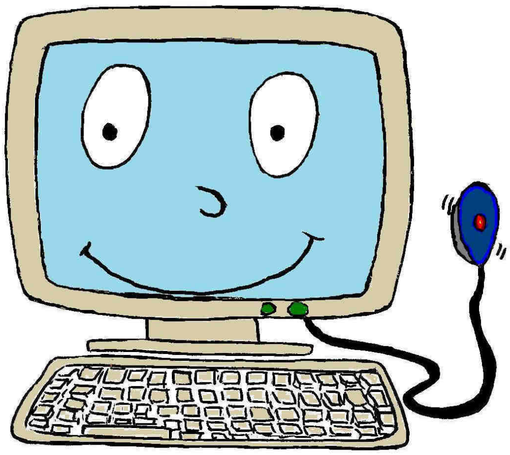
Laboratorio di informatica

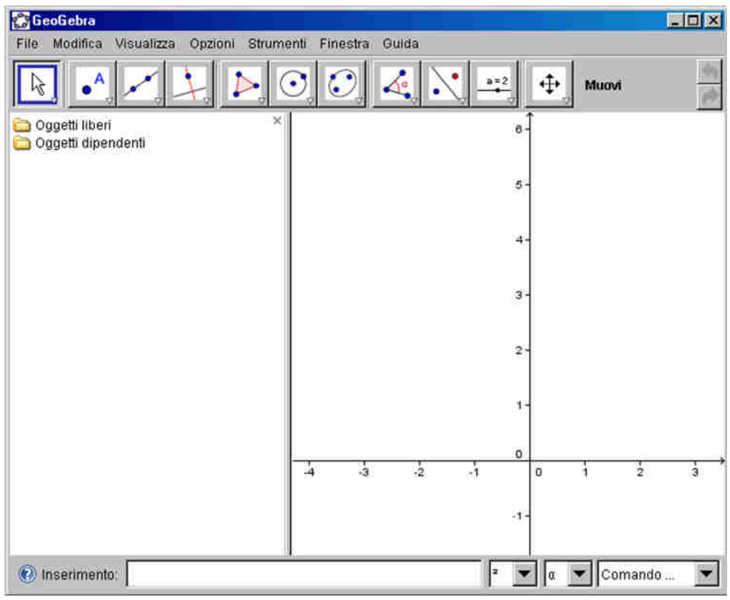


Geometria analitica con Geogebra

Oltre che per lo studio della geometria euclidea, come abbiamo fatto lo scorso anno, il software Geogebra (geometria + algebra) **può essere utilizzato per lo studio della geometria analitica**.
Apriamo il programma:comparirà un piano cartesiano con dei pulsanti in alto che hanno funzioni simili a quelle di Cabri (disegnare punti, rette, circonferenze ecc.) e in basso una riga dove è possibile **inserire coordinate di punti o equazioni**.

Se per esempio digito (1,1) nella finestra grafica compare il punto corrispondente : posso anche assegnare un nome al punto, per es. B=(1,1) , altrimenti viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (A, B, C …).

Se digito $y = x$ compare nella finestra grafica la retta corrispondente: per darle un nome basta digitare, per esempio, r : $y = x$ altrimenti il nome viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (a,b,c…).



Esercizio: prova a digitare coordinate di punti e equazioni di rette.

SCHEDA 1

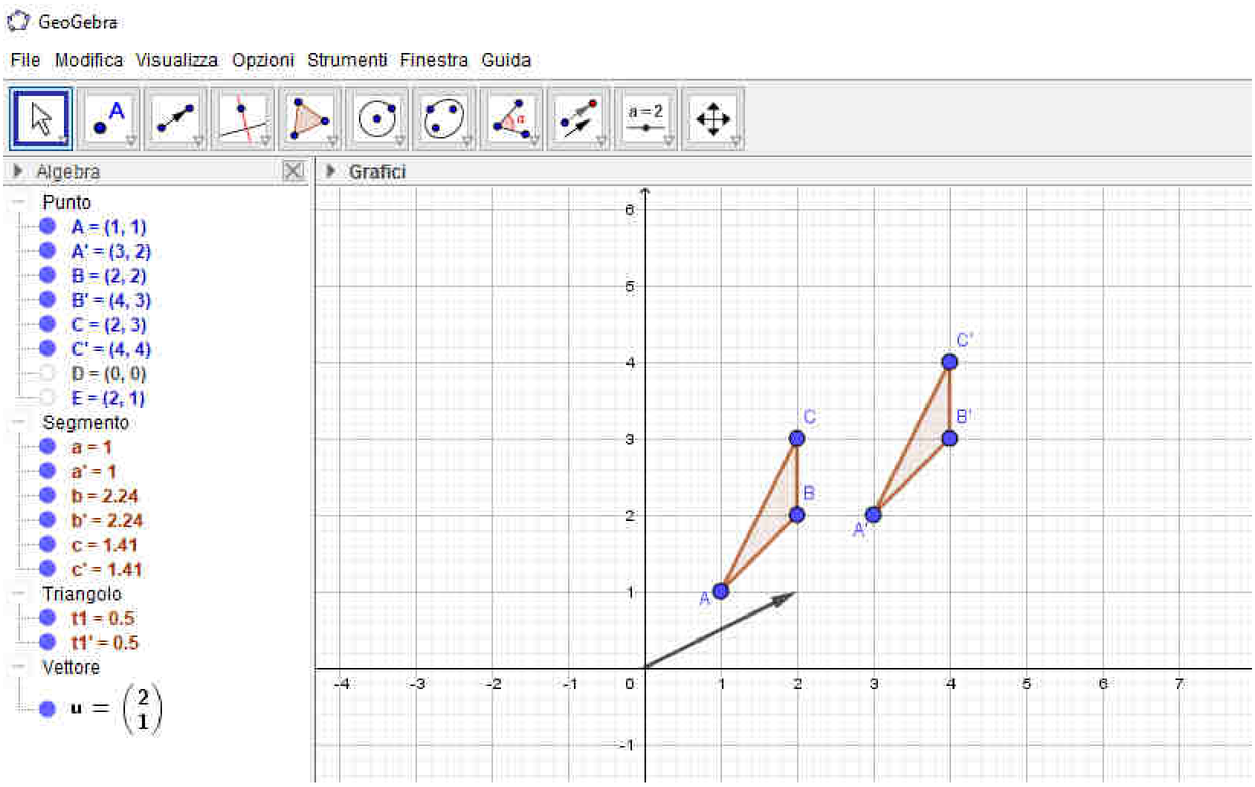
GEOMETRIA ANALITICA
Isometrie

Proviamo ad applicare ad una figura, per esempio un poligono, delle **isometrie** cioè traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali.

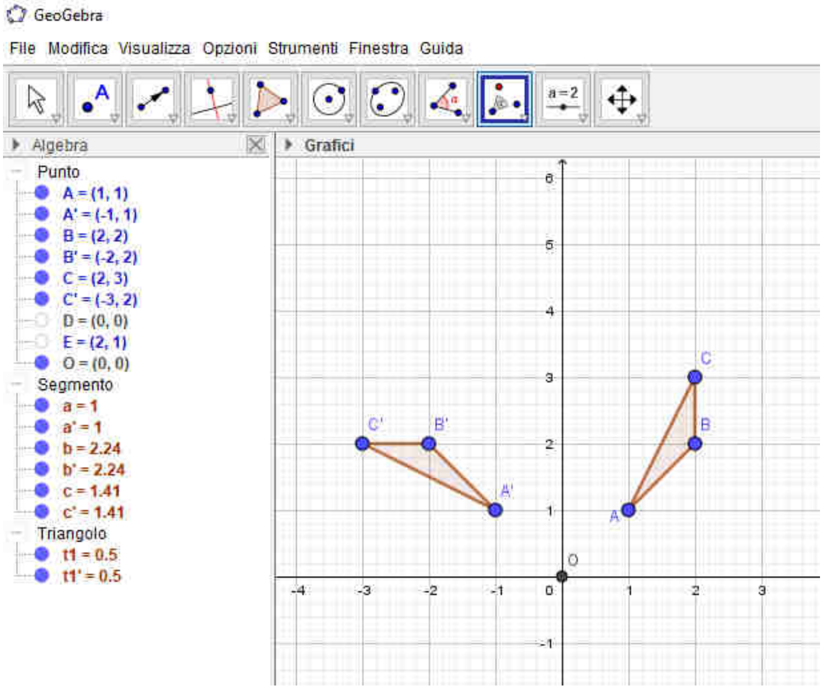
Disegna per esempio nel piano cartesiano quadrettato di Geogebra un triangolo come in figura con il comando poligono (puoi evitare che vengano scritte le "etichette" sui lati digitando Opzioni - etichettatura -solo i nuovi punti) e **applica al triangolo**:

a) **una traslazione di vettore** $(2;1)$**:** crea il vettore facendolo partire dall'origine, scegli dalla barra degli strumenti il comando "traslazione", fai clic con il mouse sul triangolo (zona interna) e poi sul vettore.

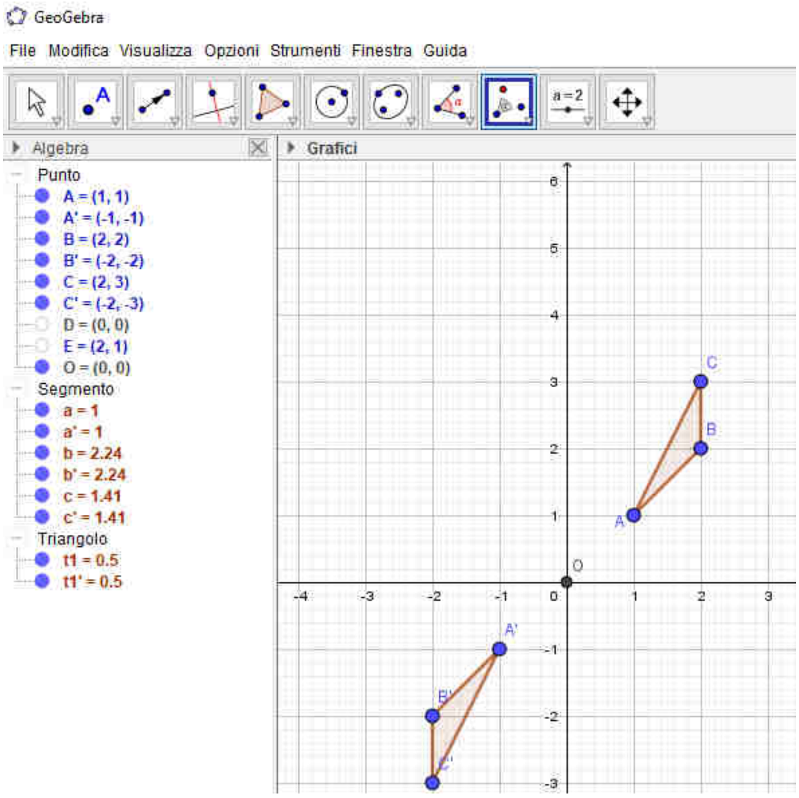
Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo traslato (controlla la zona a sinistra dello schermo, la vista "algebra" dove compaiono le coordinate dei vertici del poligono).



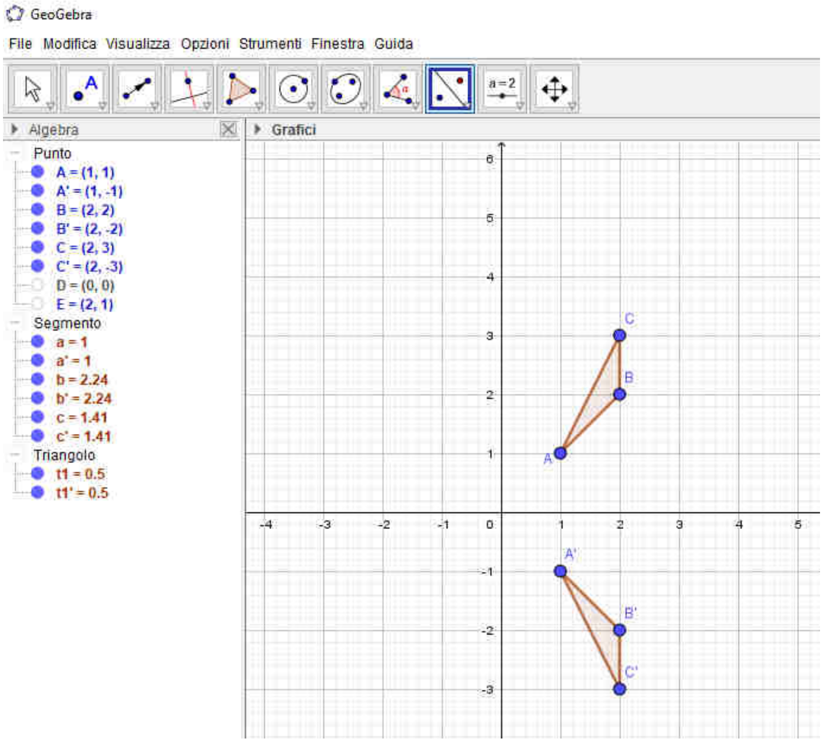
b) **una rotazione di 90° intorno all'origine**: crea il punto O(0;0) con il comando "punto", scegli dalla barra degli strumenti il comando "rotazione", fai clic sul triangolo, poi sul punto O (centro della rotazione) e poi inserisci l'angolo della rotazione (90°).
Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo ruotato di 90° intorno all'origine.



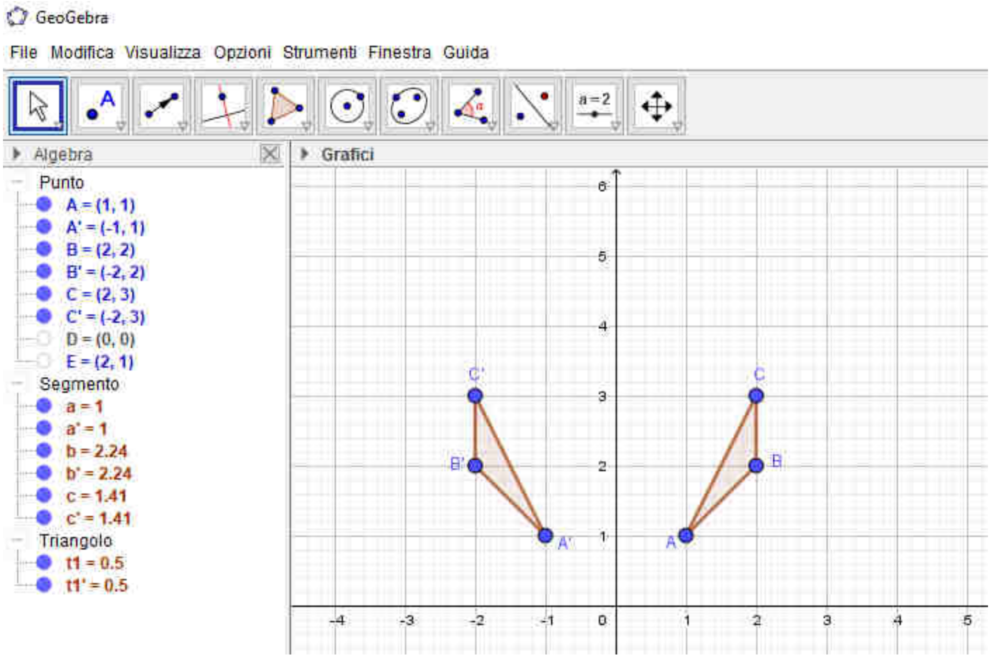
c) **rotazione di 180° intorno all'origine**: scegli il comando "rotazione", clic sul triangolo, sul punto O e questa volta inserisci 180°. Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo ruotato di 180° intorno all'origine.



d) una simmetria rispetto all'asse x: scegli "simmetria assiale", clic sul triangolo poi sull'asse x : osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico rispetto all'asse x.



e) una simmetria rispetto all'asse y: scegli "simmetria assiale", clic sul triangolo poi sull'asse y : osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico rispetto all'asse y.



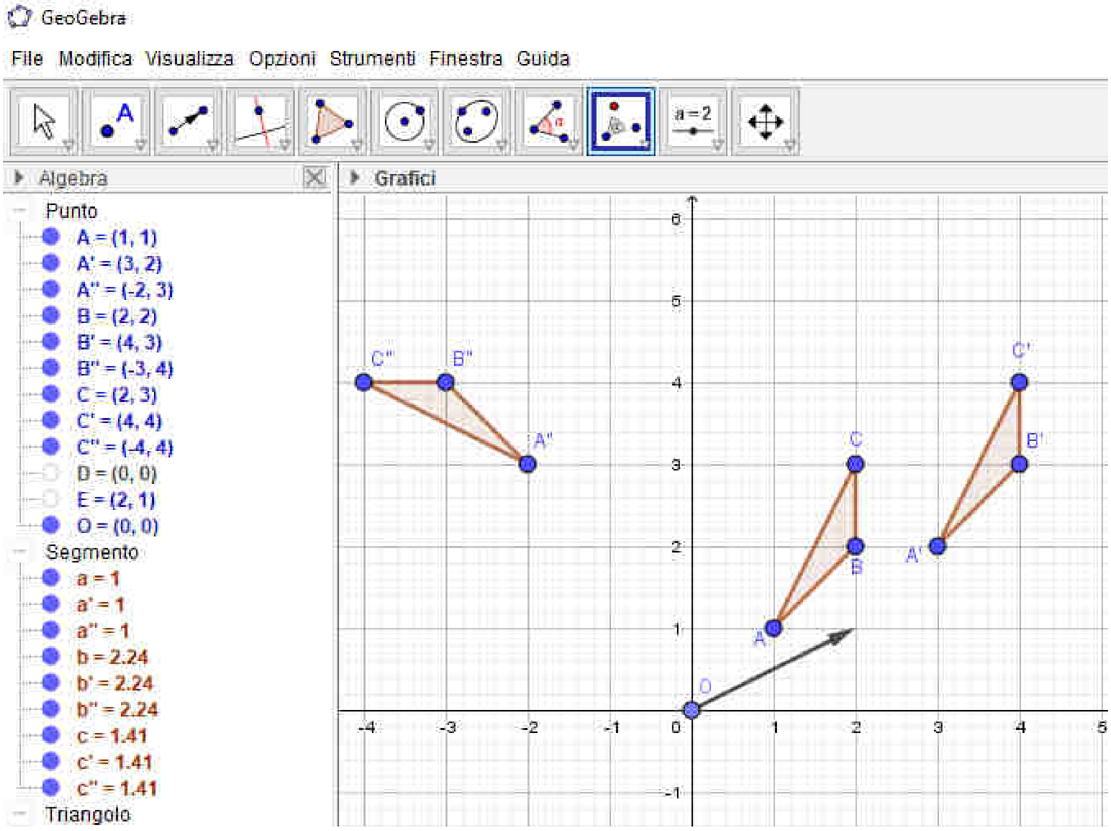
Esercizio: prova ad applicare al triangolo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo/terzo quadrante (prima costruisci la retta bisettrice…). Come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico?

SCHEDA 2

GEOMETRIA ANALITICA
Composizione di isometrie

Cosa significa "**comporre**" più isometrie?

Considera per esempio il triangolo della scheda 1: applichiamo al triangolo la traslazione di vettore $(2;1)$ e *al triangolo traslato applichiamo la rotazione di 90°* intorno all'origine (si parla di "composizione" di trasformazioni).



Osservazione

Osserviamo che *l'ordine in cui vengono eseguite le isometrie è importante*: prova ad applicare al triangolo ABC prima la rotazione di 90° intorno all'origine e poi, al triangolo ruotato, applica la traslazione di vettore $(2;1)$.
Ottieni lo stesso triangolo finale?

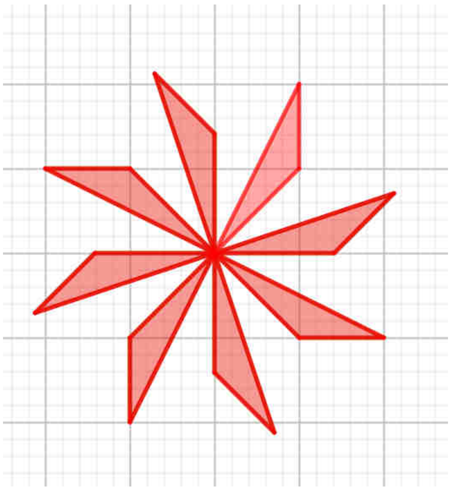
Stampa la figura che ottieni in questo caso.

SCHEDA 3

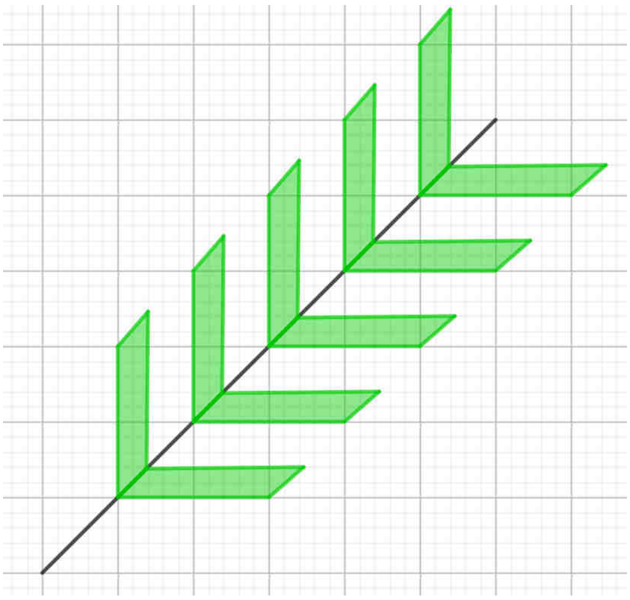
GEOMETRIA ANALITICA
Composizione di isometrie

Utilizzando la composizione di isometrie puoi realizzare anche disegni “gradevoli” a vedersi.

Esercizio 1
Prova a disegnare il fiore in figura con successive rotazioni di …….. intorno all’origine di un triangolo.



Esercizio 2
Prova a disegnare la “felce” in figura: devi utilizzare sia traslazioni che la simmetria rispetto alla retta del “gambo”.

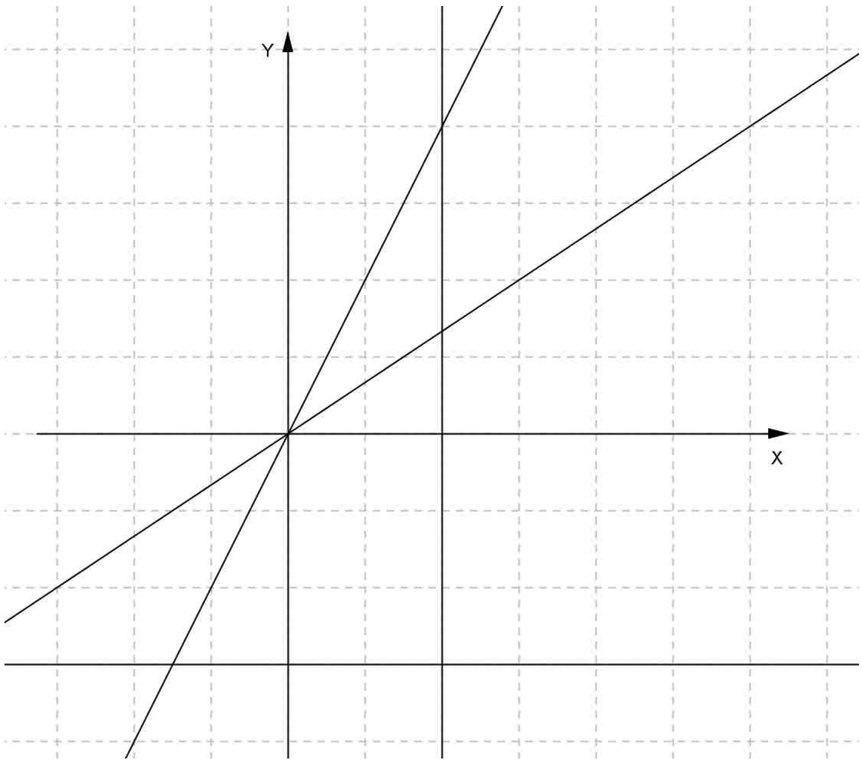


Esercizio 3
Realizza un tuo disegno utilizzando una figura geometrica e la composizione di isometrie.

SCHEDA 4

GEOMETRIA ANALITICA
La retta

Nel piano quadrettato di Geogebra disegna alcune rette con il comando retta per due punti , quali per esempio x=2 , y=-3 , y=2x , $y = \frac{2}{3}x$ aiutandoti con la quadrettatura e controlla che nella “vista algebra” l’equazione visualizzata sia quella che volevi.



Inserisci puoi nella barra di inserimento direttamente l’equazione di alcune rette quali per esempio $y = -2x$, $y = \frac{1}{3}x + 4$, $y = -\frac{5}{4}x - 2$ e controlla, nel piano quadrettato, la loro inclinazione ed eventualmente l’ordinata all’origine.

Stampa le rette.

SCHEDA 5

GEOMETRIA ANALITICA
Equazione esplicita di una retta

Per capire il significato del coefficiente angolare m e dell'ordinata all'origine q ,quando la retta è scritta nella forma $y = mx + q$, possiamo usare lo strumento di Geogebra chiamato " slider ".

Creazione dello "slider"

Prima di tutto dobbiamo "creare" lo slider.
Attiviamo il pulsante in alto in cui compare la scritta "slider", mettiamo il cursore in un punto qualsiasi del piano cartesiano e facciamo clic con il mouse: comparirà un trattino e ci verrà chiesto di inserire il nome, il campo di variazione dello slider (per esempio nel nostro caso possiamo chiamarlo m e scegliamo di farlo variare, per esempio, tra -10 e 10) e il suo incremento (possiamo per esempio scegliere 1: variando il valore dello slider si passerà per esempio da 3 a 4 e così via).

Inserimento dell'equazione contenente lo slider creato

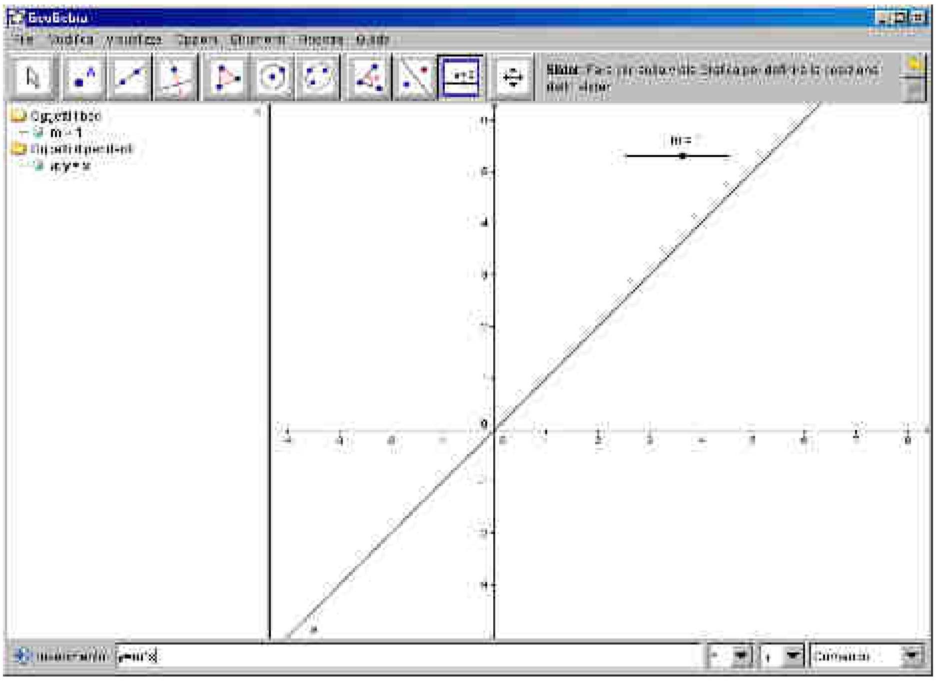
Inseriamo nella barra di inserimento l'equazione $y = mx$ (in alcune versioni di Geogebra occorre mettere * per indicare la moltiplicazione) e osserviamo che compare subito la rappresentazione della retta per l'origine corrispondente al valore che viene sempre dato inizialmente allo slider (uguale a 1).

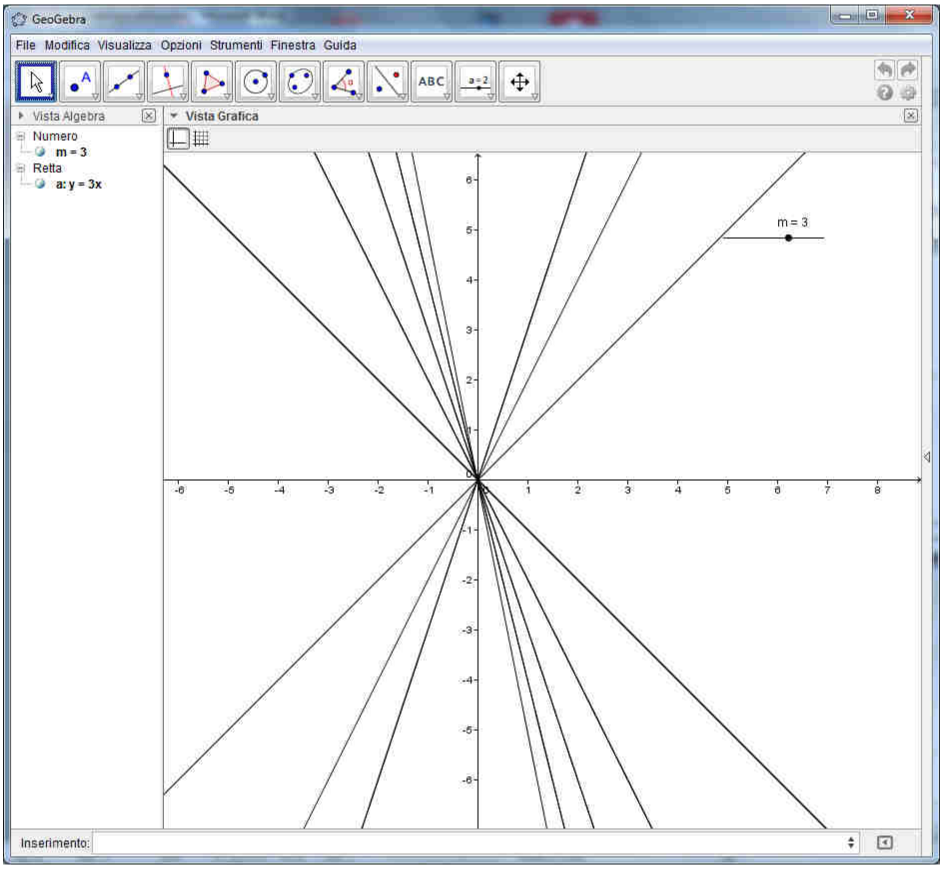
Per visualizzare come cambia la retta al variare di m attiviamo nel primo pulsante in alto a sinistra il comando **"muovi**".
Posizioniamoci sullo slider (comparirà una manina) e trasciniamo lo slider (cambia il suo valore): la retta per l'origine cambia e quindi ci rendiamo conto che variando m varia l'inclinazione della retta.

Possiamo anche visualizzare insieme tutte le rette corrispondenti ai vari valori dello slider scegliendo, dopo essersi posizionati sulla retta e premuto il tasto destro del mouse, la funzione "traccia attiva" (in alcune versioni si trova "traccia on") : a questo punto muovendo m compariranno tutte le rette corrispondenti.

Posso anche inserire un valore dello slider digitandolo nella riga di inserimento in basso.

Possiamo anche vedere automaticamente la variazione dello slider con : Modifica - proprietà fondamentale - animazione attiva.





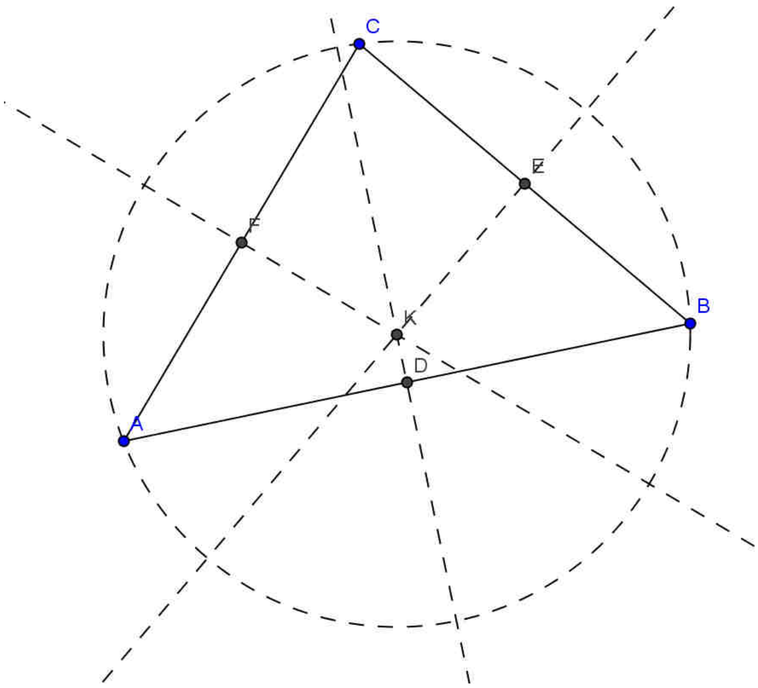
Ora prova a creare un altro slider (chiamalo q) e ad inserire $y = mx + q$.
Fai variare q e stampa qualche esempio.

SCHEDA 6

GEOMETRIA EUCLIDEA
Circocentro di un triangolo

Per costruire il circocentro di un triangolo possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono)
- Con il comando punto medio costruiamo i punti medi dei tre lati
- Disegniamo gli assi dei lati utilizzando il comando "retta perpendicolare" facendo clic sul punto medio e poi clic sul lato
- Intersechiamo due assi e verifichiamo che anche il terzo passa per quel punto che è appunto il circocentro (indicato con K).



Nota: possiamo anche usare il comando "asse" per tracciare l'asse di un lato…

Osservazione: attivando il comando "Muovi" e spostando un vertice del triangolo (quindi modificando il triangolo) osserviamo che il circocentro può cadere anche esternamente al triangolo e che è sempre alla stessa distanza dai vertici del triangolo: infatti se tracciamo una circonferenza di centro il circocentro e passante per un vertice , passa anche per gli altri due vertici.

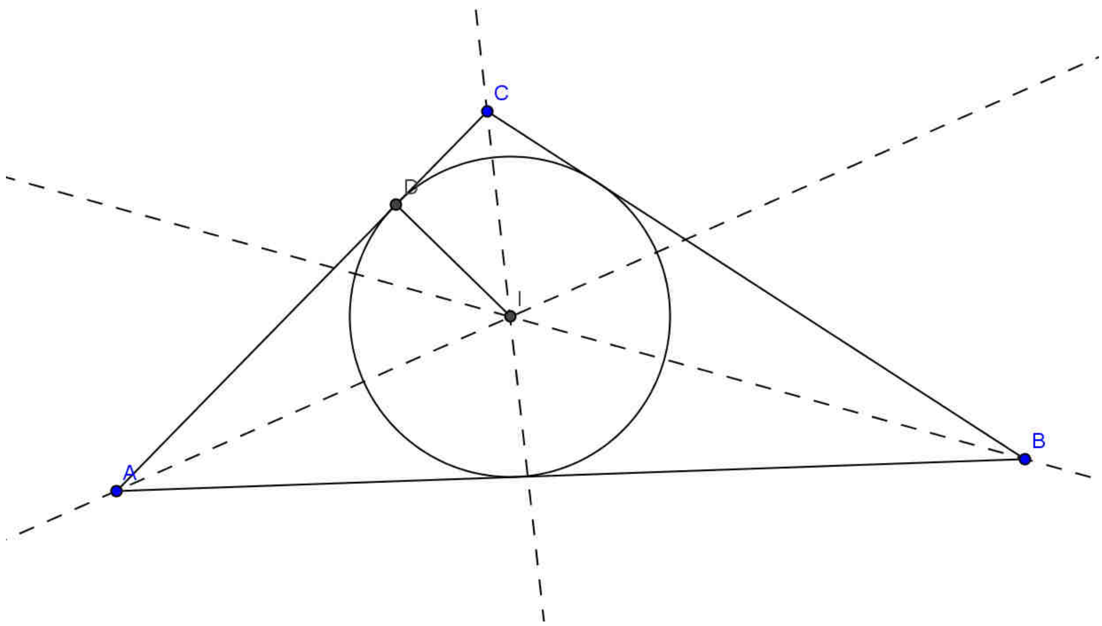
Il nome "circocentro" deriva proprio dal fatto che è **centro** della circonferenza **circo**scritta al triangolo.
In quale caso il circocentro cade su un lato?

SCHEDA 7

GEOMETRIA EUCLIDEA
Incentro di un triangolo

Per costruire l'incentro di un triangolo (intersezione delle bisettrici) possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono)
- Con il comando "bisettrice" costruiamo le bisettrici degli angoli (nascondiamo le bisettrici degli angoli esterni del triangolo)
- Intersechiamo due bisettrici e verifichiamo che anche la terza passa per quel punto che è appunto l'incentro (indicato con I).



Osservazione: attivando il comando "Muovi" e spostando un vertice del triangolo (quindi modificando il triangolo) osserviamo che l'incentro cade sempre internamente al triangolo e che è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo cioè è alla stessa distanza dai lati del triangolo: per tracciare la circonferenza inscritta possiamo usare il comando retta perpendicolare (dall'incentro ad un lato) per trovare il punto di tangenza (nella figura D) e poi tracciare la circonferenza di centro I e passante per D.

Il nome "incentro" deriva proprio dal fatto che è **centro** della circonferenza **in**scritta al triangolo.

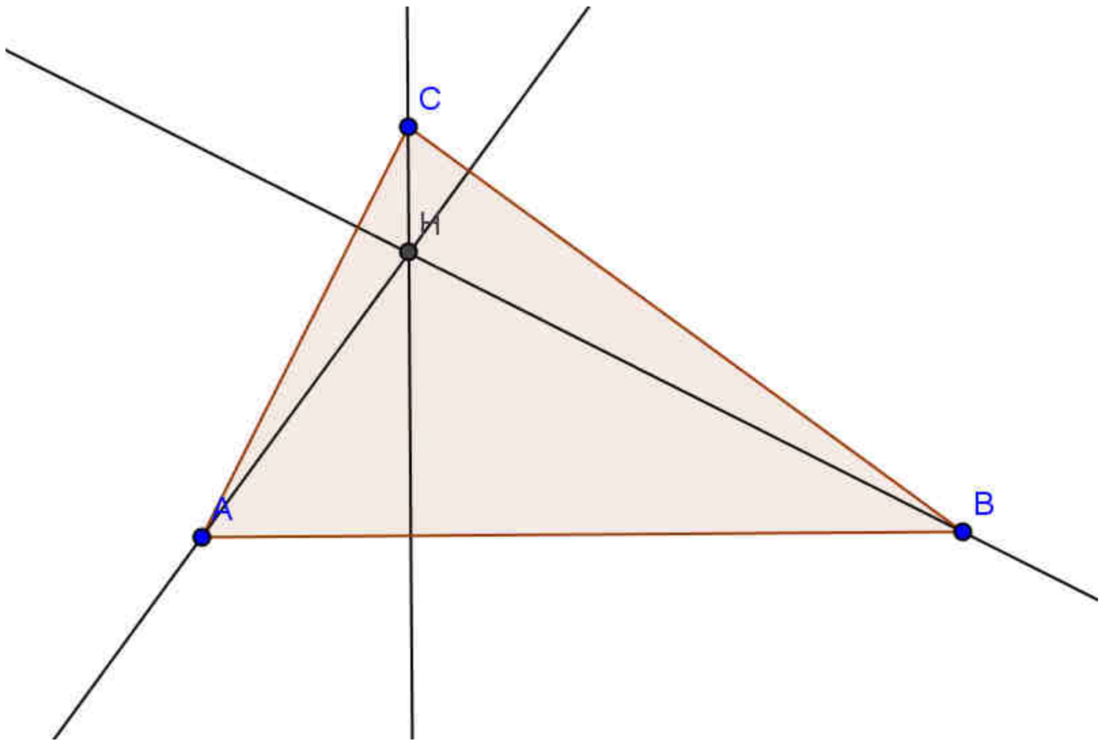
SCHEDA 8

GEOMETRIA EUCLIDEA
Ortocentro di un triangolo

Per costruire l'ortocentro di un triangolo (intersezione delle altezze) possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono);
- con il comando "retta perpendicolare" costruiamo le altezze relative ai vari lati del triangolo;
- intersechiamo due altezze e verifichiamo che anche la terza passa per quel punto che è appunto l'ortocentro (indicato in genere con H: puoi modificare il nome del punto facendo clic con il destro e utilizzando il comando "rinomina").

Se modifichi il triangolo con il comando "muovi" in quale caso H coincide con un vertice? Stampa questo caso.
L'ortocentro può cadere esternamente al triangolo? Stampa un caso in cui cade esternamente.



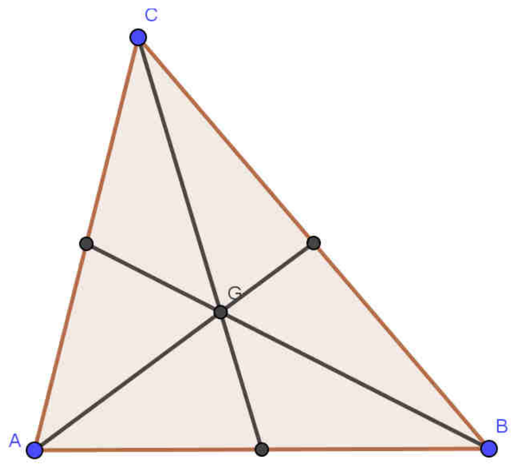
SCHEDA 9

GEOMETRIA EUCLIDEA
Baricentro di un triangolo

Disegna un triangolo ABC utilizzando il comando poligono.

Per tracciare le mediane devi costruire il punto medio di ogni lato (c'è il comando "punto medio) e poi congiungere, con il comando "segmento" ogni vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

Infine utilizzando il comando "intersezione" interseca due mediane: vedrai che le tre mediane si intersecano nello stesso punto (che in genere viene indicato con la lettera G perché g è l'iniziale della parola "gravità" e la forza di gravità di un corpo è applicata proprio nel suo baricentro).



Metti alla prova la tua costruzione!

Per verificare che le tre mediane passano sempre per uno stesso punto prova a "trascinare" uno dei vertici modificando il triangolo.

Il baricentro può cadere fuori del triangolo?

Osservi qualche proprietà particolare?

Stampa qualche esempio.

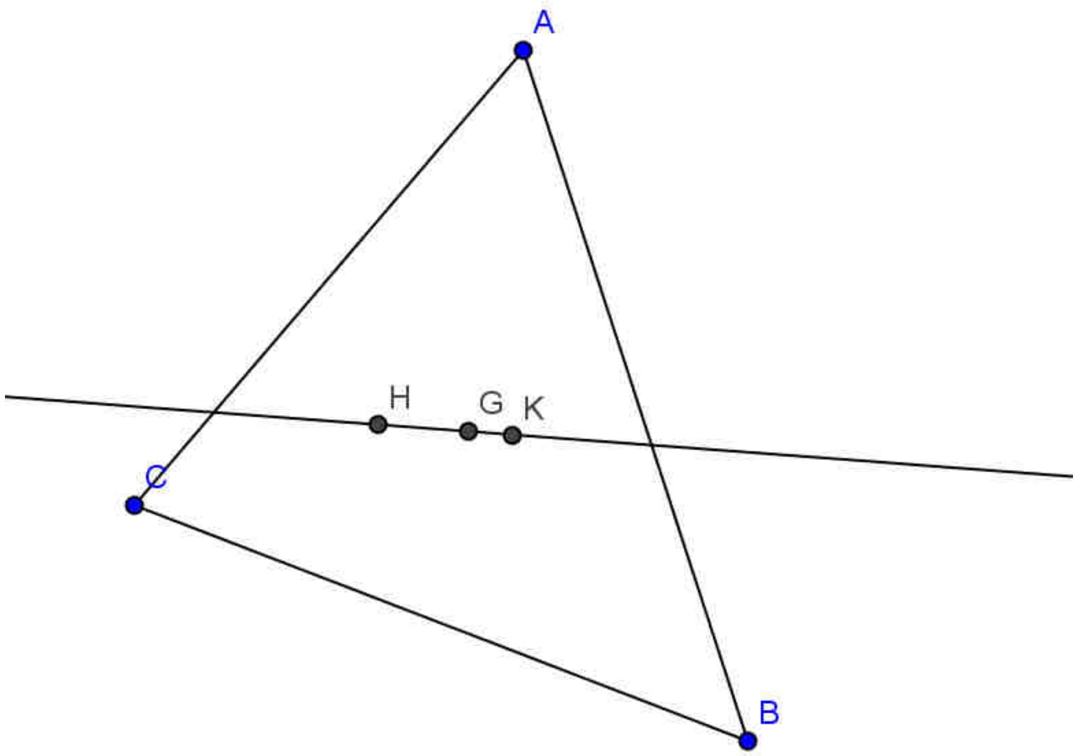
SCHEDA 10

GEOMETRIA EUCLIDEA
Baricentro, ortocentro e circocentro di un triangolo

Disegniamo un triangolo ABC e poi, con le costruzioni che abbiamo visto nelle schede precedenti, costruiamo il baricentro G, l'ortocentro H e il circocentro K (possiamo rinominare questi punti con queste lettere cliccando con il destro e scegliendo Rinomina).
Per evitare che il disegno sia troppo appesantito possiamo nascondere le varie altezze, mediane assi cliccando con il destro , selezionare "mostra oggetto" e lasciare solo i punti H,K,G.

Tracciamo la retta per H e K, per esempio, e verifichiamo che passa anche per G.

Nota: se attiviamo il comando muovi e modifichiamo la forma del triangolo vediamo che i tre punti continuano ad essere allineati.
In quale caso i tre punti coincidono?
In quale caso si trovano su un'altezza (che è anche mediana e asse) del triangolo?

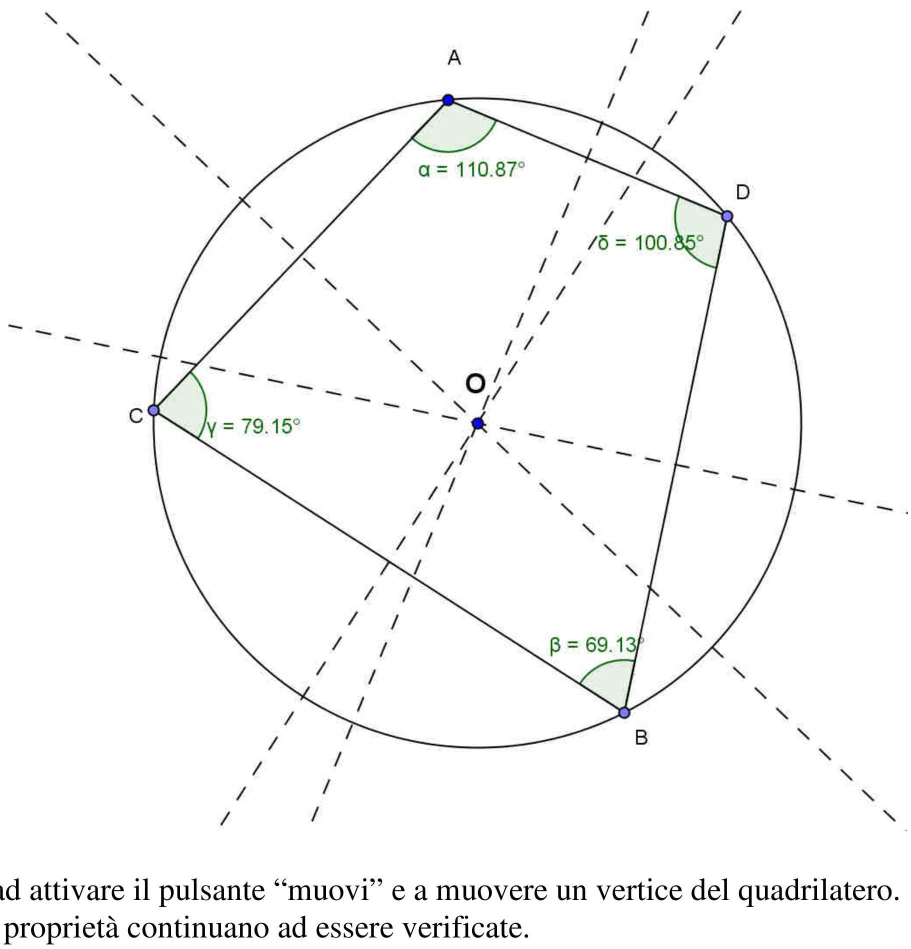


SCHEDA 11

GEOMETRIA EUCLIDEA
Quadrilatero inscritto in una circonferenza

Verifichiamo che se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza gli assi dei suoi lati passano tutti per uno stesso punto, che è il centro della circonferenza circoscritta, e che gli angoli opposti sono supplementari.

Tracciamo una circonferenza con il comando "circonferenza centro-punto";
con il comando "punto su oggetto" creiamo altri tre punti sulla circonferenza;
con il comando "segmento tra due punti" costruiamo il quadrilatero inscritto nella circonferenza;
con il comando "asse di un segmento" tracciamo gli assi dei lati e verifichiamo che passano tutti per il centro della circonferenza;
con il comando "angolo" evidenziamo gli angoli interni del quadrilatero e verifichiamo che gli angolo opposti sono supplementari.



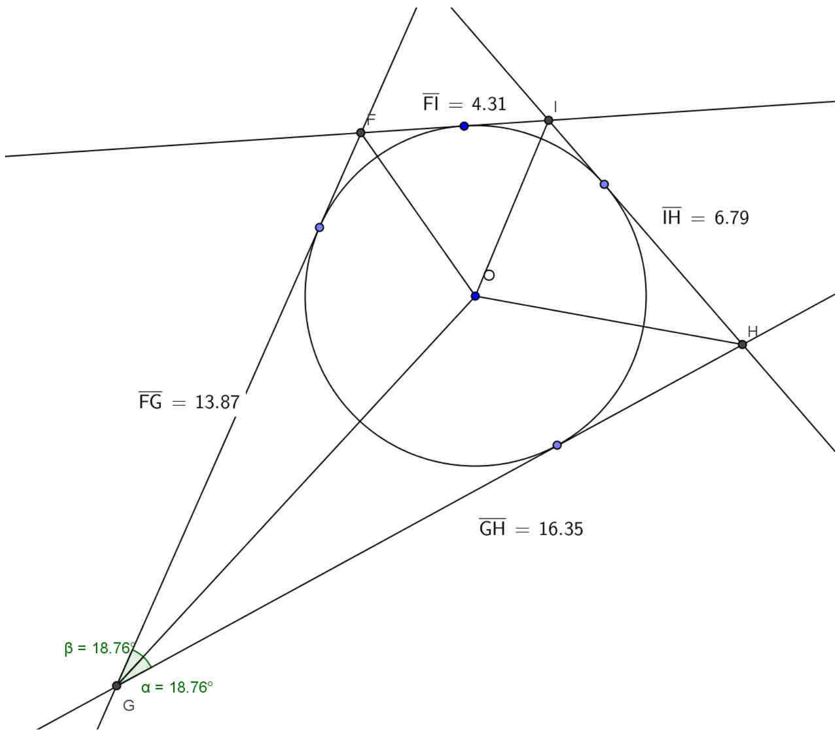
Nota: prova ad attivare il pulsante "muovi" e a muovere un vertice del quadrilatero.
Noterai che le proprietà continuano ad essere verificate.
Stampa qualche esempio.

SCHEDA 12

GEOMETRIA EUCLIDEA
Quadrilatero circoscritto ad una circonferenza

Verifichiamo che se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto , che è il centro della circonferenza inscritta, e che la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

Disegniamo una circonferenza (comando circonferenza centro-punto);
creiamo altri tre punti sulla circonferenza (punto su oggetto);
con il comando "tangenti ad una circonferenza" tracciamo le tangenti alla circonferenza nei suoi quattro punti;
intersechiamo le tangenti ottenendo il quadrilatero circoscritto (con il comando intersezione di due oggetti abbiamo i vertici);
congiungiamo i vertici con il centro della circonferenza e verifichiamo con il comando "angolo" che i segmenti tracciati sono bisettrici (che quindi si incontrano tutte in un punto che è il centro della circonferenza inscritta);
con il comando "distanza" misuriamo la lunghezza dei lati verificando che la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.



Nota: prova ad attivare "muovi" e muovi i punti sulla circonferenza.
Anche se il quadrilatero circoscritto cambia, continuano ad essere verificate le due proprietà.
Stampa qualche esempio.

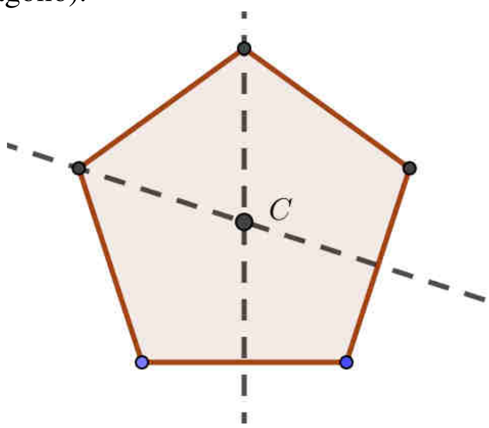
SCHEDA 13

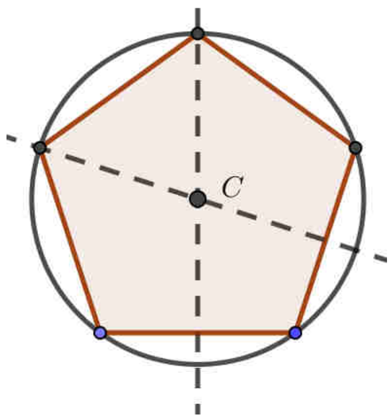
GEOMETRIA EUCLIDEA

Circonferenza inscritta e circoscritta ad un poligono regolare

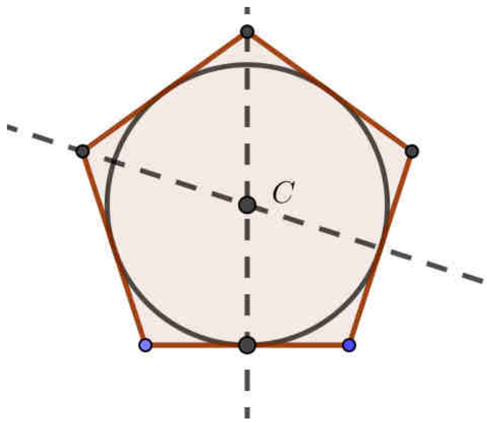
Verifichiamo che un poligono regolare è sempre inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza e che le due circonferenze hanno lo stesso centro.

Consideriamo per esempio un pentagono regolare: possiamo usare il comando poligono regolare e inserire come numero di lati 5.
Per determinare il centro della circonferenza inscritta e circoscritta possiamo tracciare sia le bisettrici di due angoli ed intersecarle che gli assi di due lati ed intersecarli.
Determinato il **centro C** , usando il comando "circonferenza di dato centro e passante per un punto" possiamo tracciare la circonferenza circoscritta (basta farla passare per un vertice del pentagono).





Per tracciare la circonferenza inscritta possiamo considerare un asse, intersecare con il lato ottenendo il punto di tangenza e poi usare il comando circonferenza centro-punto facendola passare per il punto di tangenza.



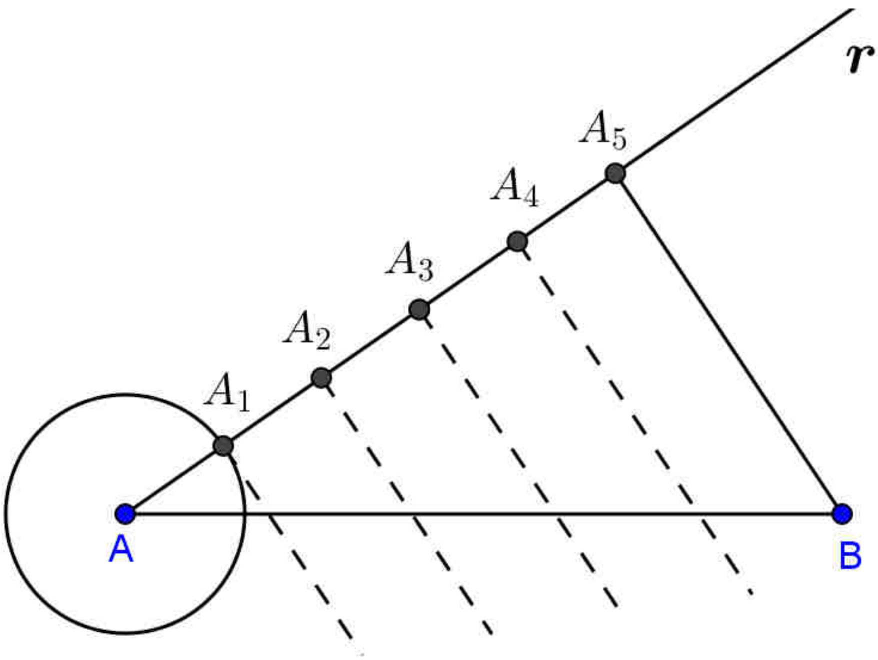
Esercizio: ripeti la costruzione per triangolo equilatero, quadrato ed esagono regolare.

SCHEDA 14

GEOMETRIA EUCLIDEA
*Divisione di un segmento in **n** parti uguali*

Possiamo tracciare un semiretta a piacere uscente da un estremo, per esempio A, e , partendo da A puntare il compasso in A con apertura *r* a piacere: dal punto A_1 così individuato sulla semiretta possiamo puntare il compasso con la stessa apertura e individuare sulla semiretta un secondo punto A_2 a distanza *r* da A_1 e così via fino ad A_n.
In figura vediamo un esempio per n=5.

Congiungiamo A_n con B e tracciamo per A_1, A_2, *ecc.* le rette parallele a A_nB: per il teorema di Talete le intersezioni daranno la divisione del segmento AB.



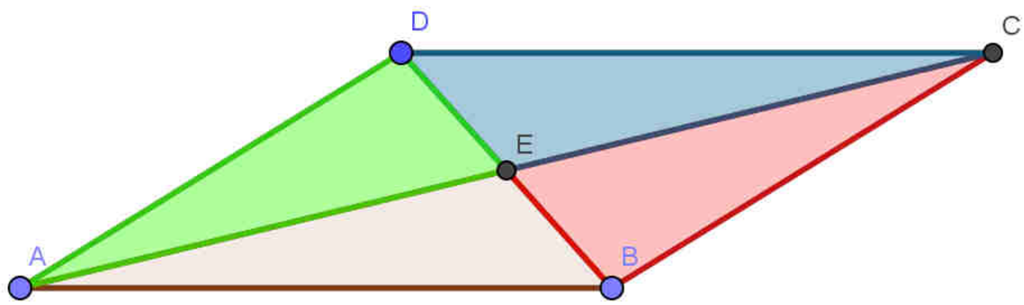
SCHEDA 15

GEOMETRIA EUCLIDEA
Parallelogramma e triangoli equivalenti

Disegna un parallelogramma:
traccia un segmento AB e un segmento consecutivo AD;
traccia la retta per B parallela ad AD e la retta per D parallela ad AB e intersecale (punto C);
traccia i segmenti BC e CD e poi nascondi la costruzione.

Traccia le diagonali AC e BD e intersecale (punto E).

Come risultano i triangoli ABE, BCE, DCE, ADE ?
Prova a modificare la figura trascinando A o B o D.



Suggerimento:

Costruisci i poligoni ABE ecc. e calcolane l'area.

Cosa osservi?

………………………………………………………………………………………………………

Prova a dimostrare quello che hai verificato con Geogebra.

………………………………………………………………………………………………………

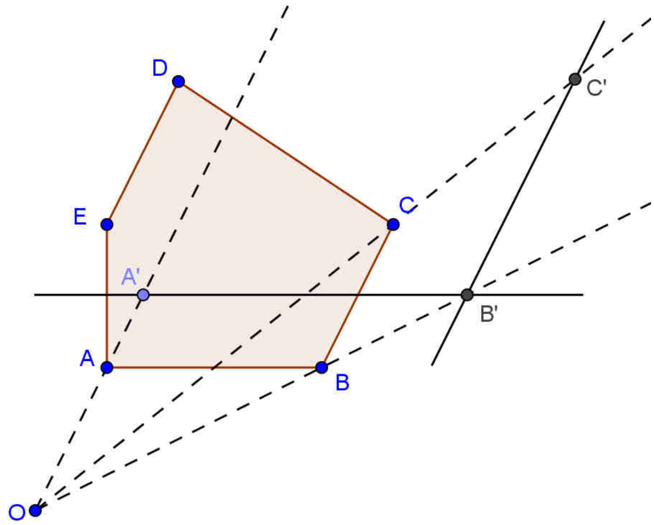
………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

SCHEDA 16

GEOMETRIA EUCLIDEA
Poligoni "omotetici"

Prova a seguire questo procedimento:



- disegna un poligono (irregolare) ABCDE usando il comando "poligono";
- crea un punto O (esterno al poligono);
- traccia le semirette uscenti da O e passanti per i vertici del poligono;
- sulla semiretta per A fissa un punto A' (comando "punto su oggetto");
- traccia per A' la parallela al lato AB del poligono e individua sulla semiretta per B un punto B';
- continua nello stesso modo (traccia da B' la parallela al lato BC e individua C'…);

Il poligono così ottenuto A'B'C'D'E' risulta simile a ABCDE per il teorema di Talete e

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=...=k= \text{ rapporto di similitudine.}$$

Osserviamo che A'B'C'D'E' risulta anche *disposto nello stesso modo* di ABCDE e per questo viene detto "**omotetico**" (dal greco "stessa posizione")

In Geogebra c'è proprio il comando "**omotetia**": basta selezionare il poligono che vogliamo trasformare, selezionare un punto (centro O dell'omotetia) e il rapporto di similitudine.

Esercizio

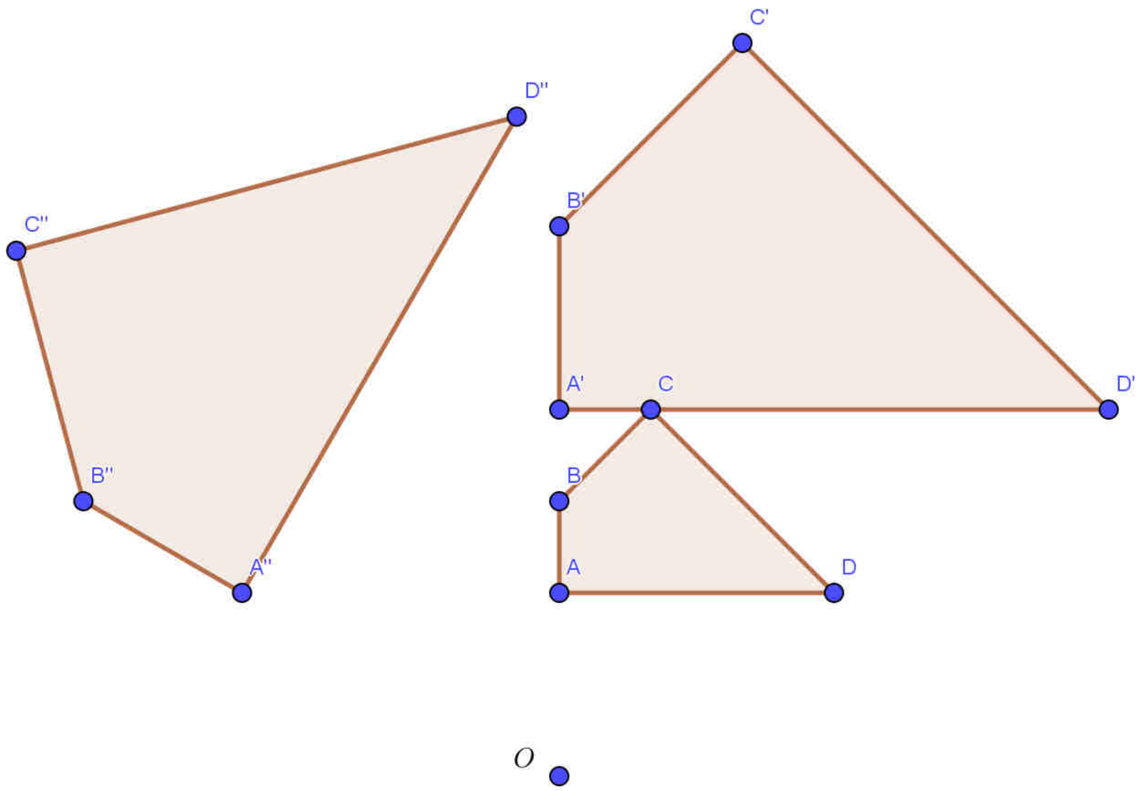
Prova a trasformare un poligono a scelta fissando O ma variando il rapporto k .
Stampa i tuoi esempi.

SCHEDA 17

GEOMETRIA EUCLIDEA
Poligoni simili

Per disegnare un poligono simile ad un poligono dato puoi utilizzare la composizione di un'omotetia e di un'isometria.

Esercizio
Disegna un poligono.
Fissa un punto O come centro dell'omotetia, seleziona "omotetia" e applicala al poligono selezionando centro e rapporto di omotetia.
Scegli un'isometria (traslazione, rotazione, simmetria assiale) ed applicala al poligono "omotetico" che hai ottenuto: stampa qualche esempio tipo quello in figura in cui è stata applicata un'omotetia di centro O e rapporto 2 e poi una rotazione di 60° intorno ad O.



SCHEDA 18

GEOMETRIA EUCLIDEA
Poligono regolare inscritto in una data circonferenza

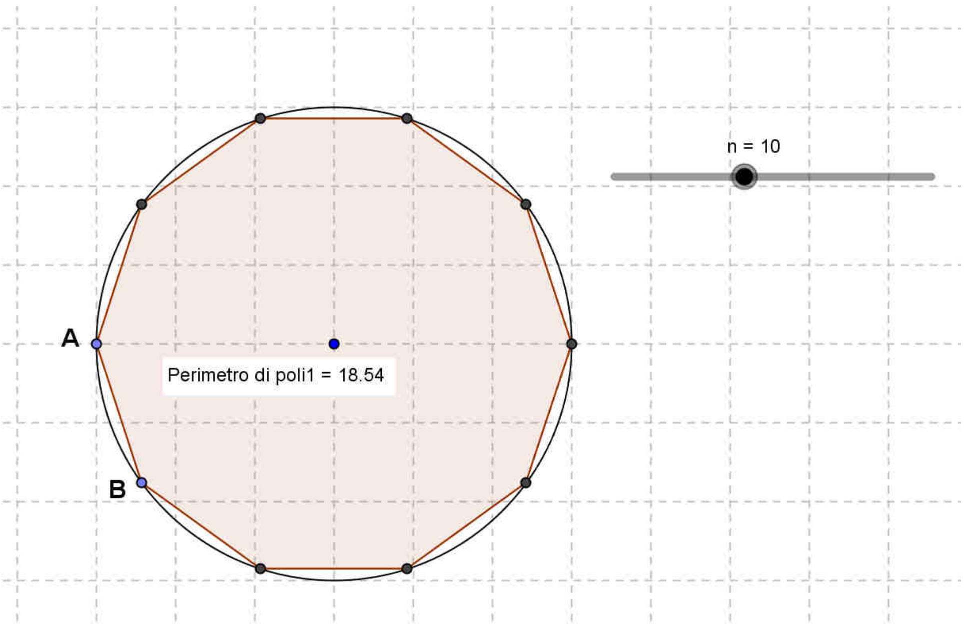
Supponiamo di avere una circonferenza di dato raggio, per esempio r =3 come in figura.

Come possiamo inscriverci un poligono regolare di n lati?

Possiamo procedere così:

- prendiamo un punto su di essa (A) con il comando punto su oggetto;
- creiamo uno slider n variabile da 3 a 20 (per esempio) con incremento 1 ;
- selezioniamo il comando Ruota oggetto e ruotiamo il punto A intorno al centro della circonferenza di 360°/n ottenendo il punto B;
- selezioniamo il comando "poligono regolare" e clicchiamo su A e B e poi indichiamo come numero di lati n.

Abbiamo ottenuto il poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza : variando lo slider n varia il poligono.
Se selezioniamo il comando "distanza" e misuriamo il perimetro del poligono inscritto, al crescere dei lati vediamo che il rapporto tra il perimetro del poligono e il diametro (nel nostro caso uguale a 6) della circonferenza si avvicina al valore di $\pi \cong 3{,}14$ (vedi in figura il caso di n = 10).
Stampa degli esempi.

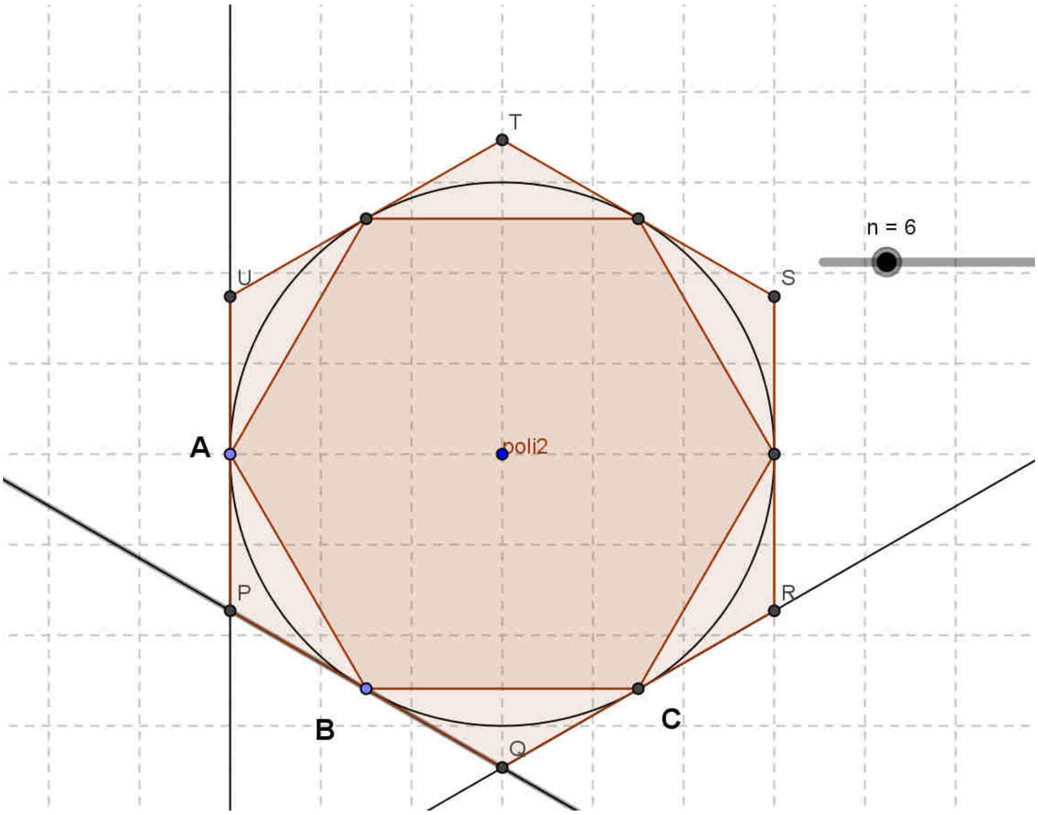


SCHEDA 19

GEOMETRIA EUCLIDEA

Poligono regolare circoscritto ad una data circonferenza

Data una circonferenza di raggio dato (per esempio r = 3) come possiamo costruire *il poligono regolare circoscritto con n lati?*
Possiamo riprendere la costruzione precedente , tracciare le tangenti in tre punti consecutivi A, B ,C del poligono inscritto, intersecare le tangenti ed ottenere così il lato PQ del poligono regolare circoscritto con lo stesso numero di lati che può essere poi tracciato con il comando poligono regolare (nella figura c'è il caso n = 6).



Anche in questo caso con il comando "distanza" possiamo calcolare il perimetro del poligono regolare circoscritto alla circonferenza e controllare che, al crescere del numero dei lati, il rapporto tra perimetro e diametro si avvicina al valore di $\pi \cong 3{,}14$.
Rispetto al rapporto che si otteneva con i perimetri dei poligoni inscritti (minore di 3,14..) abbiamo in questo caso un rapporto sempre maggiore di 3,14…

Stampa degli esempi.