

# Integrali indefiniti

## FUNZIONI PRIMITIVE

### Definizione

$F(x)$  si dice “funzione primitiva” di  $f(x)$  se  $F'(x) = f(x)$

### Esempio

Quali sono le funzioni primitive di  $f(x) = \cos x$ ?

Ricordando che  $D(\sin x) = \cos x$  avrò che  $F(x) = \sin x$  ma anche  $y = \sin x + c$  (con  $c \in \mathbb{R}$ ) risulta funzione primitiva di  $f(x) = \cos x$  poiché  $D(\sin x + c) = \cos x$ .

Abbiamo infatti il seguente teorema:

**Teorema:** se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x) \Rightarrow$  anche  $F(x) + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) è una primitiva di  $f(x)$  ed ogni primitiva di  $f(x)$  è del tipo  $F(x) + c$ .

### Dimostrazione

Poiché  $D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$  anche  $F(x) + c$  è primitiva di  $f(x)$ .

Inoltre se  $G(x)$  è una primitiva di  $f(x)$  si ha:

$$D(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

**Definizione:** l'insieme delle primitive di  $f(x)$  viene indicato con il simbolo

$$\boxed{\int f(x) dx}$$

che si legge *integrale indefinito di  $f(x)$  in  $dx$* .

Quindi se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + c} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

$f(x)$  prende il nome di *funzione integranda*.

Nel nostro esempio quindi scriviamo che:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

L'integrazione indefinita può essere considerata l'operazione inversa della differenziazione poiché

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + c) = F'(x) dx = f(x) dx$$

E' chiaro inoltre che  $D\left(\int f(x)dx\right) = D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$

### Proprietà dell'integrale indefinito

$$1. \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

*Dimostrazione*

Se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$  allora  $k \cdot F(x)$  è primitiva di  $k \cdot f(x)$  poiché  $D(k \cdot F(x)) = k \cdot f(x)$

*Esempio:*  $\int 2 \cos x dx = 2 \int \cos x dx = 2(\sin x + c)$  o anche  $2 \sin x + c$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

*Dimostrazione*

Se  $F(x)$  e  $G(x)$  sono primitive rispettivamente di  $f(x)$  e di  $g(x)$ , allora  $D(F(x) + G(x)) = f(x) + g(x)$  e quindi  $F(x) + G(x)$  è una primitiva di  $f(x) + g(x)$ .

*Esempio:*  $\int (x + \cos x) dx = \int x dx + \int \cos x dx = \frac{1}{2} x^2 + \sin x + c$

## Integrali indefiniti immediati

$$1) \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad \text{con} \quad \alpha \neq -1$$

$$2) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (*)$$

$$3) \quad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cot} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$4) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(ricorda che  $D a^x = a^x \cdot \ln a$ )

$$\int e^x dx = e^x + c$$

(caso particolare per  $a = e$ )

$$(*) \text{ NOTA} \quad \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} \cdot (-1) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

### Esempi

$$1) \quad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$2) \quad \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln|x| + c$$

$$3) \quad \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4 \operatorname{arcsen} x + c$$

$$4) \quad \int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + c$$

## Integrazioni basate sulla derivata della funzione composta

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta, abbiamo:

$$1) \quad \boxed{\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot f^{\alpha+1}(x) + c \quad \alpha \neq -1}$$

**Esempio 1:**  $\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c$

Infatti se deriviamo  $D\left(\frac{\sin^3 x}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \sin^2 x \cdot \cos x = \sin^2 x \cdot \cos x$

**Esempio 2:**  $\int (x^2 + 1)^3 \cdot x \, dx$

Cerchiamo di riportarci al caso  $\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx$  osserviamo che  $D(x^2 + 1) = 2x$ , mentre nella nostra funzione integranda abbiamo solo  $x$ . Per ottenere  $f'(x)$  moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int (x^2 + 1)^3 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + c$$

**Esempio 3:**  $\int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c$

**Esempio 4:**  $\int \sqrt{x+1} \, dx$

Osserviamo che  $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$  e che  $D(x+1) = 1$ , quindi

$$\int \sqrt{x+1} \, dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{1+x} + c$$

### NOTA

Un caso significativo è :

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} \, dx = -\frac{1}{f(x)} + c}$$

$$2) \quad \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c}$$

**Esempio 1:**  $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Se ci accorgiamo che  $D(x^2+x) = 2x+1$ , abbiamo subito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int \frac{D(x^2+x)}{x^2+x} dx = \ln|x^2+x| + c$$

**Esempio 2:**  $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

In questo caso  $D(\cos x) = -\sin x$  mentre noi abbiamo  $\sin x$  possiamo. Possiamo “aggiustare” le cose così:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

3)

a)  $\boxed{\int (\sin f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c}$

**Esempio:**  $\int \sin 2x dx$

Se  $f(x) = 2x$  allora  $D(f(x)) = 2$ .

Possiamo “aggiustare” le cose:

$$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x) \cdot 2 dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

b)  $\boxed{\int (\cos f(x)) \cdot f'(x) dx = \sin(f(x)) + c}$

**Esempio:**  $\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ .

$$\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

c) 
$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg}(f(x)) + c$$

**Esempio:**  $\int \frac{3}{\cos^2 3x} dx = \operatorname{tg} 3x + c$

d) 
$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} dx = -\cot g(f(x)) + c$$

**Esempio:**  $\int \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2 x^3} dx = -\frac{1}{3} \cot g x^3 + c$

e) 
$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + c$$

**Esempio:**  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + c$

f) 
$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$$

**Esempio:**  $\int \frac{1}{9+x^2} dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{9} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

4) 
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \left( e^{f(x)} \cdot f'(x) \right) dx = e^{f(x)} + c$$

**Esempio 1:**  $\int x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2+1} + c$  notando che  $D(x^2+1) = 2x$

**Esempio 2:**  $\int \cos x \cdot 3^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{3^{\operatorname{sen} x}}{\ln 3} + c$

**ESERCIZI**  
INTEGRAZIONI IMMEDIATE

1)  $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$

16)  $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x \, dx$

2)  $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos^4 x \, dx$

17)  $\int (2+x)^3 \, dx$

3)  $\int (1+x)^4 \, dx$

18)  $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

4)  $\int \sqrt{2x+1} \, dx$

19)  $\int \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \, dx$

5)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

20)  $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(2-x)} \, dx$

6)  $\int \operatorname{tg} x \, dx$

21)  $\int \frac{1}{x^2+3} \, dx$

7)  $\int \cot gx \, dx$

22)  $\int e^{2x+1} \, dx$

8)  $\int \frac{1}{2x+1} \, dx$

23)  $\int \frac{x}{x^2-2} \, dx$

9)  $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$

24)  $\int \frac{x-1}{x^2+5} \, dx$

10)  $\int \frac{e^x}{2e^x+5} \, dx$

25)  $\int \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$

11)  $\int \cos 3x \, dx$

26)  $\int x \cdot (x^2-1)^3 \, dx$

12)  $\int \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \, dx$

27)  $\int x \cdot \cos x^2 \, dx$

13)  $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(3-x)} \, dx$

28)  $\int \operatorname{sen} 4x \, dx$

14)  $\int x^2 \cdot e^{x^3} \, dx$

29)  $\int \frac{x^2}{x^3-1} \, dx$

15)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

30)  $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

## Soluzioni degli esercizi

1)  $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c$

2)  $-\frac{\cos^5 x}{5} + c$

3)  $\frac{(1+x)^5}{5} + c$

4)  $\frac{1}{3} \cdot (2x+1) \cdot \sqrt{2x+1} + c$

5)  $-\sqrt{1-x^2} + c$

6)  $-\ln|\cos x| + c$

7)  $\ln|\operatorname{sen} x| + c$

8)  $\frac{1}{2} \ln|2x+1| + c$

9)  $\ln|\ln x| + c$

10)  $\frac{1}{2} \ln(2 \cdot e^x + 5) + c$

11)  $\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + c$

12)  $\frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

13)  $\cot g(3-x) + c$

14)  $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$

15)  $2e^{\sqrt{x}} + c$

16)  $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + c$

17)  $\frac{(2+x)^4}{4} + c$

18)  $\frac{3}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + c$

19)  $-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + c$

20)  $\cot g(2-x) + c$

21)  $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

22)  $\frac{1}{2} e^{2x+1} + c$

23)  $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 2| + c$

24)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + c\right)$

25)  $\ln|e^x - 1| + c$

26)  $\frac{1}{8} (x^2 - 1)^4 + c$

27)  $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + c$

28)  $-\frac{1}{4} \cos 4x + c$

29)  $\frac{1}{3} \ln|x^3 - 1| + c$

30)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + c$



## Integrazione mediante semplici trasformazioni

1)  $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

In questo caso conviene semplicemente “separare” i termini al numeratore:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

2)  $\int \sin^2 x dx$

Ricordiamo che  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ , quindi:

$$\int \sin^2 x dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

3)  $\int \cos^2 x dx$

Analogamente al precedente ricordando che  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

4)  $\int \sin^3 x dx$

Possiamo scrivere:  $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x$  quindi

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

5)  $\int \cos^3 x dx$

Possiamo scrivere  $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \cdot \sin^2 x$  e si procede come nel caso precedente.

$$6) \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$$

In questo caso conviene sostituire  $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$  e poi separare i due termini:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \\ &= -\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{sen} x| + c \end{aligned}$$

$$7) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$8) \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$$

Se poniamo  $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  e ritroviamo un integrale simile al n°6:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx &= \int \frac{1}{2\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \int \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx = -\ln\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \ln\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| + c \end{aligned}$$

## Integrazione delle funzioni razionali fratte

Consideriamo una funzione razionale fratta  $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$  con grado di  $D(x) \leq 2$ .

Distinguiamo due casi:

- a) Se il grado del numeratore  $N(x)$  è maggiore o uguale al grado del denominatore  $D(x)$  si esegue la divisione.

*Esempio:*  $\int \frac{x^2+1}{x+3} dx \implies$

$x^2$	$0x$	$1$	$x+3$
$-x^2$	$-3x$		$x-3$
$=$			
	$-3x$	$1$	
	$3x$	$9$	
$=$			
		$10$	

Quindi  $x^2 + 1 = (x-3)(x+3) + 10$

e sostituendo

$$\int \frac{x^2+1}{x+3} dx = \int \frac{(x-3)(x+3)+10}{x+3} dx = \int (x-3) dx + \int \frac{10}{x+3} dx = \frac{(x-3)^2}{2} + 10 \cdot \ln|x+3| + c$$

- b) Se grado di  $N(x) <$  grado di  $D(x)$

- Se il grado di  $D(x)$  è 1, allora il grado di  $N(x)$  sarà 0 (quindi  $N(x) = \text{costante}$ ) e l'integrale si risolve facilmente.

*Esempio:*  $\int \frac{10}{x+3} dx = 10 \int \frac{1}{x+3} dx = 10 \cdot \ln|x+3| + c$

- Se il grado di  $D(x)$  è 2, allora  $D(x) = ax^2 + bx + c$  e distinguiamo tre casi a seconda che il discriminante dell'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $\Delta$ ) sia positivo, nullo o negativo.

**Caso 1:**  $\Delta > 0$

In questo caso ci si riconduce a  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

*Esempio:*  $\int \frac{2x-7}{x^2-x-2} dx$

Considerando il denominatore si ha che  $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ : cerchiamo due costanti, che chiameremo A e B, in modo che si abbia:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Basta sviluppare al secondo membro dell'uguaglianza e porre, per il principio di identità dei polinomi, l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1) \cdot (x-2)}$$

Uguagliando i coefficienti si ha il sistema:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-1 \end{cases}$$

Perciò:  $\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{3}{(x+1)} - \frac{1}{(x-2)}$  e quindi:

$$\int \frac{2x-7}{x^2-x-2} dx = \int \frac{3}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = 3\ln|x+1| - \ln|x-2| + c$$

**Attenzione**

Se nel polinomio al denominatore  $a \neq 1$  occorre ricordare che  $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ .

*Esempio:*  $\int \frac{1}{2x^2-5x-3} dx$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$  ammette come radici  $x_1 = 3; x_2 = -\frac{1}{2}$ , perciò la sua scomposizione sarà:

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(x-3)\left(\frac{2x+1}{2}\right) = (x-3)(2x+1), \text{ da cui } \frac{1}{2x^2-5x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+1}$$

e, procedendo come nell'esempio precedente, si giunge alla soluzione.

**Caso 2:**  $\Delta = 0$

In questo caso il polinomio al denominatore è un quadrato e ci si può ricondurre a

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$$

**Esempio 1:**  $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1}$

$4x^2 - 4x + 1$  è il quadrato di  $(2x - 1)$  perciò l'integrale assegnato può essere scritto come:

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{(2x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2x-1)} + c$$

**Esempio 2:**  $\int \frac{x+5}{9x^2 - 6x + 1} dx$

Prima di “spezzare” il numeratore dobbiamo vedere quello che può essere utile affinché il numeratore possa essere riportato ad essere la derivata del denominatore.

$$D(9x^2 - 6x + 1) = 18x - 6 = 18 \left( x - \frac{1}{3} \right)$$

Quindi possiamo scrivere  $x + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{16}{3}$

$$\int \frac{x - \frac{1}{3}}{9x^2 - 6x + 1} dx + \frac{16}{3} \int \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} dx = \frac{1}{18} \ln(9x^2 - 6x + 1) - \frac{16}{9} \frac{1}{(3x-1)} + c$$

**Nota:** la prima parte della risoluzione può anche essere scritta come

$$\frac{1}{18} \ln(3x-1)^2 = \frac{1}{18} \cdot 2 \cdot \ln|3x-1| = \frac{1}{9} \cdot \ln|3x-1|$$

**Caso 3:**  $\Delta < 0$

In questo caso il polinomio al denominatore non si può scomporre. Proviamo a fare in modo che nel denominatore ci sia un quadrato (metodo del completamento del quadrato) in modo da poter applicare

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$$

**Esempio 1:**  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 6}$

$$x^2 - 4x + 6 = (x^2 - 4x + 4) + 2 = (x - 2)^2 + 2, \text{ quindi:}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 6} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 2}$$

Ora mettiamo in evidenza il 2 in modo da avere 1 e poter applicare l'integrale dell'arcotangente:

$$\int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 2} = \int \frac{dx}{2 \left[ \left( \frac{x - 2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left[ \left( \frac{x - 2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x - 2}{\sqrt{2}} \right) + c$$

**Esempio 2:**  $\int \frac{3x + 1}{x^2 + 4} dx$

In questo caso possiamo “spezzare” il numeratore, ma prima vediamo come risulta la derivata del denominatore:

$$D(x^2 + 4) = 2x$$

Quindi basterà spezzare:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 4} &= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{dx}{4 \left( \frac{x^2}{4} + 1 \right)} = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \int \frac{dx}{4 \left[ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right]} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left[ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

**ESERCIZI**  
INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

1)  $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

2)  $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

3)  $\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$

4)  $\int \frac{2}{x^2 - 3} dx$

5)  $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 16}$

6)  $\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 1} dx$

7)  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$

8)  $\int \frac{x}{x^2 + x + 2} dx$

**Soluzioni degli esercizi**

- 1)  $\frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$
- 2)  $-\ln|x-1| + \ln|x-2| + c = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c$
- 3)  $\frac{1}{30} \ln|3x-5| - \frac{1}{30} \ln|3x+5| + c = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{3x-5}{3x+5} \right| + c$
- 4)  $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + c$
- 5)  $-\frac{1}{x+4} + c$
- 6)  $\frac{1}{2} \ln|x^2-2x+1| - \frac{2}{x-1} + c = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + c$
- 7)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c$
- 8)  $\frac{1}{2} \ln(x^2+x+2) - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{7}} \right) + c$



## Integrazione per sostituzione

**Esempio 1:**  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

L'integrale non è immediato e, per cercare di renderlo tale, poniamo  $t = \sqrt{x}$ .

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2 \cdot t \, dt$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{1}{t^2 + t} \cdot 2t \, dt = 2 \int \frac{t}{t(t+1)} dt = 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \cdot \ln|t+1| + c$$

Tornando alla variabile  $x$  (essendo  $t = \sqrt{x}$ ) abbiamo:

$$2 \ln|\sqrt{x} + 1| + c$$

**Esempio 2:**  $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

In questo caso se poniamo  $\boxed{x = \text{sent}}$  da cui  $dx = \cos t \, dt$  avremo:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-(\text{sent})^2} \cos t \, dt = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt \\ &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \text{sen} 2t + c \end{aligned}$$

Visto che  $x = \text{sent}$ , si ha  $t = \arcsen x$  da cui, sostituendo nella soluzione dell'integrale abbiamo in conclusione:

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{4} 2 \text{sent} \cos t + c = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{1-x^2} + c$$

Per esempio abbiamo  $\int \sqrt{4-x^2} \, dx$  possiamo ricondurci all'esempio precedente mettendo in evidenza il 4 e portandolo fuori della radice:

$$2 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx$$

A questo punto se poniamo  $\boxed{\frac{x}{2} = \text{sent}}$  possiamo procedere in modo analogo al precedente.

## Integrazione per parti

Ricordando la regola di derivazione del prodotto:

$$D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \rightarrow f'(x) \cdot g(x) = D(f(x) \cdot g(x)) - f(x) \cdot g'(x)$$

ed integrando: 
$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

che viene detta regola di “integrazione per parti” in cui  $f'(x)$  prende il nome di fattore derivato e  $g(x)$  è detto fattore finito.

**Esempio 1:**  $\int x \cdot \cos x dx$

Possiamo considerare  $\cos x$  come fattore derivato cioè  $\cos x = D(\sin x)$ :

$$\int x \cdot D(\sin x) dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

NOTA: se avessimo scelto come fattore derivato  $x$  ( $x = D\left(\frac{x^2}{2}\right)$ ), avremmo solo complicato la situazione senza risolvere l'integrale.

**Esempio 2:**  $\int x \cdot e^x dx$

$$\int x \cdot e^x dx = \int x \cdot D(e^x) dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

**Esempio 3:**  $\int x \cdot \ln x dx$

$$\int x \cdot \ln x dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

**Esempio 4:**  $\int \arctg x dx$

In casi come questo, possiamo sempre pensare che la funzione sia moltiplicata per un fattore

$$1 = D(x)$$

e quindi  $\int 1 \cdot \arctg x dx = \int D(x) \cdot \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$

**Esempio 5:**  $\int \ln x dx$

$$\int 1 \cdot \ln x dx = \int D(x) \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

**Esercizi di ricapitolazione sugli integrali indefiniti**

1)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2)  $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

3)  $\int \frac{(\arcsen x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

4)  $\int \frac{dx}{x^2-1}$

5)  $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

6)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

7)  $\int \frac{x+1}{x^2+5} dx$

8)  $\int \frac{dx}{\cos x}$

9)  $\int \ln^2 x dx$

10)  $\int e^x \sen x dx$

11)  $\int \ln x dx$

12)  $\int \frac{\cos x - \sen x}{\cos x + \sen x} dx$

13)  $\int \cos x \cdot \sen 2x dx$

14)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$

15)  $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$

16)  $\int \frac{x+1}{x^2-25} dx$

17)  $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

18)  $\int \frac{dx}{x^2+10x+25}$

19)  $\int \frac{1}{\cos x + 1} dx$

20)  $\int x^2 e^x dx$

21)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}} dx$

22)  $\int \sqrt{x+1} dx$

23)  $\int \frac{x+1}{x^2+4} dx$

24)  $\int \frac{dx}{\sen x + 1}$

25)  $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$

26)  $\int \frac{x+3}{x^2+9} dx$

27)  $\int x \arctg x dx$

28)  $\int \frac{dx}{x^2-9}$

29)  $\int \frac{2x+3}{x+5} dx$

30)  $\int \sqrt{5-x^2} dx$

## Soluzioni degli esercizi

1)  $\frac{1}{2} \arcsen 2x + c$

2)  $-\ln|x-2| + \ln|x-3| + c$

3)  $\frac{1}{4}(\arcsen x)^4 + c$

4)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$

5)  $\frac{1}{6} \arctg \left( \frac{2x}{3} \right) + c$

6)  $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$

7)  $\frac{1}{2} \ln(x^2+5) + \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \left( \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + c$

8)  $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + c$

9)  $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$

10)  $\frac{1}{2} e^x (\sen x - \cos x) + c$

11)  $x \ln x - x + c$

12)  $\ln|\cos x + \sen x| + c$

13)  $-\frac{2}{3} \cos^3 x + c$

14)  $\frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c$

15)  $\frac{1}{3} \ln|x^3+1| + c$

16)  $\frac{3}{5} \ln|x-5| + \frac{2}{5} \ln|x+5| + c$

17)  $\frac{1}{3} \arctg \left( \frac{x}{3} \right) + c$

18)  $-\frac{1}{x+5} + c$

19)  $\operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) + c$

20)  $e^x(x^2-2x+2) + c$

21)  $\frac{1}{4} \arcsen(2x^2) + c$

22)  $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x} + c$

23)  $\frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{x}{2} \right) + c$

24)  $-\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)} + c$

25)  $-\frac{1}{x-2} + c$

26)  $\frac{1}{2} \ln(x^2+9) + \arctg \left( \frac{x}{3} \right) + c$

27)  $\frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + c$

28)  $\frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + c$

29)  $2x - 7 \ln|x+5| + c$

30)  $\frac{5}{2} \arcsen \left( \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{5-x^2} + c$