

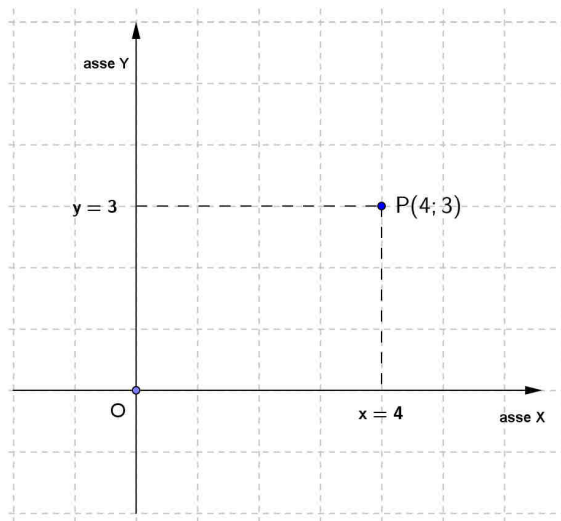
Il piano cartesiano

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.

In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** $(x;y)$ di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata $(x;y)$ di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).

Il numero x si chiama **ascissa** del punto P e il numero y si chiama **ordinata** del punto P.
 x e y si dicono anche **coordinate** del punto P.



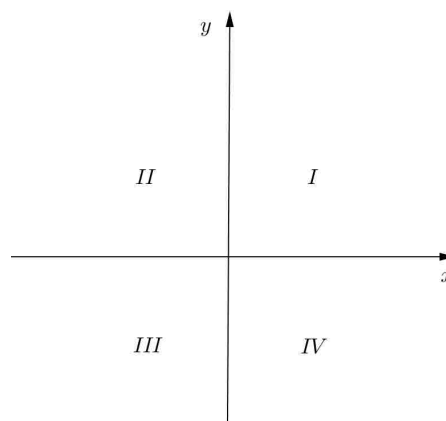
Nota

E' importante sottolineare che $(x;y)$ è una coppia “ordinata” cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.

Osservazione

I punti sull'asse x hanno ordinata $y=0$; i punti sull'asse y hanno ascissa $x=0$.

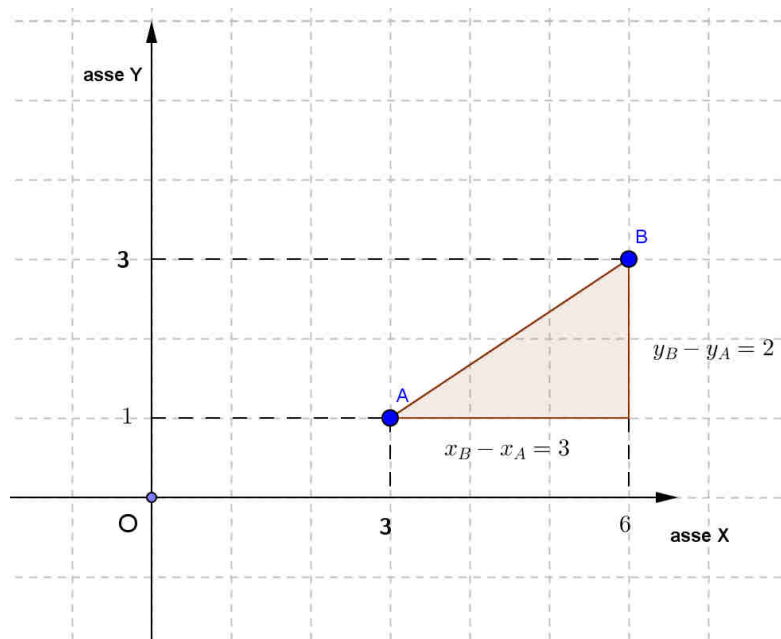
Inoltre osserviamo che i punti che si trovano nel cosiddetto I° quadrante (vedi figura) hanno ascissa e ordinata positive, quelli del II° quadrante ascissa negativa e ordinata positiva ecc.



Distanza tra due punti

Come possiamo calcolare la lunghezza del segmento che congiunge due punti assegnati?

Consideriamo per esempio $A(3;1)$, $B(6;3)$. Come possiamo determinare \overline{AB} ?

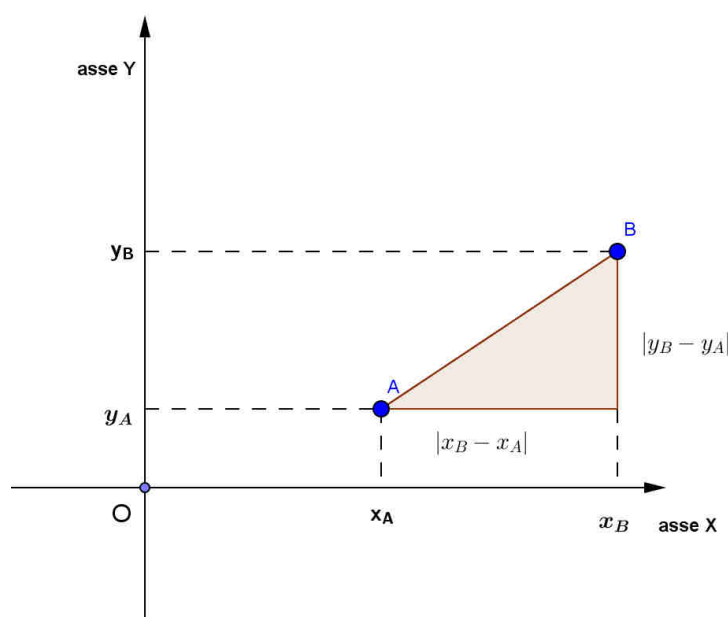


Consideriamo il triangolo in figura ed applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

In generale se $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ abbiamo che

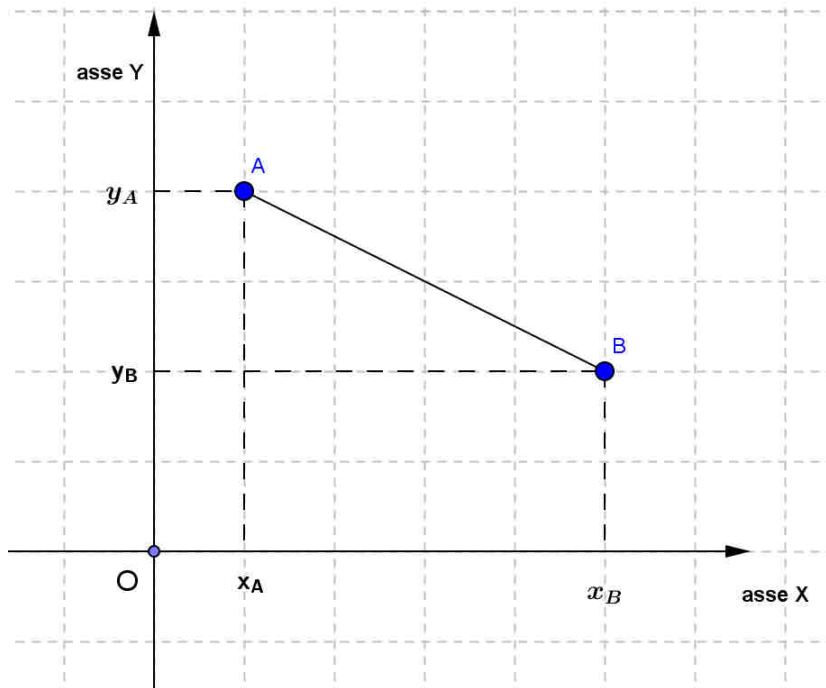
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Nota

Le misure dei cateti del triangolo corrispondono al **valore assoluto della differenza tra le ascisse** e il **valore assoluto della differenza tra le ordinate dei punti**.

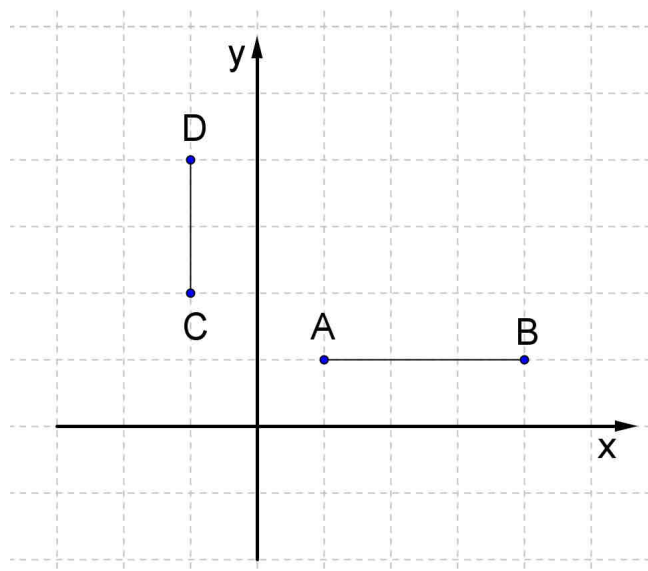
Se per esempio avessi $A(1;4)$, $B(5;2)$ i cateti del triangolo avrebbero lunghezza
 $|x_B - x_A| = 4$, $|y_B - y_A| = 2$



Caso particolare

E' chiaro che se i punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata la distanza è data dal valore assoluto della differenza delle ascisse o delle ordinate.

Per esempio in figura $\overline{AB} = |x_B - x_A| = 3$ e $\overline{CD} = |y_D - y_C| = 2$.

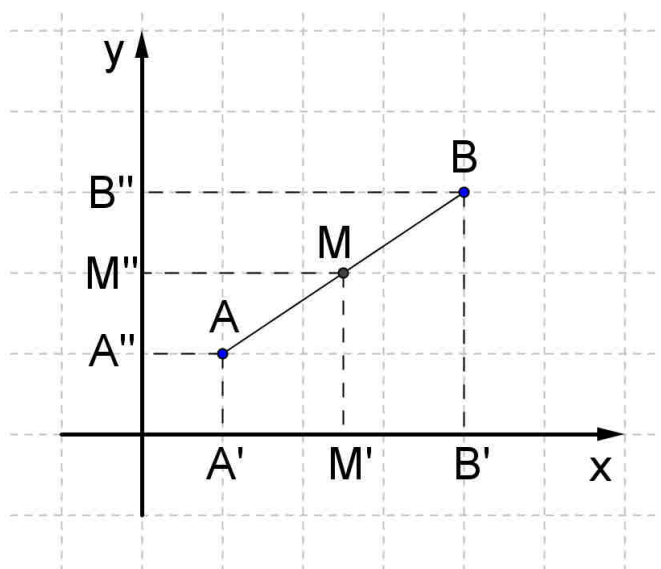


Punto medio di un segmento

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB possiamo considerare le proiezioni di A , M e B sull'asse x e poi sull'asse y e, sfruttando un teorema dimostrato sulle rette parallele, affermare che $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$, $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$ e quindi:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

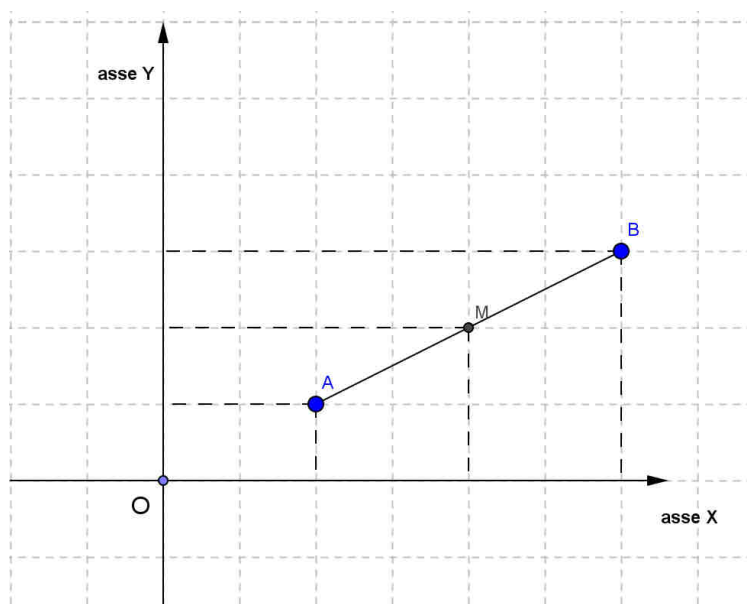
$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Esempio

Consideriamo per esempio $A(2;1)$, $B(6;3)$.

Il punto medio del segmento AB risulta essere $M\left(\frac{2+6}{2} = 4; \frac{1+3}{2} = 2\right)$.



ESERCIZI

1) Dati i punti $A(1;2)$, $B(7;2)$, $C(4;6)$, disegna il triangolo ABC e determinane perimetro e area.

$$[2p = 16; \quad A = 12]$$

2) Dati i punti $A(4;2)$, $B(6;3)$, $C(5;5)$, disegna il triangolo ABC e verifica che $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ e che quindi (essendo verificato il teorema di Pitagora) si tratta di un triangolo rettangolo. Determina perimetro e area.

$$[2p = 2\sqrt{5}, \quad A = \frac{5}{2}]$$

3) Dati i punti $A(2;2)$, $B(4;3)$, $C(2;6)$, disegna il triangolo ABC e determinane perimetro e area. Detto M il punto medio di AC, determina la lunghezza della mediana MB.

$$[2p = 4 + \sqrt{5} + \sqrt{13}; \quad A = 4; \quad \overline{BM} = \sqrt{5}]$$

4) Dati i punti $A(2;3)$, $B(7;3)$, $C(3;5)$, disegna il triangolo ABC e detto M il punto medio di AB, verifica che $\overline{CM} = \overline{AM} = \overline{MB} = \frac{5}{2}$. Come risulta il triangolo ABC?

[triangolo rettangolo]

5) Dati i punti $O(0;0)$; $A(4;2)$; $B(4;5)$; $C(0;3)$, disegna il quadrilatero OABC e verifica che si tratta di un parallelogramma. Determina le coordinate del punto di incontro delle sue diagonali.

$$[\left(2; \frac{5}{2} \right)]$$

6) Dati i punti $A(1;-2)$; $B(4;2)$; $C(1;6)$; $D(-2;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un rombo. Determina perimetro e area. Determina le coordinate del punto M in cui si intersecano le sue diagonali.

$$[2p = 20; \quad A = 24; \quad M(1;2)]$$

7) Dati i punti $A(1;-1)$; $B(4;0)$; $C(3;3)$; $D(0;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un quadrato. Determina perimetro, area e le coordinate del punto M di intersezione delle sue diagonali.

$$[2p = 4\sqrt{10}; \quad A = 10; \quad M(2;1)]$$

8) Dati i punti $A(1;2)$; $B(4;1)$; $C(4;6)$; $D(1;5)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un trapezio isoscele. Determina perimetro e area.

$$[2p = 8 + 2\sqrt{10}; \quad A = 12]$$

Isometrie nel piano cartesiano

Le isometrie nel piano sono trasformazioni che associano ad ogni punto del piano uno ed un solo punto del piano in modo tale che, se A e B sono una qualsiasi coppia di punti del piano e A' e B' sono i loro punti trasformati, si abbia

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Infatti il termine isometria deriva dal greco e significa *iso* = stessa *metria* = misura.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, studiamo alcune isometrie utilizzando il software “Geogebra”.

Traslazione

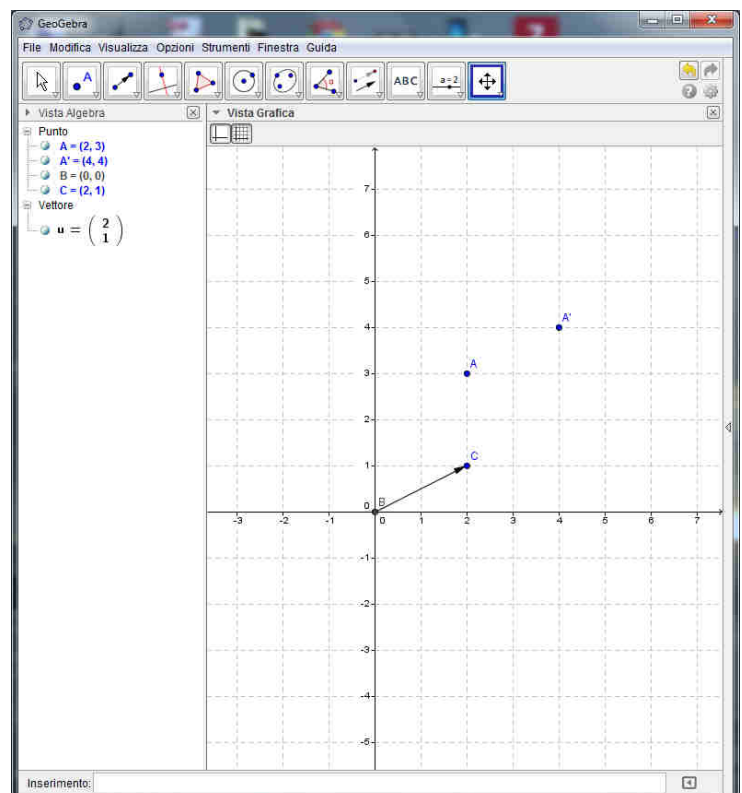
Visualizza gli assi del sistema di riferimento cartesiano.

Disegna un punto A (comando “nuovo punto”), costruisci un vettore con il comando “**vettore tra due punti**” e poi attiva il pulsante “**traslazione**”: devi selezionare il punto che vuoi traslare e poi il vettore traslazione.

Visualizza la “vista algebra” e osserva come cambiano le coordinate del punto A.

Se scegliamo, come in figura, il vettore $(2;1)$ ed indichiamo con $t_{(2;1)}$ la traslazione di vettore $(2;1)$ osserviamo che in generale abbiamo

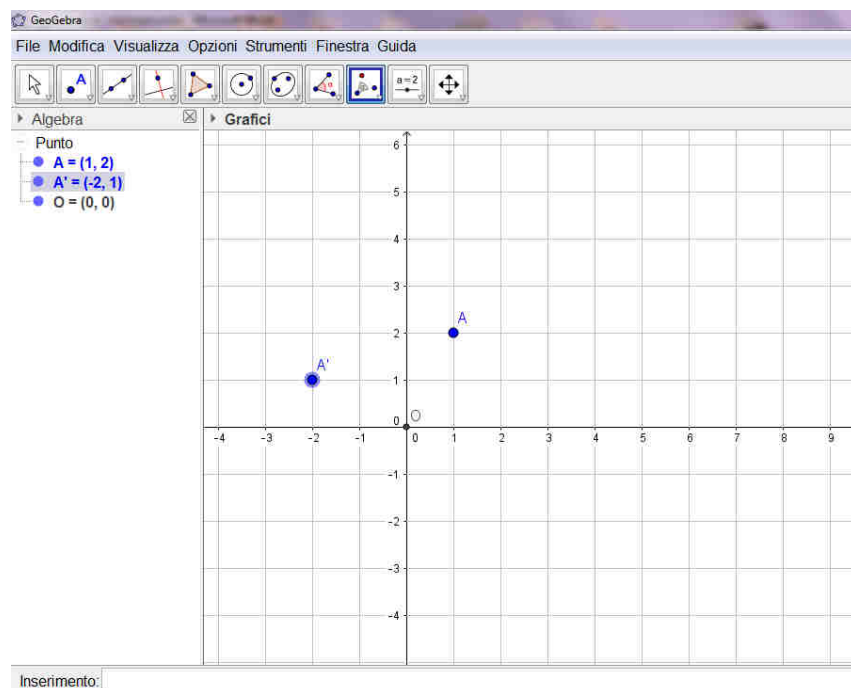
$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(2;1)}} P'(x + 2; y + 1)$$



Rotazione di 90° intorno all'origine

Visualizza il sistema di riferimento e considera le rotazioni intorno a O (origine del sistema di riferimento). Crea il punto origine O.

Disegna un punto A e **attiva il pulsante “rotazione”** : seleziona prima l’oggetto da ruotare , nel nostro caso il punto, poi il centro di rotazione (nel nostro esempio O) e poi digita la misura dell’angolo di rotazione (90°).

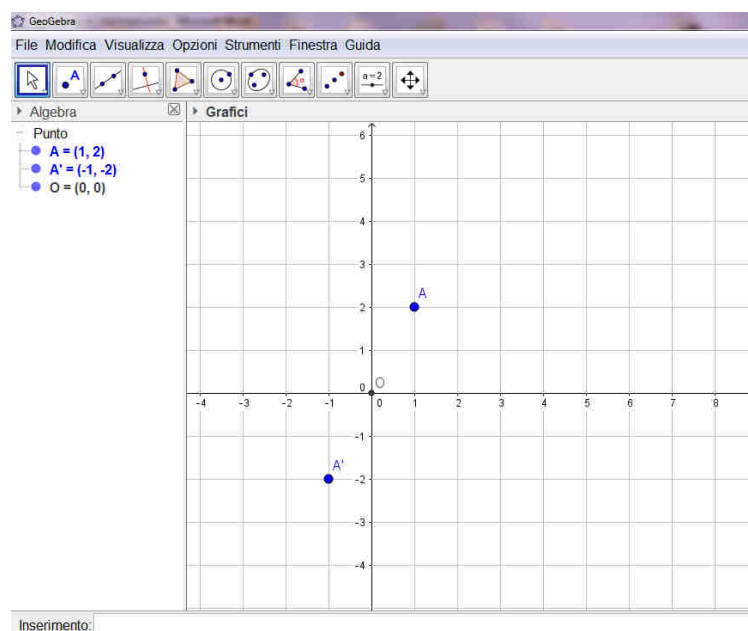


Osserva nella “vista algebra” come cambiano le coordinate del punto A.

Se indichiamo con R_{90° la rotazione di 90° intorno all’origine possiamo scrivere

$$P(x; y) \xrightarrow{R_{90^\circ}} P'(-y; x)$$

Rotazione di 180° intorno all'origine



Prova a ruotare di 180° intorno ad O (origine del sistema di riferimento) un punto A e osserva come cambiano le sue coordinate.

Se indichiamo con R_{180° la rotazione di 180° intorno all’origine possiamo dire che

$$P(x; y) \xrightarrow{R_{180^\circ}} P'(-x; -y)$$

Simmetria assiale

Simmetria rispetto all'asse x

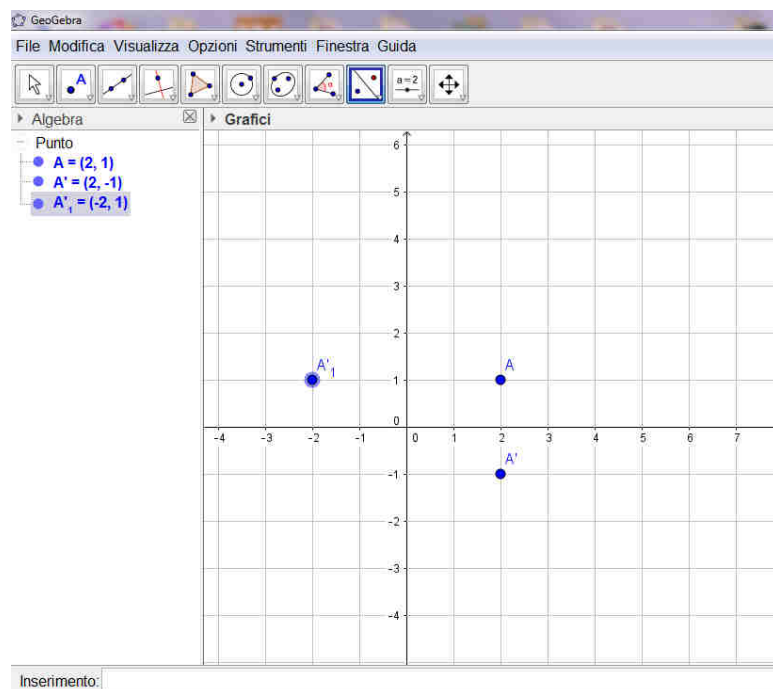
Disegna un punto e osserva come cambiano le sue coordinate se lo trasformi con una simmetria assiale rispetto all'asse x : attivato il comando “simmetria assiale” devi selezionare il punto e poi l'asse di simmetria.

In generale: $P(x; y) \xrightarrow{S_{assex}} P'(x; -y)$

Simmetria rispetto all'asse y

E se la simmetria è rispetto all'asse y?
 Come cambiano le coordinate del punto ?

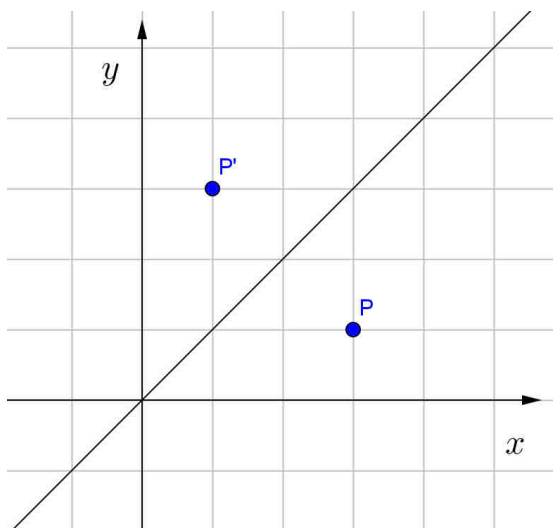
In generale $P(x; y) \xrightarrow{S_{assey}} P'(-x; y)$



Simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

Disegna la bisettrice del primo e terzo quadrante (basta usare la griglia ed inclinare la retta secondo la diagonale dei quadretti) e prova a trasformare il punto P con la simmetria assiale rispetto alla bisettrice: come cambiano le coordinate del punto?

In generale $P(x; y) \rightarrow P'(y; x)$

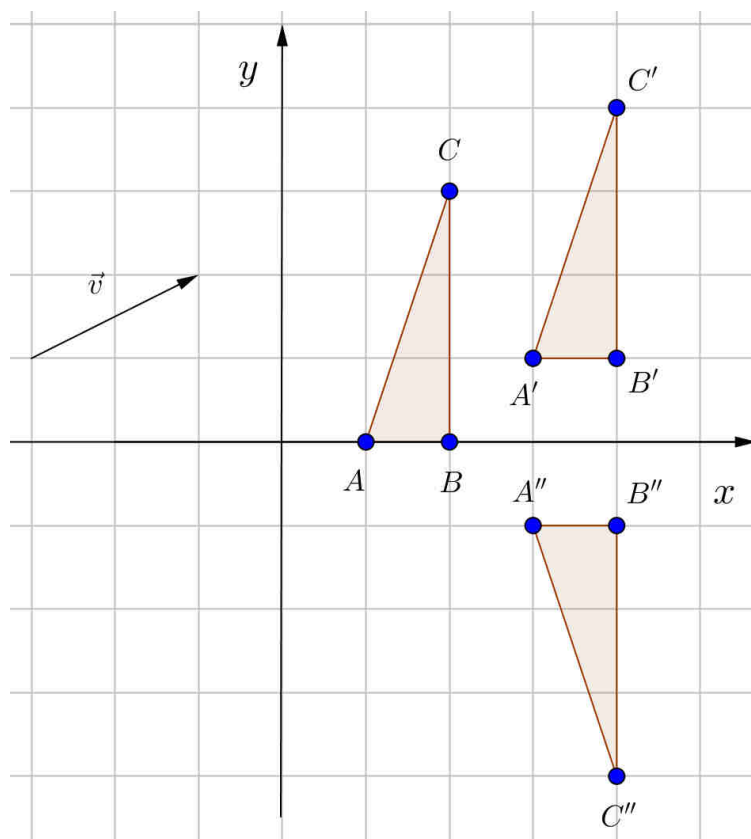


Composizione di isometrie

Le isometrie possono anche essere “composte” tra loro cioè applicate in successione: se ad una figura F, per esempio al triangolo ABC in figura, applichiamo la traslazione $t_{(2;1)}$ e poi alla figura F' che abbiamo ottenuto applichiamo la simmetria di asse x otterremo la figura F''.

Nel nostro esempio la “composizione” di isometrie trasforma in generale:

$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(2;1)}} P'(x+2; y+1) \xrightarrow{S_{asse\ x}} (x+2; -(y+1))$$



Nota

L'ordine in cui si eseguono le trasformazioni è importante, cioè invertendo l'ordine delle trasformazioni il risultato finale può cambiare.

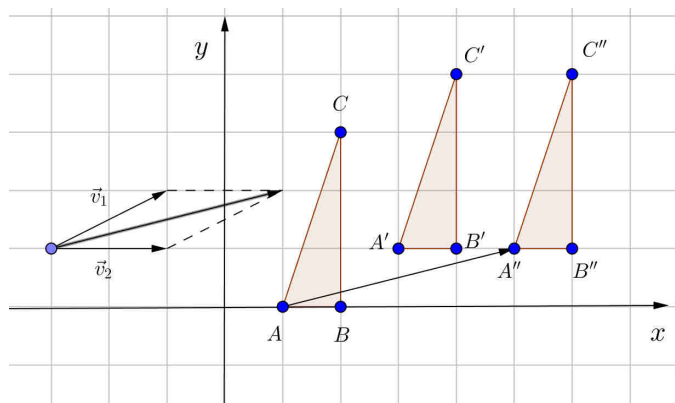
Se nel nostro esempio avessimo prima effettuato la simmetria e poi la traslazione non avremmo ottenuto la stessa figura finale (fai la prova).

Osservazioni

- 1) La composizione di due traslazioni $t_{(a;b)}$ e $t_{(c;d)}$ corrisponde alla traslazione $t_{(a+c;b+d)}$ cioè alla traslazione del vettore “somma” dei due vettori.

Per esempio

$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(2;1)}} P'(x+2; y+1) \xrightarrow{t_{(2;0)}} (x+4; y+1)$$

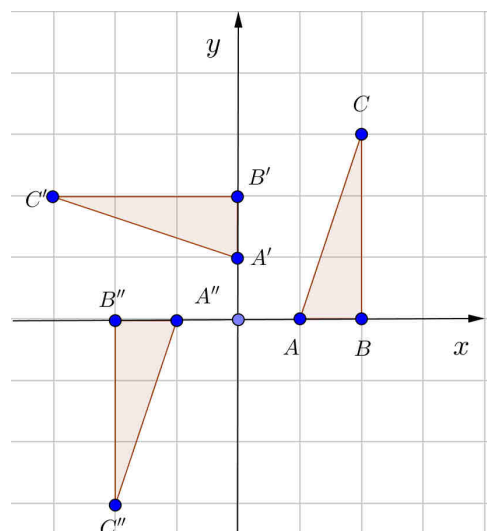


Nota: se provi ad effettuare prima la traslazione di vettore (2;0) e poi la traslazione di vettore (2;1) si ottiene la stessa figura finale.

In questo caso l'ordine in cui si effettuano le traslazioni non è importante.

- 2) La composizione di due rotazioni $R(O;90^\circ)$ corrisponde ad una rotazione $R(O;180^\circ)$ che viene chiamata anche **simmetria di centro O**.

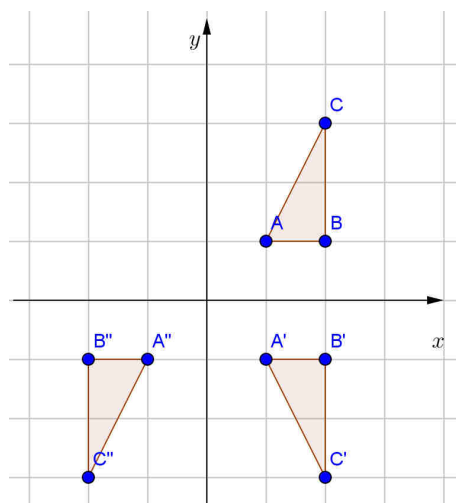
$$P(x; y) \xrightarrow{R(O;90^\circ)} P'(-y; x) \xrightarrow{R(O;90^\circ)} (-x; -y)$$



- 3) Se applichiamo ad una figura la simmetria rispetto all'asse x e alla figura trasformata applichiamo di nuovo la simmetria rispetto all'asse x ritorniamo sulla figura iniziale.

Lo stesso accade con la simmetria rispetto all'asse y o alla bisettrice del I-III quadrante e in generale per qualunque simmetria assiale.

Se applichiamo ad una figura, per esempio il triangolo ABC in figura, la simmetria rispetto all'asse x e poi la simmetria rispetto all'asse y vediamo che la composizione corrisponde a



ESERCIZI

- 1) Considera il triangolo di vertici $A(3;1)$; $B(4;1)$; $C(4;3)$. Applica al triangolo le seguenti isometrie e disegna ogni volta ABC e il triangolo trasformato $A'B'C'$ indicando le coordinate di A' , B' , C' :

- a) la traslazione di vettore $\vec{v}(2;1)$;
- b) la rotazione $R(O;90^\circ)$;
- c) la rotazione $R(O;180^\circ)$;
- d) la simmetria rispetto all'asse x ;
- e) la simmetria rispetto all'asse y ;

- 2) Considera il parallelogramma $ABCD$ con $A(4;1)$; $B(6;1)$; $C(8;4)$; $D(6;4)$. Applica al parallelogramma le seguenti isometrie disegnando ogni volta il parallelogramma $ABCD$ e il suo trasformato $A'B'C'D'$:

- a) la traslazione di vettore $\vec{v}(-3;1)$;
- b) la rotazione $R(O;90^\circ)$;
- c) la rotazione $R(O;180^\circ)$;
- d) la simmetria rispetto all'asse x ;
- e) la simmetria rispetto all'asse y ;

- 3) Considera il triangolo ABC di vertici $A(2;1)$; $B(6;1)$; $C(4;7)$. Applica al triangolo la traslazione $t_{(2;3)}$ e, al triangolo traslato $A'B'C'$, applica la simmetria rispetto all'asse x . Disegna il triangolo finale $A''B''C''$ e scrivi le coordinate dei suoi vertici.

$$[A''(4,-4), \quad B''(8,-4), \quad C''(6,-10)]$$

- 4) Considera il rombo di vertici $A(1,2)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$, $D(2,5)$: applica al rombo prima la simmetria rispetto all'asse y e alla figura ottenuta la traslazione di vettore $(-2,-1)$. Disegna la figura finale $A''B''C''D''$.

Si sarebbe ottenuta lo stessa figura finale invertendo l'ordine delle isometrie cioè applicando prima la traslazione e poi la simmetria?

$$[A''(-3,1), \quad B''(-4,-2), \quad C''(-5,1), \quad D''(-4,4)]$$

5) Considera il triangolo ABC con $A(1;1)$; $B(4;2)$; $C(3;5)$:applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x; y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse y seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (-x; -y)]$$

b) la rotazione $R(O; 90^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (-y; -x)]$$

c) la rotazione $R(O; 90^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

$$[(x; y) \rightarrow (y; x)]$$

d) la traslazione di vettore $(-2; 0)$ seguita dalla traslazione di vettore $(0; 3)$

$$[(x; y) \rightarrow (x-2; y+3)]$$

e) la traslazione di vettore $(2; 1)$ seguita dalla traslazione di vettore $(-2; -1)$

$$[(x; y) \rightarrow (x; y)]$$

f) la traslazione di vettore $(2; 1)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (x+2; -y-1)]$$

6) Considera il trapezio ABCD con $A(1;1)$; $B(4;1)$; $C(2;3)$; $D(1;3)$: applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x; y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse x e poi la simmetria rispetto alla bisettrice del I-III quadrante

$$[(x; y) \rightarrow (-y; x)]$$

b) la $R(O; 180^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

$$[(x; y) \rightarrow (x; -y)]$$

c)) la $R(O; 180^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (-x; y)]$$

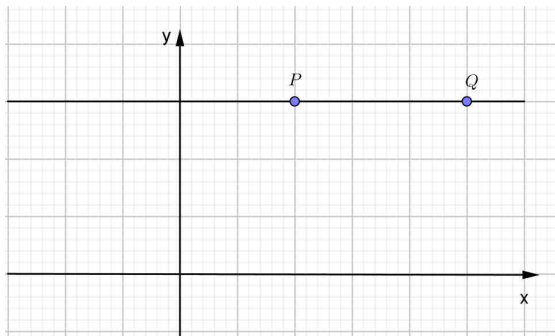
d) la traslazione di vettore $(0, 3)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

$$[(x; y) \rightarrow (-x; y+3)]$$

La retta nel piano cartesiano

Rette parallele agli assi cartesiani

Consideriamo la retta r in figura: i punti della retta hanno sempre ordinata uguale a 3.



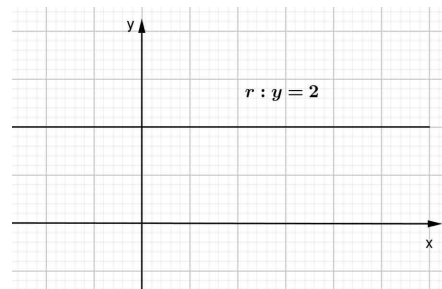
$P(2;3)$

$Q(5;3)$

ecc.

Scrivendo $y = 3$ indichiamo tutti i punti che hanno ordinata uguale a 3, cioè tutti e soli i punti della retta r . Diciamo allora che $y = 3$ è l'equazione della retta r (o associata alla retta o che descrive la retta)

Quindi se diciamo di considerare la retta di equazione $y = 2$ disegneremo la retta in figura.

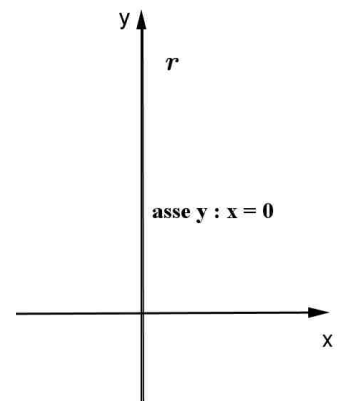
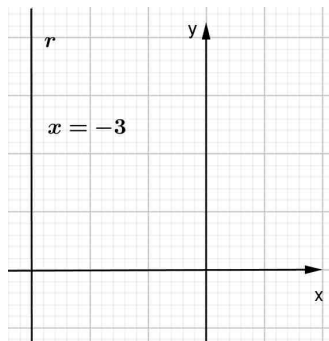
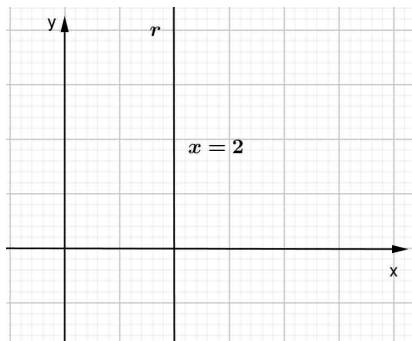


Osservazione: l'asse x avrà equazione $y = 0$

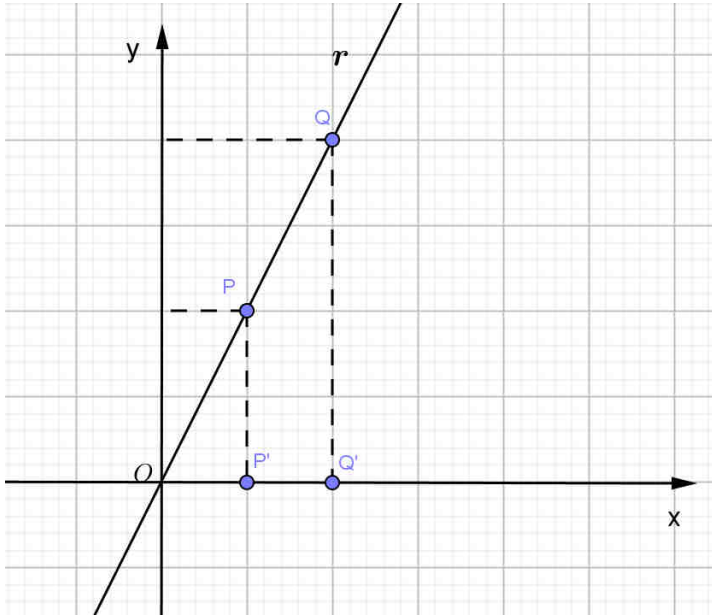
In generale quindi una retta parallela all'asse x avrà equazione $y = k$ (k numero reale)

Analogamente una retta parallela all'asse y avrà tutti i punti con la stessa ascissa e quindi avrà un'equazione del tipo $x = k$ (k numero reale).

Per esempio in figura abbiamo $x = 2$, $x = -3$, $x = 0$ (asse y).



Retta passante per l'origine



Consideriamo ora la seguente retta r passante per l'origine O del sistema di riferimento.

Osserviamo che (per la similitudine dei triangoli $OP'P$, $OQ'Q$, ecc) il rapporto tra l'ordinata y e l'ascissa x di un qualsiasi punto su r è sempre 2.

Cioè

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{QQ'}{OQ'} = \dots = \frac{y_p}{x_p} = 2$$

In generale se $P(x; y) \in r$ (cioè se P appartiene alla retta r) si osserva che $\frac{y}{x} = 2$.

Ma questa relazione può anche essere scritta

$$y = 2x$$

L'equazione $y = 2x$ è quindi l'equazione della retta r (descrive la relazione tra ascissa e ordinata dei suoi punti).

Il coefficiente 2 è chiamato **coefficiente angolare della retta** (o inclinazione o pendenza) e in generale indicato con **m**.

Quindi in generale una retta passante per l'origine ha equazione

$$\boxed{y = mx}$$

dove m è un numero reale ed è detto coefficiente angolare della retta.

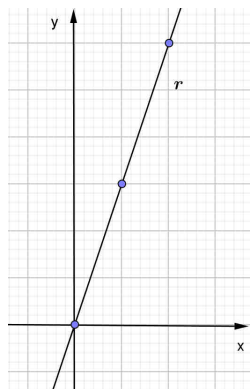
Esempi

Proviamo a disegnare alcune rette conoscendo la loro equazione.

a) $y = 3x$

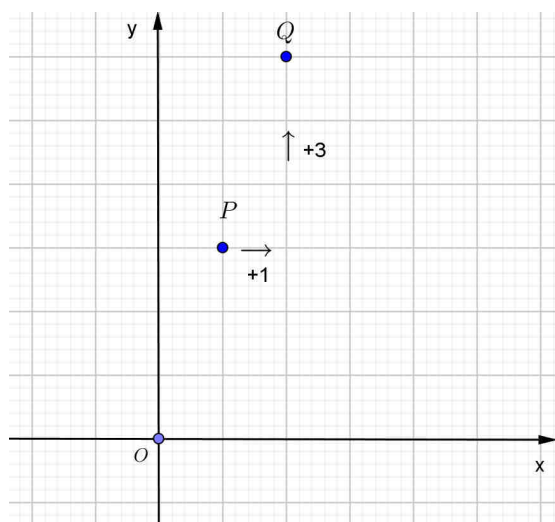
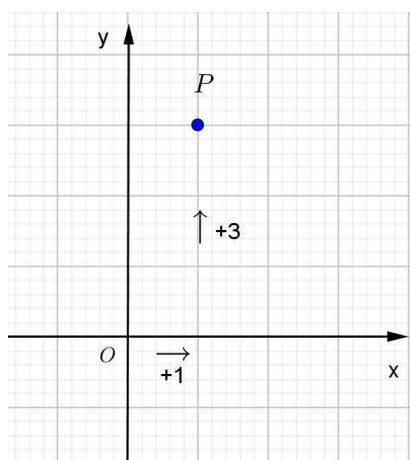
Potremo fare una tabella, assegnando dei valori alla x e determinando i corrispondenti valori della y .

x	y
0	0
1	3
2	6



C'è però un metodo più veloce che utilizza la “quadrettatura” del foglio:

- partiamo dall'origine O (sappiamo che la retta passa per O);
- per determinare un altro punto di r consideriamo il coefficiente angolare m e ricordiamo che $m = \frac{y}{x}$. Nel nostro caso abbiamo $m = 3$: possiamo pensare 3 come $\frac{3}{1}$ e quindi se ci spostiamo orizzontalmente di 1 quadretto ($x=1$) e saliamo in verticale di 3 quadretti ($y=+3$) partendo dall'origine troviamo un punto P di r .
- possiamo ripetere il procedimento partendo da P per trovare un altro punto Q e così via (l'inclinazione è sempre la stessa!).



In questo modo, anche senza fare la tabella, individuiamo vari punti e possiamo disegnare la retta.

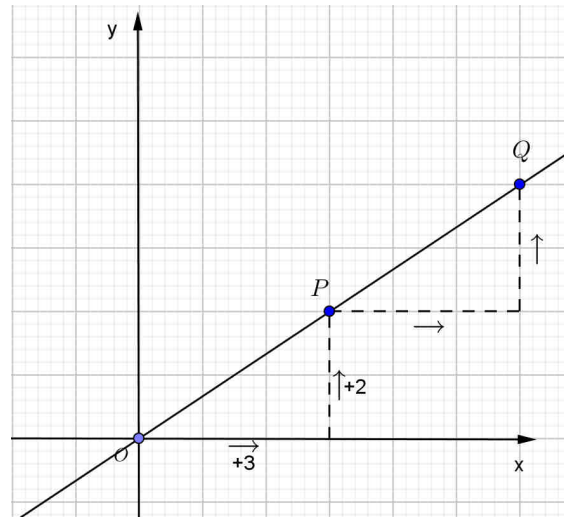
b) $y = \frac{2}{3}x$

In questo caso il coefficiente angolare è $m = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$

Possiamo disegnare la retta utilizzando la quadrettatura: partendo da O possiamo spostarci orizzontalmente di 3 quadretti e poi salire verticalmente di 2 quadretti.

Ripetendo il procedimento più volte troveremo vari punti senza dover fare calcoli.

Nota: attenzione a non confondere lo spostamento “orizzontale” (x) con lo spostamento “verticale” (y).



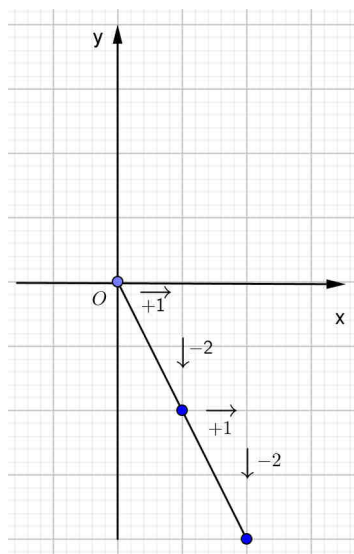
c) $y = -2x$

Facciamo la tabella

x	y
0	0
1	-2
2	-4
-1	2

E se usiamo il procedimento sul piano quadrettato?

In questo caso $m = -2 = \frac{-2}{1}$ quindi, partendo da O, ci spostiamo a destra di 1 (x) e **scendiamo verticalmente** di 2 poiché $y = -2$.

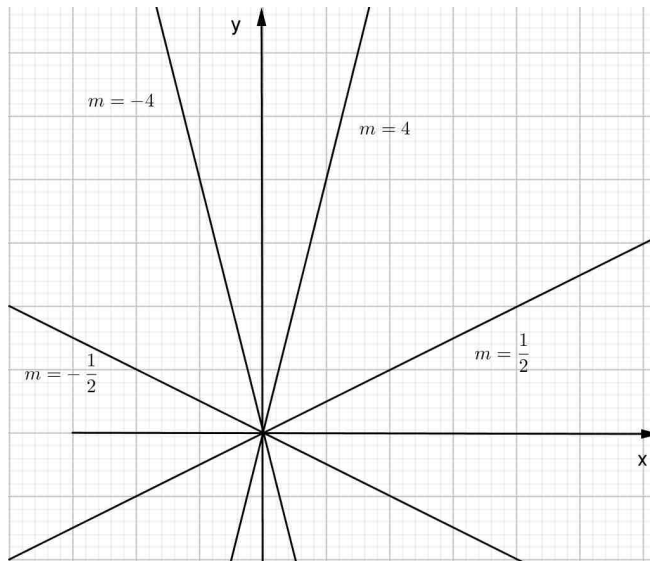


Osservazioni

- 1) Per quanto abbiamo visto l'equazione $y = mx$ rappresenta una retta passante per l'origine O del sistema di riferimento.

Se $m > 0$ la retta si trova nel I e III quadrante;

Se $m < 0$ la retta si trova nel II e IV quadrante.



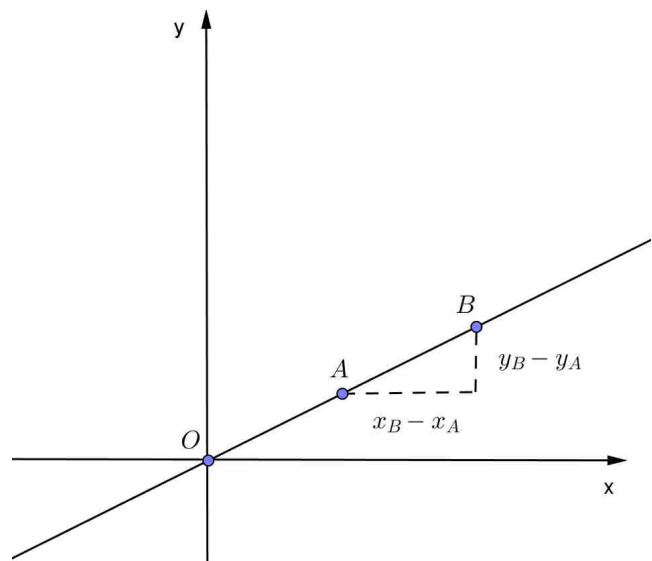
- 2) Osserviamo infine che l'asse y , pur essendo una retta per O , non può essere descritta da un'equazione di questo tipo poiché non possiamo associargli un coefficiente angolare (l'ascissa di tutti i suoi punti è 0 e non possiamo dividere per 0).

3)

Abbiamo visto che il coefficiente angolare m di una retta per l'origine corrisponde al rapporto $\frac{y}{x}$ se $P(x; y) \in r$.

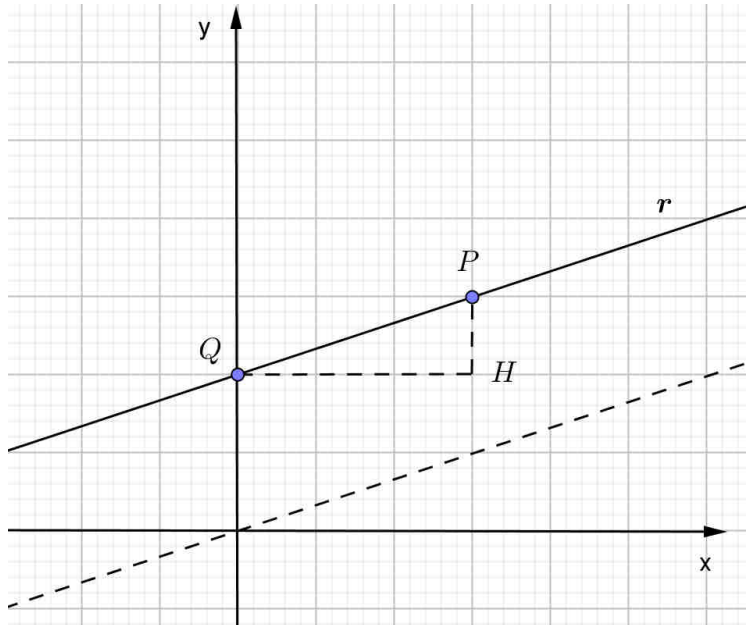
Se consideriamo due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ appartenenti a r osserviamo che si ha:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$



Retta non parallela agli assi e non passante per l'origine

Consideriamo infine una retta r non parallela agli assi coordinati e non passante per l'origine come quella in figura. Come possiamo determinare la sua equazione?



Consideriamo il punto in cui la retta interseca l'asse y :

nel nostro caso $Q(0;2)$

Ricaviamo il coefficiente angolare considerando il triangolo in figura PHQ (poiché posso ricavare m da una coppia qualsiasi di punti di r):

$$m = \frac{1}{3}$$

L'equazione della retta non sarà però $y = \frac{1}{3}x$ perché la retta non passa per l'origine: se tracciamo $y = \frac{1}{3}x$ ci accorgiamo che rispetto ad essa i punti di r hanno sempre l'ordinata aumentata di 2. e quindi l'equazione di r risulta:

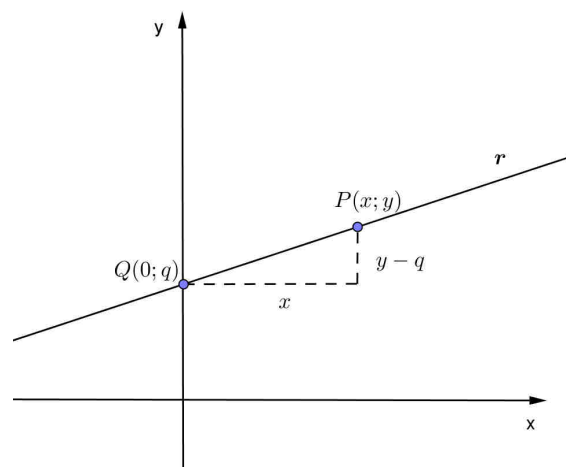
$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

In generale, se indichiamo con $Q(0;q)$ il punto di intersezione della retta con l'asse y , considerando un generico punto $P \in r$ avremo (vedi figura):

$$\frac{y-q}{x} = m \Rightarrow y - q = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + q}$$

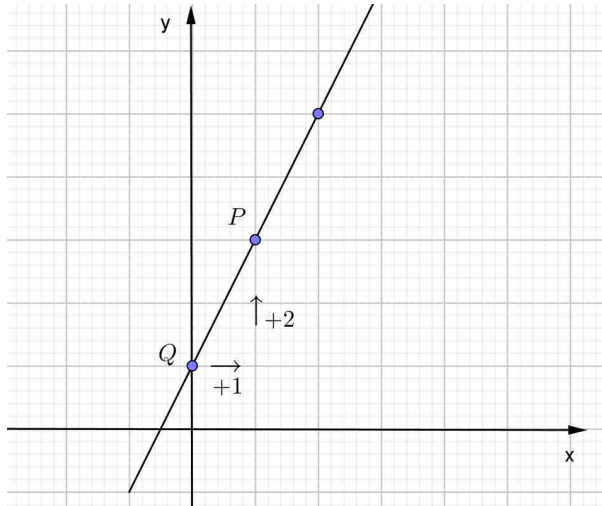
m è il **coefficiente angolare**

q è l'ordinata del punto di intersezione di r con l'asse y e viene anche detta “**ordinata all'origine**” perché è l'ordinata del punto di ascissa $x = 0$.



Esempi

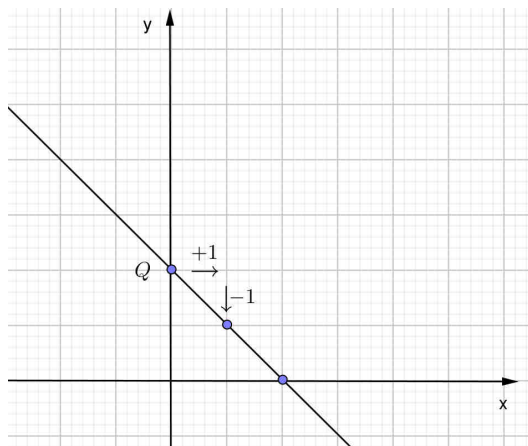
a) Disegniamo la retta di equazione $y = 2x + 1$ ($m=2$; $q=1$)



Partiamo da $Q(0;1)$: spostiamoci di 1 e saliamo di 2 (poiché $m = 2 = \frac{2}{1}$) e così via.

Naturalmente possiamo trovare anche le coordinate dei punti facendo la “tabella” x,y ma il procedimento sul piano quadrettato è più veloce.

b) Disegniamo la retta di equazione $y = -x + 2$ ($m = -1$; $q = 2$)



EQUAZIONE GENERALE DELLA RETTA

C'è un'equazione che comprende tutti i casi ?

Se consideriamo l'equazione

$$ax + by + c = 0$$

dove a, b, c sono coefficienti reali, al variare del valore dei coefficienti abbiamo tutti i casi.

Se $a = 0$ e $b \neq 0$ abbiamo rette del tipo $y = -\frac{c}{b}$ e quindi parallele all'asse x ;

Se $a \neq 0$ e $b = 0$ abbiamo rette del tipo $x = -\frac{c}{a}$ cioè rette parallele all'asse y ;

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ma $c = 0$ abbiamo $y = -\frac{a}{b}x$ cioè rette passanti per O (diverse dall'asse x)

Se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ abbiamo

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

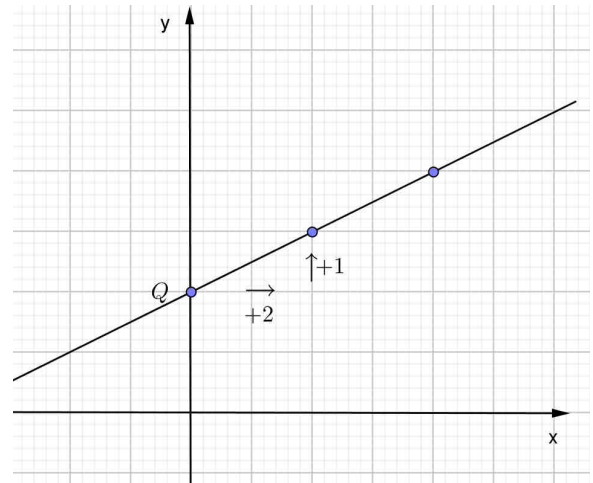
e quindi rette non passanti per l'origine e non parallele agli assi.

Esempio

Disegna la retta di equazione $x - 2y + 4 = 0$

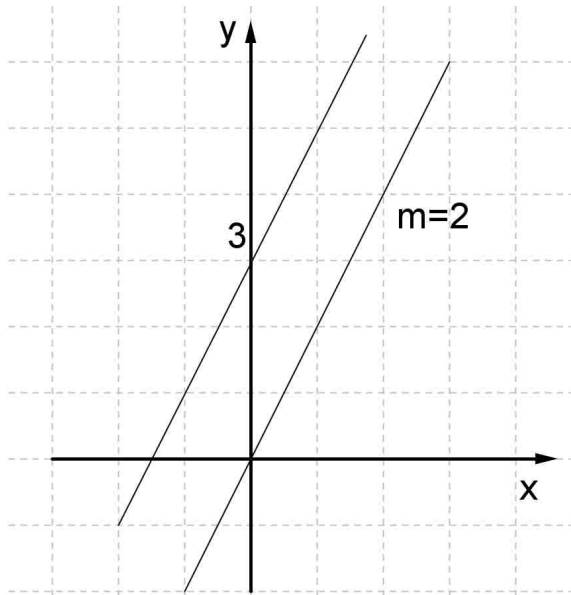
Ricaviamo la y : $2y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

e quindi $m = \frac{1}{2}$ e $q = 2$.



Rette parallele

Per quello che abbiamo detto è chiaro che due rette, non parallele all'asse y , sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

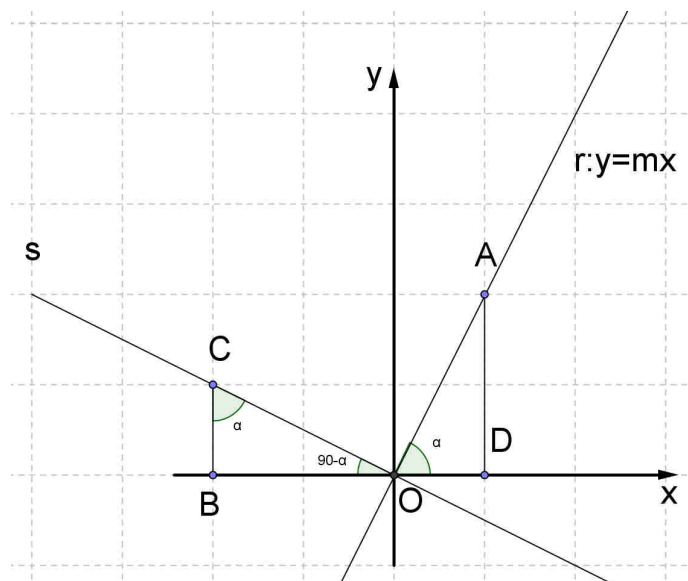


Vediamo in figura le rette di equazione $y = 2x$ e $y = 2x + 3$.

Rette perpendicolari

Consideriamo una retta per l'origine r di equazione $y = mx$ (per semplicità sia $m > 0$) e costruiamo il triangolo OAD come in figura prendendo cioè $\overline{OD} = 1$ e $\overline{AD} = m$.

A questo punto disegniamo il triangolo OCB prendendo $\overline{BC} = 1$ e $\overline{OB} = m$ (vedi figura) e tracciamo la retta s che avrà quindi equazione $y = -\frac{1}{m}x$.



Poiché i triangoli OAD e OCB sono uguali per costruzione, avranno tutti gli angoli uguali e in particolare $\hat{AOD} = \hat{BCO} = \alpha$ e allora essendo $\hat{BOC} = 90^\circ - \alpha$ avremo che l'angolo $\hat{AOC} = 90^\circ$ cioè le rette r e s sono perpendicolari.

La relazione che abbiamo trovato tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari passanti per l'origine vale naturalmente anche per rette perpendicolari non passanti per l'origine poiché quello che conta è il coefficiente angolare.

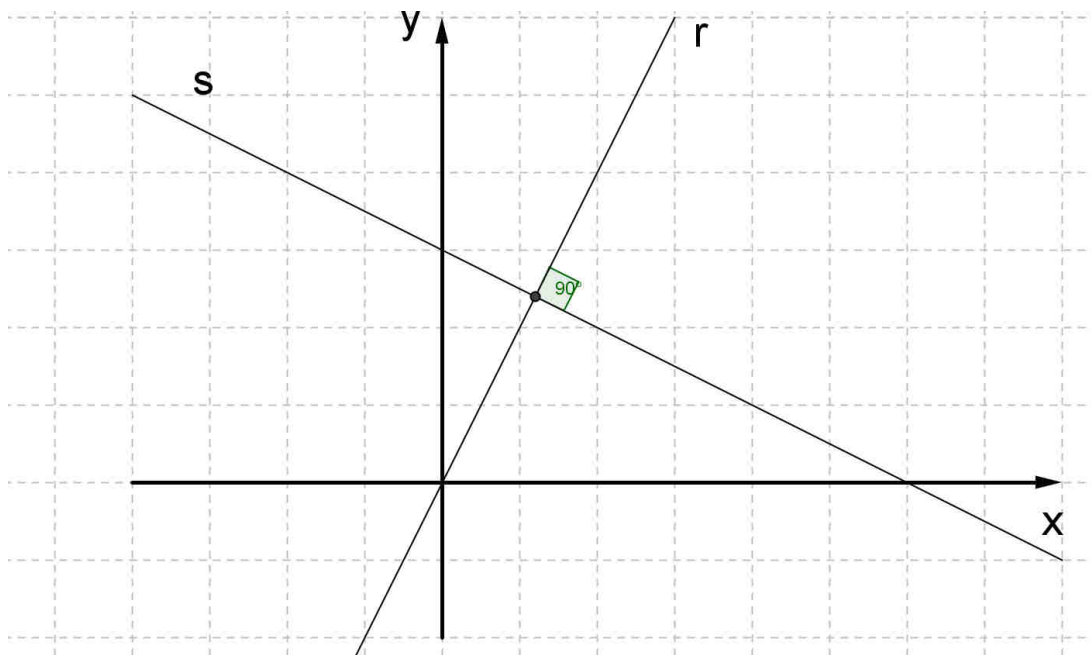
Quindi possiamo dire che se una retta ha coefficiente angolare m , una retta con coefficiente angolare

$$m' = -\frac{1}{m}$$

risulta ad essa perpendicolare (e viceversa se due rette sono perpendicolari e non parallele agli assi i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro).

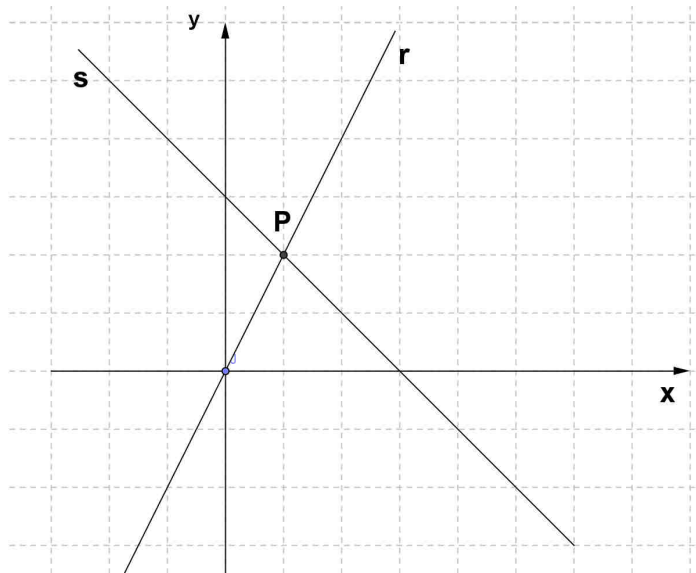
Vediamo per esempio in figura le rette perpendicolari di equazione

$$y = 2x \text{ e } y = -\frac{1}{2}x + 3$$



INTERSEZIONE TRA DUE RETTE

Supponiamo di avere due rette non parallele, per esempio $y = 2x$ e $y = -x + 3$ come in figura e di voler trovare le coordinate del loro punto P di intersezione.



In questo caso le coordinate si possono determinare facilmente anche osservando la figura: $P(1;2)$.

Ma in generale come possiamo trovare il punto di intersezione?

Poiché $P \in r$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di r e poiché $P \in s$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di s : quindi le coordinate $(x; y)$ del punto di intersezione devono verificare entrambe le equazioni cioè sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Infatti risolvendo abbiamo:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

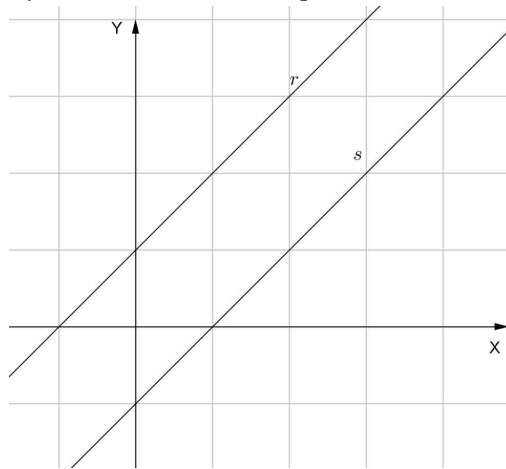
In generale quindi per trovare le coordinate del punto di intersezione di due rette basterà **risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

Quindi possiamo avere tre casi:

- Se le rette sono **incidenti** come nel nostro esempio abbiamo un punto di intersezione cioè una soluzione $(x_0; y_0)$ del sistema risulta “*determinato*”;
- Se le rette sono **parallele** allora non c'è nessun punto “comune”, quindi nessuna soluzione del sistema e il sistema risulta “*impossibile*”.

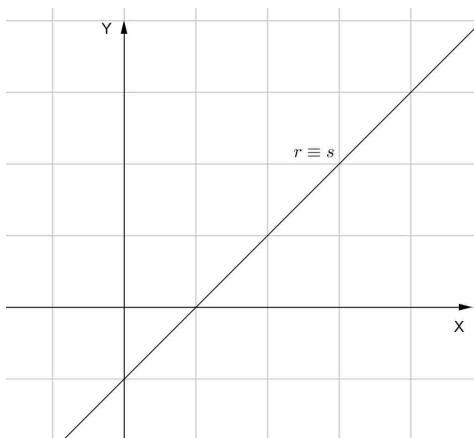
Esempio

$$\begin{cases} r: x - y + 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y - 1 - y - 1 = 0 \rightarrow -2 = 0 \text{ impossibile} \end{cases}$$



- Se le rette sono coincidenti cioè le equazioni rappresentano la **stessa retta**, i punti sono tutti comuni e il sistema ha infinite soluzioni e risulta “*indeterminato*”.

Esempio



$$\begin{cases} r: 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Infatti se ricavo $x = y + 1$ dalla prima equazione e sostituisco nella seconda equazione trovo $0=0$.

Tutti i punti della retta sono soluzioni del sistema.

**Equazione di una retta passante per un punto assegnato $P_0(x_0; y_0)$
ed avente un coefficiente angolare assegnato m**

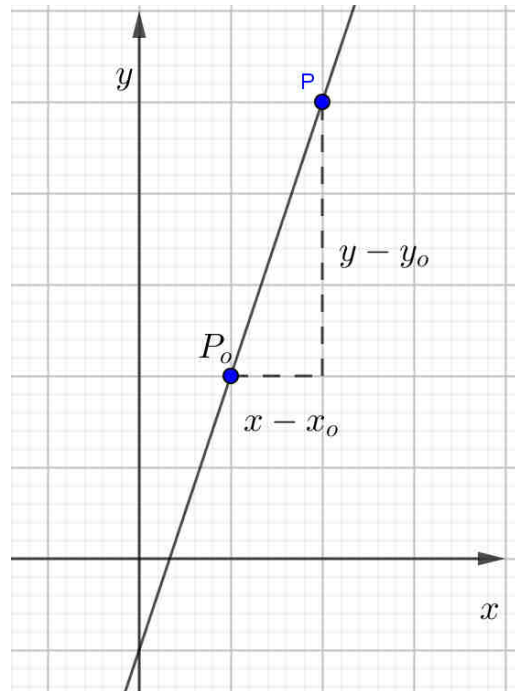
Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta passante per $P_0(1;2)$ e avente coefficiente angolare $m = 3$.

Se consideriamo un punto $P(x; y)$ sulla retta avremo che

$$\frac{y-2}{x-1} = 3 \rightarrow y-2 = 3 \cdot (x-1)$$

Sviluppando abbiamo quindi che l'equazione della retta risulta:

$$y = 2 + 3x - 3 \rightarrow y = 3x - 1$$



In generale se indichiamo con $(x_0; y_0)$ le coordinate del punto P_0 avremo

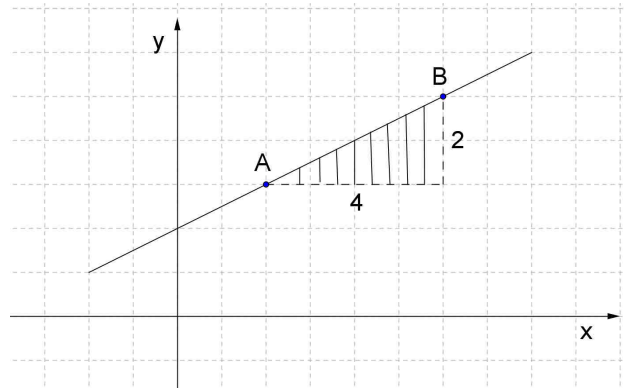
$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \rightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

cioè l'equazione della retta passante per $P_0(x_0; y_0)$ e avente coefficiente angolare m risulta

$$\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

Equazione della retta passante per due punti assegnati

Supponiamo di volere trovare l'equazione della retta passante per $A(2;3)$ e $B(6;5)$.



Osserviamo che possiamo ricavare il coefficiente angolare della retta partendo dal triangolo tratteggiato in figura:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e nel nostro esempio quindi abbiamo $m = \frac{1}{2}$.

A questo punto possiamo utilizzare l'equazione della retta per A, per esempio, con coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$ e abbiamo $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

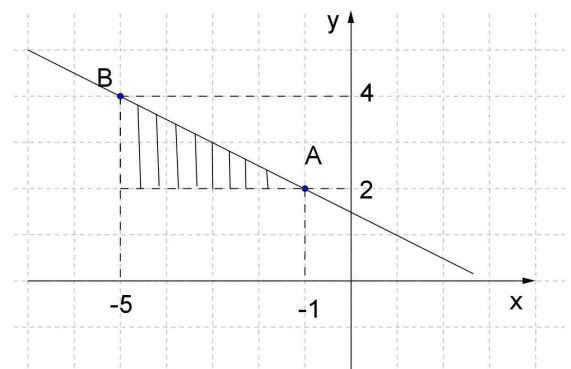
In generale per determinare l'equazione della retta passante per $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ si determina prima il coefficiente angolare e poi si sfrutta l'equazione della retta passante per un punto (possiamo scegliere A o B) con coefficiente angolare dato.

Se per esempio consideriamo il passaggio per A abbiamo:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

Attenzione: se per ricavare m ci si affida al piano quadrettato occorre fare attenzione ai coefficienti angolari negativi. Per esempio le misure dei cateti del triangolo tratteggiato in figura sono ancora 2 e 4 ma in questo caso è chiaro che $m = -\frac{1}{2}$.

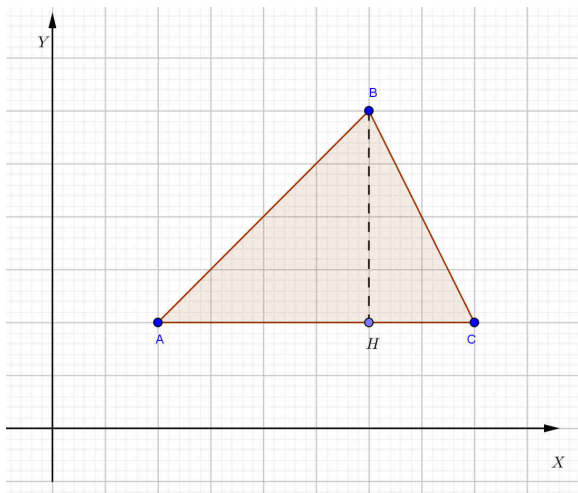
$$\text{Infatti } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{-5 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$



Area di un triangolo di vertici assegnati

Come possiamo, in generale, determinare l'area di un triangolo ABC conoscendo le coordinate dei vertici?

1) Consideriamo un esempio: $A(2;2)$ $B(6;6)$ $C(8;2)$.



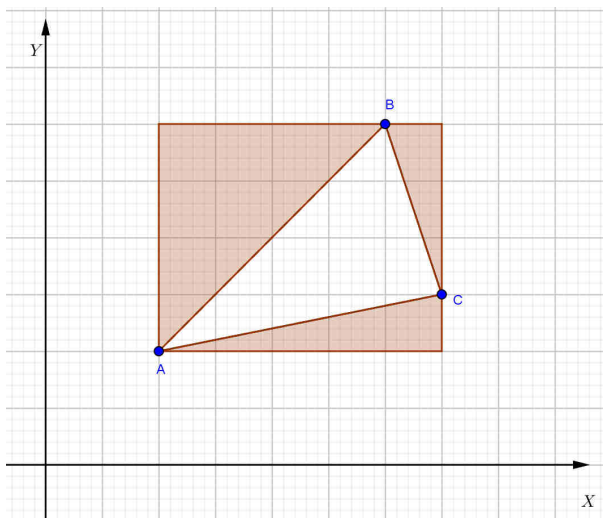
È chiaro che in questo caso conviene considerare AC come base perché l'altezza BH corrisponde alla differenza tra l'ordinata di B e quella di A (o C).

Si ha cioè $BH = 4$ e quindi

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12$$

Quindi è piuttosto facile determinare l'area di ABC se un lato è parallelo ad uno degli assi.

2) Consideriamo adesso $A(2;2)$ $B(6;6)$ $C(7;3)$



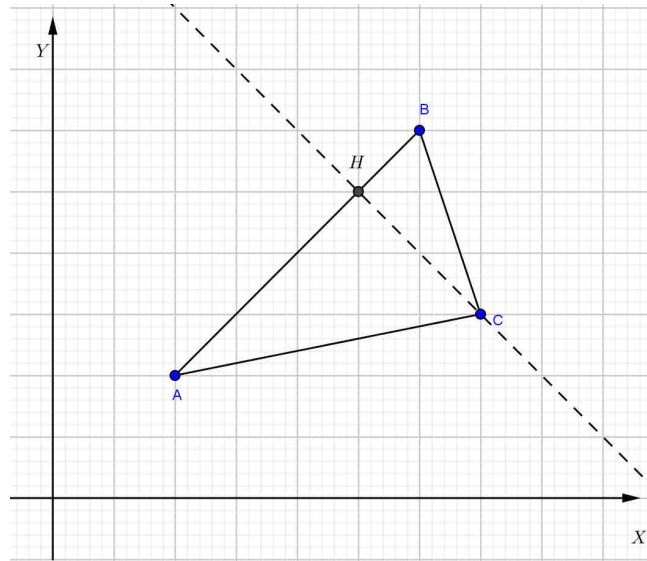
Possiamo in questo caso *inscrivere il triangolo in un rettangolo* (vedi figura) e determinare l'area di ABC sottraendo all'area del rettangolo le aree dei triangoli tratteggiati (facili da calcolare).

$$\text{Abbiamo in questo caso: } \text{area } ABC = \text{area rettangolo} - \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 8 \right) = 20 - 12 = 8$$

Ma potevamo determinare l'altezza relativa ad una base?

Proviamo a considerare AB come base: per trovare l'altezza CH (vedi figura) dobbiamo prima determinare le coordinate di H.

Per trovare H dobbiamo intersecare la retta per A e B con la retta per C perpendicolare a r_{AB} .



$$r_{AB} : y - 2 = x - 2 \Rightarrow y = x$$

$$h_C : y - 3 = -(x - 7) \Rightarrow y = -x + 10$$

$$H : \begin{cases} y = x \\ y = -x + 10 \end{cases} \Rightarrow x = -x + 10 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

Quindi $HC = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$ e in conclusione, essendo $AB = \sqrt{32}$ ritroviamo

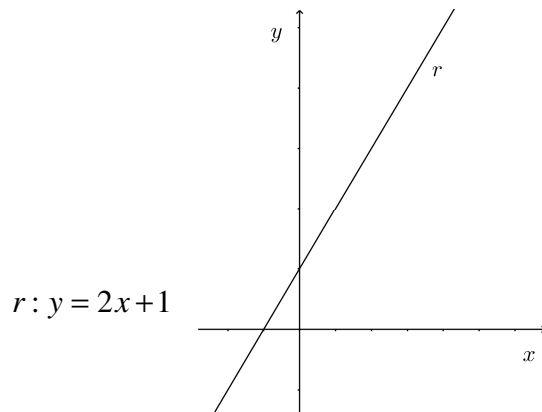
$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{256} = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

Questo secondo procedimento risulta quindi più “laborioso” del primo ma in seguito dimostreremo una formula che ci permetterà di trovare velocemente la distanza CH e allora converrà usare questo metodo per calcolare l'area.

APPROFONDIMENTI

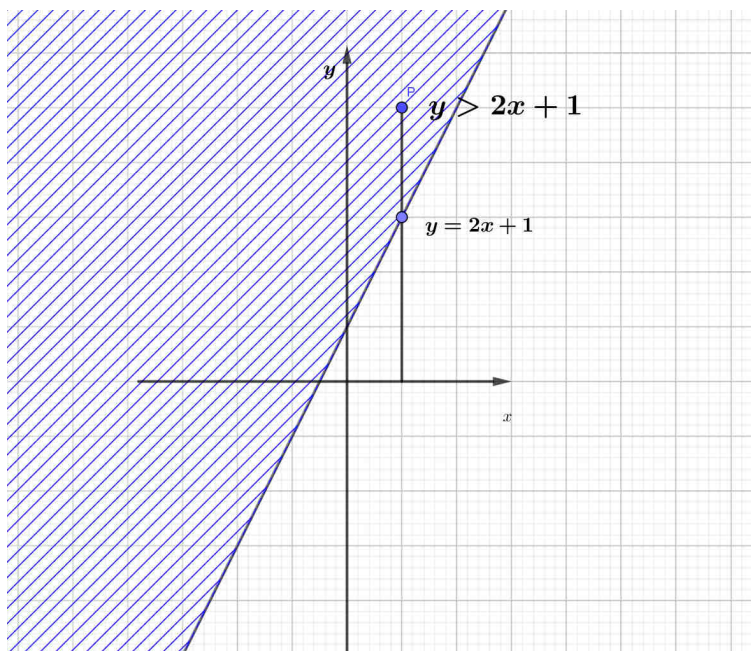
Disequazioni di primo grado in due incognite

Consideriamo la retta di equazione $y = 2x + 1$.



Cosa rappresenta la disequazione $y > 2x + 1$?

I punti del piano che hanno ordinata (y) maggiore di $2 \cdot$ ascissa $+1$ ($2x + 1$) sono tutti quelli che si trovano nel semipiano individuato da r indicato in figura (semipiano “sopra” ad r).



Per ogni $P(x; y)$ del semipiano
abbiamo

$$y_p > 2x_p + 1$$

Quindi mentre l'equazione $y = 2x + 1$
rappresenta i punti sulla retta r , la
disequazione $y > 2x + 1$ rappresenta i
punti del semipiano “sopra” ad r .

È chiaro che $y < 2x + 1$ rappresenta il semipiano “sotto” ad r .

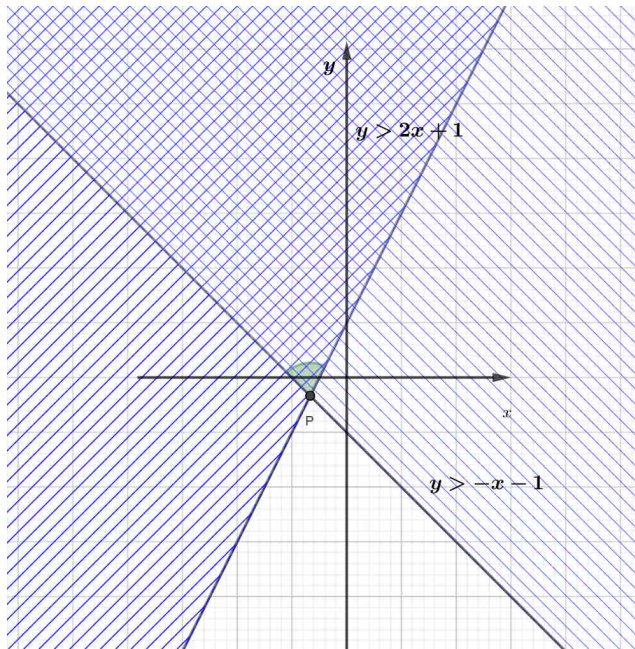
Osservazione: e se abbiamo $x + y + 1 > 0$?

Basta “esplicitare” y ed abbiamo $y > -x - 1$: le soluzioni della disequazione sono tutti i punti del semipiano “sopra” alla retta $y = -x - 1$.

Sistemi di disequazioni di primo grado in due incognite

Esempio: cosa rappresenta il sistema $\begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ y > 2x + 1 \end{cases}$?

Disegniamo i semipiani ed intersechiamoli: otteniamo un “angolo”.



$$\begin{cases} r: x + y + 1 > 0 \rightarrow y > -x - 1 \\ s: y > 2x + 1 \end{cases}$$

Il vertice dell'angolo è il punto in cui si incontrano $y = -x - 1$ e $y = 2x + 1$.

$$P \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 1 = -x - 1 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ \dots \Rightarrow y = 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi abbiamo l'angolo α in figura di vertice $P\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

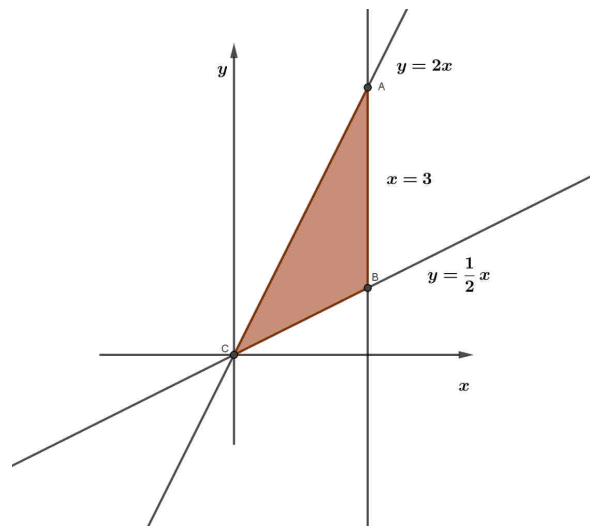
Esempio

Cosa rappresenta il sistema $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$?

Esplicitiamo la y nelle varie disequazioni:

$$\begin{cases} y < 2x \\ y > \frac{1}{2}x \\ x < 3 \end{cases}$$

Otteniamo la zona di piano triangolare tratteggiata in figura.



ESERCIZI

1. Disegna le seguenti rette:

a) $x = 5$; $y = -3$

b) $y = 4x$; $y = -4x$

c) $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$

d) $y = \frac{3}{5}x$; $y = -\frac{3}{5}x$

e) $y = \frac{5}{4}x$; $y = -\frac{4}{5}x$

2. Disegna le seguenti rette:

a) $y = x + 4$; $y = -2x - 3$; $y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) $y = 3x - 1$; $y = \frac{1}{2}x - 2$; $y = -2x + 5$

3. Disegna le rette aventi equazione:

a) $3x + y = 0$; $x - 2y + 4 = 0$; $5y - 15 = 0$; $4x - 2 = 0$

b) $2x - 3y + 6 = 0$; $x - y = 0$; $2x + y - 1 = 0$; $3 - x = 0$

4. Determina l'equazione della retta:

a) passante per $A(2;5)$ e avente $m = 2$

b) passante per $A(1;0)$ e parallela alla retta di equazione $y = x$

c) passante per $P(-1;3)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x - 2y - 2 = 0$

d) passante per $P(0;-2)$ e parallela alla retta di equazione $3x - y = 0$

5. Determina la retta passante per il punto $A(2;3)$ e avente coefficiente angolare $m = -1$.
Disegnala.

[$y = -x + 5$]

6.Determina l'equazione della retta passante per $P(3;0)$ e parallela alla retta $y = \frac{1}{2}x + 3$. Disegna le due rette.

$$[y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}]$$

7.Determina l'equazione della retta passante per $P(-2;1)$ e perpendicolare alla retta $y = -3x + 1$. Disegna.

$$[y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}]$$

8.Determina l'equazione della retta passante per i punti $A(2;-4)$ e $B(0;1)$ e disegna.

$$[y = -\frac{5}{2}x + 1]$$

9.Determina l'equazione della retta passante per i punti $A(-1;-3)$ e $B(1;-1)$ e disegna.

$$[y = x - 2]$$

10.Disegna le rette $y = 3x$, $y = 4 - x$ e, dopo aver determinato il loro punto di intersezione A, determina l'equazione della retta passante per A e parallela alla retta di equazione $x - 2y = 0$.

$$[y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}]$$

11.Determina l'equazione della retta r passante per i punti $A(-1;3)$, $B(2;2)$ e disegna. Determina poi l'equazione della retta passante per A e perpendicolare a r .

$$[y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}; y = 3x + 6]$$

12.Dati i punti $A(-3;3)$; $B(-2;5)$; $C(0;4)$; $D(-1;2)$, determina le equazioni delle rette passanti per A-B ; B-C ; C-D e D-A e verifica che individuano un quadrato. Disegna.

$$[y = 2x + 9; y = -\frac{1}{2}x + 4; y = 2x + 4; y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}]$$

13. Disegna nel piano cartesiano le rette aventi le seguenti equazioni ed indica come risultano

$$\text{a) } \begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad \text{[incidenti in } P\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right) \text{]}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{[incidenti in } P\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right) \text{]}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \quad \text{[rette parallele, sistema impossibile]}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2(x - 3) + y + 5 = 0 \\ 4x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{[rette coincidenti, sistema indeterminato]}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad \text{[rette incidenti in } P(2;3) \text{]}$$

$$\text{f) } \begin{cases} y = 3 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{[rette incidenti in } P\left(\frac{3}{2}; 3\right) \text{]}$$

14. Determina l'area del triangolo di vertici:

$$\text{a) } A(-1;2) \quad B(5;5) \quad C(6;1). \quad \text{[Area } = \frac{39}{2} \text{]}$$

$$\text{b) } A(-2;-1); \quad B(0;3); \quad C(3;0). \quad \text{[Area } = 9 \text{]}$$

$$\text{c) } A(1;1); \quad B(1;4); \quad C(4;3). \quad \text{[Area } = \frac{9}{2} \text{]}$$

$$\text{d) } A(1;-1); \quad B(5;-1); \quad C(2;-3). \quad \text{[Area } = 4 \text{]}$$

$$\text{e) } A(1;2); \quad B(3;4); \quad C(4;1) \text{ determinando l'altezza relativa ad AB.} \quad \text{[Area } = 4 \text{]}$$

15. Determina l'equazione della retta s per $A(2;3)$ parallela alla retta $r: y = \frac{1}{2}x$. Indica con B

l'intersezione di s con l'asse y .

Tracciata la retta per A parallela all'asse y e detta C la sua intersezione con r , indica come risulta il quadrilatero $ABOC$ e determinane l'area.

$$\text{[} s: y = \frac{1}{2}x + 2; B(0;2); C(2;1) \text{ ; parallelogramma ; } A = 4 \text{]}$$

16. Considera i punti $A(-1;3)$ e $B(2;6)$.

- a) Determina l'equazione della retta per A e B;
- b) considera il quadrato avente lato AB e centro $(2;3)$.

Quali sono le coordinate degli altri due vertici C e D? Determina l'area di ABCD.

$$[r_{AB} : y = x + 4; C(5;3)D(2;0); A = 18]$$

17. Considera i punti $A(0;3)$, $B(3;5)$, $C(5;2)$.

- a) Determina le equazioni delle rette r_{AB} , r_{BC} , r_{AC}
- b) Verificare che ABC è un triangolo rettangolo isoscele
- c) Determina l'area di ABC.

$$[r_{AB} : y = \frac{2}{3}x + 3; r_{BC} : 3x + 2y - 19 = 0, r_{AC} : y = -\frac{1}{5}x + 3; A = \frac{13}{2}]$$

18. Considera il triangolo di vertici $A(5;1)$, $B(-3;5)$ e $C(0;-4)$. Determina le coordinate del circocentro K del triangolo (ricorda che il circocentro è il punto di intersezione degli assi dei lati del triangolo).

$$[K(0;1)]$$

19. Considera il triangolo dell'esercizio precedente. Determina le coordinate dell'ortocentro H del triangolo (ricorda che l'ortocentro è il punto di intersezione delle altezze del triangolo).

$$[H(2;0)]$$

20. Considera il triangolo dell'esercizio precedente.

- a) Determina le coordinate del baricentro G del triangolo (ricorda che il baricentro è l'intersezione delle mediane).
- b) Verifica che circocentro K, ortocentro H e baricentro G sono allineati.
Su quale retta si trovano?

$$[G(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}), H, K, G \in r : y = -\frac{1}{2}x + 1]$$

21. Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(2;5)$, $C(3;0)$. Determina l'equazione dell'altezza h_C uscente da C e detto H il suo punto di intersezione con il lato AB, determina l'area del triangolo ABC considerando il lato AB come base.

Confronta il risultato con quello che avresti ottenuto usando il metodo "elementare" di considerare il rettangolo all'interno del quale si trova il triangolo.

$$[Area(ABC) = 9]$$

22. Considera i punti $A(-2;1)$, $B(1;4)$, $C(3;2)$. Determina circocentro K, ortocentro H e baricentro G del triangolo ABC e verifica che sono allineati.

$$\left[K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); H(1;4); G\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \right]$$

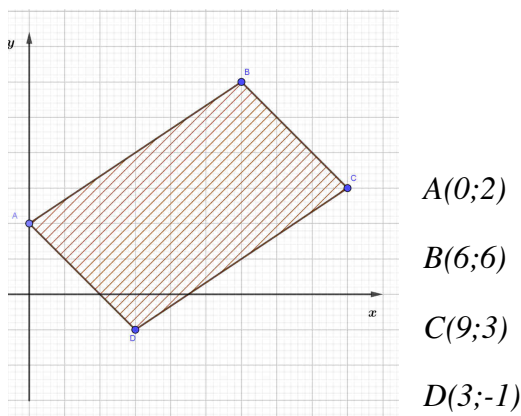
23. Considera i punti $A(-5;1)$, $B(0;6)$, $C(3;-3)$.
Determina le coordinate dell'ortocentro H.

$$[H(-2;2)]$$

24. Considera le rette $r: x+2y+5=0$, $s: y=2-2x$, $t: x-2y+9=0$.
Determina le intersezioni delle rette indicandole con A,B,C.

$$A(3;-4), B(-7;1), C(-1;4)$$

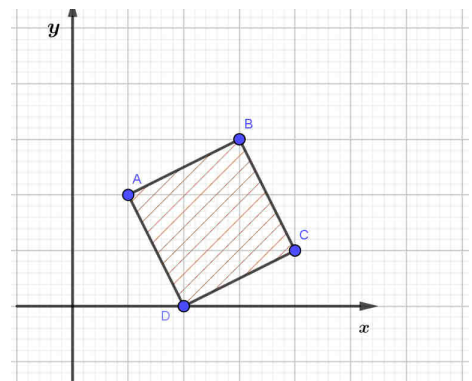
25. Considera la zona tratteggiata in figura. Qual è il sistema di disequazioni ad essa corrispondente?



26. Disegna la zona di piano corrispondente al seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - y < 0 \\ y - 4 < 0 \\ 2x + y > 0 \end{cases}$$

27. Considera la zona tratteggiata in figura. Qual è il sistema di disequazioni ad essa corrispondente?



28. Disegna la zona di piano corrispondente al seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

29. *Matematica e dieta*

Supponi di seguire una dieta in cui:

- puoi mangiare solo pasta e carne;
- 1 g di pasta fornisce 2 kcal (chilocalorie) e 1 g di carne fornisce in media 3 kcal;
- devi ogni giorno assumere tra le 1500 kcal e 2100 kcal;
- se indichi con x i grammi di pasta e con y i grammi di carne, la quantità di pasta (x) deve essere almeno $\frac{1}{5}$ della quantità totale di cibo ($x+y$) e al massimo $\frac{1}{3}$ del totale ($x+y$).

a) Scriviamo le disequazioni corrispondenti alle indicazioni precedenti:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 1500 \\ 2x + 3y \leq 2100 \\ x \geq \frac{1}{5}(x + y) \\ x \leq \frac{1}{3}(x + y) \end{cases}$$

b) Rappresenta nel piano cartesiano la zona di punti ($x;y$) compatibili con la dieta.

c) Mangiare 200 g di pasta e 500 g di carne (in un giorno) rientra nella tua dieta?

30. *Disequazioni e test*

Uno studente deve affrontare una verifica costituita da 10 domande teoriche a risposta multipla e 5 problemi a risposta aperta. Ogni risposta corretta alle domande teoriche vale 2 punti, ogni problema corretto 5 punti. Per ottenere una valutazione sufficiente si deve rispondere ad almeno 6 domande e risolvere almeno 2 problemi.

La valutazione uguale a 9 corrisponde ad un punteggio complessivo compreso tra 35 e 40 punti.

Se indichi con $x = n^\circ$ risposte corrette alle domande
 $y = n^\circ$ problemi svolti correttamente da uno studente,

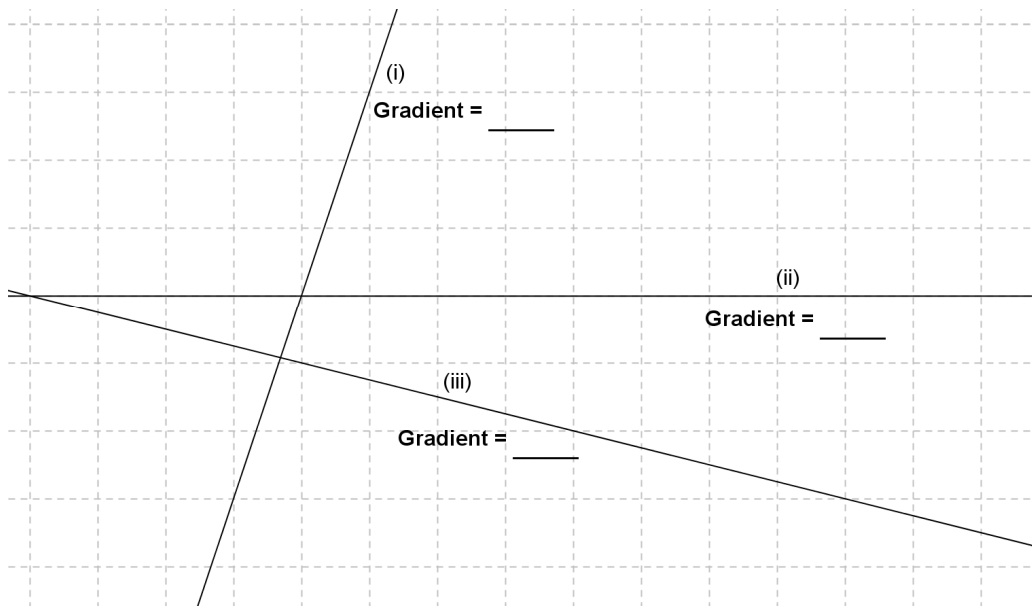
quali sono le coppie (x,y) che danno una valutazione 9?

Rappresenta la situazione in un sistema di riferimento ($0;x,y$) e trasforma le condizioni descritte in un sistema di disequazioni.

TEST 1

STRAIGHT LINES

1) Find the gradient of the following straight lines.



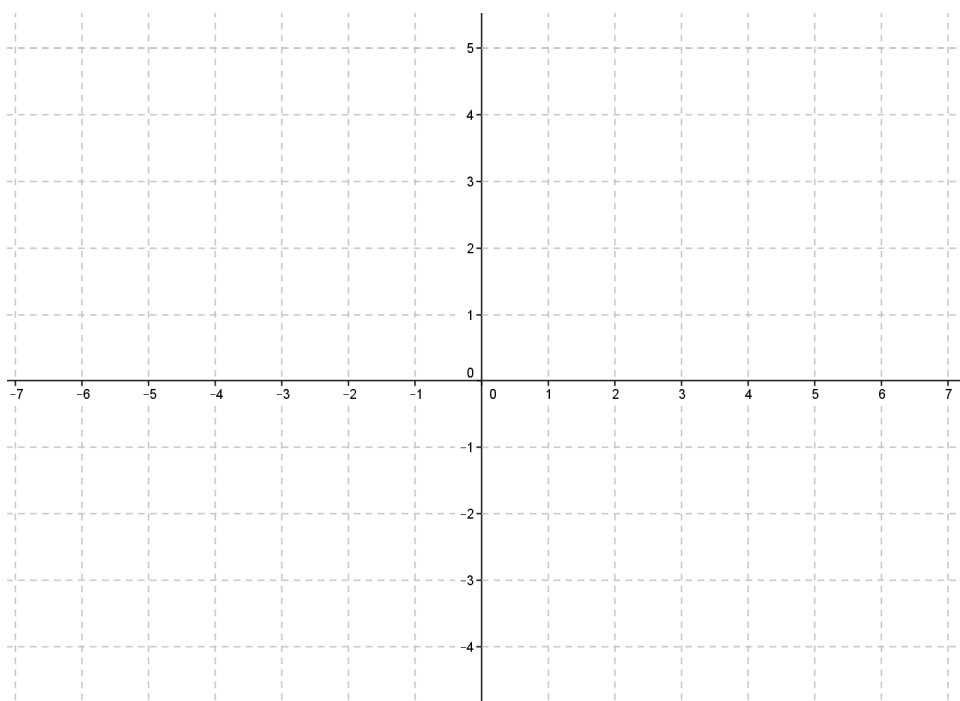
2) Write down the gradient and y-intercept of the following lines. Sketch the lines on the axes below.

(i) $y = 3x - 1$ Gradient: _____ y-intercept: _____

(ii) $y = -2x + 3$ Gradient: _____ y-intercept: _____

(iii) $y = \frac{3}{2}x + 1$ Gradient: _____ y-intercept: _____

(iv) $y = -\frac{x}{2} - 2$ Gradient: _____ y-intercept: _____



- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- La retta nel piano cartesiano -

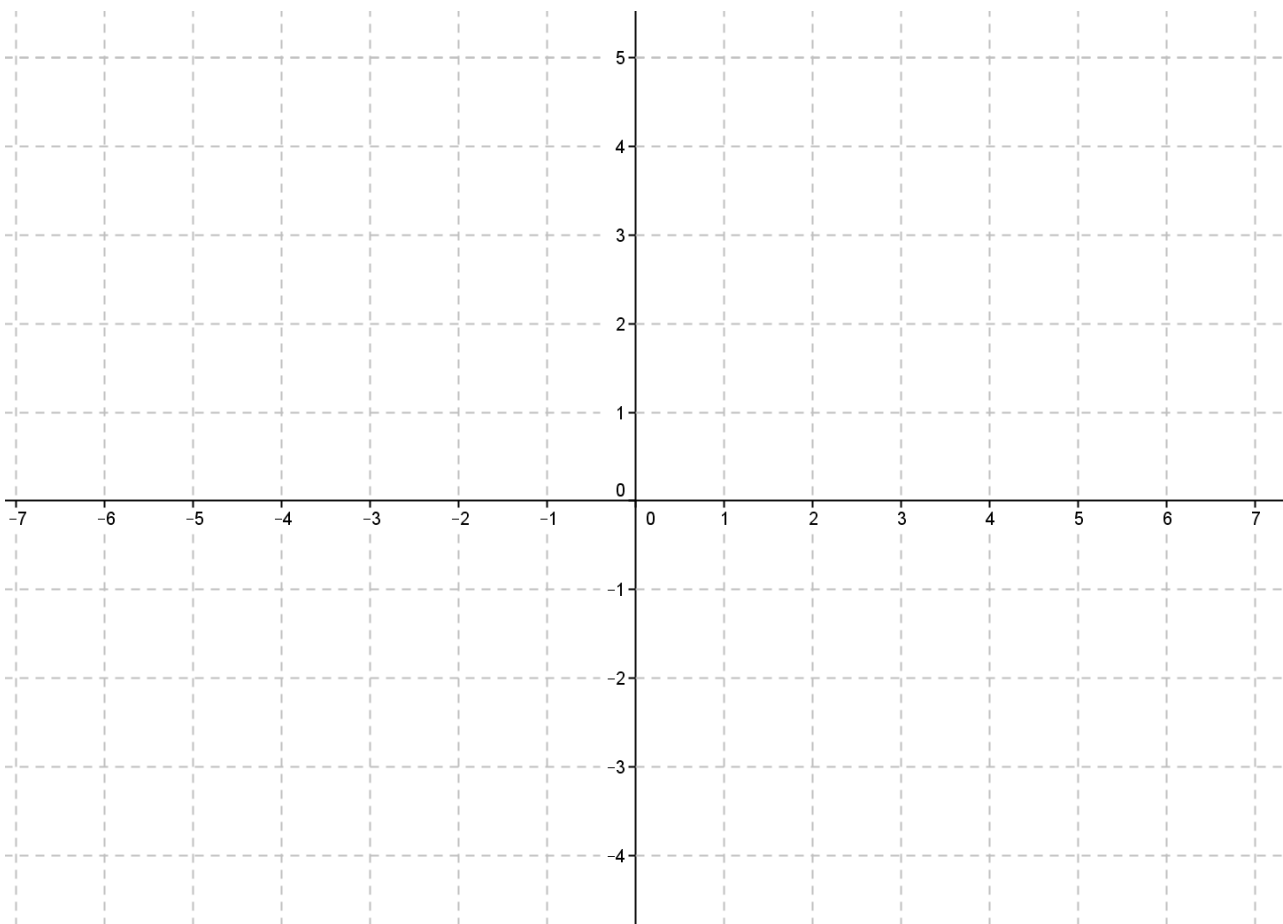
3) For each equation below:

- rearrange the equation so it is in the form $y = mx + c$

- hence state the gradient and y-intercept

- draw the line on the axes below

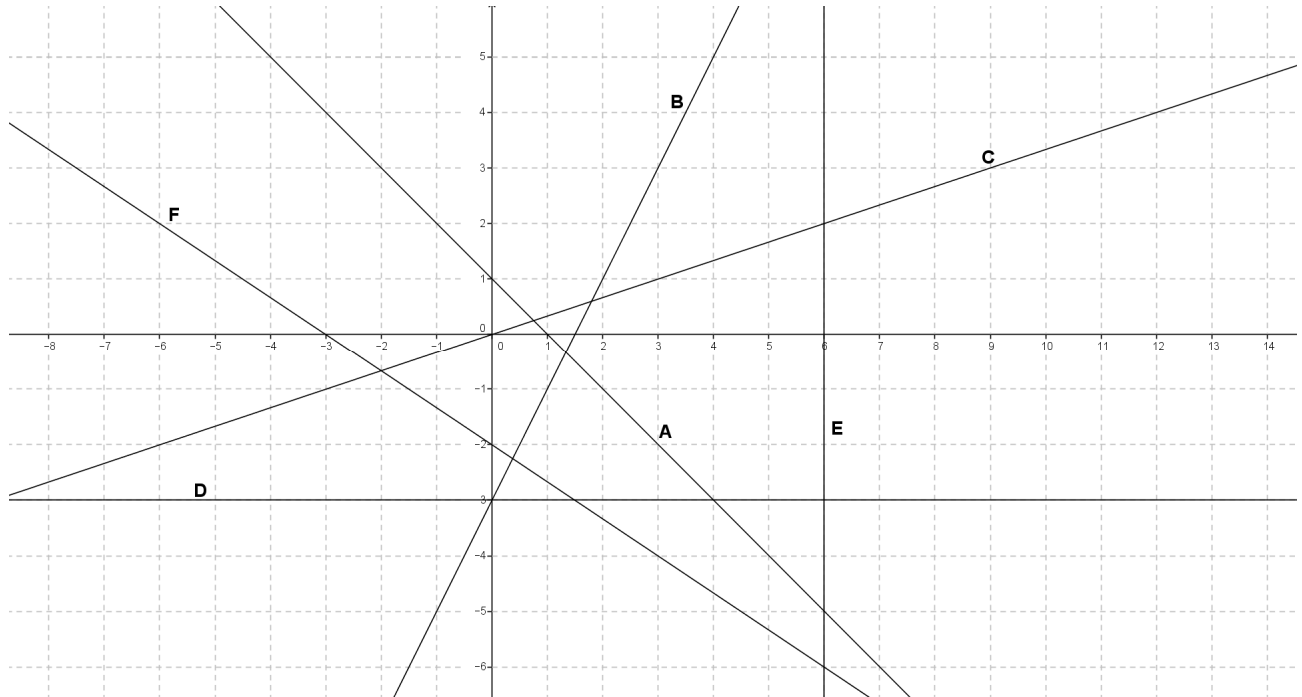
- | | | |
|--------------------------------|-----------------|--------------------|
| (i) $x + y = 2$ | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |
| (ii) $3x - y = 2$ | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |
| (iii) $2x + 4y - 9 = 0$ | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |
| (iv) $3x - 2y = 8$ | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |



4) Rearrange the equations of these lines so they are in the form $ax + by + c = 0$

(i) $y = -\frac{x}{3} - 2$ (ii) $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{3}$

5) Write down the equations of the lines below.



A: _____

B: _____

C: _____

D: _____

E: _____

F: _____

6) Complete the table:

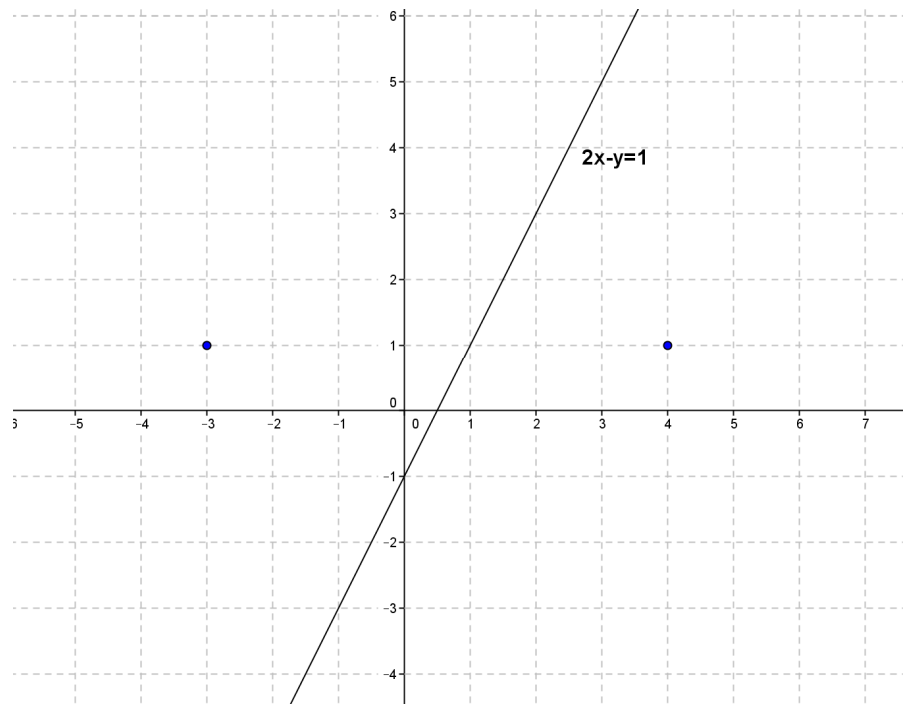
Gradient of line	Gradient of perpendicular
1	
	-4
$-\frac{2}{3}$	
	$\frac{2}{3}$
0.3	

7) Find the equation of these lines.

(i) parallel to $2x - y = 1$ going through $(4,1)$

(ii) perpendicular to $2x - y = 1$ going through $(-3,1)$

(iii) Draw these two lines on the grid below.



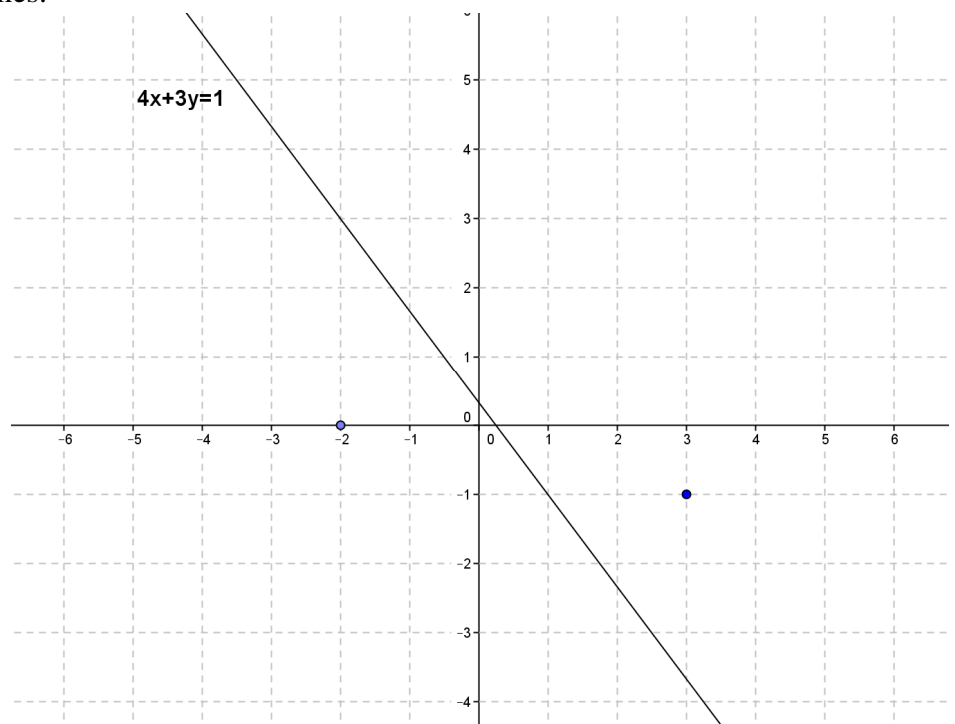
8) Find the equation of these lines.

Give your answers in the form $ax + by + c = 0$ where a, b and c are integers.

(i) parallel to $4x + 3y = 1$ going through $(-2,0)$

(ii) perpendicular to $4x + 3y = 1$ going through $(3,-1)$

(iii) Draw these two lines on the grid .



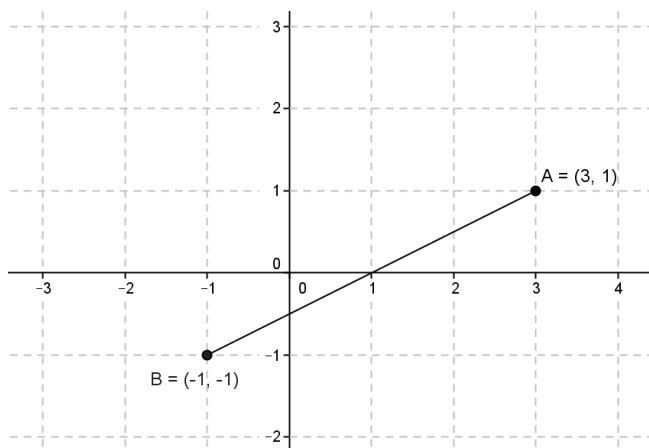
9) Point A, B, C have co-ordinates (4,1), (6,-2) and (-1,-9) respectively.

(i) Find the co-ordinates of the mid-point AC.

(ii) Find the equation of the line through B perpendicular to AC. Give your answer in the form $ax + by + c = 0$.

10) Given the coordinates of the end points of these lines, find the length, mid-point and gradient of each line.

(i)

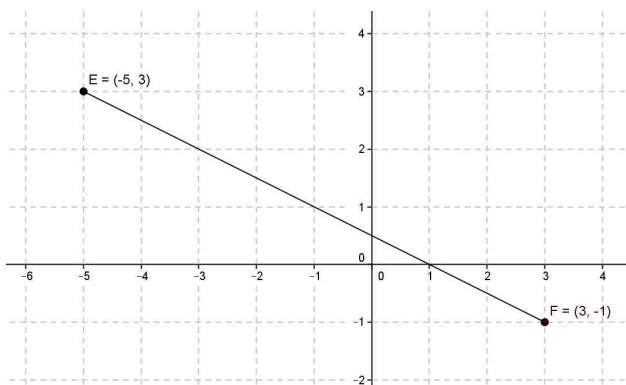


Length: _____

Mid-point: _____

Gradient: _____

(ii)



Length: _____

Mid-point: _____

Gradient: _____

11) The mid-point of A(-1,5) and B(m, n) is (2,5). Find the value of m and n.

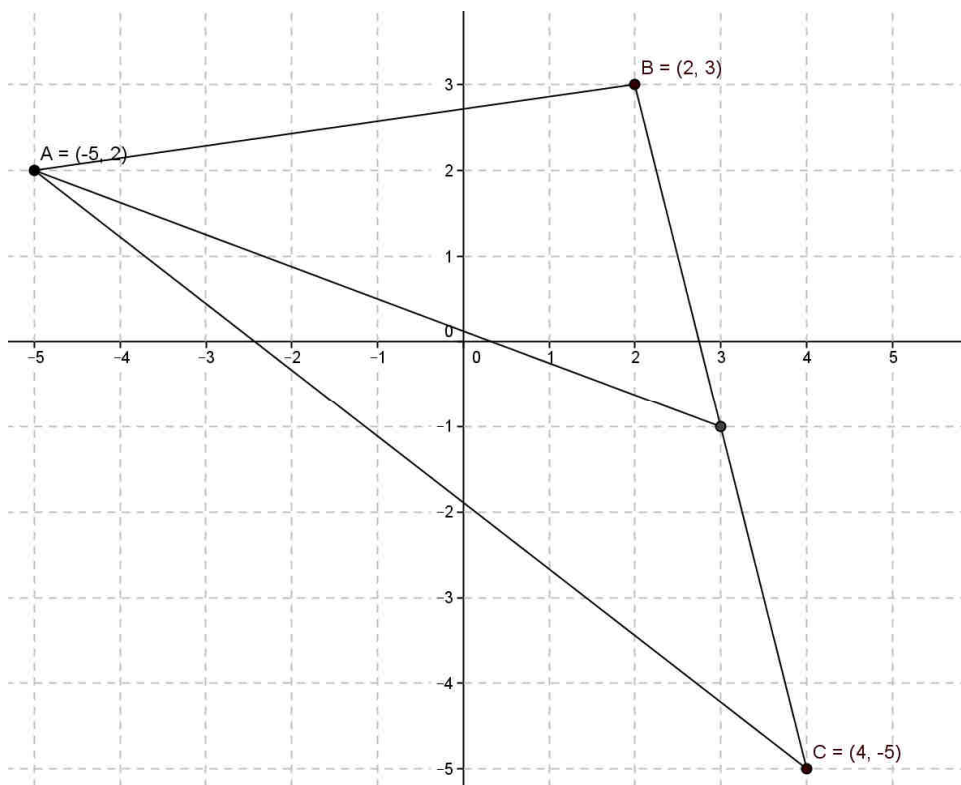
12) Find the equation of the perpendicular bisector of A(2,4) and B (-6,0).

13) The line l_1 is given by $x - 3y = 6$. The point P is $(-3, 2)$.

Find the equation of the line perpendicular to l_1 that goes through P.

14) The median of a triangle is the line that joins a vertex to the mid-point of the opposite side. A triangle is formed by the points $A(-5, 2)$, $B(2, 3)$ and $C(4, -5)$.

Find the equation of the median from the point A as shown.



TEST 2

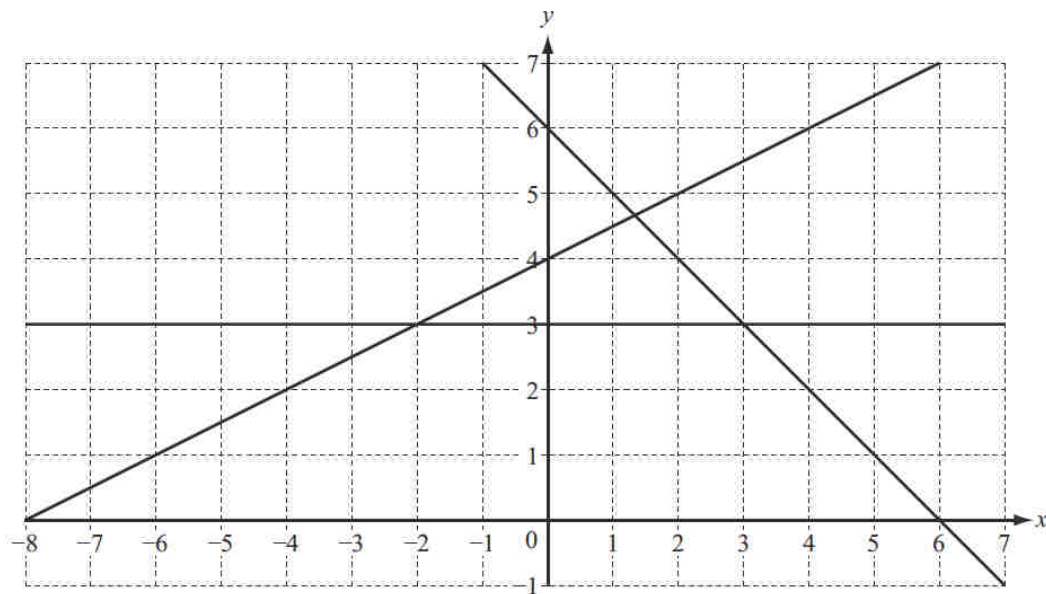
LINEAR PROGRAMMING

1) The region **R** contains points which satisfy the inequalities:

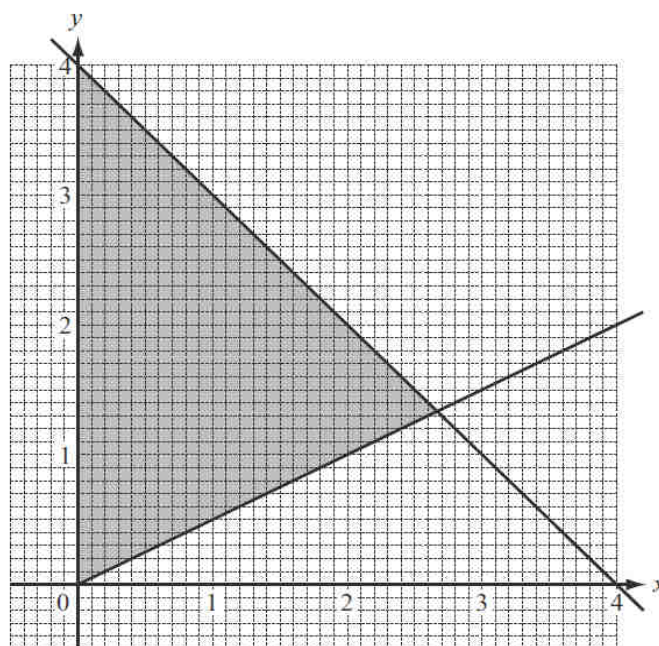
$$y \leq \frac{1}{2}x + 4 \quad , \quad y \geq 3 \quad \text{and} \quad x + y \geq 6 \quad .$$

On the grid, label with the letter **R** the region which satisfies these inequalities.

You must shade the **unwanted** regions.

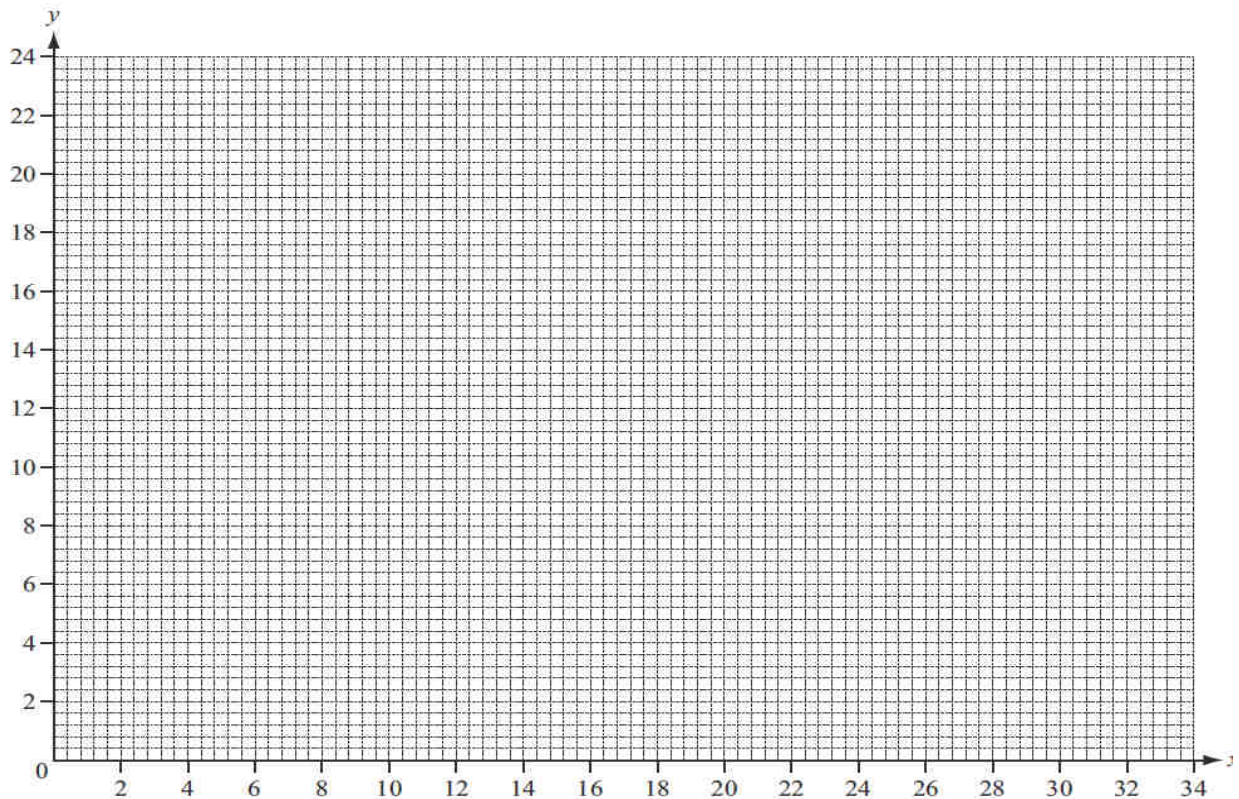


2) Find the three inequalities which define the shaded region:



3) Pablo plants x lemon trees and y orange trees.

- (a) (i) He plants at least 4 lemon trees.
 Write down an inequality in x to show this information
- (ii) Pablo plants at least 9 orange trees.
 Write down an inequality in y to show this information
- (iii) The greatest possible number of trees he can plant is 20.
 Write down an inequality in x and y to show this information
- (b) Lemon trees cost \$5 each and orange trees cost \$10 each.
 The maximum Pablo can spend is \$170.
 Write down an inequality in x and y and show that it simplifies to $x + 2y \leq 34$
- (c) (i) On the grid, draw four lines to show the four inequalities and shade the **unwanted** regions.



- (ii) Calculate the smallest cost when Pablo buys a total of 20 trees.

4) Peter wants to plant x plum trees and y apple trees. He wants at least 3 plum trees and at least 2 apple trees.

(a) Write down one inequality in x and one inequality in y to represent these conditions.

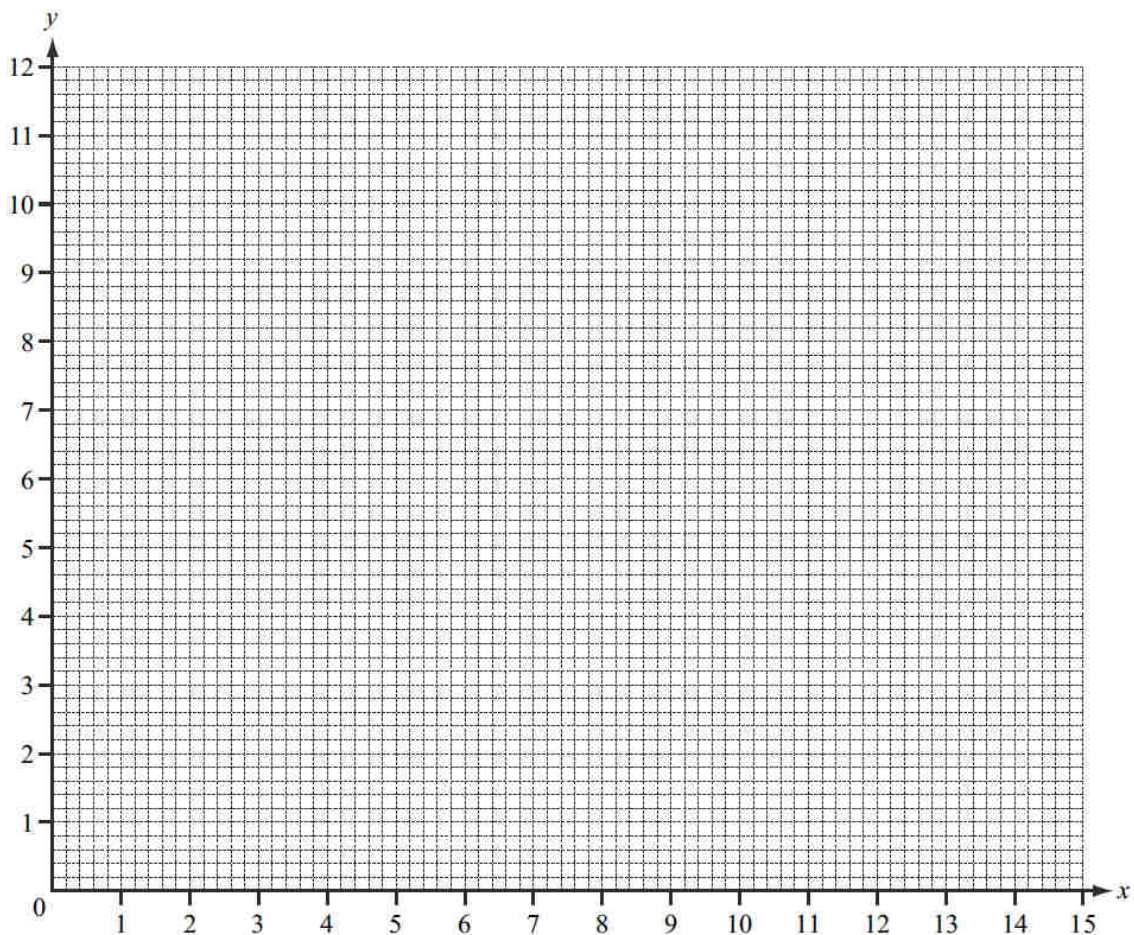
(b) There is space on his land for no more than 9 trees.

Write down one inequality in x and y to represent this condition.

(c) Plum trees cost \$6 and apple trees cost \$14.

Peter wants to spend no more than \$84.

Write down an inequality in x and y , and show that it simplifies to $3x + 7y \leq 42$.



(d) On the grid, draw four lines to show the four inequalities and shade the **unwanted** regions.

(e) Calculate the smallest cost when Peter buys a total of 9 trees.

5) By shading the unwanted region, show the region defined by the inequalities:

$$x \geq 2 \quad y > 1 \quad x + y < 6$$

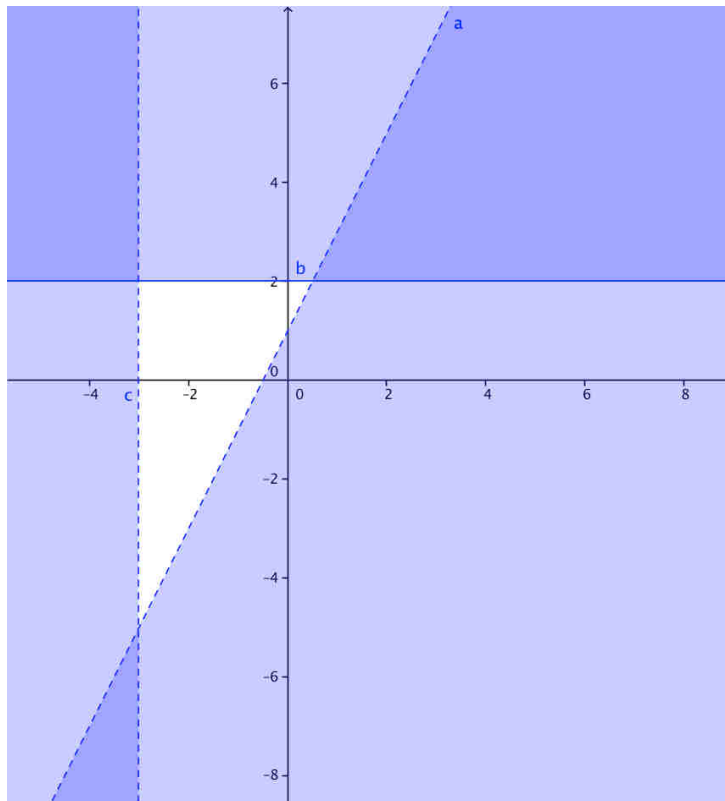
- 6) By shading the unwanted region, show the region defined by the inequalities

$$x \leq 4 \quad y < 2x + 1 \quad 5x + 2y > 20$$

- 7) By shading the unwanted region, show the region defined by the inequalities

$$x \geq 1 \quad y \leq -x + 8 \quad y \geq x + 2 \quad y \geq 4$$

- 8) Write down the inequalities, which define the unshaded region shown below:



- 9) Tiago does some work during the school holidays. In one week he spends x hours cleaning cars and y hours repairing cycles. The time he spends repairing cycles is at least equal to the time he spends cleaning cars. This can be written as $y \geq x$. He spends no more than 12 hours working. He spends at least 4 hours cleaning cars.
- (a) Write down two more inequalities in x and/or y to show this information.
 - (b) Draw x and y -axes from 0 to 12, using a scale of 1cm to represent 1 unit on each axis.
 - (c) Draw three lines to show the three inequalities. Shade the unwanted regions.
 - (d) Tiago receives \$3 each hour for cleaning cars and \$1.50 each hour for repairing cycles.
 - (i) What is the least amount he could receive?
 - (ii) What is the largest amount he could receive?