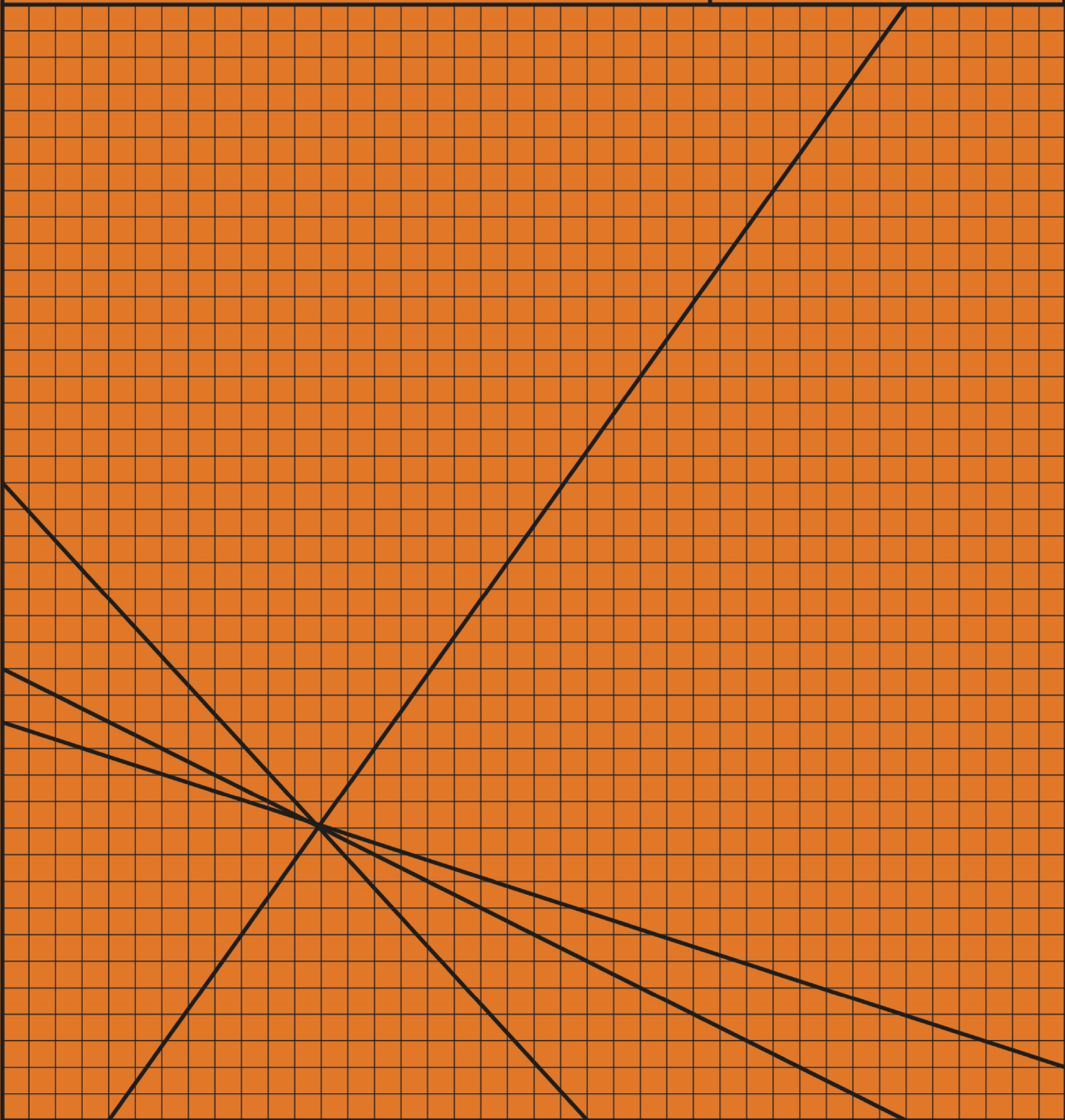
Appunti di Matematica

1

Indirizzo Scientifico

Cecilia Magni



Matematica in Rete

Prefazione

Gli **"Appunti di Matematica" sono un corso di matematica "open source" per i Licei** , con una versione per l'indirizzo scientifico ed una per l'indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella "parte teorica" del libro di testo, spesso troppo formale e "faticosa" e che non tutti riuscivano a "prendere appunti" durante le spiegazioni.

La parte teorica è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e **si integra con la parte applicativa** in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle "tecniche" di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , "schede di lavoro" da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente **non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.**

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica "Geogebra" (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle "*schede*" in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), **possano essere utili ad altri docenti per costruire,** integrandole con materiale personale, **il proprio libro di testo** che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti**, potrebbe essere facilmente aggiornato** e **modificato** ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell'articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl'Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

Cecilia Magni

Progetto Matematica in rete

Cecilia Magni

APPUNTI DI MATEMATICA 1

Indirizzo Scientifico

Editore: Matematicainrete.it

Anno di edizione : 2024

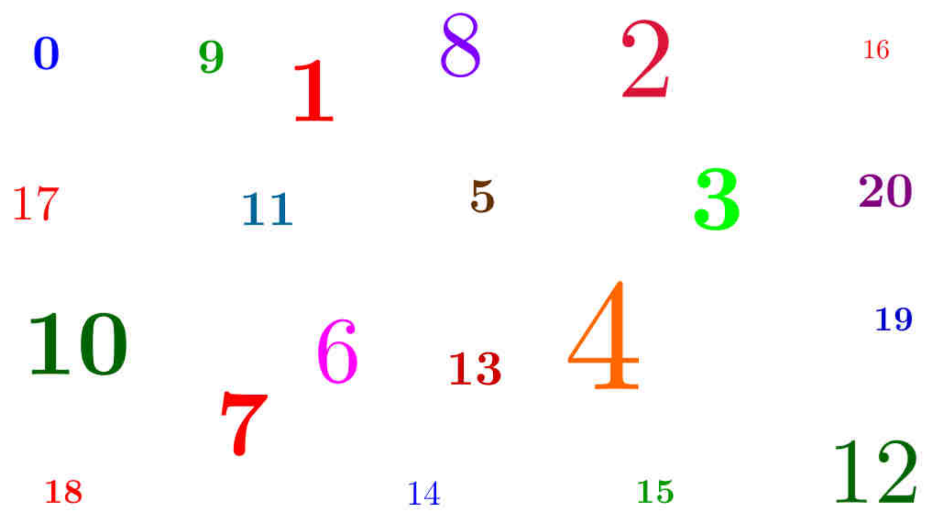
Formato: ebook (PDF)

CODICE ISBN: 978-88-943828-0-8

APPUNTI DI MATEMATICA 1
Indirizzo Scientifico

Indice

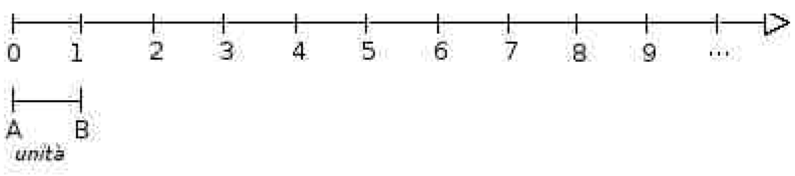
I numeri naturali



Quali sono i numeri naturali?

I numeri naturali sono : $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots$
I numeri naturali hanno un **ordine** cioè dati due numeri naturali distinti a e b si può sempre stabilire qual è il loro ordine cioè se $a<b$ (a è minore di b) oppure se $a>b$ (a maggiore di b).
Per esempio 3<5 mentre 10>2.
L'insieme dei numeri naturali viene indicato con la lettera $\mathbb{N}$.

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta orientata: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra, e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo all'origine e a ogni passo si va al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successivo di 0, 2 è il successivo di 1, 3 è il successivo di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successivo e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente.

L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.

Operazioni tra numeri naturali

L'addizione e la moltiplicazione

Sappiamo fin dalla scuola elementare cosa significa addizionare (o sommare) due numeri naturali o moltiplicarli. Facciamo solo qualche osservazione sulle proprietà di queste due operazioni.

- Dati due numeri naturali a e b la somma $a+b$ è ancora un numero naturale e anche il prodotto $a \cdot b$ è ancora un numero naturale (si dice che addizione e moltiplicazione sono operazioni "interne" a $\mathbb{N}$ perché il risultato è ancora all'interno dei numeri naturali).

- Quando sommiamo o moltiplichiamo due numeri non è importante l'ordine in cui li scriviamo cioè

$$a+b=b+a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

  Diciamo che l'addizione e la moltiplicazione godono della **proprietà commutativa**.

- Quando dobbiamo sommare o moltiplicare più di due numeri possiamo associarli come vogliamo e il risultato non cambia cioè

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

  Diciamo che l'addizione e la moltiplicazione godono della **proprietà associativa**.

- Quando dobbiamo moltiplicare un numero per una somma possiamo moltiplicare quel numero per ciascun addendo e sommare i risultati cioè:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

  Diciamo che vale la **proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**.

- Se sommiamo ad un numero qualunque lo zero otteniamo sempre lo stesso numero cioè

$$a+0=a$$

  Lo zero si dice elemento neutro per l'addizione.

- Se moltiplichiamo un numero qualunque per zero otteniamo zero cioè

$$a \cdot 0 = 0$$

- Se moltiplichiamo un numero per 1 otteniamo il numero stesso cioè

$$a \cdot 1 = a$$

  Il numero 1 si dice elemento neutro della moltiplicazione.

La sottrazione

Ricordiamo che se $a-b=d$ allora $d+b=a$. Per esempio 12-3=9 ed infatti $9+3=12$.
Quindi la sottrazione "si può fare" nell'insieme dei numeri naturali solo se $a \geq b$.

Osserviamo che per la sottrazione non vale né la proprietà commutativa né la proprietà associativa.
Infatti, per esempio:

$10-4=6$ mentre $4-10$ non ha significato nell'insieme dei numeri naturali e quindi non vale la proprietà commutativa;

(10-2)-1=7 mentre 10-(2-1)=9 e quindi non vale la proprietà associativa.

La divisione

Ricordiamo che

$a:b=q$ se $q \cdot b=a$ (a si chiama dividendo, b divisore e q quoziente)

Per esempio $12:3=4$ poiché $4 \cdot 3=12$.
Diciamo che 3 è un divisore di 12 (e che 12 è un multiplo di 3).

Lo zero nella divisione

Si possono avere tre casi:

- $a:0$ con $a \neq 0$ è una **divisione impossibile** poiché non esiste nessun numero che moltiplicato per zero possa dare come risultato un numero diverso da zero.

  Per esempio $3:0$ è impossibile

- $0:0$ è una **divisione "indeterminata"** nel senso che poiché moltiplicando qualunque numero per zero si ottiene zero questa divisione ha infiniti risultati.

- $0:b$ con $b \neq 0$ **dà come risultato 0** poiché $0 \cdot b=0$.

  Per esempio $0:3=0$

Proprietà della divisione

Per la divisione non vale né la proprietà commutativa né la proprietà associativa.
Infatti, per esempio:

10:5=2 ma 5:10 non ha alcun risultato nell'insieme dei numeri naturali e quindi non vale la proprietà commutativa;

$(25:5):5=1$ mentre $25:(5:5)=25$ e quindi non vale la proprietà associativa.

Osserviamo però che se moltiplichiamo per uno stesso numero (diverso da zero) il dividendo e il divisore , il risultato non cambia.
Per esempio:

$$30:6=(30\cdot 2):(6\cdot 2)$$

Possiamo anche dividere dividendo e divisore per uno stesso numero (purché sia divisore di entrambi).
Per esempio:

$$30:6=(30:2):(6:2)$$

Questa proprietà si chiama **proprietà invariantiva** della divisione.

Inoltre vale anche la **proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione** cioè per esempio

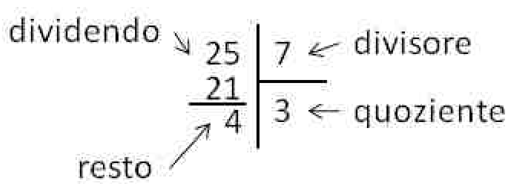
$$(10+2):2=(10:2)+(2:2)$$

cioè $(a+b):c=(a:c)+(b:c)$ se c è un divisore di a e di b.

Nota importante
Dati due numeri naturali a e $b\neq 0$ se b non è un divisore di a posso in ogni caso effettuare la **divisione con resto** cioè trovare q (quoziente) e r (resto) tali che

$$a=b\cdot q+r$$

Per esempio 25:7 dà 3 come quoziente e 4 come resto poiché $25=7\cdot 3+4$



Nota: ricordiamo i **criteri per stabilire se un numero è divisibile per 2,3 5**

- un numero è divisibile per 2 quando la sua cifra delle unità è un numero pari (0,2,4,6,8,);
- un numero è divisibile per 3 quando la somma delle sue cifre è divisibile per 3

  Per esempio 1236 è divisibile per 3 perché 1+2+3+6=12 che è divisibile per 3;
- un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5.

Potenza

Sappiamo che fare *la potenza* a^n *di un numero* a *(detto base) elevato ad un numero* n *(detto esponente) significa moltiplicare* a *per se stesso* n *volte.*
Per esempio $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Proprietà delle potenze

- Quando si moltiplicano due potenze aventi la stessa base si ottiene una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.
  Per esempio

  $$3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6$$

  e quindi in generale possiamo dire che $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

- Quando si dividono potenze con la stessa base si ottiene una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.
  Per esempio

  $$3^4 : 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3) = 3^2$$

  e quindi in generale possiamo dire che $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

- Quando si deve calcolare la potenza di una potenza si moltiplicano gli esponenti.
  Per esempio

  $$(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^8$$

  e quindi in generale possiamo dire che $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- Il prodotto di due potenze aventi gli stessi esponenti è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente l'esponente comune.
  Per esempio

  $$3^4 \cdot 2^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (3 \cdot 2)^4$$

  e quindi in generale possiamo dire che $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

- Il quoziente di due potenze aventi lo stesso esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi (se sono divisibili) e per esponente l'esponente comune.
  Per esempio

  $$8^4 : 2^4 = (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) : (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (8 : 2)^4$$

  e quindi in generale possiamo dire che $a^n : b^n = (a : b)^n$ (se b è un divisore di a)

Osservazione
Ha senso calcolare la potenza con esponente zero?
Ha senso cioè calcolare per esempio 2^0?
Consideriamo la divisione $a^n : a^n$ $(a \neq 0)$
Se applichiamo la proprietà delle potenze possiamo scrivere $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$
D'altra parte abbiamo: $a^n : a^n = 1$
Allora se vogliamo attribuire un significato anche alla scrittura a^0 dobbiamo porre $a^0 = 1$.

Le espressioni numeriche

In matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire **dobbiamo chiarire l'ordine con cui si devono eseguire le operazioni**.

Per esempio l'espressione

$$2+3\cdot 4$$

risulta ambigua se non stabiliamo in quale ordine si devono eseguire le operazioni.
Infatti:
• eseguendo per prima la moltiplicazione diventa $2+3\cdot 4=2+12=14$;
• eseguendo per prima l'addizione diventa $2+3\cdot 4=5\cdot 4=20$.

Per eliminare queste ambiguità sono state fissate alcune regole che bisogna rispettare nell'esecuzione dei calcoli.

- Se un'espressione senza parentesi contiene addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte, e poi addizioni e sottrazioni, rispettando l'ordine.

  Esempio

  $18:2:9+25-2\cdot 9:3-1=$
  $9:9+25-18:3-1=$
  $1+25-6-1=$
  $26-6-1=$
  $20-1=19$

- Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono per prima le operazioni racchiuse nelle parentesi tonde, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi tonde e si procede con le operazioni racchiuse nelle parentesi quadre. Dopo aver eliminato le parentesi quadre, si eseguono le operazioni nelle parentesi graffe. Si ottiene cosi un'espressione senza parentesi.

  L'uso di parentesi di diverso tipo rende visivamente più semplice l'ordine da seguire nelle operazioni ma **in un'espressione tutte le parentesi possono essere tonde**. Ciò accade, per esempio, quando si usano gli strumenti di calcolo elettronico come il computer e la calcolatrice.

  Per esempio:

  $$((10:5)\ +1)^2=(2+1)^2=3^2=9$$

I numeri primi

Un numero si dice **primo** se ha come unici divisori (distinti) 1 e se stesso.

Quindi i numeri primi sono : 2,3,5,7,11,13,17,19…..

I numeri primi, per esempio minori di 100, possono essere individuati con un metodo detto "crivello di Eratostene": si scrivono i numeri da 1 a 100 ; si lascia il 2 e si cancellano tutti i multipli di 2; si lascia il 3 e si cancellano tutti i multipli di 3; andando avanti dopo il 3 si lascia il 5 (che non è stato cancellato) e si cancellano tutti i suoi multipli e così via…

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Quanti sono i numeri primi ?

Proviamo a fare questo ragionamento: supponiamo che i numeri primi siano solo un certo numero, per esempio 2,3,5,7,11. Consideriamo ora il loro prodotto +1 cioè il numero

$$(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11)+1$$

Questo numero è primo o no?
Proviamo a dividerlo per i nostri numeri primi 2,3,5,7,11 (abbiamo supposto che siano solo questi): vediamo che $(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11)+1$ non ha come divisori nessuno di questi poiché facendo la divisione per questi numeri si ha sempre come resto 1.
Ma allora $(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11)+1$ è un altro primo e quindi non è vero che 2,3,5,7,11 sono gli unici numeri primi (come avevo ipotizzato)!

Questo ragionamento vale per qualsiasi numero finito di primi si consideri: posso sempre considerare il numero corrispondente al loro prodotto +1 e mi rendo conto che dovrebbe essere un altro primo diverso da quelli che ho considerato e quindi cado in una "contraddizione": questo significa che non posso affermare che i numeri primi sono un numero finito e quindi concludo che **i numeri primi sono infiniti.**

Scomposizione di un numero naturale in fattori primi

Un numero naturale si può sempre scomporre nel prodotto di numeri primi (fattori primi) facendo delle divisioni successive per i suoi divisori.
Per esempio: $120 = 60 \cdot 2 = 30 \cdot 2 \cdot 2 = 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Massimo comun divisore

Il **massimo comune divisore** di numeri naturali *a* e *b*, si indica con **MCD(a,b),** è il più grande tra tutti i divisori comuni ad *a* e *b*.
Naturalmente si può determinare anche tra più di due numeri e sarà sempre il più grande dei divisori comuni tra i numeri assegnati.

Esempio
Qual è il massimo comun divisore tra 12 e 15?
I divisori di 12 sono 1,2,3,4,6,12
I divisori di 15 sono 1,3,5,15
Quindi i divisori comuni sono 1,3 e il divisore comune più grande è 3.
In conclusione $MCD(12,15) = 3$

Nota importante
*Possiamo trovare il MCD(a,b) scomponendo a e b in fattori primi: il MCD sarà dato dal prodotto dei **fattori comuni** presi con il **minimo esponente**.*

Esempio: qual è MCD(12,18) ?
Scomponiamo i due numeri: $12 = 2^2 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3^2$
L'unico fattore primo comune I fattori primi comuni sono 2 e 3 e se li prendo con il minimo esponente ho

$$MCD(12,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Definizione
Due numeri a e b si dicono **primi tra loro** se MCD(a,b)=1.
Per esempio 6 e 35 sono primi tra loro.

Problema
Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315 cm per 435 cm con mattonelle quadrate più grandi possibili, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435.
Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune.
La soluzione del problema è data quindi dal MCD(315,435).

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad 435=3\cdot 5\cdot 29 \quad \Rightarrow M.C.D.(315,435)=3\cdot 5=15$$

Le mattonelle devono avere il lato di 15cm.

Minimo comune multiplo

Il minimo comune multiplo di due numeri naturali *a* e *b* si indica con **mcm(a,b)** è il più piccolo dei multipli comuni di *a* e *b*.

Anche in questo caso si può definire anche il minimo comune multiplo tra più di due numeri come il più piccolo dei multipli comuni a tutti i numeri assegnati.

Esempio
Qual è il minimo comune multiplo tra 12 e 15?
I multipli di 12 sono: 12,24,36,48,60,72…
I multipli di 15 sono: 15,30,45,60,75…
I multipli comuni sono: 60,…

Quindi il più piccolo multiplo comune è 60 e quindi $mcm(12,15) = 60$

Nota importante
Possiamo trovare il mcm(a,b) scomponendo a e b in fattori primi: *il mcm sarà dato dal prodotto dei fattori* ***comuni e non comuni*** *presi con il* ***massimo esponente.***

Esempio: qual è il mcm(12,30)?

Scomponiamo i due numeri: $12 = 2^2 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
Per ottenere il minimo comune multiplo dovrò moltiplicare quindi i fattori primi comuni presi con il massimo esponente cioè 2^2 e 3 e il fattore primo non comune cioè 5.

In conclusione $mcm(12,30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Problema

Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme?

Occorre calcolare il mcm(15,18,20).

Abbiamo quindi:

$$15 = 3 \cdot 5, \quad 18 = 2 \cdot 3^2, \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \rightarrow m.c.m(15,18,20) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Sistemi di numerazione posizionali

Un sistema di numerazione come il nostro si chiama sistema di numerazione **posizionale in base 10** perché utilizziamo le 10 cifre

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

e **il valore delle cifre dipende però dalla loro "posizione" nella scrittura del numero**.

Infatti scrivendo 111 intendiamo 1 centinaio+1 decina+1 unità cioè

$$111 = 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

e quindi la stessa cifra 1 a seconda della posizione che occupa indica 1 centinaio, 1 decina e 1 unità.

Per esempio $4513 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

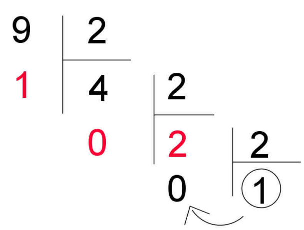
La scelta della base 10 è dovuta al fatto che abbiamo 10 dita, ma possiamo scrivere i numeri anche in altre basi.

Particolarmente importante e utile per le sue applicazioni nel campo dell'informatica è la base 2: infatti se usiamo la base 2 abbiamo bisogno solo di due cifre 0,1 che corrispondono nel computer a "passa corrente" - "non passa corrente".

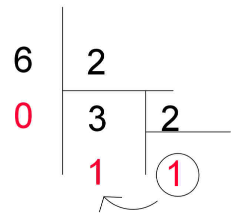
Ma come si scrive un numero in base 2?

Supponiamo di voler scrivere il numero 9 in base 2: dovremo esprimere 9 come somma di opportune potenze di 2 .
Poiché $9 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ scriverò $(9)_{10} = (1001)_2$

Possiamo seguire questo procedimento : possiamo dividere per 2 fino a che non otteniamo quoziente 1 e considerare **l'ultimo quoziente e i resti letti "a ritroso"**.
Per esempio nel caso di 9 abbiamo:



Leggendo l'ultimo quoziente e i resti a ritroso ritroviamo $(9)_{10} = (1001)_2$
Proviamo con 6:



Quindi $(6)_{10} = (110)_2$

ESERCIZI

Operazioni tra i numeri naturali

1) Presi tre numeri naturali qualsiasi *a, b e c* dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

- $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$ se $a \geq b$ V F
- $(a-b)-c = a-(b-c)$ V F
- $(a\cdot b\cdot c): a = b\cdot c$ se $a \neq 0$ V F
- Se *a* è multiplo di 3 e *b* multiplo di 4, allora *ab* è multiplo di 6 V F
- Se il prodotto di due numeri è divisibile per 6, allora almeno uno dei due fattori è divisibile per 6 V F
- Se *a* + *b* è divisibile per 2, allora *a* sia *b* sono divisibili per 2 V F

2) Quale proprietà è stata applicata in ciascuna di queste uguaglianze?

a) $256+159=159+256$

b) $81+(9+65)=(81+9)+65$

c) $48:12=(48:4):(12:4)$

d) $(56+24):8=(56:8)+(24:8)$

e) $(5+8)\cdot 3=(5\cdot 3)+(8\cdot 3)$

f) $(12\cdot 3)\cdot 2=12\cdot(3\cdot 2)$

g) $2\cdot(4+10)=2\cdot 4+2\cdot 10$

3) Dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

- $3^{12} + 3^{10} = 3^{22}$ V F
- $3^6 \cdot 3^4 = 3^{10}$ V F
- $6^{20} : 3^{20} = 2$ V F
- $(3^7)^5 = 3^{35}$ V F
- $10^{12} : 10^{10} = 100$ V F

4) Scegli la risposta esatta tra quelle proposte:

a) $(2^4 \cdot 2^6) : 4^4 =$

□ 4 □ □ 2^6 □ 4^4 □ Non si può risolvere

b) $(30^4 : 6^4) : 25 =$

□ 5 □ □ 25 □ 1/5 □ Non si può risolvere

c) $(7^5)^0 + 3^2 - 2^3 =$

□ 1 □ □ 2 □ 3 □ Non si può risolvere

d) $7 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 9 =$

□ 4 □ □ 88 □ 432 □ Non si può risolvere

e) $7 + 3 \cdot (5 - 2) \cdot 9 =$

□ 4 □ □ 88 □ 432 □ Non si può risolvere

f) Quale delle seguenti affermazioni è vera per qualsiasi numero naturale *n*?

□ $1+2n^2$ è pari □ $1+7n$ è dispari □ $3+3n$ è dispari □ $n+n^2$ è pari

Espressioni numeriche con i numeri naturali

1. $(1+2\cdot 3):(5-2\cdot 2)+1+2\cdot 4$ [16]
2. $[18-3\cdot 2]:[16-3\cdot 4]\cdot[2:2+2]$ [9]
3. $2+2\cdot 6-[21-(3+4\cdot 3:2)]:2$ [8]
4. $100:2+3^2-2^2\cdot 6$ [35]
5. $5\cdot 5^3\cdot 5^4:(5^2)^3+5$ [30]
6. $[3^0+(2^4-2^3)^2:(4^3:4^2)+3]:(2^6:2^4)$ [5]
7. $5+[(16:8)\cdot 3+(10:5)\cdot 3]:(2^3\cdot 2-4)$ [6]
8. $\{[(15:3)\cdot 2]^3:10^2+2\cdot 2^2\}:(2\cdot 3)$ [3]
9. $\{12\cdot[(5+2)\cdot 3-19]\}:[(3+1)\cdot(2+1)]$ [2]
10. $(4^2\cdot 2^2):2^2-5^2:5+(2^2\cdot 3^2)^3:6^5$ [17]

Problema
Proviamo a tradurre in espressione questa frase:
"*Dalla somma del quintuplo di b e del triplo di a sottrai il quadrato della differenza tra il doppio di b e il doppio di a*".

Abbiamo : $(5b+3a)-(2b-2a)^2$

Quanto vale questa espressione se consideriamo $a=3$ e $b=4$?
Sostituendo i valori assegnati alle due lettere abbiamo:
$(5\cdot 4+3\cdot 3)-(2\cdot 4-2\cdot 3)^2=(20+9)-(8-6)^2=29-2^2=29-4=25$

Prova tu

Moltiplica il doppio di a per la somma di a e b e poi sottrai il triplo di b. Calcola l'espressione ottenuta nel caso in cui $a=3, b=2$.

[24]

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo

1) Trova M.C.D. e m.c.m. di:

12, 18	4,20	25,30
20,30	6,18	15,20
21,24	5,10	22,44
5,6,12	12,18,24	10,20,30

2) Scrivi tre numeri il cui M.C.D. sia 6.

3) Scrivi tre numeri il cui m.c.m sia 12.

4) a) Se $M.C.D.(a,b) = m.c.m(a,b)$ allora $a = b$ V F

b) Se $m.c.m.(a,b) = a$ allora b è divisore di a V F

c) Se $m.c.m.(a,b) = a \cdot b$ allora a e b sono numeri primi V F

d) Se $M.C.D.(a,b) = a$ allora b è divisore di a V F

e) Il M.C.D di due numeri primi è uguale al più grande dei due numeri V F

f) Il M.C.D di due numeri primi tra loro è uguale al minore dei due numeri V F

5) Ad una gara di matematica partecipano 100 ragazze e 120 ragazzi. Se si decide di formare squadre costituite dallo stesso numero di maschi e femmine, quante possono essere al massimo le squadre e da quanti elementi saranno composte?

[20; 5+6]

6) Un macchinario riempie scatole di dolcetti contenenti rispettivamente 10,15,24 pezzi ed è programmata in modo che il processo si svolga lungo tre percorsi (uno per ogni tipo di scatola da confezionare). Quanti dolcetti come minimo devono essere immessi sul nastro trasportatore per poter riempire un numero intero di scatole qualunque sia la direzione che poi prenderanno?

[120]

Sistemi di numerazione posizionali

1) Scrivi in base 2 i seguenti numeri scritti in base 10:

a) 12 $[(12)_{10} = (1100)_2]$

b) 15 $[(15)_{10} = (1111)_2]$

c) 121 $[(121)_{10} = (1111001)_2]$

d) 18 $[(18)_{10} = (10010)_2]$

e) 20 $[(20)_{10} = (10100)_2]$

f) 41 $[(41)_{10} = (101001)_2]$

g) 25 $[(25)_{10} = (11001)_2]$

h) 50 $[(50)_{10} = (110010)_2]$

2) Scrivi in base 10 i seguenti numeri scritti in base 2:

a) $(100)_2$ [4]

b) $(111)_2$ [7]

c) $(110011)_2$ [51]

d) $(11111)_2$ [31]

e) $(100)_2$ [4]

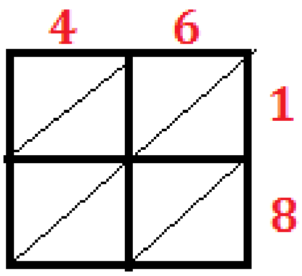
f) $(10011)_2$ [19]

g) $(100001)_2$ [33]

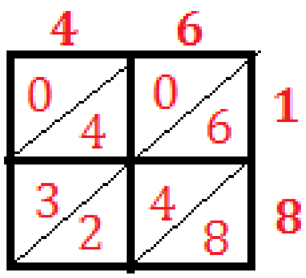
h) $(101010)_2$ [42]

Scheda storica

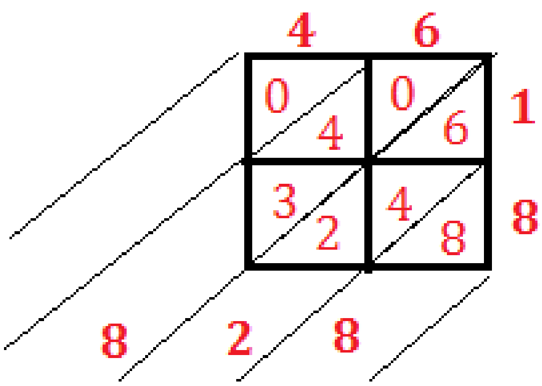
Fino dall'antichità l'uomo ha sentito la necessità di ingegnarsi per riuscire a svolgere calcoli che non poteva eseguire mentalmente; si è così cercato di trovare metodi sempre più semplici per svolgere operazioni complesse.
L'operazione che ha avuto più vicissitudini è senz'altro la moltiplicazione: era necessario riuscire a contare le merci ed il denaro che veniva esportato od importato e occorreva farlo velocemente ed in modo corretto per evitare problemi.
Il primo metodo di moltiplicazione noto è il cosiddetto metodo a gelosia[1] o **a graticola** noto presso gli Arabi: è un antenato della nostra moltiplicazione in colonna ma la sua struttura è diversa (forse meno pratica).
Vediamo come funziona.
Supponiamo di voler calcolare 46 x 18.



Intanto occorre costruire una tabella con tante colonne quante sono le cifre di ogni fattore e dividere ogni casella in due triangoli uguali lungo le diagonali.



Si moltiplicano tra di loro le cifre che si incrociano nelle caselle (4 x 1 = 0 4, 6 x 1 = 0 6, 4 x 8 = 32 e 6 x 8 = 48) riportando le decine nella parte superiore del quadrato e le unità in quella inferiore.



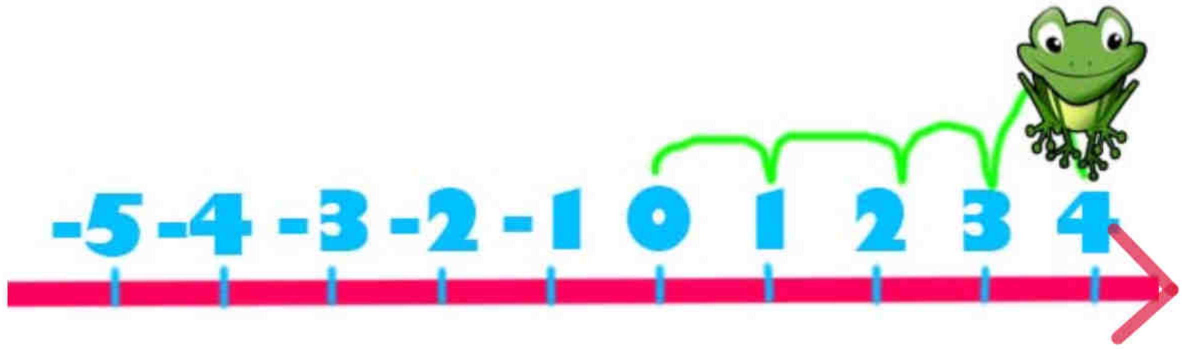
A questo punto si somma **in diagonale** cominciando dall'ultima cifra in basso a destra e tenendo conto dei riporti delle somme. A questo punto sarà possibile leggere il risultato da sinistra verso destra.

46 x 18 = 828

Provaci tu!
Prova a moltiplicare 34x52 con questo metodo.

[1] Gelosia qui ha il significato di grata poiché era l'inferriata che veniva messa alle finestre per proteggersi da eventuali saccheggiatori.

I numeri interi



Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio non si può eseguire 5-12.
Tuttavia ci sono situazioni in cui abbiamo bisogno di eseguire una sottrazione di questo tipo.

Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo:

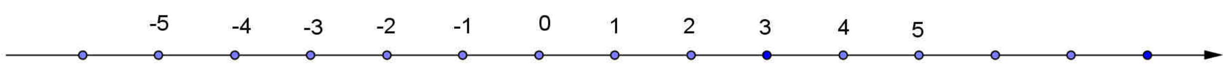
"Domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi".
Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani?
Diremo:
"Domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero" oppure "La temperatura sarà di –1 grado".

Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano.
I matematici in queste situazioni usano i numeri interi che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno + se sono numeri maggiori di 0 e dal segno – se sono numeri minori di 0.

L'insieme di questi numeri viene detto insieme dei numeri interi e si indica con la lettera maiuscola Z perché in tedesco *zahl* significa numero:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

Possiamo riportare i numeri interi su una retta orientata dopo aver fissato la misura di un segmento $\overline{AB}$ come unità di misura.



Numeri concordi e discordi

Due numeri relativi con lo stesso segno sono detti **concordi**, se hanno segni opposti si dicono **discordi.**

Valore assoluto di un numero intero

Il **valore assoluto** di un numero intero si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali ed è definito così:

$$|a| = a \text{ se } a \geqslant 0$$

$$|a| = -a \text{ se } a < 0$$

Per esempio: $|+2| = 2$; $|-7| = -(-7) = 7$; $|+13| = 13$; $|-5| = 5$

Numeri opposti
Due numeri interi si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi. Sono numeri opposti +3 e -3; +5 e -5; +19 e -19.

Nota importante
Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno + cioè, per esempio si può scrivere indifferentemente +1 o 1, +12 o semplicemente 12.

Confronto di numeri relativi

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra.

Esempi
- $+4 > +2$ i numeri sono positivi, il maggiore è +4 perché ha valore assoluto maggiore.
- $-1 > -3$ i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore.
- $+4 > -2$ il numero positivo è maggiore del numero negativo.
- $+4 > 0$ ogni numero positivo è maggiore di 0.
- $0 > -2$ ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

Osservazione importante
Possiamo pensare che i numeri interi positivi non siano altro che i numeri naturali e quindi considerare **l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi come un ampliamento dell'insieme $\mathbb{N}$** dei numeri naturali.

Operazioni tra numeri interi

Addizione e sottrazione

La somma di due numeri concordi ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti e per segno quello dei due numeri, mentre la somma di due numeri discordi ha per valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti e per segno quello del numero che ha valore assoluto maggiore.

Per esempio: $(+4)+(+5)=+9$; $(-4)+(-5)=-9$; $(+4)+(-5)=-1$

Per eseguire la sottrazione tra due interi si somma il primo con l'opposto del secondo, cioè

$$a-b=a+(-b)$$

Per esempio: $(+4)-(+5)=(+4)+(-5)=-1$ (che più semplicemente scriveremo $4-5=-1$);
$(+4)-(-5)=(+4)+(+5)=+9$ (che scriveremo $4-(-5)=4+5=9$)

Notiamo che la sottrazione tra due numeri interi dà ancora un numero intero (è un'operazione "interna all'insieme dei numeri interi).

Poiché la sottrazione si riconduce ad una addizione generalmente non si parla più di addizione e sottrazione ma di **somma algebrica .**

Moltiplicazione e divisione

- **Moltiplicazione**

Il prodotto di due numeri interi ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti, segno positivo se i numeri sono concordi, segno negativo se i numeri sono discordi (regola dei segni).

Per esempio: $(+5)\cdot(+2)=+10$ che scriviamo semplicemente $5\cdot 2=10$;
$(-5)\cdot(-2)=+10$ che scriviamo semplicemente $(-5)\cdot(-2)=10$;
$(+5)\cdot(-2)=-10$ che scriviamo semplicemente $5\cdot(-2)=-10$

Giustificazione della regola dei segni

1) *Perché* $(+)\cdot(-)=-$ *?*
Consideriamo questo esempio:

$$(5+(-5))\cdot 2=5\cdot 2+(-5)\cdot 2=10+(-5)\cdot 2$$

D'altra parte $(5+(-5))\cdot 2=0\cdot 2=0$
Ma allora dovrà essere: $(-5)\cdot 2=-10$

2) *Perché* $(-)\cdot(-)=+$ *?*
Consideriamo questo esempio:
$(5+(-5))\cdot(-2)=5\cdot(-2)+(-5)\cdot(-2)=-10+(-5)\cdot(-2)$
D'altra parte $(5+(-5))\cdot(-2)=0\cdot(-2)=0$
Ma allora dovrà essere: $(-5)\cdot(-2)=+10$

- **Divisione**

$a:b=q$ se $a=b\cdot q$ (seguendo la stessa regola dei segni della moltiplicazione)

Per esempio: $(+10):(+2)=5$; $(+10):(-2)=-5$; $(-10):(-2)=5$

La divisione tra numeri interi non è sempre possibile: per esempio non si può eseguire (+10):(+3)

Potenza di un numero intero a^n (con n numero naturale)

La definizione di potenza a^n ,con a numero intero e n numero naturale, è la stessa di quella data quando a è un numero naturale cioè si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base a quante volte è indicato dall'esponente n.

Osserviamo che , per la regola dei segni della moltiplicazione, abbiamo:

• se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;

• se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato ha segno negativo, se l'esponente è pari il risultato ha segno positivo.

Esempi

$(+3)^2=9$; $(+3)^3=27$
$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$; $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$

Osservazione
Naturalmente , anche in questo caso, si ha che $a^0=1$

ESERCIZI

Espressioni numeriche con i numeri interi

Calcola il valore delle seguenti espressioni

1. $+7-\{-6+[-5+(-3+6-4)]-3\}+[-(+2-7)-5]$ [+22]

2. $3\cdot\{15-[3\cdot(2-6+3)]-10\}+4\cdot[(-2\cdot3+6)-5]$ [+4]

3. $[15+(-3+2-6):(-7)]:[4\cdot(-2)]+6:(-3)-(4+2\cdot6-4)$ $[-16]$

4. $+6-\{+4-[+3-(-6+7+2)]-6\}-\{[+2-(-6+4)]-7\}$ [+11]

5. $4\cdot\{10+[2\cdot(6\cdot2-5\cdot3)]-2\}-6\cdot\{[(6-2)\cdot3-4]-5\}$ $[-10]$

6. $\{[(+15):(-3)-2]+5-2\}:(-2)-\{7\cdot[4-3\cdot(-2)]+(-8)(+4\cdot2)\}$ $[-4]$

7. $\left\{\left[(-2)^5\cdot(-2)\cdot(-2)^0\right]^3:\left[(-2)^4\cdot(-2)^3\right]\right\}:(-2)^{10}$ $[-2]$

8. $\left\{\left[(-3)^6\cdot(-3)\cdot(-3)^0\right]^2:\left[(-3)^4\cdot(-3)^2\right]\right\}:(-3)^7$ $[-3]$

9. $\left\{\left[(-2)^3\right]^4:2^9+25\right\}-[(+5)(-4)+1]-2(-3)$ $[+58]$

10. $\left\{\left[(+5)^2\right]^3:(-5)^4-12\right\}+[(-3)(+5)-4]+(-3)(+6)$ $[-24]$

Traduci in una espressione letterale la seguente frase e calcolane il risultato per i valori delle lettere indicati

1. Dividi per il quadruplo di a il quadrato della differenza tra il doppio di b e il triplo di a, aggiungi poi al risultato la somma del doppio di b col triplo di a.
   $(a=-2,\ b=1)$
   $[-12]$

2. Sottrai la somma del triplo di b col quintuplo di a alla somma del doppio di a e del quadrato della differenza tra b e il triplo di a e calcola considerando $a=-2,\quad b=1$.
   $[52]$

TEST

1) Write down the value of 7^0.

2) Find the value of $3a$-$5b$ when a = -4 and b = 2.

3) Write down the prime numbers between 20 and 30.

4) Put one pair of brackets in each statement to make it true.

(a) 16 + 8 : 4 - 2 = 4

(b) 16 + 8 : 4 - 2 = 20

5) Write down the lowest temperature from this list:

-3°C 8°C -19°C 42°C -7°C

6) The temperature on Monday was -6°C. On Tuesday the temperature was 3 degrees lower.
Write down the temperature on Tuesday.

7) The temperature on Saturday was -2°C. The temperature on Sunday was 8°C.
Write down the difference in these two temperatures.

8) Write down the number from this list which is both a cube number and has 4 as factor

1 4 8 12 27 40

9) Write down all the prime numbers that are greater than 30 and less than 40.

10) Three different numbers form this list are added together to give the smallest possible total.

-3 -5 1 0 3

Complete the sum below:

…………. + …………. + …………... = ……………

11) Find the lowest common multiple of 24 and 30.

12) Here is a list of numbers.

2 4 5 8 9 12

Write down all the numbers from this list which are

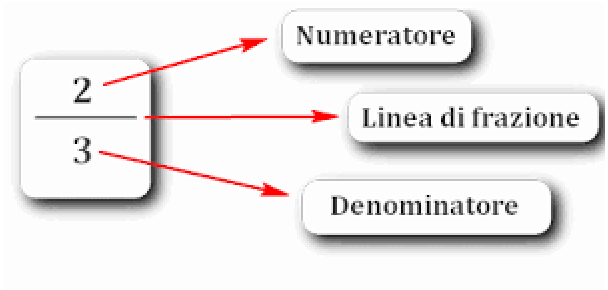
(i) odd.
(ii) square.
(iii) cube.
(iv) prime.

13) (a) Write 84 as a product of its prime factors.
(b) Find the highest common factor of 84 and 24.
(c) Find the lowest common multiple of of 84 and 24.

14) Write down all the factors of 22.

15) Write down a multiple of 13 between 30 and 50.

I numeri razionali



Le frazioni

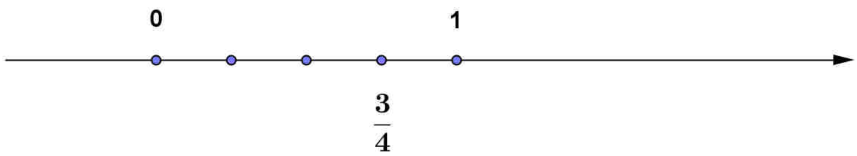
Definiamo una frazione come il rapporto di due numeri interi cioè

$$\frac{n}{d} \qquad n, d \in \mathbb{Z} \text{ con } d \neq 0$$

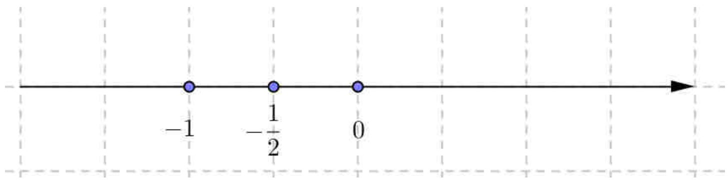
in cui il numero scritto sopra alla linea di frazione viene chiamato **numeratore** e il numero scritto sotto alla linea di frazione viene detto **denominatore**.

$\frac{n}{d}$ corrisponde a $n : d$ e quindi **il denominatore deve essere diverso da zero.**

Esempio: la frazione $\frac{3}{4}$ corrisponde a $3 : 4$. Per rappresentare la frazione $\frac{3}{4}$ sulla linea numerica devo dividere l'unità in quattro parti e prenderne tre.



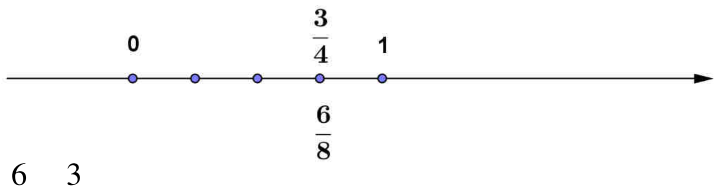
Esempio: la frazione $-\frac{1}{2}$ corrisponde a $(-1) : (+2)$ e sarà rappresentata sulla retta numerica dal seguente punto



Frazioni equivalenti

Se moltiplico il numeratore e il denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero ottengo una frazione "equivalente" (rappresentano lo stesso punto sulla retta numerica).

Per esempio: $\frac{6}{8}$ è equivalente a $\frac{3}{4}$ poiché $3:4=(3\cdot 2):(4\cdot 2)$



Scriveremo che $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Diciamo anche che dividendo 6 e 8 per 2 "semplifichiamo" la frazione : $\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}^{4}}=\frac{3}{4}$

Frazione "ridotta ai minimi termini"

Data una frazione posso ridurla ai "minimi termini" dividendo numeratore e denominatore per il M.C.D. (n,d).

Esempio: $\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$ (frazione ridotta ai minimi termini)

Abbiamo diviso 24 e 40 per 8 che è il M.C.D. (24,40).

La frazione è ridotta ai minimi termini quando non si può ulteriormente "semplificare" , quando cioè

M.C.D. (n,d)=1

Ridurre due frazioni allo stesso denominatore

E' molto importante "ridurre" due frazioni allo stesso denominatore: se infatti due frazioni hanno lo stesso denominatore potrò confrontarle o sommarle.

Consideriamo per esempio $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$.

Perché abbiano lo stesso denominatore posso sempre considerare il prodotto dei due denominatori come denominatore comune:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 6}{2\cdot 6}=\frac{6}{12} \quad ; \quad \frac{1}{6}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 6}=\frac{2}{12}$$

Generalmente però si prende come denominatore comune il m.c.m.(d_1,d_2) cioè il minimo comune multiplo dei due denominatori e si dice che **abbiamo ridotto le frazioni al minimo comun denominatore.**

Nel nostro caso basta prendere m.c.m $(2,6)=6$ e avremo: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$; $\frac{1}{6}$

I numeri razionali

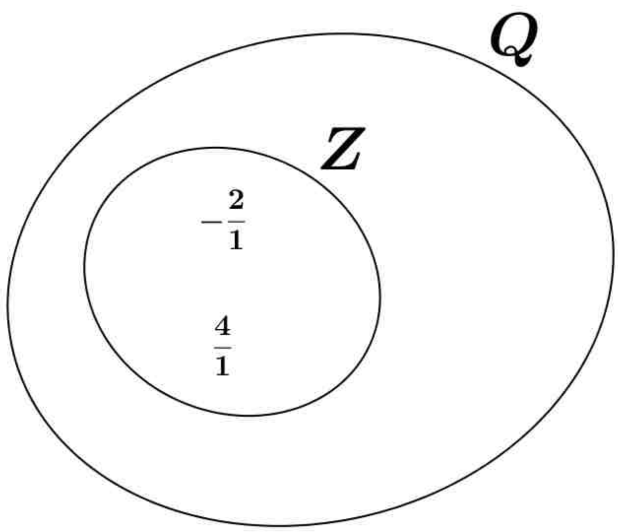
Chiamiamo **numero razionale un insieme di frazioni tra loro equivalenti**.

Per esempio: $-\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{4}, \quad -\frac{3}{6}, \quad -\frac{4}{8}$ ecc…rappresentano lo **stesso numero "razionale**" uguale al risultato della divisione $(-1):2=-0{,}5$.
Per esempio: $\frac{3}{4}, \quad \frac{6}{8}, \quad \frac{9}{12}$ ecc… rappresentano lo stesso numero "razionale" uguale al risultato della divisione $3:4=0{,}75$.

L'insieme dei numeri razionali viene indicato con la lettera *Q* (q sta per "quoziente").

Osservazione

All'interno di ***Q*** ritroviamo i numeri interi **Z**: per esempio $-\frac{2}{1}, \quad -\frac{4}{2}, \quad -\frac{6}{3}$ ecc… cioè il numero razionale $-\frac{2}{1}$ corrisponde al numero intero -2.
Si dice che ***Q*** **è un ampliamento di *Z*.**



Confronto di numeri razionali

Come si possono confrontare due numeri razionali?

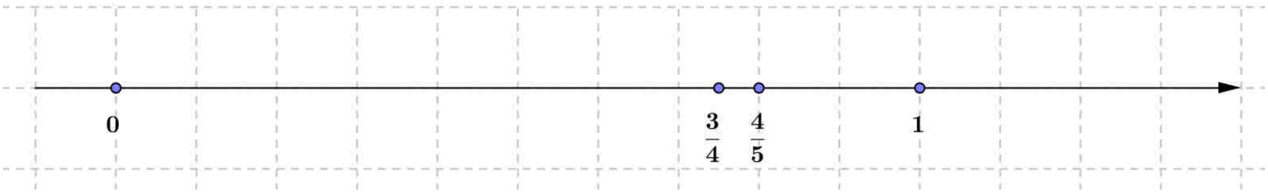
Per esempio tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ quale sarà il numero maggiore?

Possiamo portare le frazioni allo stesso denominatore e poi confrontare i numeratori: scegliamo m.c.m. (4,5) = 20

$$\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$$



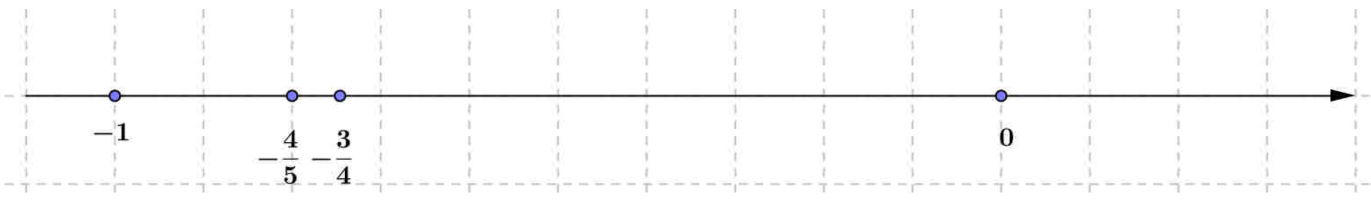
Nota

Occorre fare attenzione quando i numeri razionali sono negativi. Supponiamo di considerare:

$$-\frac{3}{4}, \qquad -\frac{4}{5}$$

Abbiamo: $$-\frac{15}{20}, \qquad -\frac{16}{20}$$

Ma questa volta, essendo $-15>-16$, avrò $-\frac{3}{4}>-\frac{4}{5}$



Operazioni tra numeri razionali

- **Somma e differenza di numeri razionali**

Per determinare la somma (o la differenza) tra due numeri razionali li riduciamo allo stesso denominatore e calcoliamo la somma (o la differenza) dei numeratori.

Esempio: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}\right)$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

- **Prodotto di numeri razionali**

Il prodotto di due numeri razionali è un razionale che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori: cioè

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Esempio: $2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Infatti è chiaro che raddoppiare $\frac{1}{3}$ significa avere $\frac{2}{3}$.

Esempio: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

In questo caso dobbiamo prendere la metà di $\frac{1}{3}$ e quindi otteniamo $\frac{1}{6}$.

- **Quoziente di numeri razionali**

Diamo prima la definizione di “**reciproco**” di un numero razionale.
Dato un numero razionale $\frac{a}{b}$ il suo “reciproco” è $\frac{b}{a}$

Esempio: il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$

Osserviamo che se moltiplichiamo un numero razionale per il suo reciproco otteniamo 1.
Infatti : $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$

Il **quoziente** di due numeri razionali (con il 2° diverso da zero) è uguale al prodotto del 1° per il reciproco del 2° numero.
Cioè:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Infatti, in questo modo, facendo la "riprova", otteniamo che

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

Esempio: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot 3$

Infatti: $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

NOTA: osserviamo che dividendo un numero razionale $\frac{a}{b}$ per un numero razionale minore di 1 otteniamo un numero maggiore di $\frac{a}{b}$.

Per esempio $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2=1 \qquad \left(1>\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 4=2 \qquad \left(2>\frac{1}{2}\right)$

NOTA: possiamo scrivere la divisione tra due numeri razionali anche con la linea di frazione.

Esempio: $\frac{1}{2}:2=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Esempio: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$

Esempio: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{5}$

In generale: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

OSSERVAZIONE: la divisione tra numeri razionali dà come risultato un numero razionale (è un' operazione interna a **Q**).

- **Potenza di un numero razionale**

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad (b \neq 0) \quad$ (n numero naturale)

Esempio: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{9}$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{(-2)^2}{(+3)^2} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{(-2)^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = ?$

Quale significato possiamo associare ad una potenza con esponente negativo?

Facciamo un esempio: $\quad 3^4 : 3^6 = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{3^2}$

Applicando la proprietà delle potenze:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

avremmo $\quad 3^4 : 3^6 = 3^{-2}$

Se allora vogliamo una definizione "coerente" dobbiamo porre $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Diamo allora la seguente definizione:

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $\quad$ (n numero naturale)

Consideriamo cioè il reciproco di $\frac{a}{b}$ e lo eleviamo a n.

Quindi per esempio:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = (3)^3 \quad ; \quad \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = (-4)^1$$

.

Numeri razionali e rappresentazione decimale

Le frazioni decimali

Le frazioni "decimali" sono frazioni il cui denominatore è una potenza di 10.

Per esempio sono frazioni decimali:

$$\frac{2}{10} \quad ; \quad \frac{3}{100}=\frac{3}{10^2} \quad ; \quad \frac{7}{1000}=\frac{7}{10^3}$$

Possiamo facilmente scrivere una frazione decimale come "numero decimale" (numero in cui le cifre a destra della virgola rappresentano i decimi, i centesimi ecc.).

Infatti per esempio $\frac{13}{10}=\frac{10+3}{10}=1+\frac{3}{10}=1{,}3$

$$\frac{171}{100}=\frac{100+70+1}{100}=1+\frac{7}{10}+\frac{1}{100}=1{,}71$$

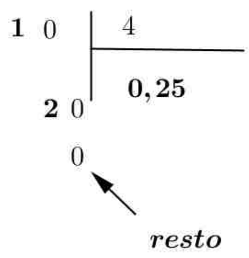
Dalla frazione al numero decimale

Posso in generale ottenere il numero decimale corrispondente ad una frazione **eseguendo la divisione.** Avremo però due casi:

1) se la frazione è equivalente ad una frazione decimale (quindi il suo denominatore contiene come fattori solo il 2 e/o il 5) otterremo un **numero decimale finito**.

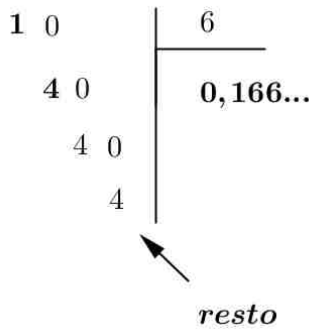
2) se la frazione non è equivalente ad una frazione decimale (cioè il suo denominatore ha fattori primi diversi dal 2 e dal 5) otterremo un **numero decimale periodico**.

Esempio: $\frac{1}{4}$ è equivalente a $\frac{25}{100}$ e infatti eseguendo la divisione otteniamo



cioè un **numero decimale finito**.

Esempio: $\frac{1}{6}$ non è equivalente ad una frazione decimale poiché il denominatore ha come fattore anche il 3. Se eseguiamo la divisione otteniamo resto 1 e poi sempre resto = 4 cioè otteniamo $0{,}1\overline{6}$.

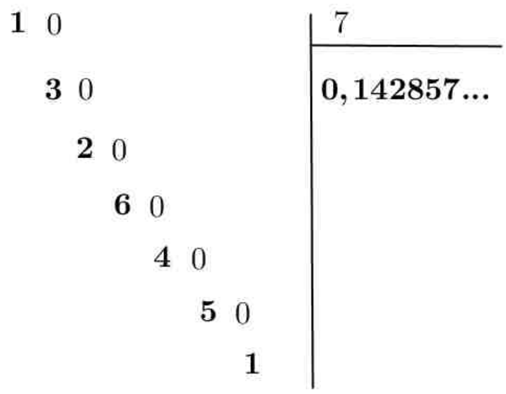


NOTA: la parte che si ripete viene soprassegnata (nel nostro esempio $\overline{6}$) e viene chiamata "**periodo**", la parte dopo la virgola che precede il periodo (in questo caso 1) viene detta "**antiperiodo**".

OSSERVAZIONE

E' chiaro che eseguendo la divisione ad un certo punto dovrò avere necessariamente un resto che ho già ottenuto (perché i resti devono essere minori del divisore = denominatore della funzione) e quindi ricomincerò ad avere le stesse cifre decimali.

Per esempio dividendo per 7 non potrò avere un periodo più lungo di 6 cifre : se per esempio considero $\frac{1}{7}$ ho proprio 6 resti diversi da zero e quindi ottengo un periodo di 6 cifre.



$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$$

Dal numero decimale alla frazione

Dato un numero decimale (finito o periodico) come posso determinare la frazione corrispondente? (viene chiamata **frazione "generatrice**").

a) Se il numero decimale è finito la frazione generatrice avrà come numeratore *il numero senza la virgola e come denominatore la potenza del 10 corrispondente al numero di cifre decimali.*

Per esempio: $0{,}75 = \frac{75}{10^2} = \frac{75}{100}$

$2{,}3 = \frac{23}{10}$

$21{,}043 = \frac{21043}{1000}$

b) Ma se il numero decimale è periodico?

Consideriamo per esempio $n = 0{,}1\overline{6}$ (avevamo visto che $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$)

Se moltiplichiamo il numero per 10 avremo : $10n = 1{,}\overline{6}$

Se moltiplichiamo il numero per 100 avremo: $100n = 16{,}\overline{6}$

Allora $100n - 10n = 16{,}\overline{6} - 1{,}\overline{6} \Rightarrow 90n = 16 - 1 \Rightarrow n = \frac{16-1}{90}$ ed infatti: $\frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$!

In generale si può dimostrare che la "regola" è la seguente:

la frazione generatrice di un numero decimale periodico ha come numeratore il numero scritto senza la virgola a cui si sottrae la parte che precede il periodo e come denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo (se c'è).

NOTA
Se vogliamo scrivere sotto forma di frazione un numero decimale periodico con periodo 9 otteniamo sempre un numero intero!

Esempio

$n = 2{,}\overline{9} \rightarrow$ $n = \frac{29-2}{9} = \frac{27}{9} = 3$

Cerchiamo di capire perché.

Consideriamo la seguente uguaglianza: $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

Ma $\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1} \rightarrow 9 \cdot \frac{1}{9} = 0{,}\overline{9}$ e quindi in conclusione $0{,}\overline{9} = 1$

Ordine di grandezza di un numero

In fisica, ma anche in altri ambiti, spesso dobbiamo considerare numeri molto grandi (per esempio la distanza Terra-Sole) o numeri molto piccoli (per esempio la dimensione del nucleo atomico).

Per evitare di scrivere numeri con troppi zeri o con tante cifre decimali (che si leggerebbero molto male) si utilizzano le potenze del 10 lasciando una sola cifra prima della virgola.

Per esempio:

a) $143000 = 1{,}43 \cdot 10^5$
b) $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$

L'ordine di grandezza del primo numero è 10^5 , quello del secondo è 10^{-4} .

Quando scriviamo i numeri in questo modo diciamo che utilizziamo **la notazione scientifica**.

Esempi

a) La massa della Terra è circa $5{,}98 \cdot 10^{24}\, Kg$

b) La velocità della luce nel vuoto è 300000 Km/s : possiamo scrivere $3 \cdot 10^8\ m/s$.

c) Il Sole dista 150 milioni di Km dalla Terra che corrisponde a

$$150 \cdot 10^6 \cdot 10^3\, m = 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m$$

d) In un anno (consideriamolo di 365 giorni) ci sono

$$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}15 \cdot 10^7\, s$$

Problemi con le frazioni

PROPORZIONI

Ricordiamo che **una proporzione è un'uguaglianza tra due rapporti**.

Per esempio $3:4=6:8$ (si legge 3 sta a 4 come 6 sta a 8)
(in pratica ho due frazioni equivalenti $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$)
3 e 8 vengono chiamati "estremi" della proporzione; 4 e 6 vengono chiamati "medi".

Proprietà fondamentale

In una proporzione *il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

$3:4=6:8$
$4\cdot 6=3\cdot 8$

Infatti scrivendo $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ abbiamo anche che $\frac{3\cdot 8}{4\cdot 8}=\frac{4\cdot 6}{4\cdot 8}$.

NOTA
A volte per risolvere un problema dobbiamo indicare una quantità incognita con la lettera x, impostare una proporzione e determinare x utilizzano la proprietà fondamentale delle proporzioni.

Esempio

Nella ricetta per fare una crostata troviamo queste dosi di farina e zucchero: 250 g di farina, 50 g di zucchero.

Se vogliamo fare una crostata più grande utilizzando 300 g di farina quanto zucchero dobbiamo mettere?

Possiamo indicare con *x* la quantità di zucchero in grammi per la crostata più grande e scrivere

$$250:300=50:x \rightarrow 250\cdot x=300\cdot 50 \rightarrow x=\frac{300\cdot 50}{250}=60$$

PERCENTUALI

Spesso nella vita quotidiana vengono utilizzate le percentuali.

Esempio 1
Durante il periodo dei saldi gli sconti sui capi di abbigliamento vengono indicati in percentuale. Se su un capo di abbigliamento che costa € 45, viene fatto uno sconto del 30%, quanto risparmiamo? 30% è come dire che se il capo di abbigliamento fosse costato € 100 , lo sconto sarebbe di € 30.
Per determinare quindi il 30% di € 45 possiamo impostare una proporzione:

$$30:100 = x:45 \rightarrow x = \frac{30 \cdot 45}{100} = \frac{27}{2}$$

Troviamo così che il 30% di 45 è € $\frac{27}{2}$ cioè € 13,50.

Possiamo però anche considerare 30% come frazione $\frac{30}{100}$ e moltiplicarla direttamente per 45 (trovando subito lo sconto senza impostare la proporzione):

$$\frac{30}{100} \cdot 45 = \frac{27}{2}$$

Esempio 2
Se in una scuola con 700 studenti, il preside afferma che solo il 5% non è stato promosso, quanti studenti non sono stati promossi?
Abbiamo che : $\frac{5}{100} \cdot 700 = 35$
Quindi 35 studenti non sono stati promossi.

Esempio 3
Se in una classe di 30 studenti, 12 praticano il nuoto, 9 studenti il basket, 6 studenti il calcio e 3 studenti non praticano nessuno sport, quali sono le percentuali di studenti che praticano nuoto, basket, calcio o che non praticano nessuno sport?
Possiamo impostare le seguenti proporzioni:

$12:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{12 \cdot 100}{30} = 40 \rightarrow$ 40% pratica il nuoto

$9:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{9 \cdot 100}{30} = 30 \rightarrow$ 30% pratica il basket

$6:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{6 \cdot 100}{30} = 20 \rightarrow$ 20% pratica il calcio

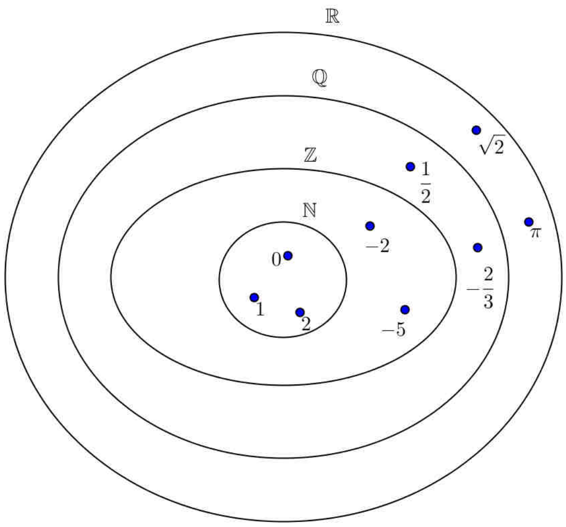
$3:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{30} = 10 \rightarrow$ 10% non pratica nessuno sport

Numeri irrazionali

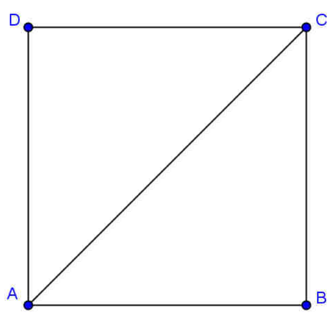
Chiamiamo numero irrazionale (cioè **non razionale**) un numero **decimale illimitato non periodico** (quindi non riconducibile ad un numero razionale).

Risultano numeri irrazionali $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ (rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro).

L'insieme dei numeri razionali e **irrazionali** viene chiamato **insieme dei numeri reali** e indicato con $\Re$.
Abbiamo quindi questa rappresentazione:



NOTA: i numeri "irrazionali" furono scoperti dai matematici greci della scuola di Pitagora: essi dimostrarono che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato non è un numero razionale cioè non si possono trovare m e n tali che $\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB}$



Questa scoperta fu per loro sconvolgente e per molto tempo fu tenuta…segreta!

Se $\overline{AB} = 1$ $\qquad \overline{AC} = \sqrt{2} = 1{,}41421356...$ (non c'è periodo)

ESERCIZI

1) Riduci le seguenti frazioni ai minimi termini:

$$-\frac{14}{20} \quad ; \quad +\frac{35}{49} \quad ; \quad -\frac{21}{63} \quad ; \quad -\frac{125}{25} \quad ; \quad +\frac{120}{45}$$

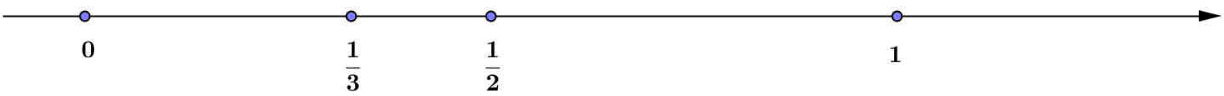
2) Rappresenta sulla stessa retta numerica le seguenti frazioni:

$$-\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{5}{6} \quad ; \quad \frac{2}{3} \quad ; \quad -\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{7}{2} \quad : \quad -\frac{5}{4}$$

3) Confronta le seguenti frazioni:

$$\frac{5}{6},\frac{4}{5} \quad ; \quad -\frac{6}{7},-\frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{13}{4},\frac{10}{3}$$

4)* Qual è la frazione che "si trova a metà" tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$?



Suggerimento: $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ quindi devi trovare la frazione a metà tra $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$ …

Operazioni tra numeri razionali

5) Calcola la somma delle seguenti frazioni:

$\frac{1}{2}+\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{7}+\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}-\frac{1}{7}$ [$\frac{13}{10}$; $-\frac{2}{21}$; $\frac{23}{35}$]

6) Calcola il prodotto delle seguenti frazioni:

$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{4}\right)$; $\left(-\frac{12}{5}\right)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)$ [$\frac{4}{15}$; $-\frac{7}{6}$; 9]

7) Calcola il quoziente delle seguenti frazioni:

$\left(\frac{1}{4}\right):\left(\frac{2}{5}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{14}{5}\right):\left(-\frac{7}{10}\right)$; $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}$; $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)}$; $\dfrac{\left(-\frac{7}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

[$\frac{5}{8}$; -2; 4; $\frac{5}{8}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{14}{3}$]

8) Calcola le seguenti potenze:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ [$\frac{1}{16}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{25}{36}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$]

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $\left(\frac{7}{6}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ [9; $-\frac{3}{2}$; $\frac{36}{49}$; -2; $\frac{9}{4}$]

9) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\right)$ $\left[\frac{29}{60}\right]$

b) $\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$ $\left[\frac{28}{15}\right]$

c) $\left[\left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $[1]$

d) $\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}:\left(+\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

Espressioni numeriche con i numeri razionali

10) $$\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\right)-\left[\frac{2}{20}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)$$ $[0]$

11) $$\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\right)-\left[\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{4}\right)\right]+\frac{2}{7}-\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{21}+\frac{3}{2}\right)$$ $\left[\frac{31}{21}\right]$

12) $$\left\{\left[-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{4}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 4-\frac{2}{3}\right\}\cdot 3-\frac{1}{12}+2$$ $\left[-\frac{127}{12}\right]$

13) $$\left\{\left[-\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-3\right)\right]\cdot 3-\frac{2}{3}\right\}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{15}+2$$ $\left[\frac{-4}{15}\right]$

14) $$\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{4}{5}-2\right)\right]\cdot\frac{6}{7}-\frac{4}{5}-\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\right]+\frac{11}{30}$$ $[-1]$

15) $$\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(2+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{6}$$ $[-2]$

16) $$\left\{\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\right]^2:\left(\frac{4}{5}\right)^8+\frac{4}{5}\right\}:\left(\frac{6}{5}\right)-1+\frac{2}{3}$$ $\left[\frac{13}{15}\right]$

17) $$\left\{\left[\left(\frac{1}{25}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^3\right]:\left(\frac{1}{25}\right)^5\right\}:\left(\frac{2}{5}\right)^4+\frac{1}{16}-\frac{2}{3}+\frac{1}{8}$$ $\left[\frac{13}{12}\right]$

18) $$\frac{1}{3}:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{10}{9}\right]^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^3:\frac{(-2)^5}{9}$$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

19) $\frac{2}{3}:\left[\left(\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)^3:\left(\frac{6}{7}\right)+\frac{4}{3}\right]^3-\left(\frac{1}{4}-1\right)^2:\frac{3}{(-4)^2}$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

20) $\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{2}+1$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

21) $\left[\left(-\frac{3}{2}+1-\frac{1}{3}\right):2+(2)^{-1}-3\cdot\left(2-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{12}\right]^2-\frac{7}{2}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

22) $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{2}{5}+\left(-1+\frac{1}{2}\right)+0{,}4\right]:\left[0{,}\overline{3}-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

23) $\left[\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot 6+\frac{1}{5}:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\frac{3}{13}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(4)^{-1}$ $[-1]$

24) $-1+\frac{2}{3}\cdot\left(-3+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-5+\frac{1}{2}\right):\left[-3\cdot\left(-2-\frac{1}{2}\right)\right]$ $[0]$

25) $\left(\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

26) $1{,}\overline{3}\cdot(3)^2+\left(2-\frac{1}{5}\right):(5)^{-2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-2)^2$ $[48]$

27) $0{,}5-\frac{1}{10}:\left(1-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot(3)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right):(-3)^{-2}-12$ $\left[\frac{13}{18}\right]$

28) $\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right]\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+3^0$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

29) $0{,}1\overline{3}:\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)+(1{,}5+1)^{-1}:(-2)^2+4$ $\left[-\frac{7}{30}\right]$

30) $\left(\frac{1}{2}\right)^3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(0{,}2+\frac{1}{5}\right)\cdot(-5)^2+\left(1{,}\overline{2}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

31) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}-\left(2-\frac{1}{2}\right)^2:\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2^0$ $\left[-\frac{23}{3}\right]$

Numeri razionali e rappresentazione decimale

32) Scrivere i numeri decimali corrispondenti alle seguenti frazioni:

$\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{13}$

33) Determinare la frazione generatrice dei seguenti numeri decimali:

$0{,}32$; $1{,}035$; $2{,}\overline{3}$; $5{,}0\overline{12}$; $3{,}\overline{45}$

*34) *Prova a dimostrare che quando ci sono 2 cifre del periodo dobbiamo mettere due 9 nel denominatore.*

Considera per esempio $1{,}\overline{03}$.

Suggerimento: chiama $n = 1{,}\overline{03}$ moltiplica per 100…

35) Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri:

234000000 ; 0,0000012 ; 0,00005

[$2{,}34 \cdot 10^{8}$; $1{,}2 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-5}$]

36) Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri:

13400; 2450000; 0,000032 [$1{,}34 \cdot 10^{4}$; $2{,}45 \cdot 10^{6}$; $3{,}2 \cdot 10^{-5}$]

37) Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri:

23500000; 0,000042; 0,00051 [$2{,}35 \cdot 10^{7}$; $4{,}2 \cdot 10^{-5}$; $5{,}1 \cdot 10^{-4}$]

Problemi

38) Un negozio effettua, durante il periodo dei saldi, uno sconto del 25% sui capi d'abbigliamento. Se un capo costava €50, quanto si risparmia?

[€12,5]

39) In un sondaggio relativo al ballottaggio tra 2 candidati (A,B) per l'elezione a sindaco, sono state intervistate 1000 persone: il 50% ha detto che voterà per il candidato A, 200 persone hanno indicato B e alcuni non hanno dato nessuna preferenza. Qual è la percentuale degli indecisi?

[30%]

40)

Per fare una crostata si usano 300g di farina, 150g di zucchero e 50g di burro. Quali sono le percentuali dei vari ingredienti sul totale?

[60%,30%,10%]

41) Un triangolo isoscele ABC di base AB ha il perimetro di 16 cm e i lati obliqui misurano 5 cm. Traccia dal punto medio M del lato AC il segmento MM' parallelo ad AB. Determina l'area del trapezio ABM'M.

[$Area(ABM'M) = 9cm^2$]

42) Un rettangolo ABCD ha dimensioni $a = 12$ e $b = 9$. Se diminuiamo a del 50% e b del 50% di quanto diminuisce l'area?

[75%]

43) Considera il rettangolo dell'esercizio precedente: se diminuiamo *a* del 50% e *b* del 30% di quanto diminuisce l'area?

[65%]

44) In una classe di 25 studenti 2 giocano a pallavolo, 5 a basket, 10 praticano il calcio, 1 segue corsi di danza e 7 non praticano nessuno sport. Calcola le relative percentuali (percentuale di studenti che praticano la pallavolo ecc.).

[8% ; 20% ; 40% ; 4% ; 28%]

45) Un capo di abbigliamento costa 100 euro: all'inizio dei saldi viene scontato del 50% e negli ultimi giorni viene applicato (al prezzo già scontato) un ulteriore ribasso del 30%. A quanto viene venduto il capo alla fine dei ribassi?

[35 euro]

46) Un elettrodomestico costa 200 euro: se viene venduto a 120 euro quale sconto è stato applicato ?

[40%]

47) In una scuola di 800 alunni l'80% vengono promossi a Giugno e il 4% degli studenti vengono respinti. Quanti studenti vengono "rimandati" in una o più materie?

[128]

VERIFICA DI RICAPITOLAZIONE
Insiemi numerici

1) Se scriviamo $(a+b)+c=a+(b+c)$ quale proprietà abbiamo applicato?

2) Completa:

$3^2 \cdot 3^4 = \ldots\ldots$ $\quad$ $2^3 \cdot 3^3 = \ldots\ldots$ $\quad$ $12^5 : 2^5 = \ldots..$ $\quad$ $(2^3)^4 = \ldots\ldots.$

$5^6 : 5^2 = \ldots\ldots$ $\quad$ $5^0 = \ldots\ldots.$

3) Determina $MCD(18,21)$ e $m.c.m.(18,21)$ sia con il metodo della scomposizione in fattori primi dei due numeri che considerando gli insiemi dei divisori e dei multipli comuni.

4) a) Scrivi il numero $(17)_{10}$ in base 2;
b) Scrivi in base 10 il numero $(1101)_2$

5) Riporta sulla retta numerica i seguenti numeri: -4 , 5 , $\frac{13}{4}$, $-\frac{7}{2}$, $\frac{19}{4}$.

6) Calcola:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{\frac{1}{2}}{2}$$

7) Calcole le seguenti potenze con esponente intero negativo

$$\left(\frac{1}{2}-3\right)^{-1} \quad ; \quad \left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad ; \quad \left(1-\frac{7}{6}\right)^{-3}$$

8) Trasforma le frazioni in numeri decimali e per ciascun numero decimale scrivi la frazione generatrice: $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{6}$; $2,7$; $2,\overline{7}$; $2,3\overline{7}$

9) In un trapezio isoscele ABCD la base minore sta alla base maggiore come 1: 4 e la loro somma è 10 cm. Determina perimetro e area del trapezio sapendo che l'altezza misura 4 cm.

10) In una classe di 30 studenti il 10% pratica il nuoto, 12 studenti giocano a basket e 9 studenti giocano a calcio. Quanti sono gli studenti che praticano il nuoto ? Qual è la percentuale degli studenti che praticano basket? E la percentuale di quelli che giocano a calcio?

SCHEDA PER IL RECUPERO
INSIEMI NUMERICI, BASI DI NUMERAZIONE

1. Per i seguenti numeri indica a quale insieme numerico appartengono:

$$5 \quad ; \quad -\frac{2}{3} \quad ; \quad -3 \quad ; \quad \sqrt{2} \quad ; \quad \frac{7}{3}$$

2. Sviluppa la seguente espressione numerica:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(-\frac{2}{3}\right)^2+5^0-\left(\frac{2}{3}\right):\left(\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2^3 \qquad [-\frac{3}{10}]$$

3. Trova la frazione generatrice dei seguenti numeri decimali:

$$1,2 \quad ; \quad 2,\overline{3} \quad ; \quad 1,1\overline{4} \qquad \left[\ \frac{12}{10} \quad ; \quad \frac{7}{3} \quad ; \quad \frac{103}{90}\ \right]$$

4. Indicata quale proprietà è stata utilizzata nelle seguenti uguaglianze:

$$a+b=b+a$$
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$
$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \qquad (c\neq 0)$$

5. Scrivi il risultato delle seguenti divisioni:

$$5:0=\dots\dots \quad ; \quad 0:5=\dots\dots \quad ; \quad 0:0=\dots\dots$$

$$\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=\dots\dots \quad ; \quad \frac{1}{4}:2=\dots\dots \quad ; \quad \frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\dots\dots$$

6. Scrivi in base 2 i seguenti numeri (scritti in base 10):

12 ; 34 ; 18 $\qquad [(1100)_2 \quad ; \quad (100010)_2 \quad ; \quad (10010)_2\ ]$

7. Scrivi in base 10 i seguenti numeri scritti in base 2:

1001 ; 11011 ; 111 $\qquad$ [9 ; 27 ; 7]

TEST

1) Choose one of the symbol $>$ $=$ $<$ above to complete each of the following statements.

a. 74% ________ $\frac{5}{7}$ b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ________ 8

2) Simplify:

a. $\left(\frac{1}{p}\right)^{0}$ b. $(r^2)^{-3}$

3) In a sale, the price of a boat was reduced from \$21 000 to \$ 16 800. Calculate the reduction as a percentage of the original price.

4) Mrs Duval makes one litre of ice cream. She eats $\frac{1}{8}$ litre and her children eat $\frac{3}{5}$ litre. Without using your calculator, find what fraction of a litre of ice cream is left. Show all your working clearly.

5) Write the following in order, staring with the smallest.

$$0.43 \quad \frac{4}{9} \quad 41\%$$

6) In a geography text book, 35% of the pages are coloured. If there are 98 coloured pages, how many pages are there in the whole book?

7) A town has 3500 families who own a car. If this represents 28% of the families in the town, how many families are there in total?

8)In a test Isabel scored 88%. If she got three questions incorrect, how many did she get correct?

9) If $\frac{3}{5}$ of the people in a theatre buy a snack during the interval, and of those who buy a snack $\frac{5}{7}$ buy ice cream, what fraction of the people in the theatre buy ice cream?

10) The angles in a triangle are in the ratio 3:4:8
   a) Show that the smallest angle of the triangle is 36°.
   b) Work out the other two angles of the triangle.

11) Denzil picks 800 tomatoes. 4% of the 800 tomatoes are damaged. How many of these tomatoes are **not** damaged?

12) (a) The running costs for a papermill are $ 75 246.
This amount is divided in the ratio labour costs : materials = 5 : 1
Calculate the labour costs.

(b) In 2012 the company made a profit of $ 135 890. In 2013 the profit was $ 150 675.
Calculate the percentage increase in the profit from 2012 to 2013.

(c) The profit of $ 135 890 in 2012 was an increase of 7% on the profit in 2011.
Calculate the prof in 2011.

13) Jane and Kate share $240 in the ratio 5:7 .

(a) Show that Kate receives $140.
(b) Jane and Kate each spend $20.
Find the new ratio Jane’s remaining money : Kate’s remaining money. Give your answer in its simplest form.

14) Denzil sells 750 of his tomatoes.

(a) The mean mass of a tomato is 66 g.
Calculate the mass of the 750 tomatoes in kilograms.
(b) Denzil sells his tomatoes at $1.40 per kilogram.
Calculate the total amount he receives from selling all the 750 tomatoes.
(c) The cost of growing these tomatoes was $33.Calculate his percentage profit.

15) Ahmed, Batuk and Chand share $1000 in the ratio 8 : 7 : 5.
Calculate the amount each receives.

16) Mrs Singh and Mr Patel are teachers.
They take their two classes to the theatre to see a play.

(a) Mrs Singh has 20 girls in her class.The ratio of girls : boys = 5 : 3.
Show that Mrs Singh has 32 students in her class.
(b) Mr Patel has 40 students in his class.The ratio of girls : boys = 3 : 2 .
For the 72 students in the two classes, work out the ratio of total number of girls : total number of boys . Give your answer in its simplest form.

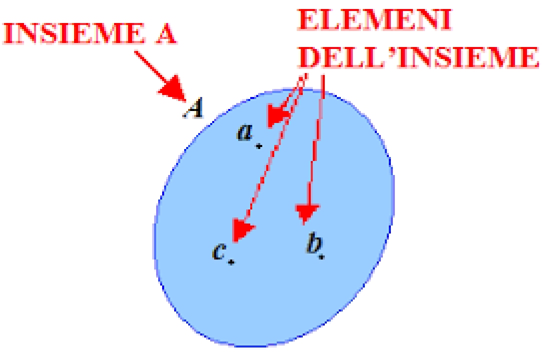
17) The Smith family paid $5635 for a holiday in India.
The total cost was divided in the ratio travel : accommodation : entertainment = 10 : 17 : 8.

(a) Calculate the percentage of the total cost spent on entertainment.
(b) Show that the amount spent on accommodation was $2737
(c) Mr Smith, his wife and their three children visit a theme park.

The tickets cost 2500 Rupees for and adult and 1000 Rupees for a child.

(1 Rupee = $0. 0152). Calculate the total cost of the tickets in dollars.

Insiemi



Il concetto di insieme è molto importante in matematica.

Cominciamo con lo stabilire cos'è un insieme in senso matematico: un raggruppamento di oggetti è un insieme se si può stabilire in modo univoco se un qualunque oggetto fa parte o meno del raggruppamento.

Quindi se per esempio considero questo raggruppamento:

- gli studenti "alti" della 1C scientifico dell'a.s. 2016/17 (del "B. Varchi")

questo non è un insieme (in senso matematico) perché non è chiaro che cosa voglia dire "alto".

Se invece dico:

- gli studenti della 1C scientifico dell'a.s. 2016/17 (del "B. Varchi") con altezza compresa tra 1,7 m e 1,8 m

questo è un insieme in senso matematico.

Gli oggetti che formano un insieme si chiamano **elementi** dell'insieme.

Per indicare che un elemento appartiene ad un dato insieme si usa il simbolo $\in$, mentre se non appartiene usiamo $\notin$.

Per esempio se considero P={numeri pari}={0, 2, 4, 6, 8, …}

$$2 \in P$$
$$3 \notin P$$

Se un insieme contiene un numero finito di elementi si dice **finito**, se contiene infiniti elementi si dice **infinito**.

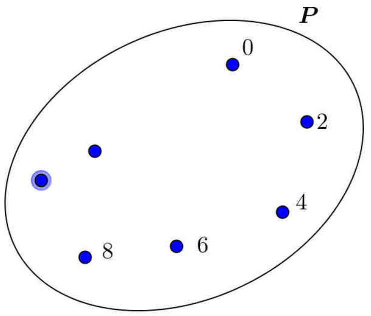
L'insieme che non contiene nessun elemento si chiama **insieme vuoto** e si indica con ϕ.

Rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in tre modi:

- rappresentazione grafica
- rappresentazione per elencazione
- rappresentazione mediante la sua proprietà caratteristica

Per esempio l'insieme dei numeri pari può essere rappresentato:

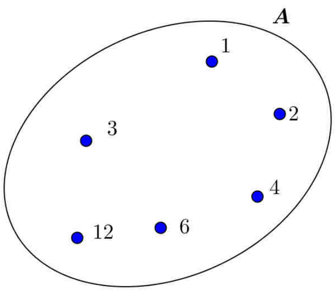


$P = \{0,2,4,6,8,10...\}$ $\qquad$ $P = \{x | x \in N \text{ e x è pari }\}$

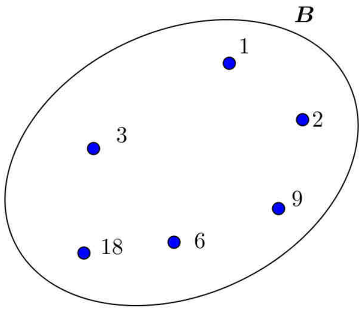
NOTA: nella rappresentazione con proprietà caratteristica, *x* indica un elemento generico e la linea verticale si legge "tale che".

Esempi

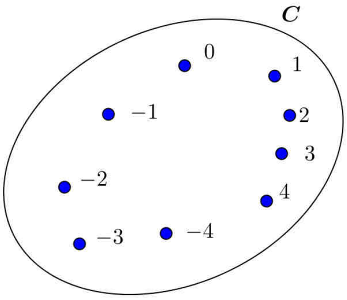
1) $A = \{x | x \in N \text{ e è un divisore di 12 }\}$
Quindi $A = \{1,2,3,4,6,12\}$



2) $B = \{x | x \in N \text{ e è un divisore di 18 }\}$. Quindi $B = \{1,2,3,6,9,18\}$



3) $C = \{x | x \in Z \text{ e } -4 \le x \le 4 \}$
$C = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

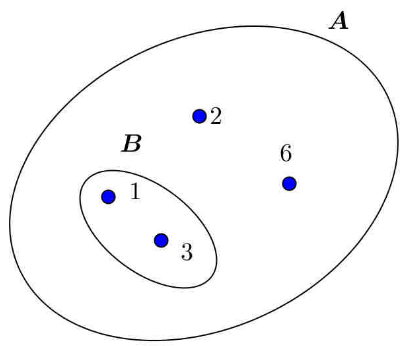


Sottoinsiemi di un insieme

Un insieme B si dice che è "sottoinsieme" di un insieme A se tutti gli elementi di B appartengono anche ad A.
Si scrive $B \subset A$ (B contenuto strettamente in A o B sottoinsieme di A)

Esempio 1

$A = \{x | x \in N$ e x è divisore di 6 $\}$
$B = \{x | x \in N$ e x è divisore di 3 $\}$



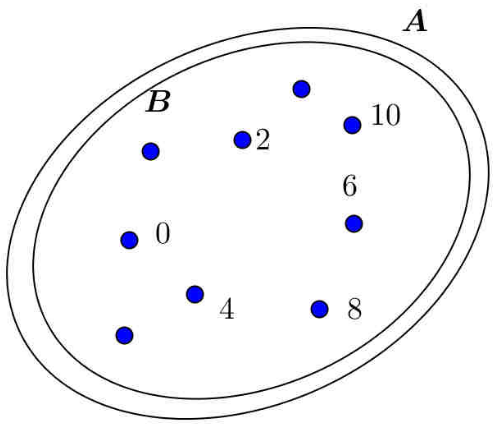
Come caso "limite" si può anche avere B=A (cioè i due insiemi hanno gli stessi elementi): se vogliamo comprendere anche questa situazione scriviamo

$$B \subseteq A$$

Esempio 2

$A = \{x | x \in N$ e x è multiplo di 2 $\}$
$B = \{x | x \in N$ e x è pari $\}$

In questo caso $B = A$.



Problema: *quanti sono i sottoinsiemi di un insieme dato?*

Consideriamo per esempio l'insieme

$$A = \{a, b, c\}$$

I sottoinsiemi "propri"di A sono:

$$\{a\} \qquad \{b\} \qquad \{c\} \qquad \{a.b\} \qquad \{a, c\} \qquad \{b, c\}$$

Inoltre possiamo sempre considerare l'insieme vuoto e l'insieme A (detti sottoinsiemi "impropri").
Quindi abbiamo 8 sottoinsiemi.

E se A avesse avuto 4 elementi?
Se $A = \{a, b, c, d\}$ abbiamo:

$$\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}$$
$$\{a, b\}\{a, c\}\{a, d\}\{b, c\}\{b, d\}\{c, d\}$$
$$\{a, b, c\}\{a, b, d\}\{b, c, d\}\{a, c, d\}$$
$$A$$

Quindi ci sono 16 sottoinsiemi.

Possiamo trovare una regola per dire quanti sono i sottoinsiemi di un insieme A?

Proviamo a scrivere il numero di sottoinsiemi di A al variare del numero degli elementi:

$A = \{a\} \rightarrow \phi, \{a\}$ 2 sottoinsiemi
$A = \{a, b\} \rightarrow \phi, \{a\}, \{b\}, A$ 4 sottoinsiemi
$A = \{a, b, c\} \rightarrow ....$ 8 sottoinsiemi
$A = \{a, b, c, d\} \rightarrow ....$ 16 sottoinsiemi
….

Osserviamo che il numero dei sottoinsiemi raddoppia quando aumentiamo un elemento: infatti oltre a tutti i sottoinsiemi di prima ce ne saranno altrettanti con il nuovo elemento. Quindi se indichiamo con n il numero degli elementi di A abbiamo:

$n = 1$ 2 sottoinsiemi

$n = 2$ $2 \cdot 2 = 2^2$ sottoinsiemi

$n = 3$ $2^2 \cdot 2 = 2^3$ sottoinsiemi

$n = 4$ $2^3 \cdot 2 = 2^4$ sottoinsiemi

In conclusione, se A ha n elementi, i suoi sottoinsiemi sono 2^n.

Intersezione di due insiemi

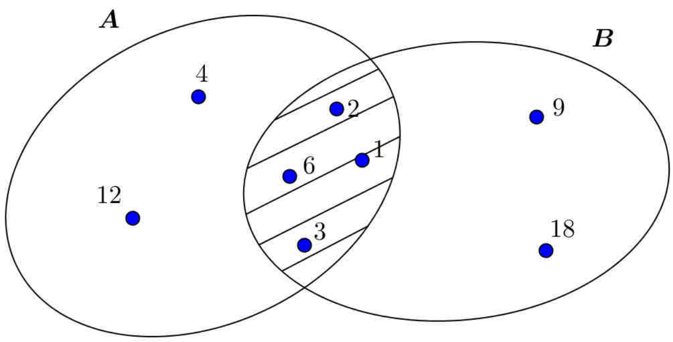
Dati due insiemi A e B possiamo controllare se hanno elementi in comune: l'insieme degli elementi comuni ad A e B si chiama "insieme intersezione tra A e B" e si indica con il simbolo

$$A \cap B$$

(si legge A intersezione B).

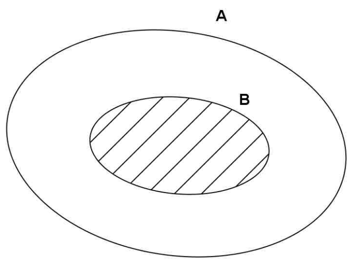
Esempio

$A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$
$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 18\} = \{1,2,3,6,9,18\}$



Abbiamo $A \cap B = \{1,2,3,6\}$ e graficamente gli elementi comuni ad A e B si rappresentano nella zona "comune".

Osservazioni



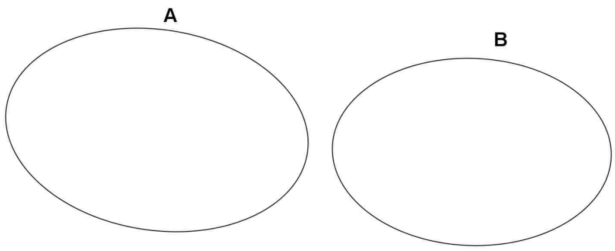
1) Se $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$

Per esempio se $A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$
$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 6\} = \{1,2,3,6\}$

si ha che B è sottoinsieme di A (tutti i suoi elementi sono anche elementi di A) e quindi $A \cap B = \{1,2,3,6\} = B$.

2) Se A e B non hanno elementi in comune allora $A \cap B = \phi$ ed A e B si dicono **disgiunti**.
Per esempio $A = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è pari}\}$
$B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è dispari}\}$

A e B sono disgiunti e $A \cap B = \phi$.



Unione di due insiemi

Dati due insiemi A e B possiamo considerare l'insieme degli elementi di A uniti agli elementi di B: questo insieme si chiama insieme "unione" di A e B e si indica con il simbolo

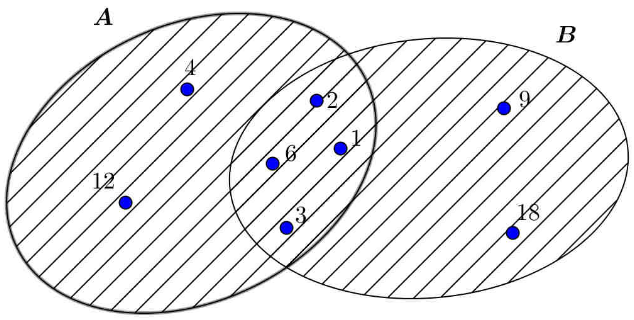
$$A \cup B$$

Esempio

Riprendiamo l'esempio precedente:

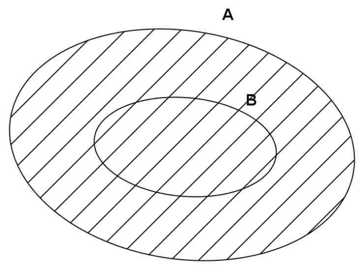
$A = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$
$B = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 18\} = \{1,2,3,6,9,18\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,6,9,12,18\}$



Osservazione

Se $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$



Nota importante

La definizione di $A \cap B$ è : $A \cap B = \{x / x \in A \textbf{ e } x \in B\}$

La definizione di $A \cup B$ è : $A \cup B = \{x / x \in A \textbf{ o } x \in B\}$

Attenzione al significato della **e** della **o** :

"**e**" significa che *x* **appartiene sia ad A che a B** (elemento comune)
"o" significa che *x* **appartiene ad A oppure a B**.

Osservazioni

1) *Se devo intersecare tre insiemi A,B,C come posso procedere?*

Esempio: $A\{1,2,3,4,5\}$ $B = \{3,4,5,6\}$ $C = \{5,6,7\}$

Come risulta $A \cap B \cap C$?

Posso prima intersecare A e B e poi intersecare con C cioè:

$(A \cap B) \cap C = \{3,4,5\} \cap \{5,6,7\} = \{5\}$

oppure posso prima intersecare B e C e poi intersecare con A cioè:

$A \cap (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{5,6\} = \{5\}$

Il risultato è sempre lo stesso!

Vale la proprietà

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(si chiama **proprietà associativa dell'intersezione**).

2) *Se devo unire tre insiemi A,B,C come posso procedere?*

In modo analogo posso prima unire due insiemi, per esempio A e B, e poi C e non è importante quali insiemi scelgo di unire per primi cioè

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(si chiama proprietà associativa dell'unione).

Prova con l'esempio precedente.

3) A volte dobbiamo compiere *operazioni più complesse*, per esempio determinare $A \cap (B \cup C)$.
Nell'esempio precedente abbiamo:

$$\{1,2,3,4,5\} \cap \{3,4,5,6,7\} = \{3,4,5\}$$

Ma potevo eseguire l'operazione anche in un altro modo?
Possiamo verificare che possiamo "distribuire" l'intersezione cioè che vale la proprietà

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(**proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione**).

Differenza tra due insiemi

Dati due insiemi A e B si possono considerare gli elementi di A che non appartengono a B: si parla di "insieme differenza" tra A e B e si indica con $A-B$.

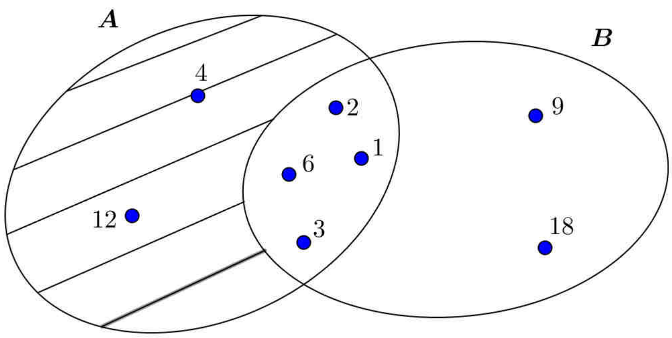
Quindi diamo questa definizione:

$$A-B=\{x\,/\,x\in A \quad e \quad x\notin B\}$$

Esempio

$A=\{x\,/\,x\in \mathrm{N}$ e x è un divisore di 12 $\}$
$B=\{x\,/\,x\in \mathrm{N}$ e x è un divisore di 18 $\}$

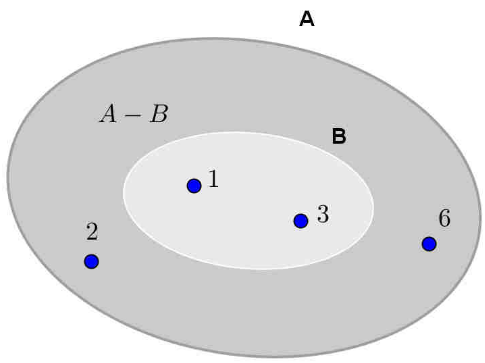
$A-B=\{4;\quad 12\}$



Osservazioni

1) Se $B\subset A$ allora $A-B$ si chiama anche **insieme complementare di B rispetto ad A** e si indica con $\overline{B}_A$.
Se per esempio $A=\{x\,/\,x\in \mathrm{N}$ e x è un divisore di 6 $\}$ $\quad B=\{x\,/\,x\in \mathrm{N}$ e x è un divisore di 3 $\}$

$A-B=\{2;\quad 6\}$



2) Se $A\cap B=\phi \Rightarrow A-B=A$

3) Osserva che $A-B$ è diverso da $B-A$!
(naturalmente se A e B non coincidono)

Per esempio considerando gli insiemi dell'esempio iniziale abbiamo

$$A-B=\{4;\quad 12\} \text{ mentre } B-A=\{9;\quad 18\}$$

Il prodotto cartesiano di due insiemi

Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è costituito dalle "coppie ordinate"

$$(x; y) \text{ in cui } x \in A \text{ e } y \in B$$

Si indica con $A \times B$ e si legge "A per B".

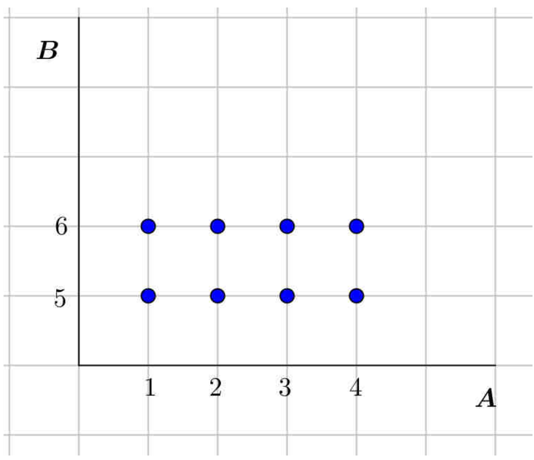
$$A \times B = \{(x; y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Se per esempio $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{5,6\}$ abbiamo

$$A \times B = \{(1,5);(1,6);(2,5);(2,6);(3,5);(3,6);(4,5);(4,6)\}$$

L'insieme $A \times B$ si può rappresentare disponendo gli elementi di A su una semiretta orizzontale e quelli di B su una semiretta verticale: gli elementi di $A \times B$ sono i punti della griglia.

Si può rappresentare $A \times B$ anche con una tabella disponendo sulla colonna gli elementi di A e sulla riga quelli di B.



A \ B	5	6
1	(1;5)	(1;6)
2	(2;5)	(2;6)
3	(3;5)	(3;6)
4	(4;5)	(4;6)

Osservazione importante: $A \times B \neq B \times A$

Infatti $B \times A$ nel nostro esempio è costituito dalle coppie

$$\{(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4)\}$$

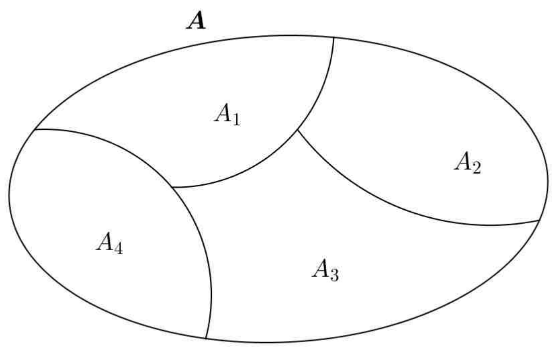
Poiché le coppie sono **ordinate** cioè per esempio la coppia $(1,5) \neq (5,1)$ecc. gli insiemi $A \times B$ e $B \times A$ risultano diversi.

Partizione di un insieme

Si chiama partizione dell'insieme A un insieme di sottoinsiemi aventi queste caratteristiche:

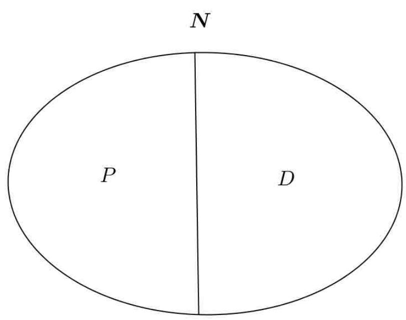
- ogni sottoinsieme è non vuoto;
- tutti i sottoinsiemi sono disgiunti tra loro;
- l'unione di tutti i sottoinsiemi è A

I sottoinsiemi in figura costituiscono una partizione dell'insieme A.

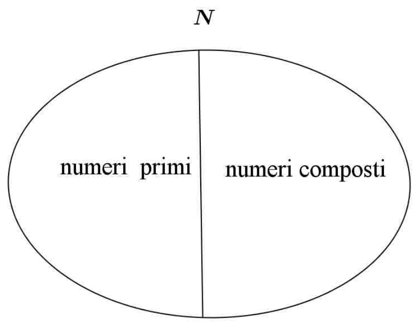


Esempi

1) Nell'insieme dei numeri naturali N , i sottoinsiemi dei numeri pari P e dei numeri dispari D costituiscono una partizione di N .



2) Nell'insieme dei numeri naturali N , i sottoinsiemi dei numeri primi e dei numeri composti costituiscono una partizione di N.



3) Nell'insieme A degli alunni di una data classe , i sottoinsiemi formati dalle femmine e dai maschi costituiscono una partizione dell'insieme A.

ESERCIZI

Rappresentazione di un insieme

1) Scrivi per elencazione i seguenti insiemi:

$A = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è multiplo di } 2\}$
$B = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 15\}$
$C = \{x / x \in \mathrm{Z} \text{ e } -5 \le x \le 2\}$
$D = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ , } x \text{ è dispari e } 2 < x < 10\}$

2) Scrivi tutti i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } 1 \le x \le 3\}$.

3) Scrivi la proprietà caratteristica per i seguenti insiemi:

$A = \{4;\ 6;\ 8;\ 10\}$
$B = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11...\}$
$C = \{1;\ 2;\ 4;\ 8\}$
$D = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

4) All'interno dell'insieme A dei quadrilateri rappresenta graficamente l'insieme B dei parallelogrammi, l'insieme C dei rombi e l'insieme D dei quadrati.

5) Rappresenta per elencazione e graficamente

$A = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 4\}$
$B = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 12\}$

Come risulta A rispetto a B?

6) Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{1,2,4,6,8\}$?

7) Come risulta l'insieme dei triangoli equilateri A rispetto all'insieme B dei triangoli isosceli?

8) Scrivi per elencazione i seguenti insiemi:

$A = \{x / x = 3n, n \in \mathrm{N}\}$

$B = \{x / x = 3k, k \in \mathrm{Z}\}$

Come risulta A rispetto a B?

Operazioni tra insiemi

9) Determina gli elementi di A e B , determina $A \cap B$; $A \cup B$; $A - B$; $B - A$ e rappresentali anche graficamente.

$$A = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ , è pari e } 3 \le x \le 11 \}$$
$$B = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 4 \}$$

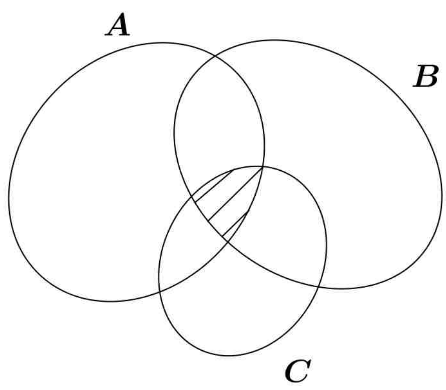
10) Determina $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C$; $A \cap (B \cup C)$; $A \cup (B \cap C)$ essendo:

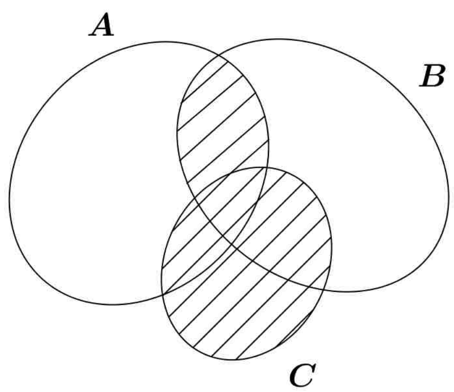
$$A = \{4; \quad 6; \quad 8; \quad 10\}$$
$$B = \{4; \quad 5; \quad 6; \quad 7\}$$
$$C = \{6; \quad 7; \quad 8; \quad 9\}$$

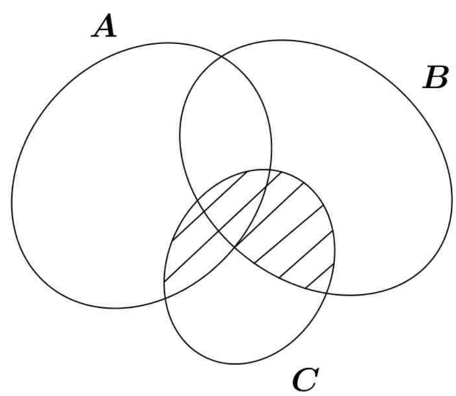
11) Considera $A = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è multiplo di } 3 \}$
$B = \{x / x \in \mathrm{N} \text{ e } x \text{ è un multiplo di } 6 \}$

Determina $A \cap B$; $A \cup B$.

12) Indica cosa rappresentano le seguenti zone tratteggiate:







13) Sono dati gli insiemi $A = \{x / x \in \mathrm{N}, \ \text{x è pari}\}$, $B = \{x / x \in \mathrm{N}, \ \text{x è dispari}\}$, $C = \{5,12,25,40\}$.
Determina $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $(A \cap B) \cap C$, $(A \cup B) \cup C$

14) Considera gli insiemi $A = \{a,b,c\}$, $B = \{d,b,f\}$, $C = \{a,f,b,d\}$.
Dopo averli rappresentati graficamente, determina $(A \cup B) \cup C$ e $(A \cap B) \cap C$.

15) Dati $A = \{x / x \in \mathrm{N}, x \leq 5\}$, $B = \{x / x \in \mathrm{N}, \quad 5 < x \leq 15\}$, $C = \{x / x \in \mathrm{N}, \quad x \leq 10\}$.
Determina, utilizzando la notazione caratteristica, $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap C$.

16) Se $D \subset F$, determina $D - F$.

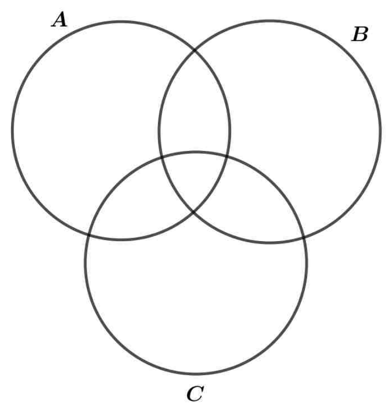
17) Dato l'insieme $A = \{a,b,c,d,e\}$, esiste un insieme B per cui $B \cup \{a,h\} = A$? Perché?

18) Ripetendo ogni volta la figura qui sotto riportata, colora le parti della figura corrispondenti alle seguenti operazioni:

a) $A \cap (B \cup C)$

b) $(A - B) \cap C$

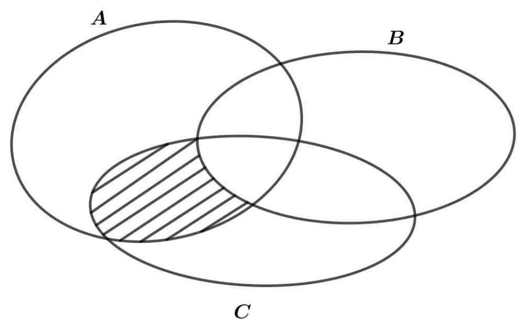
c) $(A - C) \cap (B - C)$



19) Sapendo che
$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}, \ A \cap B = \{e,g\}, \quad A - B = \{a,d,b,h\}, \quad B - A = \{c,f\},$$

scrivi gli elementi di A e di B.

20) Individua la parte colorata utilizzando le operazioni insiemistiche.



21) Dato l'insieme $A = \{-4\ ;-3\ ;-2\ ;-1\ ;0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\}$, scrivilo con la notazione caratteristica. Successivamente determina il complementare di A rispetto all'insieme dei numeri relativi. È possibile fare il complementare rispetto all'insieme dei numeri naturali? Perché?

22) Vero o falso?

I fiori profumati costituiscono un insieme	V	F
Se A ha 5 elementi allora ammette 5 sottoinsiemi	V	F
Se A ha 5 elementi allora ammette $A \times A$ ha 25 elementi	V	F
Se $A \cup B = A$, allora A = ϕ	V	F
Se $A \cap B = B$, allora A = ϕ	V	F
Se $A - B = \phi$, allora $A \subseteq B$	V	F
Se A ha 5 elementi e B ne ha 3 allora $A \cup B$ ha 8 elementi	V	F
Se A ha 5 elementi e B ne ha 3 allora $A \cap B$ ha 2 elementi	V	F

23) Si considerino gli insiemi, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, h\}$, $C = \{b, d, e, f\}$
Dopo aver rappresentato gli insiemi con i diagrammi di Eulero-Venn, determina:

$$A \cap B, \quad B \cap C, \quad A \cup B, \quad (B - A) \cap C$$

24) Dato l'insieme $U = \{x / x = 2n \quad con \quad n \in \mathrm{N}, n < 6\}$, rappresentalo in forma estensiva cioè scrivi tutti i suoi elementi.

25) Determina due insiemi A e B tali che $A \times B$ sia formato da 4 elementi, $A \cup B$ da 3 elementi ed $A \cap B$ da un solo elemento.

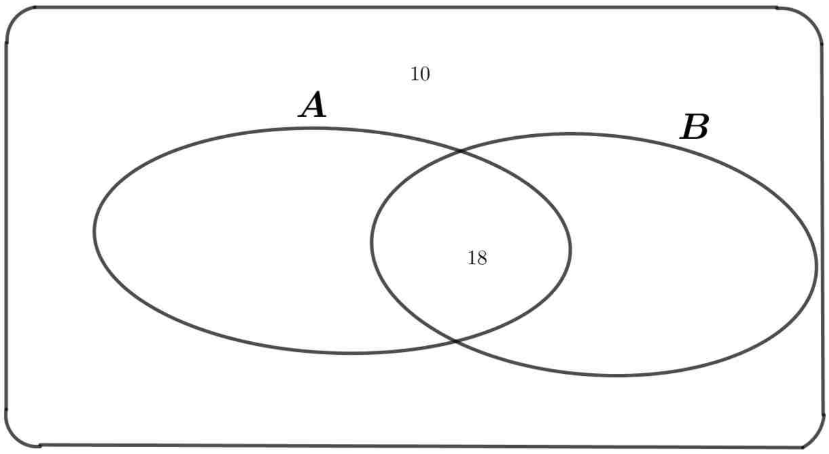
26) Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$, scrivere gli elementi di $A \times B$, $B \times A$.

27) Dati gli insiemi $A\{1,2,3\}$, $B = \{1,4,5\}$, $C = \{1,5,6\}$ e $D = \{2,4,5\}$ associa ad ogni operazione della colonna di destra, l'operazione della colonna di sinistra che ha lo stesso risultato

$(A \cap B) \times (C \cap D)$	$(A \times B) \cup (A \times C)$
$(A \cup B) \times C$	$(A \times B) \cap (A \times C)$
$A \times (C \cup B)$	$(A \times B) - (A \times C)$
$A \times (C \cap B)$	$(A \times C) \cap (B \times D)$
$A \times (B - C)$	$(B \times A) - (C \times A)$
$(B - C) \times A$	$(A \times C) \cup (B \times C)$

*28) Su 100 alunni di una scuola, 82 si interessano di calcio, 26 si interessano di basket e 10 non si interessano né di calcio né di basket. Quanti sono gli studenti che si occupano di calcio e di basket?
(*Invalsi 2014)*

Svolgimento
Poiché su 100 alunni 10 non si interessano né di calcio né di basket, ci sono100-10 = 90 studenti che si interessano o di calcio o di basket.
Se allora indichiamo con A l'insieme degli studenti che si interessano di calcio e con B l'insieme degli studenti che si interessano di basket avremo che il numero degli elementi di $A \cup B$ è 90.
D'altra parte sommando 82 (numero elementi di A) con 26 (numero degli elementi di B) si ottiene 108: quindi 108 – 90 = 18 rappresenta il numero degli studenti dell'intersezione $A \cap B$ cioè il numero di studenti che si interessa sia di calcio che di basket.



29) In un paese 220 ragazzi possiedono la moto, 80 la moto e la bici, 120 solo la bici e 15 non possiedono né l'una né l'altra. Quanti ragazzi possiedono una bici? Quanti sono i ragazzi del paese?

[200,355]

30) Una commissione esamina 60 studenti. Il compito di matematica è costituito da tre problemi. 40 candidati hanno risolto correttamente il primo problema, 40 hanno risolto il secondo e 31 il terzo. In 25 hanno risolto i primi due problemi, in 15 il primo ed il terzo, in 17 il secondo ed il terzo e solo 4 li hanno risolti tutti. Quanti sono gli studenti che hanno risolto il secondo ed il terzo ma non il primo? Quanti hanno svolto correttamente solo il secondo esercizio? Quanti non hanno risolto nessun esercizio?

[13; 2; 2]

SCHEDA PER IL RECUPERO
INSIEMI

1. Scrivi gli elementi dei seguenti insiemi:

$$A = \{x / x \in \mathrm{N} \quad e \quad 4 \le x \le 8\}$$
$$B = \{x / x \in \mathrm{N} \quad e \quad x \quad è \quad divisore \quad di \quad 12\}$$

   Determina , anche con la rappresentazione grafica $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Considera:

$$A = \{1,2,4,6\}$$
$$B = \{4,5,7,9\}$$
$$C = \{1,4,10\}$$

   Rappresenta graficamente A, B, C e verifica che $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3. Considera $A = \{a, b, c, d\}$. Scrivi tutti i sottoinsiemi di A.

4. Se $A = \{triangoli \quad equilateri\}$ e $B = \{triangoli \quad isosceli\}$ risulta $A \subset B$ oppure $B \subset A$?

5. Considera $P = \{numeri \quad pari\}$ e $D = \{numeri \quad dispari\}$. Come risultano $P \cap D$ e $P \cup D$?

6. Scrivi gli elementi contenuti nel seguente insieme:

$$A = \{x = 3n + 1 \quad con \quad x \in \mathrm{N}\}$$

7. Se due insiemi A e B hanno un numero finito di elementi, quando si può dire che il numero degli elementi di $A \cup B$ è uguale alla somma del numero degli elementi di A con il numero degli elementi di B?

Ù

TEST

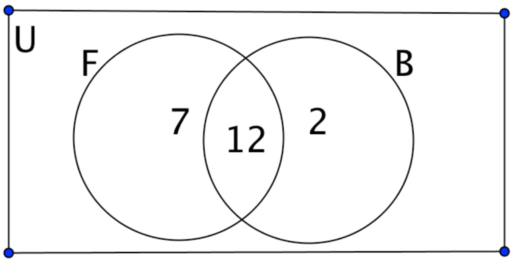
1) $A = \{x : x \quad is \quad$ natural numbers less than 10 and $even\}$
$B = \{x : x \quad is \quad prime \quad less \quad than \quad 10\}$

(a) Express this on a Venn diagram

(b) $A \cap B =$

2) All 24 students in a class are asked whether they like football and whether they like basketball. Some of the results are shown in the Venn diagram below.

U = students in the class F = students who like football B = students who like basketball



(a) How many students like both sports?
(b) How many students like neither sports?
(c) Write down the value of $n(F \cup B)$

3) In a school of 100 students, 70 enjoy Maths, 50 enjoy French and 20 enjoy neither.

(a) Draw a Venn diagram showing this information.

(b) Use your diagram to find the number of students who enjoy both subjects.

4) On an athletics day 150 athletes take part. 60 are in the 100 metres, 50 are in the 200 metres and 80 are in neither.

(a) Draw a Venn diagram showing this information.

(b) Use your diagram to find the number of athletes who run in only one race..

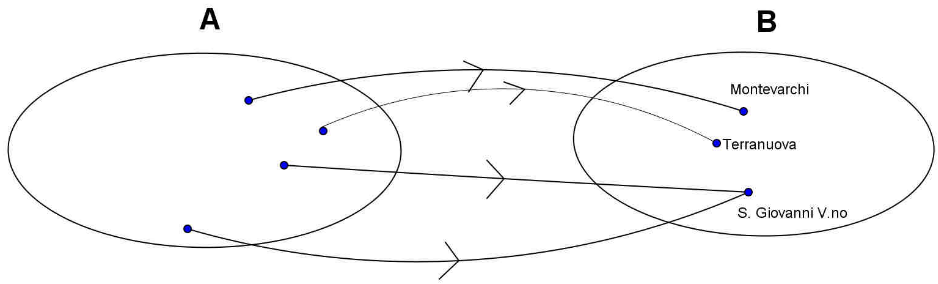
5) In a class of students, 11 play a stringed instrument, 15 play a wind instrument, 6 play both and 10 play neither.
Draw a Venn diagram to show this information and find the total number of students in the class.

Le funzioni

Definizione : $f : A \to B$ *con A e B insiemi*
f è una funzione da A a B (A insieme di "partenza", B insieme di "arrivo") se associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.

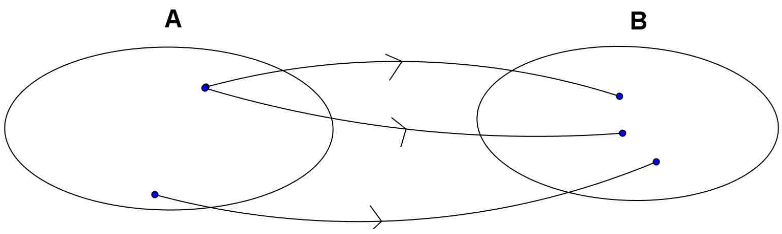
Esempio: consideriamo come insieme A l'insieme degli studenti della 1A liceo scientifico del nostro istituto nell'anno scolastico in corso e come insieme B le località del Valdarno (Montevarchi, Terranuova, ecc.).

Consideriamo $f : A \to B$ come la legge che associa ad ogni studente la località dove risiede.

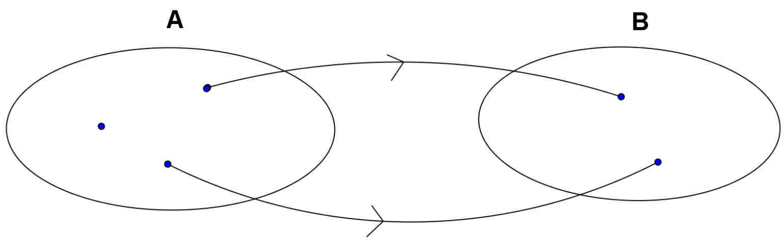


Poiché ad ogni studente è associata una e una sola località, f è una funzione (nel disegno abbiamo riportato solo qualche ipotetico studente).

Osservazione: perché $f : A \to B$ sia una funzione da ogni elemento $a \in A$ deve partire una ed una sola "freccia".
Se per esempio avessimo considerato come insieme B l'insieme degli sport (nuoto, basket, pallavolo, tennis, calcio, ecc) ed avessimo considerato $f : A \to B$ che associa ad ogni studente gli sport praticati, f poteva non risultare una funzione nel caso in cui ci fossero stati studenti che non praticano nessuno sport o ne praticano più di uno.



non è una funzione



non è una funzione

Notazioni
In genere l'elemento dell'insieme di partenza viene indicato con x e l'elemento dell'insieme di arrivo con $y = f(x)$
$f(x)$ si legge "*f di x*" e rappresenta l'elemento corrispondente a x secondo la funzione *f*.
$y = f(x)$ si chiama anche "immagine" di x secondo la funzione *f*.

Nota importante
Se A e B sono insiemi numerici la funzione si chiama "funzione numerica".

Esempio: se per esempio consideriamo $A = R$ (insieme dei numeri reali) e $B = R$ la funzione descritta dalla legge

$$f : x \to x^2$$

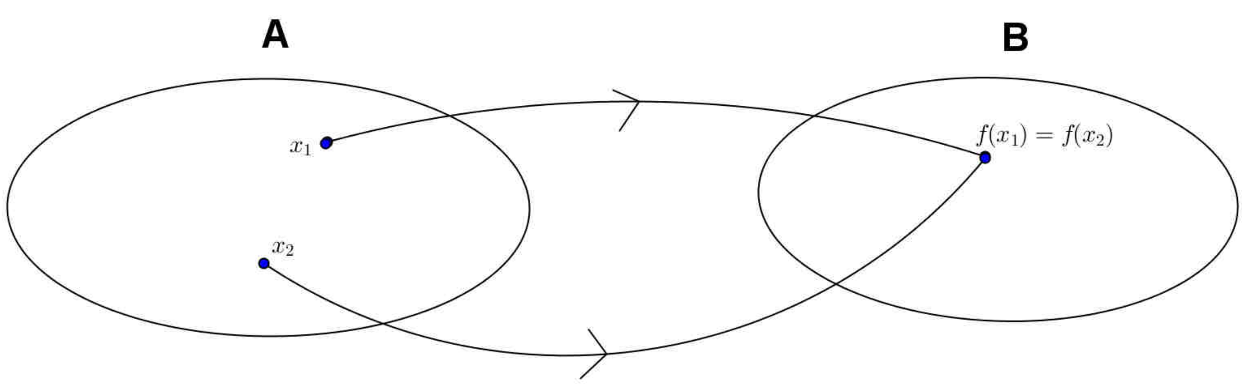
che associa cioè ad ogni $x \in R$ il suo quadrato, è una funzione numerica.

Proprietà di una funzione

Funzione iniettiva
Diciamo che una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se ad elementi distinti di A vengono associati elementi distinti di B.
Possiamo scrivere: $f : A \to B$ è iniettiva quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Per capire meglio questa definizione consideriamo il nostro primo esempio la funzione $f : A \to B$ che associa ad uno studente della 1A del liceo scientifico dell'anno in corso la località dove vive: questa funzione non risulterà iniettiva nel caso (molto probabile) che ci siano almeno due studenti che vivono nella stessa località.

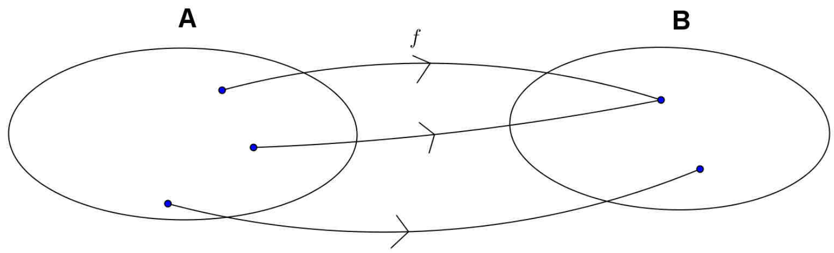
Per esempio la funzione rappresentata in figura *f* **non è iniettiva**.



Funzione suriettiva

Diciamo che $f : A \rightarrow B$ *è una funzione suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.*

Nell' esempio seguente f è suriettiva ma non è iniettiva.



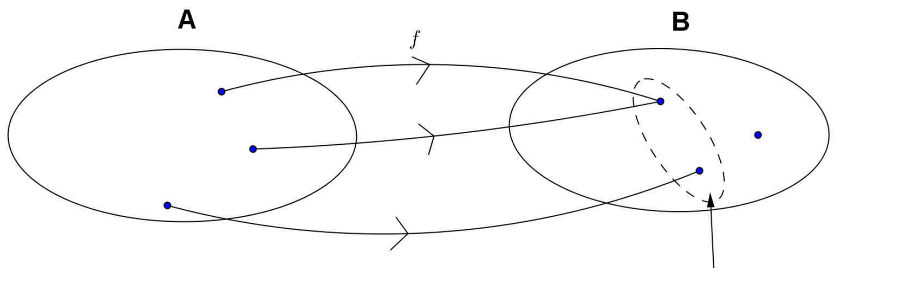
In sintesi si dice che f è suriettiva se $\forall y \in B \ \exists x \in A$ *tale che* $f(x) = y$.

Osservazione: **possiamo sempre rendere suriettiva una funzione "restringendo" l'insieme di arrivo**.

Nel nostro primo esempio se consideriamo $B = \{\textit{tutte le località del Valdarno}\}$ quasi sicuramente la nostra funzione non sarà suriettiva, ma se consideriamo $f : A \rightarrow B'$ con

$$B' = \{\textit{le località del Valdarno in cui abita almeno uno studente della } 1A\}$$

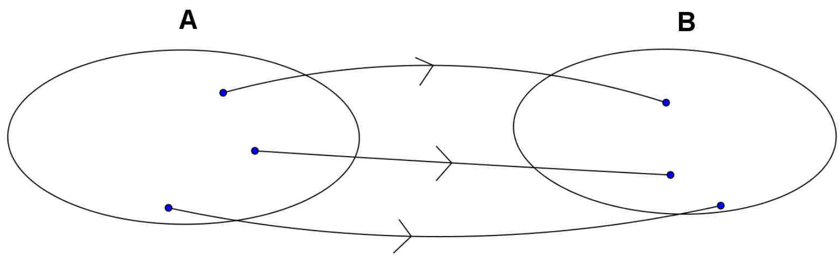
in questo caso risulterà suriettiva.



Funzione biunivoca

Diciamo che $f : A \rightarrow B$ *è una funzione biunivoca se è iniettiva e suriettiva.*

In questo caso si parla anche di corrispondenza uno-a-uno perché non solo ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde uno ed un solo elemento di B ma vale anche il viceversa, cioè ad ogni elemento di B corrisponde uno ed un solo elemento di A.



f biunivoca

Le funzioni numeriche

Consideriamo le funzioni numeriche in cui A e B sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali R.

Definizione : *si chiama **dominio** della funzione numerica f l'insieme dei numeri reali per i quali la funzione ha significato.*

Esempi

1) $f : x \to \frac{1}{x}$ D_f (dominio di f): $x \neq 0$ cioè $D_f = R \setminus \{0\}$ poiché non posso calcolare $\frac{1}{0}$.

2) $f : x \to x^2$ $D_f = R$ poiché posso sempre calcolare il quadrato di un numero $x \in R$

Definizione: *si chiama **codominio** della funzione f l'insieme delle immagini di f.*
Esempio**:** $f : x \to x^2$ C_f (codominio di f) $= R_0^+$ cioè i numeri reali $y \geq 0$ poiché un quadrato è sempre positivo o nullo.

Definizione: *si chiama **grafico** di una funzione numerica f l'insieme delle coppie $(x, f(x))$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con $x \in D_f$.*

Nota
Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

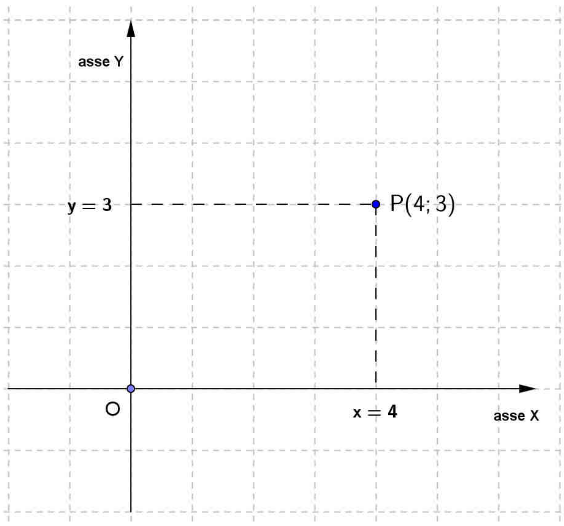
Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.

In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** *(x;y)* di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata *(x;y)* di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).

Il numero ***x*** si chiama ***ascissa*** del punto P e il numero ***y*** si chiama ***ordinata*** del punto P.

x e *y* si dicono anche **coordinate** del punto P.

E' importante sottolineare che $(x; y)$ è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.



Esempio 1

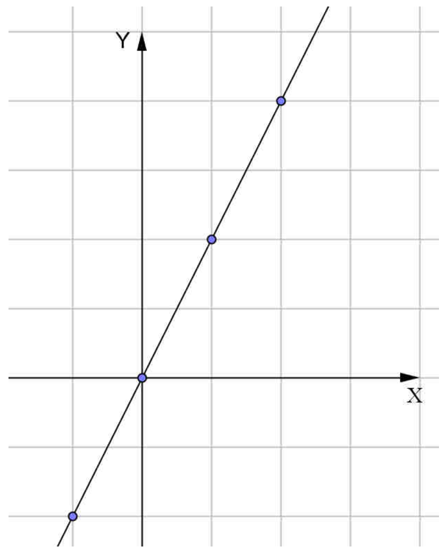
Consideriamo la funzione $\boxed{f : x \rightarrow 2x}$

che possiamo scrivere anche $f(x) = 2x$ o $y = 2x$.

Nota: x viene detta **variabile indipendente** , $y = f(x)$ viene detta **variabile dipendente** dal momento che il suo valore dipende dal valore assegnato alla x.

Per disegnare il suo grafico possiamo compilare una tabella assegnando dei valori alla variabile *x* e calcolando il corrispondente valore della *y* e poi riportare le coppie nel piano cartesiano.

x	$y = f(x)$
-1	-2
0	0
1	2
2	4



Osserviamo che **se il valore di *x* raddoppia, raddoppia anche il corrispondente valore di y**, se *x* triplica anche il corrispondente valore di y triplica: *x* e *y* si dicono "**direttamente proporzionali**".

Notiamo inoltre che **il rapporto tra y e x è costante**: nel nostro esempio $\frac{y}{x} = 2$.

In generale la funzione

$$\boxed{y = k \cdot x}$$

con $k \in R$ (cioè *k* un numero reale)

ha come grafico **una retta passante per l'origine del sistema di riferimento**.

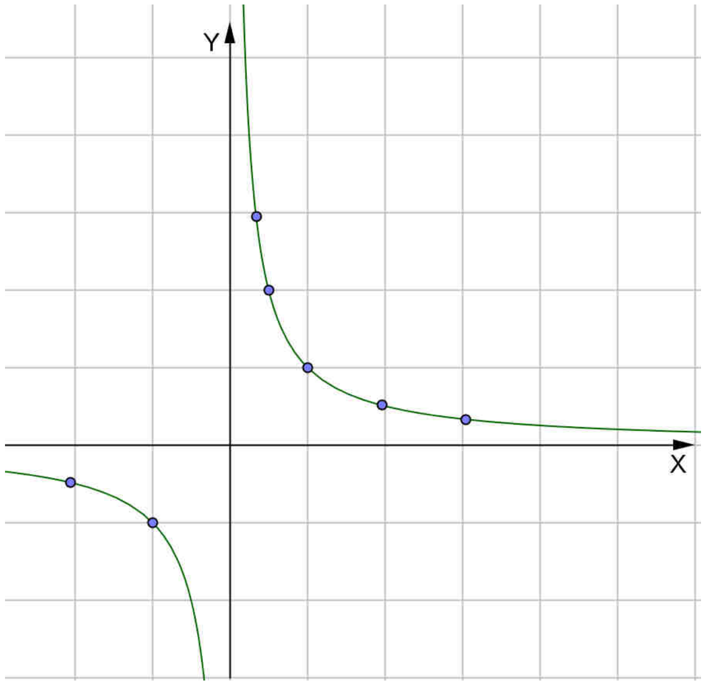
Esempio 2

Consideriamo la funzione $\boxed{f : x \to \frac{1}{x}}$

che possiamo anche scrivere come $f(x) = \frac{1}{x}$ o $y = \frac{1}{x}$.

Facendo la tabella ci accorgiamo che quando x aumenta $y = f(x)$ diminuisce avvicinandosi a zero, mentre quando ad x assegniamo un numero "piccolo" $y = f(x)$ risulta un numero "grande".

x	$y = f(x)$
-1	-1
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$



Il grafico è costituito da due "rami" separati che si avvicinano agli assi coordinati senza toccarli (si chiamano "asintoti" che significa "non tocca insieme"): questa curva prende il nome di "**iperbole**".

Osserviamo che in questo caso **se *x* raddoppia il valore corrispondente *y* dimezza**, se x triplica la y corrispondente diventa un terzo: x e y si dicono "**inversamente proporzionali**".

Osserviamo che questa volta **il prodotto tra *x* e *y* è costante** : nel nostro esempio $xy = 1$.

In generale la funzione $y = \frac{k}{x}$ (con $k \in R$ cioè k numero reale) ha come grafico un'iperbole.

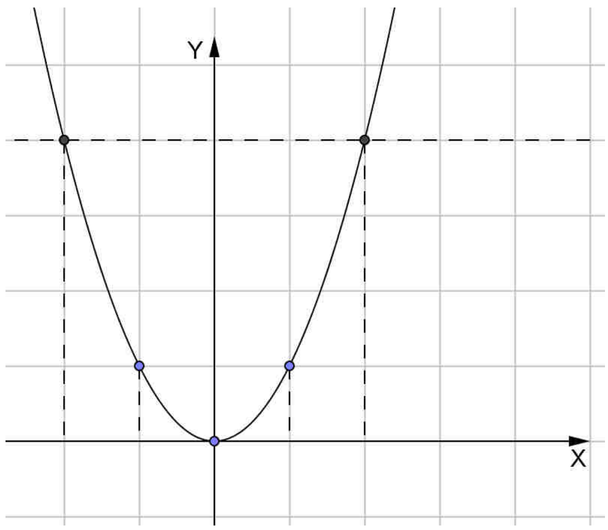
Esempio 3

Consideriamo la funzione $\boxed{f : x \rightarrow x^2}$

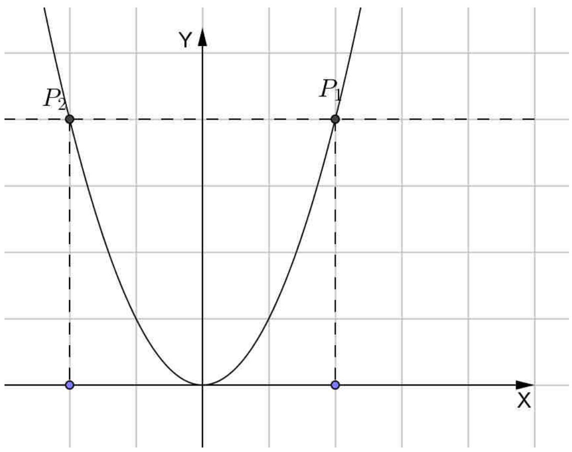
che possiamo anche scrivere $f(x) = x^2$ o $y = x^2$

Facciamo il grafico considerando alcuni valori della *x* (vedi tabella).

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



In questo caso anche dai valori della tabella vediamo che **la funzione non è iniettiva** poiché valori diversi hanno la stessa immagine $-2 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 4$ ecc.



Infatti se tagliamo il grafico con una retta parallela all'asse *x* (vedi figura) troviamo due punti e quindi per una data *y* ci sono due *x* che hanno quel valore *y* come immagine.

Quindi, in generale, *se tagliando il grafico con rette parallele all'asse x troviamo sempre al massimo un punto di intersezione allora f è iniettiva*, altrimenti non lo è.

ESERCIZI

Funzioni numeriche

1) Per ciascuna delle seguenti funzioni disegna il grafico, determina dominio, codominio e indica se si tratta di una funzione iniettiva:

a) $f : x \to 3x$

b) $f : x \to -2x$

c) $f : x \to \frac{2}{x}$

d) $f : x \to \frac{1}{2}x$

2) Per ciascuna delle seguenti funzioni disegna il grafico della funzione, determina dominio, codominio e indica se si tratta di una funzione iniettiva:

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x^2$

c) $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$

d) $y = x^2 - 2x$

3) Considera i rettangoli aventi perimetro uguale a 8. Se indichiamo con x e y le dimensioni di un rettangolo di perimetro 8 qual è la relazione tra x e y? Scrivi y in funzione di x e disegna il grafico della funzione che ottieni.

$$[y = 4 - x]$$

4) Considera i rettangoli di area 4 e indica con x e y le loro dimensioni. Qual è la relazione tra x e y? Scrivi y in funzione di x e disegnane il grafico.

$$\left[y = \frac{4}{x} \right]$$

5) L'abbonamento ad una sala cinematografica prevede il costo di iniziale di 4 euro per la tessera di abbonamento e poi il costo di 5 euro ad ingresso. Se indichi con x il numero degli ingressi e con y la spesa complessiva, come risulta y in funzione di x? Disegna il grafico della funzione che hai trovato.

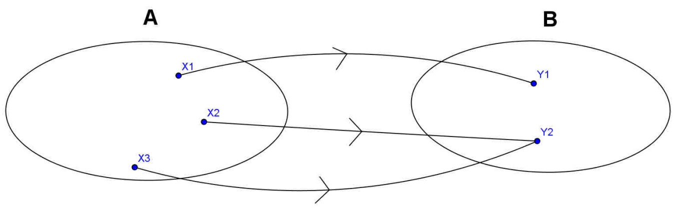
6) Considera i rettangoli di perimetro 10 cm ed indica con x e y le loro dimensioni. Come risulta y rispetto a x? Disegna il grafico della funzione che hai trovato. Quali valori di x puoi considerare?

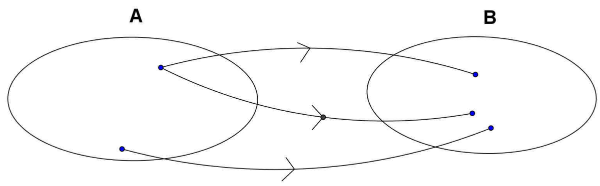
7) Considera i triangoli aventi area uguale a 3 (cm^2). Indica con x la misura della base e con y la misura dell'altezza dei triangoli. Qual è la relazione che lega x e y? Esprimi y in funzione di x e disegna il grafico della funzione che hai ottenuto (naturalmente considera solo $x > 0$).

SCHEDA PER L RECUPERO
FUNZIONI

1. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è una legge che associa ad ……………….. di A …………………….di B.

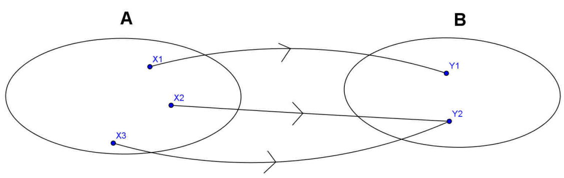
2. Indica, per ognuno dei seguenti diagrammi, se si tratta di una funzione:

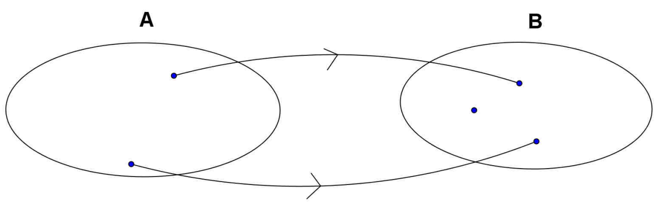


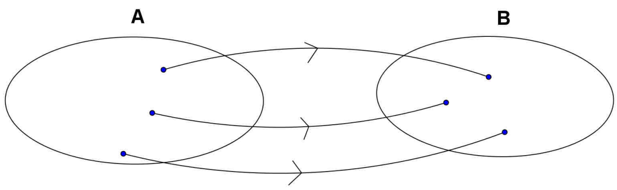


3. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice iniettiva se ad elementi distinti di A corrispondono …………….………………..di B. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice suriettiva se ogni elemento di B è …..……………………………………di A.

4. Indica, per ognuno dei seguenti diagrammi, se la funzione è iniettiva o suriettiva:





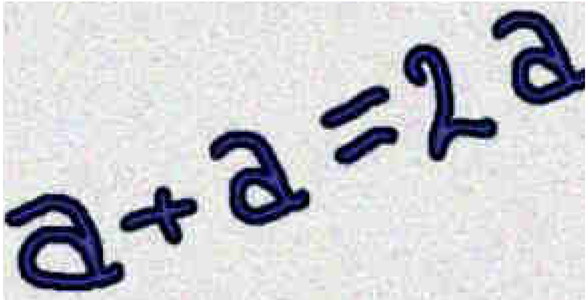


5. Considera $f : x \rightarrow x + 3$ con x numero reale $(x \in \Re)$. Disegna il grafico della funzione in un sistema di riferimento cartesiano. La funzione è iniettiva? E' suriettiva? (considera $f : \Re \rightarrow \Re$).

6. Considera $f : x \rightarrow 2x$ con $x \in \Re$. Disegna il grafico di f(x). La funzione è iniettiva? E' suriettiva?

7. Considera $f : x \rightarrow x^2$ con $x \in \Re$ .Disegna il grafico di f(x). La funzione è iniettiva? E' suriettiva? (considera $f : \Re \rightarrow \Re$).

Il calcolo letterale



Finora abbiamo studiato gli insiemi numerici N, Z, Q, $\Re$ ed operato con numeri (espressioni numeriche).
In matematica però è molto importante saper operare con le lettere e sviluppare le regole di quello che viene chiamato calcolo letterale.

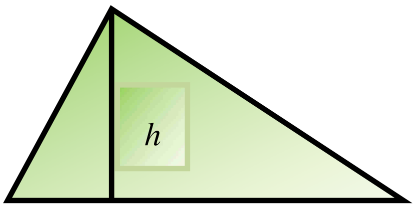
Abbiamo già trovato, nello studio della geometria, delle espressioni "letterali" : per esempio se vogliamo esprimere l'area del quadrato di lato l scriviamo A= l^2 .

l

A = l^2

Questa scrittura è generale proprio perché fa uso di una lettera e non di un numero in particolare: se poi vogliamo determinare l'area di uno specifico quadrato, per esempio di lato l = 5, sostituiremo il valore 5 al posto di l e otterremo l'area A = 25.

Anche l'area di un triangolo, di base b e altezza h viene indicata con



b

A = $\frac{b \cdot h}{2}$

Anche questa è un'espressione "letterale".

Per imparare a fare operazioni con le espressioni letterali occorre partire da quelle più semplici.

Monomi

Le espressioni letterali più semplici si chiamano "monomi" (dal greco *monos* che significa unico) e sono costituite da lettere che vengono solo moltiplicate tra loro ed eventualmente per un coefficiente numerico.

Esempio
Le espressioni letterali

$$2a^3b \ ; \ \frac{1}{3}a\ b^4c^2 \ ; \ -\frac{2}{5}a^2b^3$$

sono esempi di monomi.

Esempio
Le espressioni letterali

$$a^2 - b \text{ oppure } a^{-2}b$$

non sono monomi.

Osservazione
Lo stesso monomio può essere scritto in forme diverse.
Per esempio è chiaro che

$2a^3b$ può anche essere scritto $2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$.

ma la prima scrittura si legge molto meglio !

Forma "normale" di un monomio
Diciamo che un monomio è ridotto a "**forma normale**" quando è scritto come prodotto fra un numero (chiamato **coefficiente** del monomio) e una o più lettere (diverse tra loro) con eventuali esponenti (si chiama **parte letterale** del monomio)

$$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{coefficiente}}}{2}\ \underbrace{a^3b}_{\text{parte letterale}}$$

Esempio : la forma normale di $3\ a\ b^2 \cdot (-2) \cdot a^2 \cdot b$ risulta $-6a^3b^3$

Grado di un monomio
Si chiama "grado" del monomio la somma di tutti gli esponenti delle lettere: per esempio

$$2\ a^3b$$

ha grado $3+1=4$ (è di grado 3 rispetto alla lettera a e di grado 1 rispetto alla lettera b).

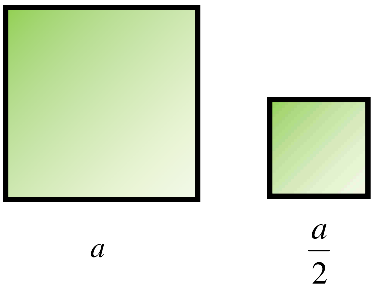
Poiché anche un numero può essere considerato un monomio, diremo che ha grado 0 perché possiamo sempre pensare che gli sia associata una parte letterale di grado 0 (che corrisponde a 1).

Esempio: 2 potrebbe essere considerato come $2 \cdot a^0$.

Operazioni con i monomi

Addizione e sottrazione di monomi

Supponiamo di dover sommare le aree in figura :



$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)a^2 = \frac{5}{4}a^2.$$

Quindi **se i monomi hanno la stessa parte letterale** (si dicono "**simili**") **per sommarli si sommano i loro coefficienti e si considera come parte letterale la parte letterale dei due monomi.**

E se i monomi non sono simili?

Come faccio per esempio se devo sommare

$$2a^3b + 3a^2 \ ?$$

Quando i monomi non sono simili non posso fare niente: la scrittura va lasciata così e sarà chiamata "**polinomio**" (dal greco polỳs che significa "molto" nel senso di molti termini).

Esempi

1) $\frac{1}{2}ab - 3ab + ab = \left(\frac{1}{2} - 3 + 1\right)ab = \left(\frac{1-6+2}{2}\right)ab = -\frac{3}{2}ab$.

2) $2a^2b - \frac{1}{3}a^2b + a^2b = \left(2 - \frac{1}{3} + 1\right)a^2b = \left(\frac{6-1+3}{2}\right)a^2b = +\frac{8}{3}a^2b$

3) $5xy - 5xy = 0$

4) $ab^4 - 2a^2b^4$ (rimane così)

5) $3a^2b^3 - a^2b^3 + ab^4 - \frac{1}{4}ab^4 = (3-1)a^2b^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)ab^4 = 2a^2b^3 + \frac{3}{4}ab^4$

6) $2x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{5}{4}x^2y^2 = (2-1)x^3y + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right)x^2y^2 = x^3y + \left(\frac{-2+5}{4}\right)x^2y^2 =$

$= x^3y + \frac{3}{4}x^2y^2$

7) $\frac{3}{2}xy - x^2y - \frac{3}{2}xy + 5x^2y = (\frac{3}{2} - \frac{3}{2})xy + (-1+5)x^2y = 0 + 4x^2y = 4x^2y$

Moltiplicazione di monomi

Come possiamo moltiplicare due monomi ?
Per esempio

$$(2ab)\cdot(3a^2)=?$$

E' chiaro che basta moltiplicare i coefficienti e la parte letterale.
Avremo

$$\underset{2\cdot 3}{6}\cdot\underbrace{a^3b}_{ab\cdot a^2}$$

Esempi

1) $\frac{1}{2}ab\cdot 3a^2b^2=\frac{3}{2}a^3b^3$.
2) $5x^4y\cdot(-2xy)=-10x^5y^2$
3) $\frac{1}{3}ab\cdot 3b=ab^2$
4) $(-2a^2b^3)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)=a^3b^4$

Potenza di un monomio

Come possiamo sviluppare la potenza di un monomio?
Per esempio :

$$(2a^2b)^2=?$$

Dovremo fare la potenza sia del coefficiente che della parte letterale. Nel nostro caso avremo:

$$(2a^2b)^2=\underset{\text{potenza del coeff.}}{2^2}\cdot\underbrace{a^4\cdot b^2}_{\text{potenza della parte letterale}}$$

Esempi

1) $\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3a^3b^6=-\frac{1}{8}a^3b^6$

2) $(-2xy^3)^2=(-2)^2x^2y^6=4x^2y^6$

Divisione tra monomi

Possiamo dividere due monomi ?

Per esempio :

$$2a^2b : ab = ?$$

$$\frac{2a^{\cancel{2}}\cancel{b}}{\cancel{a}\cancel{b}}$$

Quindi in questo caso abbiamo ottenuto un monomio.

Ma è sempre così ?

Se, per esempio, abbiamo :

$$2a^2b : a^3b = ?$$

$$\frac{2a^2b}{a^3b} = \frac{2}{a}$$

e *quindi in questo caso non abbiamo un monomio.*

Diremo che un monomio è divisibile per un altro monomio (divisore) quando nella sua parte letterale ci sono tutte le lettere del divisore con esponenti maggiori o uguali.

Esempi:

1) $2ab^4 : 3ab^2 = \dfrac{2ab^4}{3ab^2} = \dfrac{2}{3}b^2$

2) $5x^3y^2 : 10x^3y = \dfrac{5x^3y^2}{10x^3y} = \dfrac{1}{2}y$

3) $3a^2b^3 : (-3ab) = -\dfrac{3a^2b^3}{3ab} = -ab^2$

4) $4a^2b^2 : 4a^2b^2 = \dfrac{4a^2b^2}{4a^2b^2} = 1$

5) $3a^3b^2 : 9ab = \dfrac{3a^3b^2}{9ab} = \dfrac{1}{3}a^2b$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo fra monomi

Come per i numeri naturali, possiamo definire il M.C.D. tra due o più monomi e il m.c.m. tra due o più monomi.

Massimo comun divisore (M.C.D.)

- come coefficiente del massimo comun divisore si prende il M.C.D. dei coefficienti se sono interi (senza considerare il loro segno) e 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- come parte letterale del massimo comun divisore si prende il prodotto delle lettere comuni prese una sola volta e con il minimo esponente.

Esempi

$$\text{M.C.D.}\left(3a^2bc^3 \quad ; \quad 2ac^2\right) = ac^2$$

$$\text{M.C.D.}\left(\frac{1}{2}abc^4 \quad ; \quad 4b^2c^3\right) = bc^3$$

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

- come coefficiente del minimo comune multiplo si prende il m.c.m. dei coefficienti se sono interi (senza considerare il loro segno) e 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- come parte letterale del minimo comune multiplo si prende il prodotto di tutte le lettere dei monomi prese una sola volta e con il massimo esponente.

Esempi

$$\text{m.c.m.}\left(3x^2yz \quad ; \quad 2xyz^4\right) = 6x^2yz^4$$

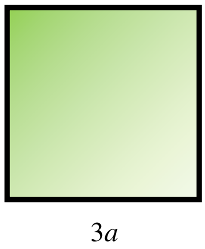
$$\text{m.c.m.}\left(\frac{1}{3}xy^3 \quad ; \quad 4y\right) = xy^3$$

$$\text{m.c.m.}\left(2abc \quad ; \quad 4a^3\right) = 4a^3bc$$

$$\text{m.c.m.}\left(\frac{1}{2}a^2b^3 \quad ; \quad 5abc^4\right) = a^2b^3c^4$$

Il calcolo letterale in geometria

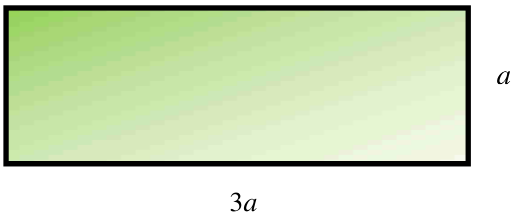
1) Consideriamo un quadrato di lato $3a$. Come si esprime la sua area? Come risulta il suo perimetro?



$$A = (3a)^2 = 9a^2$$

$$2p = 3a \cdot 4 = 12a$$

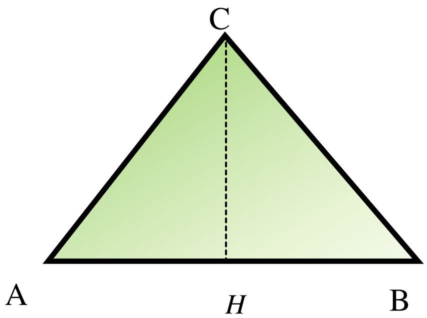
2) Consideriamo un rettangolo di base $3a$ e altezza a. Come risulta la sua area? E il suo perimetro?



$$A = 3a \cdot a = 3a^2$$

$$2p = 3a \cdot 2 + a \cdot 2 = 6a + 2a = 8a$$

3) Considera un triangolo isoscele ABC di base $AB = 6a$ e altezza $CH = 4a$. Come risulta la sua area? E il suo perimetro?



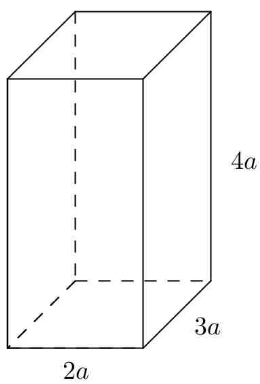
$$A = \frac{6a \cdot 4a}{2} = 12a^2$$

Poiché $\overline{AH} = 3a$ e

$$\overline{AC} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{16a^2 + 9a^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$$

$$2p = 6a + 5a \cdot 2 = 6a + 10a = 16a$$

4) Considera un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $2a$, $3a$, $4a$. Come risulta la sua superficie totale? E il suo volume?



$$S_t = S_l + 2 \cdot S_B = 2p_{base} \cdot 4a + 2 \cdot 2a \cdot 3a = 10a \cdot 4a + 12a^2 = 40a^2 + 12a^2 = 52a^2$$

$$V == 2a \cdot 3a \cdot 4a = 24a^3$$

ESERCIZI

1) Quali tra le seguenti espressioni algebriche sono monomi?

a) $-2x^3y^6$ b) $x-y-2$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{a}{b}$ e) 0

2) Riduci a forma normale i seguenti monomi:

$(-3x)(5xy)x$; $aabbc5b3$; $(-a^2b^3)(5b^4a^3)$; $-x(-y)(-xy)$; $(3bx)(3bx)(3bx)$

3) Completa le seguenti frasi:
a) In un monomio i fattori letterali devono avere come esponenti dei numeri …………..
b) Si dice grado di un monomio la …………… degli ……………… della sua ………………..
c) Un numero è considerato un monomio di grado………………
d) Due monomi che hanno lo stesso ……………… e la stessa ……………… si dicono uguali.

4) Scrivi il grado di ciascuno dei seguenti monomi:

a) $3x^2y$ b) $7a^4m^5p^9$ c) $abcd$ d) $9y$ e) $\frac{10}{7}$

5) Completa la seguente tabella:

Monomio	Coefficiente	Parte letterale	Grado
2xy			
	4		*3*
		x^2y	
x/2			
	3		*0*

6) Completa la seguente tabella:

Monomio	Uguale	Simile	Opposto
$5ab^3$			
	6xyz		
		$-abc^2$	
			$+5x^3y^5$
x/2			

7) Utilizzando le lettere *a* e *b*, scrivi tutti i monomi possibili di coefficiente 2 e grado 3.

8) Per scrivere un monomio di grado 4 sono indispensabili quattro lettere?

9) Quante lettere sono necessarie per scrivere un monomio di grado 3? Perché?

10) Può un monomio di grado 3 essere composto da quattro lettere? Perché?

Somma di monomi, prodotto di monomi, potenza di monomi

11) $\left(\frac{1}{2}ab\right)\cdot(ab)+3a^2b^2$ $\left[\frac{7}{2}a^2b^2\right]$

12) $\left(\frac{1}{5}x^2y\right)\cdot(-5x)+2x^3y$ $\left[x^3y\right]$

13) $(5ab)\cdot\left(-\frac{1}{3}a\right)+\frac{1}{3}a^2\cdot(-2b)$ $\left[-\frac{7}{3}a^2b\right]$

14) $(2ab)^2\cdot\left(\frac{1}{4}a\right)-(-2a)\cdot(ab)^2$ $\left[3a^3b^2\right]$

15) $(2a)^3\cdot\left(\frac{1}{2}b\right)^2+(5ab)\cdot(-\frac{1}{5}a^2b)$ $\left[a^3b^2\right]$

16) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3\cdot(2ab)^2-(ab)^2\cdot(3a^6b^3)$ $\left[-\frac{7}{2}a^8b^5\right]$

17) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^4-\left(-\frac{1}{2}x^4y^2\right)^2$ $\left[-\frac{3}{16}x^8y^4\right]$

18) $\left(-\frac{1}{3}ab\right)^2\cdot(-3a)^2+\left(a^2b^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2\right)$ $\left[\frac{4}{5}a^4b^2\right]$

19) $\left(-2x^2\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}xy\right)-(3xy)\cdot\left(\frac{1}{6}x^6\right)$ $\left[-\frac{5}{2}x^7y\right]$

20) $(-a)^3+\frac{1}{2}a(-a)^2+(ab)^2-a^2\cdot(-3b^2)$ $\left[4a^2b^2-\frac{1}{2}a^3\right]$

21) $2x\left(-\frac{1}{2}y\right)-(xy)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)+xy+2x^2\cdot\left(-\frac{1}{4}xy^2\right)$ $[0]$

22) $\left(-\frac{1}{2}a\right)^3\cdot(-b)^2+3a\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)^2$ $\left[\frac{5}{8}a^3b^2\right]$

23) $(2x+x)^2-5x\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)$ $\left[\frac{32}{3}x^2\right]$

24) $(-2ab)^4+a\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)+(a^2b^2)^2+2a\cdot\left(-\frac{3}{4}b\right)$ $\left[17a^4b^4-2ab\right]$

25) $\left(-\frac{1}{3}x\right)^2\cdot(-2y)+(-xy)^3+xy\cdot\left(-\frac{1}{9}x\right)+x^3y\cdot(-y)^2$ $\left[-\frac{1}{3}x^2y\right]$

Esercizi di ricapitolazione sui monomi

26) $\left(xy-\frac{2}{3}xy\right)y^3 - x\left(-y^2\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{2}{3}xy^4$ $\quad[10xy^4]$

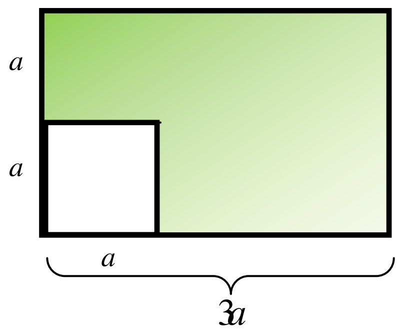
27) $\left(\frac{5}{2}ab-ab\right)^2\cdot(-a^2b)-(3a^3b^3)^2:(9ab^2)^2+\left(-\frac{3}{2}a^2\right)^2\cdot b^3$ $\quad\left[-\frac{1}{9}a^4b^2\right]$

28) $[a^2b-(-2a^2b)]\cdot(-3ab^2)+(-2a^2b^2)^2:\frac{1}{2}ab$ $\quad\left[-a^3b^3\right]$

29) $3ab(-2a)^2+(4ab^2c:\frac{1}{4}bc)a^2-6a^3b$ $\quad\left[22a^3b\right]$

30) $\left[-3xy\left(\frac{1}{9}x^2y\right)-y^2\left(-x\right)^3\right]:\left(-x\right)^2+2x^2y^2:(-x)$ $\quad\left[-\frac{4}{3}xy^2\right]$

31) Con i dati della figura trova il perimetro e l'area della zona colorata.



$\left[10a\,;\ 5a^2\right]$

32) In un triangolo isoscele la base misura $10a$ e il lato obliquo $13a$. Determina perimetro e area.

$\left[36a\,;\ 60a^2\right]$

33) Considera un prisma a base quadrata il cui spigolo di base è $3a$ e l'altezza $6a$. Determina superficie totale e volume.

$\left[90a^2;\ 54a^3\right]$

34) Considera un cilindro di raggio a e altezza $3a$. Determina superficie totale e volume.

$\left[8\pi\cdot a^2;\ 3\pi\cdot a^3\right]$

Polinomi

Algebra
Polinomi

Un polinomio è una somma algebrica di monomi.

Esempio: a^2b+2a ; $xy-\frac{1}{2}y^2$; $a^3+b^3+c^2$ sono polinomi.

I vari monomi che compongono il polinomio si chiamano "termini" del polinomio. Un monomio può anche essere considerato come un polinomio con un solo termine.

NOTA: se in un polinomio ci sono monomi simili questi si sommano e il polinomio si dice **ridotto a forma normale.**

Esempio: $6ab-x^2y^2-2ab=4ab-x^2y^2$

Definizione: se un polinomio ridotto a forma normale ha 2 termini, cioè è costituito da 2 monomi, si chiama *binomio*, se è costituito da 3 monomi si chiama *trinomio*.

Esempio: $2a+b$ è un binomio
$2a^2+b+c^3$ è un trinomio

Definizione: *il grado di un polinomio è il grado del suo termine di grado maggiore.*

Esempio: x^3y-xy^2 ha grado 4

Definizione: *il grado di un polinomio rispetto ad una lettera è il massimo degli esponenti con cui compare quella lettera.*
Esempio: x^3y-xy^2 ha grado 3 rispetto alla lettera x e grado 2 rispetto alla lettera y.

Termine "noto" di un polinomio: *è il termine di grado 0 cioè il termine in cui non compare nessuna lettera.*
Esempio: a^2b+2 2 è il termine noto

Polinomio omogeneo: *un polinomio si dice omogeneo quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.*
Esempio: $a^3b+3a^2b^2+ab^3$ è un polinomio omogeneo poiché tutti i suoi termini hanno grado 4.

Operazioni con i polinomi

Addizione tra polinomi
La somma tra due o più polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

Esempio: $(x^2y+xy)+(2xy-4x^2y+x^3)=\underline{x^2y}+\underline{\underline{xy}}+\underline{\underline{2xy}}-\underline{4x^2y}+x^3=$

(si riduce sommando i termini simili)

$=-3x^2y+3xy+x^3$

Differenza tra polinomi
La differenza tra due polinomi si ottiene sommando al primo polinomio l'opposto del secondo (si cambia il segno dei coefficienti del secondo).

Esempio: $(x^2y+xy)-(2xy-4x^2y+x^3)=\underline{x^2y}+\underline{\underline{xy}}-\underline{\underline{2xy}}+\underline{4x^2y}-x^3=$

$=5x^2y-xy-x^3$

Per indicare addizione e sottrazione tra polinomi si parla di **somma algebrica**.

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio
Per moltiplicare un monomio per un polinomio si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e si moltiplica il monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio: $5a^2\cdot(a+3b)=5a^2\cdot a+5a^2\cdot 3b=5a^3+15a^2b$

Moltiplicazione tra due polinomi
Si moltiplica ogni termine del 1° polinomio per ogni termine del 2° e si sommano i risultati (sempre per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).

Esempio: $(5a^2+b)\cdot(a+3b)=5a^2\cdot(a+3b)+b\cdot(a+3b)=5a^3+15a^2b+ab+3b^2$

NOTA: il grado del prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori (per la proprietà delle potenze).

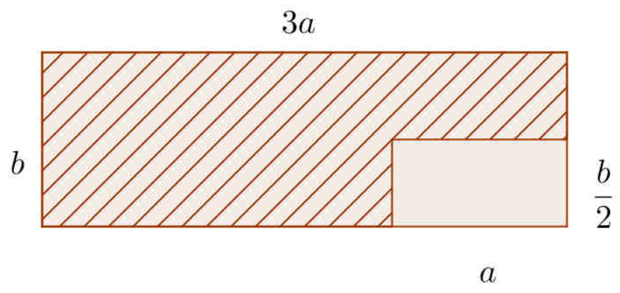
NOTA: come si moltiplicano tre polinomi? Prima si moltiplicano due polinomi e il risultato si moltiplica per il terzo.

Esempio:

$$(x+1)(2x+2)(x-4)=$$
$$(2x^2+2x+2x+2)(x-4)=$$
$$(2x^2+4x+2)(x-4)=$$
$$2x^3-8x^2+4x^2-16x+2x-8=$$
$$2x^3-4x^2-14x-8$$

Problemi di geometria
Polinomi

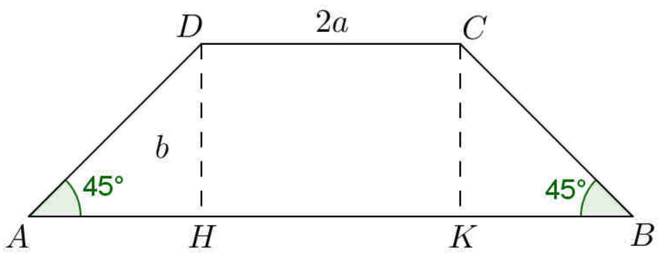
1) Determina perimetro e area della figura tratteggiata



$[\, 2p = 2b + 6a \,;\, A = \frac{5}{2} ab \,]$

2) *Problema svolto*

Considera il trapezio isoscele in figura e determinane l'area.



Osservando il triangolo AHD (triangolo rettangolo isoscele) si ha

$$\overline{AH} = \overline{KB} = b$$

Quindi $\overline{AB} = 2a + 2b$

In conclusione $A = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2a) \cdot b = \frac{1}{2}(4a + 2b) \cdot b = (2a + b) \cdot b = 2ab + b^2$

Prodotti notevoli

Nella moltiplicazione dei polinomi ci sono dei casi particolari che conviene ricordare.

Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

$$(A+B)(A-B)$$

Consideriamo per esempio:

$(2a+b)(2a-b)=4a^2-2ab+2ab-b^2=4a^2-b^2$

In generale si ha:

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$$

cioè si ottiene sempre la differenza tra il quadrato del 1° monomio e il quadrato del 2° monomio.

Esempi

1) $(a+1)(a-1)=a^2-1$

2) $(3a+5b)(3a-5b)=9a^2-25b^2$

3) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(\frac{1}{2}x+y\right)=\frac{1}{4}x^2-y^2$

4) $(x+y)(-y+x)=(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

5) $(3a-b)(b+3a)=(3a-b)(3a+b)=9a^2-b^2$

6) $(a-1)(a+1)(a^2+1)=(a^2-1)(a^2+1)=a^4-1$

Quadrato di un binomio

$$(A+B)^2$$

Consideriamo per esempio:

$$\begin{aligned}&(2a+b)^2=(2a+b)(2a+b)=4a^2+2ab+2ab+b^2=\\&=4a^2+4ab+b^2=\\&=(2a)^2+2\cdot(2a)\cdot b+(b)^2\end{aligned}$$

In generale si ha:

$$\begin{aligned}&(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+AB+B^2=\\&=A^2+2AB+B^2\end{aligned}$$

Quindi il quadrato di un binomio risulta uguale alla somma tra il quadrato del 1° termine, il quadrato del 2° termine e il doppio prodotto tra il 1° termine e il 2° termine del binomio.

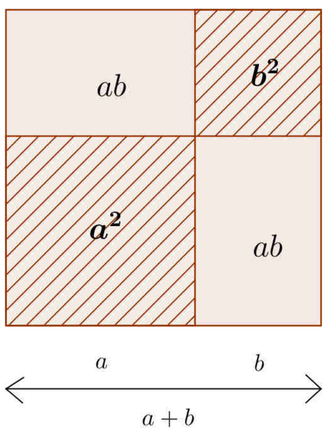
Esempi

1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

2) $(x-y)^2=x^2+2(x)(-y)+(-y)^2=x^2-2xy+y^2$

3) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2=\frac{1}{4}x^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot y+y^2=\frac{1}{4}x^2+xy+y^2$

Interpretazione geometrica



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Il quadrato di lato ***a+b*** è dato dall'unione del quadrato di lato ***a***, del quadrato di lato ***b*** e di due rettangoli di lati ***a*** e ***b*** (e quindi area ***2ab***)

Nota: vediamo come risulta il quadrato di un trinomio.

$$
\begin{aligned}
&(A+B+C)^2 = (A+B+C)(A+B+C) = \\
&= A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2 = \\
&= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC
\end{aligned}
$$

Quindi il quadrato di un trinomio è dato dalla *somma tra quadrato del 1° termine, quadrato del 2° termine, quadrato del 3° termine e il doppio prodotto tra il 1° e il 2° termine, il doppio prodotto tra il 1° e il 3° termine e il doppio prodotto tra il 2° e il 3° termine.*

Esempio

$$
\begin{aligned}
&(3a-b-2c)^2 = \\
&= 9a^2 + b^2 + 4c^2 + 2\cdot(3a)\cdot(-b) + 2\cdot(3a)\cdot(-2c) + 2\cdot(-b)\cdot(-2c) = \\
&= 9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab - 12ac + 4bc
\end{aligned}
$$

Cubo di un binomio

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B) = \\
&= (A+B)^2(A+B) = \left(A^2 + 2AB + B^2\right)(A+B) = \\
&= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = \\
&= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3
\end{aligned}
$$

Quindi il cubo di un binomio risulta *la somma tra cubo del 1°termine, cubo del 2°termine, triplo prodotto tra il quadrato del 1°termine e il 2°termine, triplo prodotto tra il 1°termine e il quadrato del 2°termine.*

Esempi

1) $(2a+b)^3 = 8a^3 + b^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot(b) + 3\cdot(2a)\cdot(b)^2 = 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

2) $(2a-b)^3 = 8a^3 + (-b)^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot(-b) + 3\cdot(2a)\cdot(-b)^2 = 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

Divisione tra polinomi

Divisione di un polinomio per un monomio

Esempio 1

$$(2a^3b + a^2) : a^2 = ?$$

Per la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione ho:

$(2a^3b : a^2) + (a^2 : a^2) = 2ab + 1$

Quindi in questo caso, essendo ogni termine del polinomio divisibile per il monomio, il polinomio risulta divisibile per il monomio.

$(2a^3b + a^2) : a^2 = 2ab + 1$

Quindi: $(2ab + 1) \cdot a^2 = 2a^3b + a^2$ cioè se

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline & Q(quoziente) \end{array}$$

si ha $Q \cdot B = A$

Esempio 2

$$(2a^3b + a^2) : a^3 = ?$$

In questo caso il polinomio non è divisibile per a^3 poiché il suo 2° termine a^2 non è divisibile per a^3.

Possiamo scrivere $\dfrac{2a^3b + a^2}{a^3} = 2b + \dfrac{1}{a}$ ma *non è un polinomio*.

Esercizi

1) $(x^3y^2 + x^2) : x = ...$

2) $(3ab^2 - 2b) : b = ...$

Divisione tra due polinomi in una sola lettera

Consideriamo polinomi contenenti una sola lettera.

Definizione: dati 2 polinomi A e B diciamo che A è divisibile per B se esiste un polinomio Q che moltiplicato per B dà A cioè:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} & Q \end{array} \qquad\qquad Q \cdot B = A$$

Esempio

$$\left(x^2-1\right):\left(x+1\right)=?$$

Poiché sappiamo che $(x+1)(x-1)=x^2-1$ abbiamo

$$\begin{array}{l|l} x^2-1 & x+1 \\ \cline{2-2} & x-1 \end{array} \qquad \text{poiché } (x+1)(x-1)=x^2-1$$

Ma in generale come possiamo trovare il quoziente?

Per svolgere la divisione tra due polinomi possiamo seguire un procedimento simile a quello usato per la divisione tra due numeri.
Riprendiamo l'esempio precedente:

- I polinomi vanno ordinati secondo le potenze decrescenti della loro lettera e dobbiamo lasciare, nel dividendo A, degli spazi vuoti in corrispondenza delle potenze mancanti

$$\begin{array}{lll|l} x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4} & & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

- Dividiamo il 1° termine del dividendo per il 1° termine del divisore e scriviamo il risultato (1° termine del quoziente Q)

$$\begin{array}{lll|l} x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4} & & & x \end{array}$$

- Moltiplichiamo x per ogni termine del divisore $(x+1)$ e sottraiamo i risultati ai termini corrispondenti in grado del dividendo A (x^2-1); sommiamo in colonna e otteniamo $-x-1$

$$\begin{array}{lll|l}
x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & x \\ \cline{1-3}
// & -x & -1 &
\end{array}$$

- Poiché $-x-1$ ha grado uguale al divisore si può ancora dividere.
  Ripetiamo quindi il procedimento precedente partendo da $-x-1$ ed in questo caso otterremo resto R=0 e quoziente Q=$x-1$

$$\begin{array}{lll|l}
x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & \underbrace{x-1}_{\text{Q quoziente}} \\ \cline{1-3}
// & -x & -1 & \\
 & x & 1 & \\ \cline{2-3}
 & // & // &
\end{array}$$

NOTA IMPORTANTE

Se il resto R (di grado minore del divisore) è diverso da zero, A non è divisibile per B ma si avrà:

$$Q \cdot B + R = A$$

Esempio $\quad (x^2+x+1):(x+1)=?$

$$\begin{array}{llll|l}
x^2 & +x & +1 & & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^2 & -x & & & \underbrace{x}_{\text{Q}} \\ \cline{1-3}
// & // & \underbrace{1}_{R} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
Q\cdot & B+ & R= & A \\
\downarrow\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\multicolumn{4}{l}{x\cdot(x+1)+1 = x^2+x+1}
\end{array}$$

NOTA: il grado di Q è uguale alla differenza tra il grado di A e il grado di B.

Esempi svolti

1) $\left(x^3-8\right):\left(x-2\right)$

$$
\begin{array}{cccc|l}
x^3 & & & -8 & x-2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & 2x^2 & & & \underbrace{x^2+2x+4}_{Q} \\
\cline{1-2}
// & 2x^2 & & -8 & \\
 & -2x^2 & 4x & & \\
\cline{2-3}
 & // & 4x & -8 & \\
 & & -4x & 8 & \\
\cline{3-4}
 & & // & // & \\
 & & R=0 & &
\end{array}
$$

Quindi x^3-8 è divisibile per $x-2$ e $\left(x^2+2x+4\right)\left(x-2\right)=x^3-8$

2) $\left(x^3-2x+1\right):\left(2x-1\right)$

$$
\begin{array}{cccc|l}
x^3 & & -2x & 1 & 2x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & \frac{1}{2}x^2 & & & \underbrace{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{7}{8}}_{Q} \\
\cline{1-2}
// & \frac{1}{2}x^2 & -2x & +1 & \\
 & -\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{4}x & & \\
\cline{2-3}
 & // & -\frac{7}{4}x & +1 & \\
 & & \frac{7}{4}x & -\frac{7}{8} & \\
\cline{3-4}
 & & // & \underbrace{\frac{1}{8}}_{R} &
\end{array}
$$

Verifichiamo che $Q\cdot B+R=A$

$$\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{7}{8}\right)\left(2x-1\right)+\frac{1}{8}=x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}x+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=x^3-2x+1$$

ESERCIZI

Somma e prodotto tra polinomi

1) $\left(4x^3-5x^2+2\right)+\left(-3x^2+2x^2-2\right)$ $[\,4x^3-6x^2\,]$

2) $\left(-8a^5+6a^3+3a-2\right)+\left(5a^5-3a^3+2a\right)$ $[-3a^5+3a^3+5a-2\,]$

3) $\left(3a^3+5a^2-2a+1\right)-\left(3a^3-2a^2+5a-7\right)$ $[\,7a^2-7a+8\,]$

4) $\left(3x^3-4y^2\right)+\left(5y^2-4x^3\right)+\left(x^3-y^3\right)$ $[\,y^2-y^3\,]$

5) $(3x-2)-(3x+2)-(-2x+1)-(-3x-1)$ $[\,5x-4\,]$

6) $x^2(x+y-1)-x(x-y)-y\left(x^2-2\right)-xy$ $[\,x^3-2x^2+2y\,]$

7) $[-2a(3a-2)-a]\cdot\left(-2a^2\right)-\left(-2a^3\right)(3a-1)-2a\left(9a^3\right)$ $[-8a^3\,]$

8) $\left(-x^3\right)\left[\left(-x^2\right)\cdot(2a-3x)-3x^3\right]-2ax\left(x^4-1\right)$ $[\,2ax\,]$

9) $(3a+2)(a-3)+(4a-1)(a+2)$ $[\,7a^2-8\,]$

10) $(2a-1)(a+1)-(a-1)(2a-3)$ $[\,6a-4\,]$

11) $\left(a^3+2b\right)\left(a^3-2b\right)-\left(a^5+a\right)(a-1)$ $[\,a^5-a^2+a-4b^2\,]$

12) $\left(4x^2+9y^2\right)\left(4x^2-9y^2\right)-y^3\left(16x^2-81y\right)$ $[\,16x^4-16x^2y^3\,]$

13) $(a+b)(a-b)\left(a^2+b^2\right)$ $[\,a^4-b^4\,]$

14) $3a(a+2)5a-2a(a+3)(a-1)$ $[\,13a^3+26a^2+6a\,]$

15) $(3x-2y)(x-4y)-(5x+3y)(2x-5y)$ $[-7x^2+23y^2+5xy\,]$

16) $\dfrac{3}{2}a(1+3a)(3a-1)+3\left(\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3}\right)\left(a+\dfrac{1}{3}\right)$ $\left[\dfrac{27}{2}a^3+\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{1}{3}\right]$

17) $(x+3)(2x-5)+(1-3x)(4-x)+(2-5x)(4-x)$ $[\,10x^2-34x-3\,]$

Prodotti notevoli

18) $3x(x+2)-(x-1)-(x+3)(x-3)-2x^2$ $[5x+10]$

19) $3a^2+(2a-5b)(2a+5b)-b(a-3b)+22b^2+ab$ $[7a^2]$

20) $(1-2x)^2+(x+2)^2-5(x^2-2)$ $[15]$

21) $\left(\frac{1}{2}-a\right)^2-3\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)+2(a-1)^2$ $[3-5a]$

22) $\left(\frac{3}{2}a-2b\right)^2-\left(-\frac{1}{2}a+3b\right)^2-2(-a)^2$ $[-3ab-5b^2]$

23) $(a-1)^2-(a-1)(a+1)(a^2-1)+(a^2+1)^2$ $[5a^2-2a+1]$

24) $(x+3)^2-(6+x)(x-6)-(1-x)^2+x(x-8)$ $[44]$

25) $(x+a+2)^2-(x+a)^2-4(2+x+a)$ $[-4]$

26) $(a+1+2y)^2-(a-1)(a+1)-(1+2y)^2-2a$ $[1+4ay]$

27) $a^3-(-b)^3-(a+b)^3-\frac{1}{3}a(3b+1)(1-3b)$ $[-3a^2b-\frac{1}{3}a]$

28) $(x-2y)^3-(2x-y)^3-6xy(x+y)+7y^3+8x^3$ $[x^3]$

29) $(x+y)^2-2y(x-y)-(x+y)(y-x)$ $[2x^2+2y^2]$

30) $(a^2+b^2)(a^2-b^2)-(a^2+b^2)^2+2a^2(a^2+b^2)$ $[2a^4-2b^4]$

31) $(x+1)^3+3(x+1)^2+3(x+1)+1$ $[x^3+6x^2+12x+8]$

32) $(2a+x-2)^2+4a(2-x)-(x-3)^2-\left[(-2a)^2-5\right]$ $[2x]$

33) 16) $(a-3)(a+3)-(2a+1)^2$ [$-3a^2-4a-10$]

34) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(y+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}(x+y)^2$ [$\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}y^2+xy$]

35) $(x-2y)(2y-x)-(x+y)(x-y)$ [$-2x^2-3y^2+4xy$]

36) $\left(\frac{1}{3}a+1\right)\left(\frac{1}{3}a-1\right)+(a-1)^2-\frac{2}{9}a(5a-9)$ [0]

37) $(2x-1)^2+\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2$ [$\frac{25}{4}x^2-7x+2$]

38) $(x+2y)^2-(x-2y)^2-8xy$ [0]

39) $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{2}$ [$2x^2$]

40) $(2x-3y)(2x+3y)-(2x+3y)^2$ [$-18y^2-12xy$]

41) $(xy+1)(1-xy)+(xy+1)^2$ [$2xy+2$]

42) $(a^2-2)^2-(a^2-2)(a^2+1)-a^2-6$ [$-4a^2$]

43) $(3x-y^2)^2-(3x+y^2)(3x-2y^2)-y^2(y^2-3x+2y^2)$ [0]

44) $2x(3x-2y)^2+x(x+4y)(x-4y)+8xy^2$ [$19x^3-24x^2y$]

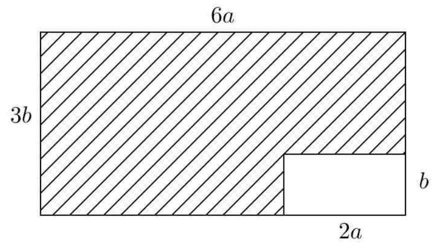
45) $(5ab-3a)^2-2(5ab-3a)(3a+5ab)+(4a+5ab)^2$ [$43a^2+10a^2b$]

46) $[(x+1)(x-1)]^2-(2+x^2)^2+\frac{3}{2}(2x-3)(2x+3)$ [$-\frac{33}{2}$]

47) $2(y-3x)^2+2(2x+y)(y-2x)-9x^2-2xy-(2y-x)^2$ [$-10xy$]

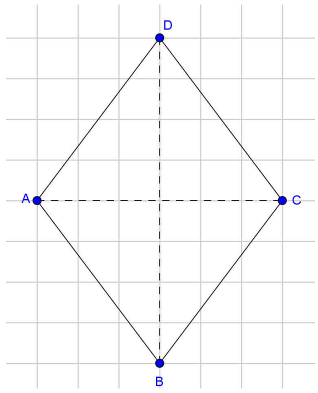
Calcolo letterale e geometria

48) Determina perimetro e area della figura tratteggiata.



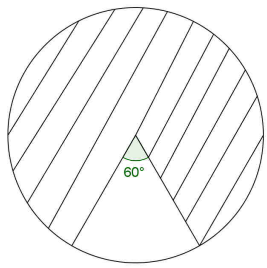
[$2p = 12a + 6b$; $A = 16ab$]

49) Determina perimetro e area del rombo in figura sapendo che $\overline{AC} = 6a$; $\overline{BD} = 8a$.



[$2p = 20a$; $A = 24a^2$]

50) Determina l'area A del settore circolare tratteggiato sapendo che il raggio misura $2a$.

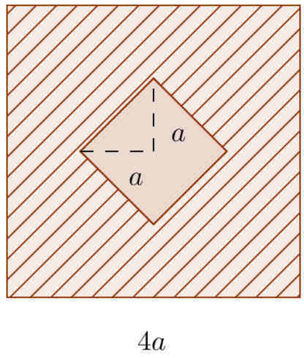


[$A = \frac{10}{3}\pi a^2$]

51) Considera un rettangolo R di dimensioni a e b . Se a viene aumentato del 50% e b viene diminuito del 50% come risulta l'area del nuovo rettangolo R'? Come risulta rispetto all'area di R?

[$A_{R'} = \frac{3}{4}ab$; $A_{R'} = \frac{3}{4}A_R$]

52) Determina l'area della zona tratteggiata.

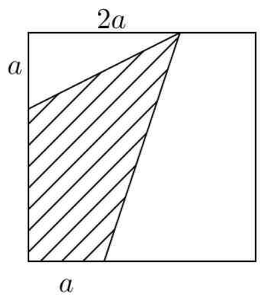


[$14a^2$]

53) Determina l'area di un esagono regolare di lato $2a$.

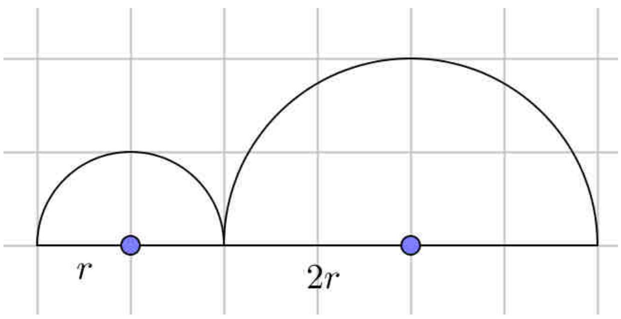
[$A = 6\sqrt{3}a^2$]

54) Considera un quadrato di lato *3a* e determina l'area della zona tratteggiata .



[$A = \frac{7}{2}a^2$]

55) Determina perimetro e area della figura seguente.

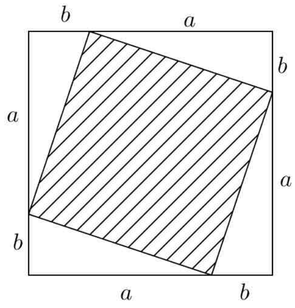


[$6r + 3\pi r$; $\frac{5}{2}\pi r^2$]

56) Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni *a*, *2a*, *3a* . Calcola il suo volume V. Aumenta di 1 tutte le dimensioni e calcola il nuovo volume V'.

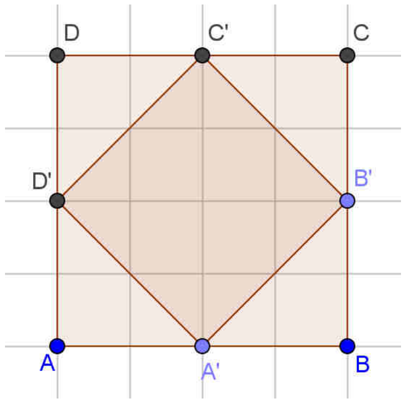
[$V = 6a^3$; $V' = 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$]

57) Calcola l'area A della zona tratteggiata.



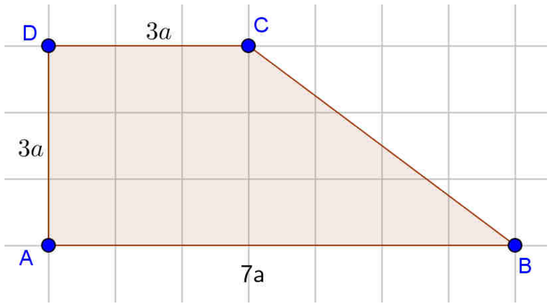
[$A = a^2 + b^2$]

58) Calcola l'area del quadrato ABCD di lato $\overline{AB} = 2a + 3$ e l'area del quadrato A'B'C'D' ottenuto congiungendo i punti medi. Come risulta l'area di A'B'C'D' rispetto all'area di ABCD ?



[$A(ABCD) = 4a^2 + 9 + 12a; \quad A(A'B'C'D') = 2a^2 + \frac{9}{2} + 6a$]

59) Determina perimetro e area del trapezio ABCD.



[$2p = 18a; \quad A = 15a^2$]

Divisione tra polinomi in una sola lettera

60) $\left(x^4+3x^2-4\right):\left(x^2-4\right)$ [$Q=x^2+7$; $R=24$]

61) $\left(15a^3-8a^2-9a+2\right):(3a+2)$ [$Q=5a^2-6a+1$; $R=0$]

62) $\left(7a-a^3+2+a^2\right):\left(a^2+2\right)$ [$Q=-a+1$; $R=9a$]

63) $\left(16x^5-8x^3+2x-1\right):\left(x^3-1\right)$ [$Q=16x^2-8$; $R=16x^2+2x-9$]

64) $\left(2a^3-4a^2+a+2\right):\left(2a^2+a-1\right)$ [$Q=a-\dfrac{5}{2}$; $R=\dfrac{9}{2}a-\dfrac{1}{2}$]

65) $\left(x^5-x^3+1\right):\left(x^2+1\right)$ [$Q=x^3-2x$; $R=2x+1$]

66) $\left(y^3-5y^2+3y-6\right):\left(y^2+1-2y\right)$ [$Q=y-3$; $R=-4y-3$]

67) $\left(-3y^3+11y^2-9y-2\right):\left(3y^2-5y-1\right)$ [$Q=2-y$; $R=0$]

68) $\left(a^2-a-12\right):(a-4)$ [$Q=a+3$; $R=0$]

69) $\left(2x^3-9x+1\right):(x-3)$ [$Q=2x^2+6x+9$; $R=28$]

70) $\left(3x^3+x^2-8x+4\right):(x+2)$ [$Q=3x^2-5x+2$; $R=0$]

71) $\left(b^2-b+b^3+15\right):(3+b)$ [$Q=b^2-2b+5$; $R=0$]

72) $\left(2x^3-x-3x^2+2\right):(x-1)$ [$Q=2x^2-x-2$; $R=0$]

SCHEDA PER IL RECUPERO
CALCOLO LETTERALE: MONOMI E POLINOMI

1. $\left(-\frac{1}{3}x\right)^2 \cdot (-2y) + (-xy)^3 + xy \cdot \left(-\frac{1}{9}x\right) + x^3 y \cdot (-y)^2$ $[-\frac{1}{3}x^2 y]$

2. $[-3xy \cdot \left(\frac{1}{9}x^2 y\right) - y^2 \cdot (-x)^3] : (-x)^2 + 2x^2 y^2 : (-x)$ $[-\frac{4}{3}xy^2]$

3. In un triangolo isoscele la base misura $10a$ e il lato obliquo $13a$. Determina perimetro e area del triangolo.
$[36a \quad ; \quad 60a^2]$

4. Un quadrato ha lato che misura $4a$. Calcola perimetro, area e misura della diagonale.
$[16a; \quad 16a^2; \quad 4a\sqrt{2}]$

5. Considera un triangolo equilatero di lato $3b$. Determina perimetro e area del triangolo.
$[9b; \quad \frac{9}{4}\sqrt{3}b^2]$

6. $(x+3)\cdot(2x-5) + (1-3x)\cdot(4-x) + (2-5x)\cdot(4-x)$ $[10x^2 - 34x - 3]$

7. $\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 - 3 \cdot \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot (a-1)^2$ $[3 - 5a]$

8. $(a-2b)^2 - (a+b)\cdot(a-b)$ $[5b^2 - 4ab]$

9. $(2a^2 b + ab^3) : a + (a-b)^2$ $[a^2 + b^2 + b^3]$

10- $(a-2b)^3 - (a-b)\cdot(a^2 + 2ab) - (-2b)^3$ $[-7a^2 b + 14ab^2]$

11. $(x^3 + x^2 - 1) : (x+1)$ $[Q = x^2; \quad R = -1]$

12. $(2x^2 - 3x^3 + x + 2) : (x-2)$ $[Q = -3x^2 - 4x - 7; \quad R = -12]$

La scomposizione dei polinomi

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado inferiore.
Esempio: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
Osserviamo che l'uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il prodotto notevole $(A+B)(A-B)$.

Metodi per la scomposizione di un polinomio

- **Raccoglimento a fattor comune**

Se in tutti i termini di un polinomio è contenuto lo stesso fattore (che può essere anche un numero) si può "*raccogliere*" questo fattore comune (si dice anche "*mettere in evidenza*")

Esempi
1) $3x^2 - 2x = x(3x-2)$
2) $4x^3 - 2x^2 + 8x = 2x(2x^2 - x + 4)$

Nota importante: il fattore comune può essere un polinomio.

Esempi

1) $2(a^2+b) - 3a(a^2+b) = (a^2+b)(2-3a)$

2) $(x+y)^2 + 2(x+y) = (x+y)(x+y) + 2(x+y) = (x+y)[(x+y)+2] = (x+y)(x+y+2)$

- **Raccoglimento parziale**

Esempio: $x^3 - x^2 + 4x - 4 =$ raccogliamo x^2 tra i primi due termini e il numero 4 tra il 3° ed il 4° termine

$= x^2(x-1) + 4(x-1) =$ possiamo raccogliere $(x-1)$

$= (x-1)(x^2+4)$

Osservazione: è come percorressimo all'indietro i passaggi per la moltiplicazione di due polinomi.
NOTA: perché questo metodo funzioni è essenziale che dopo il primo raccoglimento si possa ancora raccogliere.

Esempio: $x^3 - x^2 + 4x + 4 = x^2(x-1) + 4(x+1)$ … non funziona!

• Scomposizioni collegate ai prodotti notevoli

Esempio: $x^2-4=(x+2)(x-2) \quad \leftarrow \quad A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$

$4a^2-b^2=(2a+b)(2a-b)$

Esempio: $x^2+2x+1=(x+1)^2 \quad \leftarrow \quad A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$

$x^2-2x+1=(x-1)^2 \quad \leftarrow \quad A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$

$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

$9b^2-6b+1=(3b-1)^2$

$25x^2-10xy+y^2=(5x-y)^2$

Esempio: $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=(x+y+z)^2 \quad \leftarrow \quad (A+B+C)^2=...$

$x^2+y^2+4+2xy+4x+4y=(x+y+2)^2$

$4a^2+b^2+1+4ab+4a+2b=(2a+b+1)^2$

Esempio: $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3 \quad \leftarrow \quad (A+B)^3=...$

$8a^3-12a^2+6a-1=(2a-1)^3$

NOTA: differenza di cubi, somma di cubi

$$\boxed{A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)}$$

Infatti $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+\underline{A^2B}+\underline{\underline{AB^2}}-\underline{A^2B}-\underline{\underline{AB^2}}-B^3=A^3-B^3$

Quindi per esempio: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Analogamente $\boxed{A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)}$

Quindi per esempio: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Esempi

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$8a^3+1=(2a+1)(4a^2-2a+1)$

$8a^3-1=(2a-1)(4a^2+2a+1)$

• Scomposizione con il "teorema di Ruffini"

Consideriamo un polinomio contenente una sola lettera, per esempio

$$P(x)=2x^3-5x^2+5x-6$$

Se non riusciamo a scomporlo con i metodi considerati finora possiamo provare ad utilizzare il seguente teorema di Ruffini.

Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $P(x)$, se sostituendo alla lettera x un valore a otteniamo zero, cioè se $P(a)=0$, allora il polinomio è divisibile per $(x-a)$ e viceversa.

Dimostrazione

Supponiamo di dividere $P(x)$ per $x-a$: avremo $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$.

Sostituendo a x il valore a abbiamo $P(a)=R$ ma per ipotesi $P(a)=0$ e quindi si ha che $R=0 \Rightarrow P(x)$ è divisibile per *x-a* .

Viceversa se $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$ vuol dire che $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$ e quindi sostituendo alla lettera x il valore a otterrò come risultato zero

$$P(a)=\left(\underbrace{a-a}_{0}\right)\cdot Q(a)=0$$

Nel nostro esempio abbiamo che

$$P(2)=2\cdot 8-5\cdot 4+5\cdot 2-6=0$$

e quindi $(x-2)$ è un divisore di $P(x)$.

Eseguiamo la divisione

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & +5x & -6 & & x-2 \\
\cline{6-6}
-2x^3 & 4x^2 & & & & \underbrace{2x^2-x+3}_{Q(x)} \\
\cline{1-2}
// & -x^2 & +5x & -6 & & \\
 & +x^2 & -2x & & & \\
\cline{1-3}
 & // & +3x & -6 & & \\
 & & -3x & +6 & & \\
\cline{1-4}
 & & // & // & R=0 &
\end{array}
$$

Quindi $2x^3-5x^2+5x-6=(x-2)(2x^2-x+3)$

NOTA*: ma come facciamo a sapere se esiste un numero intero* a *che annulla il polinomio?*

Se a **intero esiste, deve essere un divisore del termine noto di** $P(x)$**:** infatti se osserviamo l'ultimo passaggio della divisione dell'esempio, per avere *R=0* dovrà essere

$$a \cdot \text{numero} = \text{termine noto di } P(x)$$

e quindi a deve essere (se è intero) un divisore del termine noto del polinomio.

Nel nostro esempio quindi avremmo dovuto provare a sostituire alla lettera x i divisori di -6 cioè

$$\pm 1 \;\; ; \;\; \pm 2 \;\; ; \;\; \pm 3 \;\; ; \;\; \pm 6$$

Generalmente si parte da ± 1 e si va avanti con i divisori finché non si trova a : $P(a) = 0$.

Se nessun divisore annulla il polinomio vuol dire che non c'è a intero tale che $P(x)$ sia divisibile per $x - a$.

Esempio: $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$

I divisori di -6 sono: $\pm 1 \;\; ; \;\; \pm 2 \;\; ; \;\; \pm 3 \;\; ; \;\; \pm 6$

$P(1) = 1 - 2 - 1 - 6 \neq 0$
$P(-1) = -1 - 2 + 1 - 6 \neq 0$
$P(2) = 8 - 8 - 2 - 6 \neq 0$
$P(-2) = -8 - 8 + 2 - 6 \neq 0$
$P(3) = 27 - 18 - 3 - 6 = 0$!

Quindi $x^3 - 2x^2 - x - 6$ è divisibile per $x - 3$: possiamo eseguire la divisione per scomporre il polinomio:

$$\begin{array}{cccc|c}
x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x-3 \\ \cline{5-5}
-x^3 & 3x^2 & & & \underbrace{x^2+x+2}_{Q(x)} \\ \cline{1-2}
// & x^2 & -x & -6 & \\
 & -x^2 & +3x & & \\ \cline{1-3}
 & // & +2x & -6 & \\
 & & -2x & +6 & \\ \cline{1-4}
 & & // & // & R=0
\end{array}$$

Quindi $x^3 - 2x^2 - x - 6 = (x-3)(x^2 + x + 2)$

NOTA IMPORTANTE
Scomposizione di particolari trinomi di secondo grado (metodo della somma e del prodotto)

Esempio 1
Consideriamo il trinomio $x^2 - 5x + 6$.
Possiamo cercare di scomporlo con il teorema di Ruffini e abbiamo che

$P(2) = 4 - 10 + 6 = 0$
Dividendo $x^2 - 5x + 6$ per $x - 2$ otteniamo $x - 3$ e quindi

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)$$

Ma in questo caso c'è un procedimento più veloce se riusciamo a trovare due numeri p, q tali che

$$\begin{cases} p + q = m \\ p \cdot q = n \end{cases}$$

Nel nostro caso si vede facilmente che questi numeri ci sono e sono

$$p = -2, \quad q = -3$$

Se allora scriviamo

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6$$

possiamo fare un raccoglimento parziale

$$x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x-3)$$

e quindi scomporre il trinomio.

In generale se abbiamo un trinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 uguale a 1 e ci sono due numeri interi la cui somma dà il coefficiente di grado 1 e il cui prodotto dà il termine noto possiamo scrivere:

$$x^2 + ax + b = x^2 + (p+q)x + p\cdot q = x^2 + px + qx + p\cdot q = x(x+p) + q(x+p) = (x+p)(x+q)$$

Esempio 2
Consideriamo il trinomio $x^2 + x - 2$
In questo caso, cercando le combinazioni di segni di 1,2 che danno come prodotto -2 e come somma 1 , abbiamo $p = 2, \quad q = -1$ e quindi abbiamo:

$$x^2 + 2x - x - 2 = x(x+2) - (x+2) = (x+2)(x-1)$$

Esempio 3
Consideriamo il trinomio $x^2 + x + 1$: ci si rende conto che non si trovano due numeri che abbiano somma 1 e prodotto 1. Anche con Ruffini abbiamo che $P(1) = 3, \quad P(-1) = 1$. Quindi questo trinomio non possiamo scomporlo (si dice irriducibile).

ESERCIZI

Raccoglimento a fattor comune, raccoglimento parziale

1) $3x+6y$; a^3x-a^3y ; x^3+4x

2) $8a^4-4a^3+2a^2$; $3xy+6x^2-9y^2$; a^2b-ab

3) $2ab-4a^2$; $\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a$; $2ax-4a+2a^2$

4) $5x-10xy+15y$; $-27a^2+9ay-18a$; $-6a^3+9a^2b+3a^2$

5) $(x+3y)-(x+3y)^2$; $(a-b)^2-(a-b)$; $(2x-3y^2)^3+(2x-3y^2)^2$

6) $5ay-y-5a+1$ $[(5a-1)(y-1)]$

7) $x^2y^2+1+x^2+y^2$ $[(x^2+1)(y^2+1)]$

8) $3a^2b-2a+12ab-8$ $[(3ab-2)(a+4)]$

9) $x^3+12x^2+6x+72$ $[(x+12)(x^2+6)]$

10) $5ax+2ay+5bx+2by$ $[(5x+2y)(a+b)]$

11) $ay-by-b+a$ $[(a-b)(y+1)]$

12) $(a+b)^2-ax-bx$ $[(a+b)(a+b-x)]$

13) $ay-4a-3y+12$ $[(y-4)(a-3)]$

14) $2ax+4x-3a-6$ $[(a+2)(2x-3)]$

15) $a^2bx+a^2b+bxy^2+by^2$ $[b(x+1)(a^2+y^2)]$

16) $x^4+4x^2-x^3y-4xy$ $[x(x^2+4)(x-y)]$

Scomposizione con prodotti notevoli

17) x^2-49y^2 ; $9-a^2b^2$

18) $4x^2-9y^2$; $25a^6b^8-\frac{1}{4}$

19) $81-a^2$; $16x^2-a^4$

20) x^4-y^4 $[\,(x^2+y^2)(x+y)(x-y)\,]$

21) $5z^2-5$; x^3-9xy^2 ; $25a^5b^3-a^3b$

22) $a^2x-b^2x+a^2y-b^2y-a^2+b^2$ $[\,(a+b)(a-b)(x+y-1)\,]$

23) $(3a-x)^3-4(3a-x)$ $[\,(3a-x)(3a-x+2)(3a-x-2)\,]$

24) $4a^3-4a^2-4a+4$ $[\,4(a-1)(a-1)(a+1)\,]$

25) $9b-18-(b^2-4)$ $[\,(b-2)(7-b)\,]$

26) $9x^2+6x+1$; $a^2+4ab+4b^2$

27) y^2-6y+9 ; $4+9b^2-12b$

28) x^2-4x+4 ; $25x^2-60x+36$

29) $4a-4a^2-1$; $9y^2+\frac{1}{4}-3y$

30) $4a^2+4ab+b^2-c^2$
$[\,(2a+b+c)(2a+b-c)\,]$

31) $25x^2-y^2-10x+1$ $[\,(5x-1+y)(5x-1-y)\,]$

32) $a^2-x^2+2xy-y^2$ $[\,(a-x+y)(a+x-y)\,]$

33) a^2-4b-b^2-4 $[\,(a+b+2)(a-b-2)\,]$

34) $27x^3+27x^2+9x+1$ $\qquad$ [$(3x+1)^3$]

35) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$ $\qquad$ [$(a-2b)^3$]

36) $-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$ $\qquad$ [$(b-a)^3$]

37) $x^6+1+3x^4+3x^2$ $\qquad$ [$(x^2+1)^3$]

38) $8a^3+b^3$; $\frac{8}{27}a^3-1$

39) $27x^3-1$; $125a^3+8b^3$

40) x^3+27 ; a^3b^3+1

41) $24x^7-3x$ $\qquad$ [$3x(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)$]

42) $2x^9+x^6-2x^3-1$ $\qquad$ [$(2x^3+1)(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$]

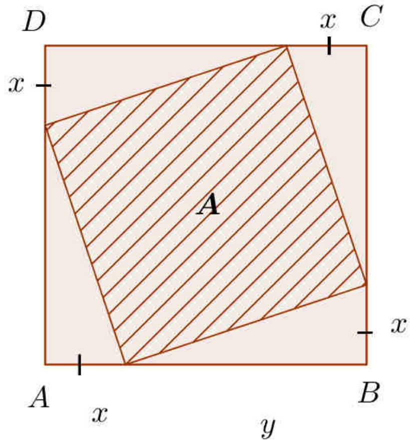
43) $2a^2+2b^2+12a+12b+4ab+18$ $\qquad$ [$2(a+b+3)^2$]

44) x^4+2x^3-x-2 $\qquad$ [$(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$]

45) $x^3-2x^2-9x+18$ $\qquad$ [$(x+3)(x-3)(x-2)$]

46) $5x^4y^4-10x^2y^2+5$ $\qquad$ [$5(xy+1)^2(xy-1)^2$]

47) Determina l’area del quadrato in figura come differenza tra l’area *A* del quadrato ABCD e le aree dei triangoli:



$[A=x^2+y^2]$

Teorema di Ruffini , trinomio di secondo grado

48) $x^2 - x - 2$ $\quad$ [$(x+1)(x-2)$]

49) $2x^2 + 3x - 2$ $\quad$ [$(x+2)(2x-1)$]

50) $x^2 - 6x + 8$ $\quad$ [$(x-2)(x-4)$]

51) $x^3 - x^2 - 3x - 9$ $\quad$ [$(x-3)(x^2+2x+3)$]

52) $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$ $\quad$ [$(b-1)(b+3)(2b+1)$]

53) $3b^3 - 4b^2 + 5b - 4$ $\quad$ [$(b-1)(3b^2 - b + 4)$]

54) $x^3 - 3x - 2$ $\quad$ [$(x+1)^2(x-2)$]

55) $x^2 - 6x + 5$ $\quad$ [$(x-1)(x-5)$]

56) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\quad$ [$(x-1)(x+2)(x-3)$]

57) $6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x$ $\quad$ [$x(x-1)(6x^2 + x - 1)$]

58) $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 9y - 4$ $\quad$ [$(y-4)(y-1)(y^2 + y - 1)$]

59) $x^2 + 5x + 4$ $\quad$ [$(x+1)(x+4)$]

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
Scomposizione dei polinomi

60) $4x^2 + 25 - 20x$ [$(2x-5)^2$]

61) $8x^3 + 27 + 36x^2 + 54x$ [$(2x+3)^3$]

62) $bx - ax + a - b$ [$(b-a)(x-1)$]

63) $27x^3 + 64$ [$(3x+4)(9x^2 + 16 - 12x)$]

64) $x^2 - 12x - 13$ [$(x+1)(x-13)$]

65) $3ax + 3xy + 2a + 2y$ [$(a+y)(3x+2)$]

66) $2a^4 - 2a^3 - 12a^2$ [$2a^2(a+2)(a-3)$]

67) $3a^3 - 2b^2 + 2a^2b - 3ab$ [$(3a+2b)(a^2-b)$]

68) $10a^2 - 4ab + 15a - 6b$ [$(5a-2b)(2a+3)$]

69) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ [$(x-1)(x^2 - x + 3)$]

70) $8ab - ax + 2a^2 - 4bx$ [$(4b+a)(2a-x)$]

71) $3x^5 - 81x^2$ [$3x^2(x-3)(x^2+3x+9)$]

72) $y - 2 - x^2y + 2x^2$ [$(x+1)(1-x)(y-2)$]

73) $x^6 - x^4 + x^2 - 1$ [$(x+1)(x-1)(x^4+1)$]

74) $x^2 - 4x^2y + 4xy^2 - y^2$ [$(x-y)(x+y-4xy)$]

75) $(a+2)^2 - 1$ [$(a+1)(a+3)$]

76) $3x^4 - 12ax^2 + 12a^2$ [$3(x^2-2a)^2$]

77) $a^2(x+1) - 2a(x+1) + x + 1$ [$(x+1)(a-1)^2$]

78) $4a^4 + 4 - 8a^2$ [$4(a+1)^2(a-1)^2$]

79) $a^3 - a^2b - ab - a$ [$a(a+1)(a-b-1)$]

80) $x^2 - y^2 - 3(x-y)^2$ [$2(2y-x)(x-y)$]

81) $x^6 + 16x^3 + 64$ [$(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$]

82) $a^4(x^2+1) - 2a^4$ [$a^4(x+1)(x-1)$]

83) $x^3 + x^2y - x - y$ [$(x-1)(x+1)(x+y)$]

84) $7x^4 - 7$ [$7(x-1)(x+1)(x^2+1)$]

85) $-2xb^2 - 4xb - 2x$ [$-2x(b+1)^2$]

86) $x^5 - 10x^4 + 25x^3$ [$x^3(x-5)^2$]

87) $2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2$ [$(x+y)(2+x+y)$]

88) $a^3 - 6a^2 - a + 30$ [$(a+2)(a-3)((a-5))$]

89) $x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$ [$(x+y)^3(x-y)$]

90) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ [$(x-2)^2(x-3)$]

91) $x^2 - 9 + 6a - a^2$ [$(x-a+3)(x+a-3)$]

92) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ [$(2x+1)^3$]

93) $3b^2 + b - 10$ [$(b+2)(3b-5)$]

94) $9x^2 - (x-5)^2$ [$(2x+5)(4x-5)$]

95) $x^3 + 27y^3$ [$(x+3y)(x^2+9y^2-3xy)$]

96) $\dfrac{x^4}{4} + x^2 + 1$ [$\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)^2$]

97) $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4ac + 4bc$ [$(a-b-2c)^2$]

98) $a^4 - 5a^2 + 4$ [$(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$]

99) $\dfrac{1}{4}a^4 + a^2 + 1 - b^2$ [$\left(\dfrac{1}{2}a^2+1-b\right)\left(\dfrac{1}{2}a^2+1+b\right)$]

Problemi

100) Considera la somma di due numeri dispari consecutivi. Cosa osservi?
Puoi dimostrare che la somma di due numeri dispari consecutivi è sempre un multiplo di 4?

101) Considera la differenza tra il quadrato di un numero dispari e 1. Cosa osservi?
Come puoi dimostrare che il numero che si ottiene è divisibile per 8?

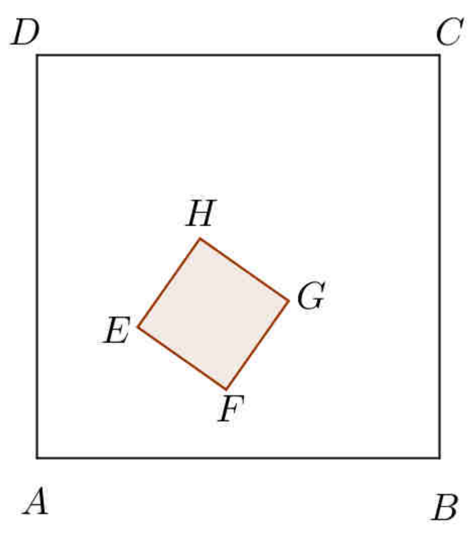
102) Il gioco "*Pensa un numero…*"
Il gioco è questo: si chiede a qualcuno di pensare un numero (intero) e poi gli si chiede di svolgere mentalmente queste operazioni:

- addiziona al numero 12
- moltiplica il risultato per 5
- sottrai 4 volte il numero pensato
- addiziona al risultato 40

Alla fine viene chiesto il risultato finale: sottraendo 100 da tale risultato si "indovina" il numero pensato in partenza.
Perché?
Prova a capirlo..
Suggerimento: indica con x il numero pensato e prova ad eseguire le operazioni indicate…

103) Un appezzamento di terreno è costituito da un quadrato ABCD e all'interno c'è uno stagno di forma quadrata EFGH.

Per recintare sia il perimetro esterno del terreno che il bordo dello stagno sono stati necessari 360m di rete; la recinzione di ABCD ha richiesto 280m di rete in più rispetto alla recinzione di EFGH. Qual è l'area della parte calpestabile dell'appezzamento?



$\left[6300m^2\right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
CALCOLO LETTERALE: SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO

1. $x^2 + xy + x + y$ $\quad [(x+y)(x+1)]$

2. $x^2 + 2xy + 2x + 4y$ $\quad [(x+2y)(x+2)]$

3. $6a + axy - 3ay - 2ax$ $\quad [a(x-3)(y-2)]$

4. $16a^2 - 36b^2$ $\quad [4(2a-3b)(2a+3b)]$

5. $a^2 + 6a + 9$ $\quad [(a+3)^2]$

6. $2a^2 + 12a + 18$ $\quad [2(a+3)^2]$

7. $a^2 + 6a + 9 - b^2$ $\quad [(a+3+b)(a+3-b)]$

8. $\frac{4}{9}a^2 - b^2$ $\quad \left[\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(\frac{2}{3}a-b\right)\right]$

9. $x^2 - xy + \frac{1}{3}ax - \frac{1}{3}ay$ $\quad \left[(x-y)\left(x+\frac{1}{3}a\right)\right]$

10. $3x(a-b) - 2(a-b)$ $\quad [(a-b)(3x-2)]$

11. $x^5 - x^3$ $\quad [x^3(x+1)(x-1)]$

12. $4a^2b^3 - 6ab^2$ $\quad [2ab^2(2ab-3)]$

13. $(x+y)^2 - 1$ $\quad [(x+y+1)(x+y-1)]$

14. $9a^2 - 9b^2$ $\quad [9(a+b)(a-b)]$

15. $x^4 - 1$ $\quad [(x^2+1)(x+1)(x-1)]$

16. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ $\quad [(2x-y)^3]$

17. $x^3 - y^3$ $\quad [(x-y)(x^2+xy+y^2)]$

18. $27a^3 + 8$ $\quad [(3a+2)(9a^2-6a+4)]$

19. $x^2 - 2x - 8$ $\quad [(x-2)(x+4)]$

20. $x^2 + 5x + 4$ $\quad [(x+1)(x+4)]$

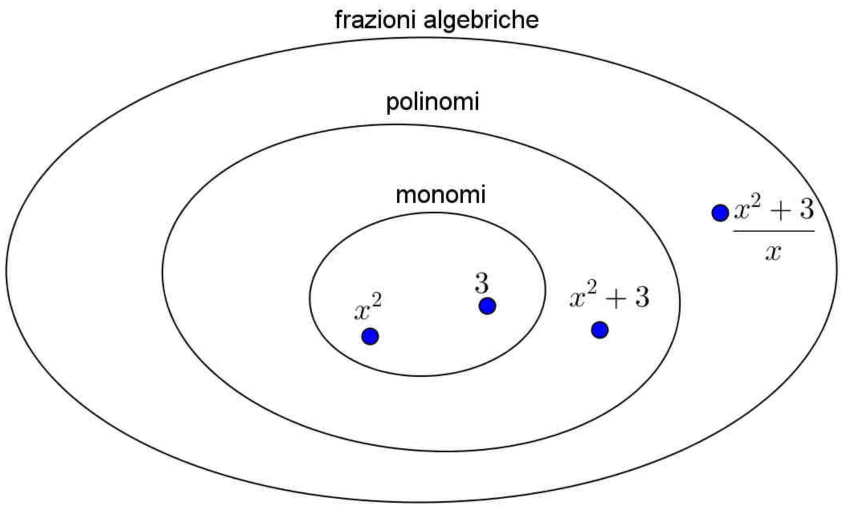
Le frazioni algebriche

Definizione: se A e B sono due polinomi e B è diverso dal polinomio nullo, $\frac{A}{B}$ viene detta frazione algebrica.

Esempio: $\frac{x^2-1}{x+3}$; $\frac{a^2+b^2}{3a-b}$; $\frac{x+1}{x}$

sono esempi di frazioni algebriche.

NOTA: ogni monomio o polinomio può essere considerato come una frazione algebrica il cui denominatore è il monomio 1.



L'insieme delle frazioni algebriche è un ampliamento dell'insieme dei polinomi.

Così come abbiamo imparato a semplificare, sommare, moltiplicare le frazioni numeriche vedremo come si possono semplificare, sommare ecc. le frazioni algebriche.

Per prima cosa però dobbiamo studiare la cosiddetta "condizione di esistenza" (C.E.) di una frazione algebrica: infatti abbiamo detto che il denominatore deve essere un polinomio diverso da zero e dobbiamo quindi escludere i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione.

Condizione di esistenza di una frazione algebrica

Una frazione algebrica perde significato per tutti i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione.
Determinare le "condizioni di esistenza" (abbreviato con C.E.) significa individuare i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione algebrica e per determinarli è necessario *risolvere un'equazione*.

Esempio 1

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\dfrac{a+3}{5a-2}$ dobbiamo risolvere l'equazione $5a-2=0$ (per determinare il valore di a che annulla il denominatore).

Per risolvere l'equazione di primo grado $5a-2=0$

- si "sposta" il termine -2 cambiandolo di segno poiché se $5a-2=0$ è chiaro che $5a=2$;
- a questo punto si divide 2 per il coefficiente 5 , cioè si ha $a=\dfrac{2}{5}$.

Quindi il C.E. della frazione algebrica è : $a \neq \dfrac{2}{5}$

Esempio 2

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\dfrac{b^2+1}{\frac{1}{2}b+3}$ dobbiamo risolvere l'equazione $\dfrac{1}{2}b+3=0$. Abbiamo: $\dfrac{1}{2}b=-3 \rightarrow b=\dfrac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$ o direttamente $b=(-3)\cdot 2=-6$

Quindi il C.E. è : $b \neq -6$

Esempio 3

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\dfrac{x+5}{x^2-4}$ dobbiamo risolvere l'equazione $x^2-4=0$. Se l'equazione è di grado superiore al primo dobbiamo prima di tutto scomporla : in questo caso abbiamo:

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

Quindi dobbiamo risolvere $\qquad (x+2)(x-2)=0$

Sappiamo che un prodotto è nullo quando almeno uno dei fattori è nullo e quindi

$$(x+2)=0 \rightarrow x=-2$$
$$(x-2)=0 \rightarrow x=2$$

In conclusione il C.E. è : $x \neq \pm 2$.

Esempio 4

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{a+3}{a^2+a}$ dobbiamo risolvere l'equazione $a^2+a=0$.
Anche in questo caso scomponiamo (mettendo in evidenza):

$$a^2+a=a(a+1)$$

Quindi dobbiamo risolvere

$$a(a+1)=0$$

Abbiamo :

$$a=0$$
$$a+1=0 \rightarrow a=-1$$

e in conclusione il C.E. è: $a \neq 0; a \neq -1$

Esempio 5

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{b+4}{b^2-5b+6}$ dobbiamo risolvere l'equazione $b^2-5b+6=0$.
Scomponiamo il denominatore con Ruffini ed abbiamo $b^2-5b+6=(b-2)(b-3)$.

$$(b-2)(b-3)=0 \rightarrow b=2, \quad b=3$$

In conclusione C.E. : $b \neq 2, \quad b \neq 3$

Esempio 6

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{y-2}{y^3-1}$ dobbiamo risolvere l'equazione $y^3-1=0$.

Poiché $y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$ abbiamo che $(y-1)(y^2+y+1)=0 \rightarrow y=1$ (l'equazione y^2+y+1 non si scompone ulteriormente e quindi non ci sono altre soluzioni reali).

Quindi C.E: $y \neq 1$

Il calcolo con le frazioni algebriche

Semplificazione di una frazione algebrica

Come per le frazioni numeriche, dividendo numeratore e denominatore di una frazione algebrica per uno stesso polinomio (diverso da zero) si ottiene una frazione algebrica equivalente.

Esempio: $$\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{x\cancel{(x+1)}}=\frac{x-1}{x}$$

(C.E. $x \neq 0$ e $x \neq -1$)

Attenzione: si semplificano i fattori della scomposizione del numeratore e del denominatore e **mai gli addendi**!

$$\frac{x^2-\cancel{1}}{x-\cancel{1}}$$ ERRORE GRAVE!

Somma algebrica

Per sommare due o più frazioni algebriche bisogna prima di tutto ridurle allo stesso denominatore (come per le frazioni numeriche).

Esempio:

$$\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+2}=?$$

Dobbiamo prendere come denominatore comune il m.c.m. dei denominatori, in questo caso $(x-1)(x+2)$

$$\frac{x(x+2)+1(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)}$$

Importante: per determinare il mc.m. dei denominatori delle frazioni algebriche da sommare occorre scomporli.

Esempi

1) $$\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x-1}=\frac{2+1(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

2) $$\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{x^2}=\frac{x+2(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{3x+2}{x^2(x+1)}$$

3) $$\frac{2}{a^2+2ab+b^2}+\frac{a}{2a+2b}=\frac{2}{(a+b)^2}+\frac{a}{2(a+b)}=\frac{4+a(a+b)}{2(a+b)^2}=\frac{a^2+ab+4}{2(a+b)^2}$$

4) $$\frac{3x}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\ldots$$

5) $$\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)}=\frac{1-(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{3-x}{(x-2)^2}$$

6) $$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x^2-9}-\frac{x}{2x+6}=\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)(x+3)}-\frac{x}{2(x+3)}=\frac{2(x+3)+4-x(x-3)}{2(x-3)(x+3)}=\ldots$$

7) $$\frac{1}{a^2+ab+2a+2b}-\frac{2}{a^2+4a+4}+\frac{b}{3a+3b}=$$

$$\frac{1}{a(a+b)+2(a+b)}-\frac{2}{(a+2)^2}+\frac{b}{3(a+b)}=$$

$$(a+b)(a+2)$$

$$\frac{3(a+2)-6(a+b)+b(a+2)^2}{3(a+b)(a+2)^2}=\ldots$$

Moltiplicazione

Il prodotto di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}}$$

Esempi

1) $$\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x}{x-3}=\frac{(x-1)x}{(x+2)(x-3)}$$ (C.E. $x\neq -2$ e $x\neq 3$)

2) $$\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{x+2}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x+2}$$

NOTA: prima di moltiplicare conviene scomporre numeratore e denominatore delle frazioni algebriche per effettuare eventuali semplificazioni.

Divisione

Il quoziente di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione per la reciproca della seconda.

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}}$$ ($B\neq 0$; $D\neq 0$; $C\neq 0$)

Esempio

$$\frac{x}{x^2-1}:\frac{x}{2x+2}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}:\frac{x}{2(x+1)}=$$ (C.E. $x\neq \pm 1$ e $x\neq 0$)

$$=\frac{\cancel{x}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}}=\frac{2}{x-1}$$

Potenza

$$\boxed{\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}}$$

Esempio $$\left(\frac{a+b}{a^2+3b}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{(a^2+3b)^2}$$

ESERCIZI

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche

1) $\frac{2}{3x+6}$; $\frac{1}{2x-2}$; $\frac{2x+3}{2x+4}$; $\frac{a}{a^2+a}$

2) $\frac{3x}{x^2+1}$; $\frac{x}{x^2-1}$; $\frac{5}{4-x^2}$; $\frac{1}{9-b^2}$

3) $\frac{2}{a^2-2a+1}$; $\frac{2a+3}{a^2+4a}$; $\frac{1}{2b^2+3b}$; $\frac{1}{a^2-b^2}$

4) $\frac{1}{x^2-5x}$; $\frac{2x}{x+y}$; $\frac{5}{x^2-y^2}$; $\frac{b}{x^2-4a^2}$

5) $\frac{1}{x^2+4}$; $\frac{x}{x^3+1}$; $\frac{5}{x^2}$; $\frac{1}{x^4-16}$

Dopo aver determinato C.E. semplifica le seguenti frazioni algebriche

6) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12}$ [C.E. $x \neq -2$ e $x \neq 2$; $\frac{x-2}{3(x+2)}$]

7) $\frac{2x-2y}{y-x}$ [C.E. $x \neq y$; -2]

8) $\frac{x^2-x}{x-1}$ [C.E. $x \neq 1$; x]

9) $\frac{x^2+3x}{3x}$ [C.E. $x \neq 0$; $\frac{x+3}{3}$]

10) $\frac{9a^2-9}{3a+3}$ [C.E. $a \neq -1$; $3(a-1)$]

11) $\frac{ay+ax+2y+2x}{4ay+4ax}$ [C.E. $a \neq 0$ e $x \neq -y$; $\frac{a+2}{4a}$]

12) $\dfrac{4x^2-4x+1}{2ax+2x-a-1}$ [C.E. $a \neq -1$ e $x \neq \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2x-1}{a+1}$]

13) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ [C.E. $x \neq -1$ e $x \neq 2$; $\dfrac{x+2}{x+1}$]

14) $\dfrac{a^4-16}{2a^2+8}$ [C.E. $\forall a$; $\dfrac{a^2-4}{2}$]

15) $\dfrac{ax-x+3a-3}{x^2+4x+3}$ [C.E. $x \neq -3$ e $x \neq -1$; $\dfrac{a-1}{x+1}$]

16) $\dfrac{y^2-9}{y^3-3y^2}$ [C.E. $y \neq 0$ e $y \neq 3$; $\dfrac{y+3}{y^2}$]

17) $\dfrac{x^3+4x^2+4x}{4-x^2}$ [C.E. $x \neq -2$ e $x \neq 2$; $\dfrac{x(x+2)}{2-x}$]

18) $\dfrac{x^2y-4y}{-2y-xy}$ [C.E. $y \neq 0$ e $x \neq -2$; $2-x$]

19) $\dfrac{a^2-10a+25}{a^2-25}$ [C.E. $a \neq -5$ e $a \neq 5$; $\dfrac{a-5}{a+5}$]

20) $\dfrac{6x^3-6xy^2}{x^2+xy}$ [C.E. $x \neq 0$ e $x \neq -y$; $6(x-y)$]

21) $\dfrac{2x^3+2}{x^3+x^2+x+1}$ [C.E. $x \neq -1$; $\dfrac{2(x^2-x+1)}{x^2+1}$]

22) $\dfrac{a^3-3a^2+4}{a^2-a-2}$ [C.E. $a \neq -1$ e $a \neq 2$; $a-2$]

23) $\dfrac{8y^2-8}{4ay+12y+4a+12}$ [C.E. $a \neq -3$ e $y \neq -1$; $\dfrac{2(y-1)}{a+3}$]

Esegui le seguenti somme algebriche (supponi che siano verificate le condizioni di esistenza)

24) $\frac{2}{a^2b}+\frac{3b}{ab^2}-1$ $\qquad [\frac{2+3a-a^2b}{a^2b}]$

25) $\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}$ $\qquad [\frac{a^2-a+1}{(a-1)(a+1)}]$

26) $\frac{a}{a+1}+\frac{a^2-ab+2a}{ab-a+b-1}-\frac{b}{1-b}$ $\qquad [\frac{a+b}{b-1}]$

27) $\frac{3a-b}{3a+b}-\frac{3a+b}{3a-b}$ $\qquad [-\frac{12ab}{9a^2-b^2}]$

28) $\frac{x+2}{x^2+x-2}+\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x-1}$ $\qquad [\frac{x}{x+2}]$

29) $\frac{x+3}{x^2-xy}+\frac{y-3}{xy-y^2}-\frac{2}{x-y}$ $\qquad [-\frac{3}{xy}]$

30) $\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{y^2-x^2}-\frac{xy-y^2}{2xy-x^2-y^2}$ $\qquad [\frac{x}{x-y}]$

31) $\frac{2}{x+2}+\frac{9x^2-3x}{3x^2+5x-2}+\frac{1}{-x-2}$ $\qquad [\frac{3x+1}{x+2}]$

32) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{6xy}{x^2-y^2}$ $\qquad [\frac{2xy}{x^2-y^2}]$

33) $\frac{4a+4a^2+1}{4a-8a^2}+a-\frac{4a^2+1}{4a}$ $\qquad [\frac{2a+3}{2-4a}]$

34) $\frac{2+x}{x+3}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}-\frac{x}{x+3}$ $\qquad [\frac{1}{2-x}]$

35) $\frac{a-1}{1+a}-\frac{2a^3+6}{a^3-a^2-a+1}+\frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}$ $\qquad [\frac{6}{a^2-1}]$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni algebriche (supponi che siano verificate le condizioni di esistenza)

36) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}\cdot\dfrac{2x-x^2}{2x}$ $\quad[-\dfrac{(x+2)}{2}]$

37) $\dfrac{4a^2}{a^2-x^2}\cdot\dfrac{x+a}{2a}$ $\quad[\dfrac{2a}{a-x}]$

38) $\dfrac{x^2-2x+1}{y^2}\cdot\dfrac{3y^3-3xy^3}{(1-x)^3}$ $\quad[3y]$

39) $\dfrac{x-1}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2+x-6}{3x-3}$ $\quad[\dfrac{x+3}{3x+6}]$

40) $\dfrac{2a^2+2a}{2a-1}\cdot\dfrac{6-12a}{a^2-a-2}$ $\quad[\dfrac{12a}{2-a}]$

41) $3x\cdot\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{2xy-x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy}$ $\quad[\dfrac{3x(y-x)}{x+y}]$

42) $\dfrac{b^3-8}{8+b^3}\cdot\dfrac{b+2}{4+2b+b^2}$ $\quad[\dfrac{b-2}{4-2b+b^2}]$

43) $\dfrac{3y-3x}{2b-a}\cdot\dfrac{a^2-4b^2}{2x-2y}$ $\quad[\dfrac{3(2b+a)}{2}]$

44) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{x+y}$ $\quad[(x+y)(x-y)^2]$

45) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ $\quad[\dfrac{x}{x-1}]$

46) $\left(x-2+\dfrac{6}{x+3}\right)\cdot\dfrac{x^2+6x+9}{2x+6}\cdot\dfrac{1}{x+x^2}$ $\quad[\dfrac{1}{2}]$

47) $\dfrac{x^2-4y^2}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x-2y}+\dfrac{1}{2y+x}\right)$ $\quad[2]$

Esegui le seguenti divisioni di frazioni algebriche

48) $\dfrac{a^2+3a}{a-3}:\dfrac{a}{a^2-9}$ [C.E. $a \neq \pm 3$ e $a \neq 0$; $(a+3)^2$]

49) $\dfrac{a^2-b^2}{6ab}:\dfrac{a+b}{12a}$ [C.E. $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq -b$; $\dfrac{2(a-b)}{b}$]

50) $\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x-1}{x^2}$ [C.E. $x \neq 0$ e $x \neq 1$; $x(x+1)$]

51) $\dfrac{\dfrac{x-2}{x^2-9}}{\dfrac{x+1}{x-3}}$ [C.E. $x \neq \pm 3$ e $x \neq -1$; $\dfrac{x-2}{(x+3)(x+1)}$]

52) $\dfrac{\dfrac{x^2+x}{x-2}}{\dfrac{x+1}{x^2-4}}$ [C.E. $x \neq \pm 2$ e $x \neq -1$; $x(x+2)$]

Potenze di frazioni algebriche

53) $\left(\dfrac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$ [$\dfrac{8}{(a+b)^3}$]

54) $\left(\dfrac{4a^2-4b^2}{2b-2a}\right)^2$ [$4(a+b)^2$]

55) $\left(x-\dfrac{xy}{x+y}\right)^2$ [$\dfrac{x^4}{(x+y)^2}$]

56) $\left(\dfrac{b}{b-1}\right)^2\cdot\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2$ [$(b+1)^2$]

57) $\left(\dfrac{a^2+1}{a^2-3a-4}-\dfrac{a+1}{a-4}\right)^2$ [$\dfrac{4a^2}{(a-4)^2(a+1)^2}$]

Espressioni con frazioni algebriche

58) $\frac{2}{a}\cdot\left(\frac{a+b}{2b}+\frac{b}{a-b}\right):\frac{a^2+b^2}{ab-b^2}$ $[\frac{1}{a}]$

59) $\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2+x}:\left(x^2-4\right)$ $[\frac{1}{x(x-2)}]$

60) $\frac{1}{x}:\left(\frac{x-3y}{xy}+\frac{x+y}{x^2}-\frac{y^3-2xy^2}{x^2y^2}\right)$ $[\frac{y}{x}]$

61) $\left[\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x+y}{xy}$ $[1]$

62) $\frac{a}{a+1}:\left(\frac{2a-1}{a+3}-\frac{2a-5}{a+1}-\frac{14}{a^2+4a+3}\right)$ [impossibile, perché …]

63) $x(2x-1):\left(2x+\frac{1}{2x-2}+\frac{2x-1}{2x-2}\right)$ $[x-1]$

64) $\frac{x^2-3x}{x^2-1}:\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{3x-3}+\frac{9-x}{3x^2-3}\right)$ $[\frac{3x}{x-3}]$

65) $\left[\left(\frac{1}{1+b}+\frac{b}{1-b}\right):\left(\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1+b}\right)-a\right]:\left(1-a^2\right)$ $[\frac{1}{1+a}]$

66) $\left(\frac{6a}{a^2-9}+\frac{a}{a+3}+\frac{3}{3-a}\right)^3:\left(\frac{b}{b-2}+\frac{8}{4-b^2}-\frac{2}{b+2}\right)^4$ $[1]$

67) $\left(y^2+2y+1-\frac{1}{y^2-2y+1}\right):\left(\frac{y}{y-1}+y\right)$ $[\frac{y^2-2}{y-1}]$

68) $\left(\frac{x+2y}{2x-4y}+\frac{2y-x}{4y+2x}+\frac{8y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{8y}{x-2y}$ $[\frac{1}{2}]$

69) $\left(\frac{x-8}{x^2+5x-6}-\frac{2}{x+6}+\frac{2}{x-1}\right):\frac{1}{x^2-1}$ $[x+1]$

70) $\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)^2:\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x}{y}-1\right)^2:\left(\frac{x}{y}+1\right)+2+\frac{2x}{y}$ $[\left(\frac{x+y}{y}\right)^2]$

71) $\left[\left(x+\frac{1}{x+2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x+2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\frac{4}{x^2}\right]$

72) $\left(\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a-3}+1\right):\left(\frac{2a^2-1}{a^2-5a+6}-2\right)$ $\left[\frac{a^2-6a+7}{10a-13}\right]$

73) $\left(\frac{3}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right):\frac{1}{x^2+4x+4}$ $\left[\frac{2+x}{2-x}\right]$

74) $\left(\frac{a+2}{a^2-4a+4}-\frac{1}{a-2}\right):\left(\frac{a}{2-a}+1\right)$ $\left[\frac{2}{2-a}\right]$

75) $\left(\frac{b+2}{b^3-8}-\frac{1}{b^2+2b+4}\right)\cdot\left(\frac{b}{2}-1\right)$ $\left[\frac{2}{b^2+2b+4}\right]$

76) $\left(1-\frac{27}{27-x^3}\right):\left(\frac{1}{9+3x+x^2}-\frac{1}{6-2x}\right)$ $\left[\frac{2x^3}{x^2+5x+3}\right]$

77) $\left(\frac{1}{b^2-4}+\frac{1}{2-b}-\frac{2}{2+b}\right)\cdot\frac{b+2}{b-1}$ $\left[\frac{3}{2-b}\right]$

78) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-a^3}-1\right)$ $\left[\frac{1}{1-a}\right]$

79) $\left(\frac{3b-1}{2b-1}+\frac{b+1}{1-2b}\right):\frac{2b^2}{1-4b^2}$ $\left[\frac{(1-b)(2b+1)}{b^2}\right]$

80) $\left(\frac{1}{3x-y}-\frac{2}{y-3x}\right)\cdot(3x-y)^2$ $[\ 3(3x-y)\ ]$

81) $\left(\frac{1}{x-2y}+\frac{2}{2x+y}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$ [0]

82) $\left(\frac{6a}{9a^2-1}-\frac{1}{3a+1}-\frac{1}{3a-1}\right)\cdot\left(\frac{2}{a+1}-3\right)$ [0]

83) $\left(\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}\right):\frac{4x^2}{1-3x}$ $\left[-\frac{3}{x(3x+1)}\right]$

84) $(2-x)^2\cdot\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}\right):\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)$ $\left[\frac{x-2}{x+2}\right]$

85) $\left(\frac{2a^2}{a^3-8}-\frac{a+2}{a^2+2a+4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot\frac{8-a^3}{4}$ $\left[\frac{a}{2}\right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
FRAZIONI ALGEBRICHE

Semplifica le seguenti frazioni algebriche , dopo aver determinato il C.E:

1. $\dfrac{a^2-2a}{a-2}$ $\qquad [a \neq 2; \quad a \quad]$

2. $\dfrac{x}{2x^2-x}$ $\qquad \left[x \neq 0; \quad \dfrac{1}{2} \quad ; \quad \dfrac{1}{2x-1}\right]$

3. $\dfrac{x^3-x^2}{4x^2y}$ $\qquad \left[x \neq 0; \quad y \neq 0 \quad ; \dfrac{x-1}{4y} \quad \right]$

4. $\dfrac{4a^2-4}{2a+2}$ $\qquad [a \equiv -1; \quad 2(a-1)]$

Svolgi i calcoli e semplifica il risultato:

1. $\dfrac{3}{3x+3}-\dfrac{x-1}{1-x^2}-3$ $\qquad \left[-\dfrac{(3x+1)}{x+1}\right]$

2. $\dfrac{2+x}{x+3}-\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}-\dfrac{x}{x+3}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{2-x}\right]$

3. $\dfrac{x^2-2x+1}{y^2}\cdot\dfrac{3y^3-3xy^3}{(1-x)^3}$ $\qquad [3y]$

4. $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}:\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{3x-3}+\dfrac{9-x}{3x^2-3}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{3x}{x-3}\right]$

5. $\left[\left(\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{b}{1-b}\right):\left(\dfrac{1}{1-b}-\dfrac{b}{1+b}\right)-a\right]:\left(1-a^2\right)$ $\qquad \left[\dfrac{1}{1+a}\right]$

6. $\left(\dfrac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$ $\qquad \left[\dfrac{8}{(a+b)^3}\right]$

Le equazioni di primo grado

Definiamo prima di tutto cosa è una identità.

Definizione : *un'identità è un'uguaglianza, dove compaiono espressioni letterali, verificata per qualunque valore attribuito alle lettere.*

Esempi
Sono identità:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$4 \cdot (a+b) = 4a + 4b$

A volte, per stabilire se una data uguaglianza rappresenta un'identità, occorre eseguire alcuni calcoli.
Per esempio:

$$4a \cdot (a+b) = (a+2b)^2 + 3a^2 - 4b^2$$

è un'identità ?
Sviluppiamo il primo membro (espressione a sinistra) e otteniamo

$$4a \cdot (a+b) = 4a^2 + 4ab$$

Sviluppiamo il secondo membro (espressione a destra) e otteniamo

$$(a+2b)^2 + 3a^2 - 4b^2 = a^2 + 4ab + \cancel{4b^2} + 3a^2 - \cancel{4b^2} = 4a^2 + 4ab$$

Quindi si tratta di un'identità.

Nota
Se nelle espressioni compaiono delle frazioni algebriche, dovremo precisare le condizioni di esistenza.
Esempio

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \frac{2}{a-1} \qquad \text{è un'identità con C.E. } a \neq 1$$

Vediamo ora come è definita un'equazione.

Definizione : un'equazione è un'uguaglianza dove compaiono espressioni letterali per le quali si cercano i valori da attribuire a una o più lettere che rendano vera l'uguaglianza.

Nota
La parola "*equazione*" deriva dal verbo latino "*aequare*" che significa "**rendere uguale**".

Noi studieremo equazioni con una sola lettera, chiamata **incognita, e di primo grado**.

Per esempio

$$\boxed{2x+1=3x-2}$$

è un'equazione di primo grado nell'incognita x

La parte dell'uguaglianza a sinistra dell'uguale viene chiamata 1° membro dell'equazione e la parte a destra dell'uguale viene detta 2° membro dell'equazione.

I valori che rendono vera l'uguaglianza si chiamano **soluzioni** (o radici) dell'equazione.

Risolvere un'equazione significa determinare tutte le sue soluzioni.

Per esempio $2x+1=3x-2$ ha come soluzione $x=3$.

Infatti se sostituiamo alla lettera x il valore 3 otteniamo:

$$2\cdot 3+1=3\cdot 3-2$$

$$7=7$$

Nota importante

Un'equazione può avere soluzione in un dato insieme numerico, ma non avere soluzione in un insieme numerico più ristretto.
Per esempio l'equazione $2x=1$ ha come soluzione $x=\frac{1}{2}$ nell'insieme $\Re$ ma non avrebbe soluzione nell'insieme dei numeri naturali N .

Noi considereremo come insieme numerico di riferimento l'insieme $\Re$ dei numeri reali.

Principi di "equivalenza" per risolvere un'equazione

Per risolvere un'equazione dobbiamo trasformarla in un'equazione "*equivalente*" via via più semplice, cioè con le stesse soluzioni dell'equazione di partenza, fino ad arrivare alla soluzione.

Vediamo come si può ottenere un'equazione equivalente.

Primo principio di equivalenza

Se si addiziona ad entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente.

Applicazione del primo principio

Esempio: consideriamo l'equazione

$$x-1=2$$

Se sommiamo +1 a entrambi i membri avremo:

$$x\cancel{-1}+\cancel{1}=2+1$$

Quindi semplificando troviamo la soluzione

$$x=3$$

Regola del "trasporto"

Nel procedimento precedente è come se avessimo trasportato -1 da sinistra a destra, ma cambiandolo di segno

$$x-1=2$$
$$x=2+1$$

Abbiamo quindi trovato una regola che possiamo chiamare del "**trasporto**": *data un'equazione se ne ottiene una equivalente se si trasporta un termine da un membro all'altro **cambiandolo di segno***.

Nota

Il termine "algebra" deriva dal termine arabo "*al-jabr*", usato dal matematico al- Khuwarizmi (IX sec. d.C.) proprio per indicare la regola del trasporto.

Secondo principio di equivalenza

Se si moltiplicano o si dividono entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero (o una stessa espressione) diverso da zero , si ottiene un'equazione equivalente.

Applicazione del 2° principio

Esempio: consideriamo l'equazione

$$2x = 1$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri per $\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{1}{2}$$

Quindi se l'equazione è ridotta nella forma $ax = b$, con $a \neq 0$, utilizzando il secondo principio di equivalenza possiamo ricavare $x = \frac{b}{a}$ cioè dividiamo il termine noto b per il coefficiente dell'incognita a .

Altre applicazioni dei due principi di equivalenza

- *Se in un'equazione sono presenti termini uguali nei due membri, possono essere cancellati*
  Esempio: $x + 1 = 2x + 1$
  Aggiungendo -1 ad entrambi i membri possiamo cancellare
  $x + \cancel{1} - \cancel{1} = 2x + \cancel{1} - \cancel{1}$

- *Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico in comune (diverso da zero), possiamo dividere tutti i termini per quel fattore*
  Esempio : $3x + 6 = 9x + 3$
  Dividendo entrambi i membri per 3 abbiamo
  $$\frac{3x+6}{3} = \frac{9x+3}{3} \Rightarrow x + 2 = 3x + 1$$
- *Cambiando segno a tutti i termini di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente perché cambiare segno equivale a moltiplicare per -1*
  Esempio: $-x - 2 = -5$ è equivalente a $x + 2 = 5$

Osservazione : il secondo principio viene utilizzato anche per "eliminare" i denominatori nei coefficienti di un'equazione.

Esempio : consideriamo l'equazione $\frac{x}{2} = x + \frac{5}{3}$

Riduciamo i due membri allo stesso denominatore (m.c.m. denominatori):

$$\frac{3x}{6} = \frac{6x+10}{6}$$

Applichiamo il secondo principio moltiplicando per 6 :

$$6 \cdot \frac{(3x)}{6} = \frac{(6x+10)}{6} \cdot 6 \Rightarrow 3x = 6x + 10$$

Risoluzione di un'equazione di 1° grado
numerica intera (1)

Esempio 1
Consideriamo la seguente equazione

$$4x-9+(x-1)\cdot(x+1)=(x-3)^2+2x+5$$

Inizialmente dobbiamo sviluppare i calcoli:

$$4x-9+x^2-1=x^2-6x+9+2x+5$$

Operando alcune semplificazioni e somme abbiamo:

$$4x-10=-4x+14$$

Trasportiamo -4x al primo membro e -10 al secondo (cambiandoli di segno) e sommiamo ottenendo:

$$8x=24$$

In conclusione ricaviamo l'incognita applicando il secondo principio di equivalenza:

$$x=\frac{24}{8}\Rightarrow x=3$$

Abbiamo quindi ottenuto una soluzione e l'equazione si dice "**determinata**".

Nota: possiamo sempre verificare l'esattezza della soluzione sostituendola nell'equazione iniziale: se otteniamo un'identità la soluzione è corretta.

Esempio 2
Consideriamo la seguente equazione

$$4x-12-3x=5+x-17$$

Sviluppando i calcoli abbiamo

$$x-12=x-12$$
$$0\cdot x=0$$

In questo caso quindi **l'equazione ha infinite soluzioni** perché qualunque valore dell'incognita verifica l'uguaglianza (si tratta quindi di un'identità).
L'equazione si dice "**indeterminata**".

Esempio 3
Consideriamo la seguente equazione

$$2(x-1)-2x=0$$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$2x-2-2x=0$$
$$0\cdot x-2=0\Rightarrow \qquad 0\cdot x=2$$

Non c'è nessun valore dell'incognita che verifichi questa uguaglianza e quindi **l'equazione non ha nessuna soluzione** e viene detta **"impossibile"**.

(1) L'incognita non compare al denominatore

Ricapitolando

Utilizzando i due principi di equivalenza, un'equazione numerica intera di 1° grado si può sempre trasformare in un'equazione equivalente scritta nella forma

$$ax = b$$

coefficiente dell'incognita   termine noto

Abbiamo tre casi:

- Se $\underline{a \neq 0}$ allora, usando il 2° principio, avremo $x = \dfrac{b}{a}$ e l'equazione è determinata;

- Se $\underline{a = 0}$
  - se anche $\underline{b = 0}$ allora abbiamo $0 \cdot x = 0$, equazione indeterminata, cioè con infinite soluzioni
  - Se $\underline{b \neq 0}$, poiché abbiamo $0 \cdot x = b (\neq 0)$, l'equazione è impossibile, cioè non ha soluzioni

Altri esempi

1) $\dfrac{1}{2}x - 2x + 3 = \dfrac{1}{3}x + 1$

Spostiamo i termini contenenti l'incognita a sinistra (per esempio) e i numeri al secondo membro:

$$\frac{1}{2}x - 2x - \frac{1}{3}x = 1 - 3$$

Calcoliamo: $\dfrac{3x - 12x - 2x}{6} = -2 \rightarrow \quad -\dfrac{11}{6}x = -2 \rightarrow \quad x = 2 \cdot \dfrac{6}{11} = \dfrac{12}{11}$

2) $2(x-3) - \dfrac{1}{2} = 3x - \dfrac{13}{2}$

Sviluppiamo il prodotto: $2x - 6 - \dfrac{1}{2} = 3x - \dfrac{13}{2}$

Possiamo spostare $2x$ a destra (cambiandolo di segno) perché in questo modo evitiamo di avere la x con segno negativo:

$$-\frac{13}{2} = 3x - 2x - \frac{13}{2}$$

In conclusione (eliminando $-\dfrac{13}{2}$) abbiamo $x = 0$.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni numeriche intere ed esegui la verifica di quelle che risultano determinate:

1) $3x-1=2x+5$; $4(1-x)-2x=3x+1$ $\left[6\ ;\ \frac{1}{3}\right]$

2) $-6x+7=7-6x$; $2x-5=x+4+x$ $[indeterm\ ;\ imposs.]$

3) $8x-3+2x=6x+1+4x$; $-3(x+1)-2-4x=2$ $[imposs.\ ;\ -1]$

4) $\frac{1}{6}(x-1)=0$; $\frac{x}{4}-x=0$ $[1\ ;\ 0]$

5) $8(x-1)-2(x+3)=3(2x-1)-5-17x$ $\left[\frac{6}{17}\right]$

6) $(x-2)^2-8+x=x(x-6)$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

7) $(2x+1)(x-3)-2x=2(x-1)^2+1$ $[-2]$

8) $(x-3)(x+3)-[-(2-x)+5]=2+x(x+1)$ $[-7]$

9) $\frac{3}{5}x-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}x+\left(1+\frac{2}{3}\right)$ $[3]$

10) $\frac{x+1}{3}-\frac{2(x-1)}{5}+\frac{2}{3}=\frac{x-4}{5}-\frac{4}{15}x$ $[imposs.]$

11) $3\left(\frac{1}{2}x-1\right)-(1+x)+\frac{1}{3}\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x+1$ $\left[\frac{29}{4}\right]$

12) $\frac{x+1}{2}-3x(x-1)=\frac{-6(x-1)(x+1)-5}{2}$ $[0]$

13) $\frac{1}{3}(x-3)-\left(\frac{x+1}{3}-\frac{3+x}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2-x}{3}+\frac{x}{3}+1$ $[-3]$

14) $x+\frac{1-6x}{15}+2=\frac{3(1-x)}{5}-\frac{2(x-1)}{3}$ $\left[-\frac{3}{7}\right]$

15) $x+\frac{x(x+2)}{2}-\frac{1}{4}(1-x)(2x+1)=\frac{1}{2}(3x+1)+x^2$ $[3]$

16) $\frac{2}{3}\left[(2x-1)(x-4)+3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+x\right)\right]=\frac{2}{3}(5x^2-x)+\frac{14}{9}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

17) $\frac{2}{3}[(1-x)(1+x)]+\frac{4}{3}x^2+2=\frac{2}{3}x(1+x)+\frac{1}{3}(x+4)$ $[\frac{4}{3}]$

18) $\left[\left(\frac{3}{4}-3x\right)\left(\frac{4}{3}-2x\right)\right]=4x\left(3x+\frac{1}{2}\right)-\left(2x-\frac{3}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)$ $\left[\frac{7}{52}\right]$

19) $\frac{2x-1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left[x^2+x\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(x+\frac{2}{3}\right)$ $\left[-\frac{1}{13}\right]$

20) $\frac{1}{5}(x-11)-2x\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{4}x-2-x-\frac{1}{60}x$ $[1]$

21) $\frac{3x+2}{5}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}\left[x+2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{3x+1}{10}+\frac{2}{3}x$ $[5]$

22) $\frac{1-2x}{2}-\frac{(1-4x)(1-2x)}{6}=\frac{5}{6}-\frac{(2x-1)^2}{3}$ $\left[-\frac{1}{8}\right]$

23) $\frac{1+x^2}{5}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{20}=\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{3}{2}-1$ $\left[\frac{11}{3}\right]$

24) $\frac{13}{48}+\frac{x}{2}-\frac{2x+1}{6}=1-\left(\frac{1}{4}-x\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

25) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2+(2-x)\left(2x-\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{6}x-2x(x+1)=0$ $[impos s.]$

26) $\frac{(2x+2)(1-x)}{3}=\frac{2(1-2x)^2-6(x-1)^2}{2}-\frac{5}{3}x^2$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

27) $\frac{1}{3}(x-2)(x+2)-\frac{3x-2}{3}=\frac{(x-3)^2}{3}-\frac{2-5x}{3}$ $\left[-\frac{9}{2}\right]$

28) $(x-2)^3+(x+2)(x+1)(x-2)+13x^2=2x(x+2)^2-12$ $[indeterm.]$

Problemi risolubili con equazioni

29) La somma di tre numeri consecutivi è 36. Determina i tre numeri. [11, 12, 13]

30) La somma di due numeri dispari consecutivi è 84. Determina i due numeri. [41, 43]

31) Determina due numeri sapendo che la loro somma è 43 e la loro differenza è 19. [31, 12]

32) Dividi il numero 35 in tre parti tali che la prima sia doppia della seconda e la seconda sia doppia della terza. [5, 10, 20]

33) Dividi il numero 50 in due parti tali che una sia i $\frac{2}{3}$ dell'altra. [20, 30]

34) Determina due numeri naturali consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati sia 13. [6, 7]

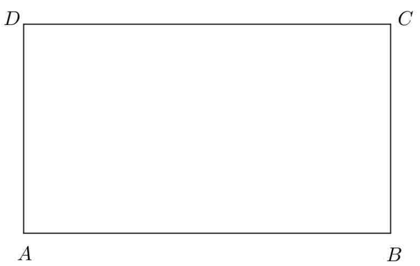
35) E' possibile distribuire 25 persone in due stanze in modo che nella prima ve ne siano il doppio che nella seconda? [no]

36) In un parcheggio ci sono scooter e automobili. Sapendo che le ruote sono 104 e che in tutto ci sono 36 veicoli, calcola il numero degli scooter e quello delle auto. [20, 16]

37) La distanza fra due località è stata percorsa da un autotreno in 9 ore, fra andata e ritorno, escluse le soste. Nell'andata la velocità media è stata di 56 km/h e nel ritorno di 70 km/h. Ricordando che $d = v\,t$, dove v è la velocità e t il tempo, quale è la distanza d fra le due località ? [280 km]

38) Considera un trapezio rettangolo ABCD in cui la differenza delle basi AB-CD = 4 e la base minore CD = $\frac{3}{5}$AB. Sapendo che il lato obliquo misura 5 cm, determina il perimetro del trapezio. [24 cm]

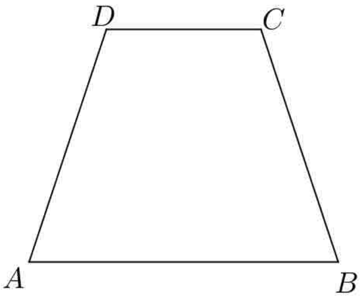
39)



Sapendo che $\overline{AB} = \frac{7}{4}\overline{BC}$ e che il perimetro è 11 cm, determina l'area del rettangolo ABCD.

[7 cm^2]

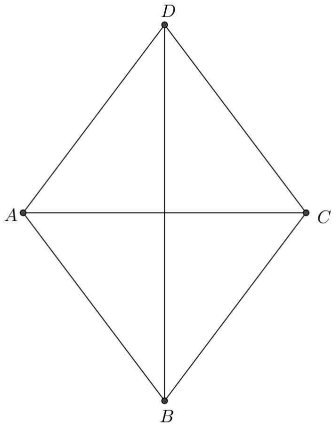
40)



Nel trapezio isoscele ABCD
$\overline{AB} = 2\overline{DC}$
e il perimetro risulta 56 cm.
Sapendo inoltre che il lato obliquo misura 13 cm, determina l'area.

[180 cm^2]

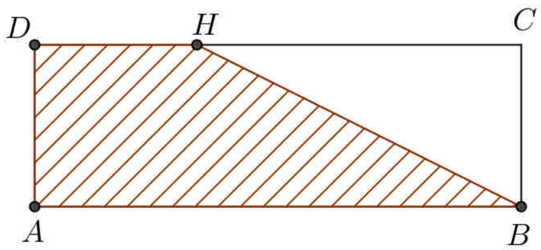
41)



Nel rombo ABCD BD-AC = 4 cm e $\overline{BD} = \frac{4}{3}\overline{AC}$.
Determina 2p e area del rombo.

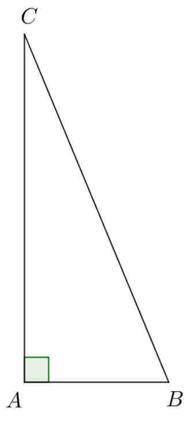
[40 cm, 96 cm^2]

42) Se AB = 6 cm, AD = 2 cm e area(ABHD)= 2·area(HBC) , quanto misura DH ?



[2 cm]

43)



Nel triangolo rettangolo ABC il perimetro misura 60 cm e $\overline{AB} = \frac{5}{12}\overline{AC}$ Determina l'area.

$[120cm^2]$

44) In un rombo la somma delle due diagonali è 84 cm. Sapendo che la differenza tra la diagonale minore e i $\frac{5}{12}$ della maggiore è 16 cm, determina perimetro e area del rombo.

[120 cm, 864 cm^2]

45) Un trapezio rettangolo ha il perimetro di 108 cm e l'altezza è pari ai $\frac{4}{3}$ della proiezione del lato obliquo sulla base maggiore. Se la somma dell'altezza e della proiezione è 49 cm, trova l'area del trapezio.

[630 cm^2]

46) In un triangolo isoscele il lato obliquo è $\frac{3}{2}$ della base e supera di 3 cm la base. Determinare il perimetro del triangolo.

[24 cm]

47) In un trapezio isoscele l'altezza misura 8 cm, l'area 160 cm^2 e la differenza delle basi è 12 cm. Determina la lunghezza delle basi.

[14 cm; 26 cm]

48) Sulla base AB di un rettangolo ABCD considera un punto E tale che l'area del trapezio AECD risulti i $\frac{3}{2}$ dell'area del triangolo CEB. Sapendo che $\overline{AB} = 20cm$ e che $\overline{CB} = 9cm$, determina $\overline{EB}$.

[16 cm]

49) Calcola l'area e il perimetro di un triangolo rettangolo ABC sapendo che la mediana AM relativa all'ipotenusa è i $\frac{5}{6}$ del cateto AB e che la somma di questo e dell'ipotenusa è 64 cm.

[384 cm^2, 96 cm]

Nota importante

Finora abbiamo sempre considerato equazioni di primo grado, ma possiamo già risolvere anche equazioni di grado superiore utilizzando la *scomposizione in fattori* e la *legge di annullamento del prodotto*.

Vediamo alcuni esempi.

1) Consideriamo per esempio l'equazione (di secondo grado perché il massimo grado con cui compare l'incognita è 2) :

$$3x^2 - 24x = 0$$

Scomponiamo il primo membro mettendo in evidenza:

$$3x(x-8) = 0$$

Ricordiamo che per avere un prodotto uguale a zero almeno uno dei fattori deve essere uguale a zero e quindi le nostro caso le soluzioni dell'equazione si ottengono ponendo uguale a zero il fattore x e il fattore $x-8$, e quindi le soluzioni sono:

$$x = 0 \quad , x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$$

2) Vediamo un altro esempio: consideriamo l'equazione

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

In questo caso riconosciamo che si tratta dello sviluppo del quadrato di un binomio cioè possiamo scrivere:

$$(x-2)^2 = 0$$

Ma $(x-2)^2 = (x-2)\cdot(x-2)$ e quindi in questo caso abbiamo solo soluzione $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

3) Vediamo un ultimo esempio: consideriamo l'equazione

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

Possiamo fare un raccoglimento parziale:

$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \rightarrow (x-1)(x^2-4) = 0$$

Ma il fattore $x^2 - 4$ può essere ancora scomposto(è una differenza di quadrati) e quindi abbiamo

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0$$

Le soluzioni dell'equazione data sono quindi $x = 1, \quad x = 2, \quad x = -2$.

Esercizi

Equazioni di grado superiore al primo

1) $x^4 - 1 = 0$ [$x = 1, \quad x = -1$]

2) $x^2 - 5x + 6 = 0$ [$x = 2, \quad x = 3$]

3) $x^2 - 4x = 0$ [$x = 0, \quad x = 4$]

4) $3x - 2x^2 = 0$ [$x = 0, \quad x = \frac{3}{2}$]

5) $x^2 - 25 = 0$ [$x = 5, \quad x = -5$]

6) $x^3 - 2x^2 = 0$ [$x = 0, \quad x = 2$]

7) $4 - 4x + x^2 = 0$ [$x = 2$]

8) $6x + 1 + 9x^2 = 0$ [$x = -\frac{1}{3}$]

9) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ [$x = 1, \quad x = -1, \quad x = 2$]

10) $x^2(x-6) + 2(x-3) + 9x = 0$ [$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3$]

Le equazioni numeriche fratte di 1° grado

Un'equazione si dice fratta se l'incognita compare in almeno un denominatore.
Occorre quindi considerare le condizioni di esistenza e la soluzione sarà accettabile solo se rispetta le condizioni di esistenza.

Esempio

$$\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1} \quad , \qquad \text{C.E. } x \neq 1$$

Sviluppiamo: $\frac{x+x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1} \rightarrow \frac{2x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1} \rightarrow 2x-1=1 \rightarrow 2x=2 \rightarrow x=1$

Ma $x=1$ **non è accettabile** e quindi l'equazione è impossibile.

Esempi

1) $\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x-3}+1 \quad , \qquad \text{C.E. } x \neq 2\,,\ x \neq 3$

$$\frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-2+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\cancel{x^2}-\cancel{3x}=x-2+\cancel{x^2}-\cancel{3x}-2x+6$$

$$0=x-2-2x+6 \qquad \Rightarrow \qquad 0=-x+4$$

$x=4$ *accettabile*

2) $\frac{6}{x-5}+\frac{x}{5-x}=1 \quad , \qquad \text{C.E. } x \neq 5$

$$-\frac{6}{5-x}+\frac{x}{5-x}=1$$

$$\frac{-6+x}{5-x}=\frac{5-x}{5-x}$$

$$-6+x=5-x$$

$$2x=11$$

$x=\frac{11}{2}$ *accettabile*

Esercizi

Equazioni numeriche fratte

1) $\dfrac{x-1}{x+5}-4=0$; $\dfrac{3x-9}{2x-6}=0$ $[-7 \; ; \; impossibile]$

2) $\dfrac{2(x-1)}{x+2}=1$; $\dfrac{1}{4-x}-\dfrac{2x}{x-4}=0$ $\left[4 \; ; \; -\dfrac{1}{2}\right]$

3) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{4-x}=0$ $\left[\dfrac{6}{5}\right]$

4) $\dfrac{x^2}{x-3}-x-1=\dfrac{1}{2}$ $[-3]$

5) $\dfrac{x}{2x+2}+x+1=\dfrac{x^2}{x+1}$ $\left[-\dfrac{2}{5}\right]$

6) $x+\dfrac{4}{4-x}=\dfrac{x}{4-x}+x+4$ $[impossibile]$

7) $\dfrac{5}{2-2x}-\dfrac{x}{x^2-2x+1}=0$ $\left[\dfrac{5}{7}\right]$

8) $\dfrac{x-1}{x^2+3x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{9}{2x+6}=0$ $\left[-\dfrac{2}{3}\right]$

9) $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{7}{x-1}=\dfrac{1}{x+1}$ $\left[-\dfrac{5}{3}\right]$

10) $\dfrac{6x+1}{x^2-4}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{3}{x^3-4x}$ $[-21]$

11) $\dfrac{x-1}{x+3}-\dfrac{2}{x^2+4x+3}=\dfrac{x+3}{x+1}$ $[-2]$

12) $\dfrac{2+2x^2}{x^3+1}+\dfrac{1-x^2}{x^2-x+1}+\dfrac{x}{x+1}=0$ $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$

13) $\dfrac{7x-10}{x^2+x-6}+\dfrac{6}{x-2}=\dfrac{5}{x+3}$ $\left[-\dfrac{9}{4}\right]$

14) $\frac{2}{x^2-x}-\frac{4}{x^2-1}=\frac{1}{x^2+x}$ $[impossibile]$

15) $\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{3}{x^2+2x}$ $[-4]$

16) $\frac{x-1}{2x-6}+\frac{6}{x^2-9}-\frac{x}{2x+6}=0$ $\left[-\frac{9}{5}\right]$

17) $\frac{1}{2x-4}-\frac{2}{x+2}=\frac{x+5}{3x^2-12}$ $\left[\frac{20}{11}\right]$

18) $\frac{2x}{x^2+6x+9}+\frac{1}{x+3}-\frac{3x-1}{x^2+3x}=0$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

19) $\frac{x+5}{2x-8}+\frac{x-2}{x}=\frac{3x+1}{2x}+\frac{x+1}{x(x-4)}$ $[-9]$

20) $\frac{2x^2+1}{x^2-x-20}+6x+2=\frac{6x^2-26x-15}{x-5}$ $[7]$

21) $\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x-2}=\frac{1}{2x-2}$ $[0]$

22) $\frac{x}{x+4}-\frac{3x+4}{2(x-3)}=-\frac{7+4x}{8+2x}+\frac{3}{2}$ $\left[-\frac{1}{30}\right]$

23) $\frac{3(4x+1)}{3x+2}-\frac{6x+2}{3x-1}=\frac{6x+4}{3x-1}-\frac{15}{9x+6}$ $[impossibile]$

24) $\frac{4}{3x}+\frac{1}{3x+12}-\frac{x-1}{2x^2+8x}=0$ $[-5]$

25) $\frac{3x}{x+2}+\frac{2x}{x-7}=\frac{5x+6}{x+2}$ $\left[-\frac{7}{2}\right]$

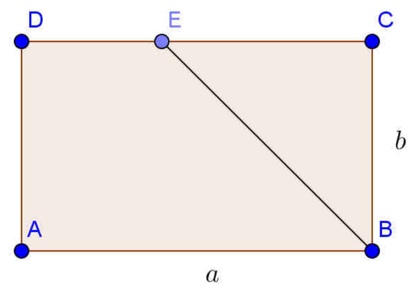
26) $\frac{2}{x^2+x}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Le equazioni letterali

Consideriamo il seguente problema: in un rettangolo ABCD le cui dimensioni misurano

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = b$$

determina un punto E sul lato CD tale che il trapezio ABED abbia area doppia del triangolo BCE.



Se poniamo

$\overline{DE} = x$

avremo che : $\dfrac{(a+x)\cdot b}{2} = 2\cdot\dfrac{(a-x)\cdot b}{2}$

Poiché in questa equazione, oltre alla lettera x che rappresenta l'incognita, compaiono altre lettere (che rappresentano numeri noti) l'equazione si chiama equazione letterale cioè *un'equazione si dice letterale se, oltre all'incognita, sono presenti altre lettere.*

Possiamo risolvere l'equazione sviluppando i calcoli:

$ab + bx = 2ab - 2bx \quad \rightarrow 3bx = ab \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{a}{3}$ (poiché $b \neq 0$ posso dividere per b)

Vediamo altri esempi di equazioni letterali.

Esempio 1

$$ax - 3a = 2x$$
$$ax - 2x = 3a$$
$$x(a-2) = 3a$$

Il coefficiente di *x* è *a-2* e quindi si possono avere due casi

Se $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ avrò $0 \cdot x = 3 \cdot 2$ equazione impossibile

Se $a - 2 \neq 0$ *cioè* $a \neq 2$ posso dividere e ottengo $x = \dfrac{3a}{a-2}$

Esempio 2

$$ax + 4 = x + 4a^2$$
$$ax - x = 4a^2 - 4$$
$$x(a-1) = 4(a^2-1)$$

Se $a - 1 = 0$ *cioè* $a = 1$ ottengo $0 \cdot x = 0$ equazione indeterminata

Se $a - 1 \neq 0$ *cioè* $a \neq 1$ ottengo $x = \dfrac{4(a-1)\cancel{(a+1)}}{\cancel{a-1}} \Rightarrow x = 4(a+1)$

Esercizi

Equazioni letterali

1) $ax-3a^2=0$ $\quad [a\neq 0 \Rightarrow x=3a; \quad a=0 \Rightarrow eq. \quad indet.]$

2) $ax=x+a$ $\quad [a\neq 1 \Rightarrow x=\dfrac{a}{a-1}; \quad a=1 \Rightarrow eq. \quad imposs.]$

3) $b(x-1)+b+1=0$ $\quad [b\neq 0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{b}; \quad b=0 \Rightarrow eq. \quad imposs.]$

4) $(a^2-3a)x=a(a^2-9)$ $\quad [a\neq 0 \quad e \quad a\neq 3 \Rightarrow x=a+3; \quad a=0 \Rightarrow eq. \quad indet.$
$a=3 \Rightarrow eq. \quad indet.]$

5) $2b(b-2)x=b^2-4b+4$ $\quad [b\neq 0 \quad e \quad b\neq 2 \Rightarrow x=\dfrac{b-2}{2b}; \quad b=0 \Rightarrow eq. \quad imposs.$
$b=2 \Rightarrow eq. \quad indet.]$

6) $a(a-1)x=a^2-2a+1$ $\quad [a=0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad a=1 \Rightarrow equ. \quad indet.;$
$a\neq 0,1 \Rightarrow x=\dfrac{a-1}{a}]$

7) $(a^2-2a)x=a^2-4$ $\quad [a=0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad a=2 \Rightarrow equ. \quad indet.;$
$a\neq 0,2 \Rightarrow x=\dfrac{a+2}{a}]$

8) $(a^3-1)x=2a-2$ $\quad [a=1 \Rightarrow equ. \quad indet.; \quad a\neq 1 \Rightarrow x=\dfrac{2}{a^2+a+1}]$

9) $(a^2+2a+1)x=a^2-1$ $\quad [a=-1 \Rightarrow equ. \quad indet.; \quad a\neq -1 \Rightarrow x=\dfrac{a-1}{a+1}]$

10) $2a(x-1)=(a+2)x-4$ $\quad [a=2 \Rightarrow equ. \quad indet.; \quad a\neq 2 \Rightarrow x=2]$

11) $\dfrac{1}{2}b(2x-2)=2bx+2(b-3)$ $\quad [b=0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad b\neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{3(2-b)}{b}]$

12) $b^2x+2bx=3b+6$ $\quad [b=0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad b=-2 \Rightarrow equ. \quad indet.;$
$b\neq 0,-2 \Rightarrow x=\dfrac{3}{b}]$

13) $\dfrac{1}{3}x(2a-1)=ax-2$ $\quad [a=-1 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad a\neq -1 \Rightarrow x=\dfrac{6}{a+1}]$

Problemi risolubili con equazioni fratte o letterali

1) Il rapporto fra la somma di tre numeri consecutivi e la differenza fra il primo numero e 5 è uguale a 9. Determina i tre numeri.

[8, 9, 10]

2) In un rettangolo la base è i $\frac{4}{3}$ dell'altezza e il rapporto tra il perimetro e l'altezza aumentata di 4 cm è $\frac{14}{5}$. Calcola l'area del rettangolo.

[48 cm^2]

3) In un rombo la somma delle diagonali è di 42 cm. Trova il perimetro e l'area del rombo sapendo che il rapporto della somma della diagonale maggiore con i $\frac{2}{5}$ della minore e il doppio della maggiore è $\frac{13}{20}$.

[60 cm; 216 cm^2]

4) Un rettangolo ha dimensioni a e b con $b > a$ .La dimensione a viene aumentata di x e b viene diminuita di x. Come deve essere x in modo che l'area del rettangolo rimanga la stessa?

[$x = b-a$]

5) In un trapezio isoscele la base minore CD è uguale al lato obliquo e la base maggiore $\overline{AB} = \frac{11}{5}\overline{CD}$. Sapendo che il rapporto tra l'area e il perimetro del trapezio risulta $\frac{16}{13}$, determina le misure dei lati del trapezio (lato obliquo e basi).

[$\overline{AD} = \overline{BC} = 5, \quad \overline{DC} = 5, \quad \overline{AB} = 11$]

6) In un rombo il perimetro misura 10 a e una diagonale è $\frac{3}{4}$ dell'altra. Determina l'area del rombo.

$\left[A = 6a^2\right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
EQUAZIONI DI PRIMO GRADO NUMERICHE INTERE

1. $2x-3=5x-2$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$
2. $3x-(x-1)=7$ $[3]$
3. $-2(x-1)-(2x-3)=5-x$ $[0]$
4. $(3x-2)^2=3(3x-1)(x-2)$ $\left[\frac{2}{9}\right]$
5. $\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{4}=\frac{x+2}{3}$ $[-23]$
6. $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$ $[3]$
7. $\frac{x+2}{4}=\frac{x}{3}$ $[6]$
8. $\frac{1}{3}x=\frac{x-1}{5}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$
9. $(x-2)^2-(x+1)(x-3)=2(3-x)$ $[\textit{impossibile}]$
10. $\frac{x-2}{4}-\frac{x+2}{2}=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$ [indeterminata]

Problemi

1. Due interi consecutivi sono tali che, sommando al doppio del minore la metà del maggiore, si ottiene come risultato 28. $[11,\quad 12]$
2. Determina due numeri dispari consecutivi sapendo che il minore, sommato a due terzi del maggiore, dà come risultato 23. $[13,\quad 15]$
3. In una classe un terzo degli allievi hanno avuto la sospensione del giudizio e 18 sono stati promossi a Giugno. Da quanti alunni è formata la classe? $[27]$
4. Il prezzo di un paio di pantaloni, dopo aver subito un aumento del 10%, è di 121 euro. Qual era il prezzo dei pantaloni prima dell'aumento? $[110\quad euro]$
5. Il prezzo di un capo di abbigliamento, dopo aver subito uno sconto del 12%, è di 44 euro. Qual era il prezzo originario? $[50\quad euro]$
6. Un quadrato e un rettangolo hanno lo stesso perimetro. La base del rettangolo supera di 5 cm il lato del quadrato e l'altezza del rettangolo è la metà del lato del quadrato. Qual è il perimetro del quadrato? $[40\quad cm]$
7. In un rettangolo un lato è il doppio dell'altro e il perimetro è di 42 cm. Determina la lunghezza della base e quella dell'altezza. $[7\quad cm,\quad 14\quad cm]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
EQUAZIONI DI PRIMO GRADO FRATTE E LETTERALI

1. $\frac{9}{x-2}=3$ $[5]$

2. $\frac{6x+9}{x-1}=0$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

3. $\frac{3(x-1)}{2x-2}=1$ $[\textit{impossibile}]$

4. $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}$ $[0]$

5. $\frac{x}{x+3}+\frac{x-1}{x-3}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2-9}$ $[4]$

6. $\frac{7}{x-6}+\frac{5}{4-x}=0$ $[-1]$

7. $\frac{2x+1}{x}+\frac{x}{x+1}=3$ $[\textit{impossibile}]$

8. $\frac{2}{x^2+4x}=\frac{x+3}{x+4}+\frac{3-x}{x}$ $[-5]$

9. $(a+1)x=2a+2$ [$a\neq -1 \Rightarrow x=2; a=-1$ indeterminata]

10. $(a^2-9)x=a+3$ [$a\neq \pm 3 \Rightarrow x=\frac{1}{a-3};\quad a=-3$ indet.; $a=3$ imp.]

TEST
EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

1) Idris has c toy cars.
Fadl has twice as many cars as Idris.
Baasim has three more cars than Fadl.
(a) Write down an expression, in terms of c, to complete each statement.

Fadl has …………………. Cars
Baasim has ……………… cars.

(b) Write down an expression, in terms of c, for the total number of cars the three children have. Give your answer in its simplest form.

Answer (b) ………………………....

(c) Idris, Fadl and Baasim have 38 cars together. Write down an equation and solve it to find the number of cars each friend has.

2) Pavan saves \$$x$ each month.
His two brothers **each** save \$4 more than Pavan each month.

Altogether the three boys save \$26 each month.

(a) Write down an equation in x.

(b) Solve your equation to find the amount Pavan saves each month.

3) A rectangular fiels has a lenght of x metres.
The width of the field is ($2x$-5) metres.

(a) Show that the perimeter of the field is ($6x$-10) metres.

(b) The perimeter of the field is 50 metres. Find the length of the field.

4) Jamil, Kiera and Luther collect badges.
Jamil has x badges.
Kiera has 12 badges more than Jamil.
Luther has 3 times as many badges as Kiera.
Altogether they have 123 badges.

Form an equation and solve it to find the value of x.

5) 120 people are asked how they travel to work.

Here is the information.

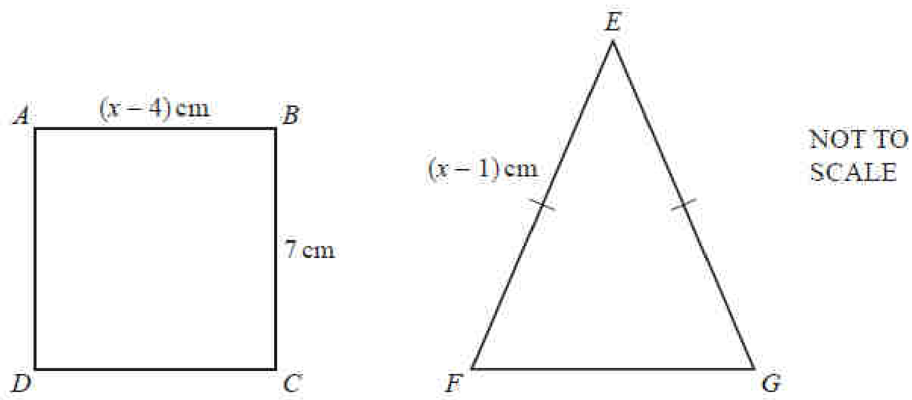
	Number of people
Walk	x
Cycle	31
Bus	17 more than the number of people who walk
Car	2 times the number of people who walk

(a) Use this information to complete the following equation, in terms of x.

………..…………………………………=120

(b) Solve the equation to find the number of people who walk to work.

6)



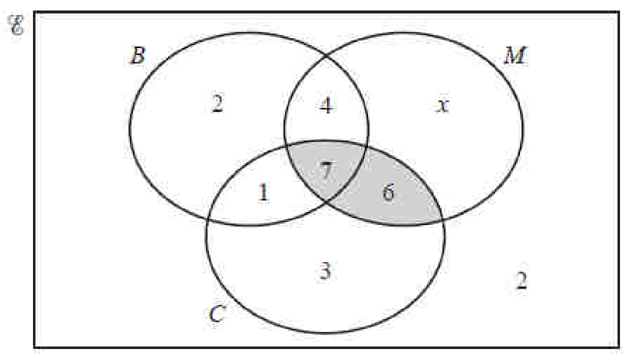
(a) *ABCD* is a square. Find the value of *x*.

(b) Square *ABCD* and isosceles triangle *EFG* have the same perimeter.
Work out the length of *FG*.

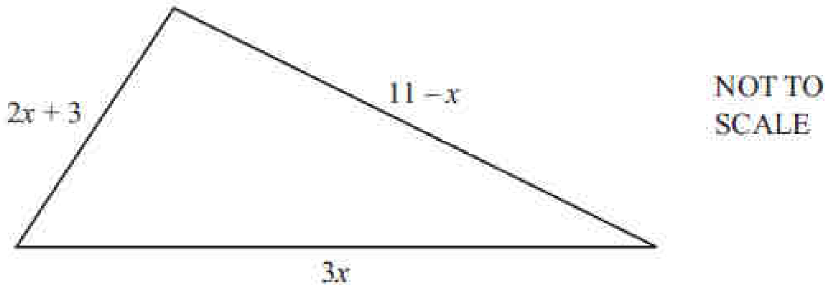
7) 30 students were asked if they had a bicycle (B), a mobile phone (M) and a computer (C).

The results are shown in the Venn diagram.

Work out the value of *x*.



8) In this question all the measurements are in centimeters.



The diagram shows a triangle with sides of length $2x+3$, $11-x$ and $3x$.

(a) Explain why x must be less than 11.
(b) Write down an expression, in terms of x, for the perimeter of the triangle.
Give your answer in its simplest possible form.

(c) The perimeter of the triangle is 32 cm.

(i) Write down an equation in terms of x and solve it.

(ii) Work out the length of the shortest side of the triangle.

9) Joseph is 3 times as old as Amy.
In 5 years time Joseph will be 2 times as old as Amy.

(a) Amy is now n years old.
Write down an equation in n connecting the ages of Joseph and Amy in 5 years time.

(b) Solve the equation to find n.

10) The cost $\$C$, of a party for n people is calculated using the following formula.

$$C=130+4n$$

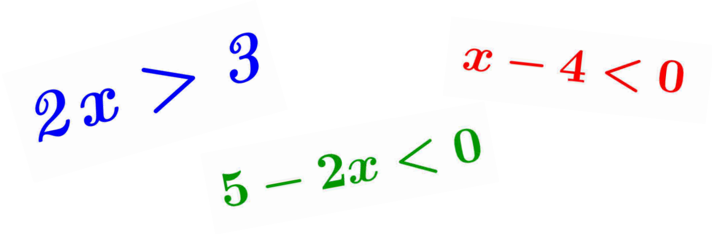
(a) Calculate C when $n=25$.

(b) John has a party which costs \$1138. How many people is this party for?

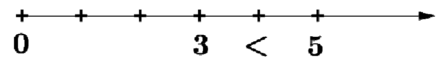
11) Sara spends $\$x$ on pens which cost \$2.50 each.
She also spends $\$(x-14.50)$ on pencils which cost \$0.50 each.
The **total** of the number of pens and the number of pencils is 19.

Write down and solve an equation in x.

Disequazioni di primo grado



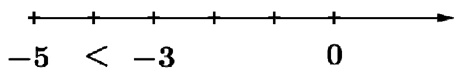
Disuguaglianze numeriche



Esempio: $3 < 5$ è una disuguaglianza numerica e si legge 3 minore di 5

Nota: posso anche scrivere $5 > 3$ (5 maggiore di 3)

Esempio: $-3 > -5$ (oppure $-5 < -3$)



Proprietà delle disuguaglianze

1) **Aggiungendo uno stesso numero ad entrambi i membri di una disuguaglianza numerica** si ottiene una disuguaglianza dello stesso "verso":

$$3 < 5 \quad \rightarrow \quad 3+2 < 5+2$$

2) **Moltiplicando (o dividendo) entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo** si ottiene una disuguaglianza dello stesso "verso":

$$3 < 5 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 2 < 5 \cdot 2$$

2') **Moltiplicando (o dividendo) entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo** si ottiene una disuguaglianza di verso contrario:

$$3 < 5 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot (-2) > 5 \cdot (-2)$$

3) Se $a < b$ con a e b concordi $\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Esempi

$$3 < 5 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{5} \quad ; \qquad -4 < -2 \Rightarrow -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$$

4) **Sommando "membro a membro"** due disuguaglianze dello stesso verso otteniamo una disuguaglianza dello stesso verso:

$$3 < 5 \text{ e } 2 < 7 \ \Rightarrow 3+2 < 5+7$$

Disequazioni di primo grado ad una incognita

Consideriamo una disuguaglianza in cui compare un'incognita x.

Esempio: $3x-2>4$ è una "disequazione" di 1° grado in x.
Risolvere una disequazione significa determinare i valori di x che rendono vera la disuguaglianza.
Come possiamo risolvere $3x-2>4$?
Possiamo usare due principi di equivalenza che derivano dalle proprietà delle disuguaglianze che abbiamo già visto.

Primo principio di equivalenza
Data una disequazione, si ottiene una disequazione equivalente aggiungendo ad entrambi i membri uno stesso numero o espressione.

Per esempio: $3x-2>4$
$$3x-2+2>4+2$$
$$3x>4+2$$

Quindi, utilizzando questo principio, un termine può essere **trasportato** da un membro all'altro membro, **cambiandolo di segno** (come per le equazioni).

Secondo principio di equivalenza
Per trasformare una disequazione in una equivalente si può:

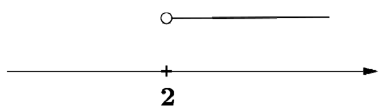
- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso **numero positivo**;
- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso **numero negativo** ma **cambiare il verso** della disequazione.

Nel nostro esempio: $3x>6 \rightarrow \quad \frac{3x}{3}>\frac{6}{3} \rightarrow \quad x>2$

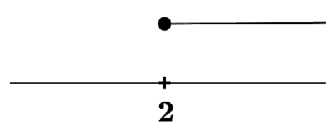
Nota: se vogliamo moltiplicare per -1 tutti i termini di una disequazione dobbiamo invertire il verso.

Esempio: $-2x>5 \rightarrow 2x<-5 \rightarrow x<-\frac{5}{2}$

Osservazione
Le soluzioni di una disequazione sono quasi sempre "intervalli" cioè infiniti numeri (minori di un dato numero, maggiori di un dato numero…). Si possono rappresentare questi "intervalli" sulla retta orientata.
Per esempio per indicare $x>2$ possiamo fare così



Per convenzione se mettiamo un cerchietto vuoto vuol dire che 2 non è soluzione.
Se la nostra disequazione fosse stata $x \geq 2$ avremmo disegnato un cerchietto "pieno" in corrispondenza del 2.



Esempi

Proviamo a risolvere qualche disequazione di 1° grado in x.

1) $3x-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x>\frac{x+1}{2}$

Calcoliamo il denominatore comune e riduciamo allo stesso denominatore:

$\frac{18x-2+3x}{6}>\frac{3x+3}{6}$

Eliminiamo il denominatore comune (moltiplicando per 6)

$18x-2+3x>3x+3$

Trasportiamo i termini con l'incognita al 1° membro e quelli noti al 2° membro:

$18x+3x-3x>2+3$

$18x>5$

Dividiamo entrambi i membri per 18:

$x>\frac{5}{18}$

2) $x+5-2x<1+3x-4x$

$x-2x-3x+4x<-5+1$

$0\cdot x<-4$

$0<-4$ disuguaglianza falsa

Quindi non c'è nessun valore di x che rende vera la disuguaglianza iniziale e la disequazione è **impossibile** (nessuna soluzione).

3) $3+x-1+2x>3x-1$

$x+2x-3x>-3+1-1$

$0\cdot x>-3$

$0>-3$ disuguaglianza vera

Quindi ogni valore di x rende vera la disuguaglianza e la disequazione è **sempre verificata** ($\forall x\in \Re$).

Sistemi di disequazioni di primo grado ad una incognita

Un sistema di disequazioni di primo grado ad una incognita è costituito da due o più disequazioni di primo grado in cui compare la stessa incognita: **risolvere un sistema significa cercare i valori che verificano tutte le disequazioni del sistema** (se non esistono si dice che il sistema è impossibile).
Per indicare che due o più disequazioni formano un sistema si "legano" con una parentesi graffa.

Esempio 1

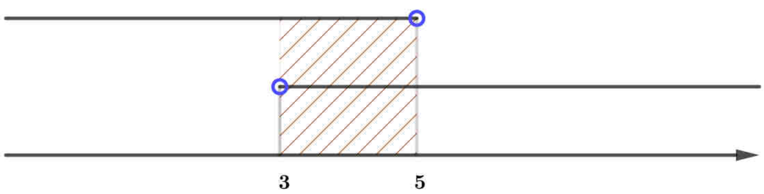
Consideriamo il seguente sistema di due disequazioni di primo grado nella stessa incognita *x*:

$$\begin{cases} x-5<0 \\ 2x-6>0 \end{cases}$$

Risolviamo entrambe le disequazioni:

$$\begin{cases} x-5<0 \rightarrow x<5 \\ 2x-6>0 \rightarrow 2x>6 \rightarrow x>3 \end{cases}$$

Adesso per visualizzare **le soluzioni "comuni" alle due disequazioni** rappresentiamo le soluzioni graficamente sulla retta numerica:



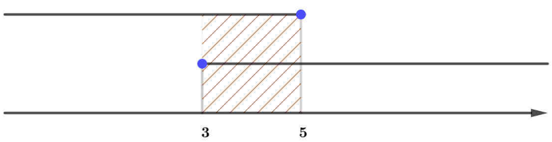
Nota: ricorda che per rappresentare i numeri $x<5$ ed indicare che 5 non è compreso mettiamo un **pallino "vuoto"** in corrispondenza del 5 (e analogamente per $x>3$).

Vediamo perciò che la soluzione del sistema è costituita dai numeri compresi tra 3 e 5 poiché sono quelli che verificano entrambe le disequazioni del sistema e per indicarli scriviamo

$$3<x<5$$

Nota: se se il sistema fosse stato

$$\begin{cases} x-5\le 0 \rightarrow x\le 5 \\ 2x-6\ge 0 \rightarrow x\ge 3 \end{cases}$$

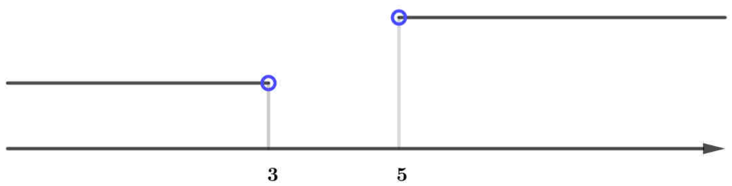


Per indicare che il 3 e il 5 sono tra le soluzioni ricorda di usare un **pallino "pieno"** in corrispondenza di 3 e 5 e la soluzione del sistema risulta $3\le x\le 5$.

Esempio 2

Consideriamo ora $\begin{cases} x-5>0 \\ 2x-6<0 \end{cases}$: risolvendo abbiamo: $\begin{cases} x-5>0 \rightarrow x>5 \\ 2x-6<0 \rightarrow 2x<6 \rightarrow x<3 \end{cases}$

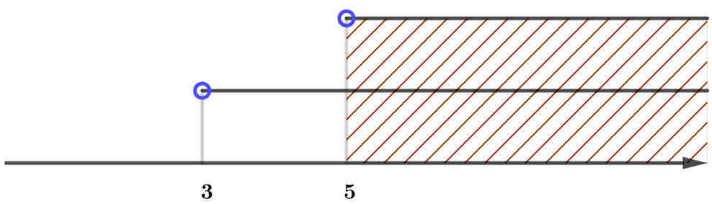
Rappresentiamo le soluzioni graficamente:



In questo caso vediamo che non ci sono numeri che verificano entrambe le disequazioni e quindi **il sistema è impossibile**.

Esempio 3

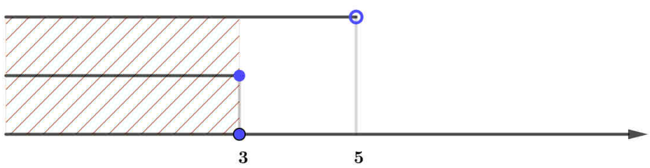
Se abbiamo $\begin{cases} x-5>0 \\ 2x-6>0 \end{cases}$ risolvendo abbiamo: $\begin{cases} x-5>0 \rightarrow x>5 \\ 2x-6>0 \rightarrow 2x>6 \rightarrow x>3 \end{cases}$



e quindi in questo caso la soluzione del sistema è $x>5$.

Esempio 4

Se abbiamo $\begin{cases} x-5<0 \\ 2x-6\leq 0 \end{cases}$ risolvendo abbiamo: $\begin{cases} x-5<0 \rightarrow x<5 \\ 2x-6\leq 0 \rightarrow x\leq 3 \end{cases}$



e quindi in questo caso la soluzione del sistema è $x \leq 3$.

Disequazioni con prodotti o quozienti

1) Consideriamo per esempio la disequazione

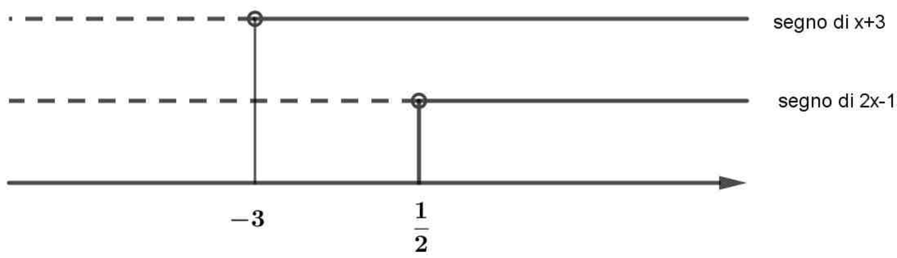
$$(2x-1)\cdot(x+3)>0$$

Per risolverla possiamo studiare il segno dei due fattori, cioè:

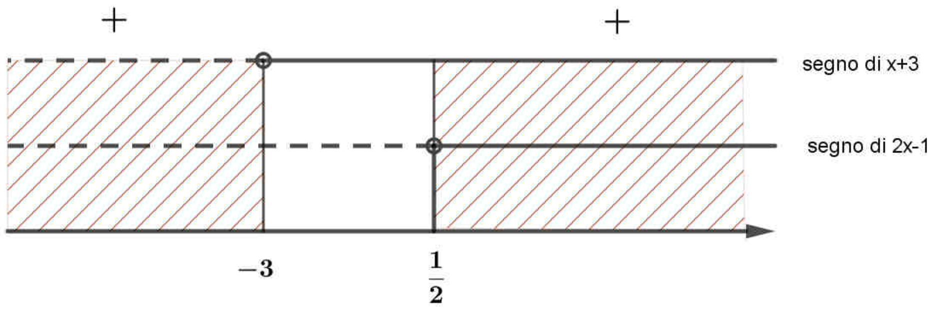
$$2x-1>0 \rightarrow x>\frac{1}{2}$$
$$x+3>0 \rightarrow x>-3$$

Possiamo rappresentare in un grafico detto "**grafico dei segni**" la situazione, **indicando per convenzione con una linea continua l'intervallo di numeri reali in cui un fattore ha segno positivo e con una linea tratteggiata l'intervallo in cui ha segno negativo**.

Nel nostro caso abbiamo il seguente grafico dei segni:



NOTA:attenzione ad ordinare correttamente i numeri sulla retta numerica.
A questo punto **per la regola dei segni** avremo un prodotto positivo quando i due fattori sono entrambi positivi o negativi e quindi in conclusione otteniamo:



La soluzione della disequazione iniziale risulta quindi costituita dai numeri reali di due "zone" (intervalli) che scriveremo così:

$$x<-3 \cup x>\frac{1}{2}$$

dove il simbolo $\cup$ si legge "oppure" nel senso di unione.

NOTA
Se nella disequazione compare il segno di uguaglianza, cioè se per esempio dobbiamo risolvere

$$(2x-1)\cdot(x+3)\geq 0$$

dobbiamo includere nella soluzione anche i valori di x che annullano i fattori, in questo caso $\frac{1}{2}$, -3 e quindi abbiamo come soluzione

$$x\leq -3\cup x\geq \frac{1}{2}$$

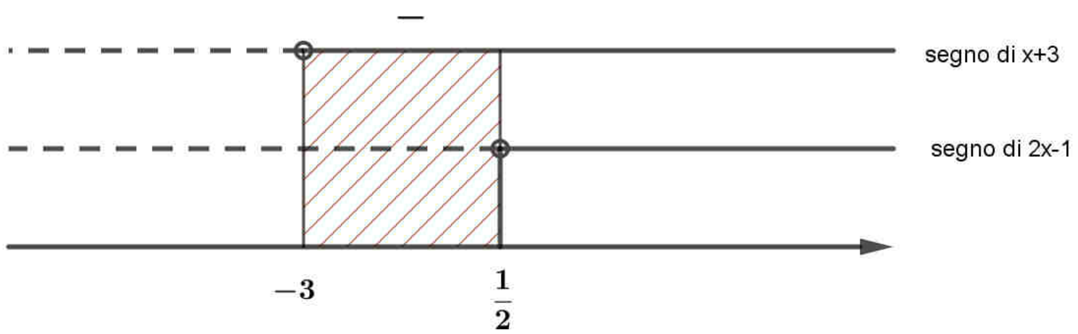
2) Consideriamo la disequazione

$$(2x-1)\cdot(x+3)<0$$

Per studiare il segno dei fattori del prodotto procediamo come prima:

$$2x-1>0\rightarrow x>\frac{1}{2}$$
$$x+3>0\rightarrow x>-3$$

In questo caso però vogliamo determinare **quando il prodotto è negativo** e quindi un fattore deve essere positivo e l'altro negativo ed abbiamo:



La soluzione della disequazione è in questo caso

$$-3<x<\frac{1}{2}$$

che si legge *x* compreso tra -3 e $\frac{1}{2}$.

NOTA
Anche in questo caso se dovessimo risolvere $(2x-1)\cdot(x+3)\leq 0$ avremmo $-3\leq x\leq \frac{1}{2}$.

3) Consideriamo ora la disequazione fratta

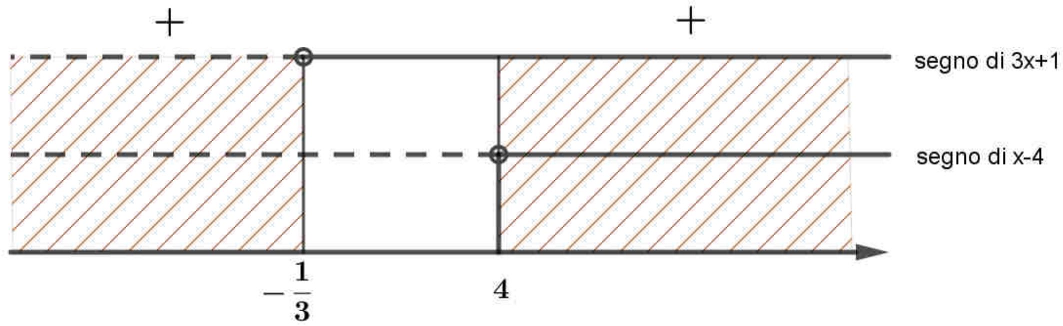
$$\frac{x-4}{3x+1} > 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$N > 0 \rightarrow x-4 > 0 \rightarrow x > 4$$
$$D > 0 \rightarrow 3x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{3}$$

Riportiamo questi risultati nel grafico dei segni e poiché vogliamo che la frazione risulti un numero positivo avremo:

:



In conclusione la soluzione della disequazione è:

$$x < -\frac{1}{3} \cup x > 4$$

NOTA

Se dobbiamo risolvere $\frac{x-4}{3x+1} \geq 0$ dobbiamo inserire tra le soluzioni anche il valore che annulla il numeratore ma attenzione a **non inserire mai tra le soluzioni il valore (o i valori) che annulla il denominatore** poiché **se il denominatore si annulla la frazione algebrica perde di significato.**

Quindi la soluzione di

$$\frac{x-4}{3x+1} \geq 0$$

sarà $x < -\frac{1}{3} \cup x \geq 4$

4) Consideriamo

$$\frac{1}{2-x}-\frac{3}{4-x^2}<0$$

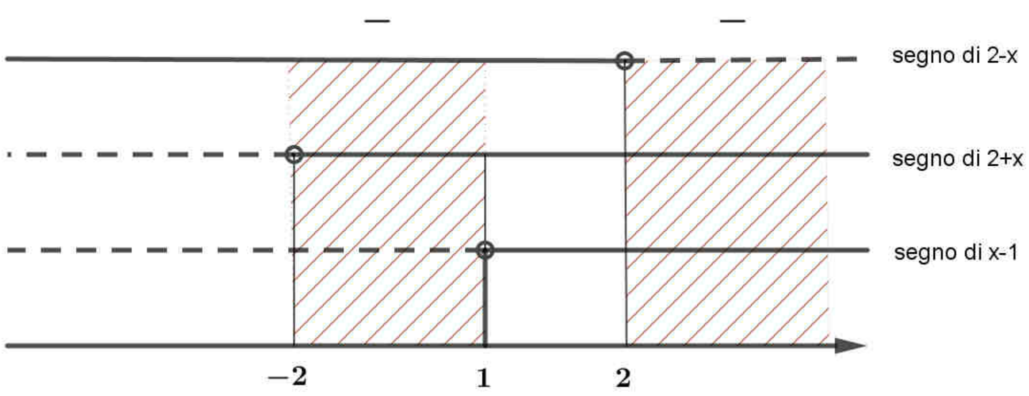
Innanzitutto svolgiamo i calcoli per ricondurci ad una disequazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ (N sta per numeratore e D per denominatore).

$$\frac{1}{2-x}-\frac{3}{(2-x)\cdot(2+x)}<0 \rightarrow \frac{2+x-3}{(2-x)\cdot(2+x)}<0 \rightarrow \frac{x-1}{(2-x)\cdot(2+x)}<0$$

A questo punto studiamo il segno di $x-1, \quad 2-x, \quad 2+x$:

$$x-1>0 \rightarrow x>1$$
$$2-x>0 \rightarrow x<2$$
$$2+x>0 \rightarrow x>-2$$

Riportiamo il segno delle tre parentesi e scegliamo le zone in cui la combinazione dei segni dà un risultato negativo:



In conclusione la soluzione della disequazione è

$$-2<x<1 \quad \cup \quad x>2$$

NOTA

Se avessimo dovuto risolvere la disequazione $\frac{1}{2-x}-\frac{3}{4-x^2}\leq 0 \rightarrow \frac{x-1}{(2-x)\cdot(2+x)}\leq 0$ avremmo dovuto aggiungere solo $x=1$ e quindi la soluzione sarebbe stata

$$-2<x\leq 1 \quad \cup \quad x>2 \ .$$

ESERCIZI

Disequazioni di primo grado numeriche intere

1) $3x-5<-2$ $[x<1]$

2) $5(x-1)<2(x-3)$ $[x<-\frac{1}{3}]$

3) $-x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{2}>0$ $[x<0]$

4) $4x-3<-\frac{2}{3}x+3$ $[x<\frac{9}{7}]$

5) $\frac{7x-1}{2}>-\frac{(2x+1)}{4}$ $[x>\frac{1}{16}]$

6) $(x-1)(x+2)+(1-x)(2x+3)\leq 2-x^2$ $[\forall x\in \Re]$

7) $(x-1)(x+1)-(x-3)^2<3$ $[x<\frac{13}{6}]$

8) $6x+7>\frac{1}{3}(9x-3)$ $[x>-\frac{8}{3}]$

9) $\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)>2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ [impossibile]

10) $x-\frac{1}{3}<2\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $[x>\frac{8}{3}]$

11) $\frac{x-3}{10}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)>\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $[x<-\frac{9}{2}]$

12) $(x-1)^2-3x<(x-3)(x+3)$ $[x>2]$

13) $4(5x-1)+2(3x+1)^2>3x(6x+5)-2x-3$ $[x>-\frac{1}{19}]$

14) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)<\frac{1}{3}-2\left(x+\frac{1}{3}\right)$ $[x<0]$

15) $\frac{5}{2}x+\frac{2x-2}{3}-\frac{(1-x)}{3}-\left(\frac{3x+1}{2}+2x\right)\geq\frac{3}{2}$ [impossibile]

16) $x-4(x+2)\leq 2x-[x-(3-4x)]$ $[\forall x\in \mathbb{R}]$

17) $x\left(1-\frac{1}{3}x\right)<-\frac{1}{3}x^2+2$ $[x<2]$

18) $3[(x+3)+\frac{1}{3}x]<7x$ $[x>3]$

19) $9x-72<20(x-3)-8x$ $[x>-4]$

20) $\frac{5+x}{3}-\frac{x}{2}>\frac{2}{3}+\frac{4x-35}{5}-\frac{2}{3}x+5$ $[x<10]$

21) $\frac{7(3-x)+2(5x+1)}{4}<2x-3$ $[x>7]$

22) $\frac{3x-\frac{2x+5}{2}}{2-\frac{1}{2}}-\frac{6-2x}{1-\frac{3}{4}}>3x-22$ $[x>\frac{11}{19}]$

23) $(2x-1)(2x+1)-3x(2+x)\leq(4+x)^2-11$ $[x\geq-\frac{3}{7}]$

24) $3x^2-4x\geq\frac{(5-x)(5+x)}{-3+\frac{8}{3}}-\frac{2-\frac{3}{2}}{4-\frac{7}{2}}$ $[x\leq 19]$

25) $x(2-x)^2+4(x+4)^2<x^3-8+\frac{3x-6}{5}$ $[x<-\frac{122}{59}]$

26) $\frac{x}{2}-\frac{2x+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}<\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{8}$ $[x>-\frac{21}{100}]$

27) $(x-1)^2-\frac{1}{3}x<x\left(x-\frac{1}{3}\right)-2x-4$ [nessuna sol.]

28) $\frac{x}{4}-16+18x>x\left(x+\frac{1}{4}\right)-(x-9)^2$ $[\forall x\in\Re]$

29) $(2-x^2)^2-x^2(x^2+5)>9(x+1)(2-x)+\frac{x+7}{2}$ $[x<-\frac{35}{19}]$

30) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-x(x+2)+3x<x(4+3x)-\frac{2x-1}{4}$ $[x>-\frac{1}{2}]$

31) $(x^2+x+1)^2-x^2(x^2+2x+3)-\frac{1}{3}(x+3)>7$ $[x>\frac{21}{5}]$

32) $\frac{\frac{3-2x}{2}-\frac{4x+5}{3}}{2}<\frac{2x+1}{12}+\frac{7-x}{3}$ $[x>-\frac{5}{2}]$

33) $\frac{1}{2}x-(x-3)(x+3)<1-x^2+\frac{1}{3}x$ $[x<-48]$

34) $\frac{x(x-5)}{2}-\frac{2x+1}{5}<\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)(x+1)$ $[x>-\frac{3}{29}]$

Sistemi di disequazioni di primo grado ad una incognita

35) $\begin{cases} x-1>0 \\ x-6>0 \end{cases}$ [$x>6$]

36) $\begin{cases} x+4<0 \\ 3x<1 \end{cases}$ [$x<-4$]

37) $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x+3<0 \end{cases}$ [impossibile]

38) $\begin{cases} x+3>0 \\ 2x-5>0 \end{cases}$ [$x>\frac{5}{2}$]

39) $\begin{cases} 3x-6<0 \\ 2x>0 \end{cases}$ [$0<x<2$]

40) $\begin{cases} 3x+4<0 \\ x-2>2x+4 \end{cases}$ [$x<-6$]

41) $\begin{cases} 2x-1<x+3 \\ \frac{1}{2}x>\frac{1}{3}x-2 \end{cases}$ [$-12<x<4$]

42) $\begin{cases} 2+4x<5 \\ \frac{x-3}{2}>0 \end{cases}$ [impossibile]

43) $\begin{cases} x-\frac{1}{2}\le 2x+1 \\ 3x-5\ge x-1 \end{cases}$ [$x\ge 2$]

44) $\begin{cases} \frac{2-x}{3}<0 \\ \frac{1}{2}x+1>0 \end{cases}$ [$x>2$]

45) $\begin{cases} 2(x-1)\le 3x+1 \\ \frac{1}{2}x+1>2x \end{cases}$ [$-3\le x<\frac{2}{3}$]

46) $\begin{cases} 4-x>0 \\ \frac{1-x}{3}>x \end{cases}$ [$x<\frac{1}{4}$]

47) $\begin{cases} (x-1)\cdot(x+2)>(x+1)^2+1 \\ (x+5)\cdot(x-5)\le x^2-1+x \end{cases}$ [$-24\le x<-4$]

48) $\begin{cases} x^2-2(x-1)\le(x-2)^2 \\ (x-2)(x+2)<x^2+2x \end{cases}$ [$-2<x\le 1$]

49) $\begin{cases}(x-1)(x-4)+1<x^2-x\\(x-3)^2>(x+1)(x-1)\end{cases}$ $[\frac{5}{4}<x<\frac{5}{3}]$

50) $\begin{cases}x-2<3x+4\\2x-3<0\\x+1>0\end{cases}$ $[-1<x<\frac{3}{2}]$

51) $\begin{cases}3x-4<0\\\frac{x-1}{3}<\frac{1-x}{2}\\2x+3>x-1\end{cases}$ $[-4<x<1]$

52) $\begin{cases}\frac{3-2x}{4}<1\\x-3<2x\\(x-1)(x+1)\le(x-2)^2\end{cases}$ $[-\frac{1}{2}<x\le\frac{5}{4}]$

53) $\begin{cases}3+2x<\frac{1-x}{2}\\4+x<0\\(x+3)^2\ge\frac{3}{2}x+x^2\end{cases}$ $[-2\le x<-1]$

54) $\begin{cases}3x-(2-x)(2+x)<x^2+\frac{1}{3}x\\\frac{x+2}{3}>0\\(x-3)(x-1)\le\frac{1}{2}x-2+x^2\end{cases}$ $[\frac{10}{9}\le x<\frac{3}{2}]$

Disequazioni con prodotti o quozienti

55) $(4-x)\cdot(1+x)<0$ [$x<-1 \quad \cup \quad x>4$]

56) $(x^2-9)\cdot(2+x)>0$ [$-3<x<-2 \quad \cup \quad x>3$]

57) $(1-x)\cdot(5-x)<0$ [$1<x<5$]

58) $\frac{2x+1}{x+2}>0$ [$x<-2 \quad \cup \quad x>-\frac{1}{2}$]

59) $\frac{3-x}{x^2-2x+1}>0$ [$x<3, \quad x\neq 1$]

60) $\frac{3}{2-x}-\frac{1}{2+x}\leq 0$ [$-2<x\leq -1 \quad \cup \quad x>2$]

61) $\frac{1}{3x-1}+\frac{2}{9x^2-1}\geq 0$ [$-1\leq x<-\frac{1}{3} \quad \cup \quad x>\frac{1}{3}$]

62) $\frac{1}{x^2-4x+4}+\frac{3}{x-2}\geq 0$ [$x\geq \frac{5}{3}, \quad x\neq 2$]

63) $\frac{3}{x-5}-\frac{1}{x^2-25}<0$ [$x<-5 \quad \cup \quad -\frac{14}{3}<x<5$]

64) $\frac{1}{x+3}-\frac{2}{9-x^2}>0$ [$-3<x<-1 \quad \cup \quad x>3$]

65) $\frac{2}{4x-3}+\frac{1}{x+1}>0$ [$-1<x<\frac{1}{6} \quad \cup \quad x>\frac{3}{4}$]

66) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}<0$ [$-1<x<1 \quad \cup \quad x>\frac{5}{3}$]

67) $\frac{1}{5-x}+\frac{2}{3-x}>0$ [$x<3 \quad \cup \quad \frac{13}{3}<x<5$]

68) $\frac{1}{x^2-10x+25}-\frac{2}{x-5}<0$ [$x>\frac{11}{2}$]

Problemi
Disequazioni di 1° grado

69) Per noleggiare un'auto una compagnia di noleggi offre due opzioni: con l'opzione A si pagano € 15 di quota fissa e € 0,2 per km percorso; con l'opzione B si pagano € 10 di quota fissa e € 0,25 per km percorso. Per quale tipo di viaggi è più conveniente l'opzione B?

[*per viaggi di percorrenza inferiore ai 100 km*]

70) Per telefonare in alcuni paesi esteri, due compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe:
A) € 1,2 per il primo minuto e € 0,9 per i successivi;
B) € 1 per ogni minuto di conversazione.
Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la tariffa A?

[*più di 3 minuti*]

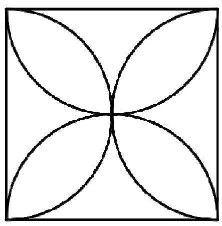
71) Andrea per andare in piscina, può scegliere tra due possibilità: € 140 di iscrizione annuale più € 2 per ogni ingresso oppure € 20 per la tessera di socio più € 8 per ogni ingresso. Per quanti ingressi risulta preferibile la seconda possibilità?

[*meno di 20*]

72) Un'aiuola rettangolare deve avere un perimetro minore o uguale a 18 m. Sapendo che la lunghezza dovrà superare di 3 m la larghezza, determina la larghezza massima dell'aiuola.

[*3 metri*]

73) Per ricamare un quadrato con dentro 4 semicirconferenze come in figura, sono disponibili 5 metri di filo colorato. Quale dimensione deve avere il quadrato affinché il ricamo sia realizzabile?



[*lato* $\leq$ *48,6 cm*]

74) Per noleggiare un'auto una compagnia di noleggi offre due possibili tariffe:
Tariffa A: € 20 quota fissa, € 0,3 per km percorso;
Tariffa B: € 0,4 per km percorso.
Se indichiamo con x il numero dei chilometri percorsi, in quale caso la tariffa A risulta più conveniente?

[$x > 200$]

75) In una piscina si può scegliere tra due tipi di abbonamento:
Abbonamento A: € 30 quota di iscrizione e € 5 ad ingresso;
Abbonamento B: € 8 ad ingresso.
Se indichiamo con x il numero degli ingressi in quale caso l'abbonamento A risulta più conveniente?

[$x > 10$]

76) Negli scritti di inglese uno studente ha riportato le seguenti valutazioni: 6; 4; 5.
Se c'è l'ultima verifica, quanto dovrebbe avere come ultimo voto per ottenere una media almeno sufficiente?

[*almeno 9*]

77) Luca deve raggiungere una baita in mountain bike e sa che deve percorrere 1 km in salita e 3 km in piano. Se durante la salita ha tenuto una velocità di 3km/h e se deve fare l'intero percorso in un'ora al massimo, a quale velocità v deve pedalare quando è sul tratto pianeggiante?

[$v \geq 4{,}5$ *km/h*]

78) Indicata con x la misura degli angoli congruenti di un triangolo isoscele, sapendo che l'angolo al vertice è maggiore di 30°, quali valori può assumere x?

[$0° < x < 75°$]

79) Se per percorrere in autostrada 630 Km voglio impiegare al massimo 6 ore facendo solo una sosta di 10 minuti , quale velocità media v dovrò mantenere?

[$v > 108$ Km/h]

80) In una lotteria a premi ogni biglietto costa € 2. Se i premi costano € 1580, le spese di organizzazione € 260 e a chi vende i biglietti viene dato un compenso di € 4 per ogni blocchetto di 20 biglietti venduto, quanti biglietti bisogna vendere (supponendo di aver venduto un dato numero di blocchetti interi) perché ci sia un guadagno di almeno € 500?

[$x =$ n° biglietti, $x \geq 1300$]

81) In una fabbrica di giocattoli si producono pupazzi che vengono rivenduti a € 7 ciascuno. Sapendo che i costi fissi mensili ammontano a € 2100 e che il costo del materiale per ogni pupazzo è di € 3,50, determina quanti pupazzi devono essere prodotti in un mese perché il bilancio non vada in perdita.

[$x =$ n° pupazzi prodotti in un mese, $x \geq 600$]

Problemi
Sistemi di disequazioni di primo grado ad una incognita

82) Uno studente nei primi tre compiti di inglese del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti: 8, 6, 4. Quale voto deve prendere nel quarto e ultimo compito del quadrimestre per avere una media compresa tra 6 e 7 (estremi inclusi)?

[Indicando con x il voto nell'ultimo compito $6 \le x \le 10$]

83) In una lotteria il costo del biglietto è 5 euro. Sapendo che per l'organizzazione si spendono 50 euro e per i premi 500 euro, quanti biglietti devono essere venduti perché il guadagno sia compreso tra 1000 e 1500 euro (estremi inclusi)?

[Indicando con x il numero dei biglietti venduti $310 \le x \le 410$]

84) Considera un rettangolo ABCD avente $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{BC} = 3$cm e considera un punto P sul lato AB : poni $\overline{AP} = x$. Per quali valori di x l'area del triangolo PBC risulta maggiore di un quarto dell'area del trapezio APCD e minore della metà dell'area del trapezio APCD ?

[$2 < x < \frac{18}{5}$]

85) In un triangolo isoscele ABC avente la base $\overline{AB} = 6$ cm e il lato obliquo $\overline{AC} = \overline{BC} = 5$ cm, considera sulla base AB un punto P e poni $\overline{AP} = x$ (in cm). Per quali valori di x l'area del triangolo PBC è maggiore di un quarto dell'area del triangolo APC e minore della metà dell'area del triangolo APC?

[$4 < x < \frac{24}{5}$]

86) Un ciclista durante gli allenamenti ha percorso, durante i primi 5 giorni della settimana, rispettivamente 30, 42, 28, 40, 50 Km. Quanti Km dovrà fare il sabato se vuole che la sua media sia compresa tra i 40 e i 45 Km?

[Indicando con x il numero dei Km dell'ultimo allenamento $50 < x < 80$]

87) Una famiglia costituita da due adulti e due bambini per andare in vacanza vuole spendere tra 1200 e 1800 euro: se ha scelto un albergo in cui la pensione completa costa 50 euro al giorno per un adulto e 30 euro per un bambino, quanti giorni potrà fissare?

[Indicando con x il numero dei giorni di vacanza $8 \le x \le 11$]

SCHEDA PER IL RECUPERO
DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Disequazioni di primo grado

1. $-x > 2x - 3$ $\quad [x < 1]$

2. $3x - 1 > 2x - 4$ $\quad [x > -3]$

3. $2x > 3(x - 2)$ $\quad [x < 6]$

4. $\frac{x-1}{2} > \frac{x+4}{3}$ $\quad [x > 11]$

5. $\frac{x-5}{6} - \frac{x}{2} > \frac{1}{3}$ $\quad \left[x < -\frac{7}{2}\right]$

6. $\frac{4-x}{2} \leq \frac{x}{5} + \frac{1}{10}$ $\quad \left[x \geq \frac{19}{7}\right]$

7. $\frac{1}{3}x - x \geq -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ $\quad \left[x \leq -\frac{1}{2}\right]$

8. $x - (x - 2) + 2(x + 3) > 1 - (2 - 3x)$ $\quad [x < 9]$

9. $\frac{1}{2}x - \frac{1-x}{3} > 1$ $\quad \left[x > \frac{8}{5}\right]$

10. $-3x > (x - 1)^2 - x^2$ $\quad [x < -1]$

SCHEDA PER IL RECUPERO

SISTEMI DI DISEQUAZIONI E PROBLEMI

Sistemi di disequazioni di primo grado

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) > x \\ 2(2-x) > 3x \end{cases}$ $[x < -1]$

2. $\begin{cases} x+1 > 3(x-1) \\ -x < 2(x+1) \end{cases}$ $\left[-\frac{2}{3} < x < 2\right]$

Disequazioni con prodotti o quozienti

1. $(x-1)(x-3) < 0$ $[1 < x < 3]$

2. $\frac{2}{x+5} \leq 0$ $[x < -5]$

3. $\frac{5}{3x+4} \geq 1$ $\left[-\frac{4}{3} < x \leq \frac{1}{3}\right]$

4. $\frac{x}{2-x} + \frac{3}{4x-8} \geq \frac{5}{3x-6}$ $[-\frac{11}{12} \leq x < 2]$

Problemi

1. Nella risoluzione di tre test Paolo ha totalizzato 15 punti, 8 punti e 11 punti. Quale punteggio deve riportare Paolo al quarto test per ottenere complessivamente una media di almeno 12 punti?

[14 punti]

2. Per noleggiare un'auto due compagnie applicano le seguenti tariffe: la prima chiede una spesa fissa di 10 euro più 20 euro per ogni giorno di noleggio; la seconda chiede una spesa fissa di 20 euro più 18 euro per ogni giorno di noleggio. Per quanti giorni bisogna noleggiare la macchina perché la seconda compagnia sia più conveniente?

[più di 5 giorni]

Introduzione alla Statistica

Il termine statistica deriva da Stato perché è lo Stato che conduce i "censimenti" cioè delle indagini per conoscere il numero degli abitanti, la composizione della popolazione per età, sesso,condizioni economiche (il "censo") e questo fin dall'antichità.

Si sono poi sviluppate indagini statistiche di vario genere oltre ai "censimenti" dello Stato.

Lo studio statistico dei fenomeni riveste oggi grande importanza per poter risolvere e studiare molti problemi.

Ad esempio uno studio sulla vita media di una popolazione può influenzare le decisioni prese dal governo in campo pensionistico, lo studio degli effetti di un farmaco in via di sperimentazione su un campione di pazienti può far decidere se metterlo in commercio oppure no, in campo medico uno studio statistico può servire a individuare le cause dell'insorgenza di alcune patologie.

Quando si compie un'indagine statistica viene indagata la presenza di un certa caratteristica (carattere) all'interno di una certa "popolazione".

Il carattere considerato può manifestarsi con modalità diverse e può essere:

un carattere quantitativo se le sue modalità sono espresse da numeri (discreto se può assumere un numero finito di valori o al più un'infinità numerabile o continuo se può assumere tutti i valori di un intervallo reale);

un carattere qualitativo se le sue modalità non sono espresse da numeri.

Tabella statistica e sua rappresentazione

Esempio 1
Qual è lo sport che pratichi maggiormente?

Supponiamo di chiedere agli studenti di una classe **quale sport praticano** maggiormente**.**
Il **carattere indagato** (sport preferito) è di **tipo qualitativo.**

La "popolazione statistica" è costituita dagli studenti della classe.

Per ciascuna modalità (calcio, nuoto ecc.) indichiamo il numero degli studenti che hanno indicato quella modalità come sport maggiormente praticato.

Supponiamo di avere ottenuto la seguente tabella:

Sport	**n° studenti (frequenza)**	**frequenza relativa**	**frequenza relativa percentuale**
Calcio	5	5/20	25%
Nuoto	2	2/20=0,1	10%
Basket	4	4/20	20%
pallavolo	6	6/20	30%
danza	1	1/20	5%
tennis	2	2/20	10%

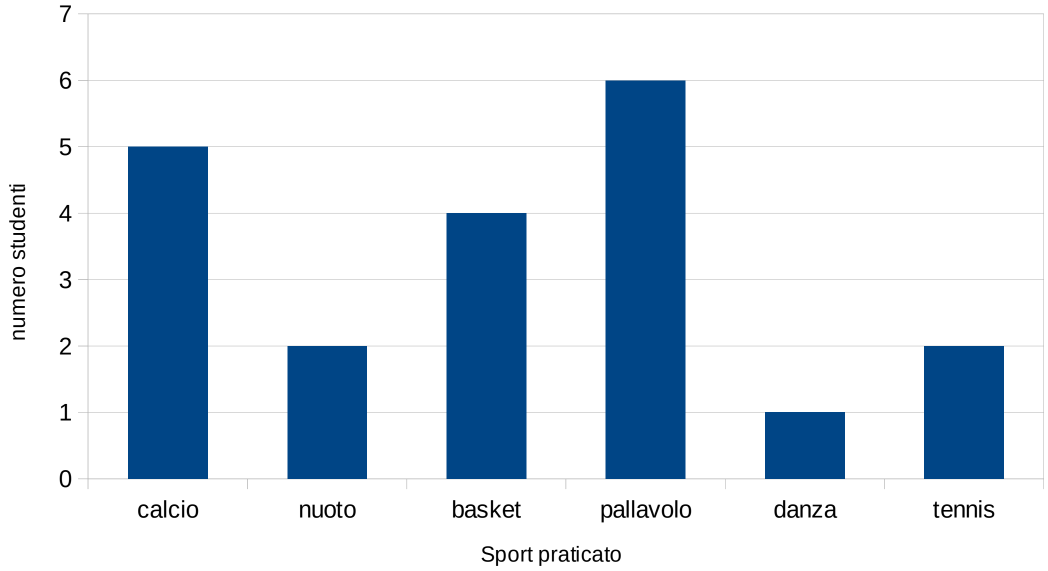
Si chiama **frequenza** (assoluta) di una modalità il numero delle volte che quella data modalità si presenta.

E' molto importante, per poter confrontare le varie frequenze, determinare la **frequenza relativa** cioè **il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero delle unità statistiche,** in questo caso il numero degli studenti della classe (20).

La **frequenza relativa percentuale** si ottiene semplicemente moltiplicando per 100 la frequenza relativa.

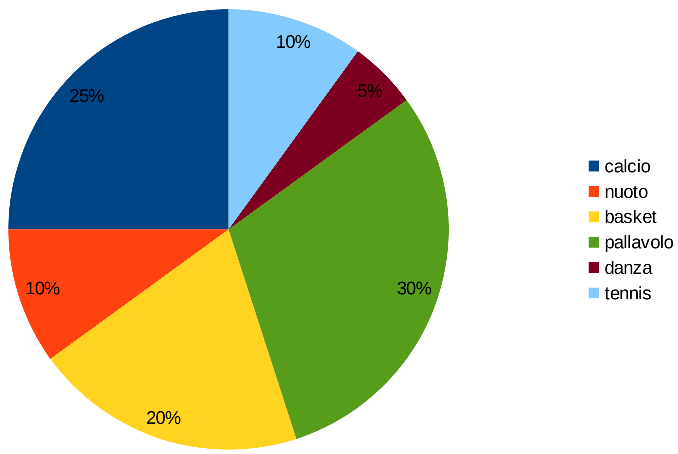
Possiamo rappresentare graficamente i nostri dati con:

1) un **diagramma a barre** in cui le basi dei rettangoli distanziati corrispondono alle varie modalità e le altezze sono proporzionali alle **frequenze**



Nota: se i rettangoli sono affiancati si chiama **istogramma**.

2) un **aerogramma** in cui un cerchio viene suddiviso in settori circolari corrispondenti alle varie modalità e ampiezza proporzionale alla **frequenza percentuale**:



Nota

Per determinare l'ampiezza α del settore corrispondente ad una data frequenza percentuale f_p basta impostare una proporzione $\alpha : 360° = f_p : 100$.

Se per esempio $f_p = 25$ abbiamo $\alpha : 360° = 25 : 100$ e otteniamo $\alpha = 90°$.

Esempio 2
Qual è la tua altezza?

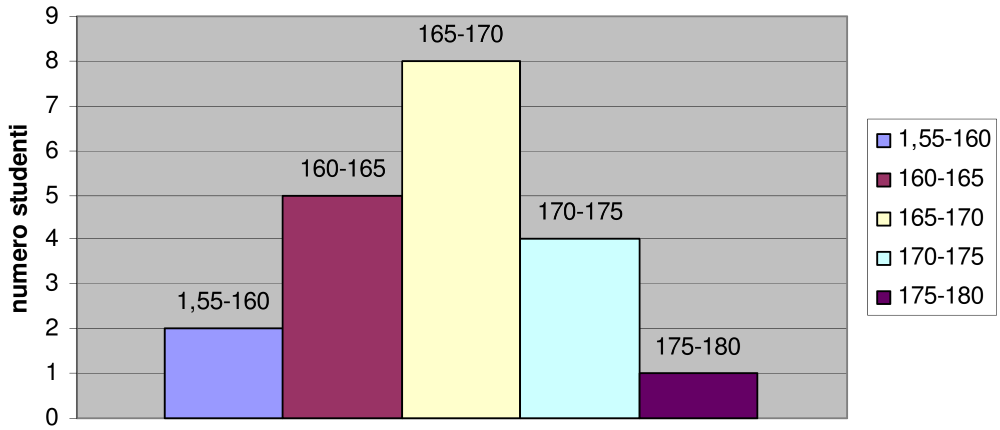
Supponiamo di chiedere agli studenti di una classe di 20 alunni qual è la propria altezza (espressa in cm).
In questo caso il carattere indagato è **quantitativo.**
Supponiamo di aver ottenuto i seguenti dati:

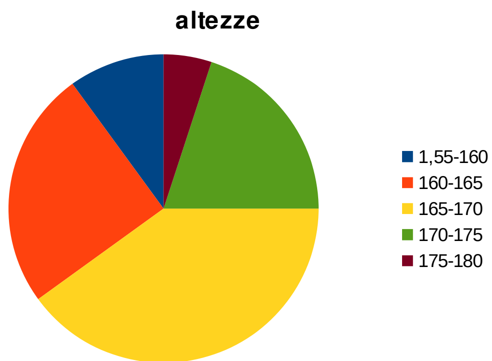
156 ; 164 ; 162 ; 168 ;169 ; 176 ;175 ;172 ;161 ; 169 ;165 ;173 ;168 ;167 ;166 ;160 ;164 ;167 ;174 ;170

In questo caso **risulta più opportuno dividere i dati in "classi"** considerando per esempio e di solito l'estremo superiore della classe è incluso nella classe e quello inferiore è escluso (quindi per esempio nella classe 150 – 160 ci saranno 2 studenti.

Classe	Frequenza	Frequenza relativa percentuale
155 - 160	2	10%
160 - 165	5	25%
165 – 170	8	40%
170 - 175	4	20%
175 - 180	1	5%

Per le "classi di valori" conviene utilizzare al posto del diagramma a barre quello che viene chiamato **istogramma** in cui **i rettangoli sono affiancati** e le aree sono proporzionali alle frequenze ma se le "classi hanno la stessa "ampiezza" (quindi le basi dei rettangoli sono uguali) si ritrova che le altezze sono proporzionali alle rispettive frequenze.





Esempio 3

Supponiamo di aver rilevato le seguenti temperature massime nei vari giorni dei mesi di marzo e luglio di un dato anno:

Giorno	Temp. Max. Marzo	Temp. Max Luglio
1	16	28
2	19	29
3	20	29
4	22	27
5	21	26
6	22	24
7	22	26
8	23	26
9	20	28
10	20	28
11	21	30
12	18	30
13	16	31
14	16	32
15	14	32
16	19	30
17	20	31
18	18	29
19	19	28
20	22	32
21	24	33
22	24	32
23	20	30
24	24	30
25	25	29
26	25	32
27	24	33
28	22	33
29	21	30
30	17	30
31	16	30

Per una serie di dati quantitativi può essere interessante determinare la **media aritmetica** $\bar{x}$ cioè la somma di tutti i dati $x_1,...x_n$ divisa per il numero dei dati cioè

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}}$$

Nota

Nel nostro caso per calcolarla possiamo sommare tutte le temperature oppure determinare prima la frequenza di ciascuna temperatura: se per esempio nel mese di Luglio la temperatura 24 ha frequenza 1, la temperatura 26 ha frequenza 3 , la temperatura 27 frequenza 1, la temperatura 28 frequenza 4…possiamo scrivere

$$media\_aritmetica = \frac{24 \cdot 1 + 26 \cdot 3 + 27 \cdot 1 + 28 \cdot 4 + ...}{31}$$

Otteniamo:

Temp max media Marzo	Temp max media Luglio
20,3	29,6

Nota

Un altro "indice" che a volte viene richiesto è la modalità che si presenta con la massima frequenza (si parla di **moda della distribuzione)**

Nel nostro caso abbiamo

Temp moda Marzo	Temp moda Luglio
20	30

Scheda di lavoro 1

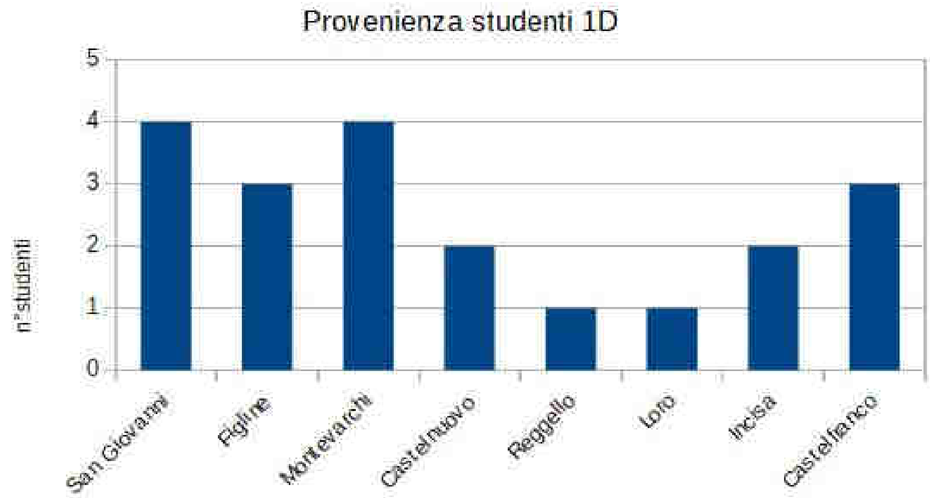
Apriamo **Open Office** e poi il Foglio elettronico:comparirà un foglio con righe e colonne e una serie di icone-strumenti.
Supponiamo di voler riportare in questo foglio **la distribuzione delle provenienze degli studenti della classe nel corrente anno scolastico.**
Inseriamo nella prima colonna (A) i nomi dei paesi di provenienza e nella colonna accanto (B) il rispettivo numero di studenti che provengono da quel paese.

Possiamo visualizzare questi dati disegnando il corrispondente diagramma a barre seguendo questa procedura:

- selezionare la zona dei nostri dati (trascinando il mouse fino a che la zona non risulta evidenziata in azzurro);
- scegliere dalla barra delle applicazioni l'icona con le colonne colorate (o inserisci grafico);
- scegliere il tipo di grafico, nel nostro caso "Colonna".

Cliccando su "Avanti" arriviamo ad "Elementi del grafico" e possiamo inserire il titolo del grafico e i sotto-titoli per l'asse x e l'asse y (per esempio scrivere come titolo "Provenienza alunni classe… a.s. …" e come sotto-titoli degli assi "Paesi" e "n° studenti".

Paesi	n°studenti	Frequenza %
San Giovanni	4	20%
Figline	3	15%
Montevarchi	4	20%
Castelnuovo	2	10%
Reggello	1	5%
Loro	1	5%
Incisa	2	10%
Castelfranco	3	15%



Nota: possiamo stampare il nostro foglio di lavoro con file-stampa ma è meglio controllare prima con anteprima di stampa per poter modificare eventualmente la posizione del grafico (basta fare clic vicino ad un angolo e quando compare una crocina trascinare il grafico nella posizione che vogliamo).

Se vogliamo cancellare un grafico basta cliccare nell'area del grafico e premere il tasto Canc.

Calcoliamo le frequenze **percentuali** di studenti provenienti dai vari paesi.

Ricordiamo che se gli studenti provenienti da San Giovanni sono 4 su un totale di 20 studenti della 1D, la frequenza relativa percentuale risulta:

$$\frac{4}{20} \cdot 100 = 0{,}2 \cdot 100 = 20 \to 20\%$$

Il foglio elettronico può essere usato per **ripetere lo stesso tipo di calcolo per tutti i paesi** se procediamo in questo modo: dobbiamo usare non il numero 4 ma il **nome della cella** (casella) in cui si trova il dato, nel nostro caso B2, e **far precedere il calcolo dal segno di =** per indicare che stiamo inserendo una "formula" che poi "estenderemo" anche alle altre righe.

Digitiamo nella cella C1 "frequenza %" ed inseriamo nella cella C2

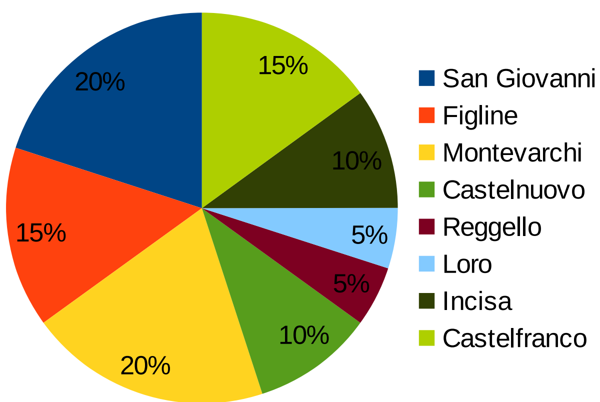
$$= B2/20$$

e poi con il tasto destro formatta celle- percentuale- posizioni decimali 1.

A questo punto per "**estendere**" la formula e calcolare le altre percentuali basta posizionare il cursore sull'angolo in basso a destra della cella finché non compare una crocetta e tenendo premuto il tasto del mouse trascinare il cursore fino alla cella desiderata : vedremo comparire tutte le altre frequenze percentuali!

Possiamo visualizzare in modo significativo queste percentuali utilizzando il **grafico a torta**:

- selezioniamo la colonna A e la colonna C (per selezionare colonne di dati non adiacenti occorre tenere premuto il tasto CTRL);
- scegliamo dallo strumento grafico il tipo "torta";
- andando avanti possiamo inserire il titolo;
- cliccando su un qualsiasi settore della torta con il tasto destro abbiamo la possibilità di inserire l'indicazione delle percentuali scegliendo "inserisci etichette dati".



Scheda di lavoro 2

Riprendiamo le temperature massime rilevate nel mese di Marzo di un dato anno come sono riportate nell'esempio 2 ed inseriamole in un foglio elettronico di Open Office.

Nota: per inserire i numeri da 1 a 31 possiamo inserire nella cella A2 il numero 1 e nella cella A3 la formula

=A2+1

ed "estenderla" poi fino ad avere 31.

Possiamo calcolare la temperatura massima "media" utilizzando la funzione **MEDIA**: basta scrivere, se i dati relativi alle temperature si trovano nelle celle da B2 a B32

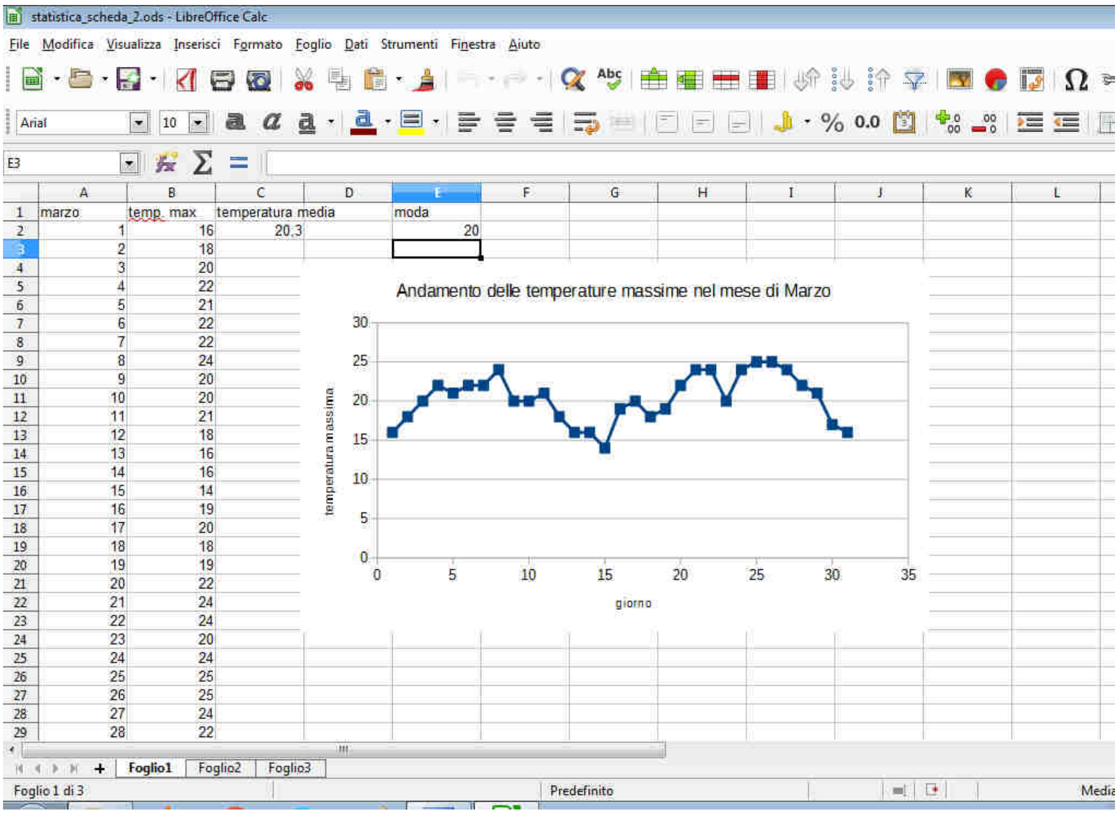
=media(b2:b32)

Possiamo calcolare la temperatura che ha avuto la massima frequenza usando la funzione **MODA**

=moda(b2:b32)

In questo caso per rappresentare graficamente l'andamento delle temperature conviene utilizzare il tipo di grafico XY: dopo aver selezionato le celle delle temperature b2…b32 e attivato "inserisci grafico" scegliamo **XY dispersione - punti e linee**.

Facendo clic con il tasto destro del mouse nella zona del grafico si possono aggiungere titolo del grafico e degli assi.
Il grafico può essere spostato andando negli angoli finché non compare una crocetta e trascinando.



ESERCIZI

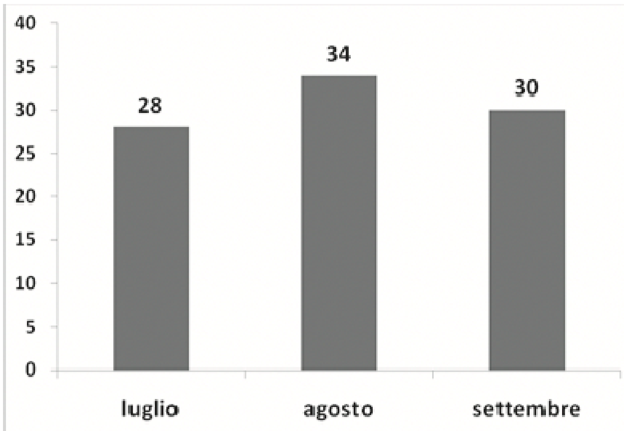
1) Con una bilancia si è misurata 10 volte la massa di una lastra di alluminio ottenendo le seguenti misure in chilogrammi:

10,55	10,76	10,60	10,87	10,64	10,67	10,84	10,46	10,55	10,70

Determina la media aritmetica (approssimata alla seconda cifra decimale).

[10,66 Kg]

2) Il grafico riporta il numero di e-book reader (lettori di libri elettronici) venduti nei mesi di luglio, agosto e settembre da un negozio di informatica.
Negli altri nove mesi lo stesso negozio ha venduto in media 18 e-book reader al mese. Qual è il numero medio **mensile** di e-book reader venduti in quell'anno in negozio?



[circa 21]

3) Un sondaggio condotto su un gruppo di 51 studenti sul numero di televisori presenti in casa ha dato i seguenti risultati

N° televisori	N° studenti
1	10
2	15
3	18
4	7

Qual è la percentuale di studenti che ha in casa meno di tre televisori?

[50%]

4) In un grande magazzino è stata compiuta un'indagine sulle taglie di pantaloni da uomo venduti durante una settimana e si sono ottenuti i dati riassunti nella seguente tabella:

Taglia	44	46	48	50	52	54	56
Frequenza	2	7	6	12	10	2	1

Qual è la frequenza percentuale della taglia 48?
Qual è la frequenza percentuale di pantaloni di taglia superiore alla 50?

[15 % ; 32,5 %]

5) In una scuola di 240 studenti il 20% ha 14 anni, il 40% ha 15 anni, il 25% ha 16 anni e il 15% ha 17 anni. Quanti studenti hanno 17 anni? Quanti studenti hanno meno di 16 anni? Quanti studenti hanno più di 15 anni?

[36 ; 144 ; 96]

6) I voti dell'ultimo compito di matematica in una classe sono stati i seguenti:

5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7,5 ; 6,5 ; 8 ; 4 ; 7 ; 7 ; 10 ; 3 ; 4,5 ; 5,5 ; 8 ; 8; 7 ; 9 ; 4 ; 6

Compila la tabella delle frequenze dei vari voti e determina la media e la moda della distribuzione.

[6,45 ; 7]

7) Considera la seguente tabella che riporta i pesi degli studenti di una classe (indicati con il numero corrispondente al loro nome nell'elenco di classe).

Studente	Peso (Kg)
1	56
2	58
3	60
4	64
5	56
6	62
7	70
8	74
9	71
10	70
11	65
12	60
13	55
14	72
15	65

Determina il peso medio (approssimando alla prima cifra decimale).
Rappresenta i dati con un istogramma dividendoli nelle "classi" di valori 55-60 ; 60-65 ecc.

[63,9 Kg]

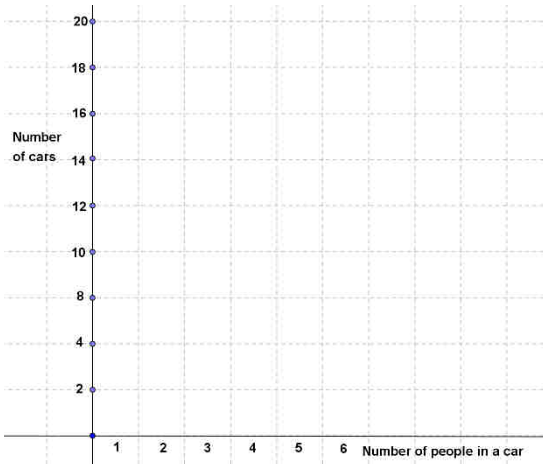
TEST
STATISTICA

1) A travel brochure contains 24 pictures from different countries. The table shows how many pictures there are from each country.
a) Complete the table
b) Complete the pie chart accurately and label the sectors for South Africa, Australia and New Zealand.

Country	**Numbers of pictures**	**Angle in pie chart**
Argentina	6	90°
South Africa	10	150°
Australia	3	
New Zealand		

2) Marie counts the number of people in each of 60 cars one morning.

Number of people in a car	**Number of cars**
1	6
2	17
3	8
4	9
5	11
6	9



On the grid, draw a bar chart to show the information for the 60 cars.
a)Write down the mode
b) Manuel uses Marie's result to draw a pie chart. Work out the sector angle for the number of cars with 5 people.

3) The table shows how many books were borrowed by the 126 members of a library group in a month.

Number of books	11	12	13	14	15	16
Number of members (frequency)	35	28	22	18	14	9

Find the mode, the median and the mean for the number of books borrowed.

4) A school has 350 students.
a)On the school sports day 96% of the students were present. Calculate how many students were absent.
b)The table shows the number of students attending school in one week.

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday
334	329	348	341	323

For these values, calculate the mean, the median and the range.

GEOMETRIA EUCLIDEA

Introduzione

La parola geometria deriva dalle parole greche

geo (terra) e **metron** (misura)

ed è nata per risolvere problemi di misurazione dei terreni al tempo degli antichi Egizi nel VI secolo a.C.
Nella scuola del 1° ciclo (elementare e media) la geometria viene presentata in modo "intuitivo", osservando e sperimentando.
Nel 2° ciclo (scuola superiore) lo studio della geometria viene affrontato in modo "razionale": partendo da alcuni concetti e proprietà iniziali tutto il resto viene rigorosamente "dimostrato".

Lo studio "razionale" della geometria si deve al grande matematico greco Euclide, vissuto ad Alessandria d'Egitto nel III secolo a.C.
Euclide riunì in tredici libri, chiamati gli "Elementi", le conoscenze geometriche dell'epoca mettendo al centro della sua opera il ragionamento rigoroso e la deduzione logica.

Partendo da alcuni "**enti primitivi**" (oggetti primitivi) e da proprietà iniziali di questi enti (i "**postulati**") si dimostrano con la sola deduzione logica i teoremi che esprimono le proprietà delle figure geometriche.

Approfondimento storico

Fai una ricerca sugli studi e la vita dei seguenti matematici dell'antichità:

1. Talete (VI sec. a.C.)

2. Pitagora (V sec. a.C.) (discepolo di Talete)

3. Euclide (III sec. a.C.)

4. Archimede (III sec. a.C.) (di poco posteriore ad Euclide)

Definizioni

Una definizione è una frase in cui si spiega cos'è un dato oggetto a cui diamo un dato nome.
Per esempio: "Un quadrato è un quadrilatero con i lati uguali e gli angoli congruenti".

Ci accorgiamo subito che questa definizione si basa su altri concetti (quadrilatero, lato, angolo, congruenza) e quindi prima di poter dare questa definizione dobbiamo definire quadrilatero, angolo, lato ecc…

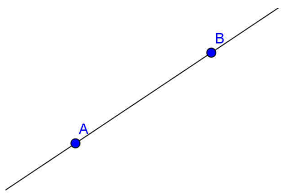
È chiaro che si innesca un procedimento "a ritroso" ed è necessario che alcuni oggetti siano considerati "primitivi" (detti enti primitivi) e non sia data per essi alcuna definizione.

Gli enti primitivi della geometria euclidea sono: il punto, **la retta** e **il piano**.

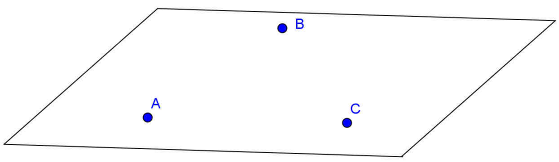
Postulati

I postulati sono proprietà degli enti primitivi che non vengono dimostrate e che si chiede (postulato viene dal verbo latino "postulare" che significa appunto "chiedere") di accettare come vere.
I postulati presenti negli "Elementi" di Euclide sono molti, noi ve vedremo solo alcuni.
Cominciamo con i seguenti tre postulati:

1° postulato: per due punti passa una ed una sola retta.

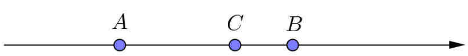


2° postulato: per tre punti non allineati (cioè non appartenenti alla stessa retta) passa uno e un solo piano.



3° postulato: la retta è un insieme ordinato di punti e fra due punti esiste sempre almeno un altro punto (quindi la retta è costituita da infiniti punti).

A precede B
C si trova tra A e B



Teoremi

Un teorema è un'affermazione da provare mediante un ragionamento.
Generalmente un teorema è costituito da una parte iniziale che viene chiamata "**ipotesi**" e da una parte finale detta "**tesi**" cioè l'affermazione che dobbiamo dimostrare.

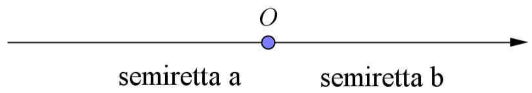
$$\text{Se "ipotesi"} \underset{(allora)}{\Rightarrow} \text{"tesi"}$$

La dimostrazione di un teorema è l'insieme dei passaggi logici che mi permettono, partendo dall'"ipotesi", di giungere alla "tesi".

Nota: scambiando l'ipotesi con la tesi si ha il teorema inverso (che può essere vero o meno).

Cominciamo con alcune definizioni:

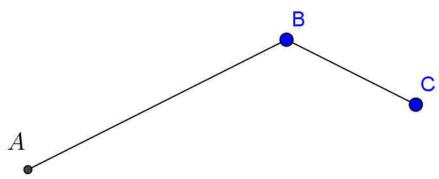
Semiretta: data una retta orientata e un suo punto O vengono individuate due semirette di origine O formate dai punti che precedono e seguono O.



Segmento: data una retta orientata e due suoi punti A e B chiamiamo segmento AB l'insieme dei punti compresi tra A e B.

A e B si dicono estremi del segmento.

Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno in comune un estremo.



AB e BC sono segmenti consecutivi.

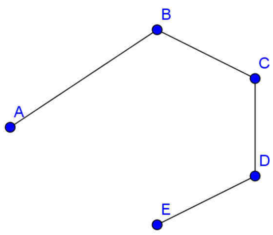
Due segmenti si dicono **adiacenti** quando sono consecutivi e appartengono alla stessa retta

AB e BC sono adiacenti

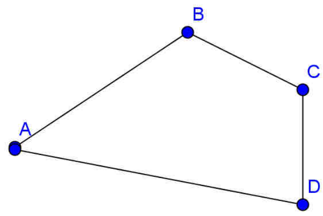
Poligonale: è costituita da una serie di segmenti in cui ciascun segmento e il successivo sono consecutivi.

Una poligonale può essere aperta o chiusa (se l'ultimo estremo coincide con il primo).

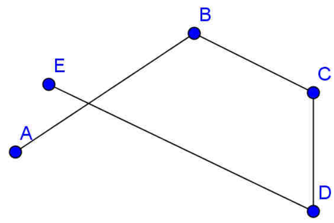
Una poligonale può essere intrecciata se almeno 2 segmenti non consecutivi si intersecano.



poligonale aperta



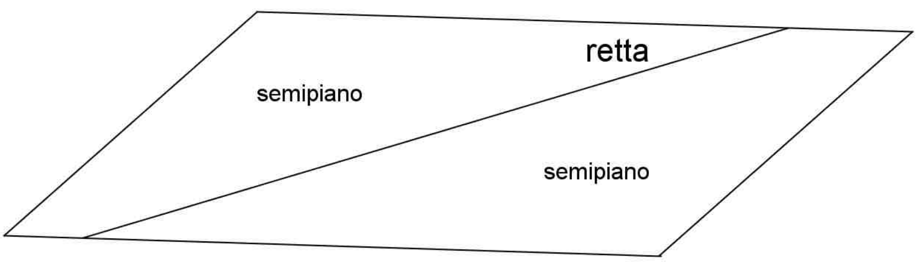
poligonale chiusa



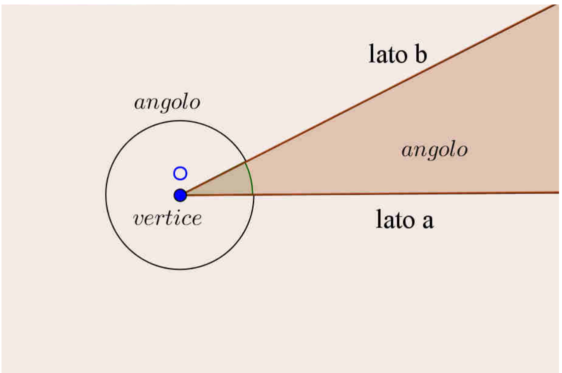
poligonale intrecciata

Semipiani: data una retta di un piano, essa divide il piano in due semipiani.

La retta si chiama origine dei due semipiani.

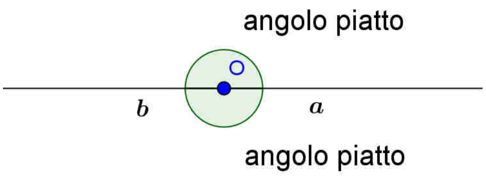


Angolo: due semirette aventi l'origine in comune individuano due parti del piano chiamate angoli.

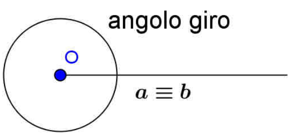


Le semirette si dicono lati dell'angolo, l'origine delle due semirette si chiama vertice dell'angolo.

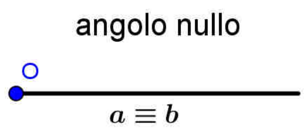
Angolo piatto: quando i suoi lati sono semirette opposte (coincide con un semipiano).



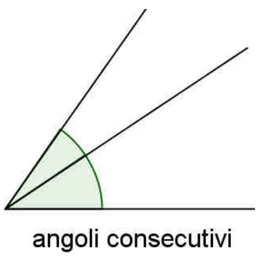
Angolo giro: quando i suoi lati sono semirette coincidenti (coincide con l'intero piano).



Angolo nullo: quando i suoi lati sono semirette coincidenti ma non ci sono altri punti eccetto quelli dei lati.



Angoli consecutivi: se hanno in comune il vertice e un lato.



Angoli adiacenti:se sono consecutivi e i lati non comuni appartengono alla stessa retta.

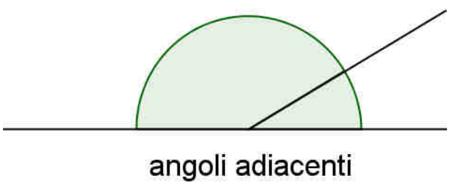


Figure concave e figure convesse

Una figura è convessa se congiungendo due suoi punti qualsiasi A, B il segmento AB è tutto contenuto nella figura. Se non è convessa, una figura si dice concava.

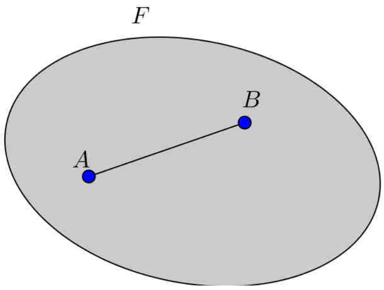


figura convessa

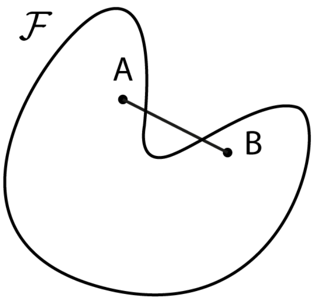
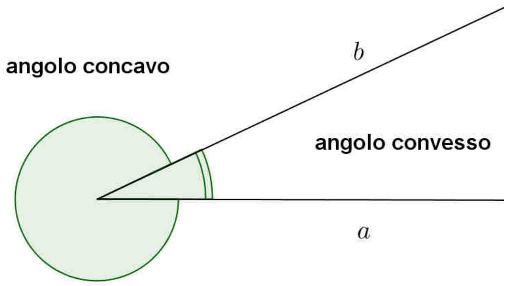


figura concava

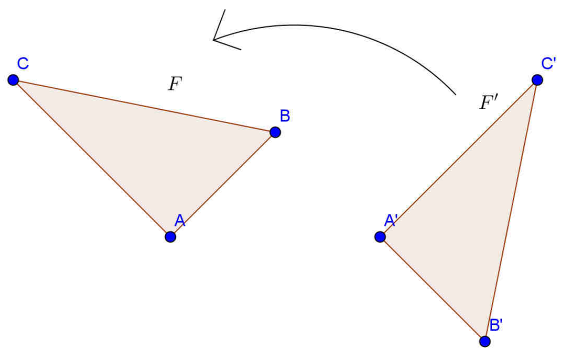
Per esempio quando *a* e *b* sono due semirette non appartenenti alla stessa retta e non coincidenti e aventi l'origine in comune, vengono individuati un angolo convesso e uno concavo.



NOTA: l'angolo piatto, l'angolo giro e l'angolo nullo sono convessi.

Figure congruenti

Diremo che due figure sono "congruenti" se sono sovrapponibili mediante un movimento rigido.



$F \cong F'$ ($\cong$ sta per congruente)

Naturalmente se $F_1 \cong F_2$ e $F_2 \cong F_3$ allora $F_1 \cong F_3$ (proprietà transitiva della congruenza).

Segmenti

Se due segmenti sono **congruenti** si dirà che hanno la **stessa lunghezza**.

- **Confronto di segmenti**: si riporta un segmento sull'altro in modo che due estremi coincidano. Si possono avere tre casi:

a) se il secondo estremo D cade internamente ad AB si ha AB>CD;

b) se il secondo estremo D cade esternamente ad AB allora AB<CD;

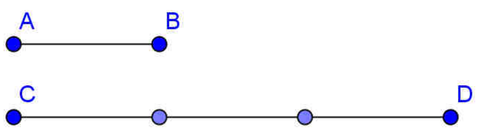
c) se il secondo estremo D coincide con B allora $AB \cong CD$.

- **Somma di segmenti**: dati AB e CD riportiamo CD in modo che sia adiacente ad AB ($B \equiv C$).

La somma sarà il segmento AD.

- **Multiplo di un segmento AB**: dato un segmento AB con $n\overline{AB}$ (n numero naturale maggiore di 1) è il segmento uguale alla somma di n segmenti congruenti ad AB.

Esempio: $\overline{CD} = 3 \cdot \overline{AB}$



Possiamo anche dire che AB è sottomultiplo di CD cioè che $AB = \frac{1}{3} CD$

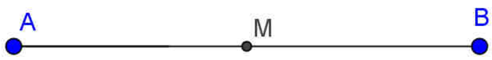
- **Sottrazione di segmenti**: dati AB e CD con AB>CD la differenza tra AB e CD è il segmento che addizionato a CD dà AB

$AB - CD \cong DB$

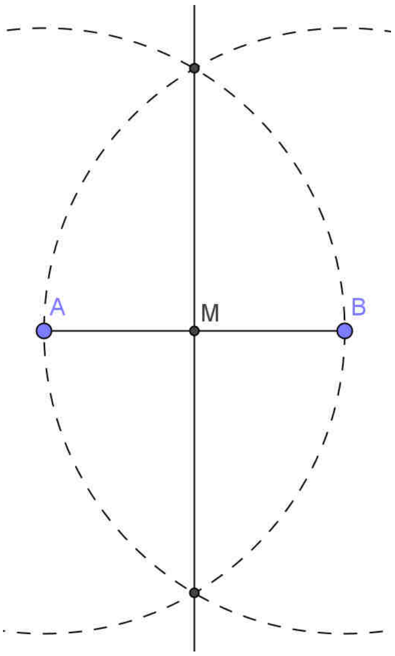
Punto medio di un segmento

Il punto medio di un segmento AB è il suo punto M che lo divide in due segmenti congruenti.

$AM \cong MB$



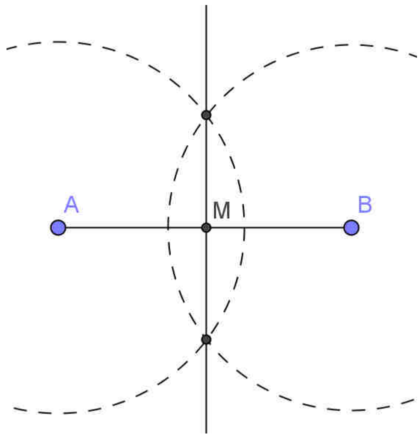
NOTA
Per costruire il punto medio di un segmento con riga e compasso si procede così:



- si punta il compasso in A con apertura AB
- si punta il compasso in B con la stessa apertura
- si congiungono i due punti di intersezione delle due circonferenze
- il punto individuato sul segmento è il punto medio

Potremo dare solo in seguito la "giustificazione" di questo procedimento.

Osservazione: l'apertura del compasso può essere anche diversa da AB purché sia maggiore della metà di AB (e uguale quando puntiamo in A e in B).

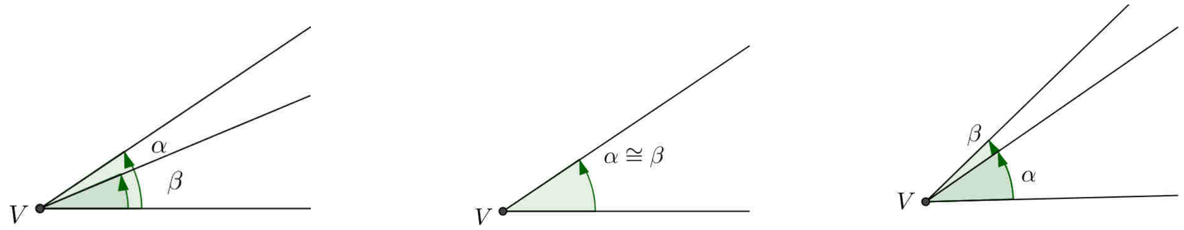


Angoli

Confronto di angoli

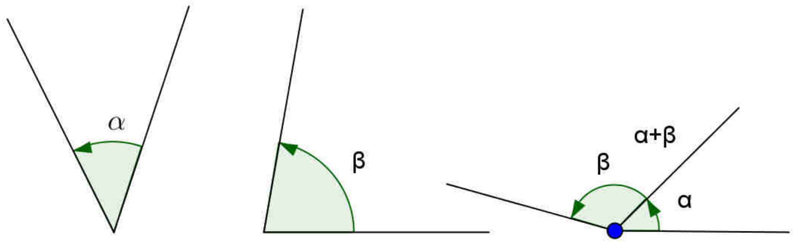
Si riporta un angolo sull'altro in modo che coincidano i vertici e un lato.

a) Se il secondo lato di β è interno ad α diremo che $\beta < \alpha$
b) Se anche il secondo lato di β è sovrapposto allora $\alpha \cong \beta$ (α congruente a β)
c) Se il secondo lato di β è esterno ad α allora $\beta > \alpha$.

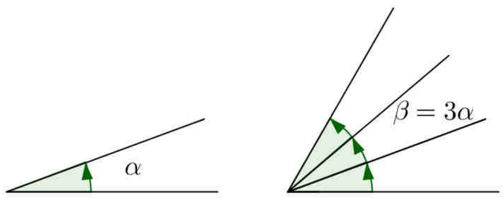


Definizione: se due angoli sono congruenti si dice che hanno la stessa "ampiezza".

- **SOMMA di angoli**: dati due angoli α e β si riporta β in modo che risultino consecutivi e si chiama somma di $\alpha + \beta$ l'angolo che ha per lati i lati non comuni.

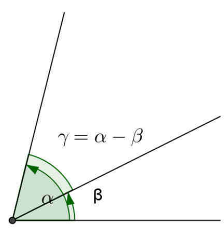


- **MULTIPLO di un angolo α:** dato un angolo α e un numero naturale $n > 1$, $n\alpha$ è l'angolo uguale alla somma di n angoli congruenti ad α.



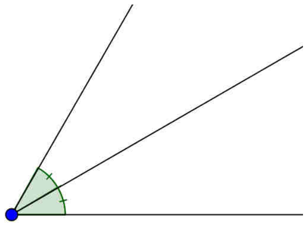
Possiamo anche dire che $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ (sottomultiplo di β)

- **DIFFERENZA tra angoli**: dati due angoli α e β con $\alpha > \beta$ o $\alpha \cong \beta$, la differenza $\alpha - \beta$ è l'angolo che addizionato a β dà α



Bisettrice di un angolo

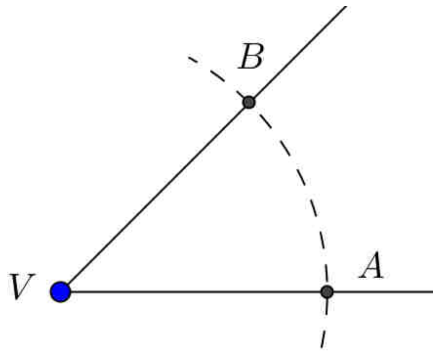
La bisettrice di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti.



Costruzione della bisettrice di un angolo (con riga e compasso).

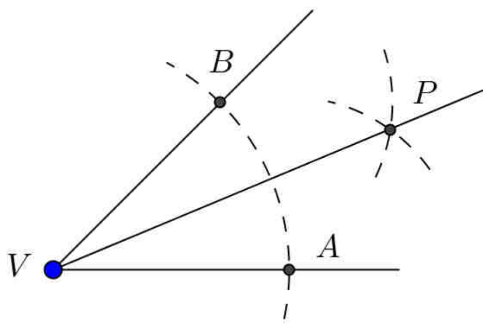
Possiamo procedere così:

- puntiamo il compasso nel vertice V dell'angolo con apertura a piacere e individuiamo i punti A e B sui lati dell'angolo.



- puntiamo il compasso in A con apertura a piacere (anche diversa dalla precedente) e poi in B con la stessa apertura tracciando cosi due archi di circonferenza che si intersecheranno in P.

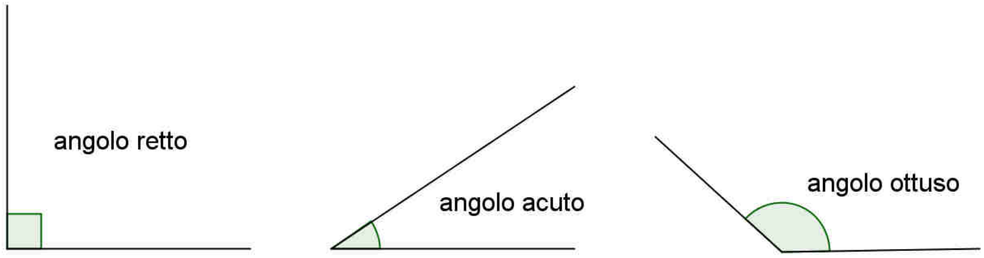
- tracciamo la semiretta VP: è la bisettrice



NOTA: la "giustificazione " di questo procedimento potremo darla solo in seguito.

Angoli retti, acuti, ottusi

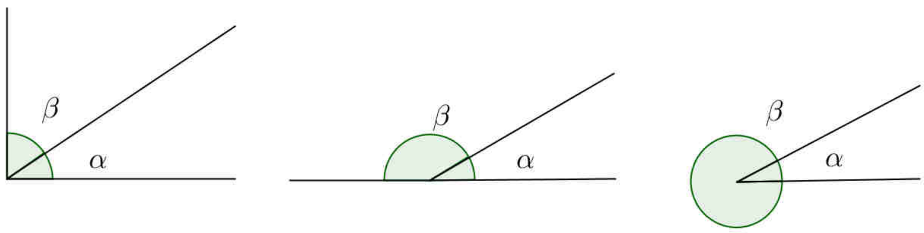
- Un angolo si dice retto se è metà di un angolo piatto;
- Un angolo si dice acuto se è minore di un angolo retto;
- Un angolo si dice ottuso se è minore di un angolo piatto e maggiore di un angolo retto.



Indicheremo con $\hat{P}$ un angolo piatto, con $\hat{R}$ un angolo retto.

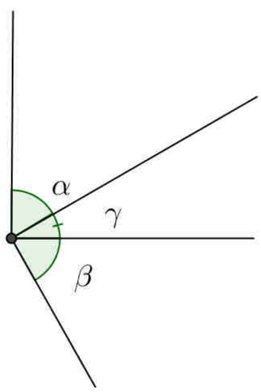
Angoli complementari, supplementari, esplementari

- Due angoli si dicono complementari se la loro somma è un angolo retto;
- Due angoli si dicono supplementari se la loro somma è un angolo piatto;
- Due angoli si dicono esplementari se la loro somma è un angolo giro.



$\alpha + \beta = \hat{R}$ $\qquad$ $\alpha + \beta = \hat{P}$ $\qquad$ $\alpha + \beta = 2\hat{P}$

Osservazione: se due angoli α e β sono complementari di uno stesso angolo γ (o di angoli congruenti) allora sono congruenti.



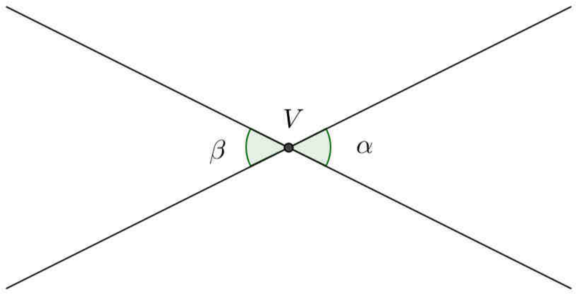
Se $\alpha + \gamma \cong \hat{R} \Rightarrow \alpha \cong \hat{R} - \gamma$

Se $\beta + \gamma \cong \hat{R} \Rightarrow \beta \cong \hat{R} - \gamma$

Quindi $\alpha \cong \beta$

Angoli opposti al vertice

Due angoli si dicono opposti al vertice se hanno in comune il vertice e i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



α e β sono opposti al vertice

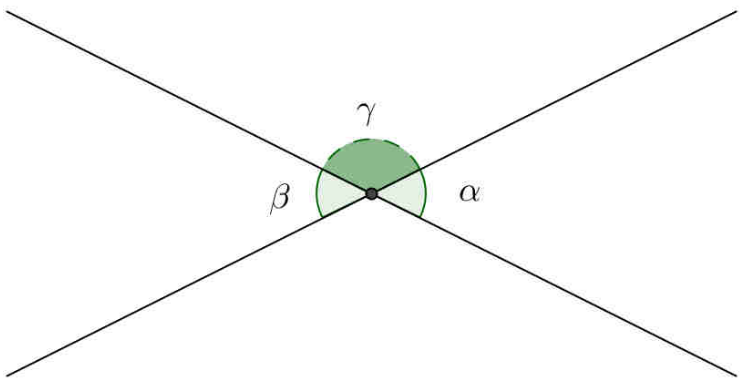
Teorema: *se α e β sono angoli opposti al vertice allora sono congruenti.*

Ipotesi: α e β sono angoli opposti al vertice.
Tesi: $\alpha \cong \beta$

Dimostrazione: osservando la figura abbiamo che

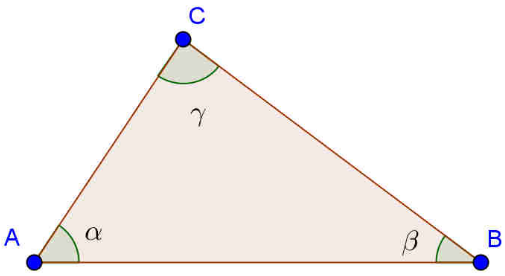
$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \gamma \cong \hat{P} \Rightarrow \alpha \cong \hat{P} - \gamma \\ \beta + \gamma \cong \hat{P} \Rightarrow \beta \cong \hat{P} - \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cong \beta$$

cioè angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti.



GEOMETRIA EUCLIDEA
I triangoli

Definizione: un triangolo è l'insieme dei punti del piano costituiti da una poligonale chiusa di tre lati e dai suoi punti interni.

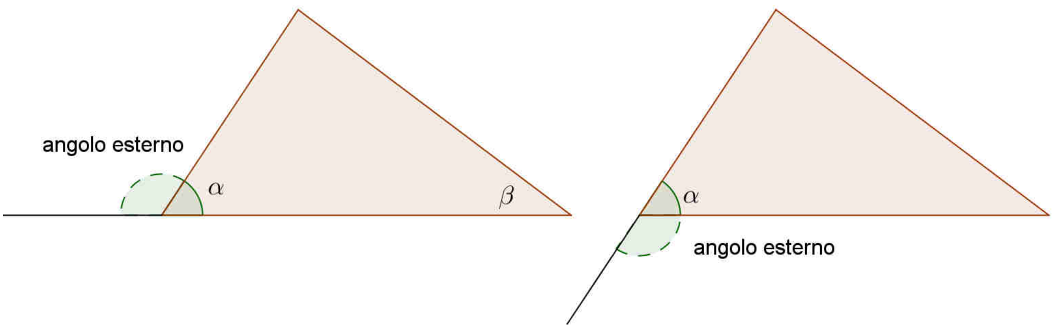


A, B, C vertici del triangolo

α, β, γ angoli interni

AB, BC, AC lati del triangolo

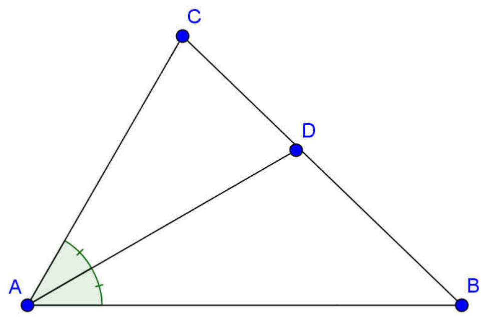
I punti estremi dei tre lati si chiamano **vertici** del triangolo.
I lati della poligonale si chiamano **lati** del triangolo.
Gli angoli compresi tra due lati si dicono angoli interni.
Gli angoli compresi tra un lato e il prolungamento di un altro lato si dicono esterni. Per ogni angolo interno ci sono due angoli esterni (congruenti).



NOTA: α si dice angolo compreso tra i lati AC e AB ecc… α e β si chiamano angoli "adiacenti" al lato AB.

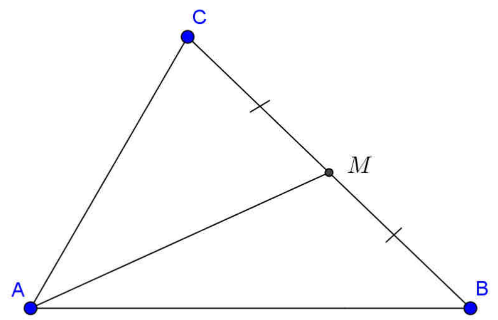
Bisettrici, mediane, altezze

- La bisettrice dell'angolo α (nel vertice A) è la parte di bisettrice di α contenuta nel triangolo.



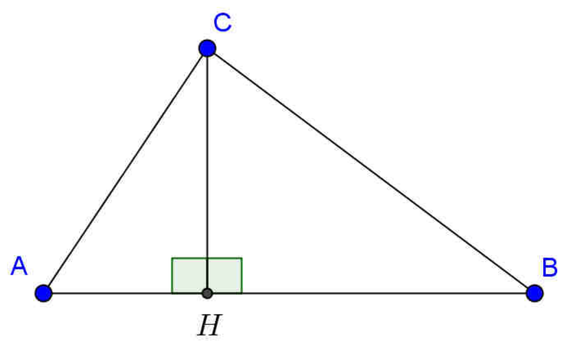
AD bisettrice relativa al vertice A

- La mediana relativa ad un lato è il segmento che congiunge il punto medio del lato con il vertice opposto.



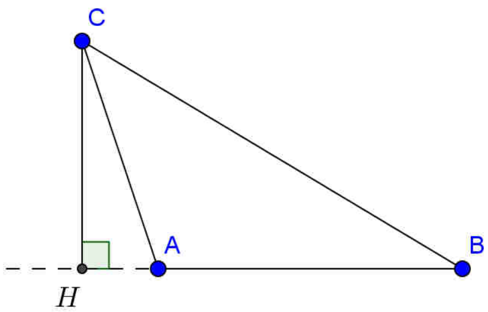
AM è la mediana relativa a BC

- L'altezza relativa ad un lato è il segmento condotto dal vertice opposto perpendicolarmente al lato considerato

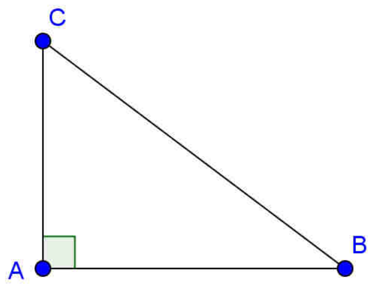


CH è l'altezza relativa ad AB

Attenzione: l'altezza può essere un segmento esterno al triangolo o coincidere con un lato.



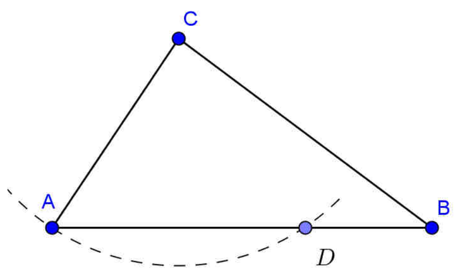
CH è esterna al triangolo $A\hat{B}C$



CA è l'altezza relativa ad AB e coincide con il lato

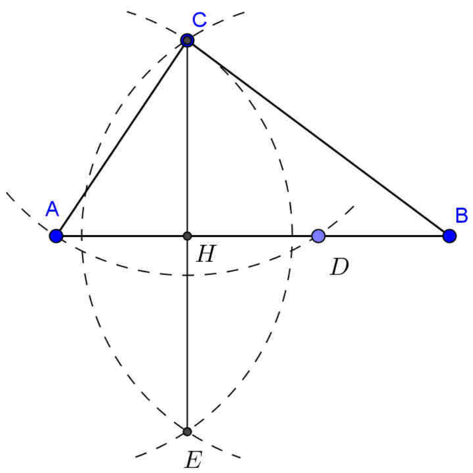
Costruzione dell'altezza con riga e compasso

- Puntiamo in C con apertura AC e tracciamo un arco per individuare su AB il punto D



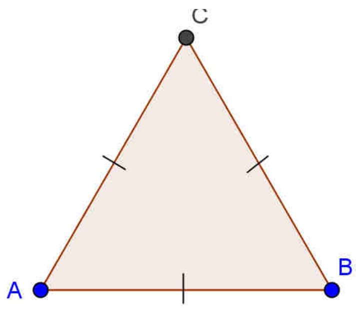
- Puntiamo in A con la stessa apertura e poi in D sempre con la stessa apertura e intersecando i due archi troviamo E (oltre a C); congiungendo C con E e intersecando con AB troviamo H.

CH è l'altezza cercata

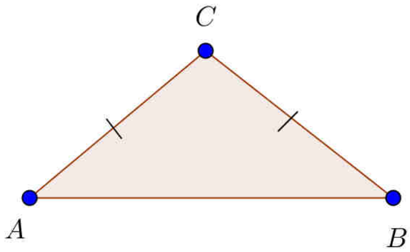


Classificazione dei triangoli rispetto ai lati

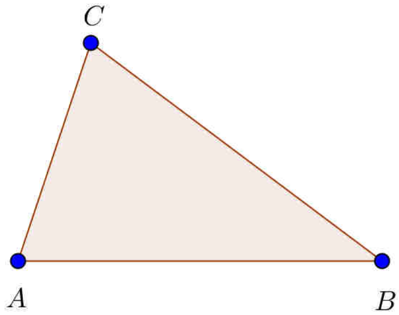
- Un triangolo si dice equilatero quando ha i tre lati congruenti.
- Un triangolo si dice isoscele quando ha due lati congruenti.
- Un triangolo si dice scaleno quando i tre lati sono diversi tra loro.



triangolo equilatero



triangolo isoscele



triangolo scaleno

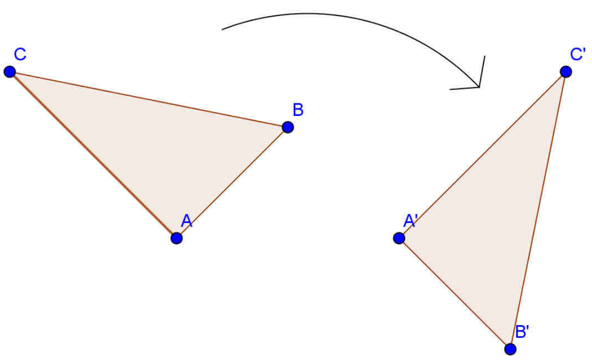
NOTA

Nel triangolo isoscele i lati congruenti vengono detti lati "obliqui" e il lato non congruente viene chiamato "base".
Gli angoli adiacenti alla base di un triangolo isoscele sono detti "angoli alla base".

Congruenza dei triangoli

Definizione: due triangoli sono congruenti se sono "sovrapponibili" punto per punto (se esiste un movimento rigido che li porta a sovrapporsi).

Ci sono tre "**criteri**" che ci permettono di capire se due triangoli sono congruenti e vengono chiamati **criteri di congruenza dei triangoli**.

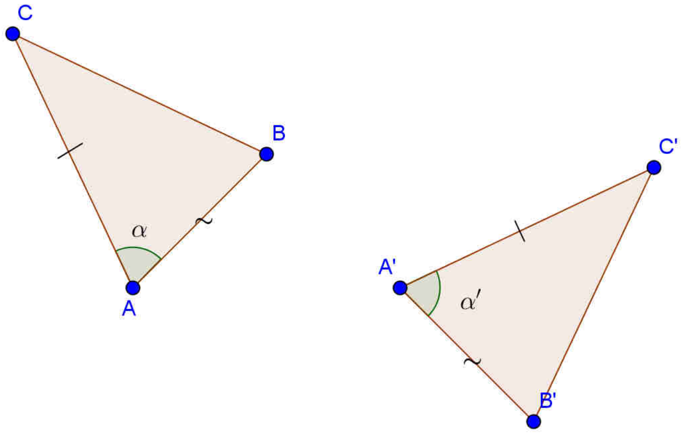


$A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ sono congruenti se esiste un movimento rigido che li porta a coincidere

Il primo criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso allora sono congruenti.

Ipotesi:
$AB \cong A'B'$
$AC \cong A'C'$
$\alpha \cong \alpha'$
Tesi: $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$

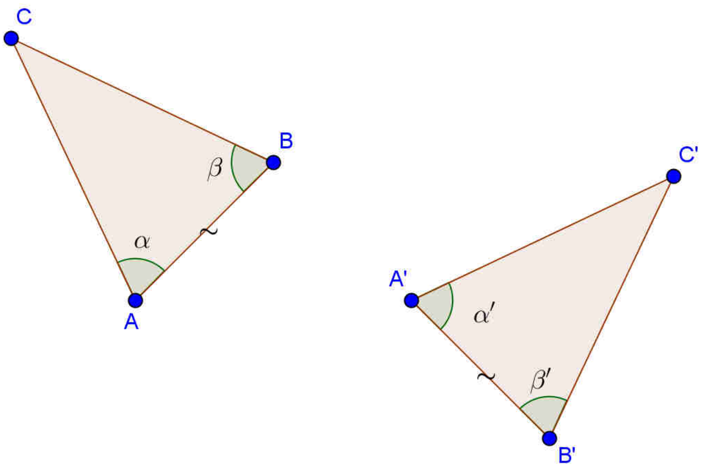


Dimostrazione: spostiamo il triangolo $A'B'C'$ in modo da far coincidere $A'B'$ con AB e l'angolo α' con α.
Poiché $A'C' \cong AC$ anche $C' \equiv C$ e quindi poiché coincidono i tre vertici i due triangoli sono congruenti.

Il secondo criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.

Ipotesi:
$AB \cong A'B'$
$\alpha \cong \alpha'$
$\beta \cong \beta'$
Tesi: $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$



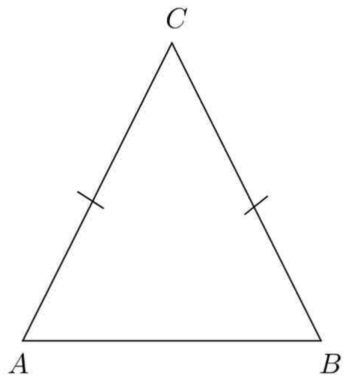
Dimostrazione: spostiamo $A'B'C'$ in modo che $A'B'$ coincida con AB. Poiché $\alpha' \cong \alpha$ la semiretta che contiene il lato $A'C'$ si sovrappone alla semiretta che contiene AC; poiché $\beta' \cong \beta$ la semiretta che contiene $B'C'$ si sovrappone a quella che contiene BC e in conclusione coincideranno i loro punti di intersezione cioè C' coinciderà con C e quindi i triangoli saranno sovrapposti e quindi congruenti.

Proprietà del triangolo isoscele

Teorema 1: s*e* $\overset{\Delta}{ABC}$ *è un triangolo isoscele allora gli angoli alla base sono congruenti*

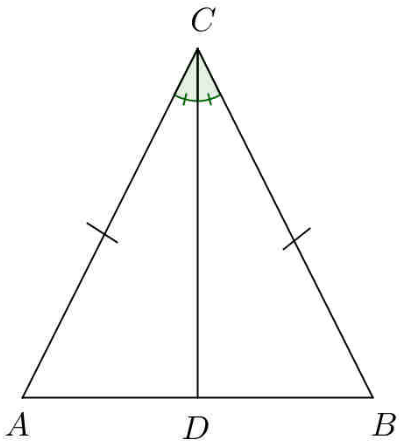
Ipotesi: $AC \cong BC$

Tesi: $\hat{A} \cong \hat{B}$



Dimostrazione

Tracciamo la bisettrice CD dell'angolo $\hat{C}$ e consideriamo i triangoli ACD e CDB.



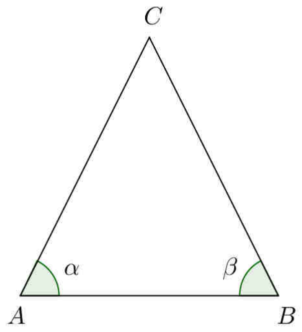
Abbiamo che:

$AC \cong BC$ per ipotesi
$A\hat{C}D \cong D\hat{C}B$ per costruzione
CD in comune e quindi ACD è congruente a DCB per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.

Quindi avremo anche $\hat{A} \cong \hat{B}$.

Teorema 2 (*inverso del teorema 1*)

Se $\overset{\Delta}{ABC}$ è un triangolo con due angoli congruenti allora è isoscele cioè ha due lati uguali.



Ipotesi: $\alpha \cong \beta$

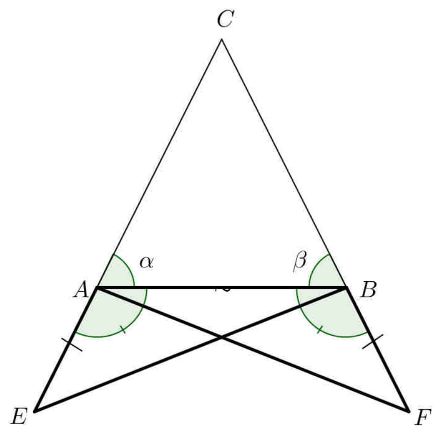
Tesi: $AC \cong BC$

Dimostrazione

Prolunghiamo i lati AC e CB di due segmenti congruenti AE, BF. Congiungiamo E con B e F con A.

Osserviamo che gli angoli $E\hat{A}B$ e $A\hat{B}F$ essendo supplementari di angoli uguali (α e β) sono uguali.

a) Consideriamo i triangoli $\overset{\Delta}{AEB}$ e $\overset{\Delta}{ABF}$: questi triangoli sono congruenti per il primo criterio avendo



$AE \cong BF$ per costruzione;
AB in comune;

$E\hat{A}B = A\hat{B}F$

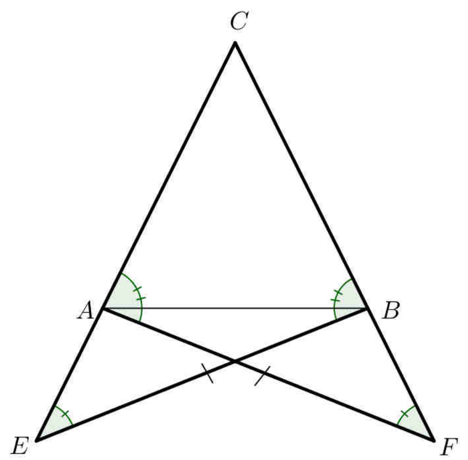
In particolare allora avremo anche:

$EB \cong AF$

$\hat{E} \cong \hat{F}$

$E\hat{B}A \cong F\hat{A}B$

b) Ora consideriamo i triangoli $\overset{\Delta}{CBE}$ e $\overset{\Delta}{AFC}$: sono congruenti per il secondo criterio di congruenza perché $EB \cong AF$; $\hat{E} \cong \hat{F}$; $E\hat{B}C \cong F\hat{A}C$ perché somma di angoli congruenti.



Se i triangoli $\overset{\Delta}{CBE}$ e $\overset{\Delta}{AFC}$ sono congruenti in particolare avremo $AC \cong BC$ (come volevamo dimostrare).

Teorema 3

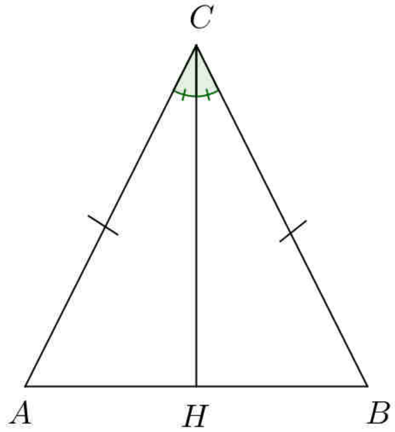
Se $\overset{\Delta}{ABC}$ *è un triangolo isoscele allora la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana.*

Ipotesi:

$AC \cong BC$

CH bisettrice $\Rightarrow A\hat{C}H \cong H\hat{C}B$

Tesi:
CH altezza e mediana



Dimostrazione

I triangoli $\overset{\Delta}{ACH}$ e $\overset{\Delta}{HCB}$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza poiché si ha:
$AC \cong BC$, CH in comune e $A\hat{C}H \cong H\hat{C}B$.

Di conseguenza abbiamo che :

- $AH \cong HB$ e quindi H è il punto medio di AB e CH è mediana;

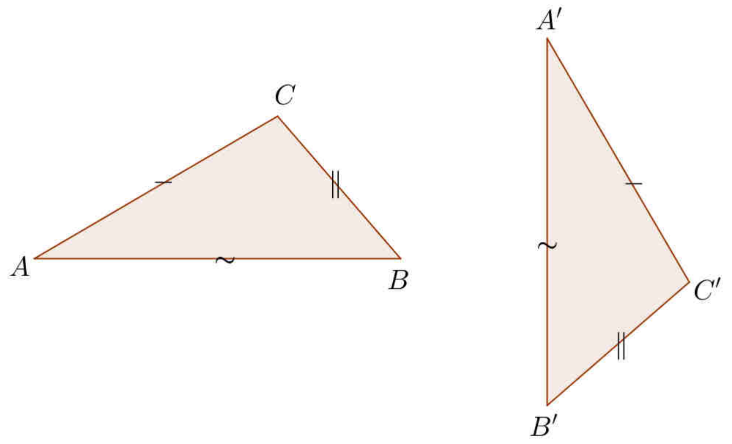
- $A\hat{H}C \cong B\hat{H}C$ ma essendo angoli supplementari dovranno essere entrambi retti e quindi CH è anche altezza.

Il terzo criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno i lati rispettivamente congruenti allora sono congruenti.

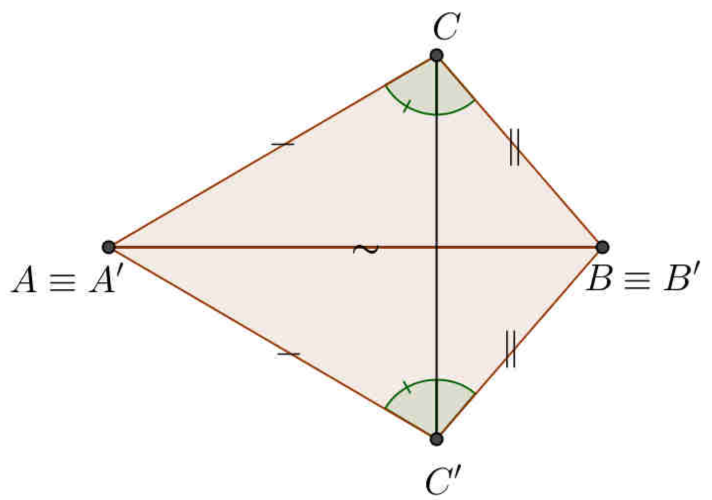
Ipotesi: $AC \cong A'C', \quad AB \cong A'B', \quad BC \cong B'C'$

Tesi: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$



Dimostrazione

Traslìamo $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ e facciamo coincidere $A'B'$ con AB e ponendo C' nel semipiano opposto a C. Congiungiamo C con C' e osserviamo che i triangoli $\overset{\Delta}{ACC'}$ e $\overset{\Delta}{BCC'}$ risultano entrambi isosceli.



Quindi per il teorema 1 sul triangolo isoscele avremo che:

$\hat{ACC'} \cong \hat{CC'A}, \quad \hat{BCC'} \cong \hat{CC'B} \Rightarrow \hat{ACB} \cong \hat{AC'B}$ perché somma di angoli congruenti.

Quindi i triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (due lati rispettivamente congruenti e l'angolo compreso).

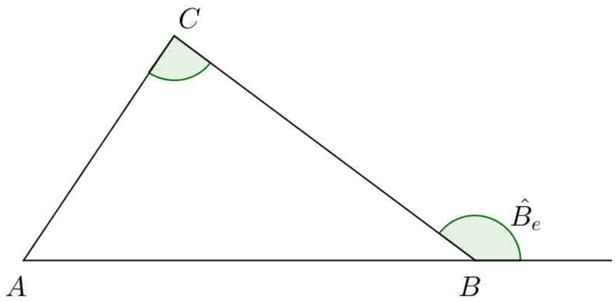
Teorema dell'angolo esterno

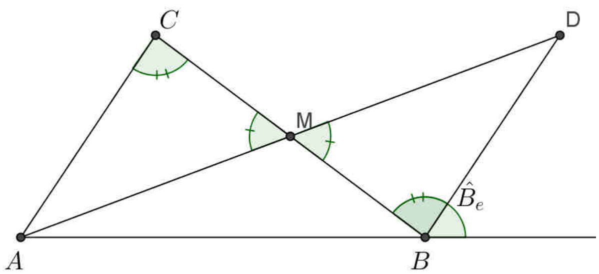
In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso.

Dimostrazione

Consideriamo per esempio l'angolo esterno $\hat{B}_e$.

Iniziamo col dimostrare che $\hat{B}_e > \hat{C}$.



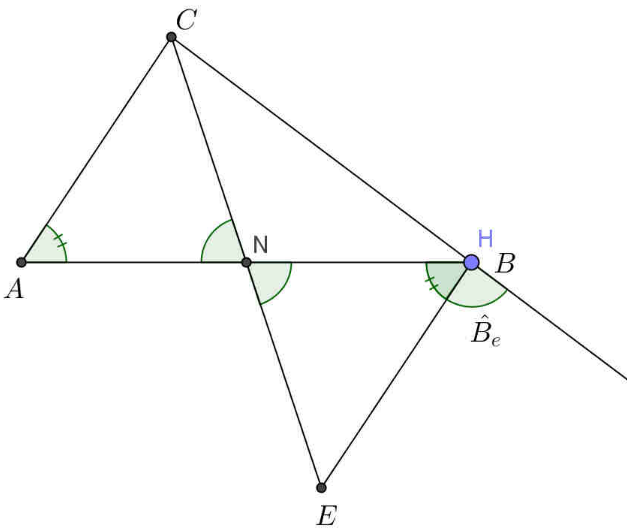


Tracciamo la mediana AM e prolunghiamola di $MD \cong AM$. I triangoli $\overset{\Delta}{AMC}$ e $\overset{\Delta}{MBD}$ sono congruenti per il primo criterio perché hanno uguali due lati e l'angolo compreso (opposti al vertice).

Quindi sarà anche $\hat{C} \cong M\hat{B}D$. Ma l'angolo $M\hat{B}D$ è interno a $\hat{B}_e$ e quindi $M\hat{B}D < \hat{B}_e$.

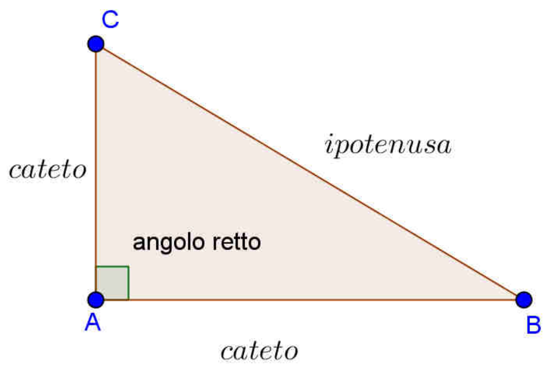
In conclusione $\hat{C} \cong M\hat{B}D < \hat{B}_e$.

Si può fare una dimostrazione analoga per dimostrare che $\hat{B}_e > \hat{A}$ (si traccia la mediana CN ecc.).



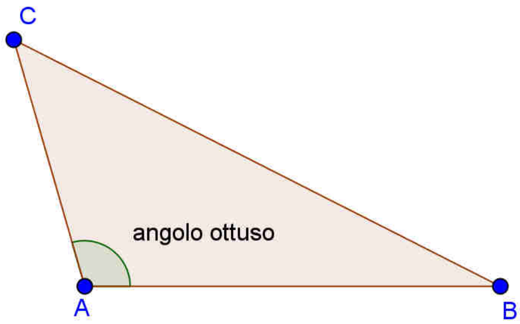
Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli

Triangolo rettangolo: triangolo con un angolo retto

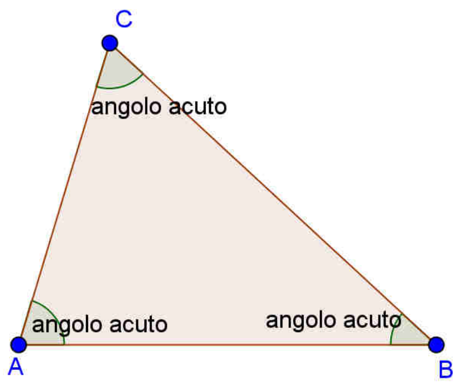


I lati che formano l'angolo retto si chiamano **cateti** e il lato opposto all'angolo retto si chiama **ipotenusa**.

Triangolo ottusangolo: triangolo con un angolo ottuso



Triangolo acutangolo: triangolo con tutti gli angoli acuti

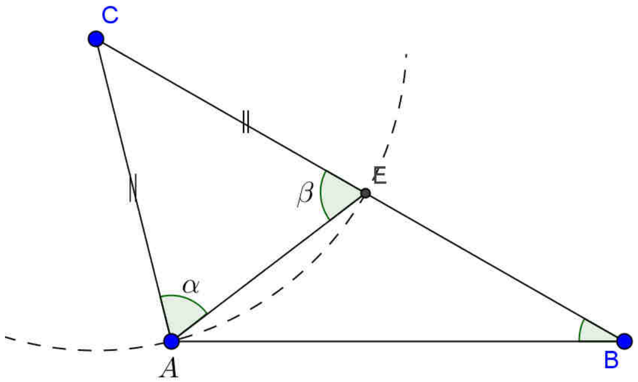


Teorema: *in un triangolo (non equilatero) a lato maggiore si oppone angolo maggiore.*

Dimostrazione

Ipotesi: $BC > AC$

Tesi: $\hat{A} > \hat{B}$



Puntando il compasso in C con apertura CA individuiamo E e quindi $CE \cong AC$.

congiungiamo A con E: poiché il triangolo $\overset{\Delta}{AEC}$ è isoscele i suoi angoli alla base sono uguali cioè si ha $\alpha \cong \beta$. Ma β è un angolo esterno del triangolo $\overset{\Delta}{ABE}$ e quindi $\beta > \hat{B}$.

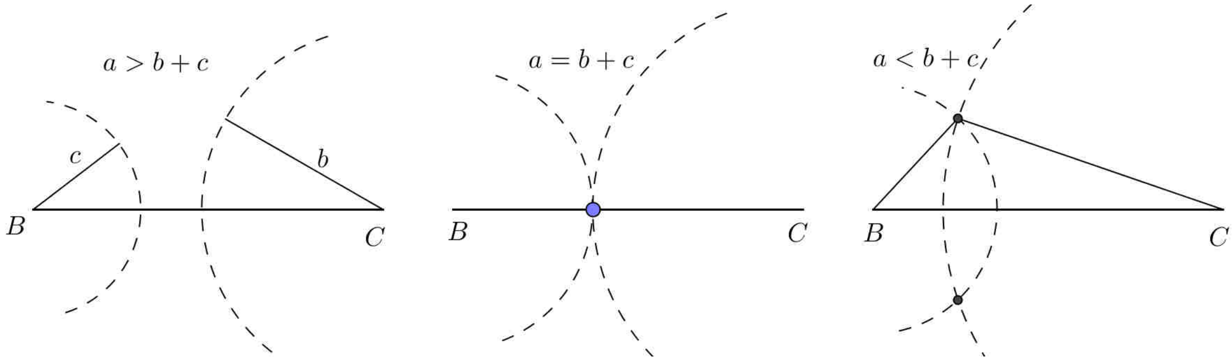
Ma α è interno ad $\hat{A}$ e quindi si ha $\alpha < \hat{A}$.

In conclusione si ha: $\hat{A} > \alpha \cong \beta > \hat{B}$ come volevamo dimostrare.

Teorema: *in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.*

Dimostrazione

Supponiamo di voler costruire con riga e compasso un triangolo di lati di lunghezza assegnata *a,b,c* e supponiamo che $a \geq b \geq c$.
Tracciamo il segmento BC di lunghezza a : per costruire il triangolo con riga e compasso puntiamo il compasso in B con apertura c e in C con apertura b e il triangolo si ottiene solo se $a < b + c$ (vedi anche la scheda di Geogebra).
(E' poi chiaro che la diseguaglianza vale anche per b e c).

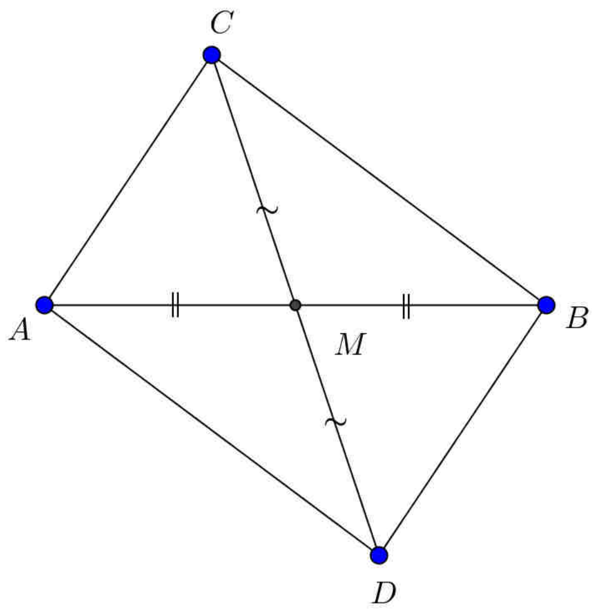


ESERCIZI

1) Considera un triangolo ABC qualsiasi e considera il punto medio M del lato AB. Traccia la mediana CM e prolungala, dalla parte di M, di un segmento $MD \cong CM$. Dimostra che il triangolo ABD è congruente al triangolo ABC.

Svolgimento guidato

Ipotesi: $AM \cong MB$, $CM \cong MD$
Tesi: $ABC \cong ABD$



Dimostrazione

I triangoli AMC e MBD sono congruenti per il primo criterio perché hanno

………………………

………………………

………………………

Quindi si avrà anche $AC \cong BD$, $C\hat{A}M \cong M\hat{B}D$.
Ma allora i triangoli ABC e ABD sono congruenti per il primo criterio avendo:

……………..

AB in comune

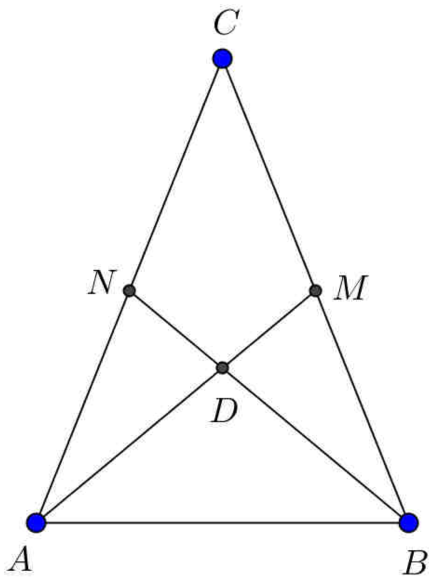
………………

2) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, traccia le mediane AM, BN relative ai lati obliqui e sia D il loro punto di intersezione. Dimostra che il triangolo ABD è isoscele.

Svolgimento guidato

Ipotesi: ABC triangolo isoscele di base AB;
M,N punti medi rispettivamente di BC e AC

Tesi: ABD triangolo isoscele



Dimostrazione

Poiché $AC \cong BC$, se N e M sono i punti medi avremo anche $AN \cong BM$.
I triangoli ABN e ABM sono congruenti per il primo criterio perché hanno:

AB in comune;

………………….

…………………..

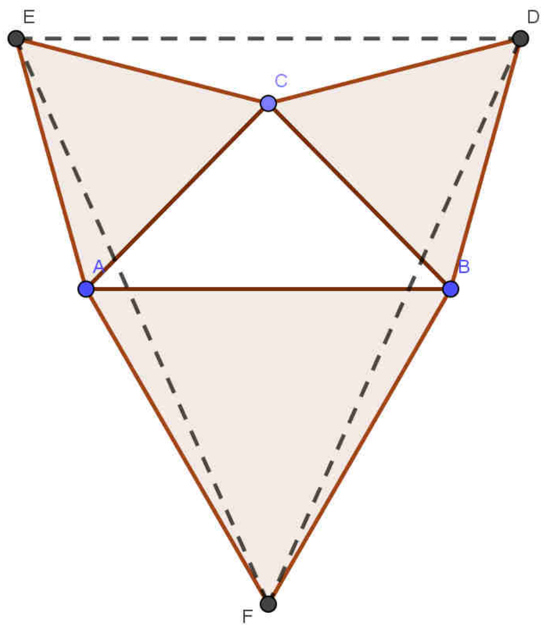
Di conseguenza anche gli angoli $M\hat{A}B$ e $N\hat{B}A$ sono congruenti e allora il triangolo ABD, avendo gli angoli alla base congruenti, risulta ……………………

3) Con il software Geogebra disegna un triangolo isoscele ABC di base AB e disegna su ciascun lato un triangolo equilatero: ABF, BCD, ACE.
Come ti sembra che risulti il triangolo DEF? Come potresti dimostrarlo?
E se ABC fosse stato equilatero?

Svolgimento guidato

Disegna il triangolo isoscele ABC:
costruisci un segmento AB, il suo punto medio M, la perpendicolare per M ad AB;
prendi un punto C su questa retta come "punto su oggetto" e congiungi con A e B;
nascondi la costruzione in modo che rimanga solo il triangolo isoscele ABC.

Disegna sui lati di ABC i triangoli equilateri con il comando "poligono regolare" (scegliendo 3 come numero di lati) e congiungi i vertici come in figura (rinomina i vertici).



Il triangolo DEF è …………… e si può verificare usando il comando "distanza" e misurando i segmenti ………………………………...
Per dimostrarlo possiamo osservare che i triangoli FDB e FAE sono …………… per il …………..criterio di congruenza dei triangoli avendo:

…………………………………………………………………………………………...

Quindi anche $FD \cong FE$ e il triangolo FDE è isoscele.

Se ABC fosse stato equilatero DEF sarebbe stato equilatero poiché ………..........................

4) Considera un triangolo isoscele ABC di base AB e traccia le bisettrici AE e BF degli angoli alla base. Indica con M il loro punto di intersezione. Dimostra che $AM \cong MB$.

5) Rispettivamente sui lati congruenti AC e BC del triangolo isoscele ABC considera due segmenti congruenti $CE \cong CF$: congiungi B con E e A con F ed indica con D il punto di intersezione dei segmenti BE e AF. Dimostra che il triangolo ABD è isoscele.

6) Disegna un triangolo ABC in cui la bisettrice AS è anche mediana. Dimostra che il triangolo ABC è isoscele.
Suggerimento: prolunga la bisettrice AS di un segmento $SE \cong AS$ e congiungi E con B. I triangoli ACS e BSE sono ………., il triangolo ABE è …………

7) Disegna due triangoli isosceli diversi tra loro ABC e ABD posti sulla stessa base AB, con i vertici C e D opposti rispetto alla base.. Dimostra che il segmento CD divide a metà la base AB. CD ha altre proprietà?

8) Nel triangolo equilatero ABC disegna le bisettrici degli angoli A e B ed indica con E il loro punto di intersezione. Dimostra che i triangoli ABE, BEC, AEC sono congruenti.

9) Sui lati di un triangolo equilatero ABC considera tre punti R, S, T in modo che risulti $AR \cong BS \cong CT$. Congiungi i tre punti. Dimostra che il triangolo RST è equilatero.

10) Dimostra che le mediane di un triangolo equilatero sono congruenti.

11) ***Motiva la costruzione con riga e compasso del punto medio di un segmento.***

Ricorda che la costruzione è la seguente: dato un segmento AB si punta il compasso prima in A e poi in B con la stessa apertura, maggiore di $\frac{AB}{2}$, e si individuano due punti C e D intersezione degli archi tracciati. Perché intersecando CD con AB si determina il punto medio di AB?

12) ***Motiva la costruzione con riga e compasso della bisettrice di un angolo.***

Ricorda che la costruzione è la seguente: dato un angolo di vertice O e lati a e b si punta il compasso nel vertice O e si traccia un arco con apertura a piacere individuando così due punti A e B sui lati dell'angolo. Si punta il compasso in A e in B con la stessa apertura e si individua un punto C……

13) Nel triangolo isoscele ABC di base AB, la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A incontra il prolungamento del lato BC nel punto E e la bisettrice dell'angolo esterno di vertice B incontra il prolungamento del lato AC nel punto F. Dimostra che i triangoli ABF e ABE sono congruenti.

14)

a) Considera un triangolo isoscele ABC di base BC e traccia l'altezza AH. Considera un punto Q su AH e dimostra che BQC è isoscele.

b) Prolunga QC dalla parte di Q fino ad incontrare AB in R e prolunga BQ fino ad incontrare AC in S. Dimostra che $BR \cong SC$.

15) Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB da ambo le parti di due segmenti congruenti AF e BE. Dimostra che i triangoli AEC e BCF sono congruenti.

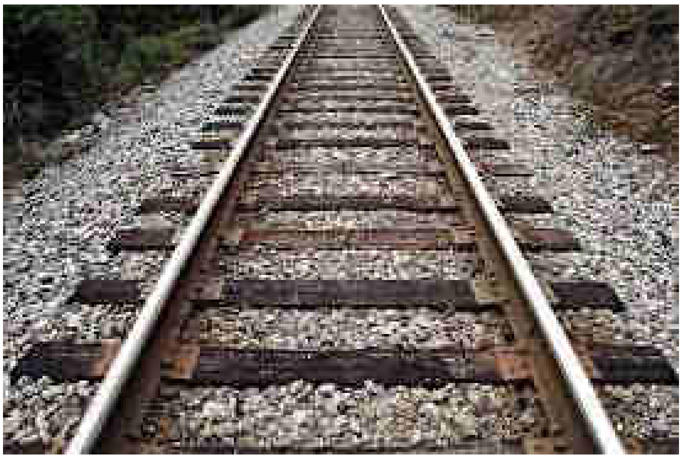
16) Nel triangolo ABC scegli a caso tre punti: D su AB, E su BC, F su AC. Dimostra che la somma dei lati del triangolo DEF è minore della somma dei lati del triangolo ABC.

Suggerimento: nel triangolo ADF si ha che $FD < AF + AD$ ……

17) Sui lati congruenti AB e AC di un triangolo isoscele disegna rispettivamente i segmenti AM e AN fra loro congruenti. Congiungi i punti M e N con il punto medio H della base BC. Dimostra che il triangolo MNH è isoscele.

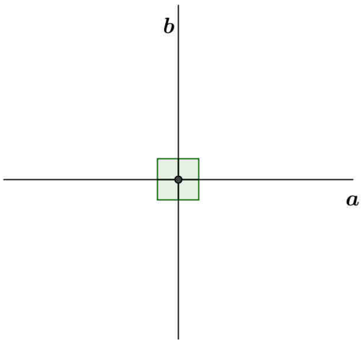
18) Disegna un triangolo isoscele ABC di base BC. Prolunga i lati AB e AC dalla parte di B e di C di due segmenti BD e CE tra loro congruenti. Indica con M il punto medio della base BC. Dimostra che i triangoli ADM e AEM sono congruenti.

GEOMETRIA EUCLIDEA
Rette perpendicolari e parallele



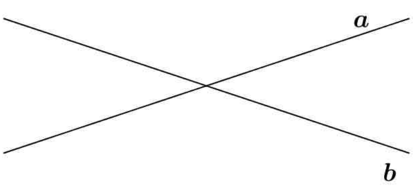
Rette perpendicolari

Definizione: *due rette incidenti* (che cioè si intersecano in un punto) *si dicono perpendicolari quando dividono il piano in quattro angoli retti.*

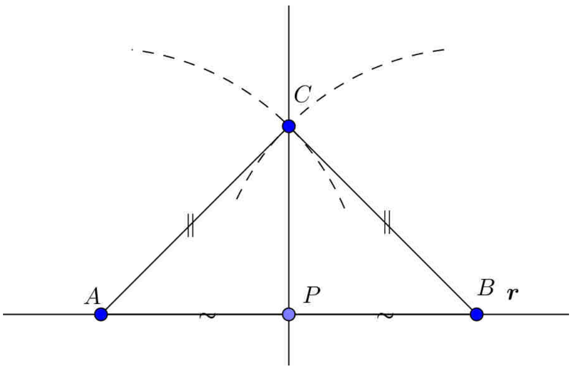


Per indicare che la retta *a* è perpendicolare alla retta *b* si scrive $a \perp b$.

Due rette incidenti che non sono perpendicolari si dicono *oblique*.

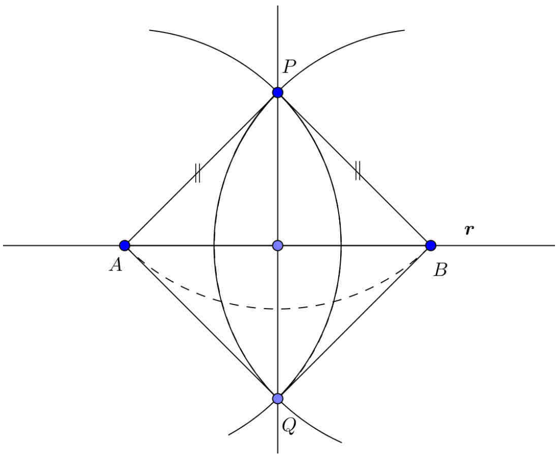


Teorema : *esistenza e unicità della perpendicolare per un punto dato P ad una retta data r.*



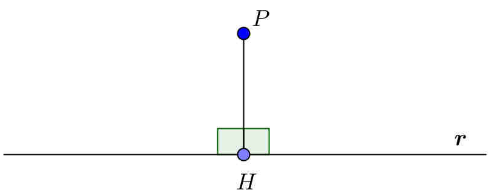
a) Supponiamo che $P \in r$.

Consideriamo due punti A,B appartenenti ad r tali che $AP \cong PB$. Puntando con il compasso in A con apertura a scelta (maggiore di AP) e in B con la stessa apertura individuiamo C tale che $AC \cong BC$. Congiungendo P con C si ha la retta perpendicolare cercata poiché nel triangolo isoscele ABC la mediana CP è anche altezza.



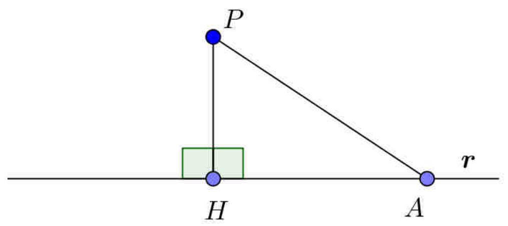
b) Supponiamo che $P \notin r$.
Puntiamo il compasso in P con un'apertura sufficiente ad intersecare in due punti A, B la retta r . Con la stessa apertura puntiamo il compasso in A e B e troviamo P e Q come intersezione dei due archi. Congiungendo P e Q troviamo la retta perpendicolare cercata: infatti i triangoli APQ e PQB sono triangoli isosceli uguali per il 3° criterio (AP$\cong$PB, AQ$\cong$BQ, PQ in comune) e quindi $APQ \cong QPB$. Ma allora nel triangolo isoscele APB PQ risulta bisettrice e quindi anche perpendicolare ad AB.

Definizione: la **distanza di un punto P da una retta** $\boldsymbol{r}$, $P \notin r$, *è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto P e il piede della perpendicolare condotta da P a r .*



H si chiama "*piede della perpendicolare*"
$\overline{PH}$ = distanza di P da r
H si dice anche "*proiezione ortogonale di P su r* "

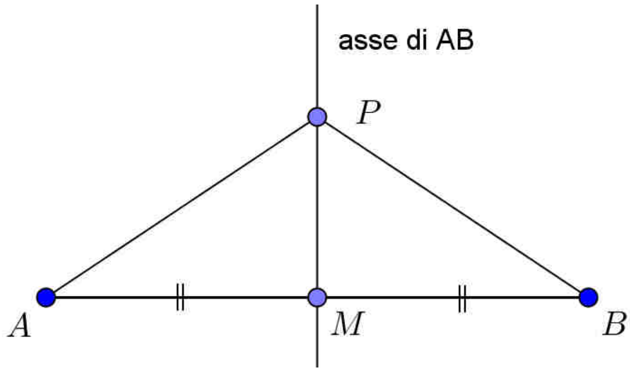
Teorema: *la distanza* $\overline{PH}$ *è minore di ogni segmento obliquo condotto da P a r .*



Il triangolo PHA è rettangolo e il cateto PH è minore dell'ipotenusa PA.

Definizione: *dato un segmento AB, si chiama* **asse di AB** *la retta perpendicolare ad AB passante per il suo punto medio.*

Teorema: *i punti appartenenti all'asse del segmento AB sono equidistanti da A e B e viceversa un punto equidistante da A e B appartiene all'asse di AB.*

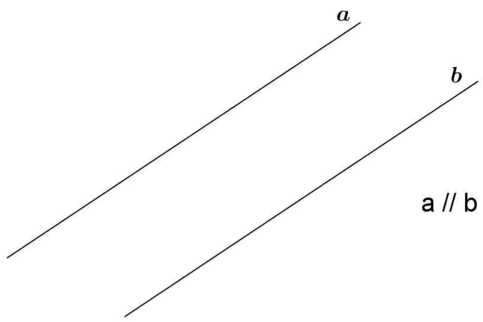


a) Se P appartiene all'asse del segmento AB i triangoli AMP e BMP sono congruenti per il 1° criterio ($AM \cong MB \cong$ $A\hat{M}P \cong B\hat{M}P \cong$ angolo retto , MP in comune) e quindi $PA \cong PB$.

b) Viceversa se P è equidistante da A e B cioè $PA \cong PB$ allora il triangolo ABP è isoscele : se M è il punto medio di AB , PM è mediana ma in un triangolo isoscele è anche altezza e quindi la retta per P e M è perpendicolare ad AB e in conclusione è l'asse di AB .

Rette parallele

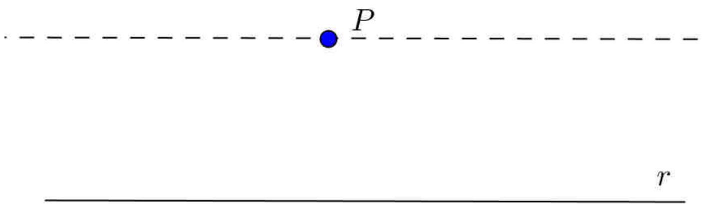
Definizione: *due rette distinte si dicono parallele quando non hanno nessun punto in comune.*



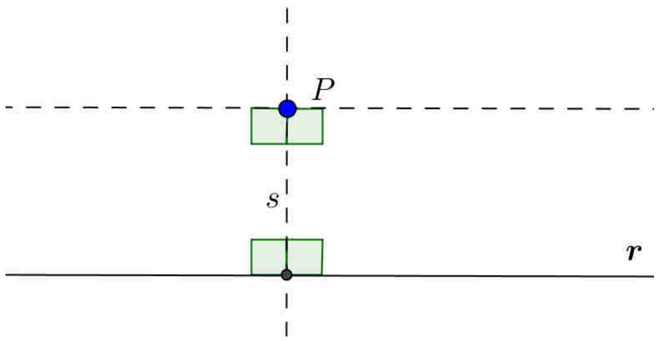
Enunciamo adesso un importante postulato (negli Elementi di Euclide è il quinto nella lista dei postulati).

Postulato dell'unicità della parallela per P ad una retta data

Data una retta r e un punto P non appartenente a r, esiste una e ***una sola retta passante per P e parallela a r****.*



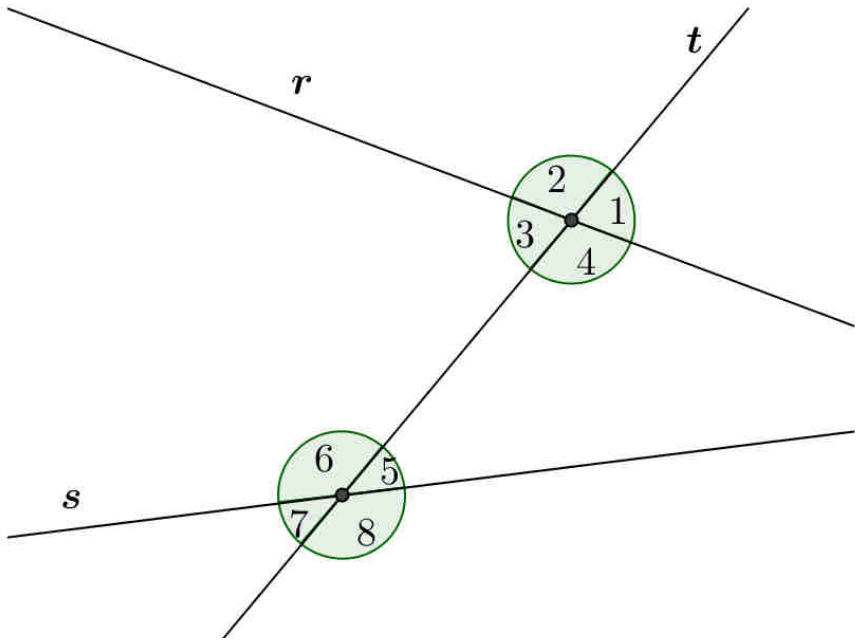
Nota: l'esistenza della parallela si può ricavare facilmente perché dato un punto P e una retta r, con $P \notin r$, si può costruire una retta per P parallela ad r per esempio tracciando la retta s passante per P e perpendicolare a r e poi la retta per P perpendicolare ad s (che risulterà parallela a r).



Invece (partendo dagli altri postulati) non è possibile dimostrare che la parallela per P alla retta r è unica ed è per questo che si introduce questo postulato : si possono costruire geometrie (le cosiddette "**geometrie non euclidee**") in cui questo postulato non è valido mentre rimangono validi tutti gli altri.

NOTA

Prima di enunciare alcuni teoremi relativi alle rette parallele introduciamo la denominazione usata per indicare i vari angoli formati da due rette *r* e *s* tagliate da terza retta *t* (detta trasversale)
Consideriamo due rette *r* e *s* intersecate da una terza retta *t* (che viene chiamata *trasversale*): si vengono a formare otto angoli che vengono così denominati



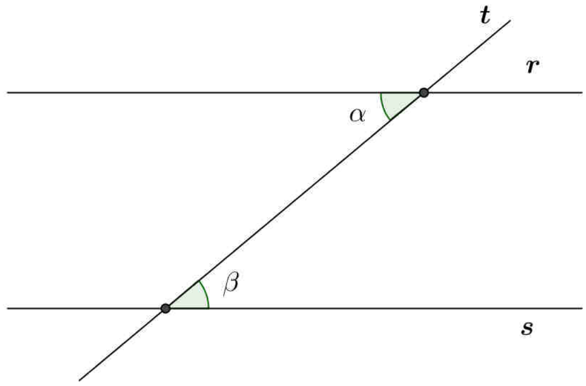
Angoli alterni interni: angoli 3-5; 4,6
Angoli alterni esterni: angoli 1-7; 2-8

Angoli corrispondenti: angoli 1-5; 4-8; 3-7; 2-6

Angoli coniugati interni: angoli 4-5; 3-6
Angoli coniugati esterni: angoli 1-8; 2-7

Vediamo adesso alcuni importanti teoremi riguardanti le rette parallele.

Teorema 1: *se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.*

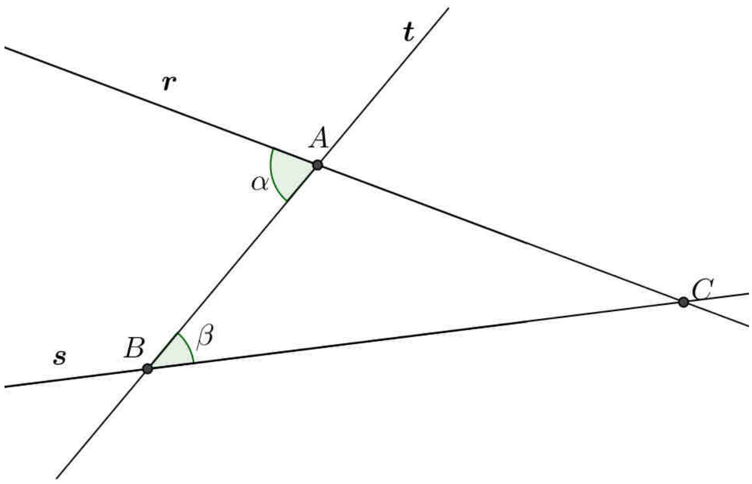


Ipotesi: $\alpha \cong \beta$
Tesi: $r \,//\, s$

Dimostrazione

Facciamo una dimostrazione che viene chiamata "**per assurdo**": *supponiamo cioè che la tesi del teorema sia falsa* (cioè nel nostro caso supponiamo che le rette non siano parallele) *e facciamo vedere che in questo caso arriviamo ad una contraddizione. Quindi la tesi del teorema deve essere vera.*

Supponiamo quindi che le rette *r* e *s* non siano parallele e che si incontrino in un punto C.



Se consideriamo il triangolo ABC, per il teorema dell'angolo esterno si dovrà avere

$$\alpha > \beta$$

ma questo contraddice la nostra ipotesi!

Non è possibile quindi che *r* e *s* siano incidenti e allora in conclusione sono parallele.

Più in generale abbiamo il seguente teorema:

Teorema 1 generalizzato: *se due rette tagliate da una trasversale formano*

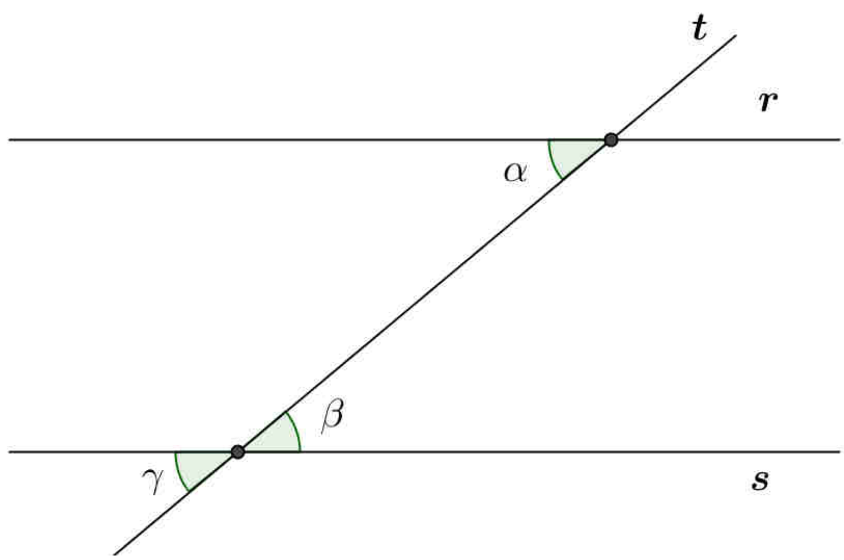
- *angoli alterni interni (esterni o interni) congruenti oppure*
- *angoli corrispondenti congruenti oppure*
- *angoli coniugati (interni o esterni) supplementari*

allora sono parallele.

Dimostrazione

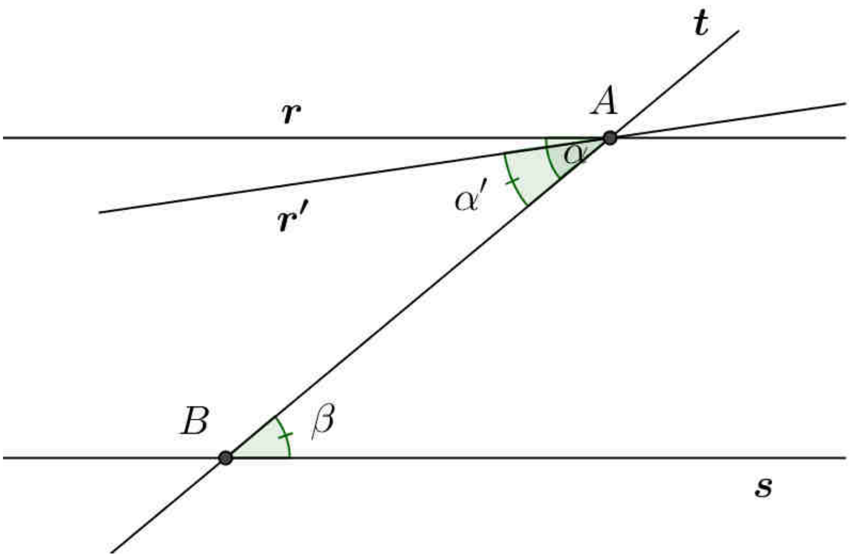
La dimostrazione è molto semplice poiché sfruttando l'uguaglianza degli angoli opposti al vertice o la proprietà che gli angoli adiacenti sono supplementari si possono dimostrare tutti i casi elencati a partire dal teorema precedente.

Dimostriamo per esempio che se $\alpha \cong \gamma$ *(angoli corrispondenti congruenti) allora le rette sono parallele*.
Poiché $\gamma \cong \beta$ (angoli opposti al vertice) avremo anche $\alpha \cong \beta$ (angoli alterni interni) e quindi per il teorema precedente le rette sono parallele.



Teorema 2 (*inverso del precedente*): *se due rette sono parallele cioè $r // s$, allora tagliandole con una qualunque retta t (trasversale) si formano angoli alterni interni congruenti.*

Ipotesi: $r // s$
Tesi: $\alpha \cong \beta$



Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $\alpha > \beta$: posso allora tracciare per A una retta *r'* tale che $\alpha' \cong \beta$.
Ma allora, per il teorema precedente, abbiamo che *r'* è parallela a *s* .

Di conseguenza per A passano due rette (*r* e *r'*) parallele ad *s* e questo è in contraddizione con il postulato dell'unicità della parallela per un punto ad una data retta.

Poiché con un ragionamento analogo possiamo cadere in contraddizione anche supponendo che $\alpha < \beta$ (basta considerare la retta per B tale che…), dobbiamo concludere che $\alpha \cong \beta$.

Più in generale abbiamo il seguente teorema

Teorema 2 generalizzato: *se due rette sono parallele, allora tagliandole con una trasversale formano:*

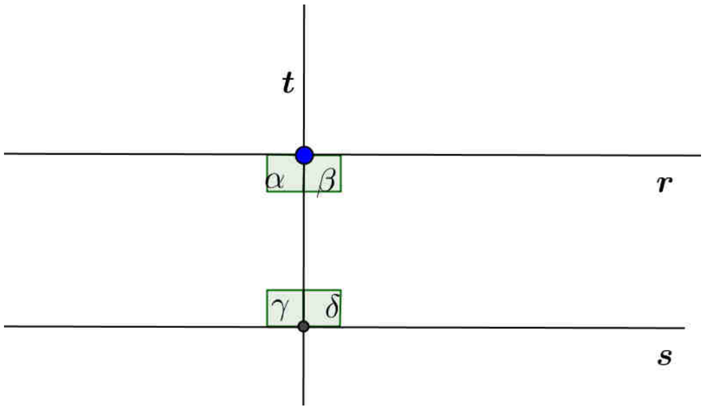
- *angoli alterni (interni e esterni) congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati (interni e esterni) supplementari.*

E' chiaro che la dimostrazione si basa, come per la generalizzazione del teorema 1, su considerazioni sulla congruenza degli angoli opposti al vertice ecc.

Osservazioni

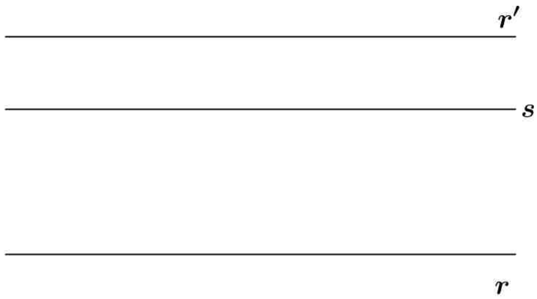
1) Se *r//s* allora se $t \perp r \Rightarrow t \perp s$

Infatti se α e β sono retti allora lo sono anche γ e δ.



2) Se *r//s e s//r'* $\Rightarrow r \,//\, r'$

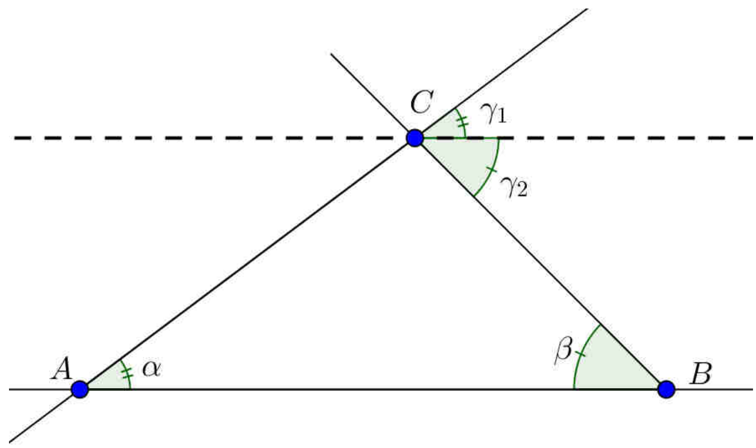
Infatti se *r* e *r'* fossero incidenti in P allora per P passerebbero due parallele a *s* in contraddizione con il postulato dell'unicità della parallela.



Da quest'ultimo teorema sulle rette parallele si deduce una proprietà molto importante dei triangoli.

Teorema *: la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto*

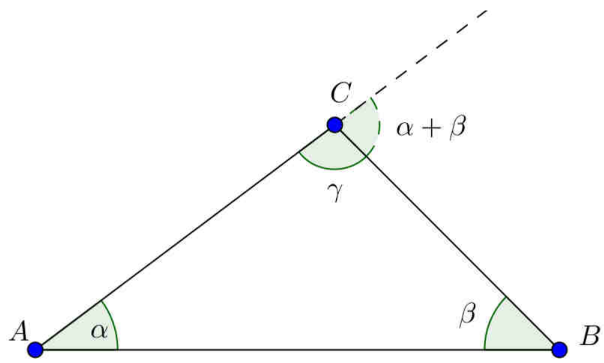
1) Dimostriamo prima che *in un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.*



Dimostrazione: tracciamo per C la retta parallela alla retta passante per A e B: abbiamo che

$\gamma_1 \cong \alpha$ perché corrispondenti rispetto alla trasversale AC;
$\gamma_2 \cong \beta$ perché alterni interni rispetto alla trasversale BC.
Quindi $\hat{C}_e = \gamma_1 + \gamma_2 \cong \alpha + \beta = \hat{A} + \hat{B}$

2) Dimostriamo ora che in un triangolo la somma degli angoli interni è congruente ad un angolo piatto.



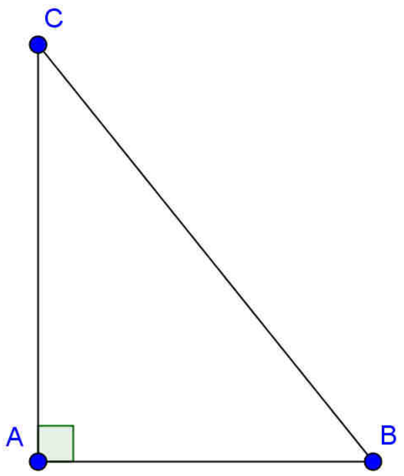
Dimostrazione: sappiamo, per teorema precedente, che $\hat{C}_e \cong \alpha + \beta$ ma poiché $\hat{C}_e$ è adiacente a γ risulta supplementare di γ e quindi abbiamo che

$$\alpha + \beta + \gamma \cong \hat{P}$$

Vediamo altre importanti proprietà dei triangoli che derivano da questo teorema.

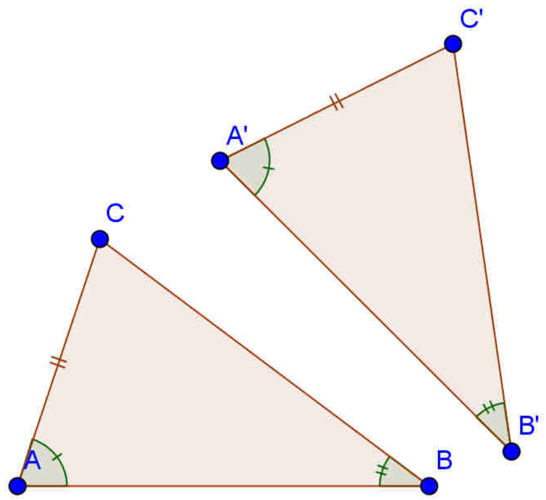
1) ***Se ABC è un triangolo rettangolo, gli angoli acuti sono complementari***

Infatti abbiamo che : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{R}+\hat{B}+\hat{C}\cong\hat{P}\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}\cong\hat{R}$ ($\hat{R}$ = angolo retto)



2) ***Se due triangoli hanno un lato e due angoli rispettivamente congruenti allora sono congruenti*** (*secondo criterio di congruenza dei triangoli generalizzato*).

Se infatti i due triangoli hanno due angoli congruenti, poiché la somma degli angoli interni è congruente ad un angolo piatto, anche il terzo angolo risulta necessariamente congruente e quindi al triangolo si può applicare il secondo criterio di congruenza dei triangoli.



3) ***Due triangoli rettangoli che hanno, oltre all'angolo retto, due elementi ordinatamente congruenti , che non siano i due angoli, sono congruenti***
(*criterio di congruenza per i triangoli rettangoli*)

Esaminiamo i vari casi.

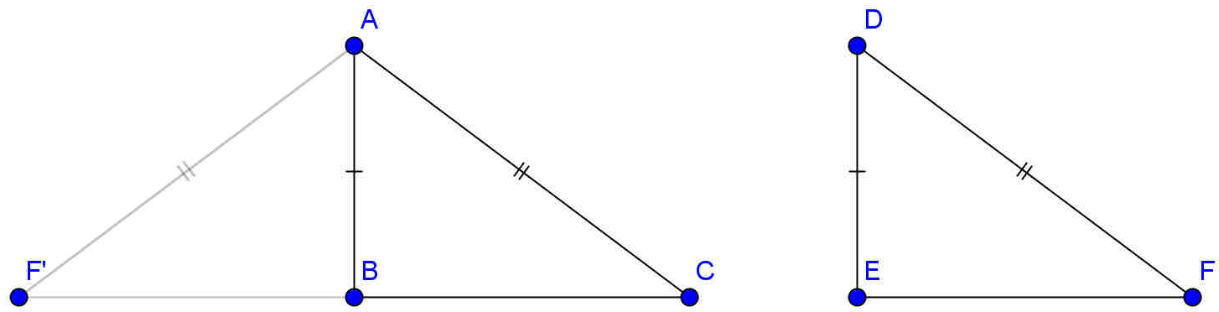
a) Se i due triangoli hanno i cateti rispettivamente congruenti risultano congruenti per il primo criterio di congruenza.

b) Se i due triangoli hanno congruenti un lato qualsiasi e un angolo acuto sono congruenti per il secondo criterio generalizzato.

c) Se i due triangoli hanno congruenti un cateto e l'ipotenusa vediamo come si dimostra che sono congruenti.

Consideriamo i triangoli rettangoli ABC e EDF retti in B ed E ed aventi

$$AB \cong DE \text{ e } AC \cong DF$$



Riportiamo il triangolo DEF nel semipiano di origine AB e che non contiene C in modo che il segmento DE coincida con il segmento AB e sia F' la nuova posizione del vertice F.

I punti F', B , C risultano allineati poiché gli angoli $F'\hat{B}A$ e $C\hat{B}A$ essendo retti e consecutivi sono adiacenti.

Se consideriamo allora il triangolo F'AC questo risulterà isoscele per ipotesi con altezza AB: ma allora AB è anche mediana e si ha

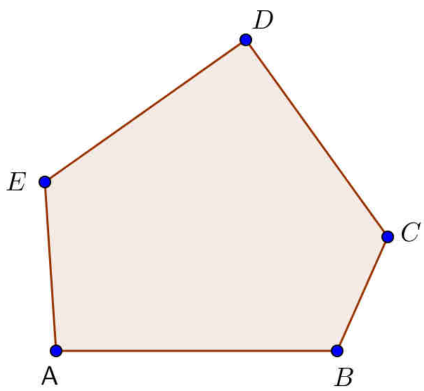
$$BC \cong F'B \text{ ma poiché } F'B \cong EF \text{ per la proprietà transitiva si ha } BC \cong EF$$

Ma allora i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio.

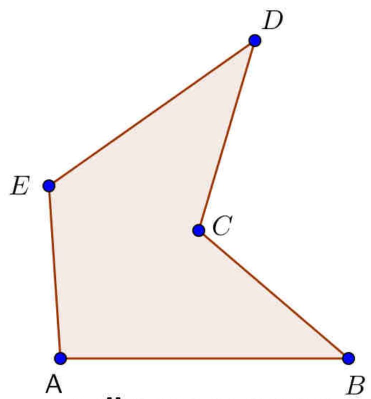
Poligoni

Definizione: si chiama “**poligono**” l’insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa non intrecciata e dai suoi punti interni.

I punti A,B,C,D ecc. si dicono vertici del poligono, il segmenti AB, BC ecc. si dicono lati del poligono.
Un poligono con più di tre lati può essere concavo o convesso (vedi figura).
Nel seguito, se non sarà specificato, *quando parleremo di poligono intenderemo poligono convesso.*



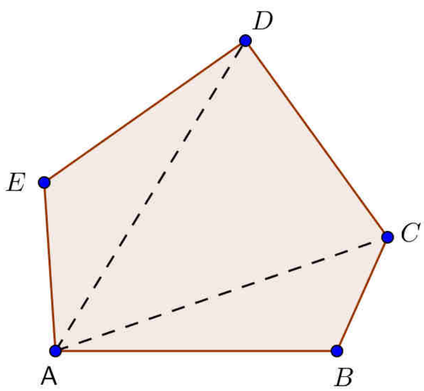
poligono convesso



poligono concavo

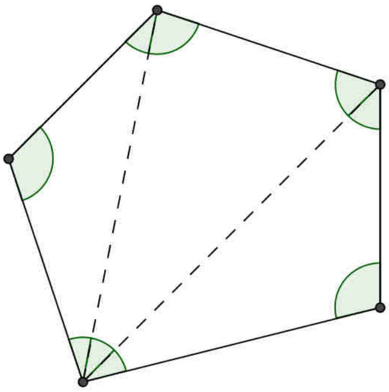
Un poligono viene denominato in modo diverso a seconda del numero dei lati: triangolo (3), quadrilatero (4), pentagono (5), esagono (6), eptagono (7), ottagono(8), ennagono(9), decagono (10) ecc.

Le **diagonali** di un poligono sono i segmenti che congiungono due vertici non consecutivi: in figura per esempio sono state disegnate le diagonali uscenti da A.



Un poligono si dice **regolare** se ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti.
Per esempio un triangolo equilatero è un poligono regolare.

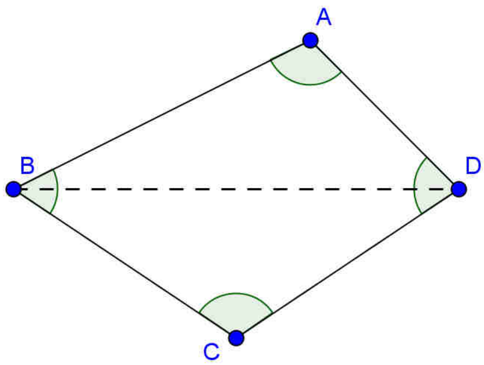
Teorema: *la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati risulta* $(n-2)\cdot \hat{P}$



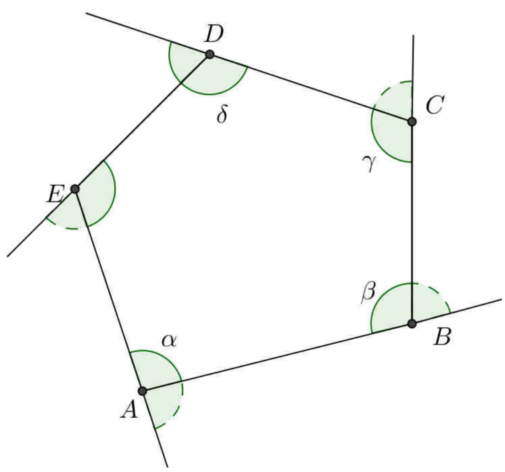
Dividiamo il poligono in *n-2* triangoli tracciando le diagonali uscenti da un dato vertice: poiché la somma degli angoli interni di ogni triangolo è congruente ad un angolo piatto avremo che la somma degli angoli interni di un poligono convesso sarà uguale a $(n-2)\cdot \hat{P}$

Esempio: se $n=4$ cioè se consideriamo un quadrilatero convesso avremo che la somma degli angoli interni risulta $(4-2)\cdot \hat{P} = 2\cdot \hat{P}$ (angolo giro).

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} \cong 2\cdot \hat{P}$ (angolo giro)



Teorema: *la somma degli angoli esterni di un poligono convesso risulta sempre congruente ad un angolo giro.*
Consideriamo un poligono convesso di *n* lati.
Abbiamo che :



$\hat{A}_e + \alpha \cong \hat{P}$; $\hat{B}_e + \beta \cong \hat{P}$ ecc.

Quindi : $(\hat{A}_e + \alpha) + \left(\hat{B}_e + \beta\right) + ... \cong n\cdot \hat{P}$

Ma poiché

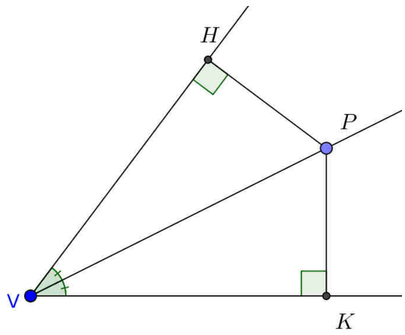
$\alpha + \beta + ... \cong (n-2)\cdot \hat{P} \Leftrightarrow \alpha + \beta + ... \cong n\cdot \hat{P} - 2\cdot \hat{P}$

si avrà in conclusione che

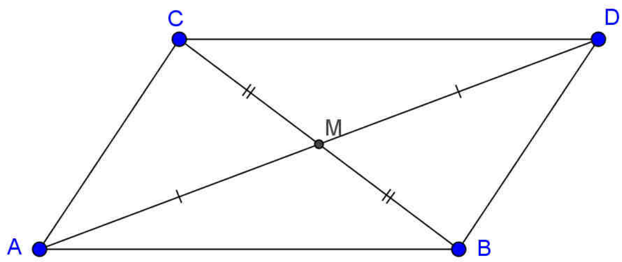
$$\hat{A}_e + \hat{B}_e + ... \cong 2\cdot \hat{P}$$

ESERCIZI

*1) *Dimostra che tutti i punti appartenenti alla bisettrice di un angolo dato sono equidistanti dai lati dell'angolo.*
Suggerimento: se P è un qualsiasi punto della bisettrice dell'angolo di vertice V, tracciamo le perpendicolari PH e PK ai lati dell'angolo. I triangoli rettangoli VPH e VKP risultano …………..poiché hanno ……………………………………….e quindi $PH \cong PK$

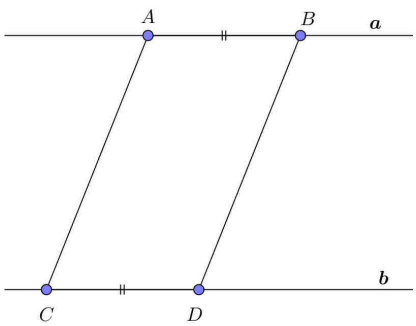


2) Dato un triangolo ABC, prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che la retta DB è parallela ad AC e la retta CD è parallela ad AB.



3) Dato il triangolo isoscele ABC di base AB, dimostra che la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C è parallela alla base.

4) Considera due rette parallele a e b . Sulle due rette scegli due segmenti congruenti AB e CD come in figura. Dimostra che $AC \cong BD$ e che la retta AC // retta BD.
Suggerimento: congiungi A con D e dimostra che i triangoli ACD e ADB sono congruenti….



5) Dal vertice C del triangolo ABC traccia il segmento CD congruente ad AB e parallelo alla retta per A e B. Dimostra che il triangolo BCD è congruente al triangolo ABC.

6) Dato un triangolo isoscele ABC, traccia una retta parallela alla base AB che intersechi i lati obliqui. Essa incontra il lato AC in E e il lato BC in F. Dimostra che il triangolo ECF è isoscele. Dimostra inoltre che $EB \cong AF$.

7) Da ogni vertice del triangolo ABC traccia la retta parallela al lato opposto. Dimostra che i tre triangoli che si formano sono congruenti al triangolo ABC.

8) Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB di un segmento $BE \cong AC$. Dimostra che $A\hat{B}C \cong 2 \cdot B\hat{E}C$.

9) Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB in modo che l'angolo $\hat{A}$ sia doppio dell'angolo al vertice $\hat{C}$. La bisettrice AD dell'angolo $\hat{A}$ divide il triangolo dato in due triangoli ADC e ABD. Dimostra che i due triangoli sono isosceli.

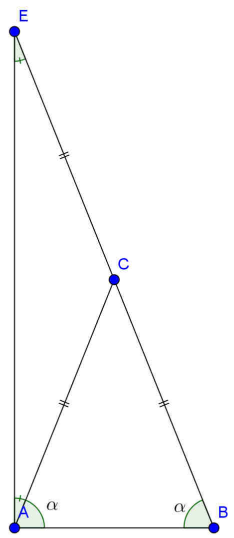
10) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, traccia l'altezza AD relativa al lato obliquo BC. Dimostra che l'angolo $D\hat{A}B$ è metà dell'angolo $\hat{C}$.

11) Considera un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB e traccia l'altezza CH relativa ad AB. Dimostra che i triangoli ACH e CHB hanno gli angoli congruenti a quelli di ABC.

12) Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB, traccia una retta *r* perpendicolare ad AB in modo che incontri il lato AC in E e il prolungamento del lato BC in F. Dimostra che il triangolo ECF è isoscele sulla base EF.
Suggerimento: traccia la retta che contiene l'altezza CH……

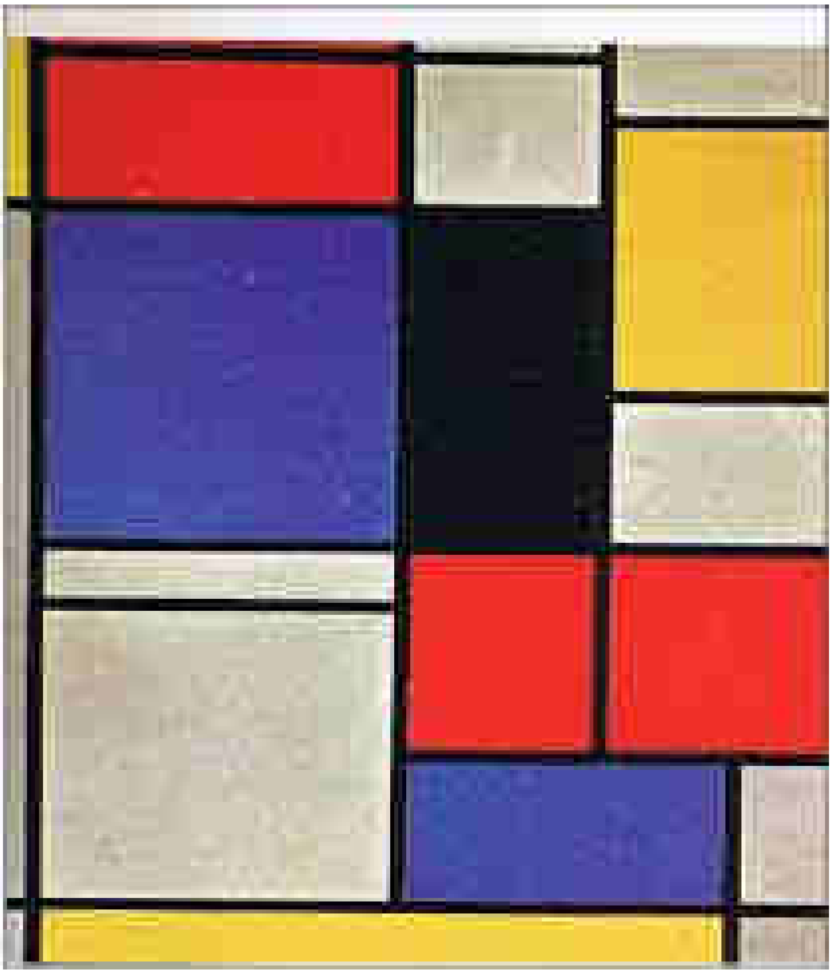
13) Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB. Prolunga il lato BC di un segmento $CE \cong CB$ e poi congiungi E con A. Dimostra che il triangolo ABE è rettangolo in A.

Suggerimento: gli angoli $E\hat{A}C$ e $C\hat{E}A$ sono congruenti e $A\hat{C}B \cong E\hat{A}C + C\hat{E}A$ …l'angolo $E\hat{C}A \cong 2\alpha$ (per il teorema dell'angolo esterno) ….



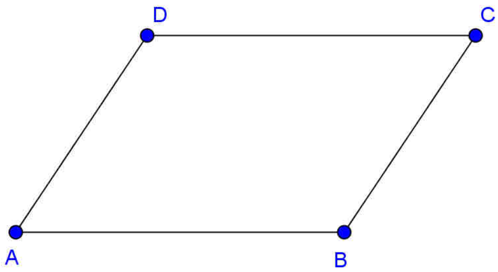
GEOMETRIA EUCLIDEA
I quadrilateri

Il



Il parallelogramma

Definizione: *un parallelogramma è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli*



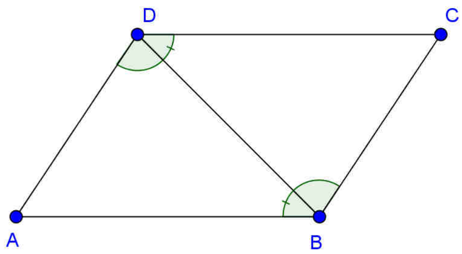
AB // DC

AD // BC

Teorema : *se ABCD è un parallelogramma allora*

- *ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;*
- *i lati opposti sono congruenti;*
- *gli angoli opposti sono congruenti;*
- *gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari;*
- *le diagonali si incontrano nel loro punto medio*

Dimostrazione



Tracciamo la diagonale BD: i triangoli ABD e BDC sono congruenti per il 2° criterio di congruenza dei triangoli poiché hanno :

BD in comune ,

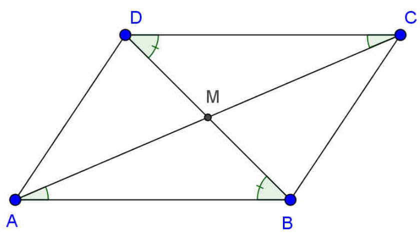
$A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$ (alterni interni delle parallele AB,DC)

$A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ (alterni interni delle parallele AD,BC)

Analogamente, tracciando l'altra diagonale, individuiamo triangoli congruenti.
Di conseguenza gli angoli opposti del parallelogramma sono congruenti e i lati opposti sono congruenti.

Gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari perché coniugati interni delle rette parallele AB, DC oppure AD,BC.

Per dimostrare l'ultima proprietà, tracciate entrambe le diagonali e detto M il loro punto di intersezione, consideriamo i triangoli ABM e DCM: sono congruenti per il 2° criterio avendo:



$AB \cong DC$, $A\hat{B}M \cong M\hat{D}C$ (alterni interni) , $B\hat{A}M \cong M\hat{C}D$ (alterni interni)

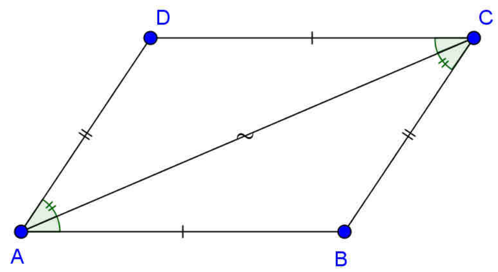
Quindi abbiamo anche $AM \cong MC$, $BM \cong MD$
cioè le diagonali si tagliano scambievolmente a metà.

Teorema: *se un quadrilatero convesso ha una delle seguenti proprietà*

a) i lati opposti congruenti
b) gli angoli opposti congruenti
c) le diagonali che si incontrano nel loro punto medio
d) due lati opposti congruenti e paralleli

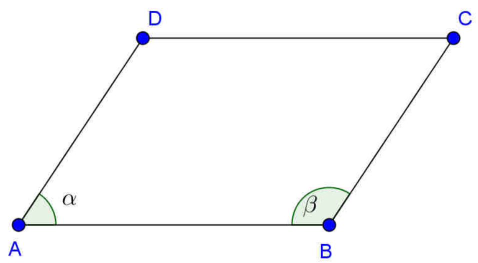
allora risulta un parallelogramma.

Dimostrazione
a) Tracciamo la diagonale AC: i triangoli ABC e ACD sono congruenti per il 3° crietrio.



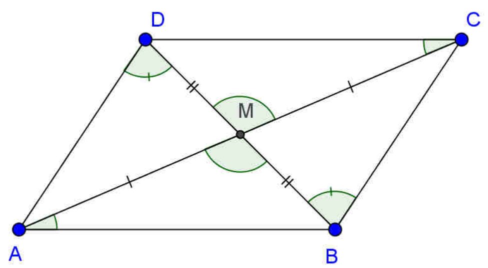
Ma allora $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ e quindi AB // DC , ma si ha anche $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ e quindi AD // BC .

b) Se gli angoli opposti sono congruenti, poiché la somma degli angoli interni è $2 \cdot \hat{P}$ (e angoli piatti) $\Rightarrow \alpha + \beta \cong \hat{P}$. Ma α e β sono coniugati interni delle rette AD, BC tagliate dalla trasversale AB e quindi AD // BC.



Analogamente $\hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P}$ e di conseguenza AB // DC .

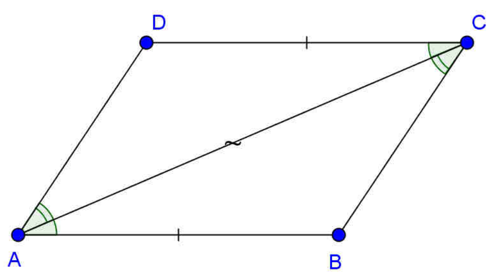
c) I triangoli ABM e CDM sono congruenti per il 1° criterio poiché :



$A\hat{M}B \cong C\hat{M}D$ (angoli opposti al vertice)
$AM \cong MC$, $BM \cong MD$ (per ipotesi)

Di conseguenza $B\hat{A}M \cong M\hat{C}D$ e quindi AB // DC.
Analogamente i triangoli AMD e BMC sono congruenti e quindi $A\hat{D}M \cong M\hat{B}C \Rightarrow$ AD // BC .

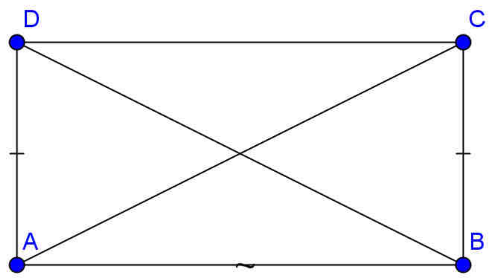
d) Tracciamo la diagonale AC: i triangoli ABC e ACD sono congruenti per il 1° criterio (vedi figura) $\Rightarrow D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ (angoli alterni interni) e quindi AD // BC .



Il rettangolo

Definizione : *un rettangolo è un parallelogramma avente tutti gli angoli tra loro congruenti (quindi tutti retti).*

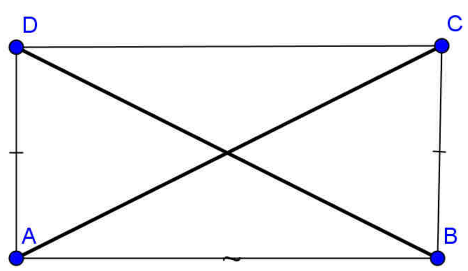
Teorema: *un rettangolo ha le diagonali congruenti*



Ipotesi: ABCD rettangolo
Tesi: $AC \cong BD$

I triangoli ABD e ABC sono congruenti per il 1° criterio poiché hanno:
$AD \cong BC$ (lati opposti di un parallelogramma);
AB in comune;
$\hat{A} \cong \hat{B}$ (angolo retto)
Di conseguenza avremo anche $AC \cong BD$

Teorema: *se un parallelogramma ha le diagonali congruenti allora è un rettangolo.*

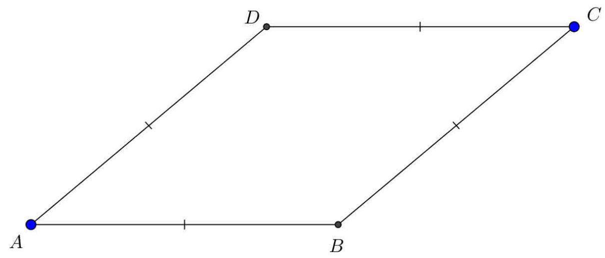


Ipotesi: ABCD parallelogramma con $AC \cong BD$
Tesi: ABCD è un rettangolo

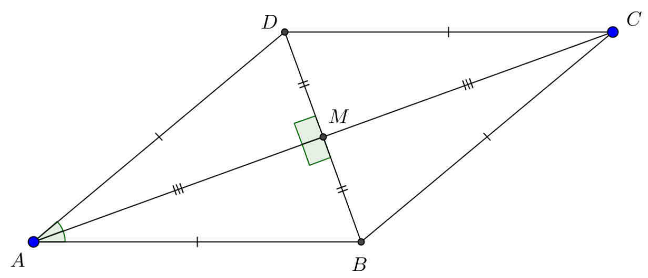
I triangoli ABD e ABC sono congruenti per il 3° criterio e quindi avremo anche $D\hat{A}B \cong A\hat{B}C$.
Ma poiché ABCD è un parallelogramma, questi angoli sono supplementari e quindi, se sono uguali, sono angoli retti.

Il rombo

Definizione : *un rombo è un parallelogramma aventi tutti i lati tra loro congruenti.*

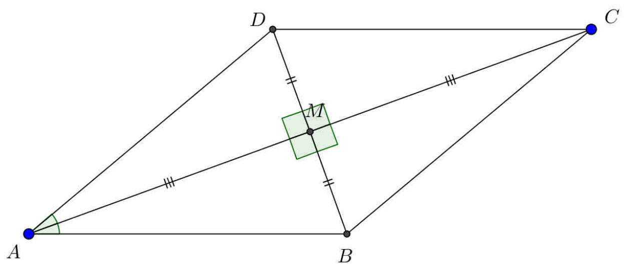


Teorema : *in un rombo le diagonali sono perpendicolari e bisettrici degli angoli.*



Poiché il rombo è un parallelogramma le sue diagonali si incontrano nel loro punto medio.
Ma il triangolo ABD risulta isoscele e poiché AM è mediana è anche altezza e bisettrice.
In modo analogo considerando il triangolo ACD la mediana DM è anche altezza e bisettrice.

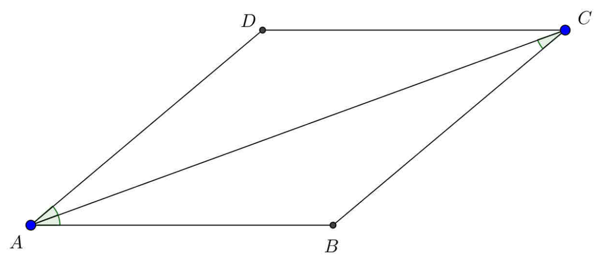
Teorema: *se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari allora è un rombo.*



Poiché ABCD è un parallelogramma le diagonali si incontrano nel loro punto medio e quindi $AM \cong MC$. Quindi i triangoli AMD e DMC sono congruenti per il 1° criterio e allora abbiamo $AD \cong DC$ e quindi ABCD è un rombo.

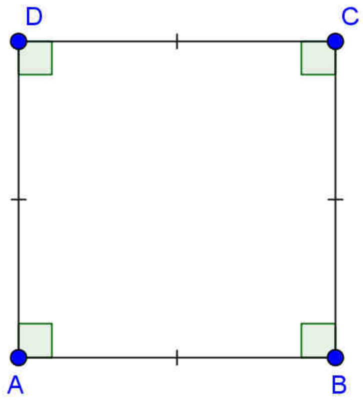
Teorema : *se un parallelogramma ha una diagonale bisettrice di un angolo allora è un rombo.*

Per ipotesi $D\hat{A}C \cong C\hat{A}B$ ma $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ (alterni interni) $\Rightarrow$ ABC è isoscele $\Rightarrow$ $AB \cong BC$ e quindi ABCD è un rombo.

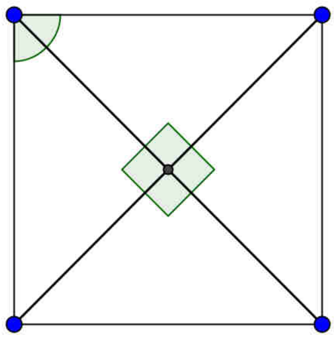


Il quadrato

Definizione : *un quadrato è un parallelogramma avente i lati e gli angoli congruenti (è un rettangolo e un rombo)*



Quindi gode delle proprietà del rettangolo e del rombo.
Un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari fra loro e bisettrici degli angoli.



Teorema

a) se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari allora è un quadrato

b) se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo allora è un quadrato

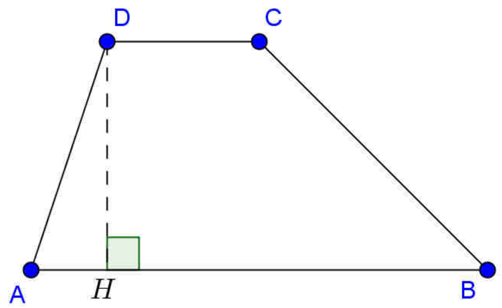
Dimostrazione

a) Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti è un rettangolo e se le diagonali sono perpendicolari è un rombo.
Di conseguenza, essendo un rettangolo e un rombo, è un quadrato.

b) Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti è un rettangolo e se una diagonale è bisettrice di un angolo è un rombo e quindi è un quadrato.

Il trapezio

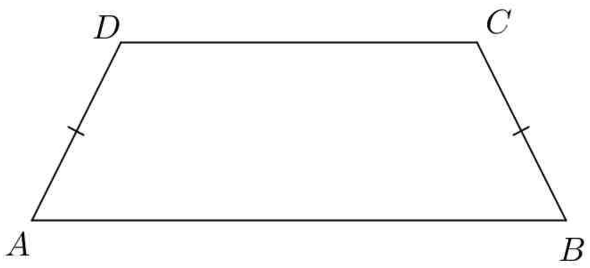
Definizione: *un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli.*



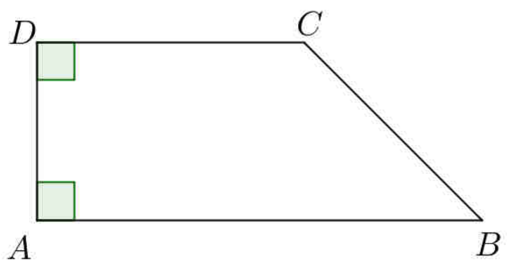
AB // DC

I lati paralleli si chiamano **basi** (base maggiore, base minore); la distanza tra le basi è detta **altezza** del trapezio; i lati non paralleli si dicono **lati obliqui** del trapezio.

Un trapezio si dice **isoscele** se ha i lati obliqui congruenti.
Un trapezio si dice **rettangolo** se uno dei lati obliqui è perpendicolare alle basi (e quindi la sua lunghezza è uguale all'altezza).



trapezio isoscele



trapezio rettangolo

Teorema: *in un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.*
Dimostrazione

Tracciamo le altezze DK, CH: poiché il quadrilatero DCHK è un rettangolo avremo $DK \cong CH$.
Quindi i triangoli rettangoli ADK e HBC sono congruenti (hanno congruenti ipotenua-cateto) e di conseguenza $\alpha \cong \beta$.

Inoltre, poiché $\hat{D}$ è supplementare di $\hat{A} = \alpha$ e $\hat{C}$ supplementare di $\hat{B} = \beta$, avremo anche $\hat{D} \cong \hat{C}$

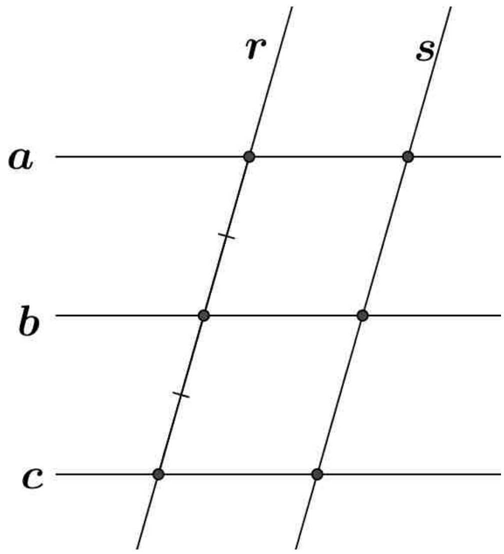
Teorema: *se in un trapezio gli angoli adiacenti a una delle basi sono congruenti allora il trapezio è isoscele.*
Dimostrazione

Supponiamo per esempio che $D\hat{A}B \cong A\hat{B}C$. Come nel teorema precedente tracciamo le altezze CH, CK ed abbiamo che $DK \cong CH$. Quindi i triangoli ADK e HBC sono congruenti….

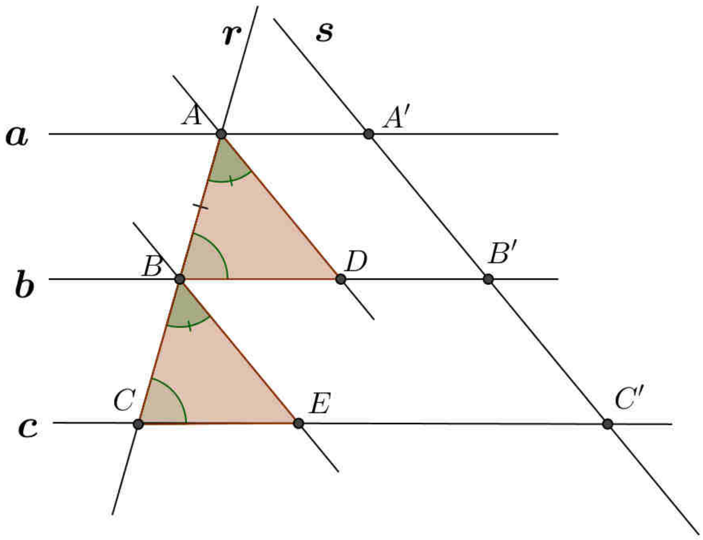
SCHEDA 1

Consideriamo tre rette parallele a,b,c tagliate da due rette r e s: ***se i segmenti intercettati sulla retta r sono congruenti allora anche i segmenti intercettati sulla retta s sono congruenti***.

1) Supponiamo che $r // s$: in questo caso ……………………………………………………………



2) Supponiamo che r e s siano incidenti:



tracciamo la retta per A parallela ad s che individua sulla retta b un punto D: essendo AA'B'B un parallelogramma avremo $AD \cong A'B'$;

tracciamo per B la retta parallela ad s che individua sulla retta c un punto E: essendo BB'C'E un parallelogramma avremo $BE \cong B'C'$.

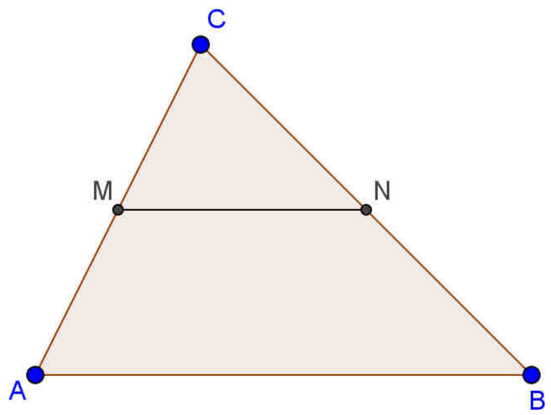
Consideriamo i triangoli ABD e BCE : risultano congruenti per il secondo criterio poiché

…………………………………………………………………………………………………

Di conseguenza $AD \cong BE$ e quindi …………………………..

SCHEDA 2

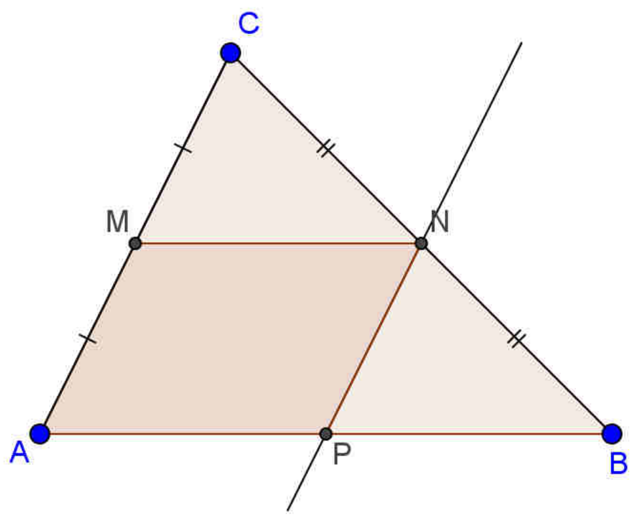
Consideriamo un triangolo ABC e congiungiamo i punti medi M e N di due lati (vedi figura).
Come risulta il segmento MN?



Supponiamo di tracciare la retta per C parallela ad AB: se tracciamo anche la parallela per M questa, per quello visto nella scheda 1, dovrebbe incontrare il lato BC nel punto medio N e quindi coincide con la retta MN.
In conclusione MN è ……………………..al lato AB.

Inoltre possiamo dimostrare che $MN \cong \frac{1}{2} AB$.

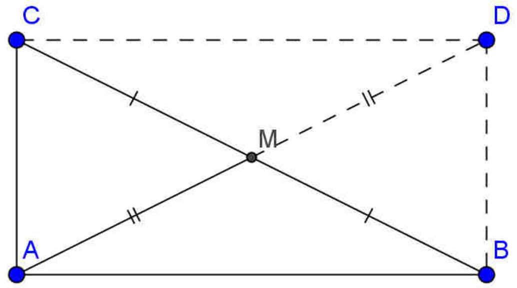
Infatti se tracciamo per N la retta parallela ad AC che incontra in P il lato AB avremo che MNPA risulta un ………………………… e inoltre, sempre pensando che ci sia anche una retta per B parallela a AC ed applicando il risultato della scheda 1, $AP \cong PB$.



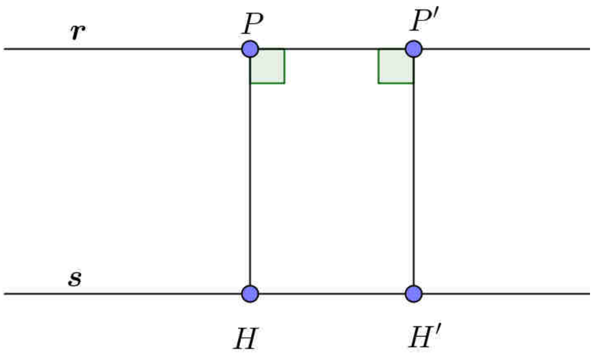
In conclusione quindi…………………………

ESERCIZI

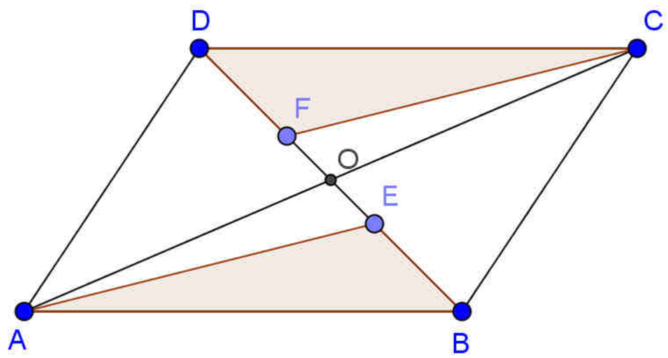
1) Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.
Suggerimento: prolunga la mediana AM di un segmento $MD \cong AM$ e considera ABDC….



2) Dimostra che, date due rette parallele r e s, ogni punto di ciascuna retta ha la stessa distanza dall'altra.
Suggerimento: se $PH \perp r \Rightarrow PH \perp s$ ….



3) Considera un parallelogramma ABCD le cui diagonali si intersecano in O. Scelti E e F come in figura con $OE \cong OF$ dimostra che i triangoli AEB e CFD sono congruenti.



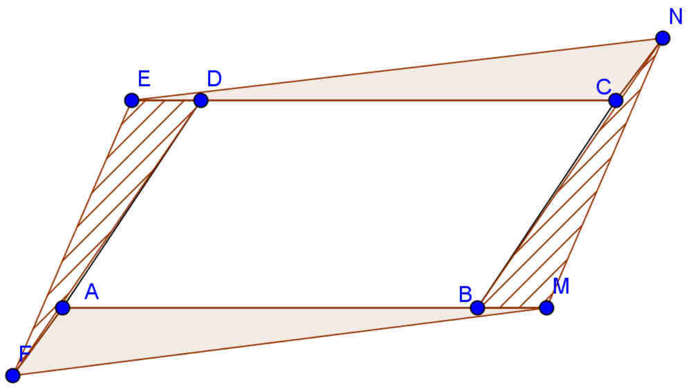
4) Disegna un triangolo ABC e la mediana CM; prolunga CM di un segmento $MD \cong CM$. Dimostra che ADBC è un parallelogramma.

5) Nel triangolo ABC prolunga il lato AC di un segmento $CE \cong AC$ e il lato BC di un segmento $CF \cong BC$. Dimostra che ABEF è un parallelogramma.

6) In un parallelogramma ABCD traccia le perpendicolari da A e da B alla retta CD e chiama rispettivamente H e K i piedi delle perpendicolari. Dimostra che i triangoli AHD e BKC sono congruenti.

7) In un parallelogramma ABCD traccia le bisettrici degli angoli interni $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Esse si incontrano in E. Dimostra che $A\hat{E}B$ è un angolo retto.

8) In un parallelogramma ABCD prolunga, sempre nello stesso verso, ogni lato in modo da ottenere i segmenti BM, CN, DE, AF congruenti tra loro. Dimostra che EFMN è un parallelogramma.
Suggerimento: i triangoli AFM e ECN sono congruenti poiché….; i triangoli BMN e EDF sono congruenti poiché…. e quindi….



9) Nel triangolo isoscele ABC di base AB, prolunga i lati AC e BC dei segmenti CE e CF congruenti a BC. Dimostra che il quadrilatero ABEF è un rettangolo.

10) Dato il triangolo rettangolo ABC, con l'angolo retto in A, da un punto P dell'ipotenusa traccia il segmento PH perpendicolare ad AB e poi PK perpendicolare a AC. Dimostra che AHPK è un rettangolo.

11) Nel parallelogramma ABCD le bisettrici dei quattro angolo, incontrandosi, determinano il quadrilatero EFGH. Dimostra che è un rettangolo.

12) Nel rombo ABCD, M,N,E,F sono i punti medi dei lati. Dimostra che il quadrilatero MNEF è un rettangolo.

13) Nel rombo ABCD l'angolo $\hat{A}$ è doppio dell'angolo $\hat{B}$. Dimostra che la diagonale minore AC è congruente al lato del rombo.

14) Dimostra che, se su una diagonale di un rombo si prendono due punti equidistanti dagli estremi, unendo tali punti con gli altri due vertici del rombo si ottiene un altro rombo.

15) Considera un triangolo rettangolo isoscele ABC con angolo retto in A. La mediana AM è prolungata di un segmento ME congruente ad AM. Dimostra che il quadrilatero ABEC è un quadrato.

16) Disegna un rettangolo ABCD e su ogni lato costruisci, esternamente al rettangolo, quattro triangoli rettangoli isosceli in modo che i lati del rettangolo siano le ipotenuse dei triangoli. Indica con P, Q, R, S i vertici degli angoli retti. Dimostra che PQRS è un quadrato.

17) Nel quadrato ABCD indica con M, N, E, F i punti medi dei lati. Dimostra che MNEF è un quadrato. Se M, N, E, Fsono diversi dai punti medi ma tali che $AM \cong BN \cong EC \cong DF$ si può ancora dire che MNEF risulta un quadrato?

18) Disegna un quadrato ABCD e prolunga AB di un segmento BE, BC di un segmento CF, CD di un segmento DG, DA di un segmento AH, tutti congruenti tra loro. Dimostra che EFGH è un quadrato.

19) Considera un triangolo isoscele ABC di base AB e traccia le altezze AH e BK. Dimostra che ABHK è un trapezio isoscele.

20) Dimostra che le diagonali di un trapezio isoscele sono congruenti.

21) Dimostra che se un trapezio ha le diagonali congruenti allora è isoscele.
Suggerimento: se CD è la base minore, traccia le altezze CH e DK e considera i triangoli CHA e DKB ….

22) Dimostra che in un trapezio isoscele le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore sono congruenti.

23) In un trapezio ABCD le diagonali AC e BD, incontrandosi nel punto O, formano i triangoli isosceli ABO e CDO. Dimostra che il trapezio è isoscele.

24) Dimostra che due trapezi sono congruenti se hanno i lati ordinatamente congruenti.
Suggerimento: devi dimostrare che i trapezi hanno anche tutti gli angoli ordinatamente congruenti.
Da un estremo della base minore traccia una retta parallela a uno dei lati obliqui….

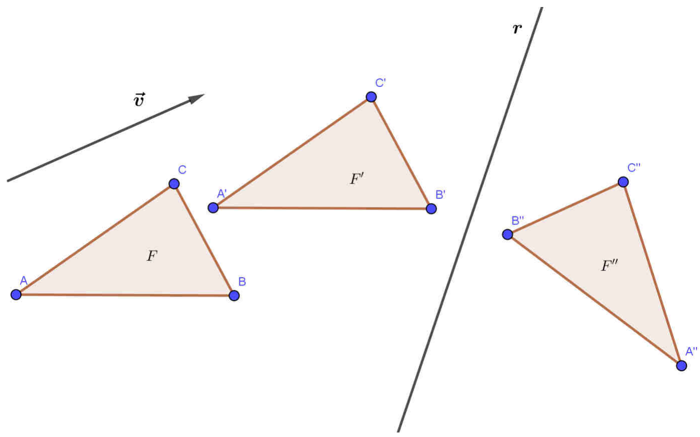
25) Considera un trapezio isoscele con i lati obliqui congruenti alla base minore. Dimostra che le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

GEOMETRIA EUCLIDEA
Isometrie

Le isometrie del piano sono trasformazioni geometriche che conservano forma e dimensione di della figura a cui sono applicate: se trasformiamo una figura del piano con un'isometria **la figura trasformata è congruente alla figura iniziale** ed infatti il termine isometria deriva dal greco e significa *iso* = stessa *metria* = misura.
Le principali isometrie del piano sono:

- traslazioni;
- rotazioni intorno ad un punto di un dato angolo;
- simmetrie rispetto ad una retta.

Le isometrie possono anche essere "composte" tra loro cioè *applicate in successione*: se ad una figura F, per esempio al triangolo ABC in figura, applichiamo la traslazione del vettore $\vec{v}$ e poi alla figura F' che abbiamo ottenuto applichiamo la simmetria rispetto alla retta *r* otterremo la figura F''.

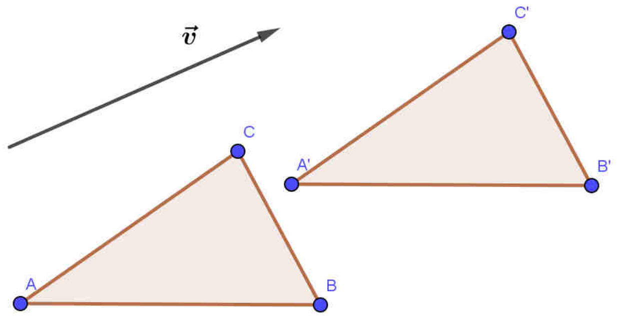


Nota: l'ordine in cui si eseguono le trasformazioni è importante, cioè invertendo l'ordine delle trasformazioni il risultato finale spesso cambia. Se nel nostro esempio avessimo prima effettuato la simmetria e poi la traslazione non avremmo ottenuto la stessa figura finale (fai la prova).
Utilizzeremo il software Geogebra per esplorare le isometrie.

Traslazione di un dato vettore

Disegna un triangolo ABC (con il comando poligono), poi costruisci un vettore con il comando "**vettore**" selezionando con il mouse un punto e poi un altro punto.

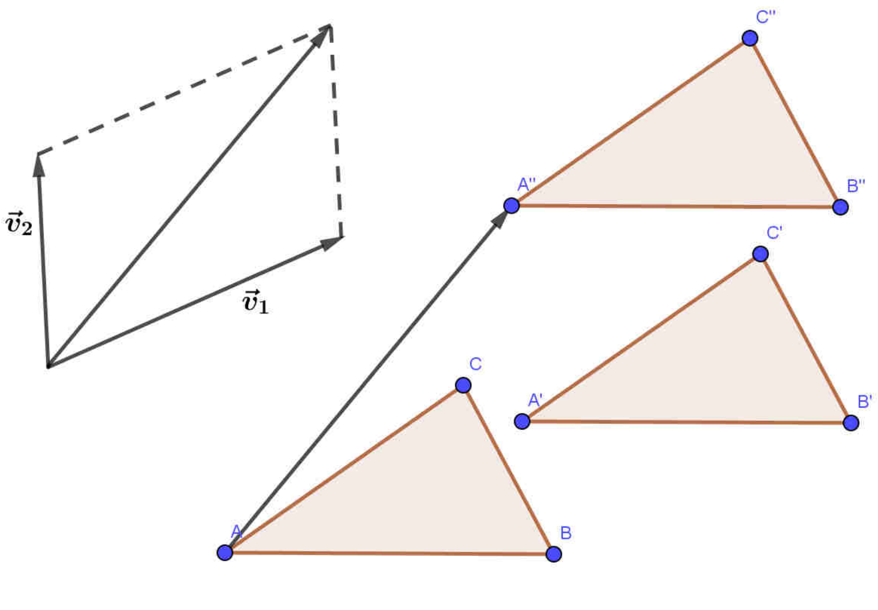
Attiva il pulsante *"traslazione*" : seleziona il triangolo che vuoi traslare e poi il vettore che hai costruito.



Osserva che i lati corrispondenti del triangolo risultano……………………………………………

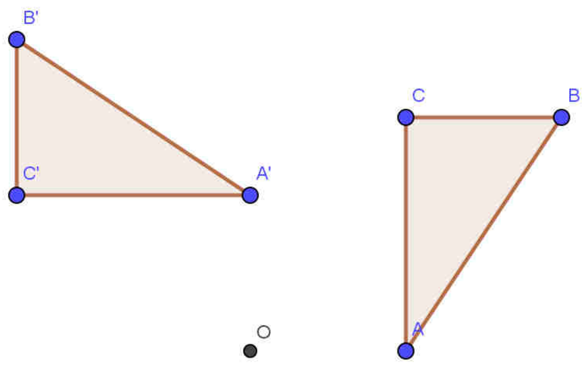
Composizione di traslazioni

La composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ corrisponde alla traslazione di vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ cioè alla traslazione del vettore "somma" dei due vettori e in questo caso l'ordine in cui si eseguono le due traslazioni è indifferente.



Rotazione intorno ad un punto

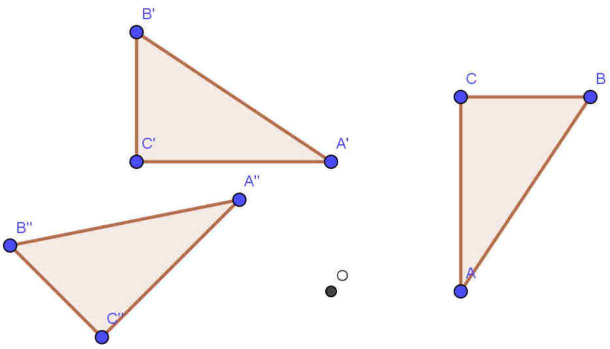
Costruiamo un punto O (centro di rotazione), un poligono e **attiviamo il pulsante “rotazione”** : seleziona prima l’oggetto da ruotare , nel nostro caso il poligono, poi il centro di rotazione O e poi digita la misura dell’angolo di rotazione (per esempio 90°): osserviamo che viene chiesto di specificare se la rotazione deve essere in senso orario o antiorario (se inseriamo $-90°$ antiorario corrisponde a 90° orario).



Osserviamo che i lati corrispondenti della figura formano lo stesso angolo dell’angolo di rotazione (nel nostro esempio 90°).

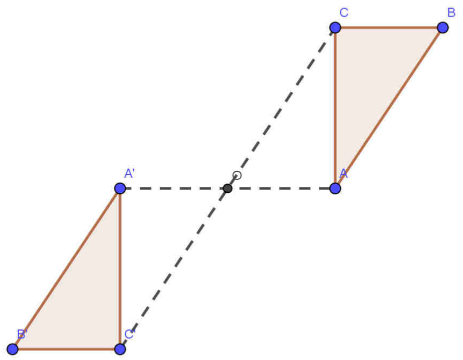
Composizione di rotazioni aventi lo stesso centro
Se le rotazioni hanno lo stesso centro otteniamo una rotazione avente lo stesso centro e come angolo la somma algebrica degli angoli (considerando positivi gli angoli “antiorari” e negativi quelli “orari”).

In figura il triangolo è stato prima ruotato di 90° e poi di 45° intorno ad O.



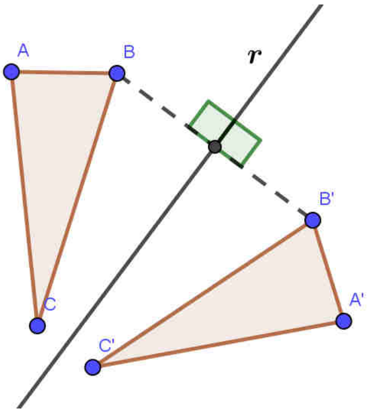
Rotazione di 180° intorno ad O (simmetria di centro O)

Se ruotiamo una figura di 180° vediamo che i punti corrispondenti si trovano alla stessa distanza da O sulla stessa retta ma da parti opposte: questa particolare rotazione viene anche chiamata simmetria di centro O.



Simmetria rispetto ad una retta
Simmetria assiale

Fissata una retta r e costruito un poligono attiviamo il comando "simmetria assiale": selezioniamo il poligono e poi la retta.

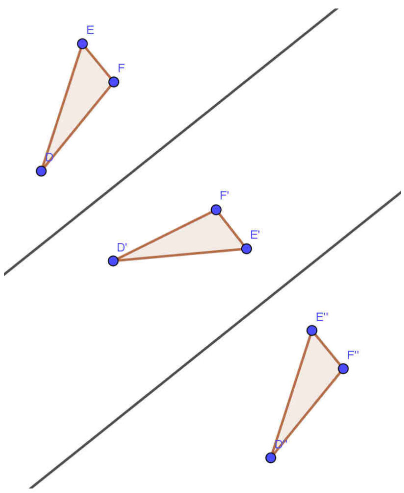


La retta asse di simmetria è asse del segmento che ha per estremi punti corrispondenti.

Osservazione
Consideriamo la figura: se percorriamo il poligono iniziale seguendo l'ordine delle lettere A.B.C giriamo in senso orario, mentre se percorriamo il poligono simmetrico sempre seguendo l'ordine A', B', C' stiamo girando in senso antiorario.

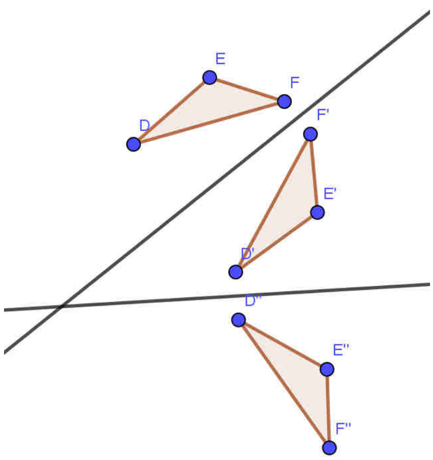
Composizione di due simmetrie assiali

a) Se gli assi di simmetria sono paralleli otteniamo ……………..



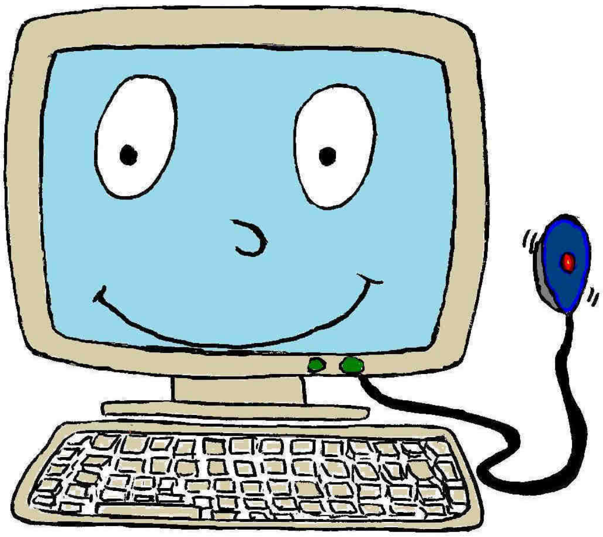
E' importante l'ordine in cui si eseguono le due trasformazioni?

b) Se gli assi di simmetria sono incidenti otteniamo ……………



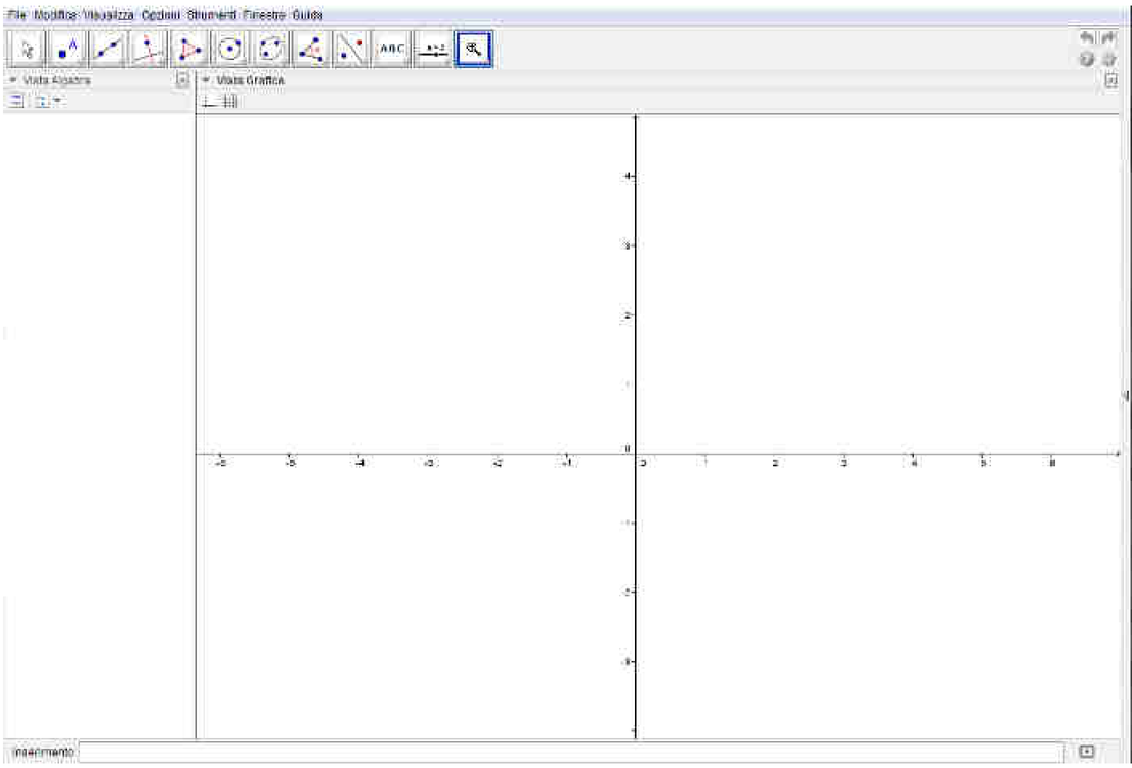
E' importante l'ordine in cui si eseguono le due trasformazioni?

Laboratorio di informatica



INTRODUZIONE

Per lo studio della geometria piana utilizzeremo un software chiamato Geogebra (GEOmetria e alGEBRA) che può essere scaricato gratuitamente da Internet.
Apriamo Geogebra.
Compare un piano cartesiano ed in alto una barra di comandi (file,modifica ecc.) e una serie di "pulsanti" come in figura.



Proviamo a vedere a cosa servono i vari pulsanti.

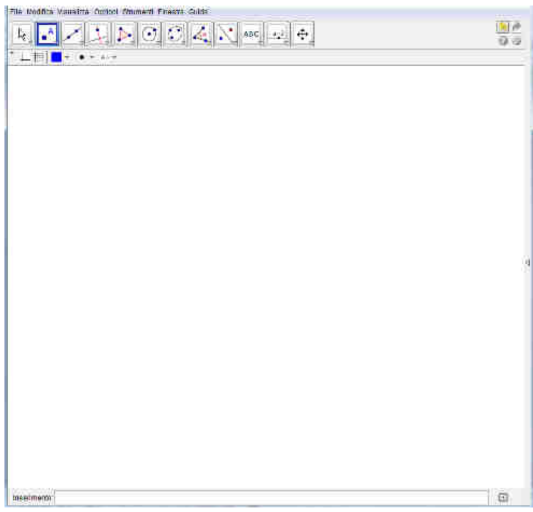
Innanzitutto osserviamo che se portiamo il puntatore del mouse sul triangolino in basso a destra, **il triangolino diventa rosso e compare una breve spiegazione dell'uso del pulsante**: se facciamo clic sul triangolino rosso si apre una finestra con tutte le varie operazioni collegate al pulsante.

Per esempio nel pulsante "nuovo punto" abbiamo: nuovo punto, punto su oggetto, punto medio ecc.
Se scegliamo una operazione , per esempio nuovo punto, e poi andiamo con il mouse sul piano, facendo clic disegneremo un punto.
Se sulla parte sinistra dello schermo è visibile la "**vista algebra**" compariranno anche le coordinate del punto che abbiamo disegnato.

Importante

Se non abbiamo bisogno del sistema di riferimento cartesiano possiamo toglierlo cliccando sul "pulsantino" con il disegno degli assi che si trova in alto a sinistra sotto la riga dei pulsanti (oppure con la successione di comandi Opzioni – avanzate – preferenze vista grafica – spuntare "Mostra gli assi" oppure **facendo clic con il tasto destro quando il puntatore è in un punto dello schermo e scegliendo "assi"**).

Possiamo inoltre chiudere la "vista Algebra" (finestra sulla sinistra) , in cui vengono riportate le coordinate dei punti o le equazioni delle curve che disegniamo, semplicemente cliccando sulla crocetta della Vista Algebra oppure con i comandi Visualizza – vista algebra.
In questo modo lo schermo *apparirà semplicemente come un foglio bianco* su cui disegnare.



Useremo questa modalità per le schede di Geometria euclidea.

Note importanti

a) Se vuoi che compaia la griglia quadrettata fai clic con il tasto destro del mouse e scegli "griglia".

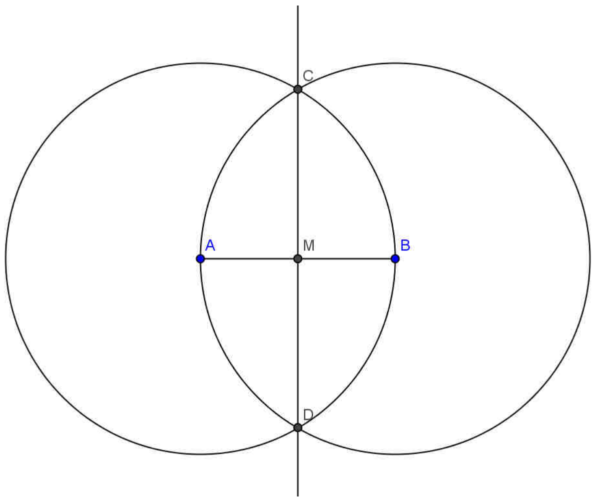
b) Ricordati sempre di impostare all'inizio della tue costruzioni ***Opzioni- etichettatura-solo i nuovi punti*** , altrimenti verranno "etichettati" con delle lettere tutti gli oggetti che costruirai (rette, circonferenze).

c) ***Se vuoi inserire un grafico all'interno di un documento per poi stamparlo*** devi:
- selezionare con il mouse la zona di foglio in cui si trova il tuo grafico;
- scegliere **file-esporta- esporta la vista grafica negli appunti** (equivale ad un crtl-C cioè ad un copia);
- andare nel documento dove vuoi inserire il grafico, posizionare il cursore nel punto esatto e premere ctrl-v ("incolla").

Laboratorio di informatica
SCHEDA 1

GEOMETRIA EUCLIDEA
Costruzione del punto medio di un segmento

Per costruire il punto medio di un segmento AB puoi procedere così:
- attiva il pulsante "punto" : crea il punto A e poi il punto B;
- attiva il pulsante "segmento per due punti": traccia il segmento AB;
- attiva "circonferenza-dati il centro e un punto": con centro in A e passaggio per B (per avere apertura AB) traccia una prima circonferenza; con centro in B e passaggio per A (per avere sempre apertura AB) traccia una seconda circonferenza;
- attiva il pulsante "intersezione di oggetti": interseca le due circonferenze determinando così due punti C, D;
- pulsante "retta per due punti": traccia la retta per C e D;
- pulsante "intersezione di oggetti": intersecando la retta per C e D con il segmento AB hai determinato il punto medio di AB.



Nota 1
Per chiamare M il punto medio (Geogebra nomina i punti con lettere in successione e quindi nel nostro caso lo ha nominato E) posizioniamoci sul punto e facciamo clic con il *tasto destro* del mouse: scegliamo *rinomina* e digitiamo M.

Metti alla prova la tua costruzione!

Prova a "muovere" gli estremi del segmento (seleziona "muovi" e **trascina** con il mouse il punto A o il punto B: *se la tua costruzione è corretta allora anche "muovendo" gli estremi A e B del segmento (quindi anche modificando il segmento) il punto M continuerà ad essere punto medio del segmento AB.*

Nota 2: Geogebra ha comunque il comando "punto medio" e quindi in seguito, se dovremo disegnare il punto medio di un segmento, ci converrà usare il comando senza fare tutta questa costruzione.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 2

GEOMETRIA EUCLIDEA
Costruzione della bisettrice di un angolo

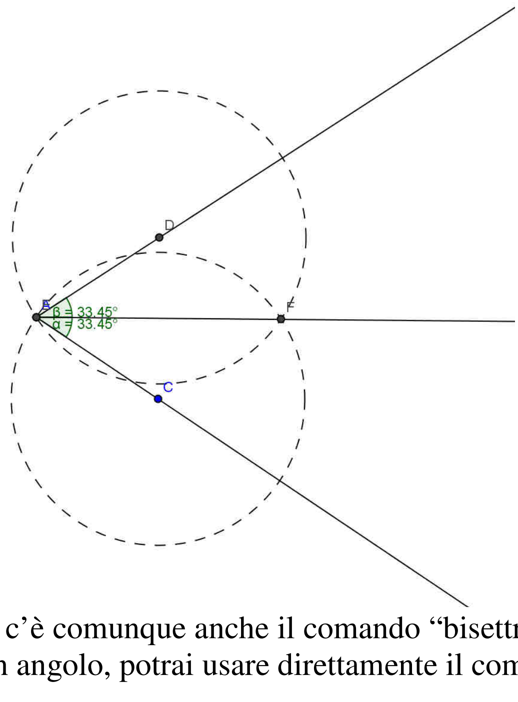
Per costruire la bisettrice di una angolo puoi procedere così:

- costruisci l'angolo usando il comando "semiretta" : prima la semiretta AB, poi la semiretta AC;
- nascondi il punto B (clic con il pulsante destro del mouse e mostra oggetto) e traccia la circonferenza di centro A e passante per C; interseca (intersezione di oggetti) con la semiretta AB ottenendo D (quindi $\overline{AC} = \overline{AD}$);
- punta in C e poi in D con la stessa apertura $\overline{AC}$ e intersechiamo ottenendo F;
- traccia la semiretta AF che sarà la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ (come si può verificare usando il pulsante che misura un angolo).

Nota: se la costruzione risulta pesante possiamo nascondere per esempio la circonferenza tracciata per avere il punto D e tratteggiare le altre due circonferenze (clic con il destro sulla circonferenza – proprietà – stile – tratteggio)

Metti alla prova la tua costruzione!

Se attiviamo il pulsante "muovi" e muoviamo il punto A o le semirette (cioè variamo l'angolo) *se la nostra costruzione è corretta* si ottiene sempre la bisettrice .



Nota: tra i comandi di Geogebra c'è comunque anche il comando "bisettrice" e quindi in seguito, se dovrai tracciare la bisettrice di un angolo, potrai usare direttamente il comando "bisettrice".

Laboratorio di informatica

SCHEDA 3

GEOMETRIA EUCLIDEA

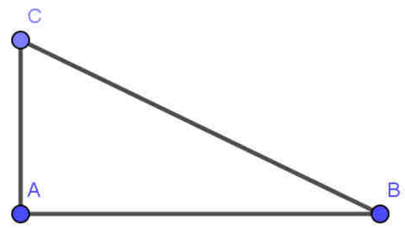
Costruzione di un triangolo rettangolo

Come possiamo costruire un triangolo rettangolo?

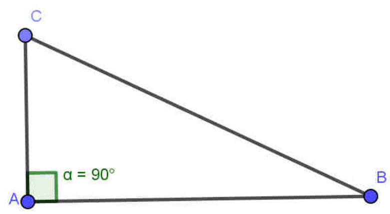
Ricorda che lavori su un foglio "bianco" (togli assi del sistema di riferimento e la griglia): comincia con il disegnare un segmento AB.

Per tracciare un segmento perpendicolare ad AB puoi utilizzare il comando "**retta perpendicolare"** che permette di tracciare la retta per un punto perpendicolare ad una retta data (basta fare clic sul punto e poi sulla retta).
Tracciata la retta perpendicolare ad AB e passante per A, scegli un punto C su di essa con il comando "**punto su oggetto**"e poi traccia il segmento AC.

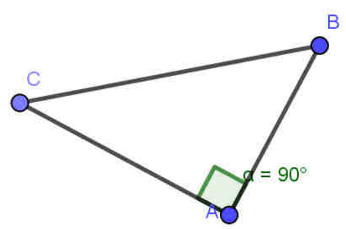
Infine puoi "nascondere" la retta facendo clic su di essa con il tasto destro e scegliendo "mostra oggetto" (in questo modo si nasconde /visualizza un oggetto) e tracciare il segmento BC.
Hai costruito il triangolo rettangolo ABC.



Puoi anche evidenziare l'angolo retto in A con il comando "angolo": facendo clic su B,A,C in successione verrà evidenziato l'angolo formato.



Metti alla prova la tua costruzione!
Come al solito prova a "muovere" il punto A o B o C: se la costruzione è corretta il triangolo cambia ma resta sempre rettangolo in A!



Laboratorio di informatica

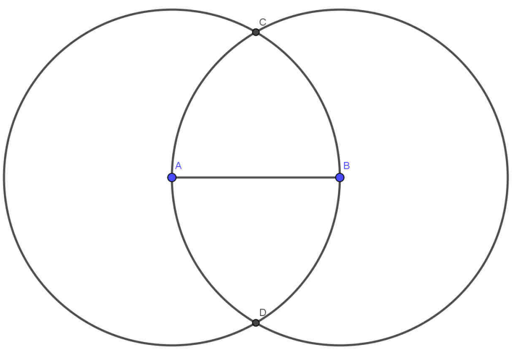
SCHEDA 4

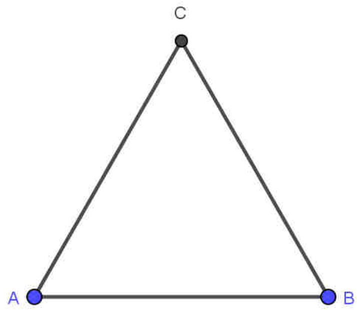
GEOMETRIA EUCLIDEA

Costruzione di un triangolo equilatero

Come possiamo costruire un triangolo equilatero?

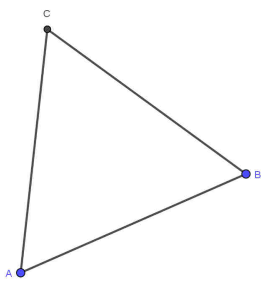
Comincia con il disegnare un segmento AB: traccia con il comando “circonferenza dati il centro e un punto”, la circonferenza di centro A e passante per B e poi la circonferenza di centro B e passante per A.
Scegli a questo punto il comando “Intersezione” e interseca le due circonferenze che hai disegnato facendo clic prima su una e poi sull’altra circonferenza: compariranno i due punti C e D di intersezione.





A questo punto poi “nascondere” la costruzione cioè nascondere le due circonferenze e il punto D e tracciare i segmenti AC e BC.
E’ chiaro che $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}$ cioè che il triangolo ABC è equilatero!

Metti alla prova la tua costruzione!
Anche in questo caso, se la costruzione è corretta, trascinando il punto A o B o C il triangolo cambia ma rimane sempre equilatero.

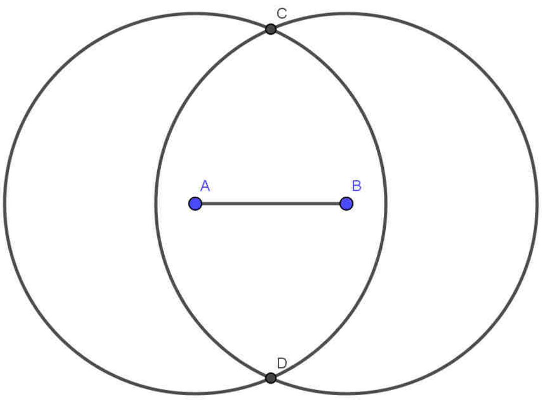


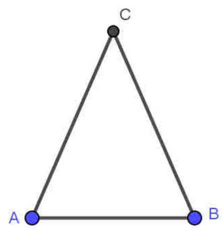
Laboratorio di informatica
SCHEDA 5

GEOMETRIA EUCLIDEA
Costruzione di un triangolo isoscele

Come possiamo costruire un triangolo isoscele?
Ci sono vari modi.

1)Parti da un segmento AB e con il comando “circonferenza dati centro e raggio” punta in A e scegli un raggio di misura qualsiasi che sia però maggiore della metà del semento AB , poi punta in B e scegli lo stesso raggio. Infine interseca le due circonferenze ottenendo i punti C e D.





Se a questo punto nascondi le circonferenze (cioè la nostra costruzione) ed anche il punto D, puoi tracciare i segmenti AB e BC: poiché $\overline{AC} = \overline{BC}$ il triangolo costruito è isoscele su base AB.

Metti alla prova la tua costruzione: trascinare A o B e controlla che il triangolo si deforma ma rimane sempre isoscele.

2)Ricordando che in un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche altezza, puoi seguire anche un altro procedimento:

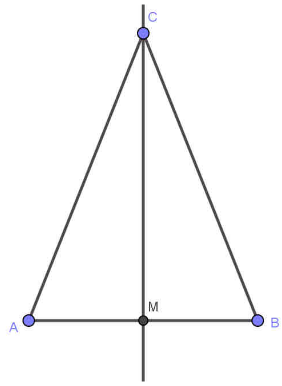
costruisci un segmento AB e il suo punto medio M;

traccia la perpendicolare per M ad AB;

prendi un punto C su questa perpendicolare (punto su oggetto);

congiungi C con A e con B;

nascondi la costruzione.



Metti alla prova la tua costruzione: trascina A o B e controlla che il triangolo risulta sempre isoscele.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 6

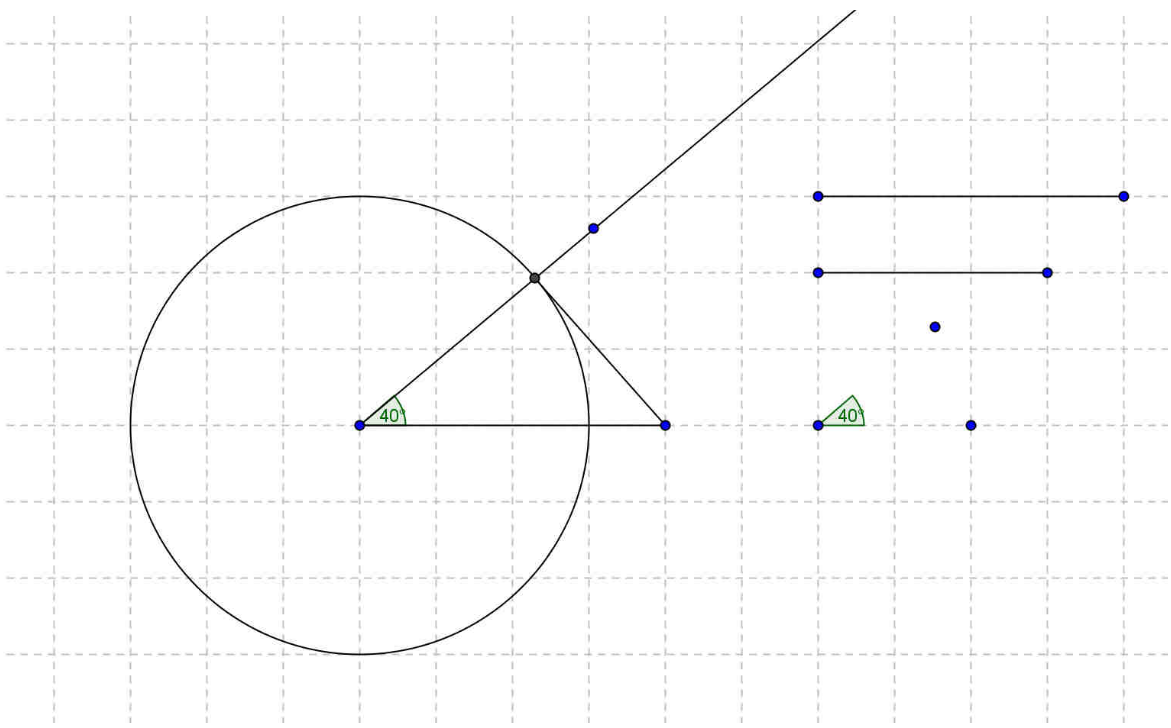
GEOMETRIA EUCLIDEA

Costruire un triangolo di cui sono assegnati due lati e l'angolo compreso

Nota: prima di cominciare togliamo come al solito il sistema di riferimento cartesiano ma lasciamo la griglia che può essere utile e per evitare che ci siano troppe lettere agli estremi dei segmenti evitiamo le "etichette" con il comando **Opzioni - etichettatura- nessun nuovo oggetto**.
Supponiamo per esempio di dover costruire un triangolo avente un lato di 4 quadretti della griglia (vedi figura), un lato che misura tre quadretti e l'angolo compreso di 40° (li disegniamo con segmento tra due punti e con "angolo di data misura").

Per costruire il triangolo possiamo procedere così:

- disegniamo un segmento uguale a quello assegnato e prendiamolo come "base" della nostra costruzione;
- disegniamo un angolo di 40° con il comando angolo di data misura che abbia il vertice in un estremo della nostra "base" e disegniamo la semiretta (con il comando semiretta) secondo lato dell'angolo;
- tracciamo una circonferenza di centro il vertice dell'angolo e raggio l'altro lato assegnato (quello lungo tre quadretti) con il comando " compasso";
- intersechiamo circonferenza e semiretta per trovare il terzo vertice del nostro triangolo e congiungiamo.



Laboratorio di informatica

SCHEDA 7

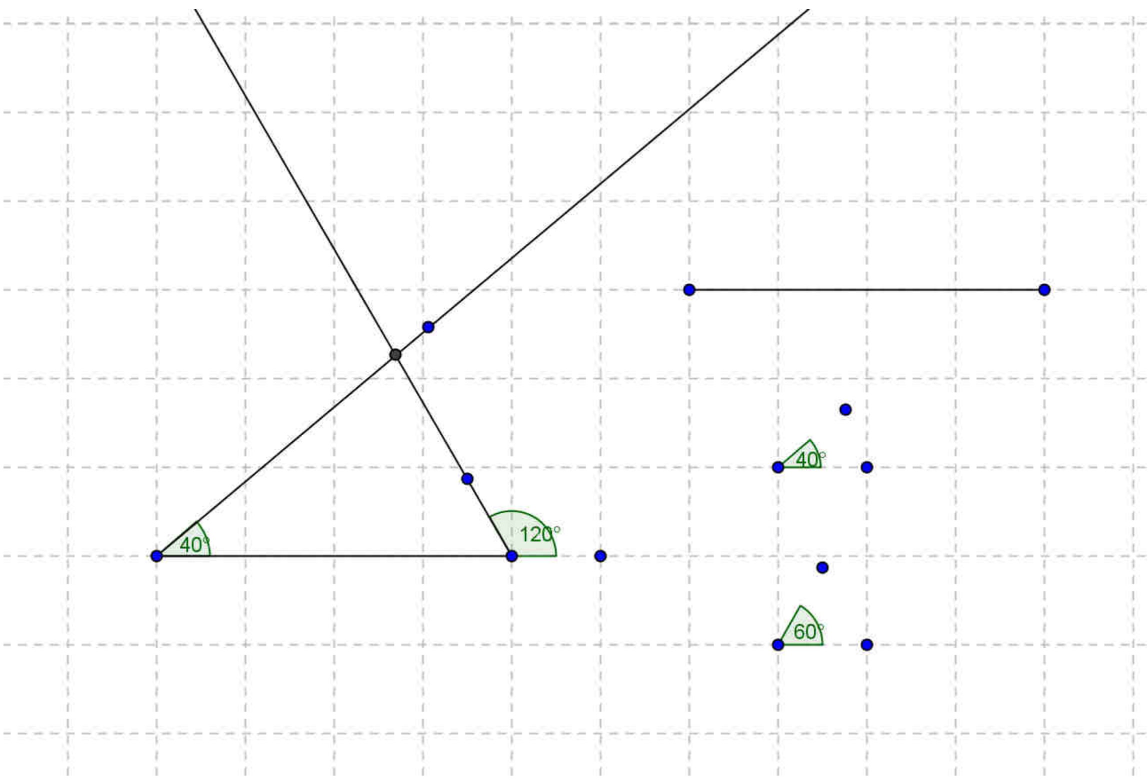
GEOMETRIA EUCLIDEA

Costruzione di un triangolo di cui sono assegnati un lato e i due angoli adiacenti

Supponiamo per esempio di dover costruire un triangolo avente un lato di 4 quadretti della griglia (vedi figura) e i due angoli adiacenti di 40° e di 60° (li disegniamo con segmento tra due punti e con "angolo di data misura").

Per costruire il triangolo possiamo procedere così:

- spostiamo il segmento lungo quattro quadretti e lo prendiamo come "base" (basta usare il comando " muovi");
- disegniamo un angolo di 40° con il comando angolo di data misura che abbia il vertice in un estremo della nostra "base" e disegniamo la semiretta (con il comando semiretta) secondo lato dell'angolo;
- poiché gli angoli vengono disegnati sempre in senso "antiorario" dovrò disegnare sull'altro estremo della "base" l'angolo esterno di 120° con la relativa semiretta;
- intersechiamo le due semirette per trovare il terzo vertice del nostro triangolo e congiungiamo.



Laboratorio di informatica

SCHEDA 8

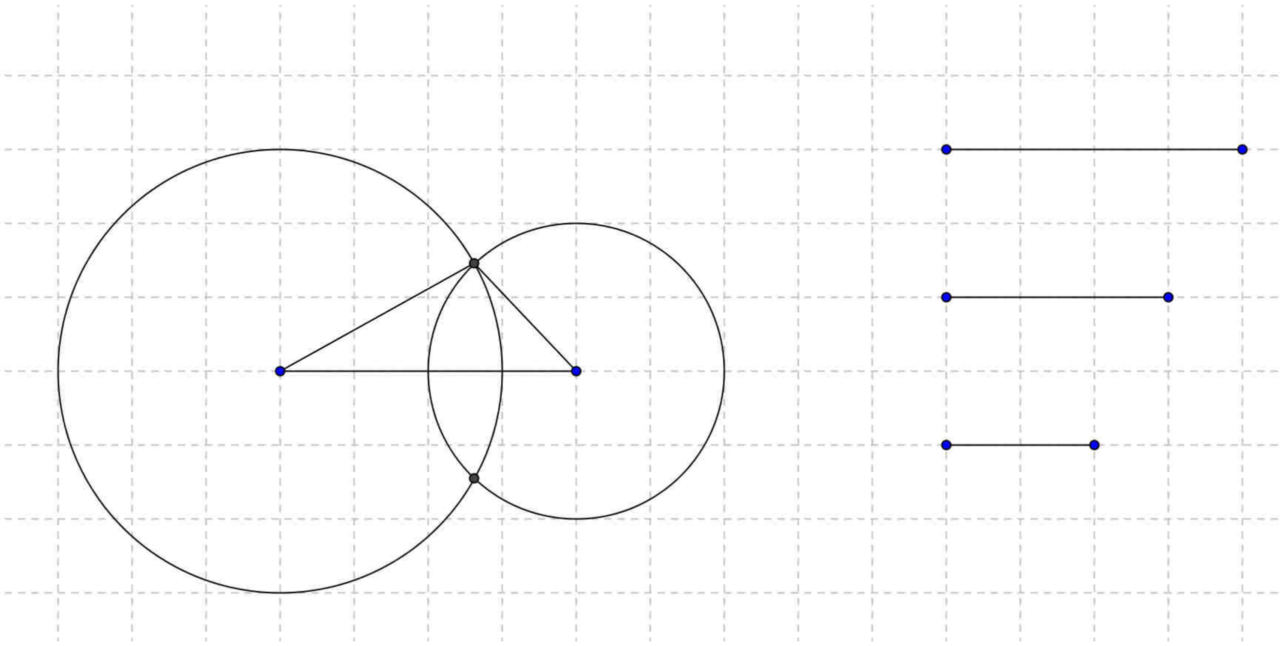
GEOMETRIA EUCLIDEA

Costruzione di un triangolo di cui sono assegnati i tre lati

Supponiamo per esempio di dover costruire un triangolo avente un lato di 4 quadretti della griglia, un lato di tre quadretti e un lato di due quadretti (vedi figura)
Per costruire il triangolo possiamo procedere così:

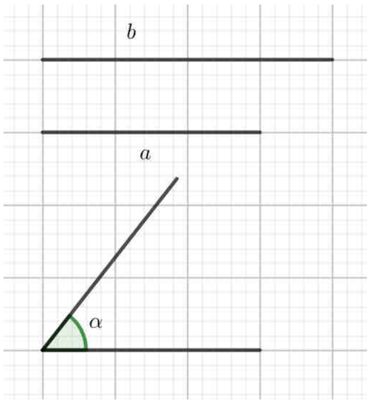
- spostiamo il segmento lungo quattro quadretti e lo prendiamo come "base" (basta usare il comando " muovi");
- con il comando "compasso" centriamo in un estremo e apriamo con apertura uguale al secondo lato;
- sempre con "compasso" puntiamo nell'altro estremo della nostra "base" e apriamo con apertura uguale al terzo lato;
- intersechiamo le due circonferenze e troviamo così il terzo vertice del triangolo (in realtà ne troviamo due ma ci danno triangoli congruenti "speculari");
- tracciamo con il comando "segmento tra due punti" gli altri due lati.

Nota: *ma il triangolo si può sempre costruire*?
E chiaro che non si formerà quando le due circonferenze non si intersecano: questo accade quando il lato maggiore (nel nostro caso quello che abbiamo preso come base) è maggiore o uguale alla somma degli altri due (fai delle prove e stampale).
Infatti sappiamo che in un triangolo il lato maggiore deve essere minore della somma degli altri due.



Laboratorio di informatica
SCHEDA 9

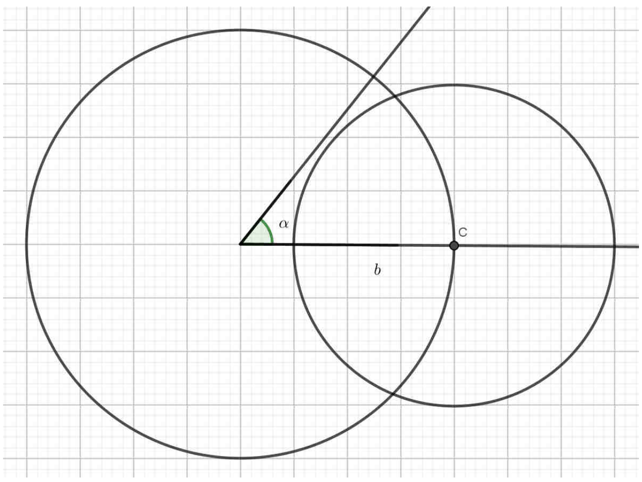
GEOMETRIA EUCLIDEA
Costruzione di un triangolo di cui sono assegnati due lati e un angolo non compreso



Supponiamo per esempio che l'angolo α sia opposto al lato *a*.

Partiamo dall'angolo per iniziare la costruzione: il segmento *b* sarà adiacente all'angolo α e quindi con lo strumento "compasso" riportalo su un lato dell'angolo ed individua il punto C.

Sempre con lo strumento "compasso" punta in C con apertura uguale al segmento *a*.



Nel nostro esempio non si forma nessun triangolo perché la circonferenza di centro C e raggio *a* non interseca il secondo lato dell'angolo α !
Quindi in questo caso non sempre si potrà costruire il triangolo.

Esercizio
Prova a variare la lunghezza di *a* lasciando inalterati *b* e stampa i vari casi che si possono avere.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 10

GEOMETRIA EUCLIDEA
Parallelogramma

Come posso costruire un parallelogramma di cui sono assegnati tre vertici consecutivi?

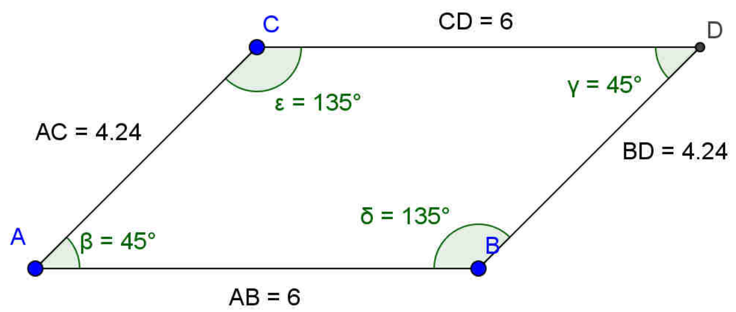
Nota
Perché durante la costruzione vengano "etichettati" solo i punti ricordati di scegliere all'inizio:
Opzioni – etichettatura – solo i nuovi punti

Costruisci un segmento AB e un segmento AC (togli la griglia e il sistema di riferimento).

Per costruire un parallelogramma avente AB e AC come lati consecutivi devi:
- tracciare per C la parallela ad AB;
- tracciare per B la parallela ad AC;
- intersecare le due rette (pulsante "intersezione"): ottieni il punto D;
- tracciare i segmenti CD e BD e poi nascondere (pulsante destro e "mostra-oggetto") le due rette

Se la tua costruzione è corretta prova a muovere il punto A o il punto B o il punto C: la figura cambia ma deve rimanere sempre un parallelogramma!

Esercizio 1
Con il pulsante "distanza o lunghezza" calcola la lunghezza dei lati e con il pulsante "angolo" individua la misura degli angoli del parallelogramma.
Verifica che i lati opposti sono uguali e gli angoli opposto sono uguali.
Stampa qualche esempio (tipo quello in figura).



Esercizio 2
Traccia le diagonali, intersecale e verifica (utilizzando il comando "distanza o lunghezza") che si dividono scambievolmente per metà.
Stampa il tuo esempio.

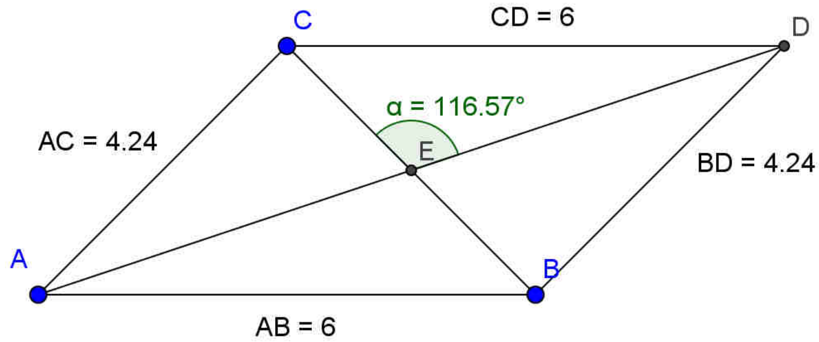
Laboratorio di informatica

SCHEDA 11

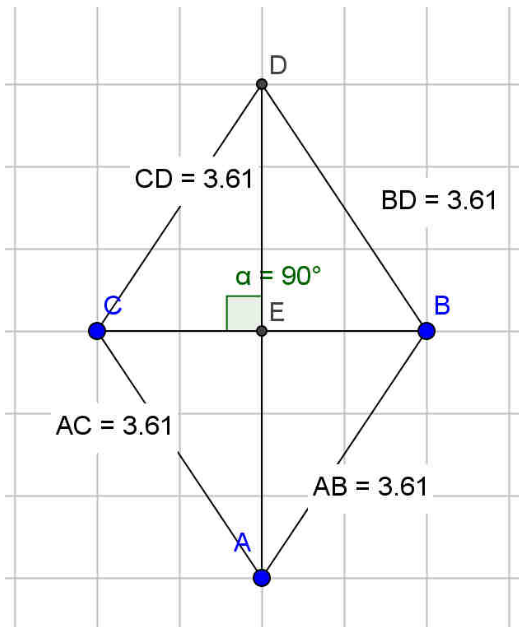
GEOMETRIA EUCLIDEA

Dal parallelogramma al rombo

Riparti dal parallelogramma che hai costruito nella scheda precedente: per non avere una figura troppo "carica" di dati, nascondi la misura degli angoli del parallelogramma, poi traccia le diagonali, intersecale (punto E) e misura un angolo tra esse (vedi figura).



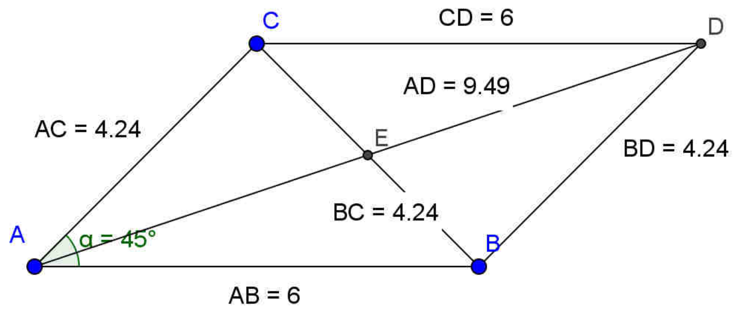
Rimetti visibile la griglia ed *aiutandoti con la griglia prova a "muovere" il punto A o il punto B o il punto C finché l'angolo tra le diagonali non diventa 90°*: verifica che in questo caso tutti i lati hanno la stessa lunghezza cioè il parallelogramma è un rombo.
Stampa la tua figura.



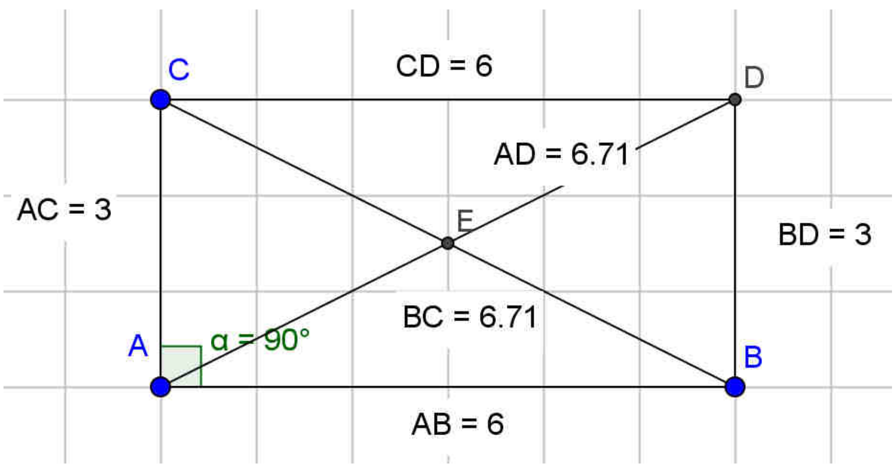
Laboratorio di informatica
SCHEDA 12

GEOMETRIA EUCLIDEA
Dal parallelogramma al rettangolo

Riparti dal parallelogramma della scheda 10 ma questa volta nascondi l'angolo tra le diagonali, misura con il comando "distanza" la lunghezza delle diagonali e mostra un angolo del parallelogramma (vedi figura).



Rimetti visibile la griglia e *aiutandoti con la griglia muovi il punto A o il punto B o il punto C fino a che l'angolo del parallelogramma non risulta di 90°* (cioè il parallelogramma è un rettangolo) : verifica che in questo caso le diagonali hanno la stessa lunghezza.
Stampa il rettangolo che hai ottenuto.



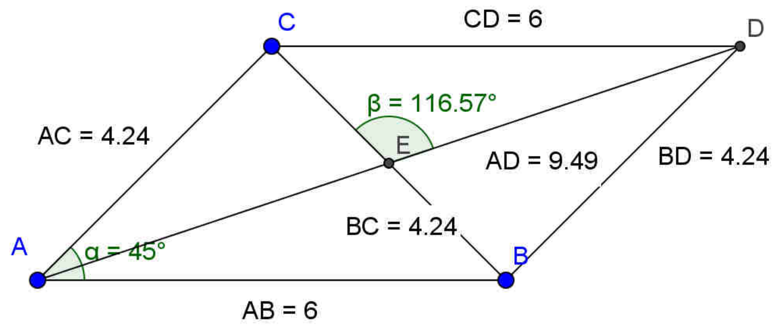
Laboratorio di informatica

SCHEDA 13

GEOMETRIA EUCLIDEA

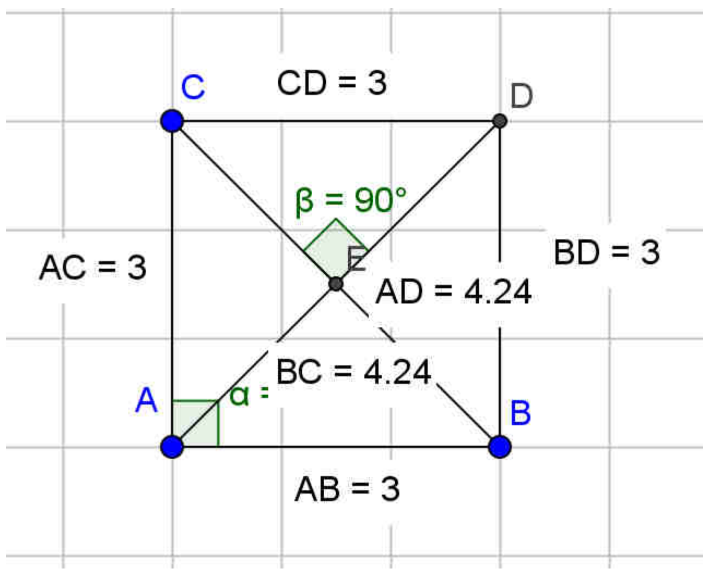
Dal parallelogramma al quadrato

Riparti dal parallelogramma della scheda 10 e questa volta lascia evidenziato sia un angolo del parallelogramma che un angolo tra le diagonali (oltre alle misure di lati e diagonali).



Rendi visibile la griglia e aiutandoti con la griglia sottostante muovi A o B o C finché l'angolo del parallelogramma e l'angolo tra le diagonali non diventano 90°: verifica che in questo caso hai un quadrato e che le diagonali hanno la stessa lunghezza.

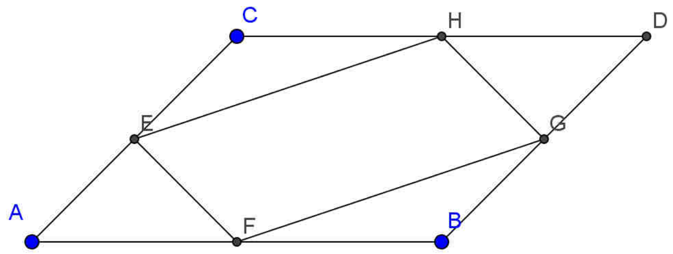
Stampa il quadrato che hai ottenuto.



Laboratorio di informatica
SCHEDA 14

GEOMETRIA EUCLIDEA
Problema sul parallelogramma

Disegna un parallelogramma ABCD (vedi scheda 10) e poi costruisci i punti medi E,F,G,H dei lati e congiungili.
Quale figura ottieni?



Prova a muovere A,B o C e controlla che la tua figura risulta sempre dello stesso tipo.

Stampa la figura che ottieni e dai una motivazione a quello che hai trovato.

Domande

1) Come risulta l'area della figura EFGH rispetto all'area del parallelogramma ABCD?

2) In quale caso EFGH risulta un rombo?

3) In quale caso EFGH risulta un rettangolo?

4) In quale caso EFGH risulta un quadrato?

Stampa i vari casi che si possono avere e dai una motivazione.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 15

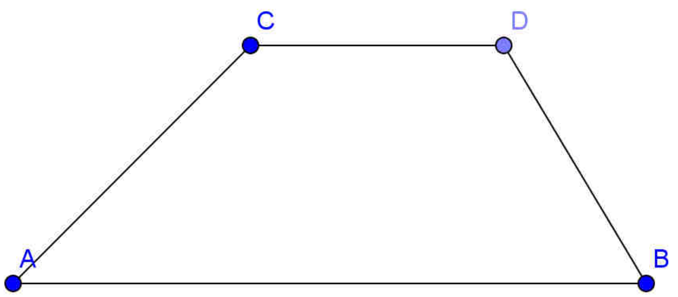
GEOMETRIA EUCLIDEA

Il trapezio

Costruisci un trapezio:

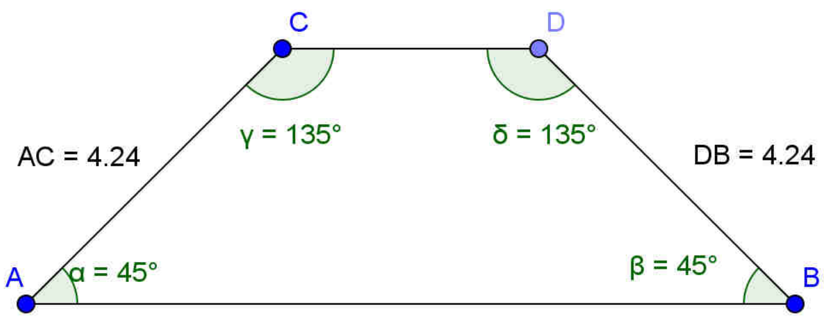
- Disegna un segmento AB;
- Disegna un punto C (non appartenente alla retta per A e B);
- Traccia la retta per C parallela ad AB;
- Prendi un punto D su di essa (comando "punto su oggetto");
- Costruisci il segmento CD e poi i segmenti AC e BD;
- Nascondi la retta (pulsante destro – comando mostra oggetto).

Prova a muovere A, B o C e verifica che ABCD risulti sempre un trapezio.
Stampa la tua figura.



Esercizio

Verifica che in un **trapezio isoscele** (lati obliqui della stessa lunghezza) le diagonali hanno la stessa lunghezza e gli angoli adiacenti alla base maggiore e alla base minore sono uguali.



Laboratorio di informatica

SCHEDA 16

GEOMETRIA EUCLIDEA

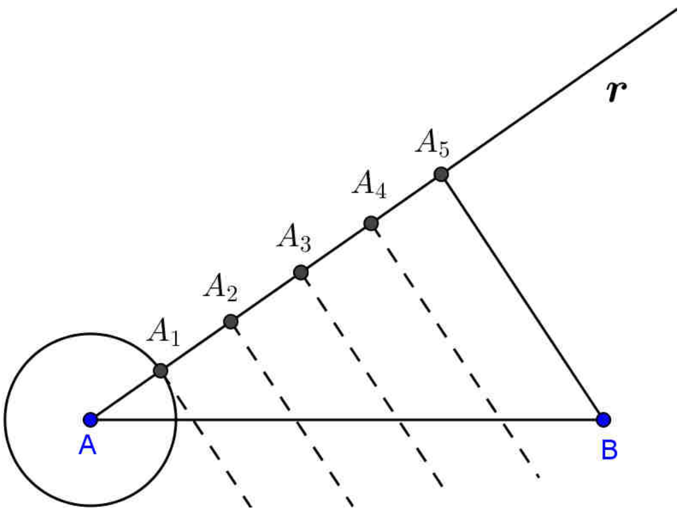
Dividere un segmento in parti uguali

Come possiamo dividere un segmento assegnato AB in un certo numero di parti uguali?

Supponiamo per esempio di doverlo dividere in cinque parti uguali.

Procedi così:

- traccia per l'estremo A una semiretta *r* ;
- utilizza il comando "circonferenza dati centro e raggio" e centra su A scegliendo per esempio raggio 1: interseca con la semiretta e ottieni un punto A_1 a distanza 1 da A;
- ripeti centrando nel punto che hai trovato (sempre con il comando circonferenza dati centro e raggio) e trova un secondo punto A_2 e così via fino ad individuare cinque segmenti consecutivi congruenti sulla semiretta *r*;
- congiungi l'ultimo punto A_5 con B e traccia per gli altri punti le parallele ad BA_5 ;
- interseca con AB le parallele e così trovi la suddivisione cercata del segmento AB.



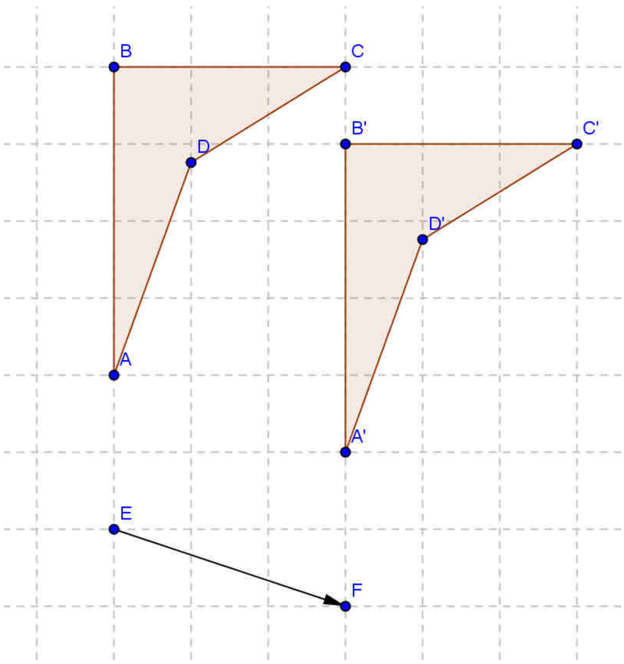
Esercizio 1

Se devi dividere AB in 2 oppure 4 oppure 8 oppure 16 parti puoi utilizzare un procedimento più semplice? Quale?

Laboratorio di informatica
SCHEDA 17

ISOMETRIE
Traslazione

Disegniamo un poligono (comando poligono), disegniamo un vettore (comando vettore tra due puti) e poi attiviamo il comando "traslazione": selezioniamo il poligono e poi il vettore traslazione e otterremo una copia del poligono traslata.
Per esempio:



Osservazioni

Prova a trascinare qualche punto del poligono variandone così la forma: cosa osservi?
Come risultano i lati corrispondenti del poligono iniziale e del poligono traslato?
Prova a modificare anche il vettore traslazione e stampa qualche esempio.

Domanda

Se abbiamo traslato una figura di un vettore $\vec{v}$ con quale traslazione possiamo ritornare alla situazione iniziale?
Stampa un esempio.

Laboratorio di informatica

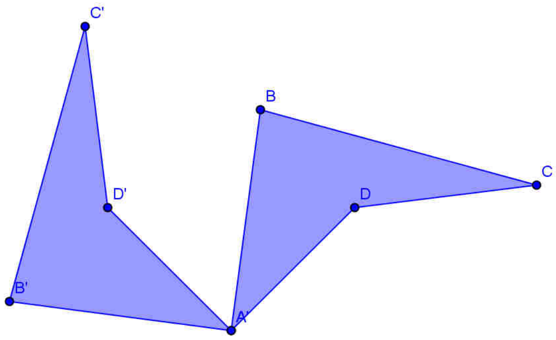
SCHEDA 18

ISOMETRIE

Rotazione

Disegniamo un poligono e scegliamo il comando "rotazione": per ruotare il poligono dobbiamo selezionarlo e selezionare il centro di rotazione (cliccare su un punto) , la misura in gradi dell'angolo di rotazione e il verso della rotazione (introducendo questi dati nella finestra che si apre).Per esempio nel disegno seguente il poligono iniziale è stato ruotato intorno al suo vertice A di 90° in senso antiorario.

Possiamo ottenere lo stesso risultato anche ruotando la figura di 270° in senso orario (prova) .

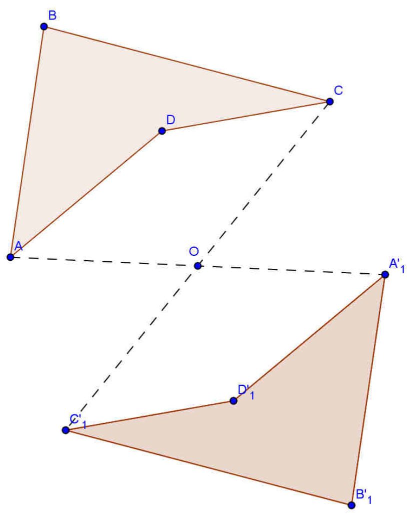


Esercizi

a) Fai anche tu qualche prova di rotazione (ruotando anche intorno ad un punto che non sia vertice del poligono) e stampala.

b) Considera le rette passanti per due lati corrispondenti del poligono iniziale e del poligono ruotato: quale angolo formano?

Considera adesso **la rotazione di 180°**.



Prova a ruotare di 180° intorno ad un punto O un poligono: prova a ruotare sia in verso orario che antiorario. Cosa osservi?

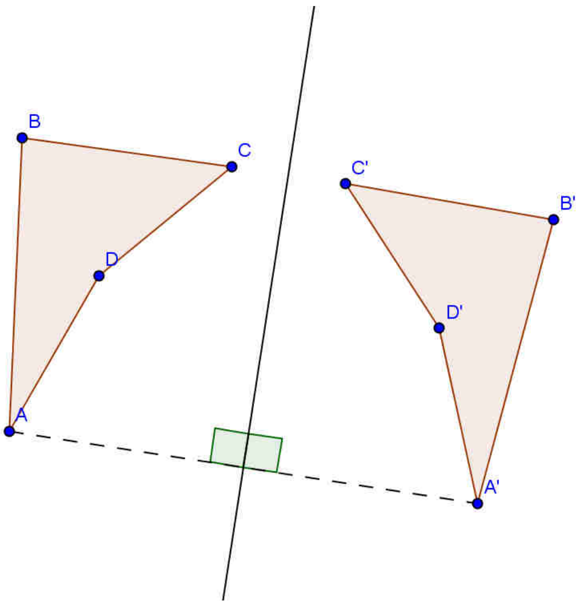
Se congiungi coppie di punti corrispondenti (se eseguendo la rotazione $A \to A'$ A e A' si dicono corrispondenti) cosa osservi?

La rotazione di 180° intorno ad un punto O viene anche chiamata **simmetria di centro O** e in Geogebra c'è anche un apposito pulsante indicato con la dicitura "simmetria centrale".
Prova ad utilizzare il comando "simmetria centrale" rispetto ad un punto O e verifica che ottieni lo stesso risultato che ruotando la tua figura di 180° intorno ad O.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 19

ISOMETRIE
Simmetria assiale

Disegniamo un poligono, tracciamo una retta e scegliamo il comando "simmetria assiale": selezioniamo il poligono e poi l'asse di simmetria (la retta) per ottenere la figura simmetrica rispetto a quella retta.



Osservazioni

Se osserviamo due qualsiasi punti corrispondenti , per esempio A e A', ci accorgiamo che l'asse di simmetria è asse del segmento AA'.

Prova ad utilizzare il pulsante "muovi" e a trascinare qualche vertice del poligono oppure a cambiare l'asse di simmetria e verifica che l'asse di simmetria è sempre l'asse dei punti corrispondenti.

Osserva inoltre che se una retta è perpendicolare all'asse di simmetria la retta simmetrica coincide con la retta stessa ma si scambiano le due semirette individuate dall'intersezione con l'asse.

Se un poligono viene trasformato con una simmetria assiale e poi sul poligono trasformato eseguiamo la stessa simmetria assiale, torniamo al poligono di partenza: questo significa che "componendo" cioè eseguendo in successione la stessa simmetria assiale è come se non si fosse realizzata nessuna trasformazione e questo non accadeva né per le traslazione né per le rotazioni.

Laboratorio di informatica

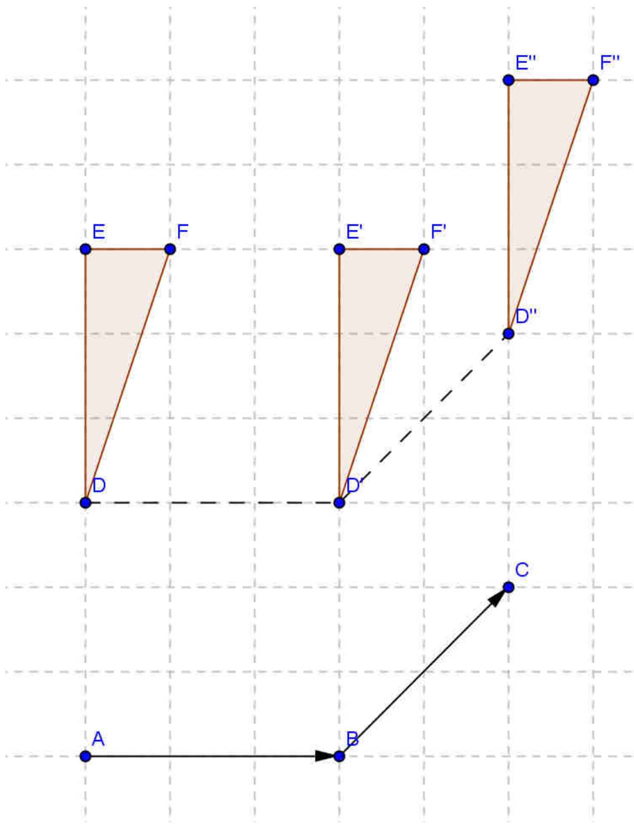
SCHEDA 20

ISOMETRIE

Composizione di due traslazioni

Eseguendo in successione cioè componendo due traslazioni ,che indicheremo con t_{v_1} e t_{v_2} , come si trasforma una figura?

Applichiamo ad un poligono la traslazione del primo vettore e poi , sul risultato, la traslazione del secondo vettore : possiamo ottenere il poligono finale direttamente dal poligono iniziale con una sola traslazione?
Descrivi quale traslazione dobbiamo fare per saltare il passaggio intermedio e fai una verifica della tua congettura (puoi aiutarti lavorando sul piano quadrettato).



Laboratorio di informatica

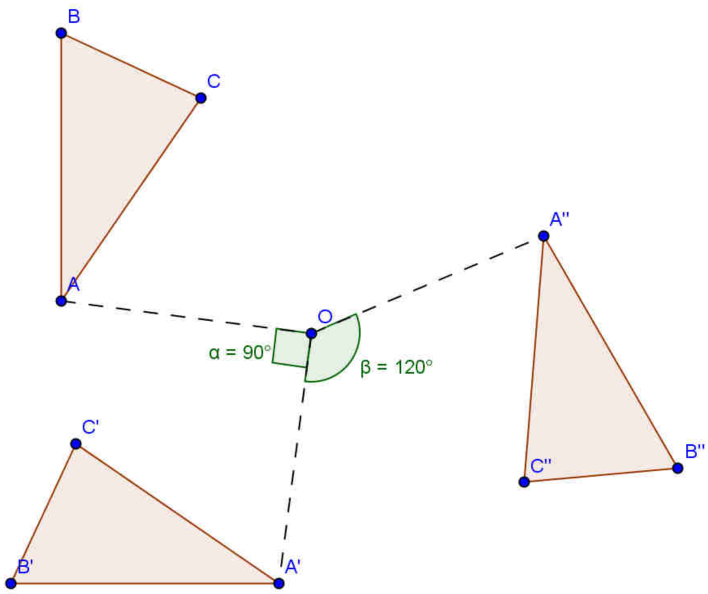
SCHEDA 21

ISOMETRIE

Composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro

Consideriamo la composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro.

Fai una prova e stampala.

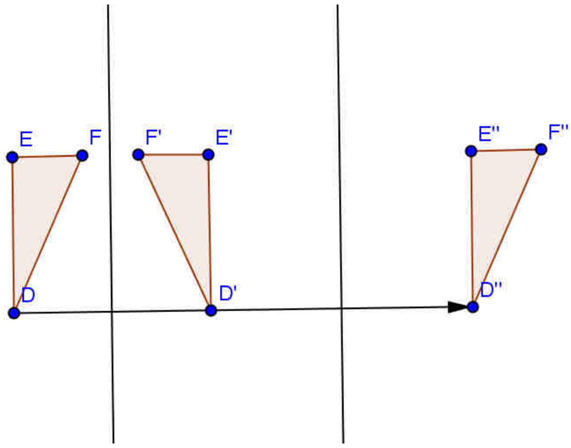


Si può ottenere la figura finale con un’unica rotazione? Intorno a quale centro e di quale angolo?

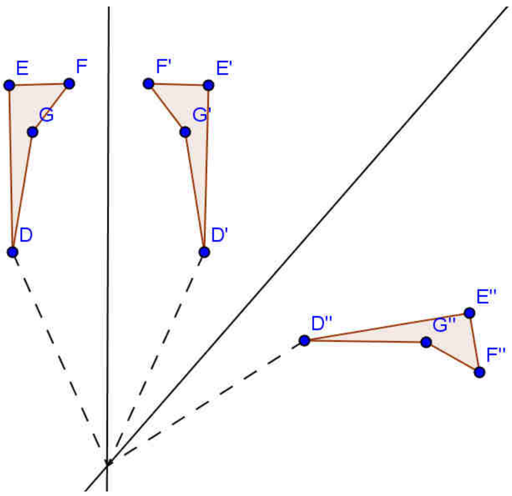
Laboratorio di informatica
SCHEDA 22

ISOMETRIE
Composizione di due simmetrie assiali

1. Fissiamo due rette parallele e trasformiamo un poligono con la simmetria avente come asse la prima retta e poi trasformiamo il poligono che abbiamo ottenuto con la simmetria avente come asse di simmetria la seconda retta (si dice che abbiamo "composto" le due simmetrie).
   Quale trasformazione potresti applicare al poligono iniziale per ottenere direttamente il poligono finale?
   Verifica la tua congettura.



2. Fissiamo due rette incidenti e trasformiamo un poligono con la simmetria avente come asse la prima retta e poi trasformiamo il poligono ottenuto con la simmetria avente come asse di simmetria la seconda retta-
   Quale trasformazione potresti applicare al poligono iniziale per ottenere direttamente il poligono finale?
   Verifica la tua congettura.



Laboratorio di informatica
SCHEDA 23

TASSELLAZIONI

Tassellazioni con un solo tipo di poligono regolare

Quali poligoni regolari possiamo combinare per "ricoprire" perfettamente il piano (si parla di tassellare il piano)?

Per iniziare **riempi la tabella** con il valore degli angoli interni dei vari poligoni regolari.

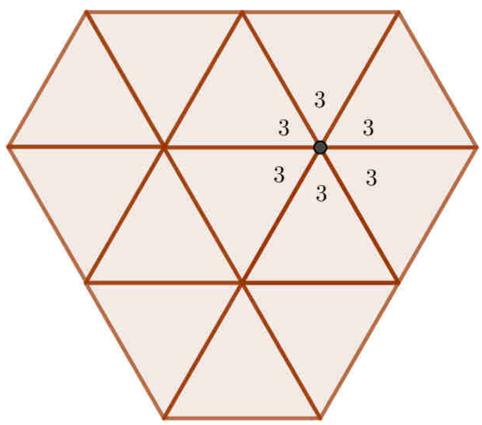
Poligono regolare	Angolo interno
3 lati (triangolo equilatero)	60°
4 lati (quadrato)	90°
5 lati (pentagono regolare)	…..
6 lati (esagono regolare)	……
7 lati (ettagono regolare)	…….
8 lati (ottagono regolare)	…….
9 lati (ennagono regolare)	…….
10 lati (decagono regolare)	…….
11-lati(endecagono regolare)	…….
12 lati (dodecagono)	…….

E' chiaro che in ogni vertice della tassellazione la somma degli angoli deve essere 360°.

Fai le tue congetture e verificale con Geogebra.

Stampa le "tassellazioni" che hai trovato con un solo tipo di poligono regolare (dovrebbero essere solo tre…).

NOTA: per distinguere le varie tassellazioni puoi scrivere il numero dei lati dei poligoni che si trovano ruotando intorno ad un vertice.
Per esempio la tassellazione ottenuta con i triangoli equilateri può essere descritta con la notazione $(3,3,3,3,3,3)$.



Laboratorio di informatica

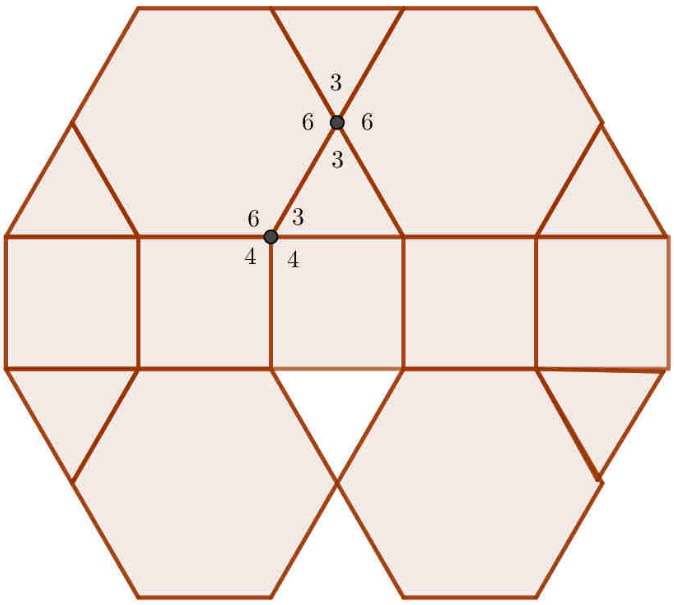
SCHEDA 24

TASSELLAZIONI

Tassellazioni con vari tipi di poligoni regolari

Se possiamo usare diversi tipi di poligoni regolari quali sono le combinazioni che funzionano?

Decidiamo però di ricercare solo quelle in cui **ci siano gli stessi poligoni attorno ad ogni vertice della tassellazione** cioè escludiamo tassellazioni come quella in figura in cui i vertici non sono tutti "dello stesso tipo".



Suggerimento: quadrato con triangolo equilatero dovrebbe funzionare e forse ci sono anche più modi di sistemarli intorno ad un vertice.

Ci sono altre combinazioni di poligoni che funzionano?

Stampa le tassellazioni che riesci a trovare (dovrebbero essere solo otto…).

Laboratorio di informatica

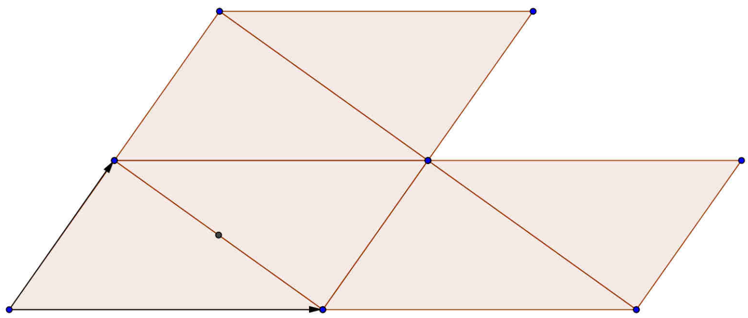
SCHEDA 25

TASSELLAZIONI

Tassellazione con un triangolo qualunque

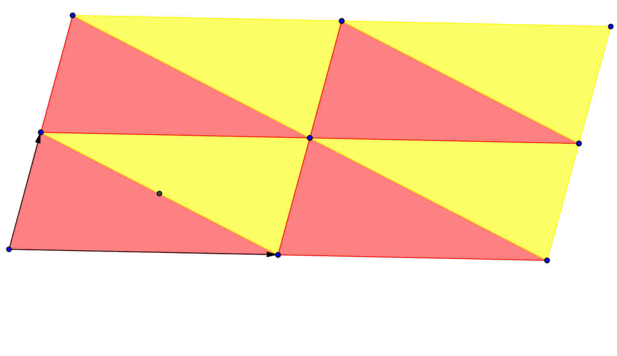
Possiamo tassellare il piano partendo da un triangolo qualunque?

Prova a fare così:
disegna un triangolo qualunque con il comando poligono, costruisci il punto medio M di un suo lato e applica la simmetria centrale rispetto a M del triangolo.
Hai ottenuto così un parallelogramma con cui puoi "tassellare" il piano (basta traslare secondo i lati del parallelogramma). Stampa la tua tassellazione.
Per evitare che vengano messe tutte le etichette ai vertici puoi selezionare Opzioni – etichettatura – nessun nuovo oggetto.



E' interessante provare a "muovere" i vertici del triangolo per modificarlo: si può ritrovare in questo modo anche la tassellazione con i triangoli equilateri che avevamo già individuato.

Possiamo anche divertirci a colorare i vari triangoli (tasto destro – proprietà – colore – scelta del colore – aumentare l'opacità) per avere un effetto "artistico" : possiamo per esempio colorare i primi due e oi applicare le traslazioni….

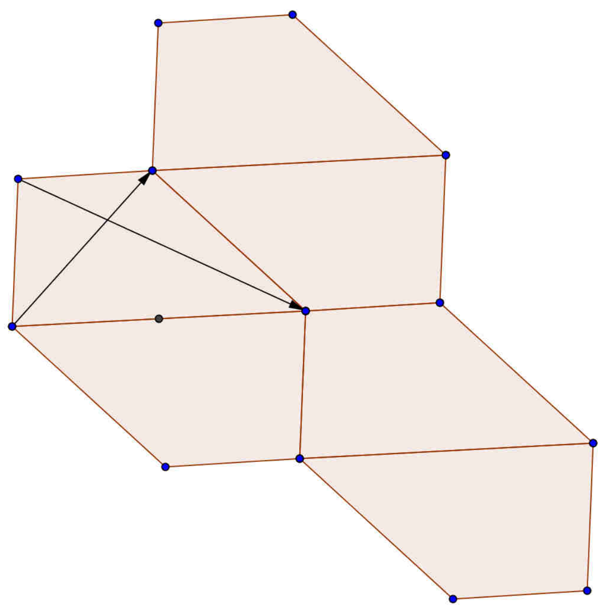


Laboratorio di informatica
SCHEDA 26

TASSELLAZIONI
Tassellazione con un quadrilatero qualunque

Possiamo tassellare il piano con un quadrilatero qualunque?

Prova a fare così: disegna un quadrilatero qualunque con il comando poligono, costruisci il punto medio M di un lato, effettua la simmetria di centro M del quadrilatero.
Hai ottenuto un esagono che tassella il piano con traslazioni corrispondenti alle diagonali del quadrilatero iniziale!



Osservazione
E' interessante notare che in ogni vertice della tassellazione si ritrovano i quattro angoli del quadrilatero iniziale e che perciò la loro somma è proprio 360°.

Inoltre non è importante quale lato si sceglie per costruire il punto medio e fare la prima simmetria centrale: partendo da un altro lato si sarebbe ottenuto lo stesso risultato (i quadrilateri accostati risultano sempre simmetrici rispetto al punto medio del loro lato in comune).

Laboratorio di informatica
SCHEDA 27

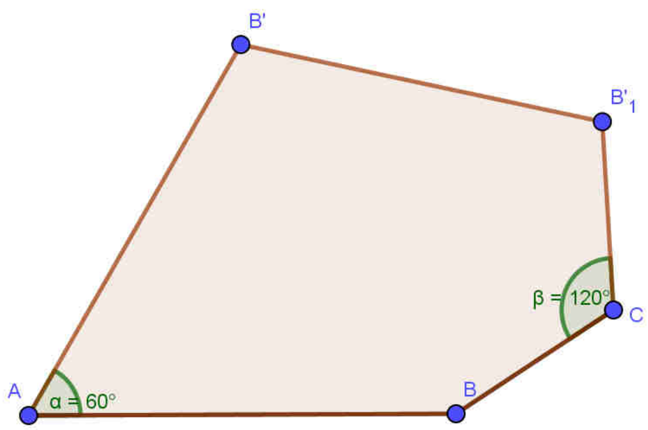
TASSELLAZIONI
Tassellazione con un pentagono irregolare

Non è possibile ricoprire il piano con pentagoni regolari poiché l'angolo interno di un pentagono regolare misura 108° che non è divisore di 360°.
Ma ci sono pentagoni irregolari con cui è possibile ricoprire il piano?

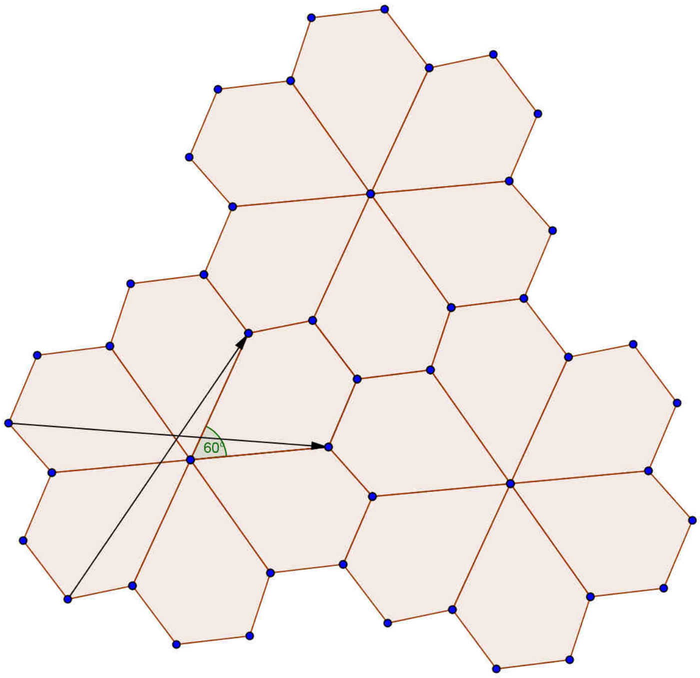
Proviamo a costruire un pentagono irregolare con due lati uguali che formano un angolo di 60° e due lati uguali che formano un angolo di 120°.

Costruiscilo:

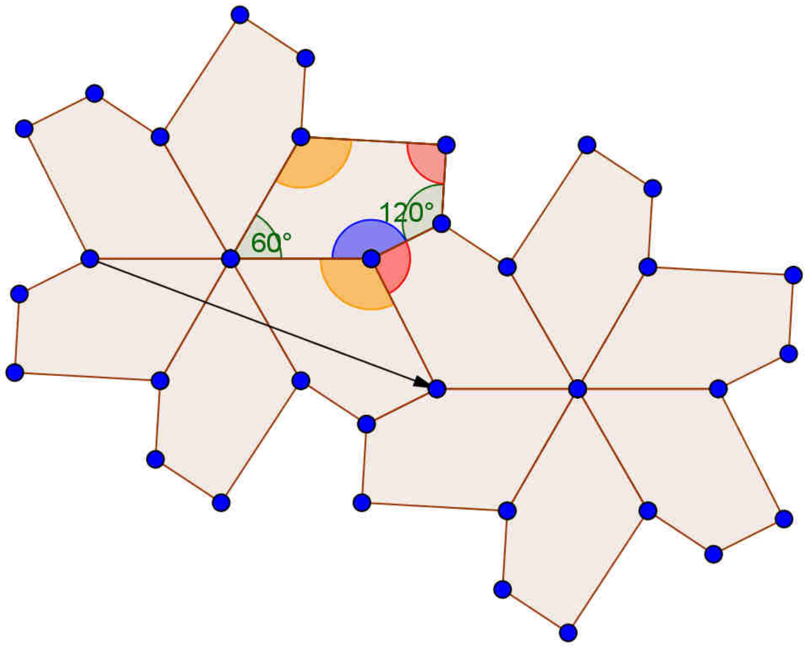
- costruisci un segmento AB, costruisci un angolo di 60° di vertice A (il comando "angolo di data misura" costruisce automaticamente un punto B' tale che AB=AB');
- costruisci un segmento BC e fai un angolo $BCB_1' = 120°$: attenzione ad indicare che vuoi l'angolo in verso orario;
- con il comando poligono riprendi i vari punti e costruisci il pentagono.



Ruotando poi questo pentagono intorno ad A di 60° per sei volte otteniamo una specie di fiore che per traslazioni tassella il piano.



Domanda: *ma perché questo pentagono funziona così bene per tassellare il piano?*
Prova a evidenziare gli angoli con colori diversi e osserva cosa accade: spiega perché con questo pentagono si riesce a tassellare il piano.

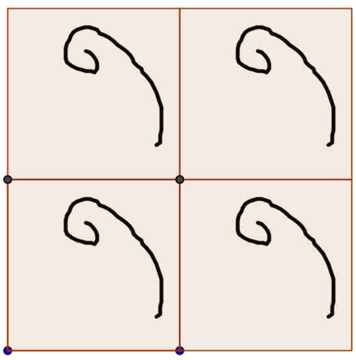


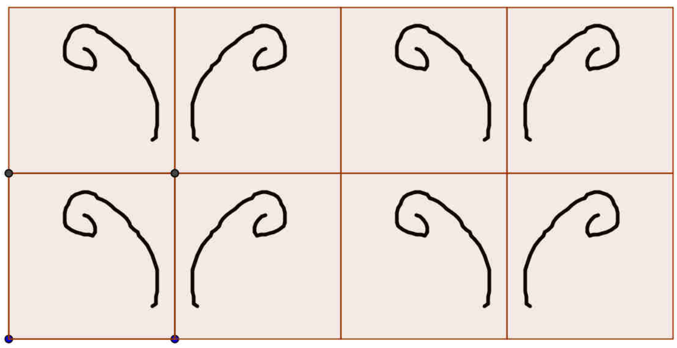
Laboratorio di informatica
SCHEDA 28

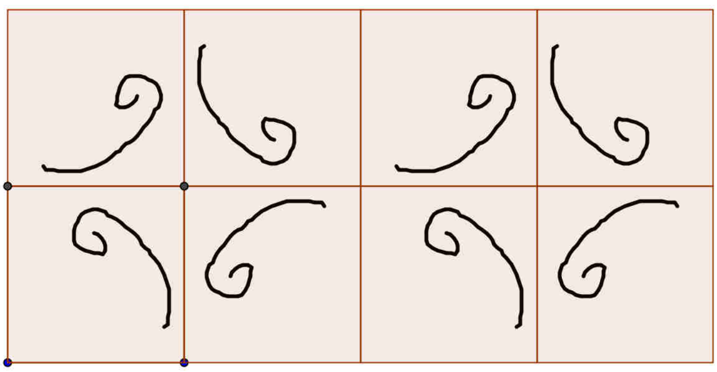
TASSELLAZIONI

Partendo da una “mattonella”…pavimenti diversi!

Partendo da un poligono che tassella il piano, per esempio un quadrato, e disegnandovi sopra un “fregio” (vedi figura) possiamo utilizzare le isometrie per ottenere pavimenti diversi!
Per esempio se semplicemente trasliamo la mattonella otteniamo il primo “pavimento”, se facciamo una simmetria rispetto ad un lato e poi trasliamo otteniamo il secondo “pavimento”, se ruotiamo la mattonella intorno ad un vertice per 4 volte di 90°e poi trasliamo otteniamo il terzo “pavimento”….







Prova a partire da una “mattonella triangolo-equilatero” e costruisci pavimenti diversi!

Nota : nei mosaici del castello dell'Alhambra di Granada sono stati ritrovate ***17 pavimentazioni diverse*** e…sono tutte le pavimentazioni possibili!