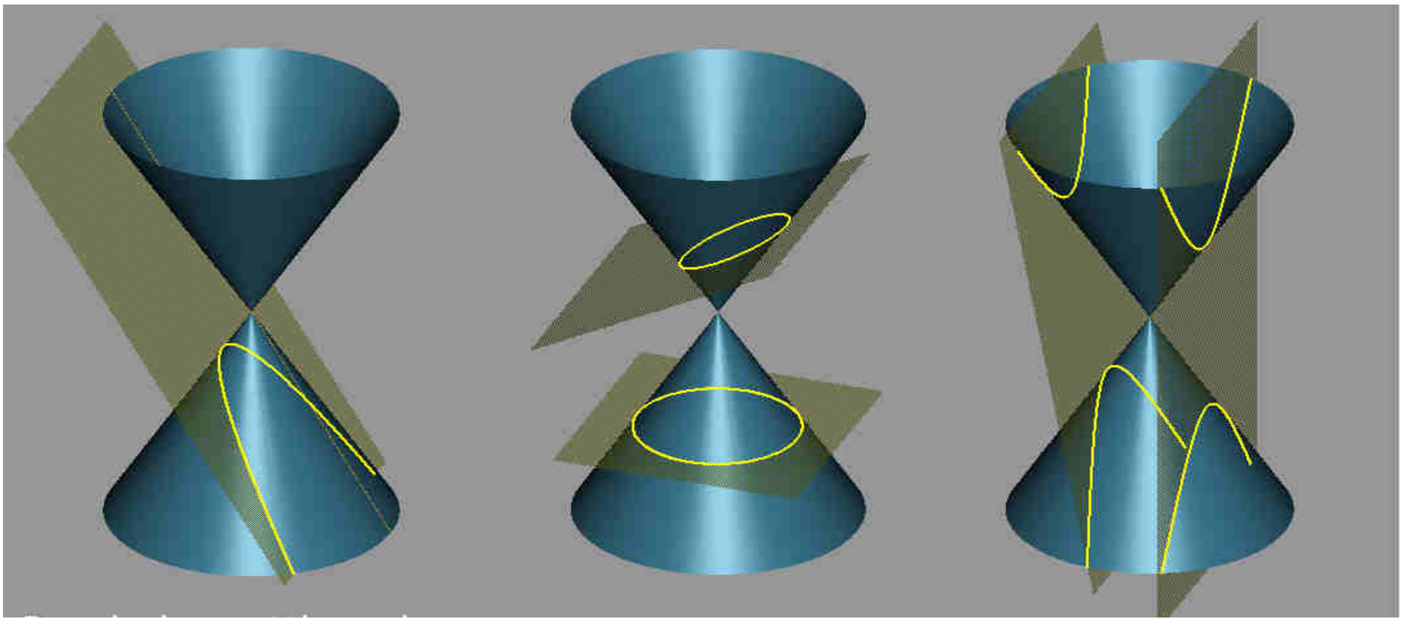
Le coniche



Circonferenza, parabola, ellisse ed iperbole sono dette “**coniche**” poiché si possono ottenere sezionando un cono a doppia falda.

Precisamente:

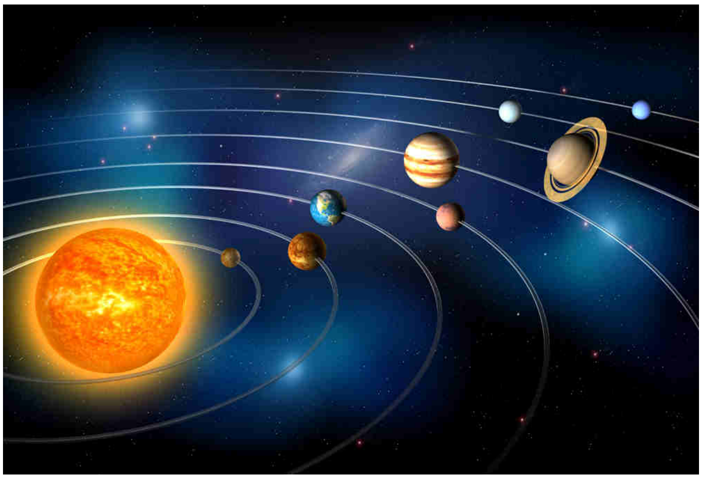
- si ottiene un’**ellisse** se il piano incontra tutte le generatrici e in particolare una **circonferenza** se il piano è perpendicolare all’asse di simmetria del cono;
- si ottiene una **parabola** se il piano è parallelo ad una generatrice del cono;
- si ottiene un’**iperbole** se il piano è parallelo a due generatrici del cono.

Noi in realtà studieremo queste curve come “luoghi” (insiemi) di punti aventi una data proprietà ma si può dimostrare che le sezioni del cono, a seconda dei vari casi, sono insiemi di punti che hanno proprio le proprietà di cui parleremo.

Approfondimenti sulle coniche

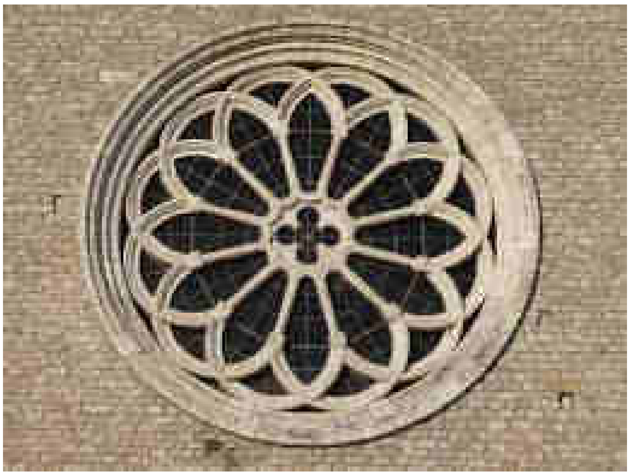
Le coniche nell'arte e nell'architettura

Le coniche nella natura



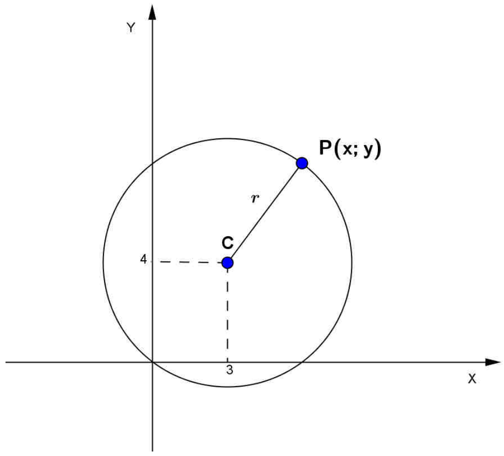
La storia delle coniche

La circonferenza nel piano cartesiano



Abbiamo già studiato la circonferenza di raggio r e centro C come l'insieme di punti per i quali la distanza da C è uguale a r : ora vogliamo studiare la circonferenza nel piano cartesiano.

Consideriamo la circonferenza in figura in cui il centro è $C(3;4)$ e il raggio $r=5$: se indichiamo con $P(x;y)$ un punto della circonferenza avremo, per definizione, che la distanza tra P e C è uguale a 5.



Per scrivere l'equazione che rappresenta questa circonferenza basterà scrivere la proprietà di tutti i suoi punti cioè

$$\overline{PC}=5$$

Avremo $$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=5$$

ed elevando al quadrato entrambi i membri avremo:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25$$

In generale l'equazione di una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(x_C;y_C)$ e raggio r sarà quindi

$$\boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2}$$

Sviluppando l'equazione ottenuta abbiamo:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25 \rightarrow x^2+y^2-6x-8y=0$$

In generale sviluppando l'equazione $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$ otteniamo

$$x^2-2x_C x+x_C{}^2+y^2-2y_C y+y_C{}^2-r^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x_C x-2y_C y+x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=0$$

e quindi, se poniamo $\begin{cases} -2x_C=a \\ -2y_C=b \\ x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=c \end{cases}$ abbiamo

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

Poiché $\begin{cases} -2x_C=a \rightarrow x_C=-\dfrac{a}{2} \\ -2y_C=b \rightarrow y_C=-\dfrac{b}{2} \\ x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=c \rightarrow r=\sqrt{x_C{}^2+y_C{}^2-c} \end{cases}$

avremo che il centro sarà $\boxed{C\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2}\right)}$ e il raggio risulterà $\boxed{r=\sqrt{x_C{}^2+y_C{}^2-c}}$.

Infatti nel nostro caso da $x^2+y^2-6x-8y=0 \rightarrow C\left(-\dfrac{a}{2}=3;-\dfrac{b}{2}=4\right)$; $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Osservazioni

Abbiamo visto che l'equazione di una circonferenza è molto diversa da quella di una retta: è un'equazione di 2° grado in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali (se sono diversi da 1 si può dividere tutta l'equazione per il valore del coefficiente di x^2 e y^2) e in cui manca il termine xy.

Inoltre, per avere una circonferenza "reale", dovrà essere

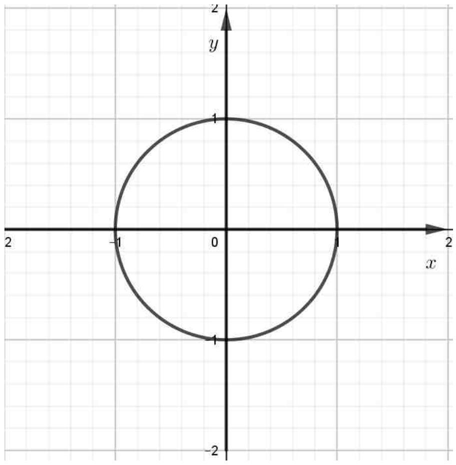
$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c\geq 0 \qquad \text{poiché} \quad r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

Se r = 0 la circonferenza "degenera" in un solo punto.

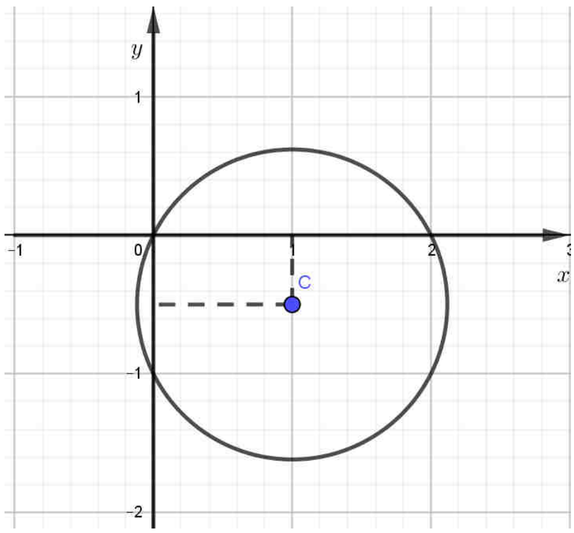
Esempi

1) $x^2+y^2=1$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e $r=1$.

In generale $x^2+y^2=r^2$ e l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e raggio r.



2) $2x^2+2y^2-4x+2y=0 \to x^2+y^2-2x+y=0$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(1;-\frac{1}{2})$ e raggio $r=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



In generale se nell'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si ha $c=0$ cioè se l'equazione è del tipo $x^2+y^2+ax+by=0$ allora la circonferenza passa per l'origine $O(0;0)$ poiché $(0;0)$ è un punto che verifica l'equazione.

3) $x^2+y^2+4=0$ non rappresenta una circonferenza reale perché calcolando il raggio troviamo $r=\sqrt{-4}\notin\Re$.

Problemi

1) Determina l'equazione della circonferenza avente **centro C assegnato** e **passante per un punto A assegnato**.

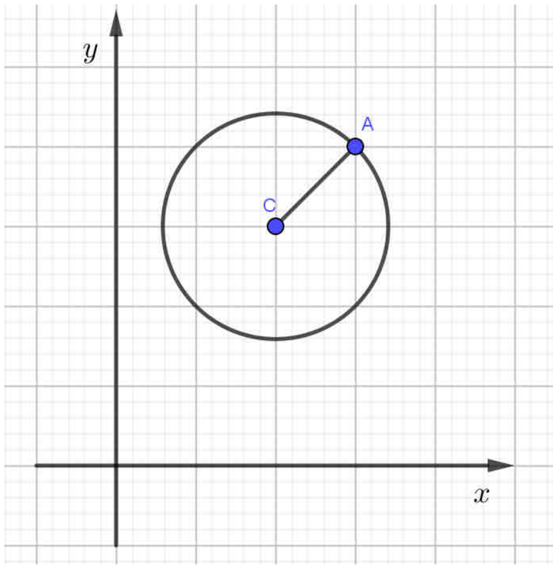
   E' chiaro che basterà calcolare raggio = $\overline{AC}$.

   Esempio: determina l'equazione della circonferenza avente centro $C(2;3)$ e passante per il punto $A(3;4)$.

   Abbiamo $\overline{CA} = \sqrt{2}$.

   Quindi l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$



2) **Determina l'equazione della circonferenza C passante per tre punti A,B,C non allineati**

   Il centro della circonferenza si può trovare intersecando l'asse del segmento AB con l'asse del segmento BC: così facendo, infatti, troviamo un punto che è equidistante da A,B,C e quindi è il centro della circonferenza.

   Infine per trovare il raggio basta calcolare la distanza del centro trovato da uno qualsiasi dei tre punti.

   Esempio: determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(7;2)$.

   - Determiniamo l'asse di AB: il punto medio ha coordinate $(2;3)$ e l'inclinazione dell'asse è $m = -1$ e quindi abbiamo

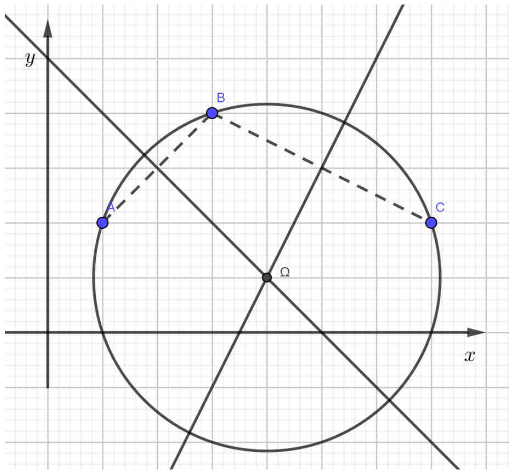
$$y - 3 = -(x-2) \rightarrow y = -x + 5$$

   - Determiniamo l'asse di BC: il punto medio ha coordinate $(5;3)$ e l'inclinazione è $m = 2$ e quindi abbiamo

$$y - 3 = 2(x-5) \rightarrow y = 2x - 7$$

Intersechiamo i due assi indicando con Ω il centro della circonferenza (non possiamo usare la lettera C perché faremo confusione con il punto C assegnato).

$$\Omega\begin{cases} y=-x+5 \\ y=2x-7 \end{cases} \rightarrow \ldots\ldots \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$



A questo punto determiniamo il raggio calcolando , per esempio, la distanza $\overline{A\Omega}=\sqrt{10}$ e in conclusione l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

Naturalmente possiamo anche sviluppare i calcoli:

$$x^2-8x+16+y^2-2y+1=10 \rightarrow x^2+y^2-8x-2y+7=0$$

Nota

Questo problema può essere risolto anche sostituendo le coordinate dei tre punti nell'equazione generale $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e risolvendo il sistema.

$$\begin{array}{l} A(x_A,y_A)\rightarrow \\ B(x_B,y_B)\rightarrow \\ C(x_C,y_C)\rightarrow \end{array}\begin{cases} x_A{}^2+y_A{}^2+ax_A+by_A+c=0 \\ x_B{}^2+y_B{}^2+ax_B+by_B+c=0 \\ x_C{}^2+y_C{}^2+ax_C+by_C+c=0 \end{cases}$$

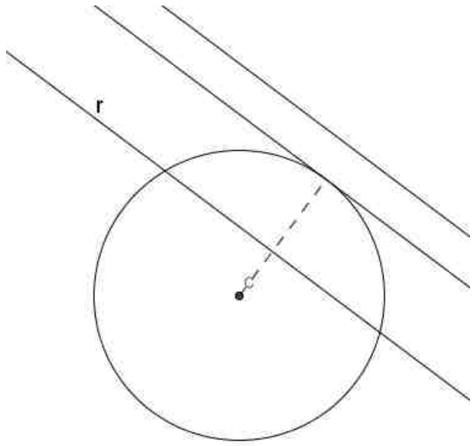
Le incognite sono *a,b,c*.

I calcoli sono in genere abbastanza faticosi e quindi **è preferibile il primo metodo**.

Retta e circonferenza

Ricordiamo che se intersechiamo una retta con una circonferenza possiamo avere:

- nessun punto di intersezione se r è esterna a $\mathcal{C}$
- 1 solo punto di intersezione (o meglio due punti coincidenti) se r è tangente a $\mathcal{C}$
- 2 punti di intersezione se r è secante a $\mathcal{C}$



Algebricamente questo significa che risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione circonferenza} \quad C \\ \text{equazione retta r} \end{cases}$$

troveremo un'equazione di 2° grado il cui Δ sarà:

$\Delta < 0$ se r è esterna a $\mathcal{C}$

$\Delta = 0$ se **r è tangente a $\mathcal{C}$** : questa viene detta "**condizione di tangenza**"

$\Delta > 0$ se r è secante a $\mathcal{C}$

Esempi

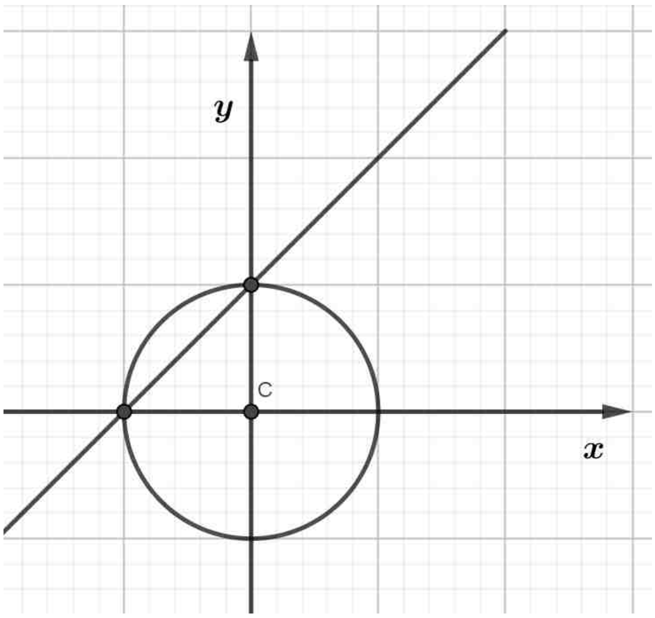
1) Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e la retta $y = x + 1$.

Disegnando sia la retta che la circonferenza vediamo che la retta è secante.

I punti di intersezione sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + (x+1)^2 = 1 \rightarrow 2x^2 + 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

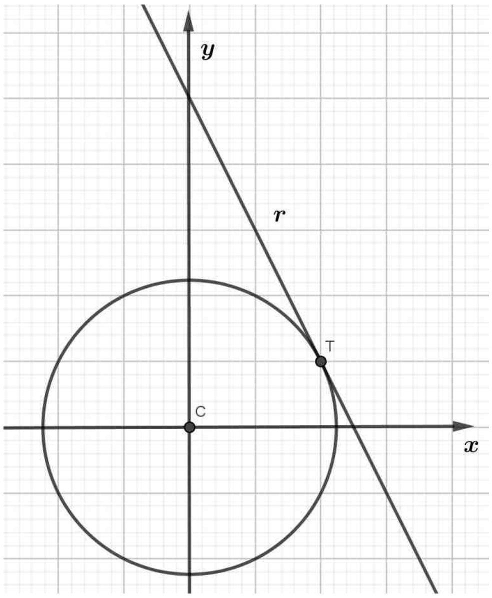


2) Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ e la retta $y = -2x + 5$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \rightarrow x^2 + (-2x+5)^2 = 5 \rightarrow 5x^2 - 20x + 20 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \\ y_1 = y_2 = 1 \end{cases}$$

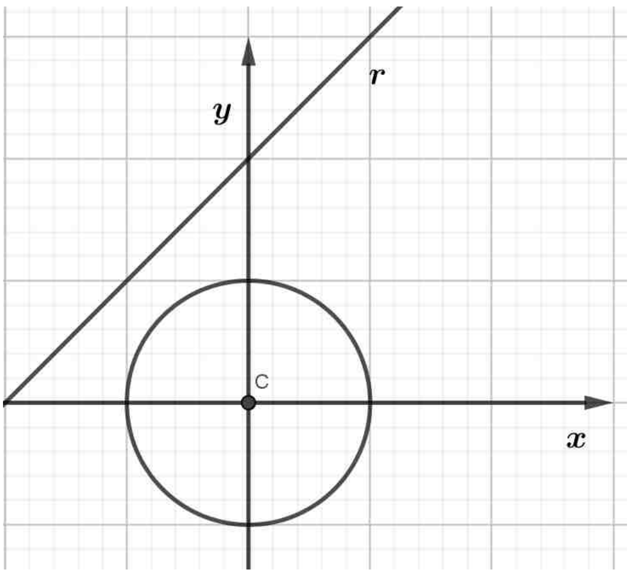


La retta risulta tangente alla circonferenza e il punto di tangenza è $T(2;1)$.

3) Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e la retta $y = x + 2$.
Risolviamo il sistema:

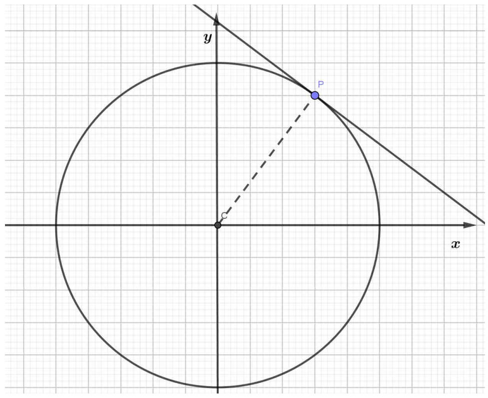
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + (x+2)^2 = 1 \rightarrow 2x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \qquad \textit{nessuna} \quad \textit{soluzione} \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Il sistema non ha nessuna soluzione e quindi la retta risulta esterna alla circonferenza.



Rette tangenti ad una circonferenza

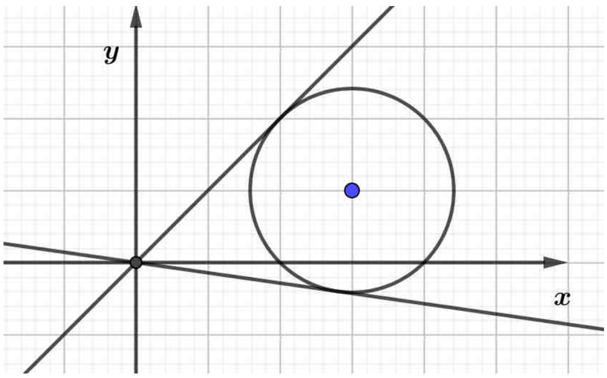
1) Data la circonferenza $\mathcal{C}\ : x^2 + y^2 = 25$ in figura e considerato il suo punto $P(3;4)$ **determiniamo la retta** t **tangente in P alla circonferenza** $\mathcal{C}$**.**



Osserviamo che la retta t è perpendicolare al raggio CP e quindi:

$$m_{CP} = \frac{4}{3} \to m_t = -\frac{3}{4} \to t : y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$$

2) Data la circonferenza $\mathcal{C}\ \ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ in figura, determiniamo le rette t_1 e t_2 tangenti alla circonferenza uscenti da $O(0;0)$.



Scriviamo l'equazione della retta generica passante per O : $y = mx$.

Consideriamo il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da questa retta "generica" passante per O.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

Iniziamo a risolverlo per sostituzione, sostituendo la y nell'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + m^2x^2 - 6x - 2mx + 8 = 0 \to (1+m^2)x^2 - 2(3+m)x + 8 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

A questo punto, per ricavare il coefficiente angolare m della tangente**, imponiamo che** $\boxed{\Delta = 0}$ in modo che ci siano due soluzioni coincidenti del sistema e quindi la retta risulti tangente alla circonferenza.

Svolgendo i calcoli abbiamo:

$$\frac{\Delta}{4} = (3+m)^2 - 8(1+m^2) = 0 \to ....7m^2 - 6m - 1 = 0 \to m_1 = 1, \quad m_2 = -\frac{1}{7}$$

$$t_1 : \quad y = x$$

$$t_2 : \quad y = -\frac{1}{7}x$$

ESERCIZI

CIRCONFERENZA

1) Disegna le circonferenze aventi le seguenti equazioni:

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

d) $3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$

e) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

2) Determina l'equazione della circonferenza sapendo che ha centro C(1;1) e passa per P(3;2).
$[(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5]$

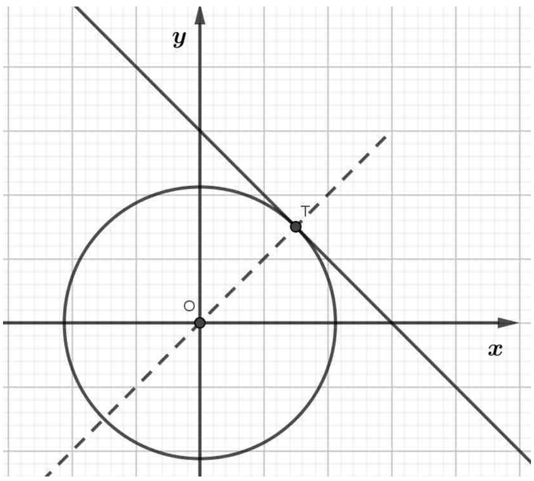
3) Determina l'equazione della circonferenza che passa per (0;0) , A(4;2) B(2;2).
$[(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10]$

4) Determina l'equazione della circonferenza che passa per (0;0) A(-2;4) B(6;0) .
$[(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25]$

5) Determina l'equazione della circonferenza che passa per A(1;-1) B(1;3) C(-3;3) .
$[(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8]$

6) Determina l'equazione della circonferenza che ha centro C(0;0) ed è tangente alla retta $t: y = -x + 3$.

Svolgimento guidato: possiamo trovare il punto di tangenza T intersecando la retta per il centro $(0;0)$ perpendicolare a *t*. Quindi possiamo calcolare il raggio $\overline{OT}$ e scrivere l'equazione della circonferenza.



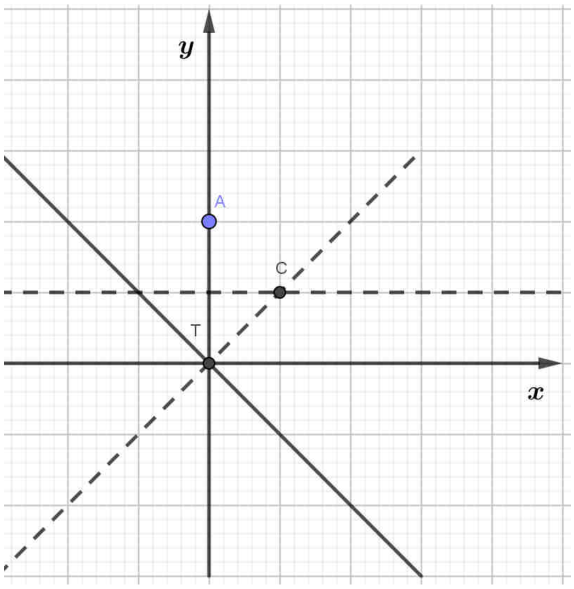
$$\left[x^2 + y^2 = \frac{9}{2}\right]$$

7) Determina l'equazione della circonferenza che è tangente alla retta t: $y = -x$ nel punto T(0;0) e passa per A(0;2).

Svolgimento guidato

Il centro C della circonferenza si troverà sulla retta per $T(0;0)$ perpendicolare a t ma anche sull'asse del segmento TA.

Trovato il centro, si può calcolare il raggio $\overline{CT}$ e quindi scrivere l'equazione della circonferenza.



$[x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0]$

8) Determina l'equazione della circonferenza che è tangente alla retta t: $y = 2x - 1$ nel punto T(1;1) e passa per A(1;-1)

$[(x-3)^2 + y^2 = 5]$

9) Determina la tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ nel suo punto T(0;2).

$[y = -2x + 2]$

10) Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ determina le rette tangenti ad essa uscenti da (0;0).

$[y = x \;\; ; \;\; y = -\frac{1}{7}x]$

11) Determina la retta tangente in (0;0) alla circonferenza di equazione $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

$[y = -\frac{3}{4}x]$

12) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ tangente in $T(1;2)$ alla retta $t: y = 2x$ e passante per il punto $A(7;4)$. Disegnala ed indica con C il suo centro.

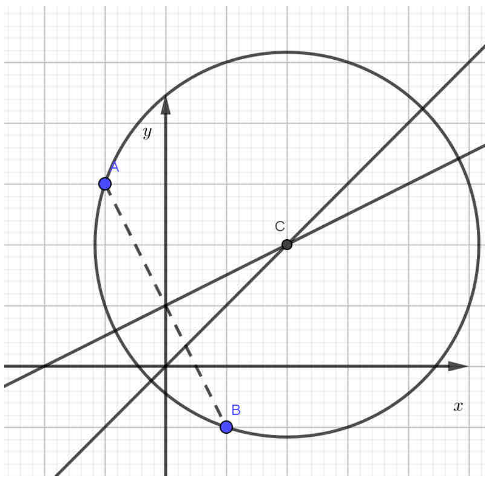
b) Determina le tangenti alla circonferenza uscenti dal punto P(15;0) e indicati con T_1 e T_2 i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero PT_1CT_2.

[$\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0$; $t_{1,2}: y = \pm\frac{1}{2}(x - 15)$; area (PT_1CT_2) = 40]

13) Determina l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ passante per A(-1; 3) e B(1; -1) e il cui centro appartiene alla retta di equazione $x - y = 0$.

Svolgimento guidato

Il centro C della circonferenza si troverà sull'asse del segmento…… e dal momento che appartiene anche alla retta $2x - y + 1 = 0$ potremo trovarlo impostando un …………



$\left[x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0\right]$

14) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici A(1;-1) B(1;3) C(-3;3) .

$\left[(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8\right]$

15) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici A(-2;0) B(2;4) C(2;0) .

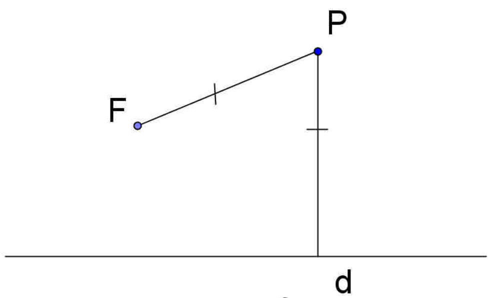
$\left[x^2 + (y-2)^2 = 8\right]$

Parabola

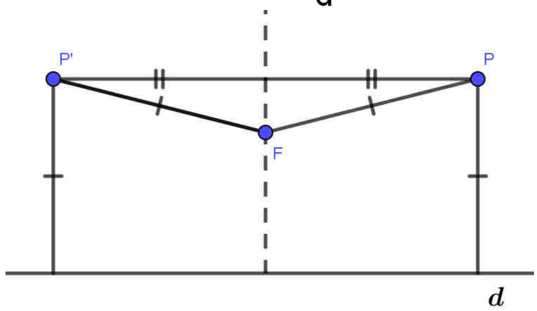
Abbiamo già visto che nel piano cartesiano il grafico dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ corrisponde ad una "parabola" con asse di simmetria parallelo all'asse y.
La parabola ha però una definizione indipendente dal sistema di riferimento:

Definizione di parabola di fuoco F e direttrice d

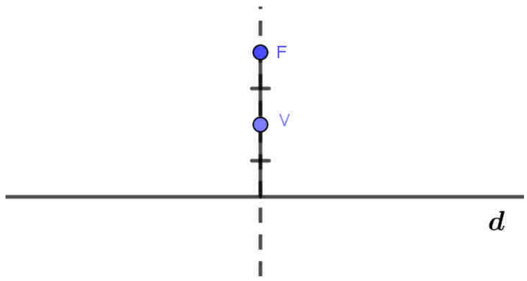
Dati nel piano una retta d (detta direttrice) e un punto $F \notin d$ (detto fuoco), si dice parabola $\mathcal{P}$ di direttrice d e fuoco F l'insieme dei punti P del piano **equidistanti** da d e da F .



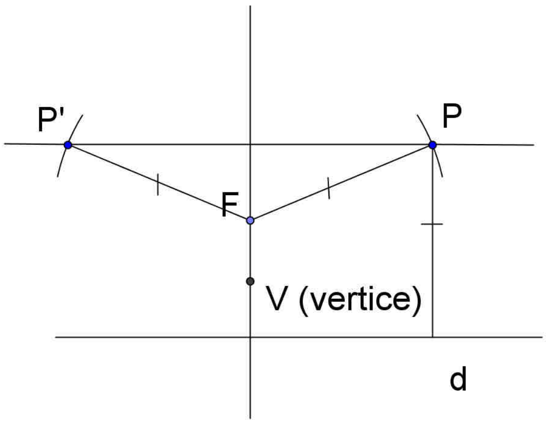
Osserviamo che se un punto $P \in \mathcal{P}$ allora anche il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta per F perpendicolare a d , appartiene alla curva: **la retta per F perpendicolare a *d* è quindi asse di simmetria della parabola**.



Il punto della parabola che si trova sull'asse di simmetria viene detto **vertice della parabola** ed è indicato con V.



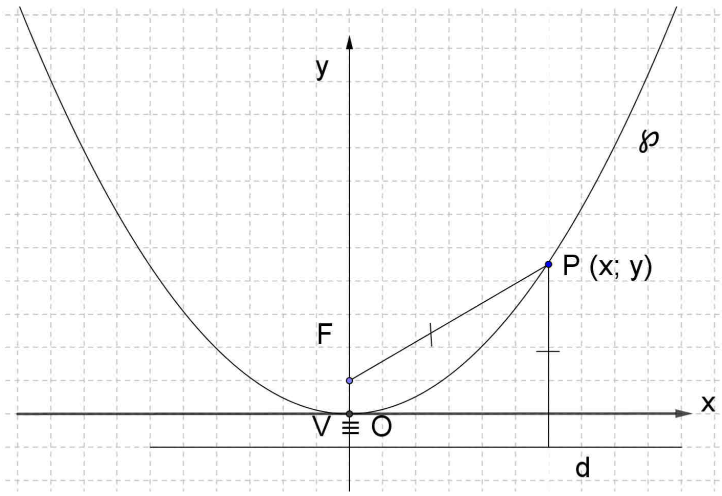
Possiamo determinare, con riga e compasso, diversi punti della curva: tracciamo una retta r parallela a d e puntiamo il compasso in F con apertura uguale alla distanza tra r e d.



Se fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse *y* sia parallelo all'asse di simmetria della parabola, indicando con $(x; y)$ le coordinate di un punto della curva e applicando la definizione, cioè ponendo la distanza di $(x; y)$ dal fuoco F uguale alla distanza del punto $(x; y)$ dalla direttrice, otteniamo proprio l'equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Esempi

1) Considera $F(0;1)$ e $d: y = -1$



Indichiamo con $P(x; y)$ un generico punto e imponiamo che sia equidistante da F e da d :

$$\overline{PF} = d(P,d)$$

Possiamo elevare al quadrato per evitare le radici quadrate e abbiamo quindi:

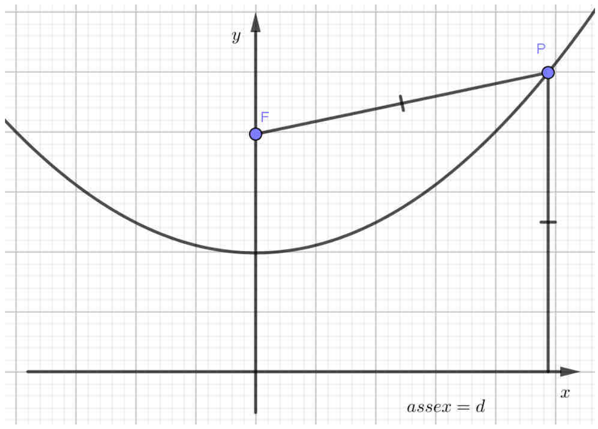
$$\overline{PF}^2 = (d(P,d))^2$$

Quindi nel nostro caso:

$$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

In conclusione l'equazione di $\mathcal{P}$ risulta $y = \frac{1}{4}x^2$.

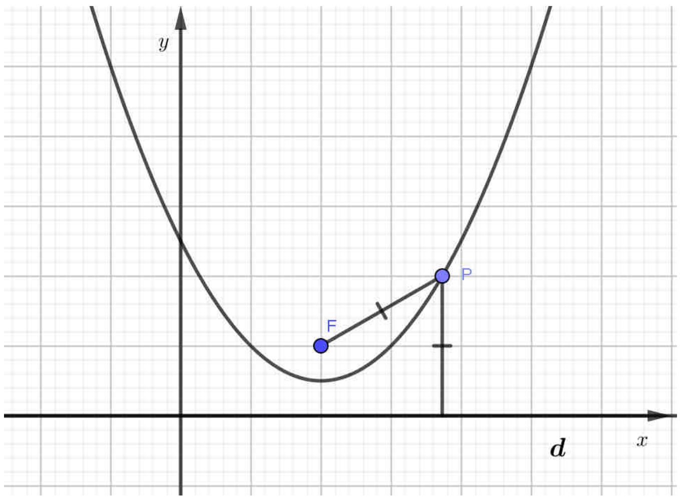
2) Determina l'equazione della parabola di fuoco $F(0;4)$ e direttrice $d: y=0$:



Applicando la definizione abbiamo:

$$x^2+(y-4)^2=y^2 \Rightarrow x^2+y^2-8y+16=y^2 \Rightarrow x^2+16=8y \Rightarrow y=\frac{1}{8}x^2+2$$

3) Determina l'equazione della parabola di fuoco $F(2;1)$ e direttrice $d: y=0$



Applicando la definizione abbiamo:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=y^2 \rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=y^2 \rightarrow 2y=x^2-4x+5 \rightarrow y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$$

Nota: infatti, ricordando che l'ascissa del vertice corrisponde a $-\frac{b}{2a}$, abbiamo:

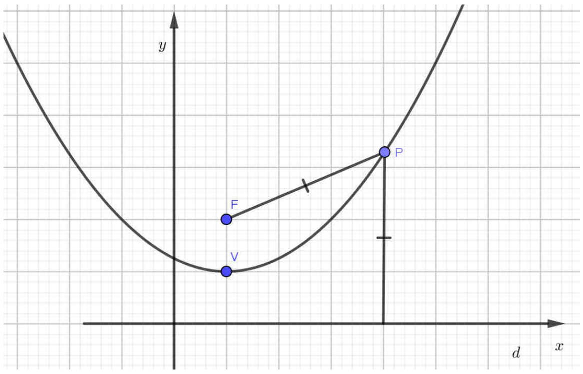
$$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{1}=2 \rightarrow y_V=2-4+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$

ed infatti il vertice, considerando la posizione del fuoco e della direttrice, risulta proprio $V\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Problemi

1) Determina l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y conoscendo: $V(1;1)$ e $F(1;2)$.

Conoscendo V e F possiamo determinare l'equazione della direttrice $\rightarrow y=0$

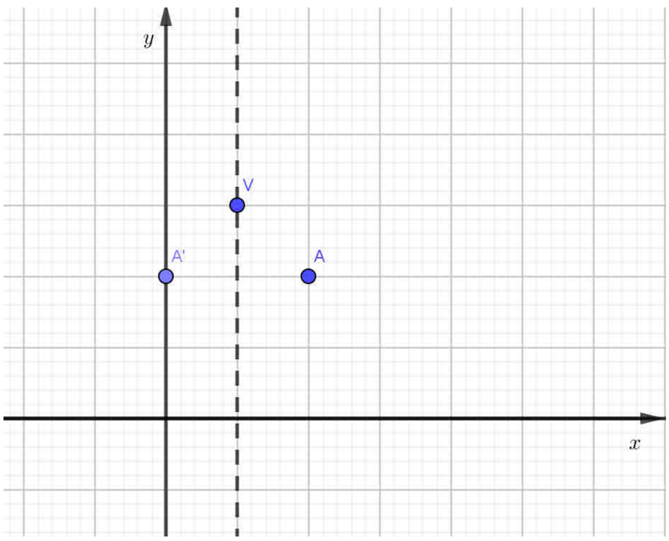


Applicando quindi la definizione abbiamo che:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=y^2 \rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=y^2 \rightarrow x^2-2x-4y+5=0 \rightarrow y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$$

Nota: analogamente se conosciamo vertice e direttrice possiamo trovare il fuoco.

2) Determina l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y conoscendo vertice $V(1;3)$ e il punto $A(2;2)$ appartenente alla parabola.



Poiché l'asse di simmetria della parabola è la retta $x=1$, se $A\in \mathcal{P}$ allora anche $A'(0;2)\in \mathcal{P}$ (simmetrico di A rispetto a x=1).

L'equazione di $\mathcal{P}$ è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ e quindi le coordinate dei punti V, A, A' verificano l'equazione: sostituendo le coordinate di V, A, A' nell'equazione generale $y = ax^2 + bx + c$ otteniamo un sistema nelle incognite *a, b, c* :

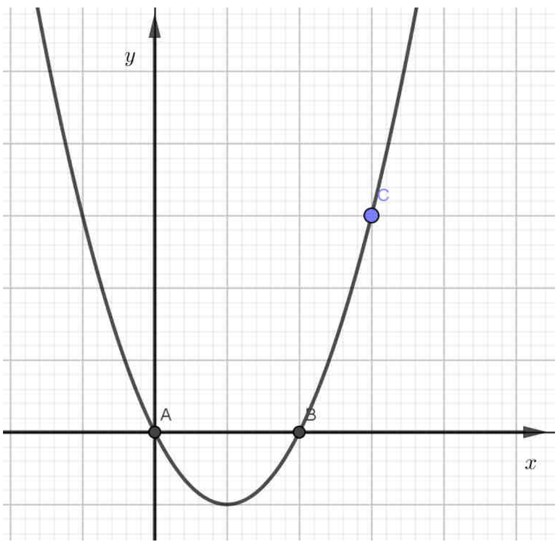
$$\begin{cases} 3 = a + b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ 2 = c \end{cases} \rightarrow ..... \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Quindi l'equazione della parabola è $y = -x^2 + 2x + 2$.

3) Determina l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y passante per i punti $A(0;0)$ $B(2;0)$ $C(3;3)$: in modo analogo a quanto fatto nel problema precedente sostituiamo le coordinate dei punti nell'equazione generale $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \end{cases} \rightarrow .... \begin{cases} 4a + 2b = 0 \rightarrow b = -2a \\ 9a + 3b = 3 \rightarrow 3a + b = 1 \rightarrow 3a - 2a = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow \\ c = 0 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Quindi l'equazione è $y = x^2 - 2x$



Rette tangenti ad una parabola

Esempio 1

Dato **un punto P appartenente ad una parabola** $\mathcal{P}$ **,** con asse parallelo all'asse y, come si determina la retta per P tangente alla parabola?

Consideriamo per esempio la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ e il suo punto $P(3;2)$.
Consideriamo l'equazione di una generica retta passante per P:

$$y - 2 = m(x-3) \rightarrow y = 2 + m(x-3)$$

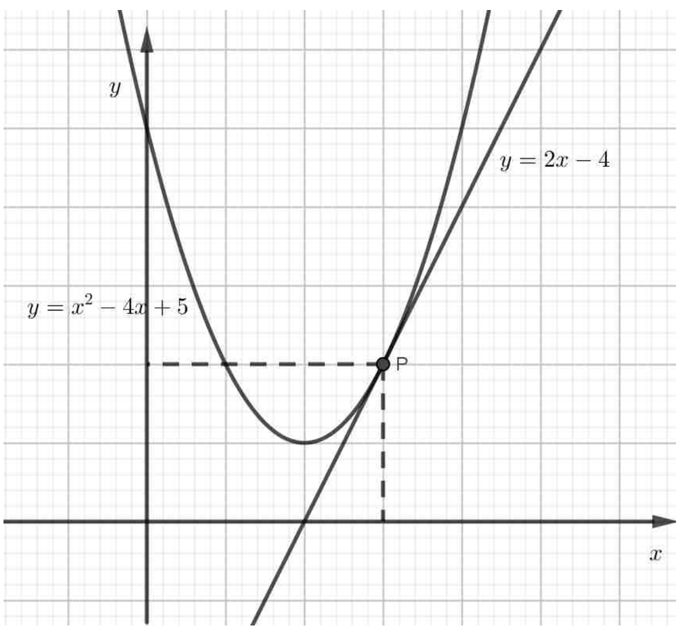
Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2 + m(x-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 + m(x-3) \rightarrow x^2 - (4+m)x + 3 + 3m = 0 \\ y = ... \end{cases}$$

Per determinare l'inclinazione della retta tangente basta imporre che l'equazione di secondo grado $x^2 - (4+m)x + 3 + 3m = 0$ abbia **discriminante uguale a zero** (si dice anche imporre la ***"condizione di tangenza***") come abbiamo fatto anche quando cercavamo le tangenti ad una circonferenza.
Abbiamo:

$$\Delta = (4+m)^2 - 4(3+3m) = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \rightarrow (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2$$

Quindi l'equazione della tangente in P alla parabola sarà: $y = 2(x-3) + 2 \rightarrow y = 2x - 4$



Esempio 2

Consideriamo : $\mathcal{P}$: $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ e il **punto esterno** alla parabola $P(0;-4)$: come si determinano le rette per P tangenti alla parabola?

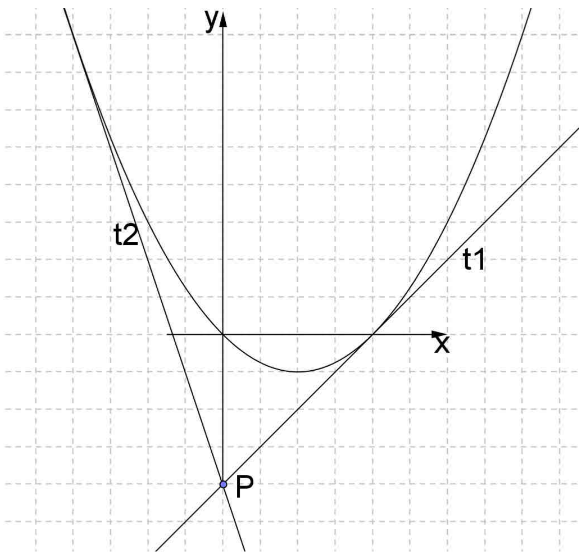
Consideriamo l'equazione di una retta generica passante per P

$$y + 4 = mx \rightarrow y = mx - 4$$

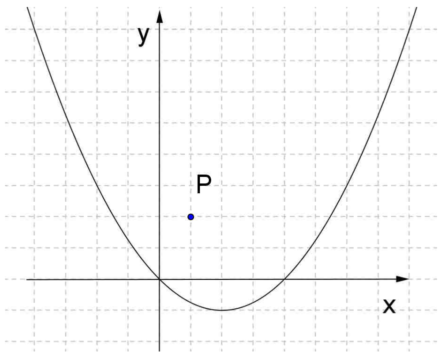
Per determinare le tangenti dobbiamo impostare il sistema e imporre **la "condizione di tangenza"**:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x \\ y = mx - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x = mx - 4 \\ .... \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4(1+m)x + 16 = 0 \\ .... \end{cases}$$

$$\Delta = 16(1+m)^2 - 64 = 0 \rightarrow ...m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_1 &= 1 \rightarrow t_1 : y = x - 4 \\ m_2 &= -3 \rightarrow t_2 : y = -3x - 4 \end{aligned}$$



Osservazione
Se P è "interno" alla parabola non ci sono rette tangenti.

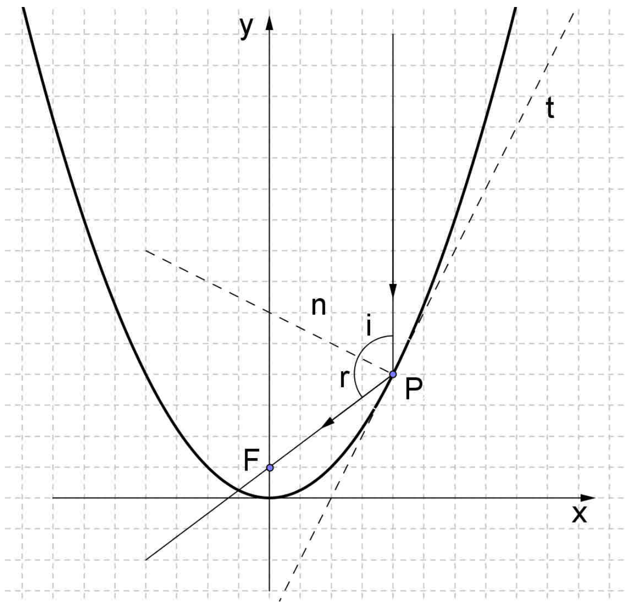


Approfondimento

Perché il "fuoco" della parabola si chiama così?

Se tracciamo una retta parallela all'asse di simmetria e dal suo punto P di intersezione con la parabola tracciamo la retta PF (F fuoco della parabola), tracciando la tangente *t* in P alla parabola e la retta perpendicolare *n* alla retta *t* , si può dimostrare che $\hat{i} = \hat{r}$ (vedi figura).

Quindi se la retta parallela all'asse di simmetria della parabola fosse un raggio di luce incidente, il raggio "riflesso" (che per la legge della riflessione forma con la perpendicolare *n* un angolo di riflessione $\hat{r}$ uguale all'angolo di incidenza $\hat{i}$) passerà per il fuoco della parabola .



In conclusione il fuoco della parabola si chiama così perché se abbiamo un fascio di raggi di luce incidenti paralleli all'asse di simmetria di uno specchio parabolico, i raggi riflessi passeranno tutti per il "fuoco" della parabola e in quel punto ci sarà una grande concentrazione di luce e di calore!

Questo vale anche se consideriamo un fascio di onde elettromagnetiche (del resto la luce è una particolare onda elettromagnetica) e ci spiega perché per concentrare un segnale usiamo le antenne "paraboliche".

ESERCIZI
PARABOLA

1) Determina l'equazione della parabola avente:

a) $F(0;0)$ $d: y=-2$ $[\, y=\frac{1}{4}x^2-1]$

b) $F(2;2)$ $d: y=3$ $[\, y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}]$

c) $F(0;1)$ $V(0;-1)$ $[\, y=\frac{1}{8}x^2-1]$

d) $V(3;0)$ $d: y=-3$ $[\, y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}]$

e) Asse parallelo asse y , $V(1;1)$, passante per $P(3;2)$ $[\, y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}]$

f) Asse parallelo asse y , passante per $A(1;0)$ $B(3;0)$ $C(4;3)$ $[\, y=x^2-4x+3]$

2) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $y=x^2-2x$ e determina l'equazione della tangente t a $\mathcal{P}$ in (0;0) e le equazioni delle tangenti $t_{1,2}$ uscenti dal punto P(3;-1).

$[\, t: y=-2x\,; t_1: y=-1, t_2: y=8x-25\,]$

3) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $y=4-x^2$ e determina le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

$[\, y=-4x+8\ \ ;\ \ y=4x+8\ ]$

4) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $y=x^2+1$ e determina le equazioni delle tangenti uscenti dall'origine.

$[\, y=\pm 2x\ ]$

5) Determina l'equazione della parabola avente fuoco $F(0;\frac{1}{2})$ e direttrice d: $y=-\frac{1}{2}$ .Disegnala, indica con V il suo vertice e sia A il suo punto di ascissa x =1. Determina l'equazione della tangente t alla parabola in A e , detta B l'intersezione di t con la direttrice d , determina l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABV}$.

$[\, y=\frac{1}{2}x^2\,; y=x-\frac{1}{2}\,;\ area(\overset{\Delta}{ABV})=\frac{1}{4}\,]$

6) Determina l'equazione della parabola avente fuoco $F(0;1)$ e direttrice d: $y=3$. Disegnala, indica con V il suo vertice e sia P il suo punto di ascissa x = 2. Determina l'equazione della tangente t alla parabola in P.

$[\, y=-\frac{1}{4}x^2+2\ \ y=-x+3\,]$

7) Un’azienda vinicola vuole lanciare un prodotto di lusso e pensa a una produzione limitata di bottiglie da offrire sul mercato ogni anno. I costi di investimento e pubblicitari si traducono in un costo fisso di € 300 000 all’anno. Il costo per la produzione di ogni bottiglia è di € 25. Il prezzo di vendita di ogni bottiglia dipende dal numero di bottiglie messo in commercio: trattandosi infatti di un prodotto di lusso, più bottiglie vengono messe in vendita e minore deve essere il loro prezzo. Quindi, il prezzo di vendita p è funzione del numero x di bottiglie messe in commercio: $p(x)=120-0{,}004x$.

a. Determina una funzione che esprima, in euro, il costo totale C di produzione all’anno.

$[C(x)=300000+25x]$

b. Determina una funzione che esprima, in euro, il ricavo R all’anno, supponendo che tutte le bottiglie prodotte siano vendute. [$R(x)=120x-0{,}004x^2$]

c. Per quale numero di bottiglie prodotte e vendute si ha il massimo guadagno? [11 875]

8) Una compagnia aerea decide di stabilire il prezzo del biglietto di un volo (per persona) nel seguente modo: 200 euro più 10 euro per ogni posto che resterà libero. L’aereo dispone di 150 posti. Quanti posti devono restare liberi perché la compagnia ottenga il massimo ricavo?

[65 posti]

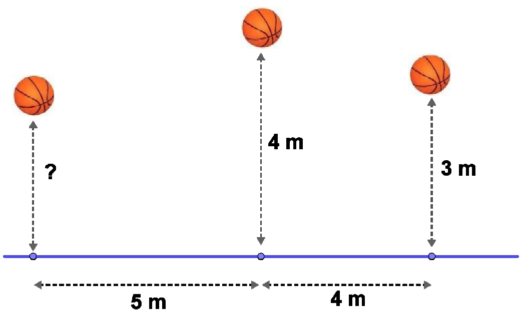
9) Si deve decidere a quale prezzo affittare 20 appartamenti. In base alle esperienze precedenti, ci si aspetta che, al prezzo di 300 euro al mese, tutti gli appartamenti verranno affittati mentre, per ogni aumento di 25 euro al mese, un appartamento resterà sfitto. A quale prezzo conviene affittare gli appartamenti per ottenere il massimo ricavo?

[400 euro al mese]

10) Un ponte su un fiume è formato da una sola arcata parabolica. Il ponte è lungo 100 m e il punto centrale dell’arcata parabolica è posto ad un’altezza di 10 m rispetto all’acqua. Stabilisci quale può essere l’altezza di un’imbarcazione che naviga a 20 m dal centro del fiume, perché riesca a passare sotto il ponte.

[inferiore a 8,4 m]

11) Un giocatore di basket tira un pallone che, seguendo una traiettoria parabolica, va a canestro. La massima altezza raggiunta dalla palla è 4 m.
In base ai dati forniti, determina a quale altezza rispetto al terreno di gioco il pallone è partito dalle mani del giocatore approssimando il risultato ad una cifra decimale.



[2,4 m]

SCHEDA DI LAVORO 1

Riportiamo qualche frase da una lettera di Vincenzo Viviani, amico e discepolo di Galileo:

"*Trovavasi Galileo in età di venti anni circa, intorno all'anno 1583, nella città di Pisa …; essendo un giorno nel duomo di quella città, … caddegli in mente d'osservare dal moto di una lampada, che era stata allontanata dal perpendicolo, se per avventura i tempi delle andate e tornate di quella fossero uguali, tanto per archi grandi che per archi minimi…*".

Queste osservazioni, fatte misurando il tempo con il battito del polso, mostrarono a Galileo che le oscillazioni di uno stesso pendolo hanno all'incirca la stessa durata.

Studi successivi hanno dimostrato che vale per un pendolo la seguente legge:

$$L = 0{,}25 \cdot T^2$$

- L indica la lunghezza del pendolo (misurata in metri)
- T indica la durata di un'oscillazione completa (misurata in secondi).

1) Rappresenta la legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse T e sull'asse delle ordinate le lunghezze L.

2) Quale lunghezza deve avere un pendolo per battere i secondi?

....

SCHEDA DI LAVORO 2

Lo spazio di frenata s di un’automobile è proporzionale al quadrato della velocità v.

Eseguendo una prova di frenata, si trova che un’auto riesce a fermarsi in 8 metri, quando viaggia alla velocità di 40 Km/h.

1) Qual è la legge che lega s a v, nel caso dell’auto esaminata?

……………………………………………………………………….

2) Rappresenta la legge su un piano cartesiano, riportando sull’asse delle ascisse le velocità v e sull’asse delle ordinate gli spazi di frenata s.

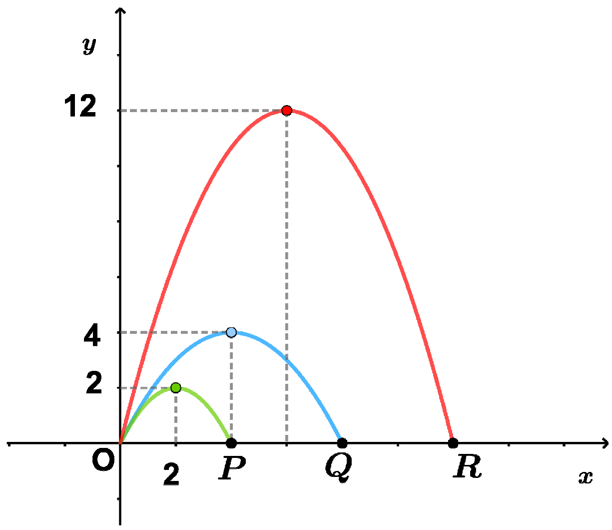
3) La stessa auto, durante un incidente, riesce a fermarsi in 24.5 m; qual’era la velocità a cui procedeva l’auto?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

SCHEDA DI LAVORO 3

1) In figura sono rappresentate le traiettorie paraboliche di tre getti d'acqua, riferiti a un piano cartesiano ortogonale con l'origine coincidente con il punto da cui fuoriesce il getto; *x* e *y* sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata, in metri, del getto. Il getto d'acqua colorato verde raggiunge l'altezza massima, uguale a 2 m, in un punto di ascissa x=2; il getto colorato azzurro raggiunge l'altezza massima, uguale a 4 m, in un punto di ascissa x=4; il getto d'acqua rosso raggiunge l'altezza massima di 12 m. I punti P, Q, R rappresentano i tre punti in cui i getti d'acqua ricadono a terra.



a. Determina le equazioni delle parabole che rappresentano le traiettorie dei due getti colorati in verde e in azzurro.

……………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………...............

b. Determina la distanza tra i due punti P e Q.

……………………………………………………………………………………...............

c. Sapendo che la distanza tra Q ed R è uguale alla distanza tra P e Q, determina l'equazione della parabola che rappresenta la traiettoria del getto in rosso.

……………………………………………………………………………………...............

SCHEDA DI LAVORO 4

Una pallavolista colpisce in tuffo la palla, a 4 m di distanza dalla rete (considera quindi che la **palla** sia praticamente arrivata **a terra**).

La palla segue una traiettoria parabolica, passa esattamente sopra la rete a un'altezza di 3 m da terra, quindi ricade nel campo avversario a 8 m dalla rete.

1) Schematizza la situazione con un disegno.

2) Dopo avere introdotto un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

a. Scrivi l'equazione della parabola che rappresenta la traiettoria della palla;

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

b. Determina l'altezza massima raggiunta dalla palla nella sua traiettoria.

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

Ellisse

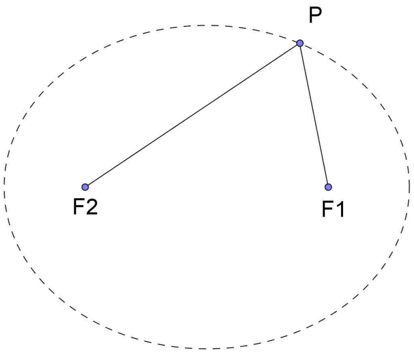
Definizione
Dati due punti F_1 e F_2 si dice ellisse $\mathcal{E}$ il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la somma delle distanze da F_1 e F_2 cioè tali che

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante}$$

F_1 e F_2 si dicono fuochi dell'ellisse.

Osservazioni

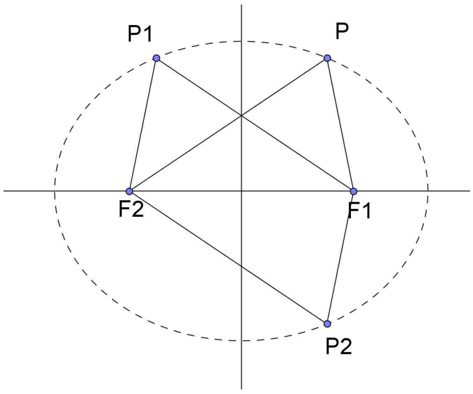
1) Dati F_1 e F_2 e il valore della costante (che deve essere maggiore di $\overline{F_1F_2}$) possiamo tracciare l'ellisse corrispondente in questo modo: prendiamo uno spago di lunghezza uguale alla costante assegnata e fissiamone le estremità ai due fuochi.
Tenendolo teso con un lapis, la punta del lapis scorrendo ci darà il disegno dell'ellisse.



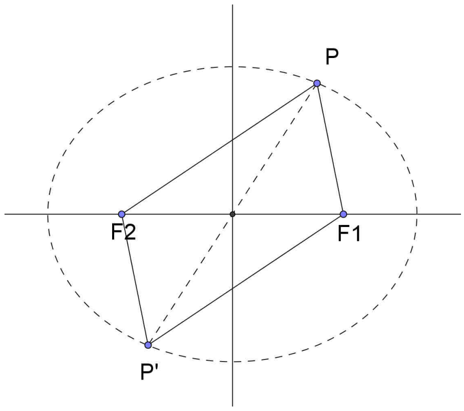
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} =$ lunghezza spago costante

Vediamo quindi che l'ellisse è una curva chiusa, simile ad una circonferenza un po' schiacciata.

2) Osserviamo che l'ellisse possiede due assi di simmetria: la retta passante per F_1 e F_2 e l'asse del segmento F_1F_2.

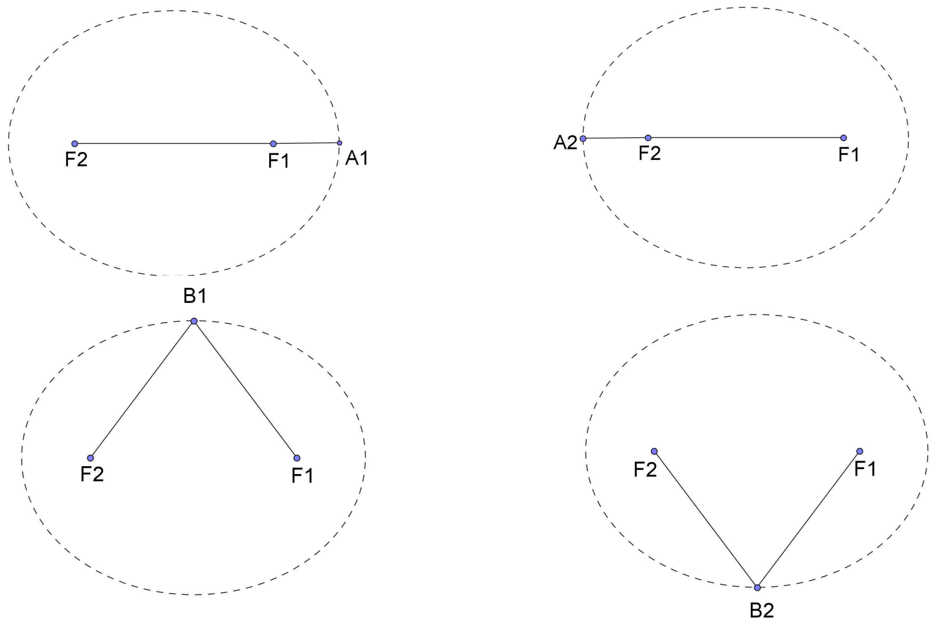


Infatti se P$\in \mathcal{E}$ anche P_1 (simmetrico di P rispetto all'asse di F_1F_2) e P_2 (simmetrico di P rispetto alla retta per F_1 e F_2) appartengono all'ellisse.

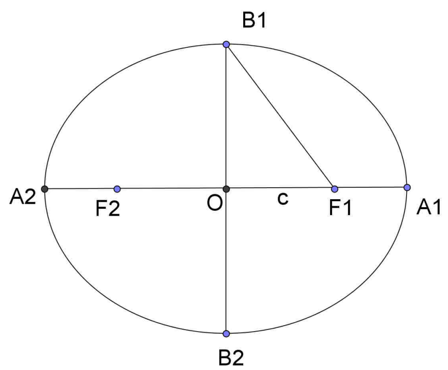


Inoltre il punto di incontro degli assi di simmetria è centro di simmetria dell'ellisse (cioè se P$\in \mathcal{E}$ anche P' $\in \mathcal{E}$) e viene chiamato "centro" dell'ellisse.

3) Osserviamo che, facendo scorrere il lapis, ci sono 4 posizioni "estreme" cioè quattro punti dell'ellisse che vengono chiamati "vertici" dell'ellisse.



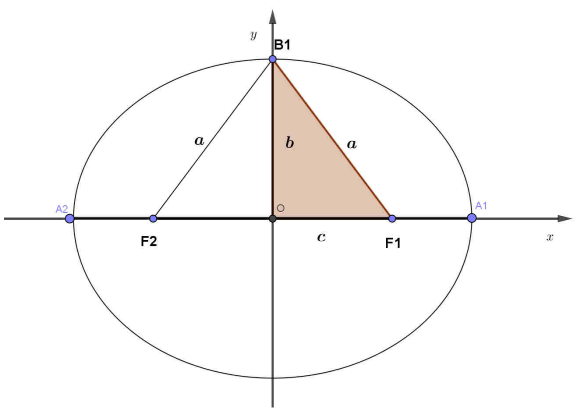
Osserviamo che $\overline{A_1A_2}$ = lunghezza dello spago = costante e che risulta maggiore di $\overline{B_1B_2}$.



$\overline{A_1A_2}$ viene detto asse maggiore (contiene i fuochi)

$\overline{B_1\,B_2}$ viene detto asse minore

4) Se consideriamo un vertice sull'asse minore, per esempio B_1, dal momento che $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2}$ e la somma delle distanze corrisponde alla lunghezza dell'asse maggiore, applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{OF_1B_1}$ avremo:



$c^2 =($ semiasse maggiore $)^2 - ($ semiasse minore $)^2$

a = semiasse maggiore

b = semiasse minore

c = semidistanza focale

5) La "forma" più o meno schiacciata dell'ellisse dipende dal rapporto tra $\overline{F_1F_2}$ (distanza focale) e la costante assegnata.

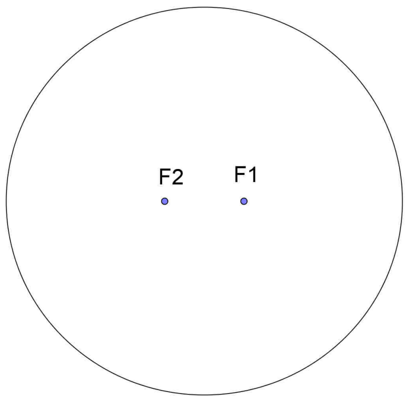
Si definisce **eccentricità e** dell'ellisse

$$e = \frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse maggiore}}$$

Poiché la semidistanza focale è minore del semiasse maggiore si ha:

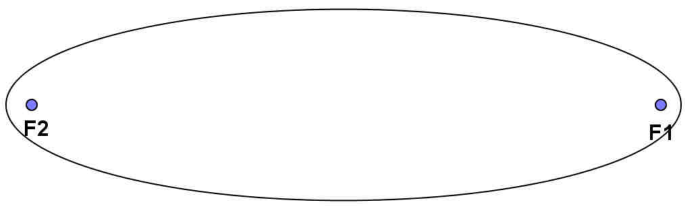
$$0 < e < 1$$

- Se $\overline{F_1F_2}$ è molto minore della costante (cioè c molto minore del semiasse maggiore) si ottengono ellissi piuttosto "tonde" (simili ad una circonferenza) e l'eccentricità risulta molto vicina a 0.



Caso limite $e = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow F_1 \equiv F_2$ e si ha una circonferenza.

- Se $\overline{F_1F_2}$ è molto vicino (anche se minore) al valore della costante si hanno ellissi "schiacciate" e l'eccentricità è vicina a 1.



Caso limite : $e = 1 \Leftrightarrow c = semiasse.maggiore \Rightarrow$ semiasse minore = 0 e si ha il segmento F_1F_2.

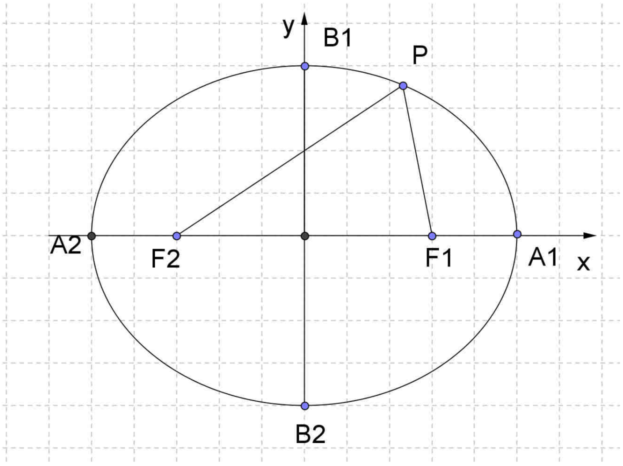
L'ellisse nel piano cartesiano

L'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano dipenderà da come si fissa il sistema di riferimento. Noi tratteremo solo il caso più semplice in cui gli assi di simmetria dell'ellisse coincidono con gli assi coordinati.

Ellisse con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati

a) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse x (quindi l'asse maggiore di $\mathcal{E}$ è sull'asse x).

Facciamo un esempio:



$F_1(3;0)$

$F_2(-3;0)$

costante = asse maggiore =10

Possiamo disegnare l'ellisse poiché sapendo che

$$c^2 = (\text{ semiasse maggiore })^2 - (\text{ semiasse minore })^2$$

otteniamo che semiasse minore = 4.

Per ricavare l'equazione di $\mathcal{E}$ impostiamo la definizione:

$$P(x;y)\ :\ \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 100 - 20 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$$

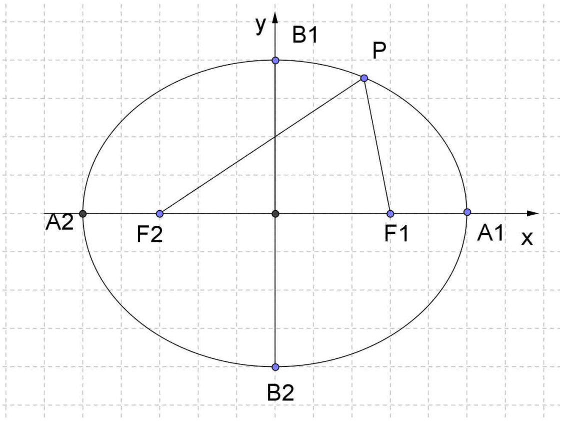
$$20 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 100 + 12x \Rightarrow 5 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25[(x+3)^2 + y^2] = (25+3x)^2 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Dividendo entrambi i membri per 400 abbiamo: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Generalizziamo utilizzando le lettere: consideriamo $F_{1,2}(\pm c;0)$ e indichiamo con a e b i due semiassi.

Nel nostro caso $a > b$ poiché i fuochi si trovano sull'asse x.



$F_{1,2}$ ($\pm$ c ; 0)

$A_{1,2}(\pm a;0)$

$B_{1,2}$ (0 ; $\pm$ b)

$a > b$

$c^2 = a^2 - b^2$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$

$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$

$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$

$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + c^2x^2 + 2ca^2x$

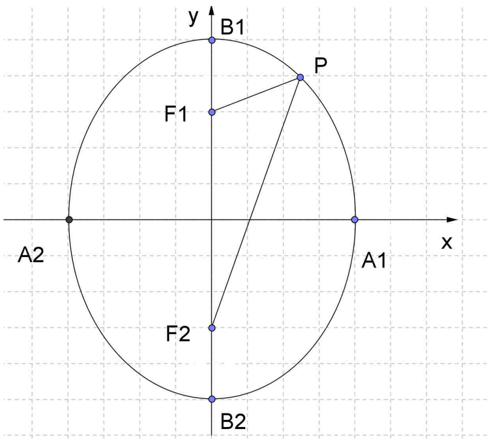
$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Ma $a^2 - c^2 = b^2$ e quindi: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividendo entrambi i membri per a^2b^2 abbiamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse y : in questo caso l'asse maggiore dell'ellisse è $\overline{B_1B_2}$ cioè $b > a$ e $c^2 = b^2 - a^2$.



$F_{1,2}$ (0; $\pm c$)

$A_{1,2}$ ($\pm a$; 0)

$B_{1,2}$ (0; $\pm b$)

$b > a$

$c^2 = b^2 - a^2$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$$

Sviluppando in modo analogo a quanto fatto in a) otteniamo ancora $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avendo sostituito $b^2 - c^2 = a^2$).

In conclusione **l'equazione di un'ellisse i cui assi di simmetria coincidono con gli assi coordinati risulta**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

dove a **e** b **sono i semiassi dell'ellisse**

se $a > b$ allora i fuochi $F_{1,2}(\pm c$; 0) appartengono all'asse x ($c^2 = a^2 - b^2$)
se $b > a$ allora i fuochi $F_{1,2}$ (0; $\pm c$) appartengono all'asse y ($c^2 = b^2 - a^2$)

Poiché l'eccentricità $e = \frac{c}{semiasse \quad maggiore}$ avremo

- se $a > b \Rightarrow e = \frac{c}{a}$
- se $b > a \Rightarrow e = \frac{c}{b}$

Problemi

Disegnare un'ellisse di equazione assegnata

Per disegnare un'ellisse occorre conoscere i suoi semiassi. Se l'equazione è data nella forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ è molto semplice risalire ad a e b .

Esempi

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow \quad a=5 \quad b=4$

Se l'equazione non si presenta nella forma "normale" possiamo fare dei passaggi per riportarcela.

2) $x^2+16y^2=16 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+y^2=1 \Rightarrow a=4 \quad b=1$

3) $4x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \quad b=1$

4) $9x^2+4y^2=16 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a=\frac{4}{3} \quad b=2$

Determinare l'equazione di un'ellisse

a*) Conoscenza di un fuoco e di un vertice*

Esempio: $F_1(2;0) \quad A_1(3;0)$

Quindi $c=2 \quad a=3$ e poiché i fuochi appartengono all'asse x $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=9-4=5$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

b) *Conoscenza di un fuoco e dell'eccentricità*

Esempio: $F_1(3;0) \quad e=\frac{1}{2}$

Poiché $F_1 \in$ asse x $e=\frac{c}{a}$ e quindi $\frac{1}{2}=\frac{3}{a} \Rightarrow a=6$.

Inoltre $b^2=a^2-c^2=36-9=27$ e quindi $\mathcal{E}: \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

ESERCIZI
ELLISSE

I) Disegna le seguenti ellissi e determina vertici e fuochi

1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $[\,a=2\;\; b=1\;\; F_{1,2}(\pm\sqrt{3};0)\,]$

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ $[\,a=3\;\; b=4\;\; F_{1,2}\left(0;\pm\sqrt{7}\right)\,]$

3) $4x^2+9y^2=36$ $[\,a=3\;\; b=2\;\; F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5};0\right)\,]$

4) $x^2+4y^2=1$ $[\,a=1\;\; b=\frac{1}{2}\;\; F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\,]$

5) $9x^2+4y^2=1$ $[\,a=\frac{1}{3}\;\; b=\frac{1}{2}\;\; F_{1,2}\left(0;\pm\frac{\sqrt{5}}{6}\right)\,]$

6) $x^2+9y^2=36$ $[\,a=6\;\; b=2\;\; F_{1,2}\left(\pm 4\sqrt{2};0\right)\,]$

7) $4x^2+y^2-16=0$ $[\,a=2\;\; b=4\;\; F_{1,2}\left(0;\pm 2\sqrt{3}\right)]$

II) Determina l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sapendo che :

8) $A_1(3;0)\;\; F_1(2;0)$ $[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\,]$

9) $B_2(0;-4)\;\; F_1(3;0)$ $[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\,]$

10) $F_{1,2}(\pm 2;0)\;\; e=\frac{1}{2}$ $[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\,]$

11) $F_{1,2}(0;\pm 3)\;\; e=\frac{1}{3}$ $[\;\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{81}=1\,]$

12) $A_1(4;0)$ fuochi $\in$ asse x ed $e=\frac{1}{4}$ $[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1\,]$

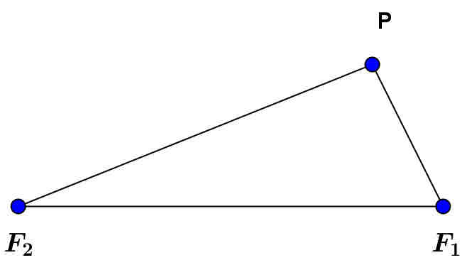
13) $A_1(1;0)$ fuochi $\in$ asse y ed $e=\frac{1}{2}$ $[\,x^2+\frac{3}{4}y^2=1\,]$

Iperbole

Definizione
Dati due punti F_1 e F_2 si dice iperbole $\Im$ il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da F_1 e F_2 cioè tali che

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = costante$$

F_1 e F_2 si dicono **fuochi** dell'iperbole.

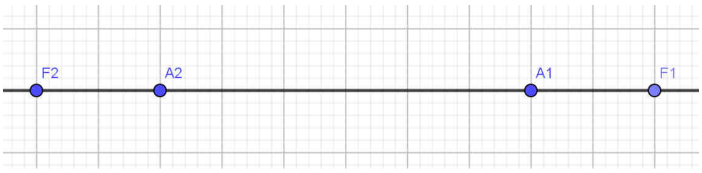


Osserviamo che deve essere $\overline{F_1F_2} > costante$ perché nel triangolo $F_1\overset{\Delta}{F_2}P$ si ha $\overline{F_1F_2} > \left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right|$ poiché un lato è sempre maggiore della differenza degli altri due.

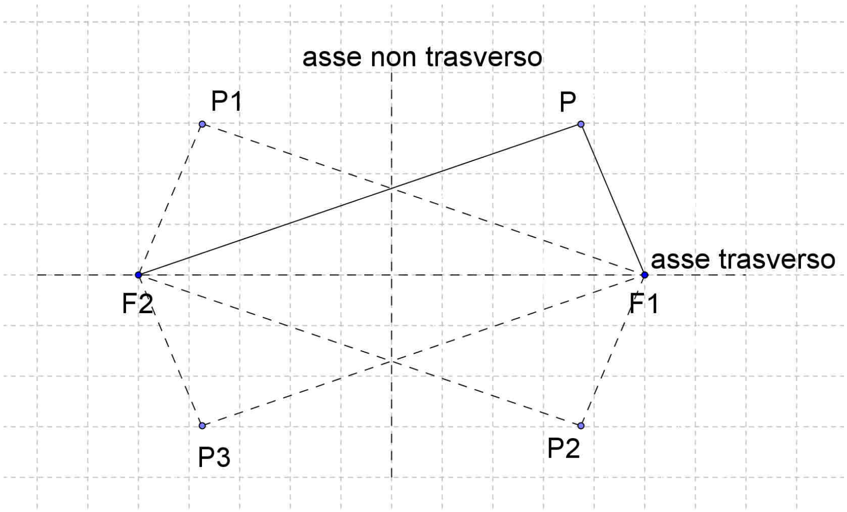
Osservazioni

Consideriamo per esempio $\overline{F_1F_2} = 10$ e la $costante = 6$.

1)Sul segmento F_1F_2 ci sono due punti A_1 e A_2 del luogo facilmente individuabili e che $\overline{A_1A_2}$ = *costante* = 6: i punti A_1 e A_2 della curva sono detti "**vertici**" dell'iperbole.



2) E' chiaro che se P appartiene all'iperbole anche P_1 , P_2, P_3 appartengono all'iperbole (vedi figura) e quindi l'iperbole è simmetrica rispetto **alla retta per** F_1 **e** F_2**,** che viene chiamata **"*asse trasverso*"** poiché interseca la curva, e all'asse del segmento F_1F_2 , che viene detto **"*asse non trasverso*"** perché non interseca la curva.



Naturalmente il punto di incontro dei due assi di simmetria risulta *centro di simmetria* dell'iperbole.

3) L'iperbole non è "limitata", come l'ellisse o la circonferenza, poiché ci sono punti della curva anche molto lontani dai fuochi dato che nella definizione del luogo è in gioco la differenza delle distanze da F_1 e F_2.

4) La"forma" dell'iperbole dipende dal rapporto tra $\overline{F_1F_2}$ e la costante (cioè la distanza tra i vertici). Questo rapporto viene chiamato **eccentricità** *e* dell'iperbole e **risulta sempre maggiore di 1** dato che $\overline{F_1F_2} > costante$

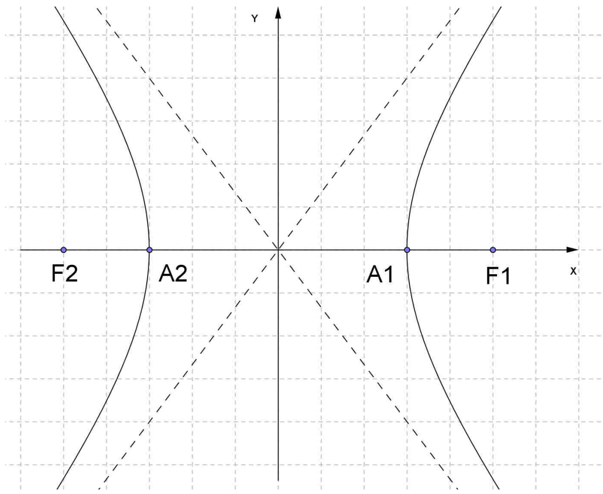
$$e = \frac{\overline{F_1F_2}}{\overline{A_1A_2}} > 1$$

L'iperbole nel piano cartesiano

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che **gli assi di simmetria dell'iperbole coincidano con gli assi coordinati.**

Esempio

Determiniamo l'equazione dell'iperbole di fuochi $F_{1,2}(\pm 5;0)$ e costante uguale a 6.



Se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 6$ cioè

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$(x-5)^2 + y^2 = (x+5)^2 + y^2 + 36 \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$20x + 36 = \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$5x + 9 = \pm 3 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$25x^2 + 81 + 90x = 9(x^2 + 10x + 25 + y^2)$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

Dividendo entrambi i membri per 144 otteniamo $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Osserviamo che i vertici sono $A_{1,2}(\pm 3;0)$ e che per determinare le coordinate degli altri punti possiamo ricavare y: $y = \pm \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^2 - 9}$

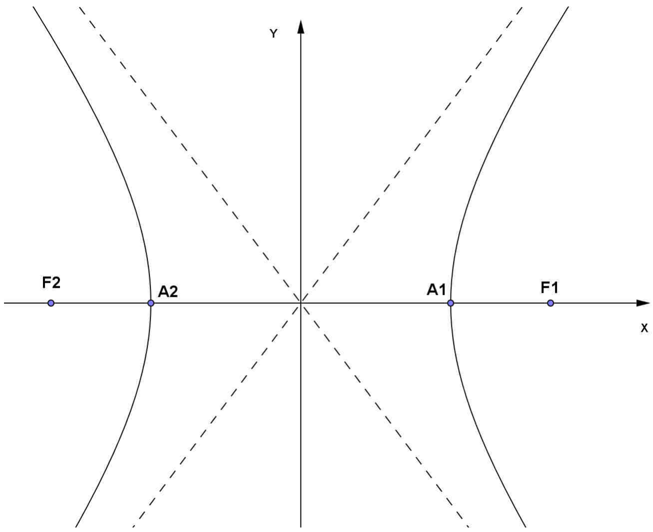
Osserviamo che quando si considera l'ascissa x molto grande in valore assoluto si ha :

$$\sqrt{x^2 - 9} \cong |x| \text{ e quindi } y = \pm \frac{4}{3} x$$

cioè l'iperbole tende ad avvicinarsi alle rette $y = \pm \frac{4}{3} x$.

Queste rette sono dette "**asintoti**" dell'iperbole dal greco $\alpha - \sigma\upsilon\nu - \tau\alpha\nu\gamma o$ (non-insieme-tocco) perché l'iperbole, pur avvicinandosi molto a queste rette, non le interseca.

Generalizziamo utilizzando le lettere.
Poniamo $\overline{F_1F_2} = 2c,\quad \overline{A_1A_2} = 2a$ e quindi $F_{1,2}(\pm c;0)$ e $A_{1,2}(\pm a;0)$



Se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ cioè $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$$
$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$4cx + 4a^2 = \pm 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$cx + a^2 = \pm a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$c^2x^2 + a^4 + 2ca^2x = a^2 \cdot (x^2 + c^2 + 2cx + y^2)$$
$$(c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Poiché $c > a \quad c^2 - a^2 > 0$ e allora possiamo indicarlo come un quadrato cioè porre

$$\boxed{c^2 - a^2 = b^2}$$

Sostituendo abbiamo: $\qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

e dividendo entrambi i membri per a^2b^2 otteniamo:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

equazione dell'iperbole con $F_{1,2}(\pm c;0)\ \ A_{1,2}(\pm a;0)$.

Si ha $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ ed eccentricità $e = \dfrac{c}{a}$.

Asintoti: per determinare l'equazione degli asintoti ricaviamo la y dall'equazione dell'iperbole.

Dopo alcuni semplici passaggi otteniamo

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

quindi se $|x|$ è grande $\sqrt{x^2 - a^2} \approx |x|$ e $y \approx \pm\frac{b}{a}x$ cioè gli asintoti hanno equazione

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$$

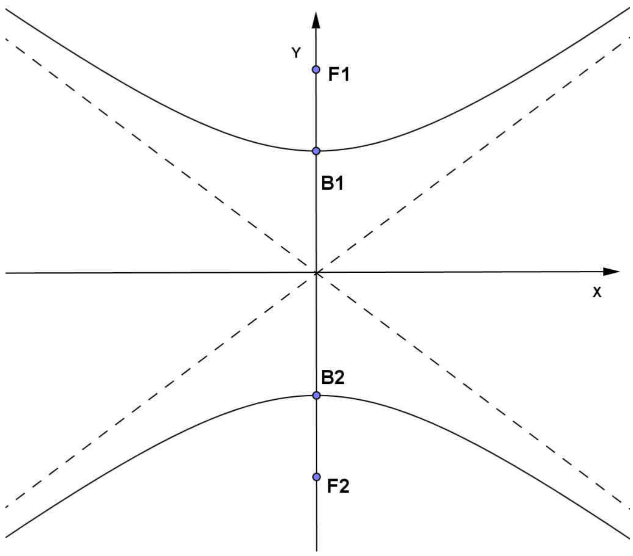
Osservazione

Abbiamo considerato i fuochi sull'asse *x*. Cosa cambia se i fuochi sono sull'asse y?

Con passaggi analoghi possiamo vedere facilmente che in questo caso, ponendo $F_{1,2}(0;\pm c)$ e i vertici $B_{1,2}(0;\pm b)$ che se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2b$ e sviluppando si ottiene , ponendo $c^2 - b^2 = a^2$, l'equazione

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$$

equazione iperbole con **asse trasverso = asse y**



- vertici $B_{1,2}(0;\pm b)$
- fuochi $F_{1,2}(0;\pm c)$ con $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$
- asintoti : $y = \pm\frac{b}{a}x$
- eccentricità $e = \frac{c}{b}$

Conclusione

In conclusione l'equazione dell'iperbole con assi di simmetria coincidenti con gli assi del sistema di riferimento sarà:

- $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **se l'asse trasverso è l'asse *x***(dove si trovano i fuochi e i vertici)
- $\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$ **se se l'asse trasverso è l'asse *y***(dove si trovano i fuochi e i vertici)

Osserviamo che, in entrambi i casi $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ e che l'equazione degli asintoti è in entrambi i casi $y = \pm\frac{b}{a}x$ mentre l'eccentricità nel primo caso è $e = \frac{c}{a}$, nel secondo $e = \frac{c}{b}$.

Problemi

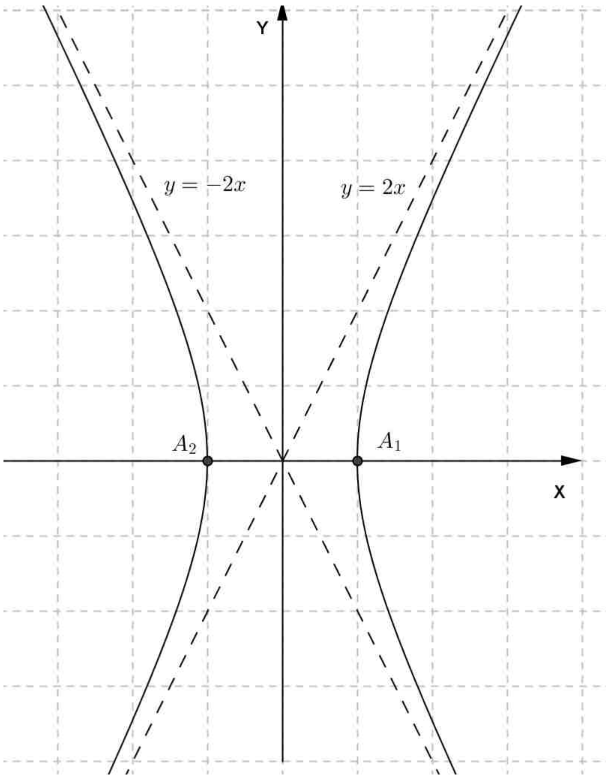
Disegnare un'iperbole di equazione assegnata

Per disegnare un'iperbole è essenziale individuare i vertici e gli asintoti.

Esempio : disegniamo l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Essendo $a = 1, \quad b = 2$ e asse trasverso l'asse *x*, abbiamo $A_{1,2}(\pm 1;0)$, asintoti : $y = \pm 2x$.

Disegniamo la posizione dei vertici e tratteggiamo gli asintoti ed infine l'iperbole.



Nota: se l'equazione non si presenta in forma "normale" faremo dei passaggi per ricondurla alla forma normale (come per l'ellisse).

Esempi

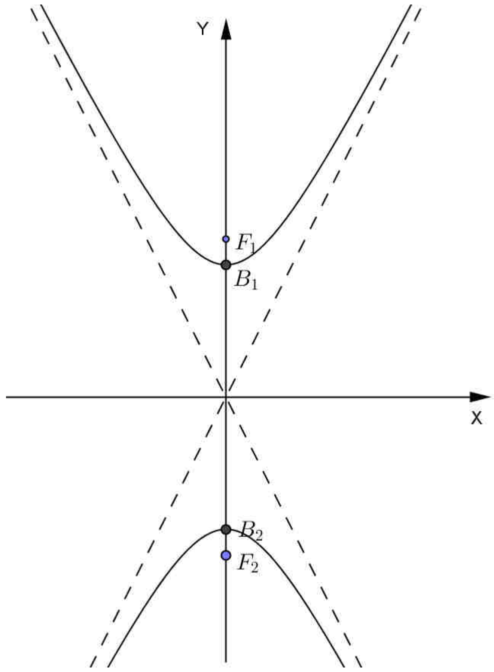
a) $x^2 - 16y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

b) $4x^2 - y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$

c) $9x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}} - \frac{y^2}{4} = 1$

Determinare l'equazione di un'iperbole

a) **Assegnati i fuochi e i vertici**



Esempio: $B_{1,2}(0;\pm 4)$ $F_{1,2}(0;\pm 2\sqrt{5})$

Poiché i fuochi sono sull'asse y l'equazione sarà del tipo : $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

Essendo $b=4$ e $c=2\sqrt{5}$ avremo

$a^2=c^2-b^2=20-16=4$

e quindi

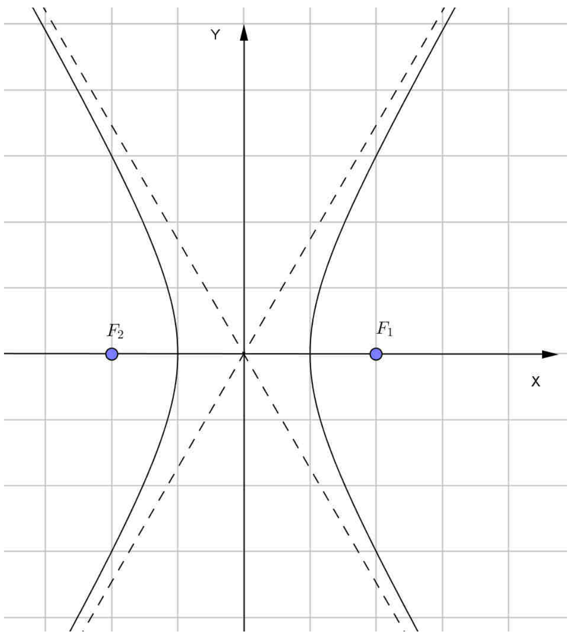
$\Im:\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

b) **Assegnati i fuochi e l'eccentricità**

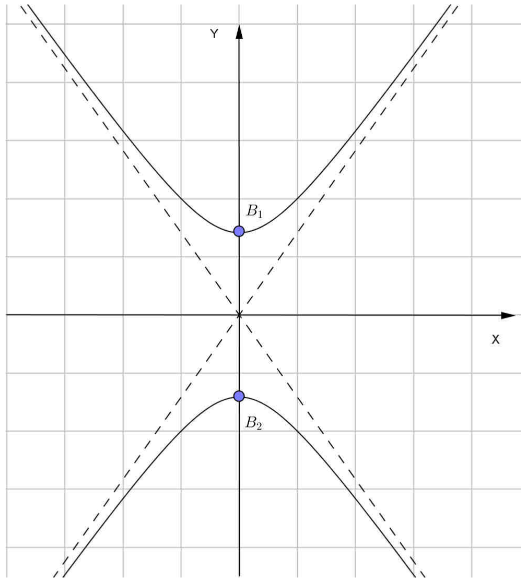
Esempio: $F_{1,2}(\pm 2;0)$ $e=2$

Poiché in questo caso i fuochi sono sull'asse *x* avremo $e=\frac{c}{a}$ sarà $2=\frac{2}{a}\Rightarrow a=1$

Inoltre $b^2=c^2-a^2=4-1=3$ e quindi $\Im:x^2-\frac{y^2}{3}=1$



c) **Assegnati i vertici e l'eccentricità**



Esempio: $B_{1,2}\left(0;\pm\sqrt{2}\right)$ $e=\sqrt{\frac{3}{2}}$

Poiché l'asse trasverso è l'asse y sarà $e=\frac{c}{b}$ e quindi

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\Rightarrow c=\sqrt{3}$$

Inoltre $a^2=c^2-b^2=3-2=1$ e quindi

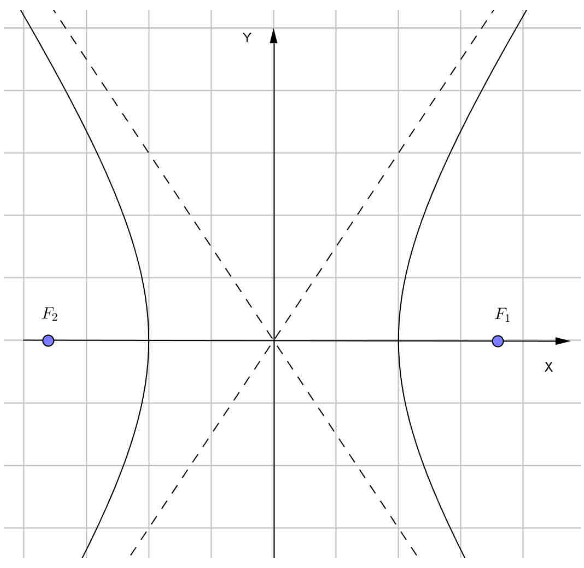
$$\Im:\frac{y^2}{2}-x^2=1$$

d) **Assegnati i fuochi e gli asintoti**

Esempio: $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{13};0\right)$ asintoti: $y=\pm\frac{3}{2}x$

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b=\frac{3}{2}a\\ 13=a^2+\frac{9}{4}a^2\rightarrow 13=\frac{13}{4}a^2\rightarrow a^2=4\rightarrow a=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b=3\\ a=2\end{cases}$$

Quindi abbiamo $\Im:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$



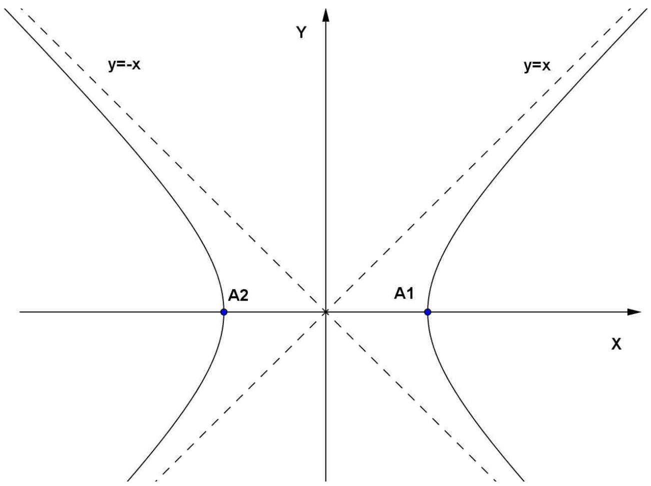
Iperbole equilatera

Un'iperbole si dice equilatera quando $\boxed{a = b}$: gli asintoti hanno quindi inclinazione ± 1 e risultano perpendicolari.

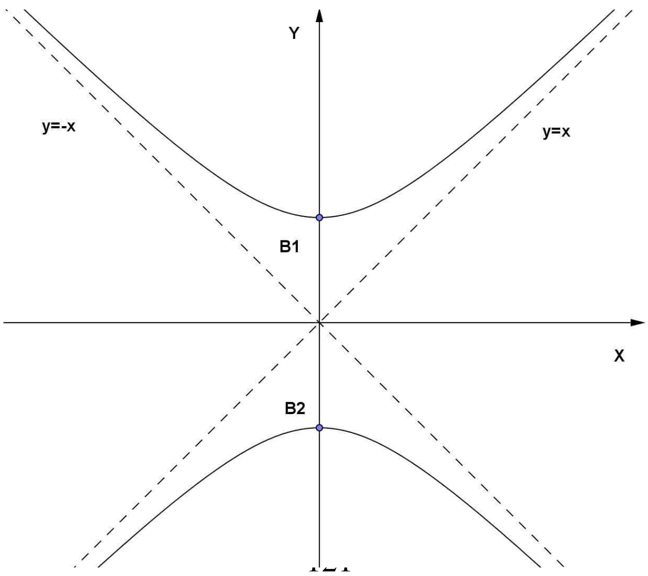
Osserviamo che per un'iperbole equilatera risulta $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}a \Rightarrow e = \sqrt{2}$
cioè l'eccentricità è sempre $\boxed{e = \sqrt{2}}$.

L'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria è quindi:

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = a^2}$ **se l'asse trasverso è l'asse x**



- $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{y^2 - x^2 = a^2}$ **se l'asse trasverso è l'asse**



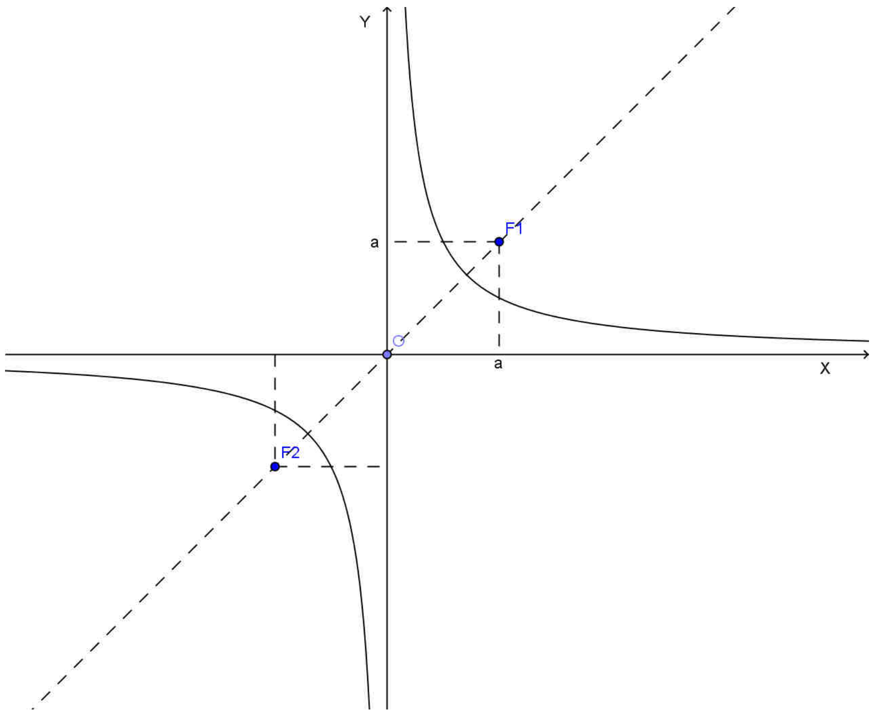
Iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti

Se l'iperbole è equilatera possiamo **prendere i suoi asintoti come sistema di riferimento**: vediamo come risulta l'equazione in questo caso.

Consideriamo l'iperbole equilatera in figura: i fuochi si trovano sulla retta $y = x$: dal momento che $c = \sqrt{2}a$, le coordinate dei fuochi in questo sistema di riferimento saranno

$$F_1(a;a) \qquad F_2(-a;-a)$$

poiché e l'ascissa e l'ordinata dei fuochi rappresentano la misura del lato di un quadrato di diagonale c.



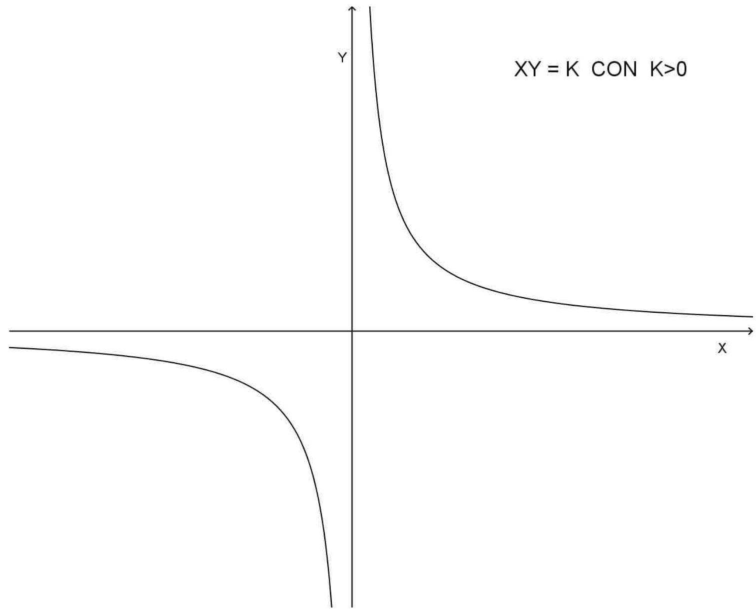
Applichiamo la definizione di iperbole che abbiamo dato inizialmente:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$$

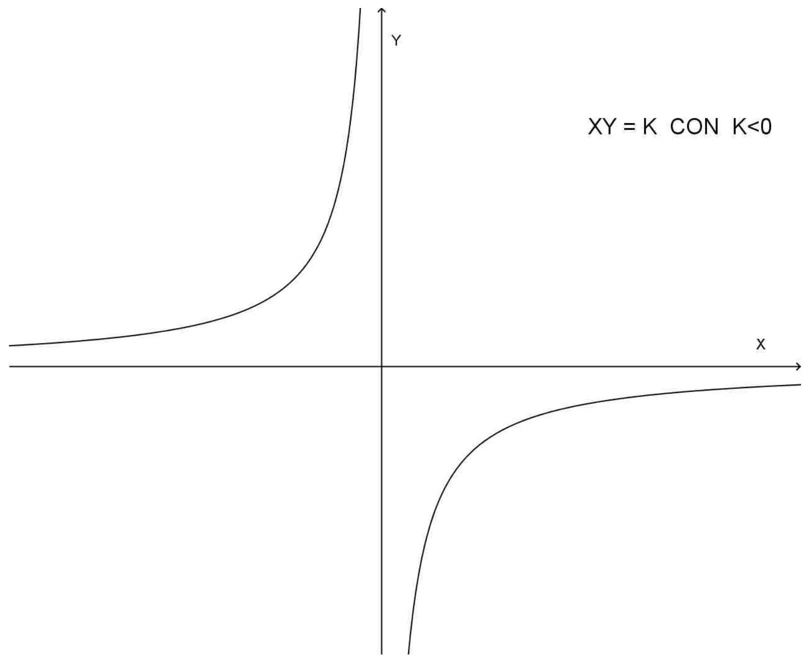
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = \pm 2a$$

Sviluppando con passaggi analoghi a quelli svolti quando abbiamo ricavato l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria, otteniamo $xy = \frac{a^2}{2}$ cioè un'equazione del tipo:

$\boxed{xy = k}$ con $k > 0$



Se invece i fuochi si trovano sulla retta $y = -x$, con analoghi passaggi , otteniamo $xy = -\frac{a^2}{2}$ cioè un'equazione del tipo: $\boxed{xy = k}$ con $k < 0$



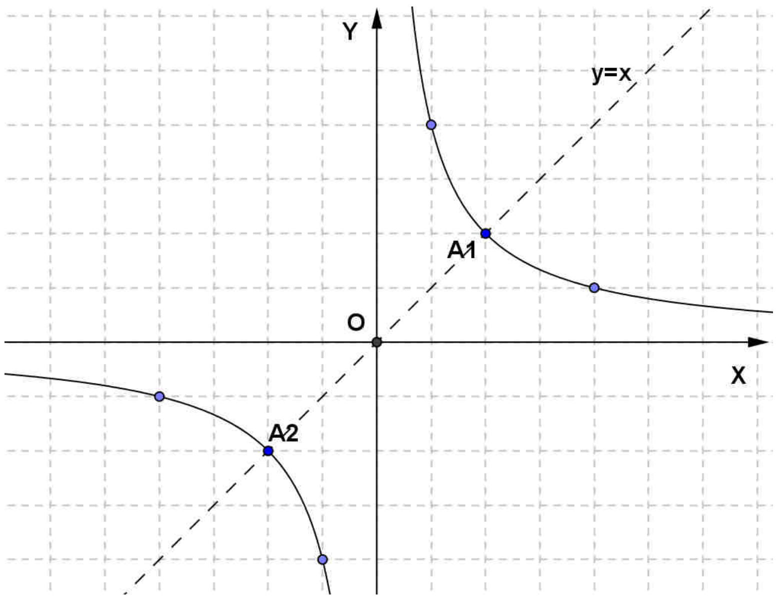
Problemi sull'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti

1) Disegna l'iperbole $xy = 4$.

Per disegnare $xy = 4$ possiamo determinare qualche punto appartenente all'iperbole: poiché $y = \frac{4}{x}$ si ottiene per esempio $(1;4)$ $(2;2)$ $(4;1)$.

Naturalmente, essendo la curva simmetrica rispetto all'origine avremo anche $(-1;-4)$ $(-2;-2)$ $(-4;-1)$.

Osserviamo che i punti A_1, A_2, essendo sulla retta $y = x$ che è asse trasverso dell'iperbole, sono i vertici.



2) Determina l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti sapendo che passa per il punto $P(1;2)$.

(*) Osserviamo che per determinare l'equazione di $\Im : xy = k$ è sufficiente una condizione.

Basterà sostituire in $xy = k$ le coordinate $P(1;2)$:

$$1 \cdot 2 = k \Rightarrow k = 2$$

e quindi $$\Im : xy = 2$$

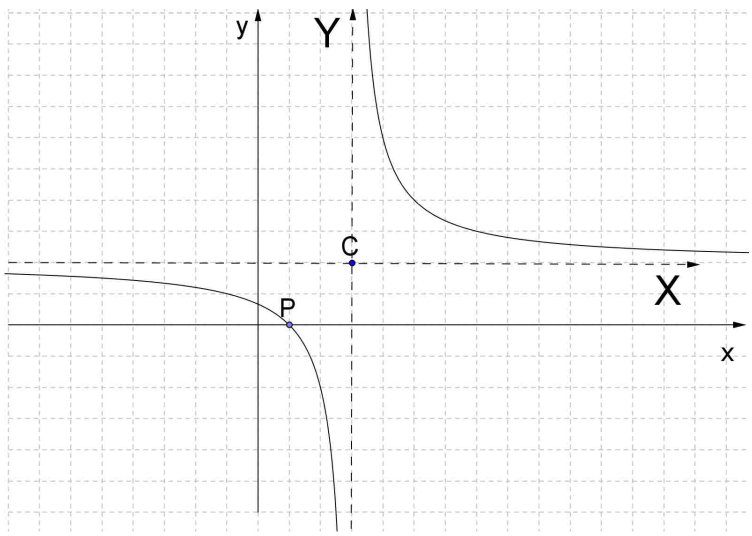
Iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati
(funzione omografica)

Abbiamo visto che l'equazione dell'iperbole equilatera con asintoti coincidenti con gli assi coordinati è del tipo $xy = k$.

E se gli asintoti non coincidono con gli assi coordinati ma sono comunque paralleli ad essi?

Vediamo un esempio: supponiamo che il centro dell'iperbole sia $C(3;2)$ e che gli asintoti abbiano equazione $x = 3$, y=2 .

Supponiamo inoltre che l'iperbole passi per il punto $P(1;0)$ (vedi figura).



Se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine in C cioè:

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

l'iperbole avrà equazione $XY = 4$:per determinare k=4 basta sostituire in $XY = k$ le coordinate di P che nel nuovo sistema di riferimento sono $(-2;-2)$.

Quindi $\Im : (x-3)\cdot(y-2) = 4$

E sviluppando avremo:

$$xy - 2x - 3y + 6 = 4 \rightarrow y(x-3) = 2x - 2 \rightarrow y = \frac{2x-2}{x-3}$$

In generale , quindi, l'equazione di un'iperbole equilatera di centro $C(x_C; y_C)$ con asintoti paralleli agli assi coordinati avrà equazione:

$$(x - x_C)\cdot(y - y_C) = k$$

che sviluppata dà un'equazione del tipo: $\boxed{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Questa funzione viene anche chiamata **funzione omografica**.

Osserviamo che :

a) $c \neq 0$ poiché se $c = 0$ otteniamo una retta;

b) $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$ poiché se $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = m \Rightarrow a = mc,\quad b = md \rightarrow y = m\cdot\dfrac{(cx+d)}{cx+d}$ che per $x \neq -\dfrac{d}{c}$ dà la retta $y = m$

Centro della funzione omografica

Ma se abbiamo l'equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ come possiamo determinare il centro dell'iperbole?
Osserviamo che **le coordinate del centro corrispondono agli asintoti della'iperbole**, cioè l'asintoto verticale ha equazione $x = x_C$ e l'asintoto orizzontale ha equazione $y = y_C$.

Torniamo all'esempio iniziale in cui sviluppando i calcoli abbiamo ottenuto $y = \dfrac{2x-2}{x-3}$.

- Osserviamo che questa funzione non è definita per $x = 3$ poiché per x=3 il denominatore si annulla: in corrispondenza di x=3 non abbiamo nessun punto della curva ed abbiamo l'asintoto verticale. Quindi $x = 3$ è l'ascissa del centro.

- Inoltre quando x è grande (in valore assoluto) i termini $b = -2$ e $d = -3$ nell'equazione diventano trascurabili nel calcolo del valore di y e $y \cong \dfrac{2x}{x}$ e quindi semplificando la x si ottiene $y \cong 2$ cioè i punti dell'iperbole, quando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$ si avvicinano alla retta $y = 2$. Quindi $y = 2$ è l'asintoto orizzontale e $y = 2$ è l'ordinata del centro.

In generale quindi se abbiamo la funzione omografica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ poiché per $x = -\dfrac{d}{c}$ il denominatore si annulla e per $x \rightarrow \infty$ $\quad y \cong \dfrac{a}{c}$ il centro C avrà coordinate

$$\boxed{C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)}$$

Problemi sulla funzione omografica

1) Disegna la funzione omografica di equazione:

$$y = \frac{2x-4}{1-x}$$

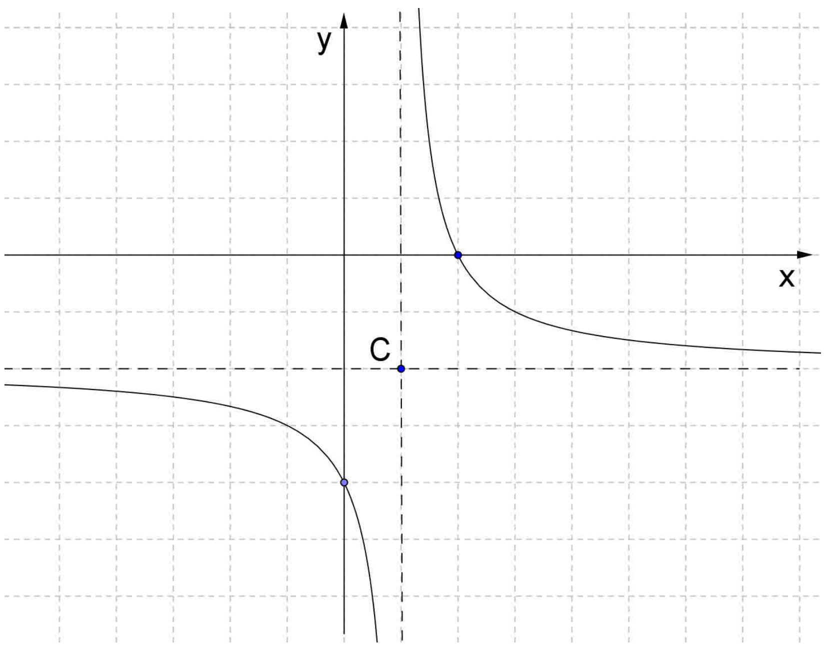
Si ricava che il centro è $C(1;-2)$.
Possiamo quindi disegnare gli asintoti che saranno le rette di equazione $x = 1$ e $y = -2$.
Per disegnare l'iperbole, dopo aver trovato il centro e tracciato gli asintoti,possiamo determinare per esempio l'intersezione dell'iperbole con l'asse x ponendo $y = 0$.

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-4}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Conoscendo il punto $(2;0)$, per la simmetria rispetto a C, ricaviamo che anche $(0;-4)$ apparterrà all'iperbole (del resto ponendo $x = 0$ si ottiene proprio $y = -4$).

Inoltre possiamo ricavare facilmente anche altri punti fissando un valore per la x e determinando la y corrispondente.

Otteniamo in conclusione il seguente disegno:



Osservazione

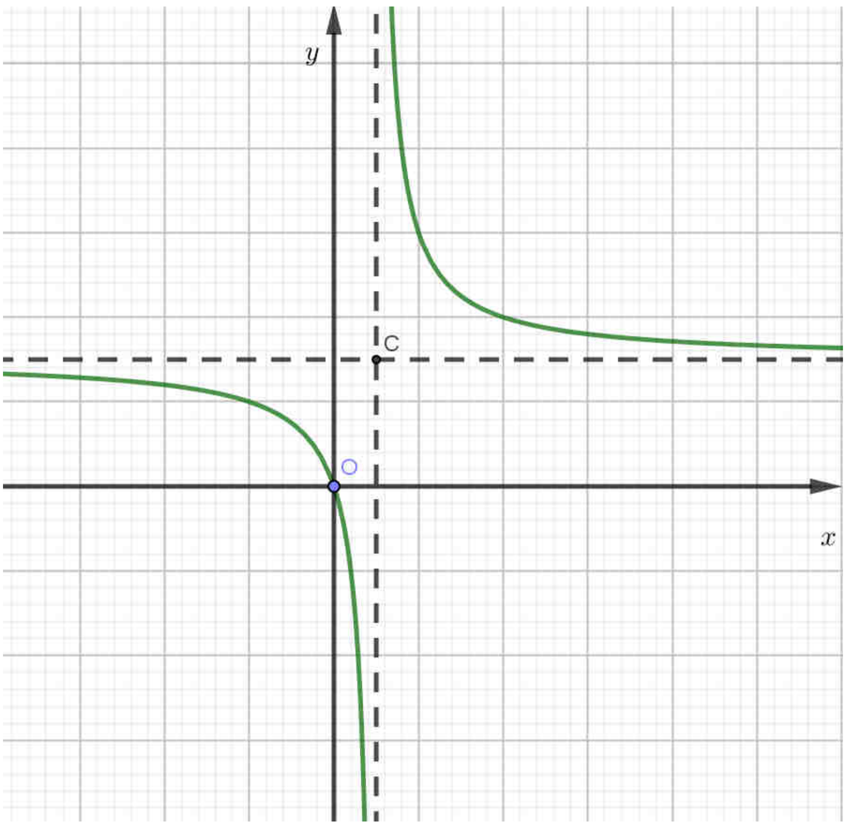
Poiché nella funzione omografica abbiamo necessariamente $c \neq 0$, possiamo dividere sia numeratore che denominatore per c e indicando con $a';b';d'$ rispettivamente $\frac{a}{c},\frac{b}{c},\frac{d}{c}$ scrivere:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y=\frac{a'x+b'}{x+d'}$$

2) Determina l'equazione della funzione omografica avente centro $C(1;3)$ e passante per $O(0;0)$.

Sappiamo che l'equazione generale della funzione omografica può essere scritta anche nella forma $y=\frac{ax+b}{x+d}$ **.** Impostiamo un sistema sfruttando la conoscenza delle coordinate del centro e il passaggio per $O(0;0)$

$$\begin{cases} -d=1 \\ a=3 \\ 0=\frac{b}{d} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d=-1 \\ a=3 \\ b=0 \end{cases} \rightarrow \qquad y=\frac{3x}{x-1}$$



3) Determina l'equazione della funzione omografica sapendo che il suo asintoto verticale è $x = 2$ e che passa per i punti $P_1(0;0)$ $P_2(1;1)$.

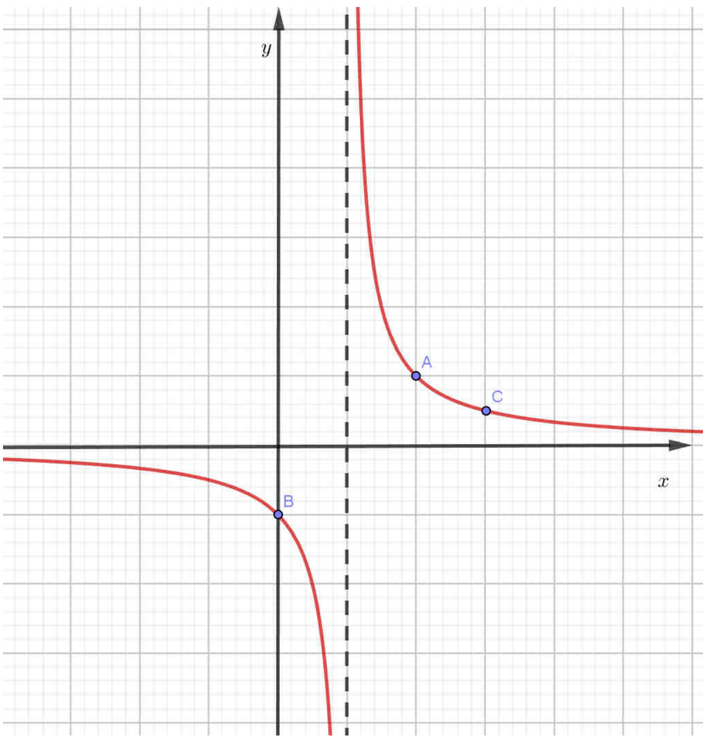
Consideriamo l'equazione nella forma $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$. Se l'asintoto verticale è x = 2 allora l'ascissa del centro sarà uguale a 2 .

$$\begin{cases} -d = 2 \\ \dfrac{b}{d} = 0(passaggio.per.P_1) \\ \dfrac{a+b}{1+d} = 1(passaggio.per.P_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = -2 \\ b = 0 \\ a = 1 + d \rightarrow a = -1 \end{cases} \qquad \Im : y = \frac{x}{-x+2}$$

4) Determina l'equazione della funzione omografica passante per $A(2;1); B(0;-1); \quad C\left(3;\dfrac{1}{2}\right)$.

In questo caso sostituendo le coordinate dei tre punti nell'equazione $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$ avremo:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2a+b}{2+d} \\ -1 = \dfrac{b}{d} \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{3a+b}{3+d} \end{cases} \rightarrow \ldots\ldots\ldots \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ d = -1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{x-1}$$



ESERCIZI
IPERBOLE

1) Disegna le seguenti iperboli indicando le coordinate dei vertici, l'equazione degli asintoti e le coordinate dei fuochi.

a) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ [$A_{1,2}(\pm 2;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$; $y = \pm\frac{1}{2}x$]

b) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{10};0)$; $y = \pm 3x$]

c) $y^2 - x^2 = 1$ [$B_{1,2}(0;\pm 1)$; $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{2})$; $y = \pm x$]

d) $4x^2 - y^2 = 4$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$; $y = \pm 2x$]

e) $4y^2 - 9x^2 = 36$ [$B_{1,2}(0;\pm 3)$; $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{13})$; $y = \pm\frac{3}{2}x$]

f) $x^2 - 4y^2 = 1$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\frac{\sqrt{5}}{2};0)$; $y = \pm\frac{1}{2}x$]

g) $y^2 - 9x^2 = 1$ [$B_{1,2}(0;\pm 1)$; $F_{1,2}(0;\pm\frac{\sqrt{10}}{3})$; $y = \pm 3x$]

h) $4x^2 - 4y^2 = 8$ [$A_{1,2}(\pm\sqrt{2};0)$; $F_{1,2}(\pm 2;0)$; $y = \pm x$]

i) $9y^2 - 16x^2 = 1$ [$B_{1,2}(0;\pm\frac{1}{3})$; $F_{1,2}(0;\pm\frac{5}{12})$; $y = \pm\frac{4}{3}x$]

l) $y^2 - x^2 = -1$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{2};0)$; $y = \pm x$]

m) $x^2 - y^2 = 9$ [$A_{1,2}(\pm 3;0)$; $F_{1,2}\left(\pm 3\sqrt{2};0\right)$; $y = \pm x$]

n) $y^2 - x^2 = 9$ [$B_{1,2}(0;\pm 3)$; $F_{1,2}\left(0;\pm 3\sqrt{2}\right)$; $y = \pm x$]

2) Determina l'equazione dell'iperbole $\Im$, riferita ai suoi assi di simmetria, avente:

a) $A_{1,2}(\pm 2;0)$ $e=2$ [$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$]

b) $B_{1,2}(0;\pm 1)$ $F_{1,2}(0;\pm 2)$ [$y^2-\frac{x^2}{3}=1$]

c) $A_{1,2}(\pm 1;0)$ asintoti $y=\pm 2x$ [$x^2-\frac{y^2}{4}=1$]

d) $F_{1,2}(\pm 2;0)$ asintoti $y=\pm x$ [$x^2-y^2=2$]

3) Disegna le seguenti iperboli equilatere riferite ai propri asintoti:

a) $xy=2$; $xy=-2$

b) $xy=4$; $xy=-4$

4) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti sapendo che passa per il punto $P(1;3)$. Disegnala e determina vertici e fuochi.

[$\Im : xy=3$, $A_{1,2}(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$, $F_{1,2}(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{6})$]

5) Disegna la funzione omografica $y=\frac{x-1}{x}$. Determina i suoi vertici.

[$C(0;1)$, $A_1(1;0)$ $A_2(-1;2)$]

6) Disegna la funzione omografica $y=\frac{2-x}{x-3}$.

[$C(3;-1)$]

7) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera avente asintoti $x=2$ e $y=1$ e passante per (0;0). Disegnala.

[$\Im : y=\frac{x}{x-2}$]

8) Determina l'equazione della funzione omografica passante per $A(-2;0)$ $B(0;2)$ $C\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Disegnala e verifica che A e B sono i vertici dell'iperbole.

[$\Im : y=\frac{x+2}{x+1}$]