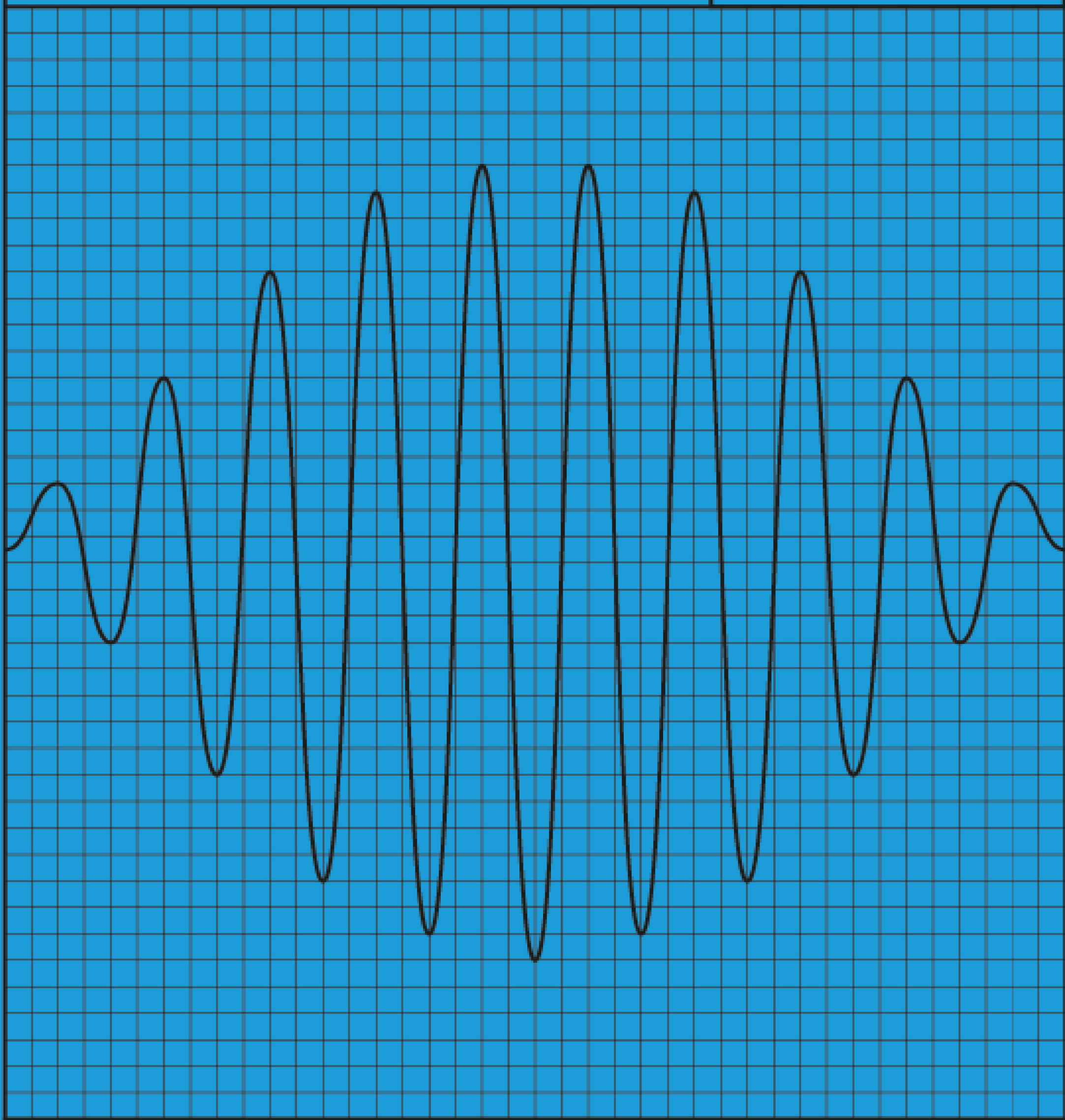
Appunti di Matematica

Indirizzo Umanistico

4

Cecilia Magni



Matematica in Rete

Prefazione

Gli **"Appunti di Matematica" sono un corso di matematica "open source" per i Licei** , con una versione per l'indirizzo scientifico ed una per l'indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella "parte teorica" del libro di testo, spesso troppo formale e "faticosa" e che non tutti riuscivano a "prendere appunti" durante le spiegazioni.

La parte teorica è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e **si integra con la parte applicativa** in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle "tecniche" di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , "schede di lavoro" da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente **non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.**

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica "Geogebra" (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle "*schede*" in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), **possano essere utili ad altri docenti per costruire,** integrandole con materiale personale, **il proprio libro di testo** che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti**, potrebbe essere facilmente aggiornato** e **modificato** ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell'articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl'Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

Cecilia Magni

Progetto Matematica in rete

Cecilia Magni

APPUNTI DI MATEMATICA 4

Indirizzo Umanistico

Editore: Matematicainrete.it

Anno di edizione : 2024

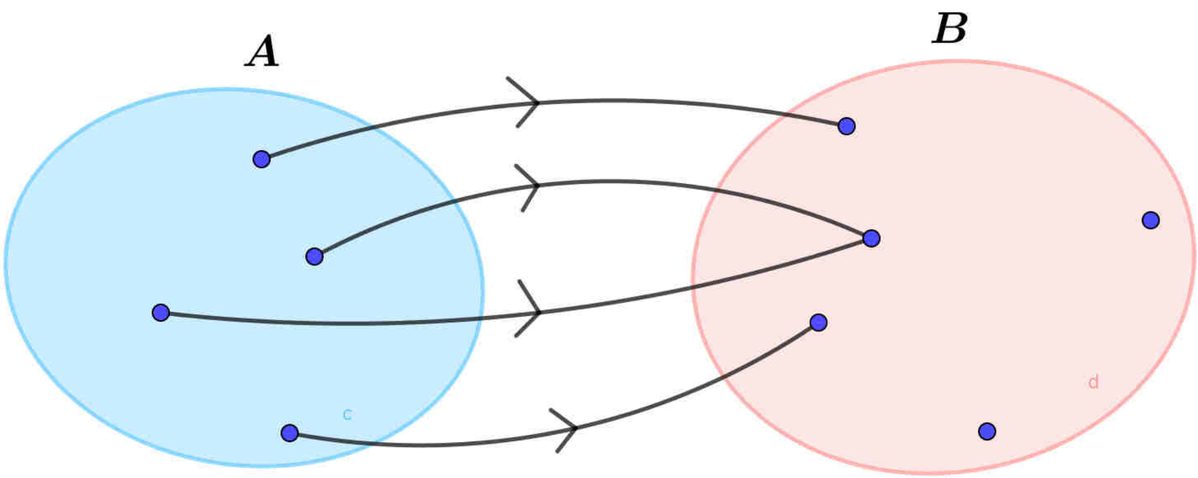
Formato: ebook (PDF)

CODICE ISBN: 978-88-943828-7-7

APPUNTI DI MATEMATICA 4
Indirizzo Umanistico

Indice

Funzioni



Il concetto di funzione è molto importante in matematica: vediamo come si definisce una funzione.

Definizione : *$f : A \to B$ con A e B insiemi è una legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.*

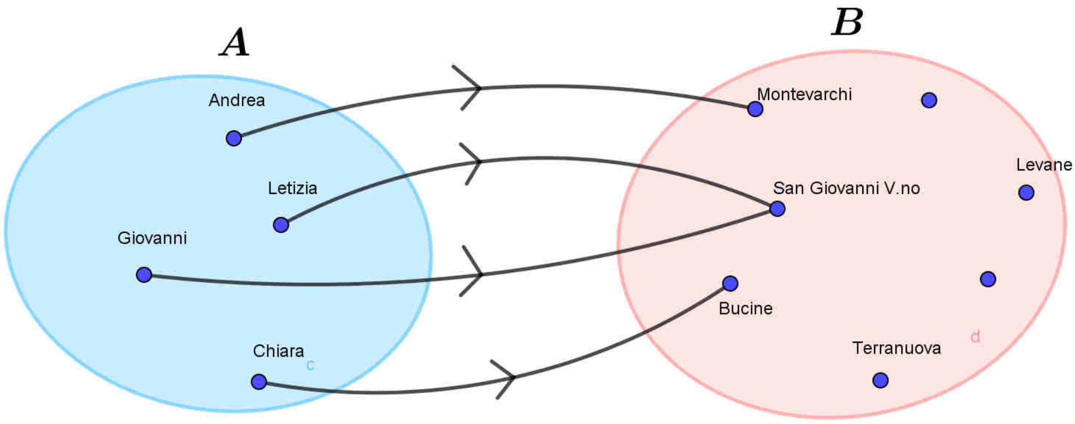
Osservazione: perché $f : A \to B$ sia una funzione da ogni elemento di A deve partire una ed una sola "freccia".

Esempio

Consideriamo come insieme A l'insieme degli studenti della 1A liceo classico del nostro istituto nell'anno scolastico in corso e come insieme B i comuni del Valdarno Superiore (Montevarchi, Terranuova, ecc.) e consideriamo la legge che associa ad ogni studente il proprio comune di residenza

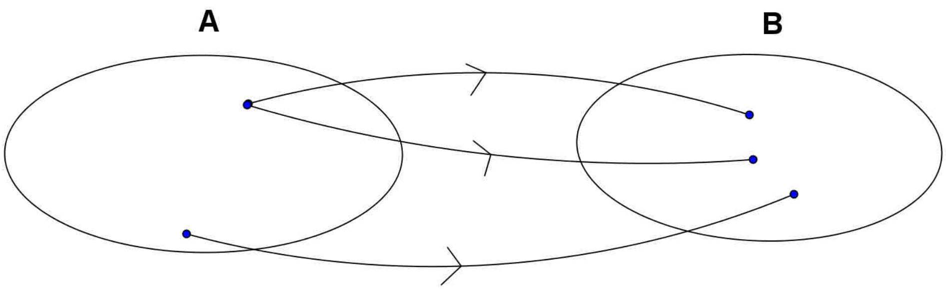
$$f : studente \to comune\_residenza$$

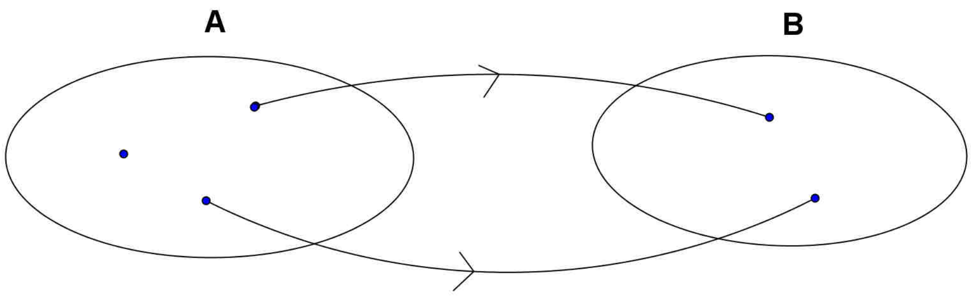
Poiché ad ogni studente è associata una e una sola località, f è una funzione (nel disegno abbiamo riportato solo qualche ipotetico studente).



Se per esempio avessimo considerato come insieme B l'insieme degli sport (nuoto, basket, pallavolo, tennis, calcio, ecc) ed avessimo considerato $f : A \rightarrow B$ come la legge che associa ad ogni studente gli sport praticati, f poteva non risultare una funzione nel caso in cui ci fossero stati studenti che non praticano nessuno sport o ne praticano più di uno.

In figura sono rappresentate due situazioni in cui la legge che associa gli elementi di A a quelli di B **non è una funzione**: nel primo caso c'è un elemento di A da cui partono due frecce, mentre nel secondo disegno c'è un elemento di A da cui non parte nessuna freccia.





Nota

In genere l'elemento dell'insieme di partenza viene indicato con x e l'elemento dell'insieme di arrivo con $y = f(x)$: $f(x)$ si legge "*f di x*" e rappresenta l'elemento corrispondente a x secondo la funzione f e $y = f(x)$ si chiama anche "immagine" di x.

Proprietà di una funzione

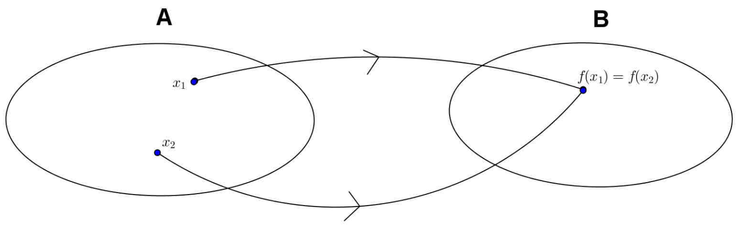
Funzione iniettiva

Diciamo che una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se ad elementi distinti di A vengono associati elementi distinti di B.

Possiamo scrivere: $f : A \to B$ è iniettiva quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Per capire meglio questa definizione consideriamo il nostro primo esempio la funzione $f : A \to B$ che associa ad uno studente della 1A del liceo classico dell'anno in corso la località dove vive: questa funzione non risulterà iniettiva nel caso (molto probabile) in cui ci siano almeno due studenti che vivono nella stessa località.

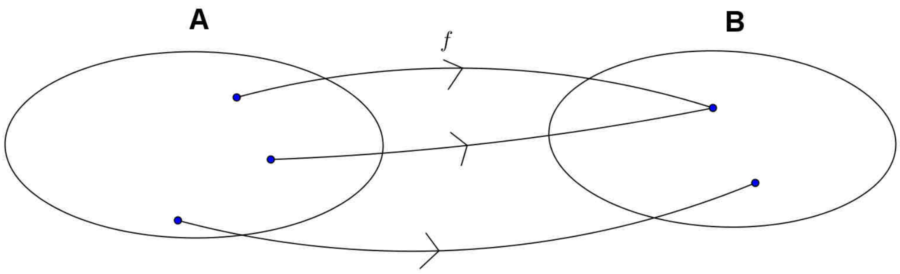
Per esempio la funzione rappresentata in figura f **non è iniettiva**.



Funzione suriettiva

Diciamo che $f : A \to B$ è una funzione suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

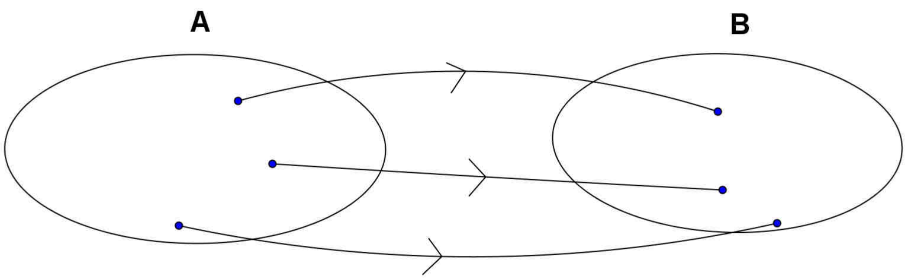
Nell' esempio seguente f è suriettiva ma non è iniettiva.



Funzione biunivoca

Diciamo che $f : A \to B$ è una funzione biunivoca se è iniettiva e suriettiva.

In questo caso si parla anche di **corrispondenza uno-a-uno** perché non solo ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde uno ed un solo elemento di B ma vale anche il viceversa, cioè ad ogni elemento di B corrisponde uno ed un solo elemento di A.



Le funzioni numeriche

Se gli insiemi A e B sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali R , le funzioni si dicono **numeriche.**

Definizione : *si chiama* ***dominio*** *della funzione numerica f l'insieme dei numeri reali per i quali la funzione ha significato.*

Definizione: *si chiama* ***codominio*** *della funzione f l'insieme delle immagini di f.*

Nota: x viene detta **variabile indipendente** , $y = f(x)$ viene detta **variabile dipendente** dal momento che il suo valore dipende dal valore assegnato alla x.

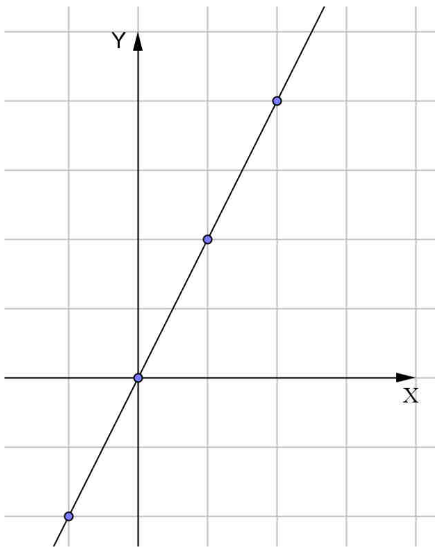
Definizione: *si chiama* ***grafico*** *di una funzione numerica f l'insieme delle coppie* $(x, f(x))$ *in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con* $x \in D_f$.

Esempi

1) $f : x \to 2x$

$D_f = R, \quad C_f = R$

x	$y = f(x)$
-1	-2
0	0
1	2
2	4



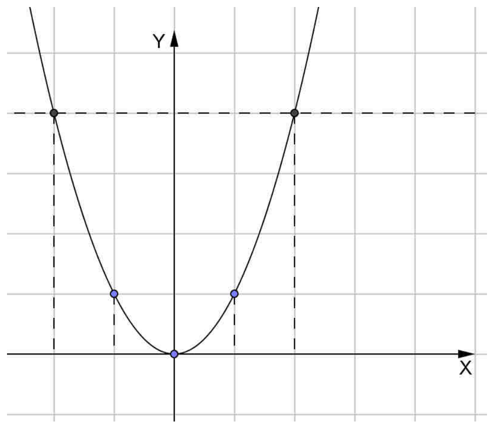
Possiamo scrivere anche $f(x) = 2x$ o $y = 2x$: abbiamo già incontrato questa equazione quando abbiamo studiato la retta nel piano cartesiano ed infatti il grafico risulta una retta passante per l'origine ed inclinazione $m = 2$.

2) $f : x \to x^2$

$D_f = R$ poiché posso sempre calcolare il quadrato di un numero $x \in R$;

$C_f = R_0^+$ cioè i numeri reali $y \geq 0$ poiché un quadrato è sempre positivo o nullo.

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



Abbiamo già incontrato l'equazione $y = x^2$ quando abbiamo studiato la parabola nel piano cartesiano: il grafico risulta infatti quello di una parabola con il vertice nell'origine, rivolta verso l'alto e asse di simmetria coincidente con l'asse y.
Vediamo che **la funzione non è iniettiva** poiché valori diversi hanno la stessa immagine $-2 \to 4$, $2 \to 4$ ecc.: infatti se tagliamo il grafico con una retta parallela all'asse *x* (vedi figura) troviamo due punti e quindi per una data *y* ci sono due *x* che hanno quel valore *y* come immagine.

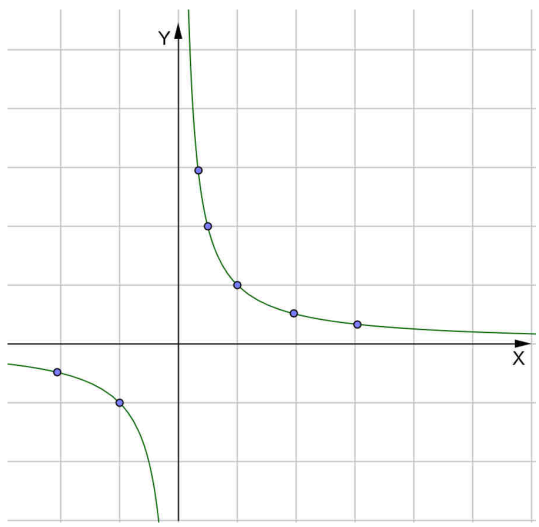
Infatti, in generale, *se tagliando il grafico con rette parallele all'asse x troviamo sempre al massimo un punto di intersezione allora f è iniettiva*, altrimenti non lo è.

3) $f : x \to \frac{1}{x}$

D_f (dominio di f): $x \neq 0$ cioè $D_f = R \setminus \{0\}$ poiché non posso calcolare $\frac{1}{0}$;

C_f (codominio di f): $y \neq 0$

x	$y = f(x)$
-1	-1
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

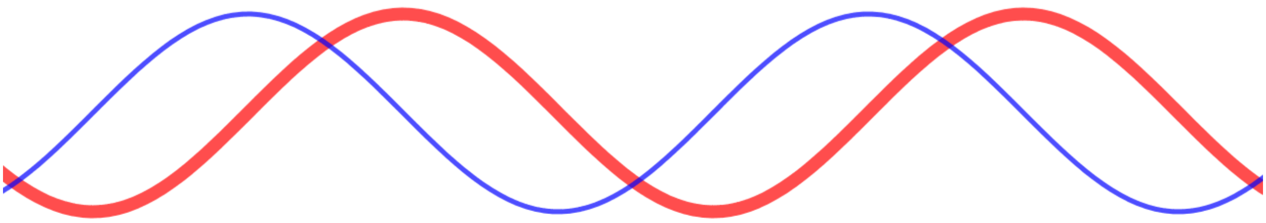


Si tratta di un'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti.

Goniometria e trigonometria

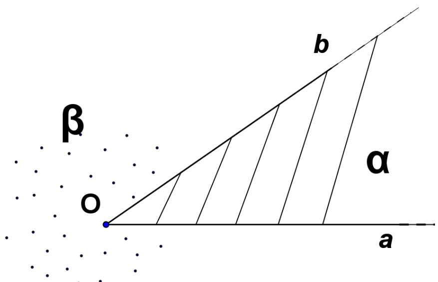
1. **Funzioni goniometriche**
2. **Triangolo rettangolo**
3. **Formule, equazioni e disequazioni goniometriche**
4. **Triangoli qualsiasi**

Funzioni goniometriche

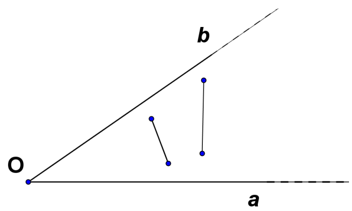


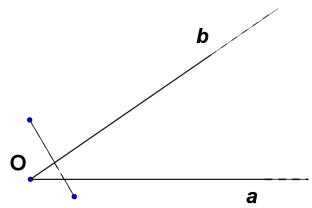
Definizione di angolo

Consideriamo due semirette a, b aventi l'origine O in comune.
Le due semirette individuano due porzioni di piano che sono dette angoli di lati a e b e vertice O. Si presentano tre casi:
1) a e b non appartengono alla stessa retta

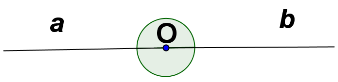


In questo caso abbiamo un **angolo convesso** α (presi comunque due punti appartenenti all'angolo il segmento che li unisce appartiene all'angolo) e un **angolo concavo** β (esistono coppie di punti appartenenti all'angolo tali che il segmento che li unisce non appartiene all'angolo).

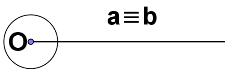




2) a e b appartengono alla stessa retta (ma non coincidono)
In questo caso vengono individuati due angoli uguali (convessi) chiamati **angoli piatti**.



3) a e b coincidono : in questo caso abbiamo **l'angolo nullo** (ci sono solo i lati) e **l'angolo giro** (tutto il piano).



Misura degli angoli

Gli angoli possono essere misurati in gradi o in radianti.

Misure in gradi

grado = $\frac{1}{360}$ (angolo giro)

Angolo giro → 360°
Angolo piato → 180°
Angolo retto → 90°
ecc…

Si usano sottomultipli sessagesimali cioè si considera

il primo → $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ → $1° = 60'$

il secondo → $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$ → $1' = 60''$

Esempio:

$$\frac{1}{4} \text{ di angolo retto} = \left(\frac{90}{4}\right)^{\circ} = 22{,}5° = 22° + (0{,}5)^{\circ} = 22° + (0{,}5 \cdot 60)' = 22° \quad 30'$$

Esempio:

$$\frac{1}{16} \text{ angolo retto} = \left(\frac{90}{16}\right)^{\circ} = (5{,}625)^{\circ} = 5° + (0{,}625 \cdot 60)' = 5° \ (37{,}5)' = 5° \ 37' \ (0{,}5 \cdot 60)'' = 5° \ 37' \ 30''$$

Esempi

1) Trasformare in frazioni di grado i seguenti angoli:

a) $$15° \ 30' = \left(15 + \frac{30}{60}\right)^{\circ} = \left(15 + \frac{1}{2}\right)^{\circ} = \left(\frac{31}{2}\right)^{\circ}$$

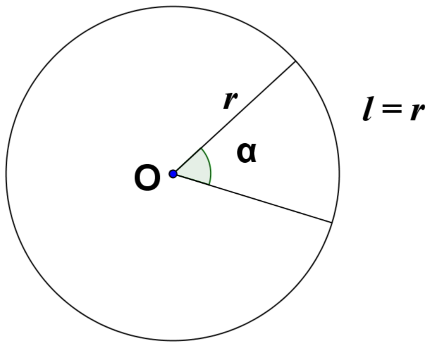
b) $$3° \ 7' \ 1'' = \left(3 + \frac{7}{60} + \frac{1}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{10800 + 420 + 1}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{11221}{3600}\right)^{\circ}$$

2) Trasformare in gradi, primi e secondi la seguente frazione di grado:

$$\left(\frac{1201}{300}\right)^{\circ} = \left(\frac{1200}{300} + \frac{1}{300}\right)^{\circ} = 4° + \left(\frac{1}{300}60\right)' = 4° \ (0{,}2)' = 4° \ (0{,}2 \quad 60)'' = 4° \ 12''$$

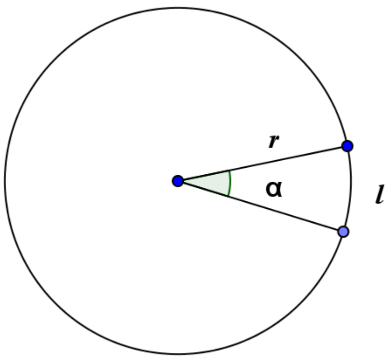
Misure in radianti

radiante = angolo che, tracciata una circonferenza di raggio qualsiasi avente centro nel vertice dell'angolo, sottende un arco uguale al raggio.



Da notare che questa definizione non dipende dalla circonferenza considerata perché se α sottende un arco uguale al raggio per una data circonferenza, allora accadrà lo stesso per ogni circonferenza centrata nel suo vertice.

Per misurare α in radianti traccio una circonferenza di raggio r, con centro il vertice di α e se l è la lunghezza dell'arco sotteso da α avrò che



$$\alpha_r = \frac{l}{r} \quad rad$$

Nota: se $l = r$ trovo $\alpha_r = 1$ rad

Quindi: angolo giro → $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad

angolo piatto → π rad

angolo retto → $\frac{\pi}{2}$ rad

Relazione tra la misura in gradi e la misura in radianti di un angolo α

Indichiamo con α^o la misura in gradi di un angolo α e con α_r la sua misura in radianti.
Avremo che

$$\alpha^\circ \ : \ \alpha_r = 360^\circ \ : \ 2\pi$$

Questo ci permetterà di determinare α^o se conosciamo α_r e viceversa.

Esempi

1)Esprimere in radianti le seguenti misure espresse in gradi:

a) $\alpha^\circ = 12^\circ$

$$12 : a_r = 360 : 2\pi$$

$$\alpha_r = 12 \ \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{15}$$

b) $\alpha^\circ = 10^\circ 30'$

Trasformo prima in frazione di grado:

$$10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{21}{2}\right)^\circ$$

$$\alpha_r = \frac{21}{2} \ \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{120}$$

2) Esprimere in gradi le seguenti misure di angoli espresse in radianti:

a) $\alpha_r = 1$ rad

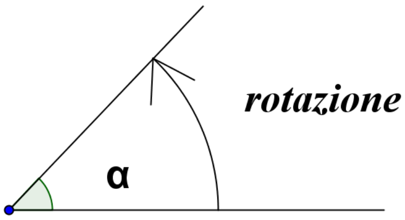
$$\alpha^o : 1 = 360 : 2\pi \ \Rightarrow \alpha^\circ = 1 \ \frac{180}{\pi} \quad (\cong \ 57{,}3^\circ)$$

b) $\alpha_r = \dfrac{\pi}{3}$ rad

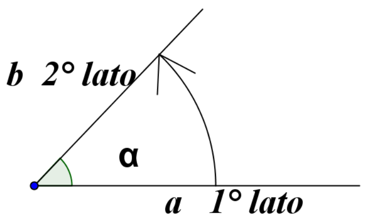
$$\alpha^o : \frac{\pi}{3} = 360 : 2\pi \qquad \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{\pi}{3} \ \frac{180}{\pi} = 60^\circ$$

Angoli orientati

Un angolo, oltre che come parte di piano, può essere associato al concetto di **rotazione** cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

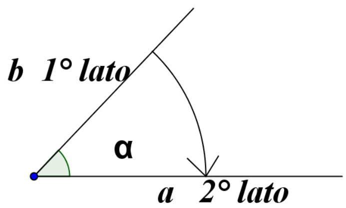


La rotazione però può essere in verso orario o antiorario.
Possiamo stabilire quale considerare come 1° lato (lato origine della rotazione) e allora avremo un angolo "orientato": per convenzione stabilisco di chiamare **positivo** un angolo orientato se la **rotazione** che porta il primo lato sul secondo lato spazzando l'angolo è **antioraria** , negativo se è invece una rotazione oraria.



Con la scrittura $\hat{ab}$ intendiamo che a sia il 1° lato,

Nel nostro esempio $\hat{ab}$ è un angolo positivo.

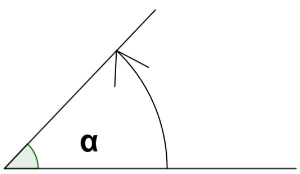


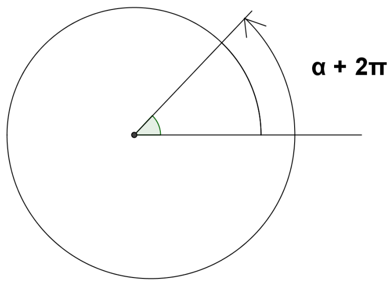
Con la scrittura $\hat{ba}$ intendiamo che il 1° lato sia b .

Nel nostro esempio $\hat{ba}$ è un angolo negativo.

Considerando il concetto di rotazione possiamo avere anche angoli di ampiezza maggiore dell'angolo giro perché possiamo pensare di ruotare di un certo numero k di giri completi: α e $\alpha + 2\pi$ sono angoli rappresentati dalla stessa parte di piano ma associati a rotazioni diverse perché nel secondo angolo ho fatto un giro in più.

In generale scrivendo $\alpha + 2k\pi$ considererò l'angolo associato alla rotazione di ampiezza α più k giri completi (se $k > 0$ ruoto in senso antiorario, se $k < 0$ in senso orario).

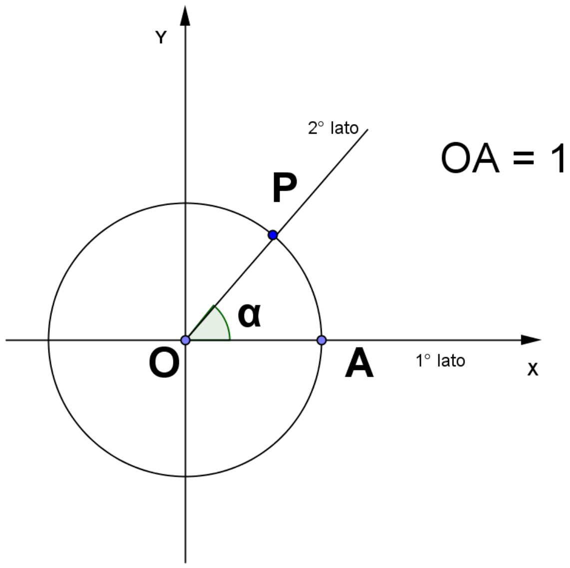




La circonferenza goniometrica

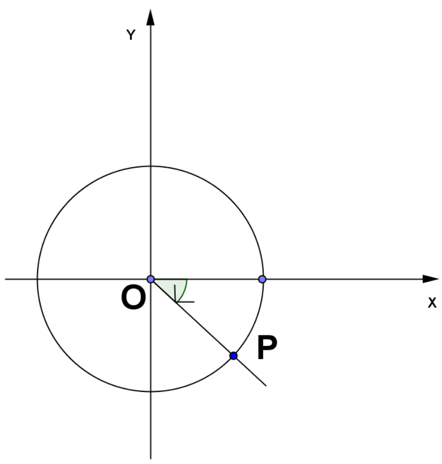
Possiamo rappresentare gli angoli orientati su una circonferenza che viene detta “circonferenza goniometrica”.

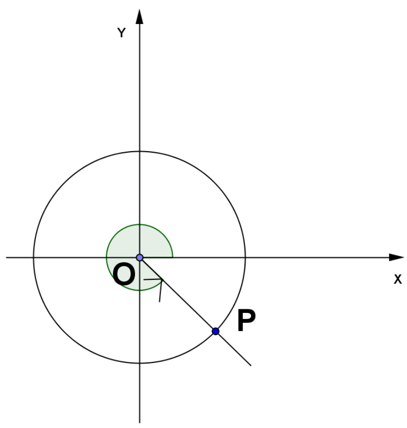
Fissato un sistema di riferimento (O;x,y) la circonferenza goniometrica è una circonferenza di centro l’origine e raggio 1.



Possiamo associare ad un angolo orientato α un punto sulla circonferenza goniometrica riportando il 1° lato dell’angolo sul semiasse positivo delle ascisse: il 2° lato dell’angolo intersecherà la circonferenza in un punto P che risulterà quindi il punto associato all’angolo α .

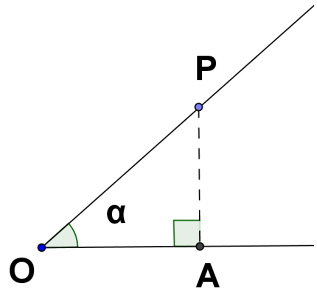
Osserviamo che lo stesso punto P sulla circonferenza è associato a più angoli, non solo perché posso sommare $2k\pi$ ma anche perché posso ruotare in senso orario o antiorario. Per esempio il punto P in figura può rappresentare $-\frac{\pi}{4}$ ma anche $\frac{7}{4}\pi$ (oltre che $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ e $\frac{7}{4}\pi+2k\pi$).





Definizione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto α

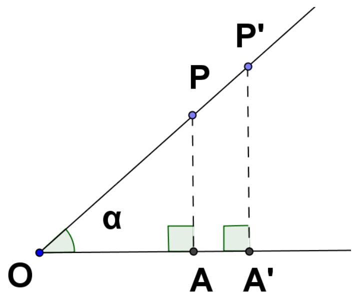
Consideriamo un angolo α acuto.



Prendiamo un punto P appartenente ad un lato (vedi figura) e proiettiamo sull'altro lato e sia A la proiezione. Il triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ è un triangolo rettangolo.

I) Consideriamo il rapporto $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$

Questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P: infatti considerando un altro punto P'e la sua proiezione A' il triangolo $\overset{\Delta}{OP'A'}$ risulta simile al triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ e quindi $\dfrac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$



Questo rapporto viene chiamato seno dell'angolo α ed indicato con la scrittura $sen\alpha$.

Quindi per definizione abbiamo:

$$sen\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$$

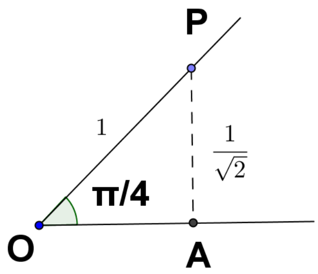
Considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo dire che :

$$\boxed{sen\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}$$

Calcoliamo il seno di qualche angolo.

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45°)

Per semplicità possiamo prendere $\overline{OP} = 1$.

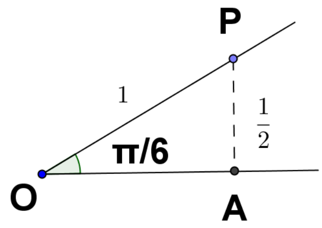


Poiché il triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ in questo caso è metà di un quadrato avremo $\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\overline{OP} = \overline{AP} \cdot \sqrt{2}$).

Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (30°)

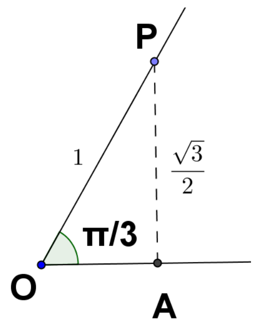
Prendiamo sempre $\overline{OP} = 1$. Poiché $\overset{\Delta}{OPA}$ risulta la metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{AP} = \frac{1}{2}$ ($\overline{OP} = 2 \cdot \overline{AP}$).



Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$

c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (60°)

Se $\overline{OP} = 1$, poiché $\overset{\Delta}{OPA}$ è la metà di un triangolo equilatero in cui $\overline{AP}$ è l'altezza, avremo $\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$)

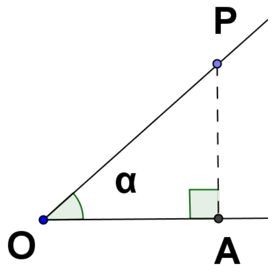


Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Nota

In questi esempi abbiamo considerato angoli "particolari" nel senso che nel triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ siamo riusciti a determinare $\overline{AP}$ in funzione di $\overline{OP}$ sfruttando **proprietà geometriche**.
In generale per calcolare il seno di un angolo occorre fare una costruzione precisa del triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ e misurare $\overline{AP}$ e $\overline{OP}$.
Noi non dovremo comunque fare queste misurazioni perché il valore del seno di un qualsiasi angolo può essere ricavato da delle "tavole" o, ancora più semplicemente, utilizzando la **calcolatrice**.
Basterà indicare la misura dell'angolo (attenzione all'unità di misura utilizzata : DEG sta per gradi e RAD per radianti)e poi premere il tasto SIN (o viceversa a seconda del tipo di calcolatrice).
Per esempio: $sen31° = 0{,}5150...$
Naturalmente anche con la calcolatrice ritroveremo per esempio che $sen30° = 0{,}5$ ecc.

II) Consideriamo il rapporto $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$



Anche questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P (vedi motivazione data in I)). Questo rapporto viene chiamato coseno dell'angolo α e indicato con la scrittura $\cos\alpha$.

Quindi abbiamo $$\cos\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$$

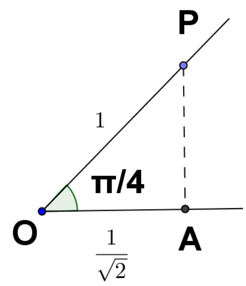
e considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo dire

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}$$

Proviamo a calcolare il coseno di $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$.

a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

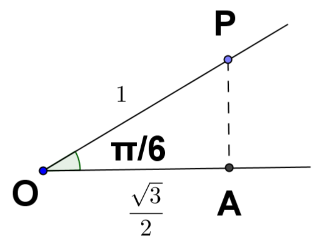
Se prendiamo $\overline{OP} = 1$ con le stesse considerazioni fatte per il seno avremo che $\overline{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi



$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

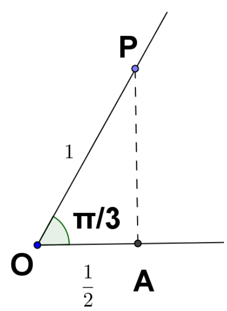
Se $\overline{OP} = 1$ considerando $\overset{\Delta}{OPA}$ come metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi



$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Se $\overline{OP} = 1$ avremo $\overline{OA} = \dfrac{1}{2}$ e quindi

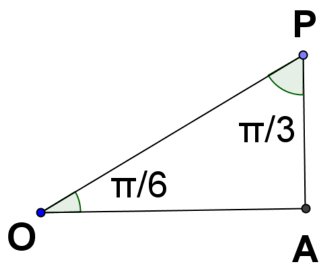


$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$

Osservazione

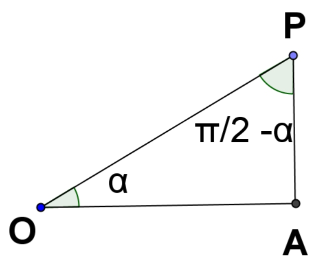
Osserviamo che $sen\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$ e $\cos\frac{\pi}{3}=sen\frac{\pi}{6}$.

Questo dipende chiaramente dal fatto che $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ sono angoli complementari e che quindi il ruolo di cateto adiacente e opposto si scambiano portando ad uno scambio dei valori del seno e del coseno.



$$sen\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \quad ; \quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \quad \Rightarrow \quad sen\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}$$

Questo vale naturalmente per tutte le coppie di angoli complementari:



$$\left.\begin{array}{l} sen\alpha=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \end{array}\right. \Rightarrow sen\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

E' chiaro che vale anche $\cos\alpha=sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

Proprio da questa ultima relazione deriva la denominazione di **coseno** che significa

complementi sinus

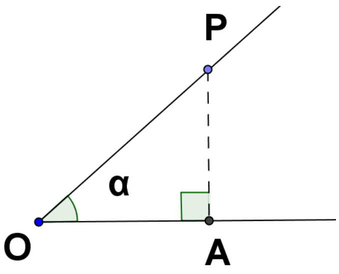
cioè seno dell'angolo complementare.

Nota

Per calcolare il coseno di angoli per i quali non si possono utilizzare proprietà geometriche per determinare $\overline{OA}$ in funzione di $\overline{OP}$ valgono le stesse considerazioni fatte per il seno e quindi utilizzeremo la calcolatrice.

Per esempio: $\cos 31°=0{,}8571...$

III) Consideriamo infine il rapporto $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$



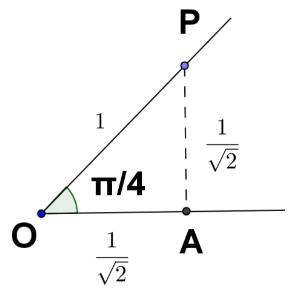
Questo rapporto, a differenza dei precedenti, può risultare anche un numero molto grande o molto piccolo in relazione all'angolo α considerato ed è indipendente dalla scelta del punto P per le stesse motivazioni date in I) e II).
Questo rapporto viene chiamato tangente dell'angolo ε e indicato con la scrittura $tg\alpha$, cioè si ha

$$tg\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$$

e considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo scrivere

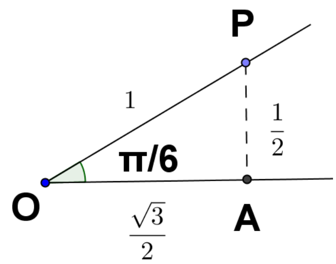
$$\boxed{tg\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}}$$

Calcoliamo la tangente di $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$.



a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Se $\overline{OP} = 1 \quad \overline{PA} = \overline{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow tg\dfrac{\pi}{4} = 1$

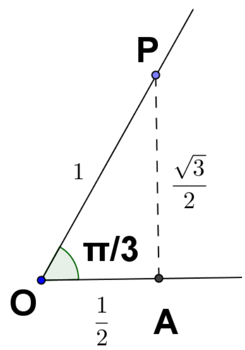


b) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

Se $\overline{OP} = 1 \quad \overline{PA} = \dfrac{1}{2}$, $\overline{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Se $\overline{OP} = 1 \quad \overline{PA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow tg\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$



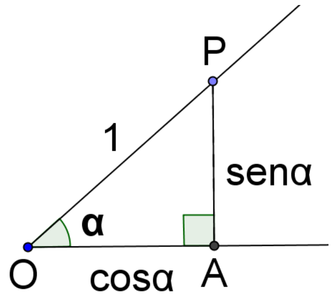
In generale, per calcolare la tangente di un angolo α, per le stesse considerazioni svolte in I) e II) useremo la calcolatrice.

E' importante osservare che

$$\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}{\dfrac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha} = tg\alpha$$

Estensione della definizione di seno,coseno e tangente

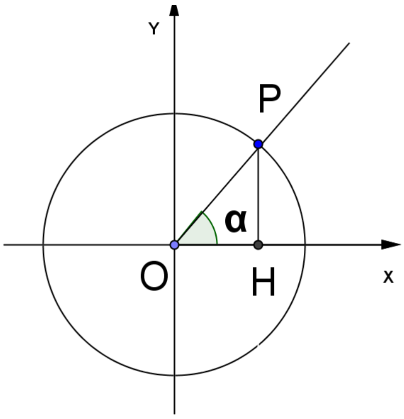
Osserviamo che se nel triangolo $\overset{\Delta}{OAP}$ l'ipotenusa $\overline{OP} = 1$ abbiamo



$sen\alpha = \overline{AP}$

$\cos\alpha = \overline{OA}$

Questo suggerisce un metodo per estendere la definizione di seno e coseno anche per angoli $\alpha \geq 90°$.
Riportiamo l'angolo α sulla circonferenza goniometrica e poiché $\overline{OP} = 1$ avremo:



$sen\alpha = \overline{PH} = y_P$
$\cos\alpha = \overline{OH} = x_P$

Diamo allora la seguente definizione di seno e coseno di α:

$$sen\alpha \overset{def}{=} y_P$$
$$\cos\alpha \overset{def}{=} x_P$$

dove P è il punto associato all'angolo orientato α sulla circonferenza goniometrica.

Osserviamo che con questa definizione i valori del seno e del coseno di un angolo possono essere anche negativi, ma che comunque sono numeri compresi tra -1 e 1.

Vediamo meglio come variano i valori di $sen\alpha$ e $\cos\alpha$.

Variazione del seno di un angolo

$\alpha = 0 \rightarrow sen\alpha = 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow sen\alpha = 1$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

$\alpha = \pi \rightarrow sen\alpha = 0$

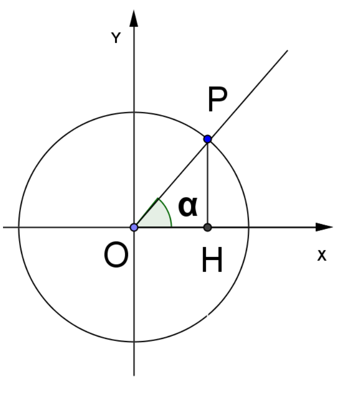
$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

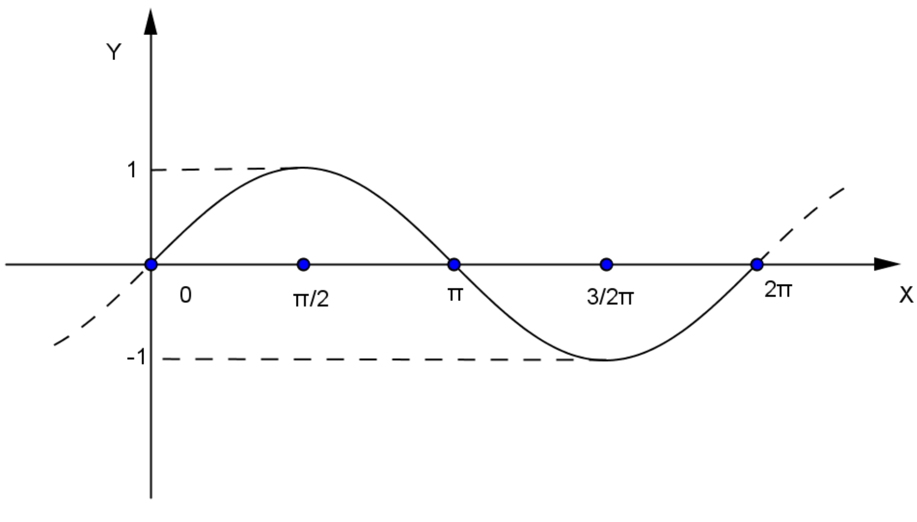
$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow sen\alpha = -1$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

$\alpha = 2\pi \rightarrow sen\alpha = 0$

$$sen\alpha = y_P$$





Osserviamo che il grafico si ripete ogni 2π cioè la funzione $f : x \rightarrow senx$ o $y = senx$ è periodica di periodo 2π.

Variazione del coseno di un angolo

$\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 1$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha = 0$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

$\alpha = \pi \rightarrow \cos\alpha = -1$

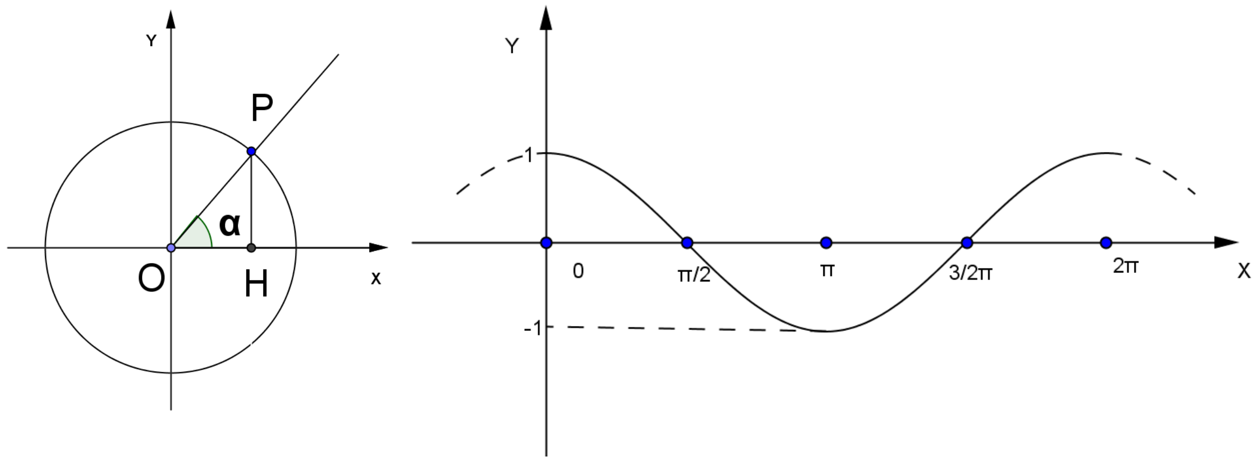
$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \cos\alpha = 0$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$\alpha = 2\pi \rightarrow \cos\alpha = 1$

$\cos\alpha = x_P$



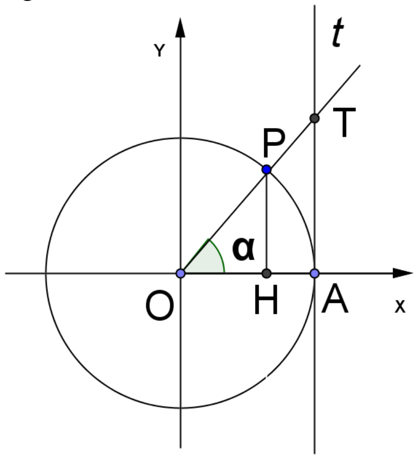
Osserviamo che anche la funzione $f : x \rightarrow \cos x$ cioè $y = \cos x$ è periodica di periodo 2π .

Osservazione

Il grafico di $y = \cos x$ corrisponde a quello di $y = sen x$ "traslato" verso sinistra di $\frac{\pi}{2}$: questo dipende dal fatto che , come vedremo, $\cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Tangente di un angolo orientato

Vediamo come possiamo estendere la definizione di tangente data per un angolo α acuto utilizzando la circonferenza goniometrica.



Tracciamo la tangente t alla circonferenza goniometrica nel punto $A(1;0)$ e consideriamo il punto T di intersezione tra t e il prolungamento del 2° lato dell'angolo α. Osservando i triangoli simili $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OAT}$ potremo scrivere

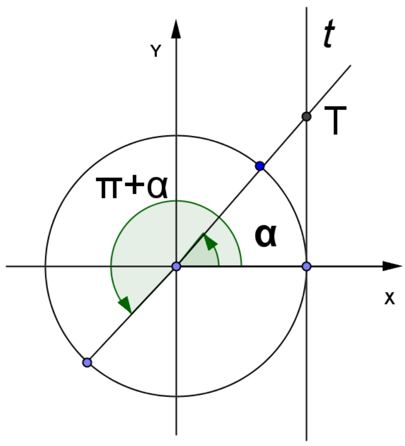
$$tg\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \overline{TA} = y_T$$

Definiamo allora $$tg\alpha \overset{def}{=} y_T$$

dove T è il punto di intersezione del prolungamento del 2° lato dell'angolo α con la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A(1;0).

Osserviamo che per $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\alpha = \frac{3}{2} + 2k\pi$ la tangente non è definita (il 2° lato dell'angolo non incontra la tangente t).

Inoltre osserviamo che α e $\alpha + \pi$ avranno la stessa tangente in quanto sono associati allo stesso punto T.



$$tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$$

Questo significa che, considerando la variazione della tangente, i valori si ripeteranno dopo un periodo di π (e non di 2π come per seno e coseno).

Vediamo come risulta il grafico di $y = tgx$.

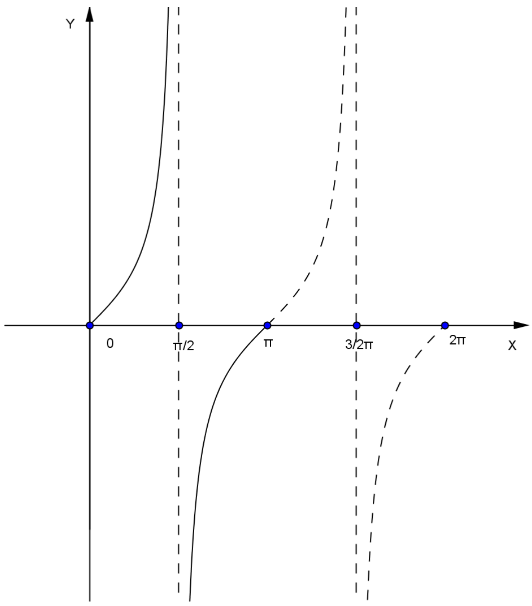
$\alpha = 0 \rightarrow tg\alpha = 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori della tangente aumentano e sono positivi

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ la tangente non è definita

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori della tangente sono negativi e aumentano

$\alpha = \pi \rightarrow tg\alpha = 0$



$x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale del grafico di y = tgx e in generale $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono tutti asintoti verticali del grafico.

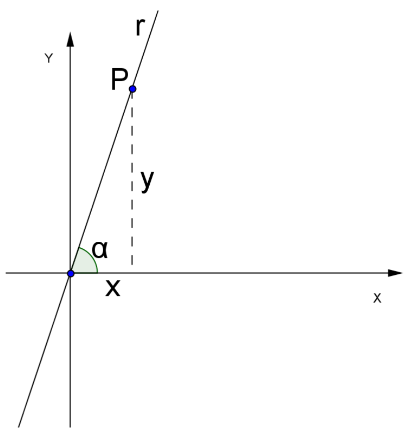
Quindi la funzione $f : x \rightarrow tgx$ o $y = tgx$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ cioè il suo dominio è $\Re - \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$ ed ha periodo π.

Nota: osserviamo che **il coefficiente angolare di una retta** corrisponde alla tangente goniometrica dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle *x*.

Consideriamo inizialmente una retta passante per l'origine (vedi figura):è chiaro che se

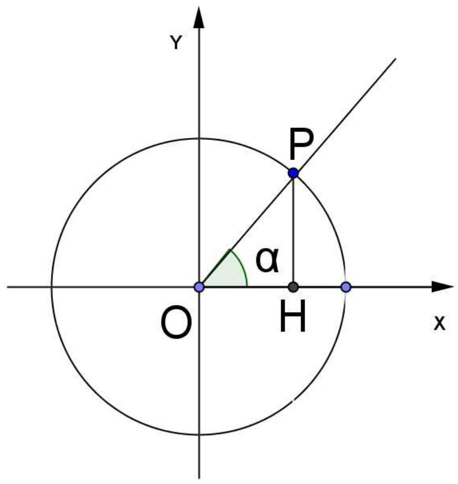
$r : y = mx$

$tga = \frac{y}{x} = m$



Relazioni fondamentali tra senα, cosα e tgα

1) Osservando la circonferenza goniometrica ed applicando il teorema di Pitagora si ha subito che



$$\overline{PH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OP}^2$$
$$(sen\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Per convenzione $(sen\alpha)^2$ si scrive $sen^2\alpha$ e quindi scriveremo

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$ ***1° relazione fondamentale***

2) Avevamo già osservato che

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}$$ ***2° relazione fondamentale***

Utilizzando queste relazioni è possibile, conoscendo una funzione goniometrica dell'angolo α, ricavare le altre due supponendo però di sapere in quale "quadrante" si trova l'angolo.

Nota
Vengono definite, oltre al seno, coseno e tangente di un angolo α, anche altre tre funzioni goniometriche:

cosecante $\rightarrow$ $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$ $\quad (\alpha \neq k\pi)$

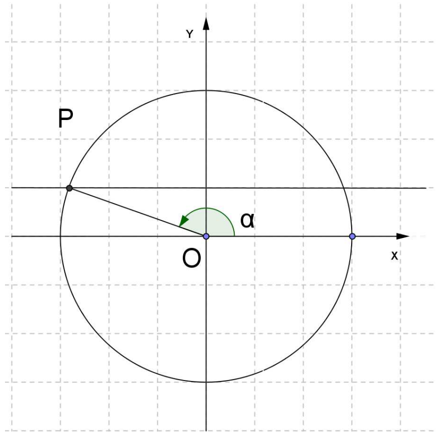
secante $\rightarrow$ $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

cotangente $\rightarrow$ $\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$ $\quad (\alpha \neq k\pi)$

Nota: osserviamo che per $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ possiamo scrivere che $\cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$.

Esempi

1) Se $sen\alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determinare $\cos\alpha$ e $tg\alpha$.



Osserviamo che per individuare graficamente l'angolo α possiamo tracciare la retta $y = \frac{1}{3}$: questa individua sulla circonferenza goniometrica due punti e noi dovremo considerare quello del 2° quadrante poiché sappiamo che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Quindi dalla 1° relazione avremo:

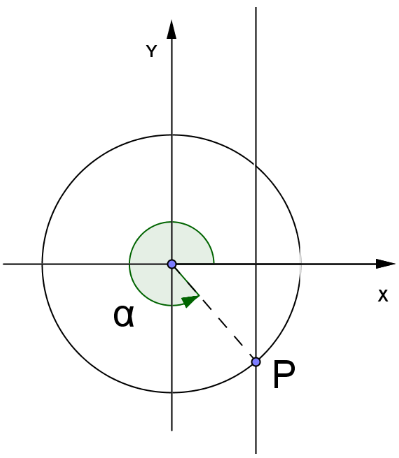
$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ e nel nostro caso ,essendo il coseno negativo, abbiamo

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - sen^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Poi dalla 2° relazione abbiamo

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2) Se $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ determina $sen\alpha$ e $tg\alpha$.



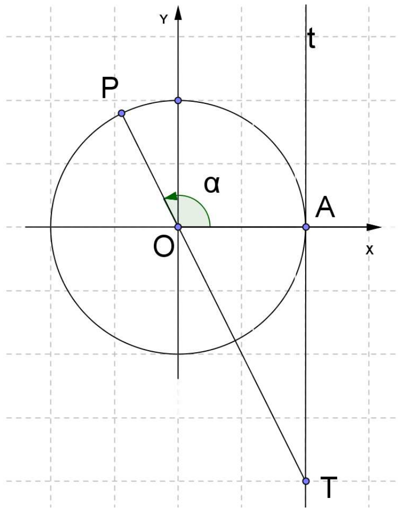
Possiamo intersecare la circonferenza goniometrica con la retta $x = \frac{3}{5}$ per individuare graficamente α.

Osserviamo che il seno di α risulta negativo.

$$sen\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

3) Se $tg\alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determina $sen\alpha$ e $\cos\alpha$.



Possiamo ricavare graficamente α considerando la tangente *t* e su di essa il punto T di ordinata -2: tracciando la retta OT otteniamo i punti associati sulla circonferenza goniometrica

In questo caso dobbiamo risolvere un sistema dove utilizziamo insieme le relazioni fondamentali:

$$\begin{cases} \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = -2 \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\alpha = -2\cos\alpha \\ 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\alpha = +\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Nota: possiamo ricavare una relazione tra $sen\alpha$ e $tg\alpha$, $\cos\alpha$ e $tg\alpha$ in modo da non essere costretti a risolvere il sistema precedente. Infatti possiamo scrivere:

$$sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{1} = \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

(abbiamo diviso numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$)

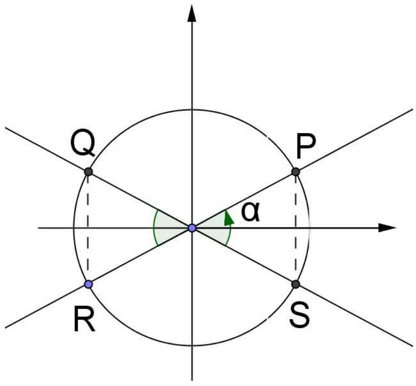
cioè
$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

e analogamente $\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{tg^2\alpha + 1}$ (abbiamo diviso numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$).

Angoli associati

Dalla conoscenza delle funzioni goniometriche di un angolo α si possono ricavare informazioni sulle funzioni goniometriche di altri angoli, detti "**angoli associati**" ad α.

Osserviamo la seguente figura: consideriamo i punti Q, R, S simmetrici di P (rispetto all'asse y, all'origine e all'asse x).
Se P è il punto della circonferenza goniometrica che rappresenta α si dimostra facilmente che:



$$Q \to \pi - \alpha$$
$$R \to \pi + \alpha$$
$$S \to 2\pi - \alpha (oppure\ -\alpha)$$

Questi angoli si dicono "angoli associati" ad α. Quindi, ricordando la definizione di seno (y) e coseno(x), abbiamo:

$$\begin{cases} sen(\pi-\alpha) = sen\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen(\pi+\alpha) = -sen\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

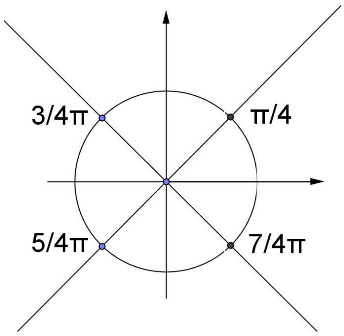
$$\begin{cases} sen(2\pi-\alpha) = -sen\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{matrix} sen(-\alpha) = -sen\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \end{matrix}$$

Di conseguenza

$$tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha$$
$$tg(\pi+\alpha) = tg\alpha$$
$$tg(2\pi-\alpha) = -tg\alpha \qquad tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

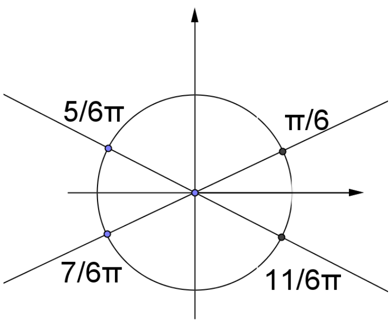
Esempi

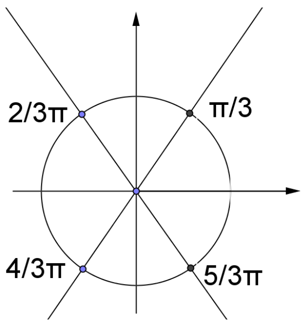
- Angoli associati a $\frac{\pi}{4}$:



Abbiamo quindi $\quad sen\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ ecc…

- Angoli associati a $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$:

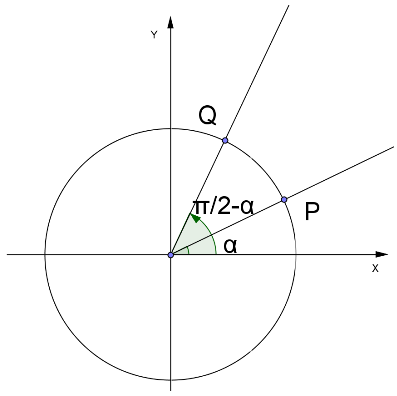




Abbiamo inoltre:

- L'angolo $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (angolo complementare di α)

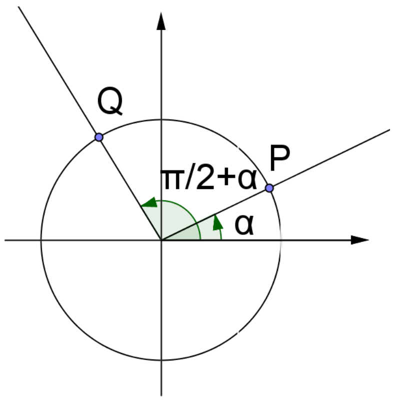
$$P \rightarrow \alpha$$
$$Q \rightarrow \frac{\pi}{2}-\alpha$$



I triangoli $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OQK}$ sono uguali poiché sono triangoli rettangoli , $\overline{OQ}=\overline{OP}=1$ e $H\hat{O}P=\alpha=O\hat{Q}K$ quindi, come avevamo già osservato:

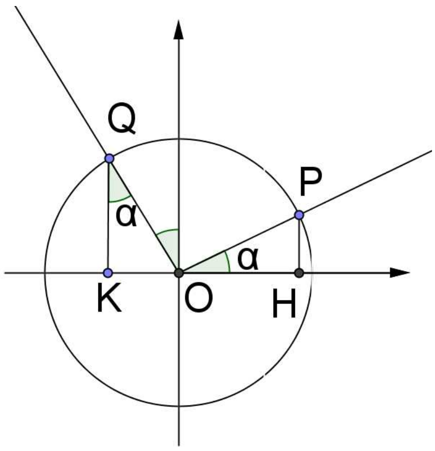
$$\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\alpha \end{cases}$$

- L'angolo $\frac{\pi}{2}+\alpha$:



$$P \rightarrow \alpha$$
$$Q \rightarrow \frac{\pi}{2}+\alpha$$

I triangoli $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OQK}$ sono uguali ($\overline{OP}=\overline{OQ}=1$ triangoli rettangoli e $P\hat{O}H=\alpha=O\hat{Q}K$) e quindi, considerando i segni:



$$\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=y_Q=x_P=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=x_Q=-y_P=-sen\alpha \end{cases}$$

Di conseguenza:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=\cot g\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=-\cot g\alpha$$

Funzioni sinusoidali

Abbiamo visto come risultano i grafici di $y = senx$ e di $y = \cos x$.

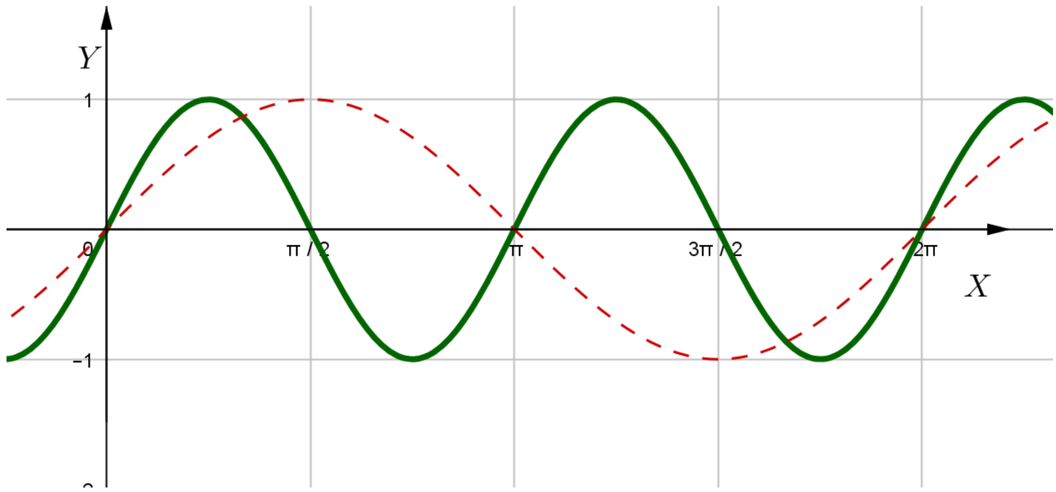
Ma come risulta per esempio il grafico di $y = sen2x$ oppure di $y = 3 \cdot senx$?

Nota: le funzioni con equazione del tipo $y = A \cdot sen(kx + \varphi)$ o $y = A \cdot \cos(kx + \varphi)$ sono dette funzioni sinusoidali.

Vediamo alcuni esempi.

1) Grafico di $\boxed{y = sen2x}$

Osserviamo che se calcoliamo la funzione per $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $y = 1$; per $x = \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 0$ e in conclusione il grafico risulta il seguente:



Il periodo risulta quindi $T = \pi$.

Se tracciamo anche il grafico di $y = senx$ (tratteggiato) possiamo vedere la differenza di periodo.

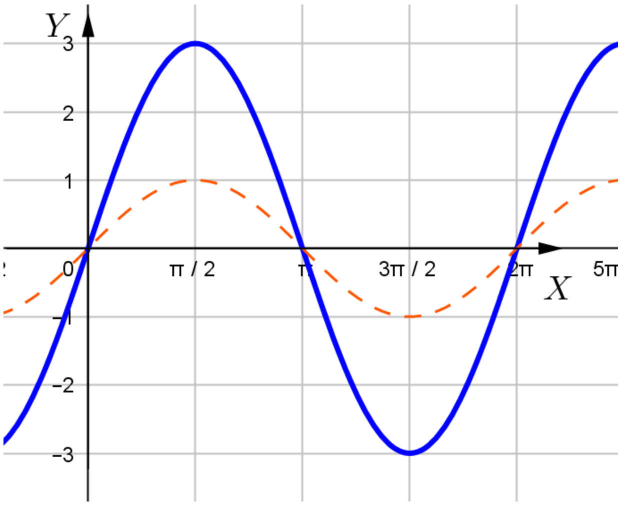
In generale se abbiamo $y = sen(kx)$ il periodo della funzione risulta $T = \frac{2\pi}{k}$ poiché

$$sen[k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)] = sen(kx + 2\pi) = sen(kx)$$

2) Grafico di $\boxed{y = 3 \cdot senx}$

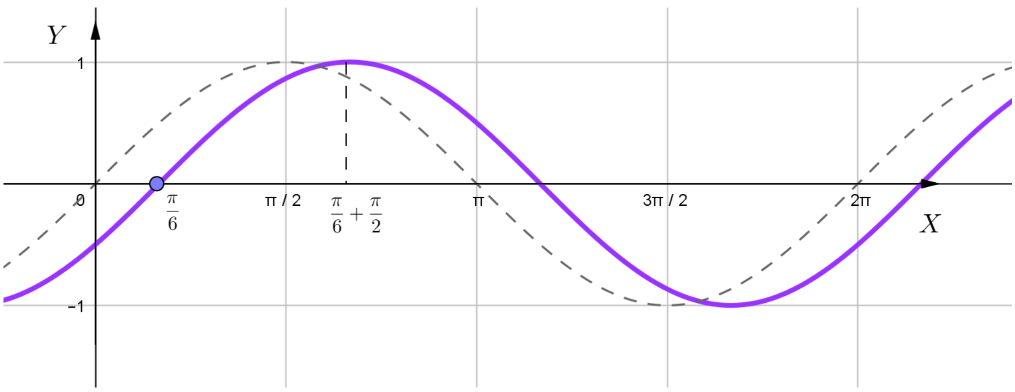
In questo caso il periodo è sempre $T = 2\pi$ ma l'ampiezza dell'oscillazione varia tra -3 e 3 e non più tra -1 e 1 (se tratteggiamo il grafico di $y = senx$ possiamo vedere la differenza).

In generale il grafico di $y = A \cdot senx$ oscilla tra $-A$ e A.



3) Come risulta il grafico di $\boxed{y = sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$?

Proviamo a calcolare qualche valore: per $x = \frac{\pi}{6}$ otteniamo $y = 0$, per $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 1$ e in conclusione il grafico risulta traslato verso destra di $\frac{\pi}{6}$.



ESERCIZI
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Determina le rimanenti funzioni goniometriche dell'angolo α e rappresenta α sulla circonferenza:

a. $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

b. $tg\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

c. $sen\alpha = -\frac{3}{5}$ $\qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

d. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

e. $tg\alpha = -3$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

f. $sen\alpha = \frac{1}{5}$ $\qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

g. $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

h. $tg\alpha = -\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

i. $sen\alpha = -\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

2) Calcola le seguenti espressioni:

a. $\cos\frac{7}{6}\pi + tg\frac{2}{3}\pi - sen\frac{3}{4}\pi + tg\frac{5}{6}\pi - sen\frac{4}{3}\pi - tg\frac{5}{3}\pi$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

b. $tg\frac{3}{4}\pi + sen\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{11}{6}\pi + tg\frac{5}{4}\pi$ $[0]$

c. $tg\frac{7}{6}\pi - \cos\frac{5}{3}\pi + sen\frac{5}{6}\pi + tg\frac{11}{6}\pi$ $[0]$

3) Sviluppa le seguenti espressioni:

a. $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - sen(-\alpha) - \cos(\pi+\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - tg(2\pi-\alpha) + \cos(\pi-\alpha)$ $\left[-\frac{1}{tg\alpha}+tg\alpha\right]$

b. $sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha) - sen(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $[1]$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + sen(\pi-\alpha) - tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos(\pi+\alpha)$ $\left[-\frac{1}{tg\alpha}\right]$

d. $tg(\pi-\alpha)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - sen(2\pi-\alpha)$ $[0]$

e. $tg(\pi+\alpha) - \cos(2\pi-\alpha) + sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $[tg\alpha]$

f. $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\alpha) + tg(\alpha+\pi) + tg(-\alpha)$ $[2\cos\alpha]$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni:

a. $y = sen3x$

b. $y = 2\cos x$

c. $y = 2sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

d. $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

e. $y = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

SCHEDA DI VERIFICA
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Ricava le rimanenti funzioni goniometriche di α,determina graficamente α nella circonferenza goniometrica e calcolane il valore approssimato usando la calcolatrice:

a) $sen\alpha = \frac{1}{5} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\qquad$ [$\cos\alpha = -\frac{2}{5}\sqrt{6}$; $tg\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$]

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{4} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ $\qquad$ [$sen\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $tg\alpha = \sqrt{15}$]

c) $tg\alpha = -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ $\qquad$ [$sen\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$]

2) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\cos\frac{7}{6}\pi + tg\frac{2}{3}\pi - sen\frac{3}{4}\pi + tg\frac{5}{6}\pi - sen\frac{4}{3}\pi + \cos\frac{7}{4}\pi + tg\frac{4}{3}\pi$ $\qquad$ [$-\frac{1}{\sqrt{3}}$]

b) $\cos(\pi-\alpha) + tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) - sen(-\alpha) - \cos(\pi+\alpha) - \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) - tg(2\pi-\alpha)$ $\qquad$ [$tg\alpha - \cot g\alpha$]

3) Verifica la seguente identità:

$$\frac{sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(-\alpha) - sen(\pi+\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) + \cot g(-\alpha)} = \frac{tg(\pi-\alpha)}{2(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)}$$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni sinusoidali:

a) $y = 2\cos(3x)$

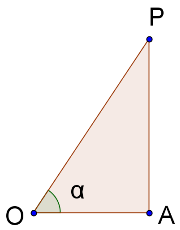
b) $y = \frac{1}{2}sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 4sen(3x)$

d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Triangolo rettangolo

Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ sappiamo che:



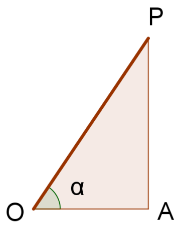
$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}$$

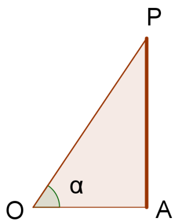
Possiamo perciò utilizzare $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ per determinare gli elementi del triangolo (lati ed angoli).

a) Conoscendo l'ipotenusa $\overline{OP}$ e l'angolo α (cioè $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$)



cateto opposto ad α = $\overline{PA}$ = ipotenusa $\cdot\, sen\alpha$
cateto adiacente ad α = $\overline{OA}$ = ipotenusa $\cdot \cos\alpha$

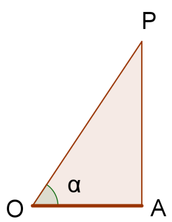
b) Conoscendo il cateto $\overline{AP}$ e l'angolo opposto α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{sen\alpha}$$

$$cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot \cos\alpha$$

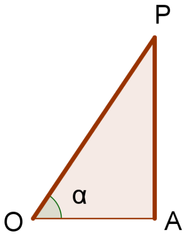
c) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'angolo adiacente α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{\cos\alpha}$$

$$cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot sen\alpha$$

d) Conoscendo il cateto $\overline{PA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ posso trovare

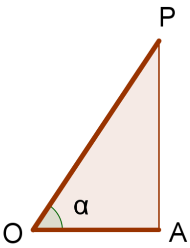


$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}}$$ e quindi anche $\cos\alpha$ e $tg\alpha$

Dalla conoscenza di senα posso risalire all'angolo α (tasto di "inversione" della calcolatrice)

Per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure $\cos\alpha$ poiché $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha$

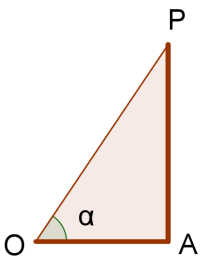
e) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ abbiamo



$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \alpha$$

$\overline{AP}$ con il teorema di Pitagora oppure $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha$

f) Conoscendo i due cateti $\overline{PA}$ e $\overline{OA}$ possiamo determinare



$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \alpha$$ (anche $sen\alpha$ e $\cos\alpha$)

$\overline{OP}$ con il teorema di Pitagora oppure $\overline{OP} = \dfrac{\overline{PA}}{sen\alpha}$

Nota

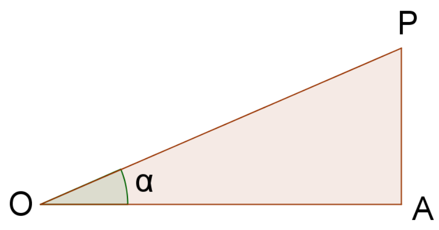
Naturalmente in tutti questi esempi dalla conoscenza di α si può ricavare anche $O\hat{P}A = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

In conclusione, dalla conoscenza di 2 elementi di un triangolo rettangolo, che però non siano due angoli, posso determinare tutti gli altri (si dice **"risolvere"** il triangolo).

Conoscere α equivale a conoscere $sen\alpha$ o $\cos\alpha$ o $tg\alpha$.

Esempi

a) Nel triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ sia l'ipotenusa $\overline{OP} = 2$ e $sen\alpha = \frac{1}{3}$ $\left(\alpha = P\hat{O}A\right)$. Determinare gli altri elementi del triangolo.



$\overline{OP} = 2$ $\qquad$ $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$sen\alpha = \frac{1}{3}$

Per determinare $\overline{OA}$ posso anche utilizzare il teorema di Pitagora oppure ricavo

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Se $\beta = O\hat{P}A = \frac{\pi}{2} - \alpha$ abbiamo

$sen\beta = \cos\alpha$

$\cos\beta = sen\alpha$

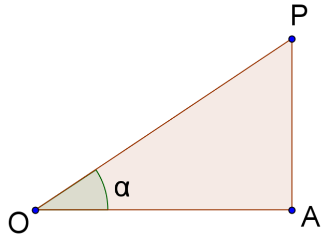
Per avere un'idea della misura degli angoli α e β possiamo utilizzare la calcolatrice premendo, per esempio, il tasto SIN^{-1} che permette di risalire all'angolo che ha come valore del seno il numero indicato.

Prendendo $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ otteniamo $\alpha \cong 19{,}47^{\circ}$.

Infine $\beta = 90° - \alpha \cong (70{,}53)°$

b) $\overline{AP} = 3$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$



Se $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ abbiamo $sen\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

Quindi $\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{\frac{3}{5}} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$ e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$ (oppure con il teorema di Pitagora).

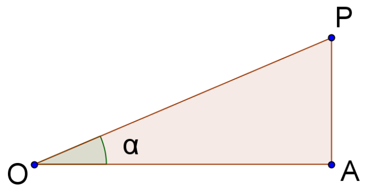
Per ricavare α utilizzando per esempio il tasto $\cos^{-1}$ della calcolatrice abbiamo

$$\cos^{-1}\frac{4}{5} \cong (36{,}86)^\circ$$

e quindi $\beta = O\hat{P}A = 90^\circ - \alpha \cong (53{,}14)^\circ$

c) $\overline{OA} = 2$

$tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$



Se $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ posso ricavare $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

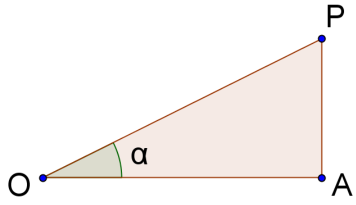
oppure ricordare che $sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$ e $\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha}$

Si ottiene, in ogni caso, che $sen\alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ da cui $\overline{OP} = \frac{\overline{OA}}{\cos\alpha} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e

$$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

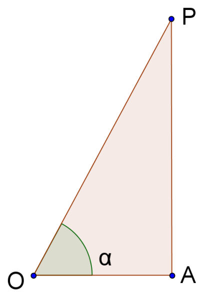
Utilizzando la calcolatrice $\alpha = tg^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4} \cong (19{,}47)^\circ$ e $\beta = 90^\circ - \alpha$

d) $\overline{OP} = 8$
$\overline{AP} = 5$



Posso determinare $sen\alpha = \frac{5}{8}$ e con la calcolatrice $\alpha \cong (38{,}68)^\circ$ e per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure calcolare $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39}$

e) $\overline{OP} = 10$
$\overline{OA} = 4$

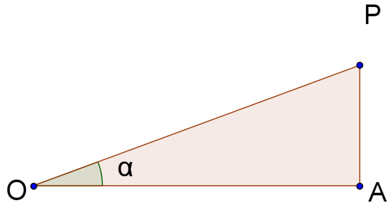


Determino $\cos\alpha = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (66{,}42)^\circ$).
Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare $\overline{AP}$, basterà calcolare

$$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 2\sqrt{21}$$

$sen\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ e avrò

f) $\overline{AP} = 2$
$\overline{OA} = 2\sqrt{15}$

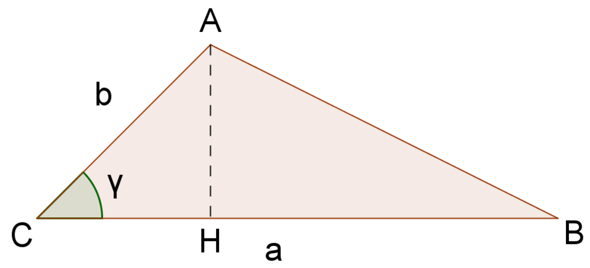


Posso determinare $tg\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ e utilizzando la calcolatrice troviamo che $\alpha \cong (14{,}47)^\circ$).

Per trovare OP possiamo utilizzare il teorema dei Pitagora oppure $\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{sen\alpha}$.

Area di un triangolo

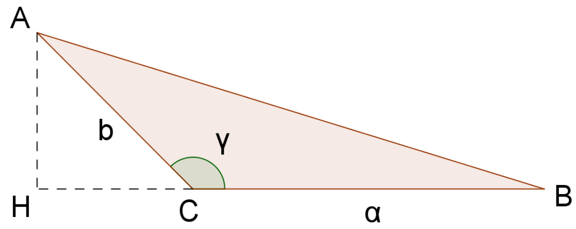
Supponiamo di conoscere due lati di un triangolo e l'angolo compreso: possiamo calcolare l'area?



Tracciamo l'altezza AH : $\overline{AH} = b sen\gamma$

e quindi $\text{area}\,(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

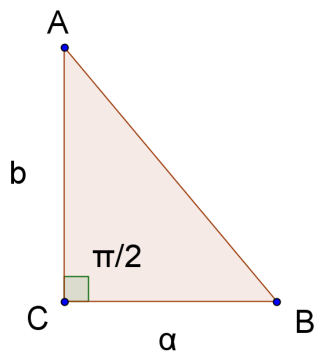
Osserviamo che se anche γ fosse ottuso avremo:



$$\overline{AH} = b \cdot sen(\pi - \gamma) = b \cdot sen\gamma$$

e quindi ancora area $(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

Se, come caso particolare, avessi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ il triangolo sarebbe rettangolo in C e infatti:

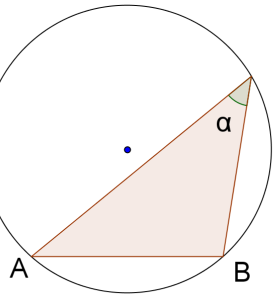


$$area(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} ab$$

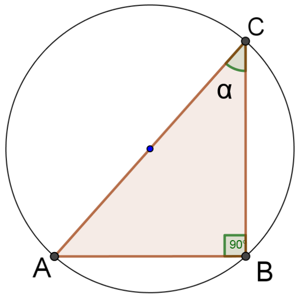
$$sen\gamma = sen\frac{\pi}{2} = 1$$

Lunghezza di una corda di una circonferenza

Consideriamo una corda AB in una circonferenza di raggio r: se conosciamo un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda possiamo trovare $\overline{AB}$?



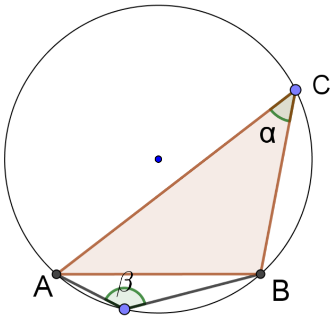
Sappiamo che tutti gli angoli che insistono su AB sono uguali: disegniamo allora quello che ha un lato passante per il centro della circonferenza.



Il triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ è rettangolo in B e quindi, essendo $\overline{AC} = 2R$:

$$\overline{AB} = 2R \cdot sen\ \alpha$$

Osserviamo che questa relazione vale anche considerando un angolo β come in figura: infatti $\beta = \pi - \alpha$ (α e β sono angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza) e quindi $sen\beta = sen\alpha$



$$\overline{AB} = 2R \cdot sen\beta$$

Quindi in generale abbiamo $\overline{AB} = 2R \cdot seno$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB)

PROBLEMI
TRIANGOLO RETTANGOLO

1) In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{AB} = 2a$ e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo.

[2p = $\frac{9}{2}a$; A = $\frac{3}{4}a^2$]

2) In un triangolo isoscele ABC di base AB , il lato obliquo $\overline{CB} = l$ e $tg\alpha = 2$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo ABC. Determina infine la misura dell'altezza AK relativa al lato obliquo.

[$2p = \frac{2}{5}\sqrt{5}l + 2l$; $A = \frac{2}{5}l^2$; $\overline{AK} = \frac{4}{5}l$]

3) In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo e la base minore misurano a e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ dove α è uno degli angoli adiacenti alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = \frac{9}{2}a$; $A = \frac{5\sqrt{15}}{16}a^2$]

4) In un trapezio rettangolo ABCD la diagonale minore AC misura a, forma un angolo retto con il lato obliquo BC e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ dove α è l'angolo acuto adiacente alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = \frac{22}{5}a$; $A = \frac{68}{75}a^2$]

5) Utilizzando il teorema della corda ricava il lato del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio *r*.

[$l_3 = \sqrt{3}r$, $l_4 = \sqrt{2}r$, $l_6 = r$]

6) In un trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 20 e la base minore DC misura 10. Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, dove α è l'angolo ottuso adiacente alla base minore, determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = 68$; $A = 256$]

7) In un trapezio rettangolo ABCD, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Sapendo che $\overline{AD} = a$ e che $tg(A\hat{B}C) = \frac{3}{4}$, determina perimetro e area del trapezio.

$[\,2p = \frac{11}{2}a\,;\;\; A = \frac{17}{12}a^2\,]$

8) L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura a e l'angolo che essa forma con uno dei due cateti ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Calcola perimetro e area del triangolo.

$[\,2p = 5a\,;\;\; A = \frac{25}{24}a^2\,]$

9) In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, il raggio della circonferenza inscritta misura r e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina i lati del triangolo.

$[\,\overline{AB} = 2\sqrt{2}r\,;\; \overline{BC} = 3\sqrt{2}r\,]$

10) In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina perimetro e area del triangolo e l'altezza AK relativa a BC.

$[\,2p = \frac{8}{3}a\,;\; A = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2\,;\; \overline{AK} = \frac{4}{9}\sqrt{2}a\,]$

11) In un trapezio scaleno ABCD la base minore DC è uguale ad uno dei due lati obliqui e si ha $\overline{DC} = \overline{AD} = l$. Sapendo che $D\hat{A}B = \frac{\pi}{4}$ e che $tg(A\hat{B}C) = 2$, determina i lati del trapezio e le funzioni goniometriche di $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

$[\,\overline{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2}+4}{4}\right)l\,;\; \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}l\;\; \hat{C} = \pi - \alpha\,....;\, \hat{D} = \frac{3}{4}\pi\,]$

12) Un trapezio isoscele di base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di raggio r e, indicato con α uno degli angoli alla base, si ha $sen\alpha = \frac{24}{25}$. Determina i lati del trapezio.

$[\,\overline{AB} = \frac{8}{3}r\,;\; \overline{DC} = \frac{3}{2}r\,;\; \overline{CB} = \overline{AD} = \frac{25}{12}r\,]$

Formule goniometriche

Come possiamo calcolare $sen(\alpha+\beta)$ oppure $\cos(\alpha+\beta)$?

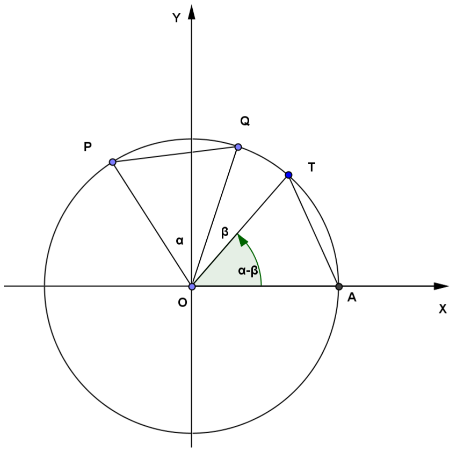
E' chiaro che non può risultare $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha+sen\beta$: se infatti fosse così e per esempio $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ avremo $sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=sen\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}=1+1=2$!

Formule di addizione e sottrazione

a) Cominciamo con questa osservazione: se riportiamo su una circonferenza goniometrica due angoli α e β , per esempio con $\alpha>\beta$ come in figura, possiamo considerare l'angolo $\alpha-\beta$ e riportarlo con il primo lato sul semiasse positivo delle x.

Avremo quindi:

$P(\cos\alpha; sen\alpha)$
$Q(\cos\beta; sen\beta)$
$T(\cos(\alpha-\beta); sen(\alpha-\beta))$
$A(1;0)$



Poiché $A\hat{O}T=Q\hat{O}P=\alpha-\beta$ allora avremo anche $\overline{PQ}=\overline{AT}$ e possiamo scrivere:

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha-sen\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+sen^2(\alpha-\beta)$$

Sviluppando abbiamo:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+sen^2\alpha-2sen\alpha sen\beta+sen^2\beta=\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+sen^2(\alpha-\beta)$$

Quindi poiché $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $sen^2\beta+\cos^2\beta=1$, $sen^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1$

Avremo $1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2sen\alpha sen\beta=1+1-2\cos(\alpha-\beta)$

e quindi $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$

Quindi abbiamo ricavato la **formula di sottrazione per il coseno**.

Esempio 1

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Da questa formula possiamo anche ricavare $\cos(\alpha+\beta)$.
Basta infatti scrivere $\alpha+\beta = \alpha - (-\beta)$ e avremo , poiché $\cos(-\beta) = \cos\beta$ mentre $sen(-\beta) = -sen\beta$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + sen\alpha \cdot sen(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$$

Quindi $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta}$

Esempio 2

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

b) Passiamo a determinare le formule per calcolare $sen(\alpha-\beta)$ e $sen(\alpha+\beta)$.

Ricordando che il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare possiamo scrivere:

$$sen(\alpha-\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \cos\beta - sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot sen\beta$$
$$= sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta$$

Quindi $\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta}$

Allora

$$sen(\alpha+\beta) = sen[\alpha-(-\beta)] = sen\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot sen(-\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta}$$

Esempio 3

$$sen(15°) = sen(45° - 30°) = sen 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

c) Infine calcoliamo $tg(\alpha-\beta)$ e $tg(\alpha+\beta)$:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot se\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\alpha\cdot sen\beta}$$

Se dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ otteniamo:

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Allora $$tg(a+\beta)=tg[\alpha-(-\beta)]=\frac{tg\alpha-tg(-\beta)}{1+tg\alpha\cdot tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Esempio 4

$$tg(15°)=tg(45°-30°)=\frac{tg45°-tg30°}{1+tg45°\cdot tg30°}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Formule di duplicazione

Utilizzando le formule di addizione abbiamo:

a) $sen2\alpha=sen(\alpha+\alpha)=sen\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot sen\alpha=2sen\alpha\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow$

$$\boxed{sen2\alpha=2sen\alpha\cdot\cos\alpha}$$

b) $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-sen\alpha\cdot sen\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha\Rightarrow$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha}$$

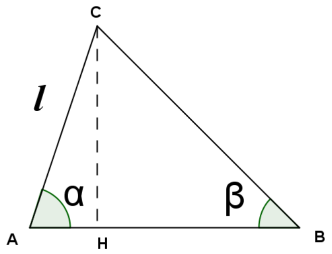
Osservazione: $\cos 2\alpha$ può essere sviluppato in due modi diversi utilizzando la relazione $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} 1-sen^2\alpha-sen^2\alpha=1-2sen^2\alpha \\ \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1 \end{array}$$

c) $tg2\alpha=tg(\alpha+\alpha)=\dfrac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg\alpha}=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \quad\Rightarrow \boxed{tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

Problemi svolti

1) Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, acutangolo, sappiamo che $sen\alpha = \frac{4}{5}$ e $tg\beta = 1$. Se $\overline{AC} = l$ determinare BC, AB e $sen\gamma$.



$sen\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$ (α è acuto); $tg\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

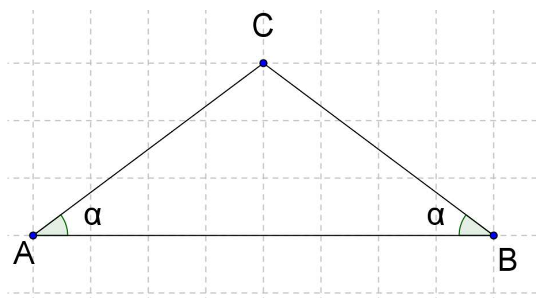
$\overline{AH} = l \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}l$ $\overline{CH} = l \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}l$ $\overline{HB} = \overline{CH} = \frac{4}{5}l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{7}{5}l$

$\overline{CB} = \overline{CH} \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{5}\sqrt{2}l$

$\gamma = \hat{C} = \pi - (\alpha + \beta)$ e quindi

$sen\hat{C} = sen(\pi - (\alpha + \beta)) = sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

2) Dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, sapendo che $sen\alpha = \frac{3}{5}$, con α l'angolo adiacente alla base, determinare le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C}$.



$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$\hat{C} = \pi - 2\alpha \Rightarrow sen\hat{C} = sen(\pi - 2\alpha) = sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

Conoscendo $sen\hat{C}$ possiamo poi determinare anche coseno e tangente.

ESERCIZI
FORMULE GONIOMETRICHE

1) Sviluppa utilizzando le formule di addizione e sottrazione:

a) $sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right]$ b) $sen\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right]$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$

e) $tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ $[-(2+\sqrt{3})]$ f) $tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $[2-\sqrt{3}]$

2) In un triangolo ABC acutangolo , sapendo che $sen\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, determina il seno dell'angolo $\hat{C}=\gamma$.

$$\left[sen\gamma=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right]$$

3) In un triangolo isoscele ABC gli angoli adiacenti alla base $\alpha=\beta$ hanno il seno uguale a $\frac{1}{4}$. Determina il seno dell'angolo al vertice γ.

$$\left[sen\gamma=\frac{\sqrt{15}}{8}\right]$$

4) In un triangolo isoscele ABC gli angoli adiacenti alla base $\alpha=\beta$ hanno il coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Determina il seno dell'angolo al vertice γ.

$$\left[sen\gamma=\frac{24}{25}\right]$$

5) In un triangolo isoscele ABC di base AB, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\overline{AC}=\overline{BC}=l$. Determina perimetro e area del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C}=\gamma$.

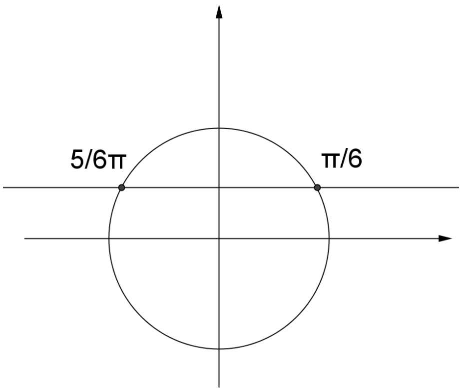
$$[\,2p=\frac{8}{3}l,\quad A=\frac{2\sqrt{2}}{9}l^2,\quad sen\gamma=\frac{4\sqrt{2}}{9},\quad \cos\gamma=\frac{7}{9},\quad tg\gamma=\frac{4\sqrt{2}}{7}\,]$$

Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari

a) Consideriamo un' equazione "elementare": $senx = \frac{1}{2}$

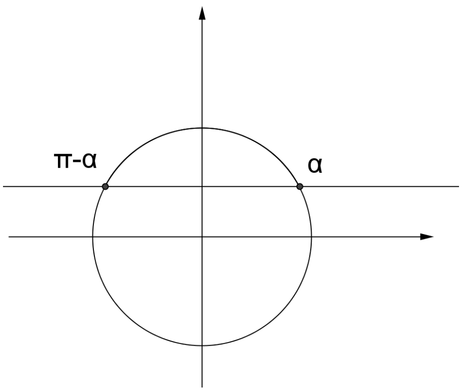
Per risolverla disegniamo la circonferenza goniometrica e tracciamo la retta orizzontale $y = \frac{1}{2}$ (ricordiamo che il seno di un angolo è l'ordinata del punto corrispondente sulla circonferenza goniometrica): troviamo due punti sulla circonferenza goniometrica, che rappresentano gli angoli che hanno il seno uguale ad $\frac{1}{2}$.



Le soluzioni dell'equazione sono quindi:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $senx = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:



$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

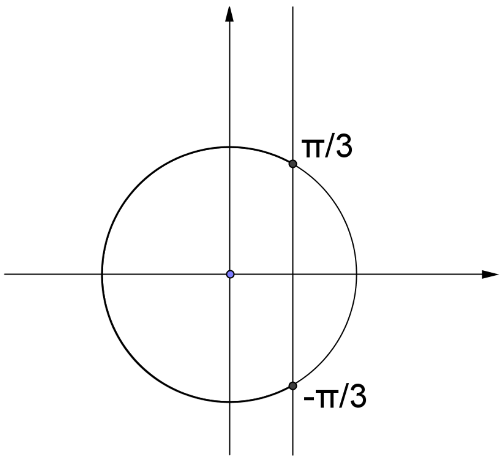
Se considero $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$senx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

b) Vediamo ora una equazione elementare con il coseno: $\cos x = \frac{1}{2}$

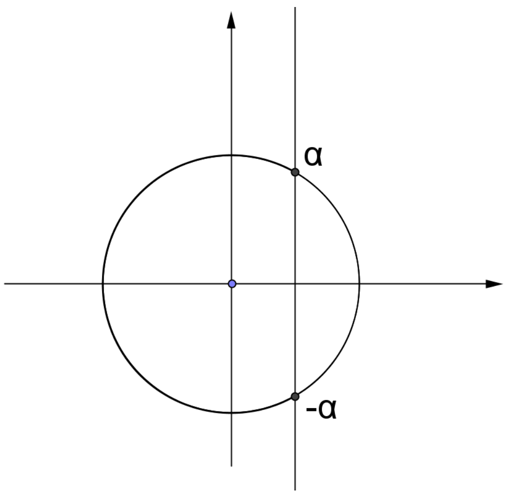
Questa volta tagliamo la circonferenza goniometrica con una retta verticale $x = \frac{1}{2}$ perché il coseno di un angolo è l'ascissa del punto corrispondente sulla circonferenza goniometrica.

Le soluzioni dell'equazioni sono quindi:



$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

In generale se dobbiamo risolvere $\cos x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:



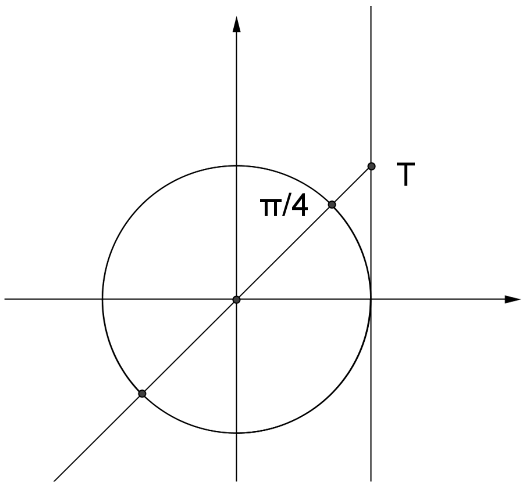
$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = -\alpha + 2k\pi$$

Se $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

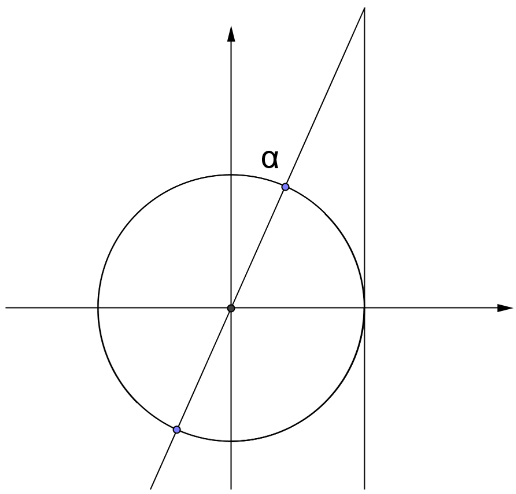
c) Consideriamo infine una equazione elementare con la tangente, per esempio: $tgx = 1$
In questo caso tracciamo la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto (1;0) e individuiamo su di essa il punto T di ordinata uguale a 1: se da T congiungiamo con l'origine otteniamo sulla circonferenza gli angoli aventi tangente uguale a 1.

Per indicare le soluzioni basterà indicare l'angolo minore e poi sommare $k\pi$, quindi le soluzioni dell'equazioni sono:



$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

In generale avremo: $tgx = k \Rightarrow x = \alpha + k\pi$

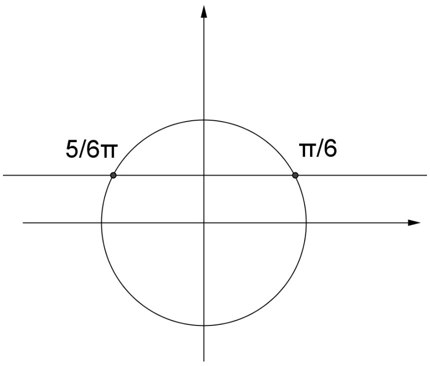


Equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari

Ci sono alcune equazioni che si "riconducono" facilmente ad equazioni elementari.
Vediamo alcuni esempi.

I) a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

In questo caso non conviene sviluppare con la formula di sottrazione ma considerare $x-\frac{\pi}{4}$ come un unico angolo. Per quello che abbiamo già visto:

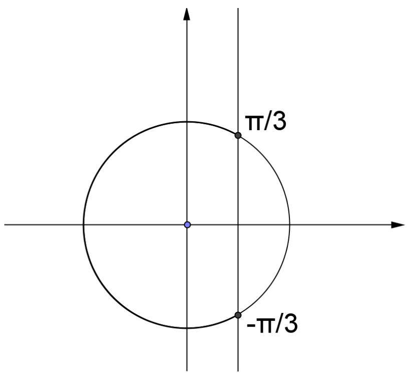


$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5}{12}\pi+2k\pi$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}\pi+2k\pi=\frac{13}{12}\pi+2k\pi$$

b) $\cos(2x)=\frac{1}{2}$

Anche in questo caso non conviene sviluppare con la formula di duplicazione ma considerare $2x$ come un unico angolo e per quello che abbiamo già visto avremo:

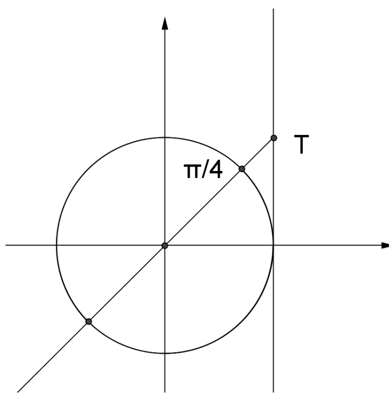


$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

c) $tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

Considerando $3x-\frac{\pi}{6}$ come un angolo avremo:



$$3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow 3x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$3x=\frac{5}{12}+k\pi$$

$$x=\frac{5}{36}\pi+k\frac{\pi}{3}$$

II) Vediamo infine i seguenti esempi:

a) $\boxed{sen^2 x + senx - 2 = 0}$

Consideriamola come un'equazione di 2° grado e ricaviamo:

$$senx_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow senx_1 = 1 \cup senx_2 = -2$$

Quindi $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$senx = -2$ nessuna soluzione

b) $\boxed{2\cos^2 x + \cos x = 0}$

Possiamo semplicemente mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (2\cos x + 1) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \end{array}$$

c) $\boxed{tg^2 x + tgx = 0}$

$$tgx(tgx + 1) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}$$

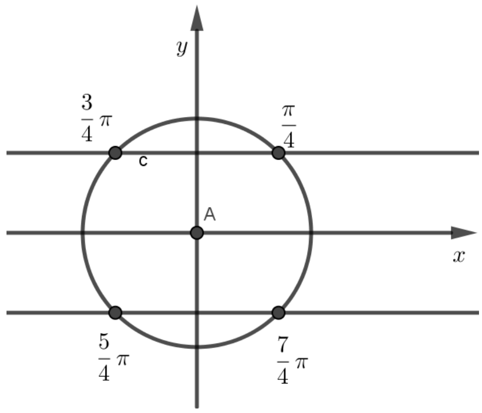
d) $\boxed{\cos^2 x - sen^2 x = 0}$

In questo caso dobbiamo utilizzare la prima relazione fondamentale e sostituire $1 - sen^2 x$ a $\cos^2 x$ (o viceversa):

$$1 - 2sen^2 x = 0 \rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow senx_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Possiamo scrivere le soluzioni così:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



Equazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Esempio 1

Consideriamo la seguente equazione: $\boxed{senx - \cos x - 1 = 0}$

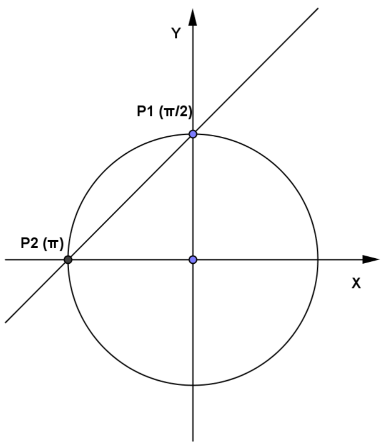
Per determinare x cerchiamo il punto P associato all'angolo x sulla circonferenza goniometrica. Ricordando che

$$senx = y_P$$
$$\cos x = x_P$$

Risolvere l'equazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_P - x_P - 1 = 0 \to y_P = x_P + 1 \\ x_P{}^2 + y_P{}^2 = 1 \end{cases}$$

Per non confondere x (angolo) con x_P (ascissa del punto P) possiamo indicare x_P con X e y_P con Y. Quindi abbiamo l'intersezione tra una retta e la circonferenza goniometrica:



$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Troviamo $P_1(0;1) \to x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$P_2(-1;0) \to x = \pi + 2k\pi$

Esempio 2

Consideriamo l'equazione $\boxed{senx - \cos x = 0}$

In questo caso non è necessario ricorrere al metodo grafico: possiamo dividere per $\cos x$ (possiamo supporre $\cos x \neq 0$ perché le soluzioni di $\cos x = 0$,cioè $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, non sono soluzioni dell'equazione) e otteniamo:

$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

ESERCIZI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari:

a) $senx = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tgx = \sqrt{3}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

f) $senx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi\right]$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7}{12}\pi + k\pi\right]$

c) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ $\left[x = \frac{\pi}{12} + k\pi\right]$

d) $sen \cdot 2x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

e) $\cos\cdot 3x = -1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

f) $tg \cdot 4x = -\sqrt{3}$ $\left[x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}\right]$

3) Risolvi le seguenti equazioni riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen^2 x - senx = 0$ $\quad [x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ $\quad [x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$ $\quad [x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

e) $2sen^2 x + senx = 0$ $\quad [x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2sen^2 x - 3senx + 1 = 0$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

g) $tg^2 x + tgx = 0$ $\quad [x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$

h) $\sqrt{3}tg^2 x + tgx = 0$ $\quad [x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$

i) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $\quad [x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

l) $3tg^2 x + 2\sqrt{3}tgx - 3 = 0$ $\quad [x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

4) Risolvi le seguenti equazioni lineari:

a) $senx + \cos x = 1$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = 2k\pi]$

b) $senx + \cos x = \sqrt{2}$ $\quad [x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$

c) $\cos x + \sqrt{3}senx = \sqrt{3}$ $\quad [x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - senx + \sqrt{3} = 0$ $\quad [x = \pi + 2k\pi; x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

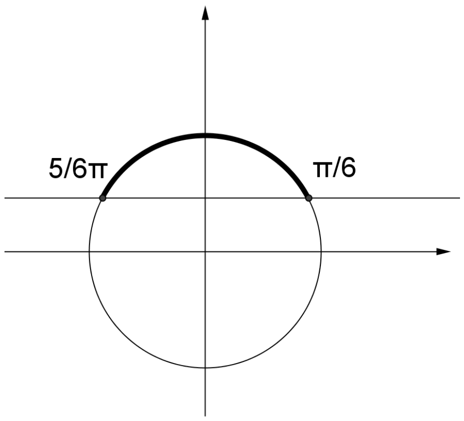
e) $2\cos x + 2senx = \sqrt{3} + 1$ $\quad [x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

f) $senx + \cos x = -2$ $\quad$ [impossibile]

Disequazioni goniometriche

Disequazioni goniometriche elementari

a) Riprendiamo gli esempi che abbiamo fatto per le equazioni trasformandoli in disequazioni:

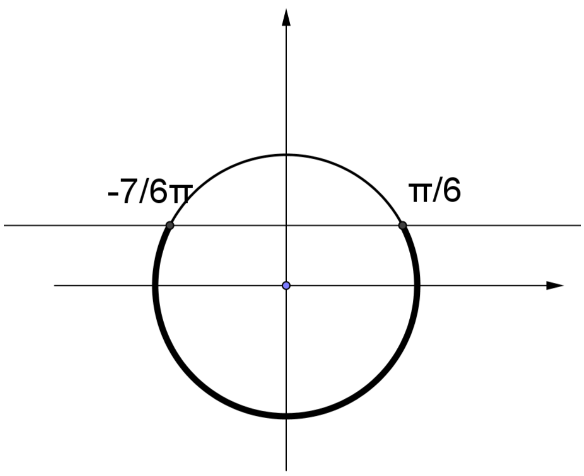


$$senx > \frac{1}{2}$$

Le soluzioni saranno:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

Se invece devo risolvere $senx < \frac{1}{2}$ le soluzioni possono essere scritte così:



$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

oppure

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$$

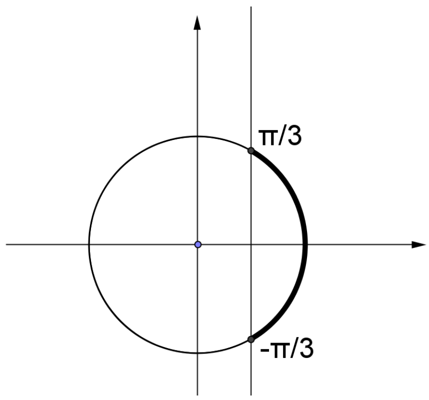
oppure

$$2k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi$$

Attenzione: non ha senso scrivere $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$!

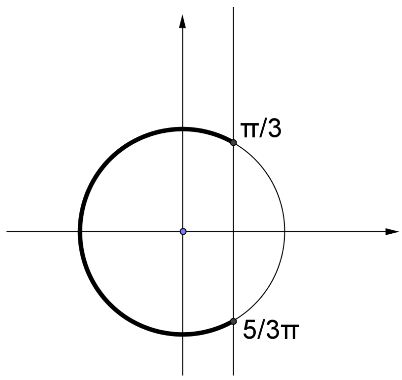
b) $\cos x > \frac{1}{2}$: le soluzioni sono

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

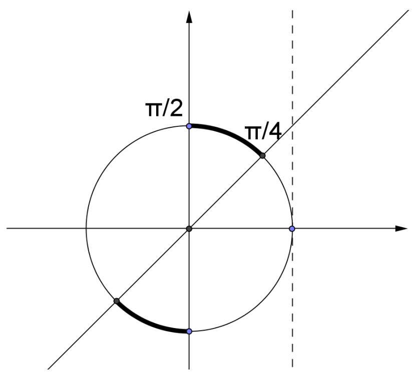


Se invece dobbiamo risolvere $\cos x < \frac{1}{2}$ abbiamo:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$



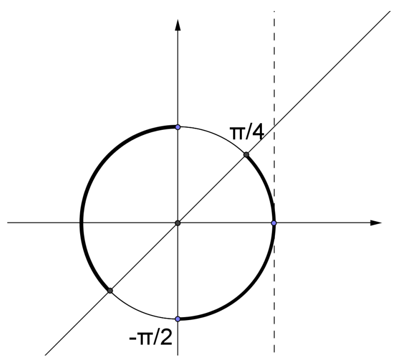
c) $tgx > 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$



Se invece devo risolvere $tgx < 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$

oppure posso scrivere

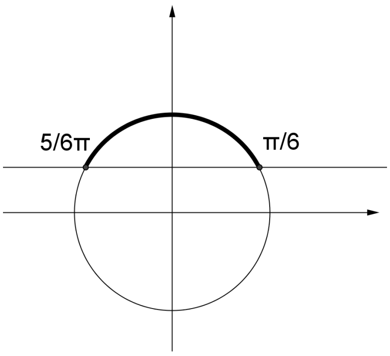
$$k\pi \le x < \frac{\pi}{4} + k\pi \cup \frac{\pi}{2} + k\pi < x \le \pi + k\pi$$



Disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari

I) a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$

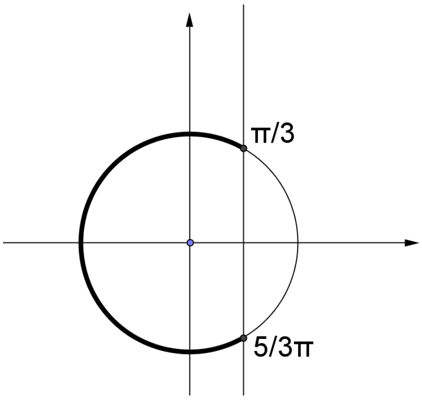
Consideriamo "$x-\frac{\pi}{4}$" tutto insieme:



$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{5}{6}\pi+2k\pi$$
$$\frac{5}{12}\pi+2k\pi<x<\frac{13}{12}\pi+2k\pi$$

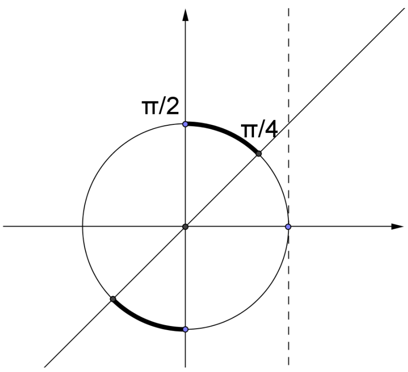
b) $\cos 2x<\frac{1}{2}$ $\rightarrow$

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<2x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$$
$$\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi$$



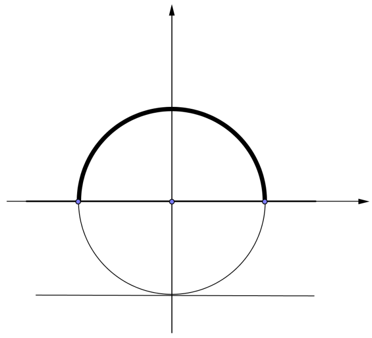
c) $tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)>1$ $\rightarrow$

$$\frac{\pi}{4}+k\pi<3x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\frac{5}{12}\pi+k\pi<3x<\frac{2}{3}\pi+k\pi$$
$$\frac{5}{36}\pi+k\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{9}\pi+k\frac{\pi}{3}$$



II) a) $sen^2 x + senx > 0$

$senx(senx+1) > 0$



Le soluzioni dell'equazione goniometrica associata sono

$$senx = 0, \quad senx = -1$$

e quindi le soluzioni della disequazione sono i valori esterni a -1 e 0 cioè $senx < -1 \cup senx > 0$

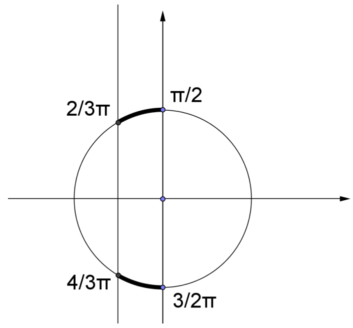
$$\Updownarrow$$

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

b) $2\cos^2 x + \cos x < 0$

$\cos x(2\cos x + 1) < 0$

$-\dfrac{1}{2} < \cos x < 0$



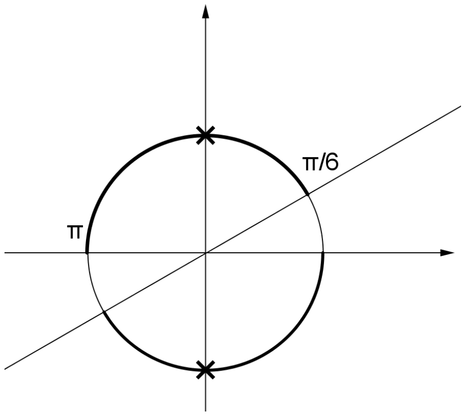
(dobbiamo prendere le soluzioni interne alle soluzioni dell'equazione associata)

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \cup \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

c) $\sqrt{3}tg^2 x + tgx > 0$

$tgx(\sqrt{3}tgx - 1) > 0$

$tgx < 0 \cup tgx > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



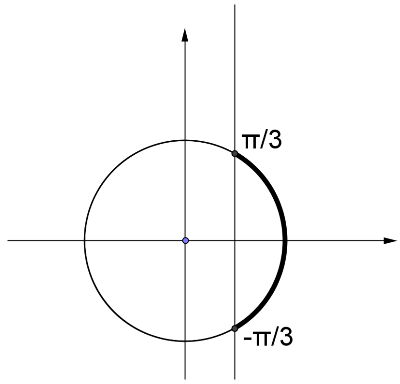
$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \pi + k\pi \text{ con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

d) $2sen^2x - 3\cos x < 0$

$$2\left(1-\cos^2 x\right) - 3\cos x < 0$$
$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0 \qquad \cos x < -2 \cup \cos x > \frac{1}{2}$$

$$(\cos x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \cup \cos x = -2)$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$



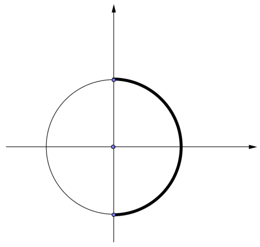
e) $sen2x + \cos x > 0$

Sviluppiamo $sen2x$ con la formula di duplicazione:

$$2senx\cos x + \cos x > 0$$
$$\cos x\left(2senx + 1\right) > 0$$

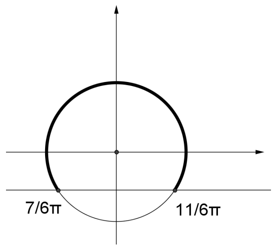
Studiamo il segno dei singoli fattori del prodotto:

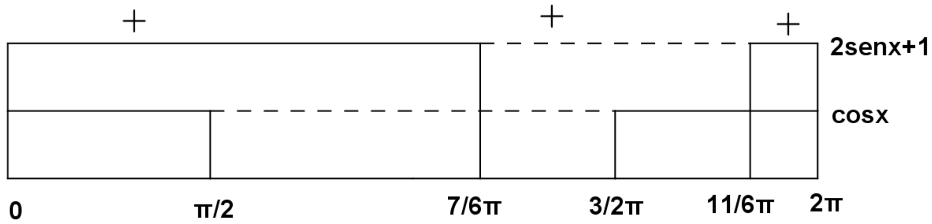
$\cos x > 0 \rightarrow$



$2senx + 1 > 0 \rightarrow senx > -\frac{1}{2}$

Riporto i risultati tra 0 e 2π





Poiché voglio che il prodotto sia positivo avrò:

$$2k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi$$

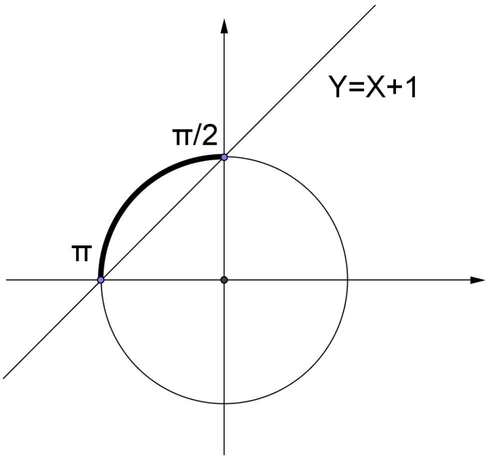
Disequazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Consideriamo per esempio la disequazione:

$$\boxed{senx - \cos x - 1 > 0}$$

Sostituendo $Y = senx$, $X = \cos x$ abbiamo:

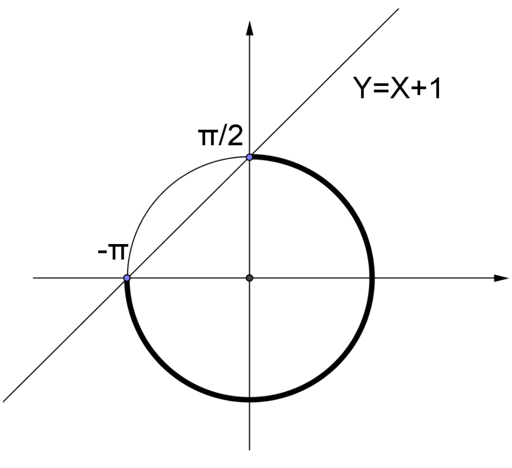
$$\begin{cases} Y - X - 1 > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y > X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



La parte di circonferenza goniometrica in cui i punti hanno Y>X+1 (semipiano "sopra" alla retta y=x+1) è quella indicata in figura e quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

Naturalmente se avessimo dovuto risolvere: $senx - \cos x - 1 < 0 \rightarrow \begin{cases} Y < X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$



la soluzione sarebbe stata:

$$-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Importante

Mentre per le equazioni goniometriche lineari in cui manca il termine noto avevamo detto che potevamo risolvere anche dividendo per cos*x*, nel caso delle disequazioni questo non può essere fatto poiché il coseno di un angolo non è sempre positivo.

ESERCIZI
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche elementari:

a. $senx > -\frac{1}{2}$ $\quad \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \right]$

b. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right]$

c. $tgx > \sqrt{3}$ $\quad \left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$

d. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6} + 2k\pi \right]$

e. $tgx < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi \right]$

f. $senx < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4} + 2k\pi \right]$

2) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

a. $sen\left(x - \frac{\pi}{4} \right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \right]$

b. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6} \right) > -\frac{1}{2}$ $\quad \left[-\frac{5}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$

c. $tg\left(x - \frac{\pi}{3} \right) > -1$ $\quad \left[\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi \right]$

d. $sen2x < 1$ $\quad \left[x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$

e. $\cos \cdot 3x \leq -1$ $\quad \left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right]$

f. $tg4x < -\sqrt{3}$ $\quad \left[-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4} \right]$

3) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

a) $sen^2 x - senx > 0$ $[\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$ $[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} > 0$ $[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \cup \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x < 0$ $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \cup \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

e) $2sen^2 x + senx < 0$ $[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2sen^2 x - 3senx + 1 > 0$ $[-\frac{7}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

g) $tg^2 x + tgx < 0$ $[-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi]$

4) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche lineari:

a) $senx + \cos x > 1$ $[2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $senx + \cos x \leq \sqrt{2}$ $[\forall x \in R]$

c) $\cos x + \sqrt{3}senx < \sqrt{3}$ $[-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - senx + \sqrt{3} > 0$ $[-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

e) $senx + \cos x > -2$ $[\forall x \in R]$

SCHEDA DI VERIFICA
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) $2\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$ $[x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi]$

2) $4sen^2x=3$ $[x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi; x=\frac{\pi}{3}+2k\pi; x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi; x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi]$

3) $tg^2x-\sqrt{3}tgx=0$ $[x=k\pi;\quad x=\frac{\pi}{3}+k\pi]$

4) $3tg^2x+2\sqrt{3}tgx-3=0$ $[x=-\frac{\pi}{3}+k\pi;\quad x=\frac{\pi}{6}+k\pi]$

5) $2+3\cos x=2sen^2x-1$ $[x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi;\quad x=\pi+2k\pi]$

6) $2\cos^2x-\cos x<0$ $[\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\cup\frac{3}{2}\pi+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi]$

7) $\sqrt{3}tg^2x+tgx>0$ $[k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\cup\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi]$

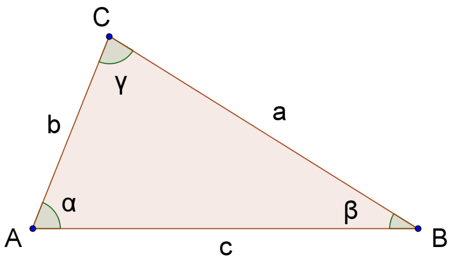
8) $2\cos^2x+\cos x-1\le 0$ $[\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi+2k\pi]$

9) $senx>\cos x$ $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right]$

10) $\cos x-\sqrt{3}senx>0$ $\left[-\frac{5}{6}\pi+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

Triangoli qualsiasi

Consideriamo un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ e adottiamo la seguente notazione: nel vertice A l'angolo è α, nel vertice B $\rightarrow \beta$, nel vertice C $\rightarrow \gamma$ e indichiamo con a il lato opposto ad A, con b quello opposto a B e con c quello opposto a C.

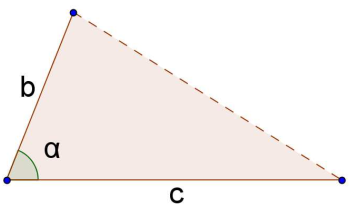


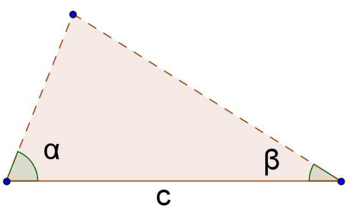
Risolvere un triangolo significa determinare, dalla conoscenza di alcuni elementi, tutti gli altri elementi (lati, angoli). Ricordiamo che, grazie ai criteri di congruenza dei triangoli, un triangolo è determinato se si assegnano:

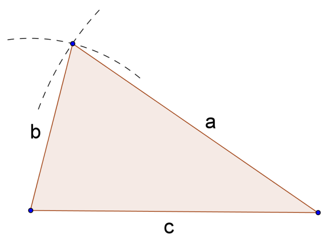
1) due lati e l'angolo compreso;
2) un lato e due angoli;
3) i tre lati (purché naturalmente sia rispettata la relazione che ciascuno sia minore della somma degli altri due)

Nota: se ordiniamo i lati in modo decrescente cioè se per esempio $a \geq b \geq c$ basterà verificare che $a < b + c$ poiché per b e c sarà verificato sicuramente.

Infatti in ognuno di questi casi è possibile costruire, con riga, compasso e goniometro, un unico triangolo.





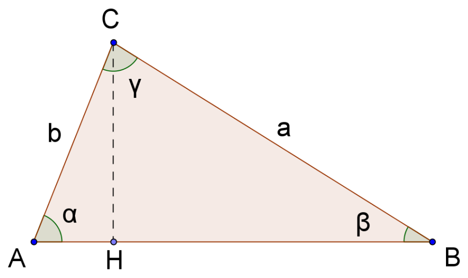


Dimostriamo due teoremi utili per la risoluzione dei triangoli qualsiasi.

Teorema dei seni

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ si ha:

$$\boxed{\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}}$$



Dimostrazione

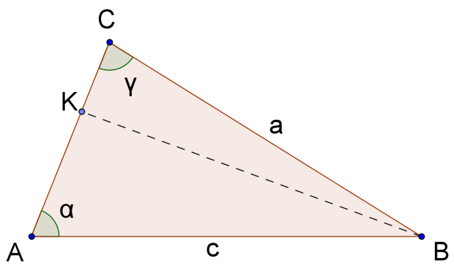
Consideriamo l'altezza CH: possiamo calcolarla in due modi

$$\overline{CH}=b\cdot sen\alpha \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{AHC}\text{)}$$

$$\overline{CH}=a\cdot sen\beta \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{CHB}\text{)}$$

e quindi $a\cdot sen\beta=b\cdot sen\alpha \rightarrow \frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}$

Analogamente tracciando l'altezza BK

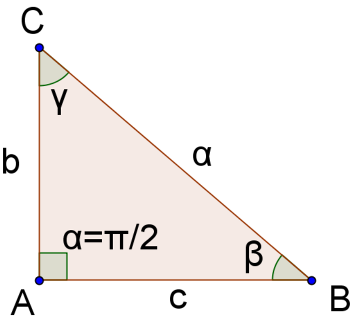


$$\left.\begin{array}{l}\overline{BK}=c\cdot sen\alpha\\ \overline{BK}=a\cdot sen\gamma\end{array}\right. \Rightarrow c\cdot sen\alpha=a\cdot sen\gamma$$

e quindi $\frac{a}{sen\alpha}=\frac{c}{sen\gamma}$

Quindi avremo che $\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$

Nota: osserviamo che questo teorema vale anche per un triangolo rettangolo. Infatti se per esempio $\alpha = \frac{\pi}{2}$ abbiamo $sen\alpha = 1$ e $a = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$



Osservazione: possiamo calcolare quanto vale questo rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto?

Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo: i lati a, b, c possono essere considerati corde di questa circonferenza e gli angoli α, β, γ angoli alla circonferenza che insistono su queste. Avevamo dimostrato che:

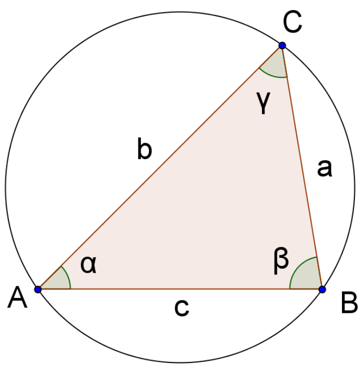
lunghezza corda = $diametro \cdot seno$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda)

e quindi

$$a = 2r \cdot sen\alpha \Rightarrow \frac{a}{sen\alpha} = 2R$$

$$b = 2r \cdot sen\beta \Rightarrow \frac{b}{sen\beta} = 2R$$

$$c = 2r \cdot sen\gamma \Rightarrow \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

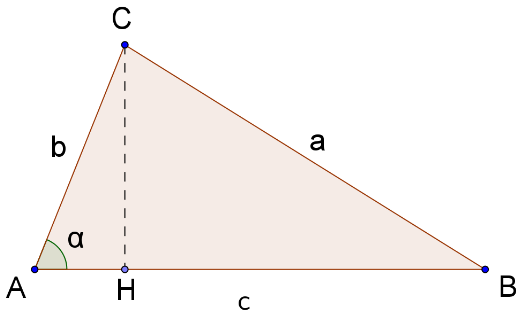


Quindi non solo abbiamo dimostrato che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è sempre lo stesso, per un dato triangolo, ma anche che è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema del coseno

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ vale, per ciascun lato, la seguente relazione:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$



cioè il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto tra questi e il coseno dell'angolo compreso.

Dimostrazione

Consideriamo l'altezza CH e il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ACH}$: avremo

$$\overline{CH} = b \cdot sen\alpha$$
$$\overline{AH} = b \cdot \cos\alpha \Rightarrow \overline{HB} = c - b \cdot \cos\alpha$$

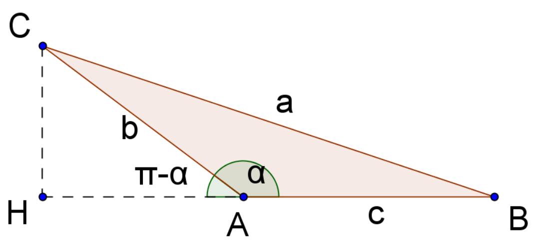
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{CHB}$ abbiamo:

$$a^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha + b^2 \cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2 \left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

e quindi: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Se l'angolo α fosse ottuso avremo: $\overline{CH} = b \cdot sen(\pi - \alpha) = b \cdot sen\alpha$

$$\overline{AH} = b \cdot \cos(\pi - \alpha) = -b \cdot \cos\alpha$$



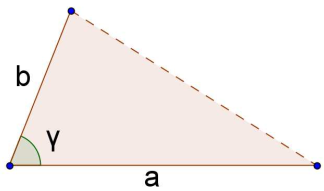
Ma poiché $\overline{HB} = \overline{AH} + AB = c - b\cos\alpha$ e quindi si ritrovano i calcoli precedenti.

Nota: se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il teorema si riduce al teorema di Pitagora e per questo viene anche chiamato teorema di Pitagora generalizzato.

.
Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Vediamo quindi i vari casi che possiamo avere.

1) Supponiamo di conoscere due lati, per esempio a e b, e l'angolo compreso γ.



Troviamo c con il teorema del coseno:

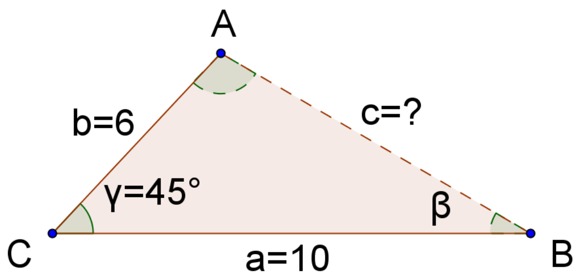
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c = ...$$

Troviamo α con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma} \Rightarrow sen\alpha = ... \rightarrow \alpha = ...$$

Naturalmente $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$

Esempio: $a = 10 \quad b = 6 \quad \gamma = 45°$



$$c^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c \cong 7{,}15$$

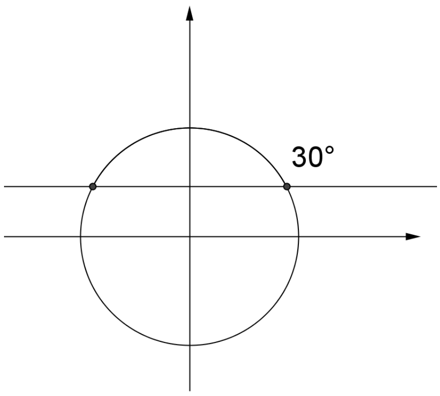
$$\frac{6}{sen\beta} = \frac{7{,}15}{sen\gamma} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}59 \Rightarrow \beta \cong 36{,}4°$$

Di conseguenza $\alpha = 180° - (45° + 36{,}4°) = 98{,}6°$

Nota

Quando usiamo la calcolatrice per trovare quale angolo ha un dato seno o un dato coseno (usando il tasto $\sin^{-1}$ o $\cos^{-1}$) dobbiamo sapere che, per definizione, $\sin^{-1}$ dà come risultati angoli tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (-90° e 90°) e $\cos^{-1}$ dà come risultati angoli tra 0 e π (0 a 180°)

Per esempio se digitiamo $\sin^{-1} 0.5$ otteniamo solo come risultato 30° ed invece sappiamo che anche 180°-30°=150° ha lo stesso seno (oltre a tutti gli angoli ottenuti con aggiungendo $2k\pi$).



Così se per esempio nel risolvere un triangolo utilizzando il teorema dei seni troviamo $sen\alpha = 0.5$ la calcolatrice ci darà solo $\alpha = 30°$ ma non è detto che questo sia il caso dell'angolo del nostro triangolo.

Ricordiamo infatti che in un triangolo con lati disuguali a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

Riprendiamo per esempio il caso del triangolo dell'esempio precedente: risolvendo $sen\beta \cong 0.59$ la calcolatrice ha fornito $\beta \cong 36.4°$. Prendiamo questo valore (e non 180°-36.4°) perché β dovrà essere minore di $\gamma = 45°$ in quanto b<c.

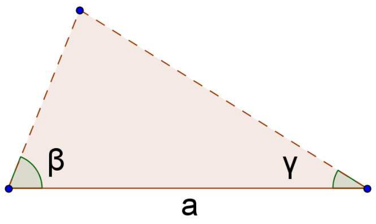
Ma se noi avessimo applicato il teorema dei seni per determinare α avremmo avuto:

$$\frac{10}{sen\alpha} = \frac{7,15}{sen45°} \Rightarrow sen\alpha \cong 0,999$$

e la calcolatrice avrebbe fornito come angolo $\alpha = 81,4°$ che ci avrebbe poi portato a $\beta = 180° - (45° + 81,4°) = 53,6°$ impossibile perché maggiore di 45°.

Quindi in questo caso 81,4° non è il nostro angolo ma dobbiamo prendere $\alpha = 180° - 81,4° = 98,6°$ che infatti ci riporta a $\beta = 180° - (45° + 98,6°) = 36,4°$.

2) Supponiamo di conoscere un lato, per esempio a , e due angoli, per esempio β e γ .



Troviamo b con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$$

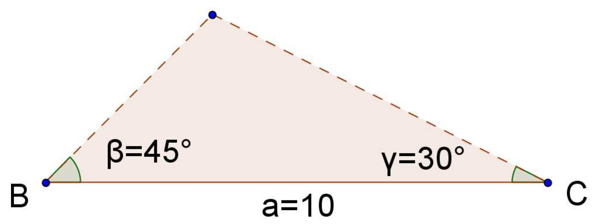
Nota: per calcolare $sen\alpha$ possiamo utilizzare le formule goniometriche poiché

$$sen\alpha = sen(\pi - (\beta + \gamma)) = sen(\beta + \gamma) = sen\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot sen\gamma$$

oppure calcolarne il valore approssimato utilizzare la calcolatrice.

Analogamente troviamo c e naturalmente $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$.

Esempio: $a = 10 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 30°$



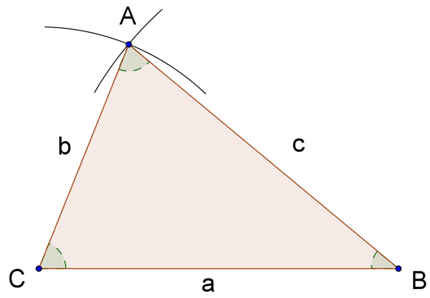
$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow b = \frac{20}{\sqrt{3}+1} \cong 7{,}33$$

$$* \; sen\alpha = sen(\pi - (\beta + \gamma)) = sen(\beta + \gamma) = sen\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot sen\gamma == \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} \Rightarrow c \cong 5{,}2$$

Naturalmente $\alpha = 180° - (45° + 30°) = 105°$

3) Supponiamo di conoscere i tre lati a, b, c (ognuno minore della somma degli altri due e maggiore della differenza).



Possiamo applicare il teorema del coseno per trovare un angolo, per esempio α :

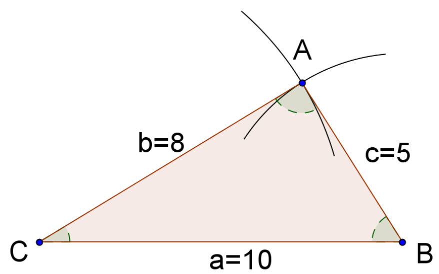
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \ldots \Rightarrow \alpha = \ldots$$

A questo punto applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = \ldots \Rightarrow \beta = \ldots$$

Infine $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$

Esempio: $a = 10 \quad b = 8 \quad c = 5$



$$10^2 = 8^2 + 5 \quad - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha \cong -0{,}14 \Rightarrow \alpha \cong 98°$$

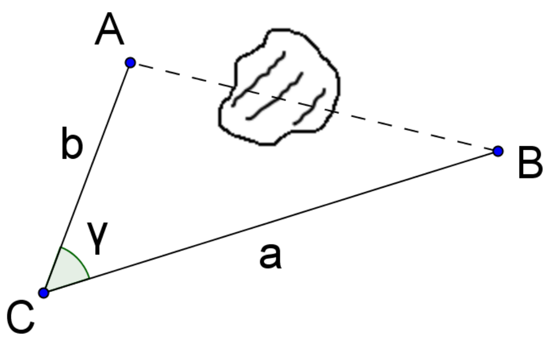
$$\frac{10}{sen98°} = \frac{8}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}792 \Rightarrow \beta \cong 52{,}4°$$

Naturalmente $\gamma = 180° - (52{,}4° + 98°) = 29{,}6°$

Applicazioni della risoluzione di un triangolo qualsiasi

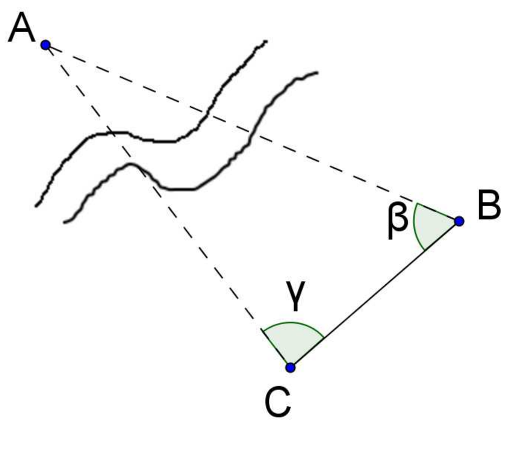
La risoluzione di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi è importante per la topografia.

1) Supponiamo per esempio di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo ma entrambi "accessibili". Posso prendere un 3° punto C, misurare $\overline{AC}, \overline{BC}$ e l'angolo γ.



Quindi conosco, del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, 2 lati e l'angolo compreso. Posso determinare $\overline{AB} = c$.

2) Supponiamo di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo e di cui solo un punto sia "accessibile" (B). Posso fissare un terzo punto C, misurare $\overline{BC}$ e gli angoli β e γ.



Quindi conosco, nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, un lato e i due angoli adiacenti. Il triangolo si può "risolvere" e posso determinare $\overline{AB}$.

ESERCIZI
TRIANGOLI QUALSIASI

1) Risolvi e costruisci con riga, compasso e goniometro oppure con il software Geogebra i seguenti triangoli:

a. $a = 8 \quad b = 4 \quad \gamma = 30°$ $\quad [c \cong 5 \quad \alpha \cong 126{,}9° \quad \beta \cong 23{,}1°]$

b. $a = 8 \quad \beta = 60° \quad \gamma = 45°$ $\quad [b \cong 7{,}2 \quad c \cong 5{,}9 \quad \alpha \cong 75°]$

c. $a = 5 \quad b = 10 \quad c = 9$ $\quad [\alpha = 29{,}9° \quad \beta = 85{,}5° \quad \gamma = 64{,}6°]$

d. $a = 8 \quad b = 5 \quad \gamma = 60°$ $\quad [c = 7 \quad \alpha \cong 81{,}3° \quad \beta \cong 38{,}7°]$

e. $a = 5 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 30°$ $\quad [b \cong 3{,}7 \quad c \cong 2{,}6 \quad \alpha \cong 105°]$

f. $a = 8 \quad b = 10 \quad c = 5$ $\quad [\alpha \cong 52{,}4° \quad \beta \cong 98° \quad \gamma = 29{,}6°]$

g. $a = 10 \quad b = 12 \quad \gamma = 30°$ $\quad [c \cong 6 \quad \alpha \cong 56{,}4° \quad \beta \cong 93{,}6°]$

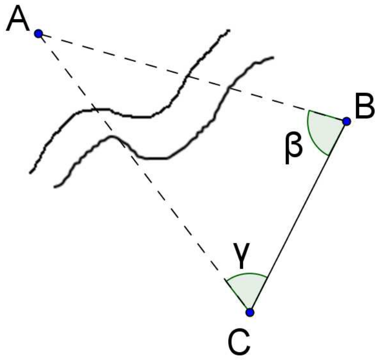
2) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma sono entrambi accessibili. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{AC} = 48$ metri, $\overline{BC} = 40$ metri e $A\hat{C}B = 40°$ Determina $\overline{AB}$.

[$\overline{AB} \cong 31$ metri]

3) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma solo B è accessibile. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{BC} = 100$ metri, $A\hat{B}C = 50°$, $A\hat{C}B = 70°$. Determina $\overline{AB}$.

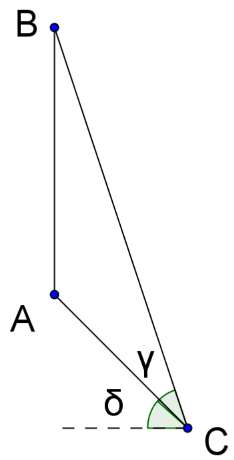
[$\overline{AB} \cong 108{,}5$ metri]

4) Due punti A e B si trovano sulle rive opposte di un fiume. Prendendo un punto C dalla parte B si misura $\overline{BC} = 50m$ $\quad \beta = 76° \quad \gamma = 63°$. Determina $\overline{AB}$.



$[\overline{AB} \cong 68m]$

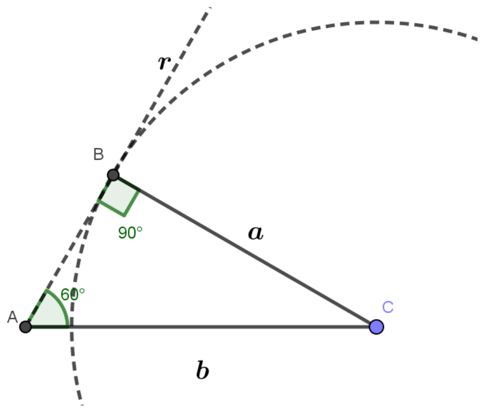
5) Una torre AB si trova su un pendio: determina $\overline{AB}$ sapendo che AC=10m, $\gamma = 30°, \delta = 45°$.



$\left[\overline{AB} = 19{,}3m\right]$

6) Problema svolto
Se per esempio abbiamo *b*=10 e $\alpha = 60°$ ci sarà un minimo valore di *a* per cui si può costruire un triangolo?
Osserviamo che tracciando la circonferenza di centro C e raggio *a* , perché essa intersechi la semiretta *r* in figura dovrà essere almeno tangente e quindi $a \geq b \cdot sen\alpha$.

In questo caso quindi $a \geq 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3}$



Quindi se $a < b \cdot sen\alpha$ non riusciamo a costruire nessun triangolo;
se $a = b \cdot sen\alpha$ e cioè nel nostro caso $a = 5 \cdot \sqrt{3}$ abbiamo solo un triangolo (rettangolo);
se $5 \cdot \sqrt{3} < a < b$ avremo due triangoli perché la circonferenza di centro C e raggio *a* intersecherà la semiretta *r* in due punti;
se $a = b$ avremo un solo triangolo (un'intersezione sarà in A) che in questo caso risulterà equilatero perché isoscele con un angolo di 60°;
se $a > b$ avremo un solo triangolo.

Disegna i vari casi.

SCHEDA DI VERIFICA
TRIANGOLI QUALSIASI

1) In un triangolo si ha $a = 10 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 60°$. Disegna il triangolo con riga e compasso e determina gli elementi mancanti.

[$b \cong 7{,}32$; $c \cong 8{,}97$; $\alpha = 75°$]

2) Determina la distanza $\overline{AB}$ tra due punti entrambi accessibili sapendo che, preso un terzo punto C, $\overline{BC} = 50m$, $\overline{AC} = 30m$, $tg\, A\hat{C}B = \frac{3}{4}$.

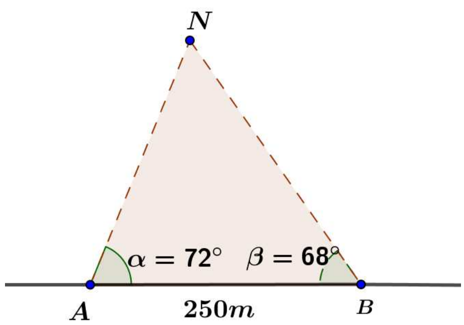
[$\overline{AB} \cong 31{,}62m$]

4) Risolvi il triangolo avente $a = 8 \;\; b = 5 \;\; c = 10$ e disegnalo.

[$\alpha \cong 52{,}44°$, $\beta \cong 29{,}7°$, $\gamma \cong 97{,}86°$]

5) Come potresti misurare l'altezza di una torre $\overline{AB}$ nel caso in cui la base A della torre non si possa raggiungere (si dice base inaccessibile) ma si trovi comunque su un terreno pianeggiante? (suggerimento: fissa un segmento $\overline{CD}$ sul piano orizzontale dove si trova la base A della torre e "traguarda" dai suoi estremi la cima della torre….).

6) Una nave N si trova a distanza *d* dalla costa (rettilinea): se da un osservatore sulla costa viene misurato $\alpha = 72°$, $\beta = 68°$ e $\overline{AB} = 250m$ (vedi figura), determina la distanza *d* della nave dalla costa.



[$d \cong 343m$]

*7) Dimostra che l'area di un quadrilatero si può calcolare con la seguente formula

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot sen\alpha$$

dove d_1 e d_2 sono la lunghezza delle diagonali e α è uno degli angoli formati dalle diagonali (è indifferente quale angolo si consideri).

Esponenziali e logaritmi

1. Funzione esponenziale

2. Funzione logaritmica

3. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

La funzione esponenziale

Consideriamo la funzione

$$f : x \to 2^x$$

(posso anche scrivere $f(x) = 2^x$ oppure $y = 2^x$).

Questa funzione risulta definita per tutti i numeri reali?

Proviamo:

- se $x = n$ є N $\qquad 2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \quad \cdot 2$ $\qquad$ (2 moltiplicato per se stesso *n* volte)
- se $x = -n$ є Z $\qquad 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$
- se $x = \frac{m}{n}$ є Q $\qquad 2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m}$
- se x è un numero irrazionale, per esempio $x = \sqrt{2}$ **possiamo definire** $2^{\sqrt{2}}$ come l'elemento "separatore" delle due classi "contigue" di numeri reali

  $2^{1,4}$ $2^{1,41}$ $2^{1,414}$ ….

  $2^{1,5}$ $2^{1,42}$ $2^{1,415}$ ….

  (dove si sono considerate le approssimazioni per eccesso e per difetto di $\sqrt{2}$).
  Quindi $f(x) = 2^x$ risulta definita $\forall x \in \Re$ cioè il suo dominio è $\Re$.

Chiamiamo **funzione esponenziale** una funzione del tipo

$$\boxed{y = a^x}$$

La variabile x si trova all'esponente e **a è un numero reale positivo e diverso da 1** e si chiama **base** della funzione esponenziale.

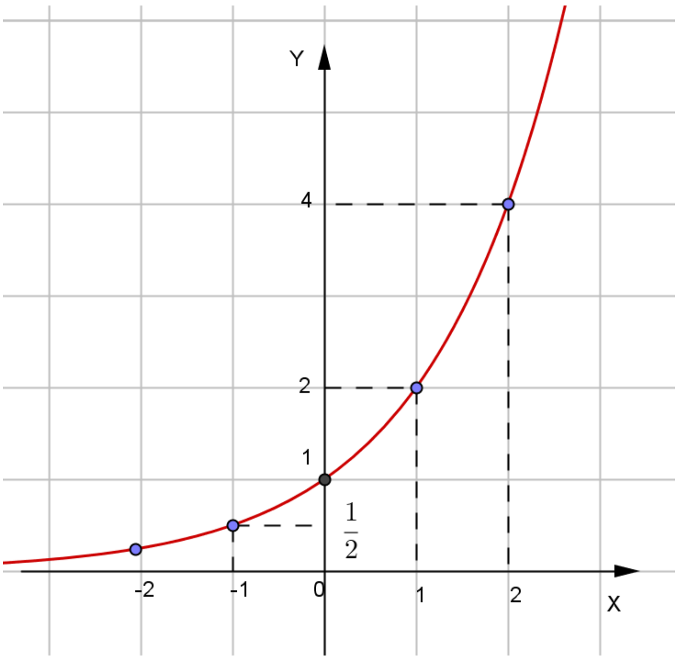
Per quello che abbiamo visto prima la funzione esponenziale ha come dominio (insieme di definizione) l'insieme $\Re$ dei numeri reali.

Osservazione 1
Si considera la base a > 0 perché la base a=0 non avrebbe nessun interesse e con basi negative non avrei sempre risultati reali: per esempio $a^{\frac{1}{2}}$ con a < 0 non è un numero reale.

Osservazione 2
Non si considera la base a = 1 perché avremmo la funzione costante y=1.

Come risulta il grafico di $y = 2^x$?

Consideriamo per esempio a = 2 : possiamo fare una tabella assegnando vari valori alla variabile x e otteniamo



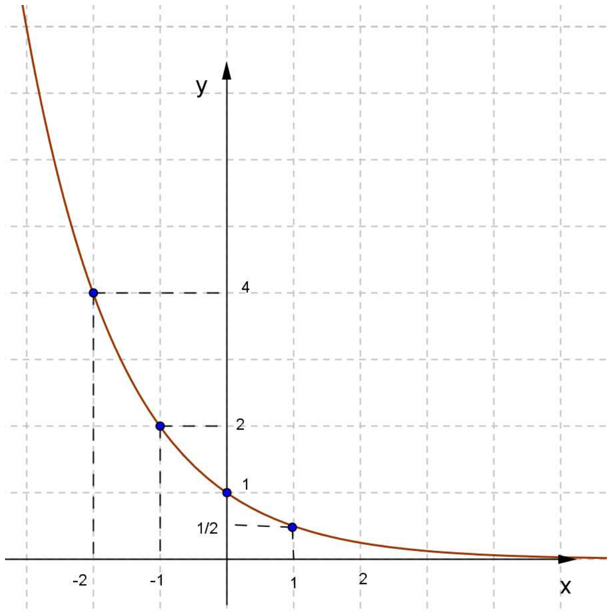
x	y
-3	2^{-3} =1/8
-2	2^{-2} =1/4
-1	2^{-1}= 1/2
0	2^0 = 1
1	2^1 = 2
2	2^2 = 4

Osservazioni

La funzione $y = 2^x$ ha le seguenti caratteristiche:

- è crescente cioè se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- è iniettiva cioè ad elementi distinti corrispondono immagini distinte (se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$);
- è sempre positiva e quindi il grafico si trova sempre sopra all'asse x;
- ha come asintoto l'asse x.

Consideriamo adesso $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Come risulta il suo grafico?



x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4

Osserviamo che in questo caso la funzione è decrescente, ma per il resto ha le stesse caratteristiche.

In conclusione quindi avremo che

$$y = a^x$$

è una funzione

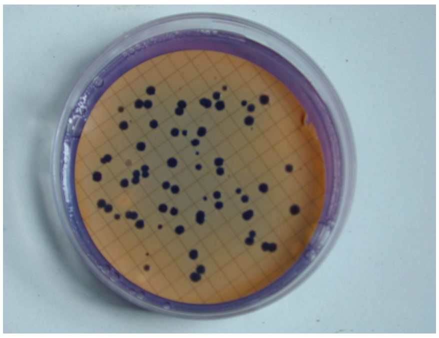
- crescente quando la base a > 1,
- decrescente per 0 < a < 1.

Il codominio (insieme delle immagini) di $y = a^x$ è in ogni caso l'insieme dei reali positivi $y > 0$.

Funzioni esponenziali nella realtà

Colonie di batteri

La mitosi è un processo legato alla divisione cellulare: **una cellula si divide in due cellule** figlie che risultano geneticamente e morfologicamente identiche tra loro e alla cellula madre.



La maggior parte dei batteri si riproduce mediante il meccanismo della mitosi: una volta che una cellula ha raggiunto una certa dimensione, si divide in due cellule identiche, di massa pari a circa la metà di quella originaria.

Intanto anche le due cellule figlie crescono fino a dividersi ulteriormente e così via….

Supponiamo di poter osservare l'evoluzione di una popolazione di questi batteri le cui cellule ogni ora si duplicano e che all'inizio della nostra osservazione ci siano $N_0 = 100$ batteri vediamo come risulta il numero N(t) dei batteri che popolano la colonia al tempo *t* (misurando *t* in ore).

numero iniziale di batteri : N(0) = 100

numero di batteri dopo 1 ora : N(1) = $100 \cdot 2$

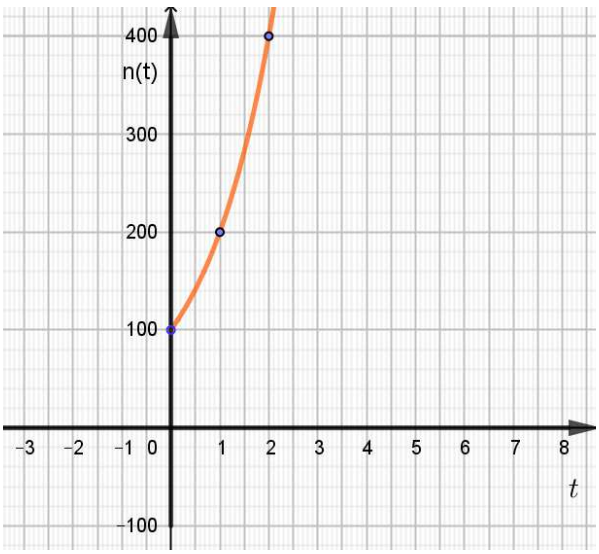
numero di batteri dopo 2 ore : N(2) = $100 \cdot 2 \cdot 2 \rightarrow 100 \cdot 2^2$

ecc.

Quindi $N(t) = 100 \cdot 2^t$

La crescita del numero dei batteri ha come "curva di sostegno" il grafico di una funzione esponenziale del tipo $y = N_o \cdot 2^x$ in cui x rappresenta il tempo t e si ha $y(0) = N_0$ cioè il valore della funzione per x=0 risulta N_0: naturalmente avrà senso considerare solo alcuni punti corrispondenti a t=0, t=1, t=2 ecc.

Disegniamo il grafico partendo da $t = 0$.



Decadimento radioattivo

Alcune sostanze, dette radioattive, si trasformano in altre sostanze (si dice che “decadono”) e il tempo in cui la sostanza si dimezza (metà della sua massa iniziale si è trasformata) viene chiamato “tempo di dimezzamento” ed è diverso da sostanza a sostanza radioattiva.

Supponiamo per semplicità di considerare 100 grammi di una sostanza radioattiva che ha un tempo di dimezzamento di 1 giorno: se misuriamo il tempo in giorni e indichiamo con *m(t)* la massa (in grammi) della sostanza al giorno *t* possiamo scrivere che:

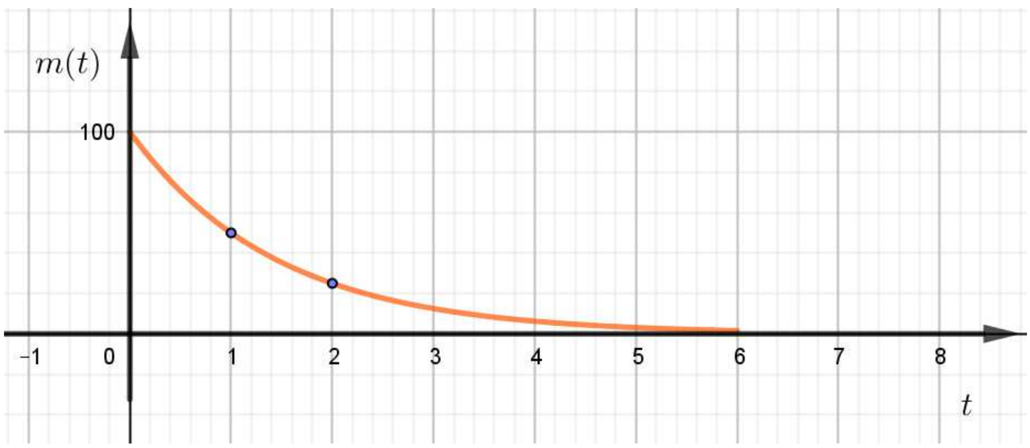
massa iniziale $m(0)=100$

massa dopo 1 giorno: $m(1)=100\cdot\frac{1}{2}$

massa dopo 2 giorni: $m(2)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\rightarrow 100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

ecc.

Quindi avremo che $m(t)=100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ cioè la massa sarà rappresentata dall’andamento di una funzione esponenziale di base $a=\frac{1}{2}$ e valore iniziale $m(0)=100$ (naturalmente dovremo considerare solo i punti del grafico corrispondenti a t=0, t=1 ecc.(t misurato in giorni).



Interesse bancario composto

Quando versiamo dei soldi in banca riceviamo un compenso che è l'interesse.
L'interesse è il prezzo che la banca paga per poter disporre del nostro denaro e quasi sempre si tratta di quello che si chiama i*nteresse composto* cioè l'interesse è calcolato alla fine di ogni anno e si capitalizza, cioè si aggiunge al capitale depositato.

Quindi se abbiamo depositato 100 euro e l'interesse è del 5% composto il primo anno guadagneremo 5 euro ma il secondo anno guadagneremo il 5% di 100+5=105 euro quindi 5,25 euro ecc.

Supponiamo di aver depositato in banca 100 euro e che la banca applichi un interesse composto del 10%.

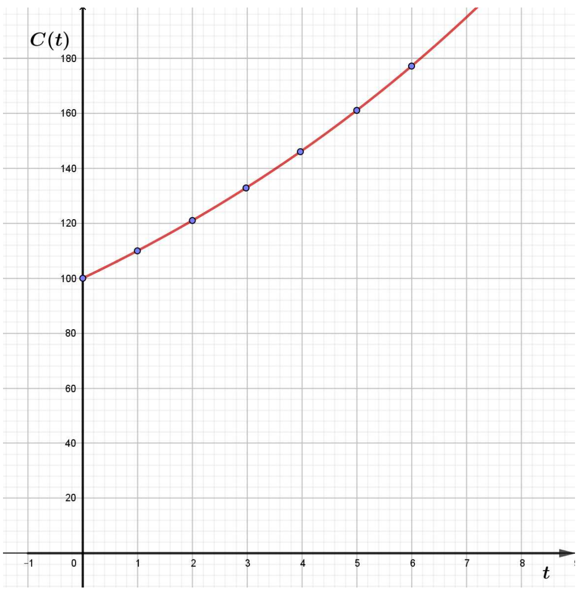
Calcoliamo il capitale $C(1)$, $C(2)$ … C(t) dopo 1, 2 anni ….t anni

$$C(1) = 100 + 100 \cdot \frac{1}{10} \to 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

$$C(2) = C(1) + C(1) \cdot \frac{1}{10} \to C(1) \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right) \to 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 \text{ ecc.}$$

Quindi avremo: $C(t) = 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^t$

Si tratta di una funzione esponenziale che ha valore iniziale C(0)=100 e base $a = \frac{11}{10}$ (maggiore di 1).



Funzione logaritmica

Definizione di logaritmo
Si definisce logaritmo in base a di un numero *x* e si indica con la scrittura $\log_a x$, l'esponente da dare alla base *a* per ottenere *x*.

Per esempio $\log_{10} 1000 = 3$ perché $10^3 = 1000$
La base *a* deve essere positiva cioè $a > 0$ e $a \neq 1$ così come avevamo visto per la funzione esponenziale.

La funzione $f : x \rightarrow \log_a x$ cioè $y = \log_a x$ viene detta funzione logaritmica ed è la **"funzione inversa" della funzione esponenziale:** infatti per esempio, considerando la base $a = 10$

$$3 \xrightarrow{10^x} 10^3$$

$$10^3 \xrightarrow{\log_{10} x} 3$$

Nota
Prova a fare alcune prove di calcolo di logaritmi in base 10 con la calcolatrice: il tasto **log** indica il logaritmo in base 10 ed è presente in tutte le calcolatrici:

$$\log_{10} 10 = 1 \qquad \log_{10} 100 = 2 \text{ ecc.}$$

Nota storica
L'idea su cui si basa il concetto di logaritmo è molto antica e se ne trova già traccia nelle opere di Archimede.
Consideriamo per esempio la base 2 (la base veniva chiamata *ragione)* e facciamo una tabella in cui mettiamo in una colonna le potenze del 2 e nella colonna accanto l'esponente corrispondente (che veniva chiamato *indice*): nel sedicesimo secolo il matematico scozzese **John Napier**, noto con il nome italianizzato di Giovanni Nepero, coniò il termine ancora oggi utilizzato di logaritmo, dal greco ***logon arithmos**,* cioè *numero della ragione* intendendo l'indice, cioè l'esponente, per avere il numero della tabella.

Numero	Logon arithmos
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
…..	…

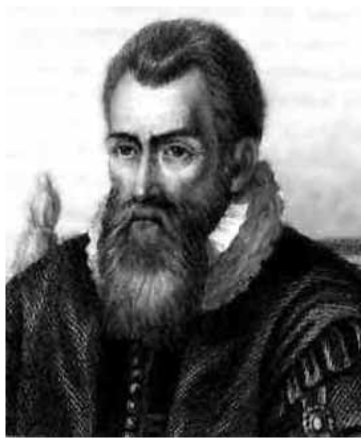
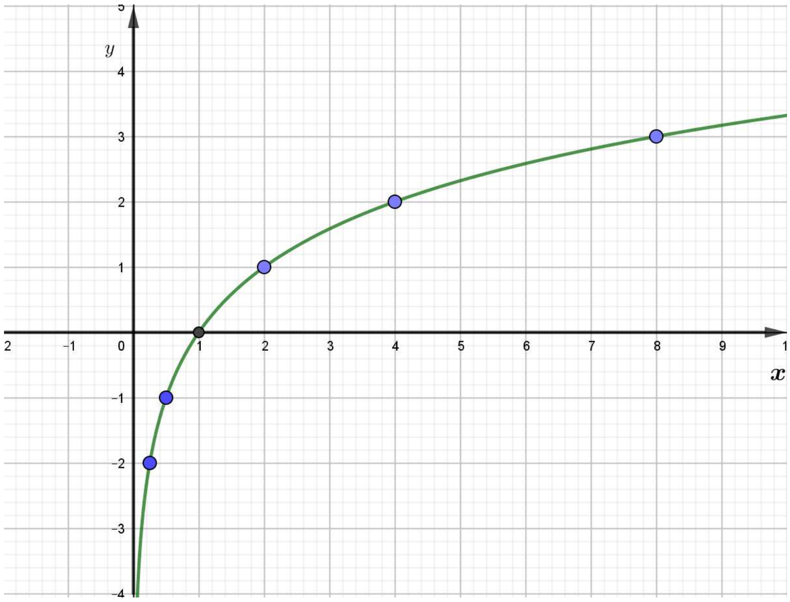


Grafico della funzione logaritmica

1) Consideriamo per esempio la funzione $y = \log_2 x$: per tracciarne il grafico facciamo prima la tabella e poi riportiamo i vari punti.

x	$y = \log_2 x$
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



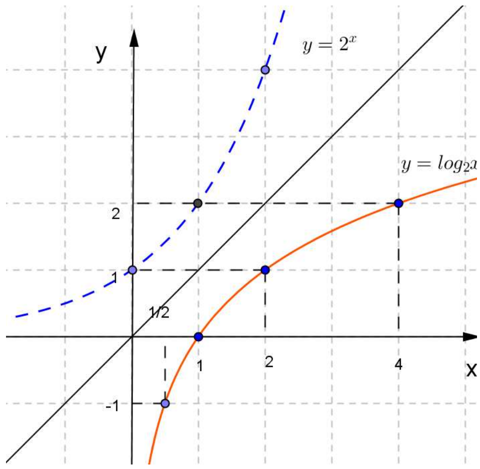
- Osserviamo che il dominio della funzione logaritmica è x > 0, mentre il codominio sono tutti i numeri reali: dominio e codominio sono scambiati rispetto alla funzione esponenziale.

- Il grafico ha come asintoto verticale l'asse *y* (l'esponenziale aveva invece l'asse *x*)

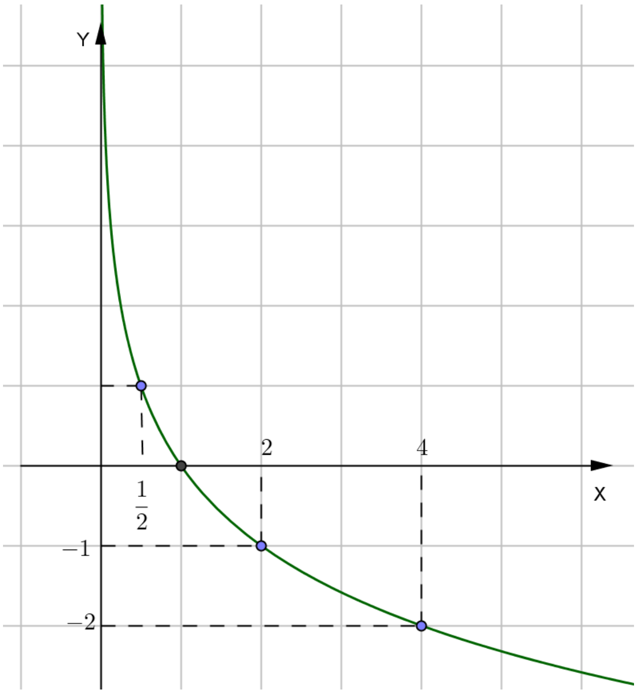
- Se, come in questo caso, la base *a* > 1 otteniamo una funzione crescente (come nel caso della funzione esponenziale).

- Il grafico interseca l'asse *x* in (1;0)

Osservazione
Poiché la funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale i grafici di $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante perché i loro punti hanno ascissa e ordinata scambiate (vedi figura).



2) Consideriamo una funzione logaritmica con base minore di 1: tracciamo per esempio il grafico di $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:



x	$\log_{1/2}x$
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2

- Osserviamo che anche in questo caso il dominio della funzione logaritmica è x > 0, mentre il codominio sono tutti i numeri reali: dominio e codominio sono scambiati rispetto alla funzione esponenziale.

- Il grafico ha come asintoto verticale l'asse *y* (l'esponenziale aveva invece l'asse *x*)

- Se, come in questo caso, la base $0 < a < 1$ otteniamo la funzione è **decrescente** (come accadeva anche per la funzione esponenziale con base minore di 1).

- Il grafico interseca l'asse *x* in (1;0)

Vediamo alcune proprietà dei logaritmi.
.

Proprietà dei logaritmi

1) $$\boxed{\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n}$$

Dimostrazione

Poniamo $\log_a m = x$ cioè $a^x = m$ e $\log_a n = y$ cioè $a^y = n$

allora $m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e quindi

$$x + y = \log_a (m \cdot n)$$

Esempio: $\log_{10} 10 \cdot 100 = \log_{10} 10 + \log_{10} 100$

Infatti $\log_{10} 10 \cdot 100 = \log_{10} 1000 = 3$ e $\log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$

2) $$\boxed{\log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n}$$

Dimostrazione

Ponendo $\log_a m = x$ e $\log_a n = y$ abbiamo che $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ e quindi

$$x - y = \log_a \left(\frac{m}{n} \right)$$

Esempio: $\log_{10} \frac{1000}{10} = \log_{10} 1000 - \log_{10} 10$

Infatti $\log_{10} \frac{1000}{10} = \log_{10} 100 = 2$ e $\log_{10} 1000 - \log_{10} 10 = 3 - 1 = 2$

3) $$\boxed{\log_a (m^n) = n \cdot \log_a m}$$

Dimostrazione

Poniamo $\log_a m = x$ cioè $a^x = m$ avremo che $m^n = (a^x)^n = a^{x \cdot n}$ e quindi

$$n \cdot x = \log_a (m^n)$$

Esempio: $\log_{10} \left(10^3 \right) = 3 \cdot \log_{10} 10$

Infatti $\log_{10} \left(10^3 \right) = 3$ e $3 \cdot \log_{10} 10 = 3 \cdot 1 = 3$

4) **Cambiamento di base** $\boxed{\log_a m = \dfrac{\log_b m}{\log_b a}}$

Dimostrazione

Poniamo $a^x = m$: se a^x è uguale a *m* allora saranno uguali anche i loro logaritmi in base b:

$$\log_b a^x = \log_b m \Rightarrow x \cdot \log_b a = \log_b m \Rightarrow x = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

(abbiamo applicato la proprietà 3 dei logaritmi e poi ricavato *x*).

Esempio: $$\log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cong \frac{0{,}699}{0{,}477} \cong 1{,}47$$

Calcolo di un logaritmo

Alcuni logaritmi possono essere calcolati a mente utilizzando la conoscenza delle potenze.

Per esempio $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$.

Ma quanto vale, per esempio**,** $\log_2 3$ **?**

Essendo il numero 3 compreso tra 2 e 4 il suo logaritmo sarà compreso tra $\log_2 2 = 1$ e $\log_2 4 = 2$: per trovare il valore approssimato di $\log_2 3$ possiamo utilizzare la calcolatrice.

In alcune calcolatrici è presente anche il tasto che permette di calcolare il logaritmo in una base qualunque ma se non fosse presente possiamo cambiare base e riportarci alla base 10.

Abbiamo quindi:

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cong \frac{0{,}477}{0{,}301} \cong 1{,}58$$

Nota: in genere nelle calcolatrici è presente anche il tasto **ln** che permette di calcolare il logaritmo in base *e* (***e*** è un numero irrazionale molto importante in matematica per la descrizione di numerosi fenomeni ed il cui valore approssimato è 2,7).

Funzioni logaritmiche nella realtà

Logaritmi e chimica

In chimica la concentrazione molare di ioni H^+ presenti in una soluzione viene indicata con il simbolo $[H^+]$ e si ha:

$[H^+]=1$ per una soluzione di massima acidità;

$[H^+]=10^{-7}$ per una soluzione neutra;

$[H^+]=10^{-14}$ per una soluzione di minima acidità (basica).

Il pH di una soluzione si definisce come

$$pH=-\log_{10}[H^+]$$

e quindi abbiamo che:

se $[H^+]=1 \Rightarrow pH=0$ soluzione di massima acidità;

se $[H^+]=10^{-7} \Rightarrow pH=7$ soluzione neutra;

se $[H^+]=10^{-14} \Rightarrow pH=14$ soluzione di minima acidità (basica)

Esempio

Se la concentrazione di ioni di una soluzione è per esempio $[H^+]=10^{-8}$ avrà pH=8.

Logaritmi e livello sonoro

Ricordiamo che l'intensità I di un'onda sonora è definita come la quantità di energia che attraversa in 1 secondo una superficie di 1 m^2 disposta perpendicolarmente alla superficie di propagazione dell'onda e si misura quindi in W/m^2.

L'intensità minima percepita da un orecchio "normale" (alla frequenza di riferimento di 1000 Hz) è $I_0=10^{-12}\,W/m^2$ (soglia di udibilità).

Si definisce livello sonoro, che indichiamo con l_s, misurato in decibel (dB):

$$l_s=10\cdot\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{(dB)}$$

Quindi se $I=I_0 \Rightarrow l_s=0$ dB

se $I=10\cdot I_0 \Rightarrow l_s=10$ dB

se $I=100\cdot I_0 \Rightarrow l_s=20$ dB

ecc.

Esempio

L'intensità del suono (per la frequenza di riferimento di 1000 Hz) che provoca una sensazione di dolore al timpano è $I=1W/m^2$ e il livello sonoro corrispondente risulta $10\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{10^{-12}}\right)=120$

Equazioni esponenziali

Equazioni esponenziali elementari

L'equazione esponenziale elementare è

$$\boxed{a^x = k}$$

con $k > 0$ altrimenti non ci sono soluzioni e per la definizione di logaritmo la soluzione dell'equazione è:

$$x = \log_a k$$

Esempio: $2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3$

Equazioni esponenziali riconducibili a quelle elementari

Esempi

1. $2^{x-1} = 3 \rightarrow \quad x - 1 = \log_2 3 \rightarrow x = 1 + \log_2 3$

2. $2^{x-1} = 2^{3x} \rightarrow x - 1 = 3x \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

3. $2^{x-1} = 3^x$

Se due numeri sono uguali allora sono uguali anche i loro logaritmi in una base qualsiasi: se scegliamo la base 10 abbiamo

$$\log_{10} 2^{x-1} = \log_{10} 3^x$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi relativa alla potenza ed abbiamo:

$$(x-1)\cdot \log_{10} 2 = x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2 = x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = \log_{10} 2$$

Infine ricaviamo la x

$$x = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2 - \log_{10} 3}$$

Nota: applicando la proprietà del quoziente possiamo scrivere la soluzione anche così: $x = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} \dfrac{2}{3}}$

4. $3^{2x} - 12 \cdot 3^x - 13 = 0$

Poniamo $3^x = y \rightarrow y^2 - 12y - 13 = 0 \rightarrow y_1 = -1 \cup y_2 = 13$

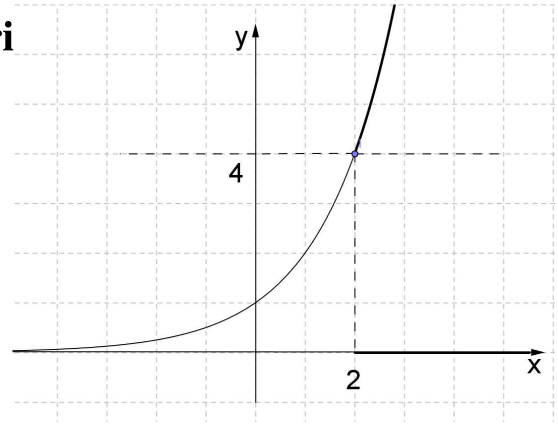
Quindi: $3^x = -1$ non ha nessuna soluzione ; $3^x = 13 \rightarrow x = \log_3 13$

Disequazioni esponenziali

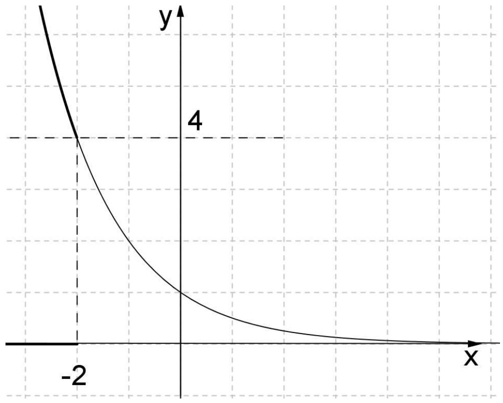
Disequazioni esponenziali elementari

Esempi

- $2^x > 4 \rightarrow x > \log_2 4$ cioè $x > 2$



- $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \rightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 4$ cioè $x < -2$



In generale se $k > 0$ abbiamo

- se $a > 1$ poiché a^x è una funzione crescente si mantiene il verso della diseguaglianza

$$\boxed{a^x > k \rightarrow x > \log_a k}$$

- se $0 < a < 1$ poiché a^x è in questo caso una funzione decrescente si inverte il verso della diseguaglianza

$$\boxed{a^x > k \rightarrow x < \log_a k}$$

Nota 1
Se $k < 0$ e dobbiamo risolvere $a^x > k$ la disequazione è verificata $\forall x \in \Re$ dal momento che a^x è sempre positivo e quindi è maggiore di un numero negativo.

Esempio: $2^x > -3 \rightarrow \forall x \in \Re$

Nota 2
Considerazioni analoghe valgono per la risoluzione della disequazione di $a^x < k$ con $k > 0$.
Se $k < 0$ non ci sarà nessuna soluzione di $a^x < k$ poiché a^x è sempre positivo.

Disequazioni esponenziali riconducibili a quelle elementari

Esempi

1. $2^{x-1} > 3 \rightarrow x-1 > \log_2 3 \rightarrow x > 1 + \log_2 3$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 3 \rightarrow x-1 < \log_{\frac{1}{2}} 3 \rightarrow x < 1 + \log_{\frac{1}{2}} 3$

3. $2^{x-1} > 2^{3x} \rightarrow x-1 > 3x \rightarrow 2x < -1 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \rightarrow x-1 < 3x \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$

5. $2^{x-1} > 3^x \rightarrow \log_{10} 2^{x-1} > \log_{10} 3^x \rightarrow (x-1)\cdot \log_{10} 2 > x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2 > x \cdot \log_{10} 3$

$$x \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) < -\log_{10} 2 \rightarrow x < -\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{3}{2}}$$

Poiché $\log_{10} \frac{3}{2} = -\log_{10} \frac{2}{3}$ possiamo scrivere la soluzione anche così: $x < \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2}{3}}$

6. $3^{2x} - 12 \cdot 3^x - 13 > 0$

Possiamo risolvere questa disequazione ponendo $3^x = y$ e sostituendo otteniamo :

$$y^2 - 12y - 13 > 0 \Rightarrow y < -1 \cup y > 13$$

Quindi abbiamo $3^x < -1$ che non ha nessuna soluzione e $3^x > 13 \rightarrow x > \log_3 13$

7. $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0 \rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$

Poniamo $2^x = y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 < 0 \Rightarrow 1 < y < 2$ e quindi

$$1 < 2^x < 2 \Rightarrow 2^0 < 2^x < 2^1 \rightarrow 0 < x < 1$$

Equazioni logaritmiche

Equazioni logaritmiche elementari

Si dice equazione logaritmica ogni equazione in cui l'incognita x compare come argomento di un logaritmo. L'equazione logaritmica elementare è quindi:

$$\log_a x = k \quad (x > 0) \rightarrow x = a^k$$

Esempio: $\log_2 x = 3 \rightarrow x = 2^3$

Equazioni logaritmiche riconducibili a quelle elementari

Esempi

1. $\log_3 (x-2) = 2 \rightarrow x - 2 = 3^2 \rightarrow x = 2 + 9 = 11$

2. $\log_2 (2x-1) = \log_2 (3x-5)$

In questo caso è importante determinare la condizione di accettabilità delle soluzioni ricordando che l'argomento di un logaritmo deve essere strettamente positivo. Quindi nel nostro caso avremo:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 3x-5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

Risolvendo l'equazione logaritmica abbiamo:

$$2x - 1 = 3x - 5 \rightarrow x = 4 \text{ accettabile}$$

Quindi la soluzione dell'equazione è $x = 4$.

3. $\log_2 (x-1) = \log_2 (2x+1)$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2$ che non è accettabile e quindi l'equazione non ha soluzioni.

4. $\log_2 x + 3 \cdot \log_4 x = 10$

In questo caso occorre operare un cambiamento di base per avere i logaritmi nella stessa base.
Per esempio possiamo portare tutto in base 2 e poiché

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

abbiamo : $\log_2 x + \frac{3}{2} \cdot \log_2 x = 10 \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \log_2 x = 10 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 2^4$

5. $\log(4x-5) + \log x = 2 \cdot \log(x+4)$

Se la base non viene indicata si intende che ci si riferisce sempre ad una stessa base e che non è importante conoscerla per risolvere l'equazione.

Impostiamo innanzitutto il sistema per avere le condizioni di accettabilità delle soluzioni:

$$\begin{cases} 4x-5>0 \\ x>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{4} \\ x>0 \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow \quad x > \frac{5}{4}$$

Possiamo in questo caso applicare le proprietà dei logaritmi:

$$\log\left[(4x-5) \cdot x\right] = \log(x+4)^2$$

$$(4x-5) \cdot x = (x+4)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 = \frac{16}{3} \quad \text{accettabile}$$

$$x_2 = -1 \quad \text{non accettabile}$$

Quindi l'unica soluzione è $x = \frac{16}{3}$.

Disequazioni logaritmiche

Disequazioni logaritmiche elementari

La disequazione logaritmica elementare del tipo

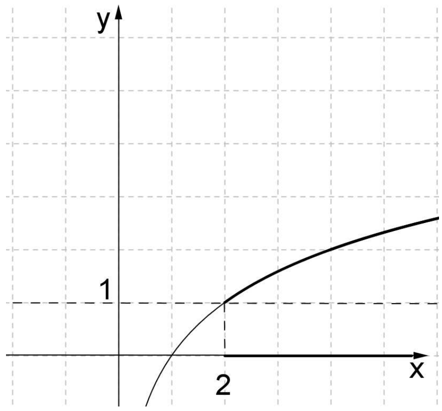
$$\boxed{\log_a x > k}$$

si risolve così:

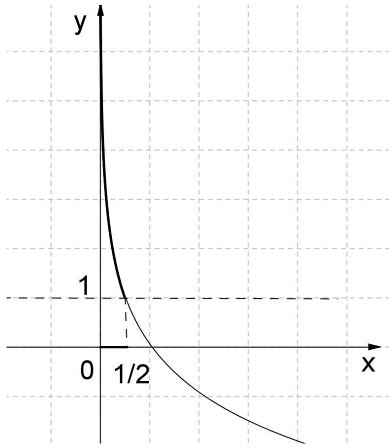
- se $a > 1 \Rightarrow x > a^k$ poiché essendo $\log_a x$ crescente si mantiene il verso della diseguaglianza
- se $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < x < a^k$ poiché essendo $\log_a x$ decrescente si inverte il verso della diseguaglianza e inoltre dobbiamo prendere solo valori positivi della x

Esempi

1) $\log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$



2) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$



Nota: se devo risolvere $\log_a x < k$ avrò:

- se $a > 1 \Rightarrow 0 < x < a^k$
- se $0 < a < 1 \Rightarrow x > a^k$

Esempi

1) $\log_2 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

2) $\log_{\frac{1}{2}} x < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Disequazioni logaritmiche riconducibili a quelle elementari

Esempi

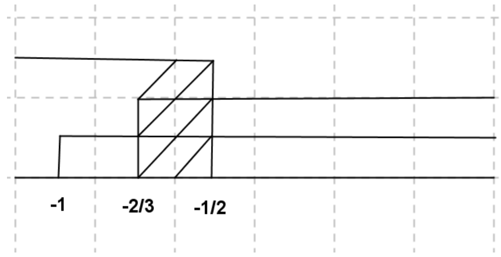
1. $\log_5(x-1) > 1 \rightarrow x-1 > 5 \rightarrow x > 6$

2. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) < 1 \rightarrow 2x-3 > \frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{7}{4}$

3. $\log_2(x+1) > \log_2(3x+2)$

In questo caso possiamo risolvere un unico sistema in cui mettiamo il dominio dei logaritmi e la risoluzione della disequazione (la base è maggiore di 1 e quindi si mantiene il verso della diseguaglianza) cioè:

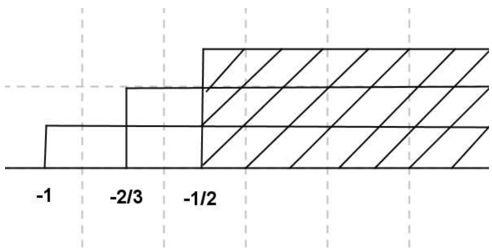
$$\begin{cases} x+1>0 \\ 3x+2>0 \\ x+1>3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-\frac{2}{3} \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$



La soluzione è: $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$

4. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 3x+2>0 \\ x+1<3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>--\frac{2}{3} \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$$



Nota: in questo caso la base è minore di 1 e quindi nella terza disequazione del sistema abbiamo invertito il verso della diseguaglianza.

La soluzione è : $x > -\frac{1}{2}$

ESERCIZI
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

I) Equazioni esponenziali

1) $4^x = 8$ $[x = \frac{3}{2}]$

2) $9^x = 6 + 3^x$ $[x = 1]$

3) $15 + 4^x = 2^{x+3}$ $[x_1 = \log_2 3 \cup x_2 = \log_2 5]$

4) $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$ $[x_1 = 3 \quad \cup \quad x_2 = -1]$

5) $4^x = \frac{1}{2}$ $[x = -\frac{1}{2}]$

6) $3^x - 9^x = 0$ $[x = 0]$

7) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ $[x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = \log_2 3]$

8) $3^{x-1} = 5^{x-2}$ $[x = \frac{\log_{10} \frac{25}{3}}{\log_{10} \frac{5}{3}}]$

9) $\frac{5}{2^x + 1} + \frac{9}{2^x - 1} = \frac{15}{2^x + 1} + 1$ $[x = 2]$

10) $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$ $[x = \log_3 4]$

11) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ $[x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = 3]$

12) $3^{2-8x} = 9^{3x+1}$ $[x = 0]$

II) Disequazioni esponenziali

16) $5^x > 25$ [$x > 2$]

17) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \geq 7^3$ [$x \leq -3$]

18) $\left(\frac{1}{10}\right)^x \leq 100$ [$x \geq -2$]

19) $(x-2)\cdot 3^x < 0$ [$x < 2$]

20) $1 \geq 7^{1+x}$ [$x \leq -1$]

21) $(2^x - 4)\cdot(3^{2x} - 3^x) \geq 0$ [$x \leq 0 \cup x \geq 2$]

22) $2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 1$ [$x < -1 \cup 0 \leq x \leq 1$]

23) $2^{x+1} \geq 5^{1-x}$ [$x \geq \log_{10}\frac{5}{2}$]

24) $25^x - 13\cdot 5^x + 30 \geq 0$ [$x \leq \log_5 3 \cup x \geq \log_5 10$]

25) $8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x - 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0$ [$x < 1 \cup x > 2$]

26) $9^x - 2\cdot 3^x - 3 \geq 0$ [$x \geq 1$]

27) $2\cdot 3^x - 9^x > 1$ [nessuna soluzione]

28) $4^x + 1 > 2^{x+1}$ [$x \neq 0$]

29) $4^x - 2^x > 0$ [$x > 0$]

III) Equazioni logaritmiche

30) $\log_4 x = 2$ $\quad [x = 4^2]$

31) $\log_3(2x+4) = 2$ $\quad [x = \frac{5}{2}]$

32) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -1$ $\quad [x = 3]$

33) $\log_2(x-2) + \log_2 x = \log_2(9-2x)$ $\quad [x = 3]$

34) $\log(x+8) = 2 \cdot \log 3 - \log x$ $\quad [x = 1]$

35) $4 \cdot \log_{\frac{1}{2}}^{2} x - 5 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$ $\quad [x_1 = \frac{1}{2} \cup x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$

36) $3 \cdot \log_2(x+2) - 3 \cdot \log_2(2x-1) + \log_2 4 - \log_3 9 = 0$ $\quad [x = 3]$

37) $\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(1-x) = 1$ $\quad [x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}]$

38) $\log_a(3x-5) + \log_a(x-2) = \log_a 2$ $\quad [x = \frac{8}{3}]$

39) $2 \cdot \log(x-1) + \log(x-2) = \log(x^2 - 3x + 2)$ $\quad$ [nessuna soluzione]

40) $2 \cdot \log x + \log(x^2 + 1) = \log(3 - x^2)$ $\quad [x = 1]$

41) $\log x + \log(x+1) = \log(1-x)$ $\quad [x = \sqrt{2} - 1]$

42) $3 \cdot \log_2^{2} x + 5 \cdot \log_2 x - 2 = 0$ $\quad [x_1 = \sqrt[3]{2} \cup x_2 = \frac{1}{4}]$

43) $\log_2(x-1) = \log_2(3x+5)$ $\quad$ [nessuna soluzione]

44) $\log_2^{2}(x-1) - 5 \cdot \log_2(x-1) + 6 = 0$ $\quad [x_1 = 5 \cup x_2 = 9]$

IV) Disequazioni logaritmiche

45) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<1$ $[x>\frac{7}{3}]$

46) $\log_2(2x+5)>0$ $[x>-2]$

47) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)>1$ $[\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}]$

48) $\log_3 x<0$ $[0<x<1]$

49) $\log_3{}^2 x-\log_3 x<0$ $[1<x<3]$

50) $\log_3 x+\log_3(x-8)\geq 2$ $[x\geq 9]$

51) $\log_3{}^2 x+2\cdot\log_3 x-3<0$ $[\frac{1}{27}<x<3]$

52) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>\log_{\frac{1}{2}}(20-3x)$ $[3<x<\frac{23}{4}]$

53) $\log_{\frac{1}{3}}(6x-x^2)+2<0$ [nessuna soluzione]

54) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4)+\log_3(x-3)\leq\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ $[x>3]$

55) $\log_{\frac{3}{4}}(1-x^2)\leq 0$ $[x=0]$

56) $\log_2(1-x^2)-1<0$ $[-1<x<1]$

57) $\log_5{}^2 x+\log_5 x-2>0$ $[0<x<\frac{1}{25}\cup x>5]$

58) $\log_{2} x+\log_2(1+x)<\log_2(1-x)$ $[0<x<\sqrt{2}-1]$

59) $\log_2{}^2(1-x)-\log_2(1-x)>0$ $[x<-1\cup 0<x<1]$

60) $\dfrac{\log_2{}^2 x-\log_2 x}{\log_3 x}<0$ $[0<x<2 \text{ con } x\neq 1]$

PROBLEMI

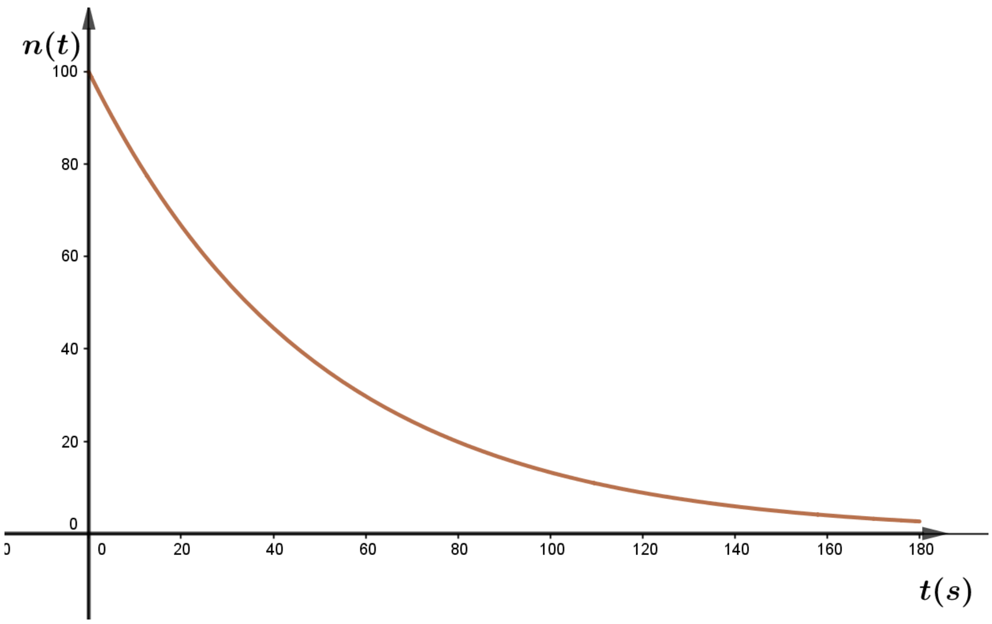
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1) Supponiamo che nella sterilizzazione del latte alla temperatura costante di 120°C il numero n(t) delle spore del microrganismo Bacillus Stearothermophilus sia regolato dalla legge

$$n(t) = 100 \cdot 0{,}98^t$$

dove t è la durata in secondi del processo di sterilizzazione.
Rappresenta l'andamento di *n(t)* e determina il tempo di dimezzamento del numero delle spore cioè dopo quanti secondi il loro numero è dimezzato rispetto a quello iniziale.

Svolgimento
Per rappresentare l'andamento di $n(t)$ possiamo utilizzare Geogebra: basterà digitare nella barra di inserimento $y = 100 \cdot (0.98)^x$ e poi indicare sull'asse *x* il tempo *t* e sull'asse *y* *n(t)*.



Si tratta di una funzione esponenziale con base minore di 1 e quindi decrescente e che al tempo $t = 0$ vale 100 cioè all'istante iniziale ci sono 100 spore.

Per determinare il tempo di dimezzamento dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale:

$$100 \cdot (0{,}98)^t = 50 \rightarrow (0{,}98)^t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \log_{0{,}98} \frac{1}{2}$$

Utilizzando infine la formula del cambiamento di base e calcolando i logaritmi con la calcolatrice avremo: $\log_{0{,}98} \frac{1}{2} = \frac{\log_{10} \frac{1}{2}}{\log_{10} 0{,}98} \cong 34{,}2$ e quindi in conclusione il tempo di dimezzamento è circa 34,2 s.

2) Un biologo ha scoperto che il numero N(t) di un dato tipo di batteri presenti al tempo t (misurato in ore) in una coltura raddoppia ogni ora. Sapendo che all'inizio (t=0) il numero dei batteri era 50 scrivi l'espressione di N(t). Dopo quanto tempo (in ore) il numero di batteri è maggiore di 1 milione?

[$N(t) = 50 \cdot 2^t$;15 h]

3) Se sappiamo che il nostro capitale iniziale raddoppierà in 10 anni, qual è il tasso di interesse composto applicato dalla nostra banca?

[7%]

4) Dopo la fecondazione, per scissione della cellula madre nel processo chiamato mitosi, si hanno due cellule figlie ogni 30 ore.
a) Quante cellule si hanno dopo 5 giorni dalla fecondazione?
b) quanti giorni devono passare dalla fecondazione per avere circa 2^{20} (circa un milione) cellule?

[16 ; 25 giorni]

5) a)Una banca applica un tasso di interesse composto del 4% con capitalizzazione ad 1 anno (ogni anno l'interesse viene aggiunto al capitale). Scrivi quanto risulta il capitale, partendo da un capitale iniziale $C_0 = 100$ (euro), dopo 5 anni.
b) Un'altra banca applica lo stesso tasso composto del 4% ma con capitalizzazione a 6 mesi cioè ogni 6 mesi l'interesse si somma al capitale. In questo caso, sempre partendo da 100 euro, quanto risulta il capitale dopo 5 anni?

[circa € 122; circa € 148]

6) Abbiamo bisogno di un prestito e confrontiamo le proposte di due banche: la prima ci propone un tasso composto del 4% con durata di 15 anni (cioè dovremo restituire quanto abbiamo avuto in prestito con l'interesse maturato in 15 anni), la seconda un tasso del 3% con durata 20 anni. Qual è la proposta migliore?Quanto dobbiamo restituire alla prima banca? E alla seconda?
(Indica con C_0 il valore iniziale del prestito)

[la prima; $1{,}801 \cdot C_0$; $1{,}806 \cdot C_0$]

7) Il numero di batteri in una certa coltura raddoppia in 20' (20 minuti). Sapendo che il numero iniziale è $N_0 = 500$ scrivi come risulta il numero $N(t)$ di batteri presenti dopo t minuti . Dopo quanto tempo i batteri sono 1 milione?

[$N(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$; 220']

SCHEDA DI VERIFICA
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1) $9^{x+1} - 3^{3x-1} = 0$ $\qquad [x = 3]$

2) $2^{x-1} = 3^{1+x}$ $\qquad [x = \dfrac{\log_{10} 6}{\log_{10} \frac{2}{3}}]$

3) $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$ $\qquad [x = \log_5 2 \cup x = \log_5 3]$

4) $(2^x - 4) \cdot \left(\left(\frac{1}{9} \right)^x - 1 \right) > 0$ $\qquad [0 < x < 2]$

5) $2 \cdot 5^x - 25^x + 8 > 0$ $\qquad [x < \log_5 4]$

6) $\log_5 (x+2) - \log_5 (x-1) = \log_5 x$ $\qquad [x = 1 + \sqrt{3}]$

7) $\log_2{}^2 (5x-4) - \log_2 (5x-4) = 0$ $\qquad [x_1 = 1 \cup x_2 = \frac{6}{5}]$

8) $\log_{\frac{1}{2}} (x+3) + \log_2 (2x-1) = 2$ $\qquad$ [nessuna soluzione]

9) $\log_{\frac{1}{2}} (x+1) - \log_{\frac{1}{2}} 3x > 0$ $\qquad [x > \frac{1}{2}]$

10) $\log_{\frac{1}{3}} (x-4) - \log_{\frac{1}{3}}{}^2 (x-4) < 0$ $\qquad [4 < x < \frac{13}{3} \cup x > 5]$

SCHEDA DI VERIFICA
ESPONENZIALI E LOGARITMI

1) $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ [$x = 0, \quad x = 2$]

2) $3^{x-2} = 5^{x-1}$ [$x = \dfrac{\log_{10} \frac{5}{9}}{\log_{10} \frac{5}{3}}$]

3) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 > 0$ [$x > 1$]

4) $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)$ [$x = 1$]

5) $\log_3 (x-1) + \log_3 (x+1) > 1$ [$x > 2$]

6) $\log_3^2 (x+2) - \log_3 (x+2) = 0$ [$x_1 = -1, \quad x_2 = 1$]

7) Una sostanza radioattiva si dimezza ogni ora. Supponendo che inizialmente si abbiano 100 g della sostanza , determina l'espressione della massa quantità *m(t)* in grammi di sostanza radioattiva al tempo t misurando t in ore. Dopo quanto tempo la quantità di sostanza radioattiva è ridotta a meno di 1 grammo?

[$m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^t$; 7 h]

8) In quanti anni raddoppia un capitale iniziale C_0 se la banca applica un interesse composto del 2%?

[35 anni]

9) Se una soluzione ha la concentrazione molare di ioni H^+ $\left[H^+ \right] = 10^{-9}$, qual è il suo pH?

$\left[pH = 9 \right]$

10) Qual è l' intensità sonora di un suono di livello sonoro 100 dB?

[$I = 10^{-2} W / m^2$]

Geometria dello spazio

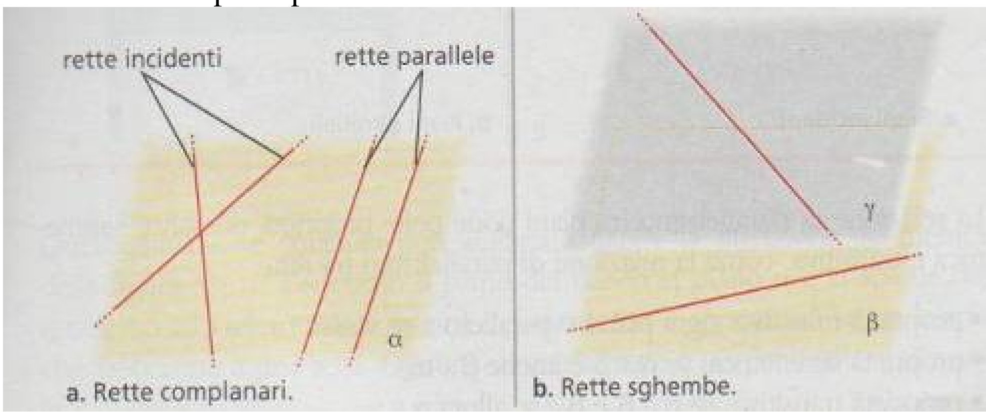
Rette e piani nello spazio

Una **retta** è individuata in modo univoco da due punti.
Un **piano** può essere individuato in modo univoco da:

- tre punti non allineati
- una retta e un punto esterno ad essa
- due rette incidenti
- due rette parallele

Posizione reciproca di due rette nello spazio

Due rette nello spazio possono essere:

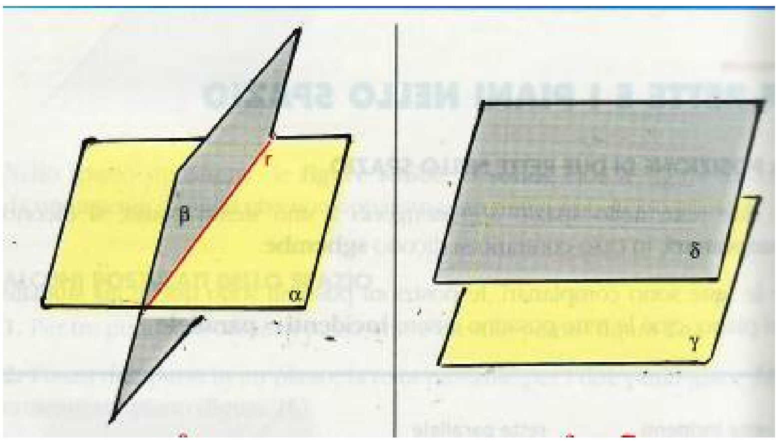


- **parallele**: sono due rette **complanari** che non hanno punti in comune
- **incidenti**: sono due rette **complanari** che hanno un punto in comune
- **sghembe**: sono rette che **non sono complanari** (e che perciò non hanno nessun punto in comune)

Posizione reciproca di due piani nello spazio

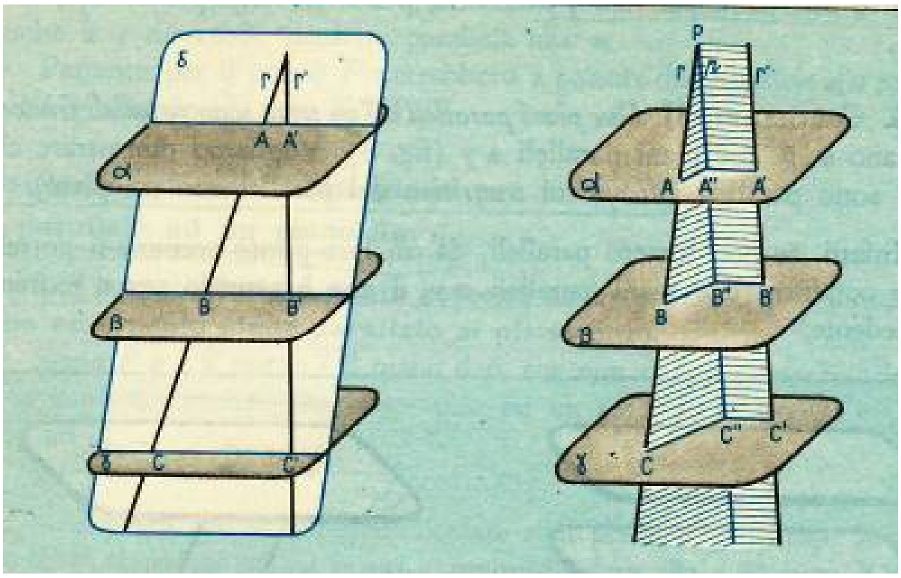
Due piani nello spazio possono essere:

- **paralleli**: sono due piani che non hanno punti in comune
- **incidenti**: sono due piani che hanno una retta in comune



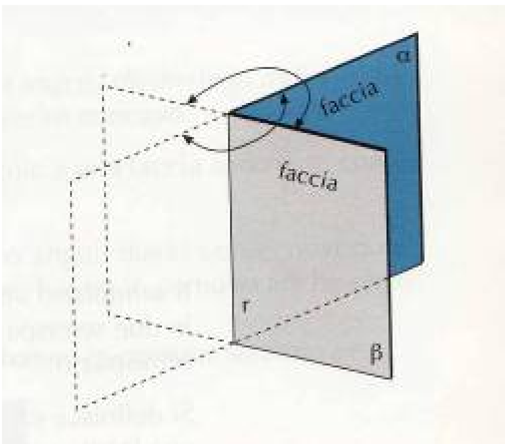
Per i piani paralleli vale il

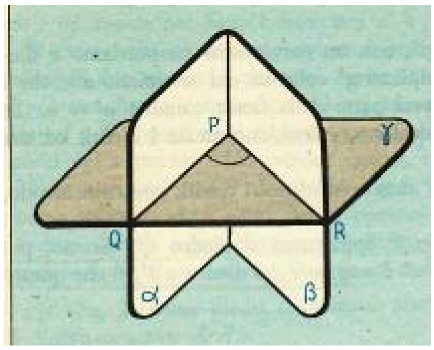
Teorema di Talete nello spazio
Un fascio di piani paralleli intersecati da due trasversali intercetta su di esse segmenti corrispondenti proporzionali.



Due piani incidenti, hanno invece una retta in comune e dividono lo spazio in quattro parti chiamati **diedri** o angoli diedri. La retta comune ai due piani è detta **spigolo** del diedro.

Dato un diedro, le sezioni del diedro ottenute con piani perpendicolari allo spigolo sono angoli tutti congruenti. La misura di una qualunque sezione normale di un diedro è la misura dell'ampiezza del diedro stesso, perciò se la sezione normale del diedro $\alpha\beta$ è 60°, diremo che il diedro $\alpha\beta$ misura 60°.



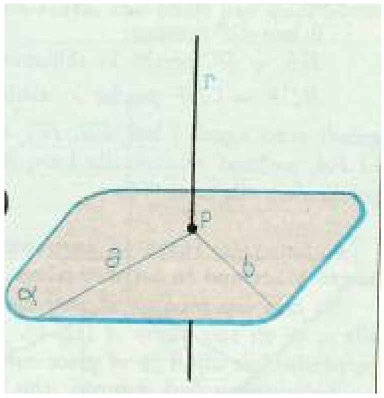


Posizione reciproca di una retta e di un piano nello spazio

Data una retta ***r*** ed un piano α

- ***r*** è parallela ad α se non hanno punti in comune
- ***r*** appartiene ad α se tutti i punti di ***r*** sono anche punti di α
- ***r*** è incidente con α se ***r*** e α hanno un punto P in comune

Un caso particolare dell'ultimo caso si ha quando l'angolo che *r* forma con a è 90°.
Diremo che ***r*** è perpendicolare al piano α se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza *P*.

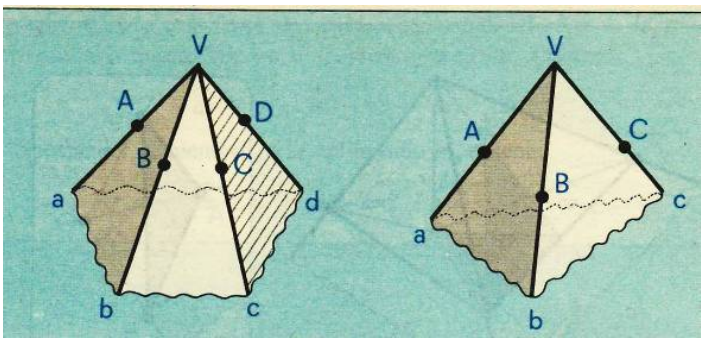


Angoloide

L'**angoloide** è la parte di spazio individuata da n (n≥3) semirette aventi origine comune, a tre a tre non complanari e tali che il piano individuato da due semirette successive lasci tutte le altre dalla stessa parte.

Le semirette sono dette **spigoli** dell'angoloide, la loro origine comune è il **vertice** e gli angoli formati da due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide.

Un angoloide con tre spigoli o facce è detto angoloide **triedro** o semplicemente triedro, con quattro facce abbiamo un angoloide **tetraedro**.

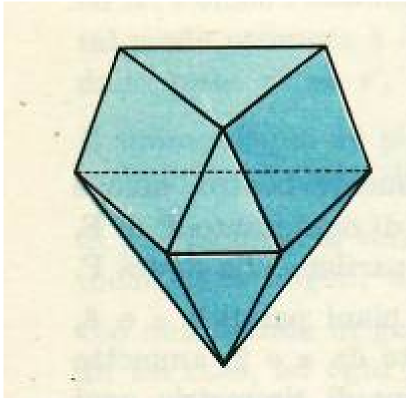


Vale la seguente proprietà:

In ogni angoloide di vertice V la somma degli angoli in V delle facce è minore di un angolo giro.

Poliedri

Definizione di poliedro



Si chiama **poliedro convesso** la porzione di spazio delimitata da poligoni a due a due non complanari tale che ogni lato dell'uno sia in comune ad un altro di essi e il piano individuato da ogni poligono lasci tutti gli altri dalla stessa parte.

Per tutti i poliedri convessi si può dimostrare che vale la

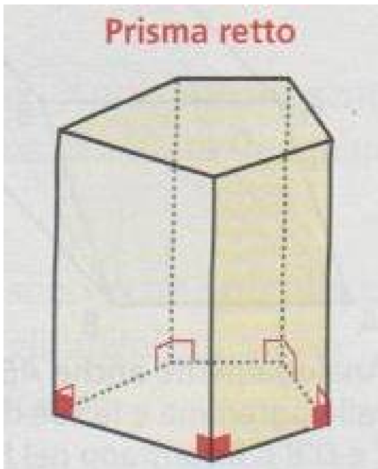
Relazione di Eulero

Dato un qualunque poliedro convesso, indicato con F il numero delle facce, con V il numero dei vertici e con S il numero degli spigoli si ha che $F+V=S+2$

Prisma retto

Un **prisma retto** è un poliedro delimitato da due basi uguali e ugualmente disposte su piani paralleli, avente per facce laterali dei rettangoli ottenuti congiungendo i vertici corrispondenti dei poligoni di base.

La distanza tra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma e corrisponde alla misura dello spigolo laterale..



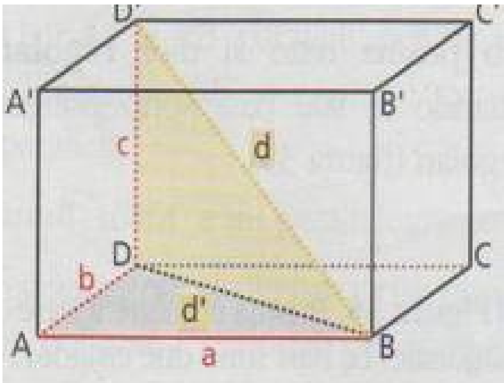
Un prisma retto è **regolare** se ciascuna delle basi è un poligono regolare.

Volume e superficie di un prisma retto

$$\boxed{\begin{aligned} &S_L = 2p_{base} \cdot h \\ &S_T = 2 \cdot S_{base} + S_L \\ &V = S_{base} \cdot h \end{aligned}}$$

Parallelepipedo rettangolo

Un **parallelepipedo rettangolo** è un prisma retto in cui anche le basi sono rettangoli.



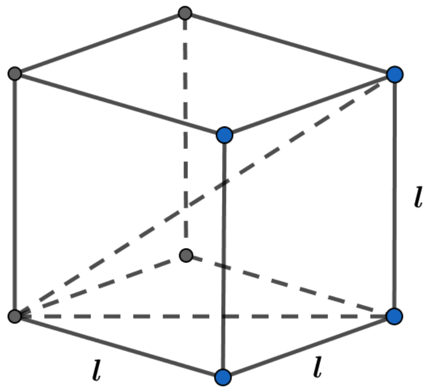
Volume e superficie di un parallelepipedo rettangolo

$$S_L = 2p_{base} \cdot h = 2(a+b)c$$
$$S_T = 2 \cdot S_{base} + S_L = 2ab + 2(a+b)c = 2(ab+bc+ac)$$
$$V = S_{base} \cdot h = abc$$
$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Cubo

Il cubo o esaedro regolare è un poliedro che ha per facce sei quadrati uguali.

E' evidente che il cubo è un particolare parallelepipedo rettangolo, avente le tre dimensioni uguali:
a=b=c=l.

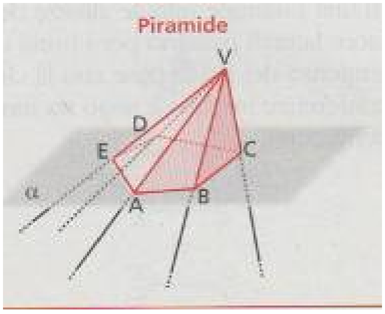


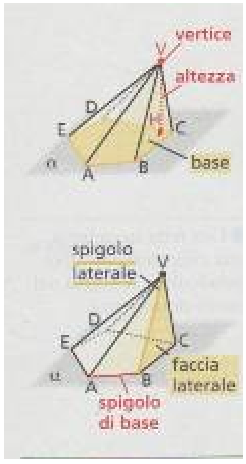
Volume , superficie , diagonale di un cubo di lato *l*

$$S_T = 6l^2$$
$$V = S_{base} \cdot h = l^3$$
$$d = \sqrt{(\sqrt{2}l)^2 + l^2} = \sqrt{3}l$$

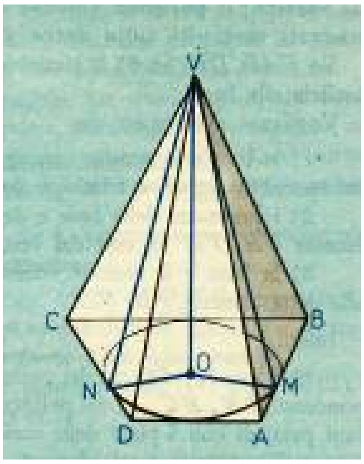
Piramide

La **piramide** si ottiene tagliando un angoloide con un piano che non passi per il vertice e che incontri tutti gli spigoli. E' perciò un poliedro limitato da un poligono (base) e da triangoli (facce laterali).
A seconda del tipo di poligono di base si parla di piramide triangolare o tetraedro, quadrangolare, pentagonale….





L'**altezza** della piramide è la distanza dal vertice V al piano della base.



Una piramide dice **retta** se il poligono di base è circoscrivibile ad una circonferenza e l'altezza cade nel centro di questa.

Se una piramide è retta, **le altezze delle facce laterali sono tutte uguali e prendono il nome di apotema che indichiamo con *a*.**

Una piramide retta si dice **regolare** se il poligono di base è un poligono regolare.

Superficie e volume di una piramide retta

$$a^2 = h^2 + r^2$$

$$S_L = \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

$$S_T = S_{base} + S_L = S_{base} + \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

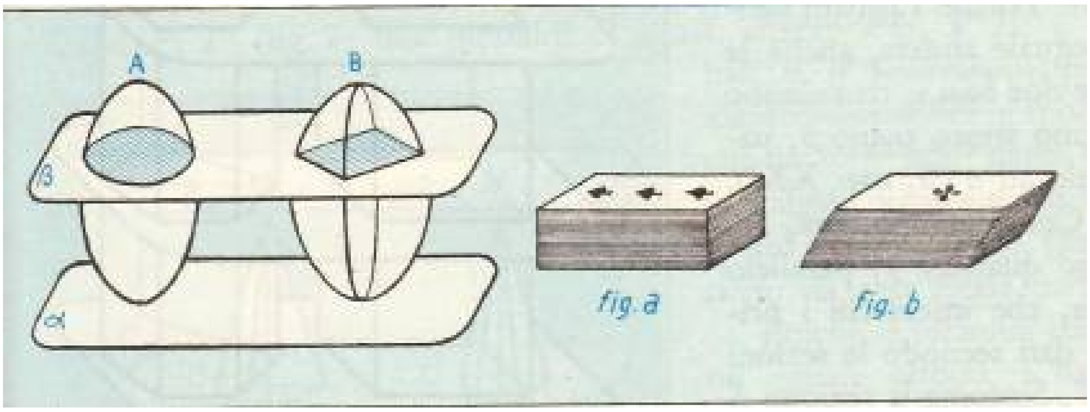
$$V = \frac{1}{3}S_{base} \cdot h$$

Volume della piramide

Per ricavare il volume della piramide enunciamo prima di tutto il

Principio di Cavalieri

Due solidi che si possono disporre rispetto ad un piano in modo che ogni piano parallelo a questo individui su di essi sezioni equivalenti, sono tra loro equivalenti, hanno cioè lo stesso volume.



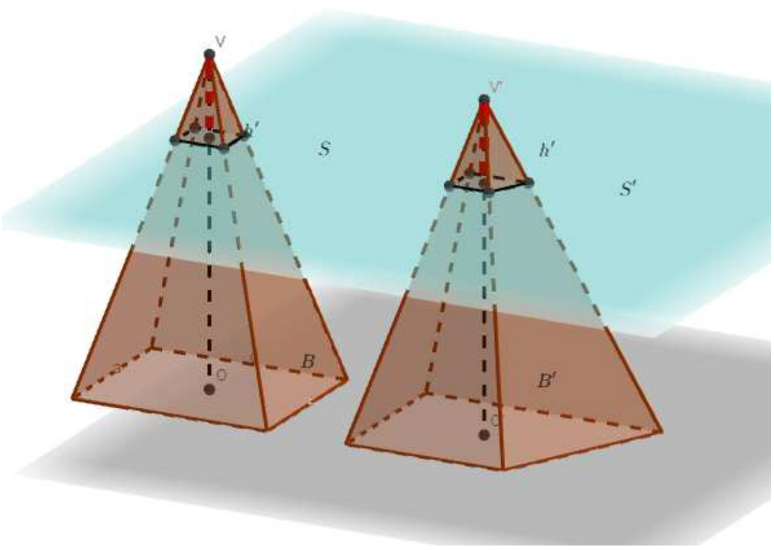
Utilizzando questo principio dimostriamo che **due piramidi che hanno basi equivalenti e stessa altezza hanno lo stesso volume.**

Dimostrazione

Consideriamo due piramidi aventi basi equivalenti di area B e B' cioè $B = B'$ e stessa altezza *h*: se, dopo averle disposte con le basi sullo stesso piano α (vedi figura) tracciamo un qualsiasi piano parallelo ad α, avremo due poligoni sezione di area S e S' rispettivamente simili a B e B' e poiché, per il teorema di Talete nello spazio anche le altezze h e h' sono nello stesso rapporto di similitudine, dal momento che $\frac{B}{b} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$ e $\frac{B'}{b'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$ allora avremo anche $\frac{B}{b} = \frac{B'}{b'} \rightarrow \frac{B}{B'} = \frac{b}{b'}$.

Ma se le basi B e B' sono equivalenti cioè hanno aree uguali allora anche le sezioni b e b' avranno aree uguali cioè sono equivalenti.

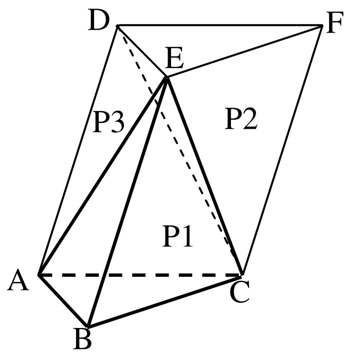
Poiché questo vale per qualsiasi piano parallelo ad α, per il principio di Cavalieri, le due piramidi hanno lo stesso volume.



Passiamo ora a dimostrare la formula per ricavare il volume di una piramide.

a) Iniziamo dimostrando la formula per una **piramide a base triangolare**.

Consideriamo la piramide a base triangolare *ABCE* e costruiamo un prisma avente la stessa base *ABC* e *BE* come spigolo laterale.

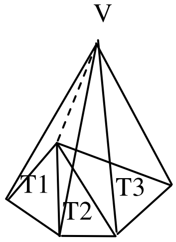


Il piano *ACE* divide il prisma in due piramidi:

la piramide *ABCE* (P1) e la piramide *ADFCE* (P2+P3) che può essere scomposta nelle piramidi P2 e P3 dal piano *EDC.*
Si osserva che P2 e P3, avendo basi *ADC* e *DFC* equivalenti (entrambe metà dello stesso parallelogrammo), e la stessa altezza (avendo lo stesso vertice E) sono equivalenti.
D'altra parte P2 e P1 sono equivalenti avendo basi ABC e EFG congruenti e stessa altezza (quella del prisma).

Segue che **P1, P2, e P3 sono equivalenti** e la piramide P1 ha volume pari alla terza parte del prisma.

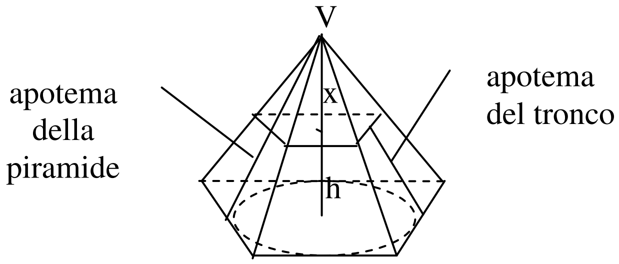
b) Poiché **una qualunque piramide a base poligonale può essere scomposta in più piramidi a base triangolare aventi tutte la stessa altezza** si ha che



$$V = \frac{1}{3} S_{T1} \cdot h + \frac{1}{3} S_{T2} \cdot h + ... + \frac{1}{3} S_{Tn} \cdot h = \frac{1}{3} S_{base} \cdot h$$

Tronco di piramide

Il **tronco di piramide** si ottiene tagliando una piramide con un piano parallelo alla base.



L'**altezza** del tronco di piramide è la distanza tra i piani delle basi .

Un tronco di piramide si dice **tronco di piramide retta** se è stato ottenuto sezionando una piramide retta.

Un tronco di piramide retta si dice **tronco di piramide regolare** se il poligono di base è regolare.

Nel tronco di piramide retta le altezze delle facce laterali, che sono tutte trapezi, sono tutte uguali e prendono il nome di **apotema del tronco** a_t.

Volume e superficie di un tronco di piramide retta

Indichiamo con B la base maggiore e con b quella minore

$$S_L = \frac{1}{2}\left[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t\right]$$

$$S_T = B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}\left[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t\right]$$

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb})\cdot h$$

Nota
Dimostriamo la formula per il volume.

Per la similitudine si ha $\frac{x^2}{(x+h)^2} = \frac{b}{B}$ da cui $\frac{x}{(x+h)} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$

e quindi si ha

$$x\cdot\sqrt{B} = \sqrt{b}(x+h)$$

$$x = \frac{\sqrt{b}\cdot h}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}\cdot h\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}{B-b}$$

e quindi

$$V = \frac{1}{3}B(x+h) - \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}\left[Bh + (B-b)x\right] = \frac{1}{3}\left[Bh + \sqrt{b}\cdot h\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[Bh + h\sqrt{Bb} + bh\right] = \frac{h}{3}\left[B + b + \sqrt{Bb}\right]$$

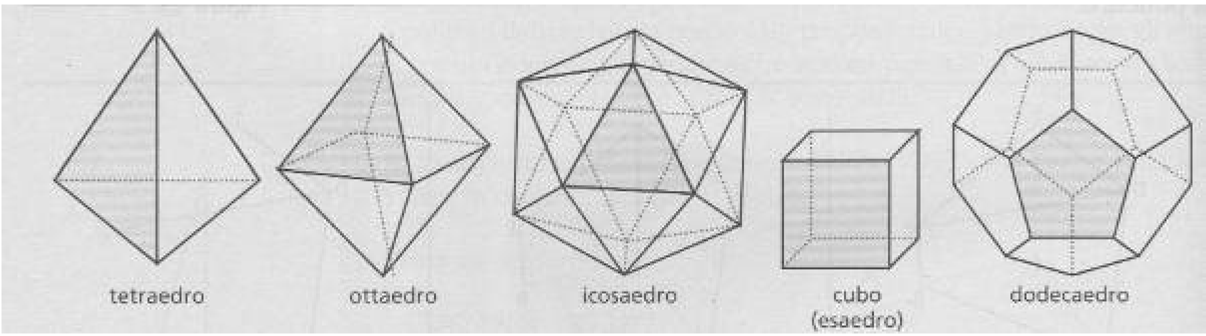
Poliedri regolari

Un **poliedro** convesso si dice **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari tutti uguali e i suoi angoloidi sono uguali.

Quanti sono i poliedri regolari?

Ricordiamo che in un angoloide le facce sono almeno tre e che la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro. Ciò limita la possibilità di ottenere poliedri regolari a cinque casi.

Poligoni regolari	**Numero di facce in un vertice**	**Somma degli angoli delle facce**	**Nome del poliedro**	**N. Vertici**	**N. Spigoli**	**N. Facce**
Triangoli equilateri (angoli 60 °)	3	180°<360°	Tetraedro	4	6	4
	4	240°<360°	Ottaedro	6	12	8
	5	300°<360°	Icosaedro	12	30	20
	6	360°=360°	Non esiste			
Quadrati (angoli di 90°)	3	270°<360°	Cubo o Esaedro	8	12	6
	4	360°=360°	Non esiste			
Pentagoni (angoli di 108°)	3	324°<360°	Dodecaedro	20	30	12
	4	432°>360°	Non esiste			
Esagoni (angoli 120°)	3	360°=360°	Non esiste			



Storicamente lo studio dei poliedri regolari si fa risalire a Pitagora nella cui scuola assunsero un ruolo magico e vennero chiamate figure cosmiche. Platone li collegava alle forme degli elementi della natura:

- cubo = particelle di terra
- tetraedro = fuoco
- ottaedro = aria
- icosaedro = acqua
- dodecaedro = la forma dell'Universo

PROBLEMI

POLIEDRI

1) Un parallelepipedo rettangolo ha per base un quadrato di lato a e la sua altezza misura $2a$. Determina superficie totale, volume e lunghezza della diagonale.

[$S = 10a^2$, $V = 2a^3$, $\sqrt{6}a$]

2) In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base misura l ed anche l'altezza misura l. Determina superficie e volume della piramide.

[$S = \left(1+\sqrt{5}\right)l^2$, $V = \frac{1}{3}l^3$]

3) In un cubo la diagonale misura 6 cm. Qual è la misura dello spigolo del cubo?

[$2\sqrt{3}$]

4) Un parallelepipedo rettangolo ha come base un quadrato di area $64cm^2$ e altezza lunga 4 cm. Qual è la misura della diagonale del parallelepipedo?

[$12cm$]

5) Un tetraedro regolare ha lo spigolo che misura l. Calcola superficie e volume.

[$S = \sqrt{3}l^2$, $V = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3$]

6) In una piramide retta a base quadrata, il lato di base misura a e l'altezza $\frac{a}{2}$. Quanto misura l'angolo diedro tra faccia laterale e base?

[$\frac{\pi}{4}$]

7) Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero di lato l. Se il volume è $V = \sqrt{3}l^3$, quanto misura l'altezza?

[$4l$]

8) In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base misura 10 cm e l'apotema misura 10 cm. Qual è la misura dell'altezza della piramide?

[$5\sqrt{3}$]

9) Un prisma retto ha per base un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 3cm e 4 cm. Sapendo che l'altezza misura 10 cm, determina la superficie e il volume del prisma.

[$S = 132cm^2$, $V = 60cm^3$]

10) In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni della base sono una doppia dell'altra. Sapendo che l'altezza è 2 cm e che il volume è $36cm^3$, determina le dimensioni di base.

[3 cm , 6 cm]

Solidi di rotazione

Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno ad una retta r secondo un angolo α.

Se α è un angolo giro allora si dice che la rotazione è **completa**.
In ogni rotazione completa ogni punto P della figura piana descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare a r passante per P.

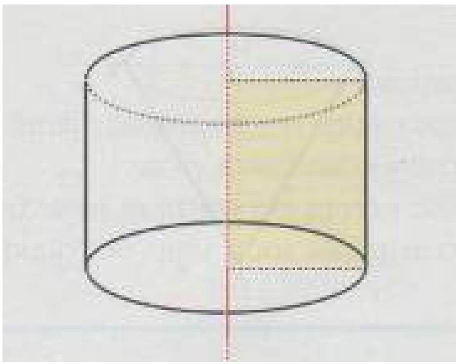
Fra i solidi di rotazione studiamo cilindro, cono e sfera.

Cilindro circolare retto (o semplicemente cilindro)

Il **cilindro circolare retto** (o semplicemente cilindro) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

Il lato attorno a cui ruota il rettangolo è detto altezza del cilindro.

Gli altri due lati perpendicolari all'**altezza** sono detti **raggi di base**.



Un cilindro si dice **equilatero** quando $h=2r$

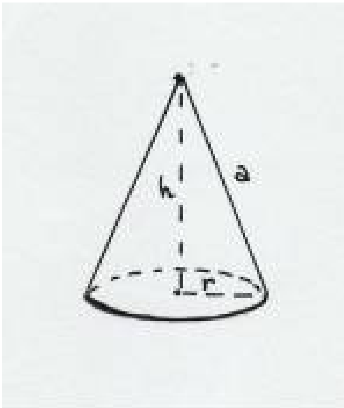
Volume e superficie di un cilindro

$$\boxed{\begin{aligned} &S_L = 2p_{base}\cdot h = 2\pi r\cdot h\\ &S_T = 2\cdot B + S_L = 2\pi r^2 + 2\pi r\cdot h\\ &V = Bh = \pi r^2\cdot h \end{aligned}}$$

La formula del volume è analoga a quella del prisma poiché per il principio di Cavalieri il cilindro è equivalente ad un prisma che ha base equivalente e uguale altezza.

Cono circolare retto (o semplicemente cono)

Il **cono circolare retto** (o semplicemente cono) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti.



Il lato attorno a cui ruota il triangolo è detto **altezza** h del cono. L'altro cateto è il **raggio di base** r. L'ipotenusa del triangolo rettangolo descrive la superficie laterale ed è detta **apotema** a.

Un cono si dice **equilatero** quando $a=2r$, cioè quando la sezione che si ottiene tagliandolo con un piano perpendicolare alla base passante per il vertice è un triangolo equilatero.

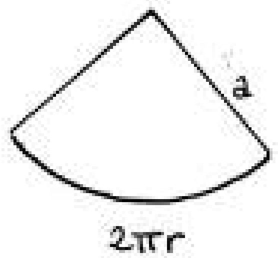
Volume e superficie di un cono

$$\boxed{\begin{aligned} S_L &= \frac{1}{2} 2p_{base} \cdot a = \pi r \cdot a \\ S_T &= B + S_L = \pi r^2 + \pi r \cdot a \\ V &= \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \end{aligned}}$$

La formula del volume è analoga a quella della piramide poiché per il principio di Cavalieri il cono è equivalente ad una piramide avente la stessa altezza e la cui base abbia la stessa area della base del cono.

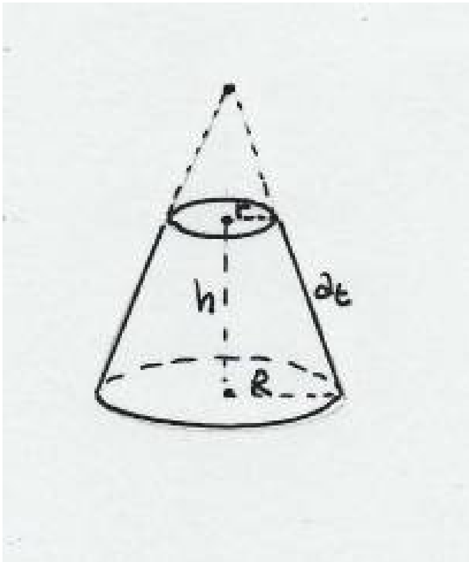
La formula dell'area della superficie laterale si ottiene dal fatto che tale superficie può essere sviluppata in un settore circolare di raggio pari all'apotema a e perciò essa , ricordando che l'area di un settore circolare è pari a $\frac{1}{2} * arco * raggio$,

$$S_l = \frac{1}{2} 2\pi \ r \ a = \pi \ r \ a$$



Tronco di cono

Il **tronco di cono** si ottiene tagliando un cono con un piano parallelo alla base , oppure può essere pensato come la rotazione completa di un trapezio rettangolo intorno al lato perpendicolare alle basi.



Volume e superficie di un tronco di cono

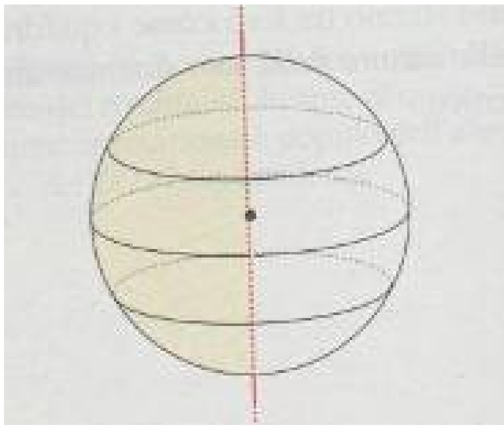
Con una simbologia ed una dimostrazione analoga a quella vista per il tronco di piramide si ha, indicando con *B* la base maggiore di raggio R , con *b* quella minore di raggio r e con a_t l'apotema del tronco:

$$S_L = \frac{1}{2}\left[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t\right] = \frac{1}{2}\left[(2\pi R + 2\pi r)\cdot a_t\right] = \pi(R+r)\cdot a_t$$

$$S_T = B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}\left[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t\right] = \pi\left[R^2 + r^2 + (R+r)a_t\right]$$

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb})\cdot h = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Sfera



La sfera è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un semicerchio intorno al diametro, oppure è l'insieme dei punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è minore o uguale alla lunghezza di un segmento assegnato detto raggio.

I punti per cui la suddetta distanza dal centro è pari al raggio formano la **superficie sferica**.

Tagliando la superficie sferica con un qualunque piano α si ottiene una circonferenza che ha raggio massimo quando α passa per il centro.

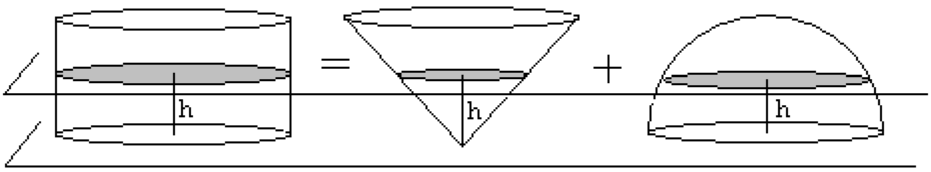
Volume e superficie di una sfera

$$\boxed{\begin{array}{l} S = 4\pi r^2 \\ V = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array}}$$

Volume della sfera

Dimostriamo la formula per il volume mediante passi successivi.

1) Un cilindro avente raggio e altezza r è equivalente alla somma di un cono avente raggio e altezza r e di una semisfera di raggio r.



Infatti se taglio i tre solidi con un piano parallelo ad una distanza h dal piano di appoggio, le sezioni hanno aree rispettivamente πr^2, πh^2 e $\pi(r^2 - h^2)$ che sono quindi legate dalla seguente relazione

$$\pi r^2 = \pi h^2 + \pi\left(r^2 - h^2\right)$$

2) Per il principio di Cavalieri si ha

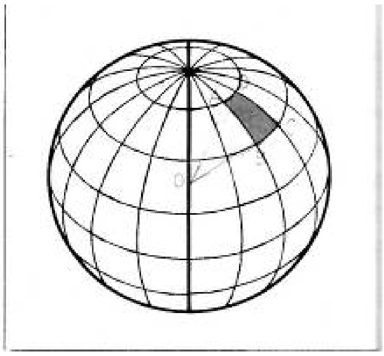
volume cilindro = *volume semisfera* + *volume cono* e quindi

$$volumesfera = V = 2(volumecilindro - volumecono) = 2\left(\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Superficie della sfera

Dimostriamo ora in modo intuitivo e non rigoroso la formula della misura della superficie.
Supponiamo di dividere la superficie sferica in aree A1, A2, …, An individuate da paralleli e meridiani.
Possiamo considerare il volume come la somma dei volumi delle n “piramidi” di base Ai e altezza r.
Quindi

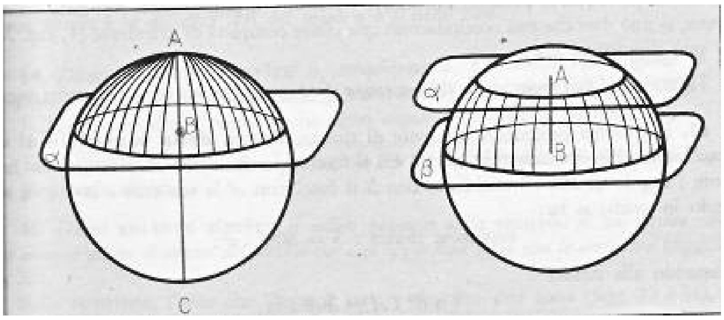
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + ... + \frac{1}{3}A_n r$$



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

Parti della superficie sferica e della sfera

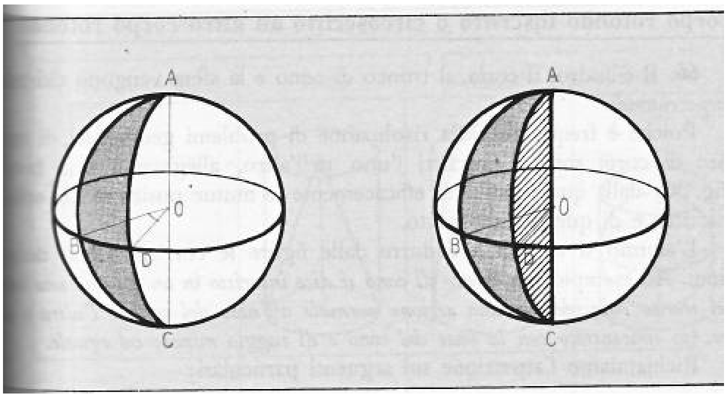
Dato un piano α secante una sfera, esso divide la sua superficie sferica in due parti ciascuna delle quali è detta **calotta**. Se invece consideriamo la sfera tagliata da un piano, individuiamo due parti ciascuna delle quali è detta **segmento sferico ad una base**.



Due piani paralleli dividono una superficie sferica in tre parti: due calotte e la parte compresa tra i due piani chiamata **zona sferica**. Considerando la sfera tagliata da due piani paralleli, la parte compresa tra i due piani è detta **segmento sferico a due basi**.

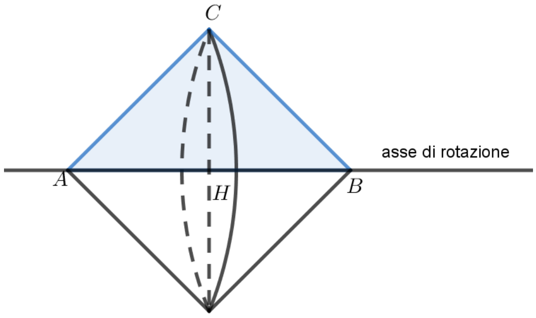
Si chiama **fuso sferico** ciascuna delle due parti in cui resta divisa una superficie sferica da due semipiani aventi come origine una retta passante per il centro della sfera.

Lo **spicchio sferico** è la parte di sfera delimitata da un fuso sferico e dai due semicerchi, lati del fuso.



PROBLEMI
SOLIDI DI ROTAZIONE

1) Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo isoscele ABC intorno all' ipotenusa AB. Sapendo che i cateti misurano $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, determina superficie e volume del solido.



Svolgimento

Osserviamo che si ottengono due coni uguali "attaccati" per la base: la superficie del solido sarà data dalla somma delle superfici laterali, il volume sarà dato dalla somma dei volumi dei due coni.

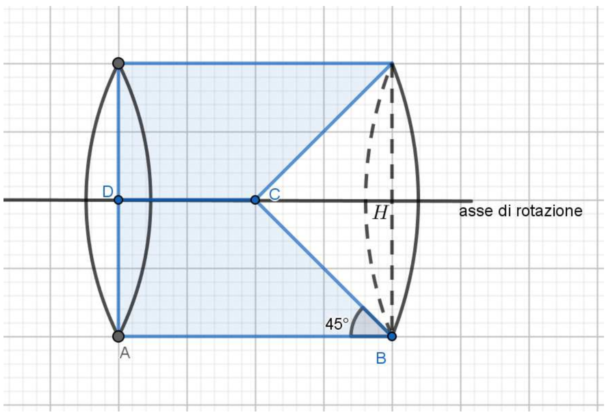
Possiamo quindi calcolare superficie e volume del solido ottenuto:

$$S_l = \pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{AC} = \pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\cdot a \rightarrow S = 2\cdot\pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\cdot a = \sqrt{2}\pi a^2$$

$$V_{cono} = \frac{\pi}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{AH} = \frac{1}{3}\left(\pi\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi a^3 \rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3$$

2) Considera un trapezio rettangolo ABCD avente base maggiore $\overline{AB} = 2l$, base minore $\overline{CD} = l$ e $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$.

Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base minore CD e determinane superficie e volume



Svolgimento

In questo caso otteniamo un *cilindro - cono* (un cilindro a cui si sottrae un cono) e quindi:

$$S = B_{cilindro} + S_{l(cilindro)} + S_{l(cono)} = \pi\overline{AD}^2 + 2\pi\overline{AD}\cdot\overline{AB} + \pi\overline{BH}\cdot\overline{BC}$$

$$V = V_{cilindro} - V_{cono} = \pi\overline{AD}^2\cdot\overline{AB} - \frac{1}{3}\pi\overline{BH}^2\cdot\overline{HC}$$

Poiché $\overline{AD} = \overline{BH} = \overline{HC} = l$ sostituendo si ha $S = \left(5+\sqrt{2}\right)\pi l^2$, $V = \frac{5}{3}\pi l^3$

3) Un cilindro ha raggio di base $2a$ e altezza $4a$. Determina superficie e volume del cilindro.

[$S = 24\pi a^2$, $V = 16\pi a^3$]

4) Un cilindro ha superficie totale uguale a $70\pi \ cm^2$ e altezza lunga 2 cm. Determina il volume del cilindro.

[$50\pi \ cm^3$]

5) Un cono ha raggio di base $3a$ e altezza $4a$. Determina superficie e volume del cono.

[$S = 24\pi a^2$, $V = 12\pi a^3$]

6) Una sfera ha raggio $2a$. Determina superficie e volume della sfera.

[$S = 16\pi a^2$, $V = \frac{32}{3}\pi a^3$]

7) Determina il volume di una sfera sapendo che l'area della sua superficie è $9\pi \ cm^2$.

[$V = \frac{9}{2}\pi \ cm^3$]

8) Considera un cubo di lato l e determina il raggio della sfera inscritta nel cubo e il raggio della sfera circoscritta al cubo.

[$\frac{l}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}l$]

9) Considera un rettangolo di dimensioni $3a$, a. Determina i volumi dei solidi che si ottengono ruotandolo intorno alla dimensione maggiore o minore. Disegna i due solidi.

[$V_1 = 3\pi l^3$, $V_2 = 9\pi l^3$]

10) Considera un triangolo rettangolo di cateti a, $2a$. Determina i volumi dei solidi che si ottengono ruotandolo intorno al cateto maggiore o minore.

[$V_1 = \frac{2}{3}\pi a^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3$]

11) Considera un trapezio isoscele ABCD avente la base maggiore $\overline{AB} = 3a$, la base minore $\overline{CD} = a$ e l'altezza uguale alla base minore. Determina superficie e volume del solido che si ottiene ruotando il trapezio intorno alla base maggiore.

[$S = 2\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2$, $V = \frac{5}{3}\pi a^3$]

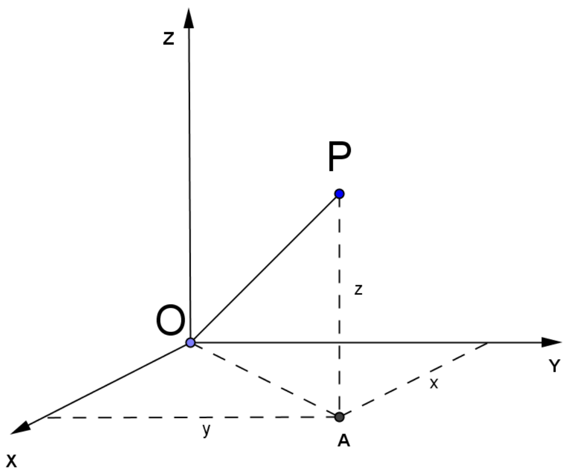
12) Considera un trapezio rettangolo ABCD avente la base maggiore $\overline{AB} = 2l$, la base minore uguale all'altezza $\overline{CD} = \overline{AD} = l$. Determina superficie e volume del solido ottenuto dalla rotazione del trapezio intorno alla base minore.

[$S = \left(5+\sqrt{2}\right)\pi l^2$, $V = \frac{5}{3}\pi l^3$]

Complemento
La geometria analitica dello spazio

Il sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio

Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio è costituito da tre rette x, y, z incidenti in O (origine) , a due a due perpendicolari ed orientate come in figura: un qualsiasi punto P del piano è quindi individuato da una terna ordinata di numeri reali $(x; y; z)$ detti rispettivamente ascissa, ordinata e quota.
Il punto $A(x; y)$ rappresenta la proiezione di P sul piano Oxy.



Distanza di un punto dall'origine del sistema

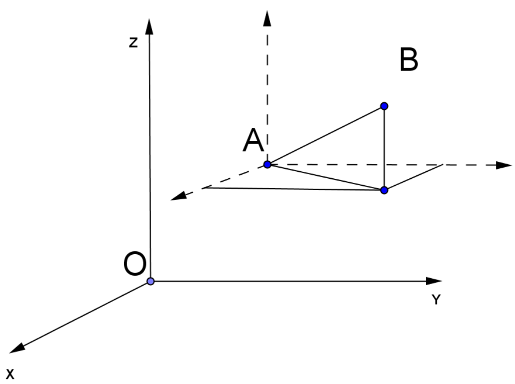
La distanza $\overline{OP}$ si può calcolare determinando prima $\overline{OA}^2 = x^2 + y^2$ e poi applicando ancora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAP (retto in A): $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + z^2$.
In conclusione :

$$\boxed{\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Distanza tra due punti

Dati due punti $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$ la distanza $\overline{AB}$ si calcola in modo analogo al procedimento usato per la distanza di un punto dall'origine, pensando di portare l'origine del sistema di riferimento in A e si ha quindi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Vettori

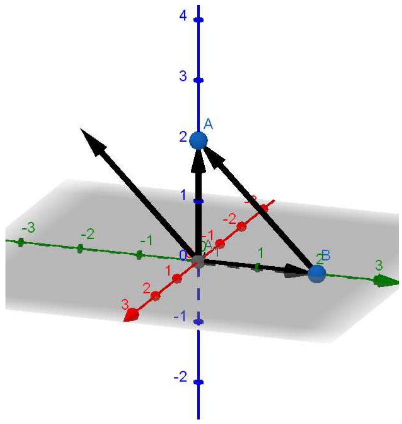
Nella geometria analitica dello spazio **è particolarmente utile saper operare con i vettori.** Osserviamo che ad un punto $P(x;y;z)$ possiamo sempre associare il vettore $\vec{OP}$ dove O è l'origine del sistema di riferimento.

Somma di vettori

Se consideriamo i vettori $\vec{OA}$ con $A(x_A;y_A;z_A)$ e $\vec{OB}$ con $B(x_B;y_B;z_B)$ si dimostra facilmente che $\vec{OA}+\vec{OB}$ è un vettore applicato nell'origine e avente come secondo estremo il punto $(x_A+x_B;y_A+y_B;z_A+z_B)$.

Differenza di vettori

Se consideriamo i vettori $\vec{OA}$ con $A(x_A;y_A;z_A)$ e $\vec{OB}$ con $B(x_B;y_B;z_B)$ si osserva che il vettore $\vec{OA}-\vec{OB}$ è parallelo al vettore $\vec{BA}$ ed il vettore parallelo applicato nell'origine avrà come secondo estremo il punto $(x_A-x_B;y_A-y_B;z_A-z_B)$.



Esempio: $A(0,0,2)$ e $B(0,2,0)$: il vettore $\vec{OA}-\vec{OB}$ ha come secondo estremo $(0,-2,2)$ ed è parallelo al vettore $\vec{BA}$

Prodotto scalare tra due vettori

Dalla fisica sappiamo che il prodotto scalare tra due vettori è definito nel modo seguente:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=v\cdot w\cdot\cos\alpha$$

dove v, w sono i moduli dei due vettori e α è l'angolo compreso tra essi.

Si può dimostrare che se $\vec{v}(x_A,y_A,z_A)$ e $\vec{w}(x_B,y_B,z_B)$ il prodotto scalare tra due vettori risulta:

$$\boxed{(x_A,y_A,z_A)\cdot(x_B,y_B,z_B)=x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B+z_A\cdot z_B}$$

Vettori perpendicolari

Consideriamo due vettori $\vec{OA}(x_A,y_A,z_A)$ e $\vec{OB}(x_B,y_B,z_B)$: se sono perpendicolari il triangolo OAB è retto in O e quindi applicando il teorema di Pitagora avremo:

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2 \Leftrightarrow x_A^2+y_A^2+z_A^2+x_B^2+y_B^2+z_B^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2$$

Sviluppando, dopo aver semplificato, otteniamo $\boxed{x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B+z_A\cdot z_B=0}$

Quindi **se due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare risulta nullo**.

Equazione di un piano

Consideriamo un piano α : possiamo individuarlo conoscendo un vettore $\vec{n}(a,b,c)$ perpendicolare ad esso (viene chiamato **vettore normale**) e un punto $P_o(x_o, y_o, z_o) \in \alpha$.
(figura realizzata con Geogebra 3D)

$P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP}$ è perpendicolare ad $\vec{n}$ e quindi il prodotto scalare

$$(a,b,c) \cdot (x - x_o, y - y \ , z - z_o) = 0$$

e sviluppando il prodotto scalare abbiamo

$$a \cdot (x - x_o) + b \cdot (y - y_o) + c \cdot (z - z_o) = 0$$

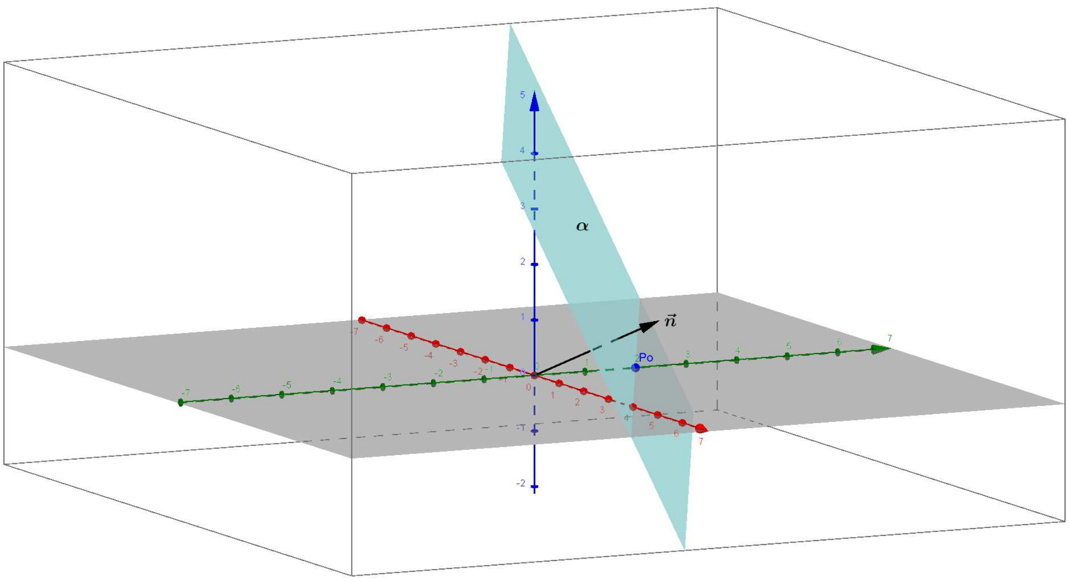
E in conclusione otteniamo una equazione del tipo

$\boxed{ax + by + cz = d}$ con (a,b,c) vettore perpendicolare al piano

Esempio: supponiamo di avere $\vec{n}(1,2,1)$ e $P_o(0,2,0)$.

Il piano di vettore normale $\vec{n}$ passante per P_o avrà equazione:

$$(1,2,1) \cdot (x - 0, y - 2, z - 0) = 0 \rightarrow x + 2 \cdot (y - 2) + z = 0 \rightarrow x + 2y + z - 4 = 0 \rightarrow x + 2y + z = 4$$



Osservazioni

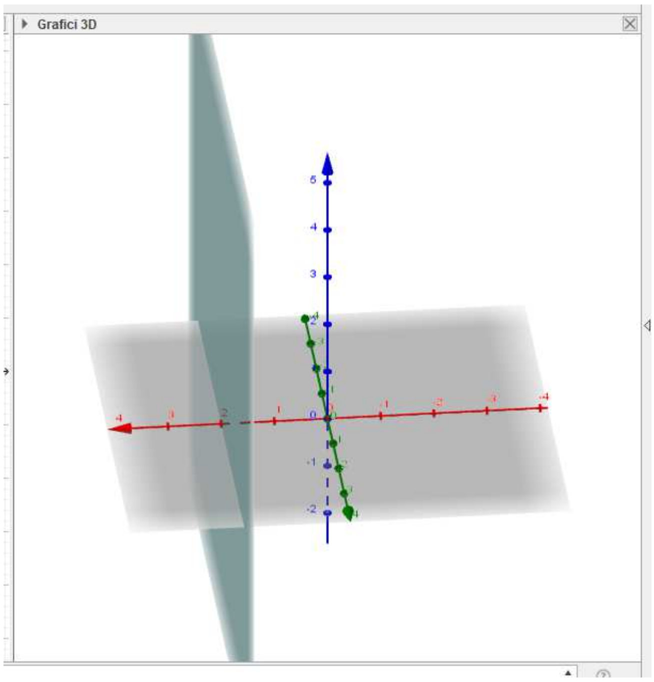
Se d=0 il piano passa per l'origine.

Il piano yz ha equazione $x=0$ e un piano parallelo al piano yz ha equazione $x=k$.

Il piano xz ha equazione $y=0$ e un piano parallelo al piano xz ha equazione $y=k$.

Il piano xy ha equazione $z=0$ e un piano parallelo al piano xy ha equazione $z=k$.

Esempio: in figura ecco come appare con Geogebra 3D il piano di equazione $x=2$.



Piani paralleli

Due piani $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono paralleli quando i vettori normali sono paralleli e quindi quando $(a',b',c')=k(a,b,c) \Rightarrow \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$.

Esempio: i piani $x+2y-z=0$, $2x+4y-2z=3$ sono paralleli.

Nota: se si ha $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}$ i due piani sono coincidenti.

Esempio: i piani $x+2y-z=1$, $2x+4y-2z=2$ sono coincidenti.

Piani perpendicolari

Due piani $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono perpendicolari quando i vettori normali sono perpendicolari cioè quando il loro prodotto scalare è nullo e quindi quando

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$$

Esempio: i piani $x+2y-z=0$, $2x+y+4z=3$ sono perpendicolari poiché $(1,2,-1)\cdot(2,1,4)=0$

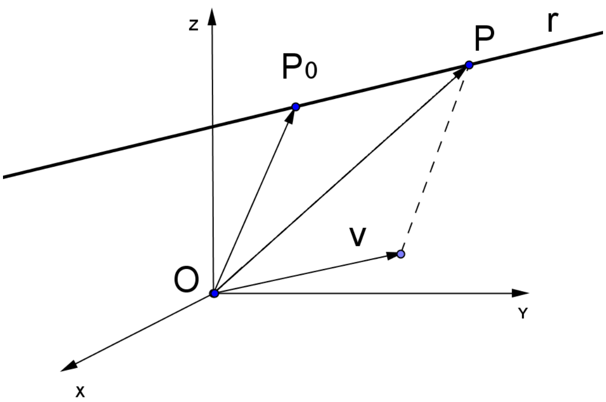
Equazione di una retta

L'equazione di una retta può essere scritta come intersezione di due piani qualsiasi passanti per essa, ma c'è un modo più significativo di scrivere le equazioni di una retta r : se conosciamo un punto $P_0 \in r$ e la **direzione della retta** $\vec{v}(a,b,c)$ (vettore parallelo alla retta chiamato vettore direzione), un qualsiasi punto $P(x,y,z) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP}$ è parallelo a $\vec{v}$ cioè

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot a \\ y - y_0 = t \cdot b \\ z - z_0 = t \cdot c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_o + t \cdot a \\ y = y_o + t \cdot b \\ z = z_o + t \cdot c \end{cases}$$

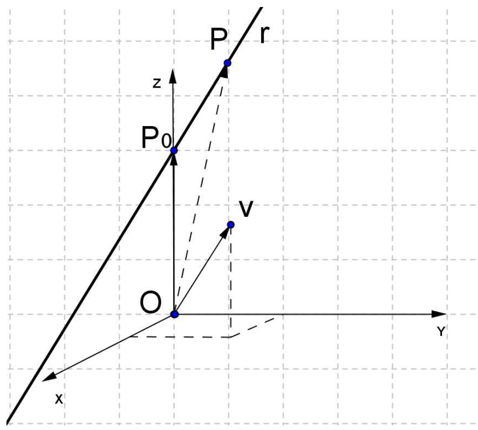
dove t è un parametro reale e per questo si parla di **equazioni parametriche** della retta: al variare del valore di t si ottengono i punti della retta r.

Nella figura seguente è stato disegnato il punto P corrispondente al valore del parametro $t = 1$.



Esempio
Le equazioni parametriche della retta r di direzione $\vec{v}(1,2,2)$ passante per $P_0(0,0,3)$ sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t \\ z = 3 + 2 \cdot t \end{cases}$$



Retta passante per due punti

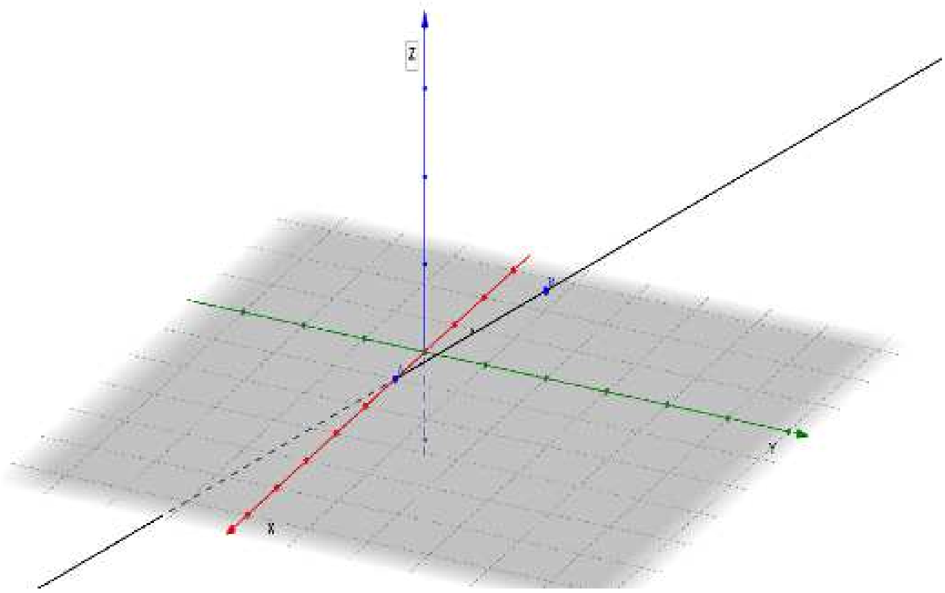
Come possiamo determinare le equazioni parametriche della retta passante per due punti assegnati?

Consideriamo per esempio i punti $A(1,0,0)$ e $B(0,2,1)$.

Se consideriamo i vettori associati ai due punti cioè $\vec{OA}(1,0,0)$ e $\vec{OB}(0,2,1)$ appare evidente che la direzione della retta per A e B è data dal vettore $\vec{AB}$ (o dal vettore opposto) e quindi possiamo prendere **come vettore direzione il vettore differenza** $\vec{OB}-\vec{OA}$ cioè $\vec{v}(-1,2,1)$ e scrivere le equazioni parametriche scegliendo come punto P_o il punto A oppure B (a piacere).

Per esempio possiamo scrivere: $r_{AB}\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

Ecco come appare questa retta utilizzando Geogebra 3D :



Esempi

1) Consideriamo per esempio le rette seguenti

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 3-2t \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1+4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

Si osserva che i vettori direzione delle due rette $(1;2;-2)$, $(2;4;-4)$ sono paralleli e quindi le rette sono parallele (non sono coincidenti perché si verifica facilmente che non hanno punti in comune).

2) Consideriamo ora le rette di equazione

$$r:\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases} , \quad s:\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 5+3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

In questo caso i vettori direzione $(3;2;-1)$, $(1;3;0)$ non sono paralleli. Vediamo allora se le rette hanno un punto in comune (incidenti) oppure no (rette sghembe).

Prendiamo il sistema formato dalle equazioni relative a due coordinate, per esempio alla y e alla z

$$\begin{cases} 2t = 5+3\lambda \\ 1-t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato per ora $y = 2$, $z = 0$: andiamo a questo punto a sostituire i valori dei parametri nelle rispettive equazioni per trovare l'ascissa:

$$r \rightarrow x = 2, \quad s \rightarrow x = 2$$

Dal momento che abbiamo trovato la stessa ascissa le rette sono incidenti nel punto $P(2;2;0)$.
Nota: se due rette incidenti hanno vettori direzione perpendicolari allora sono perpendicolari.

3) Consideriamo le rette di equazione:

$$r:\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases} , \quad s:\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 5+3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Non sono parallele, ma in questo caso risolvendo il sistema formato dalle equazioni relative alla y e alla z e sostituendo i valori di t e λ nella prima equazione, troviamo due valori diversi della x e quindi le rette non hanno punti in comune e , non essendo parallele, sono sghembe.

PROBLEMI
GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

I) Piani nello spazio

1. Scrivi l'equazione del piano passante per i punti $A(1;0;0)$ $B(0;-3;1)$ $C(2;-2;0)$.

   Svolgimento: imposta un sistema sostituendo nell'equazione generica di un piano prima le coordinate del punto A, poi di B e infine di C.

$$\begin{cases} a = d \\ -3b + c = d \\ 2a - 2b = d \end{cases} \rightarrow .... \begin{cases} a = d \\ b = \dfrac{d}{2} \\ c = \dfrac{5}{2}d \end{cases}$$

   Quindi ponendo per esempio $d = 2$ abbiamo $a = 2$, $b = 1$, $c = 5 \rightarrow 2x + y + 5z = 2$

2. Scrivi l'equazione del piano passante per i punti $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,3)$.

   $[x - y = 0]$

3. Determina l'equazione del piano α passante per $P(-1;1;1)$ e parallelo al piano β di equazione $x - 2y + z - 3 = 0$

   $[x - 2y + z + 2 = 0]$

4. Come risultano i piani $\alpha : 2x + y + z + 1 = 0$ e $\beta : 4x + 2y + 2z - 1 = 0$?

   [paralleli]

5. Come risultano i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : x + y = 0$?

   [perpendicolari]

6. Verifica che i punti $A(1;0;0)$ $B(0;2;0)$ $C(0;0;1)$ e $D\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ sono complanari e determina l'equazione del piano passante per essi.

   $[2x + y + 2z - 2 = 0]$

II) Rette nello spazio

1. Determina le equazioni parametriche della retta r passante per $A(-1;4;-5)$ e $B(0;3;-3)$.

a) Il punto $P(1;2;-1)$ appartiene alla retta?

b) Determina l'intersezione di r con il piano xy.

[$r\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$; $P \in r$; $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right)$]

2. Come risultano le seguenti rette?

$$r\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = -2t \end{cases} \quad ; \quad s\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

[parallele]

3. Come risultano le rette seguenti?

$$r\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 2t \end{cases} \quad ; \quad s\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

[sghembe]

4. Come risultano $r : (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda(1;1;1)$, $s : (x, y, z) = (1,0,0) + t(-1;1;0)$?

[incidenti e perpendicolari]

5. Determina la retta passante per $P(2;0;0)$ e perpendicolare al piano $x - y = 0$.

[$(x, y, z) = (2;0;0) + t(1;-1;0)$]

Calcolo combinatorio
e
calcolo delle probabilità

1. Calcolo combinatorio

2. Calcolo delle probabilità

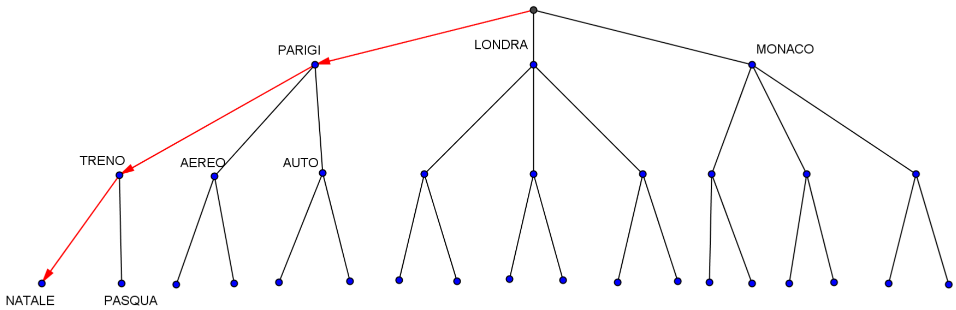
Calcolo combinatorio

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio può essere enunciato così:
"Se dobbiamo fare N scelte e la prima scelta può essere fatta in n_1 modi, la seconda scelta in n_2 modi e così via fino all'N-esima scelta che può essere fatta in n_N modi, allora la successione delle N scelte può essere fatta in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots \cdot n_N$ modi diversi."
Facciamo un esempio: supponiamo di voler organizzare una vacanza e di poter scegliere

- la meta tra Parigi, Londra e Monaco
- il mezzo di trasporto tra treno, aereo e auto
- il periodo tra vacanze di Natale e vacanze di Pasqua

In quanti modi diversi possiamo organizzare la nostra vacanza?
Possiamo rappresentare la situazione con un "grafo ad albero":



Ci accorgiamo che percorrendo i vari "rami" dell'albero abbiamo vacanze diverse: per esempio seguendo le frecce in figura abbiamo Parigi, in treno, a Natale.
Quindi, poiché ogni percorso-vacanza termina nell'ultimo livello, per sapere quante vacanze diverse possiamo organizzare basta contare le "terminazioni" dell'albero, che sono 18.

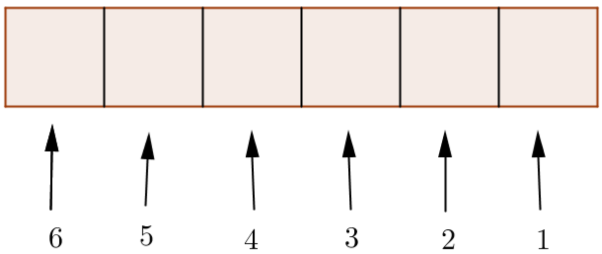
E' chiaro anche che il numero delle "terminazioni" si ottiene moltiplicando 3 (possibilità per la prima scelta) * 3 (possibilità per la seconda scelta)*2 (possibilità per la terza scelta) secondo il principio fondamentale del calcolo combinatorio che abbiamo enunciato.

Permutazioni

Se abbiamo *n* oggetti distinti e dobbiamo metterli in "fila"(quindi l'ordine è importante) **quante "file" (permutazioni) diverse possiamo fare**?

Consideriamo per esempio la parola *scuola*: **quanti anagrammi si possono fare?**

Gli oggetti in questo caso sono le sei lettere della parola s,c,u,o,l,a e sono tutte distinte.
Immaginiamo di riempire in successione sei caselle (per formare l'anagramma cioè la nostra "fila"): per riempire la prima casella ho 6 possibili scelte (posso usare una delle sei lettere), per riempire la seconda casella però ho solo 5 possibili scelte perché una lettera l'ho già usata e non posso ripeterla e così via fino al riempimento dell'ultima casella per la quale ho solo 1 scelta.



Quindi **per il principio fondamentale del calcolo combinatorio** avremo

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

possibili "file" cioè permutazioni dei 6 oggetti distinti (le lettere *s,c,u,o,l,a*).

In generale il numero delle permutazioni di n elementi distinti sarà dato dal prodotto

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \qquad \cdot 2 \cdot 1$$

che viene indicato con il simbolo

$$n!$$

e si legge ***n* fattoriale.**

Il numero delle **permutazioni di n elementi distinti** viene in genere indicato con P_n e quindi abbiamo:

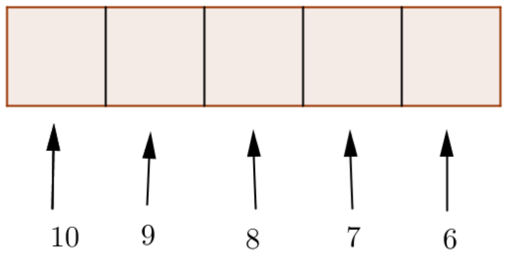
$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \qquad \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Osservazioni
$n!$ cresce molto rapidamente: per esempio 5!=120 , 6!=720 , 7!=5040 ecc.
Si ha inoltre che $n! = n \cdot (n-1)!$
Per convenzione si pone 0!=1

Disposizioni semplici

Consideriamo adesso questo problema: *quanti diversi codici di 5 cifre distinte si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*

E' chiaro che anche in questo caso l'ordine è importante: si tratta di scegliere come riempire 5 caselle potendo scegliere tra un insieme di 10 elementi e quindi, ragionando come nell'esempio precedente, avremo 10 possibilità di scelta per la cifra da mettere nella prima casella, 9 (perché le cifre devono essere distinte) possibilità di scelta per la seconda casella e così via…



In conclusione possiamo comporre

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

codici diversi con cifre distinte.

In questo caso si parla di disposizioni di ordine 5 su 10 oggetti distinti e il loro numero si indica con il simbolo $D_{10,5}$.
Generalizzando **il numero delle disposizioni semplici** cioè senza ripetizioni di *k* elementi scelti tra *n* elementi distinti è

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \quad \cdot (n-k+1)}$$

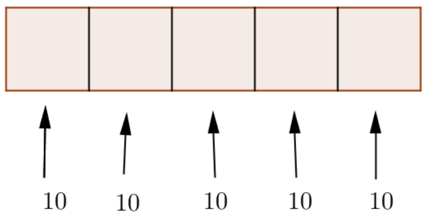
Note
E' chiaro che $k \le n$ e che nel caso in cui $k = n$ si ritrova il numero delle permutazioni P_n.
L'ultimo fattore risulta $n-k+1 = n-(k-1)$ perché quando si riempie l'ultima casella (la *k*-esima) abbiamo già scelto *k-1* elementi e quindi abbiamo ancora solo *n-(k-1)* possibilità.

Osservazione
Possiamo esprimere il numero delle disposizioni $D_{n,k}$ anche utilizzando i fattoriali: se moltiplichiamo e dividiamo per $(n-k)!$ abbiamo :

$$D_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \quad (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione

Riprendiamo l'esempio precedente: *quanti sono i codici di 5 cifre* ***anche ripetute*** *che si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*
Se in questo caso posso ripetere le cifre per ogni casella da riempire avrò sempre 10 possibilità.



Quindi avrò $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ codici diversi.

In generale **il numero delle disposizioni con ripetizione** (possono ripetere gli elementi) di ordine k su n oggetti distinti si indica con $D_{n,k}{}^{rip}$ e risulta

$$\boxed{D_{n,k}{}^{rip} = n^k}$$

Nota 1
Mentre se consideriamo le disposizioni semplici (senza ripetizione) $D_{n,k}$ è chiaro che dovrà essere $k \leq n$, nel caso delle disposizioni con ripetizione $D_{n,k}{}^{rip}$ si può avere anche $k > n$.

Per esempio se consideriamo la schedina del totocalcio in cui ci sono 13 caselle (corrispondenti alle varie partite di campionato di una data domenica) che si possono riempire con i simboli 1,2,X (1=vittoria della squadra che gioca in casa; 2=vittoria della squadra che gioca fuori casa; X= pareggio) le possibili schedine sono $D_{3,13}{}^{rip} = 3^{13}$ e in questo caso k=13 e n=3.

Nota 2
Abbiamo sempre considerato che gli elementi (di cui consideriamo le permutazioni o le disposizioni) siano distinti (cioè diversi tra loro): **ma se alcuni degli n elementi coincidono**?
Come facciamo per esempio se dobbiamo calcolare quanti anagrammi si possono formare con la parola *classe* in cui due lettere sono uguali?
Possiamo considerare all'inizio gli oggetti (le lettere) come se fossero tutti diversi (per esempio pensando di associare alle due s due formattazioni diverse) e quindi avremo 6! permutazioni.
Ma poiché in realtà due lettere coincidono permutandole tra loro ho sempre lo stesso anagramma: per esempio *cla***s***se e clas***s***e* rappresentano lo stesso anagramma e così in conclusione avrò solo $\frac{6!}{2!}$ permutazioni.
In generale quindi se n_1 elementi coincidono tra loro, n_2 elementi sono uguali tra loro ecc. dovremo dividere $n!$ per $n_1!$, $n_2!$ ecc.

Per esempio gli anagrammi della parola *mamma* saranno $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$.

Combinazioni semplici

Cominciamo con il seguente problema.

"Nel gioco del poker ad ogni giocatore vengono distribuite 5 carte da un mazzo di 32. In quanti modi diversi può essere servito un giocatore?"

Osserviamo subito che due gruppi di cinque carte sono diversi solo se differiscono per almeno una carta mentre non è importante in quale ordine sono arrivate le cinque carte.

I modi possibili in cui ciascun giocatore può essere servito è quindi inferiori al numero delle disposizioni semplici di 32 elementi a gruppi di 5: più precisamente ogni mano corrisponde a 5! disposizioni diverse.

Quindi il numero dei gruppi di cinque carte diverse sarà dato da:

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 201376$$

Generalizzando viene data la seguente definizione:

Si chiama combinazione semplice di ordine k su n elementi distinti $(k \leq n)$ ***un gruppo*** *(non mi interessa l'ordine)* ***di k elementi*** *scelti tra gli n elementi.*

Se indichiamo con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni di ordine k su n elementi per quanto osservato in precedenza si ha

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... (n-k+1)}{k!}$$

Il numero delle combinazioni $C_{n,k}$ si indica anche con il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge "n su k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... (n-k+1)}{k!}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per (n-k)! si ottiene

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Occorre inoltre osservare che avendo posto 0!=1 segue che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Proprietà delle combinazioni

Prima proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Infatti abbiamo

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Questa proprietà può essere facilmente spiegata osservando che ad ogni k-sottoinsieme in un insieme di n elementi corrisponde un (n-k)-sottoinsieme (sottoinsieme complementare).

Seconda proprietà

Per $1 \leq k \leq n-1$ vale

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Possiamo dimostrare questa proprietà algebricamente (utilizzando la formula per calcolare il coefficiente binomiale e sviluppando), oppure facendo un esempio.

Supponiamo di estrarre tre carte da un mazzo di 40 carte: in quanti modi diversi posso farlo?

E' chiaro che ci sono $\binom{40}{3}$ combinazioni.

Ma in quante di queste compare il "settebello"(sette di quadri)? Saranno le combinazioni di ordine 2 su 39 elementi cioè $\binom{39}{2}$ dal momento che mi rimangono solo da scegliere due carte su 39 carte perché poi aggiungo il "settebello".

E in quante combinazioni il "settebello" non c'è? Questa volta saranno le combinazioni di ordine 3 su 39 elementi cioè $\binom{39}{3}$ poiché devo scegliere tre carte solo tra 39 carte (tolgo il settebello).

Ma il numero totale delle combinazioni iniziali sarà dato dalla somma del numero delle combinazioni dove c'è il "settebello" con il numero delle combinazioni dove il "settebello" non c'è e quindi dovrà essere

$$\binom{40}{3} = \binom{39}{2} + \binom{39}{3}$$

Complemento

I numeri $C_{n,k}$ sono anche i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio cioè si ha:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

Per questo il numero $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ viene anche chiamato **coefficiente binomiale**.

I coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^0$ $(a+b)^1$ $(a+b)^2$ … $(a+b)^n$ si possono scrivere in modo da formare un triangolo chiamato **triangolo di Tartaglia** :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

……………………………………………………..

Osservando il triangolo di Tartaglia si possono fare alcune considerazioni:

1. I primi e gli ultimi termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia sono uguali a 1 e questo coincide con il fatto che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. In ogni riga i termini equidistanti dagli estremi sono uguali, in accordo con la prima proprietà che abbiamo visto per le combinazioni.

3. Ogni termine intermedio di una riga si ottiene, in accordo con la seconda proprietà che abbiamo visto per le combinazioni, sommando nella riga precedente il termine di ugual posto con quello che lo precede.

4. La somma dei termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia è una potenza di 2 e precisamente $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ e questo significa che il numero totale dei sottoinsiemi di un insieme di *n* elementi (sottoinsiemi con 0,1,2, ….n elementi) è uguale a 2^n.

PROBLEMI
CALCOLO COMBINATORIO

1. Con le cifre 1,2,3,4,5,6,7,8,9 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare?

[504]

2. Dei numeri dell'esercizio precedente quanti sono dispari ? Quanti sono pari ? Quanti terminano con la cifra 9 ? Quanti sono maggiori di 700 ?

[280; 224; 56; 168]

3. Quanti anagrammi si possono formare con la parola "studente"?

[20160]

4. Con le cifre 1,2,3,5,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono fare? Quanti sono pari? Quanti sono divisibili per 5? E se si possono ripetere le cifre?

[a. 60 ; 24 ;12 b. 125; 50 ; 25]

5. Consideriamo sul piano 6 punti tali che a tre a tre non siano allineati. Quanti triangoli si possono disegnare scegliendo come vertici i sei punti?

[20]

6. Quante sono le diagonali di un poligono convesso di n lati?

[$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$]

7.Quanti incontri singolari si possono organizzare con 6 giocatori di tennis ?

[15]

8.Quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto ?

[4005]

9.Quante formazioni diverse si possono formare con 11 giocatori facendo giocare tutti i giocatori in tutti i ruoli ?

[11!]

10.Quanti sono gli anagrammi della parola scuola ?

[6!]

11.Quanti sono gli anagrammi della parola babbo ? E della parola mamma ?

[20; 10]

12.Dati 10 punti distinti del piano a tre a tre non allineati, quante rette si ottengono congiungendoli due a due ?

[45]

13.Giocando a poker in quanti modi diversi si possono avere in mano 4 assi ?

[28]

14.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte da un mazzo di 40 carte ?

[91390]

15.Quante partite si giocano in un campionato composto da 15 squadre ? (considera che c'è andata e ritorno).

[210]

16.Il codice di una cassaforte è composto da 5 lettere scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone. Se le lettere possono essere anche ripetute, quanti codici diversi si possono impostare ?

[11881376]

17.Le targhe automobilistiche sono costituite da due lettere seguite da tre cifre seguite a loro volta da due lettere. Se le lettere sono scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone, quante targhe diverse si possono comporre ?

[456976000]

18.L'ultimo giorno di scuola i 20 studenti della IV B si salutano e ognuno abbraccia tutti gli altri. Quanti abbracci si sono scambiati ?

[190]

19.Per effettuare una gita 9 amici hanno a disposizione una Panda e una Tipo : in quanti modi possono distribuirsi tra le due macchine supponendo che 4 salgano nella Panda e 5 nella Tipo ?

[126]

20.Considera la situazione del problema precedente: in quanti modi possono distribuirsi se i proprietari delle auto vogliono guidare (giustamente) ognuno la propria auto ?

[35]

21.In una scuola, che comprende un liceo classico e un liceo scientifico, la rappresentanza degli studenti al Consiglio di Istituto è formata da 4 studenti del liceo scientifico e da 2 studenti del classico. Se nelle liste sono presenti 10 studenti per lo scientifico e 4 per il classico, in quanti modi diversi può essere formata la rappresentanza degli studenti ?

[1260]

22.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte di cuori da un mazzo di 40 carte ?

[210]

23.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte dello stesso seme da un mazzo di 40 ?

[840]

24.Quante sono le schedine del totocalcio diverse con 12 risultati esatti ? (in quanti modi diversi si può fare 12) [26]

25. Con le cifre 1,2,4,6,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare? Quanti di questi sono pari?

[60; 48]

26. Quanti sono gli anagrammi della parola "classe" ?

[360]

27. In quanti modi diversi si possono pescare tre carte da un mazzo di 40 carte?

[9880]

28. 10 amici per fare una gita hanno a disposizione due auto e un motorino. Se su ogni auto salgono quattro persone e due persone sul motorino, in quanti modi diversi possono sistemarsi? E se i proprietari delle auto e del motorino vogliono guidare il proprio mezzo?

[3150; 140]

29. Quante sono le possibili schedine del totocalcio con 11 risultati esatti?

[312]

30. 12 amici, dopo una cena, si salutano ed ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?

[66]

31. In una classe di 22 studenti, di cui 12 femmine e 10 maschi, si deve formare un gruppo per una ricerca costituito da tre maschi e tre femmine. In quanti modi diversi si può formare il gruppo?

[26400]

32. Considera la situazione dell'esercizio precedente: se tra i maschi ci sono due gemelli, quanti sono i gruppi in cui i due gemelli non sono insieme?

[24640]

33. Nell'ippica è chiamata "corsa tris" una corsa in cui gli scommettitori devono indovinare i cavalli che arriveranno al 1°, 2°,3° posto. Se partono 10 cavalli, quali sono i possibili ordini di arrivo?

[720]

34. In una classe di 24 alunni si devono eleggere i due rappresentanti di classe. In quanti modi diversi si può fare questa scelta?

[276]

Calcolo delle probabilità

Ogni giorno ci troviamo a dover affrontare situazioni “incerte” in cui, per prendere delle decisioni, più o meno consapevolmente facciamo delle valutazioni di “probabilità”.

Il “calcolo delle probabilità” è nato a partire dal Cinquecento per risolvere problemi legati al **gioco dei dadi**: i primi studi si trovano nel *Liber de ludo aleae* di Girolamo Cardano (scritto nel 1526, ma pubblicato solo nel 1663) e in *Sopra le scoperte dei dadi* di Galileo Galilei (scritto probabilmente nel 1612).

La parola evento aleatorio, cioè casuale, deriva appunto dalla parola latina “alea” che significa dado e per gli antichi il lancio del dado era il tipico esempio di situazione casuale.

Girolamo Cardano

La nascita del concetto moderno di probabilità viene attribuito a Blaise Pascal (1623-1662) e a Pierre de Fermat (1601-1665) e fu poi sviluppato da Huygens, Bernoulli e Laplace nel Settecento e Ottocento.

Nel Novecento infine De Finetti e Kolmogorov hanno elaborato teorie più formali della probabilità.

Pierre de Fermat

Abbiamo già trattato la definizione classica della probabilità di un evento nella classe seconda ma per completezza la riportiamo di nuovo aggiungendo altri due modi di valutare la probabilità di un evento.

Eventi certi, impossibili, aleatori

Supponiamo di lanciare un dado e consideriamo i seguenti “eventi”:

E_1={ esce un numero compreso tra 1 e 6 (estremi inclusi) }

E_2={ esce il numero 7 }

E_3={ esce il numero 2 }

L’evento E_1 è “**certo**”: infatti lanciando un dado possono uscire i numeri da 1 a 6.

L’evento E_2 è “**impossibile**”.

L’evento E_3 è possibile ma non è certo e viene detto “**aleatorio**”.

È chiaro però che non tutti gli eventi aleatori hanno la stessa “probabilità” di accadere (di verificarsi).

Se per esempio considero E_4={ esce un numero pari }, scommettereste su E_3={ esce il numero 2 } o su E_4 ?

È chiaro che l’evento E_4 ha più probabilità di verificarsi di E_3: infatti se consideriamo che i casi possibili nel caso del lancio di un dado non truccato sono l’uscita dei numeri 1,2,3,4,5,6 vediamo che perché accada E_3 ho solo un caso favorevole {2} mentre perché si verifichi E_4 ho i tre casi favorevoli {2} {4} {6}.

Ma come è definita la probabilità di un evento E?

Probabilità di un evento E

Definizione classica

La probabilità (classica) di un evento E è data dal *rapporto tra il numero dei casi favorevoli ad E e il numero dei casi possibili (tutti ugualmente possibili)*

$$\boxed{p(E) = \frac{n° \quad casi \quad favorevoli}{n° \quad casi \quad possibili}}$$

Nel nostro esempio

$p(E_1) = 1$ (evento certo)

$p(E_2) = 0$ (evento impossibile)

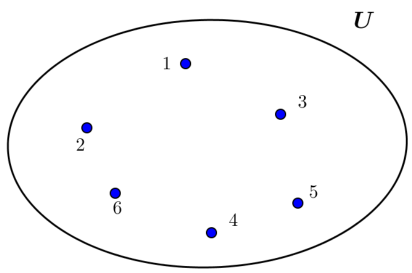
$p(E_3) = \frac{1}{6}$

$p(E_4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Osserviamo che essendo n° casi favorevoli ≤ n° casi possibili si ha che la probabilità di un evento E è un numero compreso tra 0 e 1

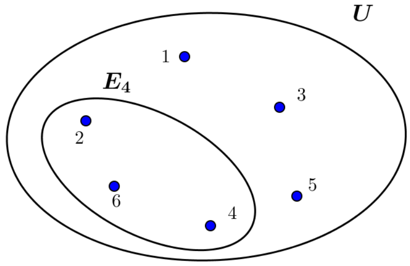
$$\boxed{0 \le p(E) \le 1}$$

Eventi ed insiemi
Possiamo rappresentare gli eventi utilizzando gli insiemi.
Considerando sempre il lancio di un dado, l'insieme di tutti gli eventi "elementari" (chiamato insieme universo U) sarà:



L'evento E_4 sarà rappresentato da un sottoinsieme di U

$$E_4 = \{2,4,6\}$$



Poiché $E_1 \equiv U$ si ha che E_1 è l'evento certo;
$E_2 = \Phi$ si ha che E_2 è l'evento impossibile.

Definizione frequentista

La definizione che abbiamo dato della probabilità di un evento viene detta definizione "classica" e presuppone che gli eventi "elementari" siano tutti ugualmente possibili cioè, per esempio nel lancio di un dado, che il dado non sia truccato.

Ma se il dado fosse truccato?
(mettendo una massa attaccata ad una faccia sarà più probabile l'uscita della faccia opposta rispetto alle altre).
In questo caso potrei lanciare il dado moltissime volte e annotare il numero di volte che è uscita ciascuna faccia.

Esempio

	1	2	3	4	5	6
numero volte che è uscito in 100 lanci	52	10	12	9	13	4
frequenza relativa f dell'uscita del numero	$\frac{52}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{4}{100}$

Potrei in questo caso considerare la frequenza relativa $f(E)$ come una valutazione della probabilità dell'evento E.

Si può verificare che al crescere del numero N delle prove (nel nostro caso lanci del dado) il valore $f(E)$ tende a stabilizzarsi intorno ad un valore ben preciso e definiamo **probabilità statistica** o **frequentista** *la frequenza relativa dell'evento calcolata effettuando un numero N molto grande di prove (nelle stesse condizioni).*

Naturalmente occorre supporre che sia possibile fare molte prove tutte nelle stesse condizioni e questo a volte non è possibile.

Definizione soggettiva

Qual è per esempio la probabilità che oggi piova? Oppure qual è la probabilità che un dato cavallo vinca una data corsa?

In questi casi si preferisce valutare la probabilità di un evento in relazione alle informazioni che abbiamo: possiamo per esempio aver consultato le previsioni metereologiche oppure conoscere le precedenti prestazioni del cavallo ed esprimeremo la probabilità di un evento come "**grado di fiducia**" sul verificarsi di quell'evento. Più precisamente viene data questa definizione:

La probabilità soggettiva di un evento E è data dal *rapporto tra* ***la somma r che sono disposto a "rischiare"*** *su E (che quindi perdo se l'evento non si verifica)* ***per vincere una somma s = r+g*** *(* ***g*** *rappresenta il guadagno) nel caso che E si verifichi.*

$$\boxed{p(E) = \frac{r}{s}} \qquad \text{con} \qquad s = r + g$$

Anche in questo caso la probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1.

Se sono certo che E non può verificarsi non rischierò niente (r=0) e quindi la probabilità associata risulta nulla.

D'altra parte è chiaro che mi aspetti di non guadagnare niente (g=0) scommettendo su un evento certo e in questo caso la probabilità associata a questo evento risulterà 1.

Esempio
Quando, nelle corse dei cavalli, gioco un cavallo 5 a 1 vuol dire che il guadagno sarà 5 volte la somma che rischio (se rischio 1 euro guadagnerò 5 euro) e quindi vuol dire che valuto la probabilità di vittoria di quel cavallo:

$$p(vittoria \quad cavallo) = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

Il gioco equo

Naturalmente se scommetto su un evento E di cui posso calcolare la probabilità secondo la definizione classica, **il gioco sarà "equo"** se il valore $\frac{r}{s}$ corrisponde alla valutazione "classica".

Se per esempio scommettiamo su E = $\{$ esce il numero 6 nel lancio di un dado $\}$, se rischiamo r=1 euro dovrà essere s = 6 euro (cioè g = 5 euro) poiché la probabilità dell'evento E secondo la valutazione classica risulta $\frac{1}{6}$.

Negli esempi seguenti tratteremo eventi di cui si può valutare la probabilità secondo la definizione classica.

Evento contrario

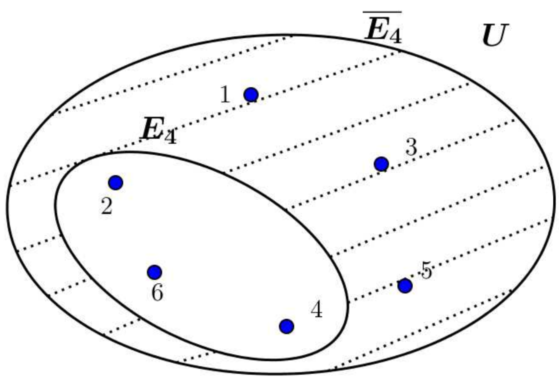
Se E è un evento indicheremo con $\overline{E}$ l'evento contrario.

Per esempio se considero

E_4 ={ nel lancio di un dado esce un numero pari }

avremo $\overline{E}_4$ ={ nel lancio di un dado **non** esce un numero pari }

Da un punto di vista insiemistico l'evento contrario $\overline{E}$ è rappresentato dall'insieme complementare di E (rispetto all'insieme universo U)



È chiaro quindi che $p(\overline{E}) = \dfrac{n°casi \quad possibili - n°casi \quad favorevoli \quad ad \quad E}{n°casi \quad possibili} = 1 - p(E)$

Nota

A volte per calcolare la probabilità di un evento E conviene calcolare la probabilità dell'evento $\overline{E}$ contrario e poi calcolare $p(E) = 1 - p(\overline{E})$.

Se per esempio, nel lancio di due dadi, voglio calcolare la probabilità dell'evento E=$\{escono \quad numeri \quad diversi\}$, posso calcolare la probabilità di $\overline{E} = \{escono \quad numeri \quad uguali\}$ che risulta $p(\overline{E}) = \dfrac{6}{36}$ (i casi favorevoli sono $(1,1)$, $(2,2)$..... $(6,6)$ cioè sei mentre i casi possibili sono 36) e poi calcolare $p(E) = 1 - \dfrac{6}{36} \rightarrow p(E) = \dfrac{5}{6}$.

Probabilità totale

Riprendiamo l'esempio del lancio di due dadi: qual è la probabilità che escano due numeri uguali? Si può rispondere semplicemente osservando che i casi favorevoli sono costituiti dalle sei coppie (1,1) (2,2) …..(6,6) e che quindi

$$p(numeri \quad uguali) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ma si può anche pensare l'evento "escono due numeri uguali" come **l'unione degli eventi** "esce 1-1" , "esce 2-2", … "esce 6-6" aventi ognuno probabilità $\frac{1}{36}$ e **sommando** le probabilità dei vari eventi otteniamo lo stesso risultato:

$$p(numeri \quad uguali) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

In generale possiamo dire che se due eventi A e B hanno "intersezione nulla" cioè non possono verificarsi contemporaneamente (si dicono **incompatibili**) abbiamo che

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

E se due eventi non sono incompatibili?
Consideriamo per esempio, sempre nel lancio di un dado, l'uscita di un numero pari o divisibile per 3.
Abbiamo quindi A = "uscita di un numero pari" e B= "uscita di un numero divisibile per 3".

Se calcoliamo la probabilità richiesta come rapporto tra numero di casi favorevoli (4) e numero dei casi possibili (6) abbiamo

$$p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ma se sommiamo $p(A) = \frac{1}{2}$ e $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ non otteniamo $\frac{2}{3}$ perché i due eventi non sono incompatibili dal momento che se uscisse il "6" sarebbe sia un numero pari che divisibile per 3.

In questo caso dopo aver sommato le probabilità di A e di B dobbiamo *togliere la probabilità dell'intersezione dei due eventi* (l'uscita del 6) che ha probabilità $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ed infatti:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Quindi in generale

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Probabilità composta

Eventi indipendenti

Supponiamo di lanciare due volte una moneta: qual è la probabilità di avere due teste?

I casi possibili sono le 4 coppie ordinate (T,C), (T,T), (C,C), (C,T) e c'è una sola coppia favorevole. Quindi la probabilità risulta:

$$p(T,T)=\frac{1}{4}$$

Osservazione

I due eventi (l'esito del primo lancio e l'esito del secondo lancio) si dicono "**eventi indipendenti**" poiché l'uscita di "testa" nel primo lancio non modifica la probabilità che esca "testa" nel secondo lancio (si dice che la moneta "non ha memoria").

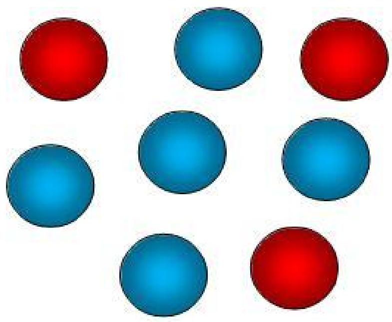
Osserviamo che la probabilità richiesta si ottiene anche moltiplicando la probabilità che esca testa nel primo lancio e la probabilità che esca testa nel secondo lancio:

$$p(T,T)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Eventi dipendenti

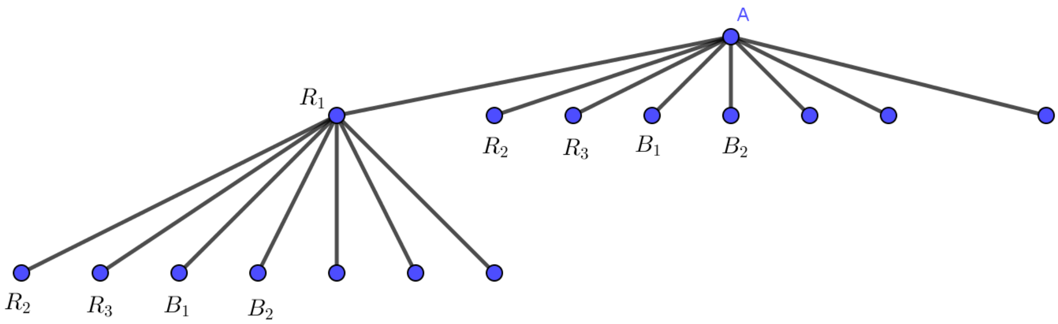
Supponiamo di avere un sacchetto contenente 8 palline di cui 3 rosse e 5 blu: estraiamo una pallina e poi, *senza rimettere la prima pallina estratta*, estraiamo una seconda pallina dal sacchetto.

Qual è la probabilità di estrarre due palline rosse?



Possiamo calcolare la probabilità richiesta come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili: dal momento che facciamo due estrazioni i casi sono rappresentati da coppie ordinate in cui il primo elemento rappresenta il risultato della prima estrazione e il secondo elemento rappresenta il risultato della seconda estrazione.

Se per esempio indichiamo con R_1, R_2, R_3 le tre palline rosse e con B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 le cinque palline blu tutte le possibili estrazioni saranno rappresentate dalle $8\cdot 7=56$ coppie ordinate (poiché non rimettiamo la prima pallina estratta nella seconda estrazione ho a disposizione solo 7 palline)



Le coppie in cui sono uscite 2 palline rosse sono $3 \cdot 2 = 6$ (numero casi favorevoli) e quindi la probabilità richiesta risulta

$$\frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

Ma se consideriamo gli eventi:

A = "esce una pallina rossa alla prima estrazione"

B = "esce una pallina rossa alla seconda estrazione"

osserviamo che si tratta di eventi "**dipendenti"** in quanto, non rimettendo la pallina estratta nel sacchetto, le palline che possiamo pescare scendono a 7 e il numero delle palline rosse dipende dall'esito della prima estrazione.
La probabilità di estrarre una pallina rossa nella prima estrazione è

$$p(A) = \frac{3}{8}$$

La probabilità di estrarre nella seconda estrazione una pallina rossa, *supponendo che nella prima estrazione sia uscita una pallina rossa* viene indicata con la scrittura $p(B/A)$ e risulta

$$p(B/A) = \frac{2}{7}$$

Osserviamo che anche in questo caso la probabilità richiesta si sarebbe potuta ottenere moltiplicando $p(A)$ per $p(B/A)$ cioè:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

In conclusione la probabilità cosiddetta "composta" di A e B risulta

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ se gli eventi sono "indipendenti"

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$ se gli eventi sono "dipendenti"

Nota: $p(B/A)$ si legge "probabilità di B condizionata ad A".

Problemi svolti

1) Lanciando due dadi e considerando la somma S dei punti ottenuti, qual è la somma S più probabile?

Svolgimento guidato

Lanciando due dadi possiamo avere:

$$\begin{array}{llll}
(1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\
. & & & . \\
. & & & \\
. & & & \\
(6,1) & (6,2) & \dots & (6,6)
\end{array}$$

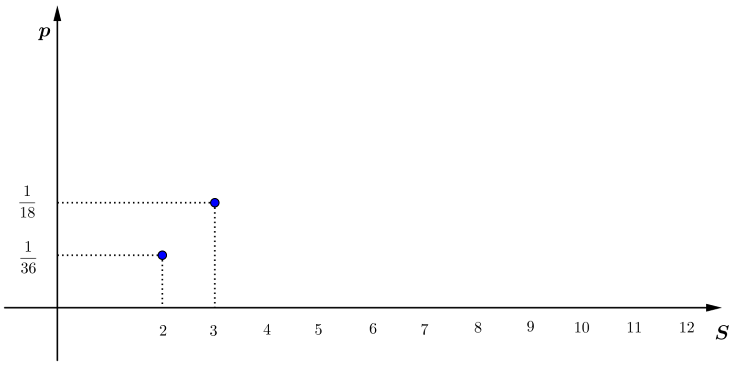
Attenzione: l'evento (1,2) è diverso dall'evento (2,1): per non confondere i due dadi possiamo pensare che siano di colori diversi, quindi l'uscita della coppia 1-2 può avvenire in due modi diversi. Ci sono quindi 36 eventi elementari.

Calcoliamo la probabilità di avere S=2, S=3 ecc.

- Per avere somma 2 devo avere (1,1) e questo è l'unico caso favorevole e quindi
$$p(S=2)=\frac{1}{36}$$
- Posso ottenere somma 3 in due casi: (1,2), (2,1) e quindi
$$p(S=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

ecc…

In conclusione vedo che la somma più probabile risulta …….
Prova anche fare un "grafico" in cui sull'asse delle ascisse metti i valori di S che si possono ottenere e sull'asse delle ordinate le corrispondenti probabilità.



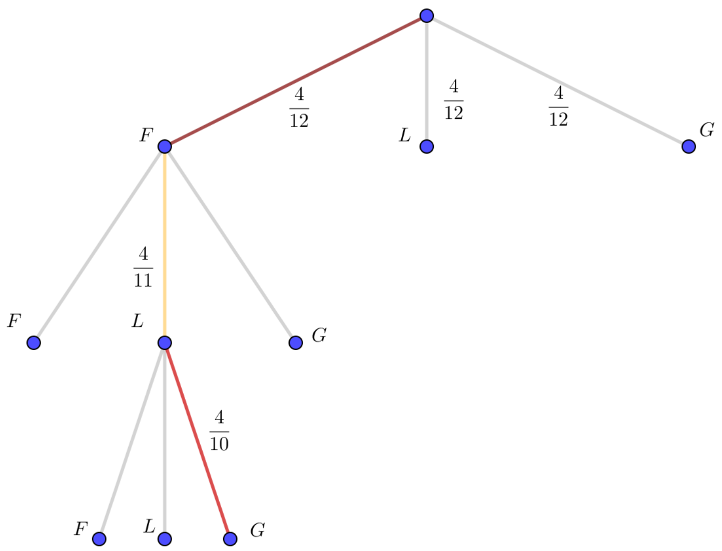
Questo grafico rappresenta quella che viene chiamata la "*distribuzione di probabilità*" della somma S.

2) Una scatola di cioccolatini ne contiene 4 al cioccolato fondente, 4 al cioccolato al latte e 4 al gianduia. Estraendo tre cioccolatini a caso, qual è la probabilità che siano di tre gusti differenti?

Svolgimento

Supponiamo di indicare con F i cioccolatini al cioccolato fondente, con L quelli al cioccolato al latte e con G quelli al gianduia.

Possiamo supporre di fare le 3 estrazioni in successione e possiamo rappresentare la situazione con un grafo ad albero:



Si osserva che la probabilità di pescare F,L,G risulta $\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{10}$ e quindi, dal momento che per pescare cioccolatini diversi potrei anche pescare F,G,L ecc. ho 3!=6 situazioni analoghe con la stessa probabilità e quindi la probabilità richiesta risulta:

$$6\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{16}{55}$$

3) Anna ha acquistato tre regali per tre sue amiche, e ha curato lei stessa la preparazione delle confezioni.
Essendo di natura un po' distratta, una volta chiusi i regali non riesce più a distinguere a chi spettava ciascuno di essi.
Per un momento Anna si chiede: "Se i regali fossero consegnati a caso, qual è la probabilità che ciascuno vada all'amica giusta?"

Svolgimento

Indichiamo con A,B,C i regali corrispondenti alle amiche a,b,c.

Supponiamo di pescare in successione i tre regali per assegnarli alle amiche: pescando a caso il primo regali la probabilità di assegnarlo bene è $\frac{1}{3}$, nella seconda assegnazione (supponendo di aver dato bene il primo regalo) la probabilità di assegnare il regalo corretto è di $\frac{1}{2}$ poiché le amiche sono due e solo uno dei due regali è quello giusto; infine se le prime due assegnazioni sono state corrette la terza lo sarà necessariamente.

Quindi

$$P(1°\,giusto \cap 2°\,giusto) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

PROBLEMI

PROBABILITA' TOTALE E COMPOSTA

1. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o un asso?

   [2/5]

2. Lanciando un dado non truccato, qual è la probabilità che esca un numero pari o un numero maggiore di 4?

   [2/3]

3. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o una carta di cuori?

   [19/40]

4. Sullo scaffale di una libreria ci sono 10 libri di matematica, 9 di fisica e 6 di arte. Qual è la probabilità che prendendo un libro a caso questo sia di fisica o di arte?

   [3/5]

5. Un'urna contiene 12 palline rosse, 8 palline gialle e 10 palline nere. Estraendo una pallina, qual è la probabilità che esca
   a) una pallina non nera;
   b) una pallina gialla o nera;
   c) una pallina verde.

   [2/3;3/5;0]

6. Da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola se ne estrae uno. Qual è la probabilità che questo sia:
   a) Un multiplo di 5
   b) Un numero maggiore di 63;
   c) Multiplo di 5 o maggiore di 63;
   d) Pari o dispari;
   e) Divisibile per 11 o per 19.

   [1/5; 3/10; 13/30; 1; 2/15]

7. Da un mazzo di 40 carte si estrae prima una carta e poi una seconda. Qual è la probabilità di aver pescato una coppia di assi se:
   a) Si rimette la prima carta nel mazzo;
   b) Non si rimette la prima carta nel mazzo

   [1/100; 1/130]

8. Calcolare la probabilità che lanciando una moneta tre volte escano tre teste.

   [1/8]

9. In un'urna ci sono 5 palline nere e 7 palline bianche. Calcolare la probabilità che esca prima una pallina nera e poi una pallina bianca senza rimettere la prima nell'urna.

   [35/132]

10. La probabilità che Marco colpisca il centro di un bersaglio è 0,25, la probabilità che lo colpisca Paolo è 0,10. Sapendo che i lanci sono indipendenti, qual è la probabilità che:
    a) Tutti e due colpiscano il centro del bersaglio;
    b) Solo Paolo colpisca il bersaglio
    c) Nessuno dei due colpisca il bersaglio

[0,025; 0,075; 0,675]

11. Si lancia un dado non truccato per due volte. Qual è la probabilità che esca almeno un 6?

[11/36]

12. Un ladro vuole rubare il portafoglio chiuso dentro una valigia sigillata da un lucchetto con una combinazione di 3 cifre.
    a) Qual è la probabilità che al primo tentativo il ladro apra la valigia?
    b) Quanto vale la probabilità se il ladro sa che la cifra finale della combinazione è 9?

[1/1000; 1/100]

13. In una classe di 25 alunni, ci sono 15 ragazze. Il professore di matematica interroga sempre a coppie. Qual è la probabilità che:
    a) Siano interrogate due ragazze;
    b) Siano interrogati un ragazzo ed una ragazza;
    c) Nessuna ragazza

[7/20; 1/2; 3/20]

14. Un'urna contiene 12 biglie bianche e 8 biglie nere. Qual è la probabilità che, estraendo tre palline rimettendo ogni pallina estratta nell'urna, siano tutte bianche. Quanto vale se invece ogni pallina estratta non viene rimessa nell'urna?

[27/125; 11/57]

15. In un supermercato la probabilità che sia aperta la cassa 1 è 0,57, mentre che sia aperta la cassa 2 è 0,45.
    a) I due eventi sono compatibili?
    b) Se l'apertura della cassa 1 è indipendente dall'apertura della cassa 2, qual è la probabilità che siano entrambe aperte?
    c) E che siano entrambe chiuse?
    d) E che sia aperta solo la cassa 2?

[no, perché?; 0,2565; 0,2365; 0,1935]

16. *[Prova Invalsi 2014] Prato fiorito* è un gioco per computer che si gioca su una scacchiera, cliccando sui riquadri della scacchiera, a volte si può scoprire un fiore nascosto. Per esempio in una scacchiera 9x9 ci sono nascosti 10 fiori.
    a) Qual è la probabilità di scoprire al primo tentativo un fiore nella scacchiera appena descritta?

       A. 1/9 B. 1/81 C. 10/80 D. 10/81
    b) È possibile personalizzare il gioco impostando le dimensioni della scacchiera (cioè il numero di righe e di colonne) ed il numero di fiori nascosti. Se si gioca con una scacchiera 12x20, quale deve essere il numero di fiori nascosti affinché la probabilità di scoprire un fiore al primo tentativo sia 1/8?

[D; 30]

17. *[Prova Invalsi 2015]* Da un mazzo di 52 carte (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori e picche) sono stati tolti i 4 assi.

a) Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?

b) Da un mazzo di 52 carte uguale al precedente sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione, la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è 6/45. Quante carte di fiori sono state tolte?

[1/4;]

18. *[Prova Invalsi 2015]* Nel foglietto contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce "Effetti collaterali" si legge che:

- il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini
- il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.
  I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti uno dall'altro.

a) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco **non** abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in percentuale.

b) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti **entrambi** gli effetti collaterali?

A. 9% B. 0,14% C. 14% D. 0,9%

[93%; B]

19. *[Prova Invalsi 2015]* Un'urna contiene 40 palline identiche tranne che per il colore: 23 sono rosse e 17 blu. Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Entrambe sono blu. Senza reintrodurre le due palline stratte, si estrae dall'urna una terza pallina. Qual è la probabilità che anche la terza pallina sia blu?

[15/38]

20. *[Prova Invalsi 2015]* Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci sia spetta di ottenere un numero maggiore di 4?

A. circa 100 B. circa 50 C. circa 30 D. circa 150

[A]

21. *[Prova Invalsi 2016]* Quale tra i seguenti numeri **non** può rappresentare la probabilità di un evento?

A. 2/3 B. 11/15 C. 8/7 D. 20/27

[C; perché?]

22. *[Prova Invalsi 2016]* Nella scatola A vi sono 6 palline verdi e 4 rosse. Nella scatola B vi sono invece 12 palline verdi e 5 rosse. Quante palline verdi si devono spostare dalla scatola B alla scatola A affinché la probabilità di estrarre una pallina verde da A sia uguale a quella di estrarre una pallina verde da B?

A. 5 B. 7 C. 2 D. 4

[C]

Successi in prove indipendenti (distribuzione binomiale)

In molti casi è molto importante calcolare *la probabilità di ottenere un dato numero di successi in un dato numero di prove.*
Facciamo un esempio.

Qual è la probabilità di ***rispondere correttamente a 6 domande*** *di un test di 10 domande ognuna con 3 alternative (A,B,C) di cui una sola corretta,* ***rispondendo a caso*** *?*

In questo caso il successo è "risposta corretta" e le prove sono le 10 domande del test.

Proviamo a calcolare questa probabilità in termini di probabilità composta di eventi indipendenti: infatti la probabilità di rispondere bene a 6 domande corrisponde alla probabilità di rispondere bene a 6 domande e rispondere male a 4 domande.

Poiché la probabilità di rispondere bene ad una domanda è $p = \frac{1}{3}$ e la probabilità di rispondere male ad una domanda è $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ la probabilità di rispondere bene per esempio alle prime 6 domande e male alle ultime quattro è $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Ma le sei risposte corrette non sono necessariamente le prime sei e quindi dobbiamo considerare che le 6 risposte corrette potrebbero essere le prime sei, ma anche la seconda,la terza ecc. fino alla settima…

Le sei risposte corrette possono essere scelte in $C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = 210$ modi , e quindi per calcolare la probabilità totale dovremo sommare per 210 volte $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$ e in conclusione, indicando con X il numero di risposte esatte, abbiamo

$$P(X = 6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cong 0{,}057$$

Generalizzando: **la probabilità di ottenere *k* successi** (le risposte giuste) **in *n* prove indipendenti** (nel nostro caso le 10 domande a cui rispondiamo a caso) in cui in ogni prova abbiamo probabilità di successo *p* risulta:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$$

Questa "distribuzione" di probabilità**,** proprio per la presenza del coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = C_{n,k}$, viene chiamata **"distribuzione binomiale"**.

Teorema di Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) ha ricavato una formula matematica che permette di **rivalutare la probabilità di un evento quando si sa che un dato evento si è verificato**.Illustreremo il teorema senza enunciarlo limitandoci a trattare un caso semplice attraverso un esempio.

Supponiamo che l'incidenza di una data infezione sia dello 0,2% cioè scegliendo a caso un individuo della popolazione e indicando con M l'evento "l'individuo è affetto da quella malattia" si ha $P(M)=0{,}002$ e indicando con $\overline{M}$ "l'individuo non è affetto da quella malattia" si ha $P(\overline{M})=0{,}998$.

Si mette a punto un test rapido e si osserva che, se un soggetto è affetto da quella malattia, allora la probabilità che il test sia positivo è pari al 100% e quindi, indicando con T^+ l'evento "il test è positivo", possiamo scrivere che $P(T^+/M)=1$.Tuttavia il test fornisce un risultato positivo anche sulle persone non affette da quella malattia nello 0,3 % dei casi (in medicina si parla di "falsi positivi") cioè $P(T^+/\overline{M})=0{,}003$.*Se una persona risulta positiva al test qual è la probabilità che sia effettivamente malata?*

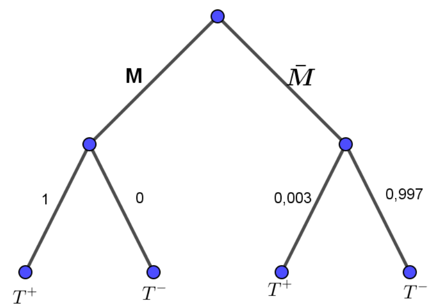
Vogliamo cioè calcolare $p\left(M/_{T^+}\right)$.

Poiché $$p\left(M\cap T^+\right)=p(M)\cdot p\left(T^+/_{M}\right) \quad \text{e} \quad p\left(M\cap T^+\right)=p\left(T^+\right)\cdot p\left(M/_{T^+}\right)$$

$$p(M)\cdot p\left(T^+/_{M}\right)=p\left(T^+\right)\cdot p\left(M/_{T^+}\right)$$

e quindi $$p\left(M/_{T^+}\right)=\frac{p(M)\cdot p\left(T^+/_{M}\right)}{p\left(T^+\right)}$$

Rappresentiamo la situazione con un diagramma ad albero:



Calcoliamo $p\left(T^+\right)$:

$$p\left(T^+\right)=p(M)\cdot p\left(T^+/_{M}\right)+p\left(\overline{M}\right)\cdot p\left(T^+/_{\overline{M}}\right)=0{,}002\cdot 1+0{,}998\cdot 0{,}003=0{,}002+0{,}00299\cong 0{,}005$$

In conclusione $$p\left(M/_{T^+}\right)=\frac{1\cdot 0{,}002}{0{,}005}=0{,}4$$

PROBLEMI
DISTRIBUZIONE BINOMIALE E TEOREMA DI BAYES

1. Un test è costituito da 10 domande, ognuna con 4 possibili risposte di cui solamente una è corretta. Se uno studente risponde a caso, qual è la probabilità che:
   a) non risponda correttamente a nessuna domanda
   b) risponda correttamente ad almeno 6 domande

   [0,056 ; 0,02]

2. Comprando un gratta - e - vinci c'è una probabilità dell'1% di vincere qualcosa. Calcola la probabilità che, comprando 10 biglietti, si vinca almeno 1 premio.

   [0,1]

3. Se si lancia una moneta per 20 volte, qual è la probabilità che esca Testa almeno 10 volte?

   [0,588]

4. Se si lancia un dado, non truccato, per 10 volte, qual è la probabilità che non esca mai il 6?

   [circa 0,16]

5. Il 22% degli individui appartenenti a una data popolazione adulta risulta fumatore (F). E' noto inoltre che l'85% dei fumatori ed il 20% dei non fumatori sono affetti da malattie respiratorie (M).
   Determina la probabilità che una persona affetta da malattie respiratorie sia un fumatore.

   [P (fumatore/malato) $= P(F/M) = 0{,}55$]

6. Una compagnia di assicurazioni ritiene che gli assicurati possano essere suddivisi in due classi: a rischio di incidente e non a rischio di incidente. Le loro statistiche mostrano che una persona a rischio avrà un incidente di qualche tipo all'interno del periodo di un anno con probabilità 0,4, mentre tale probabilità è pari a 0,2 per le persone non a rischio.
   a) Supponiamo che il 30 % delle persone sia a rischio, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente nel primo anno di polizza?
   b) Supponiamo che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dalla prima stipulazione della polizza. Qual è la probabilità che sia a rischio?

   [0,26 ; 0,46]

7. Un'azienda produce penne: la probabilità che una penna sia difettosa è del 5%. Il controllo di qualità accetta tutte le penne senza difetti e scarta il 90% delle penne difettose (quindi il 10% delle penne difettose passa il controllo). Qual è la probabilità che una penna che ha superato il controllo di qualità sia difettosa?

   [0,05% circa]

8. Supponiamo che un'indagine statistica abbia rilevato che in Italia il 20% delle persone soffra di ipertensione e che tra gli ipertesi il 60% sia fumatore. Sappiamo inoltre che tra le persone non ipertese il 50% sono comunque fumatori. Supponendo che una persona sia un fumatore, quale risulta la probabilità che sia iperteso?

   [23% circa]

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE
CALCOLO DELLE PROBABILITA'

1. Una cassaforte ha un codice di 4 cifre scelte tra 0,1,2…9 (che si possono ripetere). Qual è la probabilità di indovinare il codice al primo tentativo?

[$\frac{1}{10^4}$]

2. In una classe di 20 studenti ci sono 12 maschi e 8 femmine. Se l'insegnante interroga due studenti, qual è la probabilità che siano interrogate due femmine?

[$\frac{14}{95}$]

3.Due giocatori A e B scommettono sull'uscita della somma uguale a 12 nel lancio di due dadi: A scommette sull'uscita della somma uguale a 12 e B sull'evento contrario.
Se A vince € 35, quanto deve vincere B perché il gioco sia equo?

[€ 1]

4. In 4 lanci di una moneta (non truccata) qual è la probabilità che esca sempre testa? E che esca almeno una volta testa? E due volte testa e due volte croce?

[$\frac{1}{2^4}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{3}{8}$]

5. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono tre: qual è la probabilità di aver pescato 3 sette?

[$\frac{1}{2470}$]

6. Pescando tre carte da un mazzo di 40 carte , qual è la probabilità di pescare il sette di quadri?

[$\frac{3}{40}$]

7. Giocando a poker, qual è la probabilità di avere in mano 4 re ?

[$\frac{1}{7192}$]

8. Supponendo che tutti gli studenti debbano ancora essere interrogati, qual è la probabilità che ha uno studente di essere interrogato se l'insegnante chiama a caso tre persone e nella classe ci sono 20 studenti?

[$\frac{3}{20}$]

9. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità che siano 4 assi?

[$\frac{1}{91390}$]

10. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità di avere esattamente 3 assi?

[$\frac{72}{45695}$]

11. Si lancia una moneta 5 volte di seguito. Qual è la probabilità che escano almeno tre teste?

[$\frac{1}{2}$]

12. Qual è la probabilità, ricevendo 5 carte da un mazzo di 32, di avere esattamente tre assi?

[$\frac{27}{3596}$]

13. Giocando a poker (prendo cinque carte da un mazzo di 32) qual è la probabilità di avere 5 carte di cuori?

[$\frac{1}{3596}$]

14. Estraendo 5 carte da un mazzo di 32, qual è la probabilità di estrarre cinque carte dello stesso seme?

[$\frac{1}{899}$]

15. Lanciando due dadi, qual è la probabilità di ottenere somma 7?

[$\frac{1}{6}$]

16. Qual è la probabilità di fare 10 al totocalcio? (indovinare 10 risultati su tredici partite)

[$\frac{2288}{3^{13}}$]

17. Qual è la probabilità che esca il 90 sulla ruota di Firenze? (probabilità di un estratto semplice cioè si gioca solo il 90 e si vince se viene estratto tra i cinque numeri della ruota di Firenze)

[$\frac{1}{18}$]

18. Da un mazzo di 40 carte si estraggono tre carte. Qual è la probabilità che siano tutte di cuori? E qual è la probabilità che siano tutte dello stesso seme?

[$\frac{3}{247}$; $\frac{12}{247}$]

19. Lanciando due monete qual è la probabilità di:

    a) avere due teste;
    b) avere almeno una testa;
    c) avere la stessa faccia (o due teste o due croci).

$[\frac{1}{4} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{2}]$

20. Lanciando tre monete qual è la probabilità di :

    a) avere tre teste;
    b) avere almeno una testa;
    c) avere esattamente una testa.

$[\frac{1}{8} \; ; \; \frac{7}{8} \; ; \; \frac{3}{8}]$

21. In una classe di 23 studenti ci sono 10 maschi e 13 femmine. Vengono eletti i due rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che:
    a) siano entrambe femmine;
    b) siano entrambi maschi;
    c) siano un maschio e una femmina.

$[\frac{78}{253} \; ; \; \frac{45}{253} \; ; \; \frac{130}{253}]$

22. Si mescolano 10 carte e se ne danno 5 al giocatore A e 5 al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

[252]

23. Si mescolano 10 carte e si distribuiscono 3 al giocatore A e tre al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

[4200]

24. Qual è la probabilità di fare 9 al totocalcio? (9 risultati corretti)

[circa 0,007]

25. Vuoi acquistare un nuovo televisore e nel negozio ci sono tre modelli con prezzi 540 euro, 608 euro, 654 euro. Inoltre vuoi acquistare un decoder per il vecchio televisore e ci sono due modelli al costo rispettivamente di 32 euro e 48 euro. Scegliendo a caso sia il televisore che il decoder qual è la probabilità di spendere meno di 700 euro? E più di 650 euro?

$[\frac{5}{6} ; \; \frac{1}{2}]$

26. Tre persone prendono l'ascensore a piano terra di un edificio a 6 piani. Supponendo che ciascuna persona scenda a caso a uno dei piani dell'edificio calcola:
a) la probabilità che scendano tutte al primo piano;
b) la probabilità che scendano tutte allo stesso piano.

$[\frac{1}{216} ; \; \frac{1}{36}]$

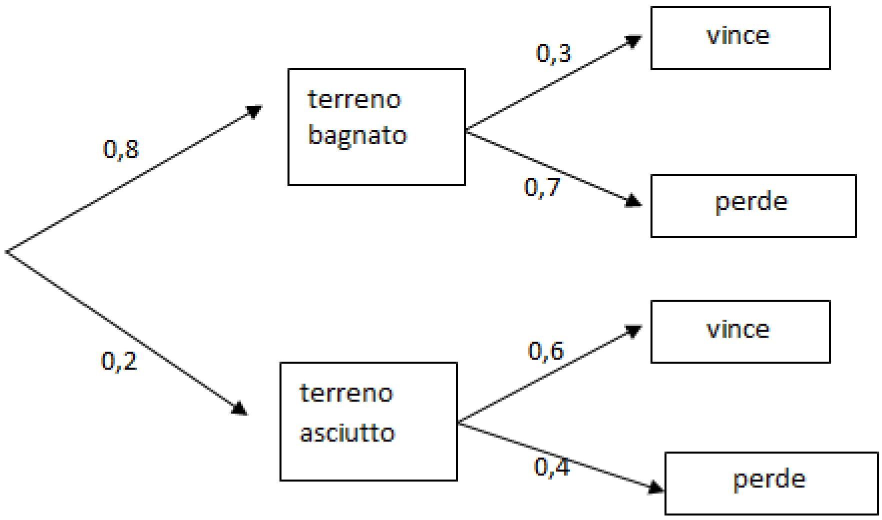
27. In una città ci sono 6 hotel e un dato giorno tre persone prenotano ciascuna una camera in uno degli hotel (in modo casuale). Qual è la probabilità che le tre persone si trovino in tre hotel diversi?

[$\frac{5}{9}$]

28. *Invalsi 2017/18*

In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara:
- 0,3 se il terreno è bagnato;
- 0,6 se il terreno è asciutto.

La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara?

[0,36]

29. In un ufficio bancario ci sono due sportelli A,B di cui almeno uno sempre aperto: la probabilità che A sia aperto è 0,7 e la probabilità che B sia aperto è 0,6. Qual è la probabilità che siano aperti entrambi gli sportelli?

[0,3]

30. Due cacciatori, che colpiscono il bersaglio con probabilità rispettive 85% e 75%, sparano (una sola volta) contemporaneamente ad una lepre. Qual è la probabilità che la lepre non venga colpita?

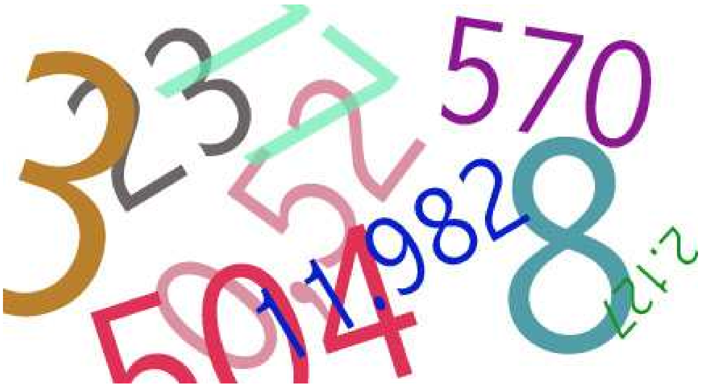
[3,75%]

31. Si hanno a disposizione due monete, una regolare e una truccata in modo che la probabilità che esca testa sia $\frac{1}{3}$. Si sceglie a caso una delle due monete e si lancia: qual è la probabilità che esca testa?

[$\frac{5}{12}$]

SCHEDE DI LAVORO

SCHEDA 1
Qual è la probabilità di indovinare un codice segreto?



*"Qual è la probabilità, al primo tentativo, di scoprire una password costituita da una successione **di cinque cifre** scelte tra le dieci cifre 0,1,2….9?"*

Osservazione iniziale
Bisognerà distinguere il caso in cui le cifre si possono ripetere oppure no.

1) Caso in cui le cifre si possono ripetere
Il numero di tutte le pw di 5 cifre (anche ripetute) che si possono formare è

…………………..

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

p(indovinare la pw) = ……

2) Caso in cui le cifre sono distinte
Il numero di tutte le pw di 5 cifre distinte che si possono formare è

………………..

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

p(indovinare la pw) = ……

SCHEDA 2
Qual è la probabilità di essere interrogato?

"L'insegnante di matematica deve interrogare ancora tutti gli studenti della IVB e decide di chiamarne 5. Se gli studenti della IVB sono 27 qual è la probabilità che un dato studente sia interrogato?"

Osservazioni

Chiamiamo Tommaso lo studente.
Indichiamo con E l'evento "l'insegnante chiama 5 studenti e tra loro c'è Tommaso": calcoliamo il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli.

In quanti modi diversi l'insegnante può scegliere i 5 studenti da interrogare? (spiega il tuo ragionamento)

....

....

Ma quanti sono i possibili gruppi di cinque studenti che contengono Tommaso? (spiega il tuo ragionamento)

....

....

Quindi la probabilità che Tommaso sia interrogato risulta………………

SCHEDA 3

Qual è la somma più probabile nel lancio di tre dadi?

*Se **lanciamo tre dadi** e consideriamo la **somma dei punti** che si presentano, su quale somma conviene scommettere?*

Ai tempi di Galileo Galilei alcuni giocatori incalliti si erano accorti che la somma 10 compariva più frequentemente della somma 9 , ma questo sembrava strano perché

la **somma 9** si può avere in sei casi 6-2-1; 5-3-1; 5-2-2; 4-4-1; 4-3-2; 3-3-3

e anche la **somma 10** si può avere in sei casi 6-3-1; 6-2-2; 5-4-1; 5-3-2; 4-4-2; 4-3-3

Chiesero quindi spiegazione di questo a Galileo…

Suggerimento
Considera l'uscita dei tre numeri sui tre dadi come **terne ordinate**: i casi possibili sono quindi ……..

Per determinare il numero dei casi favorevoli considera le terne che danno una data somma.
Per esempio per avere somma 9 posso avere
6-2-1 in **sei modi** $(6,2,1)$, $(2,6,1)$ ecc.;
5-3-1 in …………
Ecc.

In conclusione
$$p(S=9)=....$$
$$p(S=10)=.....$$
$$p(S=11)=.....$$
$$p(S=12)=.....$$

Quindi su quale somma conviene scommettere ?

SCHEDA 4
Qual è la probabilità di vincere al lotto?

*Se gioco un numero al **LOTTO** (su una determinata ruota) qual è la probabilità di vincere? (si parla di probabilità di vincere un "estratto semplice")*

Ricordiamo che nel gioco del LOTTO vengono estratti (su ciascuna Ruota) 5 numeri tra 90 numeri (da 1 a 90).

Quante sono le cinquine possibili?……………………………………………………………..

Quanti sono le cinquine in cui compare il numero che ho giocato?…………………………………

Quindi la probabilità che esca il numero che ho giocato è………………………………………….

Se gioco due numeri, qual è la probabilità di vincere (cioè la probabilità che tra i cinque estratti ci siano i due numeri che ho giocato) ?
(si chiama ambo secco)

………………………………………………………………………………………………….

E qual è la probabilità di vincere giocando tre numeri (probabilità di fare un terno-secco) , quattro numeri (quaterna secca), cinque numeri (cinquina)?

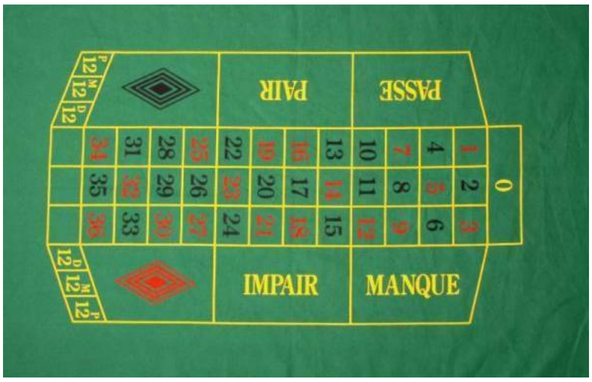
………………………………………………………………………………………………….

Nel gioco del lotto l'estratto-semplice viene pagato 11,232 volte la posta, l'ambo 250 volte la posta, il terno 4250 volte la posta , la quaterna 80000 volte la posta, la cinquina 1000000 di volte la posta : **secondo te il gioco del LOTTO è un gioco equo ?**

Fai una breve ricerca per scoprire come è nato il gioco del LOTTO.

SCHEDA 5
Rien ne va plus!

Nel gioco della roulette francese ci sono 36 numeri rossi e neri alternati da 1 a 36 e lo zero (verde).



Si può puntare su:

- sull'uscita di un dato numero;
- su un "cavallo" cioè si mette la fiche a "cavallo" su due numeri e si vince se esce uno dei due;
- sull'uscita di un numero compreso in una data dozzina (1-12; 13-24; 25-36);
- sull'uscita di un numero tra 18 numeri (1-18; 19-36);
- sull'uscita di un numero pari;
- sull'uscita di un numero dispari;
- sull'uscita di un rosso o di un nero.

Il gioco della roulette francese è un gioco equo?

Vediamo le varie "puntate":

- L'uscita di un dato numero viene data 35 a 1 cioè se il rischio è r abbiamo un guadagno $g = 35 \cdot r$.
  Calcoliamo la probabilità che esca un dato numero……
  Ti sembra che questa scommessa sia equa?
- L'uscita di un numero pari (dispari) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero pari…………
- L'uscita di un numero rosso (nero) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero rosso………
- L'uscita di un numero compreso tra 18 numeri (1-18;19-36) viene data 1 a 1 ………
- L'uscita di un numero compreso in una dozzina viene data 2 a 1 ....
- L'uscita di un numero a cavallo tra due viene data 17 a 1 ……………………………

SCHEDA 6
Qual è la probabilità di vincere al totocalcio?

La schedina del totocalcio è costituita da 13 caselle che devono essere riempite con 1,2,X (possibili risultati di tredici partite di campionato di una data domenica) : 1= vince la squadra che gioca in casa, 2= vince la squadra che gioca in trasferta, X= pareggio.

Riempiendo a caso la schedina, qual è la probabilità di fare 13 al totocalcio?

Riempiendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 12 al totocalcio?

Riempiendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 11 al totocalcio?

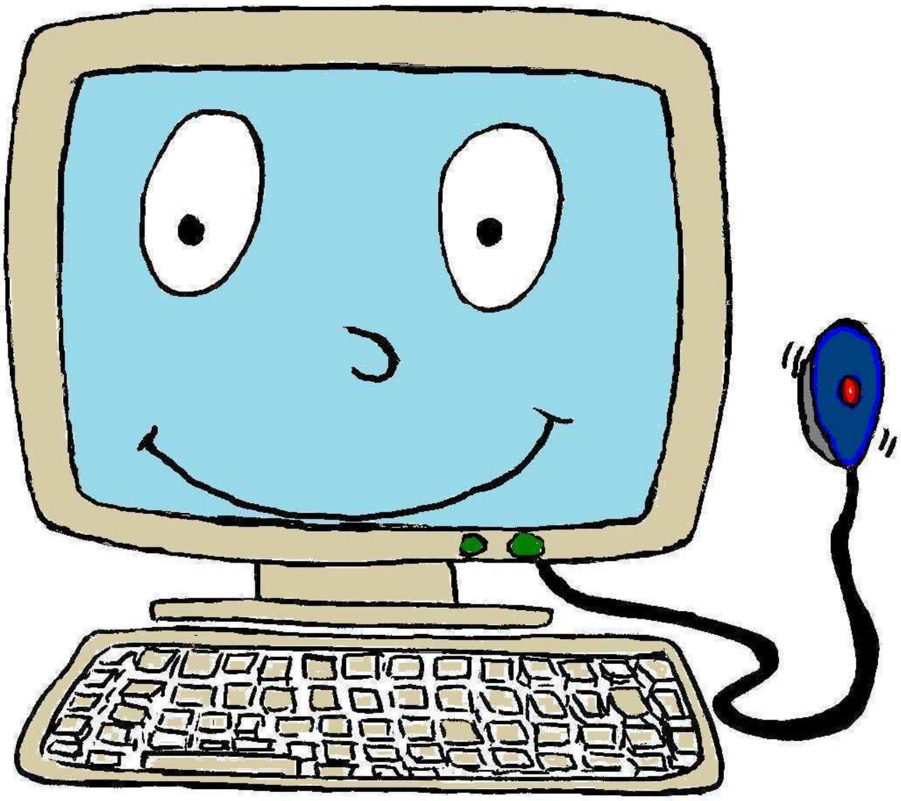
……………

$p(13) =$ …..

$p(12) =$ ......

$p(11) =$ ....

Laboratorio di informatica



SCHEDA 1

FUNZIONI GONIOMETRICHE

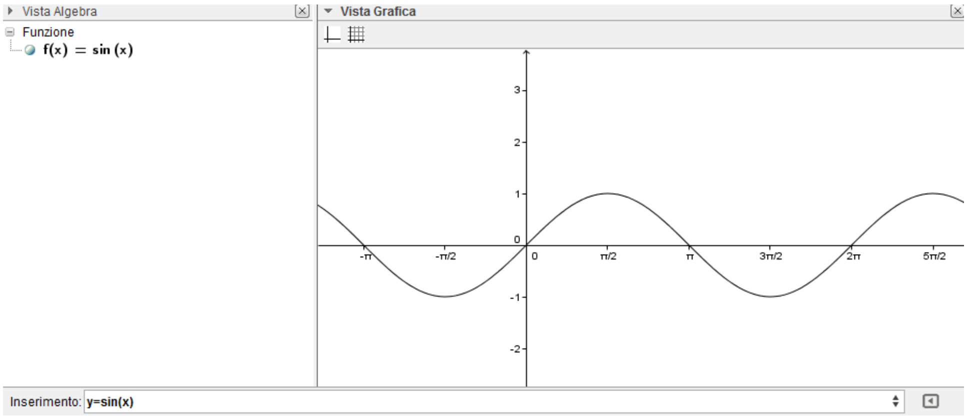
Riprendiamo il software Geogebra e utilizziamolo per lo studio delle funzioni goniometriche.

Nota: possiamo scegliere come unità di misura sull'asse x $\frac{\pi}{2}$ digitando:

Opzioni – avanzate - preferenze vista grafica - asse x – unità π - distanza $\frac{\pi}{2}$

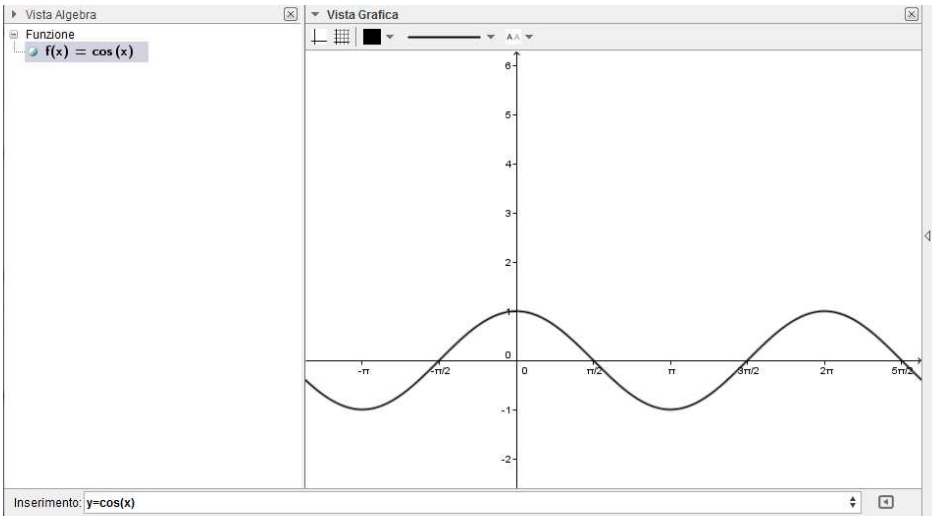
1) **Grafico di** $y = senx$

Digita nella barra di inserimento l'equazione di $y = \sin(x)$ (devi scrivere sin e mettere le parentesi intorno all'argomento della funzione): comparirà il grafico della funzione seno.
Osserviamo che il periodo è 2π e che l'ampiezza della funzione è 1.



2) **Grafico di** $y = \cos x$

Inserisci l'equazione $y = \cos(x)$: osserviamo che anche il periodo del coseno è 2π e che l'ampiezza delle oscillazioni è 1; inoltre il grafico del coseno risulta uguale a quello del seno ma traslato di $\frac{\pi}{2}$.

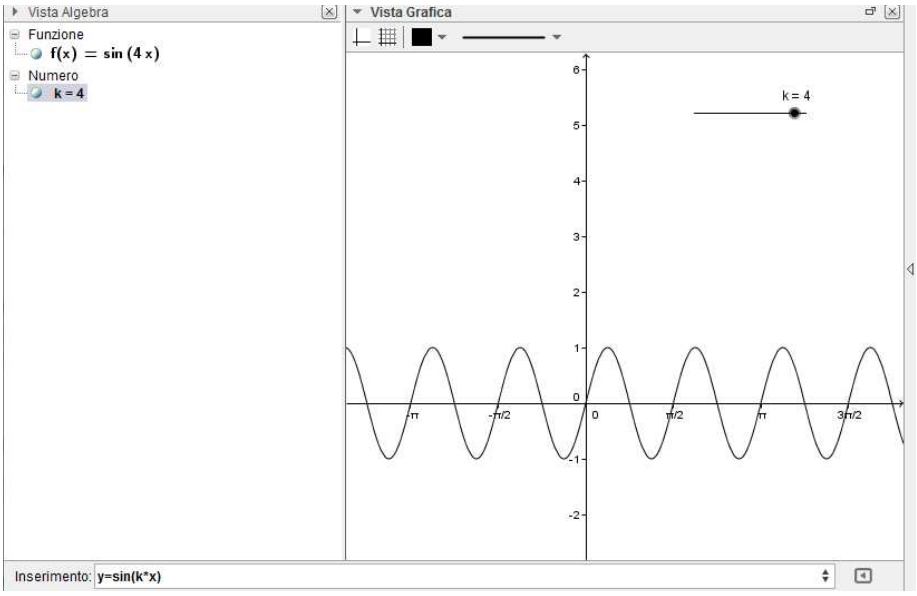


Esercizio: inserisci l'equazione $y = tgx$ e stampa il grafico indicandone le caratteristiche.

SCHEDA 2

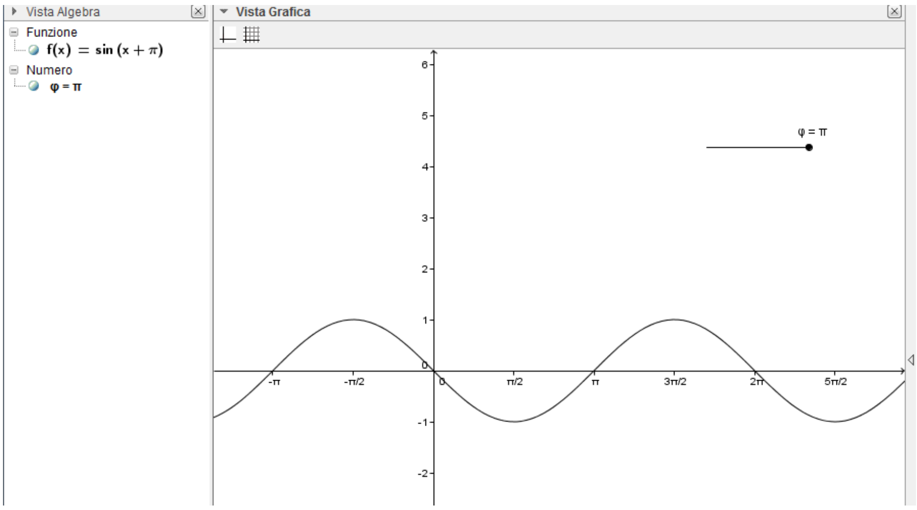
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1)Prova a studiare la funzione $\boxed{y = \sin(k * x)}$ utilizzando uno "slider" k.
Attivando la funzione "muovi" (primo pulsante da sinistra nella barra in alto) possiamo capire che k determina il periodo della funzione. Per esempio la funzione in figura ha k = 4 ed ha un periodo di $\frac{2\pi}{4}$ poiché nello spazio di 2π si è ripetuta quattro volte.

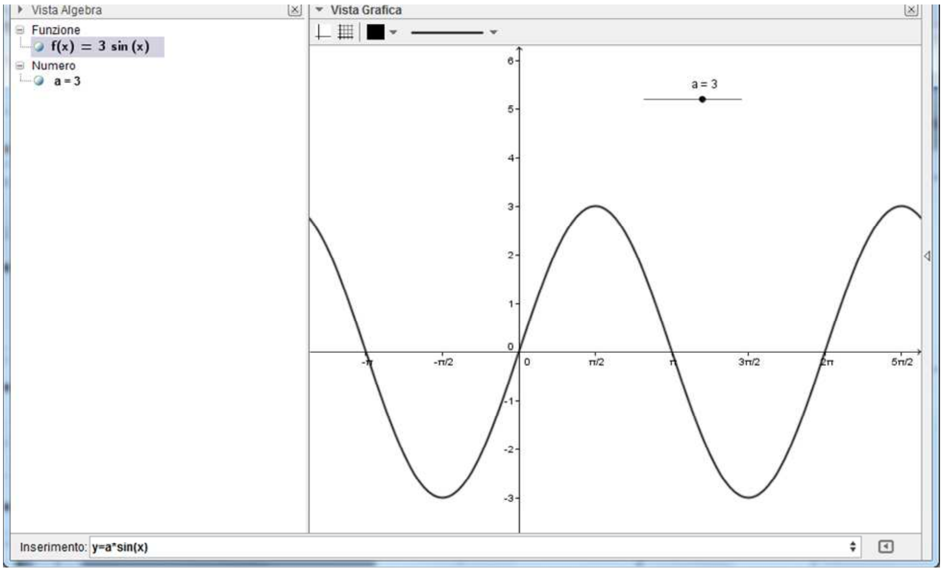


Quindi in generale la funzione $y = \sin(k * x)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$.

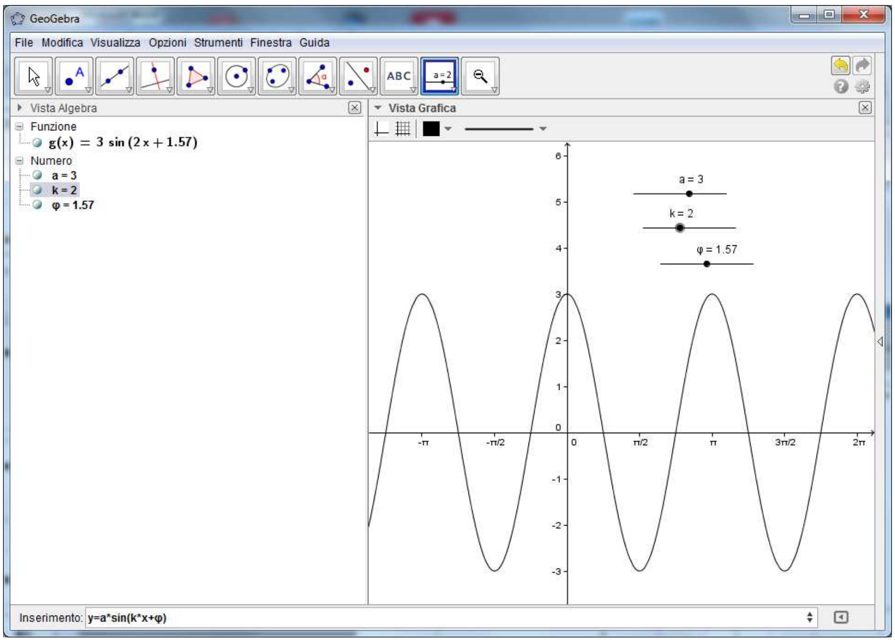
2)Prova a studiare $\boxed{y = \sin(x + \varphi)}$ utilizzando uno slider φ.
Ci accorgiamo che variando φ il grafico del seno trasla orizzontalmente: se per esempio $\varphi = \pi$ è come se il grafico si fosse spostato a sinistra di π.



3)Vediamo infine cosa accade se poniamo un parametro davanti alla funzione, cioè studia $\boxed{y = a * \sin(x)}$. Ci accorgiamo che cambia l'ampiezza dell'oscillazione del grafico: per esempio nel grafico in figura dove a = 3 i valori oscillano tra -3 e 3 .



4)Prova quindi a scrivere $\boxed{y = a * \sin(k * x + \varphi)}$ dove si utilizzano i tre slider a, k, φ: abbiamo una funzione sinusoidale generale in cui ho un periodo $T = \dfrac{2\pi}{k}$, traslata e di ampiezza a. In figura è visualizzata la sinusoide con $a = 3$, $k = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.



Esercizio: prova a fare la stessa cosa con la funzione $y = \cos(x)$ e stampa alcuni esempi.

SCHEDA 3

TRIGONOMETRIA

Sappiamo che un triangolo è univocamente determinato se conosciamo:

- due lati e l'angolo compreso;
- un lato e due angoli;
- tre lati (purché ogni lato sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza)

Supponendo di adottare l'usuale convenzione di indicare con *a* il lato opposto al vertice A, ecc. e con α l'angolo di vertice A ecc., costruisci con Geogebra un triangolo avente:

Esercizio 1
a=10, b=8, $\gamma = 30°$

Esercizio 2
a=10, $\beta = 45°$, $\gamma = 70°$

Esercizio 3
a=10, b=8 , c=5

Esercizio 4
Se si conoscono due lati e un angolo non compreso tra essi il triangolo è individuato?
Considera per esempio a=6 , b=8 $\alpha = 45°$.

Suggerimento: parti dal disegnare il segmento $\overline{AC} = b = 8$ e l'angolo $\hat{A} = 45°$ con il comando angolo di una data misura (e poi traccia la semiretta di origine A). Traccia la circonferenza di centro C e raggio *a* …
Trovi un solo triangolo?

Considerando b=8 e $\alpha = 45°$ **per quali valori di *a*** si ha

nessun triangolo………………………..

un solo triangolo …………………………

due triangoli……………………………….

SCHEDA 4

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE
Funzioni esponenziali

Funzioni esponenziali

Proviamo a disegnare con Geogebra il grafico di una funzione esponenziale.

Cominciamo con il digitare nella barra in basso

y = 2^x

oppure

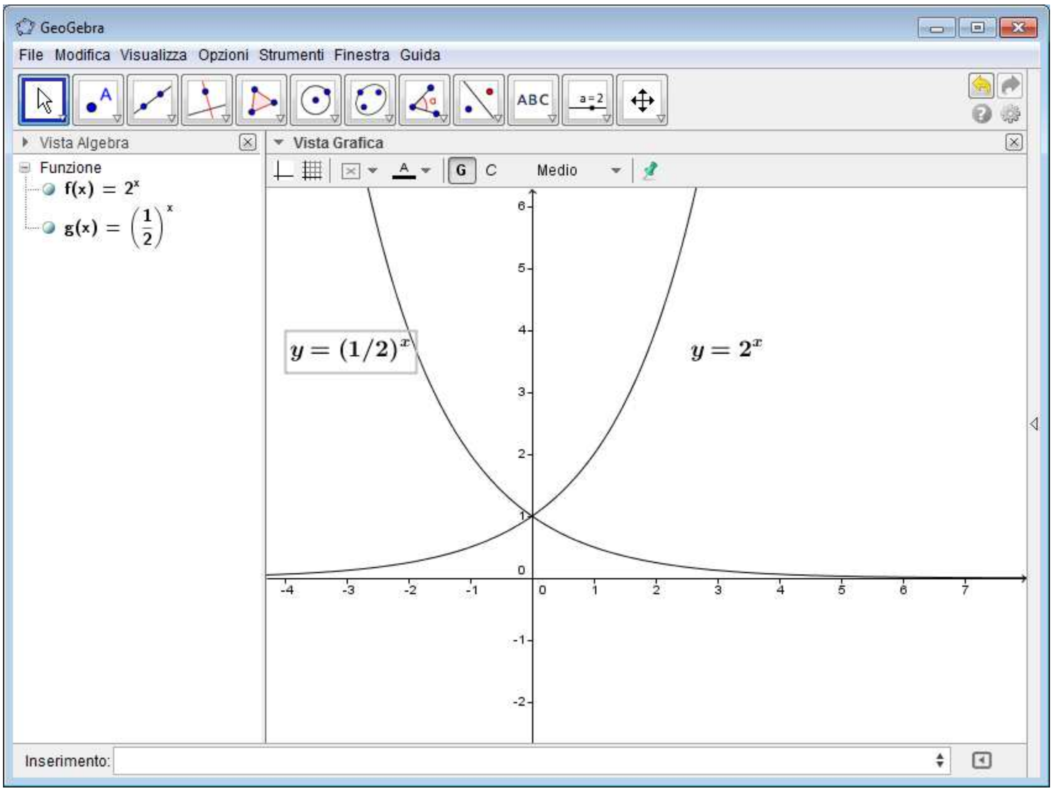
y = (1/2)^x

e osserviamone il diverso andamento.

In generale per visualizzare la funzione esponenziale di base a possiamo creare lo slider a (attenzione : a deve essere positivo) e inserire la funzione

y=a^x

Se attiviamo il pulsante "muovi" e la traccia del grafico (clic con il destro sul grafico e "traccia on") variando la base a otterremo i vari grafici.
Stampa qualche grafico al variare della base a indicandone le differenze.



SCHEDA 5

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Funzioni logaritmiche

Funzioni logaritmiche

Nel programma Geogebra (versione almeno 5.0) possiamo disegnare i grafici della funzione logaritmica in una qualsiasi base.

Se digitiamo nella barra di inserimento

$$y = \log$$

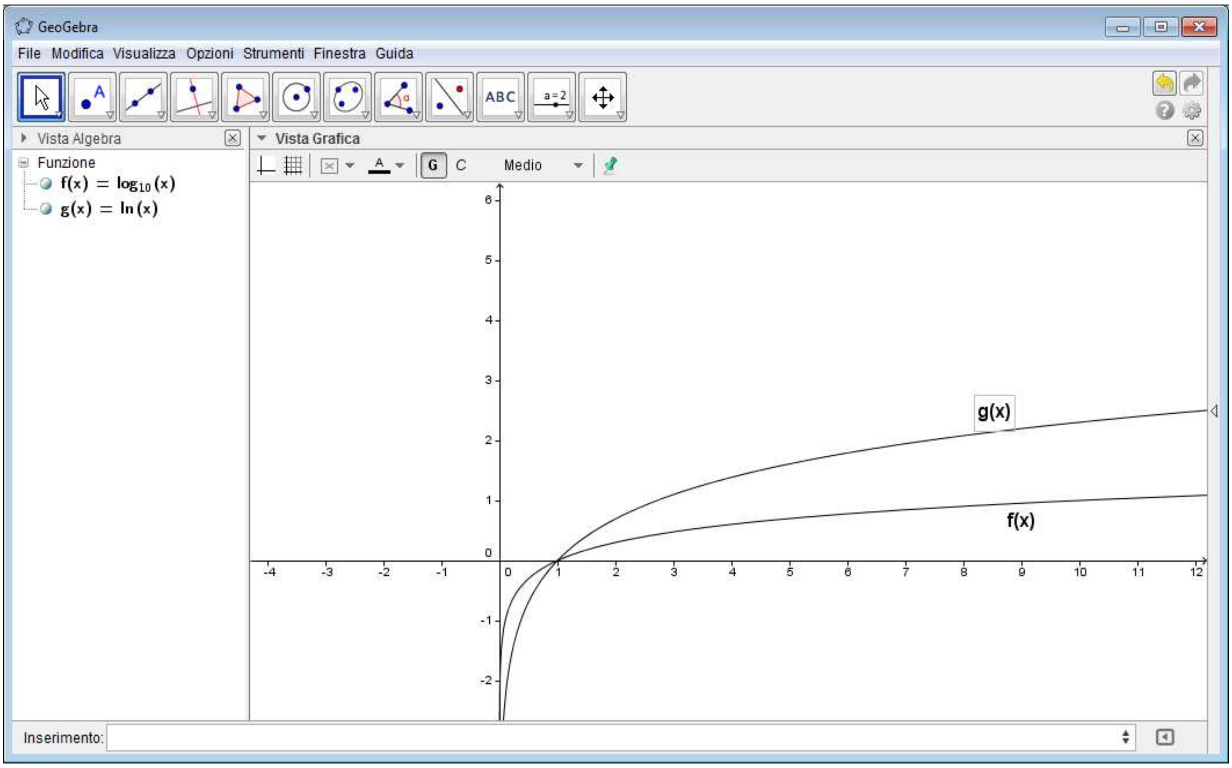
compaiono le varie scelte di completamento: $\log(x)$ sta per logaritmo in base *e* (che viene indicato con *lnx*); se scriviamo log10(x) viene visualizzato il grafico di $y = \log_{10} x$ (infatti per x=10 si ha y=1) ma possiamo disegnare il logaritmo in base qualsiasi introducendola prima della x.

Per esempio $y = \log(3, x)$ corrisponde a $y = \log_3 x$.

Stampa alcuni grafici e metti in evidenza le differenze.

Crea uno slider *a* e inserisci $y = \log(a, x)$.

Quale deve essere l'intervallo di variazione di *a*? Osserva e stampa i grafici che ottieni al variare della base *a*, indicandone le differenze e facendo le tue osservazioni.

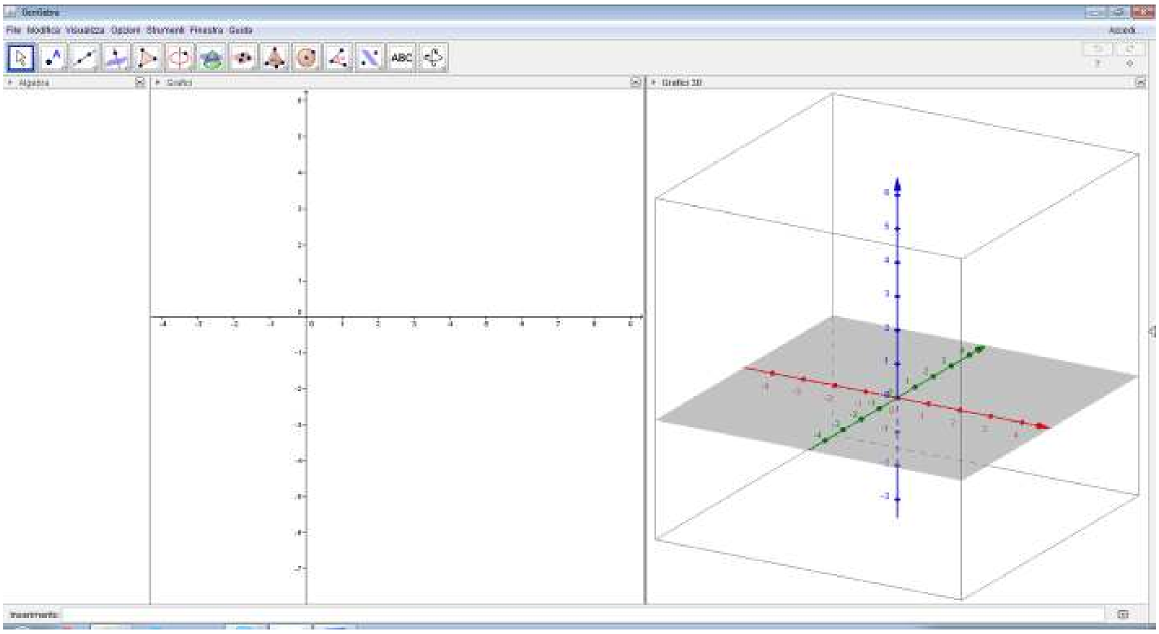


SCHEDA 6

GEOMETRIA DELLO SPAZIO
Geogebra 3D

Geogebra prevede anche la possibilità di lavorare in ambiente 3D.

Seleziona: Visualizza - Grafici 3D
Sullo schermo, oltre all'ambiente 2D con il sistema di riferimento (O,x,y), comparirà una terna di assi cartesiani (O,x,y,z) e **la barra degli strumenti 3D.**
Possiamo fare comparire la barra dei comandi 2D/3D cliccando con il tasto del mouse sulla zona grafici 2D/3D.
Notiamo inoltre che è presente anche la vista "algebra" e la barra di inserimento.
Ecco come appare lo schermo: l'asse *x* è rosso, l'asse *y* è verde e l'azze *z* è azzurro.

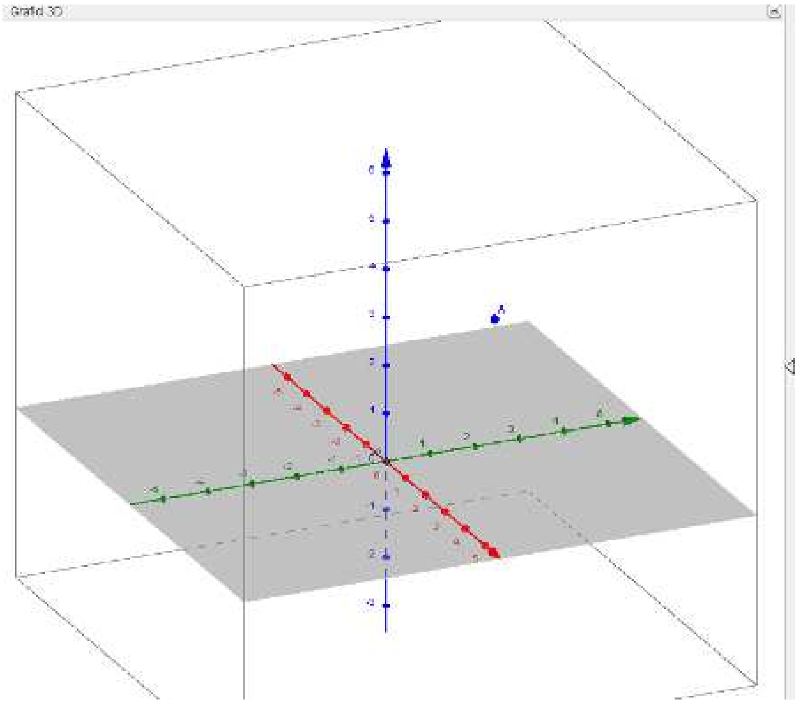


Proviamo i vari comandi dei pulsanti della barra 3D (un pulsante può aprire vari comandi) .

Pulsante "Muovi": funziona come nei grafici 2D, ma un punto può essere mosso solo in orizzontale (compaiono delle frecce orizzontali) o, facendo un secondo clic, in verticale (parallelamente all'asse z) quando compaiono delle frecce verticali.

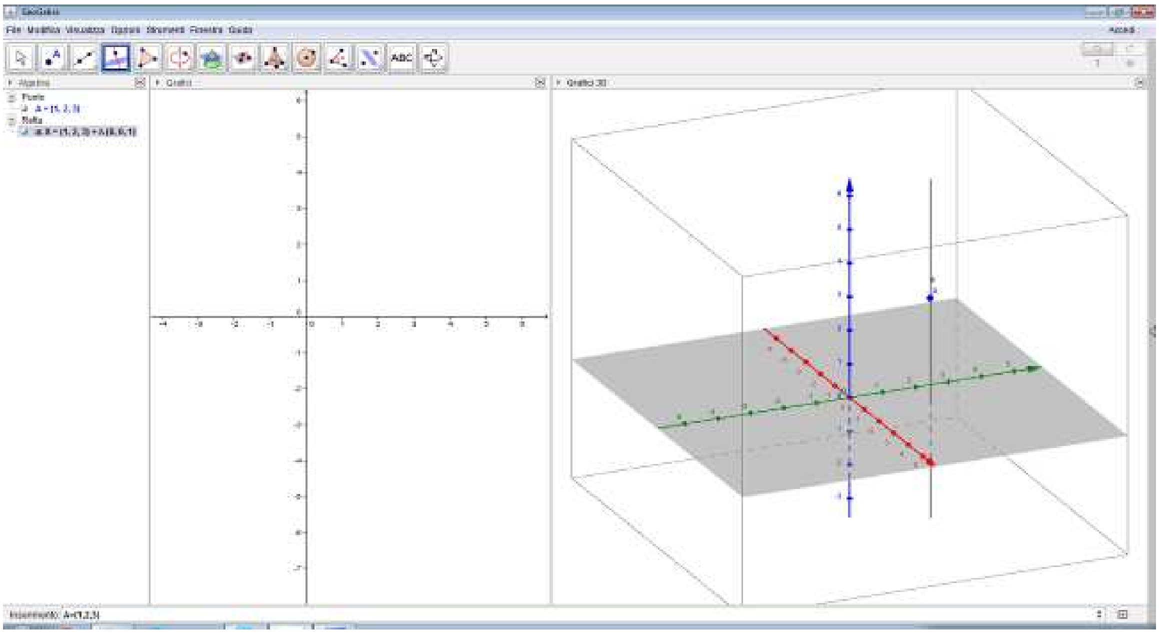
Pulsante "Punto": ci sono vari comandi che si possono scegliere a partire da questo pulsante come nei grafici 2D (punto su oggetto, intersezione, punto medio ecc).
Possiamo però creare un punto direttamente solo sul piano *xy:* se vogliamo un punto non appartenente al piano xy dobbiamo prima creare un punto sul piano *xy* e poi, facendo clic con il muose per far apparire le frecce verticali, possiamo variarne la quota.

Possiamo comunque creare un punto anche inserendolo da tastiera: per esempio digitando A=(1,2,3).



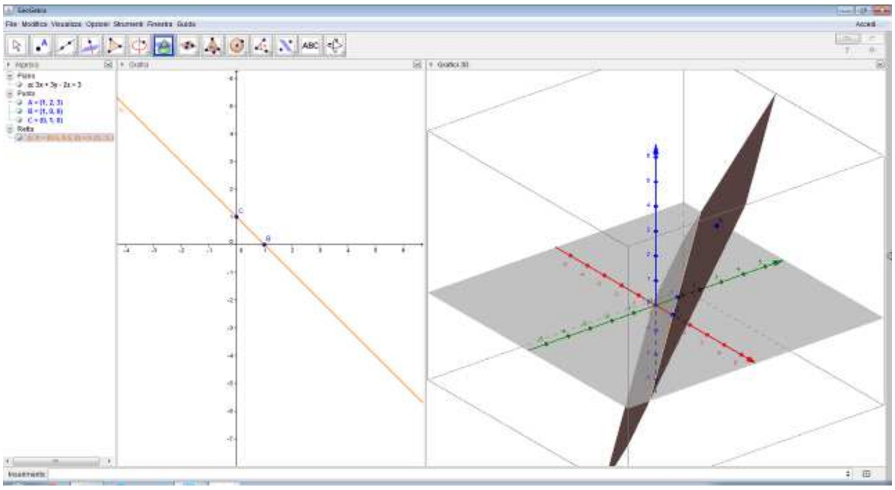
Pulsante "Retta" :questo comando ed i comandi collegati hanno lo stesso funzionamento che nei grafici 2D.

Pulsante "Retta perpendicolare" ad un piano: se per esempio vogliamo la retta per il precedente punto A(1,2,3) perpendicolare al piano (O,*xy*) basta cliccare su A e poi sul piano *xy*.



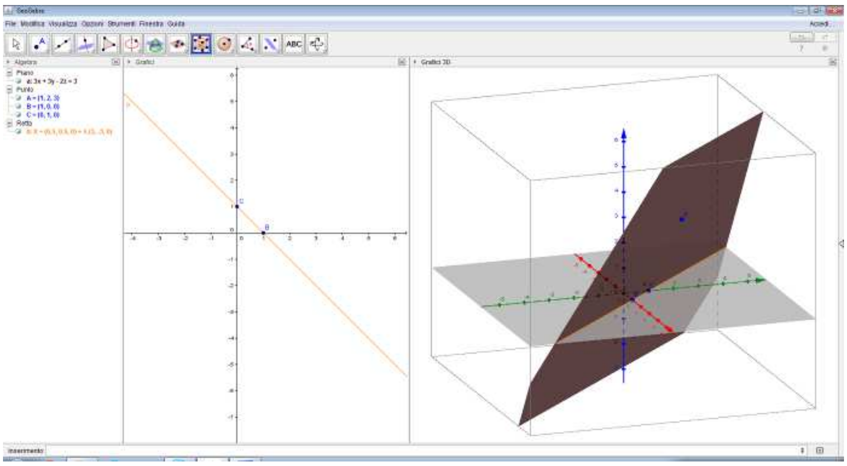
Pulsante "poligono", "circonferenza", "testo" ecc. funzionano come per i grafici 2D.

Pulsante "Piano per tre punti"(e gli altri comandi collegati quali piano parallelo e piano perpendicolare): selezionando tre punti non complanari viene creato il piano passante per essi e compare la sua equazione nella vista algebra.
Possiamo intersecare il piano a con il piano xy utilizzando il comando "interseca due superfici" e comparirà la retta intersezione (anche nella vista 2D).



Nota

La rotazione della "vista" (molto utile per esplorare una figura solida) può essere facilmente ottenuta **tenendo premuto il tasto destro del mouse** (posizionato nella zona grafici 3D) e muovendo il mouse.
Ecco come appare la figura precedente dopo aver ruotato la vista :



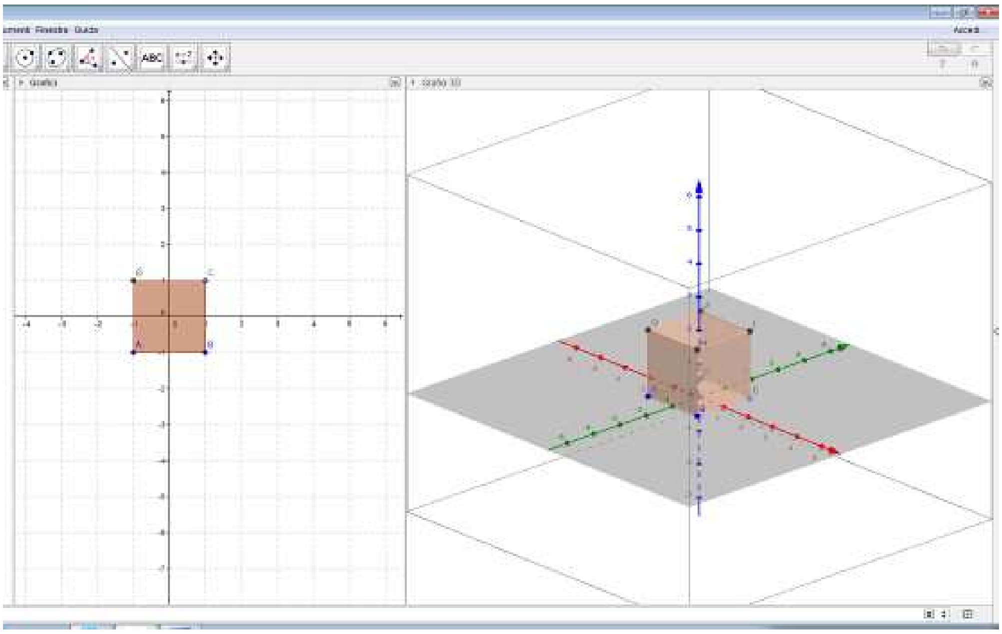
Pulsante "piramide": ci sono una serie di comandi per creare piramidi, prismi, coni, cilindri, tetraedro regolare, cubo ecc.
In particolare il comando "estrusione in piramide o cono" permette di "tirare sù" una piramide (o un cono) partendo da un poligono di base (o da una circonferenza) e nello stesso modo funziona "estrusione in prisma o cilindro".
Ogni comando ha comunque una piccola guida sul suo utilizzo che compare quando viene selezionato e il mouse si trova nel triangolino in basso a destra.

SCHEDA 7

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

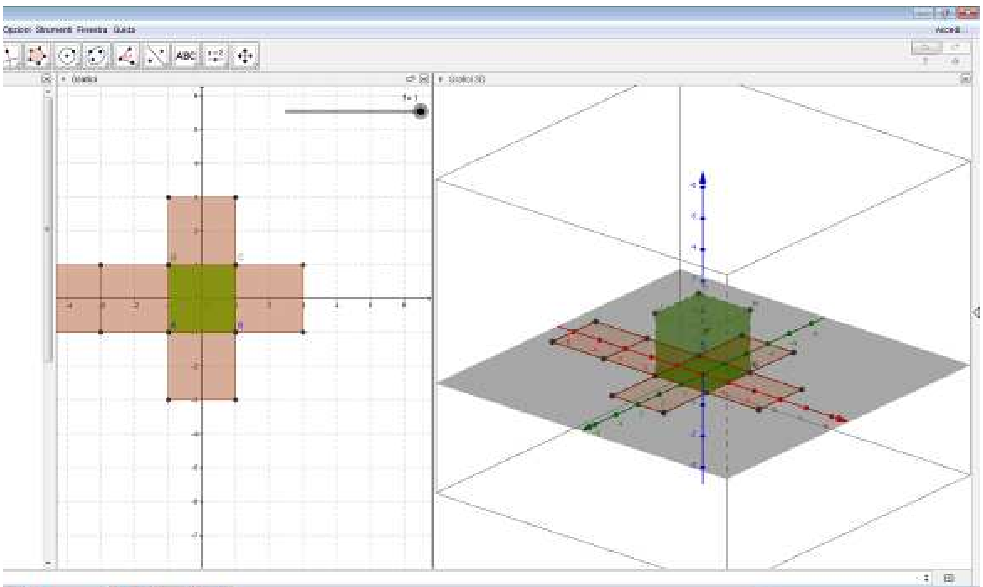
Il cubo

Per costruire un cubo puoi selezionare il comando dal menù e cliccare su due punti in ambiente 3D oppure costruire un quadrato ABCD in ambiente 2D e poi digitare nella barra di inserimento per esempio cubo[A,B].
Nota: per evitare che vengano indicati nella figura le etichette dei vari spigoli possiamo digitare Opzioni- etichettatura- nessun nuovo oggetto.



Nota

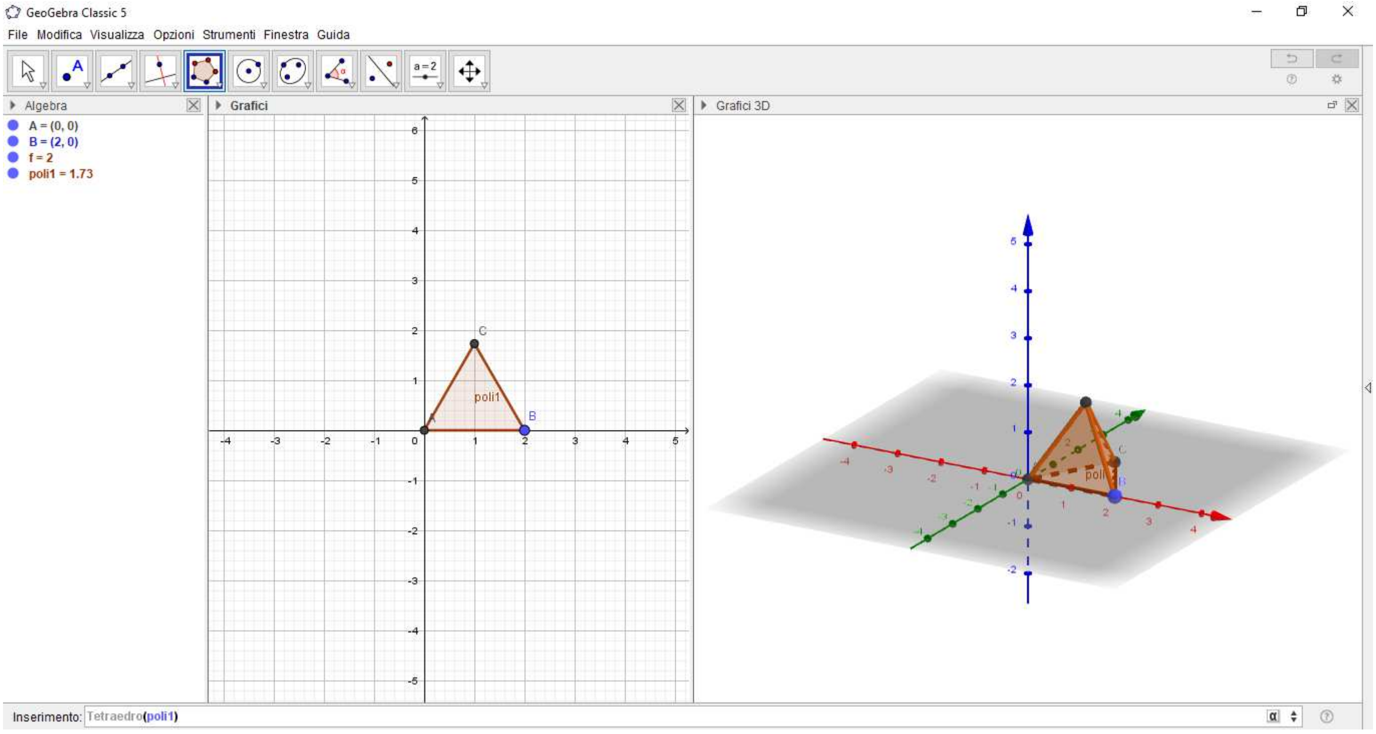
Un comando molto interessante è "sviluppo piano" che fornisce lo sviluppo piano di un poliedro: viene automaticamente anche creato uno slider e se attiviamo muovi e variamo lo slider da 0 a 1 vedremo il poliedro che "si apre" fino al suo sviluppo sul piano xy.



SCHEDA 8

GEOMETRIA DELLO SPAZIO
Poliedri regolari

Esercizio 1
Così come per il cubo prova a costruire un tetraedro regolare sia utilizzando il comando tetraedro presente nel menù che inserendo nella barra di inserimento tetraedro(poli1) dopo aver creato un triangolo equilatero poli1 in ambiente 2D.



Esercizio 2
Dopo aver creato in ambiente 2D un triangolo equilatero (Geogebra gli assegnerà un nome, per esempio poli1), costruisci un ottaedro regolare scrivendo nella barra di inserimento il comando ottaedro(nome del triangolo). Stampalo.

Esercizio 3
Costruisci un dodecaedro regolare : crea un pentagono regolare in ambiente 2D e poi utilizza il comando dodecaedro(nome pentagono). Stampalo.

Esercizio 4
Costruisci un icosaedro regolare: crea un triangolo equilatero e poi usa il comando icosaedro (nome triangolo). Stampalo.

SCHEDA 9

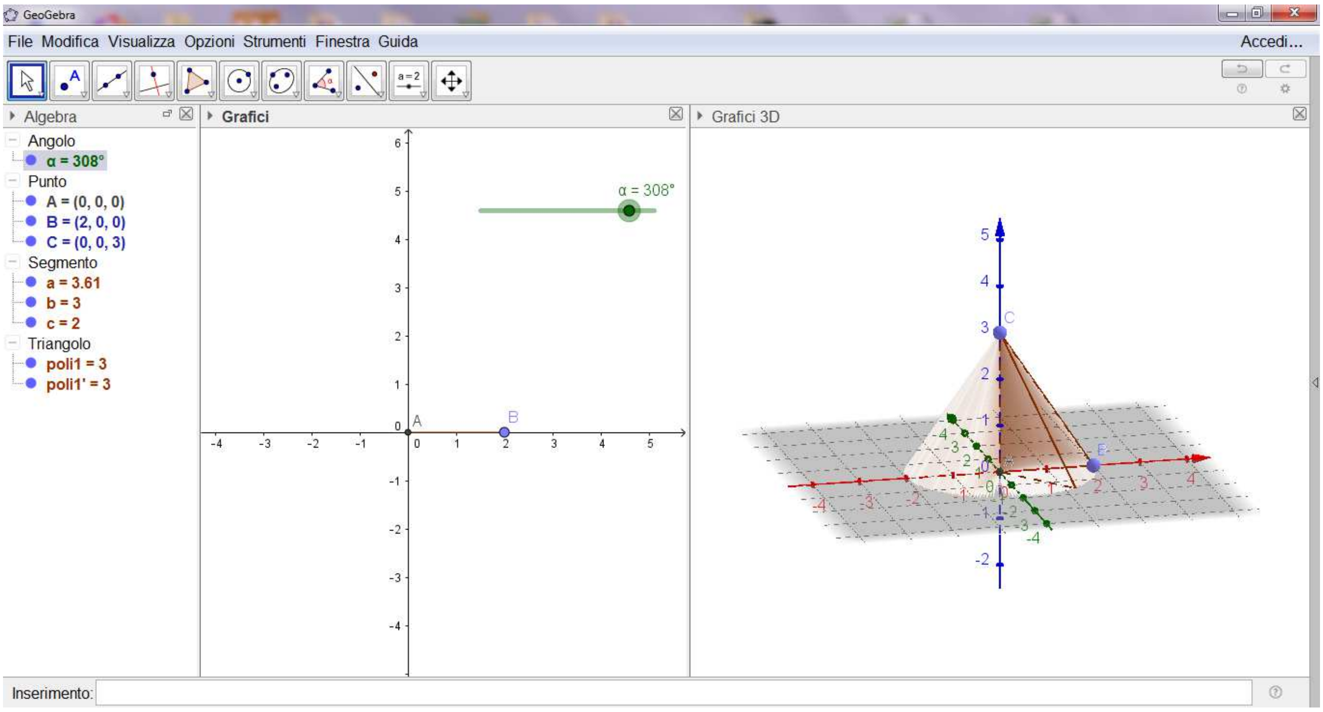
GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Cono e cilindro

Possiamo generare un cono ruotando un triangolo rettangolo intorno ad uno dei suoi cateti.

- Creiamo un triangolo rettangolo nell'ambiente 3D con il comando poligono (per esempio di vertici (0,0,0) ; (2,0,0) (0,0,3) e creiamo uno slider α (angolo) che vari tra 0° e 360°;
- scegliamo dal menù "**rotazione assiale**";
- selezioniamo il triangolo, poi per esempio l'asse z come asse di rotazione e poi inseriamo lo slider α come angolo di rotazione.

Attiviamo "traccia attiva" cliccando con il tasto destro del mouse sul poligono e "animazione attiva" cliccando con il destro sullo slider: il triangolo descriverà un cono.



Esercizio

Prova a costruire un cilindro ruotando un rettangolo attorno ad un lato.

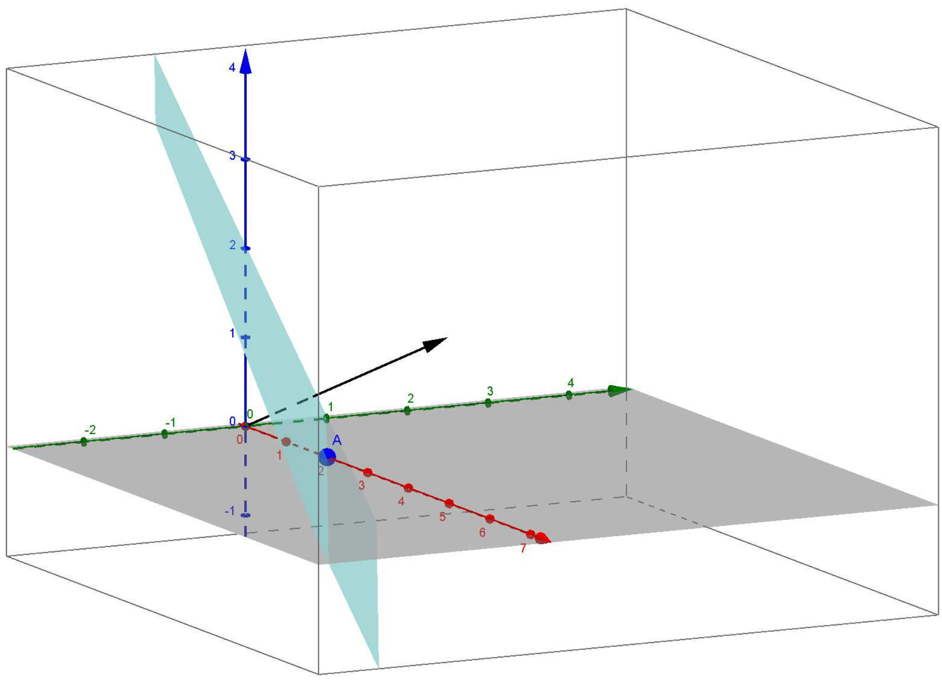
SCHEDA 10

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

Equazione di un piano

Piano passante per un punto dato e perpendicolare ad una direzione data(direzione normale)

Inseriamo nella barra di inserimento un punto, per esempio $A=(2{,}0{,}0)$ e un vettore normale al piano, per esempio $n=(1{,}2{,}1)$: selezioniamo il comando “piano perpendicolare” clicchiamo su A e n e otterremo il piano in figura.



Se controlliamo nella vista algebra troviamo l’equazione

$$x+2y+z=2$$

che infatti si ottiene sviluppando $(1{,}2{,}1)\cdot(x-2,y,z)=0$ come abbiamo visto studiando l’equazione del piano passante per un punto assegnato e avente una direzione normale assegnata.

SCHEDA 11

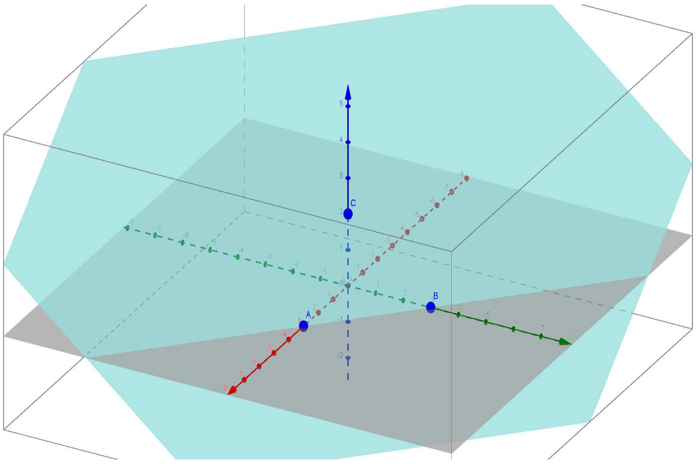
GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

Equazione di un piano

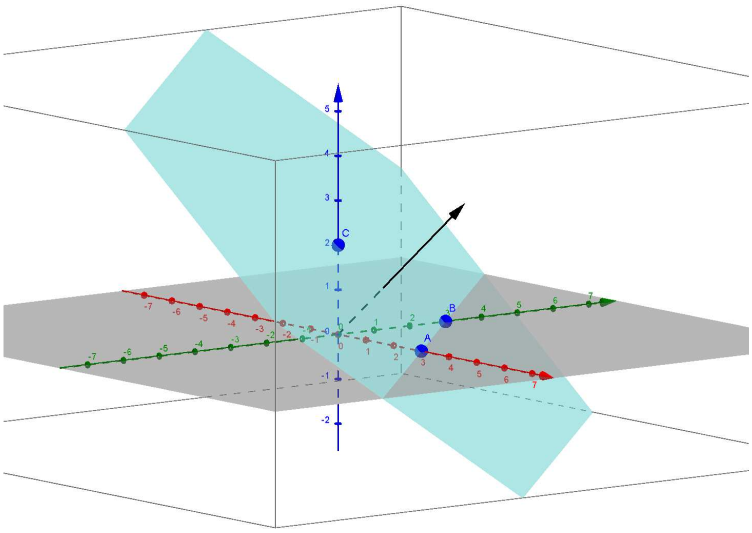
Piano passante per tre punti non allineati

Inseriamo tre punti da tastiera, per esempio $A=(3,0,0)$, $B=(0,30)$, $C=(0,0,2)$,scegliamo il comando "piano per tre punti" e creiamo il piano α passante per i punti A,B,C.

Nella vista algebra comparirà l'equazione del piano $2x+2y+3z=6$.
Imposta il sistema per determinare il piano per A,B,C e verifica che ottieni la stessa equazione (o una equivalente).



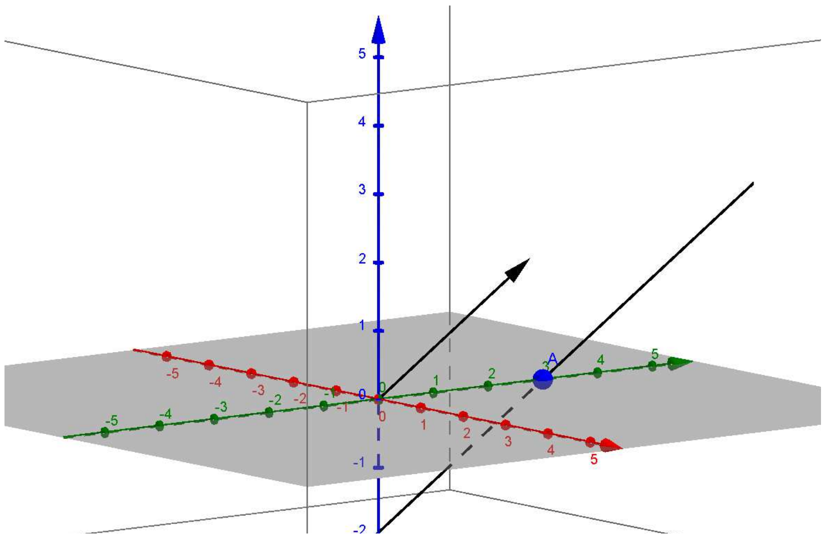
Puoi digitare nella barra di inserimento $n=(2,2,3)$ e controllare che si tratta proprio del vettore normale al piano.



SCHEDA 12

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO
Equazione di una retta nello spazio

Inseriamo nella barra di inserimento un vettore (vettore direzione della retta) per esempio $v = (1,2,2)$ e un punto, per esempio $A = (0,3,0)$. Scegliamo il comando "retta parallela": selezioniamo A e poi il vettore $\vec{v}$ e otterremo la retta seguente



Nella vista algebra avremo **l'equazione parametrica della retta**

$$X = (0,3,0) + \lambda(1,2,2)$$

dove la X sta per (x, y, z).

Esercizio

Inserisci i punti $A = (2,1,0)$ e $B = (1,0,3)$ e traccia la retta passante per essi usando sia il comando "retta" che il comando appena visto (il vettore direzione sarà…..) e verifica che in ogni caso ottieni equazioni equivalenti.

Stampa il tuo lavoro.