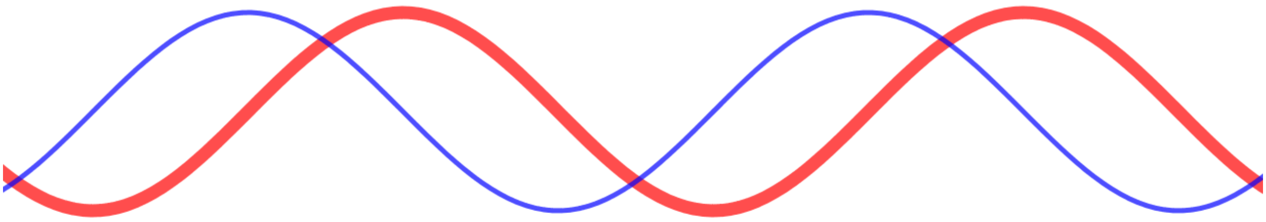
Goniometria e trigonometria

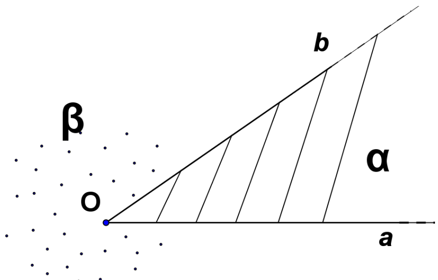
1. **Funzioni goniometriche**
2. **Triangolo rettangolo**
3. **Formule goniometriche**
4. **Equazioni goniometriche**
5. **Disequazioni goniometriche**
6. **Triangoli qualsiasi**
7. **Complementi di trigonometria**

Funzioni goniometriche

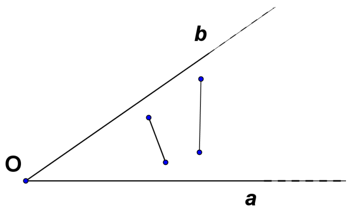


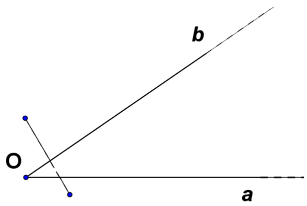
Definizione di angolo

Consideriamo due semirette a, b aventi l'origine O in comune.
Le due semirette individuano due porzioni di piano che sono dette angoli di lati a e b e vertice O.
Si presentano tre casi:
1) a e b non appartengono alla stessa retta

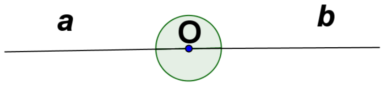


In questo caso abbiamo un **angolo convesso** α (presi comunque due punti appartenenti all'angolo il segmento che li unisce appartiene all'angolo) e un **angolo concavo** β (esistono coppie di punti appartenenti all'angolo tali che il segmento che li unisce non appartiene all'angolo).

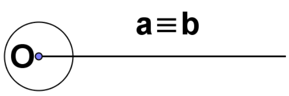




2) a e b appartengono alla stessa retta (ma non coincidono)
In questo caso vengono individuati due angoli uguali (convessi) chiamati **angoli piatti**.



3) a e b coincidono : in questo caso abbiamo **l'angolo nullo** (ci sono solo i lati) e **l'angolo giro** (tutto il piano).



Misura degli angoli

Gli angoli possono essere misurati in gradi o in radianti.

Misure in gradi

grado = $\frac{1}{360}$ (angolo giro)

Angolo giro → 360°
Angolo piatto → 180°
Angolo retto → 90°
ecc…

Si usano sottomultipli sessagesimali cioè si considera

il primo → $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ → $1° = 60'$

il secondo → $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$ → $1' = 60''$

Esempio:

$\frac{1}{4}$ di angolo retto $= \left(\frac{90}{4}\right)^{\circ} = 22{,}5° = 22° + (0{,}5)^{\circ} = 22° + (0{,}5 \cdot 60)' = 22°\ \ 30'$

Esempio:

$\frac{1}{16}$ angolo retto $= \left(\frac{90}{16}\right)^{\circ} = (5{,}625)^{\circ} = 5° + (0{,}625 \cdot 60)' = 5°\ (37{,}5)' = 5°\ 37'\ (0{,}5 \cdot 60)'' = 5°\ 37'\ 30''$

Esempi

1) Trasformare in frazioni di grado i seguenti angoli:

a) $15°\ 30' = \left(15 + \frac{30}{60}\right)^{\circ} = \left(15 + \frac{1}{2}\right)^{\circ} = \left(\frac{31}{2}\right)^{\circ}$

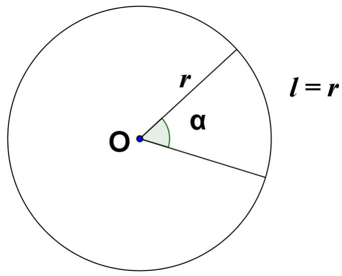
b) $3°\ 7'\ 1'' = \left(3 + \frac{7}{60} + \frac{1}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{10800 + 420 + 1}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{11221}{3600}\right)^{\circ}$

2) Trasformare in gradi, primi e secondi la seguente frazione di grado:

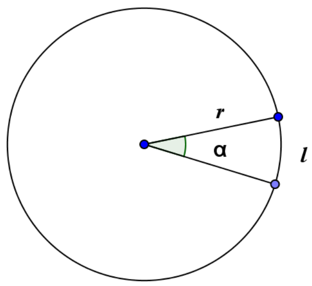
$$\left(\frac{1201}{300}\right)^{\circ} = \left(\frac{1200}{300} + \frac{1}{300}\right)^{\circ} = 4° + \left(\frac{1}{300}60\right)' = 4°\ (0{,}2)' = 4°\ (0{,}2\ \ 60)'' = 4°\ 12''$$

Misure in radianti

radiante = angolo che, tracciata una circonferenza di raggio qualsiasi avente centro nel vertice dell'angolo, sottende un arco uguale al raggio.



Da notare che questa definizione non dipende dalla circonferenza considerata perché se α sottende un arco uguale al raggio per una data circonferenza, allora accadrà lo stesso per ogni circonferenza centrata nel suo vertice.
Per misurare α in radianti traccio una circonferenza di raggio r, con centro il vertice di α e se l è la lunghezza dell'arco sotteso da α avrò che



$$\alpha_r = \frac{l}{r} \quad rad$$

Nota: se $l = r$ trovo $\alpha_r = 1$ rad)

Quindi: angolo giro → $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad

angolo piatto → π rad

angolo retto → $\frac{\pi}{2}$ rad

Nota
La misura degli angoli in radianti è preferibile a quella in gradi perché risulta molto più semplice calcolare la lunghezza l dell'arco di circonferenza corrispondente: infatti se α è misurato in radianti si ha che $l = \alpha \cdot r$

Relazione tra la misura in gradi e la misura in radianti di un angolo α

Indichiamo con α^o la misura in gradi di un angolo α e con α_r la sua misura in radianti.
Avremo che

$$\alpha^\circ : \alpha_r = 360^\circ : 2\pi$$

Questo ci permetterà di determinare α^o se conosciamo α_r e viceversa.

Esempi

1)Esprimere in radianti le seguenti misure espresse in gradi:

a) $\alpha^\circ = 12^\circ$

$$12 : a_r = 360 : 2\pi$$

$$\alpha_r = 12 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{15}$$

b) $\alpha^\circ = 10^\circ 30'$

Trasformo prima in frazione di grado:

$$10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{21}{2}\right)^\circ$$

$$\alpha_r = \frac{21}{2} \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{120}$$

2) Esprimere in gradi le seguenti misure di angoli espresse in radianti:

a) $\alpha_r = 1$ rad

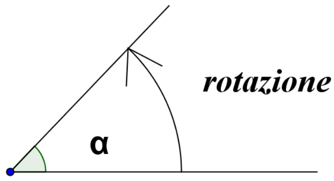
$$\alpha^o : 1 = 360 : 2\pi \Rightarrow \alpha^\circ = 1 \frac{180}{\pi} \quad (\cong 57{,}3^\circ)$$

b) $\alpha_r = \frac{\pi}{3}$ rad

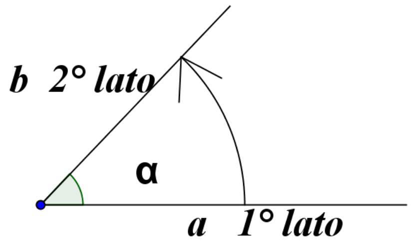
$$\alpha^o : \frac{\pi}{3} = 360 : 2\pi \qquad \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{\pi}{3} \frac{180}{\pi} = 60^\circ$$

Angoli orientati

Un angolo, oltre che come parte di piano, può essere associato al concetto di **rotazione** cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

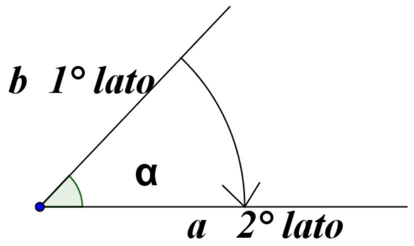


La rotazione però può essere in verso orario o antiorario.
Possiamo stabilire quale considerare come 1° lato (lato origine della rotazione) e allora avremo un angolo "orientato": per convenzione stabilisco di chiamare **positivo** un angolo orientato se la **rotazione** che porta il primo lato sul secondo lato spazzando l'angolo è **antioraria** , negativo se è invece una rotazione oraria.



Con la scrittura $\hat{ab}$ intendiamo che a sia il 1° lato,

Nel nostro esempio $\hat{ab}$ è un angolo positivo.

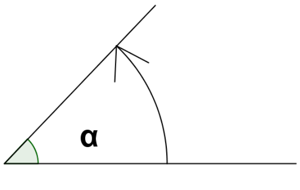


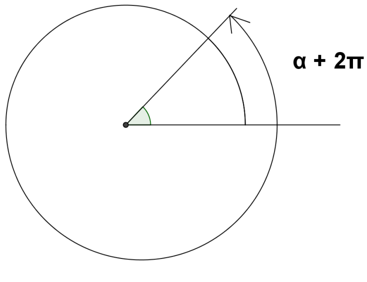
Con la scrittura $\hat{ba}$ intendiamo che il 1° lato sia b .

Nel nostro esempio $\hat{ba}$ è un angolo negativo.

Considerando il concetto di rotazione possiamo avere anche angoli di ampiezza maggiore dell'angolo giro perché possiamo pensare di ruotare di un certo numero k di giri completi: α e $\alpha + 2\pi$ sono angoli rappresentati dalla stessa parte di piano ma associati a rotazioni diverse perché nel secondo angolo ho fatto un giro in più.

In generale scrivendo $\alpha + 2k\pi$ considererò l'angolo associato alla rotazione di ampiezza α più k giri completi (se $k > 0$ ruoto in senso antiorario, se $k < 0$ in senso orario).

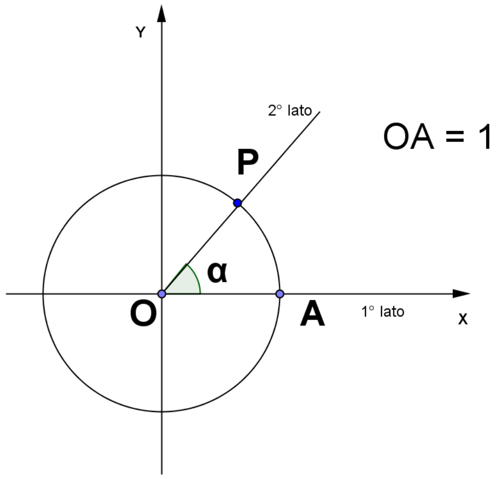




La circonferenza goniometrica

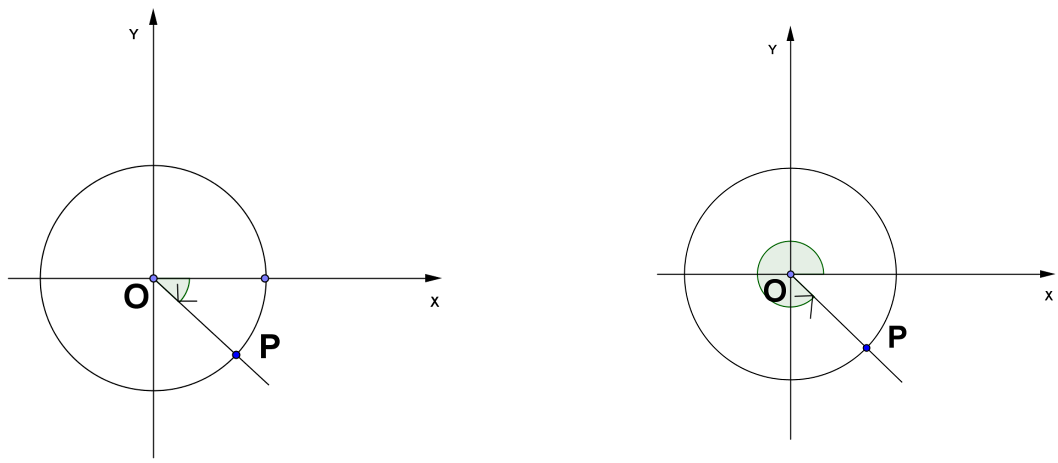
Possiamo rappresentare gli angoli orientati su una circonferenza che viene detta “circonferenza goniometrica”.

Fissato un sistema di riferimento (O;x,y) la circonferenza goniometrica è una circonferenza di centro l’origine e raggio 1.



Possiamo associare ad un angolo orientato α un punto sulla circonferenza goniometrica riportando il 1° lato dell’angolo sul semiasse positivo delle ascisse: il 2° lato dell’angolo intersecherà la circonferenza in un punto P che risulterà quindi il punto associato all’angolo α .

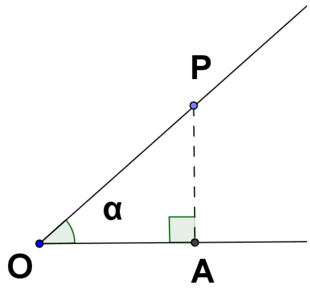
Osserviamo che lo stesso punto P sulla circonferenza è associato a più angoli, non solo perché posso sommare $2k\pi$ ma anche perché posso ruotare in senso orario o antiorario. Per esempio il punto P in figura può rappresentare $-\frac{\pi}{4}$ ma anche $\frac{7}{4}\pi$ (oltre che $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ e $\frac{7}{4}\pi+2k\pi$).



Esercizio: rappresenta gli angoli di 30°, 45°, 60° ecc. sulla circonferenza goniometrica.

Definizione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto α

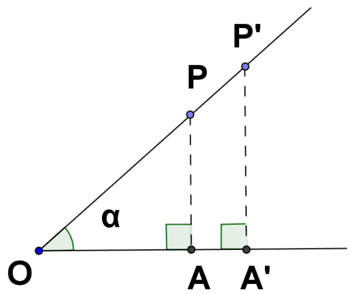
Consideriamo un angolo α acuto.



Prendiamo un punto P appartenente ad un lato (vedi figura) e proiettiamo sull'altro lato e sia A la proiezione. Il triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ è un triangolo rettangolo.

I) Consideriamo il rapporto $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$

Questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P: infatti considerando un altro punto P'e la sua proiezione A' il triangolo $\overset{\Delta}{OP'}A'$ risulta simile al triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ e quindi $\dfrac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$



Questo rapporto viene chiamato seno dell'angolo α ed indicato con la scrittura $sen\alpha$.

Quindi per definizione abbiamo:

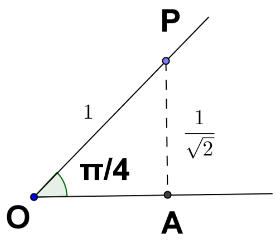
$$sen\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$$

Considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo dire che :

$$\boxed{sen\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}$$

Calcoliamo il seno di qualche angolo.

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45°)

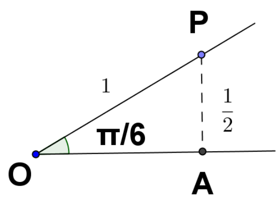


Per semplicità possiamo prendere $\overline{OP} = 1$.

Poiché il triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ in questo caso è metà di un quadrato avremo $\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\overline{OP} = \overline{AP} \cdot \sqrt{2}$).

Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

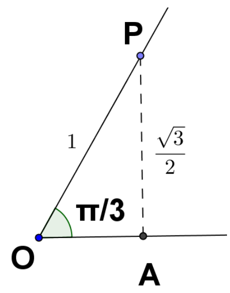
b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (30°)



Prendiamo sempre $\overline{OP} = 1$. Poiché $\overset{\Delta}{OPA}$ risulta la metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{AP} = \frac{1}{2}$ ($\overline{OP} = 2 \cdot \overline{AP}$).

Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$

c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (60°)



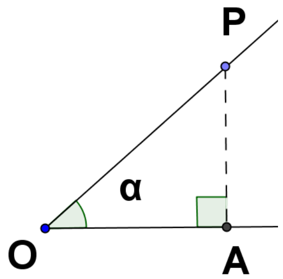
Se $\overline{OP} = 1$, poiché $\overset{\Delta}{OPA}$ è la metà di un triangolo equilatero in cui $\overline{AP}$ è l'altezza, avremo $\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Nota

In questi esempi abbiamo considerato angoli "particolari" nel senso che nel triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ siamo riusciti a determinare $\overline{AP}$ in funzione di $\overline{OP}$ sfruttando **proprietà geometriche**.
In generale per calcolare il seno di un angolo occorre fare una costruzione precisa del triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ e misurare $\overline{AP}$ e $\overline{OP}$.
Noi non dovremo comunque fare queste misurazioni perché il valore del seno di un qualsiasi angolo può essere ricavato da delle "tavole" o, ancora più semplicemente, utilizzando la **calcolatrice**.
Basterà indicare la misura dell'angolo (attenzione all'unità di misura utilizzata : DEG sta per gradi e RAD per radianti)e poi premere il tasto SIN (o viceversa a seconda del tipo di calcolatrice).
Per esempio: $sen31° = 0{,}5150...$
Naturalmente anche con la calcolatrice ritroveremo per esempio che $sen30° = 0{,}5$ ecc.

II) Consideriamo il rapporto $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$



Anche questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P (vedi motivazione data in I)). Questo rapporto viene chiamato coseno dell'angolo α e indicato con la scrittura $\cos\alpha$.

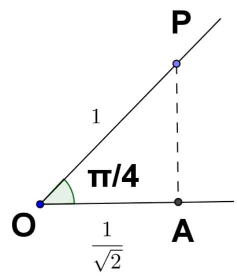
Quindi abbiamo
$$\cos\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$$

e considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo dire

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}$$

Proviamo a calcolare il coseno di $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$.

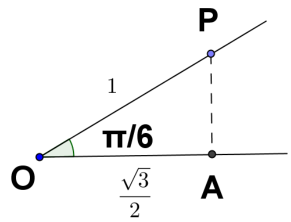
a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$



Se prendiamo $\overline{OP} = 1$ con le stesse considerazioni fatte per il seno avremo che $\overline{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

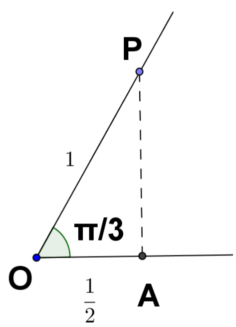
b) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$



Se $\overline{OP} = 1$ considerando $\overset{\Delta}{OPA}$ come metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$



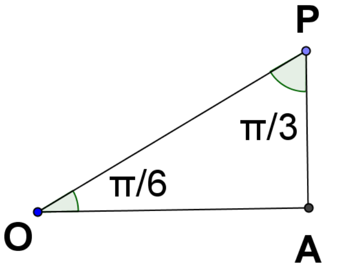
Se $\overline{OP} = 1$ avremo $\overline{OA} = \dfrac{1}{2}$ e quindi

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$

Osservazione

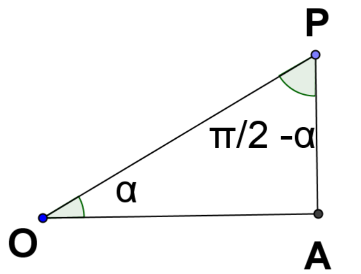
Osserviamo che $sen\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$ e $\cos\frac{\pi}{3} = sen\frac{\pi}{6}$.

Questo dipende chiaramente dal fatto che $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ sono angoli complementari e che quindi il ruolo di cateto adiacente e opposto si scambiano portando ad uno scambio dei valori del seno e del coseno.



$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \quad ; \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \quad \Rightarrow \quad sen\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$$

Questo vale naturalmente per tutte le coppie di angoli complementari:



$$\left.\begin{array}{l} sen\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \end{array}\right\} \Rightarrow sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

E' chiaro che vale anche $\cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Proprio da questa ultima relazione deriva la denominazione di **coseno** che significa

complementi sinus

cioè seno dell'angolo complementare.

Nota

Per calcolare il coseno di angoli per i quali non si possono utilizzare proprietà geometriche per determinare $\overline{OA}$ in funzione di $\overline{OP}$ valgono le stesse considerazioni fatte per il seno e quindi utilizzeremo la calcolatrice.

Per esempio: $\cos 31° = 0{,}8571...$

III) Consideriamo infine il rapporto $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$

Questo rapporto, a differenza dei precedenti, può risultare anche un numero molto grande o molto piccolo in relazione all'angolo α considerato ed è indipendente dalla scelta del punto P per le stesse motivazioni date in I) e II).
Questo rapporto viene chiamato tangente dell'angolo ε e indicato con la scrittura $tg\alpha$, cioè si ha

$$tg\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$$

e considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo scrivere

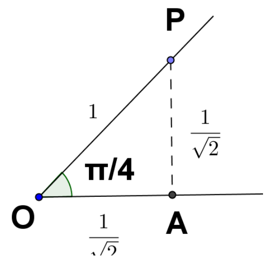
$$\boxed{tg\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}}$$

Nota: $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}{\dfrac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}} = \dfrac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha} = tg\alpha$

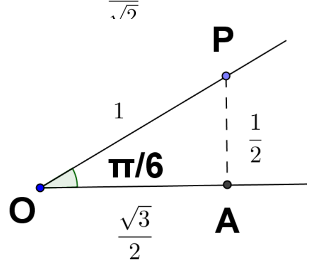
Esempi

Calcoliamo la tangente di $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$.

a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

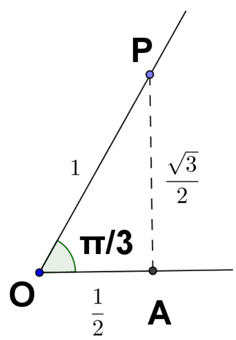


Se $\overline{OP} = 1 \;\; \overline{PA} = \overline{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow tg\dfrac{\pi}{4} = 1$



b) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

Se $\overline{OP} = 1 \;\; \overline{PA} = \dfrac{1}{2}$, $\overline{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



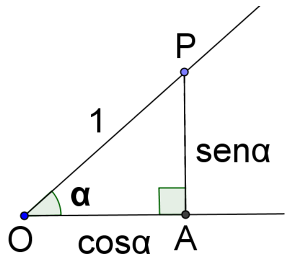
c) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Se $\overline{OP} = 1 \;\; \overline{PA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow tg\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

In generale, per calcolare la tangente di un angolo α, per le stesse considerazioni svolte in I) e II) useremo la calcolatrice.

Estensione della definizione di seno,coseno e tangente

Osserviamo che se nel triangolo $\overset{\Delta}{OAP}$ l'ipotenusa $\overline{OP} = 1$ abbiamo

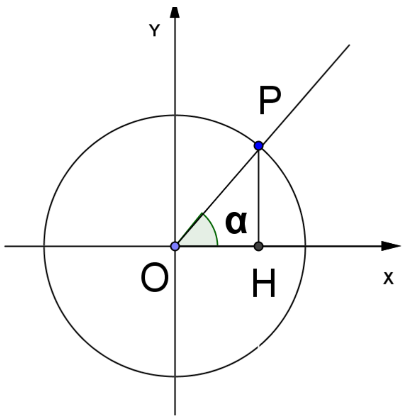


$$sen\alpha = \overline{AP}$$

$$\cos\alpha = \overline{OA}$$

Questo suggerisce un metodo per estendere la definizione di seno e coseno anche per angoli $\alpha \geq 90°$.

Riportiamo l'angolo α sulla circonferenza goniometrica e poiché $\overline{OP} = 1$ avremo:



$$sen\alpha = \overline{PH} = y_P$$
$$\cos\alpha = \overline{OH} = x_P$$

Diamo allora la seguente definizione di seno e coseno di α:

$$sen\alpha \overset{def}{=} y_P$$
$$\cos\alpha \overset{def}{=} x_P$$

dove P è il punto associato all'angolo orientato α sulla circonferenza goniometrica.

Osserviamo che con questa definizione i valori del seno e del coseno di un angolo possono essere anche negativi, ma che comunque sono numeri compresi tra -1 e 1.

Vediamo meglio come variano i valori di $sen\alpha$ e $\cos\alpha$.

Variazione del seno di un angolo

$\alpha = 0 \rightarrow sen\alpha = 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow sen\alpha = 1$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

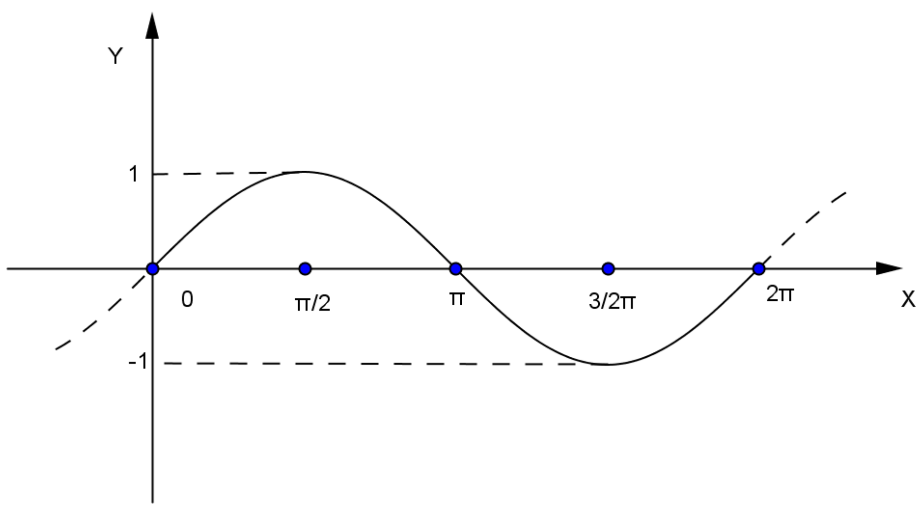
$\alpha = \pi \rightarrow sen\alpha = 0$

$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

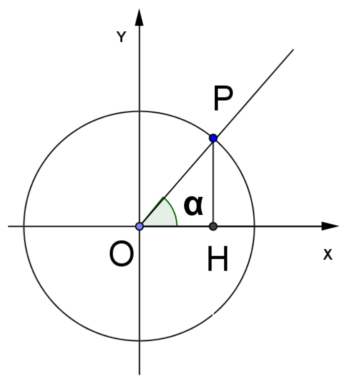
$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow sen\alpha = -1$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

$\alpha = 2\pi \rightarrow sen\alpha = 0$



$sen\alpha = y_P$



Osserviamo che il grafico si ripete ogni 2π cioè la funzione $y = senx$ è periodica di periodo 2π .

Variazione del coseno di un angolo

$\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 1$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha = 0$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

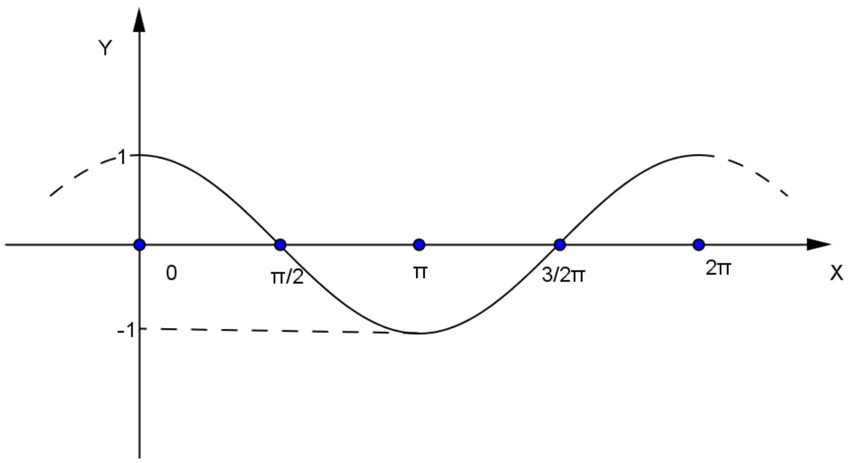
$\alpha = \pi \rightarrow \cos\alpha = -1$

$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

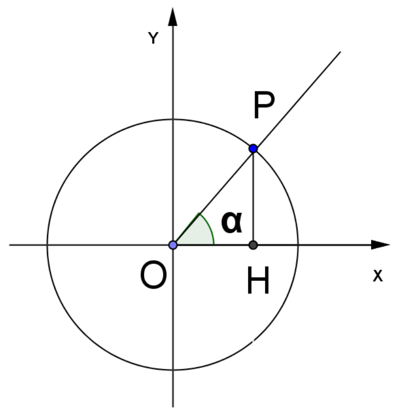
$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \cos\alpha = 0$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$\alpha = 2\pi \rightarrow \cos\alpha = 1$



$\cos\alpha = x_P$



Osserviamo che anche la funzione $y = \cos x$ è periodica di periodo 2π .

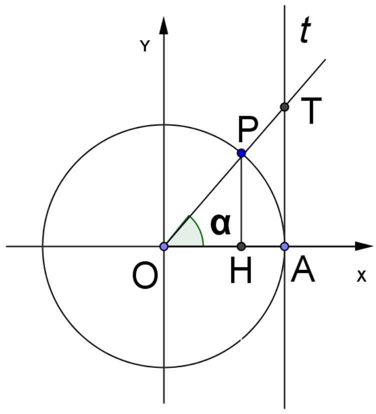
Osservazione

Il grafico di $y = \cos x$ corrisponde a quello di $y = sen x$ “traslato” verso sinistra di $\frac{\pi}{2}$: questo dipende dal fatto che , come vedremo, $\cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Tangente di un angolo orientato

Vediamo come possiamo estendere la definizione di tangente data per un angolo α acuto utilizzando la circonferenza goniometrica

.



Tracciamo la tangente t alla circonferenza goniometrica nel punto $A(1;0)$ e consideriamo il punto T di intersezione tra t e il prolungamento del 2° lato dell'angolo α.

Osservando i triangoli simili $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OAT}$ potremo scrivere

$$tg\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \overline{TA} = y_T$$

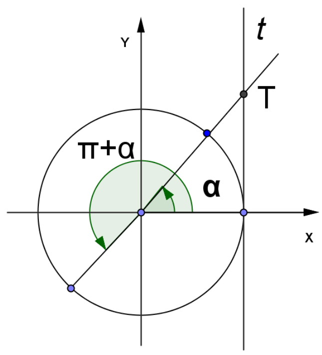
Definiamo allora in generale $tg\alpha \overset{def}{=} y_T$

dove T è il punto di intersezione del prolungamento del 2° lato dell'angolo α con la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A(1;0).

Note

1) Osserviamo che per $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\alpha = \frac{3}{2} + 2k\pi$ la tangente non è definita (il 2° lato dell'angolo non incontra la tangente t).

2) Osserviamo che α e $\alpha + \pi$ avranno la stessa tangente in quanto sono associati allo stesso punto T: questo significa che, considerando la variazione della tangente, i valori si ripeteranno dopo un periodo di π (e non di 2π come per seno e coseno).



$$tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$$

Vediamo come risulta il grafico di $y = tgx$.

$\alpha = 0 \rightarrow tg\alpha = 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori della tangente aumentano e sono positivi

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ la tangente non è definita

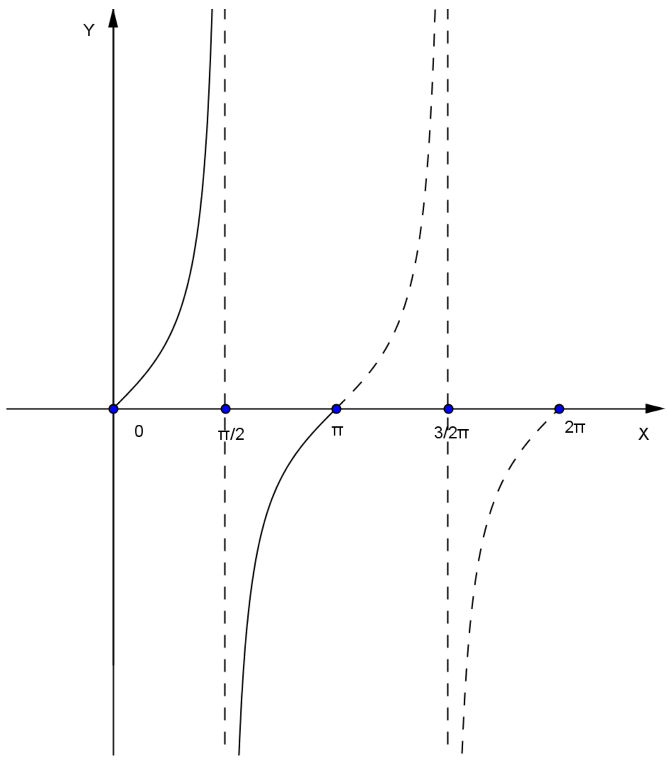
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori della tangente sono negativi e aumentano

$\alpha = \pi \rightarrow tg\alpha = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale del grafico di y = tgx

($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono gli asintoti verticali del grafico)

Quindi la funzione y = tgx è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ed ha periodo π.



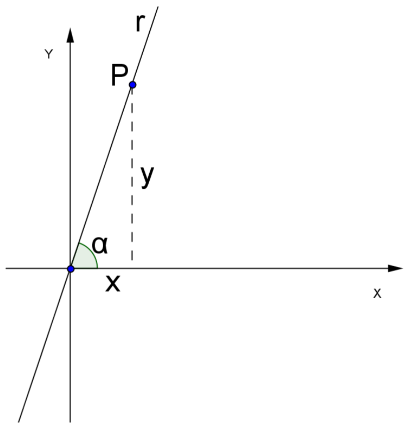
Tangente di un angolo e coefficiente angolare di una retta

Osserviamo che **il coefficiente angolare di una retta** corrisponde alla **tangente goniometrica** dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle x.

Consideriamo inizialmente una retta passante per l'origine (vedi figura):è chiaro che se

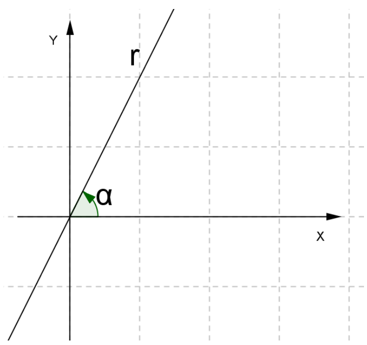
$r : y = mx$

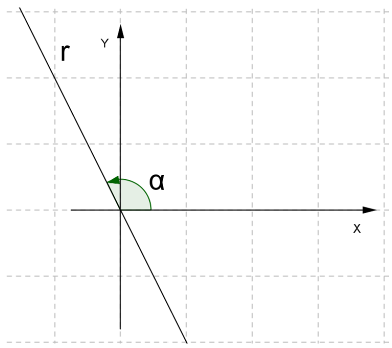
$tga = \dfrac{y}{x} = m$



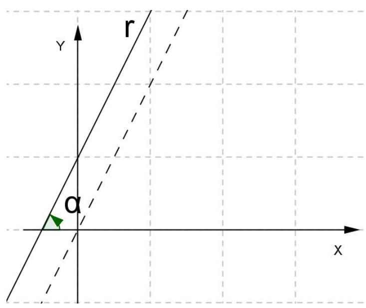
Se per esempio considero $y = 2x$ ho che $tga = 2$ (α è acuto $\Rightarrow m > 0$); se invece per esempio considero $y = -2x$ ho che $tg\alpha = -2$

(se α è ottuso $\Rightarrow m < 0$)





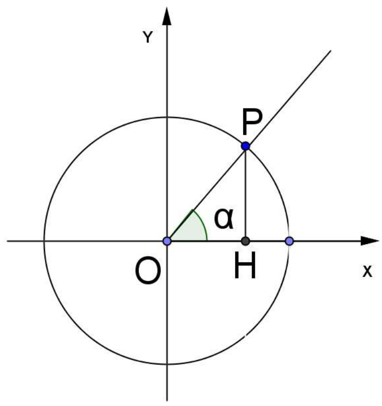
Se la retta non passa per l'origine il suo coefficiente angolare continua ad avere lo stesso significato.



$y = 2x + 1 \quad tg\alpha = 2$

Relazioni fondamentali tra senα, cosα e tgα

1.Osservando la circonferenza goniometrica ed applicando il teorema di Pitagora si ha subito che



$$\overline{PH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OP}^2$$
$$(sen\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Per convenzione $(sen\alpha)^2$ si scrive $sen^2\alpha$ e quindi scriveremo

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$ *1° relazione fondamentale*

2.Inoltre , come abbiamo già osservato:

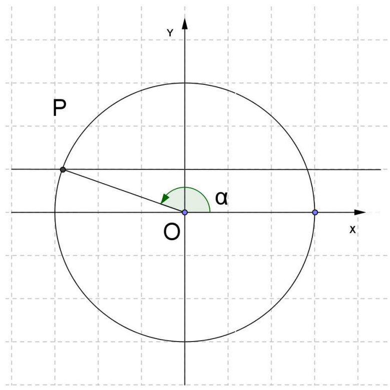
$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}$$ *2° relazione fondamentale*

Utilizzando queste relazioni è possibile, conoscendo una funzione goniometrica dell'angolo α, ricavare le altre due supponendo però di sapere in quale "quadrante" si trova l'angolo.

Esempi

1) Se $sen\alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determinare $\cos\alpha$ e $tg\alpha$.

Osserviamo che per individuare graficamente l'angolo α possiamo tracciare la retta $y = \frac{1}{3}$: questa individua sulla circonferenza goniometrica due punti e noi dovremo considerare quello del 2° quadrante poiché sappiamo che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.



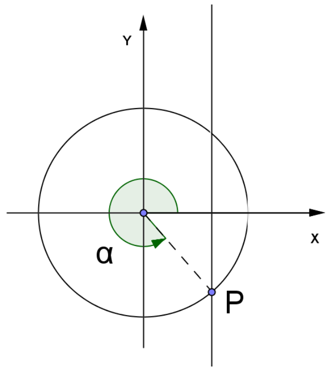
Quindi dalla 1° relazione avremo:

$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ e nel nostro caso ,essendo il coseno negativo, abbiamo $\cos\alpha = -\sqrt{1 - sen^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Poi dalla 2° relazione abbiamo $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2) Se $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ determina $sen\alpha$ e $tg\alpha$.

Possiamo intersecare la circonferenza goniometrica con la retta $x = \frac{3}{5}$ per individuare graficamente α.



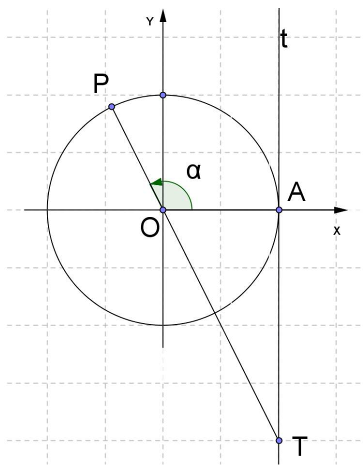
Osserviamo che il seno di α risulta negativo.

$$sen\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

3) Se $tg\alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determina $sen\alpha$ e $\cos\alpha$.

Possiamo ricavare graficamente α considerando la tangente *t* e su di essa il punto T di ordinata -2: tracciando la retta OT otteniamo i punti associati sulla circonferenza goniometrica



In questo caso dobbiamo risolvere un sistema dove utilizziamo insieme le relazioni fondamentali:

$$\begin{cases} \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = -2 \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\alpha = -2\cos\alpha \\ 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\alpha = +\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Nota: possiamo ricavare una relazione tra $sen\alpha$ e $tg\alpha$, $\cos\alpha$ e $tg\alpha$ in modo da non essere costretti a risolvere il sistema precedente.

Infatti possiamo scrivere:

$$sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{1} = \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo diviso numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$.

Quindi
$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

Analogamente dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{tg^2\alpha + 1}$$

abbiamo
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha + 1}$$

Per esempio nell'esercizio 3) avremo potuto procedere così:

$$sen^2\alpha = \frac{(-2)^2}{(-2)^2 + 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{(-2)^2 + 1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

Cosecante, secante e cotangente di un angolo

Vengono definite, oltre al seno, coseno e tangente di un angolo α, anche altre tre funzioni goniometriche:

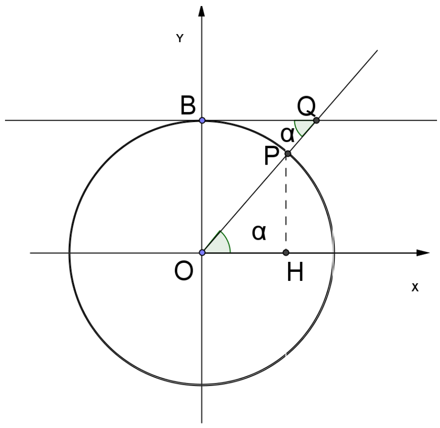
cosecante $\rightarrow$ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$ $\quad (\alpha \neq k\pi)$

secante $\rightarrow$ $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\quad \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

cotangente $\rightarrow$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}$ $\quad (\alpha \neq k\pi)$

Nota: osserviamo che per $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$ possiamo scrivere che $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$.

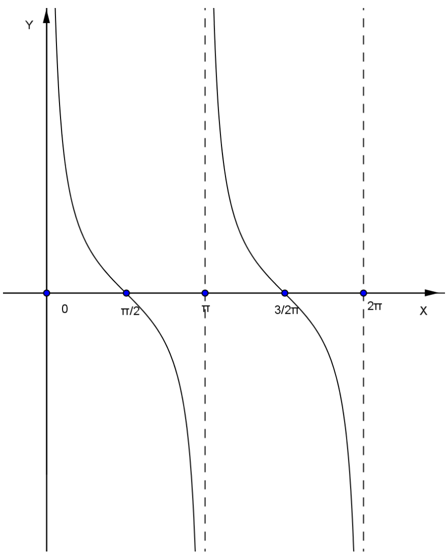
Possiamo ottenere la cotangente di α intersecando il secondo lato dell'angolo con la tangente della circonferenza goniometrica in (0;1)



Poiché i triangoli $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OBQ}$ sono simili abbiamo:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{OH}{PH} = \frac{BQ}{OB} = BQ = x_Q \quad \text{(ascissa di Q)}$$

Il grafico di y = cotgx risulta

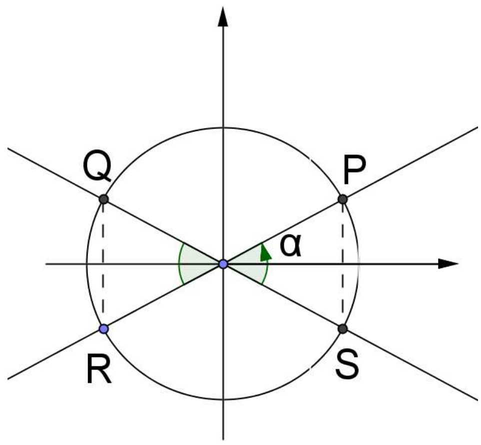


Infatti se $\alpha \rightarrow 0$ ma è positivo avremmo valori grandi valori di $\operatorname{cotg}\alpha$ ($\cos\alpha \rightarrow 1$ e $sen\alpha \rightarrow 0$) mentre se $\alpha \rightarrow \pi$ ed è minore di π avremo valori molto piccoli perché il coseno sarà negativo e il seno positivo $(\rightarrow 0)$.

Angoli associati

Dalla conoscenza delle funzioni goniometriche di un angolo α si possono ricavare informazioni sulle funzioni goniometriche di altri angoli, detti “angoli associati” ad α.

Osserviamo la seguente figura:



Consideriamo i punti Q, R, S simmetrici di P (rispetto all’asse y, all’origine e all’asse x).

Se P è il punto della circonferenza goniometrica che rappresenta α si dimostra facilmente che:

$$Q \to \pi - \alpha$$
$$R \to \pi + \alpha$$
$$S \to 2\pi - \alpha (oppure\ -\alpha)$$

Questi angoli si dicono “angoli associati” ad α.
Quindi, ricordando la definizione di seno (y) e coseno(x), avremo:

$$\begin{cases} sen(\pi - \alpha) = sen\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

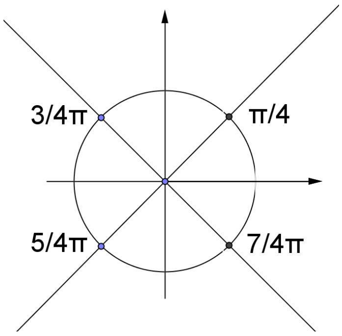
$$\begin{cases} sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen(2\pi - \alpha) = -sen\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{matrix} sen(-\alpha) = -sen\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \end{matrix}$$

Di conseguenza

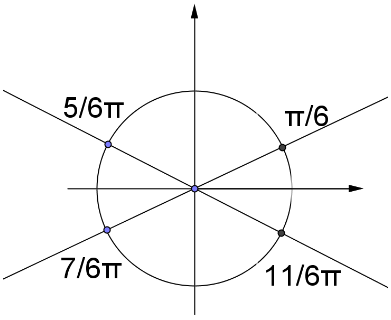
$$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$$
$$tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$$
$$tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha \qquad tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

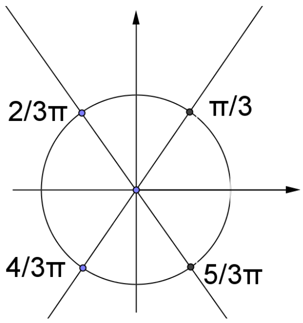
Consideriamo per esempio gli angoli associati a $\frac{\pi}{4}$:



Abbiamo quindi $\quad sen\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ ecc…

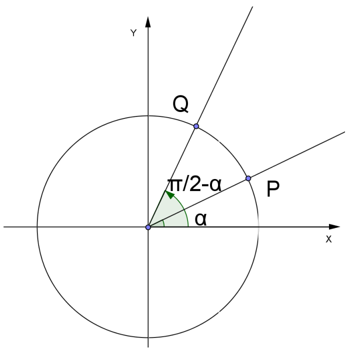
Vediamo gli angoli associati a $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$:





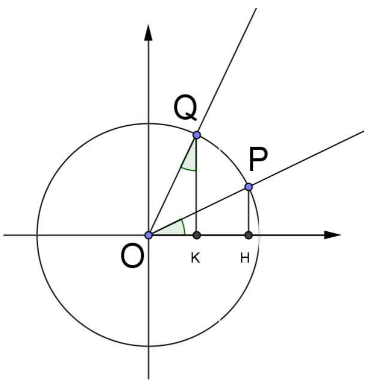
Esercizio: calcola: $sen\frac{7}{6}\pi$, $tg\frac{5}{3}\pi$ ecc…

Ci sono anche altri 2 angoli associati ad α: $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (angolo complementare di α) e $\frac{\pi}{2}+\alpha$.



$P \rightarrow \alpha$

$Q \rightarrow \frac{\pi}{2}-\alpha$

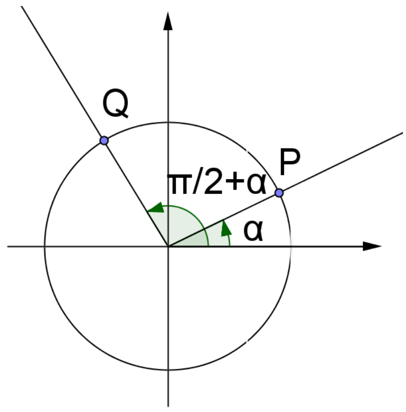


I triangoli $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OQK}$ sono uguali poiché sono triangoli rettangoli , $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$ e $H\hat{O}P = \alpha = O\hat{Q}K$ quindi

$$\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sen\alpha \end{cases}$$

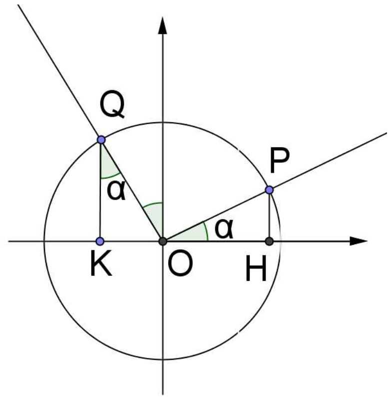
(come avevamo già osservato)

Vediamo $\frac{\pi}{2}+\alpha$:



$P \to \alpha$

$Q \to \frac{\pi}{2}+\alpha$



I triangoli $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OQK}$ sono uguali ($\overline{OP}=\overline{OQ}=1$ triangoli rettangoli e $P\hat{O}H=\alpha=O\hat{Q}K$) e quindi, considerando i segni:

$$\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=y_Q=x_P=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=x_Q=-y_P=-sen\alpha \end{cases}$$

Di conseguenza:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=\cot g\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=-\cot g\alpha$$

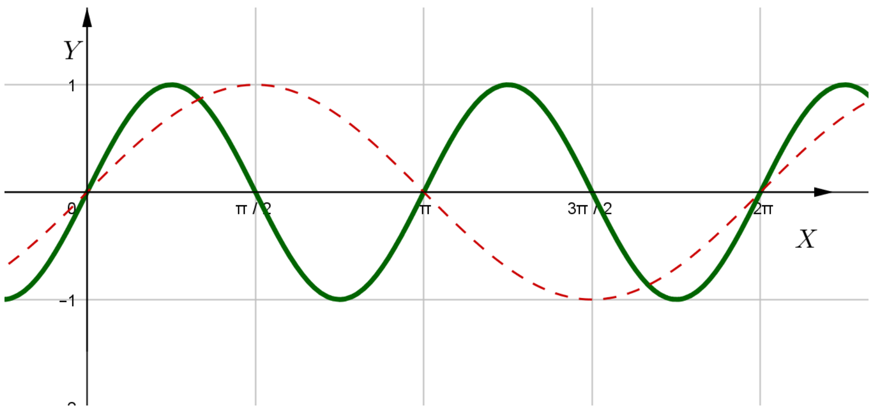
Funzioni sinusoidali

Abbiamo visto come risultano i grafici di $y = senx$ e di $y = \cos x$.
Ma come risultano i grafici di funzioni cosiddette sinusoidali del tipo $y = A \cdot sen(kx + \varphi)$ o $y = A \cdot \cos(kx + \varphi)$?

Consideriamo prima alcuni esempi.

1) Come risulta il grafico di $\boxed{y = sen2x}$?

Osserviamo che se calcoliamo la funzione per $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $y = 1$; per $x = \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 0$ e in conclusione il grafico risulta il seguente:



Il periodo risulta quindi $T = \pi$.

Se tracciamo anche il grafico di $y = senx$ (tratteggiato) possiamo vedere la differenza di periodo.

In generale $y = sen(kx)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$ poiché

$$sen[k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)] = sen(kx + 2\pi) = sen(kx)$$

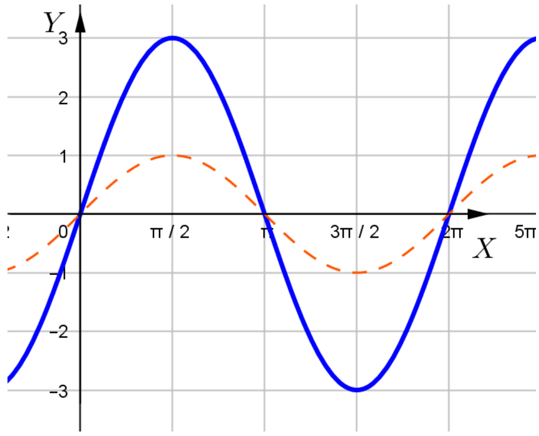
Nota
Quindi se sappiamo che il periodo T di una funzione sinusoidale è uguale a T, la sua equazione sarà del tipo

$$y = sen\left(\frac{2\pi}{T}\right)x$$

2) Come risulta il grafico di $\boxed{y = 3 \cdot senx}$?

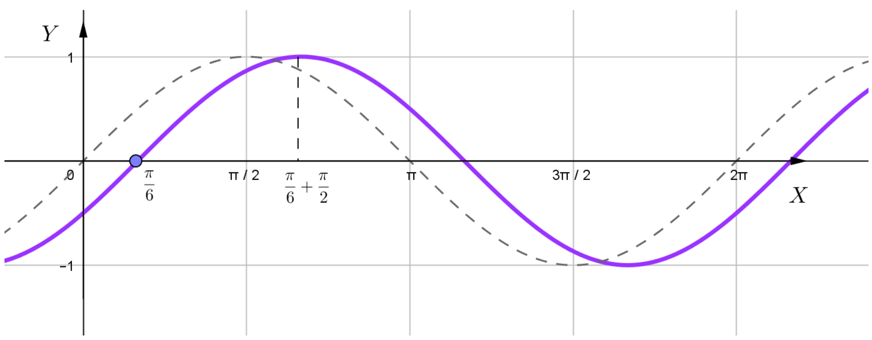
In questo caso il periodo è sempre $T = 2\pi$ ma l'ampiezza dell'oscillazione varia tra -3 e 3 e non più tra -1 e 1 (se tratteggiamo il grafico di $y = senx$ possiamo vedere la differenza).

Quindi in generale il grafico di $y = A \cdot senx$ oscilla tra –A e A.



3) Come risulta il grafico di $\boxed{y = sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$?

Proviamo a calcolare qualche valore: per $x = \frac{\pi}{6}$ otteniamo $y = 0$, per $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 1$ e in conclusione il grafico risulta traslato verso destra di $\frac{\pi}{6}$.

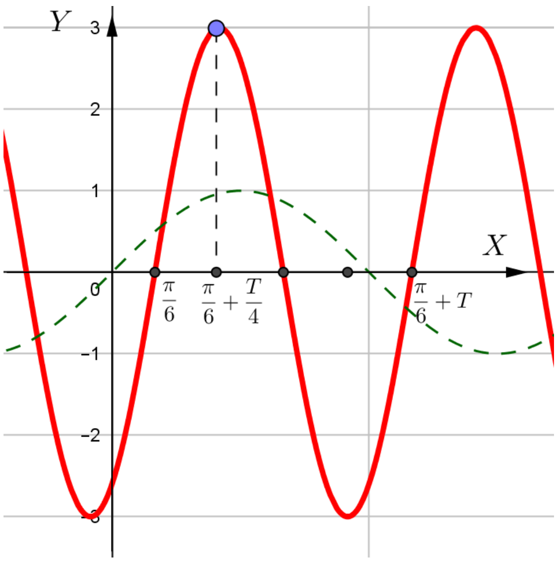


4) Come risulta il grafico di $\boxed{y = 3 \cdot sen(2x - \frac{\pi}{3})}$?

Conviene scrivere l'equazione mettendo in evidenza il coefficiente di x :

$$y = 3sen\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Il periodo sarà $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, l'ampiezza dell'oscillazione sarà tra -3 e 3 e il grafico risulterà spostato verso destra di $\frac{\pi}{6}$ poiché $2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.



Nota: per ottenere il valore delle x corrispondente al primo massimo sommiamo $\frac{T}{4}$ (in questo caso $\frac{\pi}{4}$) a $\frac{\pi}{6}$ e così via per ottenere il valore in cui taglia di nuovo l'asse x ecc.

Conclusione

In generale quindi possiamo concludere che la funzione sinusoidale

$$y = A \cdot sen(kx + \varphi)$$

oscilla tra –A e A, ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$ ed è traslata del vettore $\left(-\frac{\varphi}{k}, 0\right)$.

ESERCIZI
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Determina le rimanenti funzioni goniometriche dell'angolo α e rappresenta α sulla circonferenza:

a. $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

b. $tg\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

c. $sen\alpha = -\frac{3}{5}$ $\qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

d. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

e. $tg\alpha = -3$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

f. $sen\alpha = \frac{1}{5}$ $\qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

g. $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

h. $tg\alpha = -\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

i. $sen\alpha = -\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

2) Calcola le seguenti espressioni:

a. $\cos\frac{7}{6}\pi + tg\frac{2}{3}\pi - sen\frac{3}{4}\pi + tg\frac{5}{6}\pi - sen\frac{4}{3}\pi - tg\frac{5}{3}\pi$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

b. $tg\frac{3}{4}\pi + sen\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{11}{6}\pi + tg\frac{5}{4}\pi$ $[0]$

c. $tg\frac{7}{6}\pi - \cos\frac{5}{3}\pi + sen\frac{5}{6}\pi + tg\frac{11}{6}\pi$ $[0]$

3) Sviluppa le seguenti espressioni:

a. $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - sen(-\alpha) - \cos(\pi+\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - tg(2\pi-\alpha) + \cos(\pi-\alpha)$ $\left[-\frac{1}{tg\alpha}+tg\alpha\right]$

b. $sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha) - sen(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $[1]$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + sen(\pi-\alpha) - tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos(\pi+\alpha)$ $\left[-\frac{1}{tg\alpha}\right]$

d. $tg(\pi-\alpha)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - sen(2\pi-\alpha)$ $[0]$

e. $tg(\pi+\alpha) - \cos(2\pi-\alpha) + sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $[tg\alpha]$

f. $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha) + tg(\alpha+\pi) + tg(-\alpha)$ $[2\cos\alpha]$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni:

a. $y = sen3x$

b. $y = 2\cos x$

c. $y = 2sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

d. $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

e. $y = 2\cos(2x-\pi)$

SCHEDA DI VERIFICA
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Ricava le rimanenti funzioni goniometriche di α ,determina graficamente α nella circonferenza goniometrica e calcolane il valore approssimato usando la calcolatrice:

a) $sen\alpha = \frac{1}{5} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ [$\cos\alpha = -\frac{2}{5}\sqrt{6}$; $tg\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$]

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{4} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ [$sen\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $tg\alpha = \sqrt{15}$]

c) $tg\alpha = -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ [$sen\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$]

2) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\cos\frac{7}{6}\pi + tg\frac{2}{3}\pi - sen\frac{3}{4}\pi + tg\frac{5}{6}\pi - sen\frac{4}{3}\pi + \cos\frac{7}{4}\pi + tg\frac{4}{3}\pi$ [$-\frac{1}{\sqrt{3}}$]

b) $\cos(\pi - \alpha) + tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) - sen(-\alpha) - \cos(\pi + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) - tg(2\pi - \alpha)$ [$tg\alpha - \cot g\alpha$]

3) Verifica la seguente identità:

$$\frac{sen(\frac{\pi}{2} + \alpha)\cos(-\alpha) - sen(\pi + \alpha)\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cot g(-\alpha)} = \frac{tg(\pi - \alpha)}{2(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)}$$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni sinusoidali:

a) $y = 2\cos(3x)$

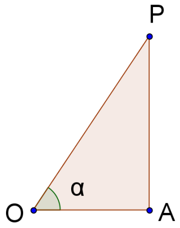
b) $y = \frac{1}{2}sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 4sen(3x)$

d) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Triangolo rettangolo

Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ sappiamo che:



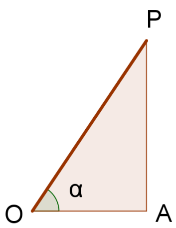
$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}$$

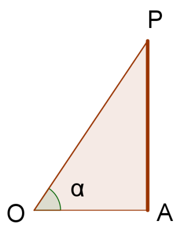
Possiamo perciò utilizzare $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ per determinare gli elementi del triangolo (lati ed angoli).

a) Conoscendo l'ipotenusa $\overline{OP}$ e l'angolo α (cioè $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$)



cateto opposto ad α = $\overline{PA}$ = ipotenusa $\cdot\, sen\alpha$
cateto adiacente ad α = $\overline{OA}$ = ipotenusa $\cdot \cos\alpha$

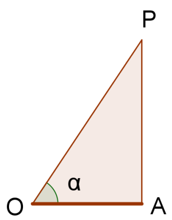
b) Conoscendo il cateto $\overline{AP}$ e l'angolo opposto α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{sen\alpha}$$

$$cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot \cos\alpha$$

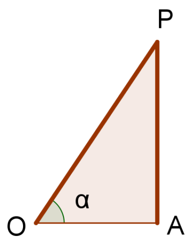
c) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'angolo adiacente α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{\cos\alpha}$$

$$cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot sen\alpha$$

d) Conoscendo il cateto $\overline{PA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ posso trovare



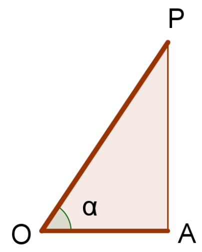
$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}}$$

e quindi anche $\cos\alpha$ e $tg\alpha$

Dalla conoscenza di senα posso risalire all'angolo α (tasto di "inversione" della calcolatrice).

Per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure $\cos\alpha$ poiché $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha$

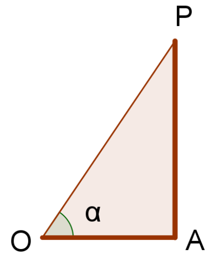
e) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ abbiamo



$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \alpha$$

$\overline{AP}$ con il teorema di Pitagora oppure $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha$

f) Conoscendo i due cateti $\overline{PA}$ e $\overline{OA}$ possiamo determinare



$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \alpha$$

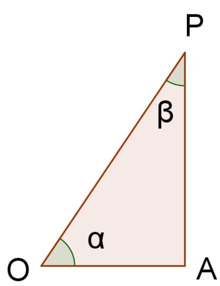
Possiamo determinare $\overline{OP}$ applicando il teorema di Pitagora oppure con la relazione $\overline{OP} = \dfrac{\overline{PA}}{sen\alpha}$

Nota: naturalmente in tutti questi esempi dalla conoscenza di α si può ricavare anche $O\hat{P}A = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

In conclusione, dalla conoscenza di 2 elementi di un triangolo rettangolo, che però non siano due angoli, posso determinare tutti gli altri (si dice **"risolvere"** il triangolo).

Conoscere α equivale a conoscere $sen\alpha$ o $\cos\alpha$ o $tg\alpha$.

Osserviamo che si ha



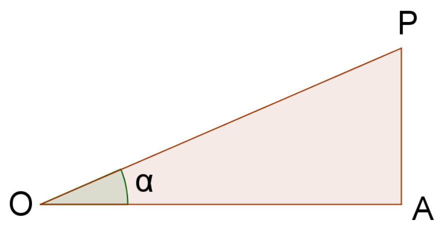
$$sen\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa} = \frac{cateto \quad adiacente \quad a \quad \beta}{ipotenusa} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa} = \frac{cateto \quad opposto \quad a \quad \beta}{ipotenusa} = sen\beta$$

$$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$$

Esempi

a) Nel triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ sia l'ipotenusa $\overline{OP}=2$ e $sen\alpha=\frac{1}{3}$ $\left(\alpha=\overset{\wedge}{POA}\right)$. Determinare gli altri elementi del triangolo.



$\overline{OP}=2$

$sen\alpha=\frac{1}{3}$

$\overline{AP}=\overline{OP}\cdot sen\alpha=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Per determinare $\overline{OA}$ posso anche utilizzare il teorema di Pitagora oppure ricavo

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\Rightarrow\overline{OA}=\overline{OP}\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

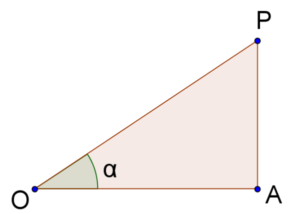
Se $\beta=\overset{\wedge}{OPA}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ abbiamo

$sen\beta=\cos\alpha$
$\cos\beta=sen\alpha$

Per avere un'idea della misura degli angoli α e β possiamo utilizzare la calcolatrice premendo, per esempio, il tasto SIN^{-1} che permette di risalire all'angolo che ha come valore del seno il numero indicato.
Prendendo $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ otteniamo $\alpha\cong 19{,}47^{\circ}$.

Infine $\beta=90°-\alpha\cong(70{,}53)°$

b)



$\overline{AP}=3$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Se $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ abbiamo $sen\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

Quindi $\overline{OP} = \dfrac{\overline{AP}}{\frac{3}{5}} = 3 \cdot \dfrac{5}{3} = 5$

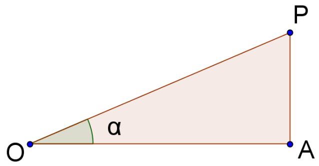
e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 4$ (oppure con il teorema di Pitagora)

Per ricavare α utilizzando per esempio il tasto $\cos^{-1}$ della calcolatrice abbiamo

$$\cos^{-1}\frac{4}{5} \cong (36{,}86)^\circ$$

e quindi $\beta = O\hat{P}A = 90° - \alpha \cong (53{,}14)^\circ$

c)



$\overline{OA} = 2$

$tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Se $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ posso ricavare $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

oppure ricordare che $sen^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$ e $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{tg^2\alpha + 1}$

Si ottiene, in ogni caso, che $sen\alpha = \dfrac{1}{3}$ e $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ da cui

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OA}}{\cos\alpha} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{e } \overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

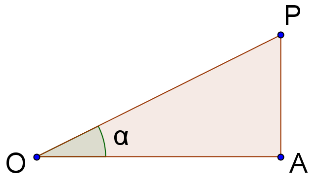
Utilizzando la calcolatrice $\alpha = tg^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{4} \cong (19{,}47)^\circ$ e $\beta = 90° - \alpha$

Nota: il problema poteva essere risolto anche così

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = tg\alpha \Rightarrow \overline{AP} = \overline{OA} \cdot tg\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e $\overline{OP}$ si può trovare con il teorema di Pitagora.

d)



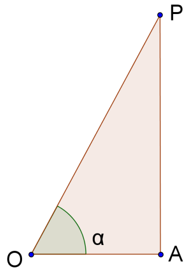
$\overline{OP} = 8$

$\overline{AP} = 5$

Posso determinare $sen\alpha = \frac{5}{8}$ e con la calcolatrice $\alpha \cong (38{,}68)^\circ$ e per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure calcolare $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ e

$\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39}$

e)



$\overline{OP} = 10$

$\overline{OA} = 4$

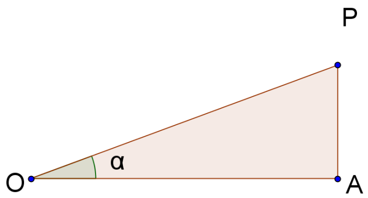
Determino $\cos\alpha = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (66{,}42)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare $\overline{AP}$, basterà calcolare

$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 2\sqrt{21}$

$sen\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ e avrò

f)



$\overline{AP} = 2$

$\overline{OA} = 2\sqrt{15}$

Posso determinare $tg\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (14{,}47)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare $\overline{OP}$ basta ricavare $sen\alpha$ (o $\cos\alpha$) da $tg\alpha$ .Risoluzione

Per esempio

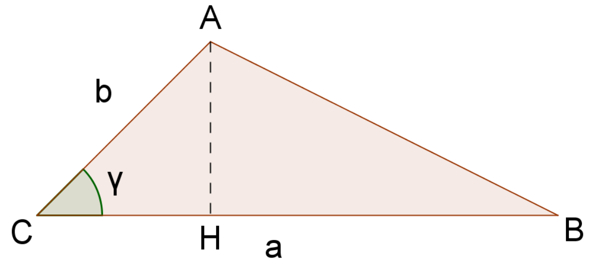
.

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + 1} = \frac{1}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow sen\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{sen\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

Area di un triangolo

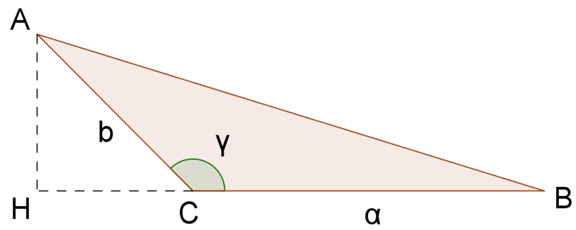
Supponiamo di conoscere due lati di un triangolo e l'angolo compreso: possiamo calcolare l'area?



Tracciamo l'altezza AH : $\overline{AH} = b sen\gamma$

e quindi area $(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

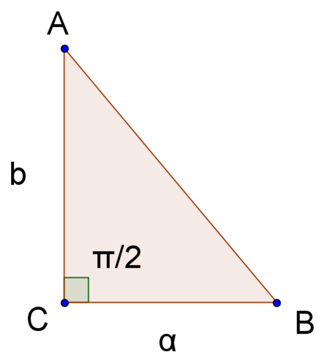
Osserviamo che se anche γ fosse ottuso avremo:



$$\overline{AH} = b \cdot sen(\pi - \gamma) = b \cdot sen\gamma$$

e quindi ancora area $(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

Se, come caso particolare, avessi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ il triangolo sarebbe rettangolo in C e infatti:

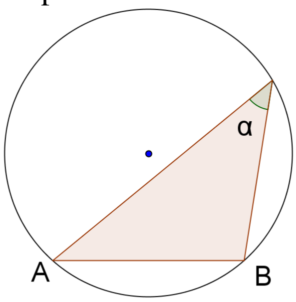


$$area(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{1}{2} ab$$

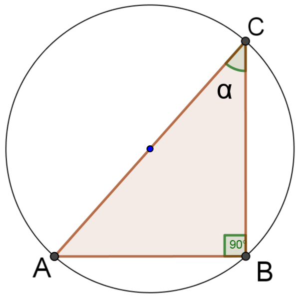
$$sen\gamma = sen\frac{\pi}{2} = 1$$

Lunghezza di una corda di una circonferenza

Consideriamo una corda AB in una circonferenza di raggio r: se conosciamo un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda possiamo trovare $\overline{AB}$?



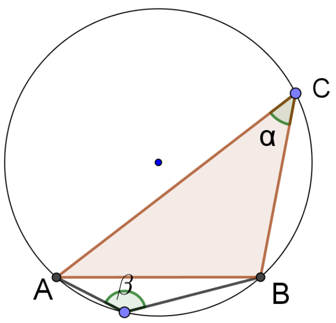
Sappiamo che tutti gli angoli che insistono su AB sono uguali: disegniamo allora quello che ha un lato passante per il centro della circonferenza.



Il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è rettangolo in B e quindi, essendo $\overline{AC} = 2R$ abbiamo:

$$\overline{AB} = 2R \cdot sen\ \alpha$$

Osserviamo che questa relazione vale anche considerando un angolo β come in figura: infatti $\beta = \pi - \alpha$ (α e β sono angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza) e quindi $sen\beta = sen\alpha$



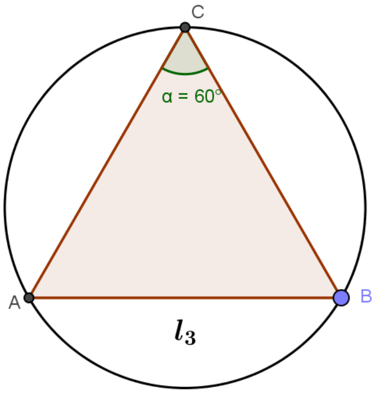
$\overline{AB} = 2R \cdot sen\beta$

Quindi in generale quindi abbiamo il cosiddetto "**teorema della corda**"

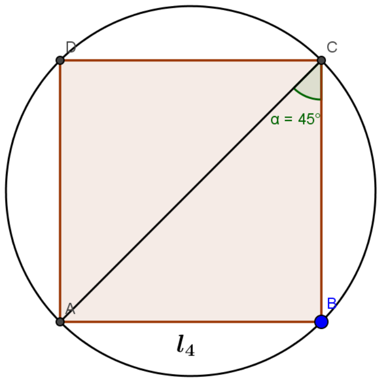
$$\overline{AB} = 2R \cdot seno \text{ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB)}$$

NOTA

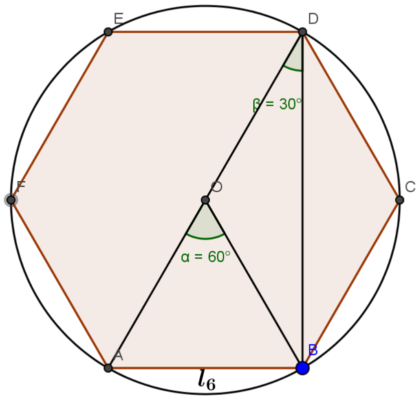
Utilizzando questo teorema possiamo ricavare facilmente il lato del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio r.



$$l_3 = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot r$$



$$l_4 = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot r$$

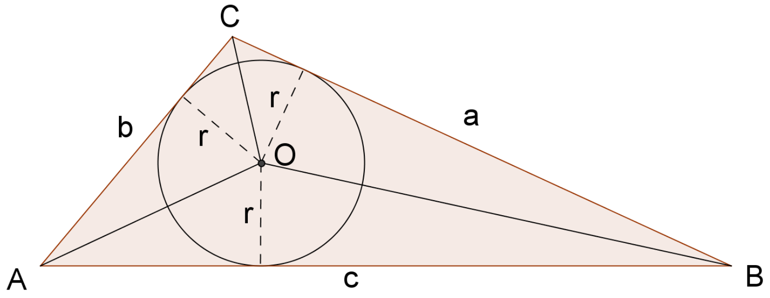


$$l_6 = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2r \cdot \frac{1}{2} = r$$

Circonferenza inscritta e circoscritta ad un triangolo

Dato un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ come possiamo calcolare il raggio R della circonferenza circoscritta e il raggio r della circonferenza inscritta?

Cominciamo con la circonferenza inscritta.



L'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è data dalla somma delle aree dei triangoli aventi base a, b, c e altezza r e quindi:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r$$

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

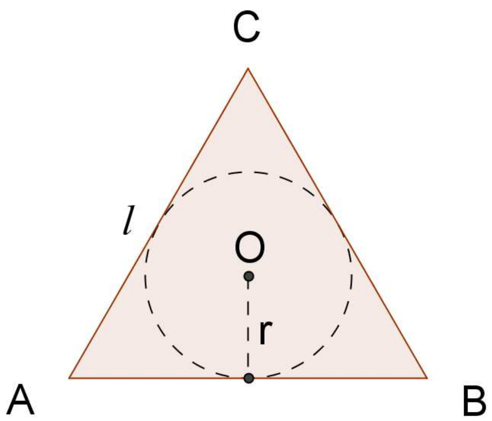
ma $\frac{a+b+c}{2} = p(semiperimetro)$

e quindi $S = r \cdot p \Rightarrow \ r = \frac{S}{p}$

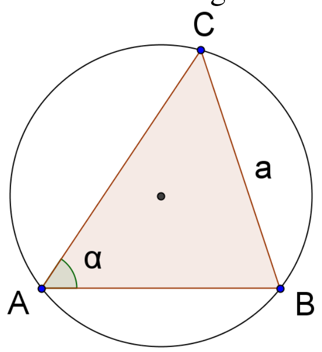
Quindi conoscendo l'area S e il semiperimetro possiamo calcolare il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo.

Esempio: in un triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$ di lato *l* abbiamo:

$$r = \left(\frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{\left(3\frac{l}{2}\right)} = \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\sqrt{3}\right)$$



Consideriamo ora la circonferenza circoscritta al triangolo



Ricordando che la corda $\overline{BC} = diametro \cdot sen\alpha$

$$a = 2R \cdot sen\alpha \Rightarrow \; R = \frac{a}{2sen\alpha} \quad (1)$$

Naturalmente è anche $R = \frac{b}{2sen\beta} = \frac{c}{2sen\gamma}$

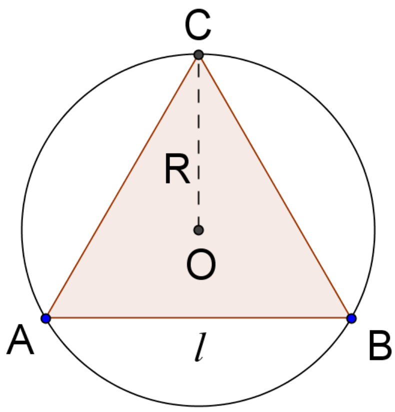
Possiamo anche scrivere, moltiplicando nella (1) per $b \cdot c$ numeratore e denominatore, e ricordando che $\frac{1}{2}bc \cdot sen\alpha = area\left(\overset{\Delta}{ABC} \right) = S$

$$R = \frac{a}{2sen\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2sen\alpha \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

Quindi conoscendo i lati del triangolo e l'area posso determinare R.

Esempio: in un triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$ di lato l abbiamo:

$$R = \frac{l \cdot l \cdot l}{4 \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \left(= \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3} \right)$$



PROBLEMI
TRIANGOLO RETTANGOLO

1. In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{AB} = 2a$ e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo.

   [2p = $\frac{9}{2}a$; A = $\frac{3}{4}a^2$]

2. In un triangolo isoscele ABC di base AB, il lato obliquo $\overline{CB} = l$ e $tg\alpha = 2$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo ABC. Determina infine la misura dell'altezza AK relativa al lato obliquo.

   [$2p = \frac{2}{5}\sqrt{5}l + 2l$; $A = \frac{2}{5}l^2$; $\overline{AK} = \frac{4}{5}l$]

3. In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo e la base minore misurano a e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ dove α è uno degli angoli adiacenti alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

   [$2p = \frac{9}{2}a$; $A = \frac{5\sqrt{15}}{16}a^2$]

4. In un trapezio rettangolo ABCD la diagonale minore AC misura a, forma un angolo retto con il lato obliquo BC e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ dove α è l'angolo acuto adiacente alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

   [$2p = \frac{22}{5}a$; $A = \frac{68}{75}a^2$]

5. In un triangolo isoscele ABC di base AB il lato obliquo misura $2a$ e $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dove α è l'angolo alla base. Determina la misura delle altezze CH e AK del triangolo.

   [$\overline{CH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}a$; $\overline{AK} = \frac{8}{5}a$]

6. In un trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 20 e la base minore DC misura 10. Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, dove α è l'angolo ottuso adiacente alla base minore, determina perimetro e area del trapezio.

   [$2p = 68$; $A = 256$]

7. In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ si prolunga il diametro dalla parte di B e si considera un punto P tale che, tracciata da P la tangente t alla semicirconferenza e detto T il punto di tangenza, si abbia $sen(A\hat{P}T) = \frac{3}{5}$. Tracciata la tangente t' alla semicirconferenza in A e detto Q il punto di intersezione tra t e t', determina perimetro e area del triangolo $A\overset{\Delta}{P}Q$.

[$2p = 8r$; $A = \frac{8}{3}r^2$]

8. Dato un trapezio rettangolo ABCD avente l'altezza $\overline{AD} = a$, $sen(B\hat{A}C) = \frac{3}{5}$ (AB base maggiore, AC diagonale minore), $\cos(A\hat{B}C) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determina perimetro e area di ABCD.

[2p=$\frac{17}{3}a + \sqrt{3}a$; $A = \frac{8+3\sqrt{3}}{6}a^2$]

9. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 2a$ si consideri il punto medio O di BC e si tracci la perpendicolare a BC per O, indicando con M l'intersezione di questa con il cateto AB. Sapendo che $tg(A\hat{B}C) = \frac{3}{4}$, determinare il perimetro del quadrilatero ACOM.

[$2p = \frac{33}{10}a$]

10. In un trapezio rettangolo ABCD, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Sapendo che $\overline{AD} = a$ e che $tg(A\hat{B}C) = \frac{3}{4}$, determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = \frac{11}{2}a$; $A = \frac{17}{12}a^2$]

11. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura a e l'angolo che essa forma con uno dei due cateti ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Calcola perimetro e area del triangolo.

[$2p = 5a$; $A = \frac{25}{24}a^2$]

12. In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, il raggio della circonferenza inscritta misura r e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina i lati del triangolo.

[$\overline{AB} = 2\sqrt{2}r$; $\overline{BC} = 3\sqrt{2}r$]

13. In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina perimetro e area del triangolo e l'altezza AK relativa a BC.

[$2p = \frac{8}{3}a$; $A = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2$; $\overline{AK} = \frac{4}{9}\sqrt{2}a$]

14. In un trapezio scaleno ABCD la base minore DC è uguale ad uno dei due lati obliqui e si ha $\overline{DC} = \overline{AD} = l$. Sapendo che $D\hat{A}B = \frac{\pi}{4}$ e che $tg(A\hat{B}C) = 2$, determina i lati del trapezio e le funzioni goniometriche di $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

[$\overline{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2}+4}{4}\right)l$; $\overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}l$ $\hat{C} = \pi - \alpha$ ....; $\hat{D} = \frac{3}{4}\pi$]

15. Un trapezio isoscele di base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di raggio r e, indicato con α uno degli angoli alla base, si ha $sen\alpha = \frac{24}{25}$. Determina i lati del trapezio.

[$\overline{AB} = \frac{8}{3}r$; $\overline{DC} = \frac{3}{2}r$; $\overline{CB} = \overline{AD} = \frac{25}{12}r$]

16. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 3a$ si ha $\cot g\left(A\hat{B}C\right) = 2$. Considera P su BC tale che $\overline{BP} = a$ e traccia da P la perpendicolare all'ipotenusa che incontra il cateto AB in Q. Determina l'area del quadrilatero AQPC.

$\left[\frac{31}{20}a^2\right]$

SCHEDA DI VERIFICA
Funzioni goniometriche e triangolo rettangolo

1) Determina graficamente α nella circonferenza goniometrica,ricava le rimanenti funzioni goniometriche di α e infine calcolane il valore approssimato di α con la calcolatrice:

   a) $sen\alpha = \frac{2}{3} \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

   b) $\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

   c) $tg\alpha = 4 \qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

2) Sviluppa le seguenti espressioni:

   a) $sen\frac{2}{3}\pi + tg\frac{2}{3}\pi + sen\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos\frac{7}{6}\pi + sen(-\frac{\pi}{4}) + \cos\frac{7}{4}\pi + tg\frac{4}{3}\pi$

   b) $sen(\pi-\alpha) - tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) + sen(\pi+\alpha) - \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) - \cos(2\pi-\alpha) + \cot g(\pi+\alpha)$

3) Disegna il grafico di

   a) $y = 3sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

   b) $y = \frac{3}{2}\cos(2x)$

Problema 1

Considera un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ e sia $tg(A\hat{B}C) = 3$. Determina perimetro e area del triangolo.

$\left[2p = 2\cdot\sqrt{10}a + 2a; \quad A = 3a^2\right]$

Problema 2

In un trapezio isoscele ABCD l'altezza è uguale alla base minore $\overline{CD} = l$ e $sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dove α è l'angolo adiacente alla base minore. Determina il perimetro e l'area del trapezio.

$[\,2p = 6l + 2\cdot\sqrt{5}l; \quad A = 3l^2\,]$

Formule goniometriche

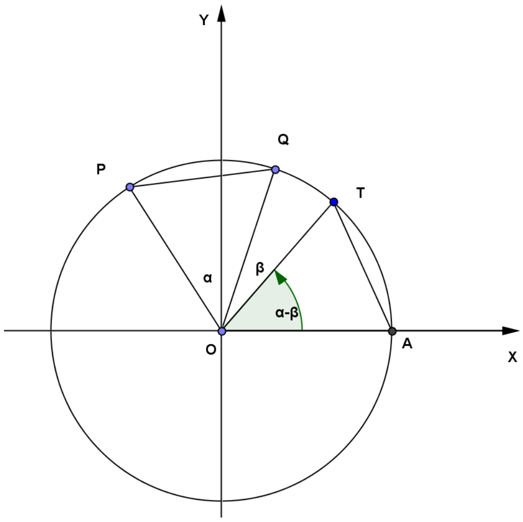
Come possiamo calcolare $sen(\alpha+\beta)$?

E' chiaro che non può risultare $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha+sen\beta$: se infatti fosse così e per esempio $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ avremo $sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=sen\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}=1+1=2$!

Dobbiamo ricavare delle relazioni che ci permetteranno di calcolare il seno, il coseno e la tangente di una somma o di una differenza di angoli.

Formule di addizione e sottrazione

1) Cominciamo con questa osservazione: se riportiamo su una circonferenza goniometrica due angoli α e β , per esempio con $\alpha>\beta$ come in figura, possiamo considerare l'angolo $\alpha-\beta$ e riportarlo con il primo lato sul semiasse positivo delle x. Avremo quindi:



$P(\cos\alpha; sen\alpha)$
$Q(\cos\beta; sen\beta)$
$T(\cos(\alpha-\beta); sen(\alpha-\beta))$
$A(1;0)$

Poiché $A\hat{O}T=Q\hat{O}P=\alpha-\beta$ allora avremo anche $\overline{PQ}=\overline{AT}$ e possiamo scrivere:

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha-sen\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+sen^2(\alpha-\beta)$$

e sviluppando abbiamo:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+sen^2\alpha-2sen\alpha sen\beta+sen^2\beta=\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+sen^2(\alpha-\beta)$$

Quindi poiché : $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $sen^2\beta+\cos^2\beta=1$, $sen^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1$

avremo: $1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2sen\alpha sen\beta=1+1-2\cos(\alpha-\beta)$

e quindi $$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$$

Esempio

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Da questa formula possiamo anche ricavare $\cos(\alpha+\beta)$: basta infatti scrivere $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$.

Quindi avremo , poiché $\cos(-\beta)=\cos\beta$ mentre $sen(-\beta)=-sen\beta$:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+sen\alpha\cdot sen(-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\alpha\cdot sen\beta$$

e quindi $$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\alpha\cdot sen\beta}$$

Esempio

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

2) Come si possono ricavare $sen(\alpha-\beta)$ e $sen(\alpha+\beta)$?

Ricordando che il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare possiamo scrivere:

$$sen(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta-sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot sen\beta$$
$$=sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot sen\beta$$

Quindi $$\boxed{sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot sen\beta}$$

Allora

$$sen(\alpha+\beta)=sen[\alpha-(-\beta)]=sen\alpha\cdot\cos(-\beta)-\cos\alpha\cdot sen(-\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\beta$$

$$\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\beta}$$

Esempio

$$sen(15°) = sen(45° - 30°) = sen 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

3) E come si calcola $tg(\alpha-\beta)$ e $tg(\alpha+\beta)$?

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot se\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\alpha\cdot sen\beta}$$

Se dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ otteniamo:

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Allora $$tg(a+\beta)=tg[\alpha-(-\beta)]=\frac{tg\alpha-tg(-\beta)}{1+tg\alpha\cdot tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Esempio

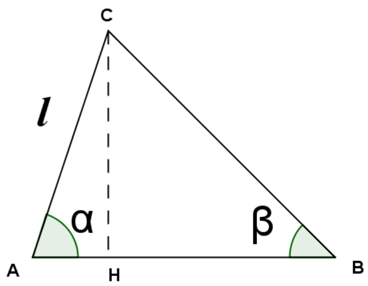
$$tg(15°)=tg(45°-30°)=\frac{tg45°-tg30°}{1+tg45°\cdot tg30°}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$tg(75°)=tg(45°+30°)=\frac{tg45°+tg30°}{1-tg45°\cdot tg30°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

Applicazioni delle formule di addizione

Esempio 1

Dato il triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$, acutangolo, sappiamo che $sen\,\hat{A}=\frac{4}{5}$ e $tg\,\hat{B}=1$. Se $\overline{AC}=l$ possiamo risolvere il triangolo, cioè determinare tutti gli altri suoi elementi?



$$sen\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5} \qquad (\ \alpha \text{ è acuto})$$

$$tg\beta=1\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{4}$$

$\overline{AH}=l\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}l$ $\qquad$ $\overline{CH}=l\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}l$ $\qquad$ $\overline{HB}=\overline{CH}=\frac{4}{5}l\Rightarrow\overline{AB}=\frac{7}{5}l$

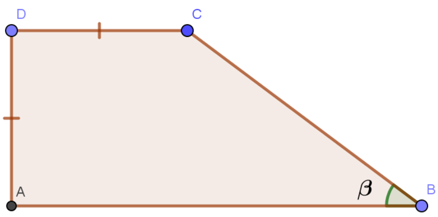
$\overline{CB}=\overline{CH}\cdot\sqrt{2}=\frac{4}{5}\sqrt{2}l$

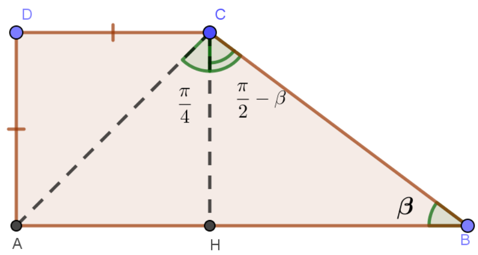
$\hat{C}=\pi-(\alpha+\beta)$ e

$$sen\,\hat{C}=sen(\pi-(\alpha+\beta))=sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

Esempio 2

Dato il trapezio rettangolo ABCD in cui $\overline{AD}=\overline{CD}=l$, $\quad sen\left(A\hat{B}C\right)=\frac{3}{5}$, come si possono calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo $A\hat{C}B$?





Osserviamo che $A\hat{C}H=\frac{\pi}{4}$ e che $B\hat{C}H=\frac{\pi}{2}-\beta$ e quindi $A\hat{C}B=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\beta=\frac{3}{4}\pi-\beta$ e utilizzando le formule si possono trovare seno, coseno e tangente.

Per esempio: $\qquad sen(\frac{3}{4}\pi-\beta)=sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\beta-\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)sen\beta=....$

Esempio 3

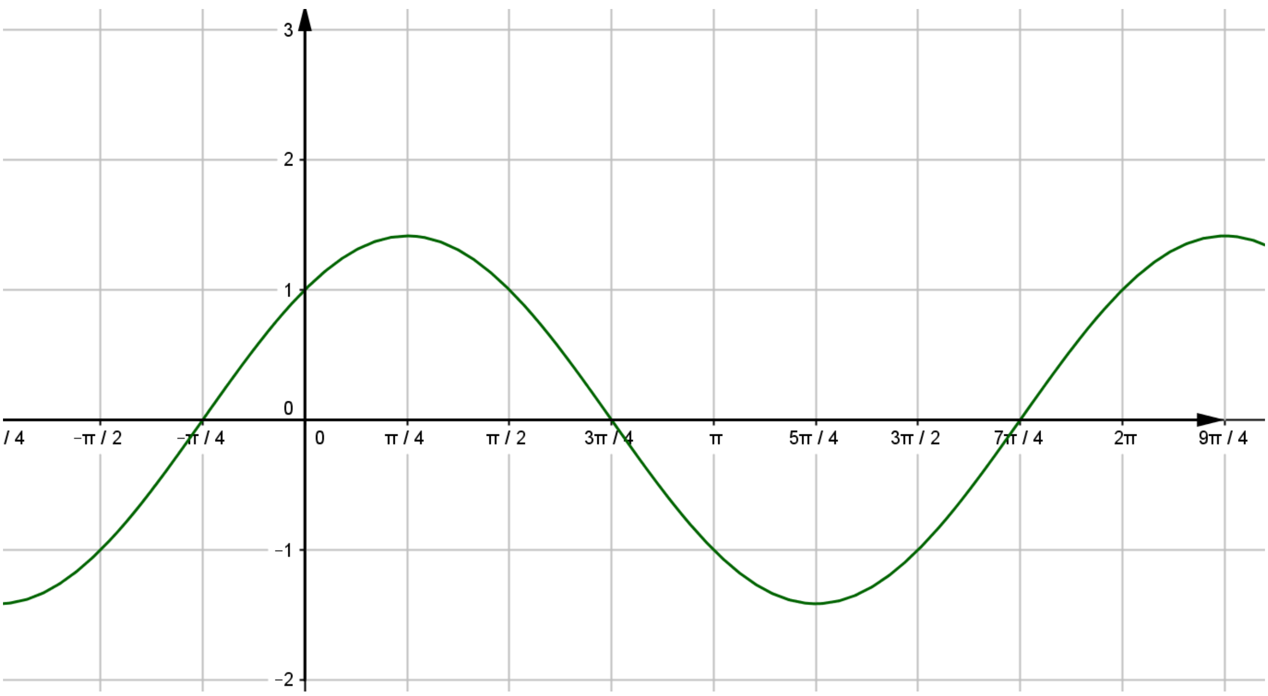
Vediamo come le funzioni del tipo $y = a \cdot senx + b \cdot \cos x$ possano essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $y = A \cdot sen(x + \varphi)$ utilizzando le formule di addizione .

Consideriamo per esempio $y = senx + \cos x$
Sviluppiamo $A \cdot sen(x + \varphi)$ e imponiamo che risulti uguale a $senx + \cos x$.

$$A \cdot (senx \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot sen\varphi) = senx + \cos x \rightarrow A \cdot \cos\varphi \cdot senx + A \cdot sen\varphi \cdot \cos x = senx + \cos x \rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos\varphi = 1 \\ A \cdot sen\varphi = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{A \cdot sen\varphi}{A \cdot \cos\varphi} = 1 \rightarrow tg\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ A^2 \cdot sen^2\varphi + A^2 \cdot \cos^2\varphi = 2 \rightarrow A^2 = 2 \rightarrow A = \sqrt{2} \end{cases}$$

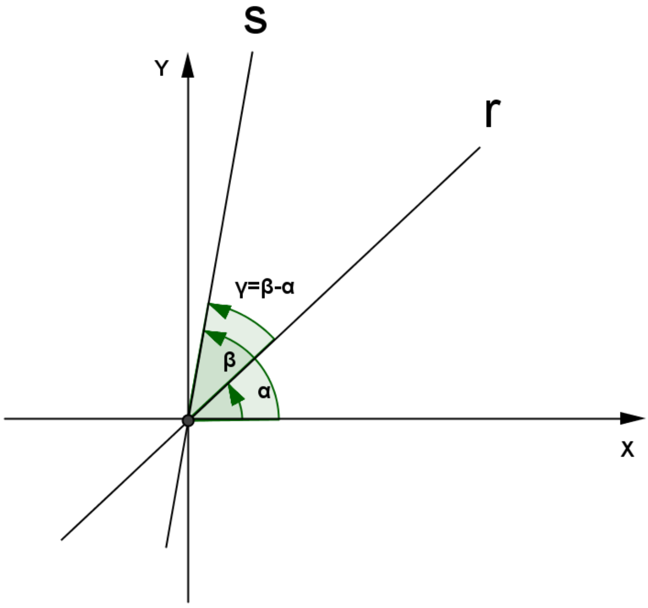
Quindi $y = senx + \cos x$ corrisponde a $y = \sqrt{2}sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ come si può verificare con Geogebra: digitando nella barra di inserimento $y = \sin x + \cos x$ abbiamo infatti il seguente grafico:



Angolo formato tra due rette

Ricordando che il coefficiente angolare di una retta, nel piano cartesiano, è uguale alla tangente dell'angolo α formato dalla retta con il semiasse positivo delle x, possiamo ricavare l'angolo (o la tangente dell'angolo) formato da due rette di equazione assegnata?

Per semplicità disegniamo due rette per l'origine con coefficienti angolari positivi.



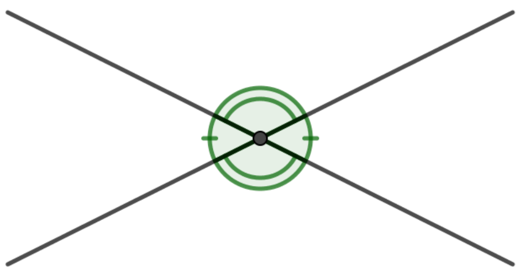
$$r : y = m \cdot x \Rightarrow tg\alpha = m$$
$$s : y = m' \cdot x \Rightarrow tg\beta = m'$$

L'angolo acuto γ formato da *r* e *s* avrà tangente

$$\boxed{tg\gamma = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{m' - m}{1 + m \cdot m'}}$$

Nota

In generale osserviamo che due rette (non perpendicolari) formano una coppia di angoli acuti (congruenti perché opposti al vertice) e una coppia di angoli ottusi congruenti e ricordando che la tangente di un angolo acuto è positiva mentre la tangente goniometrica di un angolo ottuso è negativa se vogliamo la tangente goniometrica dell'angolo acuto, che dovrà risultare positiva, dovremo applicare la formula in modo da avere un risultato positivo.



Esempio 1

Considera le rette di equazione :

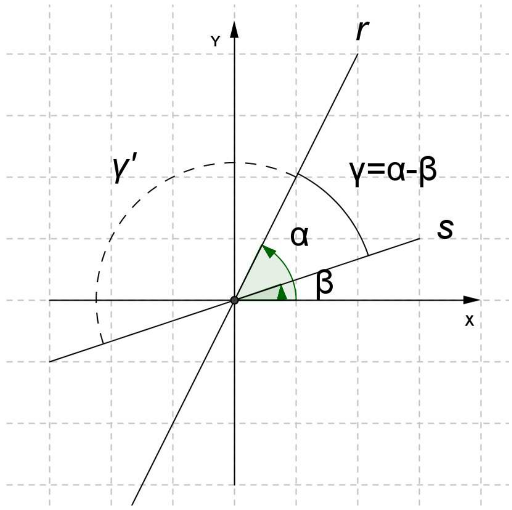
$r : y = 2x \quad m = 2$

$s : y = \frac{1}{3}x \quad m' = \frac{1}{3}$

$$tg\gamma = tg(\alpha - \beta) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

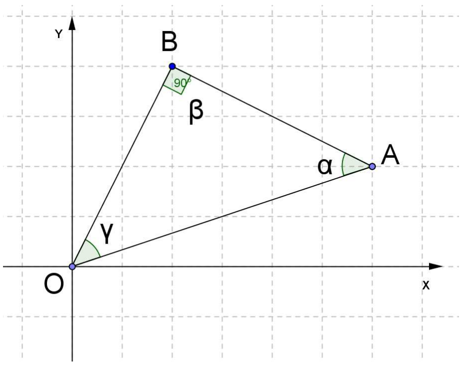
Naturalmente abbiamo anche

$$\gamma' = \pi - \gamma = \frac{3}{4}\pi$$



Esempio 2

Dato il triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(6;2)$ $B(2;4)$, determina le tangenti goniometriche dei suoi angoli.



$$\begin{aligned} r_{OA} &: y = \frac{1}{3}x \\ r_{OB} &: y = 2x \end{aligned} \Rightarrow tg\, A\hat{O}B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$$

$$r_{AB} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

La tangente di β non può essere calcolata perché r_{OB} è perpendicolare a r_{AB} e quindi $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$tg\alpha = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = \gamma$$

Infatti $\overset{\Delta}{OAB}$ è un triangolo rettangolo isoscele.

Formule di duplicazione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo 2α ?

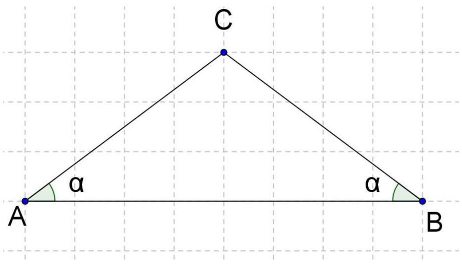
Utilizzando le formule di addizione abbiamo:

$$sen2\alpha = sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot sen\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \boxed{sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - sen\alpha \cdot sen\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

$$tg2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \qquad \Rightarrow \boxed{tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

Esempio: dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, se sappiamo che $sen\alpha = \frac{3}{5}$, con α l'angolo adiacente alla base, possiamo determinare le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C}$?



$$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\hat{C} = \pi - 2\alpha$$

$$sen\hat{C} = sen(\pi - 2\alpha) = sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Conoscendo $sen\hat{C}$ possiamo poi determinare anche coseno e tangente.

Osservazione: $\cos 2\alpha$ può essere sviluppato in due modi diversi utilizzando la relazione $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha \\ \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \end{matrix}$$

Formule di bisezione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$?

Osserviamo che $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$. Proviamo a sviluppare

$$\cos\alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}$$

a) Se sostituiamo $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - sen^2\frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos\alpha = 1 - 2sen^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

b) Se sostituiamo $sen^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Ricaviamo infine una formula per calcolare $tg\frac{\alpha}{2}$:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =^{*} \frac{sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}sen\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} =^{**} \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

*Nota: moltiplico numeratore e denominatore per $\cos\frac{\alpha}{2}$

**Nota: $sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(2\cdot sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}sen\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}sen\alpha$

Se avessimo moltiplicato per $sen\frac{\alpha}{2}$ avremmo ottenuto invece:

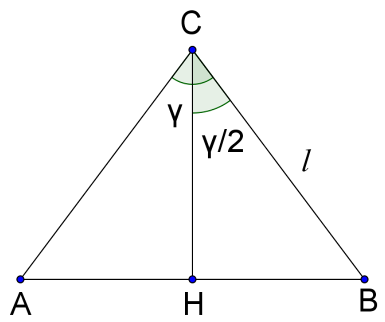
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{sen^2\frac{\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1}{2}sen\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} \Rightarrow \boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}}$$

Osserviamo che le due espressioni sono equivalenti poiché:

$$\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{sen\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{1-\cos^2\alpha}{sen\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{sen^2\alpha}{sen\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Esempio 1: dato un triangolo isoscele acutangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, se conosciamo $sen\hat{C}=\frac{24}{25}$ e il lato $\overline{BC}=l$, possiamo risolvere il triangolo?

Ponendo $\hat{C}=\gamma$ è chiaro che per risolvere il triangolo abbiamo bisogno delle funzioni goniometriche dell'angolo $\frac{\gamma}{2}$.



$$sen\gamma=\frac{24}{25}\Rightarrow\cos\gamma=\sqrt{1-\frac{576}{625}}=\frac{7}{25}$$

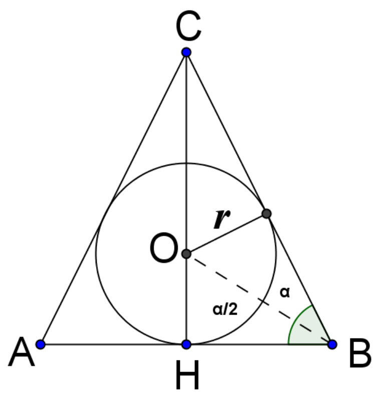
(poiché il triangolo è acutangolo il coseno è positivo)

Quindi $sen^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\frac{7}{25}}{2}=\frac{9}{25}\Rightarrow sen\frac{\gamma}{2}=\frac{3}{5}$

Allora $\overline{HB}=\frac{3}{5}l\Rightarrow\overline{AB}=\frac{6}{5}l$ e $\hat{A}=\hat{B}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$

Esempio 2: dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, se conosciamo $sen\alpha=\frac{12}{13}$ (α = angolo adiacente alla base) e il raggio r della circonferenza inscritta, possiamo risolvere il triangolo?

$$sen\alpha=\frac{12}{13}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{5}{13}\quad(\alpha \text{ è acuto})$$



$$sen^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{5}{13}}{2}=\frac{4}{13}\Rightarrow sen\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}};\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}\rightarrow tg\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{OH}}{\overline{HB}}\Rightarrow\overline{HB}=\frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}=\frac{r}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}r\Rightarrow\overline{AB}=3r$$

$$\overline{CB}=\frac{\overline{HB}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{2}r}{\frac{5}{13}}=\frac{39}{10}r$$

$$\hat{C}=\pi-2\alpha\Rightarrow sen\hat{C}=sen(\pi-2\alpha)=sen2\alpha=2sen\alpha\cdot\cos\alpha$$

Altre formule

1) Proviamo a ricavare $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione della $tg\dfrac{\alpha}{2}$.

$sen\alpha = sen2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = 2sen\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Possiamo a questo punto dividere per 1 e ricordare che 1 può essere pensato anche come $sen^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$:

$sen\alpha = \dfrac{2sen\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{sen^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$ e dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ avremo

$$\boxed{sena = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}}$$

Analogamente :

$\cos\alpha = \cos 2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-sen^2\dfrac{\alpha}{2}}{sen^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$ e quindi

$$\boxed{\cos a = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}}$$

Queste formule si chiamano formule "**parametriche**" perché esprimono seno e coseno di un angolo in funzione del "parametro" $t = tg\dfrac{\alpha}{2}$ e saranno utili nella classe quinta per la risoluzione di alcuni integrali particolari.

Possiamo esprimere anche tga in funzione di $t = tg\dfrac{\alpha}{2}$:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

2) Possiamo anche ricavare delle formule per esprimere il prodotto tra il seno di un angolo e il seno (o il coseno) di un altro o per esprimere la somma del seno di un angolo con il seno (o coseno) di una altro cioè per esempio, $sen\alpha \cdot sen\beta$, $sen\alpha \cdot \cos\beta$ ecc. oppure $sen\alpha + sen\beta$, $\cos\alpha + \cos\beta$ ecc.

Osserviamo per esempio che:

$$sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha\cdot\cos\beta$$

Quindi: $$sen\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)]$$

Esercizio 1

Analogamente se voglio ricavare $sen\alpha \cdot sen\beta$ oppure $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ posso partire da……..

D'altra parte se poniamo

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$$

avremo $$senp+senq=2\cdot sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Esercizio 2

Analogamente per ottenere un'espressione di $\cos p + \cos q$ considera

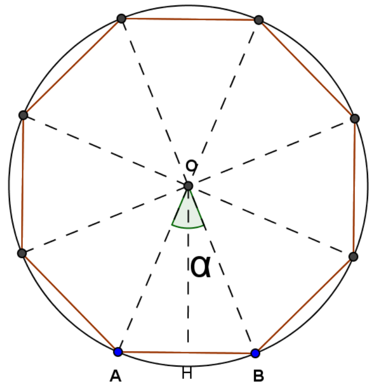
$$\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=......\\ \cos(\alpha-\beta)=....\end{array} \rightarrow$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=.......$$

e procedi dopo aver posto $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=...\\ \beta=.....\end{cases}$

Formule di bisezione e lati dei poligoni regolari inscritti ad una circonferenza

1) **Lato dell'ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *r***



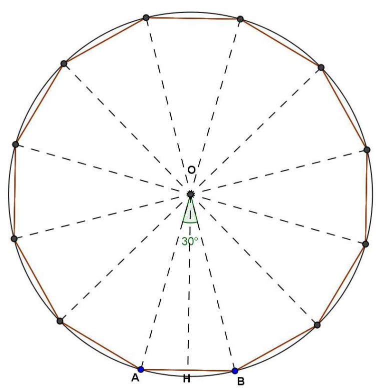
Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot sen\frac{\pi}{8}$ avremo:

$$\boxed{l_8 = 2r \cdot sen\frac{\pi}{8}}$$

Osservazione: si può anche ricorrere al teorema della corda per ottenere lo stesso risultato in quanto l'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB è la metà di $\alpha = A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$.

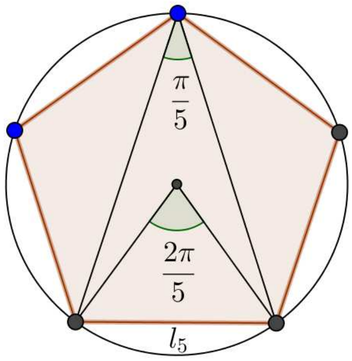
Per calcolare $sen\frac{\pi}{8}$ si può applicare la formula di bisezione ricavando $sen\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = ...$

2)**Lato del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *r***



Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot sen\frac{\pi}{12}$ abbiamo che $\boxed{l_{12} = 2r \cdot sen\frac{\pi}{12}}$ e per calcolare $sen\frac{\pi}{12}$ possiamo usare la formula di bisezione.

3) **Pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r**



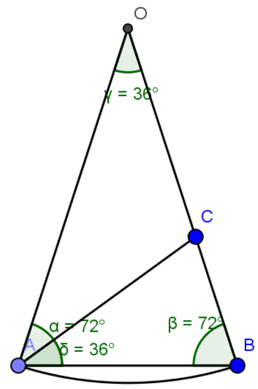
Analogamente ai casi precedenti abbiamo che il lato l_5 del pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *r* risulta

$$\boxed{l_5 = 2r \cdot sen\frac{\pi}{5}}$$

Se scriviamo $sen\frac{\pi}{5} = sen2 \cdot \frac{\pi}{10} = 2 \cdot sen\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}$ possiamo calcolare $sen\frac{\pi}{5}$ se conosciamo seno e coseno di $\frac{\pi}{10}$

NOTA

Consideriamo il decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r : se AB $= l_{10}$ vediamo che , tracciata la bisettrice AC dell'angolo $B\hat{A}O$, i triangoli ABO e ABC sono simili poiché l'angolo $B\hat{A}O$ risulta 72° e quindi $B\hat{A}C$ è 36° come l'angolo $A\hat{O}B$.

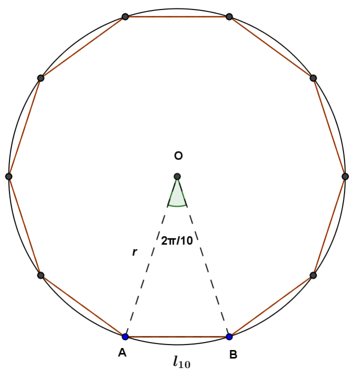


Quindi possiamo scrivere la seguente proporzione

$$r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10}) \Leftrightarrow l_{10}^{\ 2} = r^2 - r \cdot l_{10} = 0 \Leftrightarrow l_{10}^{\ 2} + r \cdot l_{10} - r^2 = 0 \Rightarrow l_{10} = \frac{-r \pm \sqrt{5}r}{2} \to l_{10} = \frac{(\sqrt{5}-1)r}{2}$$

D'altra parte per il teorema della corda vale anche che:

$$l_{10} = 2r \cdot sen\frac{\pi}{10}$$



e quindi confrontando le due espressioni possiamo ricavare:

$$\boxed{sen\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Da cui possiamo anche ricavare $\cos\frac{\pi}{10}$ e in conclusione $sen\frac{\pi}{5}$.

PROBLEMI
TRIANGOLO RETTANGOLO E FORMULE GONIOMETRICHE

1) In un triangolo ABC il lato $\overline{AC} = l$, $tg\alpha = 2$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Determina gli altri lati del triangolo e $sen\gamma$.

[$\overline{AB} = \frac{11\sqrt{5}}{15} l$, $\overline{CB} = \frac{2\sqrt{5}}{3} l$, $sen\gamma = \frac{11\sqrt{5}}{25}$]

2) In un triangolo isoscele ABC di base AB, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = l$. Determina perimetro e area del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C} = \gamma$.

[$2p = \frac{8}{3} l$, $A = \frac{2\sqrt{2}}{9} l^2$, $sen\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos\gamma = \frac{7}{9}$, $tg\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{7}$]

3) In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, il lato obliquo misura l e $\cos\hat{C} = \frac{7}{25}$. Determina perimetro e area del triangolo.

[$2p = \frac{16}{5} l$; $A = \frac{12}{25} l^2$]

4) Un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB e avente $\cos\hat{C} = \frac{1}{4}$ è inscritto in una circonferenza di raggio r . Determina i lati del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo alla base.

[$\overline{AB} = \frac{\sqrt{15}}{2} r$; $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} r$; $sen\left(A\hat{B}C\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$,…..]

5) In un trapezio rettangolo ABCD, la base maggiore $\overline{AB} = 56$, il lato obliquo $\overline{BC} = 50$ e $\cos\left(A\hat{B}C\right) = \frac{7}{25}$. Determina base minore e altezza del trapezio. Dopo aver verificato che il trapezio è circoscrivibile ad una circonferenza, detto O il suo centro, calcola $sen\left(C\hat{O}D\right)$.

[$\overline{DC} = 42$; $\overline{AD} = 48$; $sen\left(C\hat{O}D\right) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$]

6) Considera una semicirconferenza di raggio r e centro O e sia ABCD un trapezio rettangolo ad essa circoscritto. Sapendo che $\cos\left(A\hat{B}C\right) = \frac{1}{3}$ (AB base maggiore del trapezio) , determina i lati del trapezio e calcola $sen\left(O\hat{C}B\right)$.

[$\overline{AB} = r + \frac{3}{2\sqrt{2}} r$; $\overline{CB} = \frac{3}{2\sqrt{2}} r$; $\overline{DC} = r + \frac{r}{\sqrt{2}}$; $\overline{AD} = r$ $sen\left(O\hat{C}B\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$]

7) Considera il trapezio isoscele ABCD, circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r e centro O, avente $sen\left(A\hat{B}C\right)=\frac{4}{5}$ (AB base maggiore del trapezio, BC lato obliquo). Determina i lati del trapezio e $sen\left(O\hat{C}B\right)$.

[$\overline{CB}=\overline{AD}=\frac{5}{4}r$; $\overline{AB}=\frac{5}{2}r$; $\overline{DC}=r$; $sen\left(O\hat{C}B\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$]

8) Un trapezio rettangolo ABCD (base maggiore AB) è circoscritto ad una circonferenza di centro O e raggio r e $\cos\left(A\hat{B}C\right)=\frac{5}{13}$ ($A\hat{B}C=$ angolo adiacente alla base maggiore). Determina i lati del trapezio e $sen\left(O\hat{C}B\right)$.

[$\overline{CB}=\frac{13}{6}r$; $\overline{AD}=2r$; $\overline{DC}=\frac{5}{3}r$; $\overline{AB}=\frac{5}{2}r$; $sen\left(O\hat{C}B\right)=\frac{3}{\sqrt{13}}$]

9) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r: y=\frac{1}{2}x,\quad s: y=2x$. Disegna le due rette e l'angolo γ. Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ.

[$tg\gamma=\frac{3}{4},\quad \gamma\cong 36{,}87°$]

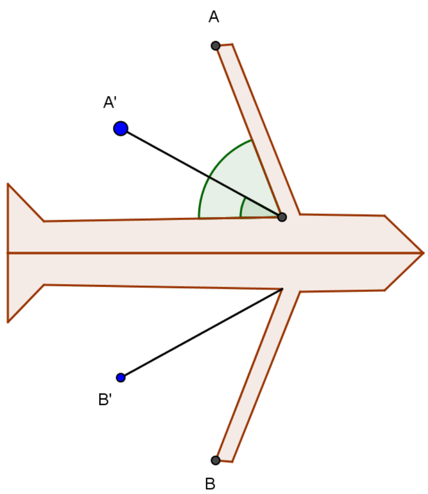
10) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r: y=\frac{1}{2}x,\quad s: y=-\frac{1}{2}x$. Disegna le due rette e l'angolo γ. Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ.

[$tg\gamma=\frac{4}{3},\quad \gamma\cong 53{,}13°$]

SCHEDE DI LAVORO
Trigonometria nella realtà

1) ***Apertura alare***

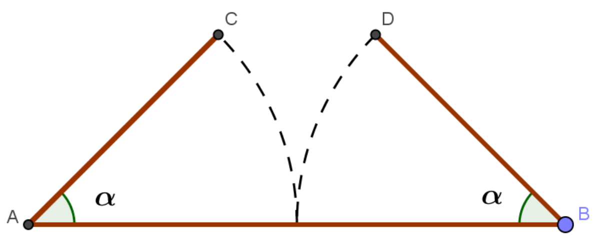
Quanto varia l'apertura alare di un aereo dalla fase di decollo alla fase di volo?
Supponiamo che l'ala dell'aereo sia lunga 16 metri e che durante il decollo di abbia $\alpha = 70°$, mentre si abbia $\alpha' = 30°$ durante il volo. Di quanto varia $\overline{AB}$ (apertura alare) cioè quanto risulta $\overline{AB} - \overline{A'B'}$?



[circa 14 m]

2) ***Cancello con apertura automatica***

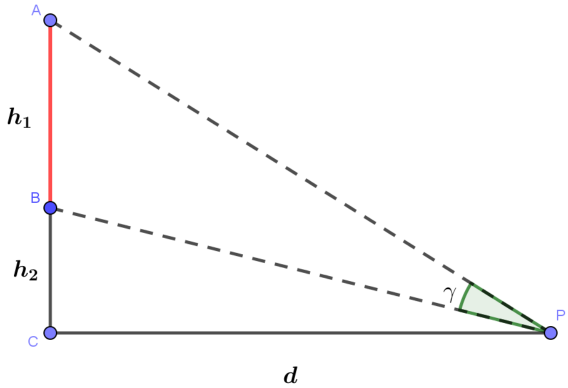
Considera un cancello automatico costituito da due parti uguali lunghe 2,5 m ciascuna.
Indica con α l'angolo in figura (che varia durante l'apertura del cancello) e calcola l'apertura $\overline{CD}$ in funzione di α. Per quale angolo si ha un'apertura di 2,5 m? E di 1 metro?



[60° ; circa 37°]

3) *Angolo di visuale*

Supponiamo di voler fotografare la cupola del duomo di Firenze alta $h_1 = 68$ m che si trova su una base di altezza $h_2 = 55$ metri di altezza. Se ti sei posizionato a 100 metri dalla base della cupola qual è il tuo angolo di visuale?



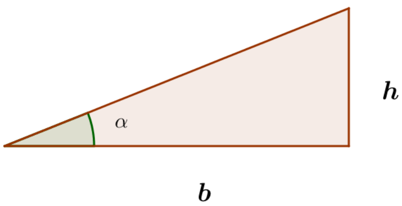
Suggerimento
Rappresentando la cupola con il segmento AB e la base con il segmento BC, quando ti posizioni in P vedrai la cupola sotto l'angolo di visuale γ: si tratta quindi di determinare γ in funzione dei tuoi dati.

[$\gamma \cong 22°$]

4) ***Piste da sci***

Le piste da sci sono classificate in **blu, rosse e nere** a seconda della pendenza massima che si può trovare percorrendo la pista e rispettivamente è stabilito che siano blu se in tutti i tratti la pendenza risulta sempre inferiore al 25%, rosse se sono presenti tratti con pendenza compresa tra il 25% e il 40% e nere se ci sono tratti con pendenza tra il 40% e il 75%.

Ricordando che per pendenza si intende la tangente dell'angolo formato dalla pista con l'orizzontale cioè $tg\alpha = \frac{h}{b}$ (vedi figura), trova quali sono i massimi angoli di inclinazione che si possono avere in una pista blu, rossa o nera.



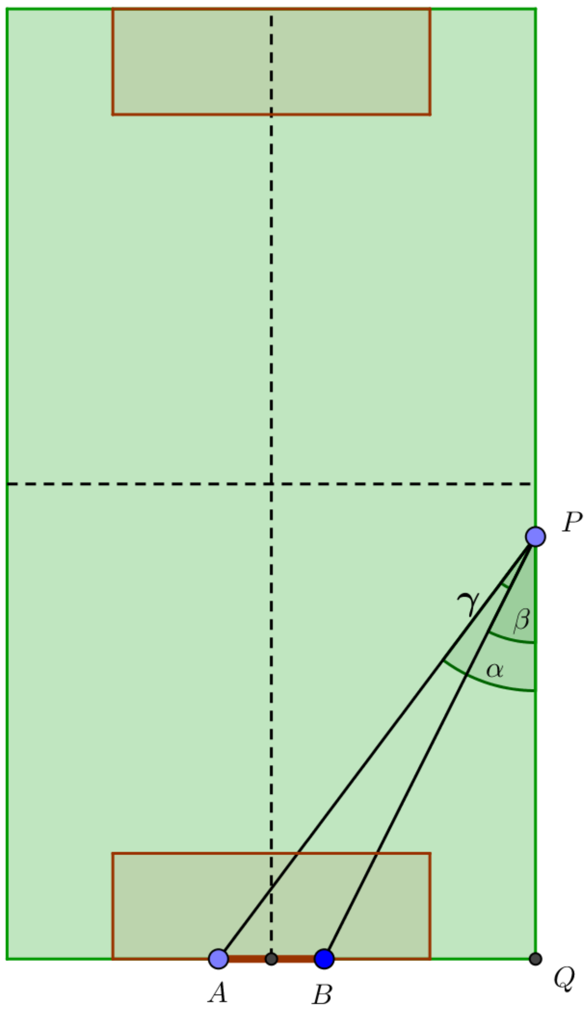
Suggerimento

Inclinazione del 25% significa quindi che $tg\alpha = 0{,}25 \rightarrow \alpha = tg^{-1}(0{,}25) \cong 14°$ ecc.

[$\max \alpha_{blu} \cong 14°$, $\max \alpha_{rossa} \cong 21{,}8°$, $\max \alpha_{nera} \cong 36{,}9°$]

5) ***Tiro in porta***

Considera un giocatore che calcia un fallo laterale dalla posizione P: indicando con γ l'angolo sotto cui vede la porta AB e supponendo di indicare con $\overline{PQ} = x$ la sua distanza dal fondo campo, determina $tg\gamma$ in funzione di x ($\overline{AB} = 7{,}32m$ e le dimensioni del campo di calcio sono $68m \cdot 105m$) .



[$tg\gamma \cong \dfrac{7{,}32x}{x^2 + 1143}$]

SCHEDA PER IL RECUPERO
FUNZIONI GONIOMETRICHE E FORMULE GONIOMETRICHE

1) Calcola

a) $tg\frac{3}{4}\pi + sen\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{11}{6}\pi + tg\frac{5}{4}\pi$ [0]

b) $sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha) - sen(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ [1]

c) $\cos(\pi-\alpha)+tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-sen(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-tg(2\pi-\alpha)$

[$tg\alpha - \cot g\alpha$]

2) Calcola

a) $sen(75°) = sen(45° + 30°) =$ …………….. $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right]$

b) $\cos 75° =$ ………………………………….. $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right]$

c) $sen15° =$ ………………………………….. ………

d) $tg15° =$ …………………………………….. $\left[2-\sqrt{3}\right]$

3) Verifica le seguenti identità:

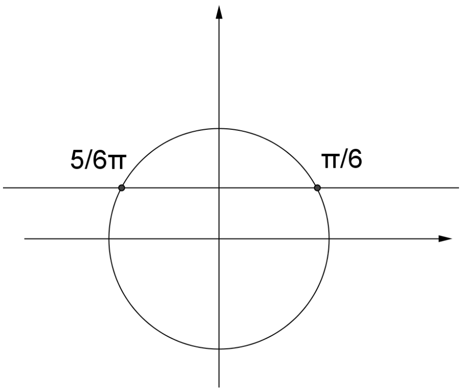
a) $\cos 2\alpha + sen2\alpha + 1 = 2\cos\alpha(sen\alpha + \cos\alpha)$

b) $sen^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha + sen^2\alpha\right)$

Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari

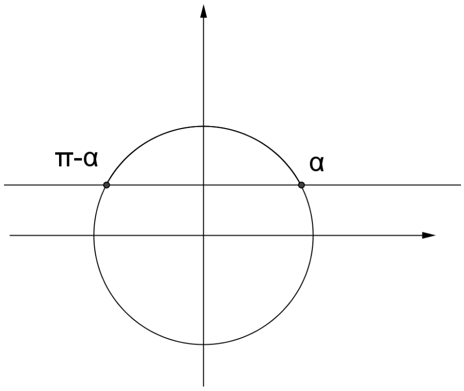
a) Consideriamo per esempio l' equazione "elementare" $senx = \frac{1}{2}$.



Le soluzioni saranno:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $senx = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:

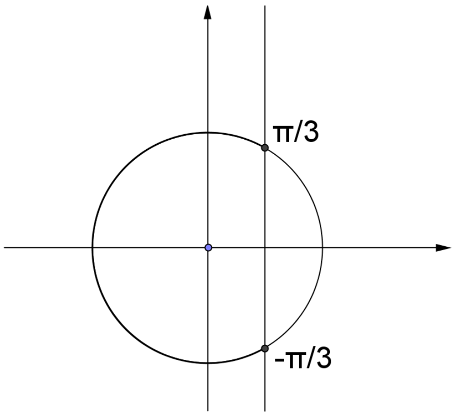


$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Se considero $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

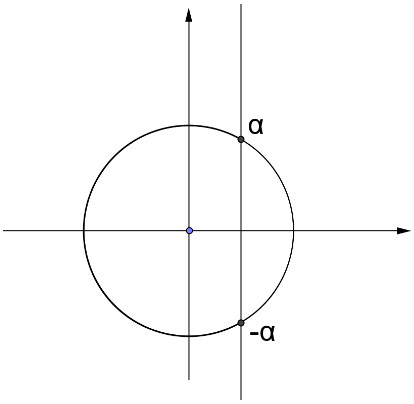
$$senx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

b) Consideriamo l'equazione elementare $\cos x = \frac{1}{2}$.



$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $\cos x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo come soluzioni

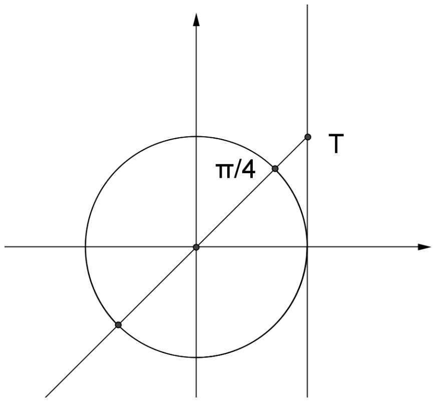


$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = -\alpha + 2k\pi$$

Se $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

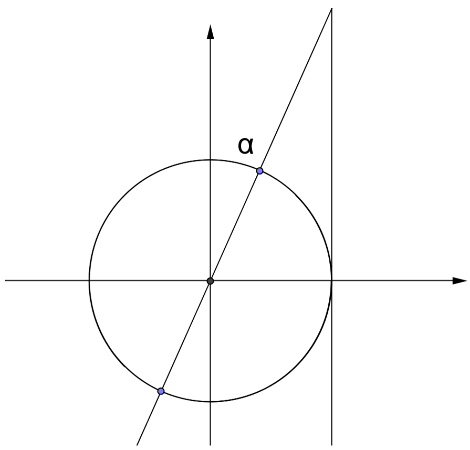
$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

c) Consideriamo l'equazione elementare $tgx = 1$.



$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

In generale quindi $tgx = k \Rightarrow x = \alpha + k\pi$

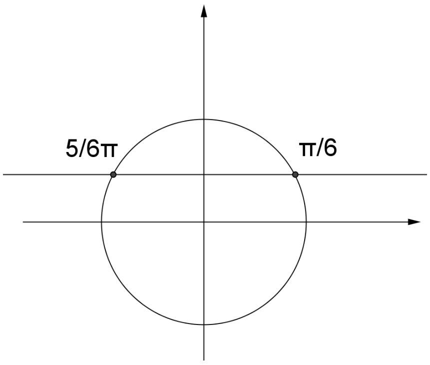


Equazioni goniometriche "riconducibili" ad equazioni elementari

1) Vediamo i seguenti esempi:

a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

In questo caso non conviene sviluppare con la formula di sottrazione! Consideriamo $x-\frac{\pi}{4}$ come un unico angolo. Per quello che abbiamo già visto:

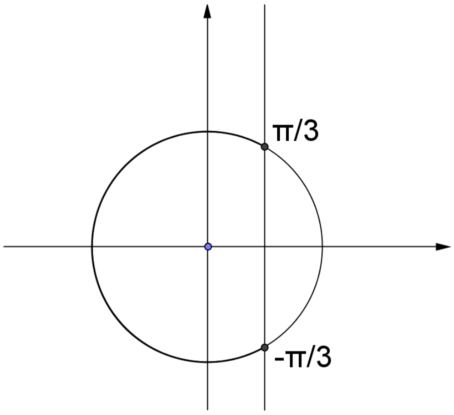


$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5}{12}\pi+2k\pi$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}\pi+2k\pi=\frac{13}{12}\pi+2k\pi$$

b) $\cos(2x)=\frac{1}{2}$

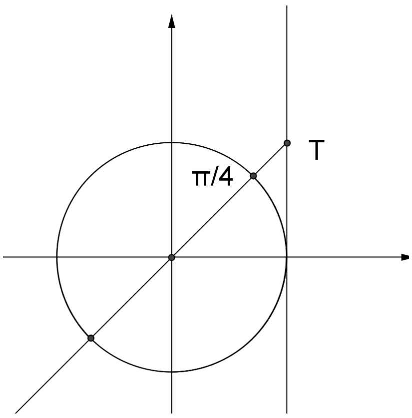
Anche in questo caso non conviene sviluppare con la formula di duplicazione ma considerare $2x$ come un unico angolo e per quello che abbiamo già visto avremo:



$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

c) $tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$



Considerando $3x-\frac{\pi}{6}$ come un angolo avremo:

$$3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow 3x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k\pi$$

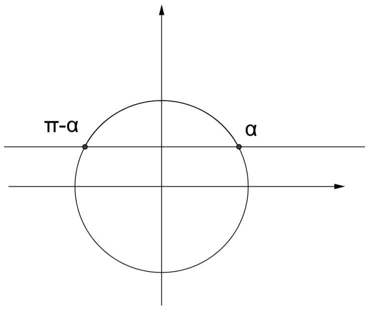
$$3x=\frac{5}{12}+k\pi$$

$$x=\frac{5}{36}\pi+k\frac{\pi}{3}$$

2) Consideriamo i seguenti esempi:

a) $sen \cdot 2x = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso seno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure se sono supplementari. Quindi:



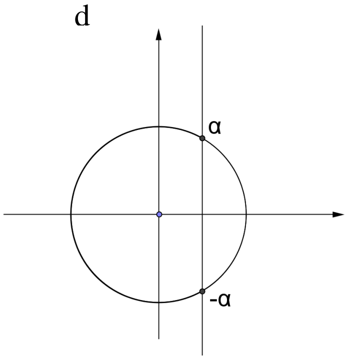
$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

b) $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso coseno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure sono opposti. Quindi:

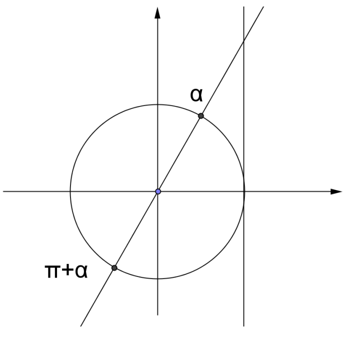


$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

c) $tg\, 2x = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli (diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi$) hanno la stessa tangente quando sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica o differiscono di π, quindi potremo semplicemente scrivere:



$$2x = x - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

3) Vediamo infine i seguenti esempi:

a) $\boxed{sen^2 x + senx - 2 = 0}$

Consideriamola come un'equazione di 2° grado e ricaviamo:

$$senx_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow senx_1 = 1 \cup senx_2 = -2$$

Quindi $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$senx = -2$ nessuna soluzione

b) $\boxed{2\cos^2 x + \cos x = 0}$

Possiamo semplicemente mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (2\cos x + 1) = 0$$

e quindi avremo:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

c) $\boxed{tg^2 x + tgx = 0}$

$$tgx(tgx + 1) = 0$$

$$tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

d) $\boxed{\cos^2 x + senx = 0}$

In questo caso dobbiamo utilizzare la prima relazione fondamentale e sostituire $1 - sen^2 x$ a $\cos^2 x$.

$$1 - sen^2 x + senx = 0$$
$$sen^2 x - senx - 1 = 0$$
$$senx_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$senx = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nessuna soluzione

$senx = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ utilizzando la calcolatrice abbiamo

$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$
con $\alpha \cong -38°$

e) $\boxed{sen2x + \cos x = 0}$

In questo caso gli argomenti del seno e del coseno sono diversi: possiamo riportarci all'angolo x utilizzando la formula di duplicazione.

$$2senx \cdot \cos x + \cos x = 0$$
$$\cos x \cdot (2senx + 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$senx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \\ x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \end{array}$$

f) $\boxed{sen^2 \frac{x}{2} + \cos x = 0}$

Utilizzando la formula di bisezione avremo:

$$\frac{1 - \cos x}{2} + \cos x = 0$$
$$1 - \cos x + 2\cos x = 0$$
$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

Equazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Consideriamo la seguente equazione:

$$\boxed{senx - \cos x - 1 = 0}$$

Per determinare x cerchiamo il punto P associato all'angolo x sulla circonferenza goniometrica. Ricordando che

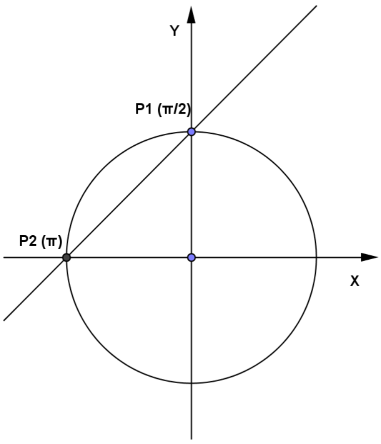
$$senx = y_P$$
$$\cos x = x_P$$

Risolvere l'equazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_P - x_P - 1 = 0 \rightarrow y_P = x_P + 1 \\ x_P^{\ 2} + y_P^{\ 2} = 1 \end{cases}$$

Per non confondere x (angolo) con x_P (ascissa del punto P) possiamo indicare x_P con X e y_P con Y. Quindi abbiamo l'intersezione tra una retta e la circonferenza goniometrica:

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Troviamo $P_1(0;1) \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$P_2(-1;0) \rightarrow x = \pi + 2k\pi$

Osservazione: non sempre occorre utilizzare questo "metodo grafico".

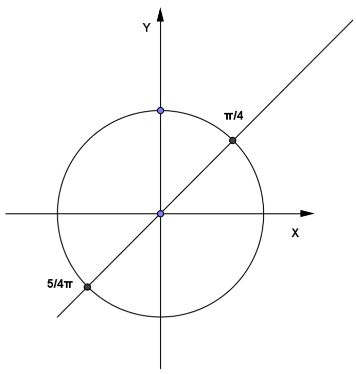
Esempio: $\boxed{senx - \cos x = 0}$

Possiamo dividere per $\cos x$ (possiamo supporre $\cos x \neq 0$ perché le soluzioni di $\cos x = 0$,cioè $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, non sono soluzioni dell'equazione) e otteniamo:

$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Con il metodo grafico avremmo ottenuto lo stesso risultato:

$$\begin{cases} Y - X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$



Equazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno

Esempio 1: $\boxed{senx \cdot \cos x + \cos^2 x = 0}$

Basta mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (senx + \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$senx + \cos x = 0 \Rightarrow tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 2: $\boxed{sen^2 x + (1 - \sqrt{3}) senx \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0}$

Proviamo a dividere per $\cos^2 x$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione):

$$tg^2 x + (1 - \sqrt{3}) tgx - \sqrt{3} = 0$$

$$tgx_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$tgx = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 3: $\boxed{(3 + \sqrt{3}) sen^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) senx \cdot \cos x = 3}$

Possiamo moltiplicare il termine noto per $sen^2 x + \cos^2 x$ poiché $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ e avremo:

$$(3 + \sqrt{3}) sen^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) senx \cdot \cos x = 3 \cdot (sen^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sqrt{3} sen^2 x + (\sqrt{3} - 1) senx \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$:

$$\sqrt{3} tg^2 x + (\sqrt{3} - 1) tgx - 1 = 0$$

$$tgx_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}$$

$$tgx = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$tgx = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

ESERCIZI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari:

a) $senx = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tgx = \sqrt{3}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

f) $senx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi\right]$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7}{12}\pi + k\pi\right]$

c) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ $\left[x = \frac{\pi}{12} + k\pi\right]$

d) $sen2x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

e) $\cos 3x = -1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

f) $tg4x = -\sqrt{3}$ $\left[x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}\right]$

3) Ricordando le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli associati, risolvi le seguenti equazioni:

a) $sen2x = senx$ $\left[x = 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

b) $\cos 3x = \cos 2x$ $\left[x = 2k\pi; x = \frac{2}{5}k\pi\right]$

c) $tg3x = tg\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ $\left[x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}\right]$

4) Risolvi le seguenti equazioni riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen^2 x - senx = 0$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ $[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$ $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

e) $2sen^2 x + senx = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2sen^2 x - 3senx + 1 = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

g) $tg^2 x + tgx = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$

h) $\sqrt{3}tg^2 x + tgx = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$

i) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

l) $3tg^2 x + 2\sqrt{3}tgx - 3 = 0$ $[x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

5) Risolvi le seguenti equazioni:

a) $sen^2 x - \cos^2 x = \cos x$ $[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

b) $2\cos^2 x - senx = 1$ $[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

c) $tgx \cdot senx = \sqrt{3}senx$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$

d) $senx = tgx$ $[x = k\pi]$

e) $2senx \cdot \cos x + 2\cos x = 1 + senx$ $[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

f) $sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + sen\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ $[x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi]$

g) $tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2 + 3tgx$ $[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi]$

h) $\cos 2x + sen^2 x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$

i) $2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$

l) $senx = \cos\frac{x}{2}$ $[x = \pi + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi; x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi]$

6) Risolvi le seguenti equazioni lineari:

a) $senx + \cos x = 1$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = 2k\pi]$

b) $senx + \cos x = \sqrt{2}$ $\quad [x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$

c) $\cos x + \sqrt{3}senx = \sqrt{3}$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - senx + \sqrt{3} = 0$ $\quad [x = \pi + 2k\pi; x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

e) $2\cos x + 2senx = \sqrt{3} + 1$ $\quad [x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

f) $senx + \cos x = -2$ $\quad$ [impossibile]

7) Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado in seno e coseno:

a) $3sen^2 x - \cos^2 x = 0$ $\quad [x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi]$

b) $sen^2 x - senx \cdot \cos x = 0$ $\quad [x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi]$

c) $\sqrt{3}\cos^2 x + \cos x \cdot senx = 0$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

d) $2sen^2 x - \sqrt{3}senx \cdot \cos x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ $\quad [x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$

e) $4sen^2 x - \sqrt{3}senx \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$ $\quad [x = k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$

f) $2sen^2 x + \sqrt{3}senx \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$

8) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

a) $2\cos^2 \frac{x}{2} - sen^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} sen^2 x$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$

b) $(senx + \cos x)^2 = \cos 2x$ $\quad [x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$

c) $tg 2x - 3tgx = 0$ $\quad [x = k\pi; x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi]$

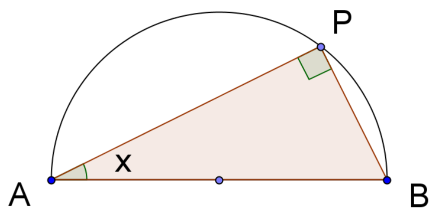
Problemi ed equazioni goniometriche

Esempio 1

Consideriamo questo problema: data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, consideriamo su di essa un punto P e determiniamo, ponendo $x = B\hat{A}P$, l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABP}$ in funzione di x.

a) Determina per quale valore di x si ottiene area uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$.

b) Qual è il valore massimo e minimo dell'area?



Limiti di x: il valore di x potrà variare da 0 (quando $P \equiv B$) a $\frac{\pi}{2}$ (quando $P \equiv A$).

Poiché il triangolo $\overset{\Delta}{ABP}$ è retto in P avremo:

$$\overline{AP} = 2r \cdot \cos x$$

$$\overline{PB} = 2r \cdot senx$$

$$Area_{ABP}(x) = \frac{1}{2} \cdot 2r\cos x \cdot 2rsenx = 2r^2 senx\cos x$$

a) Dobbiamo risolvere l'equazione

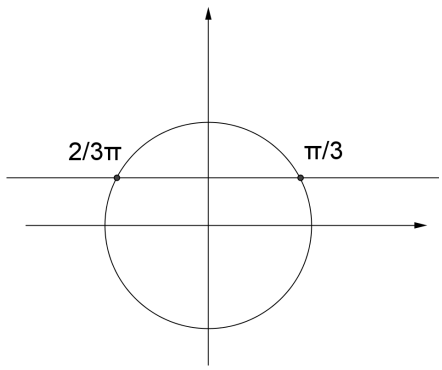
$$2r^2 senx\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

$$sen2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

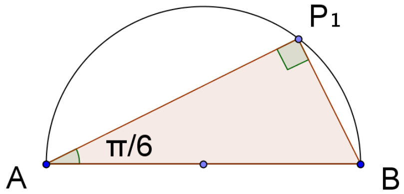
Poiché $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le 2x \le \pi$ e quindi

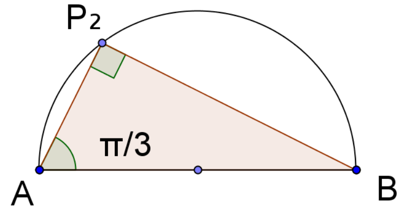
$$2x = \frac{\pi}{3} \to x = \frac{\pi}{6}$$

$$2x = \frac{2}{3}\pi \to x = \frac{\pi}{3}$$

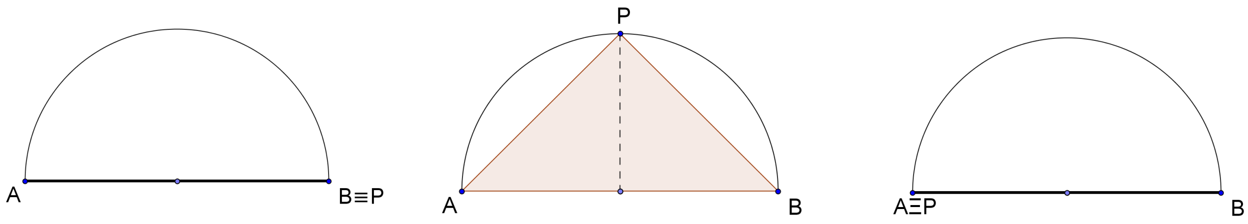


Il problema ha quindi 2 soluzioni, corrispondenti a triangoli uguali.





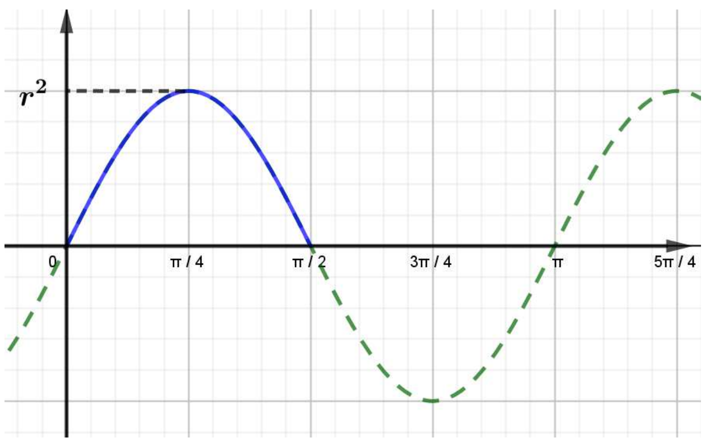
b) E' chiaro che, dal momento che l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABP}$ può essere calcolata come $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PH}$ essendo la base AB fissa e variando l'altezza PH, l'area massima si avrà quando PH è massima e quindi per $\overline{PH}=r$ cioè quando $x=\frac{\pi}{4}$ e il triangolo è un triangolo rettangolo isoscele e che l'area minima si avrà quando PH è minima cioè $\overline{PH}=0$ e $x=0(P\equiv B)\ \cup\ x=\frac{\pi}{2}(P\equiv A)$.



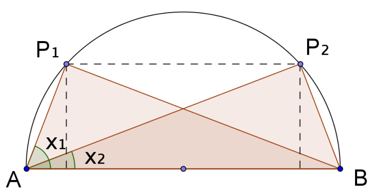
Considerando l'area come una funzione dell'angolo x abbiamo visto che

$$A(x)=2r^2 senx\cos x\rightarrow A(x)=r^2 sen2x$$

Il grafico di $A(x)$ risulta



Quindi ritroviamo che per $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ l'area vale 0 e che per $x=\frac{\pi}{4}$ si ha il massimo valore dell'area (r^2).
Inoltre ci sono sempre 2 triangoli uguali in corrispondenza di un certo valore dell'area (cioè due valori diversi di x che danno lo stesso valore dell'area): infatti, come si può osservare dal la figura, per un dato valore di PH si trovano due punti sulla semicirconferenza.

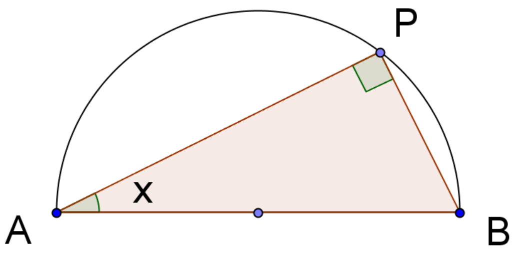


Esempio 2

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, consideriamo su di essa un punto P e, ponendo $x = B\hat{A}P$, determinare il perimetro del triangolo ABP in funzione di x.

a) Per quale valore di x il perimetro risulta $2r\left(1+\sqrt{2}\right)$?

b) Qual è il valore massimo e minimo del perimetro del triangolo ABP?



$x = B\hat{A}P$

$0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

$\overline{AP} = 2r\cos x$

$\overline{BP} = 2rsenx$

Quindi $2p_{ABP}(x) = 2rsenx + 2r\cos x + 2r$

a) Per determinare per quale x il perimetro risulta uguale a $2r\left(1+\sqrt{2}\right)$ dobbiamo risolvere l'equazione:

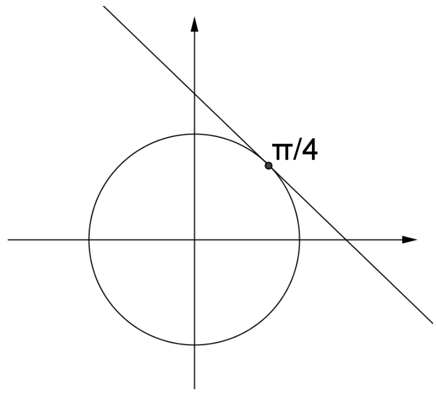
$$2r\cos x + 2rsenx + 2r = 2r\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$2r\cos x + 2rsenx = 2r\sqrt{2}$$

$$\cos x + senx = \sqrt{2}$$

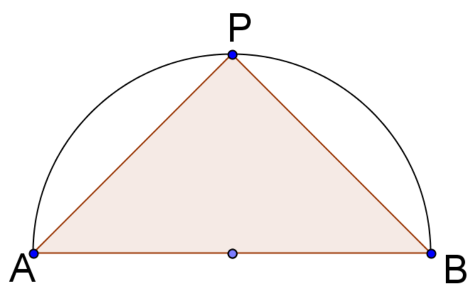
$$\begin{cases} X + Y = \sqrt{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{2} - Y \\ 2 - 2\sqrt{2} + Y^2 + Y^2 = 1 \ldots\ldots\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$



$x = \dfrac{\pi}{4}$ è l'unica soluzione del problema

Infatti: $\overline{AP} = \overline{BP} = r\sqrt{2}$ $\quad 2p_{ABP} = 2r + 2r\sqrt{2} = 2r\left(1+\sqrt{2}\right)$



b) Osserviamo che si ha il minimo perimetro di $\overset{\Delta}{ABP}$ quando $P \equiv B(x=0)$ oppure $P \equiv A\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$ perché in questi casi il triangolo degenera in 2 diametri sovrapposti e il perimetro vale *4r*.

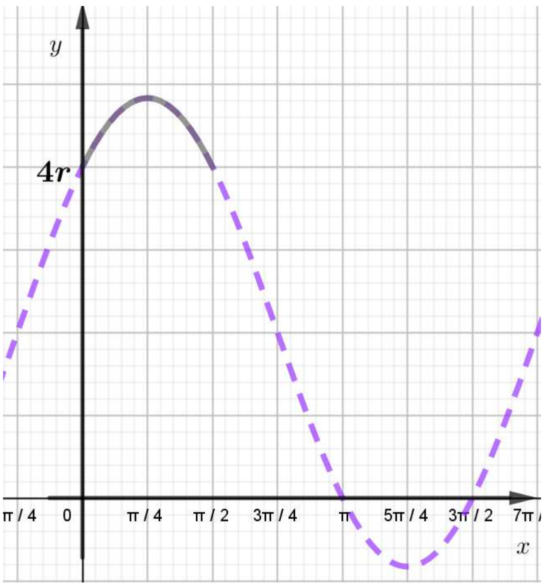
Per determinare il massimo perimetro possiamo disegnare il grafico della funzione *2p(x)*: basterà traslare di $2r$ verso l'alto il grafico di $y = 2r(senx + \cos x)$.

Per disegnare $y = 2r(senx + \cos x)$ ricordiamo che abbiamo visto che le funzioni del tipo $y = a \cdot senx + b \cdot \cos x$ possono essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $y = A \cdot sen(x + \varphi)$.

$$A \cdot (senx \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot sen\varphi) = 2r(senx + \cos x) \rightarrow A \cdot \cos\varphi \cdot senx + A \cdot sen\varphi \cdot \cos x = 2rsenx + 2r\cos x \rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos\varphi = 2r \\ A \cdot sen\varphi = 2r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{A \cdot sen\varphi}{A \cdot \cos\varphi} = 1 \rightarrow tg\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ A^2 = 8r^2 \rightarrow A = 2\sqrt{2} \cdot r \end{cases}$$

Quindi abbiamo che $y = 2r(senx + \cos x)$ corrisponde a $y = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e in conclusione il grafico di $2p_{ABP}(x)$ risulta il seguente (disegnato solo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$) :



Quindi si ha il massimo perimetro di $\overset{\Delta}{ABP}$ quando $x = \frac{\pi}{4}$ e sostituendo si trova che risulta

$$2p\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2r\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Anche in questo caso, fissato un valore del perimetro compreso tra 4r e $2r\left(1 + \sqrt{2}\right)$, si avranno sempre due valori di x corrispondenti (cioè due triangoli congruenti che hanno quel dato perimetro).

PROBLEMI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Si consideri una semicirconferenza di diametro AB= 2r e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $B\hat{A}P = x$. Determina per quale x si ha $area(ACBP) = (\sqrt{3}+1)r^2$.

$[x = \frac{\pi}{4}]$

2) Data una semicirconferenza di diametro AB= 2r si consideri il trapezio isoscele ABCD inscritto nella semicirconferenza e si ponga $B\hat{A}D = x$. Determinare per quale x si ha $2p(ABCD) = 5r$.

$[x = \frac{\pi}{3}]$

3) Si consideri una semicirconferenza di diametro AB = 2r e un trapezio isoscele CDEF circoscritto alla semicirconferenza. Posto $D\hat{C}F = x$ determina x per il quale si ha $area(CDEF) = \sqrt{3}r^2$.

$[x = \frac{\pi}{3}]$

4) Considera una semicirconferenza di diametro AB = 2r e un punto P su di essa. Costruisci il quadrato PBRQ esternamente alla semicirconferenza. Determina la posizione di P in modo che si abbia $area(ABRQ) = 3r^2$. Poni $B\hat{A}P = x$.

$[x = \frac{\pi}{4}]$

5) Considera una semicirconferenza di diametro AB = 2r e un punto P su di essa. Costruisci il triangolo equilatero PBD esternamente alla semicirconferenza e determina P per cui si abbia $area(ABDP) = \sqrt{3}r^2$. Poni $P\hat{A}B = x$.

$[x = \frac{\pi}{2}, x = arctg\frac{\sqrt{3}}{2}]$

7) Considera una semicirconferenza di diametro AB = 2r una corda PQ parallela ad AB. Posto $A\hat{O}P = x$ e costruito il triangolo equilatero PQR, con R esterno alla semicirconferenza, determina x in modo che si abbia $area(POQR) = \sqrt{3}r^2$.

$[x = 0, x = \frac{\pi}{6}]$

8) Dato un triangolo isoscele ABC avente base AB e altezza $\overline{CH} = 2a$, posto $A\hat{C}H = x$, considera il punto D, punto medio dell' altezza CH, e traccia le sue proiezioni ortogonali M e N rispettivamente su AC e CB. Determina x in modo che $2p(CMDN) = 2a\sqrt{2}$.

$[x = \frac{\pi}{4}]$

9) Considera una circonferenza di diametro AB = 2r e la corda $\overline{AC} = r$. Sia P un punto appartenente alla semicirconferenza non contenente C e poni $P\hat{A}B = x$. Determina x in modo che si abbia $area(APC) = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$.

$[x = 0, x = \frac{\pi}{6}]$

10) Sia ABO un settore circolare con $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e $\overline{AO} = \overline{OB} = r$. Si consideri un punto P appartenente all' arco AB e si ponga $A\hat{O}P = x$ .Si consideri la proiezione ortogonale H del punto P su AO , il segmento PP' parallelo ad AO e sia K la proiezione ortogonale di P' su AO. Determina x in modo che $area(HPP'K) = \frac{r^2}{2\sqrt{3}}$.

$[x = \frac{\pi}{6}]$

11) Considera una circonferenza di raggio r e le corde $\overline{AB} = r$ e $\overline{BC} = r\sqrt{3}$. Considera un punto P appartenente alla semicirconferenza AC non contenente B. Determina P in modo che $2p(ABCP) = 2r(1+\sqrt{3})$. Poni $P\hat{A}C = x$.

$[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}]$

12) Si consideri una semicirconferenza di diametro AB= 2r e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $B\hat{A}P = x$. Studia la funzione $A(x) = area(ACBP)$.

$$\left[A(x) = r^2\left(sen2x + \sqrt{3}\right), \quad \max = r^2\left(1+\sqrt{3}\right) per \quad x = \frac{\pi}{4}; \quad \min = \sqrt{3}r^2 \ per \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \right]$$

SCHEDA DI VERIFICA
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche

1. $sen(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$ $[x=\frac{17}{12}\pi+2k\pi\,;x=\frac{25}{12}\pi+2k\pi]$
2. $tg^2(3x-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$ $[x=\frac{2}{9}\pi+k\frac{\pi}{3}\,;x=\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3}]$
3. $\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$ $[x=-\frac{7}{12}\pi+2k\pi\,;x=\frac{\pi}{36}+2k\frac{\pi}{3}]$
4. $2sen^2x-2=sen^2x+\cos^2x+5\cos x+1$ $[x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi]$
5. $senx=\cos x-\sqrt{2}$ $[x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi]$
6. $\cos x+sen(x-\frac{\pi}{6})=1$ $[x=\frac{\pi}{3}+2k\pi]$
7. $2sen^2x-(\sqrt{3}+1)senx\cos x+(\sqrt{3}+1)\cos^2x=1$

   $[x=\frac{\pi}{3}+k\pi\,;x=\frac{\pi}{4}+k\pi]$
8. $\sqrt{3}\cos 2x+1=sen2x$ $[x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,;x=\frac{7}{12}\pi+k\pi]$

Problema 1
Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=$ 2r e sia P un punto su di essa. Disegna il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza e determina x = $P\hat{A}B$ in modo che $2p(ACBP)=2(2+\sqrt{2})r$.

$[x=\frac{\pi}{4}]$

Problema 2
Considera una circonferenza di diametro $\overline{AB}$ =2r e traccia la corda $\overline{AC}$ $=r\sqrt{3}$. Determina un punto P (poni $B\hat{A}P=x$) appartenente alla semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$ non contenente C tale che l'area del quadrilatero ACBP sia uguale a $\sqrt{3}r^2$.

$[x=\frac{\pi}{6}\,;x=\frac{\pi}{3}]$

Problema 3
Si consideri una semicirconferenza di diametro AB= 2r e si costruisca il quadrato ACDB esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $B\hat{A}P=x$. Studia la funzione $A(x)=area(ACDBP)$.

$$\left[A(x)=r^2(sen2x+4),\quad \max=5r^2\ per\quad x=\frac{\pi}{4};\quad \min=4r^2\ per\quad x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}\right]$$

SCHEDA PER IL RECUPERO
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

2) $senx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

3) $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

4) $sen2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \cup \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ $\left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

6) $tg\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ $\left[x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}\right]$

7) $2sen^2 x - senx = 0$ $\left[x = k\pi \quad \cup \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

8) $2\cos^2 x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

9) $tg^2 x - tgx = 0$ $\left[x = k\pi \quad \cup \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

10) $\cos^2 x - sen^2 x = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

11) $senx - \cos x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \pi + 2k\pi\right]$

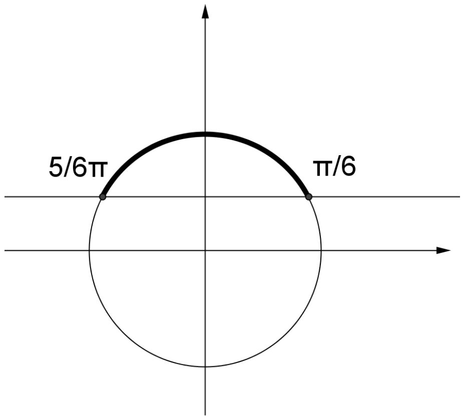
12) $senx = \cos x - 1$ $\left[x = 2k\pi \quad \cup \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

13) $senx + \cos x = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

Disequazioni goniometriche

Disequazioni goniometriche elementari

a) Riprendiamo gli esempi che abbiamo fatto per le equazioni trasformandoli in disequazioni:

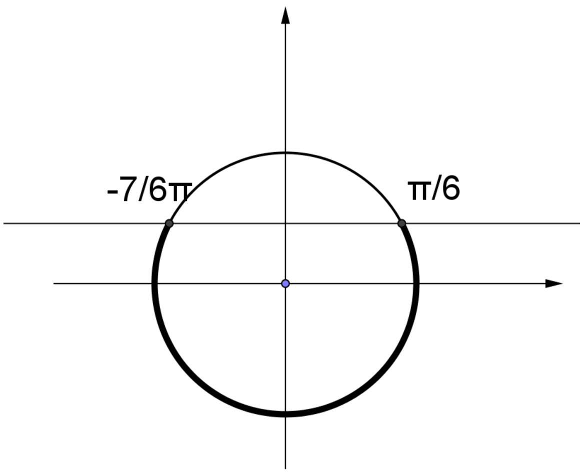


$$senx > \frac{1}{2}$$

Le soluzioni saranno:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

Se invece devo risolvere: $senx < \frac{1}{2}$



le soluzioni possono essere scritte così:

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

oppure

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$$

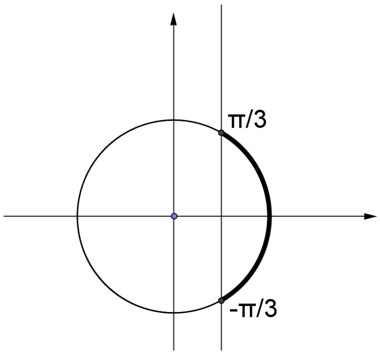
oppure

$$2k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi$$

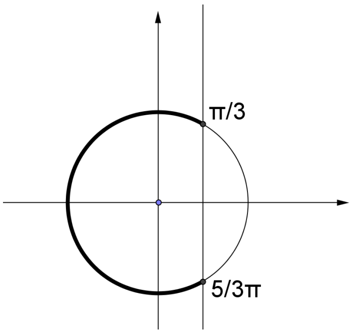
Attenzione: non ha senso scrivere $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **!**

b) $\cos x > \frac{1}{2}$: le soluzioni sono:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

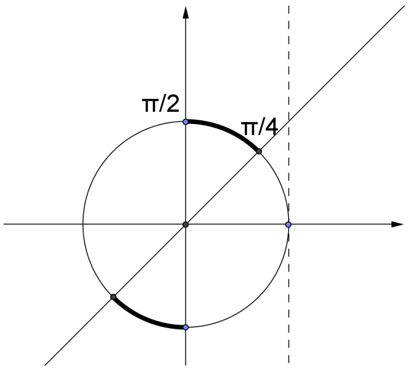


Se invece dovessi risolvere $\cos x < \frac{1}{2}$ avrei:

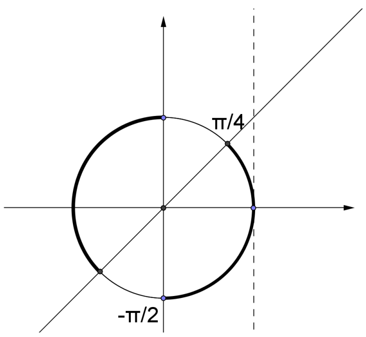


$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

c) $tgx > 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$



Se invece devo risolvere $tgx < 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$



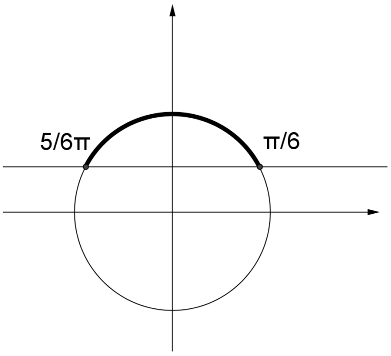
oppure posso scrivere

$$k\pi \le x < \frac{\pi}{4} + k\pi \cup \frac{\pi}{2} + k\pi < x \le \pi + k\pi$$

Disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari

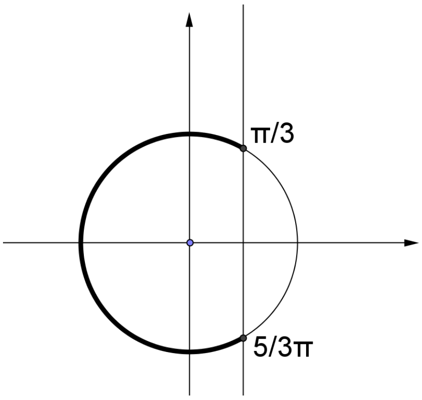
1) Come per le equazioni possiamo avere casi così:

   a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$: consideriamo " $x-\frac{\pi}{4}$ " tutto insieme:



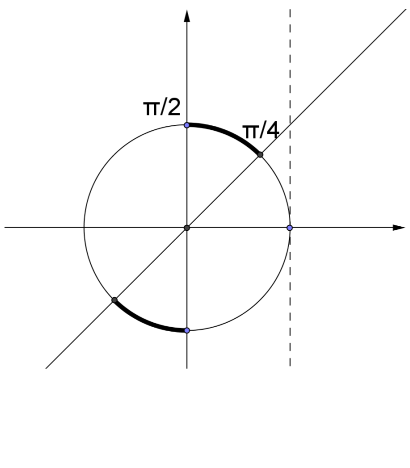
$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{5}{6}\pi+2k\pi$$
$$\frac{5}{12}\pi+2k\pi<x<\frac{13}{12}\pi+2k\pi$$

   b) $\cos 2x<\frac{1}{2}\quad\rightarrow$



$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<2x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$$
$$\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi$$

   c) $tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)>1\quad\rightarrow$



$$\frac{\pi}{4}+k\pi<3x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\frac{5}{12}\pi+k\pi<3x<\frac{2}{3}\pi+k\pi$$
$$\frac{5}{36}\pi+k\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{9}\pi+k\frac{\pi}{3}$$

2)

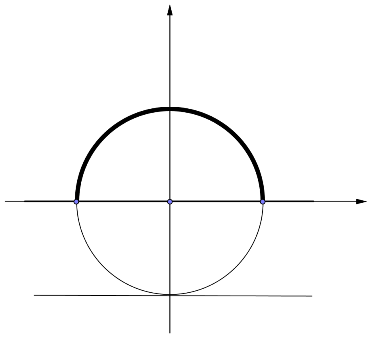
a) $sen^2 x + senx > 0$

$senx(senx+1) > 0$

$senx < -1 \cup senx > 0$

$\Updownarrow$

$2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

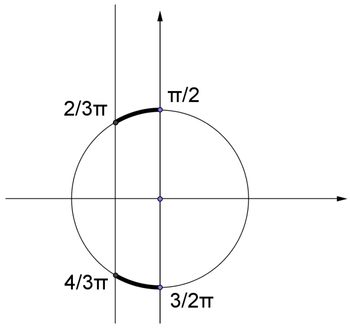


b) $2\cos^2 x + \cos x < 0$

$\cos x(2\cos x + 1) < 0$

$-\frac{1}{2} < \cos x < 0$

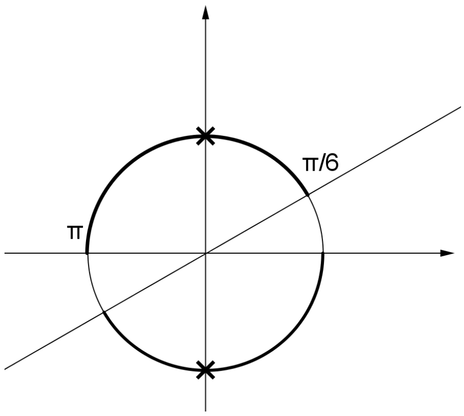
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \cup \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$



c) $\sqrt{3}tg^2 x - tgx > 0$

$tgx(\sqrt{3}tgx - 1) > 0$

$tgx < 0 \cup tgx > \frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \pi + k\pi \text{ con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

d) $2sen^2 x - 3\cos x < 0$

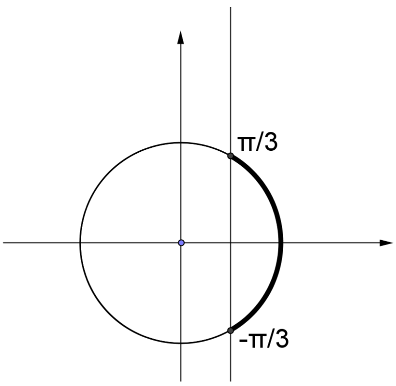
$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x < 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0$

$\cos x < -2 \cup \cos x > \frac{1}{2}$

$(\cos x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \cup \cos x = -2)$

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$



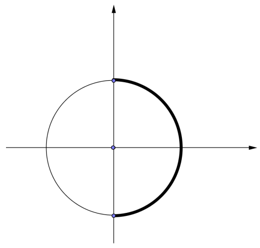
e) $\boxed{sen2x + \cos x > 0}$

$2senx \cos x + \cos x > 0$

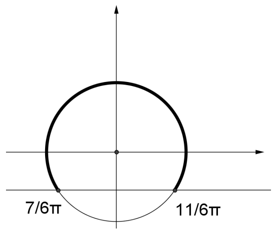
$\cos x(2senx + 1) > 0$

Studio il segno dei singoli fattori del prodotto:

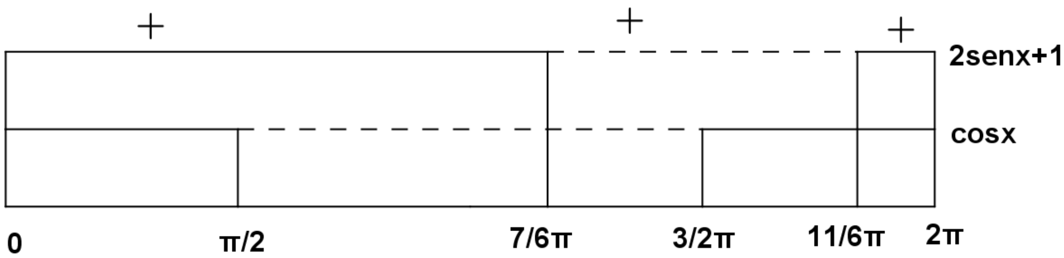
$\cos x > 0 \rightarrow$



$2senx + 1 > 0 \rightarrow senx > -\frac{1}{2}$



Riporto i risultati tra 0 e 2π



Poiché voglio che il prodotto sia positivo avrò:

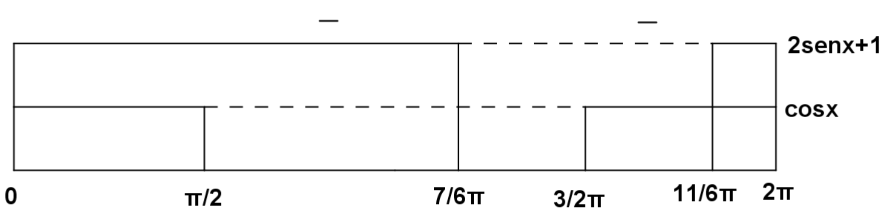
$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

f) $\boxed{\frac{\cos x}{2senx + 1} < 0}$

Anche in questo caso studio il segno del numeratore e del denominatore e alla fine prendo le zone dove ho una combinazione di segni che mi dà risultato negativo.

N: $\cos x > 0 \rightarrow$ vedi sopra

D: $2senx + 1 > 0 \rightarrow$ vedi sopra

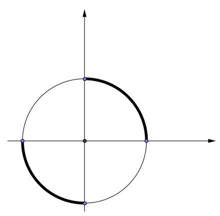


$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

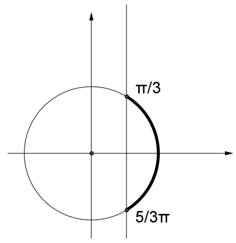
Osservazione: se devo studiare il segno di un prodotto o di un quoziente in cui compaiono funzioni goniometriche di periodo diverso dovrò fare il grafico finale considerando il minimo comune multiplo dei 2 periodi.

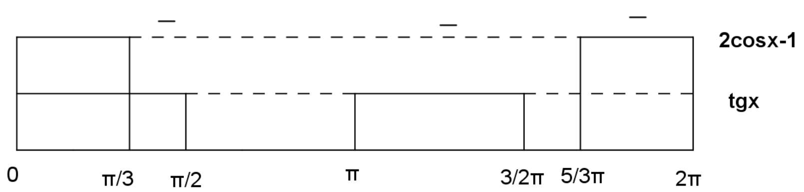
Esempio 1: $\boxed{\dfrac{tgx}{2\cos x - 1} < 0}$

N: $tgx > 0$



D: $2\cos x - 1 > 0 \rightarrow \cos x > \dfrac{1}{2}$



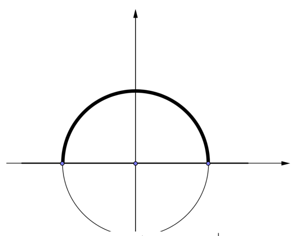


$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

Esempio 2: $\boxed{sen3x \cdot tgx > 0}$

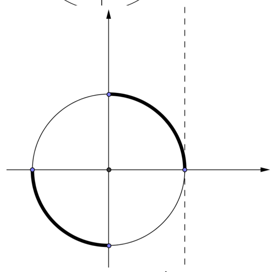
Il minimo comune multiplo tra $T_1 = \dfrac{2}{3}\pi$ e $T_2 = \pi$ è 2π .

$sen3x > 0$

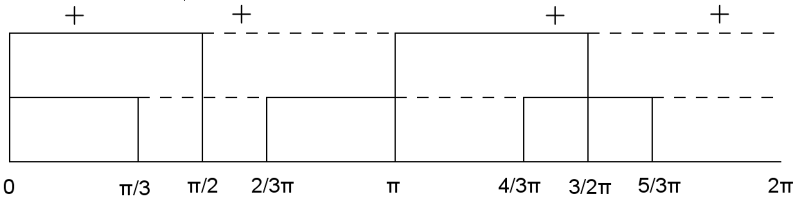


$$2k\pi < 3x < \pi + 2k\pi$$
$$\frac{2}{3}k\pi < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$$

$tgx > 0$



$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



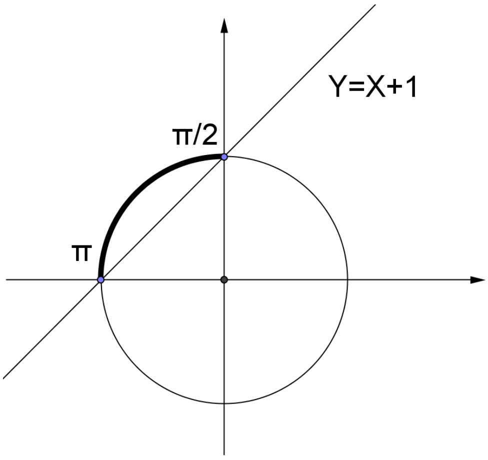
Disequazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Riprendiamo l'esempio fatto per le equazioni lineari:

$\boxed{senx - \cos x - 1 > 0}$ (ma questa volta mettiamo >)

Sostituendo $Y = senx$ avremo:
$X = \cos x$

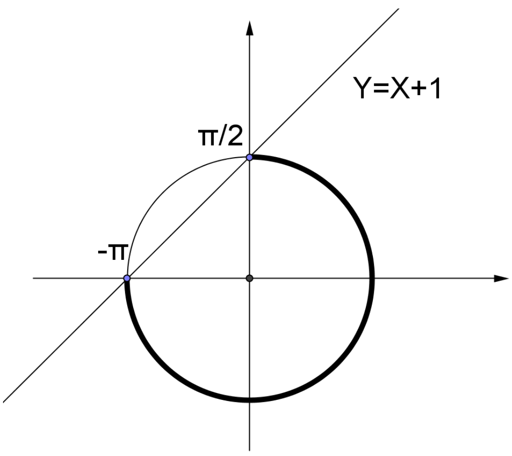
$$\begin{cases} Y - X - 1 > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y > X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



La parte di circonferenza goniometrica in cui i punti hanno Y>X+1 (semipiano "sopra" alla retta y=x+1) è quella indicata in figura e quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

Se avessimo dovuto risolvere: $senx - \cos x - 1 < 0 \rightarrow \begin{cases} Y < X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$



Le soluzioni possono essere scritte:

$$-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

oppure spezzando:

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Importante

Mentre per le equazioni goniometriche lineari in cui manca il termine noto avevamo detto che potevamo risolvere anche dividendo per cosx, nel caso delle disequazioni questo non può essere fatto poiché il coseno di un angolo non è sempre positivo.

Consideriamo per esempio la disequazione:

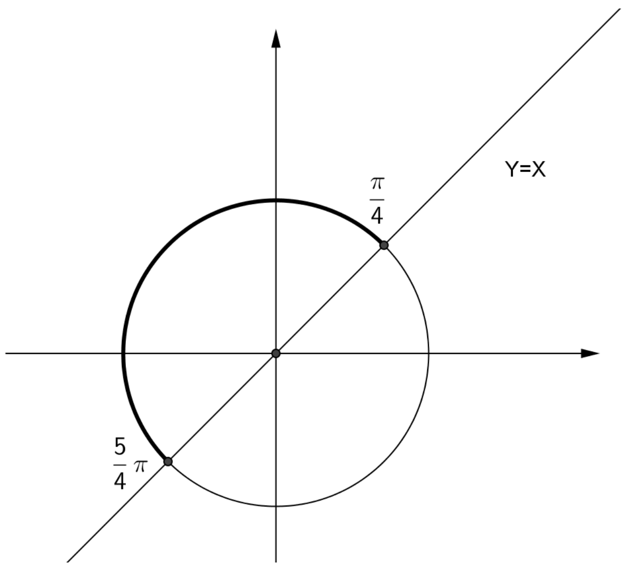
$$\boxed{senx - \cos x > 0}$$

Non possiamo dividere per cosx perché il segno del coseno varia.

Dobbiamo quindi necessariamente applicare il metodo grafico, sostituendo cioè $senx = Y$; $\cos x = X$ e intersecando con la circonferenza goniometrica.

$$\begin{cases} Y - X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y > X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Possiamo disegnare facilmente la retta $Y = X$ e quindi considerare in questo caso il semipiano "sopra" alla retta poiché abbiamo $Y > X$: avremo quindi come parte della circonferenza goniometrica quella evidenziata in figura.



In conclusione la soluzione della disequazione sarà data da

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

Disequazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno

omogenee o riconducibili ad omogenee

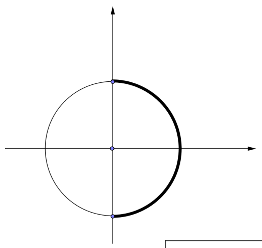
Vediamo infine come si risolvono le disequazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno.

a) $\boxed{senx \cdot \cos x + \cos^2 x > 0}$

$\cos x(senx + \cos x) > 0$

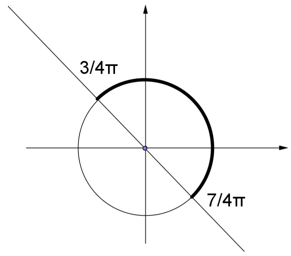
Studio il seno dei singoli fattori:

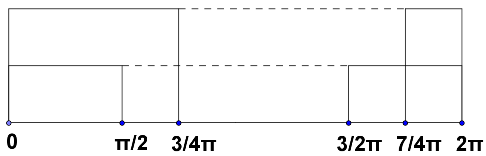
$\cos x > 0$



$senx + \cos x > 0$

$$\begin{cases} Y + X > 0 \rightarrow Y > -X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$





Le soluzioni sono quindi

$$2k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi$$

b) $\boxed{sen^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right) senx \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x < 0}$

1° metodo: sostituiamo a
$$\begin{cases} sen^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \\ senx \cdot \cos x = \dfrac{1}{2} sen2x \\ \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$$

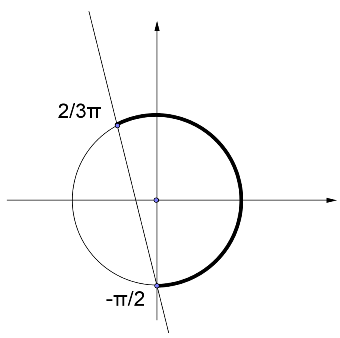
e otteniamo: $sen2x + \left(2 + \sqrt{3}\right)\cos 2x + 1 > 0$

Abbiamo quindi ottenuto una disequazione lineare ma l'angolo è 2x. Poniamo $Y = sen2x$, $X = \cos 2x$.

Risolviamo. $\begin{cases} Y + \left(2 + \sqrt{3}\right)X + 1 > 0 ..... \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$



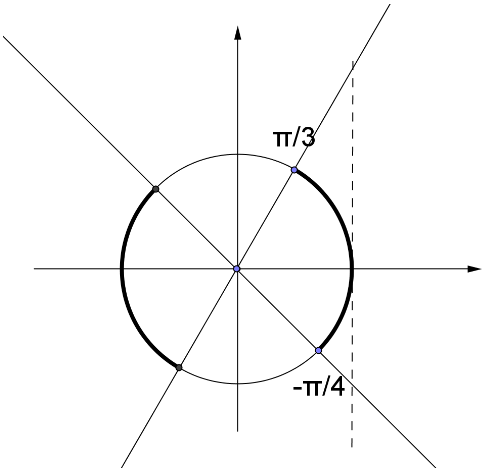
2° metodo: dividiamo per $\cos^2 x$ (è positivo) ma controlliamo se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione della disequazione. Sostituendo nell'equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ abbiamo $1 + 0 + 0$ che non è minore di 0 e quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione.

$tg^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right) tgx - \sqrt{3} < 0$ …

$-1 < tgx < \sqrt{3}$

$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$

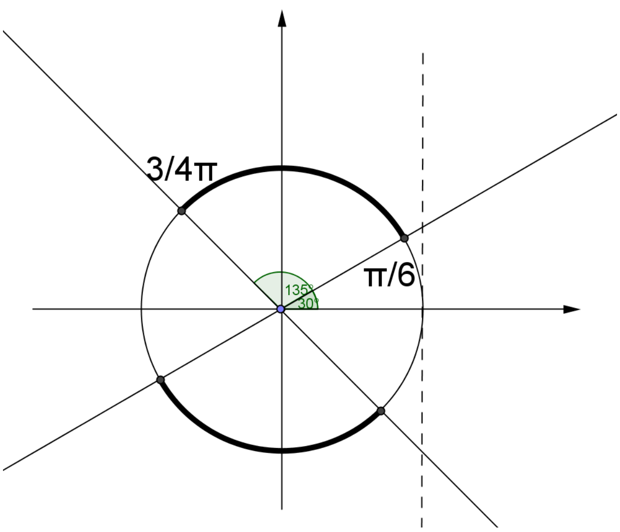
(come infatti avevamo già trovato con il primo metodo)



c) $\boxed{\left(3 + \sqrt{3}\right) sen^2 x + 2\cos^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) senx \cdot \cos x > 3}$

Moltiplichiamo 3 per 1 $= sen^2 x + \cos^2 x$ e dividiamo poi per $\cos^2 x$: sostituendo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \to 3 + \sqrt{3}$ ed è maggiore di $3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione.

Avremo
$$\sqrt{3}tg^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) tgx - 1 > 0$$
$$tgx < -1 \cup tgx > \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Poiché $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione della disequazione possiamo scrivere:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

ESERCIZI
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Riprendiamo gli esercizi sulle equazioni goniometriche e trasformiamoli in disequazioni:

1) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche elementari:

a. $senx > -\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

b. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

c. $tgx > \sqrt{3}$ $\left[\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

d. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{5}{6}\pi+2k\pi < x < \frac{7}{6} + 2k\pi\right]$

e. $tgx < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

f. $senx < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\frac{5}{4}\pi+2k\pi < x < \frac{7}{4} + 2k\pi\right]$

2) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

a. $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

b. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{5}{12}+k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

c. $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > -1$ $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

d. $sen2x < 1$ $\left[x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

e. $\cos\cdot 3x \leq -1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

f. $tg4x < -\sqrt{3}$ $\left[-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}\right]$

3) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

a) $sen^2 x - senx > 0$ $[\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\ ]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$ $[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} > 0$ $[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \cup \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x < 0$ $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \cup \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

e) $2sen^2 x + senx < 0$ $[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2sen^2 x - 3senx + 1 > 0$ $[-\frac{7}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

g) $tg^2 x + tgx < 0$ $[-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi]$

h) $\sqrt{3}tg^2 x + tgx > 0$ $[k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \cup \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi]$

i) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \le 0$ $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{5}{3}\pi + 2k\pi]$

l) $3tg^2 x + 2\sqrt{3}tgx - 3 \le 0$ $[-\frac{\pi}{3} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k\pi]$

4) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche lineari:

a) $senx + \cos x > 1$ $[2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $senx + \cos x \le \sqrt{2}$ $[\forall x \in R]$

c) $\cos x + \sqrt{3}senx < \sqrt{3}$ $[-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - senx + \sqrt{3} > 0$ $[-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

e) $2\cos x + 2senx \ge \sqrt{3} + 1$ $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

f) $senx + \cos x > -2$ $[\forall x \in R\ ]$

5) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche (omogenee o riconducibili ad omogenee) di 2° grado in seno e coseno:

a) $3sen^2 x - \cos^2 x > 0$ $\qquad [\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi]$

b) $sen^2 x - senx \cdot \cos x < 0$ $\qquad [k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi]$

c) $\sqrt{3}\cos^2 x + \cos x \cdot senx > 0$ $\qquad [-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

d) $2sen^2 x - \sqrt{3}senx \cdot \cos x - \cos^2 x < \frac{1}{2}$ $\qquad [-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi]$

e) $4sen^2 x - \sqrt{3}senx \cdot \cos x + \cos^2 x \le 1$ $\qquad [k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k\pi]$

f) $2sen^2 x + \sqrt{3}senx \cdot \cos x - \cos^2 x > 2$ $\qquad [\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

6) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche:

a) $2\cos^2 \frac{x}{2} - sen^2 \frac{x}{2} > \frac{1}{2} sen^2 x$ $\qquad [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $(senx + \cos x)^2 \ge \cos 2x$ $\qquad [k\pi \le x \le \frac{3}{4}\pi + k\pi]$

c) $tg 2x - 3tgx < 0$ $\qquad [k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \cup \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi]$

d) $\dfrac{senx - \cos x}{2\cos^2 x - 1} > 0$

$[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi]$

e) $\dfrac{senx}{senx + \cos x} < 0$ $\qquad [\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \cup \frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

f) $\dfrac{tg^2 x - 1}{sen 2x} > 0$ $\qquad [\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \pi + k\pi]$

SCHEDA DI VERIFICA
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche:

1. $2\cos(x-\frac{\pi}{4})<\sqrt{3}$ $\qquad [\frac{5}{12}\pi+2k\pi<x<\frac{25}{12}\pi+2k\pi]$

2. $4sen^2x<3$ $\qquad [-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi \cup \frac{2}{3}\pi+2k\pi<x<\frac{4}{3}\pi+2k\pi]$

3. $tg^2x-\sqrt{3}tgx>0$ $\qquad [\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\pi+k\pi \ , \ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi]$

4. $2+3\cos x\geq 2sen^2x-1$ $\qquad [-\frac{2}{3}\pi+2k\pi\leq x\leq\frac{2}{3}\pi+2k\pi \cup x=\pi+2k\pi]$

5. $2\cos^2x-\cos x<0$ $\qquad [\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \cup \frac{3}{2}\pi+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi]$

6. $\frac{\sqrt{3}senx-\cos x}{tg^2x-1}<0$ $\qquad [\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi+2k\pi<x<\frac{7}{6}\pi+2k\pi \cup$
$\frac{5}{4}\pi+2k\pi<x<\frac{7}{4}\pi+2k\pi, x\neq\frac{3}{2}\pi+2k\pi]$

7. $sen(x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(x+\frac{\pi}{3})>1$ $\qquad [-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi]$

8. $\sqrt{3}sen2x>2\cos^2x-2$ $\qquad [k\pi<x<\frac{2}{3}\pi+k\pi]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) $\cos x > -\frac{1}{2}$ $\qquad \left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

2) $senx > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

3) $tgx > -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

4) $sen2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \left[\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

5) $tg2x < -1$ $\qquad \left[-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right]$

6) $2sen^2 x - senx < 0$ $\qquad \left[2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \cup \quad \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

7) $3tg^2 x - 1 < 0$ $\qquad \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

8) $2\cos^2 x - 1 > 0$ $\qquad \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \cup \quad \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

9) $tg^2 x - tgx < 0$ $\qquad \left[k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

10) $\cos^2 x - sen^2 x > 0$ $\qquad \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

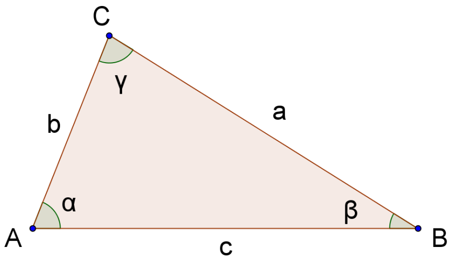
11) $senx - \cos x < 1$ $\qquad \left[-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

12) $senx - \sqrt{3}\cos x < 0$ $\qquad \left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

13) $senx - \cos x > 0$ $\qquad \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

Triangoli qualsiasi

Consideriamo un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ e adottiamo la seguente notazione: nel vertice A l'angolo è α, nel vertice B $\rightarrow \beta$, nel vertice C $\rightarrow \gamma$ e indichiamo con a il lato opposto ad A, con b quello opposto a B e con c quello opposto a C.

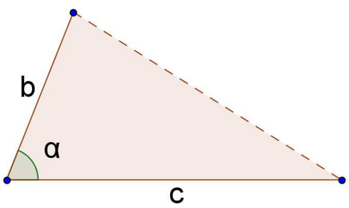


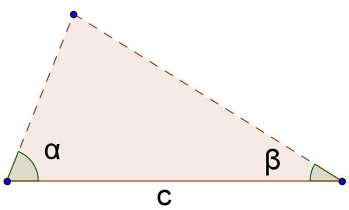
Risolvere un triangolo significa determinare, dalla conoscenza di alcuni elementi, tutti gli altri elementi (lati, angoli). Ricordiamo che, grazie ai criteri di congruenza dei triangoli, un triangolo è determinato se si assegnano:

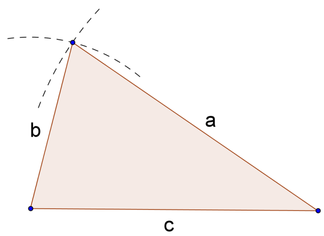
1) due lati e l'angolo compreso;
2) un lato e due angoli;
3) i tre lati (purché naturalmente sia rispettata la relazione che ciascun lato sia minore della somma degli altri due)

Nota: se ordiniamo i lati in modo decrescente cioè se per esempio $a \geq b \geq c$ basterà verificare che $a < b + c$ poiché per b e c sarà verificato sicuramente.

Infatti in ognuno di questi casi è possibile costruire, con riga, compasso e goniometro, un unico triangolo.



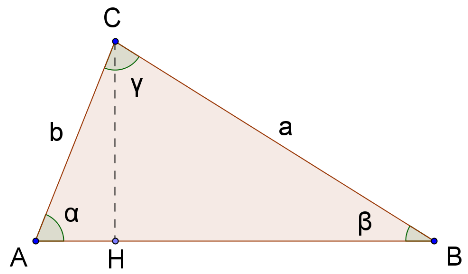




Dimostriamo due teoremi utili per la risoluzione dei triangoli qualsiasi.

Teorema dei seni

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ si ha: $\boxed{\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\gamma}}$



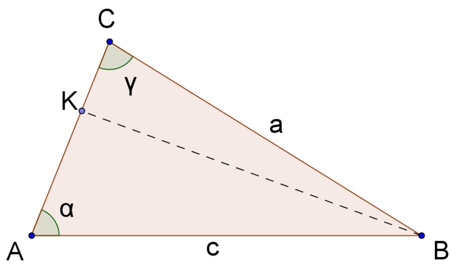
Dimostrazione
Consideriamo l'altezza CH: possiamo calcolarla in due modi

$$\overline{CH}=b\cdot sen\alpha \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{AHC}\text{)}$$

$$\overline{CH}=a\cdot sen\beta \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{CHB}\text{)}$$

e quindi $a\cdot sen\beta=b\cdot sen\alpha\rightarrow\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}$

Analogamente tracciando l'altezza BK

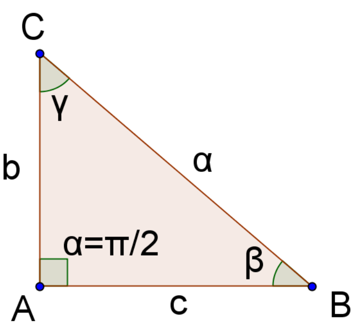


$$\left.\begin{array}{l}\overline{BK}=c\cdot sen\alpha\\ \overline{BK}=a\cdot sen\gamma\end{array}\right.\Rightarrow c\cdot sen\alpha=a\cdot sen\gamma$$

e quindi $\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{c}{sen\gamma}$

Quindi avremo che $\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\gamma}$

Nota: osserviamo che questo teorema vale anche per un triangolo rettangolo. Infatti se per esempio $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ abbiamo $sen\alpha=1$ e $a=\dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\gamma}$



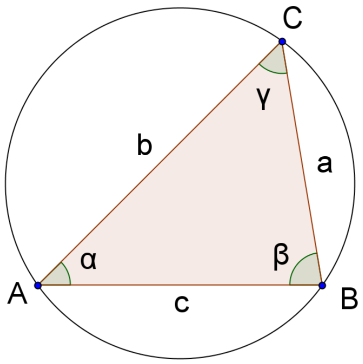
Osservazione: possiamo calcolare quanto vale questo rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto?

Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo: i lati a, b, c possono essere considerati corde di questa circonferenza e gli angoli α, β, γ angoli alla circonferenza che insistono su queste. Avevamo dimostrato che:

lunghezza corda = $diametro \cdot seno$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda)

e quindi

$$a = 2r \cdot sen\alpha \Rightarrow \frac{a}{sen\alpha} = 2R$$
$$b = 2r \cdot sen\beta \Rightarrow \frac{b}{sen\beta} = 2R$$
$$c = 2r \cdot sen\gamma \Rightarrow \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

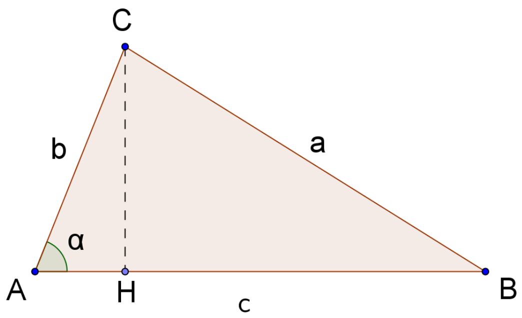


Quindi non solo abbiamo dimostrato che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è sempre lo stesso, per un dato triangolo, ma anche che è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema del coseno

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ vale, per ciascun lato, la seguente relazione:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$



cioè il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto tra questi e il coseno dell'angolo compreso.

Dimostrazione

Consideriamo l'altezza CH e il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ACH}$:

avremo $\overline{CH} = b \cdot sen\alpha$

$\overline{AH} = b \cdot \cos\alpha \Rightarrow \overline{HB} = c - b \cdot \cos\alpha$

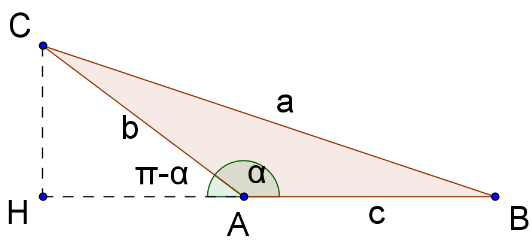
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{CHB}$ abbiamo:

$$a^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha + b^2 \cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2 (sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

e quindi: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Se l'angolo α fosse ottuso avremo: $\overline{CH} = b \cdot sen(\pi - \alpha) = b \cdot sen\alpha$

$\overline{AH} = b \cdot \cos(\pi - \alpha) = -b \cdot \cos\alpha$



Ma poiché $\overline{HB} = \overline{AH} + AB = c - b\cos\alpha$ e quindi si ritrovano i calcoli precedenti.

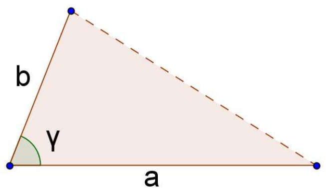
Nota: se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il teorema si riduce al teorema di Pitagora e per questo viene anche chiamato teorema di Pitagora generalizzato.

.

Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Riprendiamo la risoluzione di un triangolo.

1) Supponiamo di conoscere due lati, per esempio a e b, e l'angolo compreso γ.



Troviamo c con il teorema del coseno:

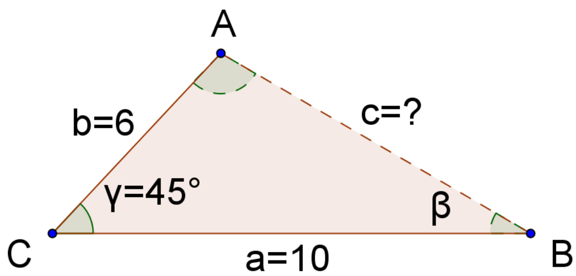
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c = ...$$

Troviamo α con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma} \Rightarrow sen\alpha = ... \rightarrow \alpha = ...$$

Naturalmente $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$

Esempio: $a = 10 \quad b = 6 \quad \gamma = 45°$



$$c^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c \cong 7{,}15$$

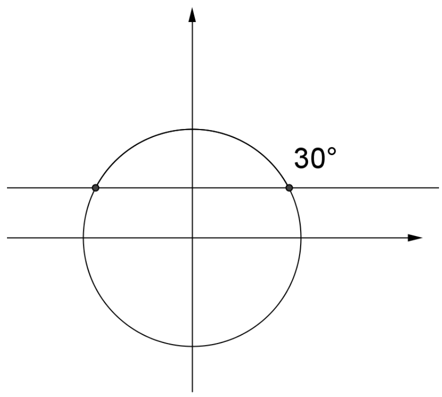
$$\frac{6}{sen\beta} = \frac{7{,}15}{sen\gamma} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}59 \Rightarrow \beta \cong 36{,}4°$$

Di conseguenza $\alpha = 180° - (45° + 36{,}4°) = 98{,}6°$

Nota

Quando usiamo la calcolatrice per trovare quale angolo ha un dato seno o un dato coseno (usando il tasto $\sin^{-1}$ o $\cos^{-1}$) dobbiamo sapere che, per definizione, $\sin^{-1}$ dà come risultati angoli tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (-90° e 90°) e $\cos^{-1}$ dà come risultati angoli tra 0 e π (0 a 180°)

Per esempio se digitiamo $\sin^{-1} 0.5$ otteniamo solo come risultato 30° ed invece sappiamo che anche 180°-30°=150° ha lo stesso seno (oltre a tutti gli angoli ottenuti con aggiungendo $2k\pi$).



Così se per esempio nel risolvere un triangolo utilizzando il teorema dei seni troviamo $sen\alpha = 0.5$ la calcolatrice ci darà solo $\alpha = 30°$ ma non è detto che questo sia il caso dell'angolo del nostro triangolo.

Ricordiamo infatti che in un triangolo con lati disuguali a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

Riprendiamo per esempio il caso del triangolo dell'esempio precedente: risolvendo $sen\beta \cong 0.59$ la calcolatrice ha fornito $\beta \cong 36.4°$. Prendiamo questo valore (e non 180°-36.4°) perché β dovrà essere minore di $\gamma = 45°$ in quanto b<c.

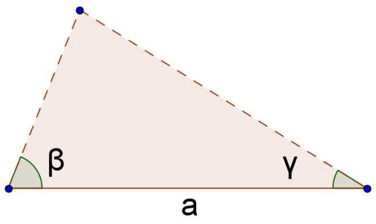
Ma se noi avessimo applicato il teorema dei seni per determinare α avremmo avuto:

$$\frac{10}{sen\alpha} = \frac{7,15}{sen45°} \Rightarrow sen\alpha \cong 0,999$$

e la calcolatrice avrebbe fornito come angolo $\alpha = 81,4°$ che ci avrebbe poi portato a $\beta = 180° - (45° + 81,4°) = 53,6°$ impossibile perché maggiore di 45°.

Quindi in questo caso 81,4° non è il nostro angolo ma dobbiamo prendere $\alpha = 180° - 81,4° = 98,6°$ che infatti ci riporta a $\beta = 180° - (45° + 98,6°) = 36,4°$.

2) Supponiamo di conoscere un lato, per esempio a, e due angoli, per esempio β e γ.



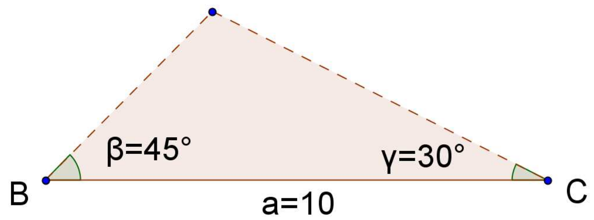
Troviamo b con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta} \qquad * \, sen\alpha = sen(\pi-(\beta+\gamma)) = sen(\beta+\gamma) = sen\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot sen\gamma$$

$$\Rightarrow b...$$

Analogamente troviamo c.
Naturalmente $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)$.

Esempio: $a=10 \quad \beta=45° \quad \gamma=30°$

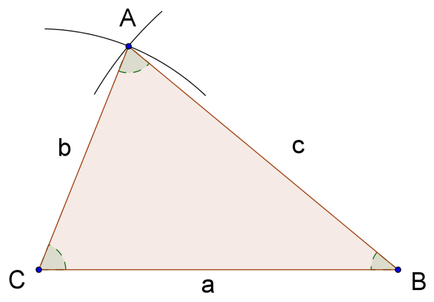


$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}\Rightarrow\frac{10}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Rightarrow b=\frac{20}{\sqrt{3}+1}\cong 7{,}33$$

$$* \, sen\alpha = sen(\pi-(\beta+\gamma)) = sen(\beta+\gamma) = sen\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot sen\gamma =$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}\Rightarrow c\cong 5{,}2$$

Naturalmente $\alpha=180°-(45°+30°)=105°$

3) Supponiamo di conoscere i tre lati a, b, c (ognuno minore della somma degli altri due e maggiore della differenza).



Possiamo applicare il teorema del coseno per trovare un angolo, per esempio α :

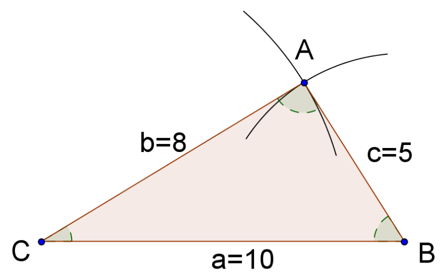
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = ... \Rightarrow \alpha = ...$$

A questo punto applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = ... \Rightarrow \beta = ...$$

Infine $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$

Esempio: $a = 10 \quad b = 8 \quad c = 5$



$$10^2 = 8^2 + 5 \quad - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha \cong -0{,}14 \Rightarrow \alpha \cong 98°$$

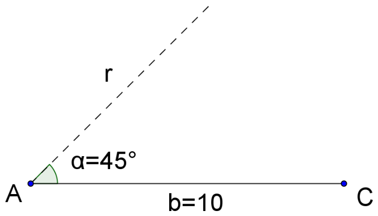
$$\frac{10}{sen 98°} = \frac{8}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}792 \Rightarrow \beta \cong 52{,}4°$$

Naturalmente $\gamma = 180° - (52{,}4° + 98°) = 29{,}6°$

Problema

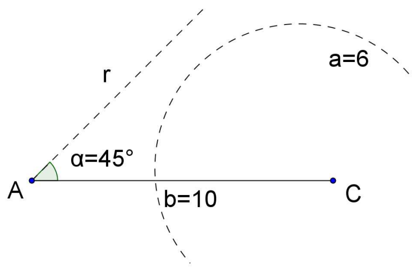
Se conosciamo due lati, per esempio a e b , e l'angolo opposto ad uno di essi, per esempio α , possiamo individuare il triangolo?

Proviamo a disegnare il lato b e l'angolo α considerando per esempio b=10 $\alpha = 45°$.

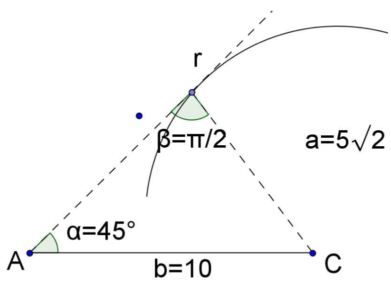


Per tracciare il lato a possiamo puntare il compasso in C con apertura a e ci sono vari casi:

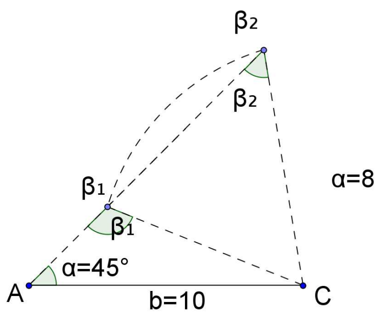
- la circonferenza non interseca la semiretta r e quindi non si ottiene nessun triangolo (per esempio nella figura $a = 6$)



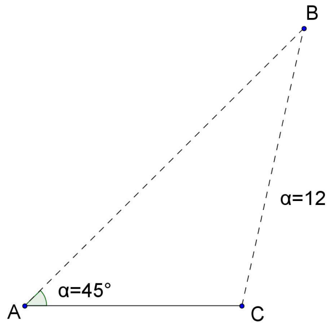
- la circonferenza è tangente alla semiretta e quindi si trova un triangolo rettangolo $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$ e in questo caso si ha $a = b \cdot sen\alpha$ (infatti in figura $a = 10 \cdot sen\frac{\pi}{4} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \cdot \sqrt{2}$).



- la circonferenza è secante con la semiretta in due punti e ci sono 2 triangoli (in figura $a = 8$)



- la circonferenza taglia la semiretta in un solo punto (e interseca in un altro punto il suo prolungamento) e quindi trovo 1 triangolo (in figura $a = 12$)



Infatti applicando il teorema dei seni ho:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = \frac{b \cdot sen\alpha}{a}$$

e quindi abbiamo:

se $sen\beta > 1$ cioè $a < b \cdot sen\alpha$ non si trova nessun β;

se $sen\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$ e $a = b \cdot sen\alpha$ abbiamo 1 triangolo (rettangolo);

se $sen\beta < 1$ i sono due casi: se $b \cdot sen\alpha < a < b$ abbiamo due triangoli oppure se $a \geq b$ 1 solo triangolo.

Infatti se per esempio a=8 (caso in cui $b \cdot sen\alpha < a < b$) abbiamo:

$$\frac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{10}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = \frac{10}{8\sqrt{2}} (\cong 0{,}886)$$

$$\beta_1 \cong 62°$$

$$\beta_2 \cong 117{,}5°$$

abbiamo 2 triangoli

Se invece a=12 $(a > b)$ abbiamo

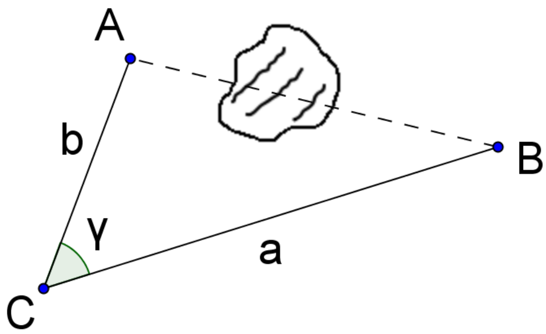
$$\frac{12}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{10}{sen\beta} \rightarrow sen\beta = \frac{10}{12\sqrt{2}} (\cong 0{,}59) \rightarrow \beta_1 \cong 36{,}2° (\beta_2 \cong 143° non..acc.)$$

abbiamo 1 triangolo

Applicazioni

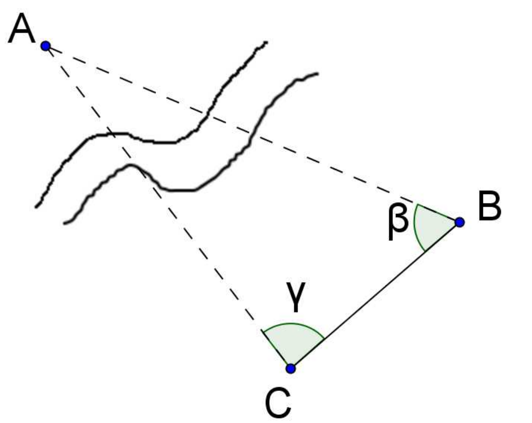
La risoluzione di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi è importante per la topografia.

1) Supponiamo per esempio di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo ma entrambi "accessibili". Posso prendere un 3° punto C, misurare $\overline{AC}, \overline{BC}$ e l'angolo γ.



Quindi conosco, del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, 2 lati e l'angolo compreso. Posso determinare $\overline{AB} = c$.

2) Supponiamo di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo e di cui solo un punto sia "accessibile" (B). Posso fissare un terzo punto C, misurare $\overline{BC}$ e gli angoli β e γ.



Quindi conosco, nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, un lato e i due angoli adiacenti. Il triangolo si può "risolvere" e posso determinare $\overline{AB}$.

PROBLEMI
TRIANGOLI QUALSIASI

1) Risolvi e costruisci con riga, compasso e goniometro oppure con il software Geogebra i seguenti triangoli:

a. $a=8 \quad b=4 \quad \gamma=30°$ $\quad [c \cong 5 \quad \alpha \cong 126{,}9° \quad \beta \cong 23{,}1°]$

b. $a=8 \quad \beta=60° \quad \gamma=45°$ $\quad [b \cong 7{,}2 \quad c \cong 5{,}9 \quad \alpha \cong 75°]$

c. $a=5 \quad b=10 \quad c=9$ $\quad [\alpha = 29{,}9° \quad \beta = 85{,}5° \quad \gamma = 64{,}6°]$

d. $a=8 \quad b=5 \quad \gamma=60°$ $\quad [c = 7 \quad \alpha \cong 81{,}3° \quad \beta \cong 38{,}7°]$

e. $a=5 \quad \beta=45° \quad \gamma=30°$ $\quad [b \cong 3{,}7 \quad c \cong 2{,}6 \quad \alpha \cong 105°]$

f. $a=8 \quad b=10 \quad c=5$ $\quad [\alpha \cong 52{,}4° \quad \beta \cong 98° \quad \gamma = 29{,}6°]$

g. $a=10 \quad b=12 \quad \gamma=30°$ $\quad [c \cong 6 \quad \alpha \cong 56{,}4° \quad \beta \cong 93{,}6°]$

2) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma sono entrambi accessibili. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{AC} = 48$ metri, $\overline{BC} = 40$ metri e $A\hat{C}B = 40°$ Determina $\overline{A\mathbf{B}}$.

[$\overline{AB} \cong 31$ metri]

3) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma solo B è accessibile. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{BC} = 100$ metri, $A\hat{B}C = 50°$, $A\hat{C}B = 70°$. Determina $\overline{AB}$.

[$\overline{AB} \cong 108{,}5$ metri]

4) Si può costruire un triangolo con b=10 , $\alpha = 60°$ e a = 8 ?

[no]

5) Fissati b=10 e $\alpha = 60°$ qual è il minimo valore di a per cui si può costruire un triangolo? Come risulta il triangolo?

[$a = 5\sqrt{3}$]

6) Risolvi il triangolo con b=10 $\alpha = 60°$, a =9.

$$\begin{bmatrix} c_1 \cong 7{,}5 & \beta_1 \cong 74° & \gamma_1 = 46° \\ c_2 \cong 2{,}5 & \beta_2 \cong 106° & \gamma_2 = 14° \end{bmatrix}$$

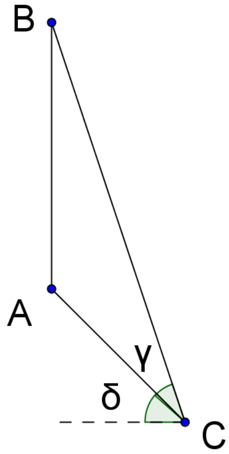
7) Risolvi il triangolo con *b*=10, $\alpha = 60°$, *a*=10.

[triangolo equilatero *c*=10, $\beta = \gamma = 60°$]

8) Risolvi il triangolo con $b = 10$ $\alpha = 60°$ $a = 12$ e disegnalo.

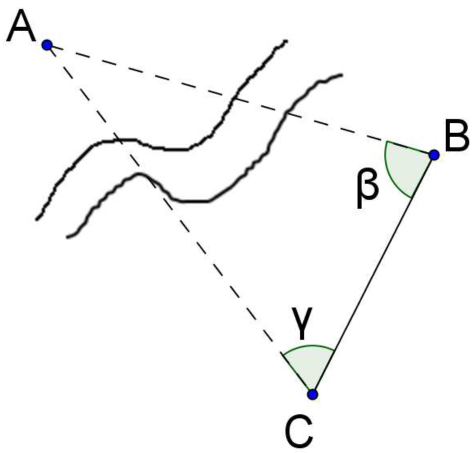
$[c \cong 13{,}3 \quad \beta \cong 46° \quad \gamma \cong 74°]$

9) Una torre AB si trova su un pendio: determina $\overline{AB}$ sapendo che AC=10m, $\gamma = 30°, \delta = 45°$.



$[\overline{AB} = 19{,}3m]$

10) Due punti A e B si trovano sulle rive opposte di un fiume. Prendendo un punto C dalla parte B si misura $\overline{BC} = 50m$ $\beta = 76°$ $\gamma = 63°$. Determina $\overline{AB}$.



$[\overline{AB} \cong 68m]$

SCHEDA DI VERIFICA
TRIANGOLI QUALSIASI

1) In un triangolo si ha $a = 10 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 60°$. Disegna il triangolo con riga e compasso e determina gli elementi mancanti.

$[b \cong 7{,}32\,;\; c \cong 8{,}97\,;\; \alpha = 75°]$

2) Sapendo che $a = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ il triangolo è univocamente determinato? Risolvi e disegna.

$[c_1 = 10 \;\; \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \; \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad c_2 = 5 \;\; \alpha_2 = \frac{2}{3}\pi \;\; \gamma_2 = \frac{\pi}{6}]$

3) Determina la distanza $\overline{AB}$ tra due punti entrambi accessibili sapendo che, preso un terzo punto C, $\overline{BC} = 50m$, $\overline{AC} = 30m$, $tg\, A\hat{C}B = \frac{3}{4}$.

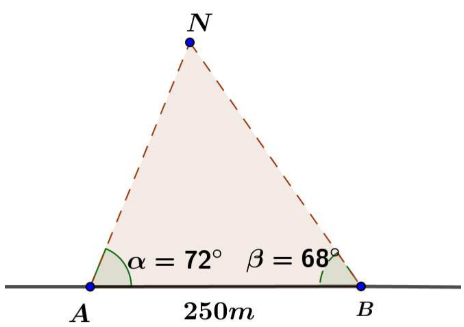
$[\overline{AB} \cong 31{,}62m]$

4) Risolvi il triangolo avente $a = 4 \;\; b = \frac{5}{2} \;\; c = 5$ e disegnalo.

$[\alpha \cong 52{,}44°,\; \beta \cong 29{,}7°,\; \gamma \cong 97{,}86°]$

5) Come potresti misurare l'altezza di una torre $\overline{AB}$ nel caso in cui la base A della torre non si possa raggiungere (si dice base inaccessibile) ma si trovi comunque su un terreno pianeggiante? (suggerimento: fissa un segmento $\overline{CD}$ sul piano orizzontale dove si trova la base A della torre e "traguarda" dai suoi estremi la cima della torre….).

6) Una nave N si trova a distanza *d* dalla costa (rettilinea): se da un osservatore sulla costa viene misurato $\alpha = 72°$, $\beta = 68°$ e $\overline{AB} = 250m$ (vedi figura), determina la distanza *d* della nave dalla costa.



$[d \cong 343m]$

7) Dimostra che l'area di un quadrilatero si può calcolare con la seguente formula

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot sen\alpha$$

dove d_1 e d_2 sono la lunghezza delle diagonali e α è uno degli angoli formati dalle diagonali (è indifferente quale angolo si consideri).

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE E TRIANGOLI QUALSIASI

I) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche

1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

2. $tg^2 x - 3 \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

3. $senx - \sqrt{3}\cos x < \sqrt{3}$ $\left[-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

4. $\dfrac{1 - tg^2 x}{\sqrt{3}senx - \cos x} > 0$

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$$

5. $2sen^2 x + \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} sen2x > 1$ $[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi]$

II) Risolvi i seguenti problemi:

1) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $AC = 50m$, $BC = 70m$, $\cos A\hat{C}B = \frac{1}{2}$. Determina $\overline{AB}$.

$\left[\overline{AB} = 62{,}5m\right]$

2) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo una posizione C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 12Km$, $C\hat{B}A = \frac{\pi}{3}$, $tg\left(A\hat{C}B\right) = 2$, determina $\overline{AB}$.

[$\overline{AB} \cong 12{,}96$ km]

3) Determina e disegna il triangolo (o i triangoli) aventi, usando le consuete convenzioni, $a = 6$, $b = 5$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$\left[\beta \cong 46{,}2°, \quad \gamma \cong 73{,}8°, \quad c \cong 6{,}65\right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
TRIANGOLO RETTANGOLO E TRIANGOLI QUALSIASI

1) In un triangolo isoscele ABC, la base $\overline{AB} = 10a$ e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo ABC.

$$\left[2p = \frac{80}{3}a; \quad A = \frac{100}{3}a^2\right]$$

2) In un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ si ha $tg\alpha = 3$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo.

$$\left[2p = 2 \cdot \left(1 + \sqrt{10}\right)a; \quad A = 3a^2\right]$$

3) In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo misura *l*, la base minore $\overline{CD} = 2l$ e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha =$ angolo adiacente alla base maggiore). Determina perimetro e area del trapezio.

$$\left[2p = \frac{38}{5}l; \quad A = \frac{42}{25}l^2\right]$$

4) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $\overline{AC} = 30 \quad m$; $\overline{BC} = 25 \quad m$; $\cos\left(A\hat{C}B\right) = \frac{1}{3}$. Determina $\overline{AB}$.

$$\left[\overline{AB} \cong 32 \quad m\right]$$

5) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo un punto C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 40 \quad m$; $C\hat{B}A = \frac{\pi}{4}$; $tg\left(A\hat{C}B\right) = 2$, determina $\overline{AB}$.

$$\left[\overline{AB} \cong 37{,}6 \quad m\right]$$

6) Considera un triangolo ABC in cui $\overline{BC} = 10$, $\hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 120°$. Determina perimetro e area.

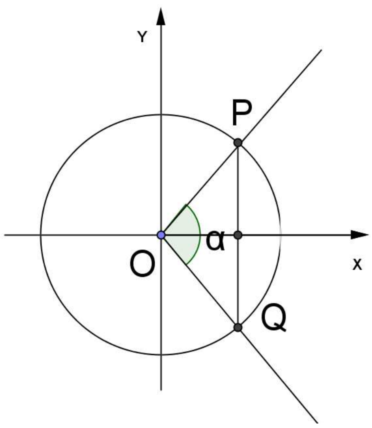
$$\left[2p = 20 + 10\sqrt{3}; \quad A = 25\sqrt{3}\right]$$

Complementi di trigonometria

Breve storia delle funzioni goniometriche

Lo studio della trigonometria nasce con gli **astronomi della scuola di Alessandria di Egitto** ed infatti la prima ad essere sviluppata fu la trigonometria sferica cioè lo studio dei triangoli sferici (tracciati sulla superficie di una sfera e i cui lati sono archi di cerchio).

Il fondatore della trigonometria è considerato **Ipparco da Rodi** (II sec a.C.) che visse ad Alessandria ma la maggior parte delle notizie sui metodi trigonometrici alessandrini ci vengono dal massimo astronomo dell'antichità, **Tolomeo** (II sec d.C.) che scrisse "Composizione matematica" mutata poi in "Grande Composizione" e chiamata infine *Almagesto* (nome arabo che deriva dal greco $\mu\epsilon\gamma\iota\sigma\tau\eta$, il massimo) in cui pose le basi della teoria astronomica.

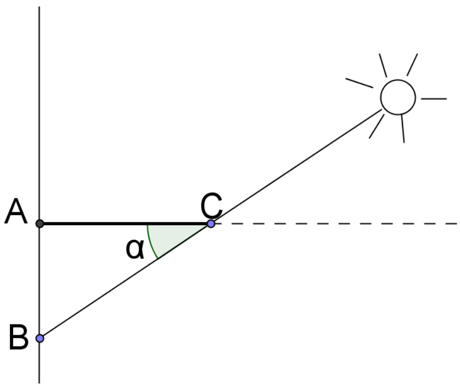


Nella trigonometria alessandrina invece di utilizzare il seno di un angolo, così come l'abbiamo definito, si usava la funzione "corda" $c(\alpha)$

$c(\alpha) = \overline{PQ}$ (**corda sottesa dall'angolo α**)

(praticamente $\overline{PQ} = 2\ sen\dfrac{\alpha}{2}$)

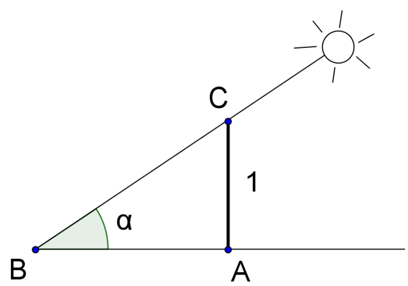
Il **seno come lo definiamo attualmente** fu introdotto in **India** e furono calcolati i seni degli angoli (tavola dei seni) intorno al V sec. d.C.
Furono sempre gli astronomi indiani ad introdurre il **coseno** definito come seno dell'angolo complementare e la **tangente** definita come l'ombra che un'asta infissa perpendicolarmente su un muro verticale (gnomone) e di lunghezza 1, proietta sul muro per una data altezza del sole sull'orizzonte (angolo α) (si tradusse in latino con "umbra versa"*).
Il termine tangente fu introdotto solo nel 1600.



$\overline{AC} = 1$

$\overline{AB} = tg\alpha$

La cotangente (tangente dell'angolo complementare) era definita come l'ombra proiettata da un orologio orizzontale ("umbra recta")
$\overline{AB} = \text{cotg}\,\alpha$

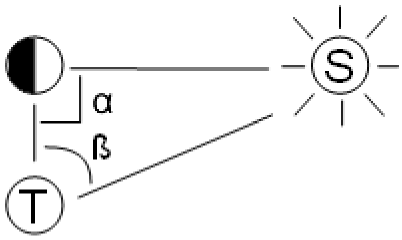


Trigonometria e astronomia

Aristarco e le distanze Terra-Sole e Terra-Luna

E' stato l'astronomo greco **Aristarco** a studiare questo problema: nell'unica sua opera a noi pervenuta, cioè il breve trattato *Sulle dimensioni e distanze del Sole e della Luna*, ha cercato di confrontare la distanza Terra-Luna e la distanza Terra-Sole.

Quando la luna è in quadratura, ossia è illuminata per metà, essa, con la Terra e il Sole, forma il triangolo rettangolo mostrato in figura ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). Misurando in tale condizione l'angolo β compreso tra la direzione Terra-Luna e la direzione Terra-Sole è possibile calcolare il rapporto tra il cateto e l'ipotenusa di un triangolo simile.



Terra, Luna e Sole durante una quadratura

Aristarco stimò l'angolo $\beta = 87°$ (di conseguenza $L\hat{S}T = 3°$) e stimò il rapporto tra la distanza Terra-Luna e Terra-Sole (il nostro sen3°) come compreso tra $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{18}$: quindi il Sole risultava circa 20 volte più lontano della Luna rispetto alla Terra.

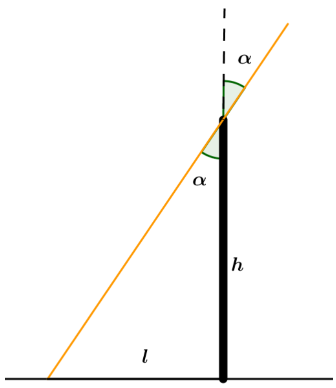
In realtà l'angolo $\beta = 89°50'$ e quindi la distanza Terra-Sole è circa 400 volte la distanza Terra-Luna, ma il metodo di Aristarco è comunque uno dei primi esempi di un metodo trigonometrico applicato per la risoluzione di un problema astronomico.

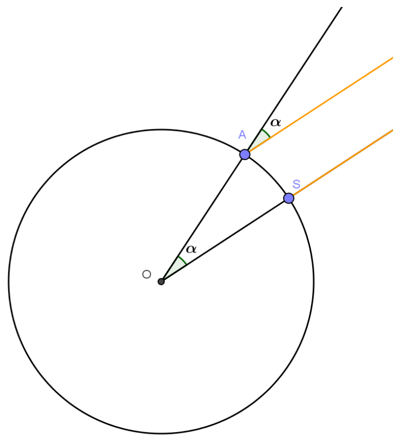
Eratostene e la misura del raggio terrestre

Il matematico, geografo ed astronomo Eratostene (III secolo a.C.), era direttore della grande biblioteca di Alessandria d'Egitto quando formulò il metodo per calcolare le dimensioni della Terra. Dai suoi studi, era venuto a conoscenza del fatto che a Syene (l'attuale Assuan), a mezzogiorno del solstizio d'estate, il Sole si trovava proprio sullo zenit, tanto che il fondo di un pozzo profondo ne veniva illuminato, perciò un bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante non avrebbe proiettato alcuna ombra in terra. Invece ad Alessandria questo non succedeva mai, gli obelischi proiettavano comunque la loro ombra sul terreno.

Eratostene perciò, per procedere con i suoi calcoli, ipotizzò la Terra perfettamente sferica ed il Sole sufficientemente distante da considerare paralleli i raggi che la investono. Inoltre assunse che Alessandria e Syene si trovassero sullo stesso meridiano.

Durante il solstizio d'estate calcolò l'angolo di elevazione del Sole ad Alessandria, misurando l'ombra proiettata proprio da un bastone piantato in terra.





Indicando con:

- h :lunghezza del palo
- l :lunghezza dell'ombra proiettata dal palo sul terreno
- α :angolo di elevazione del Sole

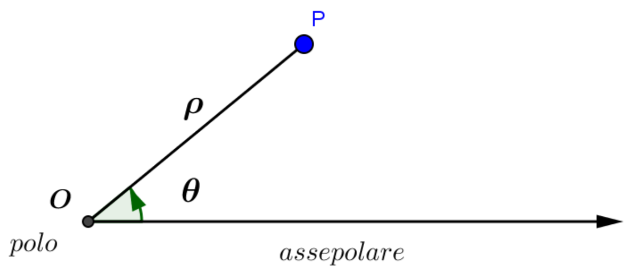
dalla misura di h e l Eratostene ricavò α che risultò circa 1/50 di angolo giro cioè 7° 12'.

Quindi anche la distanza tra le due città (che era stimata 5000 stadia e che corrisponde a circa 800 Km) doveva essere 1/50 della circonferenza terrestre che quindi risultava essere 250000 stadia cioè circa 40000 Km, valore straordinariamente vicino a quello ottenuto con metodi moderni (40.075 km).

Una volta stabilito un valore per essa, il raggio terrestre si ricavava dalla nota relazione che lega la circonferenza ed il suo raggio.

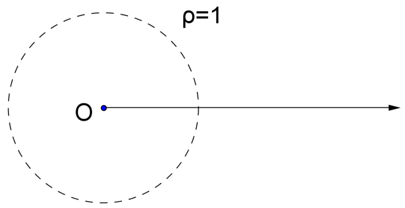
Le coordinate polari

Se nel piano fissiamo una semiretta di origine O (orientata) possiamo individuare la posizione di un qualsiasi punto P indicando la sua distanza da O e l'angolo orientato θ formato tra la semiretta fissata e la semiretta OP.

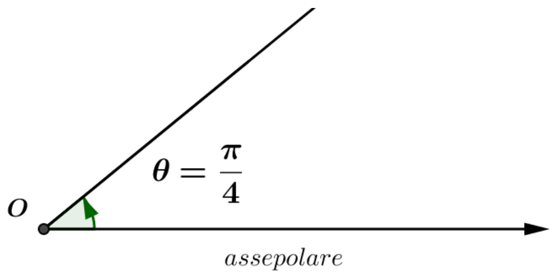


$$\overline{OP} = \rho$$
$$P(\rho, \theta)$$
$$O \le \theta < 2\pi$$

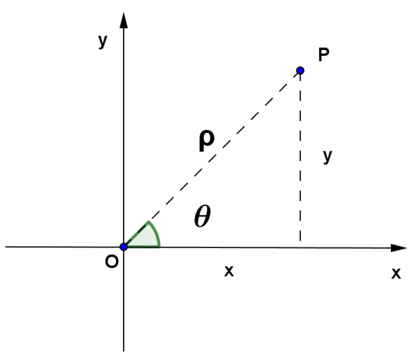
La semiretta si chiama asse polare, O si dice polo e si parla di sistema di riferimento polare.
(ρ, θ) si dicono le coordinate polari di P: ρ si chiama modulo e θ si chiama argomento.
Se scriviamo $\rho = 1$ questa risulta, in coordinate polari, l'equazione della circonferenza di centro il polo O e raggio $r = 1$ poiché tutti i suoi punti hanno distanza $\rho = 1$.



Se scriviamo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ avremo la semiretta in figura:



Nota
Possiamo passare da coordinate polari a coordinate cartesiane osservando:



$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot sen\,\theta \end{cases}$$