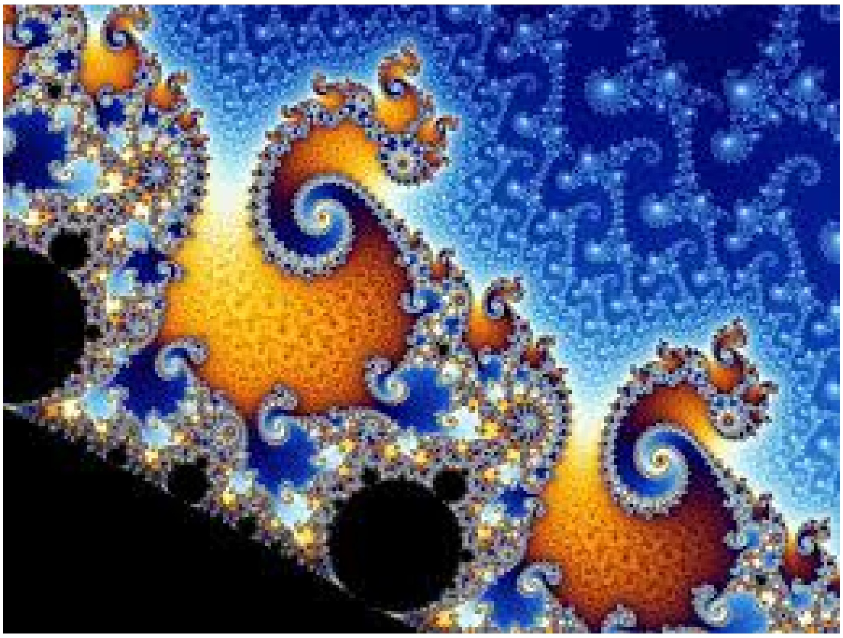
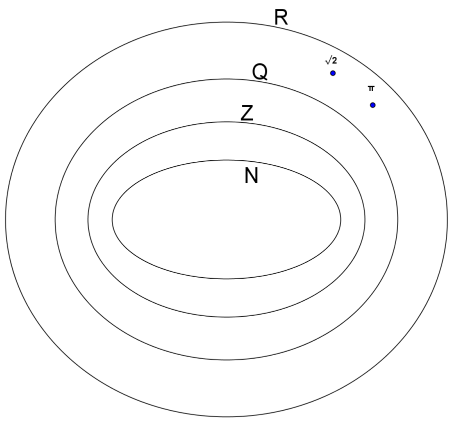
I numeri complessi



Abbiamo visto come dall'insieme **N** dei numeri naturali si passi all'insieme **Z** dei numeri relativi per poter effettuare sempre la sottrazione e poi all'insieme **Q** dei numeri razionali per poter effettuare sempre la divisione (naturalmente con divisore diverso da zero).

Abbiamo infine ampliato il nostro insieme numerico con i numeri "irrazionali" cioè con i numeri decimali illimitati aperiodici ($\sqrt{2}, \pi$ ecc.) ottenendo così l'insieme **R** dei numeri reali.



Ma i matematici non si sono fermati ai numeri reali ed hanno ampliato anche **R** definendo l'insieme **C** dei numeri "complessi".

Nel 1545 il matematico italiano Girolamo Cardano aveva pubblicato nella sua opera *Ars Magna* la formula risolutiva delle equazioni di terzo e quarto grado (gli "scopritori" di tali formule erano stati altri matematici quali Scipione Del Ferro, Tartaglia e Ferrari).
Ma in certi casi la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado sembrava non funzionare…
Per esempio considerando l'equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$, si verifica facilmente che x = 4 è soluzione mentre applicando la formula risolutiva si ottengono radici quadrate di numeri negativi…

Fu il matematico Raffaele Bombelli a proporre di operare sulle radici quadrate di numeri negativi trattandole come "***quantità silvestri***" (letteralmente "selvatiche") svolgendo i calcoli con esse fino ad arrivare al risultato.
Il termine di numeri immaginari fu coniato solo in seguito da Cartesio.
Inizialmente ci fu molta diffidenza verso questi nuovi numeri e lo stesso Bombelli che li aveva introdotti li considerava essenzialmente *artifici* per risolvere alcuni problemi.

Raffaele Bombelli

Solo alla fine del Settecento i numeri complessi , espressi dalla scrittura $a + bi$ con $a, b \in R$ e $i = \sqrt{-1}$ cioè $i^2 = -1$, vennero riconosciuti come vero e proprio insieme numerico (contenente l'insieme dei numeri reali) e fu il matematico Eulero, nel 1777, a indicare $\sqrt{-1}$ con il simbolo i .

Carl Friedrich Gauss

Il matematico Gauss ideò la rappresentazione geometrica dei numeri complessi associando al numero complesso $a + bi$ il punto (a, b) del piano (fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale).

Alla fine dell'Ottocento ci fu la prima applicazione dei numeri complessi alla realtà: i numeri complessi furono utilizzati per sviluppare la teoria delle correnti alternate.

Ma partiamo dalla definizione.

Definizione di numero complesso
Forma algebrica

Chiamiamo numero complesso z , espresso in forma algebrica, l'espressione

$$\boxed{z = a + bi} \text{ con } a, b \in R \text{ e } i^2 = -1$$

a viene detta "parte reale"
bi viene detta "parte immaginaria" (b è chiamato coefficiente della parte immaginaria).

Osservazione
Se $a = 0$ abbiamo quello che viene chiamato "numero immaginario";
se $b = 0$ abbiamo un numero reale.

Quindi i numeri reali sono numeri complessi aventi coefficiente nullo della parte immaginaria e diciamo quindi che l'insieme **C** è un'estensione di **R**.

Definizione: due numeri complessi del tipo $a + bi$ e $a - bi$ aventi cioè la stessa parte reale e parti immaginarie opposte si dicono numeri complessi "**coniugati**".
Se per esempio consideriamo le soluzioni in campo complesso dell'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ abbiamo due soluzioni complesse coniugate:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Operazioni tra numeri complessi

Vediamo come sono definite le operazioni tra numeri complessi:

- addizione: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- sottrazione: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- moltiplicazione: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

  Infatti sviluppando con le usuali regole di calcolo avremmo:
  $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

- divisione:
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Esempi
1) $(2 + i) + (3 - 4i) = 5 - 3i$
2) $(2 + i) - (3 - 4i) = -1 + 5i$
3) $(2 + i) \cdot (3 - 4i) = 6 - 8i + 3i + 4 = 10 - 5i$
4) $\dfrac{2 + i}{3 - 4i} = \dfrac{(2 + i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \dfrac{2 + 11i}{25}$

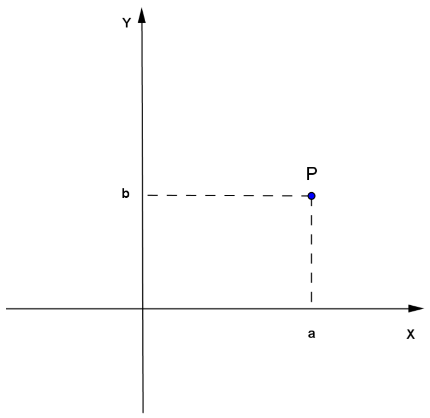
ESERCIZI
OPERAZIONI TRA NUMERI COMPLESSI

Sviluppa:

1. $(2+i)+(3-4i)$ $[5-3i]$
2. $(3-2i)-(1+i)$ $[2-3i]$
3. $(5+2i)\cdot(2-i)$ $[12-i]$
4. $(2-i)\cdot(2+i)$ $[5]$
5. $(4+3i)\cdot i$ $[-3+4i]$
6. $\dfrac{2+i}{4+2i}$ $[\frac{1}{2}]$
7. $\dfrac{5-2i}{5+2i}$ $[\frac{21}{29}-\frac{20}{29}i]$
8. $(1+i)^2$ $[2i]$
9. $(1+i)^3$ $[-2+2i]$
10. $\dfrac{1-i}{4+2i}+\dfrac{1}{i}$ $[\frac{1}{10}-\frac{13}{10}i]$
11. $(3+2i)\cdot(3-2i)+4i$ $[13+4i]$
12. $(2-i)^2-(i-1)\cdot(2+3i)$ $[8-3i]$
13. $\dfrac{2+3i}{1-i}+2i\cdot(4-i)$ $[\frac{3}{2}+\frac{21}{2}i]$
14. $(2-i)^2-(i+4)^3$ $[-49-51i]$
15. $\dfrac{(5-i)\cdot(1+i)}{1-i}$ $[1+5i]$

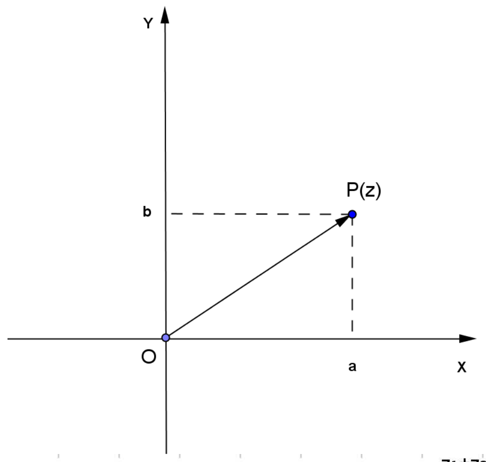
Rappresentazione geometrica di un numero complesso

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (O,x,y) si può associare ad ogni numero complesso $a+bi$ un punto $P(a,b)$ del piano e viceversa.
Il piano in cui si rappresenta l'insieme **C** dei numeri complessi viene chiamato piano complesso (o piano di Gauss).

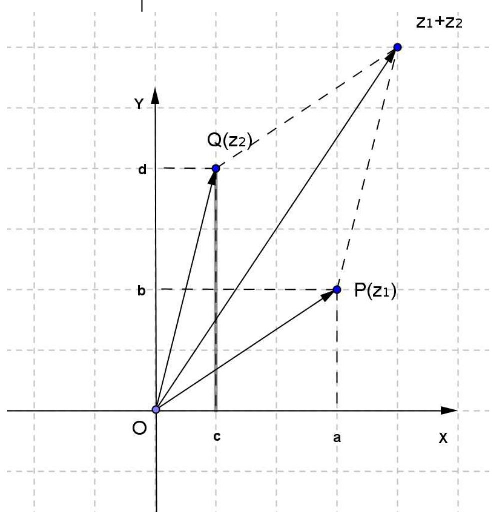


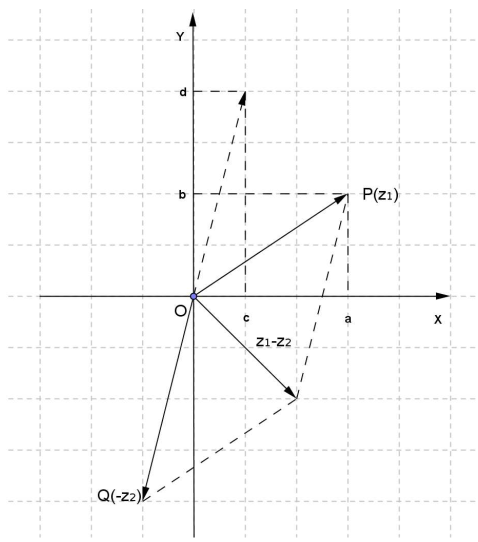
$$a+bi \leftrightarrow P(a,b)$$

Quindi i punti dell'asse x sono associati ai numeri reali (l'asse x è detto asse reale) e i punti dell'asse y sono associati ai numeri immaginari (l'asse y è detto asse immaginario).



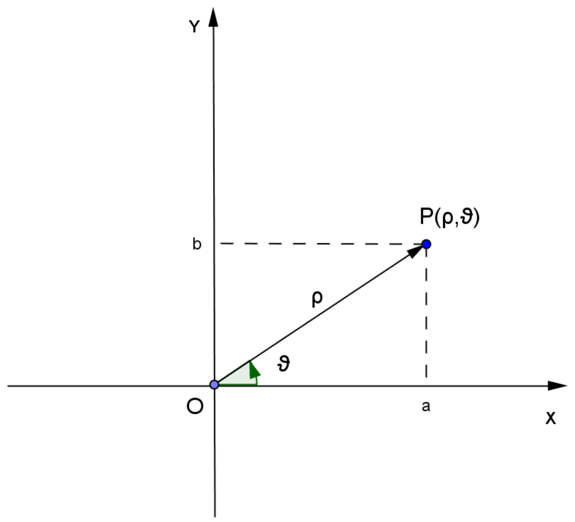
Possiamo anche associare al numero complesso $z=a+bi$ **il vettore** $\vec{OP}$ con $P(a,b)$: ci accorgiamo che la somma tra numeri complessi z_1 e z_2 corrisponde alla somma tra i vettori corrispondenti con la regola del parallelogramma e la differenza alla differenza tra vettori.





Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato il numero complesso $z = a + bi$ se esprimiamo il suo punto associato nel piano complesso $P(a,b)$ in coordinate polari abbiamo:



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\,\theta = \frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} a = \rho \cdot \cos\vartheta \\ b = \rho \cdot sen\,\vartheta \end{cases}$$

Il numero complesso può quindi anche essere scritto nella forma (detta trigonometrica):

$$\boxed{z = \rho \cdot (\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta)}$$

Nota: ρ viene detto **modulo** di z e ϑ viene detto **argomento** di z ($0 \le \theta < 2\pi$).

Esempio

Consideriamo il numero complesso (espresso in forma algebrica) $z = \sqrt{3} + i$.

Come possiamo esprimerlo in forma trigonometrica?
Considerando il punto associato nel piano complesso $P(\sqrt{3},1)$ in questo caso abbiamo:

$$\rho = 2 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\,\vartheta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{6} \quad \text{e quindi} \qquad z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,sen\frac{\pi}{6}\right)$$

ESERCIZI
RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO COMPLESSO

Passa dalla forma algebrica alla forma trigonometrica rappresentando il numero complesso nel piano di Gauss:

1. $z = 2 + 2i$ [$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4} \right)$]

2. $z = 1 - i$ [$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7}{4}\pi + isen\frac{7}{4}\pi \right)$]

3. $z = -2i$ [$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{3}{2}\pi + isen\frac{3}{2}\pi \right)$]

4. $z = -\frac{1}{4}$ [$z = \frac{1}{4} \cdot (\cos\pi + isen\pi)$]

5. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ [$z = \cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}$]

6. $z = -\sqrt{3} - i$ [$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{7}{6}\pi + isen\frac{7}{6}\pi \right)$]

7. $z = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$ [$z = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{11}{6}\pi + isen\frac{11}{6}\pi \right)$]

8. $z = 1 + i$ [$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4} \right)$]

9. $z = \sqrt{3} + i$ [$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6} \right)$]

10. $z = i$ [$z = \cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}$]

Prodotto e quoziente tra numeri complessi espressi in forma trigonometrica

Utilizzando la forma trigonometrica le operazioni di moltiplicazione e divisione tra numeri complessi risultano immediate.

Prodotto di numeri complessi

$$
\begin{aligned}
& z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot (\cos\alpha + isen\alpha) * \rho_2 \cdot (\cos\beta + isen\beta) = \\
& = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta + i(\cos\alpha \cdot sen\beta + sen\alpha \cos\beta)] = \\
& = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta)]
\end{aligned}
$$

In conclusione il prodotto di due numeri complessi risulti un numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei due numeri cioè:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta)]}$$

Quoziente di numeri complessi

$$
\begin{aligned}
& \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (\cos\alpha + isen\alpha)}{\rho_2 \cdot (\cos\beta + isen\beta)} = \frac{\rho_1 \cdot (\cos\alpha + isen\alpha) \cdot (\cos\beta - isen\beta)}{\rho_2 \cdot (\cos\beta + isen\beta) \cdot (\cos\beta - isen\beta)} = \\
& = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left[\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + sen\alpha \cdot sen\beta + i(sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha sen\beta)}{\cos^2\beta + sen^2\beta} \right] = \\
& = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\alpha-\beta) + isen(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

In conclusione il quoziente di due numeri complessi risulta un numero complesso avente per modulo il rapporto tra i moduli e per argomento la differenza degli argomenti dei due numeri cioè:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\alpha-\beta) + isen(\alpha-\beta)]}$$

Nota

Da un punto di vista "geometrico" le operazioni di prodotto e quoziente tra numeri complessi possono quindi essere viste come l'applicazione di una rotazione composta con un'omotetia: infatti se il numero z_2 ha modulo ρ_2 e angolo associato β, il prodotto $z_1 \cdot z_2$ si trova ruotando z_1 dell'angolo β e poi applicando l'omotetia $\omega(O;\rho_2)$ mentre il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$ si trova ruotando z_1 dell'angolo $-\beta$ e poi applicando l'omotetia $\omega\left(O;\frac{1}{\rho_2}\right)$ .In particolare moltiplicare un numero complesso $\vec{z}$ per un numero complesso di modulo 1 e argomento β equivale a ruotare $\vec{z}$ di β, mentre dividerlo per un numero complesso di modulo 1 e argomento β equivale a ruotare $\vec{z}$ di $-\beta$. *In particolare moltiplicare un numero complesso $\vec{z}$ per i equivale a ruotarlo di 90°.*

ESERCIZI

PRODOTTO E QUOZIENTE TRA NUMERI COMPLESSI

1) Calcola il prodotto dei seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica:

1. $z_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{2}{3}\pi + isen\frac{2}{3}\pi \right)$ $\quad z_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi \right)$ $\quad [\, z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{3}i \,]$
2. $z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6} \right)$ $\quad z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3} \right)$ $\quad [\, z_1 \cdot z_2 = i \,]$
3. $z_1 = \frac{4}{3} \cdot \left(\cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi \right)$ $\quad z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3} \right)$ $\quad [\, z_1 \cdot z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i \,]$
4. $z_1 = \left(\cos\frac{3}{4}\pi + isen\frac{3}{4}\pi \right)$ $\quad z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{11}{4}\pi + isen\frac{11}{4}\pi \right)$ $\quad [\, z_1 \cdot z_2 = -2i \,]$
5. $z_1 = \left(\cos\frac{3}{4}\pi + isen\frac{3}{4}\pi \right)$ $\quad z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4} \right)$ $\quad [\, z_1 \cdot z_2 = -1 \,]$

2) Calcola il quoziente tra i seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica:

1. $z_1 = 6 \cdot \left(\cos\frac{7}{4}\pi + isen\frac{7}{4}\pi \right)$ $\quad z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} \right)$ $\quad [\, \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \,]$
2. $z_1 = \left(\cos\frac{7}{4}\pi + isen\frac{7}{4}\pi \right)$ $\quad z_2 = \left(\cos\frac{3}{4}\pi + isen\frac{3}{4}\pi \right)$ $\quad [\, \frac{z_1}{z_2} = -1 \,]$
3. $z_1 = \left(\cos\frac{7}{6}\pi + isen\frac{7}{6}\pi \right)$ $\quad z_2 = \left(\cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi \right)$ $\quad [\, \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \,]$
4. $z_1 = \cos 0 + isen0$ $\quad z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6} \right)$ $\quad [\, \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{3} - i \,]$
5. $z_1 = \cos 0 + isen0$ $\quad z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}$ $\quad [\, \frac{z_1}{z_2} = -i \,]$

Potenza di un numero complesso

Utilizzando la forma trigonometrica $z = \rho(\cos\vartheta + isen\vartheta)$ si ottiene subito che

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos(n\cdot\vartheta) + isen(n\cdot\vartheta))}$$

Risoluzioni di equazioni in campo complesso

Si può dimostrare il seguente teorema (chiamato teorema fondamentale dell'algebra):

Un'equazione di grado n con coefficienti complessi ha n soluzioni complesse.

NOTA
Quindi anche se l'equazione ha coefficienti reali questo teorema ci assicura che ci saranno n soluzioni complesse: in particolare quindi un'equazione di secondo grado con coefficienti reali ha sempre due soluzioni complesse.

Esempi

1) Risolviamo per esempio l'equazione $z^2 + z + 1 = 0$

Applicando la formula risolutiva abbiamo: $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

2) Risolviamo l'equazione $z^3 = 1$

Se dovessimo risolvere l'equazione in campo reale ,cioè considerando l'insieme dei numeri reali, avremo solo $x = 1$come soluzione, ma in campo complesso?
Scriviamo z in forma trigonometrica e calcoliamo il cubo:

$$z = \rho(\cos\theta + isen\theta) \rightarrow z^3 = \rho^3 \cdot (\cos(3\theta) + isen(3\theta))$$

Scriviamo il numero 1 in forma trigonometrica $\quad 1 = \cos 0 + isen0$

Dovrà essere $\quad \rho^3 \cdot (\cos(3\theta) + isen(3\theta)) = \cos 0 + isen0$

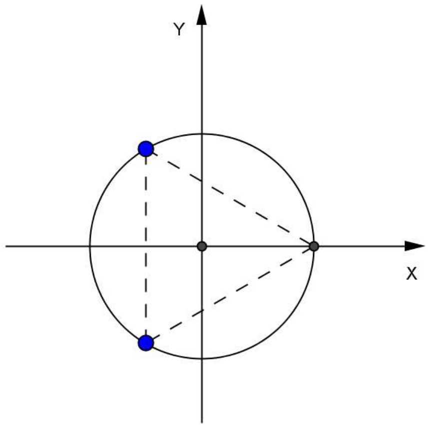
e quindi
$$\rho^3 = 1 \rightarrow \rho = 1$$
$$3\theta = 0 + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}$$

Avrò quindi tre soluzioni :

per $k = 0 \rightarrow \theta = 0;\quad k = 1 \rightarrow \theta = \dfrac{2}{3}\pi;\quad k = 2 \rightarrow \vartheta = \dfrac{4}{3}\pi$

$$z_1 = 1,\quad z_2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right),\quad z_3 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right)$$

Possiamo rappresentare le tre soluzioni nel piano complesso ed osservare che risultano i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1.



3) Risolviamo in campo complesso l'equazione $z^4 = 1$

In campo reale $x^4 = 1 \rightarrow x = \pm 1$ cioè abbiamo due soluzioni, ma in campo complesso?

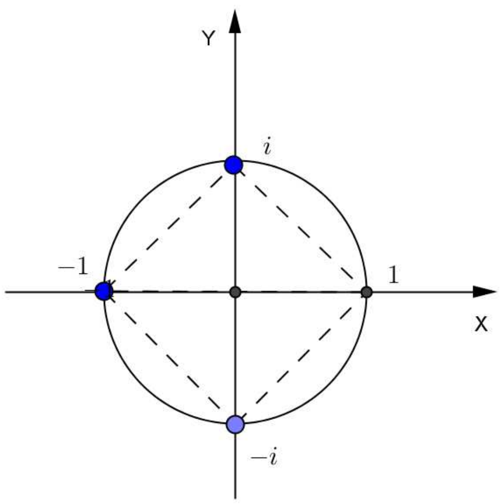
Dal momento che in questo caso abbiamo

$$\rho^4 \cdot \left(\cos(4\theta) + isen(4\theta) \right) = \cos 0 + isen 0$$

avremo $\rho = 1$, $\theta = \dfrac{2k\pi}{4} \rightarrow \theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta_3 = \pi$, $\theta_4 = \dfrac{3}{2}\pi$

cioè in conclusione le soluzioni sono:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = -i$$



In generale le soluzioni dell'equazione $\boxed{z^n = 1}$, dal momento che dovrà essere

$$\boxed{\rho^n \cdot (\cos(n\theta) + isen(n\theta)) = \cos 0 + isen 0}$$

$\rho^n = 1 \rightarrow \rho = 1$ e

$$n\theta = 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0 \\ k = 1 \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{2\pi}{n} \\ .... \\ k = n-1 \Rightarrow \theta_n = \dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

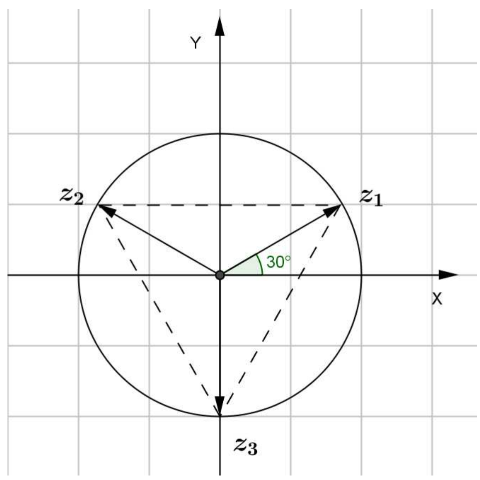
saranno **n soluzioni distinte** (associate ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza goniometrica partendo da (1;0))**.**

4) Consideriamo l'equazione $z^3 = 8i$. In questo caso abbiamo

$$\rho^3 \cdot (\cos(3\theta) + isen(3\theta)) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi $\rho = 2, \quad \theta = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad con \quad k = 0, \ 1, \ 2$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi\right), \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + isen\frac{3}{2}\pi\right)$$

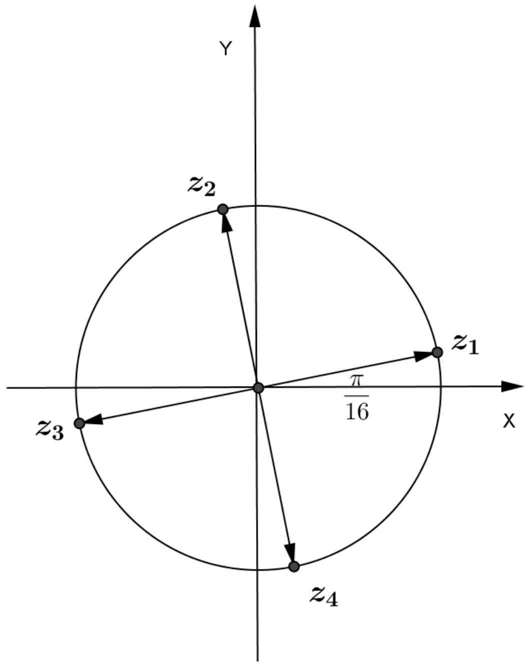


5) Risolviamo $z^4 = 1 + i$

In questo caso $\rho^4 \cdot (\cos(4\theta) + isen(4\theta)) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$

e quindi

$$\rho = \sqrt[8]{2}, \quad \theta = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, \quad con \quad k = 0,1,2,3$$



In generale per risolvere l'equazione $\boxed{z^n = z_0}$ dove z_0 è un generico numero complesso $z_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + isen\theta_0)$avremo

$$\boxed{\rho^n \cdot (\cos(n\theta) + isen(n\theta)) = \rho_o(\cos\theta_o + isen\theta_o)}$$

e quindi

$$\rho^n = \rho_0 \rightarrow \rho = \sqrt[n]{\rho_0}$$

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \quad con \quad k = 0, \; 1, \; .....n-1$$

e quindi avremo **n soluzioni** associate ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$ partendo da $\theta = \frac{\theta_0}{n}$ **.**

ESERCIZI
POTENZA DI UN NUMERO COMPLESSO

1) Calcola le potenze dei seguenti numeri complessi dopo averli trasformati in forma trigonometrica e rappresentale nel piano di Gauss:

a) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\qquad z^2 = ...,\ z^3 = ...,.....z^6 = ..$

[$z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $z^3 = -1$; $z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $z^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $z^6 = 1$]

b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$ $\qquad z^2 = ...,\ z^3 = ...,.....z^8 = ..$

[$z^2 = 4i$; $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} i$; $z^4 = -16$; $z^5 = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2} i$; $z^6 = -64i$;
$z^7 = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2} i$ $z^8 = 2^8$]

2) Risolvi in campo complesso le seguenti equazioni e rappresenta le soluzioni nel piano complesso:

a) $z^2 = i$ $\qquad$ [$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i, \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$]

b) $z^2 = -4i$ $\qquad$ [$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i, \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2} i$]

c) $z^3 = 8i$ $\qquad$ [$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = -2i$]

d) $z^4 = \sqrt{2}$ $\qquad$ [$z_1 = \sqrt[8]{2}, \quad z_2 = \sqrt[8]{2} i, \quad z_3 = -\sqrt[8]{2}, \quad z_4 = -\sqrt[8]{2} i$]

e) $z^5 = 1$ $\qquad$ [$z = \left(\cos\frac{2k\pi}{5} + isen\frac{2k\pi}{5} \right), \quad k = 0,1,2,3,4$]

f) $z^5 = i$ $\qquad$ [$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi\right) \right), \quad k = 0,1,2,3,4$]

SCHEDA DI VERIFICA

I)

Risolvi in campo complesso le seguenti equazioni di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$ scrivendo le soluzioni sia in forma algebrica che in forma trigonometrica e rappresentandole sul piano; verifica infine che la somma delle soluzioni corrisponde a $-\frac{b}{a}$ e che il prodotto corrisponde a $\frac{c}{a}$.

1. $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

[$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $z_1 = \cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi$; $z_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + isen\frac{7}{6}\pi$]

2. $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

[$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$; $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + isen\frac{7}{4}\pi\right)$]

3. $z^2 - 2z + 4 = 0$

[$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + isen\frac{5}{3}\pi\right)$]

II)

Risolvi in campo complesso la seguente equazione di quarto grado: $z^4 = 1$ e rappresenta le soluzione nel piano complesso.

[$z_{1,2} = \pm 1$; $z_{3,4} = \pm i$]