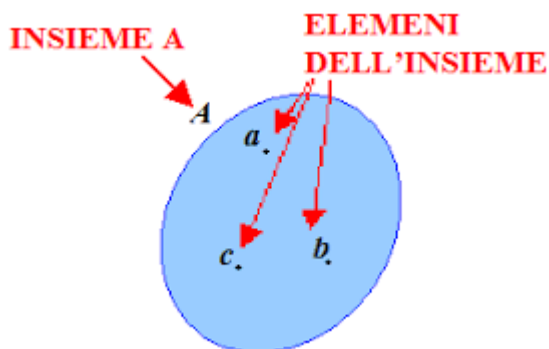


Insiemi



Il concetto di insieme è molto importante in matematica.

Cominciamo con lo stabilire cos'è un insieme in senso matematico: un raggruppamento di oggetti è un insieme se si può stabilire in modo univoco se un qualunque oggetto fa parte o meno del raggruppamento.

Quindi se per esempio considero questo raggruppamento:

- gli studenti “alti” della 1C scientifico dell’a.s. 2016/17 (del “B. Varchi”)

questo non è un insieme (in senso matematico) perché non è chiaro che cosa voglia dire “alto”.

Se invece dico:

- gli studenti della 1C scientifico dell’a.s. 2016/17 (del “B. Varchi”) con altezza compresa tra 1,7 m e 1,8 m

questo è un insieme in senso matematico.

Gli oggetti che formano un insieme si chiamano **elementi** dell’insieme.

Per indicare che un elemento appartiene ad un dato insieme si usa il simbolo \in , mentre se non appartiene usiamo \notin .

Per esempio se considero $P = \{\text{numeri pari}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

$$2 \in P$$

$$3 \notin P$$

Se un insieme contiene un numero finito di elementi si dice **finito**, se contiene infiniti elementi si dice **infinito**.

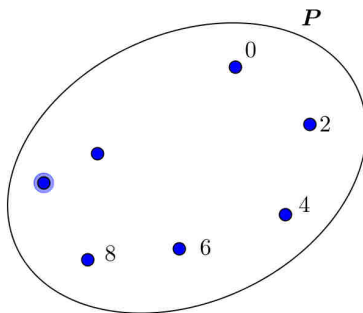
L’insieme che non contiene nessun elemento si chiama **insieme vuoto** e si indica con ϕ .

Rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in tre modi:

- rappresentazione grafica
- rappresentazione per elencazione
- rappresentazione mediante la sua proprietà caratteristica

Per esempio l'insieme dei numeri pari può essere rappresentato:



$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

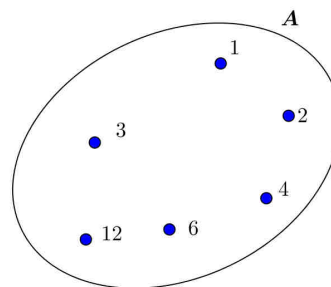
$$P = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è pari} \}$$

NOTA: nella rappresentazione con proprietà caratteristica, x indica un elemento generico e la linea verticale si legge “tale che”.

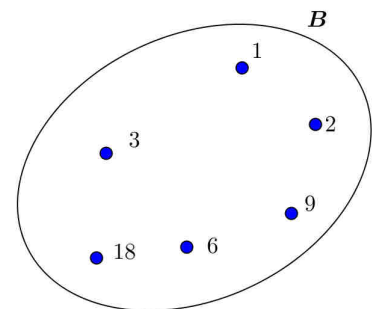
Esempi

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12 \}$

Quindi $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

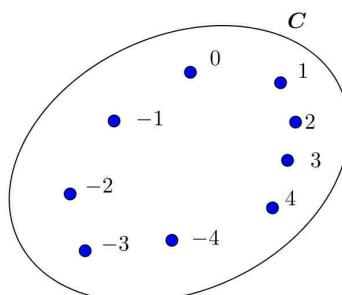


2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 18 \}$. Quindi $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$



3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -4 \leq x \leq 4 \}$

$C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$



Sottoinsiemi di un insieme

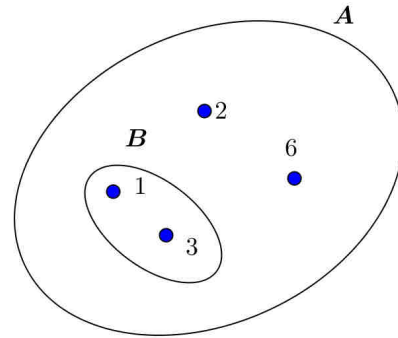
Un insieme B si dice che è “sottoinsieme” di un insieme A se tutti gli elementi di B appartengono anche ad A.

Si scrive $B \subset A$ (B contenuto strettamente in A o B sottoinsieme di A)

Esempio 1

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 6\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 3\}$$



Come caso “limite” si può anche avere $B=A$ (cioè i due insiemi hanno gli stessi elementi): se vogliamo comprendere anche questa situazione scriviamo

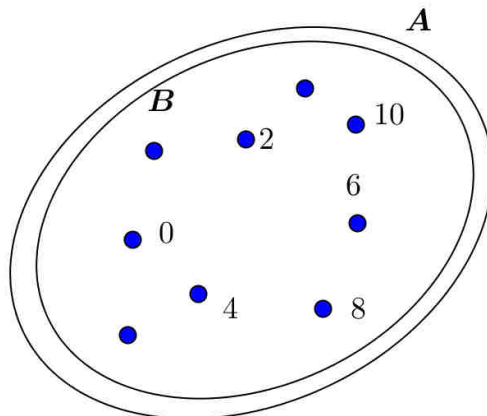
$$B \subseteq A$$

Esempio 2

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è multiplo di } 2\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è pari}\}$$

In questo caso $B = A$.



Problema: *quanti sono i sottoinsiemi di un insieme dato?*

Consideriamo per esempio l'insieme

$$A = \{a, b, c\}$$

I sottoinsiemi “propri” di A sono:

$$\{a\} \quad \{b\} \quad \{c\} \quad \{a, b\} \quad \{a, c\} \quad \{b, c\}$$

Inoltre possiamo sempre considerare l'insieme vuoto e l'insieme A (detti sottoinsiemi “impropri”).

Quindi abbiamo 8 sottoinsiemi.

E se A avesse avuto 4 elementi?

Se $A = \{a, b, c, d\}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} &\{a\}\{b\}\{c\}\{d\} \\ &\{a, b\}\{a, c\}\{a, d\}\{b, c\}\{b, d\}\{c, d\} \\ &\{a, b, c\}\{a, b, d\}\{b, c, d\}\{a, c, d\} \\ &\quad A \end{aligned}$$

Quindi ci sono 16 sottoinsiemi.

Possiamo trovare una regola per dire quanti sono i sottoinsiemi di un insieme A?

Proviamo a scrivere il numero di sottoinsiemi di A al variare del numero degli elementi:

$$\begin{aligned} A = \{a\} &\rightarrow \emptyset, \{a\} && 2 \text{ sottoinsiemi} \\ A = \{a, b\} &\rightarrow \emptyset, \{a\}, \{b\}, A && 4 \text{ sottoinsiemi} \\ A = \{a, b, c\} &\rightarrow \dots && 8 \text{ sottoinsiemi} \\ A = \{a, b, c, d\} &\rightarrow \dots && 16 \text{ sottoinsiemi} \\ &\dots && \end{aligned}$$

Osserviamo che il numero dei sottoinsiemi raddoppia quando aumentiamo un elemento: infatti oltre a tutti i sottoinsiemi di prima ce ne saranno altrettanti con il nuovo elemento. Quindi se indichiamo con n il numero degli elementi di A abbiamo:

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad 2 \text{ sottoinsiemi} \\ n = 2 & \quad 2 \cdot 2 = 2^2 \text{ sottoinsiemi} \\ n = 3 & \quad 2^2 \cdot 2 = 2^3 \text{ sottoinsiemi} \\ n = 4 & \quad 2^3 \cdot 2 = 2^4 \text{ sottoinsiemi} \end{aligned}$$

In conclusione, se A ha n elementi, i suoi sottoinsiemi sono 2^n .

Intersezione di due insiemi

Dati due insiemi A e B possiamo controllare se hanno elementi in comune: l'insieme degli elementi comuni ad A e B si chiama "insieme intersezione tra A e B" e si indica con il simbolo

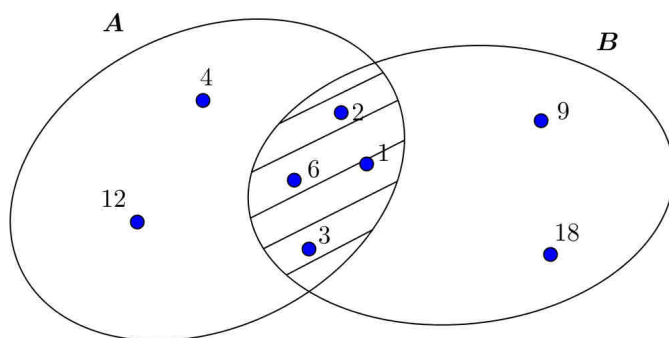
$$A \cap B$$

(si legge A intersezione B).

Esempio

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 18\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$



Abbiamo $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ e graficamente gli elementi comuni ad A e B si rappresentano nella zona "comune".

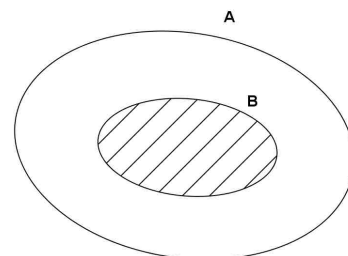
Osservazioni

1) Se $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$

Per esempio se $A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

si ha che B è sottoinsieme di A (tutti i suoi elementi sono anche elementi di A) e quindi $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\} = B$.

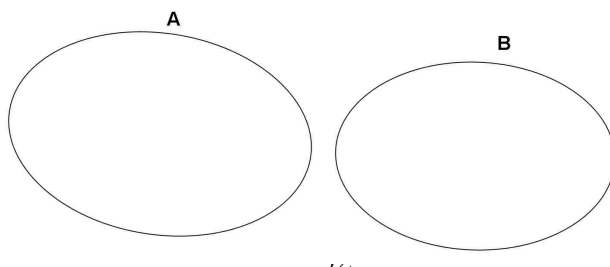


2) Se A e B non hanno elementi in comune allora $A \cap B = \emptyset$ ed A e B si dicono **disgiunti**.

Per esempio $A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è pari}\}$

$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è dispari}\}$$

A e B sono disgiunti e $A \cap B = \emptyset$.



Unione di due insiemi

Dati due insiemi A e B possiamo considerare l'insieme degli elementi di A uniti agli elementi di B: questo insieme si chiama insieme “unione” di A e B e si indica con il simbolo

$$A \cup B$$

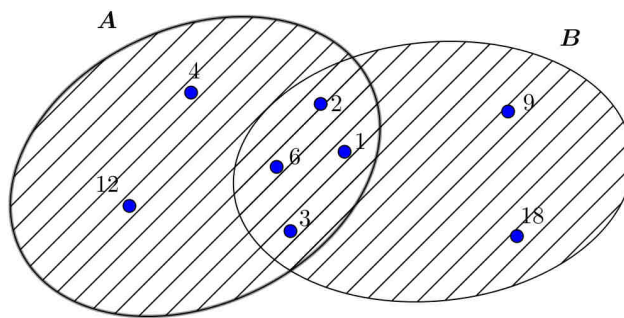
Esempio

Riprendiamo l'esempio precedente:

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

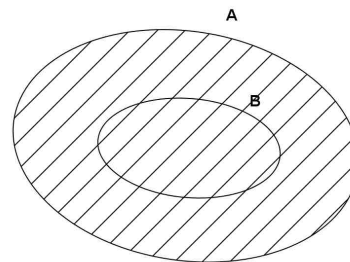
$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 18\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$$



Osservazione

Se $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$



Nota importante

La definizione di $A \cap B$ è : $A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$

La definizione di $A \cup B$ è : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$

Attenzione al significato della e della o :

“e” significa che x appartiene sia ad A che a B (elemento comune)

“o” significa che x appartiene ad A oppure a B.

Osservazioni

1) Se devo intersecare tre insiemi A, B, C come posso procedere?

Esempio: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $C = \{5, 6, 7\}$

Come risulta $A \cap B \cap C$?

Posso prima intersecare A e B e poi intersecare con C cioè:

$$(A \cap B) \cap C = \{3, 4, 5\} \cap \{5, 6, 7\} = \{5\}$$

oppure posso prima intersecare B e C e poi intersecare con A cioè:

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{5, 6\} = \{5\}$$

Il risultato è sempre lo stesso!

Vale la proprietà

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(si chiama **proprietà associativa dell'intersezione**).

2) Se devo unire tre insiemi A, B, C come posso procedere?

In modo analogo posso prima unire due insiemi, per esempio A e B , e poi C e non è importante quali insiemi scelgo di unire per primi cioè

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(si chiama **proprietà associativa dell'unione**).

Prova con l'esempio precedente.

3) A volte dobbiamo compiere operazioni più complesse, per esempio determinare $A \cap (B \cup C)$.

Nell'esempio precedente abbiamo:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4, 5\}$$

Ma potevo eseguire l'operazione anche in un altro modo?

Possiamo verificare che possiamo “distribuire” l'intersezione cioè che vale la proprietà

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(**proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione**).

Differenza tra due insiemi

Dati due insiemi A e B si possono considerare gli elementi di A che non appartengono a B : si parla di “insieme differenza” tra A e B e si indica con $A - B$.

Quindi diamo questa definizione:

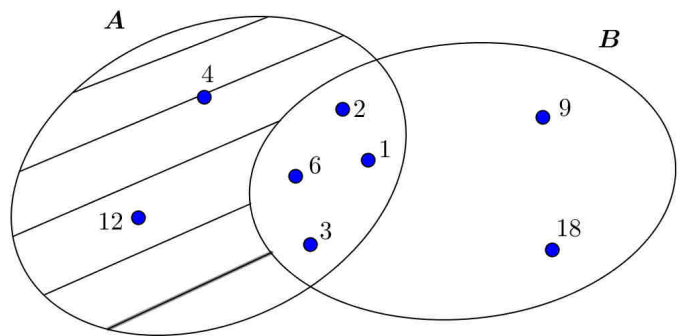
$$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Esempio

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12\}$$

$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 18\}$$

$$A - B = \{4; 12\}$$

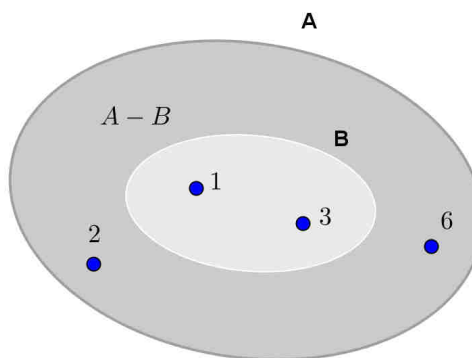


Osservazioni

1) Se $B \subset A$ allora $A - B$ si chiama anche **insieme complementare di B rispetto ad A** e si indica con \overline{B}_A .

Se per esempio $A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 6\}$ $B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 3\}$

$$A - B = \{2; 6\}$$



2) Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$

3) **Osserva che $A - B$ è diverso da $B - A$!**
(naturalmente se A e B non coincidono)

Per esempio considerando gli insiemi dell'esempio iniziale abbiamo

$$A - B = \{4; 12\} \text{ mentre } B - A = \{9; 18\}$$

Il prodotto cartesiano di due insiemi

Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è costituito dalle “coppie ordinate”

$$(x; y) \text{ in cui } x \in A \text{ e } y \in B$$

Si indica con $A \times B$ e si legge “A per B”.

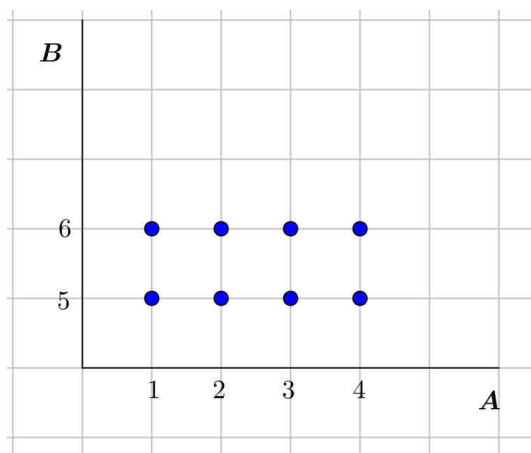
$$A \times B = \{(x; y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Se per esempio $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6\}$ abbiamo

$$A \times B = \{(1, 5); (1, 6); (2, 5); (2, 6); (3, 5); (3, 6); (4, 5); (4, 6)\}$$

L’insieme $A \times B$ si può rappresentare disponendo gli elementi di A su una semiretta orizzontale e quelli di B su una semiretta verticale: gli elementi di $A \times B$ sono i punti della griglia.

Si può rappresentare $A \times B$ anche con una tabella disponendo sulla colonna gli elementi di A e sulla riga quelli di B .



$A \backslash B$	5	6
1	(1;5)	(1;6)
2	(2;5)	(2;6)
3	(3;5)	(3;6)
4	(4;5)	(4;6)

Osservazione importante: $A \times B \neq B \times A$

Infatti $B \times A$ nel nostro esempio è costituito dalle coppie

$$\{(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4)\}$$

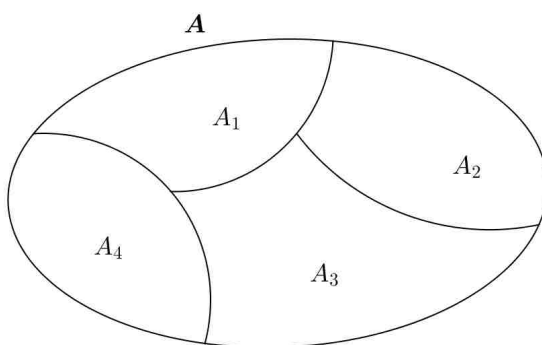
Poiché le coppie sono **ordinate** cioè per esempio la coppia $(1, 5) \neq (5, 1)$ ecc. gli insiemi $A \times B$ e $B \times A$ risultano diversi.

Partizione di un insieme

Si chiama partizione dell'insieme A un insieme di sottoinsiemi aventi queste caratteristiche:

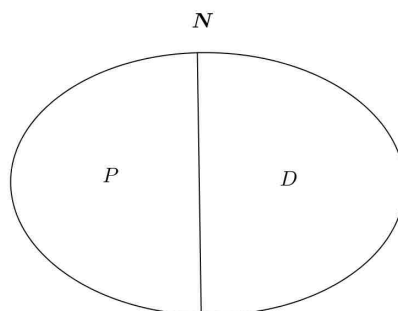
- ogni sottoinsieme è non vuoto;
- tutti i sottoinsiemi sono disgiunti tra loro;
- l'unione di tutti i sottoinsiemi è A

I sottoinsiemi in figura costituiscono una partizione dell'insieme A .

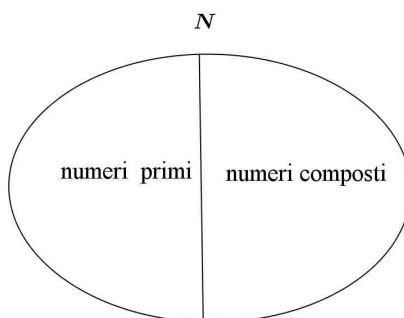


Esempi

1) Nell'insieme dei numeri naturali N , i sottoinsiemi dei numeri pari P e dei numeri dispari D costituiscono una partizione di N .



2) Nell'insieme dei numeri naturali N , i sottoinsiemi dei numeri primi e dei numeri composti costituiscono una partizione di N .



3) Nell'insieme A degli alunni di una data classe, i sottoinsiemi formati dalle femmine e dai maschi costituiscono una partizione dell'insieme A .

ESERCIZI

Rappresentazione di un insieme

1) Scrivi per elencazione i seguenti insiemi:

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è multiplo di } 2 \}$$

$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 15 \}$$

$$C = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ e } -5 \leq x \leq 2 \}$$

$$D = \{x / x \in \mathbb{N}, x \text{ è dispari e } 2 < x < 10 \}$$

2) Scrivi tutti i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq x \leq 3 \}$.

3) Scrivi la proprietà caratteristica per i seguenti insiemi:

$$A = \{4; 6; 8; 10\}$$

$$B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11...\}$$

$$C = \{1; 2; 4; 8\}$$

$$D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

4) All'interno dell'insieme A dei quadrilateri rappresenta graficamente l'insieme B dei parallelogrammi, l'insieme C dei rombi e l'insieme D dei quadrati.

5) Rappresenta per elencazione e graficamente

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 4 \}$$

$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12 \}$$

Come risulta A rispetto a B?

6) Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$?

7) Come risulta l'insieme dei triangoli equilateri A rispetto all'insieme B dei triangoli isosceli?

8) Scrivi per elencazione i seguenti insiemi:

$$A = \{x / x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x / x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Come risulta A rispetto a B?

Operazioni tra insiemi

9) Determina gli elementi di A e B , determina $A \cap B$; $A \cup B$; $A - B$; $B - A$ e rappresentali anche graficamente.

$$A = \{x / x \in \mathbb{N}, \text{ è pari e } 3 \leq x \leq 11\}$$
$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 4\}$$

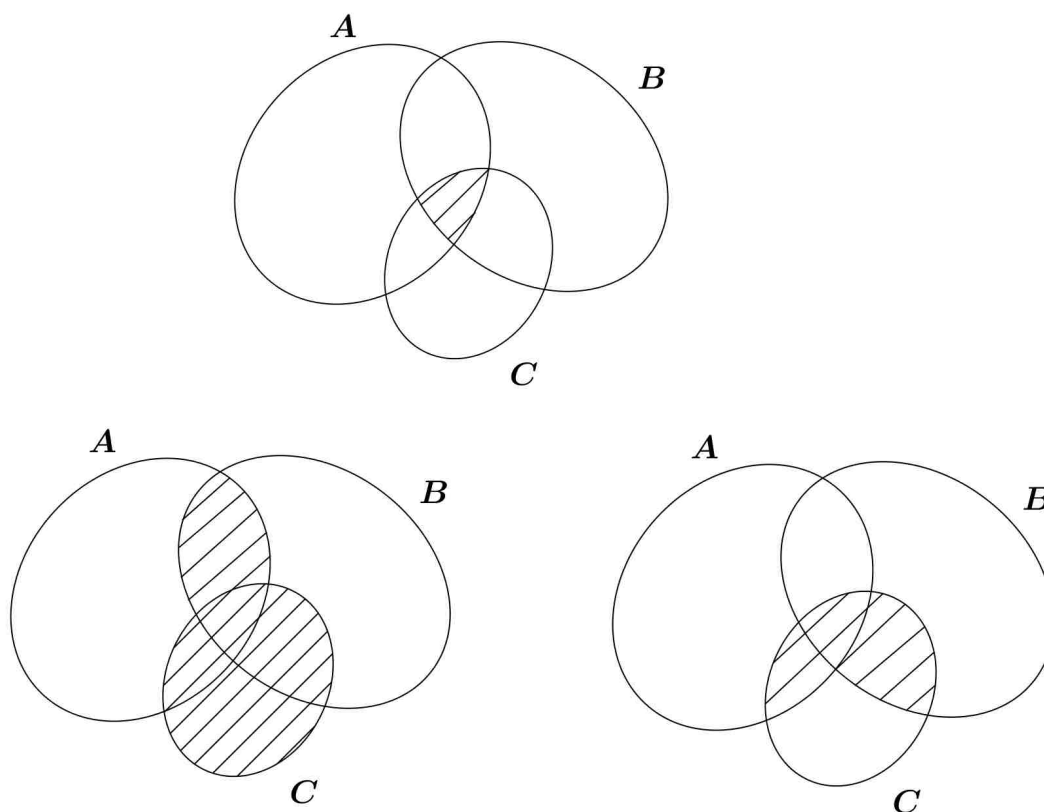
10) Determina $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C$; $A \cap (B \cup C)$; $A \cup (B \cap C)$ essendo:

$$A = \{4; 6; 8; 10\}$$
$$B = \{4; 5; 6; 7\}$$
$$C = \{6; 7; 8; 9\}$$

11) Considera $A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è multiplo di } 3\}$
 $B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un multiplo di } 6\}$

Determina $A \cap B$; $A \cup B$.

12) Indica cosa rappresentano le seguenti zone tratteggiate:



13) Sono dati gli insiemi $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x \text{ è pari}\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{N}, x \text{ è dispari}\}$, $C = \{5, 12, 25, 40\}$.

Determina $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $(A \cap B) \cap C$, $(A \cup B) \cup C$

14) Considera gli insiemi $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, b, f\}$, $C = \{a, f, b, d\}$.

Dopo averli rappresentati graficamente, determina $(A \cup B) \cup C$ e $(A \cap B) \cap C$.

15) Dati $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{N}, 5 < x \leq 15\}$, $C = \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$.

Determina, utilizzando la notazione caratteristica, $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap C$.

16) Se $D \subset F$, determina $D - F$.

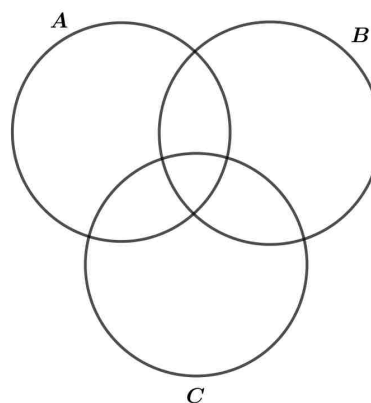
17) Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$, esiste un insieme B per cui $B \cup \{a, h\} = A$? Perché?

18) Ripetendo ogni volta la figura qui sotto riportata, colora le parti della figura corrispondenti alle seguenti operazioni:

a) $A \cap (B \cup C)$

b) $(A - B) \cap C$

c) $(A - C) \cap (B - C)$

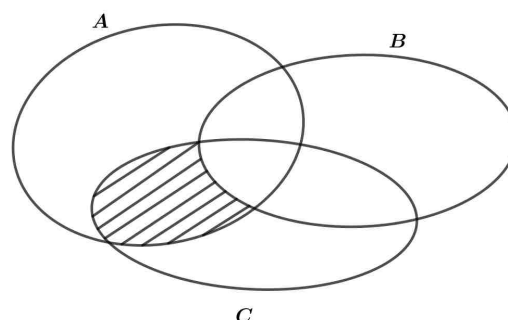


19) Sapendo che

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad A \cap B = \{e, g\}, \quad A - B = \{a, d, b, h\}, \quad B - A = \{c, f\},$$

scrivi gli elementi di A e di B.

20) Individua la parte colorata utilizzando le operazioni insiemistiche.



21) Dato l'insieme $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, scrivilo con la notazione caratteristica.
Successivamente determina il complementare di A rispetto all'insieme dei numeri relativi.
È possibile fare il complementare rispetto all'insieme dei numeri naturali? Perché?

22) Vero o falso?

I fiori profumati costituiscono un insieme V F

Se A ha 5 elementi allora ammette 5 sottoinsiemi V F

Se A ha 5 elementi allora ammette $A \times A$ ha 25 elementi V F

Se $A \cup B = A$, allora $A = \emptyset$ V F

Se $A \cap B = B$, allora $A = \emptyset$ V F

Se $A - B = \emptyset$, allora $A \subseteq B$ V F

Se A ha 5 elementi e B ne ha 3 allora $A \cup B$ ha 8 elementi V F

Se A ha 5 elementi e B ne ha 3 allora $A \cap B$ ha 2 elementi V F

23) Si considerino gli insiemi, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, h\}$, $C = \{b, d, e, f\}$

Dopo aver rappresentato gli insiemi con i diagrammi di Eulero-Venn, determina:

$$A \cap B, \quad B \cap C, \quad A \cup B, \quad (B - A) \cap C$$

24) Dato l'insieme $U = \{x / x = 2n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}, n < 6\}$, rappresentalo in forma estensiva cioè scrivi tutti i suoi elementi.

25) Determina due insiemi A e B tali che $A \times B$ sia formato da 4 elementi, $A \cup B$ da 3 elementi ed $A \cap B$ da un solo elemento.

26) Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$, scrivere gli elementi di $A \times B$, $B \times A$.

27) Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5\}$, $C = \{1, 5, 6\}$ e $D = \{2, 4, 5\}$ associa ad ogni operazione della colonna di destra, l'operazione della colonna di sinistra che ha lo stesso risultato

$(A \cap B) \times (C \cap D)$	$(A \times B) \cup (A \times C)$
$(A \cup B) \times C$	$(A \times B) \cap (A \times C)$
$A \times (C \cup B)$	$(A \times B) - (A \times C)$
$A \times (C \cap B)$	$(A \times C) \cap (B \times D)$
$A \times (B - C)$	$(B \times A) - (C \times A)$
$(B - C) \times A$	$(A \times C) \cup (B \times C)$

- *28) Su 100 alunni di una scuola, 82 si interessano di calcio, 26 si interessano di basket e 10 non si interessano né di calcio né di basket. Quanti sono gli studenti che si occupano di calcio e di basket?

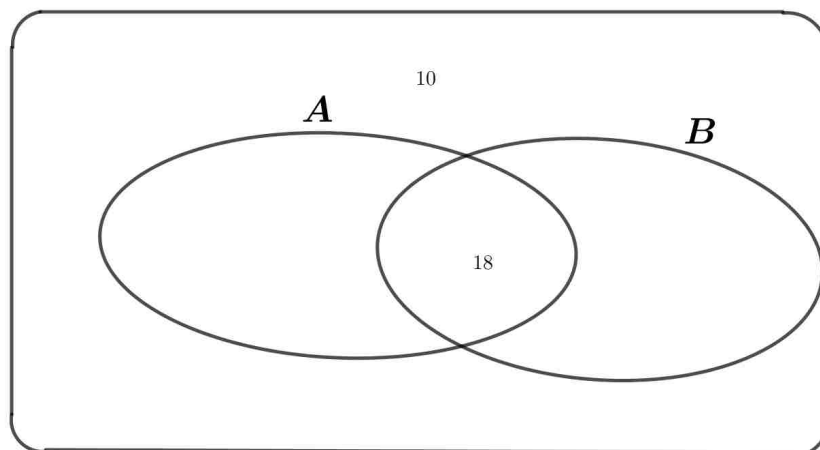
(Invalsi 2014)

Svolgimento

Poiché su 100 alunni 10 non si interessano né di calcio né di basket, ci sono $100 - 10 = 90$ studenti che si interessano o di calcio o di basket.

Se allora indichiamo con A l'insieme degli studenti che si interessano di calcio e con B l'insieme degli studenti che si interessano di basket avremo che il numero degli elementi di $A \cup B$ è 90.

D'altra parte sommando 82 (numero elementi di A) con 26 (numero degli elementi di B) si ottiene 108: quindi $108 - 90 = 18$ rappresenta il numero degli studenti dell'intersezione $A \cap B$ cioè il numero di studenti che si interessa sia di calcio che di basket.



- 29) In un paese 220 ragazzi possiedono la moto, 80 la moto e la bici, 120 solo la bici e 15 non possiedono né l'una né l'altra. Quanti ragazzi possiedono una bici? Quanti sono i ragazzi del paese?

[200,355]

- 30) Una commissione esamina 60 studenti. Il compito di matematica è costituito da tre problemi. 40 candidati hanno risolto correttamente il primo problema, 40 hanno risolto il secondo e 31 il terzo. In 25 hanno risolto i primi due problemi, in 15 il primo ed il terzo, in 17 il secondo ed il terzo e solo 4 li hanno risolti tutti. Quanti sono gli studenti che hanno risolto il secondo ed il terzo ma non il primo? Quanti hanno svolto correttamente solo il secondo esercizio? Quanti non hanno risolto nessun esercizio?

[13; 2; 2]

SCHEMA PER IL RECUPERO
INSIEMI

1. Scrivi gli elementi dei seguenti insiemi:

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \quad e \quad 4 \leq x \leq 8\}$$
$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \quad e \quad x \text{ è divisore di } 12\}$$

Determina , anche con la rappresentazione grafica $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Considera:

$$A = \{1,2,4,6\}$$
$$B = \{4,5,7,9\}$$
$$C = \{1,4,10\}$$

Rappresenta graficamente A, B, C e verifica che $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3. Considera $A = \{a,b,c,d\}$. Scrivi tutti i sottoinsiemi di A.

4. Se $A = \{\text{triangoli equilateri}\}$ e $B = \{\text{triangoli isosceli}\}$ risulta $A \subset B$ oppure $B \subset A$?

5. Considera $P = \{\text{numeri pari}\}$ e $D = \{\text{numeri dispari}\}$. Come risultano $P \cap D$ e $P \cup D$?

6. Scrivi gli elementi contenuti nel seguente insieme:

$$A = \{x = 3n + 1 \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{N}\}$$

7. Se due insiemi A e B hanno un numero finito di elementi, quando si può dire che il numero degli elementi di $A \cup B$ è uguale alla somma del numero degli elementi di A con il numero degli elementi di B?

TEST

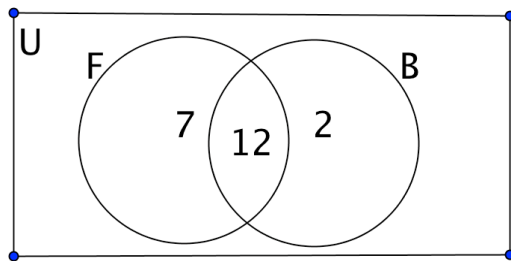
- 1) $A = \{x : x \text{ is natural numbers less than } 10 \text{ and even}\}$
 $B = \{x : x \text{ is prime less than } 10\}$

(a) Express this on a Venn diagram

(b) $A \cap B =$

- 2) All 24 students in a class are asked whether they like football and whether they like basketball. Some of the results are shown in the Venn diagram below.

U = students in the class F = students who like football B = students who like basketball



- (a) How many students like both sports?
(b) How many students like neither sports?
(c) Write down the value of $n(F \cup B)$

- 3) In a school of 100 students, 70 enjoy Maths, 50 enjoy French and 20 enjoy neither.

(a) Draw a Venn diagram showing this information.

(b) Use your diagram to find the number of students who enjoy both subjects.

- 4) On an athletics day 150 athletes take part. 60 are in the 100 metres, 50 are in the 200 metres and 80 are in neither.

(a) Draw a Venn diagram showing this information.

(b) Use your diagram to find the number of athletes who run in only one race..

- 5) In a class of students, 11 play a stringed instrument, 15 play a wind instrument, 6 play both and 10 play neither.

Draw a Venn diagram to show this information and find the total number of students in the class.

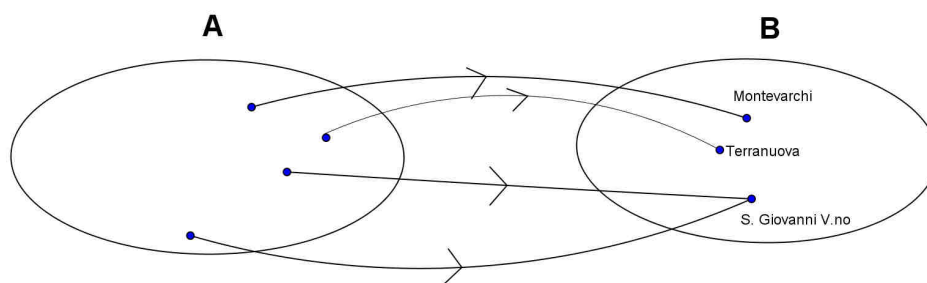
Le funzioni

Definizione : $f : A \rightarrow B$ con A e B insiemi

f è una funzione da A a B (A insieme di “partenza”, B insieme di “arrivo”) se associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B .

Esempio: consideriamo come insieme A l’insieme degli studenti della 1A liceo scientifico del nostro istituto nell’anno scolastico in corso e come insieme B le località del Valdarno (Montevarchi, Terranuova, ecc.).

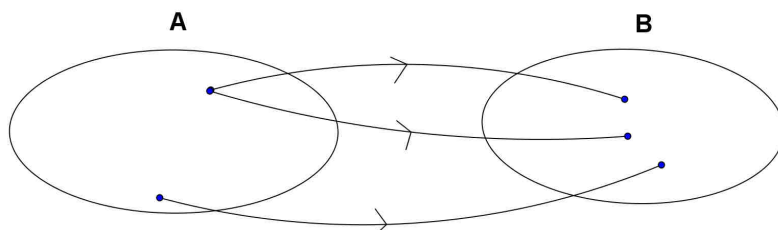
Consideriamo $f : A \rightarrow B$ come la legge che associa ad ogni studente la località dove risiede.



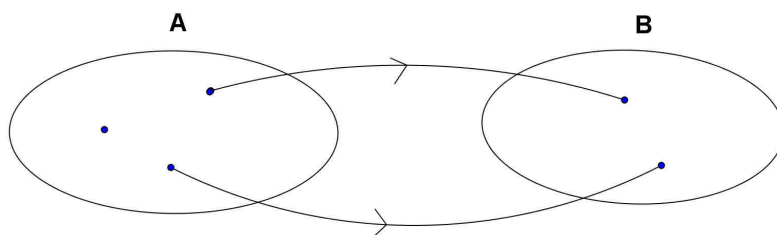
Poiché ad ogni studente è associata una e una sola località, f è una funzione (nel disegno abbiamo riportato solo qualche ipotetico studente).

Osservazione: perché $f : A \rightarrow B$ sia una funzione da ogni elemento $a \in A$ deve partire una ed una sola “freccia”.

Se per esempio avessimo considerato come insieme B l’insieme degli sport (nuoto, basket, pallavolo, tennis, calcio, ecc) ed avessimo considerato $f : A \rightarrow B$ che associa ad ogni studente gli sport praticati, f poteva non risultare una funzione nel caso in cui ci fossero stati studenti che non praticano nessuno sport o ne praticano più di uno.



non è una funzione



non è una funzione

Notazioni

In genere l'elemento dell'insieme di partenza viene indicato con x e l'elemento dell'insieme di arrivo con $y = f(x)$

$f(x)$ si legge “ f di x ” e rappresenta l'elemento corrispondente a x secondo la funzione f .

$y = f(x)$ si chiama anche “immagine” di x secondo la funzione f .

Nota importante

Se A e B sono insiemi numerici la funzione si chiama “funzione numerica”.

Esempio: se per esempio consideriamo $A = \mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali) e $B = \mathbb{R}$ la funzione descritta dalla legge

$$f : x \rightarrow x^2$$

che associa cioè ad ogni $x \in \mathbb{R}$ il suo quadrato, è una funzione numerica.

Proprietà di una funzione

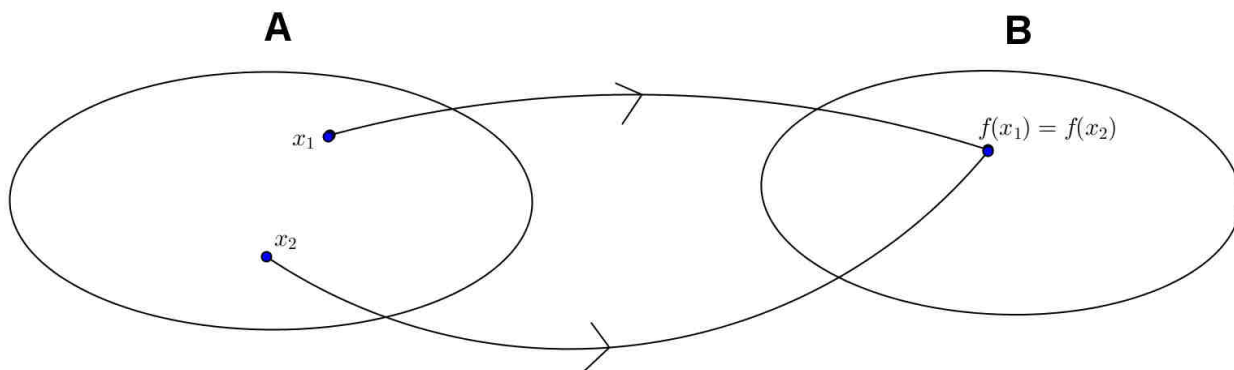
Funzione iniettiva

Diciamo che una funzione $f : A \rightarrow B$ è iniettiva se ad elementi distinti di A vengono associati elementi distinti di B .

Possiamo scrivere: $f : A \rightarrow B$ è iniettiva quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Per capire meglio questa definizione consideriamo il nostro primo esempio la funzione $f : A \rightarrow B$ che associa ad uno studente della 1A del liceo scientifico dell'anno in corso la località dove vive: questa funzione non risulterà iniettiva nel caso (molto probabile) che ci siano almeno due studenti che vivono nella stessa località.

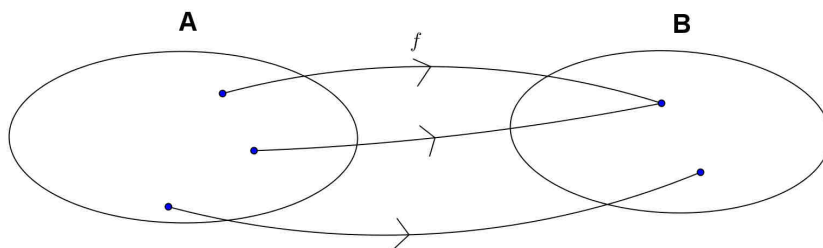
Per esempio la funzione rappresentata in figura f **non è iniettiva**.



Funzione suriettiva

Diciamo che $f : A \rightarrow B$ è una funzione suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A .

Nell'esempio seguente f è suriettiva ma non è iniettiva.



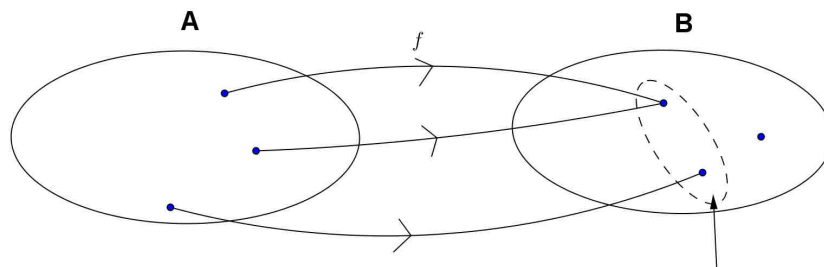
In sintesi si dice che f è suriettiva se $\forall y \in B \exists x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Osservazione: possiamo sempre rendere suriettiva una funzione “restringendo” l'insieme di arrivo.

Nel nostro primo esempio se consideriamo $B = \{\text{tutte le località del Valdarno}\}$ quasi sicuramente la nostra funzione non sarà suriettiva, ma se consideriamo $f : A \rightarrow B'$ con

$$B' = \{\text{le località del Valdarno in cui abita almeno uno studente della 1A}\}$$

in questo caso risulterà suriettiva.

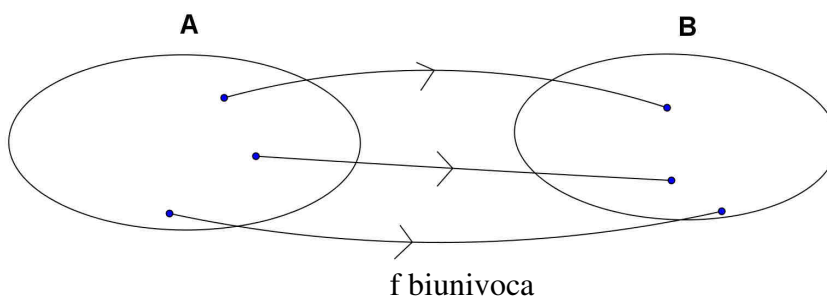


restringo l'insieme di arrivo

Funzione biunivoca

Diciamo che $f : A \rightarrow B$ è una funzione biunivoca se è iniettiva e suriettiva.

In questo caso si parla anche di corrispondenza uno-a-uno perché non solo ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde uno ed un solo elemento di B ma vale anche il viceversa, cioè ad ogni elemento di B corrisponde uno ed un solo elemento di A .



f biunivoca

Le funzioni numeriche

Consideriamo le funzioni numeriche in cui A e B sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali R.

Definizione : si chiama **dominio** della funzione numerica f l'insieme dei numeri reali per i quali la funzione ha significato.

Esempi

1) $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ D_f (dominio di f): $x \neq 0$ cioè $D_f = R \setminus \{0\}$ poiché non posso calcolare $\frac{1}{0}$.

2) $f : x \rightarrow x^2$ $D_f = R$ poiché posso sempre calcolare il quadrato di un numero $x \in R$

Definizione: si chiama **codominio** della funzione f l'insieme delle immagini di f .

Esempio: $f : x \rightarrow x^2$ C_f (codominio di f) = R_0^+ cioè i numeri reali $y \geq 0$ poiché un quadrato è sempre positivo o nullo.

Definizione: si chiama **grafico** di una funzione numerica f l'insieme delle coppie $(x, f(x))$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con $x \in D_f$.

Nota

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

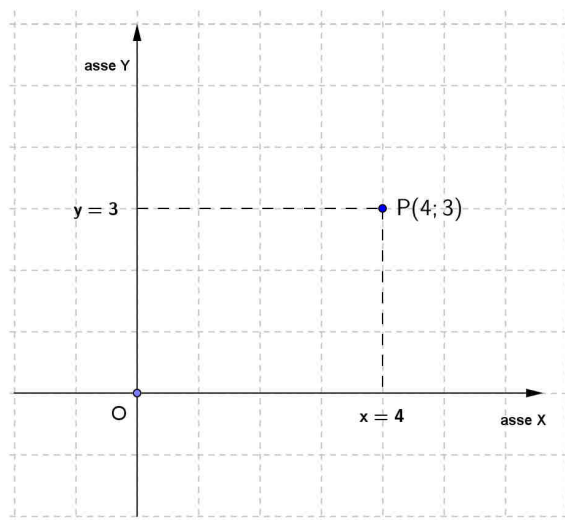
Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.

In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** $(x;y)$ di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata $(x;y)$ di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).

Il numero x si chiama **ascissa** del punto P e il numero y si chiama **ordinata** del punto P.

x e y si dicono anche **coordinate** del punto P.

E' importante sottolineare che $(x;y)$ è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.



Esempio 1

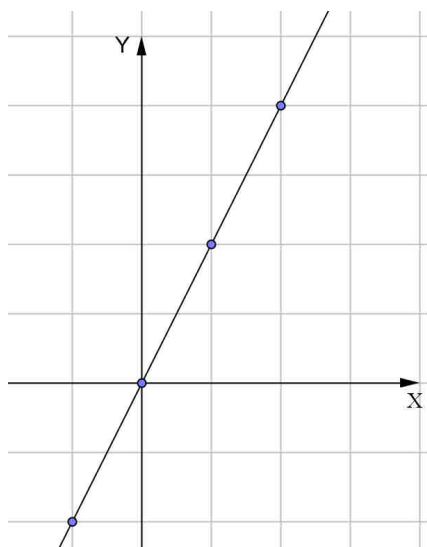
Consideriamo la funzione $f : x \rightarrow 2x$

che possiamo scrivere anche $f(x) = 2x$ o $y = 2x$.

Nota: x viene detta **variabile indipendente**, $y = f(x)$ viene detta **variabile dipendente** dal momento che il suo valore dipende dal valore assegnato alla x .

Per disegnare il suo grafico possiamo compilare una tabella assegnando dei valori alla variabile x e calcolando il corrispondente valore della y e poi riportare le coppie nel piano cartesiano.

x	$y = f(x)$
-1	-2
0	0
1	2
2	4



Osserviamo che **se il valore di x raddoppia, raddoppia anche il corrispondente valore di y** , se x triplica anche il corrispondente valore di y triplica: x e y si dicono “**direttamente proporzionali**”.

Notiamo inoltre che **il rapporto tra y e x è costante**: nel nostro esempio $\frac{y}{x} = 2$.

In generale la funzione

$$y = k \cdot x$$

con $k \in R$ (cioè k un numero reale)

ha come grafico **una retta passante per l'origine del sistema di riferimento**.

Esempio 2

Consideriamo la funzione

$$f : x \rightarrow \frac{1}{x}$$

che possiamo anche scrivere come $f(x) = \frac{1}{x}$ o $y = \frac{1}{x}$.

Facendo la tabella ci accorgiamo che quando x aumenta $y = f(x)$ diminuisce avvicinandosi a zero, mentre quando ad x assegniamo un numero “piccolo” $y = f(x)$ risulta un numero “grande”.

x	$y = f(x)$
-1	-1
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$



Il grafico è costituito da due “rami” separati che si avvicinano agli assi coordinati senza toccarli (si chiamano “asintoti” che significa “non tocca insieme”): questa curva prende il nome di “**iperbole**”.

Osserviamo che in questo caso **se x raddoppia il valore corrispondente y dimezza**, se x triplica la y corrispondente diventa un terzo: x e y si dicono “**inversamente proporzionali**”.

Osserviamo che questa volta **il prodotto tra x e y è costante** : nel nostro esempio $xy = 1$.

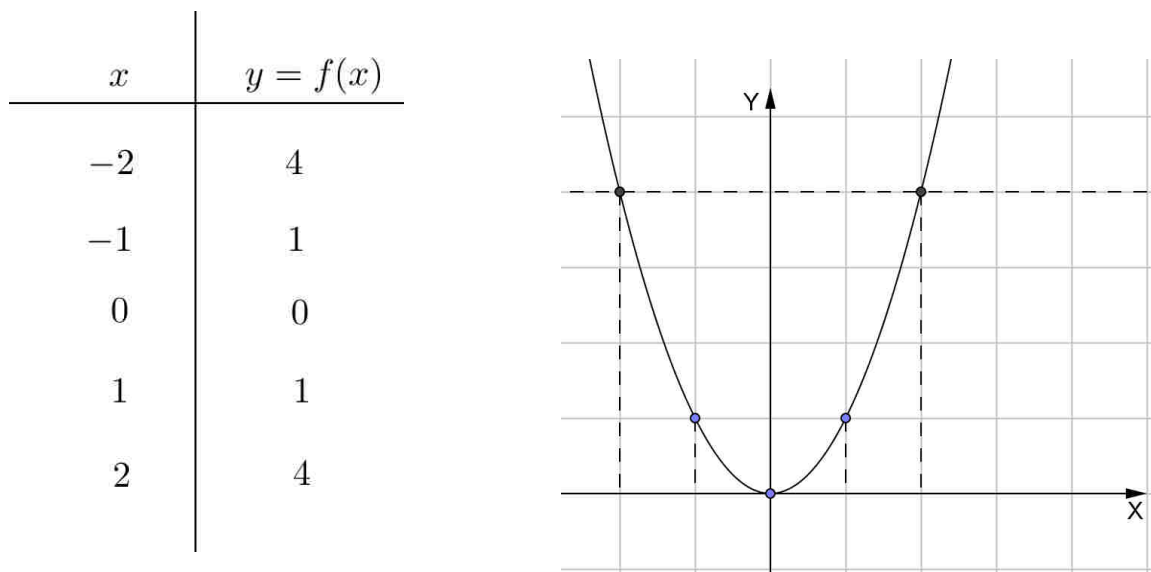
In generale la funzione $y = \frac{k}{x}$ (con $k \in \mathbb{R}$ cioè k numero reale) ha come grafico un’iperbole.

Esempio 3

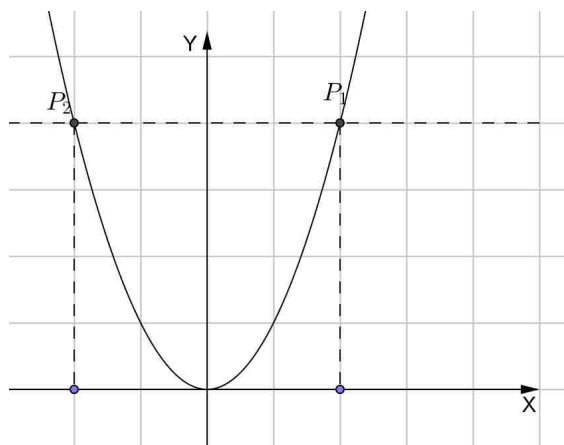
Consideriamo la funzione $f : x \rightarrow x^2$

che possiamo anche scrivere $f(x) = x^2$ o $y = x^2$

Facciamo il grafico considerando alcuni valori della x (vedi tabella).



In questo caso anche dai valori della tabella vediamo che **la funzione non è iniettiva** poiché valori diversi hanno la stessa immagine $-2 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 4$ ecc.



Infatti se tagliamo il grafico con una retta parallela all'asse x (vedi figura) troviamo due punti e quindi per una data y ci sono due x che hanno quel valore y come immagine.

Quindi, in generale, se tagliando il grafico con rette parallele all'asse x troviamo sempre al massimo un punto di intersezione allora f è iniettiva, altrimenti non lo è.

ESERCIZI

Funzioni numeriche

- 1) Per ciascuna delle seguenti funzioni disegna il grafico, determina dominio, codominio e indica se si tratta di una funzione iniettiva:

a) $f : x \rightarrow 3x$

c) $f : x \rightarrow \frac{2}{x}$

b) $f : x \rightarrow -2x$

d) $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x$

- 2) Per ciascuna delle seguenti funzioni disegna il grafico della funzione, determina dominio, codominio e indica se si tratta di una funzione iniettiva:

a) $y = x^2 + 1$

c) $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$

b) $y = -x^2$

d) $y = x^2 - 2x$

- 3) Considera i rettangoli aventi perimetro uguale a 8. Se indichiamo con x e y le dimensioni di un rettangolo di perimetro 8 qual è la relazione tra x e y ? Scrivi y in funzione di x e disegna il grafico della funzione che ottieni.

$$[y = 4 - x]$$

- 4) Considera i rettangoli di area 4 e indica con x e y le loro dimensioni. Qual è la relazione tra x e y ? Scrivi y in funzione di x e disegnane il grafico.

$$\left[y = \frac{4}{x} \right]$$

- 5) L'abbonamento ad una sala cinematografica prevede il costo di iniziale di 4 euro per la tessera di abbonamento e poi il costo di 5 euro ad ingresso. Se indichi con x il numero degli ingressi e con y la spesa complessiva, come risulta y in funzione di x ? Disegna il grafico della funzione che hai trovato.

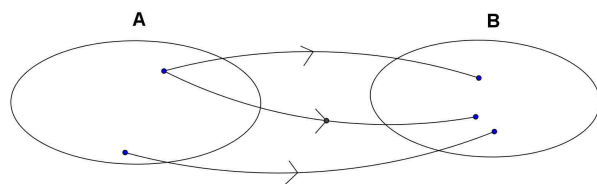
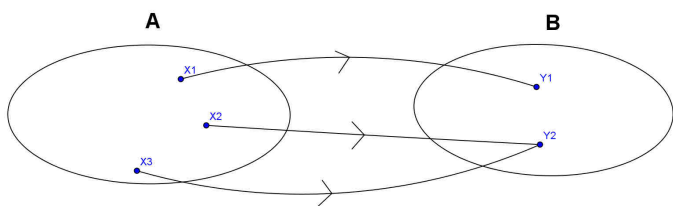
- 6) Considera i rettangoli di perimetro 10 cm ed indica con x e y le loro dimensioni. Come risulta y rispetto a x ? Disegna il grafico della funzione che hai trovato. Quali valori di x puoi considerare?

- 7) Considera i triangoli aventi area uguale a 3 (cm^2). Indica con x la misura della base e con y la misura dell'altezza dei triangoli. Qual è la relazione che lega x e y ? Esprimi y in funzione di x e disegna il grafico della funzione che hai ottenuto (naturalmente considera solo $x > 0$).

SCHEMA PER L RECUPERO FUNZIONI

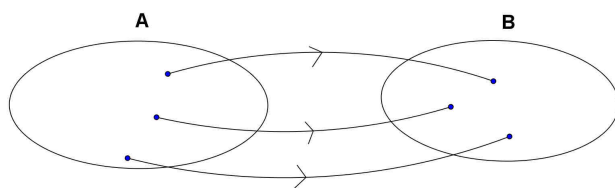
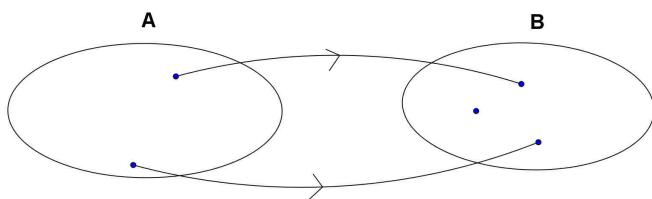
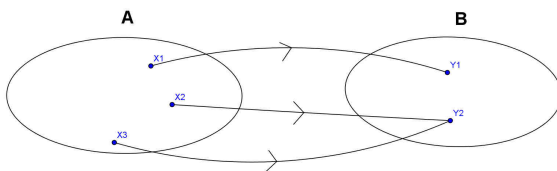
1. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è una legge che associa ad di Adi B.

2. Indica, per ognuno dei seguenti diagrammi, se si tratta di una funzione:



3. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice iniettiva se ad elementi distinti di A corrispondonodi B. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice suriettiva se ogni elemento di B èdi A.

4. Indica, per ognuno dei seguenti diagrammi, se la funzione è iniettiva o suriettiva:



5. Considera $f : x \rightarrow x+3$ con x numero reale ($x \in \mathbb{R}$). Disegna il grafico della funzione in un sistema di riferimento cartesiano. La funzione è iniettiva? E' suriettiva? (considera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

6. Considera $f : x \rightarrow 2x$ con $x \in \mathbb{R}$. Disegna il grafico di $f(x)$. La funzione è iniettiva? E' suriettiva?

7. Considera $f : x \rightarrow x^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Disegna il grafico di $f(x)$. La funzione è iniettiva? E' suriettiva? (considera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).