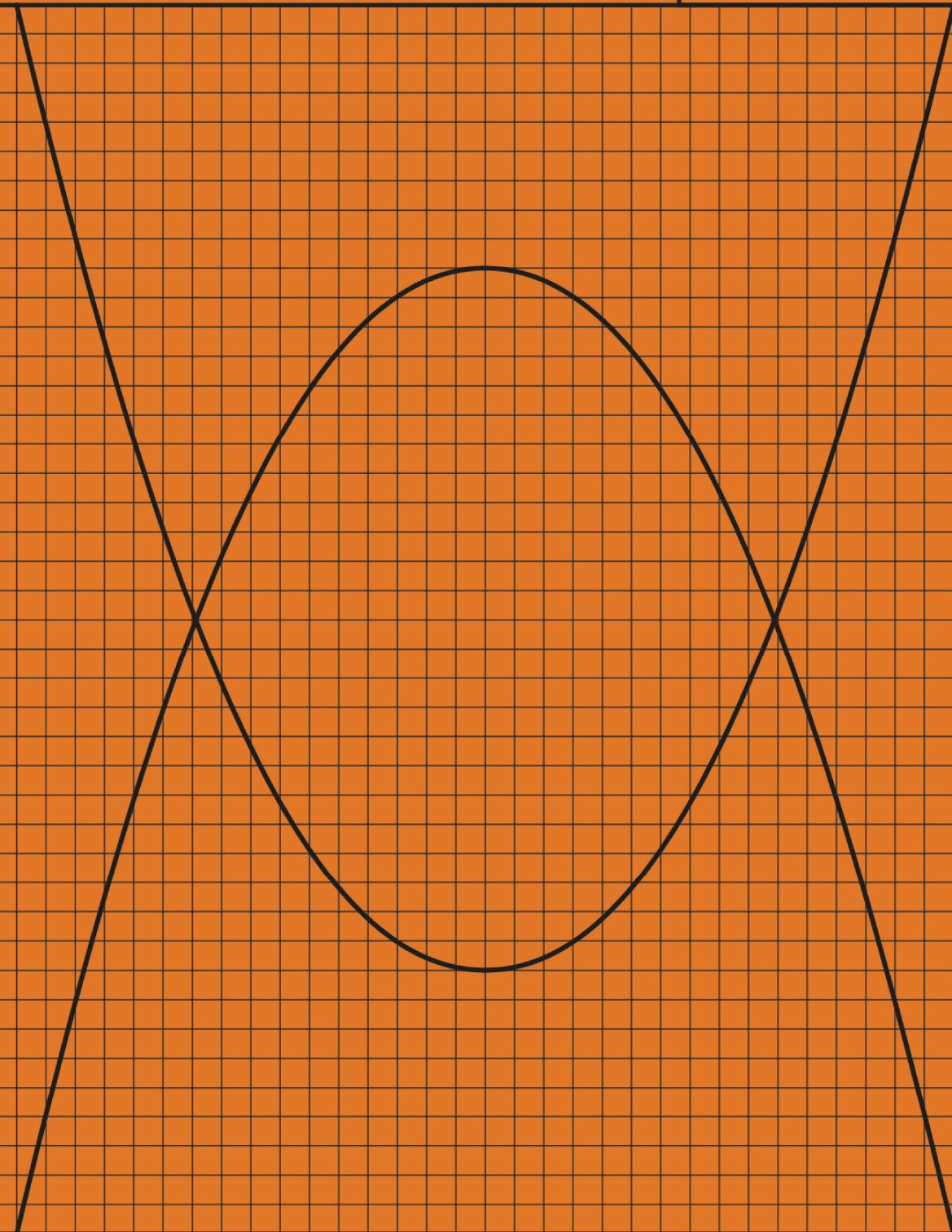


# Appunti di Matematica

Indirizzo Scientifico

3

Cecilia Magni



# Prefazione

Gli “**Appunti di Matematica**” sono un corso di matematica “open source” per i Licei , con una versione per l’indirizzo scientifico ed una per l’indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella “parte teorica” del libro di testo, spesso troppo formale e “faticosa” e che non tutti riuscivano a “prendere appunti” durante le spiegazioni.

**La parte teorica** è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e si integra con la parte applicativa in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle “tecniche” di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , “schede di lavoro” da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica “Geogebra” (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle “schede” in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), possano essere utili ad altri docenti per costruire, integrandole con materiale personale, il proprio libro di testo che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti, potrebbe essere facilmente aggiornato e modificato ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell’articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl’Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

*Cecilia Magni*

*Progetto Matematica in rete*

Cecilia Magni

# APPUNTI DI MATEMATICA 3

Indirizzo Scientifico

**Editore:** Matematicainrete.it

**Anno di edizione :** 2024

**Formato:** ebook (PDF)

**Licenza:**

Creative Commons BY NC SA (attribuzione – non commerciale – condividi allo stesso modo)

**CODICE ISBN:** 978-88-943828-4-6

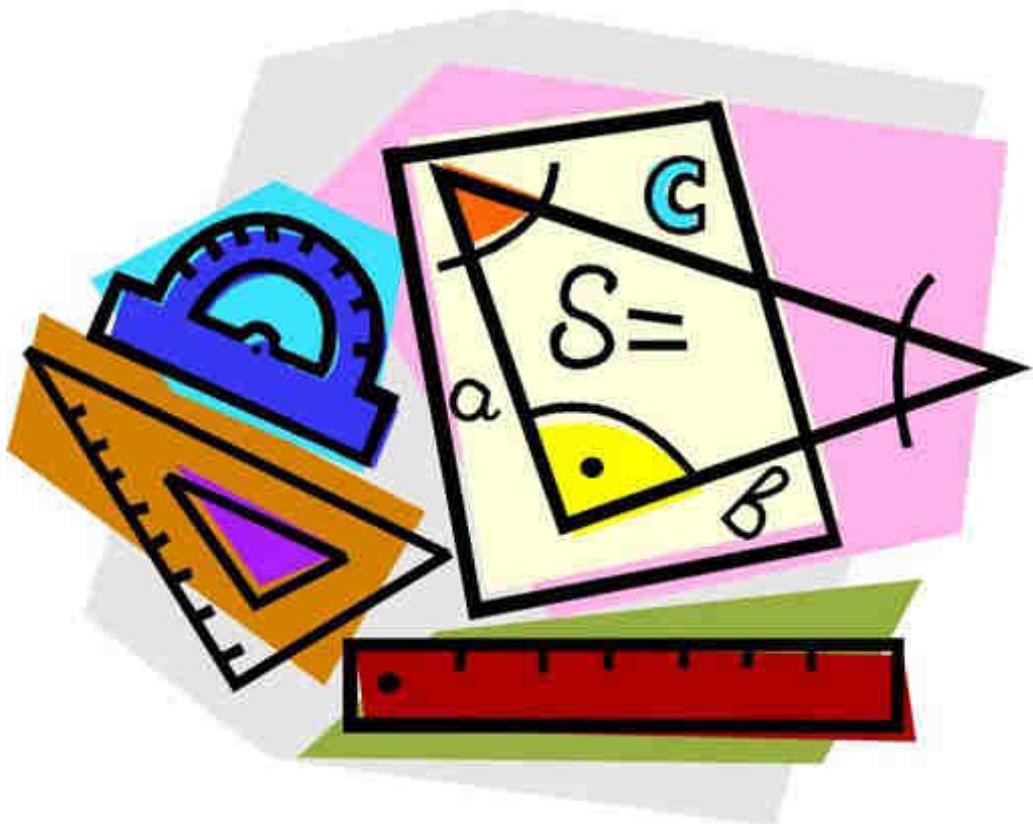
# **APPUNTI DI MATEMATICA 3**

Indirizzo Scientifico

## **Indice**

<b>1.</b>	<b>RIPASSO DI ALGEBRA E GEOMETRIA DEL BIENNIO</b>	1
<b>2.</b>	<b>GEOMETRIA ANALITICA</b>	
1.	Piano cartesiano	8
2.	Retta	13
3.	Circonferenza	40
4.	Parabola	64
5.	Ellisse	100
6.	Iperbole	123
7.	Complementi di geometria analitica	154
<b>3.</b>	<b>SUCCESSIONI NUMERICHE</b>	162
<b>4.</b>	<b>FUNZIONE ESPONENZIALE E LOGARITMICA</b>	173
<b>5.</b>	<b>STATISTICA</b>	199
<b>6.</b>	<b>LABORATORIO DI INFORMATICA</b>	212

# Ripasso di algebra e geometria del biennio



## I) Risolvi le seguenti equazioni

1)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$   $[x_1 = x_2 = \frac{1}{2}]$

2)  $x^2 + 5x + 6 = 0$   $[x_1 = -2; x_2 = -3]$

3)  $-x^2 + 4x - 3 = 0$   $[x_1 = 1; x_2 = 3]$

4)  $x^2 + x + 1 = 0$  [nessuna soluzione reale]

5)  $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$   $[x_{1,2} = \pm 2; x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}]$

6)  $|2x - 3| - |x + 1| = 2x$   $[x = \frac{2}{5}]$

7)  $|x + 1| = 4$   $[x_1 = 3; x_2 = -5]$

8)  $\sqrt{4 - 3x} + 2x = -4$   $[x = -4]$

9)  $\sqrt{5 - 2x} - \sqrt{x + 1} = 0$   $[x = \frac{4}{3}]$

10)  $\sqrt[3]{4x^2 + 8x^3 - 2x} = 2x - 1$   $[x = \frac{1}{4}]$

11)  $\sqrt[3]{x^3 - 4x + 8} - x = 0$   $[x = 2]$

12)  $\sqrt[4]{2x^2 - 1} = x$   $[x = 1]$

## II) Risolvi le seguenti disequazioni

- 1)  $x - 3x^2 > 0$   $[0 < x < \frac{1}{3}]$
- 2)  $4x^2 - 4x + 1 > 0$   $[\Re - \left\{\frac{1}{2}\right\}]$
- 3)  $x^2 - 9 \geq 0$   $[x \leq -3 \cup x \geq 3]$
- 4)  $x^2 - 10x + 32 < 0$  [nessuna sol. reale]
- 5)  $-x^2 + 4x - 3 > 0$   $[1 < x < 3]$
- 6)  $x^2 + 4 < 0$  [nessuna sol. reale]
- 7)  $\frac{x - x^2}{x^2 - 5x + 6} > 0$   $[0 < x < 1 \cup 2 < x < 3]$
- 8)  $\frac{1 - x^2}{4 + x^2} < 0$   $[x < -1 \cup x > 1]$
- 9)  $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 25} > 0$   $[x < -5 \cup x > 5]$
- 10)  $|4x + 1| < 2x + 3$   $[-\frac{2}{3} < x < 1]$
- 11)  $\frac{x - 3}{\sqrt{2x - x^2} - x} > 0$   $[1 < x < 2]$
- 12)  $\frac{3x^2 - 7x}{\sqrt{x^2 - 4}} > 0$   $[x < -2 \cup x > \frac{7}{3}]$
- 13)  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} < \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$   $[\frac{5}{3} < x \leq 2 \cup 3 \leq x < \frac{19}{5}]$
- 14)  $\sqrt{x^2 + 4} + x^2 > (x + 1) \cdot (x + 2)$   $[x < 0]$

### III) Risolvi i seguenti sistemi

1) 
$$\begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ 3x - 8y = -1 \end{cases}$$
 [(-3; -1)]

2) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$
 [(1; 2) (2; 1)]

3) 
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$$
 [(-1; 1; 2)]

4) 
$$\begin{cases} x(x - 2y) = 0 \\ 4x + y = 18 \end{cases}$$
 [(0; 18) (4; 2)]

5) 
$$\begin{cases} 3x^2 - 4x < 7 \\ \frac{4x - 6}{3} < 1 \end{cases}$$
 [-1 < x < \frac{9}{4}]

6) 
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases}$$
 [2 < x < 3]

7) 
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} > 0 \\ \frac{3}{1-x} > 0 \end{cases}$$
 [0 < x < 1]

8) 
$$\begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^4 - x^2 - 2} \leq 0 \\ (x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$
 [-\sqrt{2} < x \leq -1]

#### IV) Risovi i seguenti problemi

- 1) Dato un triangolo equilatero  $\triangle ABC$  di lato  $l$ , determina la lunghezza del segmento  $\overline{MN}$  parallelo al lato AB tale che  $\text{area}(\triangle MNC) = \frac{1}{9} \text{area}(\triangle ABC)$ .

$$[\overline{MN} = \frac{l}{3}]$$

- 2) Dato un triangolo equilatero  $\triangle ABC$  di lato  $l$ , determina la lunghezza del segmento  $\overline{MN}$  parallelo al lato AB tale che  $\text{area}(\triangle MNB) = \text{area}(\triangle MNC)$ .

$$[\overline{MN} = \frac{l}{\sqrt{2}}]$$

- 3) Dato il triangolo rettangolo  $\triangle ABC$  di cateti  $\overline{AC} = 3a$  e  $\overline{CB} = 4a$ , determina sul cateto AC un punto P tale che, detto H il piede della perpendicolare tracciata da P ad AB, si abbia  $\text{area}(\triangle APH) = \frac{1}{4} \text{area}(\triangle ABC)$ .

$$[\overline{AP} = \frac{5}{2}a]$$

- 4) Data una semicirconferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$ , determina su essa un punto P tale che, condotta la corda PQ parallela ad AB, sia abbia  $2p(\triangle ABQ) = 5r$ .

$$[\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = r]$$

- 5) Dato il triangolo isoscele  $\triangle ABC$  con base  $\overline{AB} = 10a$  e lati obliqui  $\overline{AC} = \overline{CB} = 13a$ , determina sul lato AC un punto P tale che, tracciata per P la parallela alla base AB e detto Q il suo punto di intersezione con BC, sia abbia  $\text{area}(\triangle ABQ) = \frac{1}{2} \text{area}(\triangle ABC)$ .

$$[\overline{PQ} = 5\sqrt{2}a]$$

- 6) Considera un rombo ABCD avente perimetro  $2p = 20a$  e area  $A = 24a^2$ . Determina le diagonali del rombo e il raggio  $r$  della circonferenza inscritta.

$$[6a; 8a; r = \frac{12}{5}a]$$

- 7) Data una semicirconferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$ , determina un punto P sul prolungamento del diametro dalla parte di B tale che, condotta da P la tangente alla semicirconferenza e detto T il punto di tangenza, si abbia  $\overset{\Delta}{area}(OPT) = r^2$  dove O è il centro della semicirconferenza.

$$[\overline{OP} = \sqrt{5}r]$$

- 8) Data una circonferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$ , determina sul diametro AB un punto P tale che, tracciata per P la corda CD perpendicolare al diametro AB, si abbia  $\overset{\Delta}{area}(ACBD) = \sqrt{3}r^2$ .

$$[\text{posto } \overline{AP} = x \text{ si ha } x_1 = \frac{r}{2}, x_2 = \frac{3}{2}r]$$

- 9) Dato un triangolo rettangolo  $\overset{\Delta}{ABC}$  con cateti  $\overline{AC} = 3a$  e  $\overline{AB} = 4a$ , determina sul cateto AC un punto P tale che, tracciato il segmento PQ parallelo ad AB (con Q appartenente all'ipotenusa) e il segmento QR perpendicolare ad AB (R su AB) si abbia  $\overset{\Delta}{area}(PQRA) = 3a^2$ .

$$[\overline{CP} = \frac{3}{2}a]$$

- 10) Considera il triangolo equilatero ABC inscritto in una circonferenza di diametro  $2r$ . Determina un punto P sul lato AB tale che  $\overset{\Delta}{area}(APC) = \frac{1}{2}\overset{\Delta}{area}(PBC)$ .

$$[\overline{AP} = \frac{1}{3}\sqrt{3}r]$$

- 11) Considera un trapezio rettangolo ABCD avente altezza  $\overline{AD} = 4a$  e base minore  $\overline{CD} = 3a$ . Sapendo che la diagonale minore AC risulta perpendicolare al lato obliquo BC, determina sul lato obliquo un punto P tale che, tracciato il segmento PQ parallelo ad AC (Q su AB) si abbia  $\overset{\Delta}{area}(PQB) = \overset{\Delta}{area}(AQP)$ .

$$[\overline{PB} = \frac{10}{3}\sqrt{2}a]$$

## ESERCITAZIONE

Risovi le seguenti equazioni, disequazioni e sistemi di equazioni:

1)  $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

2)  $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$

3)  $\sqrt{(x-1)^2 + 2-x} + 2x = 1$

4)  $|2x-1| - |x+3| = x-2$

5)  $\frac{x^2 + 5x + 4}{6 + 5x - x^2} < 0$

6)  $|x+3| > |2x-5| + x$

7)  $4-x > \sqrt{6x-x^2+16}$

8)  $\sqrt{4x^2 + 3x - 1} > 2x - 3$

9)  $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2-2xy+y^2=36 \end{cases}$

10) 
$$\begin{cases} x+2y=z \\ 2x-y+z=1 \\ \frac{1}{2}x+3y=2z \end{cases}$$

### Problema 1

Dato un triangolo rettangolo ABC avente cateti  $\overline{AB} = 4a$  e  $\overline{AC} = 3a$ , determina su AB un punto P tale che, detta Q la proiezione ortogonale di P su BC, si abbia  $\text{area}(PBQ) = \frac{1}{3} \text{area}(APQC)$ .

### Problema 2

Un triangolo isoscele ABC di base AB è inscritto in una circonferenza di raggio r. Sapendo che la base AB è uguale all'altezza CH relativa alla base, determina la lunghezza della base AB e dei lati obliqui.

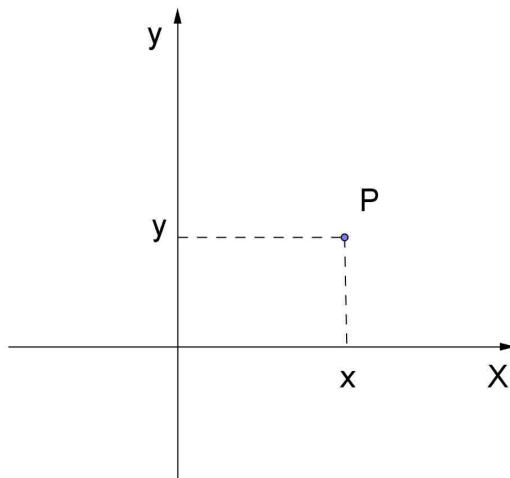
# Il piano cartesiano

## Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.

In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata**  $(x;y)$  di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata  $(x;y)$  di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).

Il numero  $x$  si chiama **ascissa** del punto P e il numero  $y$  si chiama **ordinata** del punto P.  
 $x$  e  $y$  si dicono anche **coordinate** del punto P.



### Nota

E' importante sottolineare che  $(x;y)$  è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia  $(4;3)$  rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia  $(3;4)$ .

### Osservazione:

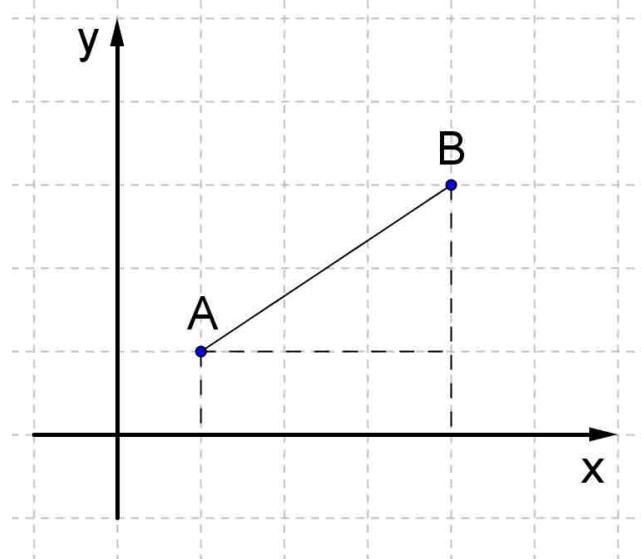
I punti sull'asse x hanno ordinata  $y = 0$ ;  
i punti sull'asse y hanno ascissa  $x = 0$ .

Inoltre osserviamo che i punti che si trovano nel cosiddetto I° quadrante (vedi figura) hanno ascissa e ordinata positive, quelli del II° quadrante ascissa negativa e ordinata positiva ecc.

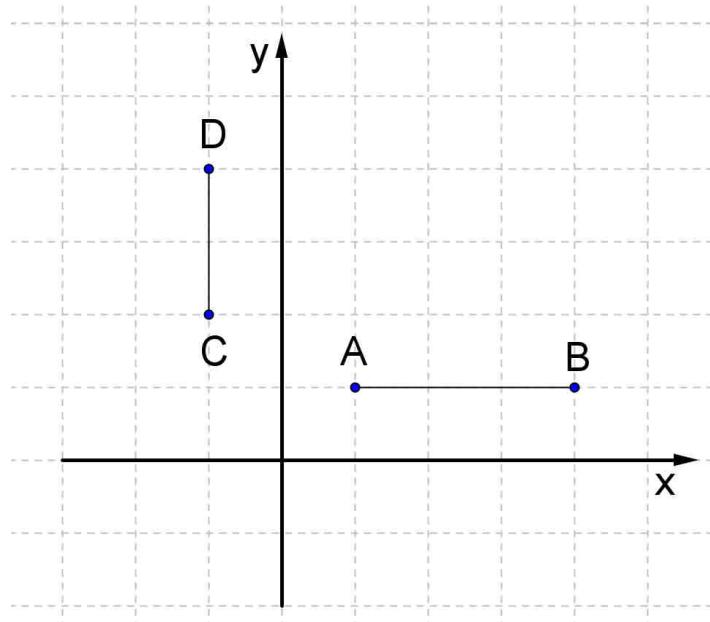
## Distanza tra due punti

Per determinare la distanza tra due punti  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  possiamo applicare il teorema di Pitagora (vedi figura):

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Se i punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata la distanza è data dal valore assoluto della differenza delle ascisse o delle ordinate : per esempio in figura  $\overline{AB} = |x_B - x_A|$  e  $\overline{CD} = |y_D - y_C|$ .

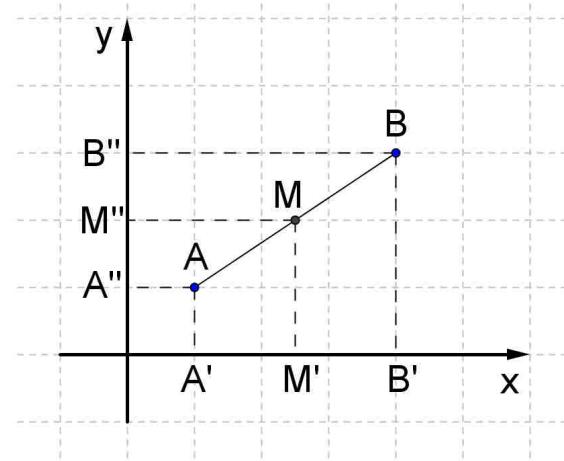


## Punto medio di un segmento

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB possiamo considerare le proiezioni di A, M e B sull'asse x e poi sull'asse y e, sfruttando il teorema di Talete, affermare che:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



## Baricentro di un triangolo

Per determinare le coordinate del baricentro G di un triangolo di vertici assegnati  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$  possiamo considerare per esempio la mediana CM (vedi figura) e ricordare che G la divide in due parti una doppia dell'altra.

Proiettando M,G,C prima sull'asse x e poi sull'asse y sempre per il teorema di Talete potremo scrivere:

$$x_C - x_G = 2(x_G - x_M) \Rightarrow x_G = \frac{2x_M + x_C}{3}$$

$$y_C - y_G = 2(y_G - y_M) \Rightarrow y_G = \frac{2y_M + y_C}{3}$$

Quindi, ricordando che

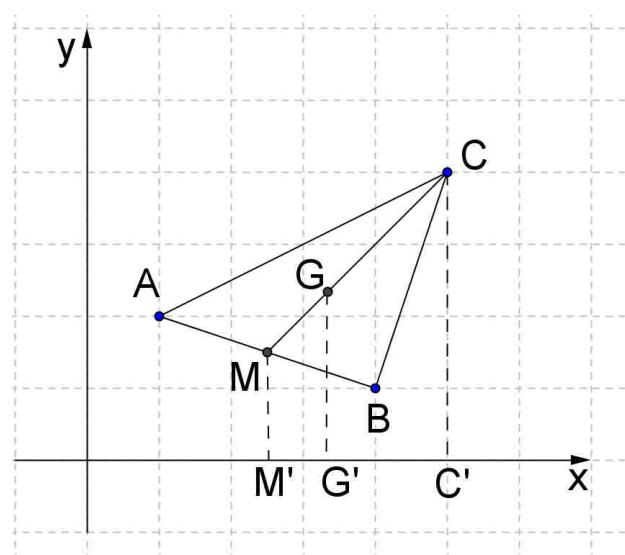
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

si ha che

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

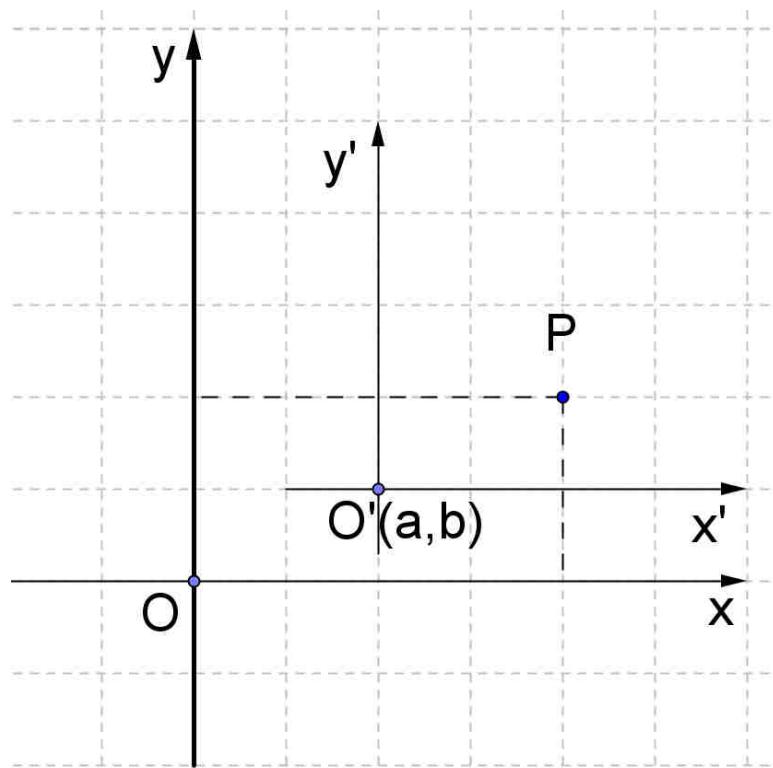


## Traslazione del sistema di riferimento

A volte può essere utile traslare il sistema di riferimento spostando l'origine in un punto  $O'(a,b)$  e chiaramente le coordinate dei punti si modificano .

Se indichiamo con  $(x',y')$  le coordinate nel nuovo sistema di riferimento avremo, come si capisce dalla figura, le seguenti relazioni tra le vecchie coordinate  $(x,y)$  e le nuove coordinate  $(x',y')$  di un punto P:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$



## ESERCIZI

- Dato il triangolo di vertici A(1,2) B(5,4) C(6,0) determina perimetro, area e coordinate del baricentro.  
(per determinare l'area puoi considerare il rettangolo in cui è inscritto il triangolo e ...)

$$[2p = 2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}, A = 9, G(4,2)]$$

- Verifica che il triangolo di vertici A(3,5) B(0,2) C(4,-2) è un triangolo rettangolo. Calcola perimetro e area.

$$[2p = 12\sqrt{2}, A = 12]$$

- Verifica che il triangolo di vertici A(1,3) B(5,7) C(7,1) è isoscele, determina la misura dell'altezza relativa alla base, calcola perimetro, area e coordinate del baricentro G.

$$\left[ 2p = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{10}, A = 16, G\left(\frac{13}{3}; \frac{11}{3}\right) \right]$$

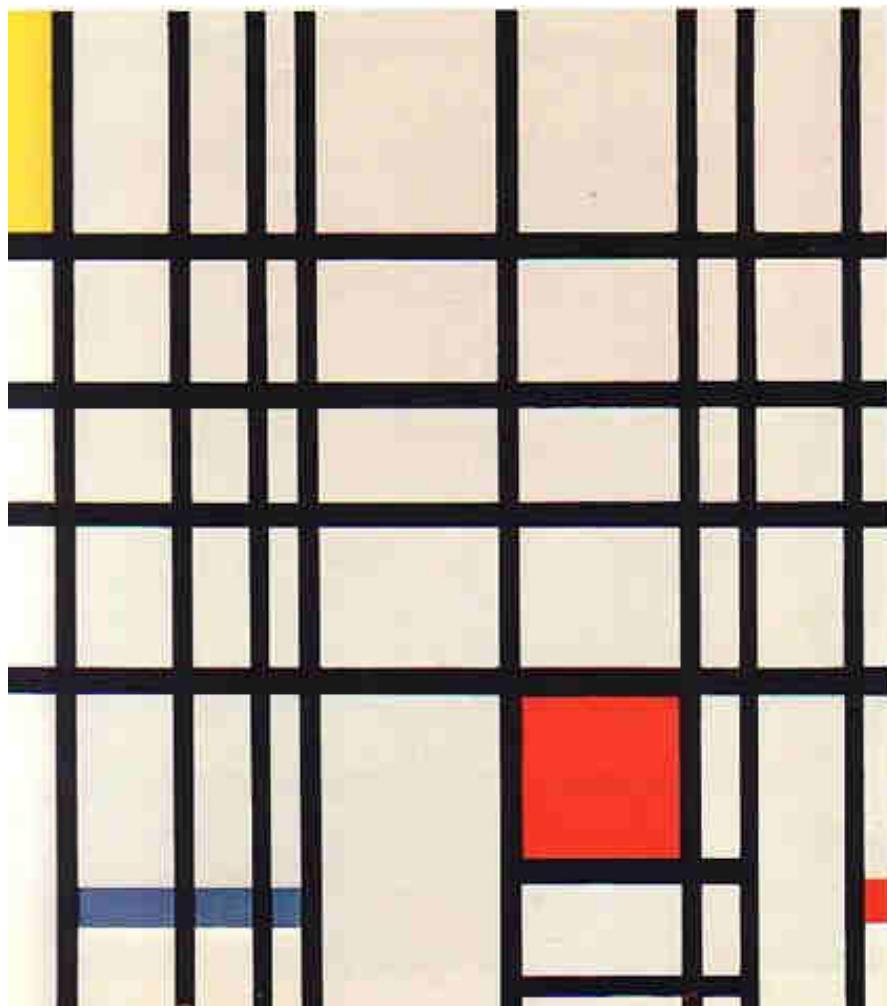
- Considera il quadrilatero di vertici A(2,3) B(7,3) C(4,7) D(-1,7). Di quale quadrilatero si tratta? Determina perimetro e area.

$$[2p = 20, A = 20]$$

- Considera il quadrilatero di vertici A(4,0) B(7,3) C(4,6) D(1,3). Di quale figura si tratta?

Se il sistema di riferimento viene traslato portando l'origine nel punto di incontro delle diagonali, quali sono le nuove coordinate dei vertici della figura?

# La retta nel piano cartesiano



Abbiamo visto come, fissato un sistema di riferimento, a ciascun punto sia possibile associare una coppia ordinata di numeri reali (le sue coordinate).

Se adesso consideriamo una retta come la potremo individuare?

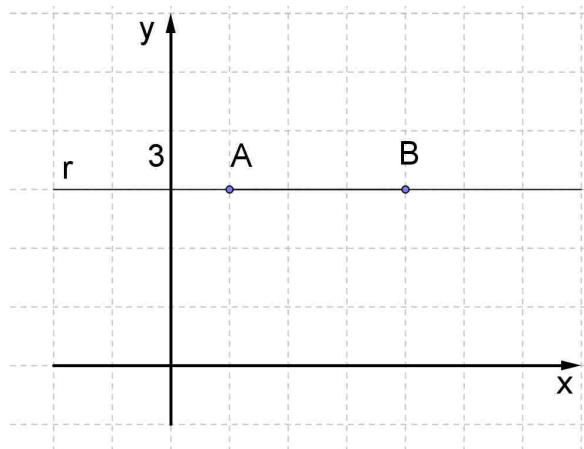
Non possiamo dare le coordinate di tutti i suoi punti ma forse possiamo cercare una relazione che riguarda le coordinate  $(x,y)$  di un suo generico punto.

Cominciamo con il considerare una retta parallela all'asse x: osserviamo che tutti i suoi punti hanno la stessa ordinata.

Se per esempio prendiamo la retta in figura potremo scrivere

$$y = 3$$

e dire che  $y=3$  è l'**equazione** di questa retta perché tutti i suoi punti hanno ordinata uguale a 3 e tutti i punti del piano che hanno ordinata 3 appartengono a questa retta.

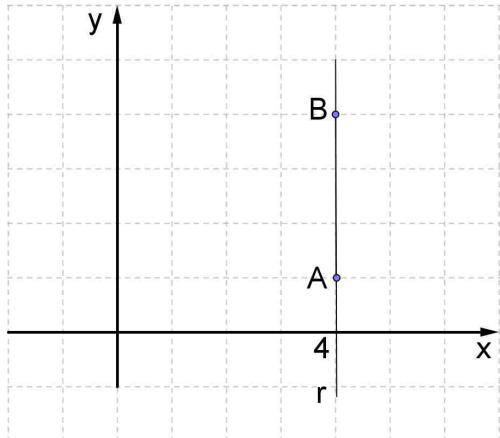


Quindi, in generale, **una retta parallela all'asse x avrà equazione  $y=k$**  dove  $k$  è un numero reale.

In particolare **l'asse x avrà equazione  $y=0$ .**

Analogamente se consideriamo una retta parallela all'asse y (vedi figura) osserviamo che tutti i suoi punti hanno la stessa ascissa, nel nostro caso 4, quindi l'equazione che descrive la retta sarà  $x=4$ .

In generale **una retta parallela all'asse y avrà equazione  $x=k$**  e in particolare **l'asse y avrà equazione  $x=0$ .**

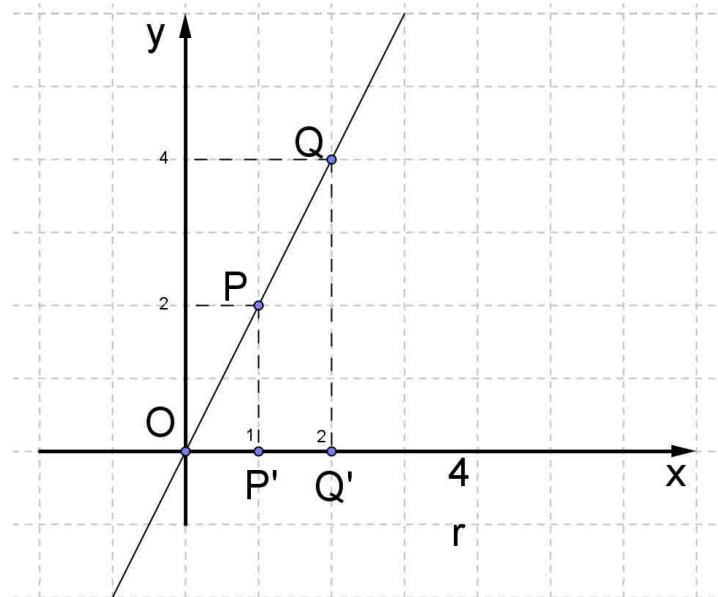


Consideriamo adesso una retta passante per l'origine degli assi (vedi figura): se P e Q sono due punti appartenenti alla retta, per la similitudine dei triangoli in figura OPP' e OQQ' potremo scrivere

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \quad \text{cioè} \quad \frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q} = 2$$

e quindi in generale potremo dire che l'equazione della retta è nel nostro esempio

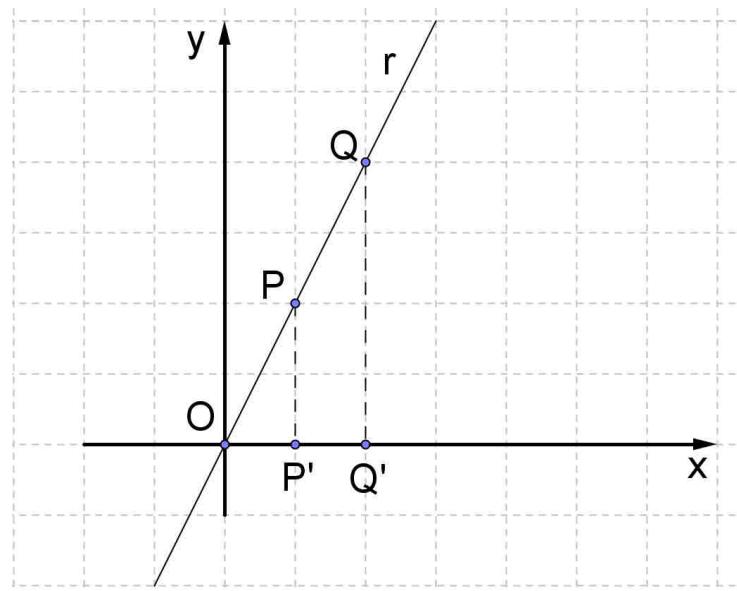
$$\frac{y}{x} = 2 \quad \text{che possiamo scrivere } y=2x.$$



In generale per una retta passante per l'origine potremo considerare i triangoli in figura OPP' e OQQ' e potremo scrivere

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} = m$$

$$\text{cioè} \quad \frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q} = m$$



Quindi l'equazione di una retta per l'origine sarà :

$$y = mx$$

**m** viene detto **coefficiente angolare** della retta ed indica l'inclinazione della retta.

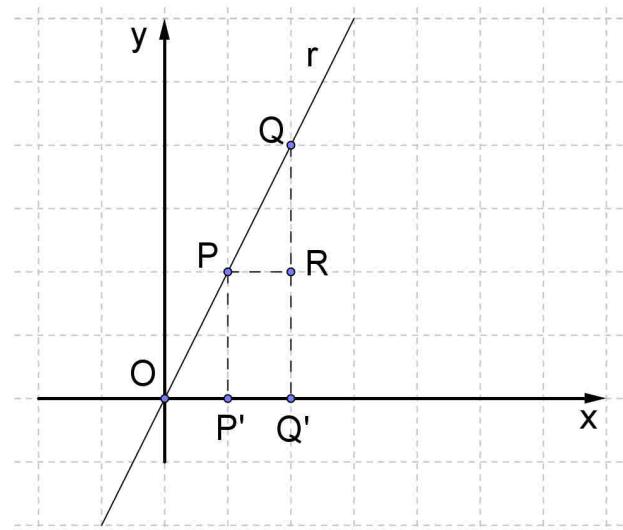
Osserviamo che se  $m > 0$  la retta appartiene al I –III quadrante (infatti le coordinate dei punti sono entrambe positive o negative e quindi il rapporto è un numero positivo) mentre se  $m < 0$  la retta appartiene al II- IV quadrante (le coordinate dei punti sono discordi e quindi il loro rapporto è negativo).

Osserviamo inoltre che l'asse x ha inclinazione  $m = 0$  (l'equazione risulta infatti  $y = 0$ ), ma che all'asse y non può essere associato un coefficiente angolare .

### NOTA

Facciamo notare che per trovare il coefficiente angolare posso considerare anche due punti qualsiasi  $P$  e  $Q$  appartenenti alla retta e esprimere  $m$  utilizzando il triangolo  $PQR$  (vedi figura) scrivendo

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$



Consideriamo infine una retta non passante per l'origine  $O(0,0)$  e non parallela agli assi (vedi figura).

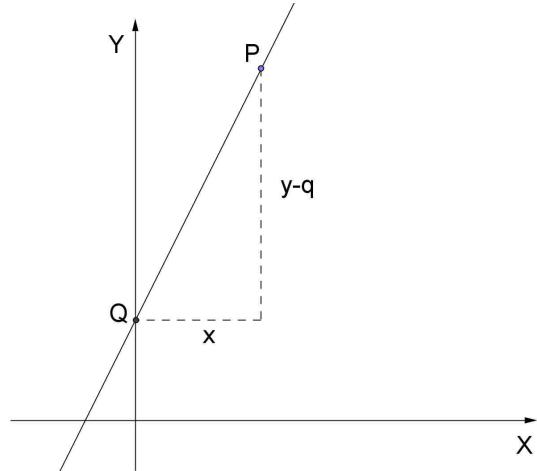
Consideriamo il punto  $Q(0;q)$  in cui interseca l'asse  $y$  ed esprimiamo il coefficiente angolare  $m$  considerando un punto generico  $P(x; y)$  e il punto  $Q$ .

Abbiamo:

$$m = \frac{y - q}{x} \Rightarrow y - q = m \cdot x$$

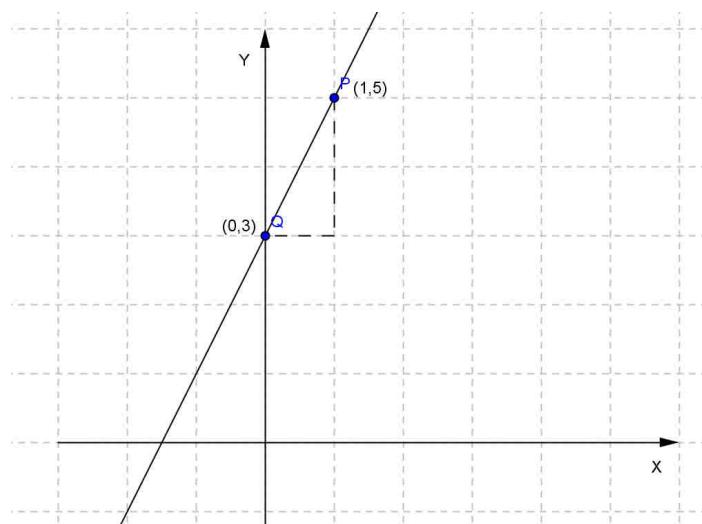
Quindi:

$$y = mx + q$$



Nell'equazione  $q$  viene detta **ordinata all'origine** poiché corrisponde all'ordinata del punto della retta avente ascissa nulla.

In figura per esempio è stata rappresentata la retta di equazione  $y = 2x + 3$ .



**Problema:** è possibile scrivere un'equazione che riesca a rappresentare qualsiasi retta ?

Abbiamo già fatto notare che all'asse y non poteva essere associato un coefficiente angolare e lo stesso vale per le rette parallele all'asse y: l'equazione  $y = mx + q$  non riesce quindi a rappresentare tutte le rette del piano cartesiano.

Osserviamo invece la seguente equazione:

$$ax + by + c = 0$$

Proviamo a far variare i parametri a, b, c:

se  $a = 0$  e  $b \neq 0$  possiamo ricavare  $y = -\frac{c}{b}$  e quindi otteniamo le rette parallele all'asse x (per  $c = 0$  abbiamo proprio l'asse x);

se  $a \neq 0$  e  $b = 0$  possiamo ricavare  $x = -\frac{c}{a}$  e quindi otteniamo le rette parallele all'asse y (per  $c = 0$  abbiamo proprio l'asse y);

se  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  ma  $c = 0$  otteniamo  $y = -\frac{a}{b}x$  cioè le rette per l'origine;

e infine se  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$  otteniamo  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$  cioè le rette del tipo  $y = mx + q$ .

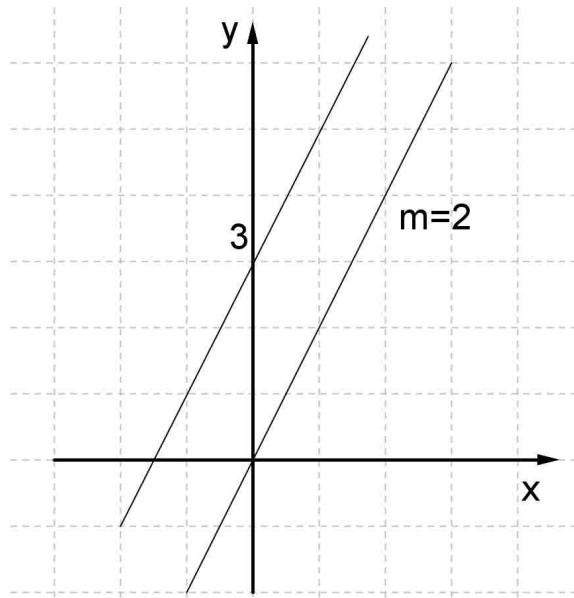
Quindi l'equazione

$$ax + by + c = 0$$

rappresenta tutte le rette nel piano cartesiano e per questo viene detta **equazione generale** di una retta.

### Rette parallele

Per quello che abbiamo detto è chiaro che due rette, non parallele all'asse  $y$ , sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

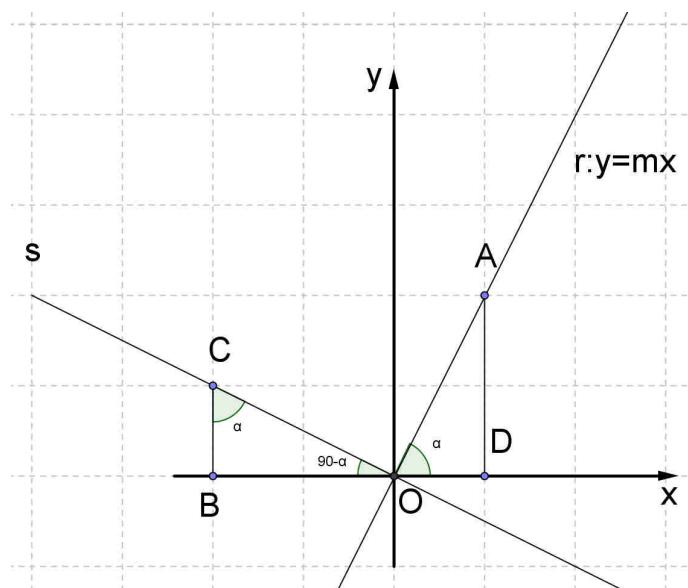


Vediamo in figura le rette di equazione  $y = 2x$  e  $y = 2x + 3$ .

### Rette perpendicolari

Consideriamo una retta per l'origine  $r$  di equazione  $y = mx$  (per semplicità sia  $m > 0$ ) e costruiamo il triangolo OAD come in figura prendendo cioè  $\overline{OD} = 1$  e  $\overline{AD} = m$ .

A questo punto disegniamo il triangolo OCB prendendo  $\overline{BC} = 1$  e  $\overline{OB} = m$  (vedi figura) e tracciamo la retta s che avrà quindi equazione  $y = -\frac{1}{m}x$ .

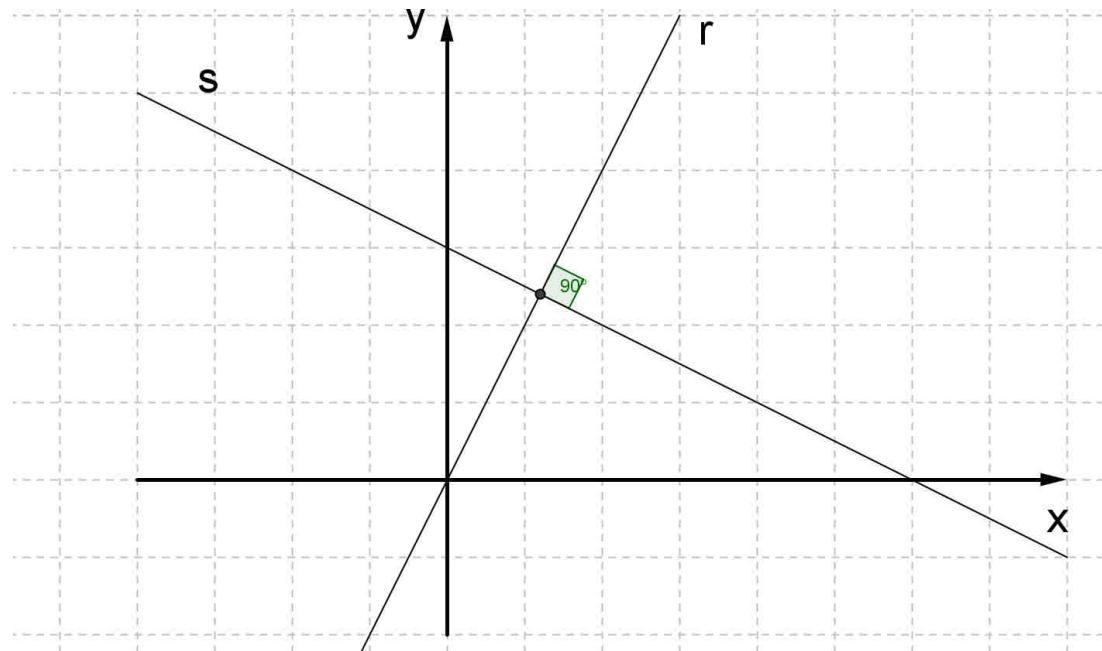


Poiché i triangoli OAD e OCB sono uguali per costruzione, avranno tutti gli angoli uguali e in particolare  $\hat{AOD} = \hat{BCO} = \alpha$  e allora essendo  $\hat{BOC} = 90^\circ - \alpha$  avremo che l'angolo  $\hat{AOC} = 90^\circ$  cioè le rette r e s sono perpendicolari.

La relazione che abbiamo trovato tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari passanti per l'origine vale naturalmente anche per rette perpendicolari non passanti per l'origine poiché quello che conta è il coefficiente angolare.

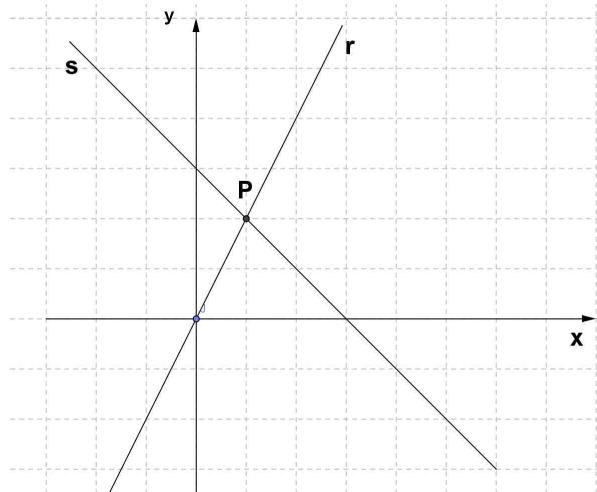
Quindi possiamo dire che se una retta ha coefficiente angolare  $m$ , una retta con coefficiente angolare  $-\frac{1}{m}$  risulta ad essa perpendicolare (e viceversa se due rette sono perpendicolari e non parallele agli assi i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro).

Vediamo per esempio in figura le rette perpendicolari di equazione  $y = 2x$  e  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .



### Intersezione tra due rette

Supponiamo di avere due rette non parallele, per esempio  $y = 2x$  e  $y = -x + 3$  come in figura e di voler trovare le coordinate del loro punto P di intersezione.



In questo caso le coordinate si possono determinare facilmente anche osservando la figura:  $P(1;2)$ .

Ma in generale come possiamo trovarle?

Poiché  $P \in r$  le sue coordinate devono verificare l'equazione di  $r$ .  
 Poiché  $P \in s$  le sue coordinate devono verificare l'equazione di  $s$ .

Quindi le coordinate  $(x; y)$  del punto di intersezione devono verificare entrambe le equazioni cioè sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Infatti risolvendo abbiamo:

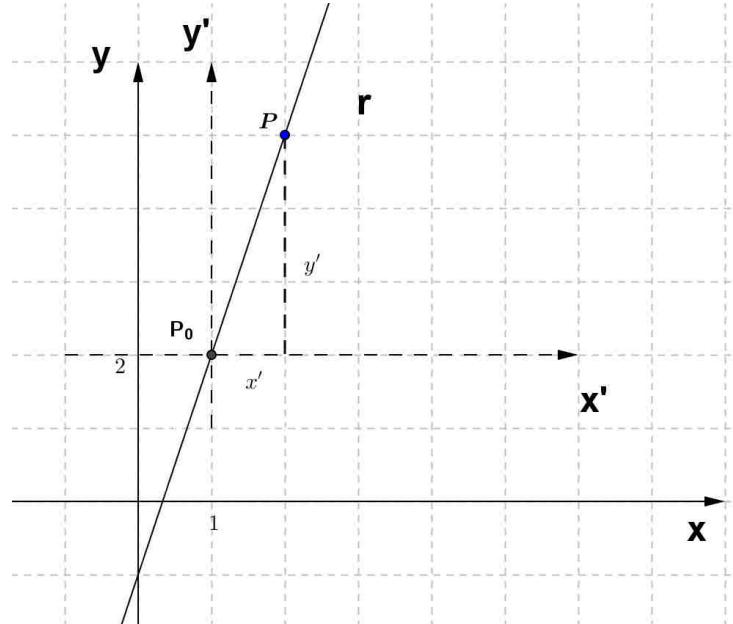
$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

In generale quindi per trovare le coordinate del punto di intersezione di due rette basterà **risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

**Nota:** se le rette sono parallele il sistema non avrà soluzione.

**Equazione di una retta passante per un punto assegnato  $P_0(x_o; y_o)$  ed avente un coefficiente angolare assegnato  $m$**

Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta passante per  $P_0(1;2)$  e avente coefficiente angolare  $m = 3$ .



Se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine nel punto  $P_0(1;2)$  avremo che , per un punto qualunque  $P(x; y)$ , la relazione tra le “nuove” coordinate  $(x', y')$  riferite al sistema traslato e le “vecchie” coordinate  $(x, y)$  riferite al sistema iniziale sarà

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Ma nel nuovo sistema di riferimento sappiamo che l'equazione di  $r$  è

$$y' = 3x'$$

e quindi, tornando a  $x$  e  $y$  , otteniamo

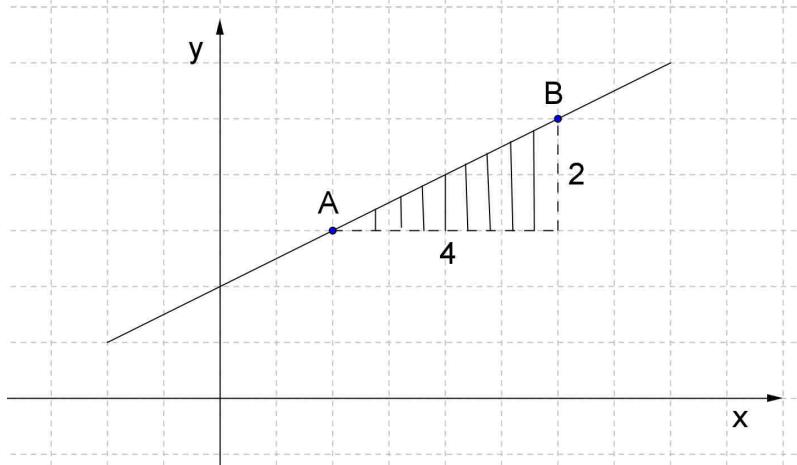
$$y - 2 = 3(x - 1)$$

In generale, quindi, la retta passante per  $P_0(x_o; y_o)$  con coefficiente angolare  $m$  avrà equazione:

$$y - y_o = m \cdot (x - x_o)$$

### Equazione della retta passante per due punti assegnati

Supponiamo di volere trovare l'equazione della retta passante per  $A(2;3)$  e  $B(6;5)$ .



Osserviamo che possiamo ricavare il coefficiente angolare della retta partendo dal triangolo tratteggiato in figura:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e nel nostro esempio  $m = \frac{1}{2}$ .

A questo punto possiamo utilizzare l'equazione della retta per  $A$ , per esempio, con coefficiente angolare  $m = \frac{1}{2}$ :

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

In generale l'equazione della retta passante per  $A(x_A; y_A)$  e  $B(x_B; y_B)$  avrà equazione:

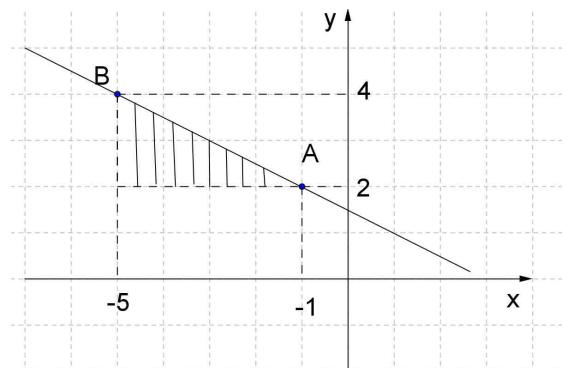
$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

che può essere anche scritta  $\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$ .

**Nota:** se per ricavare  $m$  ci si affida al piano quadrettato occorre fare attenzione ai coefficienti angolari negativi.

Per esempio le misure dei cateti del triangolo tratteggiato sono ancora 2 e 4 ma in questo caso è chiaro che  $m = -\frac{1}{2}$ .

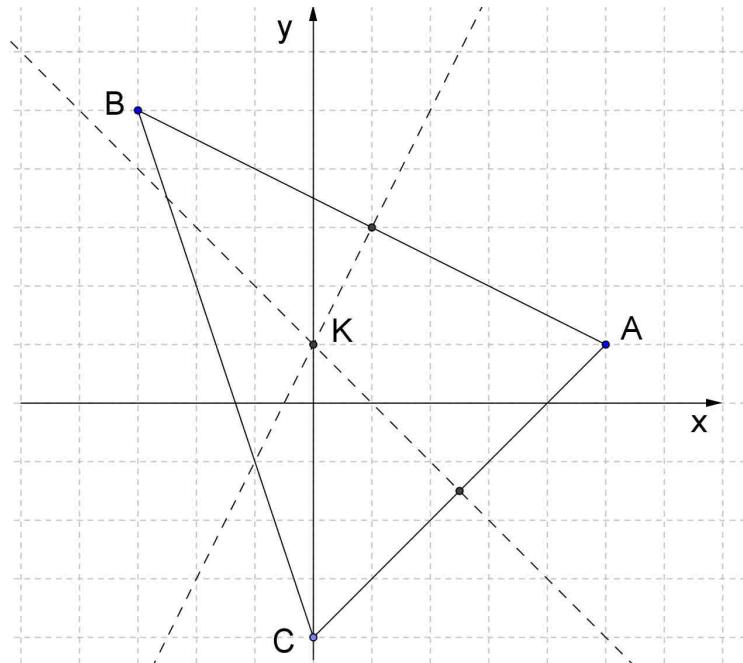
$$\text{Infatti } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{-5 + 1} = -\frac{1}{2}$$



## Problema

A questo punto si possono già risolvere molti problemi collegati con la retta. Vediamone uno.

Dati tre punti  $A(5;1)$   $B(-3;5)$   $C(0;-4)$  considera il triangolo  $\triangle ABC$  e determina le coordinate del circocentro K (centro della circonferenza circoscritta ≡ intersezione degli assi dei lati del triangolo) e dell'ortocentro H (intersezione delle altezze).



### Ricerca del circocentro K

Dobbiamo intersecare due assi del triangolo, per esempio K

$$\begin{cases} \text{asse}_{AB} \\ \text{asse}_{AC} \end{cases}$$

Poiché l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio, dobbiamo trovare

$$M_{AB}(1;3) \quad m_{AB} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{asse}AB} = 2$$

$$M_{AC}\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right) \quad m_{AC} = 1 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{asse}AC} = -1$$

Avremo quindi:

$$K \quad \begin{cases} y - 3 = 2(x - 1) \\ y + \frac{3}{2} = -(x - \frac{5}{2}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 1 = -x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

### Ricerca dell'ortocentro H

Dobbiamo intersecare due altezze, per esempio

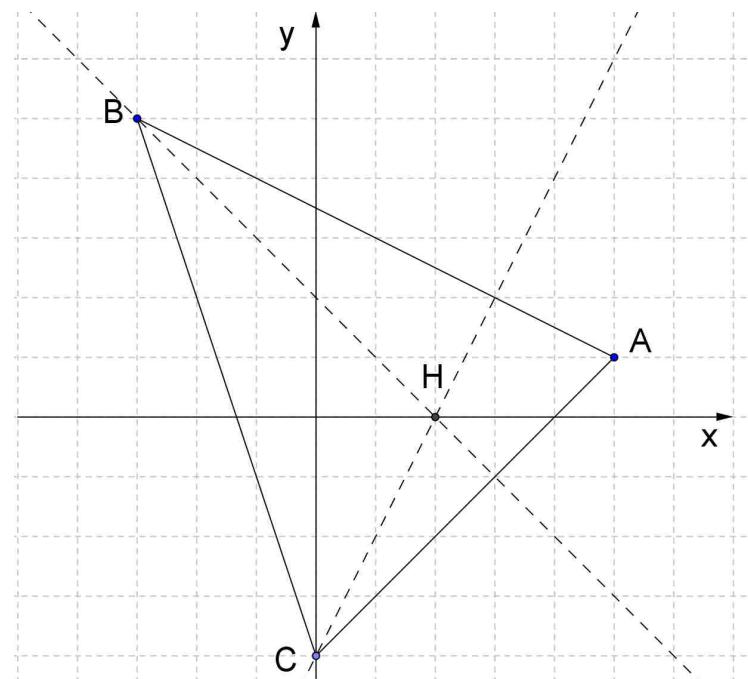
$$H \quad \begin{cases} h_B & \text{altezza uscente da } B \\ h_C & \text{altezza uscente da } C \end{cases}$$

$$h_B : m_{AC} = 1 \Rightarrow m_{hB} = -1$$

$$h_C : m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{hC} = 2$$

Quindi avremo:

$$H \quad \begin{cases} y - 5 = -(x + 3) \\ y + 4 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2 = 2x - 4 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$



## Distanza di un punto P da una retta r

In molti casi è utile conoscere la distanza di un punto P da una retta r.

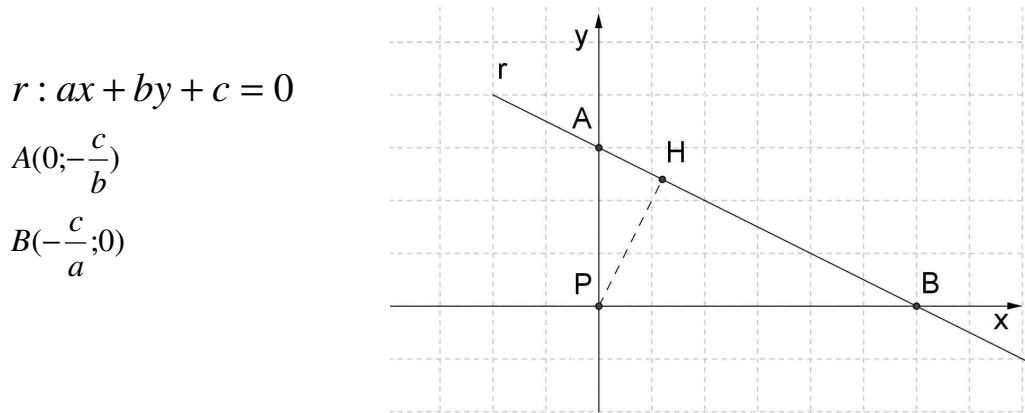
Potremo tracciare la retta per P perpendicolare ad r, trovare il punto H di intersezione con r e poi calcolare la distanza  $\overline{HP}$ . Questo procedimento risulta piuttosto lungo.

Vogliamo dimostrare che se

$$r : ax + by + c = 0 \quad P(x_o; y_o)$$

$$d(P, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1. Cominciamo con il considerare  $P(0;0)$



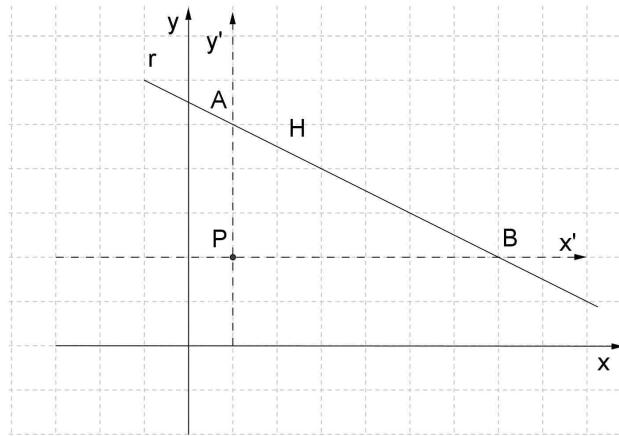
Consideriamo il triangolo  $\triangle APB$  :  $\overline{PH}$  è l'altezza relativa all'ipotenusa e quindi poiché

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2}} = \left| \frac{c}{ab} \right| \sqrt{a^2 + b^2}$$

si ottiene

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\left| \frac{c}{b} \right| \cdot \left| \frac{c}{a} \right|}{\left| \frac{c}{ab} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Se  $P \neq (0;0)$  possiamo traslare il sistema di riferimento portando l'origine in P.



Sappiamo che  $\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + x_o \\ y = y' + y_o \end{cases}$

L'equazione della retta  $r$  nel nuovo sistema di riferimento sarà quindi:

$$a(x' + x_o) + b(y' + y_o) + c = 0$$

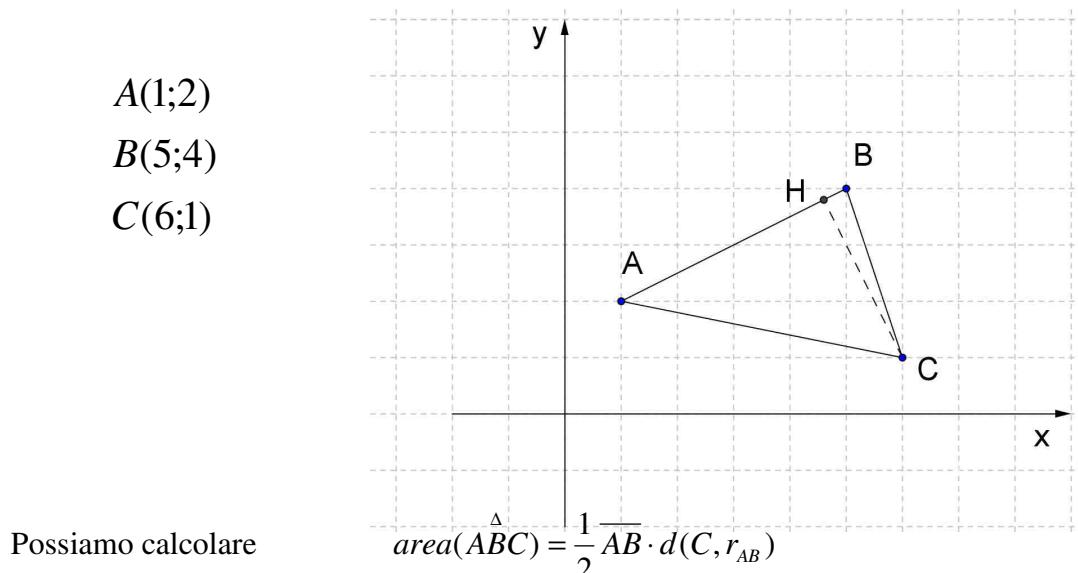
$$ax' + by' + ax_o + by_o + c = 0$$

Poiché il termine noto è  $ax_o + by_o + c$  e, nel nuovo sistema di riferimento  $P$  coincide con l'origine, utilizzando la formula trovata precedentemente avremo:

$$d(P, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Problema: calcolo dell'area di un triangolo

Determina l'area del triangolo  $\triangle ABC$  in figura.



$$\overline{AB} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

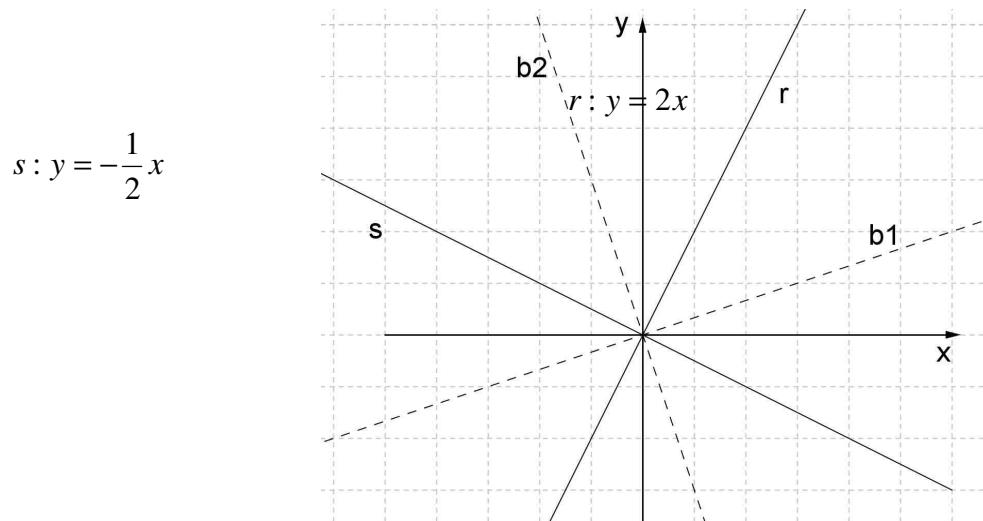
$$r_{AB} : m = \frac{1}{2} \quad y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

$$d(C, r_{AB}) = \frac{|6 - 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Quindi: } \text{area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} = 7$$

### Equazioni delle bisettrici degli angoli individuati da due rette

Supponiamo di dover risolvere il seguente problema: date le rette di equazione  $r: y = 2x$  e  $s: y = -\frac{1}{2}x$ , determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli individuati da esse.



Ricordiamo che se  $P(x; y)$  appartiene ad una bisettrice dovrà essere  $d(P, r) = d(P, s)$ .

Quindi, scrivendo  $r: 2x - y = 0$   
 $s: x + 2y = 0$  dovrà essere  $\frac{|2x - y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{5}}$

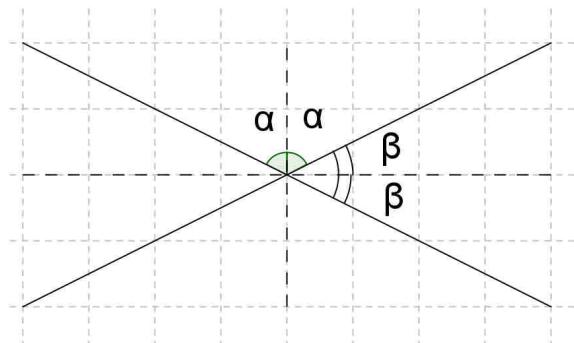
E quindi possiamo avere due casi:

$$2x - y = x + 2y \Rightarrow x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \quad (b_1)$$

$$2x - y = -(x + 2y) \Rightarrow 3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x \quad (b_2)$$

Osserviamo che le due bisettrici sono tra loro perpendicolari.

Infatti osservando la figura è chiaro che  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$  e quindi  $\alpha + \beta = 90^\circ$



## Esercizi

1. Disegna le rette aventi le seguenti equazioni:

a)  $y=3x$

b)  $y = -\frac{2}{3}x$

c)  $y = \frac{1}{4}x$

d)  $y=3x+1$

e)  $y = -\frac{2}{3}x + 3$

f)  $y = \frac{1}{4}x - 2$

2. Disegna le rette aventi le seguenti equazioni:

a)  $2x+y=0$

b)  $3x-y=0$

c)  $x-2y+2=0$

d)  $2x-y+1=0$

e)  $2x-4=0$

f)  $5y-15=0$

3. Date le rette di equazione  $y=2x$  ,  $y = -\frac{1}{2}x + 5$  ,  $y = \frac{1}{3}x$  determina perimetro e area del triangolo individuato dalle rette e verifica che si tratta di un triangolo rettangolo isoscele.

$$[2p = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10} ; A = 10]$$

4. Dati i punti A(1;3) B(3;7) C(7;-1) determina le equazioni delle rette passanti per A,B per B,C ,per A,C. Calcola il perimetro del triangolo. Determina le coordinate del baricentro G e dell'ortocentro H del triangolo.

$$[y=2x+1; y=-2x+13; y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}; 2p = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13} + 4\sqrt{5}; G(\frac{11}{3}; 3); H(0; \frac{5}{2})]$$

5. Considera i punti A(2;2) B(4;6) C(8;4).Determina le equazioni delle rette dei lati e verifica che si tratta di un triangolo rettangolo isoscele. Determina perimetro e area. Determina le coordinate di baricentro, ortocentro e circocentro e verifica che sono allineati.

$$[y=2x-2; y = -\frac{1}{2}x + 8; y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}; 2p = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}; A=10; G(\frac{14}{3}; 4); H(4;6); K(5;3)]$$

6. Considera i punti A(-3;0) B(3;2) C(5;-2). Determina le coordinate del circocentro K del triangolo ABC.

$$[K(\frac{6}{7}; -\frac{11}{7})]$$

7. Dati i punti A(-2;1) B(2;5) C(5;-1) determina:

a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;

b) il perimetro e l'area del triangolo  $\triangle ABC$ ;

c) le coordinate del baricentro G e dell'ortocentro H del triangolo.

$$[y = x + 3; y = -2x + 9; y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}; 2p = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + \sqrt{53}; A = 18; G(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}); H(\frac{4}{3}; \frac{8}{3})]$$

8. Dati i punti A(0;1) B(2;4) C(5;2) determina:

- a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;
- b) il perimetro e l'area del triangolo  $\triangle ABC$  (verifica anche che è un triangolo rettangolo);
- c) le coordinate del circocentro K del triangolo  $\triangle ABC$ .

$$[ y = \frac{3}{2}x + 1; y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}; y = \frac{1}{5}x + 1; 2p = 2\sqrt{13} + \sqrt{26}; A = \frac{13}{2}; K(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}) ]$$

9. Dati i punti A(0;4) B(2;6) C(5;5) D(1;1) determina:

- a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, C e D, D e A;
- b) verifica che ABCD è un trapezio isoscele e determina perimetro e area.

$$[ y = x + 4; y = -\frac{1}{3}x + \frac{20}{3}; y = x; y = -3x + 4; 2p = 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2}; A = 12 ]$$

10. Dati i punti A(0;3) B(2;7) C(6;5) D(4;1)

- a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, C e D, D e A;
- b) verifica che ABCD è un quadrato e calcolane perimetro e area;
- c) determina le coordinate del centro di simmetria O del quadrato ABCD.

$$[ y = 2x + 3; y = -\frac{1}{2}x + 8; y = 2x - 7; y = -\frac{1}{2}x + 3; 2p = 8\sqrt{5}; A = 20; O(3;4) ]$$

11. Dati i punti A(-2;3) B(1;6) C(4;0)

- a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;
- b) determina le coordinate del baricentro G, dell'ortocentro H e del circocentro K del triangolo  $\triangle ABC$  e verifica che sono allineati.

$$[ y = x + 5; y = -2x + 8; y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad G(1;3) \quad H(0;4) \quad K(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}) ]$$

12. Date le rette di equazione

$$r : y = 3x - 1$$

$$s : x + 3y - 17 = 0$$

$$t : x - y - 1 = 0$$

- a) determina le coordinate dei punti di intersezione  $A(r,s)$   $B(s,t)$   $C(r,t)$ ;
- b) verifica che  $\triangle ABC$  è un triangolo rettangolo;
- c) determina il perimetro e l'area del triangolo  $\triangle ABC$ .

$$[ \quad A(2;5) \quad B(5;4) \quad C(0;-1) \quad 2p = 3\sqrt{10} + 5\sqrt{2}; A = 10 ]$$

- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- La retta -

13. Calcola l'area del triangolo di vertici A(3;2) B(10;3) C(6;7). [A=16]

14. Calcola l'area del triangolo di vertici A(1;-2) B(3;-4) C(-1;3). [A=3]

15. Calcola l'area del triangolo di vertici A(-3;1) B(-2;-5) C(4;-1) [A=20]

16. Calcola la distanza d tra le rette di equazione  $y=2x$  e  $y=2x+3$ .  $[d = \frac{3}{\sqrt{5}}]$

17. Calcola la distanza d tra le rette di equazione  $x-y+1=0$  e  $x-y-4=0$ .  $[d = \frac{5}{\sqrt{2}}]$

18. Calcola la distanza d tra le rette di equazione  $2x+y=0$  e  $2x+y-3=0$ .  $[d = \frac{3}{\sqrt{5}}]$

19. a) Considera i punti A(-4;1) B(1;6) C(4;-3) . Determina le equazioni delle rette  $r_{AB}$  (retta passante per i punti A e B ),  $r_{AC}$  (retta passante per i punti A e C ) e  $r_{BC}$  (retta passante per i punti B e C).

b) Determina perimetro e area del triangolo ABC.

c) Determina le coordinate dell'ortocentro H.

d) Determina le coordinate del circocentro K.

e) Determina le coordinate del baricentro G e verifica che H, K e G sono allineati.

$$[ r_{AB} : y = x + 5; r_{BC} : y = -3x + 9; r_{AC} : x + 2y + 2 = 0 \\ 2p = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{10} + 4\sqrt{5}; A = 30; H(-1;2); K(1;1); G(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}) ]$$

20. a) Considera le rette  $r_1: x + 2y - 12 = 0$   $r_2: 2x + y - 12 = 0$  e  $r_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$  . Disegnale e determina le coordinate di  $A(r_1, assey)$   $B(r_1, r_2)$  e  $C(r_2, r_3)$ .

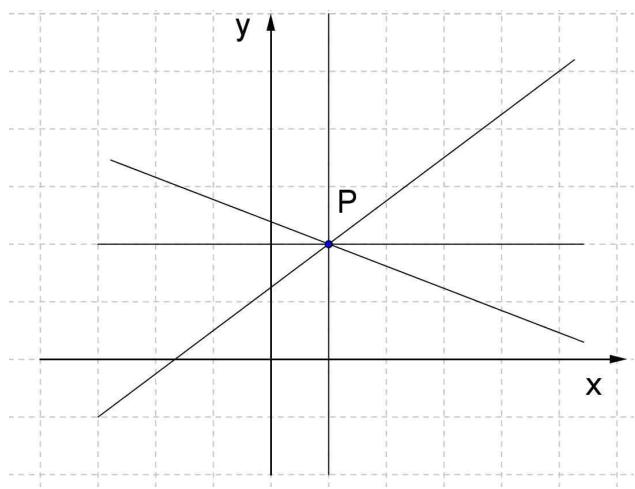
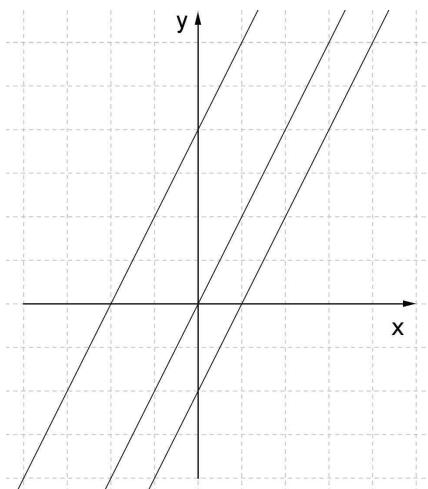
b) Determina l'equazione della retta  $r_4$  parallela alla retta  $r_2$  e passante per A e indica con D l'intersezione tra  $r_3$  e  $r_4$  . Come risulta il quadrilatero ABCD ?

c) Determina perimetro e area di ABCD.

$$[ A(0;6) B(4;4) C(6;0) r_4 : y = -2x + 6 ; D(2;2) ABCD \text{ è un rombo; } 2p = 8\sqrt{5} \text{ Area=12} ]$$

## Fasci di rette

Per fascio di rette si intende o l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data oppure l'insieme di tutte le rette passanti per un punto dato.



Per esempio, per indicare il fascio di rette parallele alla retta  $y = 2x$  scriverò:

$$y = 2x + k \quad (k \text{ è detto parametro})$$

Al variare di  $k$  (che rappresenta in questo caso l'ordinata all'origine) ottengo tutte le rette del fascio.

Per indicare, per esempio, il fascio di rette passanti per il punto P(1;2) scriverò:

$$y - 2 = k(x - 1) \cup x = 1$$

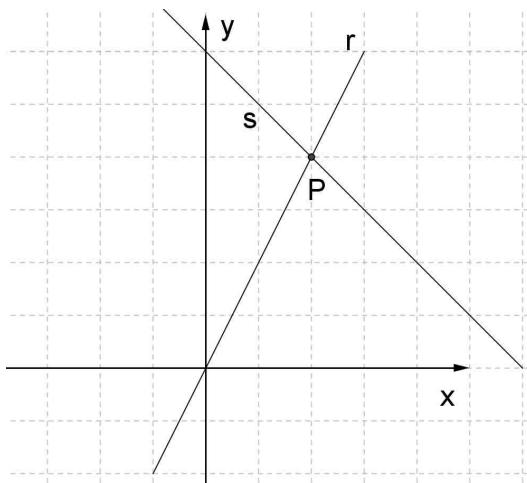
In questo caso  $k$  rappresenta il coefficiente angolare. La retta  $x = 1$  deve essere indicata a parte poiché non si ottiene per nessun valore di  $k$ .

### Fascio individuato da due rette “generatrici”

a) Consideriamo le due rette in figura

$$r : y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$$

$$s : y = -x + 6 \Rightarrow x + y - 6 = 0.$$



Per indicare il fascio di rette “**generato**” da  $r$  e  $s$ , cioè l’insieme delle rette passanti per il loro punto di intersezione  $P(2;4)$  posso scrivere così:

$$k(2x - y) + x + y - 6 = 0$$

Infatti si tratta, al variare di  $k$ , dell’equazione di una retta passante per  $P(2;4)$  poiché sostituendo  $x=2$   $y=4$  si annulla sia  $2x - y$  che  $x + y - 6$ .

Le rette  $r$  e  $s$  si chiamano “**generatrici**” del fascio.

Si osserva facilmente che se  $k=0$  si ottiene  $x + y - 6 = 0$  cioè la retta  $s$ , ma per quale valore di  $k$  otteniamo la retta  $r$ ?

Proviamo per esempio ad assegnare a  $k$  il valore 1:  $2x - y + x + y - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

Osserviamo che se assegniamo a  $k$  un valore grande in valore assoluto, per esempio  $k=100$  o  $k=-100$ , troviamo delle rette molto vicine a  $r$  poiché è come se il termine  $(x + y - 6)$  diventasse trascurabile. Per esempio:

$$k=100 \Rightarrow 201x - 99y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{201}{99}x + \frac{6}{99}$$

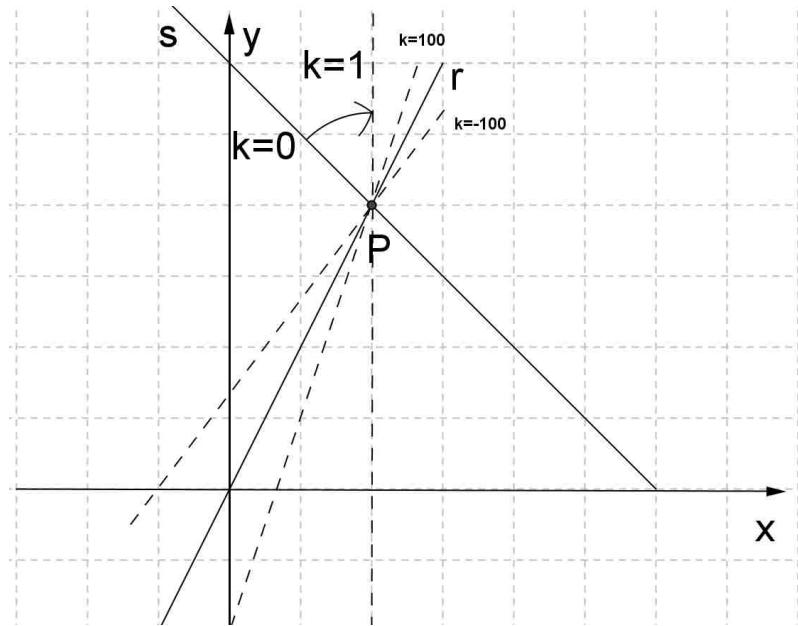
$$k=-100 \Rightarrow -199x + 101y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{199}{101}x + \frac{6}{101}$$

Si stabilisce quindi di associare a  $r$  il valore “infinito” ( $\infty$ ) di  $k$ .

Quindi

$$k = \infty \Rightarrow 2x - y = 0$$

$$k = 0 \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

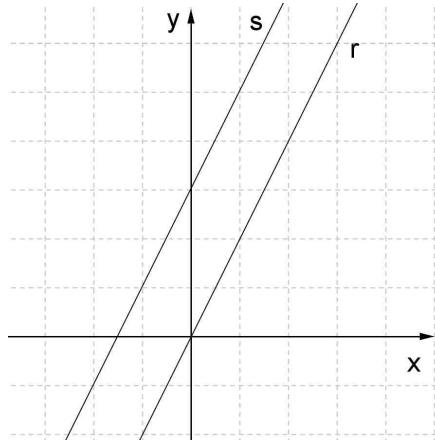


Osserviamo infine che i valori di  $k$ , nel nostro esempio, aumentano quando si ruota in senso orario: se infatti vogliamo andare dalla retta corrispondente a  $k=0$  a quella corrispondente a  $k=1$ , senza toccare la retta  $k=\infty$ , dobbiamo ruotare in senso orario: quindi partendo da  $r$  e ruotando in senso orario si hanno valori da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

b) Consideriamo le due rette in figura:

$$r : y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$$

$$s : y = 2x + 3 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$$



Se considero l'equazione:

$$k(2x - y) + 2x - y + 3 = 0 \quad \Rightarrow 2(k+1)x - (k+1)y + 3 = 0$$

al variare di  $k$  (con  $k \neq -1$ ) ottengo rette parallele ad  $r$  e  $s$ .

Si tratta quindi di un fascio di rette parallele ( $m=2$ ) in cui

$$k = 0 \Rightarrow s$$

$$k = \infty \Rightarrow r$$

$r$  e  $s$  sono le “generatrici” del fascio.

## Problema

Considera il fascio  $k(2x - y) + x + y - 6 = 0$ .

- a) Determina per quale valore di  $k$  si ottiene la retta parallela all'asse  $x$  e per quale valore di  $k$  si ottiene la retta parallela all'asse  $y$ .

Se sviluppiamo l'equazione data del fascio otteniamo  $(2k+1)x + (1-k)y - 6 = 0$ .

Quindi avremo

$$\text{una retta parallela all'asse } x \text{ se } 2k+1=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

$$\text{una retta parallela all'asse } y \text{ se } 1-k=0 \Rightarrow k=1$$

- b) Determina per quale valore di  $k$  si ottiene la retta passante per  $P(4;5)$ .

Basterà sostituire le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$k(2 \cdot 4 - 5) + 4 + 5 - 6 = 0 \Rightarrow 3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$$

- c) Determina per quale valore di  $k$  si ottiene una retta parallela alla bisettrice del I-III quadrante.

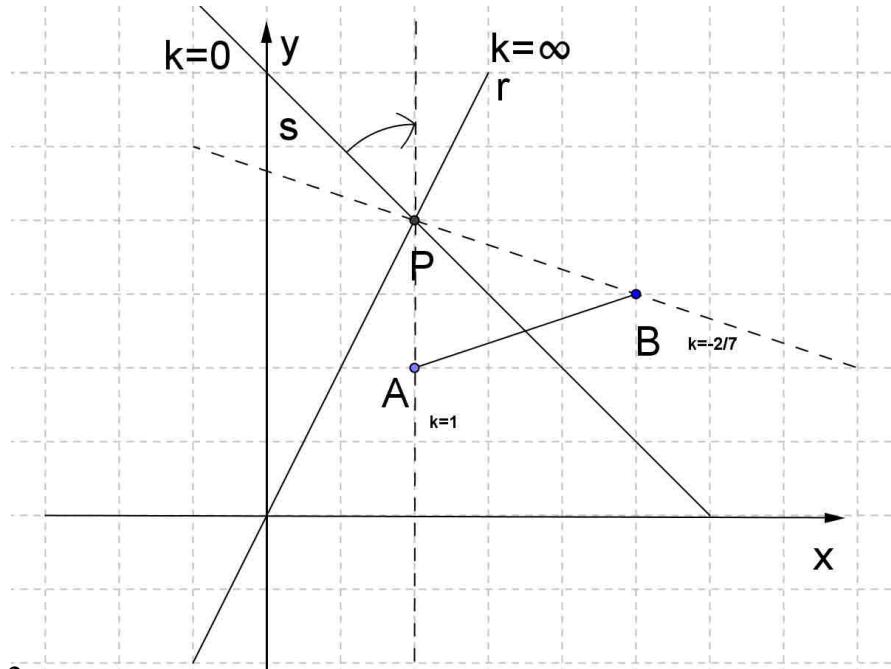
Poiché il coefficiente angolare delle rette del fascio risulta  $m = \frac{2k+1}{k-1}$  dovrà essere

$$\frac{2k+1}{k-1} = 1 \Rightarrow 2k+1 = k-1 \Rightarrow k = -2$$

- d) Determina per quali valori di  $k$  si ottengono rette che intersecano il segmento AB in figura in cui si ha  $A(2;2)$  e  $B(5;3)$ .

$$k_A : k(2 \cdot 2 - 2) + 2 + 2 - 6 = 0 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

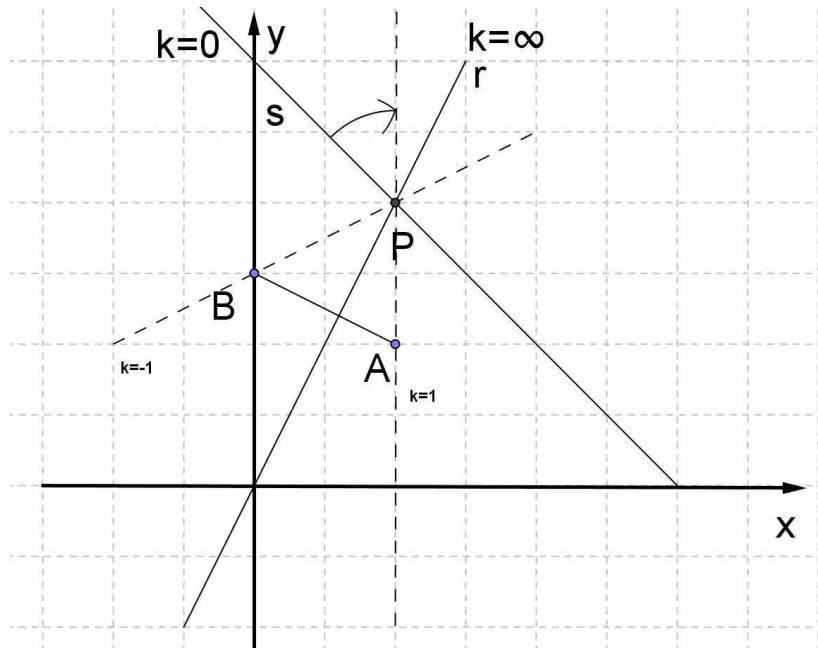
$$k_B : k(2 \cdot 5 - 3) + 5 + 3 - 6 = 0 \Rightarrow 7k = -2 \Rightarrow k = -\frac{2}{7}$$



Quindi se  $-\frac{2}{7} \leq k \leq 1$  le rette intersecano il segmento.

**Nota:** se il segmento AB interseca la retta generatrice corrispondente a  $k = \infty$  occorre fare attenzione. Consideriamo per esempio A(2;2) ma B(0;3):

$$k_B : k(-3) + 3 - 6 = 0 \Rightarrow -3k = 3 \Rightarrow k = -1$$



Le rette che intersecano il segmento AB si avranno, in questo caso, per  $k \leq -1 \cup k \geq 1$  (osserva come aumentano i valori di  $k$ ).

### Problemi sui fasci di rette

1. Scrivi come risultano i fasci di rette aventi le seguenti equazioni:

- a)  $y = x + k$  ;
- b)  $y = -\frac{1}{2}x + k$  ;
- c)  $y = mx + 2$  ;
- d)  $y - 3 = m(x - 1)$

2. Considera il triangolo  $\triangle ABC$  con  $A(-4;1)$   $B(-3;-1)$   $C(-1;3)$ . Nel fascio di rette parallele alla retta per  $B$  e  $C$  determina quella che stacca su  $ABC$  un triangolo  $AB'C'$  tale che  $area(\triangle AB'C') = \frac{1}{4} area(\triangle ABC)$ .

$$[y=2x+7]$$

3. Per quali valori di  $k$  le rette di equazione  $y=2x+k$  intersecano il triangolo  $\triangle ABC$  dell'esercizio precedente?

$$[5 \leq k \leq 9]$$

4. Considera il triangolo  $\triangle ABC$  con  $A(-2;0)$   $B(1;9)$   $C(7;7)$ . Determina perimetro e area. Calcola le coordinate del baricentro  $G$ , dell'ortocentro  $H$  e del circocentro  $K$ . Determina l'equazione della retta parallela alla retta per  $B$  e  $C$  che stacca un triangolo  $AB'C'$  tale che  $area(\triangle AB'C') = \frac{1}{4} area(\triangle ABC)$ .

$$[2p = 5\sqrt{10} + \sqrt{130}; A = 30; G(2; \frac{16}{3}); H(1;9); K(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}); y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}]$$

5. Dato il triangolo  $\triangle ABC$  con  $A(1;3)$   $B(3;7)$   $C(7;-1)$  determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $y = \frac{1}{2}x + k$  intersecano il triangolo  $\triangle ABC$ .

$$[-\frac{9}{2} \leq k \leq \frac{11}{2}]$$

6. Considera il triangolo  $\triangle ABC$  dell'esercizio precedente: per quale valore di  $k$  la retta del fascio  $y = -2x + k$  stacca un triangolo  $\triangle AB'C'$  di area 4?

[k=9]

7. Studia i seguenti fasci di rette, disegna le rette generatrici ed indica con C l'eventuale centro del fascio:

a)  $(k-1)x + ky + k + 3 = 0$  [C(3;-4)]

b)  $(k+1)x - (k-1)y - k - 3 = 0$  [C(2;1)]

c)  $2kx - (k+3)y - k - 1 = 0$  [  $C(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$  ]

d)  $(2k-1)x + ky + 3 = 0$  [C(3;-6)]

e)  $(1+k)x + (2-k)y - 4 - k = 0$  [C(2;1)]

f)  $(1-k)x + (1+k)y - 2(k+2) = 0$  [C(1;3)]

g)  $(1+k)x - (1+k)y + 2 = 0$  [rette parallele con m=1]

8. Studia il fascio di rette di equazione

$$(2k-1)x + ky - 5 = 0$$

e determina:

- a) il valore di  $k$  per cui si ha una retta parallela all'asse x;
- b) il valore di  $k$  per cui si ha una retta parallela all'asse y;
- c) il valore di  $k$  per cui si ha una retta parallela alla retta di equazione  $y=x$ ;
- d) i valori di  $k$  per cui le rette del fascio intersecano il segmento AB con A(1;0) e B(3;2).

$$[ C(-5,10); k = \frac{1}{2}; k = 0; k = \frac{1}{3}; 1 \leq k \leq 3 ]$$

9. Studia il fascio di rette di equazione  $(2+k)x + (k-1)y + 3 - k = 0$  e determina:
- a) il valore di  $k$  per cui si ha una retta parallela alla retta di equazione  $y=-x$ ;
  - b) i valori di  $k$  per cui le rette del fascio intersecano il segmento  $AB$  con  $A(0;0)$   $B(2;0)$ ;
  - c) il valore di  $k$  per cui si ha una retta parallela all'asse  $x$ ;
  - d) il valore di  $k$  per cui si ha una retta parallela all'asse  $y$ .
- $[C(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}); k = \infty; k \leq -7 \cup k \geq 3; k = -2; k = 1]$
10. Studia il fascio di rette di equazione  $k(x-2y+8) + 3x + y + 3 = 0$  e determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio intersecano il triangolo  $\triangle ABC$  dove  $A(1;1)$   $B(3;-2)$  e  $C(-1;-5)$ .
- $[C(-2;3); -1 \leq k \leq \frac{5}{17}]$
11. Studia il fascio di rette di equazione  $(x-2y) + k(2x+y+1) = 0$  e determina:
- a) per quali valori di  $k$  le rette del fascio intersecano il triangolo  $\triangle ABC$  con  $A(0;0)$   $B(2;2)$   $C(4;-1)$ ;
  - b) per quale valore di  $k$  si ha una retta perpendicolare alla retta di equazione  $y=x$ .
- $[C(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}); -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{2}{7}; k = -3]$
12. Studia  $F: k(x-2y+2) + 3x + y - 8 = 0$  e determina:
- a) per quali valori di  $k$  le rette del fascio intersecano il segmento  $AB$  con  $A(4;4)$  e  $B(6;2)$ ;
  - b) per quale valore di  $k$  si ha una retta parallela alla retta di equazione  $y = -2x$ .
- $[C(2;2); k \leq -3 \cup k \geq 4; k = -\frac{1}{5}]$

13. a) Studia il fascio di rette di equazione  $F: k(y-3) + 3x - 2y + 6 = 0$ .
- b) Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio intersecano il segmento AB con  $A(3;4)$ ,  $B(3;2)$ .
- c) Determina per quali valori di  $k$  si ottiene una retta parallela all'asse x, all'asse y.
- d) Determina per quali valori di  $k$  si ottengono rette che staccano sugli assi coordinati segmenti di uguale lunghezza.

$$[C(0;3); \quad k \leq -7 \cup k \geq 11; \quad k = \infty; \quad k = 2; \quad k = -1 \cup k = 5]$$

14. a) Studia il fascio di rette di equazione  $F: k(x-3) + x - 2y + 7 = 0$ .
- b) Determina per quale valore di  $k$  si ha la retta del fascio parallela alla retta  $2x + y = 0$ .
- c) Determina per quali valori di  $k$  si hanno le rette del fascio parallele all'asse x e all'asse y.
- d) Per quale valore di  $k$  si ottiene la retta passante per l'origine?
- e) Per quali valori di  $k$  si ottengono rette che intersecano il segmento OA con  $O(0;0)$ ;  $A(6;0)$ ?
- f) Per quali valori di  $k$  si ottiene una retta del fascio che individua, detto P il suo punto di intersezione con l'asse x, un triangolo OCP (C centro del fascio) di area 10?

$$\left[ C(3;5); \quad k = -5; \quad k = -1, \quad k = \infty; \quad k = \frac{7}{3}; \quad k \leq -\frac{13}{3} \cup k \geq \frac{7}{3}; \quad k = \frac{3}{7} \cup k = -11 \right]$$

15. a) Studia il fascio di rette di equazione  $F: k(x+y) + x + y - 2 = 0$ .
- b) Determina per quali valori di  $k$  si ottengono rette del fascio che hanno distanza  $2 \cdot \sqrt{2}$  dall'origine.
- c) Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio intersecano il semiasse positivo delle y.

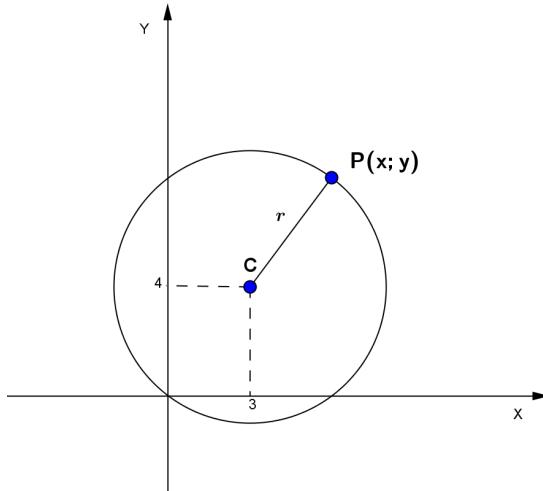
$$[ \text{fascio di rette parallele con } m = -1; \quad k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = -\frac{3}{2}; \quad k > -1 ]$$

# La circonferenza nel piano cartesiano



Abbiamo già studiato la circonferenza di raggio  $r$  e centro  $C$  come l'insieme di punti per i quali la distanza da  $C$  è uguale a  $r$ : ora vogliamo studiare la circonferenza nel piano cartesiano.

Consideriamo la circonferenza in figura in cui il centro è  $C(3;4)$  e il raggio  $r = 5$ : se indichiamo con  $P(x; y)$  un punto della circonferenza avremo, per definizione, che la distanza tra  $P$  e  $C$  è uguale a 5.



Per scrivere l'equazione che rappresenta questa circonferenza basterà scrivere la proprietà di tutti i suoi punti cioè  $\overline{PC} = 5$

Avremo  $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 5$

ed elevando al quadrato entrambi i membri avremo:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

In generale l'equazione di una circonferenza  $\mathcal{C}$  di centro  $C(x_c; y_c)$  e raggio  $r$  sarà quindi

$$\boxed{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2}$$

Sviluppando otteniamo

$$x^2 - 2x_c x + x_c^2 + y^2 - 2y_c y + y_c^2 - r^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$$

Si pone

$$\begin{cases} -2x_c = a \rightarrow x_c = -\frac{a}{2} \\ -2y_c = b \rightarrow y_c = -\frac{b}{2} \\ x_c^2 + y_c^2 - r^2 = c \rightarrow r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - c} \end{cases}$$

Quindi abbiamo  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) \\ r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} \end{cases}$$

## Osservazioni

Abbiamo visto che l'equazione di una circonferenza è molto diversa da quella di una retta: è un'equazione di 2 grado in cui i coefficienti di  $x^2$  e  $y^2$  sono uguali ( se sono diversi da 1 si può dividere tutta l'equazione per il valore del coefficiente di  $x^2$  e  $y^2$  ) e in cui manca il termine  $xy$ . Inoltre, per avere una circonferenza "reale", dovrà essere

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0 \quad (\text{ricorda che } r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c})$$

Se  $r = 0$  la circonferenza "degenera" in un solo punto.

## Esempi

1)  $x^2 + y^2 = 1$  è l'equazione della circonferenza di centro  $C(0,0)$  e  $r = 1$ .

In generale  $x^2 + y^2 = r^2$  è l'equazione della circonferenza di centro  $C(0,0)$  e raggio  $r$ .

2)  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x + y = 0$  è l'equazione della circonferenza di centro  $C(1; -\frac{1}{2})$  e raggio  $r = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

3)  $x^2 + y^2 + 4 = 0$  non rappresenta una circonferenza reale perché  $r = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ .

4)  $x^2 + y^2 + ax + by = 0$  è l'equazione di una circonferenza passante per l'origine ( $c = 0$ ).

## Problemi

- 1) Determina l'equazione della circonferenza avente **centro C assegnato e passante per un punto A assegnato**.

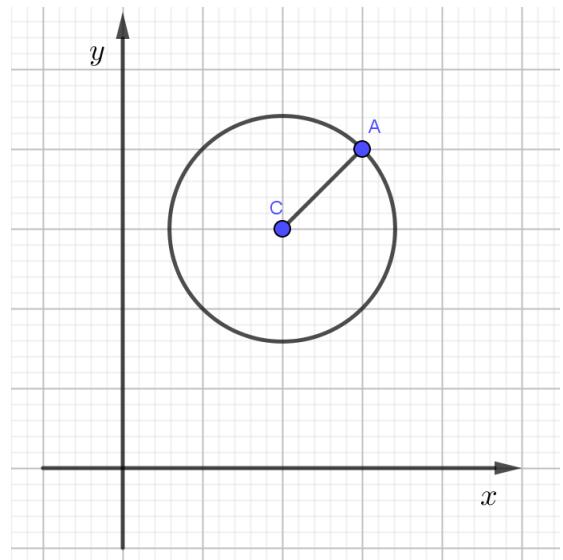
E' chiaro che basterà calcolare raggio =  $\overline{AC}$ .

**Esempio:** determina l'equazione della circonferenza avente centro  $C(2;3)$  e passante per il punto  $A(3;4)$ .

Abbiamo  $\overline{CA} = \sqrt{2}$ .

Quindi l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$



- 2) **Determina l'equazione della circonferenza C passante per tre punti A,B,C non allineati** (è come cercare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo  $\triangle ABC$ ).

Il centro della circonferenza si può trovare intersecando l'asse del segmento AB con l'asse del segmento BC: così facendo, infatti, troviamo un punto che è equidistante da A,B,C e quindi è il centro della circonferenza.

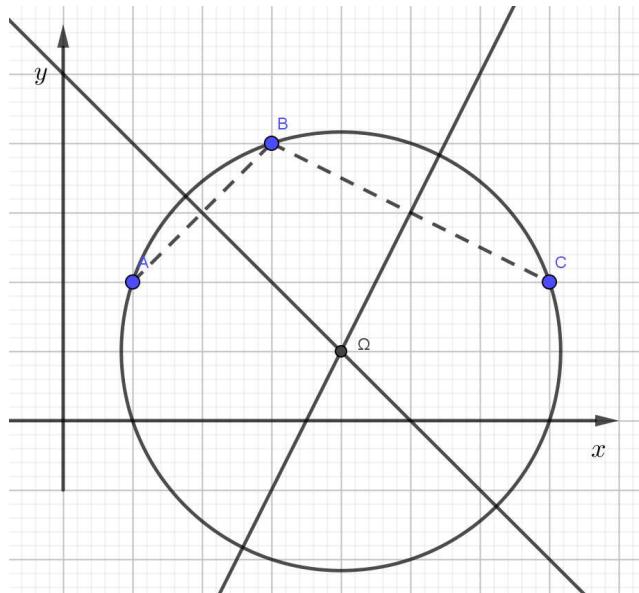
Per trovare il raggio basta calcolare la distanza del centro trovato da uno qualsiasi dei tre punti.

**Esempio:** determina l'equazione della circonferenza passante per i punti  $A(1;2)$ ,  $B(3;4)$ ,  $C(7;2)$ .

- Determiniamo l'asse di AB: il punto medio ha coordinate  $(2;3)$  e l'inclinazione dell'asse è  $m = -1$  e quindi abbiamo  
 $y - 3 = -(x - 2) \rightarrow y = -x + 5$
- Determiniamo l'asse di BC: il punto medio ha coordinate  $(5;3)$  e l'inclinazione è  $m = 2$  e quindi abbiamo  
 $y - 3 = 2(x - 5) \rightarrow y = 2x - 7$

Intersechiamo i due assi indicando con  $\Omega$  il centro della circonferenza (non possiamo usare la lettera C perché faremo confusione con il punto C assegnato).

$$\Omega \left\{ \begin{array}{l} y = -x + 5 \\ y = 2x - 7 \end{array} \right. \rightarrow \dots \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \end{array} \right.$$



A questo punto determiniamo il raggio calcolando , per esempio, la distanza  $\overline{A\Omega} = \sqrt{10}$  e in conclusione l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

Naturalmente possiamo anche sviluppare i calcoli:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

### NOTA

Questo problema può essere risolto anche sostituendo le coordinate dei tre punti nell'equazione generale  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  e risolvendo il sistema.

$$\begin{aligned} A(x_A, y_A) \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_A^2 + y_A^2 + ax_A + by_A + c = 0 \\ x_B^2 + y_B^2 + ax_B + by_B + c = 0 \\ x_C^2 + y_C^2 + ax_C + by_C + c = 0 \end{array} \right. \\ B(x_B, y_B) \rightarrow & \\ C(x_C, y_C) \rightarrow & \end{aligned} \quad \text{Le incognite sono } a, b, c.$$

I calcoli sono in genere più faticosi e quindi **è preferibile il primo metodo**.

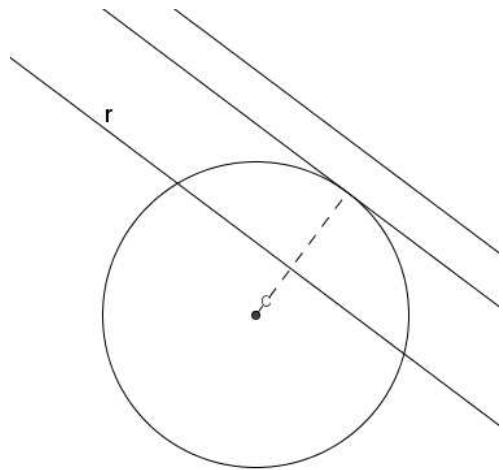
## Retta e circonferenza

Una retta  $r$  può essere esterna, tangente o secante ad una circonferenza  $C$ .

La retta è esterna quando  $d(C, r) > \text{raggio}$

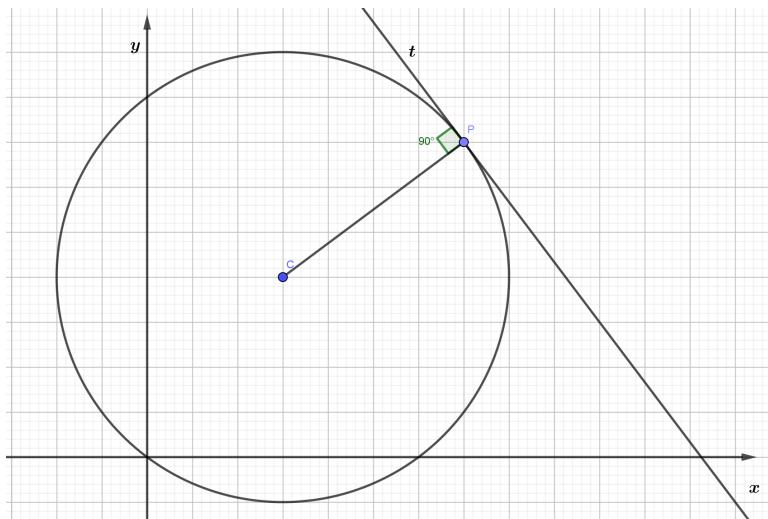
La retta è tangente quando  $d(C, r) = \text{raggio}$

La retta è secante quando  $d(C, r) < \text{raggio}$



## Rette tangenti ad una circonferenza

- 1) Risolviamo il seguente problema: data la circonferenza  $C$  in figura e considerato il suo punto  $P(7;7)$  determinare la retta  $t$  tangente in  $P$  alla circonferenza  $C$ .

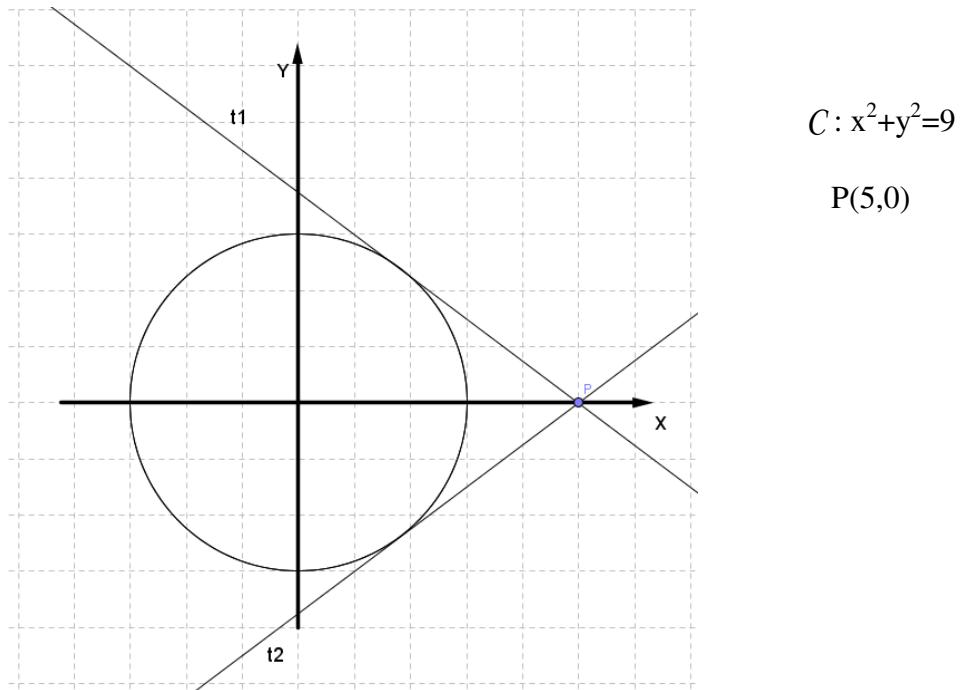


Possiamo, nel fascio di rette passanti per  $P$ , individuare quella la cui distanza da  $C$  è uguale a 5 (raggio di  $C$ ), ma c'è un procedimento più veloce.

Basta infatti osservare che la retta  $t$  risulterà perpendicolare al raggio  $CP$  e quindi:

$$m_{CP} = \frac{3}{4} \rightarrow m_t = -\frac{4}{3} \rightarrow t: y - 7 = -\frac{4}{3}(x - 7)$$

2) Risolviamo adesso il seguente problema: data la circonferenza  $C$  in figura e considerato il punto  $P(5;0)$ , determinare le rette  $t_1$  e  $t_2$  tangenti alla circonferenza uscenti da  $P$ .



Consideriamo la generica retta passante per  $P$

$$y = m(x - 5) \rightarrow mx - y - 5m = 0$$

Dobbiamo cercare le rette che hanno distanza 3 (raggio=3) dal centro di  $C$  (0,0) e quindi

$$\frac{|-5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \rightarrow |-5m| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

Elevando al quadrato:  $25m^2 = 9(m^2 + 1)$

$$16m^2 = 9 \rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \rightarrow m = \pm \frac{3}{4}$$

Quindi

$$t_1 : y = -\frac{3}{4}(x - 5)$$

$$t_2 : y = \frac{3}{4}(x - 5)$$

## La condizione di tangenza

Questo problema poteva essere risolto anche in un altro modo.

Ricordiamo che se intersechiamo una retta con una circonferenza possiamo avere:

nessun punto di intersezione se  $r$  è esterna a  $C$

1 solo punto di intersezione (o meglio due punti coincidenti) se r è tangente a C

2 punti di intersezione se r è secante a C

**Algebricamente** questo significa che risolvendo il sistema

equazione circonferenza C  
equazione retta r

troveremo un'equazione di  $2^{\circ}$  grado il cui  $\Delta$  sarà:

$\Delta < 0$  se  $r$  è esterna a  $C$

$\Delta = 0$  se  $r$  è tangente a  $C$  : questa viene detta “condizione di tangenza”

$\Delta > 0$  se r è secante a  $C$

Quindi il problema poteva essere risolto impostando il sistema tra la circonferenza e la generica retta passante per P e poi imponendo che il discriminante dell'equazione che si ottiene dopo aver sostituito sia nullo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \rightarrow x^2 + m^2(x^2 - 10x + 25) = 9 \rightarrow (1+m^2)x^2 - 10m^2x + 25m^2 - 9 = 0 \\ y = m(x-5) \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 25m^4 - (1+m^2)(25m^2 - 9) = 0$$

Svolgendo i calcoli abbiamo:

$$25m^4 - 25m^2 + 9 = 0 \rightarrow 16m^2 = 9 \rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \rightarrow m = \pm \frac{3}{4}$$

## Altri problemi sulla circonferenza

- 1) Determina la circonferenza **avente centro C assegnato e tangente ad una retta t assegnata.**

Per esempio: C(1;3) t:  $y = -x$  ( $\rightarrow x + y = 0$ ).

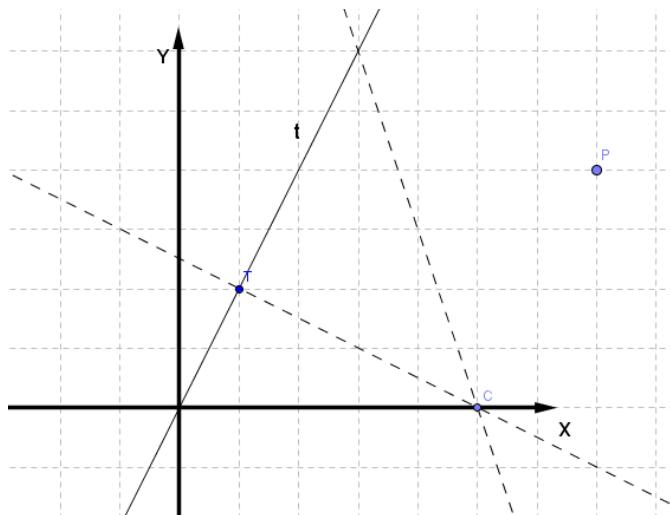
Basterà calcolare raggio = distanza (centro, tangente)

$$\text{Nel nostro caso } r = \frac{|1+3|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$C : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$$

- 2) Determina l' equazione della circonferenza **C tangente in un punto T ad una retta assegnata t e passante per un punto P assegnato.**

Per esempio: t:  $y = 2x$  T(1;2) P(7;4)



Possiamo individuare il centro C della circonferenza intersecando l' asse del segmento TP con la retta per T perpendicolare a t

$$\begin{cases} \text{asse}_{TP} : y - 3 = -3(x - 4) & \Rightarrow y = -3x + 15 \\ \text{perp. per } T \cdot a \cdot t : y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) & \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$$

$$\text{Naturalmente } r = \overline{TC} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$C : (x-5)^2 + y^2 = 20$$

- (\*) Questo problema si può risolvere anche considerando l'equazione generale  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  e imponendo il passaggio per T, per P e la condizione di tangenza a t (si ottiene un sistema di 3 equazioni nelle incognite  $a,b,c$  ).

- 3) Determina l'equazione della circonferenza  $C$  tangente ad una retta  $t$  assegnata e passante per due punti  $A$  e  $B$  assegnati.

Per esempio  $t$ :  $y = -x + 1$  e  $A(0;5)$   $B(-2;5)$ .

Se la circonferenza deve passare per  $A$  e  $B$  il suo centro dovrà appartenere all'asse del segmento  $AB$  che risulta la retta di equazione  $x = -1$ .

Quindi possiamo dire che il centro dovrà essere del tipo

$$C(-1; y)$$

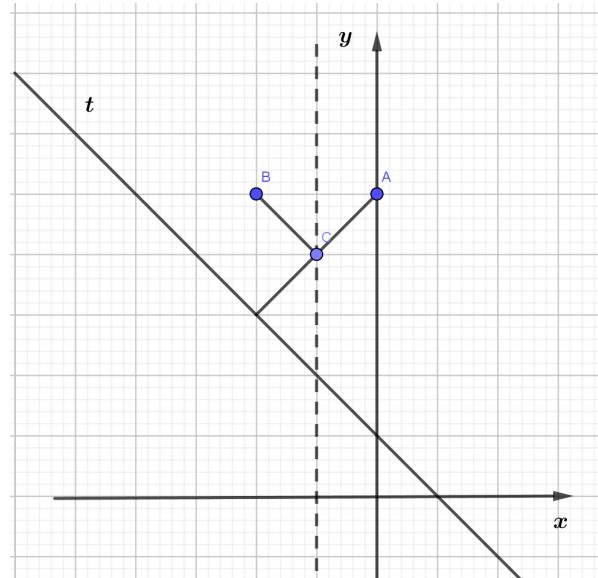
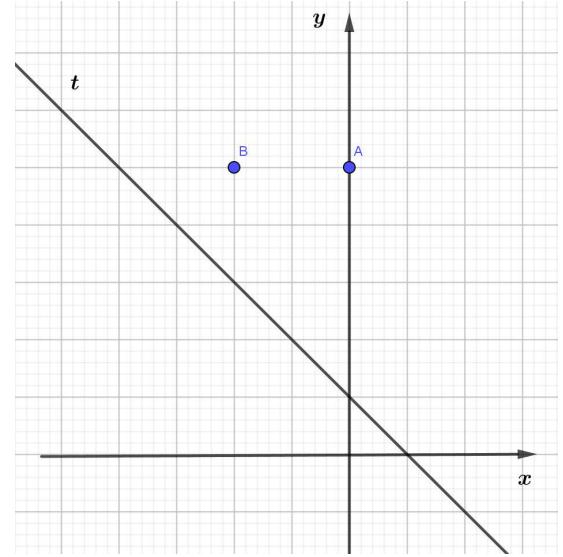
Ma perché la circonferenza sia tangente alla retta  $t$  **la distanza di  $C$  da  $t$  dovrà essere uguale al raggio  $\overline{CA}$  ( o  $\overline{CB}$  ).**

Dopo aver scritto l'equazione della tangente in forma implicita  $x + y - 1 = 0$ , possiamo impostare questa uguaglianza:

$$d(C, t) = \overline{CA}$$

$$\frac{|-1 + y - 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{1 + (y - 5)^2} \rightarrow \frac{|y - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{y^2 - 10y + 26}$$

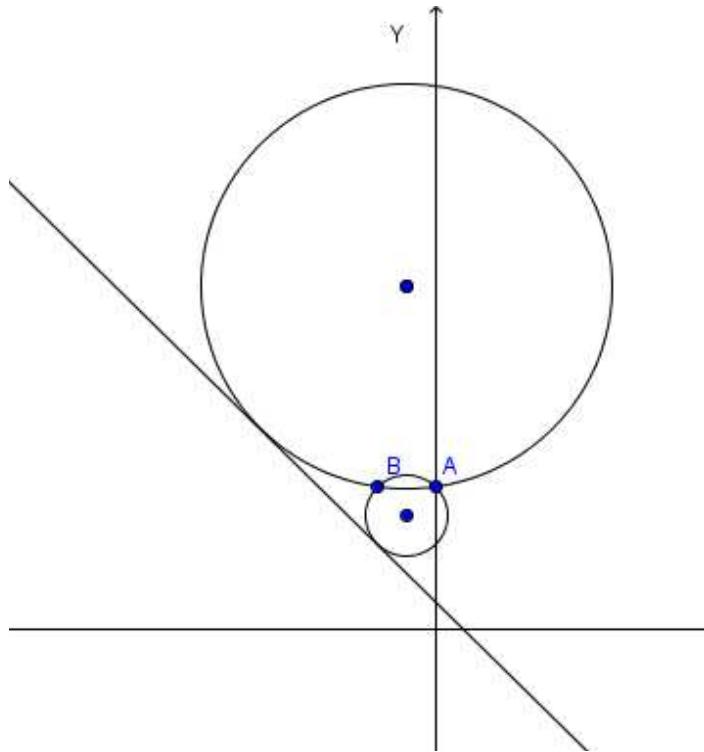
$$\frac{(y - 2)^2}{2} = y^2 - 10y + 26.....$$



Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione:

$$y^2 - 16y + 48 = 0 \rightarrow y_{1,2} = 8 \pm 4$$

In conclusione abbiamo due centri  $C_1(-1;4)$ ,  $C_2(-1;12)$  e quindi **due circonferenze** che risultano tangenti a  $t$  e passanti per A e B.



**Nota:** questo problema poteva anche essere in modo “algebrico” nel seguente modo: consideriamo l’equazione generale di una circonferenza  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  e imponiamo il passaggio per i punti A e B e la condizione di tangenza.

$$\begin{aligned} \text{passaggio per } A \rightarrow & 25 + 5b + c = 0 \\ \text{passaggio per } B \rightarrow & 4 + 25 - 2a + 5b + c = 0 \\ (*) \text{cond. tangenza} \rightarrow & \Delta = (a - b - 2)^2 - 8(1 + b + c) = 0 \end{aligned}$$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = -x + 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x^2 + (1-x)^2 + ax + b(1-x) + c = 0 \rightarrow 2x^2 + (a-b-2)x + 1 + b + c = 0 \\ ..... \end{array} \right.$$

Risolvendo il sistema otteniamo **due terne di soluzioni**  $(a, b, c)$  cioè due circonferenze che soddisfano le condizioni richieste.

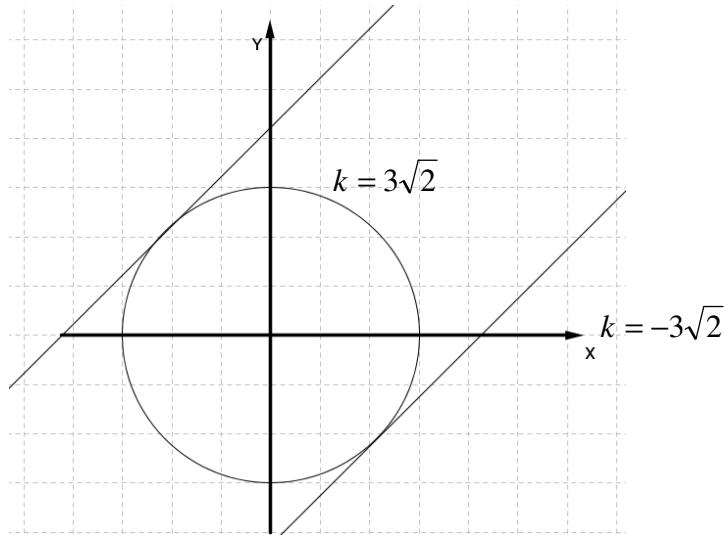
In particolare in questo caso abbiamo

$$(2; -8; 15) \rightarrow C_1(-1; 4) \quad \text{e} \quad (2; -24; 95) \rightarrow C_2(-1; 12).$$

## Circonferenza e fascio di rette

### Esempio 1

- a) Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $\mathcal{F}$ :  $y = x + k$  intersecano la circonferenza  $C : x^2 + y^2 = 9$ .



Si tratta di un fascio di rette parallele aventi  $m = 1$ .

Per determinare le rette del fascio che intersecano la circonferenza basterà determinare le rette del fascio che sono tangenti alla circonferenza, cioè le rette del fascio che hanno distanza dal centro  $(0;0)$  uguale al raggio della circonferenza cioè uguale a 3.

Per prima cosa dobbiamo scrivere l'equazione delle rette del fascio in forma implicita:

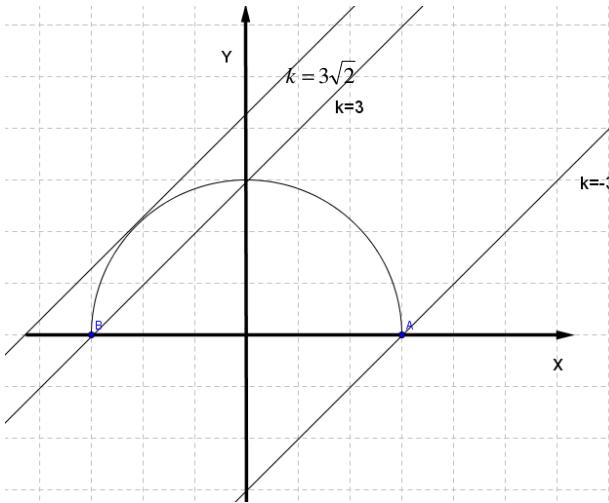
$$\mathcal{F} : x - y + k = 0$$

Calcoliamo la distanza tra la generica retta del fascio e il centro della circonferenza  $C(0;0)$  e poniamo questa distanza uguale a 3:

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow k = \pm 3\sqrt{2}$$

Quindi quando  $-3\sqrt{2} \leq k \leq 3\sqrt{2}$  le rette del fascio intersecano  $\mathcal{C}$ .

b) Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio precedente intersecano la semicirconferenza  $\widehat{AB}$  situata nel 1° e 2° quadrante ( $y \geq 0$ ) e **in quanti punti**.



In questo caso occorre determinare il valore di  $k$  delle rette del fascio passanti per A e B.

$$k_A \quad A(0;3) \quad 0 = 3 + k \rightarrow k = -3$$

$$k_B \quad B(-3;0) \quad 0 = -3 + k \rightarrow k = 3$$

Quindi:

per  $-3 \leq k < 3$  le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 1 solo punto;

per  $3 \leq k \leq 3\sqrt{2}$  le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 2 punti

(il punto di tangenza viene contato due volte).

**Nota:** il problema poteva essere proposto anche come soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1 soluzione per  $-3 \leq k < 3$

2 soluzioni per  $3 \leq k \leq 3\sqrt{2}$

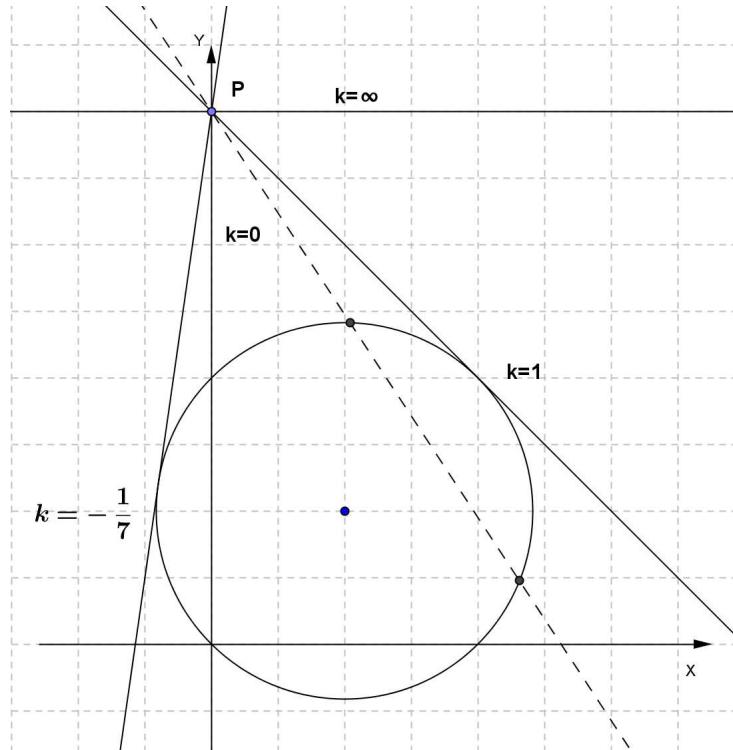
### Esempio 2

- a) Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $\mathcal{F} : x + ky - 8k = 0$  intersecano la circonferenza  $C : x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ .

Studiando il fascio si trova che si tratta di un fascio di rette passanti per  $P(0;8)$  e che le generatrici sono le rette:  
 $k = 0 \rightarrow x = 0$   
 $k = \infty \rightarrow y = 8$

Determiniamo i valori di  $k$  corrispondenti alle rette tangenti: applicando la formula della distanza dal centro  $C(2;2)$  della circonferenza e ponendola uguale a  $2\sqrt{2}$  (raggio) otteniamo i valori  $k_1 = 1$  e  $k_2 = -\frac{1}{7}$ .

Quindi quando  $-\frac{1}{7} \leq k \leq 1$  le rette del fascio intersecano la circonferenza (in due punti).



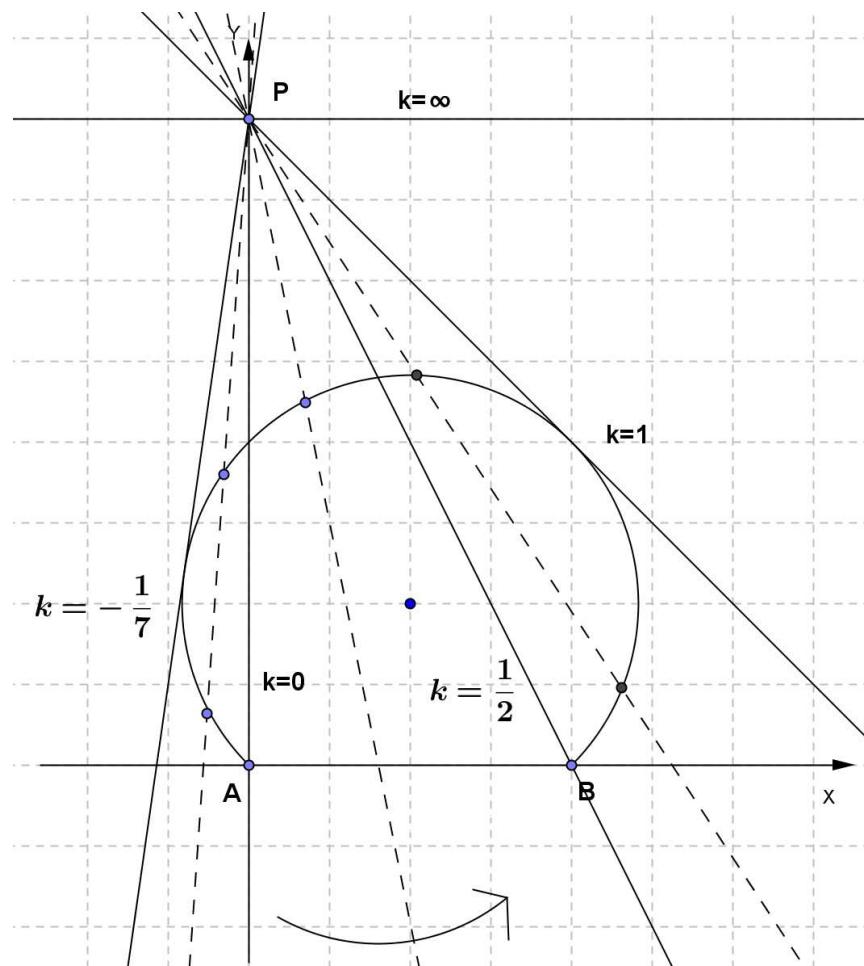
- b) Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio precedente intersecano la semicirconferenza  $\overset{\frown}{AB}$  situata nel 1° e 2° quadrante ( $y \geq 0$ ) e in quanti punti.

Sostituendo le coordinate di  $A(0;0)$  troviamo il valore  $k_A = 0$  della retta per  $A$  e sostituendo quelle di  $B(4;0)$  troviamo il valore  $k_B = \frac{1}{2}$  della retta del fascio passante per  $B$ .

Quindi:

per  $-\frac{1}{7} \leq k \leq 0 \cup \frac{1}{2} \leq k \leq 1$  le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 2 punti;

per  $0 < k < \frac{1}{2}$  le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 1 punto.



## Esercizi

**1)** Disegna le circonference aventi le seguenti equazioni:

a)  $x^2 + y^2 = 4$

d)  $3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 1 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

**2)** Determina l'equazione della circonferenza sapendo che:

a) ha centro C(1;1) e passa per P(3;2);

$[(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5]$

b) passa per (0;0) , A(4;2) B(2;2) ;

$[(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10]$

c) passa per (0;0) A(-2;4) B(6;0) ;

$[(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25]$

d) passa per A(1;-1) B(1;3) C(-3;3) ;

$[(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8]$

e) passante per O( 0;0) e A(4;0) e avente il centro appartenente alla retta di equazione

$$y = \frac{1}{2}x + 1;$$

$[(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8]$

f) ha centro C(0;0) ed è tangente alla retta t:  $y = -x + 3$ ;

$$\left[ x^2 + y^2 = \frac{9}{2} \right]$$

g) è tangente alla retta t:  $y = -x$  nel punto T(0;0) e passa per A(0;2) ;

$[x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0]$

h) è tangente alla retta t:  $y = 2x - 1$  nel punto T(1;1) e passa per A(1;-1)

$[(x-3)^2 + y^2 = 5]$

3) Determina la tangente alla circonferenza  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$  nel suo punto T(0;2).

$$[y = -2x + 2]$$

4) Data la circonferenza  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 25$  determina la retta tangente nel suo punto T(3;4) e le tangenti uscenti dal punto  $P(0; -\frac{25}{4})$ .

$$[t : 3x + 4y - 25 = 0 \quad t_{1,2} : y = \pm \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}]$$

5) Data la circonferenza  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$  determina le rette tangenti ad essa uscenti da (0;0).

$$[y = x \quad ; \quad y = -\frac{1}{7}x]$$

6) Determina la retta tangente in (0;0) alla circonferenza di equazione  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ .

$$[y = -\frac{3}{4}x]$$

7) Data  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 4$  determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $\mathcal{F}: y = x + k$  intersecano la circonferenza.

$$[-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}]$$

8) Data  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 9$  determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $\mathcal{F}: x + y - 5 + ky = 0$  intersecano la circonferenza.

$$[k \leq -\frac{7}{3} \cup k \geq \frac{1}{3}]$$

9) Data la circonferenza di equazione  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$  determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio:

a)  $\mathcal{F}_1: y = -x + k$

b)  $\mathcal{F}_2: x - 8 + k(2x - y - 4) = 0$

intersecano la circonferenza.

$$\left[ 5 - 5\sqrt{2} \leq k \leq 5 + 5\sqrt{2}; k \leq -\frac{4}{5} \text{ o } k \geq 0 \right]$$

10) Data la circonferenza C:  $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ , determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $\mathcal{F} : y = x + k$  intersecano:

a) l'intera circonferenza ;

$$[-4 \leq k \leq 4]$$

b) la parte di circonferenza che si trova nel 3° e 4° quadrante ( $y \leq 0$ ) ( specificando il numero delle intersezioni).

$$[1 \text{ intersezione per } -4 < k \leq 0 \text{ e } 2 \text{ intersezioni coincidenti per } k = -4]$$

- 11)** Data la circonferenza  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ , determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio

$$\mathcal{F} : y - 4 + k(x + y - 6) = 0$$

intersecano la circonferenza.

$$[-2 \leq k \leq -\frac{2}{3}]$$

- 12)** Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ 2x + y + k = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

[ 1 soluzione per  $-8 < k \leq -4$  ; 2 soluzioni per  $-4\sqrt{5} \leq k \leq -8$  ]

**13)**

- a) Determina l'equazione della circonferenza  $\mathcal{C}$  tangente in  $T(1;2)$  alla retta  $t : y = 2x$  e passante per il punto  $A(7;4)$ . Disegnala ed indica con  $C$  il suo centro.
- b) Determina le tangenti alla circonferenza uscenti dal punto  $P(15;0)$  e indicati con  $T_1$  e  $T_2$  i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero  $PT_1CT_2$ .
- c) Nel fascio di rette di equazione  $y = 2x + k$  determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio intersecano  $\mathcal{C}$ .

$$[\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0 ; t_{1,2} : y = \pm \frac{1}{2}(x - 15) ; \text{area}(PT_1CT_2) = 40 ; -20 \leq k \leq 0]$$

- 14)** a) Determina l'equazione della circonferenza  $\mathcal{C}$  tangente in  $(0;0)$  alla retta  $t : y = \frac{3}{4}x$  e avente il centro  $C$  appartenente alla retta  $y = -x - 1$ .

- b) Determina i punti  $P$  appartenenti a  $t$  tali che  $\overset{\Delta}{\text{area}}(OPC) = 25$ .

$$[\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \quad P_1(8;6) \quad P_2(-8;-6)]$$

- 15)** Determina l'equazione della circonferenza circoscritta e della circonferenza inscritta al triangolo di vertici  $O(0;0)$ ,  $A(4;0)$  e  $B(0;3)$ .

$$[x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0 ; x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0]$$

- 16)** Determina l'equazione della circonferenza tangente alla retta  $t: y=-1$  e passante per i punti A (1;1) e B (1;7).

$$[x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0 ; \quad x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0]$$

- 17)** Determina l'equazione della circonferenza tangente alla retta  $t: y = x - 1$  e passante per i punti A (-2;1) e B (0;3).

$$[2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 3 = 0]$$

- 18)** Determina l'equazione della circonferenza tangente all'asse x e passante per i punti A (1;2) e B (3;4).

$$[x^2 + y^2 + 10x - 20y + 25 = 0 ; \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0]$$

- 19) a)** Determina l'equazione della circonferenza  $\mathcal{C}$  passante per A(0;2) B(2;0) e O(0;0).

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio  $\mathcal{F}: y=x+k$  intersecano  $\mathcal{C}$ .

c) Determina per quali valori di k le rette del fascio  $\mathcal{F}$  intersecano la parte di  $\mathcal{C}$  con  $y \geq 0$ . Specificare in quanti punti.

$$[\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 ; -2 \leq k \leq 2 ; \quad 1 \text{ intersezione per } -2 < k < 0, 2 \text{ intersezioni per } 0 \leq k \leq 2 \cup k = -2]$$

- 20) a)** Determina l'equazione della circonferenza  $\mathcal{C}$  passante per A(-1; 3) e B(1; -1) e il cui centro appartiene alla retta di equazione  $2x - y + 1 = 0$ .

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio  $\mathcal{F}: x - y - 3 + k(x - 3) = 0$  intersecano la circonferenza e per quali valori (e in quanti punti) intersecano la  $\mathcal{C}$  con  $y \geq 0$ .

$$[\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 ; -3 \leq k \leq -\frac{1}{2} ; \quad 2 \text{ intersezioni per } -3 \leq k \leq -1]$$

- 21)** Determina l'equazione della circonferenza tangente agli assi coordinati e passante per A(1;-2).

$$[x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0 ; \quad x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0]$$

- 22) a)** Determina l'equazione della circonferenza avente centro C( 2; 1) e tangente alla retta  $t: y = x + 2$ .

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio  $\mathcal{F}: y = x + k$  staccano sulla circonferenza una corda di lunghezza 2.

$$[\mathcal{C}: 2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 1 = 0 ; \quad k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}]$$

## APPROFONDIMENTO

### Fasci di circonferenze

Supponiamo di avere due circonferenze

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \mathcal{C}_2: x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Se consideriamo l'equazione

$$k(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\text{cioè} \quad (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (ka_1 + a_2)x + (kb_1 + b_2)y + kc_1 + c_2 = 0$$

è chiaro che sarà, al variare di  $k$ , con  $k \neq -1$ , ancora una circonferenza (reale quando  $x_c^2 + y_c^2 - c \geq 0$ ). Si parla quindi di fascio di circonferenze generato da  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ . Per  $k=0$  si ottiene  $\mathcal{C}_2$ , mentre per  $k=\infty$  si ottiene  $\mathcal{C}_1$  (ragionamento analogo a quello svolto per i fasci di rette). Naturalmente a seconda di  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  si otterranno vari tipi di fasci.

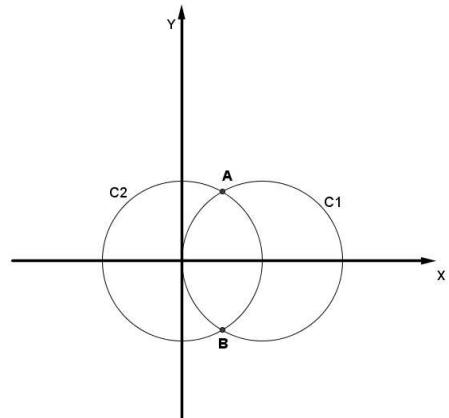
#### Esempio 1: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ secanti

Consideriamo per esempio le circonferenze in figura e studiamo il fascio da esse generato.

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad C_1(1;0) \quad r_1 = 1$$

$$\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad C_2(0;0) \quad r_2 = 1$$

$$\mathcal{F}: \quad k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (k \neq -1)$$



Qualunque sia il valore assegnato a  $k$  ( $k \neq -1$ ), si otterrà una circonferenza anch'essa passante per A e B: infatti sia sostituendo le coordinate di A che di B si otterrà  $k \cdot 0 + 0 = 0$ .

(\*) Osserviamo che, per qualunque valore di  $k$ , con  $k \neq -1$ , si ottengono circonferenze reali. Infatti:

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2kx - 1 = 0 \quad \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}x - \frac{1}{k+1} = 0$$

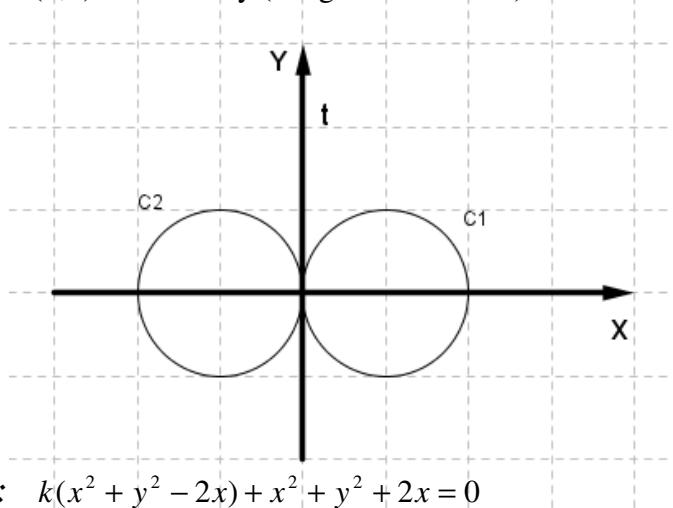
$$C\left(\frac{k}{k+1}; 0\right) \quad r = \sqrt{\frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1}} = \sqrt{\frac{k^2 + k + 1}{(k+1)^2}} \quad \frac{k^2 + k + 1}{(k+1)^2} > 0 \quad \forall k \neq -1$$

### Esempio 2: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tangenti

Consideriamo le circonferenze in figura, tangenti in  $(0;0)$  con l'asse  $y$  (tangente comune  $t$ ).

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad C_1(1;0) \quad r_1=1$$

$$\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad C_2(-1;0) \quad r_2=1$$



Consideriamo il fascio generato da  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ :  $\mathcal{F} : k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 + 2x = 0$

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2x(1-k) = 0$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2}$$

Si osserva che intersecando una qualunque circonferenza del fascio con la retta  $t : x=0$  si ottiene solo, come soluzione  $(0;0)$  e quindi tutte le circonferenze del fascio sono tangenti in  $(0;0)$  all'asse  $y$ . Il fascio generato da due circonferenze tangenti in  $T$  ad una retta  $t$  è costituito da circonferenze tangenti in  $T$  a  $t$  (che si ottiene per  $k = -1$ ).

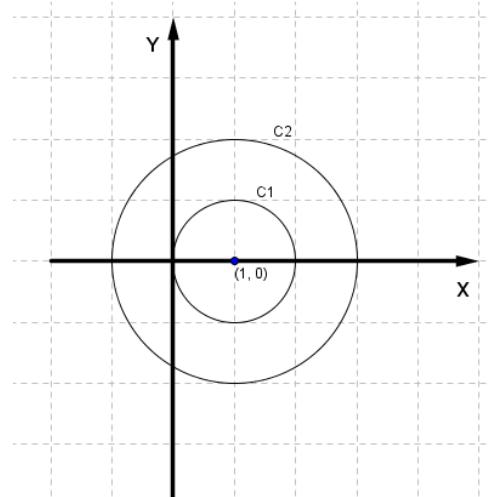
### Esempio 3 : $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ concentriche

Consideriamo le circonferenze in figura:

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \quad C_2(1;0) \quad r_2 = 2$$

$$\mathcal{F} : k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$



$$\text{Sviluppando: } (k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2x(k+1) - 3 = 0 \rightarrow (k \neq -1) : x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{k+1} = 0$$

Osserviamo che  $C(1 ; 0)$  cioè che tutte le circonferenze hanno lo stesso centro di  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  e

$$\text{Quindi avremo circonferenze } r = \sqrt{1 + \frac{3}{k+1}} = \sqrt{\frac{k+4}{k+1}} \text{ reali solo se}$$

$$\frac{k+4}{k+1} \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -4 \cup k > -1 \quad (k \neq -1)$$

#### Esempio 4: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ non aventi punti in comune e non concentriche

Consideriamo le circonferenze in figura:

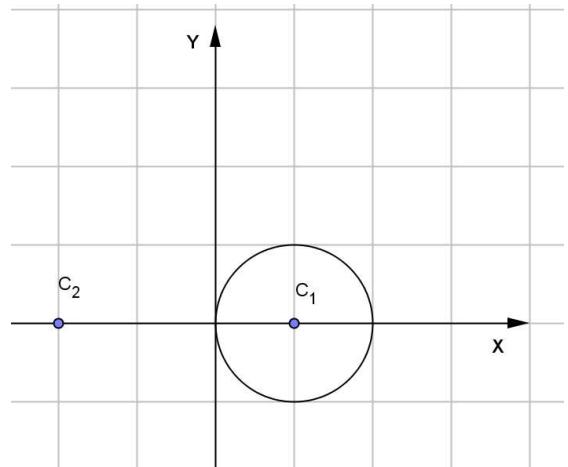
$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad C_1(1;0) \quad r_1 = 1$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0 \quad C_2(-2;0) \quad r_2 = 0$$

Consideriamo

$$\mathcal{F} : k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\text{Sviluppando: } (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2x(2-k) + 4 = 0$$



$$\text{Dividendo per } k+1 \quad (k \neq -1): \quad x^2 + y^2 + \frac{2(2-k)}{k+1}x + \frac{4}{k+1} = 0$$

$$C\left(\frac{k-2}{k+1}; 0\right) \quad r = \sqrt{\frac{(k-2)^2}{(k+1)^2} - \frac{4}{k+1}}$$

Quindi ho circonferenze reali solo se  $\frac{(k-2)^2}{(k+1)^2} - \frac{4}{k+1} \geq 0$  cioè, sviluppando i calcoli, quando

$$k \leq 0 \cup k \geq 8 \text{ con } k \neq -1$$

**Nota:** abbiamo considerato i fasci di circonferenze ottenuti “combinando” le equazioni di due circonferenze. **Ma cosa si ottiene “combinando” l’equazione di una circonferenza con l’equazione di una retta?**

$$\mathcal{F} : k(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$kx^2 + ky^2 + (ka_1 + a_2)x + (kb_1 + b_2)y + kc_1 + c_2 = 0$$

Se  $k \neq 0$  (e verifica la condizione di realtà per il raggio), **ottengo quindi un fascio di circonferenze** ed è semplice dimostrare che:

- se  $r$  e  $\mathcal{C}$  sono secanti si ottiene un fascio di circonferenze secanti (passanti per i punti di intersezione tra  $r$  e  $\mathcal{C}$ );
- se  $r$  e  $\mathcal{C}$  sono tangenti si ottiene un fascio di circonferenze tangenti nel punto di tangenza tra  $r$  e  $\mathcal{C}$  ( $r$  è la tangente comune);
- se  $r$  e  $\mathcal{C}$  non hanno punti in comune si ottiene un fascio di circonferenze che non intersecano né  $r$  né  $\mathcal{C}$  e il cui centro appartiene alla retta passante per il centro  $C$  di  $\mathcal{C}$  e perpendicolare alla retta  $r$ .

## Problemi svolti

1) Come si può scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze passanti per A( 0; 4) e B( 0; 0)?

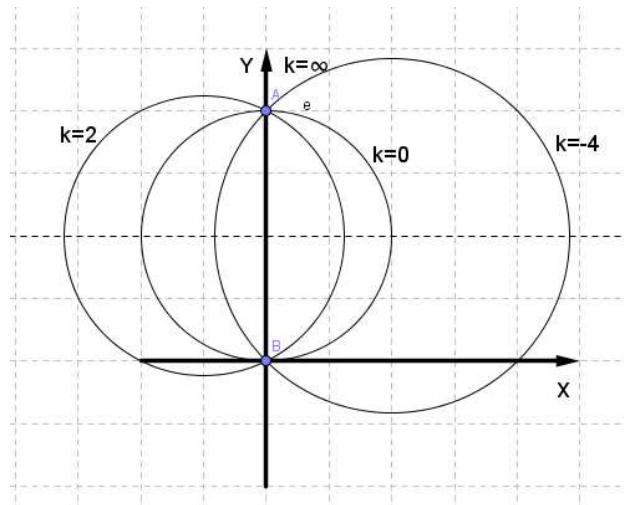
Possiamo combinare una circonferenza per A e B , per esempio quella di diametro AB:

$$\mathcal{C}: x^2 + (y - 2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

con la retta per A e B che in questo caso è l'asse y cioè la retta di equazione  $x = 0$ .

In conclusione una possibile equazione del fascio risulta

$$F: x^2 + y^2 - 4y + kx = 0$$



### Osservazioni

Il centro della circonferenza del fascio è  $C\left(-\frac{k}{2}; 2\right)$  cioè appartiene all'asse di AB ( $y = 2$ ).

**Nota:** potevamo risolvere questo problema anche considerando l'equazione generica di una circonferenza  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  e imponendo il passaggio per A e B

$$\begin{cases} 16 + 4b + c = 0 \rightarrow b = -4 \\ c = 0 \end{cases}$$

L'equazione del fascio sarà:  $F_C : x^2 + y^2 + ax - 4y = 0$  dove il parametro è  $a$  ed è praticamente uguale a quella che avevamo ricavato precedentemente.

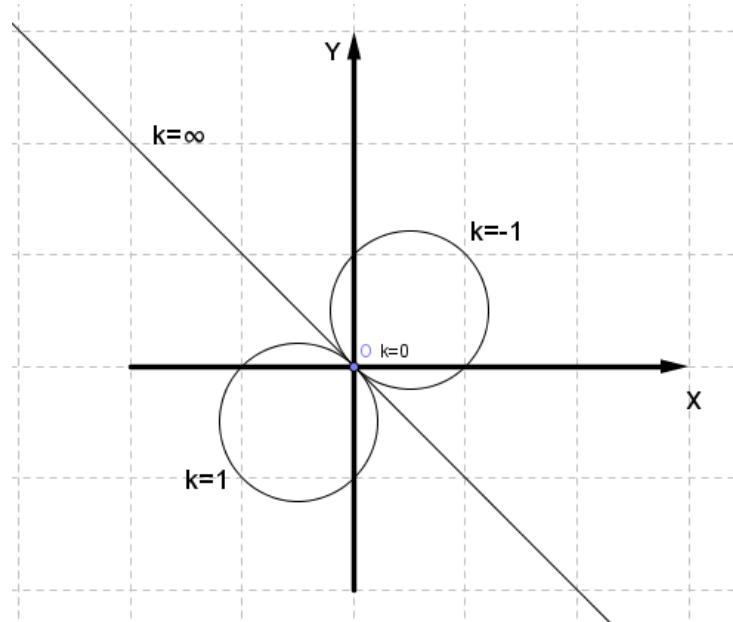
2) Come si può scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze tangenti in  $T(0; 0)$  alla retta  $t : y = -x$ ?

Possiamo combinare l'equazione di una circonferenza tangente in  $T$  alla retta  $t$  con l'equazione di  $t$ .

Per semplificare i calcoli possiamo scegliere come circonferenza tangente la circonferenza (degenera) di raggio nullo e centro  $T(0; 0) \rightarrow x^2 + y^2 = 0$

Abbiamo quindi

$$x^2 + y^2 + k(x + y) = 0$$



3) Come si può scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze aventi centro  $C(1;2)$ ?

In questo caso possiamo semplicemente usare l'equazione

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

dove  $r$  sarà il parametro.

oppure considerare l'equazione generale della circonferenza  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  e porre

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 & \rightarrow a = -2 \\ -\frac{b}{2} = 2 & \rightarrow b = -4 \end{cases}$$

da cui abbiamo che l'equazione del fascio risulta

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - c = 0$$

Calcoliamo il raggio

$$r = \sqrt{1 + 4 - c} = \sqrt{5 - c}$$

Avremo circonferenze reali quando

$$5 - c \geq 0 \rightarrow c \leq 5$$

## ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

- 1)** a) Determina l'equazione della circonferenza **C** avente centro  $C(3,-1)$  e tangente alla retta  $t$ :  $3x+y+2=0$ . Disegnala e determina le coordinate del punto  $T$  di tangenza.

$$[x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0; T(0;-2)]$$

- b) Nel fascio di rette  $F: y = -\frac{1}{3}x + k$  determina per quali valori di  $k$  le rette intersecano la circonferenza **C**.

$$[-\frac{10}{3} \leq k \leq \frac{10}{3}]$$

- 2)** a) Determina l'equazione della circonferenza **C** tangente in  $T(0,1)$  alla retta  $t$ :  $y = -x + 1$  e passante per  $(-4;1)$ . Disegnala ed indica con **C** il suo centro.

$$[x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0]$$

- b) Determina le equazioni delle tangenti alla circonferenza uscenti dal punto  $P(-2,-5)$  e, detti  $T_1$  e  $T_2$  i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero  $TT_1PT_2$ .

$$[y = x - 3; y = -x - 7; A(TT_1PT_2) = 12]$$

- 3)** a) Determina l'equazione della circonferenza **C** passante per i punti  $A(6, -5)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $C(6,1)$ . Disegnala ed indica con **Ω** il suo centro.

$$[x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0]$$

- b) Dopo aver studiato il fascio di rette di equazione

$$F: 2x - y + 9 + k(y + 1) = 0$$

determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio intersecano la circonferenza.

$$[k \leq -\frac{5}{3} \cup k \geq \frac{5}{2}]$$

- 4)** Dato il fascio di circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + k(x + y - 3) = 0$$

- a) studialo e disegna le generatrici;

[fascio circonferenze secanti in  $A(1;2)$  e  $B(2;1)$   $\forall k \in \mathbb{R}$ ]

- b) determina il valore di  $k$  per il quale si ottiene la circonferenza di centro  $(2;2)$  e disegnala;  
 $[k = -2]$

- c) determina per quali valori di  $k$  si ottengono circonferenze di raggio  $\sqrt{5}$  e disegnale.

$$[k_1 = -4 \quad k_2 = 2]$$

# Parabola

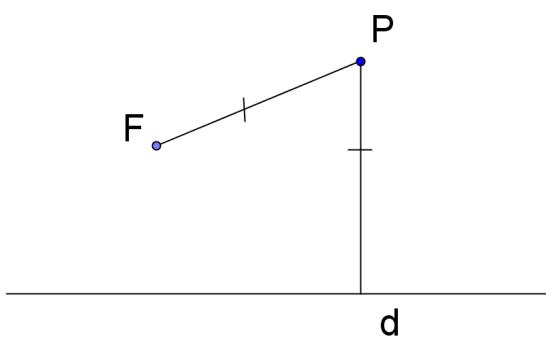


Nella classe seconda abbiamo già studiato il grafico della funzione  $y = ax^2 + bx + c$ , che risulta essere una curva chiamata “parabola”.

La parabola può essere però più in generale definita come “luogo di punti” che godono della seguente proprietà:

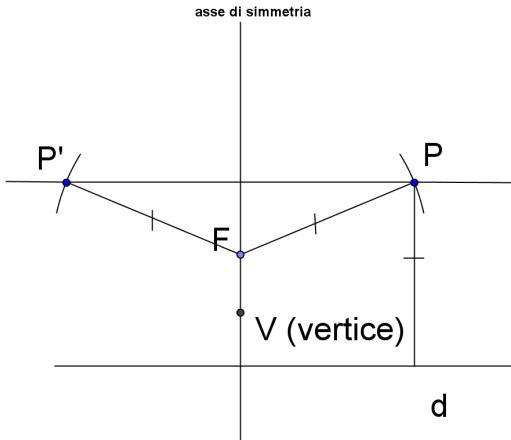
## Definizione

*Dati nel piano una retta  $d$  e un punto  $F \notin d$ , si dice parabola  $\mathcal{P}$  di direttrice  $d$  e fuoco  $F$  il “luogo geometrico” dei punti  $P$  del piano (cioè l’insieme dei punti del piano) **equidistanti** da  $d$  e da  $F$  cioè tali che  $\overline{PF} = d(P, d)$ .*

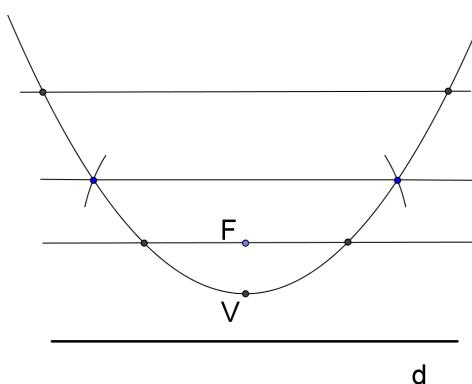


## Osservazioni

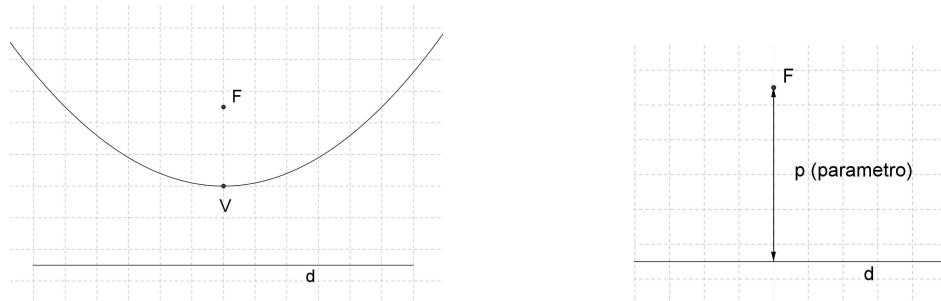
1. Possiamo subito individuare un punto “particolare” della parabola: il punto che si trova sulla perpendicolare a  $d$  per  $F$  viene detto **vertice della parabola** e indicato con  $V$ .



2. Per individuare dei punti di  $\mathcal{P}$  possiamo tracciare una retta  $r$  parallela a  $d$  e puntare il compasso in  $F$  con apertura uguale alla distanza tra  $r$  e  $d$ . Si individuano due punti  $P$ ,  $P'$  simmetrici rispetto alla retta per  $F$  perpendicolare a  $d$  che è quindi l'**asse di simmetria** della parabola.
3. Osserviamo inoltre che non ci sono punti della parabola “al di sotto” del vertice (se  $s$  è la retta per  $V$  parallela a  $d$  i punti di  $\mathcal{P}$  si trovano nel semipiano individuato da  $s$  contenente  $F$ ).
4. Determinando qualche punto di  $\mathcal{P}$  si osserva che la curva risulta aperta e illimitata.



5. Allontanando il fuoco  $F$  dalla direttrice  $d$  la “forma” della parabola risulta più “larga”.



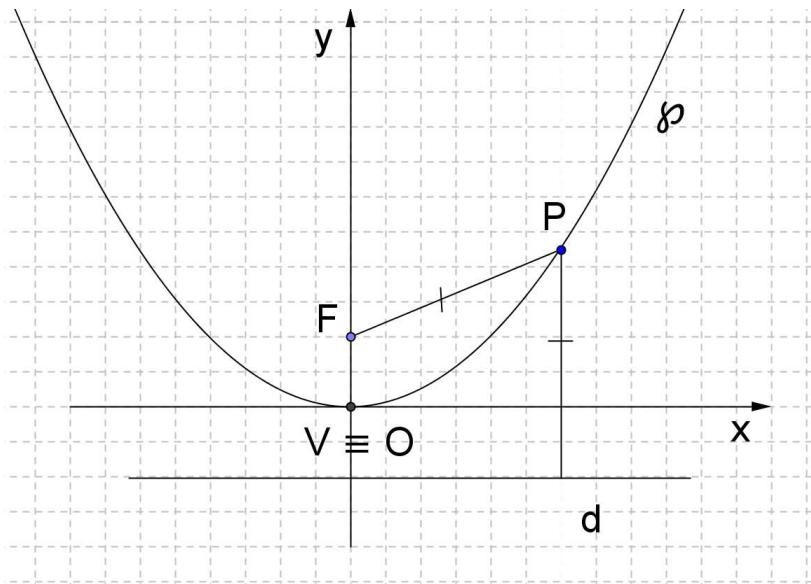
La distanza tra  $F$  e  $d$  viene chiamata **parametro** della parabola ed indicata con  $p$ : maggiore è  $p$  e maggiore è l’apertura della parabola.

## LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

### Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

Cominciamo con il considerare il caso in cui l'asse di simmetria della parabola sia parallelo all'asse y del sistema di riferimento.

- a) Supponiamo inoltre che il vertice coincida con l'origine del sistema di riferimento cioè  $V(0;0)$ .



Consideriamo per esempio  $F(0;2)$   $d : y = -2$  (vedi figura).

Per determinare l'equazione di  $\mathcal{P}$  consideriamo un generico punto  $P(x; y)$  e imponiamo che sia equidistante da  $F$  e da  $d$  :

$$\overline{PF} = d(P, d) \quad (d : y + 2 = 0)$$

Possiamo elevare al quadrato per evitare le radici quadrate e abbiamo quindi:

$$\overline{PF}^2 = (d(P, d))^2$$

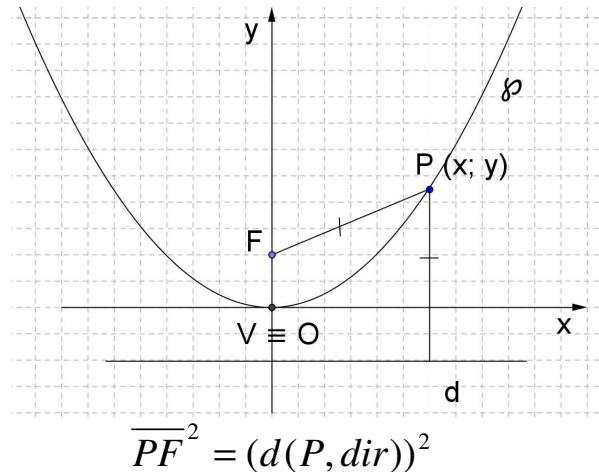
E sviluppando:

$$x^2 + (y - 2)^2 = (y + 2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \Rightarrow x^2 = 8y \Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2$$

Quindi l'equazione di  $\mathcal{P}$  risulta  $y = \frac{1}{8}x^2$ .

- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- La parabola -

In generale, indicando con  $p$  il parametro, avremo  $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$  e  $d : y = -\frac{p}{2}$

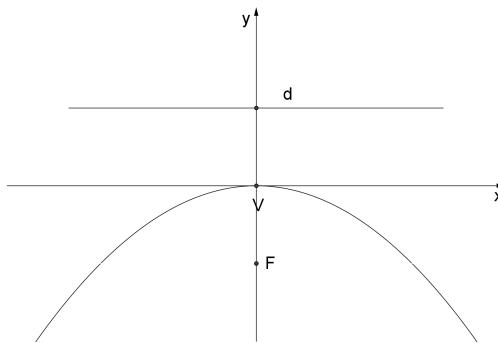


$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Rightarrow x^2 = 2py \Rightarrow y = \frac{1}{2p}x^2$$

Generalmente si pone  $a = \frac{1}{2p}$  e quindi l'equazione della parabola con vertice  $V(0;0)$  e asse di simmetria  $\equiv$  assey risulta:

$$y = ax^2$$

Da notare che se il fuoco si trova sotto alla direttrice, come nella figura seguente, avremo  $y = -\frac{1}{2p}x^2$  e quindi in questo caso si pone  $a = -\frac{1}{2p}$ .



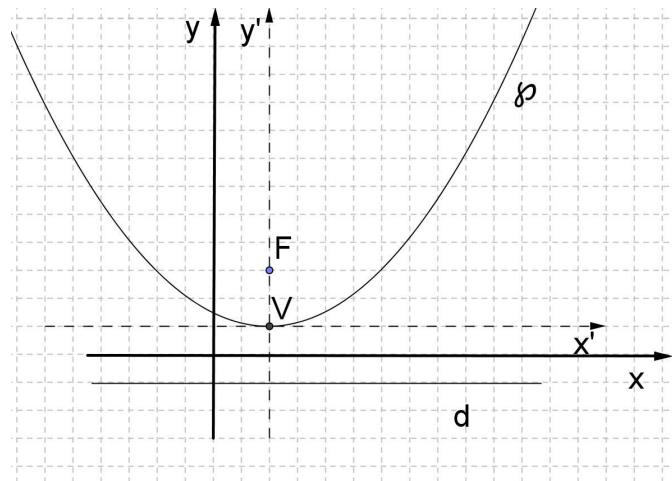
In conclusione l'equazione della parabola di vertice  $V(0;0)$ , asse di simmetria  $\equiv$  assey e parametro  $p$  ( $p > 0$  perché rappresenta la distanza tra fuoco e direttrice) risulta

$$y = ax^2$$

- $a = \frac{1}{2p}$  se  $P$  è rivolta verso l'alto ( $a > 0$ )
- $a = -\frac{1}{2p}$  se  $P$  è rivolta verso il basso ( $a < 0$ )

**b) Consideriamo adesso il caso in cui il vertice V non coincide con (0;0).**

Sia per esempio  $V(2;1)$ ,  $p = 4$  e la parabola sia rivolta verso l'alto.



Supponiamo di traslare il sistema di riferimento in modo che il vertice della parabola coincida con la nuova origine.

La relazione tra le coordinate  $(x;y)$  e quelle  $(x';y')$  sarà:  $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Ma nel nuovo sistema di riferimento possiamo scrivere l'equazione di  $\mathcal{P}$ :

$$y' = \frac{1}{8}(x')^2 \quad (a = \frac{1}{2p} = \frac{1}{8})$$

e quindi nel sistema di riferimento  $(O;x;y)$  avremo

$$y - 1 = \frac{1}{8}(x - 2)^2$$

In generale se  $V(x_V; y_V)$  avremo:  $y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$

Se sviluppiamo abbiamo:  $y = ax^2 - 2ax_V x + a \cdot x_V^2 + y_V$  e ponendo (\*)  $\begin{cases} -2ax_V = b \\ ax_V^2 + y_V = c \end{cases}$

Otteniamo

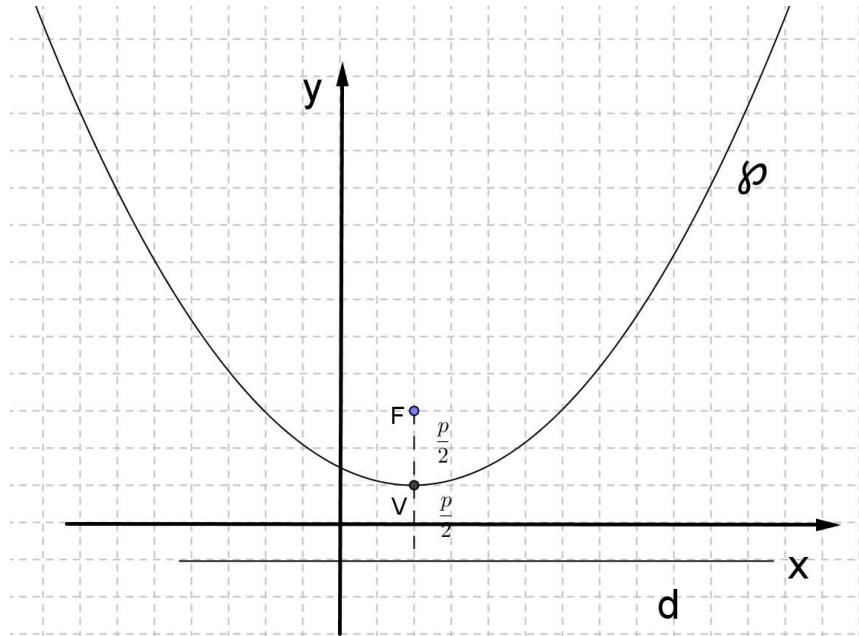
$$y = ax^2 + bx + c$$

equazione della parabola  $\mathcal{P}$  con asse di simmetria parallelo all'asse y

Dalle relazioni (\*) possiamo ricavare che le coordinate del vertice sono

$$\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} \\ y_V = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

Possiamo anche ricavare delle formule per esprimere le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice in funzione di  $a, b, c$ .



Se l'equazione della parabola è  $y = ax^2 + bx + c$  con  $a > 0$  abbiamo (vedi figura):

$$\begin{cases} x_F = x_V = -\frac{b}{2a} \\ y_F = y_V + \frac{p}{2} = y_V + \frac{1}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{-\Delta + 1}{4a} \end{cases}$$

e quindi  $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta + 1}{4a}\right)$

Per l'equazione della direttrice avremo:

$$y = y_V - \frac{p}{2} \Rightarrow y = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} - \frac{1}{4a} \Rightarrow \text{direttrice : } y = \frac{-\Delta - 1}{4a}$$

Se  $a < 0$  abbiamo  $p = -\frac{1}{2a}$  ma il fuoco sta sotto al vertice e quindi dobbiamo sottrarre  $\frac{p}{2}$

mentre la direttrice sopra al vertice e quindi dobbiamo sommare  $\frac{p}{2}$  e quindi si ottengono le stesse formule.

### Disegnare una parabola di equazione assegnata

- 1) Disegnare la parabola  $\mathcal{P}$  di equazione  $y = x^2 + 4x + 3$ , determinare le coordinate del suo fuoco F, l'equazione della direttrice  $d$  e l'equazione del suo asse di simmetria.

Per disegnare una parabola occorre innanzitutto individuare il suo vertice V.

Sappiamo che  $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$

Per determinare l'ordinata del vertice possiamo utilizzare la relazione  $y_V = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$  ma, più semplicemente, possiamo sostituire l'ascissa del vertice nell'equazione della parabola (infatti  $V \in \mathcal{P}$  e quindi le sue coordinate verificano l'equazione di  $\mathcal{P}$ ).

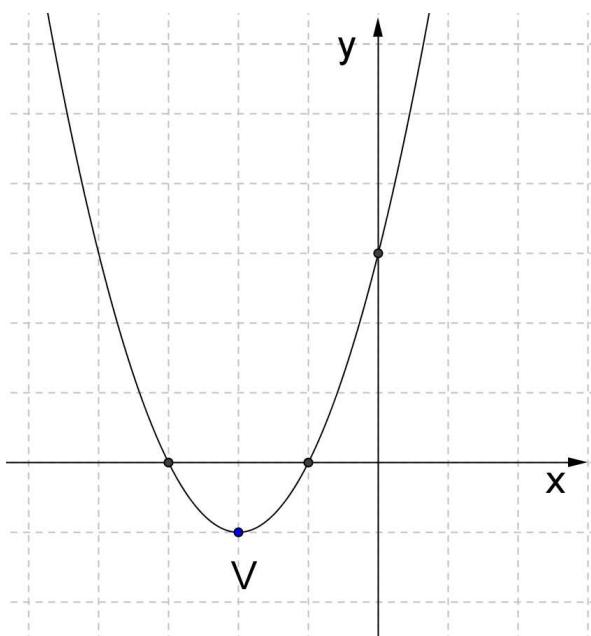
Quindi avremo:  $y_V = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$

Per disegnare la parabola possiamo poi individuare qualche altro punto, per esempio le intersezioni con gli assi del sistema di riferimento:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi avremo:



L'equazione dell'asse di simmetria di  $\mathcal{P}$  è  $x = -2$ .

Come possiamo determinare le coordinate di F e l'equazione della direttrice  $d$ ?

La parabola è rivolta verso l'alto e quindi  $a = \frac{1}{2p}$ .

Possiamo allora ricavare il parametro  $p$ :

$$1 = \frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Ricordando che il vertice dista  $\frac{p}{2}$  sia da F che dalla direttrice  $d$ , avremo

$$F\left(-2; -1 + \frac{1}{4}\right) = \left(-2; -\frac{3}{4}\right)$$

$$d : y = -1 - \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{5}{4}$$

2) Disegnare la parabola di equazione  $y = -x^2 + 2x + 3$ .

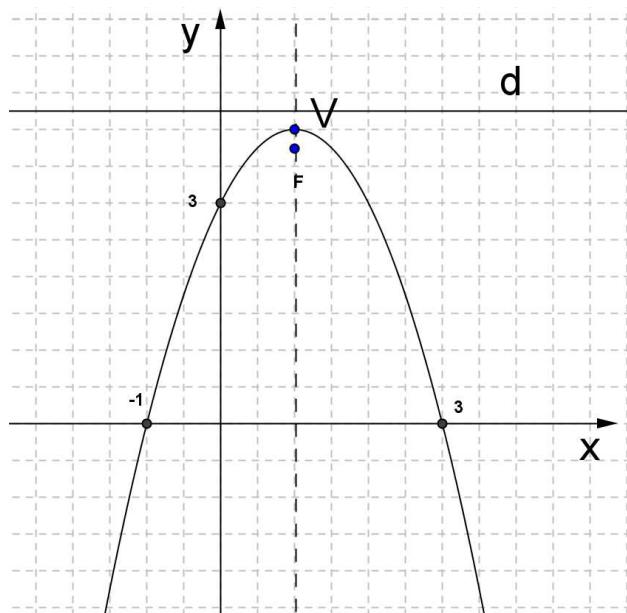
Procedendo come nel precedente problema si ottiene

$$V(1;4), \quad a = -\frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

e quindi:

$$F\left(1; 4 - \frac{1}{4}\right) = \left(1; \frac{15}{4}\right) \quad d : y = 4 + \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{17}{4}$$

asse di simmetria:  $x = 1$



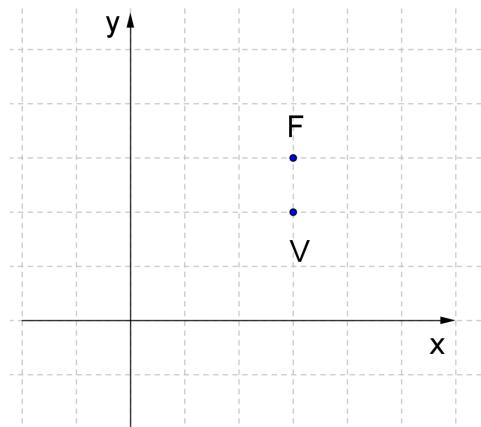
## Problemi

Determinare l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y conoscendo:

- a) *Vertice V e fuoco F*

Possiamo determinare il parametro  $p$  e quindi  $a$  e quindi l'equazione sarà:  
 $y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$ .

Esempio:  $V(3;2)$  e  $F(3;3)$



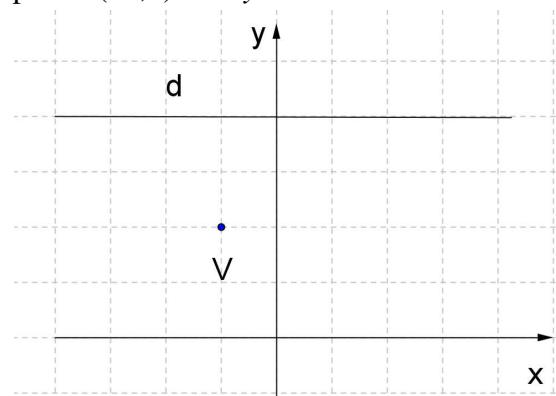
$$\frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2p} = \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{P}: y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3)^2$$

- b) *Vertice V e direttrice d*

Possiamo determinare il parametro  $p$  da cui troviamo  $a$  e poi utilizziamo l'equazione  
 $y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$ .

Esempio:  $V(-1;2)$   $d : y = 4$

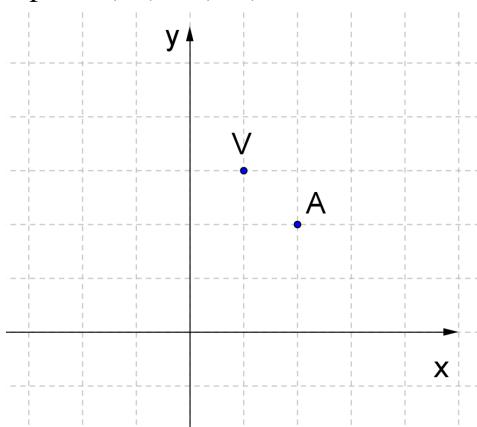


$$\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4 \quad a = -\frac{1}{2p} = -\frac{1}{8}$$

$$\mathcal{P}: y - 2 = -\frac{1}{8}(x + 1)^2$$

- c) *Vertice V e un punto A appartenente alla parabola*

Esempio:  $V(1;3)$   $A(2;2)$



L'equazione di  $\mathcal{P}$  sarà :  
 $y - 3 = a \cdot (x - 1)^2$   
 Sostituendo le coordinate di A:

$$2 - 3 = a \cdot (2 - 1)^2 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{E quindi } \mathcal{P} : y - 3 = -(x - 1)^2$$

- d) *Le coordinate di tre punti A,B,C appartengenti alla parabola*

In questo caso dobbiamo utilizzare l'equazione  $y = ax^2 + bx + c$ .

Esempio:  $A(-1;5)$   $B(2;2)$   $C(3;5)$

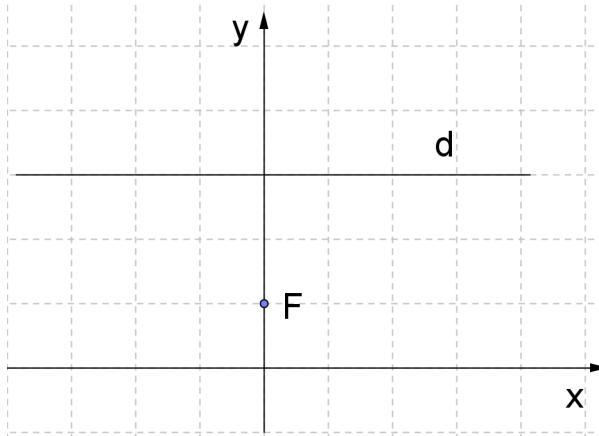
Sostituiamo le coordinate dei punti nell'equazione generale:

$$\begin{aligned} A \rightarrow & \begin{cases} 5 = a - b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \dots \dots \rightarrow \\ 5 = 9a + 3b + c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \\ B \rightarrow & \\ C \rightarrow & \end{aligned}$$

Quindi l'equazione della parabola è  $y = x^2 - 2x + 2$

- e) *Fuoco F e direttrice d*

Esempio:  $F(0;1)$   $d : y = 3$



Possiamo ricavare  $V(0;2)$   $p = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2p} = -\frac{1}{4}$  e quindi l'equazione della parabola sarà:

$$\mathcal{P} : y - 2 = -\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

Oppure possiamo utilizzare la definizione:

$$P(x; y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overline{PF}^2 = (d(P, dir))^2$$

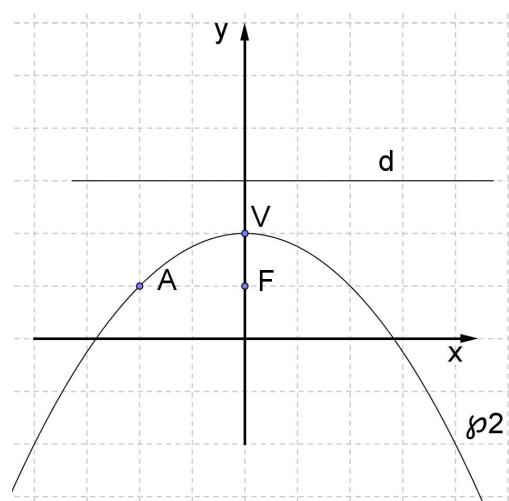
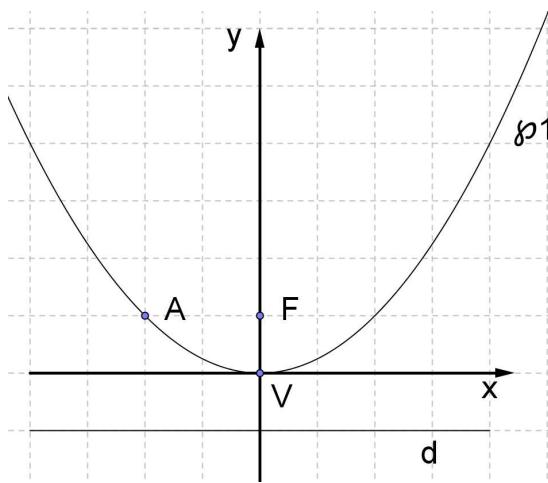
$$x^2 + (y - 1)^2 = (y - 3)^2 \dots \dots \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

f) Il fuoco  $F$  e le coordinate di un punto  $A \in \mathcal{P}$

Esempio:  $F(0;1)$   $A(-2;1)$

$$\begin{aligned} x_F &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = 0 \\ 1 - (b^2 - 4ac) = 1 \end{array} \right. \dots \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c_1 = 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} a_2 = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c_2 = 2 \end{array} \right. \\ y_F &\rightarrow \frac{4a}{1 - (b^2 - 4ac)} = 1 \\ A &\rightarrow 1 = 4a - 2b + c \end{aligned}$$

Anche in questo caso abbiamo ottenuto un sistema di  $2^\circ$  grado e abbiamo trovato due soluzioni distinte cioè due parabole. Puoi risolvere il problema con un procedimento “geometrico”?



g) L’equazione della direttrice  $d$  e le coordinate di due punti appartenenti alla parabola

Esempio:  $d : y = \frac{9}{4}$   $A(-1;1)$   $B(2;-2)$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = a - b + c \\ -2 = 4a + 2b + c \end{array} \right. \dots \\ B &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 = a - b + c \\ -2 = 4a + 2b + c \end{array} \right. \dots \\ d &\rightarrow -\frac{(1+b^2-4ac)}{4a} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Osserviamo che si ottiene un sistema di  $2^\circ$  grado: in questo caso abbiamo due soluzioni distinte  $(a_1, b_1, c_1)$   $(a_2, b_2, c_2)$  cioè due parabole che verificano le condizioni assegnate.

In quali casi si ha una sola parabola oppure nessuna parabola con asse parallelo all’asse  $y$ ? Puoi trovare le parabole con un procedimento “geometrico”?

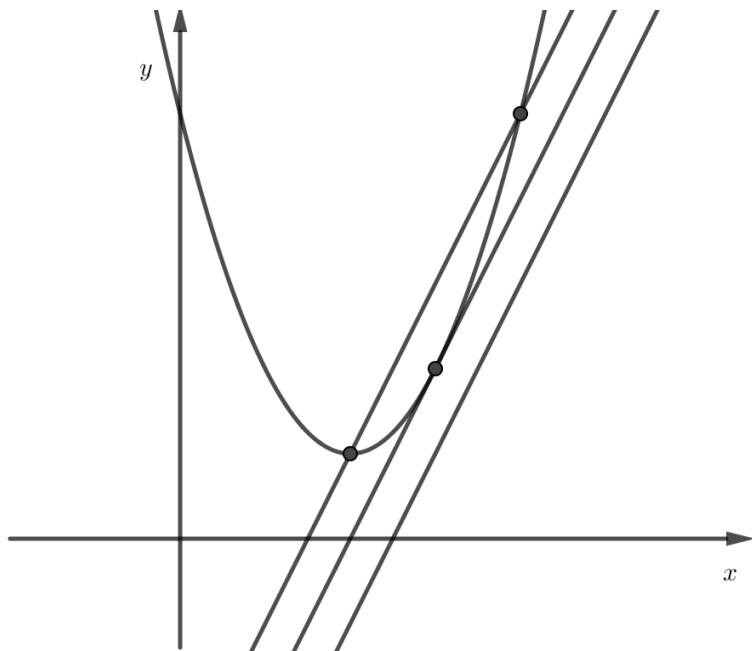
## PARABOLA E RETTA

Per determinare le intersezioni tra una parabola con asse parallelo all'asse  $y$ , quindi di equazione  $y = ax^2 + bx + c$  e una retta  $y = mx + q$ , quindi non parallela all'asse  $y$ , basterà risolvere il sistema formato dalle due equazioni.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Il sistema è di secondo grado e potremo avere tre casi:

- **la retta è secante** cioè ha due intersezioni distinte con la parabola e quindi in questo caso il discriminante dell'equazione risolvente è positivo ( $\Delta > 0$ );
- **la retta è tangente** alla parabola cioè ha due intersezioni coincidenti con la parabola ( $\Delta = 0$ );
- **la retta è esterna** alla parabola cioè non ha nessuna intersezione con la parabola ( $\Delta < 0$ )



## Esempi

Consideriamo la parabola  $y = x^2 - 4x + 5$ .

- a) Consideriamo la retta  $y = 2x - 3$  e vediamo come risulta rispetto alla parabola.

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2x - 3 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Quindi la retta è secante e i due punti di intersezione sono  $(2;1)$ ,  $(4;5)$

- b) Consideriamo la retta  $y = 2x - 4$  e vediamo come risulta rispetto alla parabola.

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2x - 4 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Quindi la retta è tangente e il punto di tangenza è  $(3;2)$ .

- c) Consideriamo la retta  $y = 2x - 5$  e vediamo come risulta rispetto alla parabola.

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2x - 5 \rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

In questo caso la retta è esterna e non ci sono intersezioni tra la retta e la parabola.

### NOTA

Se invece la retta è parallela all'asse  $y$  cioè ha equazione  $x = k$  avremo **sempre un solo punto di intersezione** con la parabola.

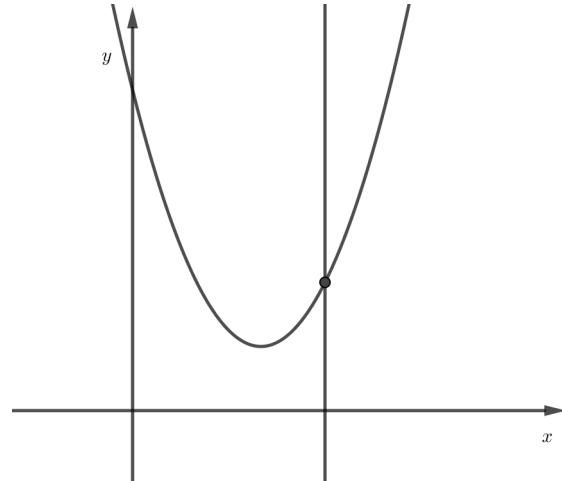
## Esempio

Consideriamo sempre la parabola  $y = x^2 - 4x + 5$ .

Consideriamo per esempio la retta  $x = 3$

Avremo

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$



### Rette tangenti ad una parabola

#### Esempio 1

Dato un punto  $P$  appartenente ad una parabola  $\mathcal{P}$ , con asse parallelo all'asse  $y$ , come si determina la retta per  $P$  tangente alla parabola?

Riprendiamo per esempio la parabola di equazione  $y = x^2 - 4x + 5$  e consideriamo il suo punto  $P(3;2)$ .

Consideriamo l'equazione di una generica retta passante per  $P$ :

$$y - 2 = m(x - 3) \rightarrow y = 2 + m(x - 3)$$

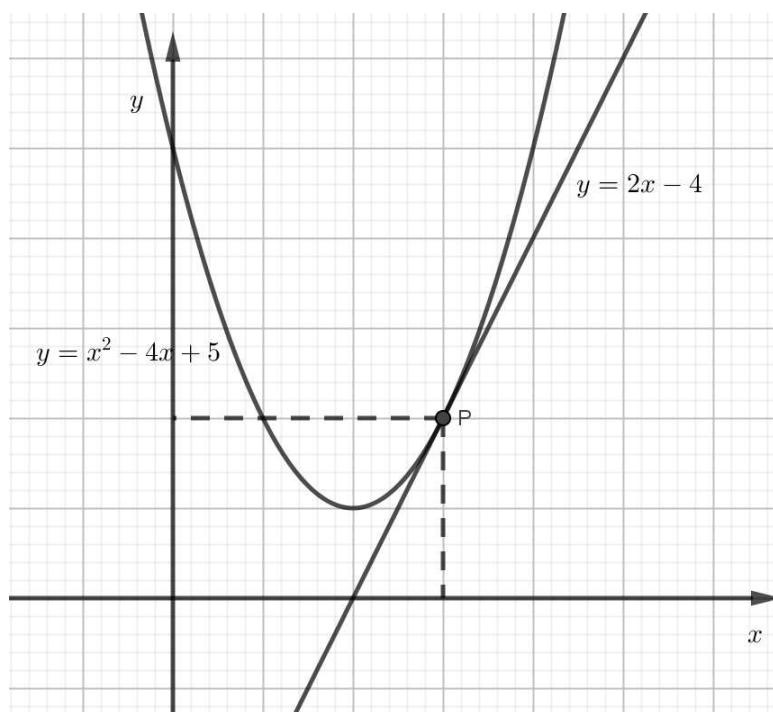
Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2 + m(x - 3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 + m(x - 3) \rightarrow x^2 - (4 + m)x + 3 + 3m = 0 \\ y = \dots \end{cases}$$

Per determinare l'inclinazione della retta tangente basta **imporre che l'equazione di secondo grado  $x^2 - (4 + m)x + 3 + 3m = 0$  abbia discriminante uguale a zero** (si dice anche imporre la **"condizione di tangenza"**) cioè:

$$(4 + m)^2 - 4(3 + 3m) = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \rightarrow (m - 2)^2 = 0 \rightarrow m = 2$$

Quindi l'equazione della tangente in  $P$  alla parabola sarà:  $y = 2(x - 3) + 2 \rightarrow y = 2x - 4$



### Esempio 2

Consideriamo :  $\mathcal{P} : y = \frac{1}{4}x^2 - x$  e il punto esterno alla parabola  $P(0; -4)$  : come si determinano le rette per  $P$  tangenti alla parabola?

Consideriamo l'equazione di una retta generica passante per  $P$

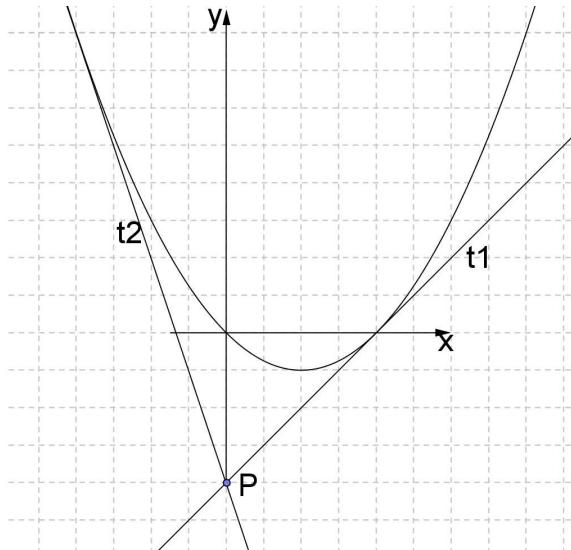
$$y + 4 = mx \rightarrow y = mx - 4$$

Per determinare le tangenti dobbiamo impostare il sistema e imporre la “condizione di tangenza”:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x \\ y = mx - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x = mx - 4 \\ \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4(1+m)x + 16 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

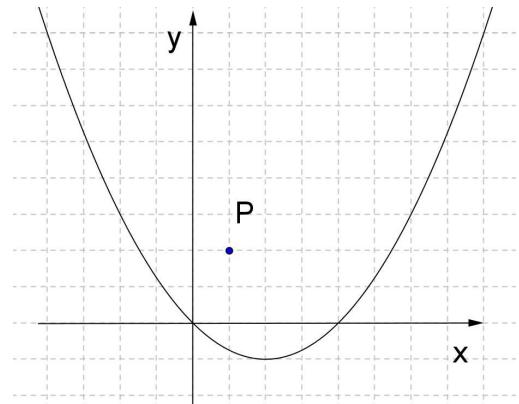
$$\frac{\Delta}{4} = 4(1+m)^2 - 16 = 0 \Rightarrow m_1 = 1 \rightarrow t_1 : y = x - 4$$

$$m_2 = -3 \rightarrow t_2 : y = -3x - 4$$



### Osservazione

Se  $P$  è “interno” alla parabola non ci sono rette tangenti.



### Esempio 3

Come si determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y sapendo che deve avere in un punto T una tangente assegnata  $t$  e passare da un dato punto A?

Consideriamo per esempio  $t : y = 3x - 3 \quad T(1;0) \quad A(2;2)$

Scriviamo l'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y

$$y = ax^2 + bx + c$$

Impostiamo il sistema formato dall'equazione della retta e della parabola e imponiamo la condizione di tangenza:

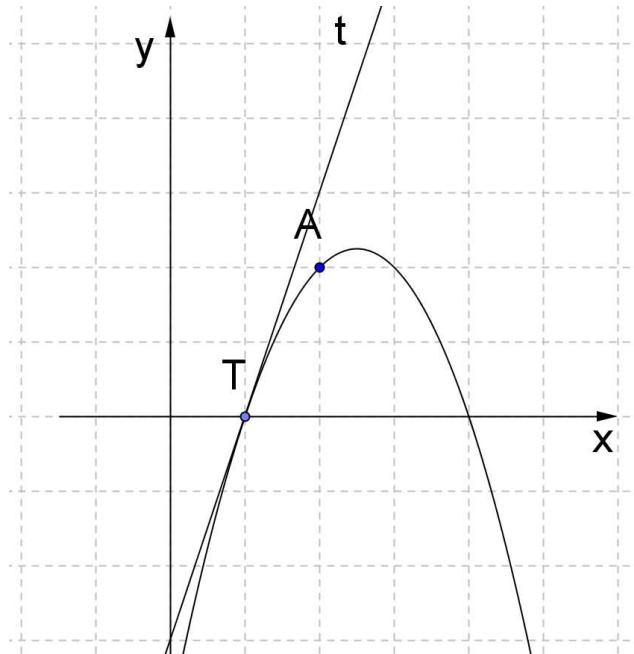
$$\begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c = 3x - 3 \\ \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 + (b-3)x + c + 3 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Delta = (b-3)^2 - 4a(c+3) = 0 \quad (\text{condizione di tangenza})$$

Quindi avremo:

$T \rightarrow$	$0 = a + b + c$	$a = -1$
$A \rightarrow$	$2 = 4a + 2b + c$	$b = 5$
$\text{cond.tan g}$	$(b-3)^2 - 4a(c+3) = 0$	$c = -4$

$$\mathcal{P} : y = -x^2 + 5x - 4$$

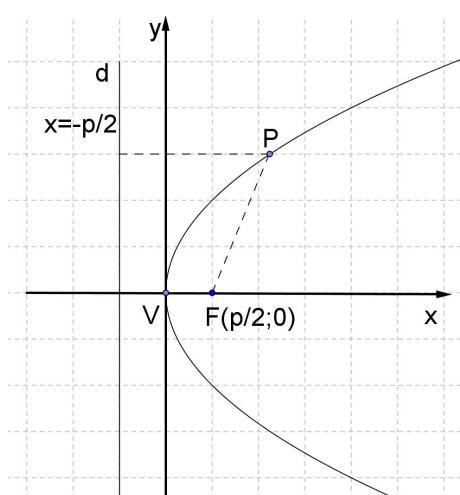


## Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x

Consideriamo adesso il caso in cui l'asse di simmetria della parabola sia parallelo all'asse x del sistema di riferimento.

a) Se il vertice  $V \equiv (0;0)$  avremo:

$$\overline{PF}^2 = (d(P, dir))^2$$



$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Sviluppando otteniamo l'equazione della parabola

$$\mathcal{P}: x = \frac{1}{2p} y^2 \text{ e ponendo } a = \frac{1}{2p}$$

$$\mathcal{P}: x = a \cdot y^2$$

Analogamente se  $\mathcal{P}$  è rivolta verso sinistra, cioè  $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$  e  $d : x = -\frac{p}{2}$  otteniamo  $x = -\frac{1}{2p} y^2$ .

Quindi, in generale, l'equazione di una parabola  $\mathcal{P}$  con  $V(0;0)$ , asse di simmetria  $\equiv$  asse x e parametro  $p$  risulta

$$x = a \cdot y^2$$

dove

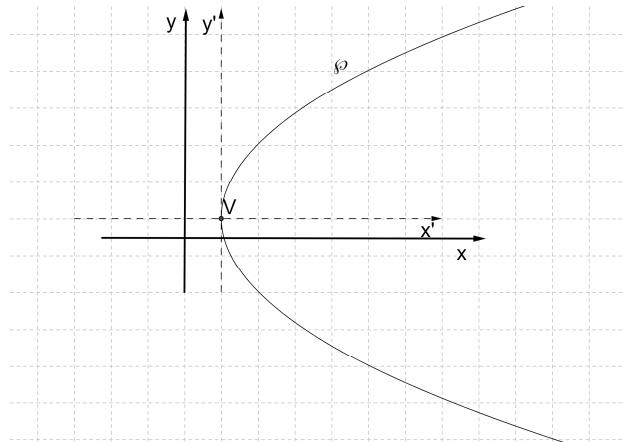
- $a = \frac{1}{2p}$  se  $\mathcal{P}$  è rivolta verso destra
- $a = -\frac{1}{2p}$  se  $\mathcal{P}$  è rivolta verso sinistra

- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- La parabola -

b) **Se il vertice**  $V(x_V; y_V)$  **trasliamo il sistema di riferimento.**

Poiché le equazioni le collegano le vecchie e le nuove coordinate sono  

$$\begin{cases} x' = x - x_V \\ y' = y - y_V \end{cases}$$
  
 avremo quindi       $\mathcal{P}: x' = a \cdot (y')^2$  cioè  $x - x_V = a \cdot (y - y_V)^2$



Sviluppando otteniamo :  $x = ay^2 - 2ay_V y + a \cdot y_V^2 + x_V$

Ponendo (\*)  $\begin{cases} -2ay_V = b \\ a \cdot y_V^2 + x_V = c \end{cases}$  abbiamo

$$\mathcal{P} : x = ay^2 + by + c$$

il cui vertice V ha coordinate  $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$  che si ricavano da (\*);

il cui fuoco F ha coordinate  $F\left(\frac{-\Delta+1}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$  (basta svolgere considerazioni analoghe a quelle viste per la parabola con asse parallelo all'asse y);

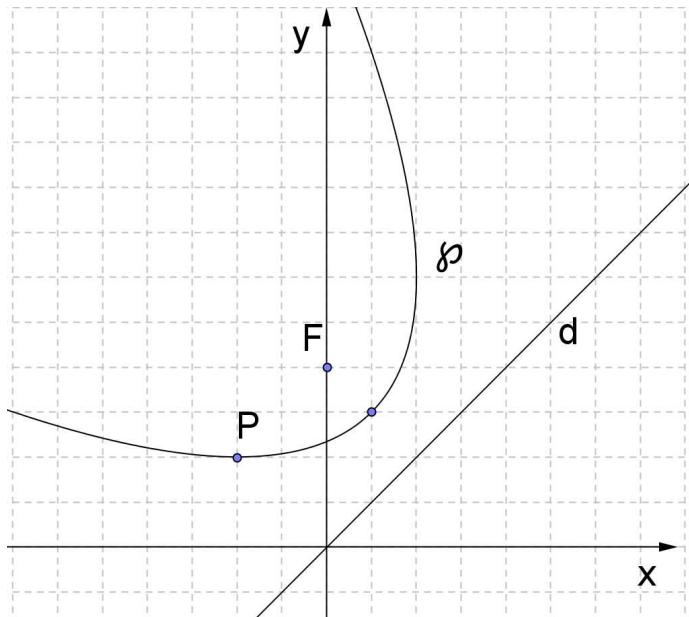
la cui direttrice ha equazione  $d : x = \frac{-\Delta-1}{4a}$

In pratica sia nell'equazione di  $\mathcal{P}$  che nelle coordinate di V, F e nell'equazione della direttrice x e y sono scambiati rispetto alla parabola con asse parallelo all'asse y.

I problemi relativi a parabole con asse parallelo all'asse x sono del tutto analoghi a quelli considerati per parabole con asse parallelo all'asse y.

## Parabola con asse di simmetria non parallelo agli assi coordinati

Facciamo solo un esempio: determiniamo l'equazione della parabola avente fuoco  $F(0;4)$  e direttrice  $d : y = x$  (quindi  $x - y = 0$ ).



Applichiamo la definizione:

$$\overline{PF}^2 = (d(P, dir))^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y - 4)^2 = \frac{(x - y)^2}{2}$$

Sviluppando otteniamo:

$$\mathcal{P} : x^2 + y^2 + 2xy - 16y + 32 = 0$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto un'equazione di  $2^\circ$  grado in  $x$  e  $y$  in cui compare, a differenza di quanto accade per la circonferenza, il termine in  $xy$ .

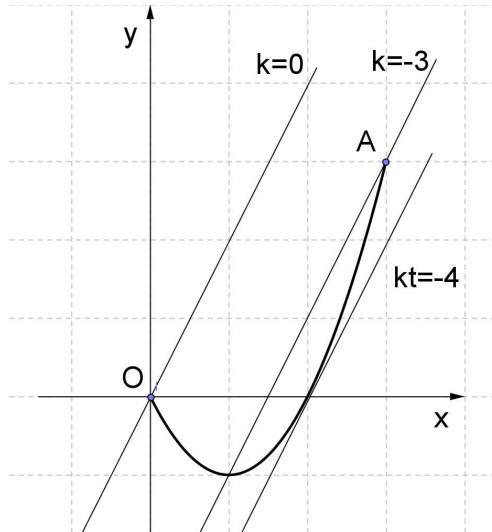
**Nota:** il nostro studio si limiterà alle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse  $y$  o all'asse  $x$ .

## PARABOLA E FASCIO DI RETTE

- 1) Consideriamo il seguente sistema contenente una “limitazione”:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x + k \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Risolverlo significa studiare le intersezioni rea l’arco di parabola in figura e il fascio di rette  $y = 2x + k$ .



Osserviamo che occorre determinare i valori di  $k$  corrispondenti alle rette del fascio passanti per gli estremi dell’arco di parabola  $\hat{OA}$  e il valore di  $k$  corrispondente alla retta tangente.

$$k_O \quad 0 = 0 + k \rightarrow k_O = 0$$

$$k_A \quad 3 = 6 + k \rightarrow k_A = -3$$

$$k_t \quad \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x + k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2x + k \\ ..... \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - k = 0 \\ ..... \end{cases}$$

La condizione di tangenza risulta:  $\frac{\Delta}{4} = 4 + k = 0 \rightarrow k_t = -4$

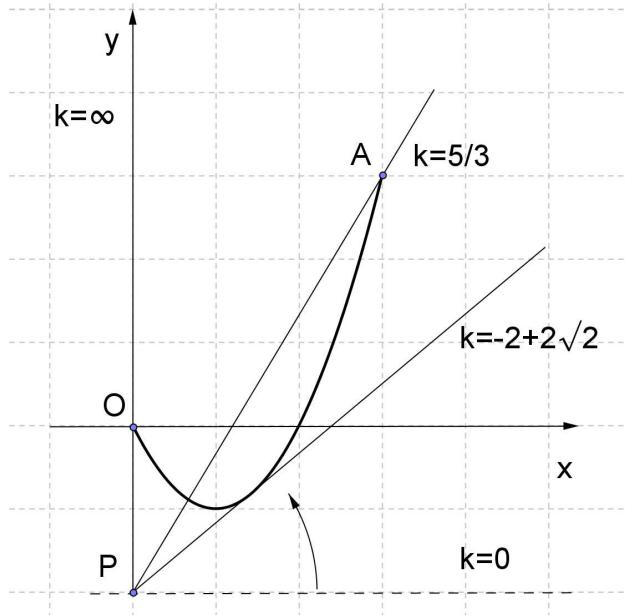
Osservando il disegno abbiamo quindi:

1 soluzione (intersezione)  $-3 < k \leq 0$

2 soluzioni (intersezioni)  $-4 \leq k \leq -3$

- 2) Consideriamo adesso l'intersezione dello stesso arco di parabola con un fascio di rette passanti per un punto:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ kx - y - 2 = 0 \quad \text{fascio di rette passanti per } P(0;-2) \text{ con rette generatrici} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} k = 0 \rightarrow y = -2 \\ k = \infty \rightarrow x = 0 \end{array}$$



In questo caso il valore di  $k$  corrispondente alla retta del fascio per  $(0;0)$  è  $k = \infty$

$$k_A \quad 3k - 3 - 2 = 0 \rightarrow k_A = \frac{5}{3}$$

$$k_t \quad \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ kx - 2 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = kx - 2 \\ ..... \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - (2+k)x + 2 = 0 \\ ..... \end{cases}$$

La condizione di tangenza è:  $\Delta = (2+k)^2 - 8 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$

Osservando come aumentano i valori di  $k$ , si deduce che il valore che ci interessa è quello positivo cioè  $k_t = -2 + 2\sqrt{2}$ .

In conclusione abbiamo:

$$1 \text{ soluzione (intersezione)} \quad k > \frac{5}{3}$$

$$2 \text{ soluzioni (intersezioni)} \quad -2 + 2\sqrt{2} \leq k \leq \frac{5}{3}$$

## Problemi di “massimo e minimo”

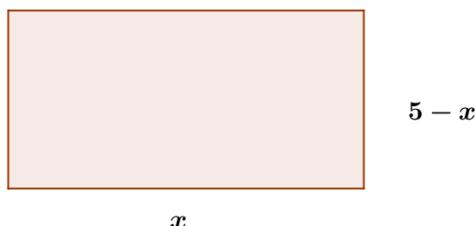
### Esempio 1

Vogliamo costruire un recinto rettangolare ed abbiamo un filo lungo 10 metri. Qual è la massima area che possiamo recintare?

Supponiamo di indicare con  $x$  una dimensione del nostro recinto rettangolare ABCD : avremo chiaramente che

$$0 \leq x \leq 5$$

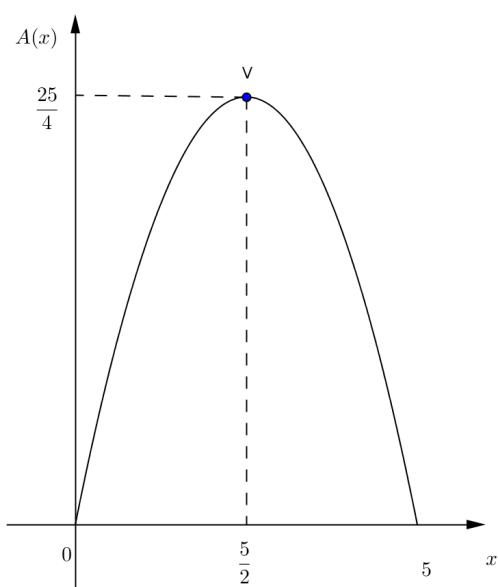
L'altra dimensione sarà quindi  $5 - x$  (il semiperimetro è 5 metri).



Quindi l'area del recinto sarà:  $A(x) = x(5 - x)$

Sviluppando abbiamo  $A(x) = 5x - x^2$

cioè un'espressione di secondo grado e quindi il grafico dell'area sarà l'arco di parabola in figura:

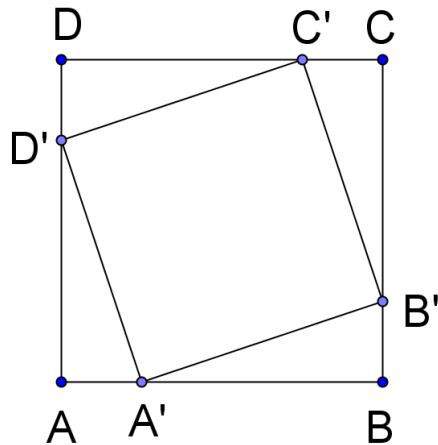


E' quindi chiaro che l'area massima si avrà prendendo  $x = \frac{5}{2}$  e risulterà  $\frac{25}{4}$ .

Osserviamo che per  $x = \frac{5}{2}$  l'altra dimensione del rettangolo risulta  $\overline{BC} = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$  e quindi il recinto di area massima è un quadrato.

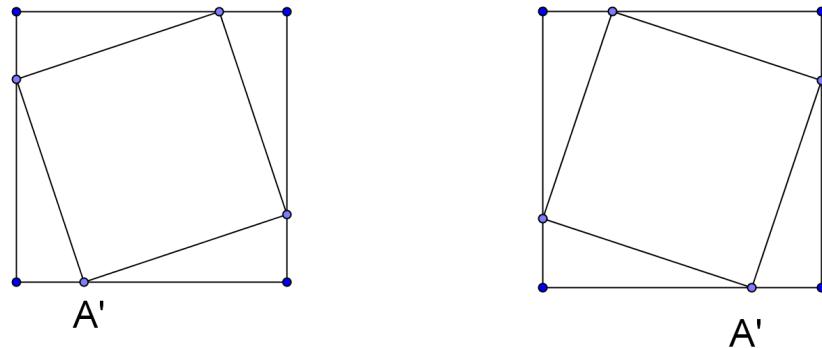
## Esempio 2

Dato il quadrato ABCD di lato  $l$  considera il quadrato A'B'C'D' inscritto in ABCD costruito prendendo  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$  (vedi figura).



*Quali valori può assumere l'area di A'B'C'D'?*

E' chiaro che l'area di A'B'C'D' sarà al massimo  $l^2$  (= area di ABCD). Inoltre si osserva che per ogni valore possibile dell'area ci sono sempre due quadrati A'B'C'D' che hanno quell'area (vedi figura).



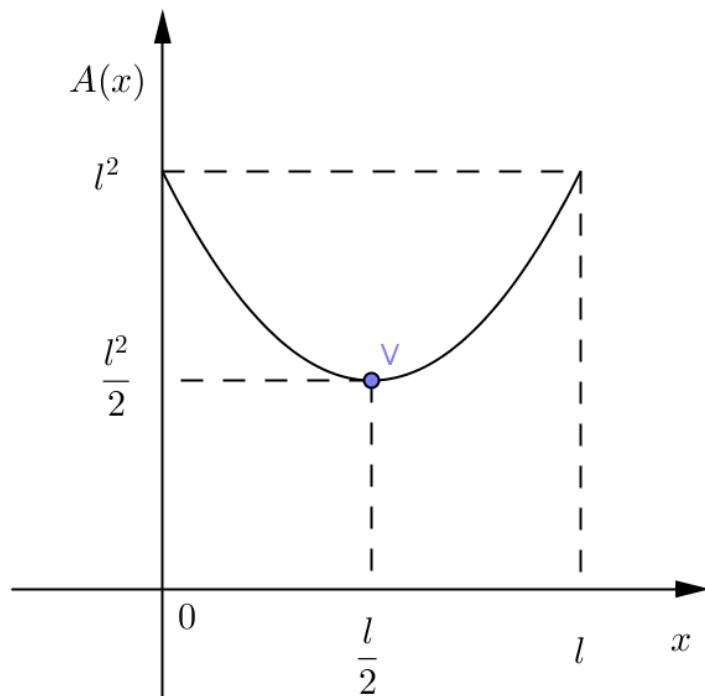
Ma cerchiamo di calcolare l'area del quadrato A'B'C'D'.

Possiamo porre  $x = \overline{AA'}$  con la limitazione  $0 \leq x \leq l$ .

L'area di A'B'C'D' allora risulta (applicando il teorema di Pitagora al triangolo A'BB'):

$$A(x) = \overline{A'B'}^2 = x^2 + (l-x)^2 = 2x^2 - 2lx + l^2$$

Ma nel piano cartesiano il grafico di  $A(x)$  è una parabola ed ha vertice  $V\left(\frac{l}{2}; \frac{l^2}{2}\right)$



Quindi osservando il grafico dell'area abbiamo che :

- l'area minima risulta  $\frac{l^2}{2}$  (cioè metà dell'area del quadrato ABCD) e si ha quando  $x = \frac{l}{2}$   
 cioè quando A' coincide con il punto medio del lato AB;
- l'area massima è  $l^2$  (area del quadrato ABCD) e si ha quando  $x = 0, x = l$  cioè quando A' coincide con A o con B.

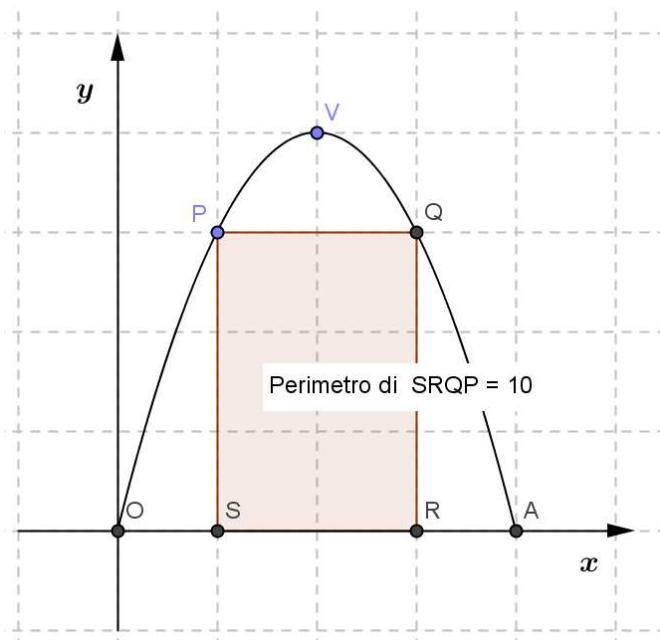
Inoltre è anche chiaro che per ogni valore  $k$  dell'area compresa tra  $\frac{l^2}{2}$  e  $l^2$  ci sono sempre due diversi quadrati inscritti con quel valore dell'area.

### Esempio 3

Considera la parabola di equazione  $y = 4x - x^2$  con  $0 \leq x \leq 4$  e un punto  $P \in \overset{\curvearrowleft}{OV}$  dove V è il vertice della parabola.

Traccia il rettangolo PQRS inscritto nella parte di piano delimitata dall'arco di parabola a e dall'asse x : come varia il perimetro ?

Puoi provare a disegnare l'arco di parabola con Geogebra e ad inscrivere il rettangolo (vedi scheda relativa): variando la posizione di P possiamo farci un'idea di come varia il perimetro di PQRS....



Proviamo ad esprimere il perimetro di PQRS in funzione dell'ascissa x del punto P.

Innanzitutto abbiamo che  $P(x; 4x - x^2)$  con  $0 \leq x \leq 2$  e quindi .

Per la simmetria della parabola avremo poi che  $\overline{PQ} = 4 - 2x$ .

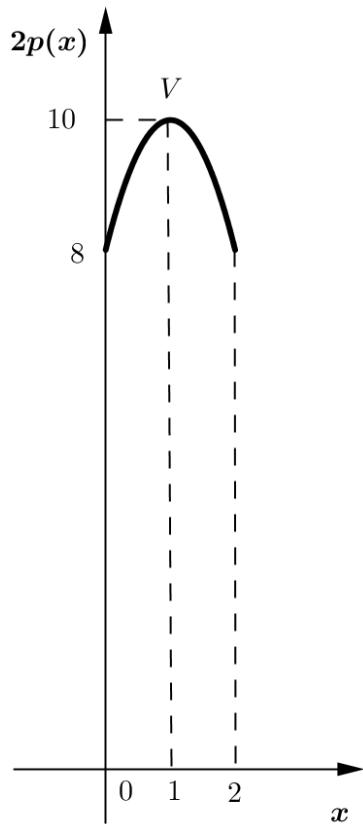
In conclusione:

$$2p(x) = 2(4x - x^2) + 2(4 - 2x) \rightarrow 2p(x) = -2x^2 + 4x + 8$$

Quindi il perimetro del rettangolo è espresso da un'espressione di secondo grado ed il suo grafico sarà una parabola.

- La parabola -

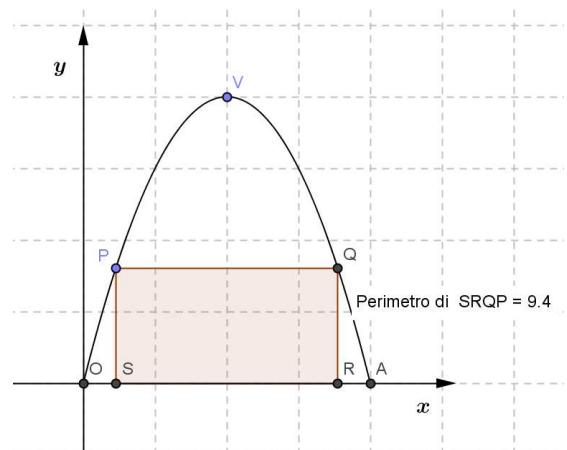
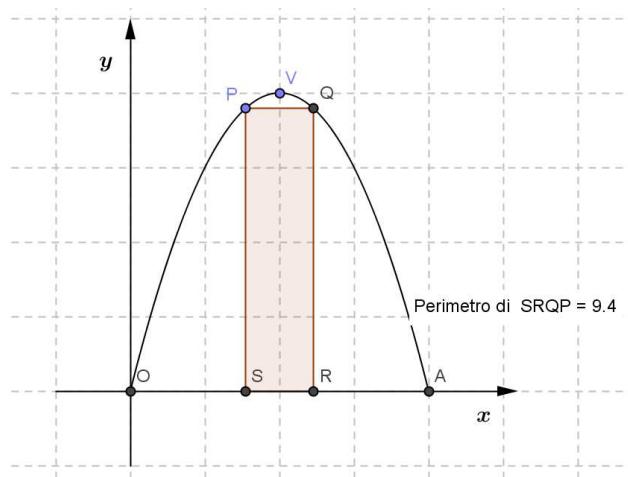
Disegniamo quindi la parabola  $2p(x) = -2x^2 + 4x + 8$  per  $0 \leq x \leq 2$ : il vertice sarà  $V(1;10)$  e avremo per  $x=0 \rightarrow 2p=8$  e per  $x=2 \rightarrow 2p=8$ .



Quindi :

- il perimetro minimo sarà 8 quando  $x=0$  cioè quando  $P \equiv O$  e quando  $x=2$  cioè quando  $P \equiv V$  ;
- il perimetro massimo sarà 10 e si avrà per  $x=1$  cioè quando  $P(1;3)$ .

E' anche chiaro che fissando un valore del perimetro compreso tra 8 e 10 si avranno sempre due diversi rettangoli con quel perimetro.



## ESERCIZI

**I) Disegna le seguenti parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y e determinane fuoco e direttrice:**

- 1)  $y = x^2 - 2x$   $[V(1;-1) \quad F\left(1; -\frac{3}{4}\right) \quad d : y = -\frac{5}{4}]$
- 2)  $y = x^2 - 4x + 4$   $[V(2;0) \quad F\left(2; \frac{1}{4}\right) \quad d : y = -\frac{1}{4}]$
- 3)  $y = 1 - x^2$   $[V(0;1) \quad F\left(0; \frac{3}{4}\right) \quad d : y = \frac{5}{4}]$
- 4)  $y = x - 2x^2$   $[V\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right) \quad F\left(\frac{1}{4}; 0\right) \quad d : y = \frac{1}{4}]$
- 5)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$   $[V\left(3; -\frac{9}{2}\right) \quad F(3;-4) \quad d : y = -5]$
- 6)  $y = 4 - x^2$   $[V(0;4) \quad F\left(0; \frac{15}{4}\right) \quad d : y = \frac{17}{4}]$
- 7)  $y = x^2 + 1$   $[V(0;1) \quad F\left(0; \frac{5}{4}\right) \quad d : y = \frac{3}{4}]$
- 8)  $y = \frac{1}{4}x^2 - x$   $[V(2;-1) \quad F(2;0) \quad d : y = -2]$
- 9)  $y = -x^2 - 1$   $[V(0;-1) \quad F\left(0; -\frac{5}{4}\right) \quad d : y = -\frac{3}{4}]$
- 10)  $y = 2x^2 - 4$   $[V(0;-4) \quad F\left(0; -\frac{31}{8}\right) \quad d : y = -\frac{33}{8}]$

**II) Determina l'equazione della parabola avente:**

- 11)  $F(0;0)$   $d : y = -2$   $[y = \frac{1}{4}x^2 - 1]$
- 12)  $F(2;2)$   $d : y = 3$   $[y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}]$
- 13)  $F(0;1)$   $V(0;-1)$   $[y = \frac{1}{8}x^2 - 1]$
- 14)  $V(3;0)$   $d : y = -3$   $[y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}]$
- 15) Asse parallelo asse y ,  $V(1;1)$  , passante per  $P(3;2)$   $[y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}]$
- 16) Asse parallelo asse y , passante per  $A(1;0)$   $B(3;0)$   $C(4;3)$   $[y = x^2 - 4x + 3]$
- 17) Asse parallelo asse y, passante per  $A\left(-1; \frac{3}{2}\right)$   $B(0;-1)$   $C\left(1; -\frac{5}{2}\right)$   $[y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1]$
- 18) Asse di simmetria parallelo asse y,  $F(0;0)$  , passante per  $A(2;0)$   
 $[y = \frac{1}{4}x^2 - 1 ; y = -\frac{1}{4}x^2 + 1]$
- 19) Diretrice  $d : y = 0$ , passante per  $A(0;2)$  e  $B(2;1)$   
 $[y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2 ; y = \frac{5}{4}x^2 - 3x + 2]$
- 20) Diretrice  $d : y = \frac{3}{4}$  ,passante per  $A(0;2)$  e  $B(3;5)$   
 $[y = x^2 - 2x + 2 ; y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + 2]$
- 21) Diretrice  $d : y = -\frac{5}{4}$  , passante per  $A(0;0)$  e  $B(3;3)$   
 $[y = x^2 - 2x ; y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{3}x]$
- 22) Diretrice  $d : y = -1$ , passante per  $A(1;0)$  e  $B(3;1)$   
 $[y = \frac{1}{4}(x-1)^2 ; y = \frac{5}{4}\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}]$
- 23) Diretrice  $d : y = 0$  ,passante per  $A(-1;1)$  e  $B(1;1)$   $[y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}]$
- 24) Asse di simmetria parallelo asse y,  $F(0;1)$  ,passante per  $P(0;2)$   $[y = -\frac{1}{4}x^2 + 2]$

**III) Disegna le seguenti parabole con asse di simmetria parallelo all'asse x e determinane fuoco e direttrice:**

25)  $x = y^2 - 3y + 2$   $[V\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right) \ F\left(0; \frac{3}{2}\right) \ d : x = -\frac{1}{2}]$

26)  $x = 4 - y^2$   $[V(4;0) ; \ F\left(\frac{15}{4}; 0\right) \ d : x = \frac{17}{4}]$

27)  $x = \frac{1}{4}y^2 + y$   $[V(-1;-2); F(0;-2) \ d : x = -2]$

28)  $x = -\frac{1}{2}y^2 + 2$   $[V(2;0) ; \ F\left(\frac{3}{2}; 0\right) \ d : x = \frac{5}{2}]$

29)  $x = y^2 + 1$   $[V(1;0) ; \ F\left(\frac{5}{4}; 0\right) \ d : x = \frac{3}{4}]$

**IV) Determina l'equazione della parabola avente:**

30)  $F(1;0) \ d : x = 0$   $[x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}]$

31)  $F(0;0) \ V(2;0)$   $[x = -\frac{1}{8}y^2 + 2]$

32)  $V(-1;1) \ d : x = 1$   $[x = -\frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{9}{8}]$

33) Asse parallelo asse x ,  $V(0;0)$  , passante per  $P(-2;1)$   $[x = -2y^2]$

34) Asse parallelo asse x , passante per  $A(0;0) \ B(2;1) \ C(1;2)$   $[x = -\frac{3}{2}y^2 + \frac{7}{2}y]$

35) Asse di simmetria parallelo asse x,  $F(0;1)$  , passante per  $A(0;2)$

$$[x = -\frac{1}{2}y^2 + y ; \ x = \frac{1}{2}y^2 - y]$$

## V) Problemi vari

- 36) Disegna la parabola  $\mathcal{P}$  :  $y = x^2 - 2x$  e determina l'equazione della tangente  $t$  a  $\mathcal{P}$  in  $(0;0)$  e le equazioni delle tangenti  $t_{1,2}$  uscenti dal punto  $P(3;-1)$ .

$$[ t : y = -2x ; t_1 : y = -1, t_2 : y = 8x - 25 ]$$

- 37) Disegna la parabola  $\mathcal{P}$  :  $x = 4 - y^2$  e determina le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione con l'asse  $y$ .

$$[ y = -\frac{1}{4}x + 2 ; y = \frac{1}{4}x - 2 ]$$

- 38) Disegna la parabola  $\mathcal{P}$  :  $x = y^2 + 1$  e determina le equazioni delle tangenti uscenti dall'origine.

$$[ y = \pm \frac{1}{2}x ]$$

- 39) Determina l'equazione della parabola  $\mathcal{P}$  con asse di simmetria parallelo all'asse  $y$ , tangente in  $T(-1;0)$  alla retta  $t : y = 2x + 2$  e passante per  $A(2;-3)$ .

$$[ y = 1 - x^2 ]$$

- 40) Determina l'equazione della parabola  $\mathcal{P}$  con asse di simmetria parallelo all'asse  $x$ , tangente in  $T(0;0)$  alla retta  $t : y = x$  e passante per  $A(3;2)$ .

$$[ x = \frac{1}{4}y^2 + y ]$$

- 41) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse  $y$ , tangenti alla retta  $t : 2x + y + 1 = 0$  e passanti per  $A(0;0)$  e  $B(1;1)$ .

$$[ y = x^2 ; y = 9x^2 - 8x ]$$

- 42) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse  $x$ , tangenti alla retta  $t : x + 2y + 2 = 0$  e passanti per  $A(0;0)$  e  $B(2;2)$ .

$$[ x = \frac{1}{2}y^2 ; x = \frac{9}{2}y^2 - 8y ]$$

## VI) Parabola e fasci di rette

43) 
$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x + k \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
 [1 sol.  $-1 \leq k < 1$  ; 2 sol.  $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$  ]

44) 
$$\begin{cases} x = y^2 + 1 \\ y = x + k \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$
 [2 sol.  $-1 \leq k \leq -\frac{3}{4}$  ]

45) 
$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = -x + k \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
 [1 sol.  $0 \leq k < 2$  ; 2 sol.  $2 \leq k \leq \frac{9}{4}$  ]

46) 
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x \\ k(3x - 2y) + x - 2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$
 [1 sol.  $k \geq -\frac{1}{5}$  ]

47) 
$$\begin{cases} x = -y^2 + 1 \\ k(x + y - 2) + y = 0 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$
 [1 sol.  $-\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$ ; 2 sol.  $\frac{2}{3} \leq k \leq 1 \cup k = -\frac{1}{3}$  ]

48) 
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ kx + y - 2(k+1) = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
 [1 sol.  $k \leq -1 \cup k \geq 1$  ]

49) 
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + k \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
 [1 sol.  $-2 < k \leq 0$ , 2 sol.  $-\frac{9}{4} \leq k \leq -2$  ]

## VII) Esercizi di ricapitolazione

- 50) Determina l'equazione della parabola avente fuoco  $F(0; \frac{1}{2})$  e direttrice  $d: y = -\frac{1}{2}$ . Disegnala, indica con  $V$  il suo vertice e sia  $A$  il suo punto di ascissa  $x = 1$ . Determina l'equazione della tangente  $t$  alla parabola in  $A$  e, detta  $B$  l'intersezione di  $t$  con la direttrice  $d$ , determina l'area del triangolo  $\triangle ABV$ .

$$[ y = \frac{1}{2}x^2; y = x - \frac{1}{2}; \text{area}(\triangle ABV) = \frac{1}{4} ]$$

- 51) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  tangente in  $T(0; -3)$  alla retta  $4x - y - 3 = 0$  e passante per  $A(-5; 2)$ . Disegnala ed indica con  $V$  il suo vertice. Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $F: y = 2x + k$  intersecano l'arco  $\overset{\curvearrowleft}{VT}$  della parabola e in quanti punti.

$$[ y = x^2 + 4x - 3 ; 2 \text{ intersezioni } -4 \leq k \leq -3 ]$$

- 52) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse  $x$  aventi come direttrice l'asse  $y$  e passanti per i punti  $A(-5; -2)$  e  $B(-5; 6)$ . Disegnale. Detta  $P$  la parabola avente il vertice di ascissa maggiore, determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $F: ky - x - 2(k + 3) = 0$  intersecano, e in quanti punti, l'arco  $\overset{\curvearrowleft}{AB}$  di  $P$ .

$$[ x = -\frac{1}{4}(y - 2)^2 - 1; x = -\frac{1}{16}(y - 2)^2 - 4; 1 \text{ inter. } k \leq -\frac{1}{4} \cup k \geq \frac{1}{4} ]$$

- 53) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  avente vertice  $V(-1; 1)$  e passante per  $A(3; 3)$ . Disegnala e detto  $B$  il punto della parabola simmetrico di  $A$  rispetto all'asse della parabola, determina un punto  $P$  appartenente all'arco  $\overset{\curvearrowleft}{VA}$  della parabola tale che  $\text{area}(\triangle VPB) = 3$ .

$$[ x = y^2 - 2y; P(0; 2) ]$$

- 54) Determina l'equazione della parabola avente fuoco  $F(0; 1)$  e direttrice  $d: y = 3$ . Disegnala, indica con  $V$  il suo vertice e sia  $P$  il suo punto di ascissa  $x = 2$ . Determina l'equazione della tangente  $t$  alla parabola in  $P$ .

$$[ y = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \quad y = -x + 3 ]$$

- 55) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  tangente in  $T(0; 2)$  alla retta  $2x + y - 2 = 0$  e passante per  $A(6; 8)$ . Disegnala ed indica con  $V$  il suo vertice. Determina l'area del triangolo  $\triangle TVA$ .

$$[ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2; \text{area}(\triangle TVA) = 12 ]$$

- 56) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse x aventi come fuoco  $F(0;0)$  e passanti per il punto  $A(-\frac{3}{2}; 2)$ . Disegna.

$$[x = \frac{1}{8}y^2 - 2; x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}]$$

- 57) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x avente vertice  $V(-1;0)$  e passante per  $A(8;3)$ . Disegnala e determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $F : y = \frac{1}{3}x + k$  intersecano l'arco  $\overset{\circ}{VA}$  della parabola e in quanti punti. Per quale punto  $P \in \overset{\circ}{VA}$  il triangolo  $VPA$  ha area massima?

$$[x = y^2 - 1; 2 \text{ inters. } \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{13}{12}; P(\frac{5}{4}; \frac{3}{2})]$$

- 58) Disegna la parabola di equazione  $y = 2x - \frac{1}{3}x^2$  e indica con A e B i suoi punti di intersezione con l'asse x. Determina la retta parallela all'asse x che interseca l'arco  $\overset{\circ}{AB}$  della parabola in C e D tali che, detti  $C'$  e  $D'$  le proiezioni ortogonali di C e D sull'asse x, si abbia  $2p(CC'D'D) = \frac{34}{3}$ .

$$[y = \frac{5}{3}]$$

### **VIII) Problemi di massimo e minimo**

- 59) Dato un rettangolo ABCD avente  $\overline{AB} = 10a$  e  $\overline{BC} = 6a$ , considera  $A', B', C', D'$  tali che  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$ . Come varia l'area del parallelogramma  $A'B'C'D'$ ?

$$[A_{\min} = 28a^2, A_{\max} = 60a^2]$$

- 60) Dato un triangolo isoscele  $\overset{\triangle}{ABC}$  avente perimetro  $2p = 16a$  e base  $\overline{AB} = 6a$ , considera un punto P appartenente al lato AC e, tracciata per P la parallela alla base AB che interseca in Q il lato BC, studia l'area( $\overset{\triangle}{PQH}$ ), dove H è il punto medio di AB.

$$[A_{\min} = 0, A_{\max} = 3a^2]$$

- 61) Dato il triangolo rettangolo  $\overset{\triangle}{ABC}$  avente cateti  $\overline{AB} = 4a$  e  $\overline{AC} = 3a$ , considera P appartenente ad AC e tracciata la parallela per P ad AB e detto Q il punto di intersezione con BC, studia l'area( $\overset{\triangle}{APQR}$ ) dove R è la proiezione ortogonale di Q su AB.

$$[A_{\min} = 0, A_{\max} = 3a^2]$$

- 62) Dato il triangolo isoscele  $\triangle ABC$  avente  $2p = 36a$  e base  $\overline{AB} = 10a$  considera un rettangolo PQRS inscritto in esso, con PQ parallelo ad AB e RS sulla base AB, e studia l'area( $PQRS$ ).

$$[ A_{\min} = 0, \quad A_{\max} = 30a^2 ]$$

- 63) Dato il trapezio rettangolo ABCD avente altezza  $\overline{AD} = 4a$ , base minore  $\overline{CD} = 4a$  e lato obliquo  $\overline{CB} = 5a$ , considera un punto P sul lato obliquo e, tracciata la perpendicolare per P a BC e detto Q il punto di intersezione con AB, studia l'area( $PQ\hat{B}$ ).

$$[ A_{\min} = 0, \quad A_{\max} = \frac{50}{3}a^2 ]$$

- 64) Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto dall'altezza di 1 metro da terra con velocità iniziale  $v_0 = 10m/s$ . Dopo quanto tempo raggiunge la massima altezza? Qual è la massima altezza raggiunta? (Considera l'accelerazione di gravità  $g \cong 10m/s^2$ )

$$[ 1 s ; h_{\max} = 6m ]$$

- 65) Considera un triangolo ABC avente  $\hat{CAB} = 60^\circ$ ,  $\hat{ABC} = 30^\circ$ ,  $\overline{AB} = 10$ . Considera un punto P appartenente al lato AC e disegna il rettangolo PQRS “inscritto” nel triangolo ABC cioè avente PQ parallelo ad AB (Q appartenente al lato BC) e RS su AB . Qual è la massima area del rettangolo inscritto PQRS ?

$$[ A_{\max} = \frac{25}{4}\sqrt{3} ]$$

- 66) Sia ABCD un rombo di perimetro  $20a$  e avente la diagonale maggiore  $\overline{BD} = \frac{4}{3} \cdot \overline{AC}$  . Considera un rettangolo PQRS inscritto nel rombo. Qual è l'area massima di PQRS ?

$$[ A_{\max} = 12a^2 ]$$

- 67) Considera un triangolo acutangolo ABC avente base  $\overline{AB} = a$  e altezza  $\overline{CH} = h$  . Considera il rettangolo PQRS inscritto nel triangolo (P appartenente al lato AC, Q appartenente al lato BC con PQ parallelo ad AB ed RS su AB): qual è il massimo valore dell'area di PQRS?

$$[ A_{\max} = \frac{ah}{4} ]$$

- 68) Una compagnia aerea decide di stabilire il prezzo di un biglietto di un volo nel modo seguente: 200 euro + 10 euro per ogni posto che resta libero. Sapendo che l'aereo dispone di 150 posti, quanti posti devono rimanere liberi perché la compagnia aerea ottenga il massimo ricavo? Quanto risulta il massimo ricavo?

$$[ 65; € 72250 ]$$

## APPROFONDIMENTO

### Il “fuoco” della parabola

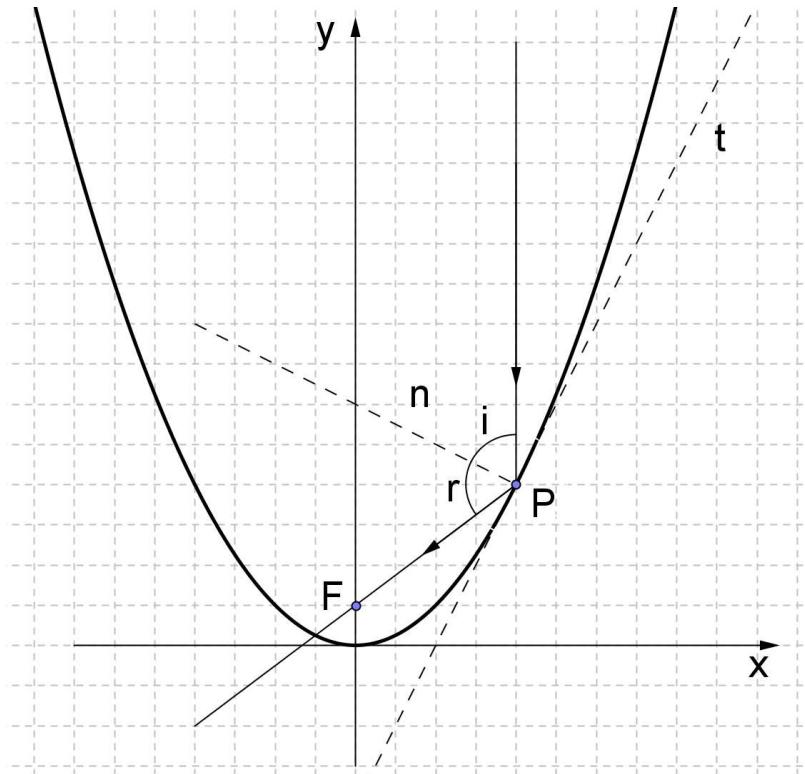
*Perché il fuoco della parabola si chiama così?*

Se consideriamo una qualunque retta  $r$  parallela all’asse di simmetria della parabola, indicato con  $P$  il suo punto di intersezione con la parabola, tracciata la tangente  $t$  in  $P$  alla parabola e la perpendicolare  $n$  alla tangente, l’angolo formato dalla retta  $r$  e  $n$  è uguale all’angolo formato tra  $n$  e la retta per  $P$  e  $F$ .

Se quindi immaginiamo che la retta  $r$  sia un raggio di luce “incidente” su uno specchio abbiamo che il raggio “riflesso” passa per il fuoco della parabola (per la legge della riflessione infatti l’angolo di incidenza è uguale all’angolo di riflessione): se abbiamo un fascio di raggi paralleli all’asse della parabola, tutti i raggi riflessi passeranno per il fuoco e quindi nel fuoco ci sarà concentrazione di luce e calore.

Verifichiamolo con un esempio.

Consideriamo  $\mathcal{P} : y = x^2$ , raggio incidente  $x = 1 \rightarrow x - 1 = 0$ , punto di incidenza  $P(1;1)$ .



- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- La parabola -

Calcolato  $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$  possiamo determinare la retta PF:

$$m_{PF} = \frac{3}{4} \rightarrow y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \rightarrow 3x - 4y + 1 = 0.$$

Vogliamo verificare che  $\hat{i} = \hat{r}$  (vedi figura).

Troviamo innanzitutto l'equazione della normale e per farlo dobbiamo prima determinare il coefficiente angolare  $m_t$  della tangente  $t$  alla parabola in P(1;1).

$$\begin{cases} y - 1 = m(x - 1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx - m + 1 \\ x^2 = mx - m + 1 \rightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0 \end{cases}$$

Ponendo  $\Delta = 0$  dell'equazione di secondo grado ottenuta abbiamo

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = 0 \Rightarrow m = 2$$

Quindi l'equazione della normale  $n$  sarà:  $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow x + 2y - 3 = 0$ .

Se  $\hat{i} = \hat{r}$  allora  $n$  e  $t$  devono essere le bisettrici degli angoli formati dalla retta  $x - 1 = 0$  e dalla retta  $3x - 4y + 1 = 0$ .

Per determinare le equazioni delle bisettrici calcoliamo e uguagliamo la distanza dalle due rette di un generico punto  $P(x;y)$ :

$$|x - 1| = \frac{|3x - 4y + 1|}{5}$$

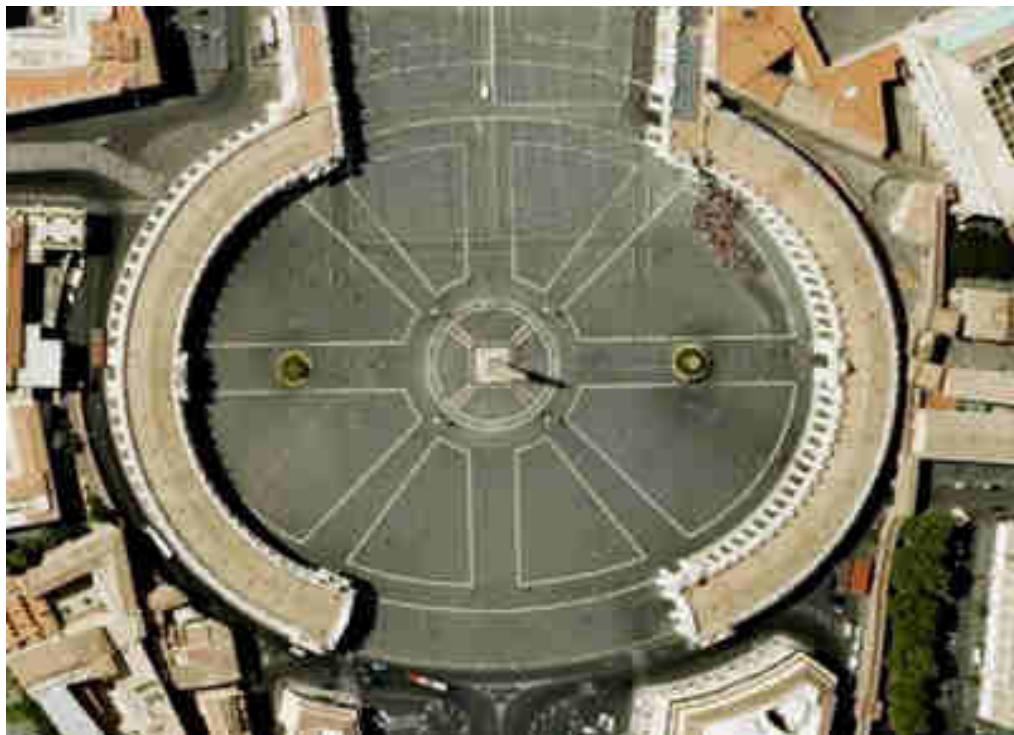
Quindi

$$x - 1 = \frac{3x - 4y + 1}{5} \rightarrow x + 2y - 3 = 0 \text{ che è l'**equazione della retta** } n$$

$$x - 1 = -\frac{3x - 4y + 1}{5} \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad \text{retta } t$$

**Nota:** questa proprietà vale anche se consideriamo onde elettromagnetiche in generale (infatti la luce è una particolare onda elettromagnetica) e ci spiega perché le antenne che servono a raccogliere un segnale elettromagnetico hanno forma “parabolica”: le onde riflesse si concentreranno nel fuoco dell’antenna!

# Ellisse



## Definizione

Dati due punti  $F_1$  e  $F_2$  si dice ellisse  $E$  il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano per i quali è costante la somma delle distanze da  $F_1$  e  $F_2$  cioè tali che

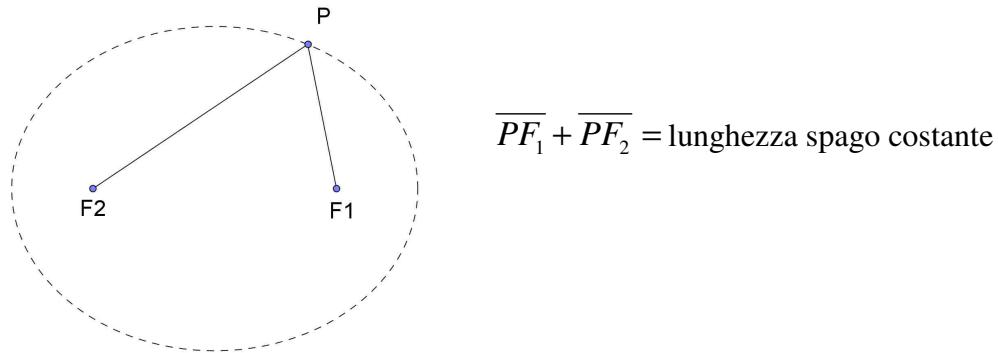
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante}$$

$F_1$  e  $F_2$  si dicono fuochi dell'ellisse.

## Osservazioni

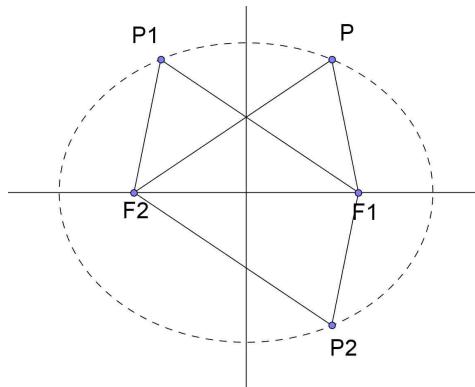
**1)** Dati  $F_1$  e  $F_2$  e il valore della costante (che deve maggiore di  $\overline{F_1F_2}$ ) possiamo tracciare l'ellisse corrispondente in questo modo: prendiamo uno spago di lunghezza uguale alla costante assegnata e fissiamone le estremità ai due fuochi.

Tenendolo teso con un lapis, la punta del lapis scorrendo ci darà il disegno dell'ellisse.



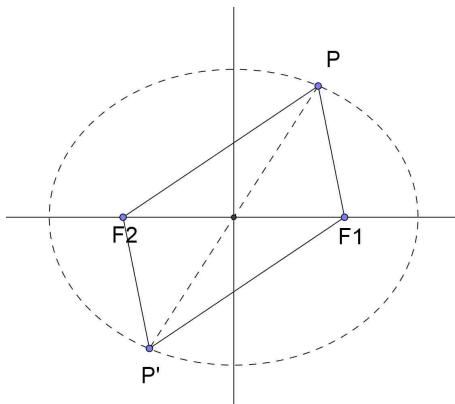
Vediamo quindi che l'ellisse è una curva chiusa, simile ad una circonferenza un po' schiacciata.

**2)** Osserviamo che l'ellisse possiede due assi di simmetria: la retta passante per  $F_1$  e  $F_2$  e l'asse del segmento  $F_1F_2$ .

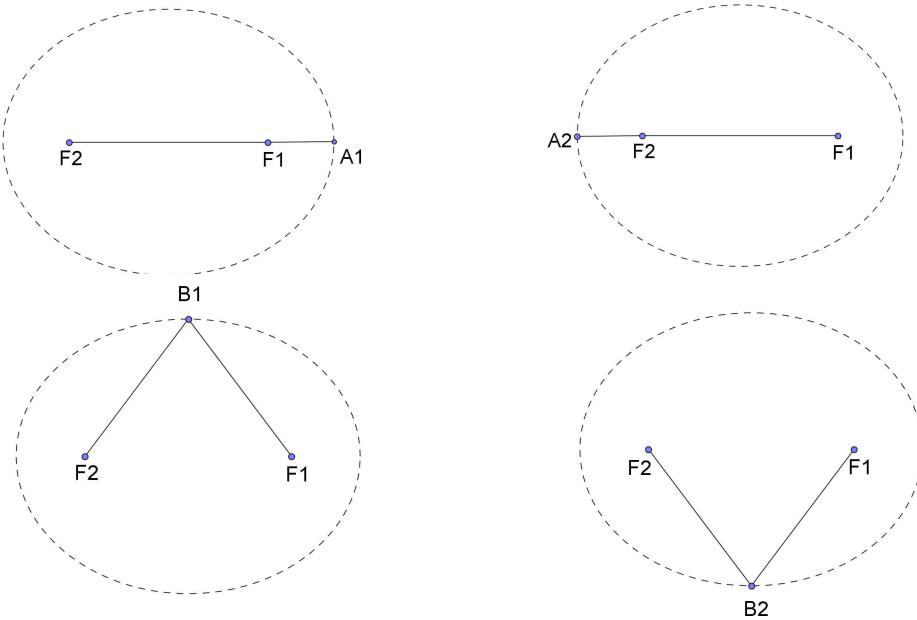


Infatti se  $P \in \mathcal{E}$  anche  $P_1$  (simmetrico di  $P$  rispetto all'asse di  $F_1F_2$ ) e  $P_2$  (simmetrico di  $P$  rispetto alla retta per  $F_1$  e  $F_2$ ) appartengono all'ellisse.

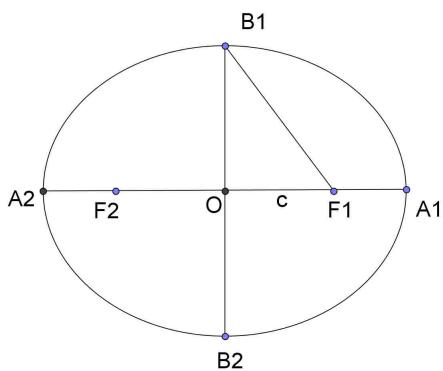
Inoltre il punto di incontro degli assi di simmetria è centro di simmetria dell'ellisse (cioè se  $P \in \mathcal{E}$  anche  $P' \in \mathcal{E}$ ) e viene chiamato "centro" dell'ellisse.



**3)** Osserviamo che, facendo scorrere il lapis, ci sono 4 posizioni “estreme” cioè quattro punti dell’ellisse che vengono chiamati “vertici” dell’ellisse.



Osserviamo che  $\overline{A_1 A_2}$  = lunghezza dello spago=costante e che risulta maggiore di  $\overline{B_1 B_2}$ .



$\overline{A_1 A_2}$  viene detto asse maggiore (contiene i fuochi)

$\overline{B_1 B_2}$  viene detto asse minore

Osserviamo che, indicando con  $c$  la semidistanza focale, poiché  $\overline{B_1 F_1} =$  semiasse maggiore  $= B_1 F_2$  applicando il teorema di Pitagora al triangolo  $\triangle OF_1 B_1$  abbiamo:

$$c^2 = (\text{semiasse maggiore})^2 - (\text{semiasse minore})^2$$

4) La “forma” più o meno schiacciata dell’ellisse dipende dal rapporto tra  $\overline{F_1 F_2}$  (distanza focale) e la costante assegnata.

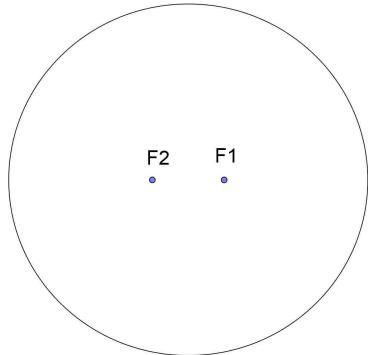
Si definisce eccentricità  $e$  dell’ellisse  $e = \frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse maggiore}}$

Poiché la semidistanza focale è minore del semiasse maggiore si ha:

$$0 < e < 1$$

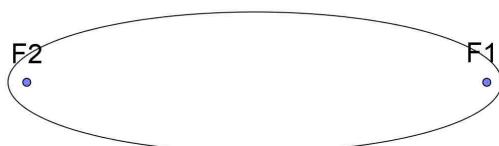
Se  $\overline{F_1 F_2}$  è molto minore della costante (cioè  $c$  molto minore del semiasse maggiore) si ottengono ellissi piuttosto “tonde” (simili ad una circonferenza) e l’eccentricità risulta molto vicina a 0.

Caso limite  $e = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow F_1 \equiv F_2$



Si ha una circonferenza

Se  $\overline{F_1 F_2}$  è molto vicino (anche se minore) al valore della costante si hanno ellissi “schiacciate” e l’eccentricità è vicina a 1.



Caso limite  
 $e = 1 \Leftrightarrow c = \text{semiasse.maggiore} \Rightarrow$   
 semiasse minore = 0

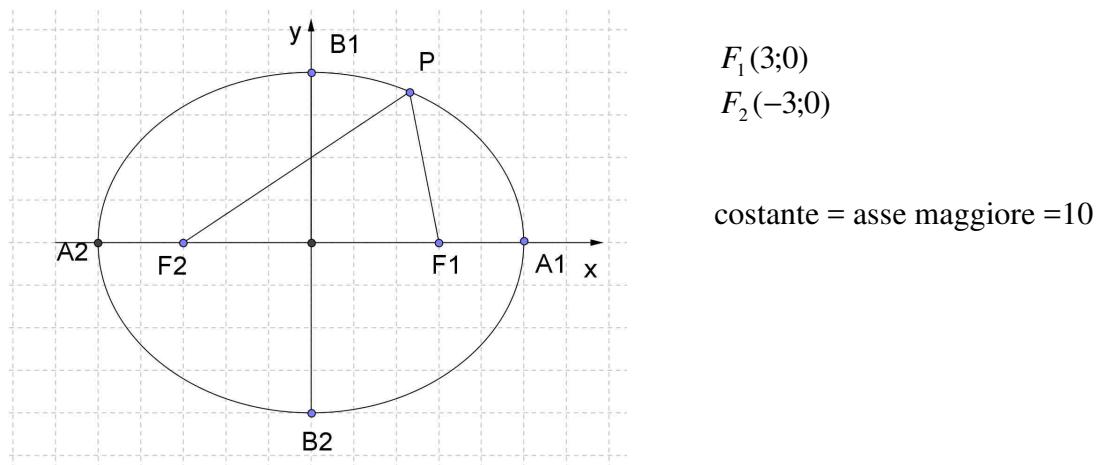
Si ha il segmento  $F_1 F_2$ .

## L'ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

L'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano dipenderà da come si fissa il sistema di riferimento. Cominciamo con il caso più semplice in cui gli assi di simmetria dell'ellisse coincidono con gli assi coordinati.

### Ellisse con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati

a) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse x (quindi l'asse maggiore di  $\mathcal{E}$  è sull'asse x). Facciamo un esempio:



Possiamo disegnare l'ellisse poiché sapendo che

$$c^2 = (\text{semiasse maggiore})^2 - (\text{semiasse minore})^2$$

otteniamo che semiasse minore = 4.

Per ricavare l'equazione di  $\mathcal{E}$  impostiamo la definizione:

$$P(x; y) : \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$$

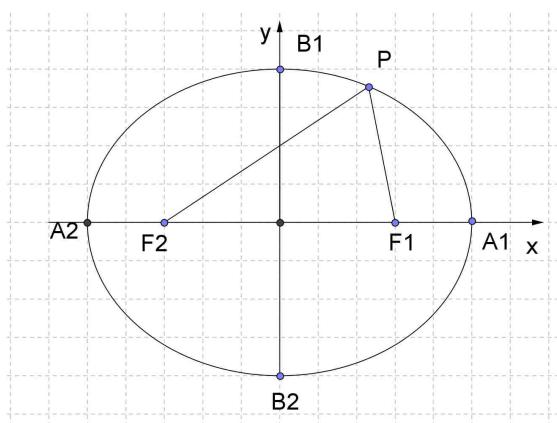
$$20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 100 + 12x \Rightarrow 5\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25[(x+3)^2 + y^2] = (25+3x)^2 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Dividendo entrambi i membri per 400 abbiamo:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Generalizziamo: consideriamo  $F_{1,2}(\pm c; 0)$  e indichiamo con  $a$  e  $b$  i due semiassi.

Nel nostro caso  $a > b$  poiché i fuochi si trovano sull'asse x.



$$F_{1,2} (\pm c ; 0)$$

$$A_{1,2} (\pm a; 0)$$

$$B_{1,2} (0 ; \pm b)$$

$$a > b$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + c^2x^2 + 2ca^2x$$

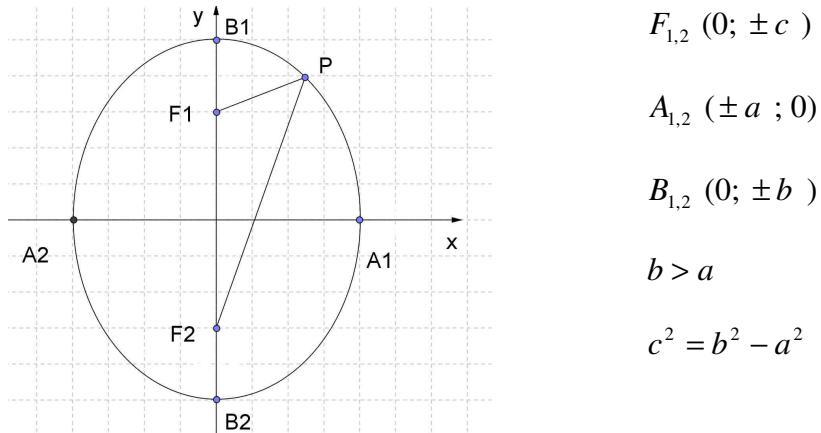
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\text{Ma } a^2 - c^2 = b^2 \text{ e quindi: } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividendo entrambi i membri per  $a^2b^2$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse y : in questo caso l'asse maggiore dell'ellisse è  $\overline{B_1 B_2}$  cioè  $b > a$  e  $c^2 = b^2 - a^2$ .



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$$

Sviluppando in modo analogo a quanto fatto in a) otteniamo ancora  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (avendo sostituito  $b^2 - c^2 = a^2$  ).

In conclusione **l'equazione di un'ellisse i cui assi di simmetria coincidono con gli assi coordinati** risulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove  $a$  e  $b$  sono i semiassi dell'ellisse

se  $a > b$  allora i fuochi  $F_{1,2}(\pm c; 0)$  appartengono all'asse x ( $c^2 = a^2 - b^2$  )

se  $b > a$  allora i fuochi  $F_{1,2}(0; \pm c)$  appartengono all'asse y ( $c^2 = b^2 - a^2$  )

Poiché l'eccentricità  $e = \frac{c}{\text{semiasse maggiore}}$  nel caso in cui

$$a > b \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

$$b > a \Rightarrow e = \frac{c}{b}$$

## Problemi sull'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria

### 1) Disegnare un'ellisse di equazione assegnata

Per disegnare un'ellisse occorre conoscere i suoi semiassi. Se l'equazione è data nella forma  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  è molto semplice risalire ad  $a$  e  $b$ .

Esempio:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad a = 5 \quad b = 4$

Se l'equazione non si presenta nella forma “normale” possiamo fare dei passaggi per riportarcela.

Esempio:  $x^2 + 16y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + y^2 = 1 \Rightarrow a = 4 \quad b = 1$

Esempio:  $4x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad b = 1$

Esempio:  $9x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad b = 2$

### 2) Determinare l'equazione di un'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria

Basterà determinare  $a$  e  $b$  e quindi occorreranno due condizioni (indipendenti). Vediamo alcuni casi.

a) *Passaggio dell'ellisse per due punti (non simmetrici rispetto all'asse  $x$  o all'asse  $y$  o all'origine)*

Esempio:  $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \quad P_2\left(-\frac{1}{2}; -\sqrt{3}\right)$

Sostituendo  $P_1$  nell'equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e analogamente  $P_2$  abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}b^2 + a^2 = a^2b^2 \\ \frac{1}{4}b^2 + 3a^2 = a^2b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}b^2 + a^2 = \frac{1}{4}b^2 + 3a^2 \\ ..... \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4}b^2 \\ \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^4 \rightarrow b^2 = \frac{1}{4}b^4 \rightarrow b^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

Quindi  $\mathcal{E}: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

b) *Conoscenza di un fuoco e di un vertice*

Esempio:  $F_1(2;0)$   $A_1(3;0)$

Quindi  $c = 2$   $a = 3$  e poiché i fuochi appartengono all'asse x  $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

c) *Conoscenza di un fuoco e dell'eccentricità*

Esempio:  $F_1(3;0)$   $e = \frac{1}{2}$

Poiché  $F_1 \in$  asse x  $e = \frac{c}{a}$  e quindi  $\frac{1}{2} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 6$ .

Inoltre  $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$  e quindi  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

d) *Conoscenza di un vertice e dell'eccentricità*

Esempio:  $A_1(4;0)$   $e = \frac{1}{2}$

Sappiamo quindi che  $a = 4$  ma non sappiamo dove si trovano i fuochi e quindi si possono avere due casi (due diverse ellissi che soddisfano le condizioni):

se  $a > b \Rightarrow e = \frac{c}{a}$  e  $\frac{1}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 2$  e  $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$  e abbiamo  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

se  $a < b \Rightarrow e = \frac{c}{b}$  e  $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{c}{b} \rightarrow c = \frac{b}{2} \\ c^2 = b^2 - a^2 \rightarrow c^2 = b^2 - 16 \end{cases}$

e risolvendo abbiamo  $b^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{64}{3}} = 1$

### Rette tangenti ad un'ellisse

Consideriamo un'ellisse  $\mathcal{E}$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e un punto  $P_o(x_o; y_o)$  assegnato.

a) **Se  $P_o$  non appartiene all'ellisse** ed è esterno all'ellisse esisteranno due rette tangenti a  $\mathcal{E}$  uscenti da  $P_o$ .

Per determinarle basterà procedere come al solito considerando il fascio di rette per  $P_o$  e imponendo la condizione di tangenza.

Esempio:  $\mathcal{E}$ :  $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$     $P_o(-2; 0)$

$$\begin{cases} y = m(x + 2) \\ x^2 + \frac{y^2}{25} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m(x + 2) \\ 25x^2 + m^2(x + 2)^2 = 25 \end{cases}$$

E sviluppando la seconda equazione abbiamo:

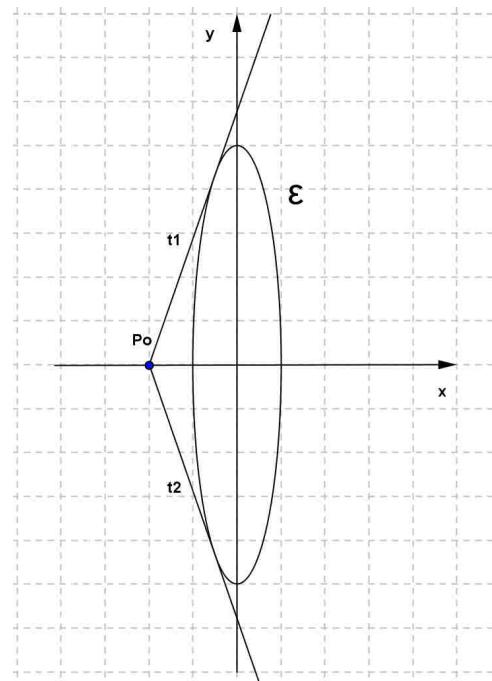
$$(25 + m^2)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 25 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4m^4 - (25 + m^2) \cdot (4m^2 - 25) = 0 \quad (\text{condizione di tangenza})$$

.....

$$m^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow m_{1,2} = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$t_{1,2} : y = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}(x + 2) \quad \text{equazioni delle tangenti}$$



b) **Se  $P_o$  appartiene all'ellisse** ci sarà una sola tangente.

Per determinarla possiamo procedere come in a) ma possiamo dimostrare che la retta tangente  $t$  avrà equazione

$$t : \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

Questa formula viene detta “**formula dello sdoppiamento**”.

Per dimostrarla potremmo procedere in modo analogo al caso precedente impostando cioè un sistema tra la retta generica passante per  $P_o$  e poi sfruttare l'appartenenza del punto all'ellisse ma possiamo anche pensare di ottenere l'ellisse trasformando una circonferenza di centro l'origine e raggio 1 con la trasformazione

$$\begin{cases} x' = a \cdot x \\ y' = b \cdot y \end{cases}$$

Infatti sostituendo nell'equazione della circonferenza  $C: x^2 + y^2 = 1$  otteniamo proprio

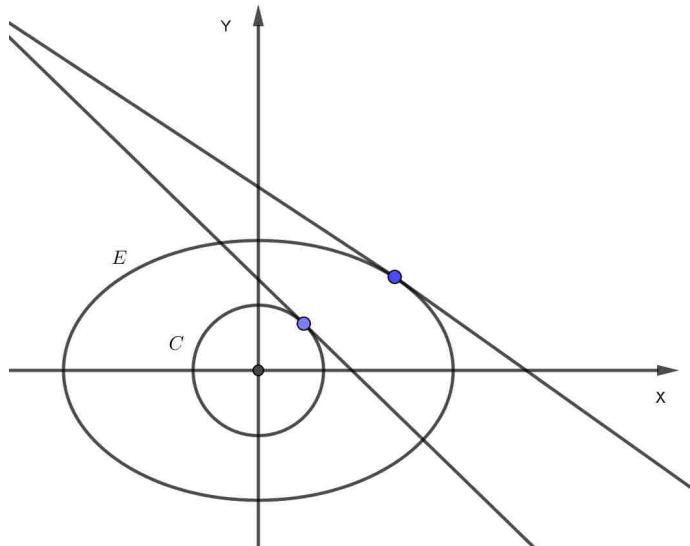
$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

cioè l'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ .

Possiamo trovare l'equazione della tangente alla circonferenza in  $P_o$  sfruttando il fatto che la sua inclinazione è perpendicolare al raggio  $OP_o$ :

$$m = -\frac{x_o}{y_o} \rightarrow t: y - y_o = -\frac{x_o}{y_o}(x - x_o) \rightarrow y_o y - y_o^2 = -x_o x + x_o^2 \rightarrow x_o x + y_o y = x_o^2 + y_o^2$$

e poiché  $P_o \in C \rightarrow x_o^2 + y_o^2 = 1$  e in conclusione  $t: x_o x + y_o y = 1$



A questo punto basta applicare la trasformazione alla tangente  $t$  per trovare la tangente all'ellisse nel suo punto  $P_o'(x_o', y_o')$ :

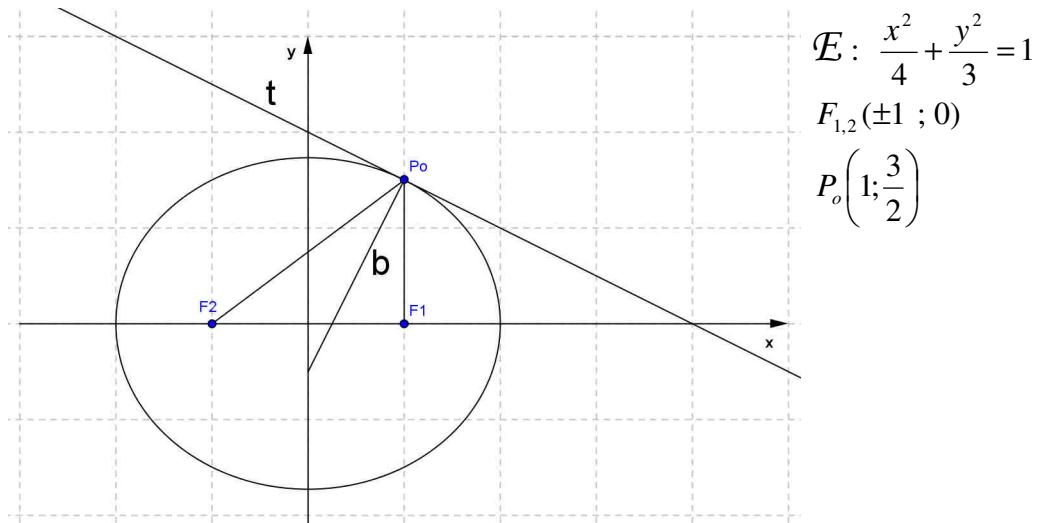
$$\frac{x_o'}{a} \cdot \frac{x'}{a} + \frac{y_o'}{b} \cdot \frac{y'}{b} = 1 \rightarrow \frac{x_o' x'}{a^2} + \frac{y_o' y'}{b^2} = 1$$

e quindi riscrivendo le coordinate dell'ellisse come  $x, y$  abbiamo che la tangente ad un'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  nel suo punto di coordinate  $P_o(x_o, y_o)$  è

$$t: \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

### Osservazione

Si può dimostrare che la tangente  $t$  in  $P_o$  all'ellisse è perpendicolare alla bisettrice  $b$  dell'angolo  $\hat{F_1 P_o F_2}$ . Vediamo solo un esempio:



Determiniamo le equazioni delle rette per  $F_1$  e  $P_o$  e per  $F_2$  e  $P_o$ :

$$r_{F_1 P_o} : x = 1 \rightarrow x - 1 = 0$$

$$r_{F_2 P_o} : y = \frac{3}{4}(x + 1) \rightarrow 3x - 4y + 3 = 0$$

Determiniamo le bisettrici degli angoli formati da queste due rette:  $|x - 1| = \frac{|3x - 4y + 3|}{5}$

$$\text{a)} \quad x - 1 = \frac{3x - 4y + 3}{5} \rightarrow \dots . y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\text{b)} \quad x - 1 = \frac{-3x + 4y - 3}{5} \rightarrow \dots . y = 2x - \frac{1}{2} \quad \text{equazione di } b$$

Ma applicando la formula dello sdoppiamento vediamo che la tangente  $t$  è proprio  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ :

$$\frac{x}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{3} = 1 \rightarrow \dots . y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Quindi  $t_{P_o}$  e  $b_{F_1 \hat{P_o} F_2}$  sono perpendicolari ( $m_t = -\frac{1}{2}$ ;  $m_b = 2$ ).

**Nota:** da questa proprietà deriva la denominazione di fuochi data a  $F_1$  e  $F_2$ .

Se infatti consideriamo uno specchio ellittico di fuochi  $F_1$  e  $F_2$  **ogni raggio luminoso incidente uscente da  $F_1$ , tipo  $F_1 P_o$ , avrà sempre come raggio riflesso un raggio passante per  $F_2$**  cioè  $P_o F_2$ : in questo modo infatti l'angolo di incidenza  $\hat{i}$  sarà uguale all'angolo di riflessione  $\hat{r}$ .

## Ellisse con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati

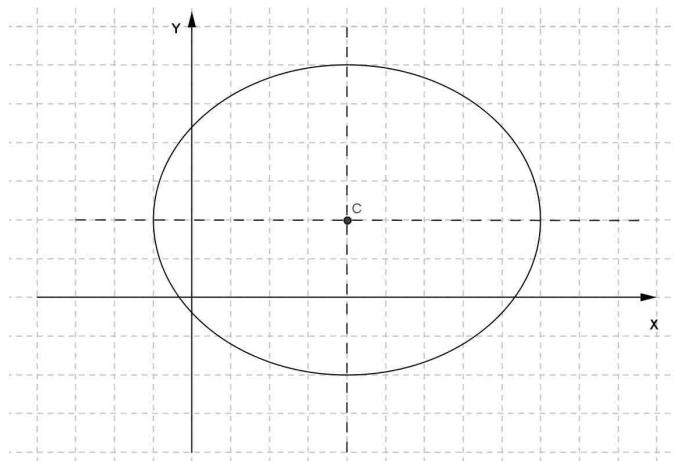
Supponiamo che gli assi di simmetria dell'ellisse non coincidano con gli assi coordinati ma siano paralleli ad essi.

Se il centro dell'ellisse è  $C(x_c; y_c)$  traslando il sistema di riferimento in modo da portare l'origine in C, l'equazione di  $\mathcal{E}$  sarà:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Ma poiché  $\begin{cases} x' = x - x_c \\ y' = y - y_c \end{cases}$  avremo:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$



Esempio

Determinare l'equazione dell'ellisse avente centro  $C(4;2)$  (assi di simmetria sono  $x = 4$  ,  $y = 2$ ) sapendo che  $a = 5$  ;  $b = 4$ .

L'equazione sarà

$$\mathcal{E} : \frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$$

Possiamo anche sviluppare e otteniamo:

$$16(x^2 - 8x + 16) + 25(y^2 - 4y + 4) = 400$$

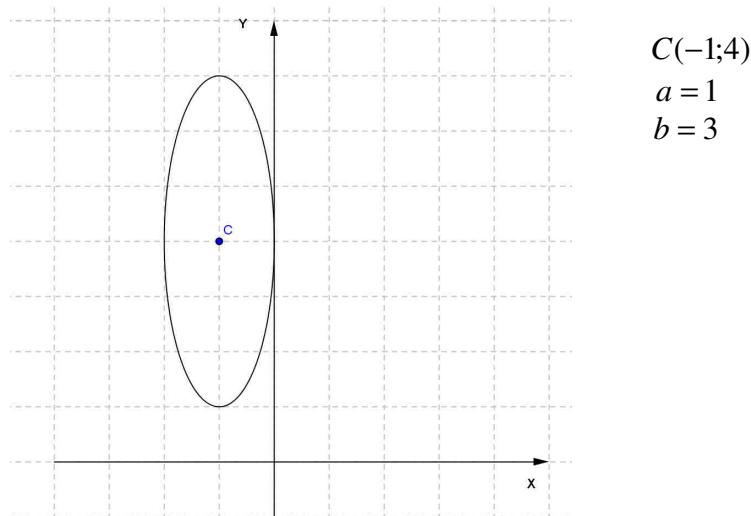
$$16x^2 + 25y^2 - 128x - 100y - 44 = 0$$

## Problemi sull'ellisse con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati

### 1) Disegnare un'ellisse di equazione assegnata

Se l'equazione è data nella forma  $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$  è molto semplice.

Esempio:  $\mathcal{E}: (x+1)^2 + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$



Se invece l'equazione è stata “sviluppata” occorre riportarsi alla forma  $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$  per riconoscere le coordinate del centro e i semiassi.

Esempio: :  $\mathcal{E}: 16x^2 + 25y^2 - 128x - 100y - 44 = 0$

Spostiamo il termine noto e mettiamo in evidenza in questo modo:

$$16(x^2 - 8x) + 25(y^2 - 4y) = 44$$

“Completiamo” i quadrati ,“bilanciando” dall’altra parte:

$$16(x^2 - 8x + 16) + 25(y^2 - 4y + 4) = 44 + (16 \cdot 16) + (25 \cdot 4)$$

$$16(x-4)^2 + 25(y-2)^2 = 400$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

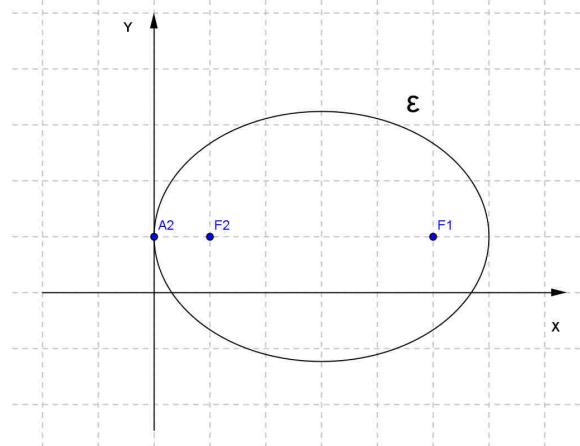
Quindi  $C(4;2)$   $a = 5$  ,  $b = 4$  .

**2) Determinare l'equazione di un'ellisse con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati**

Basterà determinare il centro e i due semiassi. Facciamo solo qualche esempio.

a) *Conoscenza dei fuochi e di un vertice*

Esempio:  $F_1(5;1)$   $F_2(1;1)$   $A_2(0;1)$



Si osserva che il centro dovrà essere  $C(3;1)$ ; inoltre  $c = 2$  e  $a = 3$ .

Di conseguenza  $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$ .

In conclusione possiamo scrivere:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

b) *Conoscenza dei fuochi e dell'eccentricità*

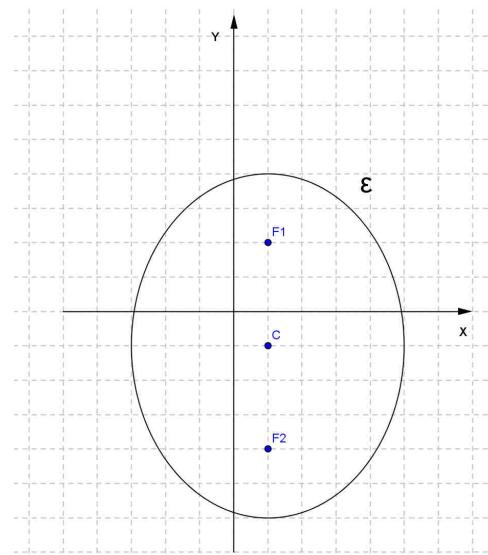
Esempio:  $F_1(1;2)$   $F_2(1;-4)$   $e = \frac{3}{5}$

E' chiaro che  $C(1,-1)$  e  $c = 3$ .

Poiché in questo caso  $e = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{3}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow b = 5$ .

Di conseguenza  $a^2 = b^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

e quindi  $\mathcal{E}: \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

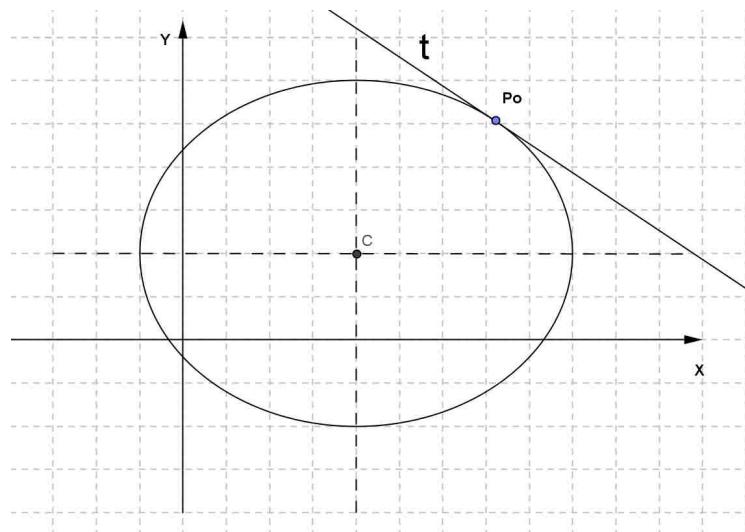


### Rette tangenti ad un'ellisse con assi paralleli agli assi coordinati

Data l'ellisse  $\mathcal{E}$  :  $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$  e un punto  $P_o(x_o; y_o)$  :

- a) se  $P_o \notin \mathcal{E}$  ed è “esterno” si determinano due rette tangenti come abbiamo già visto per l'ellisse con assi coincidenti con gli assi coordinati;
- b) se  $P_o \in \mathcal{E}$  possiamo applicare la formula dello “sdoppiamento” per determinare l'equazione della tangente considerando la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - x_c \\ y' = y - y_c \end{cases}$$



$$t: \frac{(x_o - x_c) \cdot (x - x_c)}{a^2} + \frac{(y_o - y_c) \cdot (y - y_c)}{b^2} = 1$$

Esempio

Consideriamo  $\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$  e  $P_o\left(7; \frac{26}{5}\right) \in \mathcal{E}$ .

Applicando la formula dello sdoppiamento come abbiamo detto otteniamo:

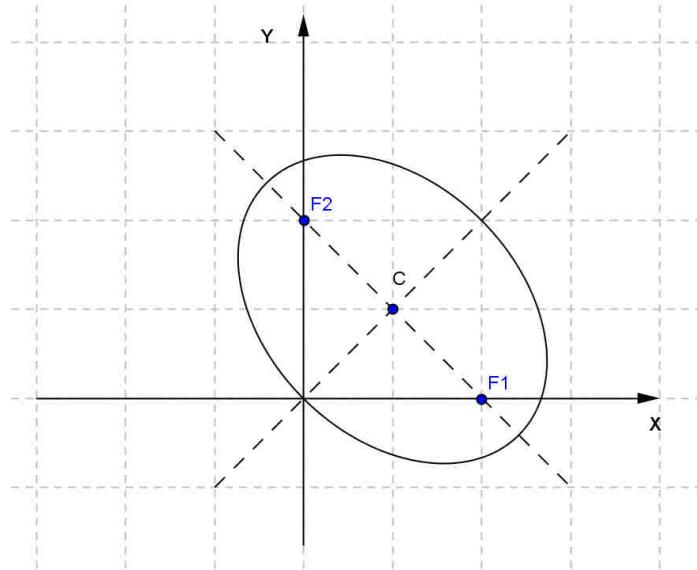
$$t: \frac{(7-4) \cdot (x-4)}{25} + \frac{\left(\frac{26}{5} - 2\right) \cdot (y-2)}{16} = 1$$

$$\text{Svolgendo i calcoli: } \frac{3 \cdot (x-4)}{25} + \frac{16}{5} \cdot \frac{(y-2)}{16} = 1 \Rightarrow 3(x-4) + 5(y-2) = 25 \Rightarrow 3x + 5y - 47 = 0$$

## Ellisse con assi di simmetria non paralleli agli assi coordinati

Facciamo solo un esempio.

Determinare l'equazione dell'ellisse  $\mathcal{E}$  avente fuochi  $F_1(1;0)$   $F_2(0;1)$  e asse maggiore uguale a 2.



Applicando la definizione abbiamo:

$$P(x; y) \text{ tale che } \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2$$

$$\text{Quindi: } \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2$$

E sviluppando i calcoli si può determinare l'equazione di  $\mathcal{E}$ .

Osserviamo, per disegnarla, che

$$C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, a = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Gli assi di simmetria hanno equazione:

$$\text{asse contenente i fuochi (asse maggiore): } y = -x + 1$$

$$\text{asse non contenente i fuochi (asse minore): } y = x$$

## Un'altra definizione di ellisse

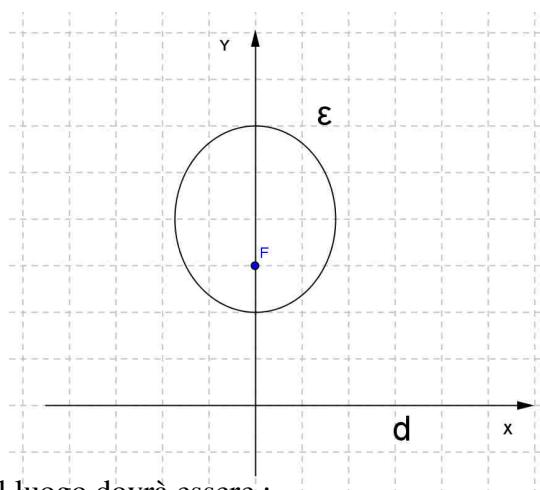
Proviamo a risolvere il seguente problema.

*Data una retta  $d$  e un punto  $F \notin d$ , determinare il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano tali che*

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = \frac{1}{2}$$

(\*) Osserviamo che il luogo dei punti  $P$  tali che  $\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = 1$  è la parabola di fuoco  $F$  e direttrice  $d$ .

Fissiamo un sistema di riferimento, per esempio prendiamo come asse  $x$  la retta  $d$  e fissiamo l'asse  $y$  e l'unità di misura in modo tale che  $F(0;1)$  (basta prendere come asse  $y$  la retta per  $F$  perpendicolare a  $d$ ....).



Quindi se  $P(x;y)$  è un punto del luogo dovrà essere :

$$\overline{PF}^2 = \frac{1}{4}(\text{dist}(P, \text{asse}x))^2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}y^2 \dots \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{\left(y - \frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

Si tratta quindi di un'ellisse con centro  $C\left(0; \frac{4}{3}\right)$  e semiassi  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$   $b = \frac{2}{3}$ .

Inoltre essendo  $c^2 = b^2 - a^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$ . Quindi  $F$  è un fuoco dell'ellisse e l'eccentricità

$$\text{risulta } e = \frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

In generale infatti si può dimostrare che:

*Data una retta  $d$  e un punto  $F \notin d$ , il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano tali che*

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = e \text{ con } e \text{ costante } 0 < e < 1$$

*risulta un'ellisse avente un fuoco in  $F$  ed eccentricità uguale ad  $e$ .*

## ESERCIZI

### I) Disegna le seguenti ellissi e determina vertici e fuochi

$$1) \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad [a = 2 \ b = 1 \ F_{1,2}(\pm\sqrt{3};0)]$$

$$2) \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad [a = 3 \ b = 4 \ F_{1,2}(0;\pm\sqrt{7})]$$

$$3) \quad 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad [a = 3 \ b = 2 \ F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)]$$

$$4) \quad x^2 + 4y^2 = 1 \quad [a = 1 \ b = \frac{1}{2} \ F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)]$$

$$5) \quad 9x^2 + 4y^2 = 1 \quad [a = \frac{1}{3} \ b = \frac{1}{2} \ F_{1,2}\left(0;\pm\frac{\sqrt{5}}{6}\right)]$$

$$6) \quad x^2 + 9y^2 = 36 \quad [a = 6 \ b = 2 \ F_{1,2}(\pm 4\sqrt{2};0)]$$

$$7) \quad 4x^2 + y^2 - 16 = 0 \quad [a = 2 \ b = 4 \ F_{1,2}(0;\pm 2\sqrt{3})]$$

**II) Determina l'equazione dell'ellisse  $E$  avente assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati sapendo che:**

8)  $A_l(3;0) \quad F_l(2;0)$   $[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1]$

9)  $B_2(0;-4) \quad F_l(3;0)$   $[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1]$

10)  $F_{l,2}(\pm 2;0) \quad e = \frac{1}{2}$   $[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1]$

11)  $F_{l,2}(0;\pm 3) \quad e = \frac{1}{3}$   $[\frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{81} = 1]$

12)  $A_l(4;0)$  fuochi  $\in$  asse x ed  $e = \frac{1}{4}$   $[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1]$

13)  $A_l(1;0)$  fuochi  $\in$  asse y ed  $e = \frac{1}{2}$   $[x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1]$

14)  $F_l(3;0)$  e passante per  $P\left(3; \frac{16}{5}\right)$   $[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1]$

15)  $B_l(0;2)$  e passante per  $P\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$   $[x^2 + \frac{y^2}{4} = 1]$

16) fuochi  $\in$  asse x ,  $e = \frac{1}{2}$  e passante per  $P\left(1; \frac{3}{2}\right)$   $[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1]$

### III) Rette tangenti ad un'ellisse

17) Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  uscenti dal punto  $P(3;0)$ .

$$[t_{1,2} : y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(x-3)]$$

18) Determina l'equazione della tangente  $t$  all'ellisse  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  nel suo punto  $P\left(3; \frac{16}{5}\right)$ .  
 $[t : 3x + 5y - 25 = 0]$

19) Determina l'equazione della tangente  $t$  all'ellisse  $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 = 4$  nel suo punto  $P\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .  
 $[t : x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0]$

20) Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse  $\mathcal{E} : 9x^2 + y^2 = 9$  uscenti dal punto  $P(0;4)$ .

$$[t_{1,2} : y = \pm\sqrt{7}x + 4]$$

### IV) Esercizi di ricapitolazione

21) Determina l'equazione dell'ellisse  $\mathcal{E}$  avente fuochi  $F_1(1;2)$ ,  $F_2(7;2)$  ed eccentricità  $e = \frac{3}{5}$ .

Determina inoltre l'equazione della retta tangente ad  $\mathcal{E}$  in  $P\left(1; \frac{26}{5}\right)$ .

$$[\mathcal{E} : \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \quad t : 3x - 5y + 23 = 0]$$

22) Determina equazione dell'ellisse  $\mathcal{E}$  avente  $B_1(0;0)$ ,  $B_2(0;4)$ , fuochi appartenenti all'asse y ed eccentricità  $e = \frac{1}{2}$ . Detto  $F_1$  il fuoco di ordinata maggiore e  $A_1$  e  $A_2$  gli altri vertici, determina l'equazione della parabola  $\mathcal{P}$  passante per  $A_1, A_2, F_1$ .

$$[\mathcal{E} : \frac{x^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1, \quad \mathcal{P} : y = -\frac{1}{3}x^2 + 3]$$

23) Determina l'equazione dell'ellisse  $\mathcal{E}$  avente  $A_1(0;0)$ ,  $A_2(6;0)$  e fuoco  $F_1(3 + \sqrt{5}; 0)$ .

Determina inoltre per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $\mathcal{F} : y = \frac{2}{3}x + k$  intersecano  $\mathcal{E}$ .

$$[\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad -2 - 2\sqrt{2} \leq k \leq -2 + 2\sqrt{2}]$$

- 24) Determina l'equazione dell'ellisse avente come assi di simmetria gli assi coordinati, passante per  $P(-3;3)$ , avente i fuochi sull'asse x ed eccentricità  $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . Disegnala e determina i fuochi  $F_{1,2}$ . Determina l'equazione della tangente t in P all'ellisse ed indica con A il suo punto di intersezione con l'asse y. Calcola l'area di  $\triangle PAF_1$  dove  $F_1$  è il fuoco di ascissa positiva.

$$\left[ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1 ; t : x - 3y + 12 = 0 ; A(\triangle PAF_1) = \sqrt{6} + 6 \right]$$

- 25) Determina l'equazione dell'ellisse avente vertici  $A_1(-4;-2)$   $A_2(4;-2)$  e passante per  $P(\frac{16}{5};1)$ . Disegnala e determina i fuochi  $F_{1,2}$ . Determina l'equazione della tangente in P all'ellisse e, detto F il suo punto di intersezione con l'asse y, determina l'equazione della parabola avente fuoco F e direttrice l'asse x. Disegna la parabola.

$$\left[ \frac{x^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1 ; t : 5x + 3y - 19 = 0 ; y = \frac{3}{38}x^2 + \frac{19}{6} \right]$$

- 26) Determina l'equazione dell'ellisse avente come assi di simmetria gli assi coordinati, un vertice  $A_1(2;0)$  e passante per il punto  $P(-1; \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Disegnala e determinane i fuochi. Determina le tangenti all'ellisse uscenti da  $Q(-3;0)$ .

$$\left[ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 ; F_{1,2}(\pm\sqrt{3};0) ; t_{1,2} : y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(x+3) \right]$$

- 27) Determina l'equazione dell'ellisse avente fuochi  $F_1(0;0)$  e  $F_2(0;2)$  ed eccentricità  $e = \frac{1}{3}$ . Disegnala e determina le coordinate dei vertici. Determina l'equazione della tangente t nel punto P dell'ellisse di intersezione con l'asse x e avente ascissa maggiore. Verifica che la bisettrice dell'angolo  $F_1PF_2$  è perpendicolare a t.

$$\left[ \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 ; A_{1,2}(\pm 2\sqrt{2};1) ; B_{1,2}(0;1 \pm 3) ; t : 3x - y - 8 = 0 \right]$$

- 28) Disegna l'ellisse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  e trova per quali valori di k le rette del fascio  $y = x + k$  intersecano l'ellisse e in quanti punti.

$$[2 \text{ intersezioni} \quad -\sqrt{41} \leq k \leq \sqrt{41}]$$

- 29) Disegna la curva di equazione  $y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$  e determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio  $y = \frac{1}{2}x + k$  intersecano la curva data e in quanti punti.

[1 intersezione  $-1 \leq k < 1$ ; 2 intersezioni  $1 \leq k \leq \sqrt{2}$ ]

- 30) Data l'ellisse di equazione  $4x^2 + y^2 - 8x = 0$  e detti  $B_{1,2}$  i vertici sull'asse maggiore, determina l'equazione della circonferenza passante per  $O(0;0)$ ,  $B_1$  e  $B_2$ .

[ $x^2 + y^2 - 5x = 0$ ]

- 31) Determina l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi di simmetria avente fuoco  $F_1(\frac{3}{2}; 0)$  e passante per  $P(\frac{3}{2}; 4)$ . Disegnala. Determina l'equazione della parabola avente fuoco  $F_1$  e direttrice l'asse  $y$ .

[ $\frac{4x^2}{81} + \frac{y^2}{18} = 1$ ;  $x = \frac{1}{3}y^2 + \frac{3}{4}$ ]

- 32) Determina l'equazione dell'ellisse avente fuochi  $F_1(0;0)$  e  $F_2(0;4)$  ed eccentricità  $e = \frac{1}{2}$ .

Dopo aver determinato l'ordinata del punto  $P$  di ascissa  $x=3$  appartenente all'ellisse e nel primo quadrante, determina l'equazione della retta  $t$  tangente in  $P$  all'ellisse ed indica con  $Q$  il punto di intersezione di  $t$  con l'asse  $x$ . Detto  $P'$  il simmetrico di  $P$  rispetto al centro dell'ellisse, calcola l'area del triangolo  $\triangle PQP'$ .

[ $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ ,  $P(3;4)$ ;  $t: 2x + y - 10 = 0$ ;  $A(\triangle PQP') = 16$ ]

- 33) Determina per quali valori di  $k$  le rette del fascio di equazione  $kx - y - 3k = 0$  intersecano, e in quanti punti, l'ellisse di equazione  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

[2 intersezioni  $-\frac{1}{\sqrt{5}} \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ ]

# Iperbole

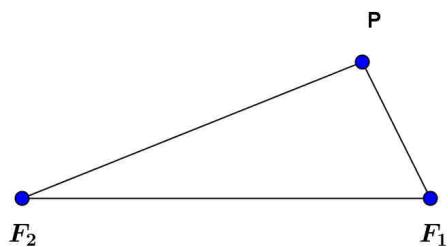


## Definizione

Dati due punti  $F_1$  e  $F_2$  si dice iperbole  $\mathfrak{I}$  il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da  $F_1$  e  $F_2$ , cioè tali che

$$|PF_1 - PF_2| = \text{costante}$$

$F_1$  e  $F_2$  si dicono **fuochi** dell'iperbole.



Osserviamo che deve essere  $\overline{F_1F_2} > \text{costante}$  perché nel triangolo  $F_1F_2P$  si ha  $\overline{F_1F_2} > |PF_1 - PF_2|$  poiché un lato è sempre maggiore della differenza degli altri due.

## Osservazioni

1) Cerchiamo di capire come risulta un'iperbole.

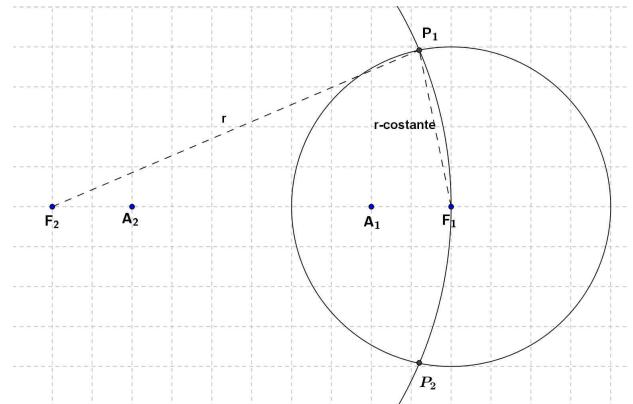
Consideriamo per esempio  $\overline{F_1 F_2} = 10$  e la costante = 6.

Per individuare qualche punto del luogo possiamo fare così : tracciamo una circonferenza di centro  $F_2$  e raggio  $r$  (per esempio  $r = 10$ ) e la intersechiamo con la circonferenza di centro  $F_1$  e raggio  $r - \text{costante}$  (quindi di raggio 4). I punti  $P_1$  e  $P_2$  individuati appartengono all'iperbole poiché

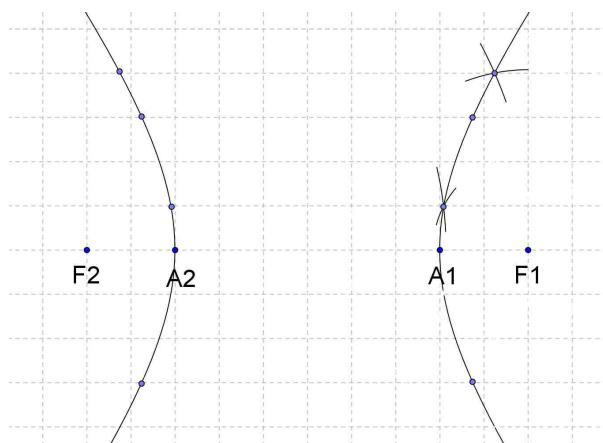
$$\overline{P_1 F_2} - \overline{P_1 F_1} = r - (r - \text{costante}) = \text{costante}$$

e analogamente per  $P_2$ .

Osserviamo poi che sul segmento  $F_1 F_2$  ci sono due punti  $A_1$  e  $A_2$  del luogo facilmente individuabili (vedi figura) e che  $\overline{A_1 A_2} = \text{costante} = 6$ : i punti  $A_1$  e  $A_2$  della curva sono detti “vertici” dell'iperbole.

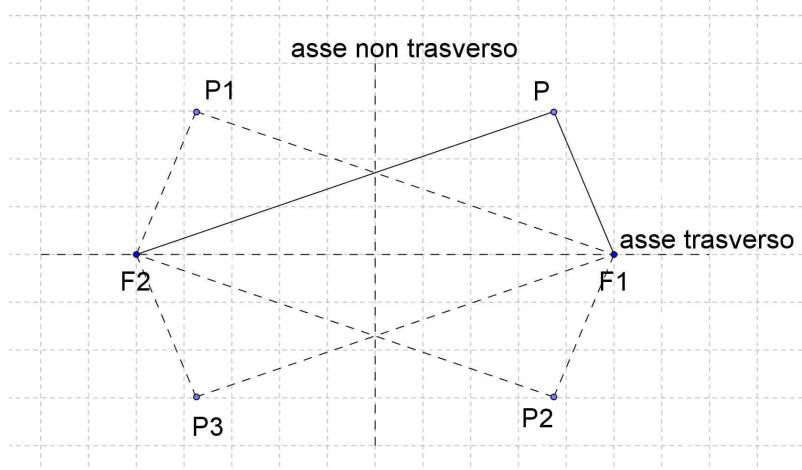


Se determiniamo vari punti avremo una curva come nella seguente figura:



2) L'iperbole è simmetrica rispetto alla retta per  $F_1$  e  $F_2$ , che viene chiamata “asse trasverso” poiché interseca la curva, e all'asse del segmento  $F_1 F_2$ , che viene detto “asse non trasverso” perché non interseca la curva.

Naturalmente il punto di incontro dei due assi di simmetria risulta *centro di simmetria* dell'iperbole



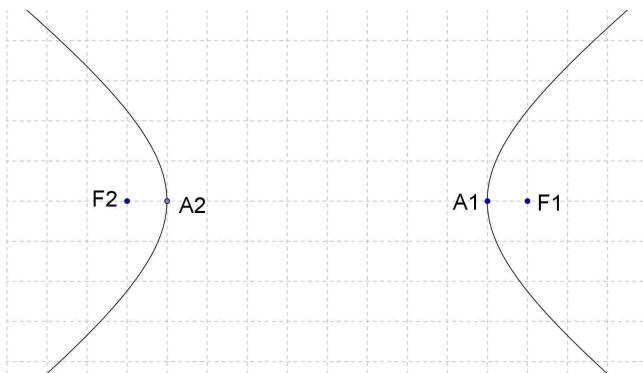
3) L'iperbole non è "limitata", come l'ellisse o la circonferenza, poiché ci sono punti della curva anche molto lontani dai fuochi dato che nella definizione del luogo è in gioco la differenza delle distanze da  $F_1$  e  $F_2$ .

4) La "forma" dell'iperbole dipende dal rapporto tra  $\overline{F_1 F_2}$  e la costante.

Questo rapporto viene chiamato **eccentricità**  $e$  dell'iperbole e risulta sempre maggiore di 1 dato che  $\overline{F_1 F_2} > \text{costante}$

$$e = \frac{\overline{F_1 F_2}}{\text{costante}} = \frac{\overline{F_1 F_2}}{\overline{A_1 A_2}}$$

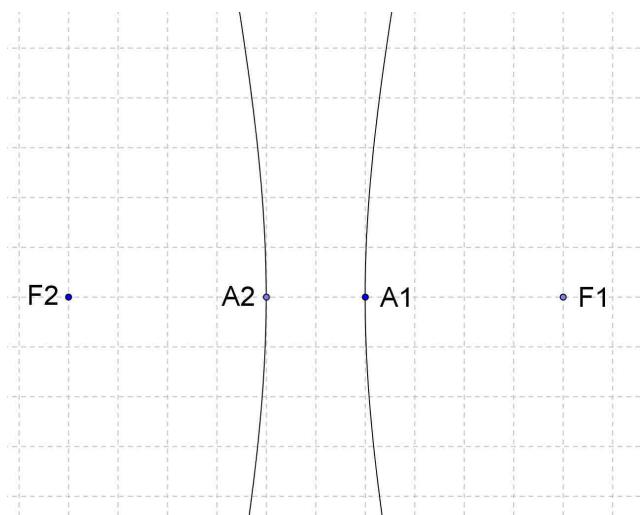
Se  $e$  è di poco maggiore di 1 (cioè se  $\overline{F_1 F_2}$  è di poco maggiore di  $\overline{A_1 A_2}$ ) si hanno iperboli come nella figura seguente:



**Nota:** se  $\overline{F_1 F_2} = \overline{A_1 A_2} = \text{costante}$  cioè se  $e = 1$  l'iperbole "degenera" nelle due semirette in figura.



Se  $e$  è molto maggiore di 1, cioè se  $\overline{F_1 F_2}$  è molto maggiore di  $\overline{A_1 A_2}$ , si hanno iperboli come nella figura seguente:



## L'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

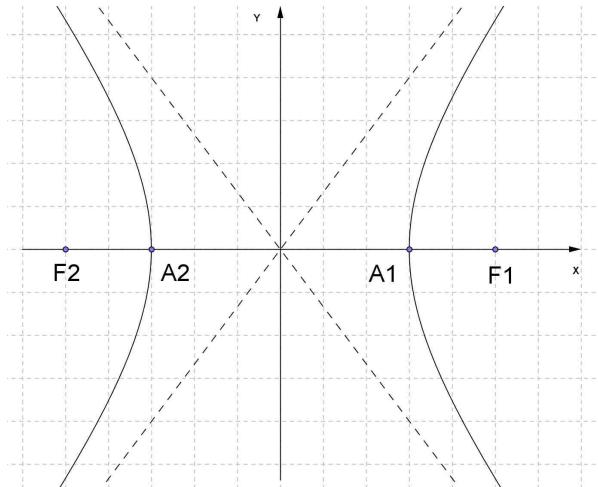
### Iperbole con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che gli assi di simmetria dell'iperbole coincidano con gli assi coordinati.

Si possono presentare due casi: l'asse trasverso (quello su cui si trovano fuochi e vertici) è l'asse x oppure è l'asse y.

#### a) Asse trasverso coincidente con l'asse x

Determiniamo l'equazione dell'iperbole considerando per esempio  $F_{1,2}(\pm 5; 0)$  e la costante uguale a 6.



Se  $P(x; y) \in \mathfrak{I}$  dovrà essere  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 6$  cioè  
 $\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$(x-5)^2 + y^2 = (x+5)^2 + y^2 + 36 \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$20x + 36 = \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$5x + 9 = \pm 3 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$25x^2 + 81 + 90x = 9(x^2 + 10x + 25 + y^2)$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

Dividendo entrambi i membri per 144 otteniamo:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Osserviamo che i vertici sono  $A_{1,2}(\pm 3; 0)$  e che per determinare le coordinate degli altri punti possiamo ricavare y:

$$y = \pm \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^2 - 9}$$

- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- Iperbole -

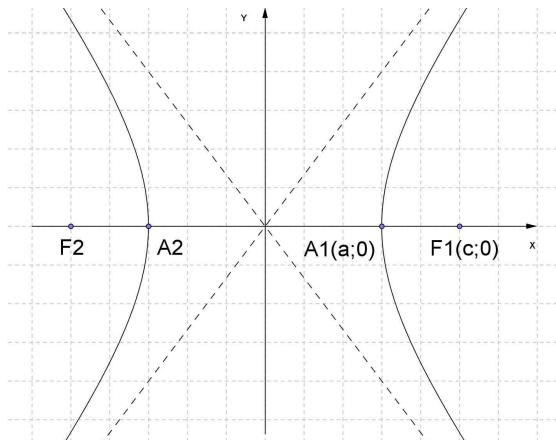
Osserviamo che quando si considera l'ascissa  $x$  molto grande in valore assoluto si ha :

$$\sqrt{x^2 - 9} \cong |x| \text{ e quindi } y = \pm \frac{4}{3}x$$

cioè l'iperbole tende ad avvicinarsi alle rette  $y = \pm \frac{4}{3}x$ .

Queste rette sono dette “*asintoti*” dell'iperbole dal greco  $\alpha - \sigma\nu\nu - \tau\alpha\nu\gamma\omega$  ( non-insieme-tocco ) perché l'iperbole, pur avvicinandosi molto a queste rette, non le interseca.

Generalizziamo: se indichiamo con  $2c$  la distanza  $\overline{F_1 F_2}$  e con  $2a$  la distanza  $\overline{A_1 A_2} = \cos \tan te$  avremo:



Se  $P(x; y) \in \mathfrak{I}$  dovrà essere  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$  cioè  

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a \\ (x-c)^2 + y^2 &= (x+c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ 4cx + 4a^2 &= \pm 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ cx + a^2 &= \pm a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ c^2x^2 + a^4 + 2ca^2x &= a^2 \cdot (x^2 + c^2 + 2cx + y^2) \\ (c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

Poiché  $c > a$   $c^2 - a^2 > 0$  e allora possiamo indicarlo come un quadrato cioè porre  $c^2 - a^2 = b^2$

Sostituendoabbiamo:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividendo entrambi i membri per  $a^2b^2$  otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{equazione dell'iperbole con } F_{1,2}(\pm c; 0) \ A_{1,2}(\pm a; 0) \ b^2 = c^2 - a^2 \\ \text{eccentricità } e = \frac{c}{a} \end{array}$$

Per determinare l'equazione degli asintoti ricaviamo la  $y$  dall'equazione dell'iperbole.  
Dopo alcuni semplici passaggi otteniamo:

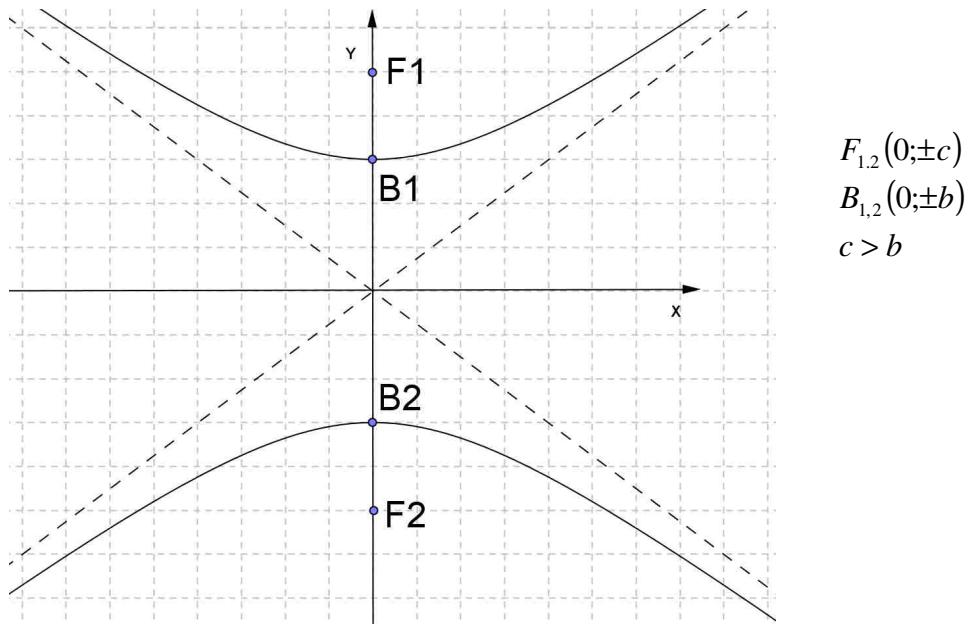
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Quindi se  $|x|$  è grande  $\sqrt{x^2 - a^2} \approx |x|$  e  $y \approx \pm \frac{b}{a} x$  cioè gli asintoti hanno equazione

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

### b) Asse trasverso coincidente con l'asse y

I vertici si trovano sull'asse y : se li indichiamo con  $B_{1,2}(0; \pm b)$  avremo:



Se  $P(x; y) \in \mathfrak{I}$  dovrà essere  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2b$  e sviluppando si ottiene , posto  $c^2 - b^2 = a^2$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

equazione dell'iperbole con  $F_{1,2}(0; \pm c)$   $B_{1,2}(0; \pm b)$   $a^2 = c^2 - b^2$

eccentricità  $e = \frac{c}{b}$

asintoti :  $y = \pm \frac{b}{a} x$

## Problemi

### I) Disegnare un'iperbole di equazione assegnata

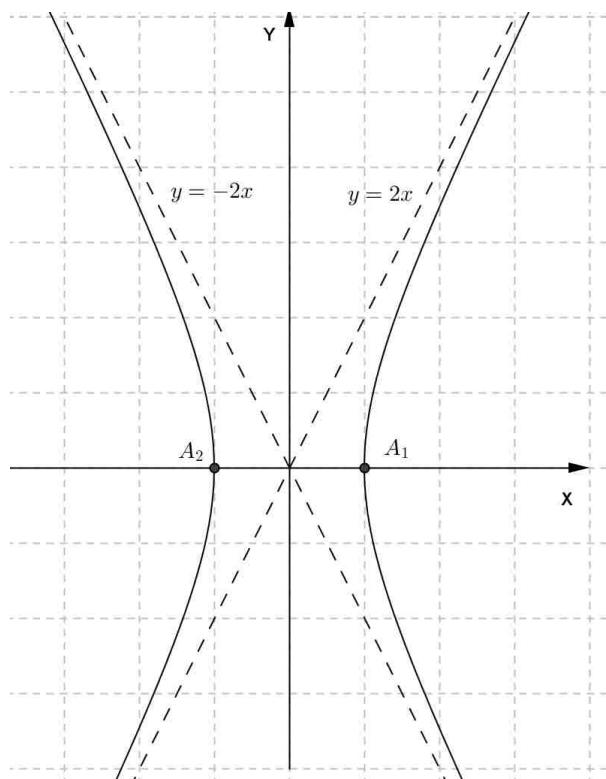
Per disegnare in modo “approssimato” un’iperbole disegniamo i vertici e gli asintoti.

**Esempio :** disegniamo l’iperbole di equazione  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ .

Essendo  $a = 1$ ,  $b = 2$  e asse trasverso l’asse x, abbiamo  $A_{1,2}(\pm 1; 0)$ , asintoti :  $y = \pm 2x$ .

Disegniamo la posizione dei vertici e tratteggiamo gli asintoti.

Infine disegniamo l’iperbole.



Se l’equazione non si presenta in forma “normale” faremo dei passaggi per ricondurla alla forma normale (come per l’ellisse).

### Esempi

a)  $x^2 - 16y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

b)  $4x^2 - y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$

c)  $9x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}} - \frac{y^2}{4} = 1$

## II) Determinare l'equazione di un'iperbole

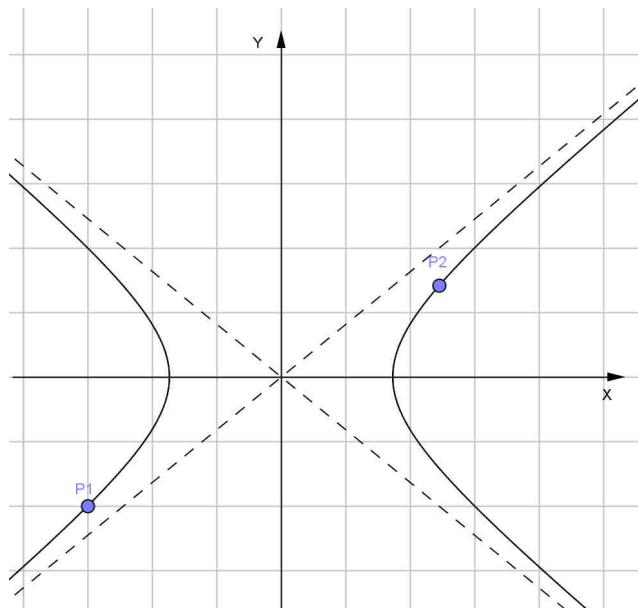
- a) Conoscenza di due punti dell'iperbole (non simmetrici rispetto agli assi o all'origine) e del suo asse focale.

Esempio: asse focale coincidente con l'asse x ,  $P_1(-3;-2)$   $P_2(\sqrt{6};\sqrt{2})$ .

Poiché l'asse focale è l'asse x l'equazione sarà del tipo  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Sostituendo avremo:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{6}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases} \dots \rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 2 \end{cases}$$



- b) Conoscenza dei fuochi e dei vertici

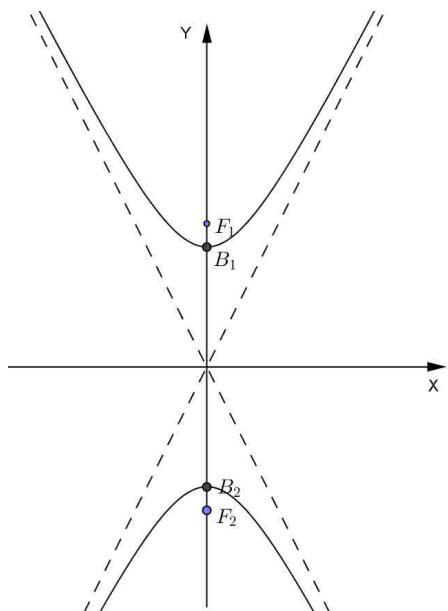
Esempio:  $B_{1,2}(0;\pm 4)$   $F_{1,2}(0;\pm 2\sqrt{5})$

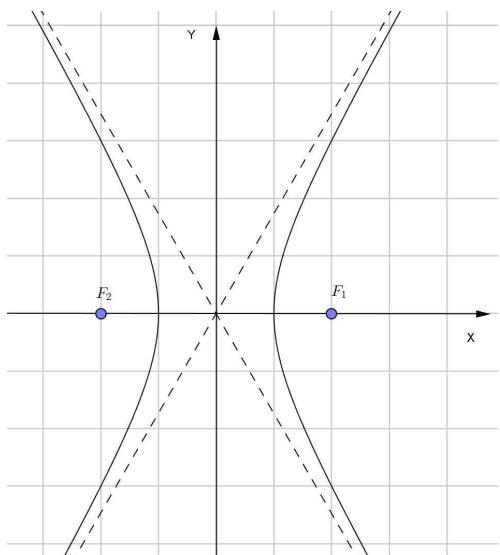
L'equazione sarà del tipo :  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Poiché  $b = 4$  e  $c = 2\sqrt{5}$

$a^2 = c^2 - b^2 = 20 - 16 = 4$  e quindi

$$\mathfrak{I}: \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$





c) Conoscenza dei fuochi e dell'eccentricità

**Esempio:**  $F_{1,2}(\pm 2; 0)$   $e = 2$

Poiché in questo caso  $e = \frac{c}{a}$  sarà  $2 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 1$

Inoltre  $b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$  e quindi

$$\mathfrak{I}: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

d) Conoscenza dei vertici e dell'eccentricità

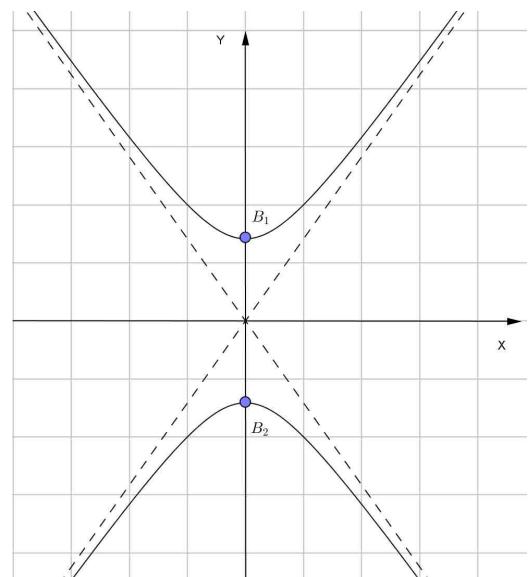
**Esempio:**  $B_{1,2}(0; \pm \sqrt{2})$   $e = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Poiché l'asse trasverso è l'asse y sarà  $e = \frac{c}{b}$  e quindi

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

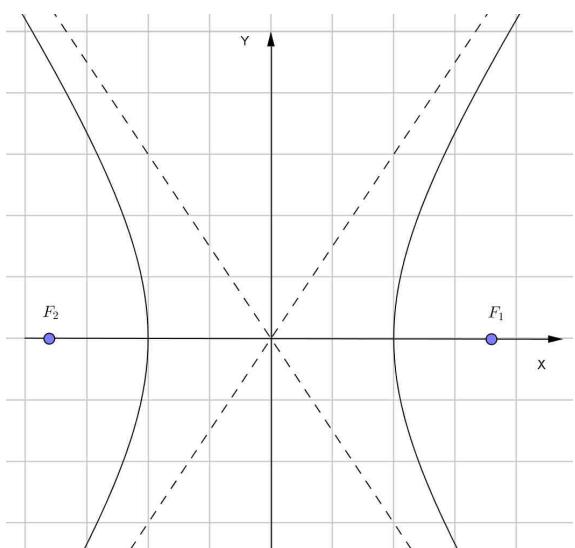
Inoltre  $a^2 = c^2 - b^2 = 3 - 2 = 1$  e quindi

$$\mathfrak{I}: \frac{y^2}{2} - x^2 = 1$$



e) Conoscenza dei fuochi e degli asintoti

**Esempio:**  $F_{1,2}(\pm \sqrt{13}; 0)$  asintoti:  $y = \pm \frac{3}{2}x$



$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ \frac{9}{4}a^2 = 13 - a^2 \rightarrow a^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

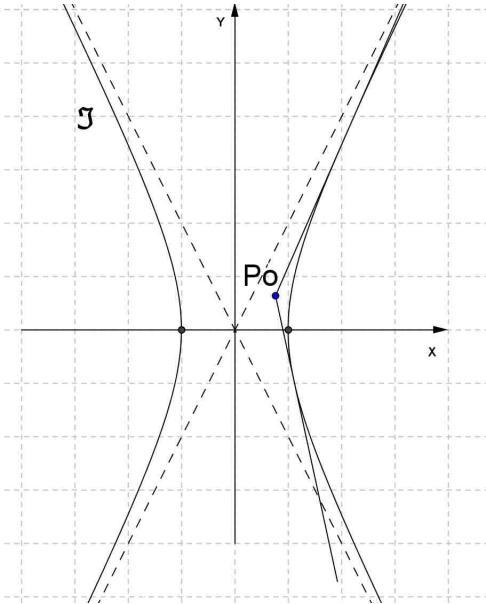
Quindi abbiamo:

$$\mathfrak{I}: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

## Rette tangenti ad un'iperbole

Consideriamo un'iperbole  $\mathfrak{I}$  con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati e un punto  $P_o$  assegnato.

- a) Se  $P_o \notin \mathfrak{I}$  ed è “esterno” a  $\mathfrak{I}$  (vedi figura) esisteranno due rette tangenti ad  $\mathfrak{I}$  uscenti da  $P_o$  e per determinarle si procederà con il solito metodo (vedi ellisse).



- b) Se  $P_o \in \mathfrak{I}$  avremo una sola tangente come che può essere determinata come in a) oppure utilizzando la “formula dello sdoppiamento” (la dimostrazione è analoga a quella svolta per l'ellisse).

Se  $\mathfrak{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  e  $P_o(x_o; y_o) \in \mathfrak{I}$  l'equazione della tangente è

$$t : \frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

Analogamente se  $\mathfrak{I} : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  avremo  $\frac{y_o y}{b^2} - \frac{x_o x}{a^2} = 1$ .

**Esempio:**  $\mathfrak{I} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$  ,  $P_o\left(5; -\frac{3}{2}\right) \in \mathfrak{I}$

$$t : \frac{5x}{16} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{4} = 1 \rightarrow 5x + 6y = 16$$

## Iperbole traslata

Sia  $\mathfrak{I}$  un'iperbole i cui **assi di simmetria** non coincidono con gli assi coordinati ma sono **paralleli agli assi del sistema di riferimento** che per brevità chiameremo iperbole “traslata”.

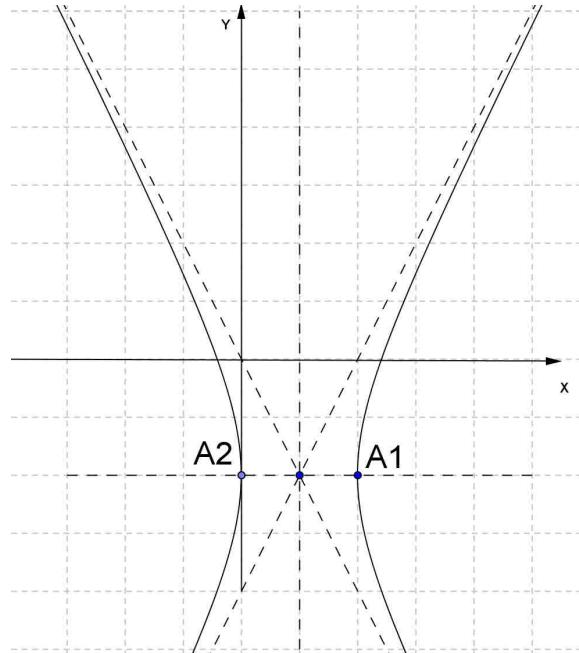
Sia  $C(x_c; y_c)$  il centro dell'iperbole (gli assi di simmetria sono quindi  $x = x_c$  ,  $y = y_c$  ).

Analogamente a quanto visto per l'ellisse, se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine in C avremo che l'equazione di  $\mathfrak{I}$  risulterà alla fine:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(y-y_c)^2}{b^2} - \frac{(x-x_c)^2}{a^2} = 1$$

**Esempio:**  $\mathfrak{I} : (x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

Il centro è  $C(1;-2)$  ,  $a = 1$  ,  $b = 2$  ; asse focale parallelo all'asse x.



I vertici sono  $A_1(2;-2)$   $A_2(0;-2)$  e gli asintoti hanno equazione  $y + 2 = \pm 2 \cdot (x - 1)$  .

## Problemi

### Iperbole traslata

#### 1) Disegnare un'iperbole traslata di equazione assegnata

Se l'equazione è nella forma

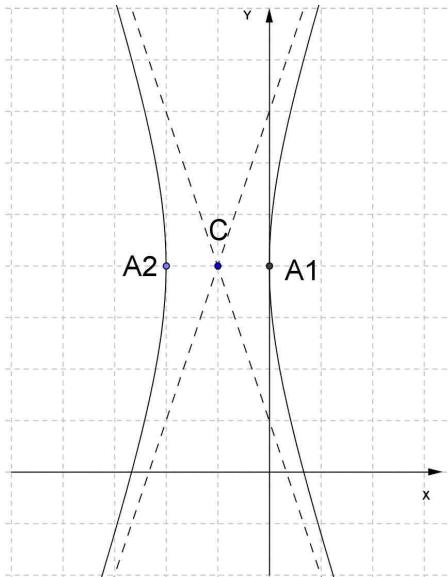
$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(y-y_c)^2}{b^2} - \frac{(x-x_c)^2}{a^2} = 1$$

È molto semplice.

**Esempio:**

$$\mathfrak{I} : (x+1)^2 - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

Osserviamo che  $C(-1;4)$   $a=1$   $b=3$



Se invece l'equazione è stata "sviluppata" occorre riportarla nella forma in cui si individuano il centro,  $a$  e  $b$  con il metodo già visto per l'ellisse.

Esempio:  $\mathfrak{I} : 4x^2 - y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$

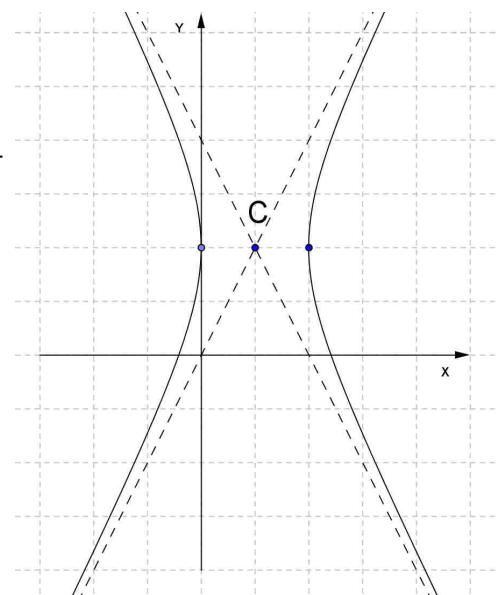
$$4(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) = 4$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) = 4 + 4 - 4$$

$$4(x-1)^2 - (y-2)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Quindi  $C(1;2)$   $a=1$   $b=2$ .

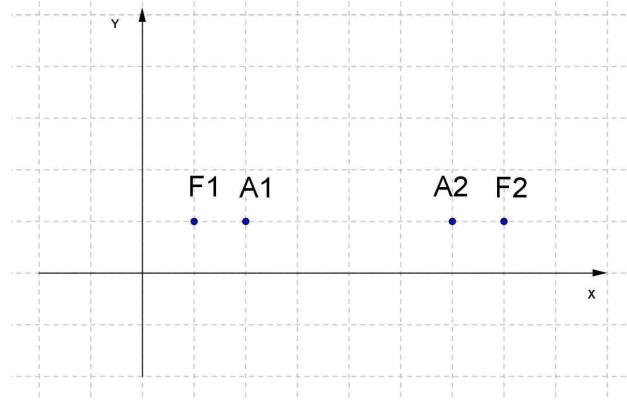


## 2) Determinare l'equazione di un'iperbole traslata

Vediamo qualche esempio:

a) *Conoscenza dei fuochi e dei vertici*

**Esempio:**  $F_1(1;1)$   $F_2(7;1)$   $A_1(2;1)$   $A_2(6;1)$



Dai fuochi possiamo ricavare il centro  $C(4;1)$  e  $c = 3$ .

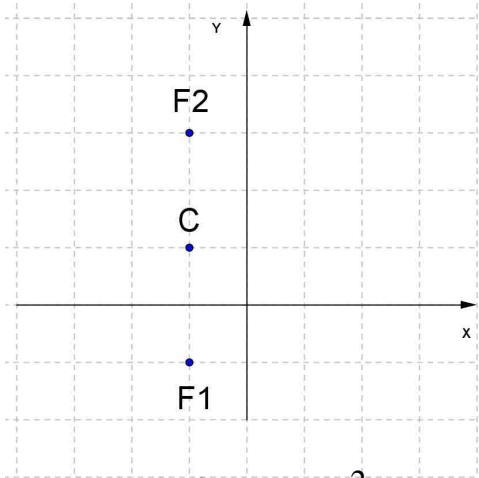
Osservando la posizione dei vertici abbiamo  $a = 2$ .

Quindi  $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$ .

$$\text{In conclusione: } \mathfrak{I} : \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

b) *Conoscenza dei fuochi e dell'eccentricità*

**Esempio:**  $F_1(-1;-1)$   $F_2(-1;3)$   $e = 2$



Sarà  $C(-1;1)$  e  $c = 2$

$$\text{Essendo l'asse focale parallelo all'asse } y \text{ avremo } e = \frac{c}{b} \text{ cioè } 2 = \frac{2}{b} \Rightarrow b = 1.$$

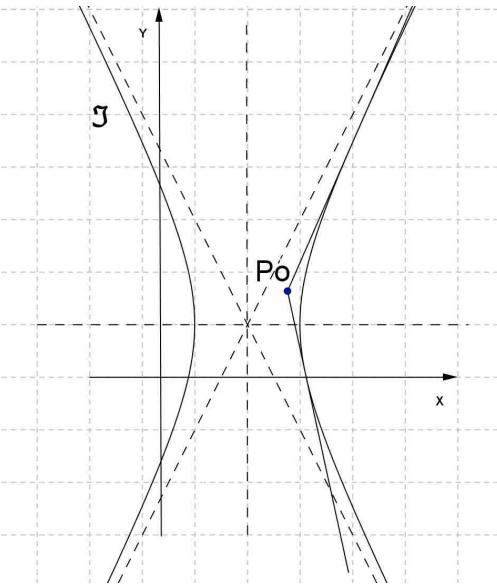
Inoltre  $a^2 = c^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$  e quindi:

$$\mathfrak{I} : (y-1)^2 - \frac{(x+1)^2}{3} = 1$$

### Rette tangenti ad un'iperbole traslata

Sia  $\mathfrak{I}$  un'iperbole con assi paralleli agli assi coordinati e  $P_o(x_o; y_o)$  un punto assegnato.

- a) Se  $P_o \notin \mathfrak{I}$  ed è “esterno” a  $\mathfrak{I}$  (vedi figura) si determinano le equazioni delle due rette tangenti a  $\mathfrak{I}$  uscenti da  $P_o$  con il solito metodo.



- b) Se  $P_o \in \mathfrak{I}$  possiamo utilizzare la “formula dello sdoppiamento” (vedi ellisse con assi paralleli agli assi coordinati).

**Esempio:**  $\mathfrak{I} : \frac{(x-x_C)^2}{a^2} - \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1$   $P_o(x_o; y_o) \in \mathfrak{I}$

$$t : \frac{(x_o - x_C) \cdot (x - x_C)}{a^2} - \frac{(y_o - y_C) \cdot (y - y_C)}{b^2} = 1$$

Quindi se per esempio  $\mathfrak{I} : (y-1)^2 - \frac{(x+1)^2}{3} = 1$  e  $P_o(2;3) \in \mathfrak{I}$

$$t : (3-1) \cdot (y-1) - \frac{(2+1) \cdot (x+1)}{3} = 1$$

$$2(y-1) - (x+1) = 1$$

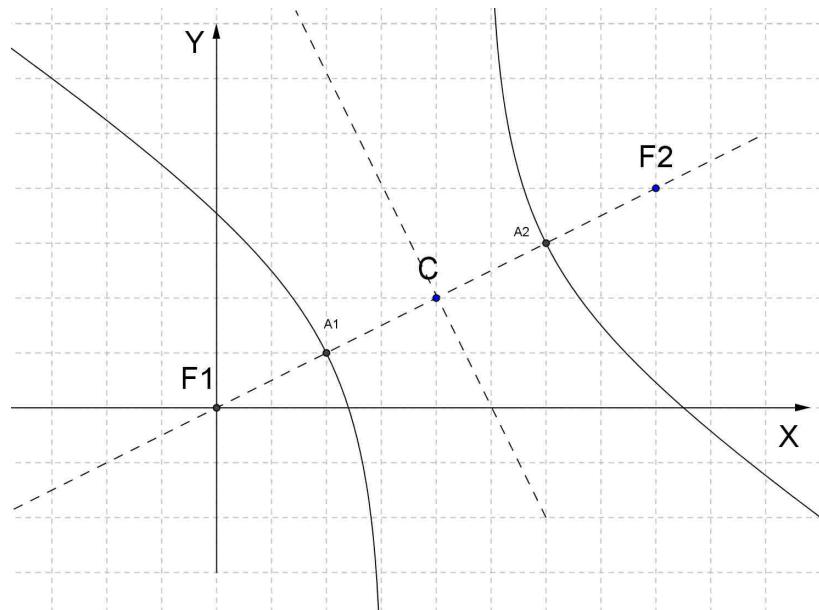
$$x - 2y + 4 = 0$$

### Iperbole con assi di simmetria non paralleli agli assi coordinati

Facciamo solo un esempio.

Determinare il luogo dei punti  $P(x;y)$  del piano tali che

$$|PF_1 - PF_2| = 2\sqrt{5} \text{ dove } F_1(0;0) \text{ e } F_2(8;4)$$



$$P(x;y) : \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-8)^2 + (y-4)^2} = \pm 2\sqrt{5}$$

Sviluppando i calcoli si determina l'equazione di  $\mathfrak{I}$ .

Osserviamo che:

- il centro è  $C(4;2)$
- gli assi di simmetria hanno equazione  $y = \frac{1}{2}x$  e  $y - 2 = -2(x - 4)$

Inoltre abbiamo che la semidistanza focale è  $c = 2\sqrt{5}$  e che la distanza tra i vertici è  $\overline{A_1 A_2} = 2\sqrt{5}$ .

I vertici sono  $A_1(2;1)$  e  $A_2(6;3)$ .

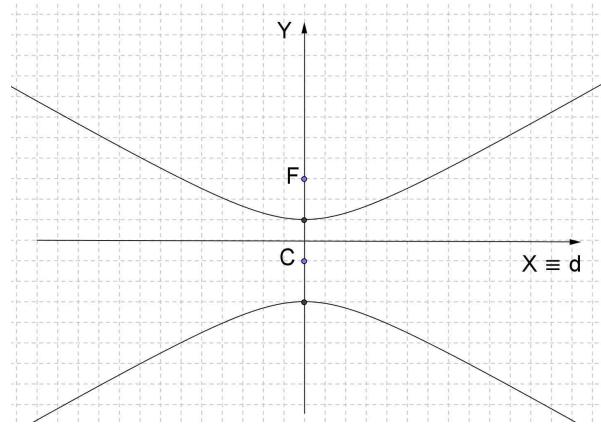
### Un'altra definizione di iperbole

Avevamo visto che si poteva dare una definizione dell'ellisse più "simile" a quella data per la parabola. Vediamo se la stessa cosa si può fare per l'iperbole.

Consideriamo il seguente problema: *Data una retta  $d$  e un punto  $F \notin d$ , determinare il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano tali che*

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = 2$$

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che asse  $x \equiv d$  e che  $F(0;1)$



$P(x;y)$  appartiene al luogo  $\Leftrightarrow \overline{PF}^2 = 4 \cdot (\text{dist}(P,\text{asse}x))^2$  cioè

$$x^2 + (y-1)^2 = 4y^2 \rightarrow \dots \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Abbiamo quindi trovato un'iperbole di centro  $C\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ , asse focale  $\equiv$  asse  $y$ ,  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $b = \frac{2}{3}$ .

Quindi  $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{16}{9} \rightarrow c = \frac{4}{3}$ .

Perciò  $F(0;1)$  è un fuoco dell'iperbole e l'eccentricità risulta  $e = \frac{c}{b} = 2$ .

In generale si può dimostrare che, data una retta  $d$  e un punto  $F \notin d$ , il luogo dei punti  $P$  tali che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = e \quad \text{dove } e \text{ è una costante } > 1$$

risulta un'iperbole avente un fuoco in  $F$  ed eccentricità  $e$ .

In conclusione il luogo dei punti  $P$  tali che  $\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = k$  risulta:

- una parabola se  $k = 1$
- un'ellisse se  $0 < k < 1$  ( $k$  è l'eccentricità dell'ellisse)
- un'iperbole se  $k > 1$  ( $k$  è l'eccentricità dell'iperbole)

## IPERBOLE EQUILATERA

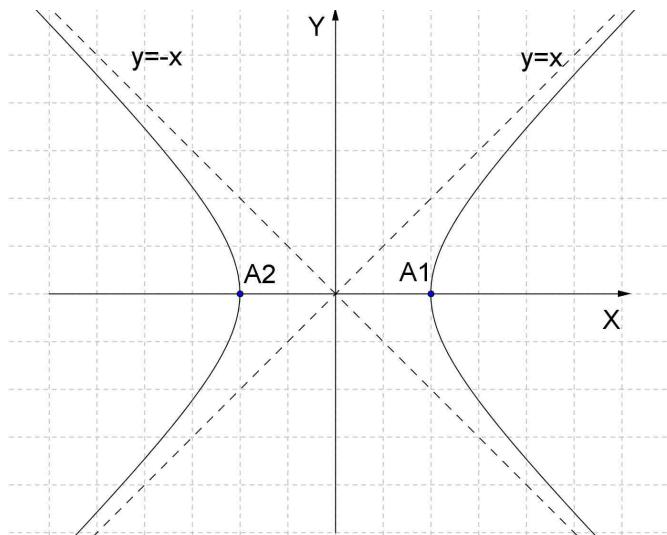
Un'iperbole si dice equilatera quando  $a = b$  : gli asintoti hanno quindi inclinazione  $\pm 1$  e risultano perpendicolari. Viceversa se gli asintoti sono perpendicolari abbiamo che  $a = b$  poiché se

$$\frac{b}{a} \cdot \left( -\frac{b}{a} \right) = -1 \Rightarrow -\frac{b^2}{a^2} = -1 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow a = b$$

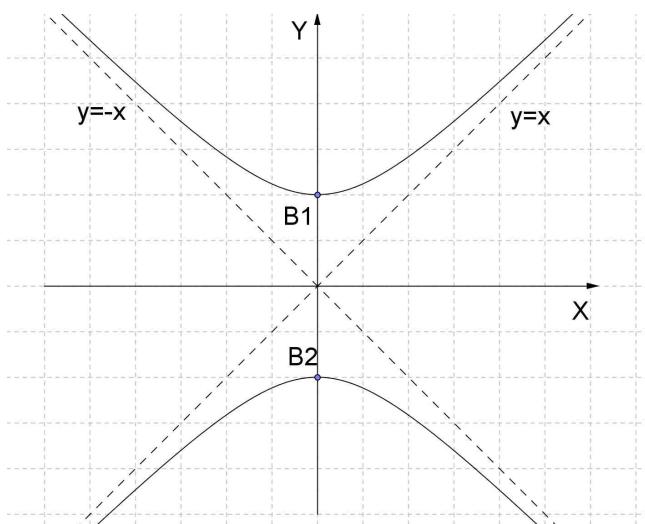
Osserviamo che per un'iperbole equilatera risulta  $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}a \Rightarrow e = \sqrt{2}$  cioè l'eccentricità è sempre  $e = \sqrt{2}$ .

L'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria è quindi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{se l'asse trasverso è l'asse x}$$



oppure  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = a^2 \quad \text{se l'asse trasverso è l'asse y}$



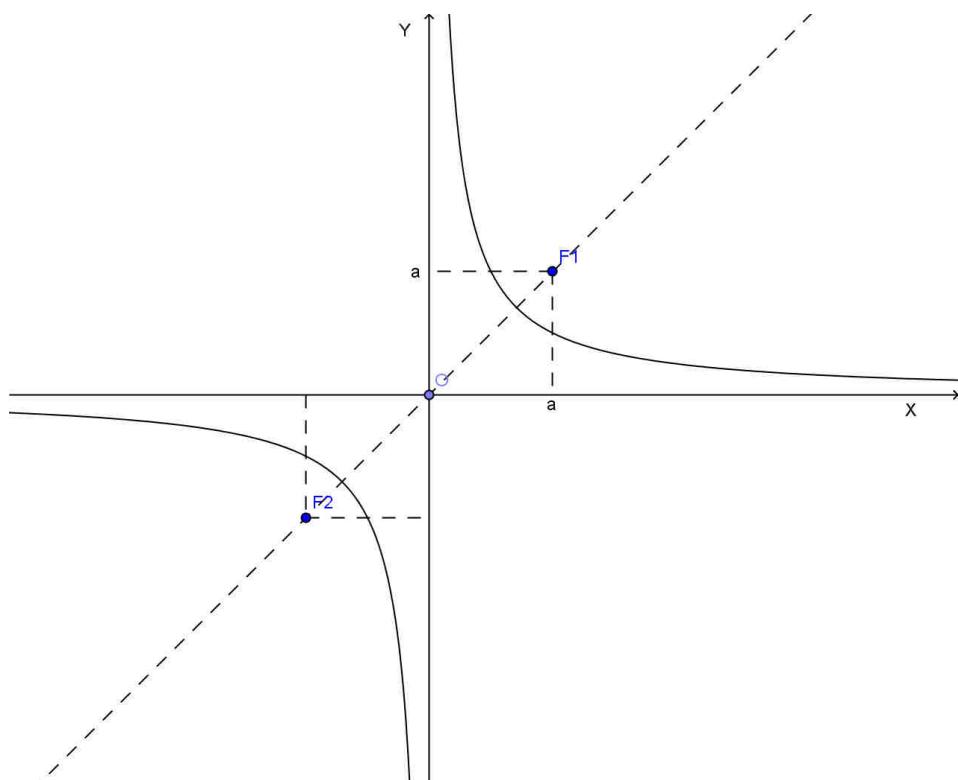
### Equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

Se l'iperbole è equilatera possiamo prendere i suoi asintoti come sistema di riferimento: vediamo come risulta l'equazione in questo caso.

Consideriamo l'iperbole equilatera in figura: i fuochi si trovano sulla retta  $y = x$  e le coordinate dei fuochi in questo sistema di riferimento saranno

$$F_1(a; a) \quad F_2(-a; -a)$$

poiché  $c = \sqrt{2}a$  e l'ascissa e l'ordinata dei fuochi rappresentano la misura del lato di un quadrato di diagonale  $c$ .



Applicando quindi la definizione di iperbole come luogo geometrico abbiamo:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$$

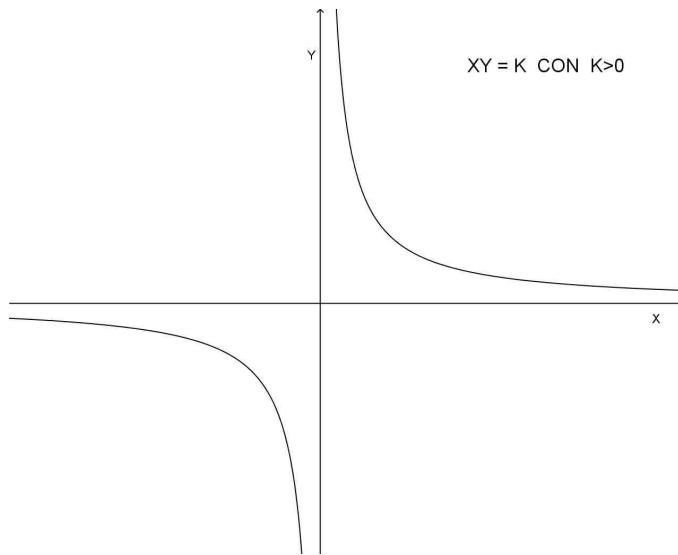
cioè  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = \pm 2a$

- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- Iperbole -

Sviluppando con passaggi analoghi a quelli visti quando abbiamo ricavato l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria otteniamo

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

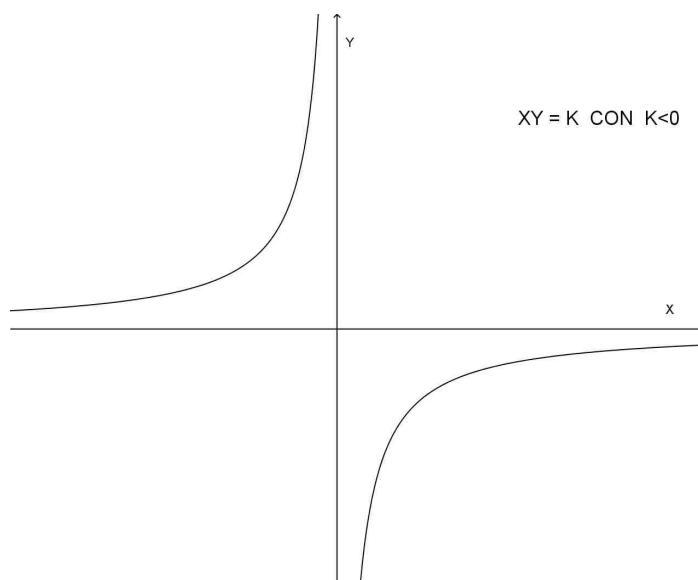
cioè un'equazione del tipo  $xy = k$  con  $k > 0$



Se i fuochi si trovano sulla retta  $y = -x$  otteniamo, con analoghi passaggi

$$xy = -\frac{a^2}{2}$$

cioè un'equazione del tipo  $xy = k$  con  $k < 0$



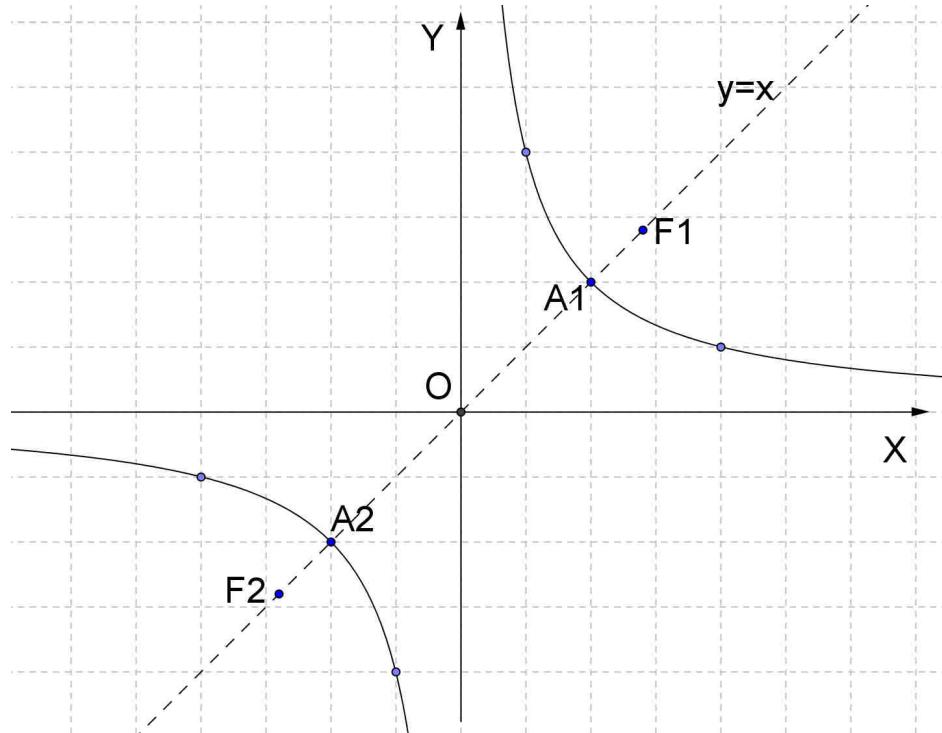
## Problemi

### Iperbole equilatera

- 1) Disegna l'iperbole  $xy = 4$  e determinane i vertici e i fuochi.

Per disegnare  $xy = 4$  possiamo determinare qualche punto appartenente all'iperbole: poiché  $y = \frac{4}{x}$  si ottiene per esempio  $(1;4)$   $(2;2)$   $(4;1)$ .

Naturalmente, essendo la curva simmetrica rispetto all'origine avremo anche  $(-1;-4)$   $(-2;-2)$   $(-4;-1)$ .



Per determinare i vertici basta intersecare la curva con la retta  $y = x$  (asse di simmetria trasverso):

$$\begin{cases} y = x \\ xy = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \pm 2 \end{cases} \quad A_1(2;2) \quad A_2(-2;-2)$$

Poiché  $\overline{OA}_1 = a = 2\sqrt{2}$  e le coordinate dei fuochi, in questo sistema di riferimento, sono  $F_1(a;a)$   $F_2(-a;-a)$  avremo:

$$F_1(2\sqrt{2};2\sqrt{2}) \quad F_2(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$$

**2)** Determina l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti sapendo che passa per il punto  $P(1;2)$ .

(\*) Osserviamo che per determinare l'equazione di  $\mathfrak{I} : xy = k$  è sufficiente una condizione.

Basterà sostituire in  $xy = k$  le coordinate  $P(1;2)$ :

$$1 \cdot 2 = k \Rightarrow k = 2$$

e quindi

$$\mathfrak{I} : xy = 2$$

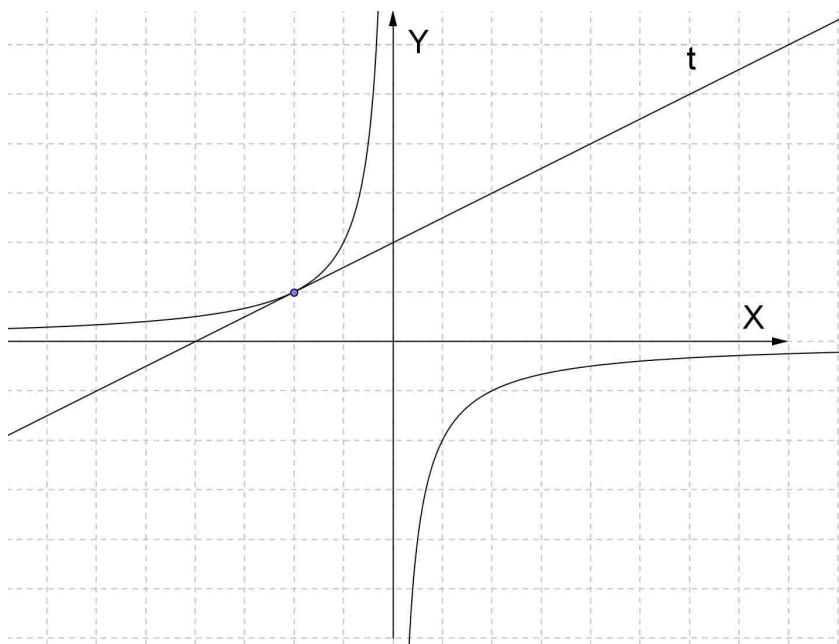
**3)** Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti sapendo che è tangente alla retta di equazione  $t : x - 2y + 1 = 0$ .

In questo caso basterà impostare la “condizione di tangenza”:

$$\begin{cases} xy = k \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2y-1) \cdot y = k \\ x = 2y-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y^2 - y - k = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 8k \\ ..... \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$$

Quindi  $\mathfrak{I} : xy = -\frac{1}{8}$



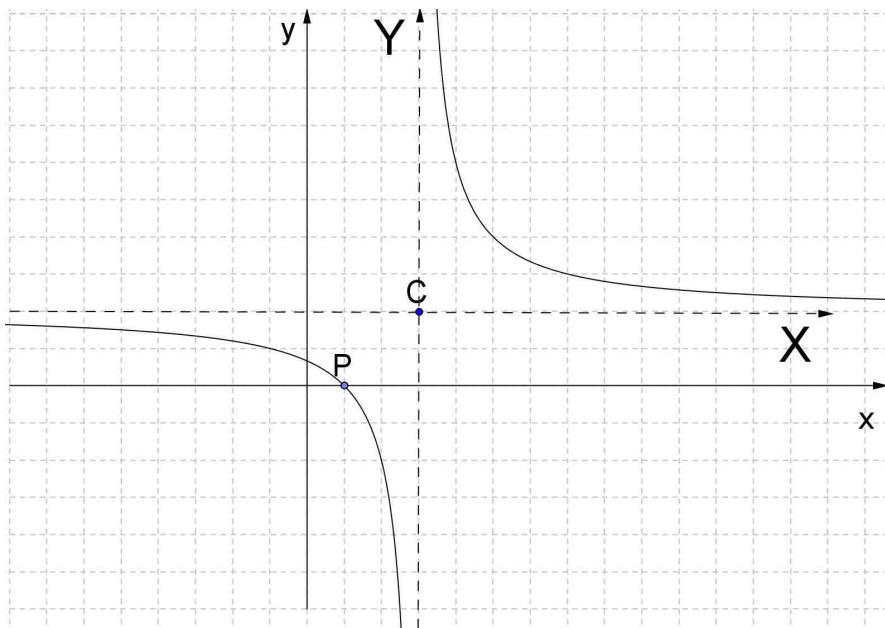
## Iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati Funzione omografica

Abbiamo visto che l'equazione dell'iperbole equilatera con asintoti coincidenti con gli assi coordinati è del tipo  $xy = k$ .

E se gli asintoti non coincidono con gli assi coordinati ma sono comunque paralleli ad essi?

Vediamo un esempio: supponiamo che il centro dell'iperbole sia  $C(3;2)$  e che gli asintoti abbiano equazione  $x = 3$ ,  $y = 2$ .

Supponiamo inoltre che l'iperbole passi per il punto  $P(1;0)$  (vedi figura).



Se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine in  $C$  cioè:

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

l'iperbole avrà equazione  $XY = 4$ : per determinare  $k=4$  basta sostituire in  $XY = k$  le coordinate di  $P$  che nel nuovo sistema di riferimento sono  $(-2;-2)$ .

Quindi

$$\mathfrak{I} : (x - 3) \cdot (y - 2) = 4$$

E sviluppando avremo:

$$xy - 2x - 3y + 6 = 4 \rightarrow y(x - 3) = 2x - 2 \rightarrow y = \frac{2x - 2}{x - 3}$$

In generale, quindi, l'equazione di un'iperbole equilatera di centro  $C(x_c; y_c)$  con asintoti paralleli agli assi coordinati avrà equazione:

$$(x - x_c) \cdot (y - y_c) = k$$

che sviluppata dà un'equazione del tipo:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Questa funzione viene anche chiamata **funzione omografica**.

Osserviamo che :

a)  $c \neq 0$  poiché se  $c = 0$  otteniamo una retta;

b)  $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$  poiché se  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = m \Rightarrow y = m \cdot \frac{(cx + d)}{cx + d}$  che per  $x \neq -\frac{d}{c}$  dà la retta  $y = m$

Ma se abbiamo l'equazione  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  come possiamo determinare il centro dell'iperbole?

Torniamo all'esempio iniziale: sviluppando i calcoli avevamo ottenuto  $y = \frac{2x - 2}{x - 3}$ .

- Osserviamo che questa funzione è definita per  $x \neq 3$  (per  $x=3$  il denominatore si annulla) e quindi  $x = 3$  sarà l'ascissa del centro cioè  $x = 3$  sarà l'asintoto verticale (infatti non c'è nessun punto dell'iperbole con ascissa 3).
- Inoltre quando  $x$  è grande in valore assoluto i termini  $b = -2$  e  $d = -3$  nell'equazione diventano trascurabili nel calcolo del valore di  $y$  e  $y \cong \frac{2x}{x}$  e quindi semplificando la  $x$  si ottiene  $y \cong 2$ . Quindi  $y = 2$  è l'asintoto orizzontale cioè  $y = 2$  è l'ordinata del centro: i rami dell'iperbole, quando  $x \rightarrow +\infty$  o  $x \rightarrow -\infty$  si avvicinano alla retta  $y = 2$ .

In generale quindi se abbiamo la funzione omografica  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  poiché per  $x = -\frac{d}{c}$  il denominatore si annulla e per  $x \rightarrow \infty$   $y \cong \frac{a}{c}$  il centro C avrà coordinate

$$C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

## Problemi

### Funzione omografica

**1)** Disegna la funzione omografica di equazione:

$$y = \frac{2x-4}{1-x}$$

Si ricava subito, da quanto abbiamo detto, che il centro è  $C(1;-2)$ .

Possiamo quindi disegnare gli asintoti che saranno le rette di equazione  $x = 1$  e  $y = -2$ .

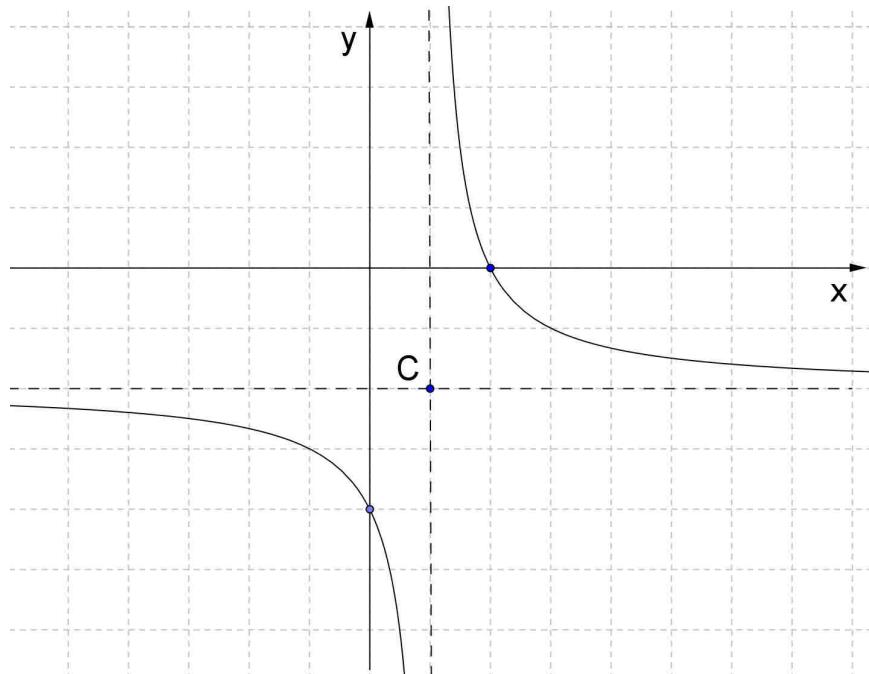
Per disegnare l'iperbole, dopo aver trovato il centro e tracciato gli asintoti, possiamo determinare per esempio l'intersezione dell'iperbole con l'asse x ponendo  $y = 0$ .

$$\begin{cases} y = \frac{2x-4}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Conoscendo il punto  $(2;0)$ , per la simmetria rispetto a C, ricaviamo che anche  $(0;-4)$  apparterrà all'iperbole (del resto ponendo  $x = 0$  si ottiene proprio  $y = -4$ ).

Inoltre possiamo ricavare facilmente anche altri punti (vedi figura) ricordando che rispetto al centro l'equazione dell'iperbole sarebbe stata  $XY = k$  e in questo caso abbiamo  $k = 2$ .

Otteniamo in conclusione il seguente disegno:



- 2)** Per determinare l'equazione di una funzione omografica (iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati) occorrono *tre condizioni indipendenti*.

Questo risulta chiaro se scriviamo l'equazione nella forma

$$\mathfrak{I} : (x - x_C) \cdot (y - y_C) = k \quad (\text{in cui abbiamo tre parametri } x_C, y_C, k)$$

oppure se consideriamo l'equazione  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ma dividiamo numeratore e denominatore per  $c$  (ricordiamo che  $c \neq 0$ ) ottenendo

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} \quad \text{cioè} \quad y = \frac{a'x + b'}{x + d'} \quad (\text{in cui compaiono solo i tre parametri } a', b', d')$$

Quindi possiamo anche scrivere l'equazione della funzione omografica nella forma

$$y = \frac{a'x + b'}{x + d'}$$

Vediamo qualche esempio.

- a)** *Conoscenza del centro C dell'iperbole e passaggio per un punto P*

Esempio:  $C(1;3) \quad P(0;0)$

Consideriamo l'equazione  $(x - x_C) \cdot (y - y_C) = k$  : poiché il centro è  $C(1;3) \rightarrow (x - 1) \cdot (y - 3) = k$   
Sostituendo le coordinate di P avremo:  $(-1) \cdot (-3) = k \Rightarrow k = 3$

In conclusione

$$\mathfrak{I} : (x - 1) \cdot (y - 3) = 3$$

- b)** *Conoscenza dell'equazione di un asintoto e passaggio per due punti  $P_1, P_2$*

Esempio: asintoto :  $x = 2$  ;  $P_1(0;0) \quad P_2(1;1)$

Consideriamo l'equazione nella forma  $y = \frac{ax+b}{x+d}$  (vedi osservazione precedente).

Il centro è  $C(-d; a)$  e poiché un asintoto è  $x = 2$  avremo  $x_C = 2$  cioè  $-d = 2$ .

Quindi abbiamo

$$\begin{cases} c = 1 \\ -d = 2 \rightarrow d = -2 \\ \frac{b}{d} = 0 \text{ (passaggio per } P_1\text{)} \rightarrow b = 0 \\ \frac{a+b}{1+d} = 1 \text{ (passaggio per } P_2\text{)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -2 \\ b = 0 \\ a = -1 \end{cases} \rightarrow \mathfrak{I} : y = \frac{-x}{x-2}$$

- c)** *Conoscenza del passaggio per tre punti  $P_1, P_2, P_3$*

In questo caso basterà sostituire le coordinate dei punti nell'equazione  $y = \frac{ax+b}{x+d}$  : otterremo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a,b,d.

## Esercizi

I) **Disegna le seguenti iperboli** indicando le coordinate dei vertici, l'equazione degli asintoti e le coordinate dei fuochi.

1)  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  [  $A_{1,2}(\pm 2; 0)$  ;  $F_{1,2}(\pm \sqrt{5}; 0)$  ;  $y = \pm \frac{1}{2}x$  ]

2)  $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$  [  $A_{1,2}(\pm 1; 0)$  ;  $F_{1,2}(\pm \sqrt{10}; 0)$  ;  $y = \pm 3x$  ]

3)  $y^2 - x^2 = 1$  [  $B_{1,2}(0; \pm 1)$  ;  $F_{1,2}(0; \pm \sqrt{2})$  ;  $y = \pm x$  ]

4)  $4x^2 - y^2 = 4$  [  $A_{1,2}(\pm 1; 0)$  ;  $F_{1,2}(\pm \sqrt{5}; 0)$  ;  $y = \pm 2x$  ]

5)  $4y^2 - 9x^2 = 36$  [  $B_{1,2}(0; \pm 3)$  ;  $F_{1,2}(0; \pm \sqrt{13})$  ;  $y = \pm \frac{3}{2}x$  ]

6)  $x^2 - 4y^2 = 1$  [  $A_{1,2}(\pm 1; 0)$  ;  $F_{1,2}(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}; 0)$  ;  $y = \pm \frac{1}{2}x$  ]

7)  $y^2 - 9x^2 = 1$  [  $B_{1,2}(0; \pm 1)$  ;  $F_{1,2}(0; \pm \frac{\sqrt{10}}{3})$  ;  $y = \pm 3x$  ]

8)  $4x^2 - 4y^2 = 8$  [  $A_{1,2}(\pm \sqrt{2}; 0)$  ;  $F_{1,2}(\pm 2; 0)$  ;  $y = \pm x$  ]

9)  $9y^2 - 16x^2 = 1$  [  $B_{1,2}(0; \pm \frac{1}{3})$  ;  $F_{1,2}(0; \pm \frac{5}{12})$  ;  $y = \pm \frac{4}{3}x$  ]

10)  $y^2 - x^2 = -1$  [  $A_{1,2}(\pm 1; 0)$  ;  $F_{1,2}(\pm \sqrt{2}; 0)$  ;  $y = \pm x$  ]

**II) Determina l'equazione dell'iperbole  $\mathfrak{I}$ , riferita ai suoi assi di simmetria, avente:**

11)  $A_{1,2}(\pm 2; 0)$   $e = 2$   $[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1]$

12)  $B_{1,2}(0; \pm 1)$   $F_{1,2}(0; \pm 2)$   $[y^2 - \frac{x^2}{3} = 1]$

13)  $A_{1,2}(\pm 1; 0)$  asintoti  $y = \pm 2x$   $[x^2 - \frac{y^2}{4} = 1]$

14)  $F_{1,2}(\pm 2; 0)$  asintoti  $y = \pm x$   $[x^2 - y^2 = 2]$

15)  $e = \sqrt{10}$ , fuochi appartenenti all'asse x, passante per  $P(\sqrt{5}; 6)$   $[x^2 - \frac{y^2}{9} = 1]$

### III) Rette tangenti

16) Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole  $\mathfrak{I} : x^2 - y^2 = 4$  uscenti dal punto  $P(1; 0)$ .

$[y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1)]$

17) Determina l'equazione della tangente all'iperbole  $\mathfrak{I} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  nel suo punto  $P(4; 3\sqrt{3})$ .

$[t : 3x - \sqrt{3}y - 3 = 0]$

18) Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole  $\mathfrak{I} : \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$  uscenti dal punto  $P(0; 1)$ .

$[t_{1,2} : y = \pm \sqrt{3}x + 1]$

19) Determina l'equazione della tangente all'iperbole  $\mathfrak{I} : y^2 - x^2 = 1$  nel suo punto  $P(1; \sqrt{2})$ .

$[t : x - \sqrt{2}y + 1 = 0]$

#### IV) Problemi vari

- 20) Determina l'equazione dell'iperbole avente fuochi  $F_1(0;2)$   $F_2(4;2)$  ed eccentricità  $e = 2$ .  
Disegnala e determina le equazioni dei suoi asintoti.

$$[\mathfrak{I} : (x-2)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = 1 \quad y-2 = \pm\sqrt{3}(x-2)]$$

- 21) Disegna l'iperbole di equazione  $\mathfrak{I} : 4x^2 - y^2 + 2y + 3 = 0$ .  
Determina il centro C, i vertici, i fuochi e gli asintoti. Disegna  $\mathfrak{I}$ .

$$[C(0;1); B_{1,2}(0;1 \pm 2); F_{1,2}(0;1 \pm \sqrt{5}); \text{asintoti: } y = \pm 2x + 1]$$

- 22) Determina l'equazione dell'iperbole  $\mathfrak{I}$  avente vertici  $A_1(0;0)$   $A_2(-2;0)$  e asintoti di equazione  $y = \pm 3(x+1)$ . Disegnala e determina la sua eccentricità. Verificato che  $P(1;3\sqrt{3})$  appartiene all'iperbole, determina l'equazione della tangente all'iperbole in P.

$$[\mathfrak{I} : (x+1)^2 - \frac{y^2}{9} = 1; e = \sqrt{10}; t : 6x - \sqrt{3}y + 3 = 0]$$

- 23) Determina l'equazione dell'iperbole  $\mathfrak{I}$  avente fuochi  $F_{1,2}(\pm\sqrt{2};3)$  e coefficienti angolari degli asintoti  $m_{1,2} = \pm 1$ . Disegnala, determina vertici ed eccentricità. Determinato il punto A di ascissa maggiore in cui  $\mathfrak{I}$  interseca l'asse x, scrivi l'equazione della tangente in A all'iperbole.

$$[x^2 - (y-3)^2 = 1; A_{1,2}(\pm 1;3); e = \sqrt{2}; A(\sqrt{10};0); t_A : \sqrt{10}x + 3y - 10 = 0]$$

#### V) Esercizi sull'iperbole equilatera

- 24) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti sapendo che passa per il punto  $P(1;3)$ . Disegnala e determina vertici e fuochi.

$$[\mathfrak{I} : xy = 3, A_{1,2}(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{3}), F_{1,2}(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{6})]$$

- 25) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti sapendo che è tangente alla retta  $t : y = -x + 2$ . Disegnala e determina vertici e fuochi.

$$[\mathfrak{I} : xy = 1, A_{1,2}(\pm 1;\pm 1), F_{1,2}(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})]$$

- 26) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti avente vertice  $A_1(2;-2)$ . Disegnala e, detto P il suo punto di ascissa  $x=1$ , determina l'equazione della tangente all'iperbole in P.

$$[\mathfrak{I} : xy = -4, t_P : y = 4x - 8]$$

- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- Iperbole -

27) Disegna l'iperbole equilatera  $y = \frac{x-1}{x}$  (funzione omografica). Determina i suoi vertici.

$$[ A_1(1;0) \quad A_2(-1;2) ]$$

28) Disegna l'iperbole equilatera  $y = \frac{2-x}{x-3}$  (funzione omografica) e detto A il suo punto di intersezione con l'asse x, determina la tangente in A all'iperbole.

$$[ A(2;0) , \quad t_A : y = x - 2 ]$$

29) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera avente asintoti  $x = 2$  e  $y = 1$  e passante per  $(0;0)$ . Disegnala e determina la tangente all'iperbole in  $(0;0)$ .

$$[ \mathfrak{I} : y = \frac{x}{x-2} , \quad t_{(0;0)} : y = -\frac{1}{2}x ]$$

30) Determina l'equazione della funzione omografica passante per  $A(-2;0)$   $B(0;2)$   $C\left(1;\frac{3}{2}\right)$ .

Disegnala e verifica che A e B sono i vertici dell'iperbole.

$$[ \mathfrak{I} : y = \frac{x+2}{x+1} ]$$

31) Determina l'equazione della funzione omografica tangente in  $(0;0)$  alla retta  $t : y = -x$  e passante per  $P\left(3;\frac{3}{2}\right)$ . Disegnala.  $[ \mathfrak{I} : y = \frac{x}{x-1} ]$

32) Determina l'equazione della funzione omografica tangente in  $A(-1;-1)$  alla retta  $t : y = x$  e avente asintoto  $x = -2$ . Disegnala.

$$[ \mathfrak{I} : y = -\frac{1}{x+2} ]$$

33) Determina l'equazione della funzione omografica tangente in  $A(4;0)$  alla retta  $t : x - 4y - 4 = 0$  e passante per  $B(-2;3)$ . Disegnala.

$$[ \mathfrak{I} : y = \frac{x-4}{x} ]$$

34) Disegna l'iperbole di equazione  $\mathfrak{I} : y = \frac{2x+1}{x+1}$ . Detto A il suo punto di intersezione con l'asse y, determina l'equazione della parabola  $\mathcal{P}$  con asse di simmetria parallelo all'asse x avente il vertice V nel centro di simmetria di  $\mathfrak{I}$  e passante per A.

$$[ \mathcal{P} : x = y^2 - 4y + 3 ]$$

35) Disegna la funzione omografica  $\mathfrak{I} : y = \frac{2x}{1-x}$  e determina l'equazione della circonferenza  $C$  avente in  $(0;0)$  la stessa tangente di  $\mathfrak{I}$  e passante per  $A(4;0)$ .

$$[ C : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 ]$$

## VI) Esercizi di ricapitolazione

- 36) Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria avente fuochi  $F_1(\sqrt{10};0)$   $F_2(-\sqrt{10};0)$  e asintoti di equazione  $y = \pm 3x$ . Disegnala e calcola l'eccentricità. Sia P il punto dell'iperbole situato nel 2° quadrante e avente ordinata uguale a 4: determina l'equazione della tangente t all'iperbole in P e, detta Q l'intersezione di t con l'asse x, determina l'area del triangolo  $\triangle PQO$  (O origine del sistema di riferimento).

$$[ x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 ; e = \sqrt{10} ; t : y = -\frac{15}{4}x - \frac{9}{4} ; \text{area}(\triangle PQO) = \frac{6}{5} ]$$

- 37) Determina l'equazione dell'iperbole avente fuochi  $F_1(0;4)$   $F_2(0;0)$  ed eccentricità  $e=2$ . Disegnala e scrivi l'equazione degli asintoti. Determina le coordinate dei punti A e B in cui l'iperbole taglia l'asse x e le equazioni delle tangenti in A e B all'iperbole. Detti A' e B' i punti simmetrici di A e B rispetto al centro C dell'iperbole determina perimetro e area del quadrilatero ABA'B'.

$$[(y-2)^2 - \frac{x^2}{3} = 1 ; A(3;0) B(-3;0) ; x+2y-3=0 ; x-2y+3=0 ; 2p=20 ; A=24]$$

- 38) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti tangente alla retta di equazione  $y = x + 3$ . Disegnala e determina le coordinate dei suoi vertici e dei suoi fuochi. Determina l'equazione della circonferenza tangente nei vertici all'iperbole.

$$[ xy = -\frac{9}{4} ; A_1(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}) A_2(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}) ; F_{1,2}(\pm\frac{3}{\sqrt{2}};\mp\frac{3}{\sqrt{2}}) ; x^2 + y^2 = \frac{9}{2} ]$$

- 39) Determina l'equazione della funzione omografica avente come asintoto orizzontale la retta di equazione  $y=3$  e passante per i punti A(-1;2) e B(1;0). Disegnala e determinane i vertici. Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e passante per A B e C (centro dell'iperbole).

$$[ y = \frac{3x-3}{x-2} ; A_{1,2}(2 \pm \sqrt{3}; 3 \pm \sqrt{3}) ; y = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{1}{3} ]$$

- 40) a) Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria avente fuochi  $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$  e passante per il punto  $P(2\sqrt{2};1)$ . Disegnala indicando vertici, asintoti e calcola la sua eccentricità.

- b) Determina l'equazione della tangente t all'iperbole nel punto P e, detta Q l'intersezione di t con l'asse y, determina l'equazione della circonferenza C passante per O,  $A_1$  (vertice dell'iperbole di ascissa positiva) e Q.

$$[ \mathfrak{I} : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 ; A_{1,2}(\pm 2;0) ; y = \pm \frac{1}{2}x ; e = \frac{\sqrt{5}}{2} t : \sqrt{2}x - 2y - 2 = 0 ; C : x^2 + y^2 - 2x + y = 0 ]$$

- 41) a) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera  $\mathfrak{I}$  riferita ai propri asintoti tangente alla retta  $t : y = 6x + 12$ . Disegna l'iperbole ed indica le coordinate dei vertici  $A_{1,2}$  e dei fuochi  $F_{1,2}$ .

b) Detto T il punto di tangenza di  $t$ , calcola l'area del triangolo  $\Delta A_1 A_2 T$ .

$$[\mathfrak{I} : xy = -6 ; A_{1,2}(\mp\sqrt{6}; \pm\sqrt{6}) ; F_{1,2}(\mp 2\sqrt{3}; \pm 2\sqrt{3}) ; \text{area}(\Delta A_1 A_2 T) = 5\sqrt{6}]$$

- 42) a) Determina l'equazione della funzione omografica  $\mathfrak{I}$  avente come asintoto orizzontale la retta  $y = 2$  e passante per  $A(-2;0)$  e  $B(0;4)$ . Disegnala ed indica con C il suo centro.

- b) Determina l'equazione della retta  $t$  tangente in A all'iperbole. Determina l'equazione della parabola  $\mathcal{P}$  con asse di simmetria parallelo all'asse x, tangente a  $t$  in A e passante per B. Disegna  $\mathcal{P}$ .

$$[\mathfrak{I} : y = \frac{2x+4}{x+1} ; t : y = -2x - 4 ; \mathcal{P} : x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - 2]$$

- 43) a) Determina l'equazione dell'iperbole  $\mathfrak{I}$  riferita ai propri assi di simmetria avente fuochi  $F_{1,2}(0; \pm\sqrt{10})$  e asintoti  $y = \pm\frac{1}{3}x$ . Disegnala indicando con  $B_1$  il suo vertice di ordinata positiva.

- b) Sia P il punto dell'iperbole situato nel 1° quadrante avente ascissa  $x = 4$ . Determina la tangente in P all'iperbole e, detto Q il suo punto di intersezione con l'asse y, calcola l'area del triangolo  $\Delta B_1 QP$ .

$$[\mathfrak{I} : y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 ; P\left(4; \frac{5}{3}\right) ; t : 4x - 15y + 9 = 0 ; \text{area}(\Delta B_1 QP) = \frac{4}{5}]$$

- 44) a) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera  $\mathfrak{I}$  riferita ai propri asintoti sapendo che è tangente alla retta  $t : y = -x + 3$ . Disegnala e determina i vertici  $A_{1,2}$  e i fuochi  $F_{1,2}$ .

- b) Determina un punto (o i punti) appartenenti alla retta  $t$  tale che l'area del triangolo  $\Delta PA_1 A_2$  sia uguale a  $\frac{15}{2}$ .

$$[\mathfrak{I} : xy = \frac{9}{4} ; A_{1,2}\left(\pm\frac{3}{2}; \pm\frac{3}{2}\right) ; F_{1,2}\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}; \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right); P_1(4;-1) \quad P_2(-1;4)]$$

- 45) a) Determina l'equazione della funzione omografica  $\mathfrak{I}$  avente come asintoto verticale la retta  $x = 3$  e passante per i punti  $A(2;-1)$  e  $B(0;1)$ . Disegnala, indica con C il suo centro e determina l'equazione della tangente  $t$  all'iperbole in B.

- b) Determina l'equazione della circonferenza  $C$  tangente in B alla retta  $t$  e avente il centro sull'asintoto verticale di  $\mathfrak{I}$ .

$$[\mathfrak{I} : y = \frac{2x-3}{x-3} ; t : y = -\frac{1}{3}x + 1 ; C : (x-3)^2 + (y-10)^2 = 90]$$

# Le coniche

## *Le “sezioni” di un cono*

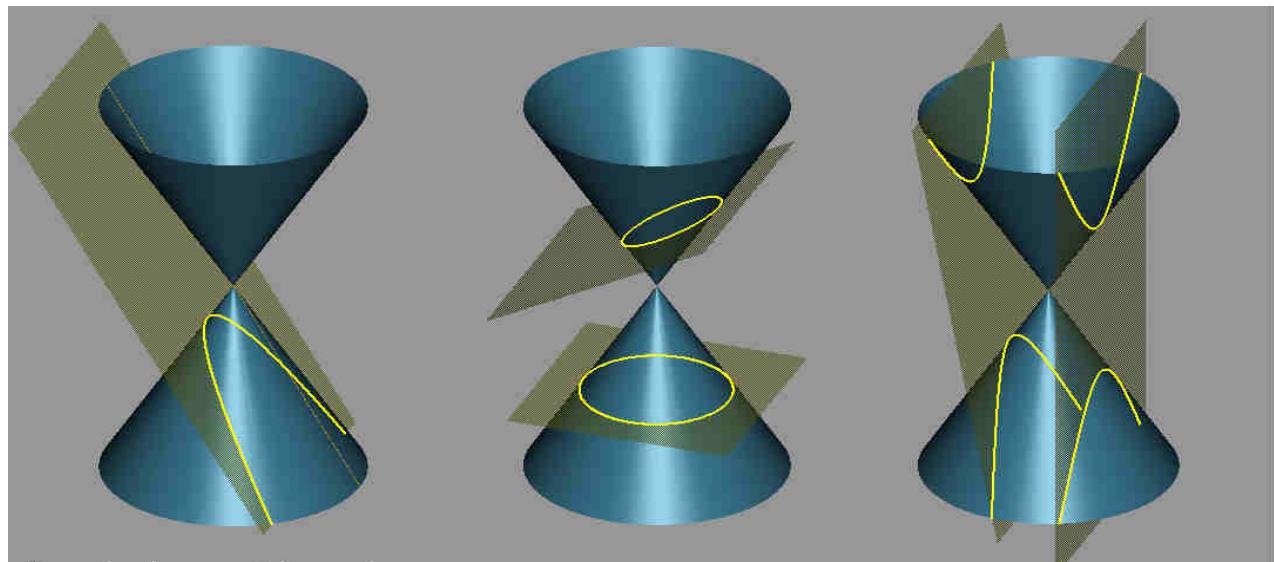
Parabola, ellisse, circonferenza, iperbole sono dette “**coniche**” poiché si possono ottenere sezionando un cono a doppia falda.

Infatti:

se il piano incontra tutte le generatrici si ottiene un’ellisse o una circonferenza se il piano è perpendicolare all’asse di simmetria del cono;

se il piano è parallelo ad una generatrice del cono si ottiene una parabola;

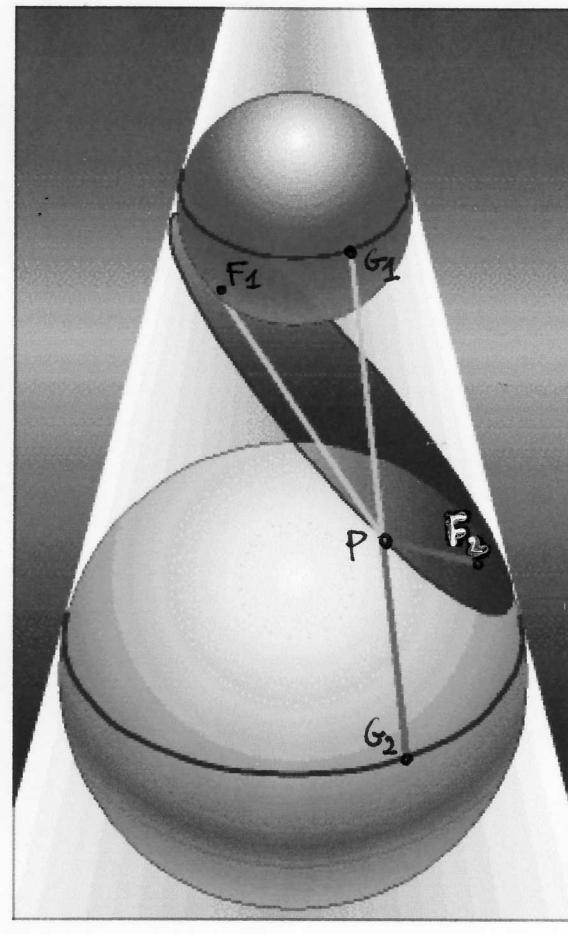
se il piano è parallelo a due generatrici del cono si ottiene un’iperbole.



Ma come si può dimostrare che queste “sezioni” corrispondono effettivamente alla definizione dei luoghi geometrici che abbiamo dato?

Dimostriamolo per esempio per l’ellisse (in modo analogo possiamo farlo per l’iperbole o la parabola).

Consideriamo le due sfere che sono tangenti al piano che individua la curva-sezione e al cono (vedi figura).



Ciascuna sfera tocca il cono secondo una circonferenza e il piano della curva-sezione in un punto: indichiamo questi due punti di tangenza con  $F_1$  ed  $F_2$ .

Sia  $P$  un generico punto sulla curva-sezione: ci proponiamo di dimostrare che la somma delle distanze  $d(F_1, P) + d(F_2, P)$  rimane costante al muoversi del punto  $P$  lungo la curva e che quindi si tratta di un'ellisse.

La retta passante per  $P$  e il vertice del cono interseca le due circonferenze in due punti che denotiamo con  $G_1$  e  $G_2$ .

Quando  $P$  si muove sulla curva-sezione,  $G_1$  e  $G_2$  si muovono ciascuno su una circonferenza.

Si ha  $\overline{F_1P} = \overline{G_1P}$  e  $\overline{F_2P} = \overline{G_2P}$  poiché entrambi i segmenti appartengono a rette tangenti alla stessa sfera.

Di conseguenza la somma delle distanze  $d(F_1, P) + d(F_2, P)$  è uguale alla somma delle distanze  $d(G_1, P) + d(G_2, P)$  che corrisponde alla lunghezza del segmento fra  $G_1$  e  $G_2$  (dato che  $P$  si trova sulla retta per  $G_1$  e  $G_2$ ) e rimane costante al variare di  $P$  sulla curva-sezione.

Questo dimostra che la curva-sezione è un'ellisse secondo la definizione che abbiamo dato come luogo geometrico e che i punti di contatto  $F_1$  e  $F_2$  sono quelli che noi avevamo chiamato fuochi.

## Un po' di storia....

Ma perché ellisse, parabola e iperbole si chiamano così?

Lo studio delle coniche si è sviluppato nel corso di diversi secoli. Per quanto si sa le sue origini risalgono a **Menecmo** (350 a.C.) che considerava solo sezioni con piani perpendicolari ad una generatrice del cono:

se il cono è ad angolo retto sezionandolo con un piano perpendicolare ad una generatrice si ottiene una parabola;

se il cono è ad angolo ottuso si trova l'iperbole;

se il cono è ad angolo acuto si trova l'ellisse.

Anche Euclide (360-300 a.C.) si interessò alle coniche sulle quali scrisse ben 4 libri andati poi perduti e la trattazione fu poi completata, dal punto di vista teorico, negli otto libri 'Le coniche' di **Apollonio** (200 a.C.).

Si dice che sia stato Apollonio, tra l'altro, ad aver introdotto i nomi "ellisse", "parabola", e "iperbole": ellisse vuol dire mancanza, iperbole significa "andare oltre", e parabola, "mettere accanto". Infatti ragionando in termini moderni l'equazione della parabola può essere scritta

$$y^2 = lx$$

cioè la parabola gode della proprietà per cui, preso un qualunque punto sulla curva, il quadrato costruito sull'ordinata risulta uguale al rettangolo avente per dimensioni l'ascissa ed un parametro  $l$ .

Se per comodità scegliamo un riferimento tale che un vertice della curva sia nell'origine, come per la parabola precedente, l'equazione di ellisse e dell'iperbole diventano

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oppure  $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

e quindi svolgendo i calcoli e ricavando  $y^2$  si ottiene, ponendo  $l = \frac{2b^2}{a}$

$$y^2 = lx - \frac{x^2 b^2}{a^2} \quad \text{cioè } y^2 < lx \text{ per l'ellisse (mancante)}$$

oppure  $y^2 = lx + \frac{x^2 b^2}{a^2}$  cioè  $y^2 > lx$  per l'iperbole (in eccesso).

## Equazione generale delle coniche

L'equazione generale di una conica è

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

con  $a,b,c$  non tutti nulli poiché altrimenti otteniamo una retta.

Vediamo come, al variare dei vari coefficienti, si ottengano tutte le coniche (eventualmente anche "degeneri") aiutandoci con Geogebra.

**Concentriamoci sulla parte di secondo grado**

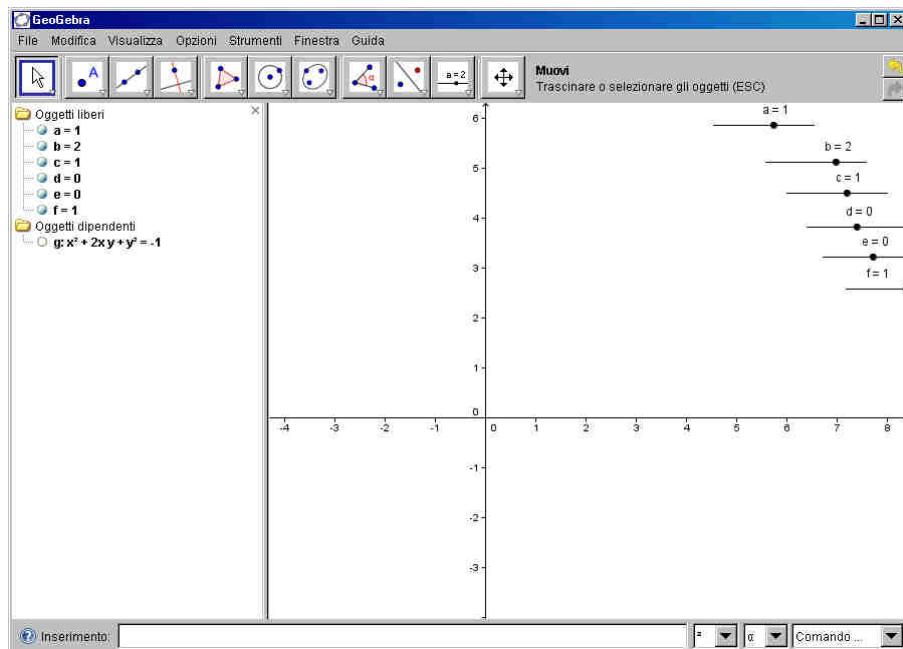
$$ax^2 + bxy + cy^2$$

1) Supponiamo che sia un quadrato cioè sia

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

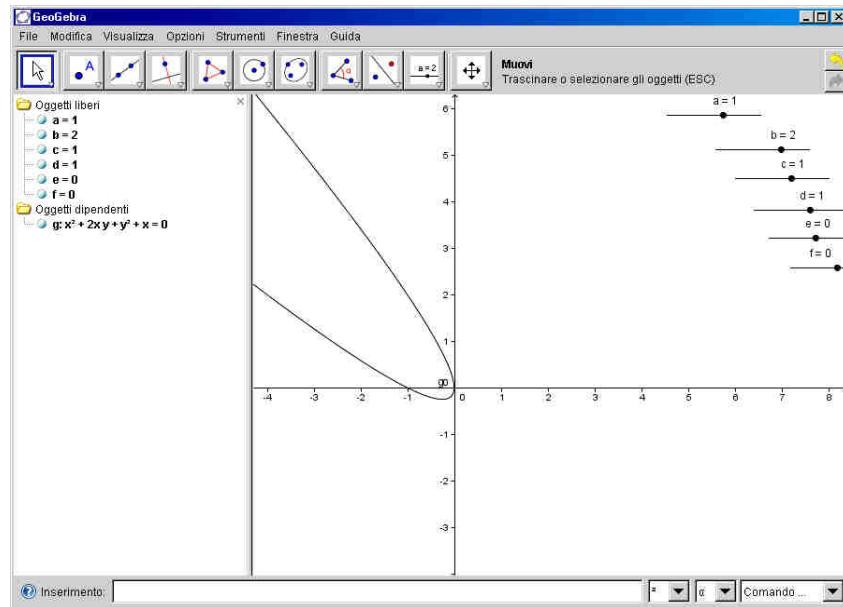
Consideriamo per esempio che  $a = c = 1$  e  $b = 2$  : la parte di secondo grado si può scrivere quindi come  $(x + y)^2$  e allora possiamo ottenere, al variare di  $e, d, f$

a)nessun punto reale ( ponendo per esempio  $d = e = 0 \quad f = 1$ )

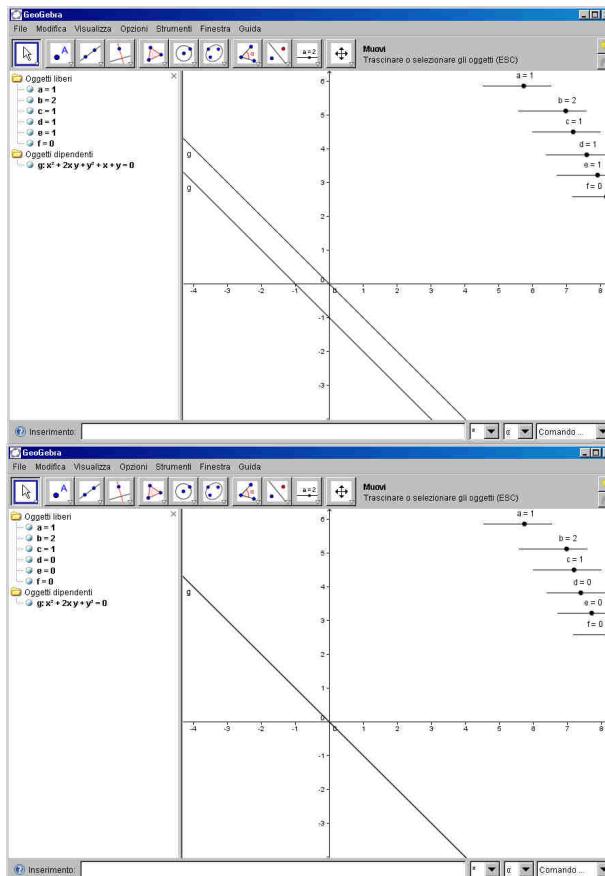


- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
 - Complementi di geometria analitica -

b) una parabola con asse di simmetria parallelo alla retta  $x + y = 0$  cioè con inclinazione  $m = -1$  (ponendo per esempio  $d = 1$   $e = f = 0$ )

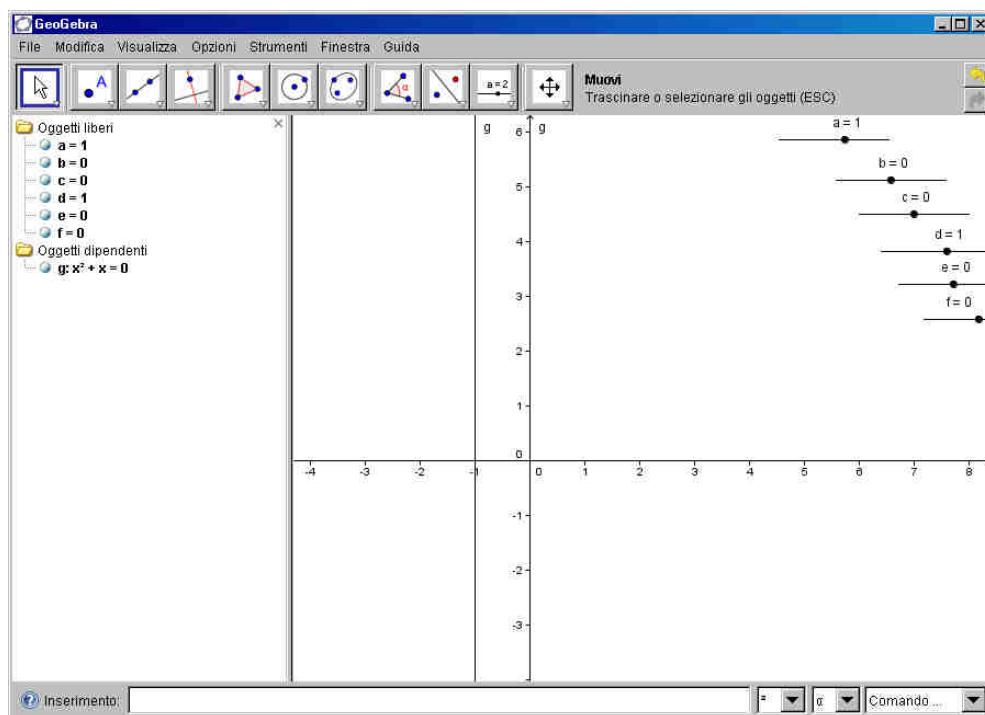
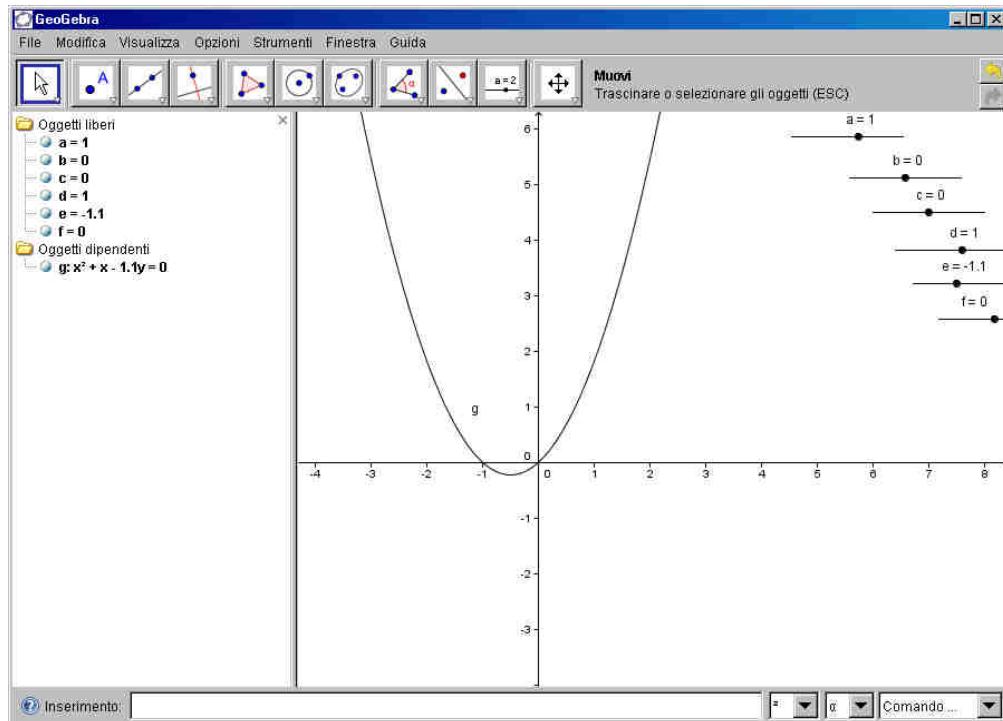


c) due rette parallele di倾inazione  $m = -1$  (di cui una  $x + y = 0$ ) eventualmente coincidenti



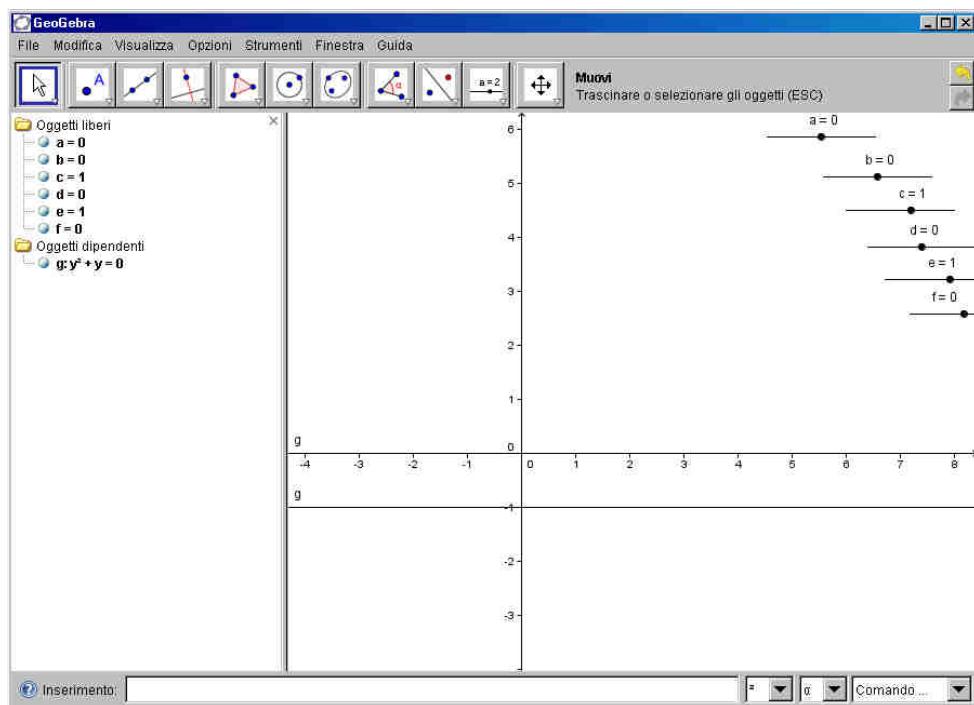
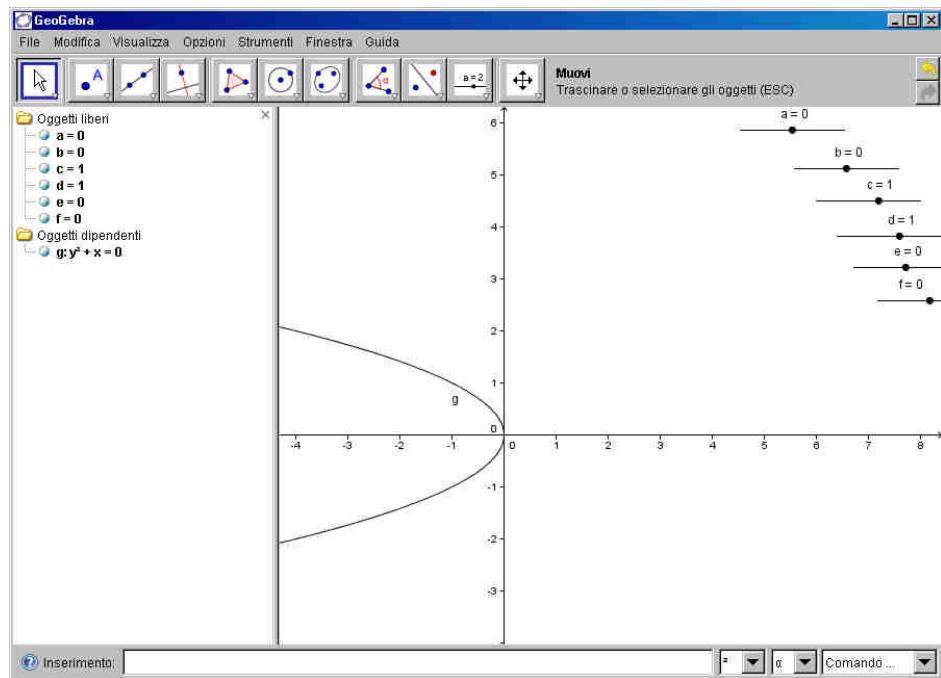
### Casi particolari:

- a) Se  $b = c = 0$  si ottiene una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse  $y$  poiché rimane solo  $ax^2$  e quindi la retta è  $x = 0$  cioè l'asse  $y$  (che può degenerare in una coppia di rette parallele (di cui una l'asse  $y$ ) eventualmente coincidenti.



- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
 - Complementi di geometria analitica -

b) Se  $a = b = 0$  si ottiene una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x poiché rimane solo  $cy^2$  cioè la retta  $y = 0$  (asse x) che può degenerare in una coppia di rette parallele all'asse x (di cui una l'asse x) eventualmente coincidenti.



- 2) Se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  ...continua tu.
- 3) Se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  ....continua tu.

## Le coniche e la fisica

Le coniche sono importanti anche nello studio della fisica: la traiettoria di un corpo lanciato con velocità avente una componente orizzontale non nulla della velocità nel campo gravitazionale terrestre è una parabola, le orbite dei pianeti intorno al Sole sono ellittiche...

Lo storico della matematica Carl Boyer afferma infatti che fu “la matematica pura di Apollonio che, 1800 anni più tardi, rese possibile i *Principia* di Newton; quest'opera, a sua volta, ha permesso agli scienziati d'oggi di mandare l'uomo sulla Luna....

Nello sviluppo della matematica si è spesso dato il caso che argomenti che originariamente potevano essere giustificati come "degni per se stessi" si siano rivelati più tardi di valore inestimabile per l'uomo pratico".

Ma i pianeti non sono gli unici oggetti a orbitare intorno al Sole: ogni anno, infatti, sono avvistate nuove *comete*, che sono oggetti del sistema solare.

Le traiettorie delle comete possono essere:

**ellittiche** e in questo caso la cometa è periodica, come ad esempio la *cometa di Halley* (la periodicità di questa cometa fu scoperta da Edmund Halley, 1656-1742, fisico e astronomo amico di Newton), che transita per il vertice dell'ellisse più vicino al Sole (il *perielio*) circa ogni 76 anni (l'ultimo passaggio è stato nel 1986);

**orbite aperte (paraboliche o iperboliche)** : la cometa ha una velocità troppo elevata per essere catturata dal Sole e, dopo essere passata al perielio, si allontana definitivamente.

Che tipo d'ellissi descrivono i pianeti e le comete periodiche?

Le orbite delle comete periodiche sono molto schiacciate (eccentriche), mentre le orbite dei pianeti sono ellissi poco schiacciate cioè molto vicine ad una circonferenza ed infatti calcolando la loro eccentricità abbiamo valori vicino allo zero.

# Successioni numeriche

Una successione numerica è una funzione che associa ad ogni numero naturale  $n \in N$  un numero reale:

$$a : N \rightarrow R$$

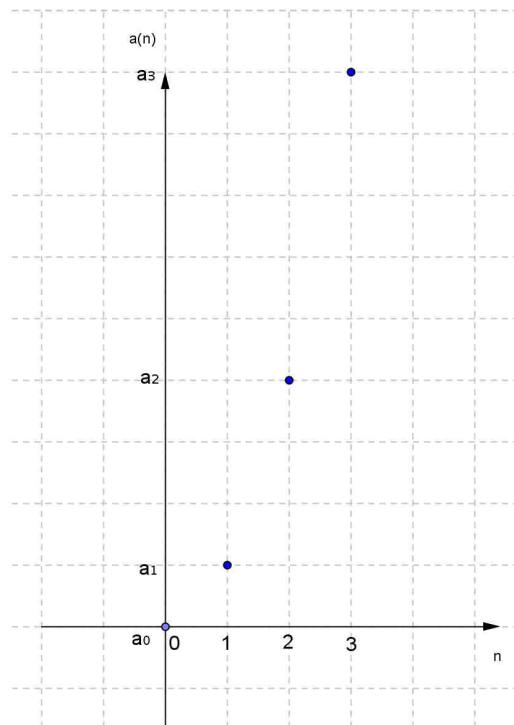
$$a : n \rightarrow a(n)$$

$a(n)$  viene spesso indicato con  $a_n$  e viene chiamato termine n-esimo della successione.

## Esempi

1)  $a : n \rightarrow n^2$

Abbiamo:  $0, 1, 4, 9, 16, \dots$  Per indicare questa successione possiamo anche scrivere  $a_n = n^2$ :



$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

ecc.

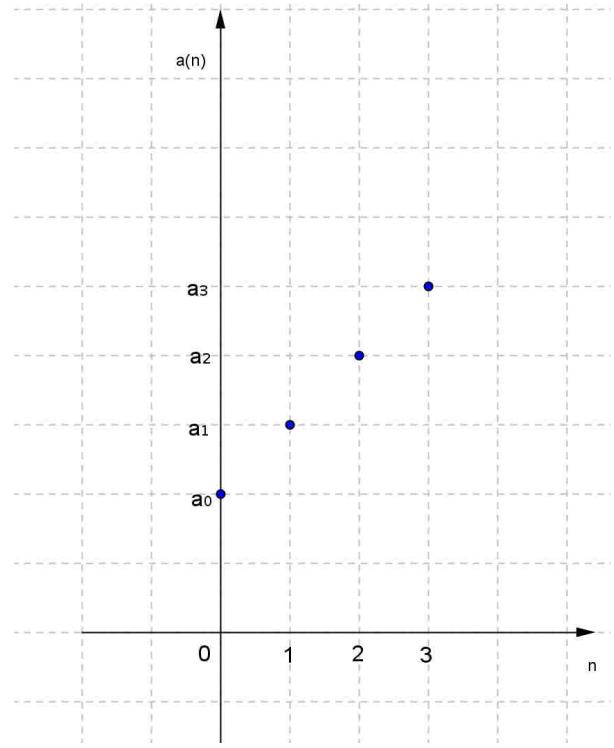
2)  $a : n \rightarrow n + 2$

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 4$$

ecc.



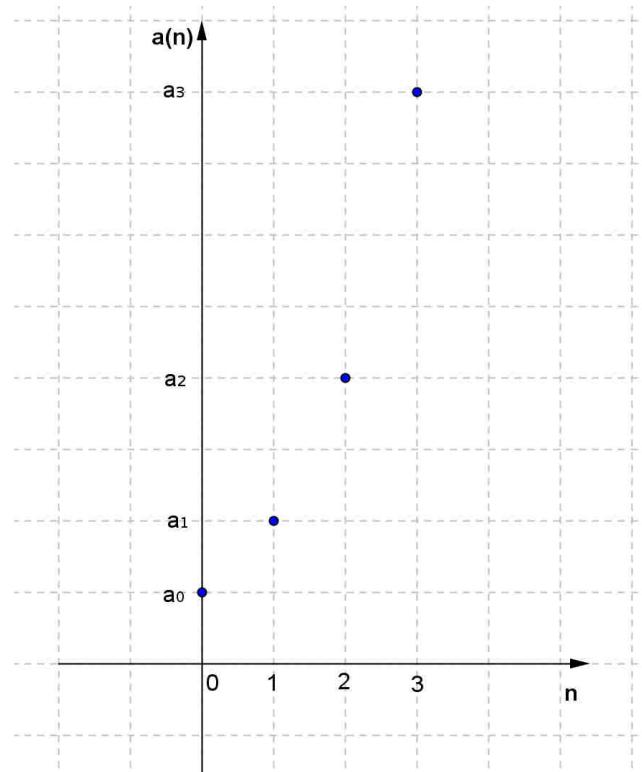
3)  $a : n \rightarrow 2^n$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$



### Nota

Alcune successioni vengono definite assegnando il termine iniziale  $a_0$  e la relazione tra il termine  $a_n$  e il termine successivo  $a_{n+1}$  e in questo caso si dice che la successione è definita “per ricorrenza”.

Esempio: consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \end{cases}$$

Abbiamo:

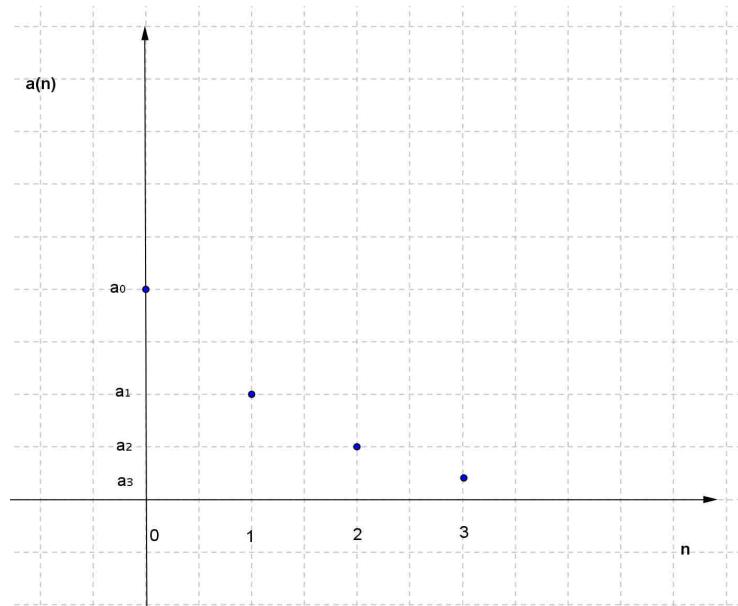
$$a_0 = 2$$

$$a_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{4}$$

ecc.



## Progressioni aritmetiche

Una progressione aritmetica è una successione in cui la differenza  $d$  tra un termine e il precedente è costante, cioè una successione in cui si assegna il primo termine  $a_0$  e  $d$  (che sta per “differenza” e che viene chiamata “ragione” della successione):

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$$

### Esempi

1)  $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$

Abbiamo: 2,6,10,14,18,22.....

In questo caso osserviamo che si tratta di una successione crescente (ogni termine è maggiore del precedente).

2)  $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases}$

Abbiamo: 2,-2,-6,-10,-14.....

In questo caso la successione è decrescente (ogni termine è minore del precedente).

### Osservazione

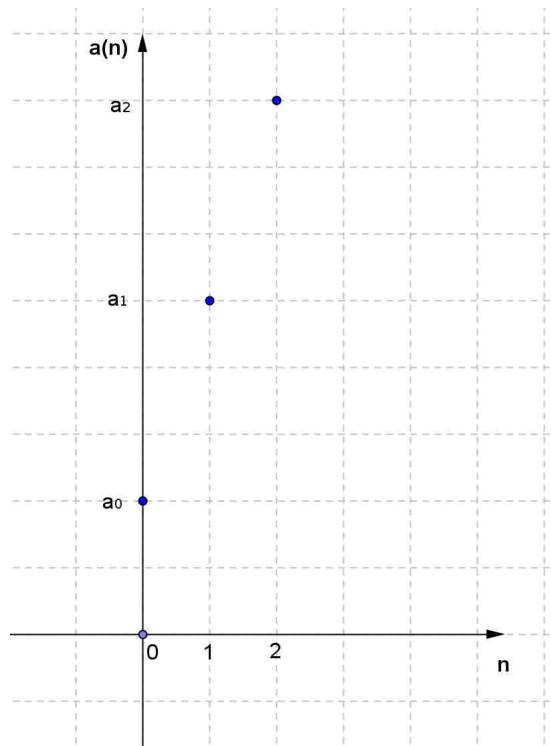
Il termine  $a_n$  di una progressione aritmetica di primo termine  $a_0$  e ragione  $d$  risulta

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

Infatti abbiamo:  $a_0$  ;  $a_0 + d$  ;  $(a_0 + d) + d = a_0 + 2 \cdot d$  ; ecc.

Quindi il grafico di una progressione aritmetica sarà formato da punti allineati.

Per esempio in figura è rappresentato il grafico della progressione  $a_n = 2 + 3 \cdot n$  avente  $a_0 = 2$  e ragione  $d = 3$ .



## Problema

*Data una progressione aritmetica, come risulta la somma dei suoi primi  $n$  termini?*

Consideriamo per esempio la successione aritmetica di termine  $a_0 = 2$  e ragione  $d = 3$ .

Quanto risulta la somma dei suoi primi 10 termini cioè quanto risulta

$$S_{10} = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 ?$$

Possiamo osservare che riscrivendo la somma S in ordine inverso e sommando membro a membro abbiamo:

$$S_{10} = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$$

$$S_{10} = 29 + 26 + 23 + 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2$$

$$2 \cdot S_{10} = 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 \Rightarrow S_{10} = \frac{31 \cdot 10}{2}$$

In generale quindi abbiamo:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

$$S_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0$$

$$2 \cdot S_n = (a_0 + a_{n-1}) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_0 + a_{n-1}) \cdot n}{2}$$

## Un aneddoto

Il grande matematico Gauss quando era bambino riuscì a calcolare la somma dei primi 100 numeri naturali (che il maestro aveva dato da calcolare perché i suoi studenti passassero un po' di tempo....) proprio osservando che la somma del primo e dell'ultimo dava 101 così come la somma del secondo e del penultimo ecc. e quindi calcolando semplicemente  $\frac{101 \cdot 100}{2}$ .

## Esercizio

Se consideriamo  $n$  come il numero di secondi, qual è la successione  $s(n)$  che esprime le posizioni occupate da un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità  $v$  rispetto ad un fissato sistema di riferimento partendo da una posizione iniziale  $s(0)$ ?

$$s(n) = \dots$$

## Progressioni geometriche

Una progressione geometrica è una successione in cui il rapporto tra un termine e il precedente è costante, cioè una successione in cui si assegna il primo termine  $a_0$  e  $q$  (che sta per “quoziente” e viene chiamata “ragione” della progressione) :

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = q \cdot a_n \end{cases}$$

### Esempi

1)  $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo: 2, 6, 18, 54, 162 ....

Osserviamo che la successione è crescente ( $q > 1$  e il primo termine è positivo).

2)  $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo:  $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

Osserviamo che la successione è decrescente ( $0 < q < 1$  e il primo termine è positivo).

3)  $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = -3 \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo: 2, -6, 18, -54, 162 ....

Osserviamo che i termini della successione sono alternativamente positivi e negativi.

4)  $\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo: -2, -6, -18, -54, -162 ....

I termini sono tutti negativi e la successione è decrescente.

5)  $\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo:  $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \dots$

I termini sono tutti negativi e la successione è crescente.

## Osservazione

Il termine  $a_n$  di una progressione geometrica di primo termine  $a_0$  e ragione  $q$  risulta

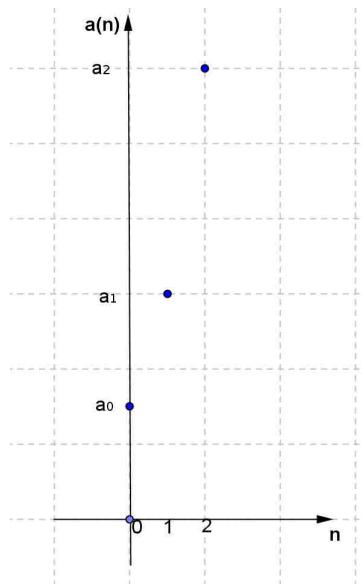
$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Infatti abbiamo :  $a_0$  ,  $a_0 \cdot q$  ,  $(a_0 \cdot q) \cdot q = a_0 \cdot q^2$  ecc.

Se per esempio consideriamo la progressione geometrica con  $a_0 = 3$  e  $q = 2$  abbiamo:

$$3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \dots$$

Il grafico cresce rapidamente.



## Problema

Come possiamo calcolare la somma dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica  $(a_0, q)$  ?

Poniamo

$$S_n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \dots + a_0 \cdot q^{n-1}$$

Se moltiplichiamo per  $q$  abbiamo:  $S_n \cdot q = a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \dots + a_0 \cdot q^n$

Calcoliamo ora  $S_n \cdot q - S_n$ : osserviamo che abbiamo

$$S_n \cdot q - S_n = a_0 \cdot q^n - a_0$$

poiché gli altri termini si annullano.

Allora possiamo scrivere:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_0 \cdot (q^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_0 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Se per esempio consideriamo la progressione geometrica con  $a_0 = 3$  e  $q = 2$  abbiamo

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 1023 = 3069$$

## Un aneddoto

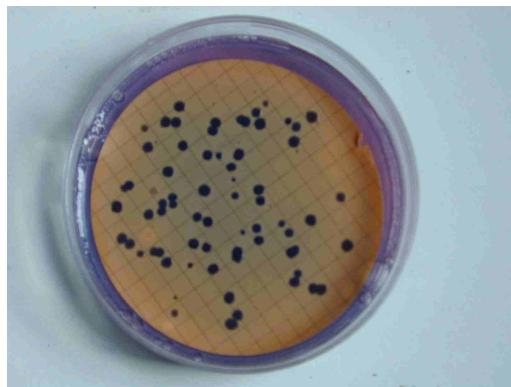
Una leggenda narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse come ricompensa al re di Persia di avere tanti chicchi di grano quanti se ne poteva disporre su una scacchiera ponendo:

1 chicco nella prima casella, due chicchi nella seconda, quattro chicchi nella terza e così via fino alla 64° casella.

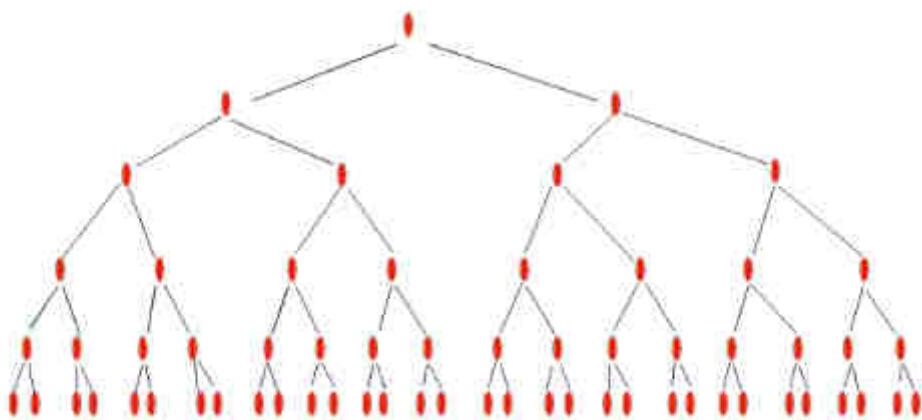
Inizialmente il re pensò che l'inventore si fosse accontentato di poco ma quando si accorse che avrebbe dovuto dargli  $S_{64} = \dots$  chicchi la leggenda narra che, preso dall'ira, decise di tagliargli la testa!

## Scheda 1

### Colonie di batteri



La mitosi è un processo legato alla divisione cellulare. Attraverso la mitosi una cellula si divide in due cellule figlie che risultano geneticamente e morfologicamente identiche tra loro e alla cellula madre. La maggior parte dei batteri si riproduce mediante il meccanismo della scissione cellulare, ovvero della mitosi. Una volta che una cellula ha raggiunto una certa dimensione, si divide in due cellule identiche, di massa pari a circa la metà di quella originaria. Intanto anche le due cellule figlie crescono fino a dividersi ulteriormente e così via....



Un dato batterio si riproduce ogni ora circa, proliferando in colonie molto grandi.

Supponiamo di poter osservare l’evoluzione di una popolazione di questi batteri e che all’inizio della nostra osservazione sia costituita da  $N_0 = 1000$  batteri. Come risulta il numero dei batteri che popolano la colonia al tempo  $t$  (misurando  $t$  in ore)?

$$N(0) = 1000$$

$$N(1) = \dots$$

$$N(2) = \dots$$

$$\text{Quindi } N(t) = \dots$$

Prova a disegnare il grafico di  $N(t)$  nel piano cartesiano.

## Scheda 2

### Interesse semplice o composto?

Quando versiamo dei soldi in banca riceviamo un compenso che è l'interesse.

L'interesse è il prezzo che la banca paga per poter disporre del nostro denaro e può essere:

- *Interesse Semplice*: se per esempio abbiamo depositato 100 euro e l'interesse è semplice del 5% guadagneremo 5 euro all'anno e quindi dopo 10 anni, per esempio, avremo  $5 \cdot 10$  euro in più rispetto al capitale depositato.
- *Interesse Composto*: l'interesse è calcolato alla fine di ogni anno e si capitalizza, cioè si aggiunge al capitale depositato.

Quindi se abbiamo depositato 100 euro e l'interesse è del 5% composto il primo anno guadagneremo 5 euro ma il secondo anno guadagneremo il 5% di  $100+5=105$  euro quindi 5,25 euro ecc.

Supponiamo di aver depositato in banca 1000 euro e che la banca applichi un interesse  $i = 2\%$ .

Calcola il capitale  $C(1)$ ,  $C(2) \dots C(t)$  dopo 1, 2 anni ....  $t$  anni nel caso che si tratti di:

- a) interesse semplice

$$C(1) = \dots\dots\dots$$

$$C(2) = \dots\dots\dots$$

$$C(t) = \dots\dots\dots$$

- b) interesse composto

$$C(1) = \dots\dots\dots$$

$$C(2) = \dots\dots\dots$$

$$C(t) = \dots\dots\dots$$

Traccia i grafici corrispondenti : è chiaro che è più conveniente l'interesse .....

**Generalizza:** se indichiamo con  $i$  l'interesse (per esempio  $i = 2\% = 0,02$  ) e con  $C_0$  il capitale iniziale (cioè al tempo 0) scrivi come risulta il capitale  $C(t)$  dopo  $t$  anni

a) interesse semplice  $C(t) = \dots\dots\dots$

b) interesse composto  $C(t) = \dots\dots\dots$

## Scheda 3

### Scala musicale temperata



Nella scala musicale temperata l'intervallo di un'ottava (per esempio da Do al Do di frequenza doppia) viene diviso in 12 intervalli uguali chiamati semitonni temperati cioè il rapporto tra la frequenza di due note consecutive (esempio Do e Do diesis, Do diesis e Re ecc.) è costante.

Se chiamiamo  $f_0$  la frequenza assegnata al Do (di una determinata ottava), come possiamo ricavare le frequenze delle note successive (Do diesis, Re, Re diesis, Mi, Fa, Fa diesis, Sol , Sol diesis, La , La diesis, Si, Do)?

Suggerimento: ricorda che la frequenza del Do successivo dovrà essere  $f_{12} = 2 \cdot f_0$  e che  $\frac{f_{n+1}}{f_n}$  è costante cioè le frequenze sono in progressione geometrica.

Riesci a determinare la ragione di questa progressione geometrica?

## ESERCIZI

### 1) *Tasso alcolemico*



Il tasso alcolemico nel sangue indica la quantità (in grammi) di alcool puro presente in 1 litro di sangue: se una persona ha un tasso alcolemico di  $1 \text{ g/l}$  vuol dire che ha 1 grammo di alcool puro per litro di sangue.

Sapendo che in media il fegato riesce a smaltire l'alcool riducendo il tasso alcolemico del 30% ogni ora, se una persona ha inizialmente (dopo una bevuta) un tasso alcolemico  $a_0 = 1,5(\text{g/l})$  scrivi la successione che descrive il tasso alcolemico in funzione del tempo misurato in ore cioè calcola  $a_n$  (tasso alcolemico dopo  $n$  ore ).

Dopo quante ore il tasso è minore di  $0,5(\text{g/l})$  (limite previsto in genere per chi è alla guida di un veicolo)?

$$[ a_n = 1,5 \cdot (0,7)^n ; \text{ dopo circa 3 ore} ]$$

**Nota:** fai una ricerca su qual è il tasso alcolemico fissato per legge oltre il quale ci sono multe per guida in stato di ebbrezza e controlla bevendo cosa e quanto si può raggiungere questo limite.

### 2) *Rimbalzi*

Supponiamo che una palla venga lasciata cadere da un'altezza iniziale  $h_0 = 1,4(\text{m})$  e che ad ogni rimbalzo perda il 20% della sua energia. Come risulta l'altezza  $h_n$  della palla dopo  $n$  rimbalzi?

Qual è l'altezza raggiunta dopo il 5° rimbalzo ?



Se una palla identica, al 6° rimbalzo, raggiunge l'altezza di 0,5 m , da quale altezza era stata lasciata cadere ? Approssima i risultati alla seconda cifra decimale.

$$[ h_n = 1,4 \cdot (0,8)^n ; 0,46 \text{ m} ; 1,91 \text{ m} ]$$

### 3) **Allenamento in bicicletta**



a) Un ciclista programma un allenamento stabilendo di percorrere il giorno iniziale 30 Km e nei giorni successivi il 10% in più del giorno precedente. Ponendo  $a_0 = 30$  come risulta  $a_n$ ?  
Se l’allenamento dura 10 giorni, quanti chilometri in totale ha percorso?

b) Se invece l’allenamento avesse previsto di aumentare di 3 Km al giorno come risulterebbe  $a_n$  e quanti chilometri in totale si sarebbero percorsi in 10 giorni?

Nota:  $a_n$  rappresenta i Km percorsi dopo  $n+1$  giorni di allenamento se consideriamo anche il giorno iniziale.

$$[a) \quad a_n = 30 \cdot (1,1)^n ; \text{ circa } 478 \text{ Km} \quad ; b) \quad a_n = 30 + 3n ; \text{ circa } 435 \text{ Km}]$$

### 4) **Decadimento radioattivo**

Alcune sostanze, dette radioattive, si trasformano in altre sostanze (si dice che “decadono”) e il tempo in cui la sostanza si dimezza (metà della sua massa iniziale si è trasformata) viene chiamato “tempo di dimezzamento” ed è diverso da sostanza a sostanza radioattiva.

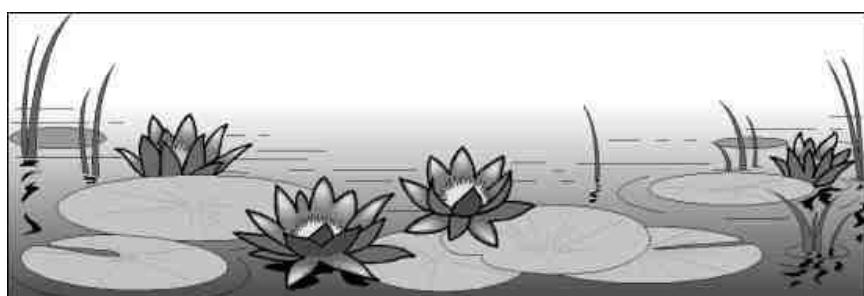
Per esempio lo iodio-131 ha un tempo di dimezzamento di 8 giorni: se inizialmente hai 200 g di iodio-131 dopo 24 giorni quanti grammi sono rimasti? E dopo 50?

$$[25 \text{ g} ; 3,125 \text{ g}]$$

### 5) **Ninfee**

Le ninfee di un lago impiegano 1 giorno per raddoppiare la propria superficie: se all’inizio occupano  $10 \text{ m}^2$  e il lago ha una superficie di  $320 \text{ m}^2$ , dopo quanti giorni le ninfee avranno occupato l’intera superficie del lago?

$$[n=5]$$



# Esponenziali e logaritmi



## Funzione esponenziale

Abbiamo studiato le progressioni geometriche ed abbiamo visto che ci sono molte situazioni reali in cui il modello matematico sottostante è proprio una progressione geometrica.

Consideriamo per esempio la successione  $a_n = 2^n$  con  $n = 0, 1, 2$  ecc.

Invece di limitarci ai numeri naturali proviamo adesso a considerare la funzione

$$f : x \rightarrow 2^x$$

( posso anche scrivere  $f(x) = 2^x$  oppure  $y = 2^x$  ).

Questa funzione risulta definita per tutti i numeri reali?

Proviamo:

- se  $x = n \in \mathbb{N}$   $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots \cdot 2$  (2 moltiplicato per se stesso  $n$  volte)

- se  $x = -n \in \mathbb{Z}$   $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$

- se  $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$   $2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m}$

- se  $x$  è un numero irrazionale, per esempio  $x = \sqrt{2}$  **possiamo definire**  $2^{\sqrt{2}}$  come l'elemento “separatore” delle due classi “contigue” di numeri reali

$$2^{1,4} \quad 2^{1,41} \quad 2^{1,414} \dots$$

$$2^{1,5} \quad 2^{1,42} \quad 2^{1,415} \dots$$

(dove si sono considerate le approssimazioni per eccesso e per difetto di  $\sqrt{2}$ ).

Quindi  $f(x) = 2^x$  risulta definita  $\forall x \in \mathbb{R}$  cioè il suo dominio è  $\mathbb{R}$ .

Chiamiamo funzione esponenziale una funzione del tipo

$$y = a^x$$

**$x$  si trova all'esponente**

dove **a è un numero reale positivo e diverso da 1** e si chiama **base** della funzione esponenziale.

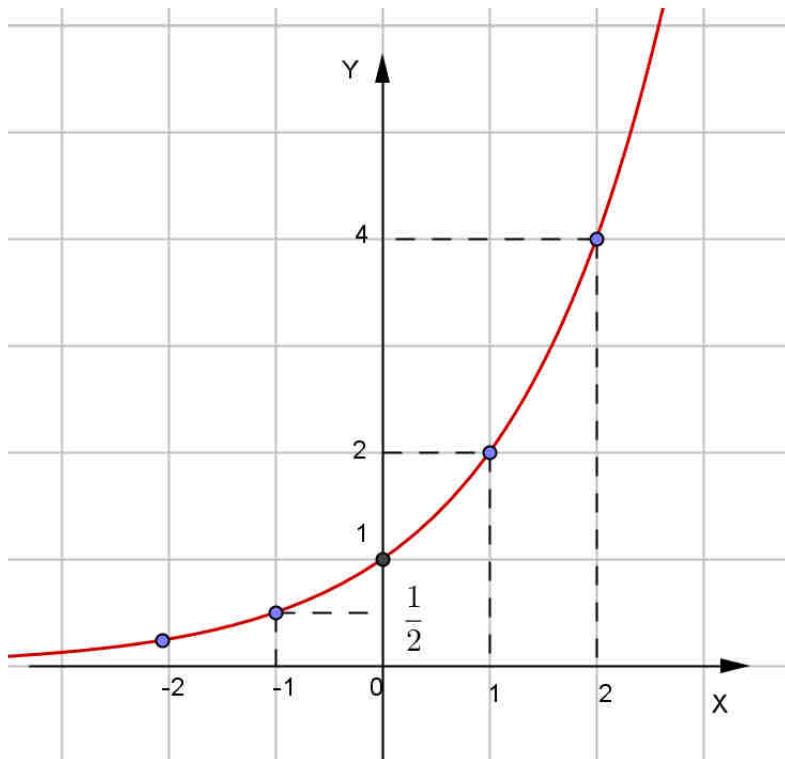
La funzione esponenziale ha come dominio (insieme di definizione) l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.

**Osservazione 1:** si considera la base  $a > 0$  perché con basi negative non avrei sempre risultati reali: per esempio  $a^{\frac{1}{2}}$  con  $a < 0$  non è un numero reale.

**Osservazione 2:** non si considera la base  $a = 1$  perché avremmo la funzione costante  $y=1$ .

Come risulta il grafico di  $y = 2^x$ ?

Consideriamo per esempio  $a = 2$ : possiamo fare una tabella assegnando vari valori alla variabile  $x$  e otteniamo



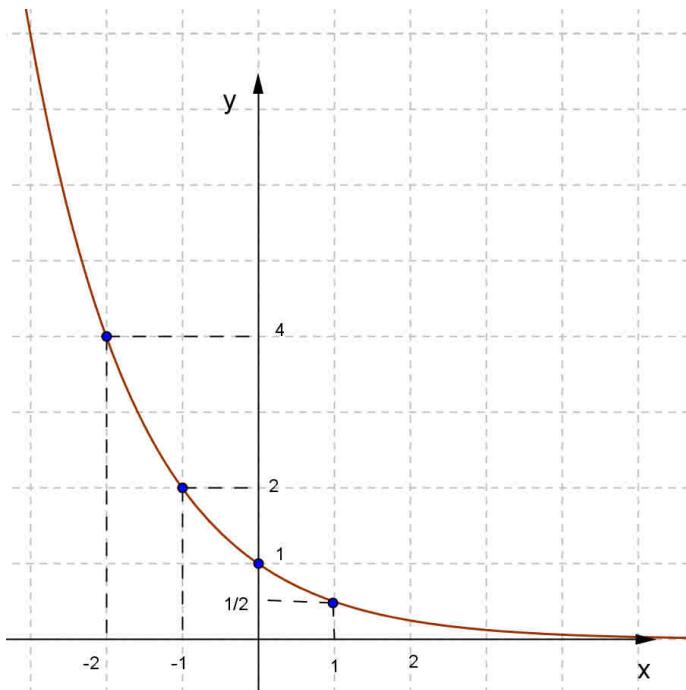
$x$	$y$
-3	$2^{-3} = 1/8$
-2	$2^{-2} = 1/4$
-1	$2^{-1} = 1/2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$

### Osservazioni

La funzione  $y = 2^x$  ha le seguenti caratteristiche:

- è crescente cioè se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ;
- è iniettiva cioè ad elementi distinti corrispondono immagini distinte (se  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ );
- è sempre positiva e quindi il grafico si trova sempre sopra all'asse  $x$ ;
- ha come asintoto l'asse  $x$ .

Consideriamo adesso  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Come risulta il suo grafico?



x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4

Osserviamo che in questo caso la funzione è decrescente, ma per il resto ha le stesse caratteristiche.

**In conclusione** quindi, in generale, avremo che

$$y = a^x$$

è una funzione

- crescente quando la base  $a > 1$ ,
- decrescente per  $0 < a < 1$ .

Il codominio (insieme delle immagini) di  $y = a^x$  è in ogni caso l'insieme dei reali positivi  $y > 0$ .

## Funzione logaritmica

### Il logaritmo (in una data base) di un numero

Riprendiamo l'esempio della duplicazione dei batteri presentato nella scheda 1 delle progressioni geometriche: se per esempio il numero iniziale dei batteri è  $N_0 = 1000$  e sappiamo che ogni batterio si duplica ogni ora, possiamo chiederci dopo quanto tempo la colonia sarà costituita da 1 milione di batteri...

Scrivendo il numero di batteri presenti al tempo  $x$  (misurato in ore) come  $N(x) = 1000 \cdot 2^x$  dovremo risolvere

$$10^3 \cdot 2^x = 10^6$$

Ma allora dovrà essere

$$2^x = 1000$$

Ma qual è l'esponente che dobbiamo dare a 2 per ottenere 1000?

Scriviamo la tabella di  $y = 2^x$  e poiché  $2^9 = 512$  e  $2^{10} = 1024$  è chiaro che il nostro numero sarà tra 9 e 10.

Se continuiamo a provare:  $2^9 = 512 \dots 2^{9,96} \cong 996$  ma  $2^{9,97} \cong 1003$  e quindi se ci accontentiamo di due cifre decimali potremo dire che  $x \cong 9,96$ .

Ma è chiaro che se dobbiamo risolvere problemi di questo tipo cercare l'esponente giusto "andando per tentativi" non è molto pratico!

I matematici hanno chiamato

$\log_a N$  (che si legge "**logaritmo in base a del numero N**" )  
**l'esponente** da dare alla base **a** per ottenere il numero **N**

Quindi nel nostro esempio il numero che cercavamo era

$$\log_2 1000$$

## Nota storica

L'idea su cui si basa il concetto di logaritmo è molto antica e se ne trova già traccia nelle opere di Archimede: consideriamo una progressione geometrica, per esempio di ragione 2, e indichiamo accanto a ciascun termine il suo indice che è l'esponente da dare a 2 per ottenerlo.

Numero	indice
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
.....	...

Si osserva che per moltiplicare due termini, per esempio  $16 \cdot 64$ , possiamo risalire ai rispettivi indici (4 e 6), sommarli ( $4+6=10$ ) e infine cercare nella tabella il termine con indice 10:

$$2^{10} = 1024 \text{ ed infatti } 16 \cdot 64 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$$

Questo metodo quindi semplificava il calcolo del prodotto di due numeri purché fossero termini della progressione.

Il matematico scozzese **John Napier**, vissuto nel sedicesimo secolo, noto con il nome italianoizzato di Giovanni Nepero, coniò il termine ancora oggi utilizzato di logaritmo, dal greco **logon arithmos**, cioè numero della ragione (intendendo l'indice, cioè l'esponente, per avere il numero della tabella).

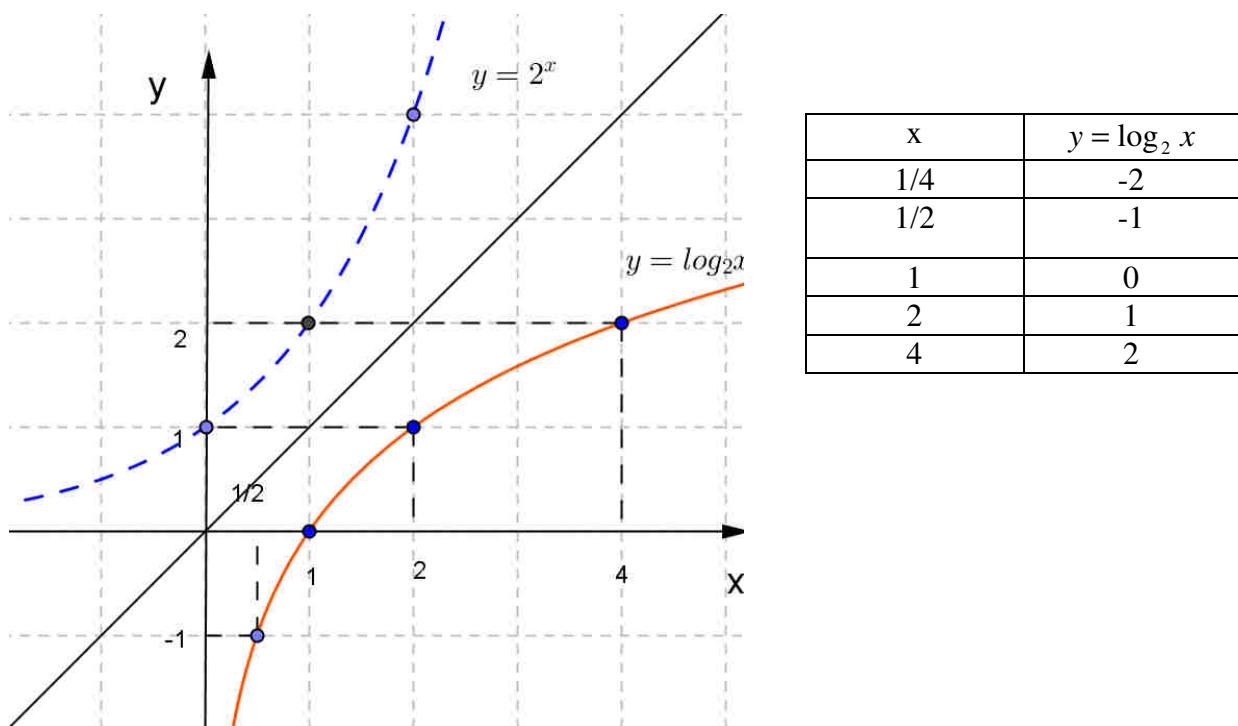


Ma come si calcola il logaritmo di un numero?

Cominciamo ad approfondire l'argomento e studiamo prima di tutto la **funzione logaritmica**  $y = \log_a x$  che risulta la **funzione inversa della funzione esponenziale**.

Se per esempio nella tabella della funzione  $y = 2^x$  inverto i “ruoli” delle variabili x e y ottengo la tabella della funzione  $y = \log_2 x$ .

Tracciamo il grafico di  $y = \log_2 x$ :

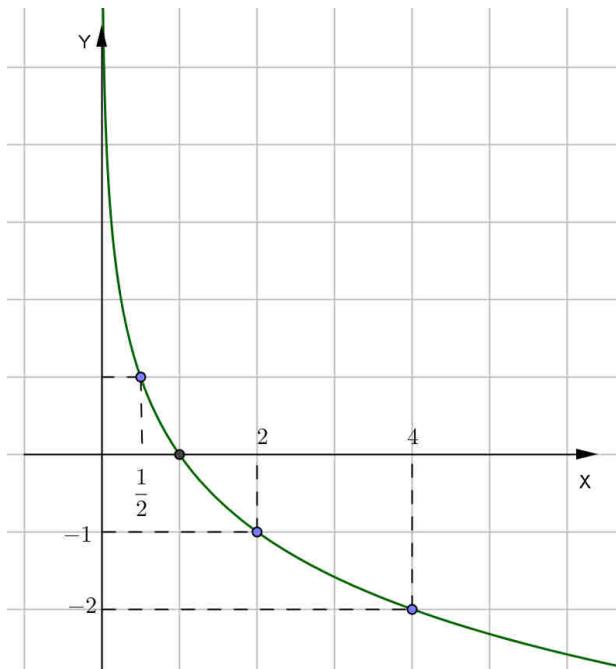


### Nota

Osserviamo che i grafici di  $y = 2^x$  e di  $y = \log_2 x$  sono simmetrici rispetto alla retta  $y = x$  poiché abbiamo scambiato la x con la y. (e questo accade sempre quando si considerano una funzione e la sua inversa)

- Osserviamo che il dominio della funzione logaritmica è  $x > 0$ , mentre il codominio sono tutti i numeri reali: dominio e codominio sono scambiati rispetto alla funzione esponenziale.
- Il grafico ha come asintoto verticale l'asse y (l'esponenziale aveva invece l'asse x)
- Se la base  $a > 1$  otteniamo una funzione crescente (come nel caso della funzione esponenziale)
- Il grafico interseca l'asse x in  $(1;0)$

Tracciamo ora il grafico di  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ :



x	$\log_{1/2}x$
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2

Osserviamo che il grafico è in questo caso decrescente.

Quindi se  $0 < a < 1$   $y = \log_a x$  è una funzione decrescente ma per il resto abbiamo sempre l'asse y come asintoto verticale e il passaggio per  $(1;0)$ .

### Nota importante

Nel calcolo dei logaritmi le basi più usate sono la base 10 e la base “e” ( $e$  è un numero irrazionale il cui valore approssimato è 2,7 ed è particolarmente importante nello studio dell’analisi matematica).

Se vogliamo calcolare  $\log_{10}x$  utilizzando la calcolatrice dobbiamo premere il tasto **log**:

$$\log_{10}10 = 1 \quad \log_{10}100 = 2 \text{ ecc.}$$

**RICORDA:** per indicare il logaritmo in base  $e$  si scrive  $\ln$  (controlla il tasto sulla calcolatrice).

Ma per calcolare il logaritmo di un numero in una base diversa da 10 e da  $e$ ?

Dobbiamo studiare alcune proprietà dei logaritmi da cui ricaveremo la regola del “cambiamento di base” che ci permetterà di calcolare logaritmi in base qualsiasi usando il tasto **log** della calcolatrice.

## Proprietà dei logaritmi

$$1) \quad \log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Infatti se poniamo  $\log_a m = x$  cioè  $a^x = m$  e  $\log_a n = y$  cioè  $a^y = n$   
allora  $m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  e quindi

$$x + y = \log_a(m \cdot n)$$

$$2) \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Infatti sempre ponendo  $\log_a m = x$  e  $\log_a n = y$  abbiamo che  $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$  e quindi

$$x - y = \log_a\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$3) \quad \log_a(m^n) = n \cdot \log_a m$$

Infatti se poniamo  $\log_a m = x$  cioè  $a^x = m$  avremo che  $m^n = (a^x)^n = a^{x \cdot n}$  e quindi

$$n \cdot x = \log_a(m^n)$$

$$4) \quad \textbf{Cambiamento di base} \quad \log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

Infatti se  $a^x = m \Rightarrow \log_b a^x = \log_b m \Rightarrow x \cdot \log_b a = \log_b m \Rightarrow x = \frac{\log_b m}{\log_b a}$

**Esempio:** per calcolare  $\log_2 1000$  utilizzando il logaritmo in base 10 (nella calcolatrice basta premere log per avere il logaritmo in base 10) utilizzando la relazione del cambiamento di base avremo  $\log_2 1000 = \frac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 2} \cong 9,96578\dots$

ed ecco finalmente il numero del nostro esempio iniziale!

### Osservazione

In particolare abbiamo  $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

Esempio:  $\log_{10} 100 = \frac{1}{\log_{100} 10}$  (infatti  $\log_{10} 100 = 2$  mentre  $\log_{100} 10 = \frac{1}{2}$ )

## Equazioni esponenziali

L'equazione esponenziale elementare è  $a^x = k$  (con  $k > 0$  altrimenti non ci sono soluzioni)

e per la definizione di logaritmo si risolve così:  $x = \log_a k$

Ci sono poi equazioni che si possono ricondurre alla soluzione di equazioni esponenziali elementari. Vediamo degli esempi.

### Esempi

$$1. \quad 2^x = 3 \quad x = \log_2 3$$

$$1. \quad 2^{x-1} = 3 \quad x-1 = \log_2 3 \Rightarrow x = 1 + \log_2 3$$

$$2. \quad 2^{x-1} = 2^{3x} \Rightarrow x-1 = 3x \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$3. \quad 2^{x-1} = 3^x$$

Per ricondurre questa equazione ad un'equazione elementare cerchiamo di avere lo stesso esponente: scriviamo quindi

$$\frac{2^x}{2} = 3^x$$

Dividiamo entrambi i membri per  $2^x$  (o per  $3^x$ ) e otteniamo:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}$$

Se avessi diviso per  $3^x$  avrei ottenuto  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 2$ .

Operando però un cambiamento di base ci accorgiamo che i due risultati sono uguali: infatti

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} = \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 \frac{3}{2}} = \frac{-\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 \frac{3}{2}} = -\left(\log_2 \frac{1}{3} - \log_2 2\right) = \log_2 \frac{1}{3} \quad (\text{poiché } \log_2 1 = 0)$$

$$5. \quad 3^{2x} - 12 \cdot 3^x - 13 = 0$$

Poniamo  $3^x = y \Rightarrow y^2 - 12y - 13 = 0 \Rightarrow y_1 = -1 \cup y_2 = 13$

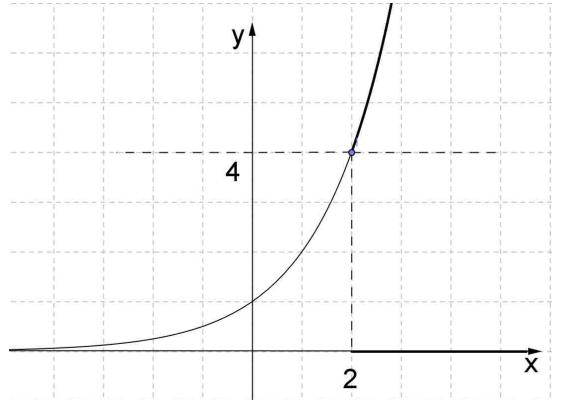
Quindi  $3^x = -1$  nessuna soluzione

$$3^x = 13 \Rightarrow x = \log_3 13$$

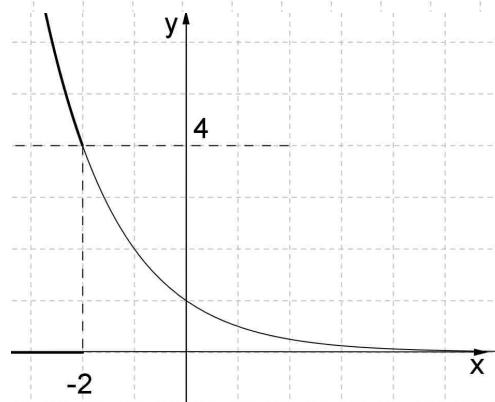
## Disequazioni esponenziali

### Esempi

- $2^x > 4 \Rightarrow x > \log_2 4$  cioè  $x > 2$



- $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \Rightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 4$  cioè  $x < -2$



In generale se abbiamo una disequazione esponenziale elementare del tipo

$$a^x > k \quad (k > 0)$$

- se  $a > 1$ , essendo  $a^x$  una funzione crescente, **si mantiene il verso della diseguaglianza** e la soluzione è

$$x > \log_a k$$

- se  $0 < a < 1$ , essendo  $a^x$  una funzione decrescente **si inverte il verso della diseguaglianza** e la soluzione è

$$x < \log_a k$$

**Nota:** se dobbiamo risolvere

$$2^x > -3$$

dal momento che  $2^x$  è sempre positivo la disequazione sarà sempre verificata.

Quindi se abbiamo  $a^x > k$  e  $k < 0$  la disequazione è verificata  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Naturalmente considerazioni analoghe valgono per la risoluzione della disequazione di  $a^x < k$  con  $k > 0$ . Se  $k < 0$  invece non ci sarà nessuna soluzione di  $a^x < k$  poiché  $a^x$  è sempre positivo.

Naturalmente una disequazione esponenziale può essere più complessa ma spesso può essere ricondotta alla risoluzione di disequazioni esponenziali elementari.

Vediamo degli esempi.

$$1. \quad 2^x > 3 \Rightarrow x > \log_2 3$$

$$1'. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > 3 \Rightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 3$$

$$2. \quad 2^{x-1} > 3 \Rightarrow x-1 > \log_2 3 \Rightarrow x > 1 + \log_2 3$$

$$2'. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 3 \Rightarrow x-1 < \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow x < 1 + \log_{\frac{1}{2}} 3$$

$$3. \quad 2^{x-1} > 2^{3x} \Rightarrow x-1 > 3x \Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$3'. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Rightarrow x-1 < 3x \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$4. \quad 2^{x-1} > 3^x \Rightarrow \frac{2^x}{2} > 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2 \Rightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 2$$

$$5. \quad 3^{2x} - 12 \cdot 3^x - 13 > 0$$

Possiamo risolvere questa disequazione ponendo  $3^x = y$  e sostituendo otteniamo :

$$y^2 - 12y - 13 > 0 \Rightarrow y < -1 \cup y > 13 \text{ cioè}$$

$$3^x < -1 \text{ che non ha nessuna soluzione}$$

$$3^x > 13 \Rightarrow x > \log_3 13$$

$$6. \quad 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0 \Rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$$

$$\text{Poniamo } 2^x = y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 < 0 \Rightarrow 1 < y < 2 \text{ e quindi}$$

$$1 < 2^x < 2 \Rightarrow 2^0 < 2^x < 2^1 \Rightarrow 0 < x < 1$$

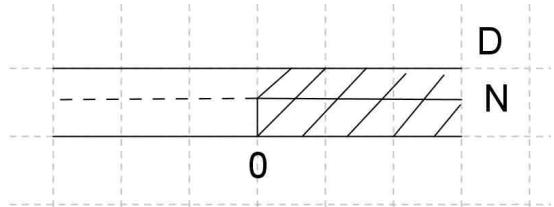
$$7. \quad \frac{9^x - 3^x}{4^x} > 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$N > 0 : 9^x - 3^x > 0 \Rightarrow 3^{2x} > 3^x \Rightarrow 2x > x \Rightarrow x > 0$$

$$D > 0 : 4^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi la soluzione è  $x > 0$ .



## Equazioni logaritmiche

Si dice equazione logaritmica ogni equazione in cui l'incognita  $x$  compare come argomento di un logaritmo.

L'equazione logaritmica elementare è quindi:

$$\log_a x = k \quad (x > 0) \Leftrightarrow x = a^k$$

Molte equazioni logaritmiche possono essere ricondotte alla risoluzione di equazioni logaritmiche elementari. Vediamo alcuni esempi.

### Esempi

1.  $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3$

2.  $\log_3(x-2) = 2 \Rightarrow x-2 = 3^2 \Rightarrow x = 2+9 = 11$

3.  $\log_2(2x-1) = \log_2(3x-5)$

In questo caso è importante determinare la condizione di accettabilità delle soluzioni (determinare il dominio dell'equazione) ricordando che l'argomento di un logaritmo deve essere strettamente positivo.

Quindi nel nostro caso avremo:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

Risolvendo l'equazione logaritmica abbiamo:

$$2x-1 = 3x-5 \Rightarrow x = 4 \text{ accettabile}$$

Quindi la soluzione dell'equazione è  $x = 4$ .

4.  $\log_2(x-1) = \log_2(2x+1)$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$x-1 = 2x+1 \Rightarrow x = -2 \text{ non accettabile}$$

Quindi l'equazione non ha soluzioni.

5.  $\log_2 x + 3 \cdot \log_4 x = 10$

In questo caso occorre operare un cambiamento di base. Per esempio possiamo portare tutto in base 2 ponendo

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

Quindi :  $\log_2 x + \frac{3}{2} \cdot \log_2 x = 10 \Rightarrow 5 \cdot \log_2 x = 20 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4$

6.  $\log(4x-5) + \log x = 2 \cdot \log(x+4)$

(Se non scriviamo la base si intende che ci si riferisce sempre ad una stessa base e che non è importante conoscerla per risolvere l'equazione).

Impostiamo innanzitutto il sistema per avere le condizioni di accettabilità delle soluzioni:

$$\begin{cases} 4x-5 > 0 \\ x > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{4} \\ x > 0 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{5}{4}$$

Possiamo in questo caso applicare le proprietà dei logaritmi:

$$\log[(4x-5) \cdot x] = \log(x+4)^2$$

$$(4x-5) \cdot x = (x+4)^2$$

.....

$$x_1 = \frac{16}{3} \text{ accettabile}$$

$$x_2 = -1 \text{ non accettabile}$$

Quindi l'unica soluzione è  $x = \frac{16}{3}$ .

## Disequazioni logaritmiche

La disequazione logaritmica elementare è del tipo

$$\log_a x > k \quad (\text{con } x > 0)$$

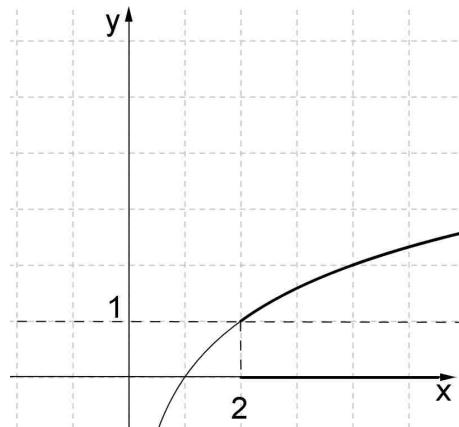
e si risolve così:

- se  $a > 1 \Rightarrow x > a^k$  (essendo  $\log_a x$  crescente si mantiene il verso della diseguaglianza)
- se  $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < x < a^k$  (essendo  $\log_a x$  decrescente si inverte il verso della diseguaglianza)

### Esempio

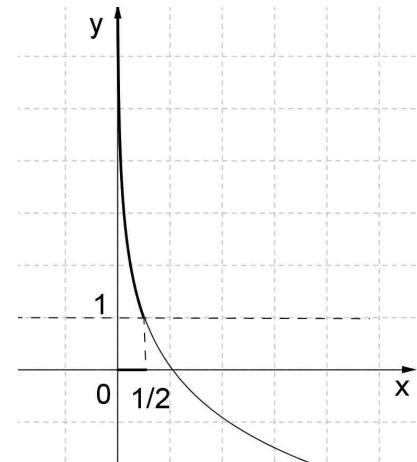
- $\log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$

Poiché per  $a > 1$   $y = \log_a x$  è una funzione crescente, si mantiene la diseguaglianza.



- $\log_{\frac{1}{2}} x > 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$

Poiché per  $0 < a < 1$   $y = \log_a x$  è una funzione decrescente, si inverte la diseguaglianza e va tenuto conto del dominio del logaritmo.



E' chiaro che se devo risolvere  $\log_a x < k$  (con  $x > 0$ ) avrò:

$$\begin{aligned} \text{se } a > 1 &\Rightarrow 0 < x < a^k \\ \text{se } 0 < a < 1 &\Rightarrow x > a^k \end{aligned}$$

### Esempi

- $\log_2 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$
- $\log_{\frac{1}{2}} x < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Naturalmente le disequazioni logaritmiche possono essere più complesse ma spesso si possono ricondurre alla risoluzione di disequazioni elementari.

Vediamo alcuni esempi.

### Esempi

1.  $\log_2 x > 3 \Rightarrow x > 2^3$

2.  $\log_{\frac{1}{3}} x > 3 \Rightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

3.  $\log_5(x-1) > 1 \Rightarrow x-1 > 5 \Rightarrow x > 6$

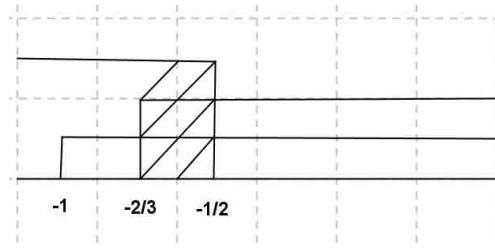
4.  $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) < 1 \Rightarrow 2x-3 > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{7}{4}$

5.  $\log_2(x+1) > \log_2(3x+2)$

In questo caso possiamo risolvere un unico sistema in cui mettiamo il dominio dei logaritmi e la risoluzione della disequazione cioè:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x+2 > 0 \\ x+1 > 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -\frac{2}{3} \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

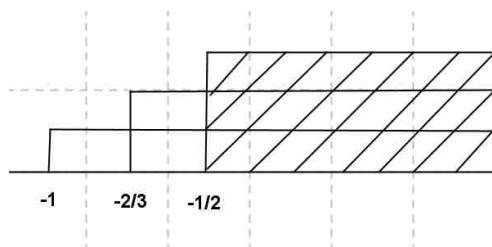
La soluzione è:  $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$



6.  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x+2 > 0 \\ x+1 < 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -\frac{2}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La soluzione è:  $x > -\frac{1}{2}$



## Esercizi

### I) Equazioni esponenziali

- 1)  $4^x = 8$   $[x = \frac{3}{2}]$
- 2)  $9^x = 6 + 3^x$   $[x = 1]$
- 3)  $\frac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1}$   $[x = -2]$
- 4)  $15 + 4^x = 2^{x+3}$   $[x_1 = \log_2 3 \cup x_2 = \log_2 5]$
- 5)  $2^{2-x} - 2^{3-x} + 2^x = 0$   $[x = 1]$
- 6)  $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$   $[x_1 = 3 \cup x_2 = -1]$
- 7)  $4^x = \frac{1}{2}$   $[x = -\frac{1}{2}]$
- 8)  $3^x - 9^x = 0$   $[x = 0]$
- 9)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$   $[x_1 = 1 \cup x_2 = \log_2 3]$
- 10)  $3^{x-1} = 5^{x-2}$   $[x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{25}]$
- 11)  $3^{x+7} = \frac{1}{3^{x-5}}$   $[x = -1]$
- 12)  $\frac{5}{2^x + 1} + \frac{9}{2^x - 1} = \frac{15}{2^x + 1} + 1$   $[x = 2]$
- 13)  $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$   $[x = \log_3 4]$
- 14)  $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$   $[x_1 = 1 \cup x_2 = 3]$
- 15)  $3^{2-8x} = 9^{3x+1}$   $[x = 0]$

## II) Disequazioni esponenziali

16)  $5^x > 25$

$[x > 2]$

17)  $\left(\frac{1}{7}\right)^x \geq 7^3$

$[x \leq -3]$

18)  $\left(\frac{1}{10}\right)^x \leq 100$

$[x \geq -2]$

19)  $(x-2) \cdot 3^x < 0$

$[x < 2]$

20)  $1 \geq 7^{1+x}$

$[x \leq -1]$

21)  $(2^x - 4) \cdot (3^{2x} - 3^x) \geq 0$

$[x \leq 0 \cup x \geq 2]$

22)  $2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 1$

$[x < -1 \cup 0 \leq x \leq 1]$

23)  $\frac{2^x - 1}{8 - 2^x} \leq 0$

$[x \leq 0 \cup x > 3]$

24)  $2^{x+1} \geq 5^{1-x}$

$[x \geq \log_{10} \frac{5}{2}]$

25)  $25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0$

$[x \leq \log_5 3 \cup x \geq \log_5 10]$

26)  $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0$

$[x < 1 \cup x > 2]$

27)  $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0$

$[x \geq 1]$

28)  $2 \cdot 3^x - 9^x > 1$

[nessuna soluzione]

29)  $4^x + 1 > 2^{x+1}$

$[x \neq 0]$

30)  $4^x - 2^x > 0$

$[x > 0]$

31)  $\frac{2^x}{2^x + 1} + \frac{2^x}{2^x + 4} \leq 1$

$[x \leq 1]$

### III) Equazioni logaritmiche

32)  $\log_4 x = 2$  [  $x = 4^2$  ]

33)  $\log_3(2x+4) = 2$  [  $x = \frac{5}{2}$  ]

34)  $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -1$  [  $x = 3$  ]

35)  $\log_2(x-2) + \log_2 x = \log_2(9-2x)$  [  $x = 3$  ]

36)  $\log(x+8) = 2 \cdot \log 3 - \log x$  [  $x = 1$  ]

37)  $4 \cdot \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 5 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$  [  $x_1 = \frac{1}{2} \cup x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$  ]

38)  $3 \cdot \log_2(x+2) - 3 \cdot \log_2(2x-1) + \log_2 4 - \log_3 9 = 0$  [  $x = 3$  ]

39)  $\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(1-x) = 1$  [  $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$  ]

40)  $\log_a(3x-5) + \log_a(x-2) = \log_a 2$  [  $x = \frac{8}{3}$  ]

41)  $2 \cdot \log(x-1) + \log(x-2) = \log(x^2 - 3x + 2)$  [nessuna soluzione]

42)  $2 \cdot \log x + \log(x^2 + 1) = \log(3 - x^2)$  [  $x = 1$  ]

43)  $\log x + \log(x+1) = \log(1-x)$  [  $x = \sqrt{2} - 1$  ]

44)  $3 \cdot \log_2^2 x + 5 \cdot \log_2 x - 2 = 0$  [  $x_1 = \sqrt[3]{2} \cup x_2 = \frac{1}{4}$  ]

45)  $\log_2(x-1) = \log_2(3x+5)$  [nessuna soluzione]

46)  $\log_3 x - \frac{2}{3} \cdot \log_x 3 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot \log_9 x^2$  [  $x_1 = 3^{\frac{4}{9}} \cup x_2 = 3$  ]

47)  $\log_2^2(x-1) - 5 \cdot \log_2(x-1) + 6 = 0$  [  $x_1 = 5 \cup x_2 = 9$  ]

## IV) Disequazioni logaritmiche

- 48)  $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 1$   $[x > \frac{7}{3}]$
- 49)  $\log_2(2x+5) > 0$   $[x > -2]$
- 50)  $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > 1$   $[\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}]$
- 51)  $\log_3 x < 0$   $[0 < x < 1]$
- 52)  $\log_3^2 x - \log_3 x < 0$   $[1 < x < 3]$
- 53)  $\log_3 x + \log_3(x-8) \geq 2$   $[x \geq 9]$
- 54)  $\log_3^2 x + 2 \cdot \log_3 x - 3 < 0$   $[\frac{1}{27} < x < 3]$
- 55)  $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > \log_{\frac{1}{2}}(20-3x)$   $[3 < x < \frac{23}{4}]$
- 56)  $\log_{\frac{1}{3}}(6x-x^2) + 2 < 0$  [nessuna soluzione]
- 57)  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4) + \log_3(x-3) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$   $[x > 3]$
- 58)  $\log_{\frac{3}{4}}(1-x^2) \leq 0$   $[x = 0]$
- 59)  $\log_2(1-x^2) - 1 < 0$   $[-1 < x < 1]$
- 60)  $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 > 0$   $[0 < x < \frac{1}{25} \cup x > 5]$
- 61)  $\log_2 x + \log_2(1+x) < \log_2(1-x)$   $[0 < x < \sqrt{2}-1]$
- 62)  $\log_2^2(1-x) - \log_2(1-x) > 0$   $[x < -1 \cup 0 < x < 1]$
- 63)  $\frac{\log_3(2-x)}{\log_{\frac{1}{3}}(1+x)-1} < 0$   $[-\frac{2}{3} < x < 1]$
- 64)  $\frac{\log_2^2 x - \log_2 x}{\log_3 x} < 0$   $[0 < x < 2 \text{ con } x \neq 1]$

## V) Esercizi di ricapitolazione

65)  $9^{x+1} - 3^{3x-1} = 0$  [  $x = 3$  ]

66)  $2^{x-1} = 3^{1+x}$  [  $x = \log_{\frac{2}{3}} 6$  ]

67)  $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$  [  $x = \log_5 2 \cup x = \log_5 3$  ]

68)  $(2^x - 4) \cdot \left( \left( \frac{1}{9} \right)^x - 1 \right) > 0$  [  $0 < x < 2$  ]

69)  $2 \cdot 5^x - 25^x + 8 > 0$  [  $x < \log_5 4$  ]

70)  $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3}{4^x} < 0$  [  $x > -1$  ]

71)  $\log_5(x+2) - \log_5(x-1) = \log_5 x$  [  $x = 1 + \sqrt{3}$  ]

72)  $\log_2^2(5x-4) - \log_2(5x-4) = 0$  [  $x_1 = 1 \cup x_2 = \frac{6}{5}$  ]

73)  $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) + \log_2(2x-1) = 2$  [nessuna soluzione]

74)  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}3x > 0$  [  $x > \frac{1}{2}$  ]

75)  $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) - \log_{\frac{1}{3}}^2(x-4) < 0$  [  $4 < x < \frac{13}{3} \cup x > 5$  ]

76)  $\frac{2^x - 8}{\log_2(x+3) - 1} > 0$  [  $-3 < x < -1 \cup x > 3$  ]

$$77) \quad 9^x + 9 = 10 \cdot 3^x \quad [ \ x = 0, \quad x = 2 \ ]$$

$$78) \quad 3^{x-2} = 5^{x-1} \quad [ \ x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{9}{5} \ ]$$

$$79) \quad 49^x - 6 \cdot 7^x - 7 > 0 \quad [ \ x > 1 \ ]$$

$$80) \quad \frac{1}{3^x - 9} - \frac{1}{3^x + 1} > 0 \quad [ \ x > 2 \ ]$$

$$81) \quad \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1}{4 - 2^x} < 0 \quad [ \ 0 < x < 2 \ ]$$

$$82) \quad \log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1) \quad [ \ x = 1 \ ]$$

$$83) \quad \log_3(x-1) + 1 = \log_3(x+2) + \log_3\left(x - \frac{6}{5}\right) \quad [ \ x = \frac{11 + \sqrt{61}}{10} \ ]$$

$$84) \quad \log_3^2(x+2) - \log_3(x+2) = 0 \quad [ \ x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \ ]$$

$$85) \quad \log_{\frac{1}{3}}(4x-3) > -1 \quad [ \ \frac{3}{4} < x < \frac{3}{2} \ ]$$

$$86) \quad \log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0 \quad [ \ \frac{1}{4} < x < 2 \ ]$$

$$87) \quad \frac{1 - 25^x}{\log_2(x-3)} < 0 \quad [ \ x > 4 \ ]$$

## Scheda 1

### *Logaritmi e chimica*

In chimica la concentrazione molare di ioni  $H^+$  presenti in una soluzione viene indicata con il simbolo  $[H^+]$  e si ha:

$[H^+] = 1$  per una soluzione di massima acidità;

$[H^+] = 10^{-7}$  per una soluzione neutra;

$[H^+] = 10^{-14}$  per una soluzione di minima acidità (basica).

Si definisce il pH di una soluzione come

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

e quindi abbiamo che:

se  $[H^+] = 1 \Rightarrow pH = 0$  soluzione di massima acidità;

se  $[H^+] = 10^{-7} \Rightarrow pH = 7$  soluzione neutra;

se  $[H^+] = 10^{-14} \Rightarrow pH = 14$  soluzione di minima acidità (basica)

#### Problemi

- a) Dato il pH di una soluzione, per esempio  $pH=8$ , quanto risulta la concentrazione di ioni  $[H^+]$ ?

.....

- b) Un aumento del pH corrisponde ad un aumento o a una diminuzione della concentrazione di ioni  $H^+$ ?

.....

- c) Se la soluzione X ha un pH doppio della soluzione Y, come risulta la concentrazione degli ioni  $H^+$  presenti nelle due soluzioni?

.....

.....

## Scheda 2

### *Logaritmi e decibel*

Ricordiamo che l'intensità  $I$  di un'onda sonora è definita come la quantità di energia che attraversa in 1 secondo una superficie di  $1 \text{ m}^2$  disposta perpendicolarmente alla superficie di propagazione dell'onda e si misura quindi in  $\text{W/m}^2$ .

L'intensità minima percepita da un orecchio "normale" (alla frequenza di riferimento di 1000 Hz) è  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  (soglia di udibilità).

Si definisce livello sonoro, che indichiamo con  $l_s$ , misurato in decibel (dB):

$$l_s = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \text{ (dB)}$$

Quindi se  $I = I_0 \Rightarrow l_s = 0 \text{ dB}$

se  $I = 10 \cdot I_0 \Rightarrow l_s = 10 \text{ dB}$

se  $I = 100 \cdot I_0 \Rightarrow l_s = 20 \text{ dB}$

ecc.

#### Problemi

- a) Un amplificatore di un impianto Hi-Fi emette un suono che ad una data distanza ha un livello sonoro di 80 dB. Raddoppiando la potenza dell'amplificatore e quindi l'intensità  $I$  del suono, come risulterà (in quella stessa posizione) il livello sonoro?

.....

- b) L'intensità del suono (per la frequenza di riferimento di 1000 Hz) che provoca una sensazione di dolore al timpano è  $I = 1 \text{ W/m}^2$ : qual è il livello sonoro corrispondente?

.....

- c) Rappresenta in un grafico  $(I, l_s)$  l'andamento del livello sonoro (in dB) rispetto all'intensità  $I$  del suono.

## Problemi

1) Supponiamo che nella sterilizzazione del latte alla temperatura costante di 120°C il numero  $n(t)$  delle spore del microrganismo *Bacillus Stearothermophilus* sia regolato dalla legge

$$n(t) = 100 \cdot 0,98^t$$

dove  $t$  è la durata in secondi del processo di sterilizzazione.

Rappresenta l'andamento di  $n(t)$  e determina il tempo di dimezzamento del numero delle spore cioè dopo quanti secondi il loro numero è dimezzato rispetto a quello iniziale.

[34,3 s]

2) Un biologo ha scoperto che il numero  $N(t)$  di un dato tipo di batteri presenti al tempo  $t$  (misurato in ore) in una coltura raddoppia ogni ora. Sapendo che all'inizio ( $t=0$ ) il numero dei batteri era 50 scrivi l'espressione di  $N(t)$ . Dopo quanto tempo il numero di batteri è maggiore di 1 milione?

$$[N(t) = 50 \cdot 2^t; 14,3 \text{ h}]$$

3) Una sostanza radioattiva si dimezza ogni ora. Indicando con  $Q_0$  la quantità di sostanza radioattiva iniziale, determina l'espressione della quantità  $Q(t)$  di sostanza radioattiva al tempo  $t$  misurando  $t$  in ore. Dopo quanto tempo la quantità di sostanza radioattiva si riduce a meno di 1/100 della quantità iniziale? E dopo quanto a meno di 1/1000?

$$[Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t; 6,6 \text{ h}; 10 \text{ h}]$$

4) In quanti anni raddoppia un capitale iniziale  $C_0$  se la banca applica un interesse composto del 2%?

[ 35 anni ]

5) Se sappiamo che il nostro capitale iniziale raddoppierà in 10 anni, qual è il tasso di interesse composto applicato dalla nostra banca?

[ 7% ]

- 6) Dopo la fecondazione, per scissione della cellula madre nel processo chiamato mitosi, si hanno due cellule figlie ogni 30 ore.

a) Quante cellule si hanno dopo 5 giorni dalla fecondazione?

b) quanti giorni devono passare dalla fecondazione per avere circa  $2^{20}$  (circa un milione) cellule?

[16 ; 25 giorni ]

- 7) a) Una banca applica un tasso di interesse composto del 4% con capitalizzazione ad 1 anno (ogni anno l'interesse viene aggiunto al capitale). Scrivi quanto risulta il capitale, partendo da un capitale iniziale  $C_0 = 100$  (euro), dopo 5 anni.  
b) Un'altra banca applica lo stesso tasso composto del 4% ma con capitalizzazione a 6 mesi cioè ogni 6 mesi l'interesse si somma al capitale. In questo caso, sempre partendo da 100 euro, quanto risulta il capitale dopo 5 anni?

[circa € 122; circa € 148 ]

- 8) Una coperta misura 250 cm x 280 cm ed è spessa 0,3 cm. Ogni volta che la pieghi in due la sua superficie si dimezza e raddoppia il suo spessore.

Se devi metterla in una scatola 50 cm x 40 cm x 30 cm (30 cm altezza della scatola), quante volte dovrà ripiegarla? La coperta starà nella scatola? (controlla lo spessore)



[ 6 piegature ; sì ]

- 9) Abbiamo bisogno di un prestito e confrontiamo le proposte di due banche: la prima ci propone un tasso composto del 4% con durata di 15 anni (cioè dovremo restituire quanto abbiamo avuto in prestito con l'interesse maturato in 15 anni), la seconda un tasso del 3% con durata 20 anni. Qual è la proposta migliore? Quanto dobbiamo restituire alla prima banca? E alla seconda?  
(Indica con  $C_0$  il valore iniziale del prestito)

[la prima;  $1,801 \cdot C_0$ ;  $1,806 \cdot C_0$  ]

- 10) Il numero di batteri in una certa coltura raddoppia in 20' (20 minuti). Sapendo che il numero iniziale è  $N_0 = 500$  scrivi come risulta il numero  $N(t)$  di batteri presenti dopo  $t$  minuti. Dopo quanto tempo i batteri sono 1 milione?

[  $N(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$  ; circa 219' cioè 3h 39' ]

# Statistica



## Introduzione

Il termine statistica deriva da Stato perché è lo Stato che conduce i “censimenti” cioè delle indagini per conoscere il numero degli abitanti, la composizione della popolazione per età, sesso, condizioni economiche (il “censo”).

Si sono poi sviluppate indagini statistiche di vario genere oltre ai "censimenti" dello Stato.

La statistica nel suo sorgere ed evolversi non si discosta di molto dal percorso attuato da altre scienze poiché inizia come *attività pratica*, tesa alla soluzione di problemi concreti, e viene poi sviluppata come disciplina scientifica.

Da attività di conteggio, enumerazione ed anche di calcolo di semplici medie attuate su rilevazioni effettuate per scopi diversi si passa all'osservazione di *proprietà di un insieme di dati*, del quale si cerca di studiarne i seguenti aspetti:

- la **variabilità** degli stessi
  - la **sintesi** attraverso varie medie
  - la **dipendenza o indipendenza** di due caratteri.

Lo sviluppo della statistica moderna è associato ai nomi di F. Galton (1822-1911) , di K. Pearson (1857-1936) e di Fisher (1890-1962).

Lo studio statistico dei fenomeni riveste oggi grande importanza per poter risolvere e studiare molti problemi: ad esempio uno studio sulla vita media di una popolazione può influenzare le decisioni prese dal governo in campo pensionistico; lo studio degli effetti di un farmaco in via di sperimentazione su un campione di pazienti può far decidere se metterlo in commercio oppure no; in campo medico uno studio statistico può servire a individuare le cause dell'insorgenza di alcune patologie.

Inizieremo con il richiamare quanto già visto nell'introduzione alla statistica svolta nella prima classe, per poi continuare con lo studio delle tabelle a doppia entrata e la definizione di correlazione tra i dati.

## Tabella statistica e sua rappresentazione

Quando si compie un'indagine statistica viene indagata la presenza di un certa caratteristica detta "carattere" all'interno di una certa "popolazione".

Il carattere considerato può manifestarsi con modalità diverse e può essere:

- **un carattere quantitativo** se le sue modalità sono espresse da numeri (discreto se può assumere un numero finito di valori o al più un'infinità numerabile o continuo se può assumere tutti i valori di un intervallo reale);
- **un carattere qualitativo** se le sue modalità non sono espresse da numeri.

### Esempio 1

Supponiamo di chiedere agli studenti della 3B dell'anno scolastico in corso quale sport praticano di più tra calcio, nuoto, basket, pallavolo, danza e tennis .

La nostra "popolazione statistica" è costituita dagli studenti della 3B dell'anno scolastico in corso.

Il carattere indagato (sport praticato maggiormente) è di tipo qualitativo e le modalità considerate sono calcio, nuoto ecc.

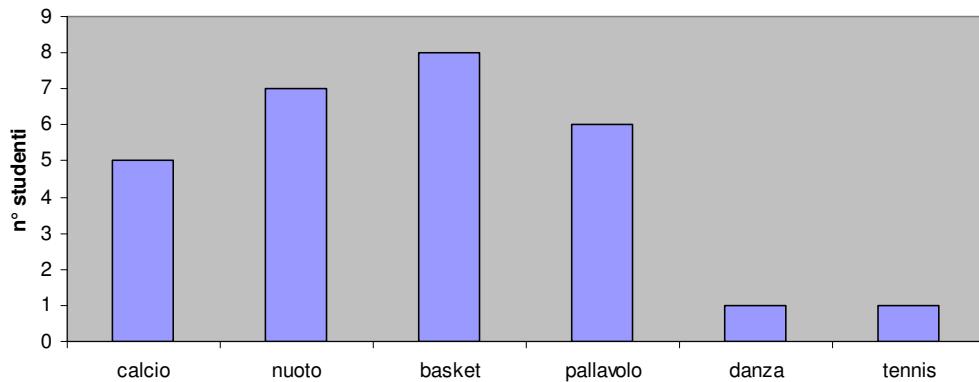
Per ciascuna modalità indichiamo il n° degli studenti che hanno indicato quella modalità come sport maggiormente praticato: la **frequenza** (assoluta) di una modalità è il numero delle volte che quella data modalità si presenta, mentre la **frequenza relativa** è il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero delle unità statistiche, cioè degli studenti della 3B.

Supponiamo di avere ottenuto la seguente tabella:

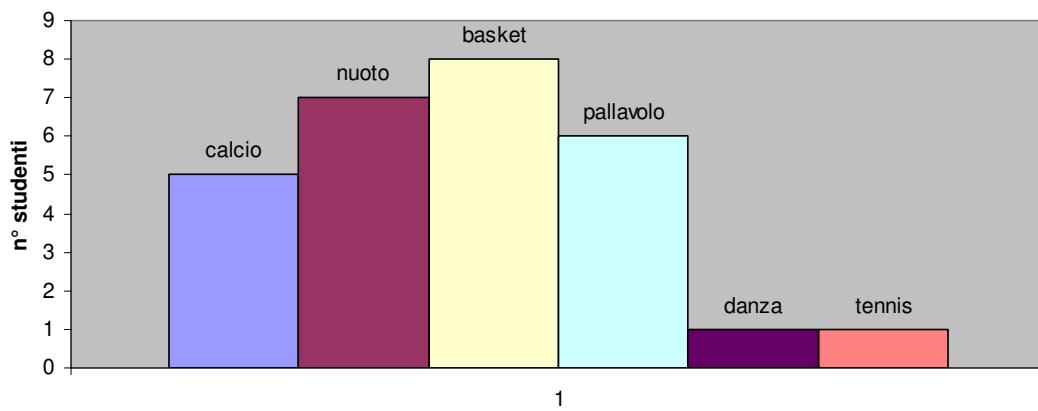
Sport praticato	n° studenti della 3B (frequenza)	Frequenza relativa	Freq. Rel %
calcio	5	5/28	....
nuoto	7	7/28=0,25	25%
basket	8	8/28	...
pallavolo	6	6/28	....
danza	1	1/28	.....
tennis	1	1/28	....

Possiamo rappresentare questi dati con:

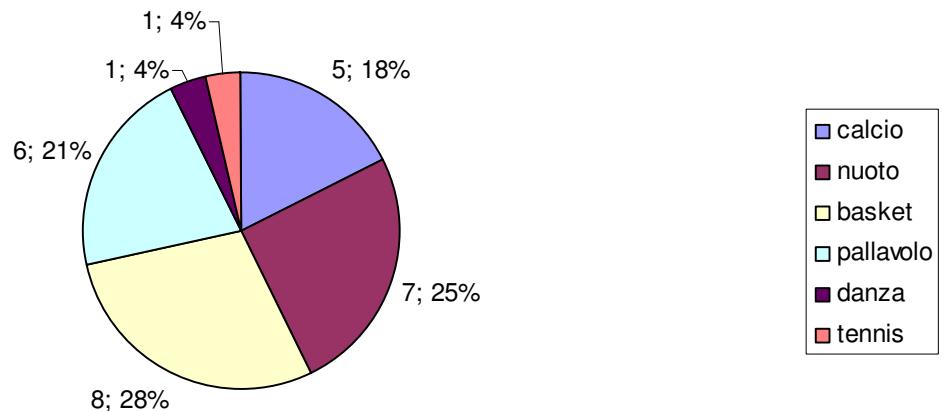
- 1) un **diagramma a barre** in cui le basi dei rettangoli distanziati corrispondono alle varie modalità e le altezze sono proporzionali alle frequenze



- 2) un **istogramma** in cui i rettangoli sono affiancati



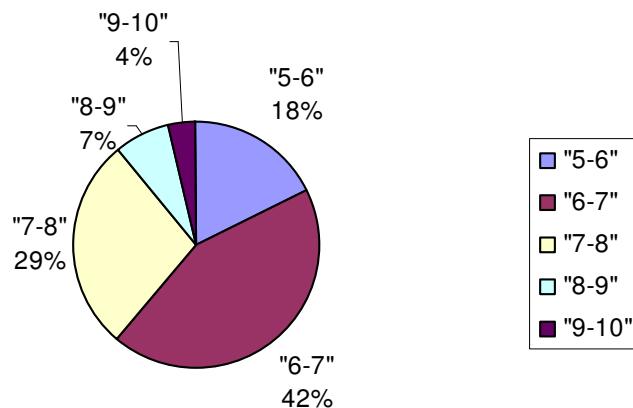
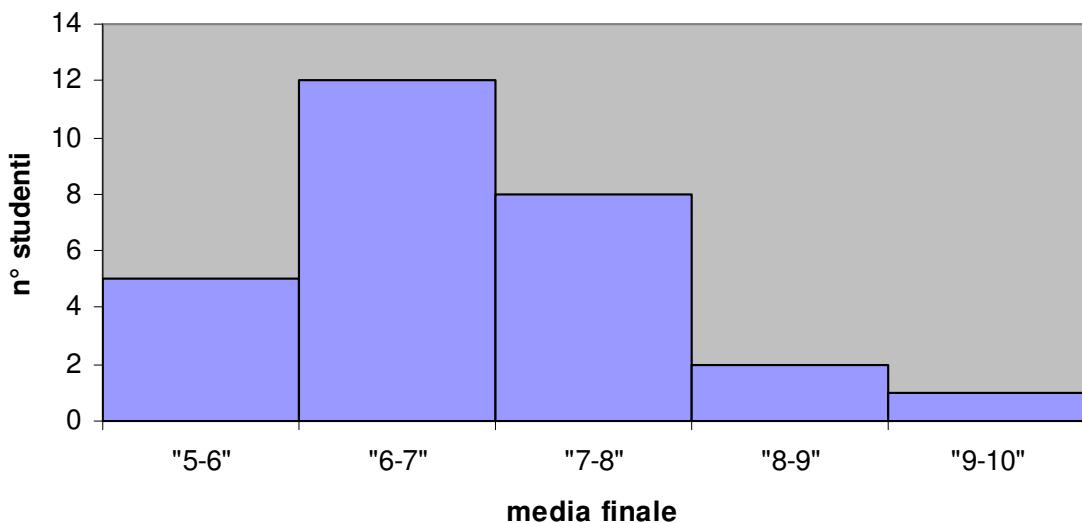
- 3) un **aerogramma** in cui un cerchio viene suddiviso in settori circolari corrispondenti alle varie modalità e ampiezza proporzionale alla frequenza relativa (o percentuale):



**Nota:** per determinare l'ampiezza  $\alpha$  del settore corrispondente ad una data frequenza relativa percentuale  $f$  basta impostare la proporzione  $\alpha : 360^\circ = f : 100$ .  
Se per esempio  $f=25\%$  otteniamo  $\alpha = 90^\circ$ .

## Esempio 2

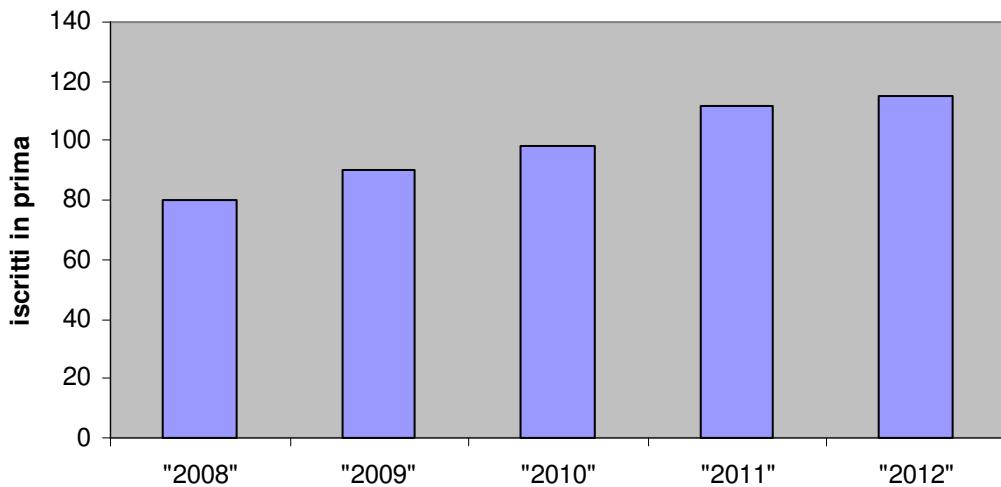
Consideriamo la media ottenuta nello scrutinio finale degli alunni della 3B del liceo scientifico in un dato anno scolastico e supponiamo di avere i seguenti dati raggruppati per “**classi di frequenza**” (la classe “5-6” comprende gli studenti che hanno una media finale  $m$  con  $5 \leq m < 6$ ): questa volta il carattere esaminato è un carattere quantitativo (discreto).



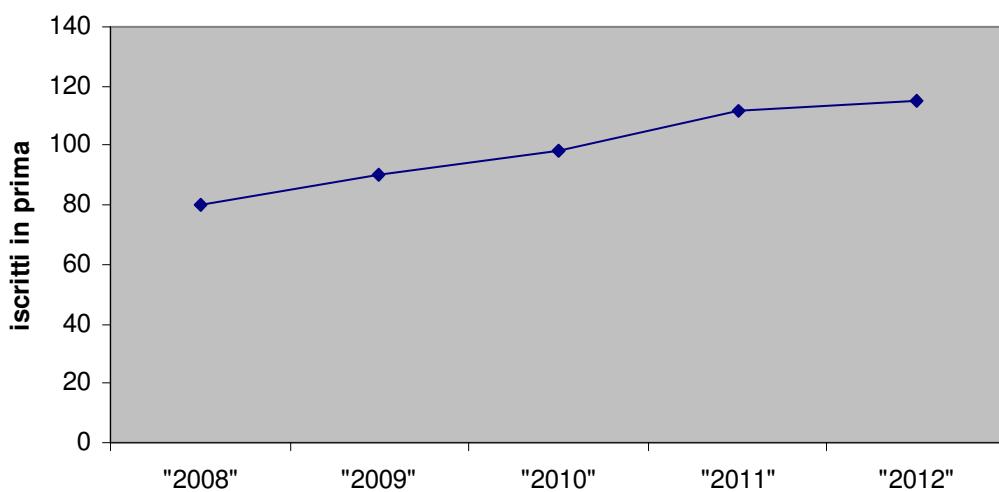
### Esempio 3

Consideriamo il n° di studenti iscritti al primo anno del liceo scientifico nel nostro istituto negli anni dal 2008 al 2012 come riportato dalla seguente tabella:

anno scol.	n° studenti
"2008"	80
"2009"	90
"2010"	98
"2011"	112
"2012"	115



In questo caso si parla di **serie “storica”** e può essere utile rappresentarla con un diagramma cartesiano per visualizzare l’andamento del fenomeno.



#### Nota

La rappresentazione che si sceglie per visualizzare una tabella di dati dipende naturalmente anche dal tipo di tabella: in questo caso il diagramma cartesiano è sicuramente la rappresentazione più significativa.

## Media aritmetica, moda, deviazione standard

Per sintetizzare i dati di una tabella statistica possiamo usare 3 “indici”: la media aritmetica, la moda e la deviazione standard (o scarto quadratico medio). Vediamo un esempio.

### Esempio 4

Supponiamo di aver rilevato le seguenti temperature massime nei vari giorni dei mesi di marzo e luglio di un dato anno:

Giorno	Temp. Max. Marzo	Temp. Max Luglio
1	16	28
2	18	29
3	20	29
4	22	27
5	21	26
6	22	24
7	22	26
8	24	26
9	20	28
10	20	28
11	21	30
12	18	30
13	16	31
14	16	32
15	14	32
16	19	30
17	20	31
18	18	29
19	19	28
20	22	32
21	24	33
22	24	32
23	20	30
24	24	30
25	25	29
26	25	32
27	24	33
28	22	33
29	21	30
30	17	30
31	16	30

Definiamo i seguenti “indici”:

- la **media aritmetica**  $\bar{x}$  è la somma di tutti i dati  $x_1, \dots, x_n$  divisa per il numero dei dati cioè

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Nel nostro caso per calcolarla possiamo sommare tutte le temperature oppure determinare la frequenza di ciascuna temperatura : se per esempio nel mese di Luglio la temperatura 24 ha frequenza 1, la temperatura 26 ha frequenza 3 , la temperatura 27 frequenza 1, la temperatura 28 frequenza 4...possiamo scrivere

$$\text{media\_aritmetica} = \frac{24 \cdot 1 + 26 \cdot 3 + 27 \cdot 1 + 28 \cdot 4 + \dots}{31}$$

Otteniamo:

Temp max media Marzo	Temp max media Luglio
20,3	29,6

- la **moda** è il dato frequenza | Temp moda Marzo 20 Temp moda Luglio 30 | che ha la massima

- la **deviazione standard**  $\sigma$  (o scarto quadratico medio) è definita così

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

e ci dà un’idea di quanto i dati sono vicini alla loro media: se  $\sigma$  è piccolo i dati sono tutti vicini alla media aritmetica, se invece è grande sono “dispersi”.

Nel nostro esempio abbiamo:

dev. Standard Marzo	dev. Standard Luglio
3,0	2,3

Osserviamo quindi che a Marzo i dati sono più “dispersi” rispetto alla loro media aritmetica rispetto al mese di Luglio.

**Nota:** se i dati vengono riportati in un foglio Excel, abbiamo a disposizione le tre funzioni

MEDIA, MODA DEV.ST.POP (dev. Stand. su tutta la popolazione)

che permettono di calcolarle automaticamente inserendo l'intervallo dei dati da considerare cioè, relativamente per esempio a Marzo, basterà scrivere (se i dati di marzo sono nelle celle b2..b32):

=media(b2:b32)  
=moda(b2:b32)  
=dev.st.pop(b2:b32)

**Esercizio :** considera le seguenti misurazioni del diametro di due tubi capillari effettuate con un calibro ed espresse in millimetri

misura	diametro tubo1	diametro tubo 2
1	5,25	4,8
2	5,26	4,7
3	5,24	4,75
4	5,2	4,74
5	5,21	4,87
6	5,23	4,73
7	5,25	4,72
8	5,24	4,82
9	5,24	4,76
10	5,19	4,78
11	5,2	4,83
12	5,23	4,76
13	5,22	4,8
14	5,26	4,75
15	5,24	4,8
16	5,24	4,75
17	5,22	4,82
18	5,2	4,81
19	5,23	4,73
20	5,26	4,7

Calcola la media aritmetica delle due serie misure, la moda e la deviazione standard.  
Quale delle due serie di misure è stata effettuata in modo migliore cioè ha la minore deviazione standard?

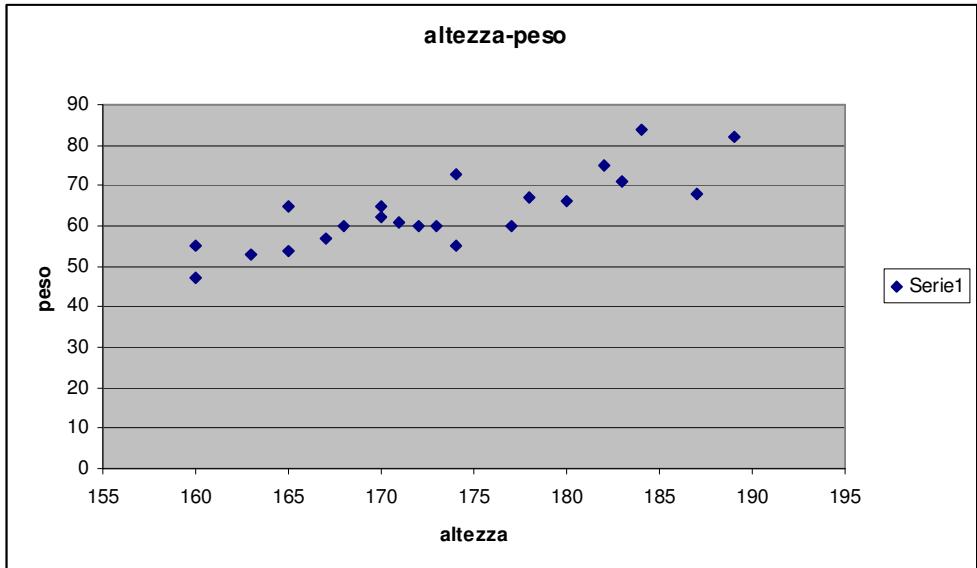
## Tabelle a doppia entrata

Finora abbiamo analizzato tabelle in cui viene considerato un solo carattere di una data popolazione (statistica univariata): vediamo un esempio in cui vengono rilevati due caratteri, quantitativi X e Y (statistica bivariata).

### Esempio

Consideriamo la tabella seguente relativa ad altezze e pesi degli studenti di una classe, riportiamo i dati in un foglio elettronico e disegniamo il grafico ( $x, y$ ) corrispondente : possiamo osservare che i punti seguono un andamento “lineare” cioè risultano grosso modo disposti lungo una retta.

altezza	peso
167	57
163	53
170	62
160	47
178	67
189	82
160	55
184	84
187	68
168	60
183	71
180	66
172	60
173	60
171	61
182	75
170	65
165	65
174	73
165	54
174	55
177	60

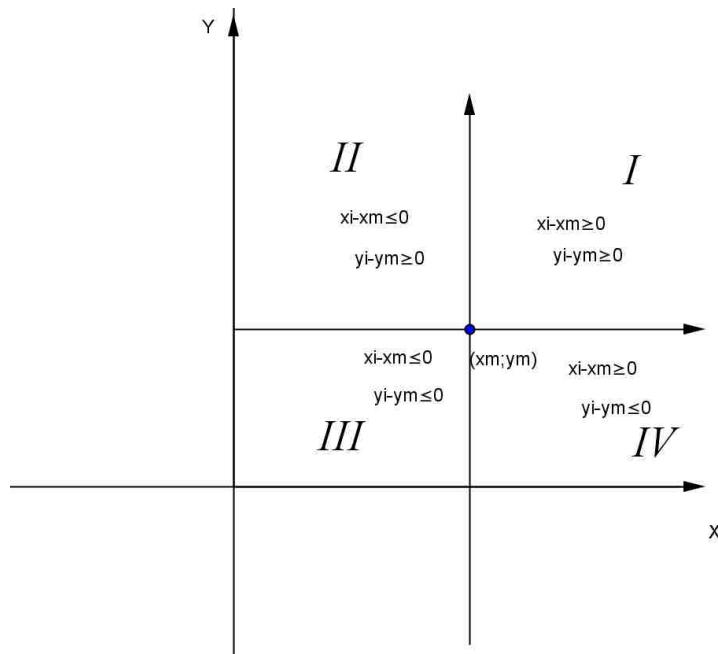


In generale se due caratteri X e Y di tipo quantitativo prendono i valori  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  possiamo calcolare la “covarianza”  $\sigma_{XY}$  definita nel modo seguente

$$\sigma_{XY} = \frac{(x_1 - \bar{x}) \cdot (y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x}) \cdot (y_n - \bar{y})}{n}$$

dove  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  rappresentano la media aritmetica delle modalità con cui si presentano i due caratteri e  $n$  è il numero dei dati.

Osserviamo che il punto di coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$  divide il piano cartesiano in quattro zone in cui i prodotti  $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$  sono positivi o negativi (vedi figura in cui  $\bar{x}$  è stato indicato con  $xm$  e analogamente  $\bar{y}$  con  $ym$ ).



- Se  $\sigma_{X,Y} > 0$  significa che la maggior parte dei prodotti  $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$  sono positivi e quindi i punti  $(x_i, y_i)$  si trovano soprattutto nelle zone I e III e la “nuvola” di punti ha una forma di tipo lineare crescente;
- Se  $\sigma_{X,Y} < 0$  invece la maggior parte dei prodotti  $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$  sono negativi e quindi i punti  $(x_i, y_i)$  cadono soprattutto nelle zone II e IV e la forma della “nuvola” di punti è di tipo lineare decrescente;
- Se  $\sigma_{X,Y}$  è vicina a zero significa che i punti sono sparpagliati senza alcuna regolarità oppure sono disposti secondo relazioni diverse da quella lineare.

Poiché si può dimostrare che

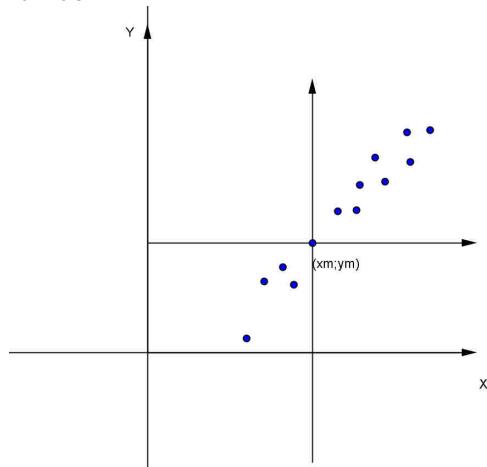
$$-\sigma_X \cdot \sigma_Y \leq \sigma_{XY} \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

(dove  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  sono le deviazioni standard di X e Y)

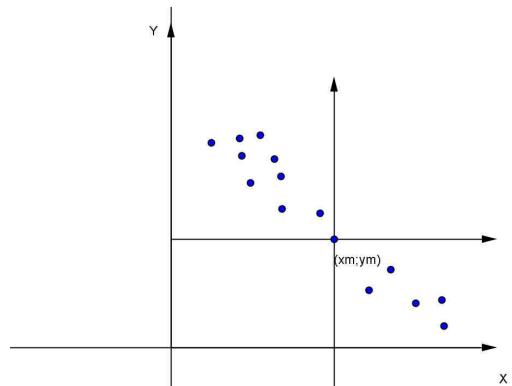
si definisce il **coefficiente di correlazione lineare**  $r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$  che risulta compreso tra -1 e 1.

Quindi:

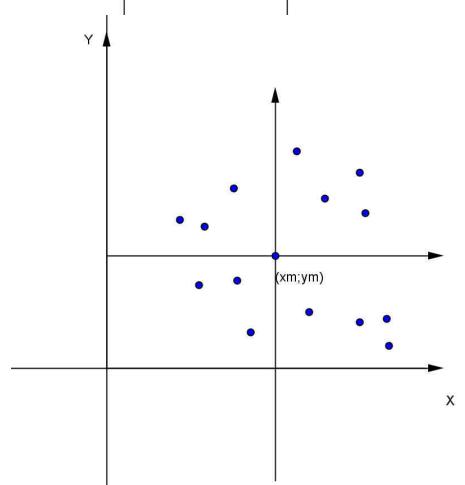
- Se  $r > 0$  si tratterà di una **correlazione “diretta”** cioè i caratteri X e Y avranno una relazione lineare crescente, ma solo se  $r$  è vicino a 1 il modello lineare interpreterà bene la relazione tra X e Y



- Se  $r < 0$  si tratterà di una **correlazione “inversa”** cioè i caratteri X e Y avranno una relazione lineare decrescente, ma solo se  $r$  è vicino a -1 il modello lineare interpreterà bene la relazione tra X e Y



- Se  $r$  è vicino a zero il legame tra X e Y è lontano da quello lineare

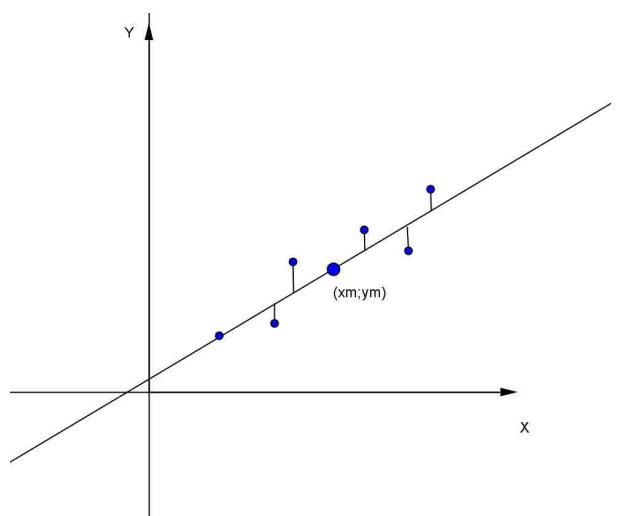


Se  $r$  è vicino a 1 oppure a -1 si cerca la “**retta di regressione**” o retta interpolante che più si avvicina ai nostri dati.

**Nota:** la retta di regressione  $f(x) = m \cdot x + q$  sarà quella retta che rende minima la somma dei quadrati delle differenze tra il valore del dato  $y_i$  che si è ottenuto in relazione alla modalità  $x_i$  e il valore  $f(x_i)$  che si avrebbe sulla retta.

Si può dimostrare che la retta di regressione passa

$$\text{per } (\bar{x}, \bar{y}) \text{ e } m = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x^2}.$$



Torniamo al nostro esempio.

Calcoliamo il **coefficiente di correlazione lineare** utilizzando la funzione di Excel

=CORRELAZIONE( a2:a23;b2:b23 )

e otteniamo (approssimato a due cifre decimali) 0,82

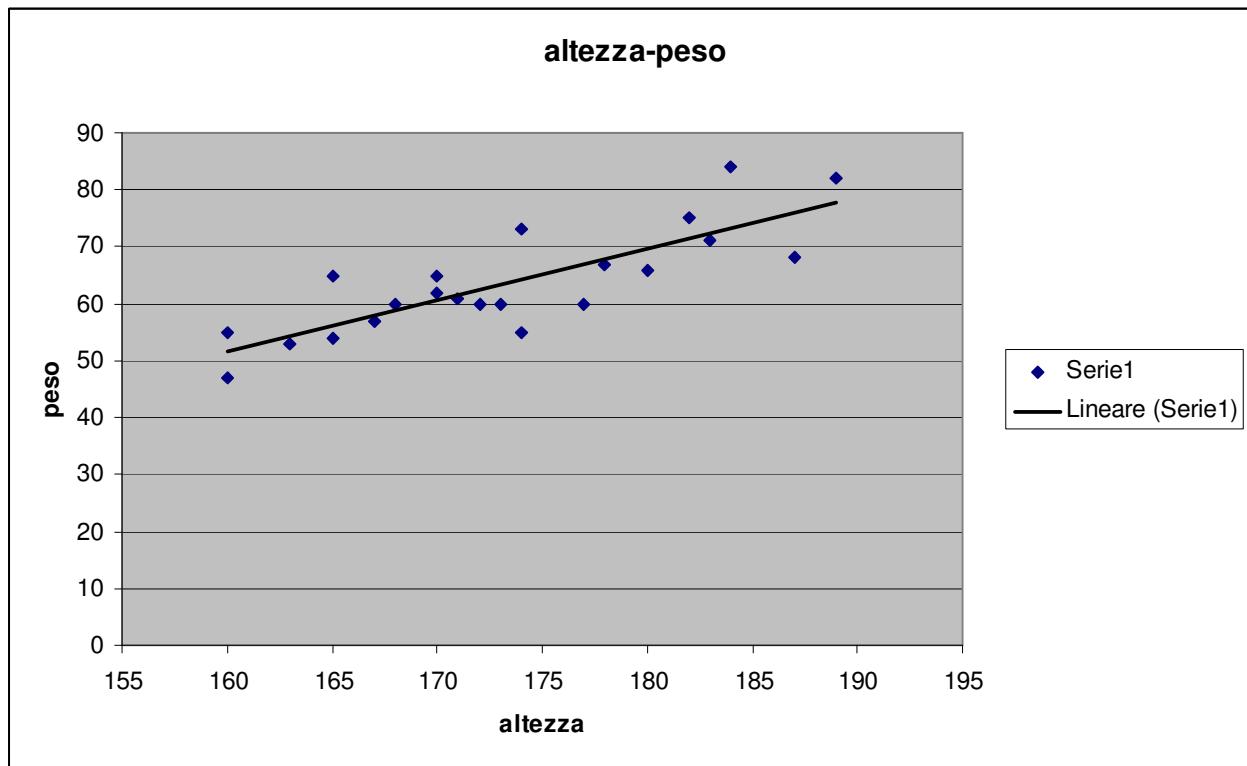
Quindi **si tratta di una correlazione lineare diretta** e quindi possiamo cercare la retta “interpolante” (detta anche retta di regressione) cioè la retta che più si avvicina ai punti del nostro grafico.

Possiamo usare una funzione presente nel foglio di calcolo Excel: se scriviamo

=REGR.LIN ( b2:b23;a2:a23 )

otteniamo 0,90 , cioè l’inclinazione della retta che interpola i nostri punti.

Per disegnare la retta di regressione basta cliccare con il tasto destro su un qualsiasi punto del grafico e scegliere “Aggiungi linea di tendenza” e scegliere (in questo caso) “lineare”.



Possiamo verificare che la retta interpolante passa per la media delle altezze (173,27) e la media dei pesi (63,64).

### Approfondimento

**1)** Se tra i caratteri X e Y sospettiamo (osservando la distribuzione dei punti  $(x_i, y_i)$ ) che vi sia una dipendenza quadratica cioè del tipo  $Y = a \cdot X^2$  possiamo studiare la dipendenza tra  $X^2$  e Y: se troviamo una correlazione lineare tra  $X^2$  e Y è chiaro che abbiamo dimostrato che c'è una dipendenza quadratica tra X e Y.

### Esercizio

Considera i dati della seguente tabella riferiti ai tempi e agli spazi rilevati da un sensore di moto disposto come nell'esempio 6 ma nel caso che la rotaia sia inclinata rispetto all'orizzontale e non venga impressa nessuna velocità iniziale al carrello.

tempo (x)	Spazio (y)
0,1	0,02
0,2	0,07
0,3	0,19
0,4	0,3
0,5	0,48
0,6	0,7
0,7	1
0,8	1,3
0,9	1,58
1	1,95

Elabora i dati impostando un foglio Excel. Quale dipendenza trovi tra tempo (X) e spazio (Y)?

**2)** Se invece tra X e Y pensiamo che ci sia un legame esponenziale cioè che sia  $Y = b \cdot a^{mX}$  possiamo vedere se c'è correlazione lineare tra X e  $\log_a Y$  oppure tra X e  $\ln Y$  (logaritmo in base e) o tra X e  $\log_{10} Y$  (logaritmo in base 10). Infatti se, per esempio,  $\log_a Y = mX + q$  allora avremo che  $Y = a^{mX+q} \Rightarrow Y = a^{mX} \cdot a^q$  e quindi ponendo  $a^q = b$  avremo una relazione del tipo  $Y = b \cdot a^{mX}$ .

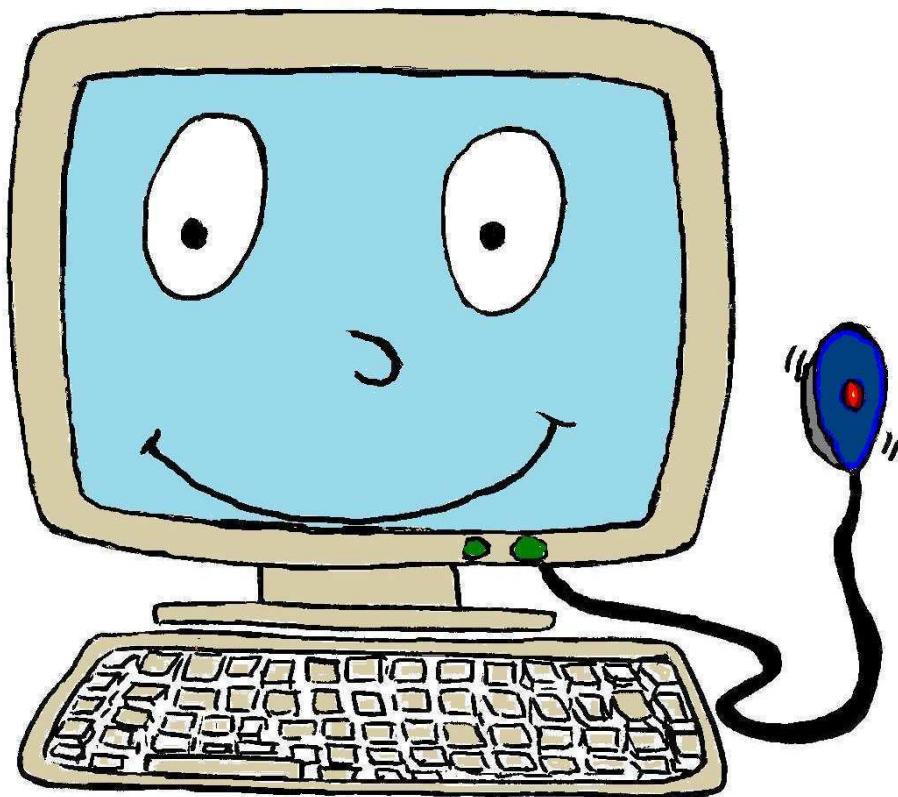
### Esercizio

Considera i dati della seguente tabella che indicano il numero di batteri rilevati al passare delle ore in una cultura:

tempo(ore) (X)	n°batteri (Y)
1	2
2	5
3	7
4	15
5	30
6	60
7	120
8	250
9	500
10	1010

Trasferisci i dati in un foglio di Excel e cerca di capire che legame c'è tra X e Y.

# Laboratorio di informatica

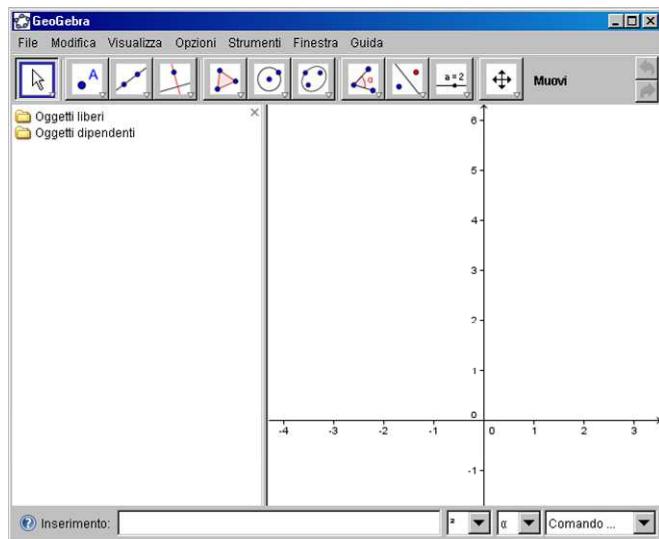


## GEOMETRIA ANALITICA CON GEOGEBRA

### Ripasso

Nello studio della geometria analitica può risultare interessante utilizzare il software Geogebra (geometria +algebra). Rivediamo brevemente come si utilizza.

Apriamo il programma: comparirà un piano cartesiano con dei pulsanti in alto che hanno comandi per disegnare punti, rette, circonferenze ecc. e in basso una riga dove è possibile **inserire coordinate di punti o equazioni**.



Se per esempio digito (1,1) nella finestra grafica compare il punto corrispondente : posso anche assegnare un nome al punto, per es. B=(1,1) , altrimenti viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (A, B, C ...).

Se digito  $y=x$  compare nella finestra grafica la retta corrispondente: per darle un nome basta digitare, per esempio, r :  $y=x$  altrimenti il nome viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (a,b,c...).

\*Prova a digitare coordinate di punti e equazioni di rette.....

## Slider

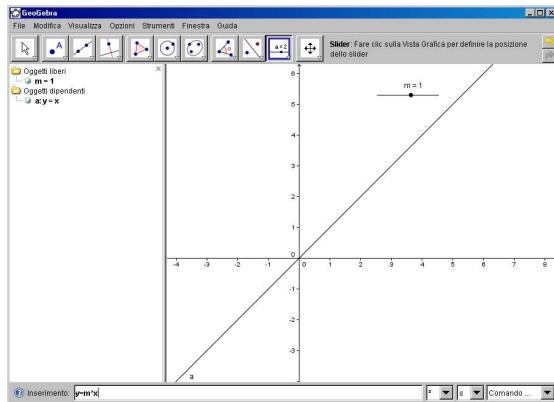
Geogebra offre la possibilità di utilizzare quelli che vengono chiamati “slider” che altro non sono che parametri che possono essere inseriti in un’equazione e variati :variando il valore dello slider viene visualizzata l’equazione corrispondente e quindi viene compreso il significato di quel parametro.

Prima di inserire uno slider in un’equazione dobbiamo crearlo.

- Attiviamo il pulsante in alto in cui compare la scritta “slider”;
- posizioniamoci in un punto qualsiasi del piano cartesiano e facciamo clic con il mouse: comparirà un trattino e ci verrà chiesto di inserire il nome e il campo di variazione dello slider (per esempio chiamiamolo m e scegliamo di farlo variare tra -10 e 10 ).

Digitiamo nella barra di inserimento per esempio  $y=mx$  (in alcune versioni di Geogebra occorre mettere \* per indicare la moltiplicazione ) e osserviamo che compare subito la rappresentazione della retta per l’origine corrispondente al valore che viene dato inizialmente allo slider (uguale a 1).

- Appunti di Matematica 3 – Liceo Scientifico -  
- Laboratorio di informatica -



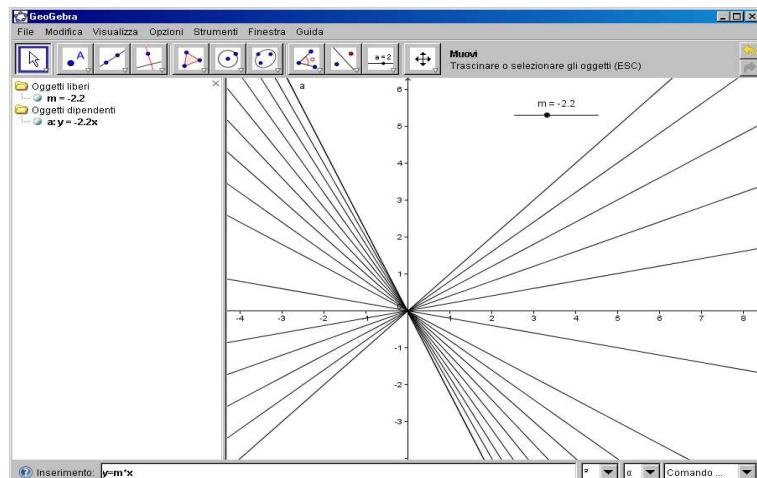
Per visualizzare come cambia la retta al variare di  $m$  attiviamo nel primo pulsante in alto a sinistra il comando **“muovi”**.

Posizioniamoci sullo slider (comparirà una manina) e trasciniamo lo slider (cambia il suo valore): la retta per l’origine cambia e quindi ci rendiamo conto che variando  $m$  varia l’inclinazione della retta.

Possiamo anche visualizzare insieme tutte le rette corrispondenti ai vari valori dello slider scegliendo, dopo essersi posizionati sulla retta e premuto il tasto destro del mouse, la funzione “traccia attiva” (in alcune versioni si trova “traccia on” ) : a questo punto muovendo  $m$  compariranno tutte le rette corrispondenti.

Posso anche inserire un valore dello slider digitandolo nella riga di inserimento in basso.

Possiamo anche vedere automaticamente la variazione dello slider con : Modifica -proprietà fondamentale-animazione attiva.



### Ricorda

Se vogliamo riportare un grafico fatto con Geogebra all’interno di un documento dobbiamo procedere così:

- selezionare con il mouse la zona della finestra grafica che ci interessa;
- selezionare file-esporta- esporta la vista grafica negli appunti (equivale ad un ctrl-C cioè ad un copia);
- andare nel documento dove vogliamo inserire il grafico, posizionare il cursore nel punto esatto e premere ctrl-v (contemporaneamente cioè “incolla”).

## Laboratorio di informatica

### SCHEDA 1

#### GEOMETRIA ANALITICA

##### *Retta e fasci di rette*

#### Esercizio 1

Studia l'equazione generale della retta  $a*x+b*y+c=0$  creando gli slider a, b, c e facendoli variare.

Stampa degli esempi.

#### Esercizio 2

Studia l'equazione del fascio di rette  $y=2x + k$  dopo aver creato lo slider k.

Stampa il fascio.

#### Esercizio 3

Studia l'equazione del fascio di rette  $y-1=m*(x-1)$  dopo aver creato lo slider m.

Stampa il fascio.

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 2

#### GEOMETRIA ANALITICA

*Fascio generato da due rette*

Studia **fasci di rette generati da due rette**  $r_1$  e  $r_2$  combinando le loro equazioni con un parametro (slider) k.

- 1) Per esempio considera

$$x - y + k * (x - 1) = 0$$

Osserva cosa accade quando  $k \rightarrow 0$  e quando  $k \rightarrow \infty$ .

Se avessimo scritto

$$k * (x - y) + (x - 1) = 0$$

avremmo ottenuto lo stesso fascio?

Quando k cresce a quale retta ci avviciniamo?  
Quale retta si ottiene per k = 0?

Stampa il fascio.

- 2) Costruisci un altro fascio e fai delle osservazioni.

Stampa i tuoi esempi.

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 3

#### GEOMETRIA ANALITICA

##### *Circonferenza*

1) Prova a disegnare una circonferenza digitando nella barra di inserimento la sua equazione, per esempio,

$$x^2 + y^2 = 1$$

(per elevare al quadrato occorre usare ^).

2) Puoi costruire una circonferenza anche attivando i comandi :

circonferenza dati il centro e un punto;  
circonferenza dati centro e raggio;  
circonferenza per tre punti (non allineati).

Prova e controlla l'equazione che compare a sinistra nella "vista algebra".  
Stampa le tue prove.

3) Crea tre slider a,b,c e inserisci l'equazione generale della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + a * x + b * y + c = 0$$

Prova a variare a,b,c e fai le tue osservazioni stampando degli esempi (per esempio se a=0..... , se b=0....., se c=0..... )

Osserva che non per tutti i valori di a,b,c, ottieni una circonferenza perché.....

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 4

#### GEOMETRIA ANALITICA *Fasci di circonferenze*

L'uso degli slider permette di studiare i fasci di circonferenze: possiamo combinare l'equazione di due circonferenze o di una circonferenza e di una retta.

Quali tipi di fasci di circonferenze sono rappresentati dalle seguenti equazioni?

Per tutti i valori di k si hanno circonferenze reali ?

- $x^2 + y^2 - 1 + k * (x - y + 1) = 0$
- $x^2 + y^2 - 1 + k * (x - 1) = 0$
- $x^2 + y^2 - 1 + k * (x^2 + y^2 - 4) = 0$
- $x^2 + y^2 - 1 + k * (x - 2) = 0$

Stampa i vari fasci di circonferenze e inserisci le tue osservazioni.

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 5

#### GEOMETRIA ANALITICA *Luoghi di punti*

**1)** Fissati due punti A e B determina il luogo dei punti P del piano che verificano la relazione

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$$

*Suggerimento:* se per esempio fissiamo un sistema di riferimento che abbia l'origine in A , come asse x la retta AB e come unità di misura la distanza  $\overline{AB}$  avremo A(0;0) e B(1;0) e quindi ponendo P(x;y) e impostando la relazione avremo

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 1$$

che sviluppata risulta .....

**Domanda:** secondo te perché il luogo dei punti P risulta così?

**2)** Fissati due punti A e B , per esempio A(0;0) e B(1;0) determina il luogo dei punti P(x;y) del piano tali che

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k \text{ con } k \text{ numero reale positivo}$$

*Suggerimento:* creiamo uno slider k e inseriamo l'equazione del luogo

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = k$$

**Domanda:** cosa si ottiene al variare di k? Vanno bene tutti i valori di k positivi?

**3)** Fissati tre punti A, B, C studiamo il luogo dei punti P(x;y) che verificano la relazione

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = k$$

dove k è un numero reale positivo.

*Suggerimento:* possiamo fissare un sistema di riferimento in modo che A(0;0) B(1;0) (prendendo come unità di misura la distanza tra A e B )e C(a;b) con a,b slider.

Creiamo anche lo slider k e inseriamo l'equazione del luogo:

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 = k$$

Come risulta il luogo al variare di k? (osserva l'equazione della curva che compare nella “finestra algebra”....). Stampa il luogo ottenuto.

#### Domande

Se muovi C cosa accade ? Vanno bene tutti i valori di k positivi? C'è un minimo valore di k?

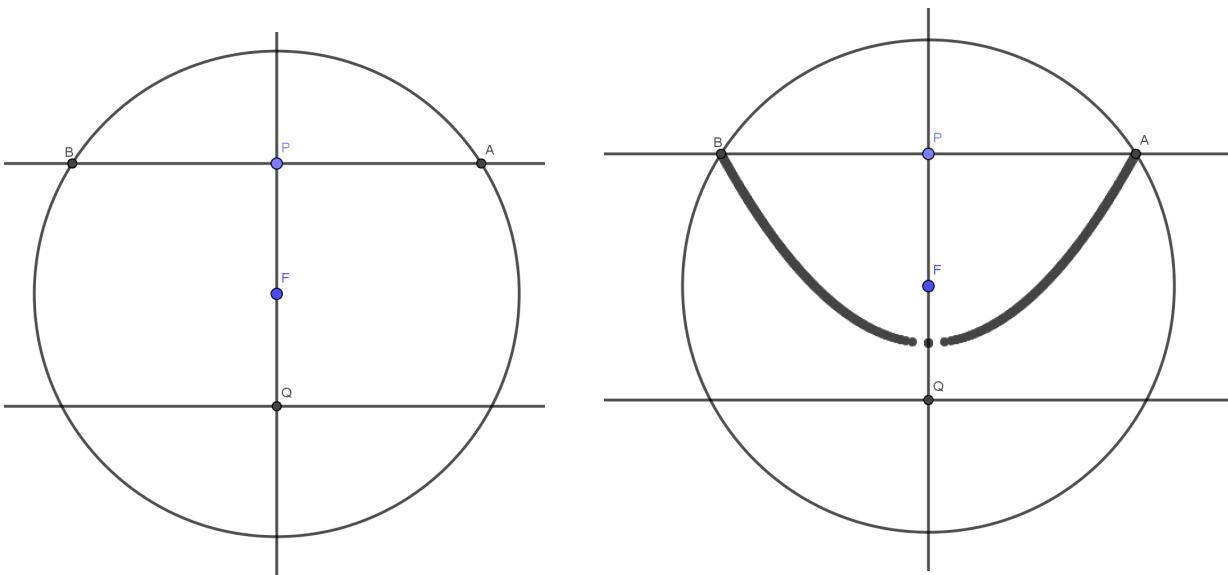
## Laboratorio di informatica

### SCHEDA 6

#### GEOMETRIA ANALITICA *Costruzione della parabola (primo metodo)*

Vediamo un metodo per disegnare per punti una parabola di fuoco F assegnato e direttrice d assegnata.

- Traccia la retta r per F perpendicolare a d (asse di simmetria);
- prendi un punto P su r (punto su oggetto) (rinomina il punto);
- interseca la retta r con d: si ottiene Q (rinominare il punto);
- con lo strumento “compasso” selezionare i punti P e Q (per indicare l’apertura  $\overline{PQ}$ ) e poi il centro F: viene tracciata una circonferenza di centro F e raggio PQ;
- traccia la retta per P parallela alla direttrice e intersecalo con la circonferenza ed ottieni due punti A e B (rinominare i punti) che, essendo equidistanti dal fuoco e dalla direttrice, appartengono alla parabola;
- attiva la traccia di A e B e muovi P ottenendo così vari punti della parabola.



#### Nota

Puoi anche usare il comando “luogo”: seleziona A e poi P (ottieni un ramo della parabola) e poi ancora B e poi P (ottieni l’altro ramo).

Nascondi tutta la costruzione lasciando solo F e d : se muovi fuoco o direttrice osserva come varia l’apertura della parabola.

**Stampa i tuoi esempi.**

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 7

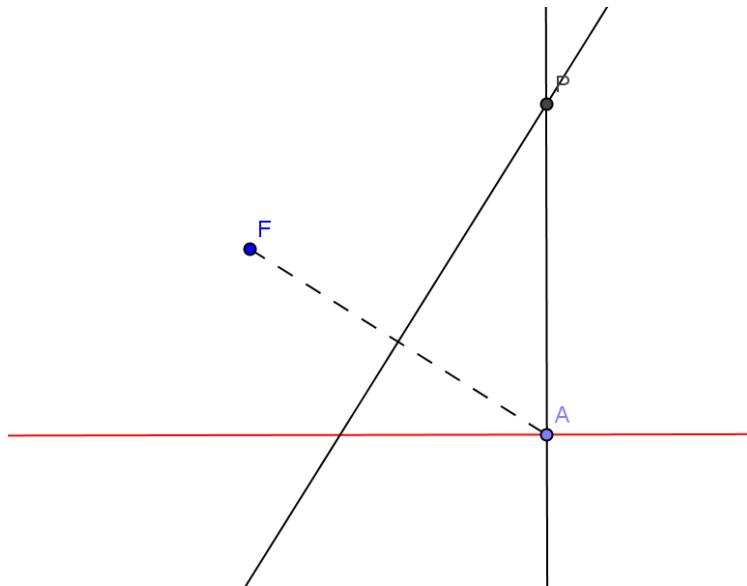
#### GEOMETRIA ANALITICA *Costruzione della parabola* (secondo metodo)

Vediamo un altro metodo per disegnare la parabola di **dato fuoco e data direttrice**.

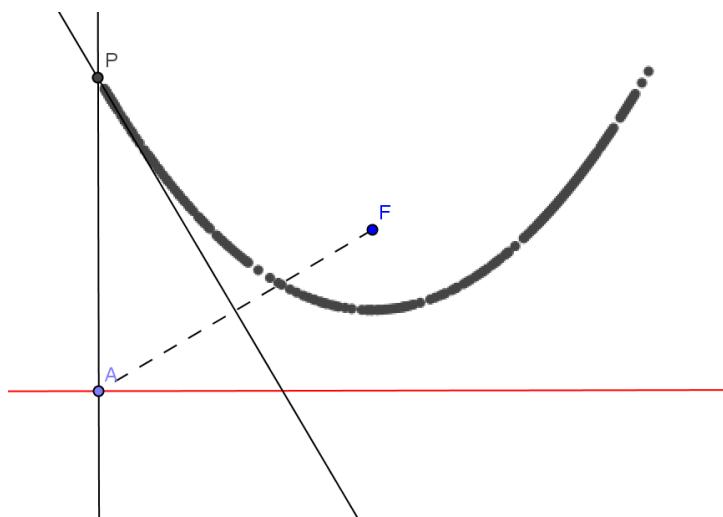
Creiamo un punto F (rinominalo) e una retta d (rinominala).

Prendi un punto A sulla direttrice (comando punto su oggetto) e traccia la retta r per A perpendicolare alla direttrice : traccia l'asse del segmento FA e intersecalo con la retta r individuando il punto P.

P appartiene alla parabola di fuoco F e direttrice d poiché è equidistante da F e dalla retta d.



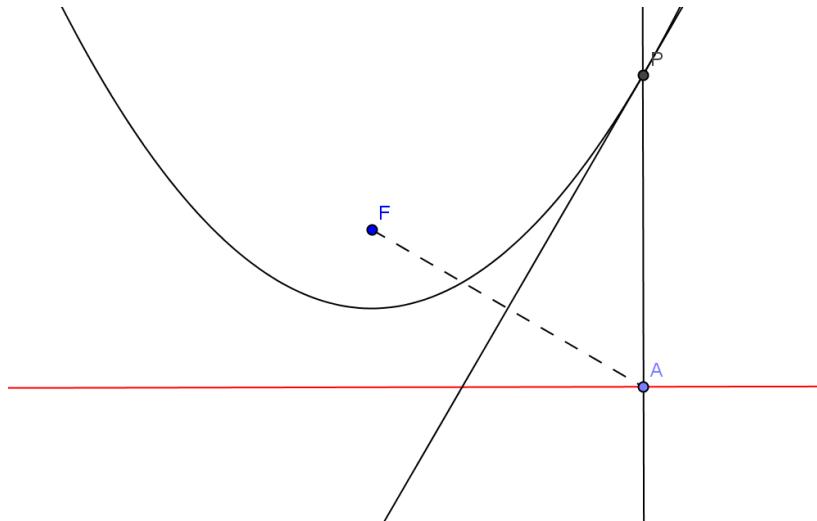
Se attiviamo la “traccia” di P e muoviamo A otteniamo la parabola di fuoco F e direttrice d.



### Nota 1

Anche in questo caso prova ad usare il comando “**luogo**”.

Cancella con “modifica” Annulla , scegli il comando “luogo”, seleziona P e poi A (poiché le varie posizioni di P dipendono dalle varie posizioni di A) e verrà immediatamente disegnata la parabola.



### Nota 2

Possiamo anche definire una “**macro**” cioè un comando che ci permetterà di avere la parabola di dato fuoco e direttrice semplicemente cliccando su un punto-fuoco e su una retta-direttrice.

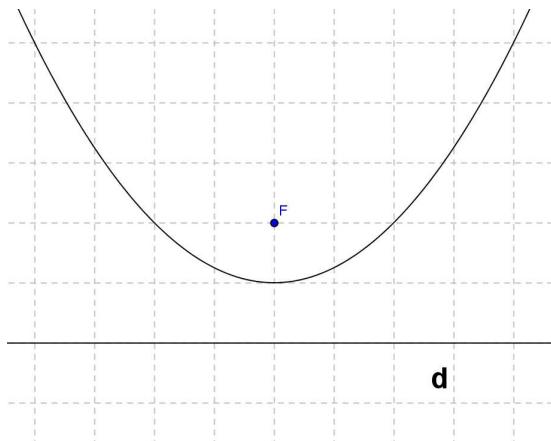
Scegliamo Strumenti – crea nuovo strumento :

come **oggetti finali** selezioniamo il luogo che abbiamo definito, come **oggetti iniziali** il fuoco F e la direttrice d (eliminiamo con la crocetta altri elementi che vengono indicati).

Premiamo “successivo” (oppure nome e icona): diamo il nome “parabola” al nostro strumento e selezioniamo “fine” (possiamo se vogliamo anche associare un’immagine al nostro strumento, basta prima disegnare una parabola, esportarla come immagine, salvarla e poi sceglierla come “icona”).

**Importante:** se vuoi che questo strumento venga memorizzato ricorda di premere Opzioni – Salva impostazioni prima di chiudere il programma.

Prova se funziona: clic sullo strumento “parabola”, clic su un punto e su una retta...



## Laboratorio di informatica

### SCHEDA 8

#### GEOMETRIA ANALITICA *Il parabolografo*

Consideriamo una parabola, per esempio  $y^2 = 2x$ .

Consideriamo  $P(x; y)$  un punto su di essa: indichiamo con A la proiezione di P sull'asse x e tracciamo il segmento VP e poi la retta per P perpendicolare a VP ed intersechiamola con l'asse x chiamando B il punto di intersezione.

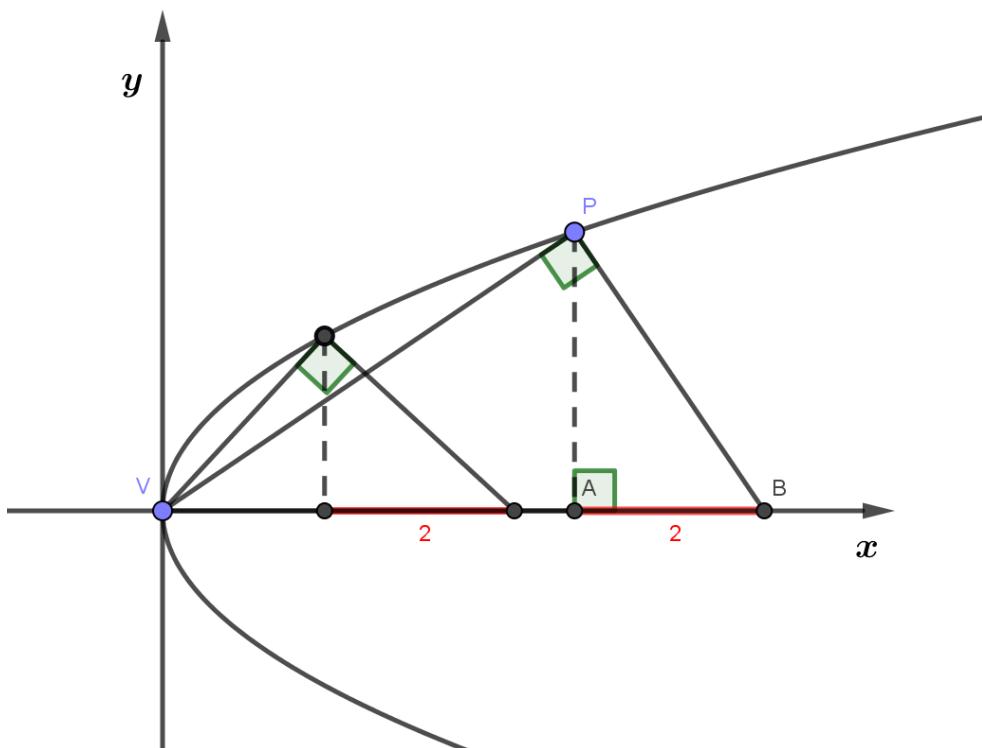
Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo VBP abbiamo che

$$x : y = y : \overline{AB} \rightarrow \overline{AB} = \frac{y^2}{x} = 2$$

Quindi il segmento AB, al variare di P sulla parabola risulta sempre uguale a 2 e in generale se abbiamo la parabola di equazione  $y^2 = p \cdot x$ , il segmento AB risulta sempre di lunghezza p al variare di P sulla parabola.

**Nota:** prova a verificare questa proprietà con Geogebra inserendo l'equazione della parabola, facendo la costruzione che abbiamo indicato e, dopo aver costruito il segmento AB, inserendo il comando “distanza o misura”.

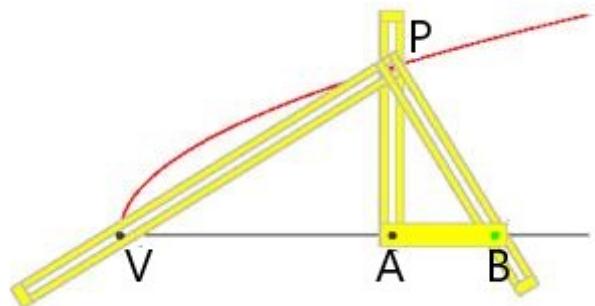
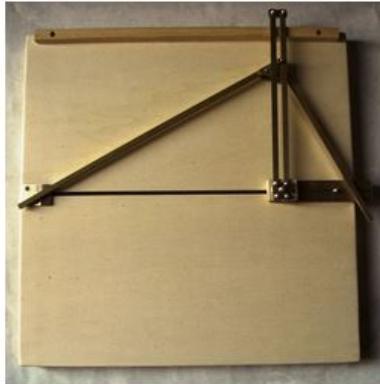
*Prova a muovere P sulla parabola:* se la costruzione è corretta vedrai che il segmento AB si mantiene sempre di lunghezza 2.



## Il parabolografo

Utilizzando questa proprietà della parabola, i matematici greci costruirono una “macchina” per tracciare una parabola e questo strumento fu chiamato parabolografo.

Un parabolografo è costituito da due “squadre” agganciate come in figura in modo che AB rimanga fisso: facendo scorrere il punto A nella scanalatura (asse x) il punto P descrive un arco di parabola.



### Proviamo a simulare il funzionamento di un parabolografo con Geogebra.

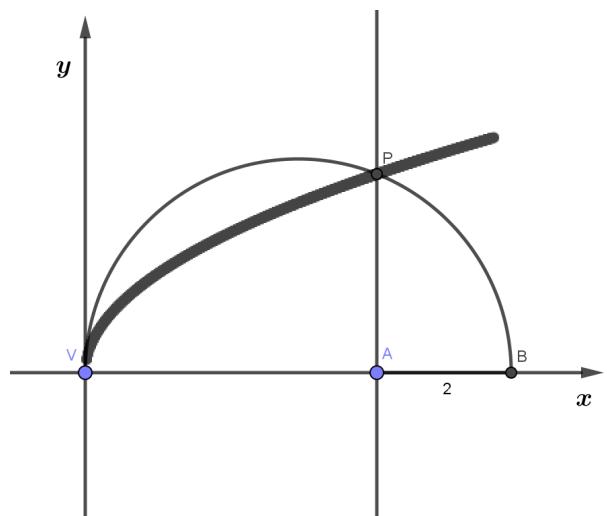
Consideriamo l'origine degli assi e poniamo  $V(0,0)$ , creiamo la retta coincidente con l'asse e un punto A su di essa con il comando “punto su oggetto”.

Inseriamo dalla barra di inserimento un altro punto B in modo che sia sempre anch'esso sull'asse x e in modo che la lunghezza del segmento AB sia fissa, per esempio uguale a 2:

$$B=(x(A)+2,0)$$

Tracciamo la retta r perpendicolare al segmento AB e passante per A. Tracciamo la semicirconferenza di diametro VB e chiamiamo con P il punto di intersezione fra la semicirconferenza e la retta r.

Il triangolo VBP risulta rettangolo (è inscritto in una semicirconferenza) e se facciamo variare il punto A e mettiamo la traccia attiva al punto P otteniamo un arco di parabola (di equazione  $y^2 = 2 \cdot x$ )



### Esercizio

Prova a inserire uno slider p e a ripetere la costruzione in modo di avere un parabolografo che tracci la parabola  $y^2 = p \cdot x$ .

Stampa qualche esempio variando il valore di p.

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 9

#### GEOMETRIA ANALITICA

*Equazione della parabola con asse parallelo all'asse y*

- 1) Prova ad inserire, dopo aver creato tre slider a, xv, yv

$$y-yv = a*(x-xv)^2$$

Prova a variare i valori di a, xv, yv.

Fai le tue osservazioni e stampa degli esempi.

- 2) Prova a vedere la relazione tra l'ampiezza della parabola e il parametro p (distanza fuoco-direttrice).

Dopo aver creato lo slider p (prendiamolo positivo) inserisci l'equazione:

$$y = 1/(2*p)*x^2$$

Puoi anche disegnare fuoco e direttrice inserendo  $F=(0,p/2)$  e  $y = -p/2$ .

Prova a “muovere” p: fai le tue osservazioni e stampa degli esempi.

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 10

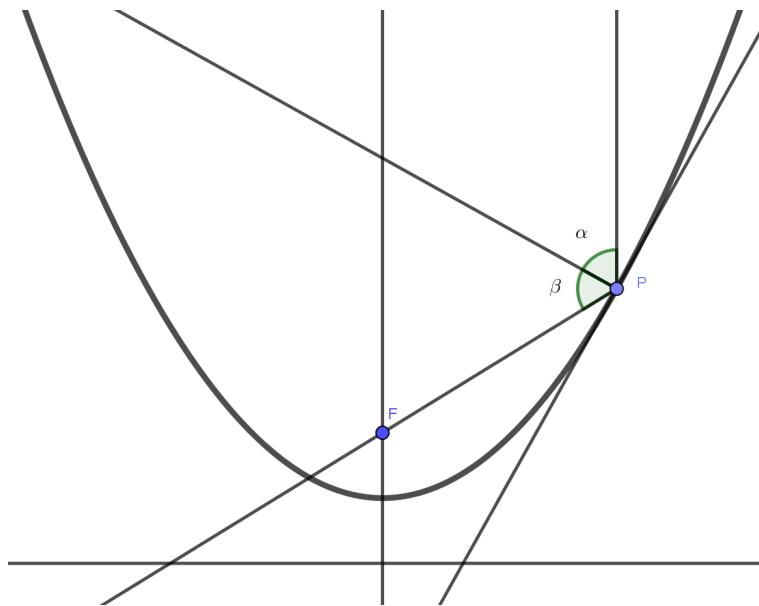
#### GEOMETRIA ANALITICA *Il fuoco della parabola*

Perché il fuoco della parabola si chiama così? Il motivo è legato ad un fenomeno di ottica.  
Se facciamo incidere su uno specchio “parabolico” un raggio di luce parallelo all’asse dello specchio il raggio riflesso passerà sempre per il fuoco: in questo punto si concentrerà molta energia luminosa e termica e per questo è stato chiamato “fuoco”.

Facciamo una verifica con Geogebra.

Disegniamo una parabola di data direttrice e fuoco (usando una delle costruzioni che abbiamo visto o inserendo l’equazione di una parabola, per esempio  $y = x^2$ );  
tracciamo l’asse di simmetria della parabola;  
prendiamo un punto P sulla parabola (punto su oggetto);  
tracciamo la semiretta uscente da P parallela all’asse (raggio incidente);  
tracciamo la semiretta uscente da P passante per F (raggio riflesso);  
tracciamo la tangente alla parabola nel punto P;  
tracciamo la perpendicolare per P alla tangente;  
costruiamo gli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  (vedi figura);  
si verifica che  $\alpha \cong \beta$ .

Quindi se l’angolo di incidenza (tra il raggio incidente e la perpendicolare allo specchio) è uguale all’angolo di riflessione (tra il raggio riflesso e la perpendicolare allo specchio) **la semiretta per P e F rappresenta effettivamente il raggio riflesso** che quindi passa per il fuoco e questo vale per tutti i raggi incidenti paralleli all’asse della parabola.



## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 11

#### GEOMETRIA ANALITICA *Il moto parabolico*

Se lanciamo un corpo con velocità  $\vec{v}_0$  (nel campo gravitazionale terrestre) inclinata di un angolo  $\alpha$ , il corpo compirà una traiettoria parabolica ottenuta dalla combinazione di un moto orizzontale rettilineo uniforme con velocità  $v_{0x} = v_o \cdot \cos \alpha$  con un moto verticale rettilineo uniformemente decelerato con velocità iniziale  $v_{0y} = v_o \cdot \sin \alpha$  e decelerazione  $g \cong 10m/s^2$ .

Abbiamo cioè

$$\begin{cases} x = v_{ox} \cdot t \\ y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

- 1) Consideriamo per esempio  $v_o = 10m/s$  e proviamo a visualizzare il moto parabolico del corpo inserendo, dopo aver creato gli slider  $\alpha$  (angolo di inclinazione della velocità  $\vec{v}_0$ ) e quindi tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ) e  $t$  (tra 0 e 2, per esempio), il punto P di coordinate

$$P = (10 * \cos(\alpha) * t, 10 * \sin(\alpha) * t - 5 * t^2)$$

Per vedere la traiettoria di P attiviamo la traccia di P e “muoviamo”  $t$ .

- 2) Proviamo a cercare, per un dato valore di  $v_0$  (nel nostro caso  $10 m/s$ ), per quale angolo  $\alpha$  si ha la massima gittata.

Per far questo fissiamo da tastiera il valore dell’angolo  $\alpha$  (non trascinando il valore dello slider): digitiamo per esempio nella barra dell’inserimento  $\alpha = 30^\circ$ , muoviamo il tempo t e vediamo come risulta la traiettoria e quindi la gittata.

Cambiamo da tastiera il valore di  $\alpha$  e verifichiamo che la massima gittata si ottiene per  $\alpha = \dots$ .

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 12

#### GEOMETRIA ANALITICA *Fasci di parabole*

Per ottenere un fascio di parabole con asse parallelo all'asse y possiamo "combinare" l'equazione di due parabole con asse parallelo all'asse y oppure l'equazione di una parabola P (con asse parallelo all'asse y) con l'equazione di una retta r.

1. Prova per esempio ad inserire, dopo aver creato uno slider k, l'equazione del fascio generato dalla parabola  $y = x^2 \Rightarrow x^2 - y = 0$  e dalla retta  $y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0$ :

$$x^2 - y + k*(y - 1) = 0$$

Cosa ottieni al variare di k? Le parabole del fascio hanno una caratteristica comune?  
Si ottengono sempre parabole? Per quale valore di k si ottiene la retta  $y = 1$ ?

2. Prova a inserire l'equazione del fascio ottenuto combinando

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 0$$

3. Prova ad inserire l'equazione del fascio ottenuto combinando

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = -1$$

Descrivi i fasci che ottieni specificando per quali valori di k non si ottengono parabole e trai una conclusione da quanto hai osservato.

## Laboratorio di informatica

### SCHEDA 13

#### GEOMETRIA ANALITICA *Problemi di massimo e minimo*

Consideriamo l'arco della parabola di equazione  $y = 4x - x^2$  con  $0 \leq x \leq 4$ .

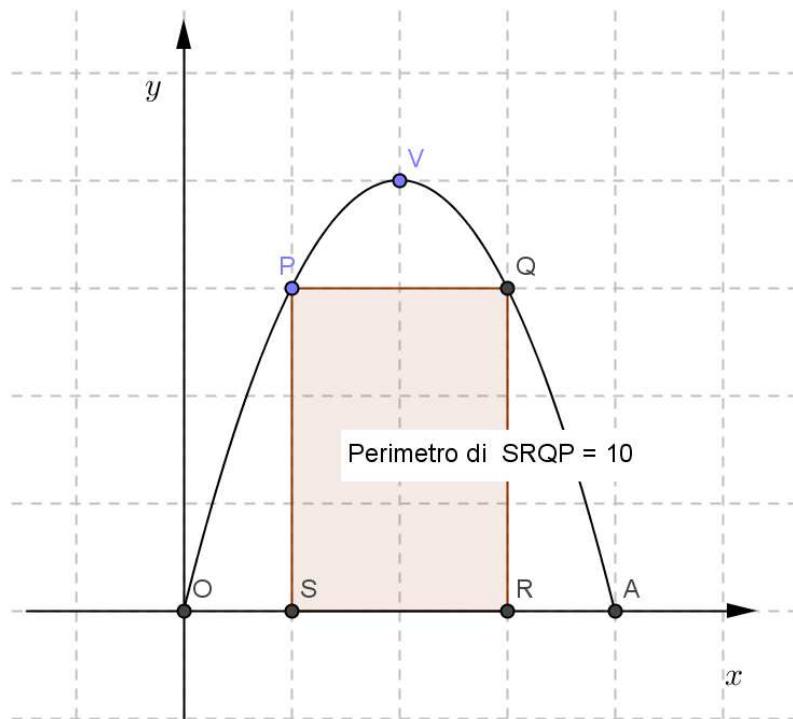
Nota: per disegnare solo l'arco considerato devi usare il comando curva[ $k,4k - k^2,k,0,4$ ].

Sia P un punto appartenente all'arco  $\overset{\circ}{OV}$  con V vertice della parabola e tracciamo il rettangolo PQRS inscritto nel segmento parabolico OVA (vedi figura)

Nota: perché il rettangolo resti inscritto nel segmento parabolico quando muoviamo P, dobbiamo costruirlo tracciando da P la parallela all'asse x e intersecare con la parabola (punto Q), la perpendicolare per P all'asse x e intersecare con l'asse x (punto S) , la perpendicolare per Q all'asse x e intersecare con l'asse x (punto R). Descriviamo il rettangolo ripassando per i punti dopo aver selezionato poligono.

Se selezioniamo il comando “distanza o lunghezza” e clicchiamo sul rettangolo avremo la misura del perimetro.

Possiamo così verificare che il valore minimo del perimetro è....e quello massimo è .....e che ci sono coppie di rettangoli diversi con lo stesso perimetro.



## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 14

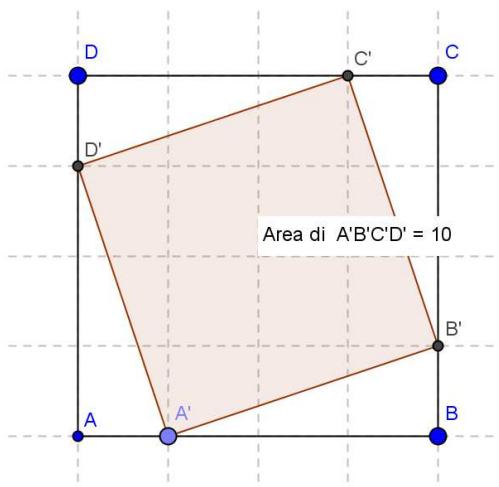
#### GEOMETRIA ANALITICA *Problemi di massimo e minimo*

Proviamo a disegnare con Geogebra il quadrato con il quadrato inscritto proposto negli Appunti in uno degli esempi di problema con discussione.

Disegna il quadrato come successione di segmenti aiutandoti con la griglia.

Costruisci un punto A' sul lato AB con il comando “punto su oggetto”: per poter costruire i punti B', C', D' in modo che  $BB'=AA'$  ecc. puoi usare lo strumento “compasso” prendendo come raggio AA'.....

Alla fine nascondi la costruzione e usando il comando “poligono” ripercorri il quadrato A'B'C'D'. Utilizza il comando area e seleziona il quadrato A'B'C'D' : verrà calcolata l’area di A'B'C'D'.



Se la costruzione funziona quando “muovi” A' tutto il quadrato A'B'C'D' dovrebbe cambiare restando però inscritto nel quadrato ABCD.

Muovi il punto A': l’area di A'B'C'D' varia tra

- un valore massimo uguale a .....
- un valore minimo uguale a .....

## Laboratorio di informatica

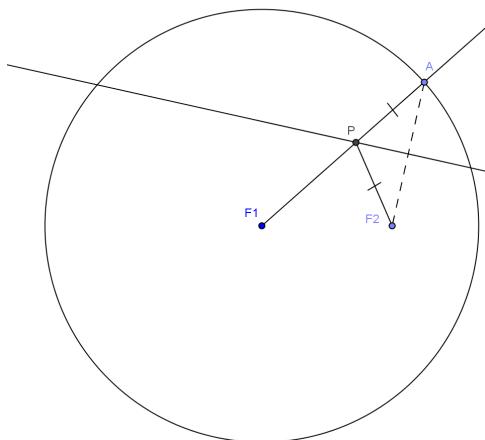
### SCHEMA 15

#### GEOMETRIA ANALITICA

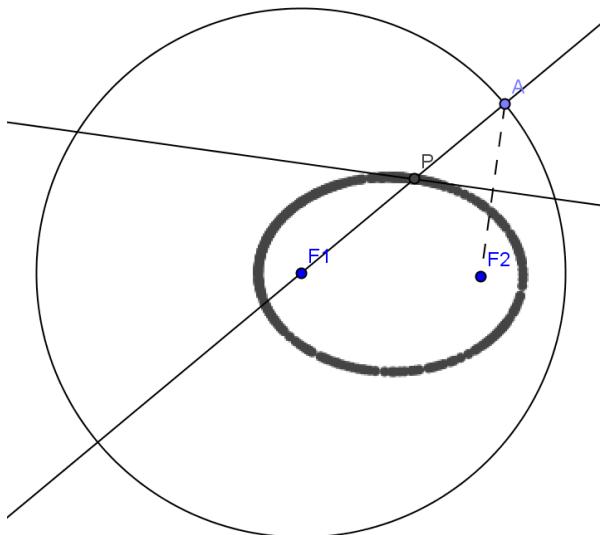
*Costruzione dell'ellisse dati i fuochi e l'asse maggiore*

Vediamo un metodo per costruire un' ellisse di dati fuochi  $F_1$  e  $F_2$  e di dato asse maggiore, per esempio 10 ( $\overline{F_1 F_2} < 10$ ): creiamo un punto  $F_1$  e un punto  $F_2$  (rinominiamoli) e tracciamo una circonferenza di centro  $F_1$  e raggio 10.

Creiamo un punto A sulla circonferenza ( con il comando “punto su oggetto”); tracciamo l'asse del segmento  $F_2 A$  e intersechiamolo con la retta per  $F_1$  e A: il punto P appartiene all'ellisse di fuochi  $F_1$  e  $F_2$  e asse maggiore 10 poiché  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{F_1 A} = 10$



Attivando la traccia di P e muovendo A otterremo l'ellisse:



## Laboratorio di informatica

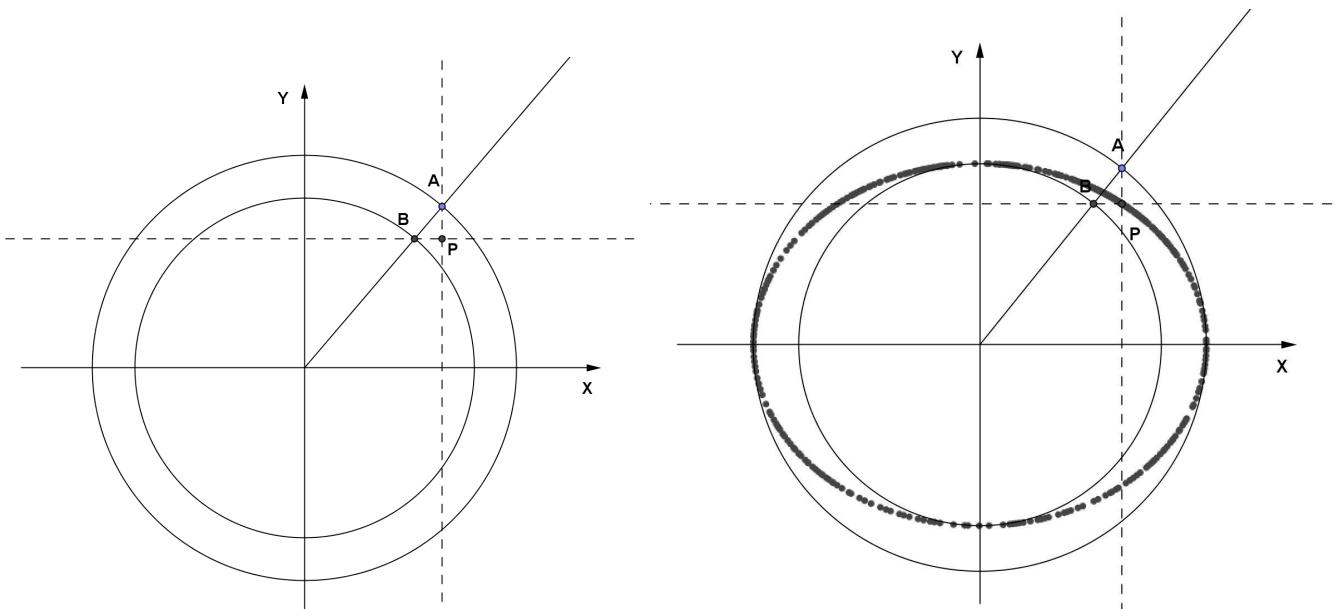
### SCHEMA 16

#### GEOMETRIA ANALITICA *Costruzione dell'ellisse di semiassi assegnati*

Possiamo costruire un'ellisse di semiassi assegnati  $a$  e  $b$  (riferita ai propri assi di simmetria) seguendo questo procedimento:

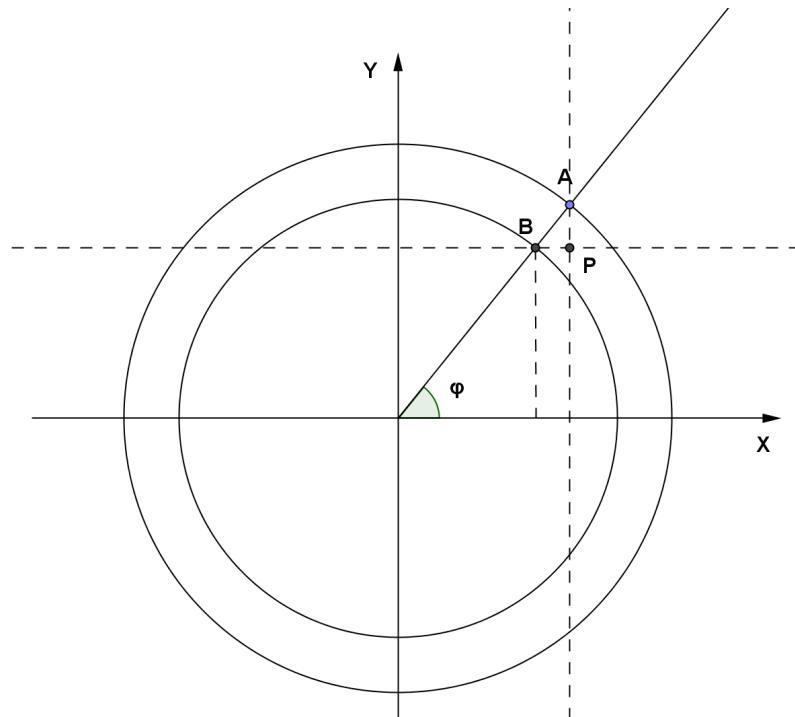
- traccia la circonferenza di centro l'origine O e raggio  $a$ , per esempio 5, e poi la circonferenza di centro l'origine O e raggio  $b$ , per esempio 4 con il comando “circonferenza dati centro e raggio”;
- crea un punto A sulla prima circonferenza utilizzando il comando “punto su oggetto”;
- traccia una semiretta uscente da O e passante per A, interseca questa semiretta anche con l'altra circonferenza con il comando “intersezione di due oggetti”: ottieni quindi il punto B;
- traccia la retta per A parallela all'asse y e la retta per B parallela all'asse x e intersecale individuando P;
- attiva la traccia di P e muovi A sulla circonferenza di raggio  $a$ .

Dovresti ottenere la seguente ellisse:



Ma perché con questo procedimento otteniamo proprio l'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  ?

Considera l'angolo  $\varphi$  in figura:



Abbiamo che :

$$\begin{cases} x_P = x_A = a \cdot \cos \varphi \\ y_P = y_B = b \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Ma allora  $\frac{x_p}{a} = \cos \varphi$  e  $\frac{y_p}{b} = \sin \varphi$  e quindi , poiché tra seno e coseno di un angolo vale la relazione  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , avremo anche:

$$\left( \frac{x_p}{a} \right)^2 + \left( \frac{y_p}{b} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1$$

cioè il punto P appartiene all'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  .

## Laboratorio di informatica

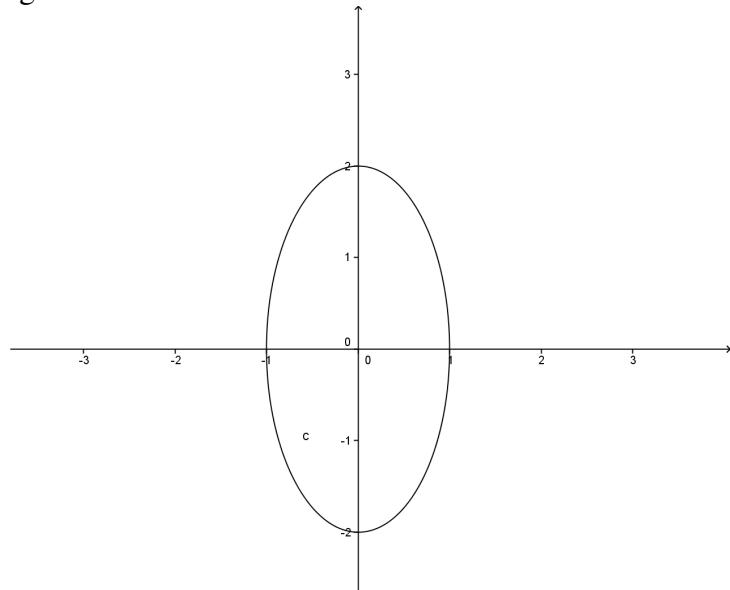
### SCHEMA 17

#### GEOMETRIA ANALITICA *Ellisse nel piano cartesiano*

1) Prova a inserire l'equazione di un'ellisse, per esempio

$$x^2 + y^2/4 = 1$$

Otterrai l'ellisse in figura:



2) Prova a definire uno slider a (semiasse sull'asse x) e uno slider b (semiasse sull'asse y ) ricordando di mettere tra le proprietà degli slider che siano positivi e ad inserire

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

Fai variare gli slider e stampa alcuni esempi.

## Laboratorio di informatica

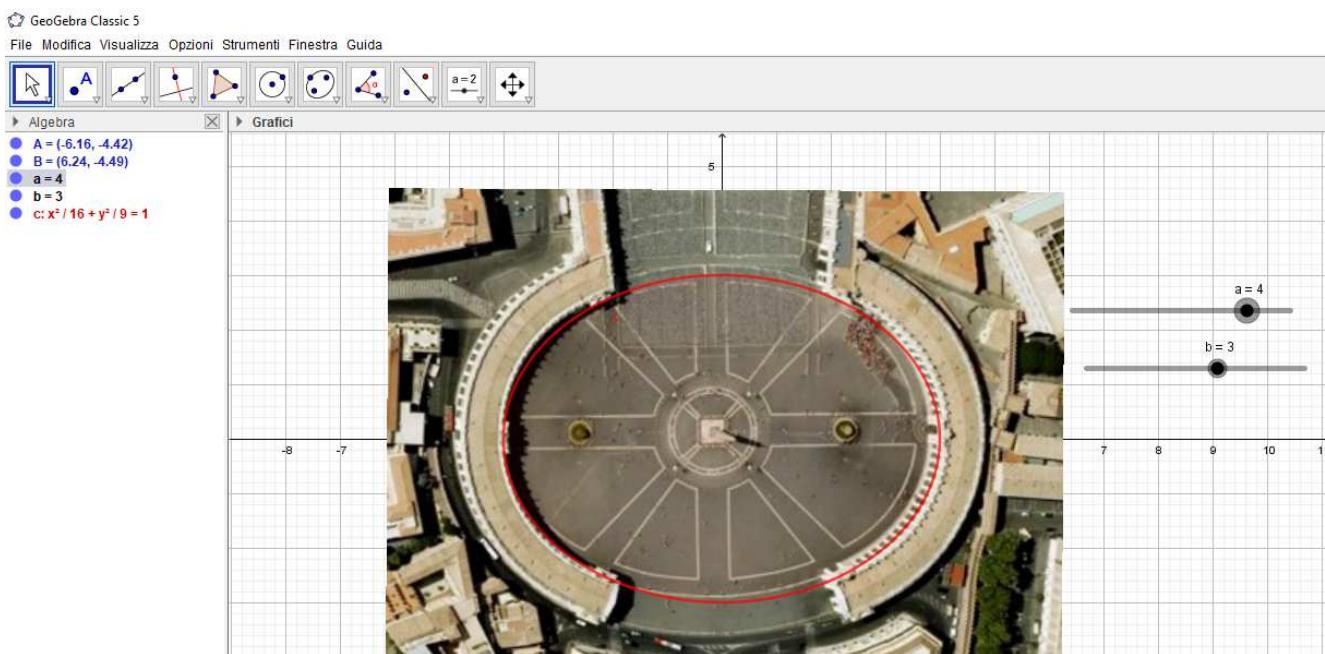
### SCHEMA 18

#### GEOMETRIA ANALITICA *Piazza S. Pietro è un'ellisse?*

Proviamo a copiare la foto della piazza di S. Pietro nel piano  $(0,x,y)$  di Geogebra cercando di far coincidere il centro della piazza con l'origine: creiamo due slider  $a,b$  e inseriamo l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Variamo il valore degli slider fino a che l'ellisse (che magari coloriamo di rosso) non si sovrappone al contorno della piazza: la piazza viene approssimata abbastanza bene da un'ellisse di semiassi  $a = 4$   $b = 3$  (vedi figura).



Si può comunque ottenere una migliore approssimazione con un “ovale” cioè raccordando 4 archi di circonferenze di centri diversi.

#### Esercizio

Trova un'altra opera architettonica che abbia la forma di ellisse e cerca di determinare l'equazione dell'ellisse che l'approssima meglio.

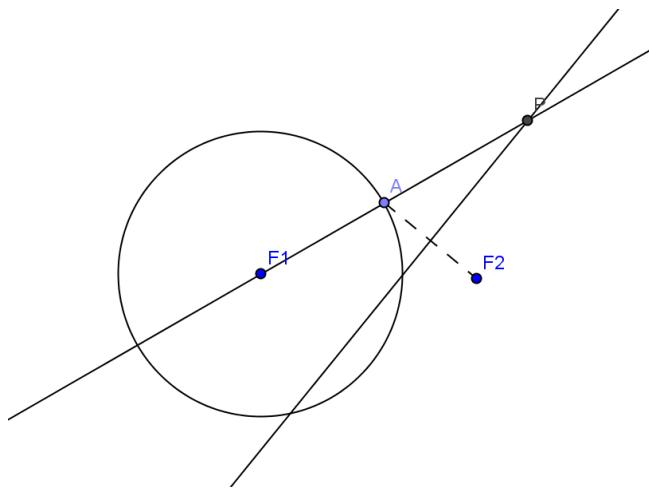
## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 19

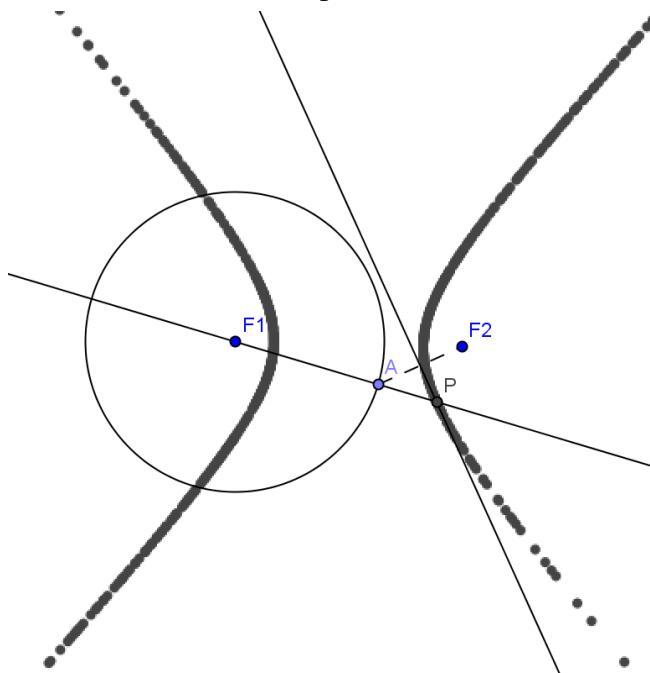
#### GEOMETRIA ANALITICA *Costruzione dell'iperbole dati i fuochi e l'asse trasverso*

Possiamo costruire un'iperbole di dati fuochi e dato asse trasverso, per esempio 8 ,con un procedimento analogo a quello utilizzato per l'ellisse nella scheda ellisse.1: l'unica differenza è che questa volta  $\overline{F_1F_2} >$  asse trasverso (8).

Abbiamo una costruzione come in figura: è chiaro che P appartiene all'iperbole di fuochi  $F_1$  e  $F_2$  poiché  $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{F_1A} = 8$  , essendo  $\overline{PF_2} = \overline{AP}$  .



Attivando la traccia di P e muovendo A avremo l'iperbole:



## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 20

#### GEOMETRIA ANALITICA *Iperbole nel piano cartesiano*

- 1) Inserisci l'equazione di un'iperbole riferita ai propri assi di simmetria, per esempio

$$x^2 - y^2/4 = 1$$

Inserisci l'equazione dei suoi asintoti

$$y = 2x \quad y = -2x$$

Stampa il grafico e fai le tue osservazioni.

Inserisci un'altra equazione, magari di un'iperbole con asse trasverso l'asse y, e stampa il grafico.

- 2) Crea due slider a, b (semiassi dell'iperbole) **positivi** e inserisci l'equazione

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

e l'equazione degli asintoti

$$y = b/a*x \quad e \quad y = -b/a*x$$

Fai variare gli slider e stampa qualche esempio facendo le tue osservazioni.

- 3) Crea due slider  $a, c$  positivi e inserisci l'equazione

$$x^2/a^2 - y^2/(c^2-a^2) = 1$$

Disegna i vertici  $A_1=(a,0)$   $A_2=(-a,0)$  e i fuochi  $F_1=(c,0)$   $F_2=(-c,0)$ .

Muovi solo lo slider  $c$  (cioè cambia la posizione dei fuochi e mantenendo costante la posizione dei vertici), stampa qualche grafico e fai le tue osservazioni.

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 21

#### GEOMETRIA ANALITICA *Iperbole equilatera*

1) Inserisci l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, per esempio

$$x^*y=1$$

Prova anche ad inserire l'equazione nella forma

$$y=1/x$$

Stampa il grafico.

2) Crea uno slider k e inserisci l'equazione

$$x^*y=k$$

oppure

$$y=k/x$$

Muovi k e fai le tue osservazioni.

3) Crea tre slider  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $k$  e inserisci l'equazione

$$(x-x_c)*(y-y_c) = k$$

Muovi gli slider e fai le tue osservazioni.

Stampa qualche grafico.

## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 22

#### GEOMETRIA ANALITICA *Coniche*

Crea sei slider a, b, c, d, e, f ed inserisci l'equazione generale di una conica:

$$a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f=0$$

Verifica che muovendo gli slider (senza però mettere a,b,c contemporaneamente tutti uguali a zero perché allora si ottiene chiaramente una retta) si possono ottenere tutti i tipi di coniche: parabole, ellissi, circonferenze, iperboli.

1) Verifica che se si ottiene una parabola  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ . Stampa degli esempi.

Per quali valori dei parametri risulta un'parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse x o all'asse y? Stampa degli esempi.

2) Verifica che se si ottiene un'ellisse  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  . Stampa degli esempi.

Per quali valori dei parametri si trova un'ellisse con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati? Stampa degli esempi.

Quando si trova una circonferenza?

3) Verifica che se si ottiene un'iperbole  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Stampa degli esempi.

In quali casi si ottiene un'iperbole con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati? Stampa degli esempi.

Per quali valori dei parametri si ottiene una funzione omografica? Stampa degli esempi.

Si possono ottenere coppie di rette? Stampa degli esempi.

## Laboratorio di informatica

### SCHEDA 23

#### GEOMETRIA ANALITICA

##### *Definizione generale delle coniche*

Ricordiamo che una conica può essere definita anche come il luogo dei punti P del piano tali che, fissati un fuoco F e una direttrice *dir*, si abbia

$$\boxed{PF = e \cdot d(P, dir)}$$

Se  $e = 1$  → **parabola**

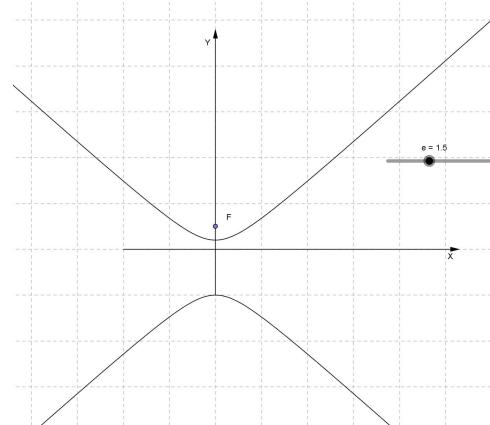
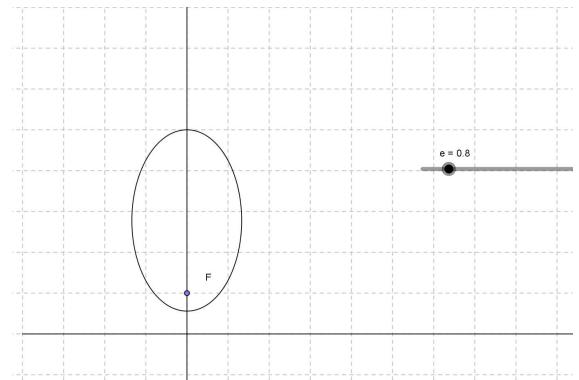
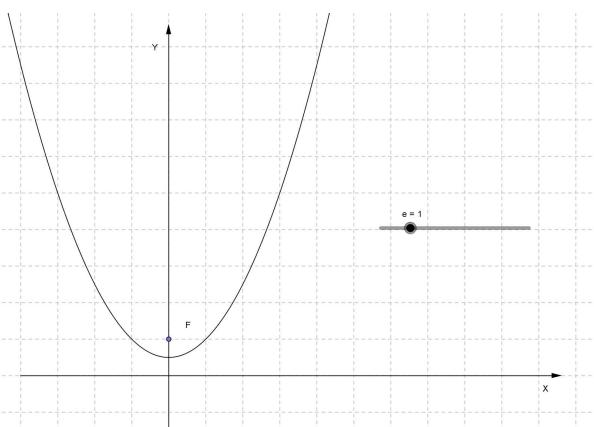
se  $0 < e < 1$  → **ellisse**

se  $e > 1$  → **iperbole**

Fissato per esempio fuoco F(0;1) e direttrice l'asse x (y=0), crea uno slider e (variabile per esempio da 0 a 5) e inserisci nella barra di inserimento l'equazione corrispondente.

$$\overline{PF}^2 = e^2 \cdot d^2(P, y = 0) \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = e^2 \cdot y^2$$

Varia l'eccentricità e stampa quello che ottieni.



## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 24

#### FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

##### *Funzioni esponenziali*

### Funzioni esponenziali

Proviamo a disegnare con Geogebra il grafico di una funzione esponenziale.

Cominciamo con il digitare nella barra in basso

$$y = 2^x$$

oppure

$$y = (1/2)^x$$

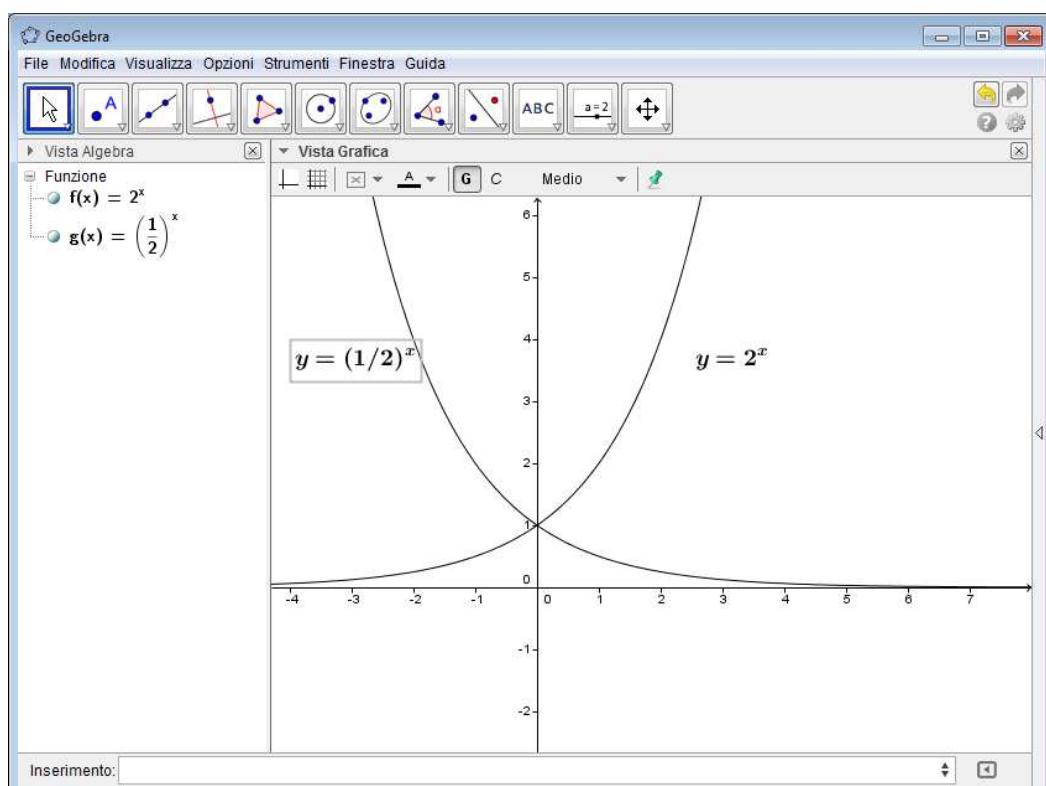
e osserviamone il diverso andamento.

In generale per visualizzare la funzione esponenziale di base a possiamo creare lo slider a (attenzione : a deve essere positivo) e inserire la funzione

$$y=a^x$$

Se attiviamo il pulsante “muovi” e la traccia del grafico (clic con il destro sul grafico e “traccia on”) variando la base a otterremo i vari grafici.

Stampa qualche grafico al variare della base a indicandone le differenze.



## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 25

#### FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE *Funzioni logaritmiche*

#### Funzioni logaritmiche

Nel programma Geogebra (versione almeno 5.0) possiamo disegnare i grafici della funzione logaritmica in una qualsiasi base.

Se digitiamo nella barra di inserimento

$$y = \log$$

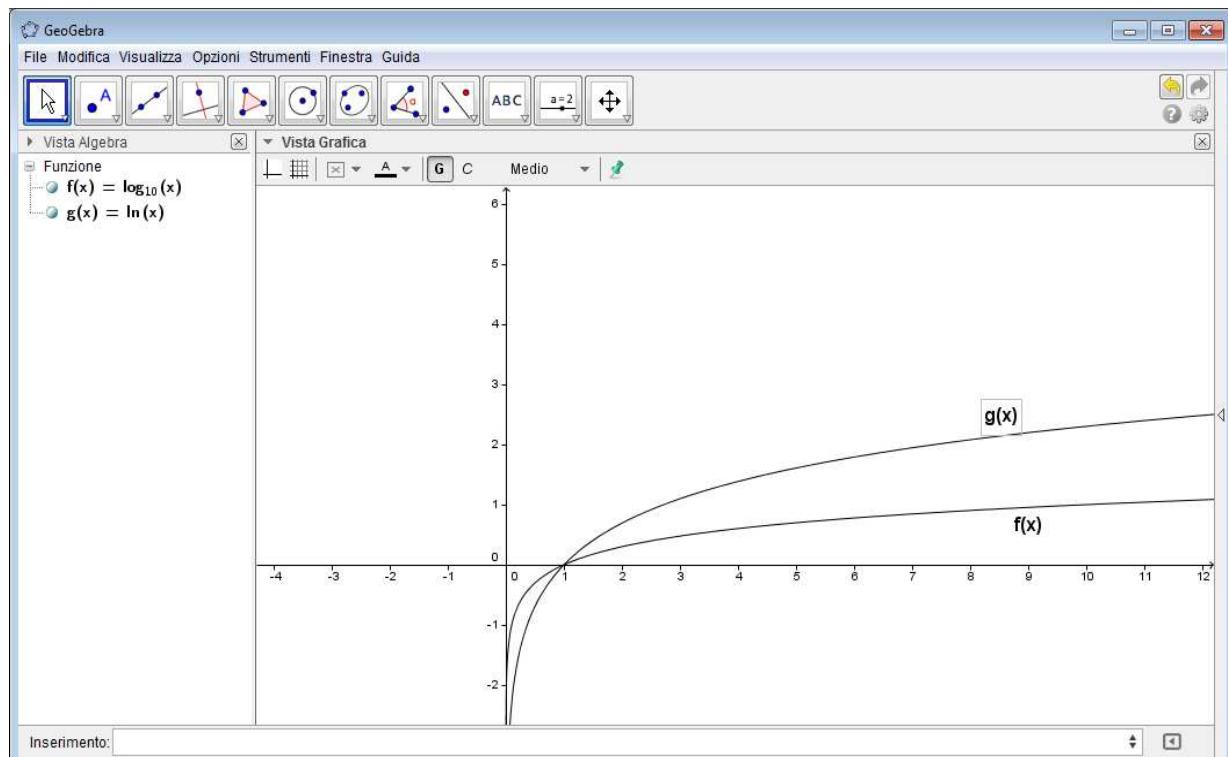
compaiono le varie scelte di completamento:  $\log(x)$  sta per logaritmo in base  $e$  (che viene indicato con  $\ln(x)$ ); se scriviamo  $\log_{10}(x)$  viene visualizzato il grafico di  $y = \log_{10} x$  (infatti per  $x=10$  si ha  $y=1$ ) ma possiamo disegnare il logaritmo in base qualsiasi introducendola prima della  $x$ .

Per esempio  $y = \log(3, x)$  corrisponde a  $y = \log_3 x$ .

Stampa alcuni grafici e metti in evidenza le differenze.

Crea uno slider  $a$  e inserisci  $y = \log(a, x)$ .

Quale deve essere l'intervallo di variazione di  $a$ ? Osserva e stampa i grafici che ottieni al variare della base  $a$ , indicandone le differenze e facendo le tue osservazioni.



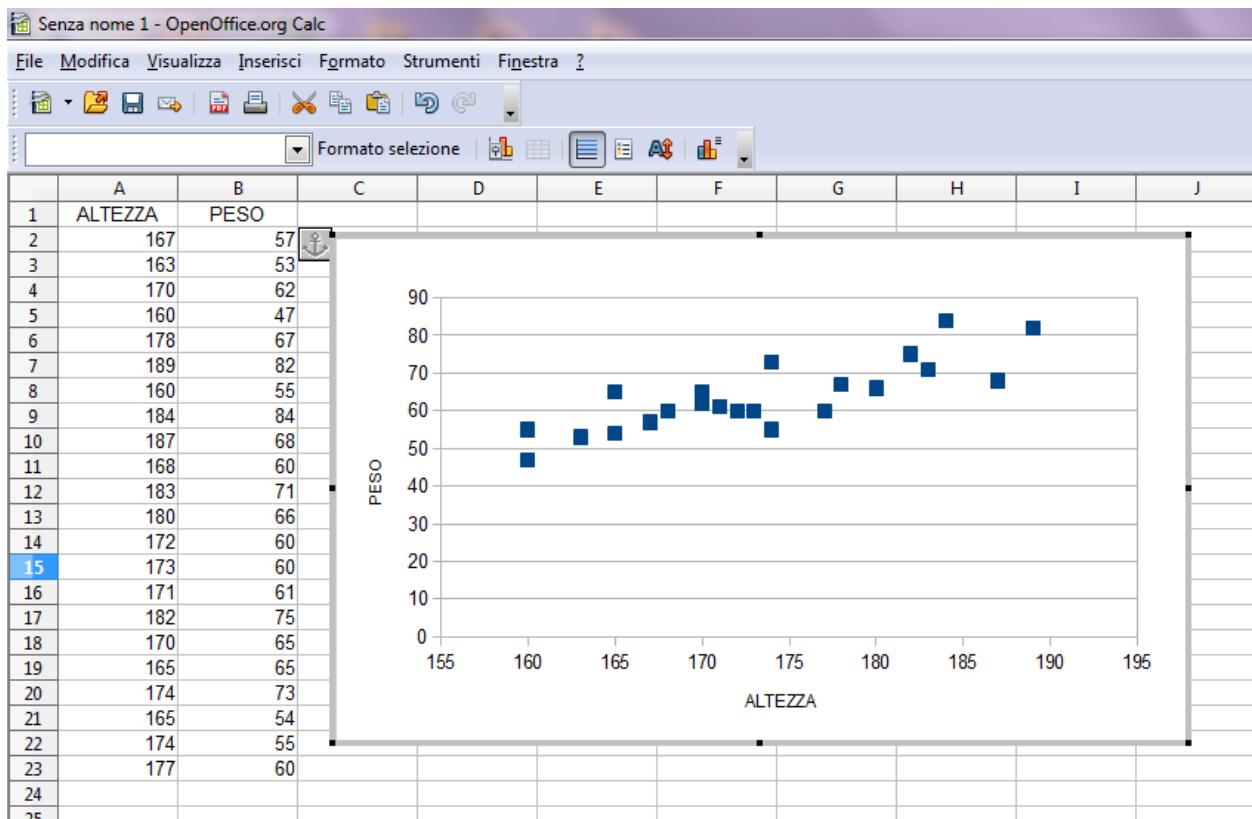
## Laboratorio di informatica

### SCHEMA 26

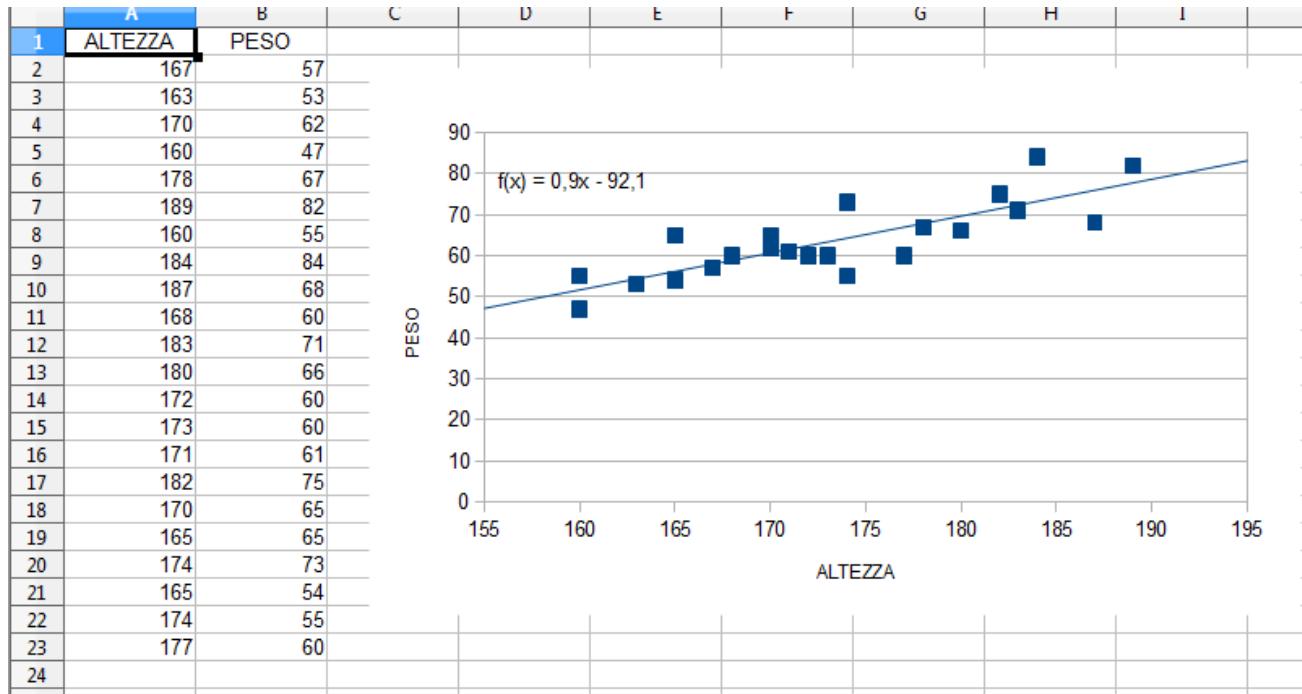
#### STATISTICA *Tabella a doppia entrata*

Consideriamo infine una tabella a doppia entrata come nell'esempio presentato negli Appunti altezza-peso degli studenti di una classe.

Riporta i dati in un foglio di calcolo (potresti anche fare una raccolta dati dei altezza-peso della tua classe) e disegna il grafico ( $x, y$ ) corrispondente.



Vediamo che i nostri dati sono piuttosto “allineati”: se con il tasto destro facciamo clic sui punti del grafico e scegliamo “aggiungi linea di andamento” **verrà disegnata la retta che meglio “interpola” i nostri dati cioè la retta che più si avvicina alle nostre coppie.**



Possiamo anche scrivere l'equazione della retta (chiamata **retta di regressione**) e scegliere il formato con un solo decimale per i numeri che vi compaiono.

**Esercizio 1:** verifica che la retta che interpola i dati passa per il punto  $(x_M; y_M)$  dove con  $x_M$  si è indicata la media delle altezze e con  $y_M$  la media dei pesi.

**Esercizio 2 :** puoi anche trovare solo **l'inclinazione della retta interpolante** i nostri dati che si trovano nelle celle a2:a23 , b2:b23 con la funzione “regressione lineare”.

Se digitai

=regr.lin(b2:b23;a2:a23)

otterrai 0,9.