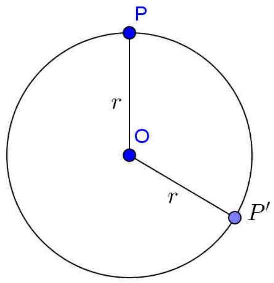
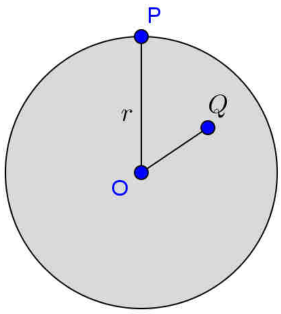
Geometria euclidea

Circonferenza

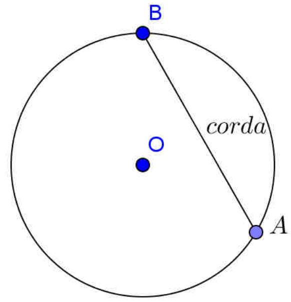
Definizione
Una **circonferenza** di centro O e raggio r è l'insieme dei punti del piano che hanno da O distanza uguale a r.
I segmenti che congiungono il centro O con i punti della circonferenza hanno tutti la stessa lunghezza e sono detti raggi della circonferenza.



Definizione
Un **cerchio** di centro O e raggio r è l'insieme dei punti del piano la cui distanza da O è minore o uguale a r .
La circonferenza di centro O e raggio r è quindi il "contorno" del cerchio di centro O e raggio r e appartiene al cerchio.

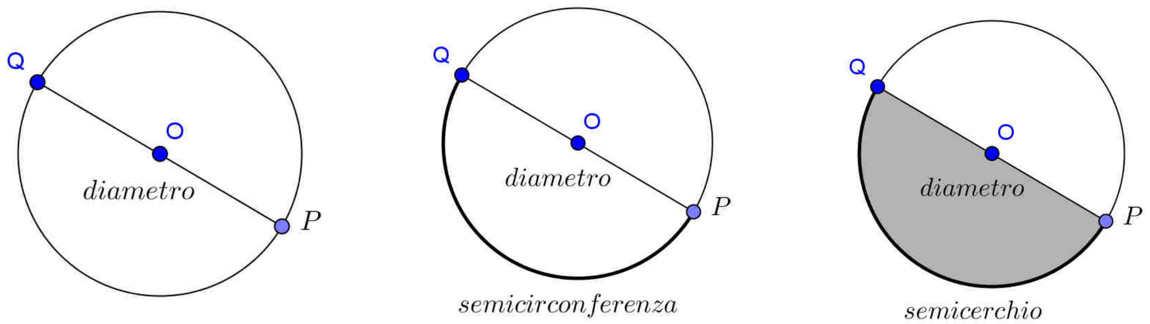


Si chiama ***corda*** il segmento che unisce due punti A e B di una circonferenza: A e B si dicono estremi della corda.



Si chiama ***diametro*** ogni corda passante per il centro della circonferenza.

Ogni diametro divide la circonferenza e il cerchio in due parti dette rispettivamente semicirconferenze e semicerchi.

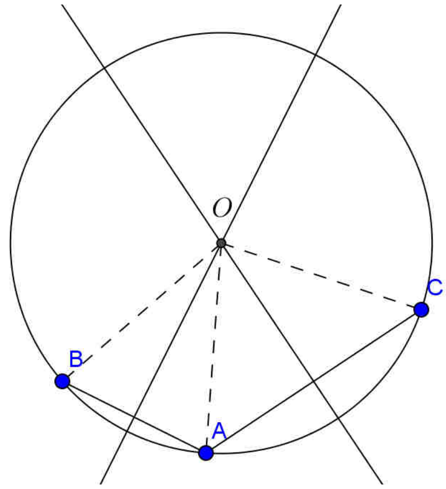


Dimostriamo subito un importante teorema:

Teorema: *per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza*

Dimostrazione

Consideriamo tre punti non allineati A, B, C: uniamo A con B e tracciamo l'asse del segmento AB; uniamo A con C e tracciamo l'asse del segmento AC.



Sia O il punto di intersezione dei due assi: poiché O appartiene all'asse di AB si ha $OA \cong OB$, ma poiché appartiene anche all'asse di AC si ha anche $OA \cong OC$.

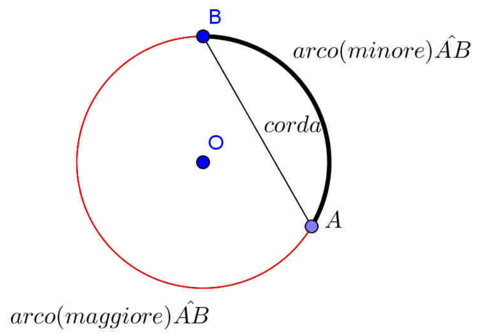
Quindi per O è equidistante dai tre punti e quindi la circonferenza di centro O e raggio OA passa anche per B e C.

Questa è anche l'unica circonferenza passante per i tre punti dal momento che l'intersezione dei due assi è solo O.

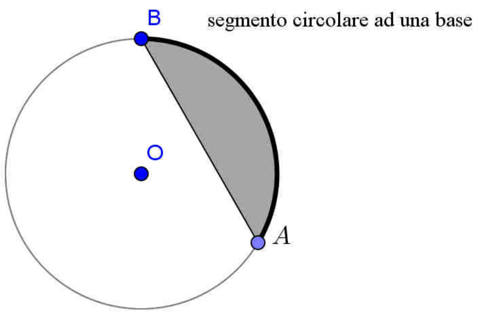
Parti della circonferenza e del cerchio

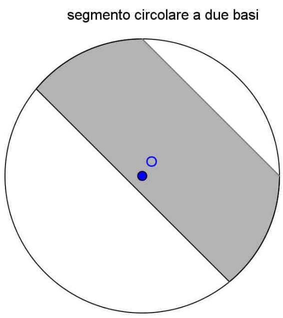
Diamo **qualche altra definizione.**

Le due parti della circonferenza individuate da una corda si dicono **archi**.

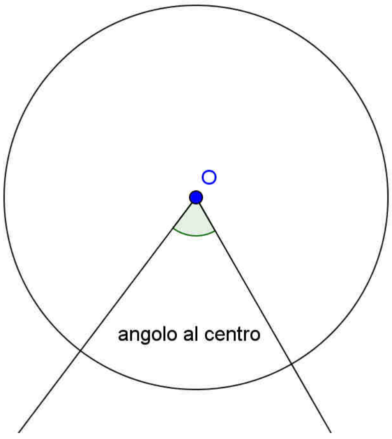


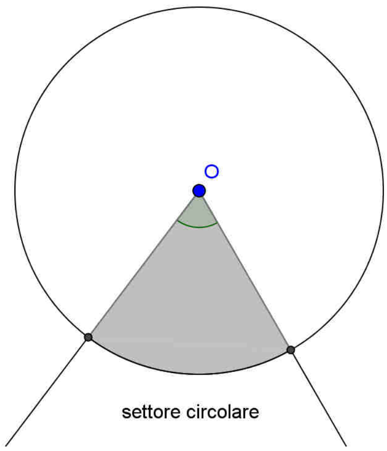
La parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco corrispondente si chiama **segmento circolare ad una base;**
la parte di cerchio compresa tra due corde parallele e i due archi che hanno per estremi gli estremi delle due corde si chiama **segmento circolare a due basi**





Un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza si chiama **angolo al centro.**
L'intersezione tra un cerchio e un suo angolo al centro si chiama **settore circolare**.

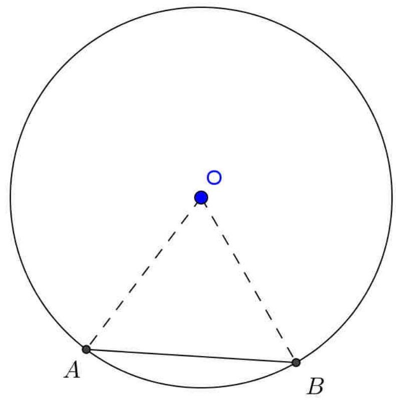




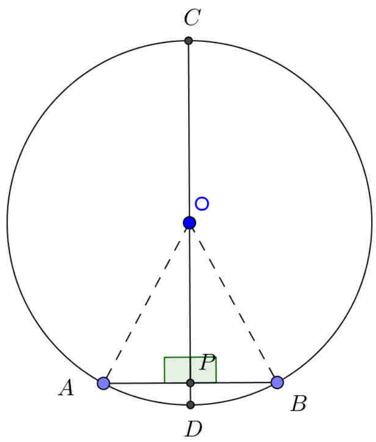
SCHEDA DI LAVORO 1
Proprietà delle corde di una circonferenza

1) ***Il diametro è la corda di lunghezza massima***

Dimostrazione: considera una corda AB che non sia un diametro e congiungi A e B con il centro O della circonferenza. Se consideri il triangolo AOB, ricordando che in un triangolo ogni lato è … ……. della somma degli altri due, abbiamo che ………………….. e quindi $\overline{AB} < diametro$.



2) ***Il diametro perpendicolare ad una corda passa per il suo punto medio e viceversa.***

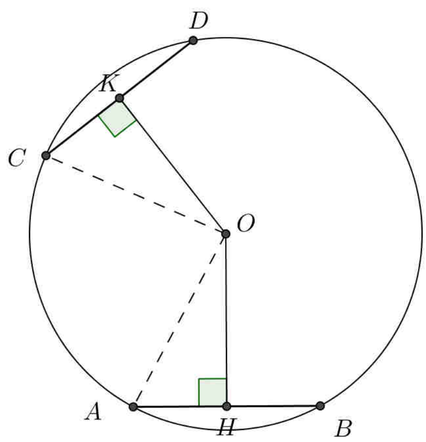


Dimostrazione: chiamiamo P il punto di intersezione tra il diametro CD perpendicolare alla corda AB e la corda AB. Il triangolo AOB è ………….. e quindi l'altezza OP è anche ……………..

In conclusione $AP \cong PB$ cioè P è il punto medio di AB.

Analogamente se un diametro passa per il punto medio di una corda……………………………

3) ***Due corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro della circonferenza e viceversa***



Dimostrazione: consideriamo AB e CD due corde congruenti della stessa circonferenza e tracciamo le distanze OH e OK. Tracciando i raggi AO,CO otteniamo due triangoli rettangoli che risultano…………………….. poiché hanno:

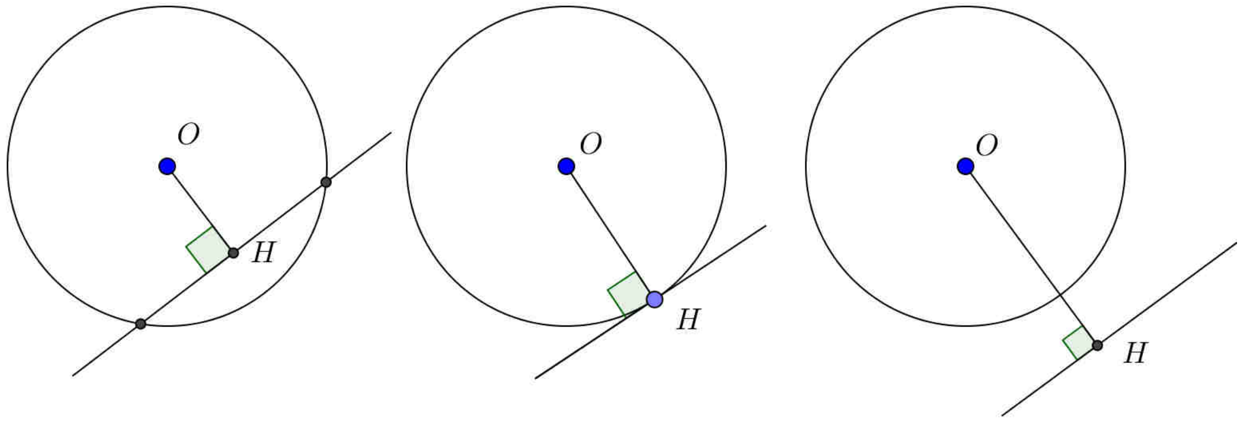
…………………………..

Quindi anche $OH \cong OK$ cioè le due corde hanno la stessa distanza dal centro.

In modo analogo si dimostra che se due corde hanno la stessa distanza dal centro sono congruenti.

SCHEDA DI LAVORO 2
Retta e circonferenza

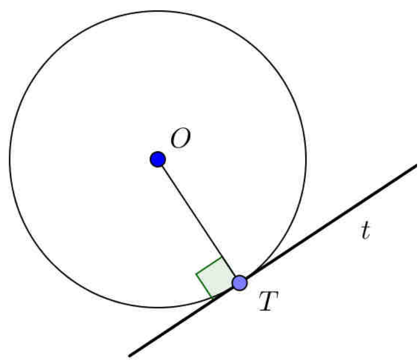
Definizione
Se una retta ha due punti di intersezione con una circonferenza si dice **secante**;
un solo punto di intersezione con la circonferenza si dice **tangente**;
nessun punto di intersezione con la circonferenza si dice **esterna** alla circonferenza.

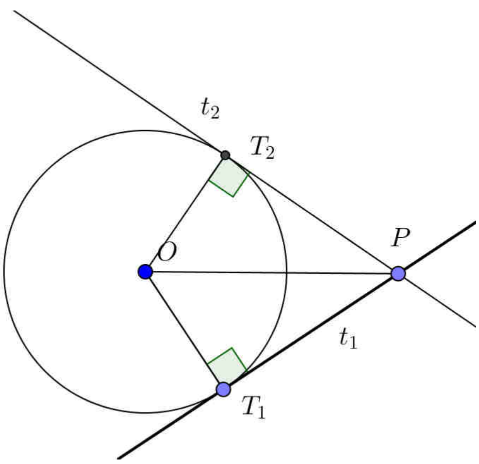


Si osserva che se la retta è secante la sua distanza dal centro della circonferenza è minore del raggio, se è tangente la sua distanza dal centro è uguale al raggio e se è esterna la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio (vale anche il viceversa cioè se la distanza è……………..allora la retta è secante ecc.).

1) ***Se una retta t è tangente ad una circonferenza in un punto T allora il raggio OT è perpendicolare alla retta t*** .

Dimostrazione: poiché la distanza dal centro è …………al raggio (se fosse minore la retta sarebbe secante, se fosse maggiore sarebbe esterna), il raggio OT è necessariamente il segmento perpendicolare la cui misura dà la distanza tra retta e centro.





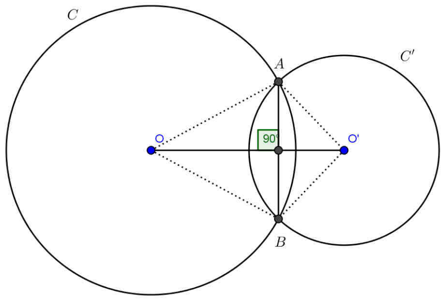
2)***Se da un punto P esterno ad una circonferenza si tracciano le rette tangenti alla circonferenza e si indicano con*** T_1, T_2 ***i punti di tangenza, si ha che*** $PT_1 \cong PT_2$.

Dimostrazione: congiungiamo O con P e con T_1, T_2.
I triangoli rettangoli OPT_1, OPT_2 sono congruenti poiché……………………………………………………

e quindi anche $PT_1 \cong PT_2$

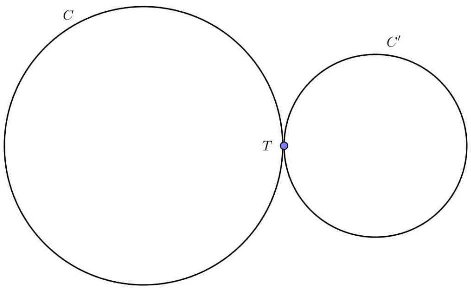
Posizione reciproca tra due circonferenze

Definizione: due circonferenze si dicono “**secanti**” quando hanno due punti in comune.
Nota
Osserviamo che il segmento AB è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze: infatti essendo $OA \cong OB$, $O'A \cong O'B \Rightarrow$ O e O’ appartengono all’asse di AB e quindi OO’ è asse di AB e di conseguenza OO’ e AB risultano perpendicolari.

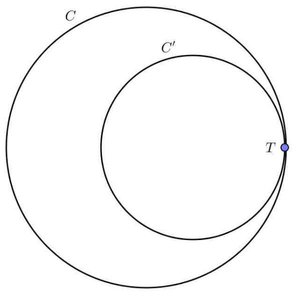


circonferenze secanti

Definizione: due circonferenze si dicono “**tangenti**” quando hanno un solo punto in comune.
Se il centro di una delle due circonferenze è esterno all’altra si dicono tangenti “esternamente”, se è interno di dicono tangenti “internamente”. Il punto comune si chiama punto di tangenza o di contatto.

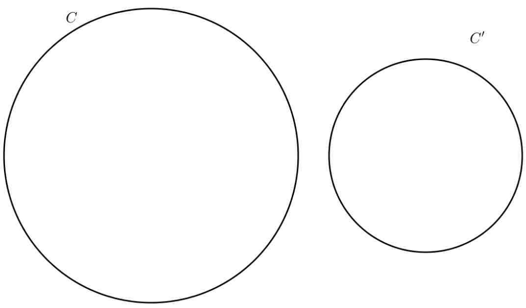


circonferenze tangenti esternamente

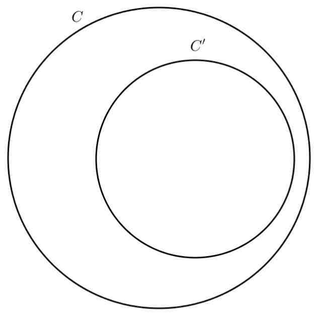


circonferenze tangenti internamente

Definizione: due circonferenze si dicono “**esterne**” quando tutti i punti di una circonferenza sono esterni all’altra e viceversa mentre si dicono **l’una “interna” all’altra** quando tutti i punti di una sono interni all’altra.

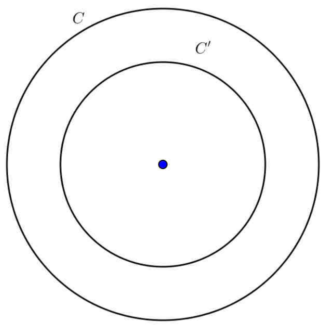


circonferenze esterne



C' interna a C

Definizione: due circonferenze, una interna all’altra, si dicono “**concentriche**” quando hanno lo stesso centro.

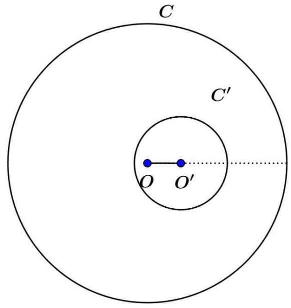


circonferenze concentriche

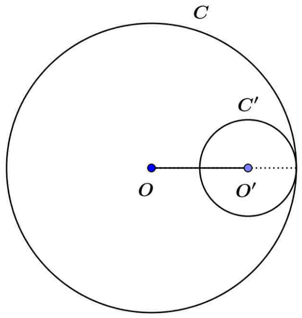
Posizione reciproca tra due circonferenze e distanza tra i loro centri

Consideriamo due circonferenze *C* e *C'* di raggi *r* e *r'* e centri O e O' ed osserviamo la distanza tra i loro centri al variare della loro posizione reciproca (iniziamo con C' interna a *C* e poi allontaniamo gradualmente O' da O).

1) *C'* è interna a *C* $\Leftrightarrow$ $OO' < r - r'$

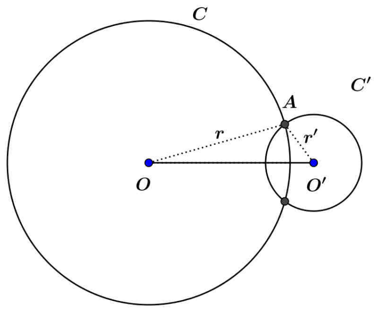


2) *C'* è tangente internamente a *C* $\Leftrightarrow$ $OO' = r - r'$

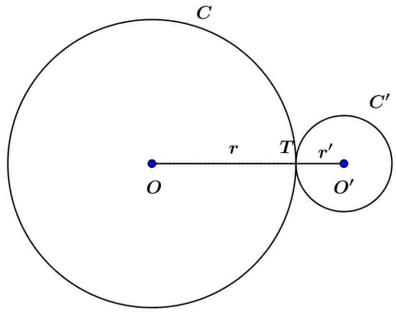


3) *C'* e *C* sono secanti $\Leftrightarrow$ $r - r' < OO' < r + r'$

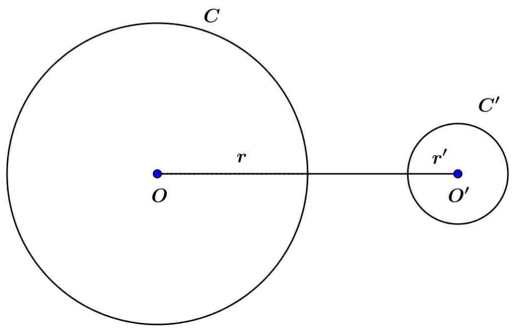
Infatti considerando il triangolo OAO' avremo che il lato OO' è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.



4) *C'* e *C* sono tangenti esternamente $\Leftrightarrow$ $OO' = r + r'$

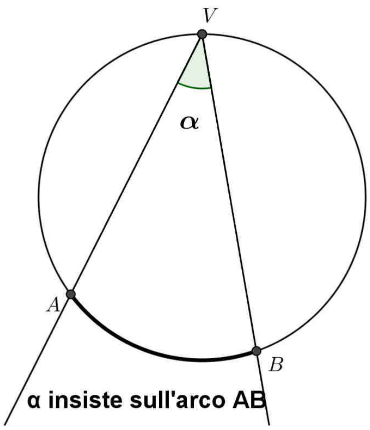


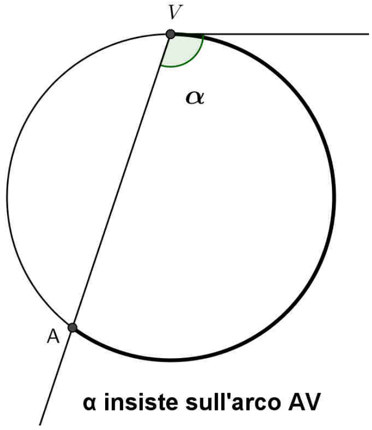
5) *C'* e *C* sono esterne $\Leftrightarrow$ $OO' > r + r'$



Angoli alla circonferenza e angoli al centro

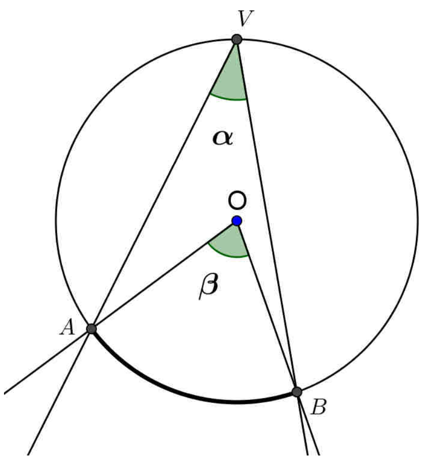
Definizione: si dice "**angolo alla circonferenza**" un angolo convesso avente il vertice sulla circonferenza e i lati entrambi secanti o uno secante ed uno tangente alla circonferenza.





L'intersezione dell'angolo con la circonferenza è un arco e si dice che l'angolo alla circonferenza **insiste** su tale arco.

Definizione: un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che "insistono" sullo stesso arco si dicono **corrispondenti.**

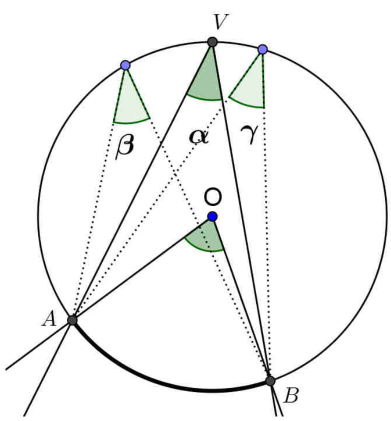


α e β sono angoli corrispondenti

Nota

Ad un angolo alla circonferenza corrisponde un solo angolo al centro "corrispondente" mentre, fissato un angolo al centro, ci sono infiniti angoli alla circonferenza "corrispondenti".

α, β, γ sono tutti angoli alla circonferenza corrispondenti all'angolo al centro $A\hat{O}B$



C'è un'importante proprietà che riguarda gli angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.

Teorema

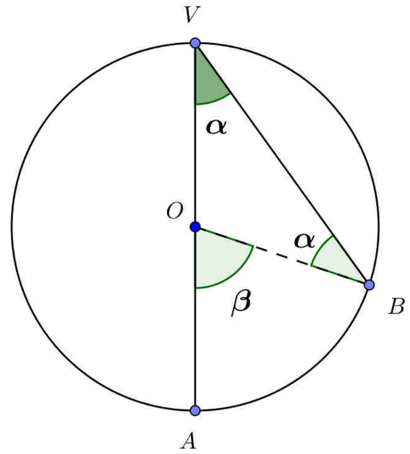
L'angolo al centro è doppio di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.

Dimostrazione

Indichiamo con α l'angolo alla circonferenza e con β il corrispondente angolo al centro.

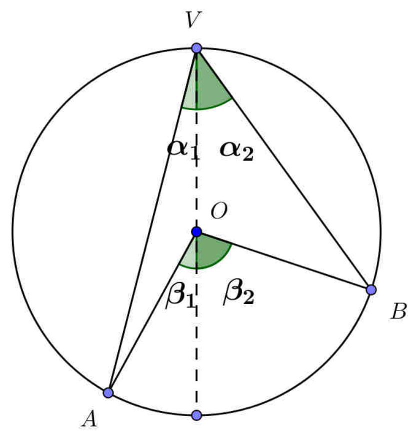
a) Cominciamo a considerare il caso in cui il centro O della circonferenza appartiene ad un lato dell'angolo alla circonferenza.
Congiungiamo O con B e consideriamo il triangolo isoscele OBV: si avrà quindi $O\hat{B}V \cong \alpha$.

Ma allora, per il teorema dell'angolo esterno, si avrà $\beta \cong \alpha + \alpha = 2\alpha$.



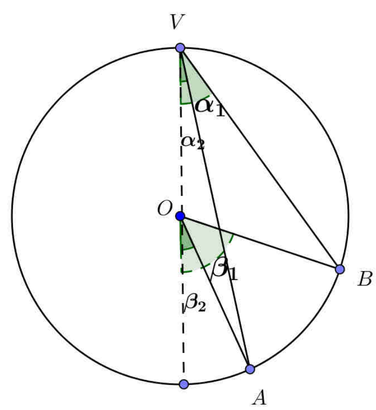
b) Sia O interno all'angolo α. Tracciamo il diametro VO e avremo, per quanto visto prima

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2$$
e quindi
$$\beta \cong \beta_1 + \beta_2 \cong 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$



c) Sia O esterno all'angolo α. Tracciamo ancora il diametro VO e consideriamo β come differenza tra β_1 e β_2 (vedi figura). Anche questa volta avremo:

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2$$
e quindi
$$\beta \cong \beta_1 - \beta_2 \cong 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha$$

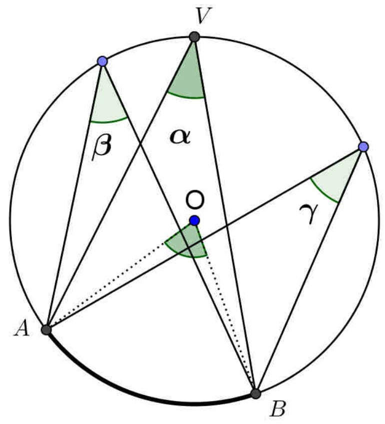


Nota

In modo analogo si dimostra la proprietà anche nel caso in cui l'angolo alla circonferenza ha un lato tangente alla circonferenza.

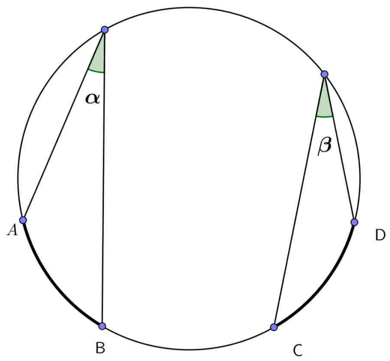
Ci sono alcune importanti conseguenze di questo teorema.

1) Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti poiché sono metà dello stesso angolo al centro.



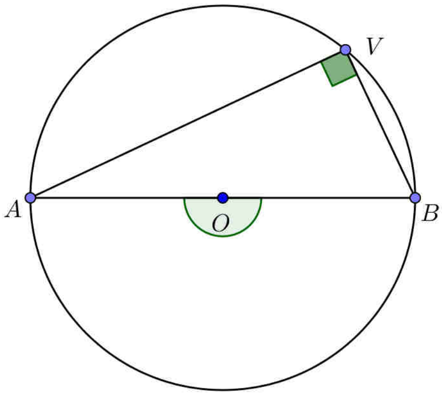
$\alpha \cong \beta \cong \gamma$

2) Angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali sono uguali.



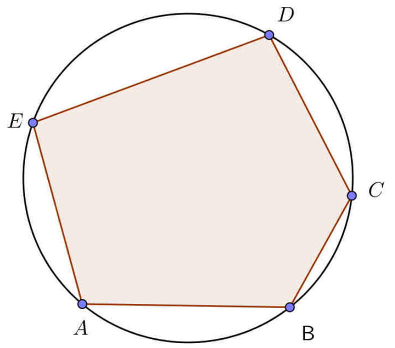
$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \alpha \cong \beta$

3) **Un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto** poiché risulta la metà di un angolo piatto.



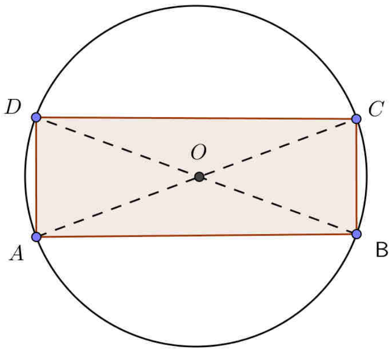
SCHEDA DI LAVORO 3
Poligoni inscritti in una circonferenza

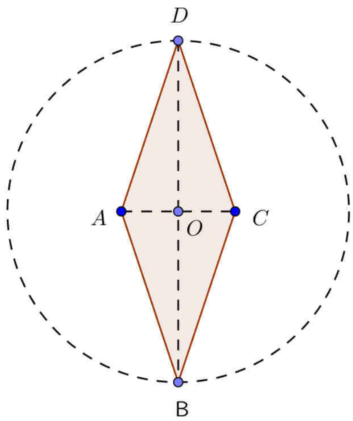
Definizione: un poligono si dice "inscritto" in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza e la circonferenza si dice circoscritta al poligono.



Quali poligoni sono inscrivibili in una circonferenza?

Se consideriamo un rettangolo osserviamo che il punto di incontro delle diagonali è il centro della circonferenza circoscritta poiché risulta alla stessa distanza da tutti i vertici.
Invece se consideriamo un rombo (che non sia un quadrato) non riusciamo a inscriverlo in una circonferenza.

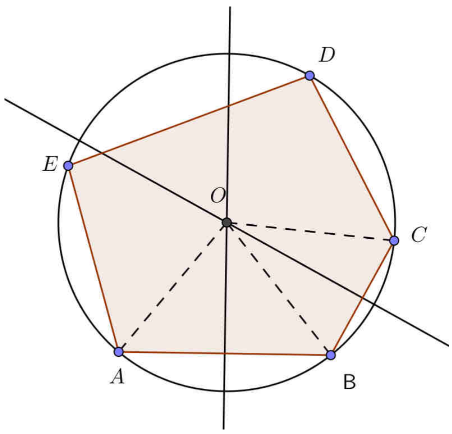




Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere inscritto in una circonferenza?

Consideriamo un poligono inscritto in una circonferenza ed indichiamo con O il centro della circonferenza: risulta che O è alla stessa distanza da tutti i vertici del poligono.

Quindi, ricordando che i punti dell'asse di un segmento sono …………………..dagli estremi del segmento, il centro O dovrà appartenere all'asse di AB, all'asse di BC ecc. (vedi figura).

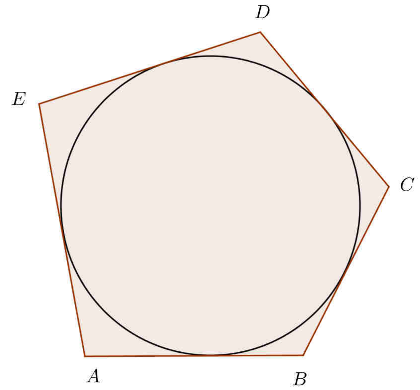


Quindi possiamo concludere che se un poligono è inscritto in una circonferenza gli assi dei suoi lati si incontrano in uno stesso………….. che risulta il ………………….della circonferenza circoscritta.

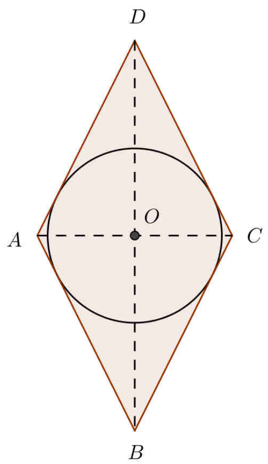
Viceversa è chiaro che se in un poligono gli assi dei lati si incontrano tutti in uno stesso ………, allora il poligono può essere………………….in una circonferenza.

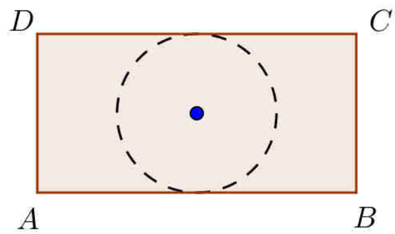
SCHEDA DI LAVORO 4
Poligoni circoscritti ad una circonferenza

Definizione: un poligono si dice "circoscritto" ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza e la circonferenza si dice inscritta nel poligono.

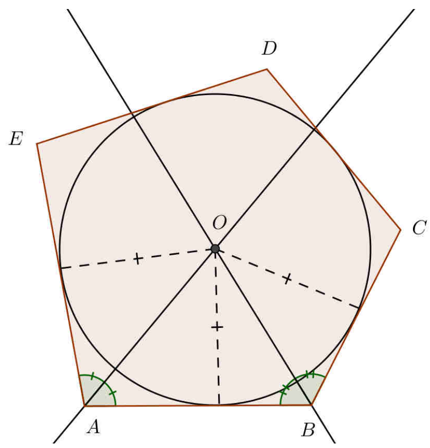


Quali poligoni sono circoscrivibili ad una circonferenza?
Se consideriamo un rombo vediamo che il punto di incontro delle sue diagonali risulta il centro della circonferenza inscritta poiché risulta alla stessa…………………..dai lati del rombo, mentre un rettangolo (che non sia un quadrato) non è circoscrivibile ad una circonferenza.





Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere circoscrivibile ad una circonferenza?
Consideriamo un poligono circoscritto ad una circonferenza ed indichiamo con O il suo centro: osserviamo che O è alla stessa distanza da tutti i lati del poligono.
Quindi, ricordando che i punti della bisettrice di un angolo sono ………………………..dai lati dell'angolo, il centro O dovrà appartenere alla bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, dell'angolo $\hat{B}$ ecc. (vedi figura).



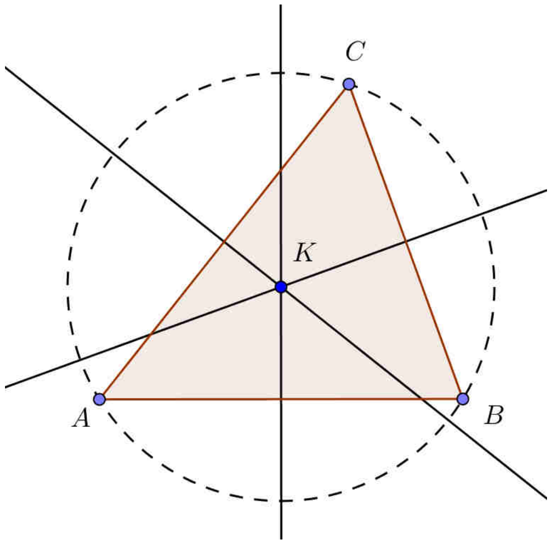
Quindi possiamo concludere che se un poligono è circoscritto ad una circonferenza le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto che risulta il …………….. della circonferenza.
Viceversa è chiaro che se in un poligono le bisettrici degli angoli si incontrano in uno stesso punto, allora il poligono è ………………………ad una circonferenza e il punto di incontro delle bisettrici ne è il ……………………

Punti notevoli di un triangolo

Circocentro

Abbiamo dimostrato che per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza: quindi in un triangolo gli **assi dei lati** si incontrano in uno stesso punto che viene detto "circocentro" ed è il centro della circonferenza circoscritta.

K è il circocentro del triangolo ABC



Incentro

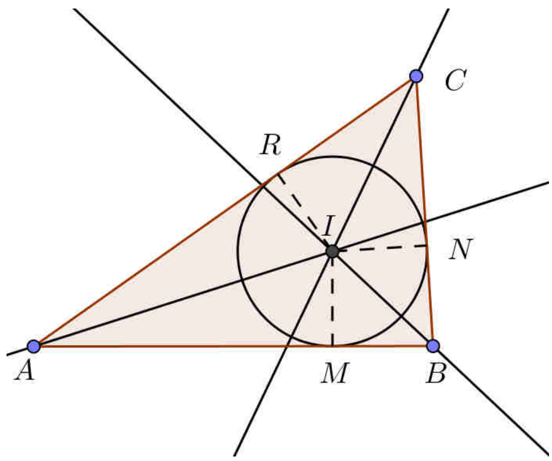
Teorema: in un triangolo le **bisettrici** degli angoli interni si incontrano in uno stesso punto che viene chiamato "incentro" e risulta il centro della circonferenza inscritta.

Dimostrazione: tracciamo le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e sia I il loro punto di intersezione. Tracciamo da I le perpendicolari ai lati e indichiamo con M,N,R i piedi di queste perpendicolari.

$IM \cong IR$ poiché I appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$;

$IM \cong IN$ poiché I appartiene alla bisettrice di $\hat{B}$.

Ma allora, per la proprietà transitiva, $IN \cong IR$ cioè I è equidistante dai lati dell'angolo $\hat{C}$ e quindi I appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.



In conclusione tutte le bisettrici si incontrano in I e poiché I si trova alla stessa distanza dai lati del triangolo risulta il centro della circonferenza inscritta nel triangolo (i lati sono tangenti alla circonferenza).

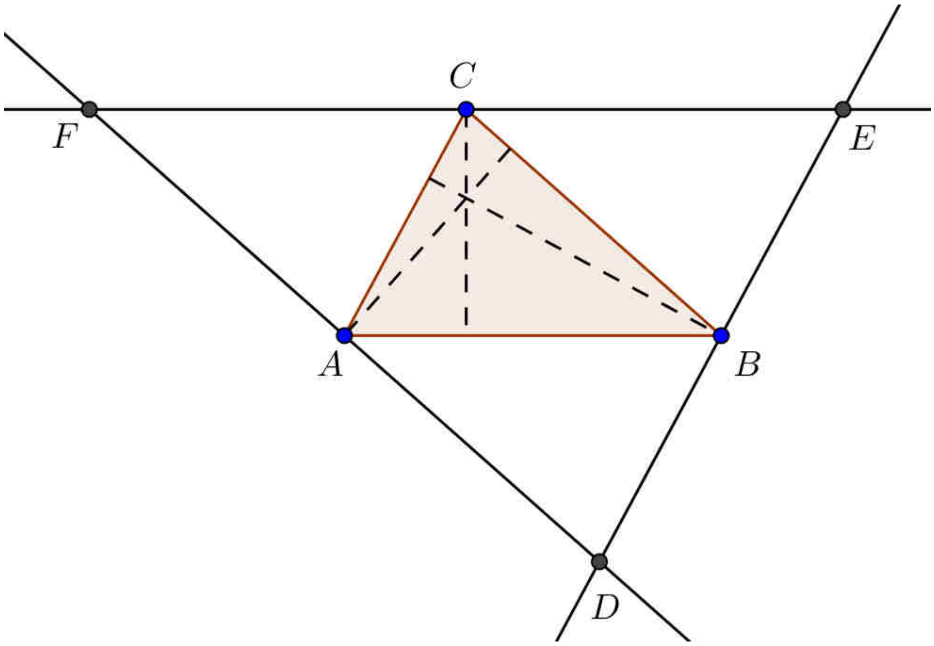
SCHEDA DI LAVORO 5
Ortocentro di un triangolo

Dimostriamo che le **altezze** di un triangolo si incontrano in uno stesso punto che viene detto "**ortocentro**" del triangolo.

Consideriamo un triangolo ABC e tracciamo le altezze h_A , h_B , h_C uscenti rispettivamente dal vertice A,B,C.

Tracciamo la retta per A parallela al lato BC, la retta per B parallela al lato AC e la retta per C parallela al alto AB: siano D,E,F i loro punti di intersezione (vedi figura).

Osserviamo che A è il punto medio di DF perché essendo ADBC un parallelogramma si ha $AD \cong$ .... ed essendo ABCF un parallelogramma si ha $BC \cong$ .... e quindi per la proprietà transitiva abbiamo che $AD \cong$ ....
Inoltre l'altezza h_A essendo perpendicolare a BC è anche perpendicolare a ……… e quindi risulta in conclusione asse del segmento………..

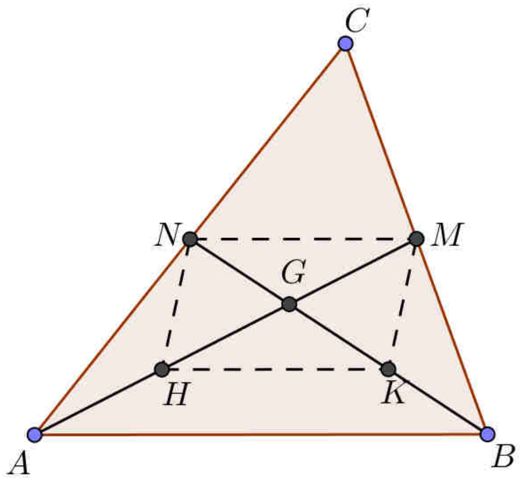


In modo analogo si dimostra che h_B è asse di DE e h_C è asse di ………: ma allora le tre altezze si incontrano in uno stesso punto perché sappiamo che gli assi del triangolo DEF si incontrano in uno stesso punto.

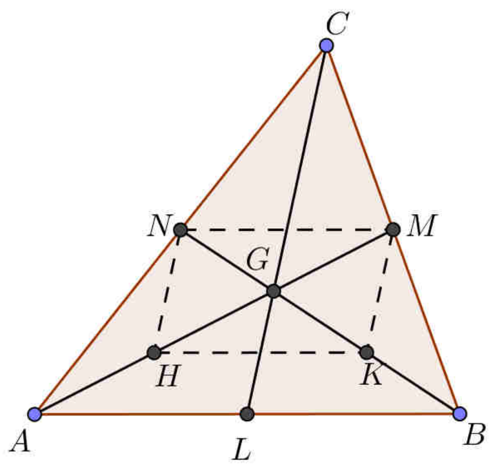
SCHEDA DI LAVORO 6
Baricentro di un triangolo

Dimostriamo che le mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto chiamato "**baricentro**" e che **il baricentro divide ogni mediana in due parti tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra**.

Consideriamo un triangolo ABC , tracciamo le due mediane AM e BN e chiamiamo G il loro punto di intersezione. Osserviamo che il segmento NM risulta parallelo ad AB e congruente alla metà di AB.



Consideriamo il punto medio H di AG e il punto medio K di GB: anche HK risulta ……………ad AB e congruente alla sua ………………..
Ma allora il quadrilatero HKMN avendo due lati opposti ………………. e …………………….. risulta un ………………………
Possiamo quindi affermare che le diagonali di HKMN si incontrano nel loro ……………………… e quindi $HG \cong GM$, $KG \cong GN$.
Ma essendo H il punto medio di AG avremo in conclusione che $AG \cong 2 \cdot GM$ ed essendo K il punto medio di GB avremo che $BG \cong 2 \cdot GN$.

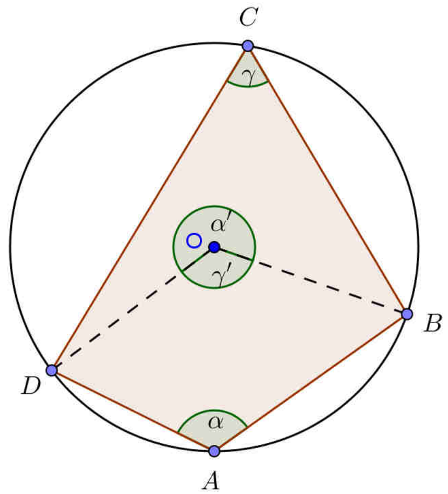


Poiché si può dimostrare in modo analogo che tracciando le mediane BN e CL anch'esse si intersecano in modo da dividersi in parti tali che quella che ha per estremo un vertice è doppia dell'altra, poiché la mediana BN è divisa nello stesso modo sia dal punto di intersezione con AM che da quello con CL, AM e CL devono intersecare BN nello stesso punto G.

Quadrilateri inscritti e circoscritti ad una circonferenza

Teorema: ***in un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.***

Dimostrazione: sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza. Congiungiamo il centro O della circonferenza con B e D: vengono individuati così due angoli al centro α', γ' e quindi $\alpha' = 2\alpha, \gamma' = 2\gamma$



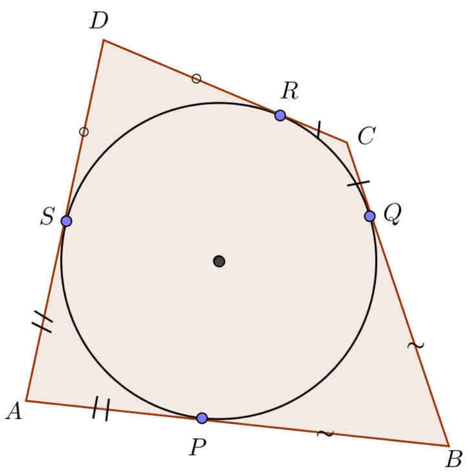
Poiché la somma di α' e γ' è un angolo giro si ha che $\alpha + \gamma = \hat{P}$ cioè α e γ sono supplementari.
Analogamente si può dimostrare anche per l'altra coppia di angoli opposti oppure si ottiene subito ricordando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro.

Vale anche il teorema inverso cioè se in un quadrilatero convesso gli angoli opposti sono supplementari allora è inscrivibile in una circonferenza (omettiamo la dimostrazione).

In conclusione condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia inscrivibile in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.

Teorema: *in un quadrilatero convesso circoscritto ad una circonferenza la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.*

Dimostrazione: sia ABCD un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza.



Indichiamo con P,Q,R,S i punti di tangenza dei lati con la circonferenza e per la proprietà dei segmenti di tangenza condotti da un punto esterno avremo che

$$AP \cong AS, \quad PB \cong BQ, \quad CR \cong CQ, \quad DR \cong DS$$

Quindi sommando membro a membro abbiamo che

$$AP + PB + CR + DR \cong AS + BQ + CQ + DS$$
$$\rightarrow (AP + PB) + (CR + DR) \cong (AS + DS) + (BQ + CQ)$$

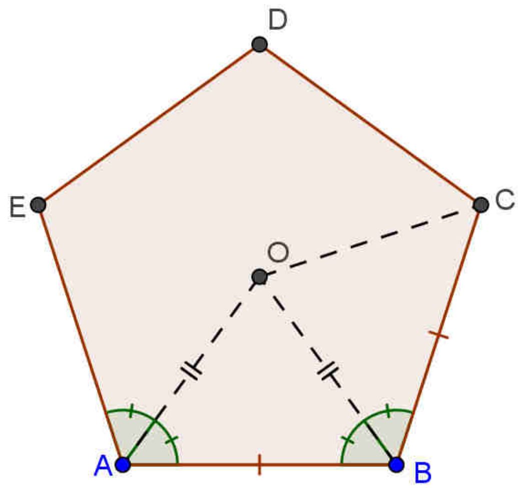
cioè $\qquad AB + DC \cong AD + BC$

Vale anche il teorema inverso (che non dimostriamo) e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia circoscritti bile ad una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia uguale alla somma degli altri due.

Poligoni regolari e circonferenze inscritte e circoscritte

Teorema: un poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza e le due circonferenze hanno lo stesso centro, che viene detto **centro** del poligono.

Dimostrazione: consideriamo un poligono regolare (vedi figura) e tracciamo le bisettrici di due angoli consecutivi $\hat{A}$, $\hat{B}$ e sia O il loro punto di intersezione.

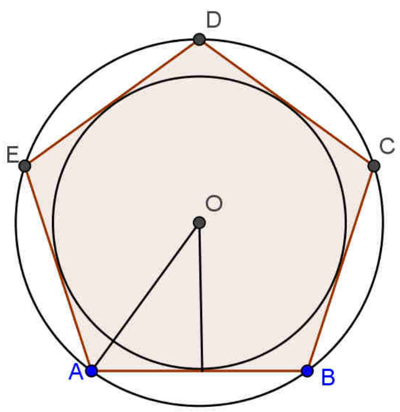


Il triangolo ABO è isoscele poiché ha gli angoli alla base congruenti e quindi $AO \cong BO$.
Congiungendo O con C i triangoli ABO e BCO sono congruenti poiché hanno OB in comune, $AB \cong BC$ e $A\hat{B}O \cong O\hat{B}C$.

Di conseguenza $OC \cong OA$, $O\hat{C}B \cong A\hat{B}O = \frac{1}{2}\hat{B}$

ed essendo il poligono regolare e quindi $\hat{B} \cong \hat{C}$ si ha anche $O\hat{C}B \cong \frac{1}{2}\hat{C}$ cioè OC è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.

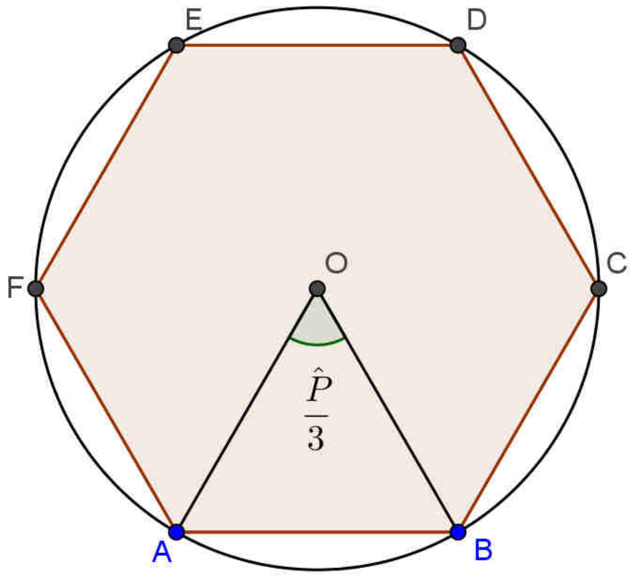
Se congiungiamo O con tutti gli altri vertici possiamo ripetere il ragionamento e concludere che O è il **punto di incontro delle bisettrici** e quindi il centro della circonferenza inscritta ma essendo anche **equidistante dai vertici** è anche il centro della circonferenza circoscritta.



Nota
Il raggio della circonferenza circoscritta si chiama "**raggio**" del poligono mentre il raggio della circonferenza inscritta si chiama "**apotema**" del poligono.

SCHEDA DI LAVORO 7
Esagono regolare e circonferenza circoscritta

Consideriamo un esagono regolare ABCDEF e tracciamo la circonferenza circoscritta.



Come risulta il raggio della circonferenza circoscritta?

Congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici A e B: otteniamo un triangolo in cui $A\hat{O}B =$ ....

Ma ABO è un triangolo isoscele e quindi gli angoli alla base sono uguali: si avrà quindi che tutti gli angoli del triangolo ABO sono ……….. e quindi il triangolo ABO è…………………………..

In conclusione il raggio della circonferenza circoscritta risulta uguale al ………………….. dell'esagono regolare.

PROBLEMI

CIRCONFERENZA

1. Dimostra che due corde AA’ e BB’ parallele, condotte dagli estremi di un diametro AB di una circonferenza sono congruenti.

2. In una circonferenza di centro O, siano AB e BC due corde congruenti. Dimostra che la semiretta BO è la bisettrice dell’angolo ABC.

3. In una circonferenza di centro O, siano AB e BC due corde. Dimostra che, se la semiretta BO è la bisettrice dell’angolo ABC, allora le due corde sono congruenti.

4. AB è il diametro di una circonferenza di centro O, C è un punto qualsiasi della circonferenza, D è il punto medio dell’arco BC ed E è il punto medio dell’arco AC. Dimostra che l’angolo DOE è retto.

5. Dimostra che il quadrilatero che ha per vertici gli estremi di due diametri perpendicolari di una circonferenza, è un quadrato.

6. Dimostra che gli estremi di due corde congruenti e parallele sono i vertici di un rettangolo.

7. Dimostra che se si conduce una perpendicolare CD ad un diametro AB di una circonferenza in un suo punto K, e si congiunge il punto C con il centro fino ad incontrare in P la circonferenza, la retta DP è parallela al diametro AB.

8. Dimostra che, se le tangenti condotte dagli estremi di una corda AB sono parallele, allora la corda è un diametro.

9. Sono date due circonferenze concentriche e due diametri: AB sulla maggiore e CD sulla minore. Dimostra che ACBD è un parallelogramma.

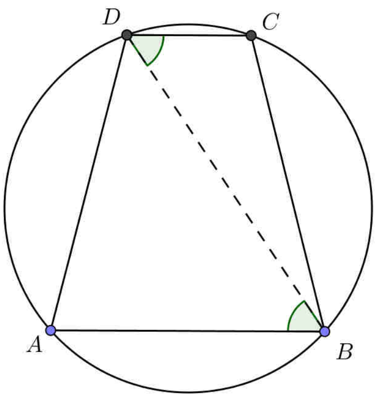
10. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O, traccia le tangenti PA e PB (essendo A e B i punti di contatto). Chiama C il secondo estremo del diametro che ha un estremo in A e dimostra che gli angoli AOB ed APB sono supplementari. Successivamente dimostra che l’angolo COB è congruente all’angolo APB ed infine che l’angolo CAB è metà dell’angolo APB.

11. Due circonferenze congruenti, di centri O ed O’, sono tangenti esternamente e T è il loro punto di contatto. La corda AT della circonferenza di centro O è perpendicolare alla corda BT della circonferenza di centro O’. Dimostra che OA è parallelo ad O’B e, poi, che AOO’B è un parallelogramma.

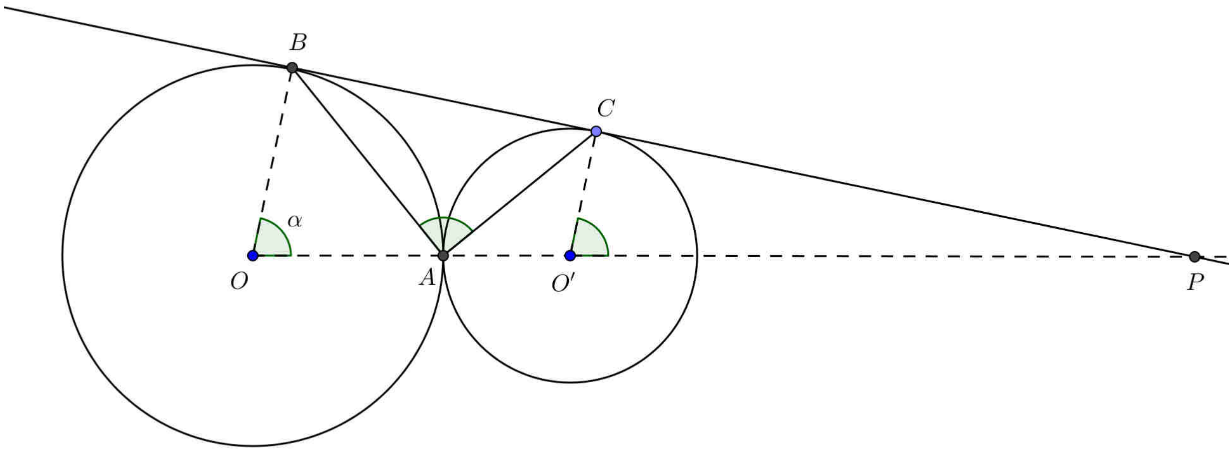
12. Da un punto P esterno ad una circonferenza traccia: una semiretta che interseca la circonferenza in A e B (con A compreso tra P e B) ed un’altra semiretta interseca la circonferenza in C e D (con C compreso tra P e D). Dimostra che il triangolo PBC ed il triangolo PDA hanno tutti gli angoli congruenti.

13. In una circonferenza congiungi gli estremi di due corde parallele disuguali. Come risulta il quadrilatero che si ottiene?

    Suggerimento: congiungi B con D e considera gli angoli in figura………



14. Considera due circonferenze tangenti esternamente nel punto A. Disegna una tangente comune come in figura e siano B e C i punti di contatto. Come risulta l'angolo $B\hat{A}C$?

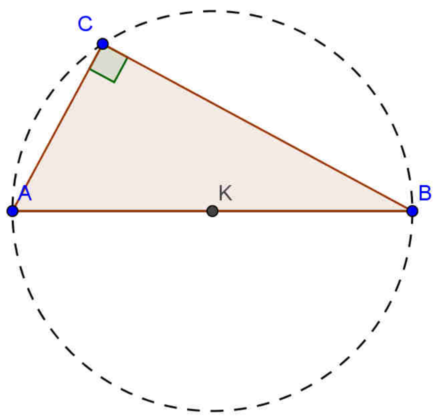


Suggerimento: congiungi i centri delle circonferenze con i punti di tangenza e con il punto A.

I triangoli OAB e O'AC sono isosceli e inoltre essendo le rette OB e O'C ……………. gli angoli $B\hat{O}A$ e $C\hat{O}'P$ sono ……………

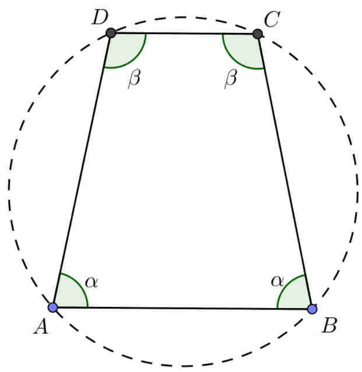
Allora poiché $B\hat{A}O \cong \dfrac{\hat{P}-\alpha}{2}$ abbiamo che $B\hat{A}C \cong$ ....

15. Considera un triangolo rettangolo ABC retto in C. Dove si trova il suo circocentro K?



Suggerimento
Ricordando che un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza si ha che il centro K della circonferenza circoscritta coincide con il ……………………………..

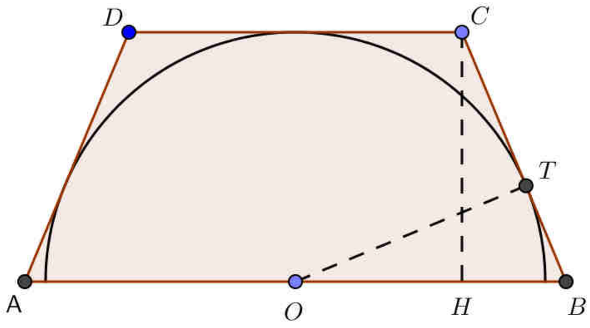
16. Considera un trapezio isoscele ABCD. E' sempre inscrivibile in una circonferenza?



Suggerimento:
Considera gli angoli del trapezio isoscele (vedi figura). Poiché le basi sono parallele abbiamo che $\alpha + \beta \cong$ .... e quindi per il teorema sui quadrilateri inscritti in una circonferenza………………………………………..

17. Disegna due triangoli isosceli ABC e ABD aventi la base AB in comune e i vertici C e D da parti opposte rispetto ad AB. Il quadrilatero ABCD è circoscrivibile ad una circonferenza?

18. Considera un trapezio isoscele ABCD circoscritto ad una semicirconferenza di centro O. Dimostra che il lato obliquo è congruente a metà della base maggiore.



Suggerimento
Disegna il punto T di tangenza sul lato obliquo BC e congiungilo con O, traccia l'altezza CH e confronta i triangoli CHB e OTB: risultano ………………….. poiché………………………..
……………………………………………
Di conseguenza $CB \cong$ ....

19. Disegna un triangolo equilatero e le circonferenze inscritta e circoscritta. Indica con R il raggio della circonferenza circoscritta e con r il raggio di quella inscritta. Dimostra che $R = 2r$.

20. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, traccia l'altezza AH e da H manda le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC. Dimostra che A,E,H,D sono punti di una stessa circonferenza.

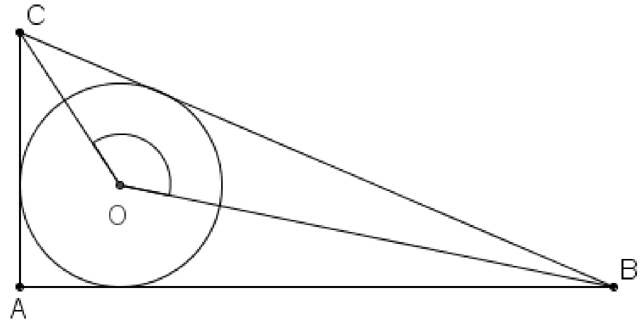
21. Considera due rette (distingui il caso che siano parallele o incidenti): dove si trovano i centri delle circonferenze tangenti?

22. Considera un triangolo rettangolo di cateti AB e AC ed indica con r il raggio della circonferenza inscritta e con R il raggio della circonferenza circoscritta. Dimostra che

$$AB + AC \cong 2r + 2R$$

23. *(Invalsi 2017/18)*

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC e O è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Si vuole dimostrare che l'ampiezza dell'angolo BOC (segnato in figura) è 135°.



La misura delle grandezze

Definizione

Una **classe** di grandezze geometriche è un insieme di enti geometrici in cui è possibile:

- il confronto tra due qualsiasi elementi dell'insieme;
- l'addizione, che gode della proprietà commutativa e associativa, che associa a due elementi A e B dell'insieme l'elemento A+B appartenente all'insieme detto somma di A e B.

Le grandezze appartenenti ad una stessa classe si dicono **omogenee.**

Sono classi di grandezze omogenee l'insieme dei segmenti, degli angoli, delle superfici piane.

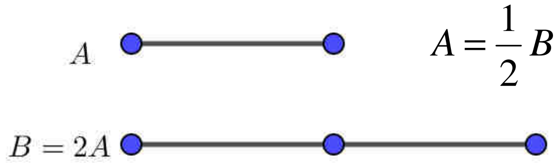
Multiplo di una grandezza

Il multiplo di una grandezza A secondo il numero naturale *n* è la grandezza omogenea ad A

$$B = A + ... + A = nA \quad (n \text{ addendi})$$

Si dice anche che A è sottomultipla di B secondo il numero *n* oppure che A è l'ennesima parte di B e si scrive

$$A = \frac{B}{n} = \frac{1}{n} B$$



$$A = \frac{1}{2} B$$

Grandezze commensurabili

Definizione
Due grandezze omogenee A e B si dicono commensurabili quando **ammettono una grandezza sottomultipla comune** cioè quando esiste una terza grandezza U (omogenea ad A e B) che è contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse cioè tale che

$$A = m \cdot U\,, \quad B = n \cdot U \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

Quindi poiché $\quad B = n \cdot U \rightarrow U = \frac{1}{n} B$

sostituendo si ha $\quad A = m \cdot \frac{1}{n} B = \frac{m}{n} \cdot B$

Rapporto di grandezze commensurabili

Se $A = \frac{m}{n} B$ chiameremo rapporto tra A e B (e lo indicheremo con $\frac{A}{B}$) il numero razionale $\frac{m}{n}$

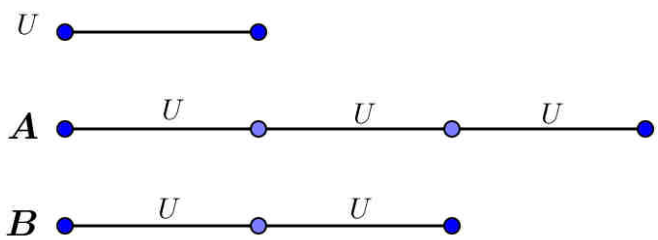
$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

Quindi il rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale.

Esempio

In figura sono disegnate due grandezze A e B tali che

$$A = 3 \cdot U\,, \quad B = 2 \cdot U \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$

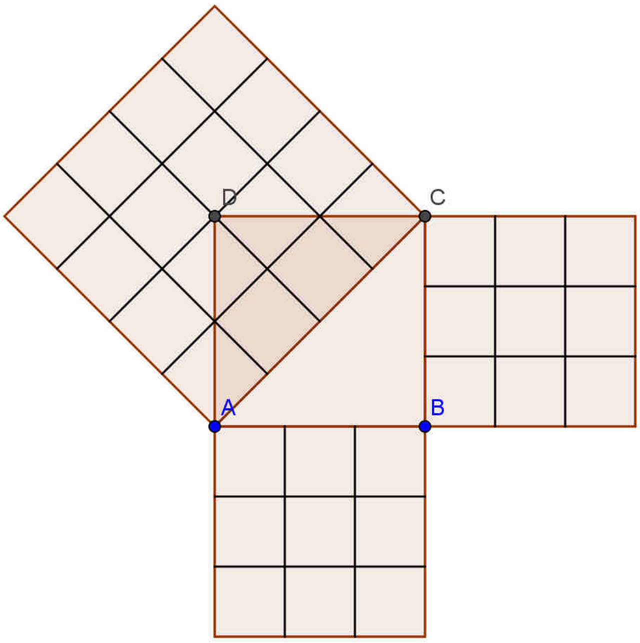


Grandezze incommensurabili

Definizione
Due grandezze omogenee A e B si dicono incommensurabili **quando non esiste una grandezza sottomultipla comune**.

Esempio: dimostriamo che *il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti incommensurabili.*

Consideriamo un quadrato ABCD e la sua diagonale AC.
Supponiamo per assurdo che il lato AB e la diagonale AC siano segmenti commensurabili cioè supponiamo che esista un segmento EF tale che $AB = n \cdot EF$, $AC = m \cdot EF$ (la figura è solo indicativa).



Applicando il teorema di Pitagora e contando il numero dei "quadratini" di lato congruente ad EF si dovrebbe avere:

$$m^2 = 2n^2$$

Ma questa uguaglianza non può essere vera perché se consideriamo la scomposizione in fattori primi e in particolare quante volte compare il fattore 2, avremo che nel numero m^2 il fattore 2 o non compare mai o compare un numero pari di volte (essendo un quadrato) mentre in $2n^2$ il fattore 2 sarà presente un numero dispari di volte perché c'è un 2 moltiplicato per n^2 in cui il 2 compare o nessuna volta o un numero pari di volte.

In conclusione siamo arrivati ad una contraddizione e questo significa che i segmenti AB e AC non sono commensurabili.

Nota storica

I primi matematici che parlarono di grandezze incommensurabili furono i *Pitagorici*: infatti applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele *furono costretti*, con ragionamenti analoghi a quelli che abbiamo visto, *ad ammettere l'esistenza di grandezze omogenee sprovviste di un sottomultiplo comune*.

Invece essi pensavano che i segmenti fossero costituiti da un numero finito di punti e che quindi fossero tutti commensurabili tra loro. Inoltre ritenevano che tutti i corpi fossero costituiti da corpuscoli tutti uguali disposti in varie forme geometriche e consideravano l'interpretazione geometrica della realtà come un anello di congiunzione tra umano e divino.

La scoperta delle grandezze incommensurabili sembrò quindi ai Pitagorici blasfema e sconcertante tanto che *fu tenuta segreta* e fu proibito ai membri della setta di rivelarla.

Rapporto di grandezze incommensurabili

Si può definire il rapporto tra due grandezze incommensurabili?

Riprendiamo l'esempio del lato l e della diagonale d di un quadrato.
Abbiamo che

$$\begin{array}{l} l < d < 2l \\ 1{,}4l < d < 1{,}5l \\ 1{,}41l < d < 1{,}42l \\ 1{,}414l < d < 1{,}415l \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 < \frac{d}{l} < 2 \\ 1{,}4 < \frac{d}{l} < 1{,}5 \\ 1{,}41 < \frac{d}{l} < 1{,}42 \\ 1{,}414 < \frac{d}{l} < 1{,}415 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Il numero $\frac{d}{l}$ è definito come "elemento separatore" dei due insiemi di numeri razionali

$$1,\ \ 1{,}4,\ \ 1{,}41,\ \ 1{,}414,\ \ .....$$
$$2,\ \ 1{,}5,\ \ 1{,}42,\ \ 1{,}415,\ \ ....$$

che rappresentano i valori approssimati per difetto e per eccesso.

Questo numero viene detto "irrazionale", cioè non razionale, e in questo caso viene indicato con il simbolo $\sqrt{2}$.

In conclusione *se A e B sono grandezze incommensurabili il loro rapporto è un numero irrazionale.*

Misura di una grandezza

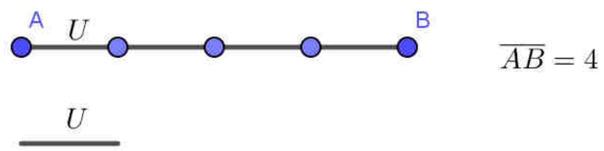
Se fissiamo una grandezza U come "unità di misura", la misura rispetto ad U di una grandezza A, omogenea con U, è il numero reale (razionale o irrazionale) che esprime il rapporto tra A e U e si indica con $\overline{A}$ cioè

$$\overline{A} = \frac{A}{U}$$

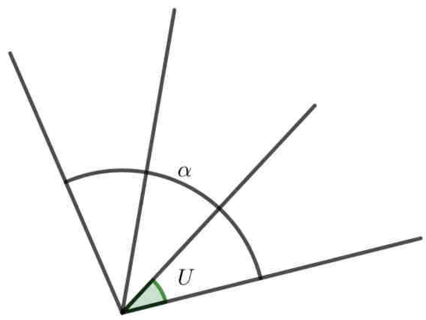
Nota

La misura di un segmento si dice "**lunghezza**", quella di un angolo si dice "**ampiezza**" e quella di una superficie piana "**area**".

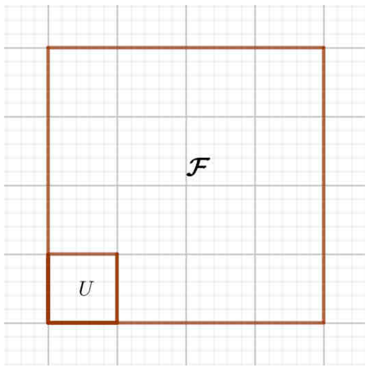
Esempio 1
La lunghezza del segmento AB in figura, rispetto all'unità di misura U, è 4.



Esempio 2
L'ampiezza dell'angolo α, rispetto all'unità di misura U, è 3.



Esempio 3
L'area della superficie della figura *F*, rispetto all'unità di misura U, è 16.



Proporzioni tra grandezze

Definizione

Due grandezze omogenee A e B (con $B \neq 0$) e altre due grandezze omogenee C e D (con $D \neq 0$) **si dicono in proporzione** quando il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra la terza e la quarta cioè:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Si scrive anche A : B = C : D e che si legge "A sta a B come C sta a D".

Le quattro grandezze si dicono **termini** della proporzione e in particolare A e B si dicono termini estremi mentre B e C si dicono termini medi.

Nota
Se A, B ,C sono tre grandezze omogenee tra loro e si ha

$$A : B = B : C$$

la grandezza B si chiama *media proporzionale* tra A e C.

Osservazione

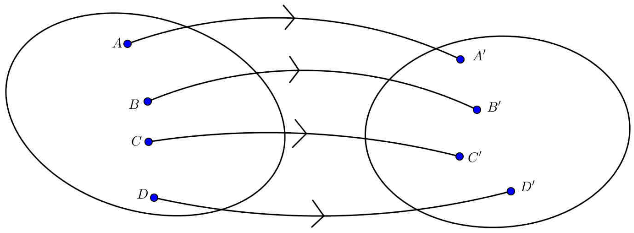
Si dimostra facilmente che *se quattro grandezze sono in proporzione allora sono in proporzione anche le loro misure* e viceversa.

Questo ci permette di estendere le proprietà delle proporzioni tra numeri alle proporzioni tra grandezze .

Ricordiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche:

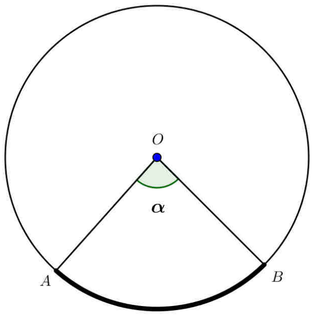
"In una proporzione numerica $a : b = c : d$ **il prodotto dei termini medi è uguale al prodotto dei termini estremi** cioè $a \cdot d = b \cdot c$ (e viceversa se $a \cdot d = b \cdot c$ allora $a : b = c : d$).

Definizione
Diciamo che due classi di grandezze sono in ***corrispondenza biunivoca*** quando è possibile associare ad ogni grandezza della prima classe una e una sola grandezza della seconda classe.



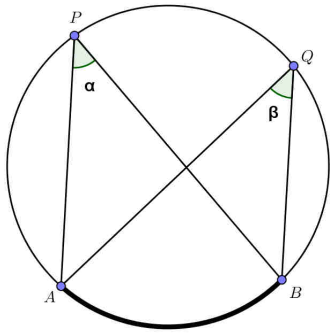
Esempio

Se consideriamo, in un dato cerchio, l'insieme degli angoli al centro e l'insieme degli archi di circonferenza possiamo associare ad ogni angolo al centro l'arco di circonferenza su cui insiste e osservare *che si tratta di una corrispondenza biunivoca* poiché per ogni angolo al centro c'è uno ed un solo arco di circonferenza su cui insiste.



$$A\hat{O}B \rightarrow arcoAB$$

Esempio
Se invece consideriamo, sempre in un dato cerchio, l'insieme degli angoli alla circonferenza e l'insieme degli archi di circonferenza ed associamo ad un angolo alla circonferenza l'arco di circonferenza su cui insiste, abbiamo che questa *non è una corrispondenza biunivoca* poiché ad angoli alla circonferenza diversi (anche se di uguale ampiezza) viene associato lo stesso arco di circonferenza.



α→arco AB
β→arco AB

Grandezze direttamente proporzionali

Definizione
Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono direttamente proporzionali quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe cioè

$$\forall \quad A, B \quad \text{se} \quad A \to A', \quad B \to B' \ \text{si ha} \ \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

Grandezze inversamente proporzionali

Definizione
Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono ***inversamente proporzionali*** *quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al reciproco del rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe* cioè

$$\forall \quad A, B \quad \text{se} \quad A \to A', \quad B \to B' \ \text{si ha} \ \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

Osservazione
In questo caso quindi è il prodotto delle misure di due grandezze corrispondenti ad essere costante perché $\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'} \to A \cdot A' = B \cdot B'$

Il criterio della proporzionalità diretta
Come possiamo stabilire se due classi di grandezze sono direttamente proporzionali?

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che

- a grandezze uguali di una classe corrispondano grandezze uguali dell'altra;
- alla somma di due grandezze qualsiasi di una classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti dell'altra.

Esempio

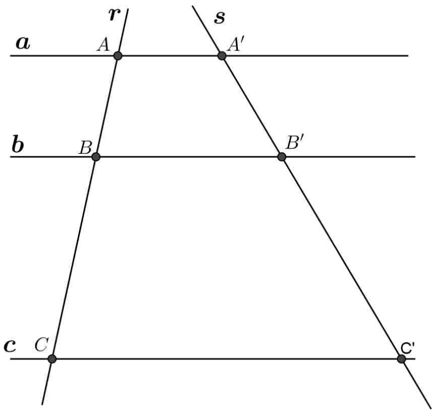
Gli angoli al centro e gli archi di circonferenza corrispondenti sono un esempio di classi di grandezze direttamente proporzionali.

Infatti ad angoli al centro uguali corrispondono archi sottesi uguali e alla somma di angoli al centro corrisponde un arco uguale alla somma degli archi sottesi corrispondenti.

Teorema di Talete

Dimostriamo questo importante teorema riguardante **le classi di grandezze direttamente proporzionali**:
Se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali, ***i segmenti individuati su una trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti individuati sull'altra trasversale.***

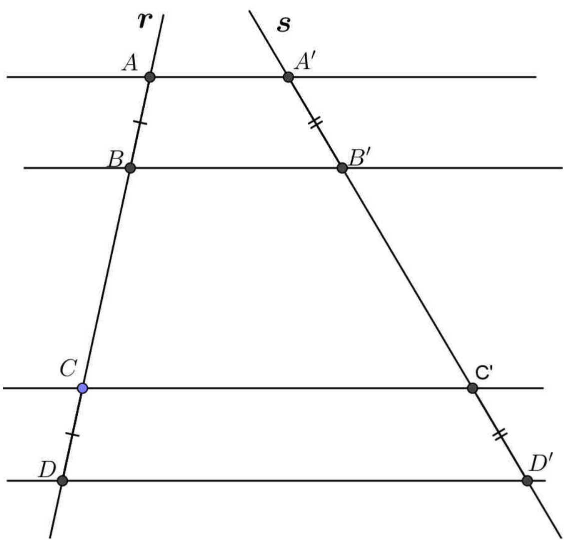
Questo significa, per esempio, che se *a*,*b*,*c* sono tre rette parallele e *r* e *s* sono due trasversali (vedi figura) si ha

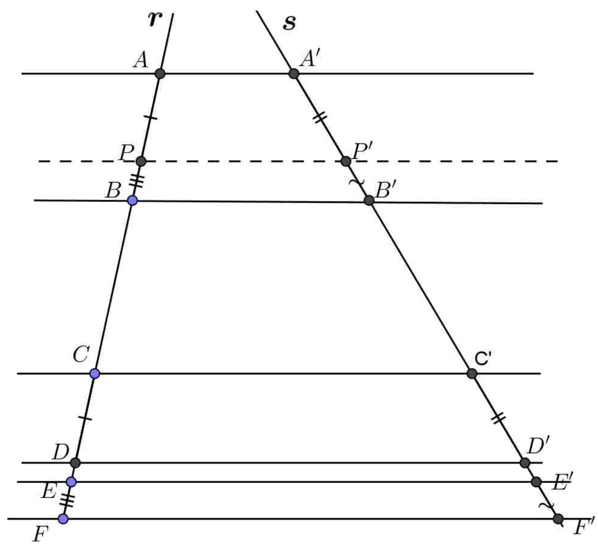


$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Dimostrazione
Osserviamo che:

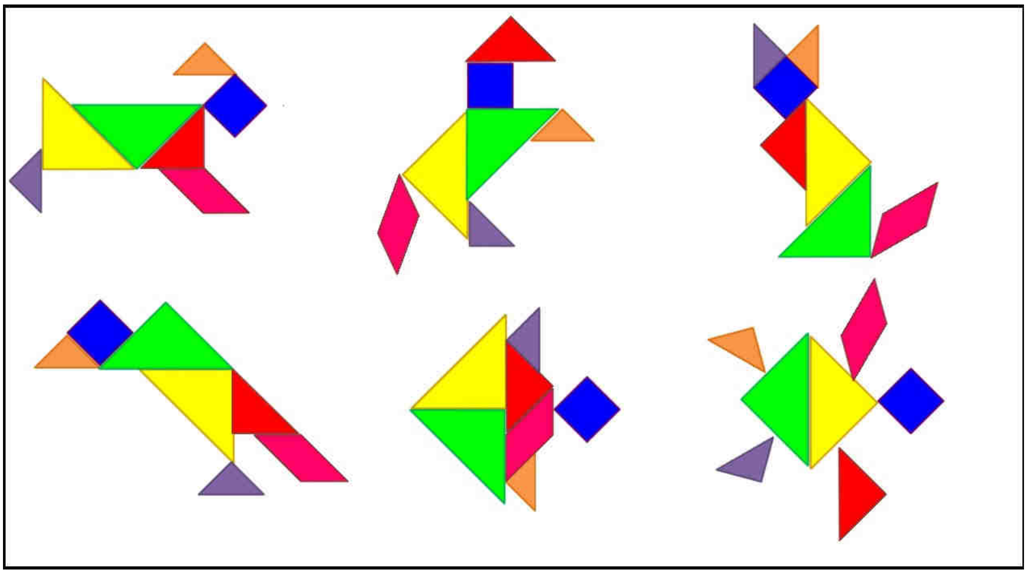
1) *a segmenti congruenti su r corrispondono segmenti congruenti su s* (vedi scheda 1-quadrilateri);
2) *ad un segmento AB congruente alla somma dei segmenti CD e EF su r corrisponde su s un segmento A'B' congruente alla somma dei segmenti C'D' e E'F' corrispondenti* a CD e EF (si dimostra facilmente tracciando dal punto P che divide AB nelle due parti congruenti a CD e EF la parallela del fascio…).





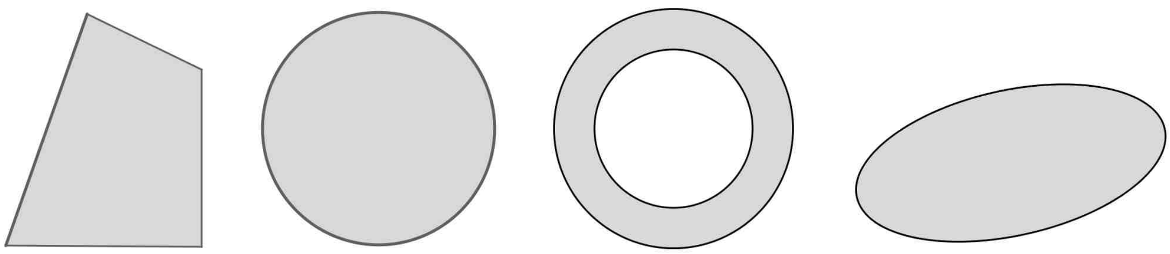
Quindi, per il criterio di proporzionalità diretta i due insiemi di segmenti sono direttamente proporzionali.

Equivalenza di superfici piane



Superficie piana

Il concetto di superficie piana è un **concetto primitivo**: i poligoni, i cerchi o in generale regioni di piano delimitate da una linea chiusa o da più linee chiuse che non si intersecano sono superfici piane.

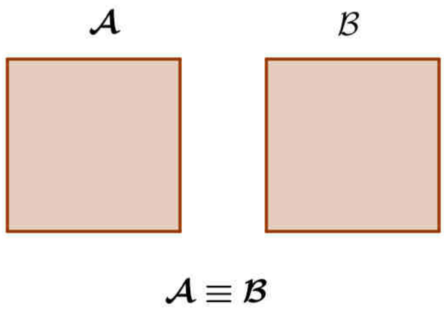


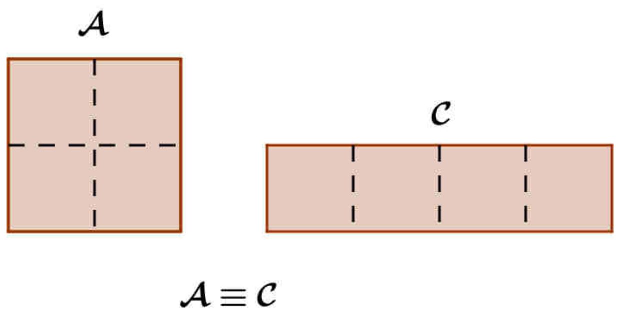
Per indicare una superficie piana useremo lettere maiuscole corsive.

Estensione superficiale

Anche il concetto di estensione superficiale è un **concetto primitivo**. E' chiaro che superfici congruenti hanno la stessa estensione superficiale ma anche superfici non congruenti possono avere la stessa estensione superficiale: se realizziamo modelli in cartoncino di superfici piane aventi la stessa estensione superficiale troviamo che hanno lo stesso "peso".

Definizione
Due superfici piane $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono **equivalenti** quando hanno la stessa estensione superficiale e scriveremo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.



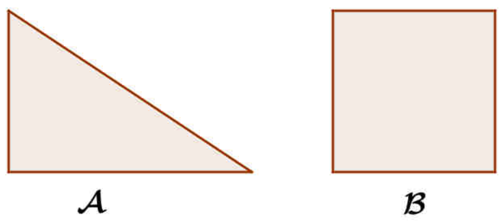


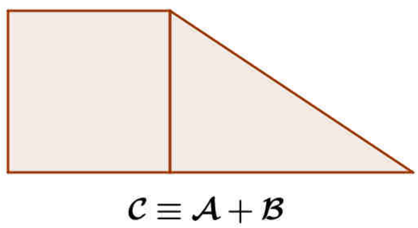
Ci sono alcuni **postulati** che caratterizzano l'equivalenza tra superfici piane:

1) Due superfici congruenti sono equivalenti (non è vero il viceversa);

2) L'equivalenza tra superfici gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva;

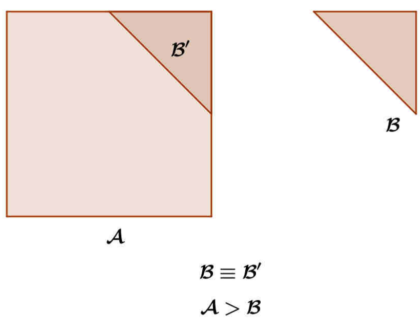
3) La "somma" di due superfici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (che non hanno punti in comune oppure che hanno in comune solo punti del loro contorno) è la figura formata dall'unione dei punti delle due superfici e si indica con $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Se $\mathcal{C} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$ allora $\mathcal{A}$ si può considerare come differenza tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ e si scrive $\mathcal{A} = \mathcal{C} - \mathcal{B}$. Le superfici somma o differenza di superfici rispettivamente equivalenti sono equivalenti.





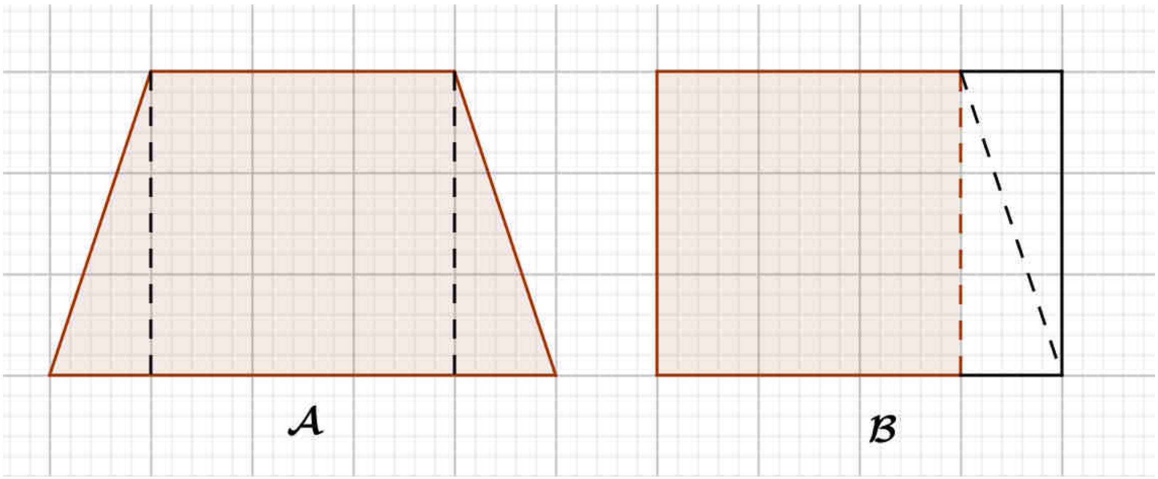
4) Una superficie non può essere equivalente ad una sua parte.

5) Una superficie $\mathcal{A}$ ha maggiore estensione di una superficie $\mathcal{B}$, e si dice che $\mathcal{A}$ è prevalente a $\mathcal{B}$ e si scrive $\mathcal{A} > \mathcal{B}$, se $\mathcal{B}$ è equivalente ad una parte di $\mathcal{A}$



Poligoni equivalenti

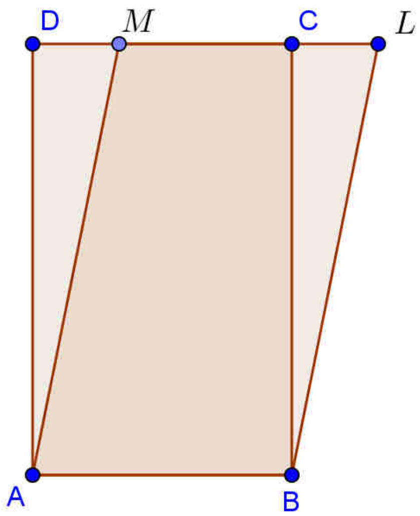
Definizione
Due poligoni si dicono **equiscomponibili** o equiscomposti se sono somme di poligoni congruenti.



$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono equiscomponibili

Osservazione: è chiaro che **due poligoni equiscomponibili sono equivalenti** (e si può dimostrare che vale anche il viceversa).

Teorema
Un parallelogramma e un rettangolo aventi basi e altezze relative congruenti sono equivalenti.
Dimostrazione



Disegniamo il rettangolo ABCD e il parallelogramma ABLM sovrapponendo le basi come in figura.

Osserviamo che i triangoli rettangoli ADM e BCL sono congruenti avendo $AD \cong BC$, $AM \cong BL$ e quindi sono anche equivalenti.

Il parallelogramma può essere considerato come la differenza tra il trapezio ABLD e il triangolo ADM e il rettangolo come la differenza tra lo stesso trapezio e il triangolo BCL e quindi parallelogramma e rettangolo sono equivalenti.

Nota: la dimostrazione è la stessa anche nel caso in cui $M \equiv C$ oppure M si trovi oltre C .

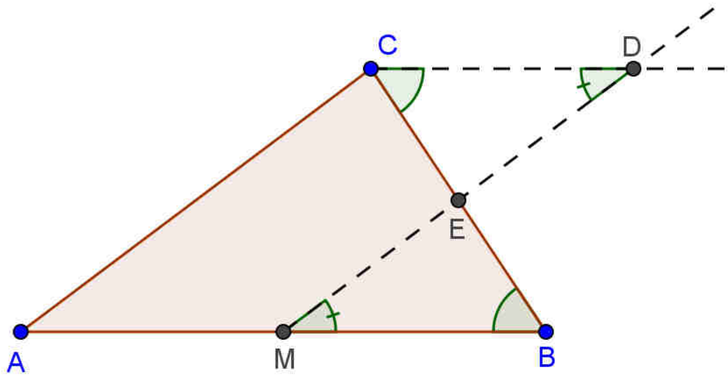
Corollario: *due parallelogrammi che hanno basi e altezze corrispondenti congruenti sono equivalenti* poiché sono entrambi equivalenti ad un rettangolo avente base e altezza congruente.

Teorema

Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma di altezza congruente e base congruente a metà di quella del triangolo.

Dimostrazione

Consideriamo il triangolo ABC e sia M il punto medio di AB. Conduciamo per M la parallela ad AC e da C la parallela ad AB e sia D il loro punto di intersezione ed E l'intersezione tra BC e MD (vedi figura).



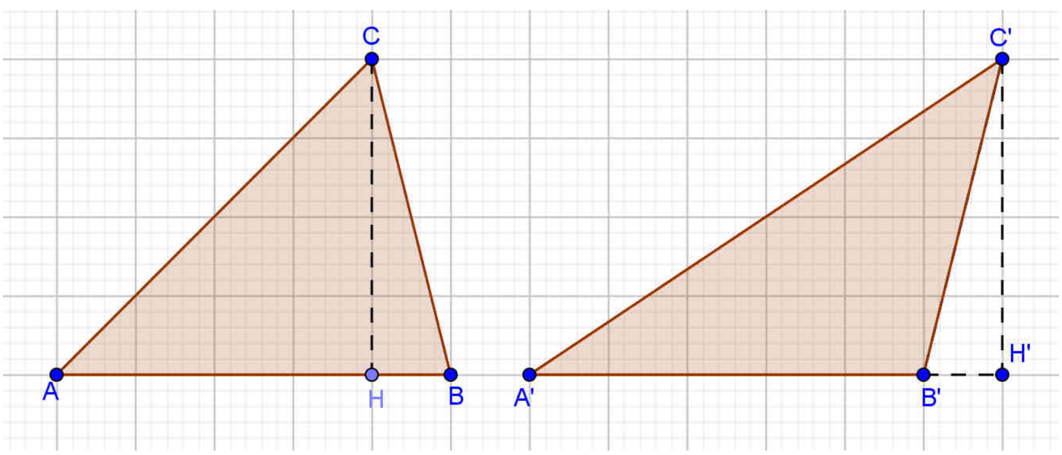
I triangoli MBE e CDE sono congruenti per il 2° criterio poiché :

$$AM \cong MB, \quad AM \cong CD \rightarrow MB \cong CD;$$

$$D\hat{C}E \cong M\hat{B}E, \quad C\hat{D}E \cong E\hat{M}B$$

Quindi il triangolo e il parallelogramma così costruito risultano equiscomposti e di conseguenza equivalenti.

Corollario: *due triangoli aventi le basi e le rispettive altezze congruenti sono equivalenti* poiché equivalenti a parallelogrammi aventi base e altezza congruenti e quindi equivalenti.



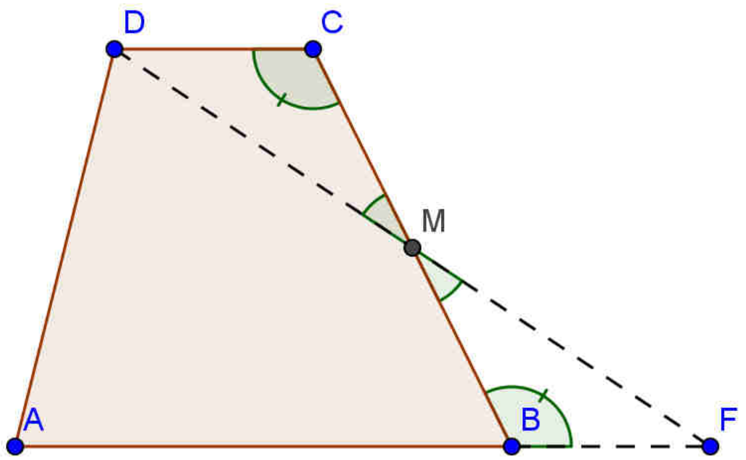
$$ABC \equiv A'B'C'$$

Teorema

Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e la cui base è uguale alla somma delle basi del trapezio.

Dimostrazione

Sia ABCD il trapezio: consideriamo il punto medio M del lato BC, congiungiamolo con D e prolunghiamo fino ad incontrare nel punto F il prolungamento di AB (vedi figura).



I triangoli DCM e MBF sono congruenti per il 2° criterio poiché

$$CM \cong MB, \quad D\hat{M}C \cong B\hat{M}F \text{ (opposti al vertice)}, \; D\hat{C}M \cong M\hat{B}F \text{ (alterni interni)}$$

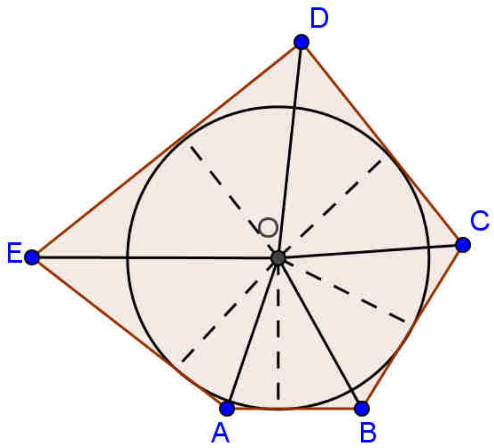
Di conseguenza $DC \cong BF$ e quindi AF risulta congruente alla somma delle basi del trapezio.

Quindi il trapezio e il triangolo AFD risultano equiscomposti e quindi equivalenti.

Teorema

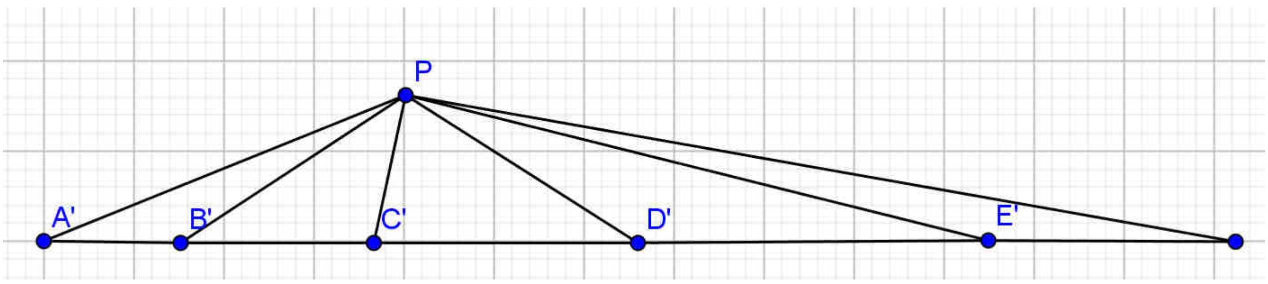
Un poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo avente come base un segmento congruente al perimetro del poligono e l'altezza congruente al raggio della circonferenza inscritta.

Disegniamo un poligono circoscritto ad una circonferenza e congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici.
Il poligono risulta così scomposto in triangoli aventi come basi i lati del poligono e come altezze segmenti congruenti al raggio r della circonferenza.



Se quindi riportiamo sulla stessa retta dei segmenti congruenti ai lati del poligono e consideriamo un punto P tale che $PH \cong r$ (vedi figura), abbiamo che

$$A'B'P \equiv ABO\ ,\quad B'C'P \equiv \ldots\ldots\ldots \quad \text{ecc.}$$



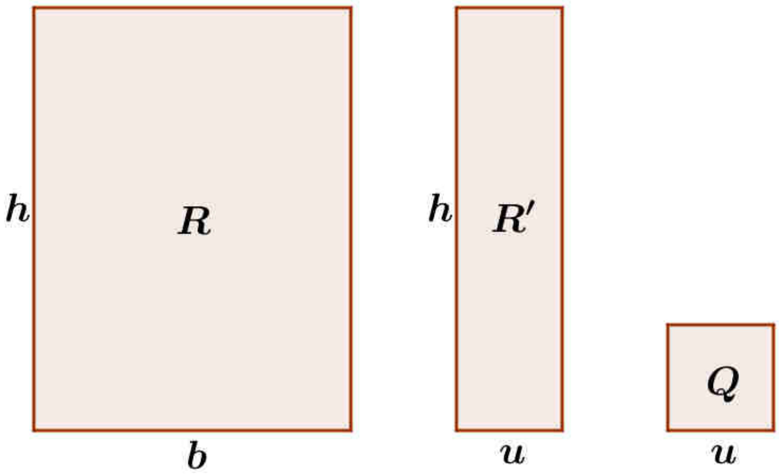
e quindi il poligono è equivalente al triangolo avente per base un segmento congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza inscritta.

Aree dei poligoni

Area di un rettangolo

Dimostriamo che *l'area di un rettangolo è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza.*

Considera il rettangolo dato R avente base di lunghezza b e altezza di lunghezza h e il quadrato Q di lato u di lunghezza 1.
Considera *il rettangolo R' avente altezza uguale all'altezza di R e base u.*



Se indichiamo con A e A' le aree di R e R' avremo :

- poiché R' e Q hanno la stessa base le loro aree sono direttamente proporzionali alle altezze e quindi

  $A' : 1 = h : 1 \rightarrow A' = h$ (prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi)

- poiché R e R' hanno la stessa altezza le loro aree sono direttamente proporzionali alle basi e quindi

$$A : A' = b : 1 \rightarrow A = A' \cdot b = h \cdot b$$

Nota
Di conseguenza se abbiamo un **quadrato di lato *l*** avremo che l'area risulta:

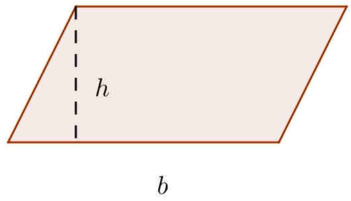
$$A = l \cdot l = l^2$$

Sapendo che l'area di un rettangolo si ottiene moltiplicando la misura della base per la misura dell'altezza del rettangolo e utilizzando i teoremi sull'equivalenza che abbiamo dimostrato, possiamo dimostrare che:

- poiché un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo

  …………………………………………………………………

  l'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza

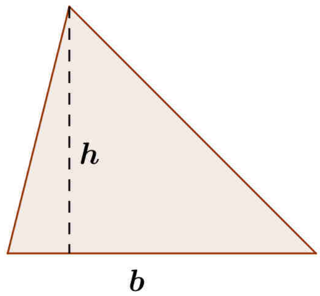


$$\boldsymbol{A = b \cdot h}$$

- poiché un triangolo è equivalente ad un parallelogramma

  ………………………………………………………………

  l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza

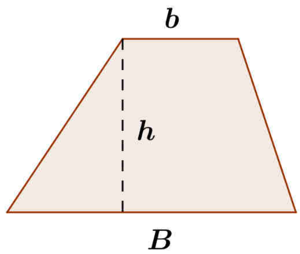


$$\boldsymbol{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

- poiché un trapezio è equivalente ad un triangolo

  ………………………………………………...........................

  l'area di un trapezio è uguale al prodotto della semisomma delle lunghezze delle basi per la lunghezza dell'altezza

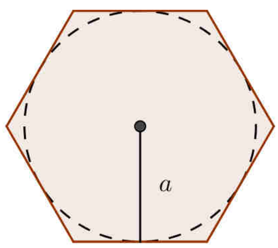


$$\boldsymbol{A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

- poiché un poligono regolare di *n* lati è equivalente

  ………………………………………….................................

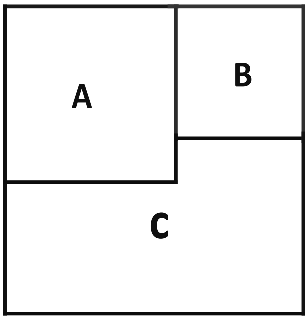
  l'area di un poligono regolare è uguale al prodotto della lunghezza del semiperimetro per la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta (apotema)



$$\boldsymbol{A = p \cdot a}$$

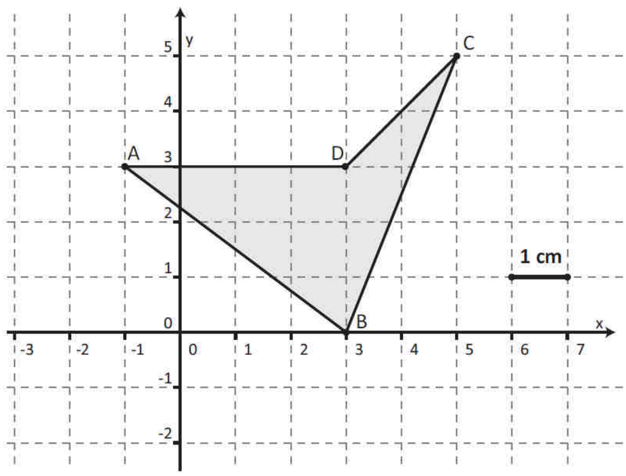
PROBLEMI
EQUIVALENZA DI SUPERFICI PIANE

1) *(Invalsi 2015/16)*
Un quadrato è formato da due quadrati A e B e da un poligono C, come mostrato in figura. L'area di A è 16 e quella di B è 9. Calcola il perimetro del poligono C.



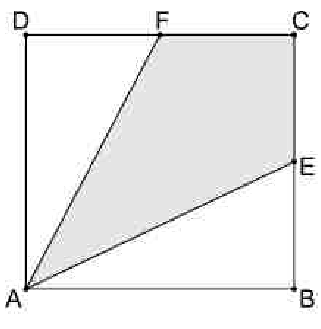
[22]

2) *(Invalsi 2014/15)*
Qual è l'area del quadrilatero ABCD rappresentato in figura?



[9 cm^2]

3) *(Invalsi 2015/16)*



ABCD è un quadrato di lato 3 m. F ed E sono i punti medi dei lati CD e BC. Quanto misura in m^2 la superficie del quadrilatero AECF?

[4,5 m^2]

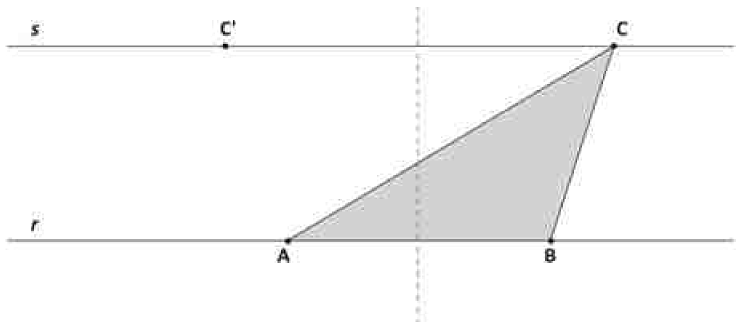
4) *(Invalsi 2015/16)*

	Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).	V	F
a.	Se si aumentano le dimensioni b e h di un rettangolo di una stessa lunghezza d, allora il perimetro del rettangolo aumenta di 4d		
b.	Se si aumentano le dimensioni b e h di un rettangolo di una stessa lunghezza d, allora l'area del rettangolo aumenta di 2d		
c.	Se si raddoppia la dimensione b di un rettangolo e si dimezza l'altra dimensione h, allora l'area rimane la stessa		
d.	Se si raddoppia la dimensione b di un rettangolo e si dimezza l'altra dimensione h, allora il perimetro rimane lo stesso		

[V;F;V;F]

5) *(Invalsi 2017/18)*

ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta r e il terzo vertice in un punto qualunque della retta s parallela a r e passante per C



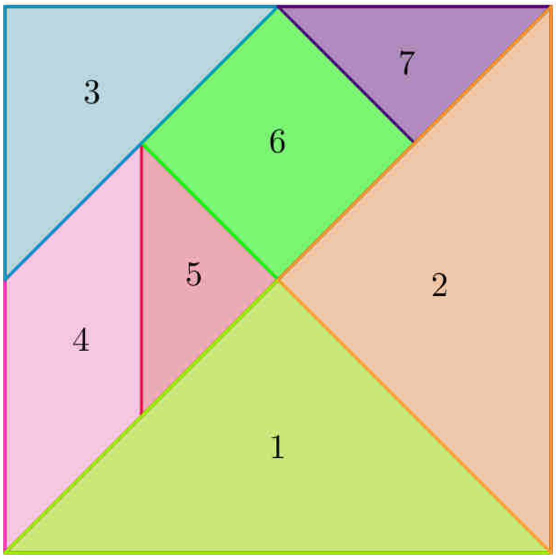
Fra gli infiniti triangoli descritti, quali hanno la stessa area di ABC?

a. Soltanto il triangolo ABC', simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB
b. Soltanto il triangolo isoscele di base AB
c. Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B
d. Tutti gli infiniti triangoli di base AB

[d]

SCHEDA DI LAVORO
Il tangram

Il Tangram è un antico gioco cinese: è una specie di puzzle le cui tessere sono 7 figure geometriche ottenute dalla scomposizione di un quadrato (vedi figura).



Le figure sono: due triangoli grandi, due triangoli piccoli, un triangolo medio, un quadrato e un parallelogramma.

Il quadrato è equivalente a ………………………………………………………………………..

Il triangolo medio è equivalente a……………………...…………...

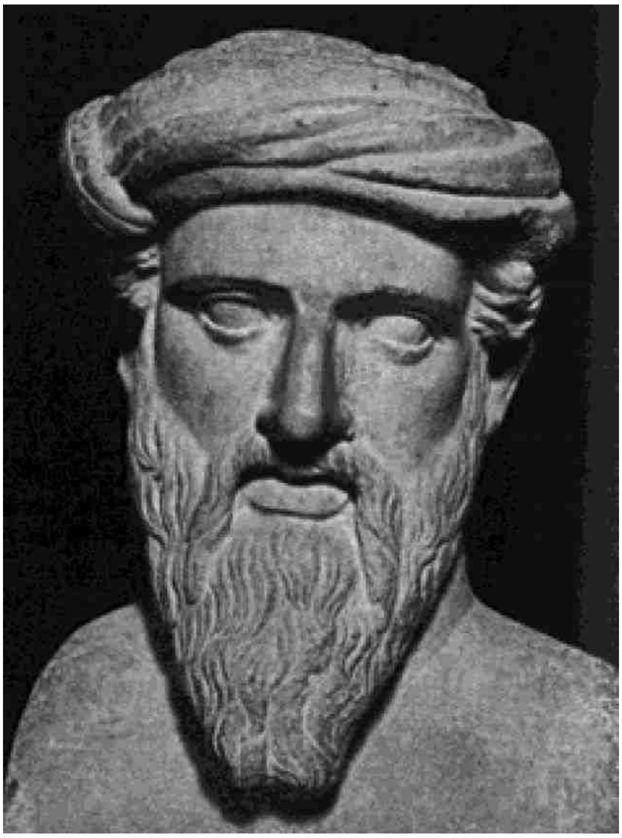
Il triangolo grande è equivalente a ……………………………………………………………

Il parallelogramma è equivalente a……………………...………………………………………

Esercizio

Usando tutti i sette pezzi del Tangram si possono costruire 13 poligoni convessi (naturalmente equivalenti)…prova a disegnarne qualcuno!

Teoremi di Euclide e Pitagora

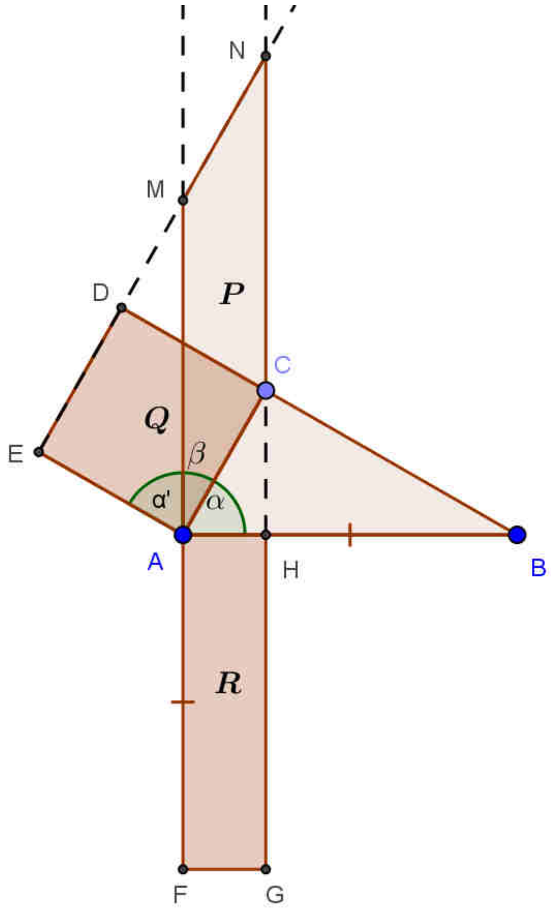


Vediamo tre importanti teoremi che riguardano i **triangoli rettangoli** e che si dimostrano utilizzando l'equivalenza delle superfici piane.

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.

Dimostrazione



Costruiamo il quadrato ACDE sul cateto AC e il rettangolo AHGF con $AF \cong AB$ (vedi figura).

Prolunghiamo il lato ED fino ad intersecare in M e N i prolungamenti di AF e HG.

Il parallelogramma ACNM è equivalente al quadrato ACDE poiché hanno stessa base e stessa altezza (EA).

Consideriamo i triangoli ABC e AME: risultano congruenti poiché

$AC \cong AE, \quad \alpha \cong \alpha'$

poiché complementari dello stesso angolo β

Quindi $\boxed{AM \cong AB}$ e il parallelogramma e il rettangolo risultano equivalenti avendo basi congruenti e uguale altezza (AH).

In conclusione: $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \equiv \mathcal{R}$

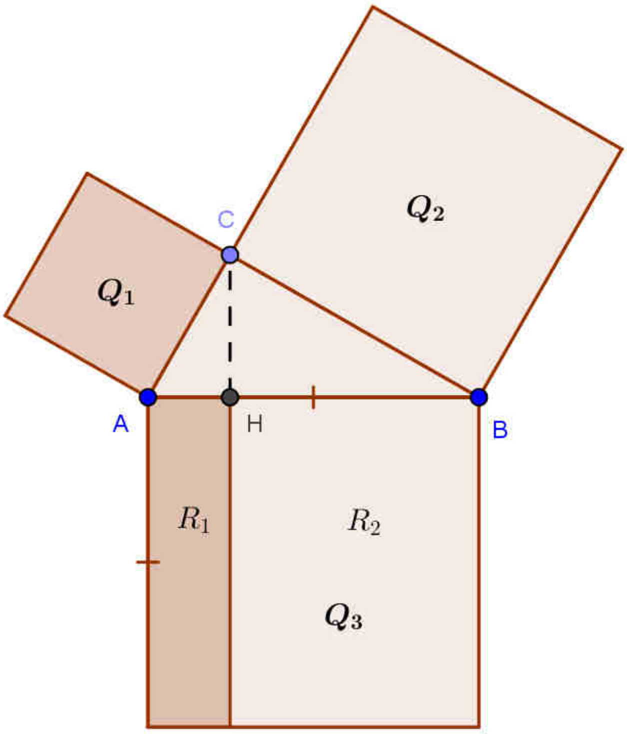
$\rightarrow \mathcal{Q} \equiv \mathcal{R}$

cioè il quadrato ACDE costruito su un cateto è equivalente al rettangolo AHGF che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.

Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Dimostrazione



Disegniamo i quadrati Q_1, Q_2 sui cateti e il quadrato Q_3 sull'ipotenusa.

Tracciamo l'altezza CH e prolunghiamola in modo da scomporre il quadrato Q_3 nei rettangoli R_1, R_2.

Per il primo teorema di Euclide abbiamo che

$$Q_1 \equiv R_1, \quad Q_2 \equiv R_2$$

e quindi

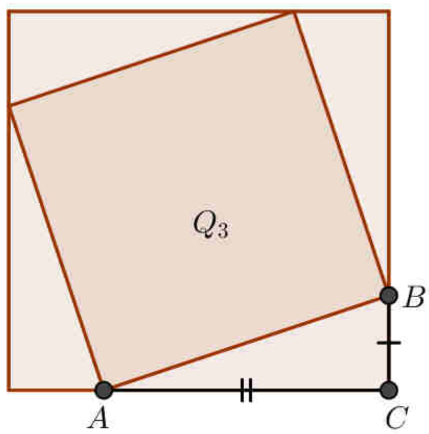
$$Q_1 + Q_2 \equiv R_1 + R_2 \quad \rightarrow \quad Q_1 + Q_2 \equiv Q_3$$

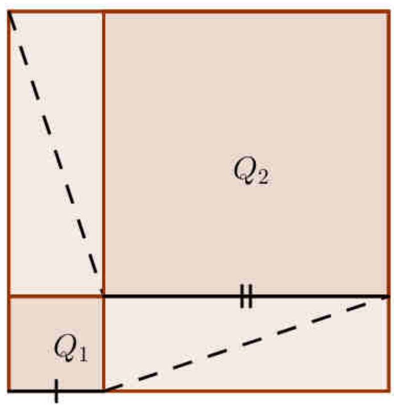
Approfondimento

Possiamo dimostrare il teorema di Pitagora anche senza utilizzare il primo teorema di Euclide.

Considera un triangolo rettangolo ABC: prolunga il cateto AC di un segmento congruente all'altro cateto e costruisci un quadrato Q che ha per lato la somma dei cateti.

Disegna, all'interno del quadrato, il quadrato Q_3 che ha per lato l'ipotenusa del triangolo.





Lo stesso quadrato Q può essere scomposto in due quadrati di lati uguali ai cateti del triangolo ABC e in due rettangoli: tracciando le diagonali dei due rettangoli ci si accorge che

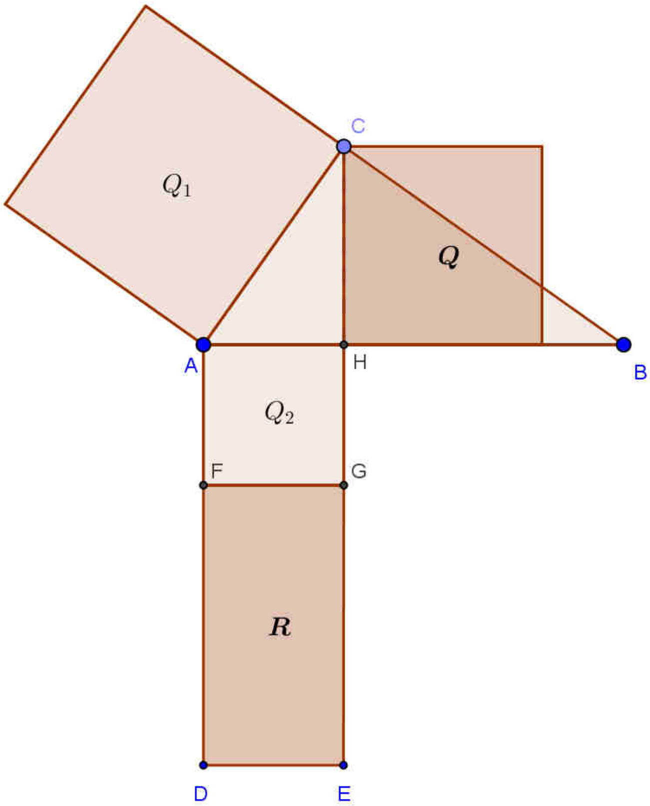
……………………………………………………………………………………………………….

Si può quindi concludere che ……………………………………………………………………….

poiché………………………………………………………………………………………………….

Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Disegniamo il quadrato Q_1 di lato AC, il quadrato Q di lato CH e il rettangolo di base AH e altezza $AD \cong AB$.

Consideriamo su AD un punto F tale che $AF \cong AH$ e disegniamo il quadrato Q_2 di lato AH.
Indichiamo con R il rettangolo DEGF.

Per il teorema di Pitagora abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + Q \to Q \equiv Q_1 - Q_2$$

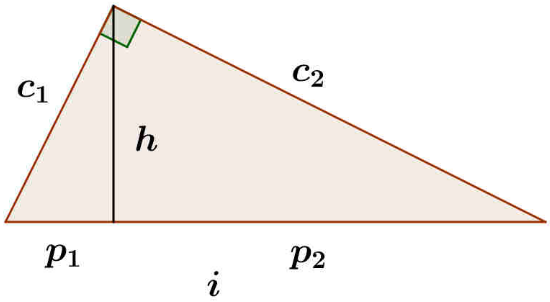
Per il primo teorema di Euclide abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + R \to R \equiv Q_1 - Q_2$$

Quindi, per la proprietà transitiva, abbiamo che $Q \equiv R$.

Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora

Utilizziamo le **misure** e vediamo come si riscrivono i teoremi di Pitagora ed Euclide per il triangolo rettangolo.
Indichiamo con c_1, c_2, i le misure dei cateti e dell'ipotenusa; con h, p_1, p_2 le misure dell'altezza relativa all'ipotenusa e delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Teorema di Pitagora: poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_1 è c_1^2, l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_2 è c_2^2 e l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa che misura i è i^2 si ha che

$$\boxed{c_1^2 + c_2^2 = i^2}$$

1° Teorema di Euclide: poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_1 è c_1^2 e l'area del rettangolo di dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa è $p_1 \cdot i$ si ha che

$$\boxed{c_1^2 = p_1 \cdot i}$$

e analogamente per l'altro cateto $c_2^2 = p_2 \cdot i$

2° Teorema di Euclide: poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa di misura h risulta h^2 e la misura dell'area del rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $p_1 \cdot p_2$ si ha

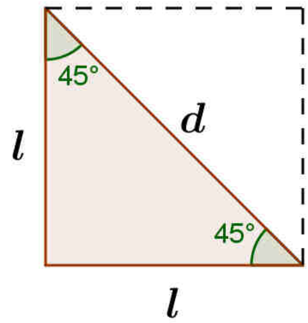
$$\boxed{h^2 = p_1 \cdot p_2}$$

Triangoli rettangoli particolari

Inoltre dal teorema di Pitagora si ricavano delle relazioni importanti per due triangoli rettangoli particolari.

Triangolo rettangolo con angoli di 45°

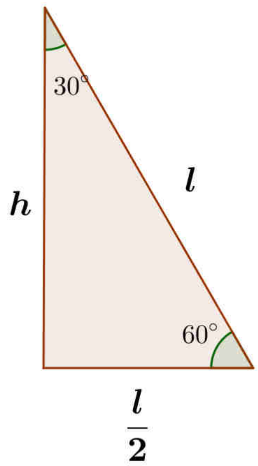
Un triangolo rettangolo con angoli di 45° è metà di un quadrato ed indicando con l il lato e con d la diagonale, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:



$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$$

Triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° è la metà di un triangolo equilatero e se indichiamo con l la lunghezza del lato e con h la lunghezza dell'altezza, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:

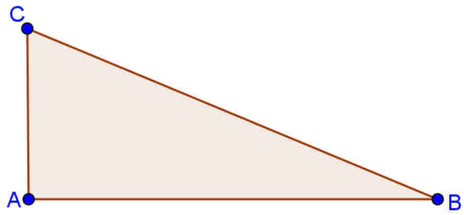


$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Problemi svolti

1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{5}{12}$ dell'altro e il perimetro è 60 cm. Quali sono le lunghezze dei cateti?

Considera il triangolo in figura.



Se poniamo $\overline{AB} = x$ abbiamo $\overline{AC} = \frac{5}{12}x$ ed applicando il teorema di Pitagora avremo:

$$\overline{CB} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{12}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{25}{144}x^2} = \frac{13}{12}x$$

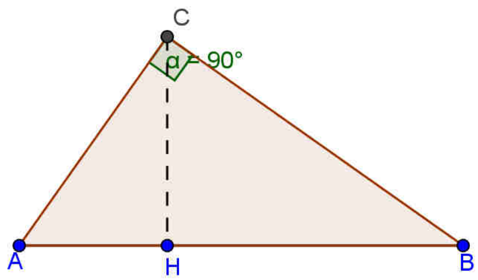
Poiché il perimetro è 60 cm abbiamo che

$$x + \frac{5}{12}x + \frac{13}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad \frac{30}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad x = 24$$

Quindi $\quad \overline{AB} = 24cm; \quad \overline{AC} = \frac{5}{12} \cdot 24 = 10cm; \quad \overline{BC} = \frac{13}{12} \cdot 24 = 26cm$

2) Consideriamo un triangolo rettangolo di cui si conoscono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa $\overline{AH} = 3cm$, $\overline{HB} = \frac{16}{3}cm$. Come risultano le lunghezze dei cateti?

Possiamo usare il 1° teorema di Euclide e, considerando che $\overline{AB} = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}$, abbiamo:

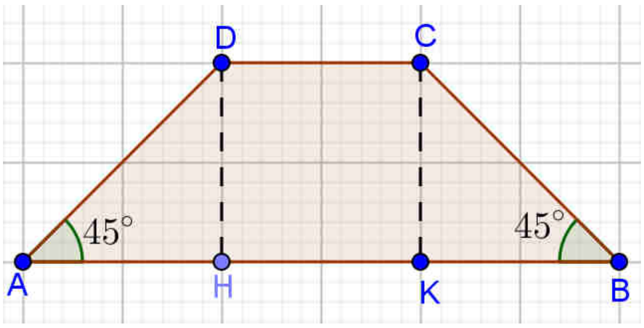


$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = \frac{25}{3} \cdot 3 = 25 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{25} = 5cm, \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB} = \frac{400}{9} \rightarrow \overline{BC} == \frac{20}{3}cm$$

Nota: avremmo potuto anche usare il 2° teorema di Euclide e determinare prima $\overline{CH}$ e poi, usando il teorema di Pitagora, i cateti.

$$\overline{CH}^2 = 16 \rightarrow \overline{CH} = 4 \ cm \ , \quad \overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5 \ cm, \quad \overline{BC} = \sqrt{16 + \frac{256}{9}} = \frac{20}{3} \ cm$$

3) Considera un trapezio isoscele ABCD avente gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45° e siano H e K i piedi delle altezze (vedi figura). Sapendo che DCKH è un quadrato di lato 5 cm, determina perimetro e area del trapezio.

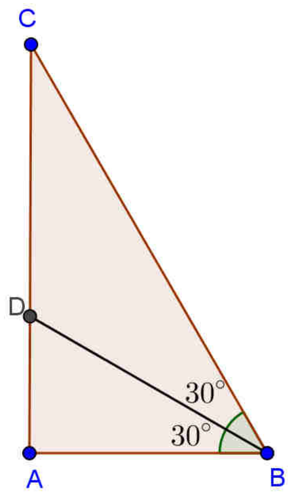


Abbiamo $\overline{AD} = \overline{CB} = 5\sqrt{2}\ \ cm, \quad \overline{AB} = 15\ \ cm$

Quindi $2p = 15 + 5 + 10\sqrt{2} = 20 + 10\sqrt{2}\ \ cm$

$$A = \frac{20 \cdot 5}{2} = 50\ \ cm^2$$

4) Un triangolo rettangolo ABC retto in A ha l'angolo $\hat{B} = 60°$ e la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ misura 6 cm. Come si determinano i lati del triangolo?



Nel triangolo ABD si ha:

$$\overline{AD} = \frac{6}{2} = 3\ \ cm, \quad \overline{AB} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\ \ cm$$

Se poi consideriamo il triangolo ABC avremo che:

$$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB} = 6\sqrt{3}\ \ cm, \quad \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = 9\ \ cm$$

PROBLEMI
TEOREMI DI EUCLIDE E PITAGORA

1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{4}{3}$ dell'altro cateto e l'area è 150 cm^2. Calcola la lunghezza dei cateti e dell'ipotenusa.

[15 *cm*; 20 *cm*; 25 *cm*]

2) In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano $\frac{9}{5}\ cm$, $\frac{16}{5}\ cm$. Determina la lunghezza dei cateti.

[3 cm; 4 cm]

3) In un triangolo rettangolo i cateti stanno tra loro come 3 sta a 4. Sapendo che il perimetro è 6 cm, determina la lunghezza dei cateti dell'ipotenusa.

[$2\ cm$; $\frac{3}{2}\ cm$, $\frac{5}{2}\ cm$]

4) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che la sua area è a^2 .

[$2\left(\sqrt{2}+1\right)a$]

5) Calcola l'area di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che il suo perimetro è uguale a $2+\sqrt{2}\ cm$.

[$\frac{1}{2}\ cm^2$]

6) In un triangolo isoscele il perimetro misura 72 *cm* e l'altezza relativa alla base 24 *cm*. Determina la lunghezza dei lati obliqui e della base.

[26 *cm*; 20 *cm*]

7) In un trapezio rettangolo ABCD con angoli retti in A e D, si ha che l'angolo adiacente alla base maggiore $\hat{B}=45°$. Sapendo che $\overline{BC}=5\sqrt{2}\ cm$ e che l'area risulta $\frac{45}{2}\ cm^2$, determina la lunghezza delle basi e dell'altezza del trapezio.

[7 *cm* ; 2 *cm* ; 5 *cm*]

8) In un rombo le diagonali sono l'una i $\frac{12}{5}$ dell'altra ed il perimetro del rombo è 26 *cm*. Determina la lunghezza del lato e dell'altezza del rombo.

[$\frac{13}{2}\ cm$, $\frac{60}{13}\ cm$]

9) Un trapezio isoscele ABCD di base AB è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 10\ cm$. Sapendo che gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano 60°, determina perimetro ed area del trapezio.

[$2p = 25\ cm, \quad A = \frac{75}{4}\sqrt{3}\ cm^2$]

10) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro è $80a$.

[$300\ a^2$]

11) I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 20 cm stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. Determina l'area del rettangolo.

[$192\ cm^2$]

12) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 25 cm ed un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.

[60 cm]

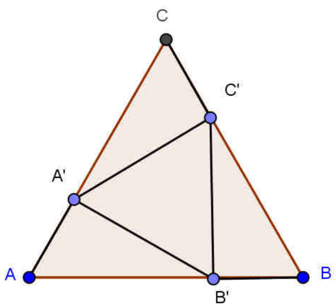
13) In un parallelogramma l'angolo acuto misura 30°, il lato maggiore è quattro volte quello minore e l'area è $450\ cm^2$. Determina le lunghezze dei lati e delle due altezze del parallelogramma.

[$15\ cm;\ 60\ cm;\ \frac{15}{2}\ cm;\ \ 30\ cm$]

14) Disegna un trapezio isoscele ABCD con la base maggiore doppia della minore e gli angoli adiacenti alla base minore di 120°. Traccia le altezze DE e CF. Sapendo che l'area del rettangolo EFCD è $32\sqrt{3}\ cm^2$, calcola area e perimetro del trapezio.

[$48\sqrt{3}\ cm^2;\ \ 40\ cm$]

15)



ABC è un triangolo equilatero di 8 cm di lato. Si scelgono sui lati tre punti A', B' e C' in modo che AA' = BB' = CC'. Come si può scegliere la distanza AA' in modo che i triangoli AA'B', BB'C' e CC'A' siano rettangoli, rispettivamente in A', B', C'? Giustificare la risposta.

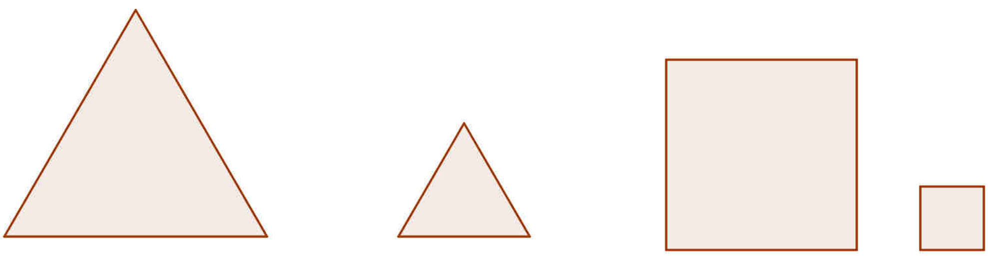
[8/3]

16)*(Invalsi 2015/16)*
Nell'atrio di un palazzo è situata una scala costituita da 4 gradini alti 16 cm e profondi 30 cm. Per permettere a carrozzine, passeggini, ecc. di accedere al palazzo, si deve costruire uno scivolo di legno da appoggiare sulla scala. Quale deve essere la lunghezza dello scivolo? [136 cm]

Similitudine

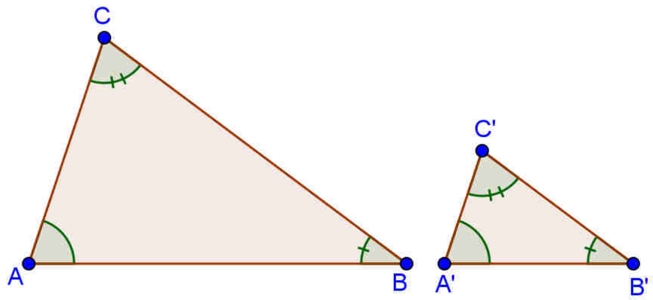
Poligoni simili

Se consideriamo due triangoli equilateri di lato diverso, due quadrati di lato diverso intuitivamente diciamo che hanno *"la stessa forma*".



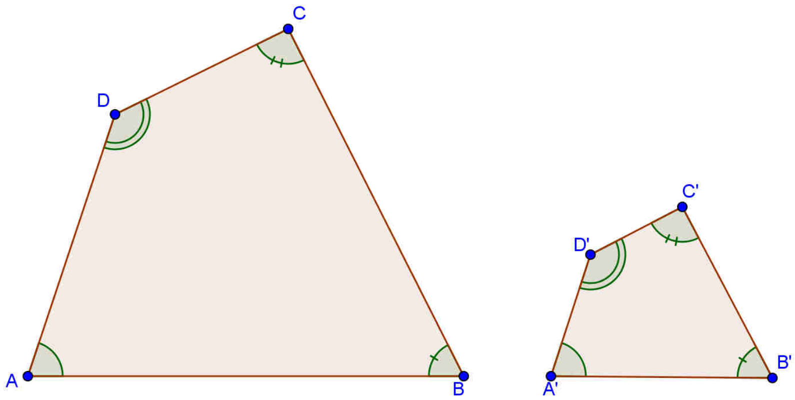
Ma cosa comporta avere la "*stessa forma*"?

Se osserviamo due triangoli della stessa forma (vedi esempio in figura) notiamo che hanno gli angoli ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati opposti ad angoli uguali è sempre lo stesso.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$$

Anche considerando due quadrilateri con la stessa forma notiamo che gli angoli sono ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati aventi per estremi vertici di angoli uguali è sempre lo stesso.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

Diamo quindi la seguente definizione:

due poligoni si dicono "simili" quando hanno lo stesso numero di lati, gli angoli ordinatamente uguali ed i lati "corrispondenti" (aventi per estremi vertici di angoli uguali) in proporzione.
Il rapporto tra lati corrispondenti viene detto *rapporto di similitudine*.

Osservazioni

- Se due poligoni sono congruenti sono anche simili (il rapporto di similitudine in questo caso è uguale a 1).

- Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili.

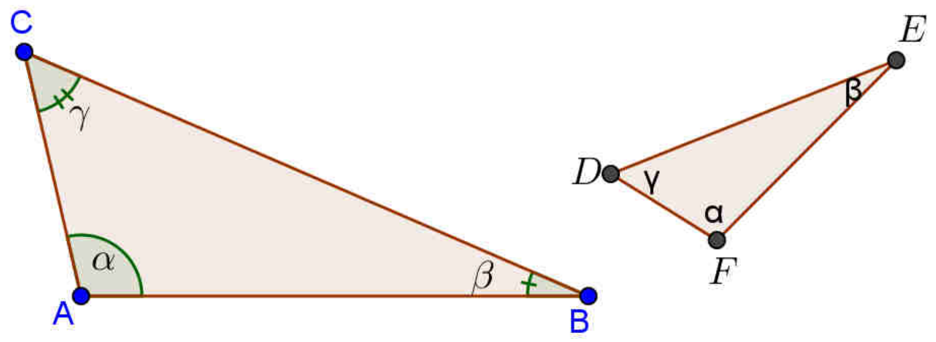
Triangoli simili

Osservazione

Se due triangoli sono simili conviene indicare con lettere "corrispondenti" (A-A' ; B-B'; C-C') i vertici di angoli corrispondenti uguali ed in questo modo sarà semplice individuare i lati corrispondenti che saranno AB - A'B' ; BC - B'C' ; AC - A'C'.

Ma se i vertici sono indicati in modo diverso è importante individuare gli angoli corrispondenti e di conseguenza i lati corrispondenti (che sono opposti ad angoli corrispondenti).

Per esempio se in figura abbiamo che



$$D\hat{F}E \cong \hat{A}, \quad F\hat{E}D \cong \hat{B}, \quad E\hat{D}F \cong \hat{C}$$

ad AB corrisponde EF perché l'angolo opposto ad AB è γ e quindi nel triangolo EDF gli corrisponde il lato opposto all'angolo congruente a γ cioè EF ecc.
e in conclusione

$$AB : EF = BC : DE = AC : DF$$

A differenza degli altri poligoni, per i triangoli ***l'uguaglianza degli angoli e la proporzionalità tra i lati non sono proprietà indipendenti.***

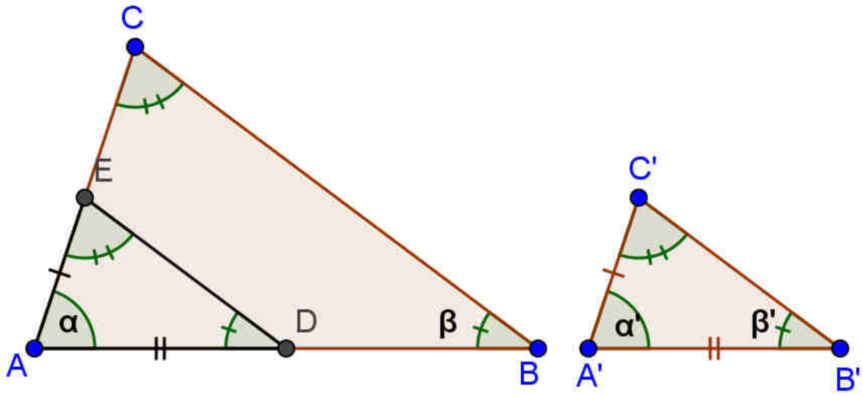
Possiamo infatti dimostrare tre "criteri" per stabilire se due triangoli sono simili.

Primo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente uguali allora sono simili.

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABC e A'B'C' e supponiamo che $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$.
Osserviamo subito che ,essendo la somma degli angoli interni di un triangolo uguale ad un angolo piatto, anche $\gamma \cong \gamma'$.
Supponiamo che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ (altrimenti i triangoli sono congruenti e quindi anche simili) e consideriamo un punto D su AB tale $\overline{AD} \cong \overline{AB'}$ e un punto E su AC in modo che $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.



Congiungendo D con E otteniamo un triangolo ADE congruente ad A'B'C' (primo criterio di congruenza) e quindi $A\hat{E}D \cong \gamma'$, $A\hat{D}E \cong \beta'$.

Ma allora le rette DE e BC sono parallele (angoli corrispondenti uguali) e quindi, *per il teorema di Talete,*

$$AB : AD = AC : AE \quad \rightarrow \quad AB : A'B' = AC : A'C'$$

Poiché il ragionamento e la costruzione si può ripetere riportando su AC e BC segmenti congruenti a A'C' e B'C' si ottiene anche che $AC : A'C' = BC : B'C'$.
Quindi tutti i lati corrispondenti sono in proporzione ed i triangoli sono simili.

Nota

Questo è sicuramente il criterio più utilizzato nei problemi per stabilire se due triangoli sono simili.

Si possono dimostrare anche i seguenti criteri:

Secondo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno un angolo uguale e i lati che lo comprendono in proporzione allora sono simili.

Terzo criterio di similitudine dei triangoli

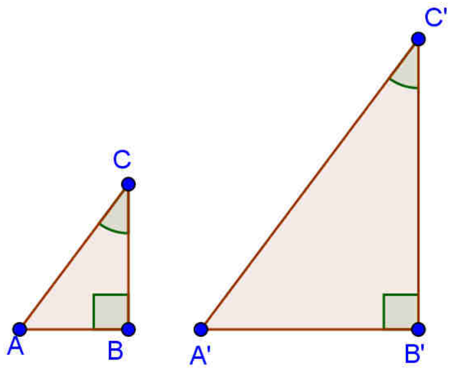
Se due triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione allora sono simili.

Conseguenze del primo criterio di similitudine dei triangoli

1) Due triangoli rettangoli aventi un angolo acuto

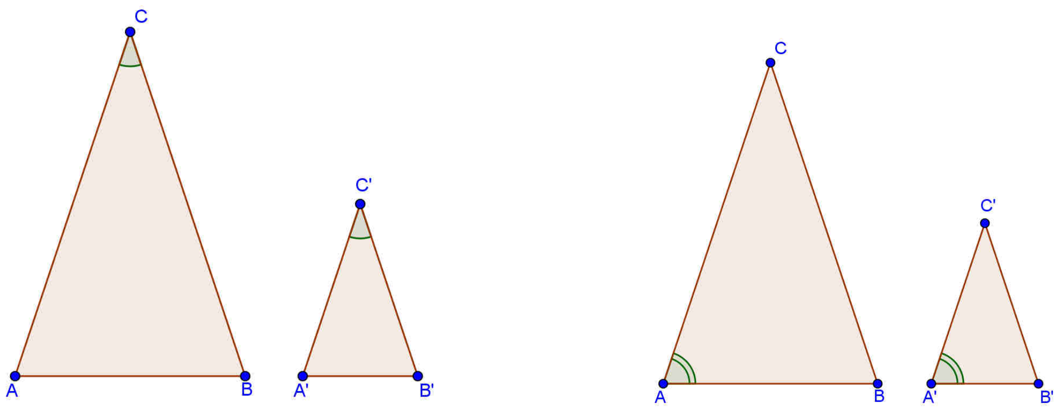
   uguale sono…………………………………..

   Infatti………………………………………..



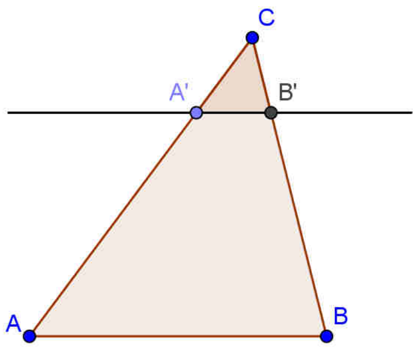
2) Due triangoli isosceli aventi uguale l'angolo al vertice oppure un angolo alla base sono………

   Infatti…………………………………



3) Tracciando una corda parallela ad un lato di un triangolo ABC si individua un triangolo…......

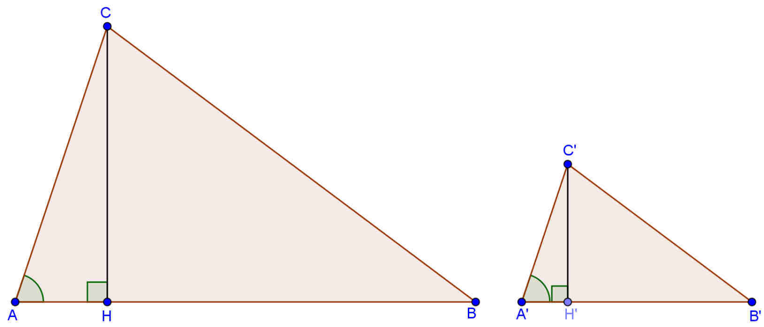
   Infatti………………………………….



Proprietà dei triangoli simili

1) In due triangoli simili le basi stanno tra loro come le rispettive altezze.

Dimostrazione: consideriamo i triangoli simili ABC e A'B'C' e siano CH e C'H' le altezze relative alle basi corrispondenti AB e A'B'.



Poiché i triangoli rettangoli AHC e A'H'C' hanno un angolo acuto uguale sono simili e quindi

$$AC : A'C' = CH : C'H'$$

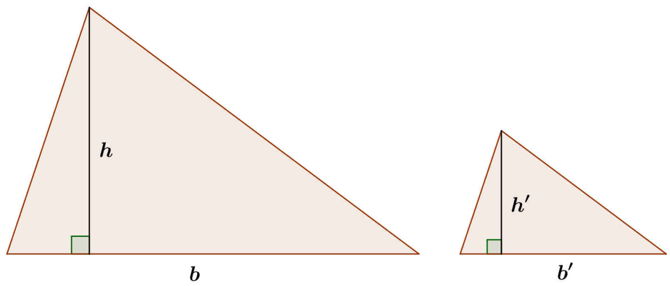
Ma poiché si ha anche che $AC : A'C' = AB : A'B'$, avremo anche che $AB : A'B' = CH : C'H'$

2) Il rapporto tra le aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Dimostrazione: consideriamo due triangoli simili aventi basi *b*,*b'* e relative altezze *h*, *h'* aventi rapporto di similitudine *k* (cioè per esempio $\frac{b}{b'} = k$).

Indicando con A e A' le loro aree abbiamo che

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}b'h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{b}{b'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = k^2$$

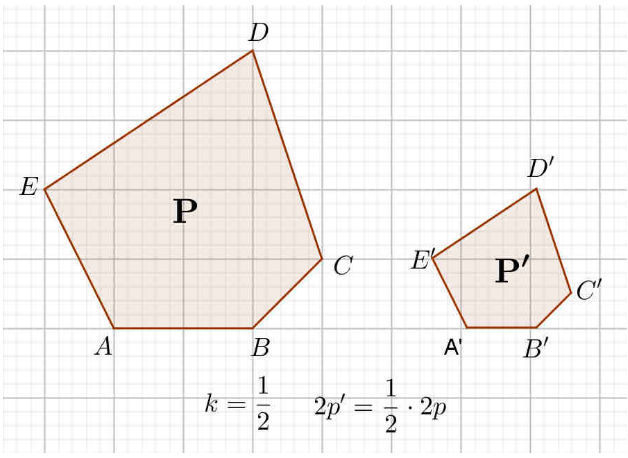


Perimetri e aree di poligoni simili

- *Il rapporto tra i perimetri di due poligoni simili è uguale al rapporto di similitudine.*

  Infatti se ABCDE e A'B'C'D'E' sono due poligoni simili e k è il loro rapporto di similitudine , indicando con $2p$, $2p'$ i rispettivi perimetri, si ha:

$$A'B' = kAB, \quad B'C' = kBC, \quad \ldots \rightarrow A'B' + B'C' + \ldots . = k(AB + BC + \ldots .) \rightarrow 2p' = k \cdot 2p \rightarrow \frac{2p'}{2p} = k$$

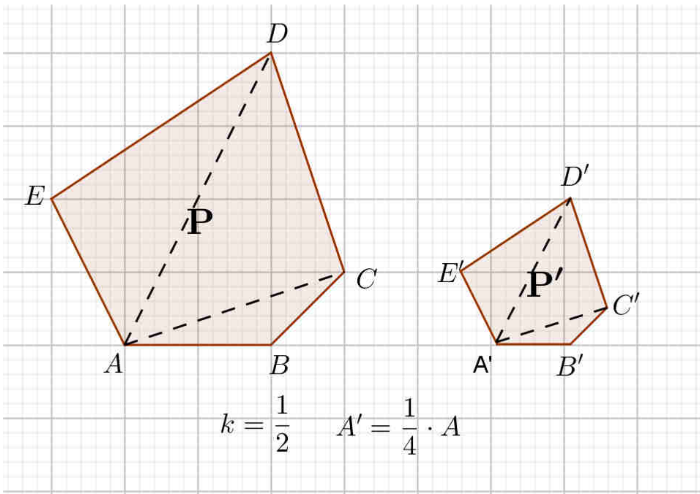


- *Il rapporto tra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.*

  Infatti, dividendo i poligoni in triangoli corrispondenti (che saranno simili tutti con lo stesso rapporto di similitudine k), se indichiamo con A e A' le aree dei due poligoni e con A_1, A_1' ; A_2, A_2' *ecc.* le aree dei triangoli corrispondenti, ricordando che

$$A_1' = k^2 A_1, \quad A_2' = k^2 A_2 \ldots .$$

  avremo che



$$A' = A_1' + A_2' + \ldots . = k^2 (A_1 + A_2 + \ldots) = k^2 \cdot A \rightarrow \frac{A'}{A} = k^2$$

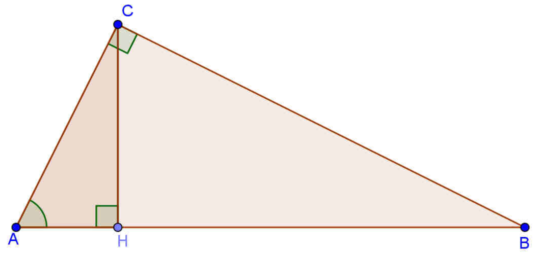
Teoremi di Euclide e similitudine

Possiamo dimostrare i due teoremi di Euclide utilizzando la similitudine dei triangoli che vengono a formarsi quando tracciamo l'altezza relativa all'ipotenusa.

1° teorema di Euclide

"Il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa"

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.



Il triangolo **ACH risulta simile al triangolo ABC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo in comune $\hat{A}$).
Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha (trascuriamo di mettere il sopra-segnato per indicare le misure):

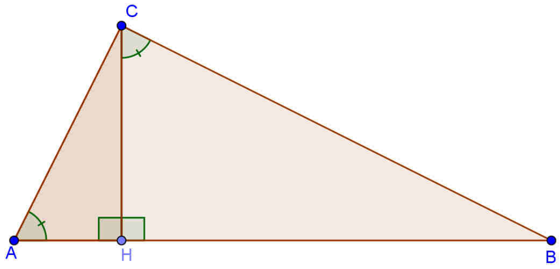
$$AB : AC = AC : AH \quad \rightarrow \quad AC^2 = AB \cdot AH$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al primo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sul cateto AC è AC^2 e l'area del rettangolo avente dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa è $AB \cdot AH$.

2° teorema di Euclide

"Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa"

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.



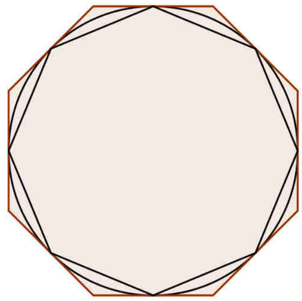
Il triangolo **ACH risulta simile al triangolo HBC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo $H\hat{A}C \equiv H\hat{C}B$ perché complementari dello stesso angolo).
Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha (trascuriamo di mettere il sopra-segnato per indicare le misure):

$$AH : HC = HC : HB \quad \rightarrow \quad HC^2 = AH \cdot HB$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al secondo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è HC^2 e l'area del rettangolo avente dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $AH \cdot HB$.

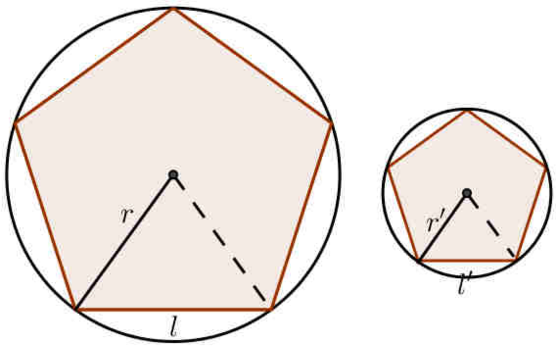
Lunghezza della circonferenza

Proviamo a considerare *i poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza*: è chiaro che la lunghezza della circonferenza è maggiore del perimetro di un qualunque poligono regolare inscritto e minore del perimetro di un qualunque poligono regolare circoscritto e che la differenza tra il perimetro di un poligono regolare circoscritto e il perimetro di un poligono regolare inscritto con lo stesso numero di lati diventa sempre più piccola aumentando il numero dei lati.



La lunghezza della circonferenza è definita come **l'elemento separatore** tra l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza.

Se consideriamo due circonferenze di raggi *r* e *r'* e vi inscriviamo un poligono regolare dello stesso numero di lati, indicando con *2p* il perimetro del poligono inscritto nella circonferenza di raggio r e con *2p'* il perimetro di quello inscritto nella circonferenza di raggio *r'*

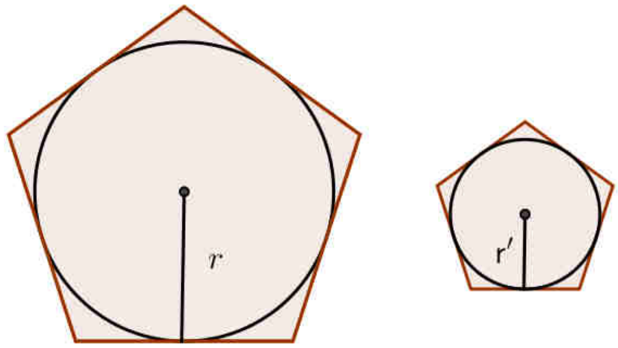


Sappiamo che $2p : 2p' = l : l'$.

Considerando la similitudine dei triangoli in figura abbiamo che $l : l' = r : r'$ e quindi in conclusione

$$2p : 2p' = r : r' \rightarrow \frac{2p}{2p'} = \frac{r}{r'}$$

Analogamente, considerando i poligoni regolari circoscritti dello stesso numero di lati ed indicando con 2P il perimetro del poligono circoscritto alla circonferenza di raggio *r* e con 2P' quello relativo alla circonferenza di raggio *r'*, abbiamo che:



$$2P : 2P' = r : r' \rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{r}{r'}$$

Se quindi indichiamo con c la lunghezza della circonferenza di raggio r e con c' la lunghezza della circonferenza di raggio r' abbiamo che:

$$\begin{matrix} 2p < c < 2P \\ 2p' < c' < 2P' \end{matrix} \quad \to \quad \frac{2p}{2p'} < \frac{c}{c'} < \frac{2P}{2P'} \quad \to \quad \frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$$

Ma allora possiamo anche scrivere $\frac{c}{c'} = \frac{2r}{2r'} \to \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$

cioè **il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro è costante e questo rapporto viene indicato con il simbolo** π (pi-greco).

π **è un numero irrazionale**, cioè non si può esprimere con una frazione (la lunghezza della circonferenza e il suo diametro sono grandezze incommensurabili) ed il suo valore approssimato è 3,14.

Quindi in conclusione $\frac{c}{2r} = \pi$, da cui la lunghezza c della circonferenza di raggio r risulta:

$$\boxed{c = 2\pi\ r}$$

Nota: per calcolare un'approssimazione di π possiamo calcolare il rapporto tra il perimetro di un poligono regolare inscritto (o circoscritto) alla circonferenza con un numero elevato di lati e il diametro.

Area del cerchio

Procedendo in modo analogo definiamo **l'area del cerchio come l'elemento separatore delle aree dei poligoni regolari inscritti e l'insieme delle aree dei poligoni regolari circoscritti** alla circonferenza.

Poiché l'area di un poligono regolare circoscritto risulta $A = \frac{2p \cdot r}{2}$ l'area A_C del cerchio sarà

$$A_{cerchio} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

In conclusione l'area del cerchio di raggio r risulta

$$\boxed{A_{cerchio} = \pi\ r^2}$$

PROBLEMI
SIMILITUDINE

1) In un triangolo ABC, M e N sono rispettivamente i punti medi di AC e BC. Qual è il rapporto tra i perimetri dei triangoli MCN e ABC? E il rapporto tra le aree?

[$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$]

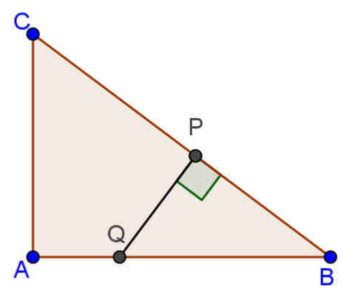
2) Considera un triangolo isoscele ABC avente base $\overline{AB} = 12\ cm$ e altezza $\overline{CH} = 8\ cm$. Considera il punto P su AC tale che $\overline{CP} = 4\ cm$ e traccia il segmento PQ parallelo ad AB con Q sul lato BC. Determina l'area del triangolo PQC.

[$\frac{192}{25}\ cm^2$]

3) Considera un triangolo ABC e siano L,M,N i punti medi dei lati. Come risulta il triangolo LMN rispetto ad ABC?

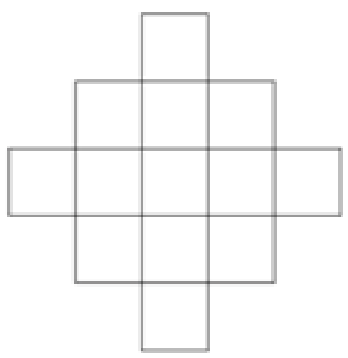
[simile, perché…..]

4) Dato un triangolo rettangolo ABC, da un punto P dell'ipotenusa BC conduci la perpendicolare all'ipotenusa e supponi che incontri AB in Q (vedi figura). Come risulta BPQ rispetto ad ABC?
Supponi che $\overline{AB} = 8\ cm$, $\overline{AC} = 6\ cm$, $\overline{PB} = 4\ cm$.
Determina perimetro e area di PBQ.



[simile perché…..; $2p = 12\ cm$, $A = 6\ cm^2$]

5) *(Invalsi 2017/18)*



La figura è composta da 13 quadrati tutti di lato 1 cm. Se il lato di ciascun quadrato si dimezza quanto risulterà la superficie della figura (in cm^2)?

[3,25 cm^2]

6) Disegna un parallelogramma ABCD e la sua diagonale AC. Da un punto P di AC traccia le parallele ai lati e dimostra che i parallelogrammi che hanno per diagonale i segmenti AP e PC sono simili.

7) Un triangolo ha i lati che misurano rispettivamente 15 cm, 20 cm e 25 cm. Se un triangolo simile a questo ha il lato maggiore di 20 cm, quanto misurano gli altri due lati?

[12 cm, 16 cm]

8) Due triangoli rettangoli hanno un angolo acuto congruente. È sufficiente per dire che sono simili? Se il perimetro del primo è doppio del perimetro del secondo quanto vale il rapporto tra le loro aree?

[Sì, perché?; 4]

9) Due triangoli rettangoli sono simili. Il cateto minore del primo triangolo misura 2 cm e la lunghezza dell'ipotenusa e del cateto maggiore del secondo sono rispettivamente 15 cm e 12 cm. Determina i lati incogniti dei due triangoli.

[9 cm; 10/3 cm; 8/3 cm]

10) Due triangoli simili hanno due lati omologhi di 12 cm e di 18 cm. Se l'area del primo misura 60 cm^2, quanto misura l'area del secondo? E se il perimetro del secondo misura 45 cm quanto misura il perimetro del primo?

[A_2=135 cm^2; $2p_1$=30 cm]

11) Le diagonali di due rettangoli simili sono uguali, rispettivamente, a 24 cm e 18 cm e la base del primo misura 12 cm. Determina le loro aree.

[$A_1=144\sqrt{3}$ cm^2 ; $A_2=81\sqrt{3}$ cm^2]

12) Un triangolo rettangolo in A ha il cateto maggiore AB di 36 cm e l'altro cateto di 24 cm. Per un punto P di AB si manda la parallela ad AC che incontra BC in Q. Sapendo che l'area di BPQ è 192 cm^2, determina la misura di PB.

[24 cm]

13) Un triangolo rettangolo ABC ha i cateti AC = 20 cm e AB = 15 cm. Tracciare una retta parallela all'ipotenusa in modo che, dette P e Q le intersezioni rispettivamente con i cateti AC e AB, l'area del triangolo PQB sia 2/9 di quella del triangolo dato.
Suggerimento: poni $\overline{BQ} = x$

[BQ=10 cm oppure BQ= 5 cm]

14) Un quadrato ABCD ha area 81 cm^2. Preso un punto E sul lato AB, mandare la perpendicolare ad ED che incontra BC in F. Dimostra che i triangoli AED e EBF sono simili.

15) In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, la proiezione dei cateti sull'ipotenusa misurano 25 cm e 144 cm. Determina perimetro ed area del triangolo.

[390 cm; 5070 cm^2]

16) In un rettangolo ABCD la perpendicolare condotta da A alla diagonale BD incontra la diagonale stessa in H ed il lato CD in K. Sapendo che DH misura 36 cm e che BH misura 64 cm, determina la misura di HK e, successivamente, il perimetro di ABCD.

[27 cm; 280 cm]

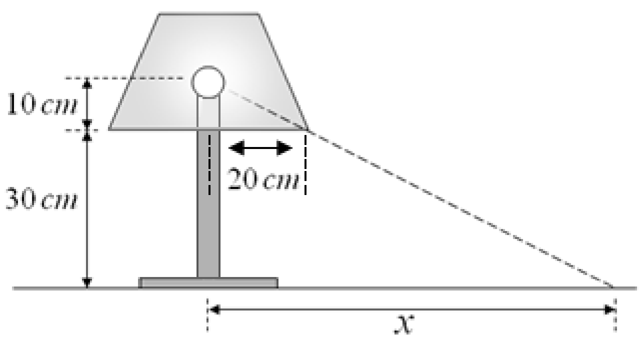
17) Un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, ha il cateto minore AB che misura 10 cm e l'altro cateto che è i suoi 3/2. Preso un punto P del cateto minore si tracci la perpendicolare al cateto stesso che incontri in Q l'ipotenusa. Sapendo che l'area di APQC è 27 cm^2, determina la misura di AP.

[2 cm]

18) In un triangolo rettangolo ABC, i cateti AB ed AC misurano, rispettivamente, 16 cm e 12 cm. Considera un punto P su ABV e sia H la sua proiezione su BC. Se il perimetro del triangolo HBP è 24 cm. Determina la misura di AP.

[6 cm]

19) *[Prove Invalsi 2013]* In figura è rappresentata una lampada con paralume e relative misure.

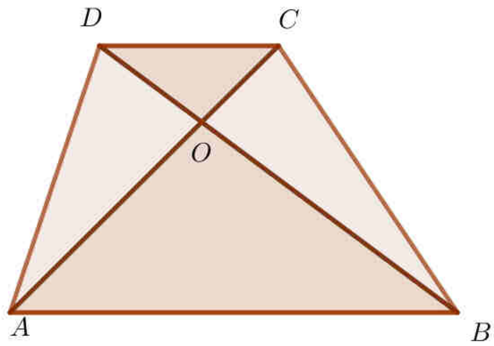


Quanto misura il raggio *x* del cerchio di luce proiettato sul piano d'appoggio della lampada?

[80 cm]

20) *[Prove Invalsi 2016*]

Le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli.
Completa il testo seguente scegliendo tra i termini riportati alla fine (ogni termine può essere usato una sola volta).



Considera i triangoli ABO e CDO.

I due triangoli hanno gli angoli $A\hat{O}B$ e …………. congruenti perché sono opposti al vertice.

L'angolo $O\hat{A}B$ è congruente all'angolo ……….. perché sono angoli …………… formati dalle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC.

Quindi i traingoli ABO e CDO sono …………… tra loro.

Termini tra cui scegliere:

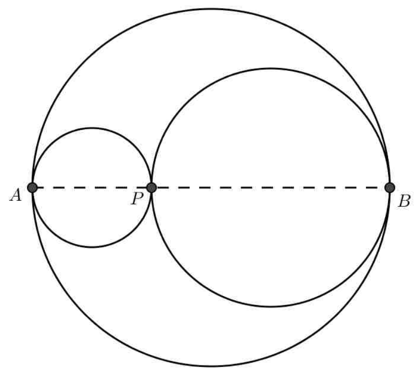
Alterni interni, corrispondenti, $A\hat{B}O$, $O\hat{C}D$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}A$ *, congruenti, simili*

21) *[Prove Invalsi 2015]*
Arturo vuole misurare l'altezza di un obelisco che si trova al centro della piazza principale della sua città. Ad una certa ora di un giorno di sole, l'obelisco proietta un'ombra di circa 6,4 m e un palo, alto 2,5 m, che si trova nella stessa piazza, proietta un'ombra di circa 0,8 m. Qual è l'altezza dell'obelisco? (supponi che la piazza sia orizzontale e che l'obelisco ed il palo siano verticali).

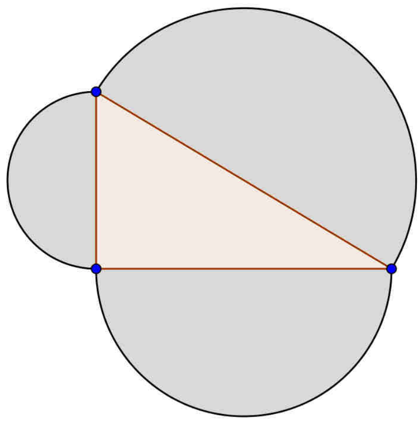
[20 m]

22) Disegna una circonferenza di diametro AB e prendi un punto P su AB: disegna le circonferenze di diametri AP e PB.

Verifica che la somma della lunghezza delle circonferenze è uguale alla somma della lunghezza della circonferenza di diametro AB.



23) Considera un triangolo rettangolo e disegna sui cateti e sull'ipotenusa dei semicerchi esterni al triangolo. Dimostra che il semicerchio costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei semicerchi costruiti sui cateti.



24) Considera un quadrato di lato 4 cm. Disegna la circonferenza inscritta e quella circoscritta. Determina la lunghezza delle due circonferenze e l'area della corona circolare individuata da esse.

[4π, $4\pi\sqrt{2}$, $A = 4\pi$]

25) Considera una circonferenza di diametro AB e traccia una corda AC che forma un angolo di 60° con AB. Sapendo che la lunghezza della circonferenza è $10\pi\ a$, determina l'area del triangolo ABC.

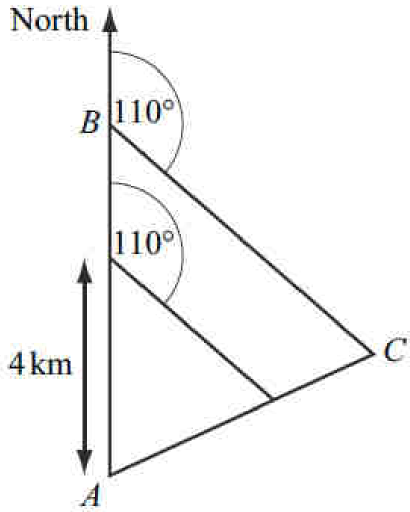
[$\frac{25\sqrt{3}}{2}a^2$]

26) In un rombo il lato e la diagonale minore misurano a. Determina l'area del rombo e l'area del cerchio inscritto nel rombo.

[$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $\frac{3}{16}\pi a^2$]

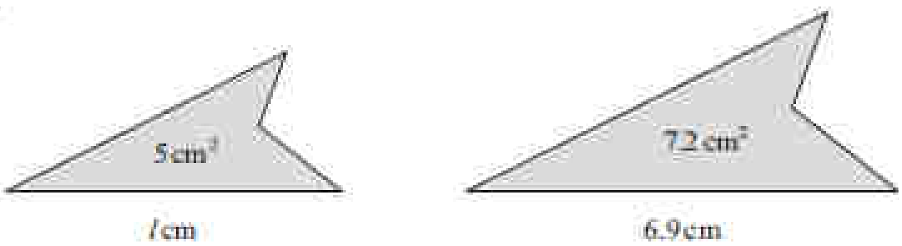
TEST IN INGLESE
SIMILITUDINE

1) The route for the sponsored walk in winter is triangular.



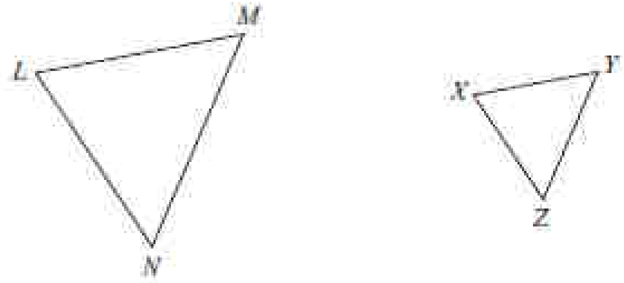
Senior students start at A, walk north to B, then walk on bearing 110° to C.
Then they return to A.
$AB=BC=6$ km
Junior students follow a **similar** path but they only walk 4 km North from A, then 4 km on a bearing of 110° before returning to A.
Senior students walk a total of 18.9 km.
Calculate the distance walked by junior students.

2) The diagram shows two similar figures.



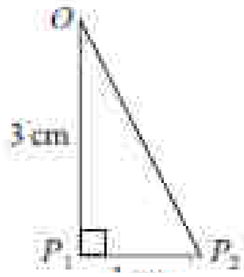
The areas of the figures are 5 cm^2 and 7.2 cm^2. The lengths of the bases are l cm and 6.9 cm.
Calculate the value of l.

3) A triangle XYZ is mathematically similar to triangle LMN.



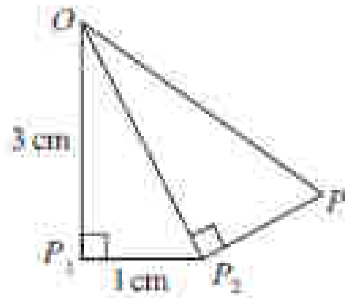
XZ=16 cm and the area of triangle LMN is 324 cm^2.Calculate the area of triangle XYZ.

4) Sidney draws the triangle OP_1P_2.OP_1=3 cm and P_1P_2=1 cm. Angle OP_1P_2=90°.



a) Show that $OP_2 = \sqrt{10}$ cm.

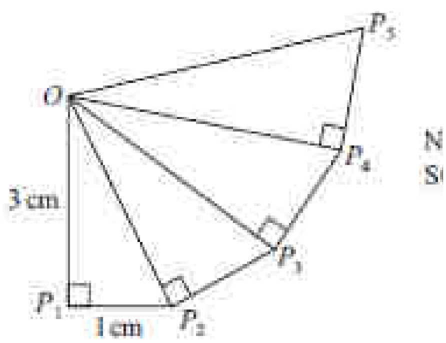
b) Sidney now draws the lines P_2P_3 and OP_3.
Triangle OP_2P_3 is mathematically similar to triangle OP_1P_2.



(i) Write down the length of P_2P_3 in the form $\frac{\sqrt{a}}{b}$ where a and b are integers.

(ii) Calculate the length of OP_3 in the form $\frac{c}{d}$ where c and d are integers.

c) Sidney continues to add mathematically similar triangles to his drawing.
Find the length of OP_5.



5) Ban and Sarah want to measure the height of a building. Ben is 1.8 m tall and Sarah suggests that he stands next to the building and compares the shadows. She measure his shadow to be 2.4 m long and the shadow of the building to be 16 m long. How tall is the building?

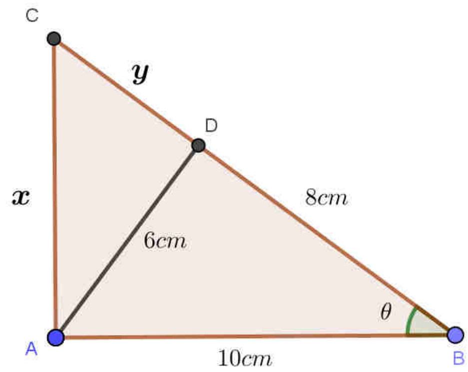
6) A photocopier is set to reduce the lengths of copies to $\frac{2}{3}$ of the original size. If the original document measures 12 cm by 15 cm what will be the dimension of the copy?

7) A photography shop produces enlargements of photos. A 15 cm x 10 cm photo was enlarged so that its longest side was 24 cm. What was the length of the shorter side?

8) A map is reduced to $\frac{3}{5}$ of its original size. A field on the original map measured 25 mm x 35 mm. What will be its dimensions on the image?

9) A map that measures 24 cm by 30 cm is reduced to $\frac{2}{3}$ of its original size. What are the dimensions of the reduced map?

10) In the triangle in the diagram BD = 8 cm, AB = 10 cm, AD = 6 cm, AC = x and CD = y.



a)Draw the two triangle ABC and DBA in the same orientation and mark on all their angles.

b)Hence explain why triangle ABC and DBA are similar.

c)Write down an equation involving x.

d)Solve the equation to find x.

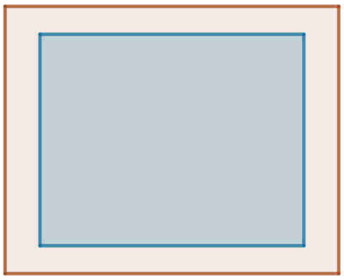
e)Calculate the value of y.

11) A rectangle P is enlarged to a rectangle Q. The dimensions of P are 5 m by 12 m. The shortest side of Q is 6 m.

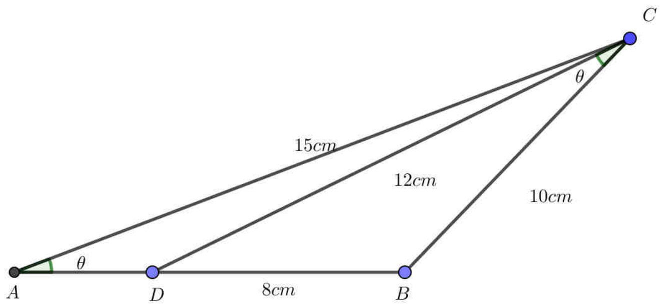
(a) What is the scale factor of enlargement?
(b) What is the length of the longer side of Q?

12) A right-angled triangle P is enlarged to a triangle Q. The hypotenuse of P is 12 cm and the hypotenuse of Q is 15 cm.
(a) What is the scale factor of enlargement?
(b) If the shortest side of P is 8 cm find the shortest side of Q.

13) A photo 8 cm high and 10 cm wide has a border 2 cm high along the bottom and the top of the photo and *w* cm wide on each side. Find *w* if the original photo is similar to the photo with its border.



14) In the diagram $D\hat{C}B \cong C\hat{A}B = \theta$, DB = 8 cm, DC = 12 cm and CB = 10 cm.



(a) To which triangle is the triangle ABC similar?

(b) Draw triangle ABC and the triangle of part (a) so that they have the same orientation and mark each side clearly.

(c) Find the length AB

(d) Find also the length AC.

15) The distance between Delhi and Calcutta is 1310 Km. On a map they are 26.2 cm apart. Find the scale of the map in the form 1:n.

16) The scale of a map is 1: 20 000 000. On the map the area of a state is 5 cm^2. Calculate the actual area of the state in Km^2.