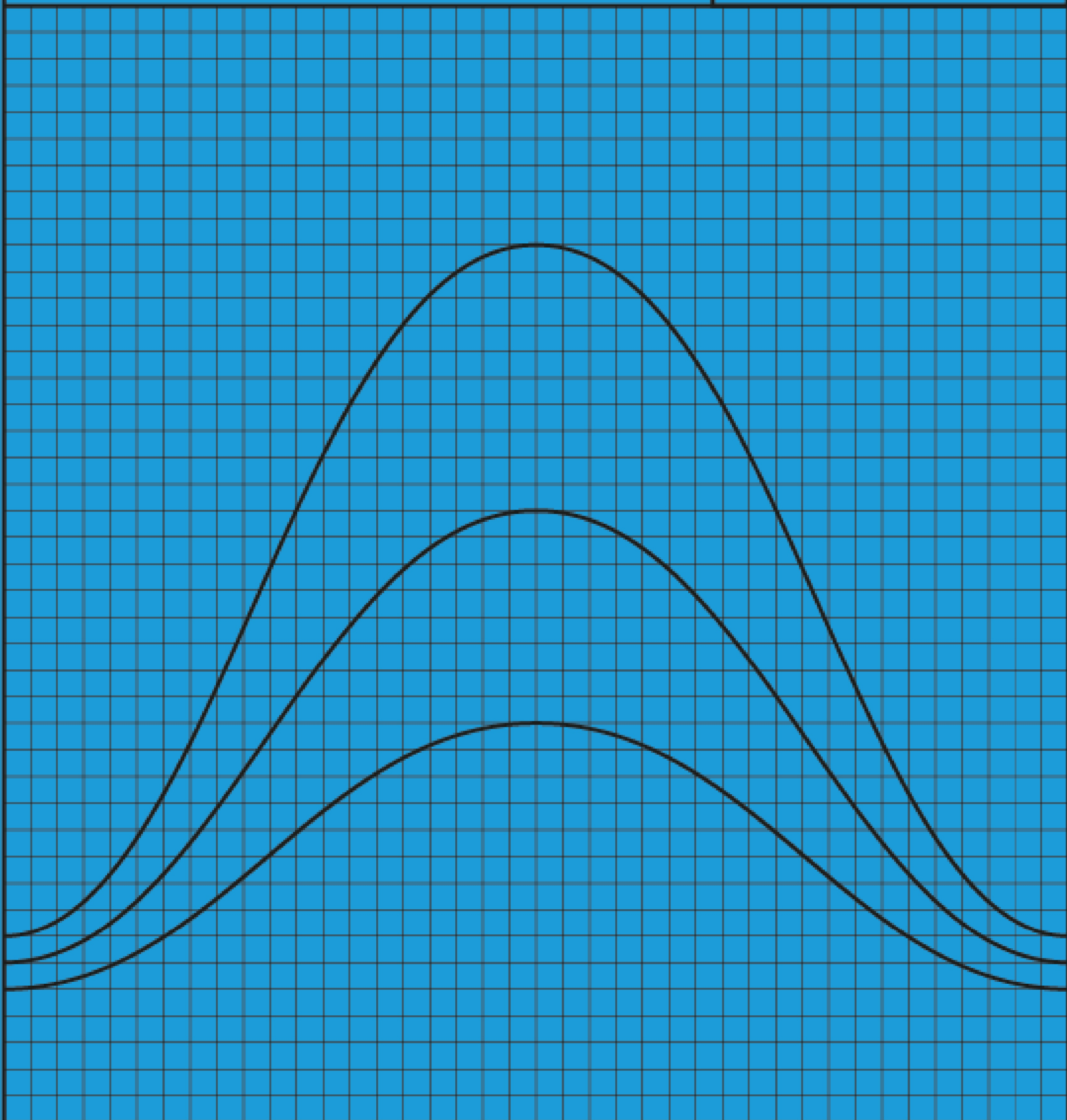
Appunti di Matematica

Indirizzo Umanistico

5

Cecilia Magni



Matematica in Rete

Prefazione

Gli **"Appunti di Matematica" sono un corso di matematica "open source" per i Licei** , con una versione per l'indirizzo scientifico ed una per l'indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella "parte teorica" del libro di testo, spesso troppo formale e "faticosa" e che non tutti riuscivano a "prendere appunti" durante le spiegazioni.

La parte teorica è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e **si integra con la parte applicativa** in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle "tecniche" di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , "schede di lavoro" da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente **non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.**

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica "Geogebra" (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle "*schede*" in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), **possano essere utili ad altri docenti per costruire,** integrandole con materiale personale, **il proprio libro di testo** che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti**, potrebbe essere facilmente aggiornato** e **modificato** ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell'articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl'Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

Cecilia Magni

Progetto Matematica in rete

Cecilia Magni

APPUNTI DI MATEMATICA 5

Indirizzo Umanistico

Editore: Matematicainrete.it

Anno di edizione : 2024

Formato: ebook (PDF)

CODICE ISBN: 978-88-943828-9-1

APPUNTI DI MATEMATICA 5
Indirizzo Umanistico

Indice

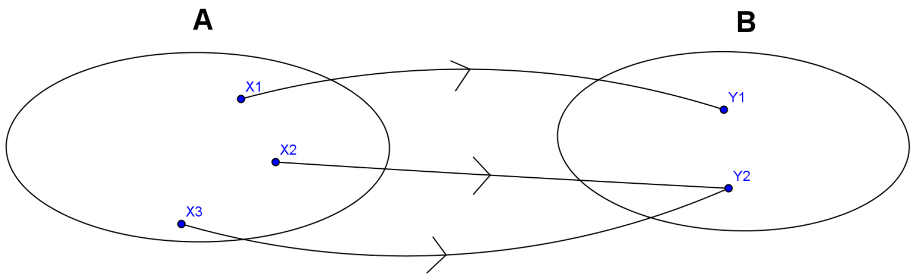
Funzioni

Riprendiamo il concetto di funzione.

Definizione di funzione : una funzione $f : A \to B$, con A e B insiemi non vuoti, è una legge che associa ad **ogni elemento** $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$

$$x \to y = f(x)$$

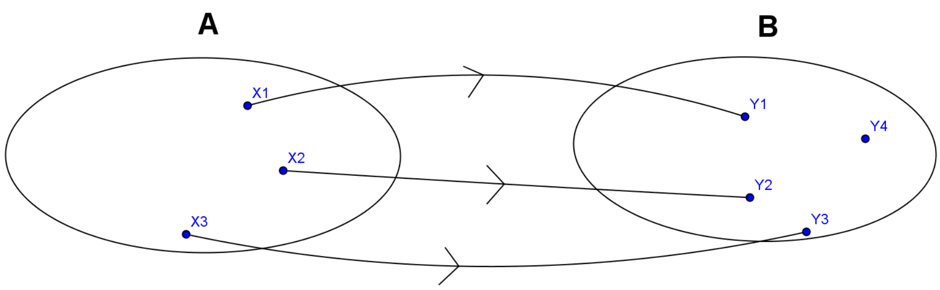
y viene chiamato "immagine" di x e indicato anche con $f(x)$.



Esempio: se consideriamo come insieme A l'insieme degli studenti della classe quinta A del liceo classico di Montevarchi nell'anno scolastico in corso e come insieme B l'insieme dei giorni dell'anno, possiamo considerare la funzione f che associa ad ogni studente la propria data di nascita.

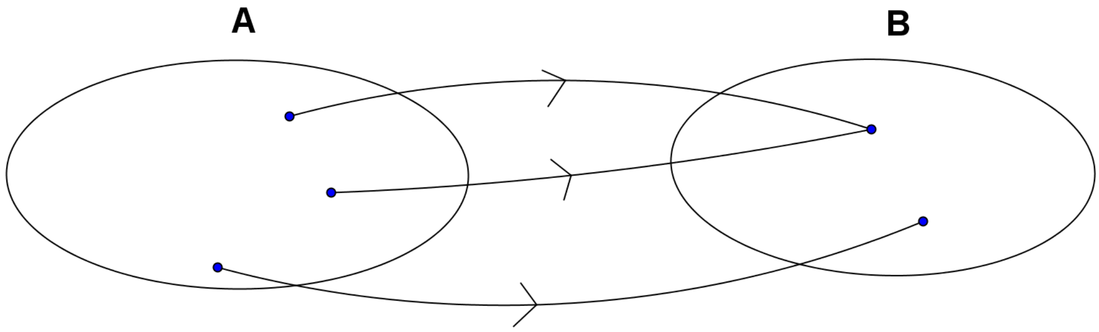
Proprietà di una funzione

- Una funzione f si dice **iniettiva** se ad elementi distinti $(x_1 \neq x_2)$ corrispondono immagini distinte $f(x_1) \neq f(x_2)$



Per esempio la funzione f : studente 5ACL$\to$data di nascita, non è detto che sia iniettiva perché ci potrebbero essere studenti nati nello stesso giorno.

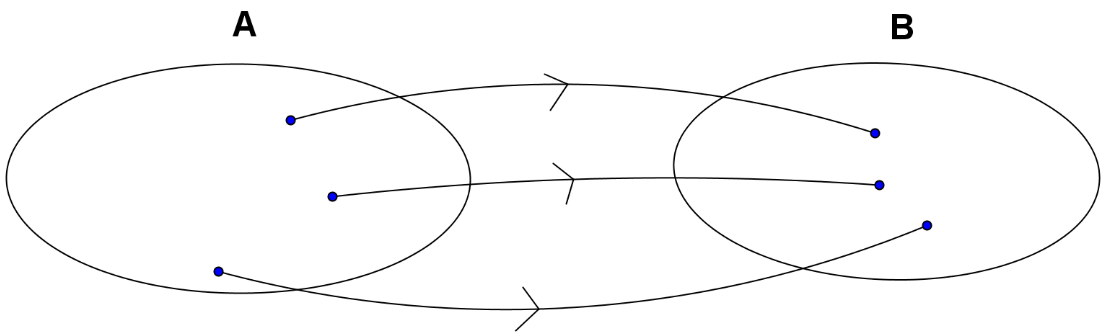
- Una funzione f si dice **suriettiva** se ogni elemento $y \in B$ è l'immagine di almeno un elemento $x \in A$.



Esempio di funzione suriettiva ma non iniettiva

NOTA: se prendiamo come insieme di arrivo B l'insieme delle immagini, ogni funzione diventa suriettiva.

- Una funzione f si dice **biunivoca** quando è iniettiva e suriettiva e quindi quando **ad ogni elemento** $x \in A$ **corrisponde uno e un solo elemento** $y \in B$ **e viceversa.**
  Questa funzione viene anche chiamata "funzione uno-a-uno".



Funzioni reali di variabile reale

Data $f: A \rightarrow B$ se $A, B \subseteq \Re$, cioè A e B sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali, f si dice **funzione reale di variabile reale.**

La variabile $x \in A$ viene detta **variabile indipendente** mentre $y = f(x)$ viene chiamata **variabile dipendente.**

Esempio: $f: x \rightarrow x+1$
è la funzione che associa ad ogni numero reale $x \in \Re$ il suo successivo.

- **Dominio della funzione**: è l'insieme dei numeri reali per cui la funzione risulta definita.

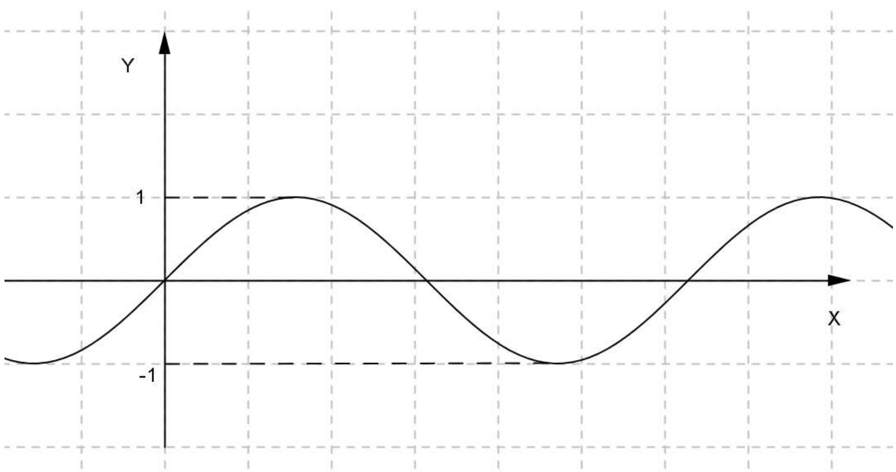
Esempio :
$f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ ha come dominio $D_f = \Re - \{0\}$ poiché per $x = 0$ non è possibile effettuare $\frac{1}{0}$.
Esempio :
$f: x \rightarrow tgx$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ cioè il suo dominio è $Df = \Re - \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$.

- **Codominio della funzione**: è l'insieme delle immagini della funzione.

Esempio : $f: x \rightarrow tgx$ ha come codominio $Cf = \Re$.
Esempio: $f: x \rightarrow senx$ ha come codominio $Cf = [-1;1]$

- **Grafico della funzione**: è l'insieme dei punti (x, y) con $x \in Df$ e $y = f(x)$ rispetto ad un sistema di riferimento.

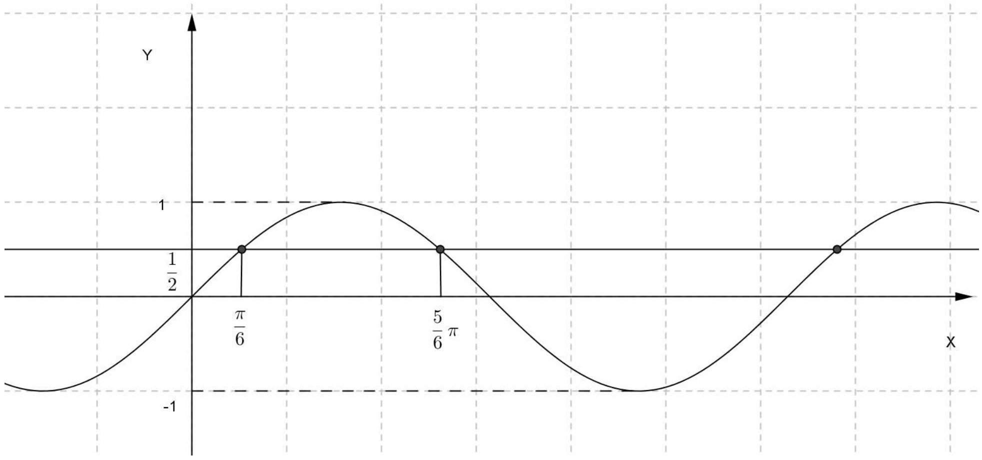
Esempio: il grafico di $y = senx$ è il seguente.



$Df = \Re$
$Cf = [-1,1]$

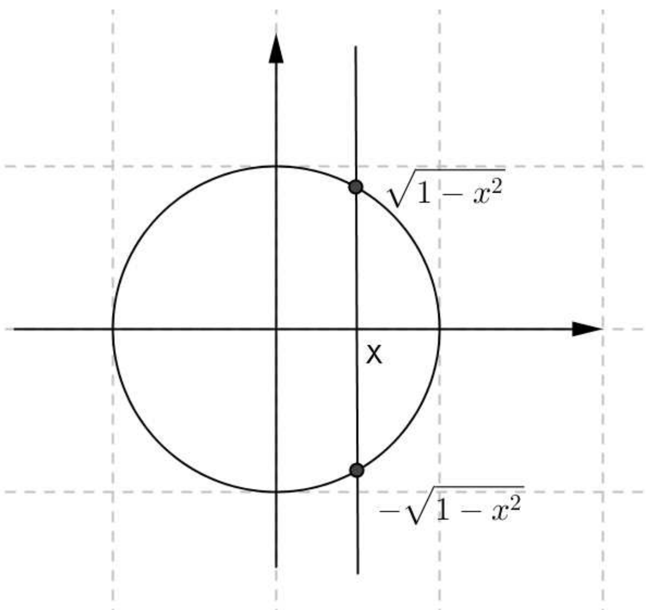
Nota 1: dal grafico di una funzione possiamo vedere se è iniettiva tracciando rette parallele all'asse x: se le rette parallele all'asse x che intersecano il grafico lo intersecano solo in un punto allora si tratta di una funzione iniettiva, altrimenti no.

Infatti per esempio nel grafico di $y = senx$ una retta $y = k$ con $-1 \le k \le 1$ interseca infinite volte il grafico ed infatti $y = senx$ non è una funzione iniettiva.



$$\frac{\pi}{6} \to \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{6}\pi \to \frac{1}{2}$$
ecc.

Nota 2: se una curva è grafico di una funzione allora tagliandola con rette parallele all'asse y dobbiamo avere **al massimo una intersezione** (ad ogni $x \in A$ è associato uno ed un solo $y = f(x) \in B$)
Per esempio una circonferenza non è grafico di una funzione.



$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$
$$x \to \sqrt{1-x^2}$$
$$x \to -\sqrt{1-x^2}$$

Ad un valore $-1 \le x \le 1$ corrispondono due immagini distinte.

ESERCIZI
DOMINIO, CODOMINIO E GRAFICO

Determina dominio, codominio e grafico delle seguenti funzioni:

1. $y = x + 1 \qquad (f : x \to x + 1)$

2. $y = x^2 + 1$

3. $y = \dfrac{1}{x}$

4. $y = \cos x$

5. $y = tgx$

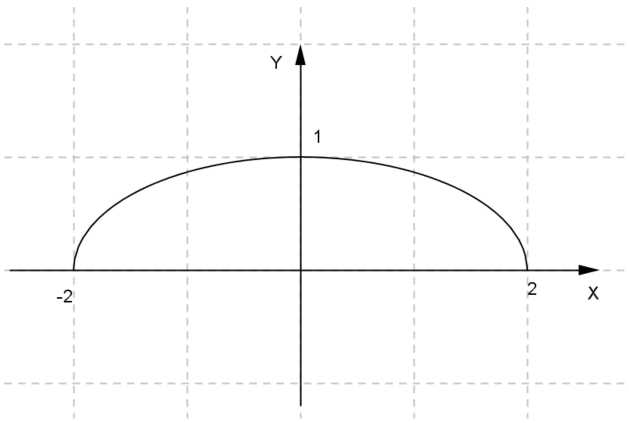
*6. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

Svolgimento: se eleviamo al quadrato entrambi i membri otteniamo

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(4 - x^2\right) \to \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Si tratta di una ellisse con semiassi $a = 2$, $b = 1$ (centro l'origine e assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani).
Non possiamo però considerare tutta la curva ma solo la parte con $y \geq 0$ poiché la funzione era

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \quad \text{e quindi} \quad y \geq 0$$



Il dominio: $D_f : -2 \leq x \leq 2$ (infatti si deve avere $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$)
Il codominio : $0 \leq y \leq 1$

7. $y = 2\sqrt{x^2 - 1}$

8. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$

Esempi

1) Se abbiamo una **funzione polinomiale**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

il suo dominio è $\Re$.

Esempio: le funzioni

$$y = x + 1 \;\; ; \;\; y = x^2 - 1 \;\; ; \;\; y = x^3 + x - 2$$

Hanno tutte come dominio $\Re$.

2) Se f è una **funzione razionale fratta** (cioè quoziente di due polinomi) per determinare il suo dominio basterà escludere i valori che annullano il denominatore.

$$f : x \to \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m}$$

$$D_f = \Re - \{x : D(x) = 0\}$$

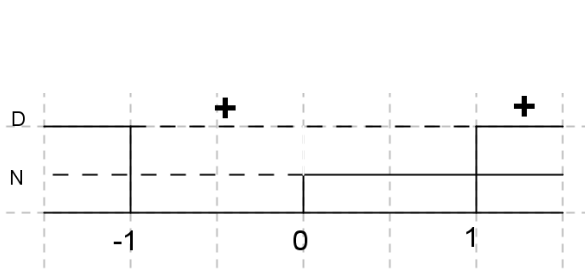
Esempi: $y = \dfrac{1}{x-1}$ ha come dominio $\Re - \{1\}$;

$y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ ha come dominio $\Re - \{\pm 2\}$

3) a) Se $f(x) = \sqrt[2n]{R(x)}$ cioè è una radice con indice pari , il dominio si troverà risolvendo $R(x) \geq 0$

Esempio: $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$

$$\frac{x}{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow$$



$$D_f : -1 < x \leq 0 \cup x > 1$$

b) Se $f(x) = \sqrt[2n+1]{R(x)}$ cioè *f(x)* è una radice di indice dispari, il duo dominio coinciderà con quello del radicando *R(x)*.

Esempio: $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ $\quad D_f : x \neq 0$

4) Se $f(x)$ è una **funzione goniometrica** ricordiamo che

$y = senx \qquad D_f = \Re$

$y = \cos x \qquad D_f = \Re$

$y = tgx \qquad D_f = \Re - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$

Esempi

$y = sen\left(x - \frac{\pi}{3} \right) \qquad D_f = \Re$

$y = tg\left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \qquad 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$

5) $f(x) = a^x$ **funzione esponenziale** ha come dominio $\Re$.

Esempio: $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$ ha come dominio $\Re - \{1\}$ perché l'esponente è definito per $x \neq 1$.

6) $f(x) = \log_a x$ **funzione logaritmica** ha come dominio $x > 0$ cioè l'argomento deve essere positivo.

Quindi se per esempio abbiamo $y = \log_a (x-1)$ dovremo porre l'argomento positivo:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Nota: per indicare il logaritmo in base *e* (numero irrazionale $\cong 2{,}7$) scriveremo *ln* , cioè

$$\ln x = \log_e x .$$

ESERCIZI

DOMINI DI FUNZIONI

Determina il dominio delle seguenti funzioni:

1) $y = x^3 + x^2 + 1$ $[\Re]$

2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ $[x \neq \pm 1]$

3) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $[x \leq 0 \cup x > 1]$

4) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ $[x \neq 1]$

5) $y = \sqrt{senx + \cos x}$ $[-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi]$

6) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$ $[x \geq 0]$

7) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $[x \neq 2]$

8) $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x^2 - 9}\right)$ $[-3 < x < 1 \cup x > 3]$

9) $y = \sqrt{\ln x}$ $[x \geq 1]$

10) $y = \sqrt[4]{9^x - 3^x}$ $[x \geq 0]$

11) $y = \dfrac{1}{\ln^2 x - 1}$ $[x > 0 \quad x \neq e, \dfrac{1}{e}]$

12) $y = \sqrt[3]{tgx}$ $[x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$

13) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$ $[0 < x \leq \dfrac{1}{e^2} \cup x \geq e^2]$

14) $y = \dfrac{1}{e^x}$ $[\Re]$

15) $y = senx + tg2x$ $[x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}]$

16) $y = \dfrac{1}{x^3 - 1}$ [$x \neq 1$]

17) $y = \dfrac{2 - x}{x^2 - x}$ [$x \neq 0 \quad ; \quad 1$]

18) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$ [$\Re$]

19) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ [$x \leq -1 \quad \cup \quad x \geq 1$]

20) $y = \sqrt{x^3 - 1}$ [$x \geq 1$]

21) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2 - x}}$ [$x \neq 2$]

22) $y = 2^{\frac{1}{x}}$ [$x \neq 0$]

23) $y = \sqrt{2^x + 1}$ [$\Re$]

24) $y = tg(3x)$ [$x \neq \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}$]

25) $y = \dfrac{1}{senx}$ [$x \neq k\pi$]

26) $y = \dfrac{1}{tgx}$ [$x \neq k\dfrac{\pi}{2}$]

27) $y = \ln(3 - x)$ [$x < 3$]

28) $y = \dfrac{1}{\ln x}$ [$x > 0, \quad x \neq 1$]

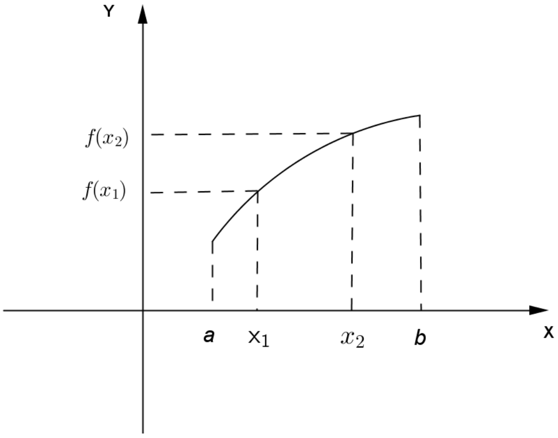
29) $y = \sqrt{3^x - 9}$ [$x > 2$]

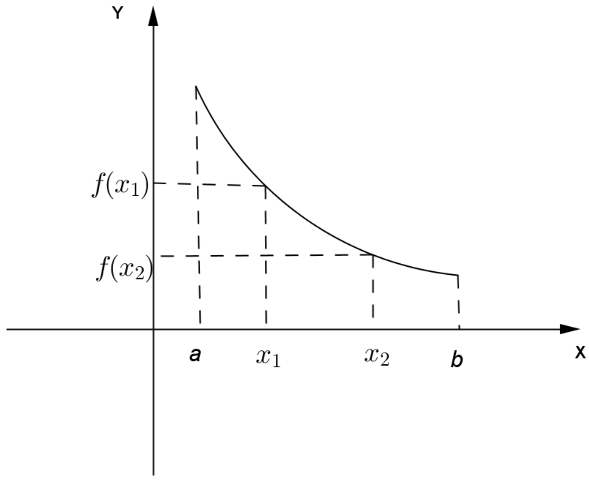
30) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$ [$x \neq 0$]

Caratteristiche di una funzione

Vediamo alcune caratteristiche di una funzione:

1) $f(x)$ si dice funzione crescente in I(a,b) (I intervallo anche illimitato) se per ogni $x_1 < x_2 \in I$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$, mentre si dice decrescente in I per ogni $x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.





Può darsi che una funzione sia crescente (o decrescente) in tutto il dominio oppure crescente in alcuni intervalli e decrescente in altri.

Esempi

$y = x + 1$ è crescente $\forall x \in D_f$

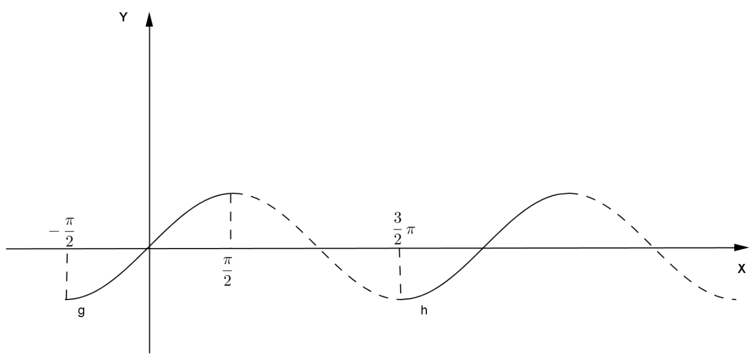
$y = x^2$ è decrescente $\forall x \leq 0$ quindi in $I = (-\infty, 0]$ è crescente $\forall x \geq 0$ cioè in $I = [0, +\infty)$

$y = senx$ è crescente negli intervalli

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

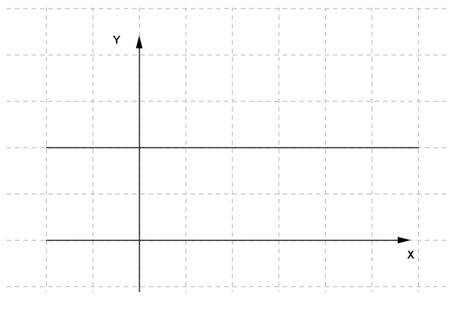
decrescente quando

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$



Nota: naturalmente una funzione può essere costante cioè $f(x) = k \quad \forall x \in D_f$.

Esempio: $y = 2$

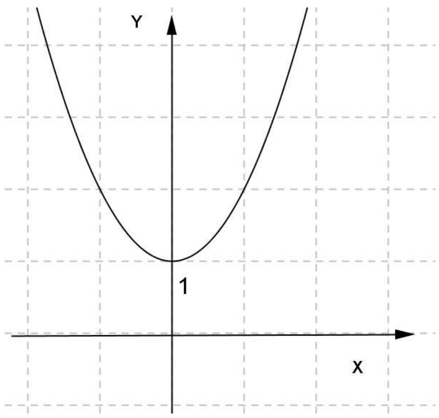


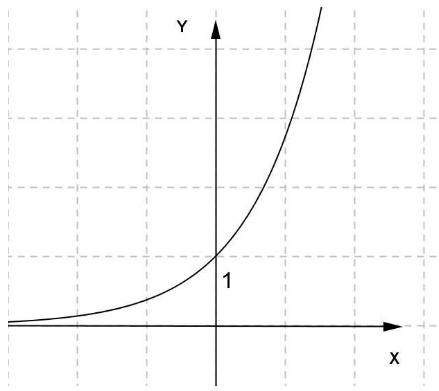
2) **a.** Una funzione $f(x)$ si dice **limitata inferiormente**

- se $f(x) \geq m \qquad \forall x \in D_f$ (m si dice minimo della funzione e appartiene al codominio)
- oppure se $f(x) > I \quad \forall x \in D_f$ (I si dice "estremo inferiore" e non appartiene al codominio).

Esempio: $y = x^2 + 1$ ha un minimo $m = 1 \quad f(x) \geq 1 \quad \forall x \in D_f = \Re$

Esempio: $y = e^x$ ha un estremo inferiore $I = 0 \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f = \Re$



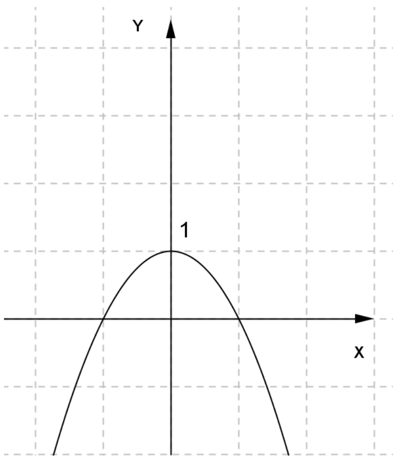


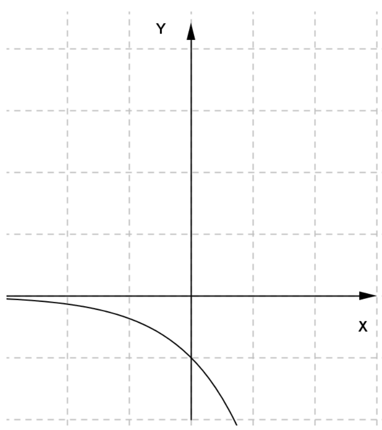
b. Una funzione $f(x)$ si dice **limitata superiormente**

- se $f(x) \leq M \quad \forall x \in D_f$ (M si dice massimo della funzione e appartiene al codominio)
- oppure se $f(x) < S \quad \forall x \in D_f$ (S si dice "estremo superiore" e non appartiene al codominio)

Esempio: $y = -x^2 + 1$ ha massimo $M = 1$: $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Re$

Esempio: $y = -e^x$ ha estremo superiore $S = 0$: $f(x) < 0 \quad \forall x \in \Re$

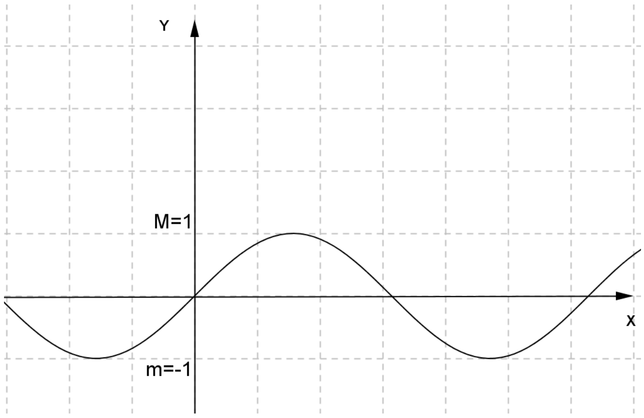


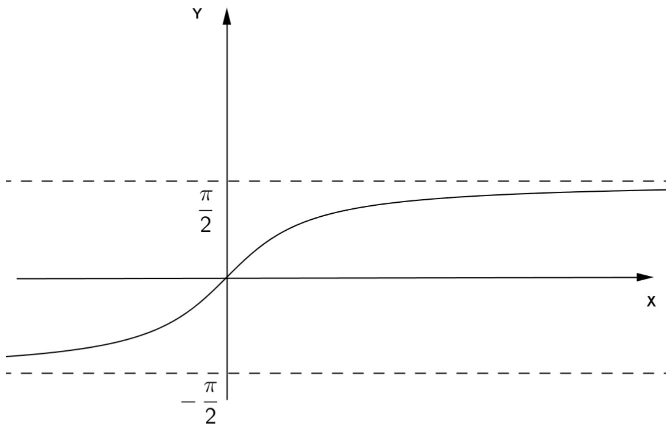


c. $f(x)$ si dice **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente.

Esempio: $y = senx$ è limitata $(m = -1, M = 1)$

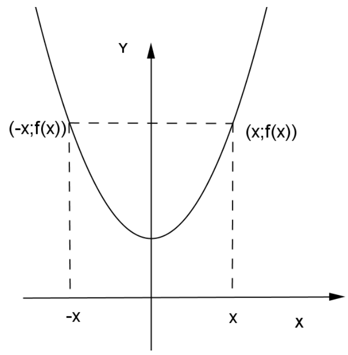
Esempio: $y = arctgx$ è limitata $\left(I = -\frac{\pi}{2}, S = \frac{\pi}{2} \right)$





3) **a.** Una funzione $f(x)$ si dice **pari** quando $f(-x) = f(x)$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Esempio: $y = x^2 + 1$ è pari



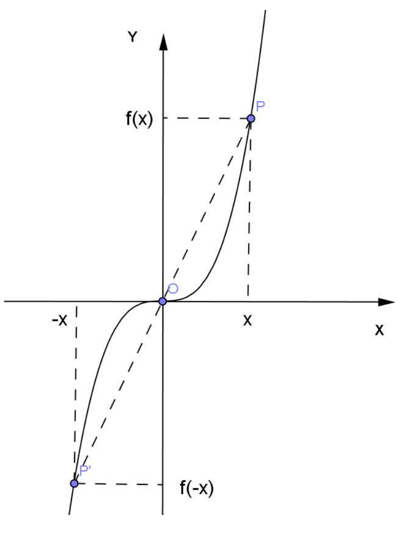
Nota: se in una funzione la variabile x compare solo con esponente "pari" la funzione è pari.

Esempio: $y = \frac{x^4 - 1}{3 + x^2}$ è una funzione pari poiché $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{3 + (-x)^2} = f(x)$

b. Una funzione $f(x)$ si dice **dispari** quando $f(-x) = -f(x)$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento.

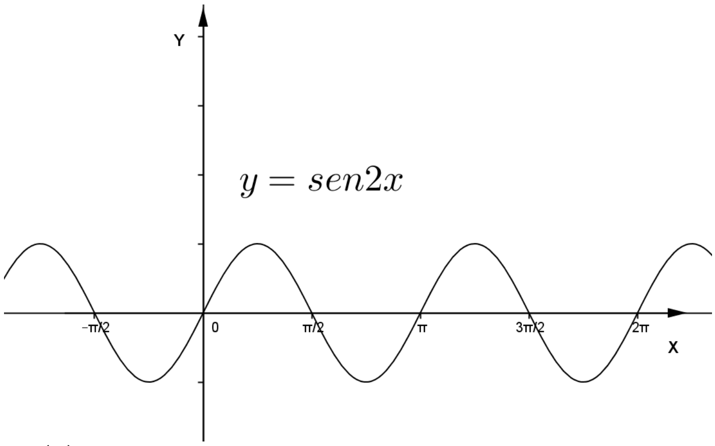
Esempio: $y = x^3$ è dispari

$P(x; f(x))$ $P'(-x; -f(x))$ sono simmetrici rispetto a (0;0)



4) Una funzione $f(x)$ si dice **periodica di periodo T** quando T è il minimo valore per cui

$$f(x+T)=f(x) \quad (\forall x \in D_f)$$



Esempi:

a. $y = senx$ ha periodo $T = 2\pi$

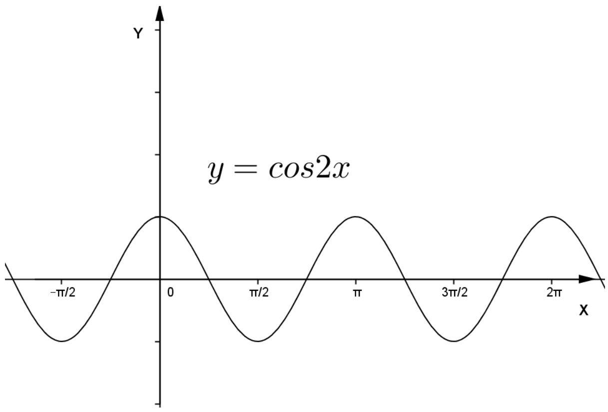
$y = sen2x$ ha periodo $T = \pi$

Infatti

$f(x+\pi)= sen2(x+\pi)= sen(2x+2\pi)= sen2x = f(x)$

In generale $y = senkx$ ha periodo $T = \dfrac{2\pi}{k}$

$$f\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)= sen\left[k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)\right]= sen(kx+2\pi)= senkx = f(x)$$



b. $y = \cos x$ ha periodo $T = 2\pi$

$y = \cos 2x$ ha periodo $T = \pi$

In generale $y = \cos kx$ ha periodo $T = \dfrac{2\pi}{k}$

poiché

$$f(x+\frac{2\pi}{k}) = \cos\left[k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)\right]= \cos(kx+2\pi)= \cos kx = f(x)$$

c. $y = tgx$ ha periodo $T = \pi$

In generale $y = tgkx$ ha periodo $T = \dfrac{\pi}{k}$ poiché

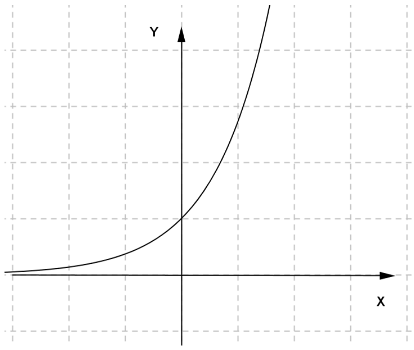
$$f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)= tg\left[k\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right]= tg(kx+\pi)= tgkx = f(x)$$

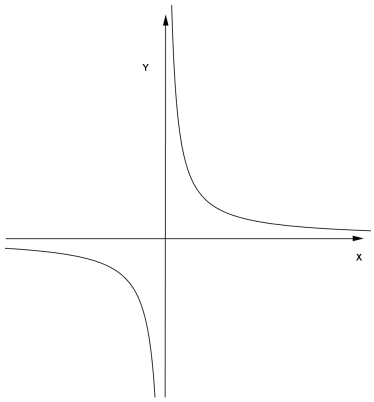
5) Una funzione $f(x)$ può avere un **asintoto**

• **orizzontale**: quando il suo grafico si "avvicina"ad una retta orizzontale di equazione $y = k$.

Esempio: $y = e^x$ ha l'asse x come asintoto orizzontale ma solo quando $x \to -\infty$ (parte sinistra del grafico).

Esempio: $y = \frac{1}{x}$ ha l'asse x come asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che quando $x \to -\infty$ (cioè sia a sinistra che a destra).

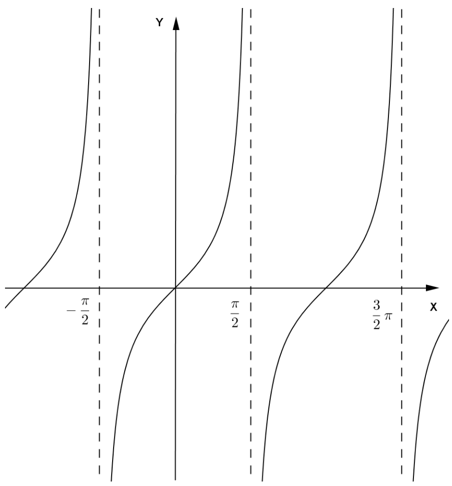


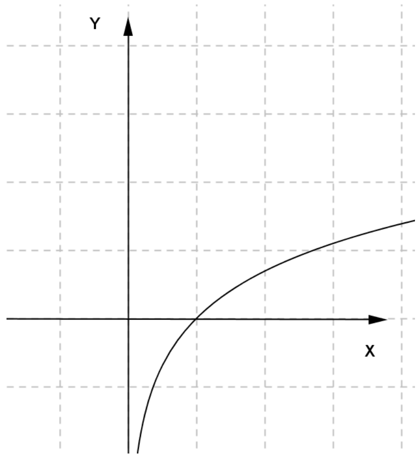


- **verticale**: quando il suo grafico si "avvicina" ad una retta verticale di equazione $x = k$ quando $x \to k$ ($x = k \notin D_f$).

  Esempio: $y = tgx$ ha come asintoti verticali le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

  Esempio: $y = \ln x$ ha come asintoto verticale l'asse y.

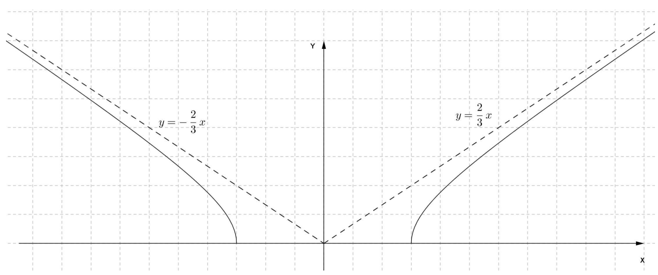




- **obliquo**: quando il suo grafico si "avvicina" ad una retta di equazione $y = mx + q$ quando $x \to +\infty$ e/o $x \to -\infty$

  Esempio: $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^x - 9}$ $\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\right)$

  asintoti obliqui $y = \pm\frac{2}{3}x$



ESERCIZI

CARATTERISTICHE DI UNA FUNZIONE

Determina dominio, codominio, grafico e caratteristiche delle seguenti funzioni:

1) $y = \cos 3x$

2) $y = -\sqrt{1-x^2}$

3) $y = 3x - 1$

4) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

5) $y = sen 4x$

6) $y = tg 4x$

7) $y = 2x - 1$

8) $y = 2^x$

9) $y = \ln x$

10) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

11) $y = \frac{x-2}{x-3}$

12) $y = x^2 - x$

13) $y = tg 2x$

14) $y = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$

15) $y = -x^2$

16) $y = x^2 + 1$

17) $y = 3^x$

18) $y = \log_2 x$

19) $y = 3 - x^2$

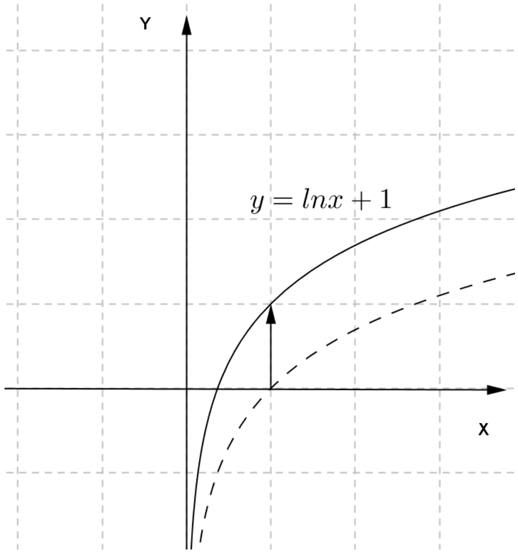
20) $y = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

Grafici deducibili dal grafico di f(x)

Se conosciamo il grafico G_f di una funzione $f(x)$ possiamo facilmente disegnare anche il grafico di:

- $f(x)+a \qquad a \in \Re$
- $f(x-a) \qquad a \in \Re$
- $-f(x)$
- $f(-x)$
- $|f(x)|$

Vediamo un esempio: consideriamo come funzione $f(x)=\ln x$



a. Come risulterà il grafico di $y=\ln x+1$?

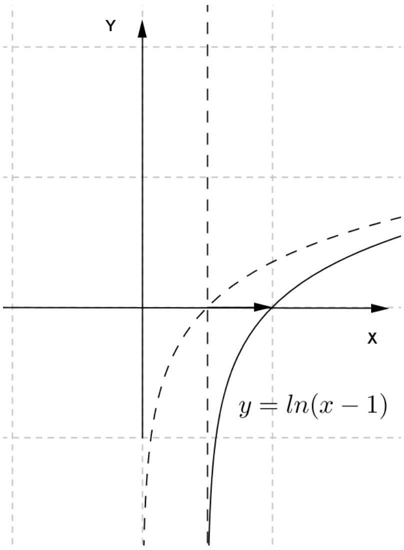
E' chiaro che sarà traslato verso l'alto di 1.

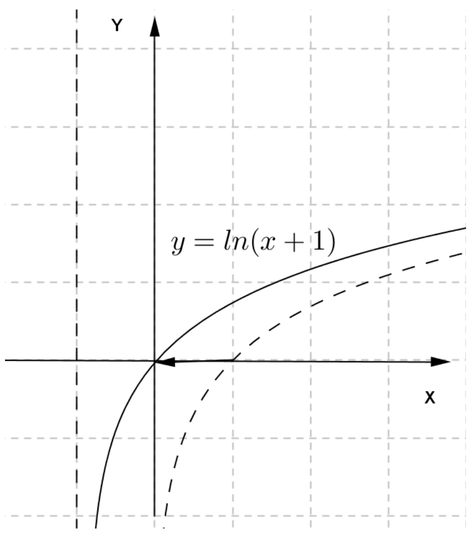
Naturalmente se considero $y=\ln x-1$ traslo verso il basso.

b. Come risulterà il grafico di $y=\ln(x-1)$?

In questo caso il dominio cambia e risulta $x>1$: il grafico è traslato verso destra ed ha asintoto verticale $x=1$.

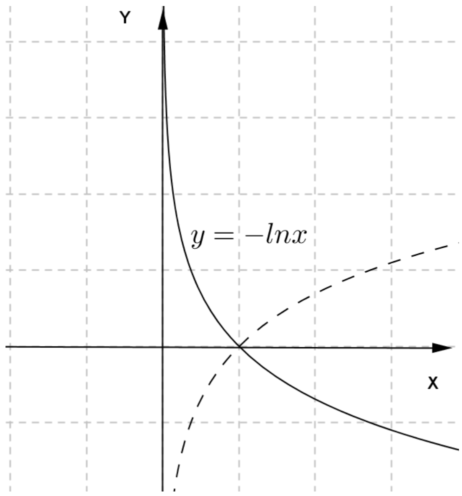
Se invece avessi considerato $y=\ln(x+1)$ il grafico del logaritmo traslava verso sinistra e aveva asintoto verticale $x=-1$ (il dominio: $x>-1$)





b. Come risulta il grafico di $y = -\ln x$?

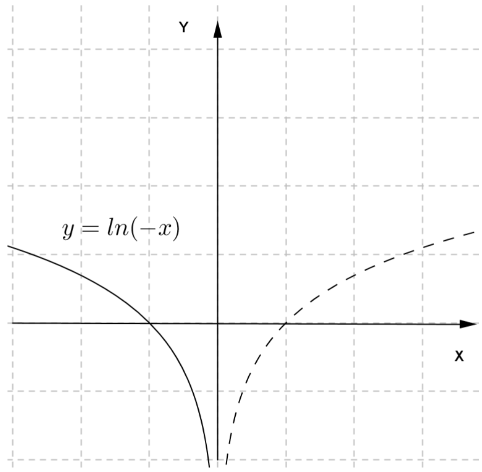
Le immagini risultano opposte e quindi si ha il grafico simmetrico rispetto all'asse x.



c. Come risulta il grafico di $y = \ln(-x)$?

Questa volta il dominio cambia e si ha $-x > 0 \Rightarrow x < 0$.

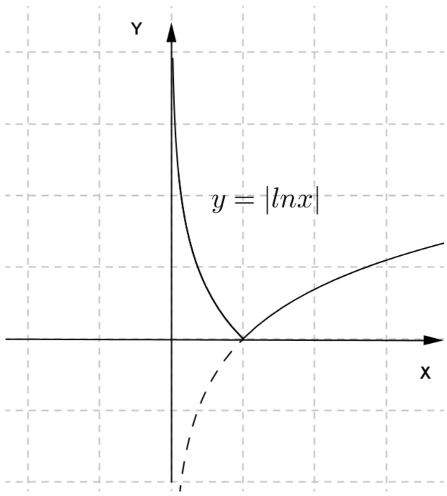
Il grafico sarà simmetrico (di quello del logaritmo) rispetto all'asse y.



d. Come risulta il grafico di $y = |\ln x|$?

Ricordiamo che:

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x & \textit{quando} \quad \ln x \geq 0 \quad \textit{cioè} \quad \textit{per} \quad x \geq 1 \\ -\ln x & \textit{quando} \quad \ln x < 0 \quad \textit{cioè} \quad \textit{per} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$



Quindi il grafico di $|\ln x|$ coincide con il grafico di $\ln x$ quando questo si trova sopra all'asse x (cioè quando le immagini sono positive), mentre andrà "ribaltato" rispetto all'asse x quando si trova sotto all'asse x (cioè quando le immagini sono negative).

ESERCIZI

GRAFICI DEDUCIBILI

Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

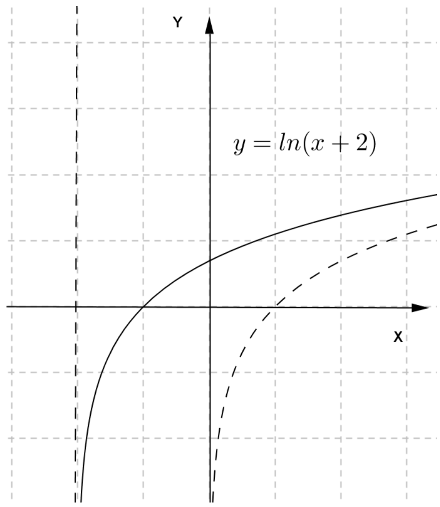
1) $y = \ln(x-2)$ 2) $y = 2^x - 1$ 3) $y = \left|\frac{x}{x-4}\right|$

4) $y = 3^{x-2}$ 5) $y = \ln x - 2$

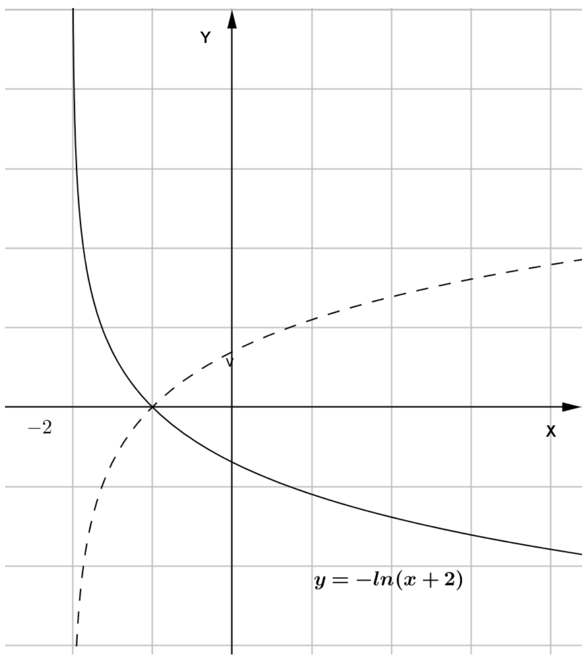
*6) $y = -\ln(x+2)$

Svolgimento:

Partiamo dal grafico di $f(x) = \ln x$ e consideriamo all'inizio il grafico di $y = \ln(x+2)$ (dominio $x > -2$: traslo a sinistra).



Infine consideriamo $y = -\ln(x+2)$ cioè ribaltiamo rispetto all'asse x:



7) $y = |\ln(x-3)|$

8) $y = \ln(x+1)$

9) $y = -\ln(x-3)$

10) $y = |tgx|$

11) $y = -2^x$

12) $y = |\ln(x-4)|$

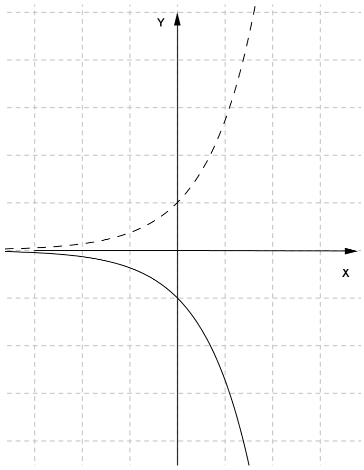
13) $y = \left|\dfrac{x-2}{x}\right|$

14) $y = 2^{x-1}$

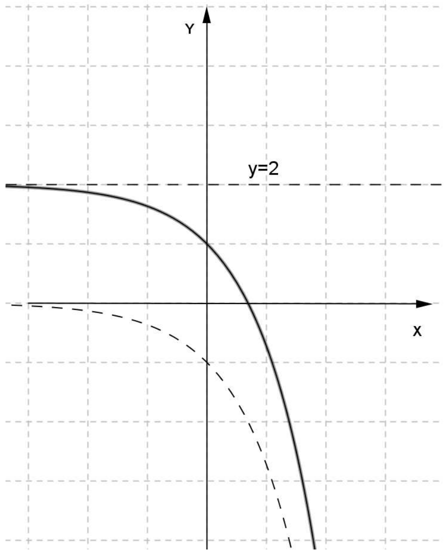
*15) $y = -e^x + 2$

Svolgimento:

Partiamo dal grafico di $f(x) = e^x$ e consideriamo il grafico di $-f(x)$ (simmetrico rispetto all'asse x)



Infine consideriamo $y = -f(x) + 2$ cioè trasliamo verso l'alto di 2 (l'asintoto orizzontale diventa $y = 2$)



Composizione di funzioni

Le funzioni si possono “comporre”.

Se per esempio abbiamo

$$f_1 : x \to x+1$$

$$f_2 : x \to x^2$$

possiamo applicare f_1 e al risultato applicare f_2

$$x \xrightarrow{f_1} x+1 \xrightarrow{f_2} (x+1)^2$$

$y=(x+1)^2$ corrisponde a $f_2 \circ f_1$ che si legge f_2 **composto** f_1 (si scrive vicino alla x la funzione che si applica per prima).

$$f_2 \circ f_1 = f_2(f_1(x))$$

Nota

Notiamo che la composizione tra funzioni non gode della proprietà commutativa cioè:

$$f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$$

Infatti per esempio considerando le funzioni precedenti se applico prima f_2 e poi f_1 ho:

$$x \xrightarrow{f_2} x^2 \xrightarrow{f_1} x^2+1$$

$f_1 \circ f_2$ risulta $y = x^2+1$ ed è diversa da $y=(x+1)^2$

Nota: si possono comporre anche più di 2 funzioni.

Per esempio $y=\ln^2(x+1)$ può essere pensata come la composizione di

$$x \xrightarrow{f_1} x+1 \xrightarrow{f_2} \ln(x+1) \xrightarrow{f_3} \ln^2(x+1)$$

Funzione inversa

Consideriamo una funzione $f(x)$: per funzione inversa di $f(x)$, indicata con il simbolo $f^{-1}(x)$, intendiamo la funzione che associa all'immagine $f(x)$ il valore x di partenza.

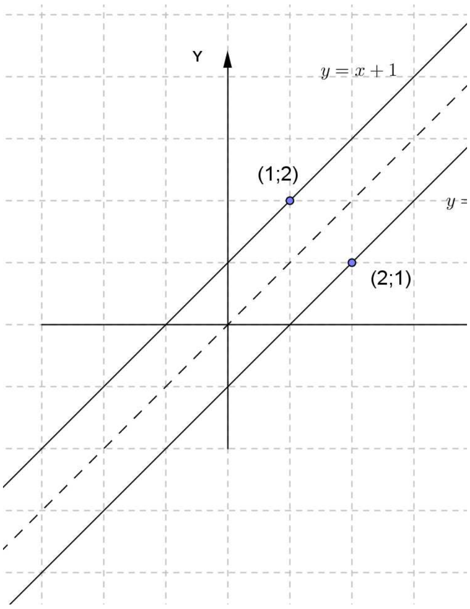
Per esempio se $\qquad f(x) : x \rightarrow x+1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad f^{-1}(x) : x \rightarrow x-1$

Infatti da $\qquad y = x+1 \qquad$ ricavando $x = y-1$ abbiamo che

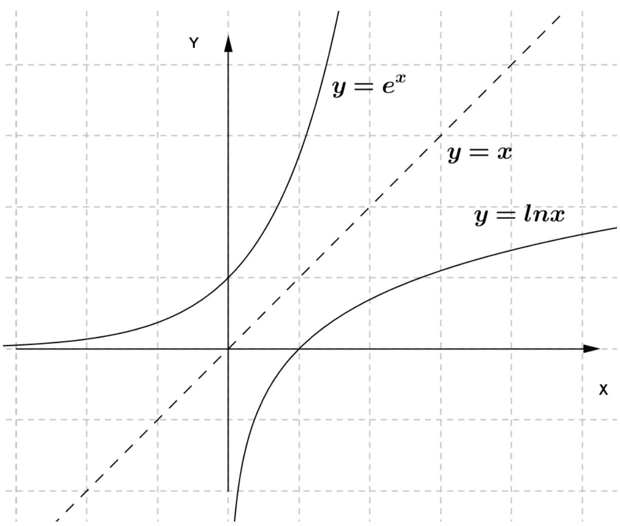
$$x \xrightarrow{f} x+1 = y$$
$$x = y-1 \xleftarrow{f^{-1}} y$$

Generalmente poi, invece di scrivere $f^{-1}(y) = y-1$ si scrive $f^{-1}(x) = x-1$.



Riportando i grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ nello stesso sistema di riferimento, notiamo che sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I-III quadrante: infatti se

$$(x, f(x)) \in G_f \rightarrow \qquad (f(x), x) \in G_{f^{-1}}$$



La funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale (in figura è stata disegnato il grafico della funzione esponenziale in base e) : osserviamo che il dominio e il codominio si scambiano.

Ma possiamo sempre invertire una funzione?

Perché la f^{-1} sia una funzione occorre che $f(x)$ sia **iniettiva** (come dominio di f^{-1} prenderemo il codominio di f).

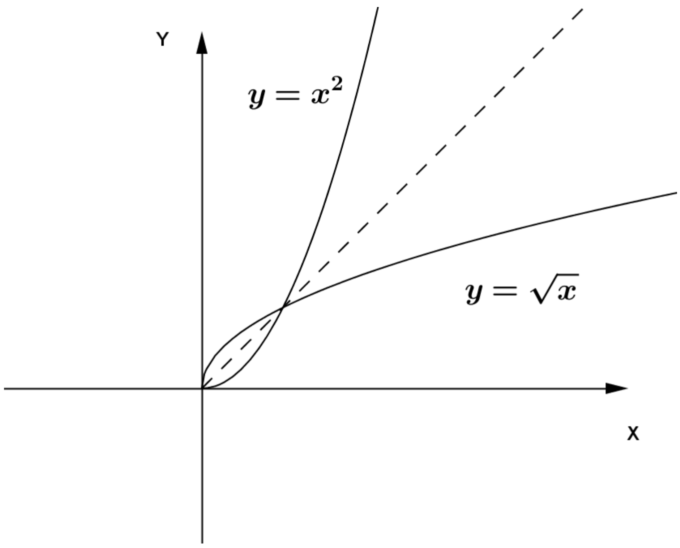
Infatti consideriamo per esempio $f(x)=x^2$.
Se proviamo a ricavare x abbiamo:

$$y=x^2 \qquad\qquad x=\pm\sqrt{y}$$

Ma $y=\pm\sqrt{x}$ non è una funzione! (ad ogni valore di x corrispondono 2 immagini).

In questi casi però, se vogliamo, possiamo decidere di "restringere" il dominio della funzione in modo da renderla iniettiva e poterla così invertire.

Se per esempio consideriamo $y=x^2$ ma solo con $x>0$ la funzione diventa iniettiva e la sua inversa è $y=\sqrt{x}$



Vediamo come sono state definite le funzioni inverse delle funzioni goniometriche.

- **Funzione inversa del seno**

Restringiamo $y = senx$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: in questo intervallo la funzione è iniettiva.

La funzione inversa si indica con $arcsenx$ (che si legge arcoseno di x ed indica l' angolo il cui seno è di x) ed ha come dominio $[-1;1]$ e come codominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Esempi

$arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$ **;** $arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

- **Funzione inversa del coseno**

Se restringiamo $y = \cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ possiamo invertire la funzione: la funzione inversa del coseno ristretto a $[0, \pi]$ si chiama $\arccos x$ (arcocoseno di x).

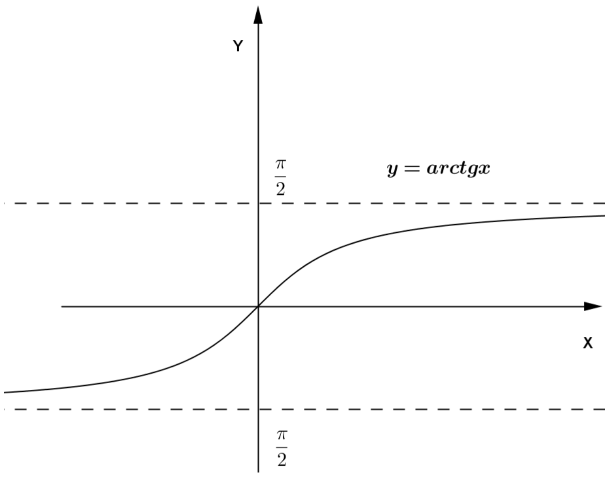
Esempi

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ **;** $\arccos(1) = 0$

- **Funzione inversa della tangente**

Se restringiamo la tangente $y = tgx$ all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ possiamo considerare la funzione inversa, indicata con $arctgx$ (arcotangente di x) che ha come dominio $\Re$ e come codominio $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Il grafico è il seguente ed osserviamo che i due asintoti verticali della funzione tangente diventano asintoti orizzontali per la funzione inversa arcotangente.



SCHEDA DI VERIFICA 1
FUNZIONI

1) Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y=\sqrt{\dfrac{x}{3-x^2}}$ $\quad [x<-\sqrt{3}\cup 0\le x<\sqrt{3}]$

b) $y=arctg\left(\dfrac{x}{x-5}\right)$ $\quad [x\ne 5]$

c) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ $\quad [x<-1\cup x>1]$

d) $y=\sqrt{1-2^x}$ $\quad [x\le 0]$

e) $y=\sqrt{\ln x}$ $\quad [x\ge 1]$

2) Traccia il grafico delle seguenti funzioni indicando anche dominio e caratteristiche:

a) $y=\left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

b) $y=-\ln(3-x)$

c) $y=3^x+1$

d) $y=\sqrt{x^2-4}$

3) a) Date $f_1:x\to\dfrac{1}{x}$ e $f_2:x\to\ln x$, scrivi come risultano $f_2\circ f_1$ e $f_1\circ f_2$ e indica i loro domini.

$$\left[f_2\circ f_1:x\to\ln\left(\frac{1}{x}\right)\qquad D_{f_2\circ f_1}:x>0\qquad ;\qquad f_1\circ f_2:x\to\frac{1}{\ln x}\qquad D_{f_1\circ f_2}:x>0,x\ne 1\right]$$

b) Determina la funzione inversa di $y=e^x-2$
Traccia i grafici di f e f^{-1} nello stesso sistema di riferimento. Cosa osservi?

c) E' possibile invertire la funzione $y=x^2+1$?
Motiva la risposta. Come si dovrebbe restringere il dominio per invertirla?
Disegna il grafico della funzione inversa nel caso in cui si restringa il dominio di f.

SCHEDA DI VERIFICA 2
FUNZIONI

1) Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \ln\left(\dfrac{x^2-9}{x-2}\right)$ $\qquad [\ -3 < x < 2 \quad \cup \quad x > 3\ ]$

b) $y = \sqrt{5^x - 1}$ $\qquad [\ x \geq 0\ ]$

c) $y = \sqrt[5]{\dfrac{\ln x}{\ln x - 2}}$ $\qquad [\ x > 0 \quad ; \quad x \neq e^2\ ]$

d) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$ $\qquad [\ x > 2\ ]$

e) $y = arctg\left(\dfrac{1}{2^x - 8}\right)$ $\qquad [\ x \neq 3\ ]$

2) Traccia il grafico delle seguenti funzioni indicando anche dominio e caratteristiche:

a) $y = |\ln(1-x)|$ $\qquad$ b) $y = e^x + 5$

c) $y = \sqrt{9 - x^2}$ $\qquad$ d) $y = -3^x$

3) a) Date $f_1 : x \to 2^x$ e $f_2 : x \to x+1$, scrivi come risultano $f_2 \circ f_1$ e $f_1 \circ f_2$ e indica i loro domini.

b) Si può invertire la funzione $y = \dfrac{x-1}{x}$?
Se la risposta è affermativa determina l'inversa.

c) Disegna il grafico della funzione $y = e^x + 3$ e indicane dominio e caratteristiche. Si può invertire? Se la risposta è affermativa determina la funzione inversa.

Limiti di una funzione

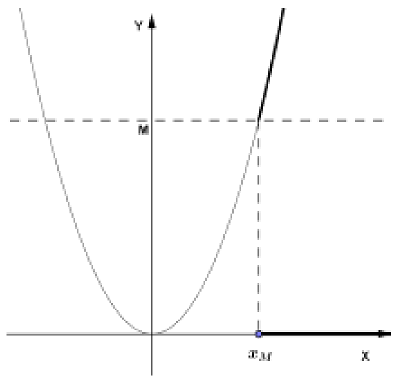
Definizioni

I) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$

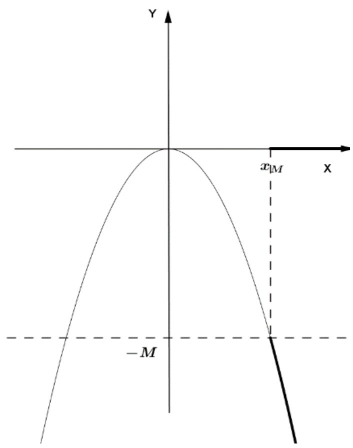
Cominciamo a studiare il "comportamento" di una funzione quando la x *diventa sempre più grande*: scriveremo $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e leggeremo "limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$". Si possono avere vari casi.

a) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x > x_M \quad f(x) > M$

Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y = x^2$



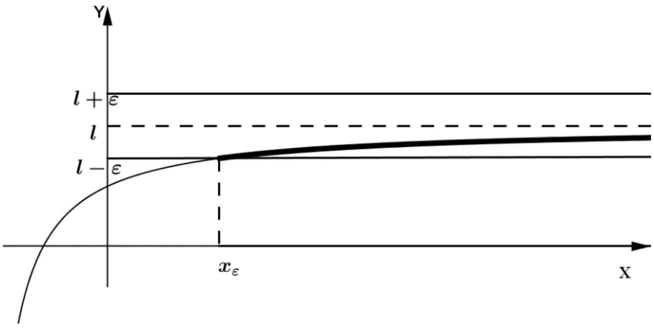
b) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x > x_M \quad f(x) < -M$



Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y = -x^2$

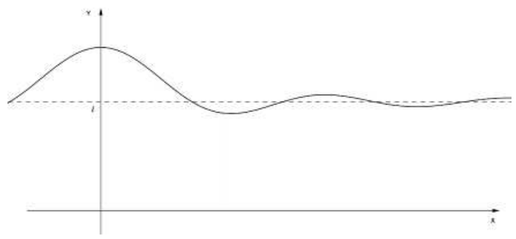
c) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l}$

Si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x > x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



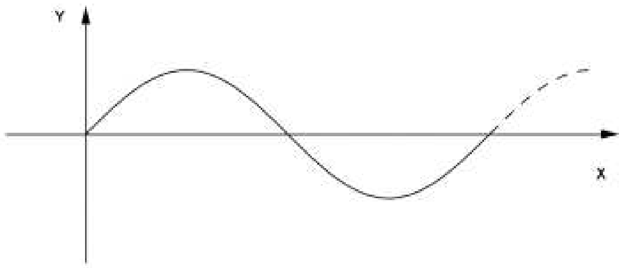
La retta $y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Nota: non dobbiamo pensare che l'asintoto non possa essere intersecato dal grafico.
Possiamo anche avere grafici come il seguente: la cosa essenziale è che le oscillazioni si "smorzino" cioè che la distanza fra il grafico e la retta $y = l$ tenda a 0.



d) $\boxed{\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)}$

Consideriamo $f(x) = \text{sen}\, x$. Qual è il suo limite quando $x \to +\infty$?
In questo caso che $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ in quanto la funzione oscilla e non ha un "comportamento definitivo".

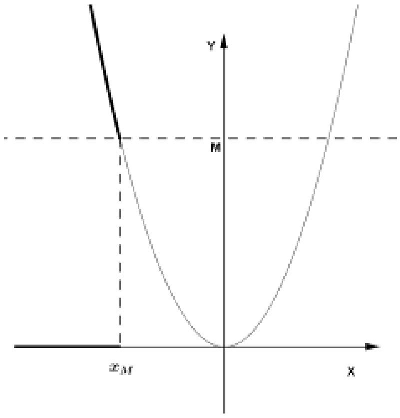


Nota: anche $y=cosx$ e $y=tgx$ e in generale le funzioni periodiche non hanno limite quando $x \to +\infty$.

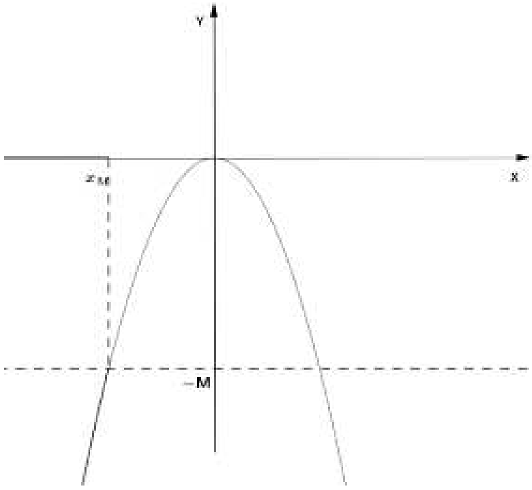
II) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x)}$

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0\ \exists x_M\colon\ \forall x < x_M\ f(x) > M$

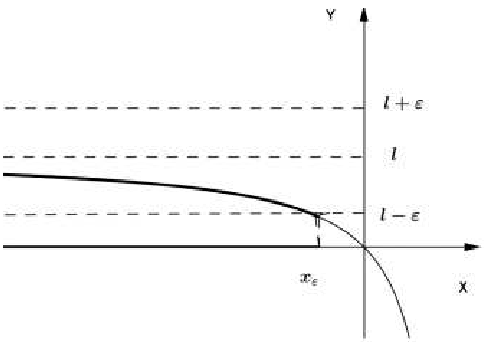
Osserviamo che questa volta consideriamo $x < x_M$ perché $x \to -\infty$.



b) Analogamente $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0\ \exists x_M\colon\ \forall x < x_M\ f(x) < -M$



c) Analogamente $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x < x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



$y = l$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

d) $\nexists \lim_{x \to -\infty} f(x)$ quando la $f(x)$ per $x \to -\infty$ non cresce sempre di più o non decresce sempre di più e neppure si avvicina ad un valore l: per esempio anche $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.

III) $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ dove } x_0 \notin D_f}$

Studiamo adesso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ dove $x_0 \notin D_f$ ma è un punto a cui posso "avvicinarmi" quanto voglio da destra e/o da sinistra.

Se ci avviciniamo a x_0 "da destra" scriveremo $\lim_{x\to x_o^+} f(x)$, se ci avviciniamo a x_0 "da sinistra" scriveremo $\lim_{x\to x_o^-} f(x)$.

a) Il limite è infinito

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$$

Abbiamo

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \;\; \exists \; I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \; f(x) > M$

e

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \;\; \exists \; I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \; f(x) < -M$

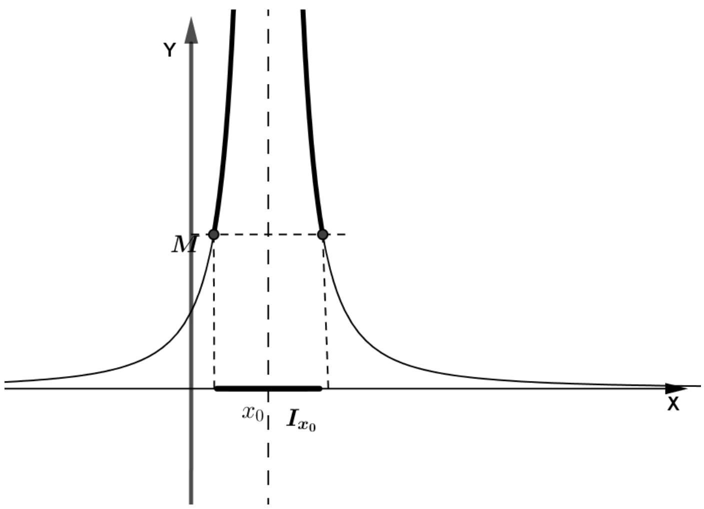
Invece

$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \;\; \exists \; I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \; f(x) > M$

e

$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \;\; \exists \; I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \; f(x) < -M$

La retta $x = x_o$ è **asintoto verticale** per la funzione : il "comportamento" può essere diverso da destra e a sinistra oppure lo stesso (in figura è rappresentato il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ che è un esempio in cui $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ con $x_0 = 1$.



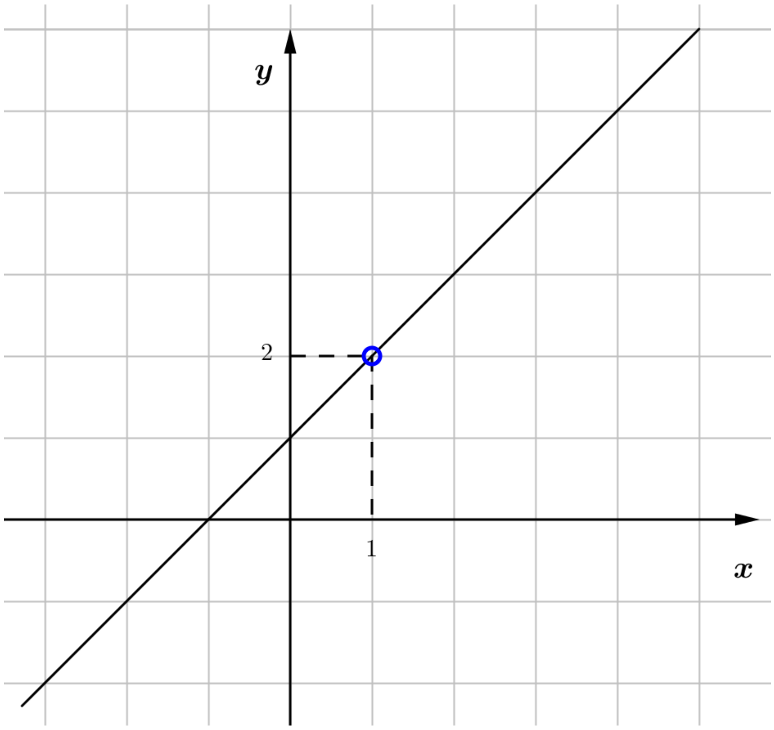
b) **Il limite è un numero finito**

Esempio: considera per esempio la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Il suo dominio è $\Re \setminus \{1\}$ ma calcolando il limite quando $x \to 1$ abbiamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

Infatti il grafico di $f(x)$ risulta una retta privata di un punto:



c) **Il limite non esiste**

Esempio: consideriamo $y = sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Il suo dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Proviamo a calcolare

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

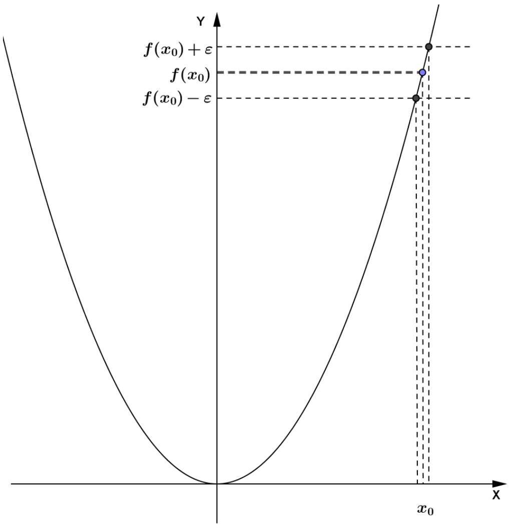
Quando $x \to 0^+$ abbiamo che $z \to +\infty$ ma sappiamo che $\lim\limits_{z\to+\infty} \operatorname{sen} z$ non esiste.

Analogamente se $x \to 0^-$ avremo che $z \to -\infty$ e $\lim\limits_{z\to-\infty} \operatorname{sen} z$ non esiste.

Quindi possiamo concludere che $\lim\limits_{x\to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ non esiste.

IV) $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) quando\ x_0 \epsilon D_f}$

a) Abbiamo $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_o} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

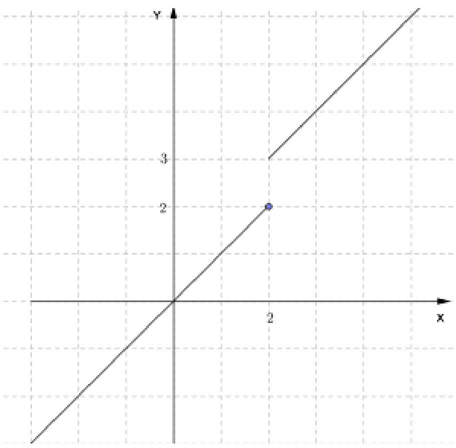


In questo **caso la funzione si dirà continua in x_0**.

b) Vediamo un altro caso considerando il seguente esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & per\ x \leq 2 \\ x + 1 & per\ x > 2 \end{cases}$$

Si tratta di una funzione definita "a tratti" cioè la funzione ha una definizione per $x \leq 2$ e un'altra definizione per $x > 2$. Il suo grafico risulta "spezzato":



In questo caso abbiamo un limite destro diverso dal limite sinistro poiché:

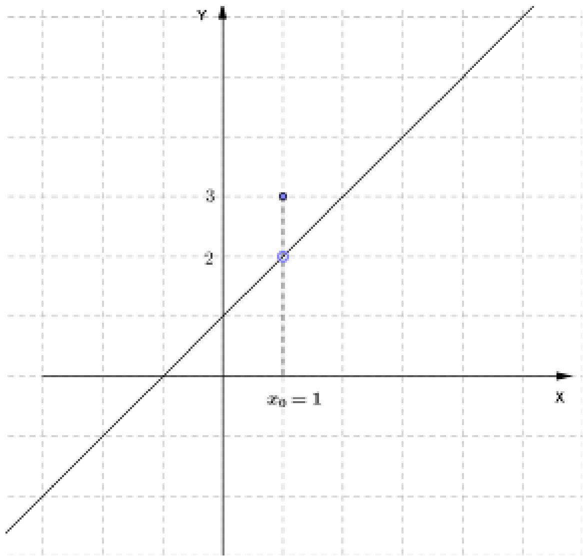
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \quad e \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

In generale se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$ $(l_1 \neq l_2)$ diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 1° specie o "salto".**

c) Consideriamo questa funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & per\ x \neq 1 \\ 3 & per\ \ x = 1 \end{cases}$$

Quanto vale $\lim_{x \to 1} f(x)$?



Se scomponiamo abbiamo che per $x \neq 1$ possiamo scrivere $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} = x + 1$ e quindi il grafico risulta quello in figura:

Quando ci avviciniamo a $x_0 = 1$ i valori della funzione si avvicinano a 2 e il fatto che $f(1) = 3$ non ha importanza perché conta il comportamento della funzione quando $x \to x_0 = 1$ e quindi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2\ (\neq f(1) = 3)$$

In questo caso quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

e diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 3° specie o "eliminabile"** poiché potremo "**ridefinire**" $f(x)$ in $x_0 = 1$ associandole il valore 2 cioè il valore del limite per $x \to 1$.

d) Possiamo avere una funzione per cui **non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ con $x_0 \in D_f$?**

Se consideriamo $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & per\ \ x \neq 0 \\ 1 & per\ \ x = 0 \end{cases}$

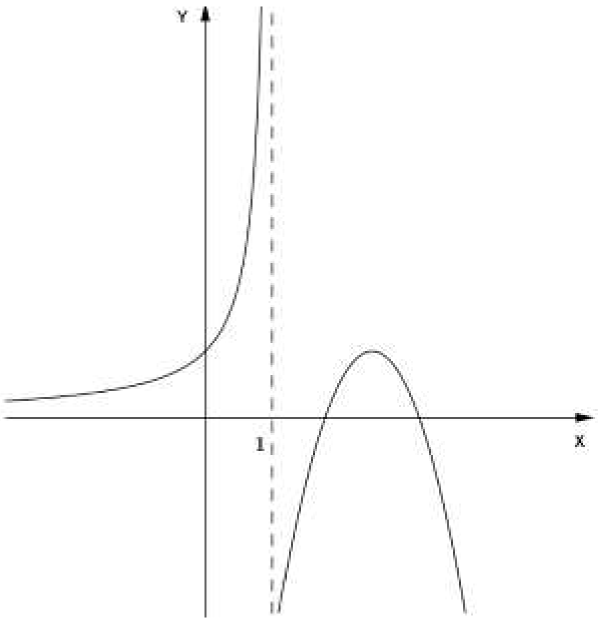
abbiamo che $x_0 = 0$ è nel dominio (per definizione $f(0) = 1$) ma, poiché il valore del limite non dipende dal valore della funzione in x_0, abbiamo che $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste perché, come avevamo già visto, non esiste $\lim_{x \to 0} sen\frac{1}{x}$.

Nota: anche in questo caso si dice che $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

ESEMPI ED ESERCIZI GUIDATI

I) Per verificare la comprensione del concetto di limite proviamo a **"leggere" i limiti di un grafico assegnato.** Consideriamo per esempio il seguente grafico:

a)



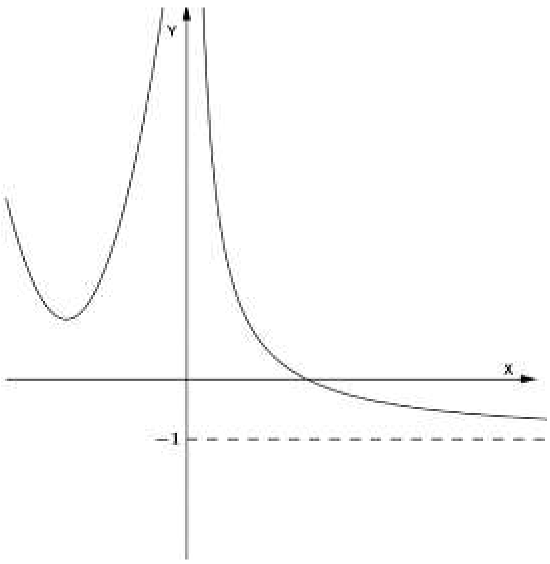
Vediamo che $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ e abbiamo:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad y = 0$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ $\quad x = 1$ è asintoto verticale

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b)

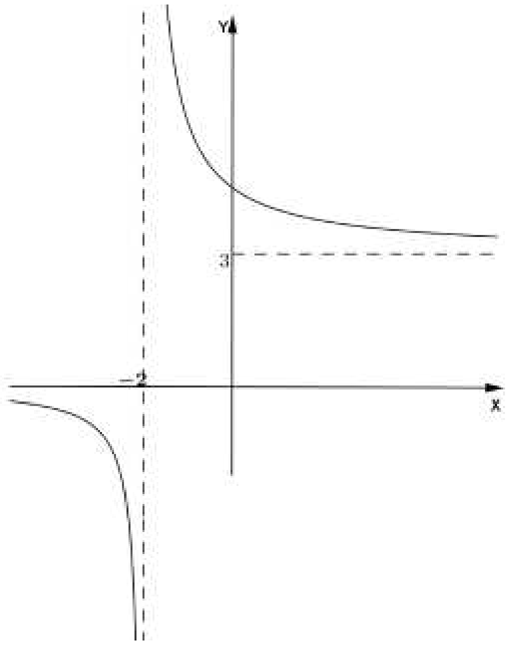


Abbiamo $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ $\quad$ ($x = 0$ asintoto verticale)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ $\;$ ($y = -1$ asintoto orizzontale) c)



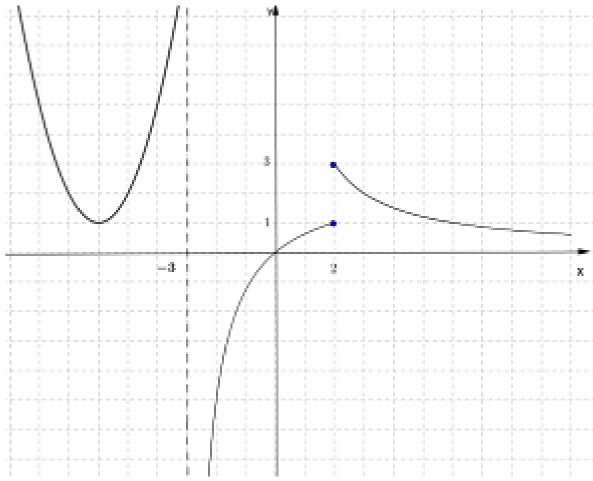
$D_f = \cdots$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim_{x\to-2^-} f(x) = \cdots \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \cdots \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$

d)



$D_{f=\cdots}$

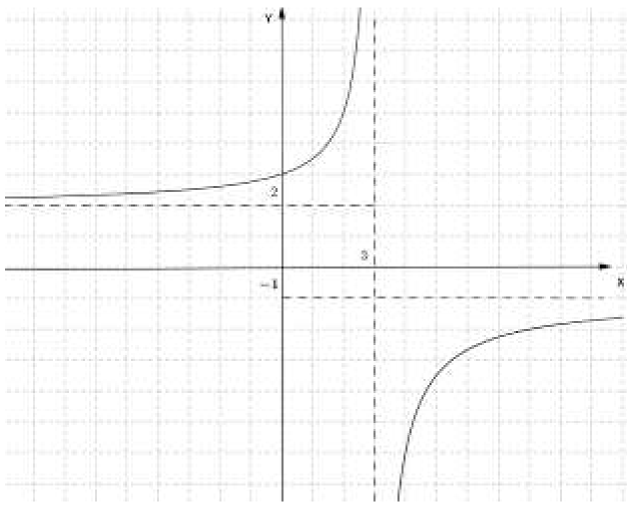
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim_{x\to-3^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim_{x\to-3^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\begin{cases} \lim_{x\to2^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots..$

e)



$D_f = \ldots..$

……………………….

………………………..

………………………..

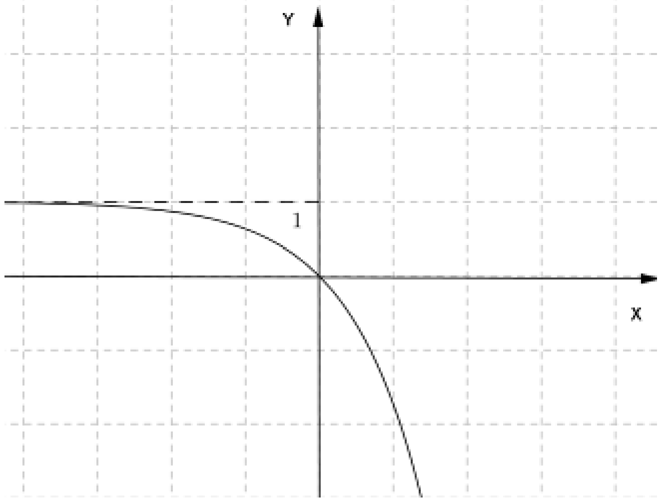
………………………..

II) Proviamo adesso a **disegnare un grafico che abbia dei limiti assegnati.**

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

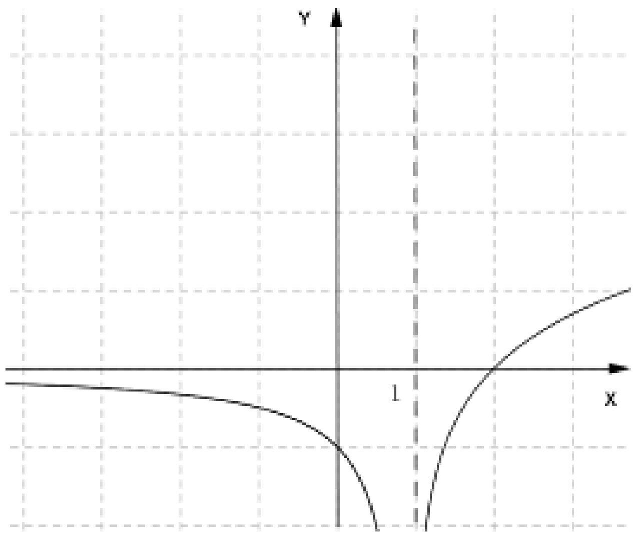
Un possibile grafico potrebbe essere:



b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Possiamo disegnare un grafico così:



Naturalmente questo è solo un esempio poiché ci possono essere grafici diversi ma che hanno comunque gli stessi limiti.

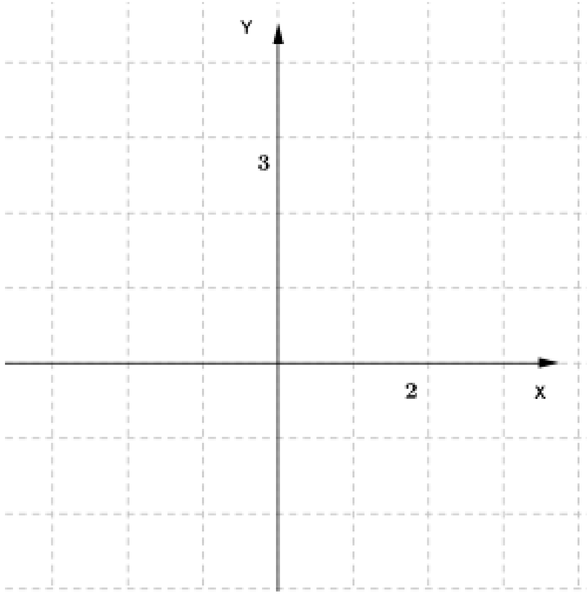
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Come potrebbe essere il grafico di una funzione che ha questi limiti?

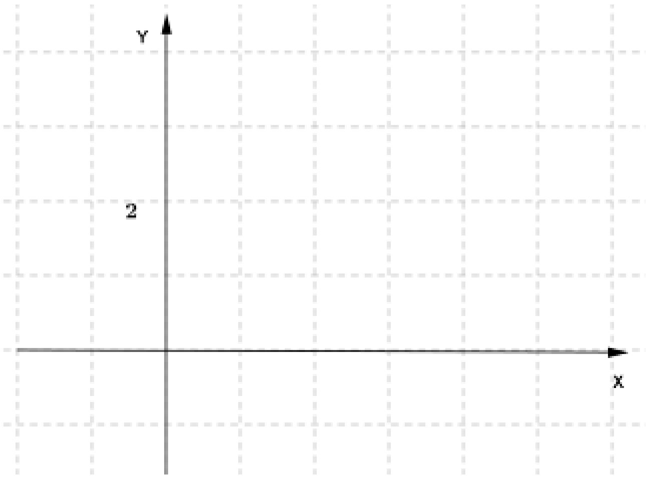


d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

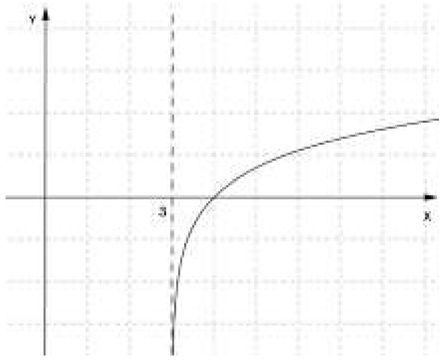
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$



Come potrebbe essere il grafico di una funzione con questi limiti?

III) Tracciamo dei grafici conosciuti e indichiamone i limiti:

a) $f(x) = \ln(x-3)$

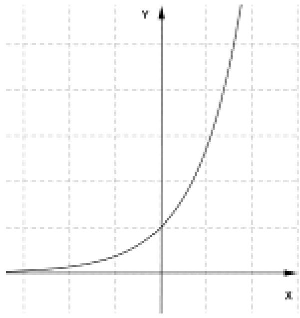


$D_f: x > 3$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty \quad x = 3$ asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = e^x$

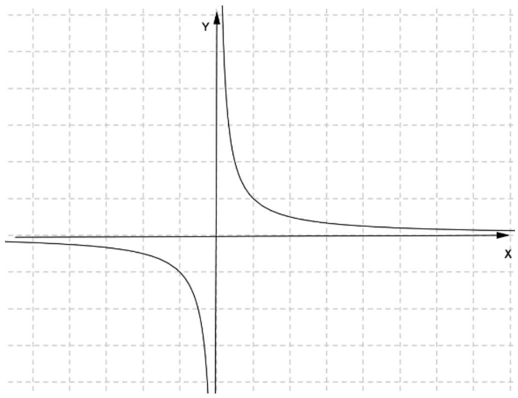


$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$



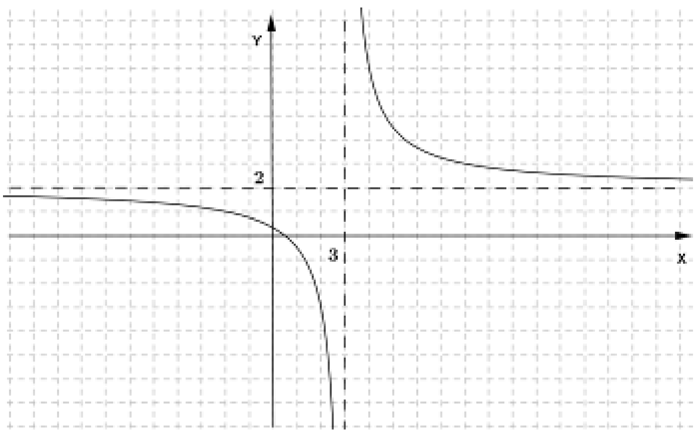
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases} \quad x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

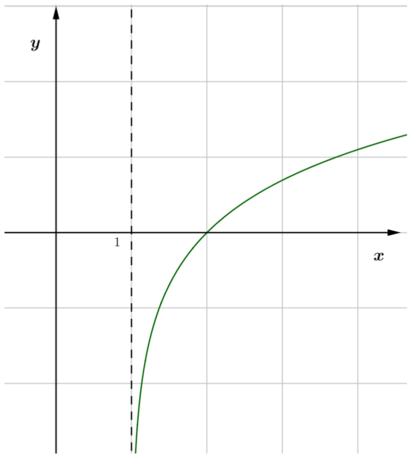
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

ESERCIZI

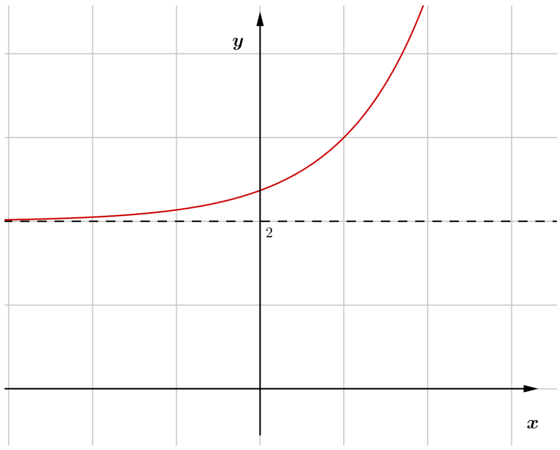
LIMITI

1) Scrivi quali sono i limiti significativi della funzione con il seguente grafico:

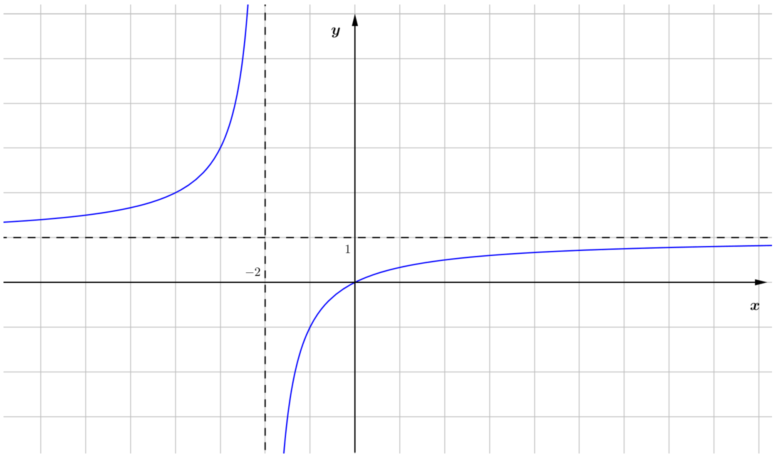
a)



b)



c)



2) Disegna il grafico di una funzione che abbia i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

g) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

h) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to2^+} f(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

i) $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to3} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

l) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

m) $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to3} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

n) $\lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to4} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3)Disegna i grafici delle seguenti funzioni e scrivine i limiti significativi:

a) $y = \frac{1}{x+3}$

b) $y = \ln(x+2)$

c) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $y = -2^x$

e) $y = \left|\frac{1}{x}\right|$

f) $y = \sqrt{4 - x^2}$

g) $y = \left|\frac{x}{x-2}\right|$

h) $y = |senx|$

i) $y = -\ln(x+1)$

l) $y = x^2 - 2x$

m) $y = e^{x-1}$

n) $y = 2^x + 3$

o) $y = \frac{1-x}{x}$

p) $y = |\ln(x-3|$

q) $y = -x^2 + 1$

r) $y = 3^{x-2}$

s) $y = |x-2|$

t) $y = |tgx|$

SCHEDA DI VERIFICA
LIMITI

1. Disegna il grafico delle seguenti funzioni ed indica dominio, caratteristiche e limiti significativi:

   a. $y = -\ln(x+4)$

   b. $y = \left|\dfrac{1-x}{x+3}\right|$

   c. $y = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Disegna il grafico di una funzione che abbia i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Disegna il grafico di $y = \frac{1}{x-3}$ e scrivi i limiti significativi.

4. Disegna il grafico di $y = \ln(x+1)$ e scrivi i limiti significativi.

Calcolo dei limiti

Limite della somma di due funzioni

Supponiamo di dover calcolare

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) + g(x))$$

e di conoscere $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$.

Possiamo dire che il limite della somma delle due funzioni sarà la somma dei limiti?

Occorre considerare vari casi e consideriamo per esempio $x \to x_0$.

a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ si può dimostrare facilmente che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$$

b) Se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = l$ e $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = +\infty$ (oppure $-\infty$)

si dimostra facilmente che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty \quad \text{(oppure } -\infty\text{)}$$

(lo stesso se $\lim f(x) = \infty$ e $\lim g(x) = l$).

c) Se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = +\infty$ è chiaro (la dimostrazione è semplice) che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$$

e che, analogamente, se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty$ e $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = -\infty$ anche

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \big(f(x) + g(x)\big) = -\infty$$

d) Ma se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = -\infty$ (o viceversa)?

Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = 2x \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) = x$ ho $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x)) = +\infty$

- $f(x) = 2x \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -2x \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) \equiv 0$ ho $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x)) = 0$

- $f(x) = 2x \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -3x \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) = -x$ ho $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x)) = -\infty$

- $f(x) = x + 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) \equiv 1$ ho $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x)) = 1$

Quindi è chiaro che **in questo caso non c'è una regola generale**: si dice che si ha una **"forma indeterminata"** nel senso che $\underset{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}}{\mathrm{Lim}}(f(x) + g(x))$ quando $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to -\infty$ non può essere determinato a priori e il limite dovrà essere calcolato caso per caso con particolari accorgimenti. Riassumiamo quindi i vari casi in questa tabella:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) + g(x)$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**forma indeterminata**

Limite del prodotto di due funzioni

In questo caso abbiamo la seguente situazione:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) \cdot g(x)$
l_1	l_2	$l_1 \cdot l_2$
$l \neq 0$	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)
$\boldsymbol{l = 0}$	∞	**forma indeterminata**
∞	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)

Quando scriviamo "regola dei segni del prodotto" significa che

se $\lim f(x) = l > 0$ e $\lim g(x) = +\infty$ allora $\lim f(x) \cdot g(x) = +\infty$

se $\lim f(x) = l < 0$ e $\lim g(x) = +\infty$ allora $\lim f(x) \cdot g(x) = -\infty$

e così via.

Ma perché $\mathbf{0} \cdot \infty$ risulta una forma indeterminata?
Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) \equiv 1$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 1$

- $f(x) = x^2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = x$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

- $f(x) = x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$

Quindi è chiaro che **non c'è una regola generale per questo limite**: dovremo calcolarlo caso per caso con opportuni passaggi.

Limite della funzione reciproca

Abbiamo i seguenti casi (la dimostrazione è semplice):

$\lim f(x)$	$\lim \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$l = 0^+$ (cioè $f(x) > 0$)	$+\infty$
$l = 0^-$ (cioè $f(x) < 0$)	$-\infty$
∞	0

Limite del quoziente di due funzioni

Osservando che $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ otteniamo:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 \neq 0$	$\frac{l_1}{l_2}$
$l_1 \neq 0$	$l_2 = 0$	∞ (regola dei segni)
l_1	∞	0
∞	l_2	∞ (regola dei segni)
∞	∞	**forma indeterminata**
0	**0**	**forma indeterminata**

Abbiamo due forme indeterminate perché

$\frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0$ (forma indeterminata del prodotto)

$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$ (forma indeterminata del prodotto)

In conclusione, nel calcolo dei limiti, si presentano **4 forme "indeterminate":**

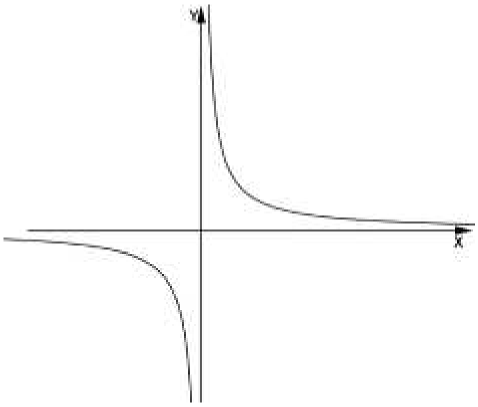
- $+\infty - \infty$ (per la somma)
- $0 \cdot \infty$ (per il prodotto)
- $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ (per il quoziente)

Esempi

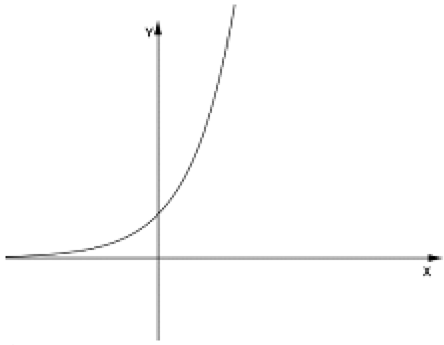
Daremo per scontata la continuità e la conoscenza dei limiti significativi delle funzioni elementari.

Per esempio:

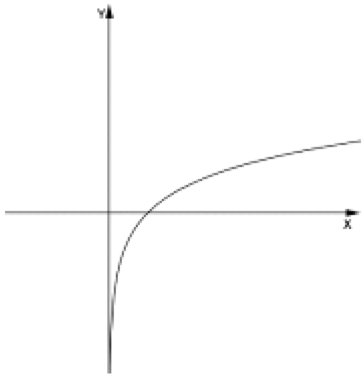
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$



$$\lim_{x\to -\infty} e^x=0$$
$$\lim_{x\to +\infty} e^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to 3} e^x=e^3$$

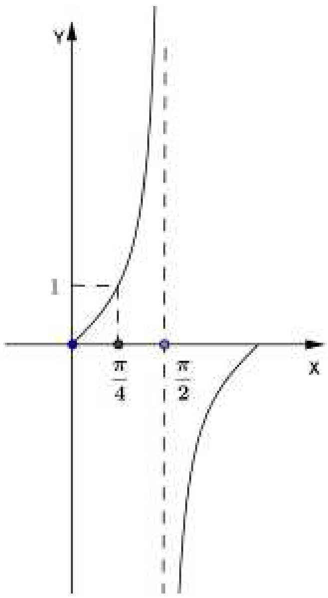


$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0$$



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tgx=+\infty,\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tgx=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} tg\,x=tg\frac{\pi}{4}=1$$



Esempi di calcolo di limiti

a) Limiti di somme di funzioni

- $\lim_{x\to 1} x^2 + 2x - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 + 3x^3 = (+\infty + \infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} e^x + x = (0 - \infty) = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \ln x + 3 = (+\infty + 3) = +\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x + 2x = (+\infty + \pi) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \operatorname{sen} x = (+\infty + 0) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x$

$$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty \quad \text{ma non esiste} \quad \lim_{x\to +\infty} \sin x$$

Osserviamo però che $x + \operatorname{sen} x \geq x - 1$ e poiché

$$\lim_{x\to +\infty} (x-1) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x = +\infty$$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 - x \quad (+\infty - \infty)$

Si tratta della forma indeterminata $(+\infty - \infty)$: **nel caso di funzioni polinomiali possiamo mettere in evidenza** e uscire dalla forma di indecisione:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 - x = \lim_{x\to +\infty} x(x-1) = \big(+\infty \cdot (+\infty)\big) = +\infty$$

- $\lim_{x\to -\infty} x^2 - x = (+\infty + \infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} x^2 + x = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to -\infty} x(x+1) = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty - \infty)$

Si tratta di una forma indeterminata: possiamo fare una specie di “razionalizzazione”:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-(x^2+1)}{\left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}\right)} \quad \left(-\frac{2}{+\infty}\right) = 0$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty - \infty)$

Si tratta ancora di una forma indeterminata, ma non conviene fare come prima perché x^2 non si semplificherebbe e avremmo un’altra forma indeterminata $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
Possiamo mettere in evidenza x^2 e portare fuori dalla radice: ricordiamo che $\sqrt{x^2} = |x|$, ma se il limite è $x \to +\infty$ allora x è positivo e $|x| = x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2-\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{0}} - \sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{0}}\right) \qquad (+\infty \cdot \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{n° pos.}}) = +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} \qquad (+\infty - \infty)$

Anche in questo caso non conviene “razionalizzare” ma occorre mettere in evidenza:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} - \sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{3+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{0}} - \sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{0}}\right) = \left(+\infty(\sqrt{3}-1)\right) = +\infty$$

b) Limiti di prodotti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} x \cdot e^x = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \cos x \cdot \ln x = \big(1 \cdot (-\infty)\big) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} (\ln x + 1)^2 = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} x \cdot tg\, x = \left(\frac{\pi}{2} \cdot (-\infty)\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to +\infty} x \cdot \operatorname{arctg} x = \left(+\infty \cdot \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot \ln x = \big((+\infty)(+\infty)\big) = +\infty$

c) Limiti di quozienti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{2x} = \left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

  $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$

  $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \left(-\frac{\infty}{0^+} = -\infty \cdot \left(\frac{1}{0^+}\right) = (-\infty) \cdot (+\infty)\right) = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x+2}$: si tratta di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$: possiamo raccogliere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)\right)} = 2$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x+3}$: anche in questo caso è una forma $\frac{\infty}{\infty}$ e raccogliendo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x\left(1+\left(\frac{3}{x}\right)\right)} = \left(\frac{+\infty\cdot 2}{1}\right) = +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^3\left(1+\left(\frac{5}{x^3}\right)\right)} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = 0$

Osserviamo che $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}}$ con $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinomi risulterà:

∞	se	grado $P_1(x) >$ grado $P_2(x)$
$l = \frac{\textit{coefficiente termine di grado max di } P_1(x)}{\textit{coefficiente termine di grado max di } P_2(x)}$	se	grado $P_1(x) =$ grado $P_2(x)$
0	se	grado $P_1(x) <$ grado $P_2(x)$

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Risulta una forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}\right)$, ma non conviene mettere in evidenza come prima perché $x \to 2$ e non $x \to \infty$ e quindi non otterremmo termini che tendono a zero: in questo caso scomponendo e semplificando abbiamo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$$

ESERCIZI
CALCOLO DI LIMITI

Calcola i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 2x$ $[+\infty]$

2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^2-1}$ $[-\infty]$

3. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$ $[0]$

4. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$ $[+\infty]$

5. $\lim_{x \to 2} x^2 + x - 3$ [3]

6. $\lim_{x \to 1} \ln x + 3x^2$ [3]

7. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x$ $[\pi/6]$

8. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x - 5x$ $[-\infty]$

9. $\lim_{x \to 2} (x-2) \ln x$ $[0]$

10. $\lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \ln x$ $[+\infty]$

11. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+5}$ $[+\infty]$

12. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-x+1}{3x^2-2}$ [1/3]

13. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x-2}{2x^2+1}$ $[+\infty]$

14. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{2x^3+x+2}$ [0]

15. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{3x+1}$ [1/3]

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{x^2-2x-5}$ $[+\infty]$

17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2}{2x^3+x+1}$ $[\frac{1}{2}]$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-3}{2x^3+1}$ $[0]$

19. $\lim\limits_{x+\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+5}$ $[0]$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$ $[+\infty]$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+4}$ $[0]$

22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2+1}$ $[-\infty]$

23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+5}$ $[-\infty]$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+x^2}{3x^2-1}$ $[\frac{1}{3}]$

25. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+x-3}$ $[\frac{\sqrt{2}}{4}]$

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9-x^2}{3-x}$ $[6]$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}-\sqrt{3x^2+1}$ $[-\infty]$

28. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$ $[6]$

29. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ $[3]$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+1}{4x^4+x+2}$ $[\frac{1}{4}]$

Limite di una funzione composta

Supponiamo di dover determinare $\lim_{x \to x_o} g(f(x))$ oppure $\lim_{x \to \infty} g(f(x))$: si può dimostrare che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (l può essere anche $\pm\infty$ oppure si può trattare di un limite per $x \to \infty$) allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$$

Esempi

- $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} e^{\operatorname{tg} x} \underset{\downarrow}{=} \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$
  $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \underset{\downarrow}{=} \lim_{y \to 1} \ln y = 0$$
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Nota: per calcolare il limite di $f(x)^{g(x)}$ si scrive

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

e si calcola come limite di una funzione composta.

Esempio: $\lim_{x \to +\infty} (x+1)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \cdot \ln(x+1)} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

Un limite importante

Se proviamo a calcolare $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ ci accorgiamo che non riusciamo a calcolarlo perché all'esponente compare la forma indeterminata $\infty \cdot 0$: se, utilizzando la calcolatrice, proviamo a calcolare $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ sostituendo a x numeri molto grandi in valore assoluto (sia positivi che negativi) , notiamo che ci stabilizziamo su un numero che risulta circa 2,71…..

Questo valore limite è stato indicato con la lettera *e* cioè abbiamo la seguente definizione del numero *e*

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Nota: con la scrittura $x \to \infty$ si intende che il limite vale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

NOTA: *e* viene chiamato **numero di Eulero** o **numero di Nepero** e lo avevamo già trovato quando abbiamo studiato i logaritmi.

ESERCIZI
LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{x-1}}$ $[e]$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{arctg}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ $\left[+\frac{\pi}{2}\right]$

3. $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $[+\infty]$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{tg}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ $[0]$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$ $[\ln 4]$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ $[-\infty]$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{3x}{x+1}}$ $[8]$

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^x$ $[0]$

9. $\lim\limits_{x+\infty} e^{\frac{1-x^2}{x+2}}$ $[\ 0\ ]$

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} arctg\left(\frac{3+x^4}{3x^3-1}\right)$ $[\ \frac{\pi}{2}\ ]$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^3+1}{2x^2-5}}$ [$+\infty$]

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^3-7}\right)$ [$-\infty$]

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+x-2}\right)$ [$\dfrac{\pi}{4}$]

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)^x$ [$+\infty$]

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^4+1}{x^4}}$ [e]

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{5x^2-1}$ [$-\infty$]

17. $\lim\limits_{x\to-1} 2^{\frac{x^2-1}{x+1}}$ [$\dfrac{1}{4}$]

18. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{2x+3}{x}}$ [$+\infty$]

19. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$ [0]

20. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^3+5}{x^3-x+1}\right)^x$ [$+\infty$]

Limiti e asintoti di una funzione

Abbiamo già visto che

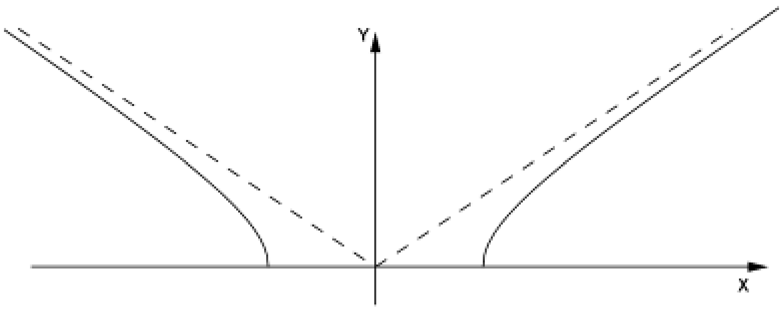
- se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ e/o $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \Rightarrow x = x_0$ è asintoto verticale

- se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \Rightarrow y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l' \Rightarrow y = l'$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

Ma come possiamo determinare, con il calcolo dei limiti, un asintoto obliquo del grafico di f(x)?

Ricordiamo che il grafico di una funzione può avere anche due asintoti obliqui diversi (vedi figura).



Consideriamo per esempio $x \to +\infty$.

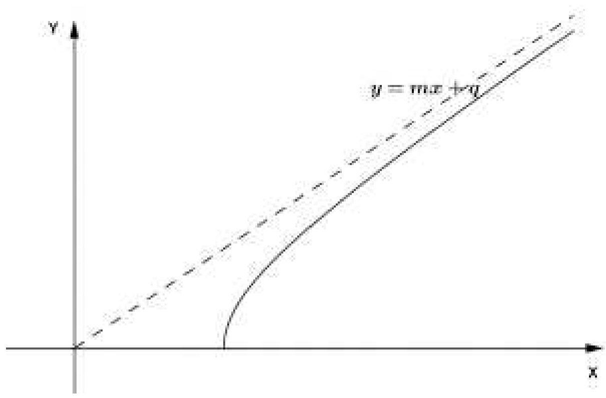
Quali sono le condizioni che si devono verificare perché il grafico di $f(x)$ abbia come asintoto obliquo la retta $y = mx + q$ per $x \to +\infty$?

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \qquad (m \neq 0)$

Infatti se $f(x) \simeq mx + q$ per $x \to +\infty$ allora

$\frac{f(x)}{x} \simeq m + \left(\frac{q}{x}\right)$



3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$ (con q anche 0)

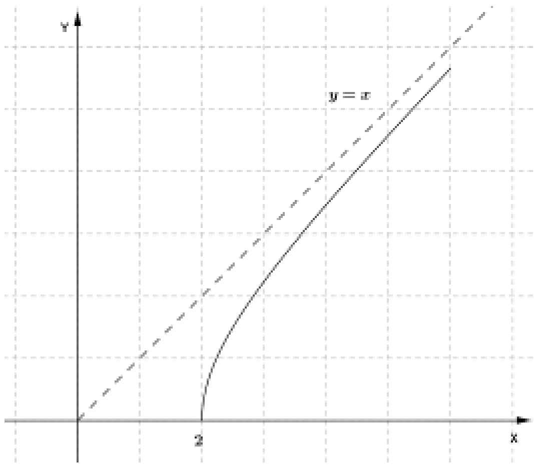
Esempio

Verifichiamo $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ha asintoto obliquo $y=x$ per $x\to+\infty$ (si tratta infatti di un "pezzo" di iperbole equilatera).

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}=1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=\left(\frac{-4}{+\infty}\right)=0 \qquad (q)$$



Vediamo se $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ ha asintoti obliqui. Cominciamo a studiare i limiti per $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=-1 \qquad (q)$$

Quindi $y=x-1$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Per $x\to-\infty$ si ottiene lo stesso asintoto (verificalo).

Nota: osserviamo che **una funzione razionale fratta** $f(x)$ **in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore avrà sempre un asintoto obliquo** (lo stesso per $x\to\pm\infty$) (che si può ottenere anche facendo la divisione tra il polinomio "numeratore" e il polinomio "denominatore").

Esercizio svolto

Ora che abbiamo esaminato il metodo di ricerca di eventuali asintoti obliqui, possiamo, data una funzione, determinare tutti i suoi eventuali asintoti.

Consideriamo $\quad f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$

Per prima cosa determiniamo il dominio di $f(x)$: $\quad D_f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Per determinare eventuali asintoti cominceremo proprio studiando i limiti quando $x \to 1$ o $x \to -1$.
È importante in questo caso distinguere limite destro e limite sinistro:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \left(\frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \left(\frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$$

Quindi $x = -1$ è asintoto verticale.

Nota: per stabilire il segno dello zero al denominatore basta ricordare che $1 - x^2 > 0$ quando $-1 < x < 1$.

Quindi se $x \to -1^-$ avrò 0^-

se $x \to -1^+$ avrò 0^+

ecc...

Analogamente: $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$

Quindi $x = 1$ è asintoto verticale.

Poiché il dominio della funzione me lo permette, passo al calcolo dei limiti quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

In questo caso mi rendo subito conto che si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore e quindi ci sarà un asintoto obliquo (lo stesso sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$).

Lo determino studiando i limiti per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x - x^3} = -2 \quad (m)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{1 - x^2} + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = 0 \quad (q)$$

Quindi $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.

Infatti alla stessa conclusione si arriva facendo la divisione fra numeratore e denominatore della funzione:

$$\begin{array}{c|l} 2x^3 & -x^2+1 \\ \cline{2-2} -2x^3 \;\; 2x & -2x \\ \cline{1-1} // & \end{array}$$

$\frac{2x^3}{1-x^2} = -2x + \frac{2x}{1-x^2}$ e quindi poiché $\frac{2x}{1-x^2} \to 0$ per $x \to \infty$ si ha che $f(x) \simeq -2x$

In conclusione la funzione $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$ ha

$x = -1$ e $x = 1$ come asintoti verticali

$y = -2x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

ESERCIZI
ASINTOTI

Determina gli asintoti delle seguenti funzioni:

1) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ $[x = -1\ as. vert.; x = 1\ as. vert.; y = x\ as. obl.]$

2) $y = \frac{x^4}{x^4-16}$ $[x = -2\ as\ vert.; x = 2\ as. vert.; y = 1\ as. orizz.]$

3) $y = \frac{2x^4}{x^3-1}$ $[x = 1\ as. vert.; y = 2x\ as. obliquo]$

4) $y = \frac{x^2}{3x-1}$ $[x = \frac{1}{3}\ as. vert.; y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\ as. obl.]$

5) $y = \frac{1-x^2}{x^2-9}$ $[x = -3\ as. vert.; x = 3\ as. vert.; y = -1\ as. orizz.]$

6) $y = \ln\left(\frac{x-4}{x-1}\right)$ $[y = 0\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 1\ as. vert.; x = 4\ as. vert.]$

7) $y = e^{\frac{x-4}{x}}$ $[y = e\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 0\ as. vert.]$

8) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $[y = 1\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = 2\ as. vert.]$

9) $y = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ $[x = 1\ as. vert.; x = 0\ as. vert.; y = 0\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty]$

10) $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $[y = 1\ as. orizz.\ per\ x \to \pm\infty; x = -1\ as. vert.; x = 1\ as. vert.]$

11) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$ $[y = 2x\ as. obl.; x = 1\ as. vert,; x = -1\ as. vert.]$

12) $y = \frac{1-3x-x^2}{x+3}$ $[y = -x\ as. obl.\ per\ x \to \pm\infty; x = -3\ as. vert.]$

SCHEDA DI VERIFICA
CALCOLO DEI LIMITI

1) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ $[+\infty]$

b. $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $[-\infty]$

c. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{x-2}$ $[+\infty]$

d. $\lim_{x\to -\infty} x^3 - x^2$ $[-\infty]$

e. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x^2-2}$ $[+\infty]$

f. $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-x^3}{3x^2-1}$ $[-\infty]$

g. $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{2x^3+1}{x^2}\right)$ $[+\infty]$

h. $\lim_{x\to -\infty} arct\left(\frac{x^2-2}{2x}\right)$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

2) Determina dominio e asintoti delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{x^3+2x^2+}{1-x^2}$

b. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Complemento
Successioni e serie numeriche

Successioni

Una successione numerica è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cioè una legge che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $f(n)$ che in genere viene indicato con la scrittura a_n o b_n ecc. (elemento n-esimo della successione o termine n-esimo).

Esempio 1: $f : n \to \frac{1}{n}$ cioè $a_n = \frac{1}{n}$

I termini di questa successione (definita per $n \neq 0$) sono:

$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3} \ldots$

Esempio 2: $f : n \to n^2$ cioè $a_n = n^2$.

In questo caso si ha:

$a_0 = 0 \;\; a_1 = 1, a_2 = 4 , a_3 = 9 \ldots$

Esempio 3: $f : n \to (\text{-}1)^n$ cioè $a_n = (\text{-}1)^n$.

Stavolta abbiamo:

$a_0 = 1 , \;\; a_1 = -1, a_2 = 1, \;\; a_3 = -1 \ldots$

Possiamo studiare $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ e si possono presentare tre casi:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$ in questo caso si dice che **la successione converge a *l* .**

  Per esempio $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ *oppure* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$: allora **la successione si dice divergente.**

  Per esempio $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

- Se $\nexists \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ in tal caso **la successione si dice indeterminata**.

  Se per esempio consideriamo $a_n = (-1)^n$ i termini della successione saranno:

  $1 \; ; \; -1 \; ; 1 \; ; \; -1 \; \ldots.$

  e quindi in questo caso non esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Serie numeriche

Data una successione numerica a_n posso considerare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$$

Consideriamo la successione s_n delle somme "parziali":

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ &... \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \end{aligned}$$

Se consideriamo $\lim_{n \to +\infty} s_n$ si possono presentare tre casi:

- $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$: si dice che **la serie converge** e S è chiamata "somma" della serie;
- $\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty$ $(+\infty$ o $-\infty)$: si dice che **la serie diverge** ;
- non esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$: si dice che **la serie è indeterminata**.

Esempio

Una serie particolarmente importante è la cosiddetta serie geometrica (somma dei termini di una successione geometrica):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n + ...$$

E' chiaro che se $a = 1$ la serie diverge.
Consideriamo $a \neq 1$.
Osserviamo che la successione delle somme parziali può anche essere scritta così:

$$s_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Calcolando $\lim_{n \to +\infty} s_n$ avremo:

- se $a > 1$ la serie diverge a $+\infty$
- se $a \leq -1$ la serie è indeterminata
- se $-1 < a < 1$ la serie converge a $S = \frac{1}{1-a}$ poiché $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

  poiché in questo caso $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$

Funzioni continue

Definizione: *f(x)* si dice continua in $x_0 \in D_f$ quando

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione: *f(x)* si dice continua in $I \subset D_f$ se è continua $\forall x \in I$.

Avevamo già dato questa definizione parlando del $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

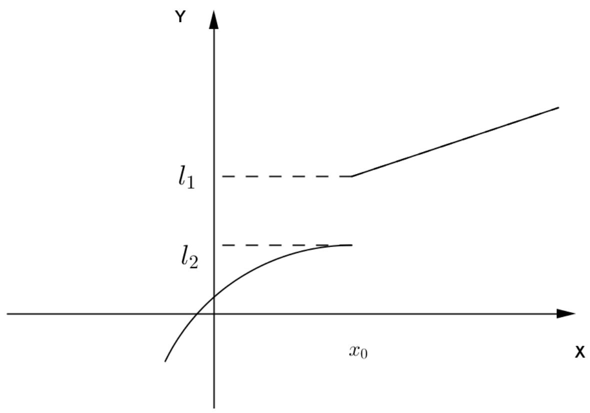
Punti di discontinuità

Un punto x_0 (per il quale abbia senso calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ cioè un punto di accumulazione del dominio (cioè posso avvicinarmi quanto voglio ad x_0 da destra e/o da sinistra all'interno del dominio) si dice punto di discontinuità per f(x) quando non si verifica la (*).

Si possono avere tre tipi di discontinuità:

- **Discontinuità di prima specie** quando

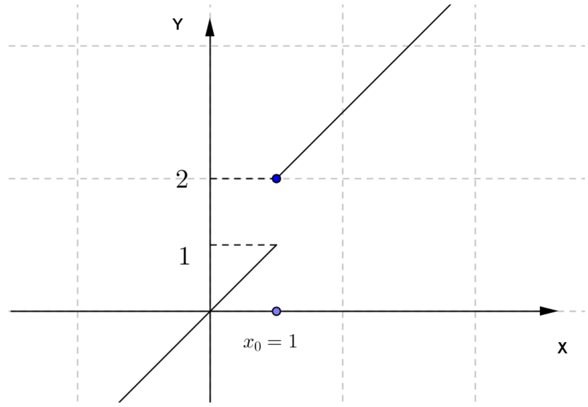
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad con \quad l_1 \neq l_2 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$



Si dice anche che la funzione ha un "salto" in x_0.

Esempio: consideriamo per esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

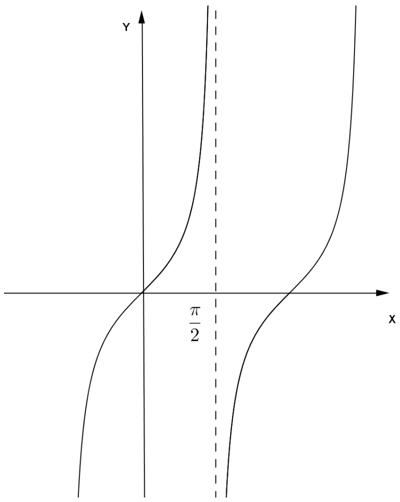


Poiché $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ la funzione ha in $x_0 = 1$ una discontinuità di prima specie.

- **Discontinuità di seconda specie** quando almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) è infinito oppure non esiste.

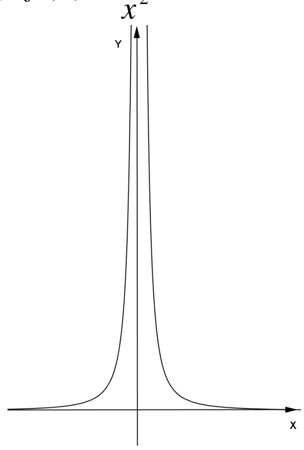
Esempi:

1) $f(x) = tgx$



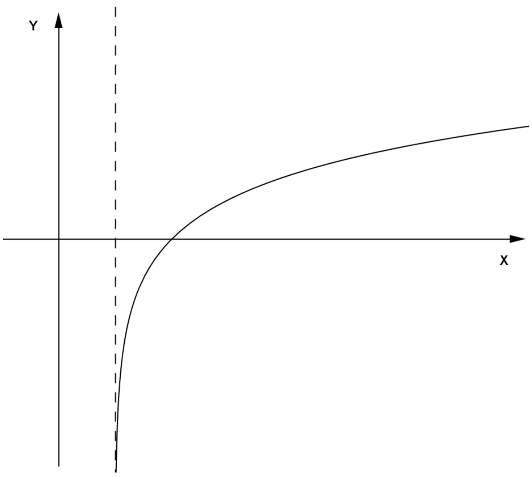
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty\end{array}\right. \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$ è un punto di discontinuità di 2ª specie

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$



$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2ª specie

3) $f(x) = \ln(x-1)$

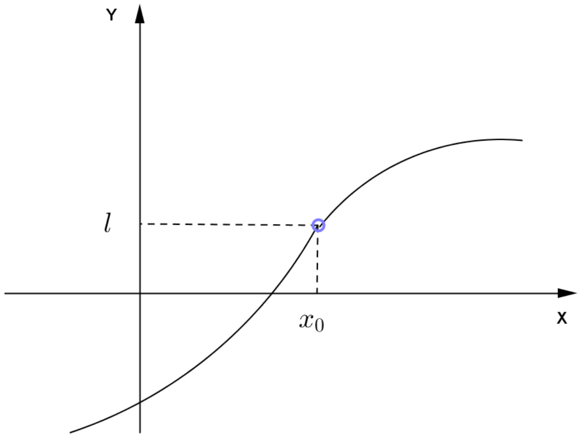


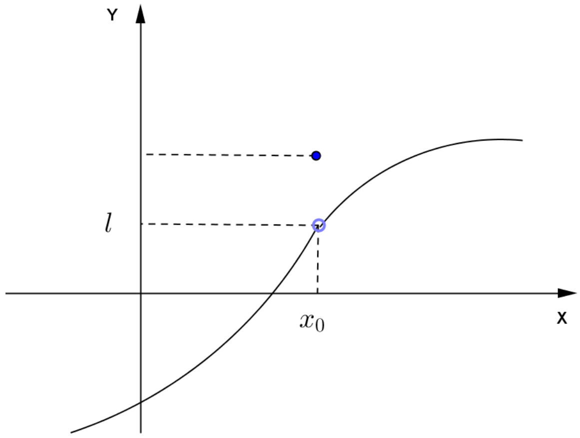
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 1$ è punto di discontinuità di 2ª specie.

- **Discontinuità di terza specie** quando

  $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ma $f(x)$ non è definita in x_0 oppure $f(x_0) \neq l$

Questa specie di discontinuità viene anche detta discontinuità "eliminabile" perché se $f(x)$ non è definita in x_0 possiamo porre $f(x_0) = l$ oppure, se era già definita, cambiare la definizione di $f(x)$ in x_0 ponendo appunto $f(x_0) = l$ e rendendola così continua in x_0.

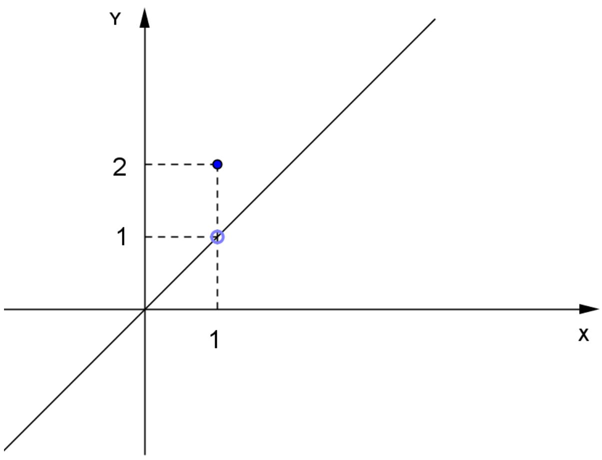




Esempio:

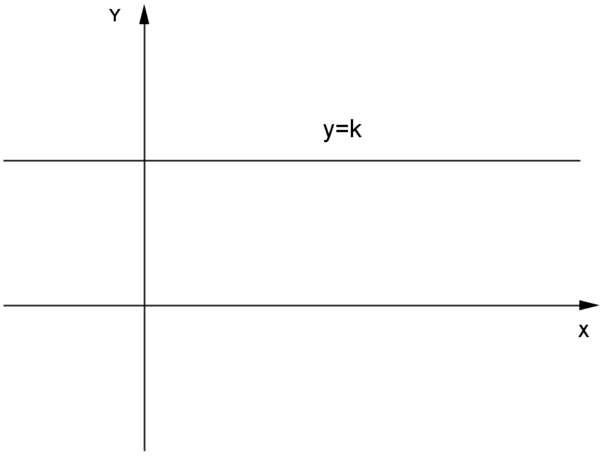
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \qquad \text{ma} \qquad \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$$

Quindi $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ ma $f(1) = 2 \Rightarrow x_0 = 1$ è un punto di discontinuità di 3^a specie.

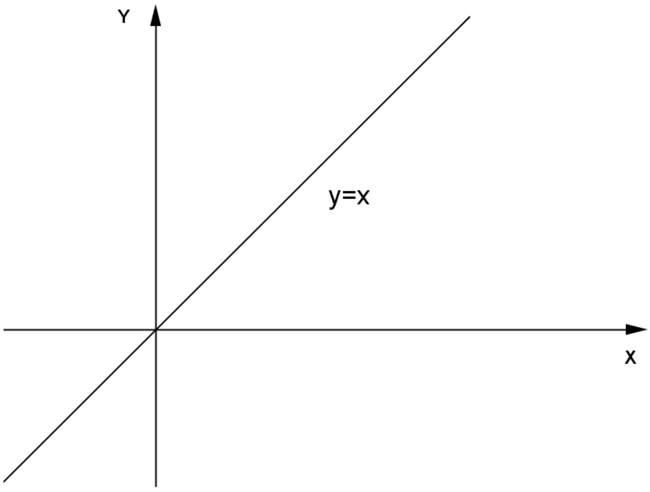


Esempi di funzioni continue

- La funzione costante $f(x) = k$ è continua $\forall x \in \Re$
  Infatti qualunque sia x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \quad (= f(x_0))$



- La funzione $f(x) = x$ è continua $\forall x \in \Re$ poiché $\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad (= f(x_0))$



- Le funzioni polinomiali $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ sono continue $\forall x \in \Re$

- Le funzioni razionali fratte $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m}$ sono continue $\forall x : D(x) \neq 0$

- Le funzioni goniometriche $y = senx$, $y = \cos x$ sono continue $\forall x \in \Re$ mentre $y = tgx$ è continua $\forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

- La funzione esponenziale $y = a^x$ $(a > 0 \quad a \neq 1)$ è continua $\forall x \in \Re$

- La funzione logaritmica $y = \log_a x$ $(a > 0 \quad a \neq 1)$ è continua $\forall x > 0$

Teoremi sulle funzioni continue

(solo enunciati)

1) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in x_0 allora

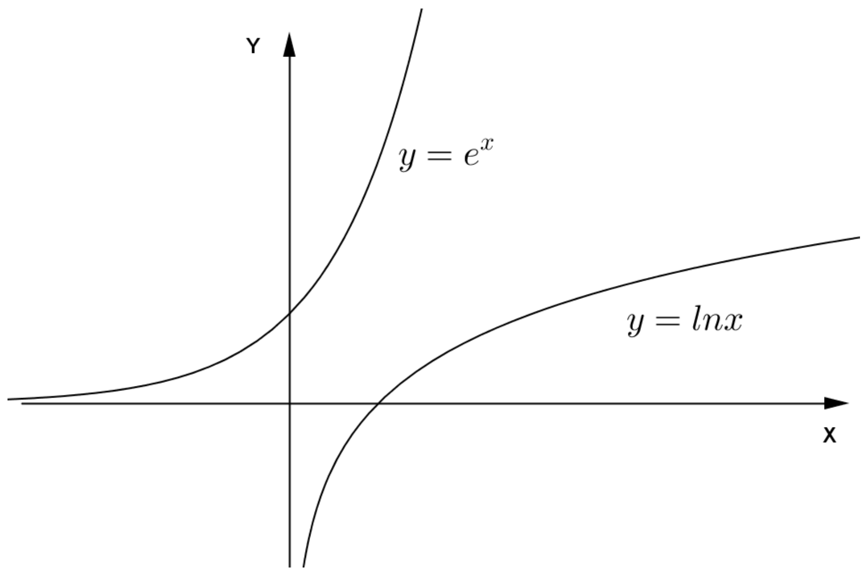
$$f(x) \pm g(x)$$
$$f(x) \cdot g(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (se \quad g(x_0) \neq 0)$$

sono ancora funzioni continue in x_0.
(La dimostrazione si basa sulle operazioni con i limiti.)

2) Se $g(x)$ è una funzione continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è continua in x_0.

3) Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo *I* e strettamente crescente (o decrescente) in *I* allora la funzione f^{-1} è continua in $f(I)$ (immagine di *I*)

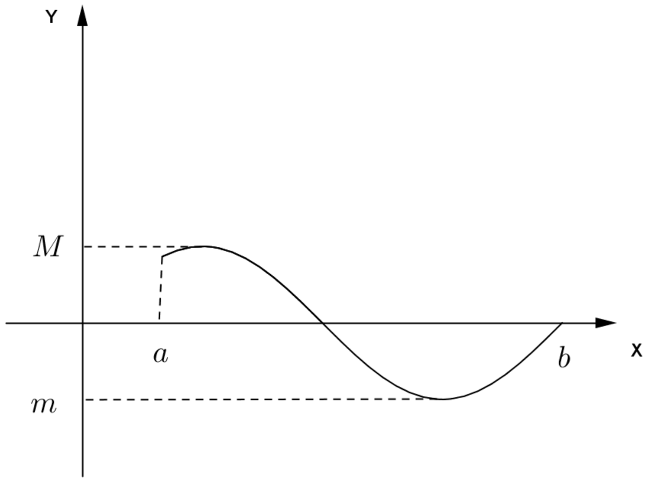
Esempio:



La funzione esponenziale $y = e^x$ è continua in $\Re$ e strettamente crescente.

La funzione logaritmo $y = \ln x$ è continua quando $x > 0$ (infatti il codominio di $y = e^x$ sono i reali positivi).

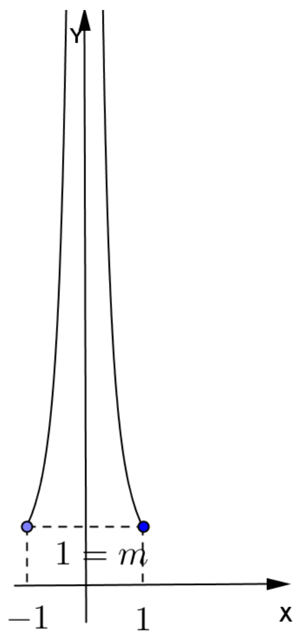
4) **Teorema di Weierstrass**
Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.



Nota: se la funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato ma non è continua in tutti i suoi punti può non avere massimo e minimo assoluti.

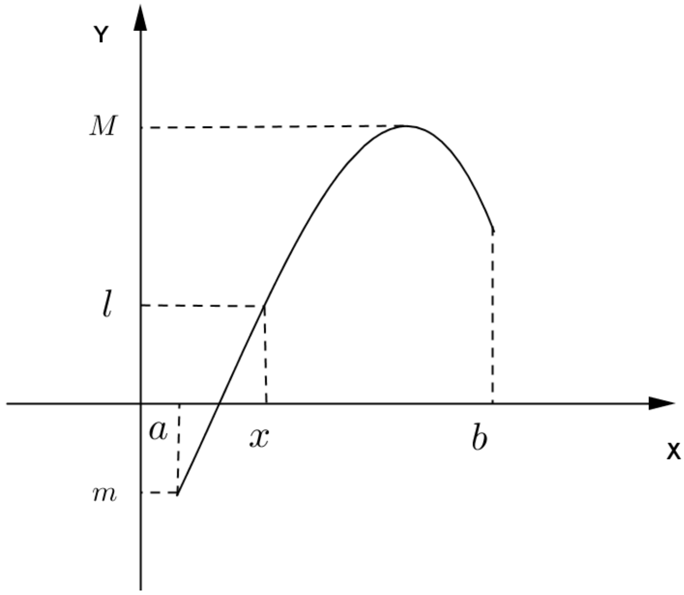
Esempio: $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad -1 \le x < 1 \quad (x \ne 0)$

Il minimo assoluto è m=1 ma non c'è massimo assoluto.



5) Teorema dei valori intermedi

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo assoluto.

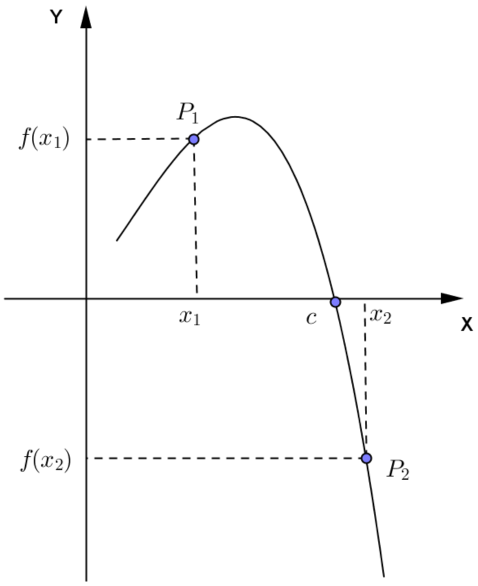


Per ogni $m \le l \le M$
esiste almeno un $x \in [a,b]$:
$f(x) = l$

6) **Teorema di esistenza degli zeri**

Se $f(x)$ è continua in un intervallo I ed esistono x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ aventi immagini $f(x_1), f(x_2)$ discordi allora esiste (almeno) un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(c) = 0$

(c si dice **zero** della funzione)



$f(x_1), f(x_2)$ di segno opposto
$x_1 < c < x_2$

$f(c) = 0$

Infatti è intuitivo che per passare da P_1 (per esempio sopra all'asse x) a P_2 (sotto all'asse x) con un grafico "continuo" almeno una volta il grafico taglierà l'asse x.

Nota : Questo teorema è spesso utilizzato per studiare l'esistenza di soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$

ESERCIZI
FUNZIONI CONTINUE

1) Studia i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ [$x=\pm 2$ discontinuità di seconda specie]

b) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ [$x=-3$ discontinuità di seconda specie]

c) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ [$x=-1$ discontinuità di terza specie]

e) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ [$x=0$ discontinuità di seconda specie]

f) $f(x)=\begin{cases} x & se \quad x>0 \\ 1-x & se \quad x<0 \end{cases}$ [$x=0$ discontinuità di prima specie]

2) La funzione $f(x)=x^2+x$ ammette massimo e minimo assoluti in $[-1,\ 1]$? Determina m ed M.

$$\left[m=-\frac{1}{4};M=2\right]$$

3) Si può applicare il teorema di Weierstrass alla funzione $y=\dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $[-1,\ 1]$? Perché?

$[no]$

4) L'equazione $x^3+x^2-4=0$ ha (almeno) uno zero appartenente all'intervallo $[1,2]$? Motiva la risposta.

$[si]$

5) La funzione $f(x)=\ln x+x$ ha (almeno) uno zero appartenente all'intervallo $(0;1]$?Motiva la risposta.

$[sì]$

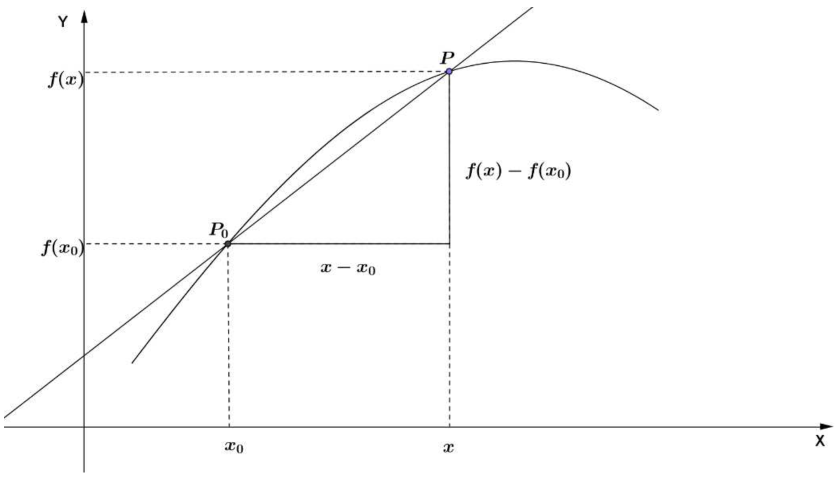
Derivate

Definizione di derivata di f(x) in $x_o \in D_f$

Considero una funzione $f(x)$ e sia $x_0 \in D_f$ e $f(x)$ definita in un intorno completo di x_0.

Consideriamo il rapporto (detto rapporto "incrementale")

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (x \in I_{x_0})$$



È evidente che il rapporto incrementale (cioè degli "incrementi" Δf e Δx) rappresenta il coefficiente angolare della retta P_0P (vedi figura).

Diciamo che $f(x)$ è derivabile in x_0 se **esiste finito**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Questo limite sarà indicato con $f'(x_0)$ ed è detto derivata di $f(x)$ in x_0.

NOTA 1: la derivata in x_0 può essere indicata anche come

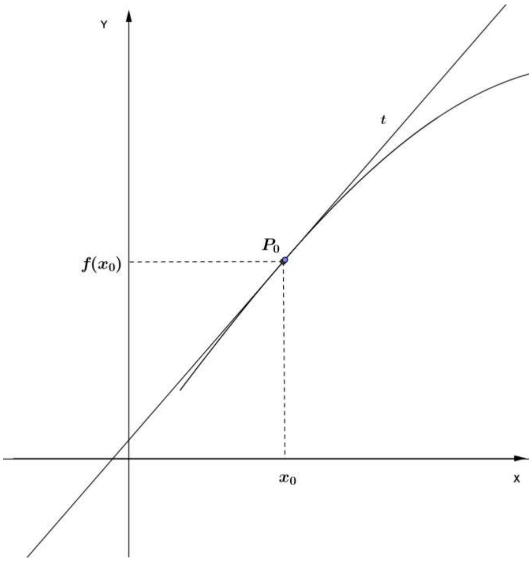
$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} \quad o \quad [Df(x)]_{x=x_0}$$

NOTA 2: il rapporto incrementale può essere anche scritto così:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{e calcolare quindi} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Interpretazione geometrica

Poiché il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta PP_0 e poiché per $x \to x_0$ si ha $P \to P_0$ e la retta $P_0P \to$ retta tangente in P_0 si ha che



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_t$$

dove m_t rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.

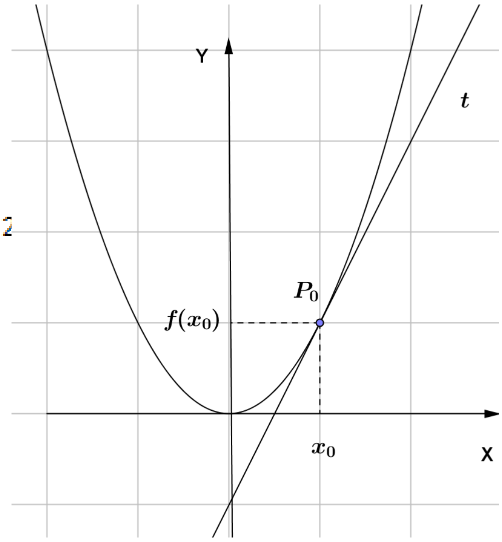
Poiché nella definizione di $f'(x_0)$ abbiamo chiesto che il limite sia finito non si considererà derivabile in x_0 una funzione che abbia in $P_0(x_0; f(x_0))$ la tangente al grafico parallela all'asse y.

Esempi

1. Consideriamo $y = x^2$ e $x_0 = 1$ ($f(x_0) = 1$)

   Calcoliamo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$



   Quindi $f'(1) = m_t = 2$.
   La retta tangente avrà equazione

$$t: y - 1 = 2(x-1) \to y = 2x - 1$$

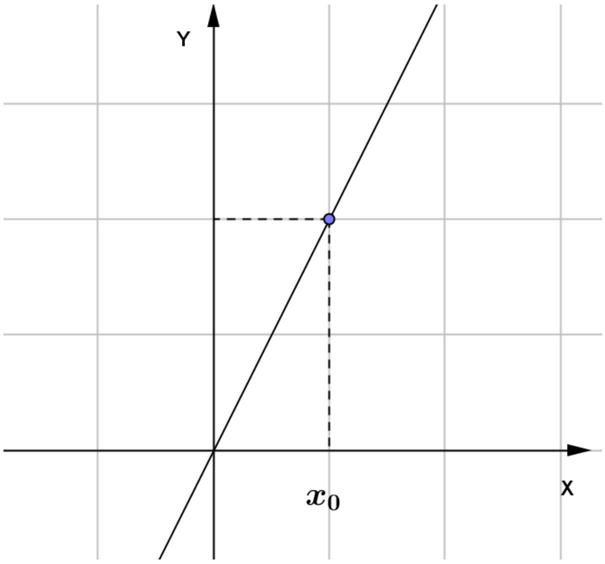
   Proviamo a verificare che l'equazione della tangente sia proprio $y = 2x - 1$: possiamo applicare il "vecchio" metodo del fascio di rette per $P_0(1;1)$ e intersecare con $y = x^2$ imponendo che $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - mx + m - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \to m^2 - 4m + 4 = 0 \to (m-2)^2 = 0 \to m = 2$$

2. Consideriamo $y = 2x$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 2)$.
   Calcoliamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$



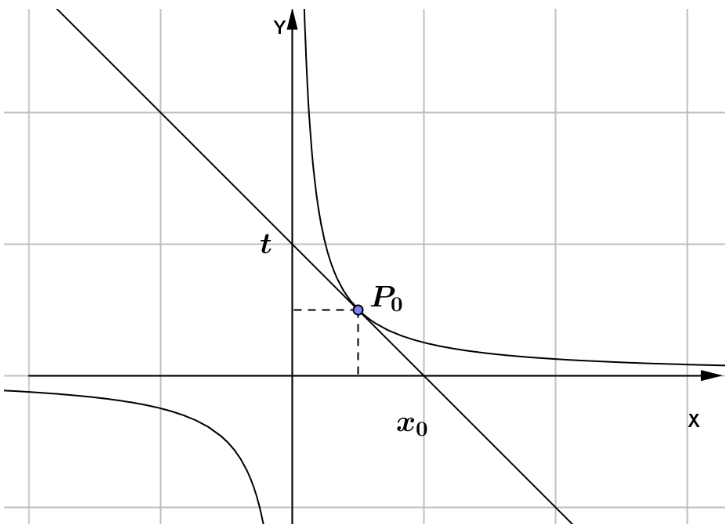
Osserviamo che se considero in generale x_0 ottengo lo stesso risultato:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{2x-2x_o}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{2(x-x_o)}{x-x_o} = 2$$

È chiaro che nel caso in cui il grafico sia una retta, la tangente coincide con il grafico in ogni punto x_0 e quindi $f'(x_0) = 2 \quad \forall x_0 \epsilon R$.

3. Consideriamo $y = \frac{1}{x}$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{x-1}{x(x-1)} = -1$$



ESERCIZI

DEFINIZIONE DI DERIVATA

Calcola $f'(x_0)$ per le seguenti funzioni ,disegna G_f e la tangente t al grafico in $(x_o; f(x_o))$:

1. $f(x) = 3x - 1$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [f'(0) = 3]$
2. $f(x) = 4x^2$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [f'(1) = 8]$
3. $f(x) = 1 - x^2$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [f'(0) = 0]$
4. $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [f'(1) = -2]$
5. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [f'(1) = -1]$
6. $f(x) = 3$ $\quad x_0 = 4$ $\quad [f'(1) = 0]$
7. $f(x) = x^3$ $\quad x_0 = 2$ $\quad [f'(2) = 12]$
8. $f(x) = \frac{x-1}{x}$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [f'(1) = 1]$
9. $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [f'(1) = 3]$
10. $f(x) = 2 - x^3$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [f'(1) = -3]$
11. $f(x) = x^2 - 1$ $\quad x_0 = -1$ $\quad [f'(-1) = -2]$
12. $f(x) = 5x + 2$ $\quad x_0 = 3$ $\quad [f'(3) = 5]$
13. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x_0 = 2$ $\quad [f'(2) = -\frac{1}{4}]$
14. $f(x) = -5$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [f'(0) = 0]$
15. $f(x) = x^2$ $\quad x_0 = 3$ $\quad [f'(3) = 6]$

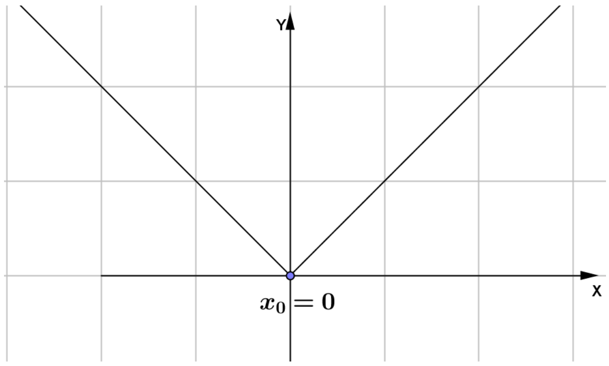
Complemento

PUNTI DI NON DERIVABILITA'

Se una funzione è derivabile in x_o per quello che abbiamo visto è necessariamente continua ma non è detto che una funzione continua in x_o sia anche derivabile in x_o cioè sia possibile tracciare la tangente al grafico in $(x_o; f(x_o))$. Vediamo quali possono essere i punti di non derivabilità.

1. a) Consideriamo $f(x) = |x|$ e $x_0 = 0$ $(f(x_0) = 0)$

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$



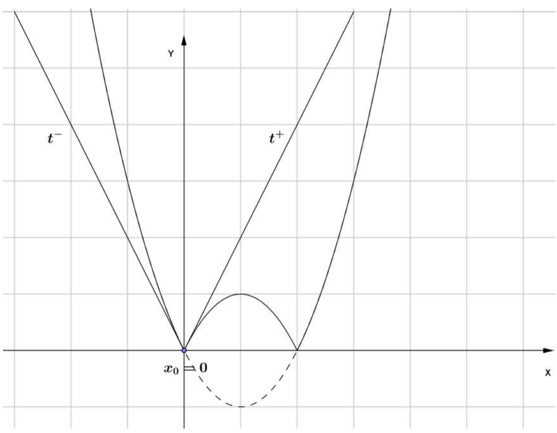
Il limite destro e sinistro del rapporto incrementale sono diversi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Quindi non esiste il limite del rapporto incrementale poiché il limite destro è diverso dal limite sinistro: è come se avessimo due tangenti in $P_0(x_0; f(x_0))$, una "destra" e una "sinistra" con inclinazioni m_1 e m_2 e x_0 si dice **punto angoloso**.

b)Vediamo un altro esempio di punto angoloso: consideriamo $f(x) = |x^2 - 2x|$ e $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$



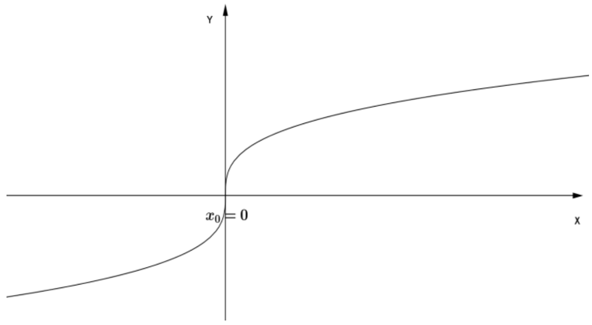
Ricorda che per tracciare il grafico di $f(x)$ prima si disegna la parabola $y = x^2 - 2x$ e poi si ribalta rispetto all'asse x la parte negativa.

Anche in questo caso abbiamo un punto angoloso in x_0 poiché:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = -2 \quad (m_{t^-})$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x^2 - 2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x(x-2)}{x} = 2 \quad (m_{t^+})$$

2. Consideriamo $f(x) = \sqrt[5]{x}$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.

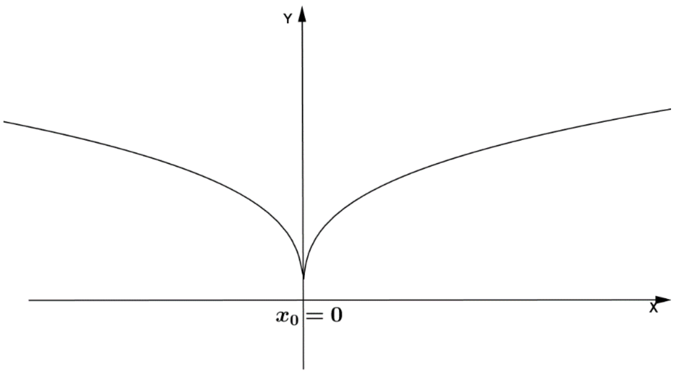


$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

In questo caso, il limite del rapporto incrementale esiste ma è infinito: la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$ al grafico è parallela all'asse delle y (nel nostro caso coincide con l'asse delle y). Diremo perciò che $y = \sqrt[5]{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

Un punto di non derivabilità di questo tipo si chiama "**punto a tangente verticale**".

3. Consideriamo $f(x) = |\sqrt[5]{x}|$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.



Poiché $f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{x} \; quando \; x \geq 0 \\ -\sqrt[5]{x} \; quando \; x < 0 \end{cases}$

Il limite destro e sinistro sono diversi:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt[5]{x^2}} = -\infty$$

Quindi anche in questo caso il limite esiste e i limiti destro e sinistro sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$: diciamo che x_0 è una "**cuspide**".

Funzione derivata

La funzione che associa $x \to f'(x)$ viene detta **funzione derivata** di $f(x)$ ed indicata con

$$f'(x) \text{ o } Df(x) \text{ o } \frac{df}{dx} \text{ (notazione di Leibniz)}$$

Esempio

Consideriamo $f(x) = x^2$.
Calcoliamo il limite del rapporto incrementale lasciando come variabile x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Quindi $x \xrightarrow{f'} 2x$ e possiamo scrivere:

$$f'(x) = 2x \text{ o } D(x^2) = 2x$$

Se dobbiamo quindi calcolare, per esempio, la derivata di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 3$ non dovremo far altro che sostituire $x = 3$ in $f'(x) = 2x$ cioè $f'(3) = 6$.

Quindi conoscere $f'(x)$ mi permette di calcolare la derivata di $f(x)$ in qualsiasi punto x_0 semplicemente con una sostituzione.

Dobbiamo quindi, per prima cosa, determinare le funzioni derivate delle funzioni elementari.

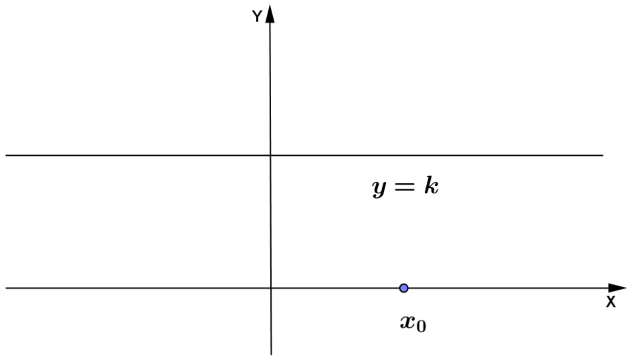
Derivate delle funzioni elementari

- Derivata di $f(x) = k$ (funzione costante)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

Quindi $\boxed{D(k) = 0}$

Infatti il grafico di $y = k$ è una retta parallela all'asse x e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico e quindi ha coefficiente angolare $m = 0$.



- Derivata di $f(x) = x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

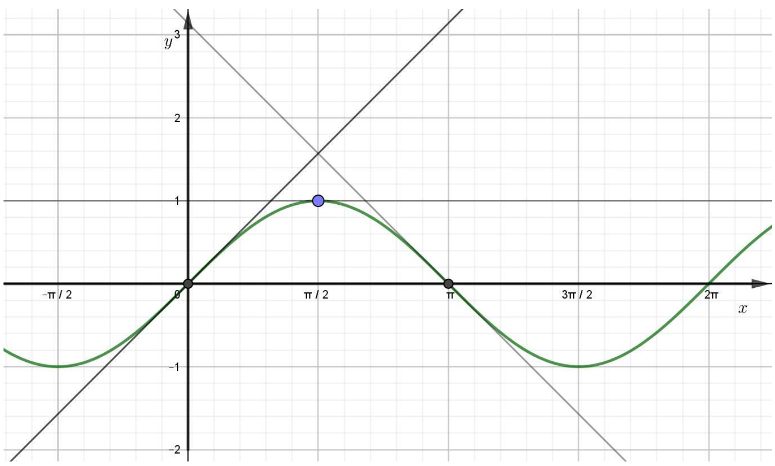
Quindi $\boxed{D(x) = 1}$

Infatti la retta $y = x$ ha coefficiente angolare $m = 1$ e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico di $f(x)$.

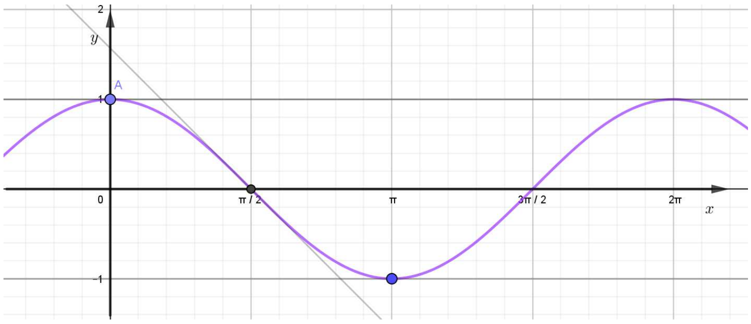
- Derivata di $f(x) = senx$

Osservando l'andamento delle tangenti alla funzione $y = senx$ ci accorgiamo che

$y'(0) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'(\pi) = -1, \quad ecc.$ e si può dimostrare che $\boxed{D(senx) = cosx}$



- Derivata di $f(x) = cosx$: si osserva che $y'(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y'(\pi) = 0$, *ecc.*



Si può dimostrare che

$$\boxed{D(cosx) = -senx}$$

- Derivata di $f(x) = lnx$

  Si può dimostrare che $$\boxed{D(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

  e in generale: $$\boxed{D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e}$$

  Esempio: $D(\log_2 x) = (\log_2 e) \cdot \frac{1}{x}$

- Derivata di $f(x) = e^x$

  Si può dimostrare che $$\boxed{D(e^x) = e^x}$$

  e in generale: $$\boxed{D(a^x) = a^x \cdot lna}$$

  Esempio: $D(2^x) = (\ln 2) \cdot 2^x$

Ricapitolando:

$D(k) = 0$

$D(x) = 1$

$D(senx) = cosx$

$D(cosx) = -senx$

$D(lnx) = \frac{1}{x}$; $D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

$D(e^x) = e^x$; $D(a^x) = a^x lna$

Regole di derivazione

Derivata della somma di due funzioni

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Quindi $\boxed{D(f(x)+g(x))=D(f(x))+D(g(x))}$

Naturalmente questa regola vale anche per la somma di più di due funzioni.

Esempio:

$$D(x+senx+2)=D(x)+D(senx)+D(2)=1+cosx$$

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=(si\ somma\ e\ si\ sottrae\ f(x_0)g(x))$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Nota: $f(x)$ e $g(x)$ essendo per ipotesi derivabili in x_0 sono anche continue e quindi $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$).

Quindi

$$\boxed{D(f(x)\cdot g(x))=D(f(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot D(g(x))}$$

Esempio:

$$D(x\cdot senx)=D(x)senx+xD(senx)=senx+x\cdot cosx$$

Nota

In particolare

$$D\big(kf(x)\big)=kD(f(x))$$

Infatti

$$D\big(kf(x)\big)=D(k)f(x)+kD\big(f(x)\big)=kD(f(x))$$

Questa regola si può estendere al prodotto di più di due funzioni e risulta:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f) \cdot g \cdot h + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

Infatti:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f \cdot (gh)) = D(f) \cdot gh + f \cdot D(gh) = D(f) \cdot gh + f[D(g) \cdot h + g \cdot D(h)]$$
$$= D(f)gh + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

Esempio:

$$D(x \cdot senx \cdot cosx) = 1 \cdot senx \cdot cosx + x \cdot cosx \cdot cosx + x \cdot senx(-senx)$$

- In particolare $D(x^n) = nx^{n-1}$ poiché:

$$D(x^n) = D\left(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\ volte}\right) = 1 \cdot \underbrace{x \cdots x}_{n-1\ volte} + \underbrace{x \cdot 1 \cdots x}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{x \cdots x \cdot 1}_{n-1\ volte} = nx^{n-1}$$

e

$$D(f^n(x)) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Poiché

$$D(f^n(x)) = D\left(\underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{n\ volte}\right) =$$

$$= f'(x) \cdot \underbrace{f(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \underbrace{f(x) \cdot f'(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{f(x) \cdots f(x) \cdot f'(x)}_{n-1\ volte} = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Esempi

$$D(x^3) = 3x^2$$

$$D(sen^3(x)) = 3sen^2 x \cdot cosx$$

$$D(ln^2 x) = 2lnx \cdot \frac{1}{x}$$

$$D(cos^4 x) = 4cos^3 x(-senx)$$

$$D(x^5) = 5x^4$$

Derivata della funzione reciproca di $f(x)$ $(f(x) \neq 0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} -\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]\frac{1}{f(x)f(x_0)}$$
$$= (f(x) \text{è continua in } x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

Esempi:

1) $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

2) $D\left(\frac{1}{senx}\right) = -\frac{\cos x}{sen^2 x}$

In particolare

a) $D(x^{-n}) = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$

Quindi $\boxed{D(x^k) = kx^{k-1}}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(x^{-2}) = -2x^{-3}$

b) $D(f^{-n}(x)) = D\left(\frac{1}{f^n(x)}\right) = -\frac{nf^{n-1}(x)f'(x)}{f^{2n}(x)} = -nf^{-n-1}(x)f'(x)$

Quindi $\boxed{D\left(f^k(x)\right) = kf^{k-1}(x)f'(x)}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(sen^{-2}x) = -2sen^{-3}x \cdot cosx$

Derivata del quoziente di due funzioni

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f(x))g(x) - f(x)D(g(x))}{g^2(x)}}$$

Esempi:

1) $$D(tgx) = D\left(\frac{senx}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cdot\cos x - senx\cdot(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2) $$D(\cot gx) = D\left(\frac{\cos x}{senx}\right) = \frac{-senx\cdot senx - \cos x\cdot\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1}{sen^2 x}$$

3) $$D\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = \frac{D(x-2)\cdot(x^2+1) - (x-2)\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-(x-2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Nota

La derivata di $f(x) = tgx$ può anche essere scritta $D(tgx) = 1 + tg^2x$.

Infatti:

$$D(tgx) = \frac{1}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = 1 + tg^2x$$

La derivata di $f(x) = cotgx$ si può scrivere anche così:

$$D(cotgx) = -\frac{1}{sen^2x} = \frac{-sen^2x - cos^2x}{sen^2x} = -1 - cotg^2x$$

ESERCIZI

REGOLE DI DERIVAZIONE

Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

1. $D(2x + tgx)$ $\left[2 + \frac{1}{\cos^2 x}\right]$

2. $D\left(\frac{x+2}{x}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^2}\right]$

3. $D(x \ln x)$ $[\ln x + 1]$

4. $D(2^x + 1)$ $[2^x \cdot \ln 2]$

5. $D(x^3 + 2x - 3)$ $[3x^2 + 2]$

6. $D\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

7. $D\left(\frac{2}{x}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^2}\right]$

8. $D\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ $\left[-\frac{1}{x \cdot \ln^2 x}\right]$

9. $D\left(\frac{1}{x+3}\right)$ $\left[-\frac{1}{(x+3)^2}\right]$

10. $D(log_2^3 x)$ $\left[3\log_2^2 x \cdot \frac{1}{x} \log_2 e\right]$

11. $D(senx + \cos x)$ $[\cos x - senx]$

12. $D\left(\frac{1}{senx + \cos x}\right)$ $\left[-\frac{\cos x - senx}{(senx + \cos x)^2}\right]$

13. $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^3}\right]$

14. $D\left(\frac{2}{senx}\right)$ $\left[-\frac{2\cos x}{sen^2 x}\right]$

15. $D(2\cos x + senx)$ $[-2senx + \cos x]$

16. $D\left(\frac{5+x}{2x}\right)$ $\left[-\frac{5}{2x^2}\right]$

17. $D\left(\frac{x}{3-x}\right)$ $\left[\frac{3}{(3-x)^2}\right]$

18. $D\left(x^4-3x^2-4\right)$ $\left[4x^3-6x\right]$

19. $D\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)$ $\left[x^2+x\right]$

20. $D(senx\cdot\cos x)$ $[\ \cos^2 x - sen^2 x\ ]$

21. $D\left(tgx+\frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]$

22. $D\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\frac{2}{x^3}\right]$

23. $D\left(e^x+2\right)$ $\left[e^x\right]$

24. $D\left(x^3+2x+4\right)$ $\left[3x^2+2\right]$

25. $D\left(x\cdot e^x\right)$ $\left[e^x+x\cdot e^x\right]$

26. $D\left((x+1)^3\right)$ $\left[3(x+1)^2\right]$

27. $D\left((2x-1)^4\right)$ $\left[8\cdot(2x-1)^3\right]$

28. $D(\log_3 x)$ $\left[\frac{1}{x}\cdot\log_3 e\right]$

29. $D\left(\frac{x-1}{x}\right)$ $\left[\frac{1}{x^2}\right]$

30. $D\left(\frac{1}{e^x}\right)$ $\left[-\frac{1}{e^x}\right]$

Derivata di una funzione composta

Si può dimostrare che:

$$\boxed{D\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Esempi

a) $D\left(sen(2x)\right) = \cos(2x) \cdot 2 = 2 \cdot \cos\,(2x)$

b) $D\left(\ln(x^2+1)\right) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$

c) $D\left(\ln(sen3x)\right) = \frac{1}{sen3x} \cdot cos3x\ 3 = 3cotg3x$

d) $D\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

e) $D(\cos(3x)) = -sen(3x) \cdot 3 = -3sen(3x)$

f) $D(tg(3x)) = \dfrac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \dfrac{3}{\cos^2(3x)}$

g) $D\left(2^{3x}\right) = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3 = 3 \cdot \ln 2 \cdot 2^{3x}$

h) $D(\log_2(3x)) = \dfrac{1}{3x} \cdot \log_2 e \cdot 3 = \dfrac{\log_2 e}{x}$

ESERCIZI

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

1) $D(ln3x)$ $\left[\ \frac{1}{x}\ \right]$

2) $D(sen4x)$ $[\ 4 \cdot cos4x\ ]$

3) $D(\cos^3 2x)$ $[-6cos^2 2x \cdot sen2x\ ]$

4) $D(ln^2(4x+1))$ $\left[\ \frac{8\ln(4x+1)}{4x+1}\ \right]$

5) $D(e^{\frac{x-1}{x}})$ $\left[\ e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\ \right]$

6) $D(\ln(\frac{x}{x^2+1}))$ $\left[\ \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}\ \right]$

7) $D(2^{x^2+1})$ $[\ ln2 \cdot 2^{x^2+1} \cdot 2x\ ]$

8) $D(sen2x)$ $[2\cos 2x]$

9) $D\left(\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)\right)$ $\left[-\frac{1}{x+1}\right]$

10) $D\left(e^{\frac{x}{x-3}}\right)$ $\left[-\frac{3}{(x-3)^2} \cdot e^{\frac{x}{x-3}}\right]$

11) $D(4^{2x+1})$ $[\ 2 \cdot \ln 4 \cdot 4^{2x+1}\ ]$

12) $D\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\right)$ $\left[\ \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\right]$

13) $D(\cos 2x)$ $[-2sen2x]$

14) $D(tg2x)$ $\left[\frac{2}{\cos^2 2x}\right]$

15) $D(e^{x^2+1})$ $\left[2x \cdot e^{x^2+1}\right]$

NOTA IMPORTANTE

Utilizzando la derivata di una funzione composta si può dimostrare che per $\alpha \in \Re$ si ha

$$\boxed{D\left(f^{\alpha}(x)\right) = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)}$$

e in particolare $\boxed{D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}}$

Quindi per $\alpha = \frac{1}{2}$ avremo:

$$D(\sqrt{x}) = D\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = D\left(f(x)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Cioè $\boxed{D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$$\boxed{D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$$

Esempi

a) $D\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $D\left(\sqrt{x^3+2}\right) = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3+2}}$

c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

d) $D\left(\sqrt[4]{x^3}\right) = D\left(x^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

Ricapitolando

$$D(f(x)+g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$$

$$D(f(x)\cdot g(x)) = D(f(x))\cdot g + f(x)\cdot D(g(x))$$

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f)\cdot g - f\cdot D(g)}{g^2(x)}$$

$$D\big(f(g(x))\big) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

In particolare:

$$D\big(kf(x)\big) = k\cdot D(f(x))$$

$$D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} \ (\ \alpha \in R\ )$$

$$D(f(x)^{\alpha}) = \alpha\cdot f(x)^{\alpha-1}\cdot f'(x) \quad (\ \alpha \in R)$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$D(lnf(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$D(tgx) = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x \qquad D(cotgx) = -\frac{1}{sen^2x} = -1 - cotg^2x$$

Nota

Si può dimostrare che le derivate delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche risultano:

$$D(arcsenx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(arccosx) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(arctgx) = \frac{1}{1+x^2} \qquad D(arccotgx) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
DERIVATE

1) $D(arctg\,2x)$ $\left[\frac{2}{1+4x^2}\right]$

2) $D\left(arct\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]$

3) $D(\sqrt{senx+cosx})$ $\left[\frac{cosx-senx}{2\sqrt{senx+cosx}}\right]$

4) $D(3x+cotgx)$ $\left[3-\frac{1}{sen^2x}\right]$

5) $D\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)$ $\left[\frac{x-2}{x^2}\right]$

6) $D(2\cos^3 x)$ $[-6senx\cos^2 x]$

7) $D(x\cdot\ln^3 x)$ $[\ln^3 x+3\ln^2 x]$

8) $D\left(\frac{senx-\cos x}{\cos x+1}\right)$ $\left[\frac{senx+\cos x+1}{(\cos x+1)^2}\right]$

9) $D\left(\frac{x}{x^3+1}\right)$ $\left[\frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}\right]$

10) $D\left(\sqrt{e^{x-2}}\right)$ $\left[\frac{e^{x-2}}{2\sqrt{e^{x-2}}}\right]$

11) $D\left(\frac{1}{sen^2 x}\right)$ $\left[-\frac{2\cos x}{sen^3 x}\right]$

12) $D\left(\frac{senx}{2cosx-1}\right)$ $\left[\frac{cosx(2cosx-1)+2sen^2x}{(2cosx-1)^2}\right]$

13) $D(arctg(2x+1))$ $\left[\frac{2}{1+(2x+1)^2}\right]$

14) $D\left(\frac{e^x+1}{2-e^x}\right)$ $\left[\frac{3e^x}{(2-e^x)^2}\right]$

Problemi

1) Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - x + 1$ determina l'equazione della retta tangente alla parabola nel suo punto $T(0;1)$ e disegna parabola e tangente.

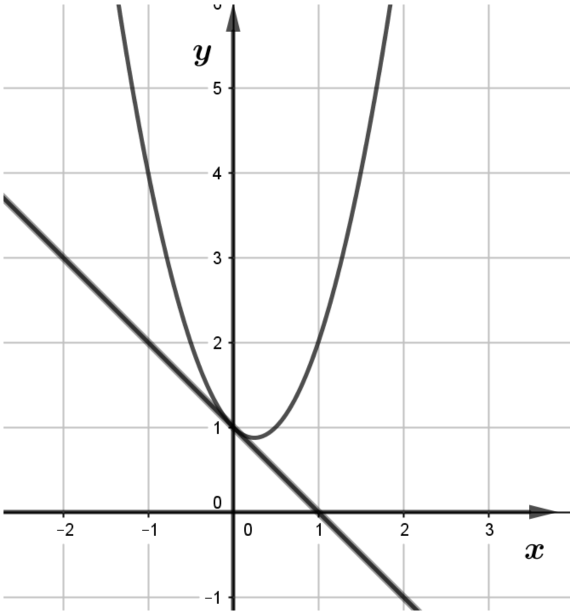
Svolgimento

Possiamo determinare la funzione derivata $y' = 4x - 1$ e poi calcolarla in $x = 0$:

$$y'(0) = -1$$

Quindi la retta tangente in $x = 0$ ha inclinazione $m = -1$ e poiché passa per T avrà equazione:

$$y - 1 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x + 1$$



2) Data la funzione omografica $\Im : y = \dfrac{2x}{x-1}$, determina la retta tangente nell'origine. Disegna sia la funzione omografica che la tangente.

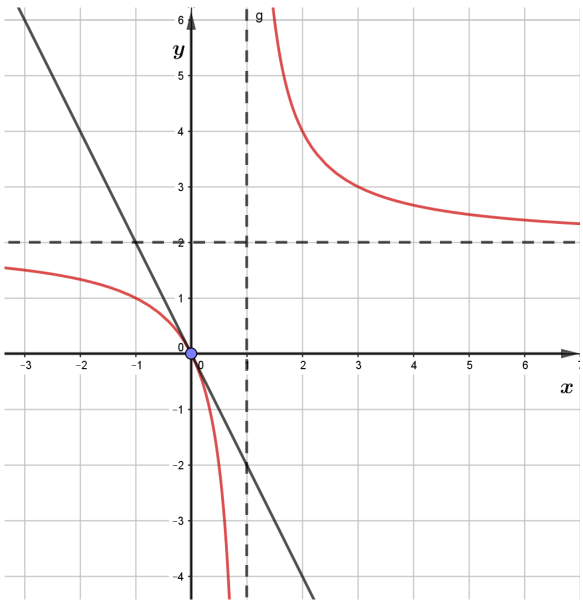
Svolgimento

Determiniamo la derivata della funzione

$$D\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

e calcoliamola in $x = 0$: $y'(0) = -2$ per determinare il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto (0;0).

Quindi l'equazione della tangente sarà: $y = -2x$.



Derivate successive di una funzione

Come abbiamo definito la funzione derivata di $f(x)$, possiamo definire la funzione derivata di $f'(x)$, che indicheremo con $f''(x)$ e chiameremo derivata seconda di $f(x)$ e così via.

Esempio1

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$
$$D(f'(x)) = f''(x) = 12x^2 + 12x$$
$$D(f''(x)) = f'''(x) = 24x + 12$$
$$D(f'''(x)) = f^{(4)}(x) = 24$$
$$D\left(f^{(4)}(x)\right) = f^{(5)}(x) = 0$$

Osserviamo che $f(x)$ è un polinomio di grado 4:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq 5$$

Analogamente se $f(x)$ è un polinomio di grado k si avrà:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq k+1$$

Esempio2

$$f(x) = senx$$
$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -senx$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = senx$$

....

Esempio 3

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$

....

Significati della derivata in fisica

Due fondamentali concetti della cinematica di un punto materiale sono basati sulla derivata: la *velocità* e l'*accelerazione*.

Supponiamo di considerare un punto materiale P che si muove su una traiettoria rettilinea con legge oraria $s = s(t)$.

La velocità istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

L'accelerazione istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = s''(t_0)$$

Esempi

1. Se consideriamo $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (*moto uniformemente accelerato*) troviamo:

$$v(t) = s'(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = v'(t) = a$$

2. Se considero $s(t) = s_0 \operatorname{sen}\omega t$ (*moto armonico*)

$$v(t) = s'(t) = \omega s_0 \cos \omega t$$

$$a(t) = v'(t) = -\omega^2 s_0 \operatorname{sen}\omega t$$

come abbiamo visto studiando il moto armonico.

SCHEDA DI VERIFICA 1
DERIVATE

1) Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a) $y = \ln(3x-1)$

b) $y = \dfrac{\cos x - 3senx}{1+senx}$

c) $y = \sqrt{1-e^{2-x}}$

d) $y = 3^{\frac{1}{x}}$

e) $y = e^{4x+1}$

f) $y = arctg\dfrac{x}{3}$

g) $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

h) $y = sen(2x+1)$

2) Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata e disegnane il grafico.

a) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-4}$

b) $f(x) = \sqrt{9x^2-1}$

Problemi

1) Disegna la funzione omografica $\Im$ di equazione $y = \dfrac{2x}{x+1}$ e la parabola di equazione $y = 2x - x^2$. Verifica che in (0,0) hanno la stessa tangente e determina l'equazione della tangente comune.

2) Disegna la parabola $y = x^2 - 2x$ e determina la tangente in (0;0). Determina anche la tangente alla parabola nel suo punto di ascissa $x = 2$.

3) Considera un punto materiale che si muove di moto armonico con legge oraria $s(t) = 3sen(2\pi \cdot t)$. Determina la sua velocità e la sua accelerazione al tempo $t = 1$ (s).

SCHEDA DI VERIFICA 2
DERIVATE

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a. $D(senx \cdot \cos x)$

b. $D\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

c. $D\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)$

d. $D(ln^3(1-2x))$

e. $D\left(\sqrt{1-x}\right)$

f. $D(\sqrt{lnx-1})$

g. $D\left(e^{2x}-1\right)$

h. $D(sen4x)$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata e disegna il grafico:

a. $y=\dfrac{1}{x-1}$

b. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Problemi

1)Disegna la parabola $y=4x-x^2$ e determina l'equazione della tangente in (0;0). Come risulta l'equazione della tangente nel punto (4;0)?

2) Disegna il grafico della funzione $y=\dfrac{1}{x-2}$ e determina l'equazione della tangente nel suo punto di ascissa $x=3$. Disegna la funzione e la tangente.

3) Un punto materiale si muove con legge oraria $s(t)=t^3$. Determina la sua velocità e accelerazione all'istante $t=1$ (s).

Studio del grafico di una funzione

Punti di massimo e minimo relativo

a) $x_0 \in D_f$ è un punto di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

b) $x_0 \in D_f$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Punti di massimo e minimo assoluto

a) $x_0 \in D_f$ è il punto di massimo assoluto se :

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in D_f$$

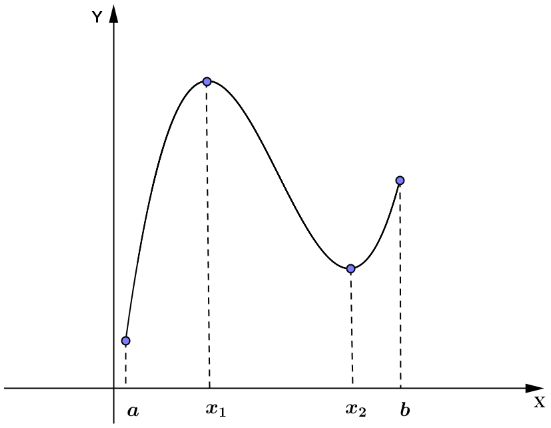
e $f(x_o) = M$ è il massimo assoluto della funzione;

b) $x_0 \in D_f$ è il punto di minimo assoluto se:

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in D_f$$

e $f(x_o) = m$ è il minimo assoluto della funzione

OSSERVAZIONE : un punto di massimo (minimo) assoluto è anche un punto di massimo (minimo) relativo ma il viceversa non è vero.

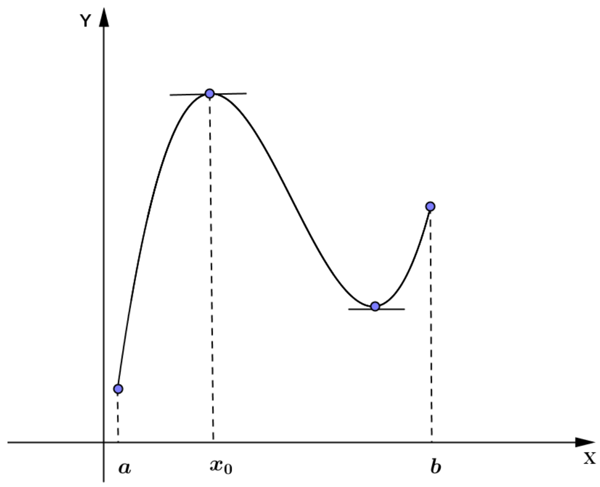


a e x_2 sono punti di minimo relativo ; a è punto di minimo assoluto;
x_1 e b sono punti di massimo relativo e x_1 è punto di massimo assoluto.

Per studiare il grafico di una funzione è fondamentale la ricerca di punti di massimo (minimo) relativi.
Per capire come possano essere individuati vediamo due teoremi riguardanti le funzioni derivabili di cui non facciamo la dimostrazione ma diamo solo un'interpretazione "geometrica".

Teorema di Fermat

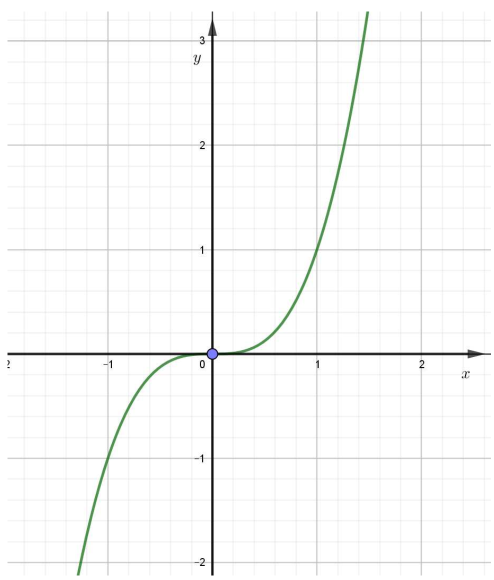
Sia $f:[a,b]\rightarrow\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b): se x_0 è un punto **di massimo o di minimo relativo interno al dominio** $\Rightarrow f'(x_0)=0$ (cioè la tangente al grafico è parallela all'asse x)



Interpretazione geometrica: osserviamo infatti che nei punti di massimo o minimo interni al dominio la tangente al grafico ha coefficiente angolare (derivata) uguale a zero perché è parallela all'asse x.

E' importante notare che se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo ma non è interno al dominio (per es. a e b nella figura) non è detto che in x_0 la derivata sia nulla.

Nota: il viceversa del teorema non è vero perché se in x_0 si ha $f'(x_0)=0$ significa che e x_0 potrebbe anche essere un punto in cui cambia la concavità del grafico cioè un punto detto "**punto di flesso**" a tangente orizzontale (vedi figura).

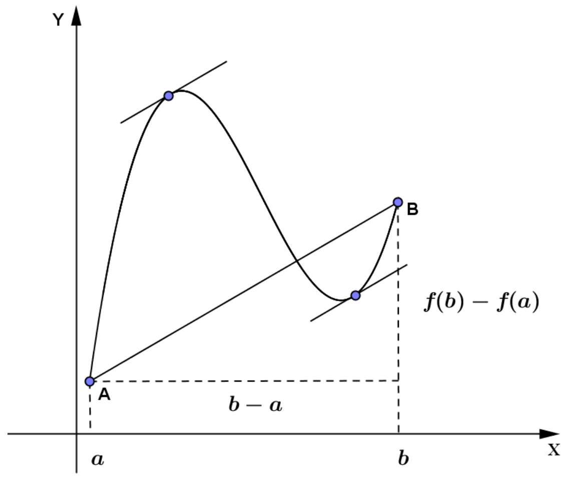


Teorema di Lagrange

Se $f:[a,b]\to\Re$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

$$\Rightarrow \exists \quad x_0 \in (a,b)\, tale \quad che\, f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interpretazione geometrica: osserviamo che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è l'inclinazione della retta passante per gli estremi del grafico e quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $P(x_0, f(x_0))$ in cui la tangente al grafico è parallela alla retta passante per gli estremi del grafico.



Esempio

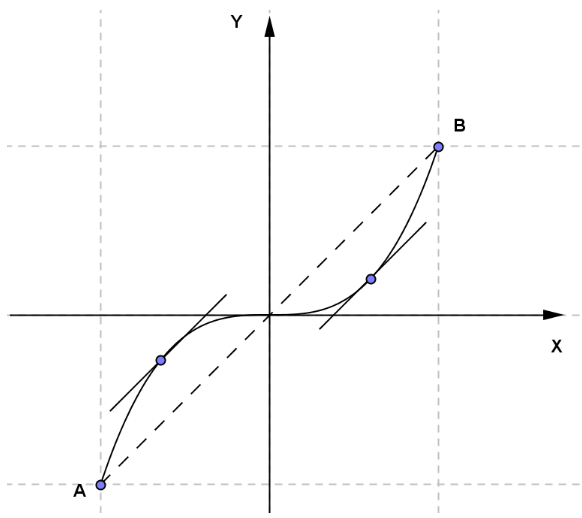
Consideriamo $f(x)=x^3$ nell'intervallo $I=[-1,1]$.

- Verifica le ipotesi del teorema di Lagrange?
  Poiché $f(x)$ è continua e derivabile in $\Re$ lo è sicuramente anche in *I* e quindi verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
- Determina il punto x_0 (o i punti) : $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  Nel nostro caso $f(-1)=-1 \quad f(1)=1$ e quindi, essendo $f'(x)=3x^2$ devo risolvere:

  $$3x^2=\frac{1-(-1)}{2}$$

  $$3x^2=1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

  I valori sono interni all'intervallo *I* e quindi entrambi accettabili.
  Graficamente infatti si verifica che esistono due punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta per $A(-1,-1)$ e $B(1,1)$



Corollari del teorema di Lagrange

Utilizzando il teorema di Lagrange si possono dimostrare i seguenti teoremi (corollari):

1) Se $f:[a,b]\rightarrow\Re$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b)
e $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x)=k$ cioè $f(x)$ è una funzione costante.

2) Se $f:[a,b]\rightarrow\Re$ e $g:[a,b]\rightarrow\Re$ sono continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e se

$$f'(x)=g'(x) \quad \forall x\in(a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)-g(x)=k \quad \forall x\in[a,b]$$

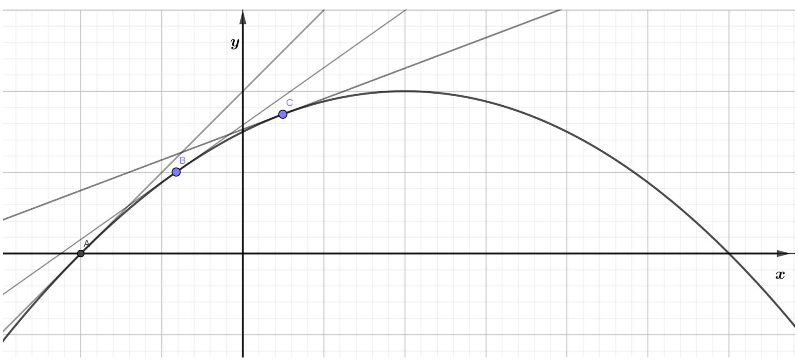
3) **Relazione tra il segno della derivata f'(x) e "andamento" della funzione**

Data $f:[a,b]\rightarrow\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) abbiamo che:

se $f'(x)>0 \quad \forall x\in(a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ è **crescente i**n (a,b)

se $f'(x)<0 \quad \forall x\in(a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ è **decrescente** in (a,b)

Osservazione: infatti "geometricamente" si osserva che quando una funzione è crescente i coefficienti angolari delle tangenti sono positivi, mentre se è decrescente sono negativi (vedi figura).



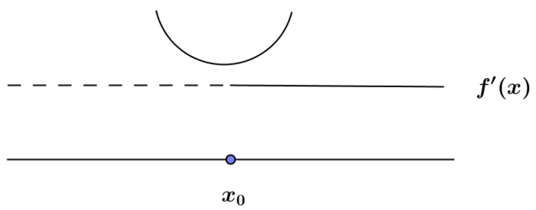
Nota
Osserviamo che se $f(x)$ è crescente in $[a,b]$ $\Rightarrow f'(x)\geq 0$ poiché può esserci anche un flesso a tangente orizzontale.
Questo teorema è fondamentale per lo studio del grafico di una funzione poiché, come vedremo, ci permette di individuare i punti di massimo, minimo e flesso a tangente orizzontale.

Ricerca dei punti di massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale

Consideriamo un punto $x_0 \in D_f$ in cui $f'(x_0) = 0$, cioè un punto in cui la tangente è parallela all'asse x.
Potrebbe essere un punto di massimo o un punto di minimo o un punto di flesso a tangente orizzontale.

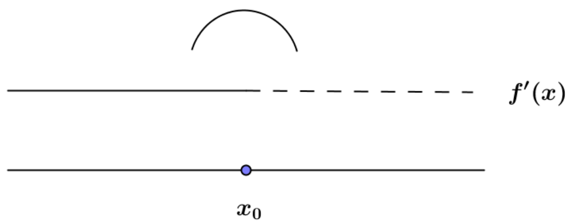
Per capirlo studiamo il segno di $f'(x)$.

1) Se il segno della derivata ha questo andamento



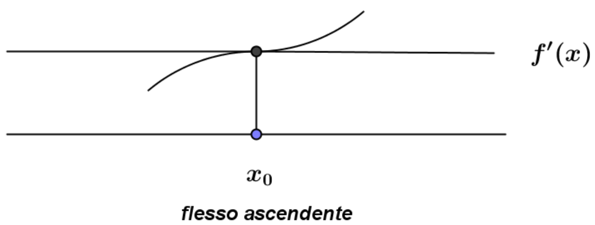
cioè negativo e poi positivo, poiché la $f(x)$ prima di x_0 decresce e poi cresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **minimo**.

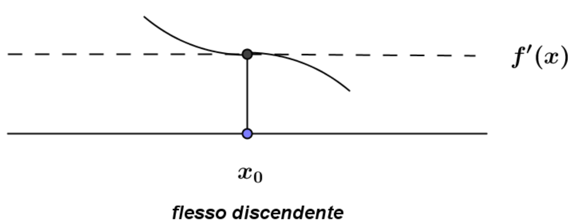
2) Se il segno della derivata ha questo andamento



la funzione prima di x_0 cresce e poi decresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **massimo**.

3) Se $f'(x)$ non cambia segno in $x_0 \Rightarrow x_0$ è un **punto di flesso a tangente orizzontale** (ascendente o discendente)





Flesso ascendente

Flesso discendente

Studio del grafico di una funzione

Esempio 1

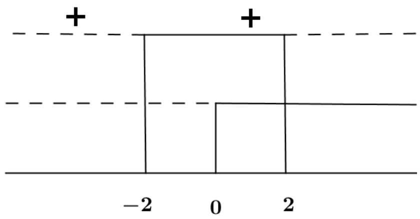
Proviamo a studiare il grafico di $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}}$

1) Per prima cosa determiniamo il dominio: $D_f = \Re \setminus \{\pm 2\}$

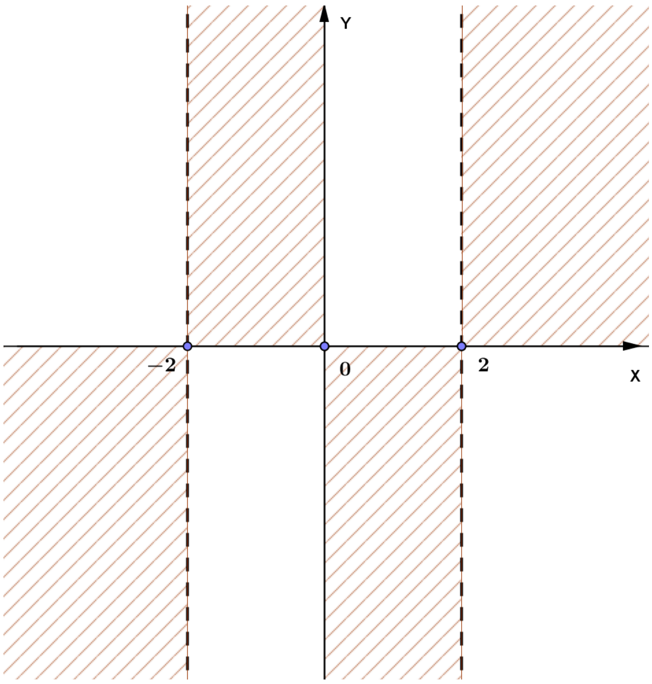
- Studiamo il segno della funzione per capire quando il grafico si trova sopra all'asse x e quando si trova sotto all'asse x.

  Studiamo: $\dfrac{x^3}{4-x^2} > 0$

  Quindi $f(x) > 0 \quad x < -2 \ \cup \ 0 < x < 2$



  Cominciamo ad eliminare con un leggero tratteggio le zone dove non si trova il grafico:



- Determiniamo le eventuali intersezioni con gli assi ponendo $x = 0$ (se è nel dominio) e $y = 0$.
  Nel nostro caso troviamo solo $(0;0)$
- Verifichiamo se la funzione è pari o dispari, cioè calcoliamo
  $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{4-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ la funzione è dispari cioè il grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine.

2) Passiamo allo studio dei limiti e alla ricerca degli asintoti (se ci sono).
Nel nostro caso abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow x=-2 \text{ as. vert.} \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow x=2 \text{ as.vert.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x}=-1 \quad (m) \\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x)+x=...=0 \quad (q)\end{array}\right\rangle \Rightarrow y=-x \text{ as. obliquo}$$

3) Calcoliamo adesso $f'(x)$, studiamo in quali punti si annulla e il suo segno:

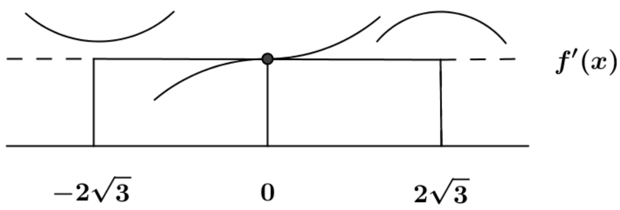
$$f'(x)=\frac{3x^2(4-x^2)-x^3(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2}=\frac{x^2\cdot\left(12-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$$

Poniamo
$$f'(x)=0$$
$$x^2(12-x^2)=0 \Rightarrow \quad x_1=0 \quad x_{2,3}=\pm 2\sqrt{3}$$

Studiamo

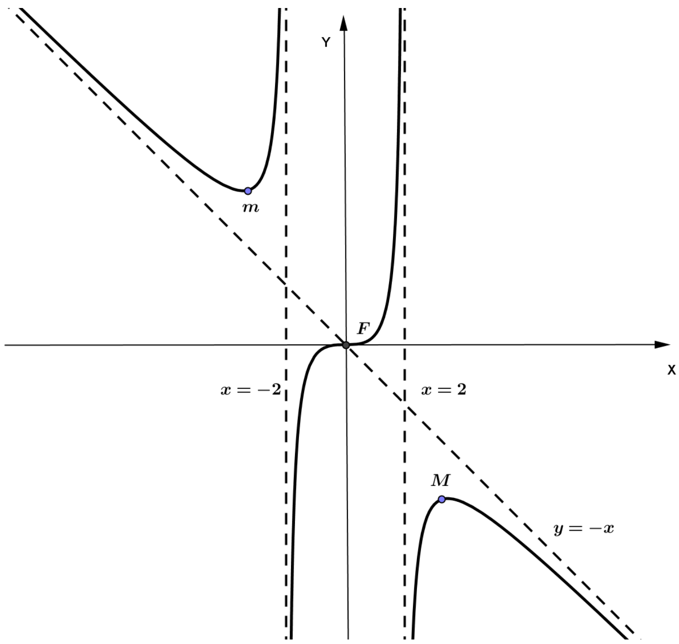
$$f'(x)>0$$

$$\frac{x^2(12-x^2)}{\left(4-x^2\right)^2}>0 \Leftrightarrow \quad 12-x^2>0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}$$



$$m\left(-2\sqrt{3}; f\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}\right)$$
$$M\left(2\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right)$$
$$F(0;0)$$

Riportiamo i nostri risultati nel disegno: il grafico dovrà necessariamente avere il seguente andamento

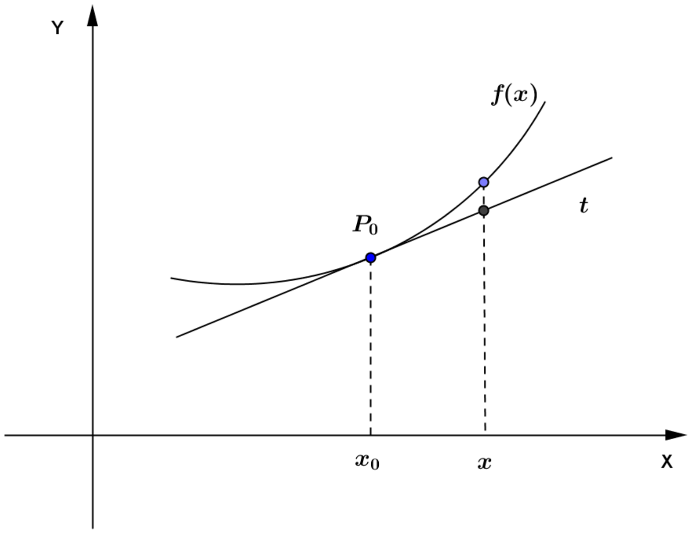


Concavità del grafico e derivata seconda

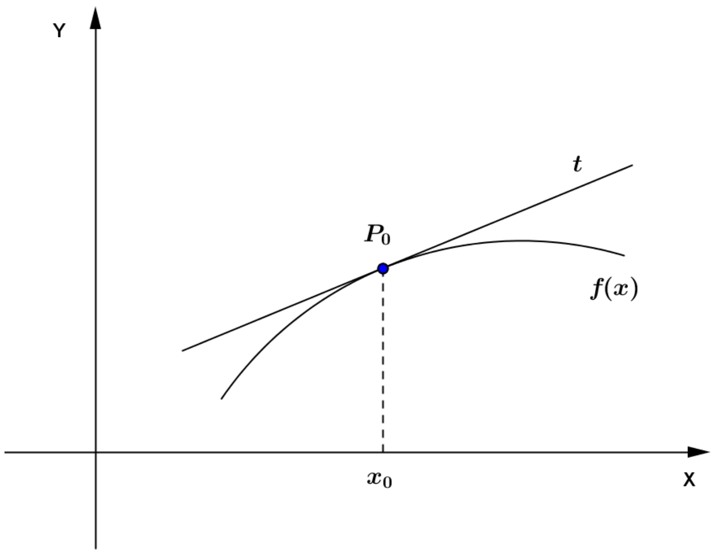
Nello studio di un grafico è importante determinare anche la "concavità" del grafico e i punti in cui c'è un cambio di concavità (punti di flesso).

Definiamo cosa si intende per "**concavità verso l'alto**" o "**verso il basso**" del grafico di una funzione in x_0:

Definizione: diciamo che in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sopra alla tangente in $P\big(x_0; f(x_0)\big)$



Definizione: diciamo che **in** x_0 **il grafico di** $f(x)$ **volge la concavità verso il basso** quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sotto alla tangente in $P\big(x_0; f(x_0)\big)$



Si può dimostrare che se $f(x)$ è continua in I con $f'(x), f''(x)$ continue e $x_0 \in I$:

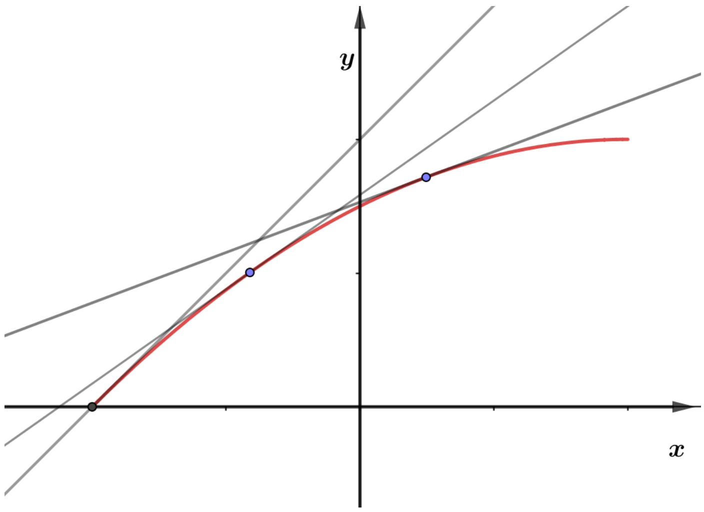
- Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la **concavità verso l'alto**.
- Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la **concavità verso il basso**.

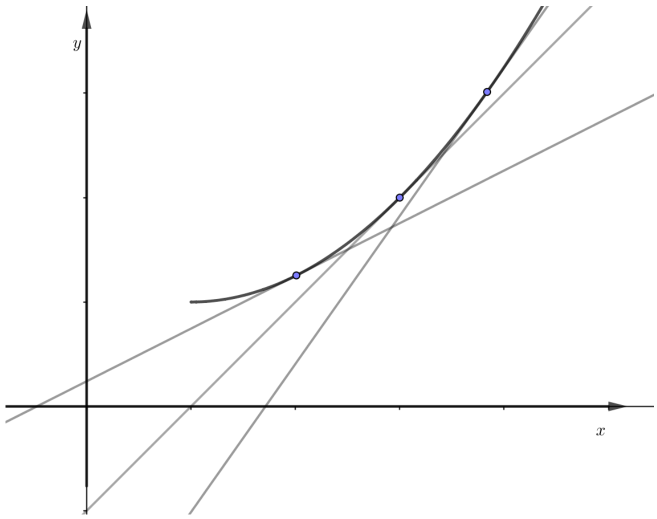
Osservazione: infatti si osserva (vedi figura) che quando la concavità è verso il basso le inclinazioni delle tangenti diminuiscono cioè la funzione derivata è decrescente cioè

$$D(f'(x)) = f''(x) < 0$$

Mentre quando la concavità è verso l'alto le inclinazioni delle tangenti aumentano cioè la funzione derivata è crescente e quindi

$$D(f'(x)) = f''(x) > 0$$

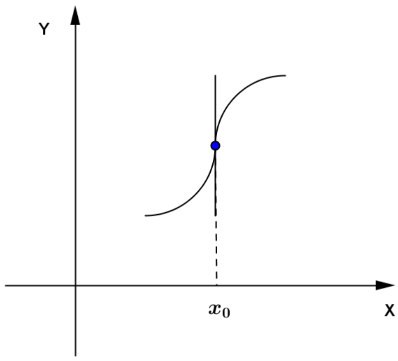


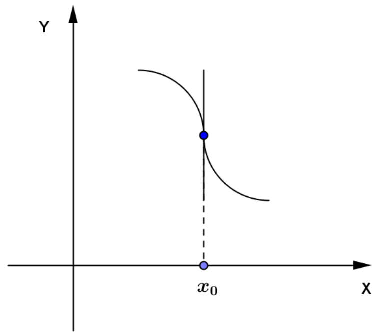


Flessi di una funzione

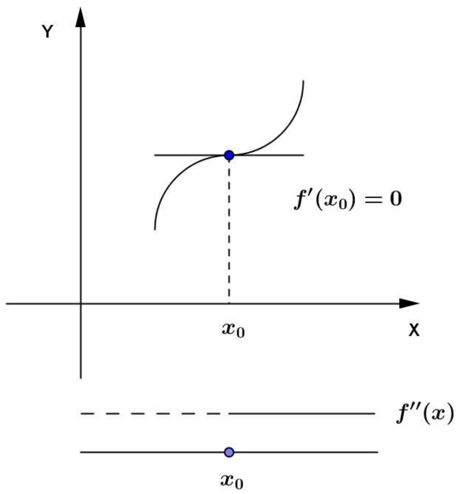
Definizione: x_0 si dice un punto di flesso per $f(x)$ se in x_0 il grafico della funzione **cambia concavità** e quindi il grafico "attraversa" la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.
A seconda dell'inclinazione della tangente possiamo avere

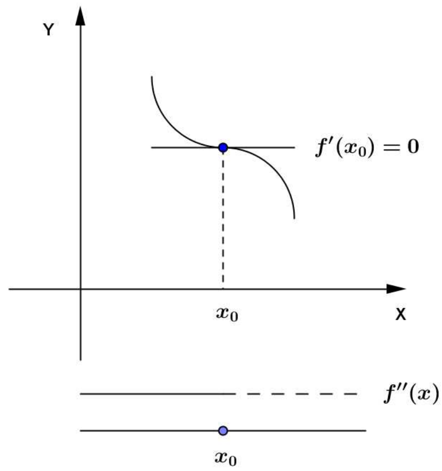
- **flesso a tangente verticale** : in questo caso $f(x)$ non è derivabile in x_0 e $\lim_{x\to x_0} f'(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to x_0} f'(x) = -\infty$



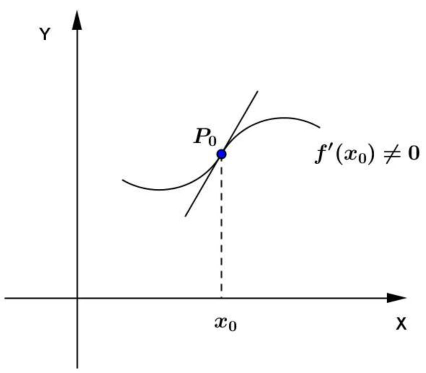


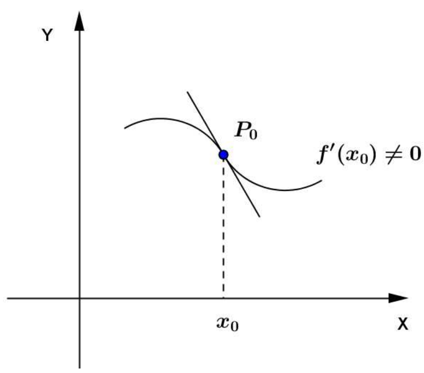
- **flesso a tangente orizzontale** : in x_0 $f'(x_0) = 0$ ma $f'(x)$ non cambia segno in x_0
  Cambia segno invece $f''(x)$ in x_0 (perché cambia la concavità) e $f''(x_0) = 0$.





- **flesso a tangente obliqua** : in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma c'è un cambio di concavità e quindi $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ **cambia segno**.



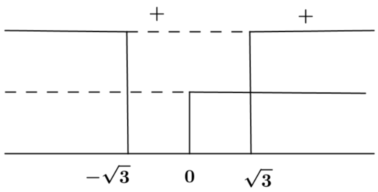


Esempio 2

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x) = x^3 - 3x}$

1) $D_f = \Re$

$f(x) > 0 \qquad x(x^2 - 3) > 0$



$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \quad \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

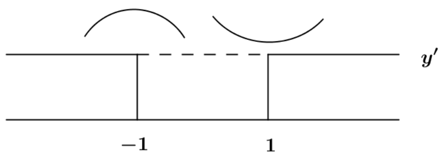
Quindi le intersezioni con gli assi sono $\left(-\sqrt{3};0\right)$ $(0;0)$ $\left(\sqrt{3};0\right)$.

Osserviamo che $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ e quindi la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine.

2) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ma non ci sono asintoti obliqui $\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\right)$

3) $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \quad 3(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$



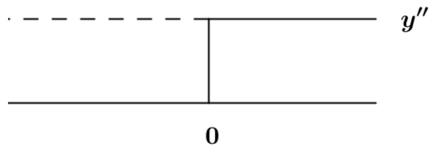
$y' > 0$

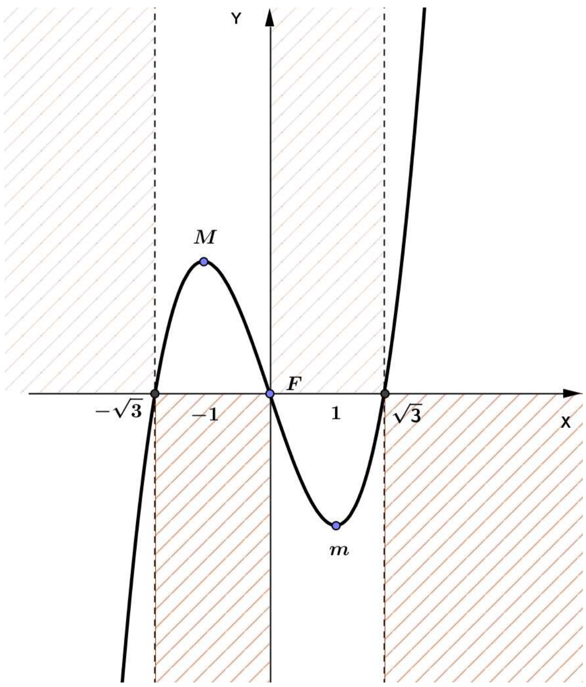
$M(-1;2) \qquad m(1;-2)$

4) $y'' = 6x$, $y'' = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$,

$y'' > 0 \Leftrightarrow \quad x > 0$

$F(0;0)$ flesso a tangente obliqua





Esempio 3

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x)=e^{-x^2}}$

1) $D_f=\Re$

$f(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in \Re$

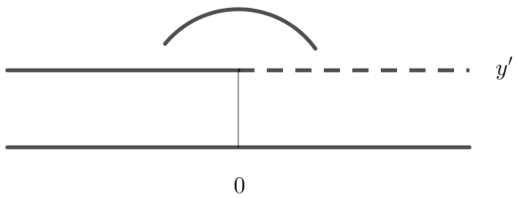
$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ e^{-x^2}=0 \rightarrow \textit{nessuna} \quad \textit{soluzione} \end{cases}$$

L’intersezione con gli assi è quindi solo il punto $(0;1)$.
$f(-x)=f(x)$ e quindi la funzione è pari cioè simmetrica rispetto all’asse y.

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \rightarrow y=0$ asintoto orizzontale

3) $y'=-2x\cdot e^{-x^2}$

$y'=0 \rightarrow x=0$
$y'>0 \rightarrow x<0$

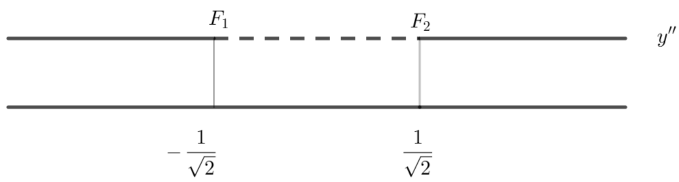


Il grafico ha un massimo in $M(0;1)$.

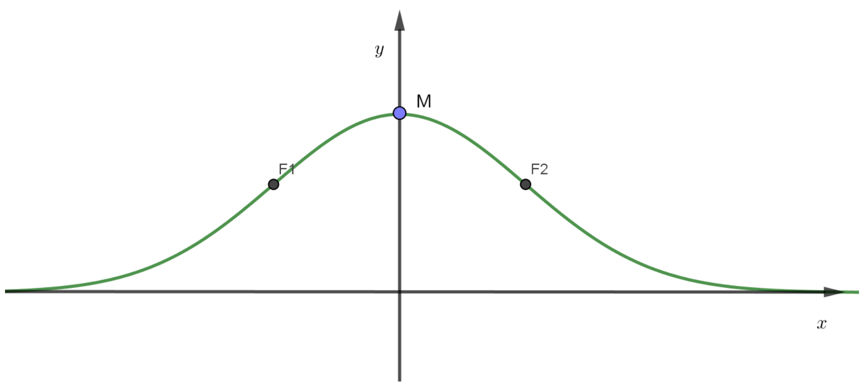
4) $y''=-2e^{-x^2}+4x^2\cdot e^{-x^2}=-2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

$y''=0 \rightarrow x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y''>0 \rightarrow x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cup x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



Quindi il grafico ha due flessi $F_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $\quad F_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

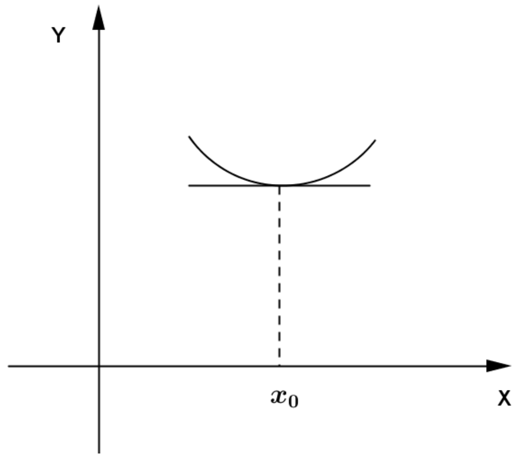


Nota

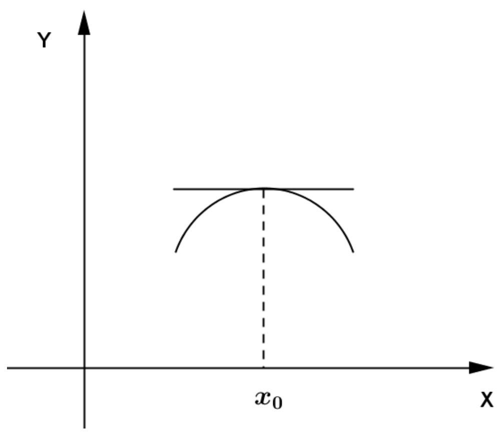
Massimi, minimi e flessi con lo studio di $f''(x_0)$

Per individuare massimi e minimi possiamo utilizzare lo studio di $f''(x)$ piuttosto dello studio del segno di $f'(x)$.

- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$ (concavità verso l'alto) $\Rightarrow x_0$ è un punto di minimo



- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$ (concavità verso il basso) $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo



Se in x_0 $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=0$ dobbiamo studiare il segno di $f''(x)$: se cambia in x_0 allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

ESERCIZI
STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

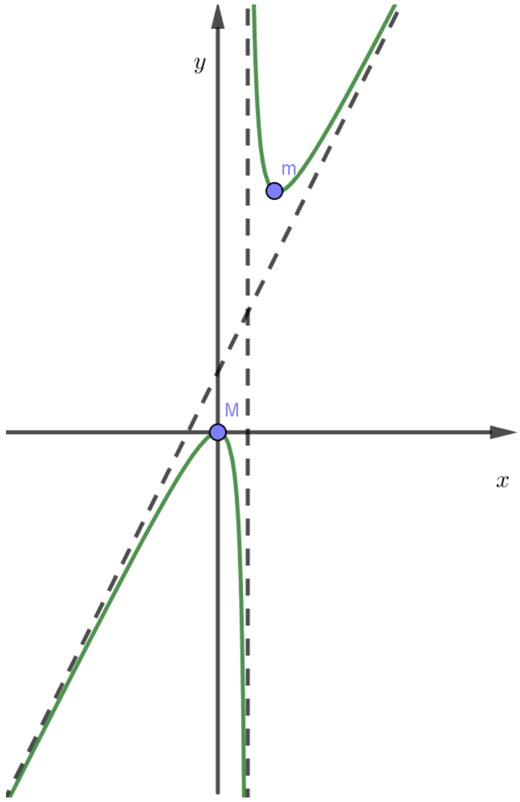
1) $y = \dfrac{2x^2}{x-2}$

Soluzione:

$D_f = \Re \setminus \{2\}$
Asintoto verticale: $x = 2$
Asintoto obliquo: $y = 2x + 4$

$$y' = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$M(0;0)$
$m(4;16)$



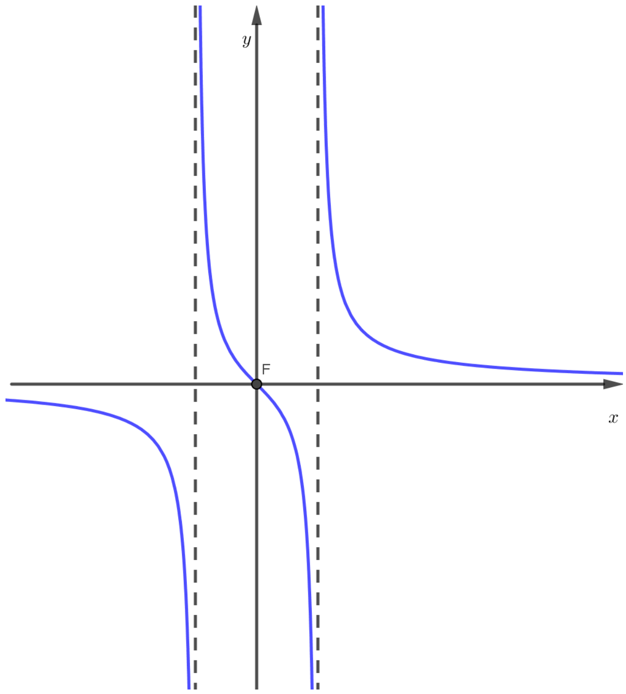
2) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

Soluzione:

$$y' = -\frac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Flesso a tangente obliqua: $F(0;0)$



3) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ $\quad [as.v.\ \ x=\pm1;\ \ as.obl.\ \ y=-x;\ \ m\left(-\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);$

$M\left(\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);\ \ F(0;0)\ \ a\ \ tg.\ \ orizz.]$

4) $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$ $\quad [\ as.v.\ \ x=4;\ \ as.obl.\ \ y=-x-1;\ \ m(2;-1)\ \ M(6;-9)\ ]$

5) $y=\dfrac{2x-1}{2x^3}$ $\quad [as.v.\ \ x=0;\ \ as.or.\ \ y=0;\ \ M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{16}{27}\right)\qquad F\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\ \ a\ \ tg.\ \ obliqua]$

6) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ $\quad [\ as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1;\ \ m(0;0);\ \ M(-2;-4)\ ]$

7) $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$ $\quad [as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1\ ]$

8) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$ $\quad [as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ m(2;3)]$

9) $y=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{2x^2}$ $\quad [as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-\dfrac{3}{2};\ \ m(1;0)]$

11) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x}$ $\quad [as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-4;\ \ M\left(-\sqrt{3};-(2\sqrt{3}+4)\right);m\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}-4\right)\ ]$

12) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ $\quad [as.v.\ \ x=5;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ M(3;1);\ \ m(7;9)]$

13) $y=\dfrac{x^2-4x}{1-x}$ $\quad [as.v.\ \ x=1;\ \ as.obl.\ \ y=-x+3]$

14) $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ $\quad [as.v.\ \ x=0\ \ as.or.\ \ y=\dfrac{1}{2}\ ]$

ESERCIZIO GUIDATO 1

Studia il grafico di $y = sen^2 x$

a) Il dominio della funzione risulta ……..
   Il segno della funzione risulta…….
   Il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse ….. poiché $f(-x) = f(x)$.
   Le intersezioni con l'asse x si ottengono risolvendo:

$$sen^2 x = 0 \rightarrow senx = 0 \rightarrow x = k\pi$$

L'intersezione con l'asse y si trova calcolando $y(0) = 0$: quindi il grafico passa per l'origine .

b) Dal momento che la funzione è periodica e definita per tutti i numeri reali non ci sono limiti da determinare.
c) Studio della derivata: calcoliamo la derivata.

$$y' = D(sen^2 x) = ...$$

Poniamo $y' = 0$ e determiniamo quando risulta positiva per trovare i punti di massimo e minimo: possiamo scegliere come intervallo di studio $I[0;2\pi]$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Dopo aver verificato che nell'intervallo $I[0;2\pi]$ci sono due massimi $M_1\left(\frac{\pi}{2};1\right)$, $M\left(\frac{3}{2}\pi;1\right)$ e tre minimi $m_1(0;0)$, $m_2(\pi;0)$, $m_3(2\pi;0)$ risulta chiaro che è necessario anche calcolare la *y''* per determinare i punti di flesso (che saranno a tangente obliqua).

d) Calcoliamo $y'' = ...$ e poniamo $y''(x) = 0 \rightarrow ....$

Possiamo quindi tracciare il grafico……..

Osservazione: dal grafico si capisce che il periodo della funzione non è 2π ma π.
Se infatti ricordiamo che $sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ è chiaro che la nostra funzione ha lo stesso periodo di $y = \cos 2x$ che ha infatti periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ESERCIZIO GUIDATO 2

Studia il grafico di $y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

a) Il dominio della funzione si ottiene risolvendo la disequazione

$$\frac{x}{x-1} > 0 \rightarrow ....$$

Possiamo studiare il segno della funzione risolvendo la disequazione:

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \rightarrow \frac{x}{x-1} > 1 \rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x-x+1}{x-1} > 0 \rightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \rightarrow x > 1$$

Per determinare le intersezioni con l'asse *x* dobbiamo risolvere l'equazione

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \rightarrow ....$$

b) Studio dei limiti

Poiché il dominio risulta $x < 0 \quad \cup \quad x > 1$ dobbiamo studiare:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = ...$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = ...$

In conclusione il grafico della funzione ha due asintoti verticali (*x=0* e *x=1*) e un asintoto orizzontale (asse x).

c) Studio della derivata

Calcoliamo $y' = D\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = ...$

Studiamo il segno della derivata ponendo $y' > 0 \rightarrow ......$

Verificato quindi che non ci sono massimi o minimi e che la funzione è nei due intervalli $x < 0$ e $x > 1$ sempre decrescente, possiamo tracciare il grafico (in questo caso non è necessario studiare la *y''*).

SCHEDA DI LAVORO

GRAFICI PER VISUALIZZARE L'ANDAMENTO DI UN FENOMENO

Lo studio dei grafici non è importante solo in ambito matematico perché un grafico può servire a "visualizzare" *l'andamento di un "fenomeno" nel tempo*: questo accade tutte le volte che la variabile x rappresenta il tempo e per questo viene indicata con la lettera t.

I fenomeni possono essere di vario tipo.

Si possono avere fenomeni di tipo naturale cioè fenomeni fisici o biologici quali:

- il valore dell'intensità di corrente che scorre in un filo metallico;
- l'intensità del campo magnetico all'interno di una bobina;
- il numero degli individui di una popolazione di animali o di piante:
- ecc.

In genere si riesce a determinare l'equazione della funzione $f(t)$ che descrive il fenomeno cioè una funzione che dipende dalla variabile tempo.

Oppure si possono considerare fenomeni legati ad attività umane e in questo caso i grafici derivano da tabelle di dati cioè non c'è un'equazione della funzione da rappresentare e servono a visualizzarne l'andamento temporale:

- la quotazione di un dato titolo in borsa;
- il fatturato mensile di una data azienda;
- il quantitativo del grano prodotto ogni anno in Italia;
- il numero degli abitanti di un dato paese negli ultimi anni;
- il numero giornaliero dei nuovi contagiati in una data epidemia;
- ecc.

Scegli un esempio di fenomeno di tipo "fisico", uno di tipo "biologico" e uno legato ad una "tabella" magari anche facendo una ricerca sul web e per ciascuno rappresenta il grafico.

Problemi di massimo e minimo

Supponiamo di avere una funzione $f: [a; b] \to R$ continua in $[a; b]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.

I problemi di massimo e minimo sono problemi (di geometria piana o solida oppure di geometria analitica ecc.) in cui dobbiamo determinare una funzione (che per esempio esprime, in funzione di una variabile scelta x, un perimetro o un'area o un volume ecc.) e individuare il valore di x per cui la funzione assume il massimo o il minimo assoluto.

Poiché la variabile avrà una limitazione data dal tipo di problema, la funzione dovrà essere considerata in un dato intervallo.

Se la funzione è continua e l'intervallo è limitato, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluto.

Possiamo quindi procedere così:

- Calcolare la derivata della funzione che dobbiamo studiare

- Cercare i valori per cui si annulla e studiare il segno della derivata: individuare quindi i massimi e minimi relativi ed eventualmente "confrontarli" (confrontare le ordinate corrispondenti) per determinare il massimo o il minimo assoluto.

Attenzione: se la derivata non si annulla ed è per esempio sempre positiva cioè la funzione è crescente, è chiaro che il minimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo e il massimo nell'estremo destro.

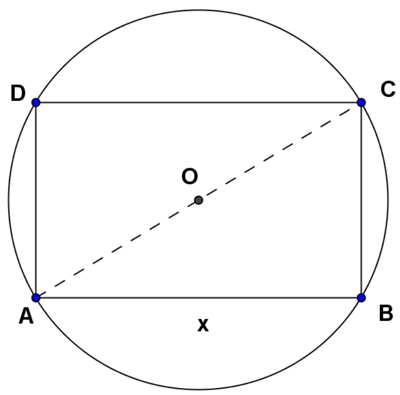
Attenzione: controllare se ci sono punti di non derivabilità: nel caso ci siano le loro ordinate vanno confrontate con quelle dei massimi (minimi) relativi trovati.

NOTA

I problemi di massimo e minimo non sono solo interessanti da un punto di vista teorico-matematico, ma anzi vedremo come **possono servire a risolvere problemi "reali".**

Esempio 1

Determina, tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima.



Poniamo $x = \overline{AB}$.

Quindi avremo: $0 \leq x \leq 2r$

Poiché $\overline{BC} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ indicando con $A(x)$ l'area di $ABCD$ avremo:

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 2r$$

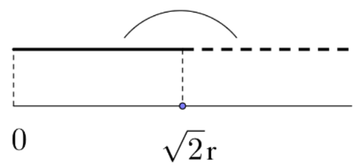
Poiché $A(x)$ è continua in $[0; 2r]$ per il teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto.

Calcoliamo quindi la derivata:

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}r$ ($x = -\sqrt{2}r$ non è accettabile)

$A'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \sqrt{2}r$



Quindi $x = \sqrt{2}r$ fornisce il massimo assoluto (non abbiamo trovato altri punti di massimo relativo).

Osserviamo che se $\overline{AB} = \sqrt{2}r$ $ABCD$ è un quadrato.

Quindi tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima è il quadrato.

Nota

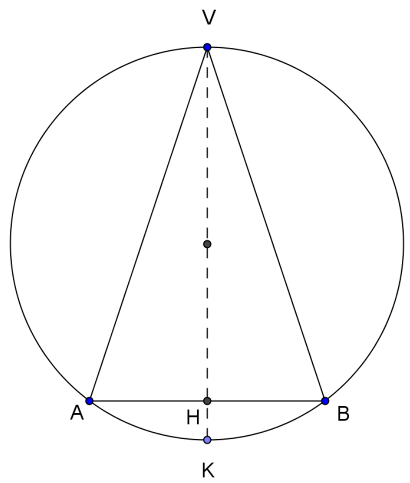
Per $x = 0$ o $x = 2r$ il rettangolo degenera in due diametri sovrapposti e sia ha area nulla (minimo assoluto).

Esempio 2

Determinare, tra i coni inscritti in una sfera di raggio r, quello di massimo volume.

Consideriamo una sezione. Avremo un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza.

Poniamo $\overline{VH} = x$: $0 \leq x \leq 2r$



Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo VAK: $\overline{AH}^2 = x(2r - x)$

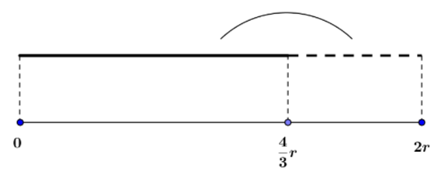
Quindi:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi x^2(2r - x) = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(4rx - 3x^2)$$

$V'(x) = 0 \rightarrow x = 0, \qquad x = \frac{4}{3}r$

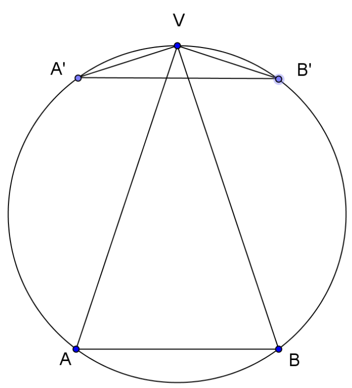
$V'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r$



e quindi per $x = \frac{4}{3}r$ si ha il cono di volume massimo.

Osservazione

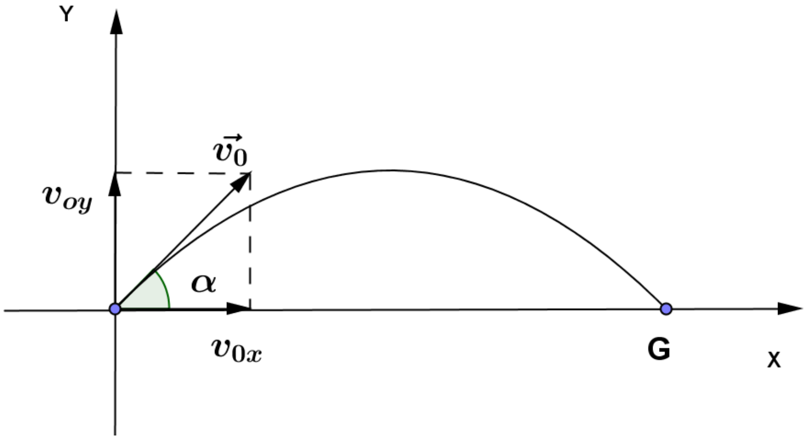
La scelta del segmento a cui associare x è importante. Scegliendo $\overline{VH} = x$ abbiamo individuato bene il cono (non ci sono coni inscritti diversi con la stessa altezza) mentre se avessimo scelto $\overline{AH}$ (o $\overline{AB}$) ad un dato valore dell'incognita corrispondevano generalmente due coni diversi.



In figura per esempio abbiamo lo stesso valore della base ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$) ma i triangoli sezione e quindi i coni sono diversi.

Esempio 3

Lanciando un corpo con velocità $\vec{v_0}$ inclinata di α rispetto all'orizzontale qual è, a parità di v_0 (intensità della velocità iniziale), l'angolo α per cui si ottiene la **massima gittata**?



Ricordiamo che per studiare il moto dobbiamo scomporlo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x} in direzione orizzontale e in un moto uniformemente decelerato (con decelerazione $g = 9{,}81\ m/s^2$) di velocità iniziale v_{0y} in direzione verticale.

$$\begin{cases} x = v_{ox} \cdot t \\ y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo t (lo ricaviamo dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda) e ponendo $y = 0$ trovo:

$$x_G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Quindi, poiché $v_{0x} = v_0 cos\alpha$ e $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ il problema si riconduce a determinare il massimo di:

$$f(\alpha) = \frac{2{v_0}^2 sen\alpha cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} sen2\alpha$$

Abbiamo quindi che $f(\alpha)$ è massima quando $sen2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ e quindi l'angolo per cui si ha la massima gittata risulta $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEMI

GEOMETRIA PIANA

1. Tra tutti i rettangoli di area assegnata a^2 determina quello di perimetro minimo.

$$[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = a \rightarrow quadrato]$$

2. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determina quello di area massima.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = \frac{p}{2} \rightarrow quadrato\right]$$

3. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata a determina quello di area massima.

$$\left[x = cateto \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow triangolo\ rettangolo\ isoscele\right]$$

4. Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.

$$\left[x = altezza\ relativa\ alla\ base \rightarrow x = \frac{3}{2}r \rightarrow triangolo\ equilatero\right]$$

5. Tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r determina quello di perimetro massimo.

$$[x = dimensione\ rettangolo \rightarrow x = r\sqrt{2} \rightarrow quadrato]$$

6. Tra i triangoli equilateri inscritti in un triangolo equilatero ABC di lato l, determina quello di area minima.

$$\left[trinagolo\ di\ lato\ \frac{l}{2}\right]$$

7. Tra tutti i triangoli iscritti in una semicirconferenza, trova quello di area massima.

[triangolo rettangolo isoscele]

8. Nell'insieme dei trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio r, determina quello di perimetro massimo.

[semiesagono regolare]

9. Fra tutti i rettangoli di data area, che misura a^2, determina quello la cui diagonale è minima.

[quadrato di lato a]

10. Tra tutti rettangoli di data diagonale, che misura d,determina quello di area massima.

[quadrato di lato $\frac{d}{\sqrt{2}}$]

PROBLEMI

GEOMETRIA SOLIDA

1. Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio r determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}r\right]$$

2. Tra i cilindri inscritti in un cono avente raggio di base r e altezza assegnata h, determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \frac{2}{3}r\right]$$

3. Tra i coni inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

$$\left[x = altezza\ del\ cono \rightarrow x = \frac{4}{3}r\right]$$

4. Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r, determina quello di minimo volume.

$$[x = distanza\ tra\ vertice\ cono - centro\ sfera \rightarrow x = 3r]$$

5. Tra i parallelepipedi rettangolari aventi per base un quadrato e un volume assegnato V, determina quello di superficie totale minima.

$$[cubo]$$

6. Tra i cilindri di superficie totale assegnata S determina quello di volume massimo.

$$[cilindro\ equilatero]$$

7. Una tipica lattina cilindrica ha volume fissato pari a 33 *cl*. Quali sono le dimensioni della lattina (altezza e diametro) che minimizzano il costo del metallo necessario a produrla, ossia la superficie totale della lattina?

[cilindro equilatero di diametro $2r = h = 2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ cm]

8. Tra i parallelepipedi rettangoli a base quadrata e diagonale di misura d, determina quello di volume massimo.

[cubo di lato $\frac{d}{\sqrt{3}}$]

SCHEDA DI LAVORO 1

DIDONE E LA FONDAZIONE DI CARTAGINE

Secondo la leggenda narrata da Virgilio nel I libro dell'Eneide, la regina fenicia Didone, sbarcata sulle coste settentrionali dell'Africa, chiese al re dei Getuli un appezzamento di terreno su cui costruire una nuova città: il re le offrì una pelle di toto dicendole che poteva appropriarsi di quanto terreno poteva comprendere con quella pelle.

"Giunsero in questi luoghi dove ora vedi le mura possenti e sorgere la rocca della nuova Cartagine, e acquistarono quanto suolo, che dal fatto si chiama Birsa , quanto potessero racchiudere con una pelle di toro."

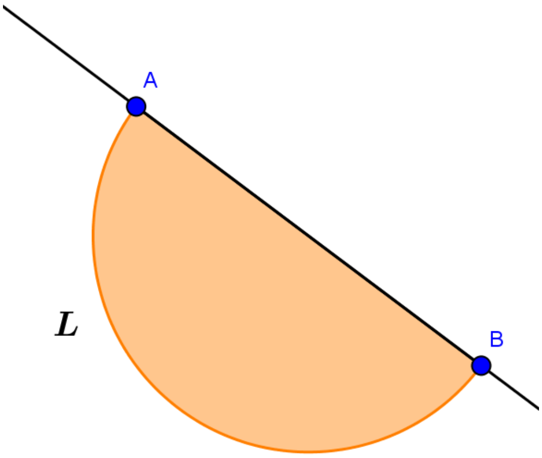
(*Devenere locos ubi nunc ingentia cernis Moenia surgentemque novae Karthaginis arcem, mercatique solum, facti de nomine Byrsam, taurino quantum possent circumdare tergo.*)

L'astuta Didone allora fece tagliare la pelle in tante strisce sottili che legò una dietro l'altra ottenendo così una corda con la quale poté delimitare una vasta area **a forma di semicerchio** affacciata sul mare.

Il problema di Didone è un problema di massimo che può essere enunciato così:

Tra tutte le curve piane di lunghezza assegnata L ed avente i due estremi su una retta, determinare quella che racchiude la superficie di area massima.

Si può dimostrare che la figura che delimita la superficie massima è la semicirconferenza di diametro AB.



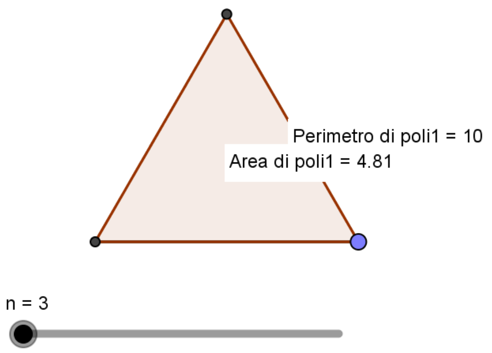
Nota: naturalmente se invece cerchiamo, tra tutte le figure piane anche non poligonali, di perimetro assegnato L di quella che delimita la superficie massima avremo la circonferenza.

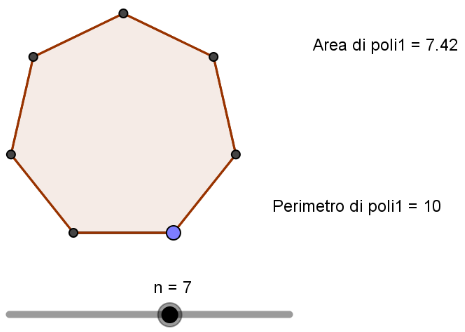
ESERCIZIO

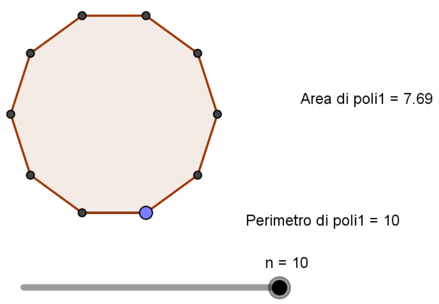
Prova con Geogebra a verificare che l'area dei poligoni regolari di perimetro assegnato L aumenta all'aumentare del numero dei lati.

Suggerimento

- Crea una costante L (per esempio L=10);
- crea uno slider n che varia tra 3 e 10(per esempio);
- crea un segmento di lunghezza L/n e con il comando "poligono regolare" disegna il poligono di *n* lati avente come lato il segmento;
- con il comando "area" visualizza l'area del poligono che hai costruito;
- aumenta il valore di n e osserva i valori dell'area.





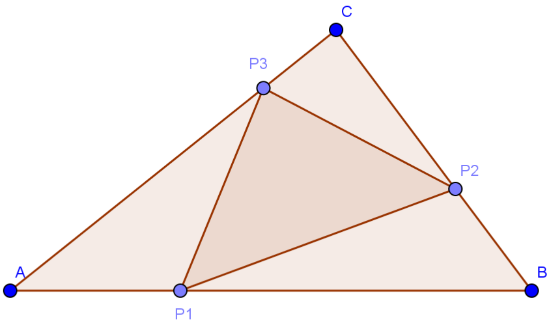


Stampa il tuo lavoro.

SCHEDA DI LAVORO 2

TRIANGOLO INSCRITTO DI PERIMETRO MINIMO

Considera un triangolo ABC: disegna un triangolo inscritto in ABC avente cioè i vertici sui lati di ABC (vedi figura). Come devi scegliere i tre punti in modo da avere il triangolo di minimo perimetro?



Si può dimostrare che il triangolo di minimo perimetro è quello che congiunge i piedi delle altezze del triangolo ABC: prova a verificarlo utilizzando Geogebra.

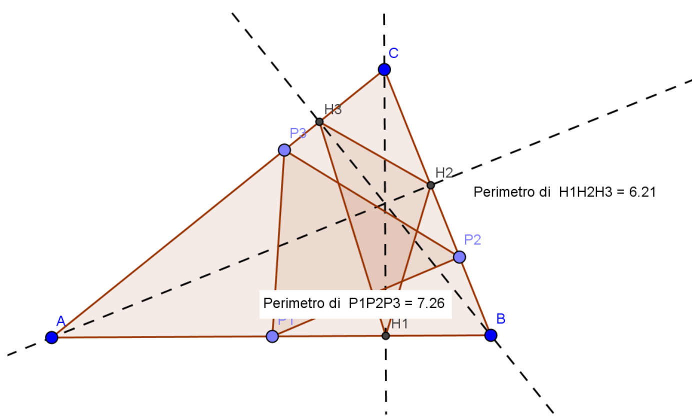
Suggerimento

Dopo aver costruito il triangolo ABC, utilizza il comando "punto su oggetto" per creare i tre punti e poi congiungili;

traccia le altezze del triangolo, individua i piedi delle altezze e congiungili;

scegli il comando "distanza o lunghezza" per determinare il perimetro dei due triangoli;

muovi i punti P1, P2, P3 e controlla i perimetri…

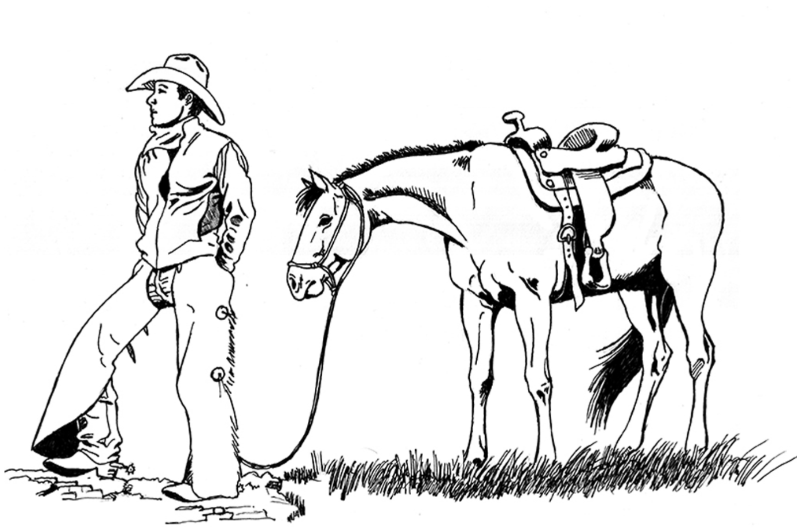


NOTA

Se immaginiamo che i lati del triangolo siano specchi, il triangolo $H_1H_2H_3$ è l'unico percorso chiuso che un raggio di luce può compiere toccando una sola volta ogni specchio-lato.

SCHEDA DI LAVORO 3

IL PERCORSO PIU’ BREVE



Un cowboy a cavallo si trova nel punto A e vuole far abbeverare il cavallo al fiume (retta r) prima di tornare alla fattoria (punto B) (vedi figura).

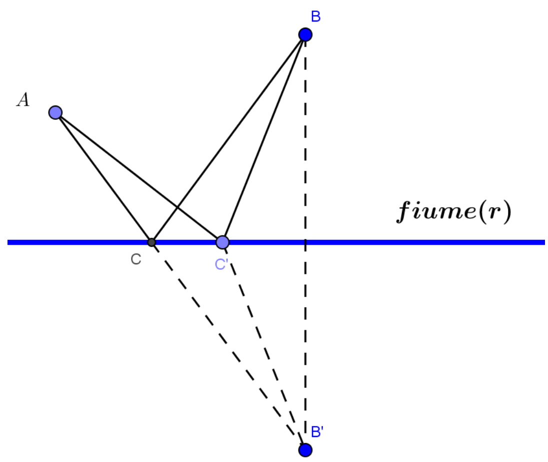
Qual è il percorso di lunghezza minima?

Suggerimento

Considera il punto B’ simmetrico di B rispetto alla retta fiume-r e congiungi A con B’: sulla retta r viene individuato un punto C.

Come potresti dimostrare che il percorso minimo è quello $\overline{AC}+\overline{CB}$?

Considerando un qualsiasi altro punto C’ su r e considerando il percorso $\overline{AC'}+\overline{C'B}$ …….



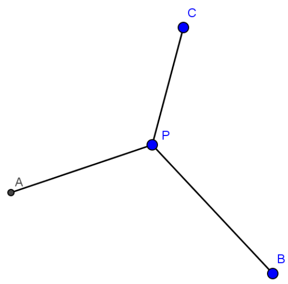
SCHEDA DI LAVORO 4

LA RETE STRADALE

Pierre de Fermat verso la metà del XVII secolo propose a Torricelli il seguente problema ripreso poi da Vincenzo Viviani:

"Dati 3 punti A,B,C tali che il triangolo ABC abbia angoli minori di 120°, trovare un punto P tale che sia minima la somma delle distanze tra P e i punti dati."

"Dato triangulo,cius unusquisque angolorum minor sit graduum 120, punctum reperire, a quo si ad angulos tres rectae educantur ipsarum aggregatum sit minimum." (Vincenzo Viviani , De maximis et minimis)



Questo problema non è solo di tipo teorico perché possiamo pensare che corrisponda alla ricerca della rete stradale di minima lunghezza che metta in comunicazione tre località: si può dimostrare che il punto P è quello da cui i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno (*).

Nota: nel caso in cui uno degli angoli del triangolo ABC sia maggiore o uguale a 120°, il punto P coincide con il vertice di quell'angolo.

Esercizio: verifica con Geogebra che la somma minima si ha quando da P i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno.

Suggerimento

Dopo aver creato tre punti A,B,C puoi creare un punto P a caso, costruire i segmenti AP, BP, CP e utilizzando il comando "lunghezza" calcolare la lunghezza dei tre segmenti e la loro somma (sommando da tastiera le lettere che rappresentano i segmenti): in questo modo puoi controllare che quando P si avvicina ad avere gli angoli α, β, γ di 120° la somma delle distanze diminuisce.

Individua una costruzione del punto P da cui i lati si "vedono" sotto angoli di 120.

(*)Cerca sul web come si può sviluppare questa dimostrazione.

SCHEDA DI LAVORO 5

LA CASSERUOLA DI CAPACITA' MASSIMA

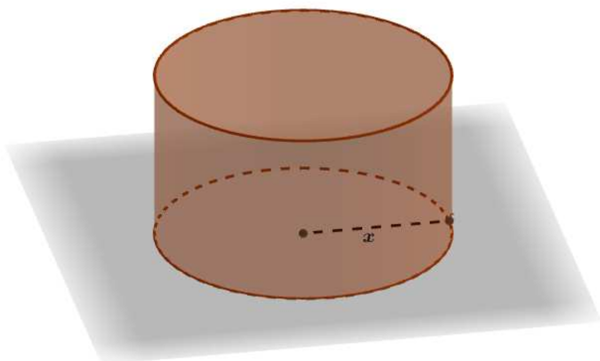
Tra tutte le casseruole di forma cilindrica aventi la stessa superficie S (superficie laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

Suggerimento

Schematizza la casseruola con un cilindro ed indica con x il raggio di base: se la superficie di base + superficie laterale sono uguali a S puoi ricavare l'altezza h…..

Dopo aver determinato l'altezza in funzione di x e S, calcola il volume $V(x)$ e poi la sua derivata $V'(x)$ e ponendola uguale a zero determina il valore del raggio per cui si ottiene il massimo volume.

Verifica che sostituendo il valore trovato nell'espressione dell'altezza si trova che la casseruola di volume massimo risulta avere …….



Integrali indefiniti

FUNZIONI PRIMITIVE

Definizione
F(x) si dice “funzione primitiva” di f(x) se $F'(x) = f(x)$

Esempio
Quali sono le funzioni primitive di $f(x) = \cos x$?

Ricordando che $D(senx) = \cos x$ avrò che $F(x) = senx$ ma anche $y = senx + c$ (con $c \in R$) risulta funzione primitiva di $f(x) = \cos x$ poiché $D(senx + c) = \cos x$.
Abbiamo quindi il seguente teorema:

Teorema: se F(x) è una primitiva di f(x) $\Rightarrow$ anche F(x) + c ($c \in R$) è una primitiva di f(x) ed ogni primitiva di f(x) è del tipo F(x) + c.

Definizione: l’insieme delle primitive di f(x) viene indicato con il simbolo

$$\boxed{\int f(x)dx}$$

che si legge *integrale indefinito di f(x) in dx.*

Quindi se F(x) è una primitiva di f(x)

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c} \text{con } c \in R$$

f(x) prende il nome di *funzione integranda*.

Nel nostro esempio quindi scriveremo:

$$\int \cos x \ dx = senx + c$$

NOTA

E’ chiaro che $D\left(\int f(x)dx\right) = D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$

Osservazioni

1. $\boxed{\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx}$

Esempio: $\int 2\cos x dx = 2\int \cos x dx = 2senx + c$

Infatti $D(2senx + c) = 2 \cdot \cos x$

2. $\boxed{\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$

Esempio: $\int (x + \cos x)dx = \int x\ dx + \int \cos x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + senx + c$

Infatti $D\left(\frac{1}{2}x^2 + senx + c\right) = x + \cos x$

Integrali indefiniti immediati

1) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \qquad con \qquad \alpha \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + c$ (*)

3) $\int senx\ dx = -\cos x + c$ $\qquad$ $\int \cos x\ dx = senx + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = tgx + c$ $\qquad$ $\int \frac{1}{sen^2 x}\ dx = -\cot gx + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsenx + c$ $\qquad$ $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctgx + c$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\qquad$ (ricorda che $Da^x = a^x \cdot \ln a$)

$\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad$ (caso particolare per $a = e$)

(*) Nota $\qquad \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} \cdot (-1) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

Esempi

1) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

2) $\int \frac{1}{2} x \ dx = \frac{1}{2} \int x \ dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{1}{4} x^2 + c$

3) $\int \frac{3}{x} \ dx = 3 \int \frac{1}{x} \ dx = 3 \ln|x| + c$

4) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = tgx + senx + c$

5) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4arcsenx + c$

6) $\int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + c$

7) $\int (3 \cdot e^x + senx) \ dx = 3 \int e^x dx + \int senx \ dx = 3 \cdot e^x - \cos x + c$

8) $\int \left(\frac{5}{x} - \cos x \right) \ dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x} \ dx - \int \cos x \ dx = 5 \ln x - senx + c$

9) $\int \frac{3}{1+x^2} \ dx = 3 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} \ dx = 3 \cdot arctgx + c$

10) $\int (\frac{1}{sen^2 x} - 3 \cdot \cos x) \ dx = \int \frac{1}{sen^2 x} \ dx - 3 \int \cos x \ dx = -\cot gx - 3senx + c$

Integrazioni basate sulla derivazione della funzione composta

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta, abbiamo:

1) $$\boxed{\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx = \frac{1}{\alpha+1}\cdot f^{\alpha+1}(x)+c \qquad \alpha \neq -1}$$

***Esempio 1*:** $\int sen^2 x\cdot\cos x\ dx = \frac{sen^3 x}{3}+c$

Infatti se deriviamo $D\left(\frac{sen^3 x}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot 3sen^2 x\cdot\cos x = sen^2 x\cdot\cos x$

Esempio 2: $\int \left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx$

Cerchiamo di riportarci al caso $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx$ osserviamo che $D\left(x^2+1\right)=2x$, mentre nella nostra funzione integranda abbiamo solo *x*. Per ottenere *f'(x)* moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int \left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^3\cdot 2x\ dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+c$$

Esempio 3: $\int \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\ dx = \frac{\ln^3 x}{3}+c$

Esempio 4: $\int \sqrt{x+1}\ dx$

Osserviamo che $\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$ e che $D(x+1)=1$, quindi

$$\int \sqrt{x+1}\ dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x}+c$$

Nota

Un caso significativo è : $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\ dx = -\frac{1}{f(x)}+c}$$

2) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + c}$$

Esempio 1: $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\ dx$

Se ci accorgiamo che $D(x^2+x) = 2x+1$, abbiamo subito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\ dx = \int \frac{D(x^2+x)}{x^2+x}\ dx = \ln|x^2+x| + c$$

Esempio 2: $\int \frac{senx}{\cos x}\ dx$

In questo caso $D(\cos x) = -senx$ mentre noi abbiamo $senx$ ma possiamo "aggiustare" le cose così:

$$\int \frac{senx}{\cos x}\ dx = -\int \frac{(-senx)}{\cos x} dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

3)

a) $$\boxed{\int (senf(x)) \cdot f'(x)\ dx = -\cos(f(x)) + c}$$

Esempio: $\int sen2x\ dx$

Considerando $f(x) = 2x$ allora $D(f(x)) = 2$ e quindi possiamo "aggiustare" le cose moltiplicando e dividendo per 2:

$$\int sen2x\ dx = \frac{1}{2}\int (sen2x) \cdot 2\ dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

b) $$\boxed{\int (\cos f(x)) \cdot f'(x)\ dx = sen(f(x)) + c}$$

Esempio:

$$\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\ dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

c)

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx = tg(f(x)) + c}$$

Esempio: $\int \frac{3}{\cos^2 3x}\ dx = tg3x + c$

d) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{sen^2(f(x))}\ dx = -\cot g(f(x)) + c}$$

Esempio: $\int \frac{x^2}{sen^2 x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{sen^2 x^3}dx = -\frac{1}{3}\cot gx^3 + c$

e) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\ dx = arcsen(f(x)) + c}$$

Esempio: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}arcsenx^2 + c$

f) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\ dx = arctg(f(x)) + c}$$

Esempio: $\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right) + c$

4) $$\boxed{\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c}$$

$$\boxed{\int \left(e^{f(x)}\cdot f'(x)\right)\ dx = e^{f(x)} + c}$$

Esempio 1: $\int x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+1} + c$ notando che $D(x^2+1) = 2x$

Esempio 2: $\int \cos x\cdot 3^{senx}dx = \frac{3^{senx}}{\ln 3} + c$

ESERCIZI
INTEGRALI INDEFINITI

1) $\int x^2 dx$

2) $\int (2x+1)^3 dx$

3) $\int \left(\frac{1}{2}x + \cos x\right) dx$

4) $\int \frac{1}{4x+1} dx$

5) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$

6) $\int e^{2x} dx$

7) $\int x \cdot e^{x^2} dx$

8) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

9) $\int \frac{1}{x^2+2} dx$

10) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

11) $\int sen 2x \ dx$

12) $\int \cos 2x \ dx$

13) $\int \sqrt{x+1} dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+4x+4} dx$

15) $\int \sqrt[3]{2x+1} dx$

16) $\int sen\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) dx$

17) $\int \frac{x}{x^2+2} dx$

18) $\int tg 2x \ dx$

19) $\int (x^3+1) dx$

20) $\int (senx + \cos x) dx$

21) $\int (x^4 + \cos x) dx$

22) $\int (e^x + x) dx$

23) $\int \sqrt{3x-1} dx$

24) $\int x \cdot \sqrt{x^2-1} dx$

25) $\int (x^3 - \cos x) dx$

26) $\int e^{3x} dx$

27) $\int senx \cdot \cos x \ dx$

28) $\int senx \cdot \cos^4 x \ dx$

29) $\int (1+x)^4 dx$

30) $\int \sqrt{2x+1} \ dx$

31) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ dx$

32) $\int tgx \ dx$

33) $\int \cot gx \ dx$

34) $\int \frac{1}{2x+1} \ dx$

35) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

36) $\int \frac{e^x}{2e^x+5} \ dx$

37) $\int \cos 3x \ dx$

38) $\int \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

39) $\int \frac{1}{sen^2(3-x)} \ dx$

40) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

41) $\int sen^3 x \cdot \cos x \ dx$

42) $\int (2+x)^3 dx$

43) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

44) $\int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ dx$

45) $\int \frac{1}{sen^2(2-x)} dx$

46) $\int \frac{1}{x^2+3} dx$

47) $\int e^{2x+1} dx$

48) $\int \frac{x}{x^2-2} dx$

49) $\int \frac{x-1}{x^2+5} dx$

50) $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$

51) $\int x \cdot (x^2-1)^3 dx$

52) $\int x \cdot \cos x^2 dx$

53) $\int sen4x \ dx$

54) $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx$

Soluzione degli esercizi

1) $\frac{x^3}{3}+c$

2) $\frac{1}{8}(2x+1)^4+c$

3) $\frac{1}{4}x^2+senx+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|4x+1|+c$

5) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$

6) $\frac{1}{2}e^{2x}+c$

7) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

8) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

9) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$

10) $-\frac{1}{x+1}+c$

11) $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

12) $\frac{1}{2}sen2x+c$

13) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

14) $-\frac{1}{x+2}+c$

15) $\frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}}+c$

16) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+c$

17) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+c$

18) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c$

19) $\frac{x^4}{4}+x+c$

20) $\cos x-senx+c$

21) $\frac{x^5}{5}+senx+c$

22) $e^x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+c$

24) $\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+c$

25) $\frac{x^4}{4}-senx+c$

26) $\frac{1}{3}e^{3x}+c$

27) $\frac{sen^2 x}{2}+c$

28) $-\frac{\cos^5 x}{5}+c$

29) $\frac{(1+x)^5}{5}+c$

30) $\frac{1}{3}\cdot(2x+1)\cdot\sqrt{2x+1}+c$

31) $-\sqrt{1-x^2}+c$

32) $-\ln|\cos x|+c$

33) $\ln|senx|+c$

34) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$

35) $\ln|\ln x|+c$

36) $\frac{1}{2}\ln(2\cdot e^x+5)+c$

37) $\frac{1}{3}sen3x+c$

38) $\frac{1}{4}sen\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+c$

39) $\cot g(3-x)+c$

40) $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$

41) $\frac{sen^4 x}{4}+c$

42) $\frac{(2+x)^4}{4}+c$

43) $\frac{3}{2}arcsenx^2+c$

44) $-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+c$

45) $\cot g(2-x)+c$

46) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

47) $\frac{1}{2}e^{2x+1}+c$

48) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2|+c$

49) $\frac{1}{2}\ln(x^2+5)-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}+c\right)$

50) $\ln|e^x-1|+c$

51) $\frac{1}{8}(x^2-1)^4+c$

52) $\frac{1}{2}senx^2+c$

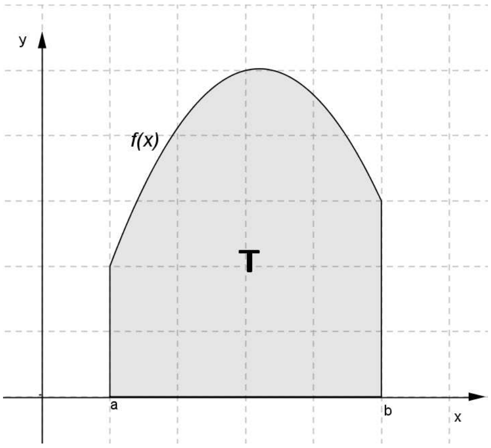
53) $-\frac{1}{4}\cos 4x+c$

54) $\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+c$

Integrali definiti

Definizione dell'integrale definito

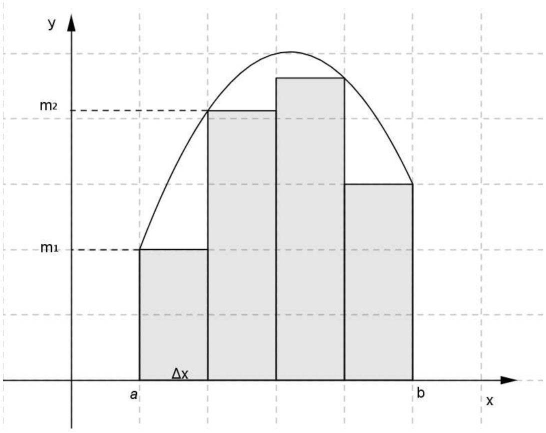
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato e supponiamo che $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$.



Consideriamo la regione T delimitata dal grafico di *f(x)*, dalle rette $x=a$, $x=b$ e dall'asse delle ascisse (regione denominata **trapezoide**):

$$T = \{(x; y) /\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

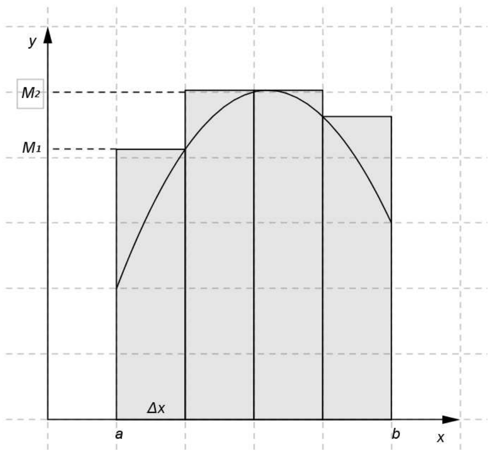
Consideriamo una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ in intervalli di uguale ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Poiché in ciascuno di questi intervalli *f(x)* è continua, per il teorema di Weierstrass, assume un valore minimo ed un valore massimo: indichiamo con m_i e M_i il minimo ed il massimo di *f(x)* nell'i-esimo intervallo.



Analizziamo i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i minimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo inscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo inscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

$$m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + m_3 \cdot \Delta x + ... = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$$



Passiamo adesso a considerare i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i massimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo circoscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo circoscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

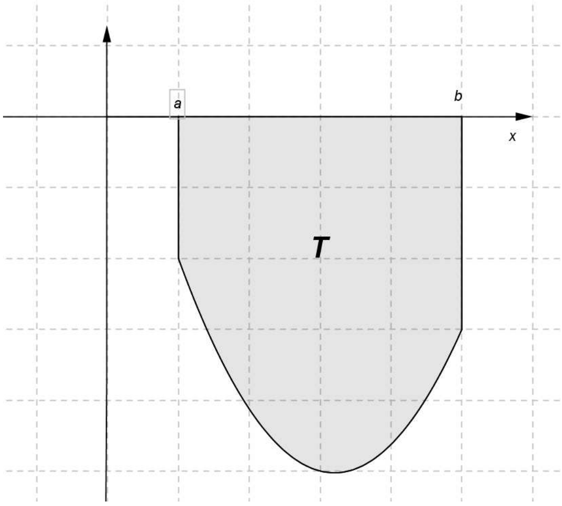
$$M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + M_3 \Delta x + \cdots = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x$$

Se aumentiamo n cioè il numero degli intervalli in cui l'intervallo è suddiviso, è intuitivo dedurre che l'area del plurirettangolo inscritto si avvicina all'area del plurirettangolo circoscritto; infatti è possibile dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x$$

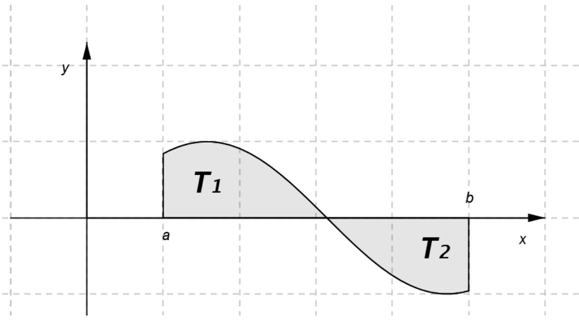
Questo limite viene indicato con il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ e si legge **integrale definito tra *a* e *b* di *f(x)* in dx.**

Osserviamo che il simbolo di integrale è la deformazione del simbolo di sommatoria, che i valori m_i o M_i tendono al valore della funzione e Δx tende a dx.



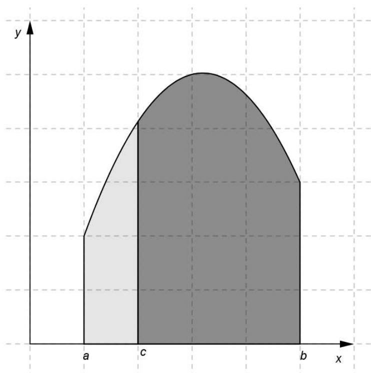
Nel caso in cui $f(x) \geq 0$, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale all'area del trapezoide T.

È, però, abbastanza chiaro che, nel caso in cui $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx = \text{-}area\ T$.



Se, infine, $f(x)$ non ha segno costante, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale a $\int_a^b f(x)dx = area\ T_1\text{-}area T_2$.

Proprietà dell'integrale definito



1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
   In questo caso il trapezoide è ridotto ad un segmento

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ con $a \leq c \leq b$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Si può dimostrare che data f : [a, b]→ $\mathbb{R}$ continua si ha:

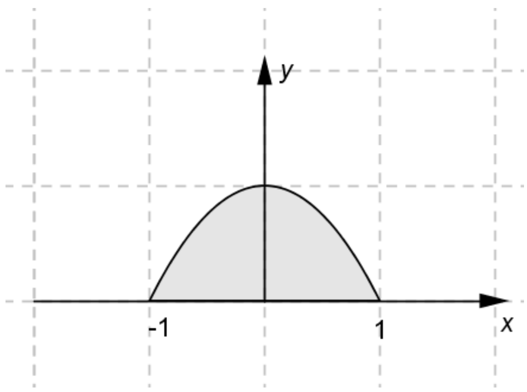
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)}$$

dove $\varphi(x)$ è una primitiva di *f(x)*

Nota: la quantità $\varphi(b) - \varphi(a)$ in genere viene indicata con la scrittura $[\varphi(x)]_a^b$

Esempi di calcolo di integrali definiti

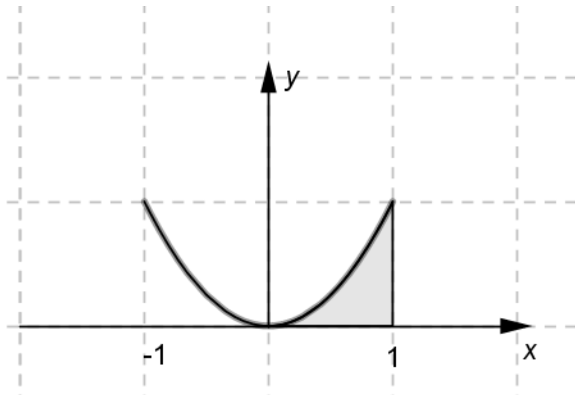
1) $\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$



2) Calcoliamo $\int_0^1 x^2\,dx$

Abbiamo che $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Quindi l'area compresa tra la parabola di equazione $y = x^2$, l'asse x e la retta $x = 1$ misura $\frac{1}{3}$.

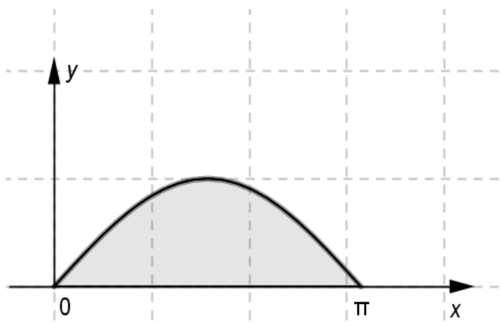


3) Calcoliamo $\int_0^\pi senx\,dx$

Abbiamo

$\int_0^\pi senx\,dx = [-cosx]_0^\pi = -cos\pi-(-cos0) = 2$

Quindi l'area della regione colorata misura 2.

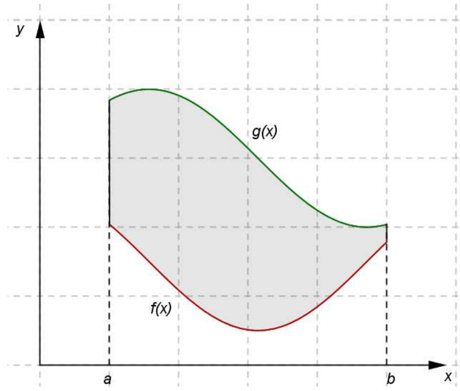


Area della parte di piano delimitata dal grafico di due funzioni

Consideriamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue nell'intervallo $[a,b]$ tali che

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e supponiamo che i grafici si trovino entrambi sopra l'asse x come in figura.



Possiamo considerare la parte di piano compresa tra i due grafici:

$$T = \{(x,y) / a \le x \le b, \quad f(x) \le y \le g(x)\}$$

Risulta subito evidente che $\boxed{\text{area T} = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx}$

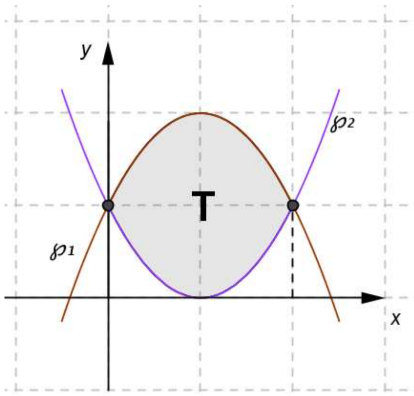
e questo vale in generale, purché $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ (si dimostra facilmente) .

Esempio: determinare l'area della regione di piano compresa tra $\mathcal{P}_1 : y = -x^2 + 2x + 1$ e $\mathcal{P}_2 : y = x^2 - 2x + 1$

Rappresentiamo graficamente le parabole: $\mathcal{P}_1$ ha vertice $V_1(1,2)$, $\mathcal{P}_2$ ha vertice $V_2(1,0)$ e le loro intersezioni sono i punti $(0,1)$ e $(2,1)$.

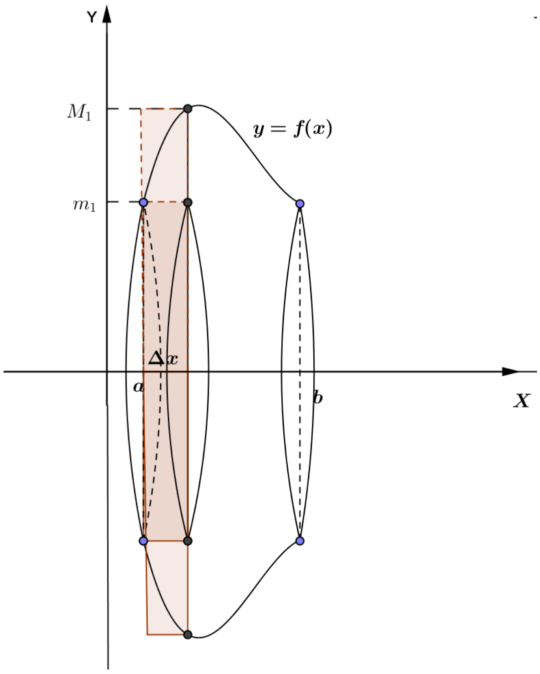
L'area richiesta si ottiene calcolando:

$$\int_0^2 \left[\left(-x^2 + 2x + 1\right) - \left(x^2 - 2x + 1\right)\right] dx = \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



Volume di un solido di rotazione

Consideriamo una funzione $f:[a,b] \to \Re$ continua e supponiamo che $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$.
Se **ruotiamo il trapezoide T attorno all'asse x** otteniamo un solido di rotazione.



Come possiamo calcolarne il volume?

Se dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ ed in ciascuna consideriamo il minimo m_i ed il massimo M_i (come avevamo fatto quando abbiamo introdotto il concetto di integrale definito) possiamo osservare che il volume V del solido di rotazione sarà compreso tra il volume del "pluricilindro inscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo inscritto nel trapezoide e il volume del "pluricilindro circoscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo circoscritto al trapezoide.

Abbiamo quindi, considerando che i raggi dei vari cilindri inscritti corrispondono a m_i, mentre quelli dei cilindri circoscritti corrispondono a M_i:

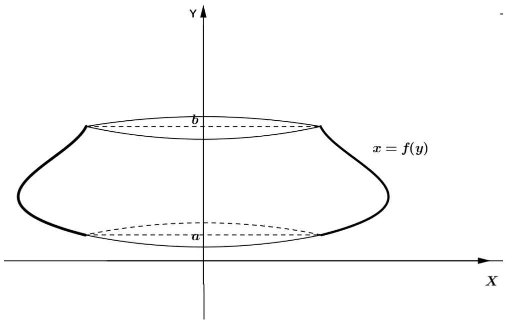
$$V_{in} = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 \Delta x \qquad V_{circ} = \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 \Delta x$$

Facendo tendere il numero degli intervalli all'infinito $\lim_{n \to +\infty} \Sigma \pi \cdot m_i^{\ 2} \cdot \Delta x = \lim_{n \to +\infty} \Sigma \pi \cdot M_i^{\ 2} \cdot \Delta x = V$

Quindi si tratta di un integrale definito cioè:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x) \ dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \ dx}$$

Se invece consideriamo la funzione $x = f(y)$ definita tra a e b il cui trapezoide ruota intorno all'asse y, il volume del solido di rotazione ottenuto risulta naturalmente:

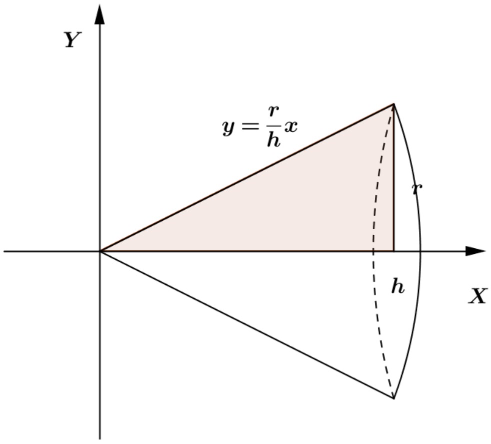


$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b f^2(y) \ dy}$$

Esempio 1

Ricaviamo la formula per determinare il volume di un cono utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere un cono di raggio r ed altezza h posso ruotare il trapezoide individuato dalla retta di equazione $y = \frac{r}{h}x$



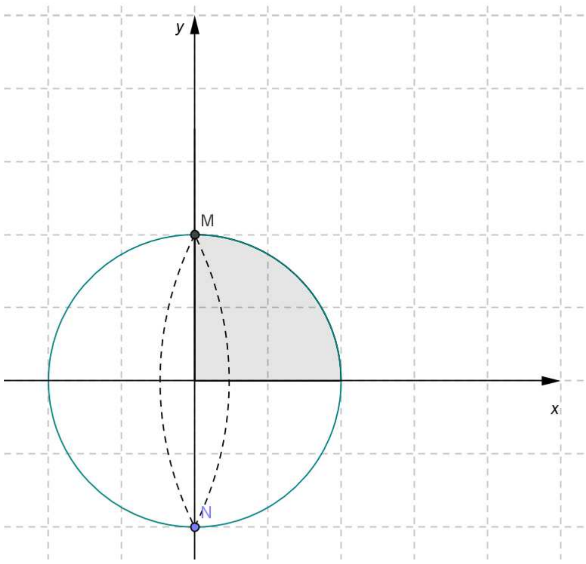
Quindi:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Esempio 2

Ricaviamo la formula per determinare il volume di una sfera di raggio *r* utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere una sfera di raggio *r*, possiamo ruotare la semicirconferenza avente centro (0,0) e raggio *r*, la cui equazione è data da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.



Per la simmetria possiamo scrivere:

$$V = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

COMPLEMENTO
Applicazioni in fisica dell'integrale definito

Moto rettilineo di un punto materiale

Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo secondo una legge oraria

$$s = s(t)$$

Sappiamo che $v(t) = s'(t)$ e che $a(t) = v'(t)$, quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2)\text{-}s(t_1) \text{ ed anche } \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt = v(t_2)\text{-}v(t_1)$$

Esempio: sapendo che l'accelerazione di un punto materiale è costante $a(t) = a$, che $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$, determinare la legge oraria.

Iniziamo con l'integrare l'accelerazione tra 0 e t: $\int_0^t a\, dt = [at]_0^t = at$.

Sappiamo quindi che $at = v(t)\text{-}v(0)$ e poiché $v(0) = v_0$, possiamo ricavare $v(t)$:

$$v(t) = at + v_o$$

A questo punto possiamo integrare $v(t)$ per risalire a $s(t)$:

$$\int_0^t v(t) dt = \int_0^t (at + v_0) dt = \left[a\frac{t^2}{2} + v_0 t\right]_0^t = a\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Ma sappiamo che $\int_0^t \ v(t) dt = s(t)\text{-}s(0)$ e che $s(0) = s_0$ quindi:

da cui

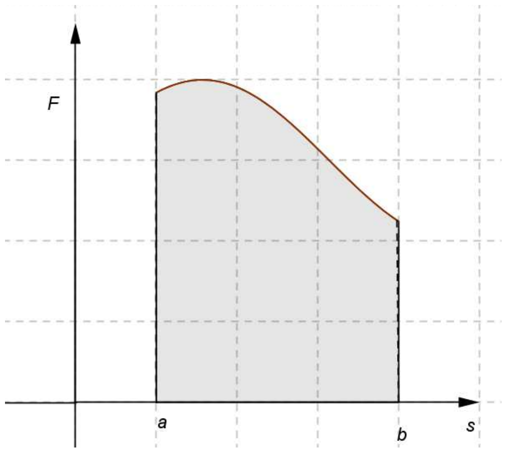
$$a\frac{t^2}{2} + v_0 t = s(t)\text{-}s_0$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Che rappresenta, come è noto, la legge oraria del moto uniformemente accelerato.

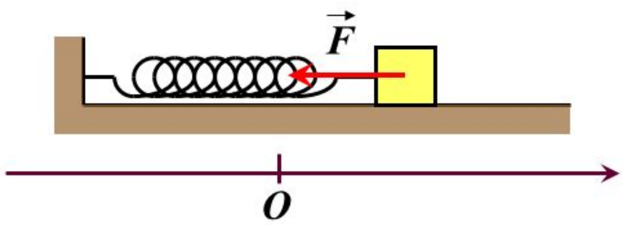
Lavoro di una forza

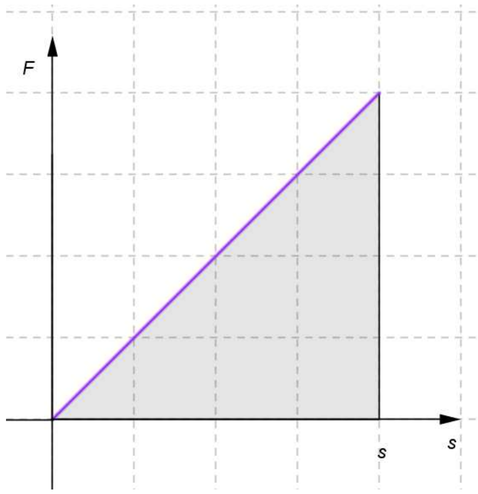
Il lavoro di una forza la cui intensità dipende dalla posizione cioè $F = F(s)$ ed avente direzione parallela allo spostamento, essendo uguale alla somma di tanti lavori relativi a piccoli spostamenti Δs, risulta l'area sottesa dal grafico di $F = F(s)$ nel sistema di riferimento (s, F) e quindi:



$$L = \int_a^b F(s)ds$$

Esempio 1: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica $F = Ks$ quando il suo punto di applicazione si sposta da 0 a s (è uguale all'energia potenziale elastica di un punto materiale di massa m, in posizione s, attaccato ad una molla di costante elastica K).





Il lavoro della forza elastica è dato da

$$L = \int_0^s Ks\,ds = \left[K\frac{s^2}{2}\right]_0^s = K\frac{s^2}{2}$$

Esempio 2: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica $F(r) = K\frac{Qq}{r^2}$ che agisce su una carica q nel campo generato dalla carica Q, quando si sposta da distanza r_A a distanza r_B lungo una linea di forza.

$$L = \int_{r_A}^{r_B} K\frac{Qq}{r^2}dr = KQq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = KQq\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right)$$

ESERCIZI

INTEGRALI DEFINITI

I) Calcola i seguenti integrali definiti interpretandoli anche geometricamente:

1) $\int_0^1 2x\ dx$ $[1]$

2) $\int_0^3 (3-x)\ dx$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

3) $\int_0^2 x^2 dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

4) $\int_{-1}^1 x^3 dx$ $[0]$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$ $[1]$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx dx$ $[1]$

7) $\int_{-1}^2 (4-x)\ dx$ $\left[\frac{21}{2}\right]$

8) $\int_0^{\pi} \cos x\ dx$ $[0]$

9) $\int_0^1 \left(x^3+1\right)\ dx$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\ dx$ $\left[\ln\sqrt{2}\right]$

11) $\int_0^1 e^x dx$ $[e-1]$

12) $\int_0^4 \sqrt{x}\ dx$ $\left[\frac{16}{3}\right]$

13) $\int_{-2}^2 \left(4-x^2\right)\ dx$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen2x\ dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

PROBLEMI

INTEGRALI DEFINITI

1) Calcola l'area delimitata dalla parabola di equazione $y = 2x - x^2$ e l'asse *x*. Disegna la parabola.

$$\left[\frac{4}{3}\right]$$

2) Disegna la curva di equazione $y = x^3$ e determina l'area della regione di piano compresa tra il suo grafico, l'asse *x* e la retta $x = 1$.

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

3) Disegna $y = e^x$ e le rette di equazione $x = -1, \quad x = 1$. Determina l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $y = e^x$, le rette e l'asse *x*.

$$\left[e - \frac{1}{e}\right]$$

4) Calcola l'area della regione T compresa tra la parabola $P_1 : y = x^2 - 3x + 2$ e la parabola $P_2 : y = -x^2 + x + 2$. [area T = $\frac{8}{3}$]

5) Determina l'area della regione A di piano delimitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$

(viene detto "segmento parabolico"). [$\frac{4}{3}$]

6) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = x^2$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$. Disegna il solido.

$$\left[\frac{\pi}{5}\right]$$

7) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = x^2$, dall'asse y e dalla retta $y = 1$. Disegna il solido.

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

8) Determina l'area della regione piana T compresa tra il grafico di $y = x^2$ e quello della retta $y = x$. Disegna i due grafici e indica la superficie richiesta.

$$\left[\frac{1}{6}\right]$$

9) Disegna la parabola $\mathcal{P}: y = 2x\text{-}x^2$ e determina le equazioni delle tangenti t_1 e t_2 nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

a) Calcola l'area della regione finita delimitata dalle tangenti e da $\mathcal{P}$; $\left[\ \frac{2}{3}\ \right]$

b) Calcola il volume del solido ottenuto ruotando la regione di piano compresa tra $\mathcal{P}$ e l' asse x, intorno all'asse x.

$$\left[V = \frac{16}{5}\pi\right]$$

10) Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse y la regione piana T delimitata dal grafico di $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$.

$$\left[V = \frac{2}{5}\pi\right]$$

11) Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = 2$, $s(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

$$[\ s(t) = t^2\ ]$$

12) Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = 3$, $s(0) = 1$ e $v(0) = 0$.

$$\left[s(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1\right]$$

13) Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = t$, $s(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

$$\left[s(t) = \frac{t^3}{6}\right]$$

14) Determina la legge oraria di un punto materiale avente $a(t) = \cos t$, $v(0) = 0$, $s(0) = 2$.

$$[s(t) = -\cos t + 3]$$

15) Determina la legge oraria di un punto materiale avente $a(t) = -sent$, $v(0) = 1$, $s(0) = 0$.

$$[s(t) = sent]$$