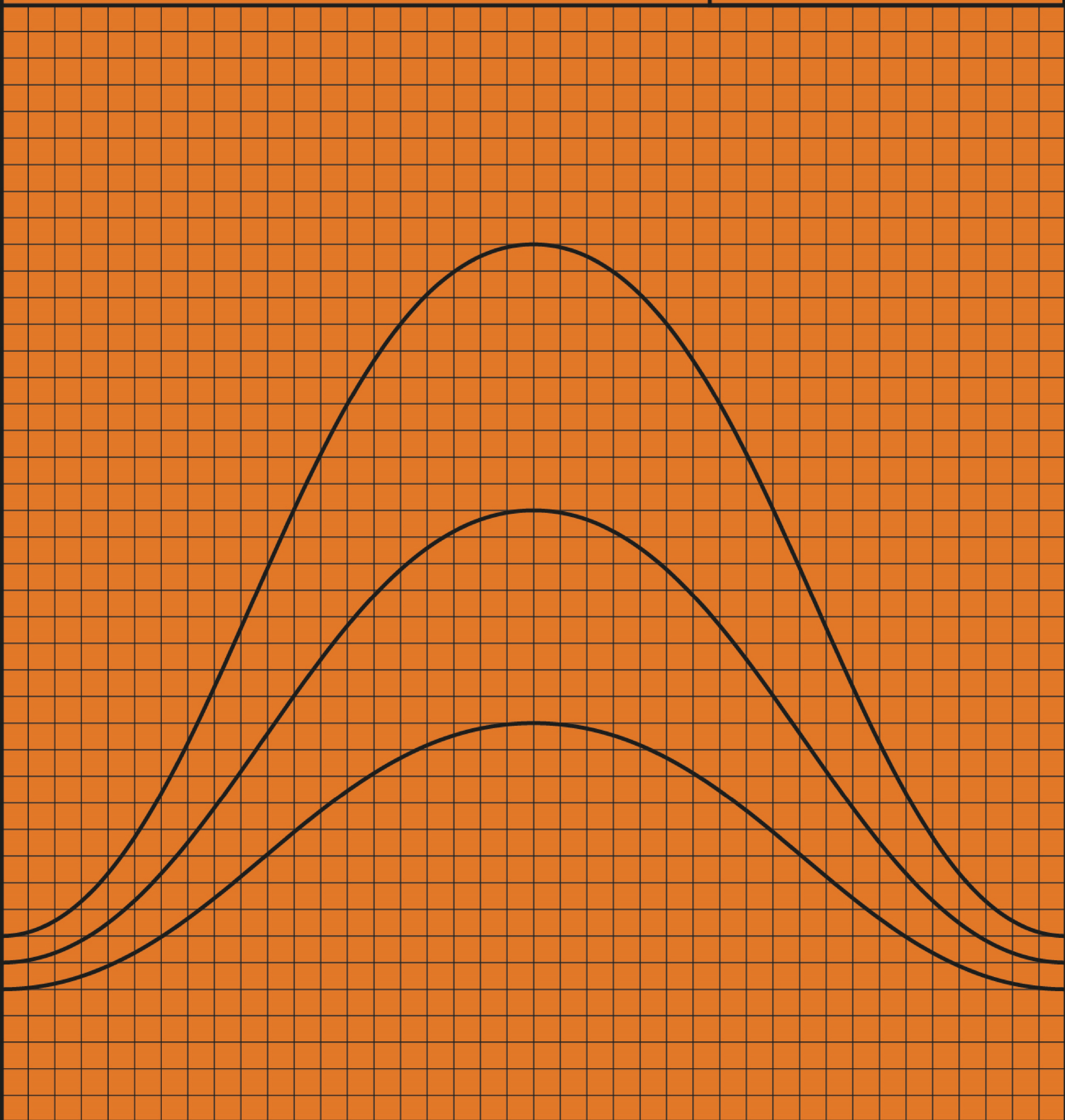
Appunti di Matematica

Indirizzo Scientifico

5

Cecilia Magni



Matematica in Rete

Prefazione

Gli **"Appunti di Matematica" sono un corso di matematica "open source" per i Licei** , con una versione per l'indirizzo scientifico ed una per l'indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella "parte teorica" del libro di testo, spesso troppo formale e "faticosa" e che non tutti riuscivano a "prendere appunti" durante le spiegazioni.

La parte teorica è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e **si integra con la parte applicativa** in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle "tecniche" di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , "schede di lavoro" da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente **non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.**

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica "Geogebra" (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle "*schede*" in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), **possano essere utili ad altri docenti per costruire,** integrandole con materiale personale, **il proprio libro di testo** che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti**, potrebbe essere facilmente aggiornato** e **modificato** ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell'articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl'Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

Cecilia Magni

Progetto Matematica in rete

Cecilia Magni

APPUNTI DI MATEMATICA 5

Indirizzo Scientifico

Editore: Matematicainrete.it

Anno di edizione : 2024

Formato: ebook (PDF)

CODICE ISBN: 978-88-943828-8-4

APPUNTI DI MATEMATICA 5
Indirizzo scientifico

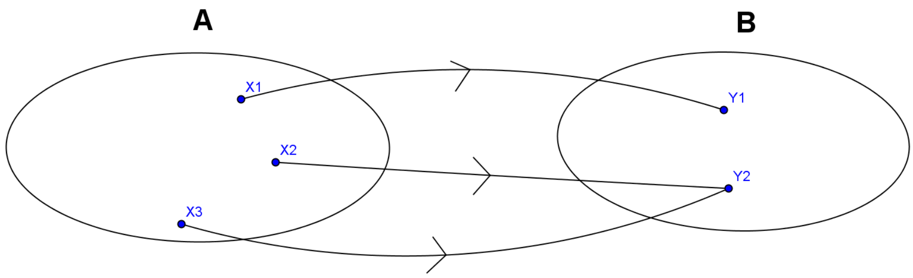
Indice

Funzioni

Definizione di funzione : una funzione $f : A \rightarrow B$, con A e B insiemi non vuoti, è una legge che associa ad **ogni elemento** $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

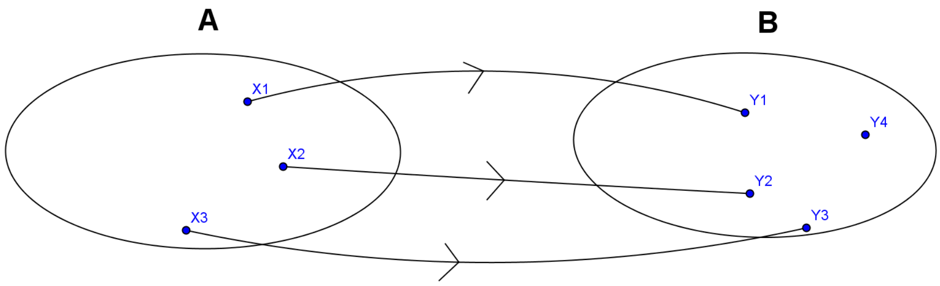
y viene chiamato "immagine" di x e indicato anche con $f(x)$.



Esempio: se consideriamo come insieme A l'insieme degli studenti della classe 5B (del liceo scientifico di Montevarchi nell'anno scolastico in corso) e come insieme B l'insieme dei giorni dell'anno, possiamo considerare la funzione f che associa ad ogni studente la propria data di nascita.

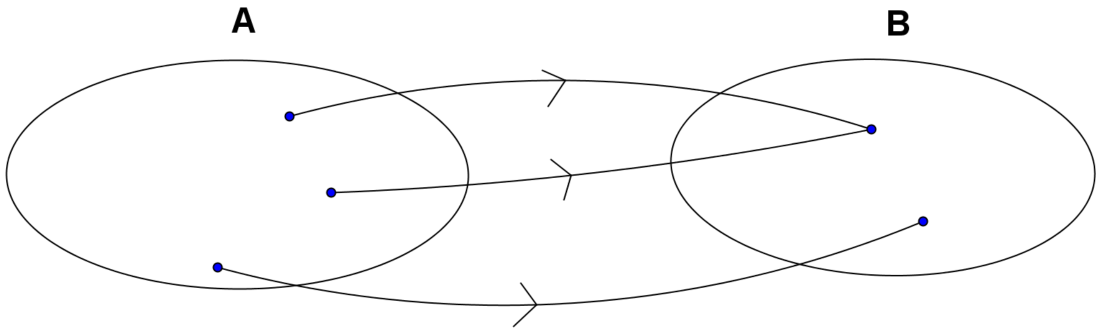
Proprietà di una funzione

- Una funzione f si dice **iniettiva** se ad elementi distinti $(x_1 \neq x_2)$ corrispondono immagini distinte $f(x_1) \neq f(x_2)$



Per esempio la funzione f : studente 5B $\rightarrow$ data di nascita, non è detto che sia iniettiva perche ci potrebbero essere studenti nati nello stesso giorno.

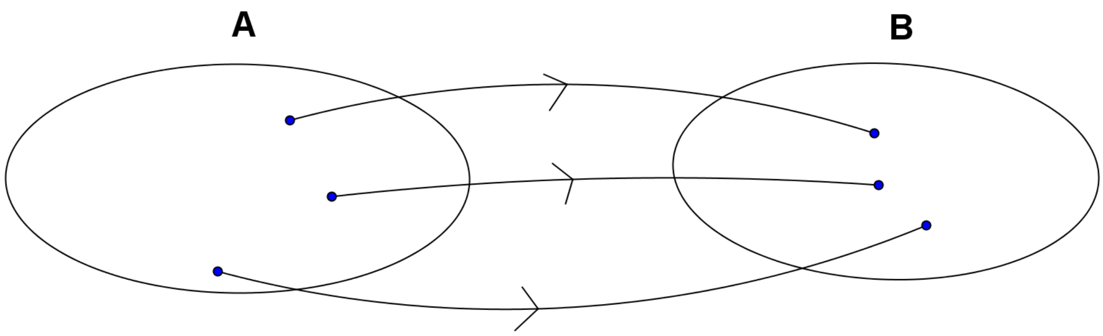
- Una funzione f si dice **suriettiva** se ogni elemento $y \in B$ è l'immagine di almeno un elemento $x \in A$.



Esempio di funzione suriettiva ma non iniettiva

NOTA: se prendiamo come insieme di arrivo B l'insieme delle immagini, ogni funzione diventa suriettiva.

- Una funzione f si dice **biunivoca** quando è iniettiva e suriettiva e quindi quando **ad ogni elemento** $x \in A$ **corrisponde uno e un solo elemento** $y \in B$ **e viceversa.**
  Questa funzione viene detta anche uno-a-uno.



Funzioni reali di variabile reale

Data $f: A \to B$ se $A, B \subseteq \Re$, cioè A e B sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali, f si dice **funzione reale di variabile reale.**

La variabile $x \in A$ viene detta **variabile indipendente** mentre $y = f(x)$ viene chiamata **variabile dipendente.**

Esempio: $f: x \to x+1$
è la funzione che associa ad ogni numero reale $x \in \Re$ il suo successivo.

- **Dominio della funzione**: è l'insieme dei numeri reali per cui la funzione risulta definita.

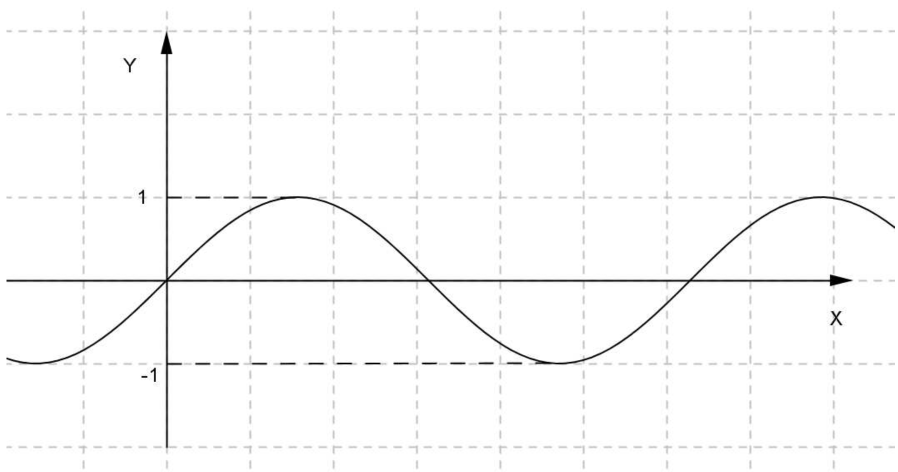
Esempio :
$f: x \to \frac{1}{x}$ ha come dominio $D_f = \Re - \{0\}$ poiché per $x = 0$ non è possibile effettuare $\frac{1}{0}$.
Esempio :
$f: x \to tgx$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ cioè il suo dominio è $Df = \Re - \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$.

- **Codominio della funzione**: è l'insieme delle immagini della funzione.

Esempio : $f: x \to tgx$ ha come codominio $Cf = \Re$.
Esempio: $f: x \to senx$ ha come codominio $Cf = [-1;1]$

- **Grafico della funzione**: è l'insieme dei punti (x, y) con $x \in Df$ e $y = f(x)$ rispetto ad un sistema di riferimento.

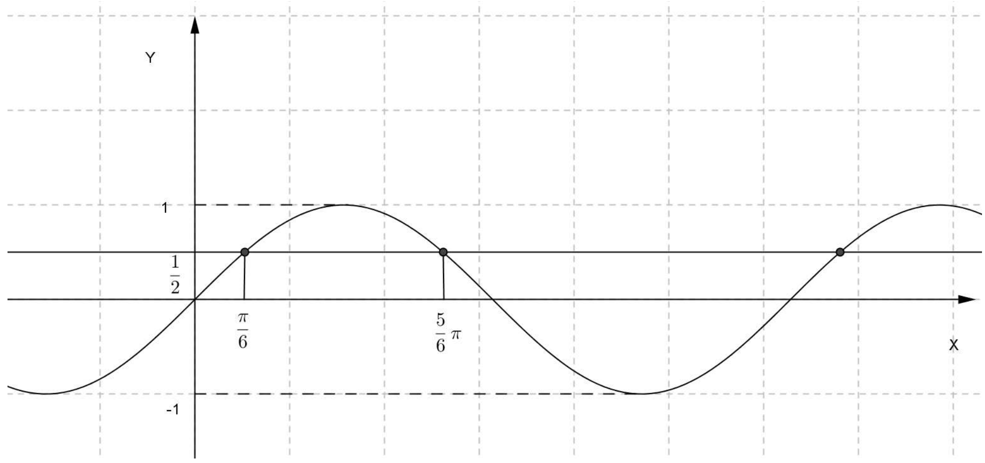
Esempio: il grafico di $y = senx$ è il seguente.



$Df = \Re$
$Cf = [-1,1]$

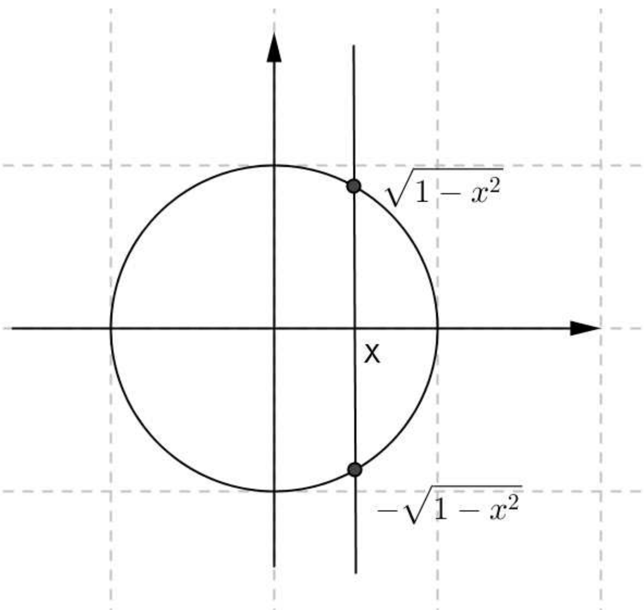
NOTA 1: dal grafico di una funzione possiamo vedere se è iniettiva tracciando rette parallele all'asse x: se le rette parallele all'asse x che intersecano il grafico lo intersecano solo in un punto allora si tratta di una funzione iniettiva, altrimenti no.

Infatti per esempio nel grafico di $y = senx$ una retta $y = k$ con $-1 \le k \le 1$ interseca infinite volte il grafico ed infatti $y = senx$ non è una funzione iniettiva.



$$\frac{\pi}{6} \to \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{6}\pi \to \frac{1}{2}$$
ecc.

NOTA 2: se una curva è grafico di una funzione allora tagliandola con rette parallele all'asse y dobbiamo avere **al massimo una intersezione** (ad ogni $x \in A$ è associato uno ed un solo $y = f(x) \in B$)
Per esempio una circonferenza non è grafico di una funzione.



$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$
$$x \to \sqrt{1-x^2}$$
$$x \to -\sqrt{1-x^2}$$

Ad un valore $-1 \le x \le 1$ corrispondono due immagini distinte.

ESERCIZI
DOMINIO, CODOMINIO E GRAFICO

Determina dominio, codominio e grafico delle seguenti funzioni:

1. $y = x + 1 \quad (f : x \to x + 1)$

2. $y = x^2 + 1$

3. $y = \frac{1}{x}$

4. $y = \cos x$

5. $y = tgx$

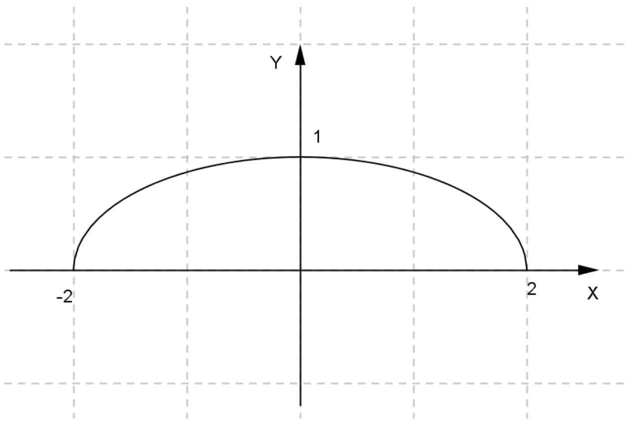
*6. $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

Svolgimento: se eleviamo al quadrato entrambi i membri otteniamo

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(4 - x^2\right) \to \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Si tratta di una ellisse con semiassi $a = 2$, $b = 1$ (centro l'origine e assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani).
Non possiamo però considerare tutta la curva ma solo la parte con $y \geq 0$ poiché la funzione era

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \text{ e quindi } y \geq 0$$



Il dominio: $D_f : -2 \leq x \leq 2$ (infatti si deve avere $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$)
Il codominio : $0 \leq y \leq 1$

7. $y = 2\sqrt{x^2 - 1}$

8. $y = \frac{2x}{x - 1}$

ESEMPI

1) Se abbiamo una **funzione polinomiale**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

il suo dominio è $\Re$.

Esempio: le funzioni

$$y = x + 1 \;\; ; \;\; y = x^2 - 1 \;\; ; \;\; y = x^3 + x - 2$$

Hanno tutte come dominio $\Re$.

2) Se f è una **funzione razionale fratta** (cioè quoziente di due polinomi) per determinare il suo dominio basterà escludere i valori che annullano il denominatore.

$$f : x \to \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots. + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_m x^m}$$

$$D_f = \Re - \{x : D(x) = 0\}$$

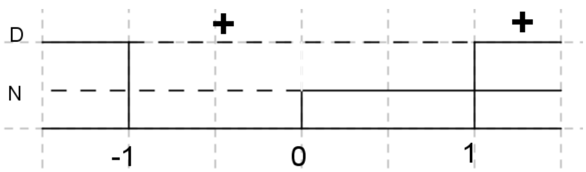
Esempi: $y = \dfrac{1}{x-1}$ ha come dominio $\Re - \{1\}$;

$y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ ha come dominio $\Re - \{\pm 2\}$

3) a) Se $f(x) = \sqrt[2n]{R(x)}$ cioè è una radice con indice pari , il dominio si troverà risolvendo $R(x) \geq 0$

Esempio: $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$

$\dfrac{x}{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow$



$$D_f : -1 < x \leq 0 \cup x > 1$$

b) Se $f(x) = \sqrt[2n+1]{R(x)}$ cioè *f(x)* è una radice di indice dispari, il duo dominio coinciderà con quello del radicando *R(x)*.

Esempio: $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ $\quad D_f : x \neq 0$

4) Se $f(x)$ è una **funzione goniometrica** ricordiamo che

$$y = senx \qquad D_f = \Re$$
$$y = \cos x \qquad D_f = \Re$$
$$y = tgx \qquad D_f = \Re - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$$

Esempi

$$y = sen\left(x - \frac{\pi}{3} \right) \qquad D_f = \Re$$
$$y = tg\left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \qquad 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$$

5) $f(x) = a^x$ **funzione esponenziale** ha come dominio $\Re$.

Esempio: $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$ ha come dominio $\Re - \{1\}$ perché l'esponente è definito per $x \neq 1$.

6) $f(x) = \log_a x$ **funzione logaritmica** ha come dominio $x > 0$ cioè in generale l'argomento deve essere positivo.

Quindi se per esempio abbiamo $y = \log_a(x-1)$ dovremo porre l'argomento positivo:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Nota: per indicare il logaritmo in base *e* (numero irrazionale $\cong 2{,}7$) scriveremo *ln* , cioè

$$\ln x = \log_e x .$$

ESERCIZI
DOMINI DI FUNZIONI

Determina il dominio delle seguenti funzioni:

1) $y = x^3 + x^2 + 1$ $[\Re]$

2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ $[x \neq \pm 1]$

3) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $[x \leq 0 \cup x > 1]$

4) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ $[x \neq 1]$

5) $y = \sqrt{senx + \cos x}$ $[-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi]$

6) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$ $[x \geq 0]$

7) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $[x \neq 2]$

8) $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x^2 - 9}\right)$ $[-3 < x < 1 \cup x > 3]$

9) $y = \sqrt{\ln x}$ $[x \geq 1]$

10) $y = \sqrt[4]{9^x - 3^x}$ $[x \geq 0]$

11) $y = \dfrac{1}{\ln^2 x - 1}$ $[x > 0 \quad x \neq e, \dfrac{1}{e}]$

12) $y = \sqrt[3]{tgx}$ $[x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$

13) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$ $[0 < x \leq \dfrac{1}{e^2} \cup x \geq e^2]$

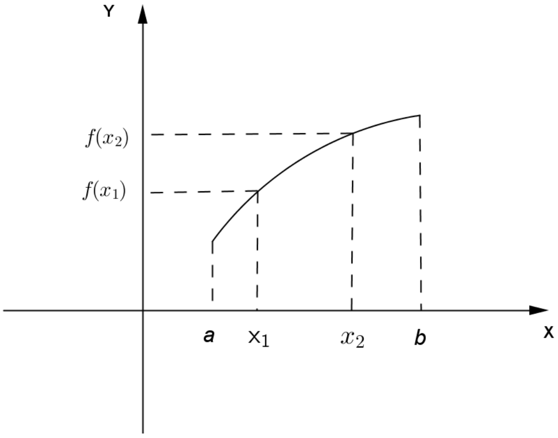
14) $y = \dfrac{1}{e^x}$ $[\Re]$

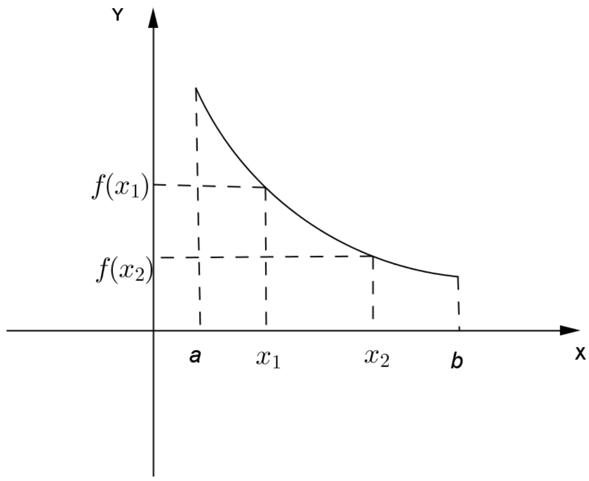
15) $y = senx + tg2x$ $[x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}]$

Caratteristiche di una funzione

Vediamo alcune caratteristiche di una funzione:

1) $f(x)$ si dice funzione crescente in I(a,b) (I intervallo anche illimitato) se per ogni $x_1 < x_2 \in I$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$, mentre si dice decrescente in I per ogni $x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.





Può darsi che una funzione sia crescente (o decrescente) in tutto il dominio oppure crescente in alcuni intervalli e decrescente in altri.

Esempi

$y = x + 1$ è crescente $\forall x \in D_f$

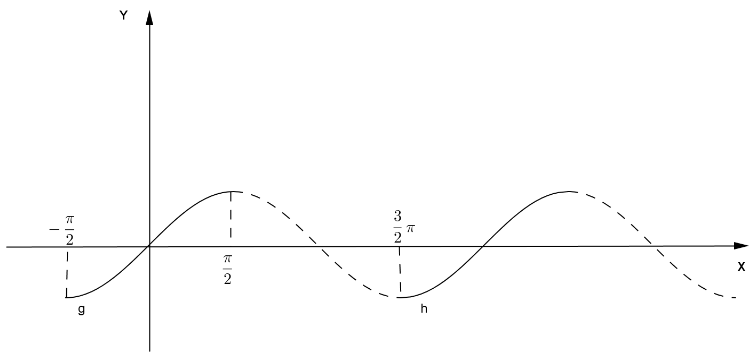
$y = x^2$ è decrescente $\forall x \leq 0$ quindi in $I = (-\infty, 0]$ è crescente $\forall x \geq 0$ cioè in $I = [0, +\infty)$

$y = senx$ è crescente negli intervalli

$-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$,

decrescente quando

$\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi$

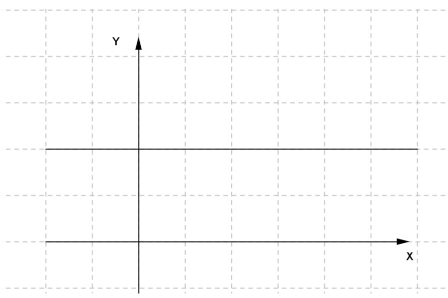


NOTA: Naturalmente una funzione può essere costante cioè $f(x) = k \quad \forall x \in D_f$.

Esempio: $y = 2$

$D_f = \Re$

funzione costante

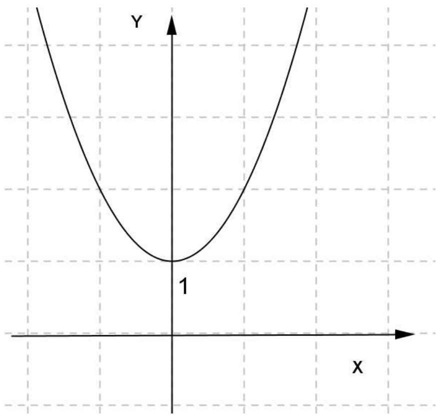


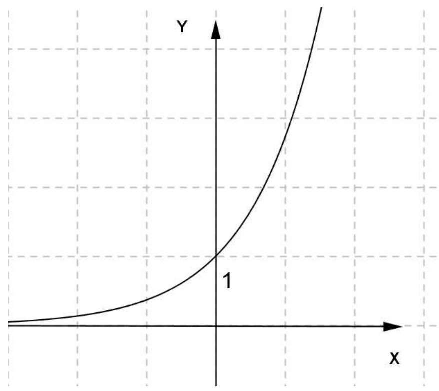
2) **a.** Una funzione $f(x)$ si dice *limitata inferiormente*

- se $f(x) \geq m \quad \forall x \in D_f$ (m si dice minimo della funzione e appartiene al codominio)
- oppure se $f(x) > I \ \ \forall x \in D_f$ (I si dice “estremo inferiore” e non appartiene al codominio).

Esempio: $y = x^2 + 1$ ha un minimo $m = 1 \ \ f(x) \geq 1 \ \ \forall x \in D_f = \Re$

Esempio: $y = e^x$ ha un estremo inferiore $I = 0 \ f(x) > 0 \ \ \forall x \in D_f = \Re$



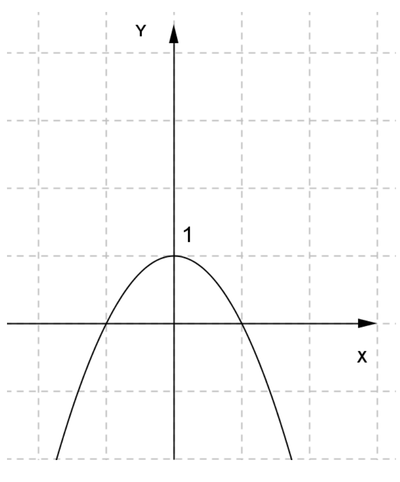


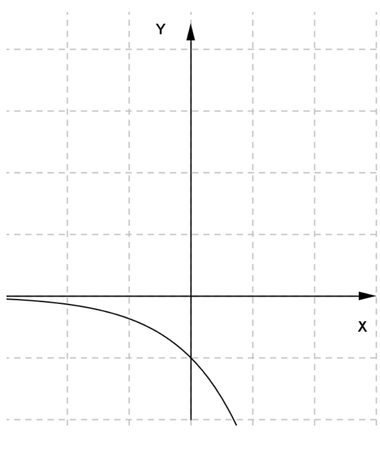
b. Una funzione $f(x)$ si dice *limitata superiormente*

- se $f(x) \leq M \quad \forall x \in D_f$ (M si dice massimo della funzione e appartiene al codominio)
- oppure se $f(x) < S \quad \forall x \in D_f$ (S si dice “estremo superiore” e non appartiene al codominio)

Esempio: $y = -x^2 + 1$ ha massimo $M = 1$: $f(x) \leq 1 \ \ \forall x \in \Re$

Esempio: $y = -e^x$ ha estremo superiore $S = 0$: $f(x) < 0 \ \ \forall x \in \Re$

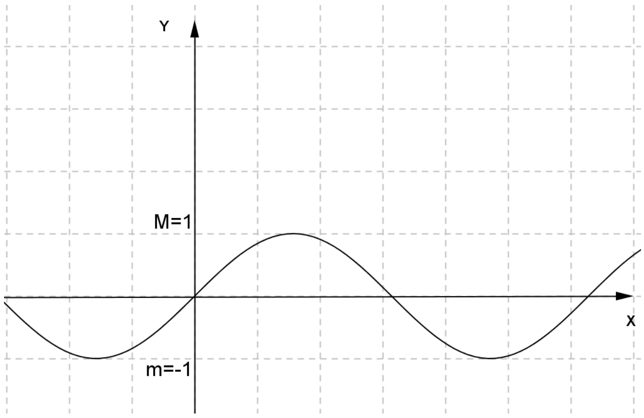


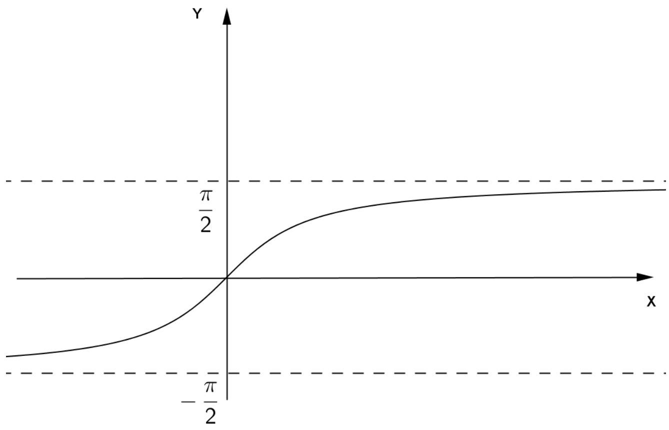


c. $f(x)$ si dice *limitata* se è limitata inferiormente e superiormente.

Esempio: $y = senx$ è limitata $(m = -1, M = 1)$

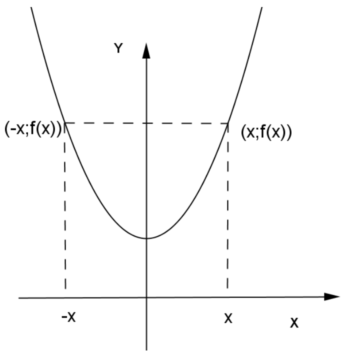
Esempio: $y = arctgx$ è limitata $\left(I = -\frac{\pi}{2}, S = \frac{\pi}{2}\right)$





3) **a.** Una funzione $f(x)$ si dice *pari* quando $f(-x) = f(x)$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Esempio: $y = x^2 + 1$ è pari



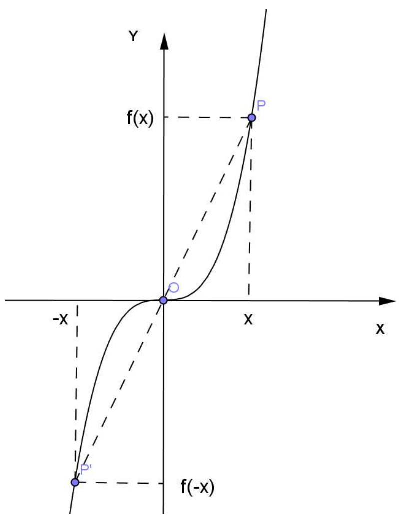
NOTA: se in una funzione la variabile x compare solo con esponente "pari" la funzione è pari.

Esempio: $y = \frac{x^4 - 1}{3 + x^2}$ è una funzione pari poiché $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{3 + (-x)^2} = f(x)$

b. Una funzione $f(x)$ si dice *dispari* quando $f(-x) = -f(x)$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento.

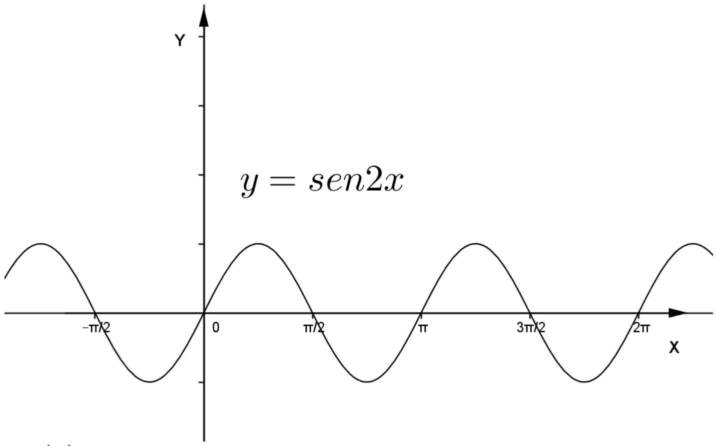
Esempio: $y = x^3$ è dispari

$P(x; f(x)) \quad P'(-x; -f(x))$ sono simmetrici rispetto a (0;0)



4) Una funzione $f(x)$ si dice *periodica di periodo T* quando T è il minimo valore per cui

$$f(x+T)=f(x) \quad (\forall x \in D_f)$$



Esempi:

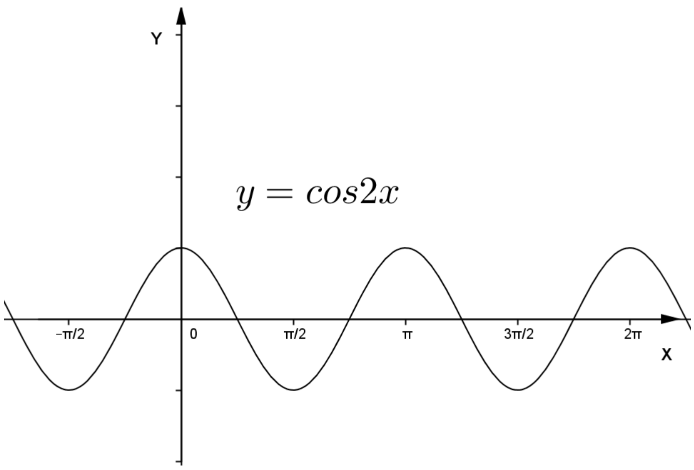
a. $y = senx$ ha periodo $T = 2\pi$

$y = sen2x$ ha periodo $T = \pi$

Infatti
$f(x+\pi)=sen2(x+\pi)=sen(2x+2\pi)=sen2x=f(x)$

In generale $y = senkx$ ha periodo $T = \dfrac{2\pi}{k}$

$$f\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)=sen\left[k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)\right]=sen(kx+2\pi)=senkx=f(x)$$



b. $y=\cos x$ ha periodo $T = 2\pi$

$y=\cos 2x$ ha periodo $T=\pi$

In generale $y=\cos kx$ ha periodo $T=\dfrac{2\pi}{k}$
poiché

$$f(x+\frac{2\pi}{k})=\cos\left[k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)\right]=\cos(kx+2\pi)=\cos kx=f(x)$$

c. $y = tgx$ ha periodo $T=\pi$

In generale $y = tgkx$ ha periodo $T=\dfrac{\pi}{k}$ poiché

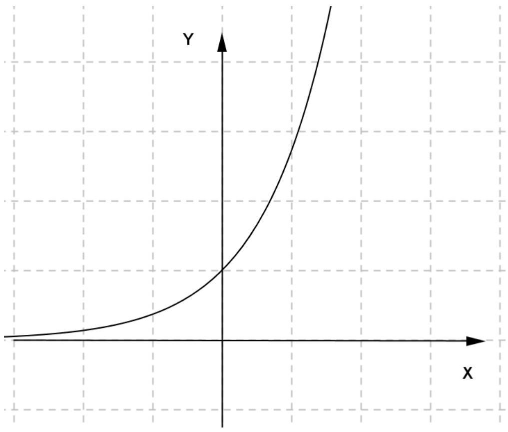
$$f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)=tg\left[k\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right]=tg(kx+\pi)=tgkx=f(x)$$

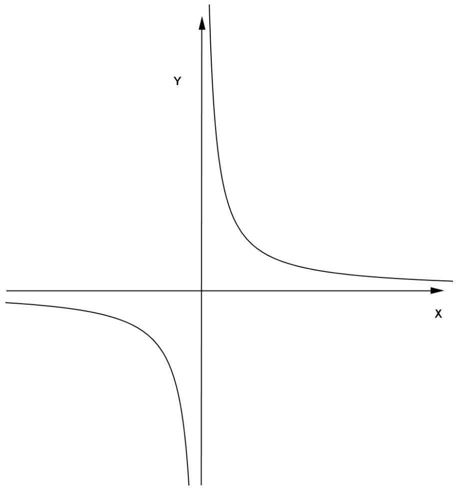
5) Una funzione $f(x)$ può avere un *asintoto*

orizzontale: quando il suo grafico si “avvicina”ad una retta orizzontale di equazione $y = k$.

Esempio: $y = e^x$ ha l’asse x come asintoto orizzontale ma solo quando $x \to -\infty$ (parte sinistra del grafico).

Esempio: $y = \frac{1}{x}$ ha l’asse x come asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che quando $x \to -\infty$ (cioè sia a sinistra che a destra).

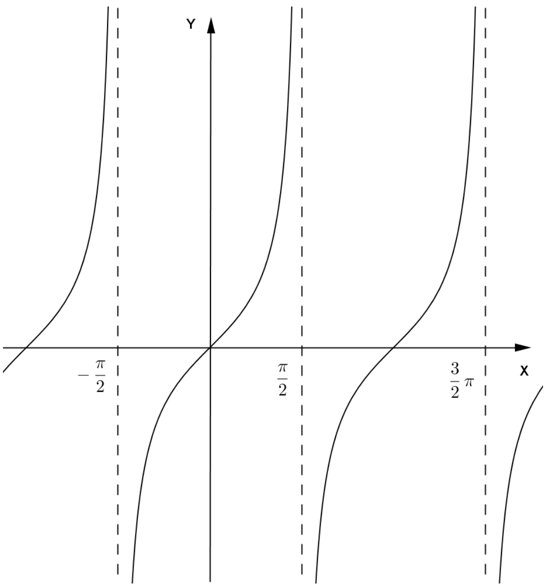


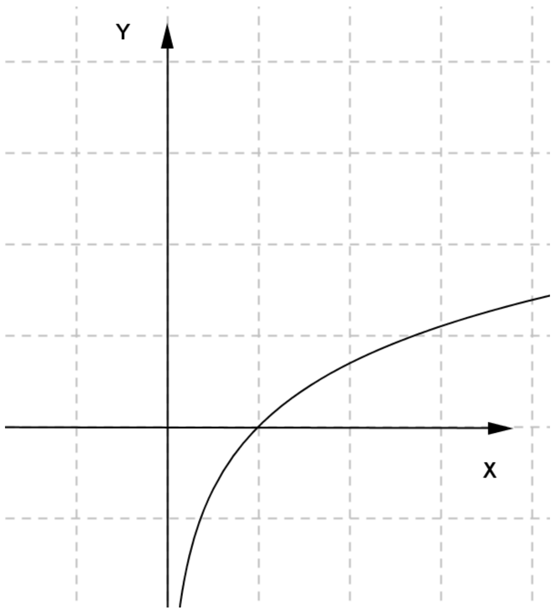


- **Verticale**: quando il suo grafico si “avvicina” ad una retta verticale di equazione $x = k$ quando $x \to k$ ($x = k \notin D_f$).

  Esempio: $y = tgx$ ha come asintoti verticali le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

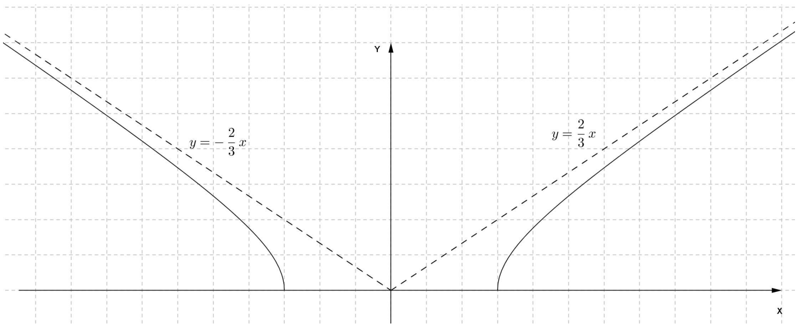
  Esempio: $y = \ln x$ ha come asintoto verticale l’asse y.





- **obliquo**: quando il suo grafico si "avvicina" ad una retta di equazione $y = mx + q$ quando $x \to +\infty$ e/o $x \to -\infty$

  Esempio: $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^x - 9}$ $\quad (\to \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad a = 3 \quad b = 2)$



asintoti obliqui
$y = \pm\frac{2}{3}x$

ESERCIZI

CARATTERISTICHE DI UNA FUNZIONE

Determina dominio, codominio, grafico e caratteristiche delle seguenti funzioni:

1) $y = \cos 3x$

2) $y = \frac{x-2}{x-3}$

3) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

4) $y = x^2 - x$

5) $y = 3x - 1$

6) $y = tg\,2x$

7) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

8) $y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$

9) $y = sen\,4x$

10) $y = -x^2$

Grafici deducibili dal grafico di f(x)

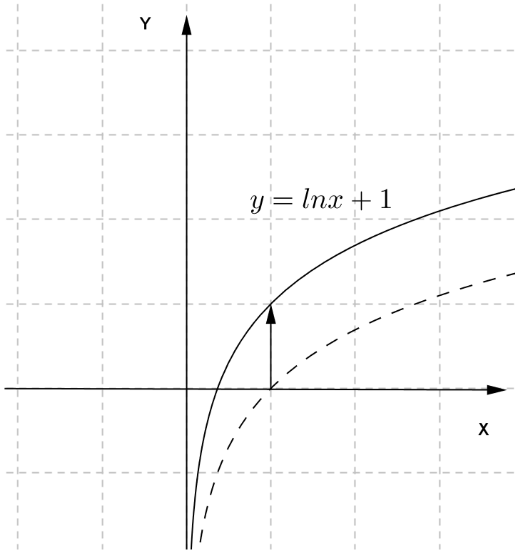
Se conosciamo il grafico G_f di una funzione $f(x)$ possiamo facilmente disegnare anche il grafico di:

- $f(x)+a \qquad a \in \Re$
- $f(x-a) \qquad a \in \Re$
- $-f(x)$
- $f(-x)$
- $|f(x)|$

Vediamo un esempio: consideriamo come funzione $f(x)=\ln x$

a. Come risulterà il grafico di $y=\ln x+1$?

E' chiaro che sarà traslato verso l'alto di 1.

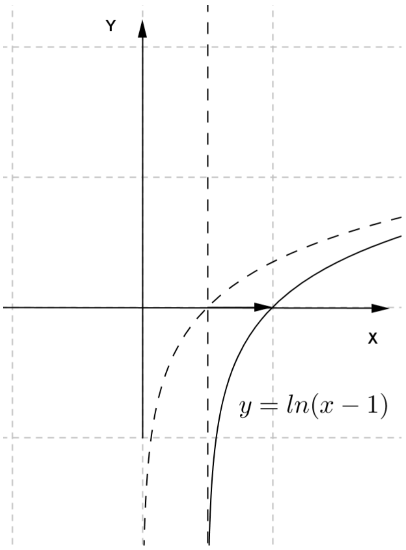


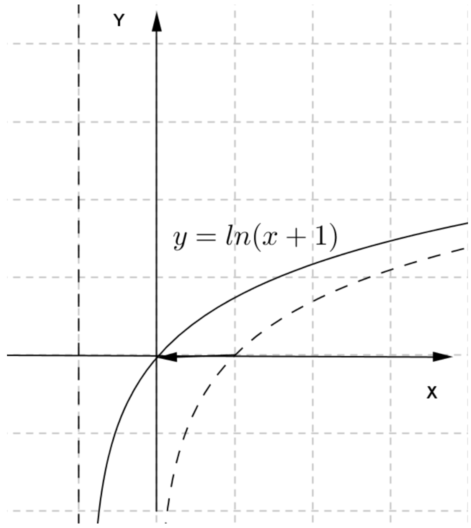
Naturalmente se considero $y=\ln x-1$ traslo verso il basso.

b. Come risulterà il grafico di $y=\ln(x-1)$?

In questo caso il dominio cambia e risulta $x>1$: il grafico è traslato verso destra ed ha asintoto verticale $x=1$.

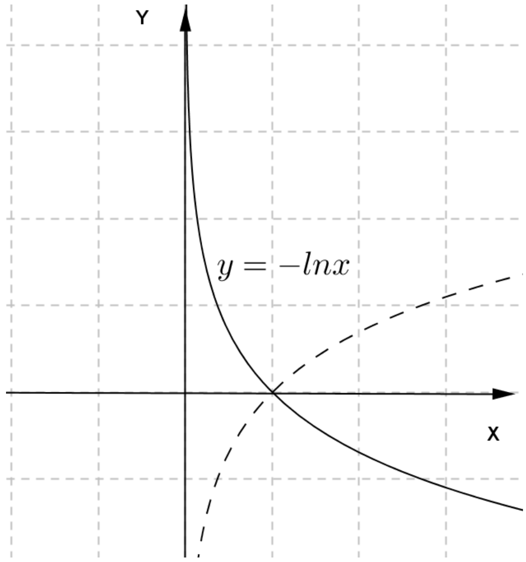
Se invece avessi considerato $y=\ln(x+1)$ il grafico del logaritmo traslava verso sinistra e aveva asintoto verticale $x=-1$ (il dominio: $x>-1$)





b. Come risulta il grafico di $y = -\ln x$?

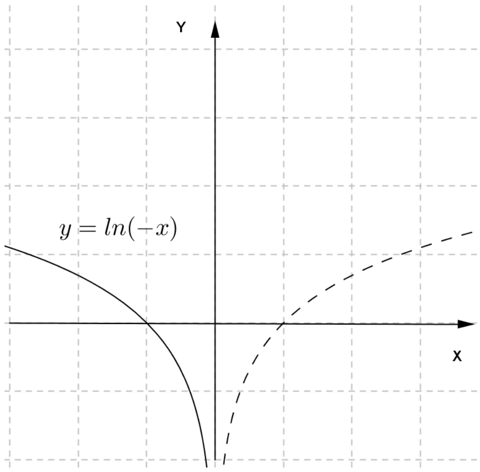
Le immagini risultano opposte e quindi si ha il grafico simmetrico rispetto all'asse x.



c. Come risulta il grafico di $y = \ln(-x)$?

Questa volta il dominio cambia e si ha $-x > 0 \Rightarrow x < 0$.

Il grafico sarà simmetrico (di quello del logaritmo) rispetto all'asse y.

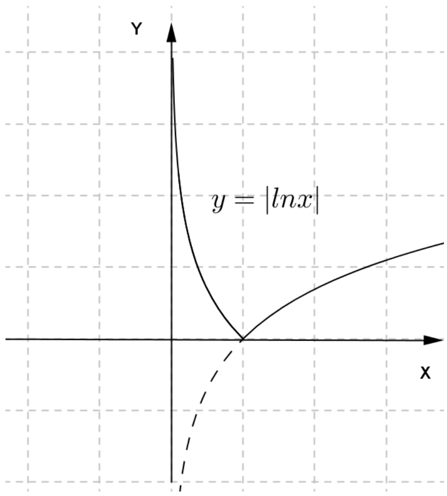


d. Come risulta il grafico di $y = |\ln x|$?

Ricordiamo che:

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x & \textit{quando} \quad \ln x \geq 0 \quad \textit{cioè} \quad \textit{per} \quad x \geq 1 \\ -\ln x & \textit{quando} \quad \ln x < 0 \quad \textit{cioè} \quad \textit{per} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Quindi il grafico di $|\ln x|$ coincide con il grafico di $\ln x$ quando si trova sopra all'asse x (cioè quando le immagini sono positive), mentre andrà "ribaltato" rispetto all'asse x quando si trova sotto all'asse x (cioè quando le immagini sono negative).



ESERCIZI

GRAFICI DEDUCIBILI

Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

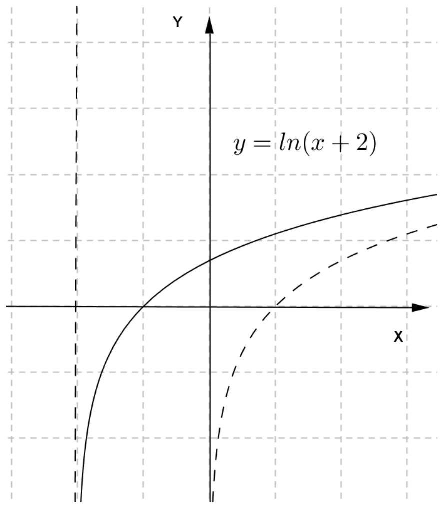
1) $y = \ln(x-2)$ 2) $y = 2^x - 1$ 3) $y = \left|\frac{x}{x-4}\right|$

4) $y = 3^{x-2}$ 5) $y = \ln x - 2$

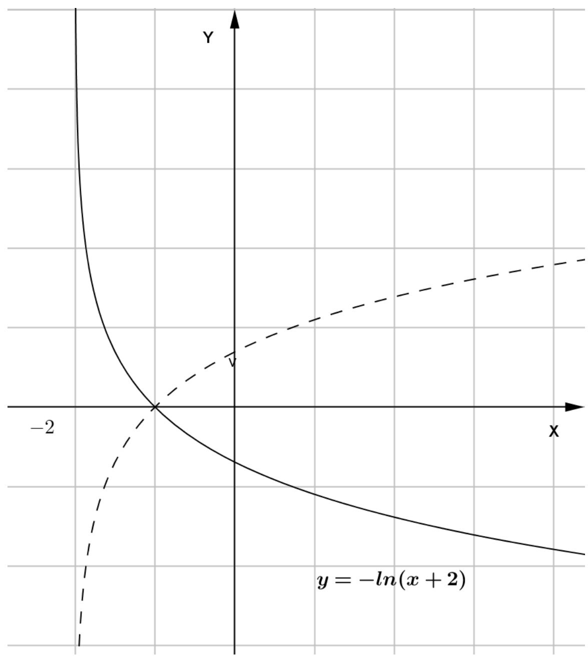
*6) $y = -\ln(x+2)$

Svolgimento:

Partiamo dal grafico di $f(x) = \ln x$ e consideriamo all'inizio il grafico di $y = \ln(x+2)$ (dominio $x > -2$: traslo a sinistra).



Infine consideriamo $y = -\ln(x+2)$ cioè ribaltiamo rispetto all'asse x:



7) $y = \left|\ln(x-3)\right|$

8) $y = \ln(x+1)$

9) $y = -\ln(x-3)$

10) $y = \left|tgx\right|$

11) $y = -2^x$

12) $y = \left|\ln(x-4)\right|$

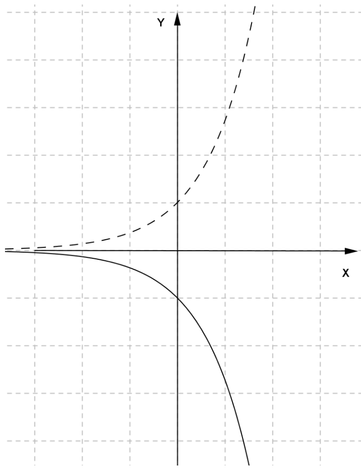
13) $y = \left|\frac{x-2}{x}\right|$

14) $y = 2^{x-1}$

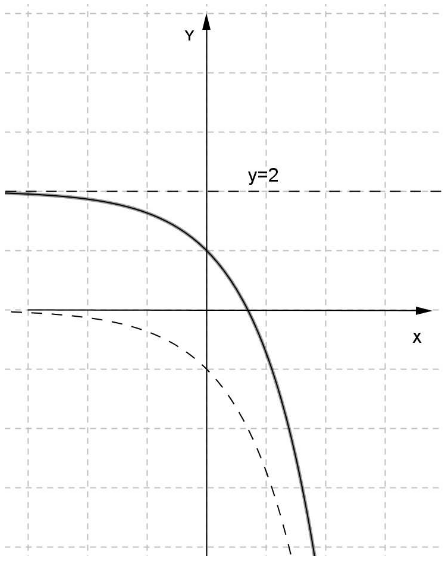
*15) $y = -e^x + 2$

Svolgimento:

Partiamo dal grafico di $f(x) = e^x$ e consideriamo il grafico di $-f(x)$ (simmetrico rispetto all'asse x)



Infine consideriamo $y = -f(x) + 2$ cioè trasliamo verso l'alto di 2 (l'asintoto orizzontale diventa $y = 2$)



Composizione di funzioni

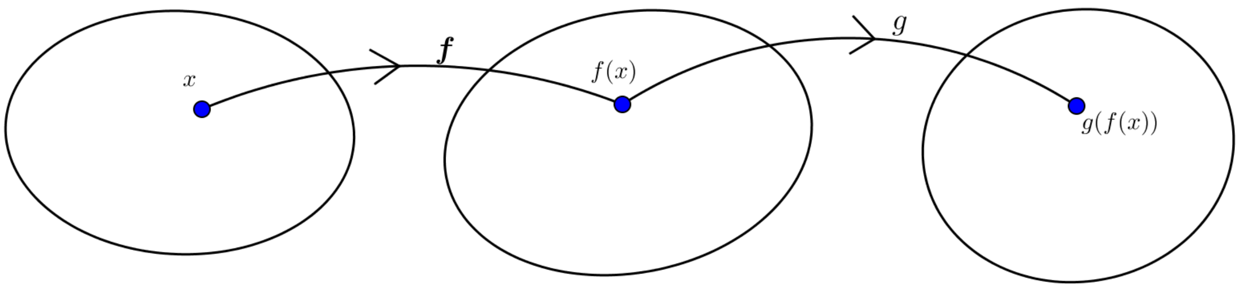
Le funzioni si possono “comporre”.

Se per esempio abbiamo $f : x \to x+1$ e $g : x \to x^2$

possiamo applicare f e al risultato applicare g $\quad x \xrightarrow{f} x+1 \xrightarrow{g} (x+1)^2$

$y=(x+1)^2$ corrisponde a $g \circ f$ che si legge g **composto** f (la funzione che si trova vicina alla x è quella che si applica per prima).

$$g \circ f = g(f(x))$$



Nota

Notiamo che **la composizione tra funzioni non gode della proprietà commutativa** cioè:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Infatti per esempio considerando le funzioni precedenti se applico prima g e poi f ho:

$$x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} x^2+1$$

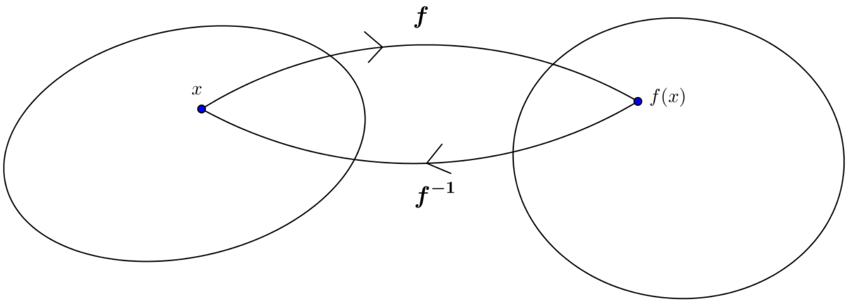
$f \circ g$ risulta $y=x^2+1$ ed è diversa da $y=(x+1)^2$

Nota: si possono comporre anche più di 2 funzioni. Per esempio $y=\ln^2(x+1)$ può essere pensata come la composizione di

$$x \xrightarrow{f_1} x+1 \xrightarrow{f_2} \ln(x+1) \xrightarrow{f_3} \ln^2(x+1)$$

Funzione inversa

Consideriamo una funzione $f(x)$: per funzione inversa di $f(x)$, indicata con il simbolo f^{-1}, intendiamo la funzione che associa all'immagine $f(x)$ il valore x di partenza.

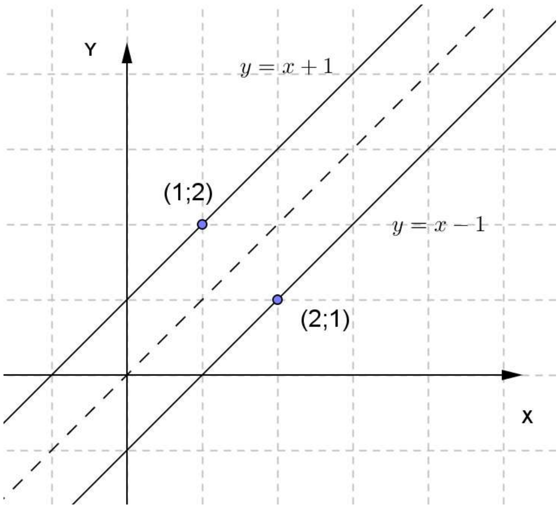


Consideriamo per esempio la funzione $f(x)$: $x \to x+1$.

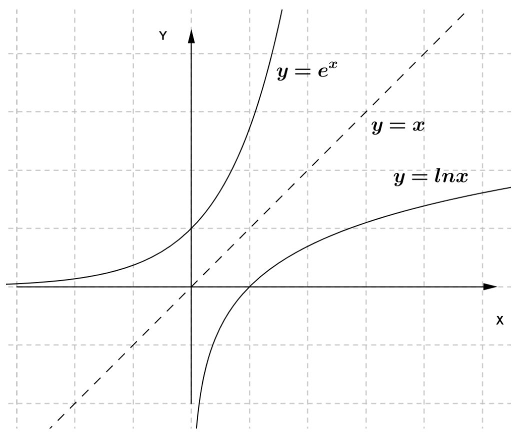
Se scriviamo $y = x+1$ e ricaviamo la x abbiamo $x = y-1$ cioè $f^{-1}: y \to y-1$

Alla fine in genere, invece di scrivere $f^{-1}(y) = y-1$, si scrive $f^{-1}(x) = x-1$.

Se riportiamo i grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ nello stesso sistema di riferimento, notiamo che sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I-III quadrante perché ascissa e ordinata si scambiano



NOTA
Ricorda che la funzione logaritmica è stata definita proprio come funzione inversa della funzione esponenziale.



Ma possiamo sempre invertire una funzione?

Perché anche f^{-1} sia una funzione occorre che $f(x)$ sia **iniettiva** (come dominio di f^{-1} prenderemo il codominio di f).

Consideriamo per esempio $f(x)=x^2$.

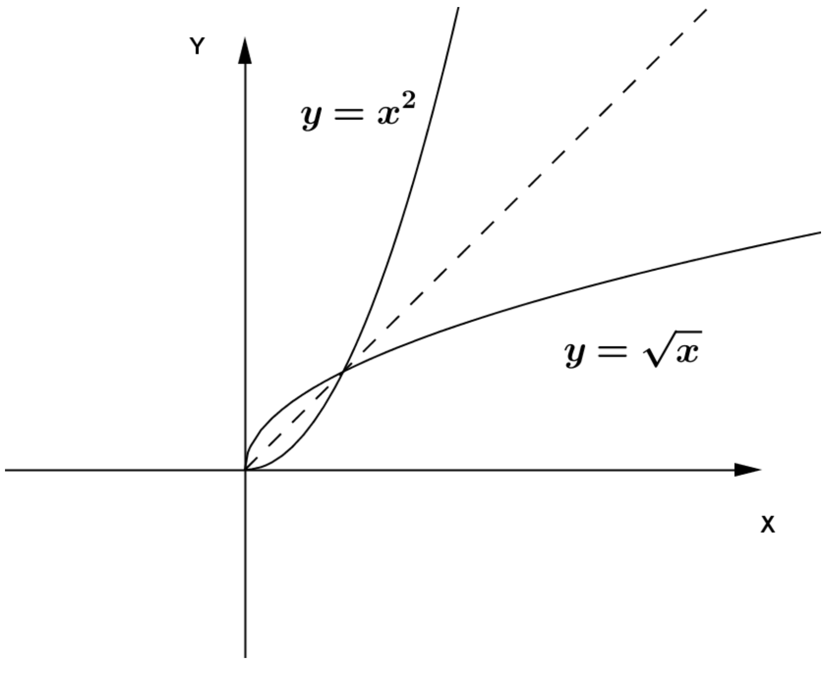
Se proviamo a ricavare x abbiamo:

$$y=x^2 \rightarrow \qquad x=\pm\sqrt{y}$$

Ma $y=\pm\sqrt{x}$ non è una funzione! (ad ogni valore di x corrispondono 2 immagini).

Se la funzione non è iniettiva e vogliamo ugualmente definire una "funzione inversa", dobbiamo "restringere" il dominio della funzione in modo da avere una funzione iniettiva e poterla così invertire.

Se per esempio consideriamo $y=x^2$ ma solo con $x\geq 0$ la funzione diventa iniettiva e la sua inversa è $y=\sqrt{x}$



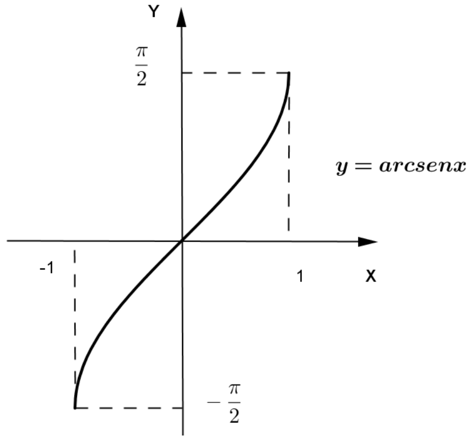
Funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente

Anche le funzioni goniometriche non sono iniettive ma il loro dominio è stato "ristretto" per poter definire le "funzioni inverse" delle funzioni goniometriche.

- ### Funzione inversa del seno

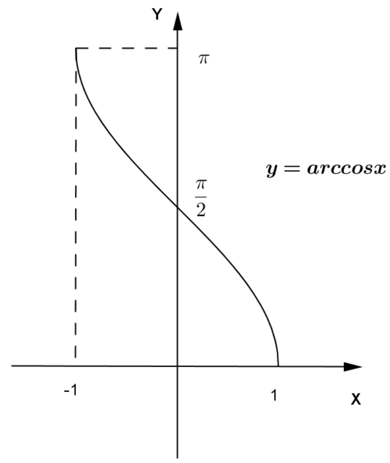
Restringiamo $y = senx$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:
in questo intervallo la funzione è iniettiva.
La funzione inversa si indica con $arcsenx$ (che si legge arcoseno di x ed indica l' angolo il cui seno è di x) ed ha come dominio $[-1;1]$ e come codominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Il grafico di $y = arcsenx$ è questo accanto:



- ### Funzione inversa del coseno

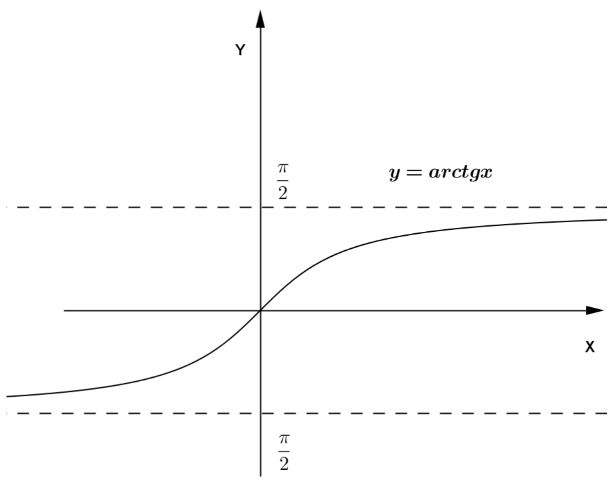
Se restringiamo $y = \cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ possiamo invertirlo: la funzione inversa del coseno ristretto a $[0, \pi]$ si chiama $\arccos x$ (arcocoseno di x) ed ha il questo grafico:



- ### Funzione inversa della tangente

Se restringiamo la tangente $y = tgx$ all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ possiamo considerare la funzione inversa, indicata con $arctgx$ (arcotangente di x) che ha il seguente grafico.

Il dominio di $y = arctgx$ è $\Re$, il codominio è $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

Determina il dominio delle seguenti funzioni:

1) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{4-x^2}}$ $\quad[-2<x\le 0 \cup 2<x\le 3]$

2) $y=\sqrt{x^3-2x^2-5x+6}$ $\quad[-2\le x\le 1\cup x\ge 3]$

3) $y=\sqrt{2^x-1}+\sqrt{9-3^x}$ $\quad[0\le x\le 2]$

4) $y=\dfrac{e^x}{\ln^2 x-4}$ $\quad[x>0 \qquad x\ne e^2, e^{-2}]$

5) $y=\sqrt{\log_2(1-2x)-1}$ $\quad\left[x\le -\dfrac{1}{2}\right]$

6) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2}$ $\quad[1<x\le 5]$

7) $y=\sqrt{1-4sen^2 x}$ $\quad\left[-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]$

8) $y=\sqrt{tg^2 x-3}$ $\quad\left[\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi\cup\dfrac{\pi}{2}+k\pi<x\le\dfrac{2}{3}\pi+k\pi\right]$

9) $y=\ln\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+1}\right)$ $\quad[x<-2\cup x>2]$

10) $y=arcsen\left(\dfrac{2}{x}\right)$ $\quad[x\le -2\cup x\ge 2]$

11) $y=arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad[x\ne 0]$

12) $y=arcsen(x-1)$ $\quad[0\le x\le 2]$

13) $y=\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad[x\le -1\cup x\ge 1]$

14) $y=arctg(\ln x)$ $\quad[x>0]$

15) $y=\sqrt{x+1-\sqrt{x+3}}$ $\quad[x\ge 1]$

16) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x^2+1}}$ $\quad [x \geq 1]$

17) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad [\Re]$

18) $y=\sqrt{tgx}$ $\quad \left[k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$

19) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{tgx}}$ $\quad [\,x \neq k\dfrac{\pi}{2}\,]$

20) $y=\sqrt[5]{\dfrac{1}{x-2}}$ $\quad [x \neq 2]$

21) $y=\sqrt{\dfrac{1}{\ln^2 x-\ln x}}$ $\quad [0<x<1 \cup x>e]$

22) $y=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$ $\quad [x>0]$

23) $y=\sqrt{tg^2 x-1}$ $\quad \left[\dfrac{\pi}{4}+k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2}+k\pi \cup \dfrac{\pi}{2}+k\pi < x \leq \dfrac{3}{4}\pi+k\pi\right]$

24) $y=\sqrt{\dfrac{e^x-3}{x}}$ $\quad [x<0 \cup x \geq \ln 3]$

25) $y=\sqrt{\dfrac{2x-x^2}{\ln x}}$ $\quad [1<x \leq 2]$

26) $y=arcsen\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ $\quad [x \leq 0 \cup x \geq 2]$

27) $y=\sqrt[3]{\ln(1-x)}$ $\quad [x<1]$

28) $y=\sqrt{e^x-1}$ $\quad [x \geq 0]$

29) $y=\sqrt{2^{x-1}-4}$ $\quad [x \geq 3]$

30) $y=\dfrac{1}{arctg(x-1)}$ $\quad [x \neq 1]$

SCHEDA DI VERIFICA 1

1) Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y=\sqrt{\dfrac{x}{3-x^2}}$ $\quad[x<-\sqrt{3}\cup 0\le x<\sqrt{3}]$

b) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ $\quad[x<-1\cup x>1]$

c) $y=\sqrt{1-2^x}$ $\quad[x\le 0]$

d) $y=arcsen(4-x)$ $\quad[3\le x\le 5]$

e) $y=arctg\left(\dfrac{x}{x-5}\right)$ $\quad[x\ne 5]$

f) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{senx+\cos x}}$ $\quad\left[x\ne -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$

g) $y=\sqrt{\ln x}$ $\quad[x\ge 1]$

h) $y=\dfrac{1}{4-\log_2 x}$ $\quad[x>0, x\ne 16]$

2) Traccia il grafico delle seguenti funzioni indicando anche dominio e caratteristiche:

a) $y=\left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

b) $y=-\ln(3-x)$

c) $y=3^x+1$

d) $y=\sqrt{x^2-4}$

3) a) Date $f_1 : x\to\dfrac{1}{x}$ e $f_2 : x\to\ln x$, scrivi come risultano $f_2\circ f_1$ e $f_1\circ f_2$ e indica i loro domini.

$$\left[f_2\circ f_1 : x\to\ln\left(\frac{1}{x}\right)\qquad D_{f_2\circ f_1} : x>0 \qquad ; \qquad f_1\circ f_2 : x\to\frac{1}{\ln x}\qquad D_{f_1\circ f_2} : x>0, x\ne 1\right]$$

b) Determina la funzione inversa di $y=e^x-2$

Traccia i grafici di f e f^{-1} nello stesso sistema di riferimento. Cosa osservi?

c) E' possibile invertire la funzione $y=x^2+1$?

Motiva la risposta.

SCHEDA DI VERIFICA 2

1) Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \ln\left(\dfrac{x^2-9}{x-2}\right)$

b) $y = \sqrt{\dfrac{senx}{2\cos x - 1}}$

c) $y = arcsen(x-7)$

d) $y = arctg\left(\dfrac{1}{2^x-8}\right)$

e) $y = \sqrt[5]{\dfrac{\ln x}{\ln x - 2}}$

f) $y = \sqrt{5^x - 1}$

g) $y = \sqrt{tg\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$

h) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$

2) Traccia il grafico delle seguenti funzioni indicando anche dominio e caratteristiche:

a) $y = |\ln(1-x)|$

b) $y = e^x + 5$

c) $y = \left|sen\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$

3) a) Date $f_1 : x \to 2^x$ e $f_2 : x \to x+1$, scrivi come risultano $f_2 \circ f_1$ e $f_1 \circ f_2$ e indica i loro domini.

b) Si può invertire la funzione $y = \dfrac{x-1}{x}$?
Se la risposta è affermativa determina l'inversa.

c) Disegna il grafico della funzione $y = tg2x$ e indicane dominio e caratteristiche. Si può invertire?

Come si dovrebbe restringere il dominio per invertirla?
Disegna il grafico della funzione inversa nel caso in cui si restringa il dominio di f.

Limiti di una funzione

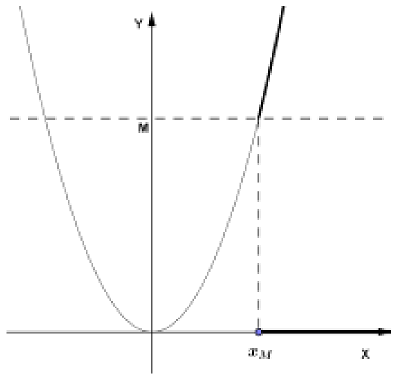
Definizioni

I) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$

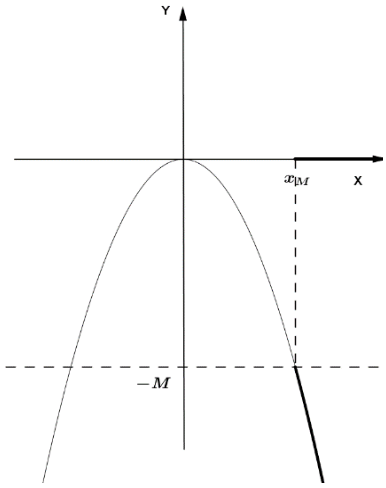
Cominciamo a studiare il "comportamento" di una funzione quando la x *diventa sempre più grande*: scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e leggeremo "limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$". Si possono avere vari casi.

a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ quando $\forall M>0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x>x_M \quad f(x)>M$

Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y = x^2$



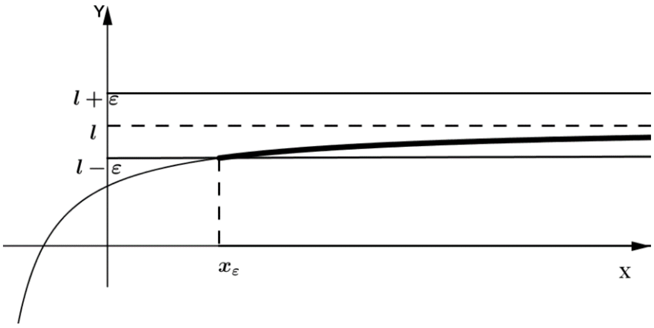
b) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ quando $\forall M>0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x>x_M \quad f(x)<-M$



Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y = -x^2$

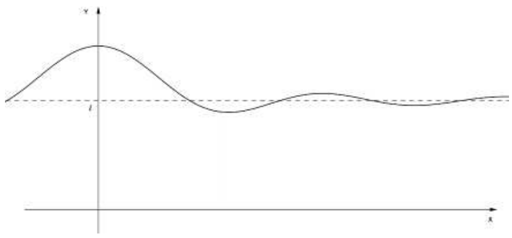
c) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l}$

Si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ quando $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x > x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



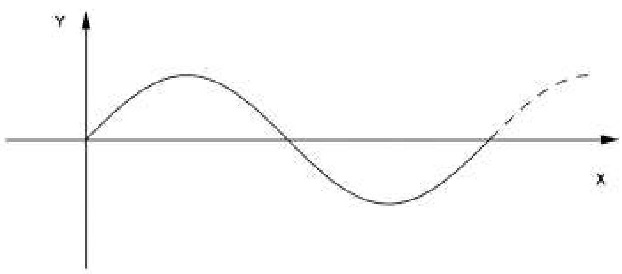
La retta $y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Nota: non dobbiamo pensare che l'asintoto non possa essere intersecato dal grafico.
Possiamo anche avere grafici come il seguente: la cosa essenziale è che le oscillazioni si "smorzino" cioè che la distanza fra il grafico e la retta
$y = l$ tenda a 0.



d) $\boxed{\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)}$

Consideriamo $f(x) = \operatorname{sen} x$. Qual è il suo limite quando $x \to +\infty$?
In questo caso che $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ in quanto la funzione oscilla e non ha un "comportamento definitivo".

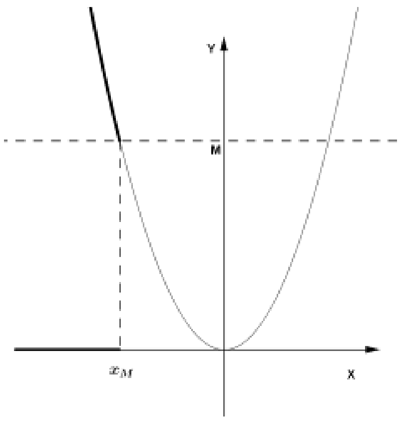


Nota: anche *y=cosx* e *y=tgx* e in generale le funzioni periodiche non hanno limite quando $x \to +\infty$.

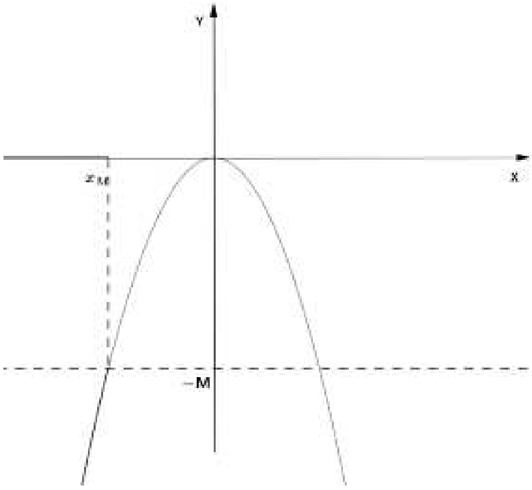
II) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)}$

a) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x < x_M \quad f(x) > M$

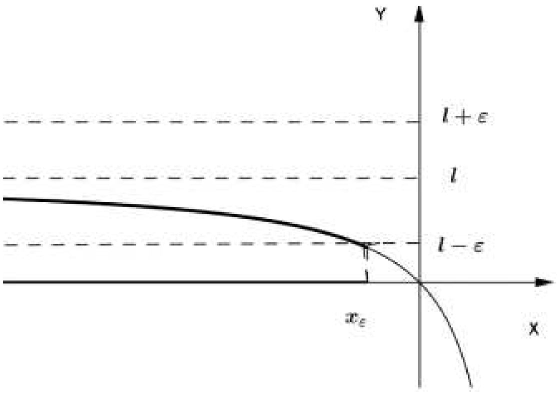
Osserviamo che questa volta consideriamo $x < x_M$ perché $x \to -\infty$.



b) Analogamente $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x < x_M \quad f(x) < -M$



c) Analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x < x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



$y = l$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

d) $\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)$ quando la $f(x)$ per $x \to -\infty$ non cresce sempre di più o non decresce sempre di più e neppure si avvicina ad un valore l: per esempio anche $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.

III) $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ dove } x_0 \notin D_f}$

Studiamo adesso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ dove $x_0 \notin D_f$ ma è un punto a cui posso "avvicinarmi" quanto voglio e poiché possiamo avvicinarci a x_0 sia "da destra" che "da sinistra" consideriamo sia $\lim_{x\to x_o^+} f(x)$ che $\lim_{x\to x_o^-} f(x)$.

a) Il limite è infinito

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$

Abbiamo

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \ f(x) > M$

e

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \ f(x) < -M$

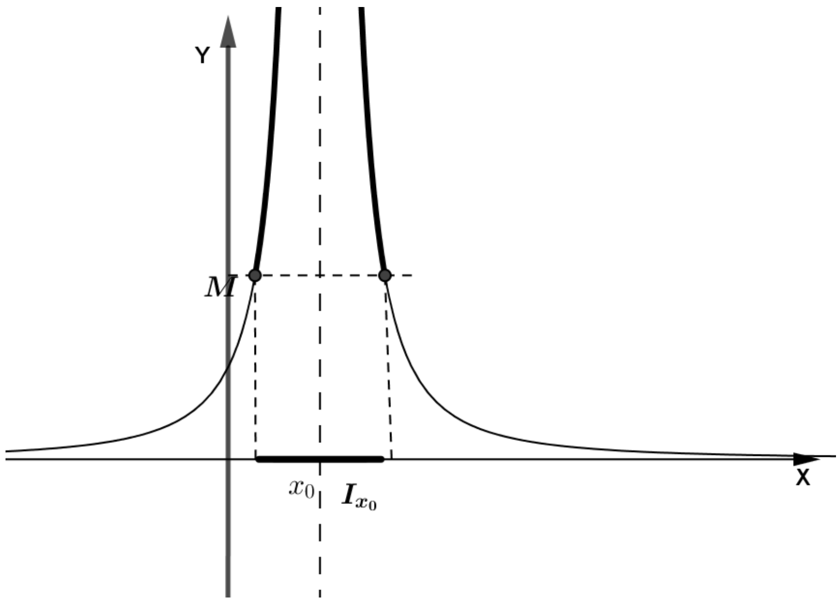
Invece

$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \ f(x) > M$

e

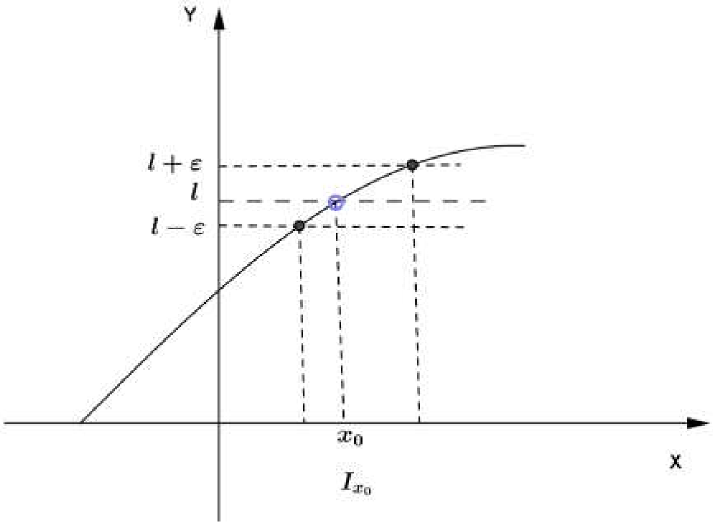
$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists \ I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \ f(x) < -M$

La retta $x = x_o$ è **asintoto verticale** per la funzione : il "comportamento" può essere diverso da destra e a sinistra oppure lo stesso (in figura è rappresentato il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ che è un esempio in cui $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ con $x_0 = 1$.



b) Il limite è un numero finito

$\boxed{\lim_{x \to x_o} f(x) = l}$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_o} : \forall x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



Esempio
Considera la funzione

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad D_f : x \neq 1$

Calcoliamo il limite quando x tende a 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

c) Il limite non esiste

Esempio

Consideriamo $y = sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Il suo dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Proviamo a calcolare

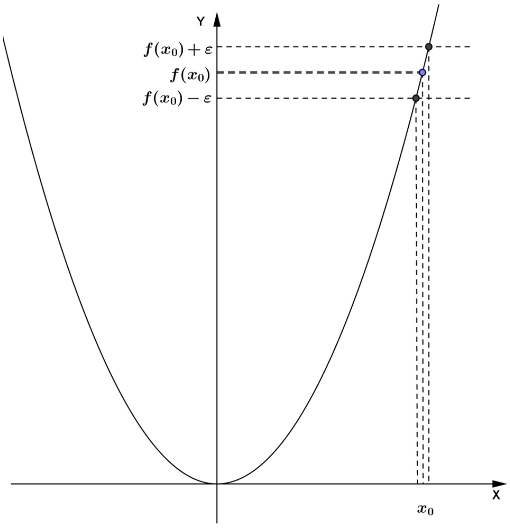
$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Quando $x \to 0^+$ abbiamo che $z \to +\infty$ ma sappiamo che $\lim_{z \to +\infty} \operatorname{sen} z$ non esiste.
Analogamente se $x \to 0^-$ avremo che $z \to -\infty$ e $\lim_{z \to -\infty} \operatorname{sen} z$ non esiste.

Quindi possiamo concludere che $\lim_{x \to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ non esiste.

IV) $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) quando\ x_0 \epsilon D_f}$

a) Abbiamo $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_o} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

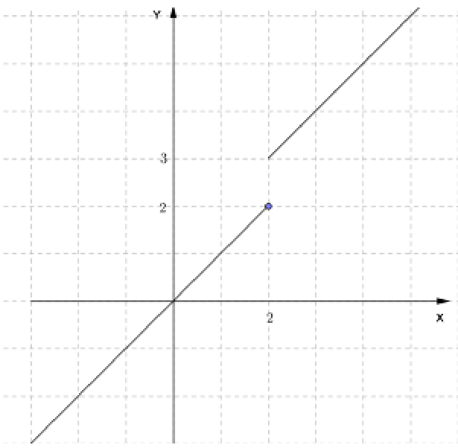


In questo **caso la funzione si dirà continua in x_0**.

b) Vediamo un altro caso considerando il seguente esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & per\ x \leq 2 \\ x+1 & per\ x > 2 \end{cases}$$

Si tratta di una funzione definita "a tratti" cioè la funzione ha una definizione per $x \leq 2$ e un'altra definizione per $x > 2$. Il suo grafico risulta "spezzato":



In questo caso abbiamo un limite destro diverso dal limite sinistro poiché:

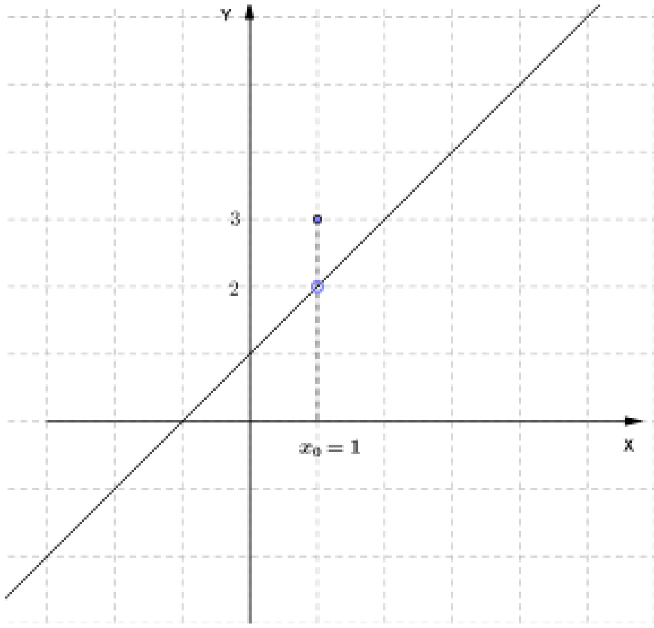
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

In generale se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$ $(l_1 \neq l_2)$ diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 1° specie o "salto".**

c) Consideriamo questa funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & per\ x \neq 1 \\ 3 & per\ \ x = 1 \end{cases}$$

Quanto vale $\lim_{x \to 1} f(x)$?



Quando ci avviciniamo a $x_0 = 1$ i valori della funzione si avvicinano a 2 e il fatto che $f(1) = 3$ non ha importanza perché dobbiamo vedere il comportamento della funzione quando $x \to x_0 = 1$ e quindi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2\ (\neq f(1) = 3)$$

In questo caso quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

e diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 3° specie o "eliminabile"** poiché potremo "ridefinire" $f(x)$ in $x_0 = 1$ associando il valore del limite per $x \to 1$.

d) Possiamo avere una funzione per cui **non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ con $x_0 \in D_f$?**

Se consideriamo $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & per\ \ x \neq 0 \\ 1 & per\ \ x = 0 \end{cases}$

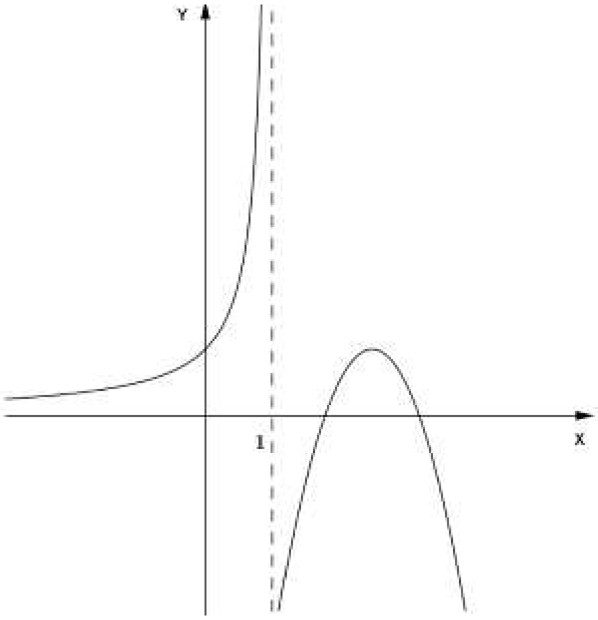
abbiamo che $x_0 = 0$ è nel dominio (per definizione $f(0) = 1$) ma, poiché il valore del limite non dipende dal valore della funzione in x_0, abbiamo che $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste perché, come avevamo già visto, non esiste $\lim_{x \to 0} sen\frac{1}{x}$.

Nota: anche in questo caso si dice che $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

ESERCIZI
LIMITI

I) Per verificare la comprensione del concetto di limite proviamo a **"leggere" i limiti di un grafico assegnato.** Consideriamo per esempio il seguente grafico:

a)



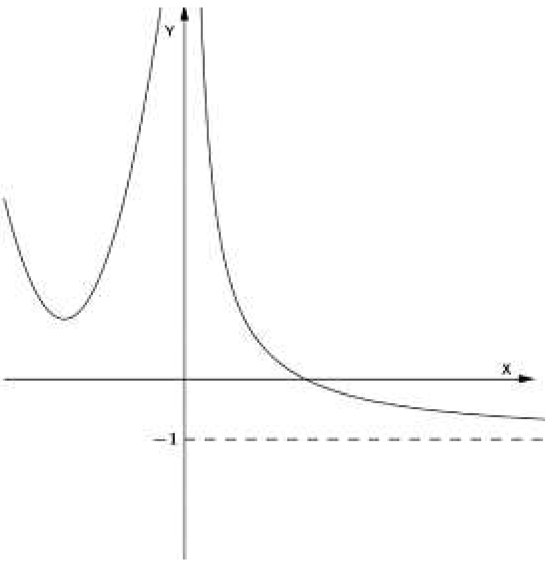
Vediamo che $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e abbiamo:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\quad y = 0$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$ $x = 1$ è asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b)



Abbiamo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ($x = 0$ asintoto verticale)

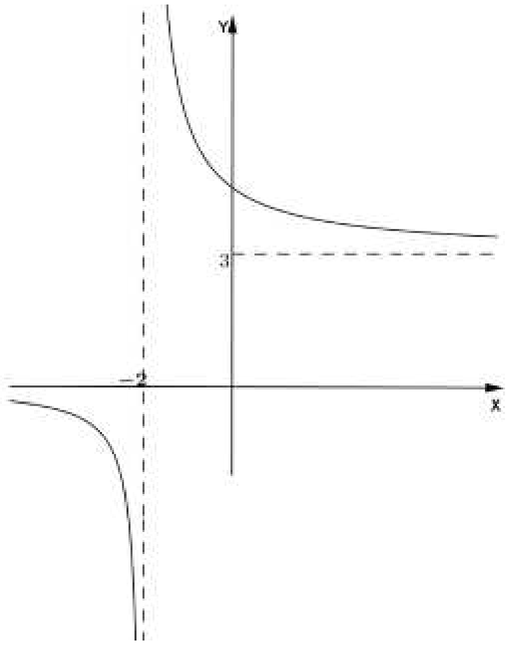
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$ ($y = -1$ asintoto orizzontale)

c)
$D_f = \cdots$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim_{x\to-2^-} f(x) = \cdots \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \cdots \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$



d)

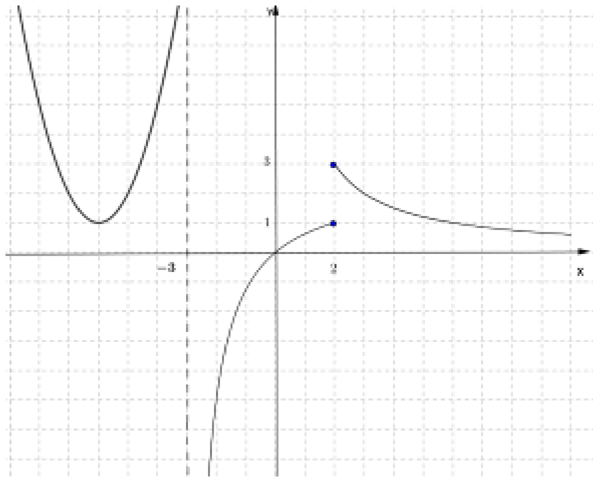
$D_{f=\cdots}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim_{x\to-3^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim_{x\to-3^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\begin{cases} \lim_{x\to2^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots..$



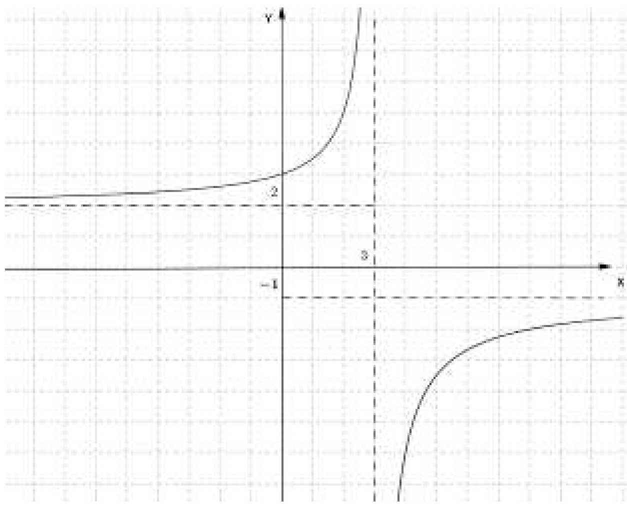
$D_f = \ldots..$

……………………..

……………………….

……………………….

……………………….



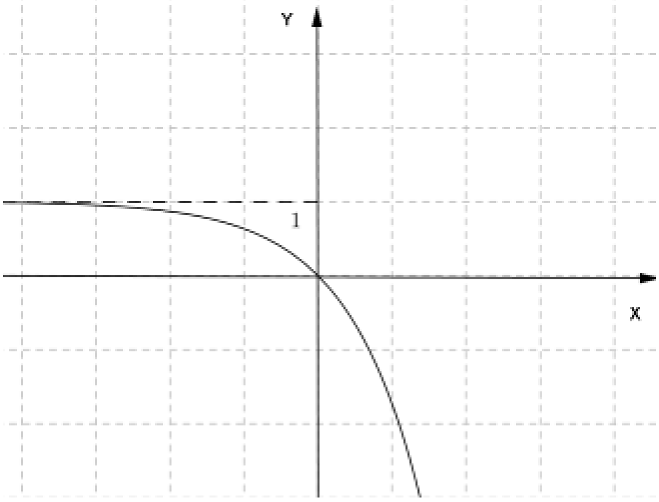
II) Proviamo adesso a fare l'esercizio "inverso" cioè a **disegnare un grafico che abbia dei limiti assegnati.**

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Un grafico potrebbe essere:



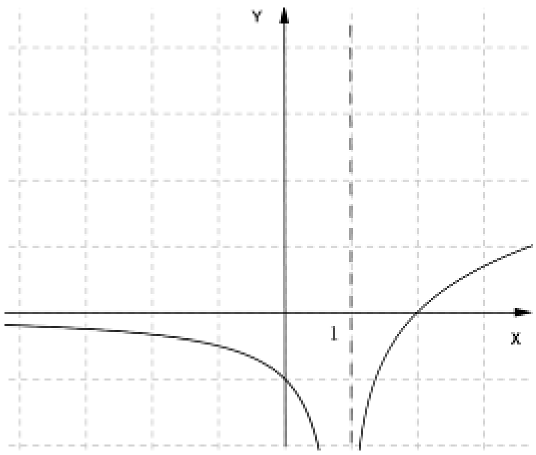
b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Possiamo pensare ad un grafico così:



Naturalmente questo è solo un esempio, ci possono essere grafici diversi, ma con gli stessi limiti.

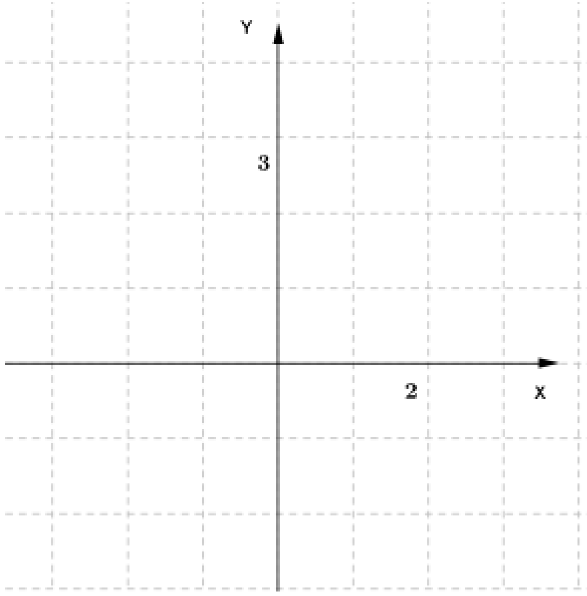
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Come potrebbe essere un grafico che presenta questi limiti?

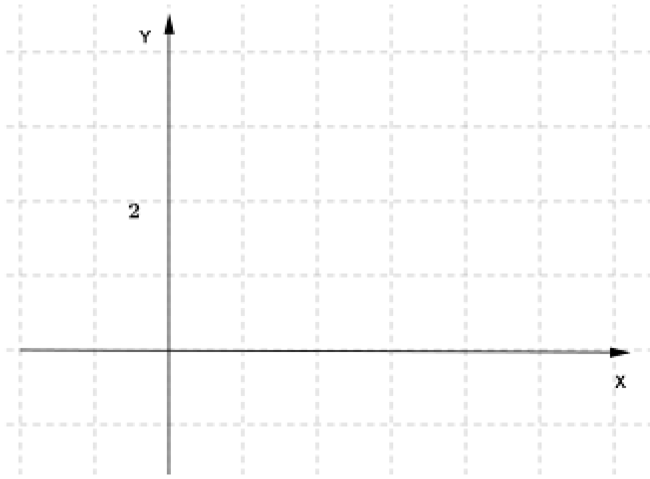


d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

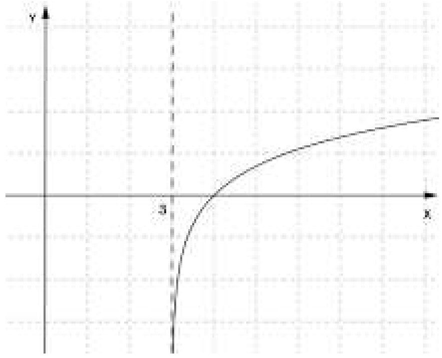
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$



Come potrebbe essere un grafico che presenta questi limiti?

III) Tracciamo dei grafici conosciuti e indichiamone i limiti:

a) $f(x) = \ln(x-3)$

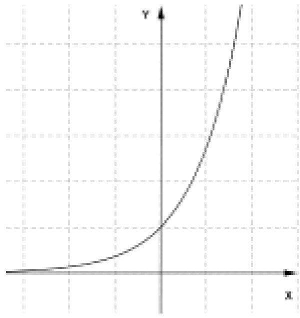


$D_f: x > 3$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty \qquad x = 3$ asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = e^x$

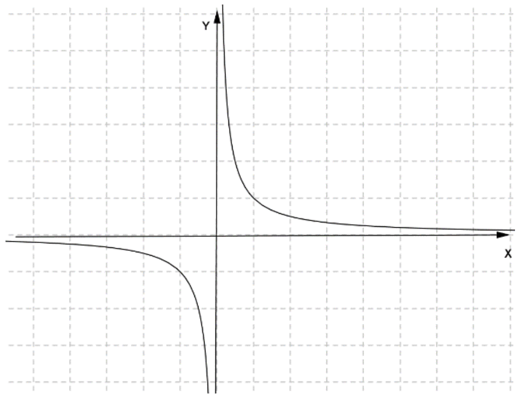


$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$



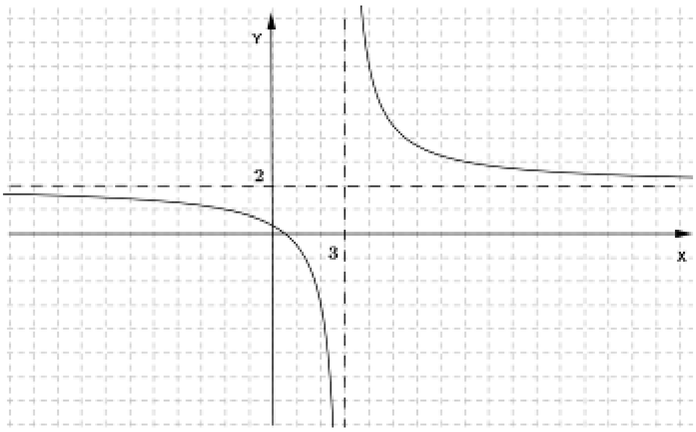
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases} \qquad x = 0$ asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \qquad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$

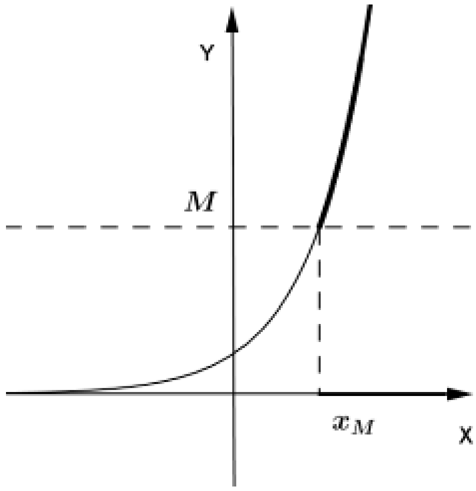
$\begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

IV) Possiamo **"verificare"** i limiti utilizzando la definizione formale.

a) Consideriamo $f(x) = e^x$ e verifichiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Per verificarlo dobbiamo far vedere che:

$$\forall M > 0 \;\; \exists x_M : \; \forall x > x_M \quad f(x) > M$$



Consideriamo l'ultima disequazione e risolviamola:

$$e^x > M \quad \Leftrightarrow x > \ln M$$

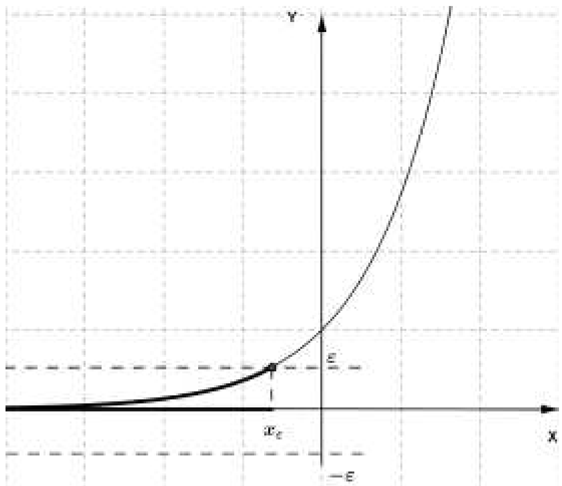
Quindi $x_M = \ln M$ cioè $\forall x > x_M \, (= \ln M)$ avrò $e^x > M$

Se, per esempio, $M = 100$ avrei che per $x > \ln 100 \Rightarrow e^x > 100$.

b) Consideriamo sempre $f(x) = e^x$ e verifichiamo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Dobbiamo verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \colon \forall x < x_\varepsilon \quad -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$
$$(l = 0)$$

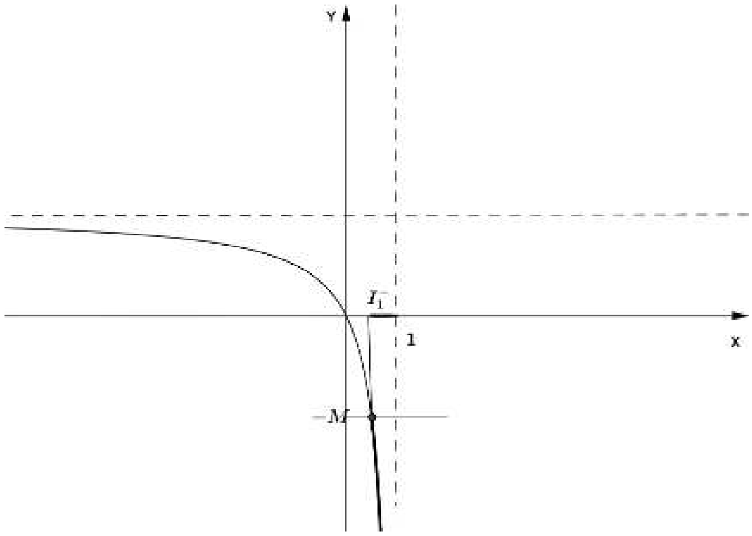


Risolvendo l'ultima disequazione abbiamo
(essendo e^x sempre positivo è maggiore di $-\varepsilon$):

$$e^x < \varepsilon \to x < \ln \varepsilon$$

Quindi $x_\varepsilon = \ln \varepsilon$ e abbiamo verificato il limite.
Se, per esempio, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\quad \forall x < \ln \frac{1}{100} \Rightarrow e^x < \frac{1}{100}$

c) Consideriamo $f(x) = \frac{2x}{x-1}$



- Verifichiamo che $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ cioè che

  $\forall M > 0 \ \exists I_1^- : \ \forall x \in I_1^- \ f(x) < -M$

  Risolviamo allora

  $\frac{2x}{x-1} < -M \rightarrow \qquad \frac{2x+M(x-1)}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{(2+M)x-M}{x-1} < 0 \ (*)$

Poiché ci stiamo interessando al limite sinistro, possiamo porre $x < 1$ e quindi $x - 1 < 0$: allora perché sia verificata $(*)$ dovremo avere

$$(2+M)x - M > 0 \rightarrow x > \frac{M}{2+M}$$

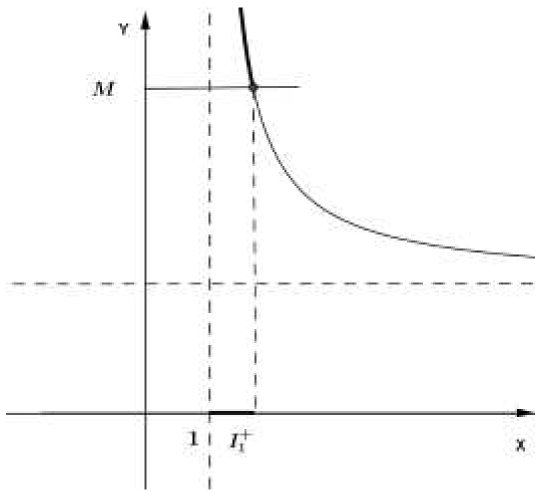
(posso dividere per $2 + M$ senza cambiare il verso della disuguaglianza perché $2 + M$ è positivo).

Quindi l'intorno sinistro di $x_0 = 1$ I_1^- è $\left(\frac{M}{2+M}, 1\right)$: se per esempio $M = +10$ quando $\frac{10}{12} < x < 1$ si ha $f(x) < -10$.

- Verifichiamo che $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ cioè che $\forall M > 0 \ \exists I_1^+ : \forall x \in I_1^+ \ \ f(x) > M$

Risolviamo

$\frac{2x}{x-1} > M \rightarrow \frac{2x-M(x-1)}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{(2-M)x+M}{x-1} > 0 \ (*)$



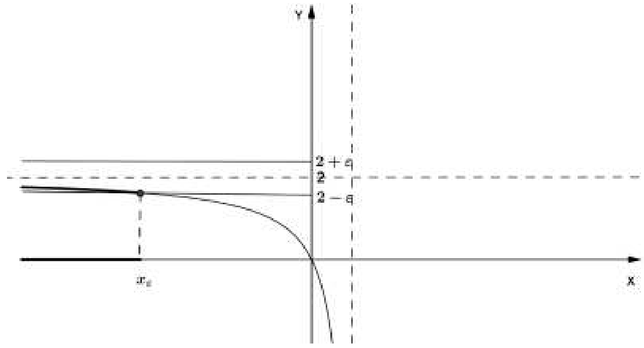
Poiché studiamo il limite destro, possiamo porre $x > 1$ e quindi $x - 1 > 0$: allora la disequazione $(*)$ sarà verificata se

$$(2-M)x + M > 0 \rightarrow x < -\frac{M}{2-M}$$

(inverto la diseguaglianza perché $2 - M$ è negativo).

Quindi l'intorno destro I_1^+ è $\left(1, \frac{M}{M-2}\right)$: se per es. $M = 10$ quando $1 < x < \frac{10}{8}$ si ha $f(x) > 10$.

- Verifichiamo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ cioè che



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \quad : \quad \forall x < x_\varepsilon \quad 2 - \varepsilon < \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon$

Risolviamo

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} > 2 - \varepsilon \to \frac{2x-(2-\varepsilon)(x-1)}{x-1} > 0 \\ \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon \to \frac{2x-(2+\varepsilon)(x-1)}{x-1} < 0 \end{cases}$$

Poiché stiamo studiando il limite per $x \to \ -\infty$ possiamo porre $\ x - 1 < 0$ e quindi il sistema di disequazioni si semplifica così:

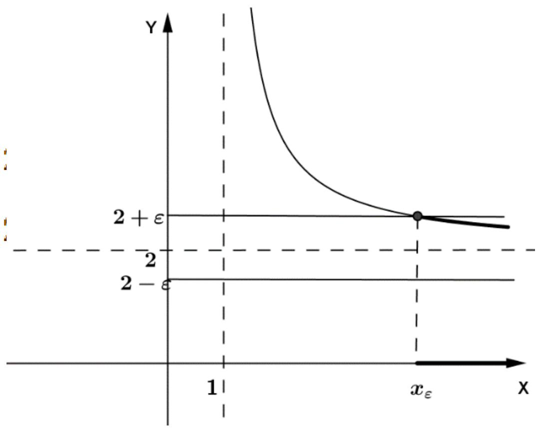
$$\begin{cases} 2x - (2-\varepsilon)(x-1) < 0 \to \cdots \to \ \varepsilon x + 2 - \varepsilon < 0 \to x < \dfrac{\varepsilon - 2}{\varepsilon} \\ 2x - (2+\varepsilon)(x-1) > 0 \to \cdots \to 2 + \varepsilon - \ \varepsilon x > 0 \to x < \dfrac{\varepsilon + 2}{\varepsilon} \end{cases}$$

$\Rightarrow x < \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}$ e quindi $\ x_\varepsilon = \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}$ (se per esempio $\varepsilon = \frac{1}{100} \quad x_\varepsilon = \ -199$)

- Verifichiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ cioè che

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x_\varepsilon \ : \forall\, x > x_\varepsilon \ \ 2 - \varepsilon < \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon$

  Risolviamo



$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} > 2 - \varepsilon \to (stavolta\ (x-1) > 0) \to \\ \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon \to (stavolta\ (x-1) > 0) \to \end{cases}$$

$$\ldots \to \begin{cases} \varepsilon x + 2 - \varepsilon > 0 \to x > \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon} \\ 2 + \varepsilon - \ \varepsilon x < 0 \to x > \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon} \end{cases} \quad \to \quad x > \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}$$

Quindi $x_\varepsilon = \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}$

Se per esempio $\ \varepsilon = \frac{1}{100} \to x_\varepsilon = 201.$

ESERCIZI
VERIFICHE DI LIMITI

1) $\lim_{x\to+\infty}(3^x+1) = +\infty$ $\quad [x_M = \log_3(M-1)]$

2) $\lim_{x\to-\infty}(3^x+1) = 1$ $\quad [x_\varepsilon = \log_3 \varepsilon]$

3) $\lim_{x\to2^+}\ln(x-2) = -\infty$ $\quad [I_2^+ = (2,\ 2+e^{-M})]$

4) $\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2) = +\infty$ $\quad [x_M = 2+e^M]$

5) Verifica i limiti di $f(x) = \frac{1}{x-1}$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad \left[x_\varepsilon = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\quad \left[x_\varepsilon = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ $\quad \left[I_1^- = \left(1-\frac{1}{M}, 1\right)\right]$
- $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ $\quad \left[I_1^+ = \left(1, 1+\frac{1}{M}\right)\right]$

6) Verifica i limiti di $f(x) = \frac{x}{x-1}$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\quad \left[x_\varepsilon = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\quad \left[x_\varepsilon = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ $\quad \left[I_1^- = \left(\frac{M}{M+1}, 1\right)\right]$
- $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ $\quad \left[I_1^+ = \left(1, \frac{M}{M-1}\right)\right]$

SCHEDA DI VERIFICA

LIMITI DI UNA FUNZIONE

1. Disegna il grafico delle seguenti funzioni ed indica dominio, caratteristiche e limiti significativi:

   a. $y = -\ln(x+4)$

   b. $y = \left|\dfrac{1-x}{x+3}\right|$

   c. $y = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Disegna il grafico di una funzione che abbia i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Disegna il grafico di $y = \frac{1}{x-3}$, scrivi i limiti significativi ed esegui la verifica.

4. Disegna il grafico di $y = \ln(x+1)$, scrivi i limiti significativi ed esegui la verifica.

Teoremi sui limiti

Teorema dell'unicità del limite

Se esiste $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ allora è unico.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che si abbia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$, per esempio $l_2 > l_1$.

Fissiamo $\varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}$: per la definizione di limite avremo che

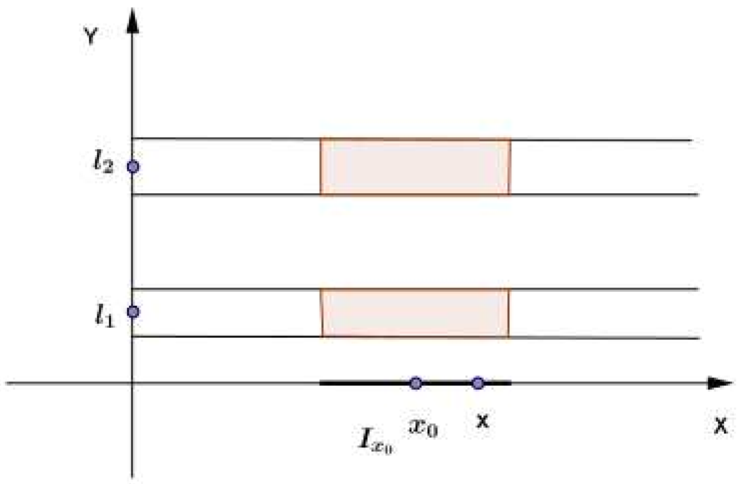
$\exists I_1(x_0) : \forall x \in I_{1\,x_0}(\cap D_f \setminus \{x_0\})\ l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\exists I_2(x_0) : \forall x \in I_{2\,x_0}(\cap D_f \setminus \{x_0\})\ l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

Allora se consideriamo $I_{x_0} = I_1 \cap I_2$ dovremmo avere

$$\forall x \in I_{x_0} \qquad l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$$

Ma, poiché le due strisce non si intersecano, questo non è possibile per la definizione stessa di funzione e quindi siamo caduti in contraddizione.



Teorema del confronto
(teorema dei due carabinieri)

Se per $f(x), g(x), h(x)$ si ha

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\} \text{ e se } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

allora si ha anche $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$

Dimostrazione

Per definizione sappiamo che fissato $\varepsilon > 0$

$$\exists I_1(x_0) \text{ in cui } \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\exists I_2(x_0) \text{ in cui } \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

e quindi considerando x appartenente all'intersezione dei due intorni e ricordando che per ipotesi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ avremo
$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$
e quindi
$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

Teorema della permanenza del segno

a) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0 \Rightarrow \exists I_{x_0}$ in cui (eccettuato al più x_0) $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

Dimostrazione
Consideriamo $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$: per definizione $\exists I_{x_0}$ in cui

$$l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$$

Quindi se $l > 0$ $\quad f(x) > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0$
se $l < 0$ $\quad f(x) < l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} < 0$

b) Se $\exists I_{x_0}$ in cui $f(x) > 0$ (oppure $f(x) < 0$) e se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Rightarrow l \geq 0$ (oppure $l \leq 0$).

Dimostrazione

Supponiamo per esempio che $\exists I_{x_0}$ in cui $f(x) > 0$.
Se per assurdo $l < 0 \Rightarrow$ (*per il punto a) appena dimostrato*) $\exists I'_{x_0}$ in cui $f(x) < 0$ ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi.

Calcolo dei limiti

Limite della somma di due funzioni

Supponiamo di dover calcolare
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} (f(x)+g(x))$
e di conoscere $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$.

Possiamo dire che il limite della somma delle due funzioni sarà la somma dei limiti?

Occorre considerare vari casi e consideriamo per esempio $x \to x_0$.

a) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ dimostriamo che

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$

Fissato $\varepsilon > 0$, considero $\frac{\varepsilon}{2}$: per definizione
$\exists\, I_1(x_0)$ in cui $l_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ e
$\exists\, I_2(x_0)$ in cui $l_2 - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < l_2 + \frac{\varepsilon}{2}$

Se considero $I = I_1 \cap I_2$ varranno entrambe le relazioni e sommando membro a membro avremo:

$$l_1 - \frac{\varepsilon}{2} + l_2 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + g(x) < l_1 + \frac{\varepsilon}{2} + l_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

cioè

$$(l_1 + l_2) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (l_1 + l_2) + \varepsilon$$

e quindi $$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$$

b) Se $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = l$ e $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = +\infty$ (oppure $-\infty$)

si dimostra facilmente che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x)+g(x)\big) = +\infty \quad \text{(oppure } -\infty)$$

(lo stesso se $\lim f(x) = \infty$ e $\lim g(x) = l$).

c) Se $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = +\infty$ è chiaro (la dimostrazione è semplice) che

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x)+g(x)\big) = +\infty$$

e che, analogamente, se $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = -\infty$ anche

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x)+g(x)\big) = -\infty$$

d) Ma se $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = -\infty$ (o viceversa)?

Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = 2x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x)+g(x) = x$ ho $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big) = +\infty$

- $f(x) = 2x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -2x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x)+g(x) \equiv 0$ ho $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big) = 0$

- $f(x) = 2x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -3x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x)+g(x) = -x$ ho $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big) = -\infty$

- $f(x) = x+1$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x)+g(x) \equiv 1$ ho $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big) = 1$

Quindi è chiaro che **in questo caso non c'è una regola generale**: si dice che si ha una **"forma indeterminata"** nel senso che

$$\operatorname*{Lim}_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x)+g(x)\big) \quad \text{quando} \quad f(x)\to+\infty \ \text{ e } \ g(x)\to-\infty$$

non può essere determinato a priori e il limite dovrà essere calcolato caso per caso con particolari accorgimenti.

Riassumiamo quindi i vari casi in questa tabella:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)+g(x)$
l_1	l_2	l_1+l_2
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**forma indeterminata**

Limite del prodotto di due funzioni

In questo caso abbiamo la seguente situazione:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)\cdot g(x)$
l_1	l_2	$l_1\cdot l_2$
$l\neq 0$	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)
$\boldsymbol{l=0}$	∞	**forma indeterminata**
∞	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)

Quando scriviamo "regola dei segni del prodotto" significa che

se $\lim f(x)=l>0$ e $\lim g(x)=+\infty$ allora $\lim f(x)\cdot g(x)=+\infty$

se $\lim f(x)=l<0$ e $\lim g(x)=+\infty$ allora $\lim f(x)\cdot g(x)=-\infty$

e così via.

Ma perché $\mathbf{0 \cdot \infty}$ risulta una forma indeterminata?

Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = x \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) \equiv 1$ ho $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = 1$

- $f(x) = x^2 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = x$ ho $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

- $f(x) = x \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ho $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$

Quindi è chiaro che **non c'è una regola generale per questo limite**: dovremo calcolarlo caso per caso con opportuni passaggi.

Limite della funzione reciproca

Abbiamo i seguenti casi (la dimostrazione è semplice):

$\lim f(x)$	$\lim \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$l = 0^+$ (cioè $f(x) > 0$)	$+\infty$
$l = 0^-$ (cioè $f(x) < 0$)	$-\infty$
∞	0

Limite del quoziente di due funzioni

Osservando che $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ otteniamo:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 \neq 0$	$\frac{l_1}{l_2}$
$l_1 \neq 0$	$l_2 = 0$	∞ (regola dei segni)
l_1	∞	0
∞	l_2	∞ (regola dei segni)
∞	∞	**forma indeterminata**
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	**forma indeterminata**

Abbiamo due forme indeterminate perché

$\frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0$ (forma indeterminata del prodotto)

$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$ (forma indeterminata del prodotto)

In conclusione, nel calcolo dei limiti, si presentano 4 forme "indeterminate":

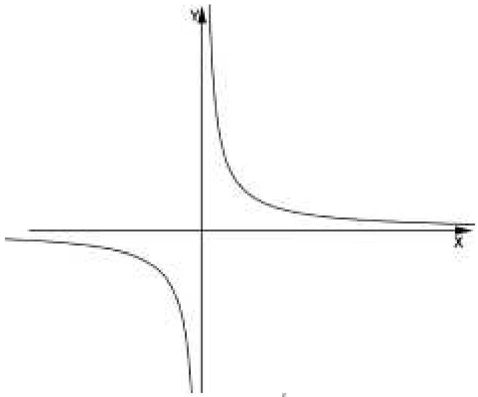
- $+\infty - \infty$ (per la somma)
- $0 \cdot \infty$ (per il prodotto)
- $\frac{\infty}{\infty}, \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (per il quoziente)

Esempi

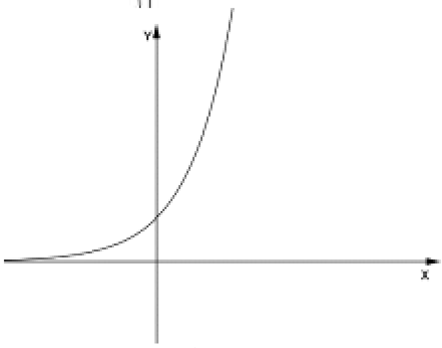
Daremo per scontata la continuità e la conoscenza dei limiti significativi delle funzioni elementari.

Per esempio:

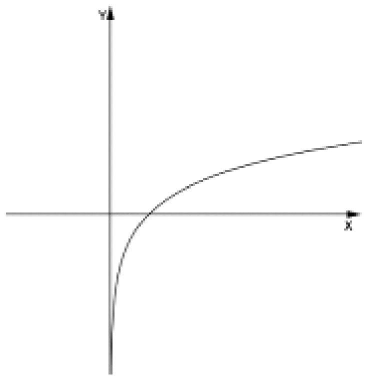
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$



$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to3}e^x=e^3$$

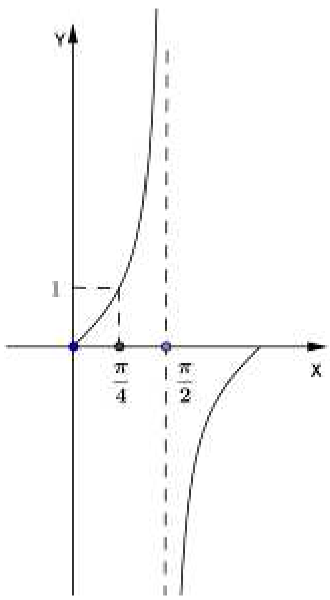


$$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$
$$\lim_{x\to1}\ln x=\ln 1=0$$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx=+\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tgx=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\,x=tg\frac{\pi}{4}=1$$



Esempi di calcolo di limiti

a) Limiti di somme di funzioni

- $\lim_{x\to 1} x^2 + 2x - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 + 3x^3 = (+\infty + \infty) = +\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} e^x + x = (0 - \infty) = -\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} \ln x + 3 = (+\infty + 3) = +\infty$

- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x + 2x = (+\infty + \pi) = +\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \operatorname{sen} x = (+\infty + 0) = +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x$

$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ ma non esiste $\lim_{x\to +\infty} \sin x$

Osserviamo però che $x + \operatorname{sen} x \geq x - 1$ e poiché

$$\lim_{x\to +\infty} (x - 1) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x = +\infty$$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 - x \quad (+\infty - \infty)$

Si tratta della forma indeterminata $(+\infty - \infty)$: **nel caso di funzioni polinomiali possiamo mettere in evidenza** e uscire dalla forma di indecisione:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 - x = \lim_{x\to +\infty} x(x-1) = \big(+\infty \cdot (+\infty)\big) = +\infty$$

- $\lim_{x\to -\infty} x^2 - x = (+\infty + \infty) = +\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} x^2 + x = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to -\infty} x(x+1) = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty-\infty)$

Si tratta di una forma indeterminata: possiamo fare una specie di "razionalizzazione":

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-(x^2+1)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} \quad \left(-\frac{2}{+\infty}\right) = 0$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty-\infty)$

Si tratta ancora di una forma indeterminata, ma non conviene fare come prima perché x^2 non si semplificherebbe e avremmo un'altra forma indeterminata $(\frac{\infty}{\infty})$.
Possiamo mettere in evidenza x^2 e portare fuori dalla radice: ricordiamo che $\sqrt{x^2}=|x|$, ma se il limite è $x\to+\infty$ allora x è positivo e $|x|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2-\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}}-\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}}\right) \qquad (+\infty\cdot\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{n° pos.}})=+\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} \qquad (+\infty-\infty)$

Anche in questo caso non conviene "razionalizzare" ma occorre mettere in evidenza:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{3+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}}-\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}}\right) = \left(+\infty(\sqrt{3}-1)\right) = +\infty$$

b) Limiti di prodotti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} x \cdot e^x = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \cos x \cdot \ln x = \big(1 \cdot (-\infty)\big) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} (\ln x + 1)^2 = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} x \cdot tg\, x = \left(\frac{\pi}{2} \cdot (-\infty)\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to +\infty} x \cdot \operatorname{arctg} x = \left(+\infty \cdot \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot \ln x = \big((+\infty)(+\infty)\big) = +\infty$

c) Limiti di quozienti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{2x} = \left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

  $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$

  $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \left(-\frac{\infty}{0^+} = -\infty \cdot \left(\frac{1}{0^+}\right) = (-\infty) \cdot (+\infty)\right) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}=\ 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+x+2}$: Si tratta di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$: possiamo raccogliere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)\right)}=2$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x+3}$: anche in questo caso è una forma $\frac{\infty}{\infty}$ e raccogliendo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x\left(1+\left(\frac{3}{x}\right)\right)}=\left(\frac{+\infty\cdot 2}{1}\right)=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^3+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^3\left(1+\left(\frac{5}{x^3}\right)\right)}=\left(\frac{2}{+\infty}\right)=0$

Osserviamo che $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P_1(x)}{P_2(x)}}$ con $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinomi risulterà:

$$\boxed{\begin{array}{l} \infty \quad \text{se} \quad \text{grado } P_1(x) > \text{grado } P_2(x) \\ \\ l=\frac{\text{coefficiente termine di grado max di } P_1(x)}{\text{coefficiente termine di grado max di } P_2(x)} \quad \text{se} \quad \text{grado } P_1(x)=\text{grado } P_2(x) \\ \\ 0 \quad \text{se} \quad \text{grado } P_1(x) < \text{grado } P_2(x) \end{array}}$$

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

Risulta una forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}\right)$, ma non conviene mettere in evidenza come prima perché $x\to 2$ e non $x\to\infty$ e quindi non otterremmo termini che tendono a zero: in questo caso scomponendo e semplificando abbiamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=4$$

ESERCIZI
CALCOLO DI LIMITI

Calcola i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^3 + 2x$ $[+\infty]$

2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^2-1}$ $[-\infty]$

3. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$ $[0]$

4. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$ $[+\infty]$

5. $\lim_{x\to 2} x^2 + x - 3$ [3]

6. $\lim_{x\to 1} \ln x + 3x^2$ [3]

7. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x$ $[\pi/6]$

8. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - 5x$ $[-\infty]$

9. $\lim_{x\to 2} (x-2)\ln x$ $[0]$

10. $\lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \ln x$ $[+\infty]$

11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2+5}$ $[+\infty]$

12. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{3x^2-2}$ [1/3]

13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-2}{2x^2+1}$ $[+\infty]$

14. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{2x^3+x+2}$ [0]

15. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{3x+1}$ [1/3]

16. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x+1}{x^2-2x-5}$ [$+\infty$]

17. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{2x^3+x+1}$ [$\frac{1}{2}$]

18. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3}{2x^3+1}$ [0]

19. $\lim_{x+\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+5}$ [0]

20. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$ [$+\infty$]

21. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+4}$ [0]

22. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2+1}$ [$-\infty$]

23. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+5}$ [$-\infty$]

24. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5+x^2}{3x^2-1}$ [$\frac{1}{3}$]

25. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+x-3}$ [$\frac{\sqrt{2}}{4}$]

26. $\lim_{x\to+\infty} \frac{9-x^2}{3-x}$ [$+\infty$]

27. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4}-\sqrt{3x^2+1}$ [$-\infty$]

28. $\lim_{x\to5} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$ [6]

29. $\lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x-1}$ [3]

30. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{4x^4+x+2}$ [$\frac{1}{4}$]

Limite di una funzione composta

Supponiamo di dover determinare $\lim_{x \to x_o} g(f(x))$ oppure $\lim_{x \to \infty} g(f(x))$.

Si può dimostrare che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (l può essere anche $\pm\infty$ oppure si può trattare di un limite per $x \to \infty$) allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$

Esempi

- $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} e^{\operatorname{tg} x} \underset{\downarrow}{=} \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$
  $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$
- $$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \underset{\downarrow}{=} \lim_{y \to 1} \ln y = 0$$
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$
- $$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) = \lim_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$$
- $$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = \lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty$$
- $$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

Nota importante

Per calcolare il limite di $f(x)^{g(x)}$ si scrive $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$ e si calcola come limite di una funzione composta.

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x+1}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \cdot \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)} =^{(*)} \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

$$(*) \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$
$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln \frac{2x}{x+1} = +\infty$$

ESERCIZI

LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x-1}}$ $[e]$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ $\left[+\frac{\pi}{2}\right]$

3. $\lim\limits_{x\to1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $[+\infty]$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ [0]

5. $\lim\limits_{x\to2} \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$ $[\ln 4]$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ $[-\infty]$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{3x}{x+1}}$ $[8]$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^x$ $[0]$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arccos\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

11. $\lim\limits_{x+\infty} e^{\frac{1-x^2}{x+2}}$ [0]

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\left(\frac{3+x^4}{3x^3-1}\right)$ [$\frac{\pi}{2}$]

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\left(\frac{x^3+1}{x^2+2}\right)$ [$-\frac{\pi}{2}$]

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^3+1}{2x^2-5}}$ [$+\infty$]

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^3-7}\right)$ [$-\infty$]

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} arcsen\left(\frac{x^3+4}{x^3+1}\right)$ [$\frac{\pi}{2}$]

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\left(\frac{x^3-1}{x^3+x-2}\right)$ [$\frac{\pi}{4}$]

18. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)^x$ [$+\infty$]

19. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^4+1}{x^4}}$ [e]

20. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{5x^2-1}$ [$-\infty$]

21. $\lim\limits_{x\to-1} 2^{\frac{x^2-1}{x+1}}$ [$\frac{1}{4}$]

22. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{2x+3}{x}}$ [$+\infty$]

23. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$ [0]

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{3-2x^2}\right)$ [$\frac{\pi}{3}$]

25. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3+5}{x^3-x+1}\right)^x$ [$+\infty$]

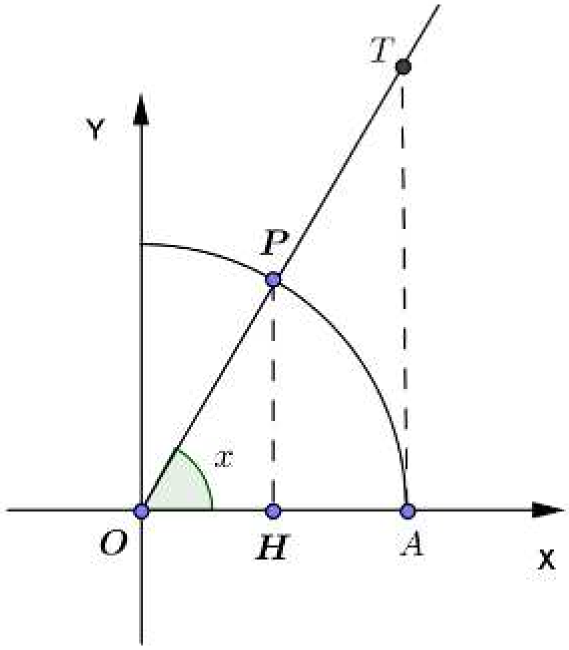
Limiti notevoli

Studiamo due limiti "notevoli" (cioè degni di nota)

1. $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1}$ (x misura dell'angolo in radianti)

Se consideriamo $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ vediamo che si tratta di una forma indeterminata.

Cominciamo con lo studiare $\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.



Considerando la circonferenza goniometrica osserviamo che la misura dell'arco $\widehat{AP}=x$ (radianti) e che (intuitivamente)

$\overline{PH}<\widehat{AP}<\overline{AT}$ e quindi (ricordando la definizione di seno e tangente)

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Dividendo per $\operatorname{sen} x$ ($\sin x > 0$) abbiamo:

$$1<\frac{x}{\operatorname{sen} x}<\frac{1}{\cos x}$$

e passando ai reciproci (e invertendo le disuguaglianze) avremo:

$$1>\frac{\operatorname{sen} x}{x}>\cos x$$

Passando al limite, poiché $\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$, per il teorema del confronto abbiamo che:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Ma anche $\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ poiché $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è una funzione pari : infatti $f(-x)=\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)}=-\frac{\operatorname{sen} x}{-x}=f(x)$ e quindi in conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

NOTA: se invece x è la misura in gradi si può dimostrare che $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\frac{\pi}{180}$

Esempi

Vediamo qualche esempio di limite che può essere calcolato utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}=\lim_{y\to 0}2\cdot\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}y}{y}\right)}_{1}$$

moltiplico e divido per 2 pongo $y=2x$

Abbiamo quindi ritrovato il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{y}=1$ e in conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}=2$$

In generale avremo (con analoghi passaggi)

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}kx}{x}=k}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}_{1}=1$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}x)^2}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2}_{1}\cdot\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=\frac{1}{2}$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+2x}{\operatorname{sen}2x-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x+2x}{x}}{\frac{\operatorname{sen}2x-3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}^{1}+2}{\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{x}\right)}_{2}-3}=\frac{3}{(-1)}=-3$$

dividiamo numeratore e denominatore per x

2. $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

Se proviamo a calcolarlo ricordando che

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} \to \qquad e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

otteniamo all'esponente una forma indeterminata $(\infty\cdot 0)$.

Se, utilizzando la calcolatrice, proviamo a calcolare $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sostituendo a x numeri molto grandi, notiamo che ci stabilizziamo su un numero che risulta circa

2,71…..

Si può dimostrare infatti che:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

dove $\boldsymbol{e}$ = **numero di Nepero** (base dei logaritmi "naturali") e con la scrittura $x\to\infty$ si intende che il limite vale sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$.

NOTA

Vediamo come il calcolo di alcuni limiti che si presentano in forma indeterminata si possa ricondurre a questo limite notevole:

1. $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

ponendo $\frac{1}{x}=y$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2 = e^2$$

dividiamo e moltiplichiamo per 2 l'esponente

$\frac{x}{2}=y$

In generale (con analoghi passaggi)

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha}$$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

Cercando di calcolare il limite passando alla forma esponenziale troviamo all'esponente una forma indeterminata.

Proviamo quindi a ricondurci al limite notevole $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

- Scriviamo

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$$

- Sottraiamo e sommiamo 1 all'esponente

$$\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1+1}=\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1$$

- Ricordiamo che

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$$

Quindi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1=e^2\cdot 1=e^2$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$

Quindi, in generale,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}$$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}(=\ln a)$

$a^x-1=y$
$a^x=1+y$
$x=\log_a(1+y)$

In particolare

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

ESERCIZI

LIMITI NOTEVOLI

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 3x}{x}$ $[3]$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, 2x}{x}$ $[2]$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x + x}{4x - \text{sen}\, x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1 - \cos x}$ $[+\infty]$

5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$ $[1]$

6. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$ $[e^3]$

7. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x$ $[e^{-5}]$

8. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ $[e^{-1}]$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$ $[2]$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$ $[\ln 2]$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
CALCOLO DI LIMITI

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ $[+\infty]$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $[-\infty]$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{x-2}$ $[+\infty]$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}$ $[0]$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3-x^2$ $[-\infty]$

6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-2}$ $[+\infty]$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x+x}{\operatorname{sen} x+2x}$ $[1]$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x+2x}{4x}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{2\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$ $[2]$

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ $[\sqrt{2}]$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^x$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x^2+2}\right)^x$ $[0]$

13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ $[1]$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-3^x}{2x}$ $\left[-\frac{\ln 3}{2}\right]$

15. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x$ $[e^3]$

Asintoti di una funzione

Asintoti verticali e orizzontali

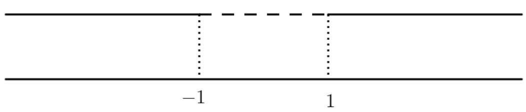
Esempio: consideriamo la funzione $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Il suo dominio è costituito dai numeri reali con $x \neq \pm 1$ (valori che annullano il denominatore).

Il grafico di questa funzione avrà degli asintoti ?

Proviamo a calcolare i limiti quando $x \to 1$ e quando $x \to -1$: osserviamo che sarà necessario distinguere limite destro e sinistro e per semplificare il calcolo possiamo schematizzare il segno del denominatore con un disegno:

$x^2 - 1 > 0 \to x < -1 \cup x > 1$



$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

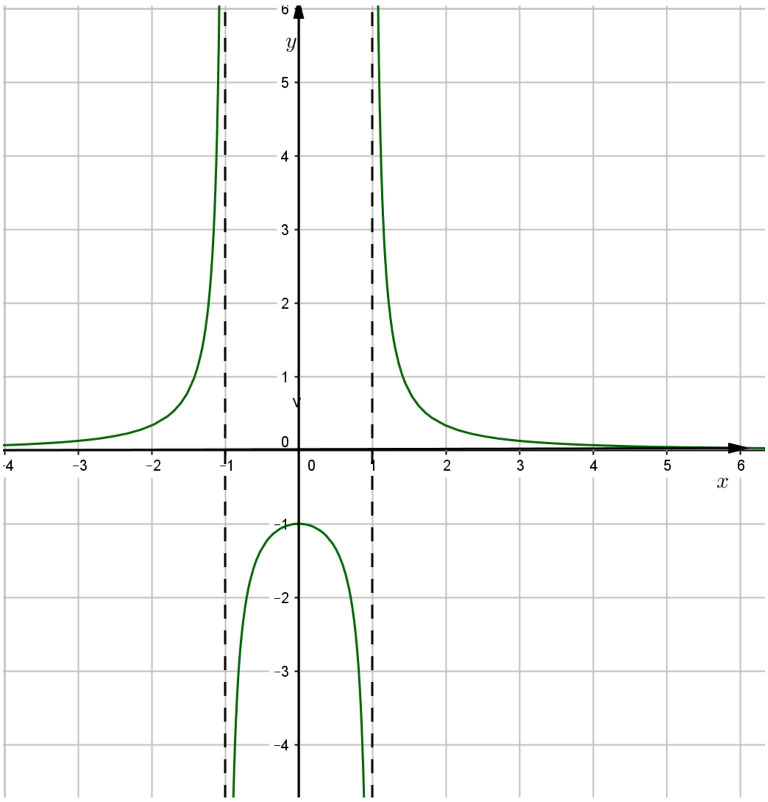
Il grafico ha quindi **due asintoti verticali** di equazione $x = -1$ e $x = 1$.

Come risultano i limiti quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$?

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0$ e quindi l'asse x è **asintoto orizzontale**.

Non siamo ancora in grado di disegnare il grafico della funzione (dobbiamo ancora sviluppare il calcolo delle derivate che ci permetterà di individuare eventuali punti di massimo, minimo e "flesso") ma possiamo verificare che gli asintoti che abbiamo individuato sono corretti utilizzando Geogebra.

Inserendo nella barra di inserimento $y = 1/(x\text{^}2 - 1)$ otteniamo il seguente grafico che conferma quello che abbiamo trovato con il calcolo dei limiti:



In conclusione

- se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ e/o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \Rightarrow x = x_0$ è asintoto verticale

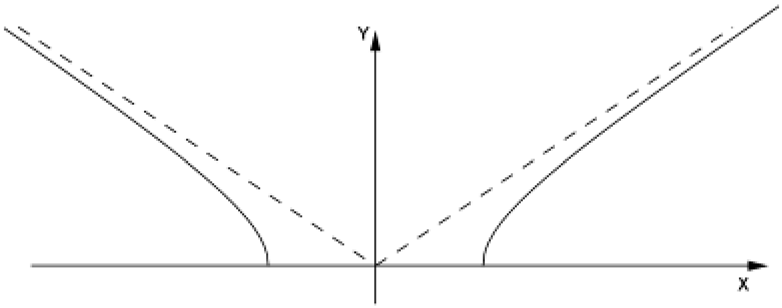
- se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Rightarrow y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l' \Rightarrow y = l'$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

Asintoti obliqui

Ma come possiamo determinare, con il calcolo dei limiti, un asintoto obliquo del grafico di f(x)?

Ricordiamo che il grafico di una funzione può avere anche due asintoti obliqui diversi (vedi figura).



Consideriamo per esempio $x \to +\infty$.

Quali sono le condizioni che si devono verificare perché il grafico di $f(x)$ abbia come asintoto obliquo la retta $y = mx + q$ per $x \to +\infty$?

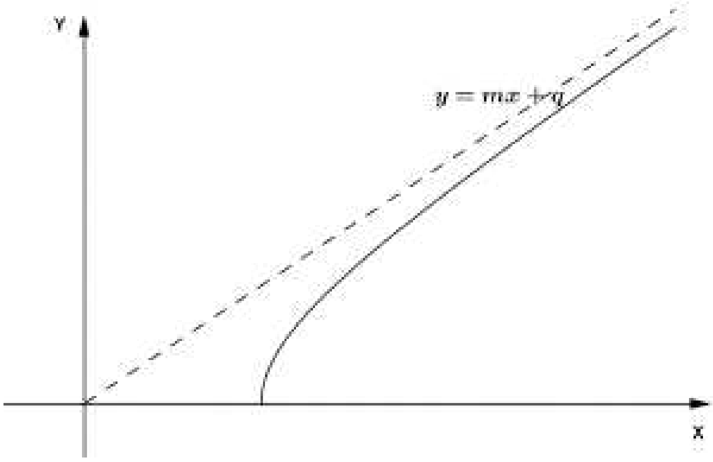
1) E' chiaro che se per $x \to +\infty$ il grafico si avvicina alla retta $y = mx + q$ dovrà essere

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

2) A questo punto se $f(x) \simeq mx + q$ per $x \to +\infty$ allora $\frac{f(x)}{x} \simeq m + \left(\frac{q}{x}\right)$

e quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad (m \neq 0)$

3) Infine dovrà anche essere $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$



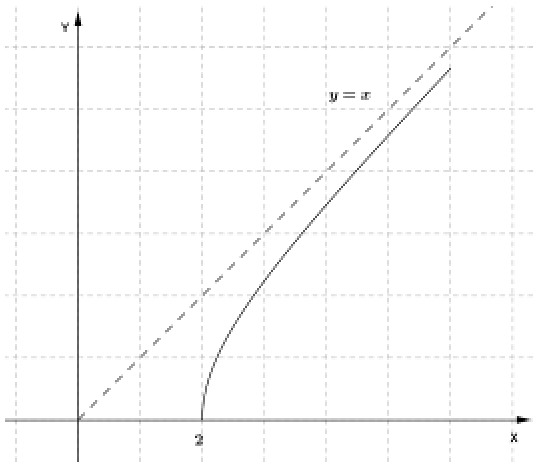
Esempi *(ricerca di asintoti obliqui)*

1) Verifichiamo $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ha asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$ (si tratta infatti di un "pezzo" di iperbole equilatera).

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = 1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \left(\frac{-4}{+\infty}\right) = 0 \qquad (q)$$



2) Vediamo se $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ ha asintoti obliqui.

Cominciamo a studiare i limiti per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{x + 1} = -1 \qquad (q)$$

Quindi $y = x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Per $x \to -\infty$ si ottiene lo stesso asintoto (verificalo).

NOTA: osserviamo che **una funzione razionale fratta** *f(x)* **in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore avrà sempre un asintoto obliquo** (lo stesso per $x \to \pm\infty$) (che si può ottenere anche facendo la divisione tra il polinomio "numeratore" e il polinomio "denominatore").

3) Studiamo $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ $\qquad (D_f: x \leq -1 \ \cup \ x \geq 1)$

- Cominciamo con $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

- Vediamo cosa succede per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + x \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 2 \quad (m)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} -x - \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} -\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = -\left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0 \quad (q)$$

Quindi $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

4) Studiamo $f(x) = \operatorname{sen} x + x$. Vediamo per esempio $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad (\operatorname{sen} x \text{ è limitato tra -1 e 1})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \qquad \textbf{non esiste}$$

Quindi la funzione non ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (analogamente per $x \to -\infty$).

Osserviamo quindi che se anche sono verificate le prime due condizioni non è detto che sia verificata la terza condizione e che quindi esista l'asintoto obliquo.

Esempio

Ora che abbiamo esaminato anche il metodo di ricerca di eventuali asintoti obliqui, possiamo, data una funzione, determinare **tutti i suoi eventuali asintoti**.

Consideriamo, per esempio $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$.

Per prima cosa determiniamo il dominio di $f(x)$: D_f: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Per determinare eventuali asintoti cominceremo proprio studiando i limiti quando $x \to 1$ o $x \to -1$.

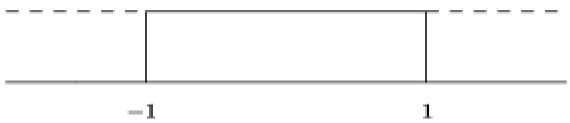
È importante in questo caso distinguere limite destro e limite sinistro:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \left(\frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \left(\frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$$

Quindi $x = -1$ è asintoto verticale.

Nota: per stabilire il segno dello zero al denominatore basta ricordare che $1 - x^2 > 0$ quando $-1 < x < 1$.



Quindi se $x \to -1^-$ avrò 0^-

se $x \to -1^+$ avrò 0^+

ecc...

Analogamente:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$$

Quindi $x = 1$ è asintoto verticale.

Poiché il dominio della funzione me lo permette, passo al calcolo dei limiti quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

In questo caso mi rendo subito conto che si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore e quindi ci sarà un asintoto obliquo (lo stesso sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$).

Lo determino studiando i limiti per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x - x^3} = -2 \quad (m)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{1 - x^2} + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = 0 \quad (q)$$

Quindi $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.

Infatti alla stessa conclusione si arriva facendo la divisione fra numeratore e denominatore della funzione:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & -x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 \;\; 2x & -2x \\ \cline{1-1} // & \end{array}$$

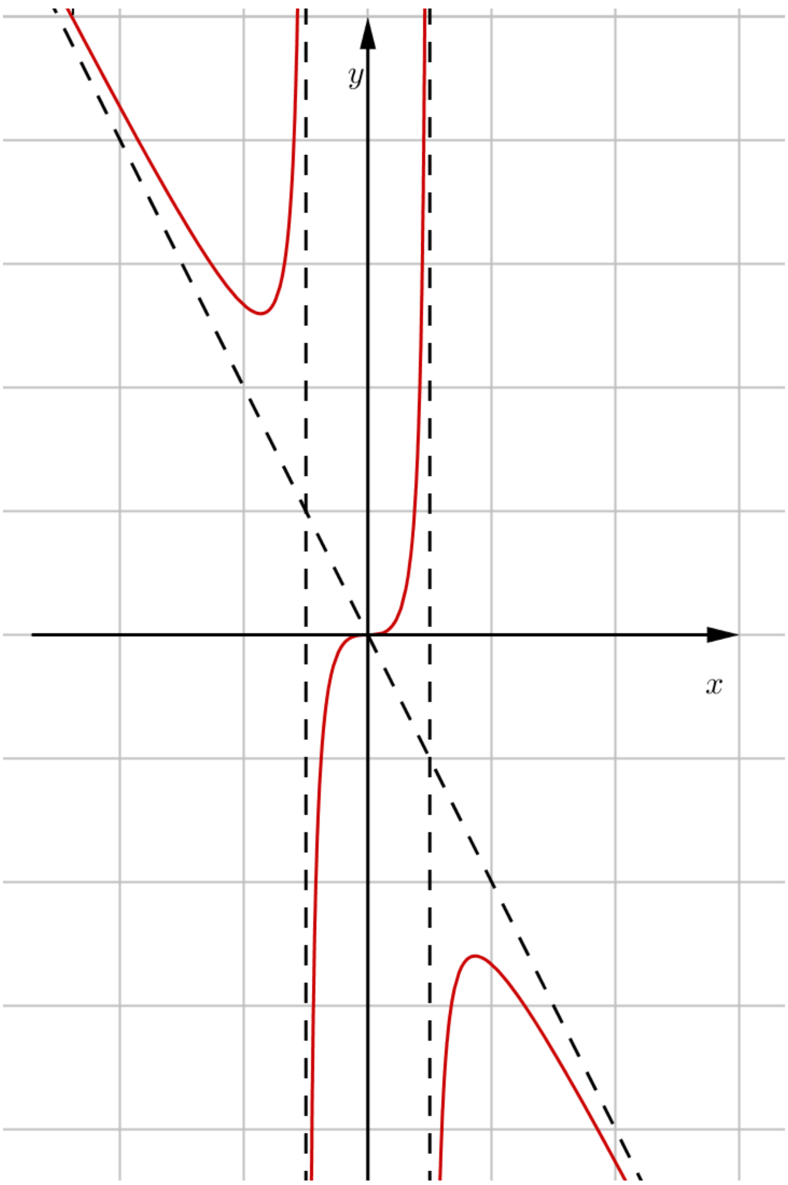
$\frac{2x^3}{1-x^2} = -2x + \frac{2x}{1-x^2}$ e quindi poiché $\frac{2x}{1-x^2} \to 0$ per $x \to \infty$ si ha che $f(x) \simeq -2x$

In conclusione la funzione $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$ ha

$x = -1$ e $x = 1$ come asintoti verticali

$y = -2x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

Controlliamo il grafico che si ottiene con Geogebra se inseriamo $y = \dfrac{2x^3}{1-x^2}$: osserviamo che il grafico ha in effetti sia i due asintoti verticali che l'asintoto obliquo che abbiamo individuato con il calcolo dei limiti.



ESERCIZI
ASINTOTI

Determina gli asintoti delle seguenti funzioni:

1) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ $[x = -1 \; as. vert.; x = 1 \; as. vert.; y = x \; as. obl.]$

2) $y = \frac{x^4}{x^4-16}$ $[x = -2 \; as \; vert.; x = 2 \; as. vert.; y = 1 \; as. orizz.]$

3) $y = \frac{2x^4}{x^3-1}$ $[x = 1 \; as. vert.; y = 2x \; as. obliquo]$

4) $y = \frac{x^2}{3x-1}$ $[x = \frac{1}{3} \; as. vert.; y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \; as. obl.]$

5) $y = \frac{1-x^2}{x^2-9}$ $[x = -3 \; as. vert.; x = 3 \; as. vert.; y = -1 \; as. orizz.]$

6) $y = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$ $[y = 3x \; as. obl. \; per \; x \to -\infty; y = x \; as. obl. \; per \; x \to +\infty]$

7) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x$ $[y = -2x \; as. obl. \; per \; x \to -\infty; y = 0 \; as. orizz. \; per \; x \to +\infty]$

8) $y = \sqrt{4x^2 + 1} - 3x$ $[y = -5x \; as. obl. \; per \; x \to -\infty; y = -x \; as. obl. \; per \; x \to +\infty]$

9) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $[x = 0 \; a. v.; y = -1 \; a. o. \; per \; x \to -\infty; y = 1 \; a. o. \; per \; x \to +\infty]$

10) $y = x - \sqrt{x^2 - 9}$ $[y = 2x \; as. obl. \; per \; x \to -\infty \; e \; y = 0 \; as. orizz. \; per \; x \to +\infty]$

11) $y = \ln\left(\frac{x-4}{x-1}\right)$ $[y = 0\ as.orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 1\ as.vert.; x = 4\ as.vert.]$

12) $y = e^{\frac{x-4}{x}}$ $[y = e\ as.orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 0\ as.vert.]$

13) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $[y = 1\ as.orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 2\ as.vert.]$

14) $y = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ $[x = 1\ as.vert.; x = 0\ as.vert.; y = 0\ as.orizz.\ per\ x \to \pm\infty]$

15) $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $[y = 1\ as.orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = -1\ as.vert.; x = 1\ as.vert.]$

16) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$ $[y = 2x\ as.obl.; x = 1\ as.vert,; x = -1\ as.vert.]$

17) $y = \frac{\sqrt{x^2-4}-1}{x}$ $[y = -1\ as.orizz.\ per\ x \to -\infty; y = 1\ as.orizz.\ per\ x \to +\infty]$

18) $y = x - \sqrt{x^2 - x}$ $[y = 2x - \frac{1}{2}\ as.obl.\ per\ x \to -\infty; y = \frac{1}{2}\ as.orizz.\ per\ x \to +\infty]$

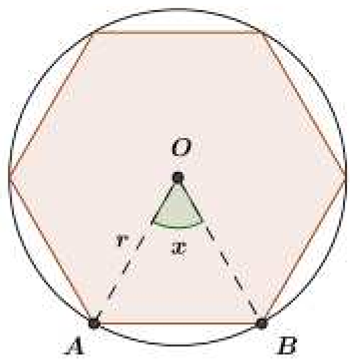
19) $y = \frac{1-3x-x^2}{x+3}$ $[y = -x\ as.obl.\ per\ x \to \pm\infty; x = -3\ as.vert.]$

20) $y = \frac{2x^3-1}{x^2-9}$ $[y = 2x\ as.obl.\ per\ x \to \pm\infty; x = -3\ as.vert.; x = 3\ as.vert.]$

Problemi e calcolo di limiti

Esempio svolto

Consideriamo un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r e centro O: sia x l'angolo (in radianti) in figura.



Determinare l'area $A(x)$ del poligono regolare e calcolare $\lim_{x\to o^+} A(x)$.

Per calcolare l'area del poligono possiamo determinare l'area del triangolo $A\hat{B}O$ e poi moltiplicarla per il numero di lati del poligono.

$$area(A\hat{B}O) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \operatorname{sen} x = \frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{sen} x$$

Il numero dei lati del poligono è $\frac{2\pi}{x}$.

Quindi $\quad A(x) = \frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{2\pi}{x}$

$$A(x) = \pi r^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} A(x) = \lim_{x\to 0^+} \pi r^2 \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}_{\to 1} = \pi r^2$$

Infatti quando $x \to 0^+$ il numero dei lati del poligono tende all'infinito e l'area del poligono tende all'area del cerchio di raggio r.

Complemento
Successioni e serie numeriche

Successioni

Una successione numerica è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cioè una legge che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $f(n)$ che in genere viene indicato con la scrittura a_n o b_n ecc. (elemento n-esimo della successione o termine n-esimo).

Esempio 1: $f: n \to \frac{1}{n}$ cioè $a_n = \frac{1}{n}$

I termini di questa successione (definita per $n \neq 0$) sono:

$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$ ...

Esempio 2: $f: n \to n^2$ cioè $a_n = n^2$.

In questo caso si ha:

$a_0 = 0 \;\; a_1 = 1, a_2 = 4\, , a_3 = 9$ ...

Esempio 3: $f: n \to (\text{-}1)^n$ cioè $a_n = (\text{-}1)^n$.

Stavolta abbiamo:

$a_0 = 1\, , \;\; a_1 = -1, a_2 = 1, \;\; a_3 = -1$ ...

Possiamo studiare $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ e si possono presentare tre casi:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$ in questo caso si dice che **la successione converge a *l* .**

  Per esempio $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ *oppure* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$: allora **la successione si dice divergente.**

  Per esempio $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

- Se $\nexists \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ in tal caso **la successione si dice indeterminata**.

  Se per esempio consideriamo $a_n = (-1)^n$ i termini della successione saranno:

  $$1 \;\; ; \;\; -1 \;\; ;1 \;\; ; \;\; -1 \;\; ....$$

  e quindi in questo caso non esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Serie numeriche

Data una successione numerica a_n posso considerare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$$

Consideriamo la successione s_n delle somme "parziali":

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$
$$...$$
$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Se consideriamo $\lim_{n \to +\infty} s_n$ si possono presentare tre casi:

- $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$: si dice che **la serie converge** e S è chiamata "somma" della serie;
- $\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty$ $(+\infty$ o $-\infty)$: si dice che **la serie diverge** ;
- non esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$: si dice che **la serie è indeterminata**.

Esempio

Una serie particolarmente importante è la cosiddetta serie geometrica (somma dei termini di una successione geometrica):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n + ...$$

E' chiaro che se $a = 1$ la serie diverge.
Consideriamo $a \neq 1$.
Osserviamo che la successione delle somme parziali può anche essere scritta così:

$$s_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Calcolando $\lim_{n \to +\infty} s_n$ avremo:

- se $a > 1$ la serie diverge a $+\infty$
- se $a \leq -1$ la serie è indeterminata
- se $-1 < a < 1$ la serie converge a $S = \frac{1}{1-a}$ poiché $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

poiché in questo caso $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$

SCHEDA DI VERIFICA 1

1) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-x^3}{3x^2-1}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-3}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{2x^3+1}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^2-2}{2x}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x^3-1}{2-x}}$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2+x)^{x+1}$

2) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{3x+\operatorname{sen} 3x}$

b. $\lim\limits_{x\to0} \frac{3^x-1}{2x}$

c. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{4x}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$

3) Determina dominio e asintoti delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\frac{x^3-x+2}{4-x^2}$

b. $f(x)=x-\sqrt{4x^2-1}$

4) Problema

Determina l'area $A(x)$ del trapezio isoscele ABCD inscritto in semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ indicando con x l'angolo adiacente alla base maggiore e calcola i limiti significativi di $A(x)$.

SCHEDA DI VERIFICA 2

1) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-x^2}{2x^2+1}$

b. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}$

c. $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^3+1}{x^3}$

d. $\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2+1}{x}}$

e. $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{2-x}$

f. $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{x+2}$

2) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x}$

c. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}$

d. $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{5x}$

3) Determina dominio e asintoti delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{1-x^2}$

b. $f(x)=x-\sqrt{9x^2-1}$

4) **Problema**
Determina il perimetro $2p(x)$ del trapezio isoscele ABCD inscritto in semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ indicando con x l'angolo adiacente alla base maggiore e calcola i limiti significativi di $2p(x)$.

Funzioni continue

Definizione: *f(x)* si dice continua in $x_0 \in D_f$ quando

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione: *f(x)* si dice continua in $I \subset D_f$ se è continua $\forall x \in I$.

Avevamo già dato questa definizione parlando del $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Punti di discontinuità

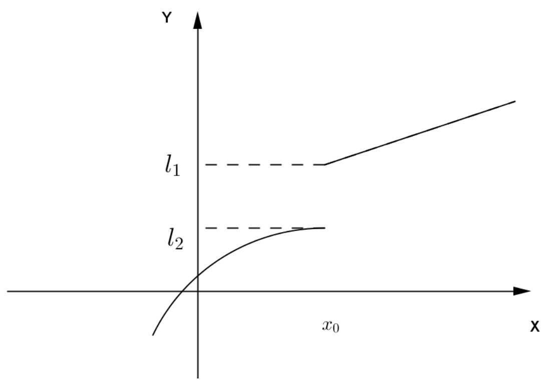
Un punto x_0 (per il quale abbia senso calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ cioè un punto di accumulazione$^{(**)}$ del dominio) si dice punto di discontinuità per f(x) quando non si verifica la (*).

(**) x_0 è un punto di accumulazione quando posso avvicinarmi quanto voglio ad x_0 da destra e/o da sinistra all'interno del dominio di *f(x)*.

Si possono avere tre tipi di discontinuità:

- **Discontinuità di prima specie** quando

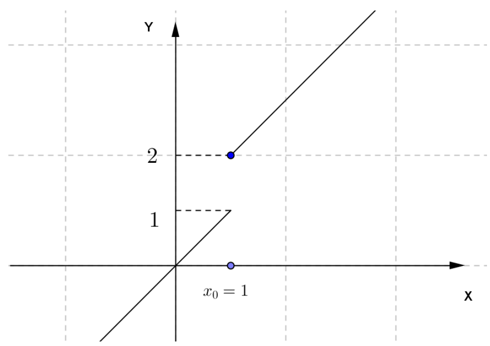
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad con \quad l_1 \neq l_2$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$



Si dice anche che la funzione ha un "salto" in x_0.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

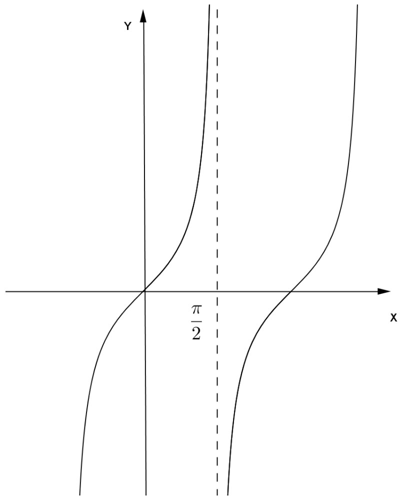


Poiché $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ la funzione ha in $x_0 = 1$ una discontinuità di prima specie.

- **Discontinuità di seconda specie** quando almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ è infinito oppure non esiste.

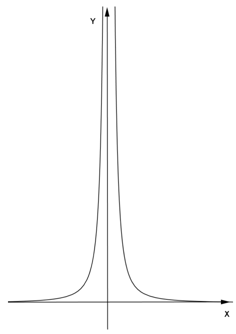
Esempi

1) $f(x) = tgx$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$ è un punto di discontinuità di 2^a specie

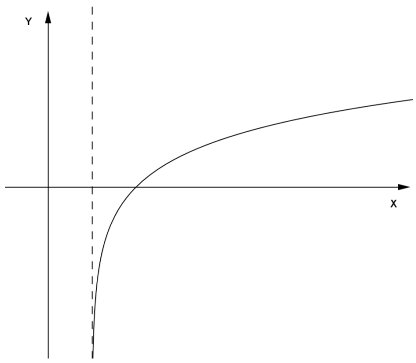
2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



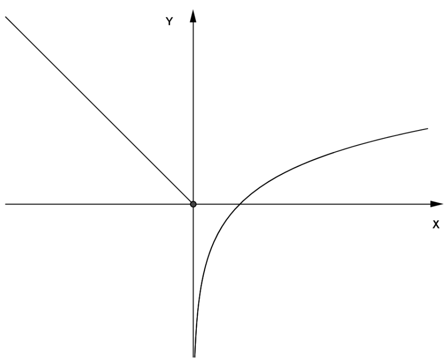
$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2^a specie

3) $f(x) = \ln(x-1)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 1$ è punto di discontinuità di 2^a specie.



4) $f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ma $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 0$ punto di discontinuità di 2° specie.

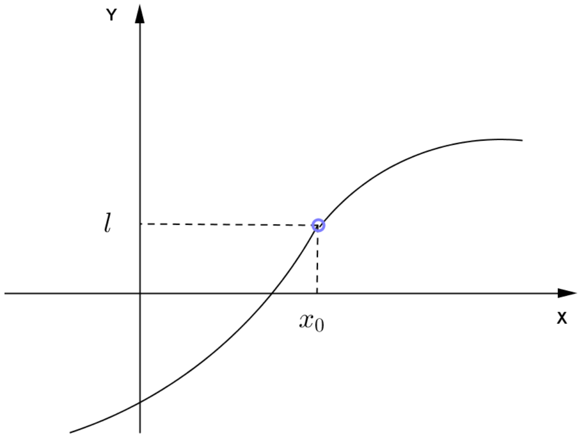
5) $f(x) = sen\dfrac{1}{x}$

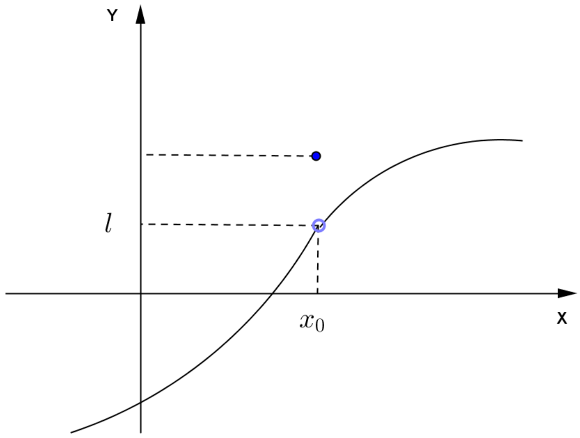
$\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste (vedi cap. sui limiti) e quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2° specie.

- **Discontinuità di terza specie** quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ ma } f(x) \text{ non è definita in } x_0 \text{ oppure } f(x_0) \neq l$$

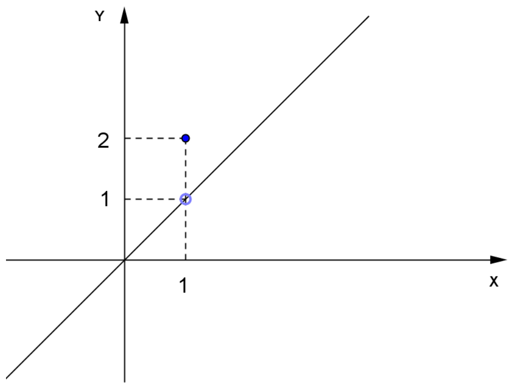
Questa specie di discontinuità viene anche detta discontinuità "eliminabile" perché se $f(x)$ non è definita in x_0 possiamo porre $f(x_0) = l$ oppure, se era già definita, cambiare la definizione di $f(x)$ in x_0 ponendo appunto $f(x_0) = l$ e rendendola così continua in x_0.





Esempio

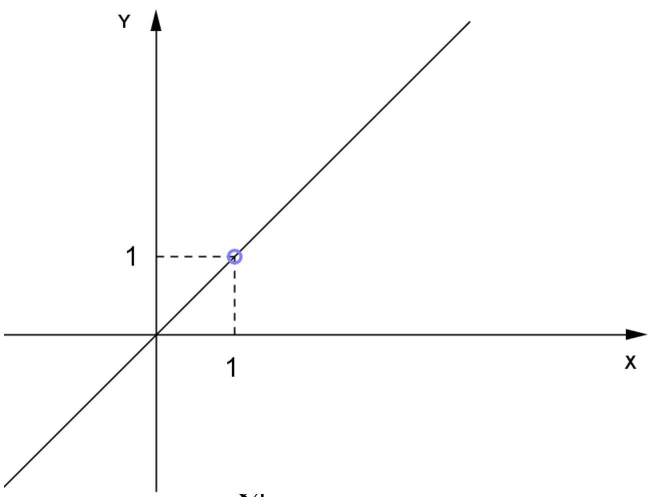
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$



ma $\dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$

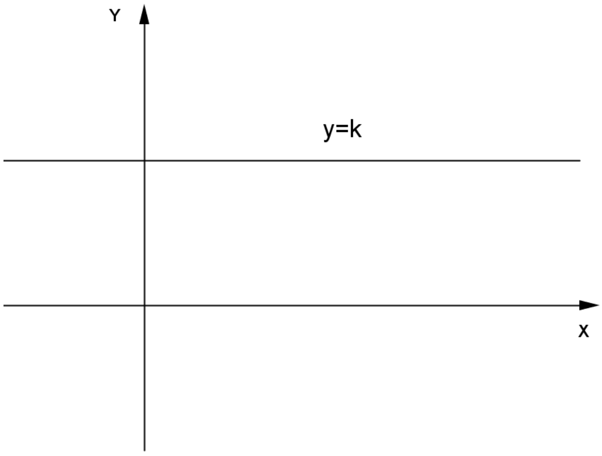
Quindi $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ ma $f(1) = 2 \Rightarrow x_0 = 1$ è un punto di discontinuità di 3^a specie.

Nota: anche $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ ha in $x_0 = 1$ un punto di discontinuità di 3^a specie poiché $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ (quindi il limite esiste ed è finito) ma la funzione non è definita in $x_0 = 1$.

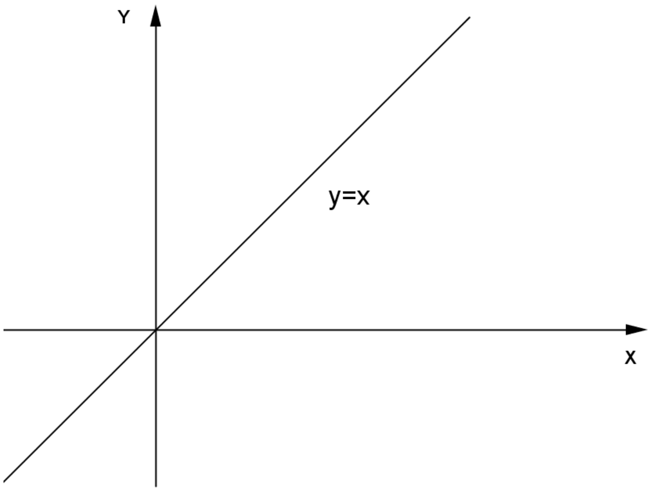


Esempi di funzioni continue

- La funzione costante $f(x)=k$ è continua $\forall x \in \Re$
  Infatti qualunque sia x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x)=k \quad (=f(x_0))$



- La funzione $f(x)=x$ è continua $\forall x \in \Re$ poiché $\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad (=f(x_0))$



- Le funzioni polinomiali $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ sono continue $\forall x \in \Re$

- Le funzioni razionali fratte $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}$ sono continue $\forall x : D(x) \neq 0$

- Le funzioni goniometriche $y=senx, \ y=\cos x$ sono continue $\forall x \in \Re$ mentre $y=tgx$ è continua $\forall x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

- La funzione esponenziale $y=a^x \ (a>0 \ \ a\neq 1)$ è continua $\forall x \in \Re$

- La funzione logaritmica $y=\log_a x \ (a>0 \ \ a\neq 1)$ è continua $\forall x>0$

I teoremi sulle funzioni continue

(solo enunciati)

1) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in x_0 allora

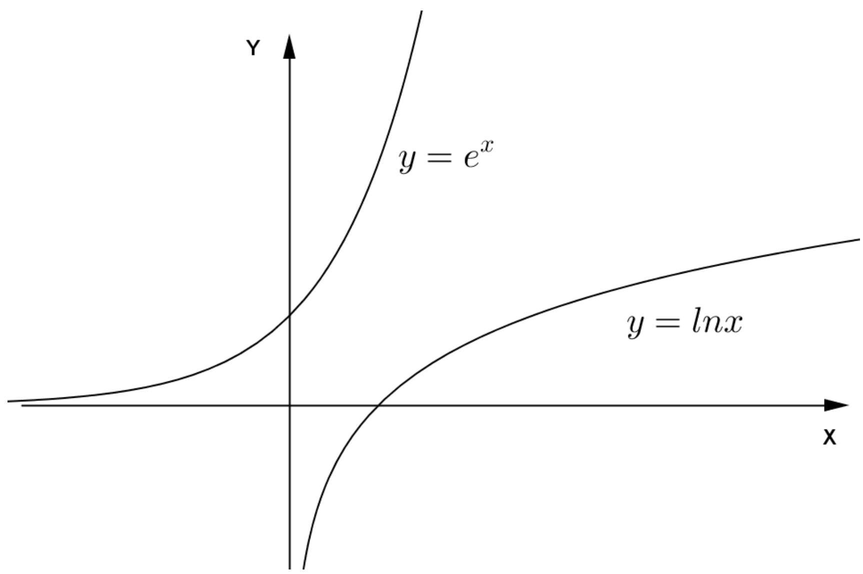
$$f(x) \pm g(x)$$
$$f(x) \cdot g(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (se \quad g(x_0) \neq 0)$$

sono ancora funzioni continue in x_0.
(La dimostrazione si basa sulle operazioni con i limiti…)

2) Se $g(x)$ è una funzione continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è continua in x_0.

3) Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo *I* e strettamente crescente (o decrescente) in *I* allora la funzione f^{-1} è continua in $f(I)$ (immagine di *I*)

Esempio:

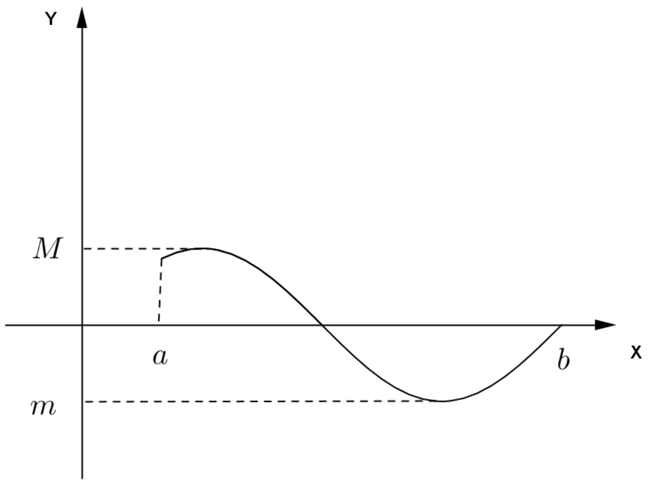


La funzione esponenziale $y = e^x$ è continua in $\Re$ e strettamente crescente.

La funzione logaritmo $y = \ln x$ è continua quando $x > 0$ (infatti il codominio di $y = e^x$ sono i reali positivi).

4) **Teorema di Weierstrass**

Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.



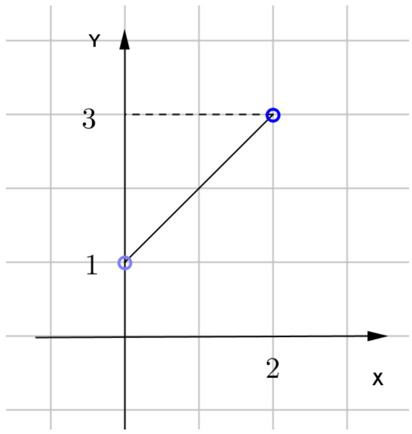
Osservazione: se alcune ipotesi del teorema non sono verificate non è detto infatti che $f(x)$ ammetta massimo e minimo assoluti.

- Se per esempio $f(x)$ è continua su un intervallo non limitato può non avere massimo e minimo assoluti (es. $y = x$; $y = e^x$)

- Se la funzione è continua in (a,b) (intervallo limitato ma aperto) può non avere massimo e minimo assoluti.

  Esempio : $f(x) = x + 1 \qquad 0 < x < 2$

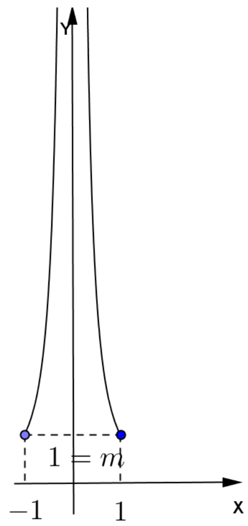
  In questo caso i valori 1 e 3 sono estremo inferiore e superiore ma non appartenendo al codominio di f(x) non sono minimo e massimo assoluti.



- Se la funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato ma non è continua in tutti i suoi punti può non avere massimo e minimo assoluti.

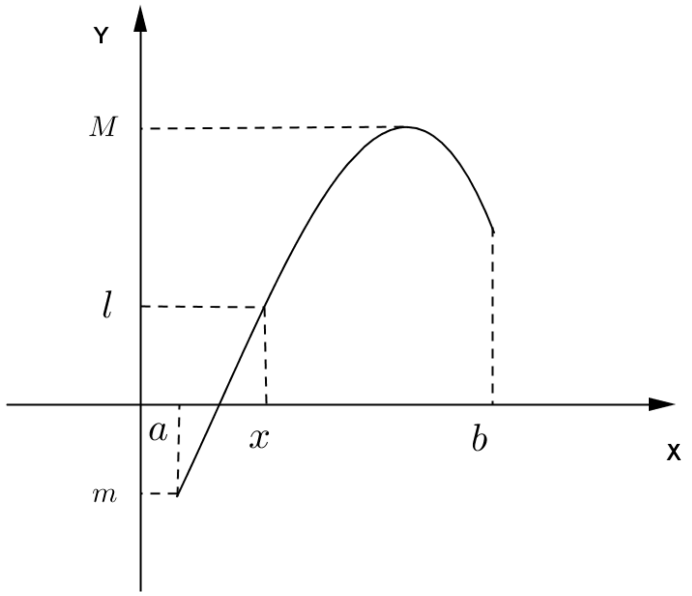
  Esempio: $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad -1 \le x < 1 \quad (x \ne 0)$

  Il minimo assoluto è m=1 ma non c'è massimo assoluto.



5) **Teorema dei valori intermedi**

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo assoluto.

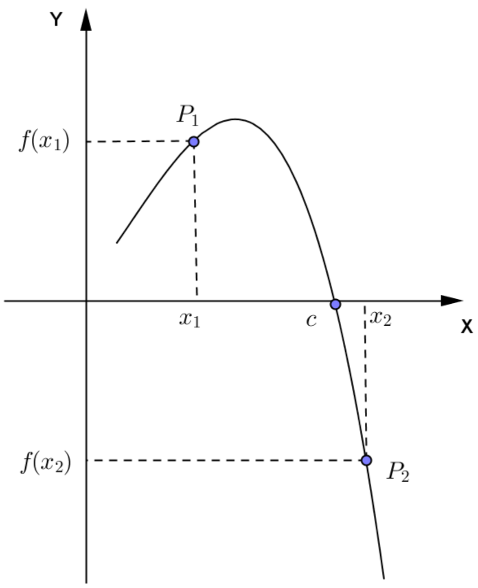


Per ogni $m \leq l \leq M$
esiste almeno un $x \in [a,b]$:
$f(x) = l$

6) **Teorema di esistenza degli zeri**

Se $f(x)$ è continua in un intervallo I ed esistono x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ aventi immagini $f(x_1), f(x_2)$ discordi allora esiste (almeno) un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(c) = 0$

(c si dice **zero** della funzione)



$f(x_1), f(x_2)$ di segno opposto
$x_1 < c < x_2$

$f(c) = 0$

Infatti è intuitivo che per passare da P_1 (per esempio sopra all'asse x) a P_2 (sotto all'asse x) con un grafico "continuo" almeno una volta il grafico taglierà l'asse x.

NOTA : Questo teorema è utilizzato per studiare l'esistenza di soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$

Esempio: utilizzando il teorema di esistenza degli zeri possiamo dimostrare che un'equazione di 3° grado ammette sempre una soluzione reale.

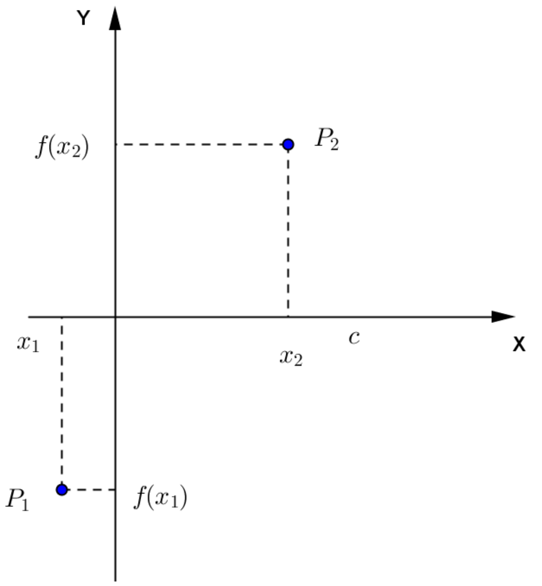
Infatti risolvere l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ significa trovare gli zeri di

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Consideriamo, per semplicità, $a > 0$ (se a fosse negativo basta cambiare segno…) e studiamo i limiti di $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$.

Si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

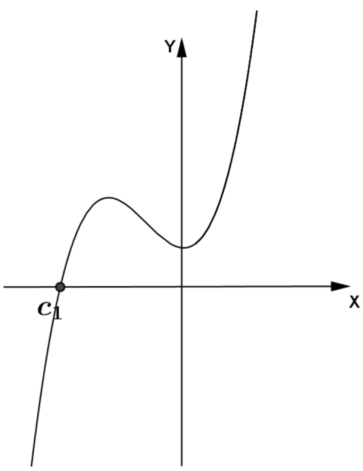
(sono forme indeterminate ma basta mettere in evidenza x^3 …)

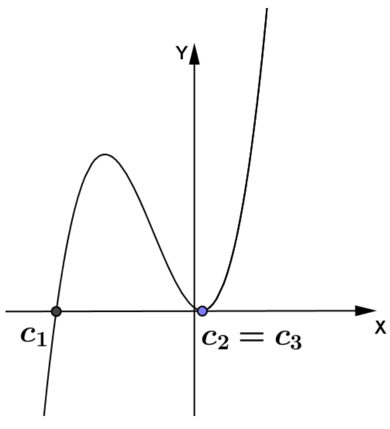


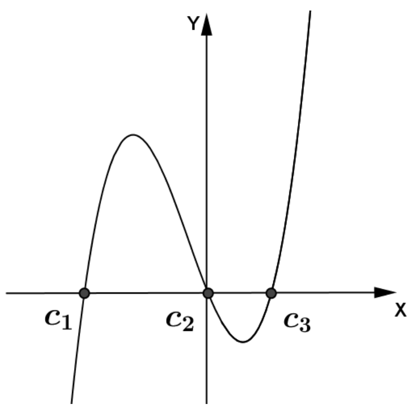
Allora esisteranno $x_1 < x_2$: $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sono discordi (più precisamente $f(x_1)$ negativo e $f(x_2)$ positivo)

Ma allora, per il teorema di esistenza degli zeri (la funzione è chiaramente continua in $\Re$),esisterà almeno un valore c, con $x_1 < c < x_2$: $f(c) = 0$ e quindi l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha almeno una soluzione reale.

Osserviamo inoltre che l'equazione di 3° grado o ha 1 sola soluzione reale oppure ne ha tre (nella figura centrale due sono coincidenti) (più di 3 non può averne).







ESERCIZI
TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

1) Studia i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ [$x=\pm 2$ discontinuità di seconda specie]

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ [$x=-1$ discontinuità di terza specie]

c) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ [$x=0$ discontinuità di terza specie]

d) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ [$x=0$ discontinuità di seconda specie]

e) $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$ [$x=-1$ discontinuità di prima specie]

f) $f(x)=\ln(x+1)$ [$x=-1$ discontinuità di seconda specie]

g) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ [$x=2$ discontinuità di seconda specie]

2) La funzione $f(x)=x^2+x$ ammette massimo e minimo assoluti in $[-1,\ 1]$? Determina m ed M.

$$\left[m=-\frac{1}{4};M=2\right]$$

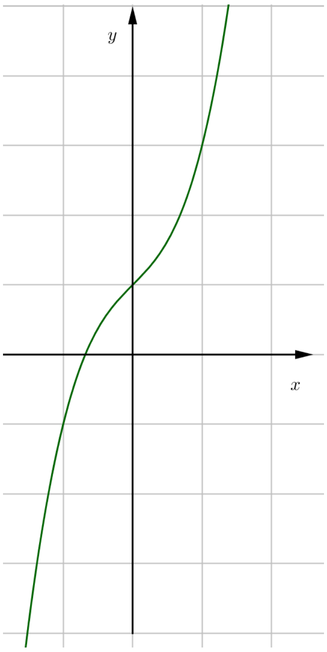
3) Si può applicare il teorema di Weierstrass alla funzione $y=\dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $[-1,\ 1]$? Perché?

$[no]$

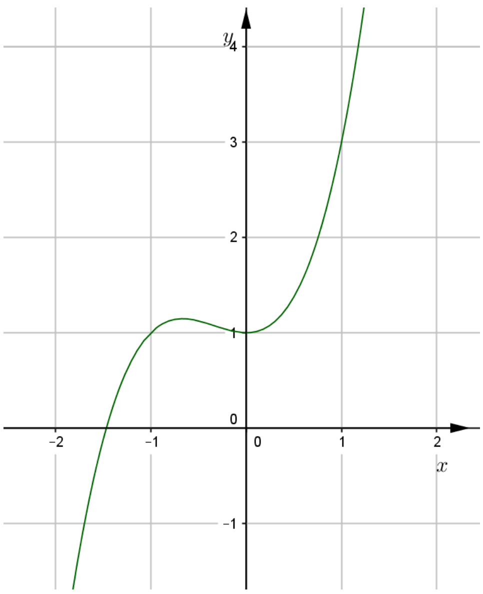
4) L'equazione $x^3 + x^2 - 4 = 0$ ha (almeno) uno zero appartenente all'intervallo $[1,2]$? Perché?

$[si]$

5) Disegna con Geogebra il grafico di $y = x^3 + x + 1$ (vedi figura): utilizzando il teorema di esistenza degli zeri prova che esiste una soluzione reale dell'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ nell'intervallo $[-1;0]$.



6) Utilizzando Geogebra traccia il grafico di $y = x^3 + x^2 + 1$ (vedi figura). Approssima la soluzione x_0 dell'equazione $x^3 + x^2 + 1 = 0$ utilizzando il teorema degli zeri.



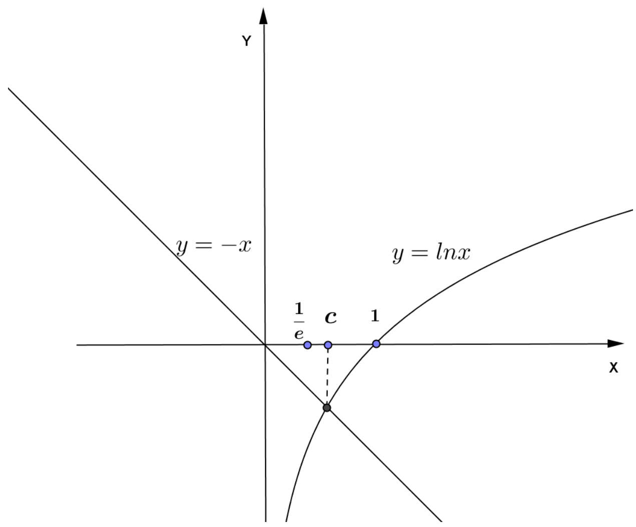
$[-1.5 < x_0 < -1.4]$

7) Studia l'equazione $\ln x + x = 0$

Per capire se l'equazione ha soluzioni possiamo scrivere l'equazione come

$$\ln x = -x$$

e considerare che le soluzioni possono essere pensate come le ascisse dei punti di intersezione tra la curva $y = \ln x$ e la retta $y = -x$.



Quindi graficamente vediamo che c'è una soluzione dell'equazione poiché c'è una intersezione tra i due grafici.

Per approssimare la soluzione dell'equazione possiamo usare quindi il teorema di esistenza degli zeri: considerando la funzione $f(x) = \ln x + x$ osserviamo che:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{1}{e} < 0$ e $f(1) = 0 + 1 = 1 > 0$ e quindi $\exists \; c, \quad \frac{1}{e} < c < 1 \; : f(c) = 0$

Possiamo poi approssimare meglio la soluzione dell'equazione "stringendo" l'intervallo (x_1, x_2) in cui si trova lo zero andando a calcolare $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{e} + 1}{2}\right) = \ldots \ldots$

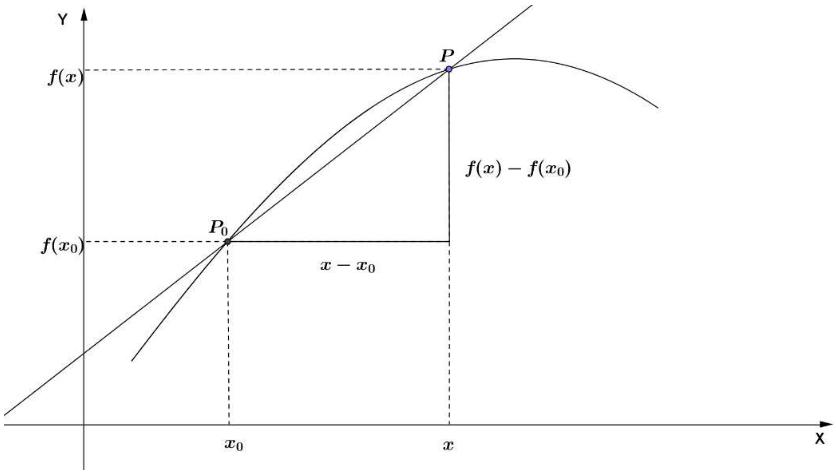
Derivate

Definizione di derivata di f(x) in $x_o \in D_f$

Considero una funzione $f(x)$ e sia $x_0 \in D_f$ e $f(x)$ definita in un intorno completo di x_0.

Consideriamo il rapporto (detto rapporto "incrementale")

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (x \in I_{x_0})$$



È evidente che il rapporto incrementale (cioè degli "incrementi" Δf e Δx) rappresenta il coefficiente angolare della retta P_0P (vedi figura).

Diciamo che $f(x)$ è derivabile in x_0 se **esiste finito**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Questo limite sarà indicato con $f'(x_0)$ e detto derivata di $f(x)$ in x_0.

NOTA1: la derivata in x_0 può essere indicata anche come

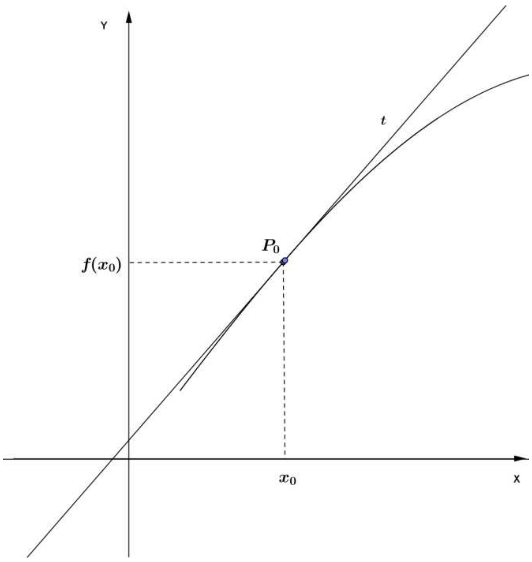
$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} \quad o \quad [Df(x)]_{x=x_0}$$

NOTA2: il rapporto incrementale può essere anche scritto così:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{e calcolare quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Interpretazione geometrica

Poiché il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta PP_0 e poiché per $x \to x_0$ si ha $P \to P_0$ e la retta $P_0P \to$ retta tangente in P_0 si ha che

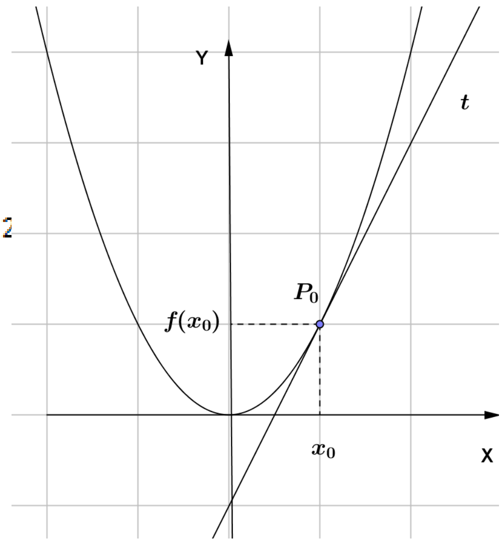


$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_t$$

dove m_t rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.

Poiché nella definizione di $f'(x_0)$ abbiamo chiesto che il limite sia finito non si considererà derivabile in x_0 una funzione che abbia in $P_0(x_0; f(x_0))$ la tangente al grafico parallela all'asse y.

Esempi



1. Consideriamo $y = x^2$ e $x_0 = 1$ ($f(x_0) = 1$)

   Calcoliamo

   $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

   Quindi $f'(1) = m_t = 2$.

   La retta tangente avrà equazione

   $$t: y - 1 = 2(x-1) \to y = 2x - 1$$

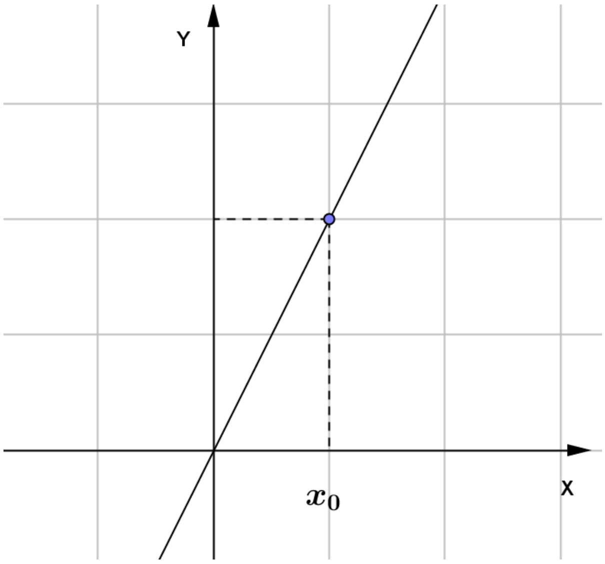
   Proviamo a verificare che l'equazione della tangente sia proprio $y = 2x - 1$: possiamo applicare il "vecchio" metodo del fascio di rette per $P_0(1; 1)$ e intersecare con $y = x^2$ imponendo che $\Delta = 0$.

   $$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - mx + m - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

   $$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \to m^2 - 4m + 4 = 0 \to (m-2)^2 = 0 \to m = 2$$

2. Consideriamo $y = 2x$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 2)$.
Calcoliamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$



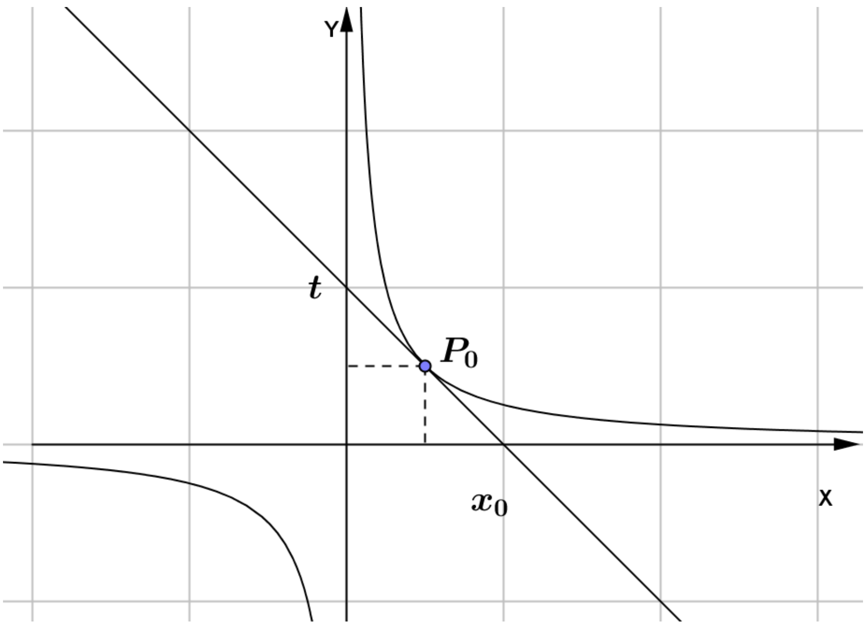
Osserviamo che se considero in generale x_0 ottengo lo stesso risultato:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{2x-2x_o}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{2(x-x_o)}{x-x_o} = 2$$

È chiaro che nel caso in cui il grafico sia una retta, la tangente coincide con il grafico in ogni punto x_0 e quindi $f'(x_0) = 2 \quad \forall x_0 \epsilon R$.

3. Consideriamo $y = \frac{1}{x}$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{x-1}{x(x-1)} = -1$$



ESERCIZI

DEFINIZIONE DI DERIVATA

Calcola $f'(x_0)$ per le seguenti funzioni (disegna anche G_f e t):

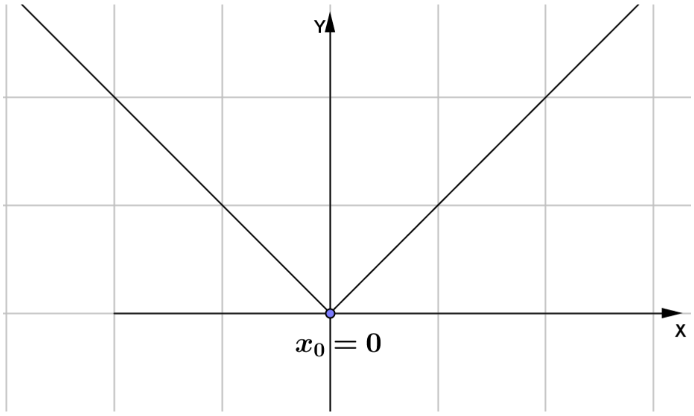
1. $f(x) = 3x - 1 \qquad x_0 = 0$ $\qquad [f'(0) = 3]$
2. $f(x) = 4x^2 \qquad x_0 = 1$ $\qquad [f'(1) = 8]$
3. $f(x) = 1 - x^2 \qquad x_0 = 0$ $\qquad [f'(0) = 0]$
4. $f(x) = \frac{2}{x} \qquad x_0 = 1$ $\qquad [f'(1) = -2]$
5. $f(x) = \frac{1}{x-2} \qquad x_0 = 1$ $\qquad [f'(1) = -1]$
6. $f(x) = 3 \qquad x_0 = 4$ $\qquad [f'(1) = 0]$
7. $f(x) = x^3 \qquad x_0 = 2$ $\qquad [f'(2) = 12]$
8. $f(x) = \frac{x-1}{x} \qquad x_0 = 1$ $\qquad [f'(1) = 1]$
9. $f(x) = \frac{2x-3}{x} \qquad x_0 = 1$ $\qquad [f'(1) = 3]$
10. $f(x) = 2 - x^3 \qquad x_0 = 1$ $\qquad [f'(1) = -3]$
11. $f(x) = x^2 - 1 \qquad x_0 = -1$ $\qquad [f'(-1) = -2]$
12. $f(x) = 5x + 2 \qquad x_0 = 3$ $\qquad [f'(3) = 5]$
13. $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = 2$ $\qquad [f'(2) = -\frac{1}{4}]$
14. $f(x) = -5 \qquad x_0 = 0$ $\qquad [f'(0) = 0]$
15. $f(x) = x^2 \qquad x_0 = 3$ $\qquad [f'(3) = 6]$

Esempi di funzioni non derivabili in x_o

Vediamo quali possono essere i punti di non derivabilità.

1. a) Consideriamo $f(x) = |x|$ e $x_0 = 0$
$(f(x_0) = 0)$

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$



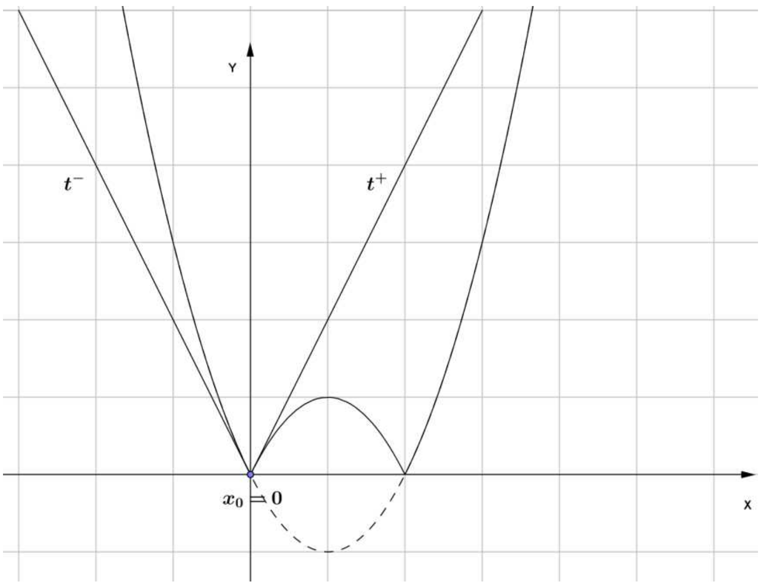
Dobbiamo distinguere due casi:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

In questo caso quindi non esiste il limite del rapporto incrementale perché il limite destro è diverso dal limite sinistro.
È come se avessimo due tangenti in $P_0(x_0; f(x_0))$, una “destra” e una “sinistra” con inclinazioni m_1 e m_2 e x_0 si dice **punto angoloso**.

b)Vediamo un altro esempio di punto angoloso: consideriamo $f(x) = |x^2 - 2x|$ e $x_0 = 0$
$(f(0) = 0)$



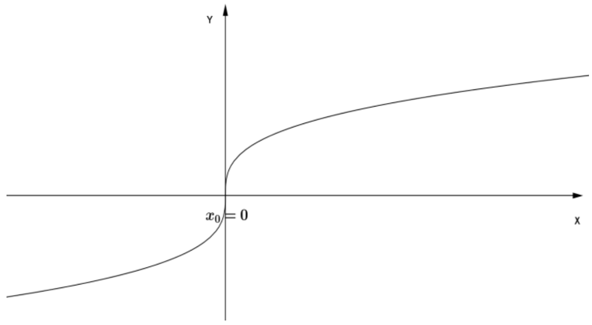
Ricorda che per tracciare il grafico di $f(x)$ prima si disegna la parabola $y = x^2 - 2x$ e poi si ribalta rispetto all’asse x la parte negativa.

Anche in questo caso abbiamo un punto angoloso in x_0 poiché:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = -2 \quad (m_{t^-})$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-(x^2 - 2x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x(x-2)}{x} = 2 \quad (m_{t^+})$$

2. Consideriamo $f(x) = \sqrt[5]{x}$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.

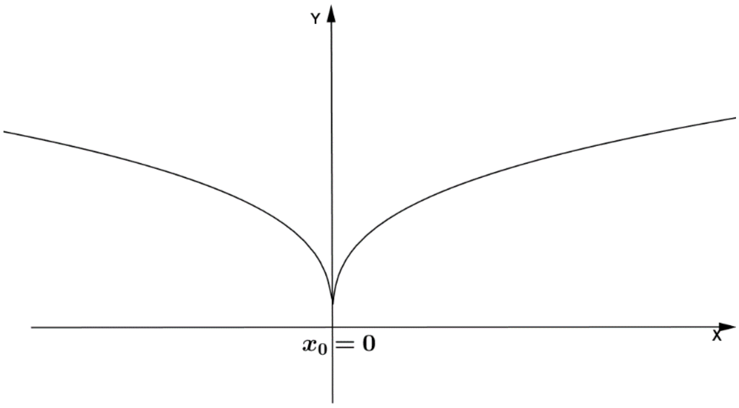


$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

In questo caso, il limite del rapporto incrementale esiste ma è infinito: la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$ al grafico è parallela all'asse delle y (nel nostro caso coincide con l'asse delle y). Diremo perciò che $y = \sqrt[5]{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

Punti di non derivabilità di questo tipo si chiamano "**punti a tangente verticale**".

3. Consideriamo $f(x) = |\sqrt[5]{x}|$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.



Poiché $f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{x} \text{ } quando \text{ } x \geq 0 \\ -\sqrt[5]{x} \text{ } quando \text{ } x < 0 \end{cases}$

occorre distinguere il limite destro e sinistro:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt[5]{x^2}} = -\infty$$

Quindi in questo caso il limite non esiste e i limiti destro e sinistro sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$: diciamo che x_0 è una "**cuspide**".

ESERCIZI

PUNTI DI NON DERIVABILITA'

Per ciascuna delle seguenti funzioni studia i punti di non derivabilità:

1. $f(x) = |x - 2|$ [$x_0 = 2$ punto angoloso]

2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ [$x_0 = -1$ punto a tangente verticale; $x_0 = 1$ punto a tangente verticale]

3. $f(x) = \sqrt[5]{x + 1}$ [$x_0 = -1$ punto a tangente verticale]

4. $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^2}$ [$x_0 = 1$ cuspide]

5. $f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|$ [$x_0 = 1$ punto angoloso]

6. $f(x) = |x^2 - 1|$ [$x_0 = -1$ punto angoloso$x_0 = 1$ punto angoloso]

7. $f(x) = |1 - x|$ [$x_0 = 1$ punto angoloso]

8. $f(x) = \left|\frac{2x}{x-1}\right|$ [$x_0 = 0$ punto angoloso]

9. $f(x) = |x| + 1$ [$x_0 = 0$ punto angoloso]

10. $f(x) = \sqrt{x}$ [$x_0 = 0$ punto a tangente verticale]

11. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ [$x_0 = 1$ punto a tangente verticale]

12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ [$x_0 = -1$ punto a tangente verticale; $x_0 = 1$ punto a tangente verticale]

Continuità e derivabilità

Teorema

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 allora $f(x)$ è continua in x_0.

Questa proprietà risulta immediata considerando il significato geometrico della derivata in x_0 in quanto se in $P_0(x_0, f(x_0))$ il grafico ha una tangente non può esserci una discontinuità in x_0, ma per completezza ne riportiamo anche una dimostrazione di tipo "algebrico".

Ricordiamo che per dimostrare la continuità di $f(x)$ in x_0 dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Allora se scriviamo $f(x)$ nel seguente modo:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

e calcoliamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

poiché $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ (per ipotesi $f(x)$ è derivabile in x_0), passando al limite avrò:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

Osservazione

Non è vero il viceversa cioè ***se $f(x)$ è continua in x_0 non è detto che sia derivabile in x_0.***

Basta infatti ricordare i punti di non derivabilità (punto angoloso, punto di flesso a tangente verticale, cuspide): in questi punti la funzione è continua ma non derivabile.

FUNZIONE DERIVATA

La funzione che associa $x \to f'(x)$ viene detta **funzione derivata** di $f(x)$ ed indicata con

$$f'(x) \text{ o } Df(x) \text{ o } \frac{df}{dx} \text{ (notazione di Leibniz)}$$

Esempio

Consideriamo $f(x) = x^2$.

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale lasciando come variabile x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Quindi $x \xrightarrow{f'} 2x$ e possiamo scrivere:

$$f'(x) = 2x \quad \text{o} \quad D(x^2) = 2x$$

Se dobbiamo quindi calcolare, per esempio, la derivata di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 3$ non dovremo far altro che sostituire $x = 3$ in $f'(x) = 2x$ cioè $f'(3) = 6$.

Quindi conoscere $f'(x)$ mi permette di calcolare la derivata di $f(x)$ in qualsiasi punto x_0 semplicemente con una sostituzione.

Dobbiamo quindi, per prima cosa, determinare le funzioni derivate delle funzioni elementari.

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- Derivata di $f(x) = k$ (funzione costante)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

Quindi $D(k) = 0$

- Derivata di $f(x) = x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Quindi $D(x) = 1$

- Derivata di $f(x) = senx$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{senx - senx_0}{x - x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(x_0 + h) - senx_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{senx_0 cosh + cosx_0 senh - senx_0}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{senx_0(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx_0 senh}{h}$$

Poiché

$$\lim_{h \to 0} \frac{cosh - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(cosh - 1)(cosh + 1)}{h \quad (cosh + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{cos^2 h - 1}{h(cosh + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-sen^2 h}{h(cosh + 1)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\mathrm{senh}}{\mathrm{h}} \frac{(senh)}{(cosh + 1)} = (-1) \cdot 0 = 0$$

Si ha:

$$senx_0 \cdot 0 + cosx_0 \left(\frac{senh}{h}\right) = cosx_0 \cdot 1 = cosx_0$$

Quindi $D(senx) = cosx$

- Derivata di $f(x) = cosx$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{cosx - cosx_0}{x - x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{cos(x_0 + h) - cosx_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cosx_0 cosh - senx_0 senh - cosx_0}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{cosx_0(cosh - 1)}{h} - \frac{senx_0(senh)}{h} = -senx_0$$

Quindi $D(cosx) = -senx$

- Derivata di $f(x) = lnx$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{lnx - lnx_0}{x - x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{ln(x_0 + h) - lnx_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0}$$

Quindi $D(\ln x) = \frac{1}{x}$

In generale $D(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$ (si dimostra in modo analogo).

- Derivata di $f(x) = e^x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

Quindi $D(e^x) = e^x$

In generale $D(a^x) = a^x \cdot lna$ (si dimostra in modo analogo).

Ricapitolando:

$D(k) = 0$

$D(x) = 1$

$D(senx) = cosx$

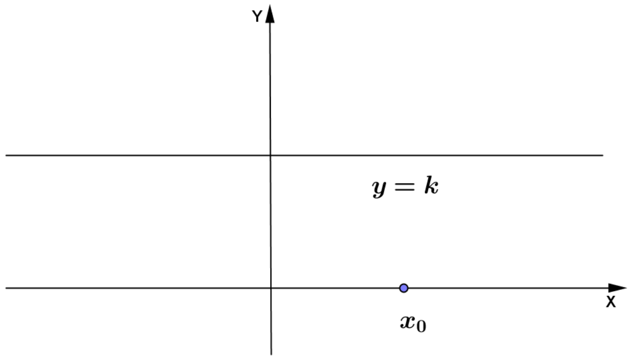
$D(cosx) = -senx$

$D(lnx) = \frac{1}{x}$ $\quad D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

$D(e^x) = e^x$ $\quad D(a^x) = a^x lna$

Osservazioni

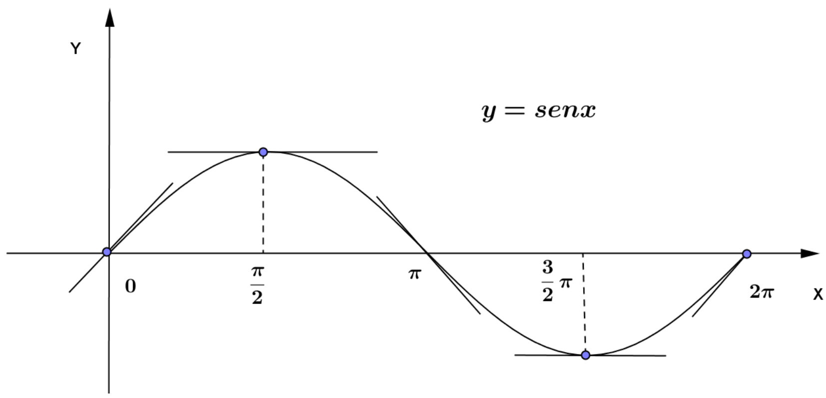
1. $D(k) = 0$: infatti il grafico di $y = k$ è una retta parallela all'asse x e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico e quindi ha coefficiente angolare $m = 0$.



2. $D(x) = 1$: infatti la retta $y = x$ ha coefficiente angolare $m = 1$ e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico di $f(x)$.

3. $D(senx) = cosx$

Osservando l'inclinazione delle tangenti al grafico di $y = senx$ possiamo verificare, per esempio, il valore della derivata in $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ecc.



SCHEDA DI LAVORO

COSTRUIRE LA FUNZIONE DERIVATA CON GEOGEBRA

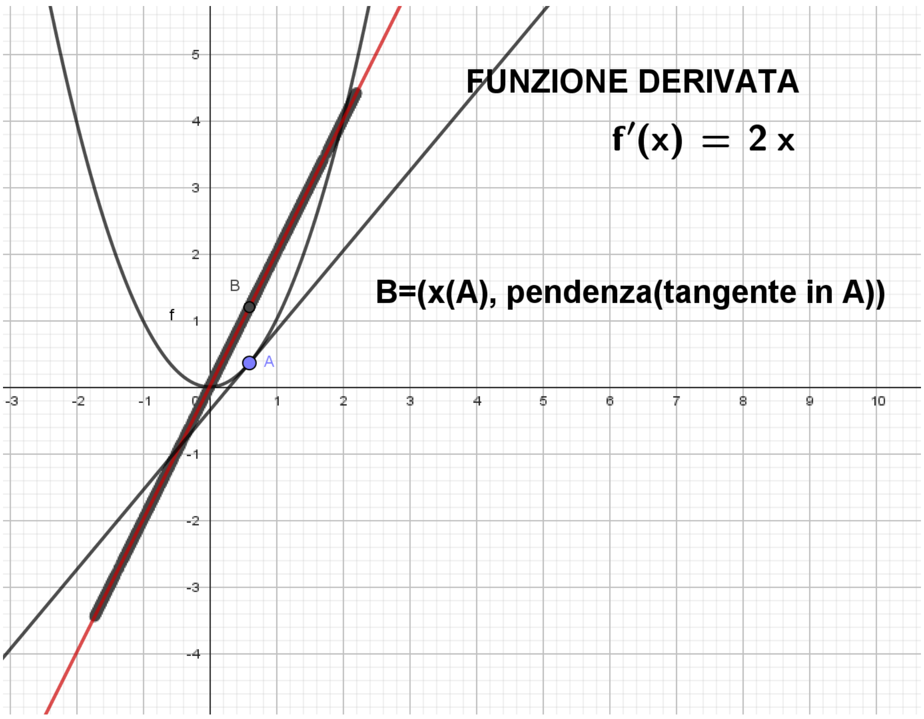
Proviamo a costruire la funzione derivata di una data funzione utilizzando il comando pendenza(retta) di Geogebra.

Sappiamo che la derivata di f(x) in un punto x_0 è il coefficiente angolare della tangente al grafico di f(x) nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

Per ottenere la funzione derivata, per esempio di $f(x) = x^2$, possiamo seguire questo procedimento:

- inseriamo una funzione, per esempio $y = x^2$;
- con punto su oggetto creiamo un punto A sul grafico di $y = x^2$;
- con il comando retta tangente in un punto disegniamo la retta (g) tangente in A al grfico;
- inseriamo da tastiera il punto $B = (x(A), pendenza(g)$;
- attiviamo la traccia di B e muoviamo A.

Otterremo così il grafico della funzione derivata che in questo caso risulta $f^{'}(x) = 2x$.



Nota: possiamo anche controllare inserendo f' che dà come risultato la derivata di f.

Esercizio: scegli un'altra funzione, costruisci la derivata con la traccia di B e verifica che si tratta della f'(x).

Regole di derivazione

Derivata della somma di due funzioni

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Quindi $\boxed{D(f(x)+g(x))=D(f(x))+D(g(x))}$

Naturalmente questa regola vale anche per la somma di più di due funzioni.

Esempio:

$$D(x+senx+2)=D(x)+D(senx)+D(2)=1+cosx$$

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=(si\ somma\ e\ si\ sottrae\ f(x_0)g(x))$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Nota: $f(x)$ e $g(x)$ essendo per ipotesi derivabili in x_0 sono anche continue e quindi $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$).

Quindi

$$\boxed{D(f(x)\cdot g(x))=D(f(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot D(g(x))}$$

Esempio:

$$D(x\cdot senx)=D(x)senx+xD(senx)=senx+x\cdot cosx$$

Nota

In particolare

$$D\big(kf(x)\big)=kD(f(x))$$

Infatti

$$D\big(kf(x)\big)=D(k)f(x)+kD\big(f(x)\big)=kD(f(x))$$

Questa regola si può estendere al prodotto di più di due funzioni e risulta:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f) \cdot g \cdot h + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} D(f \cdot g \cdot h) = D\big(f \cdot (gh)\big) = D(f) \cdot gh + f \cdot D(gh) = D(f) \cdot gh + f[D(g) \cdot h + g \cdot D(h)] \\ = D(f)gh + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h) \end{aligned}$$

Esempio:

$$D(x \cdot senx \cdot cosx) = 1 \cdot \ senx \cdot cosx + x \cdot cosx \cdot cosx + x \cdot senx(-senx)$$

- In particolare $\quad D(x^n) = nx^{n-1} \quad$ poiché:

$$D(x^n) = D\Bigg(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\ volte}\Bigg) = 1 \cdot \underbrace{x \cdots x}_{n-1\ volte} + \underbrace{x \cdot 1 \cdots x}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{x \cdots x \cdot 1}_{n-1\ volte} = nx^{n-1}$$

e

$$D\big(f^n(x)\big) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Poiché

$$D\big(f^n(x)\big) = D\Bigg(\underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{n\ volte}\Bigg) =$$

$$= f'(x) \cdot \underbrace{f(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \underbrace{f(x) \cdot f'(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{f(x) \cdots f(x) \cdot f'(x)}_{n-1\ volte} = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Esempi

$$D(x^3) = 3x^2$$

$$D\big(sen^3(x)\big) = 3sen^2x \cdot cosx$$

$$D(ln^2x) = 2lnx \cdot \frac{1}{x}$$

$$D(cos^4x) = 4cos^3x(-senx)$$

$$D(x^5) = 5x^4$$

Derivata della funzione reciproca di $f(x)$ $(f(x) \neq 0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x) f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] \frac{1}{f(x) f(x_0)}$$
$$= (f(x) \text{è } continua \ in \ x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

Esempi:

1) $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

2) $D\left(\frac{1}{senx}\right) = -\frac{\cos x}{sen^2 x}$

In particolare

a) $D(x^{-n}) = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$

Quindi $\boxed{D(x^k) = kx^{k-1}}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(x^{-2}) = -2x^{-3}$

b) $D(f^{-n}(x)) = D\left(\frac{1}{f^n(x)}\right) = -\frac{nf^{n-1}(x) f'(x)}{f^{2n}(x)} = -nf^{-n-1}(x) f'(x)$

Quindi $\boxed{D\left(f^k(x)\right) = kf^{k-1}(x) f'(x)}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(sen^{-2}x) = -2sen^{-3}x \cdot cosx$

Derivata del quoziente di due funzioni

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D\big(f(x)\big)g(x) - f(x)D\big(g(x)\big)}{g^2(x)}}$$

Esempi:

1) $$D(tgx) = D\left(\frac{senx}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cdot\cos x - senx\cdot(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2) $$D(\cot gx) = D\left(\frac{\cos x}{senx}\right) = \frac{-senx\cdot senx - \cos x\cdot\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1}{sen^2 x}$$

3) $$D\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = \frac{D(x-2)\cdot(x^2+1) - (x-2)\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-(x-2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Nota

La derivata di $f(x) = tgx$ può anche essere scritta $D(tgx) = 1 + tg^2x$.

Infatti:

$$D(tgx) = \frac{1}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = 1 + tg^2x$$

La derivata di $f(x) = cotgx$ si può scrivere anche così:

$$D(cotgx) = -\frac{1}{sen^2x} = \frac{-sen^2x - cos^2x}{sen^2x} = -1 - cotg^2x$$

ESERCIZI

REGOLE DI DERIVAZIONE

Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

1. $D(2x+tgx)$ $\left[2+\frac{1}{\cos^2 x}\right]$

2. $D\left(\frac{x+2}{3x^2-4}\right)$ $\left[-\frac{3x^2+12x+4}{(3x^2-4)^2}\right]$

3. $D(x\ln x)$ $[\ln x+1]$

4. $D((3x+1)2^x)$ $[3\cdot 2^x+(3x+1)2^x\cdot\ln 2]$

5. $D(sen^2x+\frac{\pi}{2})$ $[2senx\cos x]$

6. $D\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

7. $D\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$ $\left[\frac{2senx}{\cos^3 x}\right]$

8. $D\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ $\left[-\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\right]$

9. $D\left(\frac{\cos^2 x+1}{senx}\right)$ $\left[\frac{-\cos x(2sen^2x+\cos^2 x+1)}{sen^2x}\right]$

10. $D(x^3\cdot ln^2x)$ $[3x^2\cdot\ln^2 x+2x^2\cdot\ln x]$

11. $D(log_2^3x)$ $\left[3\log_2^2 x\cdot\frac{1}{x}\log_2 e\right]$

12. $D((x+1)^2(x^2-2)^3)$ $[2(x+1)(x^2-2)^3+3(x+1)^2(x^2-2)^2\cdot 2x]$

13. $D\left(\frac{senx+\cos x}{\cos^2 x}\right)$ $\left[\frac{\cos^2 x+2sen^2x+senx\cos x}{\cos^3 x}\right]$

14. $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^3}\right]$

15. $D\left(\frac{2}{senx}\right)$ $\left[-\frac{2\cos x}{sen^2x}\right]$

16. $D\left(x^5+6x\right)$ $\left[5x^4+6\right]$

17. $D\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)$ $\left[x^2+x\right]$

18. $D\left(x^4-3x^2-4\right)$ $\left[4x^3-6x\right]$

19. $D\left(x^3-2\cos x+\frac{\pi}{2}\right)$ $\left[3x^2+2senx\right]$

20. $D\left(x^2\cdot\cos x\right)$ $\left[2x\cdot\cos x-x^2\cdot senx\right]$

21. $D\left(2\cdot senx\cdot\cos x\right)$ $\left[2\left(\cos^2 x-sen^2 x\right)\right]$

22. $D\left(5\cdot e^x\cdot senx\right)$ $\left[5\cdot e^x\left(senx+\cos x\right)\right]$

23. $D\left(x\cdot\ln x-senx\right)$ $\left[\ln x+1-\cos x\right]$

24. $D\left(\frac{1}{3-x}\right)$ $\left[\frac{1}{(3-x)^2}\right]$

25. $D\left(\frac{5+x}{2x}\right)$ $\left[-\frac{5}{2x^2}\right]$

26. $D\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

27. $D\left(\frac{x^3-2x+1}{x+3}\right)$ $\left[\frac{2x^3+9x^2-7}{(x+3)^2}\right]$

28. $D\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ $\left[\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\right]$

29. $D\left(\frac{\ln x-2}{x}\right)$ $\left[\frac{3-\ln x}{x^2}\right]$

30. $D\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$ $\left[\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right]$

Derivata di una funzione composta

Si può dimostrare che:

$$\boxed{D\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Esempi

a) $D(sen(2x)) = \cos(2x) \cdot 2 = 2 \cdot \cos(2x)$

b) $D(\ln(x^2+1)) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$

c) $D(\ln(sen3x)) = \frac{1}{sen3x} \cdot cos3x\ 3 = 3cotg3x$

d) $D\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Nota

In particolare usando questa regola di derivazione possiamo calcolare la derivata di $f(x)^{g(x)}$.

$$D\left(f(x)^{g(x)}\right) = D\left(e^{\ln f(x)^{g(x)}}\right) = D\left(e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\right) = ecc.$$

Esempio:

$$D((x+1)^x) = D\left(e^{x\cdot \ln(x+1)}\right) = e^{x\cdot \ln(x+1)}\left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right] = (x+1)^x\left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right]$$

Se in particolare deriviamo $f^{\alpha}(x)$, con $\alpha \in \Re$, abbiamo:

$$D\left(f^{\alpha}(x)\right) = D\left(e^{\ln f^{\alpha}(x)}\right) = D\left(e^{\alpha \cdot \ln f(x)}\right) = f^{\alpha}(x)\left(\alpha \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$$

In particolare si ha che per $\alpha \in \Re$ $\boxed{D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}}$

Quindi:

$$D(\sqrt{x}) = D\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = D\left(f(x)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Esempi

a) $D(\sqrt[3]{x}) = D\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

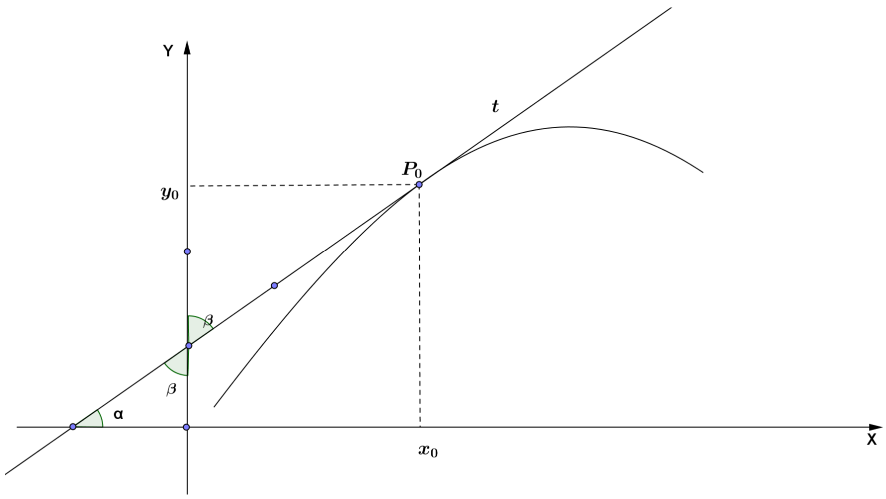
b) $D(\sqrt[3]{cosx}) = D\left(cosx^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}cosx^{-\frac{2}{3}}(-senx) = -\frac{senx}{3\sqrt[3]{cosx^2}}$

Derivata della funzione inversa

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora $x = f^{-1}(y)$ (funzione inversa di $f(x)$) è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$\boxed{[D(f^{-1}(y))]_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Dimostrazione



Poiché $f'(x_0) = tg\alpha$ e $D\left(f^{-1}(y_0)\right) = tg\beta$ essendo $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ si ha:

$$[D(f^{-1}(y))]_{y=y_0} = tg\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Determiniamo la derivata delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche:

a. $D(arcsenx) = \frac{1}{D(seny)} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ poiché

$y = arcsenx \rightarrow x = seny$

Osserviamo che $cosy = \sqrt{1 - sen^2y}$ poiché $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi $cosy > 0$

b. $D(arccosx) = \frac{1}{D(cosy)} = \frac{1}{-seny} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ poiché

$y = arccosx \rightarrow x = cosy$

c. $D(arctgx) = \frac{1}{D(tgy)} = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2}$ poiché $y = arctgx \rightarrow x = tgy$

d. $D(arccotgx) = \frac{1}{D(cotgy)} = -\frac{1}{1+cotg^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$

Osservazione: $D(arcsenx + arcosx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, infatti $arcsenx + arcosx = \frac{\pi}{2}$ e quindi la derivata di una costante è zero.

ESERCIZI

DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA

DERIVATA DI ARCOSENO, ARCOCOSENO E ARCOTANGENTE

1) $D(ln3x)$ [$\frac{1}{x}$]

2) $D(sen4x)$ [$4 \cdot cos4x$]

3) $D(\cos^3 2x)$ [$-6cos^2 2x \cdot sen2x$]

4) $D(ln^2(4x+1))$ [$\frac{8\ln(4x+1)}{4x+1}$]

5) $D\left(tg^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ [$2 \cdot tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$]

6) $D(e^{\frac{x-1}{x}})$ [$e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$]

7) $D(2^{x^2+1})$ [$ln2 \cdot 2^{x^2+1} \cdot 2x$]

8) $D\left(\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right)$ [$-\frac{2x}{x^2+1}$]

9) $D\left(\frac{1}{2} \cdot sen\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ [$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$]

10) $D\left(\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ [$-6 \cdot sen\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$]

11) $D\left(tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ [$\frac{2}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$]

12) $D(e^{-x})$ [$-e^{-x}$]

13) $D(\sqrt{senx+cosx})$ $\qquad$ [$\frac{cosx-senx}{2\sqrt{senx+cosx}}$]

14) $D(\ln(\frac{x}{x^2+1}))$ $\qquad$ [$\frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$]

15) $D(\sqrt{\frac{x}{x^2-1}})$ $\qquad$ [$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\cdot\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$]

16) $D(\sqrt[3]{\frac{x}{x-2}})$ $\qquad$ [$-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}$]

17) $D(arcsen(3x+1))$ $\qquad$ [$\frac{3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$]

18) $D\left(arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $\qquad$ [$-\frac{1}{x^2+1}$]

19) $D(\arccos(2x+1))$ $\qquad$ [$-\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$]

20) $D\left(arct\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$ $\qquad$ [$\frac{1}{2x^2+2x+1}$]

21) $D\left(e^{\sqrt{x^2-1}}\right)$ $\qquad$ [$e^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$]

22) $D\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)$ $\qquad$ [$-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}$]

23) $D(arcsen(x+2))$ $\qquad$ [$\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$]

24) $D((1+3x)^x)$ $\qquad$ [$(1+3x)^x\left[ln(1+3x)+\frac{3x}{1+3x}\right]$]

25) $D(\sqrt[4]{x^2-2})$ $\qquad$ [$\frac{1}{2}x(x^2-2)^{-\frac{3}{4}}$]

Ricapitolando

$$D(f(x)+g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$$

$$D(f(x)\cdot g(x)) = D(f(x))\cdot g + f(x)\cdot D(g(x))$$

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f)\cdot g - f\cdot D(g)}{g^2(x)}$$

$$D\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$[D(f^{-1}(y))]_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

In particolare:

$$D\big(kf(x)\big) = k\cdot D(f(x))$$

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \ (\ \alpha \in R\ )$$

$$D(f(x)^\alpha) = \alpha\cdot f(x)^{\alpha-1}\cdot f'(x) \quad (\ \alpha \in R)$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$D\big(\ln f(x)\big) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$D(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$D(cotgx) = -\frac{1}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$$

$$D(arcsenx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(arccosx) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D(arccotgx) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

REGOLE DI DERIVAZIONE

1. $D(3x + cotgx)$ $\left[\ 3 - \frac{1}{sen^2x}\ \right]$

2. $D(\frac{2}{x} + lnx)$ $[\ -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}\ ]$

3. $D(2cos^3x)$ $[\ 2 \cdot 3cos^2x(-senx) = -6senxcos^2x\ ]$

4. $D((x \cdot ln^3x)$ $[\ ln^3 x + x \cdot 3ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = ln^3x + 3ln^2x\ ]$

5. $D(\sqrt{\frac{x-1}{x}})$ $[\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\left[\frac{x-(x-1)}{x^2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1}{x^2}\ ]$

6. $D(e^{\frac{x-1}{x^2+1}})$ $[\ e^{\frac{x-1}{x^2+1}}\left[\frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2}\right] = e^{\frac{x-1}{x^2+1}}\left[\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\right]\ ]$

7. $D(arcsen\frac{1}{x})$ $[\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\sqrt{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}\ ]$

8. $D(arctg2x)$ $\left[\ \frac{1}{1+4x^2}2 = \frac{2}{1+4x^2}\ \right]$

9. $D((x+1) \cdot e^x)$ $[\ e^x + (x+1)e^x = e^x(1+x+1) = e^x(2+x)\ ]$

10. $D(\arccos(\frac{2x}{x-3}))$ $[\ -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{x-3})^2}}\left[\frac{2(x-3)-2x}{(x-3)^2}\right] = \frac{6}{(x-3)^2}\sqrt{\frac{(x-3)^2}{9-6x-3x^2}}\ ]$

11. $D(\frac{senx-cosx}{cosx+1})$ $[\ \frac{(cosx+senx)(cosx+1)-(senx-cosx)(-senx)}{(cosx+1)^2}\ ]$

12. $D(\frac{x}{x^3+1})$ $[\ \frac{x^3+1-x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}\ ]$

13. $D\left(\sqrt{e^{x-2}}\right)$ $[\ \frac{1}{2\sqrt{e^{x-2}}}e^{x-2}\ ]$

14. $D((x+2)^{x-1})$ $[\ (x+2)^{x-1}(\ln(x+2) + \frac{x-1}{x+2})\ ]$

15. $D\left(\frac{1}{sen^2 x}\right)$ $\left[\ -\frac{2senxcosx}{sen^4 x} = -\frac{2cosx}{sen^3 x}\ \right]$

16. $D\left(\frac{senx}{2cosx-1}\right)$ $\left[\ \frac{cosx(2cosx-1)+2sen^2 x}{(2cosx-1)^2}\ \right]$

17. $D\left(cotg^3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\left[\ 3cotg^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{sen^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\right) = \frac{-3cotg^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{sen^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\ \right]$

18. $D(4^{2x+1})$ $[\ 4^{2x+1}\cdot ln4\cdot 2 = 2\ln 4\cdot 4^{2x+1}\ ]$

19. $D(\arccos(1-3x))$ $\left[\ -\frac{1}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}(-3) = \frac{3}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}\ \right]$

20. $D\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}\right)$ $\left[\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}}\cdot\frac{(-x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}\ \right]$

21. $D(arctg(2x+1))$ $\left[\ \frac{1}{1+(2x+1)^2}\cdot 2 = \frac{2}{1+(2x+1)^2}\ \right]$

22. $D((1+3x)^x)$ $\left[\ (1+3x)^x\left(\ln(1+3x)+x\cdot\left(\frac{1}{1+3x}\right)\cdot 3\right)\ \right]$

23. $D\left(\frac{e^x+1}{2-e^x}\right)$ $\left[\ \frac{e^x(2-e^x)+(e^x+1)e^x}{(2-e^x)^2} = \frac{3e^x}{(2-e^x)^2}\ \right]$

24. $D\left(ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\right)$ $\left[\ \left(\frac{x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\ \right]$

25. $D\left(e^{\sqrt{x^2-1}}\right)$ $\left[\ e^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ \right]$

26. $D(arcsen(3x-1))$ $\left[\ \frac{3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}\ \right]$

27. $D\left(arctg\left(\frac{x-3}{x-1}\right)\right)$ $\left[\ \frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{2}{(x-1)^2}\ \right]$

28. $D\left(\sqrt{\frac{x^4-1}{x}}\right)$ $\left[\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^4-1}}\cdot\frac{(3x^4+1)}{x^2}\ \right]$

29. $D\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ $\left[\ e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ \right]$

30. $D(ln^3(2x-1))$ $\left[\ 3ln^2(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot 2 = \frac{6ln^2(2x-1)}{2x-1}\ \right]$

Problemi

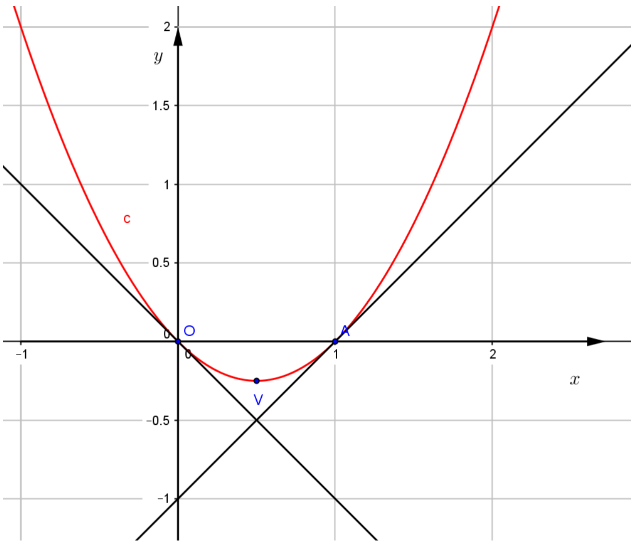
Vediamo alcuni problemi di geometria analitica in cui, per la condizione di tangenza, possiamo utilizzare la derivata.

Esempio 1

Data la parabola di equazione $y = x^2 - x$, determina l'equazione della retta tangente alla parabola nell'origine e nel suo punto $A(1;0)$.
Disegna la parabola e le due tangenti.

Svolgimento

Disegniamo la parabola, dopo aver determinato il suo vertice e le intersezioni con gli assi: il vertice risulta $V\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ e le intersezioni $O(0;0)$, $A(1;0)$



Calcoliamo, con le regole di derivazione, la derivata dell'equazione della parabola:

$$y' = 2x - 1$$

Se calcoliamo la derivata in $x = 0$ avremo il coefficiente angolare della tangente in $O(0;0)$:

$$y'(0) = -1 \to t_{(0;0)} : y = -x$$

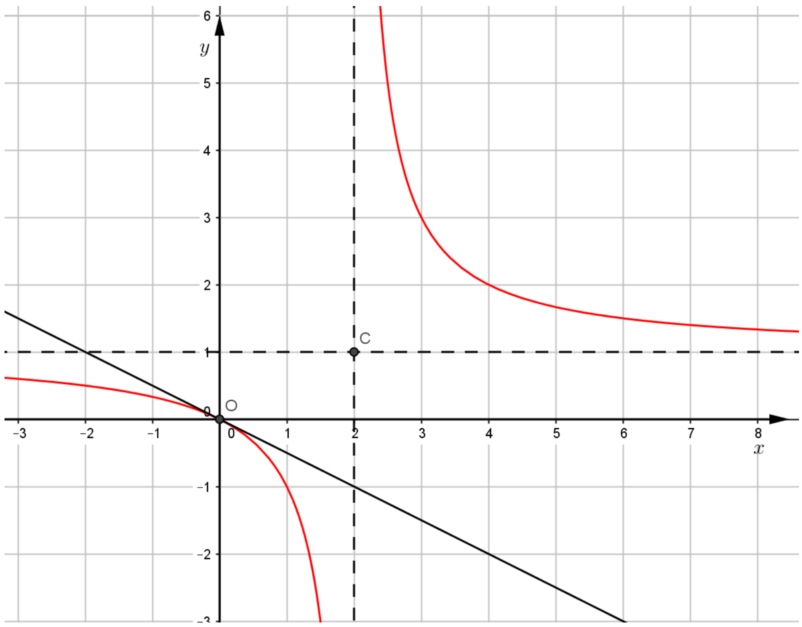
Se calcoliamo la derivata in $x = 1$ avremo il coefficiente angolare della tangente in $A(1;0)$:

$$y'(1) = 1 \to t_{(1;0)} : y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \to y = x - 1$$

Esempio 2

Data la funzione omografica di equazione $y = \frac{x}{x-2}$, determina l'equazione della retta tangente all'iperbole nell'origine.
Disegna l'iperbole e la tangente in (0;0).

Svolgimento
Disegniamo l'iperbole: il centro risulta $C(2;1)$ e quindi l'iperbole ha asintoto verticale $x = 2$ e asintoto orizzontale $y = 1$.
Inoltre si osserva che l'iperbole passa per O(0;0).



Calcoliamo la derivata della funzione e calcoliamola in $x = 0$:

$$y' = D\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

$$y'(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Quindi l'equazione della tangente all'iperbole in $O(0;0)$ avrà coefficiente angolare $m_t = -\frac{1}{2}$ ed equazione $t_{(0;0)} : y = -\frac{1}{2}x$.

Esempio 3

Determina l'equazione di una parabola P con asse di simmetria parallelo all'asse delle y, passante per $A(-1;4)$ e tangente in $T(0;1)$ alla retta $y=-x+1$.

Svolgimento

L'equazione generica della parabola con asse parallelo all'asse y è del tipo è $y=ax^2+bx+c$

Per determinare i tre parametri possiamo imporre il passaggio per A, per T e la condizione di tangenza. Abbiamo quindi:

$A(-1;4) \to 4=a-b+c$

$T(0;1) \to 1=c$

Per la condizione di tangenza possiamo calcolare la derivata in $x=0$

$$y'=2ax+b$$

$$y'(0)=b$$

Se la tangente in $x=0$ è la retta $y=-x+1$ il suo coefficiente angolare è $m=-1$ e quindi

$$y'(0)=b=-1$$

In conclusione abbiamo il seguente sistema :

$$\begin{cases} 4=a-b+c \\ 1=c \\ b=-1 \end{cases} \to \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

L'equazione della parabola risulta quindi $P: y=2x^2-x+1$

Esempio 4

Determina i coefficienti a e b di $y=\frac{ax+b}{x^2}$ sapendo che il grafico ha in $T(1;3)$ la retta tangente di equazione $4x+y-7=0$.

Determiniamo $y'=-\frac{ax+2b}{x^3}$ e $y'(1)=-a-2b$.

Poiché $t: y=-4x+7$ il coefficiente angolare è $m=-4$.

Risolviamo quindi imponendo anche il passaggio per T:

$$\begin{cases} -a-2b=-4 \\ 3=a+b \end{cases} \to \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Derivate successive di una funzione

Come abbiamo definito la funzione derivata di $f(x)$, possiamo definire la funzione derivata di $f'(x)$, che indicheremo con $f''(x)$ e chiameremo derivata seconda di $f(x)$ e così via.

Esempio1

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$
$$D\big(f'(x)\big) = f''(x) = 12x^2 + 12x$$
$$D\big(f''(x)\big) = f'''(x) = 24x + 12$$
$$D\big(f'''(x)\big) = f^{(4)}(x) = 24$$
$$D\left(f^{(4)}(x)\right) = f^{(5)}(x) = 0$$

Osserviamo che $f(x)$ è un polinomio di grado 4:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq 5$$

Analogamente se $f(x)$ è un polinomio di grado k si avrà:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq k + 1$$

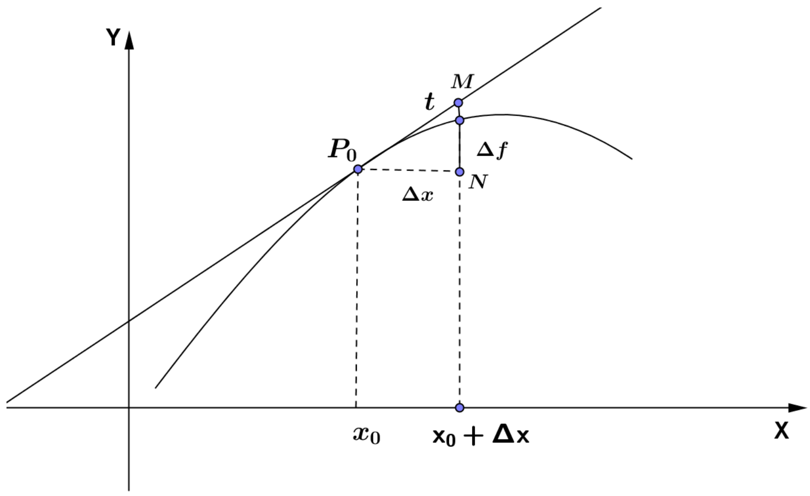
Esempio2

$$f(x) = senx$$
$$f^{'}(x) = \cos x$$
$$f^{''}(x) = -senx$$
$$f^{'''}(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = senx$$
....

Esempio 3

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
....

Differenziale di una funzione



Passando da x_0 a $x_0 + \Delta x$ la funzione subisce un **incremento** $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ **che può essere approssimato** con $\overline{MN}$ che viene detto differenziale di $f(x)$ in x_0 ed indicato con $df(x_o)$ (l'errore che si compie approssimando Δf con $df(x_o)$ aumenta all'aumentare di Δx). Poiché

$$\frac{\overline{MN}}{\Delta x} = f^{'}(x_o) \rightarrow \overline{MN} = f^{'}(x_o) \cdot \Delta x$$

in conclusione si ha $\quad df(x_o) = f^{'}(x_o) \cdot \Delta x$

Nota

Se consideriamo $f(x) = x$ si avrebbe che il differenziale, essendo $f^{'}(x) = 1$, risulterebbe $dx = \Delta x$: per questo motivo spesso si scrive anche

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

In generale, considerando x_0 variabile , si ha che il differenziale della funzione $f(x)$ risulta

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

da cui

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$ (detta notazione di Leibniz)

Esempio

Consideriamo per esempio $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$:

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(1) = 2$

$df(1) = 2dx.$

Il differenziale di $f(x) = x^2$ sarà $d(x^2) = 2x dx$.

Significati della derivata in fisica

Due fondamentali concetti della cinematica di un punto materiale sono basati sulla derivata: la *velocità* e l'*accelerazione*.

Supponiamo di considerare un punto materiale P che si muove su una traiettoria rettilinea con legge oraria $s = s(t)$.

La velocità istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

L'accelerazione istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = s''(t_0)$$

Esempi

1. Se consideriamo $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ (moto uniformemente accelerato) troviamo:

$$v(t) = s'(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = v'(t) = a$$

2. Se considero $s(t) = s_0 sen\omega t$ (moto armonico)

$$v(t) = s'(t) = \omega s_0 cos\omega t$$

$$a(t) = v'(t) = -\omega^2 s_0 sen\omega t$$

come avevamo ricavato studiando il moto armonico come proiezione di un moto circolare.

3. Se due punti materiali hanno leggi orarie
$s_1(t) = t^2$
$s_2(t) = 2t^2 - 3t$

si incontrano in un istante successivo a $t = 0$? E quando accade quale velocità possiedono?

$2t^2 - 3t = t^2 \to t^2 - 3t = 0 \to t(t - 3) = 0 \to t = 0, t = 3$
$v_1(t) = 2t \to v_1(3) = 6$
$v_2(t) = 4t - 3 \to v_2(3) = 9$

PROBLEMI SULLE DERIVATE

1) Determina l'equazione della tangente alla curva di equazione $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ nel suo punto di intersezione con l'asse y. [$y = -x+1$]

2) Scrivi le equazioni delle tangenti alla curva di equazione $y = \frac{x^2-4}{x+1}$ nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. [$y = 4x-4$; $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$; $y = 4x+8$]

3) Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x^2 + x$ nel suo punto P di ascissa x=1. [$y = 3x-1$]

4) Un corpo si muove su una traiettoria rettilinea con legge oraria $s(t) = 4\ln t - 2t^2$ dove lo spazio è misurato in metri e il tempo in secondi con $t > 0$. Dopo aver determinato la velocità v(t) e l'accelerazione a(t) determina in quale istante risulta v=0 m/s e in quale istante $a = -20\frac{m}{s^2}$ [t=1 s ; t=0,5 s]

5) Un oggetto si muove in linea retta secondo la legge oraria $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 1$ (il tempo è misurato in secondi e la posizione in metri). Calcola in quali istanti la velocità è 3 m/s. Determina l'istante in cui l'accelerazione è nulla.
[t=1 s ; t=3 s ; t=2 s]

6) Una corrente attraversa la sezione di un conduttore. La carica q che attraversa la sezione nell'intervallo [0,t] risulta $q(t) = 3t$ (misurando la carica in Coulomb e il tempo in secondi). Qual è l'intensità di corrente che circola nel conduttore?
[i(t)= 3 A]

7) La carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'intervallo [0,t] risulta $q(t) = sen(2\pi t)$ (misurando la carica in Coulomb e il tempo in secondi). Qual è l'intensità di corrente che circola nel conduttore?
[i(t)=2πcos(2πt) A]

8) In un circuito LC la carica q(t) presente sulle armature del condensatore risulta $q(t) = q_0 \cdot sen(\omega t)$. Verifica che $q''(t) = -\frac{1}{LC} \cdot q(t)$ solo se $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

9) Due punti materiali si muovono sulla stessa traiettoria rettilinea con leggi orarie $s_1(t) = t^3$ e $s_2(t) = t^2 + 2t$. Dopo l'istante t=0 (in cui si trovano entrambi nell'origine del sistema di riferimento) in quale istante si trovano nella stessa posizione? In quell'istante quali sono le loro velocità?

[12 m/s; 6 m/s]

10) Una spira conduttrice circolare di raggio 10 cm è disposta perpendicolarmente ad un campo magnetico che varia nel tempo secondo la legge B(t)=3t. Determina la f.e.m. indotta attraverso la spira. Se la resistenza della spira è 2 Ω qual è l'intensità della corrente indotta?

[$f.e.m = 3 \cdot \pi \cdot 10^{-2} V$; $i = 1{,}5 \cdot \pi \cdot 10^{-2} A$]

SCHEDA DI VERIFICA 1

1) Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a) $y = \ln^2(3x-1)$

b) $y = \dfrac{\cos x - 3senx}{1+senx}$

c) $y = \sqrt{1-e^{2-x}}$

d) $y = 3^{\frac{1}{x}}$

e) $y = tg^2(2x - \frac{\pi}{4})$

f) $y = (x+2)arctg\,\dfrac{x}{3}$

g) $y = (3x^2+2)^x$

h) $y = arcsen(2x+1)$

2) Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata, eventuali punti di non derivabilità e disegnane il grafico.

a) $f(x) = \left|\dfrac{2-x}{x-4}\right|$

b) $f(x) = \sqrt{9x^2-1}$

Problema 1

Determina l'equazione della funzione omografica $\Im$ passante per P(1,1) e avente in (0,0) la stessa tangente della parabola di equazione $y = 2x - x^2$. Disegna le due curve e scrivi l'equazione della tangente comune.

Problema 2

Determina a, b, c in modo che la curva di equazione $y = \dfrac{ax^2+bx}{x+c}$ abbia nell'origine come tangente la retta di equazione $y = x$ e come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 2x+1$.

SOLUZIONI

SCHEDA 1

1.

a. $2\ln(3x-1)\cdot\frac{1}{3x-1}\cdot 3=\frac{6\ln(3x-1)}{3x-1}$

b. $\frac{(-senx-3cosx)(1+senx)-cosx(cosx-3senx)}{(1+senx)^2}=\frac{-(senx+3cosx+1)}{(1+senx)^2}$

c. $\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2-x}}}(-e^{2-x})(-1)=\frac{e^{2-x}}{2\sqrt{1-e^{2-x}}}$

d. $3^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\ln 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

e. $2tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot 2=\frac{4tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$

f. $arctg\frac{x}{3}+(x+2)\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{1}{3}=arctg\frac{x}{3}+\frac{3(x+2)}{9+x^2}$

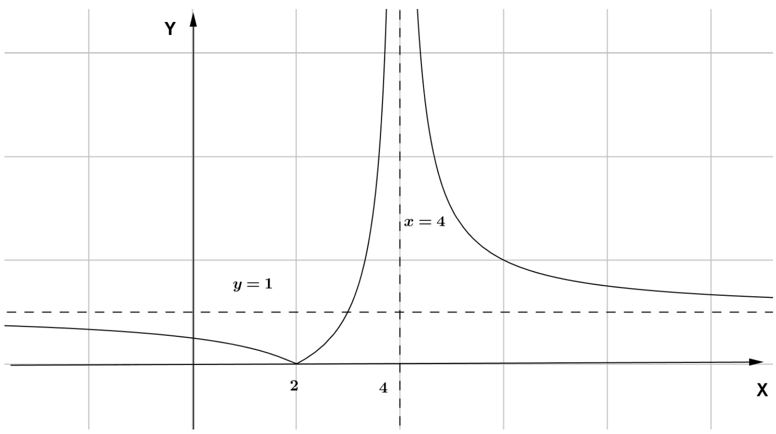
g. $(3x^2+2)^x\left[\ln(3x^2+2)+x\cdot\frac{1}{3x^2+2}\cdot 6x\right]=(3x^2+2)^x\left[\ln(3x^2+2)+\frac{6x^2}{3x^2+2}\right]$

h. $\frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$

2.

a. $f(x)=\left|\frac{2-x}{x-4}\right|$

$Df: R\setminus\{4\}$



$\lim_{x\to\infty} f(x)=1\to y=1$ *asintoto orizzontale*

$\lim_{x\to 4} f(x)=+\infty\to x=4$ *asintoto verticale* discontinuità di 2ª specie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{x-4} & 2 < x < 4 \\ -\dfrac{2-x}{x-4} & x \leq 2 \cup x > 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-4)^2} & 2 < x < 4 \\ -\dfrac{2}{(x-4)^2} & x < 2 \cup x > 4 \end{cases}$$

Quindi $x = 2$ è punto angoloso $\left(\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{2}, \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{2}\right)$

b. $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

$Df: x \leq -\dfrac{1}{3} \cup x \geq \dfrac{1}{3}$

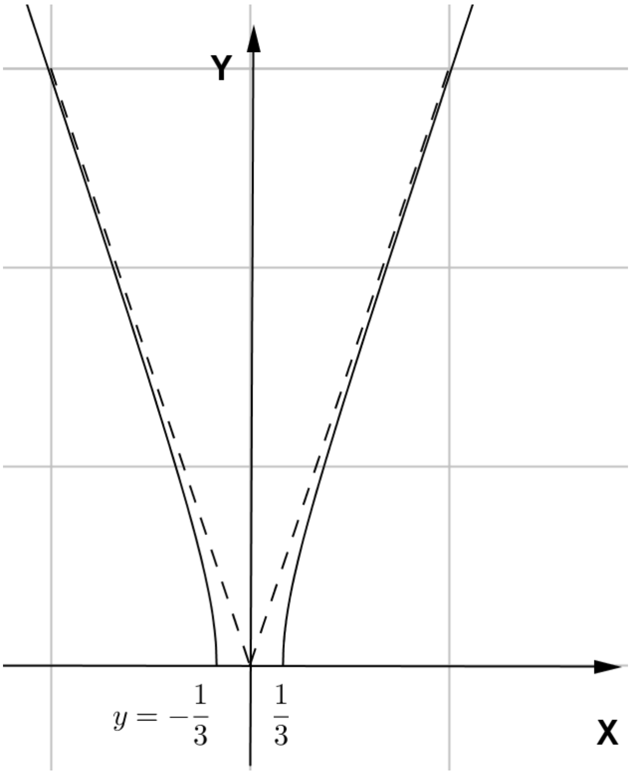
Funzione continua

$y = \pm 3x$ asintoti obliqui

$f'(x) = \dfrac{9x}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

$x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$ punti a tangente verticale

$\left(\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-} f'(x) = -\infty, \lim_{x\to \frac{1}{3}^+} f'(x) = +\infty\right)$



Problema 1: $\Im : y = \dfrac{2x}{x+1}$; $t_{(0;0)} : y = 2x$

Problema 2: $a = 2$; $b = c = -1$

SCHEDA DI VERIFICA 2

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a. $D(sen^2 x cosx)$

b. $D(\frac{tgx}{senx-cosx})$

c. $D(2^{3x+1})$

d. $D(ln^3(1-2x))$

e. $D(\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}})$

f. $D(\sqrt{lnx-1})$

g. $D(\sqrt[3]{e^{2x}-1})$

h. $D(arcsen\frac{2x}{x-1})$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata ed eventuali punti di non derivabilità:

a. $f(x) = \left|\frac{1}{x-1}\right|$

b. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

c. $f(x) = |lnx|$

d. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$

Problema 1
Determina l'equazione della parabola P con asse di simmetria $x = 2$ e tangente in $T(4;0)$ alla retta di equazione $4x - y - 16 = 0$.

Problema 2
Determina i coefficienti a e b dell'equazione $f(x) = \frac{ax+b}{x^2}$ in modo che la curva da essa rappresentata passi per $T(1;3)$ e sia tangente in T alla retta di equazione $y = -4x + 7$.

SOLUZIONI

SCHEDA 2

1. a. $2senx\cos^2 x - sen^3 x$

b. $\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(senx-\cos x)-tgx(\cos x+senx)}{(senx-\cos x)^2}$

c. $2^{3x+1} \cdot ln2 \cdot 3$

d. $3ln^2(1-2x) \cdot \frac{1}{1-2x}(-2) = -\frac{6ln^2(1-2x)}{1-2x}$

e. $\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}} \cdot \frac{(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$

f. $\frac{1}{2\sqrt{lnx-1}} \cdot \frac{1}{x}$

g. $\frac{e^{2x} \cdot 2}{3\sqrt[3]{(e^{2x}-1)^2}}$

h. $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(x-1)^2}}} \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right)$

2. a. $Df = R\backslash\{1\}$; $x = 1$ asintoto verticale ; $y = 0$ asintoto orizzontale

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x > 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 1 \end{cases}$$

b. $Df: x \leq -1 \cup x \geq 1$; $y = \pm x$ asintoti obliqui ; $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $x = \pm 1$ punti a tangente verticale

c. $Df: x > 0$, $x = 0$ asintoto verticale; $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ -\frac{1}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$;

$x = 1$ punto angoloso

d. $Df = R$, $y = x$ asintoto obliquo, $f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$;

$x = 1$ flesso a tangente verticale

Problema 1: $y = x^2 - 4x$

Problema 2: $a = 2$; $b = 1$

SCHEDA DI VERIFICA 3

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a. $D\left(ln\frac{x-1}{x}\right)$

b. $D\left(\sqrt{\frac{senx}{2cosx-1}}\right)$

c. $D\left(arctg^2\left(\frac{2x}{x+3}\right)\right)$

d. $D\left((x-2)^{3x-1}\right)$

e. $D\left(x\cdot arcsen(3x-1)\right)$

f. $D\left((x^2+1)e^{-x}\right)$

g. $D\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$

h. $D\left(tg^3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata, eventuali punti di non derivabilità e disegnare il grafico:

a. $y=\left|\frac{x}{2-x}\right|$

b. $y=\sqrt{1-x^2}$

Problema 1

Determina l'equazione della parabola P con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate passante per $P(2;0)$ e avente in $(0;0)$ la stessa tangente di $y=\frac{x}{1-x}$.
Disegna le due curve e scrivi l'equazione della tangente comune.

$[\wp: y=-\frac{1}{2}x^2+x\,;t: y=x]$

Problema 2

Data la funzione $y=\frac{ax^2+bx+c}{x}$, determina a, b, c in modo che abbia in $(1;0)$ come tangente la retta di equazione $x-y-1=0$ e che abbia asintoto obliquo parallelo alla retta $y=\frac{1}{2}x$.

[a$=\frac{1}{2}$; $b=0$; $c=-\frac{1}{2}$]

SOLUZIONI

SCHEDA 3

1. a. $\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x(x-1)}$

b. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2cosx-1}{senx}}\cdot\frac{2-cosx}{(2cosx-1)^2}$

c. $2arctg\left(\frac{2x}{x+3}\right)\cdot\frac{6}{5x^2+6x+9}$

d. $(x-2)^{3x-1}\left[3\ln(x-2)+\frac{3x-1}{x-2}\right]$

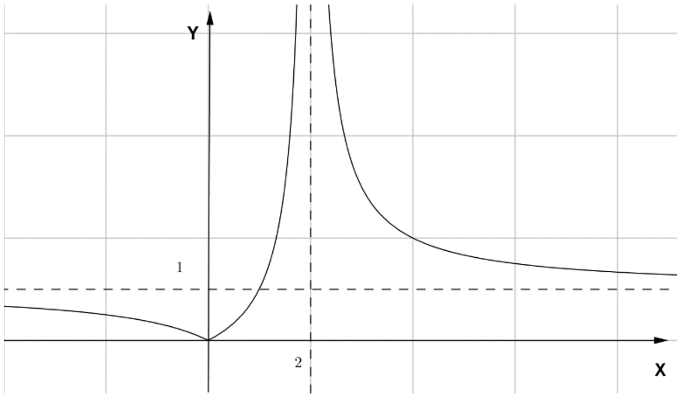
e. $arcsen(3x-1)+x\cdot\frac{3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}$

f. $2xe^{-x}+(x^2+1)\cdot e^{-x}(-1)=e^{-x}(2x-x^2-1)$

g. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$

h. $3tg^2(x-\frac{\pi}{3})\cdot\frac{1}{cos^2(x-\frac{\pi}{3})}$

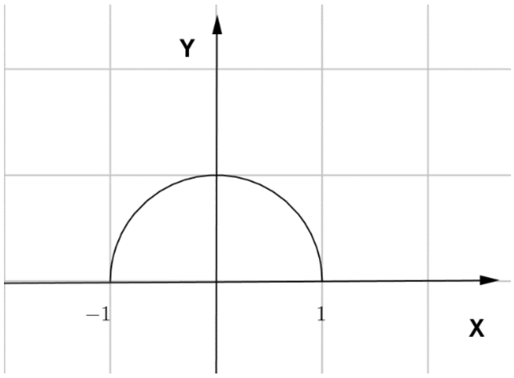
2. a. $Df=R\backslash\{2\}$



$x=2$ asintoto verticale (discontinuità di seconda specie)
$y=1$ asintoto orizzontale

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{(2-x)^2} & 0<x<2\\ -\frac{2}{(2-x)^2} & x<0\cup x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f'(x)&=-\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} x=0 \text{ punto angoloso}$$



b. $Df=-1\le x\le 1$

$y^2=1-x^2\Rightarrow x^2+y^2=1$

Circonferenza di centro $(0;0)$ e raggio 1

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\lim_{x\to -1^+} f'(x)=+\infty\to x=-1$ punto a tangente verticale

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-\infty\to x=1$ punto a tangente verticale

Teoremi sulle funzioni derivabili

Iniziamo con la definizione di punto di massimo o minimo relativo di una funzione:
Definizione
a) $x_0 \in D_f$ è un punto di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

b) $x_0 \in D_f$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Diamo ora la definizione di massimo e minimo assoluto:
Definizione
a) $x_0 \in D_f$ è il punto di massimo assoluto se :

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in D_f$$

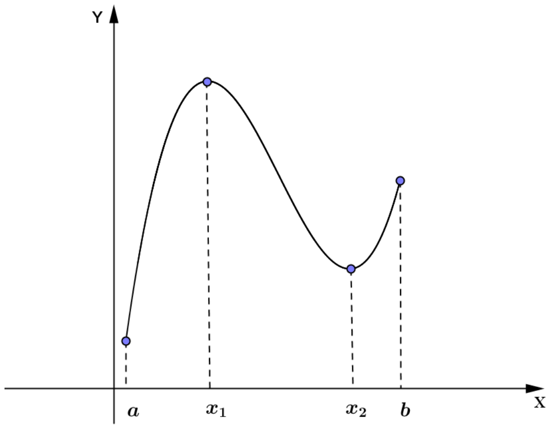
e $f(x_o) = M$ è il massimo assoluto della funzione;

b) $x_0 \in D_f$ è il punto di minimo assoluto se:

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in D_f$$

e $f(x_o) = m$ è il minimo assoluto della funzione

OSSERVAZIONE : un punto di massimo (minimo) assoluto è anche un punto di massimo (minimo) relativo ma il viceversa non è vero.

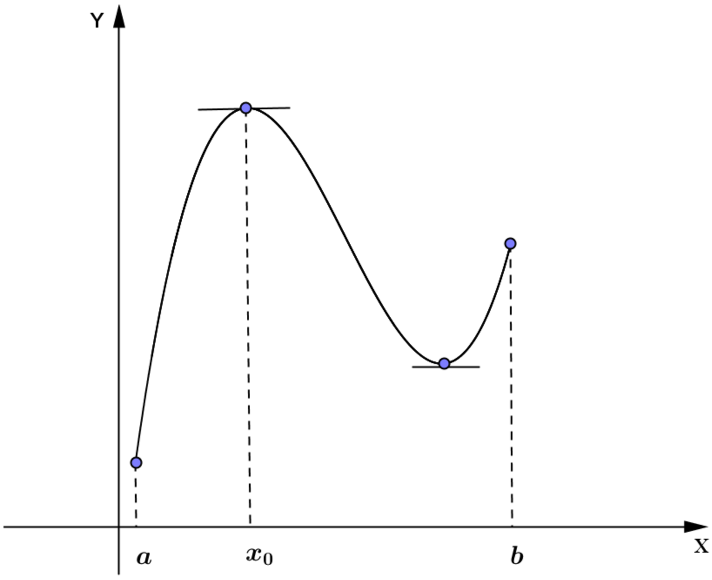


a e x_2 sono punti di minimo relativo ; a è punto di minimo assoluto;
x_1 e b sono punti di massimo relativo e x_1 è punto di massimo assoluto.

Per studiare il grafico di una funzione è fondamentale la ricerca di punti di massimo (minimo) relativi. Per capire come possano essere individuati vediamo alcuni teoremi riguardanti le funzioni derivabili. Partiremo da un teorema riguardante i massimi (minimi) relativi **interni** al dominio (per es. x_1 e x_2 nel grafico dell'esempio precedente) in cui la funzione è derivabile e poi dimostreremo tre teoremi (Rolle, Cauchy, Lagrange) che ci permetteranno di dimostrare il legame tra l'"andamento" di una funzione (funzione crescente, decrescente) e il **segno della sua derivata**.

Teorema di Fermat
Punti di massimo (minimo) relativi interni al dominio

Sia $f:[a,b]\rightarrow\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
Se x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo interno al dominio $\Rightarrow f'(x_0)=0$ (cioè la tangente al grafico è parallela all'asse x)



Dimostrazione

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo interno al dominio (vedi figura).
Allora $\exists\ I_{x_o}: f(x_0)\geq f(x)\quad \forall x\in I_{x_0}$ e quindi $f(x)-f(x_0)\leq 0\quad \forall x\in I_{x_0}$

Calcoliamo $f'(x_0)$:

$$\lim_{x\rightarrow x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \text{ perché } f(x)-f(x_0)\leq 0 \text{ e } x-x_0>0$$

mentre $\lim\limits_{x\rightarrow x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ perché $f(x)-f(x_0)\leq 0$ e $x-x_0<0$

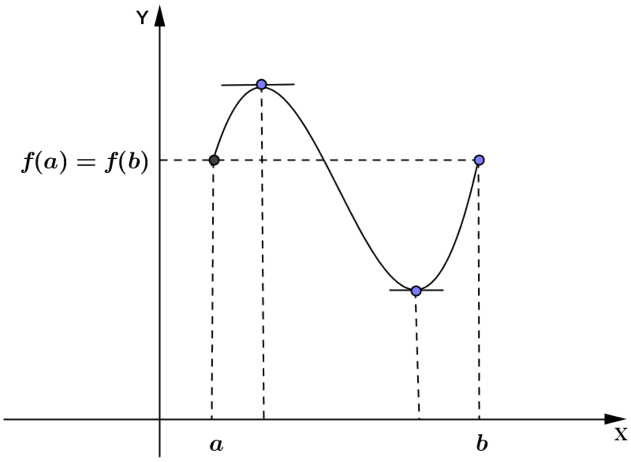
Ma se $f(x)$ è derivabile in x_0 i due limiti devono coincidere e quindi l'unica possibilità è che siano entrambi uguali a 0 $\Rightarrow f'(x_0)=0$.

Osservazione: è importante che se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo ma non è interno al dominio (per es. a e b nella figura) non è detto che in x_0 la derivata sia nulla (vedi figura).

NOTA : il viceversa del teorema non è vero perché se in x_0 si ha $f'(x_0)=0$ significa che la **tangente al grafico è orizzontale** e x_0 potrebbe anche essere un "punto di flesso" a tangente orizzontale cioè un punto in cui il grafico cambia concavità come vedremo in seguito.

Teorema di Rolle (*matematico francese*)

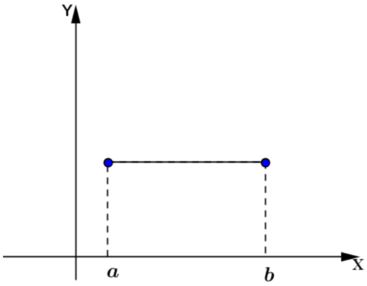
Sia $f:[a,b]\rightarrow\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e se



$$f(a)=f(b)\Rightarrow \exists x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$$

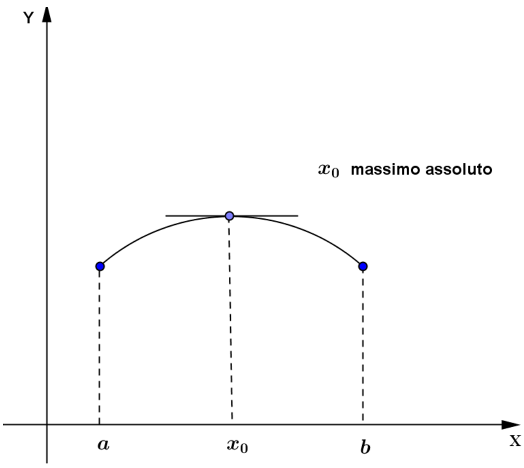
cioè esiste **almeno** un punto $x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$
.

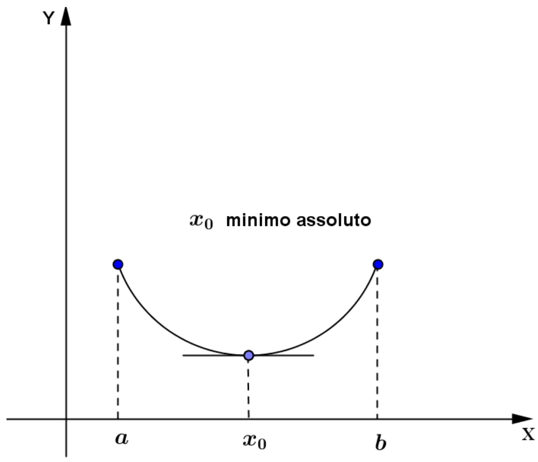
Dimostrazione



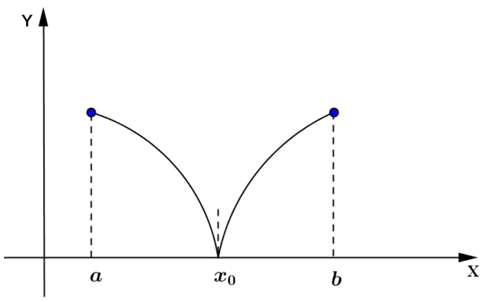
Se $f(x)$ è costante allora $\forall x\in(a,b)\quad f'(x)=0$.

Se $f(x)$ non è costante, per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo assoluti. Poiché però $f(a)=f(b)$ il massimo e il minimo assoluti non possono essere assunti entrambi negli estremi dell'intervallo e quindi **almeno uno deve essere interno** al dominio $\Rightarrow$(per il teorema precedente) $\exists x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$





NOTA : se la funzione non fosse derivabile in (a,b) il teorema non sarebbe vero.
Consideriamo per esempio il caso in figura: $f(a)=f(b)$ ma non c'è nessun punto x_0 con tangente al grafico parallela all'asse x (cioè con derivata nulla)



In x_0 $f(x)$ non è derivabile.

Esempi

1) Considera $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

- Verifica le ipotesi del teorema di Rolle in $I=[-2,2]$?

$f(x)$ ha come dominio $4-x^2\geq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow f(x)$ è continua in $[-2,2]$.

Calcoliamo $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Quindi f(x) non è derivabile in $x=\pm 2$ (punti a tangente verticale) ma nelle ipotesi del teorema non si richiede la derivabilità negli estremi dell'intervallo.

Verifichiamo infine se $f(a)=f(b)$ cioè $f(-2)=f(2)$

$f(-2)=0$ $\quad f(2)=0$ e quindi anche questa ipotesi è verificata.

Quindi $f(x)$ verifica tutte le ipotesi del teorema di Rolle in $[-2,2]$

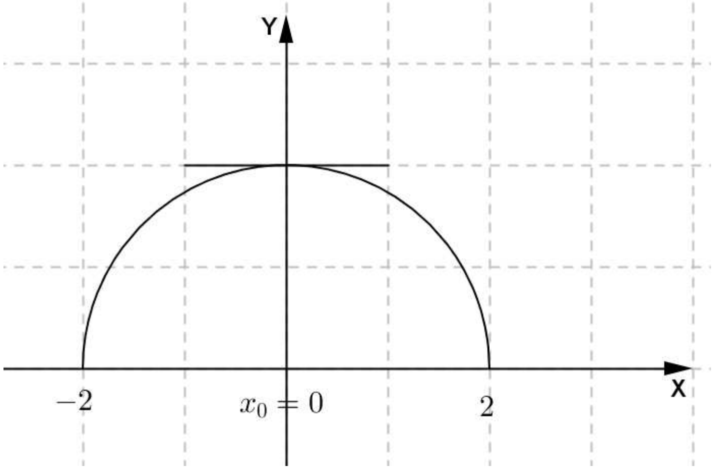
- Qual è (o quali sono) il punto $x_0 : f'(x_0)=0$?

Basta porre $f'(x)=0$ e risolvere l'equazione.

Abbiamo $$\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow x=0$$

Quindi $x_0=0$

Del resto disegnando il grafico di $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (elevando al quadrato $\Rightarrow x^2+y^2=4 \Rightarrow$ semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2) si osserva che in $x_0=0$ si ha la tangente orizzontale.



2) Considera $f(x) = \left|2x - x^2\right|$ nell'intervallo $I = [1-\sqrt{2},1]$.

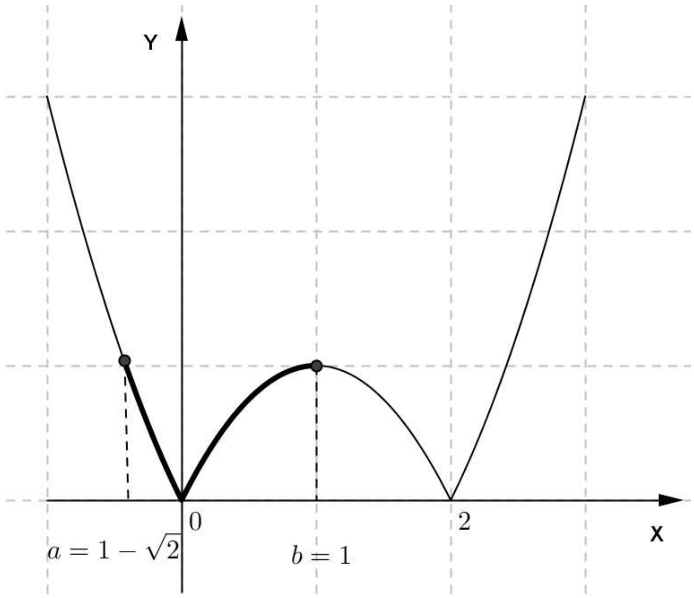
La funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle?

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & quando \quad 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -(2x - x^2) & quando \quad 2x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \cup x \geq 2 \end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & 0 < x < 2 \\ -(2 - 2x) & x < 0 \cup x > 2 \end{cases}$$

Disegnando il grafico abbiamo:



Consideriamo l'intervallo assegnato $I = [1-\sqrt{2},1]$: in questo intervallo la funzione è continua e $f(a) = f(b)$ (si verifica facilmente) ma in $x = 0$ (interno a I) non è derivabile perché

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2 \text{ mentre } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

Quindi le ipotesi del teorema di Rolle non sono verificate ed infatti osservando il grafico nessun punto interno a I ha derivata nulla.

3) Per quali valori di a e b la funzione

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & -1\le x\le 0 \\ \frac{1}{2}x^2+b & 0<x\le\sqrt{2} \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $I=\left[-1;\sqrt{2}\right]$? Qual è il valore x_0 per cui $f'(x_0)=0$? Disegna il grafico di f(x).

Svolgimento

Perché la funzione sia continua anche in x = 0 occorre che il limite sinistro e destro di f(x) in x=0 siano uguali:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} ax^2+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x^2+b=b$$

Quindi si dovrà avere $b=1$.

La derivabilità è verificata anche per $x = 0$ poiché essendo

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax & -1\le x<0 \\ x & 0<x\le\sqrt{2} \end{cases}$$

abbiamo che $\lim_{x\to 0^-} y'=\lim_{x\to 0^+} y'=0$.

Quindi, perché siano verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, basta che $f(-1)=f\left(\sqrt{2}\right)$.

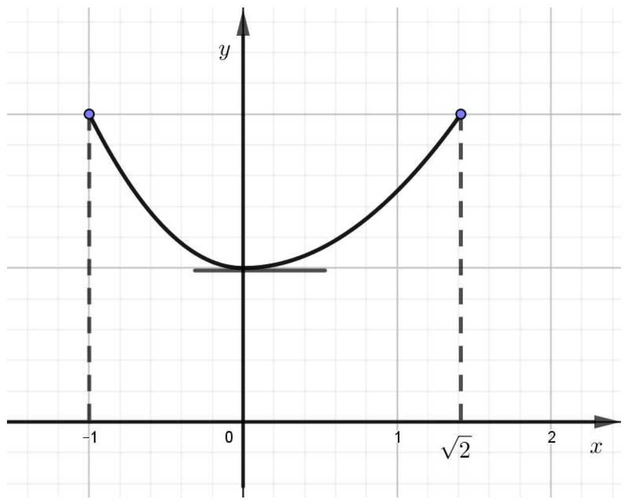
Abbiamo:

$$f(-1)=a+1$$
$$f\left(\sqrt{2}\right)=2$$

e quindi dovrà essere $a+1=2\Rightarrow a=1$.

In conclusione abbiamo $a=1$, $b=1$ e il grafico risulta quello in figura.

Il punto x_0 in cui si annulla la derivata è $x_0=0$.



ESERCIZI
TEOREMA DI ROLLE

1) Considera la funzione $f(x) = |2 - x|$
Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [0,4]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché …]

2) Considera $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1,1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0 = 0$]

3) Considera $f(x) = \left|\frac{1 - x}{x}\right|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché …]

4) Considera $f(x) = |arctgx|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1,1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché …]

5) Considera $f(x) = e^{-x^2}$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1,1]$?

[si; $x_0 = 0$]

6) Considera $f(x) = |x^3|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1,1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0 = 0$]

Teorema di Cauchy (*matematico francese*)

Siano $f:[a,b]\to\Re$ e $g:[a,b]\to\Re$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) e inoltre sia $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

$$\Rightarrow \exists \; x_0\in(a,b): \; \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dimostrazione

Osserviamo innanzitutto che $g(a)\neq g(b)$ perché se fosse $g(a)=g(b)$ per il teorema di Rolle

$\exists \; x_0\in(a,b): g'(x_0)=0$ e questo è contrario all'ipotesi che $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

Consideriamo la funzione $F(x)$ così definita:

$$F(x)=\left(g(b)-g(a)\right)\cdot f(x)-\left(f(b)-f(a)\right)\cdot g(x)$$

Poiché $F(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e, come si può verificare facilmente,

$$F(a)=F(b)$$

per il teorema di Rolle $\exists \; x_0\in(a,b): F'(x_0)=0$

Ma $F'(x)=\left(g(b)-g(a)\right)\cdot f'(x)-\left(f(b)-f(a)\right)\cdot g'(x)$

e quindi $\quad F'(x_0)=\left(g(b)-g(a)\right)\cdot f'(x_0)-\left(f(b)-f(a)\right)\cdot g'(x_0)=0$ e quindi $\exists \; x_0\in(a,b):$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

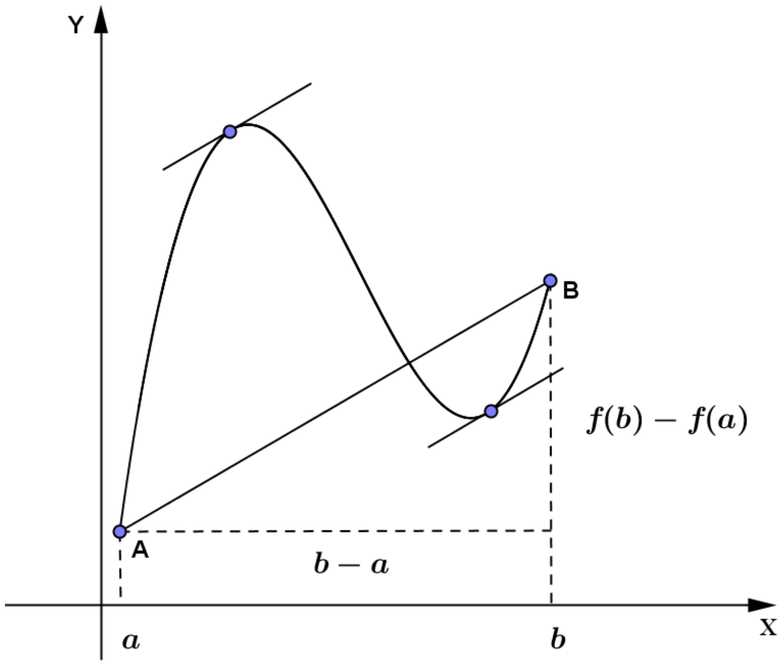
Dal teorema di Cauchy segue subito il seguente teorema di Lagrange (matematico torinese).

Teorema di Lagrange

Se $f:[a,b]\to\Re$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

$$\Rightarrow \exists \quad x_0 \in (a,b): \quad f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interpretazione geometrica: poiché $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è l'inclinazione della retta passante per gli estremi del grafico, il teorema afferma che esiste almeno un punto $P(x_0, f(x_0))$ in cui la tangente al grafico è parallela alla retta passante per gli estremi del grafico.



Dimostrazione

Basta considerare come seconda funzione $g(x)=x$ (continua, derivabile e con $g'(x)\neq 0$) ed applicare il teorema di Cauchy.

Infatti poiché $g'(x)=1 \quad \forall x\in(a,b)$ e $g(b)=b, \quad g(a)=a$ avremo che

$$\exists \quad x_0\in(a,b):\frac{f'(x_0)}{1}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cioè quello che volevamo dimostrare.

Esempi

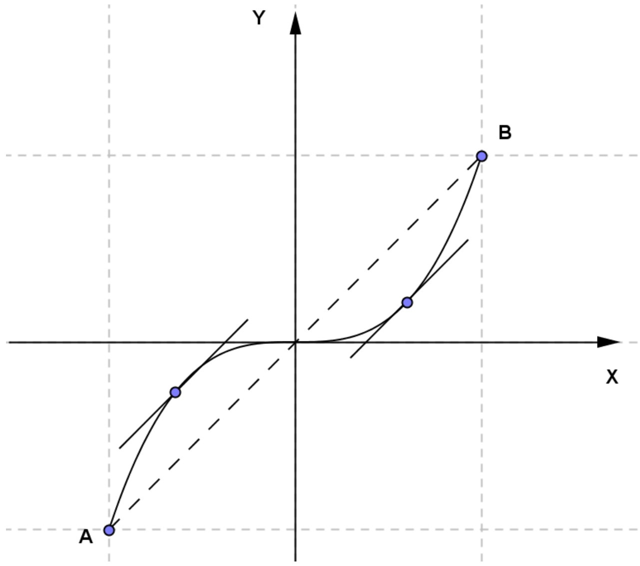
1) Consideriamo $f(x) = x^3$ nell'intervallo $I = [-1,1]$.

- Verifica le ipotesi del teorema di Lagrange?
  Poiché $f(x)$ è continua e derivabile in $\Re$ lo è sicuramente anche in *I* e quindi verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
- Determina il punto x_0 (o i punti) : $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
  Nel nostro caso $f(-1) = -1 \quad f(1) = 1$ e quindi, essendo $f'(x) = 3x^2$ devo risolvere:

$$3x^2 = \frac{1 - (-1)}{2}$$

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

I valori sono interni all'intervallo *I* e quindi entrambi accettabili.
Graficamente infatti si verifica che esistono due punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta per $A(-1,-1)$ e $B(1,1)$



2) Consideriamo $f(x) = \left|1 - x^2\right|$ in $I = [0,2]$. Si può applicare il teorema di Lagrange?

Poiché $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x \le 1 \\ -(1 - x^2) & x \le -1 \ \vee \ x \ge 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 1 \\ 2x & x < -1 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -2$ e $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2$ si ha che f(x) non è derivabile in $x = 1$ (interno a *I*) e quindi il teorema di Lagrange non si può applicare.

3) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x \le 0 \\ 1 + x^2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi di Lagrange nell'intervallo $I = [-1;1]$? Se la risposta è affermativa qual è il punto x_0 (o i punti) previsto dal teorema? Traccia il grafico di f(x).

Svolgimento

La funzione è continua anche in $x = 0$ poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 - x^2 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + x^2 = 1$$

Per la derivabilità poiché abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 \le x < 0 \\ 2x & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

la funzione è derivabile anche per x = 0 poiché limite sinistro e destro di y' per $x \to 0$ sono uguali (entrambi zero).

Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di Lagrange.

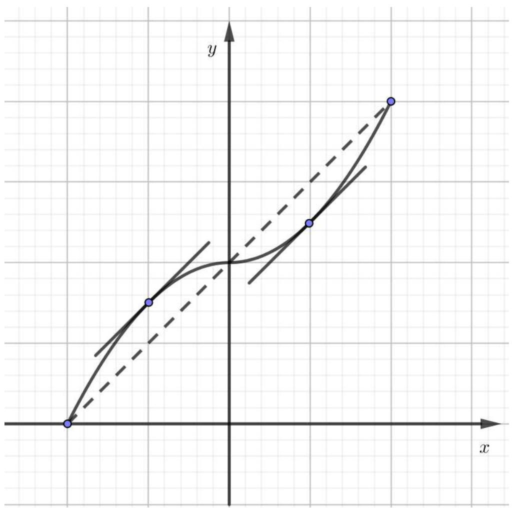
Calcoliamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Quindi per determinare x_0 tale che $y'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ poniamo:

$$-2x = 1 \to x = -\frac{1}{2}$$
$$2x = 1 \to x = \frac{1}{2}$$

Abbiamo quindi due valori di x_0 (vedi grafico).



ESERCIZI
TEOREMA DI LAGRANGE

1) Considera $f(x) = x^3 - 8$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$? Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0 = +\frac{2}{\sqrt{3}}$]

2) Considera $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$]

3) Considera $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x + 1 & x \ge 0 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,1]$?

[si; $x_0 = \ln\left(1 - \frac{1}{2e}\right)$]

4) Considera $f(x) = \begin{cases} 1 - x - x^2 & -1 \le x \le 0 \\ e^{-x} & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,1]$?

[si; $x_0 = -\frac{1+e}{4e}$]

5) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,2]$?

[si; $x_0 = \frac{1}{3}$]

6) Considera $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,2]$?

[si; $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$]

7) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{3}{2}$]

8) Considera $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [1,3]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0 = 2\sqrt{2} - 1$]

9) Considera $f(x) = \sqrt{x}$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [4,9]$?

[si; $x_0 = \dfrac{25}{4}$]

10) Considera $f(x) = \ln x$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [1, e]$?

[si; $x_0 = e - 1$]

11) Considera $f(x) = x^2 + |x|$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,2]$?

[no, perché …]

12) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \le x < 1 \\ \ln x & x \ge 1 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$?

[si; $x_0 = \dfrac{2}{\ln 2 + 1}$]

13) Considera

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2 - x}{x} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$? [si; $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$]

Teorema di De l'Hospital

(senza dimostrazione)

Se $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si presenta in forma indeterminata $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ e se esiste $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito)

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (la dimostrazione si basa sul teorema di Cauchy)

NOTA : se $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ si presenta ancora in forma indeterminata possiamo cercare di calcolare

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ eccetera…

Esempi

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

3) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

In generale se $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = 0$

Si dice che la funzione $y = \ln x$ **è un "infinito" di ordine inferiore rispetto alla funzione** $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$**, quando** $x \to +\infty$**.**

4) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

In generale se $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = ... = +\infty$

Si dice che la funzione $y = e^x$ **è un "infinito" di ordine superiore rispetto alla funzione** $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$**, quando** $x \to +\infty$**.**

5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+senx}{x+\cos x}$

Derivando troviamo $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-senx}$: questo limite non esiste e quindi non possiamo applicare il teorema di De l'Hospital.

In questo caso il limite dato può essere calcolato dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+senx}{x+\cos x} = \frac{1+\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\left(\frac{senx}{x}\right)}}{1+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\left(\frac{\cos x}{x}\right)}} = 1$$

6) Il teorema di De l'Hospital può essere utilizzato anche per determinare limiti che si presentano nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ del prodotto ma solo dopo aver scritto il prodotto come un quoziente "opportuno".

Per esempio:

$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x$ si presenta in forma indeterminata $\infty\cdot 0$

Se scriviamo $\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

Attenzione: se avessimo scritto $x\cdot e^x = \frac{e^x}{\frac{1}{x}}$ non saremmo riusciti a calcolare il limite con l'Hospital perché derivando la forma sarebbe rimasta indeterminata:

$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0}$ che è ancora una forma indeterminata…

Occorre quindi fare attenzione a come si trasforma il prodotto.

ESERCIZI
TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Calcola i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln x}$ [$+\infty$]

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$ [0]

3) $\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x$ [0]

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{x^2}$ [0]

5) $\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x$ [0]

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot tgx$ [1]

7) $\lim_{x\to+\infty} x\cdot \left(arctgx - \frac{\pi}{2}\right)$ [-1]

8) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x}$ [0]

9) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot gx}$ [0]

10) $\lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot \ln x$ [0]

11) $\lim_{x\to 0} \frac{sen 3x}{2x + tgx}$ [1]

12) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ [1]

13) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ [$+\infty$]

14) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ [2]

Corollari del teorema di Lagrange

1) Se $f:[a,b]\to\Re$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b)
e $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x)=k$ cioè $f(x)$ è una funzione costante.

Dimostrazione

Sia $x\in(a,b)$: poiché $f(x)$ è continua anche in $[a,x]$ e derivabile in (a,x) , posso applicare il teorema di Lagrange a questo intervallo.

$$\Rightarrow \exists x_0\in(a,x): \quad f'(x_0)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ma $f'(x_0)=0$ e quindi $f(x)-f(a)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=f(a)$

Poiché questo accade comunque si scelga $x\in(a,b)$ si è dimostrato che $f(x)=k$ (cioè la funzione è costante).

2) Se $f:[a,b]\to\Re$ e $g:[a,b]\to\Re$ sono continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e se

$$f'(x)=g'(x) \quad \forall x\in(a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)-g(x)=k \quad \forall x\in[a,b]$$

Dimostrazione

Consideriamo $F(x)=f(x)-g(x)$

Poiché $F'(x)=f'(x)-g'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$ applicando il primo corollario si ha $F(x)=k$ e quindi $f(x)-g(x)=k$ cioè le due funzioni differiscono per una costante.

3) Ma la conseguenza più interessante del teorema di Lagrange è rappresentata dal seguente teorema:

Teorema
Relazione tra il segno della derivata f'(x) e "andamento" della funzione

Data $f:[a,b]\rightarrow\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) abbiamo che:

- se $f'(x)>0\quad\forall x\in(a,b)\;\Rightarrow\; f(x)$ è crescente in (a,b)
- se $f'(x)<0\quad\forall x\in(a,b)\;\Rightarrow\; f(x)$ è decrescente in (a,b)

Dimostrazione

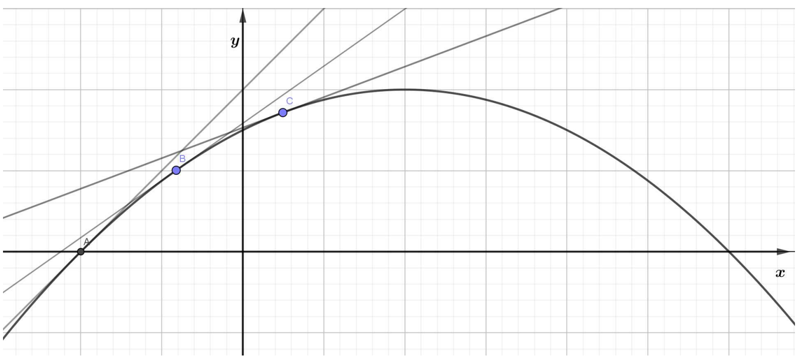
Consideriamo $x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1<x_2$.
Poiché $f(x)$ è continua in $[x_1,x_2]$ e derivabile in (x_1,x_2) applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1,x_2]$

$$\exists x_0\ con\qquad x_1<x_0<x_2:\quad f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Ma $f'(x_0)>0$ per ipotesi e $x_2-x_1>0\;\Rightarrow\; f(x_2)-f(x_1)>0\;\Rightarrow\; f(x_2)>f(x_1)$

Quindi, poiché questo vale comunque scelga $x_1<x_2$, abbiamo dimostrato che la funzione è crescente.
Analogamente si dimostra che se $f'(x)<0\quad\forall x\in(a,b)\;\Rightarrow\; f(x)$ è decrescente.

Osservazione: infatti "geometricamente" si osserva che quando una funzione è crescente i coefficienti angolari delle tangenti sono positivi, mentre se è decrescente sono negativi (vedi figura).



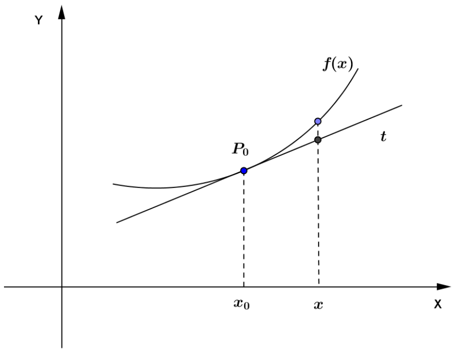
Nota
Osserviamo che se $f(x)$ è crescente in $[a,b]\;\Rightarrow f'(x)\geq 0$ poiché può esserci anche un flesso a tangente orizzontale.
Questo teorema è fondamentale per lo studio del grafico di una funzione poiché, come vedremo, ci permette di individuare i punti di massimo, minimo e flesso a tangente orizzontale.

CONCAVITA' E FLESSI

Nello studio di un grafico è importante determinare anche la "**concavità"** del grafico: i punti in cui c'è un cambio di concavità sono detti punti di flesso.

Definiamo cosa si intende per "**concavità verso l'alto**" o "**verso il basso**" del grafico di una funzione in x_0:

Definizione: diciamo che **in** x_0 **il grafico di** $f(x)$ **volge la concavità verso l'alto** quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sopra alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$



Poiché l'equazione della tangente risulta

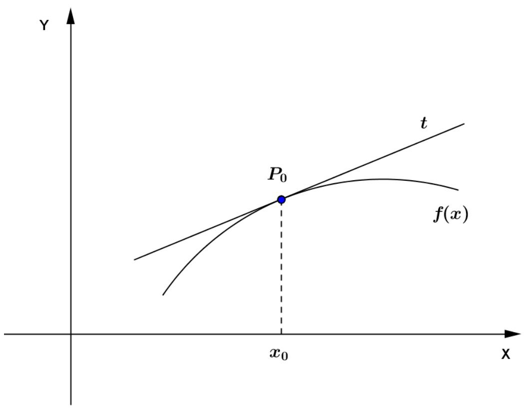
$$t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

possiamo anche dire che **in** x_0 **il grafico volge la concavità verso l'alto**

$$\text{se } \exists \ I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definizione: diciamo che **in** x_0 **il grafico di** $f(x)$ **volge la concavità verso il basso** quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sotto alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$ cioè

$$\text{se } \exists \quad I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Per determinare la concavità è necessario studiare la derivata seconda perché abbiamo il seguente teorema:

Teorema : sia $f(x)$ continua in I con $f'(x), f''(x)$ continue e $x_0 \in I$.

- Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto.
- Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso il basso.

Dimostrazione

Supponiamo che $f''(x_0) > 0$

Consideriamo $\varphi(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right]$

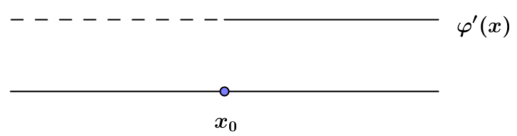
Osserviamo che $\varphi(x)$ rappresenta lo scarto funzione-tangente: per dimostrare che la concavità è rivolta verso l'alto basterà dimostrare che $\exists\ I_{x_0}$ in cui $\varphi(x) \geq 0$

Determiniamo:

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$
$$\varphi''(x) = f''(x)$$

Poiché quindi $\varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0\ \exists\ I_{x_0}$ in cui $\varphi''(x) > 0$ (per la continuità di $f''(x)$).
Possiamo scrivere $\varphi''(x) = D(\varphi'(x)) > 0$ e allora, avendo derivata positiva, $\varphi'(x)$ è una funzione crescente.

Ma sostituendo x_0 abbiamo $\varphi'(x_0) = 0$ e quindi il segno di $\varphi'(x)$ sarà il seguente (poiché $\varphi'(x)$ deve essere crescente):



Ma allora $\varphi(x)$ ha un minimo in x_0 cioè

$$\exists\ I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \qquad \varphi(x) \geq \varphi(x_0)$$

Ma sostituendo x_0 $\varphi(x_0) = 0$ e quindi

$$\exists\ I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \qquad \varphi(x) \geq 0$$

Cioè il grafico volge la concavità verso l'alto (in x_0).

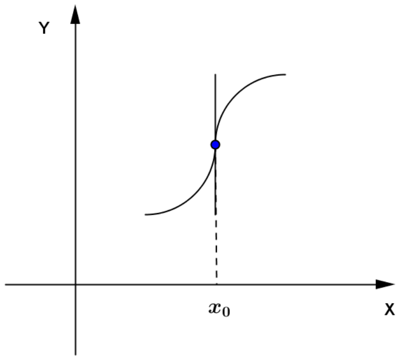
La dimostrazione della seconda parte è analoga.

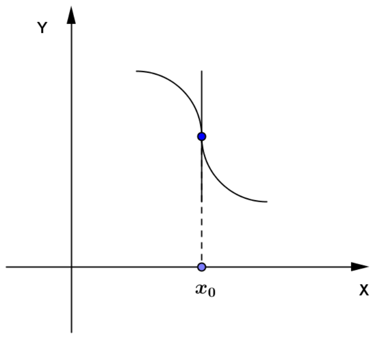
Flessi di una funzione

Definizione: x_0 si dice un punto di flesso per $f(x)$ se in x_0 il grafico della funzione **cambia concavità** e quindi il grafico "attraversa" la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.

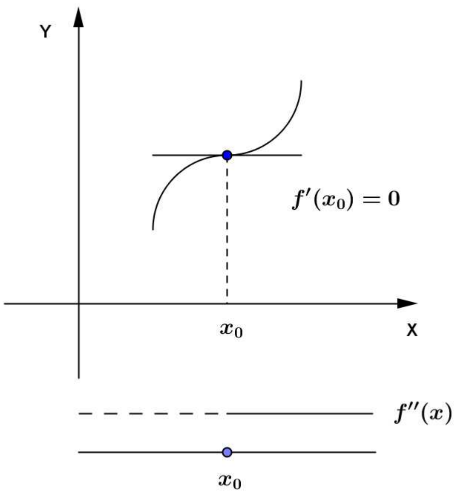
A seconda dell'inclinazione della tangente possiamo avere:

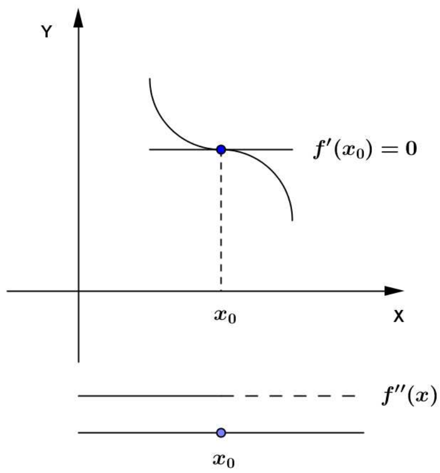
- **flesso a tangente verticale** : in questo caso $f(x)$ non è derivabile in x_0 e $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$



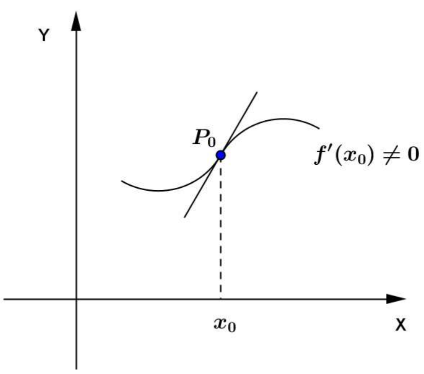


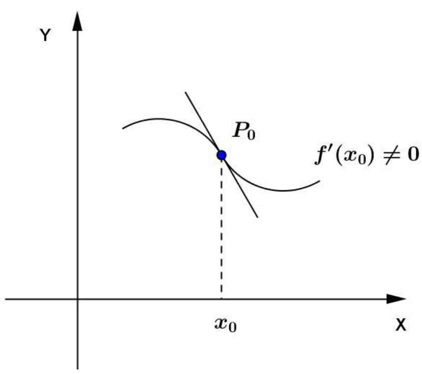
- **flesso a tangente orizzontale** : in x_0 $f'(x_0) = 0$ ma $f'(x)$ non cambia segno in x_0
  Cambia segno invece $f''(x)$ in x_0 (perché cambia la concavità) e $f''(x_0) = 0$.





- **flesso a tangente obliqua** : in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma c'è un cambio di concavità e quindi $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ **cambia segno**.



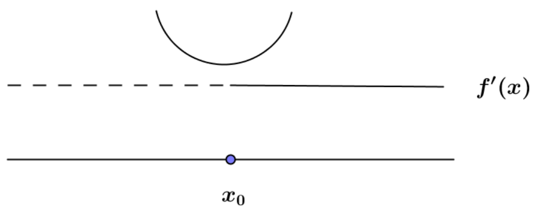


Ricerca dei punti di massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale

Consideriamo un punto $x_0 \in D_f$ in cui $f'(x_0) = 0$, cioè un punto in cui la tangente è parallela all'asse x.
Potrebbe essere un punto di massimo o un punto di minimo o un punto di flesso a tangente orizzontale.

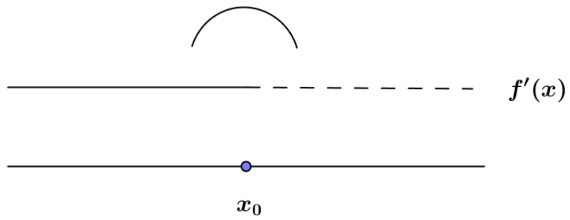
Per capirlo studiamo il segno di $f'(x)$.

1) Se il segno della derivata ha questo andamento



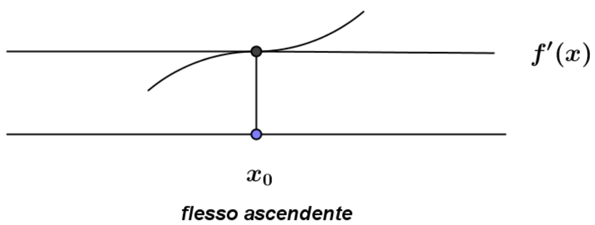
cioè negativo e poi positivo, poiché la $f(x)$ prima di x_0 decresce e poi cresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **MINIMO**.

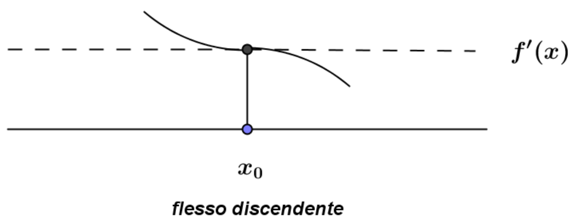
2) Se il segno della derivata ha questo andamento



la funzione prima di x_0 cresce e poi decresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **MASSIMO**.

3) Se $f'(x)$ non cambia segno in $x_0 \Rightarrow x_0$ è un punto di **FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE** (ascendente o discendente)



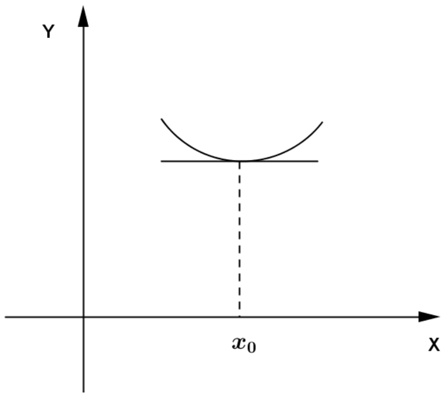


Flesso ascendente

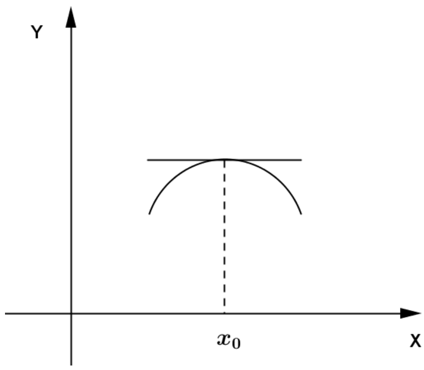
Flesso discendente

NOTA
Massimi, minimi e flessi con lo studio di $f''(x_0)$

Per individuare massimi e minimi possiamo utilizzare lo studio di $f''(x)$ piuttosto dello studio del segno di $f'(x)$.



- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ (concavità verso l'alto) $\Rightarrow x_0$ è un punto di MINIMO



- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ (concavità verso il basso) $\Rightarrow x_0$ è un punto di MASSIMO

Se in x_0 $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ dobbiamo studiare il segno di $f''(x)$: se cambia in x_0 allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

Si può dimostrare che

1) Se in x_0 $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,cioè se la derivata n-esima è la prima derivata diversa da 0 in x_0:

   se n è pari $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo se $f^{(n)}(x_0) < 0$
   è un punto di minimo se $f^{(n)}(x_0) > 0$

   se n è dispari $\Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale

2) Se in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,cioè la derivata n-esima è la prima derivata diversa da 0 in x_0:

   se n è pari $\Rightarrow$ in x_0 il grafico volge la concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0) > 0$
   il grafico volge la concavità verso il basso se $f^{(n)}(x_0) < 0$

   se n è dispari $\Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente obliqua

Grafico di una funzione

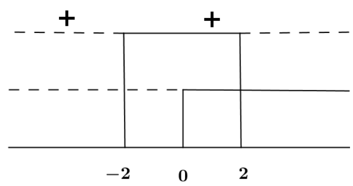
Esempio 1

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}}$

1) Per prima cosa determiniamo il dominio: $D_f=\Re\setminus\{\pm 2\}$

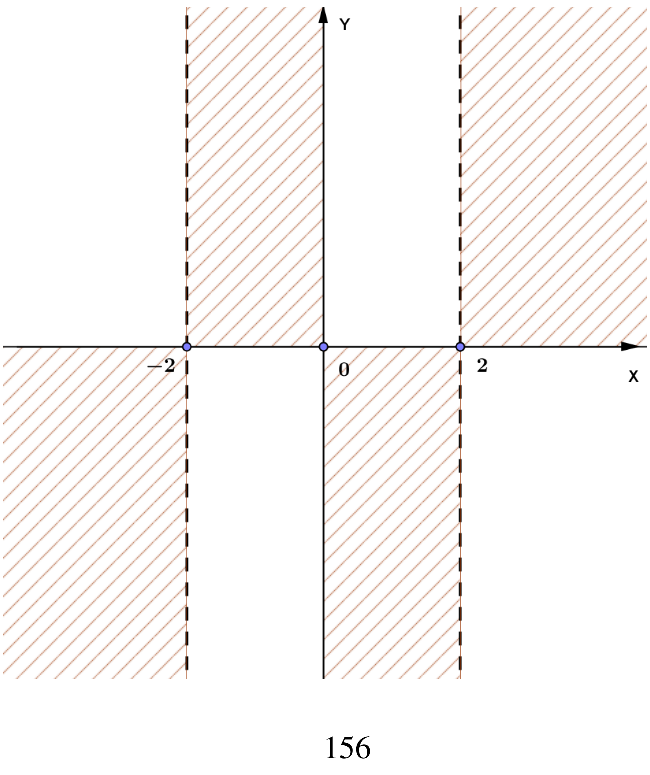
- Studiamo il segno della funzione per capire quando il grafico si trova sopra all'asse x e quando si trova sotto all'asse x.

Studiamo: $\dfrac{x^3}{4-x^2}>0$



Quindi $f(x)>0 \quad x<-2 \;\cup\; 0<x<2$

Cominciamo ad eliminare con un leggero tratteggio le zone dove non si trova il grafico:



- Determiniamo le eventuali intersezioni con gli assi ponendo $x = 0$ (se è nel dominio) e $y = 0$.

  Nel nostro caso troviamo solo $(0;0)$

- Verifichiamo se la funzione è pari o dispari, cioè calcoliamo $f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ la funzione è dispari cioè il grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine.

2) Passiamo allo studio dei limiti e alla ricerca degli asintoti (se ci sono).
Nel nostro caso abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\rangle \Rightarrow x = -2 \text{ asintoto verticale}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\rangle \Rightarrow x = 2 \text{ asintoto verticale}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad (m) \\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) + x = \ldots = 0 \quad (q) \end{array}\right\rangle \Rightarrow y = -x \text{ asintoto obliquo}$$

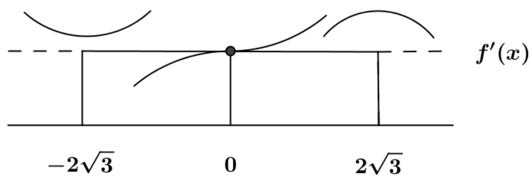
3) Calcoliamo adesso $f'(x)$, studiamo in quali punti si annulla e il suo segno:

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot (12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

Poniamo
$$\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x^2(12-x^2) = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \end{array}$$

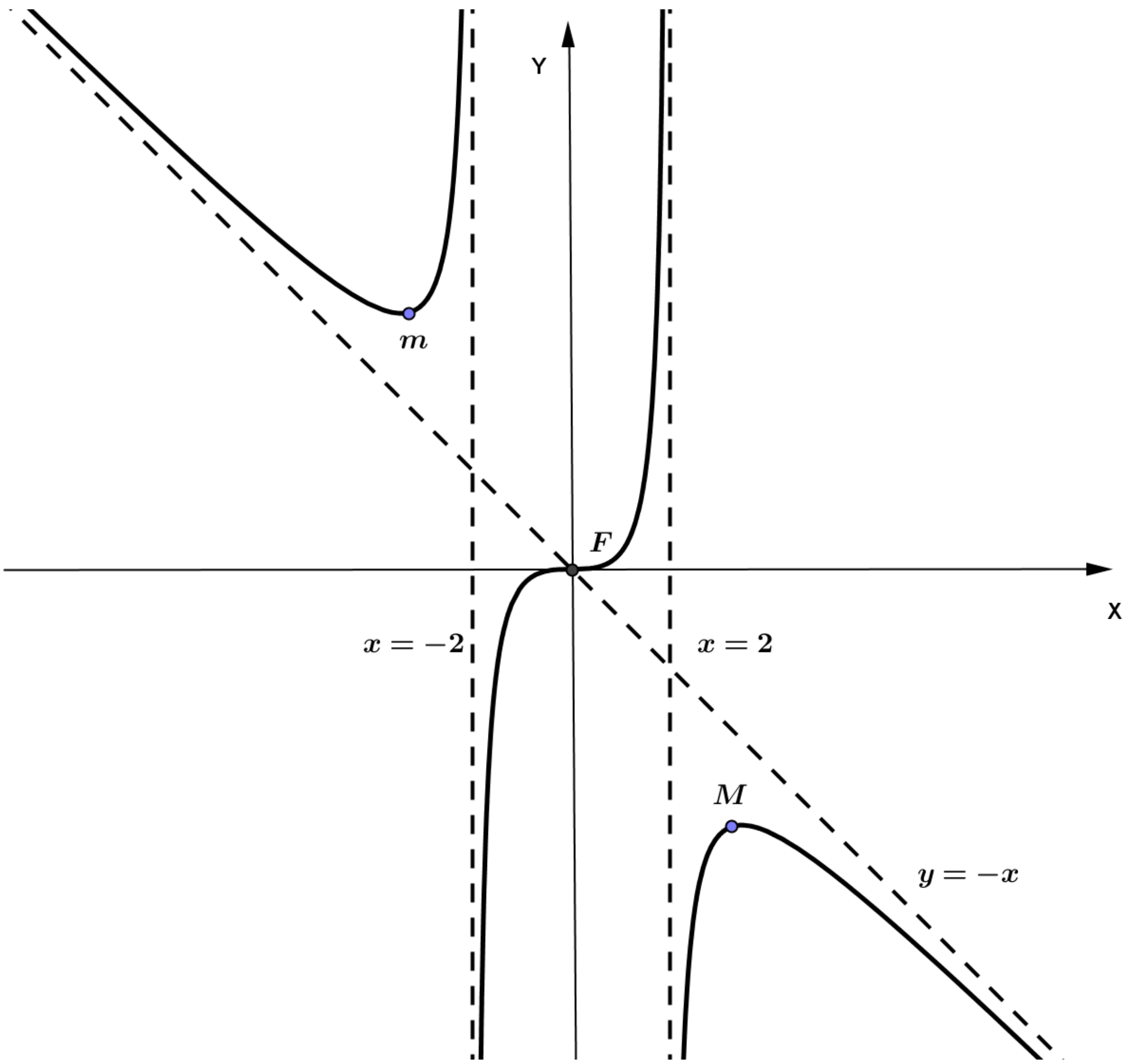
Studiamo

$$\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow \quad 12 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \end{array}$$



$m\left(-2\sqrt{3}; f\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}\right)$
$M\left(2\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right)$
$F(0;0)$

Riportiamo i nostri risultati nel disegno: il grafico dovrà necessariamente avere il seguente andamento:

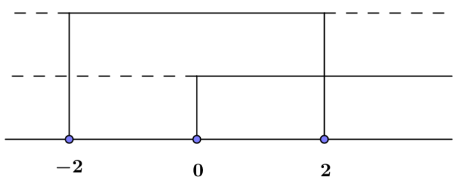


Osservazione

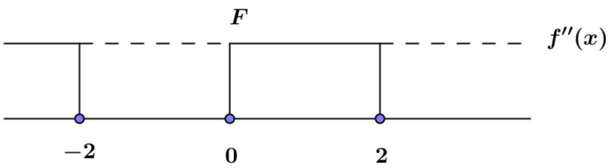
Se calcoliamo $f''(x) = ... = \dfrac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(4 - x^2)^3}$

avremo $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

e studiando $f''(x) > 0$



l'andamento del segno di $f''(x)$ sarà il seguente:



Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto per $x < -2 \quad e \quad 0 < x < 2$, verso il basso per $-2 < x < 0 \quad e \quad x > 2$ e $F(0;0)$ è un flesso.

Naturalmente $x = \pm 2$ non sono punti di flesso perché non appartengono al dominio.

Osserviamo che $F(0;0)$ **è un flesso a tangente orizzontale poiché** $f'(0) = 0$ come avevamo già trovato e quindi anche lo studio di $f''(x)$ conferma la correttezza del nostro grafico.

Nota

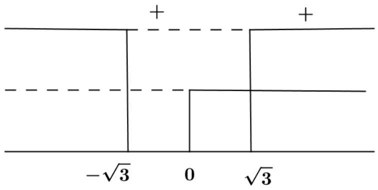
Lo studio di $f''(x)$ è indispensabile per individuare eventuali flessi a tangente obliqua mentre può essere omesso nei casi in cui , per la presenza di asintoti o per lo studio di $f'(x)$, sia chiaro come risulti il grafico come nel nostro esempio.

Esempio 2

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x) = x^3 - 3x}$

1) $D_f = \Re$

$f(x) > 0 \qquad x(x^2 - 3) > 0$



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \end{cases} \to x(x^2 - 3) = 0 \to x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

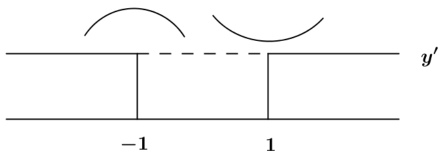
Quindi le intersezioni con gli assi sono $\left(-\sqrt{3};0\right)$ $(0;0)$ $\left(\sqrt{3};0\right)$.

Osserviamo che $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ e quindi la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine.

2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ma non ci sono asintoti obliqui $\left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \right)$

3) $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \quad 3(x^2 - 1) = 0 \quad \to \quad x_{1,2} = \pm 1$



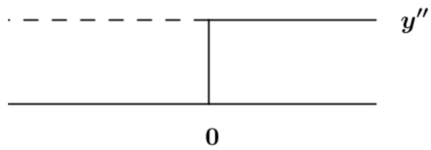
$y' > 0$

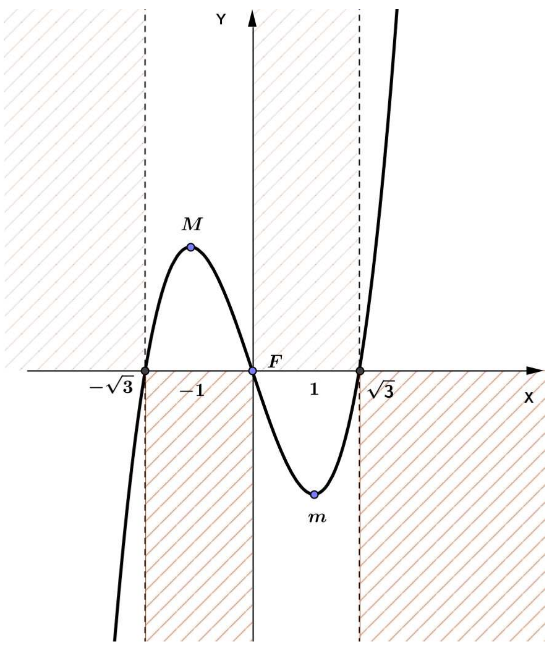
$M(-1;2) \qquad m(1;-2)$

4) $y'' = 6x$, $y'' = 0 \quad \to \quad x = 0$,

$y'' > 0 \Leftrightarrow \quad x > 0$

$F(0;0)$ flesso a tangente obliqua





ESERCIZI
Funzioni razionali fratte

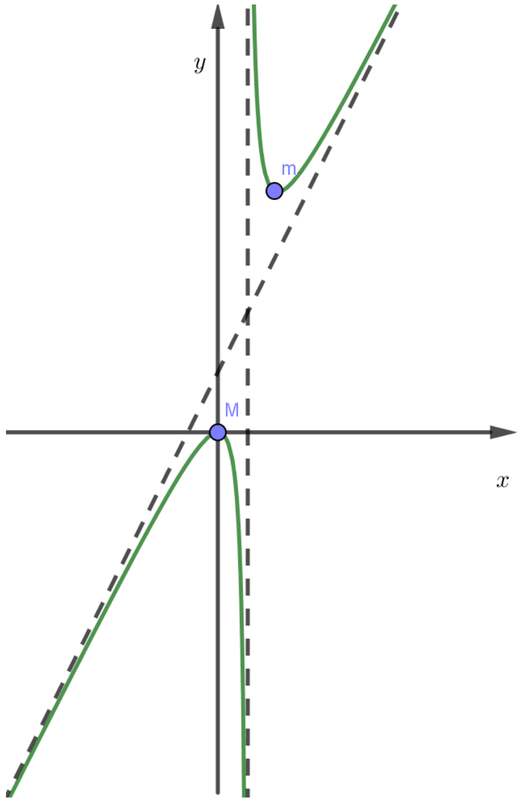
1) $y = \dfrac{2x^2}{x-2}$

Soluzione:

$D_f = \Re \setminus \{2\}$
Asintoto verticale: $x = 2$
Asintoto obliquo: $y = 2x + 4$

$y' = \dfrac{2x(x-4)}{(x-2)^2}$

$M(0;0)$
$m(4;16)$



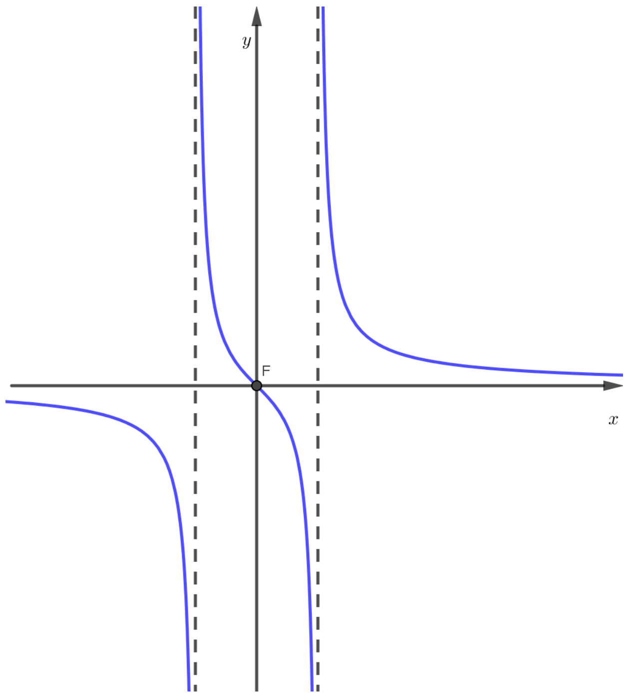
2) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

Soluzione:

$y' = -\dfrac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

Flesso a tangente obliqua: $F(0;0)$



3) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=\pm 1;\ \ as.obl.\ \ y=-x;\ \ m\left(-\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);$

.

$M\left(\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);\ \ F(0;0)\ \ a\ \ tg.\ \ orizz.]$

4) $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$ $\quad[\ as.v.\ \ x=4;\ \ as.obl.\ \ y=-x-1;\ \ m(2;-1)\ \ M(6;-9)\ ]$

5) $y=\dfrac{2x-1}{2x^3}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.or.\ \ y=0;\ \ M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{16}{27}\right)\qquad F\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\ \ a\ \ tg.\ \ obliqua]$

6) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ $\quad[\ as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1;\ \ m(0;0);\ \ M(-2;-4)\ ]$

7) $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$ $\quad[as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1\ ]$

8) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ m(2;3)]$

9) $y=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{2x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-\dfrac{3}{2};\ \ m(1;0)]$

10) $y=\dfrac{6x^2+2x+3}{2(2x^2+1)}$ $\quad[as.or.\ \ y=\dfrac{3}{2};\ \ m\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right);\ \ M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right);$

$F_1\left(0;\dfrac{3}{2}\right);\ \ F_2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{12+\sqrt{6}}{8}\right);\ \ F_3\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{12-\sqrt{6}}{8}\right);\ \ flessi\ \ a\ \ tg.\ \ obliqua]$

11) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-4;\ \ M\left(-\sqrt{3};-(2\sqrt{3}+4)\right);m\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}-4\right)\ ]$

12) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ $\quad[as.v.\ \ x=5;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ M(3;1);\ \ m(7;9)]$

13) $y=\dfrac{x^2-4x}{1-x}$ $\quad[as.v.\ \ x=1;\ \ as.obl.\ \ y=-x+3]$

14) $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=0\ \ \ as.or.\ \ y=\dfrac{1}{2}\ ]$

Funzioni irrazionali

Esempio

Consideriamo la funzione irrazionale: $\boxed{y = x - \sqrt{x^2 - 1}}$

- $D_f:\qquad x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \ \vee \ \geq 1$

  Intersezioni con gli assi:

  Per $\ y = 0 \qquad \Rightarrow x = \sqrt{x^2 - 1} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \cancel{x}^2 = \cancel{x}^2 - 1 \ \nexists \ sol. \end{cases}$

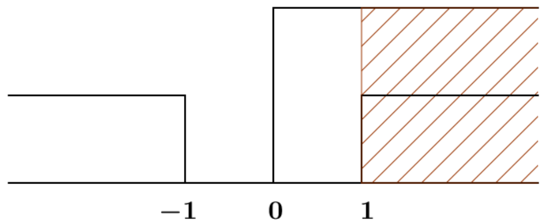
  Quindi non ci sono intersezioni con gli assi.

  Segno della funzione:

  $y > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$

  $x > \sqrt{x^2 - 1}$

  $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \ \Rightarrow x \leq -1 \ \vee x \geq 1 \\ x^2 > x^2 - 1 \qquad \forall x \end{cases}$



  $x \geq 1$

- Studio dei limiti:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

  $\Rightarrow \quad y = 0 \qquad$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

  Ricerca asintoto obliquo:

  - $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}} = 2$

  - $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to -\infty} - \frac{\left(x^2 - x^2 + 1\right)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0$

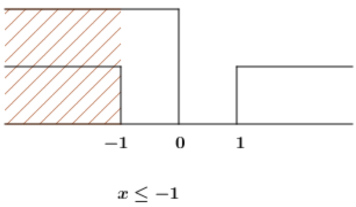
  $\Rightarrow \quad y = 2x \qquad$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

- Studio della derivata

$$y' = 1 - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 = x^2 \quad \nexists \quad sol. \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > x \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \quad \nexists \quad sol. \end{cases}$$

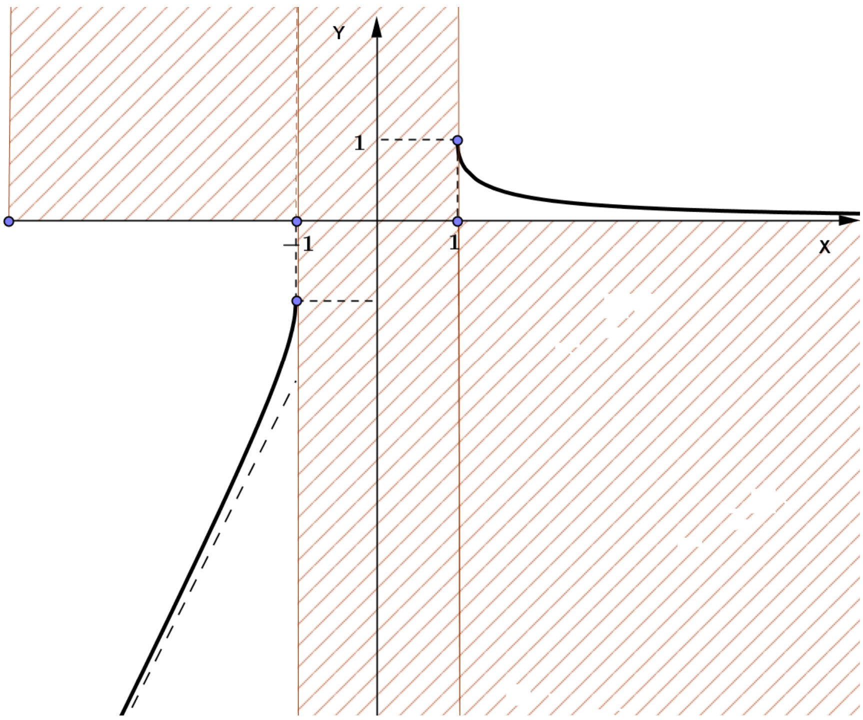


Quindi la funzione è crescente per $x \leq -1$ (e decresce per $x \geq 1$).

Osserviamo che $x = \pm 1$ sono punti a tangente verticale con: $\lim_{x \to -1^-} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\infty$

Nota: per tracciare il grafico occorre calcolare $y(-1) = -1 \;\; e \;\; y(1) = 1$ ma non è necessario lo studio di y''.

Il grafico è il seguente:



ESERCIZI
Funzioni irrazionali

1) $y=\sqrt{x^2-3x}$ $\quad [as.obl.\ \ y=x-\frac{3}{2}\ per\ \ x\to+\infty;\ \ as.obl.\ \ y=-x+\frac{3}{2}\ per\ \ x\to-\infty;$
$x=0\ \ x=3\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

2) $y=\frac{\sqrt{x^2-9}-1}{x}$ $\quad [\ as.or.\ \ y=1 per\ \ x\to+\infty;\ \ as.or.\ \ y=-1 per\ \ x\to-\infty;$
$x=\pm3\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

3) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $\quad [as.v.\ \ x=\pm2;\ \ m\left(0;\frac{1}{2}\right)]$

4) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ $\quad [as.v.\ \ x=-1;\ \ as.or.\ \ y=1;\ \ x=1\ \ p.to\ \ tg\ \ ver]$

5) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\quad [as.v.\ \ x=-1;\ \ x=1\ \ p.to\ \ tg\ \ vert.;\ \ F\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ \ flesso\ \ tg\ \ obl]$

6) $y=x-2-\sqrt{x^2-2x-3}$ $\quad [as.or.\ \ y=-1\ \ per\ \ x\to+\infty;$
$as.obl.\ \ y=2x-3\ \ per\ \ x\to-\infty;\ \ x=-1\ \ x=3\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

7) $y=x-3-\sqrt{x^2-1}$ $\quad [as.or.\ \ y=-3\ \ per\ \ x\to+\infty;$
$as.obl.\ \ y=2x-3\ \ per\ \ x\to-\infty;\ \ x=\pm1\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

8) $y=\frac{x}{2-\sqrt{x^2-5}}$ $\quad [as.v.\ \ x=\pm3;\ \ as.or.\ \ y=-1\ \ per\ \ x\to+\infty;$
$as.or.\ \ y=1\ \ per\ \ x\to-\infty;\ \ x=\pm\sqrt{5}\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

9) $y=\sqrt[3]{x^2+x}$ $\quad [m\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right);\ \ F_1(-1;0)\ \ F_2(0;0)\ \ flessi\ \ tg\ \ vert.]$

10) $y=\sqrt[3]{x^2(3+x)}$ $\quad [as.obl.\ \ y=x+1;\ \ M\left(-2;\sqrt[3]{4}\right)$
$(0;0)\ \ cuspide;\ \ F(-3;0)\ \ flesso\ \ tg\ \ vert.]$

Funzioni goniometriche

Esempio

Consideriamo la funzione goniometrica $\boxed{y = \dfrac{3\cos x}{2\cos x - 1}}$

Dominio:

$$\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$D_f = \Re - \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

Periodo: poiché nella nostra funzione compare $\cos x$ il periodo sarà quello del coseno, cioè 2π: quindi $T = 2\pi$

Quindi possiamo limitare il nostro studio all'intervallo $I = [0, 2\pi]$.

Note

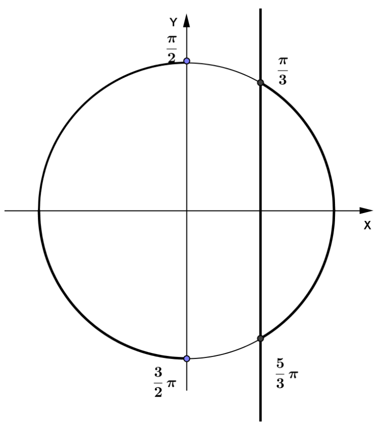
Se nella funzioni compaiono funzioni goniometriche di *periodo diverso* occorre determinare il **"minimo" multiplo comune.** Se per esempio abbiamo $sen 2x$ e $senx$ il periodo sarà 2π poiché $sen 2x$ ha periodo $\pi = \left(\frac{2\pi}{2}\right)$ e $senx$ periodo 2π. Se abbiamo insieme $sen 2x$ e $\cos 3x$ il periodo sarà 2π cioè il primo multiplo comune tra i periodi delle due funzioni π e $\frac{2}{3}\pi$.

Inoltre considerare un dato intervallo di studio non vuol dire che la funzione sia definita in tutto l'intervallo. Nel nostro caso studiamo la funzione in $I = [0, 2\pi]$ ricordando però che $x \neq \frac{\pi}{3}$ $x \neq \frac{5}{3}\pi$ (infatti $x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$).

Intersezioni con gli assi e segno della funzione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right) \quad \left(\dfrac{3}{2}\pi; 0\right) \end{matrix}$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{3\cos x}{2\cos x - 1} > 0 \Rightarrow \cos x < 0 \ \vee \cos x > \frac{1}{2}$$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \infty$$

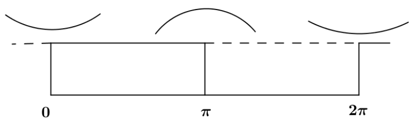
$$\lim_{x\to\frac{5}{3}\pi} f(x) = \infty \qquad x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{5}{3}\pi \qquad \text{asintoti verticali}$$

Ricordiamo che non ha senso studiare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ per una funzione periodica.

$$y' = \frac{-3senx(2\cos x - 1) - 3\cos x(-2senx)}{(2\cos x - 1)^2} = \frac{3senx}{(2\cos x - 1)^2}$$

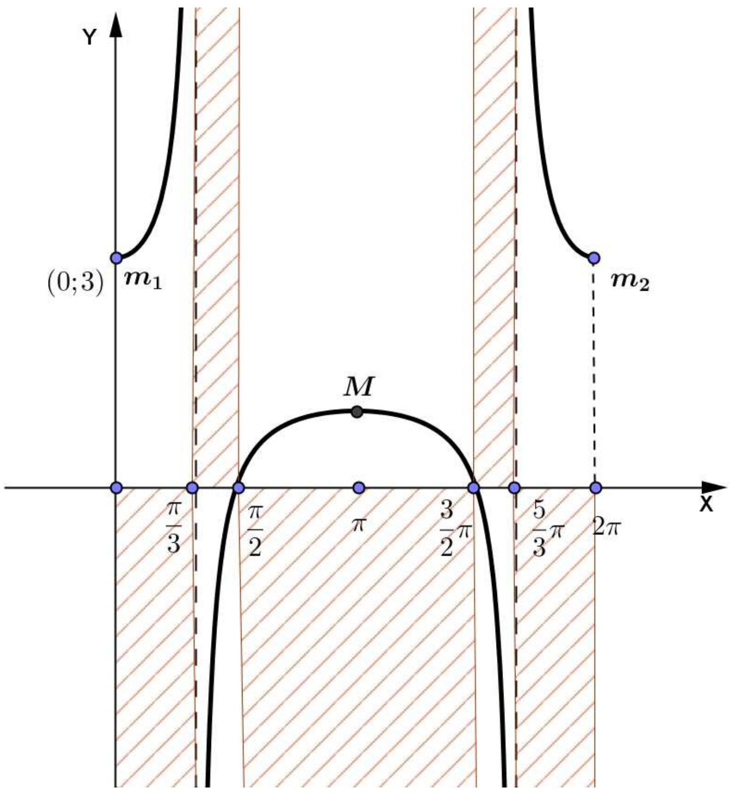
$$y' = 0 \Rightarrow senx = 0 \qquad x = k\pi \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = \pi \quad x_3 = 2\pi$$

$$y' > 0 \Rightarrow senx > 0$$



$$m_1(0;3) \qquad m_2(2\pi;3) \qquad M(\pi;1)$$

Il grafico è quindi il seguente:



ESERCIZI
Funzioni goniometriche

1) $y = senx - \sqrt{3}\cos x$

$[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi]; \quad M\left(\frac{5}{6}\pi;2\right); \quad m\left(\frac{11}{6}\pi;-2\right);$

$F_1\left(\frac{\pi}{3};0\right) \quad F_2\left(\frac{4}{3}\pi;0\right) \quad flessi \quad tg \quad obl.]$

2) $y = \frac{\cos x}{1-\cos x}$

$[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi]$

$as.v. \quad x = 0; x = 2\pi; \quad m\left(\pi;-\frac{1}{2}\right)]$

3) $y = \frac{senx - \cos x}{\sqrt{3}senx - \cos x}$

$[T = \pi \quad I = [0;\pi]$

$as.v. \quad x = \frac{\pi}{6}; \quad F\left(\frac{2}{3}\pi;\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) flesso\, a\, tg \quad obl.]$

4) $y = 4sen^2 x - 3$

$[T = \pi \quad I = [0;\pi]$

$m_1(0;-3); \; m_2(\pi;-3); \; ; \; M_1\left(\frac{\pi}{2};1\right);$

$F_1\left(\frac{\pi}{4};-1\right); \quad F_2\left(\frac{3}{4}\pi;-1\right); \quad flessi \quad tg \quad obl.]$

5) $y = sen^2 x + \cos x$

$[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi];$

$m_1(0;1); \quad m_2(\pi;-1); \quad m_3(2\pi;1); \quad M_1\left(\frac{\pi}{3};\frac{5}{4}\right); \quad M_2\left(\frac{5}{3}\pi;\frac{5}{4}\right) \quad]$

$F_1(\beta_1;...); \quad F_2(\beta_2;...); \quad F_3(2\pi-\beta_1;...); \quad F_4(2\pi-\beta_2;...) \quad flessi \quad tg \quad obl.$

$\left(dove \quad \cos\beta_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8}, \quad \cos\beta_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$

6) $y = sen^3 x.$

$[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi]$

$m\left(\frac{3}{2}\pi;-1\right); \quad M\left(\frac{\pi}{2};1\right); \quad F_1(0;0); \quad F_2(\pi;0); \quad F_3(2\pi;0) \quad flessi \quad tg \quad or.;$

$F_4(\alpha;...); \quad F_5(\pi-\alpha;...); \quad F_6(\pi+\alpha;...); \quad F_7(2\pi-\alpha;...) \quad flessi \quad tg. \quad obl.$

$\left(dove \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Funzioni esponenziali

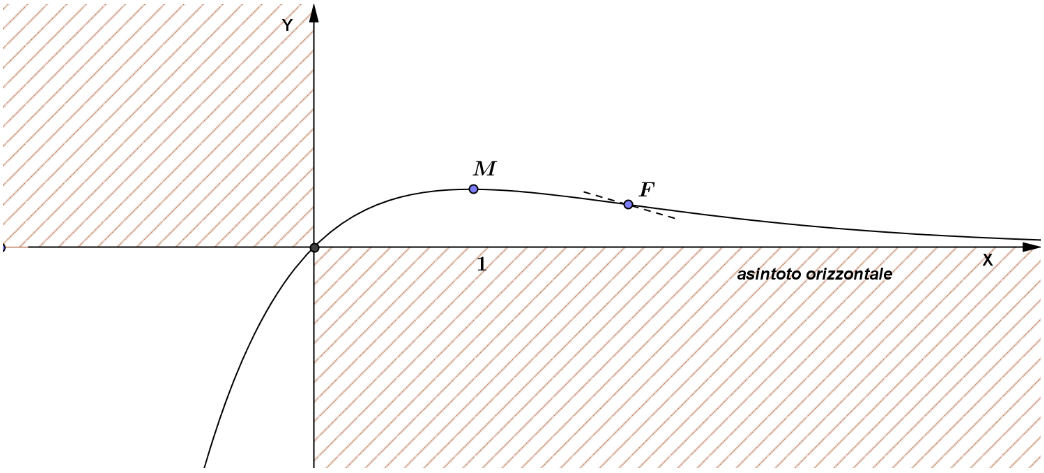
Esempio

Consideriamo la seguente funzione esponenziale: $\boxed{y = xe^{-x}}$

$D_f: \ \Re$

$y > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$x = 0 \rightarrow y = 0$



$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

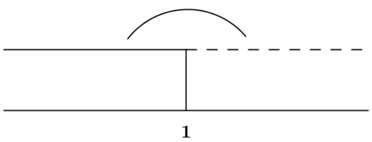
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$$

$$(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \quad \nexists \text{ asintoto obliquo})$$

$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$y' = 0 \quad x = 1$

$y' > 0 \Leftrightarrow x < 1$

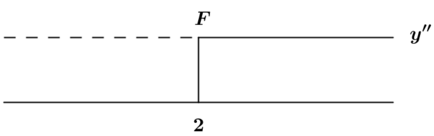


$M(1; e^{-1}) \approx (1; \ \ 0,37)$

$y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$

$y'' = 0 \quad x = 2$

$y'' > 0 \quad x > 2$



$F(2; 2e^{-2}) \approx (2; \ \ 0,27)$

Funzioni logaritmiche

Esempio

Consideriamo la seguente funzione logaritmica $\boxed{y = \dfrac{x^2}{\ln x}}$

$$D_f: \quad x > 0 \quad \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$y > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$y = 0 \rightarrow x = 0 \notin D_f$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \left(\dfrac{1}{0^-}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \quad \textit{as.verticale}$$

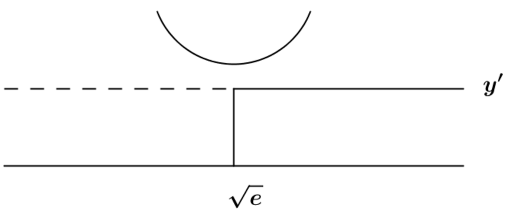
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \nexists \quad \textit{as.obliquo} \right)$$

$$y' = \left(2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}\right) \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{x}{\ln^2 x} (2 \ln x - 1)$$

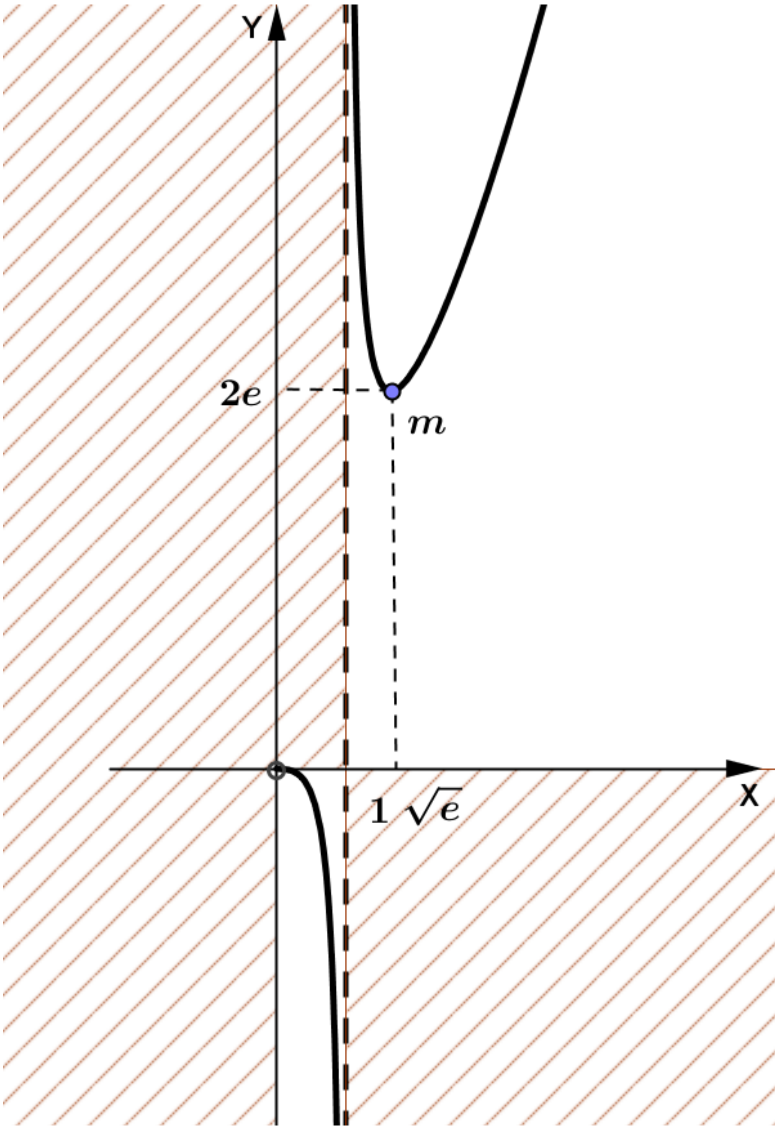
$$y' = 0 \quad \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \rightarrow x > e^{\frac{1}{2}}$$



$m(\sqrt{e}; 2e) \approx (1{,}64; \;\; 5{,}4)$

Il grafico quindi risulta:



Osservazione:

$$\lim_{x\to 0^+} y' = \lim_{x\to 0^+} x\underbrace{\left(\frac{2\ln x - 1}{\ln^2 x}\right)}_{\to 0} = 0 \qquad \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x - 1}{\ln^2 x} \overset{H}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x} = 0\right)$$

e quindi la tangente in (0;0) è orizzontale.

Controlliamo anche la concavità del grafico:

$$y'' = D\left(\frac{2x}{\ln x} - \frac{x}{\ln^2 x}\right) = \ldots = \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}$$

$y'' = 0$ nessuna soluzione (non ci sono flessi)

$y'' > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$ (concavità verso l'alto)

ESERCIZI
Funzioni logaritmiche ed esponenziali

1) $y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ [$as.v.\quad x=0;\quad as.or.\quad y=0\quad per\quad x\to-\infty\quad as.or.\quad y=2\quad per\quad x\to+\infty$]

2) $y=x^2\cdot e^{-x}$ [$as.or.\quad y=0\quad per\quad x\to+\infty;\quad m(0;0)$

$M\left(2;4e^{-2}\right);\quad F_1\left(2-\sqrt{2};...\right);\quad F_2\left(2+\sqrt{2};...\right) flessi\quad tg\quad obl.$]

3) $y=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ [$as.v.\quad x=0;\quad as.obl.\quad y=x-1;\quad M(-1;-e);\quad \lim\limits_{x\to0^+} y'=0$]

4) $y=x-\ln x$ [$as.v.\quad x=0;\quad m(1;1)$]

5) $y=\ln\sqrt{x^2-4}$ [$as.v.\quad x=\pm2$]

6) $y=x\cdot\ln x$ [$\lim\limits_{x\to0^+} y=0\quad m\left(e^{-1};-e^{-1}\right)$]

7) $y=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$ [$as.v.\quad x=0;\quad as.or.\quad y=0;\quad m\left(e;-\dfrac{1}{e^2}\right)$

$F\left(e^{\frac{4}{3}};f\left(e^{\frac{4}{3}}\right)\right)\quad flesso\quad tg\quad obl.$]

8) $y=\ln x\cdot(\ln x+1)$ [$as.v.\quad x=0;\quad m\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}};-\dfrac{1}{4}\right);\quad F\left(\sqrt{e};\dfrac{3}{4}\right)\quad flesso\quad tg\quad obl.$]

SCHEDA DI LAVORO 1

GRAFICI PER VISUALIZZARE L'ANDAMENTO DI UN FENOMENO

Lo studio dei grafici non è importante solo in ambito matematico perché un grafico può servire a "visualizzare" *l'andamento di un "fenomeno" nel tempo*: questo accade tutte le volte che la variabile x rappresenta il tempo e per questo viene indicata con la lettera t.
I fenomeni possono essere di vario tipo.

Si possono avere fenomeni di tipo naturale cioè fenomeni fisici o biologici quali:

- il valore dell'intensità di corrente che scorre in un filo metallico;
- l'intensità del campo magnetico all'interno di una bobina;
- il numero degli individui di una popolazione di animali o di piante:
- ecc.

In genere si riesce a determinare l'equazione della funzione $f(t)$ che descrive il fenomeno cioè una funzione che dipende dalla variabile tempo.

Oppure si possono considerare fenomeni legati ad attività umane e in questo caso i grafici derivano da tabelle di dati cioè non c'è un'equazione della funzione da rappresentare e servono a visualizzarne l'andamento temporale:

- la quotazione di un dato titolo in borsa;
- il fatturato mensile di una data azienda;
- il quantitativo del grano prodotto ogni anno in Italia;
- il numero degli abitanti di un dato paese negli ultimi anni;
- il numero giornaliero dei nuovi contagiati in una data epidemia;
- ecc.

Scegli un esempio di fenomeno di tipo "fisico", uno di tipo "biologico" e uno legato ad una "tabella" magari anche facendo una ricerca sul web e per ciascuno rappresenta il grafico.

SCHEDA DI LAVORO 2

DAL GRAFICO DI $f(x)$ AL GRAFICO DI $f'(x)$

OSSERVAZIONI

Se conosciamo il grafico di una funzione f(x) continua e derivabile, possiamo dedurre l'andamento del grafico della su funzione derivata f'(x)?

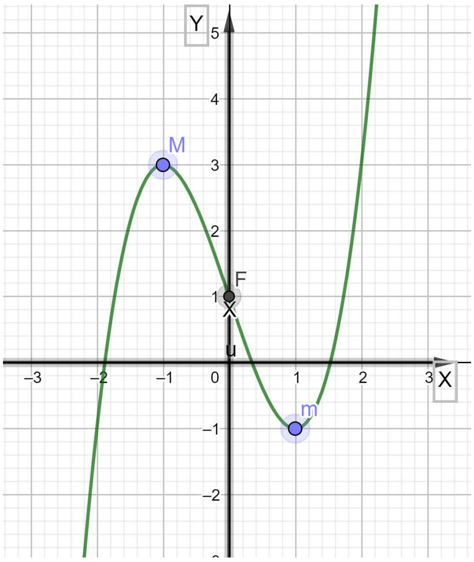
Ricordiamo che:

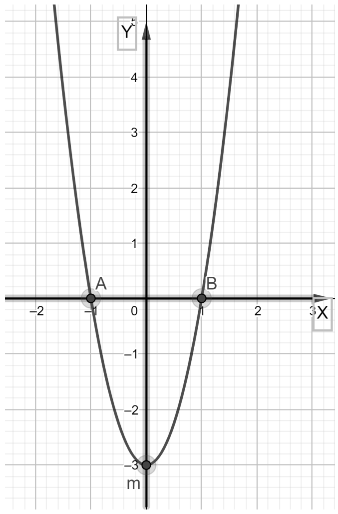
- Nei punti di massimo o minimo o flesso a tangente orizzontale il grafico di f'(x) taglia l'asse x (la derivata si annulla);
- Negli intervalli in cui f(x) è crescente avremo $f'(x) > 0$, mentre dove f(x) decresce avremo $f'(x) < 0$;
- Nei punti di flesso di f(x) si avranno massimi o minimi o flessi a tangente orizzontale per $f'(x)$ dal momento che $f''(x) = D(f'(x))$

ESEMPIO

Considera il grafico in figura: possiamo dire che il grafico di $f'(x)$ dovrà:

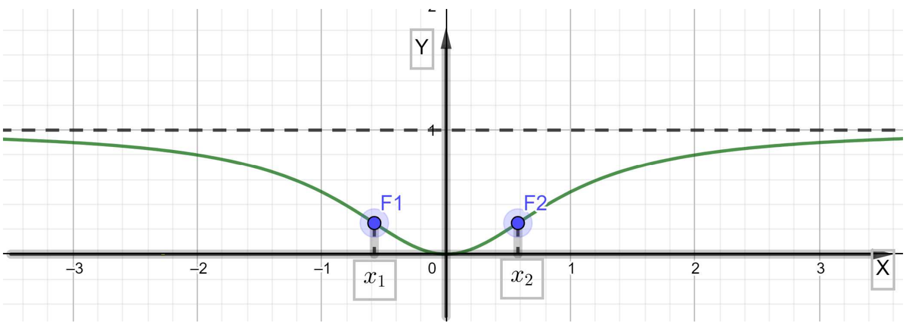
- essere sopra all'asse x per $x < -1 \cup x > 1$;
- tagliare l'asse x in $x = \pm 1$;
- essendo $F(0;1)$ un punto di flesso per f(x) la derivata avrà un minimo in x=0





Esercizio

Disegna l'andamento della derivata della funzione avente il seguente grafico:



Problemi di massimo e minimo

Supponiamo di avere una funzione $f: [a; b] \to R$ continua in $[a; b]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.

I problemi di massimo e minimo sono problemi (di geometria piana o solida oppure di geometria analitica ecc.) in cui dobbiamo determinare una funzione (che per esempio esprime, in funzione di una variabile scelta x, un perimetro o un'area o un volume ecc.) e individuare il valore di x per cui la funzione assume il massimo o il minimo assoluto.

Poiché la variabile avrà una limitazione data dal tipo di problema, la funzione dovrà essere considerata in un dato intervallo.

Se la funzione è continua e l'intervallo è limitato, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluto.

Possiamo quindi procedere così:

- Calcolare la derivata della funzione che dobbiamo studiare

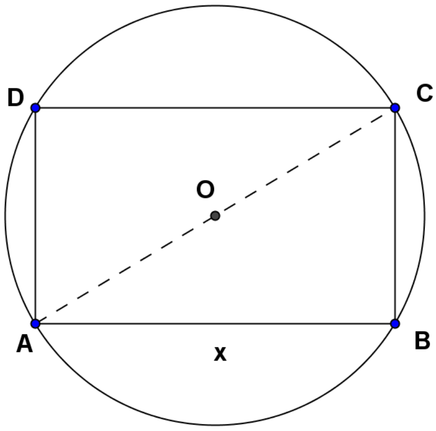
- Cercare i valori per cui si annulla e studiare il segno della derivata: individuare quindi i massimi e minimi relativi ed eventualmente "confrontarli" (confrontare le ordinate corrispondenti) per determinare il massimo o il minimo assoluto.

Attenzione: se la derivata non si annulla ed è per esempio sempre positiva cioè la funzione è crescente, è chiaro che il minimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo e il massimo nell'estremo destro.

Attenzione: controllare se ci sono punti di non derivabilità: nel caso ci siano le loro ordinate vanno confrontate con quelle dei massimi (minimi) relativi trovati.

Esempio 1

Determina, tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima.



Poniamo $x = \overline{AB}$.

Quindi avremo: $0 \le x \le 2r$

Poiché $\overline{BC} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ indicando con $A(x)$ l'area di $ABCD$ avremo:

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 2r$$

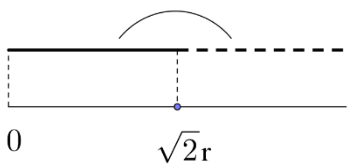
Poiché $A(x)$ è continua in $[0; 2r]$ per il teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto.

Calcoliamo quindi la derivata:

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}r$ $\quad (x = -\sqrt{2}r$ non è accettabile)

$A'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \sqrt{2}r$



Quindi $x = \sqrt{2}r$ fornisce il massimo assoluto (non abbiamo trovato altri punti di massimo relativo).

Osserviamo che se $\overline{AB} = \sqrt{2}r$ $\;ABCD$ è un quadrato.

Quindi tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r , quello di area massima è il quadrato.

Nota

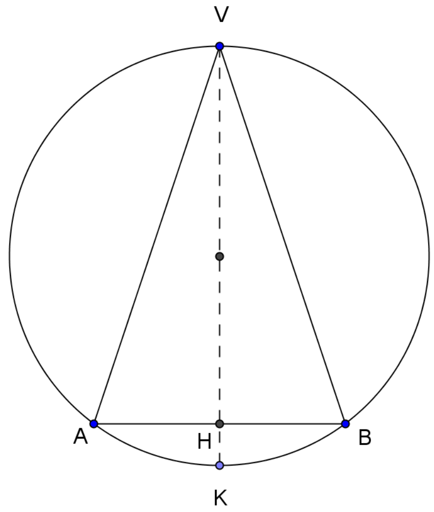
Per $x = 0$ o $x = 2r$ il rettangolo degenera in due diametri sovrapposti e sia ha area nulla (minimo assoluto).

Esempio 2

Determinare, tra i coni inscritti in una sfera di raggio r*, quello di massimo volume.*

Consideriamo una sezione. Avremo un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza.

Poniamo $\overline{VH} = x$: $0 \leq x \leq 2r$



Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo VAK: $\overline{AH}^2 = x(2r - x)$

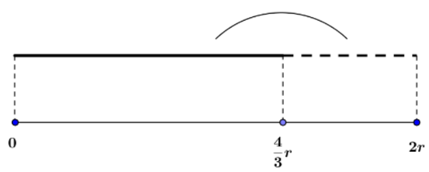
Quindi:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi x^2(2r - x) = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(4rx - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow x = 0, \qquad x = \frac{4}{3}r$$

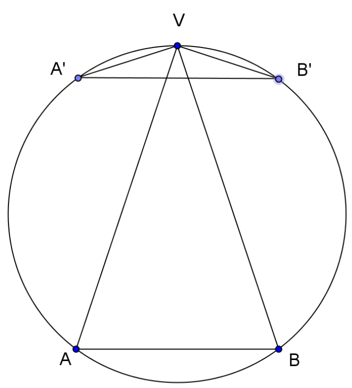
$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r$$



e quindi per $x = \frac{4}{3}r$ si ha il cono di volume massimo.

Osservazione

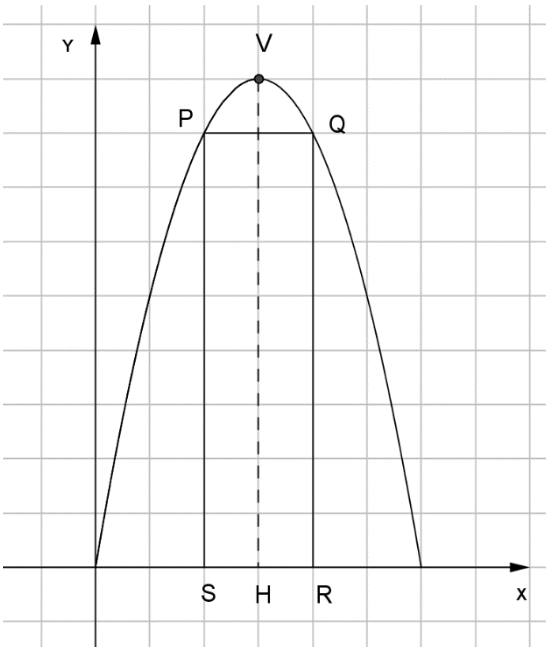
La scelta del segmento a cui associare x è importante. Scegliendo $\overline{VH} = x$ abbiamo individuato bene il cono (non ci sono coni inscritti diversi con la stessa altezza) mentre se avessimo scelto $\overline{AH}$ (o $\overline{AB}$) ad un dato valore dell'incognita corrispondevano generalmente due coni diversi.



In figura per esempio abbiamo lo stesso valore della base ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$) ma i triangoli sezione e quindi i coni sono diversi.

Esempio 3

Data la parabola di equazione $P: y = -x^2 + 6x$, considera i rettangoli inscritti nell'arco di parabola appartenente al primo quadrante e determina quello di area massima.



$V(3;9)$

Consideriamo $P(x; -x^2 + 6x)$

con $0 \leq x \leq 3$

$$\overline{PQ} = 2(3 - x)\,;\ \overline{SH} = 3 - x\,; \quad \overline{PS} = -x^2 + 6x$$

Quindi

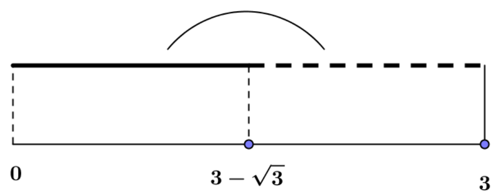
$$A(x) = 2(3 - x)(-x^2 + 6x) = 2(x^3 - 9x^2 + 18x)$$

$$A'(x) = 2(3x^2 - 18x + 18)$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Solo $x = 3 - \sqrt{3}$ è accettabile considerando la limitazione della x.

$$A'(x) > 0 \iff x < 3 - \sqrt{3} \cup x > 3 + \sqrt{3}$$



e quindi per $x = 3 - \sqrt{3}$ si ottiene il rettangolo di area massima.

È chiaro che per conoscere il valore dell'area massima basta sostituire $x = 3 - \sqrt{3}$ nella funzione $A(x)$ e si ottiene $A_{max} = 2[3 - (3 - \sqrt{3})]\left[-(3 - \sqrt{3})^2 + 6(3 - \sqrt{3})\right] = \cdots = 12\sqrt{3}$

PROBLEMI

GEOMETRIA PIANA

1. Tra tutti i rettangoli di area assegnata a^2 determina quello di perimetro minimo.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = a \rightarrow quadrato\right]$$

2. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determina quello di area massima.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = \frac{p}{2} \rightarrow quadrato\right]$$

3. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata a determina quello di area massima.

$$\left[x = cateto \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow triangolo\ rettangolo\ isoscele\right]$$

4. Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.

$$\left[x = altezza\ relativa\ alla\ base \rightarrow x = \frac{3}{2}r \rightarrow triangolo\ equilatero\right]$$

5. Tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r determina quello di perimetro massimo.

$$\left[x = dimensione\ rettangolo \rightarrow x = r\sqrt{2} \rightarrow quadrato\right]$$

6. Tra i triangoli equilateri inscritti in un triangolo equilatero ABC di lato l, determina quello di area minima.

$$\left[trinagolo\ di\ lato\ \frac{l}{2}\right]$$

7. Tra tutti i triangoli iscritti in una semicirconferenza, trova quello di area massima.

[triangolo rettangolo isoscele]

8. Nell'insieme dei trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio r, determina quello di perimetro massimo.

[semiesagono regolare]

9. Un foglio di carta deve contenere un'area di stampa di $50 cm^2$, margini superiore e inferiore di 4 cm e laterali di 2 cm. Determina le dimensioni del foglio di area minima con queste caratteristiche.

[9 cm , 18 cm]

10. Fra tutti i rettangoli di data area, che misura a^2, determina quello la cui diagonale è minima.

[quadrato di lato a]

11. Tra tutti rettangoli di data diagonale, che misura d,determina quello di area massima.

[quadrato di lato $\frac{d}{\sqrt{2}}$]

12. Tra tutti i triangoli isosceli che hanno per base una corda di una circonferenza di raggio r e il vertice nel centro della circonferenza, determina quello di area massima.

[triangolo la cui altezza misura $\frac{r}{\sqrt{2}}$]

13. Sia ABCD un trapezio isoscele di area s^2 con gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45°, determina l'altezza del trapezio in modo che abbia perimetro minimo.

[altezza=$\frac{s}{\sqrt[4]{2}}$]

14. Nel triangolo qualsiasi ABC manda la parallela al lato AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente nei punti G e F. Indicate con D e E le proiezioni ortogonali di G e F sulla retta del lato AB, determina il rettangolo DEFG di area massima.

[DG metà dell'altezza del triangolo]

PROBLEMI

GEOMETRIA SOLIDA

1. Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio r determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}r\right]$$

2. Tra i cilindri inscritti in un cono avente raggio di base r e altezza assegnata h, determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \frac{2}{3}r\right]$$

3. Tra i coni inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

$$\left[x = altezza\ del\ cono \rightarrow x = \frac{4}{3}r\right]$$

4. Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r, determina quello di minimo volume.

$$[x = distanza\ tra\ vertice\ cono - centro\ sfera \rightarrow x = 3r]$$

5. Tra i parallelepipedi rettangolari aventi per base un quadrato e un volume assegnato V, determina quello di superficie totale minima.

$$[cubo]$$

6. Tra i cilindri di superficie totale assegnata S determina quello di volume massimo.

$$[cilindro\ equilatero]$$

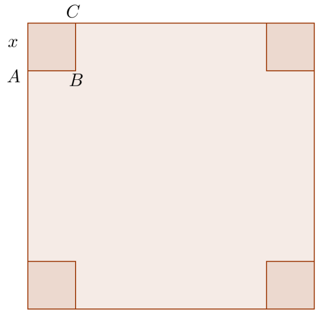
7. Una tipica lattina cilindrica ha volume fissato pari a 33 *cl*. Quali sono le dimensioni della lattina (altezza e diametro) che minimizzano il costo del metallo necessario a produrla, ossia la superficie totale della lattina?

[cilindro equilatero di diametro $2r = h = 2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ cm]

8. Si vuole costruire un salone insonorizzato a forma di parallelepipedo rettangolo con i lati del pavimento uno doppio dell'altro e volume di 300 m^3. Per insonorizzare il locale vanno applicati sulle pareti e sul soffitto pannelli del costo di € 50 al metro quadrato. Sul pavimento sarà posato un laminato che costa € 40 al metro quadrato. Quali sono le misure del pavimento che rendono minima la spesa complessiva?

[5 m ; 10 m]

9. Una scatola senza coperchio è ottenuta tagliando quattro quadrati uguali dagli angoli di un foglio di cartone quadrato, di lato 60 cm e ripiegando il cartone rimasto (incollando per esempio AB con BC). Quando vale x per avere la scatola di volume massimo?



[$x = 10cm$]

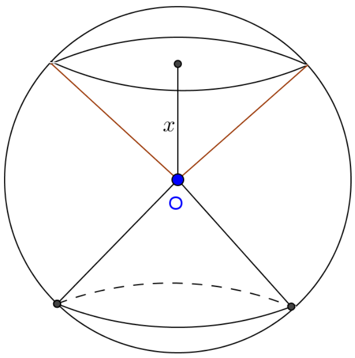
10. Tra tutti i cilindri inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

[cilindro equilatero di altezza $r\sqrt{2}$]

11. Tra i parallelepipedi rettangoli a base quadrata e diagonale di misura d, determina quello di volume massimo.

[cubo di lato $\frac{d}{\sqrt{3}}$]

12.



Determina x in modo che la "clessidra" inscritta nella sfera di raggio r abbia volume massimo.

[$x = \frac{r}{\sqrt{3}}$]

PROBLEMI
GEOMETRIA ANALITICA

1. Considerata la parabola di equazione $P: y = -x^2 + 9x - 8$ determina, tra i rettangoli inscritti nella parte di piano delimitata dalla parabola e dall'asse x, quello di perimetro massimo. Determina il perimetro massimo.

$$\left[perimetro\ massimo = \frac{53}{2}\right]$$

2. Considera la parabola $y = 4x - x^2$ ed indica con V il suo vertice. Se $P \in \overset{\frown}{OV}$ della parabola , determina per quale punto P l'area del triangolo OVP è massima.

$$[P(1;3)]$$

3. Considera l'iperbole di equazione $\Im$: $y = \frac{x}{x-2}$ e determina la sua retta tangente t in $(0;0)$. Tra i punti P di $\Im$ appartenenti al primo quadrante determina quello per cui è minima la distanza da t.

$$[P(4;2)]$$

4. Considerata la parabola $\wp: x = y^2$, tra i punti P di $\wp$ appartenenti all'arco OA con $A(4;2)$, determina quello per cui, tracciata da P la parallela e la perpendicolare all'asse x, si individua con l'asse x e la perpendicolare per A all'asse x, un rettangolo di perimetro massimo.

$$\left[P\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\right]$$

5. Considera $\wp: y = 3x - x^2$ e determina un punto $P \epsilon\ arco\ VA$ di $\wp$, con V vertice di $\wp$ e $A(3;0)$, tale che l'area del quadrilatero $OVPA$ sia massima.

$$\left[P\left(\frac{9}{4};\frac{27}{16}\right)\right]$$

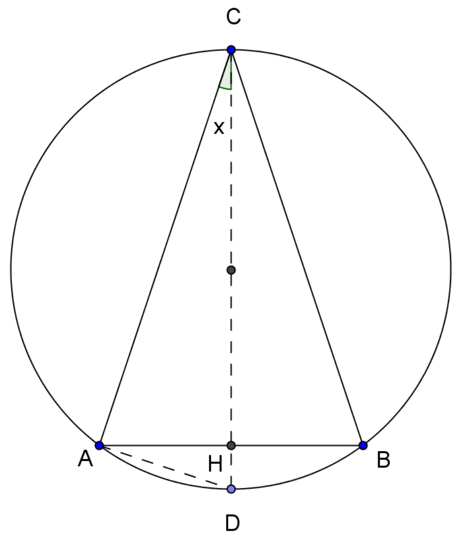
COMPLEMENTI

OSSERVAZIONE

A volte può convenire risolvere un problema di massimo e minimo utilizzando come incognita x *l'ampiezza (in radianti) di un angolo.*

Come esempio riprendiamo un problema già proposto tra i problemi di geometria piana.

Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.



Prendiamo $A\hat{C}H = x$: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Considerando il triangolo rettangolo ACD avremo:

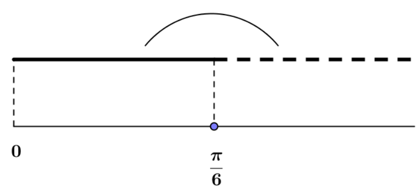
$\overline{AC} = 2r\cos x$ e quindi $\overline{AH} = \overline{AC}\,\mathrm{sen}x = 2r\,\mathrm{sen}x \cdot \cos x$ e $\overline{CH} = \overline{AC}\cos x = 2r\cos^2 x$

Quindi $A(x) = 2r\,\mathrm{sen}x\cos x \cdot 2r\cos^2 x = 4r^2\,\mathrm{sen}x\cos^3 x$

$$A'(x) = 4r^2(\cos^4 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x) = 4r^2\cos^2 x(\cos^2 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x)$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ tg^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow tgx = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \rightarrow triangolo\ equilatero \end{cases}$$

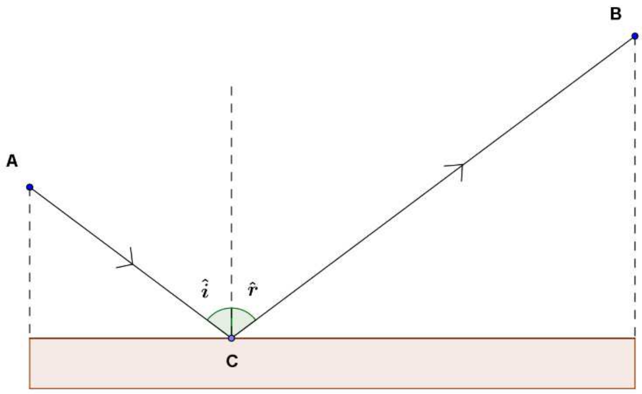
$A'(x) > 0$



Quindi per $x = \frac{\pi}{6}$ si ha un massimo (triangolo equilatero).

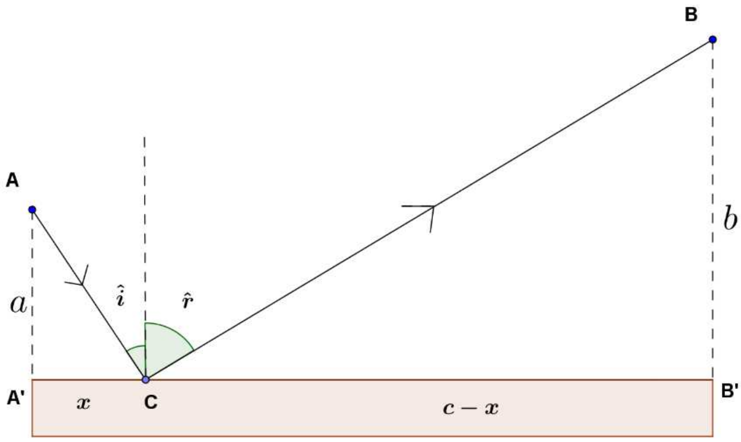
La legge della riflessione della luce

Dimostriamo che, quando la luce passa da A → B, riflessa dalla superficie piana in figura nel punto C, segue il ***percorso di "minimo tempo"****.*



Nota: per la legge della riflessione l'angolo di incidenza $\hat{\imath}$ è uguale all'angolo di riflessione $\hat{r}$.

Consideriamo un percorso generico $A \to C \to B$.



Indichiamo con a la distanza di A dallo "specchio", con b la distanza di B dallo specchio, con $c = \overline{A'B'}$, con $\hat{\imath}$ l'angolo di incidenza e con $\hat{r}$ quello di riflessione.

Se poniamo $\overline{A'C} = x$ avremo $\overline{CB'} = c - x$.

Consideriamo il tempo $t(x)$ impiegato dalla luce (che si muove con velocità v) per compiere il percorso in figura:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v} \qquad t'(x) = \frac{1}{v}\left[\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right]$$

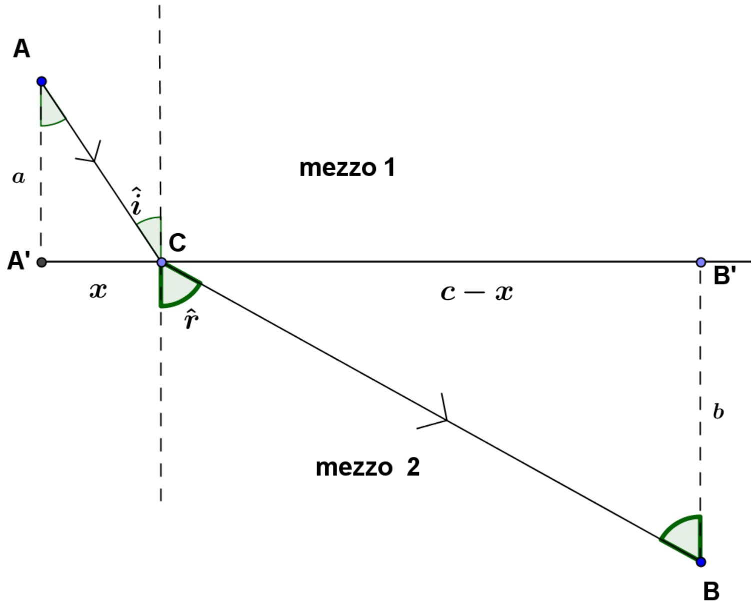
$$t'(x) = 0 \to \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

cioè $\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{CB}} \Rightarrow sen\hat{\imath} = sen\hat{r} \to \hat{\imath} = \hat{r}$ (legge della riflessione!)

(Non importa studiare $t'(x) > 0$ perché è intuitivo che abbiamo trovato un minimo).

La legge della rifrazione della luce

*Dimostriamo che quando la luce passa da un punto A situato in un mezzo ad un punto B situato in un altro mezzo (toccando in C la linea che separa i due mezzi) segue il percorso di "**minimo tempo**".*



Tracciamo un percorso $A \rightarrow B$ qualsiasi: come prima poniamo a = distanza di A dalla linea che separa i due mezzi ecc. e poniamo $\overline{A'B'} = c$.

Vogliamo calcolare la funzione che esprime il tempo impiegato dalla luce per andare $A \rightarrow B$.
Se poniamo $\overline{A'C} = x$ avremo (le velocità della luce nei due mezzi sono diverse v_1e v_2):

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}$$

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{-2(c - x)}{2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(c - x)}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

$$\frac{\overline{A'C}}{v_1\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C}}{v_2\overline{CB}}$$

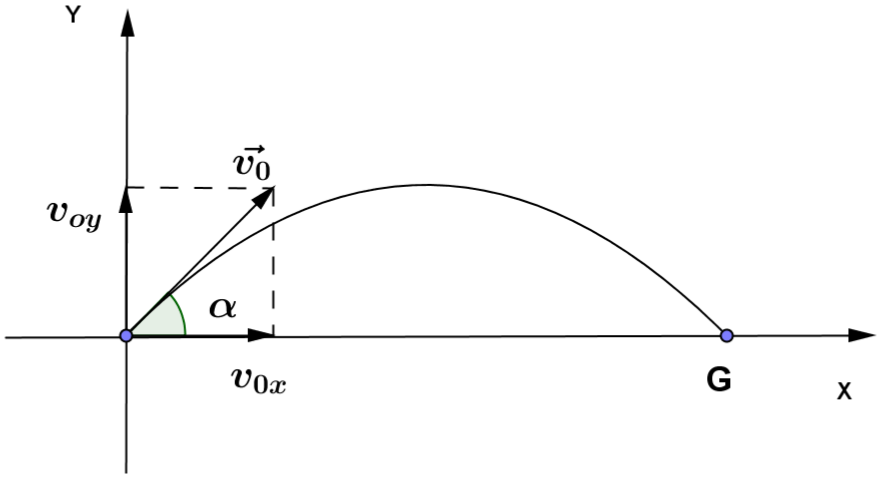
$$\frac{sen\hat{i}}{v_1} = \frac{sen\hat{r}}{v_2}$$

$$\frac{sen\,\hat{i}}{sen\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$$ (ma questa è la legge della rifrazione!)

Poiché la situazione rappresenta chiaramente un minimo abbiamo dimostrato che la luce percorre il cammino di "minimo" tempo.

La gittata massima

Lanciando un corpo con velocità $\vec{v_0}$ inclinata di α rispetto all'orizzontale qual è, a parità di v_0 (intensità della velocità iniziale), l'angolo α per cui si ottiene la massima gittata?



Ricordiamo che per studiare il moto dobbiamo scomporlo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x} in direzione orizzontale e in un moto uniformemente decelerato (con decelerazione $g = 9{,}81\ m/s^2$) di velocità iniziale v_{0y} in direzione verticale.

$$\begin{cases} x = v_{0x}\,t \\ y = v_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo t (lo ricaviamo dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda) e ponendo $y = 0$ trovo:

$$x_G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Quindi, poiché $v_{0x} = v_0 cos\alpha$ e $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ il problema si riconduce a determinare il massimo di:

$$f(\alpha) = \frac{2{v_0}^2 sen\alpha cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} sen2\alpha$$

Abbiamo quindi che $f(\alpha)$ è massima quando $sen2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ e quindi l'angolo per cui si ha la massima gittata risulta $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

SCHEDA DI LAVORO 1

DIDONE E LA FONDAZIONE DI CARTAGINE

Secondo la leggenda narrata da Virgilio nel I libro dell'Eneide, la regina fenicia Didone, sbarcata sulle coste settentrionali dell'Africa, chiese al re dei Getuli un appezzamento di terreno su cui costruire una nuova città: il re le offrì una pelle di toto dicendole che poteva appropriarsi di quanto terreno poteva comprendere con quella pelle.

"Giunsero in questi luoghi dove ora vedi le mura possenti e sorgere la rocca della nuova Cartagine, e acquistarono quanto suolo, che dal fatto si chiama Birsa , quanto potessero racchiudere con una pelle di toro."

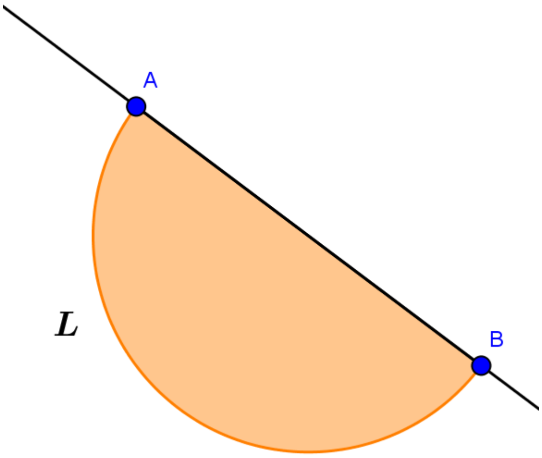
(*Devenere locos ubi nunc ingentia cernis Moenia surgentemque novae Karthaginis arcem, mercatique solum, facti de nomine Byrsam, taurino quantum possent circumdare tergo.*)

L'astuta Didone allora fece tagliare la pelle di toro in tante strisce sottili che legò una dietro l'altra ottenendo così una corda con la quale poté delimitare una vasta area **a forma di semicerchio** affacciata sul mare.

Il problema di Didone è un problema di massimo che può essere enunciato così:

Tra tutte le curve piane di lunghezza assegnata L ed avente i due estremi su una retta, determinare quella che racchiude la superficie di area massima.

Si può dimostrare che la figura che delimita la superficie massima è la semicirconferenza di diametro AB.



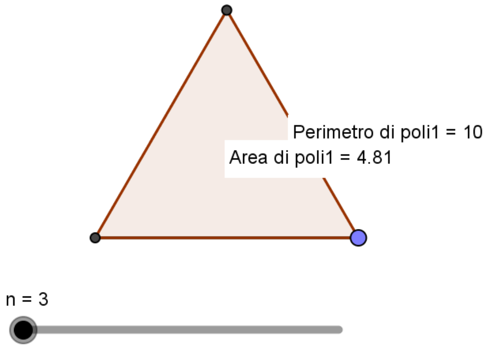
Nota: naturalmente se invece cerchiamo, tra tutte le figure piane anche non poligonali, di perimetro assegnato L di quella che delimita la superficie massima avremo la circonferenza.

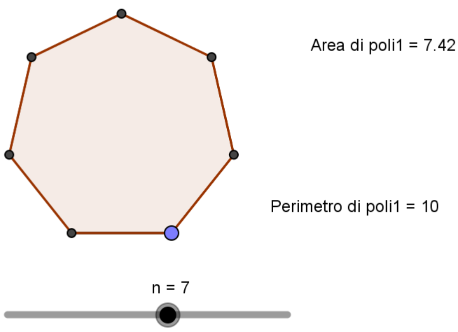
ESERCIZIO

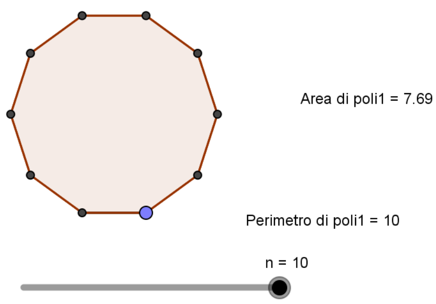
Prova con Geogebra a verificare che l'area dei poligoni regolari di perimetro assegnato L aumenta all'aumentare del numero dei lati.

Suggerimento

- Crea una costante L (per esempio L=10);
- crea uno slider n che varia tra 3 e 10(per esempio);
- crea un segmento di lunghezza L/n e con il comando "poligono regolare" disegna il poligono di *n* lati avente come lato il segmento;
- con il comando "area" visualizza l'area del poligono che hai costruito;
- aumenta il valore di n e osserva i valori dell'area.





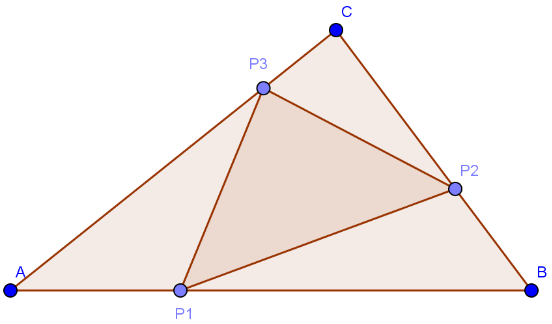


Stampa il tuo lavoro.

SCHEDA DI LAVORO 2

TRIANGOLO INSCRITTO DI PERIMETRO MINIMO

Considera un triangolo ABC: disegna un triangolo inscritto in ABC avente cioè i vertici sui lati di ABC (vedi figura). Come devi scegliere i tre punti in modo da avere il triangolo di minimo perimetro?



Si può dimostrare che il triangolo di minimo perimetro è quello che congiunge i piedi delle altezze del triangolo ABC: prova a verificarlo utilizzando Geogebra.

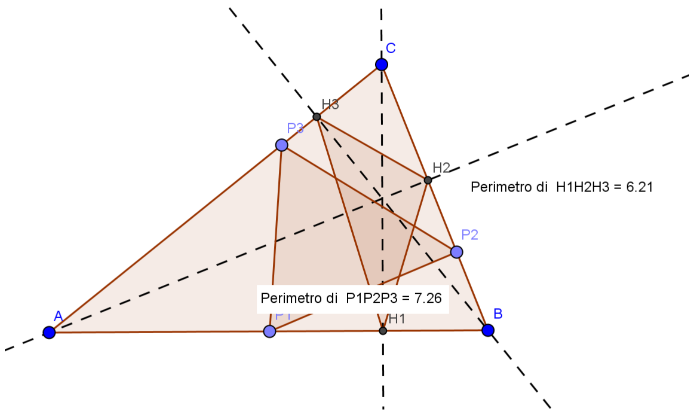
Suggerimento

Dopo aver costruito il triangolo ABC, utilizza il comando "punto su oggetto" per creare i tre punti e poi congiungili;

traccia le altezze del triangolo, individua i piedi delle altezze e congiungili;

scegli il comando "distanza o lunghezza" per determinare il perimetro dei due triangoli;

muovi i punti P1, P2, P3 e controlla i perimetri…

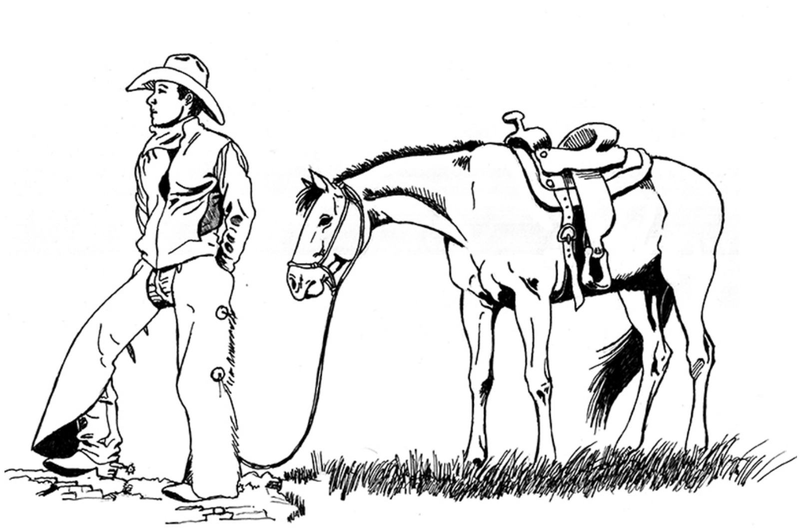


NOTA

Se immaginiamo che i lati del triangolo siano specchi, il triangolo $H_1H_2H_3$ è l'unico percorso chiuso che un raggio di luce può compiere toccando una sola volta ogni specchio-lato.

SCHEDA DI LAVORO 3

IL PERCORSO PIU' BREVE



Un cowboy a cavallo si trova nel punto A e vuole far abbeverare il cavallo al fiume (retta r) prima di tornare alla fattoria (punto B) (vedi figura).

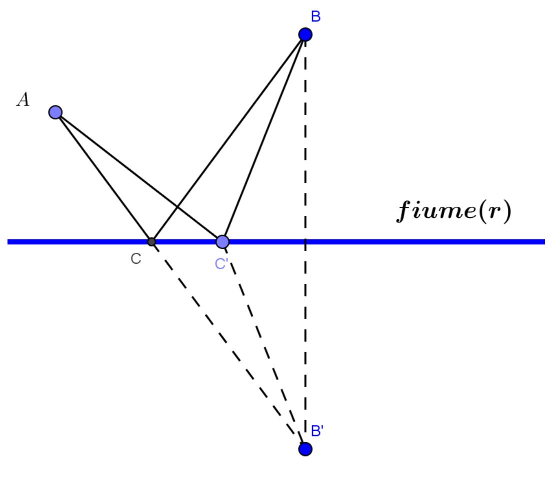
Qual è il percorso di lunghezza minima?

Suggerimento

Considera il punto B' simmetrico di B rispetto alla retta fiume-r e congiungi A con B': sulla retta r viene individuato un punto C.

Come potresti dimostrare che il percorso minimo è quello $\overline{AC}+\overline{CB}$?

Considerando un qualsiasi altro punto C' su r e considerando il percorso $\overline{AC'}+\overline{C'B}$ …….



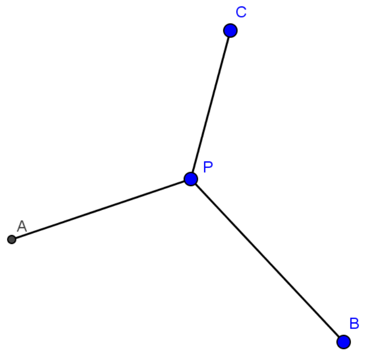
SCHEDA DI LAVORO 4

LA RETE STRADALE

Pierre de Fermat verso la metà del XVII secolo propose a Torricelli il seguente problema ripreso poi da Vincenzo Viviani:

"Dati 3 punti A,B,C tali che il triangolo ABC abbia angoli minori di 120°, trovare un punto O tale che sia minima la somma delle distanze tra O e i punti dati."

"Dato triangulo,cius unusquisque angolorum minor sit graduum 120, punctum reperire, a quo si ad angulos tres rectae educantur ipsarum aggregatum sit minimum." (Vincenzo Viviani , De maximis et minimis)



Questo problema non è solo di tipo teorico perché possiamo pensare che corrisponda alla ricerca della rete stradale di minima lunghezza che metta in comunicazione tre località: si può dimostrare(*) che il punto O è quello da cui i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno.

Nota: nel caso in cui uno degli angoli del triangolo ABC sia maggiore o uguale a 120°, il punto O coincide con il vertice di quell'angolo.

Esercizio: verifica con Geogebra che la somma minima si ha quando da O i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno.

Suggerimento

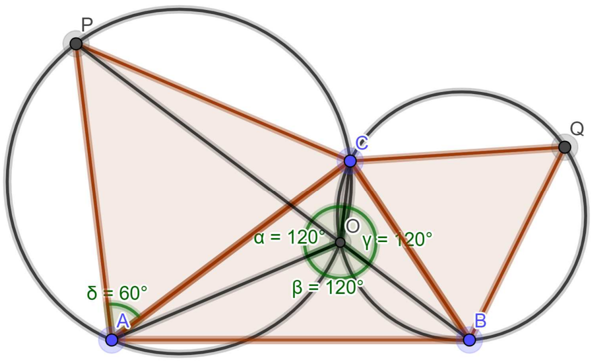
Dopo aver creato tre punti A,B,C puoi creare un punto O a caso, costruire i segmenti AO, BO, CO e utilizzando il comando "lunghezza" calcolare la lunghezza dei tre segmenti e la loro somma (sommando da tastiera le lettere che rappresentano i segmenti): in questo modo puoi controllare che quando O si avvicina ad avere gli angoli α, β, γ di 120° la somma delle distanze diminuisce e che quando gli angoli sono esattamente 120° è il valore più basso di tutti quelli che riesci a visualizzare.

(*)Prova a seguire il seguente ragionamento:

- Disegna i triangoli equilateri ABP e BCQ e traccia la circonferenza passante per A, C, P e la circonferenza passante B, C e Q: indica con O il loro punto di intersezione.

- Si ha che $A\hat{O}C = C\hat{O}B = A\hat{O}B = 120°$ dal momento che il quadrilatero AOCP è inscritto in una circonferenza e quindi gli angoli opposti sono supplementari e analogamente per il quadrilatero OBQC.

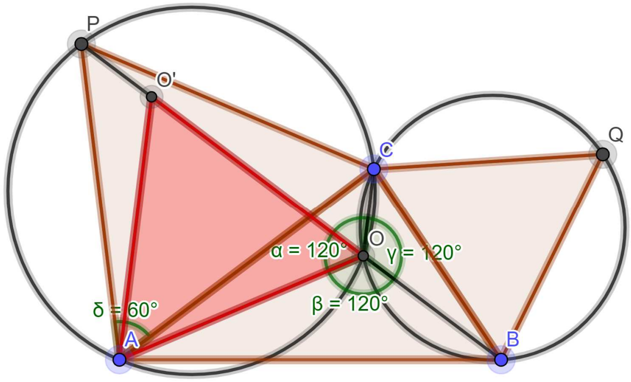
- Congiungi O con P : l'angolo $P\hat{O}C = 60°$ poiché insiste sull'arco $\overset{\frown}{PC}$ come l'angolo $P\hat{A}C$ e quindi P, O e B sono sulla stessa retta



- Se ruoti O di 60° intorno ad A trovi un punto O' e AOO' risulta un triangolo equilatero (isoscele con un angolo di 60°)

A questo punto se si dimostra che $\overline{OC} = \overline{O'P}$ (basta considerare i triangoli APO' e AOC) avremo che $\overline{AO} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OO'} + \overline{PO'} + \overline{OB}$

che quindi sarà il valore minimo perché i tre segmenti appartengono alla stessa retta.



SCHEDA DI LAVORO 5

LA CASSERUOLA DI CAPACITA' MASSIMA

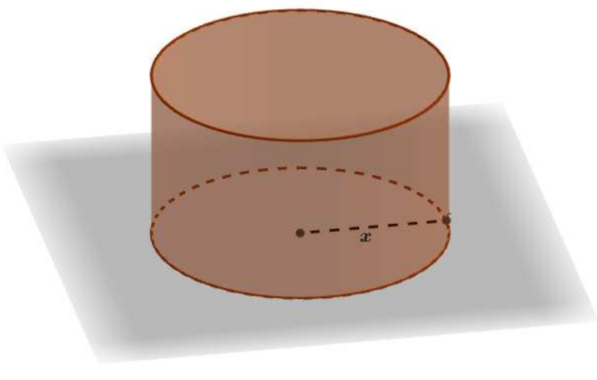
Tra tutte le casseruole di forma cilindrica aventi la stessa superficie S (superficie laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

Suggerimento

Schematizza la casseruola con un cilindro ed indica con x il raggio di base: se la superficie di base + superficie laterale sono uguali a S puoi ricavare l'altezza h…..

Dopo aver determinato l'altezza in funzione di x e S, calcola il volume $V(x)$ e poi la sua derivata $V'(x)$ e ponendola uguale a zero determina il valore del raggio per cui si ottiene il massimo volume.

Verifica che sostituendo il valore trovato nell'espressione dell'altezza si trova che la casseruola di volume massimo risulta avere …….



Integrali indefiniti

FUNZIONI PRIMITIVE

Definizione
F(x) si dice "funzione primitiva" di f(x) se $F'(x) = f(x)$

Esempio
Quali sono le funzioni primitive di $f(x) = \cos x$?

Ricordando che $D(senx) = \cos x$ avrò che $F(x) = senx$ ma anche $y = senx + c$ (con $c \in R$) risulta funzione primitiva di $f(x) = \cos x$ poiché $D(senx + c) = \cos x$.

Abbiamo infatti il seguente teorema:

Teorema: se F(x) è una primitiva di f(x) $\Rightarrow$ anche F(x) + c ($c \in R$) è una primitiva di f(x) ed ogni primitiva di f(x) è del tipo F(x) + c.

Dimostrazione

Poiché $D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$ anche $F(x) + c$ è primitiva di f(x).

Inoltre se G(x) è una primitiva di f(x) si ha:

$$D(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x) - F(x) = c \Rightarrow \quad G(x) = F(x) + c$$

Definizione: l'insieme delle primitive di f(x) viene indicato con il simbolo

$$\boxed{\int f(x)dx}$$

che si legge *integrale indefinito di f(x) in dx.*

Quindi se F(x) è una primitiva di f(x)

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c} \text{con } c \in R$$

f(x) prende il nome di *funzione integranda*.

Nel nostro esempio quindi scriviamo che:

$$\int \cos x \; dx = senx + c$$

L'integrazione indefinita può essere considerata l'operazione inversa della differenziazione poiché

$$d\left(\int f(x)\ dx\right)=d\left(F(x)+c\right)=F'(x)\ dx=f(x)\ dx$$

E' chiaro inoltre che $D\left(\int f(x)dx\right)=D(F(x)+c)=F'(x)=f(x)$

Proprietà dell'integrale indefinito

1. $\int k\cdot f(x)\ dx=k\cdot\int f(x)\ dx$

Dimostrazione

Se F(x) è una primitiva di *f(x)* allora $k\cdot F(x)$ è primitiva di $k\cdot f(x)$ poiché $D(k\cdot F(x))=k\cdot f(x)$

Esempio: $\int 2\cos x dx=2\int\cos x dx=2(senx+c)$ o anche $2senx+c$

2. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

Dimostrazione

Se F(x) e G(x) sono primitive rispettivamente di *f(x)* e di *g(x)*,allora $D\left(F(x)+G(x)\right)=f(x)+g(x)$ e quindi F(x) + G(x) è una primitiva di *f(x)+g(x)*.

Esempio: $\int\left(x+\cos x\right)dx=\int x\ dx+\int\cos x\ dx=\frac{1}{2}x^2+senx+c$

Integrali indefiniti immediati

1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \qquad con \qquad \alpha \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$ (*)

3) $\int senx\ dx = -\cos x + c \qquad\qquad \int \cos x\ dx = senx + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = tgx + c \qquad\qquad \int \frac{1}{sen^2 x}\ dx = -\cot gx + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsenx + c \qquad\qquad \int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctgx + c$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ (ricorda che $Da^x = a^x \cdot \ln a$)

$\int e^x dx = e^x + c$ (caso particolare per $a = e$)

(*) NOTA $\qquad \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x>0 \\ \ln(-x) & x<0 \end{cases} \Rightarrow D(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ -\frac{1}{x}\cdot(-1) & x<0 \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

Esempi

1) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

2) $\int \frac{3}{x}\ dx = 3\int \frac{1}{x}\ dx = 3\ln|x| + c$

3) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = tgx + senx + c$

$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4arcsenx + c$

4) $\int 2e^x dx = 2\int e^x dx = 2e^x + c$

Integrazioni basate sulla derivata della funzione composta

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta, abbiamo:

1) $\boxed{\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx = \dfrac{1}{\alpha+1}\cdot f^{\alpha+1}(x)+c \qquad \alpha\neq -1}$

***Esempio 1*:** $\int sen^2 x\cdot \cos x\ dx = \dfrac{sen^3 x}{3}+c$

Infatti se deriviamo $D\left(\dfrac{sen^3 x}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot 3sen^2 x\cdot\cos x = sen^2 x\cdot \cos x$

Esempio 2: $\int \left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx$

Cerchiamo di riportarci al caso $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx$ osserviamo che $D\left(x^2+1\right)=2x$, mentre nella nostra funzione integranda abbiamo solo *x*. Per ottenere *f'(x)* moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int \left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^3\cdot 2x\ dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+c$$

Esempio 3: $\int \ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}\ dx = \dfrac{\ln^3 x}{3}+c$

Esempio 4: $\int \sqrt{x+1}\ dx$

Osserviamo che $\sqrt{x+1}=\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}$ e che $D\left(x+1\right)=1$, quindi

$$\int\sqrt{x+1}\ dx = \int \left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\left(x+1\right)\sqrt{1+x}+c$$

NOTA

Un caso significativo è : $\boxed{\int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\ dx = -\dfrac{1}{f(x)}+c}$

2) $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + c}$

Esempio 1: $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\ dx$

Se ci accorgiamo che $D(x^2+x) = 2x+1$, abbiamo subito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\ dx = \int \frac{D(x^2+x)}{x^2+x}\ dx = \ln|x^2+x| + c$$

Esempio 2: $\int \frac{senx}{\cos x}\ dx$

In questo caso $D(\cos x) = -senx$ mentre noi abbiamo $senx$ possiamo. Possiamo "aggiustare" le cose così:

$$\int \frac{senx}{\cos x}\ dx = -\int \frac{(-senx)}{\cos x} dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

3)

a) $\boxed{\int (senf(x)) \cdot f'(x)\ dx = -\cos(f(x)) + c}$

Esempio: $\int sen 2x\ dx$

Se $f(x) = 2x$ allora $D(f(x)) = 2$.

Possiamo "aggiustare" le cose:

$$\int sen2x\ dx = \frac{1}{2}\int (sen2x) \cdot 2\ dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

b) $\boxed{\int (\cos f(x)) \cdot f'(x)\ dx = sen(f(x)) + c}$

Esempio: $\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\ dx$.

$$\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\ dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

c) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx = tg\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{3}{\cos^2 3x}\ dx = tg3x + c$

d) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}\ dx = -\cot g\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{x^2}{sen^2 x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{sen^2 x^3} dx = -\frac{1}{3}\cot gx^3 + c$

e) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\ dx = arcsen\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2}arcsenx^2 + c$

f) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\ dx = arctg\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)} dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

4)
$$\boxed{\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c}$$

$$\boxed{\int \left(e^{f(x)}\cdot f'(x)\right)\ dx = e^{f(x)}+c}$$

Esempio 1: $\int x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+1}+c$ notando che $D\left(x^2+1\right)=2x$

Esempio 2: $\int \cos x\cdot 3^{senx}dx = \frac{3^{senx}}{\ln 3}+c$

ESERCIZI
INTEGRAZIONI IMMEDIATE

1) $\int senx \cdot \cos x \ dx$

2) $\int senx \cdot \cos^4 x \ dx$

3) $\int (1+x)^4 dx$

4) $\int \sqrt{2x+1} \ dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ dx$

6) $\int tgx \ dx$

7) $\int \cot gx \ dx$

8) $\int \frac{1}{2x+1} \ dx$

9) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

10) $\int \frac{e^x}{2e^x+5} \ dx$

11) $\int \cos 3x \ dx$

12) $\int \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right) dx$

13) $\int \frac{1}{sen^2(3-x)} \ dx$

14) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

15) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \ dx$

16) $\int sen^3 x \cdot \cos x \ dx$

17) $\int (2+x)^3 dx$

18) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

19) $\int sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \ dx$

20) $\int \frac{1}{sen^2(2-x)} dx$

21) $\int \frac{1}{x^2+3} dx$

22) $\int e^{2x+1} dx$

23) $\int \frac{x}{x^2-2} dx$

24) $\int \frac{x-1}{x^2+5} dx$

25) $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$

26) $\int x \cdot (x^2-1)^3 dx$

27) $\int x \cdot \cos x^2 dx$

28) $\int sen4x \ dx$

29) $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx$

30) $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{sen^2 x}{2}+c$

2) $-\frac{\cos^5 x}{5}+c$

3) $\frac{(1+x)^5}{5}+c$

4) $\frac{1}{3}\cdot(2x+1)\cdot\sqrt{2x+1}+c$

5) $-\sqrt{1-x^2}+c$

6) $-\ln|\cos x|+c$

7) $\ln|senx|+c$

8) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$

9) $\ln|\ln x|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln(2\cdot e^x+5)+c$

11) $\frac{1}{3}sen3x+c$

12) $\frac{1}{4}sen\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+c$

13) $\cot g(3-x)+c$

14) $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$

15) $2e^{\sqrt{x}}+c$

16) $\frac{sen^4 x}{4}+c$

17) $\frac{(2+x)^4}{4}+c$

18) $\frac{3}{2}arcsenx^2+c$

19) $-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+c$

20) $\cot g(2-x)+c$

21) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

22) $\frac{1}{2}e^{2x+1}+c$

23) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2|+c$

24) $\frac{1}{2}\ln(x^2+5)-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}+c\right)$

25) $\ln|e^x-1|+c$

26) $\frac{1}{8}(x^2-1)^4+c$

27) $\frac{1}{2}senx^2+c$

28) $-\frac{1}{4}\cos 4x+c$

29) $\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+c$

30) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}x)+c$

Integrazione mediante semplici trasformazioni

1) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\ dx$

In questo caso conviene semplicemente "separare" i termini al numeratore:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\ dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = arctgx + \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + c$$

2) $\int sen^2 x\ dx$

Ricordiamo che $sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, quindi:

$$\int sen^2 x\ dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\ dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen2x + c$$

3) $\int \cos^2 x\ dx$

Analogamente al precedente ricordando che $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

4) $\int sen^3 x\ dx$

Possiamo scrivere: $sen^3 x = senx \cdot sen^2 x = senx\left(1-\cos^2 x\right) = senx - senx\cos^2 x$ quindi

$$\int sen^3 x\ dx = \int senx\ dx - \int senx \cdot \cos^2 x\ dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

5) $\int \cos^3 x\ dx$

Possiamo scrivere $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\left(1-sen^2 x\right) = \cos x - \cos x \cdot sen^2 x$ e si procede come nel caso precedente.

6) $\int \frac{1}{senx\cos x}\ dx$

In questo caso conviene sostituire $1 = sen^2 x + \cos^2 x$ e poi separare i due termini:

$$\int \frac{1}{senx\cos x}\ dx = \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{senx\cos x} dx = \int \frac{sen^2 x}{senx\cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{senx\cos x} dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{senx} dx =$$
$$= -\ln|\cos x| + \ln|senx| + c$$

7) $\int tg^2 x\ dx$

$$\int tg^2 x\ dx = \int \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = tgx - x + c$$

8) $\int \frac{1}{senx} dx$

Se poniamo $senx = sen2\left(\frac{x}{2}\right) = 2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ e ritroviamo un integrale simile al n°6:

$$\int \frac{1}{senx} dx = \int \frac{1}{2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{sen^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{sen\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\ dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2}sen\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\ dx + \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}\ dx = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|sen\frac{x}{2}\right| + c$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Consideriamo una funzione razionale fratta $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ con grado di D(x) ≤ 2.

Distinguiamo due casi:

a) **Se il grado del numeratore N(x) è maggiore o uguale al grado del denominatore D(x)** si esegue la divisione.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+3}\,dx \Longrightarrow$

$$\begin{array}{ccc|c}
x^2 & 0x & 1 & x+3 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -3x & & x-3 \\ \cline{1-3}
= & -3x & 1 & \\
 & 3x & 9 & \\ \cline{2-3}
 & = & 10 &
\end{array}$$

Quindi $x^2+1=(x-3)(x+3)+10$

e sostituendo

$$\int \frac{x^2+1}{x+3}\,dx=\int \frac{(x-3)(x+3)+10}{x+3}\,dx=\int (x-3)\,dx+\int \frac{10}{x+3}dx=\frac{(x-3)^2}{2}+10\cdot\ln|x+3|+c$$

b) **Se grado di N(x) < grado di D(x)**

- Se il grado di D(x) è 1, allora il grado di N(x) sarà 0 (quindi N(x) = costante) e l'integrale si risolve facilmente.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{10}{x+3}dx=10\int \frac{1}{x+3}dx=10\cdot\ln|x+3|+c$

- Se il grado di D(x) è 2, allora D(x) = ax^2+bx+c e distinguiamo tre casi a seconda che il discriminante dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ (Δ) sia positivo, nullo o negativo.

Caso 1: $\Delta > 0$

In questo caso ci si riconduce a $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

Esempio: $\int \frac{2x-7}{x^2-x-2}\,dx$

Considerando il denominatore si ha che $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$: cerchiamo due costanti, che chiameremo A e B, in modo che si abbia:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Basta sviluppare al secondo membro dell'uguaglianza e porre, per il principio di identità dei polinomi, l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)\cdot(x-2)}$$

Uguagliando i coefficienti si ha il sistema:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-1 \end{cases}$$

Perciò: $\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{3}{(x+1)} - \frac{1}{(x-2)}$ e quindi:

$$\int \frac{2x-7}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{3}{x+1}dx - \int \frac{1}{x-2}dx = 3\ln|x+1| - \ln|x-2| + c$$

Attenzione
Se nel polinomio al denominatore $a \neq 1$ occorre ricordare che $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Esempio: $\int \frac{1}{2x^2-5x-3}dx$

$2x^2-5x-3=0$ ammette come radici $x_1 = 3; x_2 = -\frac{1}{2}$, perciò la sua scomposizione sarà:

$2x^2-5x-3 = 2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}(x-3)\left(\frac{2x+1}{\cancel{2}}\right) = (x-3)(2x+1)$, da cui $\frac{1}{2x^2-5x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+1}$

e, procedendo come nell'esempio precedente, si giunge alla soluzione.

Caso 2: $\Delta = 0$

In questo caso il polinomio al denominatore è un quadrato e ci si può ricondurre a

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{1}{f(x)} + c$$

Esempio 1: $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1}$

$4x^2 - 4x + 1$ è il quadrato di $(2x-1)$ perciò l'integrale assegnato può essere scritto come:

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x-1)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2x-1)} + c$$

Esempio 2: $\int \frac{x+5}{9x^2 - 6x + 1}dx$

Prima di "spezzare" il numeratore dobbiamo vedere quello che può essere utile affinché il numeratore possa essere riportato ad essere la derivata del denominatore.

$$D(9x^2 - 6x + 1) = 18x - 6 = 18\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Quindi possiamo scrivere $x + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{16}{3}$

$$\int \frac{x - \frac{1}{3}}{9x^2 - 6x + 1}\,dx + \frac{16}{3}\int \frac{1}{9x^2 - 6x + 1}\,dx = \frac{1}{18}\ln\left(9x^2 - 6x + 1\right) - \frac{16}{9}\frac{1}{(3x-1)} + c$$

Nota: la prima parte della risoluzione può anche essere scritta come

$$\frac{1}{18}\ln(3x-1)^2 = \frac{1}{18}\cdot 2\cdot \ln|3x-1| = \frac{1}{9}\cdot \ln|3x-1|$$

Caso 3: $\Delta < 0$

In questo caso il polinomio al denominatore non si può scomporre. Proviamo a fare in modo che nel denominatore ci sia un quadrato (metodo del completamento del quadrato) in modo da poter applicare

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg\left(f(x)\right)+c$$

Esempio 1: $\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$

$x^2-4x+6=\left(x^2-4x+4\right)+2=(x-2)^2+2$, quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+2}$$

Ora mettiamo in evidenza il 2 in modo da avere 1 e poter applicare l'integrale dell'arcotangente:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2+2} = \int \frac{dx}{2\left[\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left[\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+c$$

Esempio 2: $\int \frac{3x+1}{x^2+4}\ dx$

In questo caso possiamo "spezzare" il numeratore, ma prima vediamo come risulta la derivata del denominatore:

$D(x^2+4)=2x$

Quindi basterà spezzare:

$$\int \frac{3x}{x^2+4}\ dx + \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\ dx + \int \frac{dx}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\int \frac{dx}{4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]}dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

ESERCIZI
INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

1) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

2) $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

3) $\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$

4) $\int \frac{2}{x^2 - 3} dx$

5) $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 16}$

6) $\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 1} dx$

7) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$

8) $\int \frac{x}{x^2 + x + 2} dx$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

2) $-\ln|x-1|+\ln|x-2|+c=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$

3) $\frac{1}{30}\ln|3x-5|-\frac{1}{30}\ln|3x+5|+c=\frac{1}{30}\ln\left|\frac{3x-5}{3x+5}\right|+c$

4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c$

5) $-\frac{1}{x+4}+c$

6) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+1|-\frac{2}{x-1}+c=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+c$

7) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

8) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+2)-\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+c$

Integrazione per sostituzione

Esempio 1: $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

L'integrale non è immediato e, per cercare di renderlo tale, poniamo $t=\sqrt{x}$.

$$t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2\cdot t\ \ dt$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2t\ \ dt=2\int \frac{t}{t(t+1)}dt=2\int \frac{1}{t+1}dt=2\int \frac{dt}{t+1}=2\cdot \ln|t+1|+c$$

Tornando alla variabile x (essendo $t=\sqrt{x}$) abbiamo:

$$2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$$

Esempio 2: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

In questo caso se poniamo $\boxed{x=sent}$ da cui $dx=\cos t\ \ dt$ avremo:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sqrt{1-(sent)^2}\ \cos t\ \ dt=\int \sqrt{1-sen^2 t}\,\cos t\ \ dt=\int \cos^2 t\ \ dt$$

$$=\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}sen2t+c$$

Visto che $x=sent$, si ha $t=arcsenx$ da cui, sostituendo nella soluzione dell'integrale abbiamo in conclusione:

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{4}2sent\cos t+c=\frac{1}{2}arcsenx+\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{1-x^2}+c$$

Per esempio abbiamo $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ possiamo ricondurci all'esempio precedente mettendo in evidenza il 4 e portandolo fuori della radice:

$$2\cdot \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\ \ dx$$

A questo punto se poniamo $\boxed{\frac{x}{2}=sent}$ possiamo procedere in modo analogo al precedente.

Integrazione per parti

Ricordando la regola di derivazione del prodotto:

$$D(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \rightarrow f'(x)\cdot g(x) = D(f(x)\cdot g(x)) - f(x)\cdot g'(x)$$

ed integrando: $\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$

che viene detta regola di "integrazione per parti" in cui *f'(x)* prende il nome di fattore derivato e *g(x)* è detto fattore finito.

Esempio 1: $\int x\cdot \cos x dx$

Possiamo considerare cosx come fattore derivato cioè $\cos x = D(senx)$:

$$\int x\cdot D(senx)\ dx = xsenx - \int 1\cdot senx\ dx = xsenx + \cos x + c$$

NOTA: se avessimo scelto come fattore derivato x ($x = D\left(\frac{x^2}{2}\right)$), avremmo solo complicato la situazione senza risolvere l'integrale.

Esempio 2: $\int x\cdot e^x dx$

$$\int x\cdot e^x dx = \int x\cdot D(e^x)dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Esempio 3: $\int x\cdot \ln x dx$

$$\int x\cdot \ln x dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot \ln x\ dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

***Esempio 4**:* $\int arctgx dx$

In casi come questo, possiamo sempre pensare che la funzione sia moltiplicata per un fattore

1 =D(x)

e quindi $\int 1\cdot arctgx dx = \int D(x)\cdot arctgx\ dx = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

***Esempio 5**:* $\int \ln x\ dx$

$$\int 1\cdot \ln x\ dx = \int D(x)\cdot \ln x\ dx = x\ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

Esercizi di ricapitolazione sugli integrali indefiniti

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

3) $\int \frac{(arcsenx)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

5) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

6) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

7) $\int \frac{x+1}{x^2+5}dx$

8) $\int \frac{dx}{\cos x}$

9) $\int \ln^2 x dx$

10) $\int e^x senx \ dx$

11) $\int \ln x \ dx$

12) $\int \frac{\cos x - senx}{\cos x + senx}dx$

13) $\int \cos x \cdot sen2x \ dx$

14) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

15) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

16) $\int \frac{x+1}{x^2-25}dx$

17) $\int \frac{1}{x^2+9}dx$

18) $\int \frac{dx}{x^2+10x+25}$

19) $\int \frac{1}{\cos x+1}dx$

20) $\int x^2 e^x dx$

21) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}}dx$

22) $\int \sqrt{x+1} \ dx$

23) $\int \frac{x+1}{x^2+4}dx$

24) $\int \frac{dx}{senx+1}$

25) $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$

26) $\int \frac{x+3}{x^2+9}dx$

27) $\int xarctgx \ dx$

28) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

29) $\int \frac{2x+3}{x+5}dx$

30) $\int \sqrt{5-x^2}dx$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{1}{2}arcsen2x+c$

2) $-\ln|x-2|+\ln|x-3|+c$

3) $\frac{1}{4}(arcsenx)^4+c$

4) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

5) $\frac{1}{6}arctg\left(\frac{2x}{3}\right)+c$

6) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$

7) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$

8) $\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+c$

9) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$

10) $\frac{1}{2}e^x(senx-\cos x)+c$

11) $x\ln x-x+c$

12) $\ln|\cos x+senx|+c$

13) $-\frac{2}{3}\cos^3 x+c$

14) $\frac{1}{2}arcsenx+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$

15) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

16) $\frac{3}{5}\ln|x-5|+\frac{2}{5}\ln|x+5|+c$

17) $\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

18) $-\frac{1}{x+5}+c$

19) $tg\left(\frac{x}{2}\right)+c$

20) $e^x\left(x^2-2x+2\right)+c$

21) $\frac{1}{4}arcsen(2x^2)+c$

22) $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x}+c$

23) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$

24) $-\frac{2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}+c$

25) $-\frac{1}{x-2}+c$

26) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

27) $\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+c$

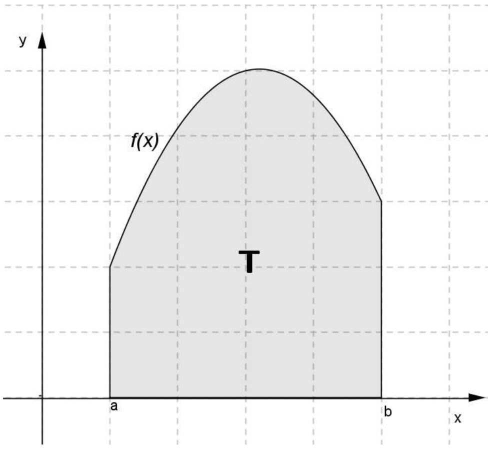
28) $\frac{1}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{6}\ln|x+3|+c$

29) $2x-7\ln|x+5|+c$

30) $\frac{5}{2}arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{5-x^2}+c$

Integrali definiti

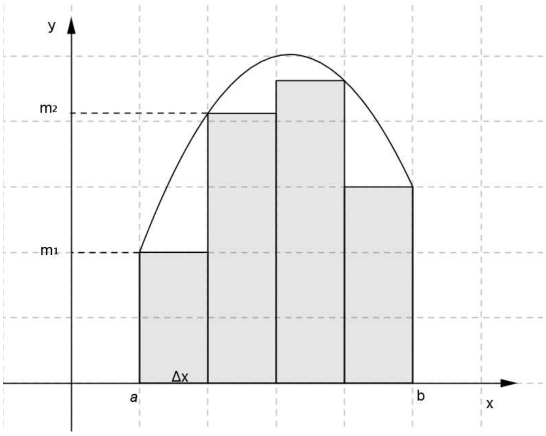
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato e supponiamo che $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$.



Consideriamo la regione T delimitata dal grafico di *f(x)*, dalle rette $x=a$, $x=b$ e dall'asse delle ascisse (regione denominata **trapezoide**):

$$T = \{(x; y) /\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

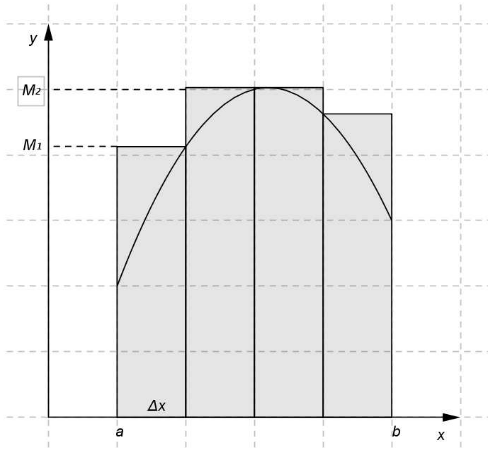
Consideriamo una suddivisione dell'intervallo [*a,b*] in intervalli di uguale ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Poiché in ciascuno di questi intervalli *f(x)* è continua, per il teorema di Weierstrass, assume un



Analizziamo i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i minimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo inscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo inscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

$$m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + m_3 \cdot \Delta x + \ldots = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$$



Passiamo adesso a considerare i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i massimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo circoscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo circoscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

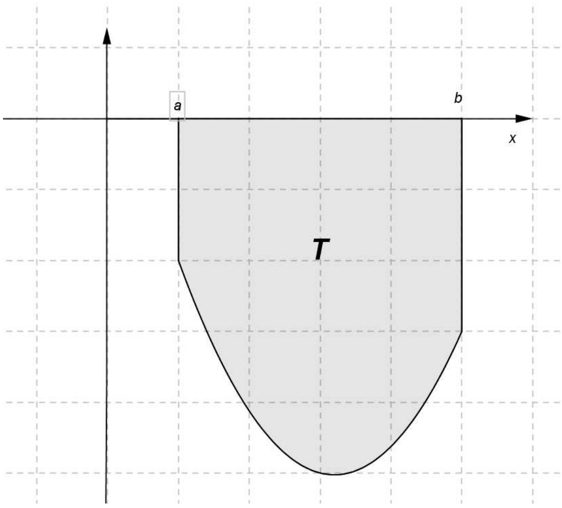
$$M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + M_3 \Delta x + \cdots = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x$$

Se aumentiamo n cioè il numero degli intervalli in cui l'intervallo è suddiviso, è intuitivo dedurre che l'area del plurirettangolo inscritto si avvicina all'area del plurirettangolo circoscritto; infatti è possibile dimostrare che:

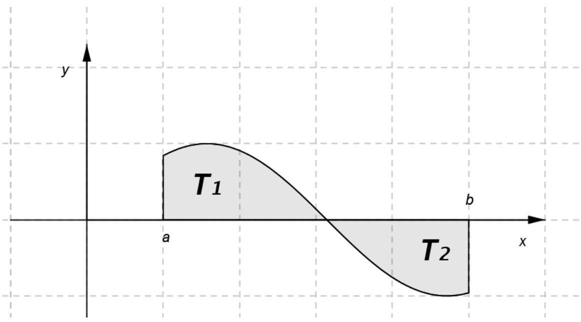
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$$

Questo limite viene indicato con il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ e si legge **integrale definito tra *a* e *b* di *f(x)* in dx.**

Osserviamo che il simbolo di integrale è la deformazione del simbolo di sommatoria, che i valori m_i o M_i tendono al valore della funzione e Δx tende a dx.



Nel caso in cui $f(x) \geq 0$, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale all'area del trapezoide T. È, però, abbastanza chiaro che, nel caso in cui $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx = \text{-}area\ T$.

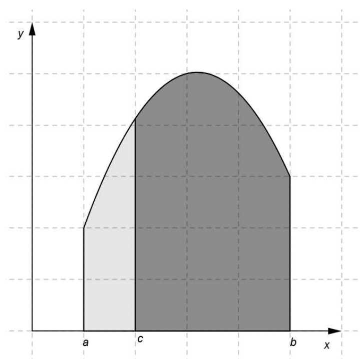


Se, infine, $f(x)$ non ha segno costante, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale a $\int_a^b f(x)dx = area\ T_1\text{-}area T_2$.

Proprietà dell'integrale definito

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
   In questo caso il trapezoide è ridotto ad un segmento.

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ con $a \leq c \leq b$



Teorema del valor medio

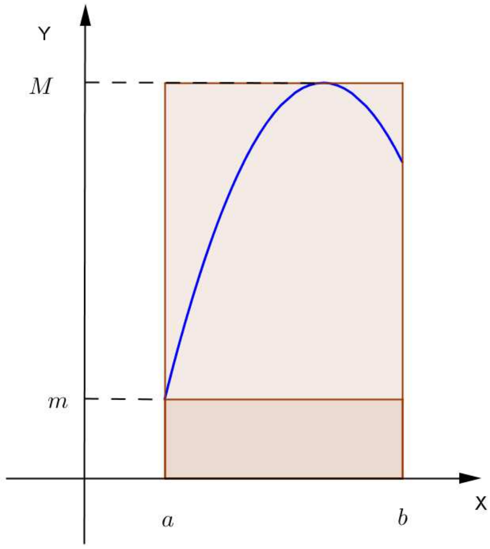
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, allora esiste un punto c interno ad $[a,b]$ tale che: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b\text{-}a)$.

Dimostrazione: per il teorema di Weierstrass esistono massimo M e minimo m assoluti di *f(x)* in $[a,b]$, quindi possiamo scrivere:

$$m(b\text{-}a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b\text{-}a)$$

da cui, dividendo per $(b\text{-}a)$

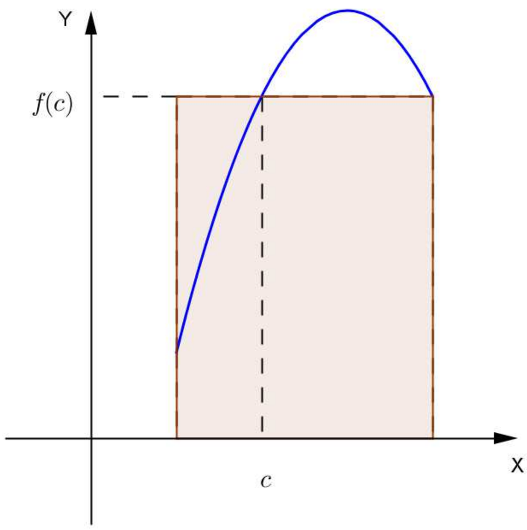
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b\text{-}a} \leq M$$



Ma allora per il teorema dei valori intermedi, esiste un punto c interno all'intervallo per cui:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b\text{-}a)} = f(c)$$

OSSERVAZIONE: Il valore $f(c)$ viene detto **valor medio** e risulta l'altezza del rettangolo avente per base l'intervallo$[a,b]$ ed equivalente al trapezoide.



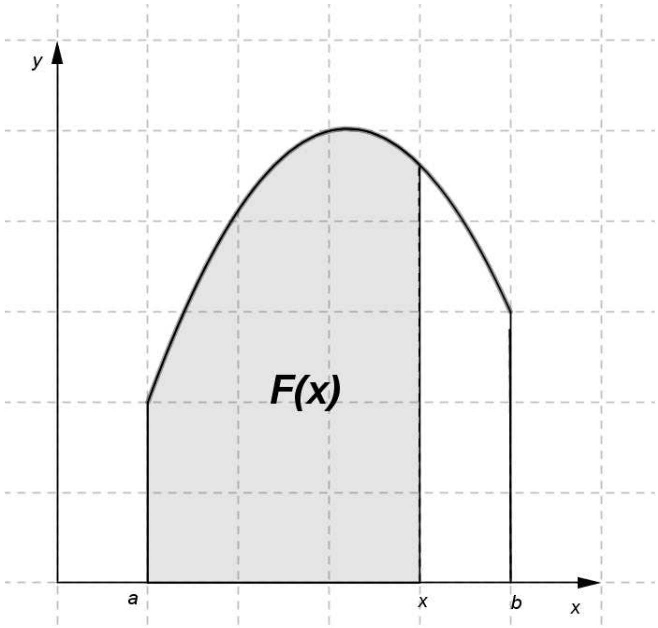
Area del trapezoide = $(b\text{-}a)f(c)$

La funzione integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, si chiama **funzione integrale** F(x), la funzione così definita

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

Osserviamo che la variabile di integrazione *t* non è stata chiamata *x* solo per non confonderla con l'estremo superiore di integrazione (ma potevamo scegliere qualsiasi altra lettera).



Si nota subito che:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Lo studio della funzione integrale ci permetterà di scoprire il legame tra integrale definito ed integrale indefinito.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Data f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e considerata la sua funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ si ha che:

a) $F'(x) = f(x)$ cioè $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$

b) $\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$ dove $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$

Dimostrazione:

a) Per calcolare $F'(x)$, calcoliamo, secondo la definizione di derivata, il limite del rapporto incrementale di $F(x)$:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} =$$
$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Dal teorema della media applicato nell'intervallo $[x, x+h]$ è possibile dedurre che esiste un punto c interno all'intervallo per cui $\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(c)$. Perciò:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$ (perché f(x) è continua)

b) Supponiamo che $\int f(x)dx = \varphi(x) + c$.

Allora $F(x)$ sarà una delle primitive di $f(x)$, cioè $F(x) = \varphi(x) + c^*$
Ma, per quanto già detto, si avrà che:

$$F(a) = \varphi(a) + c^* = 0 \rightarrow c^* = -\varphi(a)$$ e quindi

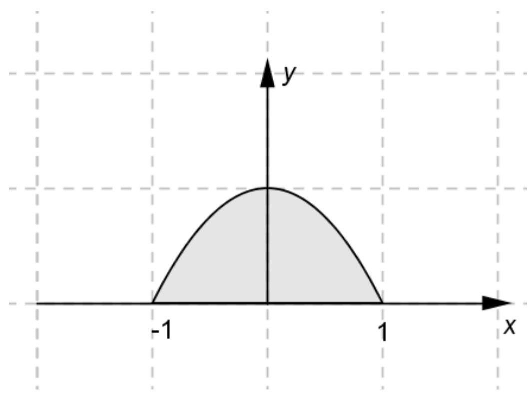
$$F(b) = \int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) + c^* = \varphi(b) - \varphi(a)$$

NOTA: la quantità $\varphi(b) - \varphi(a)$ in genere viene indicata con la scrittura $[\varphi(x)]_a^b$

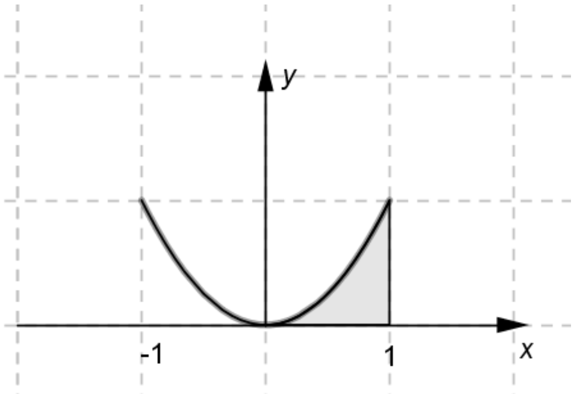
Abbiamo quindi trovato un metodo per calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$: determiniamo prima l'integrale indefinito $\varphi(x)$ e poi calcoliamo $\varphi(b) - \varphi(a)$.

Esempio:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$



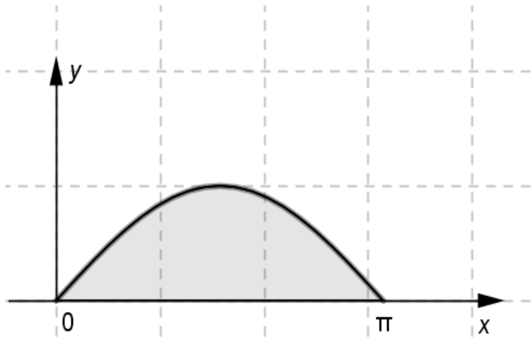
Esempi



1) Calcoliamo $\int_0^1 x^2\, dx$

Abbiamo che $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Quindi l'area compresa tra la parabola di equazione $y = x^2$, l'asse x e la retta $x = 1$ misura $\frac{1}{3}$.



2) Calcoliamo $\int_0^{\pi} senx\, dx$

Abbiamo

$\int_0^{\pi} senx\, dx = [\text{-}cosx]_0^{\pi} = \text{-}cos\pi\text{-}(\text{-}cos0) = 2$

Quindi l'area della regione colorata qui a fianco misura 2.

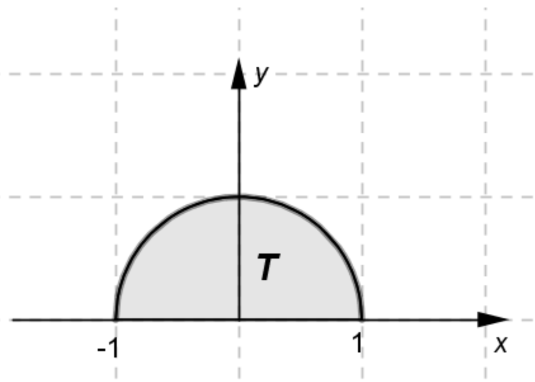
3) Calcoliamo $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$

Come già visto studiando gli integrali indefiniti questo integrale si fa con la sostituzione $x = sent$, da cui $dx = cost\ dt$.

Cambiando la variabile, occorre cambiare anche gli estremi di integrazione perché si riferiscono alla variabile x, mentre l'integrale sarà in t. Poiché $x = sent$ si avrà, per l'estremo inferiore, $\text{-}1 = sent \rightarrow t = \text{-}\frac{\pi}{2}$ e, analogamente per l'estreemo superiore. Quindi l'integrale dato diviene:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\, dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\text{-}\left(\text{-}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Infatti $y = \sqrt{1 - x^2}$ ha come grafico la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, per cui la regione T ha area $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.



Esercizi sul calcolo dell'integrale definito

Calcola i seguenti integrali definiti interpretandoli anche geometricamente:

1) $\int_0^1 2x\ dx$ $[1]$

2) $\int_0^3 (3-x)\ dx$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

3) $\int_0^2 x^2 dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

4) $\int_{-1}^1 x^3 dx$ $[0]$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$ $[1]$

6) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ $[2\pi]$

7) $\int_{-1}^2 (4-x)\ dx$ $\left[\frac{21}{2}\right]$

8) $\int_0^{\pi} \cos x\ dx$ $[0]$

9) $\int_0^1 (x^3+1)\ dx$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\ dx$ $\left[\ln\sqrt{2}\right]$

11) $\int_0^1 e^x dx$ $[e-1]$

12) $\int_1^e \ln x\ dx$ $[1]$

13) $\int_0^1 arctgx\ dx$ $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\ln 2\right]$

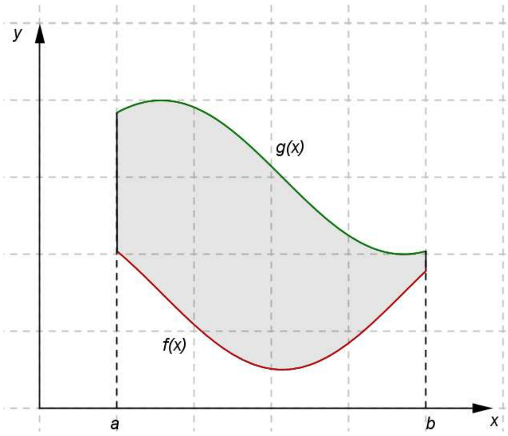
14) $\int_0^4 \sqrt{x}\ dx$ $\left[\frac{16}{3}\right]$

15) $\int_{-2}^2 (4-x^2)\ dx$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen2x\ dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Calcolo di aree

Area della parte di piano delimitata dal grafico di due funzioni



Consideriamo due funzioni *f(x)* e *g(x)* continue nell'intervallo $[a, b]$ tali che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e supponiamo che i grafici si trovino entrambi sopra l'asse *x* come in figura.

Possiamo considerare la parte di piano compresa tra i due grafici:

$$T = \{(x, y) / a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Risulta subito evidente che $\boxed{\text{area T} = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx}$

Questo vale in generale, purché $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ cioè anche quando le funzioni non sono entrambe positive perché possiamo sempre operare una traslazione opportuna per condursi al caso precedente e quindi $\text{Area T} = \int_a^b [(g(x)+h) - (f(x)+h)]\ dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$.

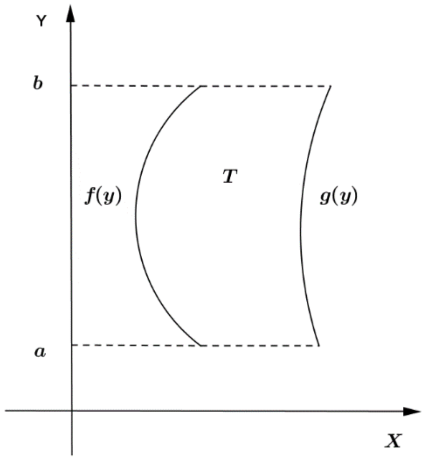
Nel caso considerato T viene anche detto **dominio normale rispetto all'asse *x***: le due funzioni hanno *x* come variabile indipendente e si integra rispetto ad *x*.

Se invece abbiamo due funzioni *f(y)* e *g (y)* continue nell'intervallo $[a,b]$ tali che

$$f(y) \leq g(y)\ \forall y \in [a, b]$$

l'area di piano compresa tra i grafici delle due funzioni (detta **dominio normale rispetto all'asse *y***) si troverà integrando rispetto ad *y*.

$$\boxed{\text{Area T} = \int_a^b [g(y) - f(y)]\ dy}$$

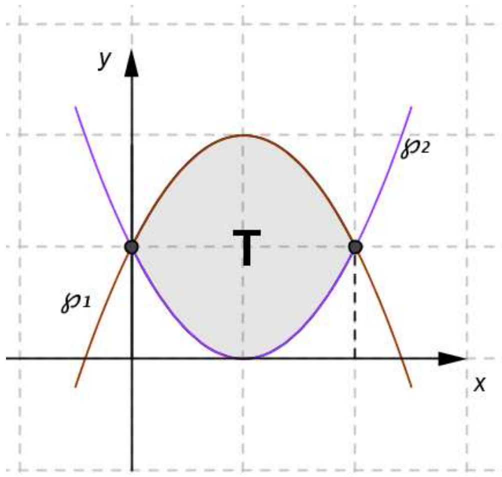


Esempi

1) Determinare l'area della regione di piano compresa tra

$\mathcal{P}_1: y = -x^2 + 2x + 1$ e $\mathcal{P}_2: y = x^2 - 2x + 1$

Rappresentando graficamente le parabole, abbiamo che $\mathcal{P}_1$ ha vertice $V_1(1,2)$, $\mathcal{P}_2$ ha vertice $V_2(1,0)$ e le loro intersezioni sono i punti $(0,1)$ e $(2,1)$.

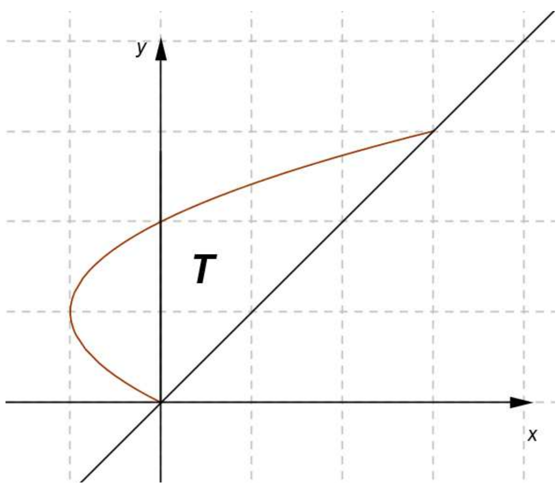


L'area richiesta si ottiene calcolando:

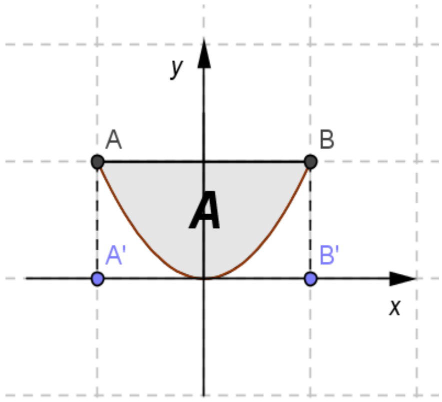
$$\int_0^2 (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)dx = \int_0^2 [(-x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)]dx = = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

2) Determinare l'area della regione T di piano delimitata dalla parabola $x = y^2 - 2y$ e dalla retta $r: y = x$ .La parabola ha vertice $V_1(-1,1)$ ed interseca la retta data nei punti $(0,0)$, $(3,3)$ .La regione T è normale rispetto all'asse y e quindi integriamo rispetto ad y.

$$\int_0^3 (r - \mathcal{P})dy = \int_0^3 [y - (y^2 - 2y)]dy = \int_0^3 (3y - y^2)dy = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \cdots = \frac{9}{2}$$



3) Determinare l'area della regione A di piano delimitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$ (si chiama "**segmento parabolico**").



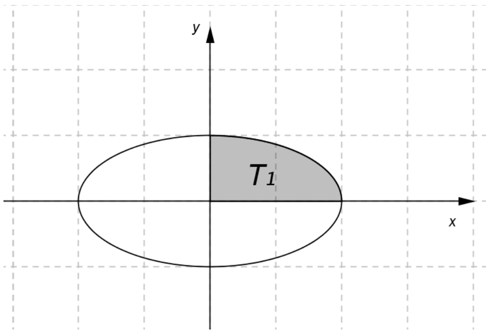
Vista la simmetria di A rispetto all'asse y possiamo calcolare l'integrale in questo modo:

$$\text{area A} = 2 \cdot \int_0^1 \left(1 - x^2\right) \, dx = 2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

In generale è semplice dimostrare che:

$$\text{area segmento parabolico} = \frac{2}{3} \cdot \text{(area rettangolo ABB'A')}$$

4) Determinare l'area della regione di piano T delimitata dall'ellisse $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Ricaviamo y : $y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$$area\ T_1 = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2\text{-}x^2}\, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2\text{-}x^2}\, dx$$

Notando che l'area richiesta è formata da 4 regioni uguali, per determinare T sarà sufficiente moltiplicare per 4 l'area T_1 che, come già visto nel capitolo sugli integrali indefiniti, ha per soluzione

$$\text{area } T_1 = \frac{b}{a}\left[a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen2t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\frac{\pi}{4}$$

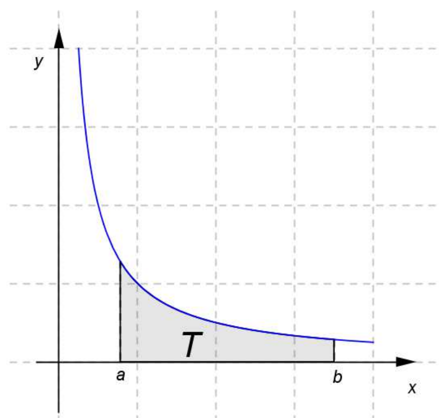
Quindi l'area richiesta è: area T = $\pi \cdot a \cdot b$.

Nota: infatti nel caso particolare in cui $a = b = r$ (l'ellisse è un cerchio) $\Rightarrow area\ T = \pi r^2$

5) Determinare l'area della regione di piano T delimitata dal grafico dell'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$, dall'asse x e dalle rette $x = a \quad x = b$, con $0 < a < b$.

Dobbiamo semplicemente calcolare l'integrale:

$$\text{area T} = \int_a^b \frac{1}{x} \, dx = [\ln|x|]_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$$



ESERCIZI

CALCOLO DI AREE

1) Calcola l'area della regione T compresa tra la parabola $P_1 : y = x^2 - 3x + 2$ e la parabola $P_2 : y = -x^2 + x + 2$

[area T = $\frac{8}{3}$]

2) Calcola l'area della regione T delimitata dalla parabola $P : x = y^2 - 1$ e dalla retta $x + y - 1 = 0$.

[area T = $\frac{9}{2}$]

3) Calcola l'area della regione T compresa tra il grafico di $y = \ln x$, l'asse x e la retta $x = e$.

[area T =1]

4) Calcola l'area della regione piana T compresa tra il grafico di $y = \sqrt{|x-1|}$ e la retta $y = 1$.

[area T = $\frac{2}{3}$]

5) Calcola l'area della regione piana T compresa tra la parabola $P_1 : x = y^2 - 2y$ e la parabola $P_2 : x = -y^2$.

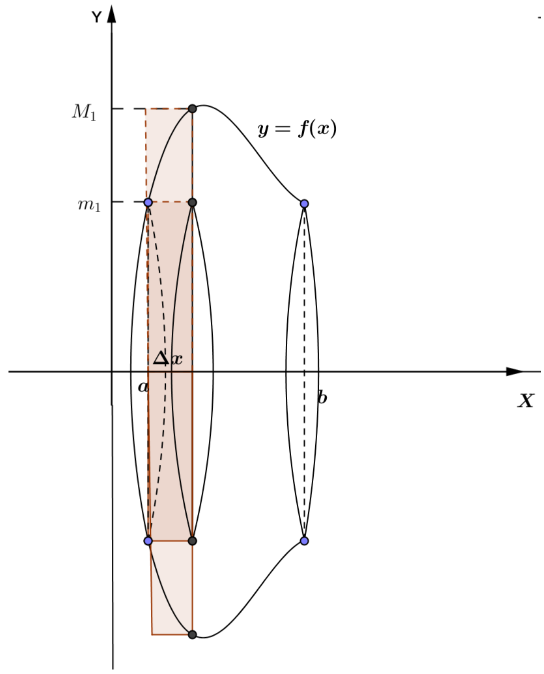
[area T = $\frac{1}{3}$]

6) Calcola l'area della regione piana T compresa tra il grafico di $P : y = 4x - x^2$, l'asse x e la tangente alla parabola nel suo punto P(1; 3).

[area T = $\frac{7}{12}$]

Volume di un solido di rotazione

Consideriamo una funzione $f:[a,b]\rightarrow\Re$ continua e supponiamo che $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$.
Se ruotiamo il trapezoide T attorno all'asse x otteniamo un solido di rotazione.



Come possiamo calcolarne il volume?

Se dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ ed in ciascuna consideriamo il minimo m_i ed il massimo M_i (come avevamo fatto quando abbiamo introdotto il concetto di integrale definito) possiamo osservare che il volume V del solido di rotazione sarà compreso tra il volume del "pluricilindro inscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo inscritto nel trapezoide e il volume del "pluricilindro circoscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo circoscritto al trapezoide.

Abbiamo quindi, considerando che i raggi dei vari cilindri inscritti corrispondono a m_i, mentre quelli dei cilindri circoscritti corrispondono a M_i:

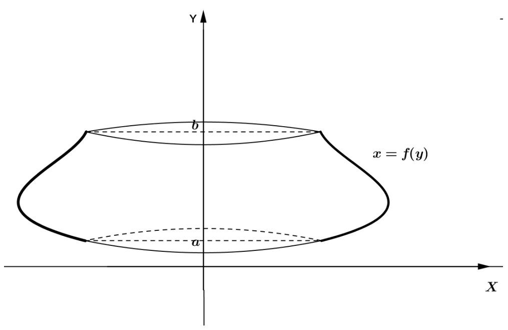
$$V_{in}=\sum_{i=1}^{n}\pi m_i^2\Delta x \qquad V_{circ}=\sum_{i=1}^{n}\pi M_i^2\Delta x$$

Facendo tendere il numero degli intervalli all'infinito $\lim\limits_{n\to+\infty}\Sigma\pi\cdot m_i^{\ 2}\cdot\Delta x=\lim\limits_{n\to+\infty}\Sigma\pi\cdot M_i^{\ 2}\cdot\Delta x=V$

Quindi si tratta di un integrale definito cioè:

$$\boxed{V=\int_a^b\pi\cdot f^2(x)\ dx=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\ dx}$$

Se invece consideriamo la funzione $x=f(y)$ definita tra a e b il cui trapezoide ruota intorno all'asse y, il volume del solido di rotazione ottenuto risulta naturalmente:



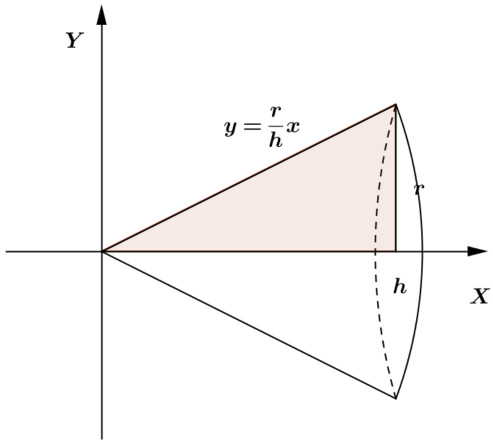
$$\boxed{V=\pi\cdot\int_a^b f^2(y)\ dy}$$

Esempi

Esempio 1

Ricaviamo la formula per determinare il volume di un cono utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere un cono di raggio r ed altezza h posso ruotare il trapezoide individuato dalla retta di equazione $y = \frac{r}{h}x$



Quindi:

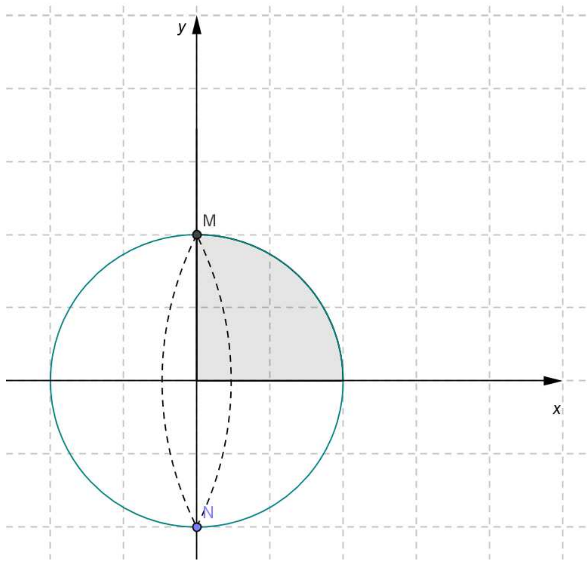
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Esempio 2

Ricaviamo la formula per determinare il volume di una sfera di raggio *r* utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere una sfera di raggio *r*, possiamo ruotare la semicirconferenza avente centro (0,0) e raggio *r*, la cui equazione è data da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Per la simmetria possiamo scrivere:

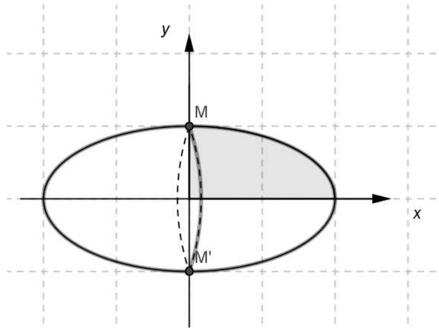


$$V = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Esempio 3: determinare il volume del solido generato dalla rotazione dell'ellisse $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a) attorno all'asse *x*



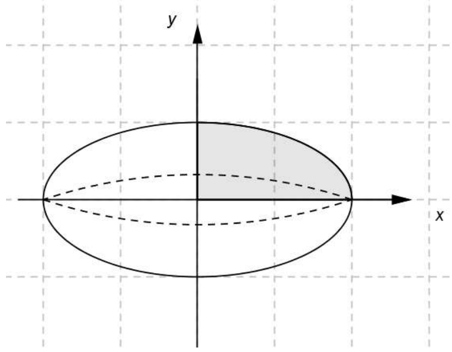
Ricaviamo $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \left(a^2 - x^2\right)$ e quindi abbiamo:

$$V = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 2\pi \left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^a = \dots = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

b) attorno all'asse y

Come al punto precedente, ricaviamo stavolta x^2 e seguiamo gli stessi passaggi del punto precedente: $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$

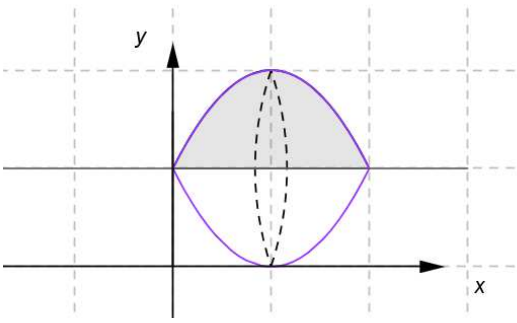
$$V = 2\pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)dy = 2\pi \left[\frac{a^2}{b^2}\left(b^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\right]_0^b = \dots = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$



Nota: le due espressioni coincidono quando a = b = r (sfera di raggio r) e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (volume della sfera).

***Esempio 4*:** determinare il volume del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla parabola $\mathcal{P}: y = -x^2 + 2x + 1$ e dalla retta $r: y = 1$ attorno a y=1.

Per poter applicare la formula per la rotazione occorre traslare il sistema di riferimento in modo che la retta *r* sia l'asse delle ascisse.



Applicando la traslazione di equazione $\begin{cases} x = X \\ y = Y + 1 \end{cases}$

si ottiene l'equazione della parabola nel sistema di riferimento traslato

$Y = -X^2 + 2X$

Quindi il volume richiesto è dato da:

$$V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 2x)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} - 4\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{32}{5} + \frac{32}{3} - 16\right) = \frac{16}{15}\pi$$

ESERCIZI
CALCOLO DEI VOLUMI DI SOLIDI DI ROTAZIONE

1) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla parabola $\mathcal{P}: x = \frac{y^2}{2}$ e dalla retta $x = 3$ attorno all'asse x.

$[V = 9\pi]$

2) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla parabola $\mathcal{P}: y = x^2$ e dalla retta $y = 1$ attorno all'asse y.

$\left[V = \frac{\pi}{2}\right]$

3) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano T delimitata dagli assi cartesiani e dal grafico della parabola $\mathcal{P}: y = x^2\text{-}2x + 1$.

$\left[V = \frac{\pi}{6}\right]$

4) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = lnx$, dall'asse x e dalla retta $x = e$.

$[V = \pi(e\text{-}2)]$

5) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = lnx$, dall'asse x e dalla retta $y = 1$.

$\left[V = \frac{\pi}{2}(e^2\text{-}1)\right]$

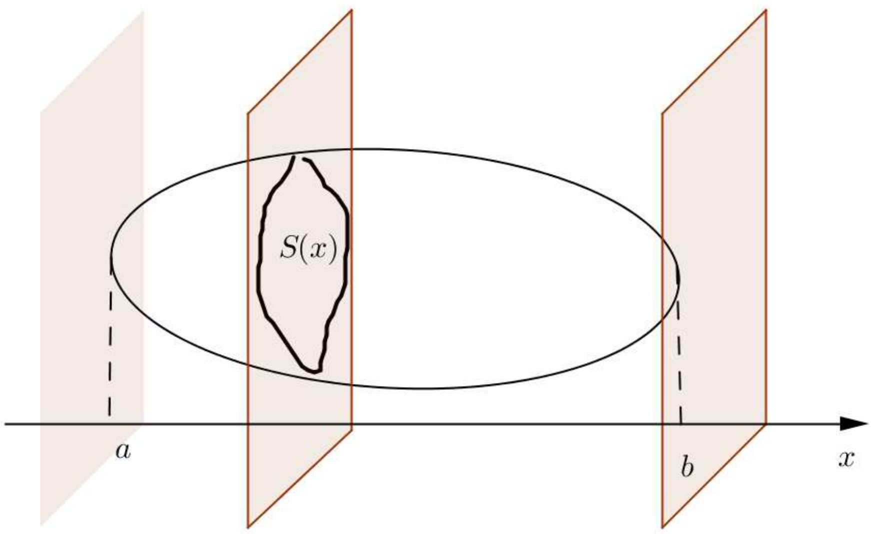
COMPLEMENTI

CALCOLO DI VOLUMI

Il metodo delle sezioni

Se un solido si può disporre in modo da essere delimitato da due piani paralleli α e β che per esempio rispetto ad un dato riferimento hanno equazione x=a e x=b e si conosce l' area S(x) di una qualunque sezione con un piano parallelo compreso tra α e β allora si ha che

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



Esempio

Consideriamo per esempio una piramide avente per base un poligono di area B e altezza h: tagliandola con piani paralleli al piano di base posti a distanza x dal vertice otteniamo sezioni di area S(x) tali che, per la similitudine, si ha

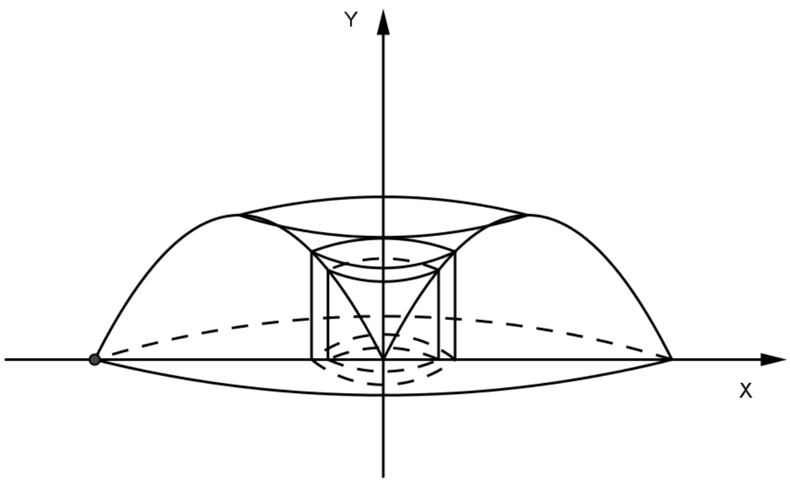
$S(x): x^2 = B: h^2$

Quindi $S(x) = \frac{x^2}{h^2}B$ e in conclusione

$$V = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}B\,dx = \left[\frac{B}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{Bh}{3}$$

Il metodo dei gusci cilindrici

Il solido generato dalla rotazione attorno all'asse y del trapezoide individuato dal grafico di una funzione $y = f(x)$ definita nell'intervallo $[a,b]$ può essere vista come somma di tanti "gusci cilindrici", cioè cilindri cavi di raggio interno x, raggio esterno $x + \Delta x$ e altezza f(x).



Se "srotoliamo" il guscio cilindrico il suo volume ΔV è approssimabile con il volume di un parallelepipedo rettangolo avente come area di base $2\pi \cdot x \cdot \Delta x$ e altezza f(x) e quindi sommando tutti gli infiniti gusci avremo

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$$

Esempio

Se per esempio consideriamo la rotazione del trapezoide individuato da $y = 2x - x^2$ nell'intervallo $[0,2]$ attorno all'asse y (vedi figura), otteniamo un solido avente volume

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot \left(2x - x^2\right) dx = ... = \frac{8}{3}\pi$$

Applicazioni in fisica dell'integrale definito

Moto rettilineo di un punto materiale

Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo secondo una legge oraria

$$s = s(t)$$

Sappiamo che $v(t) = s'(t)$ e che $a(t) = v'(t)$, quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2)\text{-}s(t_1) \text{ ed anche } \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2)\text{-}v(t_1)$$

Esempio: sapendo che l'accelerazione di un punto materiale è costante $a(t) = a$, che $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$, determinare la legge oraria.

Iniziamo con l'integrare l'accelerazione tra 0 e t: $\int_0^t a\, dt = [at]_0^t = at$.

Sappiamo quindi che $at = v(t)\text{-}v(0)$ e poiché $v(0) = v_0$, possiamo ricavare $v(t)$:

$$v(t) = at + v_o$$

A questo punto possiamo integrare $v(t)$ per risalire a $s(t)$:

$$\int_0^t v(t)dt = \int_0^t (at + v_0)dt = \left[a\frac{t^2}{2} + v_0 t\right]_0^t = a\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Ma sappiamo che $\int_0^t \; v(t)dt = s(t)\text{-}s(0)$ e che $s(0) = s_0$ quindi:

$$a\frac{t^2}{2} + v_0 t = s(t)\text{-}s_0$$

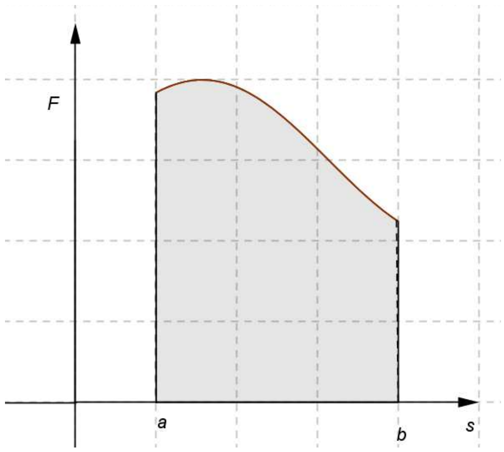
da cui

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Che rappresenta, come è noto, la legge oraria del moto uniformemente accelerato.

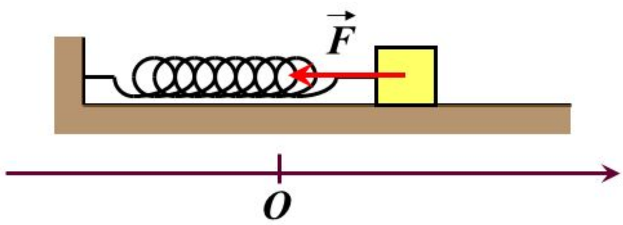
Lavoro di una forza

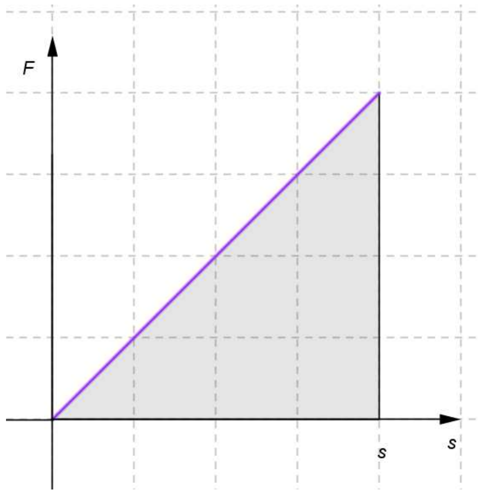
Il lavoro di una forza la cui intensità dipende dalla posizione cioè $F = F(s)$ ed avente direzione parallela allo spostamento, essendo uguale alla somma di tanti lavori relativi a piccoli spostamenti Δs, risulta l'area sottesa dal grafico di $F = F(s)$ nel sistema di riferimento (s, F) e quindi:



$$L = \int_a^b F(s)ds$$

Esempio 1: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica $F = Ks$ quando il suo punto di applicazione si sposta da 0 a s (è uguale all'energia potenziale elastica di un punto materiale di massa m, in posizione s, attaccato ad una molla di costante elastica K).





Il lavoro della forza elastica è dato da

$$L = \int_0^s Ks\,ds = \left[K\frac{s^2}{2}\right]_0^s = K\frac{s^2}{2}$$

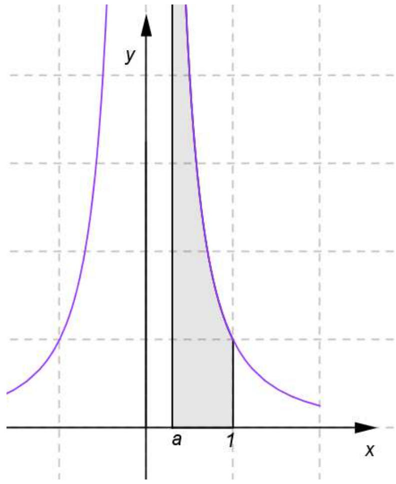
Esempio 2: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica $F(r) = K\frac{Qq}{r^2}$ che agisce su una carica q nel campo generato dalla carica Q, quando si sposta da distanza r_A a distanza r_B lungo una linea di forza.

$$L = \int_{r_A}^{r_B} K\frac{Qq}{r^2}dr = KQq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = KQq\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right)$$

INTEGRALI IMPROPRI

Abbiamo definito l'integrale definito per una funzione f(x) continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato. Proviamo ad estendere la definizione anche nel caso in cui la funzione:

a) abbia un asintoto verticale (una discontinuità di seconda specie) in un estremo dell'intervallo;
b) l'intervallo sia illimitato.



a) Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$:

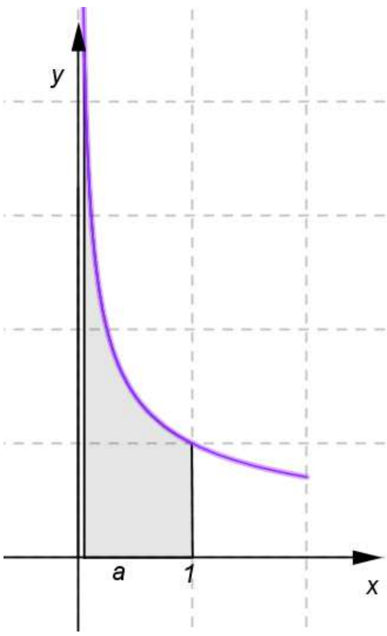
il suo grafico è quello in figura ed $x = 0$ è un asintoto verticale.

Possiamo calcolare $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$?

Consideriamo un valore a tale che $0 < a < 1$ e calcoliamo:

$$\int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_a^1 = -1 + \frac{1}{a}$$

Calcoliamo adesso $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{a} \right) = +\infty$



Ma sarà sempre così? Il limite sarà sempre infinito?

Consideriamo un'altra funzione con asintoto verticale x=0.

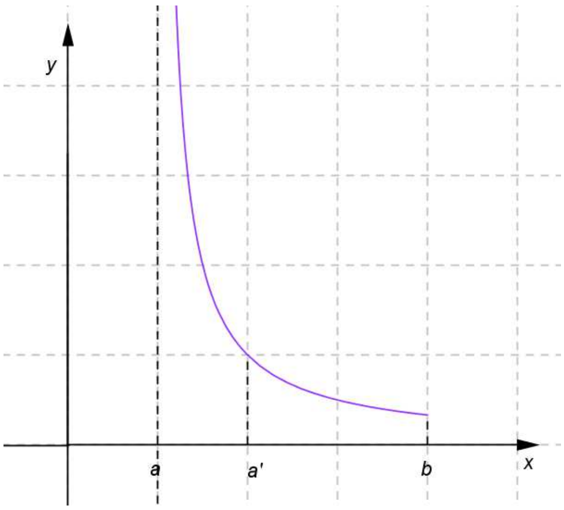
Prendiamo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e ripetiamo il procedimento precedente:

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_a^1 = \lim_{a \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{a} \right) = 2$$

In questo caso abbiamo ottenuto un numero finito.

Si dà, quindi, la seguente definizione:

$f(x)$ **è integrabile in senso improprio** in $(a,b]$ con $f(x)$ continua in $(a,b]$ con asintoto verticale $x=a$ **se esiste finito** il



$$\lim_{a'\to a}\int_{a'}^{b} f(x)dx$$

e scriveremo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a'\to a}\int_{a'}^{b} f(x)dx$$

Altrimenti diremo che $f(x)$ non è integrabile in senso improprio in $(a,b]$.

Quindi, ritornando ai nostri esempi, possiamo dire che:

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ non è integrabile in senso improprio in $(0,1]$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso improprio in $(0,1]$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$

Nota

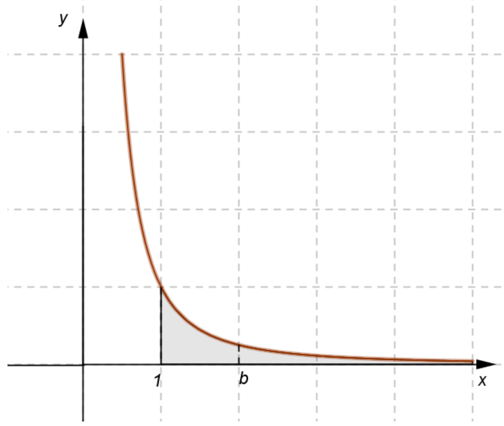
Più in generale, data la funzione $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ nell'intervallo $(0,1]$ con $\alpha>0$ si ha che:

- per $\alpha=1$ non è integrabile: $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}[ln|x|]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}(-lna) = +\infty$
- per $\alpha>1$ non è integrabile: $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^1 = \ldots = +\infty$
- per $0<\alpha<1$ è integrabile.

b) Consideriamo ora il caso di integrale in un intervallo illimitato.

Riprendiamo le stesse funzioni del caso a) e cerchiamo di calcolare $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ cioè consideriamo l'intervallo $[1, +\infty)$.

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Per calcolare $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

calcoliamo il $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$

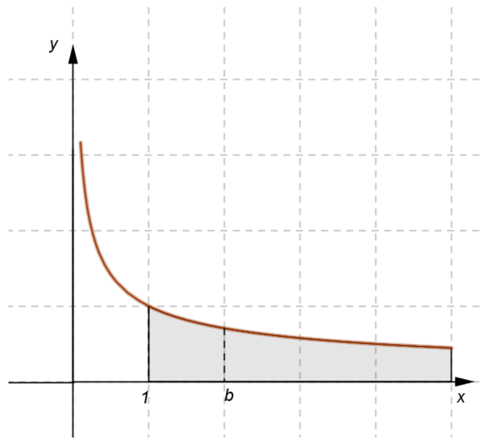
$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} - (-1) = 1 - \frac{1}{b}$

quindi $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Procediamo nello stesso modo cioè calcoliamo il

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



Abbiamo: $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^b$

e quindi $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{b} - 2 = +\infty$

Quindi viene data la seguente definizione:

f(x) è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$ se **esiste finito** il

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

e scriveremo: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$

Altrimenti diremo che f(x) non è integrabile in $[a, +\infty)$.

Pertanto, riassumendo i nostri esempi:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ non è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$.

Più in generale, data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$ si ha che:

- per $\alpha > 1$ è integrabile nell'intervallo $[1, +\infty)$
- per $0 < \alpha \leq 1$ non è integrabile nell'intervallo $[1, +\infty)$

Nota: in modo analogo si definiscono gli integrali impropri in $[a, b)$ (vale a dire con $f(x)$ che ha un asintoto verticale in $x = b$) oppure in $(-\infty; b]$ (cioè su intervalli illimitati a sinistra).

È possibile anche aver integrali impropri in $(a, +\infty)$ (nel senso che $f(x)$ ha un asintoto per $x = a$ e si considera un intervallo illimitato) o (a, b) ($f(x)$ ha un asintoto sia in $x = a$ sia in $x = b$) od anche in $(-\infty, +\infty)$, spezzando il calcolo dell'integrale nella somma di due integrali impropri.

Esempi

1) Possiamo calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$?

Consideriamo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ come $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$: affinché $y = \frac{1}{x}$ sia integrabile in $[0, +\infty)$ dovrebbero esistere entrambi ma $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$ perciò la funzione non è integrabile in $[0, 1)$ e quindi neppure in $[0, +\infty)$ (tra l'altro non è integrabile neppure in $[1, +\infty)$).

2) Possiamo calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$?

Spezziamo l'integrale in $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ e $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Si avrà che $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} [arctgx]_0^b = \lim_{b \to +\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}$$

Poiché la funzione integranda è pari, si avrà anche che:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

ESERCIZI

INTEGRALI IMPROPRI

1) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ [$\frac{1}{3}$]

2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2x+3} dx$ [non integrabile]

3) $\int_{0}^{+\infty} senxdx$ [non integrabile]

4) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ [$2\sqrt{2}$]

5) $\int_{0}^{1} x \ln xdx$ [$-\frac{1}{4}$]

6) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ [non integrabile]

7) $\int_{0}^{1} \ln xdx$ [-1]

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} arctgxdx$ [non integrabile]

9) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ [0]

10) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$ [non integrabile]

SCHEDA DI VERIFICA

INTEGRALI DEFINITI

1. Determina il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [1;2].

[ln2]

2. Determina l'area della regione piana T delimitata dal grafico di $y = lnx$, dall'asse x e dalla retta $x = 3$

[$areaT = 3ln3 - 2$]

3. Disegna la parabola $\mathcal{P}: y = 2x\text{-}x^2$ e determina le equazioni delle tangenti t_1 e t_2 nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

a) Calcola l'area della regione finita delimitata dalle tangenti e da $\mathcal{P}$;

[$\frac{2}{3}$]

b) Calcola il volume del solido ottenuto ruotando la regione di piano compresa tra $\mathcal{P}$ e l' asse x, intorno all'asse x.

$\left[V = \frac{16}{15}\pi\right]$

4. Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse y la regione piana T delimitata dal grafico di $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$.

$\left[V = \frac{2}{5}\pi\right]$

5. Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = t$, $s(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

[$s(t) = \frac{t^3}{6}$]

6. Determinare la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale sapendo che $a(t) = e^{-t}$, $v(0) = 5$ e $s(0) = 3$.

[$s(t) = e^{-t} + 6t + 2$]

7. Calcola $\int_1^{+\infty} lnxdx$.

[non integrabile]

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1) Trova per quali valori di a, b (parametri reali) la curva di equazione $y = \frac{x^2 + ax + 1}{x + b}$ ha per asintoti le rette $x = 3, \quad y = x$. Rappresenta la funzione ottenuta.

$[a = b = -3]$

2) Considera le funzioni del tipo $y = ax^4 + bx^2 + c$. Determina quella che ha un flesso in $F(1;-1)$ e tangente parallela alla retta $y = -8x + 3$. Disegna il grafico della funzione individuata.

$[y = x^4 - 6x^2 + 4]$

3) Data la cubica $y = ax^3 + bx^2 - cx + d$ con $a, b, c, d \in \Re$, $a \neq 0$, determina il valore dei parametri per cui la curva ha il flesso nell'origine e il massimo nel punto $(2;8)$. Rappresenta il grafico della funzione.

$[y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x]$

4) a) Data la funzione $y = \frac{ax + b}{cx^2 + 1}$ determina *a*, *b*, *c* in modo che *f(x)* sia dispari, abbia due punti di flesso in corrispondenza di $x = \pm 1$ e tangente in $x = 1$ con pendenza $\frac{1}{4}$.

b) Verificato che $a = -2, \quad b = 0, \quad c = 3$ traccia il grafico di *f(x)*.

c) Trova l'area compresa tra il grafico di *f(x)* e l'asse x per $0 \leq x \leq 1$.

$\left[\frac{1}{3} \cdot \ln 4\right]$

5) a) Data la funzione $y = e^{ax} \cdot (x + b)$ determina a, b (parametri reali) in modo che il grafico della funzione passi per il punto $(0;2)$ ed abbia in quel punto tangente $t: y = -x + 2$

b) Verificato che si ha $a = -1, \quad b = 2$ traccia il grafico della funzione ottenuta.

c) Si può determinare l'area della regione di piano delimitata nel primo quadrante tra il grafico e gli assi cartesiani?

$[M(-1;e), \quad F(0,2), \quad A = 3]$

Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita è una funzione *y(x)* e in cui compaiono le derivate della funzione stessa: per esempio l'equazione $y'=2y$ è un'equazione differenziale (del primo ordine perché compare solo la derivata prima di *y*).

Ma a cosa servono le equazioni differenziali?

Le equazioni differenziali sono una parte della matematica molto importante per le scienze applicate quali la fisica e la biologia: infatti quando in un fenomeno c'è una variazione nel tempo di una **quantità y(t)** quale ad esempio il numero di individui di una popolazione, la quantità di carica sulle armature di un condensatore, la temperatura di un corpo, la velocità di un corpo, possiamo considerare la "**velocità di variazione"** di y(t) **cioè la derivata** $y'(t)$**.**
Se stabiliamo una relazione tra *y(t)* e *y'(t)* (o addirittura *y''(t)*) abbiamo quella che abbiamo definito un'equazione differenziale che, risolta, ci permette di determinare *y(t).*

Esempio: il decadimento radioattivo

La radioattività, o decadimento radioattivo, è un insieme di processi fisico-nucleari attraverso i quali alcuni nuclei atomici instabili o radioattivi (radionuclidi) decadono (trasmutano) in nuclei di energia inferiore raggiungendo uno stato di maggiore stabilità con emissione di radiazioni in accordo ai principi di conservazione della massa/energia.

Indicando con $N(t)$ il numero degli atomi radioattivi presenti al tempo t , è chiaro che *la velocità di variazione* del numero degli atomi risulta direttamente proporzionale al numero degli atomi stessi cioè abbiamo :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}=-\alpha\cdot N(t)$$

(con α costante positiva che dipende dal tipo di sostanza radioattiva).
Osserviamo che il segno – indica che $\Delta N(t)<0$ cioè che il numero degli atomi diminuisce. Quindi in termini differenziali abbiamo la seguente equazione differenziale:

$$N'(t)=-\alpha\cdot N(t)$$

in cui $N(t)$ è la funzione da determinare.

Nota

Il periodo, ossia il tempo necessario perché il 50% degli atomi si sia disintegrato viene chiamato tempo di dimezzamento T_d e cambia a seconda della sostanza radioattiva: può andare da alcuni giorni per lo iodio 131 a 4,5 miliardi di anni per l'uranio 238.

Ma come si risolve un'equazione differenziale ?

Risolvere un'equazione differenziale è piuttosto complesso: noi tratteremo solo equazioni differenziali del primo ordine o particolari equazioni differenziali del secondo ordine (dove cioè compare anche la derivata seconda della funzione).

Equazioni differenziali del primo ordine

Esempio 1: $y' = x + 2$

E' chiaro che in questo caso per trovare la funzione y basta integrare entrambi i membri (rispetto alla variabile x).

$$\int y'\,dx = \int (x+2)\,dx$$

$$(*)\quad y = \frac{x^2}{2} + 2x + c, \quad c \in \Re$$

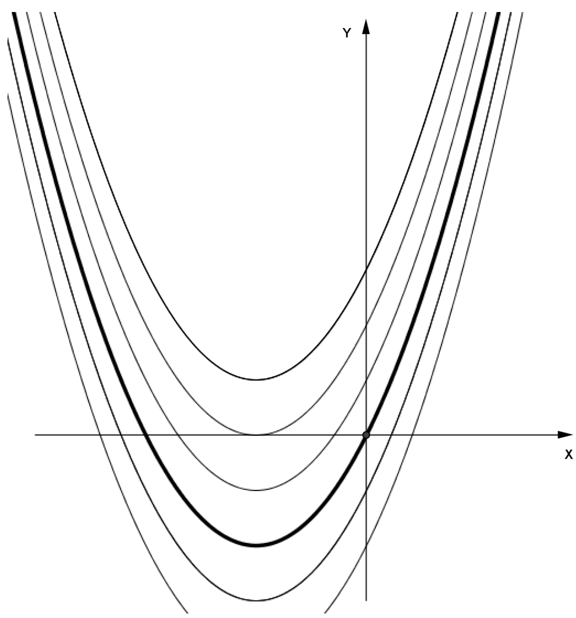
Abbiamo trovato quindi una famiglia di funzioni (le primitive di $a(x) = x + 2$).

Se poi conosciamo il valore che la funzione y deve avere in un dato punto (chiamata "condizione iniziale"), posso determinare una soluzione particolare dell'equazione.

Se per esempio nel nostro caso avessi anche la condizione

$$y(0) = 0$$

sostituendo nella (*) abbiamo $y(0) = c$, e quindi confrontando con la condizione iniziale troviamo $c = 0$ e la soluzione particolare risulta $y = \frac{x^2}{2} + 2x$.



Esempio 2: $y' = 2 \cdot y$

Scriviamo la derivata come $\frac{dy}{dx}$ e **"separiamo" le variabili x e y** spostando a sinistra la y e a destra dx (supponiamo quindi $y \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \cdot dx$$

Integrando entrambi i membri abbiamo:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2 \cdot dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + c \Rightarrow |y| = e^{2x+c} \Rightarrow y = \pm e^{c} \cdot e^{2x}$$

Poiché $\pm e^{c}$ rappresenta un qualsiasi numero reale diverso da zero, possiamo scrivere :

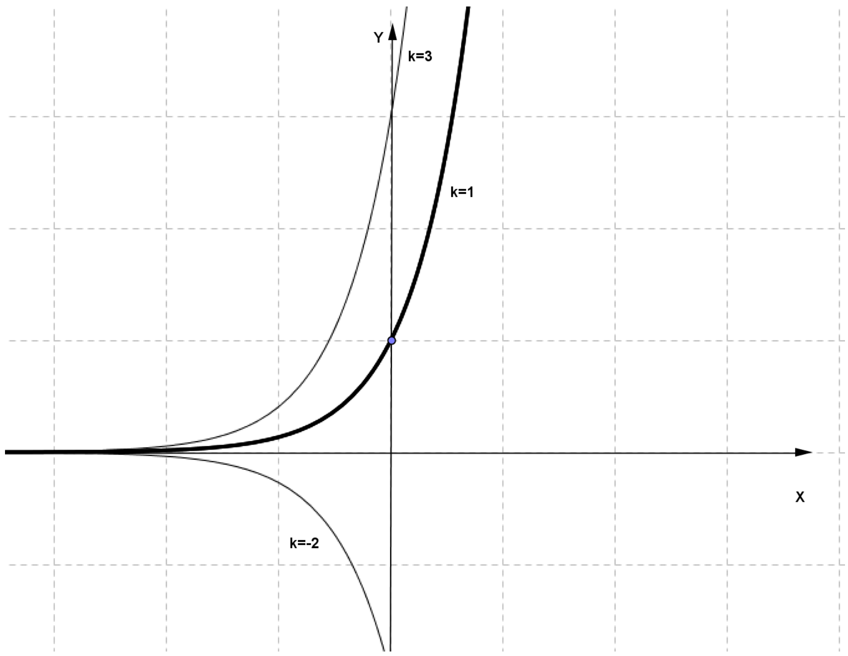
$$y = k \cdot e^{2x} \text{ con } k \neq 0$$

Considerando però l'equazione iniziale è chiaro che anche $y = 0$ è una soluzione e quindi possiamo dire che le soluzioni dell'equazione differenziale sono in conclusione

$$y = k \cdot e^{2x}, \ k \in \Re$$

Nota
Possiamo **verificare** che le soluzioni sono quelle trovate calcolando la derivata:
abbiamo $y' = 2k \cdot e^{2x}$ e sostituendo nell'equazione differenziale iniziale otteniamo un'identità.

Naturalmente anche in questo caso se abbiamo una condizione iniziale, per esempio $y(0) = 1$, otteniamo $k = 1$ e quindi la soluzione particolare $y = e^{2x}$.



E' chiaro quindi che, con passaggi analoghi all'esempio, in generale l'equazione differenziale

$$\boxed{y' = a \cdot y, \quad a \in \Re}$$

ha come soluzione generale

$$y = k \cdot e^{ax}, \quad k \in \Re$$

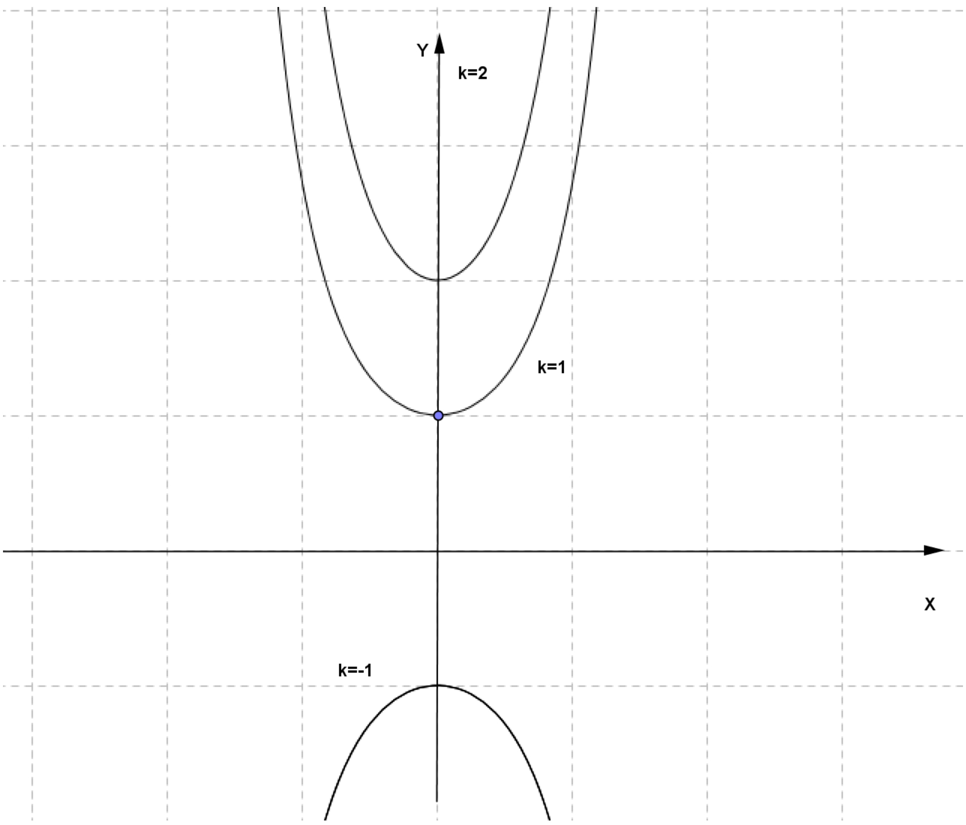
Esempio 3: $y' = 2x \cdot y$

Procediamo come abbiamo fatto nel caso precedente separando le variabili:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x \cdot dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + c \Rightarrow |y| = e^{x^2+c} \Rightarrow$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{x^2} \Rightarrow y = k \cdot e^{x^2}, \quad k \in \Re$$

(sempre osservando che nel procedimento si suppone $y \neq 0$ ma anche $y = 0$ è soluzione e quindi si può considerare $k \in \Re$).



Anche in questo caso possiamo, se vogliamo, verificare che le soluzioni trovate soddisfano l'equazione differenziale assegnata.

Se poi abbiamo anche una condizione "iniziale", per esempio $y(0) = 1$, otteniamo $k = 1$ e quindi la soluzione particolare è $y = e^{x^2}$.

Esempio 4: $y' = y + x$

In questo caso non possiamo separare le variabili e procediamo nel seguente modo (metodo di Lagrange o della “**variazione della costante**”):

- risolviamo l’equazione $y' = y$ che ci dà come soluzioni $y = k \cdot e^x$;
- **consideriamo *k*** non come una costante ma **come una variabile** , indichiamola con *k(x)* e imponiamo che $y = k(x) \cdot e^x$ sia soluzione dell’equazione differenziale assegnata cioè calcoliamo

$$y' = k'(x) \cdot e^x + k(x) \cdot e^x$$

e sostituendola nell’equazione differenziale ricaviamo $k'(x)$

$$k'(x) \cdot e^x + k(x) \cdot e^x = k(x) \cdot e^x + x \quad \Rightarrow \quad k'(x) \cdot e^x = x \quad \Rightarrow \quad k'(x) = x \cdot e^{-x}$$

Infine ricaviamo *k(x)* :

$$k(x) = \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x} \cdot (x+1) + c$$

Quindi la soluzione dell’equazione differenziale risulta:

$$y = [-e^{-x}(x+1) + c] \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = -(x+1) + c \cdot e^x$$

NOTA

Non sempre è necessario applicare il metodo della variazione della costante per ricavare la soluzione .

Se per esempio abbiamo $y' = y - 1$ possiamo usare il metodo della “separazione” delle variabili:

$$\frac{dy}{dx} = y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y-1} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y-1} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y-1| = x + c \quad \Rightarrow \quad |y-1| = e^{x+c}$$

$$y - 1 = \pm e^c \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = 1 + k \cdot e^x$$

Esempio 5

Consideriamo per esempio l'equazione $y' = x \cdot (1 + y^2)$

Procediamo così:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (1 + y^2) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{1 + y^2} = x \cdot dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x \cdot dx \quad \rightarrow \quad arctgy = \frac{x^2}{2} + c$$

e quindi in conclusione $\qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

Nota

Le equazioni del tipo $y' = a(x) \cdot b(y)$ sono dette a "**variabili separabili**" perché per risolverle si procede "separando" le variabili.

Quando dividiamo per $b(y)$ dobbiamo porlo diverso da zero e poi considerare a parte le soluzioni dell'equazione differenziale nel caso in cui sia $b(y) = 0$.
Nel nostro esempio poiché $b(y) = 1 + y^2 \neq 0$ non ci sono problemi e non dobbiamo aggiungere nessuna soluzione alla soluzione generale trovata.

Esempio 6

Consideriamo l'equazione a variabili separabili $y' = x \cdot y^2$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x \cdot dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int x \cdot dx \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + k}$$

In questo caso poiché per poter dividere per y^2 supponiamo $y \neq 0$ dobbiamo poi controllare se $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale: in questo caso si verifica che $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale e quindi va aggiunta alle soluzioni.

In conclusione allora le soluzioni dell'equazione differenziale sono

$$y = -\frac{2}{x^2 + k} \cup y = 0$$

Equazioni differenziali del secondo ordine

Studieremo solo equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti ed omogenee cioè un'equazione del tipo:

$$\boxed{ay''+by'+cy=0}$$

Per risolverla supponiamo che $y=e^{zx}$ ($z\in\Re$) sia soluzione: per determinare z calcoliamo y' e y'' e sostituiamo nell'equazione differenziale.

$$y'=z\cdot e^{zx} \quad ; \quad y''=z^2\cdot e^{zx} \quad \Rightarrow a\cdot z^2\cdot e^{zx}+b\cdot z\cdot e^{zx}+c\cdot e^{zx}=0 \quad \Rightarrow \quad a\cdot z^2+b\cdot z+c=0$$

L'equazione $a\cdot z^2+b\cdot z+c=0$ (detta **equazione "caratteristica**" associata all'equazione differenziale) può avere:

- $\Delta>0$ e quindi due soluzioni reali distinte z_1, z_2 e in questo caso si può verificare che la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$y=c_1\cdot e^{z_1x}+c_2\cdot e^{z_2x} \qquad con \quad c_1,c_2\in\Re$$

- $\Delta=0$ e quindi due soluzioni reali coincidenti $z_1=z_2$ e in questo caso si può verificare che la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$y=e^{z_1x}\cdot(c_1+c_2\cdot x) \qquad con \quad c_1,c_2\in\Re$$

- $\Delta<0$ e quindi due soluzioni complesse coniugate $z_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ e in questo caso si può verificare che la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$y=e^{\alpha x}\cdot(c_1\cdot\cos\beta x+c_2\cdot sen\beta x) \qquad con \quad c_1,c_2\in\Re$$

Esempi

1) $y''-5y'+6y=0$

L'equazione caratteristica è in questo caso: $z^2-5z+6=0\rightarrow z_1=2,\quad z_2=3$

Quindi la soluzione è $\qquad y=c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{2x}, \quad (c_1,c_2\in\Re)$

2) $y''-4y'+4y=0$

L'equazione caratteristica è : $z^2-4z+4=0\rightarrow(z-2)^2=0\rightarrow z_1=z_2=2$

Quindi la soluzione è $\qquad y=e^{2x}\cdot(c_1+c_2\cdot x), \quad (c_1,c_2\in\Re)$

3) $y''+9y=0$

L'equazione caratteristica è: $z^2+9=0\rightarrow z_{1,2}=\pm3i$

Quindi la soluzione è $\qquad y=c_1\cdot\cos3x+c_2\cdot sen3x, \quad c_1,c_2\in\Re$

PROBLEMI

Problema 1

Consideriamo una popolazione che vive in un ambiente isolato (non ci sono predatori), con risorse illimitate e per la quale perciò si suppone che, indicando con N(t) il numero degli individui della popolazione al tempo t e considerando un intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$ si abbia:

$$N(t+\Delta t) - N(t) = n°nati - n°morti$$

Se supponiamo che il numero degli individui nati nell'intervallo di tempo Δt sia proporzionale a $N(t) \cdot \Delta t$ secondo una costante α e che il numero degli individui morti nello stesso intervallo di tempo sia proporzionale a $N(t) \cdot \Delta t$ secondo una costante β possiamo scrivere, ponendo $a = \alpha - \beta$,

$$N(t+\Delta t) - N(t) = a \cdot N(t) \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = a \cdot N(t) \quad \overset{\Delta t \to 0}{\Rightarrow} \quad N'(t) = a \cdot N(t)$$

Abbiamo quindi ottenuto un'equazione differenziale in cui la funzione da determinare è N(t) (funzione del tempo) e per quello che abbiamo visto avremo quindi che

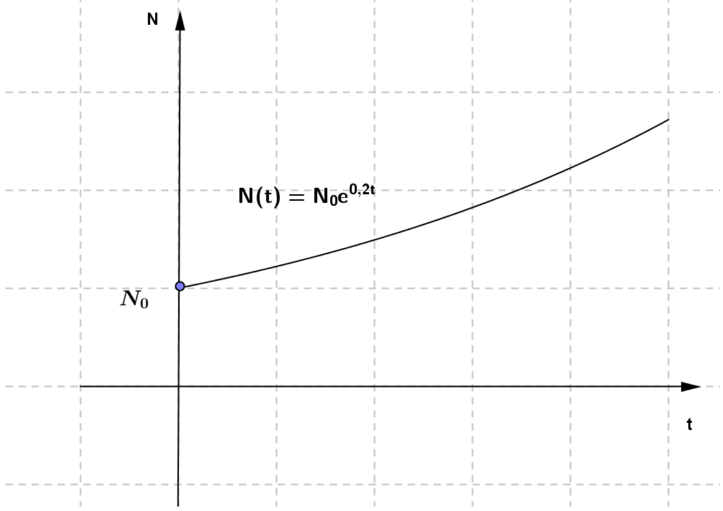
$$N(t) = k \cdot e^{at}$$

cioè la crescita (nel caso che $\alpha > \beta$ e quindi $a > 0$) o la decrescita (se $\alpha < \beta$ e quindi $a < 0$) della popolazione sarà di tipo "esponenziale".

Se conosciamo una condizione "iniziale", per esempio il numero degli individui della popolazione al tempo t=0 (inizio dell'osservazione), possiamo ricavare la costante k: se per esempio $N(0) = N_0$ avremo $k = N_0$ e quindi

$$N(t) = N_0 \cdot e^{at}$$

Se per esempio consideriamo $a = 0,2$ abbiamo un grafico del tipo seguente($t \geq 0$):



Problema 2

Consideriamo un paracadutista in caduta libera (prima che apra il paracadute): su di esso agisce la forza peso mg (m la massa del paracadutista e dell'attrezzatura) ma anche una forza dovuta alla resistenza dell'aria, opposta alla forza peso e direttamente proporzionale alla velocità.

Poiché $F_R = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad mg - k_a \cdot v = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad mg - k_a \cdot v = m \cdot v'$

Abbiamo quindi trovato un'equazione differenziale in cui la funzione da determinare è la velocità in funzione del tempo $v(t)$.

Possiamo risolverla "separando" le variabili:

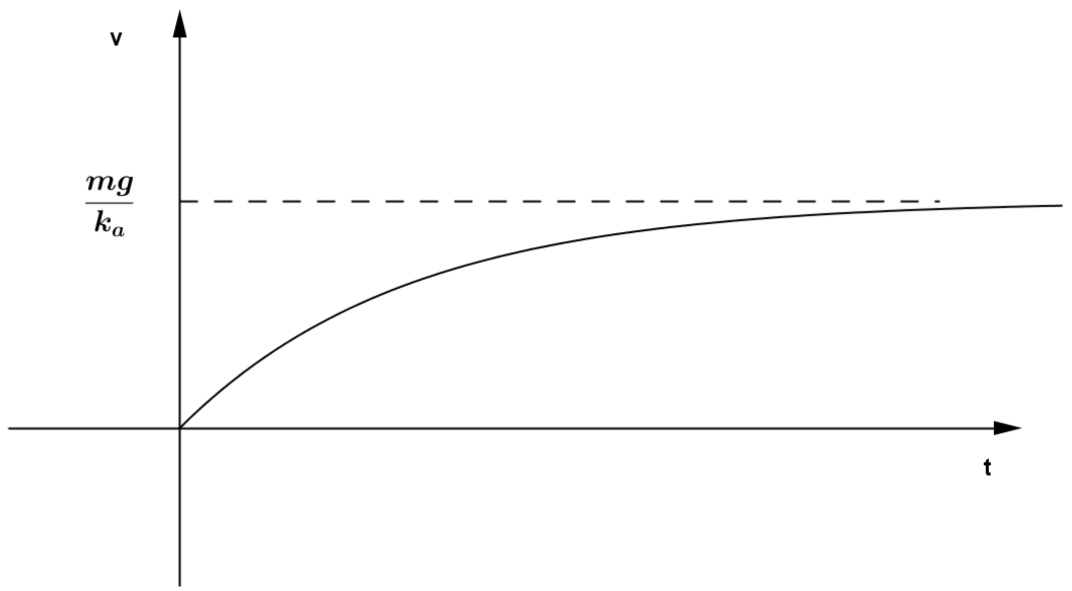
$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - k_a v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{g - \frac{k_a}{m}v} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{g - \frac{k_a}{m}v} = \int dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{k}\ln\left|g - \frac{k_a}{m}v\right| = t + c$$

Dopo alcuni passaggi otteniamo:

$$v(t) = \frac{mg}{k_a} + c \cdot e^{-\frac{k_a}{m}t}, \quad c \in \Re$$

Se poniamo che $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{mg}{k_a} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{k_a}\left(1 - e^{-\frac{k_a}{m}t}\right)$.

L'andamento della velocità è il seguente



Quando $t \to \infty \qquad v \to \frac{mg}{k_a}$ (velocità limite)

Problema 3

Consideriamo un corpo di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k (e massa trascurabile) che oscilla senza attrito su un piano orizzontale per effetto della forza elastica

$$\vec{F} = -k\,\vec{x}$$

dove *x(t)* indica la posizione del corpo all'istante t rispetto ad un sistema di riferimento lungo la direzione del moto.

Poiché $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ e $a(t) = x''(t)$ abbiamo l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$x''(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t) \quad \rightarrow \quad x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Consideriamo l'equazione caratteristica $z^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$

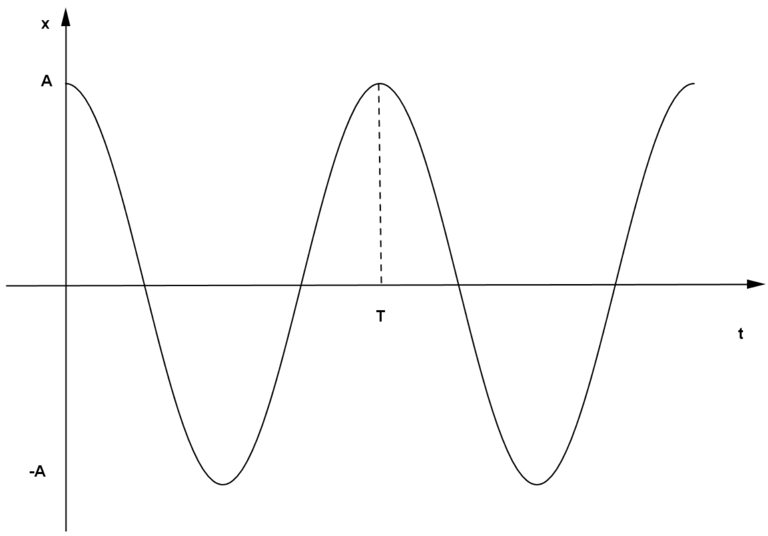
Quindi, ponendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, avremo che la soluzione generale dell'equazione è:

$$x(t) = c_1 \cdot \cos \omega t + c_2 \cdot sen \omega t$$

Nota: osserviamo che la soluzione $x(t) = c_1 \cdot \cos \omega t + c_2 \cdot sen \omega t$ è equivalente a $x(t) = k \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ equazione del moto armonico di un punto materiale.

Se conosciamo le condizioni "iniziali", per esempio se $x(0) = A$ e $x'(0) = 0$ (il corpo all'istante iniziale si trova alla massima distanza dal centro di oscillazione ed ha velocità nulla) , otteniamo: $c_1 = A, \quad c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = A \cdot \cos \omega t$

Abbiamo quindi un moto armonico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e ampiezza A come in figura:



Problema 4

Se il corpo dell'esempio precedente è soggetto anche ad una forza di attrito viscoso proporzionale, secondo una costante h , alla velocità $v(t) = x'(t)$ del corpo allora abbiamo la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) - h \cdot x'(t) \qquad \to \quad x''(t) + \frac{h}{m} \cdot x'(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

Se per esempio

$$m = 1Kg\,, \quad k = 5\frac{N}{m}, \quad h = 2\frac{kg}{s}$$

abbiamo $x''(t) + 2 \cdot x'(t) + 5 \cdot x(t) = 0$

Se risolviamo l'equazione caratteristica associata $z^2 + 2z + 5 = 0$ troviamo:

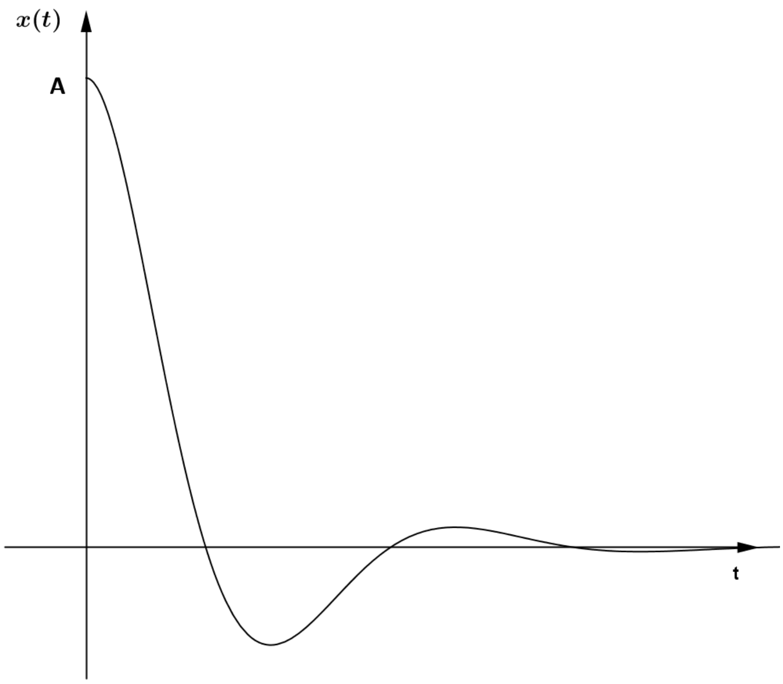
$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

Quindi la soluzione generale sarà: $x(t) = e^{-t} \cdot \left(c_1 \cdot \cos 2t + c_2 \cdot sen2t\right)$

Se le condizioni iniziali sono $x(0) = A, \quad x'(0) = 0$ si trova

$c_1 = A, \quad c_2 = \dfrac{A}{2}$ e quindi $x(t) = A \cdot e^{-t}\left(\cos 2t + 0{,}5 sen2t\right)$

che risulta avere un andamento come quello in figura (moto armonico smorzato).



ESERCIZI
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. $y' = x^2 + x$ $\qquad [y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c]$

2. $y' - 2x + senx = 0$ $\qquad [y = x^2 + \cos x + c]$

3. $tgx + y' = 0$ $\qquad [y = \ln|\cos x| + c]$

4. $\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\qquad [y = 2 \cdot e^{3x}]$

5. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad [y = e^{2x}]$

6. $\begin{cases} y' = x \cdot y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad [y = e^{\frac{x^2}{2}}]$

7. $\begin{cases} y' = x^2 \cdot y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\qquad [y = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}}]$

8. $y' = \frac{3y}{x}$ $\qquad [y = k \cdot x^3]$

9. $\begin{cases} y' = 3x - y \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\qquad [y = 3 \cdot (x-1) + e^{1-x}]$

10. $\begin{cases} y' = 1 - \frac{y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $\qquad [y = \frac{x^2 - 1}{2x}]$

11. $y' = y + 6$ $\qquad [y = c \cdot e^x - 6]$

12. $y' = 3y + 9$ $\qquad [y = c \cdot e^{3x} - 3]$

13. $y' = 2xy + x$ $\qquad [y = c \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}]$

14. $y' = \frac{2x - y}{x}$ $[y = \frac{c}{x} + x]$

15. $y' = e^x + y$ $[y = (c + x) \cdot e^x]$

16. $y' - e^{3x} = 2y$ $[y = e^{3x} + c \cdot e^{2x}]$

17. $y' = senx \cdot (1 - y)$ $[y = 1 - c \cdot e^{\cos x}]$

18. $y' = \frac{x^3}{y}$ $[y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + c}]$

19. $y' = -y^2 \cdot senx$ $[y = -\frac{1}{\cos x + c} \cup y = 0]$

20. $y' = \frac{y^2}{x^2 + 1}$ $[y = \frac{1}{c - arctgx} \cup y = 0]$

21. $y' = e^{x+y}$ $[y = -\log(c - e^x)]$

22. $y'' + 5y' - 6y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-6x}]$

23. $y'' + 2y' - 3y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-3x}]$

24. $y'' + 2y' = 0$ $[y = c_1 + c_2 \cdot e^{-2x}]$

25. $y'' - 9y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-3x}]$

26. $y'' + 8y' + 16y = 0$ $[y = e^{-4x} \cdot (c_1 + c_2 x)]$

27. $y'' - 6y' + 9y = 0$ $[y = e^{3x} \cdot (c_1 + c_2 x)]$

28. $y'' + 4y' + 5y = 0$ $[y = e^{-2x} \cdot (c_1 \cos x + c_2 senx)]$

29. $y'' + 2y' + 10y = 0$ $[y = e^{-x} \cdot (c_1 \cos 3x + c_2 sen3x)]$

30. $\{y'' - 6y' + 5y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{5x}]$

PROBLEMI
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Una colonia di batteri cresce proporzionalmente al numero di batteri presenti nella colonia secondo una costante $k = 0{,}2 / h$ (*h* sta per ora).

   Misurando il tempo *t* in ore e indicando con N(t) il numero di batteri presenti al tempo *t*, determina N(t) supponendo che al tempo t=0 nella colonia ci siano 100 batteri.
   Disegna il grafico di N(t).

   Dopo quanto tempo il numero dei batteri è raddoppiato?

   $$[N(t) = 100 \cdot e^{0{,}2 \cdot t}\ , \quad t \cong 3{,}5\, h]$$

2. La velocità di raffreddamento di un corpo è direttamente proporzionale, secondo una costante k, alla differenza di temperatura tra la temperatura dell'ambiente (supposta costante) e la temperatura del corpo T(t) al tempo t.

   Se supponiamo che $k = 0{,}5 / h$ (h sta per ora) , la temperatura dell'ambiente 20°C, la temperatura iniziale del corpo 50°C, determina la temperatura T(t) del corpo (il tempo t misurato in ore) e disegnane l'andamento.

   $$[T(t) = 20 + 30 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}\ ]$$

3. Il carbonio 14 (simbolo C^{14}) è presente in tutte le sostanze organiche ma decade, cioè si trasforma in un altro elemento, quando l'organismo muore.

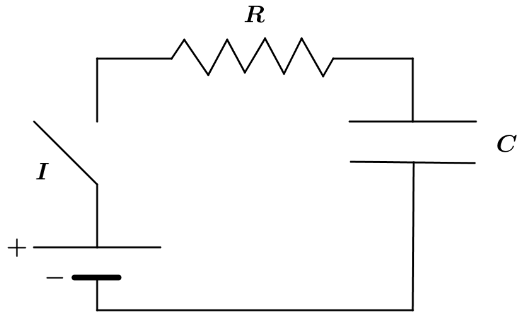
   La variazione del numero degli atomi di C^{14} è direttamente proporzionale al numero N(t) di atomi presenti al tempo t : se indichiamo con α la costante di proporzionalità possiamo quindi dire che $N'(t) = -\alpha \cdot N(t)$.
   Indicando con N_0 il numero degli atomi di C^{14} presenti al tempo t=0 in cui l'organismo è morto, determina N(t) e tracciane un grafico indicativo.

   Se si indica con t_d il "tempo di dimezzamento" cioè il tempo impiegato dal C^{14} (come da qualsiasi altra sostanza radioattiva) a dimezzarsi, trova la relazione tra α e t_d.
   (Il tempo di dimezzamento per il C^{14} è di circa 5730 anni).

   Nota: misurando la quantità di C^{14} ancora presente in un fossile si può datare il fossile, cioè determinare quanto tempo è passato dalla morte dell'organismo.

   $$[N(t) = N_0 \cdot e^{-\alpha t}\ , \quad t_d = \frac{\ln 2}{\alpha}]$$

4. Considera un circuito in cui è inserito un generatore di f.e.m. costante V_0, una resistenza R e un condensatore di capacità C (vedi figura).



Alla chiusura dell'interruttore I il generatore carica il condensatore: indica con *q(t)* la quantità di carica presente sulle armature del condensatore all'istante *t* ponendo *t=0* l'istante di chiusura dell'interruttore (quindi q(0)=0) e con $q'((t) = i(t)$ la corrente che circola nel circuito.

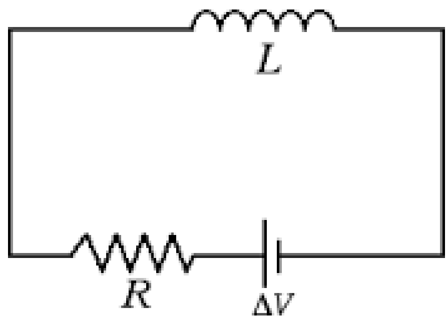
Poiché quando sulle armature c'è una carica q(t) tra le armature c'è una d.d.p. $V_C(t) = \dfrac{q(t)}{C}$ si ha:

$$V_0 = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Scrivi l'equazione differenziale corrispondente e determina *q(t)*. Traccia il grafico di *q(t)*.

$$[q(t) = V_0 \cdot C \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})]$$

5. Considera un circuito in cui è inserito un generatore di f.e.m. costante $\Delta V = V_0$, una bobina di resistenza R e induttanza L (vedi figura).



Alla chiusura dell'interruttore inizia a circolare corrente e si sviluppa nell'induttanza una f.e.m. autoindotta $L \cdot \dfrac{di}{dt}$. Quindi abbiamo:

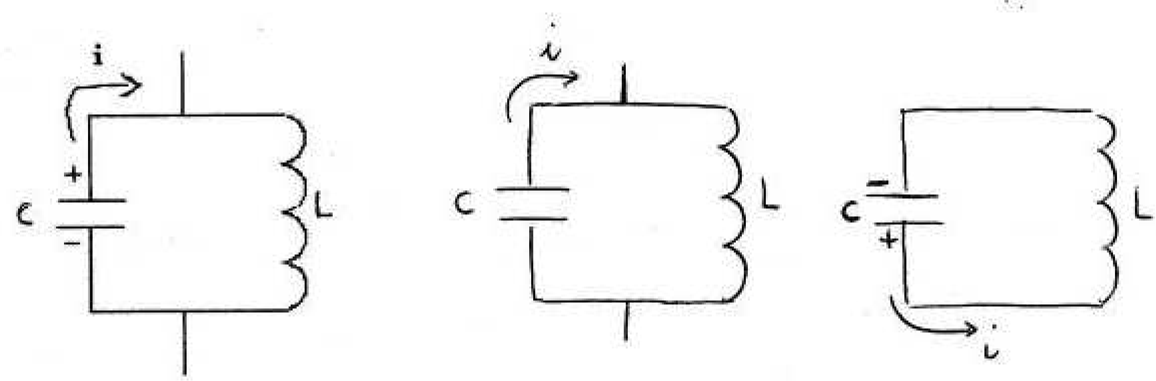
$$V_0 = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Risolvi l'equazione differenziale e ricava i(t) con la condizione iniziale che i(0)=0.
Traccia il grafico di i(t).

$$[i(t) = \frac{V_0}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t})]$$

6. Considera un circuito con una bobina di induttanza L (resistenza trascurabile) e un condensatore inizialmente carico di capacità C.

   Alla chiusura dell'interruttore il condensatore si scarica ma per il fenomeno dell'autoinduzione dovuto alla presenza dell'induttanza la corrente continua a circolare ricaricando di segno opposto le piastre del condensatore e il processo di scarica riprende ma con una corrente di verso opposto (si parla di circuito "oscillante" ed è analogo al sistema massa-molla).



S

Se indichiamo con q(t) la carica presente al tempo t sulle armature del condensatore avremo:

$$\frac{q(t)}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

Risolvi l'equazione differenziale corrispondente considerando come condizioni $q(0) = Q_0$ e $i(0) = q'(0) = 0$ e determina q(t).

Traccia il grafico corrispondente.

Come risulta la corrente che circola nel circuito? Qual è la sua frequenza?

Cosa accade se la resistenza non è trascurabile?

$$[q(t) = Q_0 \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t, \quad i(t) = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \cdot sen\frac{1}{\sqrt{LC}}t, \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}]$$

ESERCITAZIONE DI RICAPITOLAZIONE n° 1

1.a) Disegna il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) Calcola l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f(x) e l'asse x per $\dfrac{3}{2} \leq x \leq 2$.

2. Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 2$. Disegnala e determina l'equazione della tangente t nel suo punto di intersezione con l'asse y. Trova l'area della regione finita individuata dalla parabola, la retta t e la retta $x = 1$.

3. Disegna il grafico della funzione $y = e^{2x}$ e considera la regione di piano R delimitata dagli assi cartesiani, dal grafico della funzione e dalla retta $x = 1$. Ruota R intorno all'asse x e calcola il volume del solido ottenuto.

4. a) Tra le primitive di $f(x) = \dfrac{1}{sen^2 x}$ determina F(x) tale che $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ e disegnane il grafico.

b) Come risulta $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx$?

5.a) Una sostanza radioattiva decade con una costante di decadimento $\lambda = 0.01 / h$ cioè $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$, misurando il tempo t in ore e indicando con N(t) il numero di atomi della sostanza presenti al tempo t. Determina N(t) supponendo che al tempo t=0 ci fossero 100 atomi.

b) Disegna il grafico di N(t) e indica dopo quanto tempo il numero degli atomi è dimezzato.

ESERCITAZIONE DI RICAPITOLAZIONE n° 2

1. a) Disegna il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

b)Calcola l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f(x) , l'asse x e la retta $x = 3$.

2. Determina l'area della regione piana finita individuata dalle parabole di equazione $y = 3x - x^2$ e $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{9}{2}$.

3. Disegna il grafico della funzione $y = e^{-x}$ e calcola, se possibile, $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.Considera la regione R di piano delimitata dal grafico della funzione, gli assi e la retta $x = 1$: determina il volume del solido che si ottiene ruotando R intorno all'asse x.

4. a) Tra le primitive di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$ determina F(x) tale che $F(0) = 0$ e disegnane il grafico.

b) Come risulta $\int_0^1 F(x)dx$?

5.a) Determina l'espressione della corrente $i(t)$ in un circuito RL con $R = 10\Omega$, $L = 10H$ e f.e.m.=220 V (considera $i(0) = 0$) ricavandola dalla relazione $f.e.m. = r \cdot i(t) + L \cdot i'(t)$.

b) Disegna il grafico di *i(t).*

Distribuzioni di probabilità

Variabili aleatorie discrete

Introduciamo il concetto di variabile aleatoria discreta partendo da un esempio: lanciamo due dadi (per distinguerli supponiamo che siano uno rosso e uno verde) e consideriamo

X = somma ottenuta lanciando due dadi

X è detta variabile aleatoria " discreta" perché può prendere, in relazione ai vari eventi che possono verificarsi, un numero finito di valori cioè

2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

Abbiamo:

$P(X=2)=\frac{1}{36}$: infatti c'è 1 solo caso favorevole (1,1) e 36 possibili cioè le coppie ordinate (1,1), (1,2) ecc in cui il primo numero indica, per esempio, il numero uscito sul dado rosso e il secondo numero il numero uscito sul dado verde;

$P(X=3)=\frac{2}{36}$: infatti ci sono due casi favorevoli (1,2) (2,1) e 36 possibili;

$P(X=4)=\frac{3}{36}$: infatti ci sono tre casi favorevoli (1,3) (2,2) (3,1) e 36 possibili

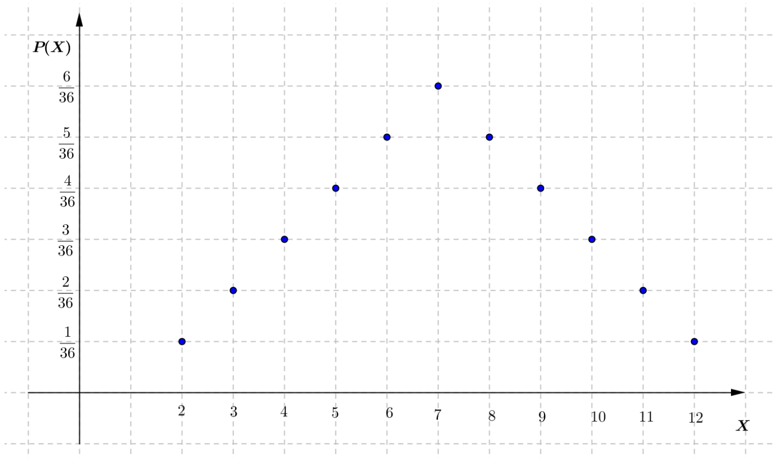
ecc.

Osserviamo che gli eventi associati ai diversi valori di X sono incompatibili e che la loro unione dà tutti i casi possibili.

Quindi $$P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+......P(X=12)=1$$

L'insieme delle probabilità che X assuma un certo valore viene chiamato "**distribuzione di probabilità di X"** e può essere rappresentato sia utilizzando un diagramma cartesiano che un istogramma.

La rappresentazione cartesiana di questa distribuzione di probabilità è la seguente:



In modo analogo alle distribuzioni di frequenze, anche per le distribuzioni di probabilità si definiscono la **media** e la **deviazione standard.**

Media di una variabile aleatoria

Se la variabile aleatoria discreta X può assumere i valori x_1, x_2, ..., x_n con probabilità p_1, p_2, ..., p_n si definisce media di X (o valore atteso o speranza matematica)

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ...x_n \cdot p_n$$

Nota: a volte il valor medio di X viene indicato con E(X) dove la E sta per l'iniziale di "expectation" (valore atteso).

Esempio: nel caso del lancio di due dadi e X = somma ottenuta lanciando due dadi abbiamo

$$M(x) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + ...10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Deviazione standard di una variabile aleatoria

La deviazione standard della variabile X (o scarto quadratico medio) si indica con la lettera σ ed è definita

$$\sigma(X) = \sqrt{(x_1 - M(X))^2 \cdot p_1 + ...(x_n - M(X))^2 \cdot p_n}$$

La deviazione standard indica quanto i valori x_1, x_2, ..., x_n sono concentrati attorno al valore medio M(X): se $\sigma(X)$ è piccolo i valori sono "vicini" a M(X).

Esempio: nel caso del lancio di due dadi e X = somma ottenuta lanciando due dadi abbiamo

$$\sigma(X) = \sqrt{(2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + ...(12-7)^2 \cdot \frac{1}{36}} \cong 2,4$$

Nota: si definisce anche la "varianza" di X

$$\text{var}(X) = \sigma^2(X)$$

Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria

Spesso può essere importante conoscere la probabilità che la variabile **X sia minore o uguale ad un dato valore**: se per esempio consideriamo la variabile aleatoria del nostro esempio la probabilità che X sia minore o uguale a k (cioè la probabilità di avere somma minore o uguale a k) sarà data da:

$$P(X \leq k) = P(X = 2) + P(X = 3) + ...P(X = k)$$

La funzione $F(k) = P(X \leq k)$ viene chiamata **funzione di ripartizione di X.**

Vediamo ora alcune distribuzioni di probabilità.

Distribuzione uniforme

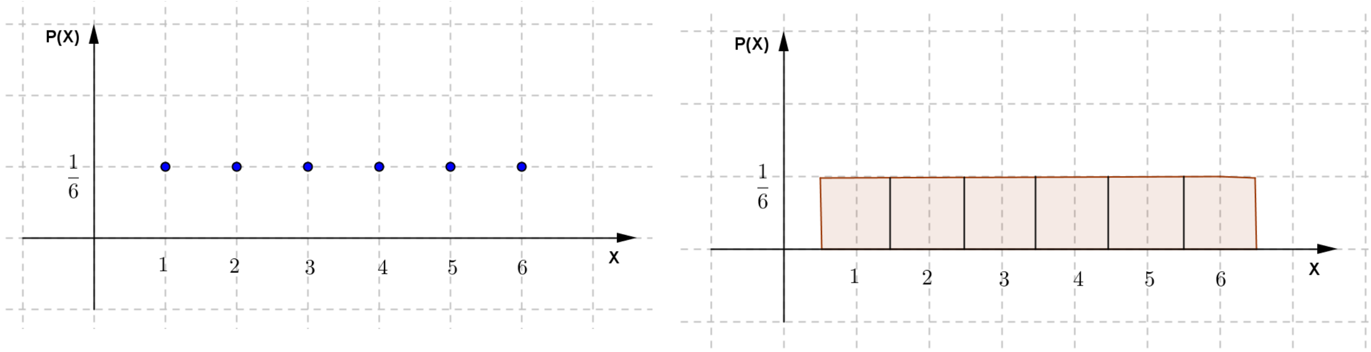
Lanciamo un dado non truccato e consideriamo X = n° uscito.

1,2,3,4,5,6 (che sono in numero finito).

In questo caso abbiamo

$$P(X=1)=\frac{1}{6},\quad P(X=2)=\frac{1}{6}....\quad P(X=6)=\frac{1}{6}$$

La rappresentazione della distribuzione di probabilità è la seguente:



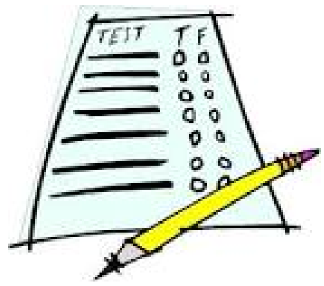
Se, come in questo caso, la probabilità che la variabile assuma un dato valore è sempre la stessa si parla di **distribuzione di probabilità uniforme.**

Vediamo come risultano la media e la deviazione standard:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+....6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+....\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{35}{12}}\cong 1{,}71$$

Distribuzione binomiale



Rispondendo a caso ad un test di 10 domande vero-falso qual è la probabilità di rispondere correttamente a k domande?

In questo caso possiamo considerare la variabile aleatoria X = n° risposte corrette: sappiamo che

$$(*)\ \ P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

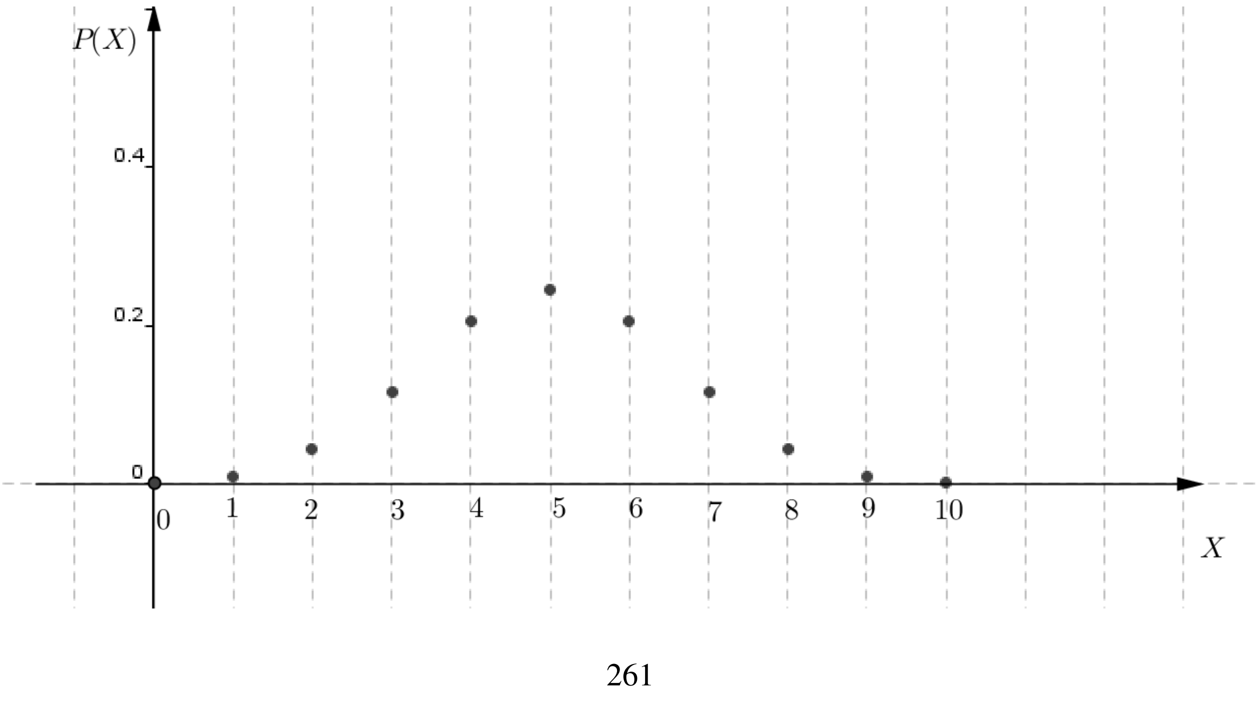
Infatti considerando il riempimento del test come una successione di n eventi indipendenti per avere un test con k risposte corrette devo "azzeccare" *k* risposte ognuna con probabilità $p=\frac{1}{2}$ e sbagliare *10-k* risposte con probabilità $q=1-p=\frac{1}{2}$, per il teorema della probabilità composta di eventi indipendenti la probabilità di riempire un test con *k* risposte corrette e *10-k* risposte errate è

$$p^{k}\cdot q^{10-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

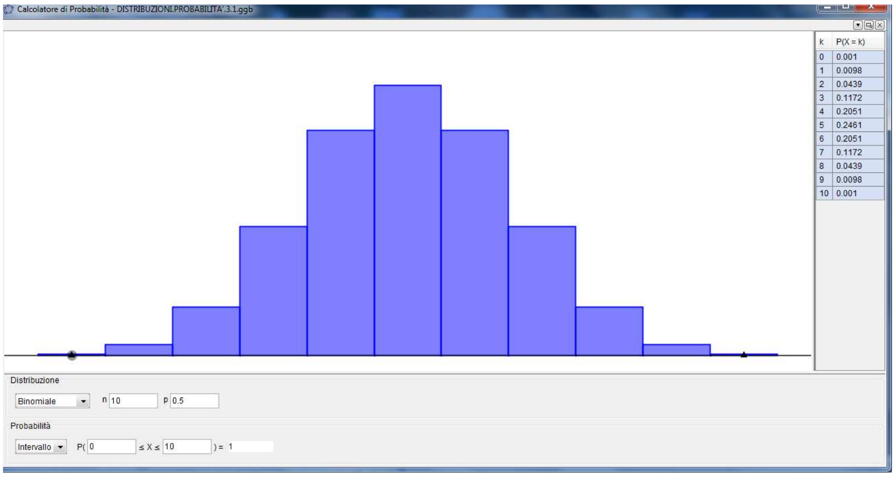
Ma d'altra parte le k risposte corrette possono essere scelte in $\binom{10}{k}$ modi diversi e quindi, per il teorema della probabilità totale, otteniamo la formula (*).

$$P(X=0)=\frac{1}{2^{10}},\quad P(X=1)=\frac{10}{2^{10}},\quad P(X=2)=\frac{45}{2^{10}}\cong 0{,}044,\quad P(X=3)=\frac{120}{2^{10}}\cong 0{,}12,\quad ecc$$

La distribuzione di probabilità di X per la presenza del coefficiente binomiale viene chiamata **distribuzione "binomiale"**.
Ecco la sua rappresentazione cartesiana:



Possiamo anche rappresentare questa distribuzione con un istogramma (in figura abbiamo riportato quello che fornisce il "calcolatore di probabilità" presente nella vista Foglio di calcolo di Geogebra selezionando distribuzione binomiale, n=10 e p=0,5):



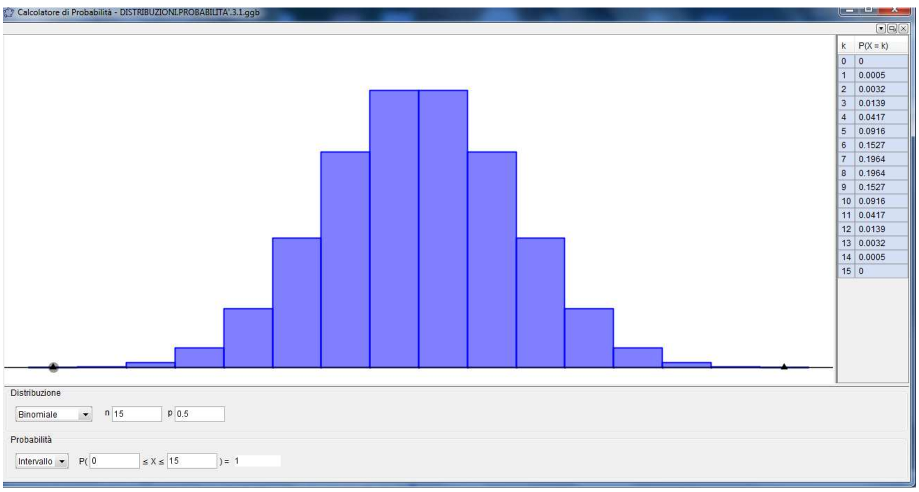
In generale se X = n° di successi in n prove indipendenti ciascuna con probabilità p di successo (e $q = 1 - p$ di insuccesso) si ha

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

S
i dice che X ha una **distribuzione di probabilità "binomiale" di parametri *n* e *p*** e si scrive

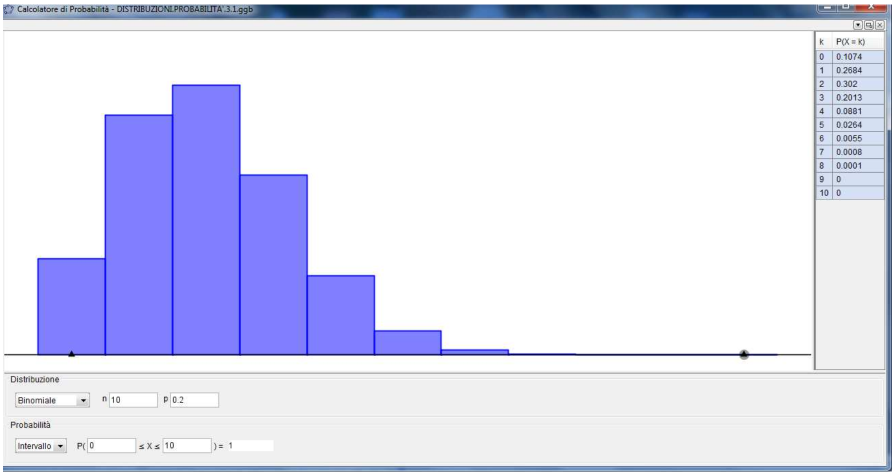
$$X \sim B(n,p)$$

Osservazione: possiamo osservare che solo se $p = q = \frac{1}{2}$ la distribuzione di probabilità è simmetrica rispetto al valore centrale $\frac{n}{2}$ e se n è dispari la distribuzione ha due valori di massima probabilità come nella figura seguente (in cui n=15).

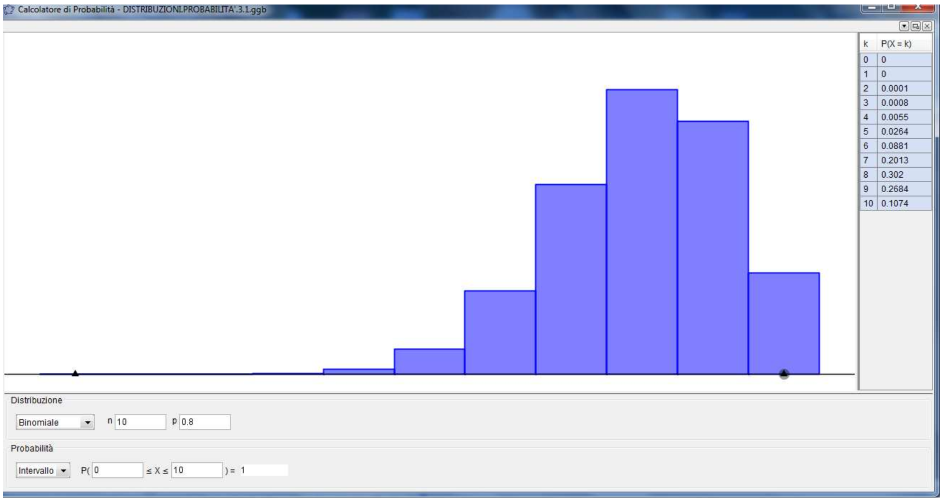


Se $p \neq \frac{1}{2}$ le distribuzioni di probabilità sono "sbilanciate".

Se per esempio n=10 e p=0,2 il valore di massima probabilità si ha per X=2.



Se invece n=10 e p=0,8 il valore di massima probabilità si ha per X=8.



Vediamo nel caso di X ~ $B(10, \frac{1}{2})$ come risultano media e deviazione standard:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{2^{10}} + 1 \cdot \frac{10}{2^{10}} + 2 \cdot \frac{45}{2^{10}} + \dots\dots + 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{(0-5)^2 \cdot \frac{1}{2^{10}} + \dots . + (10-5)^2 \cdot \frac{1}{2^{10}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cong 1{,}58$$

Nota

Si può dimostrare che se X ~ B(n,p) $\boxed{M(X) = n \cdot p}$ e $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$

Infatti nel nostro esempio, in cui X ~ $B(10, \frac{1}{2})$ abbiamo trovato:

$$M(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cong 1{,}58$$

(*)Dimostriamo la formula relativa a M(X):

$$M(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + ...n \cdot p_n = 1 \cdot \binom{n}{1} \cdot p \cdot q^{n-1} + 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + ... + n \cdot \binom{n}{n} \cdot p^n =$$

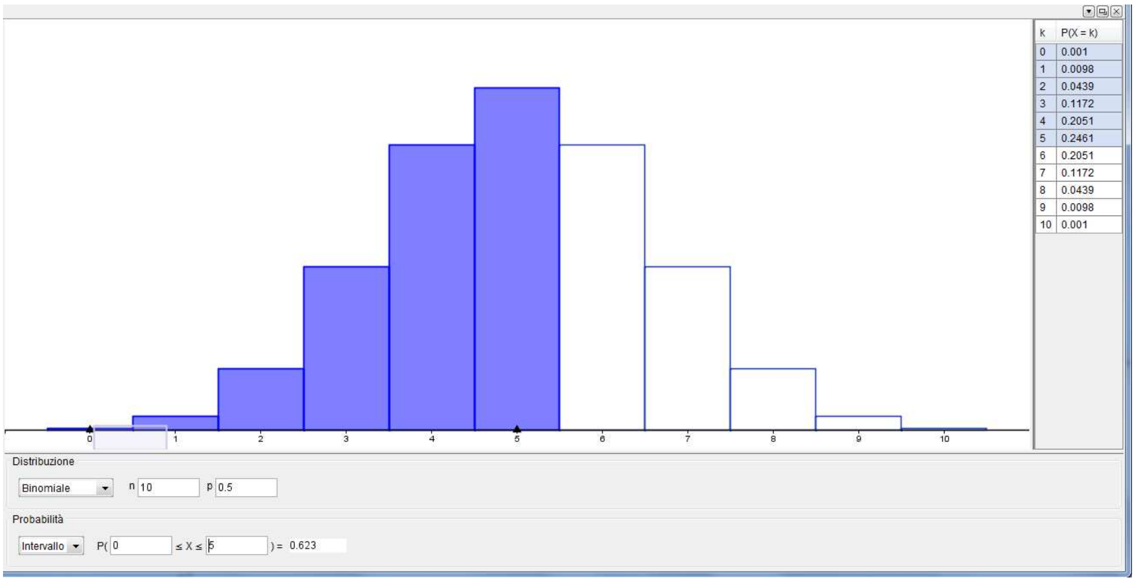
$$= n \cdot p \cdot q^{n-1} + 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + ... + n \cdot p^n = n \cdot p \cdot [q^{n-1} + (n-1) \cdot p \cdot q^{n-2} + .. p^{n-1}] = n \cdot p \cdot (p+q)^{n-1} =$$

$$= n \cdot p \cdot 1 = n \cdot p$$

Osservazione

Se rispondendo a caso ad un test di 10 domande vero-falso voglio determinare la probabilità di **rispondere correttamente al massimo a 5 domande** calcolerò la funzione di ripartizione:

$$F(5) = P(X \le 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + ... + P(X = 5) \cong 0{,}423$$



Nota

Se invece voglio determinare **la probabilità che X assuma valori maggiori di un dato valore k** devo considerare l'evento complementare e quindi scrivere

$$P(X > k) = 1 - P(X \le k) = 1 - F(k)$$

Per esempio rispondendo a caso ad un test di 10 domande vero-falso la probabilità di rispondere correttamente a più di 5 domande (probabilità di prendere la "sufficienza") è $P(X > 5) = 1 - F(5) \cong 1 - 0{,}423 = 0{,}577$

Distribuzione binomiale e tavola di Galton

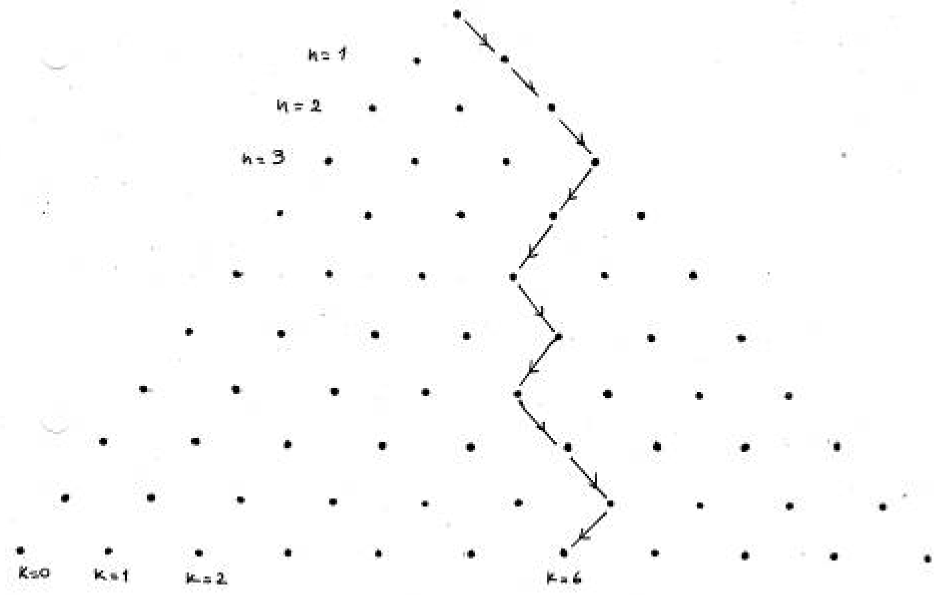
Consideriamo una tavola disposta verticalmente su cui sono fissati dei chiodi come in figura e alla base della quale ci sono dei contenitori a forma di tubi cilindrici.

Lasciamo cadere una pallina di dimensioni tali che rimbalzando ad ogni chiodo la pallina possa scendere spostandosi a destra o a sinistra con la stessa probabilità fino a cadere in uno dei tubi raccoglitori dopo aver fatto un certo percorso..
Cosa succede se faccio cadere un grande numero di palline? Come si disporranno nei tubi?

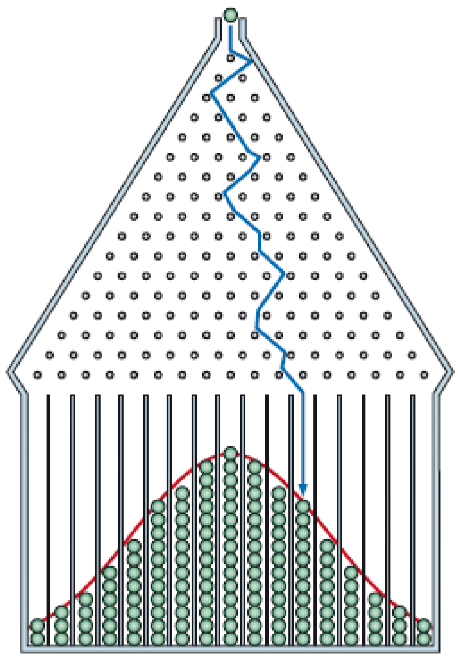
Questo dispositivo è chiamato **tavola di Galton** dal nome di chi l'ha ideato.

Il percorso casuale seguito dalla pallina può essere considerato equivalente al riempimento di un test vero-falso fatto rispondendo a caso: possiamo pensare che lo spostamento a destra corrisponda al successo S cioè al caso in cui diamo la risposta corretta e viceversa quello a sinistra corrisponda al caso in cui diamo la risposta errata (E).

Se per esempio la tavola ha 10 file di chiodi questo numero corrisponde al numero di domande del test.
Se una pallina arriva nella posizione finale $k = 6$ (vedi figura) vuol dire che per 6 volte su 10 rimbalzi è scesa a destra (6 successi-risposte esatte) e sappiamo che ci sono $C_{10,6} = 210$ modi per scegliere 6 elementi in un insieme di 10 elementi cioè ci sono 210 cammini diversi che possono portare la pallina a quella posizione.



Facendo scendere un numero N molto grande di palline se indichiamo con N_k il numero di palline che arrivano nella posizione k il rapporto $\frac{N_k}{N} \cong p_k$ (la frequenza relativa si avvicina alla probabilità di avere k successi su 10 prove indipendenti) e quindi la distribuzione delle palline nei tubi fornirà un "istogramma" della distribuzione di probabilità binomiale con $p = \frac{1}{2}$



Distribuzione di Poisson

Ad un centralino di un numero verde arrivano in media 120 telefonate in un'ora di punta.
Qual è la probabilità che in un'ora di punta arrivino 100 telefonate?

Possiamo considerare X = n° di telefonate che arrivano al centralino in un'ora di punta e considerare X ~ $B(n, p)$ in cui

- n = numero degli utenti potenziali
- p = probabilità che un utente telefoni al centralino

E' chiaro che n è un numero grande mentre p è piccolo: in queste condizioni si può dimostrare che

$$P(X = K) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cong \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}$$

Poiché $M(X) = np$ e nel nostro caso **conosciamo proprio il valor medio** di X (120) **ma non n e p** possiamo proprio utilizzare questa relazione.

Se poniamo $\boxed{\lambda = np}$ abbiamo:

$$\boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}$$

Questa distribuzione viene chiamata **distribuzione di Poisson di parametro** λ (dal nome del matematico che l'ha studiata) in cui λ è il numero medio di eventi per intervallo di tempo ed è indicata con $P(\lambda)$.

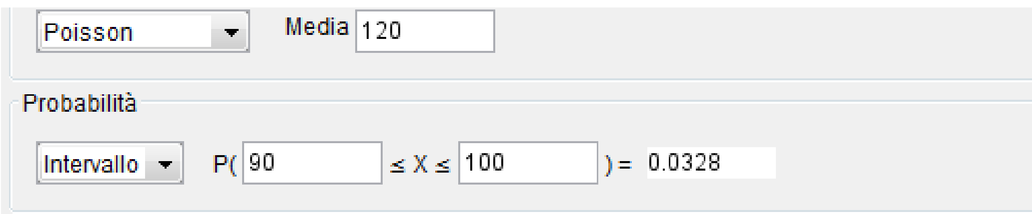
Quindi nel nostro caso avremo: $P(X = 100) = \frac{120^{100}}{100!} \cdot e^{-120} \cong 0{,}0068$

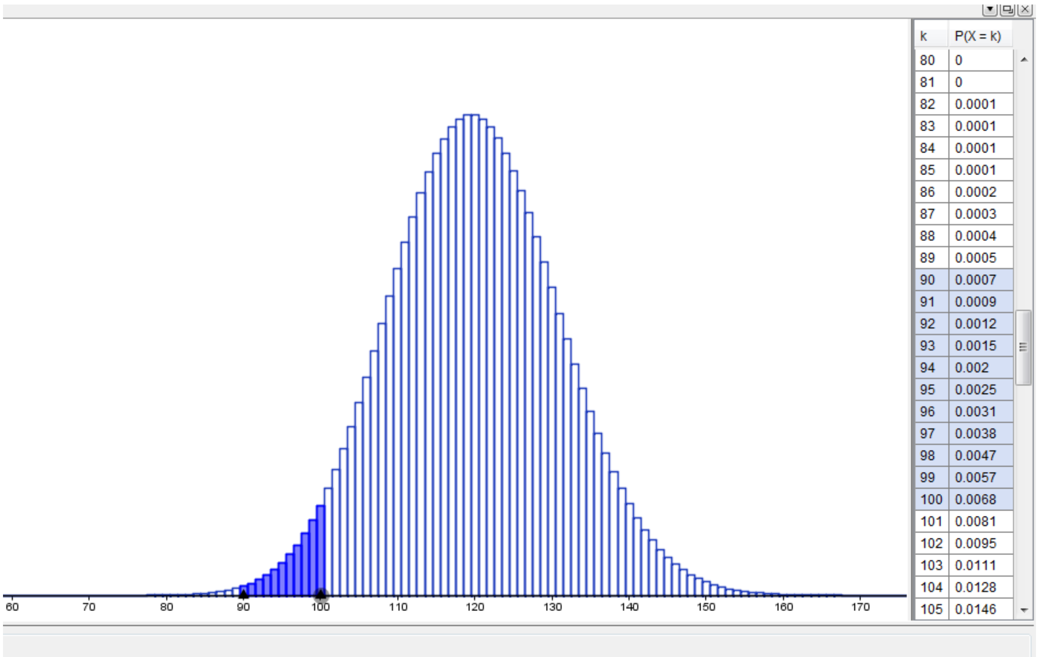
E' chiaro che la probabilità di avere un numero preciso di telefonate è molto bassa e non molto interessante.

E' più interessante chiedersi, per esempio, qual è la probabilità che in un'ora di punta arrivino tra le 90 e le 100 telefonate: dobbiamo in questo caso sommare le probabilità relative a

$$P(90 \le X \le 100) = P(X = 90) + P(X = 91) + ... + P(X = 100)$$

e dal momento che i calcoli sono pesanti possiamo utilizzare il foglio di calcolo di Geogebra e in particolare il calcolatore di probabilità dopo aver impostato distribuzione di Poisson di media 120 e selezionato l'intervallo 90-100 con i puntatori.



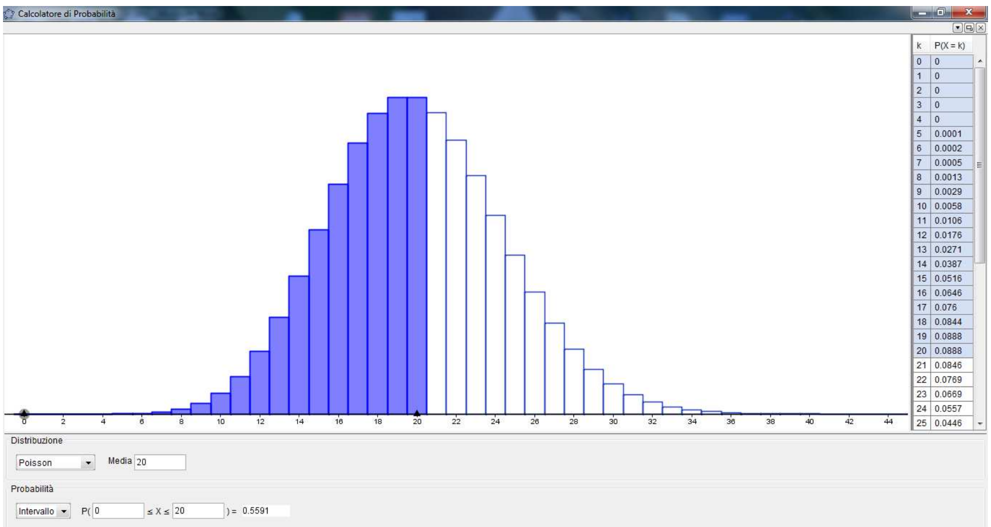


Può essere interessante anche determinare la probabilità che, per esempio, nei primi 10 minuti di un'ora di punta arrivino più di 20 telefonate: se supponiamo che le telefonate arrivino in modo "uniforme" nel tempo il numero medio di telefonate che arrivano in 10 minuti sarà

$$\frac{10}{60} \cdot 120 = 20$$

Se allora consideriamo Y = n° telefonate che arrivano nei primi 10 minuti di un'ora di punta come una variabile aleatoria di Poisson con media 20 avremo

$$P(Y > 20) = 1 - P(Y \leq 20) \cong 1 - 0{,}56 = 0{,}44$$

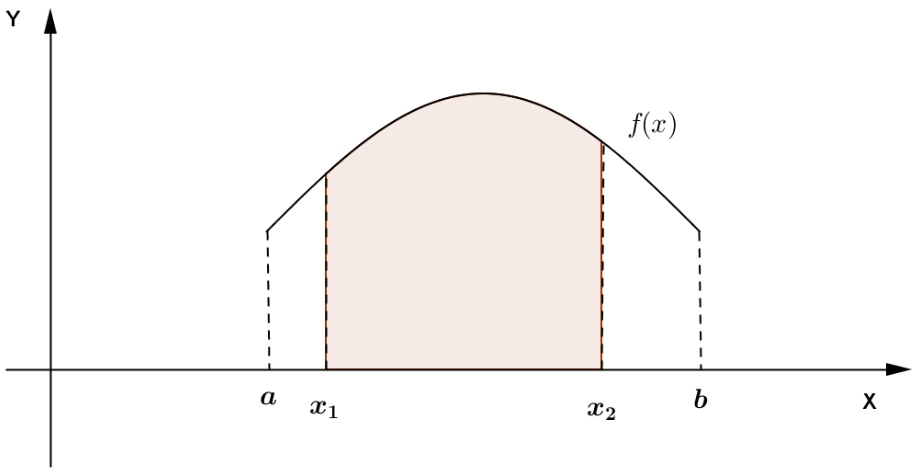


Variabili aleatorie continue

Ci sono molto situazioni in cui i valori assunti da una variabile aleatoria X non possono considerarsi in numero finito ed occorre considerare che X assuma tutti i valori reali di un dato intervallo $I = [a;b]$ e si parlerà di variabile aleatoria "continua".
Se per esempio misuriamo l'altezza degli studenti di una classe e consideriamo X = altezza (in cm) non ha senso ricercare P(X = dato valore) ma piuttosto $P(x_1 \leq X \leq x_2)$.

Nel caso di una variabile aleatoria continua che assume valori nell'intervallo $I = [a;b]$ si descrive l'andamento della probabilità di X attraverso una funzione $f(x)$ chiamata "**densità di probabilità di X**" tale che

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



E chiaro che $\int_a^b f(x)dx = 1$

Poiché se X prende valori appartenenti all'intervallo $I = [a;b]$ possiamo sempre porre

$$f(x) = 0 \qquad per \qquad x < a \cup x > b$$

possiamo considerare $f(x)$ definita su tutti i numeri reali.

Quindi se $f(x)$ è una densità di probabilità dovrà essere

$$f(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Nota: la probabilità che una variabile aleatoria continua X assuma un dato valore compreso in I è sempre nulla, cioè $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in I$: la probabilità si riferisce sempre alla probabilità che X appartenga ad un dato intervallo di valori.

Analogamente a quanto visto per le variabili aleatorie discrete abbiamo:

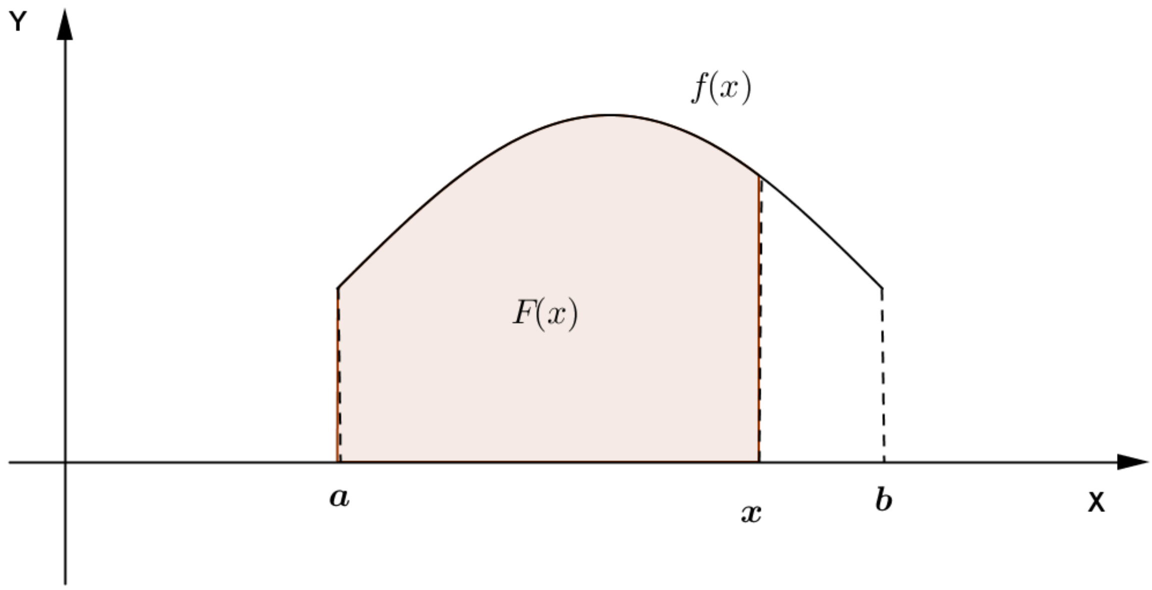
- valore medio $$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

- deviazione standard $$\sigma(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx}$$

- varianza $$\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

- funzione di ripartizione $$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Quindi F(x) è una primitiva della densità f(x) e $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$



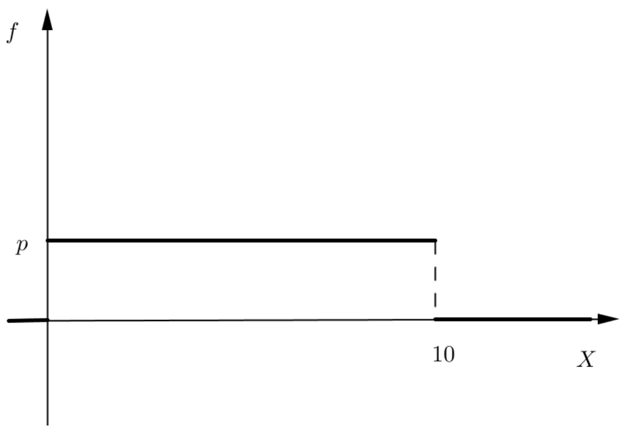
Distribuzione uniforme continua

Si dice che X ha una distribuzione uniforme continua quando la sua densità di probabilità è una funzione

$$f(x)\begin{cases} 0 & x < a \\ p & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

dove essendo $p \cdot (b-a) = 1)$ si ha che $p = \dfrac{1}{b-a}$.

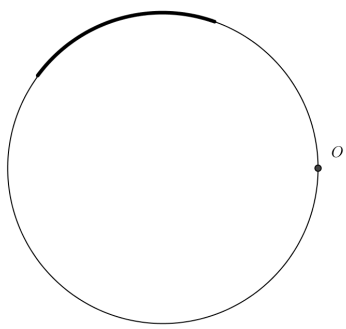
Come esempio di distribuzione uniforme continua consideriamo un punto materiale P che sta compiendo un moto circolare uniforme su una circonferenza di lunghezza 10 cm e supponiamo di osservarlo ad un determinato istante: se supponiamo di non aver dati sufficienti per sapere in quale posizione si trovi in quell'istante e consideriamo come variabile casuale X la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{OP}$ (misurato nel verso antiorario) dove O è un punto di riferimento sulla circonferenza, possiamo dire che la distribuzione di probabilità di X è uniforme continua.
Il grafico della distribuzione di probabilità $f(x)$ di X risulta



Poiché $\qquad p \cdot 10 = 1 \qquad \Rightarrow p = \dfrac{1}{10}$

Ricordiamo che per le distribuzioni continue la probabilità che il valore della variabile casuale sia uguale ad un dato numero k è nulla, cioè $P(X = k) = 0$, mentre si determina sempre la probabilità che il valore della variabile casuale appartenga ad un dato intervallo cioè si calcola $P(a \le X \le b)$.

Se per esempio nel nostro caso vogliamo determinare la probabilità che il punto P si trovi ad una distanza compresa tra 2 e 4 (cm) misurata sulla circonferenza in senso antiorario (vedi figura) avremo:



$$P(2 \le X \le 4) = \int_2^4 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5}$$

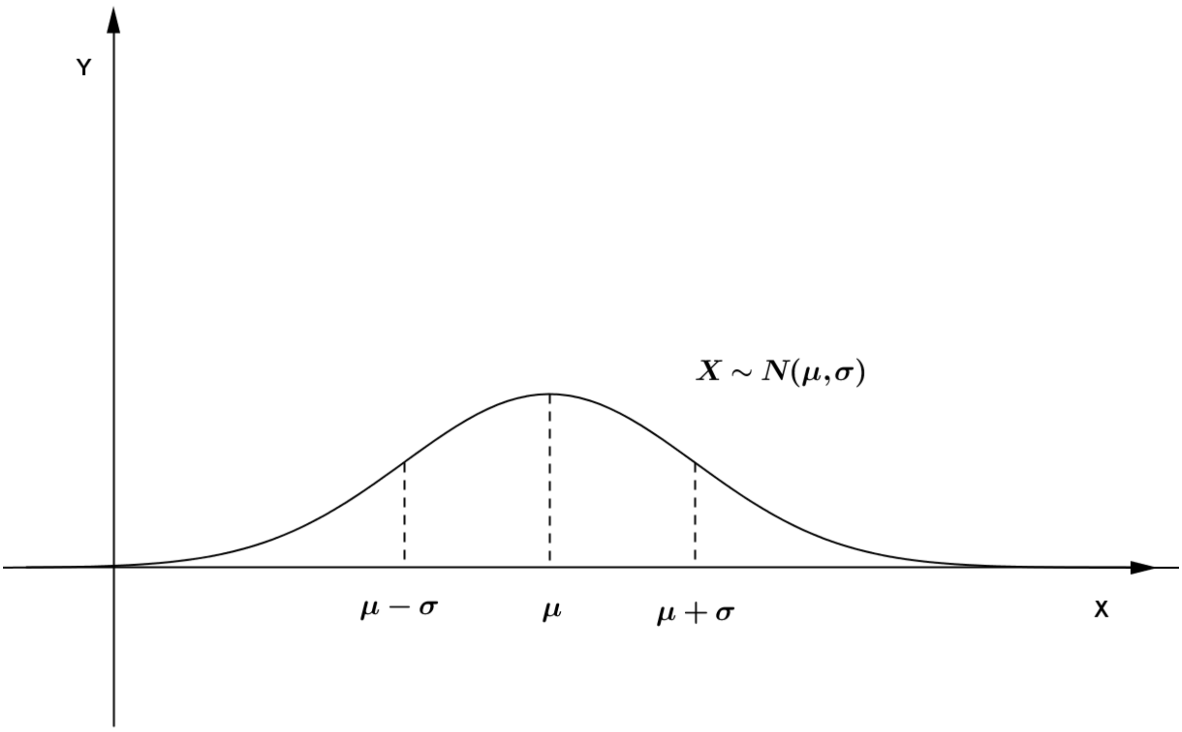
Distribuzione normale

Quando misuriamo le altezze o il peso di un grande numero di persone oppure misuriamo una grandezza in modo diretto utilizzando uno strumento di una data sensibilità se consideriamo come variabile aleatoria

X = misurazione ottenuta

riportando in un grafico l'andamento della distribuzione di frequenze relative vediamo che il grafico si avvicina ad una curva chiamata **curva normale** (proprio perché è il modello che rappresenta l'andamento che si ha di "norma" per molte distribuzioni di frequenza) o curva di Gauss (dal nome del matematico che l'ha studiata) avente equazione

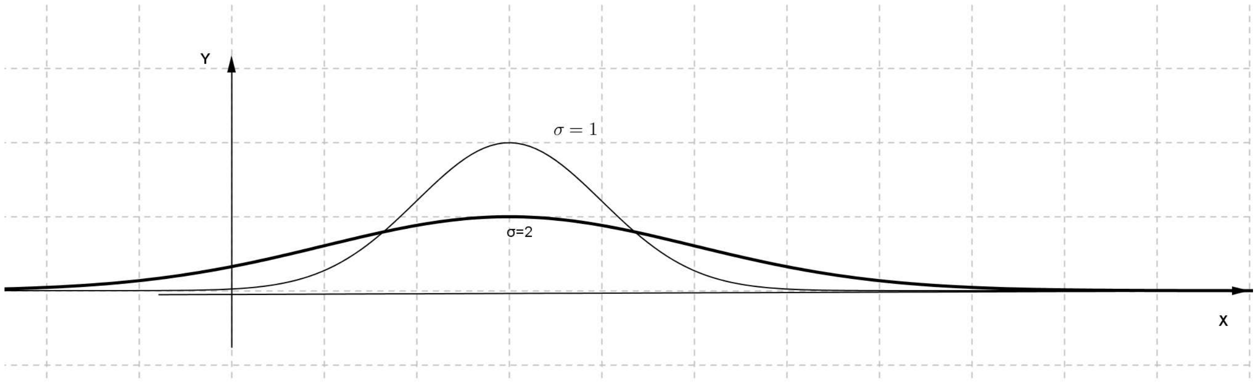
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}},$$



Questa densità di probabilità viene chiamata anche **curva degli errori accidentali** o **curva "a campana"** per la sua forma ed indicata con $N(\mu,\sigma)$.

Nota: si può dimostrare che la distribuzione normale approssima bene anche la distribuzione binomiale per *n* grande e $p = \frac{1}{2}$ ponendo $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np \cdot (1-p)}$

La curva assume il valore massimo per $X = \mu$ e risulta $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$ ed ha due flessi per $x = \mu \pm \sigma$ come si può verificare facilmente studiando la derivata prima e seconda.
Possiamo osservare che all'aumentare di σ la curva si appiattisce e c'è maggiore dispersione dei valori intorno al valore medio poiché l'ordinata del massimo dipende da σ: se σ è piccolo allora l'ordinata del massimo della distribuzione normale è grande e viceversa quando σ è grande l'ordinata del massimo è piccola e la curva si appiattisce.



Inoltre non è difficile verificare che

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \mu$$

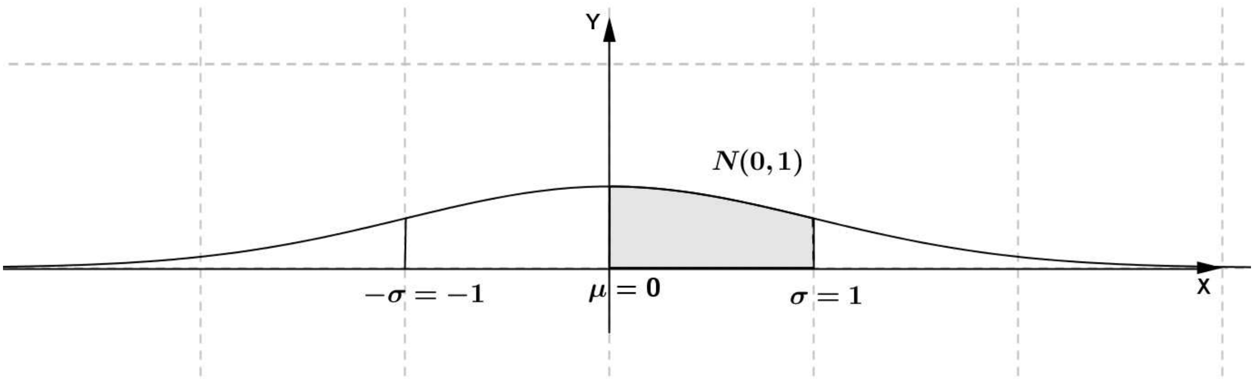
$$\sigma(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx = \sigma$$

cioè μ **e** σ **sono proprio il valore medio e la deviazione standard di X.**

Nota

Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si parla di **distribuzione normale standard** e l'equazione risulta

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$$



Se X ~ $N(\mu, \sigma)$ possiamo ricondurci ad una variabile normale standard considerando

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Per determinare la probabilità che X appartenga ad un dato intervallo $[a,b]$ dobbiamo calcolare

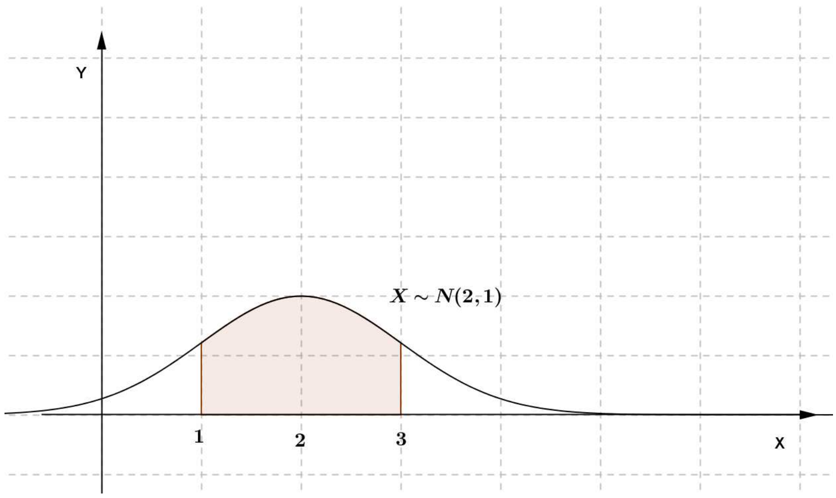
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dove $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ è la funzione di ripartizione.

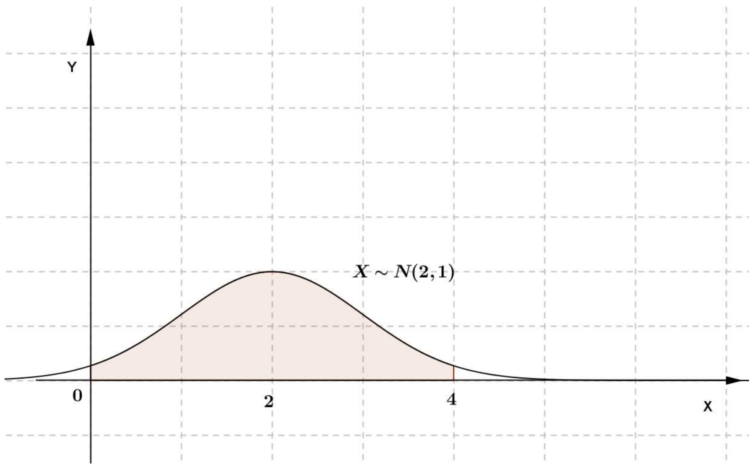
Ma questo integrale non può essere espresso mediante le usuali funzioni che conosciamo (funzioni elementari) ed occorrono metodi di calcolo approssimato.
I valori di F(x) relativi a X~ $N(0,1)$ sono stati calcolati e riportati in delle apposite "tavole" .

Esempio
Se X ~ $N(2,1)$ per calcolare la probabilità che X appartenga ad un dato intervallo, passiamo alla variabile standard e usiamo le tavole. Per esempio:

$$P(1 < X < 3) = P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot P(0 \le Z \le 1) = 2(F(1) - F(0)) \cong 2 \cdot (0{,}84 - 0{,}5) = 0{,}68$$



$$P(0 < X < 4) = P(-2 < Z < 2) = 2 \cdot P(0 \le Z \le 2) = 2 \cdot (F(2) - F(0)) \cong 0{,}96$$



In generale se X ~ $N(\mu,\sigma)$ abbiamo:

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \cong 2\cdot 0{,}34 = 0{,}68$$
$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \cong 0{,}96$$
$$P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \cong 0{,}99$$

Tabella della funzione di ripartizione F(X) *della distribuzione normale standard* $N(0,1)$

X	***F(X)***
0	0,50000
0,1	0,53983
0,2	0,57926
0,3	0,61791
0,4	0,65542
0,5	0,69146
0,6	0,72575
0,7	0,75804
0,8	0,78814
0,9	0,81594
1	0,84134
1,1	0,86650
1,2	0,88686
1,3	0,90490
1,4	0,92073
1,5	0,93448
1,6	0,94630
1,7	0,95637
1,8	0,96485
1,9	0,97193
2	0,97778
2,1	0,98257
2,2	0,98645
2,3	0,98956
2,4	0,99202
2,5	0,99396
2,6	0,99547
2,7	0,99664
2,8	0,99752
2,9	0,99819
3	0,99869

ESERCIZI
DISTRIBUZIONI BINOMIALE

1. Un test è costituito da 10 domande, ognuna con 4 possibili risposte di cui solamente una è corretta. Se uno studente risponde a caso, qual è la probabilità che:

   a) non risponda correttamente a nessuna domanda
   b) risponda correttamente ad almeno 6 domande

   [0,056 ; 0,02]

2. Comprando un gratta - e - vinci c'è una probabilità dell'1% di vincere qualcosa. Calcola la probabilità che, comprando 10 biglietti, si vinca almeno 1 premio.

   [0,1]

3. Se si lancia una moneta per 20 volte, qual è la probabilità che esca Testa almeno 10 volte?

   [0,588]

4. Se si lancia un dado, non truccato, per 10 volte, qual è la probabilità che non esca mai il 6?

   [circa 0,16]

5. Un tiratore scelto ha la probabilità del 98% di fare centro. Qual è la probabilità che, sparando 10 colpi, colpisca sempre il bersaglio?

   [circa 0,82]

ESERCIZI
DISTRIBUZIONE DI POISSON

1. Secondo alcune stime sulla Terra in un anno si verificano in media 20 terremoti di grande entità (magnitudo superiore a 6).
Se si suppone che X = n° terremoti di grande entità all'anno si possa considerare come una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson, calcola la probabilità che:

a) non si verifichi alcun terremoto di grande entità in un anno;
b) si verifichino 10 terremoti di grande entità in un anno;
c) si verifichino tra i 5 e i 10 terremoti di grande entità in un anno.

[$2 \cdot 10^{-9}$; 0,006; 0,011]

2. Un campione radioattivo contiene circa $2 \cdot 10^{10}$ nuclei, ciascuno dei quali ha probabilità 10^{-10} di decadere in 1 secondo. Calcola:

a) il numero medio di decadimenti in 1 secondo;
b) la probabilità di osservare 2 decadimenti in 1 secondo;
c) la probabilità di osservare al più 2 decadimenti in un secondo.

[2 ; $2 \cdot e^{-2}$; $5 \cdot e^{-2}$]

3. Un macchinario produce pezzi difettosi con probabilità $p = 0{,}005$. Calcola la probabilità che su 500 pezzi:

a) nessuno sia difettoso;
b) i pezzi difettosi siano in numero tra 2 e 4.

[0,082 ; 0,604]

4. Al servizio di guardia medica festivo arrivano in media 90 richieste in 24 ore. Calcola la probabilità che in un'ora:

a) vi siano 5 chiamate;
b) vi siano al massimo 2 chiamate.

[0,145 ; 0,277]

5. Ad uno sportello bancario arrivano in media 20 persone all'ora. Determina la probabilità che in 15 minuti:

a) arrivi solo una persona;
b) arrivino al massimo 5 persone.

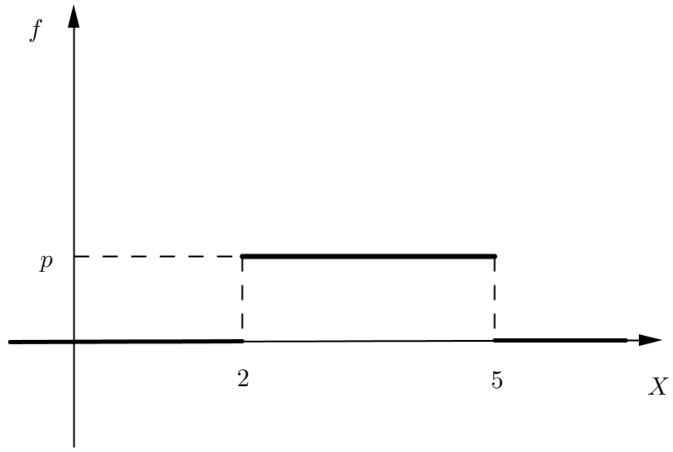
[0,034; 0,616]

ESERCIZIO
DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA

Determina la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo $[2,5]$ con una distribuzione uniforme. Determina il valor medio, la varianza e la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $\frac{5}{2} \le X \le 4$.

Svolgimento

Poiché il grafico è del tipo seguente



dovrà essere $p \cdot 3 = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

Calcoliamo il valor medio

$$M(X) = \int_2^5 x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{25}{2} - 2\right) = \frac{7}{2}$$

Osserviamo che $M(X) = \frac{2+5}{2}$

Calcoliamo la varianza e la deviazione standard

$$\operatorname{var}(X) = \int_2^5 \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(x - \frac{7}{2})^3}{3}\right]_2^5 = \ldots = \frac{3}{4} \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{\operatorname{var}(X)} \cong 0{,}87$$

Calcoliamo infine $P(3 \le X \le 4) = \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}\left[4 - \frac{5}{2}\right] = \frac{1}{2}$

ESERCIZI
DISTRIBUZIONE NORMALE

1. Il tempo di attesa (in minuti) a uno sportello di un ufficio postale si può modellare con una variabile aleatoria normale con media $\mu = 10$; $\sigma = 5$. Qual è la probabilità di dover attendere:

   a) tra 5 e 10 minuti;
   b) tra 10 e 15 minuti;
   c) tra 10 e 20 minuti.

   [0,34 ; 0,34 ; 0,48]

2. Delle barrette d'acciaio prodotte da un macchinario hanno una lunghezza $X \sim N(\mu = 10cm, \sigma = 0{,}5cm)$. La lunghezza delle barrette è ritenuta accettabile se è compresa tra 9,5 cm e 10,5 cm. Qual è la percentuale di barrette che vengono prodotte nei limiti di tolleranza?

   [68%]

3. Per un campione di 1000 persone è stato registrato il peso che è risultato distribuito in modo "normale" con $\mu = 82Kg$ e $\sigma = 12Kg$. Calcola quante persone hanno peso compreso tra 70 Kg e 90 Kg

   [circa 590]

4. La distribuzione delle altezze di un gruppo di 500 persone può essere approssimato con una distribuzione normale: la media risulta 170 cm con deviazione standard 5 cm. Quante sono, teoricamente, le persone con un'altezza compresa tra 160 cm e 180 cm?

   [circa 480]

5. Il peso di una scatola di pelati confezionata automaticamente si distribuisce normalmente . Se il peso medio è 8 Kg con deviazione standard 0,05 Kg, qual è l'intervallo di peso in cui si concentra circa il 99% delle scatole confezionate?

   [7,85 Kg – 8,15 Kg]

Simulazioni prova scritta

SIMULAZIONE 1

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x)=\dfrac{x+a}{e^{bx}}$

1. Si determinino i valori di a e b affinché la funzione passi dal punto $A(1;0)$ e abbia un punto di massimo in $x=2$.

2. Verificato che ciò avviene per $a=-1$ e $b=1$, si studi e si rappresenti il suo grafico Γ in un sistema di assi cartesiani, determinando la tangente che passa per il suo punto di flesso.

3. Detto P un punto appartenente al grafico della funzione situato nel quarto quadrante, si costruisca il rettangolo ottenuto proiettando P sugli assi cartesiani in modo che tale rettangolo abbia area massima.

4. Mostrare, facendo il calcolo, che l'area del triangolo mistilineo delimitato dalla funzione e dagli assi cartesiani nel quarto quadrante è uguale all'area delimitata dalla funzione e dall'asse delle ascisse nel primo quadrante.

PROBLEMA 2

In un piano cartesiano ortogonale Oxy sono assegnati i punti $A(0;1)$ e $B(2;0)$. Si consideri il punto $C(x;0)$ nel semiasse negativo delle ascisse.

1. Determinare il punto C in modo che il rapporto $y=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ sia massimo.

2. Si tracci il grafico della funzione $F(x)=\dfrac{(2-x)^2}{1+x^2}=\left(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2$ indipendentemente dalla questione geometrica (si tralasci lo studio della derivata seconda).

3. Si determini l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $F(x)$, la retta di equazione $x=1$ e dagli assi cartesiani.

4. Si dimostri, con il metodo che si preferisce, che $F(x)$ non è invertibile nel suo dominio e si determini un intervallo, contenuto nel dominio, nel quale tale funzione risulti invertibile, motivando esaurientemente la scelta effettuata.

Simulazioni prova scritta

QUESITI

1. Calcolare il valore del seguente limite $\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_1^x \ln t \, dt}{(x-1)^2}$

2. Determina *a* e *b* (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;2]$ e determina il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema. Disegna il grafico di $f(x)$.

3. Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse y del sottografico di $y = 1 - x^2$ per $0 \le x \le 1$ e dai una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

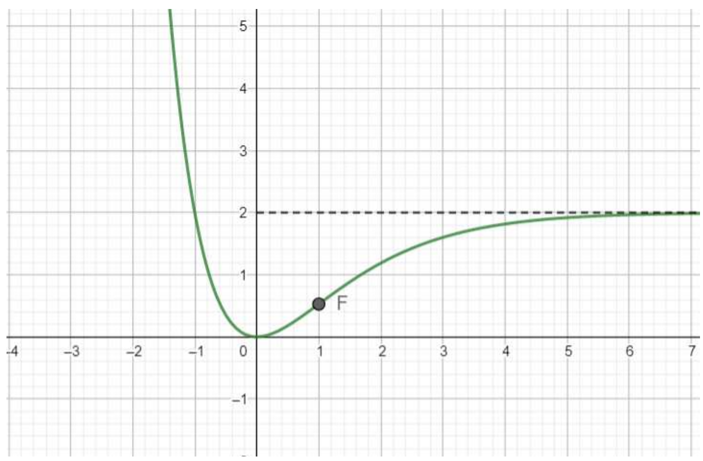
4. Stabilire per quale valore del parametro reale *k* la funzione di equazione $y = \frac{kx^2 + 1}{(k-1)x^2}$ ha valor medio uguale a 3 nell'intervallo $[1;2]$.

5. Data la funzione $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t+1} dt$, si dimostri che $F(x)$ è invertibile nell'intervallo $x \ge 1$.

6. Sulla curva $y = \ln x$ determinare il punto P nel quale la tangente è parallela alla retta congiungente i punti $A(1;0)$ e $B(e;1)$.

7. Tra tutti i coni circoscritti ad un cilindro di raggio *r* ed altezza *h* si trovi quello di minimo volume.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui sotto in cui F è un punto di flesso, determina un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate



SOLUZIONI SIMULAZIONE 1

PROBLEMA 1

1. $a=-1; \quad b=1$
2. $M\left(2, \frac{1}{e^2}\right); \quad F\left(3, \frac{2}{e^3}\right); \quad t_F : y = -\frac{1}{e^3}x + \frac{5}{e^3}; \quad y=0 \quad as. \quad or. per \quad x \to +\infty$
3. $P\left(x; \frac{x-1}{e^x}\right); \quad x_M = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
4. $\frac{1}{e}$

PROBLEMA 2

1. $C(x;0); \quad x_M = -\frac{1}{2}$
2 $M\left(-\frac{1}{2};5\right); \quad m(2;0); \quad y=1 \quad as. \quad or.$
3. $\frac{3}{4}\pi - 2\ln 2 + 1$
4. F(x) non è invertibile perché F'(x) non ha segno costante e quindi F(x) non è iniettiva. Si può invertire restringendo il dominio per esempio ad $0 \le x \le 2$.

QUESITI

1. $\frac{1}{2}$
2. $a=0; \quad b=2; \quad x_1 = \frac{7}{16} \quad ; \quad x_2 = \frac{4}{\sqrt{7}}$
3. $V = \frac{\pi}{2}$
4. $k = \frac{7}{4}$
5. $F'(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ risulta positiva per $x \ge 1$ e quindi F(x) è crescente e di conseguenza iniettiva e invertibile.
6. $x = e - 1$
7. Ponendo x = raggio del cono si ha $x_m = \frac{3}{2}r$ -
8. $f'(0) = 0$ f'(x) negativa per x<0 e positiva per x>0; massimo in x=1; asse x as. orizz. per $x \to +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$

SIMULAZIONE 2

PROBLEMA 1
In un piano cartesiano ortogonale è assegnata la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$$

con a parametro non nullo.

1. Si determini il valore del parametro a^2 in modo che la funzione ammetta un flesso nel punto di ascissa $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

2. Verificato che $a^2 = 4$, si tracci il grafico della funzione $f_2(x)$così ottenuta;

3. Si tracci una parallela all'asse x che incontri $f_2(x)$ in due punti A e B; si proiettino A e B sull'asintoto, individuando i punti A' e B' e si determini l'equazione della parallela che rende massima l'area del rettangolo ABB'A';

4. Si calcoli, infine, l'area della regione di piano compresa tra asintoto e grafico.

PROBLEMA 2

In un piano cartesiano ortogonale Oxy è assegnata la funzione $f(x)$) tale che:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \text{ e } f(4) = \frac{8}{9}.$$

1. Determina l'espressione analitica di $f(x)$.

2. Verificato che $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$, traccia il grafico di $f(x)$ indicando con O e B le sue intersezioni con l'asse delle ascisse e verificando che il grafico della funzione non ammette flessi.

3. Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in O ed indica con A l'ulteriore intersezione di tale tangente con il grafico di $f(x)$.

4. Determina il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo mistilineo OAB, cioè formato dal segmento OA e dall'arco AB del grafico di $f(x)$, attorno all'asse x.

QUESITI

1. Determinare le coppie di valori (a,b) per le quali risulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{e^{ax} + bx - 1} = \frac{1}{8}$$

2. Determinare il valore di a, b (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & 0 \le x < 1 \\ -2x^2 + 3x + b & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;2]$ determinando il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema e, successivamente, se ne disegni il grafico.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse y del sottografico di $y = 4 - x^2$ per $0 \le x \le 2$ e si dia una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

4. Si determini il valor medio di $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ nell'intervallo $[2;5]$, interpretando geometricamente il risultato. Inoltre, si motivi adeguatamente perché non esiste il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo $[0;2]$.

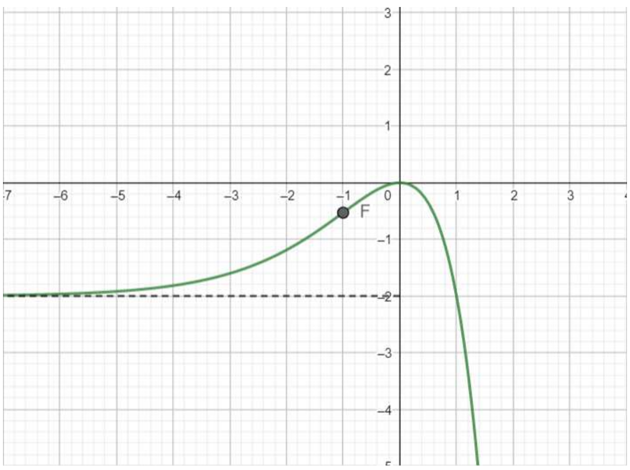
5. Data la funzione $F(x) = \int_0^x (t-1) \cdot e^t \, dt$, si dimostri che $F(x)$ ammette un punto di minimo e se ne determini il valore.

6. Dimostrare, che l'equazione $x \cdot \ln x - 1 = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale e si individuino i numeri interi tra cui si trova.

7. Si deve costruire un deposito cilindrico, aperto superiormente, di 3 m^3 di capacità. Il materiale per costruirlo costa 10 $euro/m^2$. Calcolare le dimensioni del deposito in modo che il costo sia il minore possibile.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui accanto, si determini un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate.

N.B.: F è il punto di flesso di $f(x)$.



SOLUZIONI SIMULAZIONE 2

PROBLEMA 1

1. $a^2 = 4$
2. $M\left(2, \frac{1}{e^2}\right)$; $F\left(3, \frac{2}{e^3}\right)$; $y = 1$ as. or.
3. $k = \frac{1}{2}$
4. $A = 2\pi$

PROBLEMA 2

1. $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $O(0;0)$; $B(2;0)$; $y = 1$ *as. or.* **;** $x = 1$ as. vert.
3. $t_O : y = -2x$; $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$
4. $V = \frac{16}{3}\pi$

QUESITI

1. $(4;-4)\;(-4;4)$
2. $a = -3$; $b = -1$; $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{11}{8}$
3. $V = 8\pi$
4. $f(c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\ln 4$; in $[0;2]$ f(x) non è continua
5. $F'(x) = (x-1)\cdot e^x$; $x_m = 1$; $F(1) = 2 - e$
6. $1 < x_o < 2$; $f(x) = x\ln x - 1$; $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2\ln 2 - 1 > 0$
7. $raggio = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$, $altezza = raggio$
8. $f'(0) = 0$ f'(x) positiva per x<0 e negativa per x>0; massimo in x=-1; asse x as. orizz. per $x \to -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$

SIMULAZIONE 3

PROBLEMA 1

In un piano cartesiano ortogonale sono assegnate le parabole:

$$\mathcal{P}_1: y = ax^2 - 2x + 2 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2: y = 2ax^2 - 2x + 1 \quad \text{con } a \in \Re - \{0\}$$

e si indichino con V_1 e V_2, rispettivamente, i loro vertici.

1. Per quale valore di a il segmento $\overline{V_1V_2}$ ha lunghezza minima?
2. Si consideri ora la funzione $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{2x^2}}$, che esprime la lunghezza del segmento $\overline{V_1V_2}$ avendo posto $a = x$, se ne tracci il grafico determinando, in particolar modo, il punto A in cui tale grafico interseca l'asintoto orizzontale. Il candidato si limiti allo studio della derivata prima.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x il trapezoide limitato dal grafico della funzione e dalle rette $x = x_A$, $x = 3$.
4. Si ponga $a = 1$ nelle equazioni di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e si determini l'area della regione di piano racchiusa tra i grafici delle parabole così ottenute.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = (2 - x)e^x$$

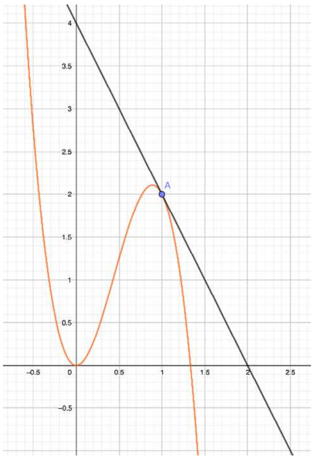
1. Si tracci il grafico della funzione $f(x)$ in un piano cartesiano ortogonale Oxy.

2. Determina l'equazione della retta *t* tangente al grafico di $f(x)$ che passa per il suo punto di flesso. Successivamente determina l'equazione della retta *s* che unisce i punti di intersezione del grafico della funzione con gli assi cartesiani. Si descriva la natura del triangolo ottenuto dall'intersezione delle rette *s, t* e dall'asse delle ascisse.

3. Detto P un punto appartenente al grafico della funzione situato nel primo quadrante, si costruisca il rettangolo ottenuto proiettando P sugli assi cartesiani. Determina P in modo che tale rettangolo abbia area massima.

4. Si calcoli l'area della regione delimitata dal grafico della funzione e dall'asintoto situata nel secondo quadrante.

QUESITI



1. Sia $y = f(x)$ la funzione con derivata continua il cui grafico è rappresentato in figura. La retta tracciata è tangente al grafico di f nel punto $A(1;2)$. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{\ln\sqrt{x}}$$

2. Determinare il valore di a, b (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2 & 0\leq x<2 \\ \dfrac{b}{x-1} & 2\leq x\leq 3\end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;3]$ determinando il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema e, successivamente, se ne disegni il grafico.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse x del sottografico di $y=\dfrac{2}{\sqrt{4x-x^2}}$ per $1\leq x\leq 3$ e dai una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

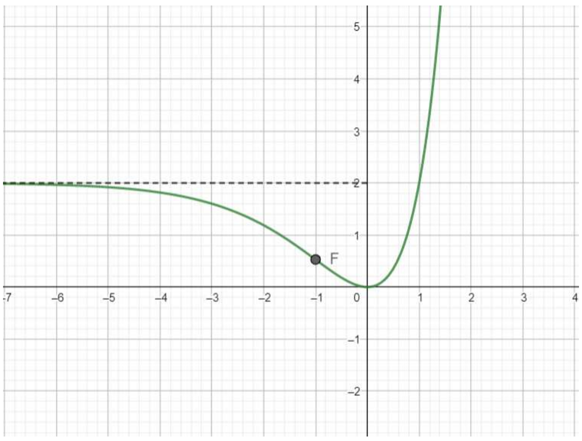
4. Si consideri la funzione $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $[2;5]$. Determinare il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo considerato interpretando geometricamente il risultato.

5. Data la funzione $F(x)=\int_1^x \ln t\; dt$, si determini l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x=e$.

6. Si dimostri, con il metodo che si preferisce, che la funzione $f(x)=2x+\ln x$ è invertibile e si calcoli la derivata della funzione inversa nel punto $y=2$.

7. Tra tutti i prismi retti di superficie totale a^2 (con $a>0$) che hanno come base un triangolo rettangolo isoscele, si determini quello di volume massimo.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui accanto (F è un punto di flesso), si determini un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate.



SOLUZIONI SIMULAZIONE 3

PROBLEMA 1

1. $a = 1$
2. $m\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $x = 0$ as. vert.; $y = 1$ as. or. ; $A\left(\frac{1}{2};1\right)$
3. $V = \left(\frac{10}{3} - \ln 6\right)\pi$
4. $A = \frac{4}{3}$

PROBLEMA 2

1. $M(1;e)$; $F(0;2)$ **;** $y = 0$ as. or. per $x \to -\infty$

2 $t_{(0;2)} : y = x + 2$; $s : y = 2 - x$ **;** $\overset{\Delta}{ABF}$ triangolo rettangolo isoscele

3. $P(x;(2-x)e^x)$; $P\left(\sqrt{2};\left(2-\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}\right)$

4. $A = 3$

QUESITI

1. -4
2. $a = -\frac{1}{4}$; $b = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$
3. $V = 2\pi \ln 3$
4. $f(c) = \frac{1}{4}$
5. $t : y = x + 1 - e$
6. $D\left(f^{-1}(2)\right) = \frac{1}{3}$
7. $x =$ cateto di base $\to x_M = \frac{a}{\sqrt{3}}$
8. $f'(0) = 0$ minimo in $x = -1$; asse x as. orizz. per $x \to -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$