Limiti di una funzione

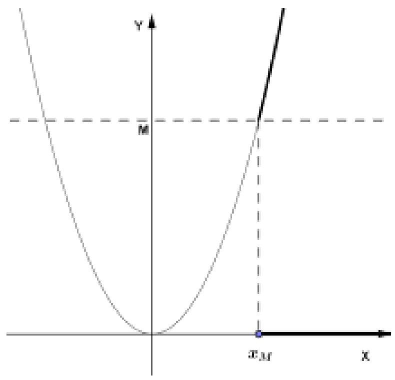
Definizioni

I) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$

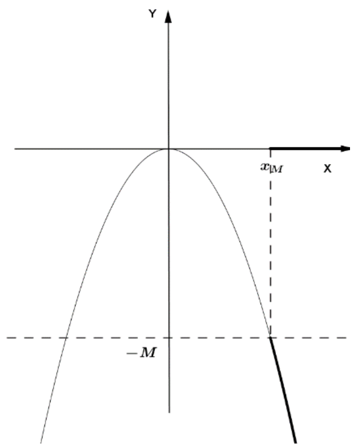
Cominciamo a studiare il "comportamento" di una funzione quando la x *diventa sempre più grande*: scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e leggeremo "limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$". Si possono avere vari casi.

a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ quando $\forall M>0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x>x_M \quad f(x)>M$

Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y=x^2$



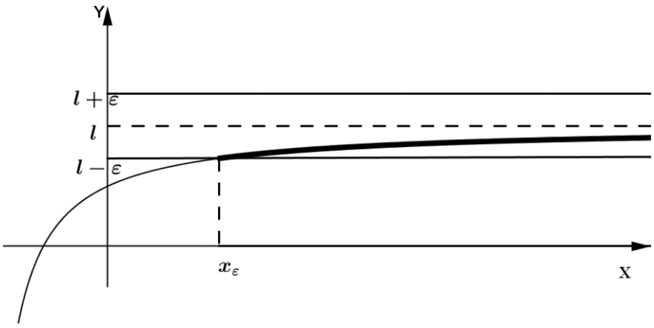
b) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$ quando $\forall M>0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x>x_M \quad f(x)<-M$



Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y=-x^2$

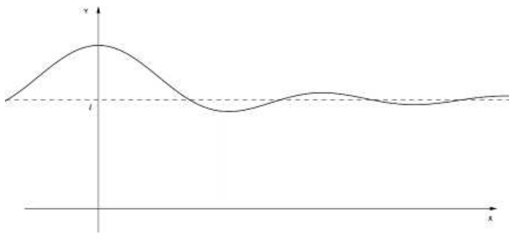
c) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l}$

Si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x > x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



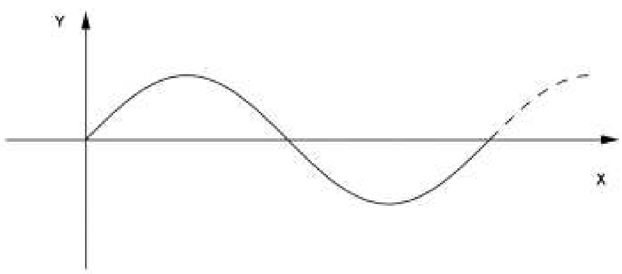
La retta $y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Nota: non dobbiamo pensare che l'asintoto non possa essere intersecato dal grafico.
Possiamo anche avere grafici come il seguente: la cosa essenziale è che le oscillazioni si "smorzino" cioè che la distanza fra il grafico e la retta $y = l$ tenda a 0.



d) $\boxed{\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)}$

Consideriamo $f(x) = \operatorname{sen} x$. Qual è il suo limite quando $x \to +\infty$?
In questo caso che $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ in quanto la funzione oscilla e non ha un "comportamento definitivo".

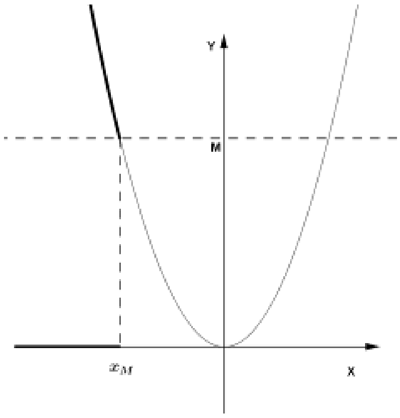


Nota: anche *y=cosx* e *y=tgx* e in generale le funzioni periodiche non hanno limite quando $x \to +\infty$.

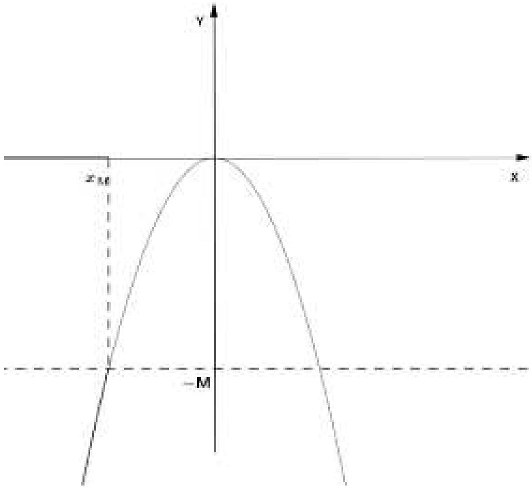
II) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x)}$

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0\ \exists x_M\colon\ \forall x < x_M\ f(x) > M$

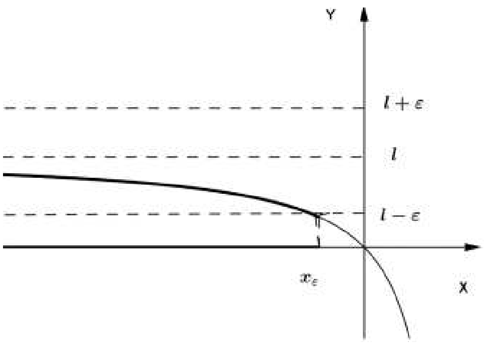
Osserviamo che questa volta consideriamo $x < x_M$ perché $x \to -\infty$.



b) Analogamente $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0\ \exists x_M\colon\ \forall x < x_M\ f(x) < -M$



c) Analogamente $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x < x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



$y = l$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

d) $\nexists \lim_{x \to -\infty} f(x)$ quando la $f(x)$ per $x \to -\infty$ non cresce sempre di più o non decresce sempre di più e neppure si avvicina ad un valore l: per esempio anche $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.

III) $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ dove } x_0 \notin D_f}$

Studiamo adesso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ dove $x_0 \notin D_f$ ma è un punto a cui posso "avvicinarmi" quanto voglio da destra e/o da sinistra.

Se ci avviciniamo a x_0 "da destra" scriveremo $\lim_{x\to x_o^+} f(x)$, se ci avviciniamo a x_0 "da sinistra" scriveremo $\lim_{x\to x_o^-} f(x)$.

a) Il limite è infinito

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$$

Abbiamo

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \ f(x) > M$

e

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \ f(x) < -M$

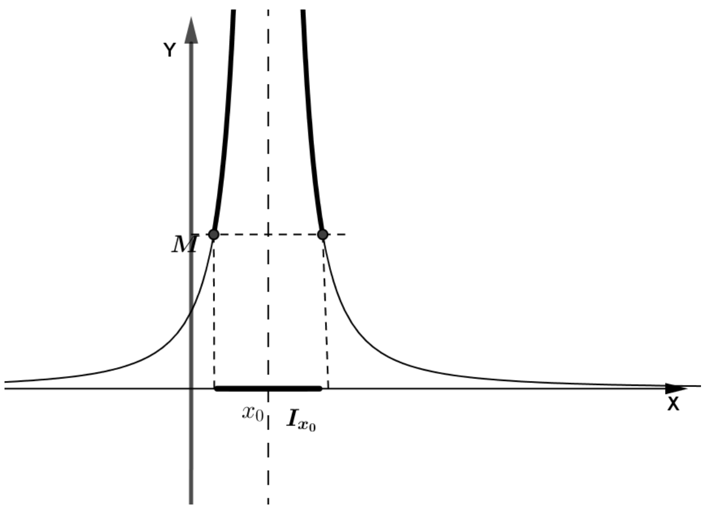
Invece

$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \ f(x) > M$

e

$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \ f(x) < -M$

La retta $x = x_o$ è **asintoto verticale** per la funzione : il "comportamento" può essere diverso da destra e a sinistra oppure lo stesso (in figura è rappresentato il grafico di $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ che è un esempio in cui $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ con $x_0 = 1$.



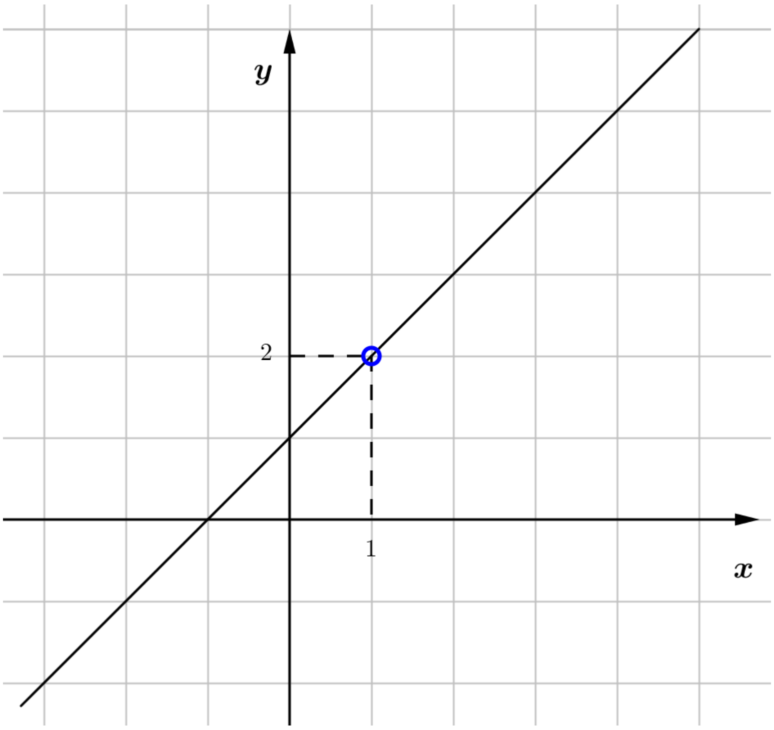
b) **Il limite è un numero finito**

Esempio: considera per esempio la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Il suo dominio è $\Re\setminus\{1\}$ ma calcolando il limite quando $x\to 1$ abbiamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

Infatti il grafico di $f(x)$ risulta una retta privata di un punto:



c) **Il limite non esiste**

Esempio: consideriamo $y=sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Il suo dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Proviamo a calcolare

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

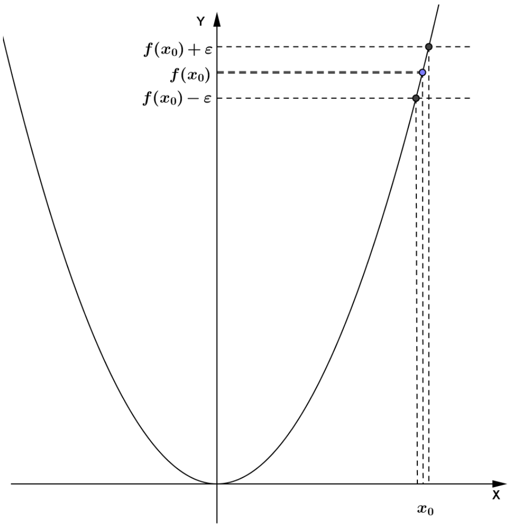
Quando $x\to 0^+$ abbiamo che $z\to+\infty$ ma sappiamo che $\lim\limits_{z\to+\infty}\operatorname{sen} z$ non esiste.

Analogamente se $x\to 0^-$ avremo che $z\to-\infty$ e $\lim\limits_{z\to-\infty}\operatorname{sen} z$ non esiste.

Quindi possiamo concludere che $\lim\limits_{x\to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ non esiste.

IV) $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) quando\ x_0 \epsilon D_f}$

a) Abbiamo $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_o} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

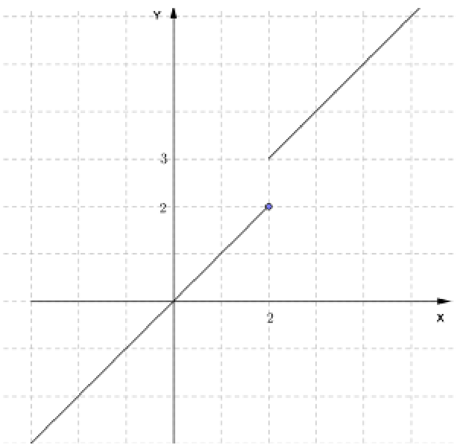


In questo **caso la funzione si dirà continua in x_0**.

b) Vediamo un altro caso considerando il seguente esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & per\ x \le 2 \\ x+1 & per\ x > 2 \end{cases}$$

Si tratta di una funzione definita "a tratti" cioè la funzione ha una definizione per $x \le 2$ e un'altra definizione per $x > 2$. Il suo grafico risulta "spezzato":



In questo caso abbiamo un limite destro diverso dal limite sinistro poiché:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

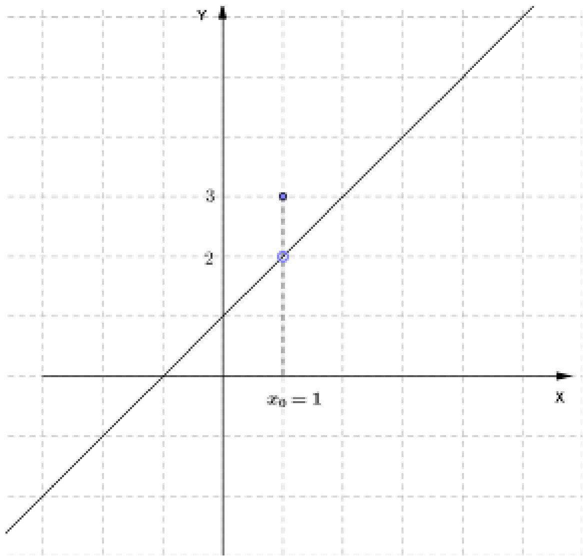
In generale se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$ $(l_1 \ne l_2)$ diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 1° specie o "salto".**

c) Consideriamo questa funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & per\ x \neq 1 \\ 3 & per\ \ x = 1 \end{cases}$$

Quanto vale $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Se scomponiamo abbiamo che per $x \neq 1$ possiamo scrivere $\dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} = x+1$ e quindi il grafico risulta quello in figura:



Quando ci avviciniamo a $x_0 = 1$ i valori della funzione si avvicinano a 2 e il fatto che $f(1) = 3$ non ha importanza perché conta il comportamento della funzione quando $x \to x_0 = 1$ e quindi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2\ (\neq f(1) = 3)$$

In questo caso quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

e diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 3° specie o "eliminabile"** poiché potremo "**ridefinire**" $f(x)$ in $x_0 = 1$ associandole il valore 2 cioè il valore del limite per $x \to 1$.

d) Possiamo avere una funzione per cui **non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ con $x_0 \in D_f$?**

Se consideriamo $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & per\ \ x \neq 0 \\ 1 & per\ \ x = 0 \end{cases}$

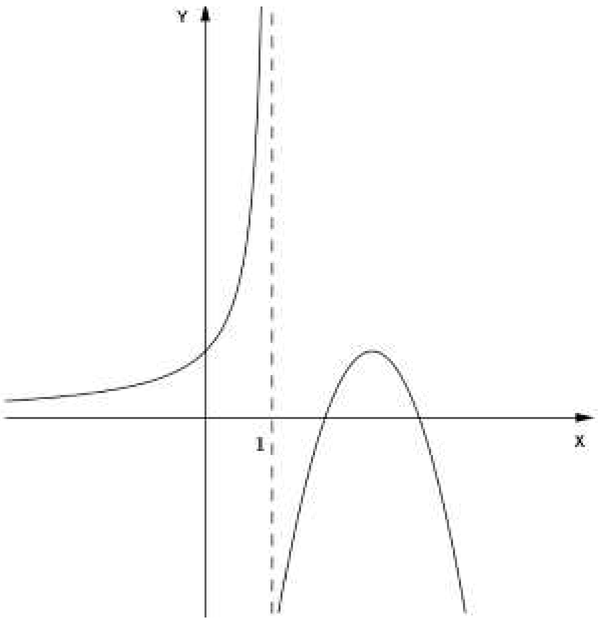
abbiamo che $x_0 = 0$ è nel dominio (per definizione $f(0) = 1$) ma, poiché il valore del limite non dipende dal valore della funzione in x_0, abbiamo che $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste perché, come avevamo già visto, non esiste $\lim_{x \to 0} sen\frac{1}{x}$.

Nota: anche in questo caso si dice che $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

ESEMPI ED ESERCIZI GUIDATI

I) Per verificare la comprensione del concetto di limite proviamo a **"leggere" i limiti di un grafico assegnato.** Consideriamo per esempio il seguente grafico:

a)



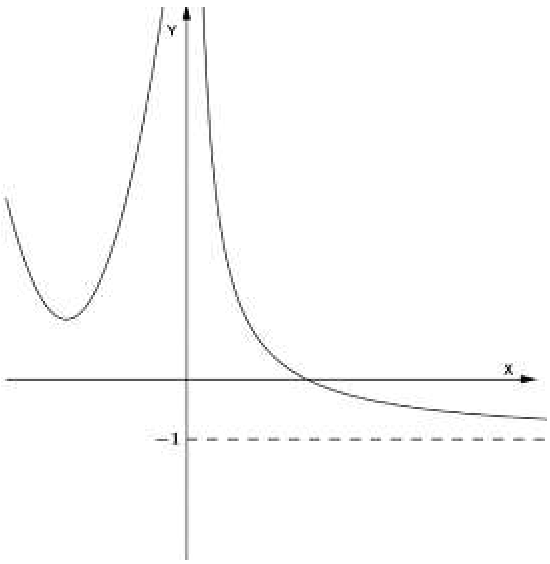
Vediamo che $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e abbiamo:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad y = 0$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \qquad x = 1$ è asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b)



Abbiamo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \quad$ ($x = 0$ asintoto verticale)

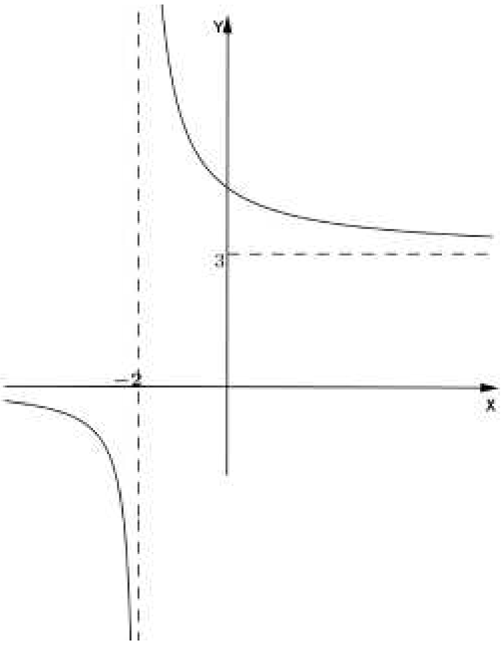
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1 \quad$ ($y = -1$ asintoto orizzontale) c)

$D_f = \cdots$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim_{x\to-2^-} f(x) = \cdots \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \cdots \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$



d)

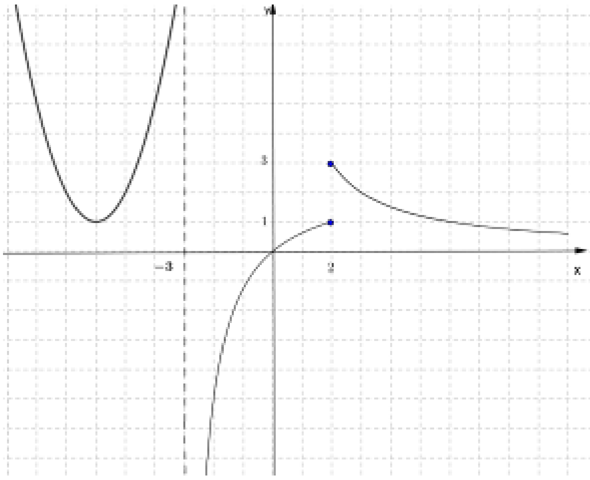
$D_{f=\cdots}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim_{x\to-3^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim_{x\to-3^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\begin{cases} \lim_{x\to2^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots..$



e)

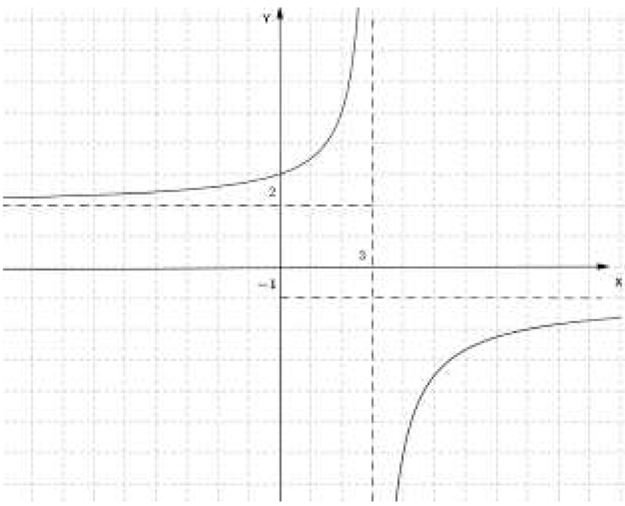
$D_f = \ldots..$

……………………..

………………………

………………………

………………………

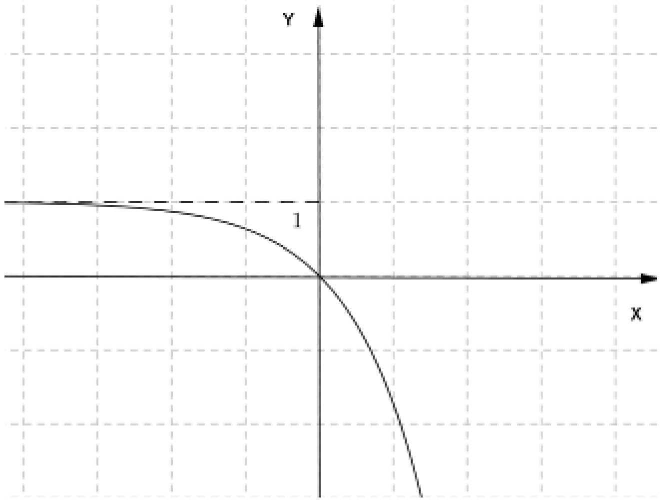


II) Proviamo adesso a **disegnare un grafico che abbia dei limiti assegnati.**

a) $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

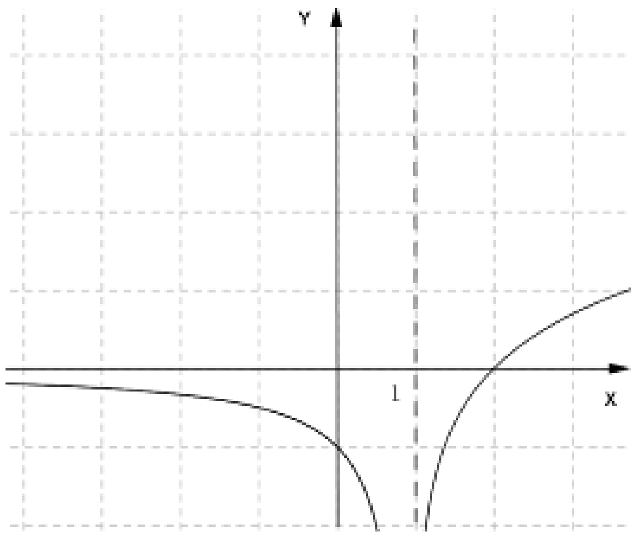
Un possibile grafico potrebbe essere:



b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Possiamo disegnare un grafico così:



Naturalmente questo è solo un esempio poiché ci possono essere grafici diversi ma che hanno comunque gli stessi limiti.

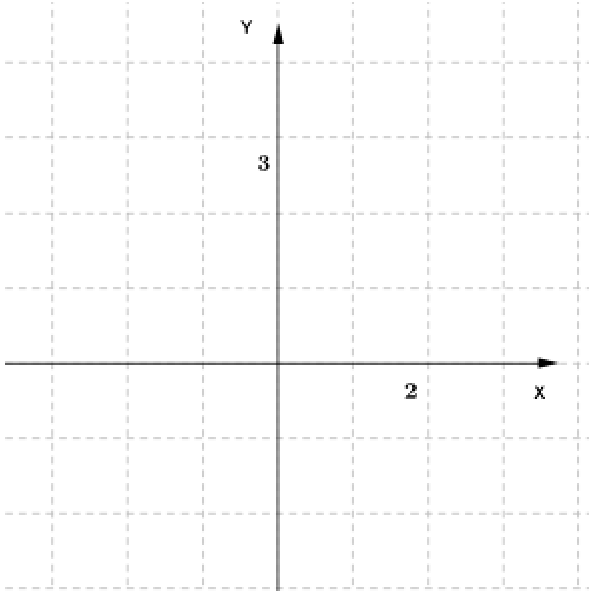
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Come potrebbe essere il grafico di una funzione che ha questi limiti?

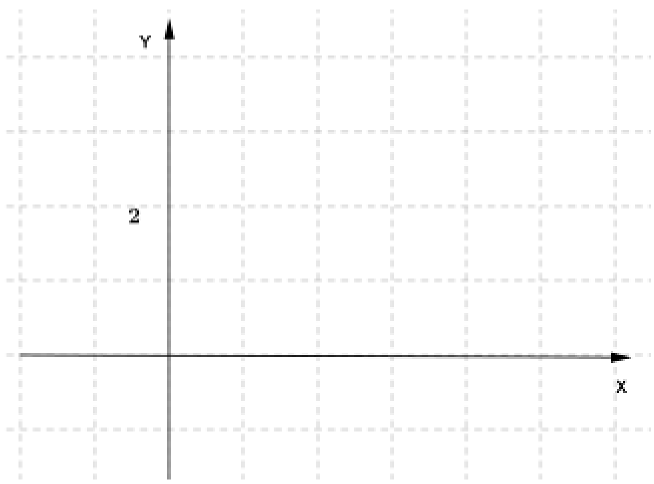


d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

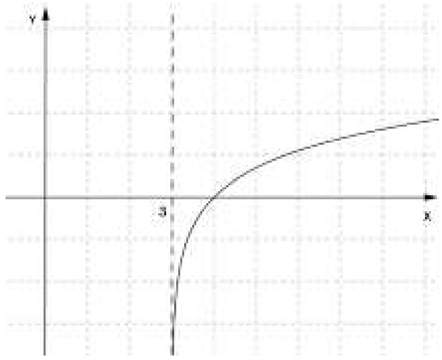
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$



Come potrebbe essere il grafico di una funzione con questi limiti?

III) Tracciamo dei grafici conosciuti e indichiamone i limiti:

a) $f(x) = \ln(x-3)$

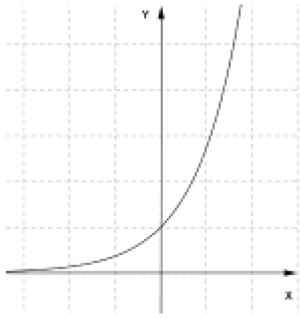


$D_f: x > 3$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \quad x = 3$ asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = e^x$

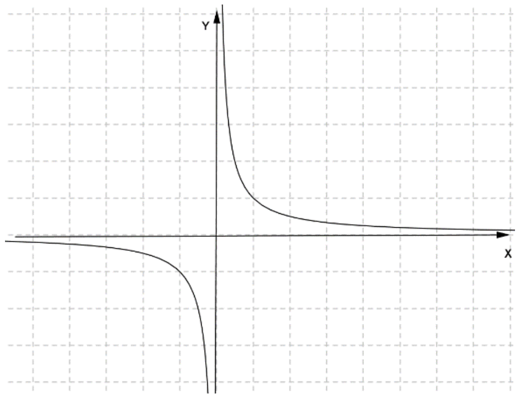


$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$



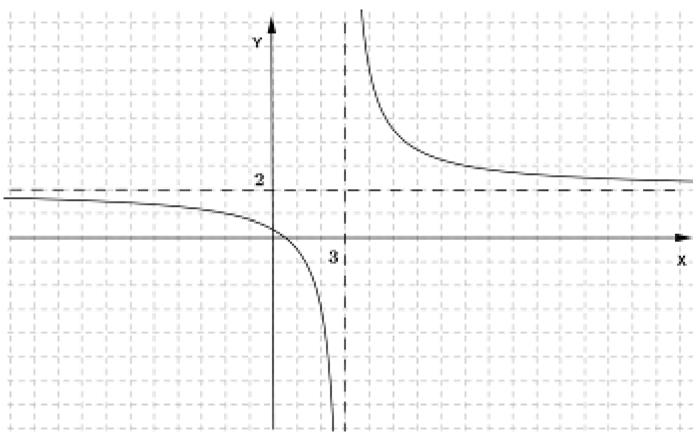
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases} \quad x = 0$ asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

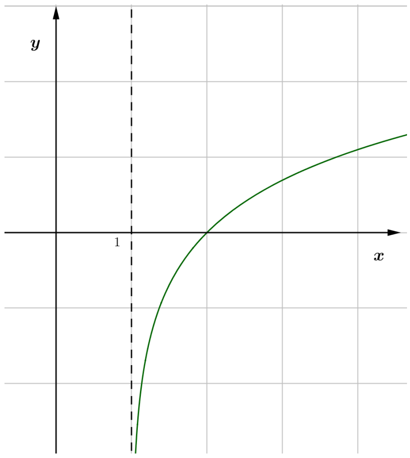
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

ESERCIZI

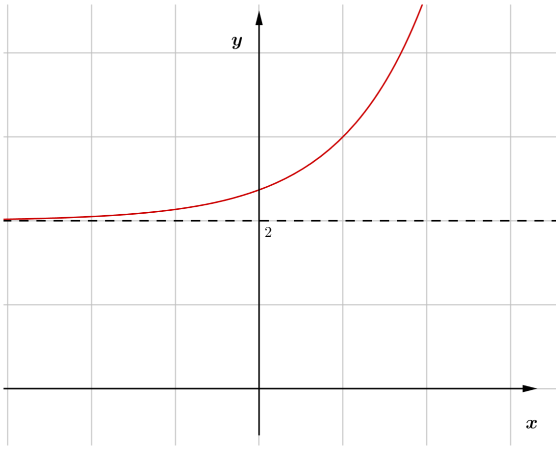
LIMITI

1) Scrivi quali sono i limiti significativi della funzione con il seguente grafico:

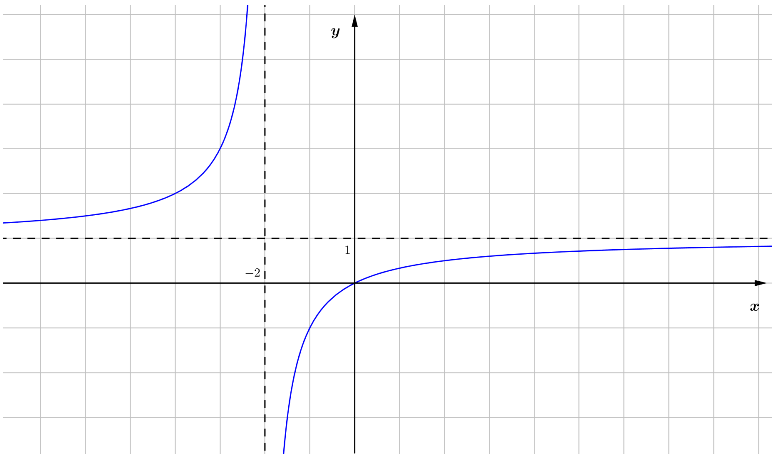
a)



b)



c)



2) Disegna il grafico di una funzione che abbia i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

g) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

h) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

l) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

m) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

n) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 4} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3)Disegna i grafici delle seguenti funzioni e scrivine i limiti significativi:

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = \ln(x+2)$

c) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $y = -2^x$

e) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

f) $y = \sqrt{4 - x^2}$

g) $y = \left|\dfrac{x}{x-2}\right|$

h) $y = |senx|$

i) $y = -\ln(x+1)$

l) $y = x^2 - 2x$

m) $y = e^{x-1}$

n) $y = 2^x + 3$

o) $y = \dfrac{1-x}{x}$

p) $y = |\ln(x-3|$

q) $y = -x^2 + 1$

r) $y = 3^{x-2}$

s) $y = |x-2|$

t) $y = |tgx|$

SCHEDA DI VERIFICA
LIMITI

1. Disegna il grafico delle seguenti funzioni ed indica dominio, caratteristiche e limiti significativi:

   a. $y = -\ln(x+4)$

   b. $y = \left|\dfrac{1-x}{x+3}\right|$

   c. $y = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Disegna il grafico di una funzione che abbia i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Disegna il grafico di $y = \frac{1}{x-3}$ e scrivi i limiti significativi.

4. Disegna il grafico di $y = \ln(x+1)$ e scrivi i limiti significativi.

Calcolo dei limiti

Limite della somma di due funzioni

Supponiamo di dover calcolare

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} (f(x)+g(x))$$

e di conoscere $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$.

Possiamo dire che il limite della somma delle due funzioni sarà la somma dei limiti?

Occorre considerare vari casi e consideriamo per esempio $x \to x_0$.

a) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ si può dimostrare facilmente che

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = l_1 + l_2$$

b) Se $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = l$ e $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = +\infty$ (oppure $-\infty$)

si dimostra facilmente che

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x)+g(x)\big) = +\infty \quad \text{(oppure } -\infty)$$

(lo stesso se $\lim f(x) = \infty$ e $\lim g(x) = l$).

c) Se $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = +\infty$ è chiaro (la dimostrazione è semplice) che

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x)+g(x)\big) = +\infty$$

e che, analogamente, se $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = -\infty$ e $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = -\infty$ anche

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x)+g(x)\big) = -\infty$$

d) Ma se $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = -\infty$ (o viceversa)?

Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = 2x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) = x$ ho $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

- $f(x) = 2x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -2x \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) \equiv 0$ ho $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 0$

- $f(x) = 2x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -3x \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) = -x$ ho $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$

- $f(x) = x + 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) \equiv 1$ ho $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 1$

Quindi è chiaro che **in questo caso non c'è una regola generale**: si dice che si ha una **"forma indeterminata"** nel senso che $\underset{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}}{\mathrm{Lim}} (f(x) + g(x))$ quando $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to -\infty$ non può essere determinato a priori e il limite dovrà essere calcolato caso per caso con particolari accorgimenti. Riassumiamo quindi i vari casi in questa tabella:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) + g(x)$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**forma indeterminata**

Limite del prodotto di due funzioni

In questo caso abbiamo la seguente situazione:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) \cdot g(x)$
l_1	l_2	$l_1 \cdot l_2$
$l \neq 0$	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)
$\boldsymbol{l = 0}$	∞	**forma indeterminata**
∞	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)

Quando scriviamo "regola dei segni del prodotto" significa che

se $\lim f(x) = l > 0$ e $\lim g(x) = +\infty$ allora $\lim f(x) \cdot g(x) = +\infty$

se $\lim f(x) = l < 0$ e $\lim g(x) = +\infty$ allora $\lim f(x) \cdot g(x) = -\infty$

e così via.

Ma perché $\mathbf{0} \cdot \infty$ risulta una forma indeterminata?
Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = x$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) \equiv 1$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 1$

- $f(x) = x^2$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = x$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

- $f(x) = x$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$

Quindi è chiaro che **non c'è una regola generale per questo limite**: dovremo calcolarlo caso per caso con opportuni passaggi.

Limite della funzione reciproca

Abbiamo i seguenti casi (la dimostrazione è semplice):

$\lim f(x)$	$\lim \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$l = 0^+$ (cioè $f(x) > 0$)	$+\infty$
$l = 0^-$ (cioè $f(x) < 0$)	$-\infty$
∞	0

Limite del quoziente di due funzioni

Osservando che $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ otteniamo:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 \neq 0$	$\frac{l_1}{l_2}$
$l_1 \neq 0$	$l_2 = 0$	∞ (regola dei segni)
l_1	∞	0
∞	l_2	∞ (regola dei segni)
∞	∞	**forma indeterminata**
0	**0**	**forma indeterminata**

Abbiamo due forme indeterminate perché

$\frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0$ (forma indeterminata del prodotto)

$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$ (forma indeterminata del prodotto)

In conclusione, nel calcolo dei limiti, si presentano **4 forme "indeterminate":**

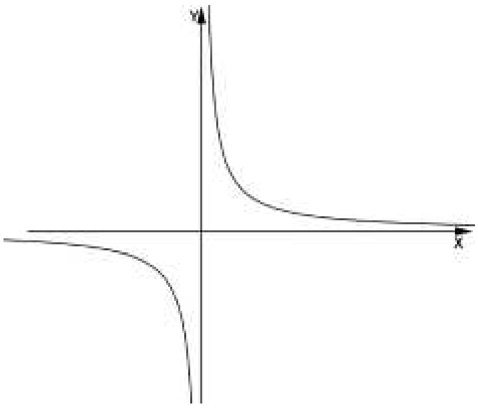
- $+\infty - \infty$ (per la somma)
- $0 \cdot \infty$ (per il prodotto)
- $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ (per il quoziente)

Esempi

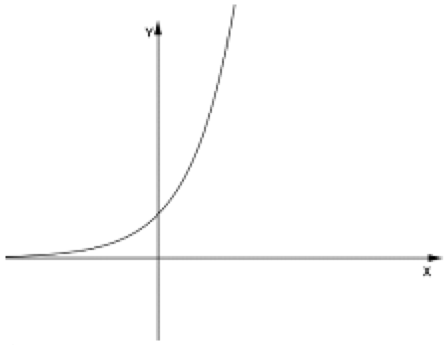
Daremo per scontata la continuità e la conoscenza dei limiti significativi delle funzioni elementari.

Per esempio:

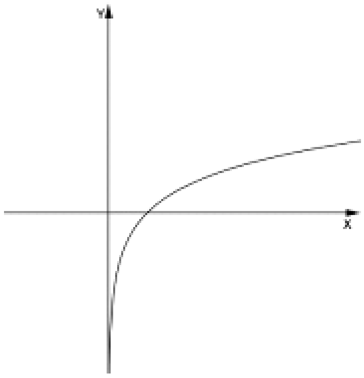
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$



$$\lim_{x\to -\infty} e^x=0$$
$$\lim_{x\to +\infty} e^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to 3} e^x=e^3$$

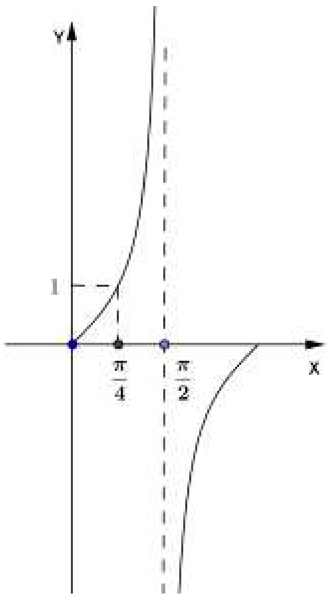


$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0$$



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tgx=+\infty,\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tgx=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} tg\,x=tg\frac{\pi}{4}=1$$



Esempi di calcolo di limiti

a) Limiti di somme di funzioni

- $\lim_{x\to 1} x^2 + 2x - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 + 3x^3 = (+\infty + \infty) = +\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} e^x + x = (0 - \infty) = -\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} \ln x + 3 = (+\infty + 3) = +\infty$

- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x + 2x = (+\infty + \pi) = +\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \operatorname{sen} x = (+\infty + 0) = +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x$

  $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ ma non esiste $\lim_{x\to +\infty} \sin x$

Osserviamo però che $x + \operatorname{sen} x \geq x - 1$ e poiché

$$\lim_{x\to +\infty} (x-1) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x = +\infty$$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 - x \quad (+\infty - \infty)$

Si tratta della forma indeterminata $(+\infty - \infty)$: **nel caso di funzioni polinomiali possiamo mettere in evidenza** e uscire dalla forma di indecisione:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 - x = \lim_{x\to +\infty} x(x-1) = \big(+\infty \cdot (+\infty)\big) = +\infty$$

- $\lim_{x\to -\infty} x^2 - x = (+\infty + \infty) = +\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} x^2 + x = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to -\infty} x(x+1) = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty-\infty)$

Si tratta di una forma indeterminata: possiamo fare una specie di "razionalizzazione":

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-(x^2+1)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} \quad \left(-\frac{2}{+\infty}\right) = 0$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty-\infty)$

Si tratta ancora di una forma indeterminata, ma non conviene fare come prima perché x^2 non si semplificherebbe e avremmo un'altra forma indeterminata $(\frac{\infty}{\infty})$.
Possiamo mettere in evidenza x^2 e portare fuori dalla radice: ricordiamo che $\sqrt{x^2}=|x|$, ma se il limite è $x\to+\infty$ allora x è positivo e $|x|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2-\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{0}}-\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{0}}\right) \qquad (+\infty\cdot\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{n° pos.}}) = +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} \qquad (+\infty-\infty)$

Anche in questo caso non conviene "razionalizzare" ma occorre mettere in evidenza:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{3+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{0}}-\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{0}}\right) = \left(+\infty(\sqrt{3}-1)\right) = +\infty$$

b) Limiti di prodotti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} x \cdot e^x = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \cos x \cdot \ln x = \big(1 \cdot (-\infty)\big) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} (\ln x + 1)^2 = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} x \cdot tg\, x = \left(\frac{\pi}{2} \cdot (-\infty)\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to +\infty} x \cdot \operatorname{arctg} x = \left(+\infty \cdot \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot \ln x = \big((+\infty)(+\infty)\big) = +\infty$

c) Limiti di quozienti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{2x} = \left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

  $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$

  $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \left(-\frac{\infty}{0^+} = -\infty \cdot \left(\frac{1}{0^+}\right) = (-\infty) \cdot (+\infty)\right) = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{arctg} x}{x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x+2}$: si tratta di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$: possiamo raccogliere

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)\right)} = 2$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x+3}$: anche in questo caso è una forma $\frac{\infty}{\infty}$ e raccogliendo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x\left(1+\left(\frac{3}{x}\right)\right)} = \left(\frac{+\infty \cdot 2}{1}\right) = +\infty$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^3\left(1+\left(\frac{5}{x^3}\right)\right)} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = 0$

Osserviamo che $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}}$ con $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinomi risulterà:

∞	se	grado $P_1(x) >$ grado $P_2(x)$
$l = \frac{\text{coefficiente termine di grado max di } P_1(x)}{\text{coefficiente termine di grado max di } P_2(x)}$	se	grado $P_1(x) =$ grado $P_2(x)$
0	se	grado $P_1(x) <$ grado $P_2(x)$

- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Risulta una forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}\right)$, ma non conviene mettere in evidenza come prima perché $x \to 2$ e non $x \to \infty$ e quindi non otterremmo termini che tendono a zero: in questo caso scomponendo e semplificando abbiamo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$$

ESERCIZI
CALCOLO DI LIMITI

Calcola i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 2x$ $[+\infty]$

2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^2-1}$ $[-\infty]$

3. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$ $[0]$

4. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$ $[+\infty]$

5. $\lim_{x \to 2} x^2 + x - 3$ [3]

6. $\lim_{x \to 1} \ln x + 3x^2$ [3]

7. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x$ $[\pi/6]$

8. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x - 5x$ $[-\infty]$

9. $\lim_{x \to 2} (x-2) \ln x$ $[0]$

10. $\lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \ln x$ $[+\infty]$

11. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+5}$ $[+\infty]$

12. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-x+1}{3x^2-2}$ [1/3]

13. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x-2}{2x^2+1}$ $[+\infty]$

14. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{2x^3+x+2}$ [0]

15. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{3x+1}$ [1/3]

16. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x+1}{x^2-2x-5}$ [$+\infty$]

17. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{2x^3+x+1}$ [$\frac{1}{2}$]

18. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3}{2x^3+1}$ [0]

19. $\lim_{x+\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+5}$ [0]

20. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$ [$+\infty$]

21. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+4}$ [0]

22. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2+1}$ [$-\infty$]

23. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+5}$ [$-\infty$]

24. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5+x^2}{3x^2-1}$ [$\frac{1}{3}$]

25. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+x-3}$ [$\frac{\sqrt{2}}{4}$]

26. $\lim_{x\to+\infty} \frac{9-x^2}{3-x}$ [6]

27. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4}-\sqrt{3x^2+1}$ [$-\infty$]

28. $\lim_{x\to5} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$ [6]

29. $\lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x-1}$ [3]

30. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{4x^4+x+2}$ [$\frac{1}{4}$]

Limite di una funzione composta

Supponiamo di dover determinare $\lim_{x\to x_o} g(f(x))$ oppure $\lim_{x\to\infty} g(f(x))$: si può dimostrare che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (l può essere anche $\pm\infty$ oppure si può trattare di un limite per $x \to \infty$) allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y)$$

Esempi

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} e^{\operatorname{tg} x} \underset{\substack{\downarrow \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty}}{=} \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1}}{=} \lim_{y\to 1} \ln y = 0$$

Nota: per calcolare il limite di $f(x)^{g(x)}$ si scrive

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

e si calcola come limite di una funzione composta.

Esempio: $\lim_{x\to+\infty} (x+1)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln(x+1)} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$

Un limite importante

Se proviamo a calcolare $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ ci accorgiamo che non riusciamo a calcolarlo perché all'esponente compare la forma indeterminata $\infty\cdot 0$: se, utilizzando la calcolatrice, proviamo a calcolare $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sostituendo a x numeri molto grandi in valore assoluto (sia positivi che negativi) , notiamo che ci stabilizziamo su un numero che risulta circa 2,71…..

Questo valore limite è stato indicato con la lettera *e* cioè abbiamo la seguente definizione del numero *e*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Nota: con la scrittura $x \to \infty$ si intende che il limite vale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

NOTA: *e* viene chiamato **numero di Eulero** o **numero di Nepero** e lo avevamo già trovato quando abbiamo studiato i logaritmi.

ESERCIZI
LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x-1}}$ $[e]$

2. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ $\left[+\frac{\pi}{2}\right]$

3. $\lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $[+\infty]$

4. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ [0]

5. $\lim_{x\to 2} \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$ $[\ln 4]$

6. $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ $[-\infty]$

7. $\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{3x}{x+1}}$ $[8]$

8. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^x$ $[0]$

9. $\lim_{x+\infty} e^{\frac{1-x^2}{x+2}}$ [0]

10. $\lim_{x\to+\infty} arctg\left(\frac{3+x^4}{3x^3-1}\right)$ [$\frac{\pi}{2}$]

11. $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x^3+1}{2x^2-5}}$ [$+\infty$]

12. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^3-7}\right)$ [$-\infty$]

13. $\lim_{x \to +\infty} arctg\left(\frac{x^3-1}{x^3+x-2}\right)$ [$\frac{\pi}{4}$]

14. $\lim_{x \to +\infty} (2x-1)^x$ [$+\infty$]

15. $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x^4+1}{x^4}}$ [e]

16. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{5x^2-1}$ [$-\infty$]

17. $\lim_{x \to -1} 2^{\frac{x^2-1}{x+1}}$ [$\frac{1}{4}$]

18. $\lim_{x \to +\infty} (x+1)^{\frac{2x+3}{x}}$ [$+\infty$]

19. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$ [0]

20. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3+5}{x^3-x+1}\right)^x$ [$+\infty$]

Limiti e asintoti di una funzione

Abbiamo già visto che

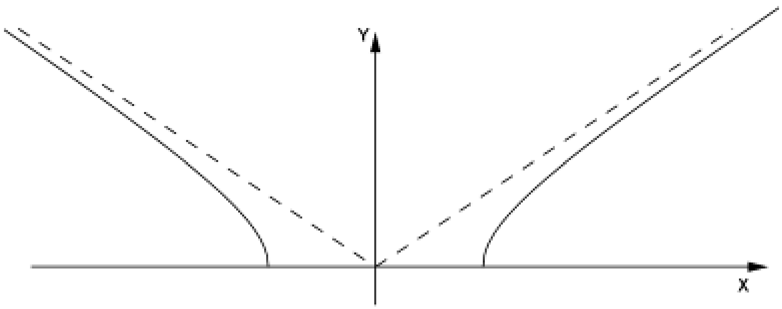
- se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ e/o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \Rightarrow x = x_0$ è asintoto verticale

- se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Rightarrow y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l' \Rightarrow y = l'$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

Ma come possiamo determinare, con il calcolo dei limiti, un asintoto obliquo del grafico di f(x)?

Ricordiamo che il grafico di una funzione può avere anche due asintoti obliqui diversi (vedi figura).



Consideriamo per esempio $x \to +\infty$.

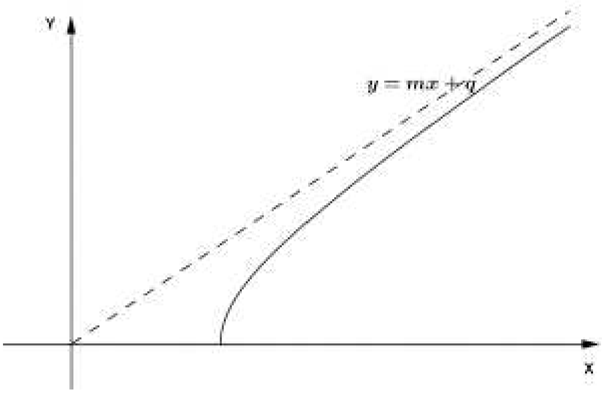
Quali sono le condizioni che si devono verificare perché il grafico di $f(x)$ abbia come asintoto obliquo la retta $y = mx + q$ per $x \to +\infty$?

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad (m \neq 0)$

Infatti se $f(x) \simeq mx + q$ per $x \to +\infty$ allora

$\frac{f(x)}{x} \simeq m + \left(\frac{q}{x}\right)$



3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$ (con q anche 0)

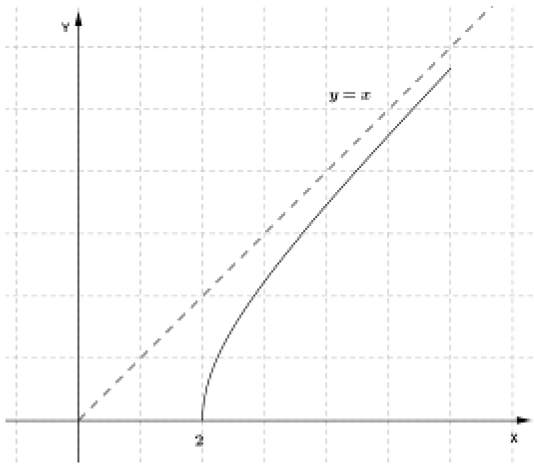
Esempio

Verifichiamo $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ha asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$ (si tratta infatti di un "pezzo" di iperbole equilatera).

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = 1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 4} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \left(\frac{-4}{+\infty}\right) = 0 \qquad (q)$$



Vediamo se $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ ha asintoti obliqui. Cominciamo a studiare i limiti per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{x + 1} = -1 \qquad (q)$$

Quindi $y = x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Per $x \to -\infty$ si ottiene lo stesso asintoto (verificalo).

Nota: osserviamo che **una funzione razionale fratta** $f(x)$ **in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore avrà sempre un asintoto obliquo** (lo stesso per $x \to \pm\infty$) (che si può ottenere anche facendo la divisione tra il polinomio "numeratore" e il polinomio "denominatore").

Esercizio svolto

Ora che abbiamo esaminato il metodo di ricerca di eventuali asintoti obliqui, possiamo, data una funzione, determinare tutti i suoi eventuali asintoti.

Consideriamo $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$

Per prima cosa determiniamo il dominio di $f(x)$: $D_f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Per determinare eventuali asintoti cominceremo proprio studiando i limiti quando $x \to 1$ o $x \to -1$.
È importante in questo caso distinguere limite destro e limite sinistro:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \left(\frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \left(\frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$$

Quindi $x = -1$ è asintoto verticale.

Nota: per stabilire il segno dello zero al denominatore basta ricordare che $1 - x^2 > 0$ quando $-1 < x < 1$.

Quindi se $x \to -1^-$ avrò 0^-

se $x \to -1^+$ avrò 0^+

ecc…

Analogamente: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$

Quindi $x = 1$ è asintoto verticale.

Poiché il dominio della funzione me lo permette, passo al calcolo dei limiti quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

In questo caso mi rendo subito conto che si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore e quindi ci sarà un asintoto obliquo (lo stesso sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$).

Lo determino studiando i limiti per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x - x^3} = -2 \quad (m)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{1 - x^2} + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = 0 \quad (q)$$

Quindi $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.

Infatti alla stessa conclusione si arriva facendo la divisione fra numeratore e denominatore della funzione:

$$\begin{array}{c|l}
2x^3 & -x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 \ \ 2x & -2x \\ \cline{1-1}
// &
\end{array}$$

$\frac{2x^3}{1-x^2} = -2x + \frac{2x}{1-x^2}$ e quindi poiché $\frac{2x}{1-x^2} \to 0$ per $x \to \infty$ si ha che $f(x) \simeq -2x$

In conclusione la funzione $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$ ha

$x = -1$ e $x = 1$ come asintoti verticali

$y = -2x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

ESERCIZI
ASINTOTI

Determina gli asintoti delle seguenti funzioni:

1) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ $[x = -1\ as. vert.; x = 1\ as. vert.; y = x\ as. obl.]$

2) $y = \frac{x^4}{x^4-16}$ $[x = -2\ as\ vert.; x = 2\ as. vert.; y = 1\ as. orizz.]$

3) $y = \frac{2x^4}{x^3-1}$ $[x = 1\ as. vert.; y = 2x\ as. obliquo]$

4) $y = \frac{x^2}{3x-1}$ $[x = \frac{1}{3}\ as. vert.; y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\ as. obl.]$

5) $y = \frac{1-x^2}{x^2-9}$ $[x = -3\ as. vert.; x = 3\ as. vert.; y = -1\ as. orizz.]$

6) $y = \ln\left(\frac{x-4}{x-1}\right)$ $[y = 0\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 1\ as. vert.; x = 4\ as. vert.]$

7) $y = e^{\frac{x-4}{x}}$ $[y = e\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 0\ as. vert.]$

8) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $[y = 1\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 2\ as. vert.]$

9) $y = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ $[x = 1\ as. vert.; x = 0\ as. vert.; y = 0\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty]$

10) $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $[y = 1\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = -1\ as. vert.; x = 1\ as. vert.]$

11) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$ $[y = 2x\ as. obl.; x = 1\ as. vert,; x = -1\ as. vert.]$

12) $y = \frac{1-3x-x^2}{x+3}$ $[y = -x\ as. obl.\ per\ x \to \pm\infty; x = -3\ as. vert.]$

SCHEDA DI VERIFICA
CALCOLO DEI LIMITI

1) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ $[+\infty]$

b. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $[-\infty]$

c. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{x-2}$ $[+\infty]$

d. $\lim_{x \to -\infty} x^3 - x^2$ $[-\infty]$

e. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x^2-2}$ $[+\infty]$

f. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-x^3}{3x^2-1}$ $[-\infty]$

g. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x^3+1}{x^2}\right)$ $[+\infty]$

h. $\lim_{x \to -\infty} arct\left(\frac{x^2-2}{2x}\right)$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

2) Determina dominio e asintoti delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{x^3+2x^2+}{1-x^2}$

b. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Complemento
Successioni e serie numeriche

Successioni

Una successione numerica è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cioè una legge che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $f(n)$ che in genere viene indicato con la scrittura a_n o b_n ecc. (elemento n-esimo della successione o termine n-esimo).

Esempio 1: $f: n \to \frac{1}{n}$ cioè $a_n = \frac{1}{n}$

I termini di questa successione (definita per $n \neq 0$) sono:

$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3} \dots$

Esempio 2: $f: n \to n^2$ cioè $a_n = n^2$.

In questo caso si ha:

$a_0 = 0 \;\; a_1 = 1, a_2 = 4\,, a_3 = 9 \dots$

Esempio 3: $f: n \to (\text{-}1)^n$ cioè $a_n = (\text{-}1)^n$.

Stavolta abbiamo:

$a_0 = 1\,,\;\; a_1 = -1, a_2 = 1,\;\; a_3 = -1 \dots$

Possiamo studiare $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e si possono presentare tre casi:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ in questo caso si dice che **la successione converge a *l* .**

  Per esempio $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *oppure* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$: allora **la successione si dice divergente.**

  Per esempio $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

- Se $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in tal caso **la successione si dice indeterminata**.

  Se per esempio consideriamo $a_n = (-1)^n$ i termini della successione saranno:

  $1 \;;\; -1 \;;\; 1 \;;\; -1 \;\; \dots.$

  e quindi in questo caso non esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Serie numeriche

Data una successione numerica a_n posso considerare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$$

Consideriamo la successione s_n delle somme "parziali":

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0 \\
&s_1 = a_0 + a_1 \\
&s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\
&s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\
&... \\
&s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n
\end{aligned}$$

Se consideriamo $\lim_{n\to+\infty} s_n$ si possono presentare tre casi:

- $\lim_{n\to+\infty} s_n = S$: si dice che **la serie converge** e S è chiamata "somma" della serie;
- $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ ($+\infty$ o $-\infty$) : si dice che **la serie diverge** ;
- non esiste $\lim_{n\to+\infty} s_n$: si dice che **la serie è indeterminata**.

Esempio

Una serie particolarmente importante è la cosiddetta serie geometrica (somma dei termini di una successione geometrica):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n + ...$$

E' chiaro che se $a = 1$ la serie diverge.
Consideriamo $a \neq 1$.
Osserviamo che la successione delle somme parziali può anche essere scritta così:

$$s_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Calcolando $\lim_{n\to+\infty} s_n$ avremo:

- se $a > 1$ la serie diverge a $+\infty$
- se $a \leq -1$ la serie è indeterminata
- se $-1 < a < 1$ la serie converge a $S = \frac{1}{1-a}$ poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

  poiché in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$