Problemi di massimo e minimo

Supponiamo di avere una funzione $f: [a; b] \to R$ continua in $[a; b]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.

I problemi di massimo e minimo sono problemi (di geometria piana o solida oppure di geometria analitica ecc.) in cui dobbiamo determinare una funzione (che per esempio esprime, in funzione di una variabile scelta x, un perimetro o un'area o un volume ecc.) e individuare il valore di x per cui la funzione assume il massimo o il minimo assoluto.

Poiché la variabile avrà una limitazione data dal tipo di problema, la funzione dovrà essere considerata in un dato intervallo.

Se la funzione è continua e l'intervallo è limitato, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluto.

Possiamo quindi procedere così:

- Calcolare la derivata della funzione che dobbiamo studiare

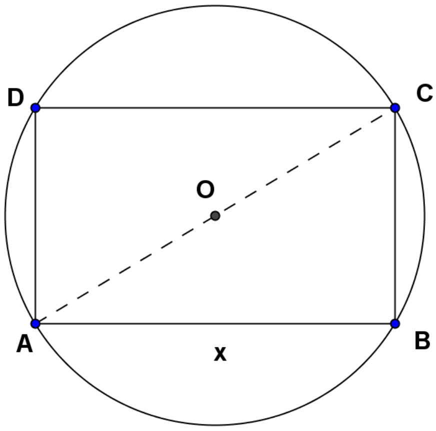
- Cercare i valori per cui si annulla e studiare il segno della derivata: individuare quindi i massimi e minimi relativi ed eventualmente "confrontarli" (confrontare le ordinate corrispondenti) per determinare il massimo o il minimo assoluto.

Attenzione: se la derivata non si annulla ed è per esempio sempre positiva cioè la funzione è crescente, è chiaro che il minimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo e il massimo nell'estremo destro.

Attenzione: controllare se ci sono punti di non derivabilità: nel caso ci siano le loro ordinate vanno confrontate con quelle dei massimi (minimi) relativi trovati.

Esempio 1

Determina, tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima.



Poniamo $x = \overline{AB}$.

Quindi avremo: $0 \leq x \leq 2r$

Poiché $\overline{BC} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ indicando con $A(x)$ l'area di $ABCD$ avremo:

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \text{ con } 0 \leq x \leq 2r$$

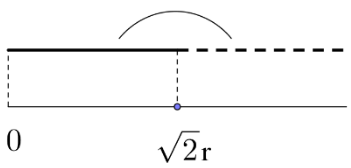
Poiché $A(x)$ è continua in $[0; 2r]$ per il teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto.

Calcoliamo quindi la derivata:

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}r$ ($x = -\sqrt{2}r$ non è accettabile)

$A'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \sqrt{2}r$



Quindi $x = \sqrt{2}r$ fornisce il massimo assoluto (non abbiamo trovato altri punti di massimo relativo).

Osserviamo che se $\overline{AB} = \sqrt{2}r$ $ABCD$ è un quadrato.

Quindi tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima è il quadrato.

Nota

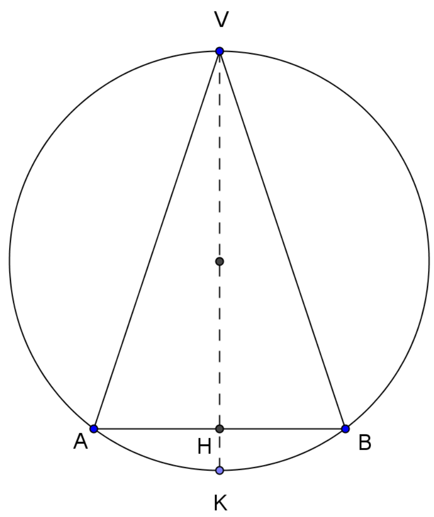
Per $x = 0$ o $x = 2r$ il rettangolo degenera in due diametri sovrapposti e sia ha area nulla (minimo assoluto).

Esempio 2

Determinare, tra i coni inscritti in una sfera di raggio r, quello di massimo volume.

Consideriamo una sezione. Avremo un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza.

Poniamo $\overline{VH} = x$: $0 \le x \le 2r$



Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo VAK: $\overline{AH}^2 = x(2r-x)$

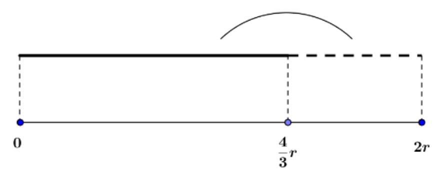
Quindi:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi x^2(2r-x) = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(4rx - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow x = 0, \qquad x = \frac{4}{3}r$$

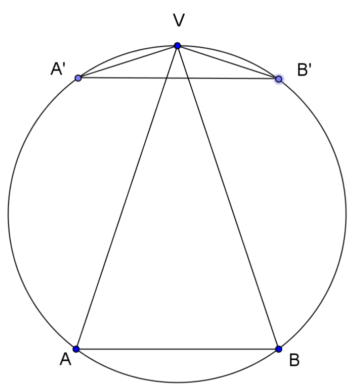
$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r$$



e quindi per $x = \frac{4}{3}r$ si ha il cono di volume massimo.

Osservazione

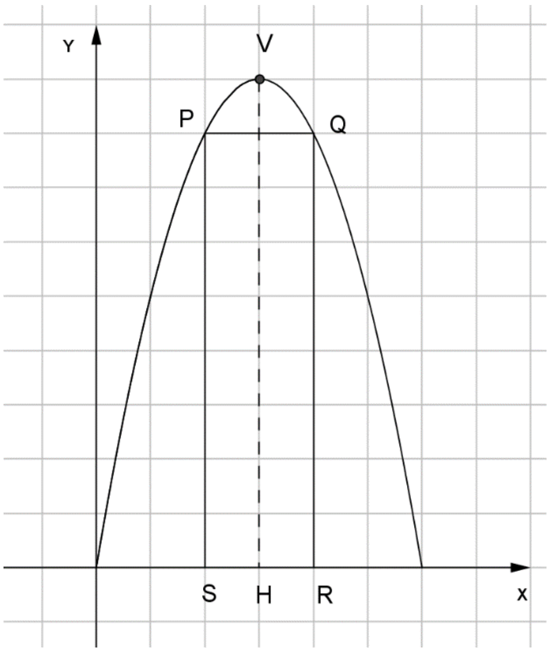
La scelta del segmento a cui associare x è importante. Scegliendo $\overline{VH} = x$ abbiamo individuato bene il cono (non ci sono coni inscritti diversi con la stessa altezza) mentre se avessimo scelto $\overline{AH}$ (o $\overline{AB}$) ad un dato valore dell'incognita corrispondevano generalmente due coni diversi.



In figura per esempio abbiamo lo stesso valore della base ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$) ma i triangoli sezione e quindi i coni sono diversi.

Esempio 3

Data la parabola di equazione $P: y = -x^2 + 6x$, considera i rettangoli inscritti nell'arco di parabola appartenente al primo quadrante e determina quello di area massima.



$V(3;9)$

Consideriamo $P(x; -x^2 + 6x)$

con $0 \leq x \leq 3$

$$\overline{PQ} = 2(3-x)\,; \overline{SH} = 3 - x\,; \quad \overline{PS} = -x^2 + 6x$$

Quindi

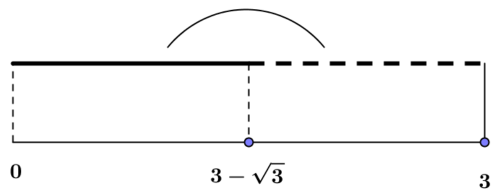
$$A(x) = 2(3-x)(-x^2+6x) = 2(x^3 - 9x^2 + 18x)$$

$$A'(x) = 2(3x^2 - 18x + 18)$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Solo $x = 3 - \sqrt{3}$ è accettabile considerando la limitazione della *x*.

$$A'(x) > 0 \iff x < 3 - \sqrt{3} \cup x > 3 + \sqrt{3}$$



e quindi per $x = 3 - \sqrt{3}$ si ottiene il rettangolo di area massima.

È chiaro che per conoscere il valore dell'area massima basta sostituire $x = 3 - \sqrt{3}$ nella funzione $A(x)$ e si ottiene $A_{max} = 2[3-(3-\sqrt{3})]\left[-(3-\sqrt{3})^2 + 6(3-\sqrt{3})\right] = \cdots = 12\sqrt{3}$

PROBLEMI
GEOMETRIA PIANA

1. Tra tutti i rettangoli di area assegnata a^2 determina quello di perimetro minimo.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = a \rightarrow quadrato\right]$$

2. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determina quello di area massima.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = \frac{p}{2} \rightarrow quadrato\right]$$

3. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata a determina quello di area massima.

$$\left[x = cateto \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow triangolo\ rettangolo\ isoscele\right]$$

4. Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.

$$\left[x = altezza\ relativa\ alla\ base \rightarrow x = \frac{3}{2}r \rightarrow triangolo\ equilatero\right]$$

5. Tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r determina quello di perimetro massimo.

$$\left[x = dimensione\ rettangolo \rightarrow x = r\sqrt{2} \rightarrow quadrato\right]$$

6. Tra i triangoli equilateri inscritti in un triangolo equilatero ABC di lato l, determina quello di area minima.

$$\left[trinagolo\ di\ lato\ \frac{l}{2}\right]$$

7. Tra tutti i triangoli iscritti in una semicirconferenza, trova quello di area massima.

[triangolo rettangolo isoscele]

8. Nell'insieme dei trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio r, determina quello di perimetro massimo.

[semiesagono regolare]

9. Un foglio di carta deve contenere un'area di stampa di $50cm^2$, margini superiore e inferiore di 4 cm e laterali di 2 cm. Determina le dimensioni del foglio di area minima con queste caratteristiche.

[9 cm , 18 cm]

10. Fra tutti i rettangoli di data area, che misura a^2, determina quello la cui diagonale è minima.

[quadrato di lato a]

11. Tra tutti rettangoli di data diagonale, che misura d,determina quello di area massima.

[quadrato di lato $\frac{d}{\sqrt{2}}$]

12. Tra tutti i triangoli isosceli che hanno per base una corda di una circonferenza di raggio r e il vertice nel centro della circonferenza, determina quello di area massima.

[triangolo la cui altezza misura $\frac{r}{\sqrt{2}}$]

13. Sia ABCD un trapezio isoscele di area s^2 con gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45°, determina l'altezza del trapezio in modo che abbia perimetro minimo.

[altezza=$\frac{s}{\sqrt[4]{2}}$]

14. Nel triangolo qualsiasi ABC manda la parallela al lato AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente nei punti G e F. Indicate con D e E le proiezioni ortogonali di G e F sulla retta del lato AB, determina il rettangolo DEFG di area massima.

[DG metà dell'altezza del triangolo]

PROBLEMI

GEOMETRIA SOLIDA

1. Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio r determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}r\right]$$

2. Tra i cilindri inscritti in un cono avente raggio di base r e altezza assegnata h, determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \frac{2}{3}r\right]$$

3. Tra i coni inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

$$\left[x = altezza\ del\ cono \rightarrow x = \frac{4}{3}r\right]$$

4. Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r, determina quello di minimo volume.

$$[x = distanza\ tra\ vertice\ cono - centro\ sfera \rightarrow x = 3r]$$

5. Tra i parallelepipedi rettangolari aventi per base un quadrato e un volume assegnato V, determina quello di superficie totale minima.

$$[cubo]$$

6. Tra i cilindri di superficie totale assegnata S determina quello di volume massimo.

$$[cilindro\ equilatero]$$

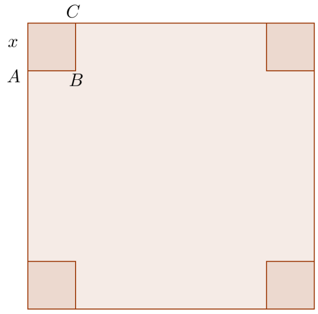
7. Una tipica lattina cilindrica ha volume fissato pari a 33 *cl*. Quali sono le dimensioni della lattina (altezza e diametro) che minimizzano il costo del metallo necessario a produrla, ossia la superficie totale della lattina?

[cilindro equilatero di diametro $2r = h = 2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ cm]

8. Si vuole costruire un salone insonorizzato a forma di parallelepipedo rettangolo con i lati del pavimento uno doppio dell'altro e volume di 300 m^3. Per insonorizzare il locale vanno applicati sulle pareti e sul soffitto pannelli del costo di € 50 al metro quadrato. Sul pavimento sarà posato un laminato che costa € 40 al metro quadrato. Quali sono le misure del pavimento che rendono minima la spesa complessiva?

[5 m ; 10 m]

9. Una scatola senza coperchio è ottenuta tagliando quattro quadrati uguali dagli angoli di un foglio di cartone quadrato, di lato 60 cm e ripiegando il cartone rimasto (incollando per esempio AB con BC). Quando vale x per avere la scatola di volume massimo?



[$x = 10cm$]

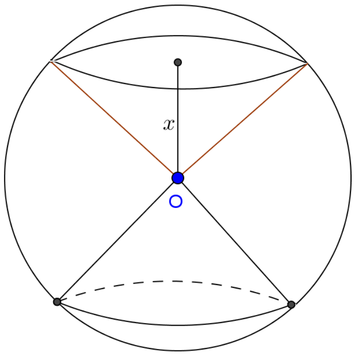
10. Tra tutti i cilindri inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

[cilindro equilatero di altezza $r\sqrt{2}$]

11. Tra i parallelepipedi rettangoli a base quadrata e diagonale di misura d, determina quello di volume massimo.

[cubo di lato $\frac{d}{\sqrt{3}}$]

12.



Determina x in modo che la "clessidra" inscritta nella sfera di raggio r abbia volume massimo.

[$x = \frac{r}{\sqrt{3}}$]

PROBLEMI
GEOMETRIA ANALITICA

1. Considerata la parabola di equazione $P: y = -x^2 + 9x - 8$ determina, tra i rettangoli inscritti nella parte di piano delimitata dalla parabola e dall'asse x, quello di perimetro massimo. Determina il perimetro massimo.

$$\left[perimetro\ massimo = \frac{53}{2}\right]$$

2. Considera la parabola $y = 4x - x^2$ ed indica con V il suo vertice. Se $P \in \overset{\frown}{OV}$ della parabola , determina per quale punto P l'area del triangolo OVP è massima.

$$[P(1;3)]$$

3. Considera l'iperbole di equazione $\Im$: $y = \frac{x}{x-2}$ e determina la sua retta tangente t in $(0;0)$. Tra i punti P di $\Im$ appartenenti al primo quadrante determina quello per cui è minima la distanza da t.

$$[P(4;2)]$$

4. Considerata la parabola $\wp: x = y^2$, tra i punti P di $\wp$ appartenenti all'arco OA con $A(4;2)$, determina quello per cui, tracciata da P la parallela e la perpendicolare all'asse x, si individua con l'asse x e la perpendicolare per A all'asse x, un rettangolo di perimetro massimo.

$$\left[P\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\right]$$

5. Considera $\wp: y = 3x - x^2$ e determina un punto $P \in arco\ VA$ di $\wp$, con V vertice di $\wp$ e $A(3;0)$, tale che l'area del quadrilatero $OVPA$ sia massima.

$$\left[P\left(\frac{9}{4};\frac{27}{16}\right)\right]$$

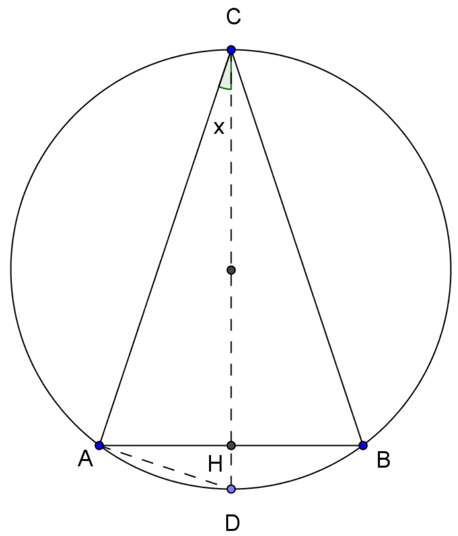
COMPLEMENTI

OSSERVAZIONE

A volte può convenire risolvere un problema di massimo e minimo utilizzando come incognita x *l'ampiezza (in radianti) di un angolo.*

Come esempio riprendiamo un problema già proposto tra i problemi di geometria piana.

Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.



Prendiamo $A\hat{C}H = x$: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Considerando il triangolo rettangolo ACD avremo:

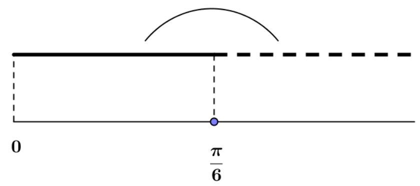
$\overline{AC} = 2r\cos x$ e quindi $\overline{AH} = \overline{AC}\,\mathrm{sen}x = 2r\,\mathrm{sen}x \cdot \cos x$ e $\overline{CH} = \overline{AC}\cos x = 2r\cos^2 x$

Quindi $$A(x) = 2r\,\mathrm{sen}x\cos x \cdot 2r\cos^2 x = 4r^2\,\mathrm{sen}x\cos^3 x$$

$$A'(x) = 4r^2(\cos^4 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x) = 4r^2\cos^2 x(\cos^2 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x)$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \\ tg^2 x = \dfrac{1}{3} \rightarrow tgx = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \rightarrow \textit{triangolo equilatero} \end{cases}$$

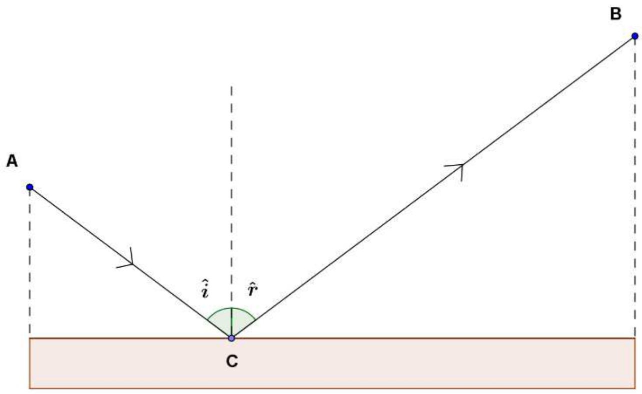
$A'(x) > 0$



Quindi per $x = \frac{\pi}{6}$ si ha un massimo (triangolo equilatero).

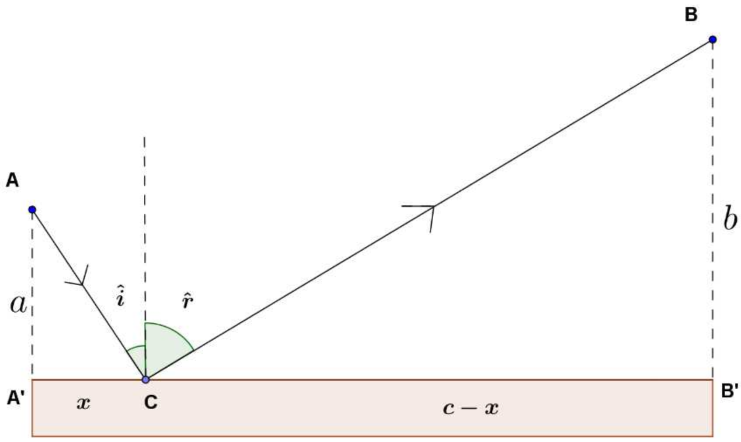
La legge della riflessione della luce

Dimostriamo che, quando la luce passa da A → B, riflessa dalla superficie piana in figura nel punto C*, segue il* ***percorso di "minimo tempo"****.*



Nota: per la legge della riflessione l'angolo di incidenza $\hat{\imath}$ è uguale all'angolo di riflessione $\hat{r}$.

Consideriamo un percorso generico $A \to C \to B$.



Indichiamo con a la distanza di A dallo "specchio", con b la distanza di B dallo specchio, con $c = \overline{A'B'}$, con $\hat{\imath}$ l'angolo di incidenza e con $\hat{r}$ quello di riflessione.

Se poniamo $\overline{A'C} = x$ avremo $\overline{CB'} = c - x$.

Consideriamo il tempo $t(x)$ impiegato dalla luce (che si muove con velocità v) per compiere il percorso in figura:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v} \qquad t'(x) = \frac{1}{v}\left[\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right]$$

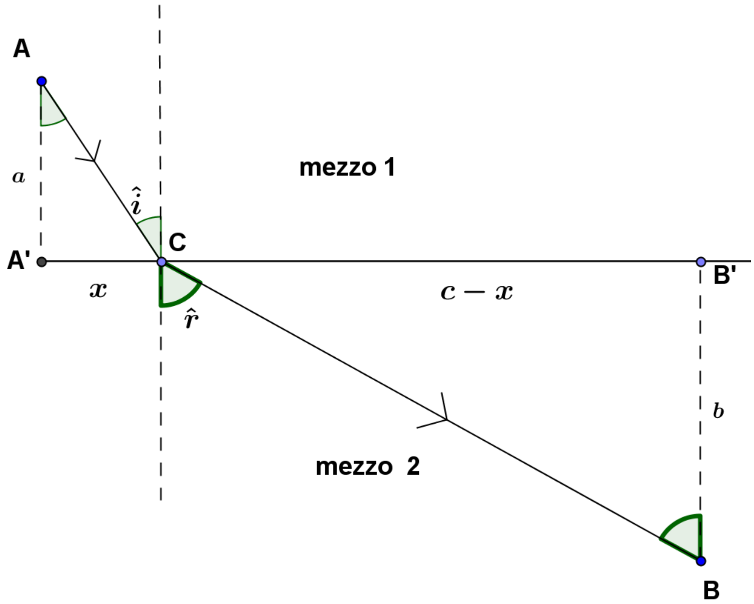
$$t'(x) = 0 \to \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

cioè $\dfrac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{CB}} \Rightarrow sen\hat{\imath} = sen\hat{r} \to \hat{\imath} = \hat{r}$ (legge della riflessione!)

(Non importa studiare $t'(x) > 0$ perché è intuitivo che abbiamo trovato un minimo).

La legge della rifrazione della luce

*Dimostriamo che quando la luce passa da un punto A situato in un mezzo ad un punto B situato in un altro mezzo (toccando in C la linea che separa i due mezzi) segue il percorso di "**minimo tempo**".*



Tracciamo un percorso $A \rightarrow B$ qualsiasi: come prima poniamo a = distanza di A dalla linea che separa i due mezzi ecc. e poniamo $\overline{A'B'} = c$.

Vogliamo calcolare la funzione che esprime il tempo impiegato dalla luce per andare $A \rightarrow B$.
Se poniamo $\overline{A'C} = x$ avremo (le velocità della luce nei due mezzi sono diverse v_1e v_2):

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(c-x)}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

$$\frac{\overline{A'C}}{v_1\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C}}{v_2\overline{CB}}$$

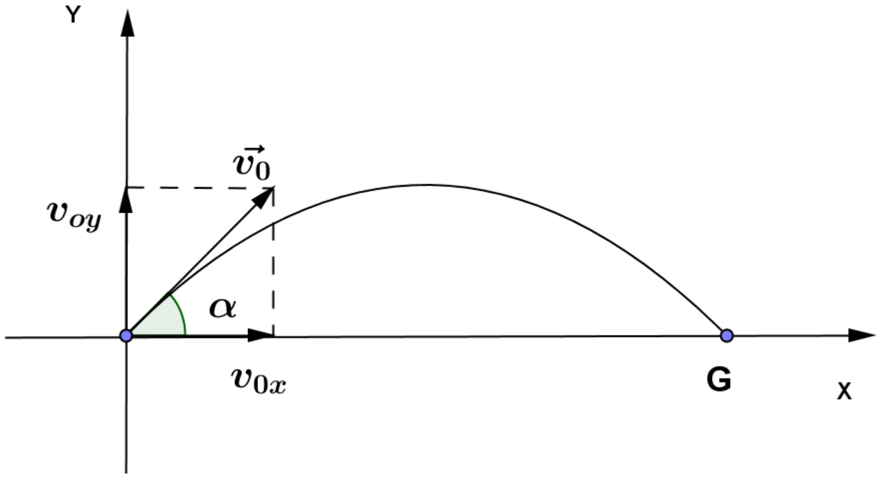
$$\frac{sen\hat{\imath}}{v_1} = \frac{sen\hat{r}}{v_2}$$

$$\frac{sen\,\hat{\imath}}{sen\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$$ (ma questa è la legge della rifrazione!)

Poiché la situazione rappresenta chiaramente un minimo abbiamo dimostrato che la luce percorre il cammino di "minimo" tempo.

La gittata massima

Lanciando un corpo con velocità $\vec{v_0}$ inclinata di α rispetto all'orizzontale qual è, a parità di v_0 (intensità della velocità iniziale), l'angolo α per cui si ottiene la massima gittata?



Ricordiamo che per studiare il moto dobbiamo scomporlo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x} in direzione orizzontale e in un moto uniformemente decelerato (con decelerazione $g = 9{,}81\ m/s^2$) di velocità iniziale v_{0y} in direzione verticale.

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo t (lo ricaviamo dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda) e ponendo $y = 0$ trovo:

$$x_G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Quindi, poiché $v_{0x} = v_0 cos\alpha$ e $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ il problema si riconduce a determinare il massimo di:

$$f(\alpha) = \frac{2{v_0}^2 sen\alpha cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} sen2\alpha$$

Abbiamo quindi che $f(\alpha)$ è massima quando $sen2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ e quindi l'angolo per cui si ha la massima gittata risulta $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

SCHEDA DI LAVORO 1

DIDONE E LA FONDAZIONE DI CARTAGINE

Secondo la leggenda narrata da Virgilio nel I libro dell'Eneide, la regina fenicia Didone, sbarcata sulle coste settentrionali dell'Africa, chiese al re dei Getuli un appezzamento di terreno su cui costruire una nuova città: il re le offrì una pelle di toto dicendole che poteva appropriarsi di quanto terreno poteva comprendere con quella pelle.

"Giunsero in questi luoghi dove ora vedi le mura possenti e sorgere la rocca della nuova Cartagine, e acquistarono quanto suolo, che dal fatto si chiama Birsa , quanto potessero racchiudere con una pelle di toro."

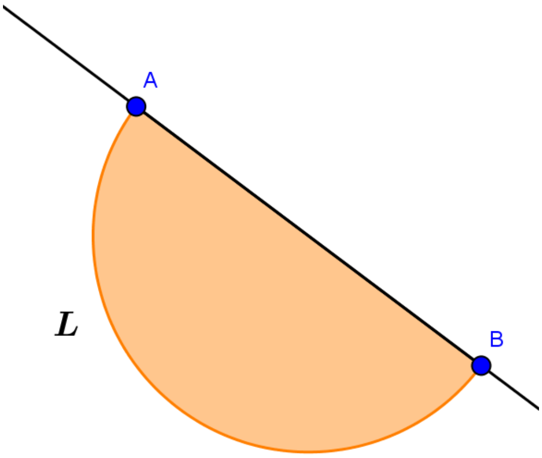
(*Devenere locos ubi nunc ingentia cernis Moenia surgentemque novae Karthaginis arcem, mercatique solum, facti de nomine Byrsam, taurino quantum possent circumdare tergo.*)

L'astuta Didone allora fece tagliare la pelle di toro in tante strisce sottili che legò una dietro l'altra ottenendo così una corda con la quale poté delimitare una vasta area **a forma di semicerchio** affacciata sul mare.

Il problema di Didone è un problema di massimo che può essere enunciato così:

Tra tutte le curve piane di lunghezza assegnata L ed avente i due estremi su una retta, determinare quella che racchiude la superficie di area massima.

Si può dimostrare che la figura che delimita la superficie massima è la semicirconferenza di diametro AB.



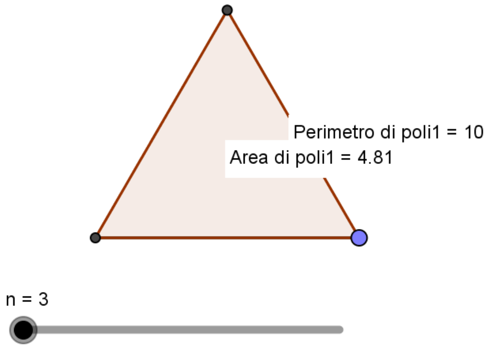
Nota: naturalmente se invece cerchiamo, tra tutte le figure piane anche non poligonali, di perimetro assegnato L di quella che delimita la superficie massima avremo la circonferenza.

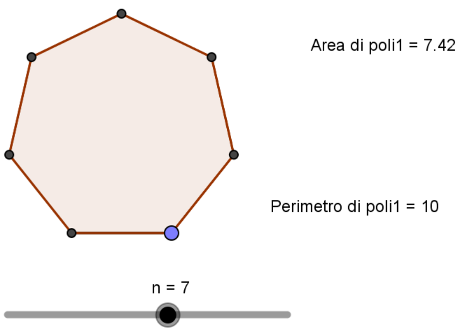
ESERCIZIO

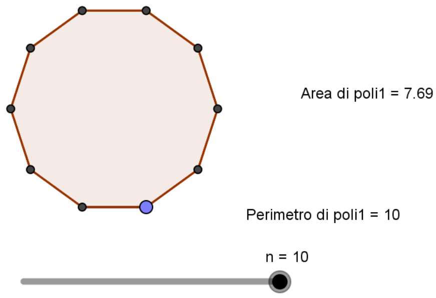
Prova con Geogebra a verificare che l'area dei poligoni regolari di perimetro assegnato L aumenta all'aumentare del numero dei lati.

Suggerimento

- Crea una costante L (per esempio L=10);
- crea uno slider n che varia tra 3 e 10(per esempio);
- crea un segmento di lunghezza L/n e con il comando "poligono regolare" disegna il poligono di *n* lati avente come lato il segmento;
- con il comando "area" visualizza l'area del poligono che hai costruito;
- aumenta il valore di n e osserva i valori dell'area.





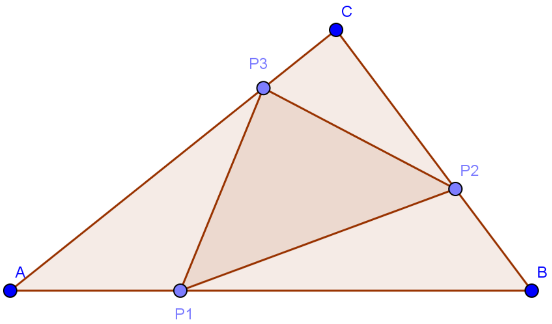


Stampa il tuo lavoro.

SCHEDA DI LAVORO 2

TRIANGOLO INSCRITTO DI PERIMETRO MINIMO

Considera un triangolo ABC: disegna un triangolo inscritto in ABC avente cioè i vertici sui lati di ABC (vedi figura). Come devi scegliere i tre punti in modo da avere il triangolo di minimo perimetro?



Si può dimostrare che il triangolo di minimo perimetro è quello che congiunge i piedi delle altezze del triangolo ABC: prova a verificarlo utilizzando Geogebra.

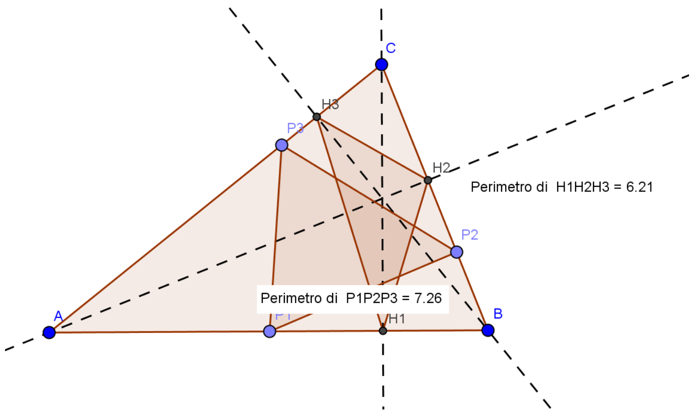
Suggerimento

Dopo aver costruito il triangolo ABC, utilizza il comando “punto su oggetto” per creare i tre punti e poi congiungili;

traccia le altezze del triangolo, individua i piedi delle altezze e congiungili;

scegli il comando “distanza o lunghezza” per determinare il perimetro dei due triangoli;

muovi i punti P1, P2, P3 e controlla i perimetri…

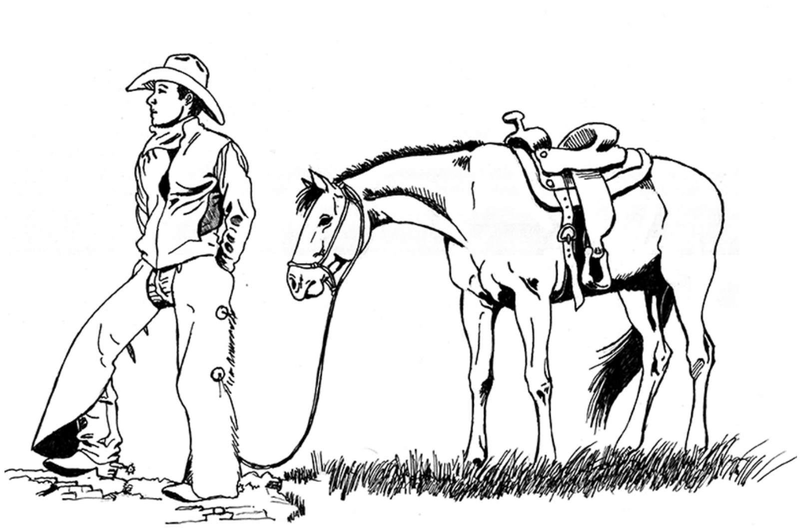


NOTA

Se immaginiamo che i lati del triangolo siano specchi, il triangolo $H_1H_2H_3$ è l'unico percorso chiuso che un raggio di luce può compiere toccando una sola volta ogni specchio-lato.

SCHEDA DI LAVORO 3

IL PERCORSO PIU' BREVE



Un cowboy a cavallo si trova nel punto A e vuole far abbeverare il cavallo al fiume (retta r) prima di tornare alla fattoria (punto B) (vedi figura).

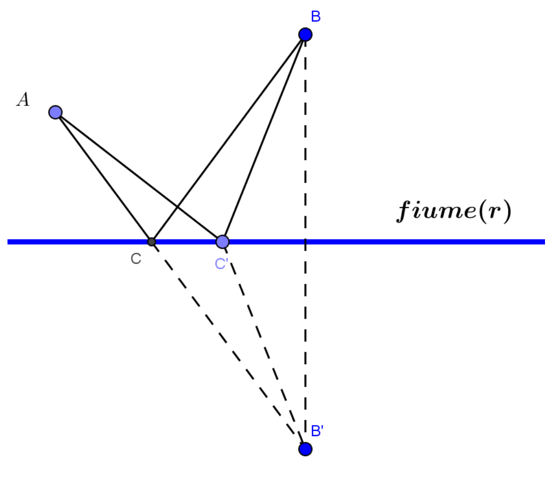
Qual è il percorso di lunghezza minima?

Suggerimento

Considera il punto B' simmetrico di B rispetto alla retta fiume-r e congiungi A con B': sulla retta r viene individuato un punto C.

Come potresti dimostrare che il percorso minimo è quello $\overline{AC} + \overline{CB}$?

Considerando un qualsiasi altro punto C' su r e considerando il percorso $\overline{AC'} + \overline{C'B}$ …….



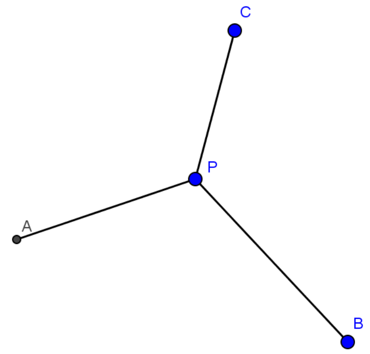
SCHEDA DI LAVORO 4

LA RETE STRADALE

Pierre de Fermat verso la metà del XVII secolo propose a Torricelli il seguente problema ripreso poi da Vincenzo Viviani:

“Dati 3 punti A,B,C tali che il triangolo ABC abbia angoli minori di 120°, trovare un punto O tale che sia minima la somma delle distanze tra O e i punti dati.”

“Dato triangulo,cius unusquisque angolorum minor sit graduum 120, punctum reperire, a quo si ad angulos tres rectae educantur ipsarum aggregatum sit minimum.” (Vincenzo Viviani , De maximis et minimis)



Questo problema non è solo di tipo teorico perché possiamo pensare che corrisponda alla ricerca della rete stradale di minima lunghezza che metta in comunicazione tre località: si può dimostrare(*) che il punto O è quello da cui i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno.

Nota: nel caso in cui uno degli angoli del triangolo ABC sia maggiore o uguale a 120°, il punto O coincide con il vertice di quell’angolo.

Esercizio: verifica con Geogebra che la somma minima si ha quando da O i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno.

Suggerimento

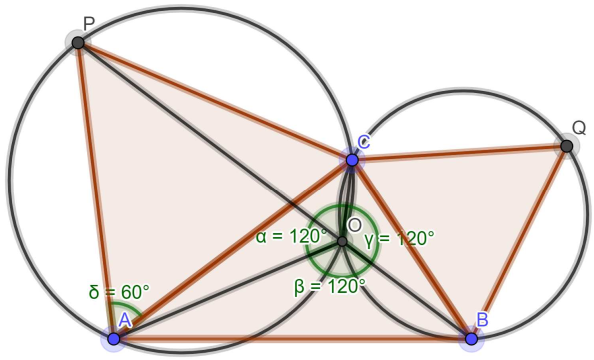
Dopo aver creato tre punti A,B,C puoi creare un punto O a caso, costruire i segmenti AO, BO, CO e utilizzando il comando “lunghezza” calcolare la lunghezza dei tre segmenti e la loro somma (sommando da tastiera le lettere che rappresentano i segmenti): in questo modo puoi controllare che quando O si avvicina ad avere gli angoli α, β, γ di 120° la somma delle distanze diminuisce e che quando gli angoli sono esattamente 120° è il valore più basso di tutti quelli che riesci a visualizzare.

(*)Prova a seguire il seguente ragionamento:

- Disegna i triangoli equilateri ABP e BCQ e traccia la circonferenza passante per A, C, P e la circonferenza passante B, C e Q: indica con O il loro punto di intersezione.

- Si ha che $\hat{AOC} = \hat{COB} = \hat{AOB} = 120°$ dal momento che il quadrilatero AOCP è inscritto in una circonferenza e quindi gli angoli opposti sono supplementari e analogamente per il quadrilatero OBQC.

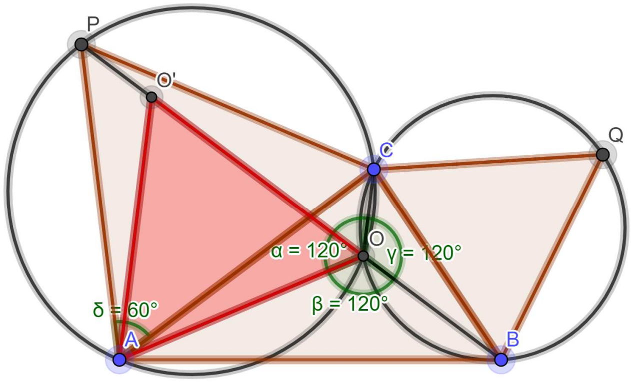
- Congiungi O con P : l'angolo $\hat{POC} = 60°$ poiché insiste sull'arco $\overset{\frown}{PC}$ come l'angolo $\hat{PAC}$ e quindi P, O e B sono sulla stessa retta



- Se ruoti O di 60° intorno ad A trovi un punto O' e AOO' risulta un triangolo equilatero (isoscele con un angolo di 60°)

A questo punto se si dimostra che $\overline{OC} = \overline{O'P}$ (basta considerare i triangoli APO' e AOC) avremo che $\overline{AO} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OO'} + \overline{PO'} + \overline{OB}$

che quindi sarà il valore minimo perché i tre segmenti appartengono alla stessa retta.



SCHEDA DI LAVORO 5

LA CASSERUOLA DI CAPACITA' MASSIMA

Tra tutte le casseruole di forma cilindrica aventi la stessa superficie S (superficie laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

Suggerimento

Schematizza la casseruola con un cilindro ed indica con x il raggio di base: se la superficie di base + superficie laterale sono uguali a S puoi ricavare l'altezza h…..

Dopo aver determinato l'altezza in funzione di x e S, calcola il volume $V(x)$ e poi la sua derivata $V'(x)$ e ponendola uguale a zero determina il valore del raggio per cui si ottiene il massimo volume.

Verifica che sostituendo il valore trovato nell'espressione dell'altezza si trova che la casseruola di volume massimo risulta avere …….