L’algebra di secondo grado

Ripasso delle equazioni di secondo grado

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Abbiamo visto che un'equazione è di secondo grado in forma "normale" è del tipo

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \qquad a,b,c \quad \in \Re, con \quad a \neq 0}$$

e che per risolverla si procede nel seguente modo:

1) Se $\boxed{b=0}$ cioè abbiamo $\boxed{ax^2+c=0}$ spostiamo il termine noto e si hanno due soluzioni opposte o nessuna soluzione reale.

Esempi

1. $4x^2-1=0 \rightarrow 4x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{4} \rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$
2. $4x^2+1=0 \rightarrow 4x^2=-1 \rightarrow x^2=-\frac{1}{4}$ nessuna soluzione reale

2) Se $\boxed{c=0}$ cioè abbiamo $\boxed{ax^2+bx=0}$ mettiamo in evidenza la *x*:

$$x(ax+b)=0$$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo quindi:

$$x_1=0 \text{ oppure } ax+b=0 \rightarrow x_2=-\frac{b}{a}$$

Esempi

1. $3x^2-x=0 \rightarrow x(3x-1)=0 \rightarrow x_1=0 \quad \cup \quad x_2=\frac{1}{3}$
2. $x^2+x=0 \rightarrow x(x+1)=0 \rightarrow x_1=0 \quad \cup \quad x_2=-1$

3) Se tutti i coefficienti a,b,c sono diversi da zero cioè abbiamo l'equazione completa $\boxed{ax^2+bx+c=0}$, indicando con la lettera Δ l'espressione b^2-4ac, abbiamo dimostrato che:

a) Se $\boxed{\Delta>0}$ **le soluzioni dell'equazione sono "distinte"** cioè sono due valori diversi dati dalla formula $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Esempi

1. $x^2+4x-5=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\dfrac{-4\pm 6}{2}\rightarrow x_1=1 \quad \cup \quad x_2=-5$

2. $2x^2+x-1=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}\rightarrow x_1=-1 \quad \cup \quad x_2=\dfrac{1}{2}$

b) Se $\boxed{\Delta=0}$ **le soluzioni sono "coincidenti"** cioè abbiamo un unico valore:

Esempi

1. $x^2+4x+4=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=-\dfrac{4}{2}=-2$

Infatti x^2+4x+4 è il quadrato di $x+2$ e quindi $(x+2)^2=0 \rightarrow (x+2)^2=0 \rightarrow x=-2$

2. $x^2-2x+1=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Infatti x^2-2x+1 è il quadrato di $x-1$ e quindi $(x-1)^2=0 \rightarrow x=1$

c) Se $\boxed{\Delta<0}$ **non ci sono soluzioni reali.**

Esempi

1. $x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta=1-4=-3$ nessuna soluzione reale

2. $x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta=1-4=-3$ nessuna soluzione reale

Somma e prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado

Ricordiamo inoltre che, nel caso in cui $\Delta \geq 0$ cioè l'equazione abbia due soluzioni (distinte o coincidenti) valgono le seguenti relazioni:

Somma delle soluzioni $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

Prodotto delle soluzioni $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

Scomposizione di un trinomio di secondo grado

Ricordiamo che abbiamo visto che:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)}$$

Infatti se moltiplichiamo abbiamo:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] = ax^2 + bx + c$$

Esempi

1) Consideriamo $x^2 + 4x - 5 = 0$: le soluzioni sono $x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = -5$

Infatti abbiamo che :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -5$$

e inoltre $$x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$$

2) Consideriamo $4x^2 + 4x + 1 = 0$: le soluzioni sono $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.

Infatti abbiamo che:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{4} = -1; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

e inoltre $$4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

ESERCIZI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado:

1) $3-x^2=0$; $\frac{1}{2}x^2-2x=0$; $x^2=0$ [$\pm\sqrt{3}$; 0, 4; $x=0(doppia)$]

2) $x-5x^2=0$; $1+3x^2=0$; $16=9x^2$ [0, $\frac{1}{5}$; *impossibile*; $\pm\frac{4}{3}$]

3) $\frac{1}{3}x^2=0$; $4-x^2=0$; $x^2-12x=0$ [$x=0(doppia)$; ± 2; 0, 12]

4) $-4x^2=-12$; $x^2=\frac{1}{5}x$; $\frac{1}{2}x^2-2=0$ [$\pm\sqrt{3}$; 0, $\frac{1}{5}$; ± 2]

5) $-x^2=36$; $2x^2-\frac{1}{3}x=0$; $9-x^2=0$ [impossibile; 0, $\frac{1}{6}$; ± 3]

6) $3\sqrt{2}x^2=0$; $16x^2=1$; $-4x^2+8x=0$ [$x=0(doppia)$; $\pm\frac{1}{4}$; 0, 2]

7) $(x-3)(x+1)=10x-3$ [$x_1=0$, $x_2=12$]

8) $x^2+\frac{1}{2}-\frac{(x+2)}{2}=\frac{1+x}{2}-(1+x^2)$ [$x_1=0 \cup x_2=\frac{1}{2}$]

9) $\sqrt{2}(x^2-1)+1=x^2$ [$x_{1,2}=\pm 1$]

10) $x+(x+2)^2+(2x+1)(x-3)=(x+1)^2+12$ [$x_1=-2$, $x_2=3$]

11) $2x^2-5x-3=0$ [$-\frac{1}{2}$, 3]

12) $x^2+5x+6=0$ [$x_1=-3$, $x_2=-2$]

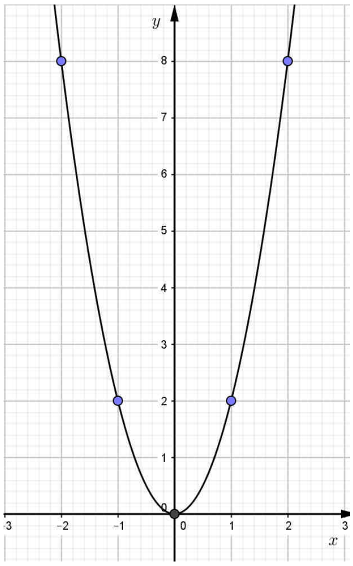
13) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}=0$ [$x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$]

Il grafico di $y = ax^2 + bx + c$

Abbiamo visto che il grafico della funzione $y = mx + q$ in cui la variabile x compare al primo grado risulta una retta. Ma come risulta il grafico dell’equazione $y = ax^2 + bx + c$?
Vediamo alcuni esempi.

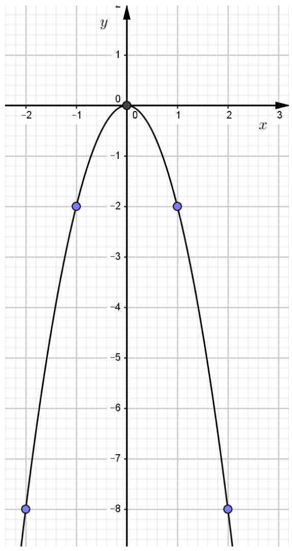
a) $\boxed{y = 2x^2}$

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8



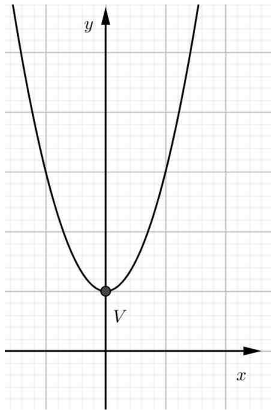
La curva che otteniamo si chiama “parabola”: è simmetrica rispetto all’asse y e il punto in cui interseca l’asse di simmetria è chiamato “vertice” (nel nostro esempio il vertice è $V(0;0)$).
Se il coefficiente a di x^2 è positivo come nel nostro esempio, la parabola è rivolta verso l’altro.
Se invece proviamo a disegnare $y = -2x^2$ ($a < 0$), avremo una parabola rivolta verso il basso:

x	y
-2	-8
-1	-2
0	0
1	-2
2	-8



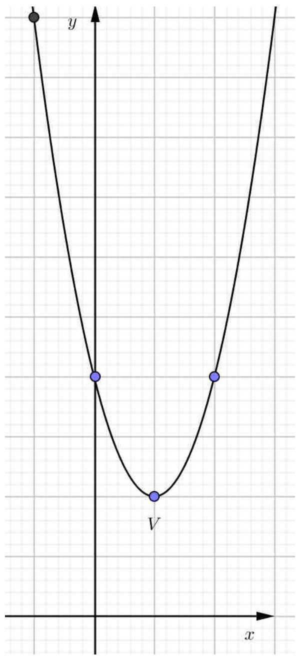
Osservazione: se aumentiamo il valore assoluto di a la parabola “si stringe”: basta per esempio confrontare nello stesso sistema di riferimento $y = x^2$ con $y = 2x^2$.

b) $\boxed{y = 2x^2 + 1}$



Disegniamo per punti questa parabola: osserviamo che risulta traslata del vettore $\vec{v}(0;1)$ rispetto alla parabola $y = 2x^2$ ed ha quindi il vertice in $V(0;1)$.

c) $\boxed{y = 2x^2 - 4x + 4}$



Disegniamo il grafico per punti facendo la tabella *x,y*: per esempio

$y(-1) = 2(-1)^2 - 4(-1) + 4 = 2 + 4 + 4 = 10$ ecc.

x	y
-1	10
0	4
1	2
2	4
3	10

Ci accorgiamo che otteniamo un grafico della stessa forma dei precedenti.

In generale quindi **il grafico di** $y = ax^2 + bx + c$ **risulta una parabola** rivolta verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$ (se $a = 0$ otteniamo una retta).

Come disegnare la parabola di equazione $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

Ma come possiamo disegnare una parabola di data equazione senza fare la tabella?
Cominciamo con il ricercare un metodo per individuare il **vertice** della parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Osserviamo che il vertice è l'unico punto della parabola che appartiene all'asse di simmetria della curva: se consideriamo due punti A e B della parabola aventi la stessa ordinata l'ascissa del vertice sarà uguale all'ascissa del loro punto medio.

Per semplificare i calcoli possiamo prendere come punto A il punto in cui la parabola taglia l'asse y, che corrisponde a x=0 e quindi è $A(0;c)$: il punto B avrà quindi ordinata c e la sua x si troverà risolvendo $ax^2 + bx + c = c \rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_A = 0; \quad x_B = -\frac{b}{a}$.

In conclusione l'ascissa del punto medio di AB sarà

$$\frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$$

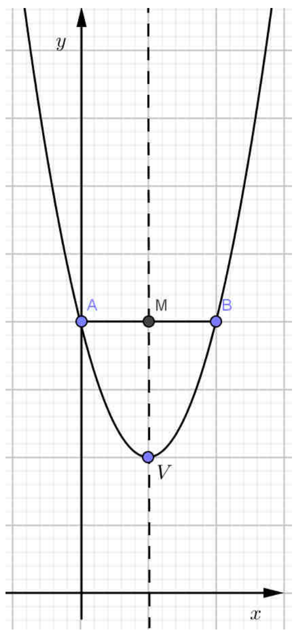
e quindi anche l'ascissa di V sarà $\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$

Infatti nell'ultimo esempio $y = 2x^2 - 4x + 4$ abbiamo

$$a = 2; \quad b = -4; \quad c = 4$$

e

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{4} = 1$$



Osserviamo che possiamo poi trovare l'ordinata del vertice sostituendo l'ascissa trovata nell'equazione della parabola.

Nel nostro caso abbiamo $y_V = 2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$

e quindi il vertice è $V(1;2)$.

Dopo aver determinato il vertice V possiamo trovare il punto A di intersezione della parabola con l'asse y ponendo nell'equazione x=0 , tratteggiare l'asse di simmetria (retta parallela all'asse y passante per il vertice), e disegnare il punto A' simmetrico di A rispetto all'asse di simmetria.

Nota: naturalmente, se la parabola interseca l'asse x, possiamo trovare i punti di intersezione con l'asse x ponendo y=0 cioè risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e utilizzare questi punti per disegnare la parabola.

Esempio

Disegna la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$.
Per prima cosa determiniamo il vertice:

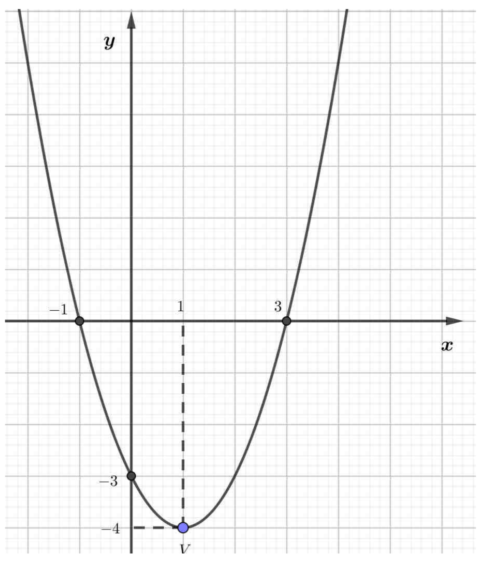
$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \to y_V = 1 - 2 - 3 = -4$$

Il vertice è quindi $V(1;-4)$.
Determiniamo l'intersezione con l'asse *y*, che si ottiene ponendo $x = 0$ e, se ci sono, le intersezioni con l'asse *x* che si ottengono ponendo $y = 0$ e quindi risolvendo l'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \to x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \to x_1 = -1 \quad \cup \quad x_2 = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$



ESERCIZI

GRAFICO DI $y = ax^2 + bx + c$

Disegna le seguenti parabole individuando il vertice, l'intersezione con l'asse y e le eventuali intersezioni con l'asse x .

1. $y = -x^2 + 2$ [$V(0;2)$, $(\pm\sqrt{2},0)$]

2. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ [$V(0;-2)$, $(\pm 2;0)$]

3. $y = x^2 - 4x$ [$V(2;-4)$, $(0;0)$ $(4;0)$]

4. $y = -x^2 + 2x - 1$ [$V(1;0)$]

5. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ [$V\left(1;-\frac{1}{2}\right)$]

6. $y = 5x^2 - 4x - 1$ [$V\left(\frac{2}{5};-\frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{5};0\right)$ $(1;0)$]

7. $y = 4x - x^2$. [$V(2;4)$; $(0;0)$ $(4;0)$]

8. $y = x^2 - 2x + 1$. [$V(1;0)$; $(0;1)$]

9. $y = x^2 - 2x$ [$V(1;-1)$; $(0;0)$; $(2;0)$]

10. $y = -2x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$]

11. $y = x^2 - 2x + 3$ [$V(1;2)$; $(0;3)$]

12. $y = -x^2 - 2x$ [$V(-1;1)$; $(0;0)$; $(-2;0)$]

13. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ [$V(2;-1)$; $(2\pm\sqrt{2};0)$; $(0;1)$]

14. $y = -x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $(\pm 1;0)$]

Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado è una disequazione del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

Per risolverla possiamo utilizzare un metodo **"algebrico"** oppure un metodo **"grafico".**

Esempi

1) $\boxed{x^2 - 4x + 3 > 0}$

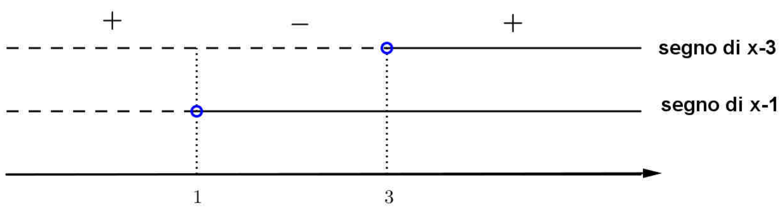
Metodo "algebrico"

Scomponiamo il trinomio di secondo grado: troviamo le soluzioni dell'equazione associata

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 2 \pm 1 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

Quindi abbiamo che $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$
Per risolvere $x^2 - 4x + 3 > 0$ dobbiamo quindi risolvere $(x-1)(x-3) > 0$
Studiamo il segno dei due fattori:
$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$
$$x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

Rappresentiamo poi la situazione con il cosiddetto "**grafico dei segni**" in cui indichiamo con una **linea continua il segno positivo** e con una **linea tratteggiata il segno negativo**.



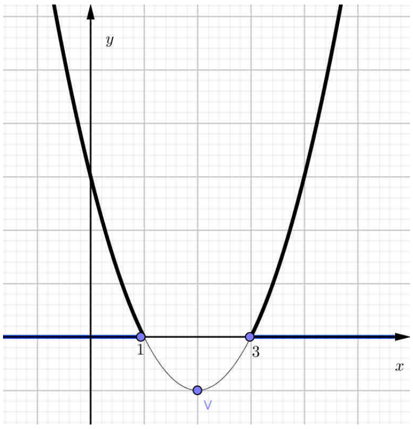
In conclusione la soluzione della disequazione sarà $x < 1 \quad \cup \quad x > 3$

Metodo "grafico"

Disegniamo la parabola associata all'equazione di secondo grado $y = x^2 - 4x + 3$: il vertice risulta $V(2;-1)$ e le intersezioni con l'asse *x* si ottengono risolvendo l'equazione

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 2 \pm 1 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

e quindi sono i punti $(1;0)$, $(3;0)$.



Risolvere la disequazione $x^2 - 4x + 3 > 0$ equivale a individuare per quali valori di *x* **la parabola si trova al di sopra dell'asse *x*** ed osservando il grafico vediamo che si tratta dei numeri minori di 1 oppure maggiori di 3.

La soluzione della disequazione è quindi $x < 1 \quad \cup \quad x > 3$ (come avevamo ottenuto anche con il metodo algebrico).

Osservazione

Per risolvere la disequazione non è necessario disegnare con precisione la parabola calcolando le coordinate del vertice ma **basta fare solo un disegno schematico della parabola**, considerando se è rivolta verso l'altro o verso il basso e indicando gli eventuali punti di intersezione con l'asse x (ottenuti risolvendo l'equazione $x^2 - 4x + 3 = 0$).

Nota: se avessimo dovuto risolvere $x^2 - 4x + 3 < 0$ avremmo avuto come soluzione, sia con il metodo algebrico che con quello grafico, $1 < x < 3$.

2) $\boxed{x^2+2x+1>0}$

Metodo “algebrico”

In questo caso l’equazione associata ha $\Delta=0$ ed infatti si tratta del quadrato di un binomio:

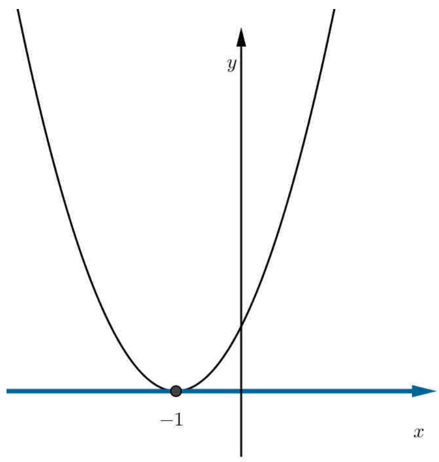
$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

Abbiamo che $(x+1)^2>0 \rightarrow \forall x \in \Re, x \neq -1$

Metodo “grafico”

Disegnando la parabola $y=x^2+2x+1$, rivolta verso l’alto, osserviamo che taglia l’asse delle x solo in $(-1;0)$ (che è anche il vertice) e quindi

$$x^2+2x+1>0 \quad \forall x \in \Re, x \neq -1$$



Osservazione
Se avessimo dovuto risolvere $x^2+2x+1>0$ non avremmo avuto nessuna soluzione.

3) $\boxed{x^2+x+1>0}$

Metodo "algebrico"

In questo caso il $\Delta = 1-4=-3<0$ e quindi non ci sono soluzioni reali dell'equazione associata.

Si può osservare in generale che scrivendo

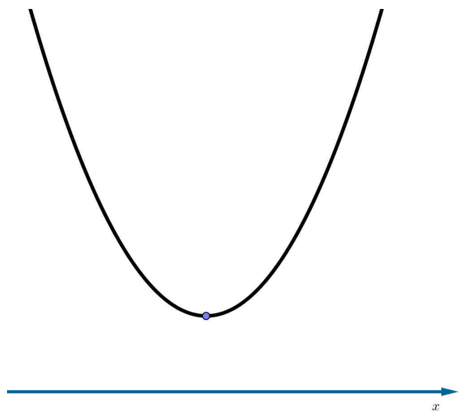
$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

poiché nella parentesi c'è un numero positivo (essendo la somma tra un quadrato e il numero corrispondente a $(-\Delta)$ che in questo caso è positivo), **quando il** $\Delta<0$ **il segno del trinomio** ax^2+bx+c **è uguale al segno di *a*** $\forall x \in \Re$.

Quindi il trinomio x^2+x+1 ha lo stesso segno di $a=1$ cioè è positivo $\forall x \in \Re$.

Metodo "grafico"

Disegniamo la parabola $y=x^2+x+1$: è rivolta verso l'alto e, poiché l'equazione associata non ha soluzioni, non interseca l'asse x.

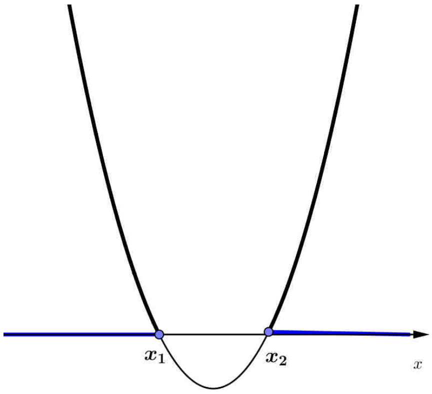


Si ha perciò $\quad x^2+x+1>0 \quad \forall x \in R$

Riepilogo

Concludiamo con un riepilogo dei vari casi che si possono presentare nella risoluzione di una disequazione di secondo grado facendo riferimento al metodo “grafico”:

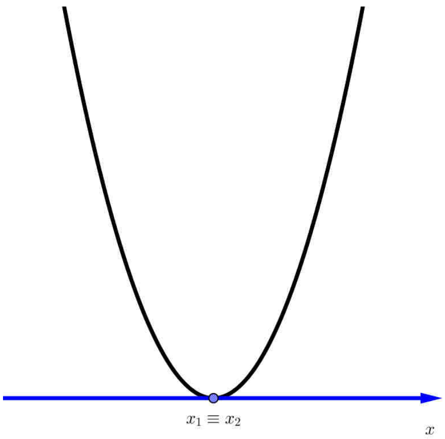
1) Quando $a>0$ **e quindi la parabola è rivolta verso l’alto** abbiamo i seguenti tre casi:



Se ci sono due soluzioni distinte x_1, x_2

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x<x_1 \cup \quad x>x_2$ (**valori esterni**)

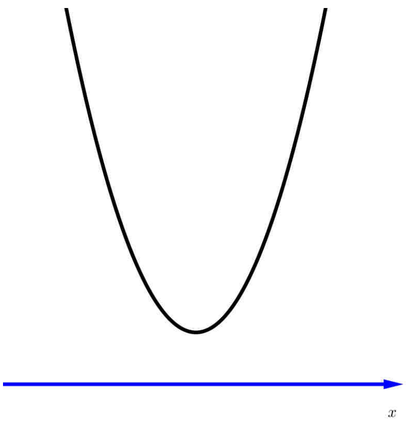
$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \quad x_1<x<x_2$ (**valori interni**)



Se ci sono due soluzioni coincidenti $x_1=x_2$

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ nessuna soluzione

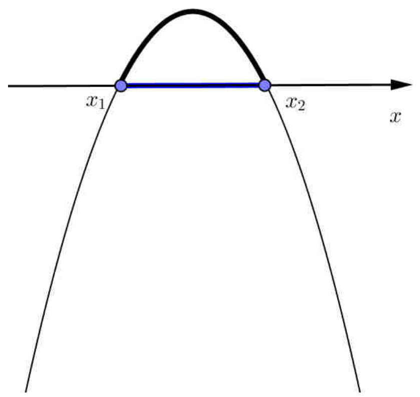


Se non ci sono soluzioni reali dell’equazione associata

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow \forall x \in \Re$

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ nessuna soluzione

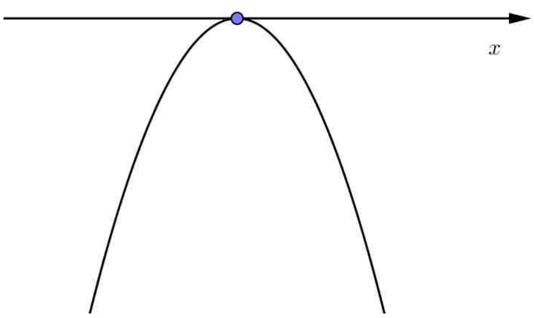
2) **Quando** $a < 0$ **e quindi la parabola è rivolta verso il basso** abbiamo i seguenti tre casi:



Se ci sono due soluzioni distinte x_1 , x_2

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

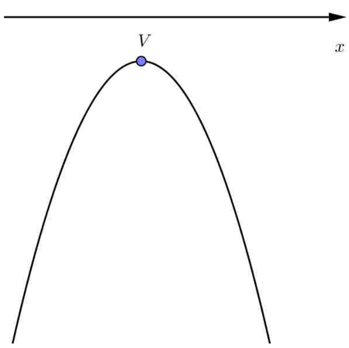
$ax_2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x < x_1 \cup \quad x > x_2$



Se ci sono due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$

$ax^2 + bx + c > 0$ nessuna soluzione

$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$



Se non ci sono soluzioni reali dell'equazione associata

$ax^2 + bx + c > 0$ nessuna soluzione

$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \Re$

Nota

Quando si ha $a < 0$ **possiamo moltiplicare tutti i termini per –1** ed invertire la diseguaglianza: in questo modo ci possiamo sempre ricondurre al caso in cui $\boxed{a > 0}$ e fare sempre riferimento alla parabola rivolta verso l'alto.

Esempio: $-x^2 + 2x > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 0 \rightarrow 0 < x < 2$

Esercizio svolto

Consideriamo la disequazione fratta

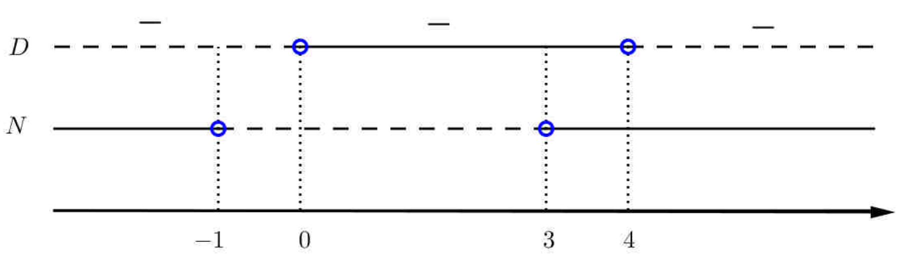
$$\frac{x^2-2x-3}{4x-x^2}<0$$

Per prima cosa dobbiamo studiare il segno del numeratore e del denominatore:

N>0 $x^2-2x-3>0 \quad (x_{1,2}=1\pm 2) \rightarrow x<-1 \cup x>3$ (parabola verso l'alto, positiva per valori "esterni" alle intersezioni con l'asse x);

D>0 $4x-x^2>0 \rightarrow x(4-x)>0$, $(x_1=0, x_2=4) \rightarrow 0<x<4$ (parabola rivolta verso il basso, positiva per valori "interni" alle intersezioni con l'asse x).

Poi dobbiamo rappresentare quello che abbiamo trovato nel "grafico dei segni":



In conclusione la soluzione della disequazione $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}<01$ sarà:

$$x<-1 \cup 0<x<3 \cup x>4$$

Nota 1: se dobbiamo risolvere $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}\leq 0$, dobbiamo considerare tra le soluzioni anche $x=-1$ e $x=3$, ma non $x=0$ e $x=4$ perché per quei valori il denominatore si annulla (C.E. della frazione algebrica: $x\neq 0, x\neq 4$).
La soluzione risulta quindi:

$$x\leq -1 \cup 0<x\leq 3 \cup x>4$$

Nota2: se dobbiamo risolvere $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}>0$, il procedimento sarebbe stato lo stesso solo che alla fine, dal grafico dei segni, avremmo considerato i valori di *x* che danno segno complessivo positivo.

La soluzione di $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}>0$ risulta quindi $\quad -1<x<0 \cup 3<x<4$

ESERCIZI
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:

1) $x^2 - 1 > 0$ $[x < -1 \cup x > 1]$

2) $4 - x^2 < 0$ $[x < -2 \cup x > 2]$

3) $x^2 - 2x + 1 < 0$ $[\textit{nessuna soluzione reale}]$

4) $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \cup x > 2]$

5) $-x^2 - 2x < 0$ $[x < -2 \cup x > 0]$

6) $x^2 - 4x + 6 > 0$ $[\forall x \in R]$

7) $x^2 + 4x + 3 < 0$ $[-3 < x < -1]$

8) $x^2 + 5 > 0$ $[\forall x \in R]$

9) $x^2 - 8x > 0$ $[x < 0 \quad \cup \quad x > 8]$

10) $-x^2 + 16 \leq 0$ $[x \leq -4 \cup x \geq 4]$

11) $x^2 + 3x + 2 > 0$ $[x < -2 \cup x > -1]$

12) $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \cup x > 2]$

13) $x^2 - 2x + 10 > 0$ $[\forall x \in R]$

14) $x^2 - 2x - 8 > 0$ $[x < -2 \cup x > 4]$

15) $x^2 + 4x + 5 < 0$ $[\textit{nessuna soluzione reale}]$

16) $-x^2 + 3x - 2 > 0$ $[1 < x < 2]$

17) $x(x+3) \leq -2x$ $[-5 \leq x \leq 0]$

18) $-x^2 + 9 \leq 0$ $[x \leq -3 \cup x \geq 3]$

19) $x^2+10x+34<0$ $[\,nessuna\ \ soluzione\ \ reale\,]$

20) $-x(x-4)<3$ $[\,x<1\cup x>3\,]$

21) $9x^2+4>0$ $[\,\forall x\in R\,]$

22) $81x^2+18x+1\le 0$ $\left[x=-\frac{1}{9}\right]$

23) $-x^2-6x-8\ge 0$ $[\,-4\le x\le -2\,]$

24) $6x^2+x-1<0$ $\left[-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right]$

25) $x^2-8x+20>0$ $[\,\forall x\in R\,]$

26) $\frac{1}{2}(x-1)\le x^2-x$ $\left[x\le\frac{1}{2}\cup x\ge 1\right]$

27) $9x^2-30x+25>0$ $\left[\forall x\in R-\left\{\frac{5}{3}\right\}\right]$

28) $-x^2-3\ge 0$ $[\,nessuna\ \ soluzione\ \ reale\,]$

29) $x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{8}>0$ $\left[x<-\frac{3}{4}\cup x>\frac{5}{2}\right]$

30) $x^2-\frac{13}{6}x+1<0$ $\left[\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}\right]$

31) $x^2-6x+1>0$ $[\,x<3-2\sqrt{2}\cup x>3+2\sqrt{2}\,]$

32) $3x^2+8x-3<0$ $\left[-3<x<\frac{1}{3}\right]$

33) $2x^2-4x-1>0$ $\left[x<\frac{2-\sqrt{6}}{2}\cup x>\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right]$

34) $x^2+3x+8>0$ $[\,\forall x\in R\,]$

35) $-x^2+3x-10>0$ $[\,nessuna\ \ soluzione\ \ reale\,]$

36) $-x^2+2x+4>0$ $\left[1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}\right]$

37) $-2x^2+4x+6\ge 0$ $[\,-1\le x\le 3\,]$

38) $x^2 - 6x + 12 > 0$ $[\forall x \in R]$

39) $7x^2 - 12x - 4 > 0$ $\left[x < -\frac{2}{7} \cup x > 2\right]$

40) $-12x^2 + 4x + 1 < 0$ $\left[x < -\frac{1}{6} \cup x > \frac{1}{2}\right]$

41) $4x^2 - 3x + 1 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

42) $3x^2 + x + 2 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

43) $x^2 - 6x + 9 > 0$ $[\forall x \in R - \{3\}]$

44) $-2x^2 + x + 1 > 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

45) $-5x^2 + 4x + 1 \le 0$ $\left[x \le -\frac{1}{5} \cup x \ge 1\right]$

46) $9x^2 + 12x + 4 \ge 0$ $[\forall x \in R]$

47) $8x^2 - 24x + 18 \le 0$ $\left[x = \frac{3}{2}\right]$

48) $-27x^2 + 18x - 3 \ge 0$ $\left[x = \frac{1}{3}\right]$

49) $x^2 - 2x < 0$ $[0 < x < 2]$

50) $1 - x^2 \ge 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ $[-2 \le x \le 0]$

51) $\frac{13 + 9x^2}{9} - \frac{2x - 1}{2} - \frac{1}{3}(4x + 1) > 0$ $[\forall x \in R]$

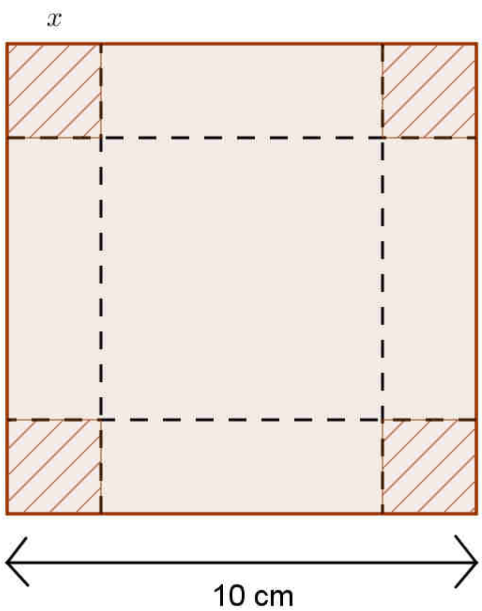
52) $-6x + \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) - 9(-1)^2 < 0$ $\left[x < -\frac{7}{2} \cup x > -\frac{5}{2}\right]$

53) $\frac{1 - x + x^2}{2} + \frac{x(3x + 16)}{8} - \frac{3x^2 + 2}{4} \le x^2 + \frac{5x - 4}{3}$ $\left[x \le -\frac{4}{3} \cup x \ge \frac{8}{7}\right]$

PROBLEMI
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1) ***Problema guidato***

Da una lamiera quadrata di lato 10 cm vogliamo ritagliare quatto quadrati uguali di lato x (vedi figura) in modo che, ripiegando lungo i lati tratteggiati, si possa costruire una "scatola". Per quali valori di x la scatola ha superficie maggiore di 84 cm^2?



L'area della base della scatola risulta $(10-2x)^2$. Le quattro pareti della scatola hanno area $4(10-2x)x$, quindi:

$(10-2x)^2 + 4(10-2x)x > 84 \rightarrow$ ……………………….

Poiché $x > 0$ perché………………………………., allora la soluzione è ………………………………..

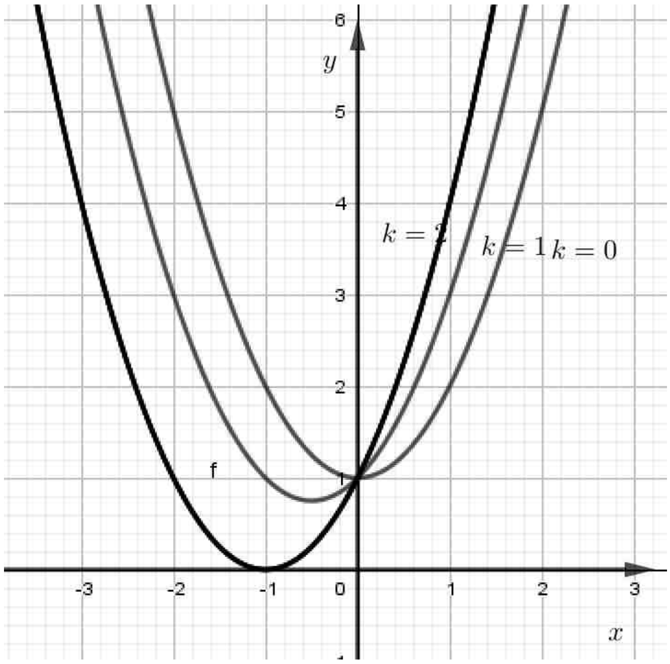
NOTA
Oppure (più semplicemente): $100-4x^2 > 84$ da cui si ha………………………………….

2) ***Problema svolto***

Consideriamo l'equazione di una parabola contenente però un parametro reale *k*, per esempio

$$y = x^2 + kx + 1$$

poiché ad ogni valore reale di k corrispondente una data parabola abbiamo un "fascio" di parabole (nel disegno sono state disegnate le parabole corrispondenti ai valori $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$).



Possiamo, per esempio, chiederci per quali valori del parametro *k* la parabola corrispondente interseca l'asse delle x.

Per rispondere a questa domanda dobbiamo impostare il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + kx + 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 + kx + 1 = 0$$

Ma allora la parabola interseca l'asse x soltanto se il discriminante dell'equazione $x^2 + kx + 1 = 0 \rightarrow \Delta = k^2 - 4$ risulta positivo o nullo cioè quando:

$$k^2 - 4 \geq 0 \rightarrow k \leq -2 \cup k \geq 2$$

Nota: utilizzando Geogebra puoi visualizzare il fascio di parabole creando uno slider k e poi inserendo l'equazione del fascio nella barra di inserimento: al variare del valore dello slider vedrai cambiare la parabola….

3) Per quali valori di m le parabole del fascio di equazione $y = x^2 - 2mx + 9$ intersecano l’asse x?

$[m \leq -1 \cup m \geq 5]$

4) Per quali valori di k le parabole del fascio $y = 2x^2 + kx + k$ non intersecano l’asse x?

$[0 < k < 8]$

5) Per quali valori di a le parabole del fascio $y = -x^2 + 2ax - 1$ intersecano l’asse x?

$[a \leq -1 \cup a \geq 1]$

6) In un rettangolo la base supera l’altezza di 1 cm. Tra quali limiti deve trovarsi la misura dell’altezza (x) affinché l’area non superi i 12 cm^2?

$[0 < x \leq 3cm]$

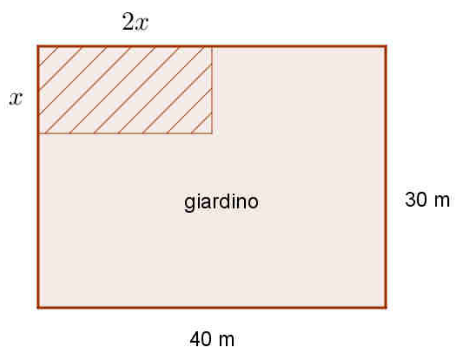
7) In un triangolo rettangolo la differenza tra i cateti è 1 cm. Quali limitazioni deve avere la misura x del cateto minore in modo che l’area non superi i 15 cm^2?

$[0 < x \leq 5\,cm]$

8) In un triangolo rettangolo un cateto è doppio dell’altro. Quali limitazioni deve avere la misura x del cateto minore in modo che l’area non superi i $36\,cm^2$?

$[0 < x \leq 6\,cm]$

9) In un appezzamento rettangolare di terreno 30 m x 40 m si vuole costruire una casa come in figura qui sotto. Quale deve essere x (in metri) in modo che il giardino abbia una superficie di almeno 1000 m^2?



$[0 < x \leq 10m]$

10) In un trapezio rettangolo la base minore è uguale all’altezza e la base maggiore supera di 2 cm la base minore. Quale deve essere la misura della base minore x perché l’area del trapezio non superi i 20 cm^2?

$[0 < x \leq 4\ cm]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
PARABOLA E DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

I) Disegna le seguenti parabole individuando il vertice, il punto di intersezione con l'asse y e gli eventuali punti di intersezione con l'asse x:

a) $y = x^2 + 3$ $\left[V(0;3)\right]$

b) $y = x^2 + x$ $\left[V\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\right]$

c) $y = 3x - x^2$ $\left[V\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)\right]$

d) $y = \frac{1}{2}x^2$ $\left[V(0;0)\right]$

e) $y = 2x^2 + 1$ $\left[V(0;1)\right]$

f) $y = -x^2 + 1$ $\left[V(0;1)\right]$

g) $y = -2x^2$ $\left[V(0;0)\right]$

h) $y = x - x^2$ $\left[V\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\right]$

i) $y = -x^2 - 1$ $\left[V(0;-1)\right]$

l) $y = x^2 - 4$ $\left[V(0;-4)\right]$

II) Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$ $[2 < x < 3]$

b) $x^2 - 1 > 0$ $[x < -1 \quad \cup \quad x > 1]$

c) $x^2 + 1 > 0$ $[\forall x \in \Re]$

d) $x^2 - 2x < 0$ $[0 < x < 2]$

e) $x^2 - 2x - 3 > 0$ $[x < -1 \quad \cup \quad x > 3]$

f) $x^2 - 4x + 4 < 0$ [nessuna soluzione]

g) $4x^2 - 1 > 0$ $\left[x < -\frac{1}{2} \quad \cup \quad x > \frac{1}{2}\right]$

h) $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$ $[\forall x \in \Re]$

Sistemi di secondo grado

Sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite

Un sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite è costituito da un’equazione di primo grado e da una equazione di secondo grado e si risolve **ricavando un’incognita dall’equazione di primo grado e sostituendo l’espressione trovata nell’equazione di secondo grado.** Vediamo degli esempi.

Esempio 1

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=1-y \\ (1-y)^2+y^2=1 \rightarrow 1-2y+y^2+y^2=1 \rightarrow 2y^2-2y=0 \rightarrow y(y-1)=0 \rightarrow y_1=0, \quad y_2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=1 \end{cases}$$

Abbiamo trovato quindi **due soluzioni** $(1;0)$ $(0;1)$

Esempio 2

$$\begin{cases} x^2-y-2x=0 \\ 2x+y=0 \rightarrow y=-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+2x-2x=0 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0 \\ y=-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

In questo caso abbiamo solo **una soluzione** $(0;0)$ in realtà si tratta di una soluzione “doppia”, cioè di due soluzioni coincidenti).

Esempio 3

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=2 \rightarrow x=2-y \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-y)^2+y^2=1 \rightarrow 4-4y+y^2+y^2=1 \rightarrow 2y^2-4y+3=0 \\ x=2-y \end{cases}$$

Poiché $2y^2-4y+3=0$ non ha soluzioni reali $(\Delta<0)$ il sistema **non ha soluzione**.

Problemi che risolvono con un sistema di secondo grado

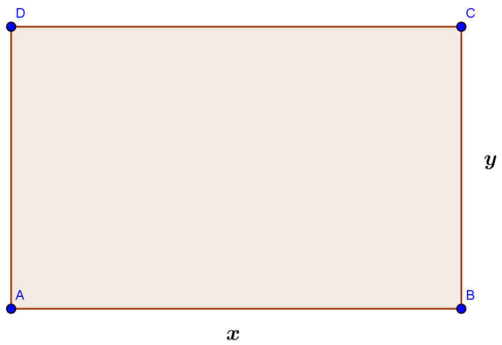
Molti problemi si risolvono impostando un sistema di secondo grado. Vediamo alcuni esempi.

Esempi

1) Un rettangolo ABCD ha l'area di 40 cm^2 e il perimetro di 26 cm. Determina la lunghezza delle sue dimensioni.

Poniamo $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$

Se il perimetro è 26 cm il semiperimetro è 13 cm, e quindi abbiamo che $\begin{cases} x \cdot y = 40 \\ x + y = 13 \end{cases}$



Si tratta di un sistema di secondo grado perché l'equazione $x \cdot y = 40$ è di secondo grado.

Ricaviamo una incognita dall'equazione di primo grado, per esempio la *x*, e sostituiamo nell'altra equazione:

$$\begin{cases} x = 13 - y \\ (13 - y) \cdot y = 40 \rightarrow 13y - y^2 = 40 \rightarrow y^2 - 13y + 40 = 0 \rightarrow y_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{2} = \dfrac{13 \pm 3}{2} \rightarrow y_1 = 8, \quad y_2 = 5 \end{cases}$$

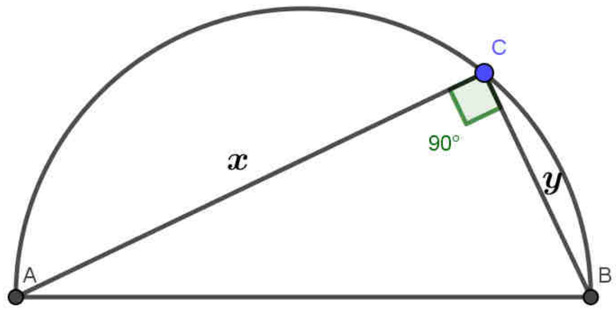
$$\begin{cases} y_1 = 8 \\ x_1 = 5 \end{cases} \cup \begin{cases} y_2 = 5 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $(5;8)$, $(8;5)$ che rappresentano comunque lo stesso rettangolo.

Le dimensioni del rettangolo richiesto sono quindi 5 cm, 8 cm.

2) Un triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza di diametro 13 cm. Sapendo che il suo perimetro misura 30 cm, determina i lati del triangolo.

Osserviamo che il triangolo è rettangolo e che la sua ipotenusa coincide con il diametro.



Se quindi poniamo $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$, utilizzando anche la relazione espressa dal teorema di Pitagora, possiamo impostare il seguente sistema di secondo grado:

$$\begin{cases} x + y + 13 = 30 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases}$$

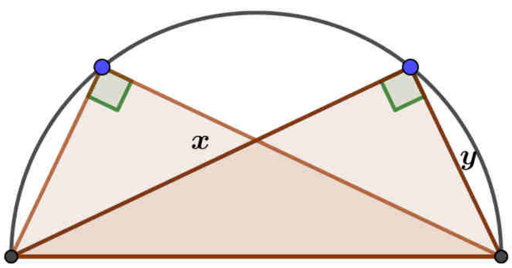
Sviluppando i calcoli:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 + y^2 = 169 \rightarrow 2y^2 - 34y + 120 = 0 \rightarrow y^2 - 17y + 60 = 0 \rightarrow y_1 = 12 \quad \cup \quad y_2 = 5 \end{cases}$$

In conclusione:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 12 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

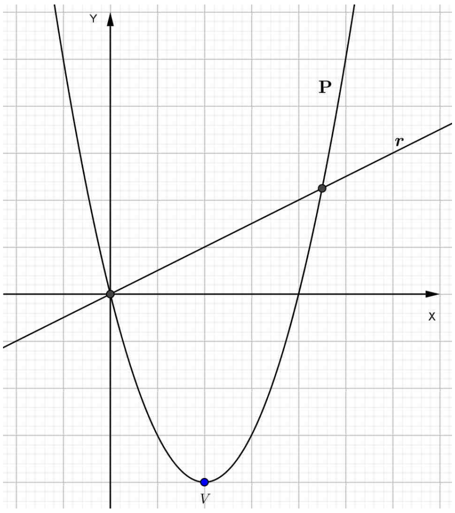
In pratica abbiamo due soluzioni "simmetriche" (vedi figura), ed i lati del triangolo misurano quindi 5 cm,12 cm,13 cm.



Intersezione tra retta e parabola

1) Consideriamo la parabola $P: y = x^2 - 4x$ e la retta $r: y = \frac{1}{2}x$.

Come si determinano i punti di intersezione tra la parabola e la retta?



$P: y = x^2 - 4x$

$r: y = \frac{1}{2}x$

Disegniamo la parabola: determiniamo il vertice $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y_V = 4 - 8 = -4$

Quindi $V(2;-4)$

Troviamo le intersezioni della parabola con l'asse *x* risolvendo l'equazione

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

Le sue intersezioni con l'asse x sono quindi $(0;0)$ $(4;0)$

Disegniamo la retta $r: y = \frac{1}{2}x$

Si vede facilmente che un punto di intersezione tra *P* e *r* è $(0;0)$ ma come possiamo determinare le coordinate dell'altro punto di intersezione?

Basta risolvere il sistema formato dall'equazione di *P* e di *r*

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 2° grado.

In questo caso l'incognita y è già "ricavata" nell'equazione della retta e basterà sostituire nell'equazione della parabola *P*.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x = 0 \rightarrow x(2x-9) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = \frac{9}{2} \\ y_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono $(0;0)$, $\left(\frac{9}{2};\frac{9}{4}\right)$ cioè i punti di intersezione tra *P* e *r* sono

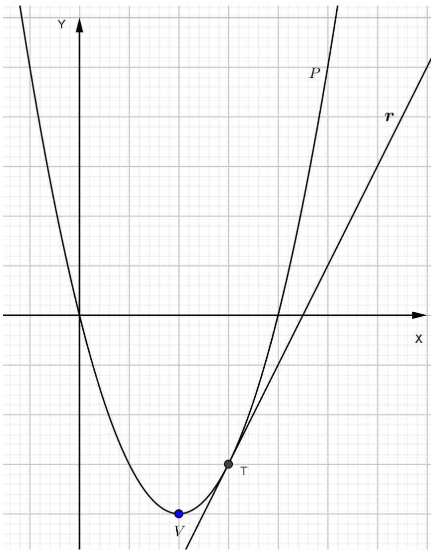
$O(0;0)$ $P\left(\frac{9}{2};\frac{9}{4}\right)$

2) Determiniamo le intersezioni tra la parabola $y = x^2 - 4x$ e la retta $y = 2x - 9$.
Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 9 = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 3 \\ y = 2x - 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

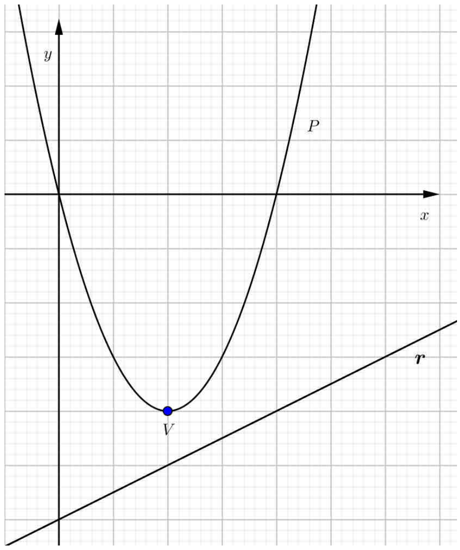
In questo caso il sistema ha due soluzioni coincidenti $(3;-3)$ e la retta è tangente alla parabola nel punto $T(3;-3)$.



3) Determiniamo le intersezioni tra la parabola $y = x^2 - 4x$ e la retta $y = \frac{1}{2}x - 6$.

Risolviamo il sistema:

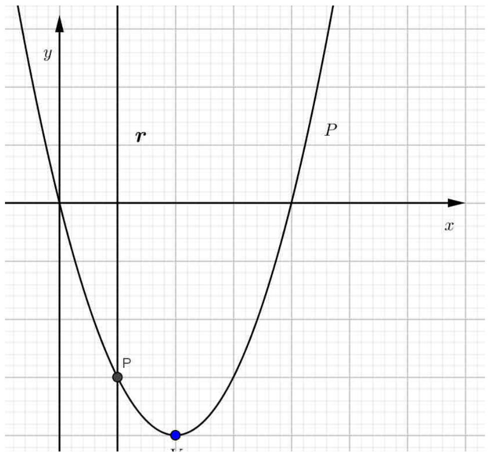
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x - 6 = x^2 - 4x \rightarrow 2x^2 - 9x + 12 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \quad \textit{nessuna} \quad \textit{soluzione} \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$



In questo caso il sistema non ha nessuna soluzione e la retta non interseca la parabola.

4) Determiniamo le intersezioni tra la parabola $y = x^2 - 4x$ e la retta $x = 1$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$



La retta $x = 1$ è parallela all'asse di simmetria della parabola e interseca la parabola nel punto $P(1;-3)$.

ESERCIZI
SISTEMI DI SECONDO GRADO

I) Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado in 2 incognite

a) $\begin{cases} x^2 + y = -8 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ $[(1;-9)]$

b) $\begin{cases} 3x - y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $[(1;1) \ ; \ (6;-4)]$

c) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 19 - xy = (x + y)^2 \end{cases}$ $[(-1;-3) \ ; \ (1;3)]$

d) $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + xy + 4 = 0 \end{cases}$ $[(0;2) \ ; \ (2;4)]$

e) $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ $[(2;4) \ ; \ (4;2)]$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $[(0;1) \ ; \ (1;0)]$

g) $\begin{cases} xy = \dfrac{3}{4} \\ x + y = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \ ; \ \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\right]$

h) $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ $[(1;1); \ (4;-2)]$

i) $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ $[(1;1)]$

l) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ [impossibile]

m) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ [indeterminato, infinite soluzioni del tipo $(x;-x)$]

II) Problemi risolubili con sistemi di secondo grado

1) Un rettangolo ha l'area di 12 m^2 e il perimetro di 14 m. Determina la lunghezza dei suoi lati.

$[3m;\ \ 4m]$

2) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 10 m e il perimetro 24 m. Determina la lunghezza dei cateti.

$[6m;\ \ 8m]$

3) In un triangolo rettangolo l'area è 96 cm^2 e la somma dei cateti è 28 cm. Determina la lunghezza dei cateti.

$[12cm;\ \ 16cm]$

4) In un cerchio di raggio 25 cm è inscritto un rettangolo il cui perimetro è 140 cm. Calcola l'area del rettangolo.

$[1200cm^2]$

5) Un triangolo isoscele ha il perimetro di 16 cm e l'altezza di 4 cm. Determina la lunghezza dei lati.

$[6cm;\ \ 5cm;\ \ 5cm]$

6) In un rombo l'area misura 96 l^2 e la somma delle diagonali è 28 l. Determina il lato del rombo.

$[10l]$

7) Un rettangolo ha il perimetro che misura 28 r. Sapendo che il raggio della circonferenza circoscritta misura 5 r, determina i lati del rettangolo.

$[6r;\ \ 8r]$

8) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 20 cm e il perimetro 48 cm. Determina la lunghezza dei cateti.

$[12cm;\ \ 16cm]$

9) La somma delle età di Alberto e Chiara è 22. Due anni fa il prodotto delle loro età era 80. Che età hanno (adesso) Alberto e Chiara?

[10 anni; 12 anni]

10) Un negoziante di occhiali incassa in un certo mese 1500 euro dalla vendita di un certo tipo di occhiali. Il mese successivo, il negoziante vende tre paia di occhiali in meno, ma incassa 300 euro in più, perché ha aumentato il prezzo degli occhiali di 50 euro al paio. Determina il prezzo degli occhiali e il numero di occhiali venduti nel primo mese.

[15 paia al prezzo di 100 euro]

11) Il prodotto delle età di Anna e di suo padre è 429. L'età del padre, quando Anna è nata, era il doppio dell'età che Anna avrà tra tre anni. Quali sono le età attuali di Anna e di suo padre?

[11 e 39 anni]

12) La spesa di un viaggio viene suddivisa equamente tra i suoi partecipanti. Se al viaggio avessero partecipato 2 persone in più, la quota per partecipante sarebbe stata di 100 euro. Se invece al viaggio avessero partecipato 4 persone in meno, la quota per partecipante sarebbe stata di 125 euro in più rispetto alla quota inizialmente prevista. Determina la spesa complessiva del viaggio e il numero dei partecipanti.

[1000 euro; 8 partecipanti]

13) Enrico viaggia da una località A ad una località B alla velocità costante v. Egli nota che, se viaggiasse a una velocità di 5 km/h superiore arriverebbe a destinazione 5 ore prima del previsto, mentre se viaggiasse a una velocità di 10 km/h superiore arriverebbe a destinazione 8 ore prima del previsto. Qual è la velocità v in km/h?

[15 km/h]

14) Un quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari tra loro ed è inscritto in una circonferenza *C* di diametro AC. L'area e il perimetro del quadrilatero sono rispettivamente 48 cm^2 e 28 cm. Quanto misura il raggio della circonferenza *C*?

[5 cm]

III) Determina i punti di intersezione tra retta e parabola e disegnane il grafico

a) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ [nessuna intersezione]

b) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -2x^2 + 2x + 4 \end{cases}$ $[(1;4)]$

c) $\begin{cases} y = 5 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ $[(-2;5) \ ; \ (4;5)]$

d) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$ $[(3;0) \ ; \ (-1;-8)]$

e) $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 2 \end{cases}$ $[(2;4)]$

f) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = -1 \end{cases}$ $[(-1;2)]$

g) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ $[(0;-1); \ (1;0)]$

h) $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $[(2;0); \ (-3;-5)]$

SCHEDA PER IL RECUPERO

SISTEMI DI SECONDO GRADO E INTERSEZIONE TRA RETTA E PARABOLA

I) Sistemi di secondo grado

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$ $\quad [(2;1);(-1;-2)]$

b) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]$

c) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$ $\quad [(4;1);(-2;-2)]$

d) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ $\quad [(\sqrt{2};-\sqrt{2});(-\sqrt{2} : \sqrt{2})]$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\quad [(1;0)]$

f) $\begin{cases} x \cdot y = 4 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$ $\quad [(4;1);(-4;-1)]$

II) Disegna retta e parabola e determina i punti di intersezione:

a) $r : y = x, \quad \mathrm{P} : y = x^2$ $\quad [(0;0);(1;1)]$

b) $r : x + y - 2 = 0, \quad \mathrm{P} : y = x^2 - 2x + 2$ $\quad [(0;2);(1;1)]$

c) $r : y = x - 3, \quad \mathrm{P} : y = -x^2 + 4x - 3$ $\quad [(0;-3);(3;0)]$

d) $r : y = 1, \quad \mathrm{P} : y = -x^2 + 2$ $\quad [(-1;1);(1;1)]$

e) $r : x = 2, \quad \mathrm{P} : y = x^2 - 2x$ $\quad [(2;0)]$

SCHEDA DI VERIFICA
L’ALGEBRA DI SECONDO GRADO

I) Disegna le seguenti parabole individuando il vertice, l’intersezione con l’asse y e le eventuali intersezioni con l’asse x

a) $y = x^2 + 2x$

b) $y = -x^2 + 6x - 5$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

II) Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado:

a) $2x^2 - 3x > 0$

b) $-x^2 + 2x + 8 > 0$

c) $4 - x + x(x-2) - \frac{1}{2}(x-1)(x+1) < 0$

III) Risolvi il seguente sistema di secondo grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

IV) Problemi

a) Da un cartone rettangolare ABCD avente $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ si ritagliano, agli angoli, quattro quadrati uguali di lato $\frac{1}{3}x$. Come deve risultare la misura di $\overline{BC}$ in modo che la superficie rimasta dopo aver ritagliato i quattro quadrati sia almeno 14 cm^2 ?

b) Un rettangolo ha l’area di 10 cm^2 e il perimetro di 14 cm. Determina le lunghezze dei lati.

c) Determina i punti di intersezione tra la retta $r: y = x + 2$ e la parabola di equazione $y = x^2 - 4$. Disegna la retta e la parabola.

d)Un quadrilatero ABCD è inscritto in una circonferenza e la sua diagonale AC coincide con un diametro e misura $\frac{5}{2}$ *cm.* Sapendo che l’altra diagonale BD del quadrilatero è perpendicolare ad AC e che il perimetro del quadrilatero è 7 cm, determina i lati del quadrilatero.