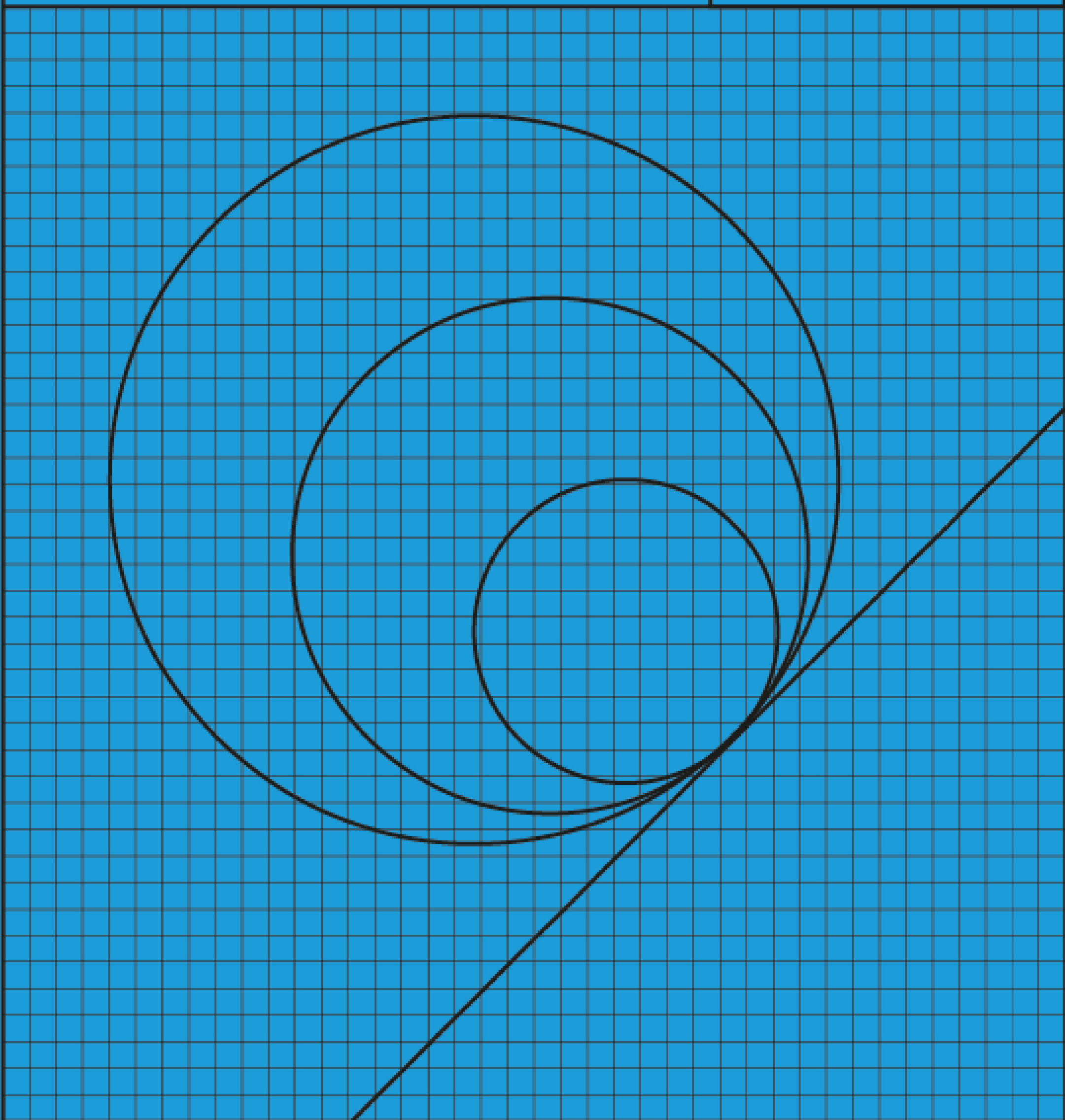
# Appunti di Matematica

## 2

Indirizzo Umanistico

Cecilia Magni



Matematica in Rete

# Prefazione

Gli **“Appunti di Matematica” sono un corso di matematica “open source” per i Licei** , con una versione per l’indirizzo scientifico ed una per l’indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella “parte teorica” del libro di testo, spesso troppo formale e “faticosa” e che non tutti riuscivano a “prendere appunti” durante le spiegazioni.

**La parte teorica** è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e **si integra con la parte applicativa** in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle “tecniche” di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , “schede di lavoro” da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente **non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.**

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica “Geogebra” (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle “*schede*” in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), **possano essere utili ad altri docenti per costruire,** integrandole con materiale personale, **il proprio libro di testo** che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti**, potrebbe essere facilmente aggiornato** e **modificato** ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell’articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl’Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

*Cecilia Magni*

*Progetto Matematica in rete*

Cecilia Magni

# APPUNTI DI MATEMATICA 2

Indirizzo Umanistico

**Editore**: Matematicainrete.it

**Anno di edizione** : 2024

**Formato**: ebook (PDF)



**CODICE ISBN**: 978-88-943828-3-9

**APPUNTI DI MATEMATICA 2**
Indirizzo Umanistico

# Indice

# Sistemi di primo grado

Cominciamo con un problema: *determinare due numeri la cui somma è 10 e la cui differenza è 1.*

Possiamo risolvere questo problema utilizzando due incognite *x, y* per indicare i due numeri cercati.
Avremo quindi che dovrà essere (indicando con $x$ il maggiore):

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=1 \end{cases}$$

La parentesi graffa sta ad indicare che le due equazioni devono essere soddisfatte entrambe e diciamo che abbiamo un "sistema" di due equazioni (che in questo caso risulta di primo grado in due incognite).

Ma come possiamo "risolvere" questo sistema di equazioni cioè **determinare i valori di *x* e di *y* che le soddisfano entrambe** ?

Possiamo ricavare l'incognita $x$ dalla prima equazione e sostituirla nella seconda equazione, poi continuare a sviluppare la seconda equazione (che contiene a questo punto solo l'incognita $y$ ) e ricavare alla fine il valore di y.

$$\begin{cases} x=10-y \\ 10-y-y=1 \quad \to 10-2y=1 \quad \to 2y=9 \to y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

A questo punto non ci rimane che sostituire il valore che abbiamo trovato di $y$ nella prima equazione e determinare anche il valore dell'incognita $x$ :

$$\begin{cases} x=10-\dfrac{9}{2}=\dfrac{11}{2} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

In conclusione i due numeri sono $\dfrac{11}{2}$ , $\dfrac{9}{2}$ .

# Metodi di risoluzione di un sistema di primo grado in due incognite

## Primo passo: riduzione del sistema a "forma normale"

Se abbiamo un sistema di primo grado in due incognite per prima cosa dobbiamo svolgere i calcoli per ricondurlo nella forma cosiddetta "normale"

$$(*) \qquad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

**Esempio**: se abbiamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) + 2(y-1) = -\frac{1}{2}x - 2 \\ 2(x-3) - (y+1) = x - 6 \end{cases}$$

per prima cosa svolgiamo i calcoli per ricondurlo nella forma "normale":

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 + 2y - 2 = -\frac{1}{2}x - 2 \rightarrow x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 6 - y - 1 - x + 6 = 0 \rightarrow x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

A questo punto per risolverlo ci sono diversi metodi: vedremo solo il metodo di "sostituzione" e il metodo del "confronto".

## Metodo di sostituzione

- Come abbiamo fatto nel primo esempio considerato, **ricaviamo una incognita** dalla prima o dalla seconda equazione (in genere da quella in cui l'incognita si ricava più facilmente): ricaviamo per esempio la $x$ dalla prima equazione

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

- Sostituiamo l'espressione trovata per la $x$ nella seconda equazione e, svolgendo i calcoli, determiniamo la $y$

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ -2y + 1 - y - 1 = 0 \Rightarrow -3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

- Torniamo nella prima equazione e sostituiamo a $y$ il valore trovato, determinando così il valore della $x$ e quindi la soluzione del sistema $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

## Metodo del confronto

Consideriamo sempre il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

- **Ricaviamo la stessa incognita da entrambe le equazioni**, per esempio la $x$

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

- Uguagliamo le due espressioni trovate e determiniamo la $y$ ; riscriviamo inoltre una delle due equazioni

$$\begin{cases} -2y + 1 = y + 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

- Sostituiamo il valore trovato per la $y$ nell'altra equazione e troviamo anche la $x$ e quindi la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

## Sistemi determinati, indeterminati, impossibili

*Quante soluzioni può avere un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite ?*

Dal momento che sia utilizzando il metodo di sostituzione che quello del confronto otteniamo ad un certo punto un'equazione di primo grado in una incognita, se questa è "determinata" (ha una soluzione) avremo una sola soluzione del sistema, se è "indeterminata" (verificata per tutti i valori dell'incognita) anche il sistema sarà indeterminato e se infine l'equazione è impossibile (nessuna soluzione) anche il sistema non avrà nessuna soluzione.

**Esempi**

**1)** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y+y=0 \rightarrow 1-y=0 \rightarrow y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2(1)=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi la soluzione $(-1;1)$ e si dice **"determinato**".

**2)** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y+2y=0 \rightarrow 1=0 \quad \textit{equazione} \quad \textit{impossibile} \end{cases}$$

Il sistema non ha nessuna soluzione e si dice "**impossibile**".

**3)** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 2(1-2y)+4y=2 \rightarrow 2-4y+4y=2 \rightarrow 2=2 \quad \textit{equazione} \quad \textit{ind.} \end{cases}$$

Il sistema ha quindi infinite soluzioni cioè tutte le coppie (x;y) per cui si abbia che $x=1-2y$ e si dice **"indeterminato**".

Per esempio:
se fisso $y=0 \rightarrow x=1-2\cdot 0=1$ e quindi la coppia $(1;0)$ è soluzione del sistema;
se fisso $y=1 \rightarrow x=1-2(1)=-1$ e quindi la coppia $(-1;1)$ è un'altra soluzione del sistema e così via…..

# ESERCIZI
## SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO IN DUE INCOGNITE

1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ $[(6,3)]$

2) $\begin{cases} 5x + y = 20 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}$ $[(4,0)]$

3) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$ [ (0;4) ]

4) $\begin{cases} x + 8y = 2 \\ 3x - y = 31 \end{cases}$ [ $(10;-1)$ ]

5) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 5x - y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$ [ $\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$ ]

6) $\begin{cases} 2x + 8y = 16 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ [ $\left(10;-\dfrac{1}{2}\right)$ ]

7) $\begin{cases} 4x + y = -3 \\ 3x - 3y = -1 \end{cases}$ [ $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ ]

8) $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ x - 15y = 0 \end{cases}$ [ $\left(-\dfrac{1}{5};-3\right)$ ]

9) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ [ $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ ]

10) $\begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ x + \dfrac{2}{3}y = 1 \end{cases}$ [ $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{2}\right)$ ]

11) $\begin{cases} 7x - y = -5 \\ 21x + 2y = 0 \end{cases}$ [ $\left(-\dfrac{2}{7};3\right)$ ]

12) $\begin{cases} 2x+3y=-9 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ [ $(0;-3)$ ]

13) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{7},\frac{1}{7}\right)\right]$

14) $\begin{cases} x-6y+5=3-7y+10+2x+2 \\ x+y=6-8 \end{cases}$ $[(-6,4)]$

15) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$ $\left[\left(1,\frac{1}{2}\right)\right]$

16) $\begin{cases} 2x-\frac{1}{3}y=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{13},\frac{6}{13}\right)\right]$

17) $\begin{cases} 4x-y+1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\right]$

18) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)\right]$

19) $\begin{cases} 5(5x-2)=20x-2(y-3) \\ 2(x-5)-12y=21(1-y) \end{cases}$ $[(2,3)]$

20) $\begin{cases} 2x-\frac{1}{5}y=0 \\ x-\frac{1}{10}y=1 \end{cases}$ [ impossibile ]

21) $\begin{cases} x-2=\frac{y}{3}-1+\frac{x}{2} \\ \frac{5x+3y}{6}-3=\frac{2x-y}{4}+\frac{7}{12} \end{cases}$ $[(4,3)]$

22) $\begin{cases} x-\frac{y}{2}=\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{8}y=1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{3},-4\right)\right]$

23) $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ 18x-6y=-1 \end{cases}$ [impossibile]

24) $\begin{cases} y-3x=1 \\ x-\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

25) $\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1)+y-3=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x+1) \end{cases}$ $[(-1,3)]$

26) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ [indeterminato]

27) $\begin{cases} 1-4y-\frac{1}{3}x=0 \\ \frac{2}{3}x+8y=\frac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

28) $\begin{cases} \frac{2}{3}y+\frac{1}{5}x=5 \\ 2x-\frac{5}{6}y+3=8 \end{cases}$ $[(5,6)]$

29) $\begin{cases} \frac{x+2y}{3}+1=\frac{1}{3} \\ 3x+5y=-4 \end{cases}$ $[(2,-2)]$

30) $\begin{cases} \frac{3}{4}x+y=-2 \\ \frac{4}{5}y+x=2-\frac{x}{2} \end{cases}$ $[(4,-5)]$

31) $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+2y=\frac{1}{2} \end{cases}$ [indeterminato]

32) $\begin{cases} \frac{4}{3}x+\frac{1}{2}y=-\frac{15}{4} \\ \frac{y-x}{2}-1=\frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-3,\frac{1}{2}\right)\right]$

33) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)-3y=0 \\ x-\frac{1}{3}(x-y)=1 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{15}{11},\frac{3}{11}\right)\right]$

34) $\begin{cases} \frac{x-y}{2}-1=\frac{x+y}{3} \\ x-y+4=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{13}{2},-\frac{5}{2}\right)\right]$

35) $\begin{cases} 2-\frac{(x-y)}{4}=0 \\ x-\frac{1}{3}y+1=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{11}{2},-\frac{27}{2}\right)\right]$

36) $\begin{cases} (x+2)^2-3x+2y=9+x^2 \\ -5x+3(x-3)+x-y=-6 \end{cases}$ $[(-11,8)]$

37) $\begin{cases} 3x+2(y-4)^2=36+2y^2-15y+2x \\ 3(y-1)+2\left[x-(x-1)^2\right]=-2-2x(x-2) \end{cases}$ $[(3,-1)]$

38) $\begin{cases} (x-2y)^2-(x-y)^2-y(3y-2x)=x+y-2 \\ \frac{2x-y}{3}-\frac{x+2y}{6}-\frac{x-y}{2}=0 \end{cases}$ $[(2,0)]$

39) $\begin{cases} (x+2)^2-1=x^2-5y \\ 4x-1=-y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2},-1\right)\right]$

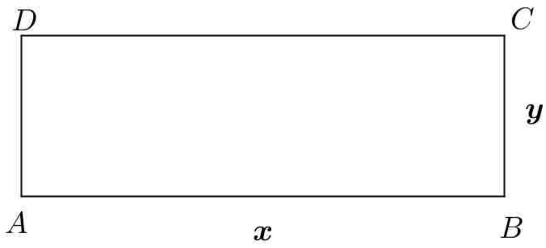
40) $\begin{cases} 3y+24+(y-2)^2+4y=4x+y^2+4 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ $[(3,-4)]$

# PROBLEMI
## SISTEMI DI PRIMO GRADO

**1) Problema svolto**

Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

Indichiamo con $x$ la base e con $y$ l'altezza.




Avremo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y=48 \\ 2y=\frac{2}{3}x \end{cases} \begin{cases} x+y=24 \rightarrow x+\frac{1}{3}x=24 \rightarrow \frac{4}{3}x=24 \rightarrow x=18 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} x=18 \\ y=6 \end{cases}$

2) In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo.

$[25cm, 15cm]$

3) Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo sapendo che la somma di $\frac{1}{2}$ della maggiore e di $\frac{1}{4}$ della minore è 7 cm e che, diminuendo la maggiore di 1cm e aumentando di 1 cm la minore le due diagonali diventano congruenti.

$[10cm, 8cm]$

4) Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo sapendo che il perimetro è 14 cm e che l'altezza supera la base di 1 cm.

$[5cm]$

5) Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio sapendo che l'area è 32 $cm^2$, l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm.

$$[10cm, 6cm]$$

6) In un rombo la somma delle diagonali è 34 cm, i $\frac{3}{4}$ della maggiore superano di 8 cm la minore. Determina il perimetro del rombo.

$$[52cm]$$

7) Calcola l'area di un triangolo sapendo che i $\frac{3}{5}$ dell'altezza sono 27 cm e che il doppio della base supera di 23 cm l'altezza.

$$[765cm^2]$$

8) Il perimetro di un rettangolo è 94 cm e la base supera di 11 cm il doppio dell'altezza. Calcola l'area.

$$[420cm^2]$$

9) Calcola l'area di un trapezio rettangolo sapendo che il lato obliquo è 10 cm, che la base maggiore è il triplo della minore e che la somma delle basi è 16 cm.

$$[48cm^2]$$

10) Determina il perimetro di un trapezio isoscele sapendo che la sua area è 52 $cm^2$, che la base maggiore supera di 6 cm la base minore e che l'altezza è 4 cm.

$$[36cm]$$

11) L'area di un trapezio rettangolo è 72 $cm^2$. La somma delle basi è 24 cm e la loro differenza è 8 cm. Determina il perimetro.

$$[40cm]$$

12) In un trapezio isoscele gli angoli alla base sono di 60° e il perimetro è 35 cm. Sapendo che la base maggiore è $\frac{3}{2}$ della minore, calcola le misure dei lati del trapezio.

$$[10cm, 15cm, 5cm, 5cm]$$

13) Sappiamo che la somma delle diagonali di un rombo è 66 cm e che la loro differenza è 18 cm. Calcola l'area del rombo.

$$[504cm^2]$$

14) Il perimetro di un trapezio isoscele è 72 cm. Calcola l’area del trapezio sapendo che il lato obliquo è uguale alla metà della base minore e che la somma dei $\frac{3}{8}$ della base maggiore con il lato obliquo è 22 cm.

$\left[208cm^2\right]$

15) Calcola l’area di un trapezio isoscele sapendo che le basi differiscono di 6 cm, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 cm e che il lato obliquo è 5 cm.

[ $48cm^2$ ]

16) Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l’area del rettangolo diminuisce di 2 $cm^2$.

[8 cm; 4 cm ]

17) Calcola il perimetro di un rombo sapendo che le sue diagonali differiscono di *2a* e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di *5a.*

[ *20a* ]

18) Calcola l’area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato.

[ 24 $cm^2$; 20 cm ]

19) In un rombo la diagonale maggiore supera la minore di 6 cm e la somma tra i $\frac{3}{7}$ della maggiore e $\frac{1}{3}$ della minore è 30 cm. Determina le diagonali.

[ 36 cm; 42 cm ]

20) In un trapezio rettangolo la somma delle basi misura *10a* e la semidifferenza delle lunghezze delle basi è $\frac{2}{3}$ della base minore. Sapendo inoltre che l’altezza è uguale alla base minore determina il perimetro del trapezio.

[ *18a* ]

# SCHEDA DI VERIFICA

## SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

**I)**

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni di primo grado in due incognite:

1) $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ y - 15x = 0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{5} : -3\right)\right]$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ $[(0;-3)]$

3) $\begin{cases} \frac{y-2x}{3} + x = 1 \\ x + 5y + 1 = 12 \end{cases}$ $[(1;2)]$

4) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y+6}{2} = 3 \\ \frac{x+y}{2} + x = 5 \end{cases}$ $[(4;-2)]$

5) $\begin{cases} \frac{2x-y}{2} + \frac{5}{6} = \frac{x+y}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot (x+y) + 2y = 0 \end{cases}$ $\left[\left(-1;\frac{1}{5}\right)\right]$

6) $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 2x + \frac{1}{2} y = 3 \end{cases}$ [ indeterminato]

**II) Problemi**

1)In un trapezio rettangolo la somma delle basi è 14 cm e la loro differenza è 8 cm. Sapendo che l'area misura $42cm^2$, determina il perimetro del trapezio.

$[30cm]$

2)In un rombo la differenza tra le diagonali è 7 cm e la maggiore supera di 2 cm il doppio della minore. Determina perimetro e area del rombo.

$[2p = 26cm; A = 30cm^2]$

3) In un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo e diagonale e lato obliquo stanno nel rapporto di $\frac{4}{3}$. Sapendo che la differenza tra il doppio dell'altezza e il lato obliquo è $9a$, trova il perimetro del trapezio.

$[68a]$

4)Laura acquista 4 penne (uguali) e 2 quaderni (uguali) e spende 15 euro. La settimana successiva il cartolaio applica uno sconto del 10% su tutti gli articoli. Maria acquista, a prezzo scontato rispetto alla settimana precedente,3 penne e 4 quaderni dello stesso tipo di Laura e spende 18 euro. Quanto ha pagato Laura per una penna? E quanto per un quaderno?

[ 2 euro; 3,5 euro ]

# SCHEDA PER IL RECUPERO
SISTEMI DI PRIMO GRADO

**I)** Risolvi i seguenti sistemi di primo grado in due incognite:

1) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ $[(2;1)]$

2) $\begin{cases} 4x+7y=10 \\ x-y=-3 \end{cases}$ $[(-1;2)]$

3) $\begin{cases} 2x+3y=-9 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ $[(0;-3)]$

4) $\begin{cases} 5x+2y=-4 \\ 2x+7y=17 \end{cases}$ $[(-2;3)]$

5) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ [ impossibile]

6) $\begin{cases} \frac{4}{5}x-\frac{7}{5}y=1 \\ 2x-\frac{7}{2}y=\frac{5}{2} \end{cases}$ [ indeterminato]

**II)Problemi**

1)In un rettangolo una dimensione supera l'altra di 2 cm ed il perimetro è 28 cm. Determina la lunghezza della diagonale del rettangolo.

[ 10 cm ]

2) In un triangolo isoscele il lato obliquo è $\frac{13}{10}$ della base. Sapendo che il perimetro misura $36a$ determina l'area.

[ $60a^2$ ]

3) In un trapezio isoscele la base maggiore supera di 2 cm il quadruplo della base minore. Sapendo che i lati obliqui misurano 5 cm e che il perimetro è 22 cm, determina l'area del trapezio.

$[18cm^2]$

4) Un gruppo di 10 adulti e 4 bambini spende in tutto 100 euro per i biglietti di un cinema; un gruppo di 3 adulti e 2 bambini spende 34 euro. Si può stabilire quanto costa il biglietto per adulti e quello ridotto per bambini in quella sala?

[ 8 euro; 5 euro]

# TEST IN INGLESE
## SIMULTANEUS EQUATIONS

**1)** Thilo and Toby buy some boats and trains from the toy shop.
The cost of one boat is $b$ cents and the cost of one train is $t$ cents.

(a) Toby buys 3 boats and 4 trains for \$5.70. Complete this equation

$3b+4t=$ …………..

(b) Thilo buys 1 boat and 2 trains for \$2.40.Write this information as an equation.

………………………….=……………

(c) Solve your to equations to find the cost of a boat and the cost of a train.You must show all your working.

Cost of a boat = …………..cents
Cost of a train = …………..cents

**2)** Pens cost $p$ cents and pencils cost $q$ cents.

(a) Aisha buys 3 pens and 5 pencils for \$2.20.Write down an equation representing this cost in cents.

……………………………..=…………

(b) Bishen buys 4 pens and 10 pencils for \$3.50. Write down an equation representing this cost in cents.

……………………………..=…………

(c) Solve your equations to find the value of $p$ and the value of $w$.

$p =$ …………..cents
$q =$ …………..cents

**3)** Solve the simultaneous equations.

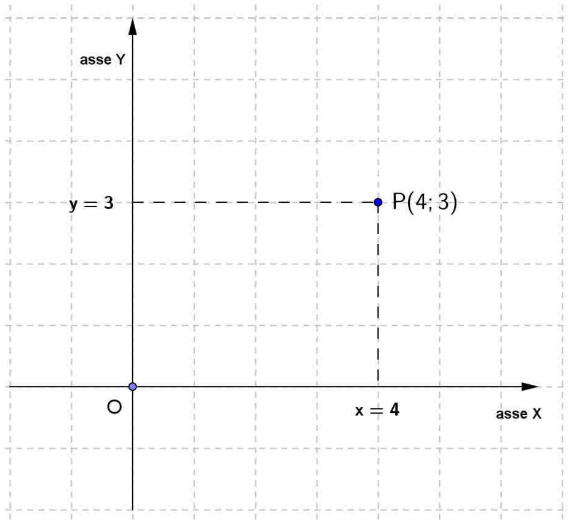
$$3x + 2y = 18$$
$$2x - y = 19$$

$x =$ …………..
$y =$ …………..

# Il piano cartesiano

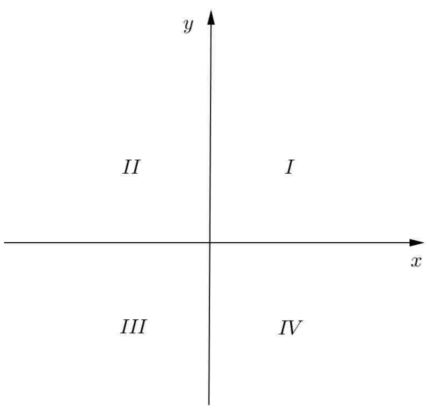
## Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.
In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** *(x;y)* di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata *(x;y)* di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).
Il numero ***x*** si chiama ***ascissa*** del punto P e il numero ***y*** si chiama ***ordinata*** del punto P.
*x* e *y* si dicono anche **coordinate** del punto P.



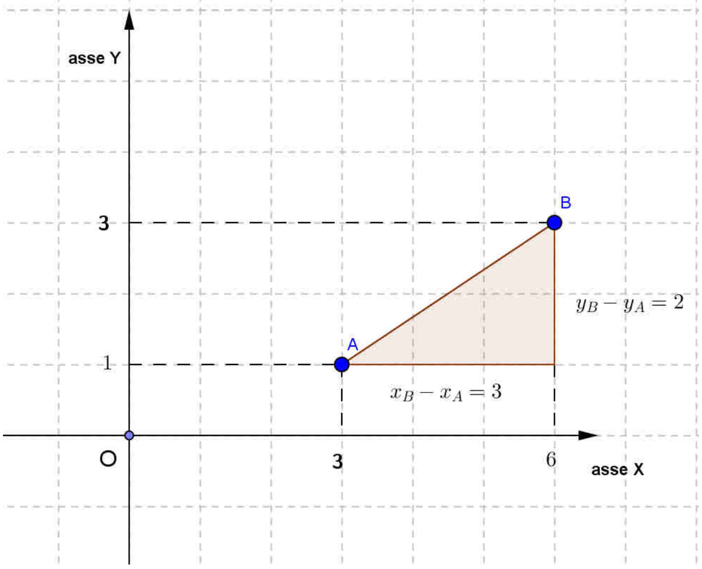

### Nota
E' importante sottolineare che $(x; y)$ è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.

### Osservazione
I punti sull'asse x hanno ordinata y=0; i punti sull'asse y hanno ascissa x=0.
Inoltre osserviamo che i punti che si trovano nel cosiddetto I° quadrante (vedi figura) hanno ascissa e ordinata positive, quelli del II° quadrante ascissa negativa e ordinata positiva ecc.



# Distanza tra due punti

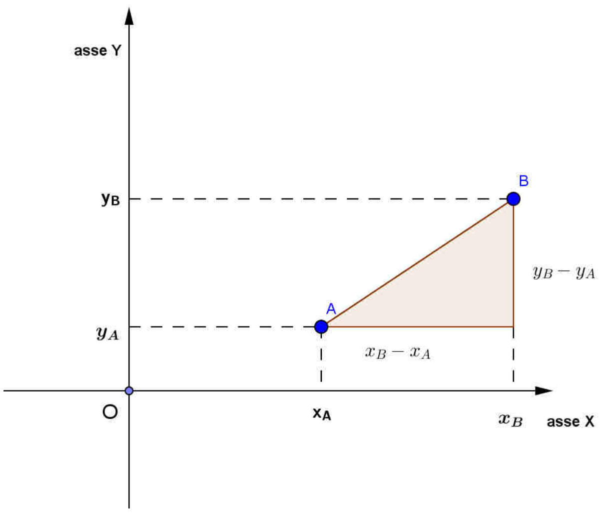
*Come possiamo calcolare la lunghezza del segmento che congiunge due punti assegnati?*
Consideriamo per esempio $A(3;1)$, $B(6;3)$. Come possiamo determinare $\overline{AB}$ ?




Consideriamo il triangolo in figura ed applichiamo il teorema di Pitagora:

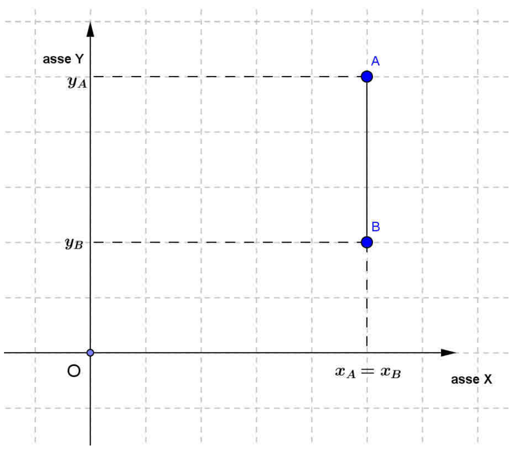
$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

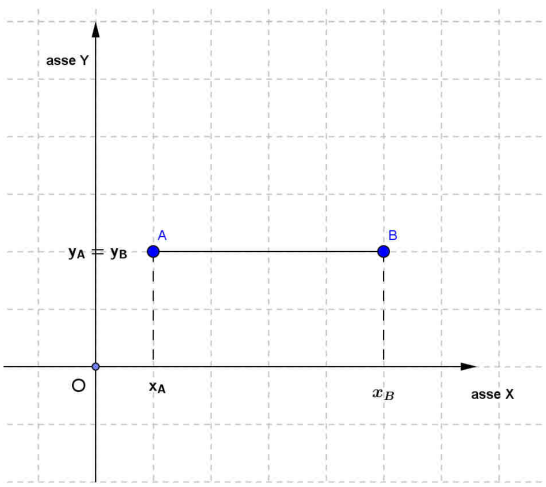
In generale se $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ abbiamo che




$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

**Osservazione**: se i punti A e B hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata possiamo calcolare la loro distanza semplicemente facendo la differenza tra le ordinate, nel primo caso, o delle ascisse, nel secondo caso.



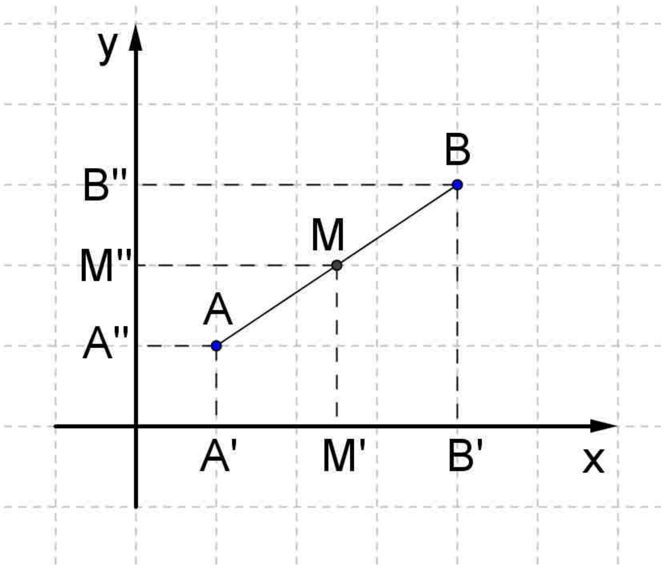



# Punto medio di un segmento

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB possiamo considerare le proiezioni di A, M e B sull'asse x e poi sull'asse y e, sfruttando un teorema dimostrato sulle rette parallele, affermare che $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$, $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$ e quindi:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

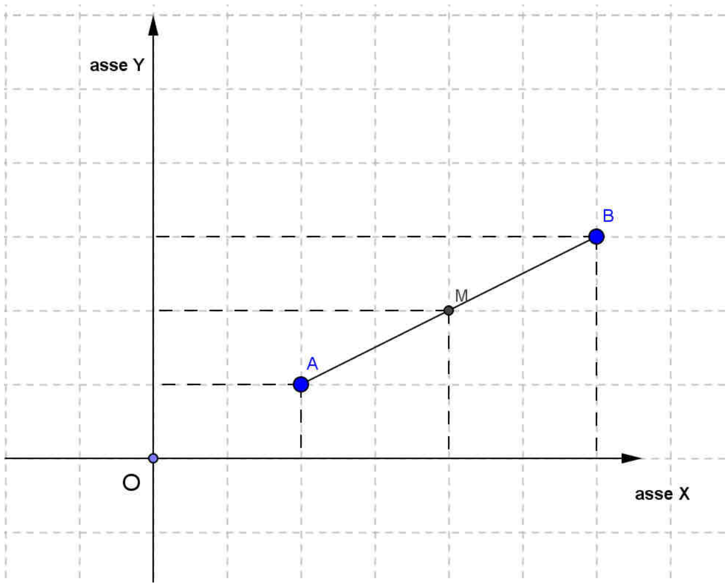
$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$




## Esempio

Consideriamo per esempio $A(2;1)$, $B(6;3)$.

Il punto medio del segmento AB risulta essere $M\left(\frac{2+6}{2} = 4; \frac{1+3}{2} = 2\right)$.



# ESERCIZI
## PIANO CARTESIANO

1) Dati i punti $A(1;2)$, $B(7;2)$, $C(4;6)$, disegna il triangolo ABC e determinane perimetro e area.

[ $2p = 16$; $A = 12$ ]

2) Dati i punti $A(2;1)$, $B(6;4)$, $C(3;8)$, disegna il triangolo ABC e verifica che $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ e che quindi (essendo verificato il teorema di Pitagora) si tratta di un triangolo rettangolo. Determina perimetro e area.

[ $2p = 10 + \sqrt{50}$, $A = \frac{25}{2}$ ]

3) Dati i punti $A(2;2)$, $B(4;3)$, $C(2;6)$, disegna il triangolo ABC e detto M il punto medio di AC, determina la lunghezza della mediana MB.

[ $\overline{BM} = \sqrt{5}$ ]

4) Dati i punti $A(2;3)$, $B(7;3)$, $C(3;5)$, disegna il triangolo ABC e detto M il punto medio di AB, verifica che $\overline{CM} = \overline{AM} = \overline{MB} = \frac{5}{2}$. Come risulta il triangolo ABC?

[ triangolo rettangolo ]

5) Dati i punti $O(0;0)$; $A(4;2)$; $B(4;5)$; $C(0;3)$, disegna il quadrilatero OABC e verifica che si tratta di un parallelogramma. Determina le coordinate del punto di incontro delle sue diagonali.

[ $\left(2;\frac{5}{2}\right)$ ]

6) Dati i punti $A(1;-2)$; $B(4;2)$; $C(1;6)$; $D(-2;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un rombo. Determina perimetro e area. Determina le coordinate del punto M in cui si intersecano le sue diagonali.

[ $2p = 20$; $A = 24$; $M(1;2)$ ]

7) Dati i punti $A(1;-1)$; $B(4;0)$; $C(3;3)$; $D(0;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un quadrato. Determina perimetro, area e le coordinate del punto M di intersezione delle sue diagonali.

[ $2p = 4\sqrt{10}$; $A = 10$; $M(2;1)$ ]

8) Dati i punti $A(1;2)$; $B(4;1)$; $C(4;6)$; $D(1;5)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un trapezio isoscele. Determina perimetro e area.

[ $2p = 8 + 2\sqrt{10}$; $A = 12$ ]

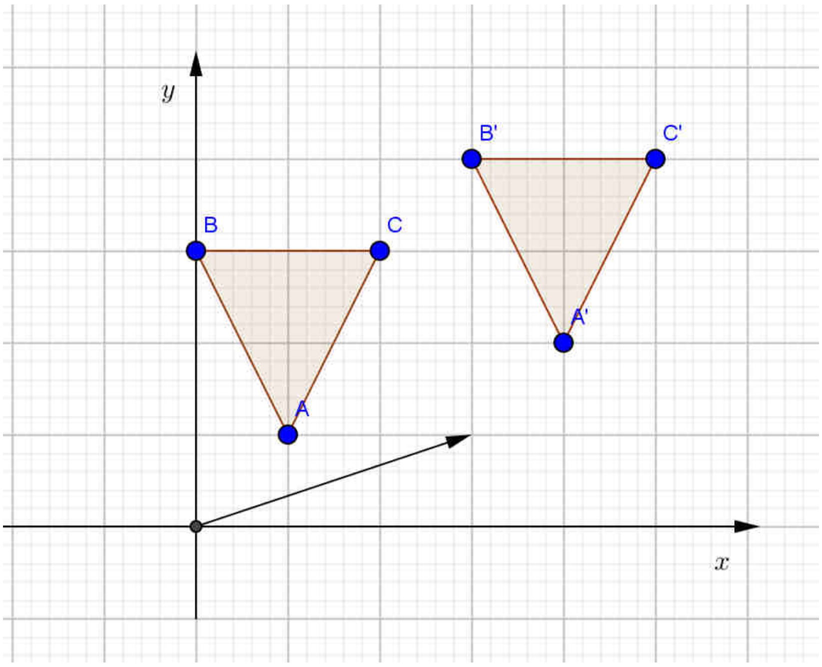
# Isometrie nel piano cartesiano

Le isometrie del piano sono traslazioni, rotazioni intorno ad un punto di un dato angolo,simmetrie rispetto ad una retta e le loro "composizioni": se trasformiamo una figura del piano con un'isometria **la figura trasformata è congruente alla figura iniziale** ed infatti il termine isometria deriva dal greco e significa *iso* = stessa *metria* = misura.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e studiamo alcune isometrie utilizzando il software "Geogebra".

## Traslazione

Visualizza gli assi del sistema di riferimento cartesiano.
Disegna un triangolo ABC (con il comando poligono), poi costruisci un vettore, per esempio $v=(3;1)$ con il comando "**vettore**" selezionando con il mouse l'origine e poi il punto in (3,1) e **attiva il pulsante *"traslazione"*** : seleziona il triangolo che vuoi traslare e poi il vettore che hai costruito.
Visualizza la "vista algebra" e osserva come cambiano le coordinate dei vertici del triangolo.




Osserva che se indichi con $P(x, y)$ un generico punto del piano, questa traslazione sposta P in $P'(x+3, y+1)$:

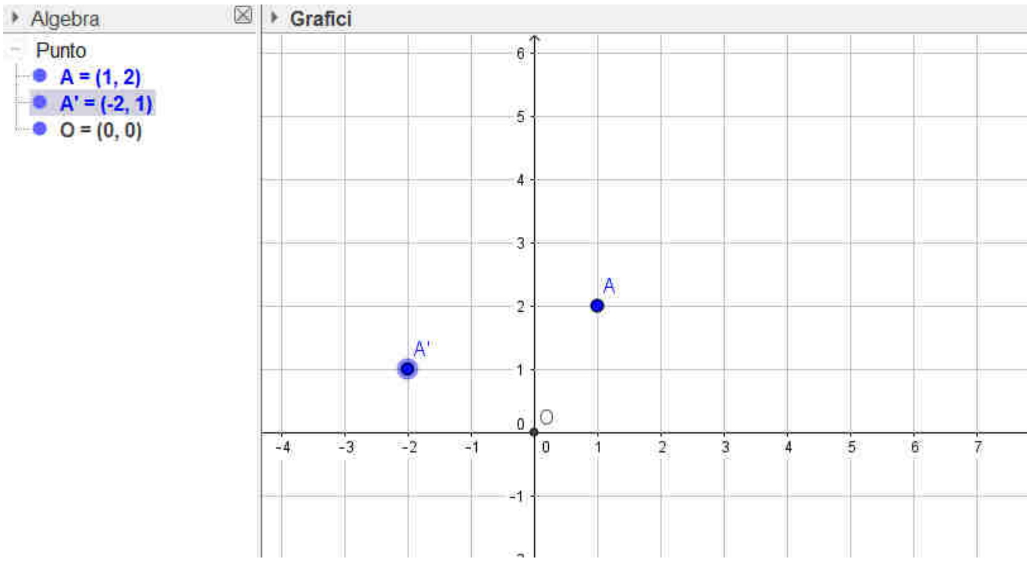
$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(3;1)}} P'(x+3; y+1)$$

Nota: se consideriamo un vettore $(a,b)$, la traslazione $t_{(a,b)}$ avremo:

$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(a;b)}} P'(x+a; y+b)$$

# Rotazione di 90° intorno all'origine

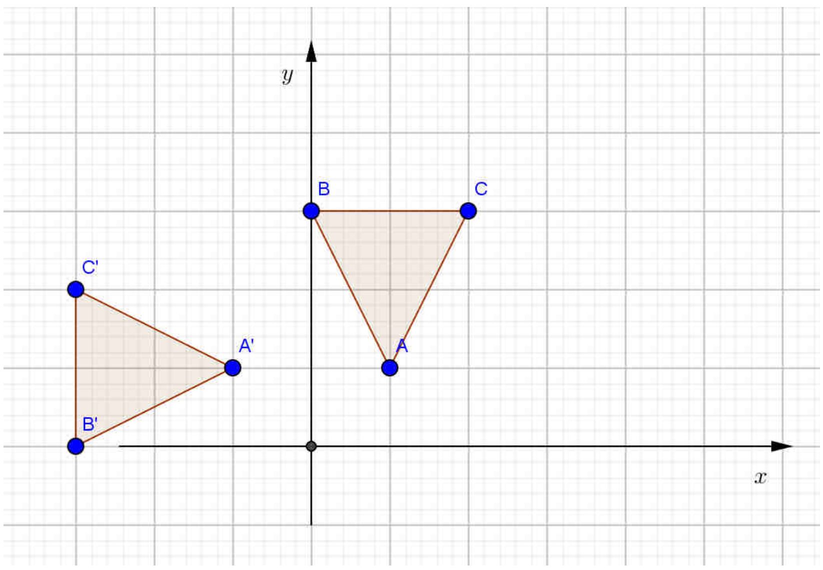
Visualizza il sistema di riferimento e crea il punto O(0,0) nell'origine del sistema di riferimento: consideriamo le rotazioni intorno a O.
Disegna un punto A **e attiviamo il pulsante "rotazione"** : seleziona prima l'oggetto da ruotare , nel nostro caso il punto, poi il centro di rotazione O e poi digita la misura dell'angolo di rotazione (90°).




Osserva nella "vista algebra" come cambiano le coordinate del punto A.
Se indichiamo con $R_{O,90°}$ la rotazione di 90° intorno all'origine possiamo scrivere

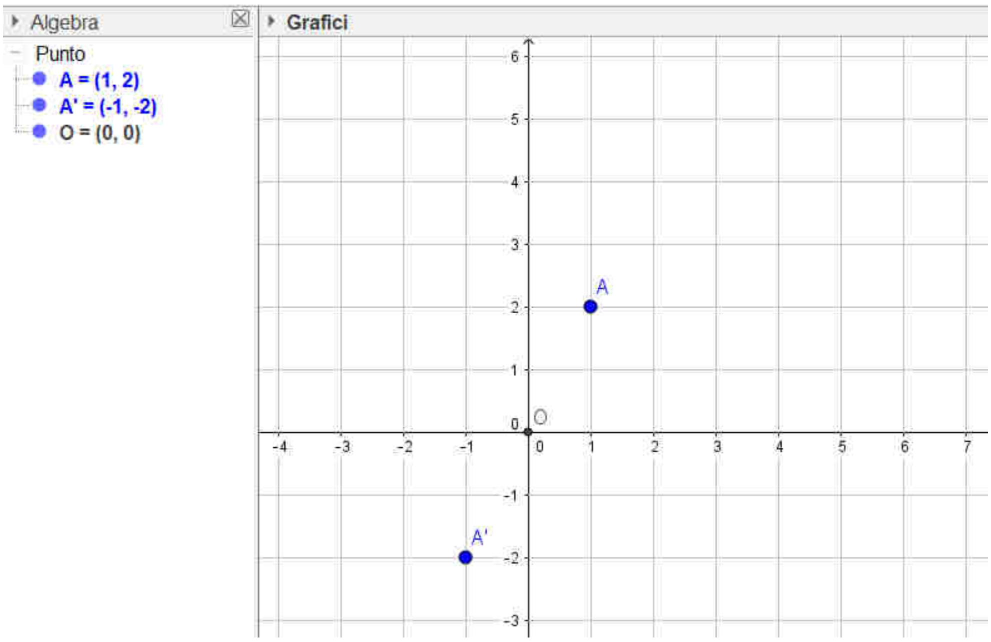
$$P(x;\, y) \xrightarrow{R_{O,90°}} P'(-y;\, x)$$

Puoi anche disegnare una figura, per esempio un triangolo ABC con il comando poligono, e ruotarla di 90° intorno a O:



## **Rotazione di 180° intorno all'origine** (simmetria di centro O )

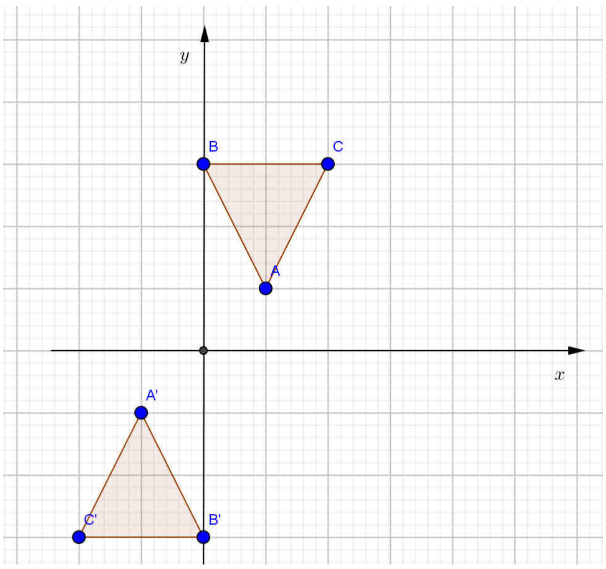
Prova a ruotare di 180° intorno ad O (origine del sistema di riferimento) un punto A e osserva come cambiano le sue coordinate.




Se indichiamo con $R_{O,180°}$ la rotazione di 180° intorno all'origine possiamo dire che

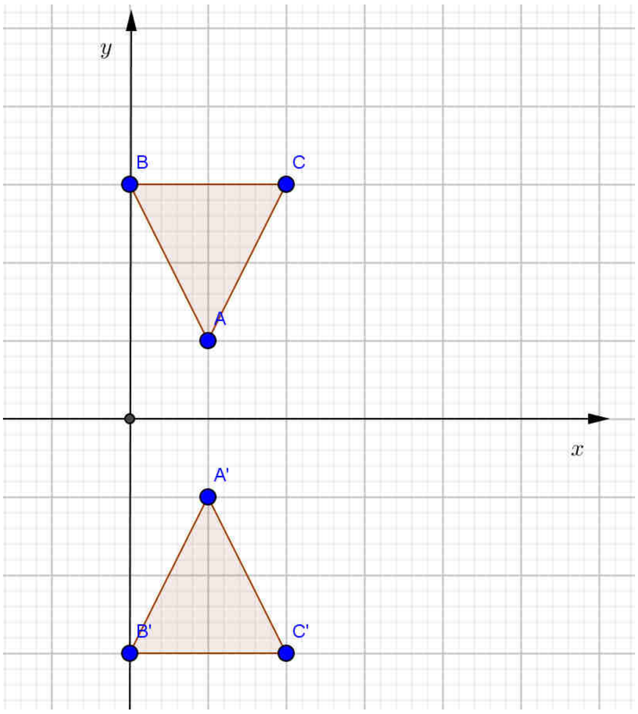
$$P(x;y) \xrightarrow{R_{O,180°}} P'(-x;-y)$$

Puoi ruotare una figura, per esempio il triangolo ABC costruito con il comando poligono, di 180° intorno all'origine:



# **Simmetria rispetto ad una retta** (simmetria assiale)

## Simmetria rispetto all'asse x

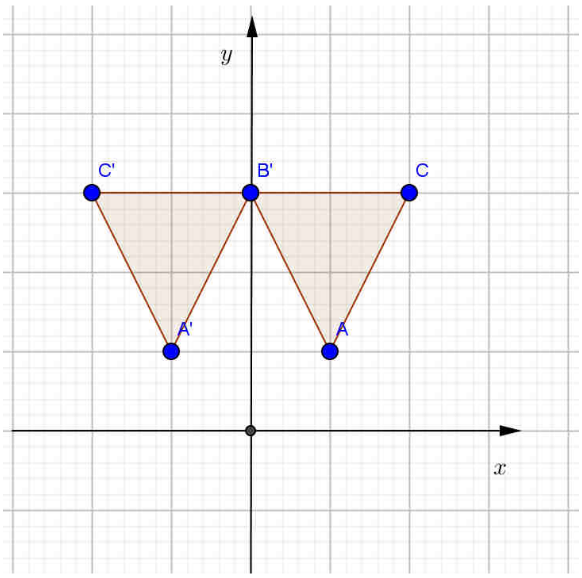



Osserva come cambiano le coordinate dei punti se li trasformi con una simmetria assiale rispetto all'asse x : attivato il **comando "simmetria assiale"** seleziona l'oggetto da trasformare (per esempio un poligono) e poi l'asse di simmetria.
Se osservi le coordinate del punto iniziale e del punto simmetrico noti che

$$P(x;y) \xrightarrow{S_{assex}} P'(x;-y)$$

## Simmetria rispetto all'asse y

E se facciamo la simmetria è rispetto all'asse y? Come cambiano le coordinate dei punti ?

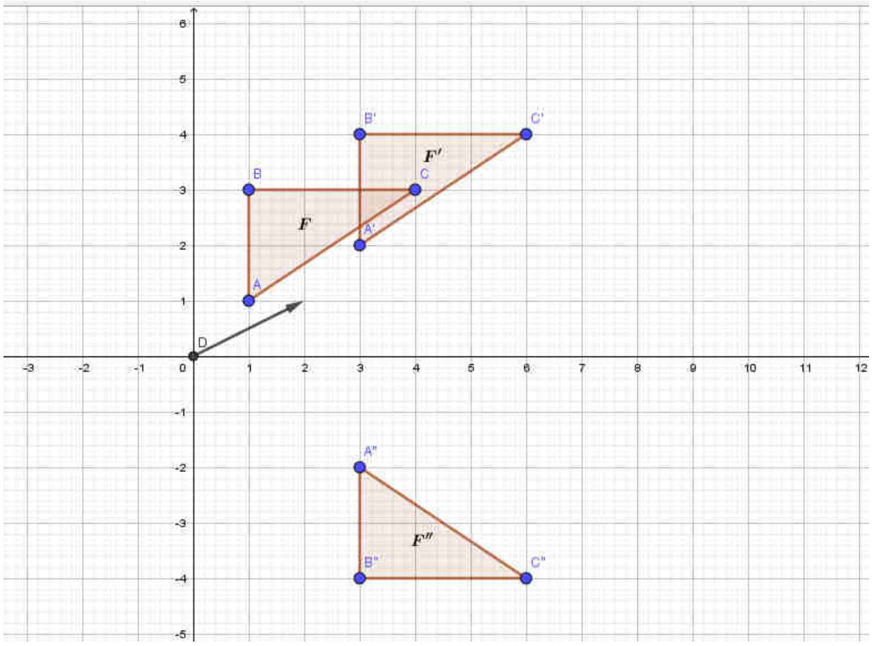



Si osserva che

$$P(x;y) \xrightarrow{S_{assey}} P'(-x;y)$$

## Composizione di isometrie

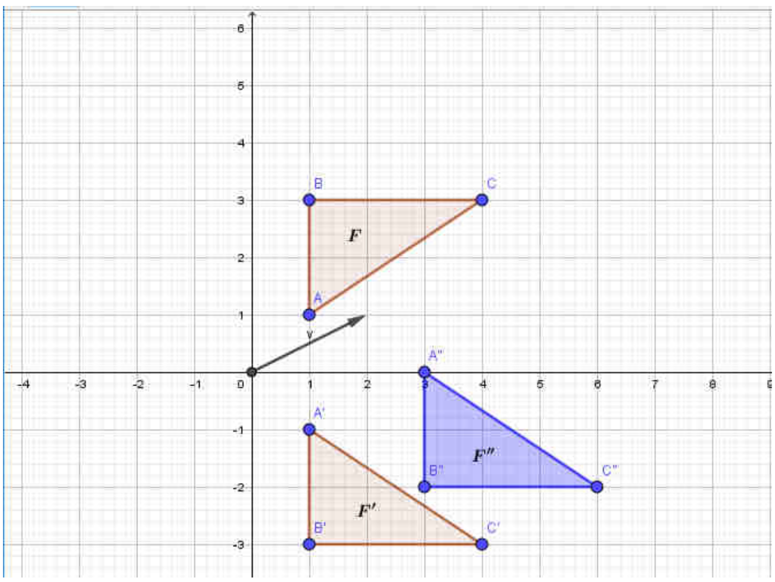
Le isometrie possono anche essere “composte” tra loro cioè **applicate in successione**: se ad una figura F, per esempio al triangolo ABC in figura, applichiamo la traslazione $t_{(2;1)}$ e poi alla figura F’ che abbiamo ottenuto applichiamo la simmetria di asse x otterremo la figura F’’.



### Nota

**E’ importante l’ordine in cui si eseguono le trasformazioni** perché invertendolo il risultato finale generalmente cambia.

Se nel nostro esempio avessimo prima effettuato la simmetria e poi la traslazione non avremmo ottenuto la stessa figura finale (vedi disegno).



# PROBLEMI
## ISOMETRIE

**1)** Considera il triangolo di vertici $A(3;1)$; $B(4;1)$; $C(4;3)$. Applica al triangolo le seguenti isometrie e disegna ogni volta ABC e il triangolo trasformato A'B'C' indicando le coordinate di A', B', C':

a) la traslazione di vettore $\vec{v}(2;1)$ ;
b) la rotazione $R(O;90°)$;
c) la rotazione $R(O;180°)$;
d) la simmetria rispetto all'asse x;
e) la simmetria rispetto all'asse y;

**2)** Considera il parallelogramma ABCD con $A(4;1)$; $B(6;1)$; $C(8;4)$; $D(6;4)$. Applica al parallelogramma le seguenti isometrie disegnando ogni volta il parallelogramma ABCD e il suo trasformato A'B'C'D':

a) la traslazione di vettore $\vec{v}(-3;1)$ ;
b) la rotazione $R(O;90°)$;
c) la rotazione $R(O;180°)$;
d) la simmetria rispetto all'asse x;
e) la simmetria rispetto all'asse y;

**3)** Considera il triangolo ABC di vertici $A(2;1)$; $B(6;1)$; $C(4;7)$. Applica al triangolo la traslazione $t_{(2;3)}$ e ,al triangolo traslato A'B'C', applica la simmetria rispetto all'asse x. Disegna il triangolo finale A''B''C'' e scrivi le coordinate dei suoi vertici.

$[A''(4,-4),\quad B''(8,-4),\quad C''(6,-10)]$

**4)** Considera il rombo di vertici $A(1,2)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$, $D(2,5)$ : applica al rombo prima tra la simmetria rispetto all'asse y e alla figura ottenuta la traslazione di vettore $(-2,-1)$. Disegna la figura finale A''B''C''D''.

Si sarebbe ottenuta lo stessa figura finale invertendo l'ordine delle isometrie cioè applicando prima la traslazione e poi la simmetria?

$[A''(-3,1),\quad B''(-4,-2),\quad C''(-5,1),\quad D''(-4,4)]$

**5)** Considera il triangolo ABC con $A(1;1)$; $B(4;2)$; $C(3;5)$ :applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x;y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse y seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (-x;-y)$]

b) la rotazione $R(O;90°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (-y;-x)$]

c) la rotazione $R(O;90°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

[$(x;y) \to (y;x)$]

d) la traslazione di vettore $(-2;0)$ seguita dalla traslazione di vettore $(0;3)$

[$(x;y) \to (x-2;y+3)$]

e) la traslazione di vettore $(2;1)$ seguita dalla traslazione di vettore $(-2;-1)$

[$(x;y) \to (x;y)$]

f) la traslazione di vettore $(2;1)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (x+2;-y-1)$]

**6)** Considera il trapezio ABCD con $A(1;1)$; $B(4;1)$; $C(2;3)$; $D(1;3)$: applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x;y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse x e poi la simmetria rispetto alla bisettrice del I-III quadrante

[$(x;y) \to (-y;x)$]

b) la $R(O;180°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

[$(x;y) \to (x;-y)$]

c) ) la $R(O;180°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (-x;y)$]

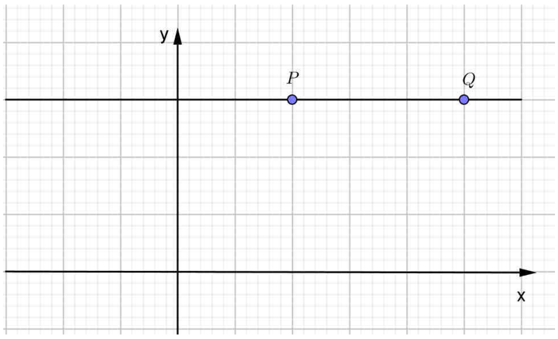
d) la traslazione di vettore $(0,3)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

[$(x;y) \to (-x;y+3)$]

# La retta nel piano cartesiano

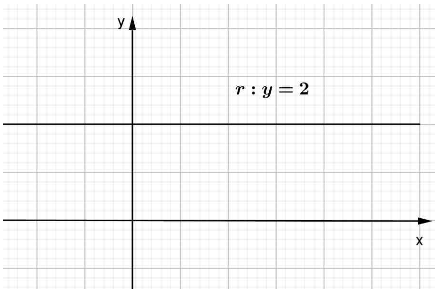
## Rette parallele agli assi cartesiani

Consideriamo la retta *r* in figura: i punti della retta hanno sempre ordinata uguale a 3.

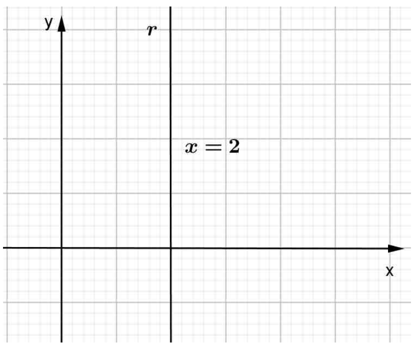


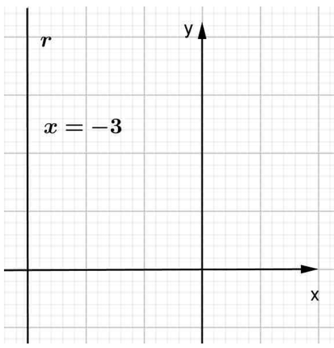

$P(2;3)$
$Q(5;3)$
ecc.

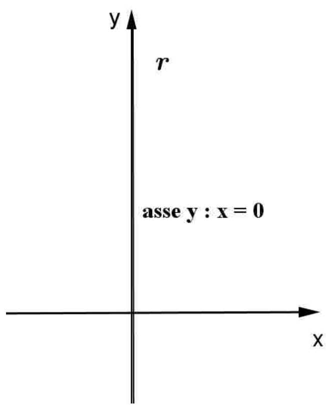
Scrivendo $y = 3$ indichiamo tutti i punti che hanno ordinata uguale a 3, cioè tutti e soli i punti della retta *r*. Diciamo allora che $y = 3$ è l'equazione della retta *r* (o associata alla retta o che descrive la retta)
Quindi se diciamo di considerare la retta di equazione $y = 2$ disegneremo la retta in figura.




**Osservazione:** l'asse x avrà equazione $y = 0$
In generale quindi una retta parallela all'asse x avrà equazione $\boxed{y = k}$ (*k* numero reale)
Analogamente una retta parallela all'asse y avrà tutti i punti con la stessa ascissa e quindi avrà un'equazione del tipo $\boxed{x = k}$ (*k* numero reale).
Per esempio in figura abbiamo $x = 2$, $x = -3$ , $x = 0$ (asse y).

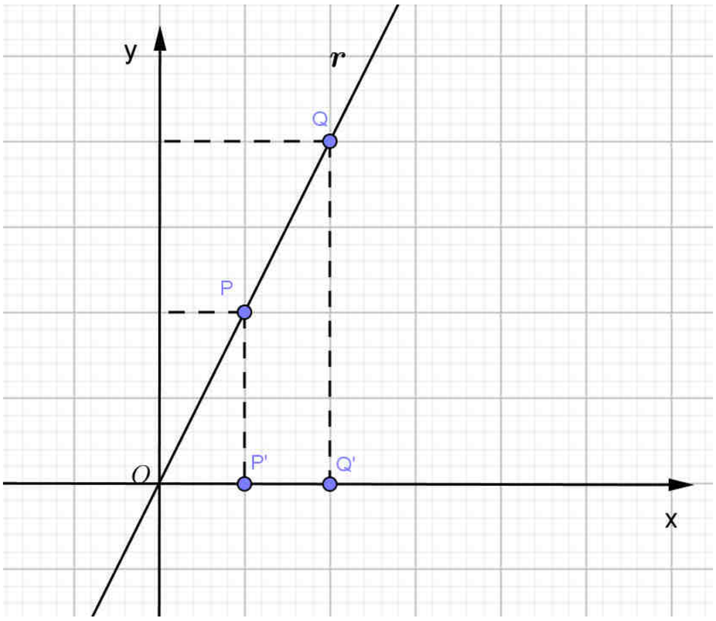


# Retta passante per l'origine

Consideriamo ora la seguente retta *r* passante per l'origine O del sistema di riferimento.




Osserviamo che (per la similitudine dei triangoli $OP'P$, $OQ'Q$, ecc ) il rapporto tra l'ordinata $y$ e l'ascissa $x$ di un qualsiasi punto su $r$ è sempre 2.

Cioè

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{QQ'}{OQ'} = .... = \frac{y_p}{x_p} = 2$$

In generale se $P(x; y) \in r$ (cioè se P appartiene alla retta r) si osserva che $\frac{y}{x} = 2$.
Ma questa relazione può anche essere scritta

$$y = 2x$$

L'equazione $y = 2x$ è quindi l'equazione della retta r (descrive la relazione tra ascissa e ordinata dei suoi punti).

Il coefficiente 2 è chiamato **coefficiente angolare della retta** (o inclinazione o pendenza) e in generale indicato con **m.**

Quindi in generale una retta passante per l'origine ha equazione

$$\boxed{y = mx}$$

dove m è un numero reale ed è detto coefficiente angolare della retta.

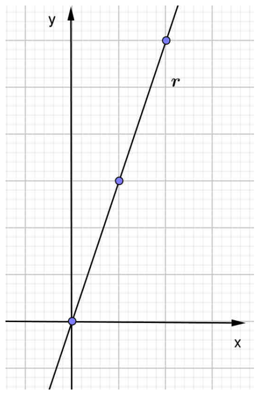
## Esempi

Proviamo a disegnare alcune rette conoscendo la loro equazione.

**a)** $y = 3x$

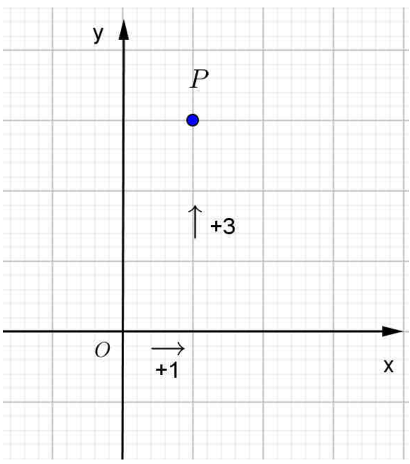
Potremo fare una tabella, assegnando dei valori alla $x$ e determinando i corrispondenti valori della $y$.

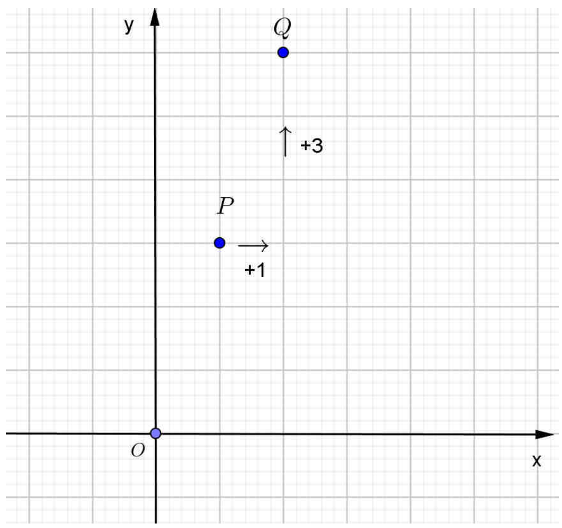
| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |




C'è però un metodo più veloce che utilizza la "quadrettatura" del foglio:

- partiamo dall'origine O (sappiamo che la retta passa per O);
- per determinare un altro punto di $r$ consideriamo il coefficiente angolare $m$ e ricordiamo che $m = \frac{y}{x}$.Nel nostro caso abbiamo $m = 3$: possiamo pensare 3 come $\frac{3}{1}$ e quindi se ci spostiamo orizzontalmente di 1 quadretto (x=1) e saliamo in verticale di 3 quadretti (y=+3) partendo dall'origine troviamo un punto P di $r$.
- possiamo ripetere il procedimento partendo da P per trovare un altro punto Q e così via (l'inclinazione è sempre la stessa!).



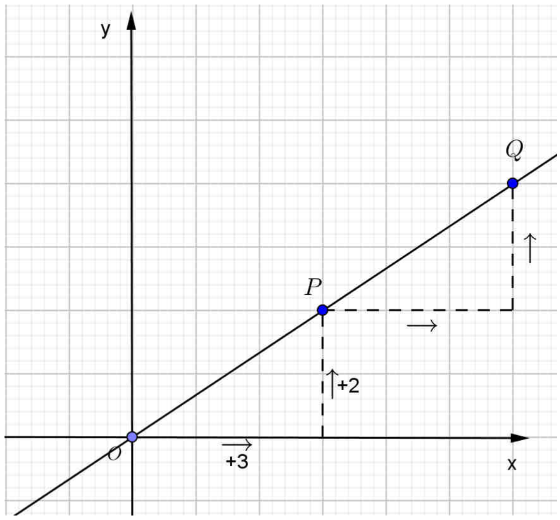

In questo modo, anche senza fare la tabella, individuiamo vari punti e possiamo disegnare la retta.

**b)** $y = \frac{2}{3}x$

In questo caso il coefficiente angolare è $m = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$

Possiamo disegnare la retta utilizzando la quadrettatura: partendo da O possiamo spostarci orizzontalmente di 3 quadretti e poi salire verticalmente di 2 quadretti.

Ripetendo il procedimento più volte troveremo vari punti senza dover fare calcoli.




**Nota**: attenzione a non confondere lo spostamento "orizzontale" ($x$) con lo spostamento "verticale" ($y$).

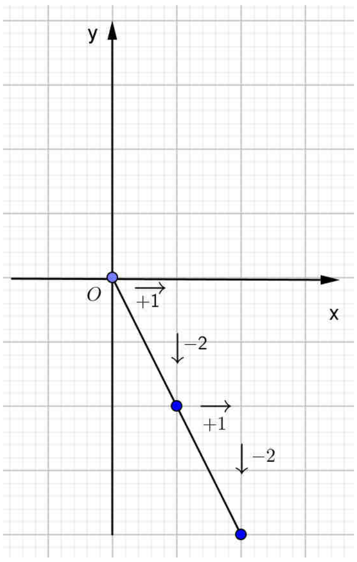
**c)** $y = -2x$

Facciamo la tabella

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | -2 |
| 2 | -4 |
| -1 | 2 |

E se usiamo il procedimento sul piano quadrettato?

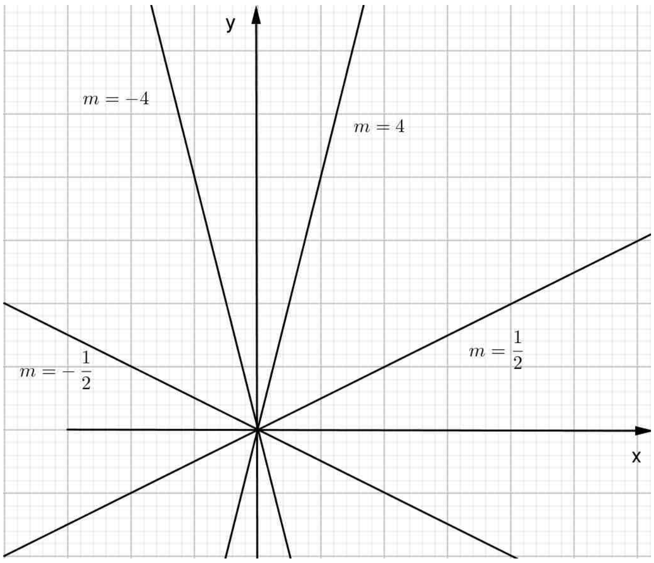
In questo caso $m = -2 = \frac{-2}{1}$ quindi, partendo da O, ci spostiamo a destra di 1 ($x$) e **scendiamo verticalmente** di 2 poiché $y = -2$.



## Osservazioni

**1)** Per quanto abbiamo visto l'equazione $y = mx$ rappresenta una retta passante per l'origine O del sistema di riferimento.
Se $m > 0$ la retta si trova nel I e III quadrante;

Se $m < 0$ la retta si trova nel II e IV quadrante.

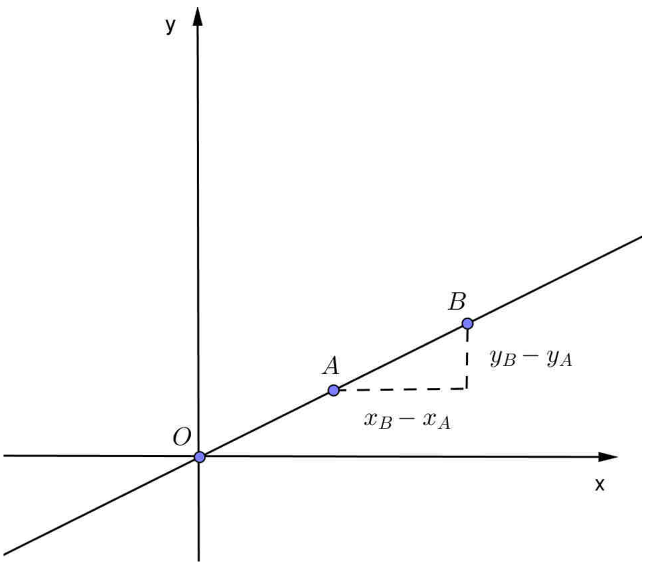



**2)** Osserviamo infine che l'asse y, pur essendo una retta per O, non può essere descritta da un'equazione di questo tipo poiché non possiamo associargli un coefficiente angolare (l'ascissa di tutti i suoi punti è 0 e non possiamo dividere per 0).

**3)**
Abbiamo visto che il coefficiente angolare m di una retta per l'origine corrisponde al rapporto $\frac{y}{x}$ se $P(x; y) \in r$.

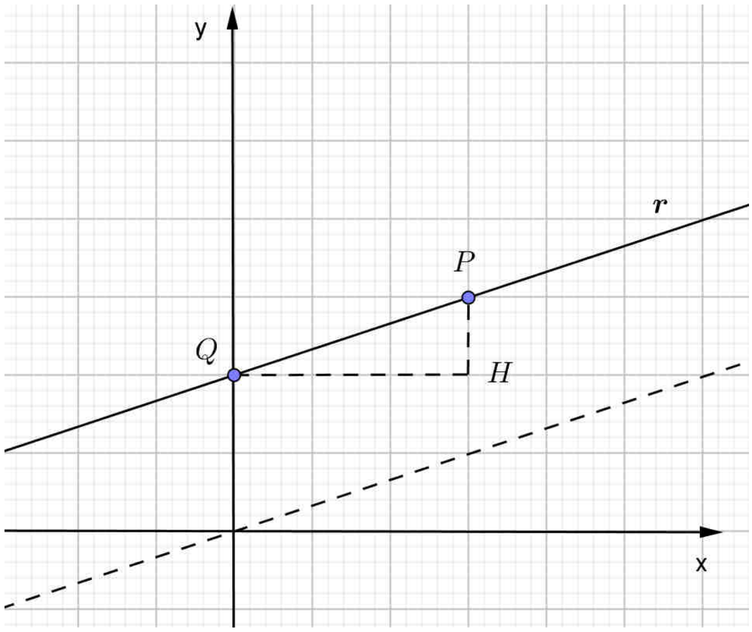
Se consideriamo due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ appartenenti a $r$ osserviamo che si ha:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$



# Retta non parallela agli assi e non passante per l'origine

Consideriamo infine una retta $r$ non parallela agli assi coordinati e non passante per l'origine come quella in figura. Come possiamo determinare la sua equazione?

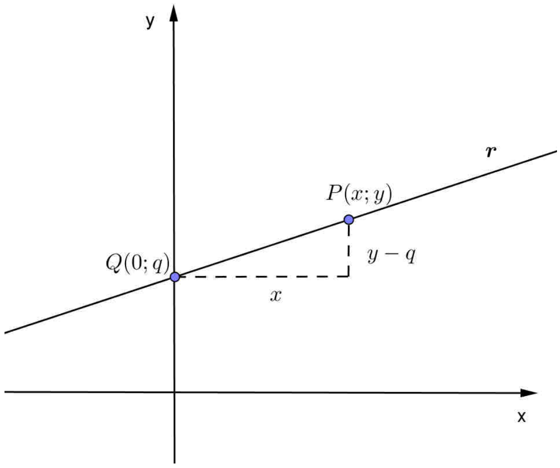



Consideriamo il punto in cui la retta interseca l'asse y:
nel nostro caso $Q(0;2)$
Ricaviamo il coefficiente angolare considerando il triangolo in figura PHQ (poiché posso ricavare m da una coppia qualsiasi di punti di $r$):

$$m = \frac{1}{3}$$

L'equazione della retta non sarà però $y = \frac{1}{3}x$ perché la retta non passa per l'origine: se tracciamo $y = \frac{1}{3}x$ ci accorgiamo che rispetto ad essa i punti di $r$ hanno sempre l'ordinata aumentata di 2. e quindi l'equazione di $r$ risulta:

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$




In generale, se indichiamo con $Q(0;q)$ il punto di intersezione della retta con l'asse y, considerando un generico punto $P \in r$ avremo (vedi figura):

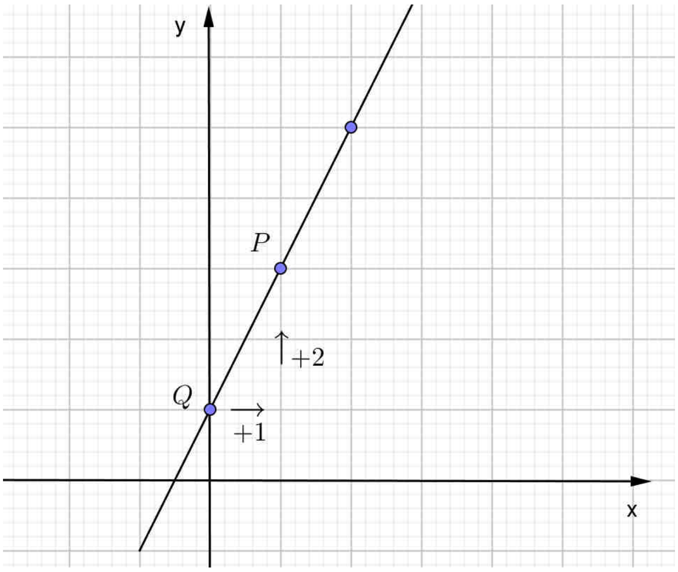
$$\frac{y-q}{x} = m \Rightarrow y - q = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + q}$$

**m** è il **coefficiente angolare**

**q** è l'ordinata del punto di intersezione di $r$ con l'asse $y$ e viene anche detta "**ordinata all'origine**" perché è l'ordinata del punto di ascissa $x = 0$.

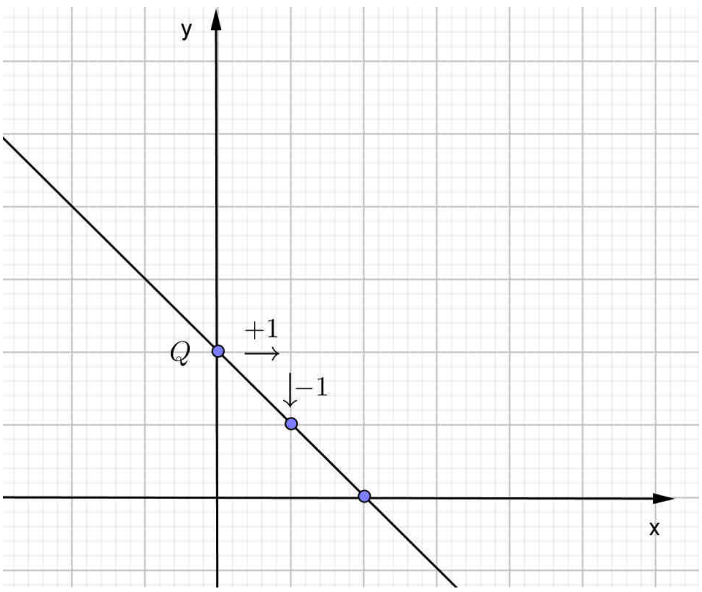
## Esempi

a) Disegniamo la retta di equazione $y = 2x + 1$ ($m$=2; $q$=1)




Partiamo da $Q(0;1)$: spostiamoci di 1 e saliamo di 2 (poiché $m = 2 = \frac{2}{1}$) e così via.
Naturalmente possiamo trovare anche le coordinate dei punti facendo la "tabella" x,y ma il procedimento sul piano quadrettato è più veloce.

b) Disegniamo la retta di equazione $y = -x + 2$ ($m$ = -1; $q$ = 2)



## Equazione generale della retta

C'è un'equazione che comprende tutti i casi ?

Se consideriamo l'equazione

$$\boxed{ax+by+c=0}$$

dove $a$, $b$, $c$ sono coefficienti reali, al variare del valore dei coefficienti abbiamo tutti i casi.

Se $a=0$ e $b\neq 0$ abbiamo rette del tipo $y=-\frac{c}{b}$ e quindi parallele all'asse x;

Se $a\neq 0$ e $b=0$ abbiamo rette del tipo $x=-\frac{c}{a}$ cioè rette parallele all'asse y;

Se $a\neq 0$ e $b\neq 0$ ma $c=0$ abbiamo $y=-\frac{a}{b}x$ cioè rette passanti per O (diverse dall'asse x)

Se $a\neq 0$, $b\neq 0$ e $c\neq 0$ abbiamo

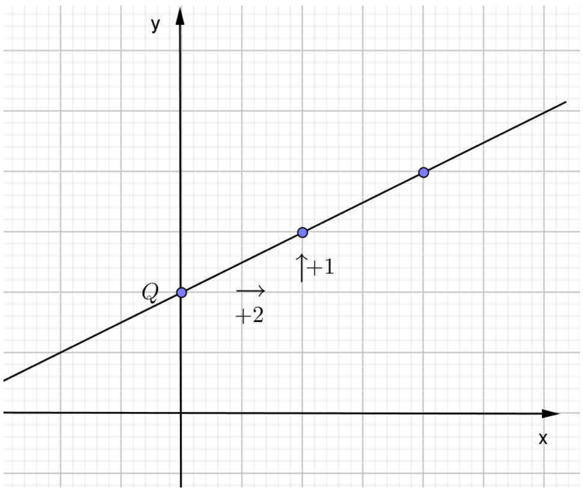
$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

e quindi rette non passanti per l'origine e non parallele agli assi.

**Esempio**
Disegna la retta di equazione $x-2y+4=0$
Ricaviamo la y:

$$2y=x+4\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

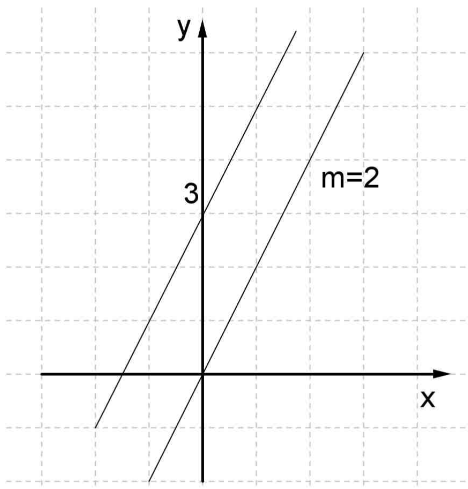
e quindi $m=\frac{1}{2}$ e $q=2$.




## Rette parallele

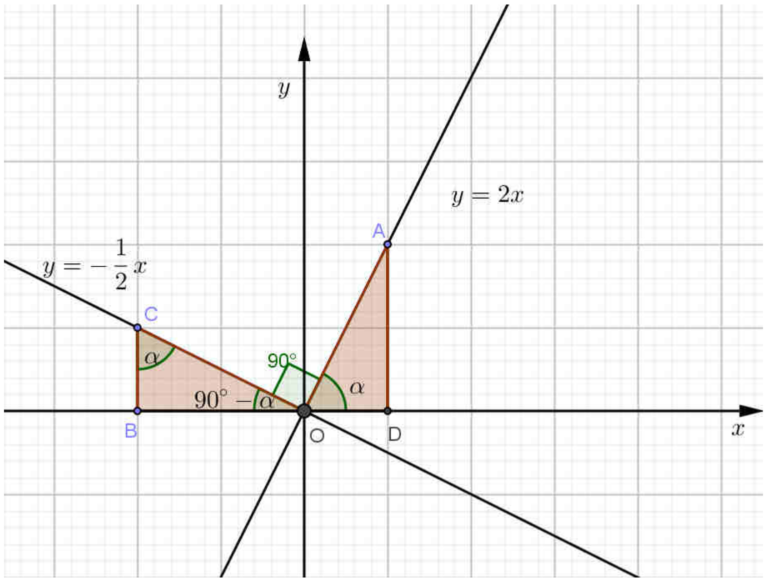
Per quello che abbiamo detto è chiaro che due rette, non parallele all'asse y, sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

Vediamo in figura le rette di equazione y = 2x e y = 2x +3.



## Rette perpendicolari

Consideriamo la retta $y = 2x$ e su di essa il punto $A(1,2)$: disegniamo il triangolo rettangolo ODA avente cateti $\overline{OD} = 1$, $\overline{AD} = 2$.




Se disegniamo il triangolo rettangolo OBC come in figura con cateti $\overline{OB} = 2$, $\overline{BC} = 1$, avremo che i due triangoli sono congruenti e quindi l'angolo $A\hat{O}D \cong B\hat{C}O = \alpha$.

Ma allora, poiché gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari, avremo che $B\hat{O}C = 90° - \alpha$ e in conclusione l'angolo $A\hat{O}C = 90°$ poiché gli angoli $B\hat{O}C$, $A\hat{O}C$, $A\hat{O}D$ sono supplementari.

Quindi la retta passante per O e C, che ha inclinazione $-\frac{1}{2}$ ed equazione $y = -\frac{1}{2}x$, risulta perpendicolare alla retta $y = 2x$.

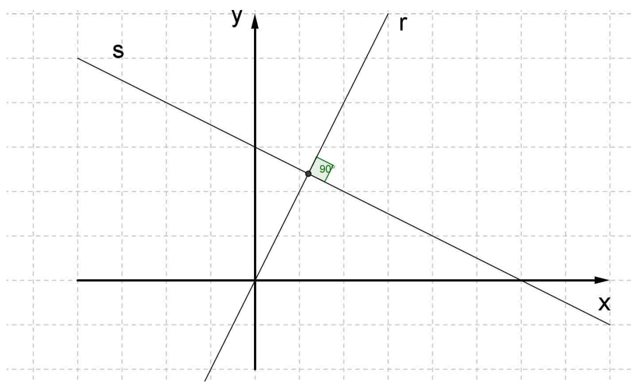
In generale se consideriamo una retta per l'origine r di equazione $y = mx$ (per semplicità sia $m > 0$ ) possiamo quindi dire che la retta perpendicolare per l'origine avrà equazione $y = -\frac{1}{m}x$ (basta ripetere il ragionamento costruendo i triangoli OAD e OBC come nella figura precedente cioè $\overline{OD} = 1$ e $\overline{AD} = m$ , $\overline{BC} = 1$, $\overline{BO} = m$).

La relazione che abbiamo trovato tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari passanti per l'origine vale naturalmente anche per rette perpendicolari non passanti per l'origine poiché quello che conta è il coefficiente angolare e quindi possiamo dire che la relazione tra i coefficienti angolari $m$, $m'$ di due rette perpendicolari risulta:

$$\boxed{m' = -\frac{1}{m}}$$

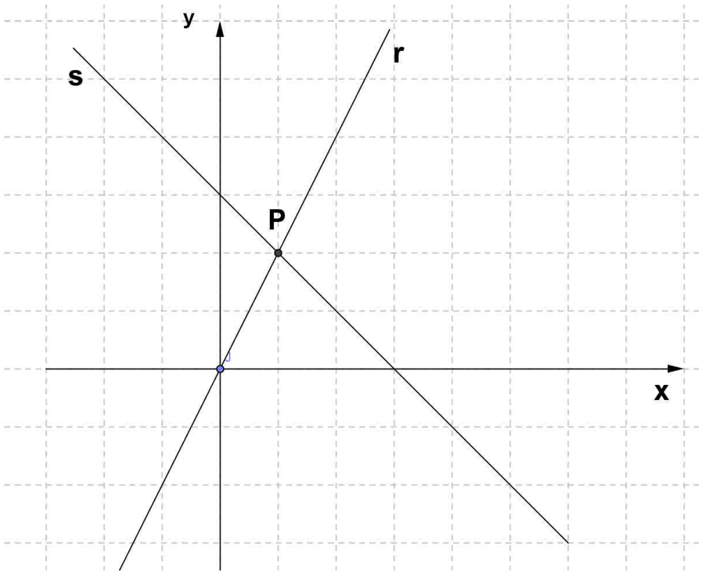
Vediamo per esempio in figura le rette perpendicolari di equazione

$$y = 2x \text{ e } y = -\frac{1}{2}x + 3$$



# Intersezione tra due rette

Supponiamo di avere due rette non parallele, per esempio $y = 2x$ e $y = -x + 3$ come in figura e di voler trovare le coordinate del loro punto P di intersezione.




In questo caso le coordinate si possono determinare facilmente anche osservando la figura: $P(1;2)$. Ma in generale come possiamo trovarle?

Poiché $P \in r$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di $r$ e poiché $P \in s$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di $s$: quindi le coordinate $(x; y)$ del punto di intersezione devono verificare entrambe le equazioni cioè sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Infatti risolvendo abbiamo:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

In generale quindi per trovare le coordinate del punto di intersezione di due rette basterà **risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

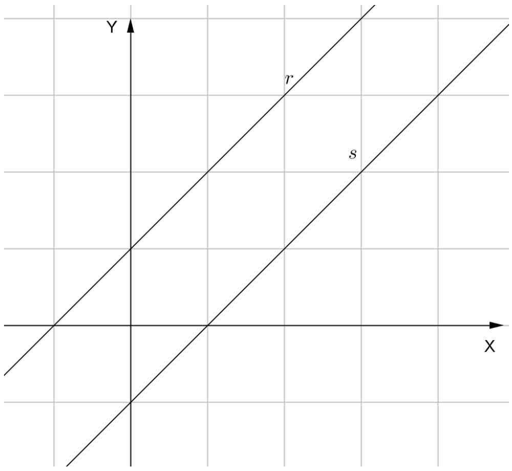
Possiamo avere tre casi:

- Se le rette sono **incidenti** come nel nostro esempio abbiamo un punto di intersezione cioè una soluzione $(x_0; y_0)$ del sistema risulta "*determinato*";

- Se le rette sono **parallele** allora non c'è nessun punto "comune", quindi nessuna soluzione del sistema e il sistema risulta "*impossibile*".

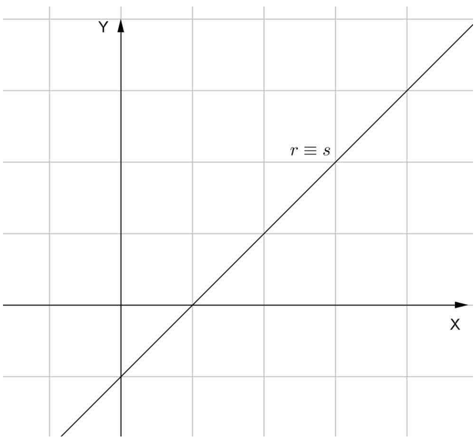
  **Esempio**

  $$\begin{cases} r: x-y+1=0 \\ s: x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ y-1-y-1=0 \rightarrow -2=0 \ \textit{impossibile} \end{cases}$$




- Se le rette sono coincidenti cioè le equazioni rappresentano la **stessa retta**, i punti sono tutti comuni e il sistema ha infinite soluzioni e risulta "*indeterminato*".

  **Esempio**




$$\begin{cases} r: 2x-2y-2=0 \Leftrightarrow x-y-1=0 \\ s: x-y-1=0 \end{cases}$$

Infatti se ricavo $x = y+1$ dalla prima equazione e sostituisco nella seconda equazione trovo 0=0.

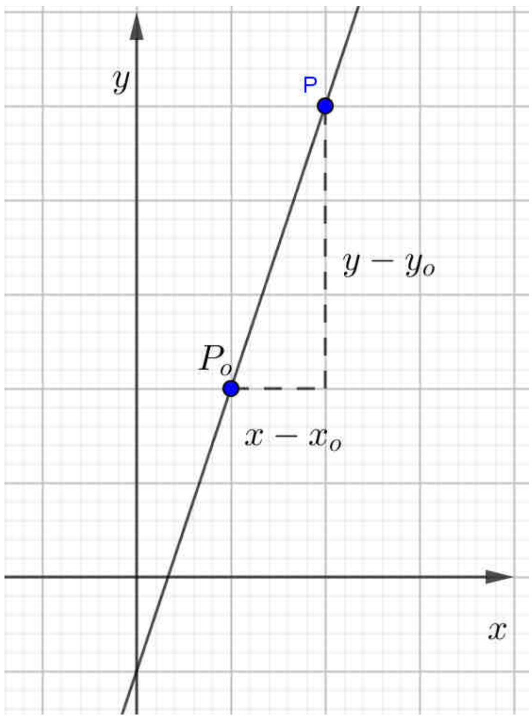
Tutti i punti della retta sono soluzioni del sistema.

## Equazione di una retta passante per un punto assegnato e avente coefficiente angolare assegnato

Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta passante per $P_0(1;2)$ e avente coefficiente angolare $m = 3$.
Se consideriamo un punto $P(x; y)$ sulla retta avremo che

$$\frac{y-2}{x-1} = 3 \rightarrow y - 2 = 3 \cdot (x-1)$$

Sviluppando abbiamo quindi che l'equazione della retta risulta $y = 2 + 3x - 3 \rightarrow y = 3x - 1$




In generale se indichiamo con $(x_o; y_o)$ le coordinate del punto $P_o$ avremo

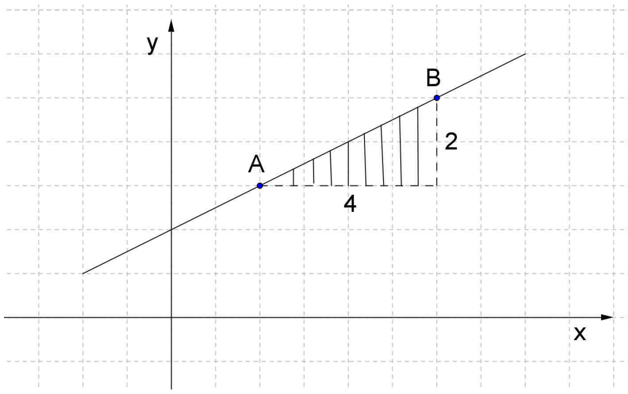
$$\frac{y-y_o}{x-x_o} = m \rightarrow y - y_o = m \cdot (x - x_o)$$

cioè l'equazione della retta passante per $P_o(x_o; y_o)$ e avente coefficiente angolare *m* risulta

$$\boxed{y - y_o = m \cdot (x - x_o)}$$

## Equazione della retta passante per due punti assegnati

Supponiamo di volere trovare l'equazione della retta passante per $A(2;3)$ e $B(6;5)$.




Osserviamo che possiamo ricavare il coefficiente angolare della retta partendo dal triangolo tratteggiato in figura:

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

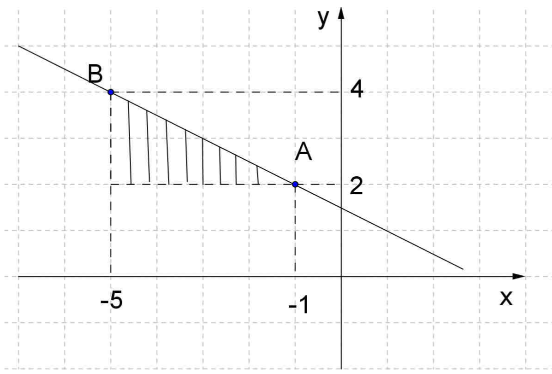
e nel nostro esempio quindi abbiamo $m = \frac{1}{2}$.

A questo punto possiamo utilizzare l'equazione della retta per A, per esempio, con coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$ e abbiamo $\quad y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

In generale per determinare l'equazione della retta passante per $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ si determina prima il coefficiente angolare e poi si sfrutta l'equazione della retta passante per un punto (possiamo scegliere A o B) con coefficiente angolare dato.

Se per esempio consideriamo il passaggio per A abbiamo:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$



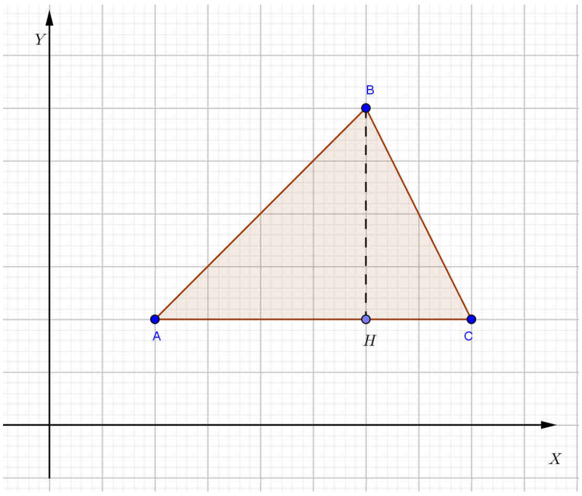

**Nota**: se per ricavare $m$ ci si affida al piano quadrettato occorre fare attenzione ai coefficienti angolari negativi.
Per esempio le misure dei cateti del triangolo tratteggiato in figura sono ancora 2 e 4 ma in questo caso è chiaro che $m = -\frac{1}{2}$.

Infatti $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{-5+1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

## Area di un triangolo

Come possiamo, in generale, determinare l'area di un triangolo ABC conoscendo le coordinate dei vertici?

1) Consideriamo un esempio: $A(2;2)$ $B(6;6)$ $C(8;2)$.

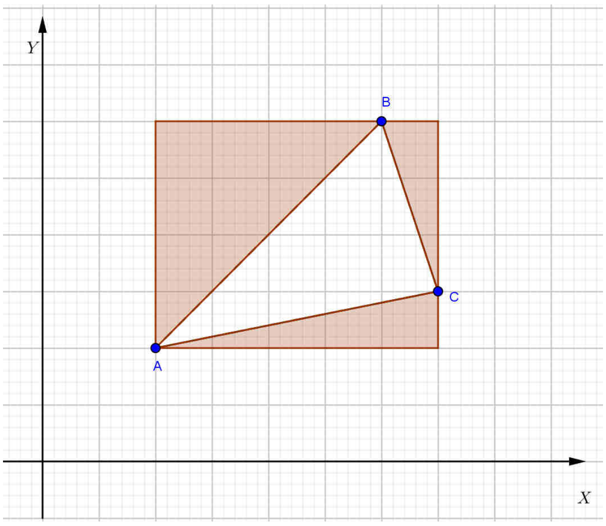



È chiaro che in questo caso conviene considerare AC come base perché l'altezza BH corrisponde alla differenza tra l'ordinata di B e quella di A (o C).
Si ha cioè BH = 4 e quindi

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12$$

Quindi è piuttosto facile determinare l'area di ABC se un lato è parallelo ad uno degli assi.

2) Consideriamo adesso $A(2;2)$ $B(6;6)$ $C(7;3)$



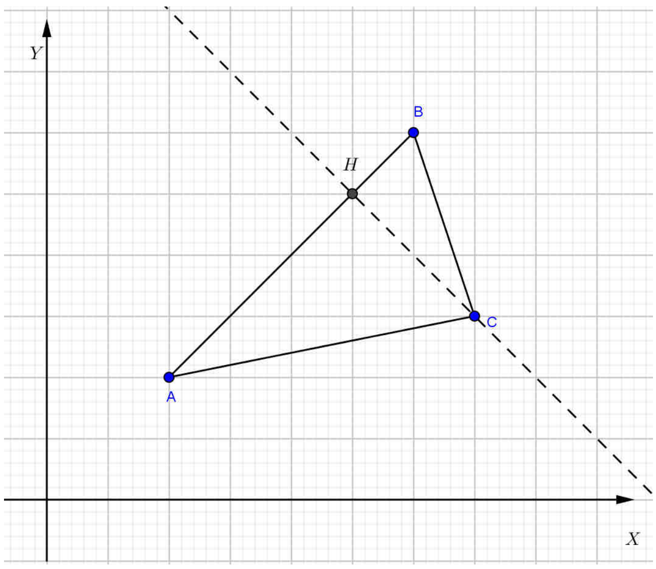

Possiamo in questo caso *inscrivere il triangolo in un rettangolo* (vedi figura) e determinare l'area di ABC sottraendo all'area del rettangolo le aree dei triangoli tratteggiati (facili da calcolare).

Abbiamo in questo caso: area ABC = area rettangolo - $\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 8\right) = 20 - 12 = 8$

**Nota**: potevamo calcolare l'area anche determinando **l'altezza relativa ad una base.**

Proviamo a considerare AB come base: per trovare l'altezza CH (vedi figura) dobbiamo prima determinare le coordinate di H. Per trovare H dobbiamo intersecare la retta per A e B con la retta per C perpendicolare a $r_{AB}$.

$$r_{AB} : y-2 = x-2 \Rightarrow y = x$$
$$h_C : y-3 = -(x-7) \Rightarrow y = -x+10$$
$$H : \begin{cases} y = x \\ y = -x+10 \end{cases} \Rightarrow x = -x+10 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$




Quindi $HC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ e in conclusione, essendo $AB = \sqrt{32}$ ritroviamo

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2}\sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{256} = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

# PROBLEMI SVOLTI
## RETTA NEL PIANO CARTESIANO

**1)** Considera i punti $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(6;-1)$**.**

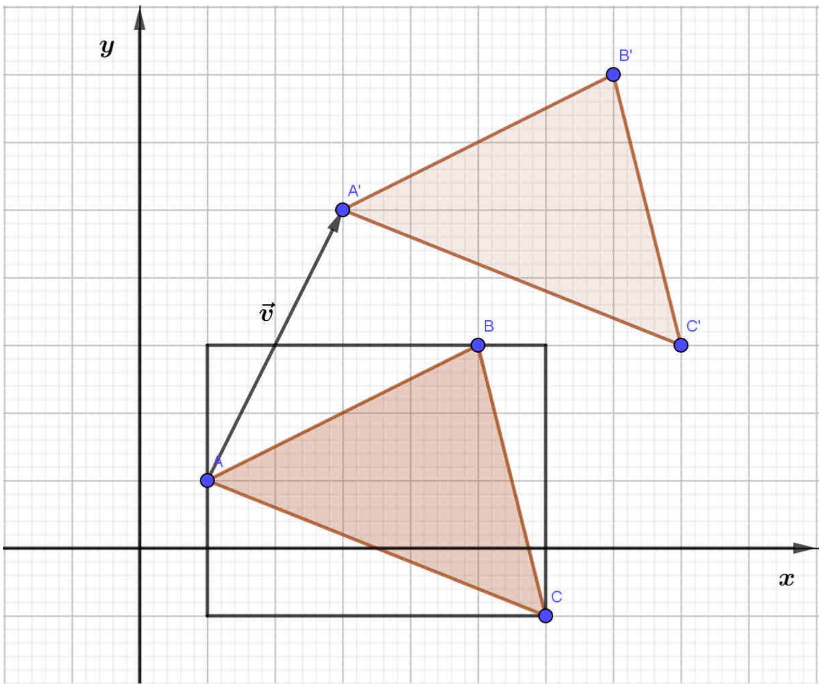
a) Determina le equazioni delle rette passanti per AB, AC, BC.

b) Determina perimetro e area del triangolo ABC.

c) Trasla il triangolo ABC del vettore $\vec{v}(2;4)$, disegna il triangolo traslato A'B'C' indicandone le coordinate.

***Svolgimento***

a)




$r_{AC}$ : $\quad m_{AC} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \to y-1 = -\frac{2}{5}(x-1) \to y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} + 1 \to y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$

$r_{BC}$ $\quad m_{BC} = \frac{-4}{1} = -4 \to y-3 = -4(x-5) \to y = -4x + 20 + 3 \to y = -4x + 23$

$r_{AB}$ : $\quad m_{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \to y-1 = \frac{1}{2}(x-1) \to y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 \to y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $\quad \overline{AB} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$, $\quad \overline{BC} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$, $\quad \overline{AC} = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

$2p = \sqrt{20} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$

$A = 20 - (5+2+4) = 9$

c) $A'(3;5)$, $\quad B'(7;7)$, $\quad C'(8;3)$

**2)**

a) Disegna le rette di equazione $r_1 : y = -x + 1$ ; $r_2 : x - 2y + 8 = 0$ ; $r_3 : x = 2$ e determina le coordinate dei loro punti di intersezione $A(r_1, r_2)$ $B(r_2, r_3)$ $C(r_1, r_3)$.

b) Calcola l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

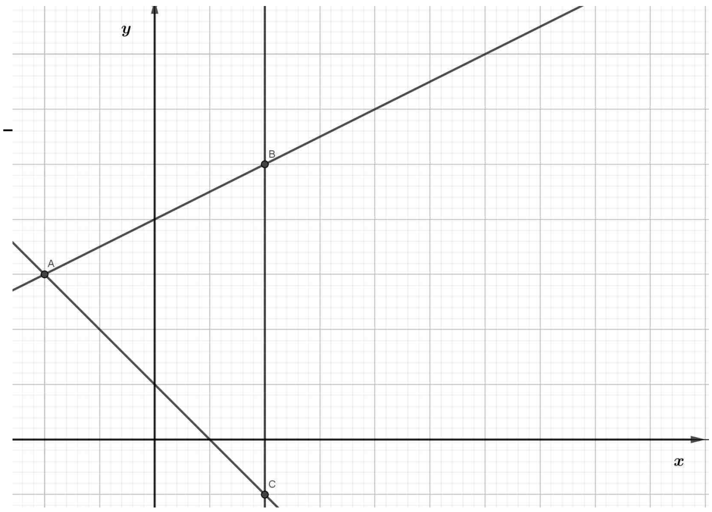
c) Determina le coordinate del punto M, punto medio di AC, e del punto N, punto medio di BC. Scrivi l'equazione della retta passante per M e N e verifica che risulta parallela alla retta AB.

d) Applica al triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ la rotazione di 90° intorno all'origine degli assi, scrivi le coordinate di A', B', C' (punti ruotati di A, B, C ) e disegna $\overset{\Delta}{A'B'C'}$.

***Svolgimento***

a)

$$r_2 : x - 2y + 8 = 0 \rightarrow 2y = x + 8 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$$

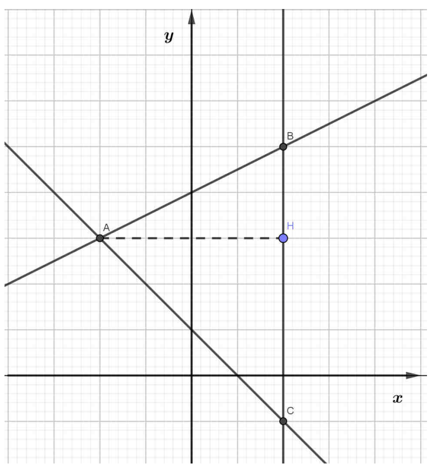



$$A\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 1 = \frac{1}{2}x + 4 \rightarrow \frac{3}{2}x = -3 - \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \rightarrow y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$C\begin{cases} y = -x + 1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2 + 1 \rightarrow y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

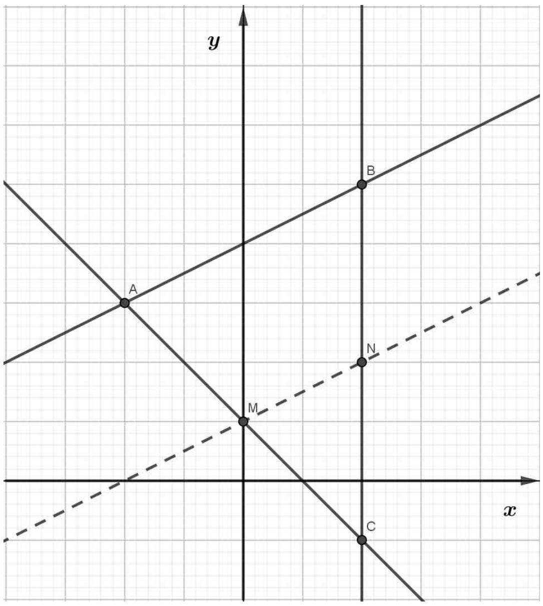
b) $A = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$



c) $M\left(\frac{-2+2}{2}=0;\frac{3-1}{2}=1\right)$

$N(2;2)$

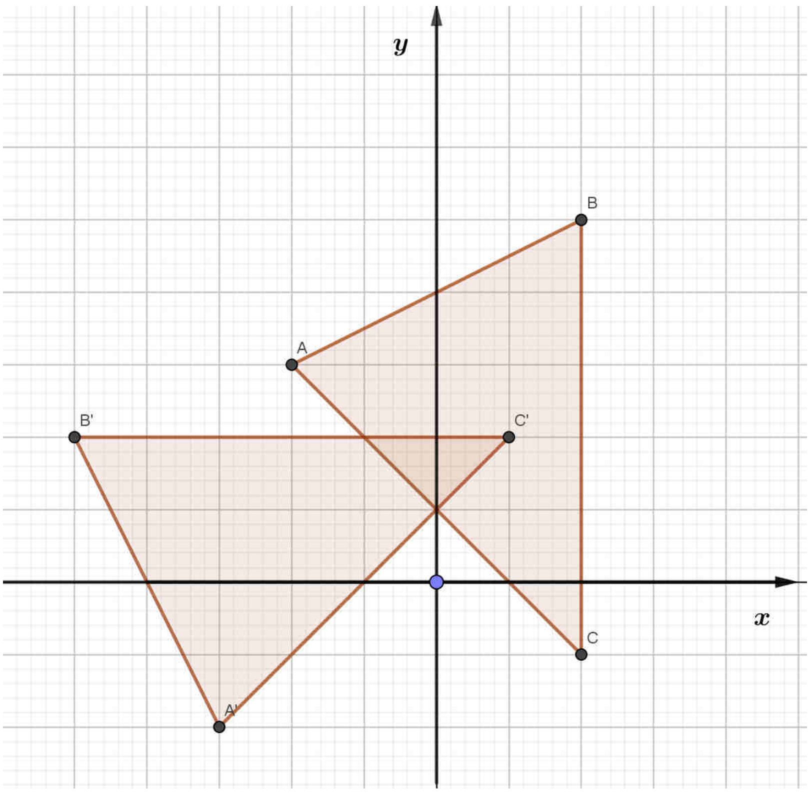
$r_{MN}: m=\frac{1}{2} \quad \to y=\frac{1}{2}x+1$




La retta per M e N ha lo stesso coefficiente angolare della retta per A e B e quindi sono parallele.

d) Per ruotare il triangolo ABC intorno all'origine di 90° ricordiamo che $(x;y)\to(-y;x)$ e quindi avremo che

$A(-2;3)\to A'(-3;-2)$
$B(2;5)\to B'(-5;2)$
$C(2;-1)\to(1;2)$



# PROBLEMI
## RETTA NEL PIANO CARTESIANO

1) Disegna le seguenti rette:
   a) $x = 5$; $y = -3$

   b) $y = 4x$; $y = -4x$
   c) $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$
   d) $y = \frac{3}{5}x$; $y = -\frac{3}{5}x$
   e) $y = \frac{5}{4}x$; $y = -\frac{4}{5}x$

2) Disegna le seguenti rette:
   a) $y = x + 4$ ; $y = -2x - 3$ ; $y = -\frac{1}{2}x + 2$
   b) $y = 3x - 1$ ; $y = \frac{1}{2}x - 2$ ; $y = -2x + 5$

3) Disegna le rette aventi equazione:

   a) $3x + y = 0$ ; $x - 2y + 4 = 0$ ; $5y - 15 = 0$ ; $4x - 2 = 0$
   b) $2x - 3y + 6 = 0$ ; $x - y = 0$ ; $2x + y - 1 = 0$ ; $3 - x = 0$

4) Determina l'equazione della retta:

   a) passante per $A(2;5)$ e avente $m = 2$

   b) passante per $A(1;0)$ e parallela alla retta di equazione y = x

   c) passante per $P(-1;3)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x - 2y - 2 = 0$

   d) passante per $P(0;-2)$ e parallela alla retta di equazione $3x - y = 0$

5) Determina la retta passante per il punto $A(2;3)$ e avente coefficiente angolare $m = -1$. Disegnala.

[ $y = -x + 5$ ]

6) Determina l'equazione della retta passante per $P(3;0)$e parallela alla retta $y=\frac{1}{2}x+3$. Disegna le due rette.

[ $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ ]

7) Determina l'equazione della retta passante per $P(-2;1)$ e perpendicolare alla retta $y=-3x+1$. Disegnale.

[ $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ ]

8) Determina l'equazione della retta passante per i punti $A(2;-4)$ e $B(0;1)$e disegnala.

[ $y=-\frac{5}{2}x+1$ ]

9) Determina l'equazione della retta passante per i punti $A(-1;-3)$ e $B(1;-1)$ e disegnala.

[ $y=x-2$ ]

10) Disegna le rette $y=3x$, $y=4-x$ e, dopo aver determinato il loro punto di intersezione A, determina l'equazione della retta passante per A e parallela alla retta di equazione $x-2y=0$.

[ $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ]

11) Determina l'equazione della retta *r* passante per i punti $A(-1;3)$, $B(2;2)$ e disegnala. Determina poi l'equazione della retta passante per A e perpendicolare a *r*.

[ $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$; $y=3x+6$ ]

12) Dati i punti $A(-3;3)$; $B(-2;5)$; $C(0;4)$; $D(-1;2)$, determina le equazioni delle rette passanti per A-B ; B-C ; C-D e D-A e verifica che individuano un quadrato. Disegnale.

[ $y=2x+9$; $y=-\frac{1}{2}x+4$; $y=2x+4$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ]

13) Trova l'area del triangolo di vertici $A(-1;2)$ $B(5;5)$ $C(6;1)$. [ $Area=\frac{27}{2}$ ]

14) Trova l'area del triangolo di vertici $A(-2;-1)$; $B(0;3)$; $C(3;0)$. [ $Area=9$ ]

15) Trova l'area del triangolo di vertici $A(1;1)$; $B(1;4)$; $C(4;3)$. [ $Area=\frac{9}{2}$ ]

16) Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(2;5)$, $C(3;0)$. Determina l'equazione dell'altezza $h_C$ uscente da C e detto H il suo punto di intersezione con il lato AB, determina l'area del triangolo ABC considerando il lato AB come base.
Confronta il risultato con quello che avresti ottenuto usando il metodo "elementare" di considerare il rettangolo all'interno del quale si trova il triangolo.

[ $Area(ABC) = 9$ ]

17) Considera i punti $A(-2;1)$, $B(1;4)$, $C(3;2)$. Verifica che i tre assi del triangolo ABC passano tutti per lo stesso punto K e determinane le coordinate.

[ $K\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ ]

18) Considera i punti $A(-5;1)$, $B(0;6)$, $C(3;-3)$. Verifica che le tre altezze del triangolo ABC passano tutte per lo stesso punto H e determinane le coordinate.

[ $H(-2;2)$ ]

19) Considera il triangolo di vertici $A(0;2)$, $B(4;2)$, $C(2;6)$: verifica che le mediane del triangolo passano tutte per lo stesso punto G e determinane le coordinate.

[ $G\left(2;\frac{10}{3}\right)$ ]

20) Considera le rette $r: x + 2y + 5 = 0$, $s: y = 2 - 2x$, $t: x - 2y + 9 = 0$.
Determina le intersezioni delle rette indicandole con A,B,C.

[ $A(3;-4)$, $B(-7;1)$, $C(-1;4)$ ]

21) Considera il triangolo di vertici A(1;1) B(3;3) C(4;0). Verifica che è isoscele.

a) Determinane l'area.
b) Determina l'equazione dell'altezza uscente dal vertice C.
c) Trasla il triangolo del vettore $\vec{v}(4;0)$ e siano A', B', C' i vertici del triangolo traslato.
d) Ruota il triangolo di 90° intorno all'origine e siano A'', B'', C'' i vertici del triangolo ruotato.

[ $A = 4$; $y = -x + 4$; $A'(5;1)$, $B'(7;3)$, $C'(8;0)$; $A''(-1;1)$, $B''(-3;3)$, $C''(0;4)$ ]

22) Trova l'area del triangolo di vertici $A(1;-1)$; $B(5;-1)$; $C(2;-3)$. [ $Area = 4$ ]

23) Trova l'area del triangolo di vertici $A(1;2)$; $B(3;4)$; $C(4;1)$ determinando l'altezza relativa ad AB. [ $Area = 4$ ]

24) Considera i punti $A(2;2)$ $B(6;4)$ $C(4;8)$ e determina le equazioni delle rette che individuano il triangolo ABC. Verifica che si tratta di un triangolo rettangolo e calcolane l'area.

[ $y = \frac{1}{2}x + 1, \quad y = -2x + 16, \quad y = 3x - 4, \quad A = 10$ ]

25) Considera il punto $A(2;2)$. Scrivi l'equazione della retta $r$ passante per O (origine) e A, l'equazione della retta $s$ perpendicolare a $r$ e passante per A e indicato con B il suo punto di intersezione con l'asse y, determina l'area del triangolo OAB.

[ $y = x, \quad y = -x + 4, \quad A = 4$ ]

26) Considera i punti $A(-2;0)$, $B(4;2)$, $D(0;3)$. Scrivi l'equazione della retta passante per A e B e determina le coordinate del punto C tale che ABCD sia un parallelogramma.

[ $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad C_1(6;5), \quad C_2(-6;1)$ ]

27) Considera i punti $A(-1;0)$, $B(4;0)$, $C(3;2)$, $D(0;2)$. Determina le equazioni delle rette che delimitano il trapezio ABCD e calcolane l'area.

[ $y = 0, \quad y = 2, \quad y = -2x + 8, \quad y = 2x + 2, \quad A = 8$ ]

28) Considera i punti $A(-2;5)$, $B(1;3)$, $C(7;-1)$: verifica che sono allineati (appartengono cioè alla stessa retta) e determina l'equazione della retta passante per essi.

[ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ ]

29) Determina l'equazione della retta s per $A(2;3)$ parallela alla retta $r: y = \frac{1}{2}x$. Indica con B l'intersezione di $s$ con l'asse $y$. Tracciata la retta per A parallela all'asse $y$ e detta C la sua intersezione con $r$, indica come risulta il quadrilatero ABOC e determinane l' area.

[ $s: y = \frac{1}{2}x + 2; B(0;2); C(2;1)$ ; parallelogramma ; $A = 4$ ]

30) Considera i punti $A(0;3)$, $B(3;5)$, $C(5;2)$.

a) Determina le equazioni delle rette $r_{AB}$, $r_{BC}$, $r_{AC}$
b) Verificare che ABC è un triangolo rettangolo isoscele
c) Determina l' area di ABC.

[ $r_{AB} : y = \frac{2}{3}x + 3; r_{BC} : 3x + 2y - 19 = 0, r_{AC} : y = -\frac{1}{5}x + 3; A = \frac{13}{2}$ ]

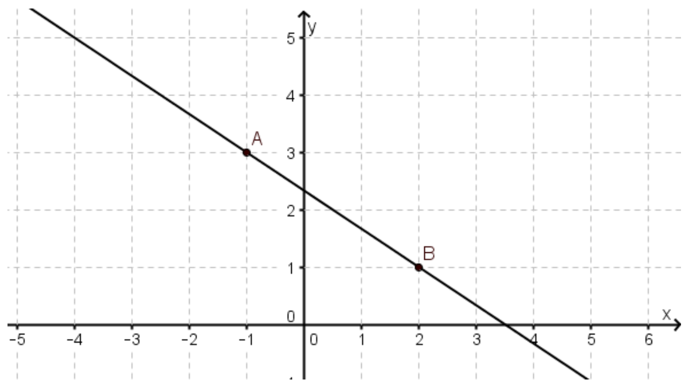
31) *(Invalsi 2017/18)*

Considera l'equazione $\boldsymbol{y = 2x + k}$. Per quale valore di $k$ essa rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate P (1; 5)?

[3]

32) *(Invalsi 2017/18)*

Considera la retta passante per i punti A (–1; 3) e B (2; 1). Determina la pendenza (o coefficiente angolare) della retta AB.




[ $-\frac{2}{3}$ ]

33) *(Invalsi 2014/15)*

Nel piano cartesiano *Oxy* la retta di equazione $y = 3x - 5$ e la retta di equazione $y = \frac{k}{2}x - 1$ sono tra loro parallele. Qual è il valore di $k$ ?

[6]

34) *(Invalsi 2015/16)*

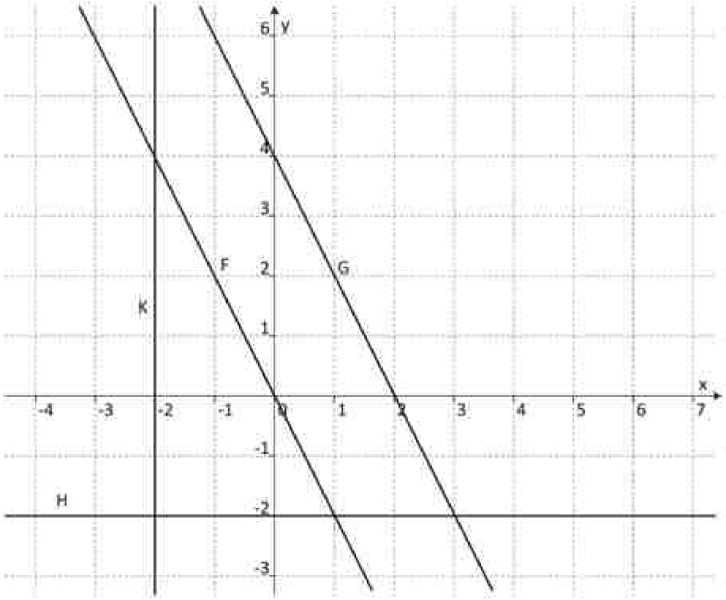
Per quale valore di m l'equazione y = mx rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate (3;12)?

$[m = 4]$

35) *(Invalsi 2017/18)*

Sul seguente piano cartesiano sono rappresentate le rette F, G, H, K.

Associa a ciascuna delle equazioni in tabella la retta corrispondente. Metti una crocetta per ogni riga.




| | Retta F | Retta G | Retta H | Retta K |
|---|---|---|---|---|
| a. *y=-2x+4* | | | | |
| b. *y=-2x* | | | | |
| c. *y=-2* | | | | |

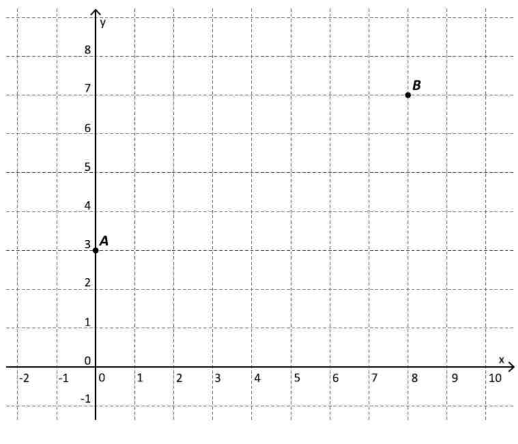
[*a --> retta G, b --> retta F, c --> retta H*]

36)*(Invalsi 2015/16)*

Sul piano cartesiano in figura sono assegnati i punti A e B di coordinate intere.

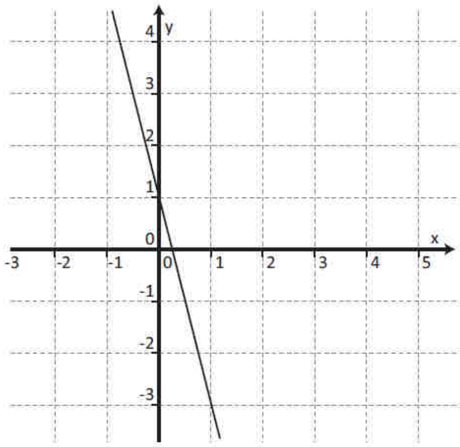
Il coefficiente angolare della retta AB è

..................................

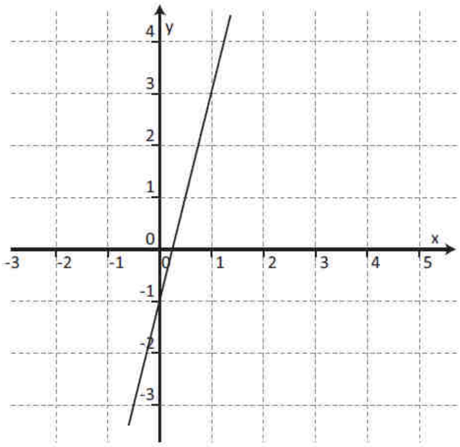


37) *(Invalsi 2014/15)*

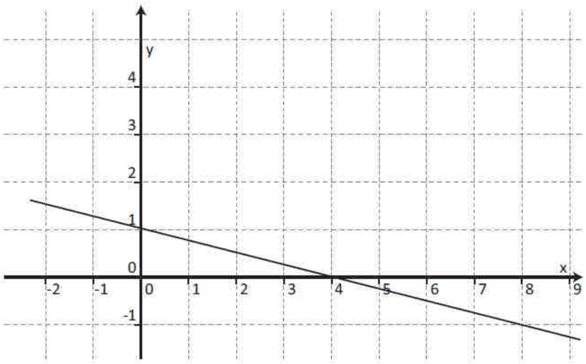
Uno dei seguenti grafici rappresenta la retta di equazione y = 1 – 4x. Quale?



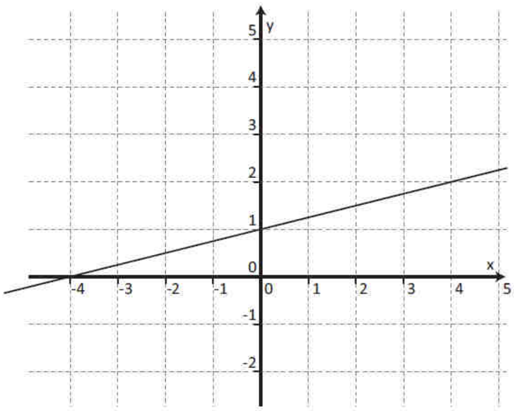
A. ☐



B. ☐



C. ☐

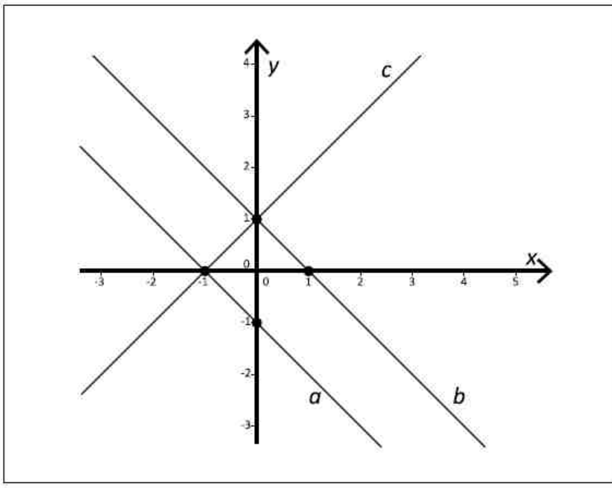


D. ☐

[*A*]

38) *(Invalsi 2015/16)*

In figura sono rappresentate le tre rette a, b, e c sono date quattro equazioni.




**1.** $y = x + 1$

**2.** $y = x - 1$

**3.** $y = -x + 1$

**4.** $y = -x - 1$

Completa la seguente tabella associando a ogni retta il numero dell'equazione corrispondente.

| Retta | Equazione corrispondente |
|---|---|
| *a* | |
| *b* | |
| *c* | |

39)*(Invalsi 2014/15)*

Una sorgente di montagna alimenta continuativamente un serbatoio con 5 m$^3$ di acqua ogni settimana. Oggi il serbatoio contiene 100 m$^3$ di acqua e un villaggio inizia a prelevare 7 m$^3$ di acqua alla settimana. Completa la seguente tabella relativa al numero *n* di m$^3$ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane a partire da oggi:

| t | n (m$^3$) |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | … |
| 2 | … |
| 3 | … |
| 4 | … |

a. Scrivi un'espressione che rappresenti il numero n di $m^3$ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero t di settimane.

b. Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?

$$[n = 100 - 2t, \quad 50]$$

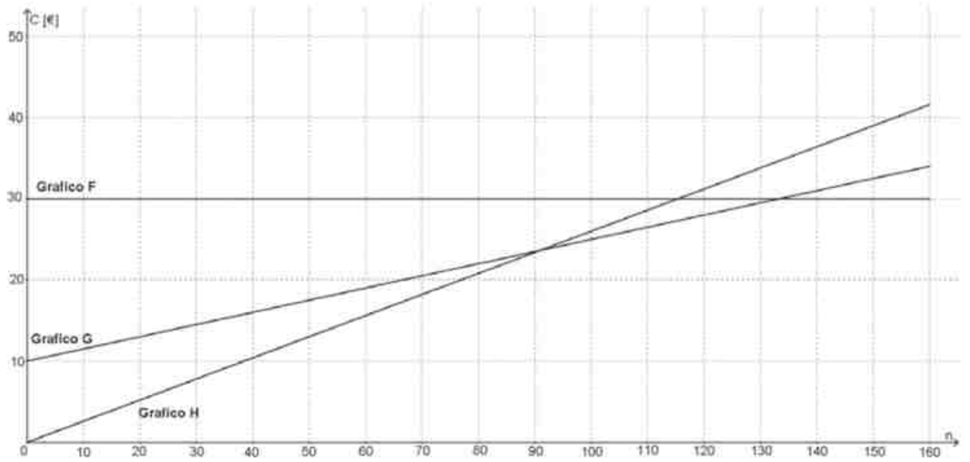
40) *(Invalsi 2015/16)*
Il contratto con l'Internet provider di Carlo prevede, ogni mese, un costo fisso F e un costo variabile, proporzionale al tempo t di connessione espresso in ore. Il costo in euro per ogni ora di connessione viene indicato con *k*. Quale formula esprime il costo *C* che Carlo deve sostenere, ogni mese, in funzione delle ore di connessione?

$$[C = F + kt]$$

Nel mese di gennaio Carlo si è connesso per 185 ore e nel mese di febbraio il tempo di connessione è cresciuto del 60% rispetto a gennaio.
Come si esprime il costo che Carlo deve sostenere nel mese di febbraio?

$$[C = F + k \cdot 1{,}6 \cdot 185]$$

41*)(Invalsi 2017/18)*
Nel 2008 un gestore telefonico aveva proposto a Marcella tre possibili tariffe mensili per le telefonate nazionali da telefono fisso:
Tariffa 1: telefonate a 26 centesimi di euro l'una.
Tariffa 2: 30 euro con chiamate illimitate senza ulteriore spesa.
Tariffa 3: 10 euro di spesa fissa più 15 centesimi di euro per ogni telefonata.
In figura sono disegnati i grafici che rappresentano le tre tariffe: in ascissa è riportato il numero *n* di telefonate e in ordinata il costo *C* in euro.




a. Inserisci il nome del grafico (F, G o H) che corrisponde a ciascuna tariffa.
[*1→H 2→F 3→G* ]
b. Le seguenti formule esprimono, per le tariffe 1 e 2, il costo *C* (in euro) in funzione del numero n di telefonate effettuate: Tariffa 1: $C = 0{,}26n$; Tariffa 2: $C = 30$ .
Qual è la formula che esprime la tariffa 3? [C=10+0,15n]
c. Marcella dice che, qualunque sia il numero di telefonate, la tariffa 1 costa sempre meno delle altre due. E' vero?
[no]

42*)(Invalsi 2017/18)*
Una casa editrice propone all'autore di un libro di scegliere uno tra due diversi tipi di contratto relativi al suo compenso: contratto forfettario con compenso di 50 000 €, indipendentemente dal numero di copie vendute; contratto a partecipazione con compenso di 5000 € a cui si aggiunge il 10 % del prezzo di copertina per ogni copia venduta. Il prezzo di copertina del libro è di 30 €.
L'autore sceglie il contratto a partecipazione. Completa la tabella.

| Numero di copie vendute | Compenso per l'autore (in euro) |
|---|---|
| 0 | |
| 1000 | |
| 2000 | |

[0→5000; 1000→8000; 2000→11000]

Scrivi la formula che esprime il compenso *C* (in euro) dell'autore in funzione del numero *n* di copie vendute nel caso del **contratto a partecipazione** [C=*5000 + 3n*]

Qual è il numero di copie che devono essere vendute perché il compenso ottenuto con il contratto a partecipazione sia uguale a quello ottenuto con il contratto forfettario? [15000 copie]

# SCHEDA DI VERIFICA
## ISOMETRIE E RETTA NEL PIANO CARTESIANO

**1)** a) Disegna le rette di equazione $r_1 : y = -x + 1$ ; $r_2 : x - 2y + 8 = 0$ ; $r_3 : x = 2$ e determina le coordinate dei loro punti di intersezione $A(r_1, r_2)$ $B(r_2, r_3)$ $C(r_1, r_3)$.

b) Determina perimetro e area del triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$.

c) Trasla il triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ applicando la traslazione di vettore $\vec{v}(5;0)$: disegna il triangolo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ traslato e scrivi le coordinate di A', B', C'.

**2)** Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(1;6)$, $C(5;0)$.

a) Determina le equazioni delle rette $r_{AB}$ , $r_{BC}$ , $r_{AC}$ .

b) Calcola l'area del triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$.

c) Determina le coordinate del punto M, punto medio di AC, e del punto N, punto medio di BC e scrivi l'equazione della retta passante per M e N. Verifica che risulta parallela alla retta AB.

d) Applica al triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ la rotazione di 90° intorno all'origine degli assi, scrivi le coordinate di A', B', C' (punti ruotati di A, B, C ) e disegna $A'\overset{\Delta}{B'}C'$.

**3)** a) Disegna le rette $r_1: \ y = x + 3$ , $r_2: \ 2x + y - 9 = 0$ , $r_3: \ y = x - 3$ , $r_4: \ 2x + y - 3 = 0$ e determina i loro punti di intersezione.

b) Come risulta il quadrilatero individuato dalle rette? Determinane perimetro e area.

# SCHEDA PER IL RECUPERO
## ISOMETRIE E RETTA NEL PIANO CARTESIANO

**1)** a) Disegna le rette di equazione $r_1: y=2$ ; $r_2: 2x+y-12=0$ ; $r_3: x-y+3=0$ e determina le coordinate dei loro punti di intersezione $A(r_1,r_3)$ $B(r_2,r_3)$ $C(r_1,r_2)$.

b) Determina perimetro e area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

c) Trasla il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ applicando la traslazione di vettore $\vec{v}(8;1)$: disegna il triangolo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ traslato e scrivi le coordinate di A', B', C'.

**2)** Considera il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(6;7)$, $C(8;1)$.

a) Determina le equazioni delle rette $r_{AB}$ , $r_{BC}$ , $r_{AC}$ . Come risulta il triangolo ABC?

b) Calcola l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

c) Determina l'ortocentro H del triangolo (interseca due altezze).

d) Applica al triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ la rotazione di 90° intorno all'origine degli assi, scrivi le coordinate di A', B', C' (punti ruotati di A, B, C ) e disegna $A'\overset{\Delta}{B'}C'$.

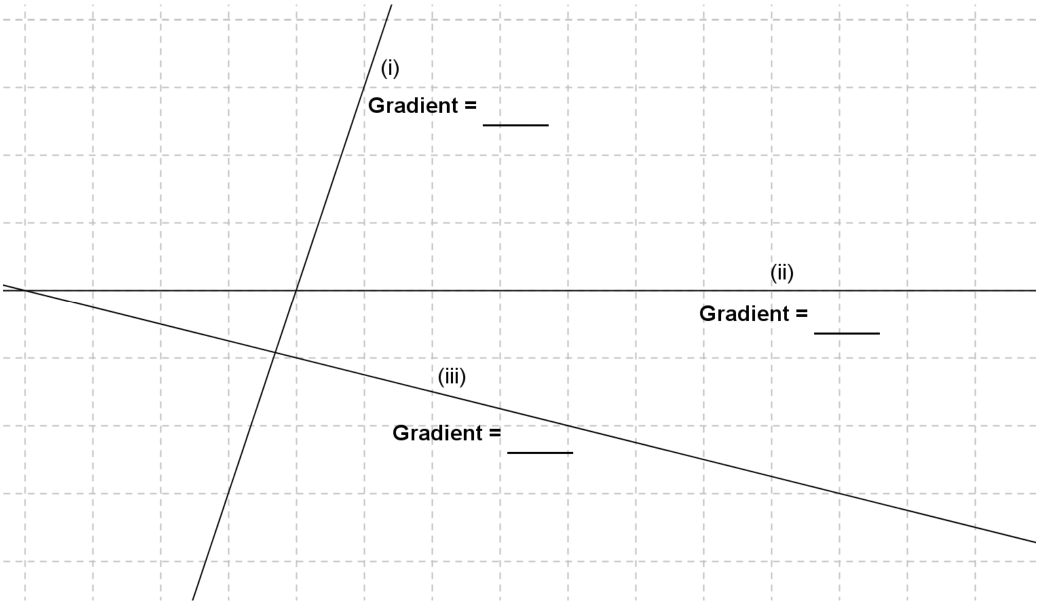
**3)** a) Disegna le rette $r_1:\ y=\frac{1}{2}x+3$ , $r_2:\ 2x+y-3=0$ , $r_3:\ x-2y-4=0$ , $r_4:\ y=-2x+13$ e determina i loro punti di intersezione.

b) Come risulta il quadrilatero individuato dalle rette? Determinane perimetro e area.

# TEST IN INGLESE

## STRAIGHT LINES

**1)** Find the gradient of the following straight lines.



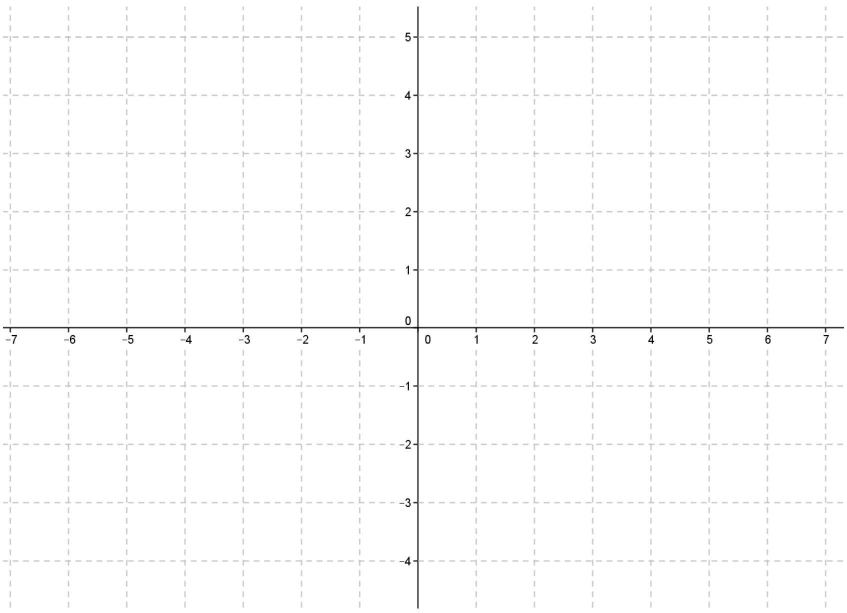

**2)** Write down the gradient and y-intercept of the following lines. Sketch the lines on the axes below.

**a)** $y = 3x - 1$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________

**b)** $y = -2x + 3$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________

**c)** $y = \frac{3}{2}x + 1$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________

**d)** $y = -\frac{x}{2} - 2$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________



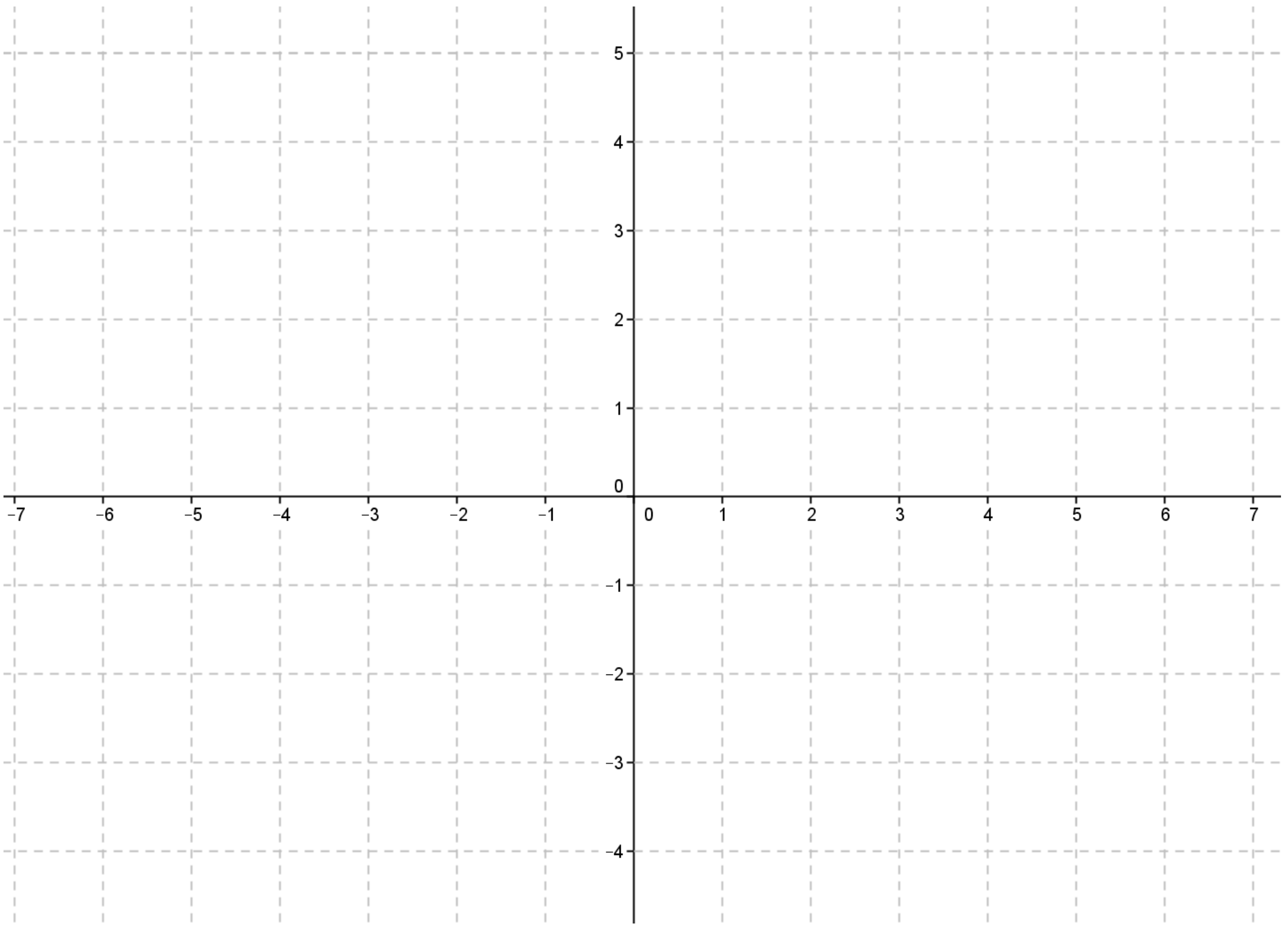
**3)** For each equation below:

- rearrange the equation so it is in the form $y = mx + c$

- hence state the gradient and y-intercept

- draw the line on the axes below

**a)** $x + y = 2$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________
**b)** $3x - y = 2$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________
**c)** $2x + 4y - 9 = 0$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________
**d)** $3x - 2y = 8$ Gradient: ________________ y-intercept: ________________

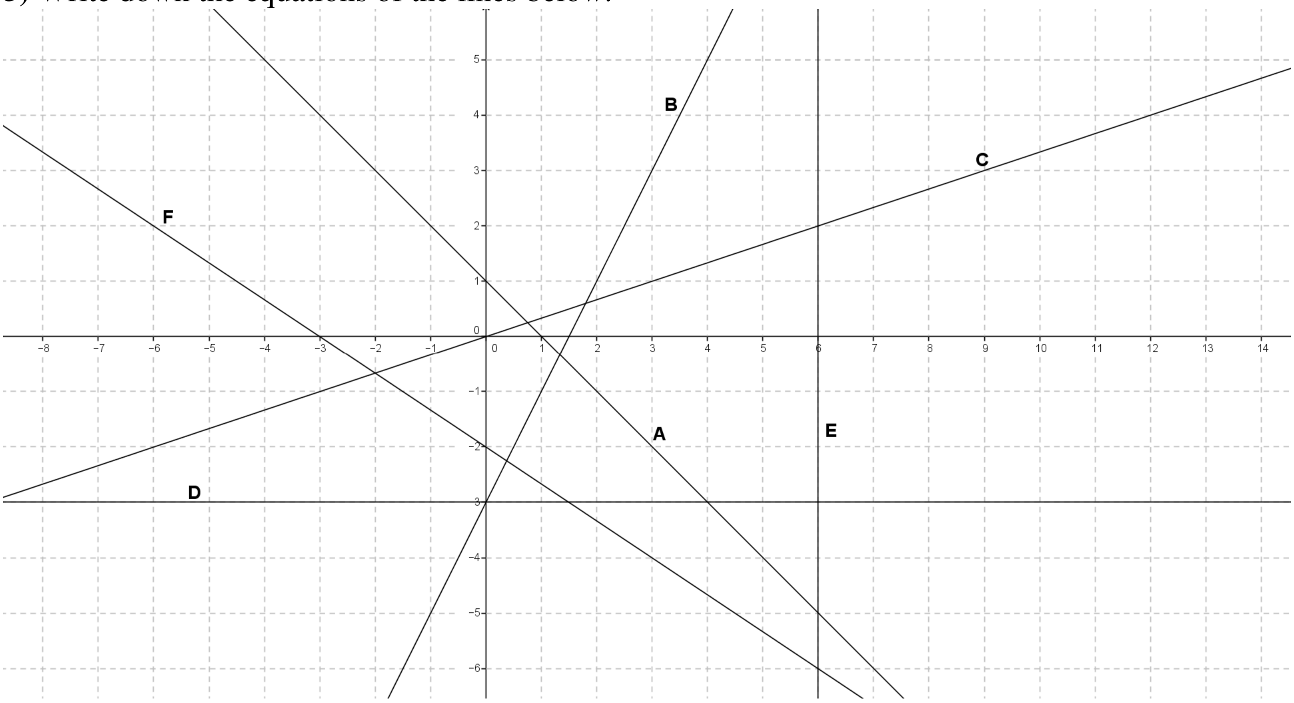


**4)** Rearrange the equations of these lines so they are in the form $ax + by + c = 0$

**a)** $y = -\dfrac{x}{3} - 2$

**b)** $y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{1}{3}$

**5)** Write down the equations of the lines below.




A: __________________ B: __________________ C: __________________

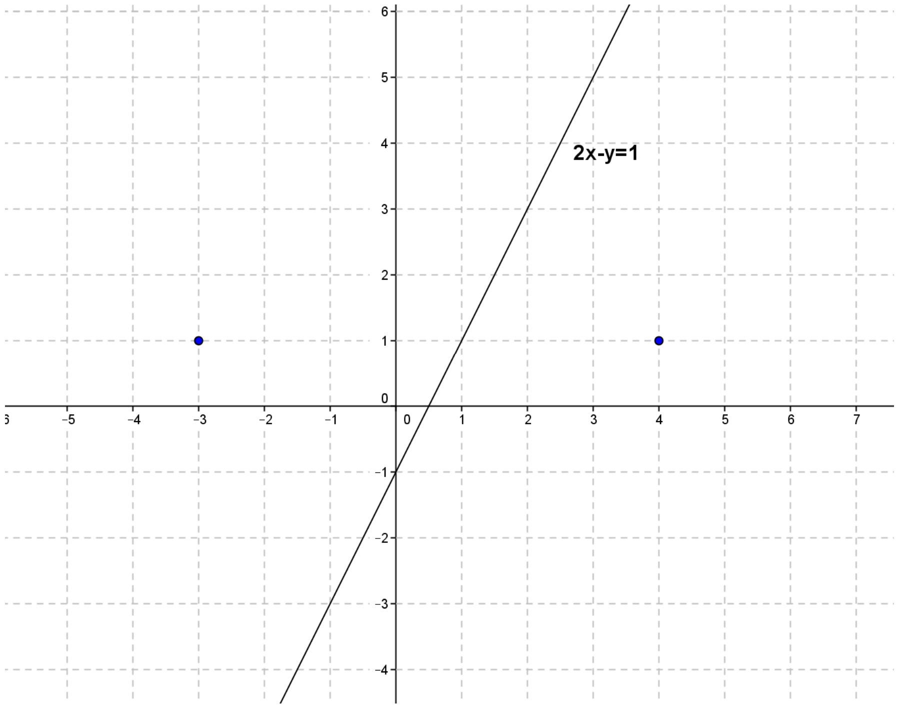
D: __________________ E: __________________ F: __________________

**6)** Complete the table:

| **Gradient of line** | **Gradient of perpendicular** |
|---|---|
| 1 | |
| | -4 |
| $-\dfrac{2}{3}$ | |
| | $\dfrac{2}{3}$ |
| 0.3 | |

**7)** Find the equation of these lines.

a) parallel to $2x - y = 1$ going through (4,1)
b) perpendicular to $2x - y = 1$ going through (-3,1)
c) Draw these two lines on the grid below.

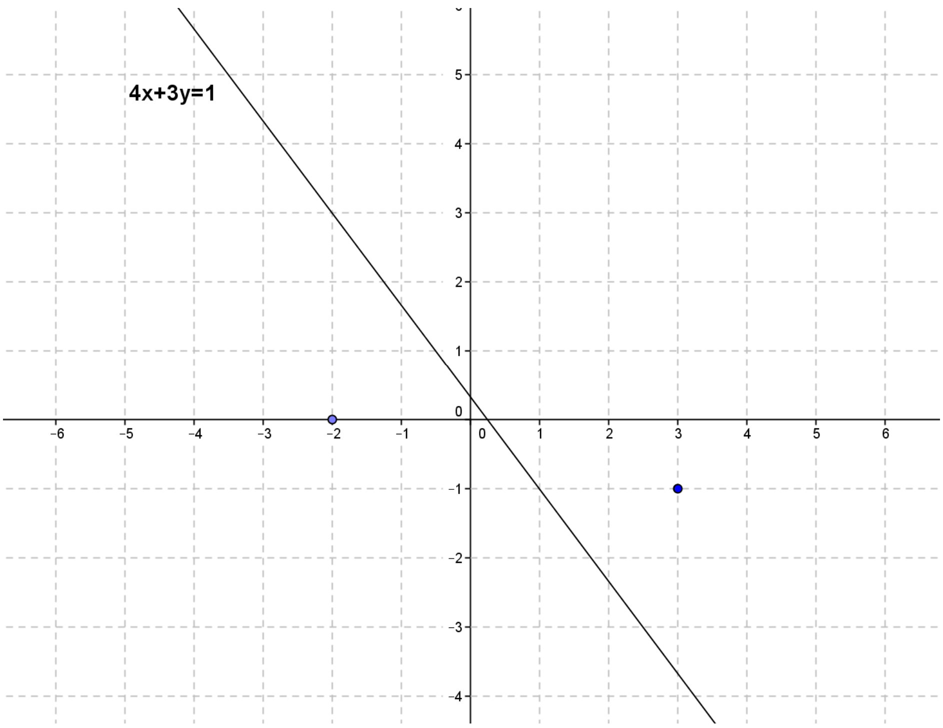



**8)** Find the equation of these lines. Give your answers in the form $ax + by + c = 0$ where $a, b$ and $c$ are integers.

**a)** parallel to $4x + 3y = 1$ going through (-2,0)

**b)** perpendicular to $4x + 3y = 1$ going through (3,-1)

**c)** Draw these two lines on the grid .



**9)** Point A, B, C have co-ordinates (4,1), (6,-2) and (-1,-9) respectively.

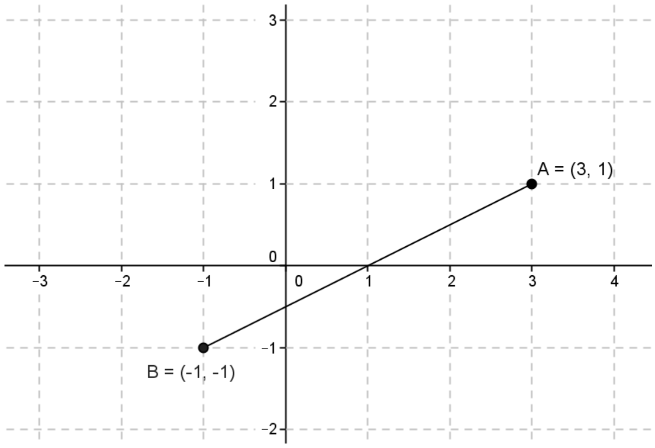
a) Find the co-ordinates of the mid-point AC.

b) Find the equation of the line through B perpendicular to AC. Give your answer in the form $ax + by + c = 0$.

**10)** Given the coordinates of the end points of these lines, find the length, mid-point and gradient of each line.

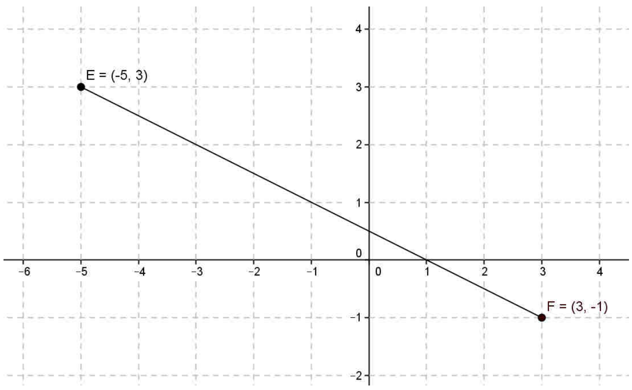
a)

Length: _______________
Mid-point: ____________
Gradient: _____________




b)

Length: _______________
Mid-point: ____________
Gradient: _____________




**11)** The mid-point of A(-1,5) and B($m$, $n$) is (2,5). Find the value of $m$ and $n$.

**12)** Find the equation of the perpendicular bisector of A(2,4) and B (-6,0).

**13)** The line $l_1$ is given by $x - 3y = 6$. The point P is (-3,2).
Find the equation of the line perpendicular to $l_1$ that goes through P.

**14)** The median of a triangle is the line that joins a vertex to the mid-point of the opposite side. A triangle is formed by the points A(-5,2), B(2,3) and C(4,-5).
Find the equation of the median from the point A.

# I radicali

**I)** Consideriamo l'operazione che associa ad un numero il suo quadrato

$$x \to x^2$$

Per esempio:

$$3 \to 3^2 = 9$$
$$(-3) \to (-3)^2 = 9$$
$$2 \to 2^2 = 4$$
$$(-2) \to (-2)^2 = 4$$

Possiamo definire l'operazione inversa?

È possibile, dato un numero $a$, individuare un numero di cui $a$ è il quadrato?

$$? \leftarrow 9$$
$$? \leftarrow -5$$

**1° osservazione**
Ci accorgiamo subito che se $a < 0$ non troviamo nessun numero che elevato al quadrato dia come risultato $a$.
Quindi dovremo limitare il campo ai numeri positivi $a \geq 0$.

**2° osservazione**
Se consideriamo per esempio $a = 9$ abbiamo due numeri che hanno come quadrato 9

$$3 \leftarrow 9 \qquad (3^2 = 9)$$
$$(-3) \leftarrow 9 \qquad ((-3)^2 = 9)$$

Ma poiché non possiamo associare ad un'operazione due risultati i matematici hanno stabilito di prendere il numero positivo (nel nostro caso 3)

$$3 \leftarrow 9$$

Il simbolo usato per indicare l'operazione inversa del "fare il quadrato" e chiamata radice quadrata di $a$ è $\sqrt{a}$.
Quindi, per esempio, abbiamo $\sqrt{9} = 3$, mentre non associamo (per ora) nessun significato alla scrittura $\sqrt{-9}$.

**Nota**: il simbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ è la stilizzazione di $r$ che sta per "radice".

**Problema**

Ma se estraiamo la radice quadrata di un numero che non è un quadrato, per esempio $a = 2$, il simbolo $\sqrt{2}$ quale numero rappresenta?

$$\sqrt{2} = ?$$

Se usiamo la calcolatrice, digitando $\sqrt{2}$ otteniamo

1,414213562…..

Sappiamo che i numeri razionali corrispondono a numeri decimali finiti o illimitati **periodici** mentre questo numero non sembra avere un periodo….

Il periodo potrebbe essere molto lungo e magari potrei non essermi accorto della ripetizione…

Ma in realtà fin dall'antichità è stato "**dimostrato**"(*) che $\sqrt{2}$ **non è un numero decimale periodico** perché non può essere scritto come frazione.

(*)Il ragionamento è questo: supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2}$ corrisponda ad un numero razionale. Possiamo sempre ridurlo ai minimi termini cioè considerare $a$ e $b$ primi tra loro

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Ma allora:

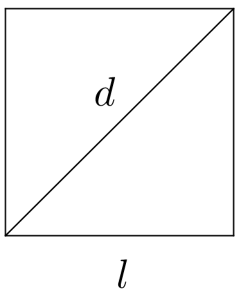
- se $a$ è pari (e quindi $b$ non può esserlo perché sono primi tra loro) allora $a^2$ è divisibile per 4 mentre $2b^2$ non lo è ($b^2$ è dispari $\Rightarrow 2b^2$ è divisibile per 2 ma non per 4);
- se $a$ è dispari $\Rightarrow a^2$ è dispari mentre $2b^2$ è pari.

In conclusione non può sussistere l'uguaglianza $a^2 = 2b^2$.

## Nota storica

$\sqrt{2}$ corrisponde al rapporto tra la misura della diagonale e il lato di un quadrato.

La scoperta che diagonale e lato di un quadrato non sono "confrontabili" tra loro (cioè il loro rapporto non è un numero razionale) fu fatta dalla scuola pitagorica e tenuta segreta per lungo tempo.

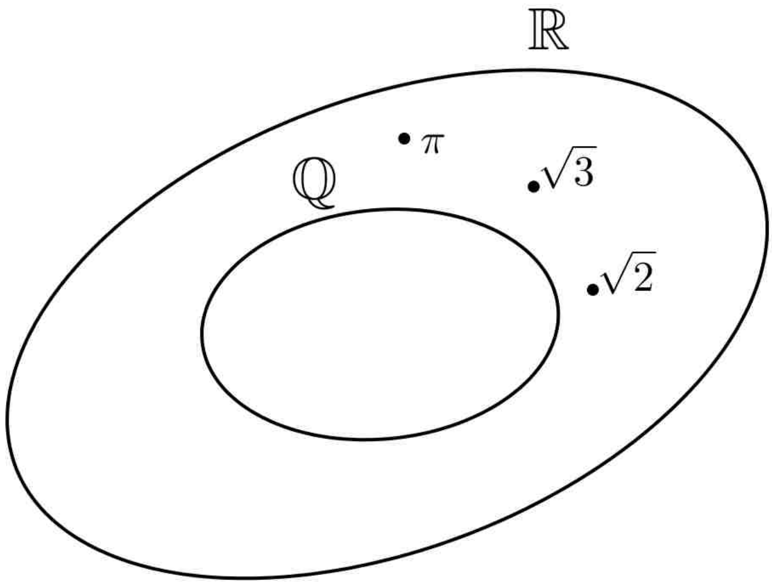



Infatti, dal teorema di Pitagora abbiamo
$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot l$

I matematici hanno chiamato i **numeri decimali illimitati aperiodici** (a = senza – periodo) numeri irrazionali (cioè non razionali) ed hanno chiamato **numeri reali $\Re$ l'unione dei numeri razionali e irrazionali**.

Non ci sono solo $\sqrt{2}$ (o $\sqrt{3}$ ecc..) tra i numeri irrazionali: in seguito sono stati scoperti anche altri numeri che hanno una rappresentazione decimale illimitata aperiodica ma che non sono radici.

Un esempio è $\pi$ che rappresenta il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro.




## Osservazione

Inizialmente avevamo considerato i numeri naturali $N$, avevamo poi ampliato $N$ perché fosse sempre possibile effettuare la sottrazione tra due numeri ottenendo $Z$;

per poter sempre eseguire la divisione tra numeri interi appartenenti a $Z$ avevamo introdotto l'insieme dei numeri razionali Q;

per poter eseguire l'operazione inversa della potenza abbiamo infine introdotto i numeri irrazionali che, uniti ai razionali, danno l'insieme dei numeri reali $\Re$.

**II)** È chiaro che, come abbiamo definito l'operazione di radice quadrata come operazione inversa dell'elevamento al quadrato, possiamo definire *l'operazione di radice cubica come operazione inversa dell'elevamento al cubo.*

Per esempio se consideriamo

$$x \to x^3$$

ci accorgiamo che non ci sono i problemi trovati nel caso dell'elevamento al quadrato perché si ottengono come risultati numeri positivi e negativi e non ci sono numeri diversi che danno lo stesso risultato.

Per esempio:

$$2 \to 2^3 = 8$$
$$-2 \to (-2)^3 = -8$$

Quindi:

$$2 \leftarrow 8$$
$$-2 \leftarrow -8$$

Possiamo indicare l'estrazione di radice cubica di $a$ con il simbolo

$$\sqrt[3]{a}$$

($a$ può essere sia negativo che positivo e il numero $\sqrt[3]{a}$ può risultare sia positivo che negativo).

Avremo quindi:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Ma se $a$ non è un cubo, cosa rappresenta $\sqrt[3]{a}$ ?
Per esempio, $\sqrt[3]{2}$ che numero è?

Anche in questo caso, come per $\sqrt{2}$ , ci troviamo di fronte ad un numero decimale illimitato aperiodico cioè ad un numero irrazionale.

**III)** È chiaro che in generale possiamo considerare l'operazione inversa dell'elevamento a potenza $n-$esima .
**Avremo però due casi distinti:**

- Se $n$ **è pari** il simbolo
$$\sqrt[n]{a}$$
avrà significato solo se $a \geq 0$ (elevando ad una potenza pari si ottengono sempre numeri positivi) e indicherà un numero positivo o nullo.

- Se $n$ **è dispari** il simbolo
$$\sqrt[n]{a}$$
avrà sempre significato e potrà essere sia positivo che negativo.

In generale $\sqrt[n]{a}$ **si chiama più brevemente "radicale"** (o radice $n-$esima di *a*)

$$\begin{cases} n & \text{viene chiamato } \textbf{INDICE} \text{ del radicale} \\ a & \text{viene chiamato } \textbf{RADICANDO} \end{cases}$$

Per quello che abbiamo precedentemente osservato **i radicali possono essere numeri razionali o irrazionali**.

**Esempi**

$\sqrt{25} = 5 \in$ Q
$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad \in$ Q
$\sqrt{5} \notin$ Q (numero irrazionale)
$\sqrt[3]{2} \notin$ Q (numero irrazionale)

## Nota

Osserviamo che se $n$ è dispari possiamo sempre ricondurci ad avere un radicando positivo.
Per esempio:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

## Radicali equivalenti

Consideriamo radicali del tipo

$$\sqrt[n]{a^m}$$

con $a^m \geq 0$ perché anche nel caso di indice dispari ci si può ricondurre a considerare il radicando positivo o nullo.

*m* **viene detto esponente del radicando**.

Anche se sono scritti in forma diversa, due radicali possono rappresentare lo stesso numero?
Consideriamo per esempio $\sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{4}$ : se proviamo con la calcolatrice otteniamo lo stesso numero!

Se scriviamo $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$ notiamo che, rispetto a $\sqrt{2}$ , indice ed esponente del radicando sono stati moltiplicati per 2.

Inoltre osserviamo che elevando alla quarta otteniamo lo stesso numero:

$(\sqrt{2})^4 = [(\sqrt{2})^2]^2 = 2^2$
$(\sqrt[4]{2^2})^4 = 2^2$

Abbiamo quindi individuato questa proprietà

*Moltiplicando per uno stesso numero naturale (≠ 0) INDICE e ESPONENTE del radicando di un radicale si ottiene un radicale **"equivalente"** (a cui è associato cioè lo stesso numero reale).*

**Nota**

E' un po' come quando, moltiplicando per uno stesso numero naturale (≠ 0) numeratore e denominatore di una frazione si ottiene una frazione equivalente (cioè associata allo stesso numero razionale).

Naturalmente (per simmetria) se dividiamo indice ed esponente del radicando di un radicale per un divisore comune si ottiene un radicale equivalente.

$$\sqrt{2} \underset{\leftarrow}{\rightarrow} \sqrt[4]{2^2}$$

In simboli quindi abbiamo

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

## Riduzione di radicali allo stesso indice

Come possiamo "**confrontare**"(cioè stabilire qual è il maggiore) due radicali come $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$ ?

Possiamo "ridurli" allo stesso indice utilizzando la proprietà precedente: conviene prendere come indice il **minimo comune multiplo dei due indici**, nel nostro caso

$$m.c.m.(2,3) = 6$$

Quindi

$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$ (moltiplico per 3 indice ed esponente del radicando)

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}$ (moltiplico per 2 indice ed esponente del radicando)

Quindi ora confronto i radicandi ed ottengo

$$\sqrt[6]{2^3} < \sqrt[6]{3^2} \qquad \text{(poiché } 8 < 9\text{)}$$

## Radicali simili

Quando due radicali hanno **stesso indice**, **stesso radicando** e differiscono al massimo per un fattore che li moltiplica (detto coefficiente del radicale) si dicono **simili.**

Per esempio $\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$ sono radicali simili

**Esempio**

$\sqrt[4]{9}$ e $2\sqrt{3}$ sono simili?

$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

Quindi sono simili.

# Operazioni con i radicali

- ## Addizione e sottrazione

**Possiamo sommare o sottrarre tra loro due radicali solo se sono simili**.

Esempio: $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1+3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Se i radicali non sono simili non possiamo fare niente.
Esempio: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ rimane così!

**NOTA**: ricorda che

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}\ !!$$

Se infatti elevi al quadrato $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ottieni $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=2+3+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=5+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, mentre se elevi al quadrato $\sqrt{5}$ ottieni 5.

- ## Moltiplicazione e divisione

**a) Radicali con lo stesso indice**

Esempio: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=?$

Proviamo a scrivere $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}$: se eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza otteniamo

$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})^2=2\cdot 3$
$(\sqrt{2\cdot 3})^2=2\cdot 3$
e quindi l'uguaglianza è vera. Quindi in generale

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

**b) Radicali con indice diverso**

**Esempio**: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=?$

Possiamo provare a ridurli allo stesso indice e poi procedere come nel caso precedente.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}$$

Analogamente per la divisione:

**a') Divisione tra radicali con lo stesso indice**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

**b') Divisione tra radicali con indice diverso**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^2}}=\sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2}}$$

## "Trasportare fuori" dal segno di radice

Possiamo scrivere $\sqrt{32}$ in modo diverso?

$$\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=\sqrt{2^4\cdot 2}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Proprietà della moltiplicazione}}}{=}\sqrt{2^4}\cdot\sqrt{2}=2^2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

Quindi utilizzando la regola della moltiplicazione tra radicali a volte riusciamo a scrivere un radicale in modo diverso e *diciamo che abbiamo trasportato un fattore fuori dal segno di radice.*

**Esempi**

1) $\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

2) $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

3) $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

**Nota**

Questo può essere importante se dobbiamo sommare o sottrarre radicali che a prima vista non sembrano simili.

Esempi

1) $\sqrt{50}+\sqrt{8}=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

2) $\sqrt{27}+\sqrt{12}=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

- **Potenza di un radicale**

Come si calcola la potenza di un radicale?

Per esempio: $(\sqrt{5})^3 = ?$

Poiché abbiamo $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5^3}$ in generale possiamo dire che la potenza di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza $n$-esima del radicando.
In simboli:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

- **Radice di un radicale**

Come si calcola la radice di un radicale?

Come risulta, per esempio:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = ?$$

Proviamo a vedere se $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$
Elevando alla sesta entrambi i membri abbiamo lo stesso risultato:

$$(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6 = [(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3]^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(\sqrt[6]{2})^6 = 2$$

Quindi in generale la radice $m$-esima di un radicale con indice $n$ sarà un radicale che ha per indice il prodotto $m \cdot n$ e lo stesso radicando

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

## "Razionalizzazione" del denominatore di una frazione

I. Consideriamo la frazione $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Possiamo trasformarla in una frazione equivalente che non abbia radici al denominatore?

Possiamo moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{2}$ e otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e diciamo che abbiamo razionalizzato il denominatore.

E se consideriamo $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ?

In questo caso moltiplicando per $\sqrt[3]{2}$ ottengo al denominatore $\sqrt[3]{2^2}$ e non riesco a "sbarazzarmi" del radicale. Moltiplicando però per $\sqrt[3]{2^2}$ ….

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

In generale quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

II. A volte si trovano frazioni del tipo $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Come possiamo, in questo caso, "razionalizzare" il denominatore?

Ricordando il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ possiamo moltiplicare per $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ numeratore e denominatore

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(-1)} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Analogamente, se avessimo avuto $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ moltiplicando per $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(-1)} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

## Radicali come potenze con esponente razionale

I radicali possono essere anche scritti come potenze con esponente razionale e le **proprietà usuali delle potenze corrispondono alle proprietà che abbiamo visto per i radicali**.

Possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a > 0)$$

Per esempio:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{4}}$$

Osserviamo che

- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}}$

  Infatti $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

  Infatti $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5}$

- $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = (\dfrac{5}{2})^{\frac{1}{3}}$

  Infatti $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$

  Infatti $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{2}$

- $(\sqrt{2})^3 = (2^{\frac{1}{2}})^3 = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$

- $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$

  Infatti $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

# Radicali letterali

## Campo di esistenza di un radicale letterale

### *Radicali con indice pari*

Abbiamo visto che il radicando deve essere positivo o nullo. Se quindi abbiamo

$$\sqrt{a-1}$$

dovrà essere $a-1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

$a \geq 1$ viene chiamato **campo di esistenza** del radicale $\sqrt{a-1}$.

### *Radicali con indice dispari*

Se l'indice è dispari il radicando può essere negativo, positivo o nullo. Se per esempio abbiamo

$$\sqrt[3]{a-1}$$

non c'è nessuna limitazione per $a$ e quindi il campo di esistenza è l'insieme dei numeri reali:

$$\text{C.E. } \forall a \in \Re$$

Naturalmente se consideriamo un'espressione letterale contenente delle *frazioni*, i denominatori dovranno essere diversi da zero.

Per esempio il campo di esistenza di $\sqrt[3]{\frac{1}{a-1}}$ sarà $a \neq 1$ (tutti i valori di $a$ escluso $a = 1$).

## Operazioni con radicali letterali

Dobbiamo premettere la seguente definizione:
**Valore assoluto di un numero reale:** il valore assoluto di un numero reale $x$ è indicato con la notazione $|x|$ ed è definito:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Quindi $|x|$ è sempre positivo o nullo.

**Esempi**

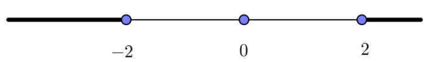
$|5| = 5$

$|-3| = -(-3) = +3$

$|x| = 2 \Rightarrow x = -2 \cup x = 2$

Se abbiamo $|x| < 2$ vuol dire che $-2 < x < 2$


Se abbiamo $|x| > 2$ vuol dire che $x < -2 \cup x > 2$



## Osservazione

- $\sqrt{x^2}$ è uguale a $x$?

Osserviamo che, per esempio che $\sqrt{3^2} = 3$ e che $\sqrt{(-3)^2} = 3$
Quindi, solo se $x \geq 0$ vale $\sqrt{x^2} = x$, mentre se $x < 0 \rightarrow \sqrt{x^2} = -x$.

Quindi, ricordando la definizione di valore assoluto di un numero, abbiamo che:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Lo stesso vale per $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ ecc…, cioè

$$\textbf{se } n \textbf{ è pari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

- $\sqrt[3]{x^3}$ è uguale a $x$?

Osserviamo che, per esempio, $\sqrt[3]{3^3} = 3$ e $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

Quindi in questo caso $\sqrt[3]{x^3} = x$ e in generale

$$\textbf{se } n \textbf{ è dispari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = x$$

## Trasporto fuori dalla radice

Quando trasportiamo fuori dalla radice occorre ricordare quanto sopra osservato.

Per esempio:

- $\sqrt{a^3 + a^2} = \sqrt{a^2(a+1)} = |a|\sqrt{a+1}$ (C.E. $a \geq -1$)
- $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt{a}$ (non importa mettere $|a^2|$ perché $a^2 \geq 0$; C.E. $a \geq 0$)

Se l'indice è dispari non ci sono particolari problemi

- $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a} = a \cdot \sqrt[3]{a}$
- $\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

# ESERCIZI
## RADICALI

1) Trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili

a) $\sqrt{24}$ ; $\sqrt{30}$ ; $\sqrt{32}$ ; $\sqrt[3]{16}$ ; $\sqrt[3]{24}$ ; $\sqrt[5]{64}$

b) $\sqrt{18}$ ; $\sqrt{72}$ ; $\sqrt[4]{32}$ ; $\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$ ; $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

2) Svolgi le operazioni tra radicali

a) $\sqrt{18}+\sqrt{2}$ [ $4\sqrt{2}$ ]

b) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}$ [ $\sqrt[3]{2}$ ]

c) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{36}$ [ $3+\sqrt{6}$ ]

d) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$ [ $2\sqrt[3]{3}$ ]

e) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{15}$ [ $2\sqrt{30}$ ]

f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$ [ $\sqrt[6]{2^3\cdot 5^2}$ ]

g) $\sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{2}$ [ $5\sqrt[6]{2^5}$ ]

h) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$ [ $\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$ ]

i) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{3}}$ [ $2\sqrt[6]{\dfrac{4}{27}}$ ]

l) $(\sqrt{3})^3$ [ $3\sqrt{3}$ ]

m) $(\sqrt[4]{8})^2$ [ $2\sqrt{2}$ ]

n) $\sqrt{\sqrt{3}}$ [ $\sqrt[4]{3}$ ]

o) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ [ $\sqrt[6]{2}$ ]

3) Razionalizza il denominatore delle seguenti frazioni

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ; $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ ; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ ; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ; $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ ; $\dfrac{3}{\sqrt{7}+1}$ ; $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$ [ $\sqrt{2}+1$ ; $\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$ ; $\sqrt{6}+1$ ]

c) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$ ; $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ ; $\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}$ [ $\sqrt{5}-1$ ; $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ; $5(\sqrt{3}+1)$ ]

4) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$ [ 0 ]

5) $2\sqrt{3}-\sqrt{48}-\sqrt{27}$ [ $-5\sqrt{3}$ ]

6) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{72}$ [ $6\sqrt{2}$ ]

7) $2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{32}+3\sqrt{27}-\sqrt{18}+3\sqrt{\frac{2}{9}}$ [ $\frac{23}{2}\sqrt{3}-10\sqrt{2}$ ]

8) $\sqrt{\frac{3}{9}}+\frac{1}{10}\sqrt{125}-\frac{1}{4}\sqrt{20}+\sqrt{45}-\frac{1}{3}\sqrt{12}$ [ $3\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ]

9) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{12}-\sqrt{6})\sqrt{12}$ [ $6(\sqrt{6}-\sqrt{2}+4)$ ]

10) $(2\sqrt{7}-3)(2\sqrt{7}+3)-(\sqrt{7}+1)^2-(\sqrt{7}-2)^2$ [ $2\sqrt{7}$ ]

11) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{3})$ [ 17 ]

12) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ [ 1 ]

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}-\sqrt{8}$ [ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ]

14) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\sqrt{45}$ [ $\frac{10\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$ ]

15) $(\sqrt[3]{2})^4+\sqrt[3]{54}$ [ $5\sqrt[3]{2}$ ]

16) $\sqrt{18}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\sqrt{32}}$ [ $2\sqrt[6]{32}$ ]

17) $\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt{2}}+\sqrt{10}$ [ $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ ]

18) $\sqrt{\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ [ $\frac{5}{2}\sqrt[4]{2}$ ]

19) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\sqrt{8}$ [ $\sqrt{2}-1$ ]

20) $2\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{125}-3\sqrt{20}+8\sqrt{5}$ [ $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ ]

21) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ $[\frac{21}{2}\sqrt[3]{3}]$

22) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ $[-4-\sqrt{6}]$

23) $(1-2\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2-3$ $[12]$

24) $\dfrac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}+(1-\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$ $[\frac{30-17\sqrt{2}}{7}]$

25) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{2})^2$ $[2\sqrt{2}-2]$

26) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(3\sqrt{2}+1)$ $[\sqrt{2}-4]$

27) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right):\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$ $[0]$

28) $[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^2-(2-\sqrt[4]{4})^2-4\sqrt{2}$ $[-5]$

29) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$ $[\frac{3\sqrt{3}-6}{5}]$

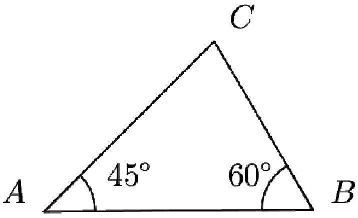
30) $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$ $[10]$

# PROBLEMI
## RADICALI

1) In un triangolo isoscele $ABC$ la base $\overline{BC} = 12cm$ e $\hat{A} = 120°$. Determinare perimetro e area del triangolo.

[ $2p = 8\sqrt{3} + 12cm$ ; $A = 12\sqrt{3}cm^2$ ]

2) Considera il triangolo $ABC$ in figura. Sapendo che $\overline{BC} = 6a$, determina perimetro e area del triangolo.

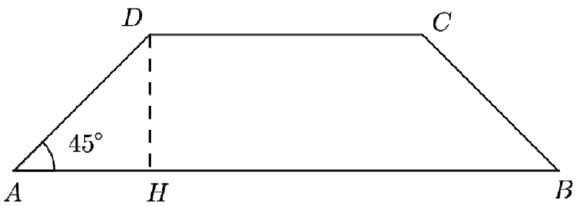



[ $2p = 3a(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})$ ; $A = \dfrac{9a^2(3+\sqrt{3})}{2}$ ]

3) L'area di un esagono regolare è $216\sqrt{3}cm^2$. Determinare il perimetro.

[ $2p = 72cm$ ]

4) Considera il trapezio isoscele in figura. Determina perimetro e area.




$\overline{DH} = 16cm$

$\overline{DC} = 20cm$

[ $2p = 72 + 32\sqrt{2}cm$ ; $A = 576cm^2$ ]

5) Considera un trapezio isoscele $ABCD$ avente base minore $\overline{CD} = 10a$, lato obliquo $\overline{AD} = \overline{BC} = 12a$ e gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano $30°$. Determina perimetro e area del trapezio.

[ $2p = 44a + 12a\sqrt{3}$ ; $A = 12a^2(5+3\sqrt{3})$ ]

6) Considera un triangolo $ABC$ inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$. Sapendo che $B\hat{A}C = 30°$, determina perimetro e area del triangolo.

[ $2p = (3+\sqrt{3})r$ ; $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2$ ]

7) Considera i punti $A(2;2)$, $B(8;5)$, $C(-1;8)$ .

a) Determina perimetro e area del triangolo *ABC*.

b) Detto $M$ il punto medio di $BC$, determina $\overline{AM}$ e verifica che $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ .

[ $2p = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{10}$ ; $A = \frac{45}{2}$ ; $\overline{AM} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$ ]

8) Considera le rette $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 2x - 6$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Determina i loro punti di intersezione *A, B, C, D*.

Come risulta il quadrilatero *ABCD*? Calcola perimetro a area.

[ $2p = 8\sqrt{5}$ ; $A = 12$ ]

9) Considera i punti $A(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$, $B(\frac{9}{2};\frac{3}{2})$, $C(2;4)$ . Determina perimetro e area del triangolo *ABC*. Come risulta il triangolo *ABC*? Detto $M$ il punto medio di $AB$, calcola $\overline{CM}$ . La retta per *C* e *M* è perpendicolare alla retta per *A* e *B*?

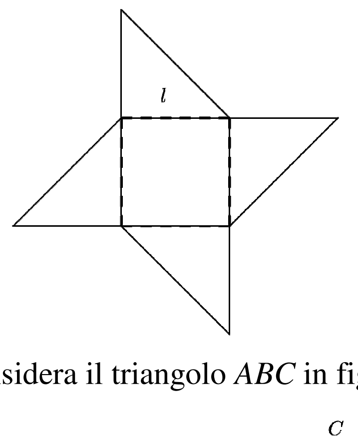
[ $2p = 5\sqrt{2} + \sqrt{10}$ ; $A = 5$ ]

10) Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(3;0)$, $C(3;6)$ e determina il baricentro *G*.

Detto $M$ il punto medio di $AC$, verifica che $\overline{BG} = 2\overline{GM}$ .

[ $BG = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ ; $GM = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ ]

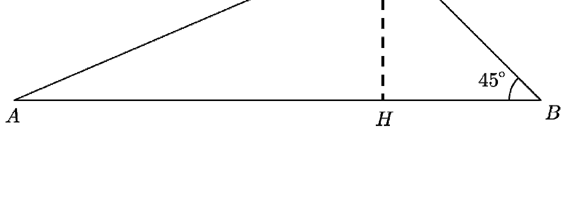
11) Considera il disegno in figura e calcola perimetro e area.




(lato del quadrato = $l$)

[ $2p = 4(\sqrt{2} + 1)l$ ; $A = 3l^2$ ]

12) Considera il triangolo *ABC* in figura. Determina perimetro e area del triangolo.




$\overline{CH} = 2$

$\overline{AC} = 6$

[ $2p = 6\sqrt{2} + 8$ ; $A = 4\sqrt{2} + 2$ ]

# SCHEDA DI VERIFICA
RADICALI

**I)** Sviluppa il calcolo nelle seguenti espressioni contenenti radicali:

1) $\sqrt{50}-\frac{1}{2}\sqrt{18}+\sqrt{32}+\frac{2}{3}\sqrt{75}-\sqrt{27}$ $\qquad [\frac{15}{2}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}]$

2) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}+(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)+\frac{1}{4}\sqrt{125}$ $\qquad [\frac{6\sqrt{5}+5}{4}]$

3) $\frac{1}{2}\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt[4]{32}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad [2\sqrt{2}+3\sqrt[4]{2}]$

4) $\sqrt{\frac{a+1}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{a^3}{a+1}}$ $\qquad$ [C.E. $a \ge 0$; $\sqrt{a}$]

5) $\sqrt{4a^2-8a+4}$ $\qquad [2|a-1|]$

**II) Problemi**

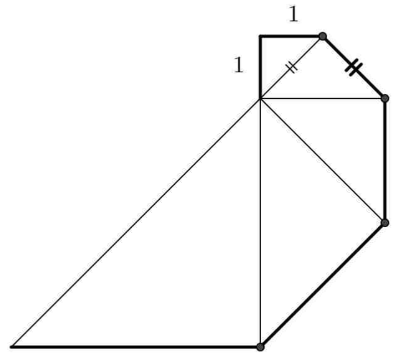
1) Considera un trapezio ABCD avente gli angoli adiacenti alla base maggiore AB avente $D\hat{A}B=60°$; $A\hat{B}C=30°$; $\overline{AD}=\overline{DC}=\sqrt{3}$. Determina perimetro e area del trapezio.

$[\ 2p=5\sqrt{3}+3]$

2) Fissato un sistema di riferimento cartesiano, considera i punti $A(0;1)$; $B(2;3)$; $C(3;0)$. Determina il perimetro e, dopo aver calcolato la misura dell'altezza CH relativa ad AB, l'area del triangolo ABC.

$[\ 2p=2\sqrt{2}+2\sqrt{10};\quad A=4]$

3) Disegna un triangolo rettangolo isoscele di cateti uguali ad 1 e sull'ipotenusa disegna un altro triangolo rettangolo isoscele come in figura e così via fino ad ottenere il disegno a fianco: determina la lunghezza del contorno della figura ottenuta e la sua area.




$[2p=8+7\sqrt{2};\quad A=\frac{27}{2}]$

# SCHEDA PER IL RECUPERO
RADICALI

**I)** Sviluppa il calcolo nelle seguenti espressioni contenenti radicali:

1) $\sqrt{12}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{72}+\sqrt{27}+\sqrt{50}$ $\quad [5\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}]$

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right):\frac{1}{\sqrt{8}}$ $\quad [8]$

3) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}-\sqrt{\sqrt{16}}+\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ $\quad [\frac{13}{2}]$

4) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt[6]{2}\right)^4+\frac{1}{\sqrt{27}}$ $\quad [\frac{7}{9}\sqrt{3}]$

1) $\sqrt{20}+3\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)^2$ $\quad [6+3\sqrt{5}]$

**II) Problemi**

1) Considera un trapezio rettangolo *ABCD* avente base maggiore *AB* che forma un angolo di 45° con il lato obliquo. Sapendo che la base minore è uguale all'altezza e misura *l*, determina perimetro e area del trapezio.

$[2p=(4+\sqrt{2})l\,;\,A=\frac{3}{2}l^2]$

2) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza.
Sapendo che il lato obliquo misura *l* e che la base maggiore forma un angolo di 60° con il lato obliquo, determina perimetro, area del trapezio e il raggio della semicirconferenza.

$[2p=5l\,;\,A=\frac{3}{4}\sqrt{3}l^2\,;\,r=\frac{l}{2}\sqrt{3}]$

3) Disegna il triangolo di vertici $A(-1;2)$; $B(3;4)$; $C(5;0)$. Verifica che è isoscele. Determina perimetro e area.

$[\ 2p=4\sqrt{5};\quad A=10]$

# Le equazioni di secondo grado

## Cos'è un'equazione di secondo grado

Un'equazione è di secondo grado se l'incognita compare (al massimo) elevata alla seconda.
Sono esempi di equazioni di secondo grado:

$x^2 - 1 = 0, \quad 3x^2 + x - 4 = 0, \quad 2 = 3x - x^2, \quad 2 - x^2 = 2x^2$

Applicando la regola del trasporto possiamo sempre scriverla nella forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \Re, con \quad a \neq 0}$$

**Esempi**

$2 = 3x - x^2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$2 - x^2 = 2x^2 \rightarrow -3x^2 + 2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2 = 0$

**Osservazione:** nel secondo esempio in cui il coefficiente del termine di secondo grado è negativo abbiamo moltiplicato tutti i termini per -1 (si ottiene un'equazione equivalente) in modo da avere $a > 0$.

L'equazione scritta così si dice **scritta in forma "normale"** e $c$ è detto **termine noto.**

**Nota:** a volte occorre svolgere diversi calcoli per riportarla in forma "normale".

**Esempio:**

$$x(x-1) + 3x = (2x-1)(2x+1) \rightarrow x^2 - x + 3x = 4x^2 - 1 \rightarrow x^2 - x + 3x - 4x^2 + 1 = 0$$
$$-3x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Come per tutte le equazioni, una **soluzione** (chiamata anche "radice") dell'equazione è un valore che sostituito all'incognita rende vera l'uguaglianza fra i due membri.

# Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Vediamo degli esempi.

**1)** Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 - 1 = 0$$

Possiamo ricavare

$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ cioè $x = \pm\frac{1}{2}$

Abbiamo perciò due soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infatti se sostituiamo:

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

**2)** Consideriamo l'equazione $4x^2 + 1 = 0$

In questo caso abbiamo:

$x^2 = -\frac{1}{4}$ e non ci sono soluzioni reali poiché nessun quadrato risulta negativo.

**3)** Consideriamo l'equazione $3x^2 - x = 0$

Come possiamo risolverla ?

## Nota

Quando in un polinomio c'è un *termine comune* a tutti monomi possiamo "raccoglierlo" perché è come se tornassimo indietro rispetto alla moltiplicazione per quel fattore.

Nel nostro caso se raccogliamo $x$ ( perché è presente sia nel fattore $3x^2$ che nel fattore $-x$) possiamo scrivere

$$x(3x - 1) = 0$$

(infatti se svolgiamo la moltiplicazione ritroviamo $3x^2 - x$)

Ma a questo punto, per la legge di annullamento del prodotto, possiamo dire che le soluzioni dell'equazione sono:

$\boxed{x = 0}$ oppure $3x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$

Quindi le soluzioni dell'equazione data sono $x_1 = 0 \quad \cup \quad x_2 = \frac{1}{3}$ .

**4)** Consideriamo l'equazione $x^2 + 4x - 5 = 0$

Come possiamo risolverla?

Se riuscissimo a scriverla nella forma $(...........)^2 = numero$ poi potremmo procedere come nei primi due esempi.

- Cominciamo a spostare il termine noto: nel nostro caso abbiamo
$$x^2 + 4x = 5$$
- Aggiungiamo ad entrambi i membri dell'equazione un numero in modo che $x^2 + 4x + ..$ risulti il quadrato di un binomio (questo metodo si chiama "**completamento del quadrato"**).

E' chiaro che $4x$ dovrà essere il doppio prodotto e quindi dividendo il coefficiente 4 per 2 otteniamo il 2° termine del binomio $\frac{4}{2} = 2$: aggiungiamo quindi $2^2$ ad entrambi i membri (per ottenere un'equazione equivalente) ed abbiamo:

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

In questo modo l'equazione può essere scritta nella forma

$$\boxed{(x+2)^2 = 9}$$

- A questo punto, essendo 9 un numero positivo, possiamo andare avanti

$$x + 2 = \pm\sqrt{9} \rightarrow x + 2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{matrix} x + 2 = 3 \rightarrow x = 3 - 2 = 1 \\ x + 2 = -3 \rightarrow x = -3 - 2 = -5 \end{matrix}$$

Abbiamo quindi che le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = -5$$

# Formula risolutiva di un’equazione di secondo grado

Proviamo a generalizzare, utilizzando le lettere, il procedimento che abbiamo seguito nell’ultimo esempio.

Consideriamo $\quad ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

- Spostiamo il termine noto:
$$ax^2 + bx = -c$$
- Prima di completare il quadrato dividiamo tutto per $a$ (i calcoli risulteranno più semplici):
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$
- Completiamo il quadrato: ricordiamo che, dovendo essere $\frac{b}{a}x$ il doppio prodotto, dobbiamo aggiungere il quadrato di: $\quad \dfrac{\frac{b}{a}}{2} = \dfrac{b}{2a}$

Quindi:
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
Facendo qualche calcolo:
$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

a) Se $\boxed{b^2 - 4ac \geq 0}$ possiamo estrarre la radice quadrata ed abbiamo:
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

b) Se $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$ **non abbiamo soluzioni reali**

**Nota:** $b^2 - 4ac$ viene chiamato “***discriminante***” dell’equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ed indicato con la lettera $\Delta$ cioè $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

## *Osservazione 1*

Se $\boxed{\Delta > 0}$ **le soluzioni dell'equazione sono "distinte"** cioè sono due valori diversi (vedi esempio 4: $x^2 + 4x - 5 = 0$).
Se $\boxed{\Delta = 0}$ **le soluzioni sono "coincidenti"** cioè abbiamo un unico valore.

Esempio: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Infatti $x^2 + 4x + 4$ è il quadrato di $x + 2$ e quindi abbiamo:

$$(x+2)^2 = 0$$

Il quadrato è nullo se $\quad x + 2 = 0 \to x = -2 \quad (x_1 = x_2 = -2)$
Se $\boxed{\Delta < 0}$ **non ci sono soluzioni reali.**

## *Osservazione 2*

Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si ha $b = 0$ oppure $c = 0$ (si dice che l'equazione non è completa) *non conviene usare la formula risolutiva* generale che abbiamo trovato ma procedere come abbiamo fatto nei primi esempi.

Generalizziamo quegli esempi usando le lettere.

- Se $\boxed{b = 0}$ abbiamo $ax^2 + c = 0$.

Spostiamo il termine noto:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

a) Se $-\frac{c}{a} \geq 0$ allora $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (la scrittura $x_{1,2}$ indica che ci sono due soluzioni $x_1$, $x_2$).

Vedi l'esempio 1: $4x^2 - 1 = 0$.

b) Se $-\frac{c}{a} < 0$ allora l'equazione non ha soluzioni reali (vedi esempio 2: $4x^2 + 1 = 0$).

- Se $\boxed{c = 0}$ abbiamo $ax^2 + bx = 0$

Mettiamo in evidenza la *x*: $\quad x(ax + b) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo quindi:

$$x_1 = 0 \text{ oppure } ax + b = 0 \to x_2 = -\frac{b}{a}$$

(vedi l'esempio 3 : $3x^2 - x = 0$).

## Osservazioni

**Somma delle soluzioni**

Proviamo a sommare le soluzioni $x_1$, $x_2$ ottenute con la formula risolutiva:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

In conclusione si ha: $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$

**Prodotto delle soluzioni**

Vediamo cosa si ottiene moltiplicando le soluzioni:

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

In conclusione si ha: $\boxed{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$

**Scomposizione di** $ax^2+bx+c$

Se $\Delta\geq 0$ abbiamo due soluzioni (distinte o coincidenti) dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ e possiamo scrivere:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]=$$
$$=a\left[x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2\right]=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2)$$

In conclusione $\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$

**Esempi**

1) Consideriamo $2x^2-x-1$: poniamo $2x^2-x-1=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}\rightarrow x_1=1;\quad x_2=-\frac{1}{2}$

Si ha quindi: $2x^2-x-1=2(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$

2) Consideriamo $4x^2-12x+9$: poniamo $4x^2-12x+9=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 0}{4}=\frac{3}{2}$

Si ha quindi: $4x^2-12x+9=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

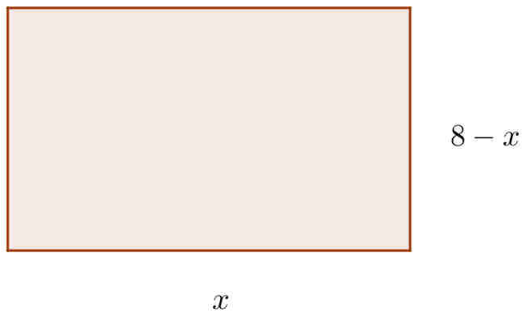
# Problemi di secondo grado

Spesso risolvendo un problema (di geometria analitica, euclidea ecc.), dopo aver posto come incognita $x$ la misura di un segmento o qualche altra quantità, ci si trova a dover risolvere un'equazione di secondo grado.
Vediamo qualche esempio.

## Esempio 1

*Determina le lunghezze dei lati di un rettangolo di area* $15\ cm^2$ *e perimetro* $16\ cm$.

Se $2p = 16\ cm \rightarrow p = 8\ cm$ (semiperimetro). Quindi, se indichiamo con $x$ un lato del rettangolo, l'altro risulterà $8 - x$.




Ma dal momento che l'area è $15\ cm^2$ avremo:

$$x(8-x) = 15 \rightarrow 8x - x^2 = 15 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

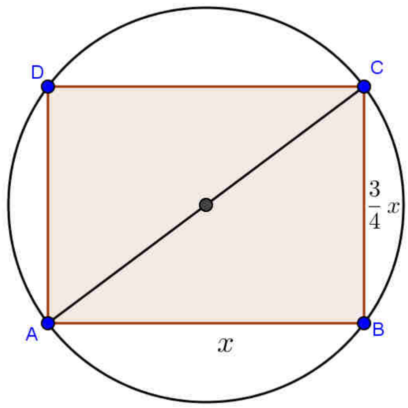
Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado che risolta dà:

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

Osserviamo che se $x = 5$ allora l'altra dimensione è $8 - 5 = 3$ e che se $x = 3$ allora l'altra dimensione è $8 - 3 = 5$, cioè le dimensioni del rettangolo sono in ogni caso 3 e 5.

## Esempio 2

*I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 30 cm stanno tra loro nel rapporto* $\frac{3}{4}$*. Determina l'area del rettangolo.*




Se indichiamo con $x$ la misura di un lato, l'altro lato sarà $\frac{3}{4}x$ ed **applicando il teorema di Pitagora** (ricordiamo che il diametro coincide con la diagonale del rettangolo) avremo:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 30^2$$

Sviluppando:

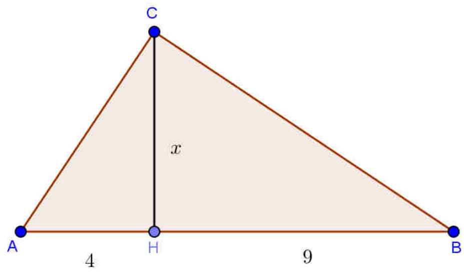
$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 900 \to \frac{25}{16}x^2 = 900 \to x^2 = 576 \to x = 24$$

( $x^2 = 576 \to x = \pm 24$ ma è accettabile solo la soluzione positiva).

Quindi l'altro lato risulta $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ e possiamo calcolare l'area del rettangolo è : $A = 24 \cdot 18 = 432 \ \ cm^2$

## Esempio 3

*Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo sapendo che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 4 cm e 9 cm.*




Abbiamo che $\overline{AH} = 4 \ \ cm$, $\overline{HB} = 9\, cm$.

Se indichiamo con $x$ la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, applicando il **secondo teorema di Euclide** abbiamo che

$$x^2 = 4 \cdot 9 \to x^2 = 36 \to x = 6$$

( $x^2 = 36 \to x = \pm 6$ ma la soluzione negativa non è accettabile poiché $x$ rappresenta una misura).

Quindi $\overline{AC} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \ \ cm$, $\overline{BC} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \ \ cm$

In conclusione abbiamo $2p = 13 + 5\sqrt{13} \ \ cm$, $A = \frac{13 \cdot 6}{2} = 39 \ \ cm^2$

# ESERCIZI
## EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

**Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado**:

1) $2-x^2=0$ ; $\frac{1}{3}x^2-2x=0$ ; $9x^2=0$ [ $\pm\sqrt{2}$; 0, 6; $x=0(doppia)$ ]

2) $7x-5x^2=0$ ; $4+3x^2=0$ ; $25=9x^2$ [ 0, $\frac{7}{5}$; *impossibile*; $\pm\frac{5}{3}$ ]

3) $\frac{1}{2}x^2=0$ ; $1-x^2=0$ ; $9x^2-12x=0$ [ $x=0(doppia)$; $\pm 1$; 0, $\frac{4}{3}$ ]

4) $-3x^2=-12$ ; $\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{5}x$ ; $\frac{1}{2}x^2-18=0$ [ $\pm 2$; 0, $\frac{4}{5}$; $\pm 6$ ]

5) $-4x^2=36$ ; $2x^2-\frac{8}{3}x=0$ ; $4-x^2=0$ [ impossibile; 0, $\frac{4}{3}$; $\pm 2$ ]

6) $3\sqrt{5}x^2=0$ ; $16x^2=1$ ; $-3x^2+6x=0$ [ $x=0(doppia)$; $\pm\frac{1}{4}$; 0, 2 ]

7) $\frac{5}{3}(2x-3)(x+1)=10x-5$ [ $x_1=0$, $x_2=\frac{7}{2}$ ]

8) $3x^2+\frac{3}{2}-\frac{(x+2)}{2}=\frac{3-x}{2}-(1+x^2)$ [ $x_1=x_2=0$ ]

9) $\sqrt{5}(x^2-1)+1=x^2$ [ $x_{1,2}=\pm 1$ ]

10) $11x+(x-2)^2+(2x+1)(x-3)=(x+1)^2-14$ [ impossibile ]

11) $2x^2-5x-3=0$ [ $-\frac{1}{2}$, 3 ]

12) $4x^2-4x+1=0$ [ $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ ]

13) $x^2 - x + 2 = 0$ [ impossibile ]

14) $x^2 + 5x + 6 = 0$ [ $x_1 = -3, \quad x_2 = -2$ ]

15) $x^2 - 5\sqrt{2}x + 12 = 0$ [ $x_1 = 2\sqrt{2}, \quad x_2 = 3\sqrt{2}$ ]

16) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$ [ $x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$ ]

17) $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} = 0$ [ $x_1 = x_2 = -\frac{4}{5}$ ]

18) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 6 = 0$ [ $x_1 = -2\sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}$ ]

19) $(2x+1)^2 - x^2 - (x-1)^2 = (2x+3)(2x-3)+1$ [ $x_1 = -1, \quad x_2 = 4$ ]

20) $(2-3x)(x-2) + 3(x-1)^2 = (x-1)(x+3)$ [ $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ ]

21) $(1-x)^2 = 2x + \frac{x^2 - 3x + 7}{2}$ [ $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ ]

22) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x(x+2) - 5x + \frac{1}{6} = \frac{x}{3}(x-5)$ [ $x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$ ]

23) $\frac{6-3x}{5} + \frac{x^2+2}{15} - x = \frac{4-x^2}{3}$ [ $x_1 = 0, \quad x_2 = 4$ ]

24) $(x-1)^3 = x^2(x-1) - (x+3)(x-2) - 19$ [ $x_1 = -2, \quad x_2 = 6$ ]

25) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right) + 2$ [ $x_1 = -5, \quad x_2 = 0$ ]

26) $\frac{2x}{15} + \frac{x^2+x}{6} = \frac{(x+2)(x+1)}{10}$ [ $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ ]

27) $\frac{2}{3}\left(\frac{6+x}{2} - \frac{x-3}{4}\right) = \frac{(x-2)^2}{12} - \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$ [ $x_1 = -2, \quad x_2 = 12$ ]

28) $x^2 + 8x - 9 = 0$ [ $x_1 = -9, \quad x_2 = 1$ ]

29) $10x^2+8x+5=0$ [ impossibile ]

30) $9+16x^2+24x=0$ [ $x_1=x_2=-\frac{3}{4}$ ]

31) $3x^2+2\sqrt{3}x-3=0$ [ $x_1=-\sqrt{3},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ]

32) $x^2=\frac{1}{3}(2x+1)$ [ $x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=1$ ]

33) $\frac{7}{4}-3x-x^2=0$ [ $x_1=-\frac{7}{2},\quad x_2=\frac{1}{2}$ ]

34) $3x^2+4x-4=0$ [ $x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=-2$ ]

35) $4x^2-2=0$ [ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ]

36) $2x^2+1=0$ [ impossibile ]

37) $(2x+3)^2=(x-3)^2$ [ $x_1=0;\quad x_2=-6$ ]

38) $(x-3)\cdot(x+3)=3x\cdot(x-1)+3x-9$ [ $x_1=x_2=0$ ]

39) $x\cdot(x+3)+1=(1+x)^2-2x\cdot\left(1+\frac{1}{2}x\right)$ [ $x_1=0;\quad x_2=-3$ ]

40) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ [ $x_1=2\sqrt{2};\quad x_2=\sqrt{2}$ ]

**Scomponi i seguenti trinomi di secondo grado:**

41) $6x^2+13x+7$ [ $6(x+1)\left(x+\frac{7}{6}\right)$ ]

42) $4x^2-8x+3$ [ $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ]

43) $x^2+6x+5$ [ $(x+1)\cdot(x+5)$ ]

44) $2x^2-4x+5$ [ irriducibile]

45) $5x^2+4x+\frac{4}{5}$ [ $5\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)^2$ ]

46) $4a^2-4a-3$ [ $(2a-3)\cdot(2a+1)$ ]

# PROBLEMI
## EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1) In un triangolo rettangolo un cateto misura 1 cm in più dell'altro e l'ipotenusa è 5 cm. Determina i cateti del triangolo.

[ 3 cm ; 4 cm ]

2) Se in un quadrato un lato viene aumentato del 20% e un altro viene diminuito del 20%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato diminuita di 1 $cm^2$. Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

[ 5 cm ]

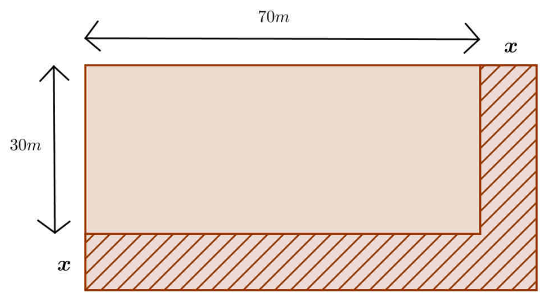
3) L'area di un rombo è $24 \ cm^2$ e una diagonale supera l'altra di 2 cm. Determina il perimetro del rombo.

[ $2p = 20 \ cm$ ]

4) In un triangolo isoscele la base supera di 3 cm il lato obliquo e l'altezza è 12 cm. Determina il perimetro.

[ $2p = 48 \ cm$ ]

5) Il proprietario di un terreno deve cederne una parte di area $416 \ m^2$ per la costruzione di una strada (vedi figura).Calcola *x*.




[ $x = 4 \ m$ ]

6) Un rettangolo è inscritto in una circonferenza di raggio 13 cm e il suo perimetro è 68 cm. Determina i lati del rettangolo.

[ $10 \ cm; \quad 24 \ cm$ ]

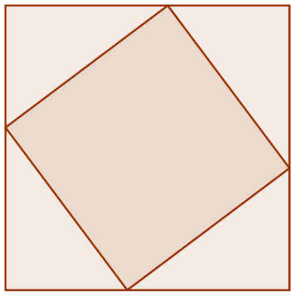
7) In un triangolo isoscele base e altezza stanno tra loro come 3 sta a 2 e il perimetro è 16 cm. Determina l'area.

[ $12 \ cm^2$ ]

8) Un rettangolo ha area $40 \ cm^2$ e i suoi lati misurano uno 3 cm in più dell'altro. Se si allungano entrambi i lati della stessa misura, si ottiene un rettangolo la cui area è $30 \ cm^2$ in più dell'area iniziale. Determina il perimetro del nuovo rettangolo.

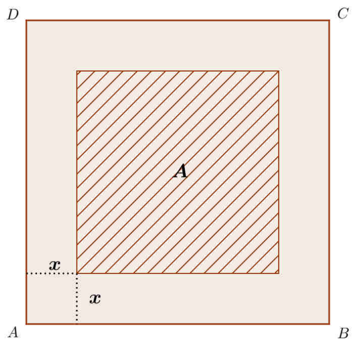
[ $34 \ cm$ ]

9) In un quadrato di area $49 \ cm^2$ è inscritto un quadrato di area $25 \ cm^2$. Determina il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dal quadrato inscritto nel quadrato più grande.



[ $12 \ cm$ ]

10) Osserva la figura: sapendo che l'area del quadrato ABCD è $256 \ cm^2$ e che $A = 100 \quad cm^2$ quanto vale $x$?




[ 3 cm ]

11) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro misura $80a$ .

[$300 \ a^2$]

12) Due triangoli rettangoli congruenti hanno un cateto in comune, l'altro posto su rette parallele. Il perimetro di ciascun triangolo è $108a$, mentre quello del poligono individuato da essi è $144a$. Determina la lunghezza del cateto comune e dell'ipotenusa.

[ $36a$; $45a$ ]

13) In un trapezio rettangolo una base è doppia dell'altra, l'altezza supera di 1 cm la base minore e l'area è $3\ cm^2$. Determina l'altezza del trapezio.

[ 2 cm ]

14) In un rombo di perimetro $100k$, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è $60k$. Determina l'area del rombo.

[ $600\ k^2$ ]

15) Il diametro di una semicirconferenza misura 15 cm. Calcola la lunghezza dei tre lati di un triangolo inscritto nella semicirconferenza sapendo che i due lati distinti dal diametro sono uno i $\frac{3}{4}$ dell'altro.

[ 15 cm; 12 cm; 9 cm ]

16) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 25 cm e supera di 9 cm una delle proiezioni dei cateti. Determina l'area del triangolo.

[ $150\ cm^2$ ]

17) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 50 cm e un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.

[ 120 cm ]

18) Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa ed è anche il doppio dell'altra proiezione aumentato di $2a$. Determina l'area del triangolo.

[ $150\ a^2$ ]

19) In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ volte il cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto misura $\frac{4}{5}\sqrt{5}\ cm$. Determina il perimetro del triangolo.

[ $2p = \left(12 + 4\sqrt{5}\right)\ cm$ ]

20) L'area di un triangolo rettangolo è $80\ cm^2$. Determina l'ipotenusa sapendo che un cateto diminuito di 4 cm è pari al doppio dell'altro cateto.

[ $4\sqrt{29}\ cm$ ]

21) Un quadrato ha il perimetro di 24 cm. Un rettangolo ha lo stesso perimetro mentre l'area è $\frac{3}{4}$ di quella del quadrato. Determina le dimensioni del rettangolo.

[ 3 cm; 9 cm ]

22) Un rettangolo di area $20 \ cm^2$ ha l'altezza minore della base di 1 cm. Calcola il perimetro del rettangolo.

[ $2p = 18 \ cm$ ]

23) Un rettangolo ha le dimensioni di 5 cm e 2 cm. Vogliamo incrementare la base e l'altezza di una stessa quantità in modo da ottenere un secondo rettangolo che abbia l'area di $70 \ cm^2$. Determina tale quantità.

[ 5 cm ]

24) Un rettangolo ha il perimetro $2p = 14cm$ e l'area $A = 10cm^2$. Determina le sue dimensioni.

[ 2; 5 ]

25) In una semicirconferenza di raggio $r = \frac{13}{2}cm$ è inscritto un triangolo avente perimetro $2p = 30cm$. Determina la misura dei cateti.

[ 5, 12 ]

26) In un trapezio rettangolo di area $12cm^2$, l'altezza supera di 1 cm la base minore e la base maggiore è il triplo della minore. Determina il perimetro del trapezio.

[ $2p = 16cm$ ]

27) In un rombo di perimetro 80$a$, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è 48$a$. Determina l'area del rombo.

[ $A = 384a^2$ ]

28) In un triangolo rettangolo l'area misura $120cm^2$ e il cateto maggiore supera di 4 cm il doppio del cateto minore. Determina il perimetro del triangolo.

[ $2p = 60cm$ ]

29) In un triangolo isoscele la base supera di 1 cm l'altezza e il perimetro è 8 cm. Determina l'area del triangolo.

[ $A = 3cm^2$ ]

30) Se in un quadrato un lato viene aumentato del 25% e un altro viene diminuito del 50%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato iniziale diminuita di $6cm^2$. Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

[ 4 cm ]

# SCHEDA DI VERIFICA
## EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

### I) Risolvi le seguenti equazioni

1) a. $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$ [ $x_1 = 0; \quad x_2 = 6$ ]

b. $x^2 + 5x + 7 = 0$ [ impossibile]

c. $2x^2 - 5x - 3 = 0$ [ $x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 3$ ]

d. $9x^2 - 6x + 1 = 0$ [ $x = \frac{1}{3}$ ]

2) $2(x-1) - \frac{5}{4}x = \frac{3-5x}{4} - 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$ [ $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ]

3) $x \cdot \left(2x - 3\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(x+1)(x-1) = (x-1)\cdot(x-4) - \frac{1}{2}x(x-10) - \frac{1}{2}$ [ $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2\sqrt{2}$ ]

### II) Risolvi i seguenti problemi

1) In un trapezio rettangolo ABCD , l'altezza è il doppio della base minore e la base maggiore supera di 6 cm la minore. Sapendo che l'area misura $56\,cm^2$ , determina il perimetro del trapezio.
[ $2p = 32cm$ ]

2) In un triangolo isoscele ABC il perimetro misura 36 cm e l'altezza relativa alla base AB misura 6 cm. Determina l'area del triangolo. [ $A = 48cm^2$ ]

3) In un triangolo rettangolo ABC le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misura 2 cm e 8 cm. Determina perimetro e area del triangolo.
[ $2p = (6\sqrt{5} + 10)cm; \quad A = 20cm^2$ ]

4) In un rettangolo ABCD se si uniscono i punti medi dei lati si ottiene un rombo di area $60a^2$ . Sapendo che il perimetro del rettangolo è $46a$ , determina le dimensioni del rettangolo.

[ $8a; \quad 15a$ ]

# SCHEDA PER IL RECUPERO
## EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

**I) Risolvi le seguenti equazioni:**

a. $4x-\frac{1}{2}x^2=0$ $[\ x_1=0;\quad x_2=8]$

b. $2x^2-x-6=0$ $[x_1=-\frac{3}{2};\quad x_2=2]$

c. $x^2+4x+5=0$ [impossibile]

d. $\frac{1}{4}x^2+x+1=0$ $[x_1=x_2=-2]$

2) $2(x-3)-\frac{5}{6}x=\frac{3-5x}{6}-(x-1)^2$ $[x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}]$

3) $x^2-\frac{1}{2}(x-1)(x+1)=\sqrt{2}x+1$ $[x_{1,2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}]$

II) **Risolvi i seguenti problemi**

1) Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo sapendo che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 1 cm e 4 cm.

$[2p=(5+3\sqrt{5})cm;\quad A=5\,cm^2]$

2) In un trapezio rettangolo ABCD , l'altezza è il doppio della base minore e la base maggiore supera di 6 cm la minore. Sapendo che l'area misura 56 $cm^2$ , determina il perimetro del trapezio.

$[2p=32cm]$

3) I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di raggio 13 cm stanno tra loro nel rapporto $\frac{5}{12}$. Determina l'area del rettangolo.

$[A=240cm^2]$

4) In un triangolo isoscele l'altezza è uguale alla base. Sapendo che l'area misura $8cm^2$, determina il perimetro del triangolo.

$[2p=4+4\sqrt{5}]$

# Introduzione al calcolo delle probabilità

## Eventi certi, impossibili, aleatori

Supponiamo di lanciare un dado e consideriamo i seguenti "eventi":
$E_1$={ esce un numero compreso tra 1 e 6 (estremi inclusi) }
$E_2$={ esce il numero 7 }
$E_3$={ esce il numero 2 }

L'evento $E_1$ è "**certo**": infatti lanciando un dado possono uscire i numeri da 1 a 6.
L'evento $E_2$ è "**impossibile**".
L'evento $E_3$ è possibile ma non è certo e viene detto "**aleatorio**".

Il termine "aleatorio" deriva da "**alea**" che in latino significa proprio "dado" e per gli antichi il lancio del dado era il tipico esempio di situazione casuale.

### Nota
Il calcolo delle probabilità è nato proprio in relazione ai giochi di dadi e vedremo come Galileo fu interpellato da alcuni giocatori del "gioco dei tre dadi".

È chiaro però che non tutti gli eventi aleatori hanno la stessa "probabilità" di accadere (di verificarsi). Se per esempio considero $E_4$={ esce un numero pari }, scommettereste su $E_3$={ esce il numero 2 } o su $E_4$ ?

È chiaro che l'evento $E_4$ ha più probabilità di verificarsi di $E_3$: infatti se consideriamo che i casi possibili nel caso del lancio di un dado non truccato sono l'uscita dei numeri 1,2,3,4,5,6 vediamo che perché accada $E_3$ ho solo un caso favorevole {2} mentre perché si verifichi $E_4$ ho i tre casi favorevoli {2} {4} {6}.

# Probabilità di un evento E

Ma come è definita la probabilità di un evento E?
Per ora daremo solo la definizione cosiddetta "classica" ed approfondiremo poi l'argomento nella classe quarta.

## Definizione classica

La probabilità (classica) di un evento E è data dal *rapporto tra il numero dei casi favorevoli ad E e il numero dei casi possibili (tutti ugualmente possibili)*

$$\boxed{p(E)=\frac{n^\circ \quad casi \quad favorevoli}{n^\circ \quad casi \quad possibili}}$$

Nel nostro esempio

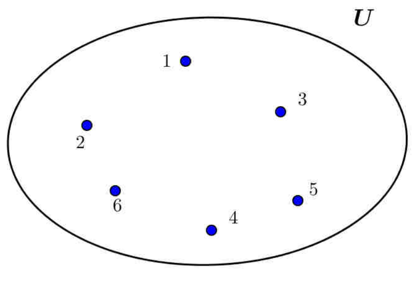
$p(E_1) = 1$ (evento certo)
$p(E_2) = 0$ (evento impossibile)
$p(E_3) = \frac{1}{6}$
$p(E_4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Osserviamo che essendo n° casi favorevoli $\leq$ n° casi possibili si ha che la probabilità di un evento E è un numero compreso tra 0 e 1

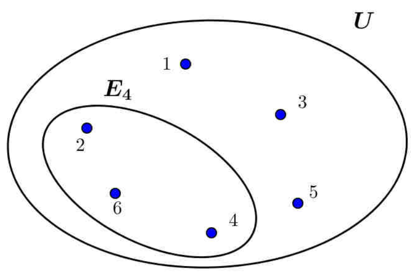
$$\boxed{0 \leq p(E) \leq 1}$$

**Eventi ed insiemi**

Possiamo rappresentare gli eventi utilizzando gli insiemi. Considerando sempre il lancio di un dado, l'insieme di tutti gli eventi "elementari" (chiamato insieme universo U) sarà:




L'evento $E_4$ sarà rappresentato da un sottoinsieme di U




$$E_4 = \{2,4,6\}$$

Poiché $E_1 \equiv U$ si ha che $E_1$ è l'evento certo;
$E_2 = \Phi$ si ha che $E_2$ è l'evento impossibile.

## Evento contrario

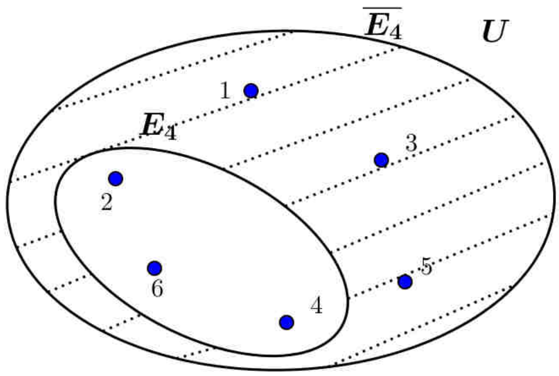
Se $E$ è un evento indicheremo con $\overline{E}$ l'evento contrario.

Per esempio se considero

$E_4$ ={ nel lancio di un dado esce un numero pari }

avremo $\overline{E}_4$ ={ nel lancio di un dado **non** esce un numero pari }

Da un punto di vista insiemistico l'evento contrario $\overline{E}$ è rappresentato dall'insieme complementare di $E$ (rispetto all'insieme universo U)




È chiaro quindi che $p(\overline{E}) = \dfrac{n°casi \quad possibili - n°casi \quad favorevoli \quad ad \quad E}{n°casi \quad possibili} = 1 - p(E)$

## Problema
### *Lancio di due dadi*

Consideriamo il lancio di due dadi (non truccati): possiamo avere

(1,1) (1,2) … (1,6)
(2,1) (2,2) … (2,6)
. .
.
.
(6,1) (6,2) … (6,6)

**Attenzione**

L'evento (1,2) è diverso dall'evento (2,1): per non confondere i due dadi possiamo pensare che siano di colori diversi, quindi l'uscita della coppia 1-2 può avvenire in due modi diversi.

Ci sono quindi 36 eventi elementari.

Qual è la probabilità di $E_1$={ nel lancio di due dadi esce il doppio 6 } ?

È chiaro che $p(E_1) = \frac{1}{36}$ (se facessi una scommessa lo giocherei 35 a 1).

*Qual è la probabilità di avere una certa somma S* ?

- $p(S = 2) = ?$
  Per avere somma 2 devo avere (1,1) e questo è l'unico caso favorevole.
  Quindi $p(S = 2) = \frac{1}{36}$
- $p(S = 3) = ?$
  Posso ottenere somma 3 in due casi: (1,2) (2,1) e quindi
  $p(S = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
  ecc…

## PROBLEMI
INTRODUZIONE AL CALCOLO DELLE PROBABILITA'

1) Lanciando due volte una moneta, qual è la probabilità che esca per due volte testa?

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

2) Nel gioco del "pari-dispari" (che consiste nell'aprire alcune dita della mano e sommare i punti dei due giocatori) è indifferente scommettere sul pari o sul dispari ?

[solo se si decide che si può "gettare" il pugno chiuso]

3) Lanciando tre volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere almeno una volta croce? (puoi pensare che sia l'evento contrario di "esce sempre testa"…)

$$\left[\frac{7}{8}\right]$$

4) Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane qual è la probabilità che:

- sia un asso; $\left[\frac{1}{10}\right]$
- sia una carta di picche; $\left[\frac{1}{4}\right]$
- sia una figura; $\left[\frac{3}{10}\right]$
- sia il "settebello". $\left[\frac{1}{40}\right]$

5) Lanciando due dadi qual è la probabilità che:

- escano numeri uguali $\left[\frac{1}{6}\right]$
- escano due numeri pari $\left[\frac{1}{4}\right]$
- escano due numeri primi $\left[\frac{1}{4}\right]$

6) *(Invalsi 2014/15)*
Da un mazzo di 52 carte da gioco (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori, picche) sono stati tolti i 4 assi. Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?

[$\frac{1}{4}$]

7) *(Invalsi 2014/15)*
Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci si aspetta di ottenere un numero maggiore di 4?

[circa 100 volte]

8)*(Invalsi 2014/15)*
Un'urna contiene 40 palline identiche tranne che per il colore: 23 sono rosse e 17 blu.
Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Entrambe sono blu. Senza reintrodurre le due palline estratte, si estrae dall'urna una terza pallina. Qual è la probabilità che anche la terza pallina sia blu?

[15/38]

9)*(Invalsi 2015/16)*
Quale tra i seguenti numeri non può rappresentare la probabilità di un evento?

A. ☐ $\frac{2}{3}$

B. ☐ $\frac{11}{15}$

C. ☐ $\frac{8}{7}$

D. ☐ $\frac{20}{27}$

[C]

10) *)(Invalsi 2015/16)*
Nella scatola A vi sono 6 palline verdi e 4 rosse. Nella scatola B vi sono invece 12 palline verdi e 5 rosse. Quante palline verdi si devono spostare dalla scatola B alla scatola A affinché la probabilità di estrarre una pallina verde da A diventi uguale alla probabilità di estrarre una pallina verde da B?

[2]

11)*(Invalsi 2017/18)*
Due urne A e B contengono ciascuna tre bigliettini numerati con i numeri 1, 2 e 3. Si estrae un bigliettino dall'urna A e poi un bigliettino dall'urna B. Fra tutte le possibili somme che si possono ottenere, qual è la più probabile?

[4]

# TEST IN INGLESE
## PROBABILITA'

**1)** Tom has 50 model cars. He has 10 blue cars and 19 red cars. He has no yellow cars.
a) Tom chooses a car at random. Write down the probability that it is
(i) red,
(ii) red or blue,
(iii) not blue,
(iv) yellow.
b) The probability that a car is damaged is 1.How many cars are damaged?

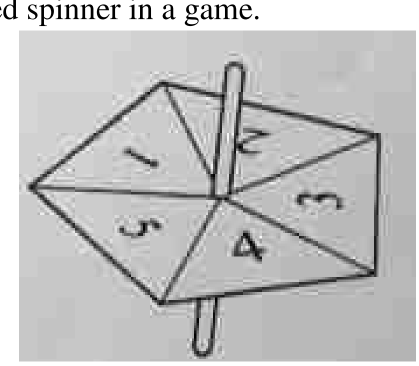
**2)** The probability that FC Victoria wins the cup is 0.18. Work out the probability that they do **not** win the cup.

**3)** A whole number is picked at random from the numbers 1 to 200, inclusive.
a) What is the probability that is **more than** 44? Give your answer as
(i) a fraction in its lowest terms,
(ii) a decimal
b) What is the probability that the number is **at least** 180?

**4)** After training, the shirts are washed. There are 5 red, 3 blue and 6 green shirts. One shirt is taken from the washing machine at random. Find the probability that is
a) red
b) blue or green
c) white

**5)** Celine buys a bag of 24 tulip bulbs. There are 8 red bulbs and 5 white bulbs. All of the other bulbs are yellow. Celine chooses a blub at random from the bag.
a) Write down the probability that the bulb is red or white.
b) Write down the probability that the bulb is yellow.

**6)** Jonah uses a fair five-sided spinner in a game.



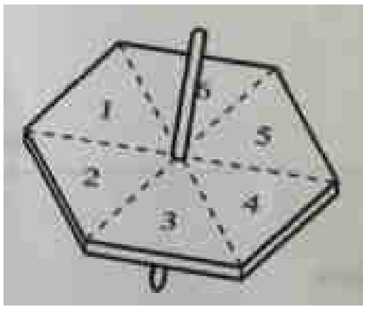

a) What is the probability that the spinner lands on
(i) 3,
(ii) an even number,
(iii) a number greater than 5?

b) Jonah spins the spinner 25 times and records the results in a frequency table.

| Number that the spinner lands on | Frequency |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 2 | 4 |
| 3 | 5 |
| 4 | |
| 5 | 2 |

(i) Fill in the missing number.
(ii) Write down the mode.

**7)** The diagram shows a six-sided spinner.




a) Amy spins a **biased** spinner and the probability she gets a two is $\frac{5}{36}$. Find the probability she
(i) does not get a two,
(ii) gets a seven,
(iii) gets a number on the spinner that is less than 7.

b) Joel spins his blue spinner 99 times and gets a two 17 times.
Write down the relative frequency of getting a two with Joel's spinner.

c) The relative frequency of getting a two with Piero's spinner is $\frac{21}{102}$.
Which of the three spinners, Amy's, Joel's or Piero's, is most likely to give a two?

**8)** A bag contains 5 black beads, 7 white beads and 4 blue beads.

a) Mohini picks a bead at random. What is the probability that it is.
(i) black,
(ii) not black?

b) One of the 16 beads is lost. The probability that Mohini picks a black bead is now $\frac{1}{3}$.
What can you say about the colour of the lost bead?

**9)** a) The diagram shows 5 discs. One disc is chosen at random.


(i) Which is most likely to be choosen?
(ii) What is the probability that the number on the disc is even?
(iii) What is the probability that the number on the disc is even and a factor of 20?

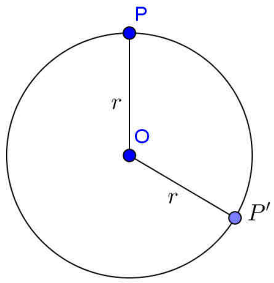
b) A disc is chosen at random from the discs with even numbers. What is the probability that the number on the disc is a factor of 20?

# Geometria euclidea

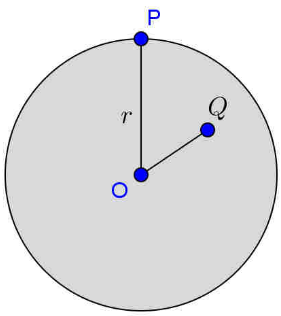
1. **Circonferenza**
2. **Misura delle grandezze. Proporzioni tra grandezze**
3. **Equivalenza di superfici piane**
4. **Teoremi di Euclide e Pitagora**
5. **Similitudine**

# Circonferenza

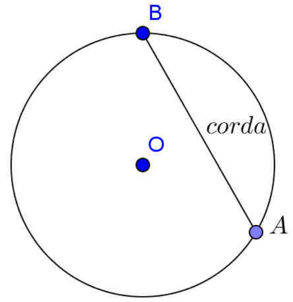
**Definizione**
Una **circonferenza** di centro O e raggio $r$ è l'insieme dei punti del piano che hanno da O distanza uguale a $r$.
I segmenti che congiungono il centro O con i punti della circonferenza hanno tutti la stessa lunghezza e sono detti raggi della circonferenza.




**Definizione**
Un **cerchio** di centro O e raggio $r$ è l'insieme dei punti del piano la cui distanza da O è minore o uguale a $r$ .
La circonferenza di centro O e raggio $r$ è quindi il "contorno" del cerchio di centro O e raggio $r$ e appartiene al cerchio.

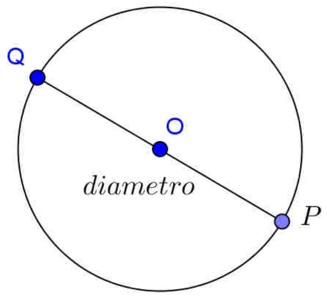


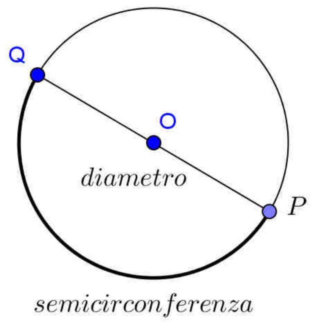
Si chiama ***corda*** il segmento che unisce due punti A e B di una circonferenza: A e B si dicono estremi della corda.

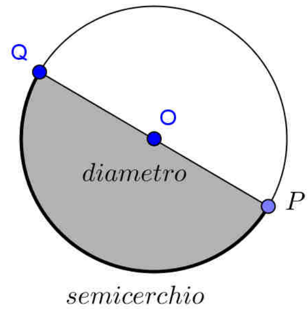



Si chiama ***diametro*** ogni corda passante per il centro della circonferenza.

Ogni diametro divide la circonferenza e il cerchio in due parti dette rispettivamente semicirconferenze e semicerchi.




Dimostriamo subito un importante teorema:

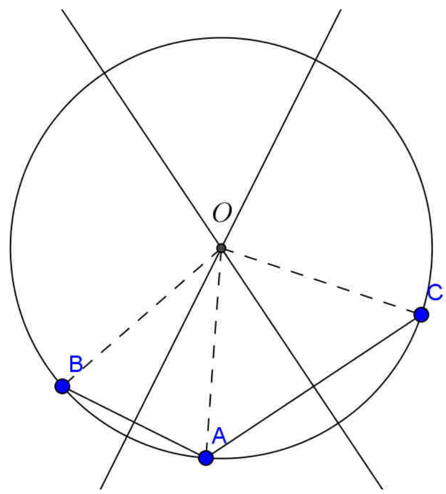
**Teorema:** *per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza*

**Dimostrazione**

Consideriamo tre punti non allineati A, B, C: uniamo A con B e tracciamo l'asse del segmento AB; uniamo A con C e tracciamo l'asse del segmento AC.

Sia O il punto di intersezione dei due assi: poiché O appartiene all'asse di AB si ha $OA \cong OB$, ma poiché appartiene anche all'asse di AC si ha anche $OA \cong OC$.

Quindi per O è equidistante dai tre punti e quindi la circonferenza di centro O e raggio OA passa anche per B e C.

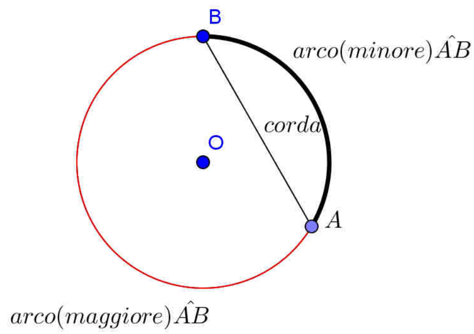



Questa è anche l'unica circonferenza passante per i tre punti dal momento che l'intersezione dei due assi è solo O.

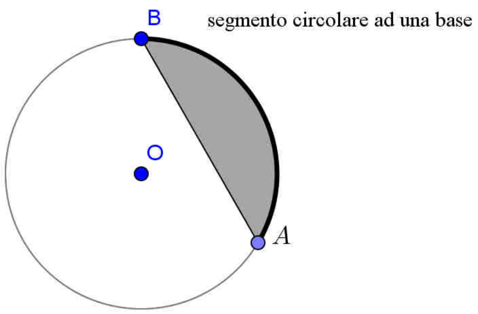
## Parti della circonferenza e del cerchio

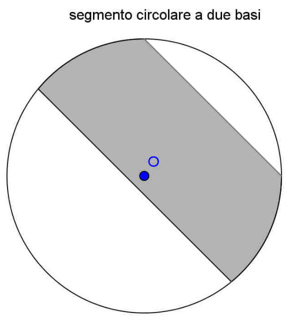
Diamo **qualche altra definizione.**

Le due parti della circonferenza individuate da una corda si dicono **archi**.

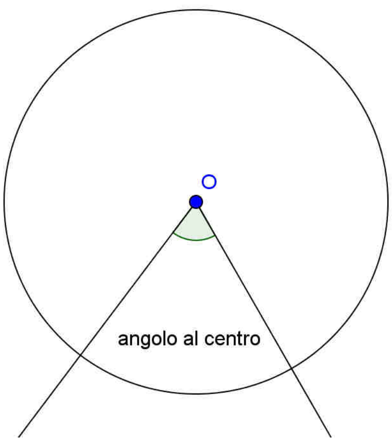


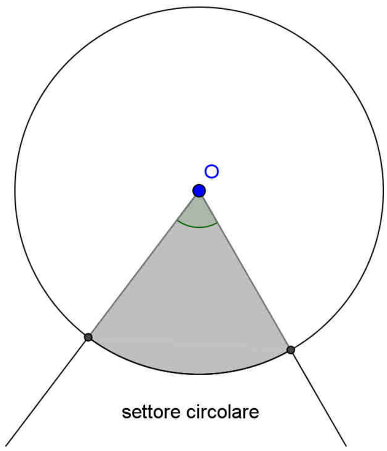

La parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco corrispondente si chiama **segmento circolare ad una base;**
la parte di cerchio compresa tra due corde parallele e i due archi che hanno per estremi gli estremi delle due corde si chiama **segmento circolare a due basi**




Un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza si chiama **angolo al centro.**
L'intersezione tra un cerchio e un suo angolo al centro si chiama **settore circolare**.

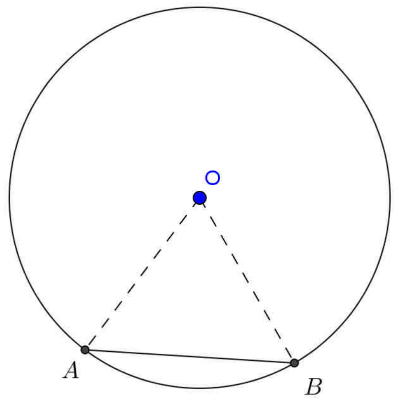


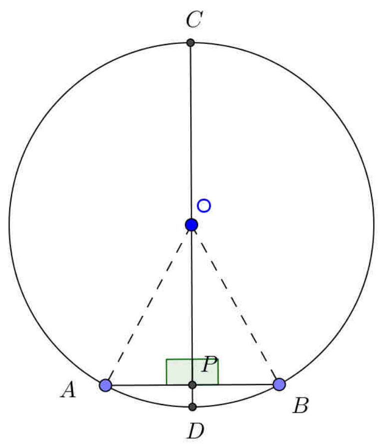
## SCHEDA DI LAVORO 1
***Proprietà delle corde di una circonferenza***

1) ***Il diametro è la corda di lunghezza massima***

*Dimostrazione:* considera una corda AB che non sia un diametro e congiungi A e B con il centro O della circonferenza. Se consideri il triangolo AOB, ricordando che in un triangolo ogni lato è … ……. della somma degli altri due, abbiamo che ………………….. e quindi $\overline{AB} < diametro$ .




2) ***Il diametro perpendicolare ad una corda passa per il suo punto medio e viceversa.***

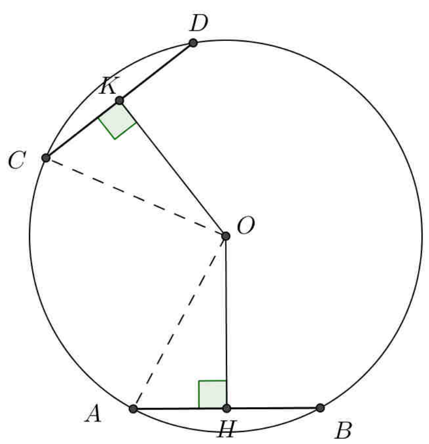



*Dimostrazione:* chiamiamo P il punto di intersezione tra il diametro CD perpendicolare alla corda AB e la corda AB. Il triangolo AOB è ………….. e quindi l'altezza OP è anche ……………..

In conclusione $AP \cong PB$ cioè P è il punto medio di AB.

Analogamente se un diametro passa per il punto medio di una corda……………………………

3) ***Due corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro della circonferenza e viceversa***




*Dimostrazione:* consideriamo AB e CD due corde congruenti della stessa circonferenza e tracciamo le distanze OH e OK. Tracciando i raggi AO,CO otteniamo due triangoli rettangoli che risultano…………………….. poiché hanno:

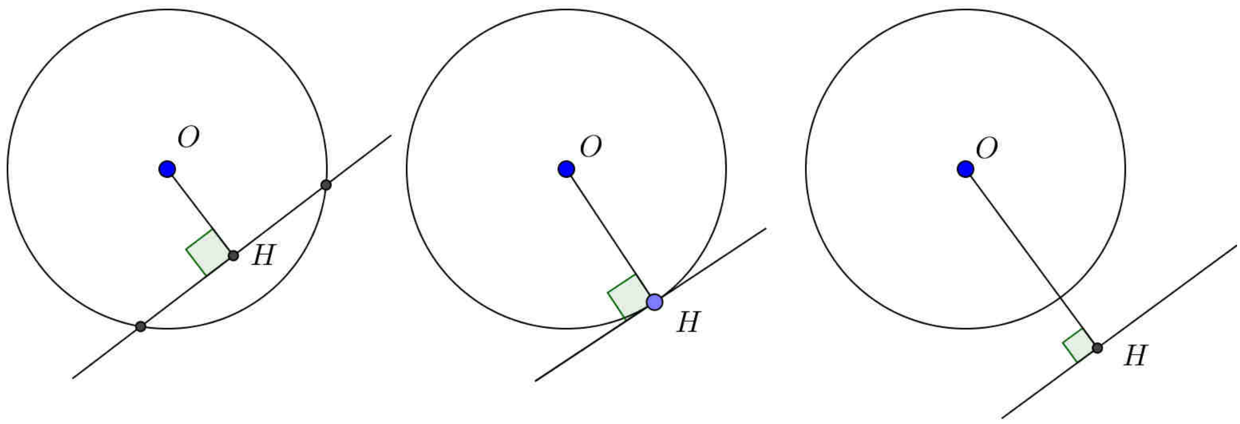
…………………………....................................................................

Quindi anche $OH \cong OK$ cioè le due corde hanno la stessa distanza dal centro.

In modo analogo si dimostra che se due corde hanno la stessa distanza dal centro sono congruenti.

## SCHEDA DI LAVORO 2
## *Retta e circonferenza*

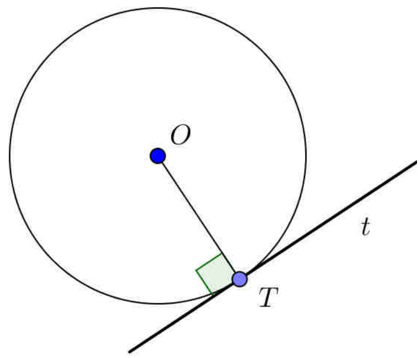
**Definizione**
Se una retta ha due punti di intersezione con una circonferenza si dice **secante**;
un solo punto di intersezione con la circonferenza si dice **tangente**;
nessun punto di intersezione con la circonferenza si dice **esterna** alla circonferenza.

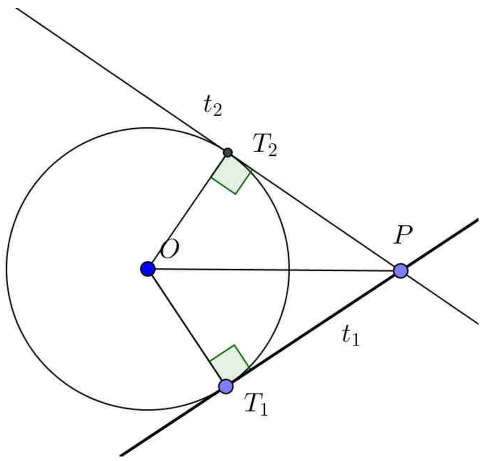



Si osserva che se la retta è secante la sua distanza dal centro della circonferenza è minore del raggio, se è tangente la sua distanza dal centro è uguale al raggio e se è esterna la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio (vale anche il viceversa cioè se la distanza è……………..allora la retta è secante ecc.).

1) ***Se una retta t è tangente ad una circonferenza in un punto T allora il raggio OT è perpendicolare alla retta t*** .

*Dimostrazione:* poiché la distanza dal centro è …………al raggio (se fosse minore la retta sarebbe secante, se fosse maggiore sarebbe esterna), il raggio OT è necessariamente il segmento perpendicolare la cui misura dà la distanza tra retta e centro.



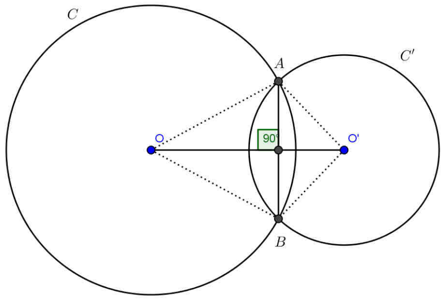

2)***Se da un punto P esterno ad una circonferenza si tracciano le rette tangenti alla circonferenza e si indicano con*** $T_1$ , $T_2$ ***i punti di tangenza, si ha che*** $PT_1 \cong PT_2$ **.**

*Dimostrazione:* congiungiamo O con P e con $T_1$ , $T_2$ .
I triangoli rettangoli $OPT_1$ , $OPT_2$ sono congruenti poiché…………………………………………………………

e quindi anche $PT_1 \cong PT_2$

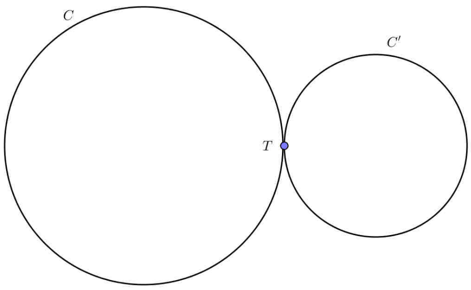
## Posizione reciproca tra due circonferenze

**Definizione:** due circonferenze si dicono “**secanti**” quando hanno due punti in comune.
**Nota**
Osserviamo che il segmento AB è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze: infatti essendo $OA \cong OB$, $O'A \cong O'B \Rightarrow$ O e O’ appartengono all’asse di AB e quindi OO’ è asse di AB e di conseguenza OO’ e AB risultano perpendicolari.

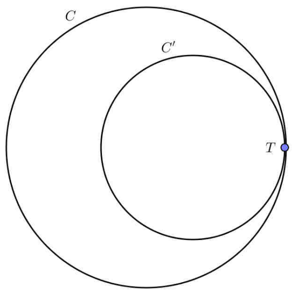


circonferenze secanti

**Definizione:** due circonferenze si dicono “**tangenti**” quando hanno un solo punto in comune.
Se il centro di una delle due circonferenze è esterno all’altra si dicono tangenti “esternamente”, se è interno di dicono tangenti “internamente”. Il punto comune si chiama punto di tangenza o di contatto.

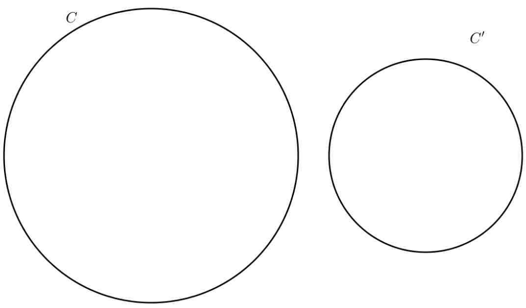


circonferenze tangenti esternamente

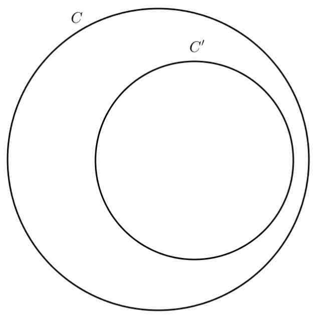


circonferenze tangenti internamente

**Definizione:** due circonferenze si dicono “**esterne**” quando tutti i punti di una circonferenza sono esterni all’altra e viceversa mentre si dicono **l’una “interna” all’altra** quando tutti i punti di una sono interni all’altra.

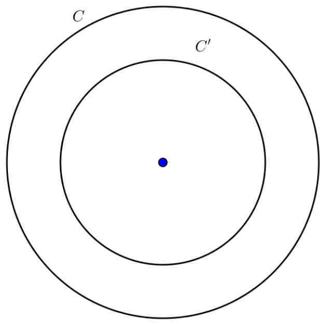


circonferenze esterne



C' interna a C

**Definizione:** due circonferenze, una interna all’altra, si dicono “**concentriche**” quando hanno lo stesso centro.

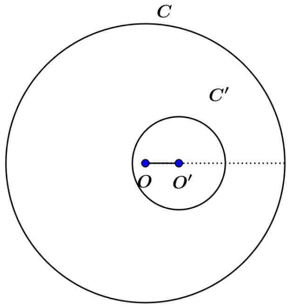


circonferenze concentriche

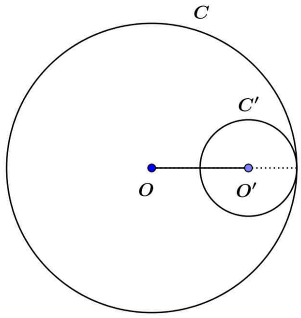
## Posizione reciproca tra due circonferenze e distanza tra i loro centri

Consideriamo due circonferenze $C$ e $C'$ di raggi $r$ e $r'$ e centri O e O' ed osserviamo la distanza tra i loro centri al variare della loro posizione reciproca (iniziamo con C' interna a $C$ e poi allontaniamo gradualmente O' da O).

1) $C'$ è interna a $C$ $\Leftrightarrow$ $OO' < r - r'$

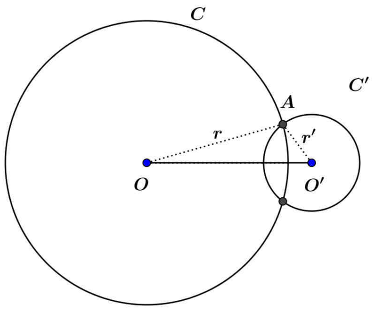



2) $C'$ è tangente internamente a $C$ $\Leftrightarrow$ $OO' = r - r'$

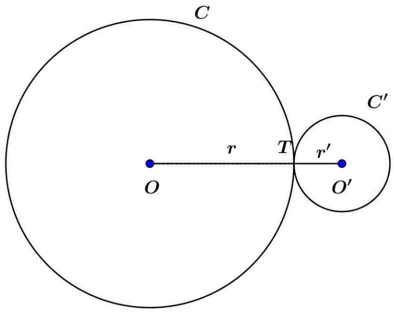



3) $C'$ e $C$ sono secanti $\Leftrightarrow$ $r - r' < OO' < r + r'$

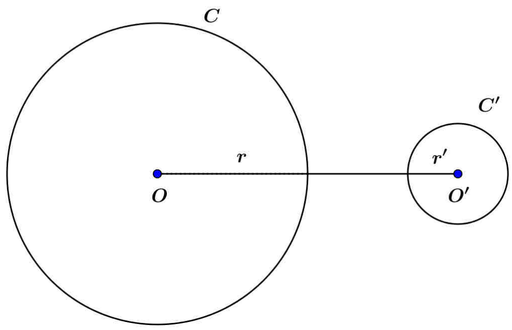
Infatti considerando il triangolo OAO' avremo che il lato OO' è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.




4) $C'$ e $C$ sono tangenti esternamente $\Leftrightarrow$ $OO' = r + r'$

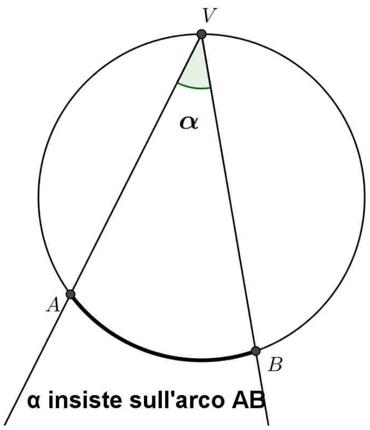


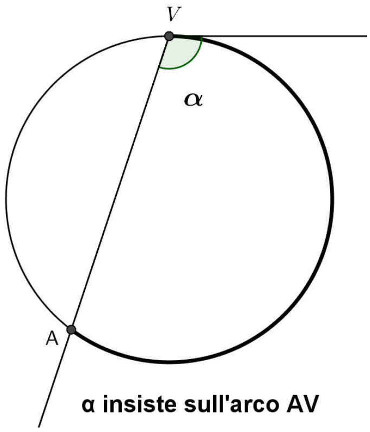

5) $C'$ e $C$ sono esterne $\Leftrightarrow$ $OO' > r + r'$



## Angoli alla circonferenza e angoli al centro

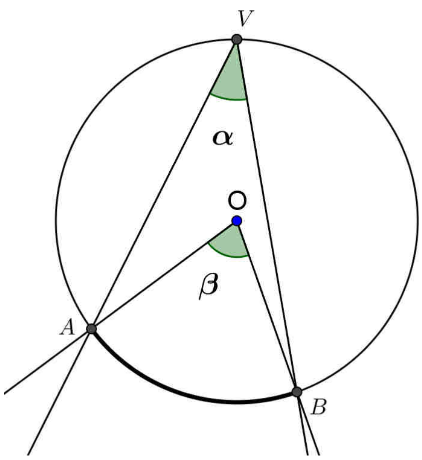
**Definizione:** si dice "**angolo alla circonferenza**" un angolo convesso avente il vertice sulla circonferenza e i lati entrambi secanti o uno secante ed uno tangente alla circonferenza.




L'intersezione dell'angolo con la circonferenza è un arco e si dice che l'angolo alla circonferenza **insiste** su tale arco.

**Definizione:** un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che "insistono" sullo stesso arco si dicono **corrispondenti.**

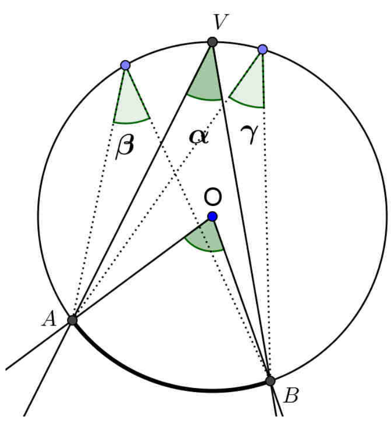



$\alpha$ e $\beta$ sono angoli corrispondenti

## Nota

Ad un angolo alla circonferenza corrisponde un solo angolo al centro "corrispondente" mentre, fissato un angolo al centro, ci sono infiniti angoli alla circonferenza "corrispondenti".

$\alpha$, $\beta$ , $\gamma$ sono tutti angoli alla circonferenza corrispondenti all'angolo al centro $A\hat{O}B$



C'è un'importante proprietà che riguarda gli angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.

## Teorema

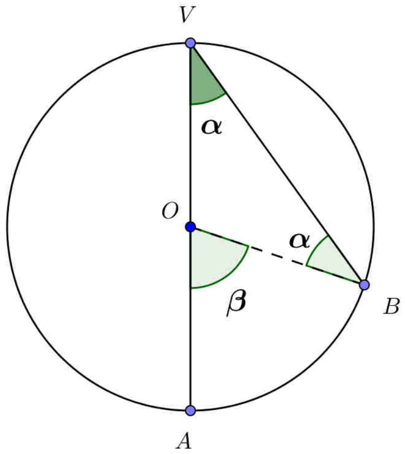
*L'angolo al centro è doppio di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.*

**Dimostrazione**

Indichiamo con $\alpha$ l'angolo alla circonferenza e con $\beta$ il corrispondente angolo al centro.

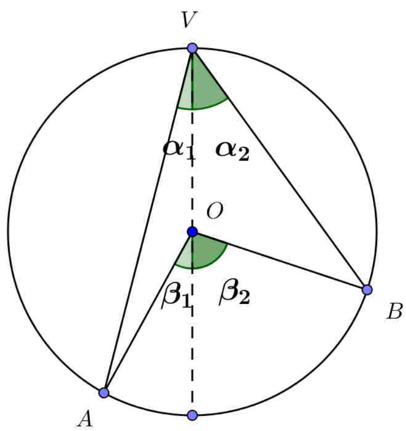
a) Cominciamo a considerare il caso in cui il centro O della circonferenza appartiene ad un lato dell'angolo alla circonferenza.
Congiungiamo O con B e consideriamo il triangolo isoscele OBV: si avrà quindi $O\hat{B}V \cong \alpha$.

Ma allora, per il teorema dell'angolo esterno, si avrà $\beta \cong \alpha + \alpha = 2\alpha$.



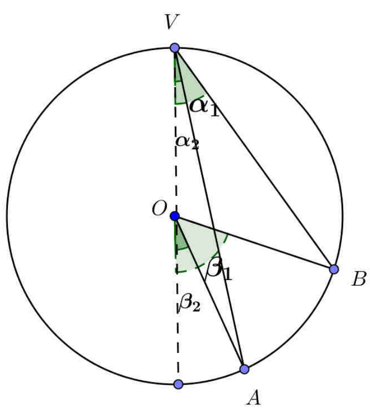

b) Sia O interno all'angolo $\alpha$. Tracciamo il diametro VO e avremo, per quanto visto prima

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2$$
e quindi
$$\beta \cong \beta_1 + \beta_2 \cong 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$




c) Sia O esterno all'angolo $\alpha$. Tracciamo ancora il diametro VO e consideriamo $\beta$ come differenza tra $\beta_1$ e $\beta_2$ (vedi figura). Anche questa volta avremo:

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2$$
e quindi
$$\beta \cong \beta_1 - \beta_2 \cong 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha$$

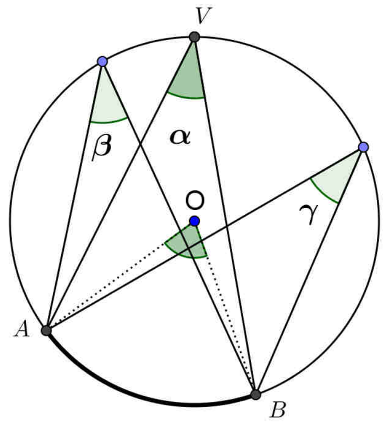



**Nota**

In modo analogo si dimostra la proprietà anche nel caso in cui l'angolo alla circonferenza ha un lato tangente alla circonferenza.

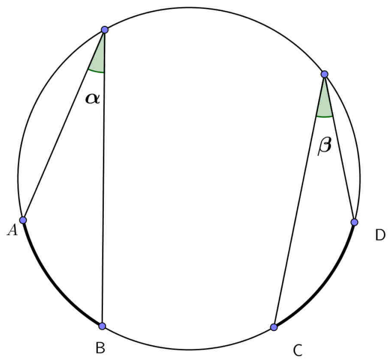
**Ci sono alcune importanti conseguenze di questo teorema**.

1) Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti poiché sono metà dello stesso angolo al centro.



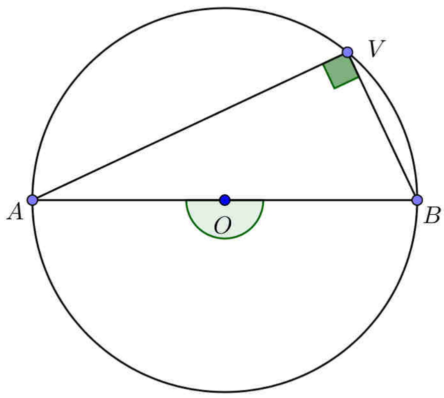

$$\alpha \cong \beta \cong \gamma$$

2) Angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali sono uguali.



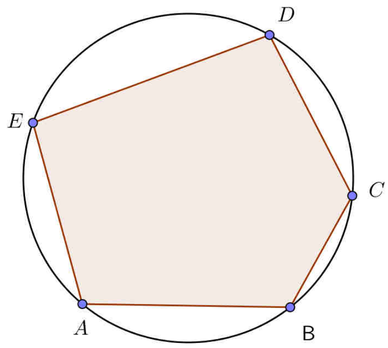

$$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \alpha \cong \beta$$

3) **Un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto** poiché risulta la metà di un angolo piatto.



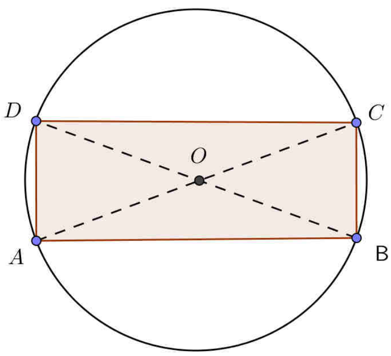
# SCHEDA DI LAVORO 3
## *Poligoni inscritti in una circonferenza*

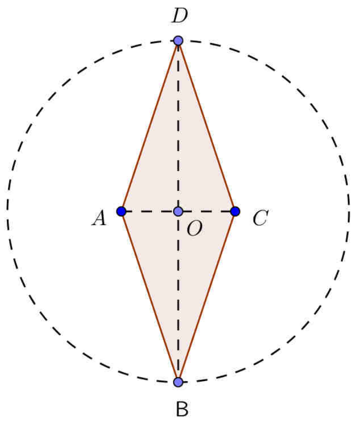
**Definizione:** un poligono si dice "inscritto" in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza e la circonferenza si dice circoscritta al poligono.




*Quali poligoni sono inscrivibili in una circonferenza?*

Se consideriamo un rettangolo osserviamo che il punto di incontro delle diagonali è il centro della circonferenza circoscritta poiché risulta alla stessa distanza da tutti i vertici.
Invece se consideriamo un rombo (che non sia un quadrato) non riusciamo a inscriverlo in una circonferenza.

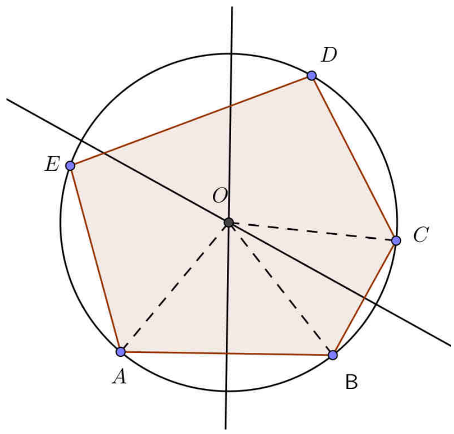



Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere inscritto in una circonferenza?

Consideriamo un poligono inscritto in una circonferenza ed indichiamo con O il centro della circonferenza: risulta che O è alla stessa distanza da tutti i vertici del poligono.

Quindi, ricordando che i punti dell'asse di un segmento sono …………………..dagli estremi del segmento, il centro O dovrà appartenere all'asse di AB, all'asse di BC ecc. (vedi figura).

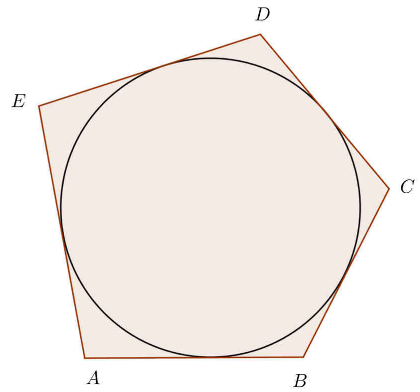



Quindi possiamo concludere che se un poligono è inscritto in una circonferenza gli assi dei suoi lati si incontrano in uno stesso………….. che risulta il …………………..della circonferenza circoscritta.

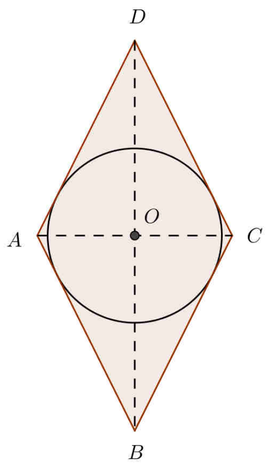
Viceversa è chiaro che se in un poligono gli assi dei lati si incontrano tutti in uno stesso ………., allora il poligono può essere…………………in una circonferenza.

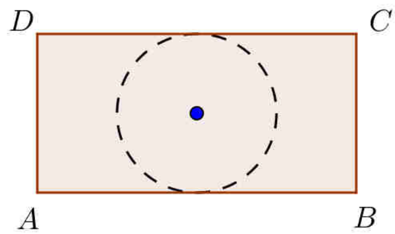
# SCHEDA DI LAVORO 4
## *Poligoni circoscritti ad una circonferenza*

**Definizione:** un poligono si dice "circoscritto" ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza e la circonferenza si dice inscritta nel poligono.

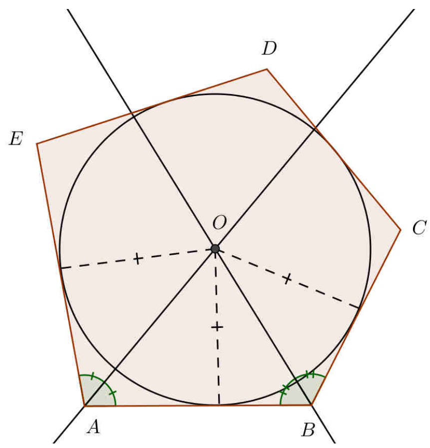



Quali poligoni sono circoscrivibili ad una circonferenza?
Se consideriamo un rombo vediamo che il punto di incontro delle sue diagonali risulta il centro della circonferenza inscritta poiché risulta alla stessa…………………..dai lati del rombo, mentre un rettangolo (che non sia un quadrato) non è circoscrivibile ad una circonferenza.




Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere circoscrivibile ad una circonferenza?
Consideriamo un poligono circoscritto ad una circonferenza ed indichiamo con O il suo centro: osserviamo che O è alla stessa distanza da tutti i lati del poligono.
Quindi, ricordando che i punti della bisettrice di un angolo sono ………………………..dai lati dell'angolo, il centro O dovrà appartenere alla bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, dell'angolo $\hat{B}$ ecc. (vedi figura).



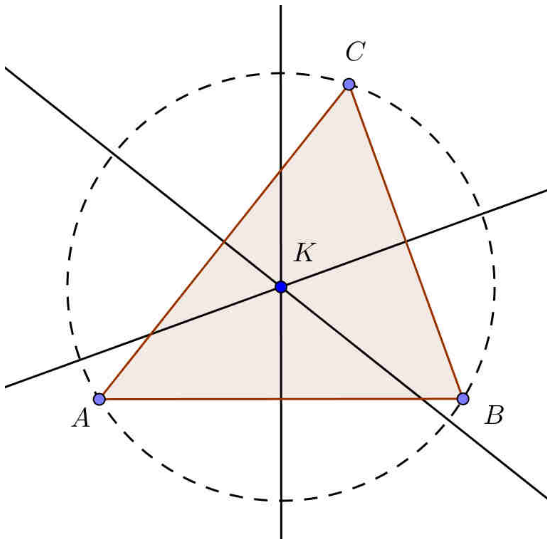

Quindi possiamo concludere che se un poligono è circoscritto ad una circonferenza le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto che risulta il …………….. della circonferenza.
Viceversa è chiaro che se in un poligono le bisettrici degli angoli si incontrano in uno stesso punto, allora il poligono è ………………………ad una circonferenza e il punto di incontro delle bisettrici ne è il ……………………

# Punti notevoli di un triangolo

## *Circocentro*

Abbiamo dimostrato che per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza: quindi in un triangolo gli **assi dei lati** si incontrano in uno stesso punto che viene detto "circocentro" ed è il centro della circonferenza circoscritta.

K è il circocentro del triangolo ABC




## *Incentro*

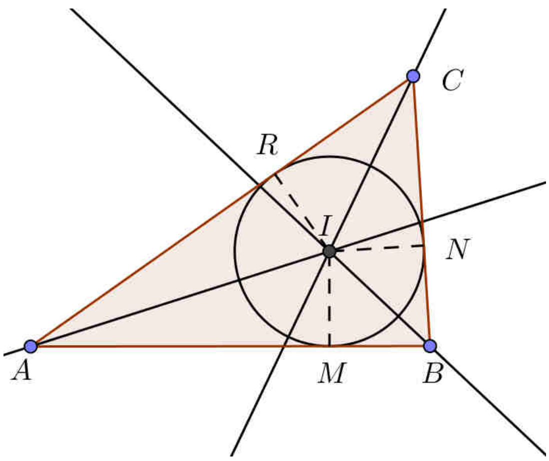
**Teorema**: in un triangolo le **bisettrici** degli angoli interni si incontrano in uno stesso punto che viene chiamato "incentro" e risulta il centro della circonferenza inscritta.

**Dimostrazione**: tracciamo le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e sia I il loro punto di intersezione. Tracciamo da I le perpendicolari ai lati e indichiamo con M,N,R i piedi di queste perpendicolari.

$IM \cong IR$ poiché I appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$;

$IM \cong IN$ poiché I appartiene alla bisettrice di $\hat{B}$.

Ma allora, per la proprietà transitiva, $IN \cong IR$ cioè I è equidistante dai lati dell'angolo $\hat{C}$ e quindi I appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.




In conclusione tutte le bisettrici si incontrano in I e poiché I si trova alla stessa distanza dai lati del triangolo risulta il centro della circonferenza inscritta nel triangolo (i lati sono tangenti alla circonferenza).

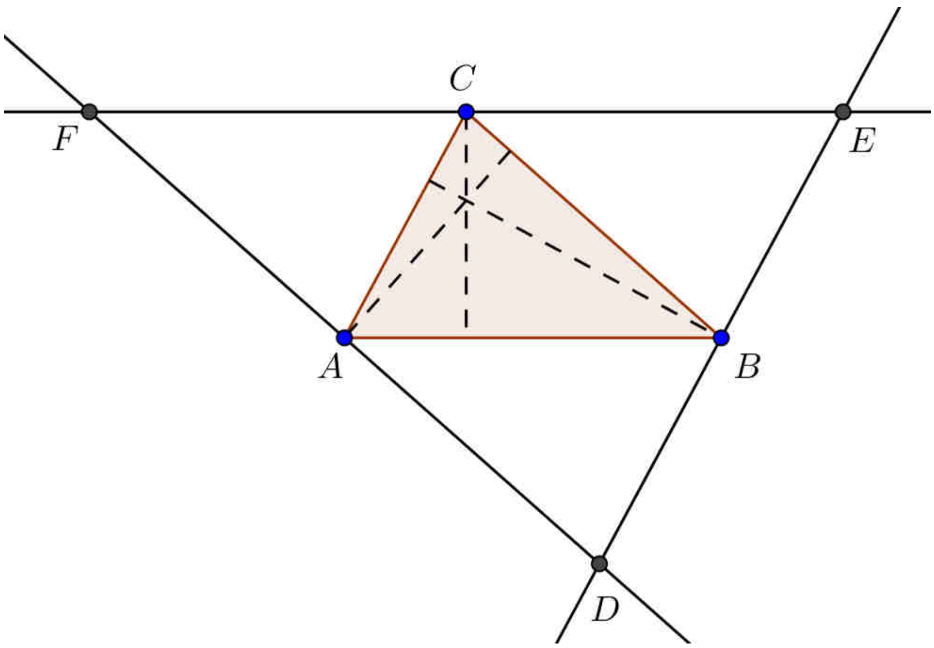
# SCHEDA DI LAVORO 5
## *Ortocentro di un triangolo*

Dimostriamo che le **altezze** di un triangolo si incontrano in uno stesso punto che viene detto "**ortocentro**" del triangolo.

Consideriamo un triangolo ABC e tracciamo le altezze $h_A$ , $h_B$ , $h_C$ uscenti rispettivamente dal vertice A,B,C.

Tracciamo la retta per A parallela al lato BC, la retta per B parallela al lato AC e la retta per C parallela al alto AB: siano D,E,F i loro punti di intersezione (vedi figura).

Osserviamo che A è il punto medio di DF perché essendo ADBC un parallelogramma si ha $AD \cong$ .......... ed essendo ABCF un parallelogramma si ha $BC \cong$ .......... e quindi per la proprietà transitiva abbiamo che $AD \cong$ ........
Inoltre l'altezza $h_A$ essendo perpendicolare a BC è anche perpendicolare a ……… e quindi risulta in conclusione asse del segmento………..

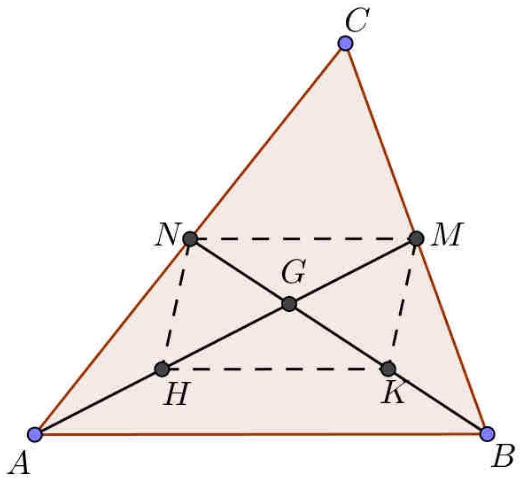



In modo analogo si dimostra che $h_B$ è asse di DE e $h_C$ è asse di ………: ma allora le tre altezze si incontrano in uno stesso punto perché sappiamo che gli assi del triangolo DEF si incontrano in uno stesso punto.

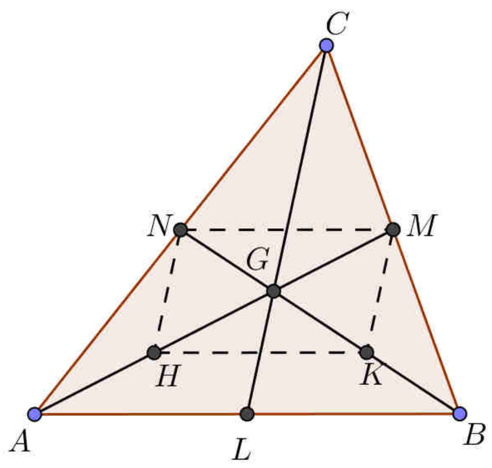
## SCHEDA DI LAVORO 6
### *Baricentro di un triangolo*

Dimostriamo che le mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto chiamato "**baricentro**" e che **il baricentro divide ogni mediana in due parti tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra**.

Consideriamo un triangolo ABC , tracciamo le due mediane AM e BN e chiamiamo G il loro punto di intersezione. Osserviamo che il segmento NM risulta parallelo ad AB e congruente alla metà di AB.




Consideriamo il punto medio H di AG e il punto medio K di GB: anche HK risulta ……………ad AB e congruente alla sua ………………..
Ma allora il quadrilatero HKMN avendo due lati opposti ………………. e …………………….. risulta un ………………………
Possiamo quindi affermare che le diagonali di HKMN si incontrano nel loro ……………………… e quindi $HG \cong GM$ , $KG \cong GN$ .
Ma essendo H il punto medio di AG avremo in conclusione che $AG \cong 2 \cdot GM$ ed essendo K il punto medio di GB avremo che $BG \cong 2 \cdot GN$ .

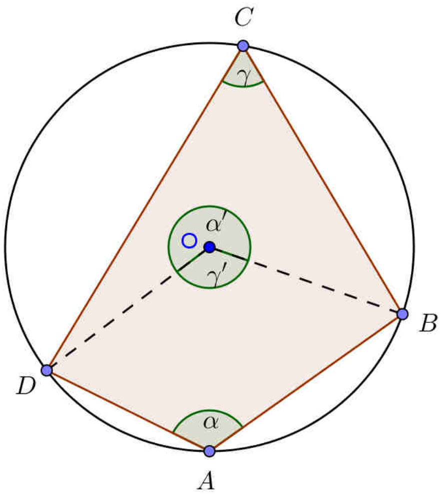



Poiché si può dimostrare in modo analogo che tracciando le mediane BN e CL anch'esse si intersecano in modo da dividersi in parti tali che quella che ha per estremo un vertice è doppia dell'altra, poiché la mediana BN è divisa nello stesso modo sia dal punto di intersezione con AM che da quello con CL, AM e CL devono intersecare BN nello stesso punto G.

# Quadrilateri inscritti e circoscritti ad una circonferenza

**Teorema**: ***in un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.***

**Dimostrazione**: sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza. Congiungiamo il centro O della circonferenza con B e D: vengono individuati così due angoli al centro $\alpha'$, $\gamma'$ e quindi $\alpha' = 2\alpha, \gamma' = 2\gamma$



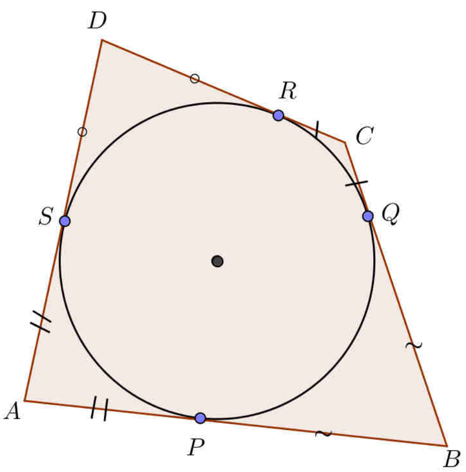

Poiché la somma di $\alpha'$ e $\gamma'$ è un angolo giro si ha che $\alpha + \gamma = \hat{P}$ cioè $\alpha$ e $\gamma$ sono supplementari.
Analogamente si può dimostrare anche per l'altra coppia di angoli opposti oppure si ottiene subito ricordando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro.

Vale anche il teorema inverso cioè se in un quadrilatero convesso gli angoli opposti sono supplementari allora è inscrivibile in una circonferenza (omettiamo la dimostrazione).

In conclusione condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia inscrivibile in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.

**Teorema:** *in un quadrilatero convesso circoscritto ad una circonferenza la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.*

**Dimostrazione**: sia ABCD un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza.




Indichiamo con P,Q,R,S i punti di tangenza dei lati con la circonferenza e per la proprietà dei segmenti di tangenza condotti da un punto esterno avremo che

$$AP \cong AS, \quad PB \cong BQ, \quad CR \cong CQ, \quad DR \cong DS$$

Quindi sommando membro a membro abbiamo che

$$AP + PB + CR + DR \cong AS + BQ + CQ + DS$$
$$\rightarrow (AP + PB) + (CR + DR) \cong (AS + DS) + (BQ + CQ)$$

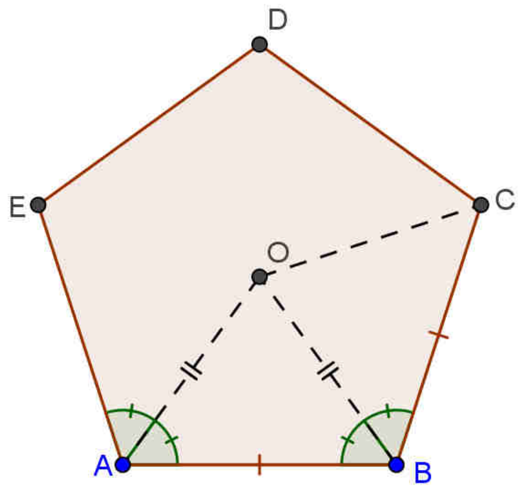
cioè $\quad AB + DC \cong AD + BC$

Vale anche il teorema inverso (che non dimostriamo) e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia circoscritti bile ad una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia uguale alla somma degli altri due.

# Poligoni regolari e circonferenze inscritte e circoscritte

**Teorema:** un poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza e le due circonferenze hanno lo stesso centro, che viene detto **centro** del poligono.

**Dimostrazione**: consideriamo un poligono regolare (vedi figura) e tracciamo le bisettrici di due angoli consecutivi $\hat{A}$, $\hat{B}$ e sia O il loro punto di intersezione.

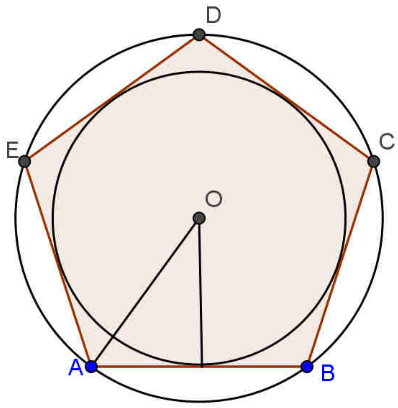



Il triangolo ABO è isoscele poiché ha gli angoli alla base congruenti e quindi $AO \cong BO$.
Congiungendo O con C i triangoli ABO e BCO sono congruenti poiché hanno OB in comune, $AB \cong BC$ e $A\hat{B}O \cong O\hat{B}C$.

Di conseguenza $OC \cong OA$, $O\hat{C}B \cong A\hat{B}O = \frac{1}{2}\hat{B}$

ed essendo il poligono regolare e quindi $\hat{B} \cong \hat{C}$ si ha anche $O\hat{C}B \cong \frac{1}{2}\hat{C}$ cioè OC è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.

Se congiungiamo O con tutti gli altri vertici possiamo ripetere il ragionamento e concludere che O è il **punto di incontro delle bisettrici** e quindi il centro della circonferenza inscritta ma essendo anche **equidistante dai vertici** è anche il centro della circonferenza circoscritta.

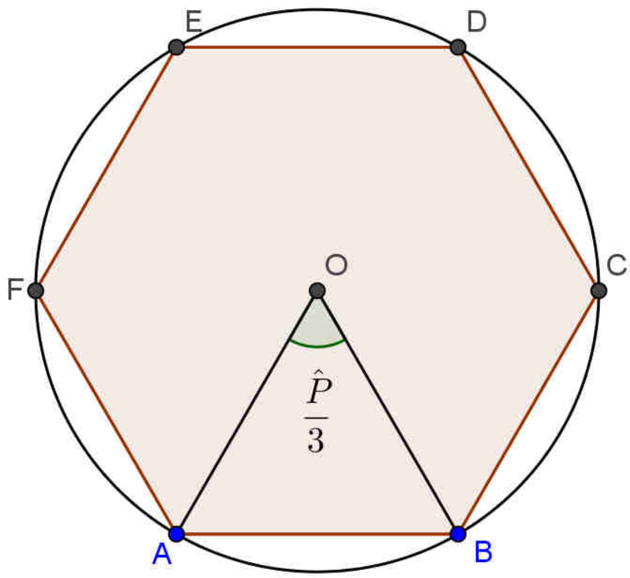



## Nota

Il raggio della circonferenza circoscritta si chiama "**raggio**" del poligono mentre il raggio della circonferenza inscritta si chiama "**apotema**" del poligono.

# SCHEDA DI LAVORO 7
## *Esagono regolare e circonferenza circoscritta*

Consideriamo un esagono regolare ABCDEF e tracciamo la circonferenza circoscritta.




### *Come risulta il raggio della circonferenza circoscritta?*

Congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici A e B: otteniamo un triangolo in cui $A\hat{O}B =$ ............ .

Ma ABO è un triangolo isoscele e quindi gli angoli alla base sono uguali: si avrà quindi che tutti gli angoli del triangolo ABO sono ……….. e quindi il triangolo ABO è…………………………..

In conclusione il raggio della circonferenza circoscritta risulta uguale al ………………….. dell’esagono regolare.

# PROBLEMI
## CIRCONFERENZA

1. Dimostra che due corde AA’ e BB’ parallele, condotte dagli estremi di un diametro AB di una circonferenza sono congruenti.

2. In una circonferenza di centro O, siano AB e BC due corde congruenti. Dimostra che la semiretta BO è la bisettrice dell’angolo ABC.

3. In una circonferenza di centro O, siano AB e BC due corde. Dimostra che, se la semiretta BO è la bisettrice dell’angolo ABC, allora le due corde sono congruenti.

4. AB è il diametro di una circonferenza di centro O, C è un punto qualsiasi della circonferenza, D è il punto medio dell’arco BC ed E è il punto medio dell’arco AC. Dimostra che l’angolo DOE è retto.

5. Dimostra che il quadrilatero che ha per vertici gli estremi di due diametri perpendicolari di una circonferenza, è un quadrato.

6. Dimostra che gli estremi di due corde congruenti e parallele sono i vertici di un rettangolo.

7. Dimostra che se si conduce una perpendicolare CD ad un diametro AB di una circonferenza in un suo punto K, e si congiunge il punto C con il centro fino ad incontrare in P la circonferenza, la retta DP è parallela al diametro AB.

8. Dimostra che, se le tangenti condotte dagli estremi di una corda AB sono parallele, allora la corda è un diametro.

9. Sono date due circonferenze concentriche e due diametri: AB sulla maggiore e CD sulla minore. Dimostra che ACBD è un parallelogramma.

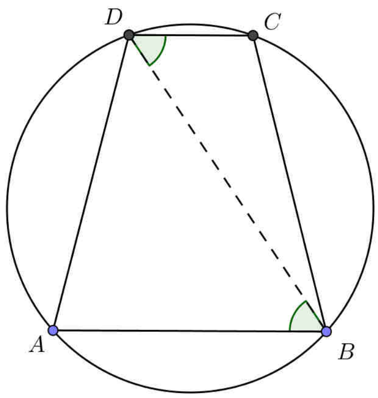
10. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O, traccia le tangenti PA e PB (essendo A e B i punti di contatto). Chiama C il secondo estremo del diametro che ha un estremo in A e dimostra che gli angoli AOB ed APB sono supplementari. Successivamente dimostra che l’angolo COB è congruente all’angolo APB ed infine che l’angolo CAB è metà dell’angolo APB.

11. Due circonferenze congruenti, di centri O ed O’, sono tangenti esternamente e T è il loro punto di contatto. La corda AT della circonferenza di centro O è perpendicolare alla corda BT della circonferenza di centro O’. Dimostra che OA è parallelo ad O’B e, poi, che AOO’B è un parallelogramma.

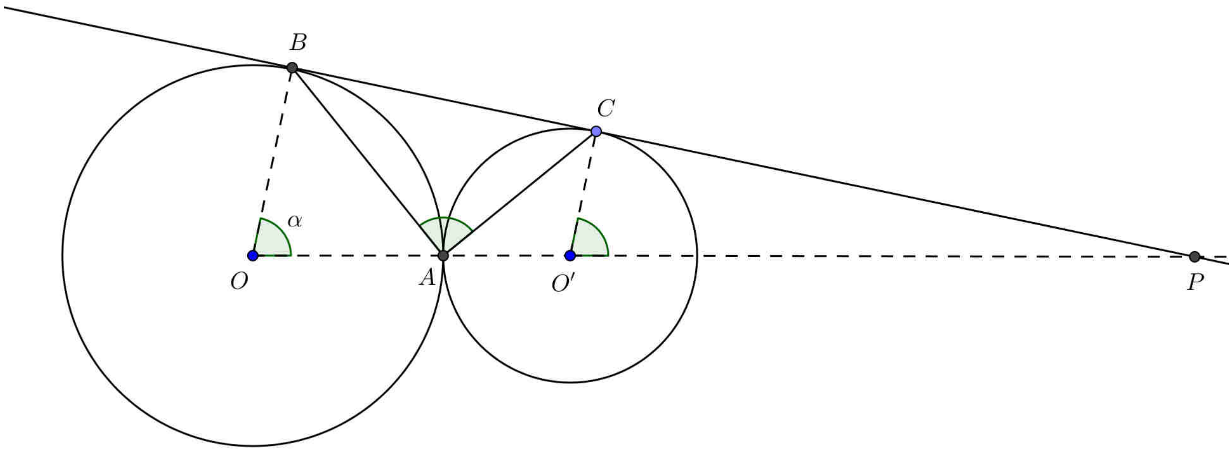
12. Da un punto P esterno ad una circonferenza traccia: una semiretta che interseca la circonferenza in A e B (con A compreso tra P e B) ed un’altra semiretta interseca la circonferenza in C e D (con C compreso tra P e D). Dimostra che il triangolo PBC ed il triangolo PDA hanno tutti gli angoli congruenti.

13. In una circonferenza congiungi gli estremi di due corde parallele disuguali. Come risulta il quadrilatero che si ottiene?

    *Suggerimento:* congiungi B con D e considera gli angoli in figura………




14. Considera due circonferenze tangenti esternamente nel punto A. Disegna una tangente comune come in figura e siano B e C i punti di contatto. Come risulta l'angolo $B\hat{A}C$ ?

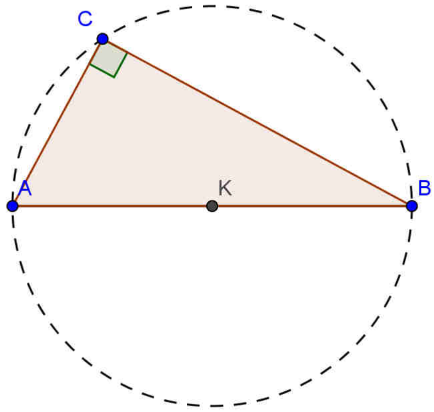



*Suggerimento*: congiungi i centri delle circonferenze con i punti di tangenza e con il punto A.

I triangoli OAB e O'AC sono isosceli e inoltre essendo le rette OB e O'C ……………. gli angoli $B\hat{O}A$ e $C\hat{O}'P$ sono ……………

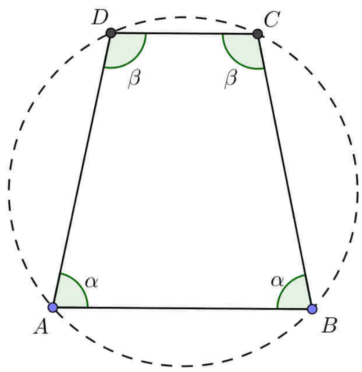
Allora poiché $B\hat{A}O \cong \dfrac{\hat{P}-\alpha}{2}$ abbiamo che $B\hat{A}C \cong$......................

15. Considera un triangolo rettangolo ABC retto in C. Dove si trova il suo circocentro K?




*Suggerimento*
Ricordando che un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza si ha che il centro K della circonferenza circoscritta coincide con il ……………………………..

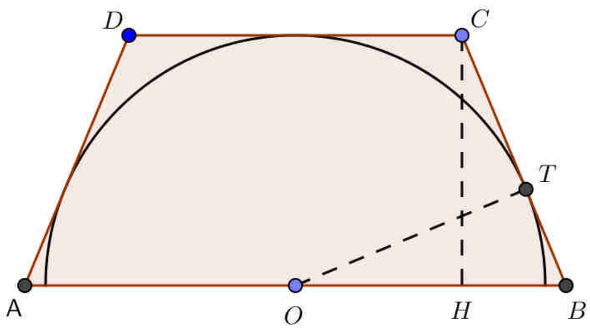
16. Considera un trapezio isoscele ABCD. E' sempre inscrivibile in una circonferenza?




*Suggerimento*:
Considera gli angoli del trapezio isoscele (vedi figura). Poiché le basi sono parallele abbiamo che $\alpha + \beta \cong$ ......... e quindi per il teorema sui quadrilateri inscritti in una circonferenza………………………………………..

17. Disegna due triangoli isosceli ABC e ABD aventi la base AB in comune e i vertici C e D da parti opposte rispetto ad AB. Il quadrilatero ABCD è circoscrivibile ad una circonferenza?

18. Considera un trapezio isoscele ABCD circoscritto ad una semicirconferenza di centro O. Dimostra che il lato obliquo è congruente a metà della base maggiore.




*Suggerimento*
Disegna il punto T di tangenza sul lato obliquo BC e congiungilo con O, traccia l'altezza CH e confronta i triangoli CHB e OTB: risultano ………………….. poiché………………………..
………………………………………………
Di conseguenza $CB \cong$ .................

19. Disegna un triangolo equilatero e le circonferenze inscritta e circoscritta. Indica con $R$ il raggio della circonferenza circoscritta e con $r$ il raggio di quella inscritta. Dimostra che $R = 2r$ .

20. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, traccia l'altezza AH e da H manda le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC. Dimostra che A,E,H,D sono punti di una stessa circonferenza.

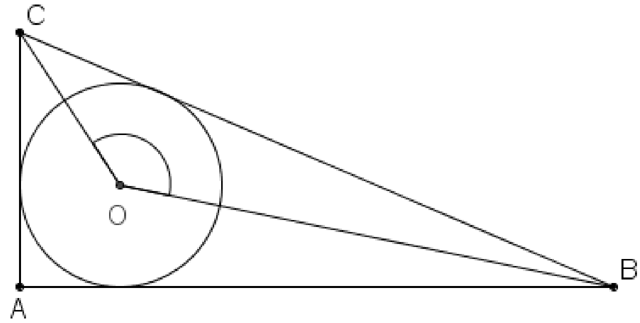
21. Considera due rette (distingui il caso che siano parallele o incidenti): dove si trovano i centri delle circonferenze tangenti?

22. Considera un triangolo rettangolo di cateti AB e AC ed indica con $r$ il raggio della circonferenza inscritta e con $R$ il raggio della circonferenza circoscritta. Dimostra che

$$AB + AC \cong 2r + 2R$$

23. *(Invalsi 2017/18)*

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC e O è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Si vuole dimostrare che l'ampiezza dell'angolo BOC (segnato in figura) è 135°.



# La misura delle grandezze

## Definizione

Una **classe** di grandezze geometriche è un insieme di enti geometrici in cui è possibile:

- il confronto tra due qualsiasi elementi dell'insieme;

- l'addizione, che gode della proprietà commutativa e associativa, che associa a due elementi A e B dell'insieme l'elemento A+B appartenente all'insieme detto somma di A e B.

Le grandezze appartenenti ad una stessa classe si dicono **omogenee.**

Sono classi di grandezze omogenee l'insieme dei segmenti, degli angoli, delle superfici piane.

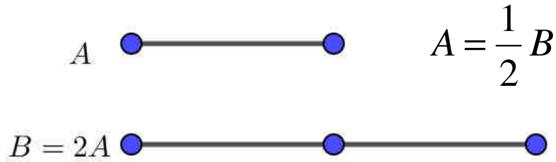
## Multiplo di una grandezza

Il multiplo di una grandezza A secondo il numero naturale *n* è la grandezza omogenea ad A

$$B = A + ...... + A = nA \quad (n \text{ addendi})$$

Si dice anche che A è sottomultipla di B secondo il numero *n* oppure che A è l'ennesima parte di B e si scrive

$$A = \frac{B}{n} = \frac{1}{n}B$$




$$A = \frac{1}{2}B$$

# Grandezze commensurabili

**Definizione**
Due grandezze omogenee A e B si dicono commensurabili quando **ammettono una grandezza sottomultipla comune** cioè quando esiste una terza grandezza U (omogenea ad A e B) che è contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse cioè tale che

$$A = m \cdot U\,, \quad B = n \cdot U \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

Quindi poiché $\qquad B = n \cdot U \rightarrow U = \dfrac{1}{n} B$

sostituendo si ha $\qquad A = m \cdot \dfrac{1}{n} B = \dfrac{m}{n} \cdot B$

**Rapporto di grandezze commensurabili**

Se $A = \dfrac{m}{n} B$ chiameremo rapporto tra A e B (e lo indicheremo con $\dfrac{A}{B}$) il numero razionale $\dfrac{m}{n}$

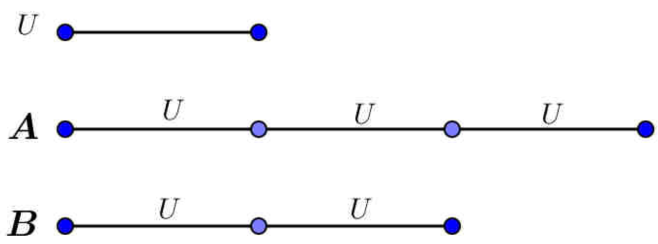
$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

*Quindi il rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale.*

**Esempio**

In figura sono disegnate due grandezze A e B tali che

$$A = 3 \cdot U\,, \quad B = 2 \cdot U \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$

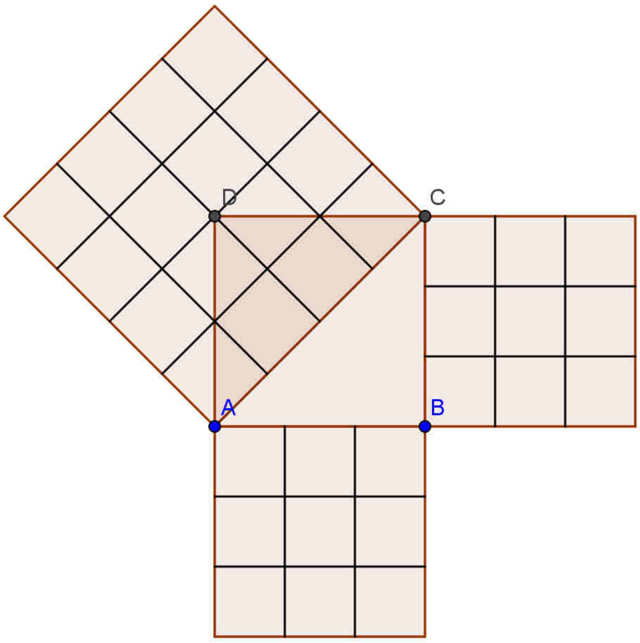


# Grandezze incommensurabili

**Definizione**
Due grandezze omogenee A e B si dicono incommensurabili **quando non esiste una grandezza sottomultipla comune**.

**Esempio**: dimostriamo che *il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti incommensurabili.*

Consideriamo un quadrato ABCD e la sua diagonale AC.
Supponiamo per assurdo che il lato AB e la diagonale AC siano segmenti commensurabili cioè supponiamo che esista un segmento EF tale che $AB = n \cdot EF$, $AC = m \cdot EF$ (la figura è solo indicativa).




Applicando il teorema di Pitagora e contando il numero dei "quadratini" di lato congruente ad EF si dovrebbe avere:

$$m^2 = 2n^2$$

Ma questa uguaglianza non può essere vera perché se consideriamo la scomposizione in fattori primi e in particolare quante volte compare il fattore 2, avremo che nel numero $m^2$ il fattore 2 o non compare mai o compare un numero pari di volte (essendo un quadrato) mentre in $2n^2$ il fattore 2 sarà presente un numero dispari di volte perché c'è un 2 moltiplicato per $n^2$ in cui il 2 compare o nessuna volta o un numero pari di volte.

In conclusione siamo arrivati ad una contraddizione e questo significa che i segmenti AB e AC non sono commensurabili.

## Nota storica

I primi matematici che parlarono di grandezze incommensurabili furono i *Pitagorici*: infatti applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele *furono costretti*, con ragionamenti analoghi a quelli che abbiamo visto, *ad ammettere l'esistenza di grandezze omogenee sprovviste di un sottomultiplo comune.*

Invece essi pensavano che i segmenti fossero costituiti da un numero finito di punti e che quindi fossero tutti commensurabili tra loro. Inoltre ritenevano che tutti i corpi fossero costituiti da corpuscoli tutti uguali disposti in varie forme geometriche e consideravano l'interpretazione geometrica della realtà come un anello di congiunzione tra umano e divino.

*La scoperta delle grandezze incommensurabili* sembrò quindi ai Pitagorici blasfema e sconcertante tanto che *fu tenuta segreta* e fu proibito ai membri della setta di rivelarla.

**Rapporto di grandezze incommensurabili**
Si può definire il rapporto tra due grandezze incommensurabili?

Riprendiamo l'esempio del lato $l$ e della diagonale $d$ di un quadrato.
Abbiamo che

$$
\begin{array}{lcl}
l < d < 2l & & 1 < \frac{d}{l} < 2 \\
1{,}4l < d < 1{,}5l & \rightarrow & 1{,}4 < \frac{d}{l} < 1{,}5 \\
1{,}41l < d < 1{,}42l & & 1{,}41 < \frac{d}{l} < 1{,}42 \\
1{,}414l < d < 1{,}415l & & 1{,}414 < \frac{d}{l} < 1{,}415 \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Il numero $\frac{d}{l}$ è definito come "elemento separatore" dei due insiemi di numeri razionali

$$1,\quad 1{,}4,\quad 1{,}41,\quad 1{,}414,\quad \ldots..$$
$$2,\quad 1{,}5,\quad 1{,}42,\quad 1{,}415,\quad \ldots\ldots.$$

che rappresentano i valori approssimati per difetto e per eccesso.

Questo numero viene detto "irrazionale", cioè non razionale, e in questo caso viene indicato con il simbolo $\sqrt{2}$ .

In conclusione *se A e B sono grandezze incommensurabili il loro rapporto è un numero irrazionale.*

# Misura di una grandezza

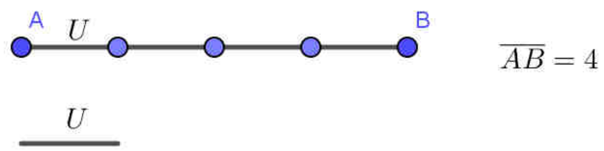
Se fissiamo una grandezza U come "unità di misura", la misura rispetto ad U di una grandezza A, omogenea con U, è il numero reale (razionale o irrazionale) che esprime il rapporto tra A e U e si indica con $\overline{A}$ cioè

$$\overline{A} = \frac{A}{U}$$

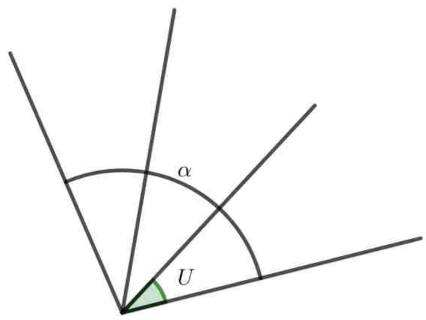
## Nota

La misura di un segmento si dice "**lunghezza**", quella di un angolo si dice "**ampiezza**" e quella di una superficie piana "**area**".

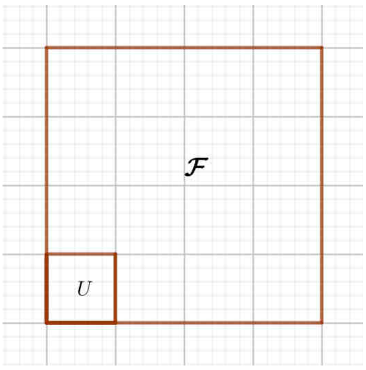
**Esempio 1**
La lunghezza del segmento AB in figura, rispetto all'unità di misura U, è 4.




**Esempio 2**
L'ampiezza dell'angolo $\alpha$, rispetto all'unità di misura U, è 3.




**Esempio 3**
L'area della superficie della figura *F*, rispetto all'unità di misura U, è 16.



# Proporzioni tra grandezze

**Definizione**

Due grandezze omogenee A e B (con $B \neq 0$) e altre due grandezze omogenee C e D (con $D \neq 0$) **si dicono in proporzione** quando il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra la terza e la quarta cioè:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Si scrive anche A : B = C : D e che si legge "A sta a B come C sta a D".

Le quattro grandezze si dicono **termini** della proporzione e in particolare A e B si dicono termini estremi mentre B e C si dicono termini medi.

**Nota**
Se A, B ,C sono tre grandezze omogenee tra loro e si ha

$$A : B = B : C$$

la grandezza B si chiama *media proporzionale* tra A e C.

## Osservazione

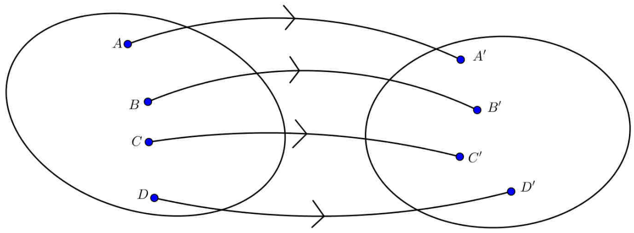
Si dimostra facilmente che *se quattro grandezze sono in proporzione allora sono in proporzione anche le loro misure* e viceversa.

Questo ci permette di estendere le proprietà delle proporzioni tra numeri alle proporzioni tra grandezze .

Ricordiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche:

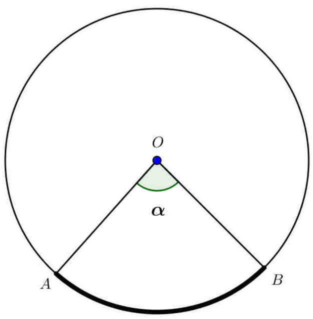
"In una proporzione numerica $a : b = c : d$ **il prodotto dei termini medi è uguale al prodotto dei termini estremi** cioè $a \cdot d = b \cdot c$ (e viceversa se $a \cdot d = b \cdot c$ allora $a : b = c : d$ ).

**Definizione**
Diciamo che due classi di grandezze sono in ***corrispondenza biunivoca*** quando è possibile associare ad ogni grandezza della prima classe una e una sola grandezza della seconda classe.



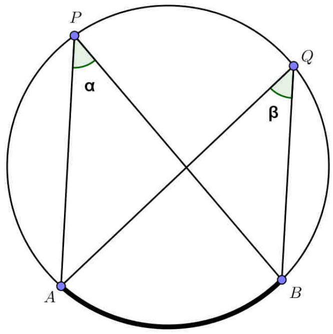

**Esempio**

Se consideriamo, in un dato cerchio, l'insieme degli angoli al centro e l'insieme degli archi di circonferenza possiamo associare ad ogni angolo al centro l'arco di circonferenza su cui insiste e osservare *che si tratta di una corrispondenza biunivoca* poiché per ogni angolo al centro c'è uno ed un solo arco di circonferenza su cui insiste.




$A\hat{O}B \rightarrow arcoAB$

**Esempio**
Se invece consideriamo, sempre in un dato cerchio, l'insieme degli angoli alla circonferenza e l'insieme degli archi di circonferenza ed associamo ad un angolo alla circonferenza l'arco di circonferenza su cui insiste, abbiamo che questa *non è una corrispondenza biunivoca* poiché ad angoli alla circonferenza diversi (anche se di uguale ampiezza) viene associato lo stesso arco di circonferenza.




$\alpha \rightarrow$ arco AB

$\beta \rightarrow$ arco AB

## Grandezze direttamente proporzionali

**Definizione**
*Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono direttamente proporzionali quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe* cioè

$$\forall \quad A, B \quad \text{se} \quad A \to A', \quad B \to B' \ \text{ si ha } \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

## Grandezze inversamente proporzionali

**Definizione**
*Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono* ***inversamente proporzionali*** *quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al reciproco del rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe* cioè

$$\forall \quad A, B \quad \text{se} \quad A \to A', \quad B \to B' \ \text{ si ha } \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

**Osservazione**
In questo caso quindi è il prodotto delle misure di due grandezze corrispondenti ad essere costante perché $\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'} \to A \cdot A' = B \cdot B'$

**Il criterio della proporzionalità diretta**
Come possiamo stabilire se due classi di grandezze sono direttamente proporzionali?

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che

- a grandezze uguali di una classe corrispondano grandezze uguali dell'altra;
- alla somma di due grandezze qualsiasi di una classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti dell'altra.

**Esempio**

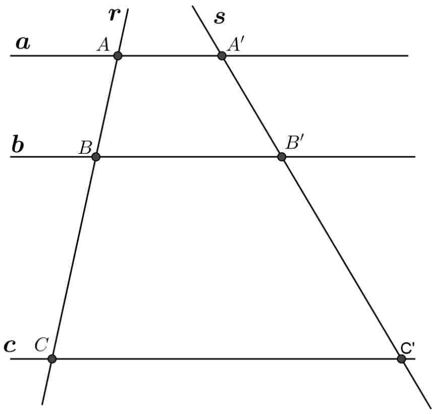
Gli angoli al centro e gli archi di circonferenza corrispondenti sono un esempio di classi di grandezze direttamente proporzionali.

Infatti ad angoli al centro uguali corrispondono archi sottesi uguali e alla somma di angoli al centro corrisponde un arco uguale alla somma degli archi sottesi corrispondenti.

## Teorema di Talete

Dimostriamo questo importante teorema riguardante **le classi di grandezze direttamente proporzionali**:
*Se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali,* ***i segmenti individuati su una trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti individuati sull'altra trasversale.***

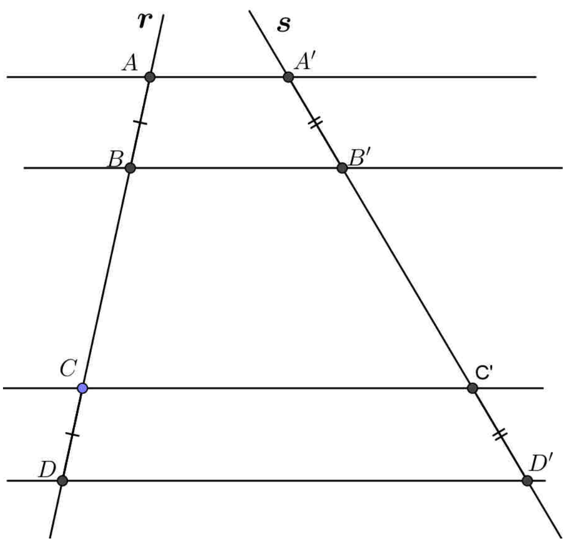
Questo significa, per esempio, che se *a*,*b*,*c* sono tre rette parallele e *r* e *s* sono due trasversali (vedi figura) si ha

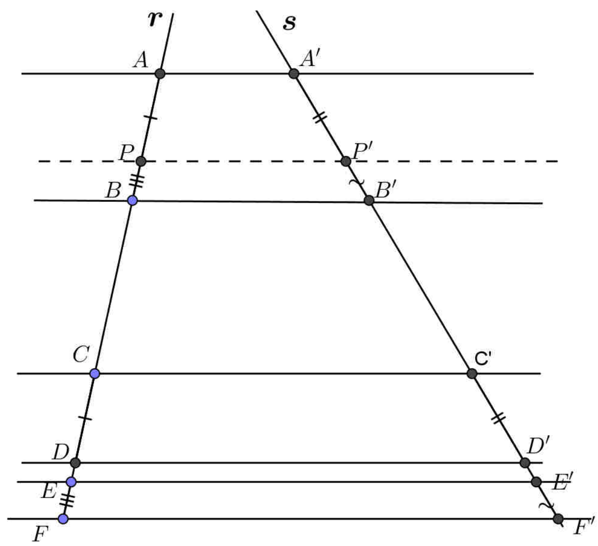



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

**Dimostrazione**
Osserviamo che:

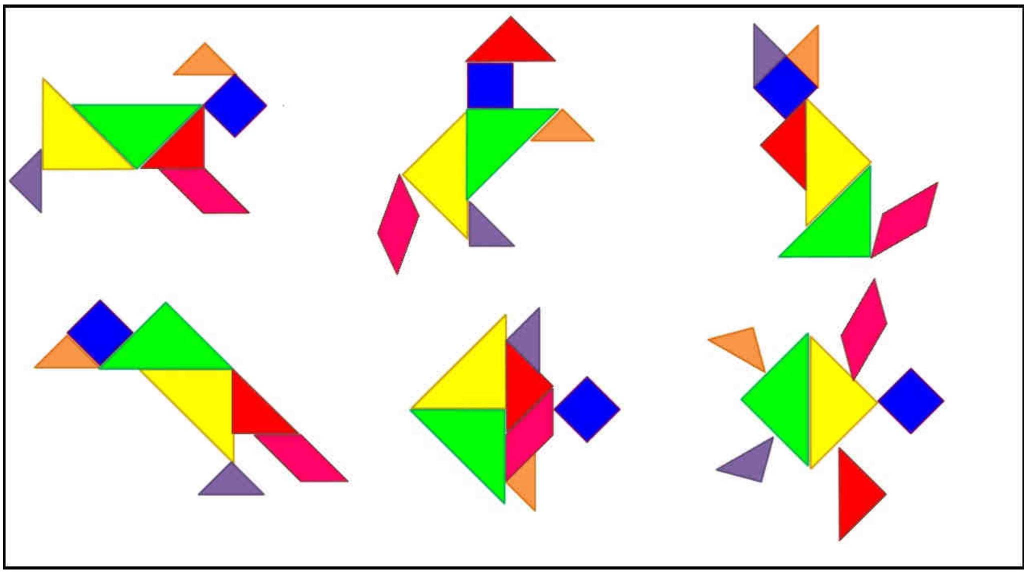
1) *a segmenti congruenti su r corrispondono segmenti congruenti su s* (vedi scheda 1-quadrilateri);
2) *ad un segmento AB congruente alla somma dei segmenti CD e EF su r corrisponde su s un segmento A'B' congruente alla somma dei segmenti C'D' e E'F' corrispondenti* a CD e EF (si dimostra facilmente tracciando dal punto P che divide AB nelle due parti congruenti a CD e EF la parallela del fascio…).



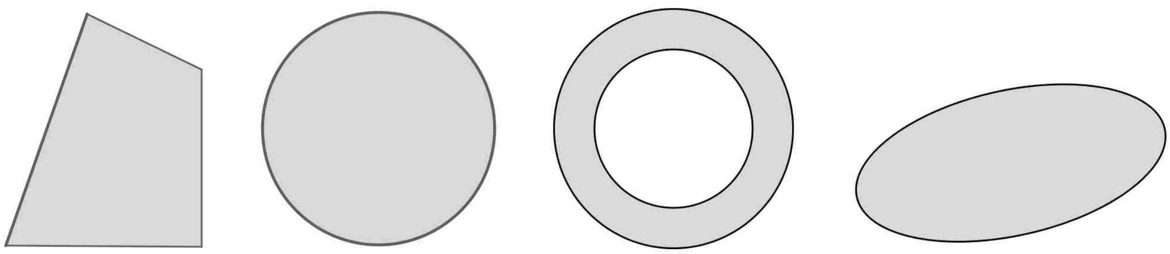

Quindi, per il criterio di proporzionalità diretta i due insiemi di segmenti sono direttamente proporzionali.

# Equivalenza di superfici piane



## Superficie piana

Il concetto di superficie piana è un **concetto primitivo**: i poligoni, i cerchi o in generale regioni di piano delimitate da una linea chiusa o da più linee chiuse che non si intersecano sono superfici piane.

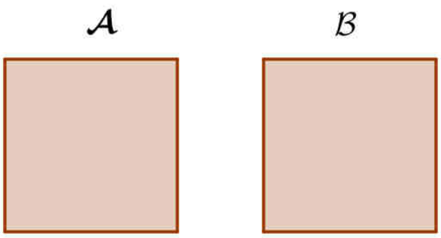


Per indicare una superficie piana useremo lettere maiuscole corsive.

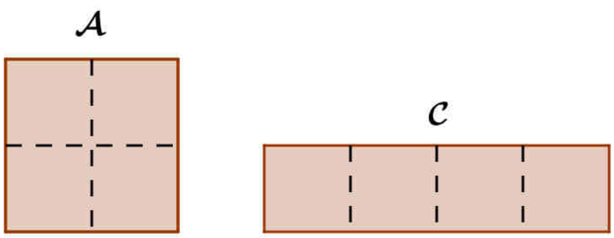
## Estensione superficiale

Anche il concetto di estensione superficiale è un **concetto primitivo**. E' chiaro che superfici congruenti hanno la stessa estensione superficiale ma anche superfici non congruenti possono avere la stessa estensione superficiale: se realizziamo modelli in cartoncino di superfici piane aventi la stessa estensione superficiale troviamo che hanno lo stesso "peso".

**Definizione**
Due superfici piane $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono **equivalenti** quando hanno la stessa estensione superficiale e scriveremo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.




$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$




$\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$

Ci sono alcuni **postulati** che caratterizzano l'equivalenza tra superfici piane:

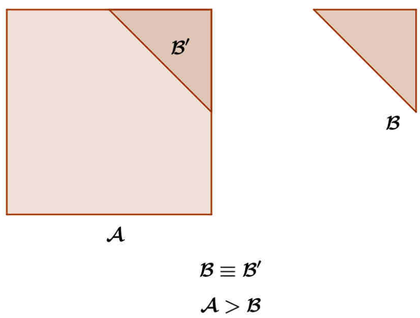
1) Due superfici congruenti sono equivalenti (non è vero il viceversa);

2) L'equivalenza tra superfici gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva;

3) La "somma" di due superfici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (che non hanno punti in comune oppure che hanno in comune solo punti del loro contorno) è la figura formata dall'unione dei punti delle due superfici e si indica con $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Se $\mathcal{C} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$ allora $\mathcal{A}$ si può considerare come differenza tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ e si scrive $\mathcal{A} = \mathcal{C} - \mathcal{B}$. Le superfici somma o differenza di superfici rispettivamente equivalenti sono equivalenti.

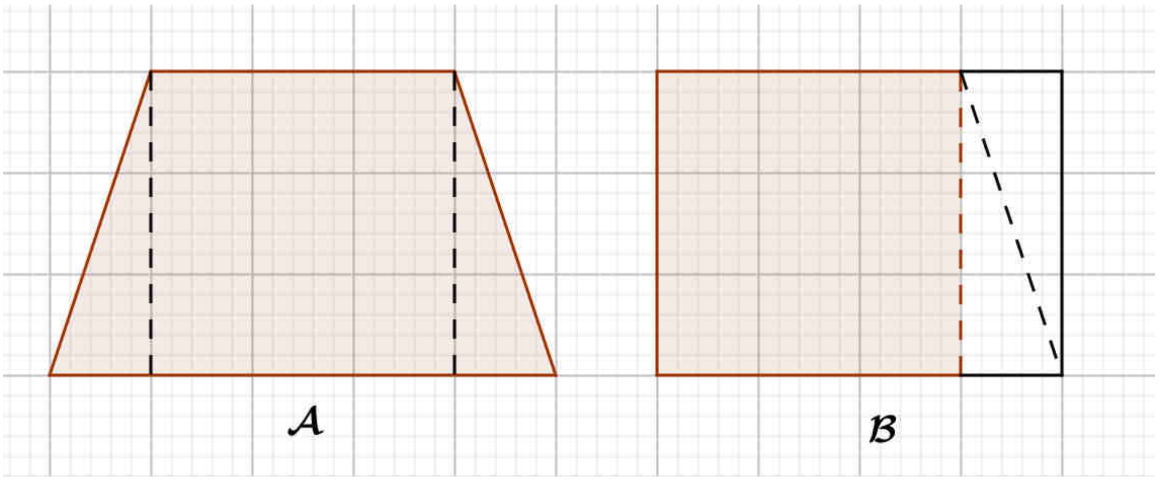

4) Una superficie non può essere equivalente ad una sua parte.

5) Una superficie $\mathcal{A}$ ha maggiore estensione di una superficie $\mathcal{B}$, e si dice che $\mathcal{A}$ è prevalente a $\mathcal{B}$ e si scrive $\mathcal{A} > \mathcal{B}$, se $\mathcal{B}$ è equivalente ad una parte di $\mathcal{A}$



# Poligoni equivalenti

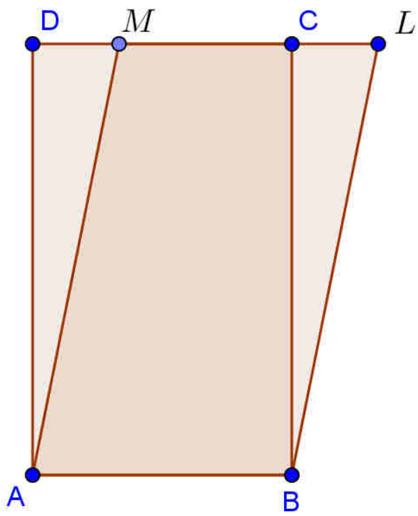
**Definizione**
Due poligoni si dicono **equiscomponibili** o equiscomposti se sono somme di poligoni congruenti.




$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono equiscomponibili

**Osservazione**: è chiaro che **due poligoni equiscomponibili sono equivalenti** (e si può dimostrare che vale anche il viceversa).

## Teorema
*Un parallelogramma e un rettangolo aventi basi e altezze relative congruenti sono equivalenti.*
**Dimostrazione**




Disegniamo il rettangolo ABCD e il parallelogramma ABLM sovrapponendo le basi come in figura.

Osserviamo che i triangoli rettangoli ADM e BCL sono congruenti avendo $AD \cong BC$, $AM \cong BL$ e quindi sono anche equivalenti.

Il parallelogramma può essere considerato come la differenza tra il trapezio ABLD e il triangolo ADM e il rettangolo come la differenza tra lo stesso trapezio e il triangolo BCL e quindi parallelogramma e rettangolo sono equivalenti.

**Nota**: la dimostrazione è la stessa anche nel caso in cui $M \equiv C$ oppure M si trovi oltre C .

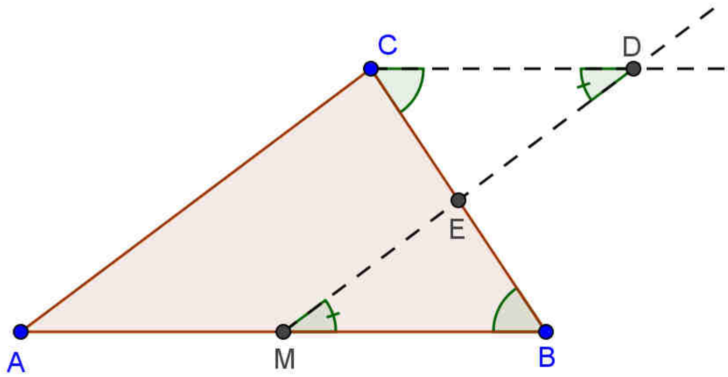
**Corollario**: *due parallelogrammi che hanno basi e altezze corrispondenti congruenti sono equivalenti* poiché sono entrambi equivalenti ad un rettangolo avente base e altezza congruente.

## Teorema

*Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma di altezza congruente e base congruente a metà di quella del triangolo.*

**Dimostrazione**

Consideriamo il triangolo ABC e sia M il punto medio di AB. Conduciamo per M la parallela ad AC e da C la parallela ad AB e sia D il loro punto di intersezione ed E l'intersezione tra BC e MD (vedi figura).



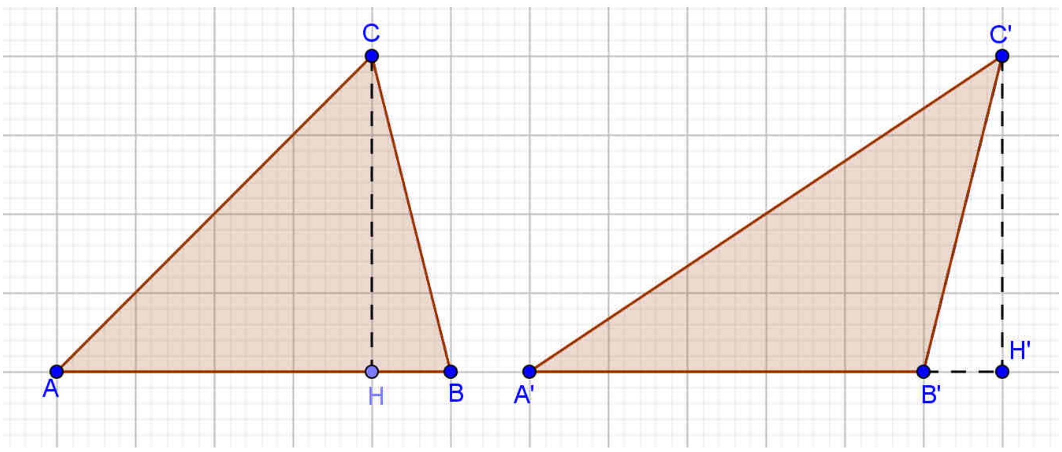

I triangoli MBE e CDE sono congruenti per il 2° criterio poiché :

$$AM \cong MB, \quad AM \cong CD \rightarrow MB \cong CD;$$

$$D\hat{C}E \cong M\hat{B}E, \quad C\hat{D}E \cong E\hat{M}B$$

Quindi il triangolo e il parallelogramma così costruito risultano equiscomposti e di conseguenza equivalenti.

**Corollario**: *due triangoli aventi le basi e le rispettive altezze congruenti sono equivalenti* poiché equivalenti a parallelogrammi aventi base e altezza congruenti e quindi equivalenti.



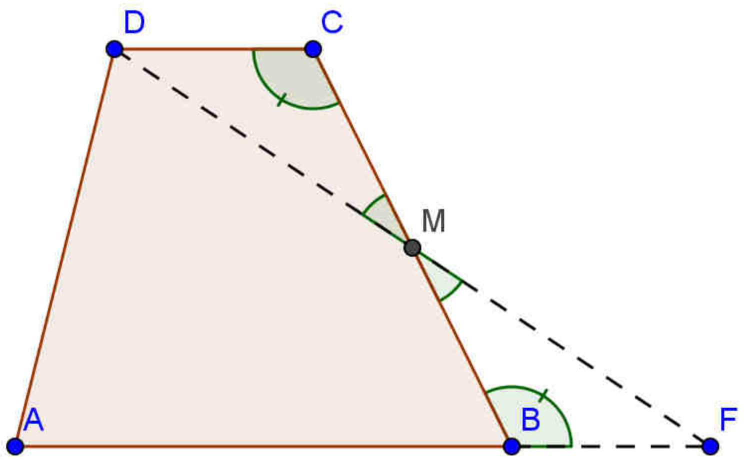

$$ABC \equiv A'B'C'$$

## Teorema

*Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e la cui base è uguale alla somma delle basi del trapezio.*

**Dimostrazione**

Sia ABCD il trapezio: consideriamo il punto medio M del lato BC, congiungiamolo con D e prolunghiamo fino ad incontrare nel punto F il prolungamento di AB (vedi figura).




I triangoli DCM e MBF sono congruenti per il 2° criterio poiché

$$CM \cong MB, \quad D\hat{M}C \cong B\hat{M}F \text{ (opposti al vertice)}, \; D\hat{C}M \cong M\hat{B}F \text{ (alterni interni)}$$

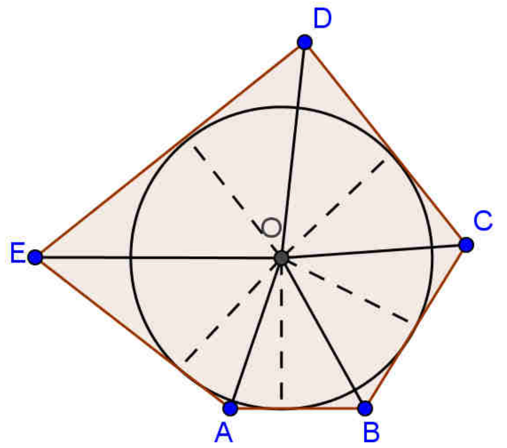
Di conseguenza $DC \cong BF$ e quindi AF risulta congruente alla somma delle basi del trapezio.

Quindi il trapezio e il triangolo AFD risultano equiscomposti e quindi equivalenti.

## Teorema

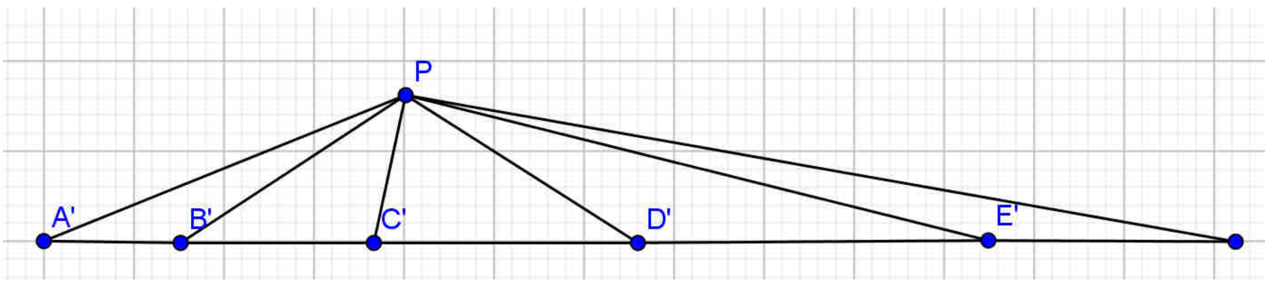
*Un poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo avente come base un segmento congruente al perimetro del poligono e l'altezza congruente al raggio della circonferenza inscritta.*

Disegniamo un poligono circoscritto ad una circonferenza e congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici.
Il poligono risulta così scomposto in triangoli aventi come basi i lati del poligono e come altezze segmenti congruenti al raggio $r$ della circonferenza.




Se quindi riportiamo sulla stessa retta dei segmenti congruenti ai lati del poligono e consideriamo un punto P tale che $PH \cong r$ (vedi figura), abbiamo che

$$A'B'P \equiv ABO\ , \quad B'C'P \equiv \ldots\ldots\ldots \text{ ecc.}$$



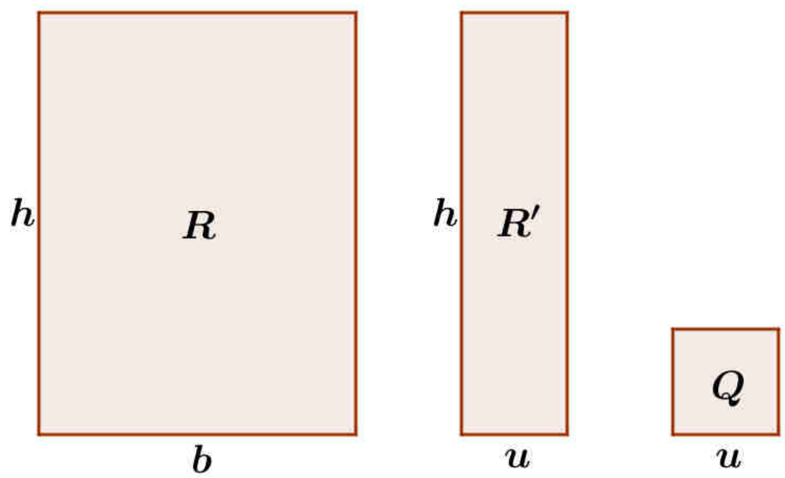

e quindi il poligono è equivalente al triangolo avente per base un segmento congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza inscritta.

# Aree dei poligoni

## *Area di un rettangolo*

Dimostriamo che *l'area di un rettangolo è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza.*

Considera il rettangolo dato $R$ avente base di lunghezza $b$ e altezza di lunghezza $h$ e il quadrato $Q$ di lato $u$ di lunghezza 1.
Considera *il rettangolo R' avente altezza uguale all'altezza di R e base u.*




Se indichiamo con $A$ e $A'$ le aree di $R$ e $R'$ avremo :

- poiché $R'$ e $Q$ hanno la stessa base le loro aree sono direttamente proporzionali alle altezze e quindi

  $A':1 = h:1 \rightarrow A' = h$ (prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi)

- poiché $R$ e $R'$ hanno la stessa altezza le loro aree sono direttamente proporzionali alle basi e quindi

$$A : A' = b : 1 \rightarrow A = A' \cdot b = h \cdot b$$

**Nota**
Di conseguenza se abbiamo un **quadrato di lato *l*** avremo che l'area risulta:

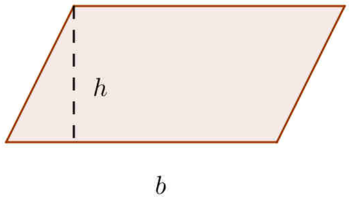
$$A = l \cdot l = l^2$$

Sapendo che l'area di un rettangolo si ottiene moltiplicando la misura della base per la misura dell'altezza del rettangolo e utilizzando i teoremi sull'equivalenza che abbiamo dimostrato, possiamo dimostrare che:

- poiché un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo

  ……………………………………………………………

  *l'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza*

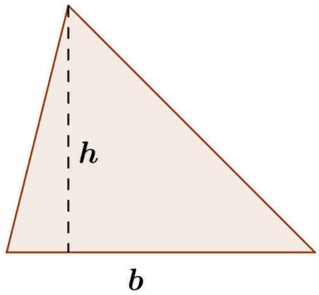



$$A = b \cdot h$$

- poiché un triangolo è equivalente ad un parallelogramma

  ……………………………………………………………

  *l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza*

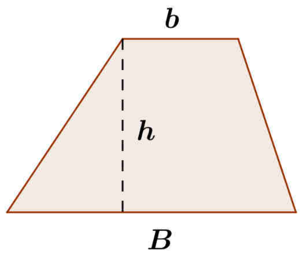



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- poiché un trapezio è equivalente ad un triangolo

  ……………………………………………...........................

  *l'area di un trapezio è uguale al prodotto della semisomma delle lunghezze delle basi per la lunghezza dell'altezza*

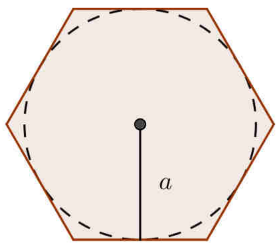



$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- poiché un poligono regolare di *n* lati è equivalente

  ……………………………………….................................

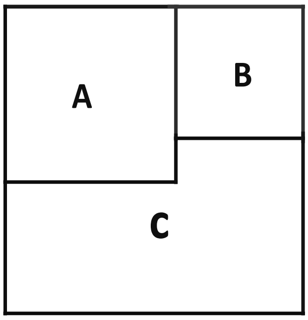
  *l'area di un poligono regolare è uguale al prodotto della lunghezza del semiperimetro per la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta (apotema)*




$$A = p \cdot a$$

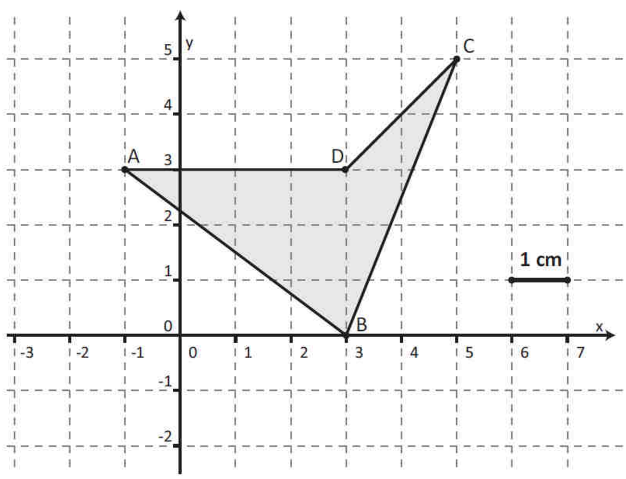
# PROBLEMI
## EQUIVALENZA DI SUPERFICI PIANE

1) *(Invalsi 2015/16)*
Un quadrato è formato da due quadrati A e B e da un poligono C, come mostrato in figura. L'area di A è 16 e quella di B è 9. Calcola il perimetro del poligono C.



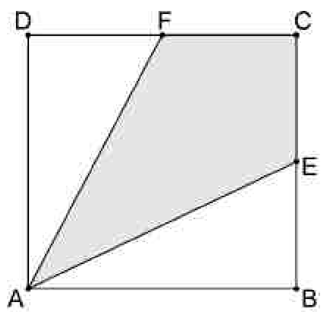

[22]

2) *(Invalsi 2014/15)*
Qual è l'area del quadrilatero ABCD rappresentato in figura?




[ 9 $cm^2$ ]

3) *(Invalsi 2015/16)*




ABCD è un quadrato di lato 3 m. F ed E sono i punti medi dei lati CD e BC. Quanto misura in $m^2$ la superficie del quadrilatero AECF?

[4,5 $m^2$ ]

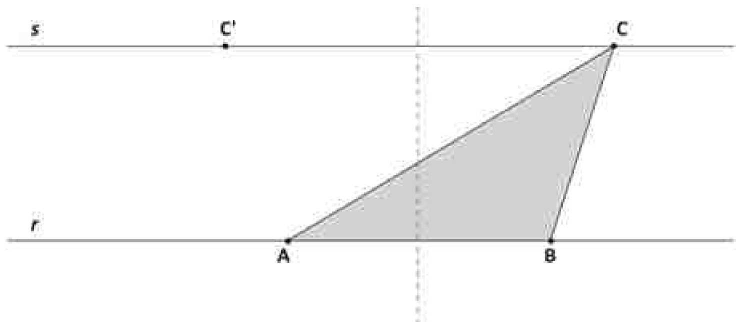
4) *(Invalsi 2015/16)*

| Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). | | V | F |
|---|---|---|---|
| a. | Se si aumentano le dimensioni b e h di un rettangolo di una stessa lunghezza d, allora il perimetro del rettangolo aumenta di 4d | | |
| b. | Se si aumentano le dimensioni b e h di un rettangolo di una stessa lunghezza d, allora l'area del rettangolo aumenta di 2d | | |
| c. | Se si raddoppia la dimensione b di un rettangolo e si dimezza l'altra dimensione h, allora l'area rimane la stessa | | |
| d. | Se si raddoppia la dimensione b di un rettangolo e si dimezza l'altra dimensione h, allora il perimetro rimane lo stesso | | |

[V;F;V;F]

5) *(Invalsi 2017/18)*

ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta r e il terzo vertice in un punto qualunque della retta s parallela a r e passante per C



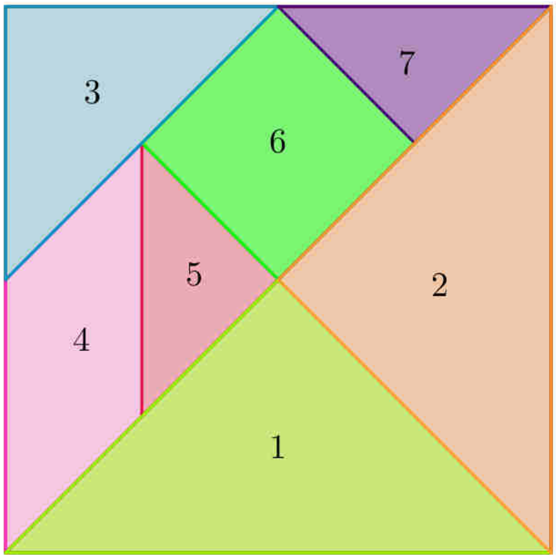

Fra gli infiniti triangoli descritti, quali hanno la stessa area di ABC?

a. Soltanto il triangolo ABC', simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB
b. Soltanto il triangolo isoscele di base AB
c. Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B
d. Tutti gli infiniti triangoli di base AB

[d]

## SCHEDA DI LAVORO
### *Il tangram*

Il Tangram è un antico gioco cinese: è una specie di puzzle le cui tessere sono 7 figure geometriche ottenute dalla scomposizione di un quadrato (vedi figura).




Le figure sono: due triangoli grandi, due triangoli piccoli, un triangolo medio, un quadrato e un parallelogramma.

Il quadrato è equivalente a …………………………………………………………………..

Il triangolo medio è equivalente a…………………...…………..........................................

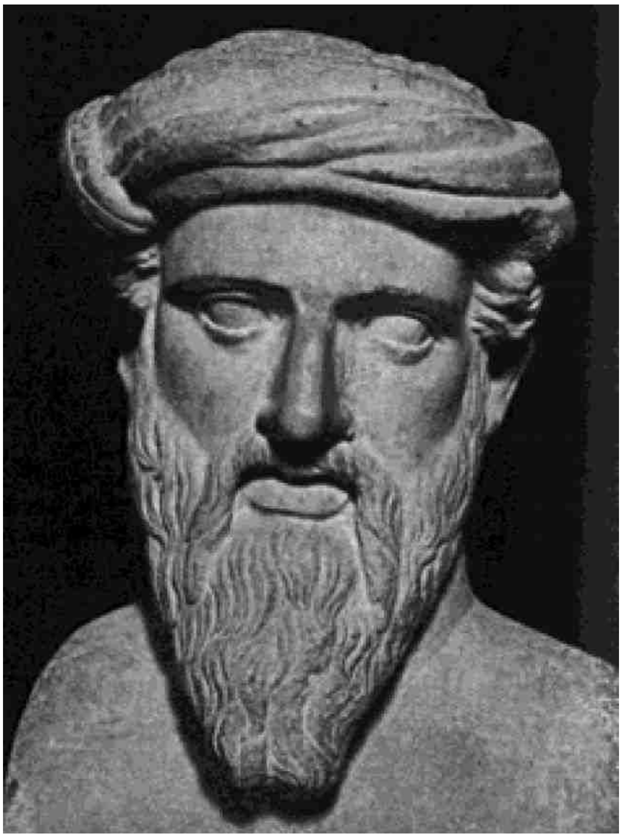
Il triangolo grande è equivalente a …………………………………………………………

Il parallelogramma è equivalente a…………………...………………………………………

**Esercizio**

Usando tutti i sette pezzi del Tangram si possono costruire 13 poligoni convessi (naturalmente equivalenti)…prova a disegnarne qualcuno!

# Teoremi di Euclide e Pitagora

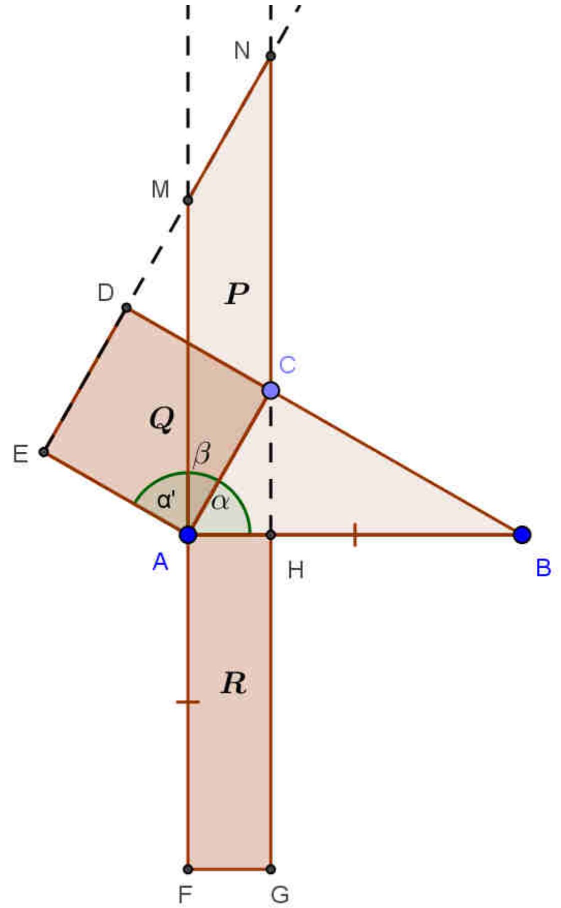


Vediamo tre importanti teoremi che riguardano i **triangoli rettangoli** e che si dimostrano utilizzando l'equivalenza delle superfici piane.

## Primo teorema di Euclide

*In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.*

**Dimostrazione**




Costruiamo il quadrato ACDE sul cateto AC e il rettangolo AHGF con $AF \cong AB$ (vedi figura).

Prolunghiamo il lato ED fino ad intersecare in M e N i prolungamenti di AF e HG.

Il parallelogramma ACNM è equivalente al quadrato ACDE poiché hanno stessa base e stessa altezza (EA).

Consideriamo i triangoli ABC e AME: risultano congruenti poiché

$AC \cong AE, \quad \alpha \cong \alpha'$
poiché complementari dello stesso angolo $\beta$

Quindi $\boxed{AM \cong AB}$ e il parallelogramma e il rettangolo risultano equivalenti avendo basi congruenti e uguale altezza (AH).

In conclusione: $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}$ , $\mathcal{P} \equiv \mathcal{R}$

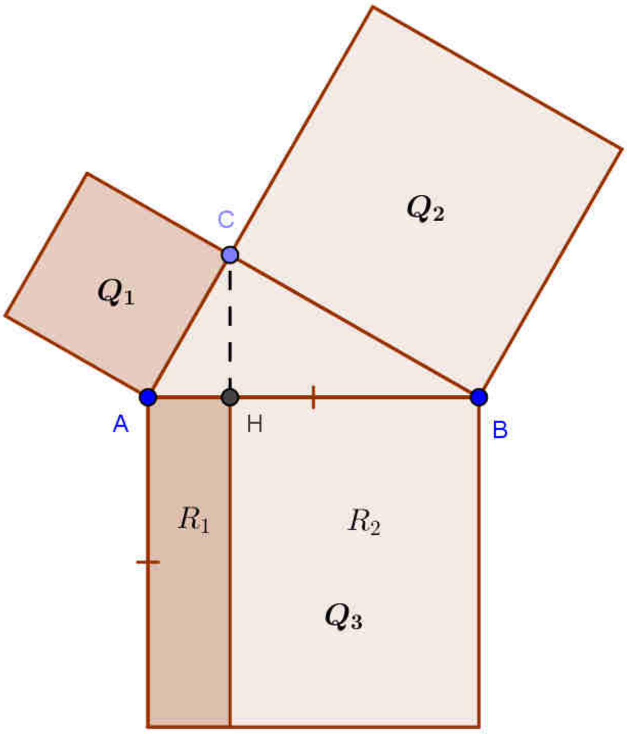
$\rightarrow \mathcal{Q} \equiv \mathcal{R}$

cioè il quadrato ACDE costruito su un cateto è equivalente al rettangolo AHGF che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.

## Teorema di Pitagora

*In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

**Dimostrazione**




Disegniamo i quadrati $Q_1$, $Q_2$ sui cateti e il quadrato $Q_3$ sull'ipotenusa.

Tracciamo l'altezza CH e prolunghiamola in modo da scomporre il quadrato $Q_3$ nei rettangoli $R_1$, $R_2$.

Per il primo teorema di Euclide abbiamo che

$$Q_1 \equiv R_1 , \quad Q_2 \equiv R_2$$

e quindi

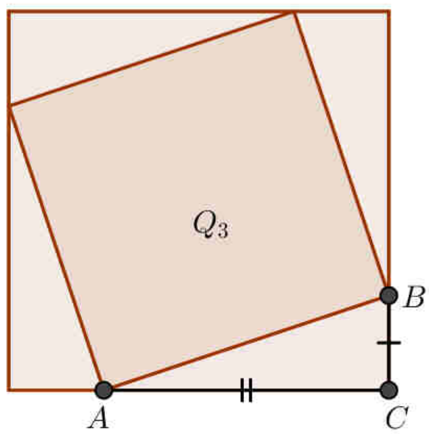
$$Q_1 + Q_2 \equiv R_1 + R_2 \quad \rightarrow \quad Q_1 + Q_2 \equiv Q_3$$

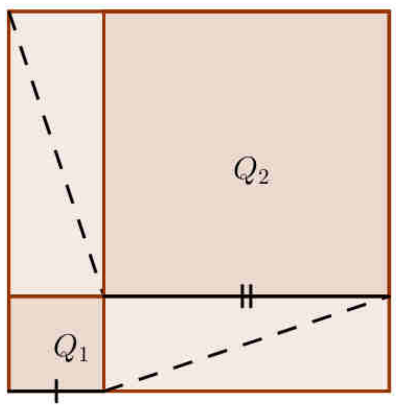
## Approfondimento

Possiamo dimostrare il teorema di Pitagora anche senza utilizzare il primo teorema di Euclide.

Considera un triangolo rettangolo ABC: prolunga il cateto AC di un segmento congruente all'altro cateto e costruisci un quadrato $Q$ che ha per lato la somma dei cateti.

Disegna, all'interno del quadrato, il quadrato $Q_3$ che ha per lato l'ipotenusa del triangolo.




Lo stesso quadrato $Q$ può essere scomposto in due quadrati di lati uguali ai cateti del triangolo ABC e in due rettangoli: tracciando le diagonali dei due rettangoli ci si accorge che

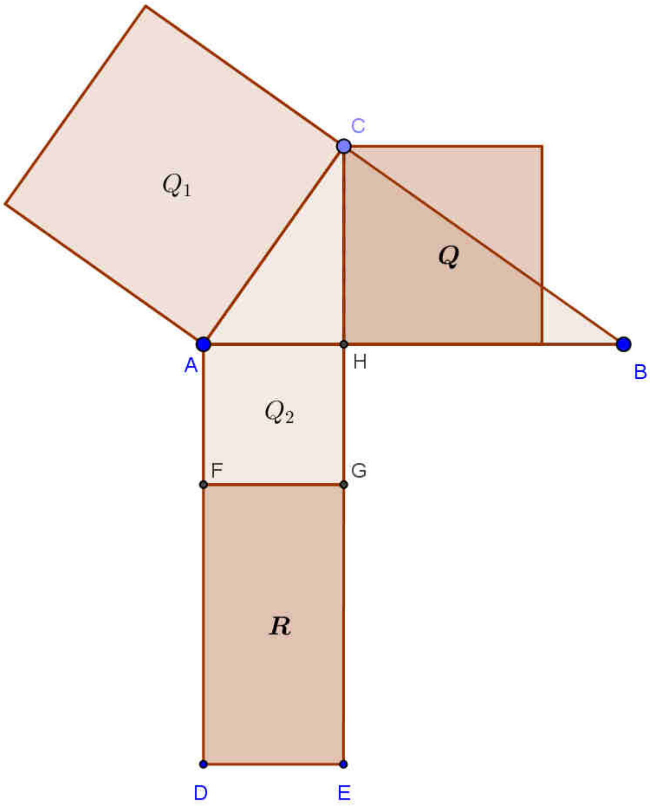
……………………………………………………………………………………………………….

Si può quindi concludere che ……………………………………………………………………….

poiché…………………………………………………………………………………………….

## Secondo teorema di Euclide

*In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*




Disegniamo il quadrato $Q_1$ di lato AC, il quadrato Q di lato CH e il rettangolo di base AH e altezza $AD \cong AB$.

Consideriamo su AD un punto F tale che $AF \cong AH$ e disegniamo il quadrato $Q_2$ di lato AH. Indichiamo con $R$ il rettangolo DEGF.

Per il teorema di Pitagora abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + Q \rightarrow Q \equiv Q_1 - Q_2$$

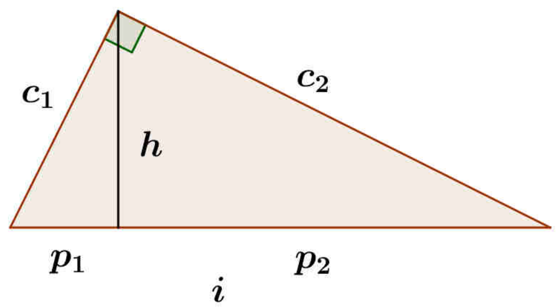
Per il primo teorema di Euclide abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + R \rightarrow R \equiv Q_1 - Q_2$$

Quindi, per la proprietà transitiva, abbiamo che $Q \equiv R$.

# Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora

Utilizziamo le **misure** e vediamo come si riscrivono i teoremi di Pitagora ed Euclide per il triangolo rettangolo.
Indichiamo con $c_1$, $c_2$, $i$ le misure dei cateti e dell'ipotenusa; con $h$, $p_1$, $p_2$ le misure dell'altezza relativa all'ipotenusa e delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.




**Teorema di Pitagora:** poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura $c_1$ è $c_1^2$, l'area del quadrato costruito sul cateto che misura $c_2$ è $c_2^2$ e l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa che misura $i$ è $i^2$ si ha che

$$\boxed{c_1^2 + c_2^2 = i^2}$$

**1° Teorema di Euclide:** poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura $c_1$ è $c_1^2$ e l'area del rettangolo di dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa è $p_1 \cdot i$ si ha che

$$\boxed{c_1^2 = p_1 \cdot i}$$

e analogamente per l'altro cateto $c_2^2 = p_2 \cdot i$

**2° Teorema di Euclide:** poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa di misura $h$ risulta $h^2$ e la misura dell'area del rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $p_1 \cdot p_2$ si ha

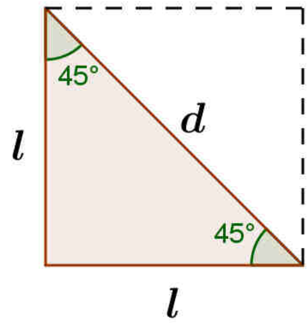
$$\boxed{h^2 = p_1 \cdot p_2}$$

# Triangoli rettangoli particolari

Inoltre dal teorema di Pitagora si ricavano delle relazioni importanti per due triangoli rettangoli particolari.

## Triangolo rettangolo con angoli di 45°

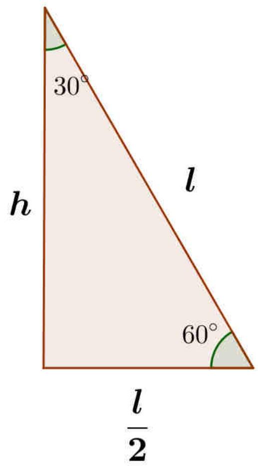
Un triangolo rettangolo con angoli di 45° è metà di un quadrato ed indicando con $l$ il lato e con $d$ la diagonale, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:




$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$$

## Triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° è la metà di un triangolo equilatero e se indichiamo con $l$ la lunghezza del lato e con $h$ la lunghezza dell'altezza, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:

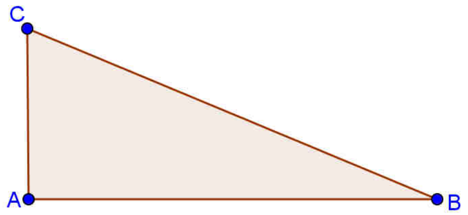



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

# Problemi svolti

1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{5}{12}$ dell'altro e il perimetro è 60 cm. Quali sono le lunghezze dei cateti?

Considera il triangolo in figura.




Se poniamo $\overline{AB} = x$ abbiamo $\overline{AC} = \frac{5}{12}x$ ed applicando il teorema di Pitagora avremo:

$$\overline{CB} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{12}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{25}{144}x^2} = \frac{13}{12}x$$

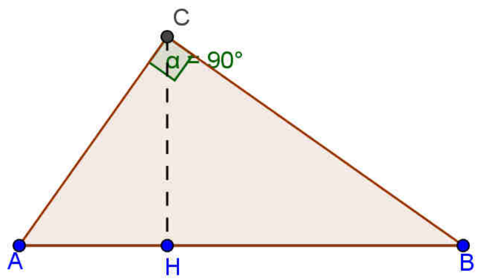
Poiché il perimetro è 60 cm abbiamo che

$$x + \frac{5}{12}x + \frac{13}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad \frac{30}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad x = 24$$

Quindi $\quad \overline{AB} = 24cm; \quad \overline{AC} = \frac{5}{12} \cdot 24 = 10cm; \quad \overline{BC} = \frac{13}{12} \cdot 24 = 26cm$

2) Consideriamo un triangolo rettangolo di cui si conoscono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa $\overline{AH} = 3cm$, $\overline{HB} = \frac{16}{3}cm$ . Come risultano le lunghezze dei cateti?

Possiamo usare il 1° teorema di Euclide e, considerando che $\overline{AB} = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}$, abbiamo:

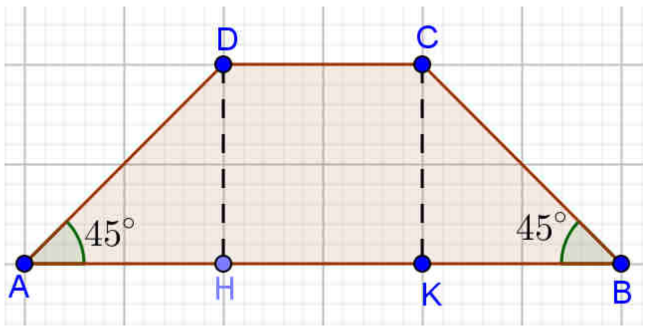



$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = \frac{25}{3} \cdot 3 = 25 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{25} = 5cm, \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB} = \frac{400}{9} \rightarrow \overline{BC} == \frac{20}{3}cm$$

**Nota**: avremmo potuto anche usare il 2° teorema di Euclide e determinare prima $\overline{CH}$ e poi, usando il teorema di Pitagora, i cateti.

$$\overline{CH}^2 = 16 \rightarrow \overline{CH} = 4 \ cm \ , \quad \overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5 \ cm, \quad \overline{BC} = \sqrt{16 + \frac{256}{9}} = \frac{20}{3} \ cm$$

3) Considera un trapezio isoscele ABCD avente gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45° e siano H e K i piedi delle altezze (vedi figura). Sapendo che DCKH è un quadrato di lato 5 cm, determina perimetro e area del trapezio.

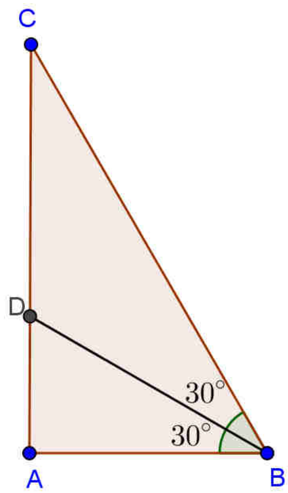



Abbiamo $\overline{AD}=\overline{CB}=5\sqrt{2}\ \ cm,\quad \overline{AB}=15\ \ cm$

Quindi $2p=15+5+10\sqrt{2}=20+10\sqrt{2}\ \ cm$

$$A=\frac{20\cdot 5}{2}=50\ \ cm^2$$

4) Un triangolo rettangolo ABC retto in A ha l'angolo $\hat{B}=60°$ e la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ misura 6 cm. Come si determinano i lati del triangolo?




Nel triangolo ABD si ha:

$$\overline{AD}=\frac{6}{2}=3\ \ cm,\quad \overline{AB}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3}\ \ cm$$

Se poi consideriamo il triangolo ABC avremo che:

$$\overline{BC}=2\cdot\overline{AB}=6\sqrt{3}\ \ cm,\quad \overline{AC}=\frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{3}=\frac{6\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}=9\ \ cm$$

# PROBLEMI

## TEOREMI DI EUCLIDE E PITAGORA

1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{4}{3}$ dell'altro cateto e l'area è 150 $cm^2$. Calcola la lunghezza dei cateti e dell'ipotenusa.

[ 15 *cm*; 20 *cm*; 25 *cm*]

2) In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano $\frac{9}{5}\ cm$, $\frac{16}{5}\ cm$. Determina la lunghezza dei cateti.

[ 3 cm; 4 cm]

3) In un triangolo rettangolo i cateti stanno tra loro come 3 sta a 4. Sapendo che il perimetro è 6 cm, determina la lunghezza dei cateti dell'ipotenusa.

[ $2\ cm$ ; $\frac{3}{2}\ cm$, $\frac{5}{2}\ cm$ ]

4) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che la sua area è $a^2$ .

[ $2\left(\sqrt{2}+1\right)a$ ]

5) Calcola l'area di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che il suo perimetro è uguale a $2+\sqrt{2}\ cm$ .

[ $\frac{1}{2}\ cm^2$ ]

6) In un triangolo isoscele il perimetro misura 72 *cm* e l'altezza relativa alla base 24 *cm*. Determina la lunghezza dei lati obliqui e della base.

[ 26 *cm*; 20 *cm* ]

7) In un trapezio rettangolo ABCD con angoli retti in A e D, si ha che l'angolo adiacente alla base maggiore $\hat{B}=45°$. Sapendo che $\overline{BC}=5\sqrt{2}\ cm$ e che l'area risulta $\frac{45}{2}\ cm^2$, determina la lunghezza delle basi e dell'altezza del trapezio.

[ $7\ cm$ ; $2\ cm$ ; $5\ cm$ ]

8) In un rombo le diagonali sono l'una i $\frac{12}{5}$ dell'altra ed il perimetro del rombo è 26 *cm*. Determina la lunghezza del lato e dell'altezza del rombo.

[ $\frac{13}{2}\ cm$, $\frac{60}{13}\ cm$ ]

9) Un trapezio isoscele ABCD di base AB è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 10\ cm$. Sapendo che gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano 60°, determina perimetro ed area del trapezio.

[ $2p = 25\ cm, \quad A = \frac{75}{4}\sqrt{3}\ cm^2$ ]

10) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro è $80a$.

[ $300\ a^2$ ]

11) I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 20 $cm$ stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. Determina l'area del rettangolo.

[ $192\ cm^2$ ]

12) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 25 $cm$ ed un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.

[ 60 $cm$ ]

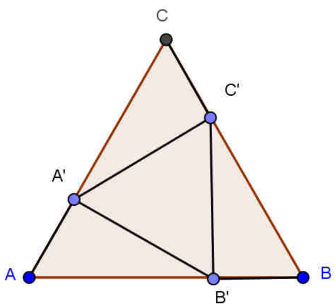
13) In un parallelogramma l'angolo acuto misura 30°, il lato maggiore è quattro volte quello minore e l'area è $450\ cm^2$. Determina le lunghezze dei lati e delle due altezze del parallelogramma.

[ $15\ cm;\ 60\ cm;\ \frac{15}{2}\ cm;\ \ 30\ cm$ ]

14) Disegna un trapezio isoscele ABCD con la base maggiore doppia della minore e gli angoli adiacenti alla base minore di 120°. Traccia le altezze DE e CF. Sapendo che l'area del rettangolo EFCD è $32\sqrt{3}\ cm^2$, calcola area e perimetro del trapezio.

[ $48\sqrt{3}\ cm^2;\ \ 40\ cm$ ]

15)




ABC è un triangolo equilatero di 8 cm di lato. Si scelgono sui lati tre punti A', B' e C' in modo che AA' = BB' = CC'. Come si può scegliere la distanza AA' in modo che i triangoli AA'B', BB'C' e CC'A' siano rettangoli, rispettivamente in A', B', C'? Giustificare la risposta.

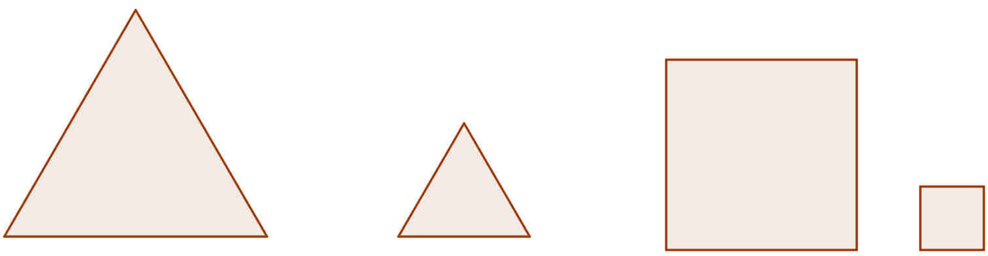
[8/3]

16)*(Invalsi 2015/16)*
Nell'atrio di un palazzo è situata una scala costituita da 4 gradini alti 16 cm e profondi 30 cm. Per permettere a carrozzine, passeggini, ecc. di accedere al palazzo, si deve costruire uno scivolo di legno da appoggiare sulla scala. Quale deve essere la lunghezza dello scivolo? [136 cm]

# Similitudine

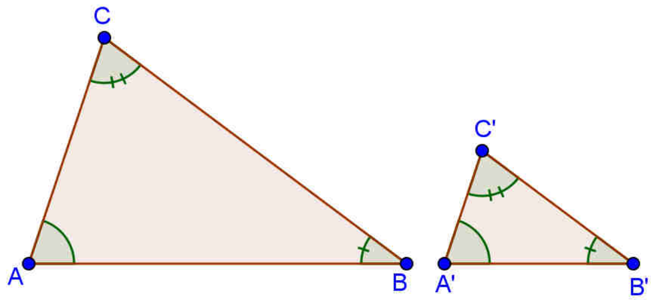
## Poligoni simili

Se consideriamo due triangoli equilateri di lato diverso, due quadrati di lato diverso intuitivamente diciamo che hanno *"la stessa forma*".



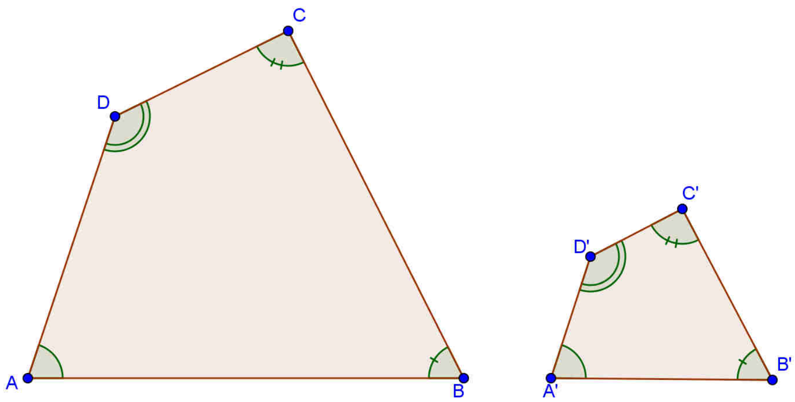
Ma cosa comporta avere la "*stessa forma*"?

Se osserviamo due triangoli della stessa forma (vedi esempio in figura) notiamo che hanno gli angoli ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati opposti ad angoli uguali è sempre lo stesso.




$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$$

Anche considerando due quadrilateri con la stessa forma notiamo che gli angoli sono ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati aventi per estremi vertici di angoli uguali è sempre lo stesso.




$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

Diamo quindi la seguente definizione:

*due poligoni si dicono "simili" quando hanno lo stesso numero di lati, gli angoli ordinatamente uguali ed i lati "corrispondenti" (aventi per estremi vertici di angoli uguali) in proporzione.*
Il rapporto tra lati corrispondenti viene detto *rapporto di similitudine***.**

## Osservazioni

- Se due poligoni sono congruenti sono anche simili (il rapporto di similitudine in questo caso è uguale a 1).
- Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili.

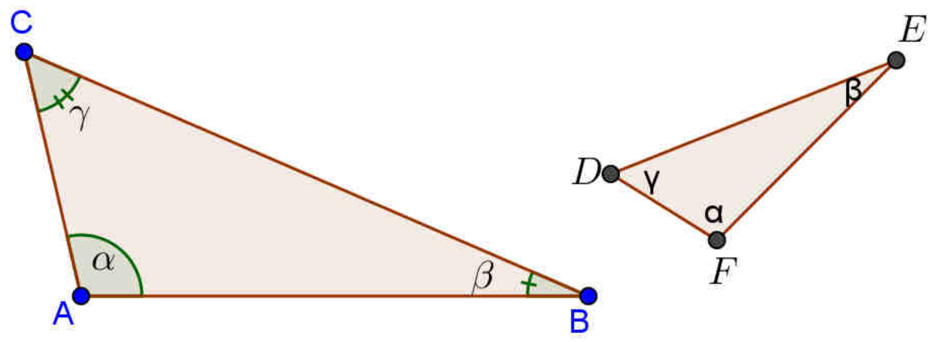
# Triangoli simili

## Osservazione

Se due triangoli sono simili conviene indicare con lettere “corrispondenti” (A-A’ ; B-B’; C-C’) i vertici di angoli corrispondenti uguali ed in questo modo sarà semplice individuare i lati corrispondenti che saranno AB - A’B’ ; BC - B’C’ ; AC - A’C’.

Ma se i vertici sono indicati in modo diverso è importante individuare gli angoli corrispondenti e di conseguenza i lati corrispondenti (che sono opposti ad angoli corrispondenti).

Per esempio se in figura abbiamo che




$$D\hat{F}E \cong \hat{A}, \quad F\hat{E}D \cong \hat{B}, \quad E\hat{D}F \cong \hat{C}$$

ad AB corrisponde EF perché l’angolo opposto ad AB è $\gamma$ e quindi nel triangolo EDF gli corrisponde il lato opposto all’angolo congruente a $\gamma$ cioè EF ecc.
e in conclusione

$$AB : EF = BC : DE = AC : DF$$

A differenza degli altri poligoni, per i triangoli ***l’uguaglianza degli angoli e la proporzionalità tra i lati non sono proprietà indipendenti.***

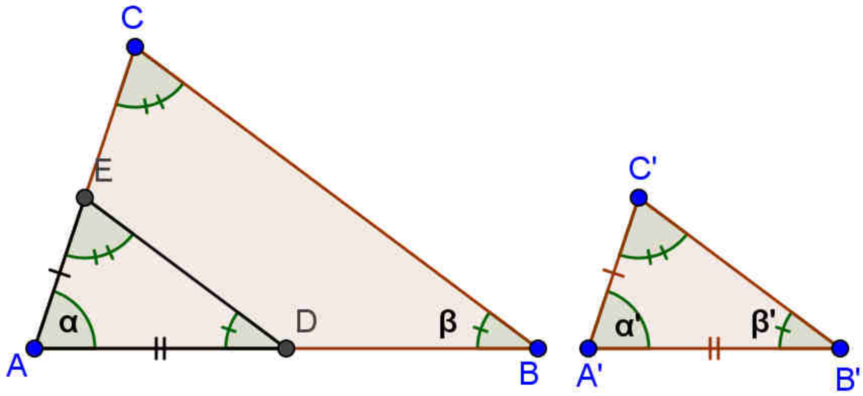
Possiamo infatti dimostrare tre “criteri” per stabilire se due triangoli sono simili.

## Primo criterio di similitudine dei triangoli

*Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente uguali allora sono simili.*

**Dimostrazione**

Consideriamo i triangoli ABC e A'B'C' e supponiamo che $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$.
Osserviamo subito che ,essendo la somma degli angoli interni di un triangolo uguale ad un angolo piatto, anche $\gamma \cong \gamma'$.
Supponiamo che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ (altrimenti i triangoli sono congruenti e quindi anche simili) e consideriamo un punto D su AB tale $\overline{AD} \cong \overline{AB'}$ e un punto E su AC in modo che $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.




Congiungendo D con E otteniamo un triangolo ADE congruente ad A'B'C' (primo criterio di congruenza) e quindi $A\hat{E}D \cong \gamma'$, $A\hat{D}E \cong \beta'$.

Ma allora le rette DE e BC sono parallele (angoli corrispondenti uguali) e quindi, *per il teorema di Talete,*

$$AB : AD = AC : AE \quad \rightarrow \quad AB : A'B' = AC : A'C'$$

Poiché il ragionamento e la costruzione si può ripetere riportando su AC e BC segmenti congruenti a A'C' e B'C' si ottiene anche che $AC : A'C' = BC : B'C'$.
Quindi tutti i lati corrispondenti sono in proporzione ed i triangoli sono simili.

## Nota

Questo è sicuramente il criterio più utilizzato nei problemi per stabilire se due triangoli sono simili.

Si possono dimostrare anche i seguenti criteri:

## Secondo criterio di similitudine dei triangoli

*Se due triangoli hanno un angolo uguale e i lati che lo comprendono in proporzione allora sono simili.*

## Terzo criterio di similitudine dei triangoli

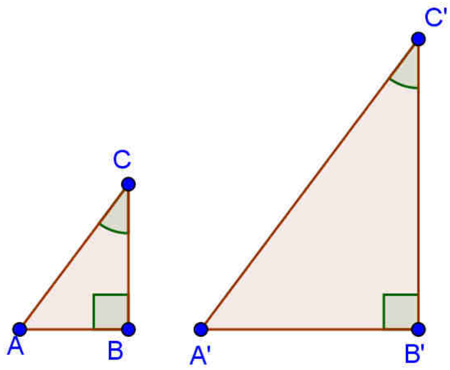
*Se due triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione allora sono simili.*

# Conseguenze del primo criterio di similitudine dei triangoli

1) Due triangoli rettangoli aventi un angolo acuto

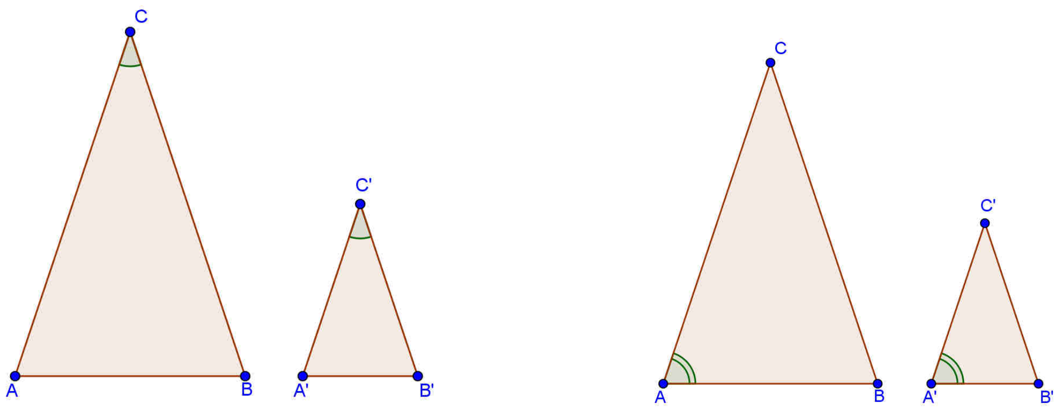
   uguale sono…………………………………..

   Infatti………………………………………..



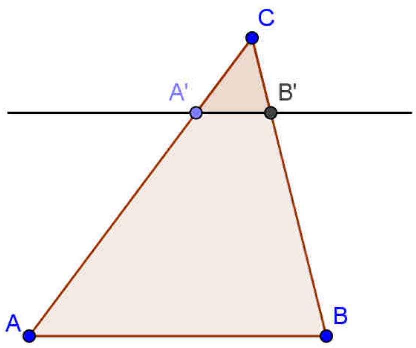

2) Due triangoli isosceli aventi uguale l'angolo al vertice oppure un angolo alla base sono………

   Infatti…………………………………




3) Tracciando una corda parallela ad un lato di un triangolo ABC si individua un triangolo…......

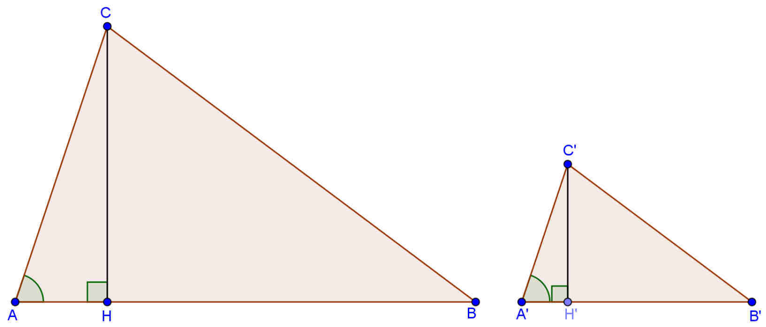
   Infatti………………………………….



# Proprietà dei triangoli simili

**1) In due triangoli simili le basi stanno tra loro come le rispettive altezze.**

*Dimostrazione*: consideriamo i triangoli simili ABC e A'B'C' e siano CH e C'H' le altezze relative alle basi corrispondenti AB e A'B'.




Poiché i triangoli rettangoli AHC e A'H'C' hanno un angolo acuto uguale sono simili e quindi

$$AC : A'C' = CH : C'H'$$

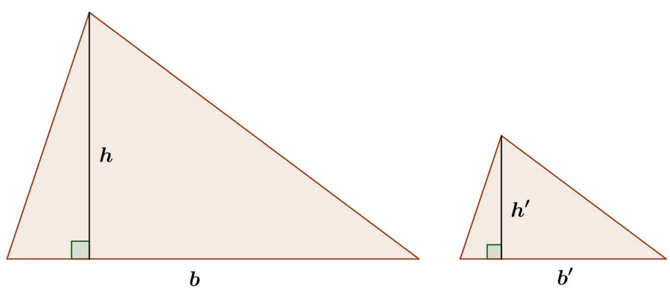
Ma poiché si ha anche che $AC : A'C' = AB : A'B'$, avremo anche che $AB : A'B' = CH : C'H'$

**2) Il rapporto tra le aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.**

*Dimostrazione:* consideriamo due triangoli simili aventi basi *b*,*b'* e relative altezze *h*, *h'* aventi rapporto di similitudine *k* (cioè per esempio $\frac{b}{b'} = k$ ).

Indicando con A e A' le loro aree abbiamo che

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}b'h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{b}{b'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = k^2$$

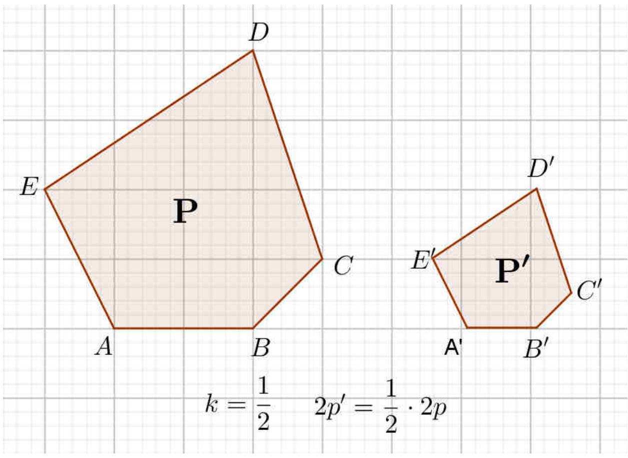


# Perimetri e aree di poligoni simili

- *Il rapporto tra i perimetri di due poligoni simili è uguale al rapporto di similitudine.*

  Infatti se ABCDE e A'B'C'D'E' sono due poligoni simili e $k$ è il loro rapporto di similitudine , indicando con $2p$, $2p'$ i rispettivi perimetri, si ha:

$$A'B' = kAB, \quad B'C' = kBC, \quad \ldots \to A'B' + B'C' + \ldots. = k(AB + BC + \ldots.) \to 2p' = k \cdot 2p \to \frac{2p'}{2p} = k$$

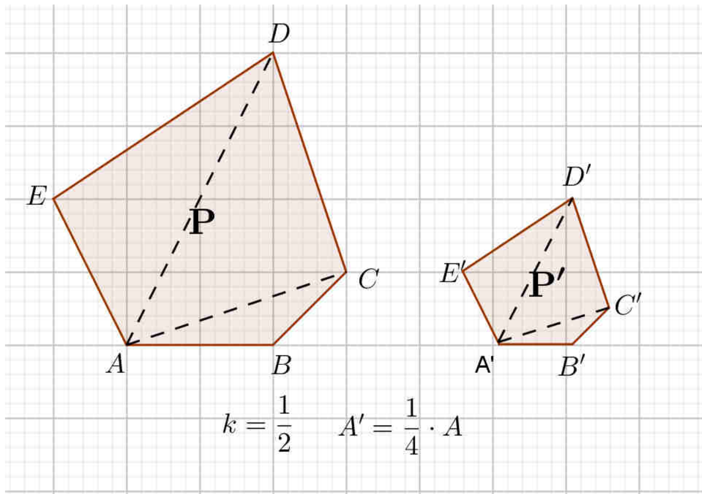



- *Il rapporto tra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.*

  Infatti, dividendo i poligoni in triangoli corrispondenti (che saranno simili tutti con lo stesso rapporto di similitudine $k$ ), se indichiamo con A e A' le aree dei due poligoni e con $A_1, A_1'$ ; $A_2, A_2'$ *ecc.* le aree dei triangoli corrispondenti, ricordando che

$$A_1' = k^2 A_1, \quad A_2' = k^2 A_2 \ldots.$$

  avremo che




$$A' = A_1' + A_2' + \ldots. = k^2 (A_1 + A_2 + \ldots) = k^2 \cdot A \to \frac{A'}{A} = k^2$$

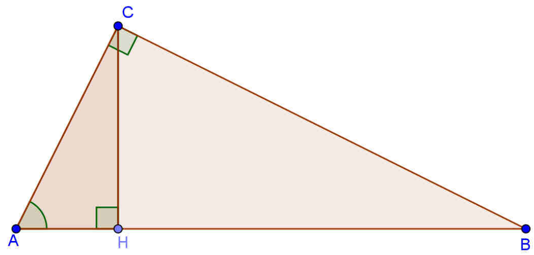
# Teoremi di Euclide e similitudine

Possiamo dimostrare i due teoremi di Euclide utilizzando la similitudine dei triangoli che vengono a formarsi quando tracciamo l'altezza relativa all'ipotenusa.

## 1° teorema di Euclide

*"Il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa"*

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.




Il triangolo **ACH risulta simile al triangolo ABC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo in comune $\hat{A}$).
Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha (trascuriamo di mettere il sopra-segnato per indicare le misure):

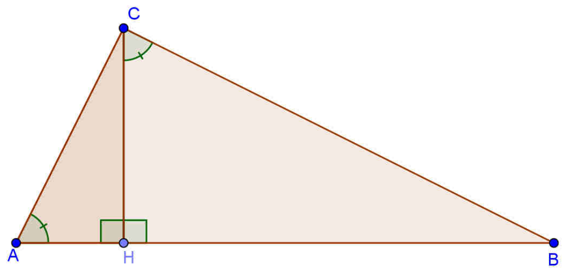
$$AB : AC = AC : AH \quad \rightarrow \quad AC^2 = AB \cdot AH$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al primo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sul cateto AC è $AC^2$ e l'area del rettangolo avente dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa è $AB \cdot AH$ .

## 2° teorema di Euclide

*"Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa"*

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.



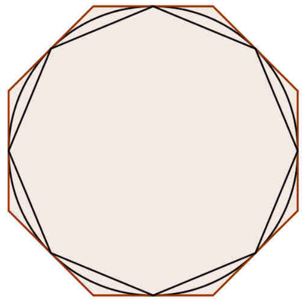

Il triangolo **ACH risulta simile al triangolo HBC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo $H\hat{A}C \equiv H\hat{C}B$ perché complementari dello stesso angolo).
Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha (trascuriamo di mettere il sopra-segnato per indicare le misure):

$$AH : HC = HC : HB \quad \rightarrow \quad HC^2 = AH \cdot HB$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al secondo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è $HC^2$ e l'area del rettangolo avente dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $AH \cdot HB$ .

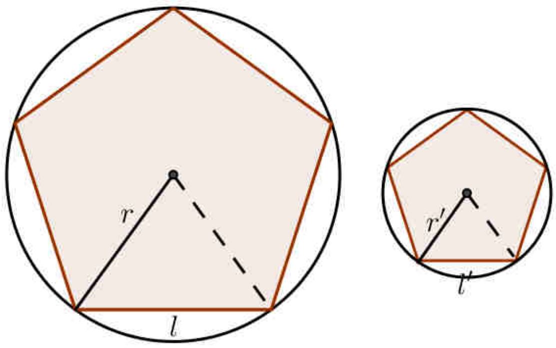
# Lunghezza della circonferenza

Proviamo a considerare *i poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza*: è chiaro che la lunghezza della circonferenza è maggiore del perimetro di un qualunque poligono regolare inscritto e minore del perimetro di un qualunque poligono regolare circoscritto e che la differenza tra il perimetro di un poligono regolare circoscritto e il perimetro di un poligono regolare inscritto con lo stesso numero di lati diventa sempre più piccola aumentando il numero dei lati.



La lunghezza della circonferenza è definita come **l'elemento separatore** tra l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza.

Se consideriamo due circonferenze di raggi *r* e *r'* e vi inscriviamo un poligono regolare dello stesso numero di lati, indicando con *2p* il perimetro del poligono inscritto nella circonferenza di raggio r e con *2p'* il perimetro di quello inscritto nella circonferenza di raggio *r'*

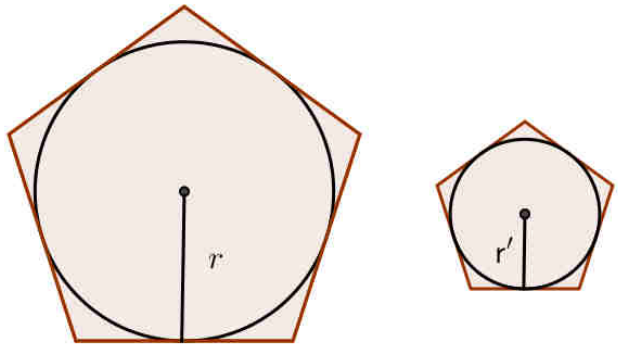



Sappiamo che $2p : 2p' = l : l'$.

Considerando la similitudine dei triangoli in figura abbiamo che $l : l' = r : r'$ e quindi in conclusione

$$2p : 2p' = r : r' \rightarrow \frac{2p}{2p'} = \frac{r}{r'}$$

Analogamente, considerando i poligoni regolari circoscritti dello stesso numero di lati ed indicando con 2P il perimetro del poligono circoscritto alla circonferenza di raggio *r* e con 2P' quello relativo alla circonferenza di raggio *r'*, abbiamo che:




$$2P : 2P' = r : r' \rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{r}{r'}$$

Se quindi indichiamo con $c$ la lunghezza della circonferenza di raggio $r$ e con $c'$ la lunghezza della circonferenza di raggio $r'$ abbiamo che:

$$\begin{array}{l} 2p < c < 2P \\ 2p' < c' < 2P' \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{2p}{2p'} < \frac{c}{c'} < \frac{2P}{2P'} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$$

Ma allora possiamo anche scrivere $\frac{c}{c'} = \frac{2r}{2r'} \rightarrow \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$

cioè **il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro è costante e questo rapporto viene indicato con il simbolo** $\pi$ (pi-greco).

$\pi$ **è un numero irrazionale**, cioè non si può esprimere con una frazione (la lunghezza della circonferenza e il suo diametro sono grandezze incommensurabili) ed il suo valore approssimato è 3,14.

Quindi in conclusione $\frac{c}{2r} = \pi$ , da cui la lunghezza $c$ della circonferenza di raggio $r$ risulta:

$$\boxed{c = 2\pi\ r}$$

**Nota:** per calcolare un'approssimazione di $\pi$ possiamo calcolare il rapporto tra il perimetro di un poligono regolare inscritto (o circoscritto) alla circonferenza con un numero elevato di lati e il diametro.

## Area del cerchio

Procedendo in modo analogo definiamo **l'area del cerchio come l'elemento separatore delle aree dei poligoni regolari inscritti e l'insieme delle aree dei poligoni regolari circoscritti** alla circonferenza.

Poiché l'area di un poligono regolare circoscritto risulta $A = \frac{2p \cdot r}{2}$ l'area $A_C$ del cerchio sarà

$$A_{cerchio} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

In conclusione l'area del cerchio di raggio $r$ risulta

$$\boxed{A_{cerchio} = \pi\ r^2}$$

# PROBLEMI

## SIMILITUDINE

1) In un triangolo ABC, M e N sono rispettivamente i punti medi di AC e BC. Qual è il rapporto tra i perimetri dei triangoli MCN e ABC? E il rapporto tra le aree?

[ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ]

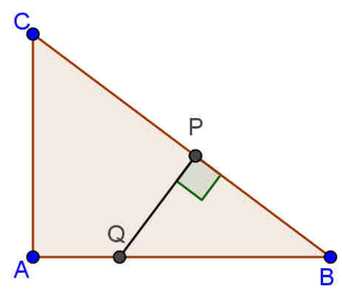
2) Considera un triangolo isoscele ABC avente base $\overline{AB} = 12\ cm$ e altezza $\overline{CH} = 8\ cm$. Considera il punto P su AC tale che $\overline{CP} = 4\ cm$ e traccia il segmento PQ parallelo ad AB con Q sul lato BC. Determina l'area del triangolo PQC.

[ $\frac{192}{25}\ cm^2$ ]

3) Considera un triangolo ABC e siano L,M,N i punti medi dei lati. Come risulta il triangolo LMN rispetto ad ABC?

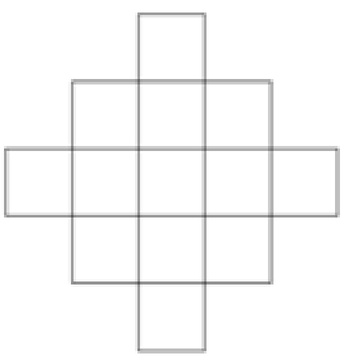
[simile, perché….. ]

4) Dato un triangolo rettangolo ABC, da un punto P dell'ipotenusa BC conduci la perpendicolare all'ipotenusa e supponi che incontri AB in Q (vedi figura). Come risulta BPQ rispetto ad ABC?
Supponi che $\overline{AB} = 8\ cm$, $\overline{AC} = 6\ cm$, $\overline{PB} = 4\ cm$.
Determina perimetro e area di PBQ.




[ simile perché…..; $2p = 12\ cm$, $A = 6\ cm^2$ ]

5) *(Invalsi 2017/18)*



La figura è composta da 13 quadrati tutti di lato 1 cm. Se il lato di ciascun quadrato si dimezza quanto risulterà la superficie della figura (in $cm^2$)?

[3,25 $cm^2$]

6) Disegna un parallelogramma ABCD e la sua diagonale AC. Da un punto P di AC traccia le parallele ai lati e dimostra che i parallelogrammi che hanno per diagonale i segmenti AP e PC sono simili.

7) Un triangolo ha i lati che misurano rispettivamente 15 cm, 20 cm e 25 cm. Se un triangolo simile a questo ha il lato maggiore di 20 cm, quanto misurano gli altri due lati?

[12 cm, 16 cm]

8) Due triangoli rettangoli hanno un angolo acuto congruente. È sufficiente per dire che sono simili? Se il perimetro del primo è doppio del perimetro del secondo quanto vale il rapporto tra le loro aree?

[Sì, perché?; 4]

9) Due triangoli rettangoli sono simili. Il cateto minore del primo triangolo misura 2 cm e la lunghezza dell'ipotenusa e del cateto maggiore del secondo sono rispettivamente 15 cm e 12 cm. Determina i lati incogniti dei due triangoli.

[9 cm; 10/3 cm; 8/3 cm]

10) Due triangoli simili hanno due lati omologhi di 12 cm e di 18 cm. Se l'area del primo misura 60 $cm^2$, quanto misura l'area del secondo? E se il perimetro del secondo misura 45 cm quanto misura il perimetro del primo?

[$A_2$=135 $cm^2$; $2p_1$=30 cm]

11) Le diagonali di due rettangoli simili sono uguali, rispettivamente, a 24 cm e 18 cm e la base del primo misura 12 cm. Determina le loro aree.

[$A_1=144\sqrt{3}$ $cm^2$ ; $A_2=81\sqrt{3}$ $cm^2$]

12) Un triangolo rettangolo in A ha il cateto maggiore AB di 36 cm e l'altro cateto di 24 cm. Per un punto P di AB si manda la parallela ad AC che incontra BC in Q. Sapendo che l'area di BPQ è 192 $cm^2$, determina la misura di PB.

[24 cm]

13) Un triangolo rettangolo ABC ha i cateti AC = 20 cm e AB = 15 cm. Tracciare una retta parallela all'ipotenusa in modo che, dette P e Q le intersezioni rispettivamente con i cateti AC e AB, l'area del triangolo PQB sia 2/9 di quella del triangolo dato.
*Suggerimento*: poni $\overline{BQ} = x$

[BQ=10 cm oppure BQ= 5 cm]

14) Un quadrato ABCD ha area 81 $cm^2$. Preso un punto E sul lato AB, mandare la perpendicolare ad ED che incontra BC in F. Dimostra che i triangoli AED e EBF sono simili.

15) In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, la proiezione dei cateti sull'ipotenusa misurano 25 cm e 144 cm. Determina perimetro ed area del triangolo.

[390 cm; 5070 $cm^2$]

16) In un rettangolo ABCD la perpendicolare condotta da A alla diagonale BD incontra la diagonale stessa in H ed il lato CD in K. Sapendo che DH misura 36 cm e che BH misura 64 cm, determina la misura di HK e, successivamente, il perimetro di ABCD.

[27 cm; 280 cm]

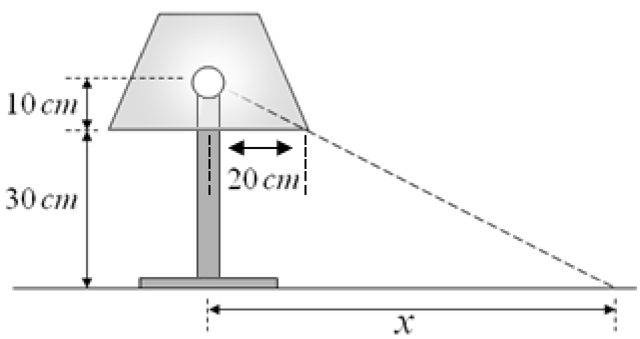
17) Un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, ha il cateto minore AB che misura 10 cm e l'altro cateto che è i suoi 3/2. Preso un punto P del cateto minore si tracci la perpendicolare al cateto stesso che incontri in Q l'ipotenusa. Sapendo che l'area di APQC è 27 $cm^2$, determina la misura di AP.

[2 cm]

18) In un triangolo rettangolo ABC, i cateti AB ed AC misurano, rispettivamente, 16 cm e 12 cm. Considera un punto P su ABV e sia H la sua proiezione su BC. Se il perimetro del triangolo HBP è 24 cm. Determina la misura di AP.

[6 cm]

19) *[Prove Invalsi 2013]* In figura è rappresentata una lampada con paralume e relative misure.

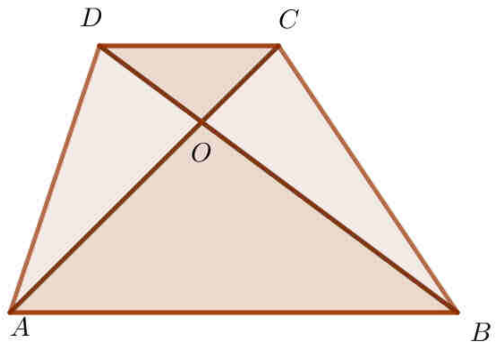



Quanto misura il raggio *x* del cerchio di luce proiettato sul piano d'appoggio della lampada?

[80 cm]

20) *[Prove Invalsi 2016*]

Le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli.
Completa il testo seguente scegliendo tra i termini riportati alla fine (ogni termine può essere usato una sola volta).




Considera i triangoli ABO e CDO.

I due triangoli hanno gli angoli $A\hat{O}B$ e ………… congruenti perché sono opposti al vertice.

L'angolo $O\hat{A}B$ è congruente all'angolo ………… perché sono angoli …………… formati dalle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC.

Quindi i traingoli ABO e CDO sono …………… tra loro.

Termini tra cui scegliere:

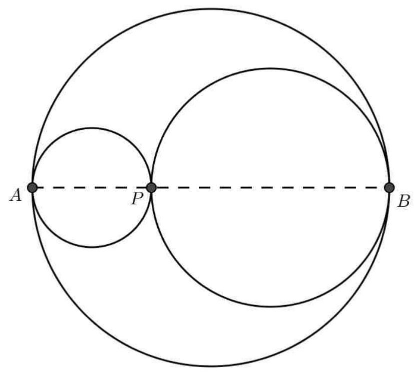
*Alterni interni, corrispondenti,* $A\hat{B}O$, $O\hat{C}D$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}A$ *, congruenti, simili*

21) *[Prove Invalsi 2015]*
Arturo vuole misurare l'altezza di un obelisco che si trova al centro della piazza principale della sua città. Ad una certa ora di un giorno di sole, l'obelisco proietta un'ombra di circa 6,4 m e un palo, alto 2,5 m, che si trova nella stessa piazza, proietta un'ombra di circa 0,8 m. Qual è l'altezza dell'obelisco? (supponi che la piazza sia orizzontale e che l'obelisco ed il palo siano verticali).

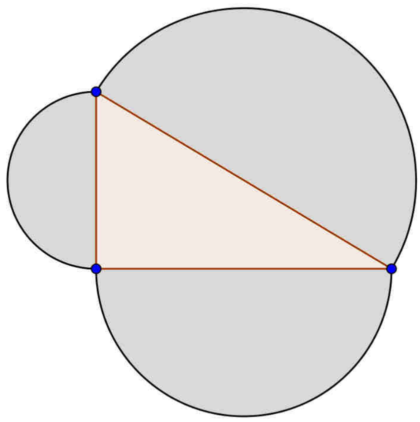
[20 m]

22) Disegna una circonferenza di diametro AB e prendi un punto P su AB: disegna le circonferenze di diametri AP e PB.

Verifica che la somma della lunghezza delle circonferenze è uguale alla somma della lunghezza della circonferenza di diametro AB.



23) Considera un triangolo rettangolo e disegna sui cateti e sull'ipotenusa dei semicerchi esterni al triangolo. Dimostra che il semicerchio costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei semicerchi costruiti sui cateti.



24) Considera un quadrato di lato 4 cm. Disegna la circonferenza inscritta e quella circoscritta. Determina la lunghezza delle due circonferenze e l'area della corona circolare individuata da esse.

[ $4\pi$, $4\pi\sqrt{2}$, $A = 4\pi$ ]

25) Considera una circonferenza di diametro AB e traccia una corda AC che forma un angolo di 60° con AB. Sapendo che la lunghezza della circonferenza è $10\pi\ a$, determina l'area del triangolo ABC.

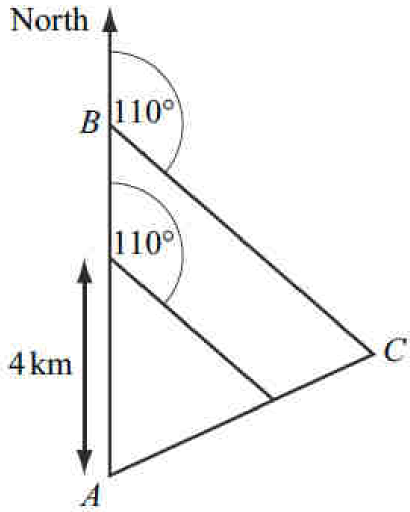
[ $\frac{25\sqrt{3}}{2}a^2$ ]

26) In un rombo il lato e la diagonale minore misurano *a*. Determina l'area del rombo e l'area del cerchio inscritto nel rombo.

[ $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $\frac{3}{16}\pi a^2$ ]

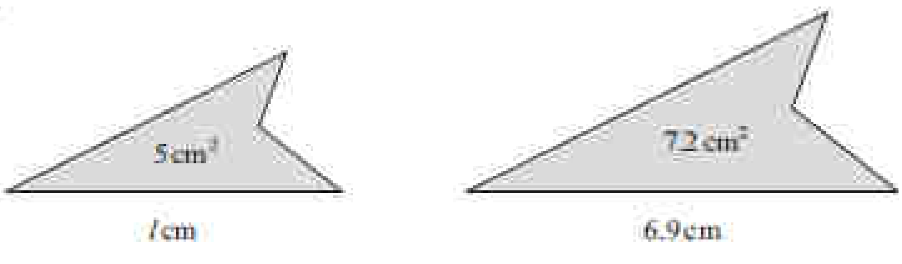
# TEST IN INGLESE
SIMILITUDINE

**1)** The route for the sponsored walk in winter is triangular.



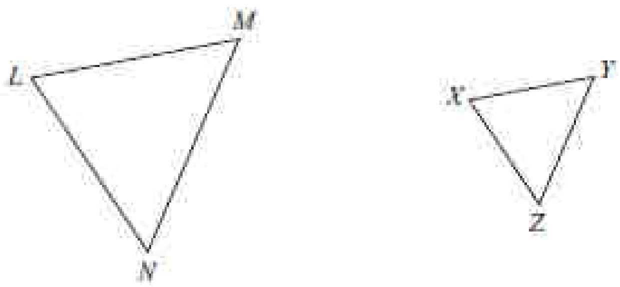

Senior students start at *A*, walk north to *B*, then walk on bearing 110° to *C*.
Then they return to *A*.
*AB*=*BC*=6 km
Junior students follow a **similar** path but they only walk 4 km North from *A*, then 4 km on a bearing of 110° before returning to A.
Senior students walk a total of 18.9 km.
Calculate the distance walked by junior students.

**2)** The diagram shows two similar figures.

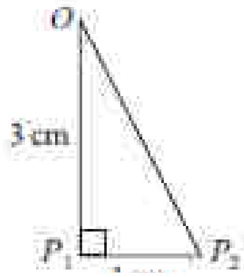



The areas of the figures are 5 cm$^2$ and 7.2 cm$^2$. The lengths of the bases are *l* cm and 6.9 cm.
Calculate the value of *l*.

**3)** A triangle *XYZ* is mathematically similar to triangle *LMN*.



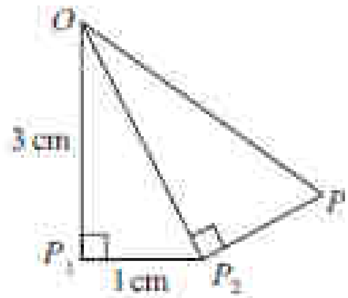

*XZ*=16 cm and the area of triangle *LMN* is 324 cm$^2$.Calculate the area of triangle *XYZ*.




**4)** Sidney draws the triangle $OP_1P_2$.$OP_1$=3 cm and $P_1P_2$=1 cm. Angle $OP_1P_2$=90°.

a) Show that $OP_2 = \sqrt{10}$ cm.

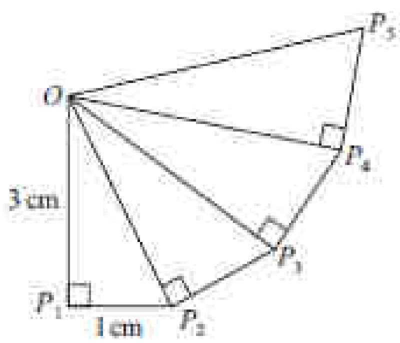
b) Sidney now draws the lines $P_2P_3$ and $OP_3$.
Triangle $OP_2P_3$ is mathematically similar to triangle $OP_1P_2$.




(i) Write down the length of $P_2P_3$ in the form $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ where *a* and *b* are integers.

(ii) Calculate the length of $OP_3$ in the form $\dfrac{c}{d}$ where *c* and *d* are integers.

c) Sidney continues to add mathematically similar triangles to his drawing.
Find the length of $OP_5$.




N
S

**5)** Ban and Sarah want to measure the height of a building. Ben is 1.8 m tall and Sarah suggests that he stands next to the building and compares the shadows. She measure his shadow to be 2.4 m long and the shadow of the building to be 16 m long. How tall is the building?

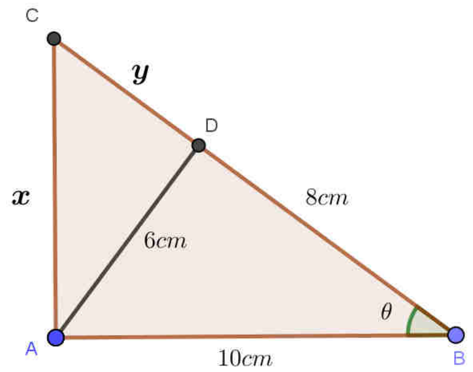
**6)** A photocopier is set to reduce the lengths of copies to $\frac{2}{3}$ of the original size. If the original document measures 12 cm by 15 cm what will be the dimension of the copy?

**7)** A photography shop produces enlargements of photos. A 15 cm x 10 cm photo was enlarged so that its longest side was 24 cm. What was the length of the shorter side?

**8)** A map is reduced to $\frac{3}{5}$ of its original size. A field on the original map measured 25 mm x 35 mm. What will be its dimensions on the image?

**9)** A map that measures 24 cm by 30 cm is reduced to $\frac{2}{3}$ of its original size. What are the dimensions of the reduced map?

**10)** In the triangle in the diagram BD = 8 cm, AB = 10 cm, AD = 6 cm, AC = x and CD = y.




a)Draw the two triangle ABC and DBA in the same orientation and mark on all their angles.

b)Hence explain why triangle ABC and DBA are similar.

c)Write down an equation involving x.

d)Solve the equation to find x.

e)Calculate the value of y.

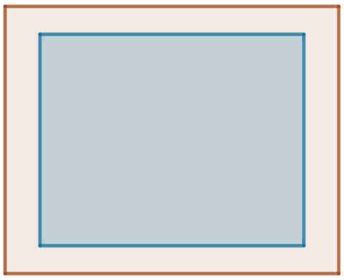
**11)** A rectangle P is enlarged to a rectangle Q. The dimensions of P are 5 m by 12 m. The shortest side of Q is 6 m.

(a) What is the scale factor of enlargement?
(b) What is the length of the longer side of Q?

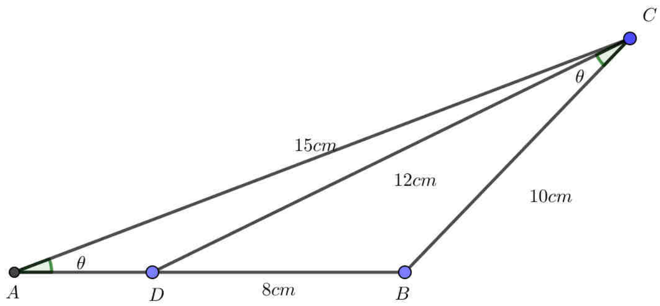
**12)** A right-angled triangle P is enlarged to a triangle Q. The hypotenuse of P is 12 cm and the hypotenuse of Q is 15 cm.

(a) What is the scale factor of enlargement?
(b) If the shortest side of P is 8 cm find the shortest side of Q.

**13)** A photo 8 cm high and 10 cm wide has a border 2 cm high along the bottom and the top of the photo and *w* cm wide on each side. Find *w* if the original photo is similar to the photo with its border.



**14)** In the diagram $D\hat{C}B \cong C\hat{A}B = \theta$, DB = 8 cm, DC = 12 cm and CB = 10 cm.




(a) To which triangle is the triangle ABC similar?

(b) Draw triangle ABC and the triangle of part (a) so that they have the same orientation and mark each side clearly.

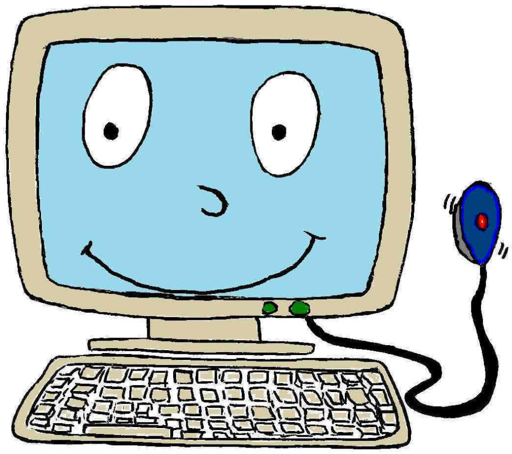
(c) Find the length AB

(d) Find also the length AC.

**15)** The distance between Delhi and Calcutta is 1310 Km. On a map they are 26.2 cm apart. Find the scale of the map in the form 1:n.

**16)** The scale of a map is 1: 20 000 000. On the map the area of a state is 5 $cm^2$. Calculate the actual area of the state in $Km^2$.

# Laboratorio di informatica

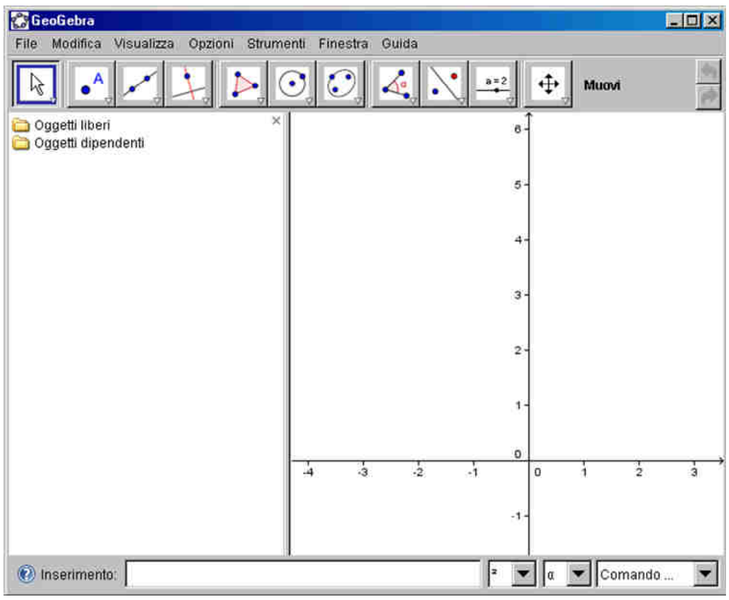


## Geometria analitica con Geogebra

Oltre che per lo studio della geometria euclidea, come abbiamo fatto lo scorso anno, il software Geogebra (geometria + algebra) **può essere utilizzato per lo studio della geometria analitica**. Apriamo il programma:comparirà un piano cartesiano con dei pulsanti in alto che hanno funzioni simili a quelle di Cabri (disegnare punti, rette, circonferenze ecc. ) e in basso una riga dove è possibile **inserire coordinate di punti o equazioni**.

Se per esempio digito (1,1) nella finestra grafica compare il punto corrispondente : posso anche assegnare un nome al punto, per es. B=(1,1) , altrimenti viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (A, B, C …).

Se digito $y = x$ compare nella finestra grafica la retta corrispondente: per darle un nome basta digitare, per esempio, r : $y = x$ altrimenti il nome viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (a,b,c…).




**Esercizio**: prova a digitare coordinate di punti e equazioni di rette.

# SCHEDA 1

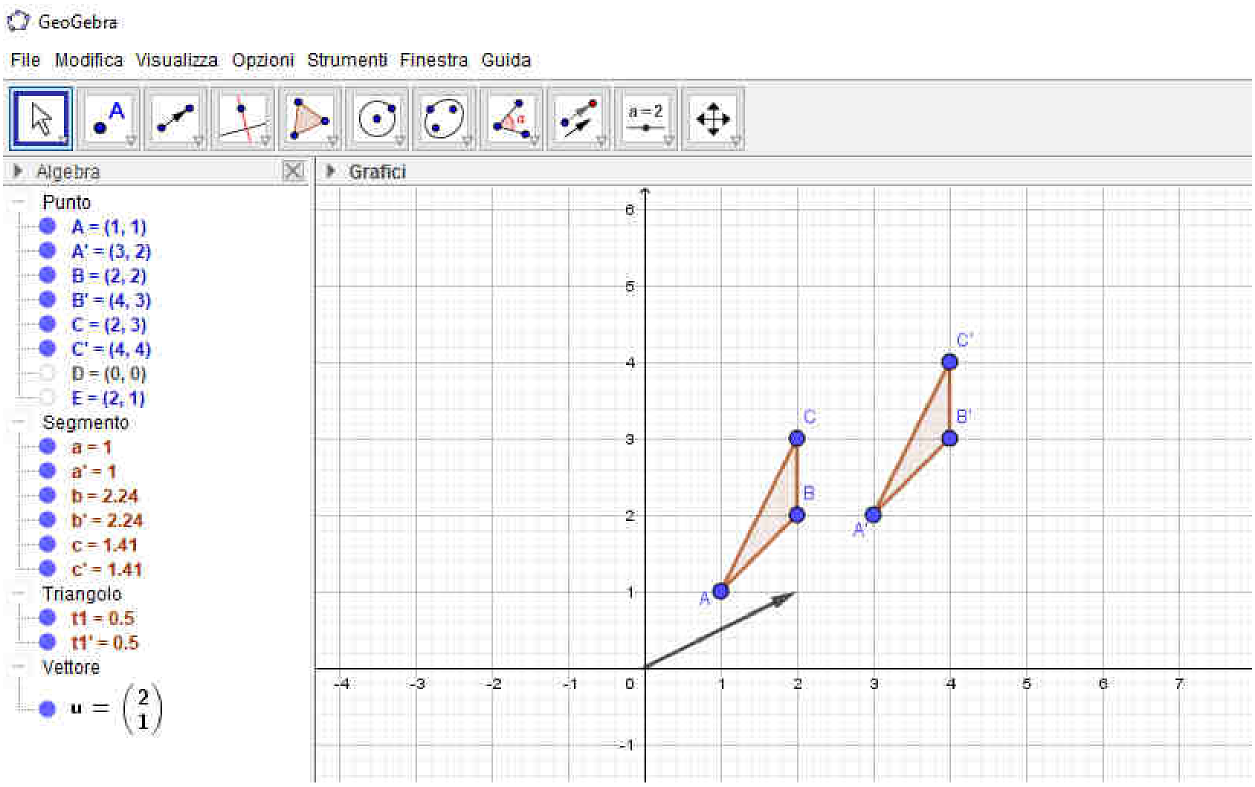
## GEOMETRIA ANALITICA
*Isometrie*

Proviamo ad applicare ad una figura, per esempio un poligono, delle **isometrie** cioè traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali.

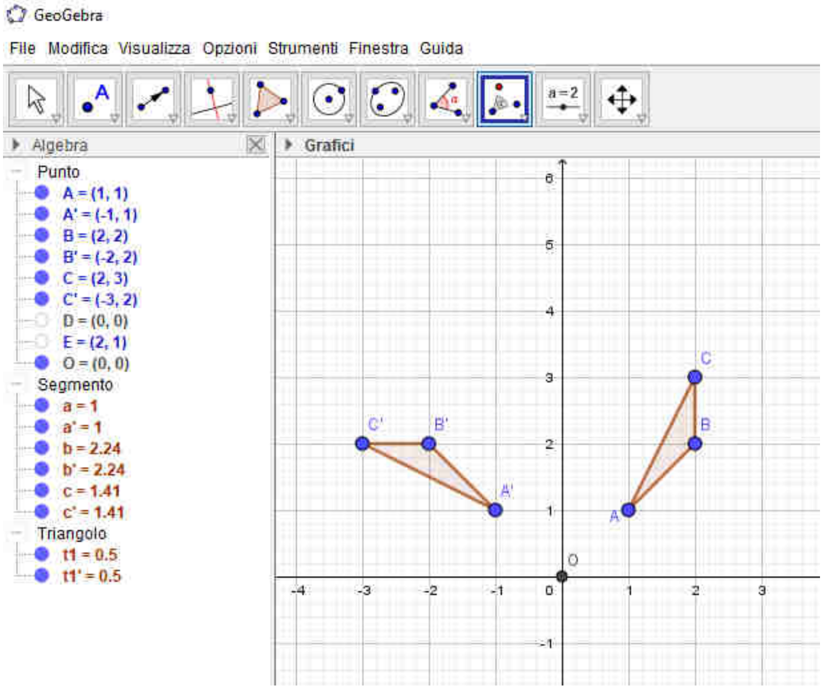
Disegna per esempio nel piano cartesiano quadrettato di Geogebra un triangolo come in figura con il comando poligono (puoi evitare che vengano scritte le "etichette" sui lati digitando Opzioni - etichettatura -solo i nuovi punti ) e **applica al triangolo**:

a) **una traslazione di vettore** $(2;1)$**:** crea il vettore facendolo partire dall'origine, scegli dalla barra degli strumenti il comando "traslazione", fai clic con il mouse sul triangolo (zona interna) e poi sul vettore.

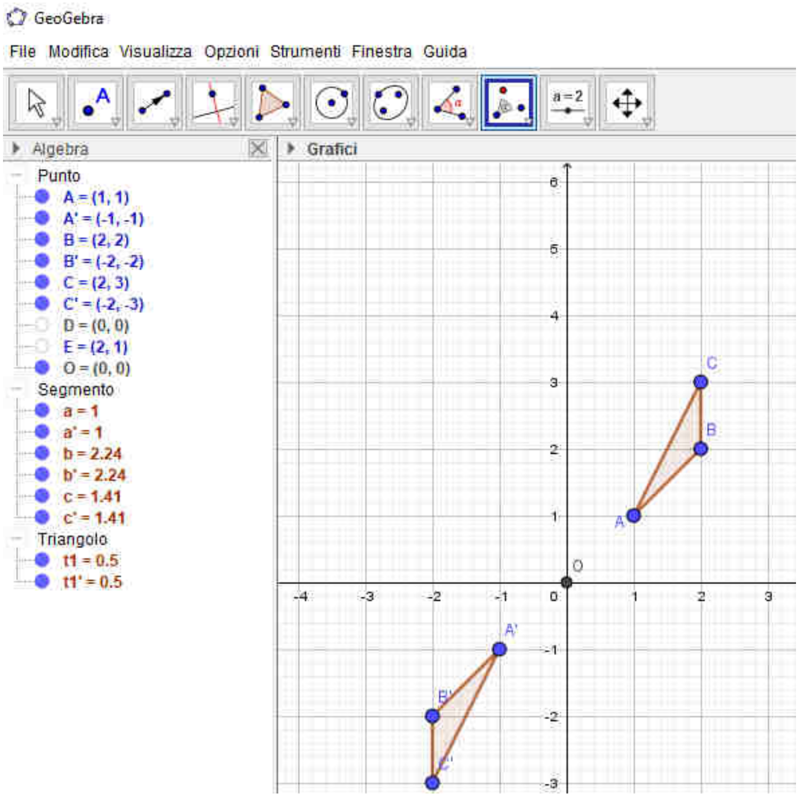
Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo traslato (controlla la zona a sinistra dello schermo, la vista "algebra" dove compaiono le coordinate dei vertici del poligono).



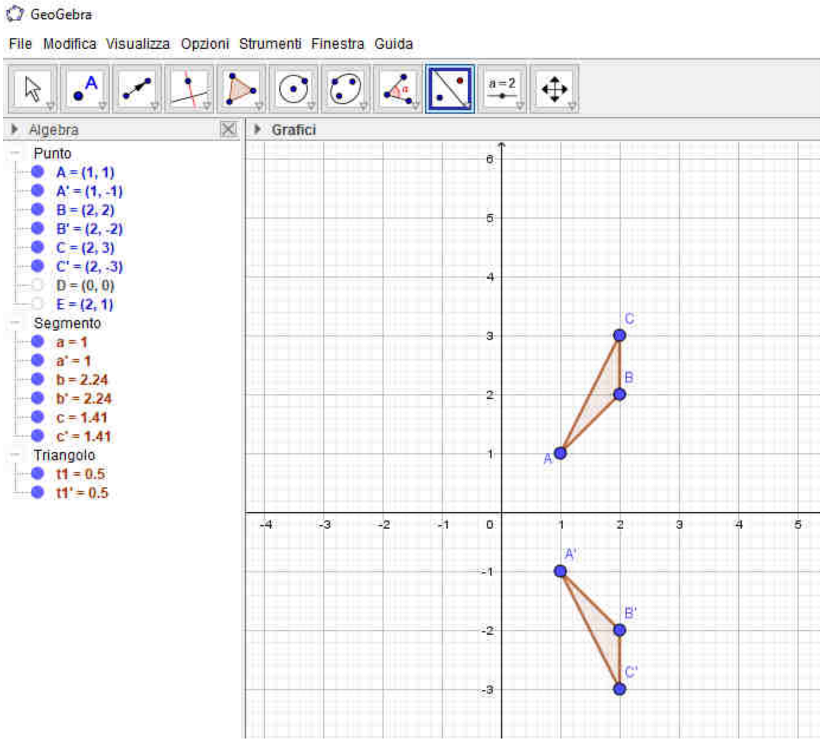
**b)** **una rotazione di 90° intorno all'origine**: crea il punto O(0;0) con il comando "punto", scegli dalla barra degli strumenti il comando "rotazione", fai clic sul triangolo, poi sul punto O (centro della rotazione) e poi inserisci l'angolo della rotazione (90°).
Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo ruotato di 90° intorno all'origine.



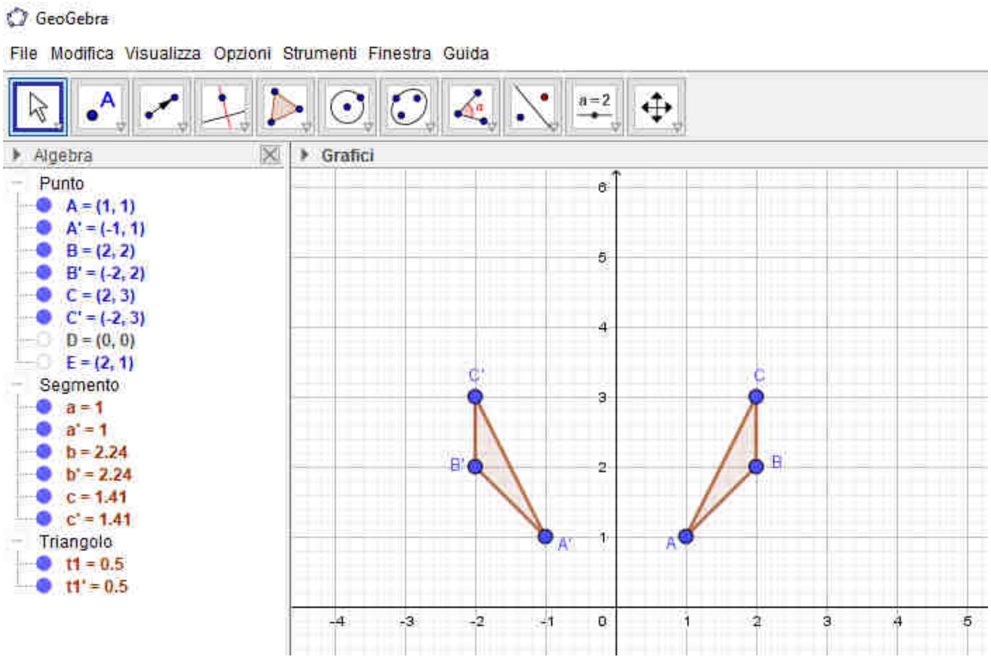

**c)** **rotazione di 180° intorno all'origine**: scegli il comando "rotazione", clic sul triangolo, sul punto O e questa volta inserisci 180°. Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo ruotato di 180° intorno all'origine.



**d) una simmetria rispetto all'asse x**: scegli "simmetria assiale", clic sul triangolo poi sull'asse x : osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico rispetto all'asse x.




**e) una simmetria rispetto all'asse y**: scegli "simmetria assiale", clic sul triangolo poi sull'asse y : osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico rispetto all'asse y.



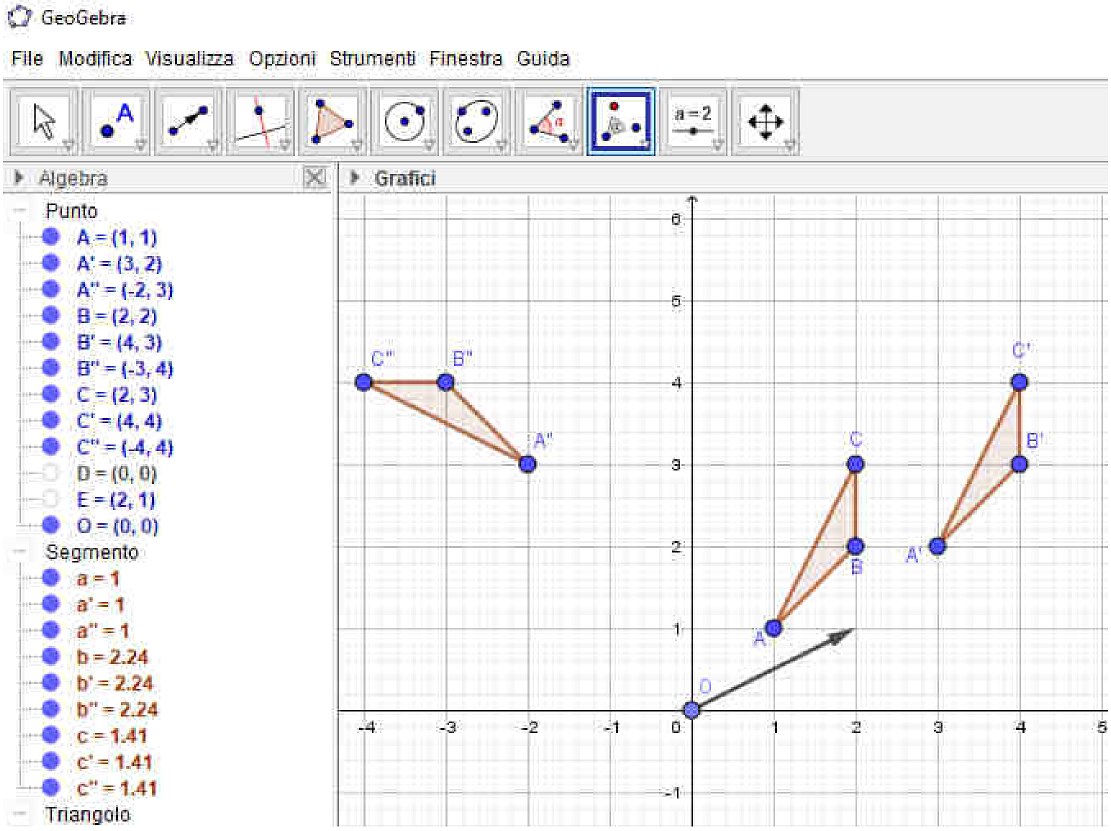

**Esercizio**: prova ad applicare al triangolo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo/terzo quadrante (prima costruisci la retta bisettrice…). Come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico?

# SCHEDA 2

## GEOMETRIA ANALITICA
*Composizione di isometrie*

Cosa significa "**comporre**" più isometrie?

Considera per esempio il triangolo della scheda 1: applichiamo al triangolo la traslazione di vettore $(2;1)$ e *al triangolo traslato applichiamo la rotazione di 90°* intorno all'origine (si parla di "composizione" di trasformazioni).




### Osservazione

Osserviamo che *l'ordine in cui vengono eseguite le isometrie è importante*: prova ad applicare al triangolo ABC prima la rotazione di 90° intorno all'origine e poi, al triangolo ruotato, applica la traslazione di vettore $(2;1)$.
Ottieni lo stesso triangolo finale?

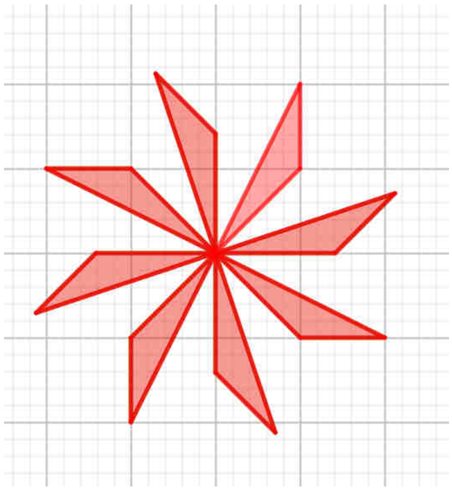
Stampa la figura che ottieni in questo caso.

# SCHEDA 3

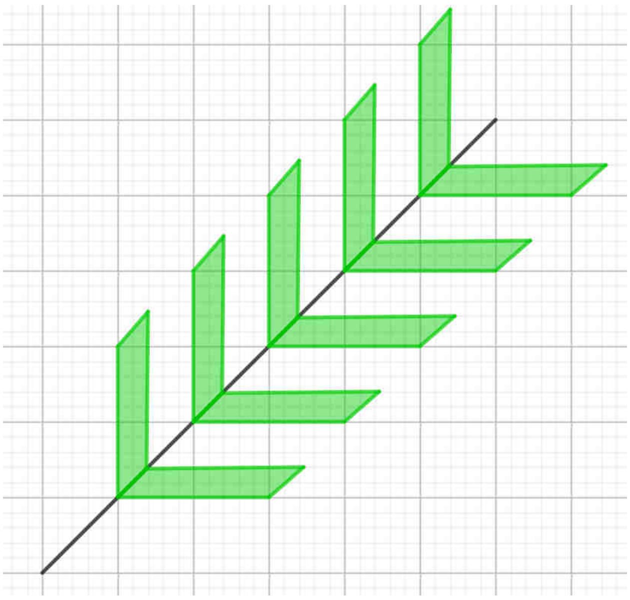
## GEOMETRIA ANALITICA
*Composizione di isometrie*

Utilizzando la composizione di isometrie puoi realizzare anche disegni “gradevoli” a vedersi.

**Esercizio 1**
Prova a disegnare il fiore in figura con successive rotazioni di …….. intorno all’origine di un triangolo.



**Esercizio 2**
Prova a disegnare la “felce” in figura: devi utilizzare sia traslazioni che la simmetria rispetto alla retta del “gambo”.

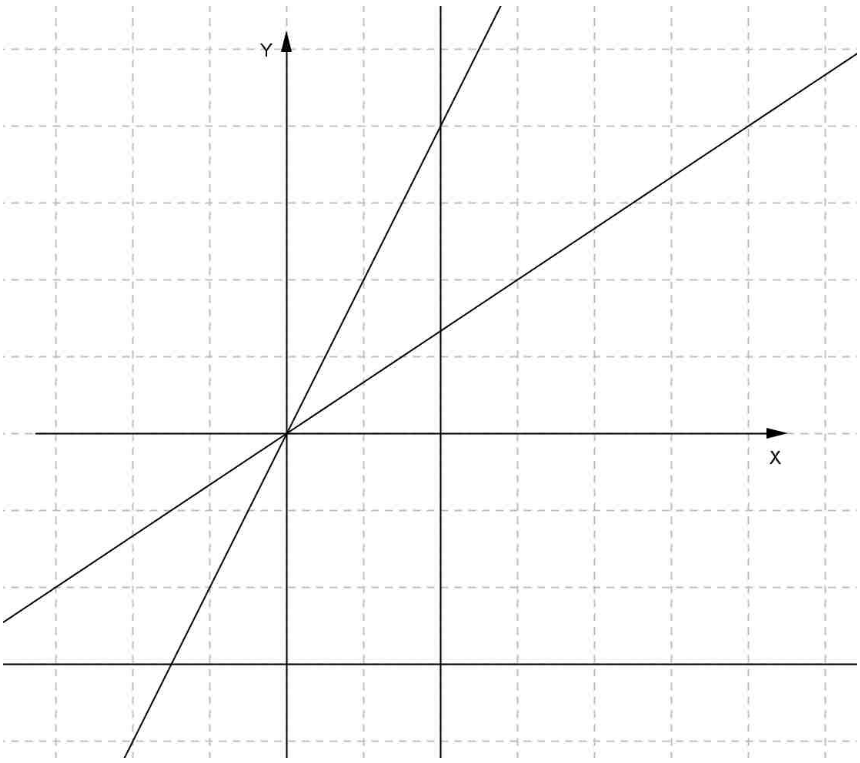


**Esercizio 3**
Realizza un tuo disegno utilizzando una figura geometrica e la composizione di isometrie.

# SCHEDA 4

## GEOMETRIA ANALITICA
*La retta*

Nel piano quadrettato di Geogebra disegna alcune rette con il comando retta per due punti , quali per esempio x=2 , y=-3 , y=2x , $y = \frac{2}{3}x$ aiutandoti con la quadrettatura e controlla che nella "vista algebra" l'equazione visualizzata sia quella che volevi.




Inserisci puoi nella barra di inserimento direttamente l'equazione di alcune rette quali per esempio $y = -2x$ , $y = \frac{1}{3}x + 4$ , $y = -\frac{5}{4}x - 2$ e controlla, nel piano quadrettato, la loro inclinazione ed eventualmente l'ordinata all'origine.

Stampa le rette.

# SCHEDA 5

GEOMETRIA ANALITICA
*Equazione esplicita di una retta*

Per capire il significato del coefficiente angolare $m$ e dell'ordinata all'origine $q$ ,quando la retta è scritta nella forma $y = mx + q$ , possiamo usare lo strumento di Geogebra chiamato " slider ".

## Creazione dello "slider"

Prima di tutto dobbiamo "creare" lo slider.
Attiviamo il pulsante in alto in cui compare la scritta "slider", mettiamo il cursore in un punto qualsiasi del piano cartesiano e facciamo clic con il mouse: comparirà un trattino e ci verrà chiesto di inserire il nome, il campo di variazione dello slider (per esempio nel nostro caso possiamo chiamarlo *m* e scegliamo di farlo variare, per esempio, tra -10 e 10 ) e il suo incremento (possiamo per esempio scegliere 1: variando il valore dello slider si passerà per esempio da 3 a 4 e così via).

## Inserimento dell'equazione contenente lo slider creato

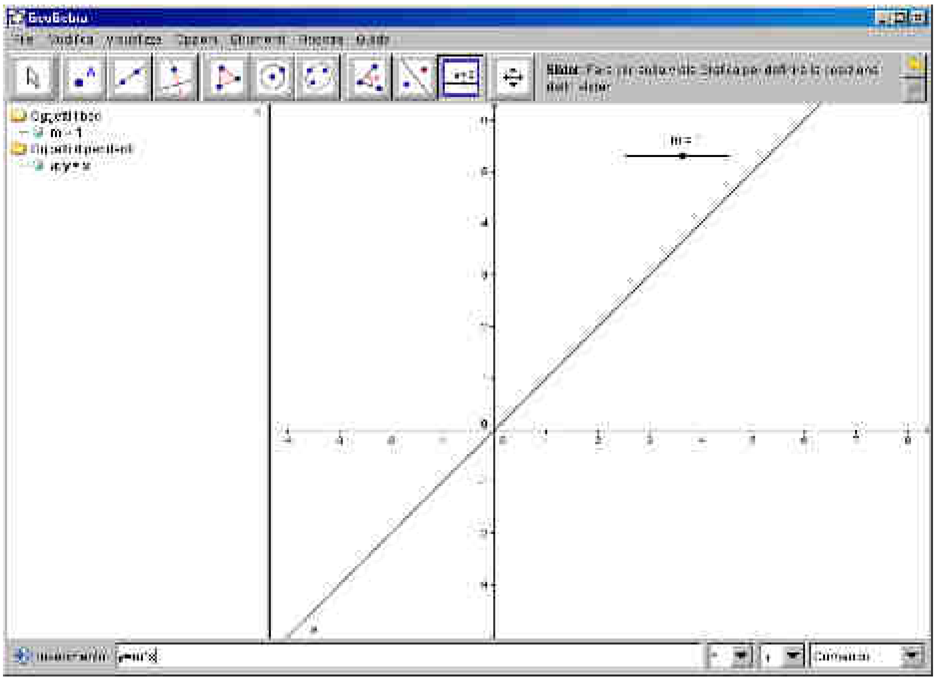
Inseriamo nella barra di inserimento l'equazione $y = mx$ (in alcune versioni di Geogebra occorre mettere * per indicare la moltiplicazione ) e osserviamo che compare subito la rappresentazione della retta per l'origine corrispondente al valore che viene sempre dato inizialmente allo slider (uguale a 1).

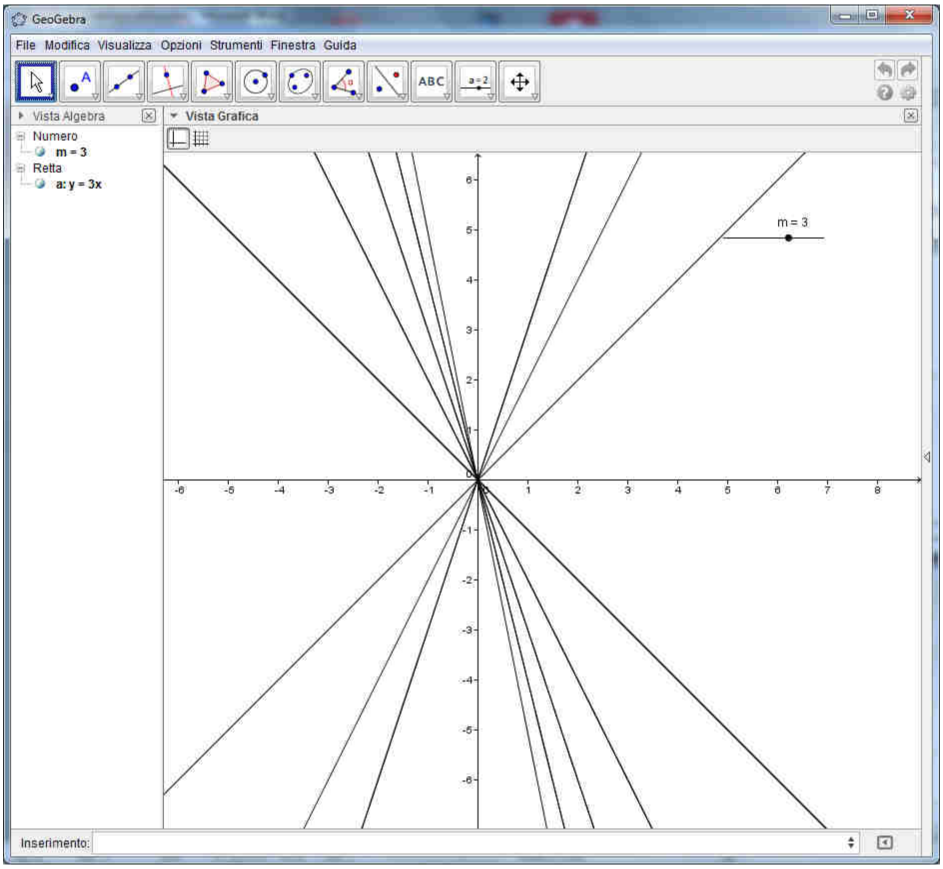
Per visualizzare come cambia la retta al variare di m attiviamo nel primo pulsante in alto a sinistra il comando **"muovi**".
Posizioniamoci sullo slider (comparirà una manina) e trasciniamo lo slider (cambia il suo valore): la retta per l'origine cambia e quindi ci rendiamo conto che variando m varia l'inclinazione della retta.

Possiamo anche visualizzare insieme tutte le rette corrispondenti ai vari valori dello slider scegliendo, dopo essersi posizionati sulla retta e premuto il tasto destro del mouse, la funzione "traccia attiva" (in alcune versioni si trova "traccia on" ) : a questo punto muovendo m compariranno tutte le rette corrispondenti.

Posso anche inserire un valore dello slider digitandolo nella riga di inserimento in basso.

Possiamo anche vedere automaticamente la variazione dello slider con : Modifica - proprietà fondamentale - animazione attiva.





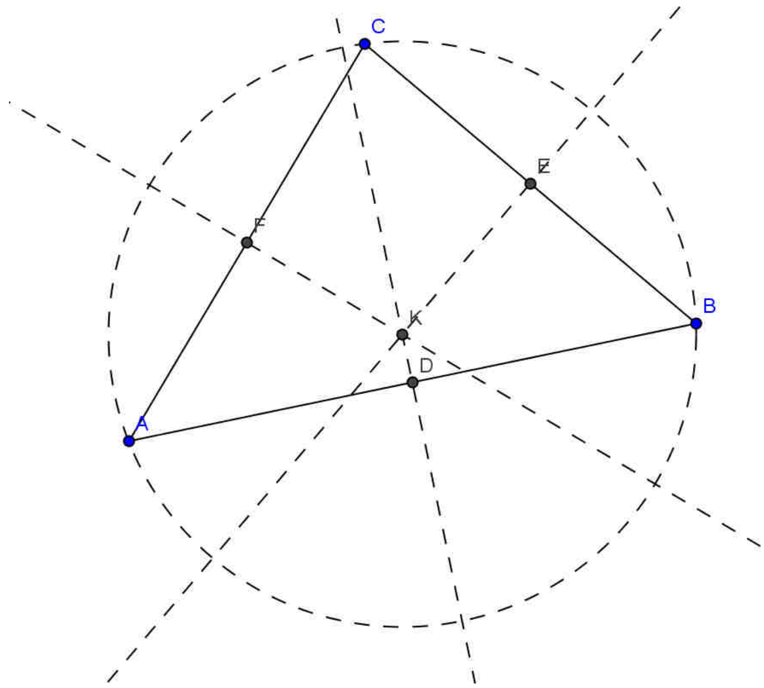

Ora prova a creare un altro slider (chiamalo $q$ ) e ad inserire $y = mx + q$.
Fai variare $q$ e stampa qualche esempio.

# SCHEDA 6

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Circocentro di un triangolo*

Per costruire il circocentro di un triangolo possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono)
- Con il comando punto medio costruiamo i punti medi dei tre lati
- Disegniamo gli assi dei lati utilizzando il comando "retta perpendicolare" facendo clic sul punto medio e poi clic sul lato
- Intersechiamo due assi e verifichiamo che anche il terzo passa per quel punto che è appunto il circocentro (indicato con K).




**Nota:** possiamo anche usare il comando "asse" per tracciare l'asse di un lato…

**Osservazione**: attivando il comando "Muovi" e spostando un vertice del triangolo (quindi modificando il triangolo) osserviamo che il circocentro può cadere anche esternamente al triangolo e che è sempre alla stessa distanza dai vertici del triangolo: infatti se tracciamo una circonferenza di centro il circocentro e passante per un vertice , passa anche per gli altri due vertici.

Il nome "circocentro" deriva proprio dal fatto che è **centro** della circonferenza **circo**scritta al triangolo.
In quale caso il circocentro cade su un lato?

# SCHEDA 7

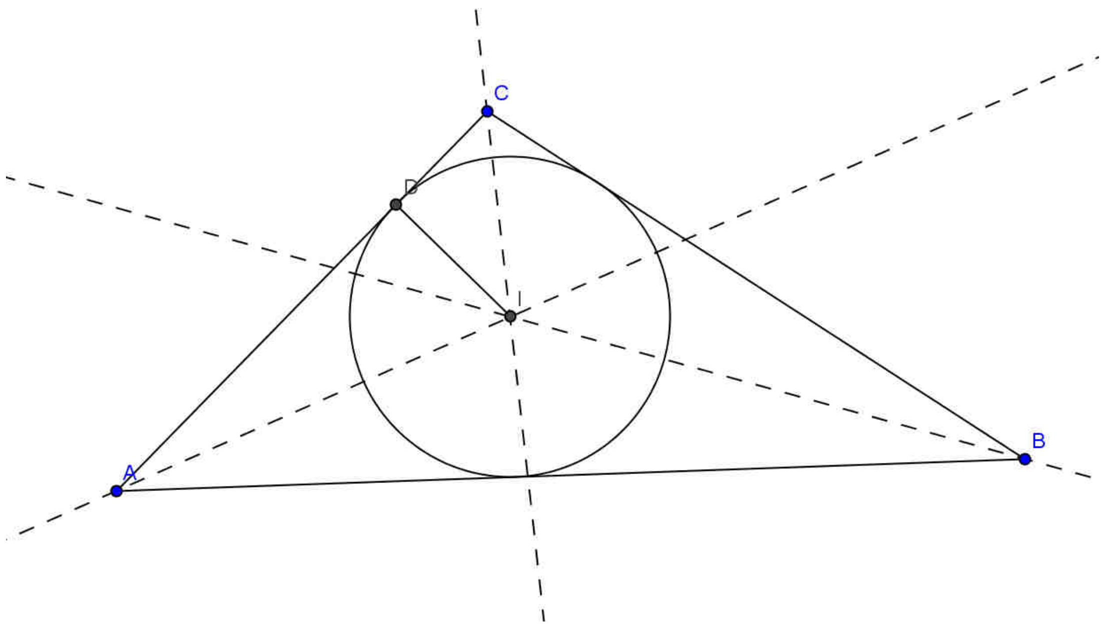
GEOMETRIA EUCLIDEA
*Incentro di un triangolo*

Per costruire l'incentro di un triangolo (intersezione delle bisettrici) possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono)

- Con il comando "bisettrice" costruiamo le bisettrici degli angoli (nascondiamo le bisettrici degli angoli esterni del triangolo)

- Intersechiamo due bisettrici e verifichiamo che anche la terza passa per quel punto che è appunto l'incentro (indicato con I).




**Osservazione**: attivando il comando "Muovi" e spostando un vertice del triangolo (quindi modificando il triangolo) osserviamo che l'incentro cade sempre internamente al triangolo e che è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo cioè è alla stessa distanza dai lati del triangolo: per tracciare la circonferenza inscritta possiamo usare il comando retta perpendicolare (dall'incentro ad un lato) per trovare il punto di tangenza (nella figura D) e poi tracciare la circonferenza di centro I e passante per D.

Il nome "incentro" deriva proprio dal fatto che è **centro** della circonferenza **in**scritta al triangolo.

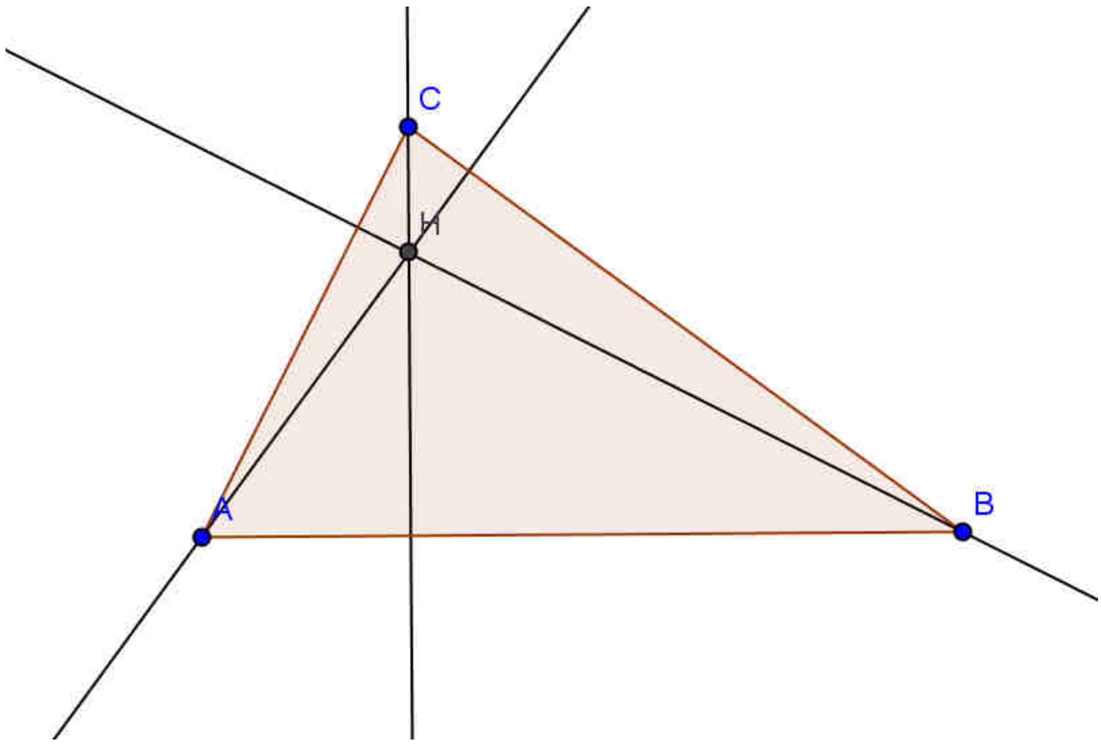
# SCHEDA 8

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Ortocentro di un triangolo*

Per costruire l'ortocentro di un triangolo (intersezione delle altezze) possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono);
- con il comando "retta perpendicolare" costruiamo le altezze relative ai vari lati del triangolo;
- intersechiamo due altezze e verifichiamo che anche la terza passa per quel punto che è appunto l'ortocentro (indicato in genere con H: puoi modificare il nome del punto facendo clic con il destro e utilizzando il comando "rinomina").

Se modifichi il triangolo con il comando "muovi" in quale caso H coincide con un vertice? Stampa questo caso.
L'ortocentro può cadere esternamente al triangolo? Stampa un caso in cui cade esternamente.



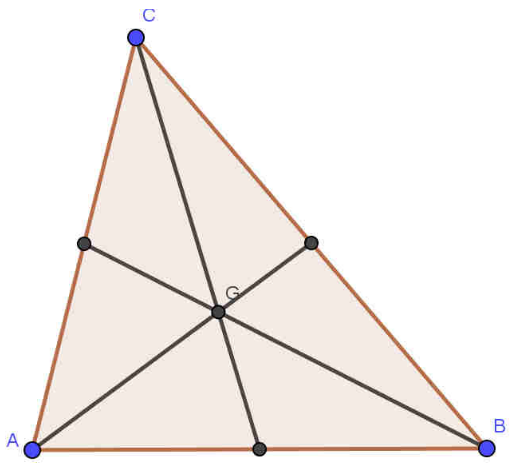
# SCHEDA 9

## GEOMETRIA EUCLIDEA
## *Baricentro di un triangolo*

Disegna un triangolo ABC utilizzando il comando poligono.

Per tracciare le mediane devi costruire il punto medio di ogni lato (c'è il comando "punto medio) e poi congiungere, con il comando "segmento" ogni vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

Infine utilizzando il comando "intersezione" interseca due mediane: vedrai che le tre mediane si intersecano nello stesso punto (che in genere viene indicato con la lettera G perché g è l'iniziale della parola "gravità" e la forza di gravità di un corpo è applicata proprio nel suo baricentro).




**Metti alla prova la tua costruzione!**

Per verificare che le tre mediane passano sempre per uno stesso punto prova a "trascinare" uno dei vertici modificando il triangolo.

Il baricentro può cadere fuori del triangolo?

Osservi qualche proprietà particolare?

Stampa qualche esempio.

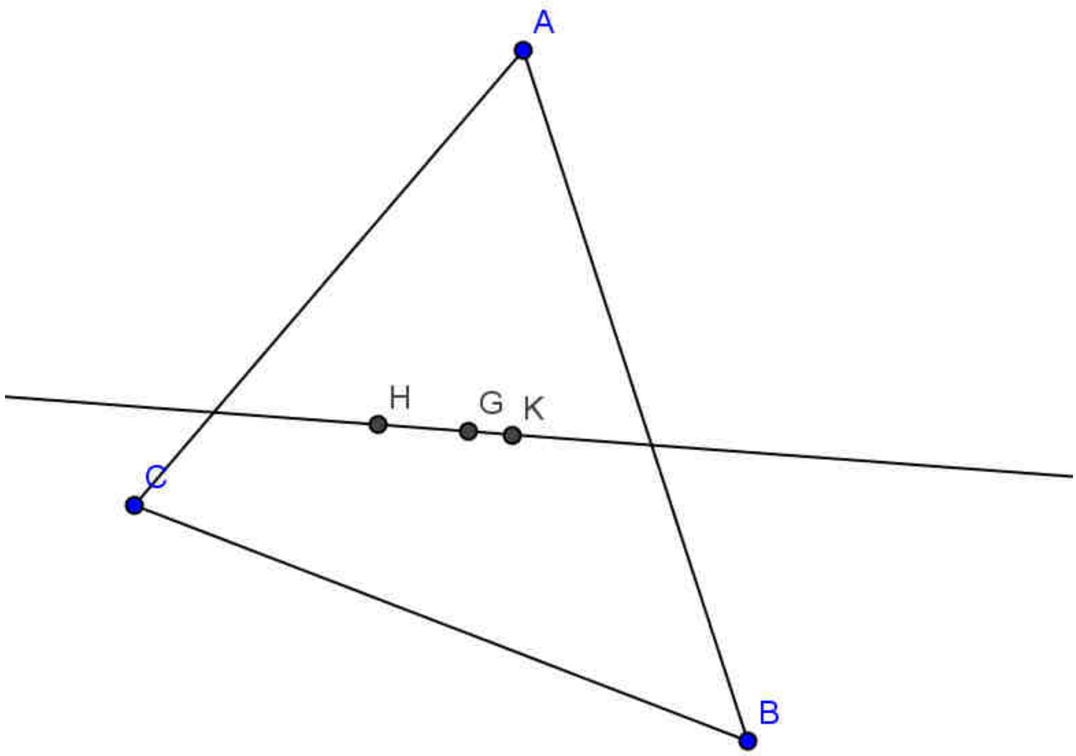
# SCHEDA 10

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Baricentro, ortocentro e circocentro di un triangolo*

Disegniamo un triangolo ABC e poi, con le costruzioni che abbiamo visto nelle schede precedenti, costruiamo il baricentro G, l'ortocentro H e il circocentro K (possiamo rinominare questi punti con queste lettere cliccando con il destro e scegliendo Rinomina ).
Per evitare che il disegno sia troppo appesantito possiamo nascondere le varie altezze, mediane assi cliccando con il destro , selezionare "mostra oggetto" e lasciare solo i punti H,K,G.

Tracciamo la retta per H e K, per esempio, e verifichiamo che passa anche per G.

**Nota:** se attiviamo il comando muovi e modifichiamo la forma del triangolo vediamo che i tre punti continuano ad essere allineati.
In quale caso i tre punti coincidono?
In quale caso si trovano su un'altezza (che è anche mediana e asse ) del triangolo?

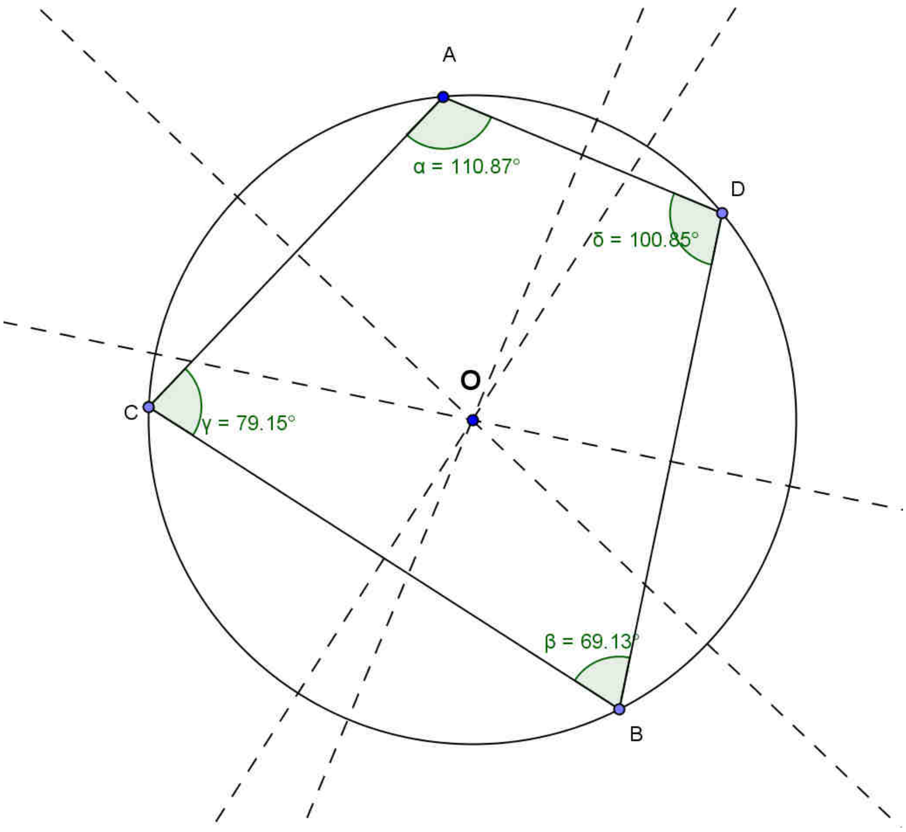


# SCHEDA 11

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Quadrilatero inscritto in una circonferenza*

Verifichiamo che se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza gli assi dei suoi lati passano tutti per uno stesso punto, che è il centro della circonferenza circoscritta, e che gli angoli opposti sono supplementari.

Tracciamo una circonferenza con il comando "circonferenza centro-punto";
con il comando "punto su oggetto" creiamo altri tre punti sulla circonferenza;
con il comando "segmento tra due punti" costruiamo il quadrilatero inscritto nella circonferenza;
con il comando "asse di un segmento" tracciamo gli assi dei lati e verifichiamo che passano tutti per il centro della circonferenza;
con il comando "angolo" evidenziamo gli angoli interni del quadrilatero e verifichiamo che gli angolo opposti sono supplementari.



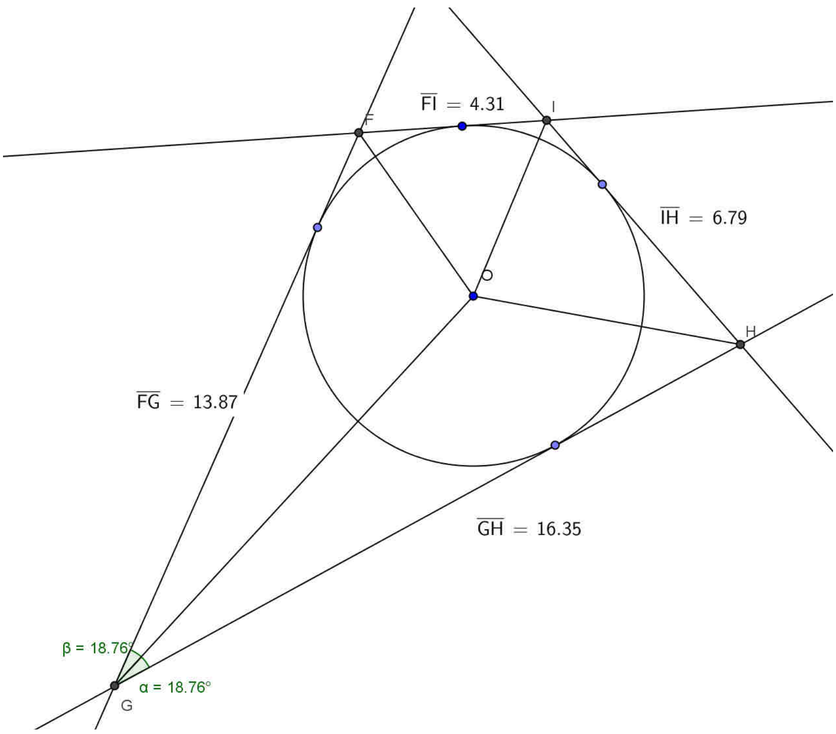

**Nota**: prova ad attivare il pulsante "muovi" e a muovere un vertice del quadrilatero.
Noterai che le proprietà continuano ad essere verificate.
Stampa qualche esempio.

# SCHEDA 12

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Quadrilatero circoscritto ad una circonferenza*

Verifichiamo che se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto , che è il centro della circonferenza inscritta, e che la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

Disegniamo una circonferenza (comando circonferenza centro-punto);
creiamo altri tre punti sulla circonferenza (punto su oggetto);
con il comando "tangenti ad una circonferenza" tracciamo le tangenti alla circonferenza nei suoi quattro punti;
intersechiamo le tangenti ottenendo il quadrilatero circoscritto (con il comando intersezione di due oggetti abbiamo i vertici);
congiungiamo i vertici con il centro della circonferenza e verifichiamo con il comando "angolo" che i segmenti tracciati sono bisettrici (che quindi si incontrano tutte in un punto che è il centro della circonferenza inscritta);
con il comando "distanza" misuriamo la lunghezza dei lati verificando che la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.




**Nota:** prova ad attivare "muovi" e muovi i punti sulla circonferenza.
Anche se il quadrilatero circoscritto cambia, continuano ad essere verificate le due proprietà.
Stampa qualche esempio.

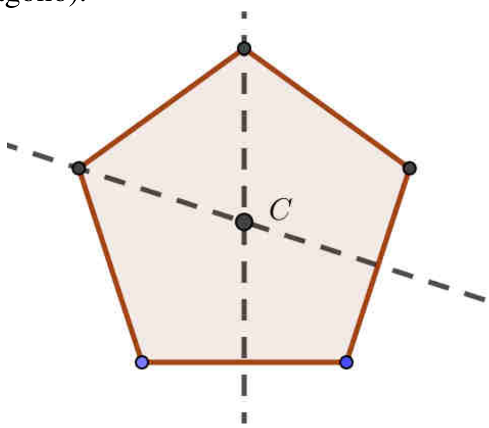
# SCHEDA 13

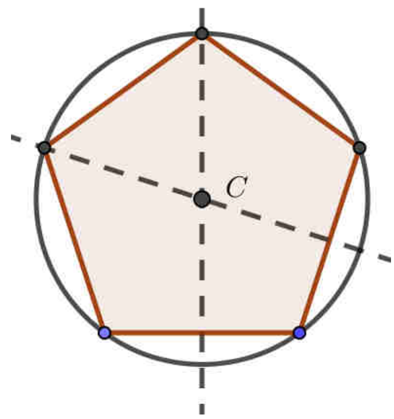
GEOMETRIA EUCLIDEA

## *Circonferenza inscritta e circoscritta ad un poligono regolare*

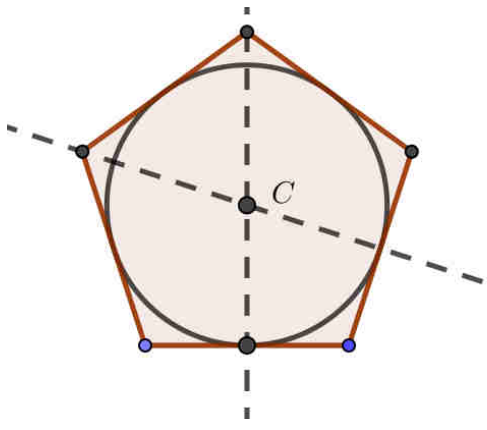
Verifichiamo che un poligono regolare è sempre inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza e che le due circonferenze hanno lo stesso centro.

Consideriamo per esempio un pentagono regolare: possiamo usare il comando poligono regolare e inserire come numero di lati 5.
Per determinare il centro della circonferenza inscritta e circoscritta possiamo tracciare sia le bisettrici di due angoli ed intersecarle che gli assi di due lati ed intersecarli.
Determinato il **centro C** , usando il comando "circonferenza di dato centro e passante per un punto" possiamo tracciare la circonferenza circoscritta (basta farla passare per un vertice del pentagono).




Per tracciare la circonferenza inscritta possiamo considerare un asse, intersecare con il lato ottenendo il punto di tangenza e poi usare il comando circonferenza centro-punto facendola passare per il punto di tangenza.



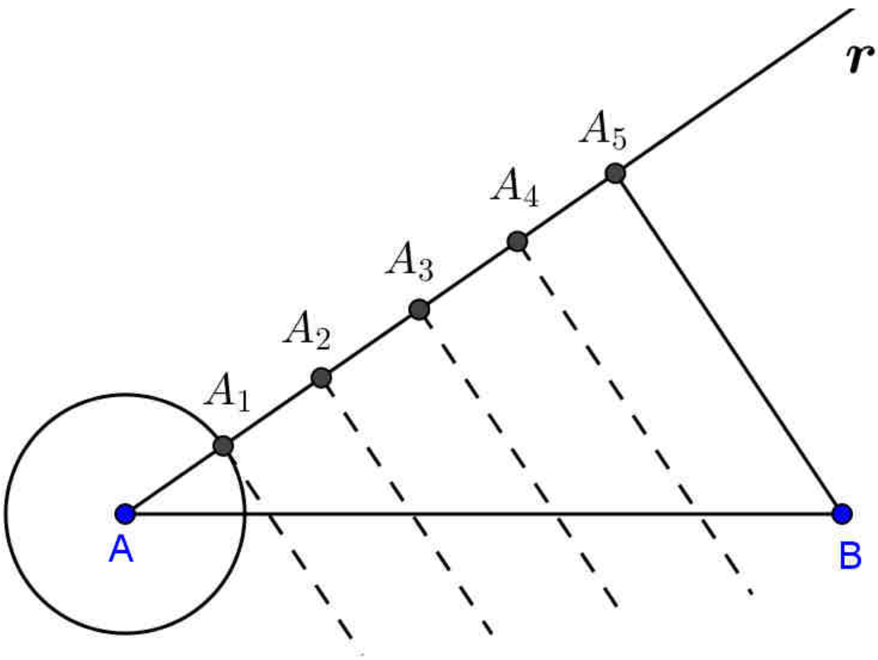

**Esercizio:** ripeti la costruzione per triangolo equilatero, quadrato ed esagono regolare.

# SCHEDA 14

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Divisione di un segmento in **n** parti uguali*

Possiamo tracciare un semiretta a piacere uscente da un estremo, per esempio A, e , partendo da A puntare il compasso in A con apertura *r* a piacere: dal punto $A_1$ così individuato sulla semiretta possiamo puntare il compasso con la stessa apertura e individuare sulla semiretta un secondo punto $A_2$ a distanza *r* da $A_1$ e così via fino ad $A_n$.
In figura vediamo un esempio per n=5.

Congiungiamo $A_n$ con B e tracciamo per $A_1$, $A_2$, *ecc.* le rette parallele a $A_nB$: per il teorema di Talete le intersezioni daranno la divisione del segmento AB.



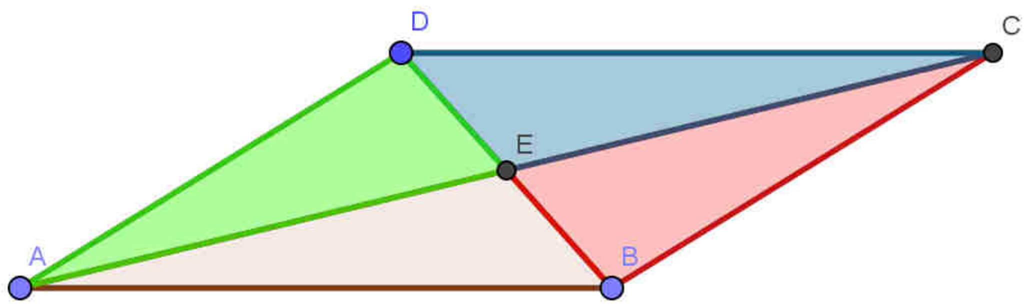
# SCHEDA 15

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Parallelogramma e triangoli equivalenti*

Disegna un parallelogramma:
traccia un segmento AB e un segmento consecutivo AD;
traccia la retta per B parallela ad AD e la retta per D parallela ad AB e intersecale (punto C);
traccia i segmenti BC e CD e poi nascondi la costruzione.

Traccia le diagonali AC e BD e intersecale (punto E).

Come risultano i triangoli ABE, BCE, DCE, ADE ?
Prova a modificare la figura trascinando A o B o D.




*Suggerimento:*

Costruisci i poligoni ABE ecc. e calcolane l'area.

Cosa osservi?

……………………………………………………………………………………………………

Prova a dimostrare quello che hai verificato con Geogebra.

……………………………………………………………………………………………………

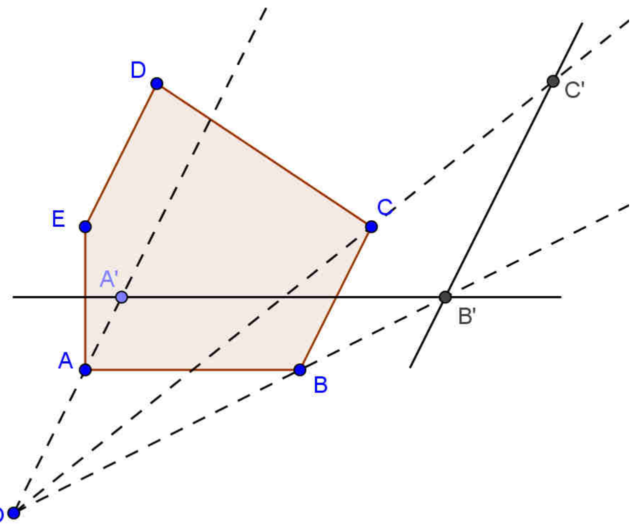
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

# SCHEDA 16

GEOMETRIA EUCLIDEA
*Poligoni "omotetici"*

Prova a seguire questo procedimento:




- disegna un poligono (irregolare) ABCDE usando il comando "poligono";
- crea un punto O (esterno al poligono);
- traccia le semirette uscenti da O e passanti per i vertici del poligono;
- sulla semiretta per A fissa un punto A' (comando "punto su oggetto");
- traccia per A' la parallela al lato AB del poligono e individua sulla semiretta per B un punto B';
- continua nello stesso modo (traccia da B' la parallela al lato BC e individua C'…);

Il poligono così ottenuto A'B'C'D'E' risulta simile a ABCDE per il teorema di Talete e

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \ldots = k = \text{ rapporto di similitudine.}$$

Osserviamo che A'B'C'D'E' risulta anche *disposto nello stesso modo* di ABCDE e per questo viene detto "**omotetico**" (dal greco "stessa posizione")

In Geogebra c'è proprio il comando "**omotetia**": basta selezionare il poligono che vogliamo trasformare, selezionare un punto (centro O dell'omotetia) e il rapporto di similitudine.

**Esercizio**

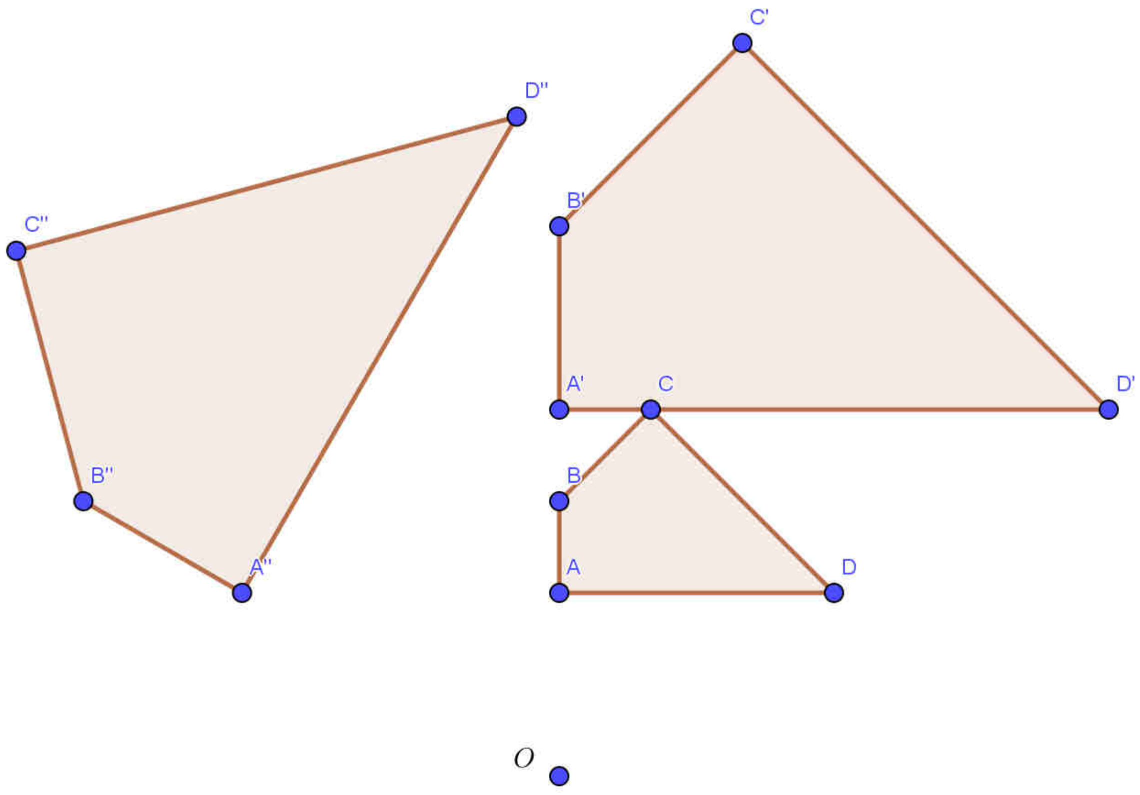
Prova a trasformare un poligono a scelta fissando O ma variando il rapporto k .
Stampa i tuoi esempi.

# SCHEDA 17

## GEOMETRIA EUCLIDEA
*Poligoni simili*

Per disegnare un poligono simile ad un poligono dato puoi utilizzare la composizione di un'omotetia e di un'isometria.

**Esercizio**
Disegna un poligono.
Fissa un punto O come centro dell'omotetia, seleziona "omotetia" e applicala al poligono selezionando centro e rapporto di omotetia.
Scegli un'isometria (traslazione, rotazione, simmetria assiale) ed applicala al poligono "omotetico" che hai ottenuto: stampa qualche esempio tipo quello in figura in cui è stata applicata un'omotetia di centro O e rapporto 2 e poi una rotazione di 60° intorno ad O.



# SCHEDA 18

## GEOMETRIA EUCLIDEA
## *Poligono regolare inscritto in una data circonferenza*

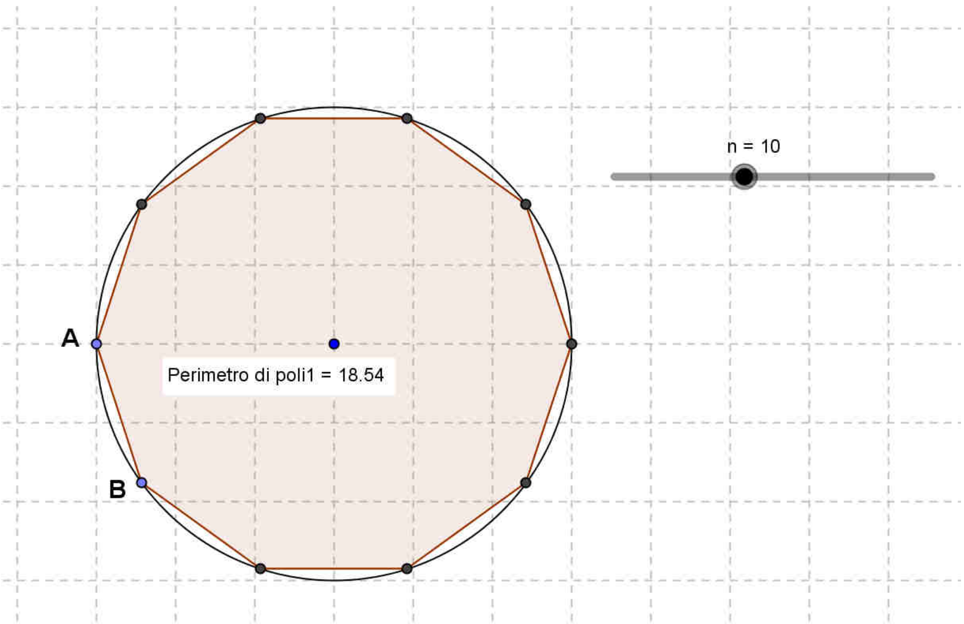
Supponiamo di avere una circonferenza di dato raggio, per esempio $r$ =3 come in figura.

*Come possiamo inscriverci un poligono regolare di n lati?*

Possiamo procedere così:

- prendiamo un punto su di essa (A) con il comando punto su oggetto;
- creiamo uno slider n variabile da 3 a 20 (per esempio) con incremento 1 ;
- selezioniamo il comando Ruota oggetto e ruotiamo il punto A intorno al centro della circonferenza di 360°/n ottenendo il punto B;
- selezioniamo il comando "poligono regolare" e clicchiamo su A e B e poi indichiamo come numero di lati n.

Abbiamo ottenuto il poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza : variando lo slider n varia il poligono.
Se selezioniamo il comando "distanza" e misuriamo il perimetro del poligono inscritto, al crescere dei lati vediamo che il rapporto tra il perimetro del poligono e il diametro (nel nostro caso uguale a 6) della circonferenza si avvicina al valore di $\pi \cong 3{,}14$ (vedi in figura il caso di n = 10).
**Stampa degli esempi.**

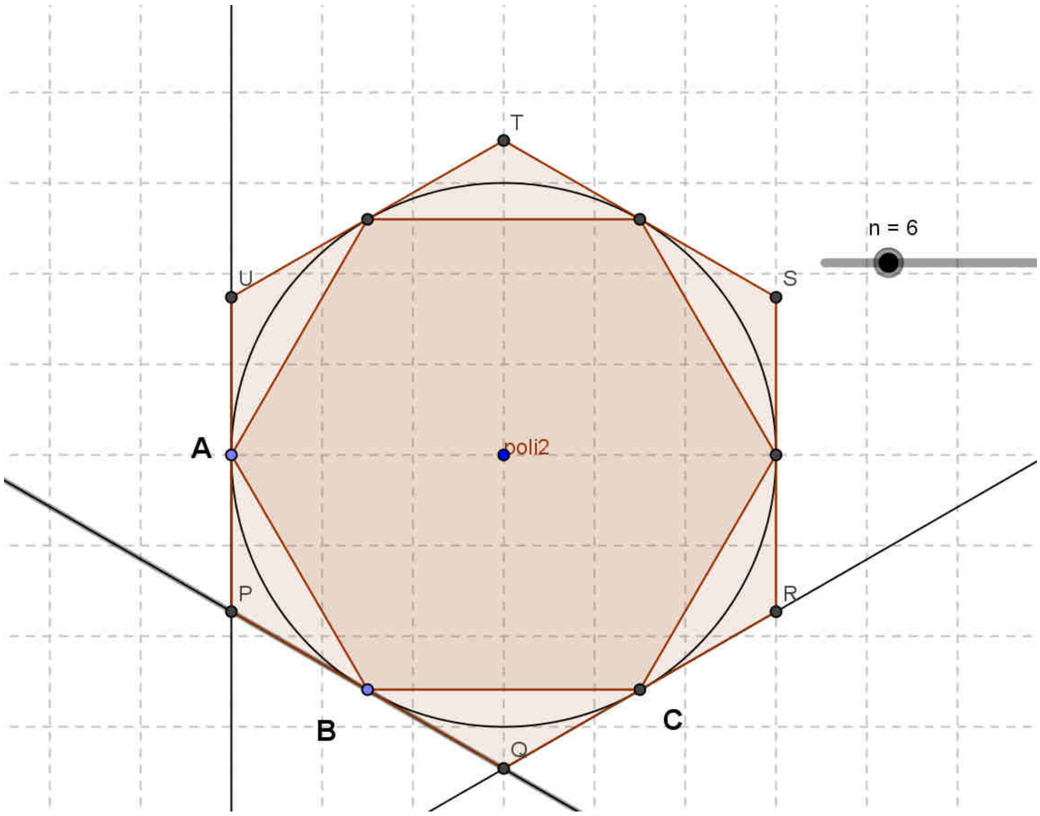


# SCHEDA 19

## GEOMETRIA EUCLIDEA

## *Poligono regolare circoscritto ad una data circonferenza*

Data una circonferenza di raggio dato (per esempio r = 3 ) come possiamo costruire *il poligono regolare circoscritto con n lati?*
Possiamo riprendere la costruzione precedente , tracciare le tangenti in tre punti consecutivi A, B ,C del poligono inscritto, intersecare le tangenti ed ottenere così il lato PQ del poligono regolare circoscritto con lo stesso numero di lati che può essere poi tracciato con il comando poligono regolare (nella figura c'è il caso n = 6).



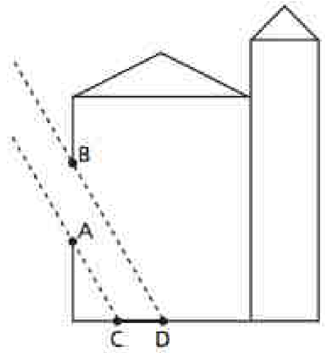

Anche in questo caso con il comando "distanza" possiamo calcolare il perimetro del poligono regolare circoscritto alla circonferenza e controllare che, al crescere del numero dei lati, il rapporto tra perimetro e diametro si avvicina al valore di $\pi \cong 3{,}14$.
Rispetto al rapporto che si otteneva con i perimetri dei poligoni inscritti ( minore di 3,14..) abbiamo in questo caso un rapporto sempre maggiore di 3,14…

**Stampa degli esempi.**

# Prova Invalsi

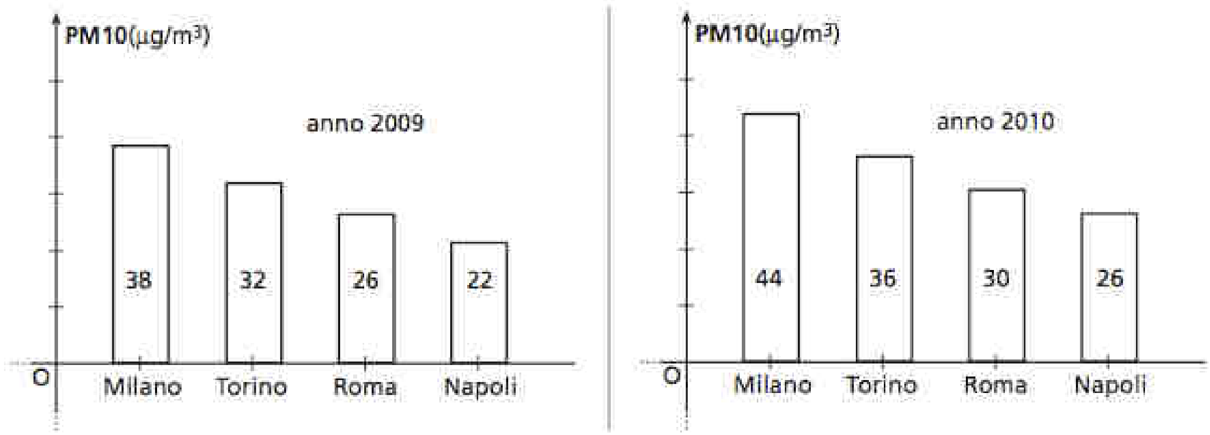
## SIMULAZIONE

**1.** In una bella giornata di primavera, la luce del sole entra in una chiesa attraverso una vetrata, proiettandone l'immagine sul pavimento.
Sapendo che l'altezza *AB* della vetrata misura 4 m, e i raggi del sole sono inclinati di 60° rispetto al suolo, qual è la lunghezza della proiezione *CD* della vetrata sul pavimento?




A. 2 m B. $\sqrt{3}$ m C. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ m D. 3 m

**2.** I due istogrammi in figura rappresentano i valori medi annuali (ipotetici) della concentrazione di polveri sottili (PM10), in microgrammi per $m^3$, nell'aria di quattro città italiane, in due anni successivi. In quale città si è verificato in un anno il maggior aumento percentuale della concentrazione di PM10?




A. Milano B. Roma C. Torino D. Napoli

**3.** Qual è il valore della seguente potenza? $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

A. $\frac{9}{4}$ B. $-\frac{9}{4}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $-\frac{4}{9}$

**4.** Quale tra le seguenti relazioni *non* rappresenta una corrispondenza di inversa proporzionalità tra $x$ e $y$?

A. $x = \frac{3}{y}$ B. $x \cdot y = 3$ C. $y = \frac{3}{x}$ D. $\frac{x}{y} = 3$

**5.** Affinché un quadrilatero sia un parallelogramma è sufficiente che:
A. due lati opposti siano congruenti.
B. due angoli opposti siano congruenti.
C. due lati opposti siano paralleli.
D. le diagonali si dividano reciprocamente a metà.

**6.** Per la tua videocamera digitale hai bisogno di due pile stilo identiche, e ti ricordi di averne messe due coppie, di tipo diverso, dentro un sacchetto. Qual è la probabilità che, estraendone due a caso, esse siano dello stesso tipo?

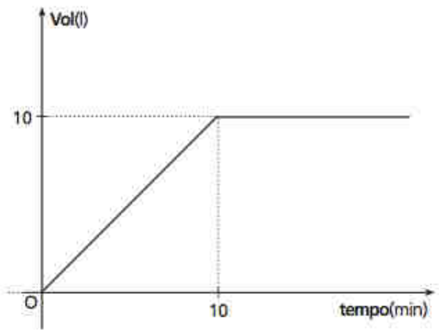
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

**7.** Quale fra le seguenti espressioni è un numero irrazionale?

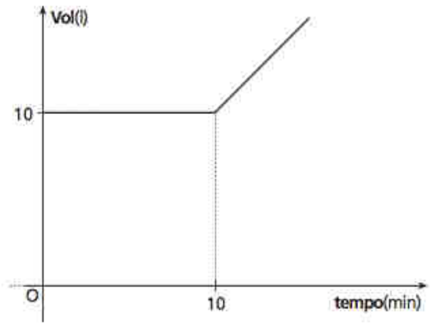
A. $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)$ B. $\frac{3}{5}-1,\overline{6}$ C. $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)^2-\frac{13}{4}$ D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2$

**8.** In un certo istante una vasca contiene 10 litri d'acqua. Dopo 10 minuti, da un rubinetto comincia a scendere altra acqua, in quantità di un litro al minuto. Quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento del volume d'acqua contenuta nella vasca, al passare del tempo?

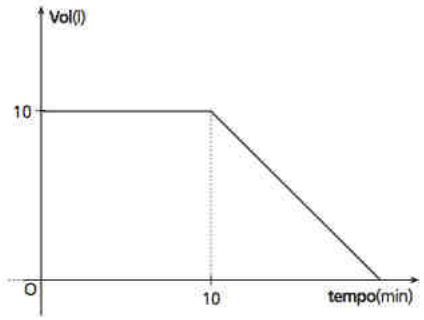
A.



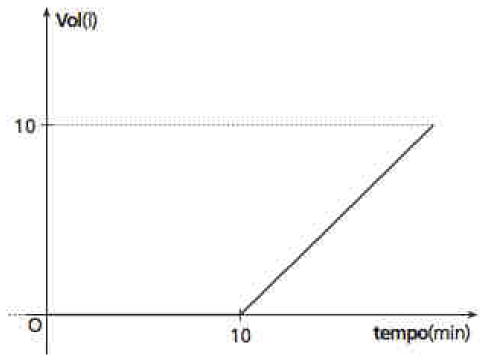

B.




C.




D.




**9.** Aldo, Bruno, Carlo e Dario stanno giocando al parco. In un primo momento, si riuniscono tutti su una piccola pedana. Da lì, Aldo va verso nord per 1 m, Bruno va verso est per 2 m, Carlo va verso sud per 3 m. Di quanti metri deve andare Dario verso ovest, affinché le posizioni *ABCD* dei quattro amici formino un trapezio con base maggiore *CD*?

A.4 m B.5 m C.6 m D.7 m

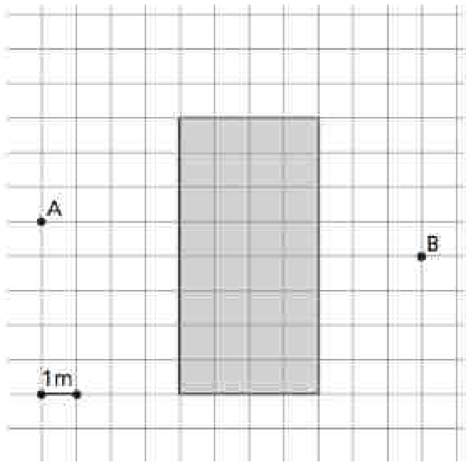
**10.** Da un mazzo di 40 carte (10 carte per ogni seme) qual è la probabilità di pescare una figura di cuori o di quadri?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{1}{10}$

**11.** Dati i polinomi $A(x)=3x^2-7x-1$ $B(x)=2x^3-5x^2-1$,l'espressione $C(x)=2x\cdot A(x)-3\cdot B(x)$:

A. non è un polinomio.
B. è il polinomio $C(x)=x^2-2x+3$.
C. è il polinomio $C(x)=x^3-x^2+2x-3$.
D. è il monomio $C(x)=x^2$.

**12.** Dall'altra parte di una piscina rettangolare Alice (A) riconosce la sua amica Bianca (B). Quanti metri deve percorrere almeno Alice per raggiungere Bianca, senza attraversare l'acqua della piscina?




A.12 m B.14 m C.16 m D.18 m

**13.** Anna e Marco hanno in tasca la stessa somma di denaro. Marco dà 10 euro ad Anna, in restituzione di un prestito, e dice ad Anna: "Se tu mi regalassi 1 euro, ora io avrei esattamente la metà dei tuoi soldi". Qual era la cifra inizialmente posseduta da ciascuno dei due?

A.€ 30 B.€ 27 C.€ 36 D.€ 21

**14.** Una comitiva di 30 donne e 20 uomini si prepara per un viaggio organizzato. Si rileva che il peso medio dei bagagli delle donne è di 20 kg, quello degli uomini invece è di 15 kg. Qual è il peso medio dei bagagli, se non si fanno distinzioni di sesso?

A.16 kg B.17,5 kg C. 18 kg D. 19,5 kg

**15.** Qual è il polinomio risultante dallo sviluppo della seguente espressione?

$$(a+b-c)^2-(a+b)^2-(b-c)^2$$

A. $a^2+b^2-2bc$
B. $-b^2-2ac$
C. $b^2+2ac$
D. $-a^2$

**16.** Il tuo orologio da polso segna le 11:40. Qual è l'angolo tra la lancetta delle ore e quella dei minuti?
A. 90° B. 100° C. 110° D. 120°

**17.** Il prezzo di una confezione di pasta è salito da 80 centesimi a 1 euro. Qual è stato l'aumento percentuale?

A. 20 % B. 25 % C. 0,20 % D. 0,25 %

**18.**
Osserva la seguente tabella.

| x | y |
|---|---|
| -1 | 0 |
| 0 | 3 |
| 2 | 9 |
| 3 | 12 |

Quale tra le seguenti equazioni può esprimere la relazione fra $x$ e $y$?

A. $3y - x + 3 = 0$ C. $3x - y + 3 = 0$
B. $y = x + 1$ D. $y = 2x + 6$

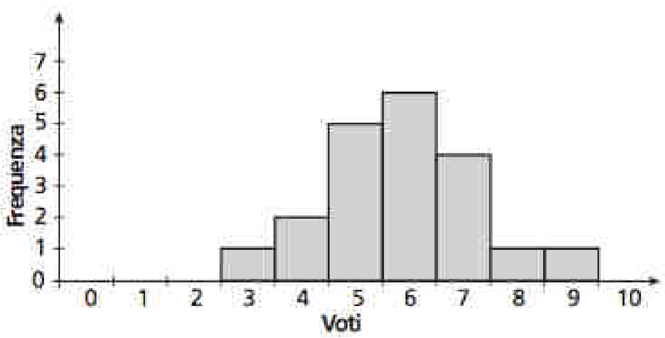
**19.** In un triangolo isoscele $ABC$, la base $AB$ è congruente all'altezza $CH$ relativa alla base. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo e l'area del quadrato costruito sul lato obliquo?

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

**20.** Consideriamo i seguenti numeri reali: $a = \sqrt{15}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{17} - 1$. Quale tra le seguenti proposizioni è *vera*?
A. $a < b < c$
B. $b < a < c$
C. $c < b < a$
D. $b < c < a$

**21.**
Quali valori si possono dare ad $a$ e $b$ perché l'equazione $ax^2 + 3bx = 6$ abbia come soluzione $x = 2$?
A. $a = 1$, $b = 5$ B. $a = 0$, $b = 1$ C. $a = 0$, $b = 2$ D. $a = 1$, $b = 1$

**22.** L'istogramma illustra l'andamento di un compito di matematica:




Qual è la frequenza relativa dei voti 6, sul totale dei voti sufficienti?

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{2}$
C. 6 D. 1

**23.** Si vuole ritagliare via da un foglio rettangolare una parte triangolare, in questo modo: a partire da un punto P che sta a $\frac{1}{3}$ di uno dei lati, si taglia il foglio parallelamente alla diagonale che parte dal vertice del foglio più vicino a P.
Se l'area dell'intero foglio misurava 90 cm$^2$, quanto misura l'area del triangolo?

A. 10 cm$^2$
B. 20 cm$^2$
C. 30 cm$^2$
D. Non si può sapere: mancano le misure dei lati.

**24.** Se la lunghezza del bordo di una pizza normale è 100cm e si prepara una "maxi" stendendo due impasti (mantenendo spessore e forma circolare), qual è la lunghezza del bordo della pizza "maxi"?
A. 140 cm circa B.160 cm circa C.180 cm circa D. 200 cm

**25.** Quale tra le seguenti coppie di funzioni è rappresentata nel piano cartesiano da rette aventi in comune solamente il punto (1; 3)?

A. $y = 4x - 1, \quad y = x + 2$.
B. $y = x + 2, \quad y = x + 3$
C. $y = 4x - 1, \quad y = -x + 5$.
D. $y = 4x - 1, \quad y = -1 + 4x$

**26.** Quale fra le seguenti terne di punti del piano cartesiano non può costituire la terna dei vertici di un triangolo?

A. $(0;0), (0;1), (1;0)$
B. $(0;1), (3;2), (4;4)$
C. $(0;1), (-5;-1), (5;3)$
D. $(-1;0), \left(0; -\frac{1}{4}\right), (1;-1)$

**27.** Dati *a*, *b*, *c* interi positivi non nulli, l'uguaglianza: $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$

A. è sempre verificata.
B. è soddisfatta per infiniti valori di *c*.
C. è soddisfatta per ogni coppia di interi positivi *a* e *b* se e solo se $c = 1$.
D. è soddisfatta solamente dalla terna $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

**28.** Qual è il polinomio quoziente della divisione $\left[(x^3)^2 + (x^2)^3\right] : x^2$?
A. $2x^4$ B. $2x^3$ C. $x^7 + x^6$ D. $x^3 + x^6$

**29.** Si consideri la seguente funzione razionale fratta:

$$\frac{x-3}{2x-1}+\frac{1}{9x^2+1}$$

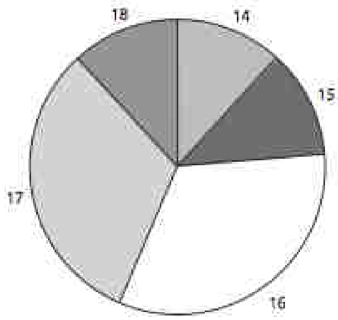
Essa perde di significato per:

A. $x = 3$ B. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = -\frac{1}{3}$ D. $x = 9$

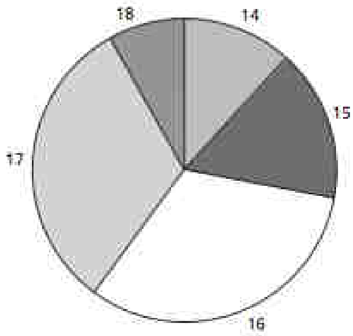
**30.** In un gruppo giovanile di atletica, i 25 ragazzi che ne fanno parte si distribuiscono per età secondo la tabella seguente.

| Età (anni) | frequenza |
|---|---|
| 14 | 3 |
| 15 | 4 |
| 16 | 8 |
| 17 | 8 |
| 18 | 2 |

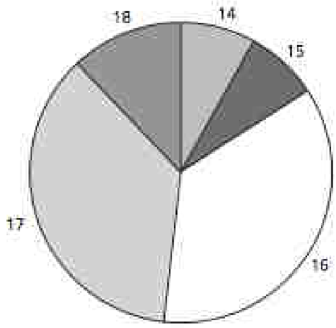
Quale dei seguenti grafici a torta rappresenta correttamente la distribuzione delle età?



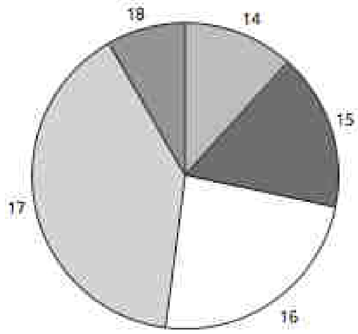
A.



B.



C.



D.

**RISPOSTE**

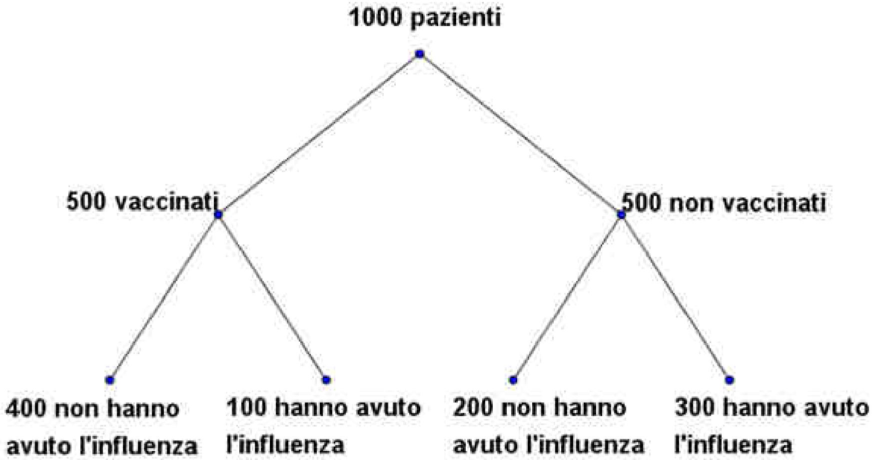
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | D | C | D | D | B | C | B | C | C | B | B | B | C | B |

| **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | B | C | A | D | B | B | B | A | A | C | C | A | B | B |

# INVALSI 2018/19

PROVA DI ESEMPIO

**1.** Osserva il seguente diagramma ad albero. Dei 1000 pazienti di un medico solo 500 sono stati vaccinati contro l'influenza. Dopo alcuni mesi si è riscontrato che l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza mentre il 40% dei non vaccinati non ha avuto l'influenza.




a. Utilizzando i dati del diagramma ad albero completa la seguente tabella.

| | Non hanno avuto l'influenza | Hanno avuto l'influenza | TOTALE |
|---|---|---|---|
| Vaccinati | 400 | | |
| Non vaccinati | | | |
| TOTALE | | 400 | 1000 |

b. Qual è la probabilità che una persona scelta a caso dal campione di pazienti abbia avuto l'influenza?

A) 80%
B) 60%
C) 50%
D) 40%

c. Qual è la probabilità che un paziente, preso a caso tra coloro che sono stati vaccinati, abbia avuto l'influenza?
Risposta: ………………………%

**2.** Una fabbrica utilizza due diverse stampanti, $S_1$ e $S_2$ per produrre biglietti d'auguri. La probabilità che un biglietto stampato da $S_1$ sia difettoso è del 3%, mentre la probabilità che un biglietto stampato da $S_2$ sia difettoso è del 2%.

**a.** La probabilità che un biglietto stampato da $S_2$ sia senza difetti è

A) 0.02
B) 0.03
C) 0.97
D) 0.98

**b.** Per la realizzazione di biglietti d'auguri $S_1$ e $S_2$ lavorano in serie, cioè ogni biglietto viene stampato prima da $S_1$ e poi da $S_2$. Si sa che gli eventi "$S_1$ produce un biglietto **non** difettoso" e "$S_2$ produce un biglietto **non** difettoso" sono fra loro indipendenti. La probabilità che un biglietto **non** sia difettoso dopo essere stato stampato sia da $S_1$ che da $S_2$ è

A) 98%
B) 95.06%
C) 6%
D) 1.95%

**3.** In un'industria una macchina A produce in un minuto il triplo di cialde di caffè rispetto a una macchina B. Quando le macchine A e B lavorano contemporaneamente producono in tutto 40 cialde al minuto. Se la macchina B viene sostituita con una macchina identica ad A, quante cialde potranno essere prodotte complessivamente in un minuto?

A) 40

B) 50

C) 60

D) 80

**4.** Individua, fra i seguenti problemi, quello che può essere risolto dall'equazione $1/2(x-20)=200$.

A) La differenza tra un numero $x$ e 10 è uguale a 200. Calcola $x$.

B) In un negozio ho acquistato un articolo che costava $x$ euro. Calcola $x$ sapendo che nel portafoglio avevo 200 euro e me ne sono rimasti 20.

C) A scuola una mattina sono assenti 20 studenti. Il 50% dei presenti è uguale a 200. Calcola il numero totale $x$ di alunni della scuola.

D) La differenza tra un numero $x$ e 20 è uguale a 100. Calcola $x$.

**5.** Anna ha speso presso un'edicola un quinto del denaro con cui è uscita da casa, in cartoleria la metà del denaro rimanente. Dopo i due acquisti le sono rimasti 20€.

a. Qual è la quantità di denaro con cui Anna è uscita da casa? ………………………. €

b. Quale delle seguenti equazioni consente di determinare la quantità di denaro *x* con cui Anna è uscita da casa?

A ○ $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 20 = x$

B ○ $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}x = x + 20$

C ○ $\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x + 20 = x$

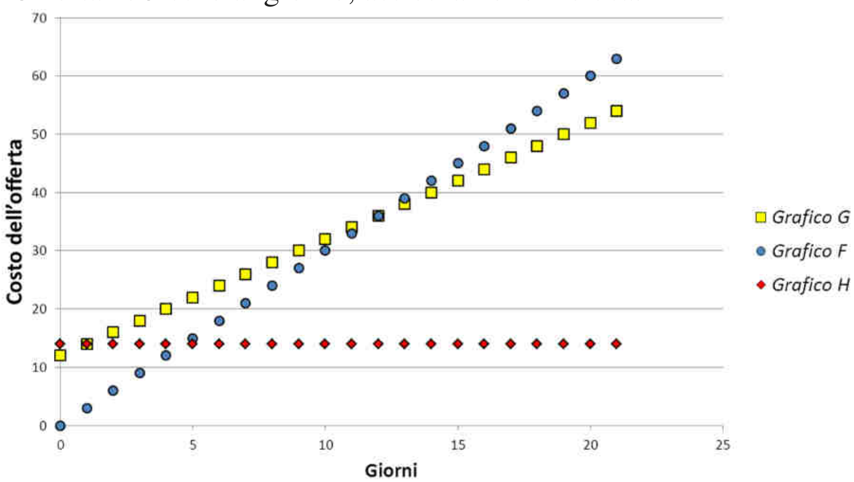
D ○ $\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x + 20 = x$

**6.** Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

| | V | F |
|---|---|---|
| 1. Se $a$ e $b$ sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $ab < a^2$ | ○ | ○ |
| 2. Se $a$ e $b$ sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a^2 < b^2$ | ○ | ○ |
| 3. Se $a$ e $b$ sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a + b < a$ | ○ | ○ |
| 4. Se $a$ e $b$ sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ | ○ | ○ |

**7.** Tre amici si preparano a trascorrere una vacanza di alcune settimane e vogliono noleggiare una tenda. Confrontano le offerte di due negozi:

- Offerta 1: 2 euro al giorno per il noleggio della tenda più un costo fisso di 12 euro per l'assicurazione obbligatoria.
- Offerta 2: 3 euro al giorno, assicurazione inclusa.




In figura sono rappresentati i grafici F, G e H. Solo due di essi rappresentano le offerte 1 e 2:

**a.** Completa la tabella associando a ciascuna offerta il nome del grafico corrispondente.

Offerta 1 --> Grafico ……………..
Offerta 2 --> Grafico ……………..

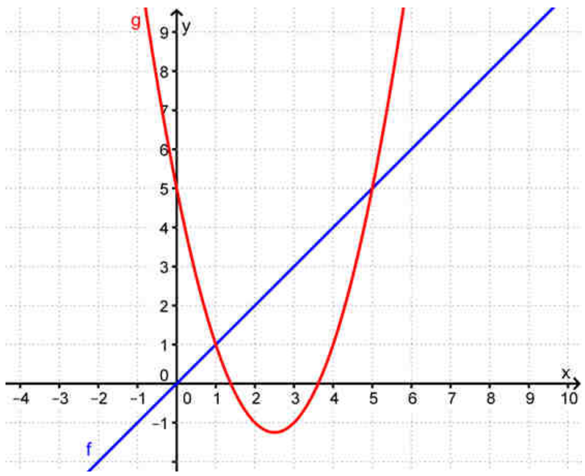
**b.** Quanto pagherebbero i tre amici per una vacanza di 25 giorni se scegliessero l'offerta 1?

Risposta: ……………. Euro

**c.** Completa le due formule che esprimono il costo totale *C* al variare del numero *n* di giorni.

Offerta 1 --> C=……………………………………………
Offerta 2 --> C=……………………………………………

**8.** In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni *f* e *g* definite, nell'insieme dei numeri reali, dalle formule $f(x)=x$ e $g(x)=x^2-5x+5$.




Aiutandoti anche con i grafici di *f* e *g*, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

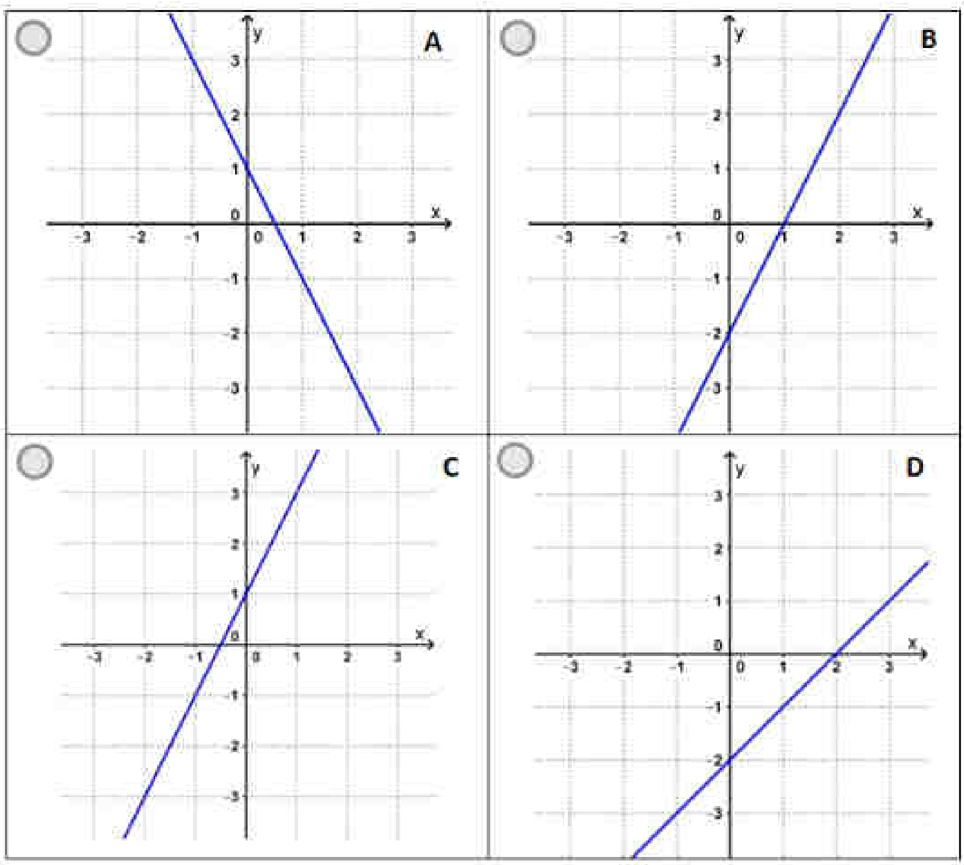
| | V | F |
|---|---|---|
| 1. $f(x)=0$ se e solo se $x=0$ | ○ | ○ |
| 2. $f(x)=g(x)$ se e solo se $x=1$ o $x=5$ | ○ | ○ |
| 3. $g(x)>f(x)$ se e solo se $x<1$ o $x>5$ | ○ | ○ |
| 4. $f(x)>0$ se e solo se $1<x<5$ | ○ | ○ |

**9.** Considera la funzione definita da: $y=-2x+1$

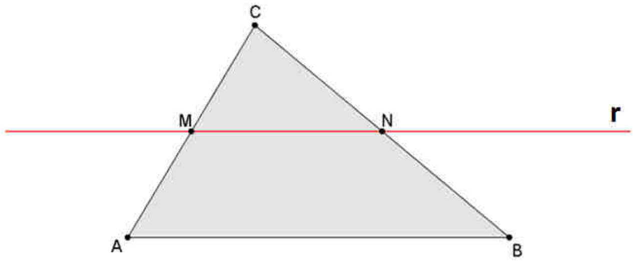
**a.** Quale valore di y si ottiene per *x=0*? ……………………

**b.** Quale valore di x si ottiene per y=0? ……………………

**c.** Quale dei seguenti grafici può rappresentare questa funzione?




**10.** Sia dato un triangolo $ABC$. La retta $r$ passa per il punto medio $M$ del lato $AC$ ed è parallela al lato $AB$.




Si vuole dimostrare che la retta $r$ interseca il lato $CB$ nel suo punto medio $N$.

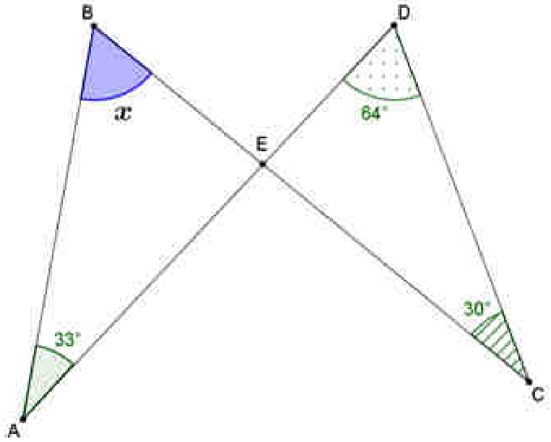
Completa il testo di questa dimostrazione scegliendo tra i seguenti termini e prestando attenzione al fatto che ogni termine può essere utilizzato una sola volta.

Termini fra cui scegliere:

| | | | |
|---|---|---|---|
| congruenti | corrispondenti | parallele | Talete |
| Euclide | AM | perpendicolari | CN |

Considera le rette $AB$ e $MN$ fra loro………………………………………………….. Per il teorema di ……………………….. esse intercettano sulle rette $AC$ e $CB$ segmenti fra loro proporzionali. Poiché per ipotesi ……………………………………………………………………….. è congruente a $MC$ allora $CN$ e $NB$ sono …………………………… il che equivale a dimostrare la tesi.

**11.** Osserva la figura.

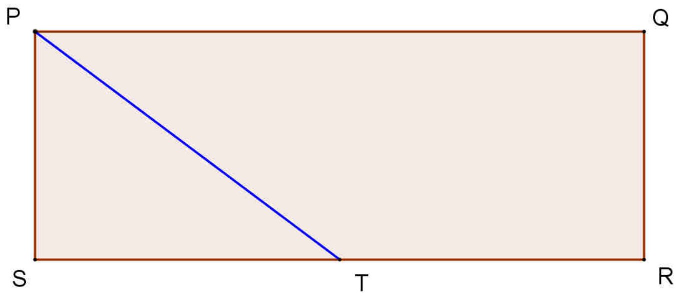



Giulia afferma che l'ampiezza $x$ dell'angolo ABE è 61°.
Giulia ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Giulia ha ragione, perché
..........................................................................................................
..........................................................................................................
..........................................................................................................
..........................................................................................................
...........................................................................................

Giulia non ha ragione, perché
..........................................................................................................
..........................................................................................................
..........................................................................................................
..........................................................................................................
...........................................................................................

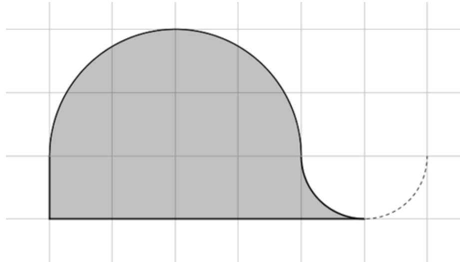
**12.** PQRS è un rettangolo e T è il punto medio di SR.




Qual è il rapporto tra l'area del triangolo PST e l'area del rettangolo PQRS?

Risposta:.....................................

**13.** Nella figura seguente il lato della griglia quadrettata misura 10.



Il perimetro della regione colorata misura:

A) $25\pi + 60$

B) $25\pi + 100$

C) $50\pi + 60$

D) $50\pi + 100$

**14.** Un barattolo di forma cilindrica ha il diametro di base di 6,6 cm e l'altezza di 14 cm . Qual è la capacità del barattolo?

A) Esattamente ½ litro

B) Poco meno di ½ litro

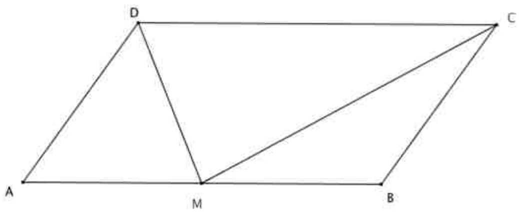
C) Esattamente 1/3 di litro

D) Poco meno di 1/3 di litro

**15.** Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

| | V | F |
|---|---|---|
| 1. Se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, allora gli assi dei suoi lati si intersecano in un unico punto | | |
| 2. Se un quadrilatero è circoscritto a una circonferenza, allora le bisettrici dei suoi angoli interni si intersecano in un unico punto | | |
| 3. Se un quadrilatero ha tre angoli retti, allora è un rettangolo | | |

**16.** *M* è il punto medio del lato *AB* del parallelogramma *ABCD*.




Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

| | V | F |
|---|---|---|
| 1. I triangoli *AMD* e *MBC* hanno la stessa area | | |
| 2. L'area del triangolo *DMC* è il doppio dell'area del triangolo *MBC* | | |
| 3. Le altezze dei triangoli *AMD* e *MBC* relative ai lati *AD* e *BC* sono congruenti | | |
| 4.L'area del triangolo *AMD* è 1/3 dell'area del parallelogramma *ABCD* | | |

**RISPOSTE**

| Domanda | Risposta corretta |
|---|---|
| **1a** | Prima riga: " 100" " 500"; seconda riga: " 200" " 300" " 500"; terza riga: " 600" |
| **1b** | D |
| **1c** | 20 |
| **2a** | D |
| **2b** | B |
| **3** | C |
| **4** | C |
| **5a** | 50 |
| **5b** | C |
| **6** | F – V – F – V |
| **7a** | Offerta 1 : grafico G; offerta 2 : grafico F |
| **7b** | 62 |
| **7c** | Offerta 1: 12+2n; Offerta 2: 3n |
| **8** | V – V – V – F |
| **9a** | 1 |
| **9b** | 1/ 2 |
| **9c** | A |
| **10** | Nell'ordine: " parallele"; " Talete"; " AM"; " congruenti" |
| **11** | Giulia ha ragione perché ….<br>Accettabili tutte le risposte che utilizzino le due seguenti informazioni: Gli angoli DEC e BEA hanno stessa ampiezza perché sono angoli opposti al vertice; La somma degli angoli interni di un triangolo è 180° |
| **12** | 1/ 4 |
| **13** | A |
| **14** | B |
| **15** | V – V – V |
| **16** | V – V – V – F |