

Studio del grafico di una funzione

Punti di massimo e minimo relativo

a) $x_0 \in D_f$ è un punto di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$$

b) $x_0 \in D_f$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$$

Punti di massimo e minimo assoluto

a) $x_0 \in D_f$ è il punto di massimo assoluto se :

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D_f$$

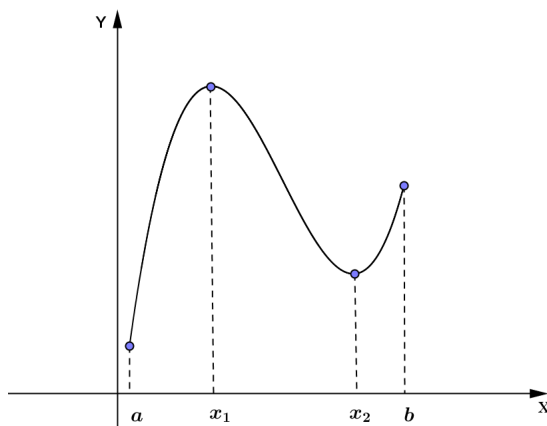
e $f(x_0) = M$ è il massimo assoluto della funzione;

b) $x_0 \in D_f$ è il punto di minimo assoluto se:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D_f$$

e $f(x_0) = m$ è il minimo assoluto della funzione

OSSERVAZIONE : un punto di massimo (minimo) assoluto è anche un punto di massimo (minimo) relativo ma il viceversa non è vero.



a e x_2 sono punti di minimo relativo ; a è punto di minimo assoluto;

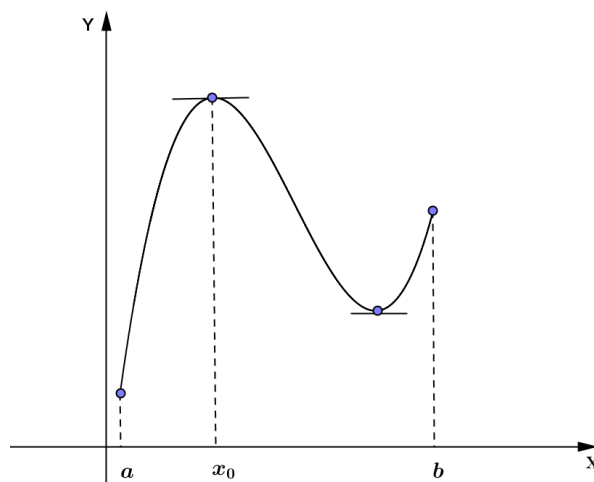
x_1 e b sono punti di massimo relativo e x_1 è punto di massimo assoluto.

Per studiare il grafico di una funzione è fondamentale la ricerca di punti di massimo (minimo) relativi.

Per capire come possano essere individuati vediamo due teoremi riguardanti le funzioni derivabili di cui non facciamo la dimostrazione ma diamo solo un'interpretazione "geometrica".

Teorema di Fermat

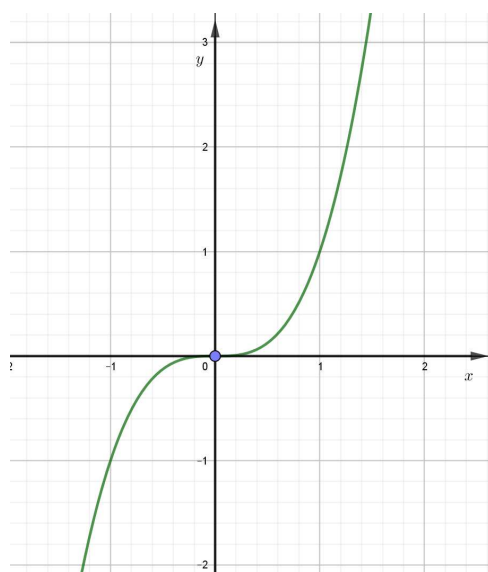
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) : se x_0 è un punto **di massimo o di minimo relativo interno al dominio** $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (cioè la tangente al grafico è parallela all'asse x)



Interpretazione geometrica: osserviamo infatti che nei punti di massimo o minimo interni al dominio la tangente al grafico ha coefficiente angolare (derivata) uguale a zero perché è parallela all'asse x.

E' importante notare che se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo ma non è interno al dominio (per es. a e b nella figura) non è detto che in x_0 la derivata sia nulla.

Nota: il viceversa del teorema non è vero perché se in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$ significa che x_0 potrebbe anche essere un punto in cui cambia la concavità del grafico cioè un punto detto “**punto di flesso**” a tangente orizzontale (vedi figura).

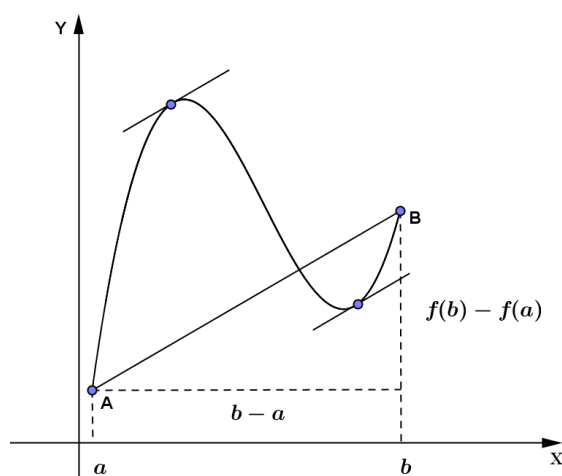


Teorema di Lagrange

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ tale che } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretazione geometrica: osserviamo che $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è l'inclinazione della retta passante per gli estremi del grafico e quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $P(x_0, f(x_0))$ in cui la tangente al grafico è parallela alla retta passante per gli estremi del grafico.



Esempio

Consideriamo $f(x) = x^3$ nell'intervallo $I = [-1, 1]$.

- Verifica le ipotesi del teorema di Lagrange?
Poiché $f(x)$ è continua e derivabile in \mathbb{R} lo è sicuramente anche in I e quindi verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
- Determina il punto x_0 (o i punti) : $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

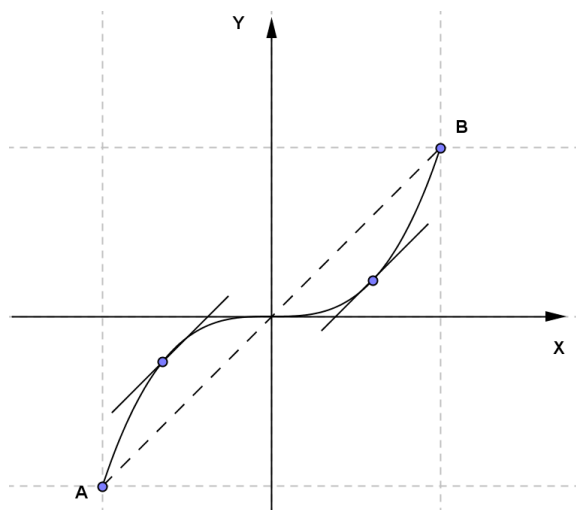
Nel nostro caso $f(-1) = -1$ $f(1) = 1$ e quindi, essendo $f'(x) = 3x^2$ devo risolvere:

$$3x^2 = \frac{1 - (-1)}{2}$$

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

I valori sono interni all'intervallo I e quindi entrambi accettabili.

Graficamente infatti si verifica che esistono due punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta per $A(-1, -1)$ e $B(1, 1)$



Corollari del teorema di Lagrange

Utilizzando il teorema di Lagrange si possono dimostrare i seguenti teoremi (corollari):

- 1) Se $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b)
e $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) = k$ cioè $f(x)$ è una funzione costante.
- 2) Se $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e se

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \quad \forall x \in (a,b) \\ \Downarrow \\ f(x) - g(x) &= k \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

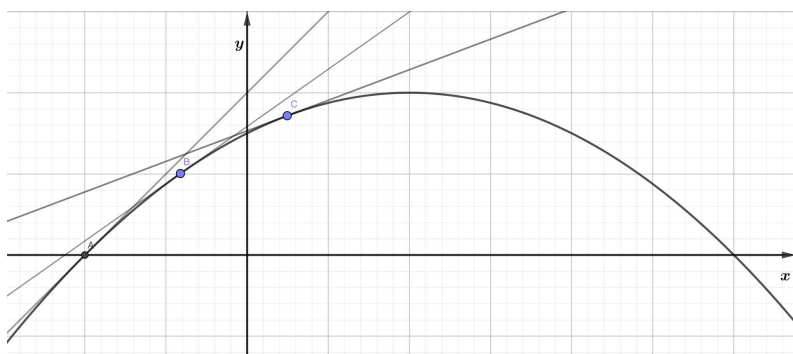
3) Relazione tra il segno della derivata $f'(x)$ e “andamento” della funzione

Data $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) abbiamo che:

se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ è **crescente** in (a,b)

se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ è **decrecente** in (a,b)

Osservazione: infatti “geometricamente” si osserva che quando una funzione è crescente i coefficienti angolari delle tangenti sono positivi, mentre se è decrecente sono negativi (vedi figura).



Nota

Osserviamo che se $f(x)$ è crescente in $[a,b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ poiché può esserci anche un flesso a tangente orizzontale.

Questo teorema è fondamentale per lo studio del grafico di una funzione poiché, come vedremo, ci permette di individuare i punti di massimo, minimo e flesso a tangente orizzontale.

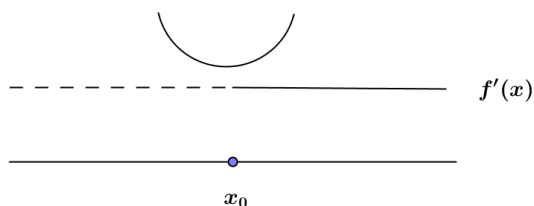
Ricerca dei punti di massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale

Consideriamo un punto $x_0 \in D_f$ in cui $f'(x_0) = 0$, cioè un punto in cui la tangente è parallela all'asse x .

Potrebbe essere un punto di massimo o un punto di minimo o un punto di flesso a tangente orizzontale.

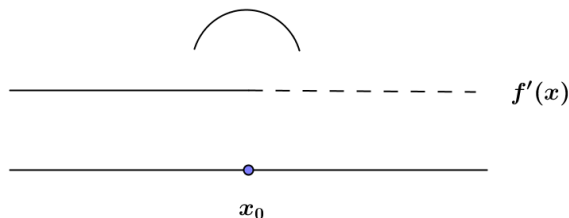
Per capirlo studiamo il segno di $f'(x)$.

1) Se il segno della derivata ha questo andamento



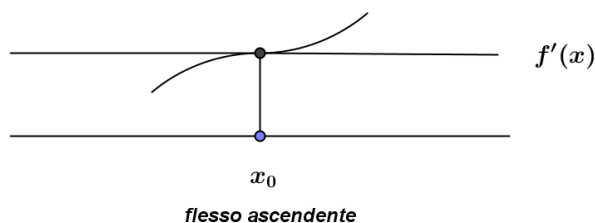
cioè negativo e poi positivo, poiché la $f(x)$ prima di x_0 decresce e poi cresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **minimo**.

2) Se il segno della derivata ha questo andamento

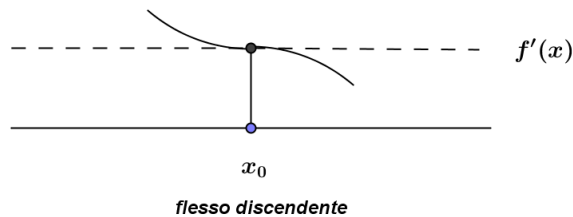


la funzione prima di x_0 cresce e poi decresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **massimo**.

3) Se $f'(x)$ non cambia segno in $x_0 \Rightarrow x_0$ è un **punto di flesso a tangente orizzontale** (ascendente o discendente)



Flesso ascendente



Flesso discendente

Studio del grafico di una funzione

Esempio 1

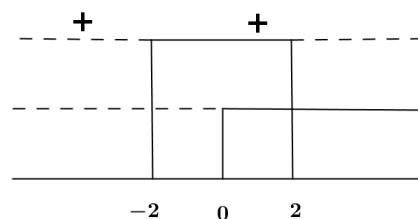
Proviamo a studiare il grafico di $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

1) Per prima cosa determiniamo il dominio: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

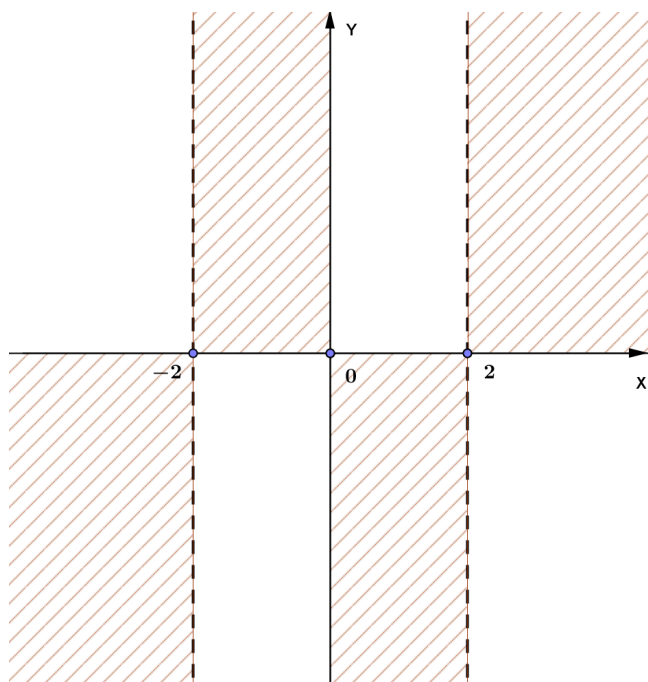
- Studiamo il segno della funzione per capire quando il grafico si trova sopra all'asse x e quando si trova sotto all'asse x.

Studiamo: $\frac{x^3}{4-x^2} > 0$

Quindi $f(x) > 0 \quad x < -2 \cup 0 < x < 2$



Cominciamo ad eliminare con un leggero tratteggio le zone dove non si trova il grafico:



- Determiniamo le eventuali intersezioni con gli assi ponendo $x=0$ (se è nel dominio) e $y=0$.

Nel nostro caso troviamo solo $(0;0)$

- Verifichiamo se la funzione è pari o dispari, cioè calcoliamo

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ la funzione è dispari cioè il grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine.

2) Passiamo allo studio dei limiti e alla ricerca degli asintoti (se ci sono).

Nel nostro caso abbiamo:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -2 \text{ as. vert.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ as. vert.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad (m) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + x = \dots = 0 \quad (q) \end{array} \right\} \Rightarrow y = -x \text{ as. obliquo}$$

3) Calcoliamo adesso $f'(x)$, studiamo in quali punti si annulla e il suo segno:

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot (12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

Poniamo $f'(x) = 0$
 $x^2(12-x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3}$

Studiamo

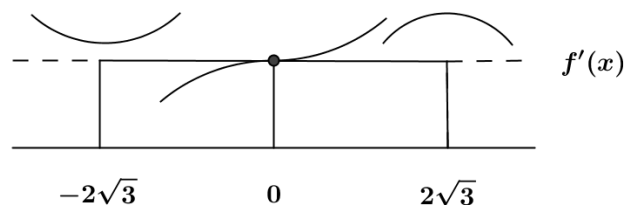
$$f'(x) > 0$$

$$\frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 12-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$$

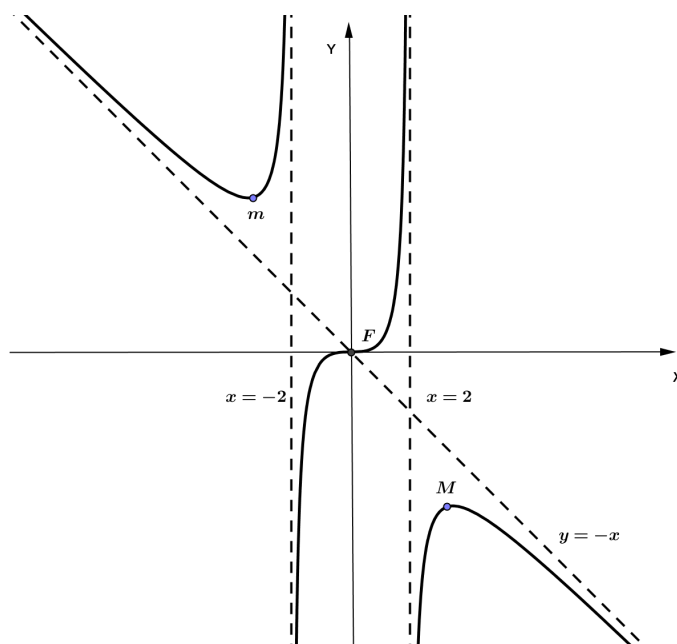
$$m(-2\sqrt{3}; f(-2\sqrt{3})) = 3\sqrt{3}$$

$$M(2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$$

$$F(0;0)$$



Riportiamo i nostri risultati nel disegno: il grafico dovrà necessariamente avere il seguente andamento

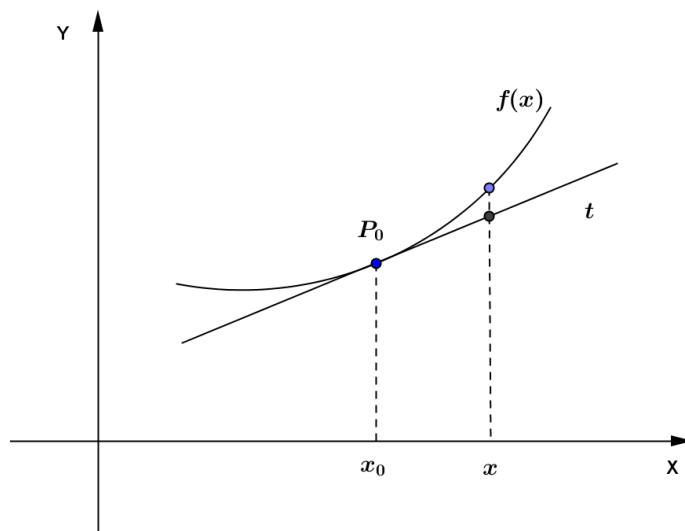


Concavità del grafico e derivata seconda

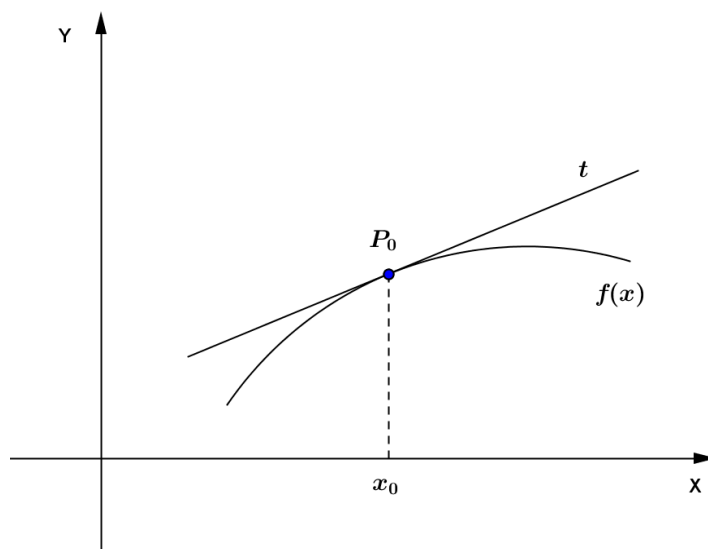
Nello studio di un grafico è importante determinare anche la “concavità” del grafico e i punti in cui c’è un cambio di concavità (punti di flesso).

Definiamo cosa si intende per “**concavità verso l’alto**” o “**verso il basso**” del grafico di una funzione in x_0 :

Definizione: diciamo che in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l’alto quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sopra alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$



Definizione: diciamo che in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso il basso quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sotto alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$



Studio del grafico di una funzione

Si può dimostrare che se $f(x)$ è continua in I con $f'(x), f''(x)$ continue e $x_0 \in I$:

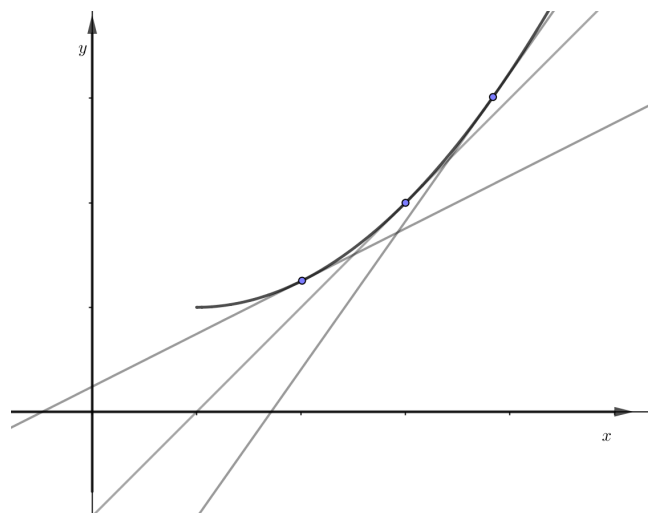
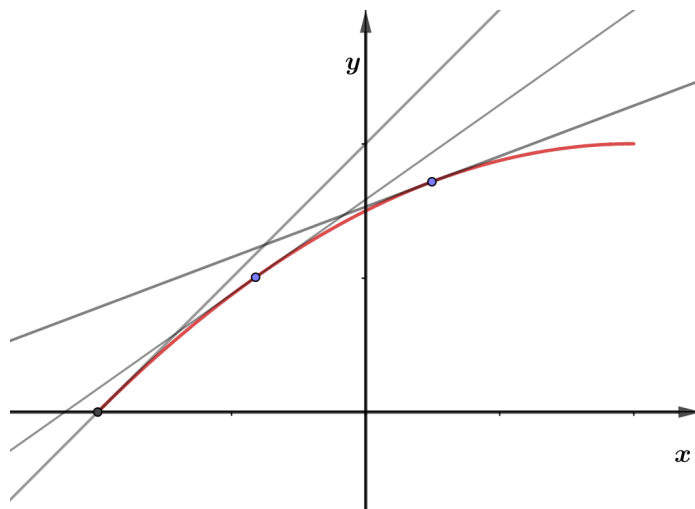
- Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la **concavità verso l'alto**.
- Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la **concavità verso il basso**.

Osservazione: infatti si osserva (vedi figura) che quando la concavità è verso il basso le inclinazioni delle tangenti diminuiscono cioè la funzione derivata è decrescente cioè

$$D(f'(x)) = f''(x) < 0$$

Mentre quando la concavità è verso l'alto le inclinazioni delle tangenti aumentano cioè la funzione derivata è crescente e quindi

$$D(f'(x)) = f''(x) > 0$$

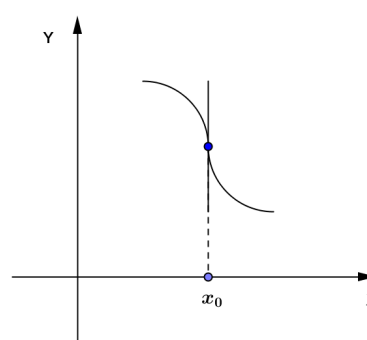
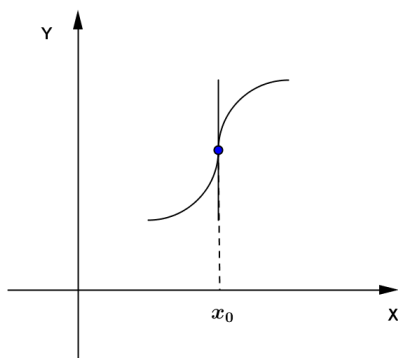


Flessi di una funzione

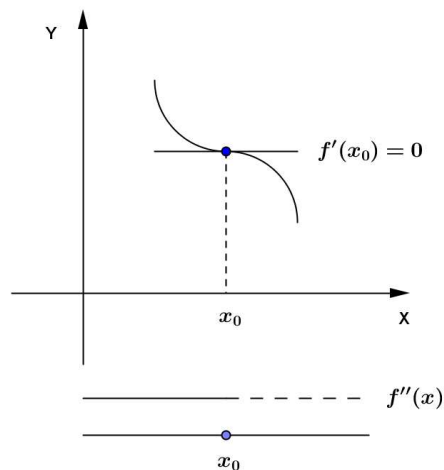
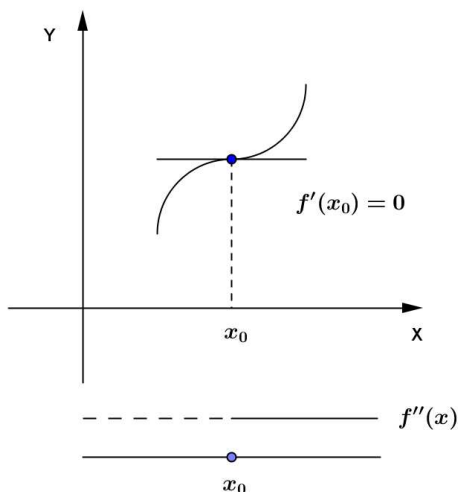
Definizione: x_0 si dice un punto di flesso per $f(x)$ se in x_0 il grafico della funzione **cambia concavità** e quindi il grafico “attraversa” la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.

A seconda dell'inclinazione della tangente possiamo avere

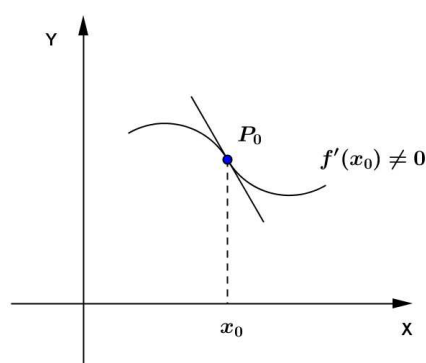
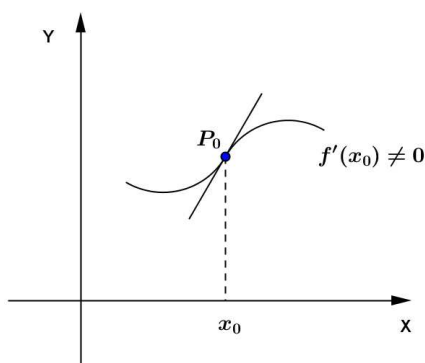
- **flesso a tangente verticale** : in questo caso $f(x)$ non è derivabile in x_0 e
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = -\infty$



- **flesso a tangente orizzontale** : in x_0 $f'(x_0) = 0$ ma $f'(x)$ non cambia segno in x_0 .
Cambia segno invece $f''(x)$ in x_0 (perché cambia la concavità) e $f''(x_0) = 0$.



- **flesso a tangente obliqua** : in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma c'è un cambio di concavità e quindi
 $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ **cambia segno**.

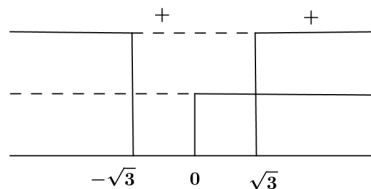


Esempio 2

Studiamo il grafico di $f(x) = x^3 - 3x$

1) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) > 0 \quad x(x^2 - 3) > 0$$



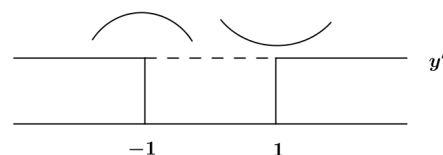
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Quindi le intersezioni con gli assi sono $(-\sqrt{3}; 0)$ $(0; 0)$ $(\sqrt{3}; 0)$.

Osserviamo che $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ e quindi la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine.

2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ma non ci sono asintoti obliqui $\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \right)$

3) $y' = 3x^2 - 3$
 $y' = 0 \quad 3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

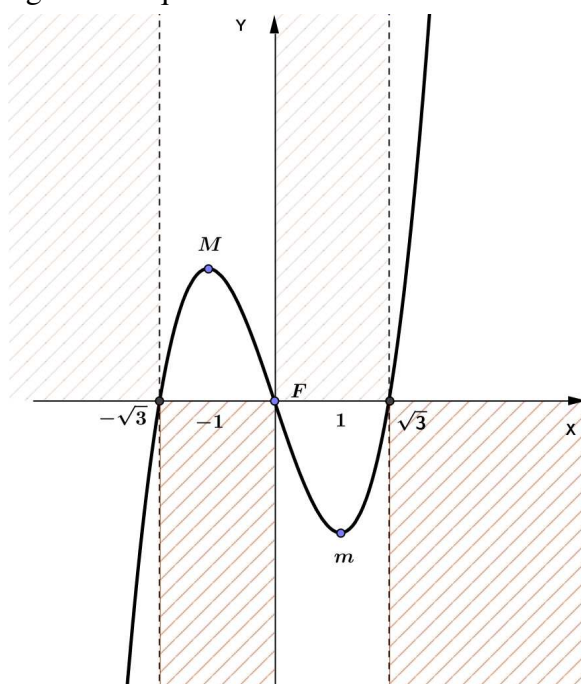
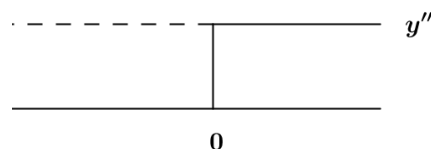


$$y' > 0$$

$$M(-1; 2) \quad m(1; -2)$$

4) $y'' = 6x$, $y'' = 0 \rightarrow x = 0$,
 $y'' > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$F(0; 0)$ flesso a tangente obliqua



Esempio 3

Studiamo il grafico di $f(x) = e^{-x^2}$

1) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione} \end{cases}$$

L'intersezione con gli assi è quindi solo il punto $(0;1)$.

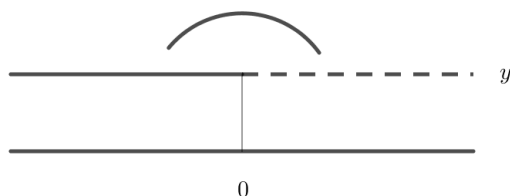
$f(-x) = f(x)$ e quindi la funzione è pari cioè simmetrica rispetto all'asse y.

2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale

3) $y' = -2x \cdot e^{-x^2}$

$$y' = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y' > 0 \rightarrow x < 0$$

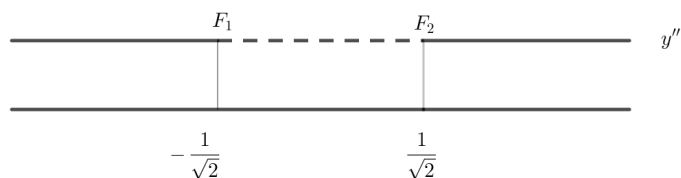


Il grafico ha un massimo in $M(0;1)$.

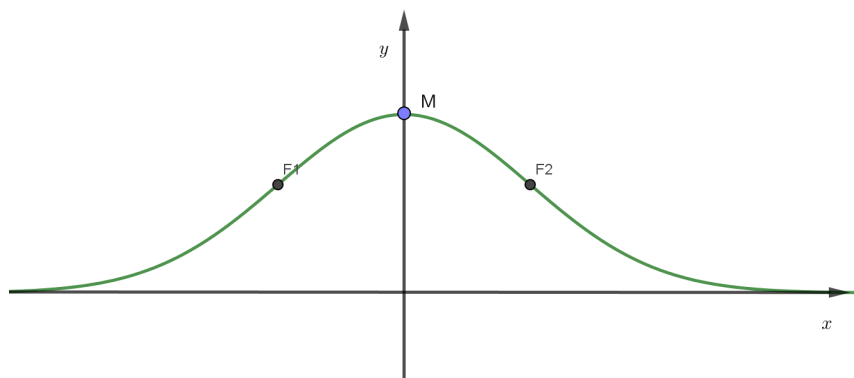
4) $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$$y'' = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y'' > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \cup x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Quindi il grafico ha due flessi $F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

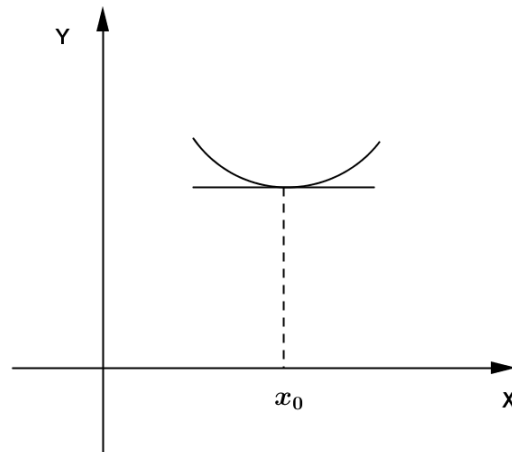


Nota

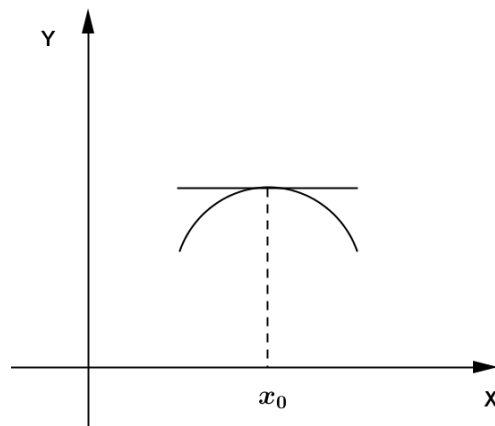
Massimi, minimi e flessi con lo studio di $f''(x_0)$

Per individuare massimi e minimi possiamo utilizzare lo studio di $f''(x)$ piuttosto dello studio del segno di $f'(x)$.

- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ (concavità verso l'alto) $\Rightarrow x_0$ è un punto di minimo



- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ (concavità verso il basso) $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo



Se in x_0 $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ dobbiamo studiare il segno di $f'''(x)$: se cambia in x_0 allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

ESERCIZI

STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

1) $y = \frac{2x^2}{x-2}$

Soluzione:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

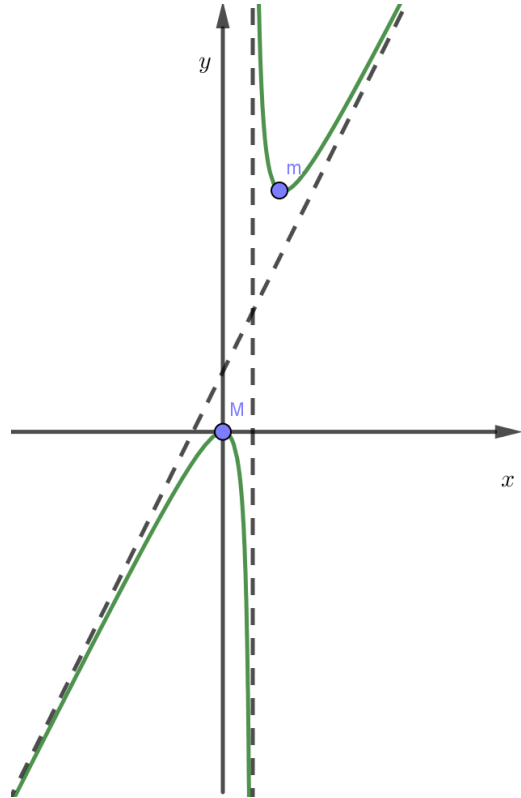
Asintoto verticale: $x = 2$

Asintoto obliquo: $y = 2x + 4$

$$y' = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$M(0;0)$

$m(4;16)$



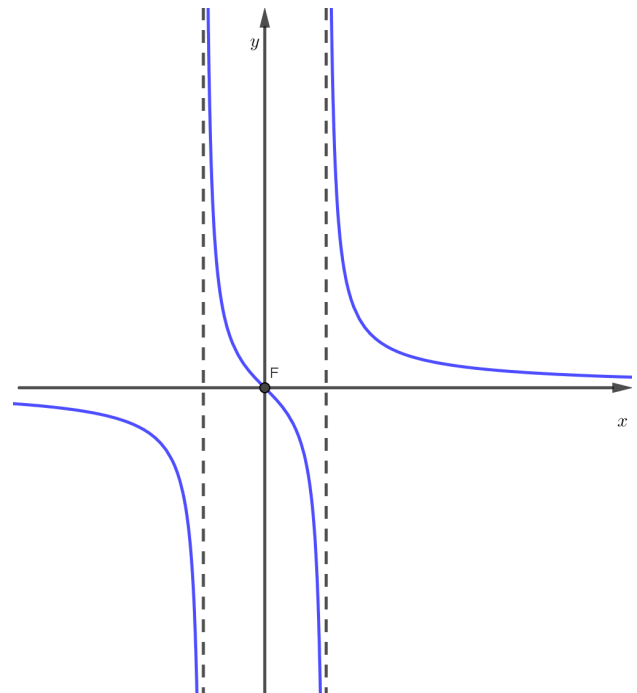
2) $y = \frac{x}{x^2-1}$

Soluzione:

$$y' = -\frac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Flesso a tangente obliqua: $F(0;0)$



$$3) \quad y = \frac{x^3}{1-x^2} \quad [as.v. \quad x = \pm 1; \quad as.obl. \quad y = -x; \quad m\left(-\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$M\left(\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \quad F(0;0) \quad a \quad tg. \quad orizz.]$$

$$4) \quad y = \frac{3x-x^2}{x-4} \quad [\quad as.v. \quad x=4; \quad as.obl. \quad y=-x-1; \quad m(2;-1) \quad M(6;-9)]$$

$$5) \quad y = \frac{2x-1}{2x^3} \quad [as.v. \quad x=0; \quad as.or. \quad y=0; \quad M\left(\frac{3}{4}; \frac{16}{27}\right) \quad F\left(1; \frac{1}{2}\right) \quad a \quad tg. \quad obliqua]$$

$$6) \quad y = \frac{x^2}{x+1} \quad [\quad as.v. \quad x=-1; \quad as.obl. \quad y=x-1; \quad m(0;0); \quad M(-2;-4)]$$

$$7) \quad y = \frac{x^2-4}{x+1} \quad [as.v. \quad x=-1; \quad as.obl. \quad y=x-1]$$

$$8) \quad y = x + \frac{4}{x^2} \quad [as.v. \quad x=0; \quad as.obl. \quad y=x; \quad m(2;3)]$$

$$9) \quad y = \frac{2x^3-3x^2+1}{2x^2} \quad [as.v. \quad x=0; \quad as.obl. \quad y=x-\frac{3}{2}; \quad m(1;0)]$$

$$11) \quad y = \frac{x^2-4x+3}{x} \quad [as.v. \quad x=0; \quad as.obl. \quad y=x-4; \quad M(-\sqrt{3}; -(2\sqrt{3}+4)); m(\sqrt{3}; 2\sqrt{3}-4)]$$

$$12) \quad y = \frac{x^2-5x+4}{x-5} \quad [as.v. \quad x=5; \quad as.obl. \quad y=x; \quad M(3;1); \quad m(7;9)]$$

$$13) \quad y = \frac{x^2-4x}{1-x} \quad [as.v. \quad x=1; \quad as.obl. \quad y=-x+3]$$

$$14) \quad y = \frac{x^2-1}{2x^2} \quad [as.v. \quad x=0 \quad as.or. \quad y=\frac{1}{2}]$$

ESERCIZIO GUIDATO 1

Studia il grafico di $y = \sin^2 x$

a) Il dominio della funzione risulta

Il segno della funzione risulta.....

Il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse poiché $f(-x) = f(x)$.

Le intersezioni con l'asse x si ottengono risolvendo:

$$\sin^2 x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

L'intersezione con l'asse y si trova calcolando $y(0) = 0$: quindi il grafico passa per l'origine .

b) Dal momento che la funzione è periodica e definita per tutti i numeri reali non ci sono limiti da determinare.

c) Studio della derivata: calcoliamo la derivata.

$$y' = D(\sin^2 x) = \dots\dots\dots$$

Poniamo $y' = 0$ e determiniamo quando risulta positiva per trovare i punti di massimo e minimo: possiamo scegliere come intervallo di studio $I[0; 2\pi]$

.....

Dopo aver verificato che nell'intervallo $I[0; 2\pi]$ ci sono due massimi $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $M_2\left(\frac{3}{2}\pi; 1\right)$ e tre minimi $m_1(0; 0)$, $m_2(\pi; 0)$, $m_3(2\pi; 0)$ risulta chiaro che è necessario anche calcolare la y'' per determinare i punti di flesso (che saranno a tangente obliqua).

d) Calcoliamo $y'' = \dots\dots\dots$ e poniamo $y''(x) = 0 \rightarrow \dots\dots\dots$

Possiamo quindi tracciare il grafico.....

Osservazione: dal grafico si capisce che il periodo della funzione non è 2π ma π .

Se infatti ricordiamo che $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ è chiaro che la nostra funzione ha lo stesso periodo

di $y = \cos 2x$ che ha infatti periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ESERCIZIO GUIDATO 2

Studia il grafico di $y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

a) Il dominio della funzione si ottiene risolvendo la disequazione

$$\frac{x}{x-1} > 0 \rightarrow \dots\dots\dots$$

Possiamo studiare il segno della funzione risolvendo la disequazione:

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \rightarrow \frac{x}{x-1} > 1 \rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x-x+1}{x-1} > 0 \rightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \rightarrow x > 1$$

Per determinare le intersezioni con l'asse x dobbiamo risolvere l'equazione

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \rightarrow \dots\dots\dots$$

b) *Studio dei limiti*

Poiché il dominio risulta $x < 0 \cup x > 1$ dobbiamo studiare:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots\dots ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots ; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots\dots\dots$$

In conclusione il grafico della funzione ha due asintoti verticali ($x=0$ e $x=1$) e un asintoto orizzontale (asse x).

c) *Studio della derivata*

$$\text{Calcoliamo } y' = D\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = \dots\dots\dots$$

Studiamo il segno della derivata ponendo $y' > 0 \rightarrow \dots\dots\dots$

Verificato quindi che non ci sono massimi o minimi e che la funzione è nei due intervalli $x < 0$ e $x > 1$ sempre decrescente, possiamo tracciare il grafico (in questo caso non è necessario studiare la y'').

SCHEMA DI LAVORO

GRAFICI PER VISUALIZZARE L'ANDAMENTO DI UN FENOMENO



Lo studio dei grafici non è importante solo in ambito matematico perché un grafico può servire a “visualizzare” *l'andamento di un “fenomeno” nel tempo*: questo accade tutte le volte che la variabile x rappresenta il tempo e per questo viene indicata con la lettera t .

I fenomeni possono essere di vario tipo.

Si possono avere fenomeni di tipo naturale cioè fenomeni fisici o biologici quali:

- il valore dell'intensità di corrente che scorre in un filo metallico;
- l'intensità del campo magnetico all'interno di una bobina;
- il numero degli individui di una popolazione di animali o di piante;
- ecc.

In genere si riesce a determinare l'equazione della funzione $f(t)$ che descrive il fenomeno cioè una funzione che dipende dalla variabile tempo.

Oppure si possono considerare fenomeni legati ad attività umane e in questo caso i grafici derivano da tabelle di dati cioè non c'è un'equazione della funzione da rappresentare e servono a visualizzarne l'andamento temporale:

- la quotazione di un dato titolo in borsa;
- il fatturato mensile di una data azienda;
- il quantitativo del grano prodotto ogni anno in Italia;
- il numero degli abitanti di un dato paese negli ultimi anni;
- il numero giornaliero dei nuovi contagiati in una data epidemia;
- ecc.

Scegli un esempio di fenomeno di tipo “fisico”, uno di tipo “biologico” e uno legato ad una “tabella” magari anche facendo una ricerca sul web e per ciascuno rappresenta il grafico.