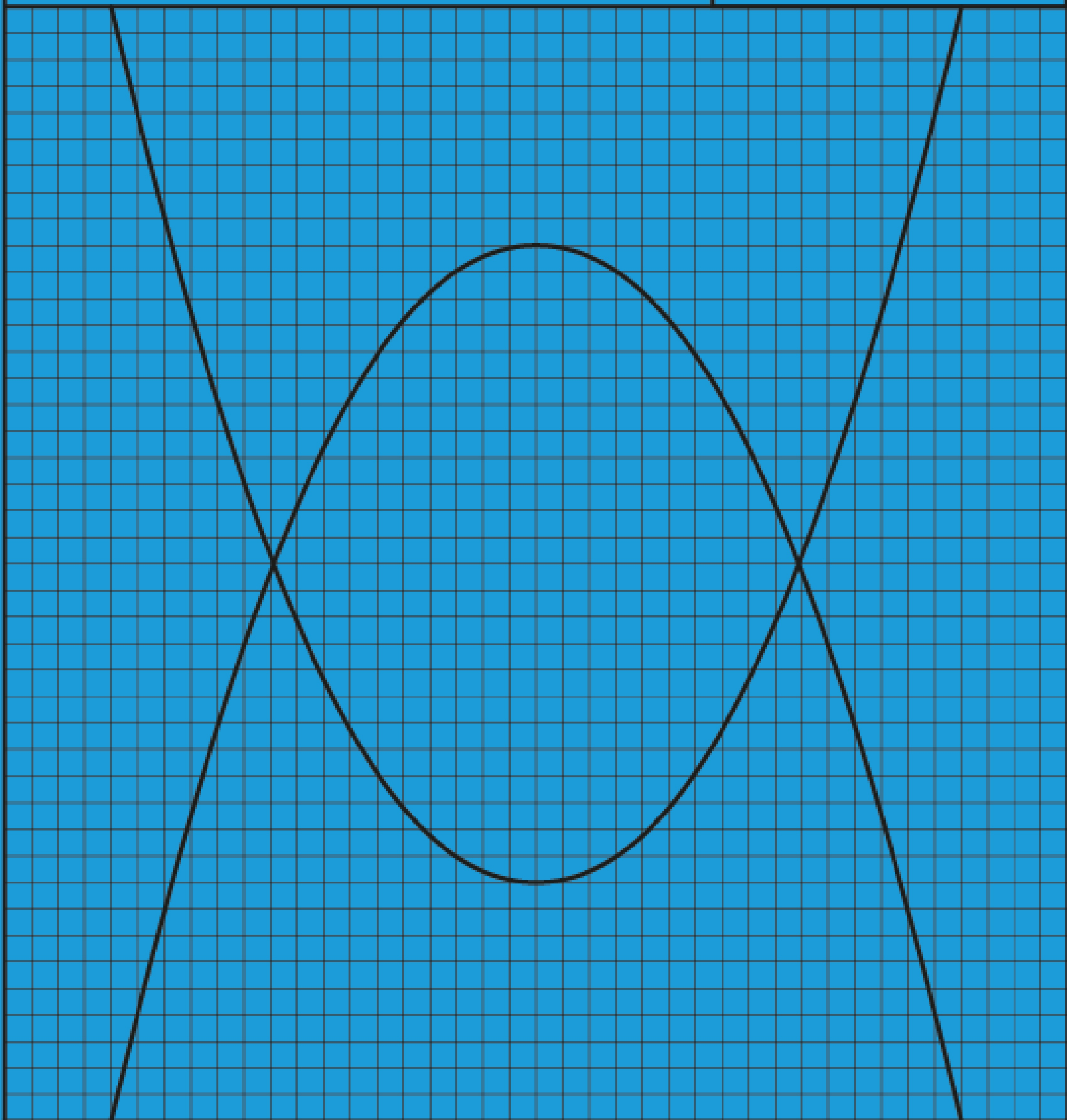
Appunti di Matematica

3

Indirizzo Umanistico

Cecilia Magni



Matematica in Rete

Prefazione

Gli **“Appunti di Matematica” sono un corso di matematica “open source” per i Licei** , con una versione per l’indirizzo scientifico ed una per l’indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella “parte teorica” del libro di testo, spesso troppo formale e “faticosa” e che non tutti riuscivano a “prendere appunti” durante le spiegazioni.

La parte teorica è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e **si integra con la parte applicativa** in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle “tecniche” di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , “schede di lavoro” da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente **non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.**

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica “Geogebra” (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle “*schede*” in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), **possano essere utili ad altri docenti per costruire,** integrandole con materiale personale, **il proprio libro di testo** che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti**, potrebbe essere facilmente aggiornato** e **modificato** ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell’articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl’Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

Cecilia Magni

Progetto Matematica in rete

Cecilia Magni

APPUNTI DI MATEMATICA 3

Indirizzo Umanistico

Editore: Matematicainrete.it

Anno di edizione : 2024

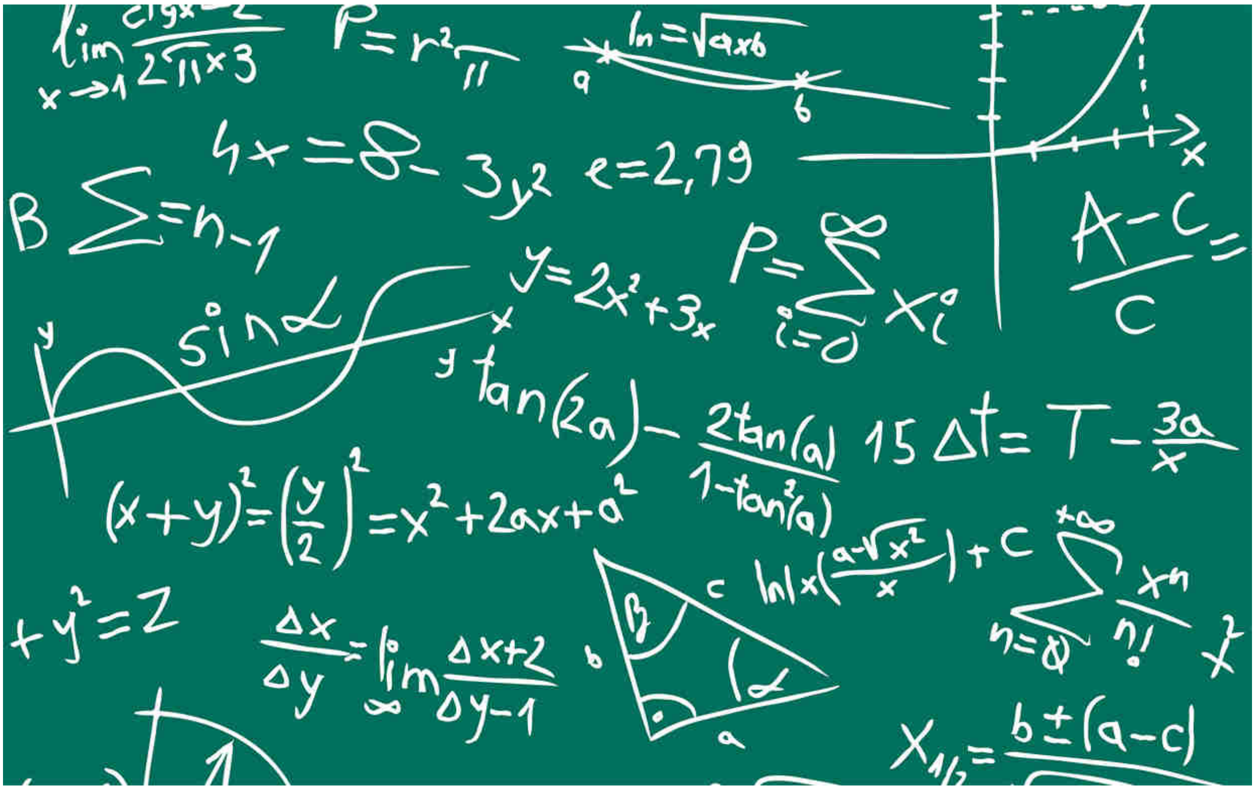
Formato: ebook (PDF)

CODICE ISBN: 978-88-943828-5-3

APPUNTI DI MATEMATICA 3
Indirizzo Umanistico

Indice

Complementi di algebra



1. **Divisione tra polinomi**
2. **Scomposizione di un polinomio**
3. **Frazioni algebriche**
4. **Equazioni e disequazioni fratte**

Divisione tra polinomi

Per completare lo studio delle operazioni tra polinomi dobbiamo trattare la divisione tra due polinomi.

Divisione di un polinomio per un monomio

Il primo anno abbiamo già trattato la divisione di un polinomio per un monomio ma rivediamo qualche esempio.

1) $\left(2a^3b + a^2\right) : a^2$

Per la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione abbiamo:

$$\left(2a^3b : a^2\right) + \left(a^2 : a^2\right) = 2ab + 1$$

Quindi in questo caso, essendo ogni termine del polinomio divisibile per il monomio, **il polinomio risulta divisibile per il monomio**.

$$\left(2a^3b + a^2\right) : a^2 = 2ab + 1$$

Abbiamo infatti $(2ab+1) \cdot a^2 = 2a^3b + a^2$ cioè se

$$\begin{array}{c|l} A & B \\ \cline{2-2} & Q(quoziente) \end{array}$$

si ha $\boxed{Q \cdot B = A}$

2) $\left(2a^3b + a^2\right) : a^3$

In questo caso il polinomio non è divisibile per a^3 poiché il suo 2° termine a^2 non è divisibile per a^3.

Abbiamo quindi $\dfrac{2a^3b + a^2}{a^3} = 2b + \dfrac{1}{a}$

e il **risultato non è un polinomio**.

Divisione tra due polinomi

Definizione: dati 2 polinomi A e B diciamo che **A è divisibile per B** se esiste un polinomio Q che moltiplicato per B dà A cioè:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} & Q \end{array} \qquad \boxed{Q\cdot B = A}$$

Esempio 1 $\left(x^2-1\right):\left(x+1\right)$

Seguiamo la seguente procedura (simile a quella usata per la divisione in colonna tra numeri naturali):

- I polinomi vanno ordinati secondo le potenze decrescenti della loro lettera e dobbiamo lasciare, nel dividendo A, degli spazi vuoti in corrispondenza delle potenze mancanti

$$\begin{array}{ccc|c} x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4} & & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} A & B \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

- Dividiamo il 1° termine del dividendo per il 1° termine del divisore e scriviamo il risultato (1° termine del quoziente Q)

$$\begin{array}{ccc|c} x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4} & & & x \end{array}$$

- Moltiplichiamo x per ogni termine del divisore $(x+1)$ e sottraiamo i risultati ai termini corrispondenti in grado del dividendo A $\left(x^2-1\right)$; sommiamo in colonna e otteniamo $-x-1$

$$\begin{array}{ccc|c} x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & x \\ \cline{1-3} // & -x & -1 & \end{array}$$

- Poiché $-x-1$ ha grado uguale al divisore **si può ancora dividere**. Ripetiamo quindi il procedimento precedente partendo da $-x-1$ ed in questo caso otterremo resto

  $\boxed{\text{R=0}}$ e quoziente Q= $x-1$

  Il polinomio x^2-1 è divisibile per $x+1$ e il quoziente è $x-1$.

  Infatti abbiamo che $(x+1)(x-1)=x^2-1$

$$\begin{array}{ccc|c} x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & \underbrace{x-1}_{\text{Q quoziente}} \\ \cline{1-3} // & -x & -1 & \\ & x & 1 & \\ \cline{2-3} & // & // & \end{array}$$

Nota: in questo caso potevamo anche sfruttare la scomposizione di x^2-1 come differenza di due quadrati e avremmo avuto subito il risultato.

Se il resto R (di grado minore del divisore) **è diverso da zero**, **A non è divisibile per B** e si avrà:

$$\boxed{Q \cdot B + R = A}$$

come nella divisione tra due numeri interi a e b si ha che, se q è il quoziente e r il resto, vale l'uguaglianza $b \cdot q + r = a$ (chiamata anche "verifica" della divisione).

Esempio:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{15} & \mathbf{7} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \qquad 7 \cdot 2 + 1 = 15$$

Esempio 2: $\left(x^2 + x + 1\right) : \left(x + 1\right)$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + x + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^2 - x & \underbrace{x}_{\text{Q}} \\ \cline{1-1} // \quad // & \\ \qquad \underbrace{1}_{R} & \end{array}$$

In questo caso quindi c'è un resto $\boxed{R = 1}$ e abbiamo che

$$\begin{array}{cccc} Q \cdot & B + & R = & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x \cdot & (x+1) + & 1 = & x^2 + x + 1 \end{array}$$

Osservazione: il grado di Q è uguale alla differenza tra il grado di A e il grado di B.

Scomposizione di un polinomio

Abbiamo già introdotto nel primo anno diversi metodi per la scomposizione dei polinomi: cominciamo con il ricordare i metodi già trattati per scomporre un polinomio.

- ## Raccoglimento totale

Se in tutti i termini di un polinomio è contenuto lo stesso fattore (che può essere anche un numero) si può *"raccogliere"* questo fattore comune (si dice anche "*mettere in evidenza*")

Esempi
1) $3x^2 - 2x = x(3x - 2)$
2) $4x^3 - 2x^2 + 8x = 2x(2x^2 - x + 4)$

Nota importante: il fattore comune può essere un polinomio.

Esempi

1) $2(a^2 + b) - 3a(a^2 + b) = (a^2 + b)(2 - 3a)$

2) $(x + y)^2 + 2(x + y) = (x + y)(x + y) + 2(x + y) = (x + y)[(x + y) + 2] = (x + y)(x + y + 2)$

- ## Raccoglimento parziale

Esempio: $x^3 - x^2 + 4x - 4 =$ raccogliamo x^2 tra i primi due termini e il numero 4 tra il 3° ed il 4° termine

$= x^2(x - 1) + 4(x - 1) =$ possiamo raccogliere $(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + 4)$

Osservazione: è come percorressimo all'indietro i passaggi per la moltiplicazione di due polinomi.

Nota: perché questo metodo funzioni è essenziale che dopo il primo raccoglimento si possa ancora raccogliere.

Esempio: $x^3 - x^2 + 4x + 4 = x^2(x - 1) + 4(x + 1)$ … non funziona!

• Scomposizioni basate su prodotti notevoli

Differenza di quadrati: $\boxed{A^2 - B^2 = (A+B)\cdot(A-B)}$

Esempi

1. $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
2. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
3. $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$
4. $4a^2 - b^2 = (2a+b)(2a-b)$

Quadrato di un binomio: $\boxed{A^2 \pm 2\cdot A\cdot B + B^2 = (A\pm B)^2}$

Esempi

1. $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
2. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
3. $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$
4. $9b^2 - 6b + 1 = (3b-1)^2$
5. $25x^2 - 10xy + y^2 = (5x-y)^2$

Cubo di un binomio: $\boxed{A^3 + 3\cdot A^2\cdot B + 3\cdot A\cdot B^2 + B^3 = (A+B)^3}$

Esempi

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$
2. $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1 = (2a-1)^3$

• Scomposizione di un trinomio di secondo grado $\boxed{ax^2 + bx + c}$

Se $\Delta \geq 0$ e quindi abbiamo due soluzioni x_1, x_2 (distinte o coincidenti) dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ abbiamo dimostrato che possiamo scrivere

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$$

Esempi

1. $x^2 - 5x + 6$

Risolviamo l'equazione associata

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 3$$

Quindi $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

2. $2x^2 + x - 1$

Risolviamo

$$2x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{1}{2} \rightarrow 2x^2 + x - 1 = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Completiamo i metodi di scomposizione di un polinomio utilizzando la divisione tra polinomi che abbiamo introdotto.

- ## Differenza di cubi

Osserviamo che la differenza di due cubi $A^3 - B^3$ è sempre divisibile per $A - B$: infatti se eseguiamo la divisione troviamo R=0

$$
\begin{array}{cccc|l}
A^3 & & & -B^3 & A-B \\ \cline{5-5}
-A^3 & A^2B & & & \underbrace{A^2+AB+B^2}_{Q} \\ \cline{1-2}
// & A^2B & & -B^3 & \\
 & -A^2B & AB^2 & & \\ \cline{2-3}
 & // & AB^2 & -B^3 & \\
 & & -AB^2 & B^3 & \\ \cline{3-4}
 & & // & // & \\
 & & R=0 & &
\end{array}
$$

Poiché il quoziente risulta $A^2 + AB + B^2$ abbiamo quindi

$$\boxed{A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)}$$

Esempi

1. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

2. $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

- ## Somma di cubi

Analogamente abbiamo che la somma di due cubi $A^3 + B^3$ è sempre divisibile per $A + B$: infatti se eseguiamo la divisione troviamo R=0 e quoziente $A^2 - AB + B^2$ e quindi

$$\boxed{A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)}$$

Esempi

1. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

2. $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

• Scomposizione con il "teorema di Ruffini"

Consideriamo un polinomio contenente una sola lettera, per esempio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$
Se non riusciamo a scomporlo con i metodi considerati finora possiamo provare ad utilizzare il seguente teorema di Ruffini:

***Teorema di Ruffini*:** dato un polinomio $P(x)$, se sostituendo alla lettera x un valore a otteniamo zero, cioè se $P(a) = 0$, allora il polinomio è divisibile per $(x-a)$ e viceversa.
Dimostrazione
Infatti se supponiamo di dividere $P(x)$ per $(x-a)$ e scriviamo

$$P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + r$$

avremo $P(a) = r$ e quindi essendo per ipotesi $P(a) = 0$ ne seguirà che $r = 0$ cioè P(x) è divisibile per $(x-a)$.
Viceversa se P(x) è divisibile per $(x-a)$ cioè

$$P(x) = (x-a)\cdot Q(x) \Rightarrow P(a) = 0$$

Nel nostro esempio abbiamo che

$$P(2) = 2\cdot 8 - 5\cdot 4 + 5\cdot 2 - 6 = 0$$

e quindi $(x-2)$ è un divisore di $P(x)$.

Eseguiamo la divisione:

$$\begin{array}{llll|l}
2x^3 & -5x^2 & +5x & -6 & x-2 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & 4x^2 & & & \\
\cline{1-3}
// & -x^2 & +5x & -6 & \underbrace{2x^2 - x + 3}_{Q(x)} \\
 & +x^2 & -2x & & \\
\cline{1-3}
 & // & +3x & -6 & \\
 & & -3x & +6 & \\
\cline{1-4}
 & & // & // \quad R=0 &
\end{array}$$

In conclusione $\qquad 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = (x-2)(2x^2 - x + 3)$

Osservazione*: ma come facciamo a individuare(se esiste) un numero intero a che annulla il polinomio?*
Se a intero esiste, deve essere un divisore del termine noto di $P(x)$**:** infatti se osserviamo l'ultimo passaggio della divisione dell'esempio, per avere *R=0* dovrà essere $a\cdot$numero = termine noto di $P(x)$ e quindi a deve essere (se è intero) un divisore del termine noto del polinomio.

Nel nostro esempio quindi avremmo dovuto provare a sostituire alla lettera x i divisori di -6 cioè

$$\pm 1 \;;\; \pm 2 \;;\; \pm 3 \;;\; \pm 6$$

ESERCIZI
DIVISIONE TRA POLINOMI

Esegui le seguenti divisioni tra polinomi:

1) $\left(x^4+3x^2-4\right):\left(x^2-4\right)$ $[\,Q=x^2+7\;\;;\;\;R=24\,]$

2) $\left(15a^3-8a^2-9a+2\right):\left(3a+2\right)$ $[\,Q=5a^2-6a+1\;\;;\;\;R=0\,]$

3) $\left(7a-a^3+2+a^2\right):\left(a^2+2\right)$ $[\,Q=-a+1\;\;;\;\;R=9a\,]$

4) $\left(16x^5-8x^3+2x-1\right):\left(x^3-1\right)$ $[\,Q=16x^2-8\;\;;\;\;R=16x^2+2x-9\,]$

5) $\left(2a^3-4a^2+a+2\right):\left(2a^2+a-1\right)$ $[\,Q=a-\dfrac{5}{2}\;\;;\;\;R=\dfrac{9}{2}a-\dfrac{1}{2}\,]$

6) $\left(x^5-x^3+1\right):\left(x^2+1\right)$ $[\,Q=x^3-2x\;\;;\;\;R=2x+1\,]$

7) $\left(y^3-5y^2+3y-6\right):\left(y^2+1-2y\right)$ $[\,Q=y-3\;\;;\;\;R=-4y-3\,]$

8) $\left(-3y^3+11y^2-9y-2\right):\left(3y^2-5y-1\right)$ $[\,Q=2-y\;\;;\;\;R=0\,]$

9) $\left(a^2-a-12\right):\left(a-4\right)$ $[\,Q=a+3\;\;;\;\;R=0\,]$

10) $\left(3x^3+x^2-8x+4\right):\left(x+2\right)$ $[\,Q=3x^2-5x+2\;\;;\;\;R=0\,]$

11) $\left(b^2-b+b^3+15\right):\left(3+b\right)$ $[\,Q=b^2-2b+5\;\;;\;\;R=0\,]$

12) $\left(2x^3-x-3x^2+2\right):\left(x-1\right)$ $[\,Q=2x^2-x-2\;\;;\;\;R=0\,]$

ESERCIZI
SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI

1) $2x+4y$; b^3x-b^3y ; x^4+4x

2) $3a^2b-6a^2$; $\frac{1}{3}b^3+\frac{1}{3}b$; $8ax-4a+2a^2$

3) $(x+2y)-(x+2y)^2$; $(a+b)^2-(a+b)$; $(x-3y^2)^3+(x-3y^2)^2$

4) $4ay-y-4a+1$ [$(4a-1)(y-1)$]

5) $a^2b-2a^2+6b-12$ [$(b-2)(a^2+6)$]

6) x^2-16y^2 ; $1-a^2b^2$

7) x^4-y^4 [$(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$]

8) $a^2x-b^2x+a^2y-b^2y-a^2+b^2$ [$(a+b)(a-b)(x+y-1)$]

9) $(3a-x)^3-4(3a-x)$ [$(3a-x)(3a-x+2)(3a-x-2)$]

10) $4a^3-4a^2-4a+4$ [$4(a-1)(a-1)(a+1)$]

11) $9b-18-(b^2-4)$ [$(b-2)(7-b)$]

12) $9x^2+6x+1$; $a^2+4ab+4b^2$

13) y^2-6y+9 ; $4+9b^2-12b$

14) x^2-4x+4 ; $25x^2-60x+36$

15) $4a-4a^2-1$; $9y^2+\frac{1}{4}-3y$

16) $27x^3+27x^2+9x+1$ [$(3x+1)^3$]

17) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$ [$(a-2b)^3$]

18) $-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$ [$(b-a)^3$]

19) $x^6 + 1 + 3x^4 + 3x^2$ [$(x^2+1)^3$]

20) $8a^3 + b^3$; $\frac{8}{27}a^3 - 1$

21) $27x^3 - 1$; $125a^3 + 8b^3$

22) $x^3 + 27$; $a^3b^3 + 1$

23) $24x^7 - 3x$ [$3x(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)$]

24) $2a^2 + 2b^2 + 12a + 12b + 4ab + 18$ [$2(a+b+3)^2$]

25) $x^4 + 2x^3 - x - 2$ [$(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$]

26) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ [$(x+3)(x-3)(x-2)$]

28) $x^2 - x - 2$ [$(x+1)(x-2)$]

29) $2x^2 + 3x - 2$ [$(x+2)(2x-1)$]

30) $x^2 - 6x + 8$ [$(x-2)(x-4)$]

31) $x^3 - x^2 - 3x - 9$ [$(x-3)(x^2+2x+3)$]

32) $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$ [$(b-1)(b+3)(2b+1)$]

33) $3b^3 - 4b^2 + 5b - 4$ [$(b-1)(3b^2-b+4)$]

34) $x^3 - 3x - 2$ [$(x+1)^2(x-2)$]

35) $x^2 - 6x + 5$ [$(x-1)(x-5)$]

36) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ [$(x-1)(x+2)(x-3)$]]

37) $x^2 + 5x + 4$ [$(x+1)(x+4)$]

38) $4x^2 + 25 - 20x$ [$(2x-5)^2$]

39) $8x^3 + 27 + 36x^2 + 54x$ [$(2x+3)^3$]

40) $bx - ax + a - b$ [$(b-a)(x-1)$]

41) $27x^3 + 64$ [$(3x+4)(9x^2+16-12x)$]

42) $x^2 - 12x - 13$ [$(x+1)(x-13)$]

43) $3ax + 3xy + 2a + 2y$ [$(a+y)(3x+2)$]

44) $2a^4 - 2a^3 - 12a^2$ [$2a^2(a+2)(a-3)$]

45) $3a^3 - 2b^2 + 2a^2b - 3ab$ [$(3a+2b)(a^2-b)$]

46) $10a^2 - 4ab + 15a - 6b$ [$(5a-2b)(2a+3)$]

47) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ [$(x-1)(x^2-x+3)$]

48) $8ab - ax + 2a^2 - 4bx$ [$(4b+a)(2a-x)$]

49) $3x^5 - 81x^2$ [$3x^2(x-3)(x^2+3x+9)$]

50) $y - 2 - x^2y + 2x^2$ [$(x+1)(1-x)(y-2)$]

51) $x^6 - x^4 + x^2 - 1$ [$(x+1)(x-1)(x^4+1)$]

52) $x^2 - 4x^2y + 4xy^2 - y^2$ [$(x-y)(x+y-4xy)$]

53) $3x^4 - 12ax^2 + 12a^2$ [$3(x^2-2a)^2$]

Le frazioni algebriche

Definizione: se A e B sono due polinomi e B è diverso dal polinomio nullo, $\frac{A}{B}$ viene detta frazione algebrica.

Esempio: $\frac{x^2-1}{x+3}$; $\frac{a^2+b^2}{3a-b}$; $\frac{x+1}{x}$

sono esempi di frazioni algebriche.

Così come abbiamo imparato a semplificare, sommare, moltiplicare le frazioni numeriche vedremo come si possono semplificare, sommare ecc. le frazioni algebriche.

Per prima cosa però dobbiamo studiare la cosiddetta "condizione di esistenza" (C.E.) di una frazione algebrica: infatti abbiamo detto che il denominatore deve essere un polinomio diverso da zero e dobbiamo quindi escludere i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione.

Condizione di esistenza di una frazione algebrica

Una frazione algebrica perde significato per tutti i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione.

Determinare le "condizioni di esistenza" (abbreviato con C.E.) significa individuare i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione algebrica cioè risolvere l'equazione che si ottiene ponendo il denominatore uguale a zero.

Esempio 1: $\dfrac{a+3}{5a-2}$

Dobbiamo risolvere l'equazione $5a-2=0$ (per determinare il valore di a che annulla il denominatore).

$$5a-2=0 \rightarrow a=\frac{2}{5}$$

Quindi il C.E. della frazione algebrica è : $a \neq \dfrac{2}{5}$

Esempio 2: $\dfrac{b^2+1}{\frac{1}{2}b+3}$

Dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{1}{2}b+3=0$: $\frac{1}{2}b=-3 \rightarrow b=\dfrac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$

Quindi il C.E. è : $b \neq -6$

Esempio 3: $\dfrac{x+5}{x^2-4}$

Dobbiamo risolvere l'equazione $x^2-4=0$: $x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_{1,2}=\pm 2$

In conclusione il C.E. è : $x \neq \pm 2$.

Esempio 4: $\dfrac{a+3}{a^2+a}$

Dobbiamo risolvere l'equazione $a^2+a=0$: $a^2+a=0 \rightarrow a(a+1)=0 \rightarrow a_1=0, \quad a_2=-1$

In conclusione il C.E. è: $a \neq 0; a \neq -1$

Esempio 5: $\dfrac{b+4}{b^2-5b+6}$

Dobbiamo risolvere l'equazione $b^2-5b+6=0$:

$$b^2-5b+6=0 \rightarrow b_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2} \rightarrow b_1=3, \quad b_2=2 \rightarrow b^2-5b+6=(b-2)(b-3)$$

In conclusione C.E. : $b \neq 2, \quad b \neq 3$

Operazioni con le frazioni algebriche

Semplificazione di una frazione algebrica

Come per le frazioni numeriche, dividendo numeratore e denominatore di una frazione algebrica per uno stesso polinomio (diverso da zero) si ottiene una frazione algebrica equivalente.

Esempio: $\frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{x\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{x}$

(C.E. $x \neq 0$ e $x \neq -1$)

Attenzione: si semplificano i fattori della scomposizione del numeratore e del denominatore e **mai gli addendi**!

$\frac{x^2-\cancel{1}}{x-\cancel{1}}$ Errore grave!

Somma algebrica

Per sommare due o più frazioni algebriche bisogna prima di tutto ridurle allo stesso denominatore (come per le frazioni numeriche).

Esempio:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+2} = ?$$

Dobbiamo prendere come denominatore comune il m.c.m. dei denominatori, in questo caso $(x-1)(x+2)$

$$\frac{x(x+2)+1(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)}$$

Importante: per determinare il mc.m. dei denominatori delle frazioni algebriche da sommare occorre scomporli.

Esempi

1) $$\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x-1}=\frac{2+1(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

2) $$\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{x^2}=\frac{x+2(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{3x+2}{x^2(x+1)}$$

3) $$\frac{2}{a^2+2ab+b^2}+\frac{a}{2a+2b}=\frac{2}{(a+b)^2}+\frac{a}{2(a+b)}=\frac{4+a(a+b)}{2(a+b)^2}=\frac{a^2+ab+4}{2(a+b)^2}$$

4) $$\frac{3x}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\ldots$$

5) $$\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)}=\frac{1-(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{3-x}{(x-2)^2}$$

6) $$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x^2-9}-\frac{x}{2x+6}=\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)(x+3)}-\frac{x}{2(x+3)}=\frac{2(x+3)+4-x(x-3)}{2(x-3)(x+3)}=\ldots$$

7) $$\frac{1}{a^2+ab+2a+2b}-\frac{2}{a^2+4a+4}+\frac{b}{3a+3b}=$$

$$\frac{1}{a(a+b)+2(a+b)}-\frac{2}{(a+2)^2}+\frac{b}{3(a+b)}=$$

$$(a+b)(a+2)$$

$$\frac{3(a+2)-6(a+b)+b(a+2)^2}{3(a+b)(a+2)^2}=\ldots$$

Moltiplicazione

Il prodotto di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}}$$

Esempi

1) $$\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x}{x-3}=\frac{(x-1)x}{(x+2)(x-3)}$$

2) $$\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{x+2}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x+2}$$

Nota: prima di moltiplicare conviene scomporre numeratore e denominatore delle frazioni algebriche per effettuare eventuali semplificazioni.

Divisione

Il quoziente di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione per la reciproca della seconda.

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}} \qquad (B\neq 0\ \ ;\ \ D\neq 0\ \ ;\ \ C\neq 0)$$

Esempio

$$\frac{x}{x^2-1}:\frac{x}{2x+2}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}:\frac{x}{2(x+1)}=$$
$$=\frac{\cancel{x}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}}=\frac{2}{x-1}$$

Potenza:

$$\boxed{\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}}$$

Esempio

$$\left(\frac{a+b}{a^2+3b}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{(a^2+3b)^2}$$

ESERCIZI
FRAZIONI ALGEBRICHE

Determina C.E. (condizioni o campo di esistenza) delle seguenti frazioni algebriche

1) $\dfrac{2}{3x+6}$; $\dfrac{1}{2x-2}$; $\dfrac{2x+3}{2x+4}$; $\dfrac{a}{a^2+a}$

2) $\dfrac{3x}{x^2+1}$; $\dfrac{x}{x^2-1}$; $\dfrac{5}{4-x^2}$; $\dfrac{1}{9-b^2}$

3) $\dfrac{2}{a^2-2a+1}$; $\dfrac{2a+3}{a^2+4a}$; $\dfrac{1}{2b^2+3b}$; $\dfrac{1}{a^2-b^2}$

Dopo aver determinato C.E. semplifica le seguenti frazioni algebriche

4) $\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-12}$ [C.E. $x \neq -2$ e $x \neq 2$; $\dfrac{x-2}{3(x+2)}$]

5) $\dfrac{2x-2y}{y-x}$ [C.E. $x \neq y$; -2]

6) $\dfrac{x^2-x}{x-1}$ [C.E. $x \neq 1$; x]

7) $\dfrac{x^2+3x}{3x}$ [C.E. $x \neq 0$; $\dfrac{x+3}{3}$]

8) $\dfrac{9a^2-9}{3a+3}$ [C.E. $a \neq -1$; $3(a-1)$]

9) $\dfrac{ay+ax+2y+2x}{4ay+4ax}$ [C.E. $a \neq 0$ e $x \neq -y$; $\dfrac{a+2}{4a}$]

10) $\dfrac{4x^2-4x+1}{2ax+2x-a-1}$ [C.E. $a \neq -1$ e $x \neq \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2x-1}{a+1}$]

Esegui le seguenti somme algebriche (supponi che siano verificate le condizioni di esistenza)

11) $\frac{2}{a^2b}+\frac{3b}{ab^2}-1$ $\qquad [\frac{2+3a-a^2b}{a^2b}]$

12) $\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}$ $\qquad [\frac{a^2-a+1}{(a-1)(a+1)}]$

13) $\frac{a}{a+1}+\frac{a^2-ab+2a}{ab-a+b-1}-\frac{b}{1-b}$ $\qquad [\frac{a+b}{b-1}]$

14) $\frac{3a-b}{3a+b}-\frac{3a+b}{3a-b}$ $\qquad [-\frac{12ab}{9a^2-b^2}]$

15) $\frac{x+2}{x^2+x-2}+\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x-1}$ $\qquad [\frac{x}{x+2}]$

16) $\frac{x+3}{x^2-xy}+\frac{y-3}{xy-y^2}-\frac{2}{x-y}$ $\qquad [-\frac{3}{xy}]$

17) $\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{y^2-x^2}-\frac{xy-y^2}{2xy-x^2-y^2}$ $\qquad [\frac{x}{x-y}]$

18) $\frac{2}{x+2}+\frac{9x^2-3x}{3x^2+5x-2}+\frac{1}{-x-2}$ $\qquad [\frac{3x+1}{x+2}]$

19) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{6xy}{x^2-y^2}$ $\qquad [\frac{2xy}{x^2-y^2}]$

20) $\frac{4a+4a^2+1}{4a-8a^2}+a-\frac{4a^2+1}{4a}$ $\qquad [\frac{2a+3}{2-4a}]$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni algebriche (supponi che siano verificate le condizioni di esistenza)

21) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}\cdot\dfrac{2x-x^2}{2x}$ $\quad[-\dfrac{(x+2)}{2}]$

22) $\dfrac{4a^2}{a^2-x^2}\cdot\dfrac{x+a}{2a}$ $\quad[\dfrac{2a}{a-x}]$

23) $\dfrac{x^2-2x+1}{y^2}\cdot\dfrac{3y^3-3xy^3}{(1-x)^3}$ $\quad[3y]$

24) $\dfrac{x-1}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2+x-6}{3x-3}$ $\quad[\dfrac{x+3}{3x+6}]$

25) $\dfrac{2a^2+2a}{2a-1}\cdot\dfrac{6-12a}{a^2-a-2}$ $\quad[\dfrac{12a}{2-a}]$

26) $3x\cdot\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{2xy-x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy}$ $\quad[\dfrac{3x(y-x)}{x+y}]$

27) $\dfrac{b^3-8}{8+b^3}\cdot\dfrac{b+2}{4+2b+b^2}$ $\quad[\dfrac{b-2}{4-2b+b^2}]$

28) $\dfrac{3y-3x}{2b-a}\cdot\dfrac{a^2-4b^2}{2x-2y}$ $\quad[\dfrac{3(2b+a)}{2}]$

29) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{x+y}$ $\quad[(x+y)(x-y)^2]$

30) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ $\quad[\dfrac{x}{x-1}]$

Esegui le seguenti divisioni di frazioni algebriche

31) $\frac{a^2+3a}{a-3}:\frac{a}{a^2-9}$ [C.E. $a\neq\pm3$ e $a\neq0$; $(a+3)^2$]

32) $\frac{a^2-b^2}{6ab}:\frac{a+b}{12a}$ [C.E. $a\neq0$, $b\neq0$ e $a\neq-b$; $\frac{2(a-b)}{b}$]

33) $\frac{x^2-1}{x}:\frac{x-1}{x^2}$ [C.E. $x\neq0$ e $x\neq1$; $x(x+1)$]

34) $\dfrac{\frac{x-2}{x^2-9}}{\frac{x+1}{x-3}}$ [C.E. $x\neq\pm3$ e $x\neq-1$; $\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$]

35) $\dfrac{\frac{x^2+x}{x-2}}{\frac{x+1}{x^2-4}}$ [C.E. $x\neq\pm2$ e $x\neq-1$; $x(x+2)$]

Esegui le seguenti potenze di frazioni algebriche

36) $\left(\frac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$ [$\frac{8}{(a+b)^3}$]

37) $\left(\frac{4a^2-4b^2}{2b-2a}\right)^2$ [$4(a+b)^2$]

38) $\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)^2$ [$\frac{x^4}{(x+y)^2}$]

39) $\left(\frac{b}{b-1}\right)^2\cdot\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$ [$(b+1)^2$]

40) $\left(\frac{a^2+1}{a^2-3a-4}-\frac{a+1}{a-4}\right)^2$ [$\frac{4a^2}{(a-4)^2(a+1)^2}$]

Sviluppa le seguenti espressioni con frazioni algebriche

41) $\frac{2}{a}\cdot\left(\frac{a+b}{2b}+\frac{b}{a-b}\right):\frac{a^2+b^2}{ab-b^2}$ $[\frac{1}{a}]$

42) $\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2+x}:(x^2-4)$ $[\frac{1}{x(x-2)}]$

43) $\frac{1}{x}:\left(\frac{x-3y}{xy}+\frac{x+y}{x^2}-\frac{y^3-2xy^2}{x^2y^2}\right)$ $[\frac{y}{x}]$

44) $\left[\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x+y}{xy}$ $[1]$

45) $\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)^2:\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x}{y}-1\right)^2:\left(\frac{x}{y}+1\right)+2+\frac{2x}{y}$ $[\left(\frac{x+y}{y}\right)^2]$

46) $\frac{3}{3x+3}-\frac{x-1}{1-x^2}-3$ $\left[-\frac{(3x+1)}{x+1}\right]$

47) $\frac{2+x}{x+3}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}-\frac{x}{x+3}$ $\left[\frac{1}{2-x}\right]$

48) $\frac{x^2-2x+1}{y^2}\cdot\frac{3y^3-3xy^3}{(1-x)^3}$ $[3y]$

49) $\frac{x^2-3x}{x^2-1}:\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{3x-3}+\frac{9-x}{3x^2-3}\right)$ $\left[\frac{3x}{x-3}\right]$

50) $\left[\left(\frac{1}{1+b}+\frac{b}{1-b}\right):\left(\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1+b}\right)-a\right]:(1-a^2)$ $\left[\frac{1}{1+a}\right]$

Equazioni fratte

Un'equazione si dice fratta se l'incognita compare in almeno un denominatore.
Occorre quindi considerare le condizioni di esistenza e la soluzione sarà accettabile solo se rispetta le condizioni di esistenza**.**

Esempi

1) $\dfrac{x-2}{x+3}=0$ C.E. $x \neq -3$

La soluzione si ottiene ponendo uguale a zero il numeratore della frazione algebrica cioè:

$x-2=0 \rightarrow x=2$ ed è accettabile.

2) $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$ C. E. $x \neq 2$

Poniamo uguale a zero il numeratore: $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$ ma solo $x=-2$ è accettabile.

3) $\dfrac{x}{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$, C.E. $x \neq 1$

Sviluppiamo: $\dfrac{x+x-1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1} \rightarrow \dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1} \rightarrow 2x-1=1 \rightarrow 2x=2 \rightarrow x=1$

Ma $x=1$ **non è accettabile** e quindi l'equazione è impossibile.

4) $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{1}{x-3}+1$, C.E. $x \neq 2$, $x \neq 3$

$$\frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-2+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\cancel{x^2}\cancel{-3x}=x-2+\cancel{x^2}\cancel{-3x}-2x+6$$

$0=x-2-2x+6 \qquad \rightarrow \qquad 0=-x+4 \rightarrow x=4$ ed è accettabile.

5) $\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}=2$, C.E. $x \neq \pm 1$

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x-1}=2 \rightarrow \frac{3+x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{2\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)} \rightarrow x+4=2x^2-2 \rightarrow 2x^2-x-6=0$$

$x_{1,2}=\dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{1 \pm 7}{4} \rightarrow x_1=2, \quad x_2=-\dfrac{3}{2}$ entrambe accettabili

ESERCIZI
EQUAZIONI FRATTE

1) $\dfrac{x-1}{x+5}-4=0 \quad ; \quad \dfrac{3x-9}{2x-6}=0$ $\qquad [-7\ ;\ impossibile]$

2) $\dfrac{2(x-1)}{x+2}=1 \quad ; \quad \dfrac{1}{4-x}-\dfrac{2x}{x-4}=0$ $\qquad \left[4\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right]$

3) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{4-x}=0$ $\qquad \left[\dfrac{6}{5}\right]$

4) $\dfrac{x^2}{x-3}-x-1=\dfrac{1}{2}$ $\qquad [-3]$

5) $\dfrac{x}{2x+2}+x+1=\dfrac{x^2}{x+1}$ $\qquad \left[-\dfrac{2}{5}\right]$

6) $x+\dfrac{4}{4-x}=\dfrac{x}{4-x}+x+4$ $\qquad [impossibile]$

7) $\dfrac{5}{2-2x}-\dfrac{x}{x^2-2x+1}=0$ $\qquad \left[\dfrac{5}{7}\right]$

8) $\dfrac{x-1}{x^2+3x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{9}{2x+6}=0$ $\qquad \left[-\dfrac{2}{3}\right]$

9) $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{7}{x-1}=\dfrac{1}{x+1}$ $\qquad \left[-\dfrac{5}{3}\right]$

10) $\dfrac{6x+1}{x^2-4}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{3}{x^3-4x}$ $\qquad [-21]$

11) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=1$ $\qquad \left[x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

12) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}=1$ $\qquad \left[x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}\right]$

13) $2-\dfrac{5}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}$ $\qquad \left[x_1=-\dfrac{5}{2},\quad x_2=3\right]$

14) $\dfrac{9}{x-2}=3$ $[5]$

15) $\dfrac{6x+9}{x-1}=0$ $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$

16) $\dfrac{3(x-1)}{2x-2}=1$ $[\textit{impossibile}]$

17) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x-2}$ $[0]$

18) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2-9}$ $[4]$

19) $\dfrac{7}{x-6}+\dfrac{5}{4-x}=0$ $[-1]$

20) $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{x}{x+1}=3$ $[\textit{impossibile}]$

21) $\dfrac{2}{x^2+4x}=\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{3-x}{x}$ $[-5]$

22) In un rettangolo la base è i $\dfrac{4}{3}$ dell'altezza e il rapporto tra il perimetro e l'altezza aumentata di 4 cm è $\dfrac{14}{5}$. Calcola l'area del rettangolo.

[48 cm^2]

23) In un rombo la somma delle diagonali è di 42 cm. Trova il perimetro e l'area del rombo sapendo che il rapporto della somma della diagonale maggiore con i $\dfrac{2}{5}$ della minore e il doppio della maggiore è $\dfrac{13}{20}$.

[60 cm; 216 cm^2]

Disequazioni fratte

1) Consideriamo per esempio la disequazione

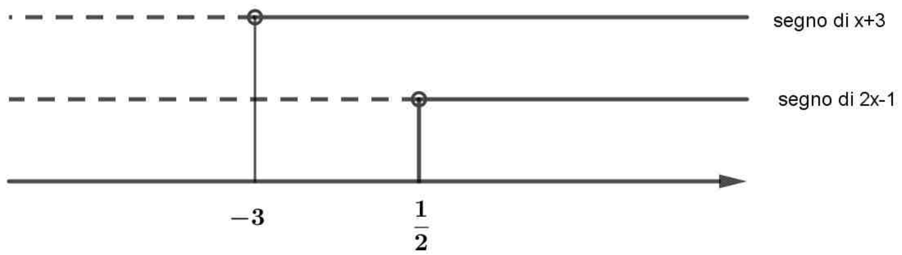
$$\frac{2x-1}{x+3} > 0$$

Per risolverla possiamo studiare il segno dei due fattori, cioè:

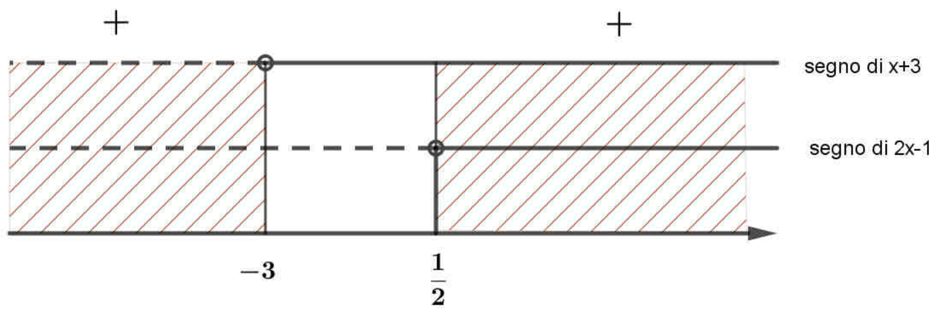
$$2x-1>0 \rightarrow x>\frac{1}{2}$$
$$x+3>0 \rightarrow x>-3$$

Possiamo rappresentare in un grafico detto "**grafico dei segni**" la situazione, indicando per convenzione con **una linea continua** l'intervallo di numeri reali in cui un fattore ha segno **positivo** e con una linea tratteggiata l'intervallo in cui ha segno negativo.

Nel nostro caso abbiamo il seguente grafico dei segni:



Nota:attenzione ad ordinare correttamente i numeri sulla retta numerica.
A questo punto **per la regola dei segni** avremo un quoziente positivo quando numeratore e denominatore sono entrambi positivi o negativi e quindi in conclusione otteniamo:



La soluzione della disequazione è

$$x<-3 \cup x>\frac{1}{2}$$

Nota
Se nella disequazione compare il segno di uguaglianza, cioè se per esempio dobbiamo risolvere

$$\frac{2x-1}{x+3} \geq 0$$

dobbiamo includere nella soluzione anche i valori di *x* che annullano il numeratore ma non quelli che annullano il denominatore perché il C.E. della frazione algebrica è $x \neq -3$
In questo caso abbiamo come soluzione

$$x < -3 \cup x \geq \frac{1}{2}$$

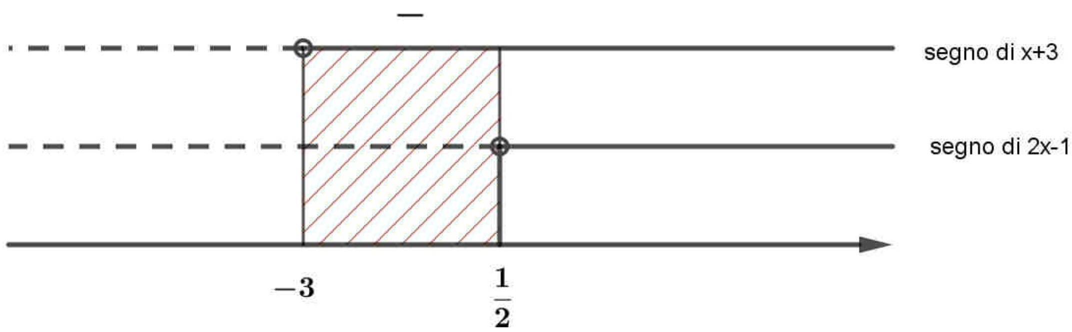
2) Consideriamo la disequazione

$$\frac{2x-1}{x+3} < 0$$

Per studiare il segno dei fattori del prodotto procediamo come prima:

$$2x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$
$$x+3 > 0 \rightarrow x > -3$$

In questo caso però vogliamo determinare **quando il prodotto è negativo** e quindi un fattore deve essere positivo e l'altro negativo ed abbiamo:



La soluzione della disequazione è in questo caso

$$-3 < x < \frac{1}{2}$$

che si legge *x* compreso tra -3 e $\frac{1}{2}$.

Nota
Anche in questo caso se dovessimo risolvere $\frac{2x-3}{x+3} \leq 0$ avremmo $-3 < x \leq \frac{1}{2}$.

3) Consideriamo $\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{4-x^2}<0$

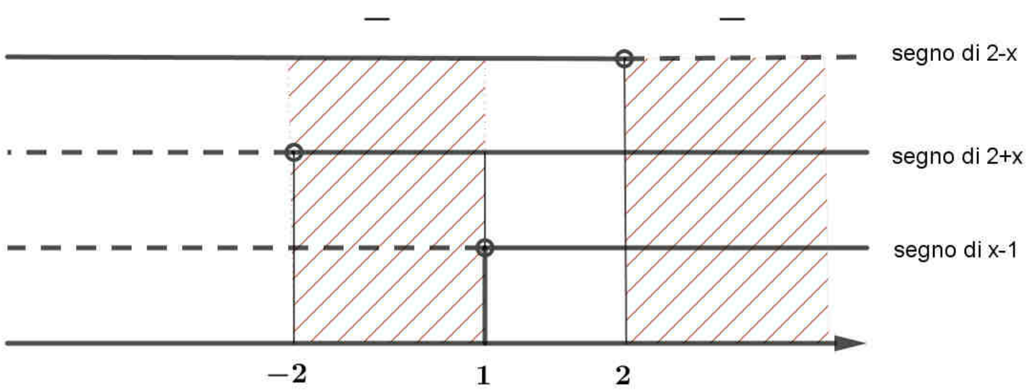
Innanzitutto svolgiamo i calcoli per ricondurci ad una disequazione del tipo $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ (N sta per numeratore e D per denominatore).

$$\frac{1}{2-x}-\frac{3}{(2-x)\cdot(2+x)}<0 \to \frac{2+x-3}{(2-x)\cdot(2+x)}<0 \to \frac{x-1}{(2-x)\cdot(2+x)}<0$$

A questo punto studiamo il segno di $x-1$, $2-x$, $2+x$:

$$x-1>0 \to x>1$$
$$2-x>0 \to x<2$$
$$2+x>0 \to x>-2$$

Riportiamo il segno delle tre parentesi e scegliamo le zone in cui la combinazione dei segni dà un risultato negativo:



In conclusione la soluzione della disequazione è

$$-2<x<1 \quad \cup \quad x>2$$

Nota

Se avessimo dovuto risolvere la disequazione $\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{4-x^2}\leq 0 \to \dfrac{x-1}{(2-x)\cdot(2+x)}\leq 0$ avremmo dovuto aggiungere solo $x=1$ e quindi la soluzione sarebbe stata

$$-2<x\leq 1 \quad \cup \quad x>2 \; .$$

ESERCIZI
DISEQUAZIONI FRATTE

1) $\dfrac{2x+1}{x+2}>0$ $\qquad$ [$x<-2 \quad \cup \quad x>-\dfrac{1}{2}$]

2) $\dfrac{3-x}{x^2-2x+1}>0$ $\qquad$ [$x<3, \quad x\neq 1$]

3) $\dfrac{3}{2-x}-\dfrac{1}{2+x}\leq 0$ $\qquad$ [$-2<x\leq -1 \quad \cup \quad x>2$]

4) $\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{2}{9x^2-1}\geq 0$ $\qquad$ [$-1\leq x<-\dfrac{1}{3} \quad \cup \quad x>\dfrac{1}{3}$]

5) $\dfrac{1}{x^2-4x+4}+\dfrac{3}{x-2}\geq 0$ $\qquad$ [$x\geq \dfrac{5}{3}, \quad x\neq 2$]

6) $\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{1}{x^2-25}<0$ $\qquad$ [$x<-5 \quad \cup \quad -\dfrac{14}{3}<x<5$]

7) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{9-x^2}>0$ $\qquad$ [$-3<x<1 \quad \cup \quad x>3$]

8) $\dfrac{2}{4x-3}+\dfrac{1}{x+1}>0$ $\qquad$ [$-1<x<\dfrac{1}{6} \quad \cup \quad x>\dfrac{3}{4}$]

9) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x+1}<0$ $\qquad$ [$-1<x<1 \quad \cup \quad x>\dfrac{5}{3}$]

10) $\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{2}{3-x}>0$ $\qquad$ [$x<3 \quad \cup \quad \dfrac{13}{3}<x<5$]

11) $\dfrac{1}{x^2-10x+25}-\dfrac{2}{x-5}<0$ $\qquad$ [$x>\dfrac{11}{2}$]

12) $\dfrac{x}{9x^2-6x}>0$ $\qquad$ $\left[x>\dfrac{2}{3}\right]$

13) $\dfrac{x^2+4x-5}{2x-3}<0$ $\left[x<-5 \cup 1<x<\dfrac{3}{2}\right]$

14) $\dfrac{2}{x+5}\le 0$ $[x<-5]$

15) $\dfrac{5}{3x+4}\ge 1$ $\left[-\dfrac{4}{3}<x\le\dfrac{1}{3}\right]$

16) $\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{3}{4x-8}\ge\dfrac{5}{3x-6}$ $\left[-\dfrac{11}{12}\le x<2\right]$

17) $\dfrac{11}{2x+3}>\dfrac{5}{2-x}$ $\left[-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{1}{3} \quad \cup \quad x>2\right]$

18) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}<\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{4}{x}$ $[-2<x<0 \quad \cup \quad 1<x<5]$

19) $\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{x+1}>\dfrac{2}{x+1}$ $[-3<x<-1 \quad \cup \quad 0<x<4]$

20) $\dfrac{2x^2-3x}{2x^2}\le 0$ $\left[0<x\le\dfrac{3}{2}\right]$

21) $\dfrac{4x^2+5x}{3x^2}\ge 0$ $\left[x\le-\dfrac{5}{4} \quad \cup \quad x>0\right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO

FRAZIONI ALGEBRICHE. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI FRATTE

I) Espressioni con frazioni algebriche

a) $\left(\frac{2a}{a^2-b^2}-\frac{2}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{2b}$ $\left[\frac{a-b}{a+b}\right]$

b) $\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{2}{2-x}\right)\cdot\frac{2x-4}{4x+10}$ $\left[\frac{1}{x+2}\right]$

c) $\left(\frac{1}{3b^2-b}-\frac{2}{9b^2-6b+1}\right):\frac{2b-2}{6b^2-2b}$ $\left[\frac{1}{3b-1}\right]$

d) $\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\cdot x$ $\left[\frac{(1-x)^2}{x}\right]$

e) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}\right)^2:\left(\frac{1}{a}\right)^2$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

II) Equazioni e disequazioni fratte

a) $\frac{x}{x+3}=\frac{1}{x-1}$ $[x_1=-1; x_2=3]$

b) $\frac{1}{x^2-2x}+\frac{2}{x}=0$ $\left[x=\frac{3}{2}\right]$

c) $\frac{1}{x^2-4x+4}+\frac{2x}{2x-4}=1$ $\left[x=\frac{3}{2}\right]$

d) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x+2}>1$ $\left[-\sqrt{3}<x<-1 \quad \cup \quad 1<x<\sqrt{3}\right]$

e) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}>0$ $[1<x<2]$

f) $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{6-3x}<\frac{1}{x-2}$ [impossibile]

SCHEDA DI VERIFICA
COMPLEMENTI DI ALGEBRA

1) Scomponi i seguenti polinomi:

a) $4x^2-12x+9$ b) $18-2x^2$ c) $2a^3+a^2+4a+2$

d) $27-b^3$ e) $4+4y^3+12y^2+12y$ f) $2x^2+x-3$

2) Determina il campo di esistenza e poi semplifica le seguenti frazioni algebriche:

a) $\dfrac{2x+10}{x^2-25}$ b) $\dfrac{2a^2+4a+2}{a^3+1}$

3) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x^2+x-2}$ b) $\left(\dfrac{1}{y^2-1}+\dfrac{y}{y+1}\right)\cdot\dfrac{y^2-2y+1}{y^3+1}$

c) $\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right):\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^2$ d) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right)$

4) Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni fratte:

a) $\dfrac{2}{x^2+2x-3}=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{4-x}{x-1}$

b) $1+\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{2\left(x^2+2\right)}{x^2-4}$

c) $\dfrac{x-5}{x-1}>1$

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}<0$

5) In un rettangolo ABCD la base AB è $\dfrac{5}{3}$ dell'altezza BC e il rapporto tra il perimetro del rettangolo e l'altezza aumentata di 2 cm è uguale a 4. Calcola l'area del rettangolo.

L'algebra di secondo grado

Ripasso delle equazioni di secondo grado

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Abbiamo visto che un'equazione è di secondo grado in forma "normale" è del tipo

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \qquad a,b,c \ \in \Re, con \quad a \neq 0}$$

e che per risolverla si procede nel seguente modo:

1) Se $\boxed{b=0}$ cioè abbiamo $\boxed{ax^2+c=0}$ spostiamo il termine noto e si hanno due soluzioni opposte o nessuna soluzione reale.

Esempi

1. $4x^2-1=0 \rightarrow 4x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{4} \rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$
2. $4x^2+1=0 \rightarrow 4x^2=-1 \rightarrow x^2=-\frac{1}{4}$ nessuna soluzione reale

2) Se $\boxed{c=0}$ cioè abbiamo $\boxed{ax^2+bx=0}$ mettiamo in evidenza la *x*:

$$x(ax+b)=0$$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo quindi:

$$x_1=0 \text{ oppure } ax+b=0 \rightarrow x_2=-\frac{b}{a}$$

Esempi

1. $3x^2-x=0 \rightarrow x(3x-1)=0 \rightarrow x_1=0 \quad \cup \quad x_2=\frac{1}{3}$
2. $x^2+x=0 \rightarrow x(x+1)=0 \rightarrow x_1=0 \quad \cup \quad x_2=-1$

3) Se tutti i coefficienti a,b,c sono diversi da zero cioè abbiamo l'equazione completa $\boxed{ax^2+bx+c=0}$, indicando con la lettera Δ l'espressione b^2-4ac, abbiamo dimostrato che:

a) Se $\boxed{\Delta>0}$ **le soluzioni dell'equazione sono "distinte"** cioè sono due valori diversi dati dalla formula $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Esempi

1. $x^2+4x-5=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\dfrac{-4\pm 6}{2}\rightarrow x_1=1 \quad\cup\quad x_2=-5$

2. $2x^2+x-1=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}\rightarrow x_1=-1 \quad\cup\quad x_2=\dfrac{1}{2}$

b) Se $\boxed{\Delta=0}$ **le soluzioni sono "coincidenti"** cioè abbiamo un unico valore:

Esempi

1. $x^2+4x+4=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=-\dfrac{4}{2}=-2$

Infatti x^2+4x+4 è il quadrato di $x+2$ e quindi $(x+2)^2=0 \rightarrow (x+2)^2=0 \rightarrow x=-2$

2. $x^2-2x+1=0 \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Infatti x^2-2x+1 è il quadrato di $x-1$ e quindi $(x-1)^2=0 \rightarrow x=1$

c) Se $\boxed{\Delta<0}$ **non ci sono soluzioni reali.**

Esempi

1. $x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta=1-4=-3$ nessuna soluzione reale

2. $x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta=1-4=-3$ nessuna soluzione reale

Somma e prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado

Ricordiamo inoltre che, nel caso in cui $\Delta \geq 0$ cioè l'equazione abbia due soluzioni (distinte o coincidenti) valgono le seguenti relazioni:

Somma delle soluzioni $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

Prodotto delle soluzioni $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

Scomposizione di un trinomio di secondo grado

Ricordiamo che abbiamo visto che:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

Infatti se moltiplichiamo abbiamo:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] = ax^2 + bx + c$$

Esempi

1) Consideriamo $x^2 + 4x - 5 = 0$: le soluzioni sono $x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = -5$

Infatti abbiamo che :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -5$$

e inoltre $$x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$$

2) Consideriamo $4x^2 + 4x + 1 = 0$: le soluzioni sono $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.

Infatti abbiamo che:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{4} = -1; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

e inoltre $$4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

ESERCIZI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado:

1) $3-x^2=0$; $\frac{1}{2}x^2-2x=0$; $x^2=0$ [$\pm\sqrt{3}$; 0, 4; $x=0(doppia)$]

2) $x-5x^2=0$; $1+3x^2=0$; $16=9x^2$ [0, $\frac{1}{5}$; *impossibile*; $\pm\frac{4}{3}$]

3) $\frac{1}{3}x^2=0$; $4-x^2=0$; $x^2-12x=0$ [$x=0(doppia)$; ± 2; 0, 12]

4) $-4x^2=-12$; $x^2=\frac{1}{5}x$; $\frac{1}{2}x^2-2=0$ [$\pm\sqrt{3}$; 0, $\frac{1}{5}$; ± 2]

5) $-x^2=36$; $2x^2-\frac{1}{3}x=0$; $9-x^2=0$ [impossibile; 0, $\frac{1}{6}$; ± 3]

6) $3\sqrt{2}x^2=0$; $16x^2=1$; $-4x^2+8x=0$ [$x=0(doppia)$; $\pm\frac{1}{4}$; 0, 2]

7) $(x-3)(x+1)=10x-3$ [$x_1=0$, $x_2=12$]

8) $x^2+\frac{1}{2}-\frac{(x+2)}{2}=\frac{1+x}{2}-(1+x^2)$ [$x_1=0 \cup x_2=\frac{1}{2}$]

9) $\sqrt{2}(x^2-1)+1=x^2$ [$x_{1,2}=\pm 1$]

10) $x+(x+2)^2+(2x+1)(x-3)=(x+1)^2+12$ [$x_1=-2$, $x_2=3$]

11) $2x^2-5x-3=0$ [$-\frac{1}{2}$, 3]

12) $x^2+5x+6=0$ [$x_1=-3$, $x_2=-2$]

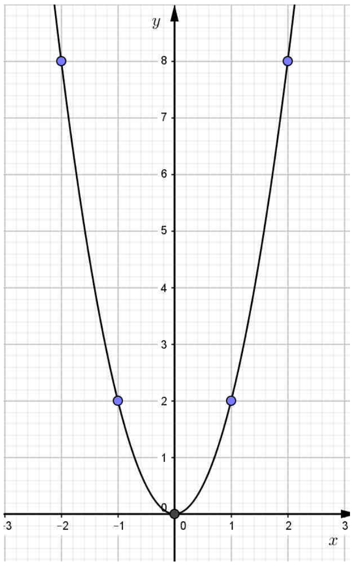
13) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}=0$ [$x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$]

Il grafico di $y = ax^2 + bx + c$

Abbiamo visto che il grafico della funzione $y = mx + q$ in cui la variabile x compare al primo grado risulta una retta. Ma come risulta il grafico dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$?
Vediamo alcuni esempi.

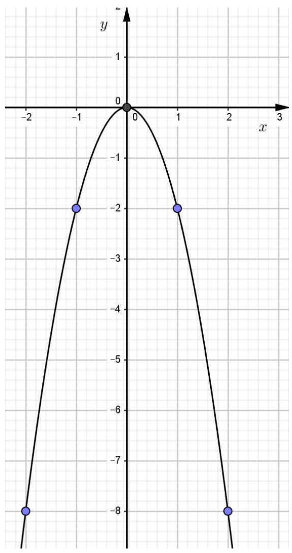
a) $\boxed{y = 2x^2}$

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8



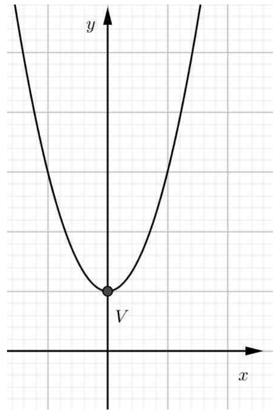
La curva che otteniamo si chiama "parabola": è simmetrica rispetto all'asse y e il punto in cui interseca l'asse di simmetria è chiamato "vertice" (nel nostro esempio il vertice è $V(0;0)$).
Se il coefficiente a di x^2 è positivo come nel nostro esempio, la parabola è rivolta verso l'altro.
Se invece proviamo a disegnare $y = -2x^2$ ($a < 0$), avremo una parabola rivolta verso il basso:

x	y
-2	-8
-1	-2
0	0
1	-2
2	-8



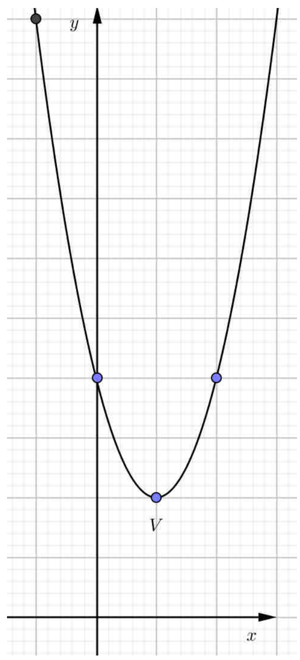
Osservazione: se aumentiamo il valore assoluto di a la parabola "si stringe": basta per esempio confrontare nello stesso sistema di riferimento $y = x^2$ con $y = 2x^2$.

b) $\boxed{y = 2x^2 + 1}$



Disegniamo per punti questa parabola: osserviamo che risulta traslata del vettore $\vec{v}(0;1)$ rispetto alla parabola $y = 2x^2$ ed ha quindi il vertice in $V(0;1)$.

c) $\boxed{y = 2x^2 - 4x + 4}$



Disegniamo il grafico per punti facendo la tabella *x,y*: per esempio

$$y(-1) = 2(-1)^2 - 4(-1) + 4 = 2 + 4 + 4 = 10 \text{ ecc.}$$

x	y
-1	10
0	4
1	2
2	4
3	10

Ci accorgiamo che otteniamo un grafico della stessa forma dei precedenti.

In generale quindi **il grafico di** $y = ax^2 + bx + c$ **risulta una parabola** rivolta verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$ (se $a = 0$ otteniamo una retta).

Come disegnare la parabola di equazione $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

Ma come possiamo disegnare una parabola di data equazione senza fare la tabella?
Cominciamo con il ricercare un metodo per individuare il **vertice** della parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Osserviamo che il vertice è l'unico punto della parabola che appartiene all'asse di simmetria della curva: se consideriamo due punti A e B della parabola aventi la stessa ordinata l'ascissa del vertice sarà uguale all'ascissa del loro punto medio.

Per semplificare i calcoli possiamo prendere come punto A il punto in cui la parabola taglia l'asse y, che corrisponde a x=0 e quindi è $A(0;c)$: il punto B avrà quindi ordinata c e la sua x si troverà risolvendo $ax^2 + bx + c = c \rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_A = 0; \quad x_B = -\frac{b}{a}$.

In conclusione l'ascissa del punto medio di AB sarà

$$\frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$$

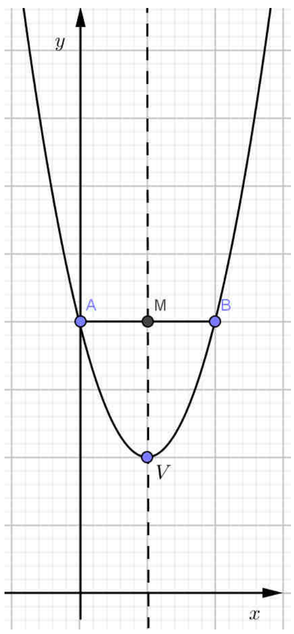
e quindi anche l'ascissa di V sarà $\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$

Infatti nell'ultimo esempio $y = 2x^2 - 4x + 4$ abbiamo

$$a = 2; \quad b = -4; \quad c = 4$$

e

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{4} = 1$$



Osserviamo che possiamo poi trovare l'ordinata del vertice sostituendo l'ascissa trovata nell'equazione della parabola.

Nel nostro caso abbiamo $y_V = 2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$

e quindi il vertice è $V(1;2)$.

Dopo aver determinato il vertice V possiamo trovare il punto A di intersezione della parabola con l'asse y ponendo nell'equazione x=0 , tratteggiare l'asse di simmetria (retta parallela all'asse y passante per il vertice), e disegnare il punto A' simmetrico di A rispetto all'asse di simmetria.

Nota: naturalmente, se la parabola interseca l'asse x, possiamo trovare i punti di intersezione con l'asse x ponendo y=0 cioè risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e utilizzare questi punti per disegnare la parabola.

Esempio

Disegna la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$.

Per prima cosa determiniamo il vertice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow y_V = 1 - 2 - 3 = -4$$

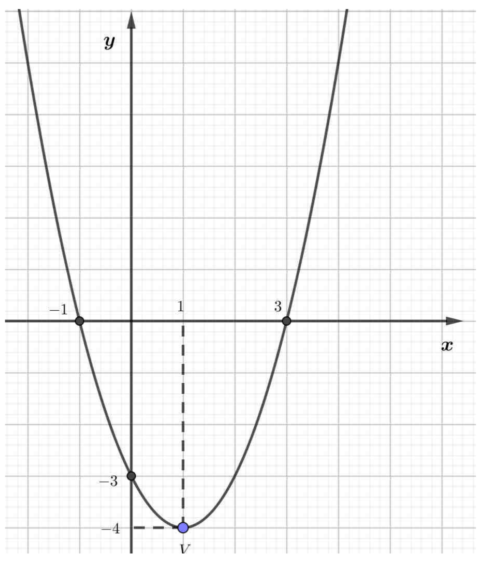
Il vertice è quindi $V(1;-4)$.

Determiniamo l'intersezione con l'asse *y*, che si ottiene ponendo $x = 0$ e, se ci sono, le intersezioni con l'asse *x* che si ottengono ponendo $y = 0$ e quindi risolvendo l'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \rightarrow x_1 = -1 \quad \cup \quad x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$



ESERCIZI

GRAFICO DI $y = ax^2 + bx + c$

Disegna le seguenti parabole individuando il vertice, l’intersezione con l’asse y e le eventuali intersezioni con l’asse x .

1. $y = -x^2 + 2$ [$V(0;2)$, $(\pm\sqrt{2},0)$]

2. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ [$V(0;-2)$, $(\pm 2;0)$]

3. $y = x^2 - 4x$ [$V(2;-4)$, $(0;0)$ $(4;0)$]

4. $y = -x^2 + 2x - 1$ [$V(1;0)$]

5. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ [$V\left(1;-\frac{1}{2}\right)$]

6. $y = 5x^2 - 4x - 1$ [$V\left(\frac{2}{5};-\frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{5};0\right)$ $(1;0)$]

7. $y = 4x - x^2$. [$V(2;4)$; $(0;0)$ $(4;0)$]

8. $y = x^2 - 2x + 1$. [$V(1;0)$; $(0;1)$]

9. $y = x^2 - 2x$ [$V(1;-1)$; $(0;0)$; $(2;0)$]

10. $y = -2x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$]

11. $y = x^2 - 2x + 3$ [$V(1;2)$; $(0;3)$]

12. $y = -x^2 - 2x$ [$V(-1;1)$; $(0;0)$; $(-2;0)$]

13. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ [$V(2;-1)$; $(2 \pm \sqrt{2};0)$; $(0;1)$]

14. $y = -x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $(\pm 1;0)$]

Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado è una disequazione del tipo

$$ax^2+bx+c>0 \text{ oppure } ax^2+bx+c\geq 0$$

$$ax^2+bx+c<0 \text{ oppure } ax^2+bx+c\leq 0$$

Per risolverla possiamo utilizzare un metodo **"algebrico"** oppure un metodo **"grafico".**

Esempi

1) $\boxed{x^2-4x+3>0}$

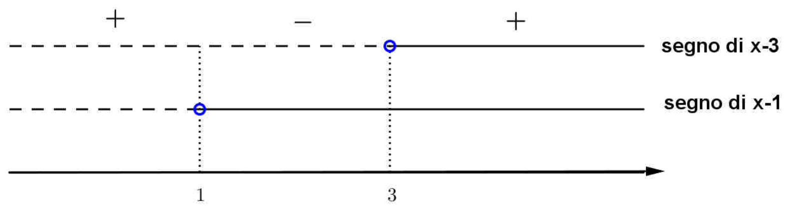
Metodo "algebrico"

Scomponiamo il trinomio di secondo grado: troviamo le soluzioni dell'equazione associata

$$x^2-4x+3=0 \rightarrow x_{1,2}=2\pm 1 \rightarrow x_1=1, \quad x_2=3$$

Quindi abbiamo che $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$
Per risolvere $x^2-4x+3>0$ dobbiamo quindi risolvere $(x-1)(x-3)>0$
Studiamo il segno dei due fattori: $\begin{array}{l} x-1>0 \rightarrow x>1 \\ x-3>0 \rightarrow x>3 \end{array}$

Rappresentiamo poi la situazione con il cosiddetto "**grafico dei segni**" in cui indichiamo con una **linea continua il segno positivo** e con una **linea tratteggiata il segno negativo**.



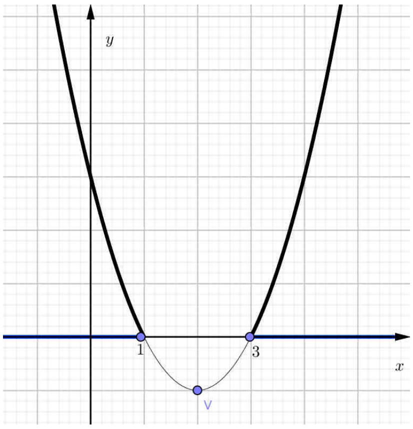
In conclusione la soluzione della disequazione sarà $x<1 \quad \cup \quad x>3$

Metodo "grafico"

Disegniamo la parabola associata all'equazione di secondo grado $y = x^2 - 4x + 3$: il vertice risulta $V(2;-1)$ e le intersezioni con l'asse *x* si ottengono risolvendo l'equazione

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 2 \pm 1 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

e quindi sono i punti $(1;0)$, $(3;0)$.



Risolvere la disequazione $x^2 - 4x + 3 > 0$ equivale a individuare per quali valori di *x* **la parabola si trova al di sopra dell'asse *x*** ed osservando il grafico vediamo che si tratta dei numeri minori di 1 oppure maggiori di 3.

La soluzione della disequazione è quindi $x < 1 \quad \cup \quad x > 3$ (come avevamo ottenuto anche con il metodo algebrico).

Osservazione

Per risolvere la disequazione non è necessario disegnare con precisione la parabola calcolando le coordinate del vertice ma **basta fare solo un disegno schematico della parabola**, considerando se è rivolta verso l'altro o verso il basso e indicando gli eventuali punti di intersezione con l'asse x (ottenuti risolvendo l'equazione $x^2 - 4x + 3 = 0$).

Nota: se avessimo dovuto risolvere $x^2 - 4x + 3 < 0$ avremmo avuto come soluzione, sia con il metodo algebrico che con quello grafico, $1 < x < 3$.

2) $\boxed{x^2 + 2x + 1 > 0}$

Metodo "algebrico"

In questo caso l'equazione associata ha $\Delta = 0$ ed infatti si tratta del quadrato di un binomio:

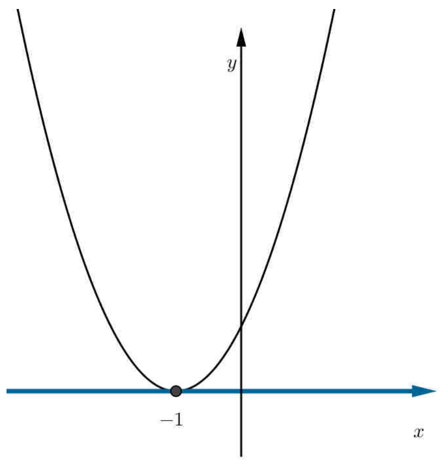
$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Abbiamo che $(x+1)^2 > 0 \rightarrow \forall x \in \Re, x \neq -1$

Metodo "grafico"

Disegnando la parabola $y = x^2 + 2x + 1$, rivolta verso l'alto, osserviamo che taglia l'asse delle *x* solo in $(-1;0)$ (che è anche il vertice) e quindi

$$x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in \Re, x \neq -1$$



Osservazione
Se avessimo dovuto risolvere $x^2 + 2x + 1 > 0$ non avremmo avuto nessuna soluzione.

3) $\boxed{x^2+x+1>0}$

Metodo "algebrico"

In questo caso il $\Delta = 1-4=-3<0$ e quindi non ci sono soluzioni reali dell'equazione associata.

Si può osservare in generale che scrivendo

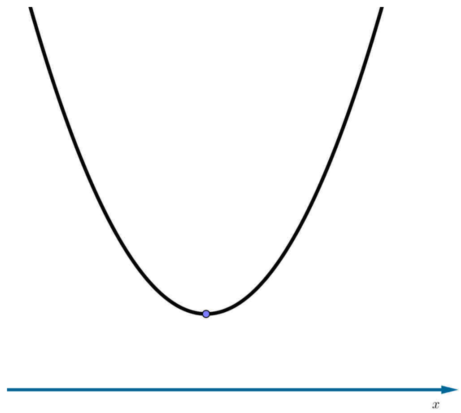
$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

poiché nella parentesi c'è un numero positivo (essendo la somma tra un quadrato e il numero corrispondente a $(-\Delta)$ che in questo caso è positivo), **quando il $\Delta<0$ il segno del trinomio ax^2+bx+c è uguale al segno di a** $\forall x \in \Re$.

Quindi il trinomio x^2+x+1 ha lo stesso segno di $a=1$ cioè è positivo $\forall x \in \Re$.

Metodo "grafico"

Disegniamo la parabola $y=x^2+x+1$: è rivolta verso l'alto e, poiché l'equazione associata non ha soluzioni, non interseca l'asse x.

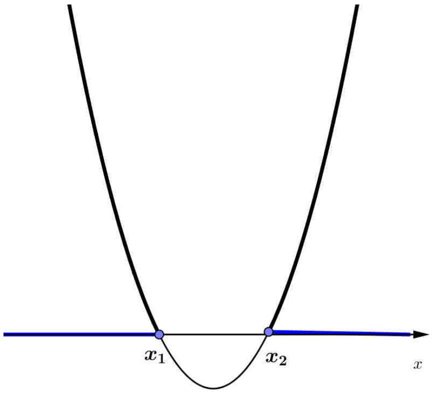


Si ha perciò $\quad x^2+x+1>0 \quad \forall x \in R$

Riepilogo

Concludiamo con un riepilogo dei vari casi che si possono presentare nella risoluzione di una disequazione di secondo grado facendo riferimento al metodo "grafico":

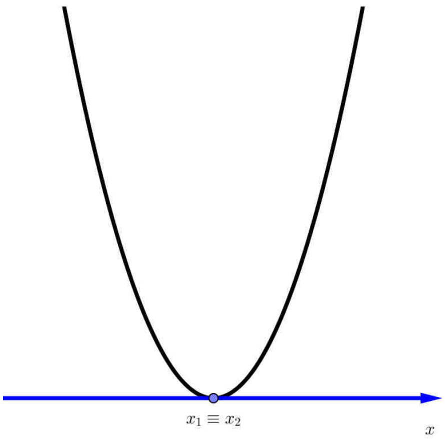
1) Quando $a > 0$ **e quindi la parabola è rivolta verso l'alto** abbiamo i seguenti tre casi:



Se ci sono due soluzioni distinte $x_1, \quad x_2$

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \cup \quad x > x_2$ (**valori esterni**)

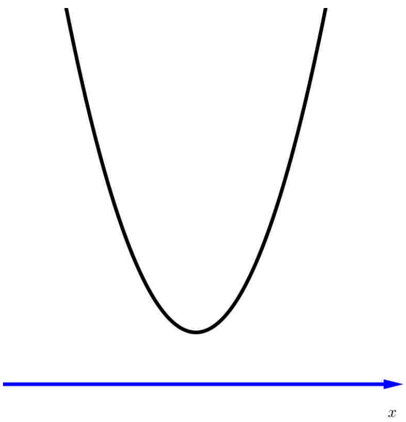
$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$ (**valori interni**)



Se ci sono due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$

$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ nessuna soluzione

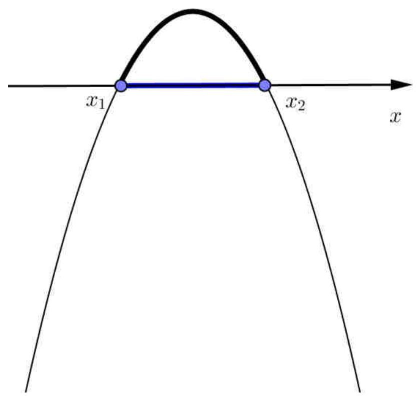


Se non ci sono soluzioni reali dell'equazione associata

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \Re$

$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ nessuna soluzione

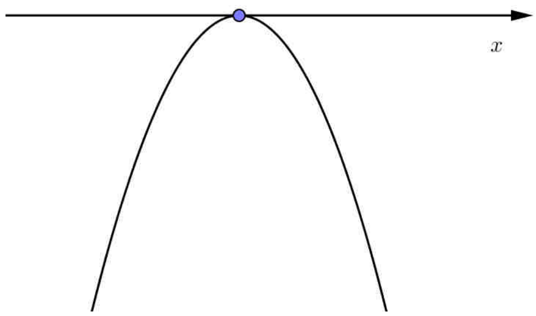
2) **Quando** $a < 0$ **e quindi la parabola è rivolta verso il basso** abbiamo i seguenti tre casi:



Se ci sono due soluzioni distinte x_1, x_2

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

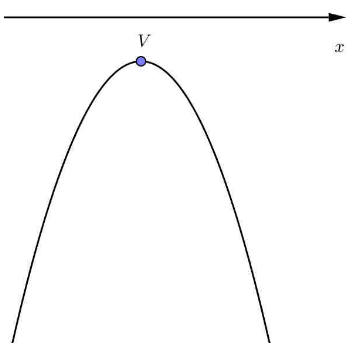
$ax_2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x < x_1 \cup \quad x > x_2$



Se ci sono due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$

$ax^2 + bx + c > 0$ nessuna soluzione

$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1$



Se non ci sono soluzioni reali dell'equazione associata

$ax^2 + bx + c > 0$ nessuna soluzione

$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \Re$

Nota

Quando si ha $a < 0$ **possiamo moltiplicare tutti i termini per –1** ed invertire la diseguaglianza: in questo modo ci possiamo sempre ricondurre al caso in cui $\boxed{a > 0}$ e fare sempre riferimento alla parabola rivolta verso l'alto.

Esempio: $-x^2 + 2x > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 0 \rightarrow 0 < x < 2$

Esercizio svolto

Consideriamo la disequazione fratta

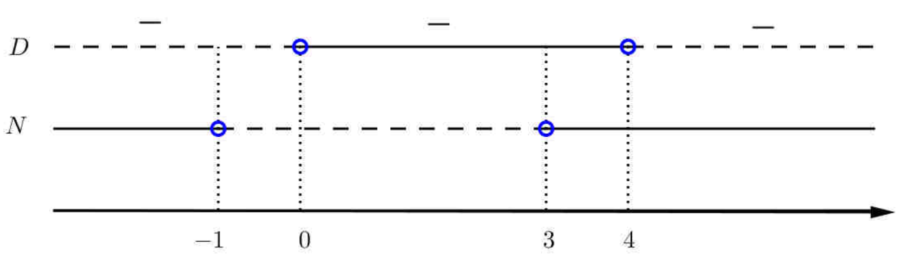
$$\frac{x^2-2x-3}{4x-x^2}<0$$

Per prima cosa dobbiamo studiare il segno del numeratore e del denominatore:

N>0 $x^2-2x-3>0$ $(x_{1,2}=1\pm 2)\rightarrow x<-1\cup x>3$ (parabola verso l’alto, positiva per valori “esterni” alle intersezioni con l’asse x);

D>0 $4x-x^2>0\rightarrow x(4-x)>0$, $(x_1=0, x_2=4)\rightarrow 0<x<4$ (parabola rivolta verso il basso, positiva per valori “interni” alle intersezioni con l’asse x).

Poi dobbiamo rappresentare quello che abbiamo trovato nel “grafico dei segni”:



In conclusione la soluzione della disequazione $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}<01$ sarà:

$$x<-1\cup 0<x<3\cup x>4$$

Nota 1: se dobbiamo risolvere $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}\leq 0$, dobbiamo considerare tra le soluzioni anche x =–1 e x = 3, ma non x = 0 e x = 4 perché per quei valori il denominatore si annulla (C.E. della frazione algebrica: $x\neq 0, x\neq 4$).
La soluzione risulta quindi:

$$x\leq -1\cup 0<x\leq 3\cup x>4$$

Nota2: se dobbiamo risolvere $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}>0$, il procedimento sarebbe stato lo stesso solo che alla fine, dal grafico dei segni, avremmo considerato i valori di x che danno segno complessivo positivo.

La soluzione di $\frac{x^2-2x+3}{4x-x^2}>0$ risulta quindi $-1<x<0\cup 3<x<4$

ESERCIZI

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:

1) $x^2 - 1 > 0$ $[x < -1 \cup x > 1]$

2) $4 - x^2 < 0$ $[x < -2 \cup x > 2]$

3) $x^2 - 2x + 1 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

4) $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \cup x > 2]$

5) $-x^2 - 2x < 0$ $[x < -2 \cup x > 0]$

6) $x^2 - 4x + 6 > 0$ $[\forall x \in R]$

7) $x^2 + 4x + 3 < 0$ $[-3 < x < -1]$

8) $x^2 + 5 > 0$ $[\forall x \in R]$

9) $x^2 - 8x > 0$ $[x < 0 \quad \cup \quad x > 8]$

10) $-x^2 + 16 \le 0$ $[x \le -4 \cup x \ge 4]$

11) $x^2 + 3x + 2 > 0$ $[x < -2 \cup x > -1]$

12) $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \cup x > 2]$

13) $x^2 - 2x + 10 > 0$ $[\forall x \in R]$

14) $x^2 - 2x - 8 > 0$ $[x < -2 \cup x > 4]$

15) $x^2 + 4x + 5 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

16) $-x^2 + 3x - 2 > 0$ $[1 < x < 2]$

17) $x(x+3) \le -2x$ $[-5 \le x \le 0]$

18) $-x^2 + 9 \le 0$ $[x \le -3 \cup x \ge 3]$

19) $x^2+10x+34<0$ [*nessuna soluzione reale*]

20) $-x(x-4)<3$ [$x<1 \cup x>3$]

21) $9x^2+4>0$ [$\forall x \in R$]

22) $81x^2+18x+1 \leq 0$ $\left[x=-\frac{1}{9}\right]$

23) $-x^2-6x-8 \geq 0$ [$-4 \leq x \leq -2$]

24) $6x^2+x-1<0$ $\left[-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right]$

25) $x^2-8x+20>0$ [$\forall x \in R$]

26) $\frac{1}{2}(x-1) \leq x^2-x$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \cup x \geq 1\right]$

27) $9x^2-30x+25>0$ $\left[\forall x \in R-\left\{\frac{5}{3}\right\}\right]$

28) $-x^2-3 \geq 0$ [*nessuna soluzione reale*]

29) $x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{8}>0$ $\left[x<-\frac{3}{4} \cup x>\frac{5}{2}\right]$

30) $x^2-\frac{13}{6}x+1<0$ $\left[\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}\right]$

31) $x^2-6x+1>0$ [$x<3-2\sqrt{2} \cup x>3+2\sqrt{2}$]

32) $3x^2+8x-3<0$ $\left[-3<x<\frac{1}{3}\right]$

33) $2x^2-4x-1>0$ $\left[x<\frac{2-\sqrt{6}}{2} \cup x>\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right]$

34) $x^2+3x+8>0$ [$\forall x \in R$]

35) $-x^2+3x-10>0$ [*nessuna soluzione reale*]

36) $-x^2+2x+4>0$ $\left[1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}\right]$

37) $-2x^2+4x+6 \geq 0$ [$-1 \leq x \leq 3$]

38) $x^2 - 6x + 12 > 0$ $[\forall x \in R]$

39) $7x^2 - 12x - 4 > 0$ $\left[x < -\frac{2}{7} \cup x > 2\right]$

40) $-12x^2 + 4x + 1 < 0$ $\left[x < -\frac{1}{6} \cup x > \frac{1}{2}\right]$

41) $4x^2 - 3x + 1 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

42) $3x^2 + x + 2 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

43) $x^2 - 6x + 9 > 0$ $[\forall x \in R - \{3\}]$

44) $-2x^2 + x + 1 > 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

45) $-5x^2 + 4x + 1 \leq 0$ $\left[x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1\right]$

46) $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$ $[\forall x \in R]$

47) $8x^2 - 24x + 18 \leq 0$ $\left[x = \frac{3}{2}\right]$

48) $-27x^2 + 18x - 3 \geq 0$ $\left[x = \frac{1}{3}\right]$

49) $x^2 - 2x < 0$ $[0 < x < 2]$

50) $1 - x^2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ $[-2 \leq x \leq 0]$

51) $\frac{13 + 9x^2}{9} - \frac{2x - 1}{2} - \frac{1}{3}(4x + 1) > 0$ $[\forall x \in R]$

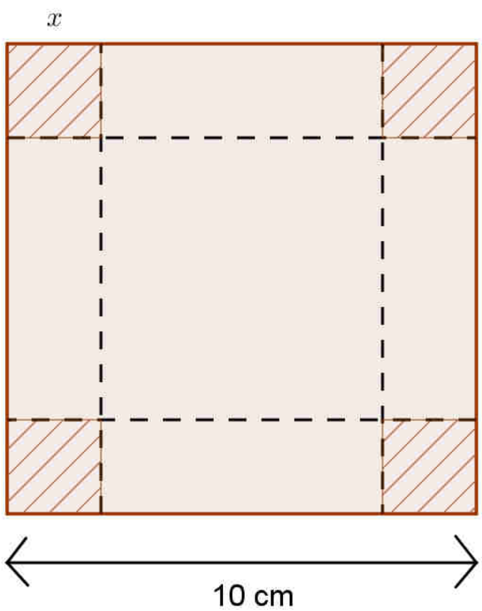
52) $-6x + \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) - 9(-1)^2 < 0$ $\left[x < -\frac{7}{2} \cup x > -\frac{5}{2}\right]$

53) $\frac{1 - x + x^2}{2} + \frac{x(3x + 16)}{8} - \frac{3x^2 + 2}{4} \leq x^2 + \frac{5x - 4}{3}$ $\left[x \leq -\frac{4}{3} \cup x \geq \frac{8}{7}\right]$

PROBLEMI
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1) ***Problema guidato***

Da una lamiera quadrata di lato 10 cm vogliamo ritagliare quatto quadrati uguali di lato x (vedi figura) in modo che, ripiegando lungo i lati tratteggiati, si possa costruire una "scatola". Per quali valori di x la scatola ha superficie maggiore di 84 cm^2?



L'area della base della scatola risulta $(10-2x)^2$. Le quattro pareti della scatola hanno area $4(10-2x)x$, quindi:

$(10-2x)^2 + 4(10-2x)x > 84 \rightarrow$ ………………………..

Poiché $x > 0$ perché………………………………., allora la soluzione è ………………………………..

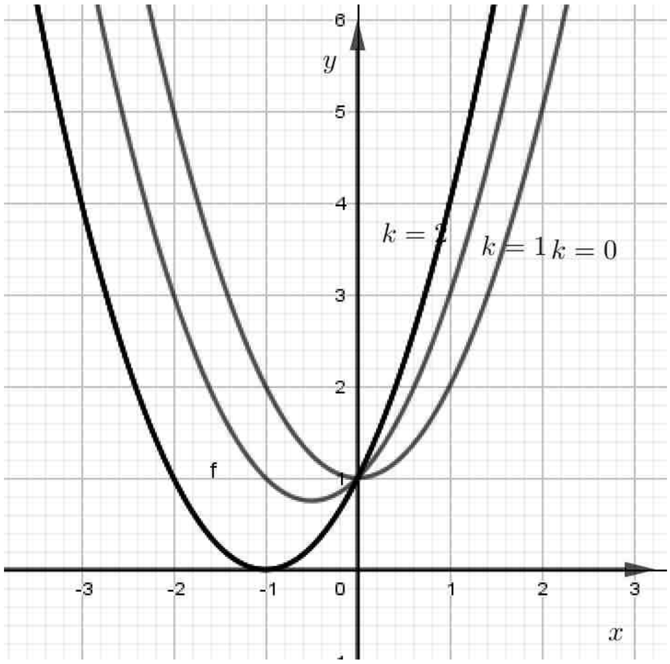
NOTA
Oppure (più semplicemente): $100-4x^2 > 84$ da cui si ha…………………………………..

2) ***Problema svolto***

Consideriamo l'equazione di una parabola contenente però un parametro reale *k*, per esempio

$$y = x^2 + kx + 1$$

poiché ad ogni valore reale di k corrispondente una data parabola abbiamo un "fascio" di parabole (nel disegno sono state disegnate le parabole corrispondenti ai valori $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$).



Possiamo, per esempio, chiederci per quali valori del parametro *k* la parabola corrispondente interseca l'asse delle x.

Per rispondere a questa domanda dobbiamo impostare il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + kx + 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 + kx + 1 = 0$$

Ma allora la parabola interseca l'asse x soltanto se il discriminante dell'equazione $x^2 + kx + 1 = 0 \rightarrow \Delta = k^2 - 4$ risulta positivo o nullo cioè quando:

$$k^2 - 4 \geq 0 \rightarrow k \leq -2 \cup k \geq 2$$

Nota: utilizzando Geogebra puoi visualizzare il fascio di parabole creando uno slider k e poi inserendo l'equazione del fascio nella barra di inserimento: al variare del valore dello slider vedrai cambiare la parabola….

3) Per quali valori di m le parabole del fascio di equazione $y = x^2 - 2mx + 9$ intersecano l'asse x?

$$[m \le -1 \cup m \ge 5]$$

4) Per quali valori di k le parabole del fascio $y = 2x^2 + kx + k$ non intersecano l'asse x?

$$[0 < k < 8]$$

5) Per quali valori di a le parabole del fascio $y = -x^2 + 2ax - 1$ intersecano l'asse x?

$$[a \le -1 \cup a \ge 1]$$

6) In un rettangolo la base supera l'altezza di 1 cm. Tra quali limiti deve trovarsi la misura dell'altezza (x) affinché l'area non superi i 12 cm^2?

$$[0 < x \le 3cm]$$

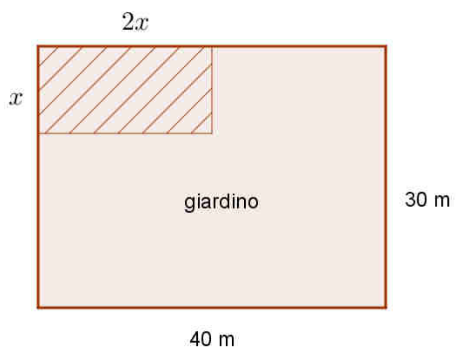
7) In un triangolo rettangolo la differenza tra i cateti è 1 cm. Quali limitazioni deve avere la misura x del cateto minore in modo che l'area non superi i 15 cm^2?

$$[0 < x \le 5\,cm]$$

8) In un triangolo rettangolo un cateto è doppio dell'altro. Quali limitazioni deve avere la misura x del cateto minore in modo che l'area non superi i $36\,cm^2$?

$$[0 < x \le 6\,cm]$$

9) In un appezzamento rettangolare di terreno 30 m x 40 m si vuole costruire una casa come in figura qui sotto. Quale deve essere x (in metri) in modo che il giardino abbia una superficie di almeno 1000 m^2?



$$[0 < x \le 10m]$$

10) In un trapezio rettangolo la base minore è uguale all'altezza e la base maggiore supera di 2 cm la base minore. Quale deve essere la misura della base minore x perché l'area del trapezio non superi i 20 cm^2?

$$[0 < x \le 4\ cm]$$

SCHEDA PER IL RECUPERO
PARABOLA E DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

I) Disegna le seguenti parabole individuando il vertice, il punto di intersezione con l'asse y e gli eventuali punti di intersezione con l'asse x:

a) $y = x^2 + 3$ $\quad [V(0;3)]$

b) $y = x^2 + x$ $\quad \left[V\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\right]$

c) $y = 3x - x^2$ $\quad \left[V\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)\right]$

d) $y = \frac{1}{2}x^2$ $\quad [V(0;0)]$

e) $y = 2x^2 + 1$ $\quad [V(0;1)]$

f) $y = -x^2 + 1$ $\quad [V(0;1)]$

g) $y = -2x^2$ $\quad [V(0;0)]$

h) $y = x - x^2$ $\quad \left[V\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\right]$

i) $y = -x^2 - 1$ $\quad [V(0;-1)]$

l) $y = x^2 - 4$ $\quad [V(0;-4)]$

II) Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$ $\quad [2 < x < 3]$

b) $x^2 - 1 > 0$ $\quad [x < -1 \quad \cup \quad x > 1]$

c) $x^2 + 1 > 0$ $\quad [\forall x \in \Re]$

d) $x^2 - 2x < 0$ $\quad [0 < x < 2]$

e) $x^2 - 2x - 3 > 0$ $\quad [x < -1 \quad \cup \quad x > 3]$

f) $x^2 - 4x + 4 < 0$ $\quad$ [nessuna soluzione]

g) $4x^2 - 1 > 0$ $\quad \left[x < -\frac{1}{2} \quad \cup \quad x > \frac{1}{2}\right]$

h) $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$ $\quad [\forall x \in \Re]$

Sistemi di secondo grado

Sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite

Un sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite è costituito da un'equazione di primo grado e da una equazione di secondo grado e si risolve **ricavando un'incognita dall'equazione di primo grado e sostituendo l'espressione trovata nell'equazione di secondo grado.** Vediamo degli esempi.

Esempio 1

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ (1-y)^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; 1 - 2y + y^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; 2y^2 - 2y = 0 \;\rightarrow\; y(y-1) = 0 \rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Abbiamo trovato quindi **due soluzioni** $(1;0)$ $(0;1)$

Esempio 2

$$\begin{cases} x^2 - y - 2x = 0 \\ 2x + y = 0 \;\rightarrow y = -2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2x - 2x = 0 \;\rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

In questo caso abbiamo solo **una soluzione** $(0;0)$ in realtà si tratta di una soluzione "doppia", cioè di due soluzioni coincidenti).

Esempio 3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 2 \;\rightarrow x = 2 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-y)^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; 4 - 4y + y^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; 2y^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

Poiché $2y^2 - 4y + 3 = 0$ non ha soluzioni reali $(\Delta < 0)$ il sistema **non ha soluzione**.

Problemi che risolvono con un sistema di secondo grado

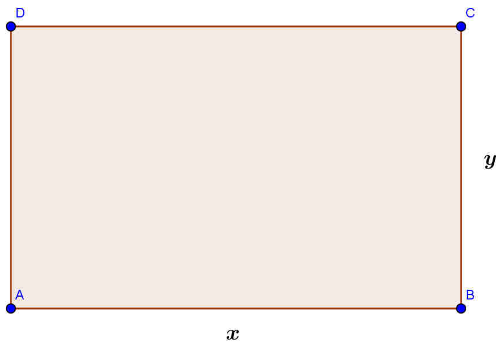
Molti problemi si risolvono impostando un sistema di secondo grado. Vediamo alcuni esempi.

Esempi

1) Un rettangolo ABCD ha l'area di 40 cm^2 e il perimetro di 26 cm. Determina la lunghezza delle sue dimensioni.

Poniamo $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$

Se il perimetro è 26 cm il semiperimetro è 13 cm, e quindi abbiamo che $\begin{cases} x \cdot y = 40 \\ x + y = 13 \end{cases}$



Si tratta di un sistema di secondo grado perché l'equazione $x \cdot y = 40$ è di secondo grado.

Ricaviamo una incognita dall'equazione di primo grado, per esempio la *x*, e sostituiamo nell'altra equazione:

$$\begin{cases} x = 13 - y \\ (13 - y) \cdot y = 40 \to 13y - y^2 = 40 \to y^2 - 13y + 40 = 0 \to y_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{2} = \dfrac{13 \pm 3}{2} \to y_1 = 8, \quad y_2 = 5 \end{cases}$$

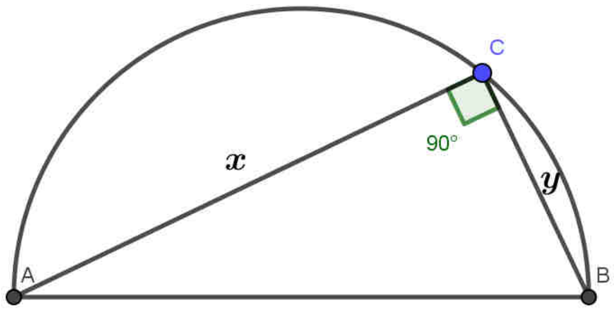
$$\begin{cases} y_1 = 8 \\ x_1 = 5 \end{cases} \cup \begin{cases} y_2 = 5 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $(5;8)$, $(8;5)$ che rappresentano comunque lo stesso rettangolo.

Le dimensioni del rettangolo richiesto sono quindi 5 cm, 8 cm.

2) Un triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza di diametro 13 cm. Sapendo che il suo perimetro misura 30 cm, determina i lati del triangolo.

Osserviamo che il triangolo è rettangolo e che la sua ipotenusa coincide con il diametro.



Se quindi poniamo $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$, utilizzando anche la relazione espressa dal teorema di Pitagora, possiamo impostare il seguente sistema di secondo grado:

$$\begin{cases} x + y + 13 = 30 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases}$$

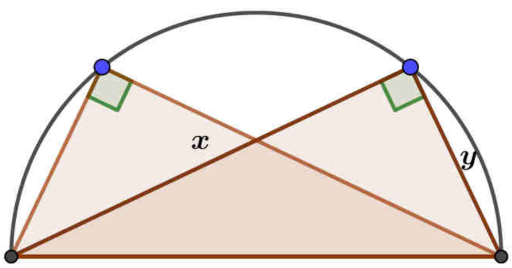
Sviluppando i calcoli:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 + y^2 = 169 \rightarrow 2y^2 - 34y + 120 = 0 \rightarrow y^2 - 17y + 60 = 0 \rightarrow y_1 = 12 \quad \cup \quad y_2 = 5 \end{cases}$$

In conclusione:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 12 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

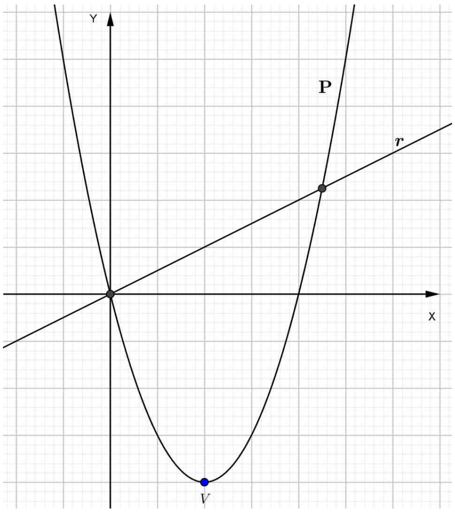
In pratica abbiamo due soluzioni "simmetriche" (vedi figura), ed i lati del triangolo misurano quindi 5 cm,12 cm,13 cm.



Intersezione tra retta e parabola

1) Consideriamo la parabola $P: y = x^2 - 4x$ e la retta $r: y = \frac{1}{2}x$.

Come si determinano i punti di intersezione tra la parabola e la retta?



$$P: y = x^2 - 4x$$

$$r: y = \frac{1}{2}x$$

Disegniamo la parabola: determiniamo il vertice $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y_V = 4 - 8 = -4$

Quindi $V(2;-4)$

Troviamo le intersezioni della parabola con l'asse *x* risolvendo l'equazione

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

Le sue intersezioni con l'asse x sono quindi $(0;0)$ $(4;0)$

Disegniamo la retta $r: y = \frac{1}{2}x$

Si vede facilmente che un punto di intersezione tra *P* e *r* è $(0;0)$ ma come possiamo determinare le coordinate dell'altro punto di intersezione?

Basta risolvere il sistema formato dall'equazione di *P* e di *r*

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 2° grado.

In questo caso l'incognita y è già "ricavata" nell'equazione della retta e basterà sostituire nell'equazione della parabola *P*.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x = 0 \quad \rightarrow \quad x(2x-9) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = \frac{9}{2} \\ y_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono $(0;0)$, $\left(\frac{9}{2};\frac{9}{4}\right)$ cioè i punti di intersezione tra *P* e *r* sono

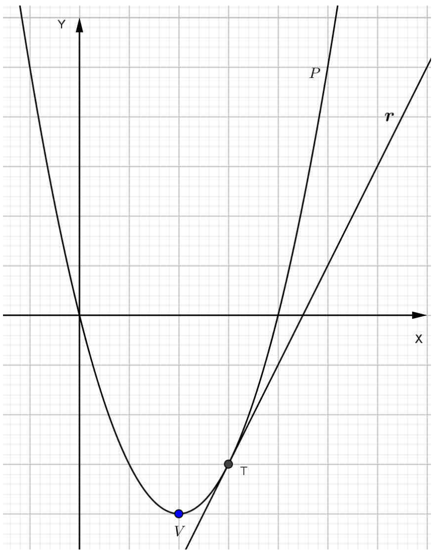
$O(0;0)$ $P\left(\frac{9}{2};\frac{9}{4}\right)$

2) Determiniamo le intersezioni tra la parabola $y = x^2 - 4x$ e la retta $y = 2x - 9$.
Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 9 = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 3 \\ y = 2x - 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

In questo caso il sistema ha due soluzioni coincidenti $(3;-3)$ e la retta è tangente alla parabola nel punto $T(3;-3)$.

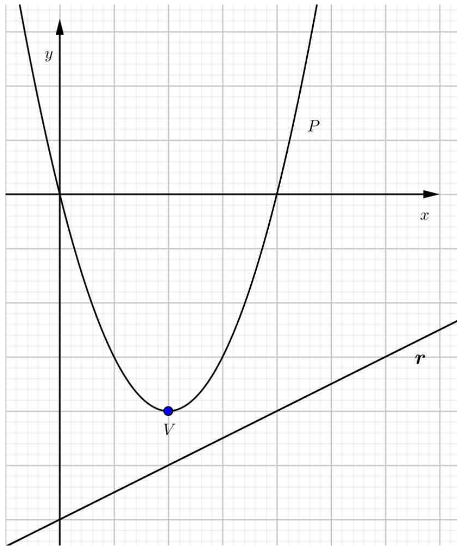


3) Determiniamo le intersezioni tra la parabola $y = x^2 - 4x$ e la retta $y = \frac{1}{2}x - 6$.

Risolviamo il sistema:

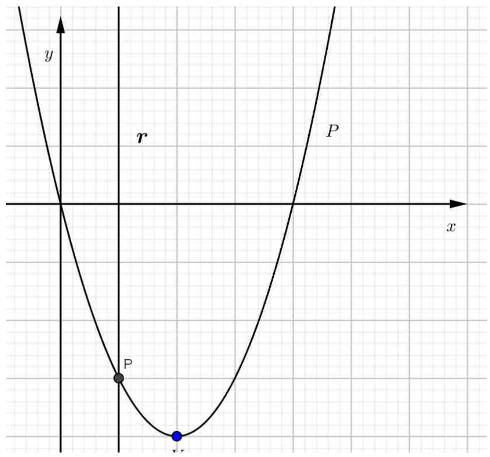
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x - 6 = x^2 - 4x \rightarrow 2x^2 - 9x + 12 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \quad \textit{nessuna} \quad \textit{soluzione} \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$

In questo caso il sistema non ha nessuna soluzione e la retta non interseca la parabola.



4) Determiniamo le intersezioni tra la parabola $y = x^2 - 4x$ e la retta $x = 1$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$



La retta $x = 1$ è parallela all'asse di simmetria della parabola e interseca la parabola nel punto $P(1;-3)$.

ESERCIZI
SISTEMI DI SECONDO GRADO

I) Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado in 2 incognite

a) $\begin{cases} x^2 + y = -8 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ $[(1;-9)]$

b) $\begin{cases} 3x - y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $[(1;1) \ ; \ (6;-4)]$

c) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 19 - xy = (x+y)^2 \end{cases}$ $[(-1;-3) \ ; \ (1;3)]$

d) $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + xy + 4 = 0 \end{cases}$ $[(0;2) \ ; \ (2;4)]$

e) $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ $[(2;4) \ ; \ (4;2)]$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $[(0;1) \ ; \ (1;0)]$

g) $\begin{cases} xy = \dfrac{3}{4} \\ x + y = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \ ; \ \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\right]$

h) $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ $[(1;1); \quad (4;-2)]$

i) $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ $[(1;1)]$

l) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ [impossibile]

m) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ [indeterminato, infinite soluzioni del tipo $(x;-x)$]

II) Problemi risolubili con sistemi di secondo grado

1) Un rettangolo ha l'area di 12 m^2 e il perimetro di 14 m. Determina la lunghezza dei suoi lati.

$[3m;\ \ 4m]$

2) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 10 m e il perimetro 24 m. Determina la lunghezza dei cateti.

$[6m;\ \ 8m]$

3) In un triangolo rettangolo l'area è 96 cm^2 e la somma dei cateti è 28 cm. Determina la lunghezza dei cateti.

$[12cm;\ \ 16cm]$

4) In un cerchio di raggio 25 cm è inscritto un rettangolo il cui perimetro è 140 cm. Calcola l'area del rettangolo.

$[1200cm^2]$

5) Un triangolo isoscele ha il perimetro di 16 cm e l'altezza di 4 cm. Determina la lunghezza dei lati.

$[6cm;\ \ 5cm;\ \ 5cm]$

6) In un rombo l'area misura 96 l^2 e la somma delle diagonali è 28 l. Determina il lato del rombo.

$[10l]$

7) Un rettangolo ha il perimetro che misura 28 r. Sapendo che il raggio della circonferenza circoscritta misura 5 r, determina i lati del rettangolo.

$[6r;\ \ 8r]$

8) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 20 cm e il perimetro 48 cm. Determina la lunghezza dei cateti.

$[12cm;\ \ 16cm]$

9) La somma delle età di Alberto e Chiara è 22. Due anni fa il prodotto delle loro età era 80. Che età hanno (adesso) Alberto e Chiara?

[10 anni; 12 anni]

10) Un negoziante di occhiali incassa in un certo mese 1500 euro dalla vendita di un certo tipo di occhiali. Il mese successivo, il negoziante vende tre paia di occhiali in meno, ma incassa 300 euro in più, perché ha aumentato il prezzo degli occhiali di 50 euro al paio. Determina il prezzo degli occhiali e il numero di occhiali venduti nel primo mese.

[15 paia al prezzo di 100 euro]

11) Il prodotto delle età di Anna e di suo padre è 429. L'età del padre, quando Anna è nata, era il doppio dell'età che Anna avrà tra tre anni. Quali sono le età attuali di Anna e di suo padre?

[11 e 39 anni]

12) La spesa di un viaggio viene suddivisa equamente tra i suoi partecipanti. Se al viaggio avessero partecipato 2 persone in più, la quota per partecipante sarebbe stata di 100 euro. Se invece al viaggio avessero partecipato 4 persone in meno, la quota per partecipante sarebbe stata di 125 euro in più rispetto alla quota inizialmente prevista. Determina la spesa complessiva del viaggio e il numero dei partecipanti.

[1000 euro; 8 partecipanti]

13) Enrico viaggia da una località A ad una località B alla velocità costante v. Egli nota che, se viaggiasse a una velocità di 5 km/h superiore arriverebbe a destinazione 5 ore prima del previsto, mentre se viaggiasse a una velocità di 10 km/h superiore arriverebbe a destinazione 8 ore prima del previsto. Qual è la velocità v in km/h?

[15 km/h]

14) Un quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari tra loro ed è inscritto in una circonferenza C di diametro AC. L'area e il perimetro del quadrilatero sono rispettivamente 48 cm^2 e 28 cm. Quanto misura il raggio della circonferenza C?

[5 cm]

III) Determina i punti di intersezione tra retta e parabola e disegnane il grafico

a) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ [nessuna intersezione]

b) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -2x^2 + 2x + 4 \end{cases}$ $[(1;4)]$

c) $\begin{cases} y = 5 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ $[(-2;5) \; ; \; (4;5)]$

d) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$ $[(3;0) \; ; \; (-1;-8)]$

e) $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 2 \end{cases}$ $[(2;4)]$

f) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = -1 \end{cases}$ $[(-1;2)]$

g) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ $[(0;-1); \;\; (1;0)]$

h) $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $[(2;0); \;\; (-3;-5)]$

SCHEDA PER IL RECUPERO

SISTEMI DI SECONDO GRADO E INTERSEZIONE TRA RETTA E PARABOLA

I) Sistemi di secondo grado

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$ $\quad [(2;1);(-1;-2)]$

b) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]$

c) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$ $\quad [(4;1);(-2;-2)]$

d) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ $\quad [(\sqrt{2};-\sqrt{2});(-\sqrt{2}:\sqrt{2})]$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\quad [(1;0)]$

f) $\begin{cases} x \cdot y = 4 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$ $\quad [(4;1);(-4;-1)]$

II) Disegna retta e parabola e determina i punti di intersezione:

a) $r: y = x, \quad \mathrm{P}: y = x^2$ $\quad [(0;0);(1;1)]$

b) $r: x + y - 2 = 0, \quad \mathrm{P}: y = x^2 - 2x + 2$ $\quad [(0;2);(1;1)]$

c) $r: y = x - 3, \quad \mathrm{P}: y = -x^2 + 4x - 3$ $\quad [(0;-3);(3;0)]$

d) $r: y = 1, \quad \mathrm{P}: y = -x^2 + 2$ $\quad [(-1;1);(1;1)]$

e) $r: x = 2, \quad \mathrm{P}: y = x^2 - 2x$ $\quad [(2;0)]$

SCHEDA DI VERIFICA
L'ALGEBRA DI SECONDO GRADO

I) Disegna le seguenti parabole individuando il vertice, l'intersezione con l'asse y e le eventuali intersezioni con l'asse x

a) $y = x^2 + 2x$

b) $y = -x^2 + 6x - 5$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

II) Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado:

a) $2x^2 - 3x > 0$

b) $-x^2 + 2x + 8 > 0$

c) $4 - x + x(x-2) - \frac{1}{2}(x-1)(x+1) < 0$

III) Risolvi il seguente sistema di secondo grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

IV) Problemi

a) Da un cartone rettangolare ABCD avente $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ si ritagliano, agli angoli, quattro quadrati uguali di lato $\frac{1}{3}x$. Come deve risultare la misura di $\overline{BC}$ in modo che la superficie rimasta dopo aver ritagliato i quattro quadrati sia almeno 14 cm^2 ?

b) Un rettangolo ha l'area di 10 cm^2 e il perimetro di 14 cm. Determina le lunghezze dei lati.

c) Determina i punti di intersezione tra la retta $r: y = x + 2$ e la parabola di equazione $y = x^2 - 4$. Disegna la retta e la parabola.

d)Un quadrilatero ABCD è inscritto in una circonferenza e la sua diagonale AC coincide con un diametro e misura $\frac{5}{2}$ *cm.* Sapendo che l'altra diagonale BD del quadrilatero è perpendicolare ad AC e che il perimetro del quadrilatero è 7 cm, determina i lati del quadrilatero.

Algebra di grado superiore al secondo

Equazioni di grado superiore al secondo

Come per le equazioni di 2° grado, esistono formule risolutive anche per le equazioni di 3° e 4° grado ma non le studieremo perché sono troppo complesse,mentre si può dimostrare che non ci sono formule risolutive generali per le equazioni di grado superiore al quarto.

Noi consideriamo solo alcuni tipi particolari di equazioni di grado superiore al secondo che possono essere risolte attraverso la scomposizione in fattori.

Esempi

1) $x^3 - 2x^2 = 0$

Per risolvere questa equazione basta "raccogliere" x^2:

$x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow$ (per la legge di annullamento del prodotto) $x^2 = 0 \quad \cup \quad x - 2 = 0$

Quindi $x_1 = x_2 = 0 \qquad \cup \qquad x_3 = 2$

L'equazione data ha quindi 3 soluzioni reali di cui due coincidenti.

2) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$

Possiamo effettuare un raccoglimento parziale:

$$x^2(x-2) + 2(x-2) = 0$$
$$(x-2)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \cup \quad x^2 + 2 = 0$$

Quindi avrò solo la soluzione reale $x_1 = 2$ poiché $x^2 + 2 = 0$ non ha soluzioni reali.

3) $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

Proviamo a cercare un valore di *x* che annulla $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Vediamo che $P(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ e quindi $x^3 - 2x^2 + 1$ è divisibile per $x - 1$ ed effettuando la divisione abbiamo che

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$$

Allora le soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4) E*quazioni "binomie"*

- Considera l'equazione $x^4 = 16$

Le soluzioni sono $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

poiché sia $\sqrt[4]{16}$ che $-\sqrt[4]{16}$ elevati alla quarta danno 16

E se avessi avuto $x^4 = -16$? E' chiaro che in questo caso non c'è nessuna soluzione.

Quindi se ho $\boxed{x^n = a \text{ con } \mathbf{n\ pari}}$ avrò : **se** $a \geq 0$ due soluzioni opposte $\pm\sqrt[n]{a}$
se $a < 0$ nessuna soluzione reale

- Considera l'equazione $x^5 = 32$

La soluzione è $x = \sqrt[5]{32}$ cioè $x = 2$ poiché $32 = 2^5$.

E se avessi avuto $x^5 = -32$?
In questo caso la soluzione è $x = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

Quindi se ho $\boxed{x^n = a \text{ con } \mathbf{n\ dispari}}$ avrò: $x = \sqrt[n]{a}$

5) E*quazioni "trinomie"*

- Considera l'equazione $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Se poniamo $x^2 = z$ e sostituiamo abbiamo $z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 \qquad z_2 = 3$

Quindi $\quad x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
$\quad x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$

- Considera l'equazione $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

Se poniamo $x^3 = z$ abbiamo $z^2 - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 3 \qquad z_2 = -1$

Quindi $\quad x^3 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{3}$
$\quad x^3 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1$

In generale se l'equazione si presenta nella forma

$$\boxed{a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0}$$

(n intero positivo, $a \neq 0$)

possiamo porre $\boxed{x^n = z}$ e risolvere l'equazione di 2° grado in z

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

risolvendo infine $x^n = z_1 \cup x^n = z_2$ (se z_1, z_2 esistono).

ESERCIZI
EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

1) $x^4 - 4x^2 = 0$ $[0;\ \pm 2]$

2) $x - x^5 = 0$ $[0;\ \pm 1]$

3) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ $[0;\ 3]$

4) $4x^3 + 4x^2 - x = 1$ $\left[-1;\ \pm\frac{1}{2}\right]$

5) $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$ $\left[0;\ \frac{1}{2};\ -\frac{4}{3}\right]$

6) $4x^3 + 3x^2 - 8x - 6 = 0$ $\left[\pm\sqrt{2};\ -\frac{3}{4}\right]$

7) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ $\left[\pm\sqrt{3};\ \frac{1}{3}\right]$

8) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

9) $x^3 - 7x + 6 = 0$ $[-3;\ 1;\ 2]$

10) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$ $[1;\ 3]$

11) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 1\right]$

12) $2x^3 - 5x - 6 = 0$ $[2]$

13) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$ $\left[-2;\ \frac{1}{3};\ 1\right]$

14) $\frac{1}{4}x^3-2=0$ $[2]$

15) $3x^3+375=0$ $[-5]$

16) $x^7+1=0$ $[-1]$

17) $x^8-17x^4+16=0$ $[\pm 1;\ \ \pm 2]$

18) $x^4-2x^2+1=0$ $[\pm 1]$

19) $x^6+19x^3-216=0$ $[-3;\ \ 2]$

20) $x^8-10x^4+9=0$ $[\pm 1;\ \ \pm\sqrt{3}]$

21) $x^4-7x^2-144=0$ $[\pm 4]$

22) $x^4+5x^2+6=0$ [impossibile]

23) $4x^4-13x^2+3=0$ $\left[\pm\frac{1}{2};\ \ \pm\sqrt{3}\right]$

24) $x^4-5x^2-24=0$ $[\pm 2\sqrt{2}]$

25) $x^4-12x^2+32=0$ $[\pm 2\sqrt{2};\ \ \pm 2]$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Esempio 1

Consideriamo la disequazione $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

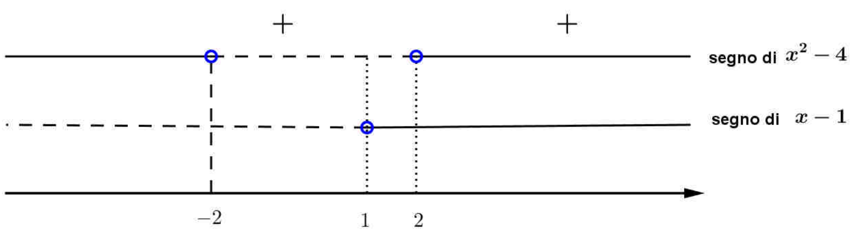
Proviamo a scomporre il polinomio (raccoglimento parziale):

$$x^2(x-1) - 4(x-1) > 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(x^2-4) > 0$$

Possiamo quindi studiare il segno dei singoli fattori

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$
$$x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \cup x > 2$$

Riportiamo questi risultati nel "grafico dei segni":



Abbiamo quindi $(x-1)(x^2-4) > 0$ per $-2 < x < 1 \cup x > 2$.

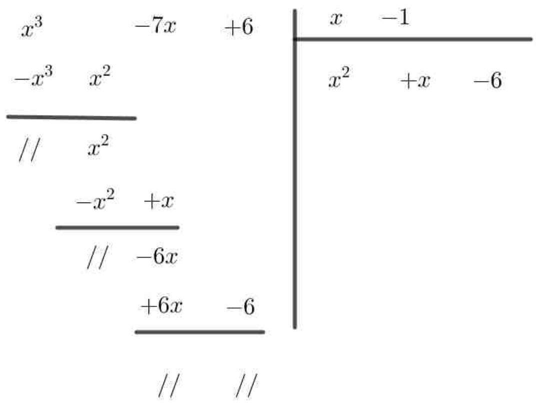
Esempio 2

Consideriamo la disequazione

$x^3 - 7x + 6 < 0$

Scomponiamo utilizzando la regola di Ruffini:

$P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$



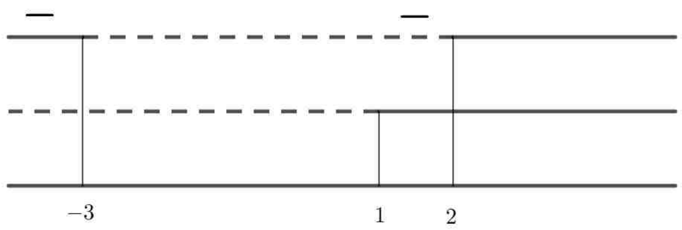
Quindi $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 + x - 6)$

Studiamo il segno dei singoli fattori (si imposta sempre il fattore >0)

$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$

$x^2 + x - 6 > 0 \rightarrow \left(x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \right) \qquad x < -3 \cup \qquad x > 2$

Riportiamo questi risultati nel “grafico dei segni”:



Poiché la disequazione è $x^3 - 7x + 6 < 0$, la soluzione è $x < -3 \cup 1 < x < 2$.

Esempio 3
Consideriamo la disequazione $x^3 - 1 > 0$

Sappiamo che possiamo scomporre il polinomio dato come differenza di cubi per cui

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Studiamo il segno dei singoli fattori

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad (a > 0, \Delta < 0) \rightarrow \forall x \in R$$

Quindi $x^3 - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

Osservazione
Quando in un prodotto un fattore è positivo $\forall x \in R$, possiamo anche non considerarlo perché non fa cambiare il segno del prodotto.

Esempio 4
Consideriamo la disequazione $x^3 + 2x^2 \le 0$

Basta mettere in evidenza:

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2) \le 0$$

Poiché $x^2 \ge 0 \ \forall x \in R$ possiamo anche non considerarlo e studiare solo il segno di $(x+2)$:

$$x^2(x+2) \le 0 \rightarrow (x+2) \le 0 \rightarrow x + 2 \le 0 \rightarrow x \le -2$$

ESERCIZI
DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

1) $3x^3+2x^2+3x+2<0$ $\left[x<-\frac{2}{3}\right]$

2) $x^4+x^3<0$ $[-1<x<0]$

3) $x^4-1>0$ $[x<-1\cup x>1]$

4) $2x^3-x^2-2x+1>0$ $\left[-1<x<\frac{1}{2}\cup x>1\right]$

5) $6x^3+x^2-11x-6\geq 0$ $\left[-1\leq x\leq -\frac{2}{3}\cup x\geq \frac{3}{2}\right]$

6) $x^2-2x^3\leq 0$ $\left[x\geq \frac{1}{2}\quad \cup \quad x=0\right]$

7) $x^3+1>0$ $[x>-1]$

8) $x^3+2x^2-9x-18>0$ $[-3<x<-2\quad \cup \quad x>3]$

9) $x^3-4x^2\leq 0$ $[x\leq 4]$

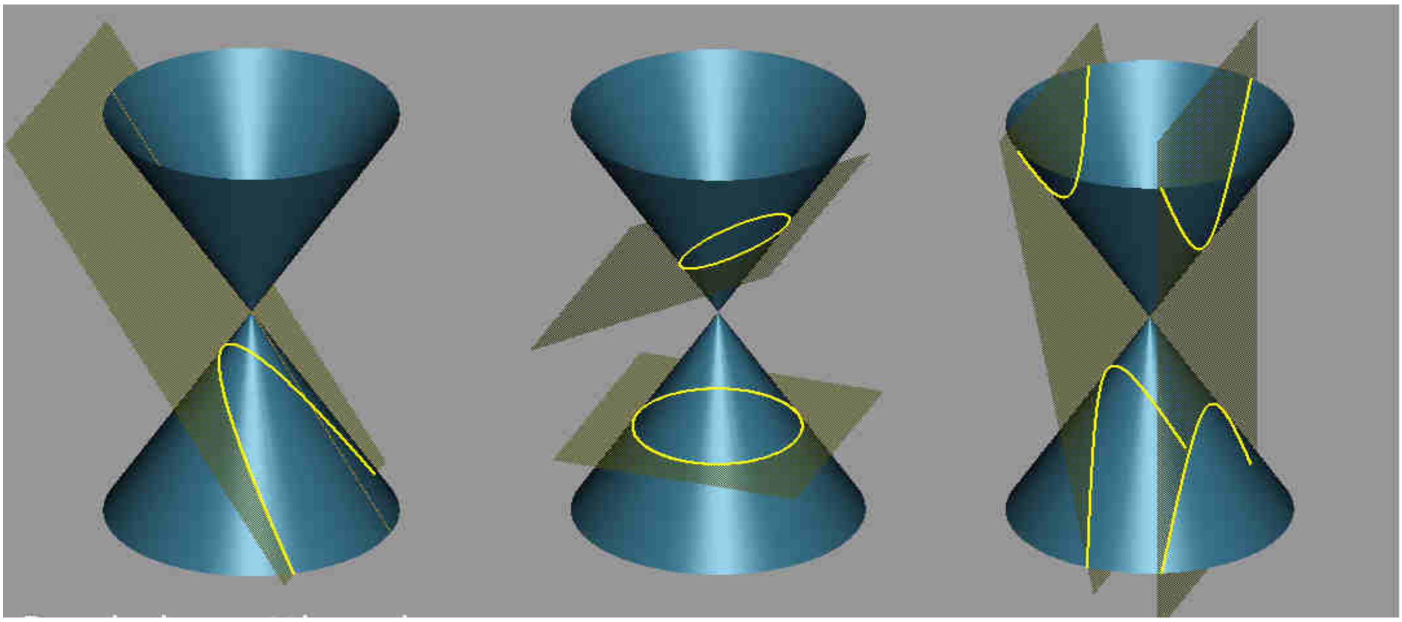
10) $x^5-x^2>0$ $[x>1]$

11) $(4-x^2)\cdot(1+x)<0$ $[-2<x<-1\quad \cup \quad x>2]$

12) $(x^2-9)\cdot(2+x)>0$ $[-3<x<-2\quad \cup \quad x>3]$

13) $(1-x^2)\cdot(5-x)<0$ $[x<-1\quad \cup \quad 1<x<5]$

Le coniche



Circonferenza, parabola, ellisse ed iperbole sono dette “**coniche**” poiché si possono ottenere sezionando un cono a doppia falda.

Precisamente:

- si ottiene un’**ellisse** se il piano incontra tutte le generatrici e in particolare una **circonferenza** se il piano è perpendicolare all’asse di simmetria del cono;

- si ottiene una **parabola** se il piano è parallelo ad una generatrice del cono;

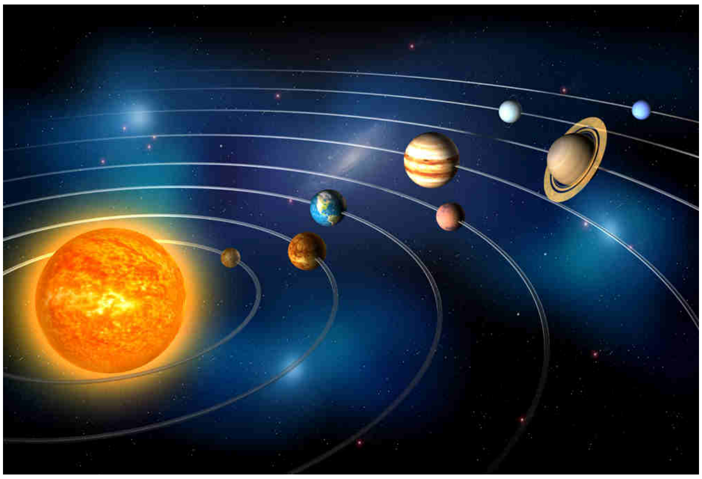
- si ottiene un’**iperbole** se il piano è parallelo a due generatrici del cono.

Noi in realtà studieremo queste curve come “luoghi” (insiemi) di punti aventi una data proprietà ma si può dimostrare che le sezioni del cono, a seconda dei vari casi, sono insiemi di punti che hanno proprio le proprietà di cui parleremo.

Approfondimenti sulle coniche

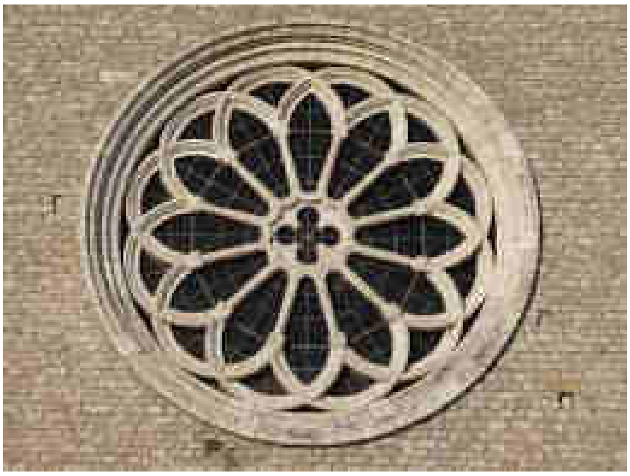
Le coniche nell'arte e nell'architettura

Le coniche nella natura



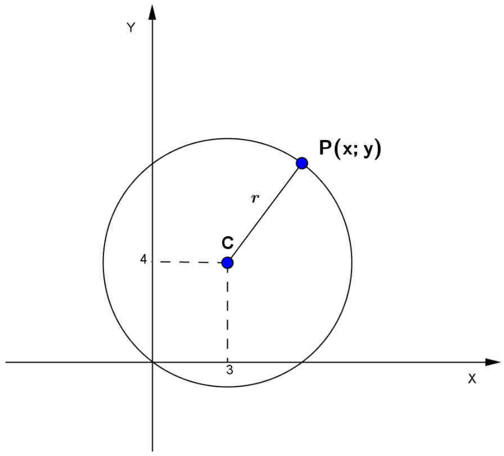
La storia delle coniche

La circonferenza nel piano cartesiano



Abbiamo già studiato la circonferenza di raggio *r* e centro C come l'insieme di punti per i quali la distanza da C è uguale a *r* : ora vogliamo studiare la circonferenza nel piano cartesiano.

Consideriamo la circonferenza in figura in cui il centro è $C(3;4)$ e il raggio $r = 5$: se indichiamo con $P(x; y)$ un punto della circonferenza avremo, per definizione, che la distanza tra P e C è uguale a 5.



Per scrivere l'equazione che rappresenta questa circonferenza basterà scrivere la proprietà di tutti i suoi punti cioè

$$\overline{PC} = 5$$

Avremo $$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 5$$

ed elevando al quadrato entrambi i membri avremo:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

In generale l'equazione di una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(x_C; y_C)$ e raggio r sarà quindi

$$\boxed{(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = r^2}$$

Sviluppando l'equazione ottenuta abbiamo:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25 \to x^2+y^2-6x-8y=0$$

In generale sviluppando l'equazione $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$ otteniamo

$$x^2-2x_Cx+x_C{}^2+y^2-2y_Cy+y_C{}^2-r^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x_Cx-2y_Cy+x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=0$$

e quindi, se poniamo $\begin{cases}-2x_C=a\\-2y_C=b\\x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=c\end{cases}$ abbiamo

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

Poiché $\begin{cases}-2x_C=a \to x_C=-\dfrac{a}{2}\\-2y_C=b \to y_C=-\dfrac{b}{2}\\x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=c \to r=\sqrt{x_C{}^2+y_C{}^2-c}\end{cases}$

avremo che il centro sarà $\boxed{C\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2}\right)}$ e il raggio risulterà $\boxed{r=\sqrt{x_C{}^2+y_C{}^2-c}}$.

Infatti nel nostro caso da $x^2+y^2-6x-8y=0 \to C\left(-\dfrac{a}{2}=3;-\dfrac{b}{2}=4\right)$; $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Osservazioni

Abbiamo visto che l'equazione di una circonferenza è molto diversa da quella di una retta: è un'equazione di 2° grado in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali (se sono diversi da 1 si può dividere tutta l'equazione per il valore del coefficiente di x^2 e y^2) e in cui manca il termine xy.

Inoltre, per avere una circonferenza "reale", dovrà essere

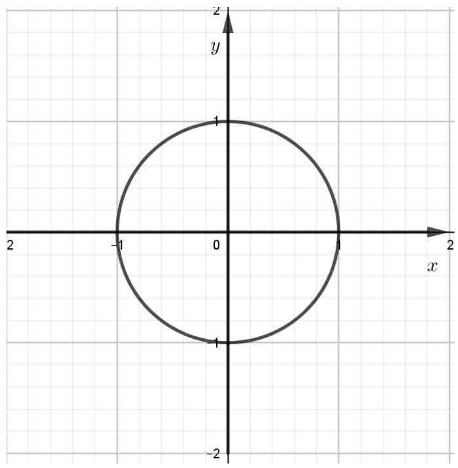
$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c\geq 0 \qquad \text{poiché } r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

Se r = 0 la circonferenza "degenera" in un solo punto.

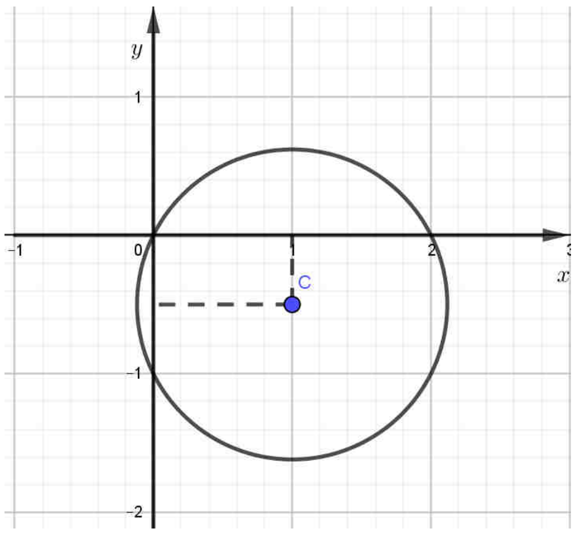
Esempi

1) $x^2+y^2=1$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e $r=1$.

In generale $x^2+y^2=r^2$ e l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e raggio r.



2) $2x^2+2y^2-4x+2y=0 \rightarrow x^2+y^2-2x+y=0$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(1;-\frac{1}{2})$ e raggio $r=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



In generale se nell'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si ha $c=0$ cioè se l'equazione è del tipo $x^2+y^2+ax+by=0$ allora la circonferenza passa per l'origine $O(0;0)$ poiché $(0;0)$ è un punto che verifica l'equazione.

3) $x^2+y^2+4=0$ non rappresenta una circonferenza reale perché calcolando il raggio troviamo $r=\sqrt{-4}\notin\Re$.

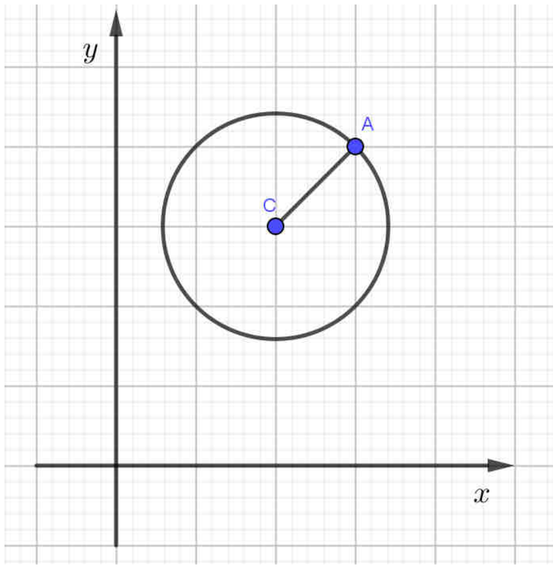
Problemi

1) Determina l'equazione della circonferenza avente **centro C assegnato** e **passante per un punto A assegnato**.

   E' chiaro che basterà calcolare raggio = $\overline{AC}$.

   Esempio: determina l'equazione della circonferenza avente centro $C(2;3)$ e passante per il punto $A(3;4)$.
   Abbiamo $\overline{CA} = \sqrt{2}$.
   Quindi l'equazione della circonferenza risulta:

   $$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$



2) **Determina l'equazione della circonferenza C passante per tre punti A,B,C non allineati**

   Il centro della circonferenza si può trovare intersecando l'asse del segmento AB con l'asse del segmento BC: così facendo, infatti, troviamo un punto che è equidistante da A,B,C e quindi è il centro della circonferenza.
   Infine per trovare il raggio basta calcolare la distanza del centro trovato da uno qualsiasi dei tre punti.

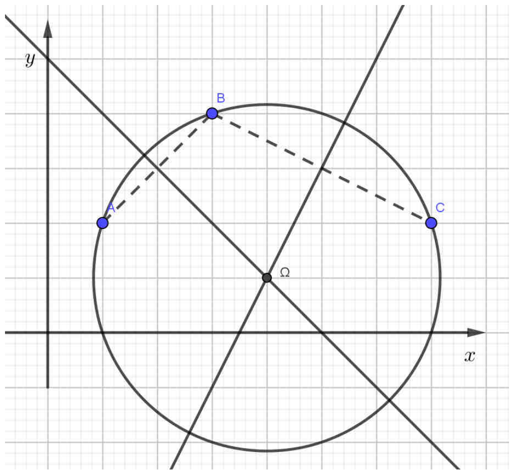
   Esempio: determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1;2),\quad B(3;4),\quad C(7;2)$.

   - Determiniamo l'asse di AB: il punto medio ha coordinate $(2;3)$ e l'inclinazione dell'asse è $m=-1$ e quindi abbiamo
   $$y-3=-(x-2) \to y=-x+5$$

   - Determiniamo l'asse di BC: il punto medio ha coordinate $(5;3)$ e l'inclinazione è $m=2$ e quindi abbiamo
   $$y-3=2(x-5) \to y=2x-7$$

Intersechiamo i due assi indicando con Ω il centro della circonferenza (non possiamo usare la lettera C perché faremo confusione con il punto C assegnato).

$$\Omega\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \rightarrow \ldots\ldots \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$



A questo punto determiniamo il raggio calcolando , per esempio, la distanza $\overline{A\Omega} = \sqrt{10}$ e in conclusione l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Naturalmente possiamo anche sviluppare i calcoli:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

Nota

Questo problema può essere risolto anche sostituendo le coordinate dei tre punti nell'equazione generale $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e risolvendo il sistema.

$$\begin{matrix} A(x_A, y_A) \rightarrow \\ B(x_B, y_B) \rightarrow \\ C(x_C, y_C) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x_A{}^2 + y_A{}^2 + ax_A + by_A + c = 0 \\ x_B{}^2 + y_B{}^2 + ax_B + by_B + c = 0 \\ x_C{}^2 + y_C{}^2 + ax_C + by_C + c = 0 \end{cases}$$

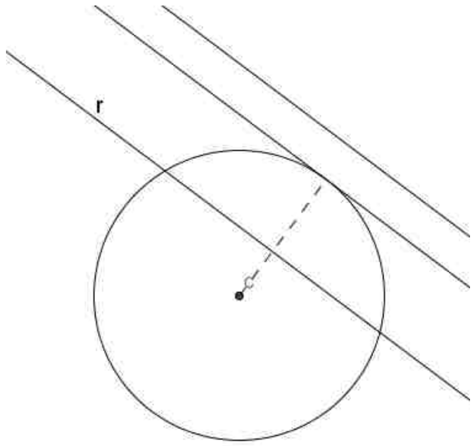
Le incognite sono *a,b,c*.

I calcoli sono in genere abbastanza faticosi e quindi **è preferibile il primo metodo**.

Retta e circonferenza

Ricordiamo che se intersechiamo una retta con una circonferenza possiamo avere:

- nessun punto di intersezione se r è esterna a $\mathcal{C}$
- 1 solo punto di intersezione (o meglio due punti coincidenti) se r è tangente a $\mathcal{C}$
- 2 punti di intersezione se r è secante a $\mathcal{C}$



Algebricamente questo significa che risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione circonferenza} \quad C \\ \text{equazione retta r} \end{cases}$$

troveremo un'equazione di 2° grado il cui Δ sarà:

$\Delta < 0$ se r è esterna a $\mathcal{C}$

$\Delta = 0$ se **r è tangente a $\mathcal{C}$** : questa viene detta "**condizione di tangenza**"

$\Delta > 0$ se r è secante a $\mathcal{C}$

Esempi

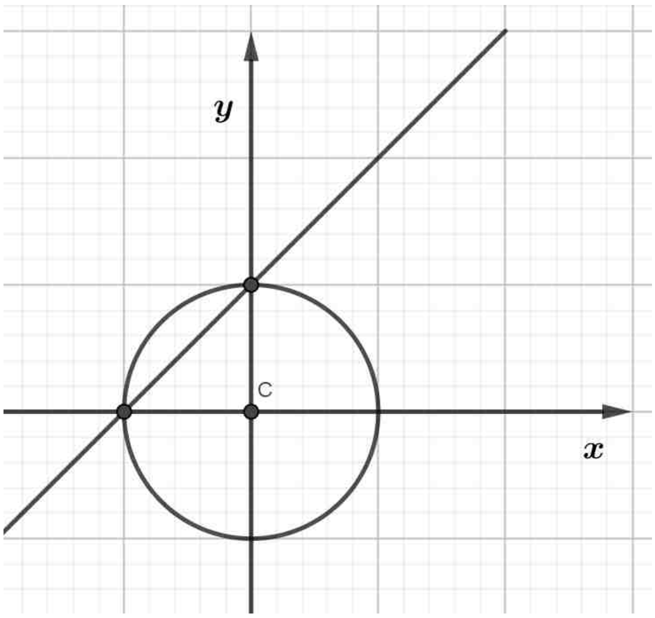
1) Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e la retta $y = x + 1$.

Disegnando sia la retta che la circonferenza vediamo che la retta è secante.

I punti di intersezione sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + (x+1)^2 = 1 \rightarrow 2x^2 + 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

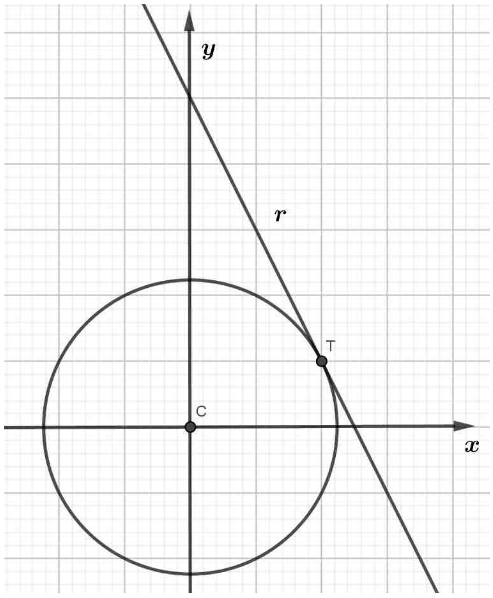


2) Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ e la retta $y = -2x + 5$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \rightarrow x^2 + (-2x+5)^2 = 5 \rightarrow 5x^2 - 20x + 20 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \\ y_1 = y_2 = 1 \end{cases}$$

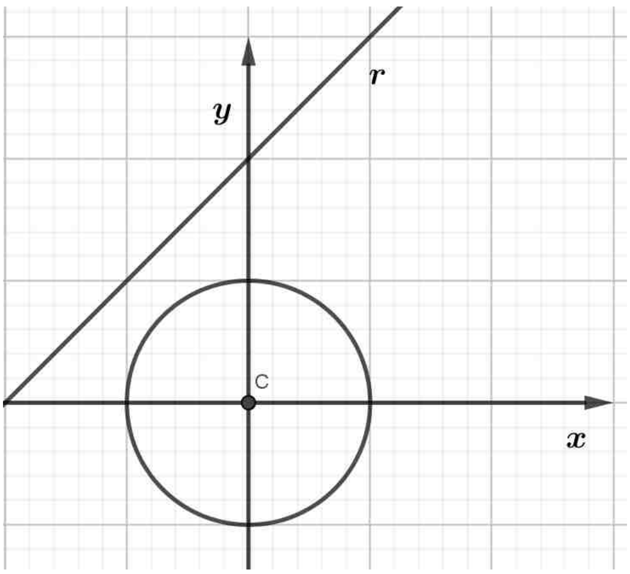


La retta risulta tangente alla circonferenza e il punto di tangenza è $T(2;1)$.

3) Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e la retta $y = x + 2$.
Risolviamo il sistema:

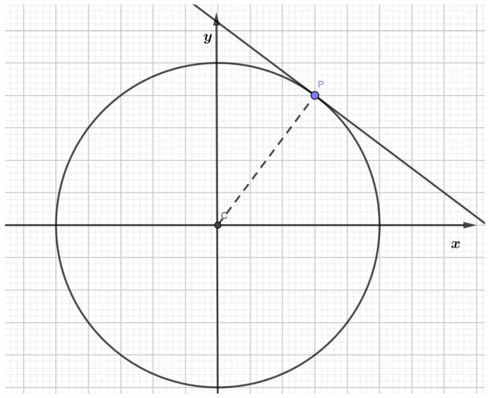
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + (x+2)^2 = 1 \rightarrow 2x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \qquad \textit{nessuna} \quad \textit{soluzione} \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Il sistema non ha nessuna soluzione e quindi la retta risulta esterna alla circonferenza.



Rette tangenti ad una circonferenza

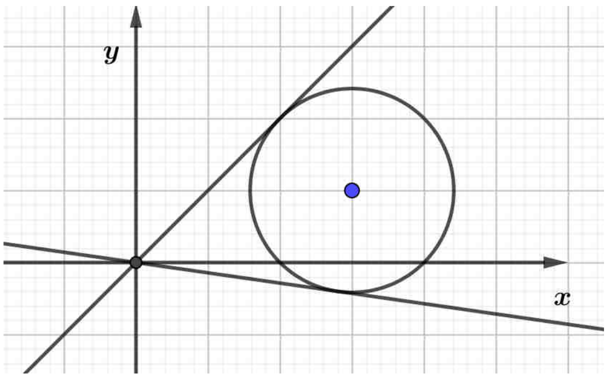
1) Data la circonferenza $\mathcal{C}\ : x^2 + y^2 = 25$ in figura e considerato il suo punto $P(3;4)$ **determiniamo la retta** t **tangente in P alla circonferenza** $\mathcal{C}$**.**



Osserviamo che la retta t è perpendicolare al raggio CP e quindi:

$$m_{CP} = \frac{4}{3} \to m_t = -\frac{3}{4} \to t : y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$$

2) Data la circonferenza $\mathcal{C}\ \ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ in figura, determiniamo le rette t_1 e t_2 tangenti alla circonferenza uscenti da $O(0;0)$.



Scriviamo l'equazione della retta generica passante per O : $y = mx$.

Consideriamo il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da questa retta "generica" passante per O.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

Iniziamo a risolverlo per sostituzione, sostituendo la y nell'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + m^2x^2 - 6x - 2mx + 8 = 0 \to (1+m^2)x^2 - 2(3+m)x + 8 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

A questo punto, per ricavare il coefficiente angolare m della tangente**, imponiamo che** $\boxed{\Delta = 0}$ in modo che ci siano due soluzioni coincidenti del sistema e quindi la retta risulti tangente alla circonferenza.

Svolgendo i calcoli abbiamo:

$$\frac{\Delta}{4} = (3+m)^2 - 8(1+m^2) = 0 \to ....7m^2 - 6m - 1 = 0 \to m_1 = 1, \quad m_2 = -\frac{1}{7}$$

$$t_1 : \ \ y = x$$

$$t_2 : \ \ y = -\frac{1}{7}x$$

ESERCIZI

CIRCONFERENZA

1) Disegna le circonferenze aventi le seguenti equazioni:

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

d) $3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$

e) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

2) Determina l'equazione della circonferenza sapendo che ha centro C(1;1) e passa per P(3;2).

$[(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5]$

3) Determina l'equazione della circonferenza che passa per (0;0) , A(4;2) B(2;2).

$[(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10]$

4) Determina l'equazione della circonferenza che passa per (0;0) A(-2;4) B(6;0) .

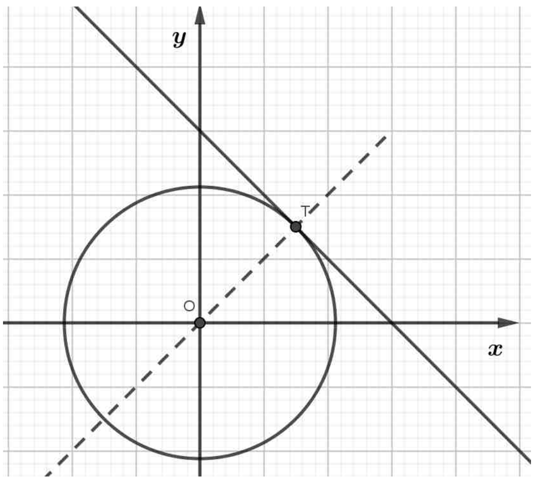
$[(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25]$

5) Determina l'equazione della circonferenza che passa per A(1;-1) B(1;3) C(-3;3) .

$[(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8]$

6) Determina l'equazione della circonferenza che ha centro C(0;0) ed è tangente alla retta $t: y = -x + 3$.

Svolgimento guidato: possiamo trovare il punto di tangenza T intersecando la retta per il centro $(0;0)$ perpendicolare a *t*. Quindi possiamo calcolare il raggio $\overline{OT}$ e scrivere l'equazione della circonferenza.



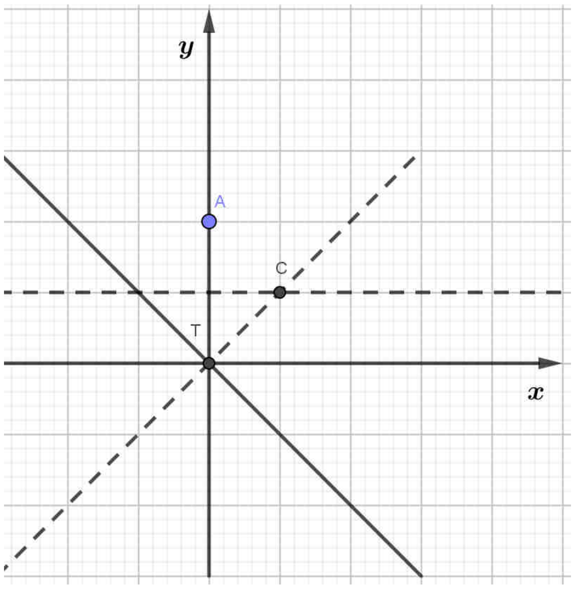
$\left[x^2 + y^2 = \frac{9}{2}\right]$

7) Determina l'equazione della circonferenza che è tangente alla retta t: $y=-x$ nel punto T(0;0) e passa per A(0;2).

Svolgimento guidato

Il centro C della circonferenza si troverà sulla retta per $T(0;0)$ perpendicolare a t ma anche sull'asse del segmento TA.

Trovato il centro, si può calcolare il raggio $\overline{CT}$ e quindi scrivere l'equazione della circonferenza.



$[x^2+y^2-2x-2y=0]$

8) Determina l'equazione della circonferenza che è tangente alla retta t: $y=2x-1$ nel punto T(1;1) e passa per A(1;-1)

$[(x-3)^2+y^2=5]$

9) Determina la tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$: $x^2+y^2+4x-2y=0$ nel suo punto T(0;2).

$[y=-2x+2]$

10) Data la circonferenza $\mathscr{C}$: $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ determina le rette tangenti ad essa uscenti da (0;0).

$[y=x \quad ; \quad y=-\frac{1}{7}x]$

11) Determina la retta tangente in (0;0) alla circonferenza di equazione $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

$[y=-\frac{3}{4}x]$

12) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ tangente in $T(1;2)$ alla retta $t: y = 2x$ e passante per il punto $A(7;4)$. Disegnala ed indica con C il suo centro.

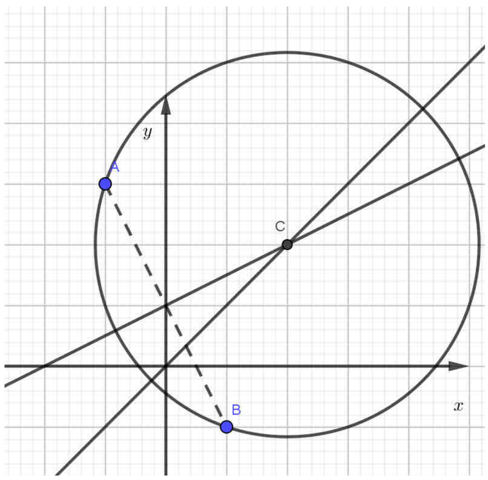
b) Determina le tangenti alla circonferenza uscenti dal punto P(15;0) e indicati con T_1 e T_2 i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero PT_1CT_2.

[$\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0$; $t_{1,2}: y = \pm\frac{1}{2}(x - 15)$; area (PT_1CT_2) = 40]

13) Determina l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ passante per A(-1; 3) e B(1; -1) e il cui centro appartiene alla retta di equazione $x - y = 0$.

Svolgimento guidato

Il centro C della circonferenza si troverà sull'asse del segmento…… e dal momento che appartiene anche alla retta $2x - y + 1 = 0$ potremo trovarlo impostando un …………



$\left[x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0\right]$

14) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici A(1;-1) B(1;3) C(-3;3) .

$\left[(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8\right]$

15) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici A(-2;0) B(2;4) C(2;0) .

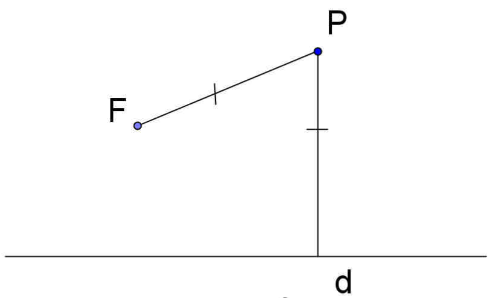
$\left[x^2 + (y-2)^2 = 8\right]$

Parabola

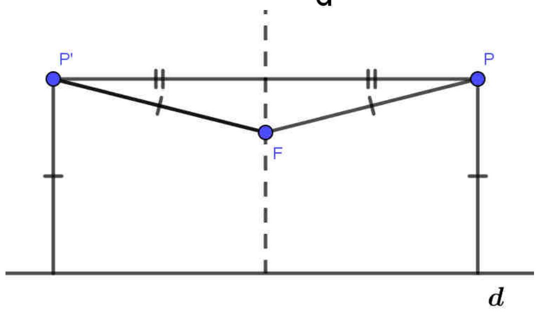
Abbiamo già visto che nel piano cartesiano il grafico dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ corrisponde ad una "parabola" con asse di simmetria parallelo all'asse y.
La parabola ha però una definizione indipendente dal sistema di riferimento:

Definizione di parabola di fuoco F e direttrice d

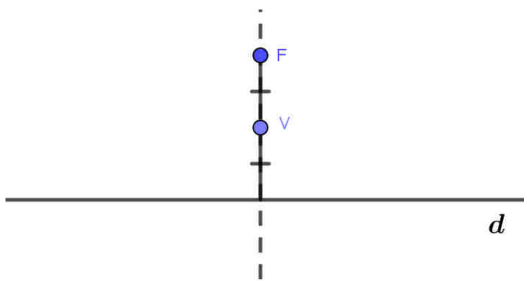
Dati nel piano una retta d (detta direttrice) e un punto $F \notin d$ (detto fuoco), si dice parabola $\mathcal{P}$ di direttrice d e fuoco F l'insieme dei punti P del piano **equidistanti** da d e da F .



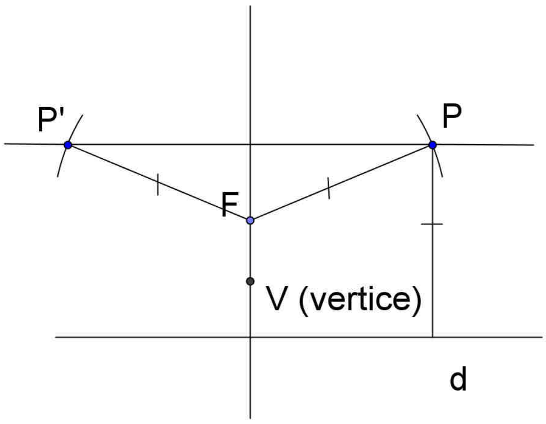
Osserviamo che se un punto $P \in \mathcal{P}$ allora anche il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta per F perpendicolare a d , appartiene alla curva: **la retta per F perpendicolare a *d* è quindi asse di simmetria della parabola**.



Il punto della parabola che si trova sull'asse di simmetria viene detto **vertice della parabola** ed è indicato con V.



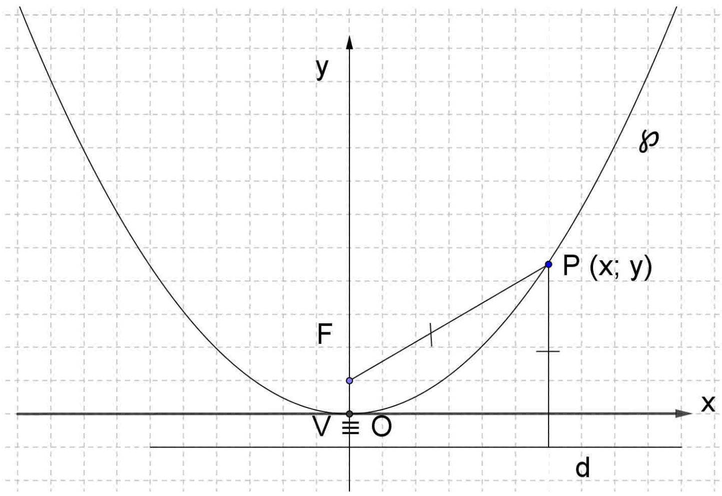
Possiamo determinare, con riga e compasso, diversi punti della curva: tracciamo una retta r parallela a d e puntiamo il compasso in F con apertura uguale alla distanza tra r e d.



Se fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse *y* sia parallelo all'asse di simmetria della parabola, indicando con $(x; y)$ le coordinate di un punto della curva e applicando la definizione, cioè ponendo la distanza di $(x; y)$ dal fuoco F uguale alla distanza del punto $(x; y)$ dalla direttrice, otteniamo proprio l'equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Esempi

1) Considera $F(0;1)$ e $d : y = -1$



Indichiamo con $P(x; y)$ un generico punto e imponiamo che sia equidistante da F e da d :

$$\overline{PF} = d(P,d)$$

Possiamo elevare al quadrato per evitare le radici quadrate e abbiamo quindi:

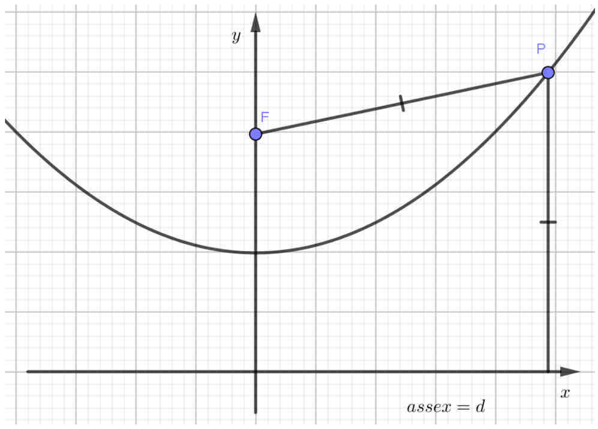
$$\overline{PF}^2 = (d(P,d))^2$$

Quindi nel nostro caso:

$$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

In conclusione l'equazione di $\mathcal{P}$ risulta $y = \frac{1}{4}x^2$.

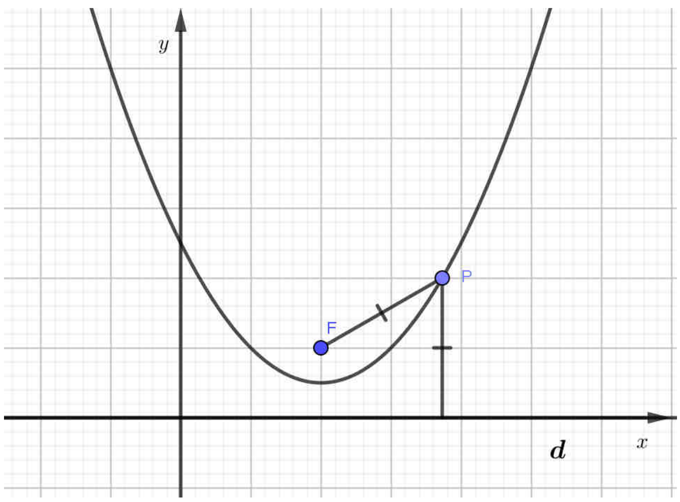
2) Determina l'equazione della parabola di fuoco $F(0;4)$ e direttrice $d: y=0$:



Applicando la definizione abbiamo:

$$x^2+(y-4)^2=y^2 \Rightarrow x^2+y^2-8y+16=y^2 \Rightarrow x^2+16=8y \Rightarrow y=\frac{1}{8}x^2+2$$

3) Determina l'equazione della parabola di fuoco $F(2;1)$ e direttrice $d: y=0$



Applicando la definizione abbiamo:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=y^2 \rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=y^2 \rightarrow 2y=x^2-4x+5 \rightarrow y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$$

Nota: infatti, ricordando che l'ascissa del vertice corrisponde a $-\frac{b}{2a}$, abbiamo:

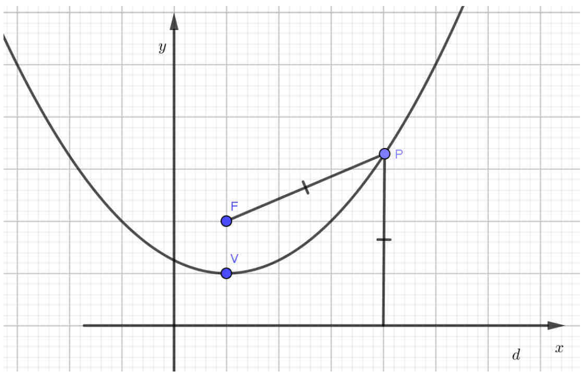
$$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{1}=2 \rightarrow y_V=2-4+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$

ed infatti il vertice, considerando la posizione del fuoco e della direttrice, risulta proprio $V\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Problemi

1) Determina l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y conoscendo: $V(1;1)$ e $F(1;2)$.

Conoscendo V e F possiamo determinare l'equazione della direttrice $\rightarrow y = 0$

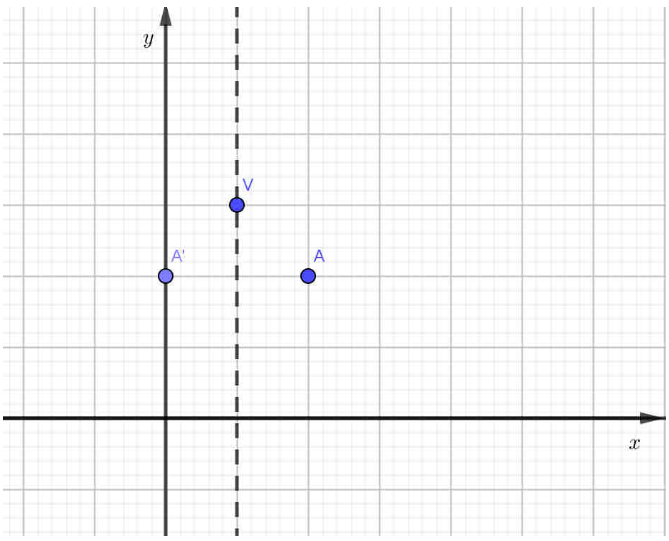


Applicando quindi la definizione abbiamo che:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = y^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = y^2 \rightarrow x^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

Nota: analogamente se conosciamo vertice e direttrice possiamo trovare il fuoco.

2) Determina l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y conoscendo vertice $V(1;3)$ e il punto $A(2;2)$ appartenente alla parabola.



Poiché l'asse di simmetria della parabola è la retta $x = 1$, se $A \in \mathcal{P}$ allora anche $A'(0;2) \in \mathcal{P}$ (simmetrico di A rispetto a x=1).

L'equazione di $\mathcal{P}$ è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ e quindi le coordinate dei punti V, A, A' verificano l'equazione: sostituendo le coordinate di V, A, A' nell'equazione generale $y = ax^2 + bx + c$ otteniamo un sistema nelle incognite *a, b, c* :

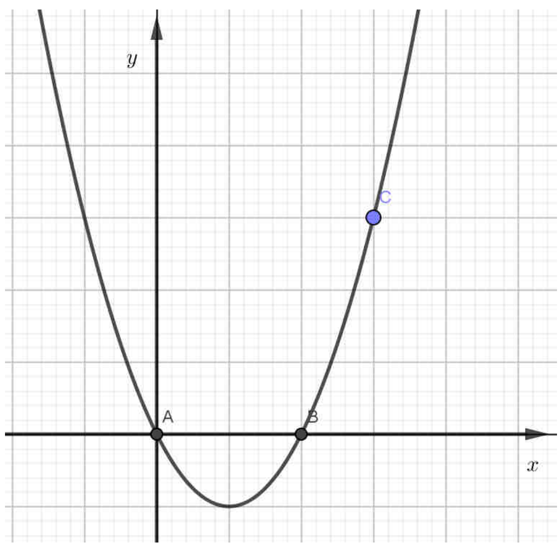
$$\begin{cases} 3 = a + b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ 2 = c \end{cases} \rightarrow \ldots\ldots \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Quindi l'equazione della parabola è $y = -x^2 + 2x + 2$.

3) Determina l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y passante per i punti $A(0;0)$ $B(2;0)$ $C(3;3)$: in modo analogo a quanto fatto nel problema precedente sostituiamo le coordinate dei punti nell'equazione generale $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \end{cases} \rightarrow \ldots\ldots \begin{cases} 4a + 2b = 0 \rightarrow b = -2a \\ 9a + 3b = 3 \rightarrow 3a + b = 1 \rightarrow 3a - 2a = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow \\ c = 0 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Quindi l'equazione è $y = x^2 - 2x$



Rette tangenti ad una parabola

Esempio 1

Dato **un punto P appartenente ad una parabola** $\mathcal{P}$ **,** con asse parallelo all'asse y, come si determina la retta per P tangente alla parabola?

Consideriamo per esempio la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ e il suo punto $P(3;2)$.
Consideriamo l'equazione di una generica retta passante per P:

$$y - 2 = m(x-3) \rightarrow y = 2 + m(x-3)$$

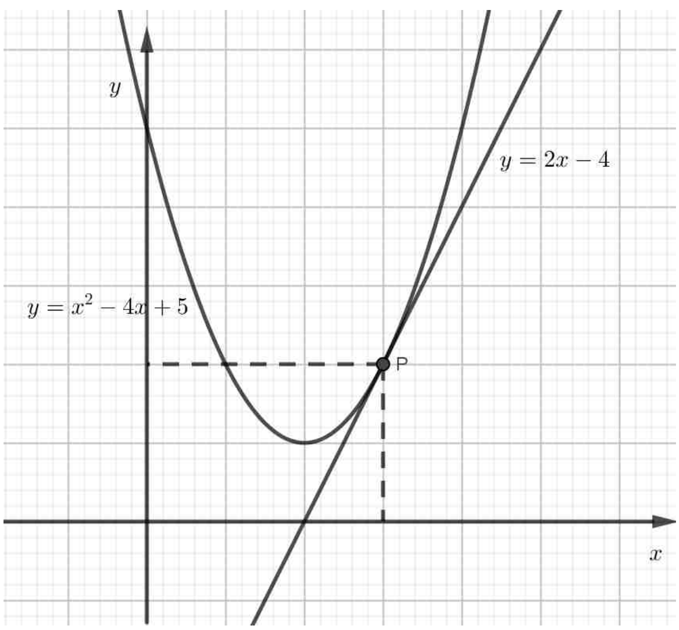
Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2 + m(x-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 + m(x-3) \rightarrow x^2 - (4+m)x + 3 + 3m = 0 \\ y = ... \end{cases}$$

Per determinare l'inclinazione della retta tangente basta imporre che l'equazione di secondo grado $x^2 - (4+m)x + 3 + 3m = 0$ abbia **discriminante uguale a zero** (si dice anche imporre la ***"condizione di tangenza***") come abbiamo fatto anche quando cercavamo le tangenti ad una circonferenza.
Abbiamo:

$$\Delta = (4+m)^2 - 4(3+3m) = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \rightarrow (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2$$

Quindi l'equazione della tangente in P alla parabola sarà: $y = 2(x-3) + 2 \rightarrow y = 2x - 4$



Esempio 2

Consideriamo : $\mathcal{P}$: $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ e il **punto esterno** alla parabola $P(0;-4)$: come si determinano le rette per P tangenti alla parabola?

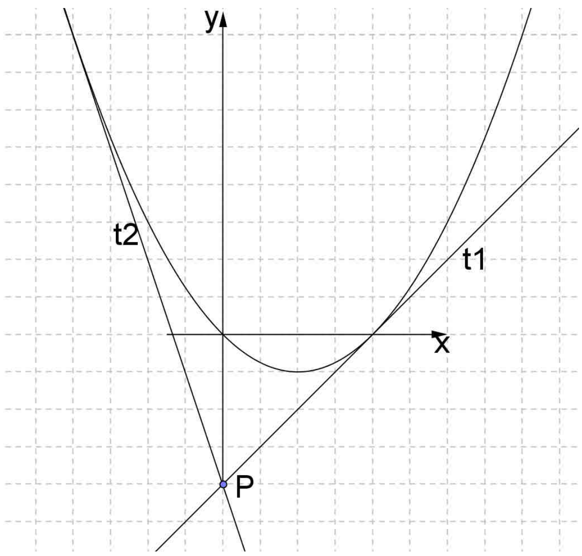
Consideriamo l'equazione di una retta generica passante per P

$$y + 4 = mx \rightarrow y = mx - 4$$

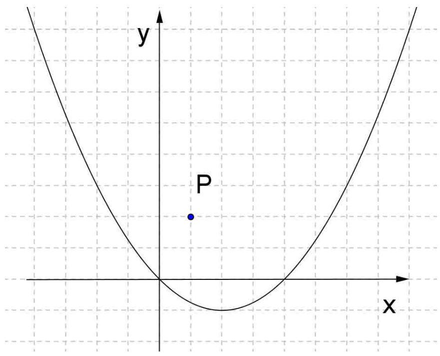
Per determinare le tangenti dobbiamo impostare il sistema e imporre **la "condizione di tangenza"**:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x \\ y = mx - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x = mx - 4 \\ .... \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4(1+m)x + 16 = 0 \\ .... \end{cases}$$

$$\Delta = 16(1+m)^2 - 64 = 0 \rightarrow ...m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} m_1 = 1 \rightarrow t_1 : y = x - 4 \\ m_2 = -3 \rightarrow t_2 : y = -3x - 4 \end{array}$$



Osservazione
Se P è "interno" alla parabola non ci sono rette tangenti.

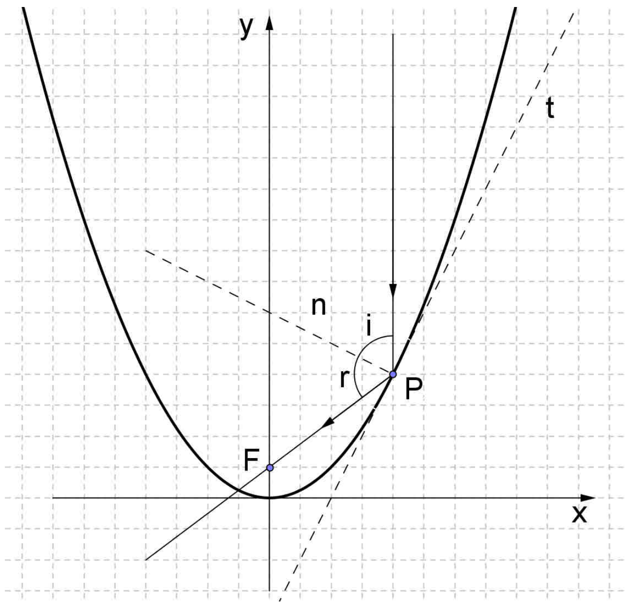


Approfondimento

Perché il "fuoco" della parabola si chiama così?

Se tracciamo una retta parallela all'asse di simmetria e dal suo punto P di intersezione con la parabola tracciamo la retta PF (F fuoco della parabola), tracciando la tangente *t* in P alla parabola e la retta perpendicolare *n* alla retta *t* , si può dimostrare che $\hat{i} = \hat{r}$ (vedi figura).

Quindi se la retta parallela all'asse di simmetria della parabola fosse un raggio di luce incidente, il raggio "riflesso" (che per la legge della riflessione forma con la perpendicolare *n* un angolo di riflessione $\hat{r}$ uguale all'angolo di incidenza $\hat{i}$) passerà per il fuoco della parabola .



In conclusione il fuoco della parabola si chiama così perché se abbiamo un fascio di raggi di luce incidenti paralleli all'asse di simmetria di uno specchio parabolico, i raggi riflessi passeranno tutti per il "fuoco" della parabola e in quel punto ci sarà una grande concentrazione di luce e di calore!

Questo vale anche se consideriamo un fascio di onde elettromagnetiche (del resto la luce è una particolare onda elettromagnetica) e ci spiega perché per concentrare un segnale usiamo le antenne "paraboliche".

ESERCIZI
PARABOLA

1) Determina l'equazione della parabola avente:

a) $F(0;0)$ $d: y=-2$ $[\ y=\frac{1}{4}x^2-1]$

b) $F(2;2)$ $d: y=3$ $[\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}]$

c) $F(0;1)$ $V(0;-1)$ $[\ y=\frac{1}{8}x^2-1]$

d) $V(3;0)$ $d: y=-3$ $[\ y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}]$

e) Asse parallelo asse y , $V(1;1)$, passante per $P(3;2)$ $[\ y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}]$

f) Asse parallelo asse y , passante per $A(1;0)$ $B(3;0)$ $C(4;3)$ $[\ y=x^2-4x+3]$

2) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $y=x^2-2x$ e determina l'equazione della tangente t a $\mathcal{P}$ in (0;0) e le equazioni delle tangenti $t_{1,2}$ uscenti dal punto P(3;-1).

$[\ t: y=-2x\ ; t_1: y=-1, t_2: y=8x-25\ ]$

3) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $y=4-x^2$ e determina le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

$[\ y=-4x+8\ \ ;\ \ y=4x+8\ ]$

4) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $y=x^2+1$ e determina le equazioni delle tangenti uscenti dall'origine.

$[\ y=\pm 2x\ ]$

5) Determina l'equazione della parabola avente fuoco $F(0;\frac{1}{2})$ e direttrice d: $y=-\frac{1}{2}$.Disegnala, indica con V il suo vertice e sia A il suo punto di ascissa x =1. Determina l'equazione della tangente t alla parabola in A e , detta B l'intersezione di t con la direttrice d , determina l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABV}$.

$[\ y=\frac{1}{2}x^2\ ; y=x-\frac{1}{2};\ area(\overset{\Delta}{ABV})=\frac{1}{4}\ ]$

6) Determina l'equazione della parabola avente fuoco $F(0;1)$ e direttrice d: $y=3$. Disegnala, indica con V il suo vertice e sia P il suo punto di ascissa x = 2. Determina l'equazione della tangente t alla parabola in P.

$[\ y=-\frac{1}{4}x^2+2\ \ y=-x+3\ ]$

7) Un'azienda vinicola vuole lanciare un prodotto di lusso e pensa a una produzione limitata di bottiglie da offrire sul mercato ogni anno. I costi di investimento e pubblicitari si traducono in un costo fisso di € 300 000 all'anno. Il costo per la produzione di ogni bottiglia è di € 25. Il prezzo di vendita di ogni bottiglia dipende dal numero di bottiglie messo in commercio: trattandosi infatti di un prodotto di lusso, più bottiglie vengono messe in vendita e minore deve essere il loro prezzo. Quindi, il prezzo di vendita p è funzione del numero x di bottiglie messe in commercio: $p(x) = 120 - 0{,}004x$.

a. Determina una funzione che esprima, in euro, il costo totale C di produzione all'anno.

[$C(x) = 300000 + 25x$]

b. Determina una funzione che esprima, in euro, il ricavo R all'anno, supponendo che tutte le bottiglie prodotte siano vendute. [$R(x) = 120x - 0{,}004x^2$]

c. Per quale numero di bottiglie prodotte e vendute si ha il massimo guadagno? [11 875]

8) Una compagnia aerea decide di stabilire il prezzo del biglietto di un volo (per persona) nel seguente modo: 200 euro più 10 euro per ogni posto che resterà libero. L'aereo dispone di 150 posti. Quanti posti devono restare liberi perché la compagnia ottenga il massimo ricavo?

[65 posti]

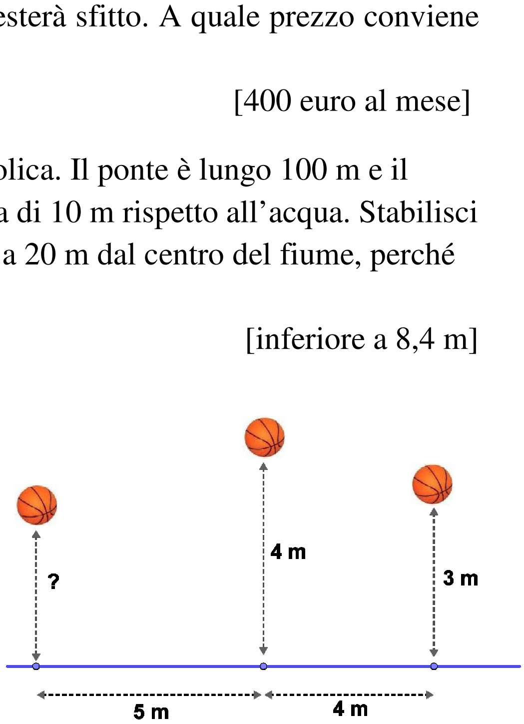
9) Si deve decidere a quale prezzo affittare 20 appartamenti. In base alle esperienze precedenti, ci si aspetta che, al prezzo di 300 euro al mese, tutti gli appartamenti verranno affittati mentre, per ogni aumento di 25 euro al mese, un appartamento resterà sfitto. A quale prezzo conviene affittare gli appartamenti per ottenere il massimo ricavo?

[400 euro al mese]

10) Un ponte su un fiume è formato da una sola arcata parabolica. Il ponte è lungo 100 m e il punto centrale dell'arcata parabolica è posto ad un'altezza di 10 m rispetto all'acqua. Stabilisci quale può essere l'altezza di un'imbarcazione che naviga a 20 m dal centro del fiume, perché riesca a passare sotto il ponte.

[inferiore a 8,4 m]

11) Un giocatore di basket tira un pallone che, seguendo una traiettoria parabolica, va a canestro. La massima altezza raggiunta dalla palla è 4 m.
In base ai dati forniti, determina a quale altezza rispetto al terreno di gioco il pallone è partito dalle mani del giocatore approssimando il risultato ad una cifra decimale.



[2,4 m]

SCHEDA DI LAVORO 1

Riportiamo qualche frase da una lettera di Vincenzo Viviani, amico e discepolo di Galileo:

"*Trovavasi Galileo in età di venti anni circa, intorno all'anno 1583, nella città di Pisa …; essendo un giorno nel duomo di quella città, … caddegli in mente d'osservare dal moto di una lampada, che era stata allontanata dal perpendicolo, se per avventura i tempi delle andate e tornate di quella fossero uguali, tanto per archi grandi che per archi minimi…*".

Queste osservazioni, fatte misurando il tempo con il battito del polso, mostrarono a Galileo che le oscillazioni di uno stesso pendolo hanno all'incirca la stessa durata.

Studi successivi hanno dimostrato che vale per un pendolo la seguente legge:

$$L = 0,25 \cdot T^2$$

- L indica la lunghezza del pendolo (misurata in metri)
- T indica la durata di un'oscillazione completa (misurata in secondi).

1) Rappresenta la legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse T e sull'asse delle ordinate le lunghezze L.

2) Quale lunghezza deve avere un pendolo per battere i secondi?

....

SCHEDA DI LAVORO 2

Lo spazio di frenata s di un'automobile è proporzionale al quadrato della velocità v.

Eseguendo una prova di frenata, si trova che un'auto riesce a fermarsi in 8 metri, quando viaggia alla velocità di 40 Km/h.

1) Qual è la legge che lega s a v, nel caso dell'auto esaminata?

…………………………………………………………………….

2) Rappresenta la legge su un piano cartesiano, riportando sull'asse delle ascisse le velocità v e sull'asse delle ordinate gli spazi di frenata s.

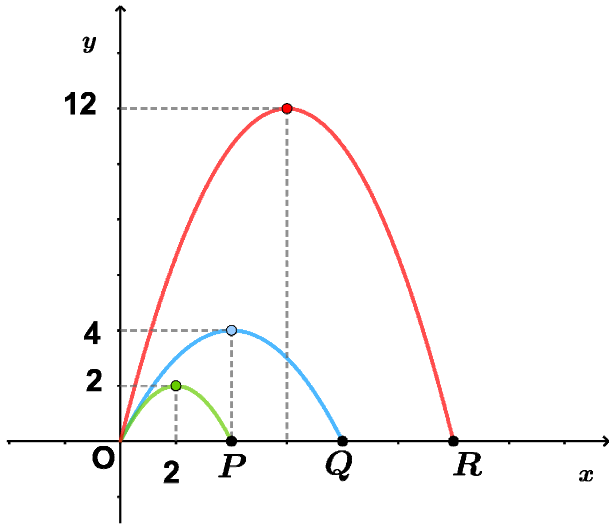
3) La stessa auto, durante un incidente, riesce a fermarsi in 24.5 m; qual'era la velocità a cui procedeva l'auto?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

SCHEDA DI LAVORO 3

1) In figura sono rappresentate le traiettorie paraboliche di tre getti d'acqua, riferiti a un piano cartesiano ortogonale con l'origine coincidente con il punto da cui fuoriesce il getto; *x* e *y* sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata, in metri, del getto. Il getto d'acqua colorato verde raggiunge l'altezza massima, uguale a 2 m, in un punto di ascissa x=2; il getto colorato azzurro raggiunge l'altezza massima, uguale a 4 m, in un punto di ascissa x=4; il getto d'acqua rosso raggiunge l'altezza massima di 12 m. I punti P, Q, R rappresentano i tre punti in cui i getti d'acqua ricadono a terra.



a. Determina le equazioni delle parabole che rappresentano le traiettorie dei due getti colorati in verde e in azzurro.

………………………………………………………………………………………….............

………………………………………………………………………………………….............

b. Determina la distanza tra i due punti P e Q.

………………………………………………………………………………………….............

c. Sapendo che la distanza tra Q ed R è uguale alla distanza tra P e Q, determina l'equazione della parabola che rappresenta la traiettoria del getto in rosso.

………………………………………………………………………………………….............

SCHEDA DI LAVORO 4

Una pallavolista colpisce in tuffo la palla, a 4 m di distanza dalla rete (considera quindi che la **palla** sia praticamente arrivata **a terra**).

La palla segue una traiettoria parabolica, passa esattamente sopra la rete a un'altezza di 3 m da terra, quindi ricade nel campo avversario a 8 m dalla rete.

1) Schematizza la situazione con un disegno.

2) Dopo avere introdotto un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

a. Scrivi l'equazione della parabola che rappresenta la traiettoria della palla;

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

b. Determina l'altezza massima raggiunta dalla palla nella sua traiettoria.

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

Ellisse

Definizione

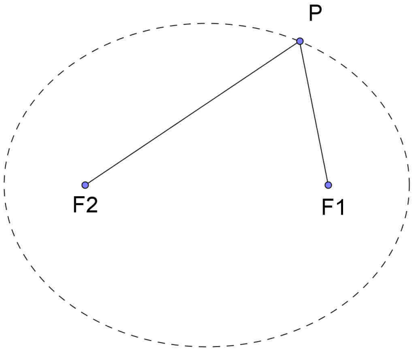
Dati due punti F_1 e F_2 si dice ellisse $\mathcal{E}$ il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la somma delle distanze da F_1 e F_2 cioè tali che

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante}$$

F_1 e F_2 si dicono fuochi dell'ellisse.

Osservazioni

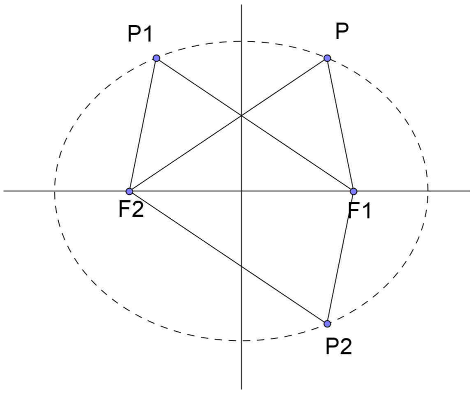
1) Dati F_1 e F_2 e il valore della costante (che deve essere maggiore di $\overline{F_1F_2}$) possiamo tracciare l'ellisse corrispondente in questo modo: prendiamo uno spago di lunghezza uguale alla costante assegnata e fissiamone le estremità ai due fuochi.
Tenendolo teso con un lapis, la punta del lapis scorrendo ci darà il disegno dell'ellisse.



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{lunghezza spago costante}$$

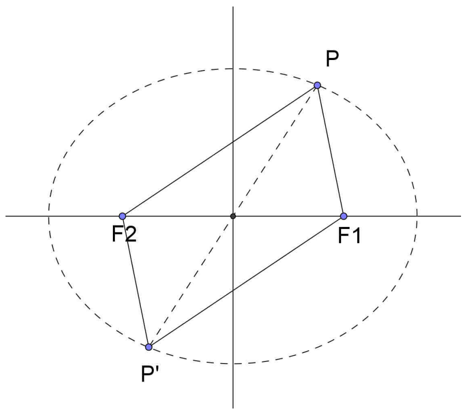
Vediamo quindi che l'ellisse è una curva chiusa, simile ad una circonferenza un po' schiacciata.

2) Osserviamo che l'ellisse possiede due assi di simmetria: la retta passante per F_1 e F_2 e l'asse del segmento F_1F_2.

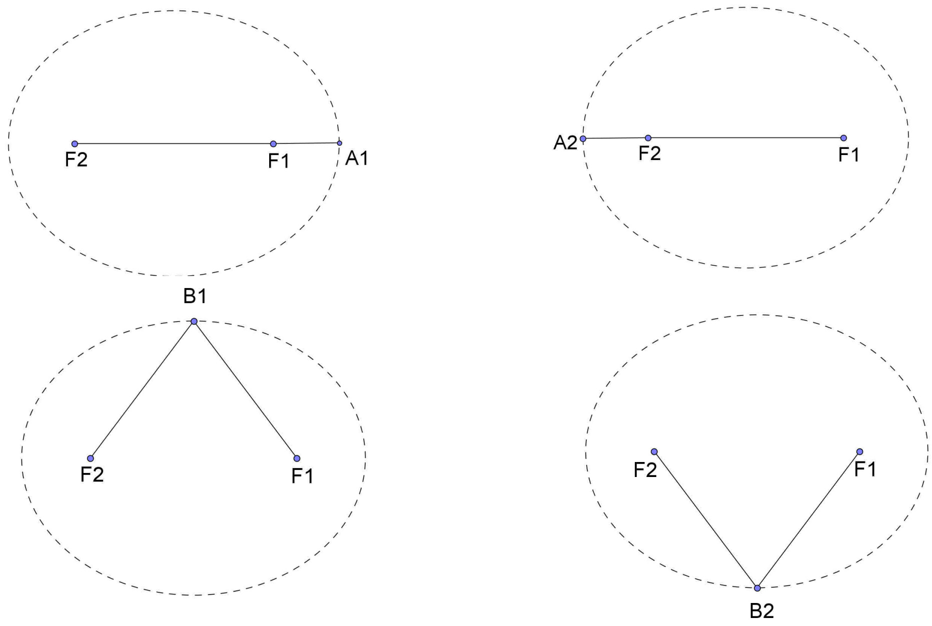


Infatti se P$\in \mathcal{E}$ anche P_1 (simmetrico di P rispetto all'asse di F_1F_2) e P_2 (simmetrico di P rispetto alla retta per F_1 e F_2) appartengono all'ellisse.

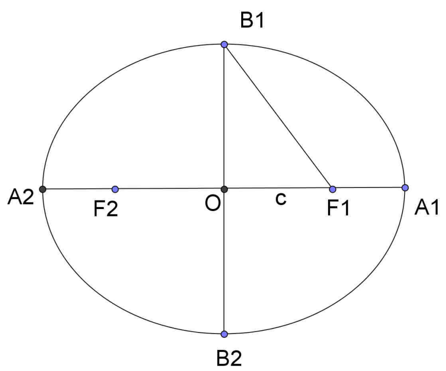
Inoltre il punto di incontro degli assi di simmetria è centro di simmetria dell'ellisse (cioè se P$\in \mathcal{E}$ anche P' $\in \mathcal{E}$) e viene chiamato "centro" dell'ellisse.



3) Osserviamo che, facendo scorrere il lapis, ci sono 4 posizioni "estreme" cioè quattro punti dell'ellisse che vengono chiamati "vertici" dell'ellisse.



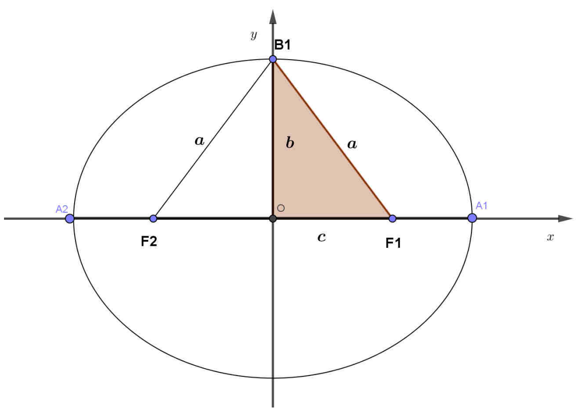
Osserviamo che $\overline{A_1A_2}$ = lunghezza dello spago = costante e che risulta maggiore di $\overline{B_1B_2}$.



$\overline{A_1A_2}$ viene detto asse maggiore (contiene i fuochi)

$\overline{B_1\,B_2}$ viene detto asse minore

4) Se consideriamo un vertice sull'asse minore, per esempio B_1, dal momento che $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2}$ e la somma delle distanze corrisponde alla lunghezza dell'asse maggiore, applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{OF_1B_1}$ avremo:



$c^2 = (\text{ semiasse maggiore })^2 - (\text{ semiasse minore })^2$

a = semiasse maggiore

b = semiasse minore

c = semidistanza focale

5) La "forma" più o meno schiacciata dell'ellisse dipende dal rapporto tra $\overline{F_1F_2}$ (distanza focale) e la costante assegnata.

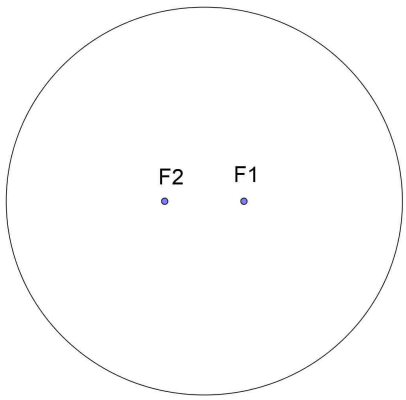
Si definisce **eccentricità e** dell'ellisse

$$e = \frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse maggiore}}$$

Poiché la semidistanza focale è minore del semiasse maggiore si ha:

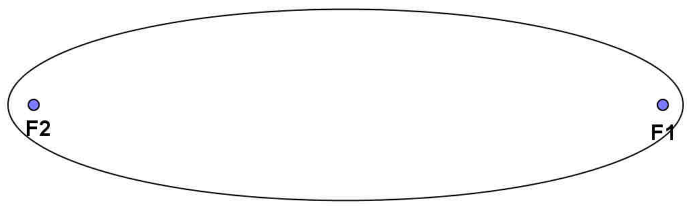
$$0 < e < 1$$

- Se $\overline{F_1F_2}$ è molto minore della costante (cioè c molto minore del semiasse maggiore) si ottengono ellissi piuttosto "tonde" (simili ad una circonferenza) e l'eccentricità risulta molto vicina a 0.



Caso limite $e = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow F_1 \equiv F_2$ e si ha una circonferenza.

- Se $\overline{F_1F_2}$ è molto vicino (anche se minore) al valore della costante si hanno ellissi "schiacciate" e l'eccentricità è vicina a 1.



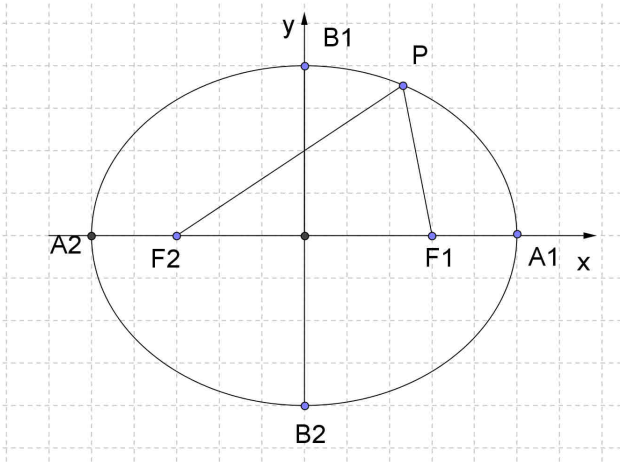
Caso limite : $e = 1 \Leftrightarrow c = semiasse.maggiore \Rightarrow$ semiasse minore = 0 e si ha il segmento F_1F_2.

L'ellisse nel piano cartesiano

L'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano dipenderà da come si fissa il sistema di riferimento. Noi tratteremo solo il caso più semplice in cui gli assi di simmetria dell'ellisse coincidono con gli assi coordinati.

Ellisse con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati

a) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse x (quindi l'asse maggiore di $\mathcal{E}$ è sull'asse x).
Facciamo un esempio:



$F_1(3;0)$
$F_2(-3;0)$

costante = asse maggiore =10

Possiamo disegnare l'ellisse poiché sapendo che

$$c^2 = (\text{ semiasse maggiore })^2 - (\text{ semiasse minore })^2$$

otteniamo che semiasse minore = 4.

Per ricavare l'equazione di $\mathcal{E}$ impostiamo la definizione:

$$P(x;y) \ : \ \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 100 - 20 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$$

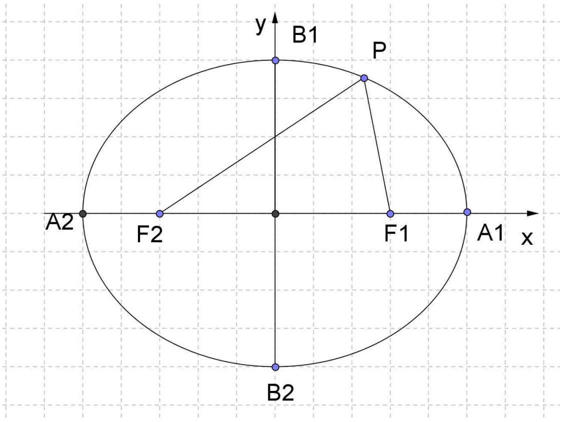
$$20 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 100 + 12x \Rightarrow 5 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25[(x+3)^2 + y^2] = (25+3x)^2 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Dividendo entrambi i membri per 400 abbiamo: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Generalizziamo utilizzando le lettere: consideriamo $F_{1,2}(\pm c;0)$ e indichiamo con a e b i due semiassi.

Nel nostro caso $a > b$ poiché i fuochi si trovano sull'asse x.



$F_{1,2}$ ($\pm$ c ; 0)

$A_{1,2}(\pm a;0)$

$B_{1,2}$ (0 ; $\pm$ b)

$a > b$

$c^2 = a^2 - b^2$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$

$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$

$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$

$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + c^2x^2 + 2ca^2x$

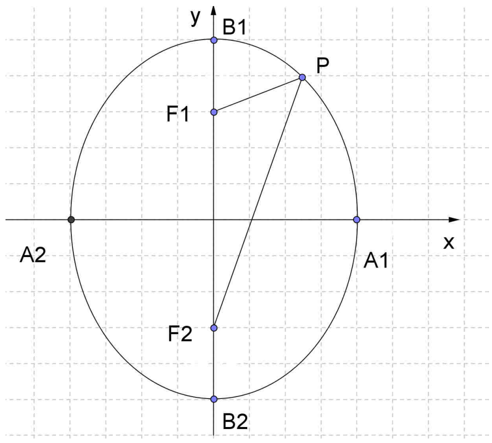
$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Ma $a^2 - c^2 = b^2$ e quindi: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividendo entrambi i membri per a^2b^2 abbiamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse y : in questo caso l'asse maggiore dell'ellisse è $\overline{B_1B_2}$ cioè $b > a$ e $c^2 = b^2 - a^2$.



$F_{1,2}$ $(0; \pm c)$

$A_{1,2}$ $(\pm a\ ; 0)$

$B_{1,2}$ $(0; \pm b)$

$b > a$

$c^2 = b^2 - a^2$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$$

Sviluppando in modo analogo a quanto fatto in a) otteniamo ancora $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (avendo sostituito $b^2 - c^2 = a^2$).

In conclusione **l'equazione di un'ellisse i cui assi di simmetria coincidono con gli assi coordinati risulta**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

dove a **e** b **sono i semiassi dell'ellisse**

se $a > b$ allora i fuochi $F_{1,2}(\pm c\ ; 0)$ appartengono all'asse x ($c^2 = a^2 - b^2$)
se $b > a$ allora i fuochi $F_{1,2}$ $(0; \pm c)$ appartengono all'asse y ($c^2 = b^2 - a^2$)

Poiché l'eccentricità $e = \dfrac{c}{semiasse \quad maggiore}$ avremo

- se $a > b \Rightarrow e = \dfrac{c}{a}$
- se $b > a \Rightarrow e = \dfrac{c}{b}$

Problemi

Disegnare un'ellisse di equazione assegnata

Per disegnare un'ellisse occorre conoscere i suoi semiassi. Se l'equazione è data nella forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ è molto semplice risalire ad a e b .

Esempi

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow \quad a=5 \quad b=4$

Se l'equazione non si presenta nella forma "normale" possiamo fare dei passaggi per riportarcela.

2) $x^2+16y^2=16 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+y^2=1 \Rightarrow a=4 \quad b=1$

3) $4x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \quad b=1$

4) $9x^2+4y^2=16 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a=\frac{4}{3} \quad b=2$

Determinare l'equazione di un'ellisse

a*) Conoscenza di un fuoco e di un vertice*

Esempio: $F_1(2;0) \quad A_1(3;0)$

Quindi $c=2 \quad a=3$ e poiché i fuochi appartengono all'asse x $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=9-4=5$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

b) *Conoscenza di un fuoco e dell'eccentricità*

Esempio: $F_1(3;0) \quad e=\frac{1}{2}$

Poiché $F_1 \in$ asse x $e=\frac{c}{a}$ e quindi $\frac{1}{2}=\frac{3}{a} \Rightarrow a=6$.

Inoltre $b^2=a^2-c^2=36-9=27$ e quindi $\mathcal{E}: \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

ESERCIZI
ELLISSE

I) Disegna le seguenti ellissi e determina vertici e fuochi

1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ [$a=2\;\; b=1\;\; F_{1,2}(\pm\sqrt{3};0)$]

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ [$a=3\;\; b=4\;\; F_{1,2}\left(0;\pm\sqrt{7}\right)$]

3) $4x^2+9y^2=36$ [$a=3\;\; b=2\;\; F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5};0\right)$]

4) $x^2+4y^2=1$ [$a=1\;\; b=\frac{1}{2}\;\; F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$]

5) $9x^2+4y^2=1$ [$a=\frac{1}{3}\;\; b=\frac{1}{2}\;\; F_{1,2}\left(0;\pm\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$]

6) $x^2+9y^2=36$ [$a=6\;\; b=2\;\; F_{1,2}\left(\pm4\sqrt{2};0\right)$]

7) $4x^2+y^2-16=0$ [$a=2\;\; b=4\;\; F_{1,2}\left(0;\pm2\sqrt{3}\right)$]

II) Determina l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sapendo che :

8) $A_1(3;0)\;\; F_1(2;0)$ [$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$]

9) $B_2(0;-4)\;\; F_1(3;0)$ [$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$]

10) $F_{1,2}(\pm2;0)\;\; e=\frac{1}{2}$ [$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$]

11) $F_{1,2}(0;\pm3)\;\; e=\frac{1}{3}$ [$\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{81}=1$]

12) $A_1(4;0)$ fuochi $\in$ asse x ed $e=\frac{1}{4}$ [$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$]

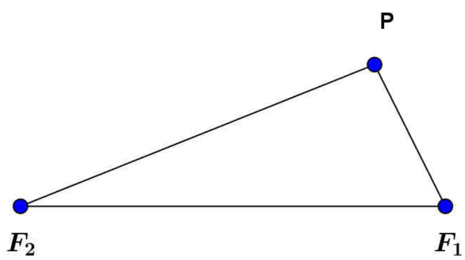
13) $A_1(1;0)$ fuochi $\in$ asse y ed $e=\frac{1}{2}$ [$x^2+\frac{3}{4}y^2=1$]

Iperbole

Definizione
Dati due punti F_1 e F_2 si dice iperbole $\Im$ il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da F_1 e F_2 cioè tali che

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = costante$$

F_1 e F_2 si dicono **fuochi** dell'iperbole.

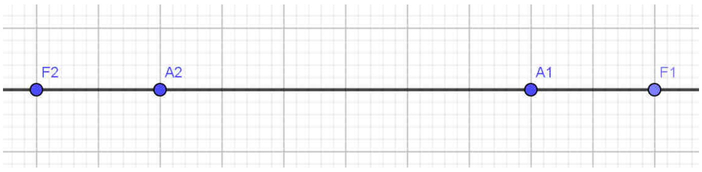


Osserviamo che deve essere $\overline{F_1F_2} > costante$ perché nel triangolo $F_1\overset{\Delta}{F_2}P$ si ha $\overline{F_1F_2} > \left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right|$ poiché un lato è sempre maggiore della differenza degli altri due.

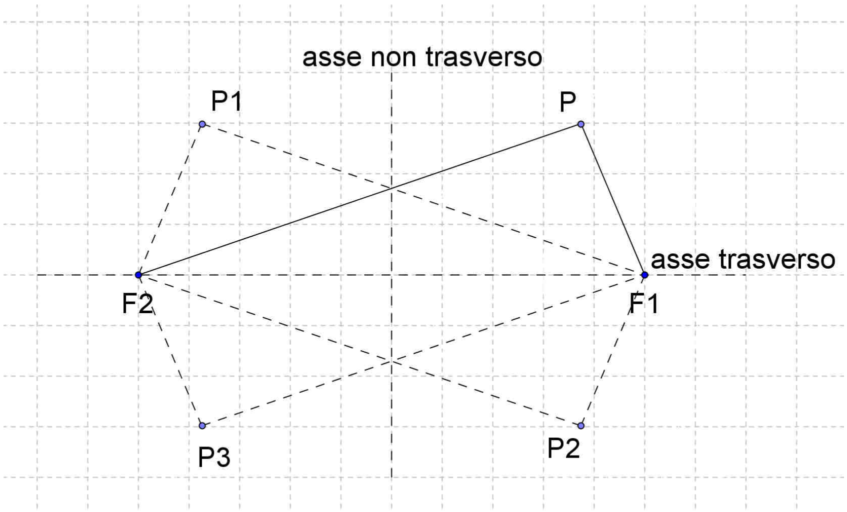
Osservazioni

Consideriamo per esempio $\overline{F_1F_2} = 10$ e la $costante = 6$.

1)Sul segmento F_1F_2 ci sono due punti A_1 e A_2 del luogo facilmente individuabili e che $\overline{A_1A_2}$ = *costante* = 6: i punti A_1 e A_2 della curva sono detti "**vertici**" dell'iperbole.



2) E' chiaro che se P appartiene all'iperbole anche P_1 , P_2, P_3 appartengono all'iperbole (vedi figura) e quindi l'iperbole è simmetrica rispetto **alla retta per** F_1 **e** F_2**,** che viene chiamata **"*asse trasverso*"** poiché interseca la curva, e all'asse del segmento F_1F_2 , che viene detto **"*asse non trasverso*"** perché non interseca la curva.



Naturalmente il punto di incontro dei due assi di simmetria risulta *centro di simmetria* dell'iperbole.

3) L'iperbole non è "limitata", come l'ellisse o la circonferenza, poiché ci sono punti della curva anche molto lontani dai fuochi dato che nella definizione del luogo è in gioco la differenza delle distanze da F_1 e F_2.

4) La"forma" dell'iperbole dipende dal rapporto tra $\overline{F_1F_2}$ e la costante (cioè la distanza tra i vertici). Questo rapporto viene chiamato **eccentricità** *e* dell'iperbole e **risulta sempre maggiore di 1** dato che $\overline{F_1F_2} > costante$

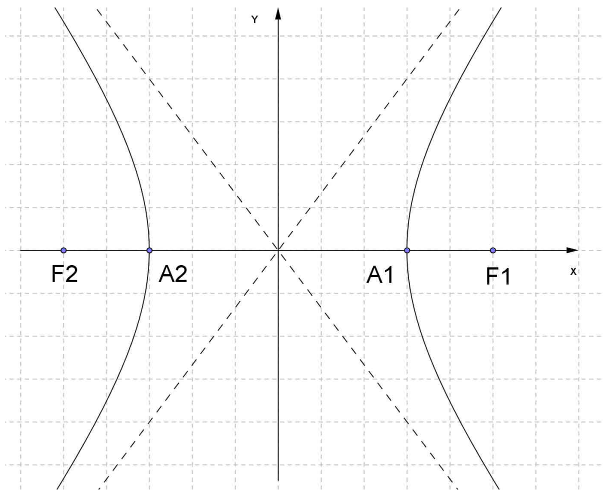
$$e = \frac{\overline{F_1F_2}}{\overline{A_1A_2}} > 1$$

L'iperbole nel piano cartesiano

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che **gli assi di simmetria dell'iperbole coincidano con gli assi coordinati.**

Esempio

Determiniamo l'equazione dell'iperbole di fuochi $F_{1,2}(\pm 5;0)$ e costante uguale a 6.



Se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 6$ cioè

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$(x-5)^2 + y^2 = (x+5)^2 + y^2 + 36 \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$20x + 36 = \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$5x + 9 = \pm 3 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$25x^2 + 81 + 90x = 9(x^2 + 10x + 25 + y^2)$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

Dividendo entrambi i membri per 144 otteniamo $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Osserviamo che i vertici sono $A_{1,2}(\pm 3;0)$ e che per determinare le coordinate degli altri punti possiamo ricavare y: $y = \pm \dfrac{4}{3} \cdot \sqrt{x^2 - 9}$

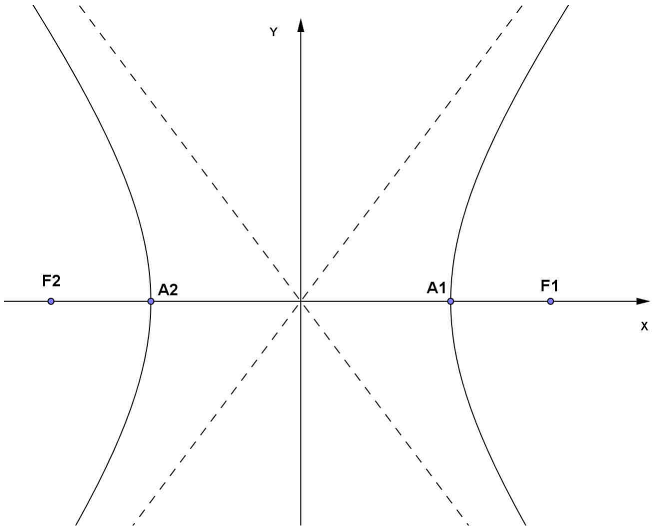
Osserviamo che quando si considera l'ascissa x molto grande in valore assoluto si ha :

$$\sqrt{x^2 - 9} \cong |x| \text{ e quindi } y = \pm \frac{4}{3}x$$

cioè l'iperbole tende ad avvicinarsi alle rette $y = \pm \dfrac{4}{3}x$.

Queste rette sono dette "**asintoti**" dell'iperbole dal greco $\alpha - \sigma \upsilon \nu - \tau \alpha \nu \gamma o$ (non-insieme-tocco) perché l'iperbole, pur avvicinandosi molto a queste rette, non le interseca.

Generalizziamo utilizzando le lettere.
Poniamo $\overline{F_1F_2} = 2c$, $\overline{A_1A_2} = 2a$ e quindi $F_{1,2}(\pm c;0)$ e $A_{1,2}(\pm a;0)$



Se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ cioè $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$$
$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$4cx + 4a^2 = \pm 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$cx + a^2 = \pm a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$c^2x^2 + a^4 + 2ca^2x = a^2 \cdot (x^2 + c^2 + 2cx + y^2)$$
$$(c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Poiché $c > a$ $\quad c^2 - a^2 > 0$ e allora possiamo indicarlo come un quadrato cioè porre

$$\boxed{c^2 - a^2 = b^2}$$

Sostituendo abbiamo: $\qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

e dividendo entrambi i membri per a^2b^2 otteniamo:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

equazione dell'iperbole con $F_{1,2}(\pm c;0)$ $A_{1,2}(\pm a;0)$.

Si ha $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ ed eccentricità $e = \dfrac{c}{a}$.

Asintoti: per determinare l'equazione degli asintoti ricaviamo la y dall'equazione dell'iperbole.

Dopo alcuni semplici passaggi otteniamo

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

quindi se $|x|$ è grande $\sqrt{x^2 - a^2} \approx |x|$ e $y \approx \pm\frac{b}{a}x$ cioè gli asintoti hanno equazione

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$$

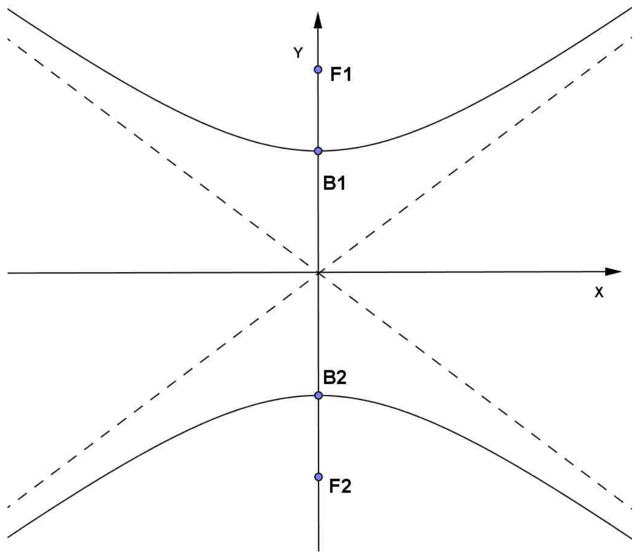
Osservazione

Abbiamo considerato i fuochi sull'asse *x*. Cosa cambia se i fuochi sono sull'asse y?

Con passaggi analoghi possiamo vedere facilmente che in questo caso, ponendo $F_{1,2}(0;\pm c)$ e i vertici $B_{1,2}(0;\pm b)$ che se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2b$ e sviluppando si ottiene , ponendo $c^2 - b^2 = a^2$, l'equazione

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$$

equazione iperbole con **asse trasverso = asse y**



- vertici $B_{1,2}(0;\pm b)$
- fuochi $F_{1,2}(0;\pm c)$ con $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$
- asintoti : $y = \pm\frac{b}{a}x$
- eccentricità $e = \frac{c}{b}$

Conclusione

In conclusione l'equazione dell'iperbole con assi di simmetria coincidenti con gli assi del sistema di riferimento sarà:

- $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **se l'asse trasverso è l'asse *x***(dove si trovano i fuochi e i vertici)
- $\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$ **se se l'asse trasverso è l'asse *y***(dove si trovano i fuochi e i vertici)

Osserviamo che, in entrambi i casi $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ e che l'equazione degli asintoti è in entrambi i casi $y = \pm\frac{b}{a}x$ mentre l'eccentricità nel primo caso è $e = \frac{c}{a}$, nel secondo $e = \frac{c}{b}$.

Problemi

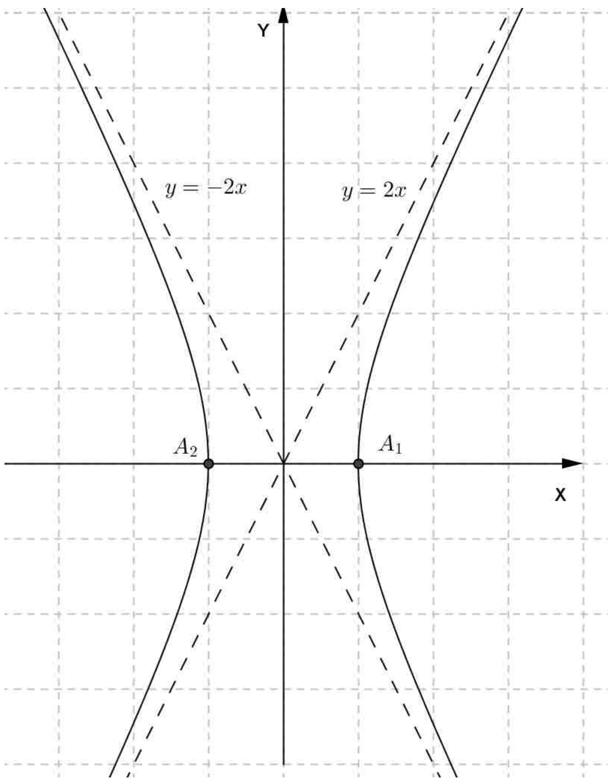
Disegnare un'iperbole di equazione assegnata

Per disegnare un'iperbole è essenziale individuare i vertici e gli asintoti.

Esempio : disegniamo l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Essendo $a = 1, \quad b = 2$ e asse trasverso l'asse *x*, abbiamo $A_{1,2}(\pm 1;0)$, asintoti : $y = \pm 2x$.

Disegniamo la posizione dei vertici e tratteggiamo gli asintoti ed infine l'iperbole.



Nota: se l'equazione non si presenta in forma "normale" faremo dei passaggi per ricondurla alla forma normale (come per l'ellisse).

Esempi

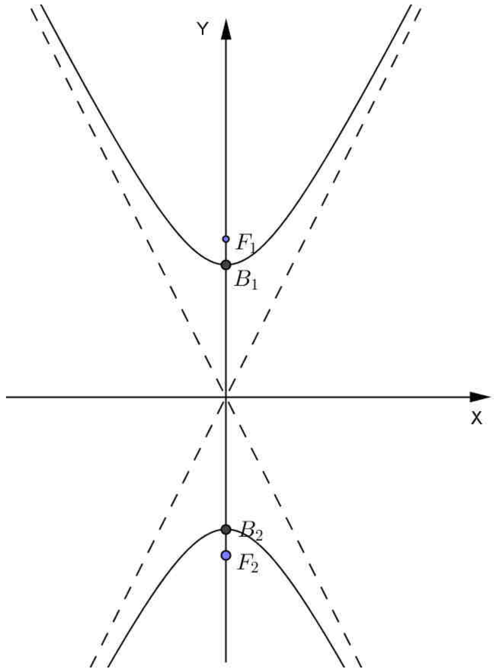
a) $x^2 - 16y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

b) $4x^2 - y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$

c) $9x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}} - \frac{y^2}{4} = 1$

Determinare l'equazione di un'iperbole

a) **Assegnati i fuochi e i vertici**



Esempio: $B_{1,2}(0;\pm 4)$ $F_{1,2}(0;\pm 2\sqrt{5})$

Poiché i fuochi sono sull'asse y l'equazione sarà del tipo : $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$

Essendo $b=4$ e $c=2\sqrt{5}$ avremo

$a^2=c^2-b^2=20-16=4$

e quindi

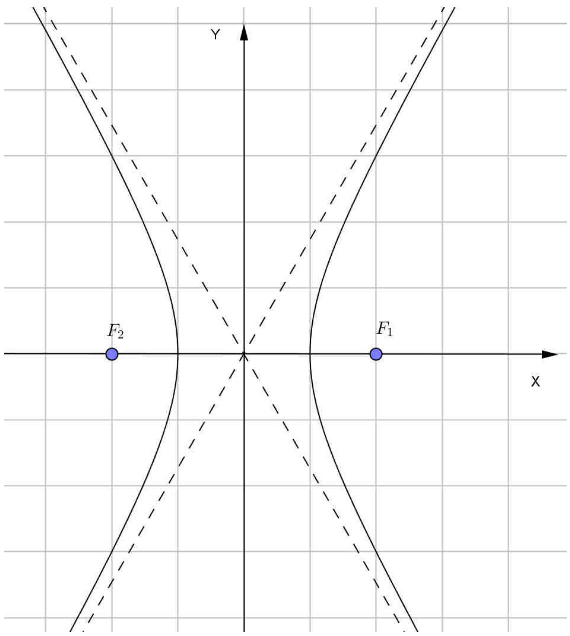
$\Im:\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{4}=1$

b) **Assegnati i fuochi e l'eccentricità**

Esempio: $F_{1,2}(\pm 2;0)$ $e=2$

Poiché in questo caso i fuochi sono sull'asse x avremo $e=\dfrac{c}{a}$ sarà $2=\dfrac{2}{a}\Rightarrow a=1$

Inoltre $b^2=c^2-a^2=4-1=3$ e quindi $\Im:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$



c) **Assegnati i vertici e l'eccentricità**

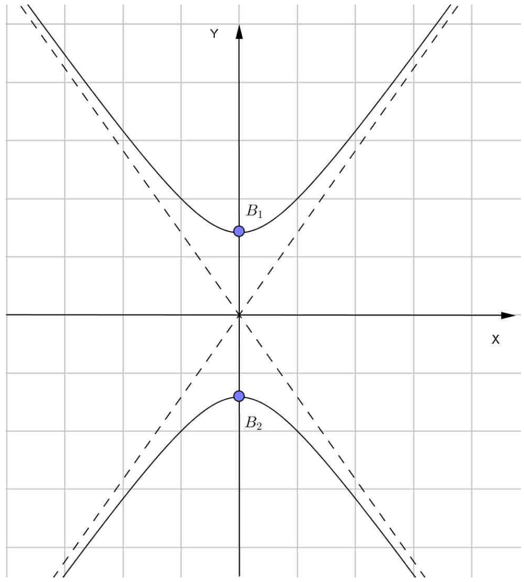
Esempio: $B_{1,2}\left(0;\pm\sqrt{2}\right)$ $e=\sqrt{\frac{3}{2}}$

Poiché l'asse trasverso è l'asse y sarà $e=\frac{c}{b}$ e quindi

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\Rightarrow c=\sqrt{3}$$

Inoltre $a^2=c^2-b^2=3-2=1$ e quindi

$$\Im:\frac{y^2}{2}-x^2=1$$

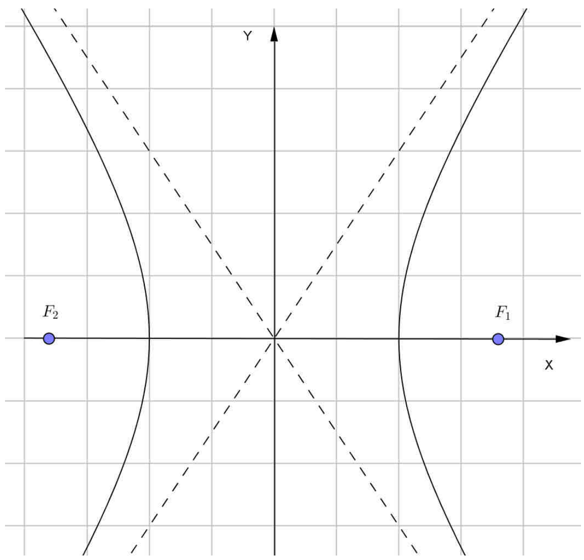


d) **Assegnati i fuochi e gli asintoti**

Esempio: $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{13};0\right)$ asintoti: $y=\pm\frac{3}{2}x$

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b=\frac{3}{2}a\\ 13=a^2+\frac{9}{4}a^2\rightarrow 13=\frac{13}{4}a^2\rightarrow a^2=4\rightarrow a=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b=3\\ a=2\end{cases}$$

Quindi abbiamo $\Im:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$



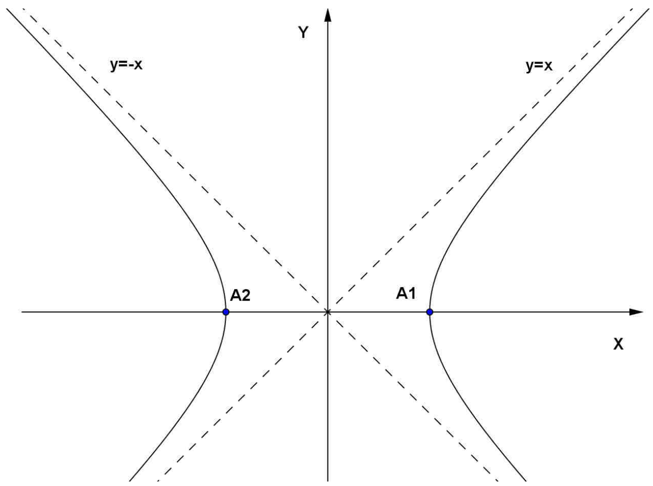
Iperbole equilatera

Un'iperbole si dice equilatera quando $\boxed{a = b}$: gli asintoti hanno quindi inclinazione ± 1 e risultano perpendicolari.

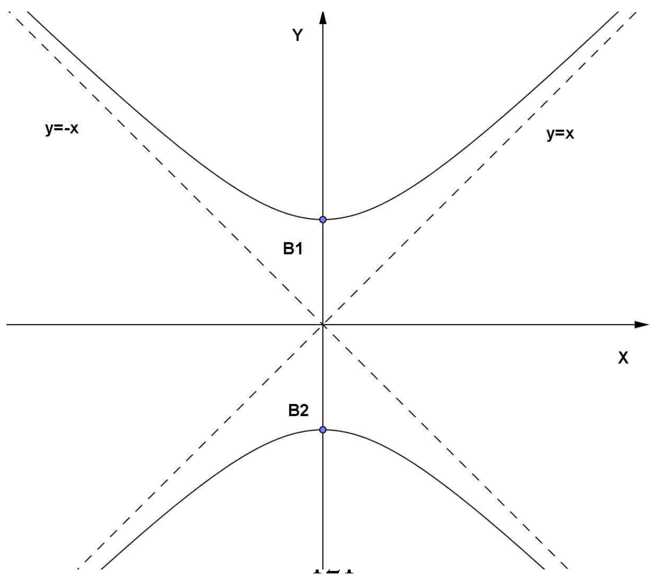
Osserviamo che per un'iperbole equilatera risulta $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}a \Rightarrow e = \sqrt{2}$
cioè l'eccentricità è sempre $\boxed{e = \sqrt{2}}$.

L'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria è quindi:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = a^2}$ **se l'asse trasverso è l'asse x**



- $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{y^2 - x^2 = a^2}$ **se l'asse trasverso è l'asse**



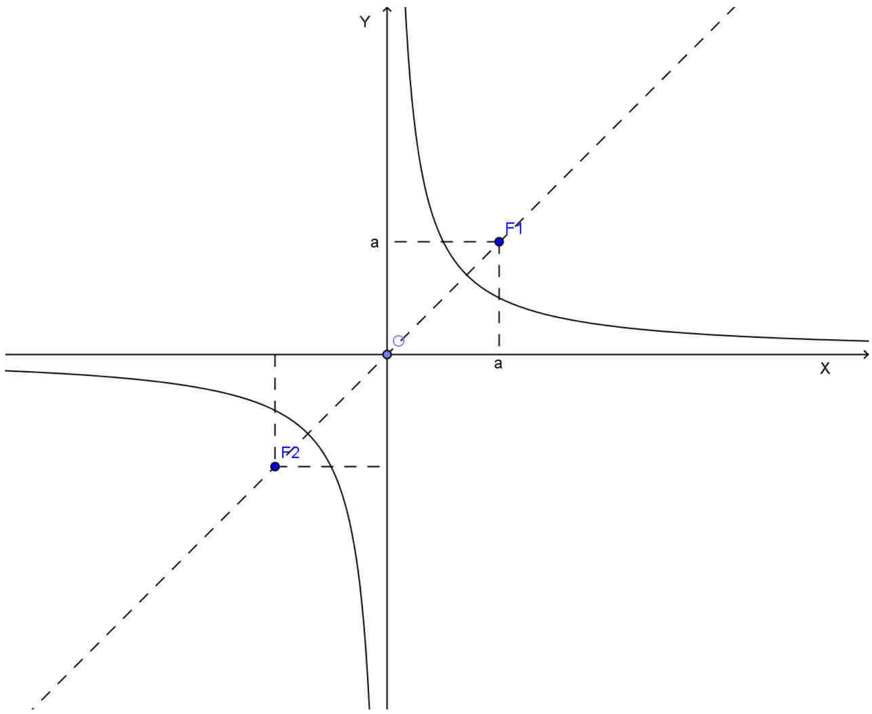
Iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti

Se l'iperbole è equilatera possiamo **prendere i suoi asintoti come sistema di riferimento**: vediamo come risulta l'equazione in questo caso.

Consideriamo l'iperbole equilatera in figura: i fuochi si trovano sulla retta $y = x$: dal momento che $c = \sqrt{2}a$, le coordinate dei fuochi in questo sistema di riferimento saranno

$$F_1(a;a) \qquad F_2(-a;-a)$$

poiché e l'ascissa e l'ordinata dei fuochi rappresentano la misura del lato di un quadrato di diagonale c .



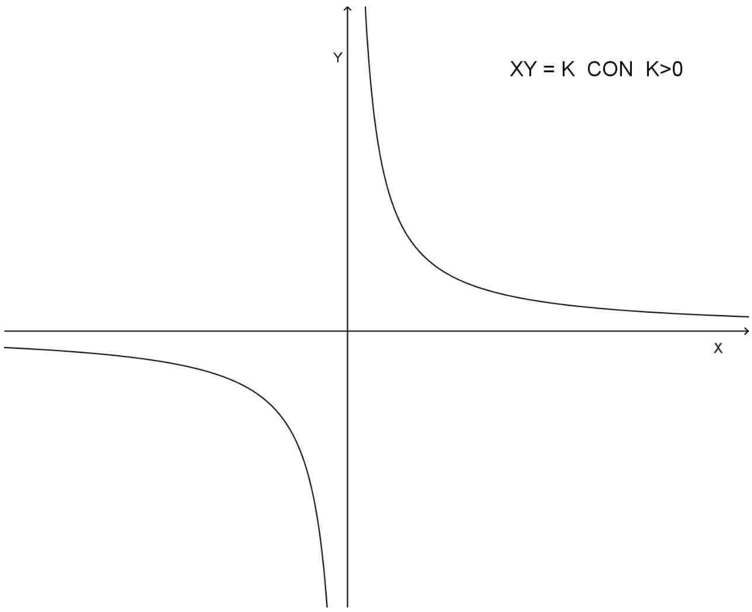
Applichiamo la definizione di iperbole che abbiamo dato inizialmente:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$$

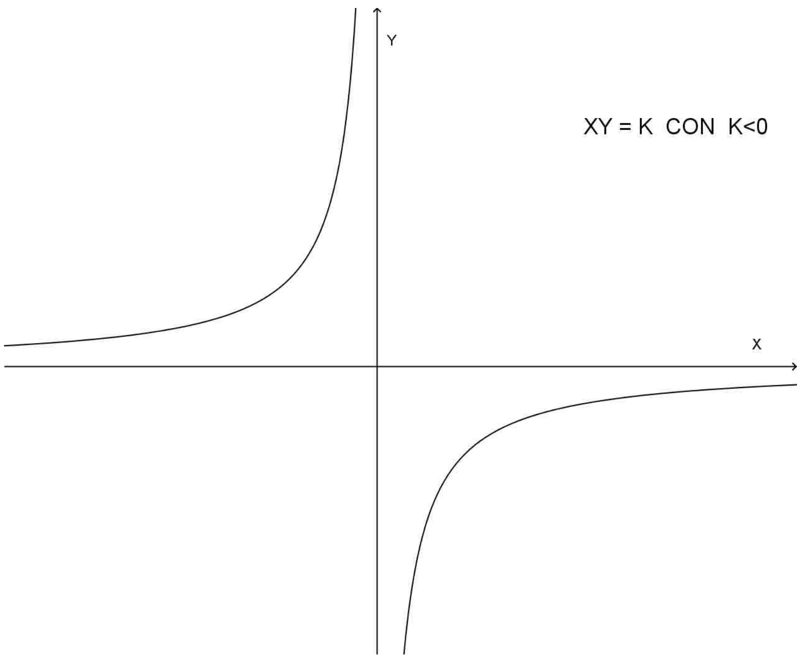
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = \pm 2a$$

Sviluppando con passaggi analoghi a quelli svolti quando abbiamo ricavato l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria, otteniamo $xy = \frac{a^2}{2}$ cioè un'equazione del tipo:

$\boxed{xy = k}$ con $k > 0$



Se invece i fuochi si trovano sulla retta $y = -x$, con analoghi passaggi , otteniamo $xy = -\frac{a^2}{2}$ cioè un'equazione del tipo: $\boxed{xy = k}$ con $k < 0$



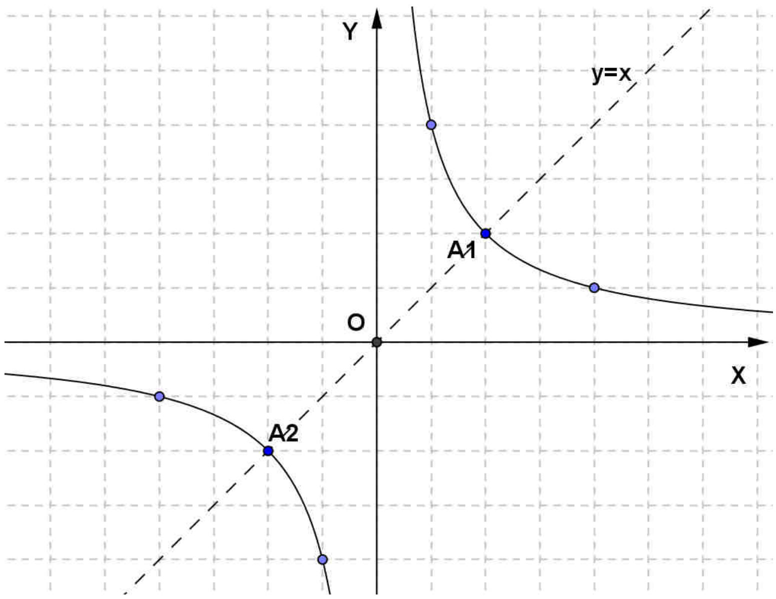
Problemi sull'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti

1) Disegna l'iperbole $xy = 4$.

Per disegnare $xy = 4$ possiamo determinare qualche punto appartenente all'iperbole: poiché $y = \frac{4}{x}$ si ottiene per esempio $(1;4)$ $(2;2)$ $(4;1)$.

Naturalmente, essendo la curva simmetrica rispetto all'origine avremo anche $(-1;-4)$ $(-2;-2)$ $(-4;-1)$.

Osserviamo che i punti A_1, A_2, essendo sulla retta $y = x$ che è asse trasverso dell'iperbole, sono i vertici.



2) Determina l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti sapendo che passa per il punto $P(1;2)$.

(*) Osserviamo che per determinare l'equazione di $\Im : xy = k$ è sufficiente una condizione.

Basterà sostituire in $xy = k$ le coordinate $P(1;2)$:

$$1 \cdot 2 = k \Rightarrow k = 2$$

e quindi $$\Im : xy = 2$$

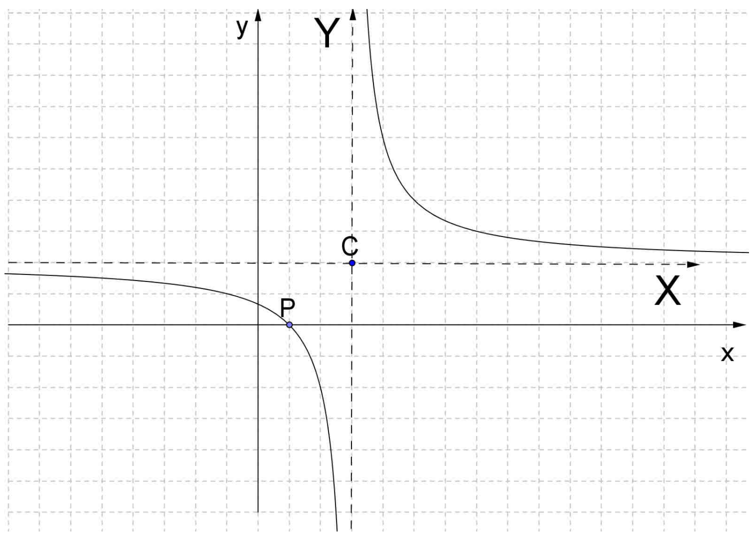
Iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati
(funzione omografica)

Abbiamo visto che l'equazione dell'iperbole equilatera con asintoti coincidenti con gli assi coordinati è del tipo $xy = k$.

E se gli asintoti non coincidono con gli assi coordinati ma sono comunque paralleli ad essi?

Vediamo un esempio: supponiamo che il centro dell'iperbole sia $C(3;2)$ e che gli asintoti abbiano equazione $x = 3$, y=2 .

Supponiamo inoltre che l'iperbole passi per il punto $P(1;0)$ (vedi figura).



Se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine in C cioè:

$$\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y-2 \end{cases}$$

l'iperbole avrà equazione $XY = 4$:per determinare k=4 basta sostituire in $XY = k$ le coordinate di P che nel nuovo sistema di riferimento sono $(-2;-2)$.

Quindi $\qquad \Im : (x-3)\cdot(y-2) = 4$

E sviluppando avremo:

$$xy - 2x - 3y + 6 = 4 \rightarrow y(x-3) = 2x - 2 \rightarrow y = \frac{2x-2}{x-3}$$

In generale , quindi, l'equazione di un'iperbole equilatera di centro $C(x_C; y_C)$ con asintoti paralleli agli assi coordinati avrà equazione:

$$(x - x_C) \cdot (y - y_C) = k$$

che sviluppata dà un'equazione del tipo: $\boxed{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Questa funzione viene anche chiamata **funzione omografica**.

Osserviamo che :

a) $c \neq 0$ poiché se $c = 0$ otteniamo una retta;

b) $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$ poiché se $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = m \Rightarrow a = mc$, $b = md \rightarrow y = m \cdot \dfrac{(cx+d)}{cx+d}$ che per $x \neq -\dfrac{d}{c}$ dà la retta $y = m$

Centro della funzione omografica

Ma se abbiamo l'equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ come possiamo determinare il centro dell'iperbole?
Osserviamo che **le coordinate del centro corrispondono agli asintoti della'iperbole**, cioè l'asintoto verticale ha equazione $x = x_C$ e l'asintoto orizzontale ha equazione $y = y_C$.

Torniamo all'esempio iniziale in cui sviluppando i calcoli abbiamo ottenuto $y = \dfrac{2x-2}{x-3}$.

- Osserviamo che questa funzione non è definita per $x = 3$ poiché per x=3 il denominatore si annulla: in corrispondenza di x=3 non abbiamo nessun punto della curva ed abbiamo l'asintoto verticale. Quindi $x = 3$ è l'ascissa del centro.

- Inoltre quando x è grande (in valore assoluto) i termini $b = -2$ e $d = -3$ nell'equazione diventano trascurabili nel calcolo del valore di y e $y \cong \dfrac{2x}{x}$ e quindi semplificando la x si ottiene $y \cong 2$ cioè i punti dell'iperbole, quando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ si avvicinano alla retta $y = 2$. Quindi $y = 2$ è l'asintoto orizzontale e $y = 2$ è l'ordinata del centro.

In generale quindi se abbiamo la funzione omografica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ poiché per $x = -\dfrac{d}{c}$ il denominatore si annulla e per $x \to \infty$ $y \cong \dfrac{a}{c}$ il centro C avrà coordinate

$$\boxed{C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)}$$

Problemi sulla funzione omografica

1) Disegna la funzione omografica di equazione:

$$y = \frac{2x-4}{1-x}$$

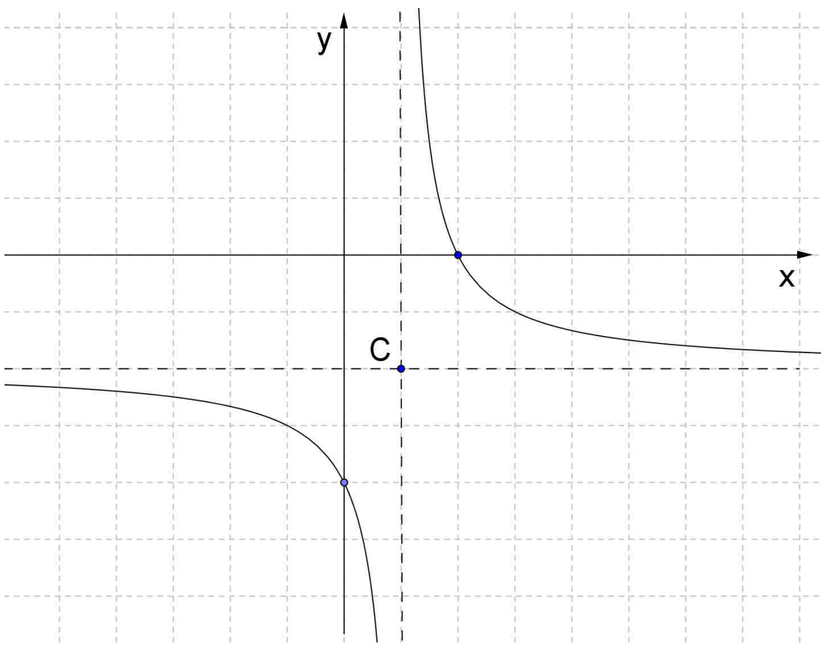
Si ricava che il centro è $C(1;-2)$.
Possiamo quindi disegnare gli asintoti che saranno le rette di equazione $x=1$ e $y=-2$.
Per disegnare l'iperbole, dopo aver trovato il centro e tracciato gli asintoti,possiamo determinare per esempio l'intersezione dell'iperbole con l'asse x ponendo $y=0$.

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-4}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Conoscendo il punto $(2;0)$, per la simmetria rispetto a C, ricaviamo che anche $(0;-4)$ apparterrà all'iperbole (del resto ponendo $x=0$ si ottiene proprio $y=-4$).

Inoltre possiamo ricavare facilmente anche altri punti fissando un valore per la x e determinando la y corrispondente.

Otteniamo in conclusione il seguente disegno:



Osservazione

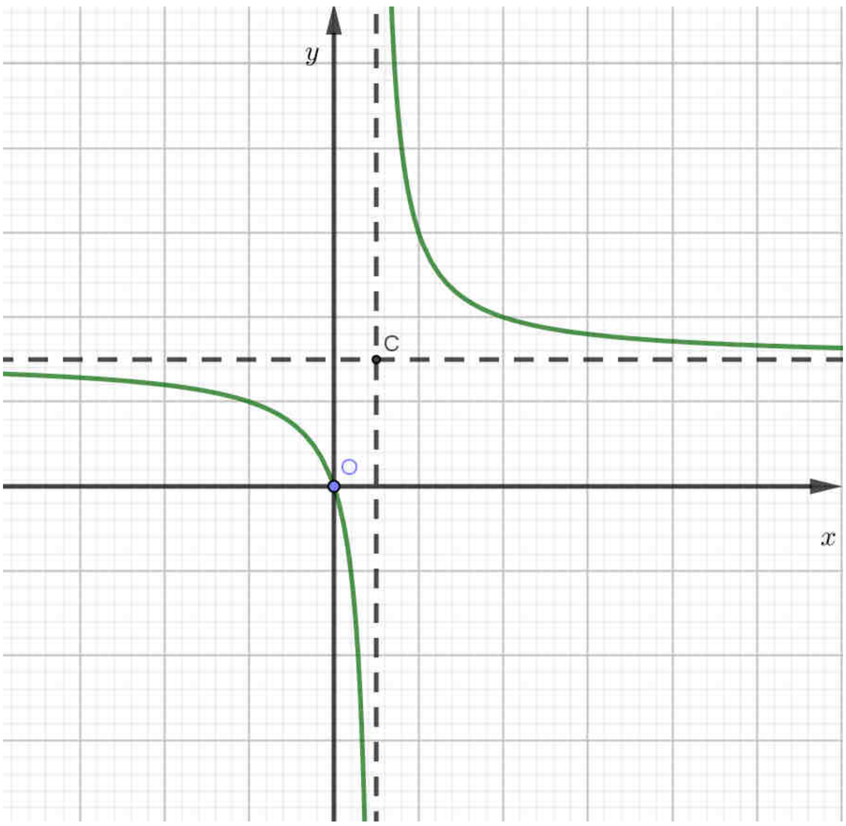
Poiché nella funzione omografica abbiamo necessariamente $c \neq 0$, possiamo dividere sia numeratore che denominatore per c e indicando con $a';b';d'$ rispettivamente $\frac{a}{c},\frac{b}{c},\frac{d}{c}$ scrivere:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y=\frac{a'x+b'}{x+d'}$$

2) Determina l'equazione della funzione omografica avente centro $C(1;3)$ e passante per $O(0;0)$.

Sappiamo che l'equazione generale della funzione omografica può essere scritta anche nella forma $y=\frac{ax+b}{x+d}$. Impostiamo un sistema sfruttando la conoscenza delle coordinate del centro e il passaggio per $O(0;0)$

$$\begin{cases} -d=1 \\ a=3 \\ 0=\frac{b}{d} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d=-1 \\ a=3 \\ b=0 \end{cases} \rightarrow \qquad y=\frac{3x}{x-1}$$



3) Determina l'equazione della funzione omografica sapendo che il suo asintoto verticale è $x = 2$ e che passa per i punti $P_1(0;0)$ $P_2(1;1)$.

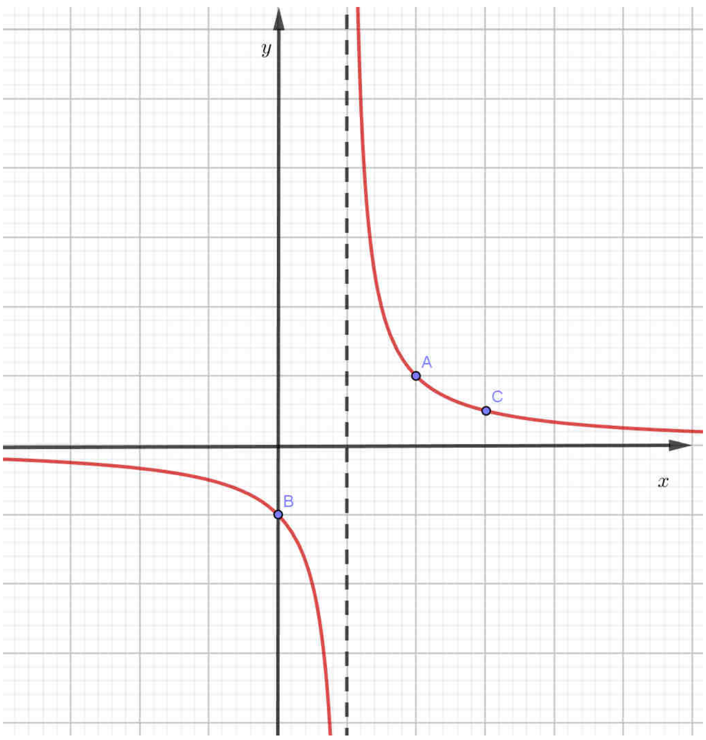
Consideriamo l'equazione nella forma $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$. Se l'asintoto verticale è x = 2 allora l'ascissa del centro sarà uguale a 2 .

$$\begin{cases} -d = 2 \\ \dfrac{b}{d} = 0 (passaggio.per.P_1) \\ \dfrac{a+b}{1+d} = 1 (passaggio.per.P_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = -2 \\ b = 0 \\ a = 1 + d \rightarrow a = -1 \end{cases} \qquad \Im : y = \frac{x}{-x+2}$$

4) Determina l'equazione della funzione omografica passante per $A(2;1); B(0;-1); \quad C\left(3;\frac{1}{2}\right)$.

In questo caso sostituendo le coordinate dei tre punti nell'equazione $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$ avremo:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2a+b}{2+d} \\ -1 = \dfrac{b}{d} \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{3a+b}{3+d} \end{cases} \rightarrow \ldots\ldots\ldots \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ d = -1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{x-1}$$



ESERCIZI
IPERBOLE

1) Disegna le seguenti iperboli indicando le coordinate dei vertici, l'equazione degli asintoti e le coordinate dei fuochi.

a) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ [$A_{1,2}(\pm 2;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$; $y = \pm\frac{1}{2}x$]

b) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{10};0)$; $y = \pm 3x$]

c) $y^2 - x^2 = 1$ [$B_{1,2}(0;\pm 1)$; $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{2})$; $y = \pm x$]

d) $4x^2 - y^2 = 4$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$; $y = \pm 2x$]

e) $4y^2 - 9x^2 = 36$ [$B_{1,2}(0;\pm 3)$; $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{13})$; $y = \pm\frac{3}{2}x$]

f) $x^2 - 4y^2 = 1$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\frac{\sqrt{5}}{2};0)$; $y = \pm\frac{1}{2}x$]

g) $y^2 - 9x^2 = 1$ [$B_{1,2}(0;\pm 1)$; $F_{1,2}(0;\pm\frac{\sqrt{10}}{3})$; $y = \pm 3x$]

h) $4x^2 - 4y^2 = 8$ [$A_{1,2}(\pm\sqrt{2};0)$; $F_{1,2}(\pm 2;0)$; $y = \pm x$]

i) $9y^2 - 16x^2 = 1$ [$B_{1,2}(0;\pm\frac{1}{3})$; $F_{1,2}(0;\pm\frac{5}{12})$; $y = \pm\frac{4}{3}x$]

l) $y^2 - x^2 = -1$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{2};0)$; $y = \pm x$]

m) $x^2 - y^2 = 9$ [$A_{1,2}(\pm 3;0); F_{1,2}\left(\pm 3\sqrt{2};0\right);$ $y = \pm x$]

n) $y^2 - x^2 = 9$ [$B_{1,2}(0;\pm 3); F_{1,2}\left(0;\pm 3\sqrt{2}\right);$ $y = \pm x$]

2) Determina l'equazione dell'iperbole $\Im$, riferita ai suoi assi di simmetria, avente:

a) $A_{1,2}(\pm 2;0)$ $e = 2$ [$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$]

b) $B_{1,2}(0;\pm 1)$ $F_{1,2}(0;\pm 2)$ [$y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$]

c) $A_{1,2}(\pm 1;0)$ asintoti $y = \pm 2x$ [$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$]

d) $F_{1,2}(\pm 2;0)$ asintoti $y = \pm x$ [$x^2 - y^2 = 2$]

3) Disegna le seguenti iperboli equilatere riferite ai propri asintoti:

a) $xy = 2$; $xy = -2$

b) $xy = 4$; $xy = -4$

4) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti sapendo che passa per il punto $P(1;3)$. Disegnala e determina vertici e fuochi.

[$\Im : xy = 3$, $A_{1,2}(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$, $F_{1,2}(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{6})$]

5) Disegna la funzione omografica $y = \frac{x-1}{x}$. Determina i suoi vertici.

[$C(0;1)$, $A_1(1;0)$ $A_2(-1;2)$]

6) Disegna la funzione omografica $y = \frac{2-x}{x-3}$.

[$C(3;-1)$]

7) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera avente asintoti $x = 2$ e $y = 1$ e passante per (0;0). Disegnala.

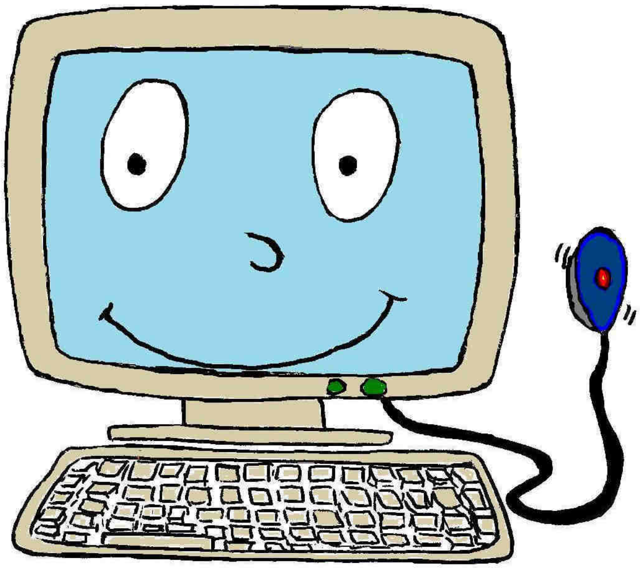
[$\Im : y = \frac{x}{x-2}$]

8) Determina l'equazione della funzione omografica passante per $A(-2;0)$ $B(0;2)$ $C\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Disegnala e verifica che A e B sono i vertici dell'iperbole.

[$\Im : y = \frac{x+2}{x+1}$]

Laboratorio di informatica



Geometria analitica con Geogebra (ripasso)

Come abbiamo già visto l'anno scorso, nello studio della geometria analitica può risultare interessante utilizzare il software Geogebra (geometria +algebra).

Ricordiamo brevemente che se per esempio digito (1,1) nella finestra grafica compare il punto corrispondente : posso anche assegnare un nome al punto, per es. B=(1,1) , altrimenti viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (A, B, C …).

Se digito nella barra di inserimento in basso y=x compare nella finestra grafica la retta corrispondente: per darle un nome basta digitare, per esempio, r : y=x altrimenti il nome viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (a,b,c…).

*Prova a digitare coordinate di punti e equazioni di rette per riprendere confidenza con il software.

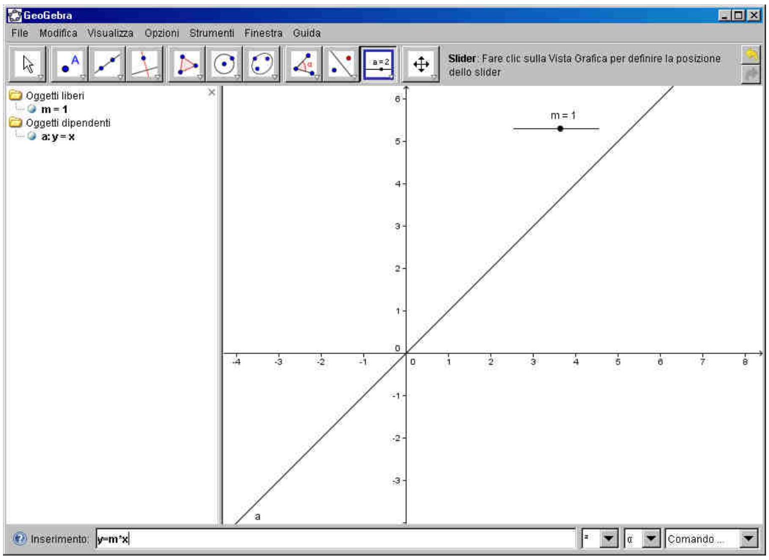
Slider

Abbiamo anche già visto che Geogebra offre la possibilità di utilizzare quelli che vengono chiamati "slider"che altro non sono che **parametri** che possono essere inseriti in un'equazione: variando il valore dello slider cambia il valore del parametro collegato e si può capire a quale caratteristica geometrica corrisponde.

Ricordiamo che prima di poter inserire uno slider in un'equazione dobbiamo crearlo:

- attiviamo il pulsante in alto in cui compare la scritta "slider";
- posizioniamoci in un punto qualsiasi del piano cartesiano e facciamo clic con il mouse: comparirà un trattino e ci verrà chiesto di inserire il nome e il campo di variazione dello slider (per esempio chiamiamolo *m* e scegliamo di farlo variare tra -10 e 10).

Se inseriamo per esempio $y = mx$ (in alcune versioni di Geogebra occorre mettere * per indicare la moltiplicazione) osserviamo che compare subito la rappresentazione della retta per l'origine corrispondente al valore che viene dato inizialmente allo slider (uguale a 1).



Per variare il valore dello slider *m* basta posizionarsi sullo slider (comparirà una manina) e trascinare lo slider (il suo valore cambierà): la retta per l'origine cambia e quindi ci rendiamo conto che variando *m* varia l'inclinazione della retta.

Possiamo anche visualizzare insieme tutte le rette corrispondenti ai vari valori dello slider scegliendo, dopo essersi posizionati sulla retta e premuto il tasto destro del mouse, la funzione "traccia attiva" (in alcune versioni si trova "traccia on") : a questo punto trascinando *m* compariranno tutte le rette corrispondenti.

Nota: posso anche inserire un valore dello slider digitandolo nella riga di inserimento in basso.

Possiamo anche far variare uno slider in modo continuo ed automatico: basta posizionarsi sullo slider, premere il tasto destro e scegliere **animazione attiva**.

SCHEDA 1

L'ALGEBRA DI SECONDO GRADO E LA PARABOLA
Equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$

1)Prova ad inserire, l'equazione di alcune parabole, per esempio $y = x^2$, $y = x^2 + 1$ ecc. e fai le tue osservazioni.
Stampa degli esempi.

2)Dopo aver creato tre slider *a, b, c* inserisci l'equazione $y = ax^2 + bx + c$

Prova a variare i valori di a, b,c, fai le tue osservazioni e stampa degli esempi.

3) Prova a capire la relazione tra l'ampiezza della parabola e il parametro *a*. Stampa degli esempi e scrivi le tue osservazioni.

4) Prova a capire la relazione tra il punto in cui la parabola interseca l'asse y e il parametro *c*. Stampa degli esempi e scrivi le tue osservazioni.

5) Secondo te a cosa è collegato il parametro *b*? Stampa degli esempi e scrivi le tue osservazioni.

SCHEDA 2

LE CONICHE
Circonferenza nel piano cartesiano

1)Prova a disegnare una circonferenza digitando nella barra di inserimento la sua equazione, per esempio,

x^2 +y^2 =1

(per elevare al quadrato occorre usare ^).

2)Puoi costruire una circonferenza anche attivando i comandi :

circonferenza dati il centro e un punto;
circonferenza dati centro e raggio;
circonferenza per tre punti (non allineati).

Prova e controlla l'equazione che compare a sinistra nella "vista algebra".
Stampa le tue prove.

3) Crea tre slider a,b,c e inserisci l'equazione generale della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + a * x + b * y + c = 0$$

Prova a variare a,b,c e fai le tue osservazioni stampando degli esempi (per esempio se a=0…… , se b=0……, se c=0……)

Osserva che non per tutti i valori di a,b,c, ottieni una circonferenza perché…..

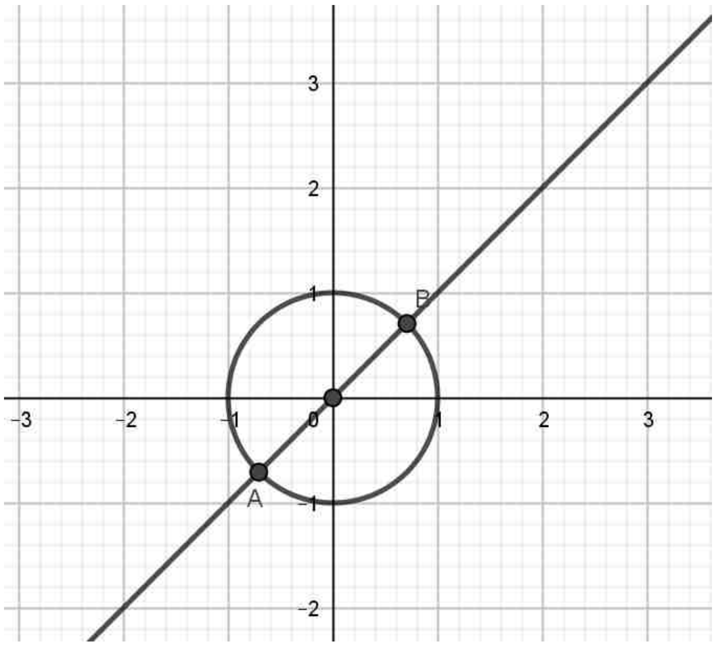
SCHEDA 3

LE CONICHE
Circonferenza e retta

Disegna la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ (puoi inserire l'equazione nella barra di inserimento in fondo oppure utilizzare il comando circonferenza di dato centro e passante per un punto).

a) Disegna la retta $y = x$ e individua le intersezioni con la circonferenza: scegliendo il comando "intersezione" e selezionando circonferenza e retta verranno evidenziati i due punti di intersezione (che puoi eventualmente rinominare con A e B come in figura)

Esercizio: quali sono le coordinate dei punti di intersezione?



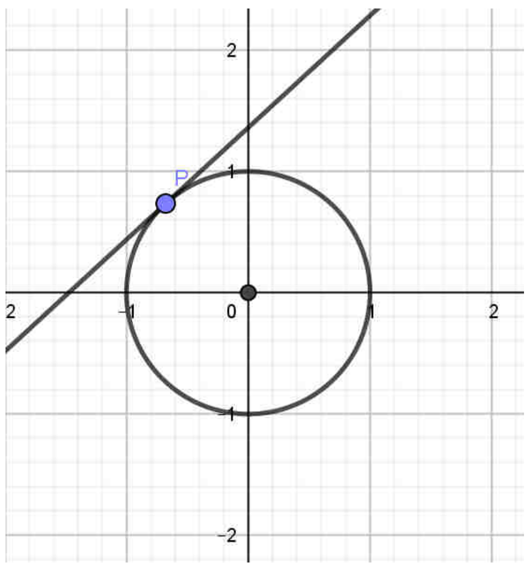
b) Disegna la retta $y = x + 2$: come risulta rispetto alla circonferenza?

c) Costruisci un punto P sulla circonferenza con il comando "**punto su oggetto**" e poi usa il comando "**tangenti**" per tracciare la tangente alla circonferenza in P.

Esercizi
Muovi P sulla circonferenza e osserva come cambia l'inclinazione della tangente.

In quali posizioni di P l'inclinazione della tangente è uguale a zero?

In quali posizioni di P si ha tangente parallela all'asse x?



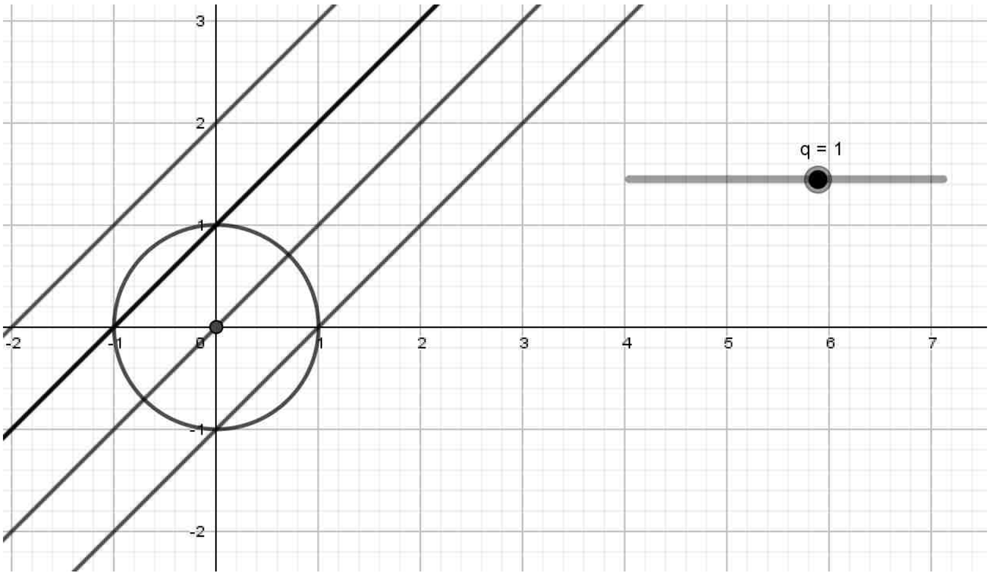
SCHEDA 4

LE CONICHE

Circonferenza e fascio di rette parallele

Consideriamo ancora la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

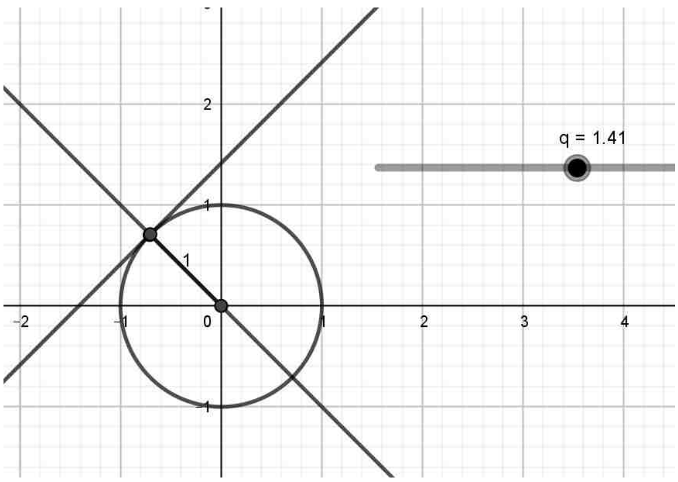
Crea uno slider q e inserisci l'equazione $y = x + q$: variando q otteniamo sempre rette con inclinazione 1 ma che tagliano l'asse y in punti diversi (l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y è proprio q) e si parla di "fascio di rette parallele" con inclinazione 1.



Esercizio: sapresti indicare un procedimento per calcolare la distanza tra il centro (0;0) della circonferenza e la retta del "fascio"?

Verifica che

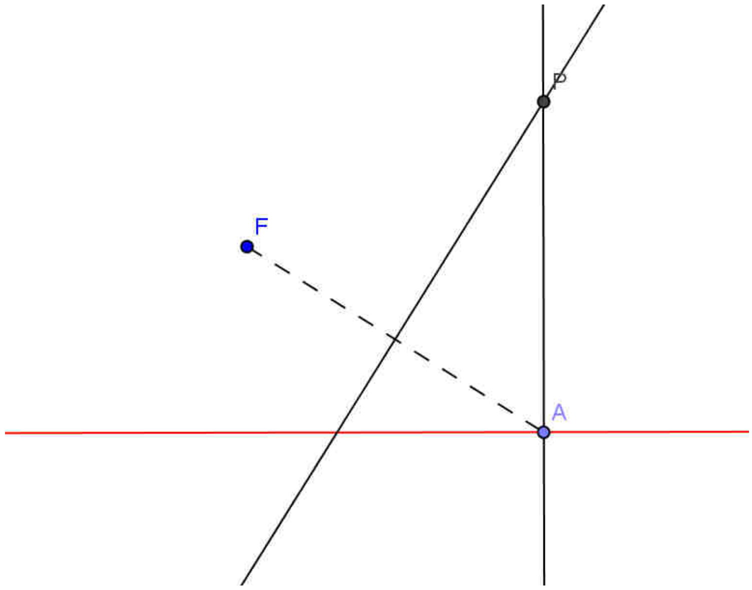
- se la distanza dal centro è maggiore del raggio si ha una retta…
- se la distanza dal centro è uguale al raggio si ha una retta …
- se la distanza dal centro è minore del raggio si ha una retta….



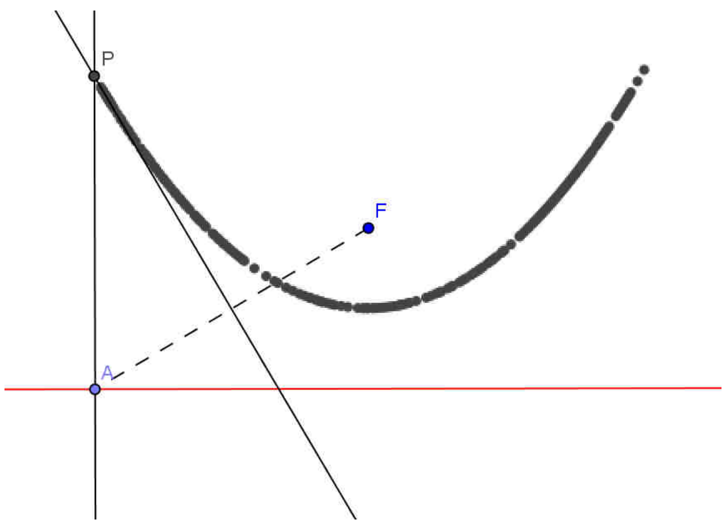
SCHEDA 5

LE CONICHE
Costruzione della parabola dato fuoco e direttrice

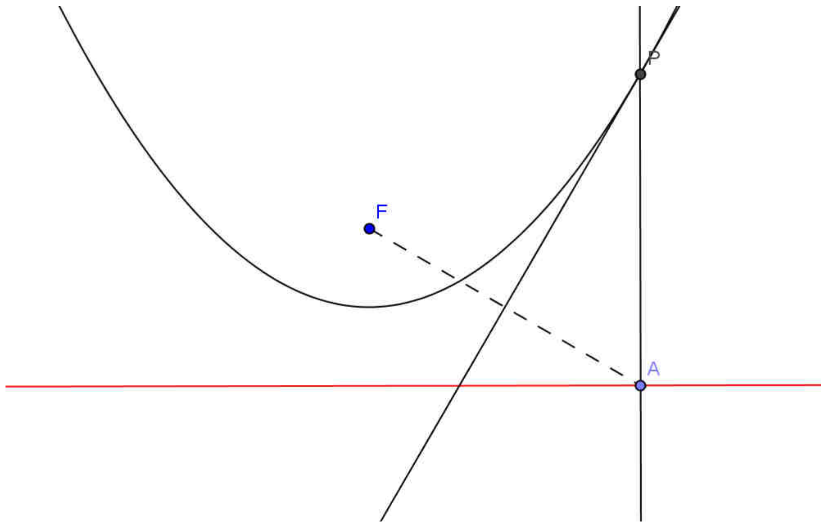
Vediamo un metodo per disegnare la parabola di **dato fuoco e data direttrice**.
Crea un punto F (rinominalo) e una retta d (rinominala).
Prendi un punto A sulla direttrice (comando punto su oggetto) e traccia la retta r per A perpendicolare alla direttrice : traccia l'asse del segmento FA e intersecalo con la retta r individuando il punto P.
P appartiene alla parabola di fuoco F e direttrice d poiché è equidistante da F e dalla retta d.



Se attivi la "traccia" di P e muovi A otteni la parabola di fuoco F e direttrice d.



Nota 1
Prova ad usare il comando **“luogo”.**
Cancella con “modifica” Annulla , scegli il comando “luogo”, seleziona P e poi A (poiché le varie posizioni di P dipendono dalle varie posizioni di A) e verrà immediatamente disegnata la parabola.



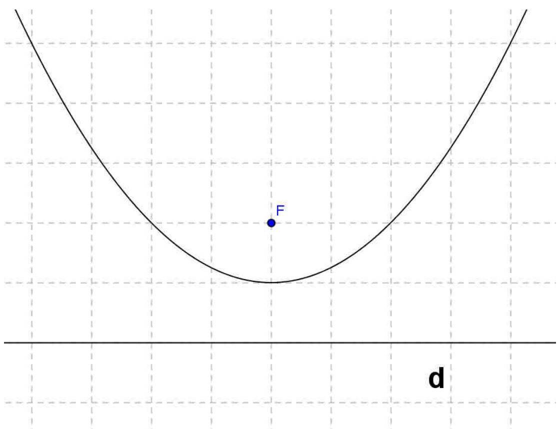
Nota 2

Possiamo anche definire una **“macro**” cioè un comando che ci permetterà di avere la parabola di dato fuoco e direttrice semplicemente cliccando su un punto-fuoco e su una retta-direttrice.

Scegliamo Strumenti – crea nuovo strumento :
come **oggetti finali** selezioniamo il luogo che abbiamo definito, come **oggetti iniziali** il fuoco F e la direttrice d (eliminiamo con la crocetta altri elementi che vengono indicati).
Premiamo “successivo” (oppure nome e icona): diamo il nome “parabola” al nostro strumento e selezioniamo “fine” (possiamo se vogliamo anche associare un’immagine al nostro strumento, basta prima disegnare una parabola, esportarla come immagine, salvarla e poi sceglierla come “icona”).

Importante: se vuoi che questo strumento venga memorizzato ricorda di premere Opzioni – Salva impostazioni prima di chiudere il programma.

Prova se funziona: clic sullo strumento “parabola”, clic su un punto e su una retta…



Nota: in realtà questa macro è stata già inserita tra i comandi Geogebra che puoi usare (c’è un tasto in alto…cercalo…)

SCHEDA 6

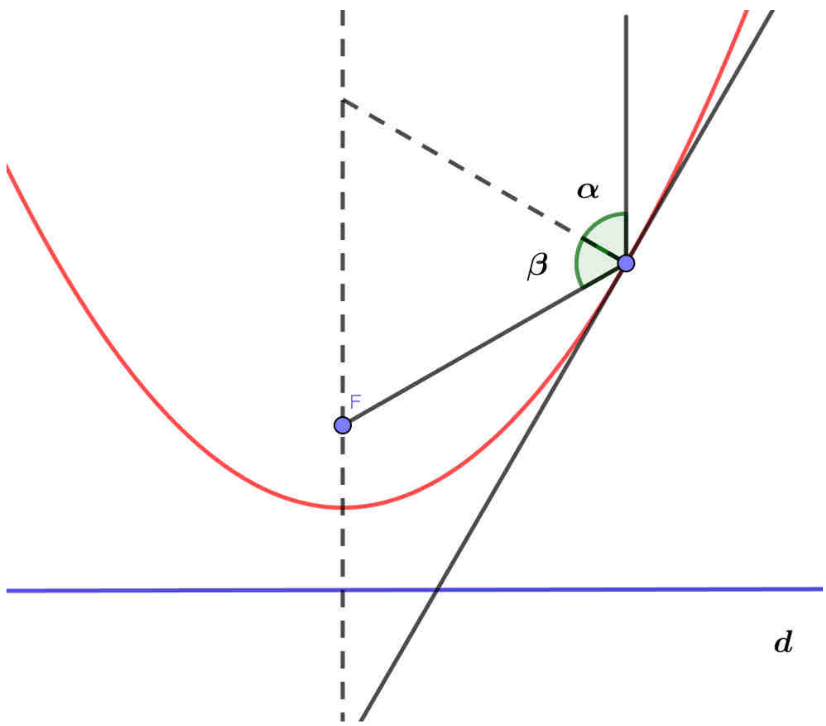
LE CONICHE
Il fuoco della parabola

Se facciamo incidere su uno specchio "parabolico" un raggio di luce parallelo all'asse dello specchio il raggio riflesso passerà sempre per il fuoco: in questo punto si concentrerà molta energia luminosa e termica e per questo è stato chiamato "fuoco".

Esercizio: fissa un punto (fuoco F) e una retta (direttrice): disegna una parabola di data direttrice e fuoco (usando il comando nei pulsanti della barra).

Traccia l'asse di simmetria della parabola;
prendi un punto P sulla parabola (punto su oggetto);
traccia la semiretta uscente da P parallela all'asse (raggio incidente);
traccia la semiretta uscente da P passante per F (raggio riflesso);
traccia la tangente alla parabola nel punto P;
traccia la perpendicolare per P alla tangente;
costruisci gli angoli α, β (vedi figura);

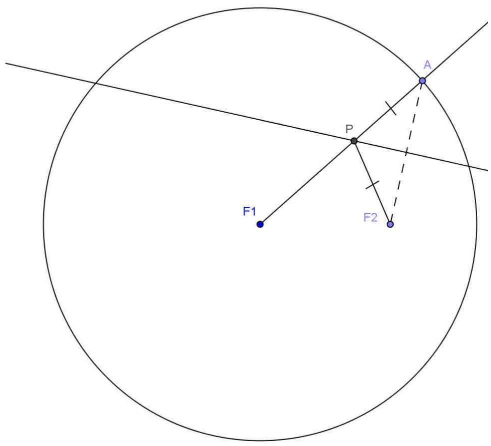
Verifica che $\alpha \cong \beta$.



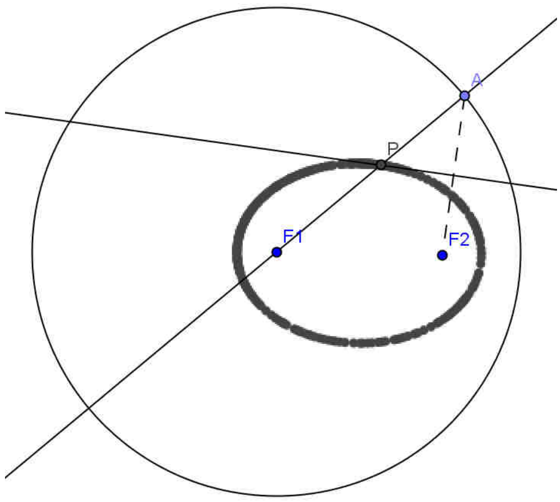
SCHEDA 7

LE CONICHE
Costruzione dell'ellisse di dati fuochi e asse maggiore

Vediamo un metodo per costruire un' ellisse di dati fuochi F1 e F2 e di dato asse maggiore, per esempio 10 ($\overline{F_1F_2} < 10$): creiamo un punto F_1 e un punto F_2 (rinominiamoli) e tracciamo una circonferenza di centro F_1 e raggio 10.
Creiamo un punto A sulla circonferenza (con il comando "punto su oggetto"); tracciamo l'asse del segmento F_2A e intersechiamolo con la retta per F_1 e A: il punto P appartiene all'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e asse maggiore 10 poiché $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{F_1 A} = 10$



Attivando la traccia di P e muovendo A otterremo l'ellisse:



Esercizio: crea una "macro" per ottenere la costruzione che abbiamo visto in cui gli oggetti iniziali saranno i due punti-fuochi e un punto sulla retta per i fuochi ad una distanza dal loro punto medio uguale al semiasse maggiore.

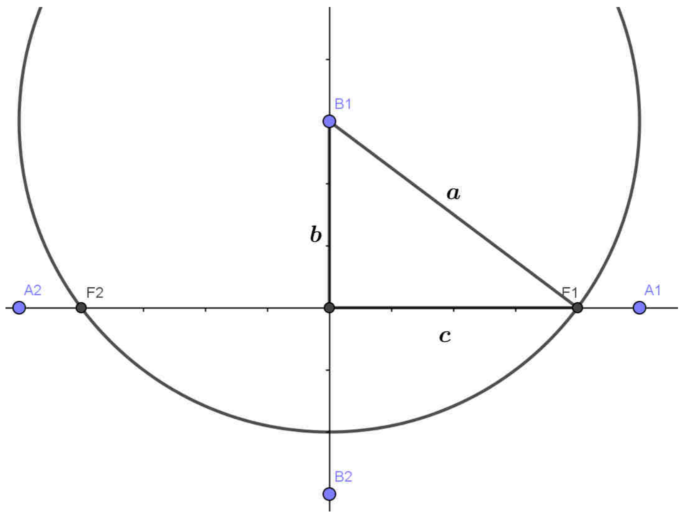
Nota: nella barra dei comandi c'è il comando "ellisse" che disegna l'ellisse dati i fuochi e un punto dell'ellisse.

SCHEDA 8

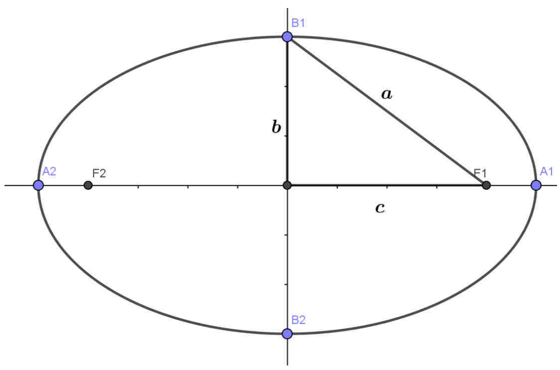
LE CONICHE
Costruzione dell'ellisse di semiassi assegnati

Possiamo costruire un'ellisse di semiassi assegnati a e b (riferita ai propri assi di simmetria) seguendo questo procedimento, supponendo che $a > b$:

Riporta i semiassi sugli assi del sistema di riferimento (a sull'asse x e b sull'asse y) costruendo i vertici dell'ellisse: traccia la circonferenza di centro B_1 e raggio a ed individua i fuochi dell'ellisse (vedi figura) poiché vale la relazione $c^2 = a^2 - b^2$



A questo punto possiamo utilizzare la macro costruita nella scheda precedente oppure anche il comando inserito nella barra dei comandi "ellisse" in cui si devono selezionare i fuochi e un punto dell'ellisse)



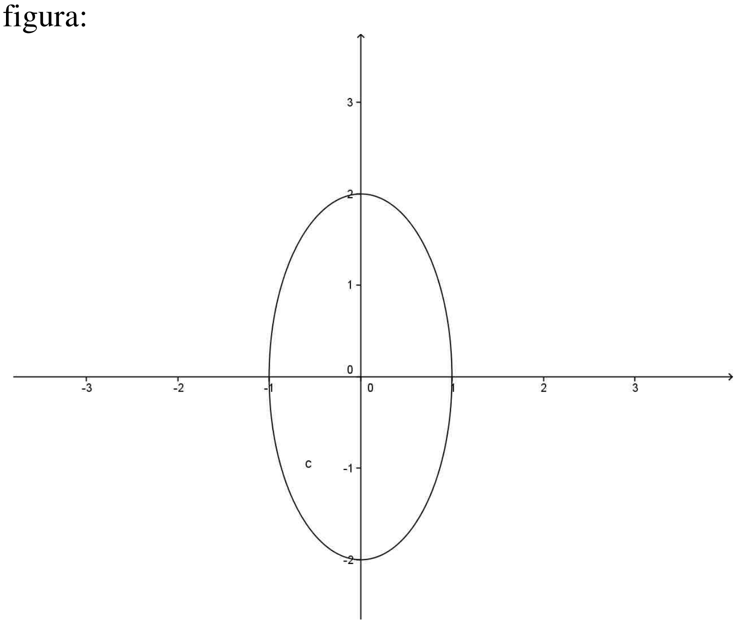
SCHEDA 9

LE CONICHE
Ellisse nel piano cartesiano

1) Prova a inserire l'equazione di un'ellisse, per esempio

x^2+y^2/4=1

Otterrai l'ellisse in figura:



2) Prova a definire uno slider a (semiasse sull'asse x) e uno slider b (semiasse sull'asse y) ricordando di mettere tra le proprietà degli slider che siano positivi e ad inserire

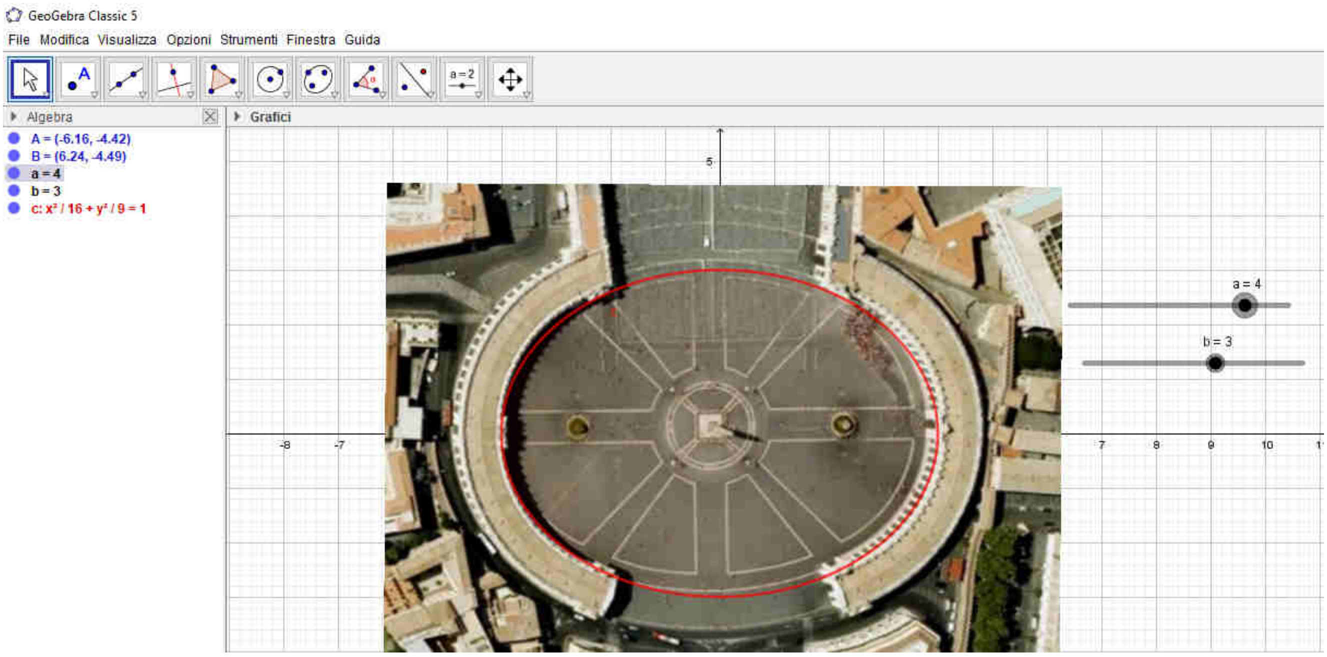
x^2/a^2+y^2/b^2=1

Fai variare gli slider e stampa alcuni esempi.

SCHEDA 10

LE CONICHE
Piazza S. Pietro è un'ellisse?

Proviamo a copiare la foto della piazza di S. Pietro nel piano (0,x,y) di Geogebra cercando di far coincidere il centro della piazza con l'origine: creiamo due slider a,b e inseriamo l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Variamo il valore degli slider fino a che l'ellisse (che magari coloriamo di rosso) non si sovrappone al contorno della piazza: la piazza viene approssimata abbastanza bene da un'ellisse di semiassi $a=4$ $b=3$ (vedi figura).



Si può comunque ottenere una migliore approssimazione con un "ovale" cioè raccordando 4 archi di circonferenze di centri diversi.

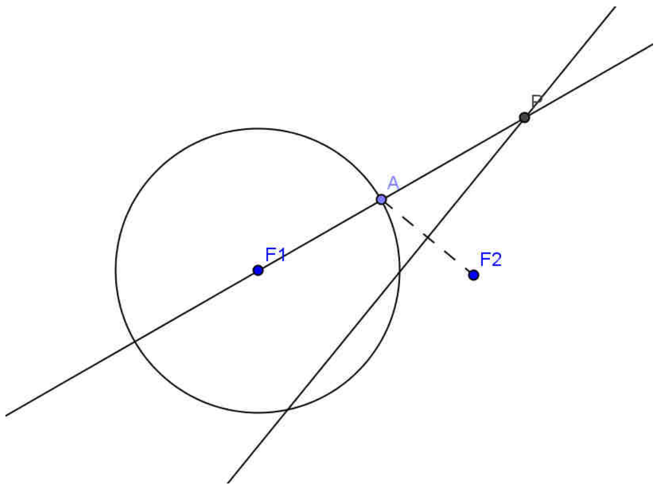
Esercizio
Trova un'altra opera architettonica che abbia la forma di ellisse e cerca di determinare l'equazione dell'ellisse che l'approssima meglio.

SCHEDA 11

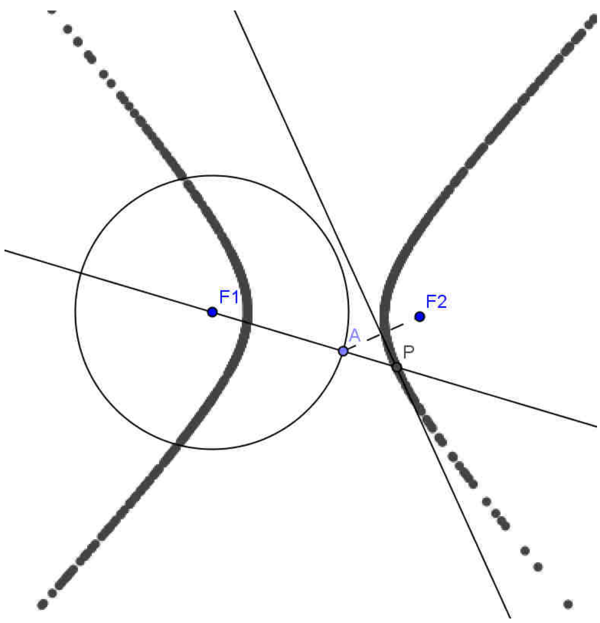
LE CONICHE

Costruzione dell'iperbole dati i fuochi e l'asse trasverso

Possiamo costruire un'iperbole di dati fuochi e dato asse trasverso, per esempio 8 ,con un procedimento analogo a quello utilizzato per l'ellisse nella scheda 7: l'unica differenza è che questa volta $\overline{F_1F_2} >$ asse trasverso (8).
Abbiamo una costruzione come in figura: è chiaro che P appartiene all'iperbole di fuochi F_1 e F_2 poiché $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{F_1A} = 8$, essendo $\overline{PF_2} = \overline{AP}$.



Attivando la traccia di P e muovendo A avremo l'iperbole:



SCHEDA 12

LE CONICHE
Iperbole nel piano cartesiano

1) Inserisci l'equazione di un'iperbole riferita ai propri assi di simmetria, per esempio

x^2-y^2/4=1

Inserisci l'equazione dei suoi asintoti

y = 2x y = -2x

Stampa il grafico e fai le tue osservazioni.

Inserisci un'altra equazione, magari di un'iperbole con asse trasverso l'asse y, e stampa il grafico.

2) Crea due slider *a*, *b* (semiassi dell'iperbole) **positivi** e inserisci l'equazione

x^2/a^2-y^2/b^2=1

e l'equazione degli asintoti

y = b/a*x   e y = -b/a*x

Fai variare gli slider e stampa qualche esempio facendo le tue osservazioni.

3) Crea due slider *a*,*c* positivi e inserisci l'equazione

x^2/a^2-y^2/(c^2-a^2)=1

Disegna i vertici A1=(a,0) A2=(-a,0) e i fuochi F1=(c,0) F2=(-c,0).

Muovi solo lo slider *c* (cioè cambia la posizione dei fuochi e mantenendo costante la posizione dei vertici), stampa qualche grafico e fai le tue osservazioni.

SCHEDA 13

LE CONICHE
Iperbole equilatera

1) Inserisci l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, per esempio

x*y=1

Prova anche ad inserire l'equazione nella forma

y=1/x

Stampa il grafico.

2) Crea uno slider k e inserisci l'equazione

x*y=k

oppure y=k/x

Muovi k e fai le tue osservazioni.

3) Crea tre slider a,b,c,d e inserisci l'equazione

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Muovi gli slider e fai le tue osservazioni.

Stampa qualche grafico.