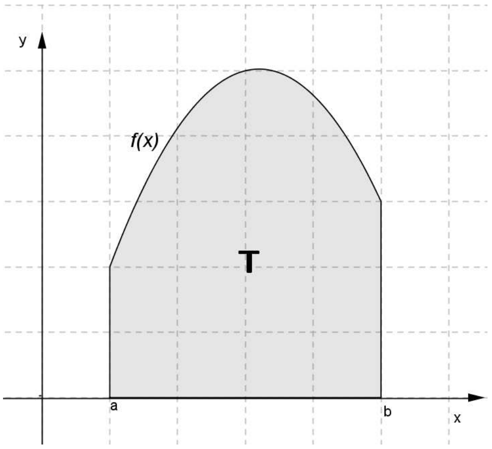
Integrali definiti

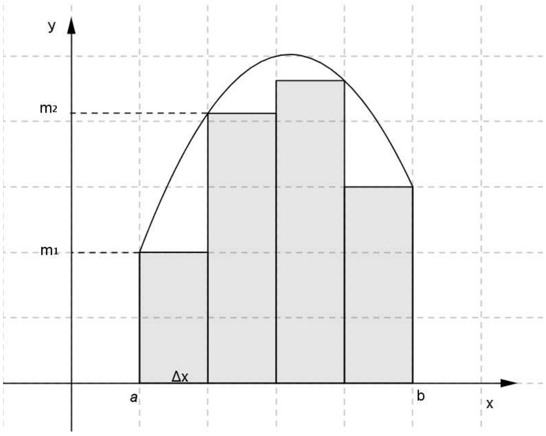
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato e supponiamo che $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$.



Consideriamo la regione T delimitata dal grafico di *f(x)*, dalle rette $x=a$, $x=b$ e dall'asse delle ascisse (regione denominata **trapezoide**):

$$T = \{(x; y)/\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

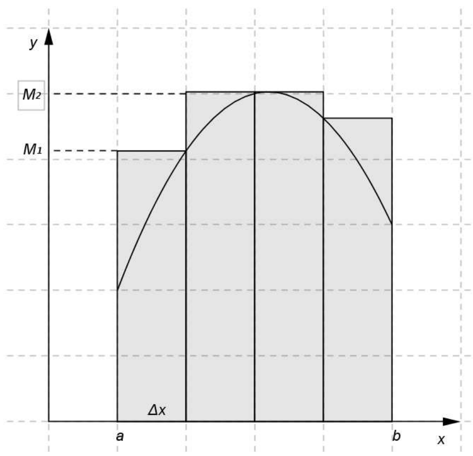
Consideriamo una suddivisione dell'intervallo [*a,b*] in intervalli di uguale ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Poiché in ciascuno di questi intervalli *f(x)* è continua, per il teorema di Weierstrass, assume un



Analizziamo i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i minimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo inscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo inscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

$$m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + m_3 \cdot \Delta x + ... = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$$



Passiamo adesso a considerare i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i massimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo circoscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo circoscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

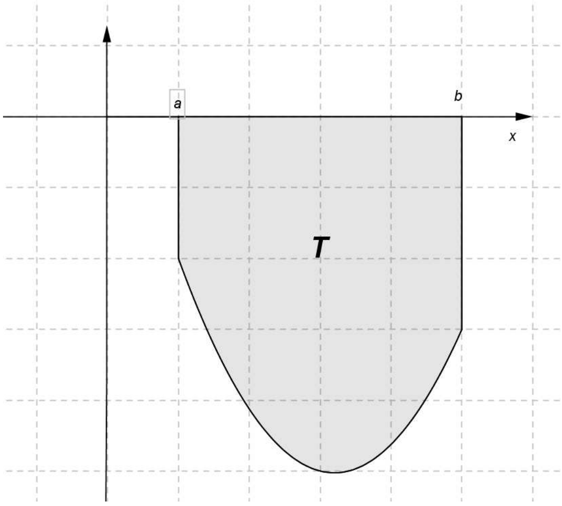
$$M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \cdots = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$$

Se aumentiamo n cioè il numero degli intervalli in cui l'intervallo è suddiviso, è intuitivo dedurre che l'area del plurirettangolo inscritto si avvicina all'area del plurirettangolo circoscritto; infatti è possibile dimostrare che:

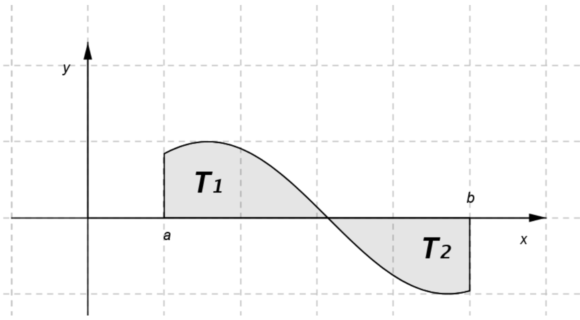
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$$

Questo limite viene indicato con il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ e si legge **integrale definito tra *a* e *b* di *f(x)* in dx.**

Osserviamo che il simbolo di integrale è la deformazione del simbolo di sommatoria, che i valori m_i o M_i tendono al valore della funzione e Δx tende a dx.



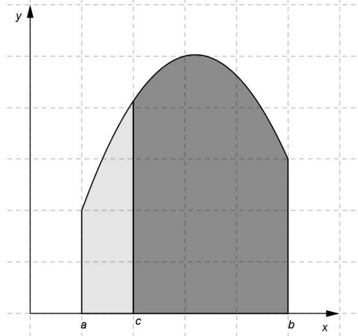
Nel caso in cui $f(x) \geq 0$, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale all'area del trapezoide T. È, però, abbastanza chiaro che, nel caso in cui $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ = -$area\ T$.



Se, infine, $f(x)$ non ha segno costante, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale a $\int_a^b f(x)dx = area\ T_1$-$areaT_2$.

Proprietà dell'integrale definito

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
   In questo caso il trapezoide è ridotto ad un segmento.



2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ con $a \leq c \leq b$

Teorema del valor medio

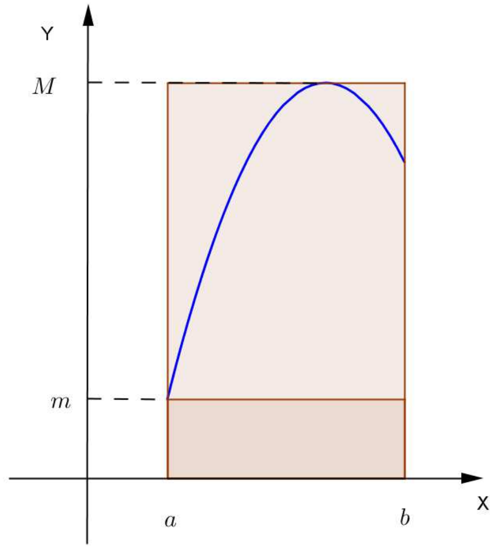
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora esiste un punto c interno ad $[a,b]$ tale che: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b\text{-}a)$.

Dimostrazione: per il teorema di Weierstrass esistono massimo M e minimo m assoluti di *f(x)* in $[a,b]$, quindi possiamo scrivere:

$$m(b\text{-}a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b\text{-}a)$$

da cui, dividendo per $(b\text{-}a)$

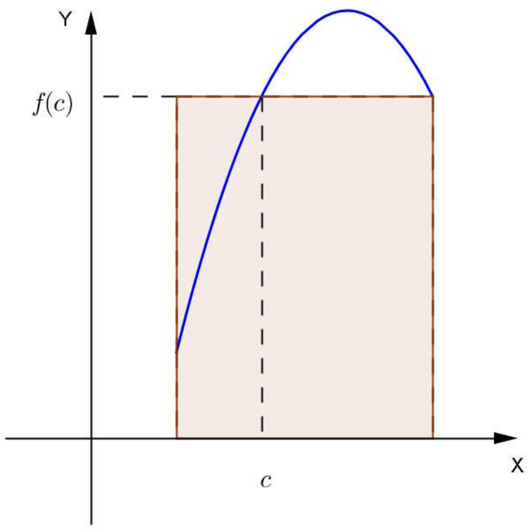
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b\text{-}a} \leq M$$



Ma allora per il teorema dei valori intermedi, esiste un punto c interno all'intervallo per cui:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b\text{-}a)} = f(c)$$

OSSERVAZIONE: Il valore $f(c)$ viene detto **valor medio** e risulta l'altezza del rettangolo avente per base l'intervallo$[a,b]$ ed equivalente al trapezoide.



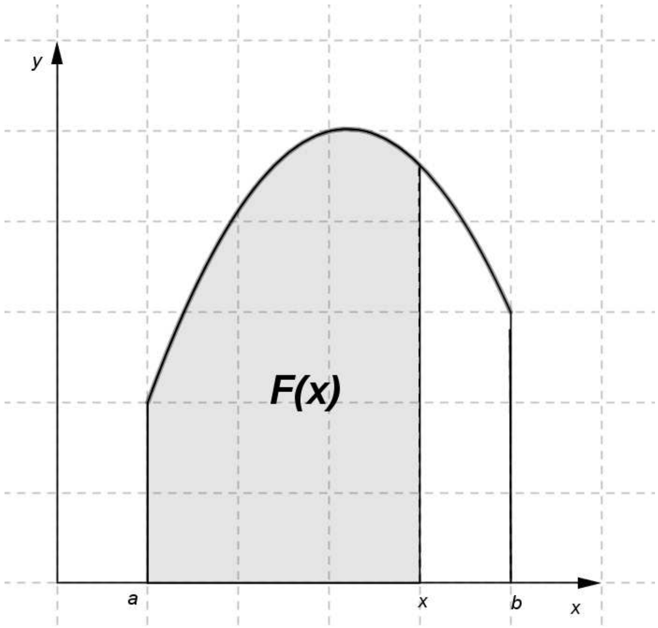
Area del trapezoide = $(b\text{-}a)f(c)$

La funzione integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si chiama **funzione integrale** F(x), la funzione così definita

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

Osserviamo che la variabile di integrazione *t* non è stata chiamata *x* solo per non confonderla con l'estremo superiore di integrazione (ma potevamo scegliere qualsiasi altra lettera).



Si nota subito che:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Lo studio della funzione integrale ci permetterà di scoprire il legame tra integrale definito ed integrale indefinito.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Data f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e considerata la sua funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ si ha che:

a) $F'(x) = f(x)$ cioè *F(x)* è una primitiva di *f(x)*

b) $\int_a^b f(x)dx = \varphi(b)\text{-}\varphi(a)$ dove $\varphi(x)$ è una primitiva di *f(x)*

Dimostrazione:

a) Per calcolare $F'(x)$, calcoliamo, secondo la definizione di derivata, il limite del rapporto incrementale di $F(x)$:

$$\frac{F(x+h)\text{-}F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} =$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Dal teorema della media applicato nell'intervallo [*x*, *x*+*h*] è possibile dedurre che esiste un punto *c* interno all'intervallo per cui $\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(c)$. Perciò:

$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)\text{-}F(x)}{h} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$ (perché f(x) è continua)

b) Supponiamo che $\int f(x)dx = \varphi(x) + c$.

Allora $F(x)$ sarà una delle primitive di $f(x)$, cioè $F(x) = \varphi(x) + c^*$
Ma, per quanto già detto, si avrà che:

$F(a) = \varphi(a) + c^* = 0 \rightarrow c^* = \text{-}\varphi(a)$ e quindi

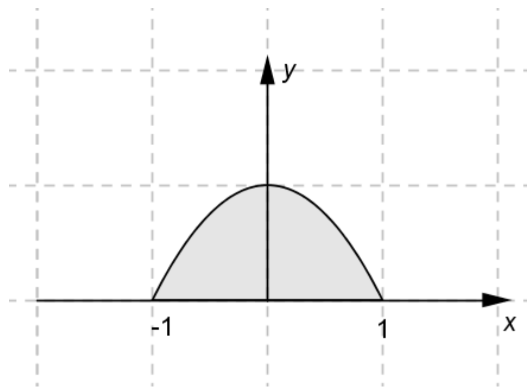
$F(b) = \int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) + c^* = \varphi(b)\text{-}\varphi(a)$

NOTA: la quantità $\varphi(b)\text{-}\varphi(a)$ in genere viene indicata con la scrittura $[\varphi(x)]_a^b$

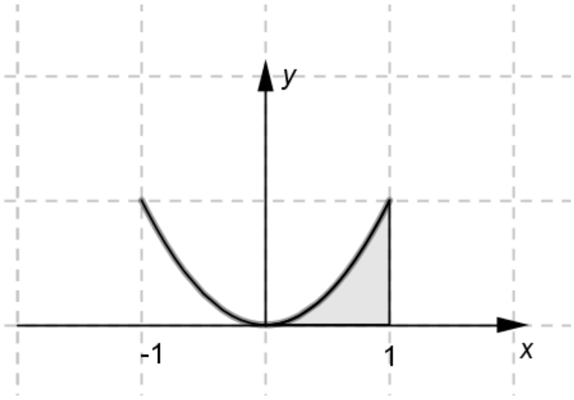
Abbiamo quindi trovato un metodo per calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$: determiniamo prima l'integrale indefinito $\varphi(x)$ e poi calcoliamo $\varphi(b)\text{-}\varphi(a)$.

Esempio:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x\text{-}\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \text{-} \left(\text{-}1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$



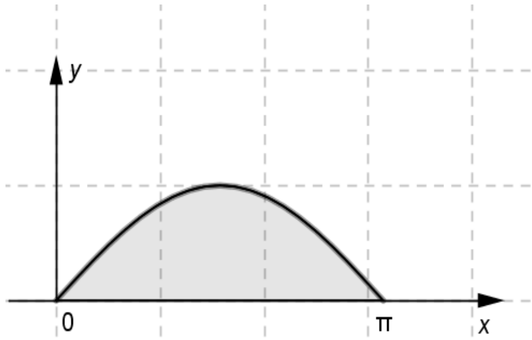
Esempi



1) Calcoliamo $\int_0^1 x^2\, dx$

Abbiamo che $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Quindi l'area compresa tra la parabola di equazione $y = x^2$, l'asse x e la retta $x = 1$ misura $\frac{1}{3}$.



2) Calcoliamo $\int_0^{\pi} senx\, dx$

Abbiamo

$\int_0^{\pi} senx\, dx = [-cosx]_0^{\pi} = -cos\pi-(-cos0) = 2$

Quindi l'area della regione colorata qui a fianco misura 2.

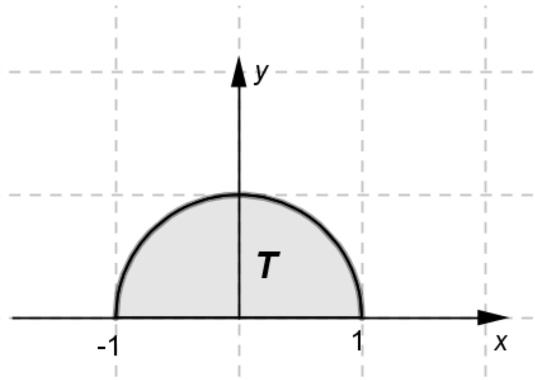
3) Calcoliamo $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$

Come già visto studiando gli integrali indefiniti questo integrale si fa con la sostituzione $x = sent$, da cui $dx = cost\ dt$.

Cambiando la variabile, occorre cambiare anche gli estremi di integrazione perché si riferiscono alla variabile x, mentre l'integrale sarà in t. Poiché $x = sent$ si avrà, per l'estremo inferiore, $-1 = sent \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$ e, analogamente per l'estreemo superiore. Quindi l'integrale dato diviene:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\ dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Infatti $y = \sqrt{1 - x^2}$ ha come grafico la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, per cui la regione T ha area $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.



Esercizi sul calcolo dell'integrale definito

Calcola i seguenti integrali definiti interpretandoli anche geometricamente:

1) $\int_0^1 2x\ dx$ $[1]$

2) $\int_0^3 (3-x)\ dx$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

3) $\int_0^2 x^2 dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

4) $\int_{-1}^1 x^3 dx$ $[0]$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$ $[1]$

6) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ $[2\pi]$

7) $\int_{-1}^2 (4-x)\ dx$ $\left[\frac{21}{2}\right]$

8) $\int_0^{\pi} \cos x\ dx$ $[0]$

9) $\int_0^1 \left(x^3+1\right)\ dx$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\ dx$ $\left[\ln\sqrt{2}\right]$

11) $\int_0^1 e^x dx$ $[e-1]$

12) $\int_1^e \ln x\ dx$ $[1]$

13) $\int_0^1 arctgx\ dx$ $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\ln 2\right]$

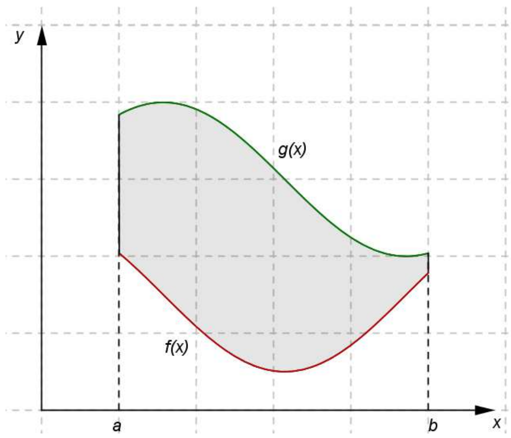
14) $\int_0^4 \sqrt{x}\ dx$ $\left[\frac{16}{3}\right]$

15) $\int_{-2}^2 \left(4-x^2\right)\ dx$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen2x\ dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Calcolo di aree

Area della parte di piano delimitata dal grafico di due funzioni



Consideriamo due funzioni *f(x)* e *g(x)* continue nell'intervallo $[a, b]$ tali che

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e supponiamo che i grafici si trovino entrambi sopra l'asse *x* come in figura.

Possiamo considerare la parte di piano compresa tra i due grafici:

$$T = \{(x, y) / a \le x \le b, \quad f(x) \le y \le g(x)\}$$

Risulta subito evidente che $\boxed{\text{area T} = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx}$

Questo vale in generale, purché $f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$ cioè anche quando le funzioni non sono entrambe positive perché possiamo sempre operare una traslazione opportuna per condursi al caso precedente e quindi $\text{Area T} = \int_a^b [(g(x)+h) - (f(x)+h)]\ dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$.

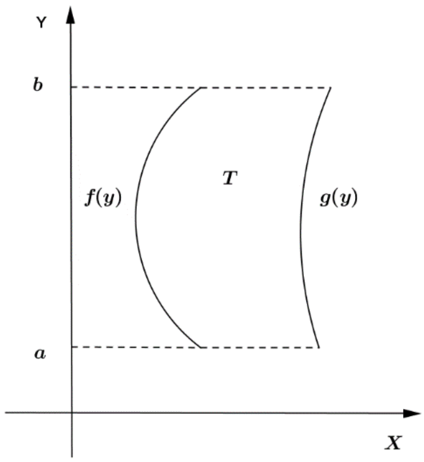
Nel caso considerato T viene anche detto **dominio normale rispetto all'asse *x***: le due funzioni hanno *x* come variabile indipendente e si integra rispetto ad *x*.

Se invece abbiamo due funzioni *f(y)* e *g (y)* continue nell'intervallo $[a,b]$ tali che

$$f(y) \le g(y)\ \forall y \in [a, b]$$

l'area di piano compresa tra i grafici delle due funzioni (detta **dominio normale rispetto all'asse *y***) si troverà integrando rispetto ad *y*.

$$\boxed{\text{Area T} = \int_a^b [g(y) - f(y)]\ dy}$$

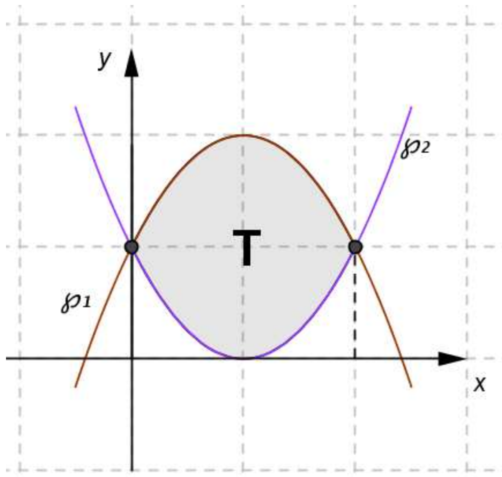


Esempi

1) Determinare l'area della regione di piano compresa tra

$\mathcal{P}_1 \colon y = -x^2 + 2x + 1$ e $\mathcal{P}_2 \colon y = x^2 - 2x + 1$

Rappresentando graficamente le parabole, abbiamo che $\mathcal{P}_1$ ha vertice $V_1(1,2)$, $\mathcal{P}_2$ ha vertice $V_2(1,0)$ e le loro intersezioni sono i punti $(0,1)$ e $(2,1)$.

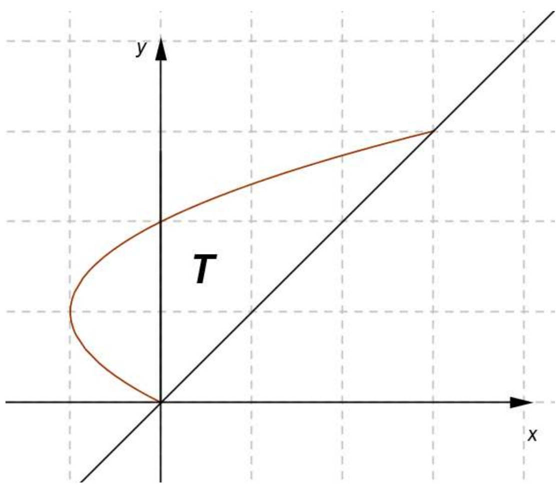


L'area richiesta si ottiene calcolando:

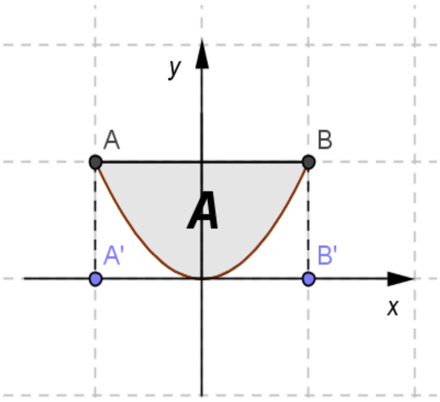
$$\int_0^2 (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)dx = \int_0^2 [(-x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)]dx = = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

2) Determinare l'area della regione T di piano delimitata dalla parabola $x = y^2 - 2y$ e dalla retta $r \colon y = x$ .La parabola ha vertice $V_1(-1,1)$ ed interseca la retta data nei punti $(0,0)$, $(3,3)$ .La regione T è normale rispetto all'asse y e quindi integriamo rispetto ad y.

$$\int_0^3 (r - \mathcal{P})dy = \int_0^3 [y - (y^2 - 2y)]dy = \int_0^3 (3y - y^2)dy = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \cdots = \frac{9}{2}$$



3) Determinare l'area della regione A di piano delimitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$ (si chiama "**segmento parabolico**").



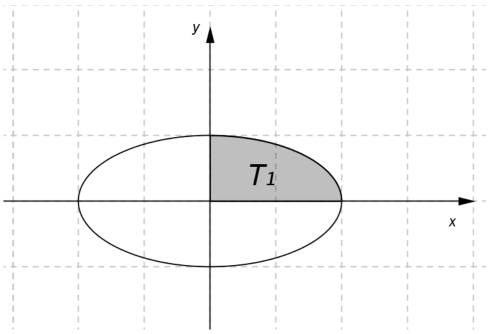
Vista la simmetria di A rispetto all'asse y possiamo calcolare l'integrale in questo modo:

$$\text{area A} = 2 \cdot \int_0^1 \left(1 - x^2\right)\, dx = 2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

In generale è semplice dimostrare che:

$$\text{area segmento parabolico} = \frac{2}{3} \cdot (\text{area rettangolo ABB'A'})$$

4) Determinare l'area della regione di piano T delimitata dall'ellisse $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Ricaviamo y: $\quad y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$$area\ T_1 = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2\text{-}x^2}\, dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2\text{-}x^2}\, dx$$

Notando che l'area richiesta è formata da 4 regioni uguali, per determinare T sarà sufficiente moltiplicare per 4 l'area T_1 che, come già visto nel capitolo sugli integrali indefiniti, ha per soluzione

$$\text{area } T_1 = \frac{b}{a}\left[a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen2t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\frac{\pi}{4}$$

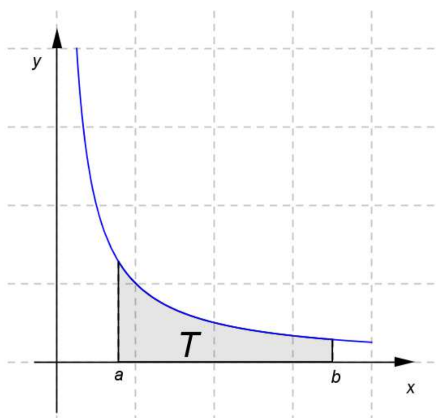
Quindi l'area richiesta è: area T = $\pi \cdot a \cdot b$.

<u>Nota</u>: infatti nel caso particolare in cui $a = b = r$ (l'ellisse è un cerchio) $\Rightarrow area\ T = \pi r^2$

5) Determinare l'area della regione di piano T delimitata dal grafico dell'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$, dall'asse x e dalle rette $x = a \quad x = b$, con $0 < a < b$.

Dobbiamo semplicemente calcolare l'integrale:

$$\text{area T} = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$$



ESERCIZI

CALCOLO DI AREE

1) Calcola l'area della regione T compresa tra la parabola $P_1 : y = x^2 - 3x + 2$ e la parabola $P_2 : y = -x^2 + x + 2$

[area T = $\frac{8}{3}$]

2) Calcola l'area della regione T delimitata dalla parabola $P : x = y^2 - 1$ e dalla retta $x + y - 1 = 0$.

[area T = $\frac{9}{2}$]

3) Calcola l'area della regione T compresa tra il grafico di $y = \ln x$, l'asse x e la retta $x = e$.

[area T = 1]

4) Calcola l'area della regione piana T compresa tra il grafico di $y = \sqrt{|x-1|}$ e la retta $y = 1$.

[area T = $\frac{2}{3}$]

5) Calcola l'area della regione piana T compresa tra la parabola $P_1 : x = y^2 - 2y$ e la parabola $P_2 : x = -y^2$.

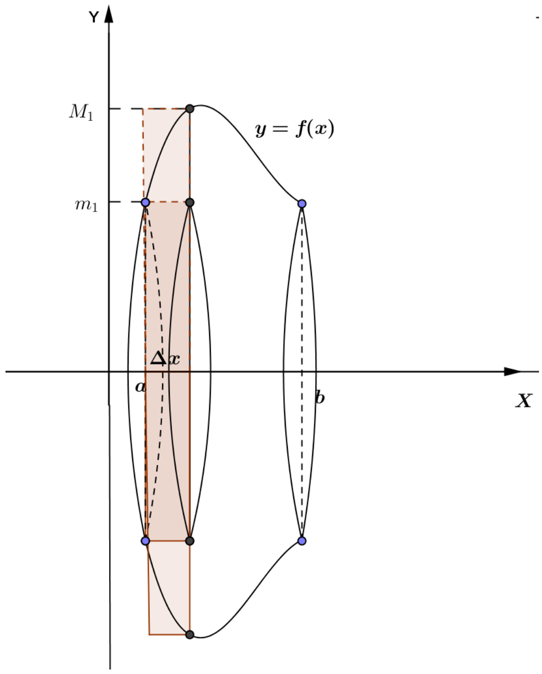
[area T = $\frac{1}{3}$]

6) Calcola l'area della regione piana T compresa tra il grafico di $P : y = 4x - x^2$, l'asse x e la tangente alla parabola nel suo punto P(1; 3).

[area T = $\frac{7}{12}$]

Volume di un solido di rotazione

Consideriamo una funzione $f:[a,b]\to\Re$ continua e supponiamo che $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$.
Se ruotiamo il trapezoide T attorno all'asse x otteniamo un solido di rotazione.



Come possiamo calcolarne il volume?

Se dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ ed in ciascuna consideriamo il minimo m_i ed il massimo M_i (come avevamo fatto quando abbiamo introdotto il concetto di integrale definito) possiamo osservare che il volume V del solido di rotazione sarà compreso tra il volume del "pluricilindro inscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo inscritto nel trapezoide e il volume del "pluricilindro circoscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo circoscritto al trapezoide.

Abbiamo quindi, considerando che i raggi dei vari cilindri inscritti corrispondono a m_i, mentre quelli dei cilindri circoscritti corrispondono a M_i:

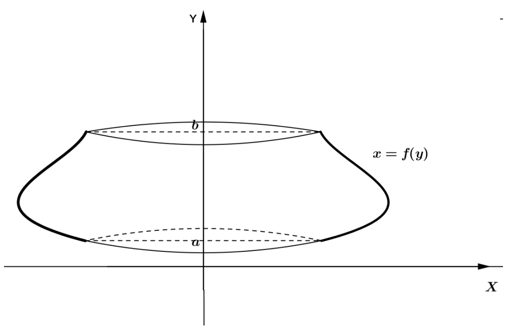
$$V_{in}=\sum_{i=1}^{n}\pi m_i^2\Delta x \qquad V_{circ}=\sum_{i=1}^{n}\pi M_i^2\Delta x$$

Facendo tendere il numero degli intervalli all'infinito $\lim\limits_{n\to+\infty}\Sigma\pi\cdot m_i^{\,2}\cdot\Delta x=\lim\limits_{n\to+\infty}\Sigma\pi\cdot M_i^{\,2}\cdot\Delta x=V$

Quindi si tratta di un integrale definito cioè:

$$\boxed{V=\int_a^b\pi\cdot f^2(x)\ dx=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\ dx}$$

Se invece consideriamo la funzione $x=f(y)$ definita tra a e b il cui trapezoide ruota intorno all'asse y, il volume del solido di rotazione ottenuto risulta naturalmente:



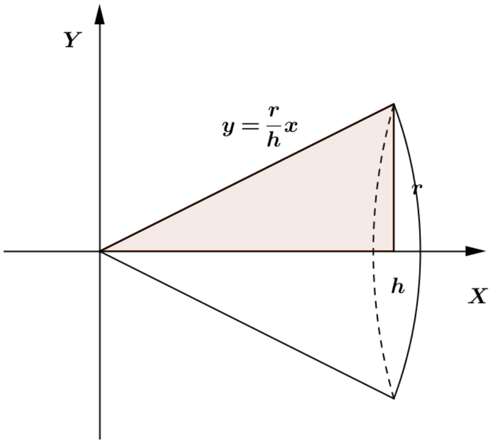
$$\boxed{V=\pi\cdot\int_a^b f^2(y)\ dy}$$

Esempi

Esempio 1

Ricaviamo la formula per determinare il volume di un cono utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere un cono di raggio r ed altezza h posso ruotare il trapezoide individuato dalla retta di equazione $y = \frac{r}{h}x$



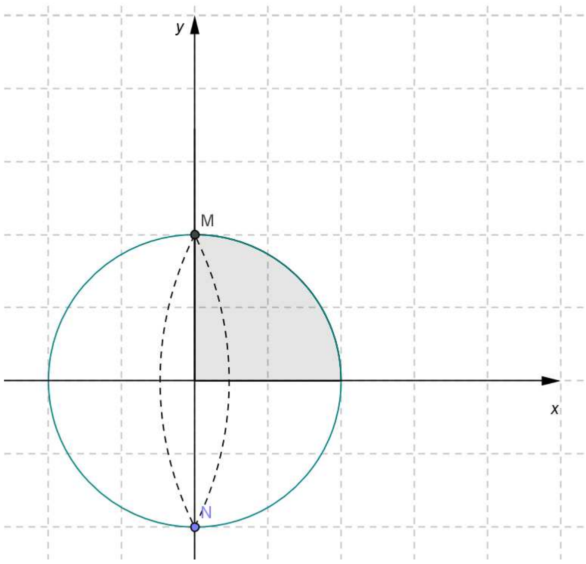
Quindi:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Esempio 2

Ricaviamo la formula per determinare il volume di una sfera di raggio *r* utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere una sfera di raggio *r*, possiamo ruotare la semicirconferenza avente centro (0,0) e raggio *r*, la cui equazione è data da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.



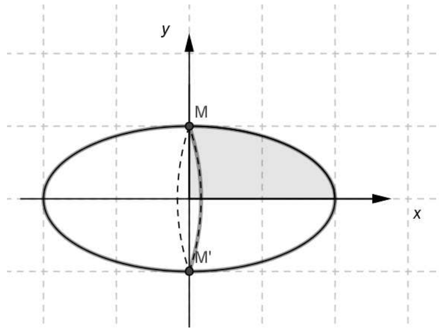
Per la simmetria possiamo scrivere:

$$V = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

***Esempio 3**:* determinare il volume del solido generato dalla rotazione dell'ellisse $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a) attorno all'asse *x*



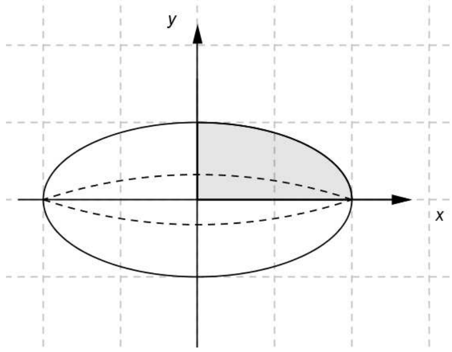
Ricaviamo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot\left(a^2-x^2\right)$ e quindi abbiamo:

$$V = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2\text{-}x^2)dx = 2\pi\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x\text{-}\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^a = \ldots = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

b) attorno all'asse y

Come al punto precedente, ricaviamo stavolta x^2 e seguiamo gli stessi passaggi del punto precedente: $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2\text{-}y^2)$

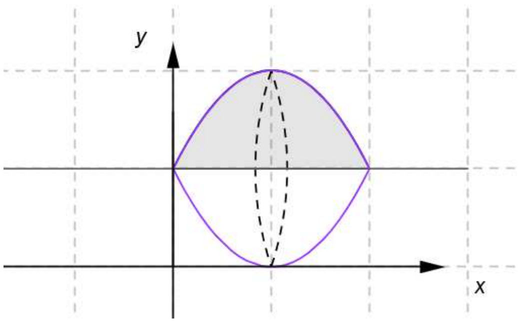
$$V = 2\pi\int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2\text{-}y^2)dy = 2\pi\left[\frac{a^2}{b^2}\left(b^2y\text{-}\frac{y^3}{3}\right)\right]_0^b = \ldots = \frac{4}{3}\pi a^2b$$



Nota: le due espressioni coincidono quando a = b = r (sfera di raggio r) e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (volume della sfera).

Esempio 4: determinare il volume del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla parabola $\mathcal{P}: y = \text{-}x^2 + 2x + 1$ e dalla retta $r: y = 1$ attorno a y=1.

Per poter applicare la formula per la rotazione occorre traslare il sistema di riferimento in modo che la retta *r* sia l'asse delle ascisse.



Applicando la traslazione di equazione $\begin{cases} x = X \\ y = Y+1 \end{cases}$

si ottiene l'equazione della parabola nel sistema di riferimento traslato

$Y = -X^2 + 2X$

Quindi il volume richiesto è dato da:

$$V = \pi\int_0^2(\text{-}x^2 + 2x)^2dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}\text{-}4\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{32}{5}+\frac{32}{3}\text{-}16\right) = \frac{16}{15}\pi$$

ESERCIZI
CALCOLO DEI VOLUMI DI SOLIDI DI ROTAZIONE

1) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla parabola $\mathcal{P}: x = \frac{y^2}{2}$ e dalla retta $x = 3$ attorno all'asse x.

$[V = 9\pi]$

2) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla parabola $\mathcal{P}: y = x^2$ e dalla retta $y = 1$ attorno all'asse y.

$\left[V = \frac{\pi}{2}\right]$

3) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano T delimitata dagli assi cartesiani e dal grafico della parabola $\mathcal{P}: y = x^2\text{-}2x + 1$.

$\left[V = \frac{\pi}{6}\right]$

4) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = lnx$, dall'asse x e dalla retta $x = e$.

$[V = \pi(e\text{-}2)]$

5) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = lnx$, dall'asse x e dalla retta $y = 1$.

$\left[V = \frac{\pi}{2}(e^2\text{-}1)\right]$

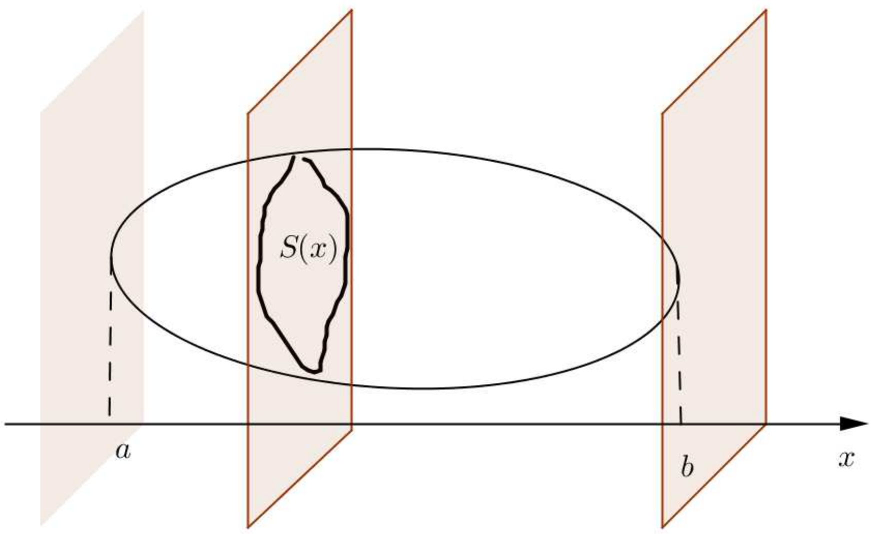
COMPLEMENTI

CALCOLO DI VOLUMI

Il metodo delle sezioni

Se un solido si può disporre in modo da essere delimitato da due piani paralleli α e β che per esempio rispetto ad un dato riferimento hanno equazione x=a e x=b e si conosce l' area S(x) di una qualunque sezione con un piano parallelo compreso tra α e β allora si ha che

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



Esempio

Consideriamo per esempio una piramide avente per base un poligono di area B e altezza h: tagliandola con piani paralleli al piano di base posti a distanza x dal vertice otteniamo sezioni di area S(x) tali che, per la similitudine, si ha

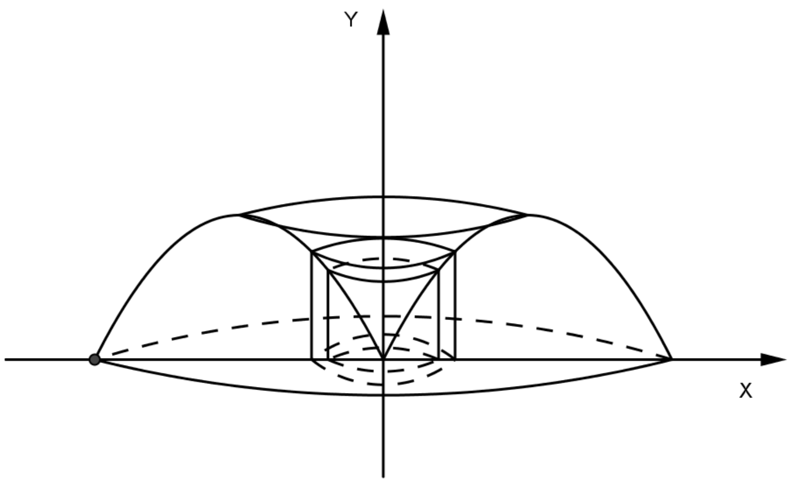
$S(x): x^2 = B: h^2$

Quindi $S(x) = \frac{x^2}{h^2}B$ e in conclusione

$$V = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}B\,dx = \left[\frac{B}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{Bh}{3}$$

Il metodo dei gusci cilindrici

Il solido generato dalla rotazione attorno all'asse y del trapezoide individuato dal grafico di una funzione $y = f(x)$ definita nell'intervallo $[a,b]$ può essere vista come somma di tanti "gusci cilindrici", cioè cilindri cavi di raggio interno x, raggio esterno $x + \Delta x$ e altezza f(x).



Se "srotoliamo" il guscio cilindrico il suo volume ΔV è approssimabile con il volume di un parallelepipedo rettangolo avente come area di base $2\pi \cdot x \cdot \Delta x$ e altezza f(x) e quindi sommando tutti gli infiniti gusci avremo

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$$

Esempio

Se per esempio consideriamo la rotazione del trapezoide individuato da $y = 2x - x^2$ nell'intervallo $[0,2]$ attorno all'asse y (vedi figura), otteniamo un solido avente volume

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot \left(2x - x^2\right) dx = \dots\dots\dots = \frac{8}{3}\pi$$

Applicazioni in fisica dell'integrale definito

Moto rettilineo di un punto materiale

Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo secondo una legge oraria

$$s = s(t)$$

Sappiamo che $v(t) = s'(t)$ e che $a(t) = v'(t)$, quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2)\text{-}s(t_1) \text{ ed anche } \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2)\text{-}v(t_1)$$

Esempio: sapendo che l'accelerazione di un punto materiale è costante $a(t) = a$, che $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$, determinare la legge oraria.

Iniziamo con l'integrare l'accelerazione tra 0 e t: $\int_0^t a\,dt = [at]_0^t = at$.

Sappiamo quindi che $at = v(t)\text{-}v(0)$ e poiché $v(0) = v_0$, possiamo ricavare $v(t)$:

$$v(t) = at + v_o$$

A questo punto possiamo integrare $v(t)$ per risalire a $s(t)$:

$$\int_0^t v(t)dt = \int_0^t (at + v_0)dt = \left[a\frac{t^2}{2} + v_0 t\right]_0^t = a\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Ma sappiamo che $\int_0^t \; v(t)dt = s(t)\text{-}s(0)$ e che $s(0) = s_0$ quindi:

$$a\frac{t^2}{2} + v_0 t = s(t)\text{-}s_0$$

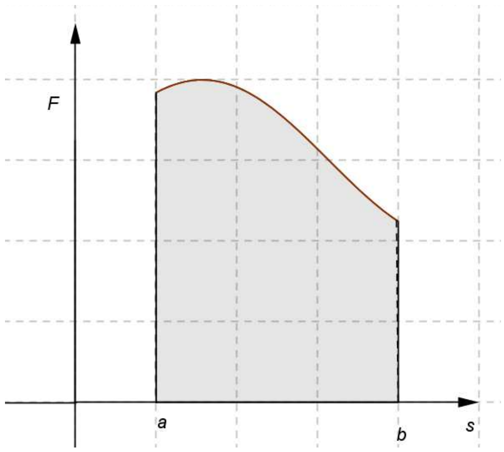
da cui

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Che rappresenta, come è noto, la legge oraria del moto uniformemente accelerato.

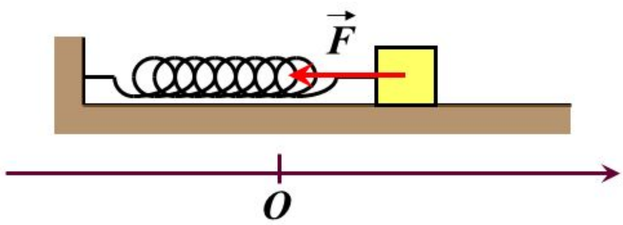
Lavoro di una forza

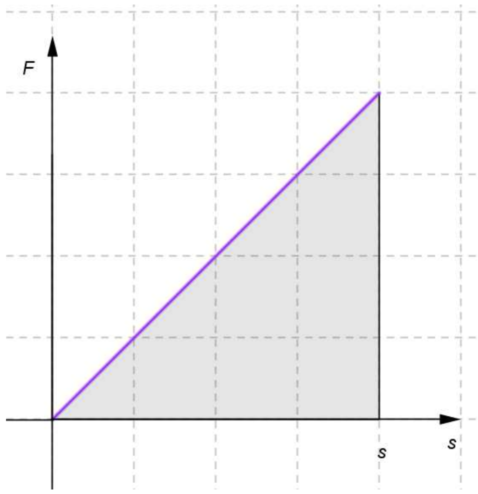
Il lavoro di una forza la cui intensità dipende dalla posizione cioè $F = F(s)$ ed avente direzione parallela allo spostamento, essendo uguale alla somma di tanti lavori relativi a piccoli spostamenti Δs, risulta l'area sottesa dal grafico di $F = F(s)$ nel sistema di riferimento (s, F) e quindi:



$$L = \int_a^b F(s)ds$$

Esempio 1: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica $F = Ks$ quando il suo punto di applicazione si sposta da 0 a s (è uguale all'energia potenziale elastica di un punto materiale di massa m, in posizione s, attaccato ad una molla di costante elastica K).





Il lavoro della forza elastica è dato da

$$L = \int_0^s Ks\, ds = \left[K\frac{s^2}{2}\right]_0^s = K\frac{s^2}{2}$$

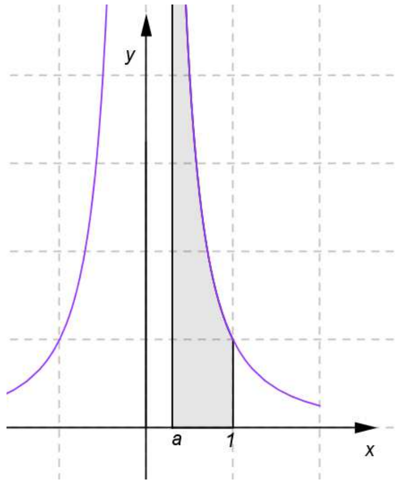
Esempio 2: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica $F(r) = K\frac{Qq}{r^2}$ che agisce su una carica q nel campo generato dalla carica Q, quando si sposta da distanza r_A a distanza r_B lungo una linea di forza.

$$L = \int_{r_A}^{r_B} K\frac{Qq}{r^2}dr = KQq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = KQq\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right)$$

INTEGRALI IMPROPRI

Abbiamo definito l'integrale definito per una funzione f(x) continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato. Proviamo ad estendere la definizione anche nel caso in cui la funzione:

a) abbia un asintoto verticale (una discontinuità di seconda specie) in un estremo dell'intervallo;
b) l'intervallo sia illimitato.



a) Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x)=\frac{1}{x^2}$:

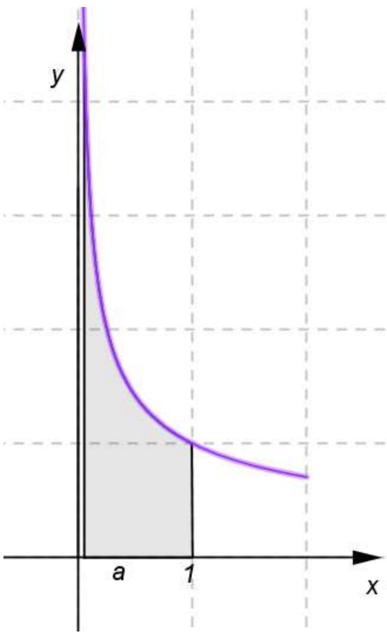
il suo grafico è quello in figura ed $x=0$ è un asintoto verticale.

Possiamo calcolare $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$?

Consideriamo un valore a tale che $0<a<1$ e calcoliamo:

$$\int_a^1 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = -1+\frac{1}{a}$$

Calcoliamo adesso $\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to0^+}\left(-1+\frac{1}{a}\right) = +\infty$



Ma sarà sempre così? Il limite sarà sempre infinito?

Consideriamo un'altra funzione con asintoto verticale x=0.

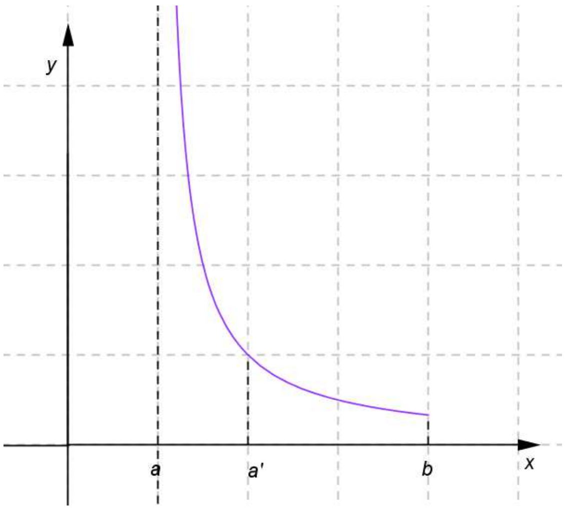
Prendiamo $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ e ripetiamo il procedimento precedente:

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to0^+}\left(2-2\sqrt{a}\right) = 2$$

In questo caso abbiamo ottenuto un numero finito.

Si dà, quindi, la seguente definizione:

$f(x)$ **è integrabile in senso improprio** in $(a, b]$ con $f(x)$ continua in $(a, b]$ con asintoto verticale $x = a$ **se esiste finito** il



$$\lim_{a' \to a} \int_{a'}^{b} f(x)dx$$

e scriveremo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a' \to a} \int_{a'}^{b} f(x)dx$$

Altrimenti diremo che $f(x)$ non è integrabile in senso improprio in $(a, b]$.

Quindi, ritornando ai nostri esempi, possiamo dire che:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ non è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$

Nota

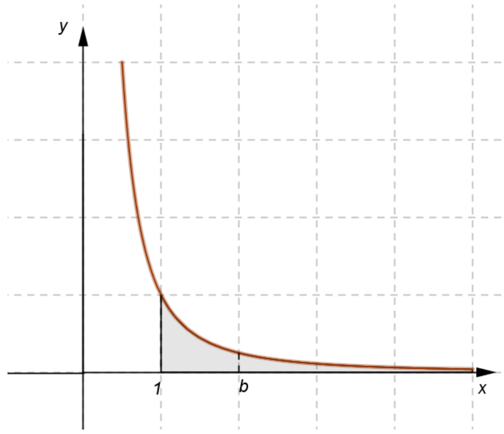
Più in generale, data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ nell'intervallo $(0, 1]$ con $\alpha > 0$ si ha che:

- per $\alpha = 1$ non è integrabile: $\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} [ln|x|]_a^1 = \lim_{a \to 0^+} (-lna) = +\infty$
- per $\alpha > 1$ non è integrabile: $\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^1 = \ldots = +\infty$
- per $0 < \alpha < 1$ è integrabile.

b) Consideriamo ora il caso di integrale in un intervallo illimitato.

Riprendiamo le stesse funzioni del caso a) e cerchiamo di calcolare $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ cioè consideriamo l'intervallo $[1, +\infty)$.

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Per calcolare $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

calcoliamo il $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$

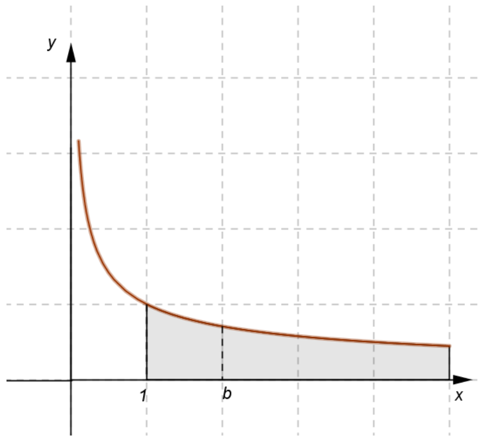
$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} - (-1) = 1 - \frac{1}{b}$

quindi $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Procediamo nello stesso modo cioè calcoliamo il

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



Abbiamo: $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^b$

e quindi $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} 2\sqrt{b} - 2 = +\infty$

Quindi viene data la seguente definizione:

f(x) è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$ se **esiste finito** il

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e scriveremo: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$

Altrimenti diremo che f(x) non è integrabile in $[a, +\infty)$.

Pertanto, riassumendo i nostri esempi:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ non è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$.

Più in generale, data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$ si ha che:

- per $\alpha > 1$ è integrabile nell'intervallo $[1, +\infty)$
- per $0 < \alpha \leq 1$ non è integrabile nell'intervallo $[1, +\infty)$

Nota: in modo analogo si definiscono gli integrali impropri in $[a, b)$ (vale a dire con $f(x)$ che ha un asintoto verticale in $x = b$) oppure in $(-\infty; b]$ (cioè su intervalli illimitati a sinistra).

È possibile anche aver integrali impropri in $(a, +\infty)$ (nel senso che $f(x)$ ha un asintoto per $x = a$ e si considera un intervallo illimitato) o (a, b) ($f(x)$ ha un asintoto sia in $x = a$ sia in $x = b$) od anche in $(-\infty, +\infty)$, spezzando il calcolo dell'integrale nella somma di due integrali impropri.

Esempi

1) Possiamo calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$?

Consideriamo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ come $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$: affinché $y = \frac{1}{x}$ sia integrabile in $[0, +\infty)$ dovrebbero esistere entrambi ma $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$ perciò la funzione non è integrabile in $[0, 1)$ e quindi neppure in $[0, +\infty)$ (tra l'altro non è integrabile neppure in $[1, +\infty)$).

2) Possiamo calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$?

Spezziamo l'integrale in $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ e $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Si avrà che $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} [arctgx]_0^b = \lim_{b \to +\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}$

Poiché la funzione integranda è pari, si avrà anche che:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

ESERCIZI

INTEGRALI IMPROPRI

1) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ [$\frac{1}{3}$]

2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2x+3} dx$ [non integrabile]

3) $\int_{0}^{+\infty} senx dx$ [non integrabile]

4) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ [$2\sqrt{2}$]

5) $\int_{0}^{1} x \ln x dx$ [$-\frac{1}{4}$]

6) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ [non integrabile]

7) $\int_{0}^{1} \ln x dx$ [-1]

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} arctgx dx$ [non integrabile]

9) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ [0]

10) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$ [non integrabile]

SCHEDA DI VERIFICA

INTEGRALI DEFINITI

1. Determina il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [1;2].

[ln2]

2. Determina l'area della regione piana T delimitata dal grafico di $y = lnx$, dall'asse x e dalla retta $x = 3$

[$areaT = 3ln3 - 2$]

3. Disegna la parabola $\mathcal{P}: y = 2x\text{-}x^2$ e determina le equazioni delle tangenti t_1 e t_2 nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

a) Calcola l'area della regione finita delimitata dalle tangenti e da $\mathcal{P}$; [$\frac{2}{3}$]

b) Calcola il volume del solido ottenuto ruotando la regione di piano compresa tra $\mathcal{P}$ e l' asse x, intorno all'asse x.

$\left[V = \frac{16}{15}\pi\right]$

4. Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse y la regione piana T delimitata dal grafico di $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$.

$\left[V = \frac{2}{5}\pi\right]$

5. Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = t$, $s(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

[$s(t) = \frac{t^3}{6}$]

6. Determinare la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale sapendo che $a(t) = e^{-t}$, $v(0) = 5$ e $s(0) = 3$.

[$s(t) = e^{-t} + 6t + 2$]

7. Calcola $\int_1^{+\infty} lnxdx$.

[non integrabile]

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1) Trova per quali valori di a,b (parametri reali) la curva di equazione $y=\frac{x^2+ax+1}{x+b}$ ha per asintoti le rette $x=3,\quad y=x$. Rappresenta la funzione ottenuta.

$[a=b=-3]$

2) Considera le funzioni del tipo $y=ax^4+bx^2+c$. Determina quella che ha un flesso in $F(1;-1)$ e tangente parallela alla retta $y=-8x+3$. Disegna il grafico della funzione individuata.

$[y=x^4-6x^2+4]$

3) Data la cubica $y=ax^3+bx^2-cx+d$ con $a,b,c,d\in\Re,\quad a\neq 0$, determina il valore dei parametri per cui la curva ha il flesso nell'origine e il massimo nel punto $(2;8)$. Rappresenta il grafico della funzione.

$[y=-\frac{1}{2}x^3+6x]$

4) a) Data la funzione $y=\frac{ax+b}{cx^2+1}$ determina *a*, *b*, *c* in modo che *f(x)* sia dispari, abbia due punti di flesso in corrispondenza di $x=\pm 1$ e tangente in $x=1$ con pendenza $\frac{1}{4}$.

b) Verificato che $a=-2,\quad b=0,\quad c=3$ traccia il grafico di *f(x)*.

c) Trova l'area compresa tra il grafico di *f(x)* e l'asse x per $0\leq x\leq 1$.

$\left[\frac{1}{3}\cdot\ln 4\right]$

5) a) Data la funzione $y=e^{ax}\cdot(x+b)$ determina a,b (parametri reali) in modo che il grafico della funzione passi per il punto $(0;2)$ ed abbia in quel punto tangente $t: y=-x+2$

b) Verificato che si ha $a=-1,\quad b=2$ traccia il grafico della funzione ottenuta.

c) Si può determinare l'area della regione di piano delimitata nel primo quadrante tra il grafico e gli assi cartesiani?

$[M(-1;e),\quad F(0,2),\quad A=3]$