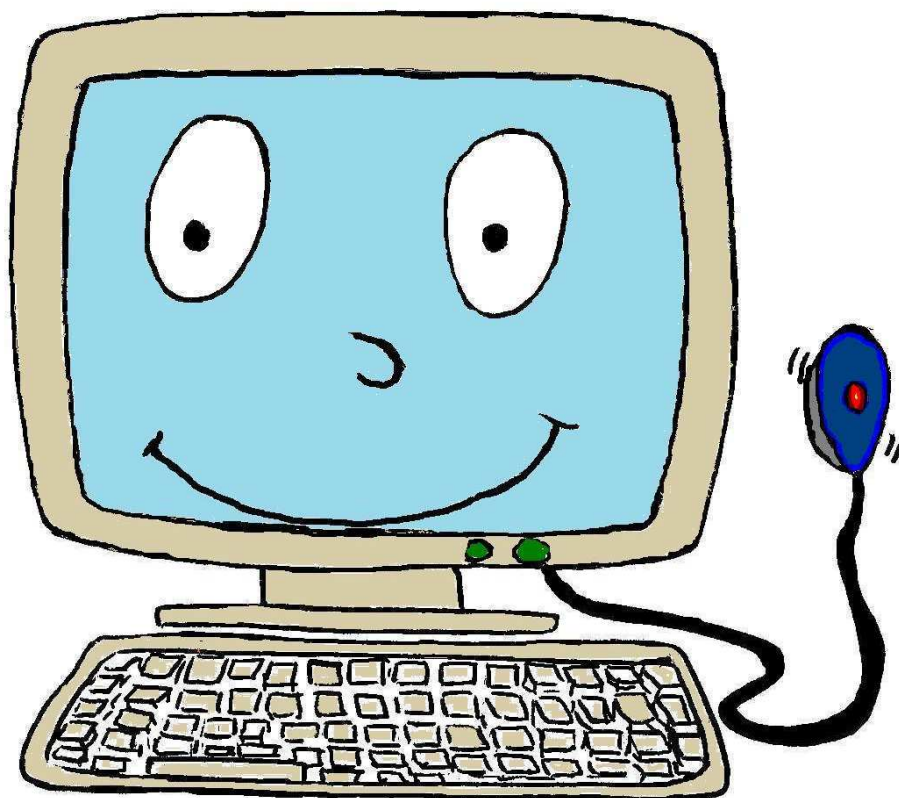


Laboratorio di informatica



SCHEDA 1

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Riprendiamo il software Geogebra e utilizziamolo per lo studio delle funzioni goniometriche.

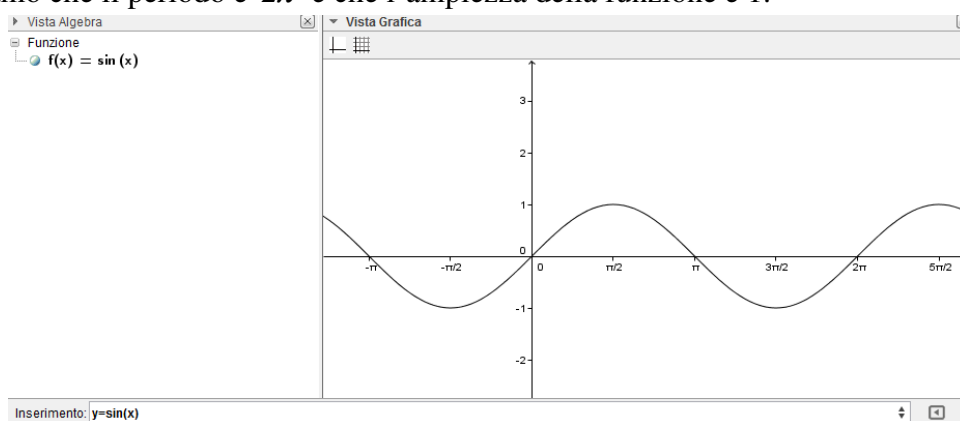
Nota: possiamo scegliere come unità di misura sull'asse x $\frac{\pi}{2}$ digitando:

Opzioni – avanzate - preferenze vista grafica - asse x – unità π - distanza $\frac{\pi}{2}$

1) Grafico di $y = \sin x$

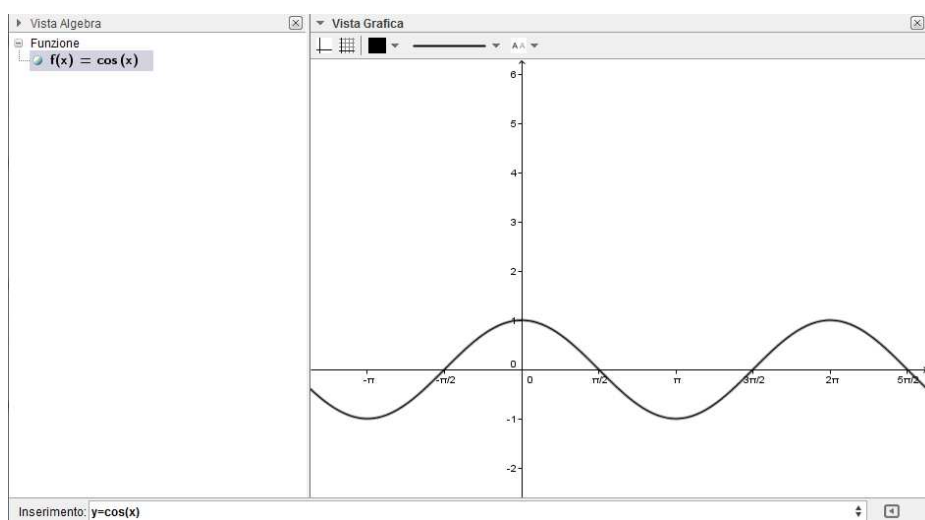
Digita nella barra di inserimento l'equazione di $y = \sin(x)$ (devi scrivere sin e mettere le parentesi intorno all'argomento della funzione): comparirà il grafico della funzione seno.

Osserviamo che il periodo è 2π e che l'ampiezza della funzione è 1.



2) Grafico di $y = \cos x$

Inserisci l'equazione $y = \cos(x)$: osserviamo che anche il periodo del coseno è 2π e che l'ampiezza delle oscillazioni è 1; inoltre il grafico del coseno risulta uguale a quello del seno ma traslato di $\frac{\pi}{2}$.



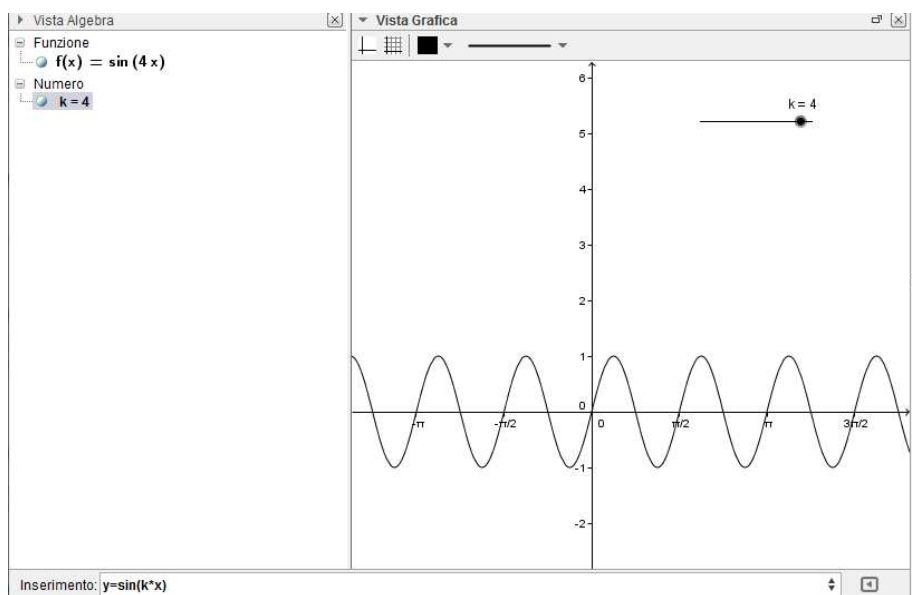
Esercizio: inserisci l'equazione $y = \tan x$ e stampa il grafico indicandone le caratteristiche.

SCHEDA 2

FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Prova a studiare la funzione $y = \sin(k * x)$ utilizzando uno “slider” k .

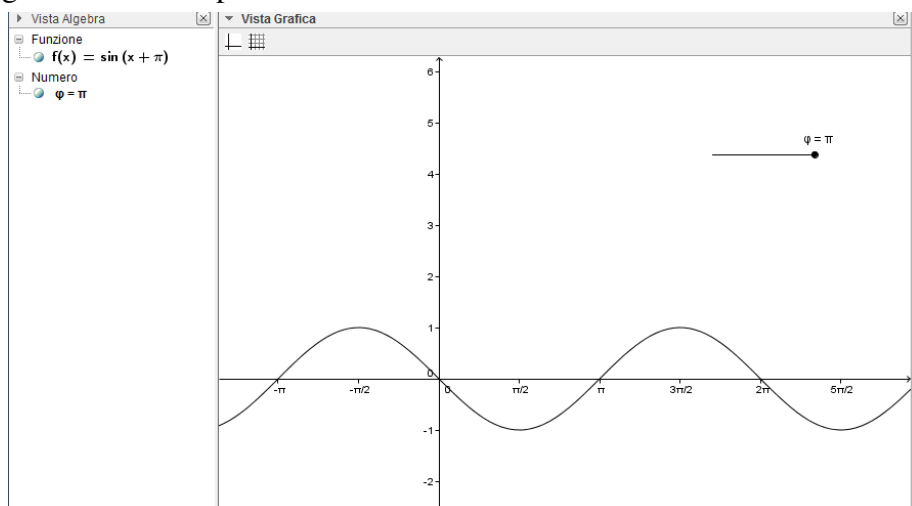
Attivando la funzione “muovi” (primo pulsante da sinistra nella barra in alto) possiamo capire che k determina il periodo della funzione. Per esempio la funzione in figura ha $k = 4$ ed ha un periodo di $\frac{2\pi}{4}$ poiché nello spazio di 2π si è ripetuta quattro volte.



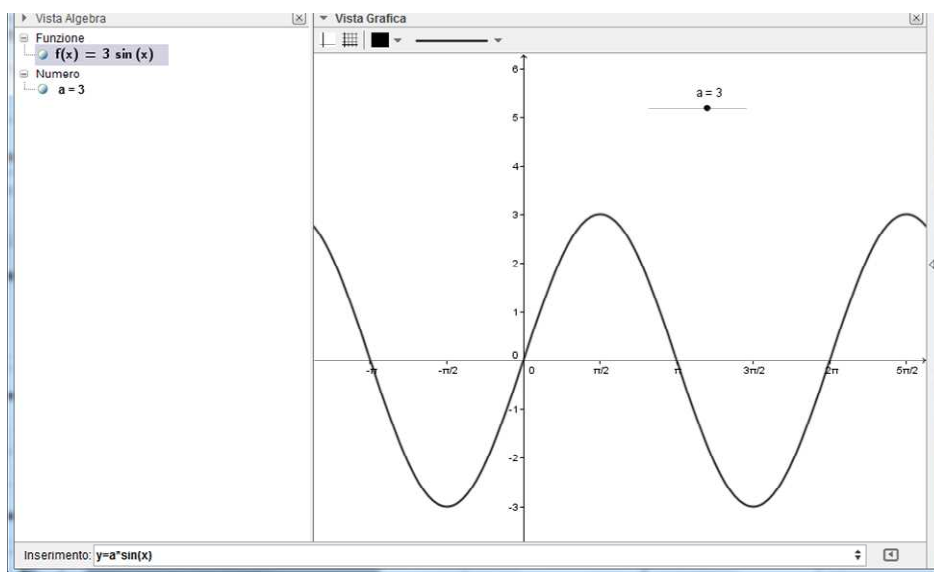
Quindi in generale la funzione $y = \sin(k * x)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$.

2) Prova a studiare $y = \sin(x + \varphi)$ utilizzando uno slider φ .

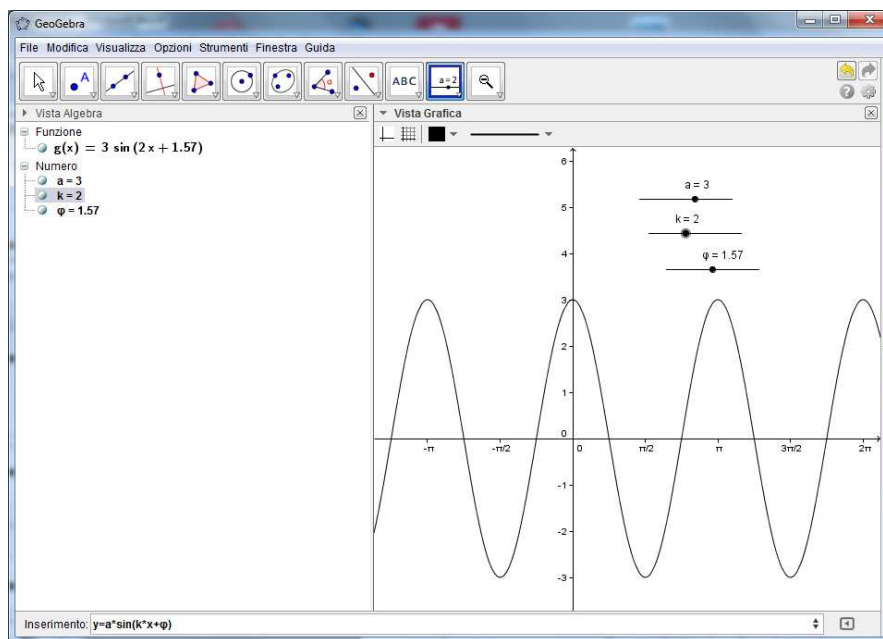
Ci accorgiamo che variando φ il grafico del seno trasla orizzontalmente: se per esempio $\varphi = \pi$ è come se il grafico si fosse spostato a sinistra di π .



3) Vediamo infine cosa accade se poniamo un parametro davanti alla funzione, cioè studia $y = a * \sin(x)$. Ci accorgiamo che cambia l'ampiezza dell'oscillazione del grafico: per esempio nel grafico in figura dove $a = 3$ i valori oscillano tra -3 e 3.



4) Prova quindi a scrivere $y = a * \sin(k * x + \varphi)$ dove si utilizzano i tre slider a , k , φ : abbiamo una funzione sinusoidale generale in cui ho un periodo $T = \frac{2\pi}{k}$, traslata e di ampiezza a . In figura è visualizzata la sinusoide con $a = 3$, $k = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



Esercizio: prova a fare la stessa cosa con la funzione $y = \cos(x)$ e stampa alcuni esempi.

SCHEDA 3

TRIGONOMETRIA

Sappiamo che un triangolo è univocamente determinato se conosciamo:

- due lati e l'angolo compreso;
- un lato e due angoli;
- tre lati (purché ogni lato sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza)

Supponendo di adottare l'usuale convenzione di indicare con a il lato opposto al vertice A, ecc. e con α l'angolo di vertice A ecc., costruisci con Geogebra un triangolo avente:

Esercizio 1

$a=10, b=8, \gamma = 30^\circ$

Esercizio 2

$a=10, \beta = 45^\circ, \gamma = 70^\circ$

Esercizio 3

$a=10, b=8, c=5$

Esercizio 4

Se si conoscono due lati e un angolo non compreso tra essi il triangolo è individuato?

Considera per esempio $a=6, b=8, \alpha = 45^\circ$.

Suggerimento: parti dal disegnare il segmento $\overline{AC} = b = 8$ e l'angolo $\hat{A} = 45^\circ$ con il comando angolo di una data misura (e poi traccia la semiretta di origine A). Traccia la circonferenza di centro C e raggio a ...

Trovi un solo triangolo?

Considerando $b=8$ e $\alpha = 45^\circ$ per quali valori di a si ha

nessun triangolo.....

un solo triangolo

due triangoli.....

SCHEDA 4

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Funzioni esponenziali

Funzioni esponenziali

Proviamo a disegnare con Geogebra il grafico di una funzione esponenziale.

Cominciamo con il digitare nella barra in basso

$$y = 2^x$$

oppure

$$y = (1/2)^x$$

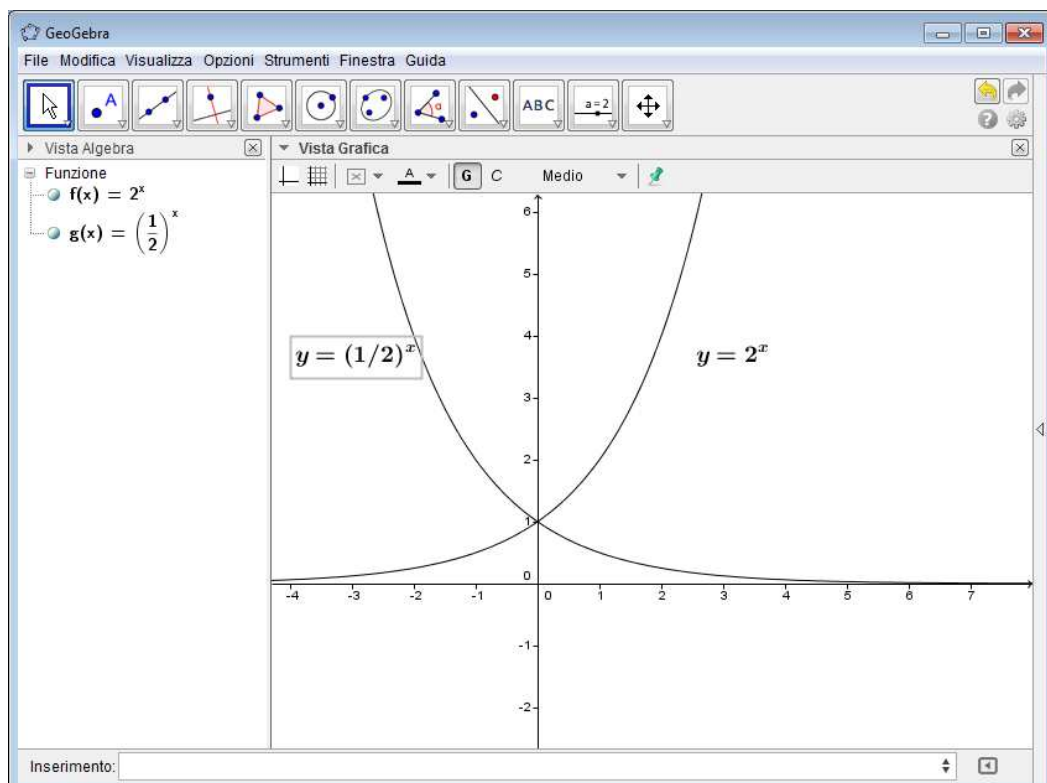
e osserviamone il diverso andamento.

In generale per visualizzare la funzione esponenziale di base a possiamo creare lo slider a (attenzione : a deve essere positivo) e inserire la funzione

$$y = a^x$$

Se attiviamo il pulsante “muovi” e la traccia del grafico (clic con il destro sul grafico e “traccia on”) variando la base a otterremo i vari grafici.

Stampa qualche grafico al variare della base a indicandone le differenze.



SCHEDA 5

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Funzioni logaritmiche

Funzioni logaritmiche

Nel programma Geogebra (versione almeno 5.0) possiamo disegnare i grafici della funzione logaritmica in una qualsiasi base.

Se digitiamo nella barra di inserimento

$$y = \log$$

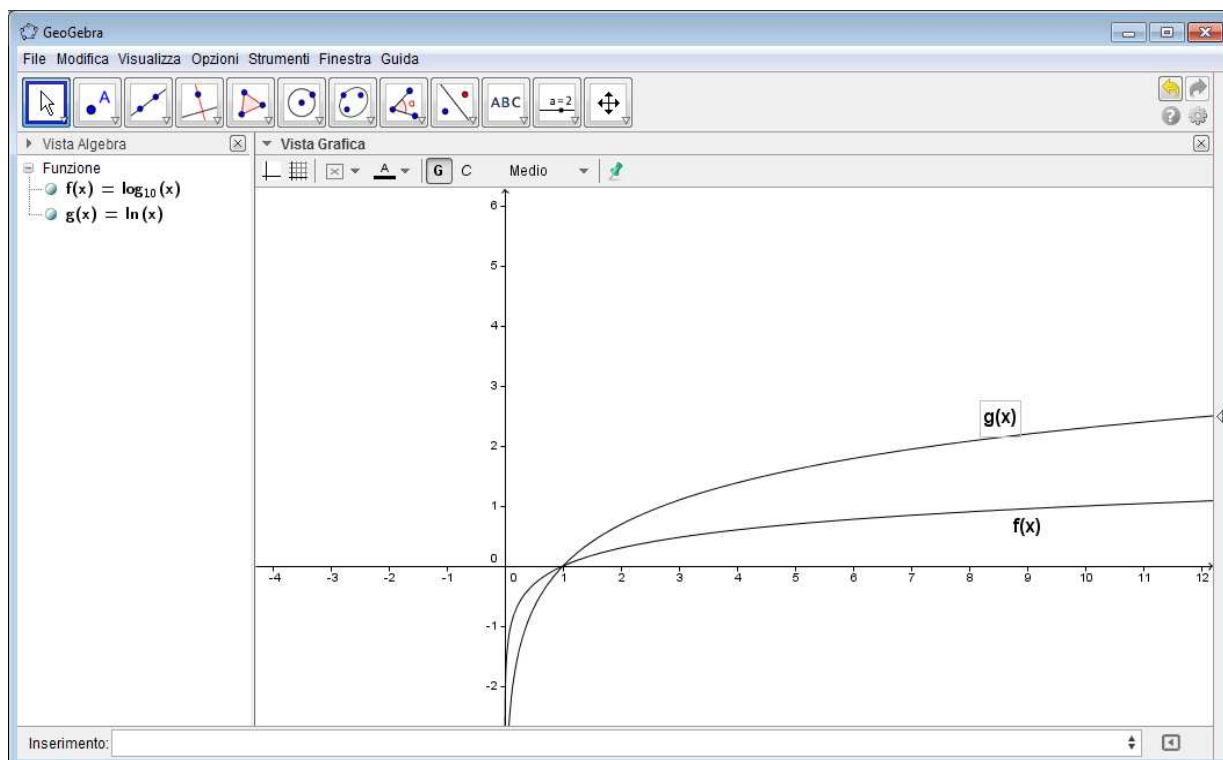
compaiono le varie scelte di completamento: $\log(x)$ sta per logaritmo in base e (che viene indicato con $\ln x$); se scriviamo $\log_{10}(x)$ viene visualizzato il grafico di $y = \log_{10} x$ (infatti per $x=10$ si ha $y=1$) ma possiamo disegnare il logaritmo in base qualsiasi introducendola prima della x .

Per esempio $y = \log(3, x)$ corrisponde a $y = \log_3 x$.

Stampa alcuni grafici e metti in evidenza le differenze.

Crea uno slider a e inserisci $y = \log(a, x)$.

Quale deve essere l'intervallo di variazione di a ? Osserva e stampa i grafici che ottieni al variare della base a , indicandone le differenze e facendo le tue osservazioni.



SCHEDA 6

GEOMETRIA DELLO SPAZIO *Geogebra 3D*

Geogebra prevede anche la possibilità di lavorare in ambiente 3D.

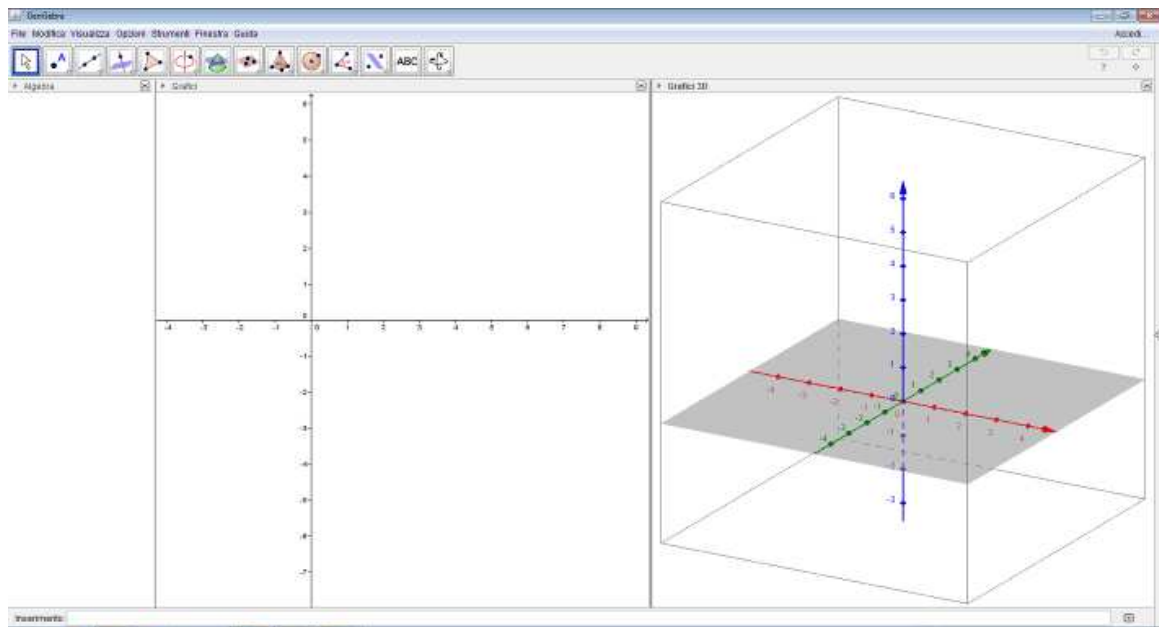
Seleziona: Visualizza - Grafici 3D

Sullo schermo, oltre all'ambiente 2D con il sistema di riferimento (O,x,y), comparirà una terna di assi cartesiani (O,x,y,z) e **la barra degli strumenti 3D**.

Possiamo fare comparire la barra dei comandi 2D/3D cliccando con il tasto del mouse sulla zona grafici 2D/3D.

Notiamo inoltre che è presente anche la vista "algebra" e la barra di inserimento.

Ecco come appare lo schermo: l'asse x è rosso, l'asse y è verde e l'asse z è azzurro.



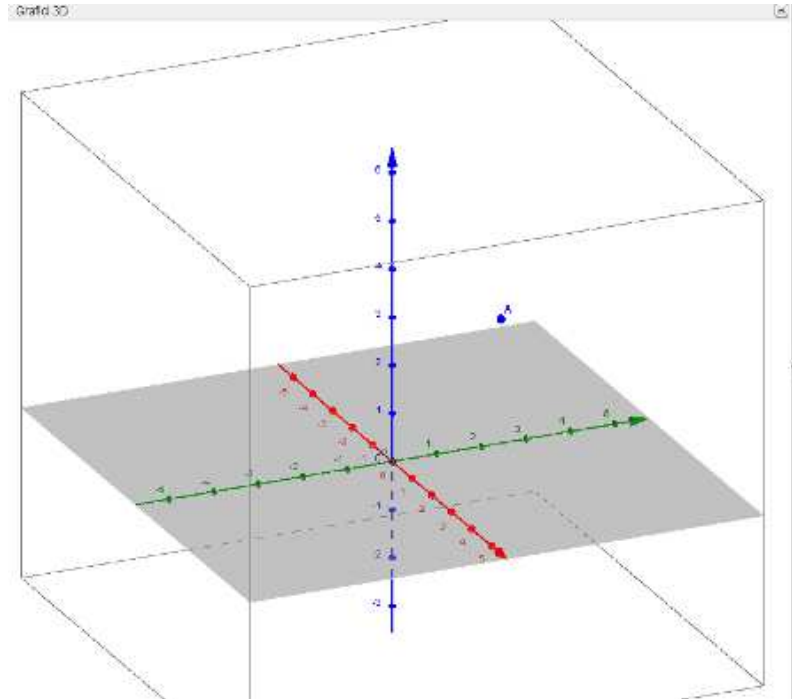
Proviamo i vari comandi dei pulsanti della barra 3D (un pulsante può aprire vari comandi) .

Pulsante “Muovi”: funziona come nei grafici 2D, ma un punto può essere mosso solo in orizzontale (compaiono delle frecce orizzontali) o, facendo un secondo clic, in verticale (parallelamente all'asse z) quando compaiono delle frecce verticali.

Pulsante “Punto”: ci sono vari comandi che si possono scegliere a partire da questo pulsante come nei grafici 2D (punto su oggetto, intersezione, punto medio ecc).

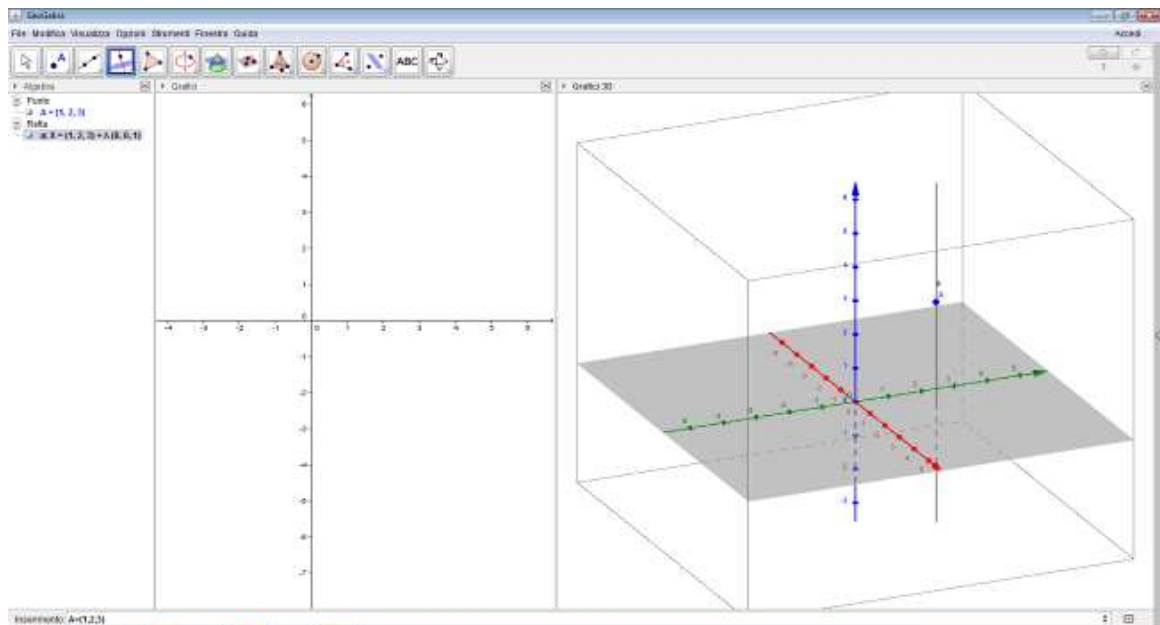
Possiamo però creare un punto direttamente solo sul piano xy : se vogliamo un punto non appartenente al piano xy dobbiamo prima creare un punto sul piano xy e poi, facendo clic con il mouse per far apparire le frecce verticali, possiamo variane la quota.

Possiamo comunque creare un punto anche inserendolo da tastiera: per esempio digitando $A=(1,2,3)$.



Pulsante “Retta”: questo comando ed i comandi collegati hanno lo stesso funzionamento che nei grafici 2D.

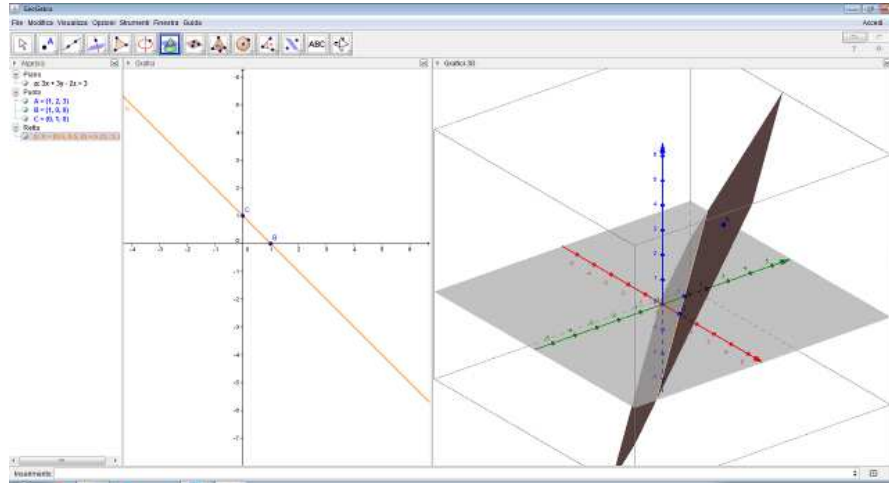
Pulsante “Retta perpendicolare” ad un piano: se per esempio vogliamo la retta per il precedente punto $A(1,2,3)$ perpendicolare al piano (O,xy) basta cliccare su A e poi sul piano xy .



Pulsante “poligono”, “circonferenza”, “testo” ecc. funzionano come per i grafici 2D.

Pulsante “Piano per tre punti”(e gli altri comandi collegati quali piano parallelo e piano perpendicolare): selezionando tre punti non complanari viene creato il piano passante per essi e compare la sua equazione nella vista algebrica.

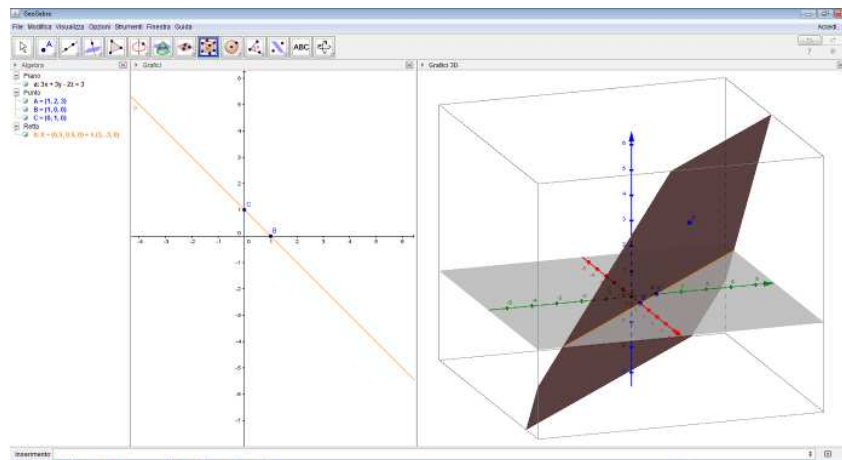
Possiamo intersecare il piano a con il piano xy utilizzando il comando “interseca due superfici” e comparirà la retta intersezione (anche nella vista 2D).



Nota

La rotazione della “vista” (molto utile per esplorare una figura solida) può essere facilmente ottenuta **tenendo premuto il tasto destro del mouse** (posizionato nella zona grafici 3D) e muovendo il mouse.

Ecco come appare la figura precedente dopo aver ruotato la vista :



Pulsante “piramide”: ci sono una serie di comandi per creare piramidi, prismi, coni, cilindri, tetraedro regolare, cubo ecc.

In particolare il comando “estrusione in piramide o cono” permette di “tirare sù” una piramide (o un cono) partendo da un poligono di base (o da una circonferenza) e nello stesso modo funziona “estrusione in prisma o cilindro”.

Ogni comando ha comunque una piccola guida sul suo utilizzo che compare quando viene selezionato e il mouse si trova nel triangolino in basso a destra.

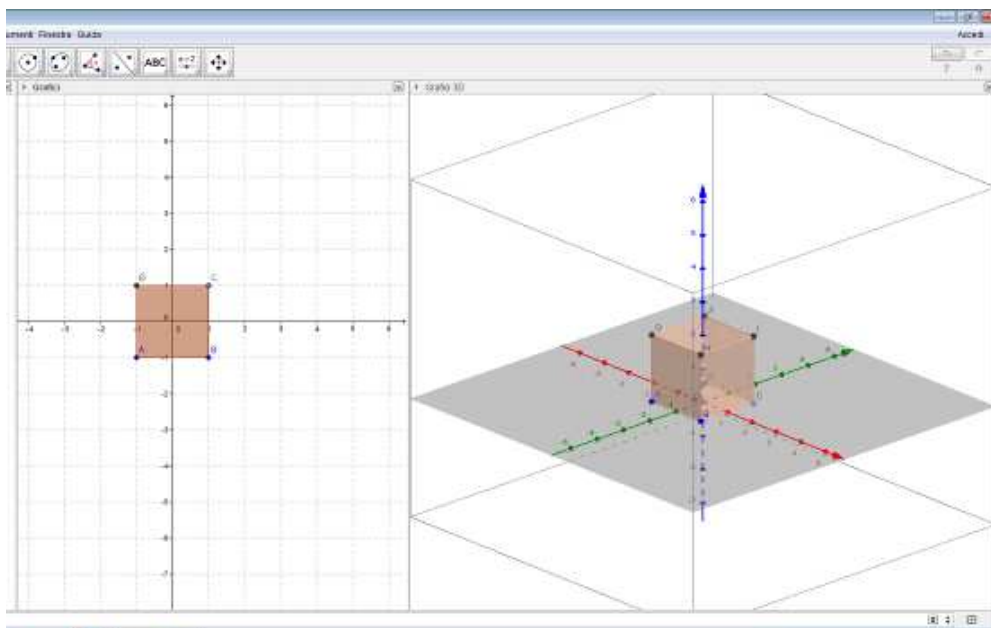
SCHEDA 7

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Il cubo

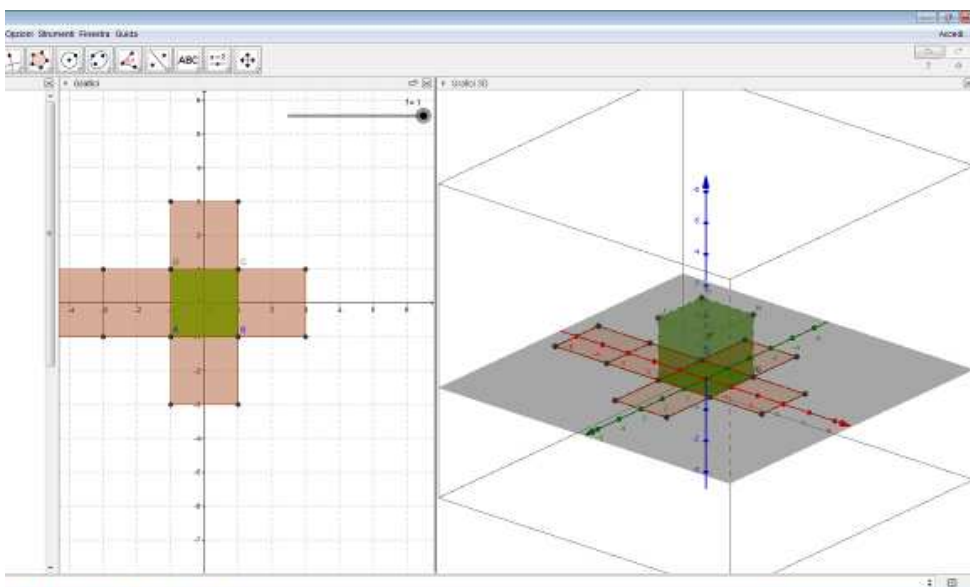
Per costruire un cubo puoi selezionare il comando dal menù e cliccare su due punti in ambiente 3D oppure costruire un quadrato ABCD in ambiente 2D e poi digitare nella barra di inserimento per esempio cubo[A,B].

Nota: per evitare che vengano indicati nella figura le etichette dei vari spigoli possiamo digitare Opzioni- etichettatura- nessun nuovo oggetto.



Nota

Un comando molto interessante è “sviluppo piano” che fornisce lo sviluppo piano di un poliedro: viene automaticamente anche creato uno slider e se attiviamo muovi e variamo lo slider da 0 a 1 vedremo il poliedro che “si apre” fino al suo sviluppo sul piano xy.



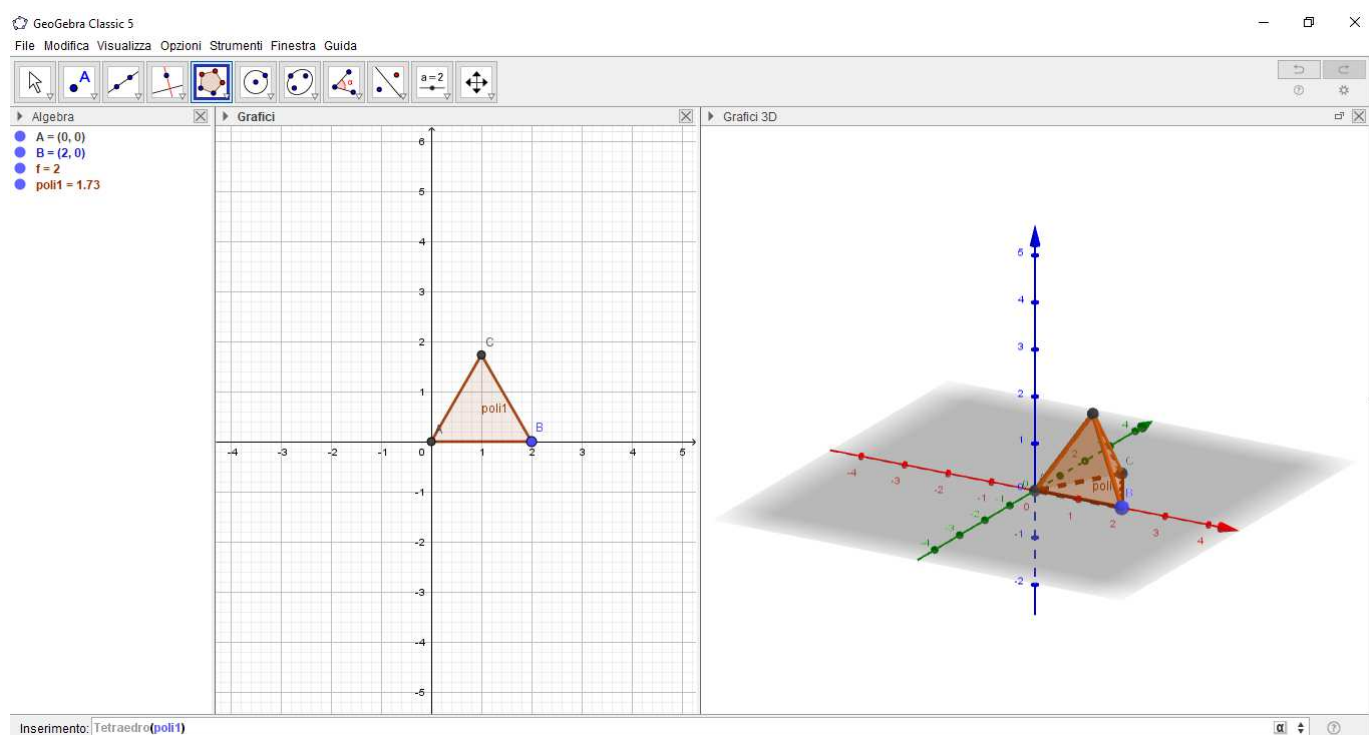
SCHEDA 8

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Poliedri regolari

Esercizio 1

Così come per il cubo prova a costruire un tetraedro regolare sia utilizzando il comando tetraedro presente nel menù che inserendo nella barra di inserimento `tetraedro(poli1)` dopo aver creato un triangolo equilatero poli1 in ambiente 2D.



Esercizio 2

Dopo aver creato in ambiente 2D un triangolo equilatero (Geogebra gli assegnerà un nome, per esempio poli1), costruisci un ottaedro regolare scrivendo nella barra di inserimento il comando `ottaedro(nome del triangolo)`. Stampalo.

Esercizio 3

Costruisci un dodecaedro regolare : crea un pentagono regolare in ambiente 2D e poi utilizza il comando `dodecaedro(nome pentagono)`. Stampalo.

Esercizio 4

Costruisci un icosaedro regolare: crea un triangolo equilatero e poi usa il comando `icosaedro (nome triangolo)`. Stampalo.

SCHEDA 9

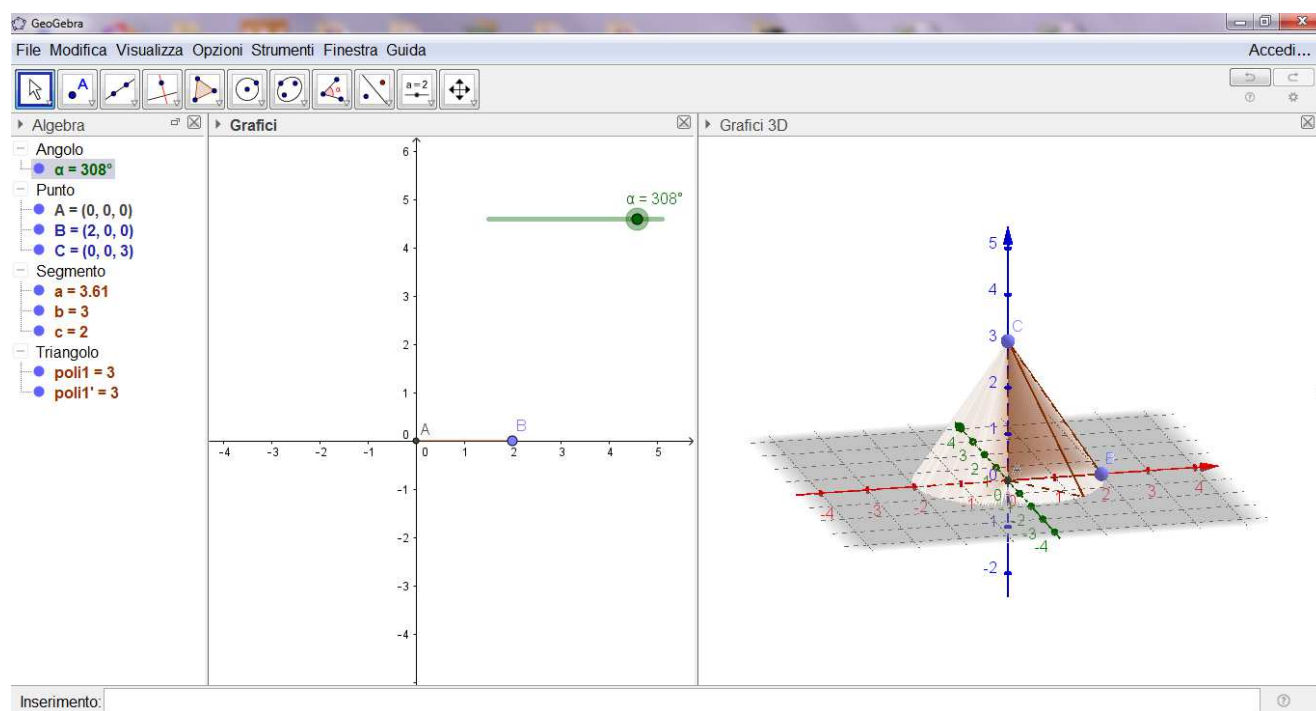
GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Cono e cilindro

Possiamo generare un cono ruotando un triangolo rettangolo intorno ad uno dei suoi cateti.

- Creiamo un triangolo rettangolo nell'ambiente 3D con il comando poligono (per esempio di vertici $(0,0,0)$; $(2,0,0)$ $(0,0,3)$ e creiamo uno slider α (angolo) che vari tra 0° e 360° ;
- scegliamo dal menù “**rotazione assiale**”;
- selezioniamo il triangolo, poi per esempio l'asse z come asse di rotazione e poi inseriamo lo slider α come angolo di rotazione.

Attiviamo “traccia attiva” cliccando con il tasto destro del mouse sul poligono e “animazione attiva” cliccando con il destro sullo slider: il triangolo descriverà un cono.



Esercizio

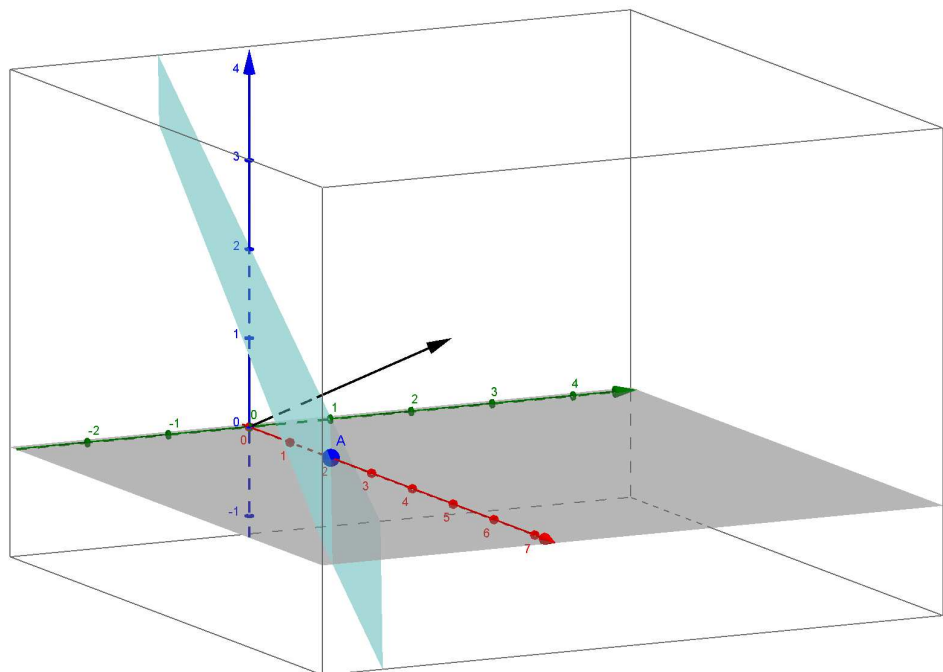
Prova a costruire un cilindro ruotando un rettangolo attorno ad un lato.

SCHEDA 10

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO *Equazione di un piano*

Piano passante per un punto dato e perpendicolare ad una direzione data(direzione normale)

Inseriamo nella barra di inserimento un punto, per esempio $A = (2,0,0)$ e un vettore normale al piano, per esempio $n = (1,2,1)$: selezioniamo il comando “piano perpendicolare” clicchiamo su A e n e otterremo il piano in figura.



Se controlliamo nella vista algebra troviamo l'equazione

$$x + 2y + z = 2$$

che infatti si ottiene sviluppando $(1,2,1) \cdot (x-2, y, z) = 0$ come abbiamo visto studiando l'equazione del piano passante per un punto assegnato e avente una direzione normale assegnata.

SCHEMA 11

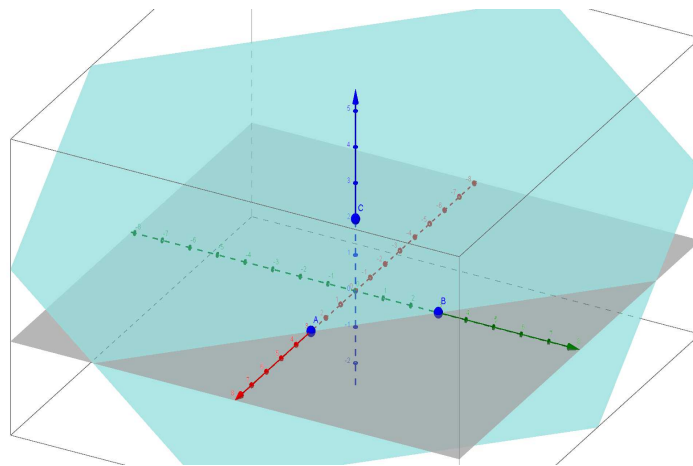
GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO *Equazione di un piano*

Piano passante per tre punti non allineati

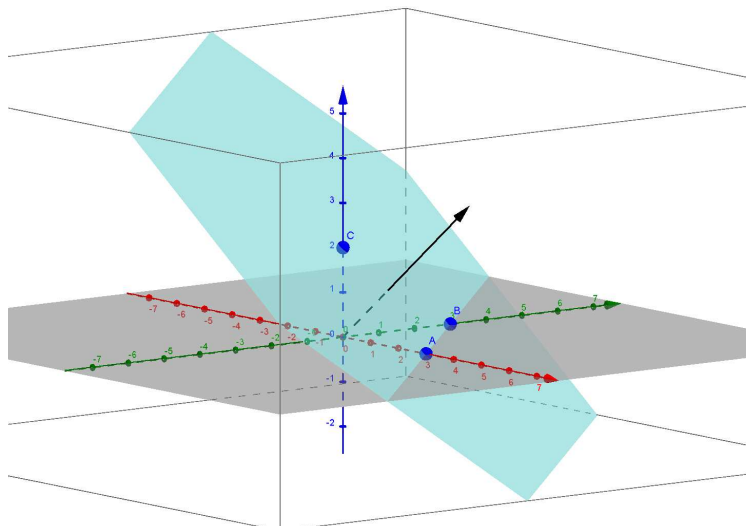
Inseriamo tre punti da tastiera, per esempio $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$, $C = (0,0,2)$, scegliamo il comando “piano per tre punti” e creiamo il piano α passante per i punti A,B,C.

Nella vista algebra comparirà l'equazione del piano $2x + 2y + 3z = 6$.

Imposta il sistema per determinare il piano per A,B,C e verifica che ottieni la stessa equazione (o una equivalente).



Puoi digitare nella barra di inserimento $n = (2,2,3)$ e controllare che si tratta proprio del vettore normale al piano.

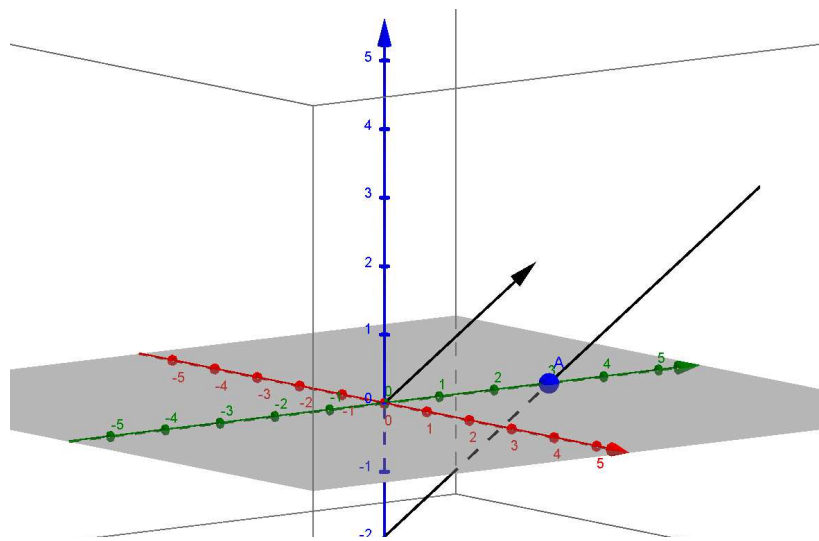


SCHEMA 12

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

Equazione di una retta nello spazio

Inseriamo nella barra di inserimento un vettore (vettore direzione della retta) per esempio $v = (1,2,2)$ e un punto, per esempio $A = (0,3,0)$. Scegliamo il comando “retta parallela”: selezioniamo A e poi il vettore \vec{v} e otterremo la retta seguente



Nella vista algebra avremo **l'equazione parametrica della retta**

$$X = (0,3,0) + \lambda(1,2,2)$$

dove la X sta per (x, y, z) .

Esercizio

Inserisci i punti $A = (2,1,0)$ e $B = (1,0,3)$ e traccia la retta passante per essi usando sia il comando “retta” che il comando appena visto (il vettore direzione sarà.....) e verifica che in ogni caso ottieni equazioni equivalenti.

Stampa il tuo lavoro.