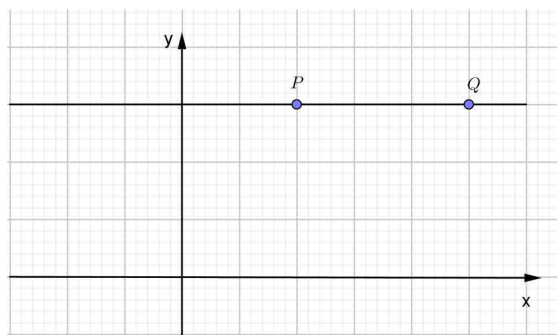


# La retta nel piano cartesiano

## Rette parallele agli assi cartesiani

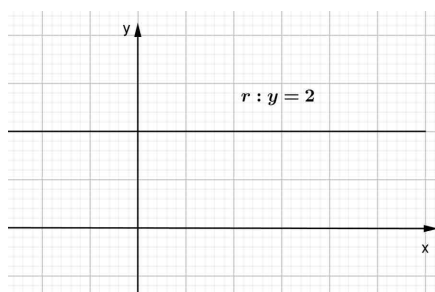
Consideriamo la retta  $r$  in figura: i punti della retta hanno sempre ordinata uguale a 3.



$P(2;3)$   
 $Q(5;3)$   
 ecc.

Scrivendo  $y = 3$  indichiamo tutti i punti che hanno ordinata uguale a 3, cioè tutti e soli i punti della retta  $r$ . Diciamo allora che  $y = 3$  è l'equazione della retta  $r$  (o associata alla retta o che descrive la retta)

Quindi se diciamo di considerare la retta di equazione  $y = 2$  disegneremo la retta in figura.

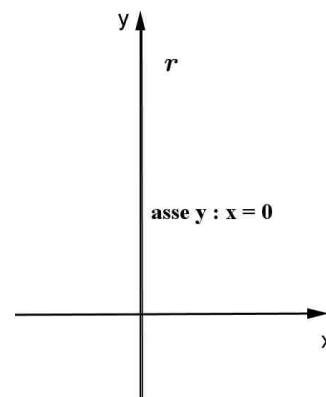
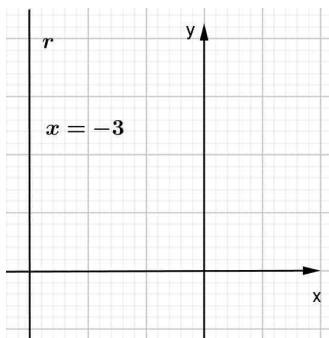
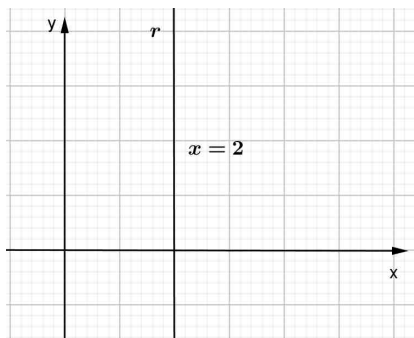


**Osservazione:** l'asse  $x$  avrà equazione  $y = 0$

In generale quindi una retta parallela all'asse  $x$  avrà equazione  $y = k$  ( $k$  numero reale)

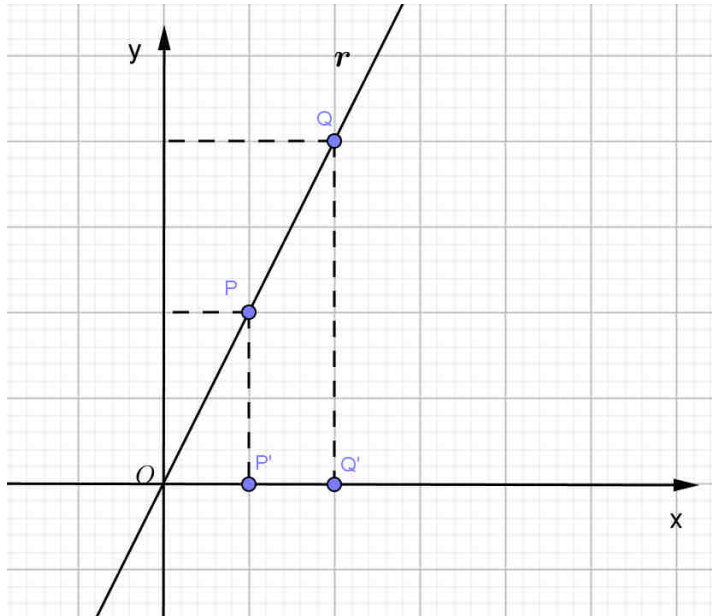
Analogamente una retta parallela all'asse  $y$  avrà tutti i punti con la stessa ascissa e quindi avrà un'equazione del tipo  $x = k$  ( $k$  numero reale).

Per esempio in figura abbiamo  $x = 2$ ,  $x = -3$ ,  $x = 0$  (asse  $y$ ).



## Retta passante per l'origine

Consideriamo ora la seguente retta  $r$  passante per l'origine  $O$  del sistema di riferimento.



Osserviamo che (per la similitudine dei triangoli  $OP'P$ ,  $OQ'Q$ , ecc) il rapporto tra l'ordinata  $y$  e l'ascissa  $x$  di un qualsiasi punto su  $r$  è sempre 2.

Cioè

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{QQ'}{OQ'} = \dots = \frac{y_p}{x_p} = 2$$

In generale se  $P(x; y) \in r$  (cioè se  $P$  appartiene alla retta  $r$ ) si osserva che  $\frac{y}{x} = 2$ .

Ma questa relazione può anche essere scritta

$$y = 2x$$

L'equazione  $y = 2x$  è quindi l'equazione della retta  $r$  (descrive la relazione tra ascissa e ordinata dei suoi punti).

Il coefficiente 2 è chiamato **coefficiente angolare della retta** (o inclinazione o pendenza) e in generale indicato con **m**.

Quindi in generale una retta passante per l'origine ha equazione

$$\boxed{y = mx}$$

dove  $m$  è un numero reale ed è detto coefficiente angolare della retta.

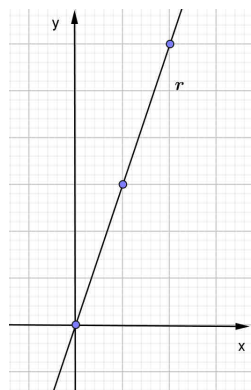
## Esempi

Proviamo a disegnare alcune rette conoscendo la loro equazione.

a)  $y = 3x$

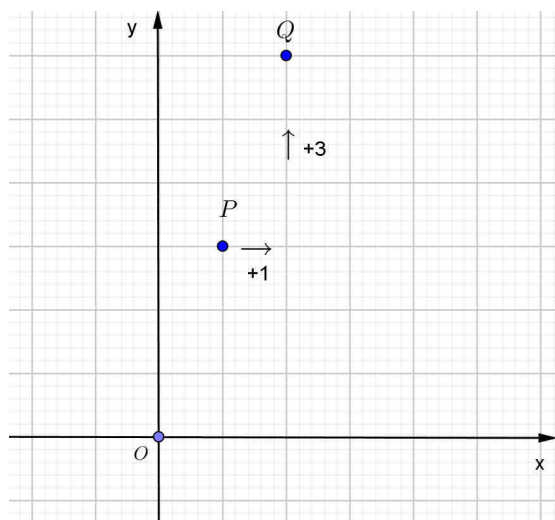
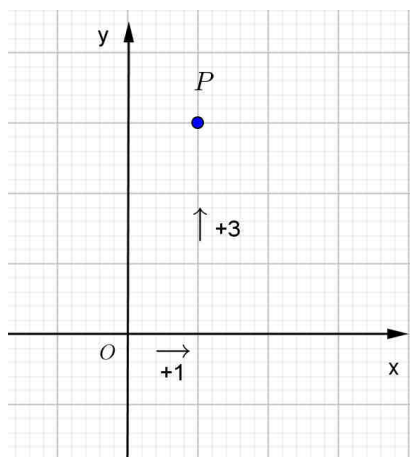
Potremo fare una tabella, assegnando dei valori alla  $x$  e determinando i corrispondenti valori della  $y$ .

$x$	$y$
0	0
1	3
2	6



C'è però un metodo più veloce che utilizza la “quadrettatura” del foglio:

- partiamo dall'origine  $O$  (sappiamo che la retta passa per  $O$ );
- per determinare un altro punto di  $r$  consideriamo il coefficiente angolare  $m$  e ricordiamo che  $m = \frac{y}{x}$ . Nel nostro caso abbiamo  $m = 3$ : possiamo pensare 3 come  $\frac{3}{1}$  e quindi se ci spostiamo orizzontalmente di 1 quadretto ( $x=1$ ) e saliamo in verticale di 3 quadretti ( $y=+3$ ) partendo dall'origine troviamo un punto  $P$  di  $r$ .
- possiamo ripetere il procedimento partendo da  $P$  per trovare un altro punto  $Q$  e così via (l'inclinazione è sempre la stessa!).



In questo modo, anche senza fare la tabella, individuiamo vari punti e possiamo disegnare la retta.

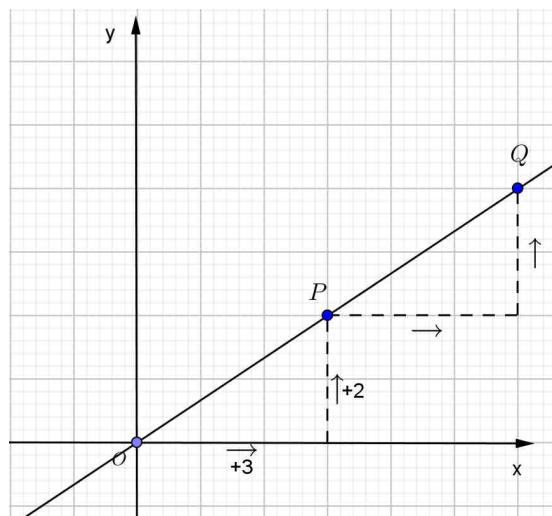
## Retta nel piano cartesiano

b)  $y = \frac{2}{3}x$

In questo caso il coefficiente angolare è  $m = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$

Possiamo disegnare la retta utilizzando la quadrettatura: partendo da O possiamo spostarci orizzontalmente di 3 quadretti e poi salire verticalmente di 2 quadretti.

Ripetendo il procedimento più volte troveremo vari punti senza dover fare calcoli.



**Nota:** attenzione a non confondere lo spostamento “orizzontale” (x) con lo spostamento “verticale” (y).

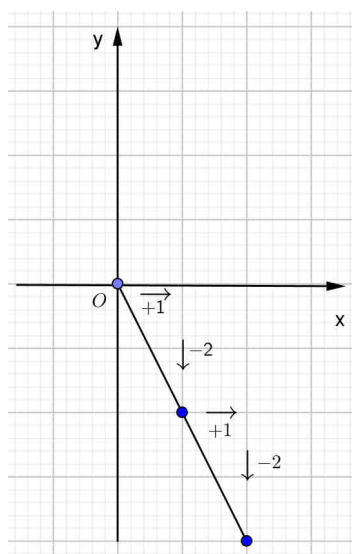
c)  $y = -2x$

Facciamo la tabella

x	y
0	0
1	-2
2	-4
-1	2

E se usiamo il procedimento sul piano quadrettato?

In questo caso  $m = -2 = \frac{-2}{1}$  quindi, partendo da O, ci spostiamo a destra di 1 (x) e **scendiamo verticalmente** di 2 poiché  $y = -2$ .

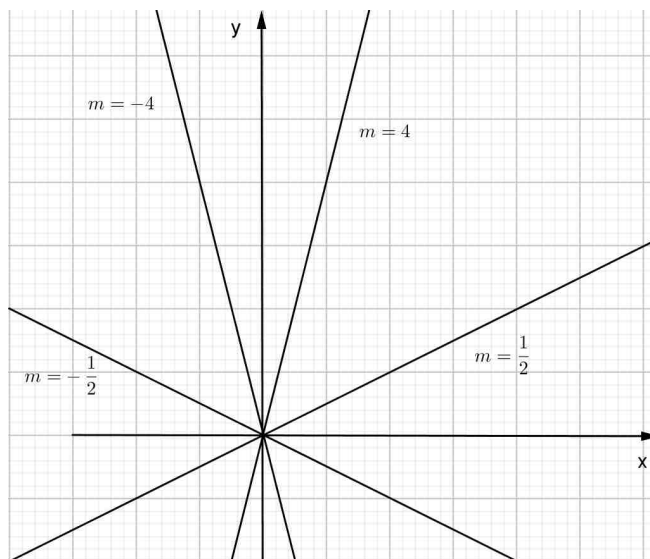


## Osservazioni

1) Per quanto abbiamo visto l'equazione  $y = mx$  rappresenta una retta passante per l'origine  $O$  del sistema di riferimento.

Se  $m > 0$  la retta si trova nel I e III quadrante;

Se  $m < 0$  la retta si trova nel II e IV quadrante.



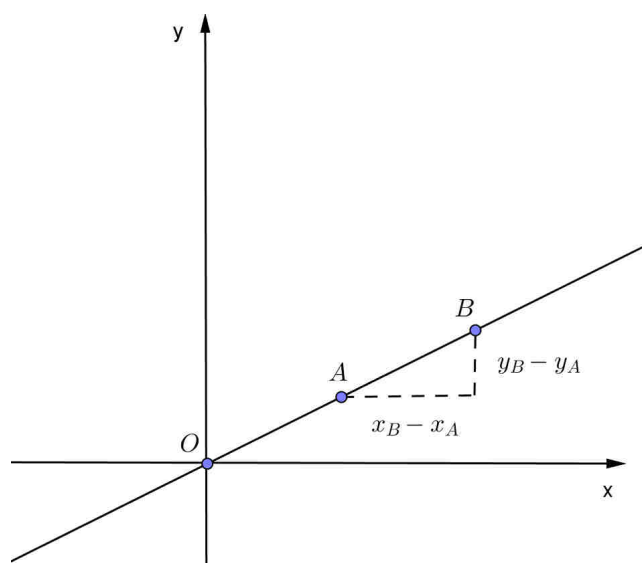
2) Osserviamo infine che l'asse  $y$ , pur essendo una retta per  $O$ , non può essere descritta da un'equazione di questo tipo poiché non possiamo associargli un coefficiente angolare (l'ascissa di tutti i suoi punti è 0 e non possiamo dividere per 0).

3)

Abbiamo visto che il coefficiente angolare  $m$  di una retta per l'origine corrisponde al rapporto  $\frac{y}{x}$  se  $P(x; y) \in r$ .

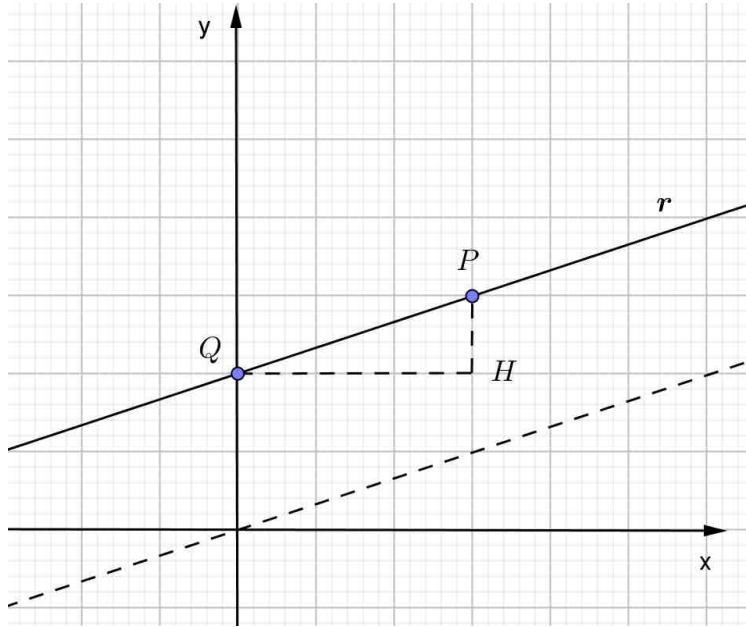
Se consideriamo due punti  $A(x_A; y_A)$  e  $B(x_B; y_B)$  appartenenti a  $r$  osserviamo che si ha:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$



## Retta non parallela agli assi e non passante per l'origine

Consideriamo infine una retta  $r$  non parallela agli assi coordinati e non passante per l'origine come quella in figura. Come possiamo determinare la sua equazione?



Consideriamo il punto in cui la retta interseca l'asse  $y$ :

nel nostro caso  $Q(0;2)$

Ricaviamo il coefficiente angolare considerando il triangolo in figura  $PHQ$  (poiché posso ricavare  $m$  da una coppia qualsiasi di punti di  $r$ ):

$$m = \frac{1}{3}$$

L'equazione della retta non sarà però  $y = \frac{1}{3}x$  perché la retta non

passa per l'origine: se tracciamo  $y = \frac{1}{3}x$  ci accorgiamo che rispetto

ad essa i punti di  $r$  hanno sempre l'ordinata aumentata di 2. e quindi l'equazione di  $r$  risulta:

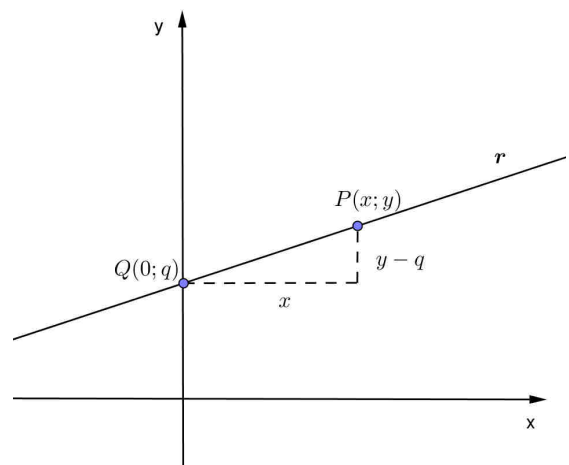
$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

In generale, se indichiamo con  $Q(0;q)$  il punto di intersezione della retta con l'asse  $y$ , considerando un generico punto  $P \in r$  avremo (vedi figura):

$$\frac{y-q}{x} = m \Rightarrow y - q = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + q}$$

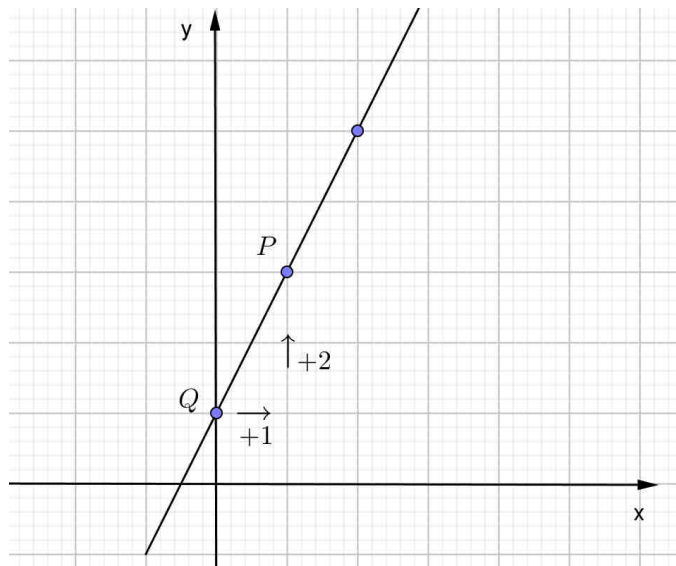
$m$  è il **coefficiente angolare**

$q$  è l'ordinata del punto di intersezione di  $r$  con l'asse  $y$  e viene anche detta “**ordinata all'origine**” perché è l'ordinata del punto di ascissa  $x = 0$ .



## Esempi

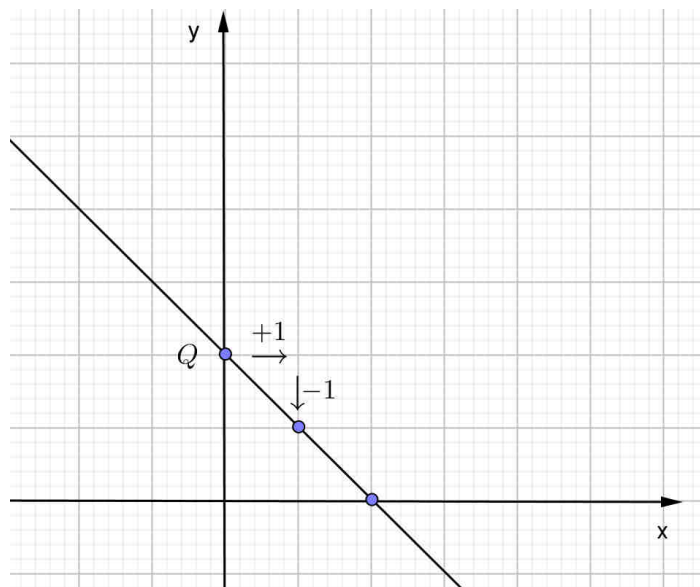
a) Disegniamo la retta di equazione  $y = 2x + 1$  ( $m=2$ ;  $q=1$ )



Partiamo da  $Q(0;1)$ : spostiamoci di 1 e saliamo di 2 (poiché  $m = 2 = \frac{2}{1}$ ) e così via.

Naturalmente possiamo trovare anche le coordinate dei punti facendo la “tabella” x,y ma il procedimento sul piano quadrettato è più veloce.

b) Disegniamo la retta di equazione  $y = -x + 2$  ( $m = -1$ ;  $q = 2$ )



## Equazione generale della retta

C'è un'equazione che comprende tutti i casi ?

Se consideriamo l'equazione

$$ax + by + c = 0$$

dove  $a, b, c$  sono coefficienti reali, al variare del valore dei coefficienti abbiamo tutti i casi.

Se  $a = 0$  e  $b \neq 0$  abbiamo rette del tipo  $y = -\frac{c}{b}$  e quindi parallele all'asse  $x$ ;

Se  $a \neq 0$  e  $b = 0$  abbiamo rette del tipo  $x = -\frac{c}{a}$  cioè rette parallele all'asse  $y$ ;

Se  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  ma  $c = 0$  abbiamo  $y = -\frac{a}{b}x$  cioè rette passanti per  $O$  (diverse dall'asse  $x$ )

Se  $a \neq 0, b \neq 0$  e  $c \neq 0$  abbiamo

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

e quindi rette non passanti per l'origine e non parallele agli assi.

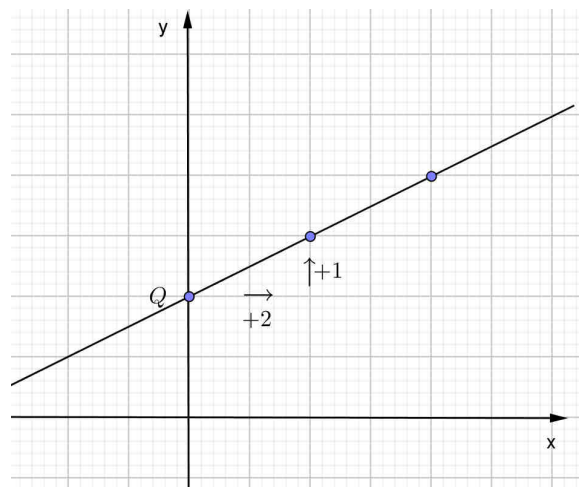
### Esempio

Disegna la retta di equazione  $x - 2y + 4 = 0$

Ricaviamo la  $y$ :

$$2y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

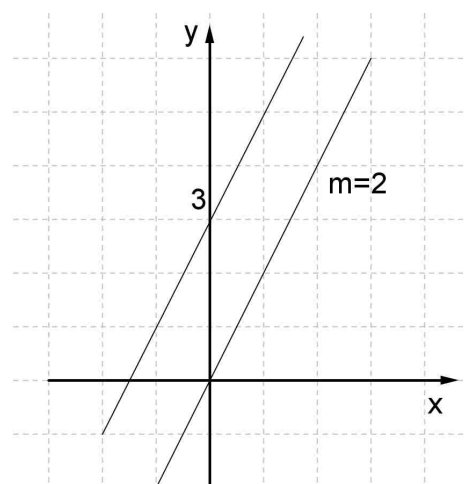
e quindi  $m = \frac{1}{2}$  e  $q = 2$ .



### Rette parallele

Per quello che abbiamo detto è chiaro che due rette, non parallele all'asse  $y$ , sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

Vediamo in figura le rette di equazione  $y = 2x$  e  $y = 2x + 3$ .



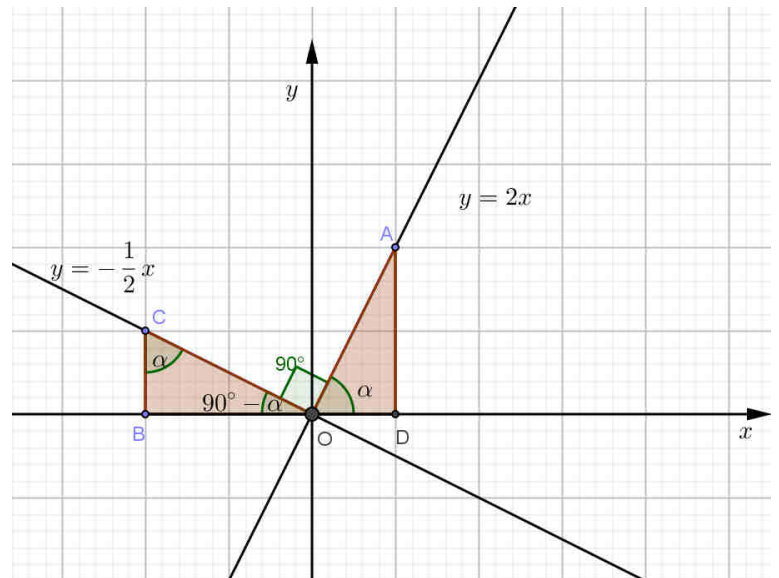


## Rette perpendicolari

Consideriamo la retta  $y = 2x$  e su di essa il punto  $A(1,2)$ : disegniamo il triangolo rettangolo  $ODA$  avente cateti  $\overline{OD} = 1$ ,  $\overline{AD} = 2$ .

Se disegniamo il triangolo rettangolo  $OBC$  come in figura con cateti  $\overline{OB} = 2$ ,  $\overline{BC} = 1$ , avremo che i due triangoli sono congruenti e quindi l'angolo  $\hat{AOD} \cong \hat{BCO} = \alpha$ .

Ma allora, poiché gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari, avremo che  $\hat{BOC} = 90^\circ - \alpha$  e in conclusione l'angolo  $\hat{AOC} = 90^\circ$  poiché gli angoli  $\hat{BOC}$ ,  $\hat{AOC}$ ,  $\hat{AOD}$  sono supplementari.



Quindi la retta passante per O e C, che ha inclinazione  $-\frac{1}{2}$  ed equazione  $y = -\frac{1}{2}x$ , risulta perpendicolare alla retta  $y = 2x$ .

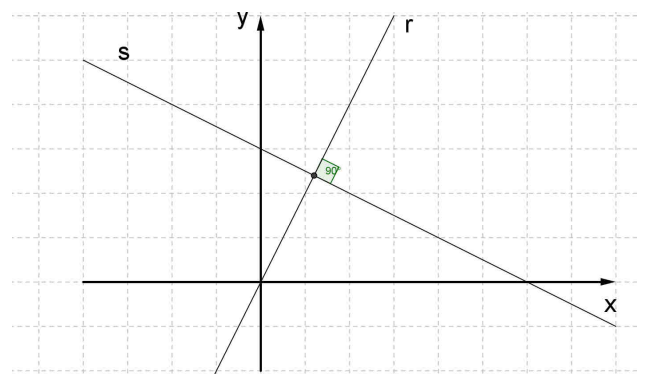
In generale se consideriamo una retta per l'origine  $r$  di equazione  $y = mx$  (per semplicità sia  $m > 0$ ) possiamo quindi dire che la retta perpendicolare per l'origine avrà equazione  $y = -\frac{1}{m}x$  (basta ripetere il ragionamento costruendo i triangoli  $OAD$  e  $OBC$  come nella figura precedente cioè  $\overline{OD} = 1$  e  $\overline{AD} = m$ ,  $\overline{BC} = 1$ ,  $\overline{BO} = m$ ).

La relazione che abbiamo trovato tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari passanti per l'origine vale naturalmente anche per rette perpendicolari non passanti per l'origine poiché quello che conta è il coefficiente angolare e quindi possiamo dire che la relazione tra i coefficienti angolari  $m$ ,  $m'$  di due rette perpendicolari risulta:

$$m' = -\frac{1}{m}$$

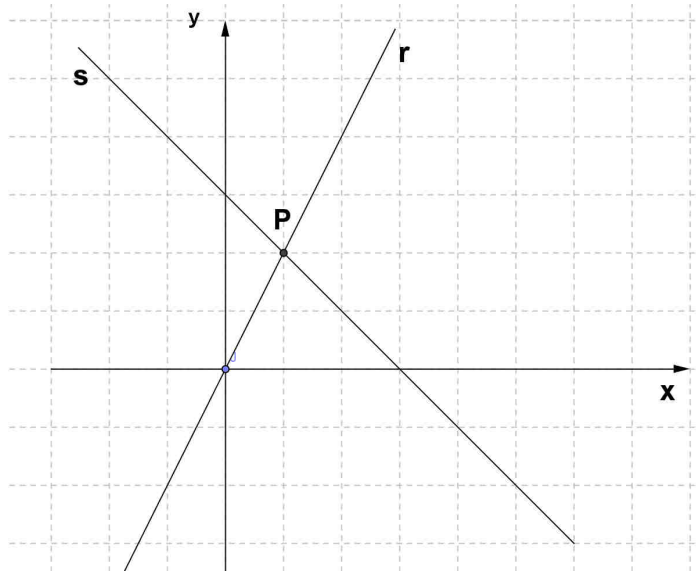
Vediamo per esempio in figura le rette perpendicolari di equazione

$$y = 2x \text{ e } y = -\frac{1}{2}x + 3$$



## Intersezione tra due rette

Supponiamo di avere due rette non parallele, per esempio  $y = 2x$  e  $y = -x + 3$  come in figura e di voler trovare le coordinate del loro punto P di intersezione.



In questo caso le coordinate si possono determinare facilmente anche osservando la figura:  $P(1;2)$ . Ma in generale come possiamo trovarle?

Poiché  $P \in r$  le sue coordinate devono verificare l'equazione di  $r$  e poiché  $P \in s$  le sue coordinate devono verificare l'equazione di  $s$ : quindi le coordinate  $(x; y)$  del punto di intersezione devono verificare entrambe le equazioni cioè sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Infatti risolvendo abbiamo:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

In generale quindi per trovare le coordinate del punto di intersezione di due rette basterà **risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

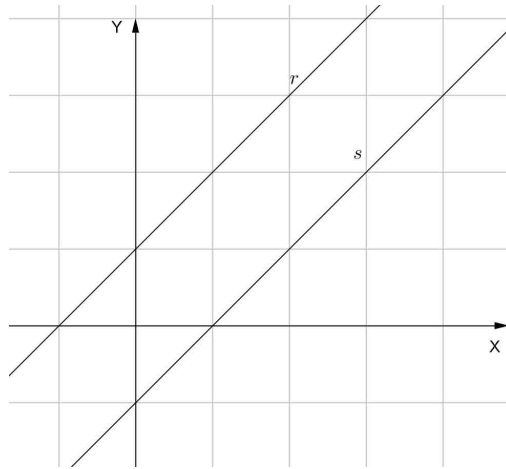
## Retta nel piano cartesiano

Possiamo avere tre casi:

- Se le rette sono **incidenti** come nel nostro esempio abbiamo un punto di intersezione cioè una soluzione  $(x_0; y_0)$  del sistema risulta “*determinato*”;
- Se le rette sono **parallele** allora non c’è nessun punto “comune”, quindi nessuna soluzione del sistema e il sistema risulta “*impossibile*”.

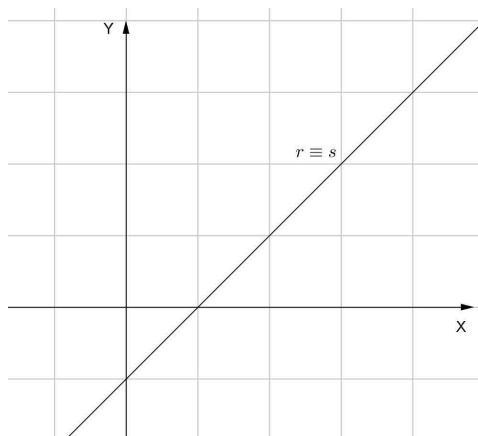
### Esempio

$$\begin{cases} r: x - y + 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y - 1 - y - 1 = 0 \rightarrow -2 = 0 \text{ impossibile} \end{cases}$$



- Se le rette sono coincidenti cioè le equazioni rappresentano la **stessa retta**, i punti sono tutti comuni e il sistema ha infinite soluzioni e risulta “*indeterminato*”.

### Esempio



$$\begin{cases} r: 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Infatti se ricavo  $x = y + 1$  dalla prima equazione e sostituisco nella seconda equazione trovo  $0=0$ .

Tutti i punti della retta sono soluzioni del sistema.

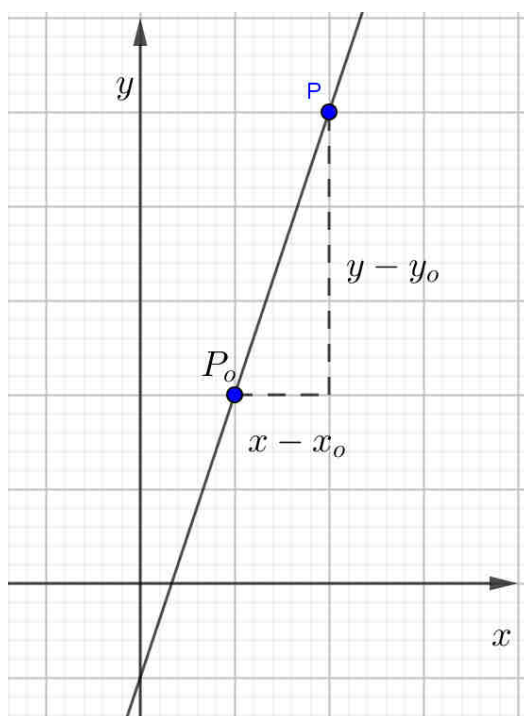
## Equazione di una retta passante per un punto assegnato e avente coefficiente angolare assegnato

Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta passante per  $P_0(1;2)$  e avente coefficiente angolare  $m = 3$ .

Se consideriamo un punto  $P(x; y)$  sulla retta avremo che

$$\frac{y-2}{x-1} = 3 \rightarrow y-2 = 3 \cdot (x-1)$$

Sviluppando abbiamo quindi che l'equazione della retta risulta  $y = 2 + 3x - 3 \rightarrow y = 3x - 1$



In generale se indichiamo con  $(x_o; y_o)$  le coordinate del punto  $P_o$  avremo

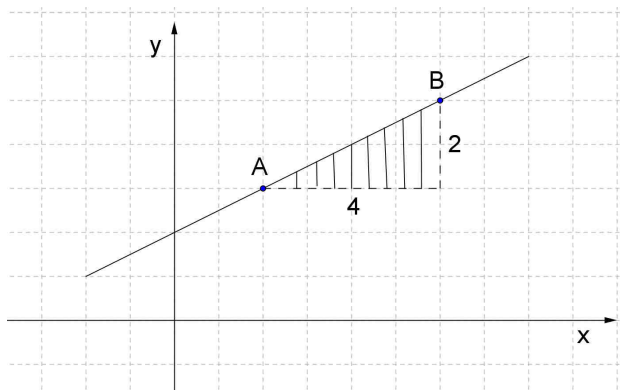
$$\frac{y - y_o}{x - x_o} = m \rightarrow y - y_o = m \cdot (x - x_o)$$

cioè l'equazione della retta passante per  $P_o(x_o; y_o)$  e avente coefficiente angolare  $m$  risulta

$$y - y_o = m \cdot (x - x_o)$$

## Equazione della retta passante per due punti assegnati

Supponiamo di volere trovare l'equazione della retta passante per  $A(2;3)$  e  $B(6;5)$ .



Osserviamo che possiamo ricavare il coefficiente angolare della retta partendo dal triangolo tratteggiato in figura:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e nel nostro esempio quindi abbiamo  $m = \frac{1}{2}$ .

A questo punto possiamo utilizzare l'equazione della retta per A, per esempio, con coefficiente angolare  $m = \frac{1}{2}$  e abbiamo  $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

In generale per determinare l'equazione della retta passante per  $A(x_A; y_A)$  e  $B(x_B; y_B)$  si determina prima il coefficiente angolare e poi si sfrutta l'equazione della retta passante per un punto (possiamo scegliere A o B) con coefficiente angolare dato.

Se per esempio consideriamo il passaggio per A abbiamo:

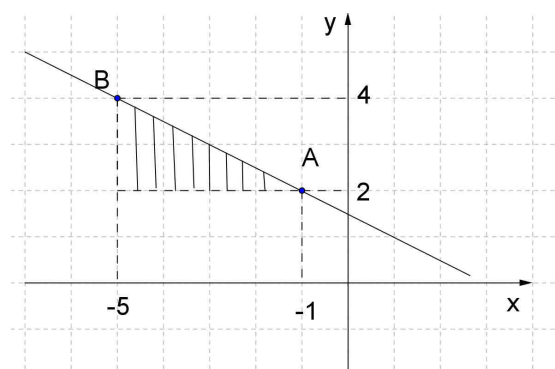
$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

**Nota:** se per ricavare  $m$  ci si affida al piano quadrettato occorre fare attenzione ai coefficienti angolari negativi.

Per esempio le misure dei cateti del triangolo tratteggiato in figura sono ancora 2 e 4 ma in questo caso è chiaro che

$$m = -\frac{1}{2}.$$

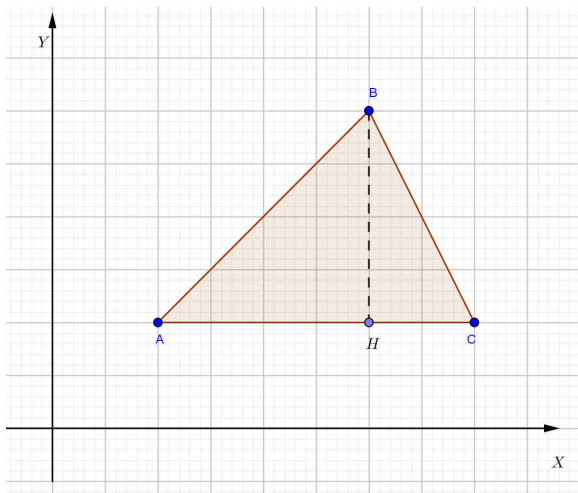
$$\text{Infatti } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{-5 + 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$



## Area di un triangolo

Come possiamo, in generale, determinare l'area di un triangolo ABC conoscendo le coordinate dei vertici?

1) Consideriamo un esempio:  $A(2;2)$   $B(6;6)$   $C(8;2)$ .



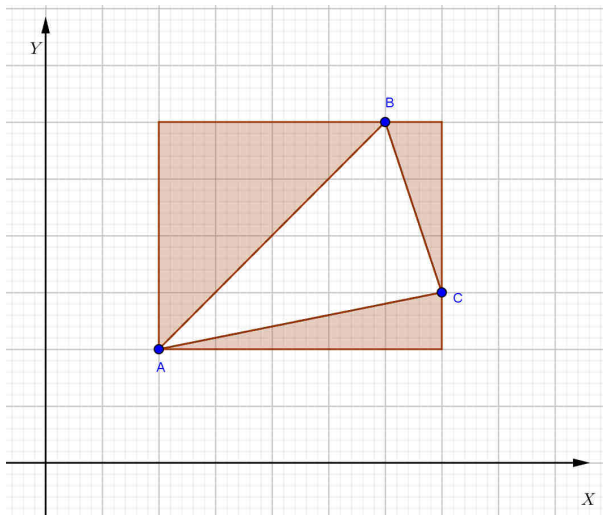
È chiaro che in questo caso conviene considerare AC come base perché l'altezza BH corrisponde alla differenza tra l'ordinata di B e quella di A (o C).

Si ha cioè  $BH = 4$  e quindi

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12$$

Quindi è piuttosto facile determinare l'area di ABC se un lato è parallelo ad uno degli assi.

2) Consideriamo adesso  $A(2;2)$   $B(6;6)$   $C(7;3)$



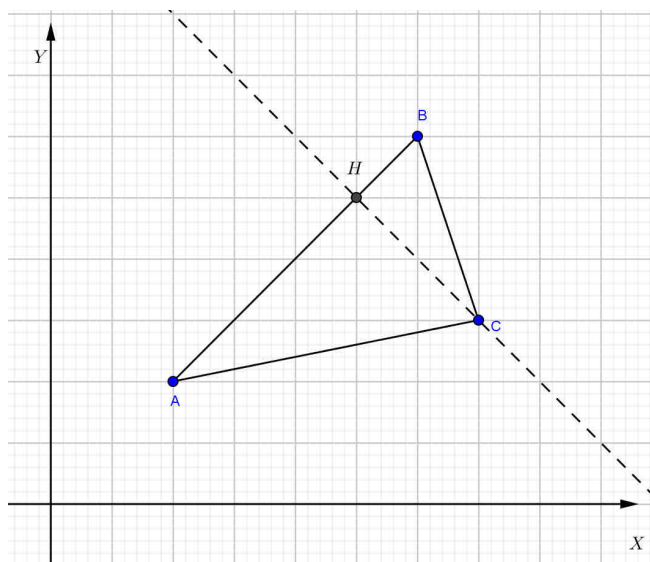
Possiamo in questo caso *inscrivere il triangolo in un rettangolo* (vedi figura) e determinare l'area di ABC sottraendo all'area del rettangolo le aree dei triangoli tratteggiati (facili da calcolare).

$$\text{Abbiamo in questo caso: } \text{area } ABC = \text{area rettangolo} - \left( \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 8 \right) = 20 - 12 = 8$$

**Nota:** potevamo calcolare l'area anche determinando l'**altezza relativa ad una base**.

Proviamo a considerare AB come base: per trovare l'altezza CH (vedi figura) dobbiamo prima determinare le coordinate di H. Per trovare H dobbiamo intersecare la retta per A e B con la retta per C perpendicolare a  $r_{AB}$ .

$$\begin{aligned} r_{AB} : y - 2 &= x - 2 \Rightarrow y = x \\ h_C : y - 3 &= -(x - 7) \Rightarrow y = -x + 10 \\ H : \begin{cases} y = x \\ y = -x + 10 \end{cases} &\Rightarrow x = -x + 10 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$



Quindi  $HC = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$  e in conclusione, essendo  $AB = \sqrt{32}$  ritroviamo

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{256} = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

## PROBLEMI SVOLTI

### RETTA NEL PIANO CARTESIANO

1) Considera i punti  $A(1;1)$ ,  $B(5;3)$ ,  $C(6;-1)$ .

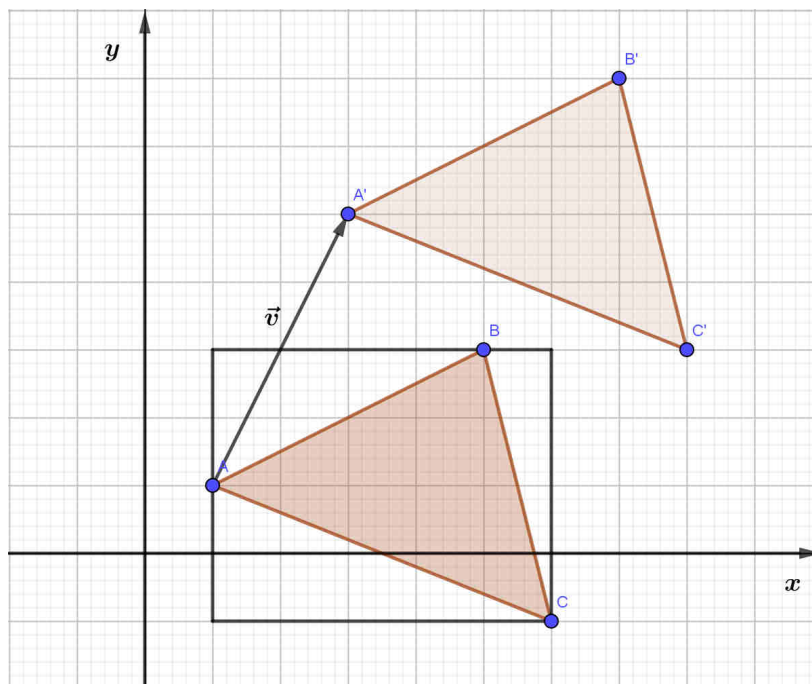
a) Determina le equazioni delle rette passanti per AB, AC, BC.

b) Determina perimetro e area del triangolo ABC.

c) Trasla il triangolo ABC del vettore  $\vec{v}(2;4)$ , disegna il triangolo traslato  $A'B'C'$  indicandone le coordinate.

**Svolgimento**

a)



$$r_{AC}: m_{AC} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \rightarrow y-1 = -\frac{2}{5}(x-1) \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} + 1 \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$$

$$r_{BC}: m_{BC} = \frac{-4}{1} = -4 \rightarrow y-3 = -4(x-5) \rightarrow y = -4x + 20 + 3 \rightarrow y = -4x + 23$$

$$r_{AB}: m_{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow y-1 = \frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$b) \quad \overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}, \quad \overline{BC} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}, \quad \overline{AC} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$2p = \sqrt{20} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$$

$$A = 20 - (5 + 2 + 4) = 9$$

$$c) \quad A'(3;5), \quad B'(7;7), \quad C'(8;3)$$



2)

a) Disegna le rette di equazione  $r_1 : y = -x + 1$  ;  $r_2 : x - 2y + 8 = 0$  ;  $r_3 : x = 2$  e determina le coordinate dei loro punti di intersezione  $A(r_1, r_2)$   $B(r_2, r_3)$   $C(r_1, r_3)$ .

b) Calcola l'area del triangolo  $\triangle ABC$ .

c) Determina le coordinate del punto M, punto medio di AC, e del punto N, punto medio di BC. Scrivi l'equazione della retta passante per M e N e verifica che risulta parallela alla retta AB.

d) Applica al triangolo  $\triangle ABC$  la rotazione di  $90^\circ$  intorno all'origine degli assi, scrivi le coordinate di  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  (punti ruotati di A, B, C) e disegna  $\triangle A'B'C'$ .

### Svolgimento

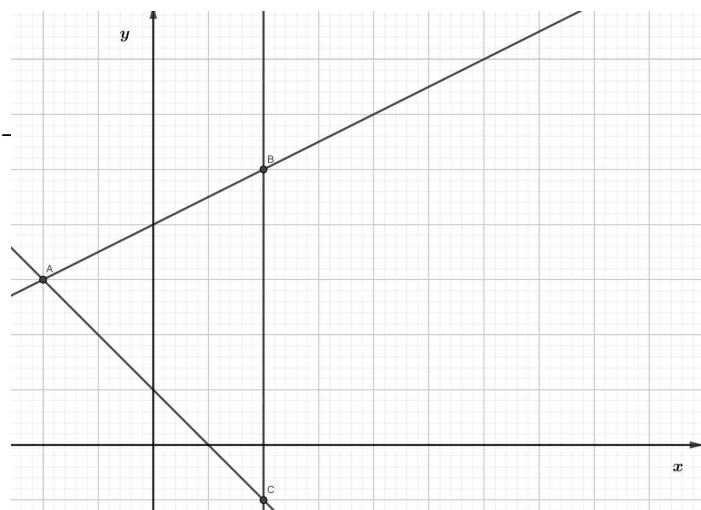
a)

$$r_2 : x - 2y + 8 = 0 \rightarrow 2y = x + 8 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$$

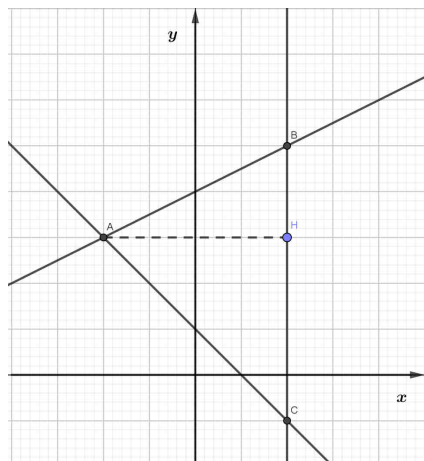
$$A \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 1 = \frac{1}{2}x + 4 \rightarrow \frac{3}{2}x = -3 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \rightarrow y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} y = -x + 1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2 + 1 \rightarrow y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



$$b) A = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

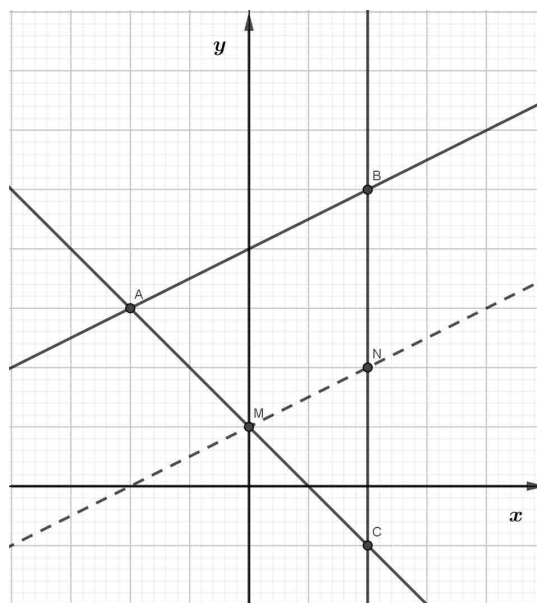


## Retta nel piano cartesiano

$$c) M\left(\frac{-2+2}{2}=0; \frac{3-1}{2}=1\right)$$

$$N(2;2)$$

$$r_{MN} : m = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$



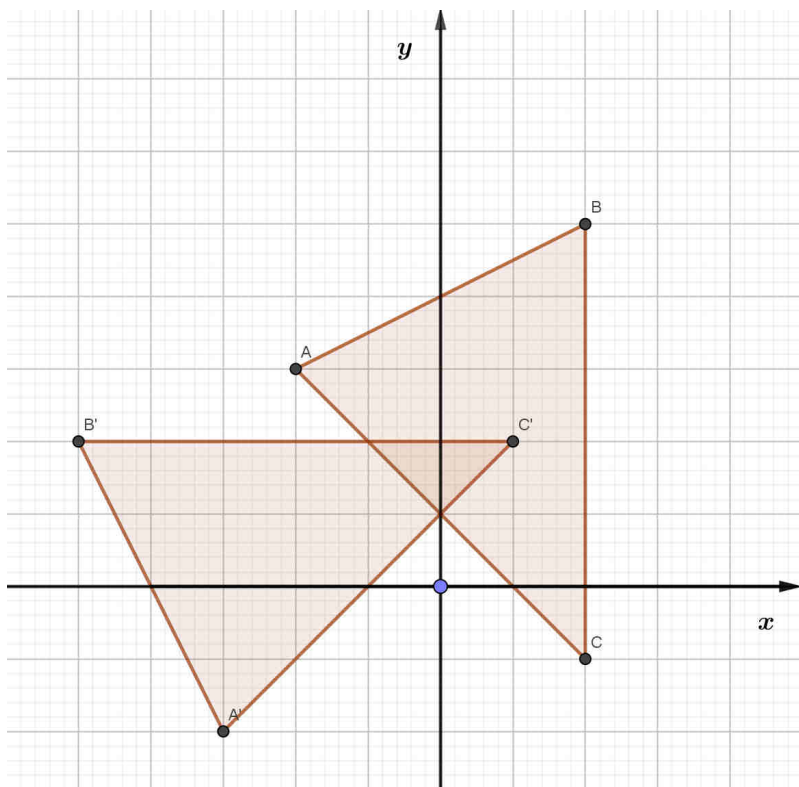
La retta per M e N ha lo stesso coefficiente angolare della retta per A e B e quindi sono parallele.

d) Per ruotare il triangolo ABC intorno all'origine di  $90^\circ$  ricordiamo che  $(x; y) \rightarrow (-y; x)$  e quindi avremo che

$$A(-2; 3) \rightarrow A'(-3; -2)$$

$$B(2; 5) \rightarrow B'(-5; 2)$$

$$C(2; -1) \rightarrow C'(1; 2)$$



**PROBLEMI**  
**RETTA NEL PIANO CARTESIANO**

1) Disegna le seguenti rette:

a)  $x = 5$ ;  $y = -3$

b)  $y = 4x$ ;  $y = -4x$

c)  $y = \frac{1}{2}x$ ;  $y = -\frac{1}{2}x$

d)  $y = \frac{3}{5}x$ ;  $y = -\frac{3}{5}x$

e)  $y = \frac{5}{4}x$ ;  $y = -\frac{4}{5}x$

2) Disegna le seguenti rette:

a)  $y = x + 4$  ;  $y = -2x - 3$  ;  $y = -\frac{1}{2}x + 2$

b)  $y = 3x - 1$  ;  $y = \frac{1}{2}x - 2$  ;  $y = -2x + 5$

3) Disegna le rette aventi equazione:

a)  $3x + y = 0$  ;  $x - 2y + 4 = 0$  ;  $5y - 15 = 0$  ;  $4x - 2 = 0$

b)  $2x - 3y + 6 = 0$  ;  $x - y = 0$  ;  $2x + y - 1 = 0$  ;  $3 - x = 0$

4) Determina l'equazione della retta:

a) passante per  $A(2;5)$  e avente  $m = 2$

b) passante per  $A(1;0)$  e parallela alla retta di equazione  $y = x$

c) passante per  $P(-1;3)$  e perpendicolare alla retta di equazione  $x - 2y - 2 = 0$

d) passante per  $P(0;-2)$  e parallela alla retta di equazione  $3x - y = 0$

5) Determina la retta passante per il punto  $A(2;3)$  e avente coefficiente angolare  $m = -1$ .  
Disegnala.

[  $y = -x + 5$  ]

## Retta nel piano cartesiano

- 6) Determina l'equazione della retta passante per  $P(3;0)$  e parallela alla retta  $y = \frac{1}{2}x + 3$ .  
Disegna le due rette.

$$[ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} ]$$

- 7) Determina l'equazione della retta passante per  $P(-2;1)$  e perpendicolare alla retta  $y = -3x + 1$ . Disegna.

$$[ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} ]$$

- 8) Determina l'equazione della retta passante per i punti  $A(2;-4)$  e  $B(0;1)$  e disegna.

$$[ y = -\frac{5}{2}x + 1 ]$$

- 9) Determina l'equazione della retta passante per i punti  $A(-1;-3)$  e  $B(1;-1)$  e disegna.

$$[ y = x - 2 ]$$

- 10) Disegna le rette  $y = 3x$ ,  $y = 4 - x$  e, dopo aver determinato il loro punto di intersezione A, determina l'equazione della retta passante per A e parallela alla retta di equazione  $x - 2y = 0$ .

$$[ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} ]$$

- 11) Determina l'equazione della retta  $r$  passante per i punti  $A(-1;3)$ ,  $B(2;2)$  e disegna.  
Determina poi l'equazione della retta passante per A e perpendicolare a  $r$ .

$$[ y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}; y = 3x + 6 ]$$

- 12) Dati i punti  $A(-3;3)$ ;  $B(-2;5)$ ;  $C(0;4)$ ;  $D(-1;2)$ , determina le equazioni delle rette passanti per A-B ; B-C ; C-D e D-A e verifica che individuano un quadrato. Disegna.

$$[ y = 2x + 9; y = -\frac{1}{2}x + 4; y = 2x + 4; y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} ]$$

- 13) Trova l'area del triangolo di vertici  $A(-1;2)$   $B(5;5)$   $C(6;1)$ .

$$[ Area = \frac{27}{2} ]$$

- 14) Trova l'area del triangolo di vertici  $A(-2;-1)$ ;  $B(0;3)$ ;  $C(3;0)$ .

$$[ Area = 9 ]$$

- 15) Trova l'area del triangolo di vertici  $A(1;1)$ ;  $B(1;4)$ ;  $C(4;3)$ .

$$[ Area = \frac{9}{2} ]$$

- 16) Considera il triangolo di vertici  $A(-1;2)$ ,  $B(2;5)$ ,  $C(3;0)$ . Determina l'equazione dell'altezza  $h_c$  uscente da C e detto H il suo punto di intersezione con il lato AB, determina l'area del triangolo ABC considerando il lato AB come base.

Confronta il risultato con quello che avresti ottenuto usando il metodo "elementare" di considerare il rettangolo all'interno del quale si trova il triangolo.

$$[ \text{Area}(ABC) = 9 ]$$

- 17) Considera i punti  $A(-2;1)$ ,  $B(1;4)$ ,  $C(3;2)$ . Verifica che i tre assi del triangolo ABC passano tutti per lo stesso punto K e determinane le coordinate.

$$[ K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) ]$$

- 18) Considera i punti  $A(-5;1)$ ,  $B(0;6)$ ,  $C(3;-3)$ . Verifica che le tre altezze del triangolo ABC passano tutte per lo stesso punto H e determinane le coordinate.

$$[ H(-2;2) ]$$

- 19) Considera il triangolo di vertici  $A(0;2)$ ,  $B(4;2)$ ,  $C(2;6)$ : verifica che le mediane del triangolo passano tutte per lo stesso punto G e determinane le coordinate.

$$[ G\left(2; \frac{10}{3}\right) ]$$

- 20) Considera le rette  $r: x + 2y + 5 = 0$ ,  $s: y = 2 - 2x$ ,  $t: x - 2y + 9 = 0$ .

Determina le intersezioni delle rette indicandole con A,B,C.

$$[ A(3;-4), B(-7;1), C(-1;4) ]$$

- 21) Considera il triangolo di vertici  $A(1;1)$   $B(3;3)$   $C(4;0)$ . Verifica che è isoscele.

a) Determinane l'area.

b) Determina l'equazione dell'altezza uscente dal vertice C.

c) Trasla il triangolo del vettore  $\vec{v}(4;0)$  e siano  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  i vertici del triangolo traslato.

d) Ruota il triangolo di  $90^\circ$  intorno all'origine e siano  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  i vertici del triangolo ruotato.

$$[ A = 4; y = -x + 4; A'(5;1), B'(7;3), C'(8;0); A''(-1;1), B''(-3;3), C''(0;4) ]$$

22) Trova l'area del triangolo di vertici  $A(1;-1)$ ;  $B(5;-1)$ ;  $C(2;-3)$ . [ Area = 4 ]

23) Trova l'area del triangolo di vertici  $A(1;2)$ ;  $B(3;4)$ ;  $C(4;1)$  determinando l'altezza relativa ad AB. [ Area = 4 ]

24) Considera i punti  $A(2;2)$   $B(6;4)$   $C(4;8)$  e determina le equazioni delle rette che individuano il triangolo ABC. Verifica che si tratta di un triangolo rettangolo e calcolane l'area.

$$[ y = \frac{1}{2}x + 1, \quad y = -2x + 16, \quad y = 3x - 4, \quad A = 10 ]$$

25) Considera il punto  $A(2;2)$ . Scrivi l'equazione della retta  $r$  passante per O (origine) e A, l'equazione della retta  $s$  perpendicolare a  $r$  e passante per A e indicato con B il suo punto di intersezione con l'asse y, determina l'area del triangolo OAB.

$$[ y = x, \quad y = -x + 4, \quad A = 4 ]$$

26) Considera i punti  $A(-2;0)$ ,  $B(4;2)$ ,  $D(0;3)$ . Scrivi l'equazione della retta passante per A e B e determina le coordinate del punto C tale che ABCD sia un parallelogramma.

$$[ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad C_1(6;5), \quad C_2(-6;1) ]$$

27) Considera i punti  $A(-1;0)$ ,  $B(4;0)$ ,  $C(3;2)$ ,  $D(0;2)$ . Determina le equazioni delle rette che delimitano il trapezio ABCD e calcolane l'area.

$$[ y = 0, \quad y = 2, \quad y = -2x + 8, \quad y = 2x + 2, \quad A = 8 ]$$

28) Considera i punti  $A(-2;5)$ ,  $B(1;3)$ ,  $C(7;-1)$ : verifica che sono allineati (appartengono cioè alla stessa retta) e determina l'equazione della retta passante per essi.

$$[ y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3} ]$$

29) Determina l'equazione della retta  $s$  per  $A(2;3)$  parallela alla retta  $r: y = \frac{1}{2}x$ . Indica con B l'intersezione di  $s$  con l'asse y. Tracciata la retta per A parallela all'asse y e detta C la sua intersezione con  $r$ , indica come risulta il quadrilatero ABOC e determinane l'area.

$$[ s: y = \frac{1}{2}x + 2; B(0;2); C(2;1) ; \text{parallelogramma} ; A = 4 ]$$

30) Considera i punti  $A(0;3)$ ,  $B(3;5)$ ,  $C(5;2)$ .

- Determina le equazioni delle rette  $r_{AB}$ ,  $r_{BC}$ ,  $r_{AC}$
- Verificare che ABC è un triangolo rettangolo isoscele
- Determina l'area di ABC.

$$[r_{AB} : y = \frac{2}{3}x + 3; r_{BC} : 3x + 2y - 19 = 0, r_{AC} : y = -\frac{1}{5}x + 3; A = \frac{13}{2}]$$

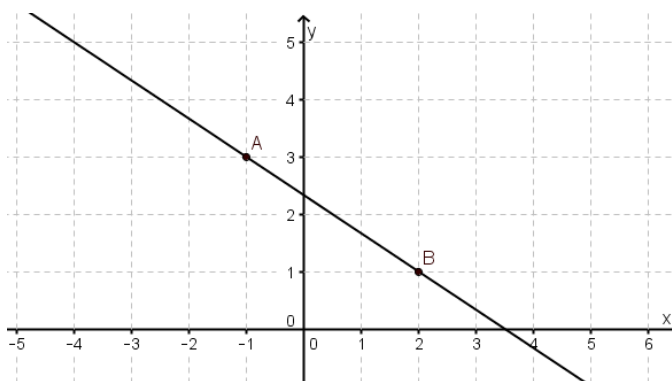
31) (Invalsi 2017/18)

Considera l'equazione  $y = 2x + k$ . Per quale valore di  $k$  essa rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate P (1; 5)?

[3]

32) (Invalsi 2017/18)

Considera la retta passante per i punti A (-1; 3) e B (2; 1). Determina la pendenza (o coefficiente angolare) della retta AB.



$$[-\frac{2}{3}]$$

33) (Invalsi 2014/15)

Nel piano cartesiano  $Oxy$  la retta di equazione  $y = 3x - 5$  e la retta di equazione  $y = \frac{k}{2}x - 1$  sono tra loro parallele. Qual è il valore di  $k$ ?

[6]

34) (Invalsi 2015/16)

Per quale valore di  $m$  l'equazione  $y = mx$  rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate (3;12)?

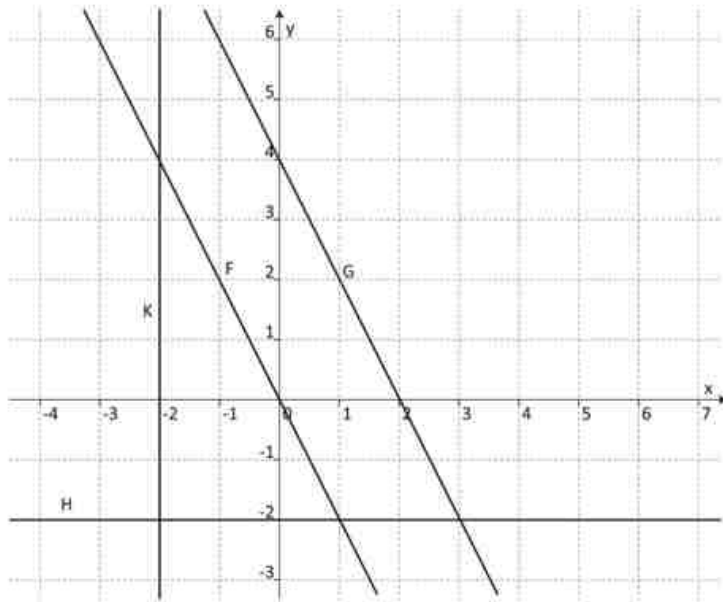
$$[m = 4]$$

## Retta nel piano cartesiano

35) (Invalsi 2017/18)

Sul seguente piano cartesiano sono rappresentate le rette F, G, H, K.

Associa a ciascuna delle equazioni in tabella la retta corrispondente. Metti una crocetta per ogni riga.



	Retta F	Retta G	Retta H	Retta K
a. $y = -2x + 4$				
b. $y = -2x$				
c. $y = -2$				

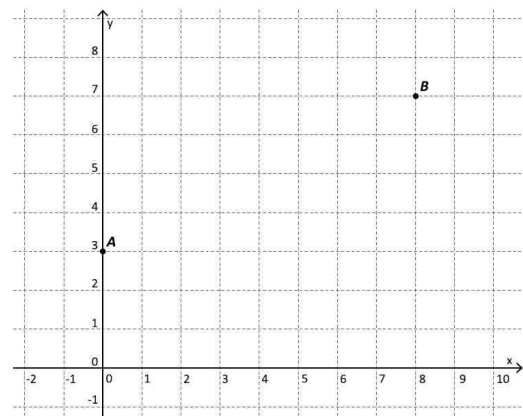
[a --> retta G, b --> retta F, c --> retta H]

36)(Invalsi 2015/16)

Sul piano cartesiano in figura sono assegnati i punti A e B di coordinate intere.

Il coefficiente angolare della retta AB è

.....

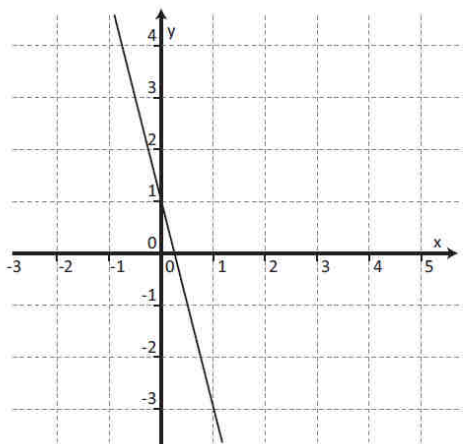




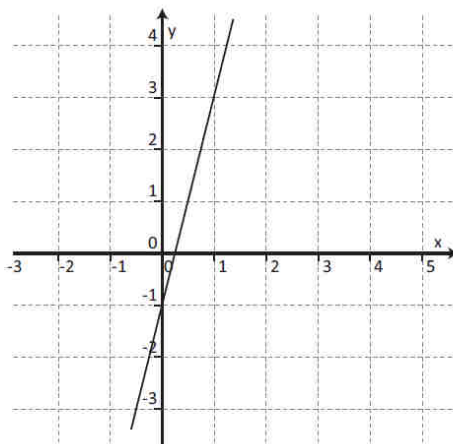
## Retta nel piano cartesiano

37) (Invalsi 2014/15)

Uno dei seguenti grafici rappresenta la retta di equazione  $y = 1 - 4x$ . Quale?



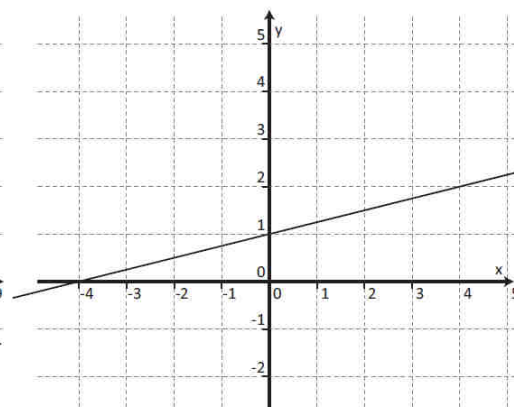
A. ☐



B. ☐



C. ☐

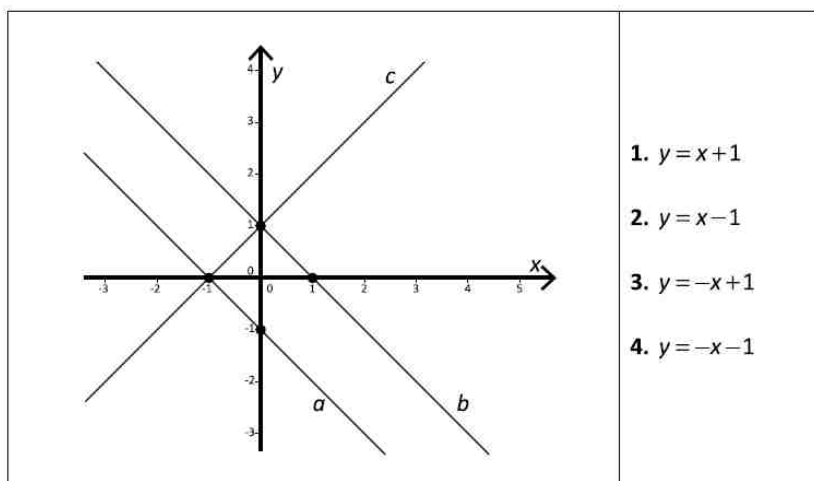


D. ☐

[A]

38) (Invalsi 2015/16)

In figura sono rappresentate le tre rette a, b, e c sono date quattro equazioni.



## Retta nel piano cartesiano

Completa la seguente tabella associando a ogni retta il numero dell'equazione corrispondente.

Retta	Equazione corrispondente
$a$	
$b$	
$c$	

39)(Invalsi 2014/15)

Una sorgente di montagna alimenta continuamente un serbatoio con  $5 \text{ m}^3$  di acqua ogni settimana. Oggi il serbatoio contiene  $100 \text{ m}^3$  di acqua e un villaggio inizia a prelevare  $7 \text{ m}^3$  di acqua alla settimana. Completa la seguente tabella relativa al numero  $n$  di  $\text{m}^3$  di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero  $t$  di settimane a partire da oggi:

$t$	$n \text{ (m}^3\text{)}$
0	100
1	...
2	...
3	...
4	...

- Scrivi un'espressione che rappresenti il numero  $n$  di  $\text{m}^3$  di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero  $t$  di settimane.
- Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?

$$[n = 100 - 2t, \quad 50]$$

40) (Invalsi 2015/16)

Il contratto con l'Internet provider di Carlo prevede, ogni mese, un costo fisso  $F$  e un costo variabile, proporzionale al tempo  $t$  di connessione espresso in ore. Il costo in euro per ogni ora di connessione viene indicato con  $k$ . Quale formula esprime il costo  $C$  che Carlo deve sostenere, ogni mese, in funzione delle ore di connessione?

$$[C = F + kt]$$

Nel mese di gennaio Carlo si è connesso per 185 ore e nel mese di febbraio il tempo di connessione è cresciuto del 60% rispetto a gennaio.

Come si esprime il costo che Carlo deve sostenere nel mese di febbraio?

$$[C = F + k \cdot 1,6 \cdot 185]$$

## Retta nel piano cartesiano

41)(Invalsi 2017/18)

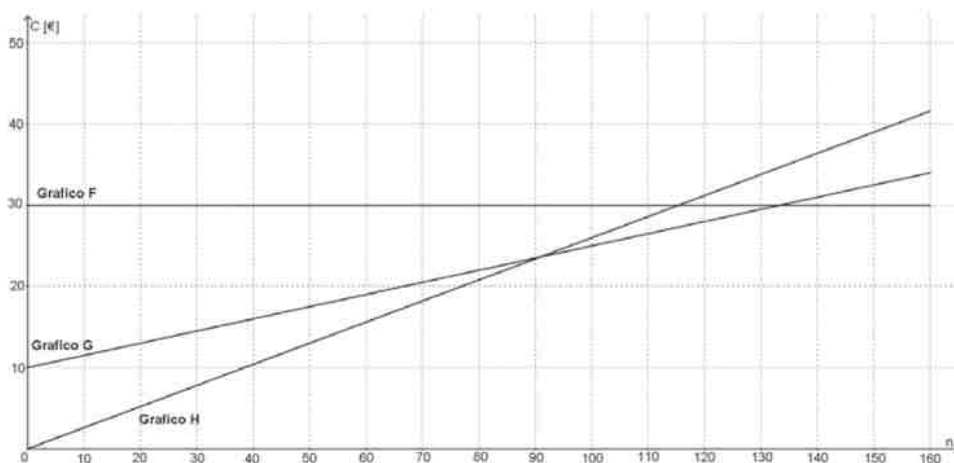
Nel 2008 un gestore telefonico aveva proposto a Marcella tre possibili tariffe mensili per le telefonate nazionali da telefono fisso:

Tariffa 1: telefonate a 26 centesimi di euro l'una.

Tariffa 2: 30 euro con chiamate illimitate senza ulteriore spesa.

Tariffa 3: 10 euro di spesa fissa più 15 centesimi di euro per ogni telefonata.

In figura sono disegnati i grafici che rappresentano le tre tariffe: in ascissa è riportato il numero  $n$  di telefonate e in ordinata il costo  $C$  in euro.



a. Inserisci il nome del grafico (F, G o H) che corrisponde a ciascuna tariffa.

[1→H 2→F 3→G]

b. Le seguenti formule esprimono, per le tariffe 1 e 2, il costo  $C$  (in euro) in funzione del numero  $n$  di telefonate effettuate: Tariffa 1:  $C = 0,26n$ ; Tariffa 2:  $C = 30$ .

Qual è la formula che esprime la tariffa 3?

[ $C=10+0,15n$ ]

c. Marcella dice che, qualunque sia il numero di telefonate, la tariffa 1 costa sempre meno delle altre due. E' vero?

[no]

42)(Invalsi 2017/18)

Una casa editrice propone all'autore di un libro di scegliere uno tra due diversi tipi di contratto relativi al suo compenso: contratto forfettario con compenso di 50 000 €, indipendentemente dal numero di copie vendute; contratto a partecipazione con compenso di 5000 € a cui si aggiunge il 10 % del prezzo di copertina per ogni copia venduta. Il prezzo di copertina del libro è di 30 €. L'autore sceglie il contratto a partecipazione. Completa la tabella.

Numero di copie vendute	Compenso per l'autore (in euro)
0	
1000	
2000	

[0→5000; 1000→8000; 2000→11000]

Scrivi la formula che esprime il compenso  $C$  (in euro) dell'autore in funzione del numero  $n$  di copie vendute nel caso del **contratto a partecipazione**

[ $C=5000 + 3n$ ]

Qual è il numero di copie che devono essere vendute perché il compenso ottenuto con il contratto a partecipazione sia uguale a quello ottenuto con il contratto forfettario?

[15000 copie]

**SCHEDA DI VERIFICA**  
**ISOMETRIE E RETTA NEL PIANO CARTESIANO**

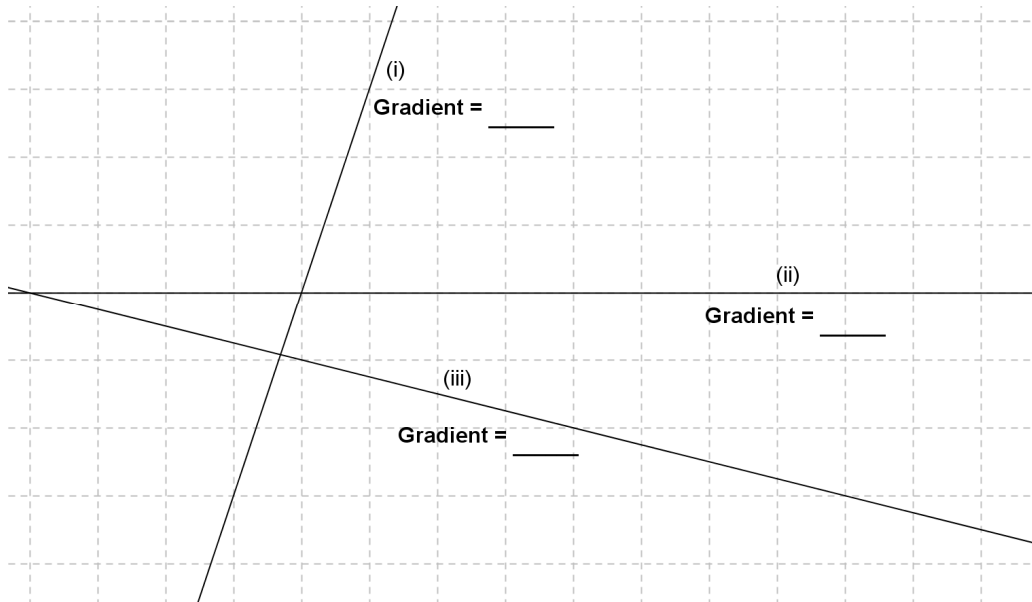
- 1) a) Disegna le rette di equazione  $r_1: y = -x + 1$  ;  $r_2: x - 2y + 8 = 0$  ;  $r_3: x = 2$  e determina le coordinate dei loro punti di intersezione  $A(r_1, r_2)$   $B(r_2, r_3)$   $C(r_1, r_3)$  .
- b) Determina perimetro e area del triangolo  $\triangle ABC$  .
- c) Trasla il triangolo  $\triangle ABC$  applicando la traslazione di vettore  $\vec{v}(5;0)$  : disegna il triangolo  $A'B'C'$  traslato e scrivi le coordinate di A', B', C' .
- 2) Considera il triangolo di vertici  $A(-1;2)$  ,  $B(1;6)$  ,  $C(5;0)$  .
- a) Determina le equazioni delle rette  $r_{AB}$  ,  $r_{BC}$  ,  $r_{AC}$  .
- b) Calcola l'area del triangolo  $\triangle ABC$  .
- c) Determina le coordinate del punto M, punto medio di AC, e del punto N, punto medio di BC e scrivi l'equazione della retta passante per M e N. Verifica che risulta parallela alla retta AB.
- d) Applica al triangolo  $\triangle ABC$  la rotazione di  $90^\circ$  intorno all'origine degli assi, scrivi le coordinate di A', B', C' (punti ruotati di A, B, C ) e disegna  $\triangle A'B'C'$  .
- 3) a) Disegna le rette  $r_1: y = x + 3$  ,  $r_2: 2x + y - 9 = 0$  ,  $r_3: y = x - 3$  ,  $r_4: 2x + y - 3 = 0$  e determina i loro punti di intersezione.
- b) Come risulta il quadrilatero individuato dalle rette? Determinane perimetro e area.

**SCHEMA PER IL RECUPERO**  
**ISOMETRIE E RETTA NEL PIANO CARTESIANO**

- 1) a) Disegna le rette di equazione  $r_1: y = 2$  ;  $r_2: 2x + y - 12 = 0$  ;  $r_3: x - y + 3 = 0$  e determina le coordinate dei loro punti di intersezione  $A(r_1, r_3)$   $B(r_2, r_3)$   $C(r_1, r_2)$ .
- b) Determina perimetro e area del triangolo  $\triangle ABC$ .
- c) Trasla il triangolo  $\triangle ABC$  applicando la traslazione di vettore  $\vec{v}(8;1)$ : disegna il triangolo  $A'B'C'$  traslato e scrivi le coordinate di  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .
- 2) Considera il triangolo di vertici  $A(2;3)$ ,  $B(6;7)$ ,  $C(8;1)$ .
- a) Determina le equazioni delle rette  $r_{AB}$ ,  $r_{BC}$ ,  $r_{AC}$ . Come risulta il triangolo  $ABC$ ?
- b) Calcola l'area del triangolo  $\triangle ABC$ .
- c) Determina l'ortocentro  $H$  del triangolo (interseca due altezze).
- d) Applica al triangolo  $\triangle ABC$  la rotazione di  $90^\circ$  intorno all'origine degli assi, scrivi le coordinate di  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  (punti ruotati di  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) e disegna  $\triangle A'B'C'$ .
- 3) a) Disegna le rette  $r_1: y = \frac{1}{2}x + 3$  ,  $r_2: 2x + y - 3 = 0$  ,  $r_3: x - 2y - 4 = 0$  ,  $r_4: y = -2x + 13$  e determina i loro punti di intersezione.
- b) Come risulta il quadrilatero individuato dalle rette? Determinane perimetro e area.

## TEST IN INGLESE STRAIGHT LINES

1) Find the gradient of the following straight lines.



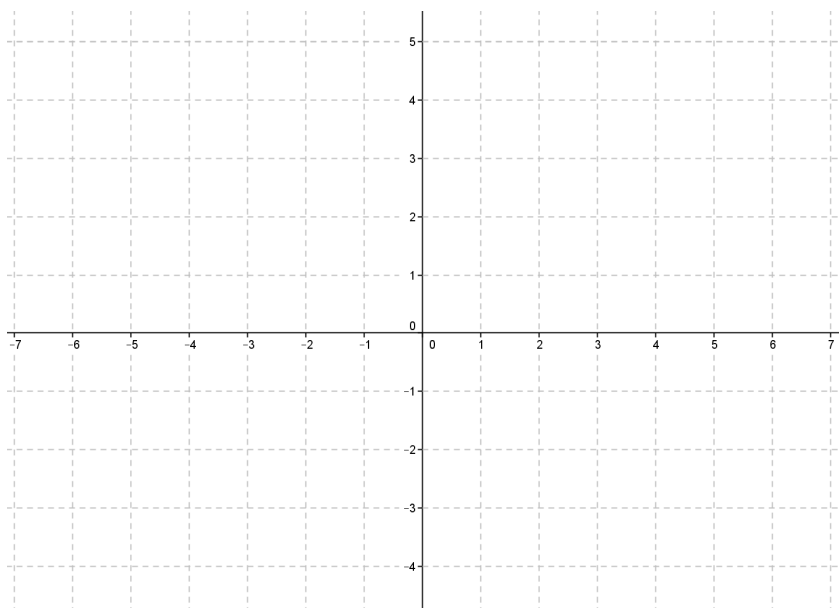
2) Write down the gradient and y-intercept of the following lines. Sketch the lines on the axes below.

a)  $y = 3x - 1$  Gradient: \_\_\_\_\_ y-intercept: \_\_\_\_\_

b)  $y = -2x + 3$  Gradient: \_\_\_\_\_ y-intercept: \_\_\_\_\_

c)  $y = \frac{3}{2}x + 1$  Gradient: \_\_\_\_\_ y-intercept: \_\_\_\_\_

d)  $y = -\frac{x}{2} - 2$  Gradient: \_\_\_\_\_ y-intercept: \_\_\_\_\_



## Retta nel piano cartesiano

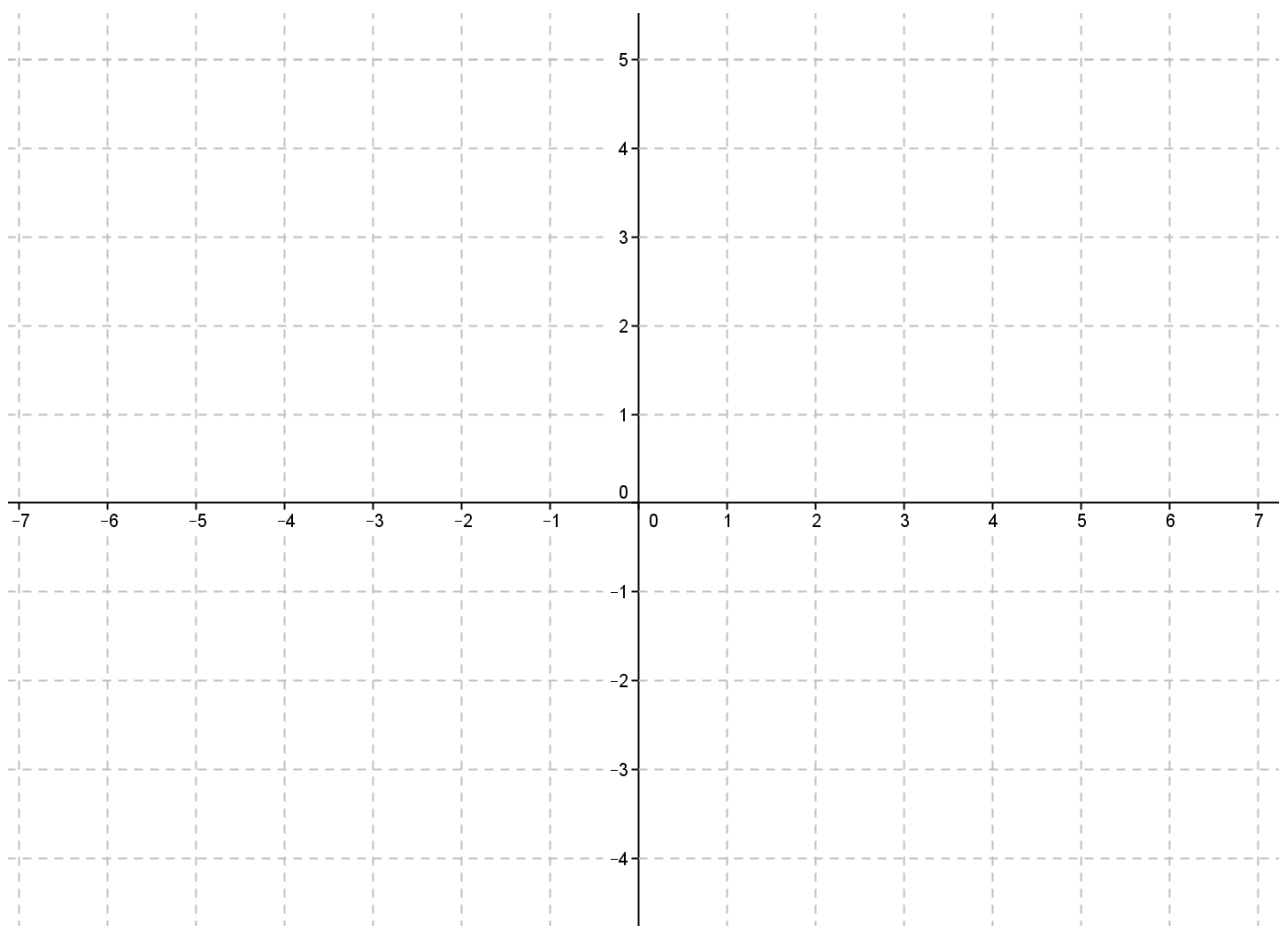
3) For each equation below:

- rearrange the equation so it is in the form  $y = mx + c$

- hence state the gradient and y-intercept

- draw the line on the axes below

- |                             |                 |                    |
|-----------------------------|-----------------|--------------------|
| <b>a)</b> $x + y = 2$       | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |
| <b>b)</b> $3x - y = 2$      | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |
| <b>c)</b> $2x + 4y - 9 = 0$ | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |
| <b>d)</b> $3x - 2y = 8$     | Gradient: _____ | y-intercept: _____ |



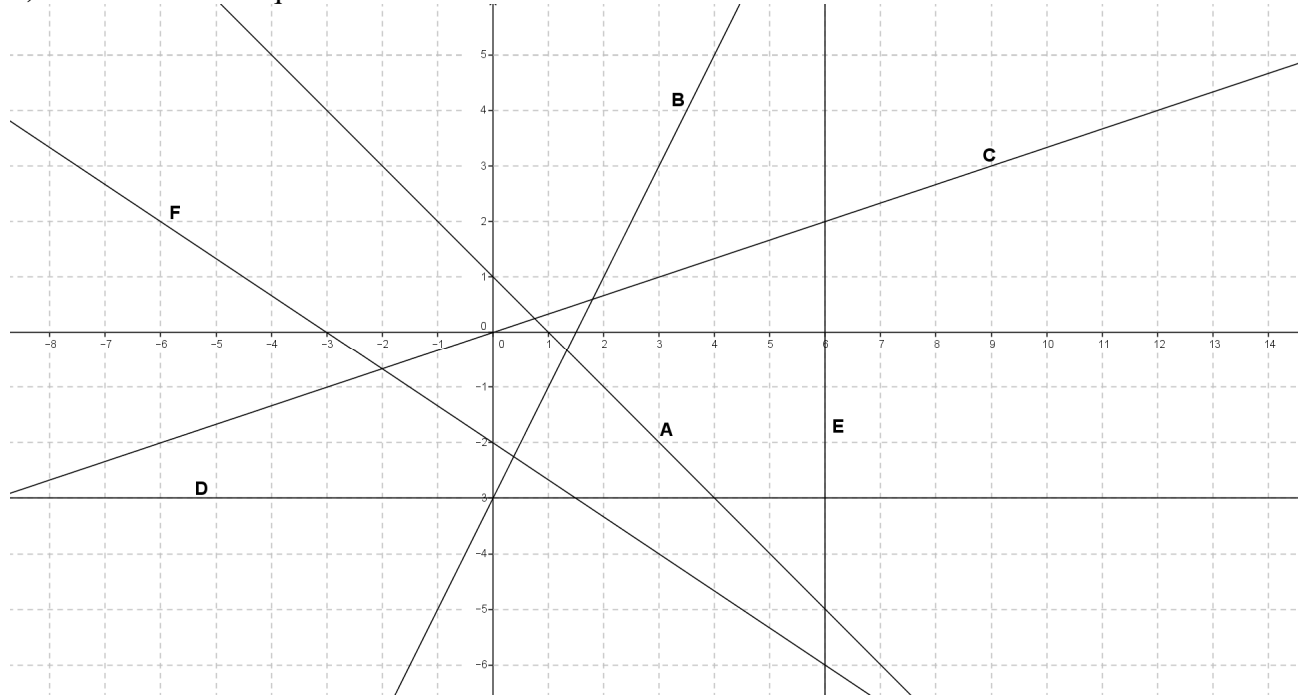
## Retta nel piano cartesiano

4) Rearrange the equations of these lines so they are in the form  $ax + by + c = 0$

a)  $y = -\frac{x}{3} - 2$

b)  $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{3}$

5) Write down the equations of the lines below.



A: \_\_\_\_\_

B: \_\_\_\_\_

C: \_\_\_\_\_

D: \_\_\_\_\_

E: \_\_\_\_\_

F: \_\_\_\_\_

6) Complete the table:

Gradient of line	Gradient of perpendicular
1	
	-4
$-\frac{2}{3}$	
	$\frac{2}{3}$
0.3	



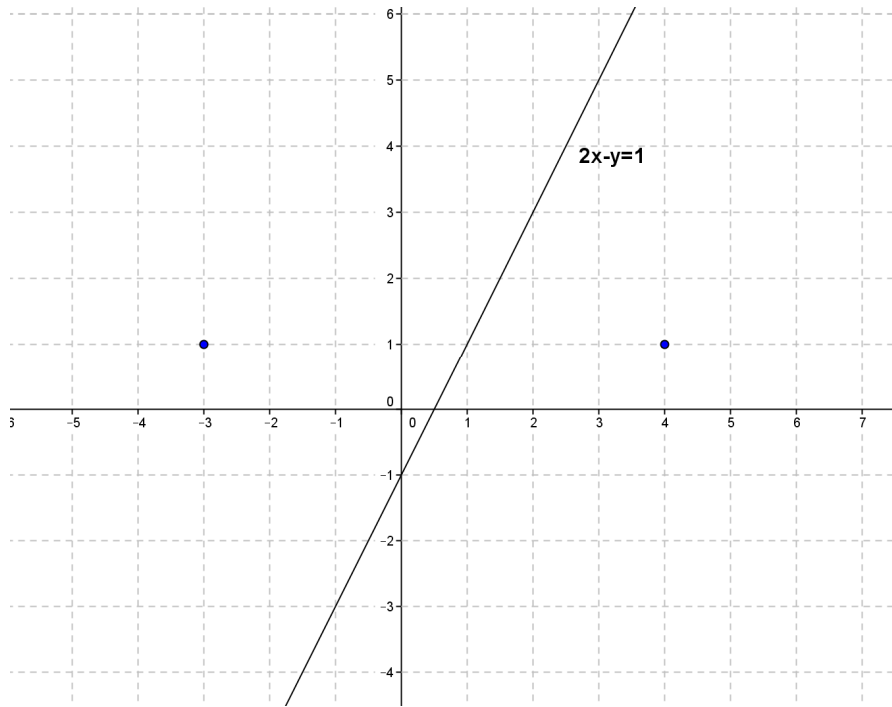
## Retta nel piano cartesiano

7) Find the equation of these lines.

a) parallel to  $2x - y = 1$  going through  $(4,1)$

b) perpendicular to  $2x - y = 1$  going through  $(-3,1)$

c) Draw these two lines on the grid below.

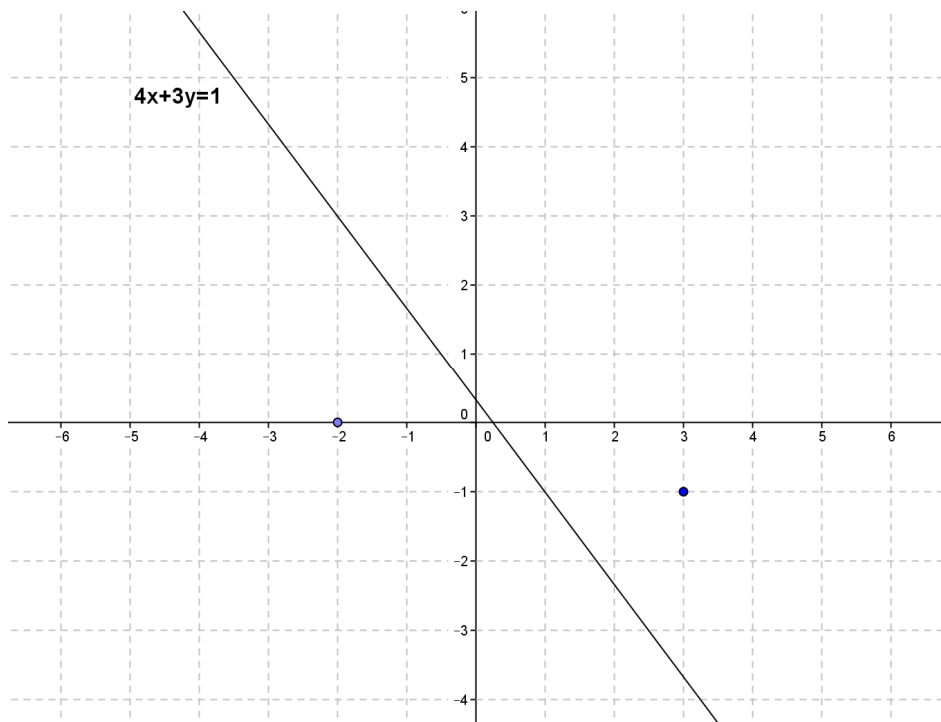


8) Find the equation of these lines. Give your answers in the form  $ax + by + c = 0$  where  $a, b$  and  $c$  are integers.

a) parallel to  $4x + 3y = 1$  going through  $(-2, 0)$

b) perpendicular to  $4x + 3y = 1$  going through  $(3, -1)$

c) Draw these two lines on the grid .



## Retta nel piano cartesiano

9) Point A, B, C have co-ordinates (4,1), (6,-2) and (-1,-9) respectively.

a) Find the co-ordinates of the mid-point AC.

b) Find the equation of the line through B perpendicular to AC. Give your answer in the form  $ax + by + c = 0$ .

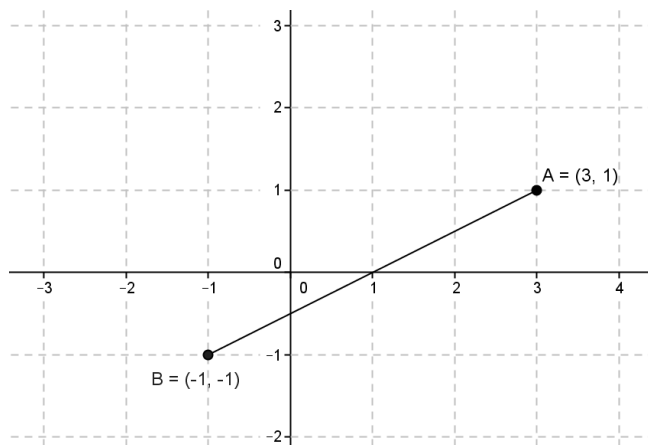
10) Given the coordinates of the end points of these lines, find the length, mid-point and gradient of each line.

a)

Length: \_\_\_\_\_

Mid-point: \_\_\_\_\_

Gradient: \_\_\_\_\_

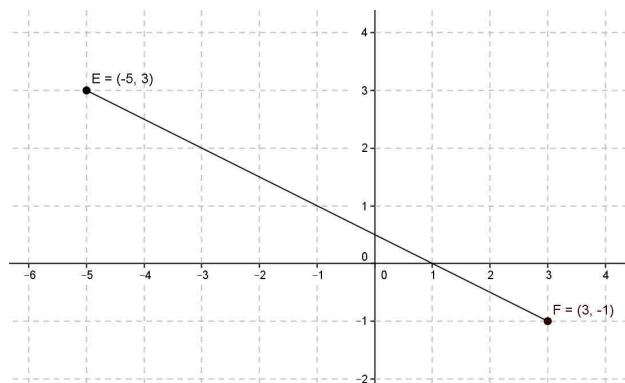


b)

Length: \_\_\_\_\_

Mid-point: \_\_\_\_\_

Gradient: \_\_\_\_\_



11) The mid-point of A(-1,5) and B(m, n) is (2,5). Find the value of m and n.

12) Find the equation of the perpendicular bisector of A(2,4) and B (-6,0).

13) The line  $l_1$  is given by  $x - 3y = 6$ . The point P is (-3,2).

Find the equation of the line perpendicular to  $l_1$  that goes through P.

14) The median of a triangle is the line that joins a vertex to the mid-point of the opposite side. A triangle is formed by the points A(-5,2), B(2,3) and C(4,-5).

Find the equation of the median from the point A.