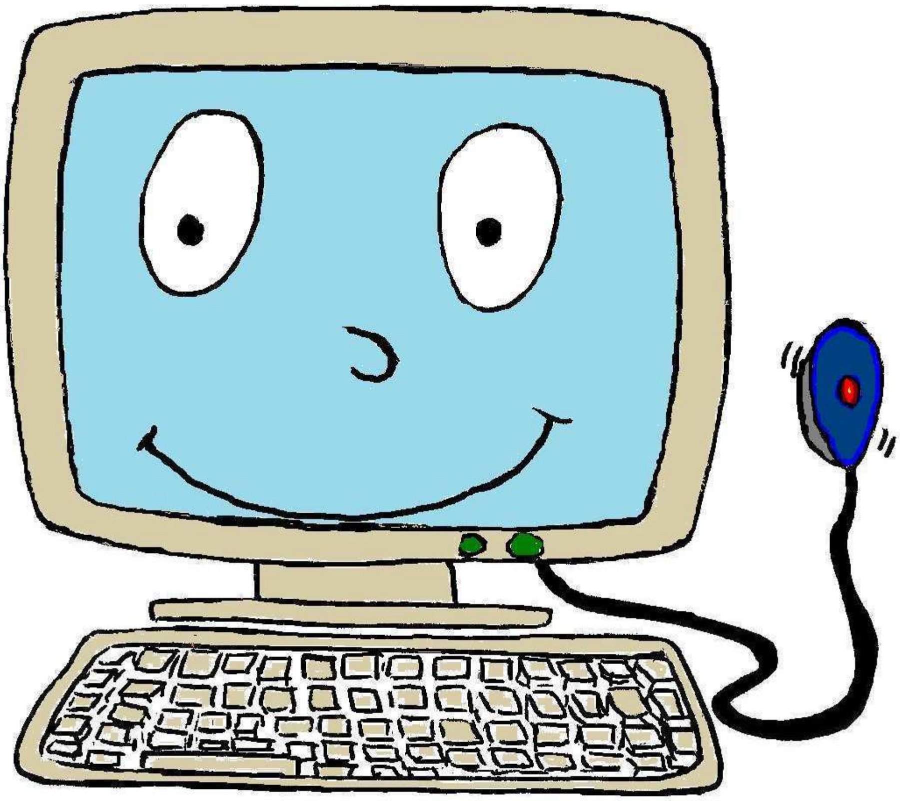
Laboratorio di informatica

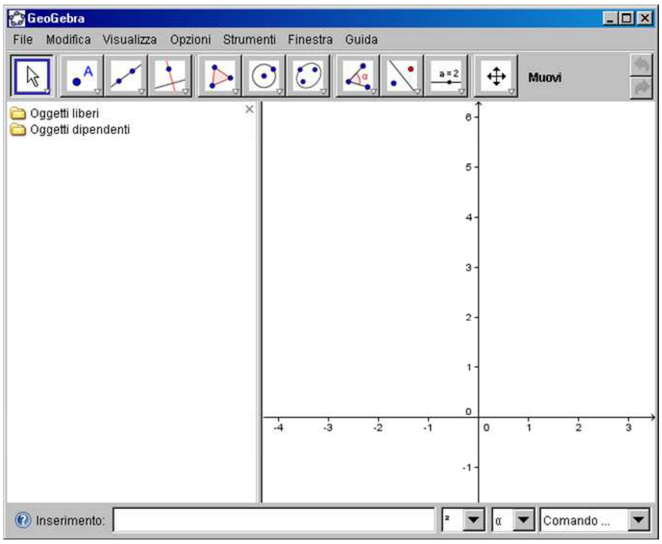


GEOMETRIA ANALITICA CON GEOGEBRA

Ripasso

Nello studio della geometria analitica può risultare interessante utilizzare il software Geogebra (geometria +algebra). Rivediamo brevemente come si utilizza.

Apriamo il programma: comparirà un piano cartesiano con dei pulsanti in alto che hanno comandi per disegnare punti, rette, circonferenze ecc. e in basso una riga dove è possibile **inserire coordinate di punti o equazioni**.



Se per esempio digito (1,1) nella finestra grafica compare il punto corrispondente : posso anche assegnare un nome al punto, per es. B=(1,1) , altrimenti viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (A, B, C …).

Se digito y=x compare nella finestra grafica la retta corrispondente: per darle un nome basta digitare, per esempio, r : y=x altrimenti il nome viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (a,b,c…).

*Prova a digitare coordinate di punti e equazioni di rette…..

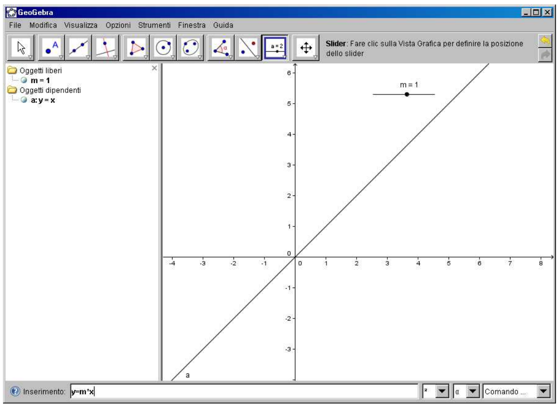
Slider

Geogebra offre la possibilità di utilizzare quelli che vengono chiamati "slider"che altro non sono che parametri che possono essere inseriti in un'equazione e variati :variando il valore dello slider viene visualizzata l'equazione corrispondente e quindi viene compreso il significato di quel parametro.

Prima di inserire uno slider in un'equazione dobbiamo crearlo.

- Attiviamo il pulsante in alto in cui compare la scritta "slider";
- posizioniamoci in un punto qualsiasi del piano cartesiano e facciamo clic con il mouse: comparirà un trattino e ci verrà chiesto di inserire il nome e il campo di variazione dello slider (per esempio chiamiamolo m e scegliamo di farlo variare tra -10 e 10).

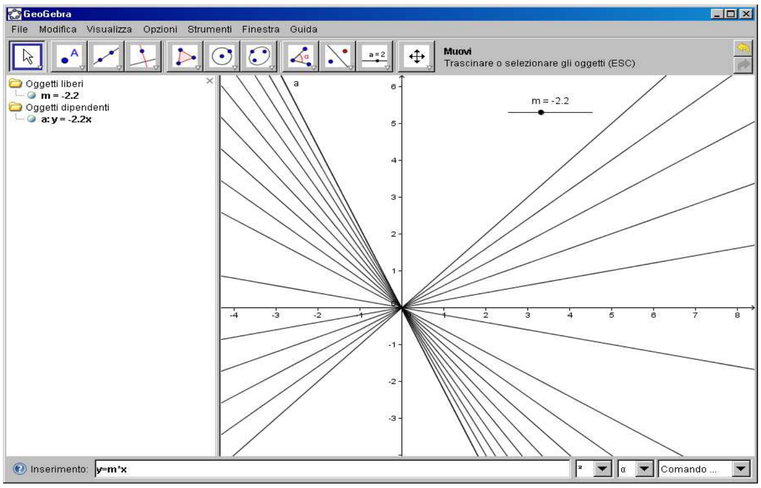
Digitiamo nella barra di inserimento per esempio y=mx (in alcune versioni di Geogebra occorre mettere * per indicare la moltiplicazione) e osserviamo che compare subito la rappresentazione della retta per l'origine corrispondente al valore che viene dato inizialmente allo slider (uguale a 1).



Per visualizzare come cambia la retta al variare di m attiviamo nel primo pulsante in alto a sinistra il comando **“muovi**”.
Posizioniamoci sullo slider (comparirà una manina) e trasciniamo lo slider (cambia il suo valore): la retta per l’origine cambia e quindi ci rendiamo conto che variando m varia l’inclinazione della retta.

Possiamo anche visualizzare insieme tutte le rette corrispondenti ai vari valori dello slider scegliendo, dopo essersi posizionati sulla retta e premuto il tasto destro del mouse, la funzione “traccia attiva” (in alcune versioni si trova “traccia on”) : a questo punto muovendo m compariranno tutte le rette corrispondenti.
Posso anche inserire un valore dello slider digitandolo nella riga di inserimento in basso.

Possiamo anche vedere automaticamente la variazione dello slider con : Modifica -proprietà fondamentale-animazione attiva.



Ricorda

Se vogliamo riportare un grafico fatto con Geogebra all’interno di un documento dobbiamo procedere così:

- selezionare con il mouse la zona della finestra grafica che ci interessa;
- selezionare file-esporta- esporta la vista grafica negli appunti (equivale ad un crtl-C cioè ad un copia);
- andare nel documento dove vogliamo inserire il grafico, posizionare il cursore nel punto esatto e premere ctrl-v (contemporaneamente cioè “incolla”).

Laboratorio di informatica
SCHEDA 1

GEOMETRIA ANALITICA
Retta e fasci di rette

Esercizio 1
Studia l'equazione generale della retta a*x+b*y+c=0 creando gli slider a, b, c e facendoli variare.

Stampa degli esempi.

Esercizio 2
Studia l'equazione del fascio di rette y=2x + k dopo aver creato lo slider k.
Stampa il fascio.

Esercizio 3
Studia l'equazione del fascio di rette y-1=m*(x-1) dopo aver creato lo slider m.
Stampa il fascio.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 2

GEOMETRIA ANALITICA
Fascio generato da due rette

Studia **fasci di rette generati da due rette** r_1 e r_2 combinando le loro equazioni con un parametro (slider) k.

1) Per esempio considera

$$x-y+k*(x-1)=0$$

Osserva cosa accade quando $k \to 0$ e quando $k \to \infty$.

Se avessimo scritto

$$k*(x-y)+(x-1)=0$$

avremmo ottenuto lo stesso fascio?

Quando k cresce a quale retta ci avviciniamo?
Quale retta si ottiene per k = 0?

Stampa il fascio.

2) Costruisci un altro fascio e fai delle osservazioni.

Stampa i tuoi esempi.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 3

GEOMETRIA ANALITICA

Circonferenza

1)Prova a disegnare una circonferenza digitando nella barra di inserimento la sua equazione, per esempio,

x^2 +y^2 =1

(per elevare al quadrato occorre usare ^).

2)Puoi costruire una circonferenza anche attivando i comandi :

circonferenza dati il centro e un punto;
circonferenza dati centro e raggio;
circonferenza per tre punti (non allineati).

Prova e controlla l'equazione che compare a sinistra nella "vista algebra".
Stampa le tue prove.

3) Crea tre slider a,b,c e inserisci l'equazione generale della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + a * x + b * y + c = 0$$

Prova a variare a,b,c e fai le tue osservazioni stampando degli esempi (per esempio se a=0…… , se b=0……, se c=0……)

Osserva che non per tutti i valori di a,b,c, ottieni una circonferenza perché…..

Laboratorio di informatica
SCHEDA 4

GEOMETRIA ANALITICA
Fasci di circonferenze

L'uso degli slider permette di studiare i fasci di circonferenze: possiamo combinare l'equazione di due circonferenze o di una circonferenza e di una retta.

Quali tipi di fasci di circonferenze sono rappresentati dalle seguenti equazioni?

Per tutti i valori di k si hanno circonferenze reali ?

- $x^2 + y^2 - 1 + k*(x - y + 1) = 0$
- $x^2 + y^2 - 1 + k*(x - 1) = 0$
- $x^2 + y^2 - 1 + k*(x^2 + y^2 - 4) = 0$
- $x^2 + y^2 - 1 + k*(x - 2) = 0$

Stampa i vari fasci di circonferenze e inserisci le tue osservazioni.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 5

GEOMETRIA ANALITICA
Luoghi di punti

1) Fissati due punti A e B determina il luogo dei punti P del piano che verificano la relazione

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$$

Suggerimento: se per esempio fissiamo un sistema di riferimento che abbia l'origine in A , come asse x la retta AB e come unità di misura la distanza $\overline{AB}$ avremo A(0;0) e B(1;0) e quindi ponendo P(x;y) e impostando la relazione avremo

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 1$$

che sviluppata risulta …..

Domanda: secondo te perché il luogo dei punti P risulta così?

2) Fissati due punti A e B , per esempio A(0;0) e B(1;0) determina il luogo dei punti P(x;y) del piano tali che

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k \quad \text{con k numero reale positivo}$$

Suggerimento: creiamo uno slider k e inseriamo l'equazione del luogo

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = k$$

Domanda: cosa si ottiene al variare di k? Vanno bene tutti i valori di k positivi?

3) Fissati tre punti A, B, C studiamo il luogo dei punti P(x;y) che verificano la relazione

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = k$$

dove k è un numero reale positivo.
Suggerimento: possiamo fissare un sistema di riferimento in modo che A(0:0) B(1;0) (prendendo come unità di misura la distanza tra A e B)e C(a;b) con a,b slider.
Creiamo anche lo slider k e inseriamo l'equazione del luogo:

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 = k$$

Come risulta il luogo al variare di k? (osserva l'equazione della curva che compare nella "finestra algebra"….). Stampa il luogo ottenuto.

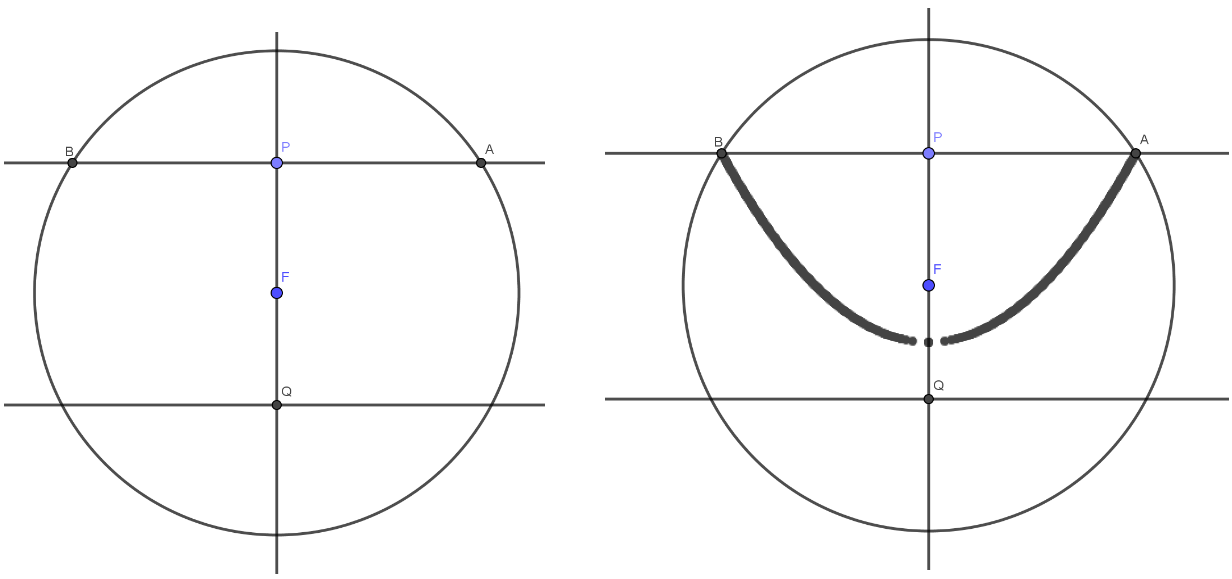
Domande
Se muovi C cosa accade ? Vanno bene tutti i valori di k positivi? C'è un minimo valore di k?

Laboratorio di informatica
SCHEDA 6

GEOMETRIA ANALITICA
Costruzione della parabola
(primo metodo)

Vediamo un metodo per disegnare per punti una parabola di fuoco F assegnato e direttrice d assegnata.

- Traccia la retta r per F perpendicolare a d (asse di simmetria);
- prendi un punto P su r (punto su oggetto) (rinomina il punto);
- interseca la retta r con d: si ottiene Q (rinominare il punto);
- con lo strumento "compasso" selezionare i punti P e Q (per indicare l'apertura $\overline{PQ}$) e poi il centro F: viene tracciata una circonferenza di centro F e raggio PQ;
- traccia la retta per P parallela alla direttrice e intersecala con la circonferenza ed ottieni due punti A e B (rinominare i punti) che, essendo equidistanti dal fuoco e dalla direttrice, appartengono alla parabola;
- attiva la traccia di A e B e muovi P ottenendo così vari punti della parabola.



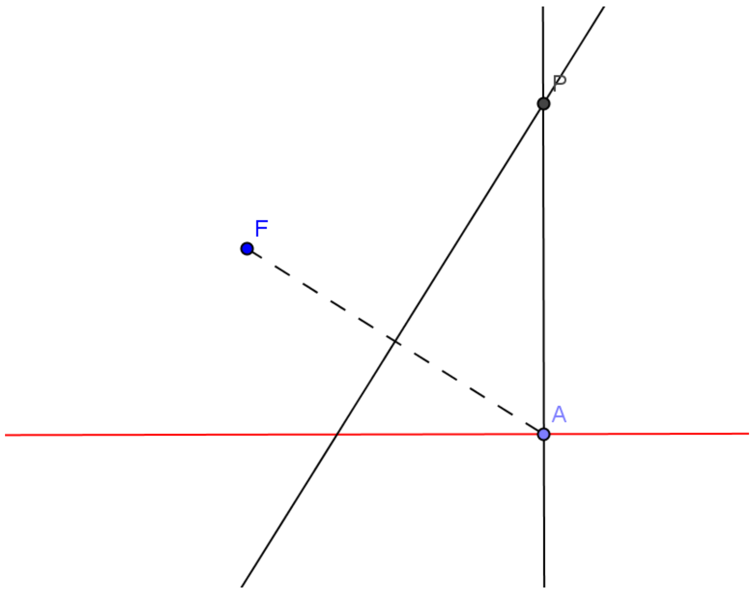
Nota
Puoi anche usare il comando "**luogo**": seleziona A e poi P (ottieni un ramo della parabola) e poi ancora B e poi P (ottieni l'altro ramo).
Nascondi tutta la costruzione lasciando solo F e d : se muovi fuoco o direttrice osserva come varia l'apertura della parabola.

Stampa i tuoi esempi.

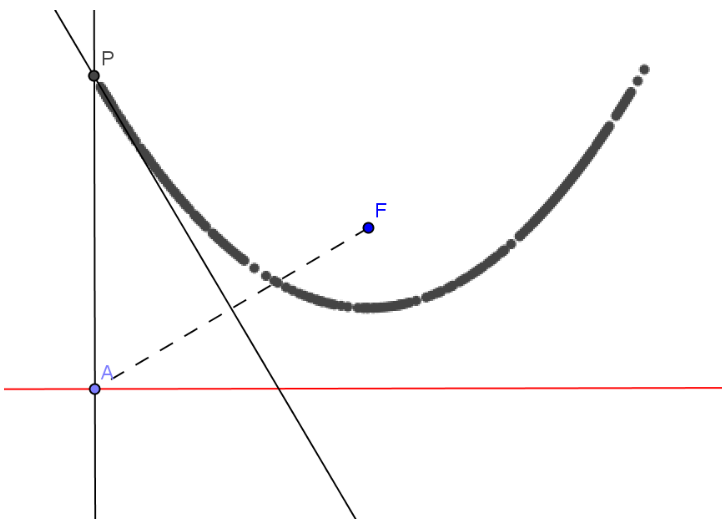
Laboratorio di informatica
SCHEDA 7

GEOMETRIA ANALITICA
Costruzione della parabola
(secondo metodo)

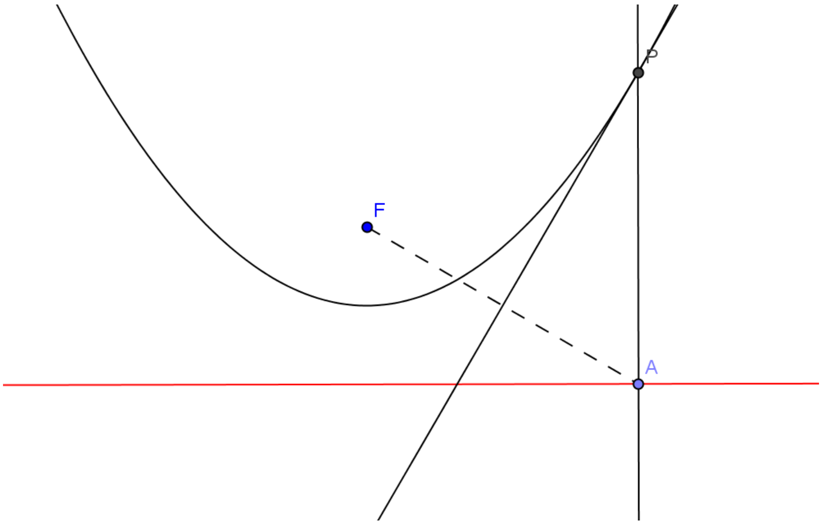
Vediamo un altro metodo per disegnare la parabola di **dato fuoco e data direttrice**.
Creiamo un punto F (rinominalo) e una retta d (rinominala).
Prendi un punto A sulla direttrice (comando punto su oggetto) e traccia la retta r per A perpendicolare alla direttrice : traccia l'asse del segmento FA e intersecalo con la retta r individuando il punto P.
P appartiene alla parabola di fuoco F e direttrice d poiché è equidistante da F e dalla retta d.



Se attiviamo la "traccia" di P e muoviamo A otteniamo la parabola di fuoco F e direttrice d.



Nota 1
Anche in questo caso prova ad usare il comando **“luogo”.**
Cancella con “modifica” Annulla , scegli il comando “luogo”, seleziona P e poi A (poiché le varie posizioni di P dipendono dalle varie posizioni di A) e verrà immediatamente disegnata la parabola.



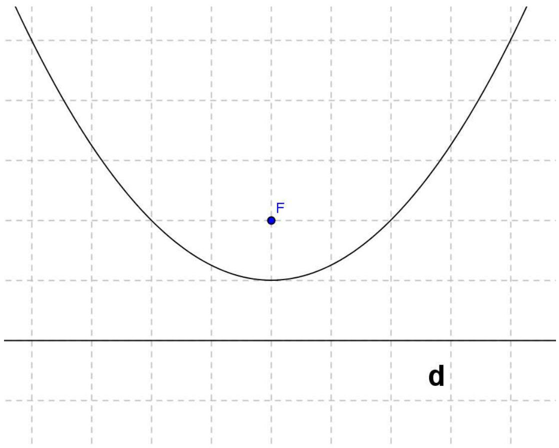
Nota 2

Possiamo anche definire una **“macro”** cioè un comando che ci permetterà di avere la parabola di dato fuoco e direttrice semplicemente cliccando su un punto-fuoco e su una retta-direttrice.

Scegliamo Strumenti – crea nuovo strumento :
come **oggetti finali** selezioniamo il luogo che abbiamo definito, come **oggetti iniziali** il fuoco F e la direttrice d (eliminiamo con la crocetta altri elementi che vengono indicati).
Premiamo “successivo” (oppure nome e icona): diamo il nome “parabola” al nostro strumento e selezioniamo “fine” (possiamo se vogliamo anche associare un’immagine al nostro strumento, basta prima disegnare una parabola, esportarla come immagine, salvarla e poi sceglierla come “icona”).

Importante: se vuoi che questo strumento venga memorizzato ricorda di premere Opzioni – Salva impostazioni prima di chiudere il programma.

Prova se funziona: clic sullo strumento “parabola”, clic su un punto e su una retta…



Laboratorio di informatica
SCHEDA 8

GEOMETRIA ANALITICA
Il parabolografo

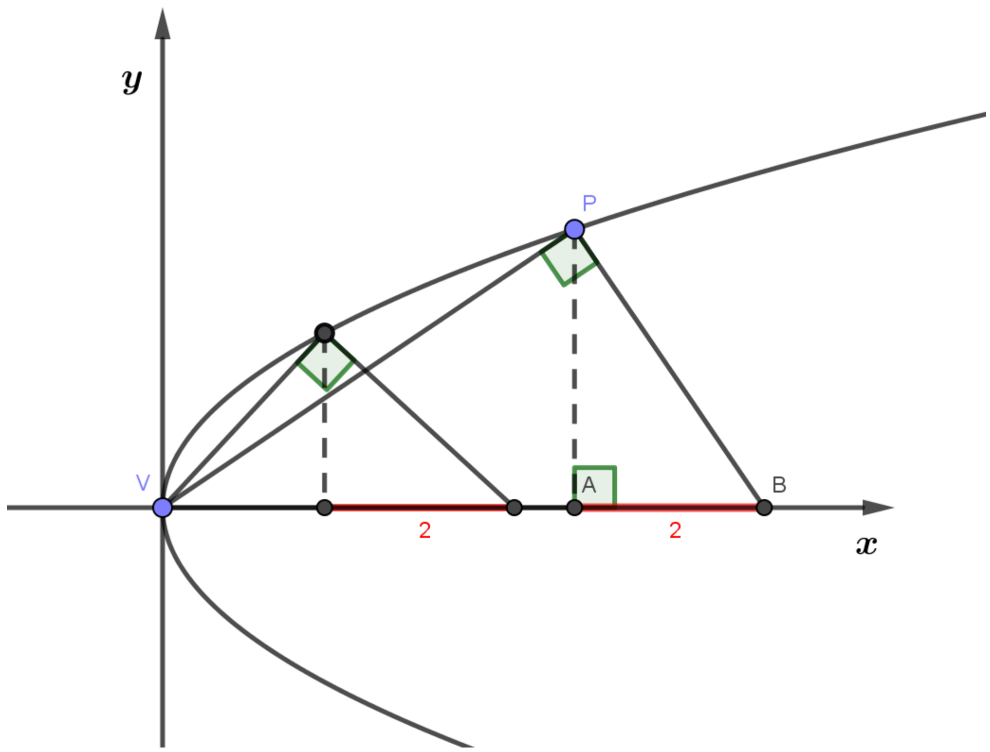
Consideriamo una parabola, per esempio $y^2 = 2x$.
Consideriamo $P(x; y)$ un punto su di essa: indichiamo con A la proiezione di P sull'asse x e tracciamo il segmento VP e poi la retta per P perpendicolare a VP ed intersechiamola con l'asse x chiamando B il punto di intersezione.
Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo VBP abbiamo che

$$x : y = y : \overline{AB} \to \overline{AB} = \frac{y^2}{x} = 2$$

Quindi il segmento AB, al variare di P sulla parabola risulta sempre uguale a 2 e in generale se abbiamo la parabola di equazione $y^2 = p \cdot x$, il segmento AB risulta sempre di lunghezza p al variare di P sulla parabola.

Nota: prova a verificare questa proprietà con Geogebra inserendo l'equazione della parabola, facendo la costruzione che abbiamo indicato e, dopo aver costruito il segmento AB, inserendo il comando "distanza o misura".

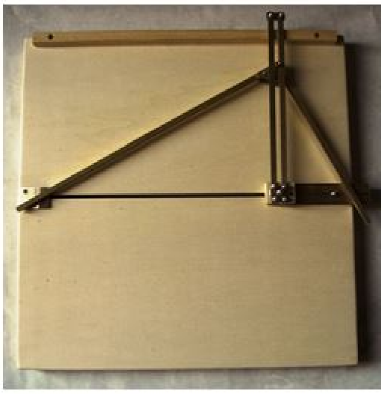
Prova a muovere P sulla parabola: se la costruzione è corretta vedrai che il segmento AB si mantiene sempre di lunghezza 2.

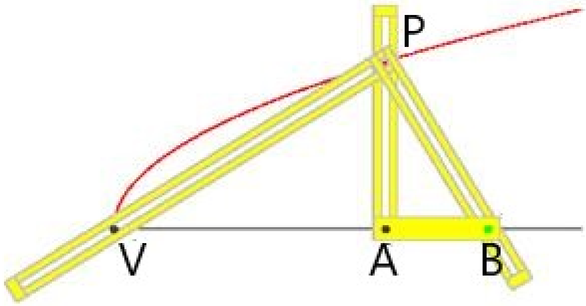


Il parabolografo

Utilizzando questa proprietà della parabola, i matematici greci costruirono una “macchina” per tracciare una parabola e questo strumento fu chiamato parabolografo.

Un parabolografo è costituito da due “squadre” agganciate come in figura in modo che AB rimanga fisso: facendo scorrere il punto A nella scanalatura (asse x) il punto P descrive un arco di parabola.





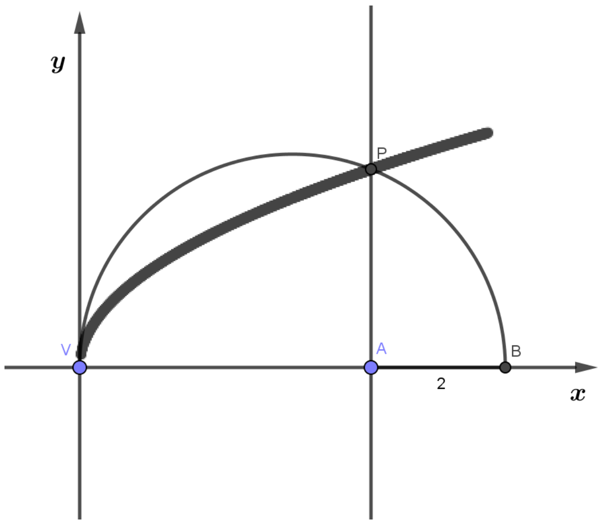
Proviamo a simulare il funzionamento di un parabolografo con Geogebra.

Consideriamo l’origine degli assi e poniamo V(0,0), creiamo la retta coincidente con l’asse e un punto A su di essa con il comando “punto su oggetto”.
Inseriamo dalla barra di inserimento un altro punto B in modo che sia sempre anch’esso sull’asse x e in modo che la lunghezza del segmento AB sia fissa, per esempio uguale a 2:

B=(x(A)+2,0)

Tracciamo la retta *r* perpendicolare al segmento AB e passante per A. Tracciamo la semicirconferenza di diametro VB e chiamiamo con P il punto di intersezione fra la semicirconferenza e la retta r.

Il triangolo VBP risulta rettangolo (è inscritto in una semicirconferenza) e se facciamo variare il punto A e mettiamo la traccia attiva al punto P otteniamo un arco di parabola (di equazione $y^2 = 2 \cdot x$)



Esercizio
Prova a inserire uno slider *p* e a ripetere la costruzione in modo di avere un parabolografo che tracci la parabola $y^2 = p \cdot x$.
Stampa qualche esempio variando il valore di *p*.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 9

GEOMETRIA ANALITICA

Equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

1) Prova ad inserire, dopo aver creato tre slider a, xv, yv

   y-yv = a*(x-xv)^2

   Prova a variare i valori di a, xv, yv.

   Fai le tue osservazioni e stampa degli esempi.

2) Prova a vedere la relazione tra l'ampiezza della parabola e il parametro p (distanza fuoco-direttrice).

   Dopo aver creato lo slider p (prendiamolo positivo) inserisci l'equazione:

   y = 1/(2*p)*x^2

   Puoi anche disegnare fuoco e direttrice inserendo F=(0,p/2) e y = -p/2.

   Prova a "muovere" p: fai le tue osservazioni e stampa degli esempi.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 10

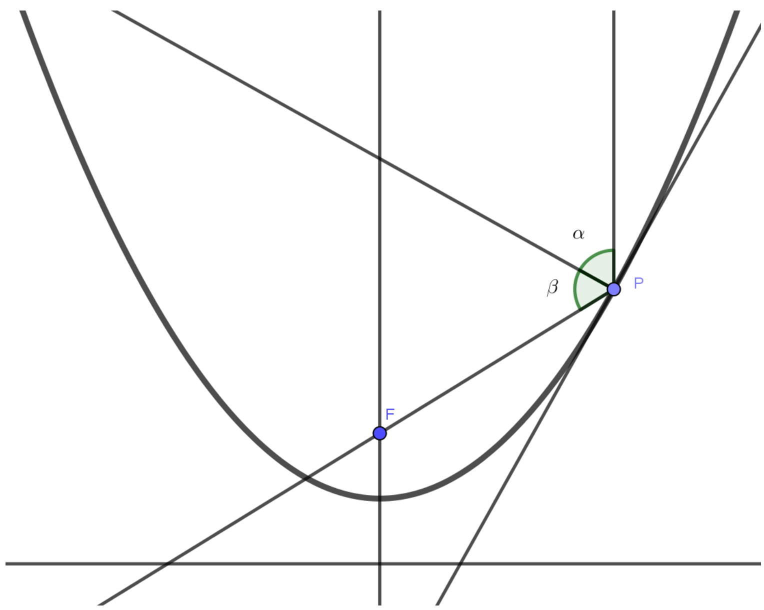
GEOMETRIA ANALITICA
Il fuoco della parabola

Perché il fuoco della parabola si chiama così? Il motivo è legato ad un fenomeno di ottica.
Se facciamo incidere su uno specchio "parabolico" un raggio di luce parallelo all'asse dello specchio il raggio riflesso passerà sempre per il fuoco: in questo punto si concentrerà molta energia luminosa e termica e per questo è stato chiamato "fuoco".

Facciamo una verifica con Geogebra.

Disegniamo una parabola di data direttrice e fuoco (usando una delle costruzioni che abbiamo visto o inserendo l'equazione di una parabola, per esempio $y = x^2$);
tracciamo l'asse di simmetria della parabola;
prendiamo un punto P sulla parabola (punto su oggetto);
tracciamo la semiretta uscente da P parallela all'asse (raggio incidente);
tracciamo la semiretta uscente da P passante per F (raggio riflesso);
tracciamo la tangente alla parabola nel punto P;
tracciamo la perpendicolare per P alla tangente;
costruiamo gli angoli α, β (vedi figura);
si verifica che $\alpha \cong \beta$.

Quindi se l'angolo di incidenza (tra il raggio incidente e la perpendicolare allo specchio) è uguale all'angolo di riflessione (tra il raggio riflesso e la perpendicolare allo specchio) **la semiretta per P e F rappresenta effettivamente il raggio riflesso** che quindi passa per il fuoco e questo vale per tutti i raggi incidenti paralleli all'asse della parabola.



Laboratorio di informatica
SCHEDA 11

GEOMETRIA ANALITICA
Il moto parabolico

Se lanciamo un corpo con velocità $\overrightarrow{v_0}$ (nel campo gravitazionale terrestre) inclinata di un angolo α, il corpo compirà una traiettoria parabolica ottenuta dalla combinazione di un moto orizzontale rettilineo uniforme con velocità $v_{0x} = v_o \cdot \cos\alpha$ con un moto verticale rettilineo uniformemente decelerato con velocità iniziale $v_{0y} = v_o \cdot \sin\alpha$ e decelerazione $g \cong 10 m/s^2$.
Abbiamo cioè

$$\begin{cases} x = v_{ox} \cdot t \\ y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

1) Consideriamo per esempio $v_o = 10 m/s$ e proviamo a visualizzare il moto parabolico del corpo inserendo, dopo aver creato gli slider α (angolo di inclinazione della velocità $\vec{v_o}$ e quindi tra 0° e 90°) e t (tra 0 e 2, per esempio), il punto P di coordinate

$$P = (10 * \cos(\alpha) * t, 10 * \sin(\alpha) * t - 5 * t\text{^}2)$$

Per vedere la traiettoria di P attiviamo la traccia di P e "muoviamo" t.

2) Proviamo a cercare , per un dato valore di v_0 (nel nostro caso 10 m/s), per quale angolo α si ha la massima gittata.

Per far questo fissiamo da tastiera il valore dell'angolo α (non trascinando il valore dello slider): digitiamo per esempio nella barra dell'inserimento $\alpha = 30°$, muoviamo il tempo t e vediamo come risulta la traiettoria e quindi la gittata.

Cambiamo da tastiera il valore di α e verifichiamo che la massima gittata si ottiene per $\alpha = ...$

Laboratorio di informatica
SCHEDA 12

GEOMETRIA ANALITICA
Fasci di parabole

Per ottenere un fascio di parabole con asse parallelo all'asse y possiamo "combinare " l'equazione di due parabole con asse parallelo all'asse y oppure l'equazione di una parabola P (con asse parallelo all'asse y) con l'equazione di una retta r.

1. Prova per esempio ad inserire, dopo aver creato uno slider k, l'equazione del fascio generato dalla parabola $y = x^2 \Rightarrow x^2 - y = 0$ e dalla retta $y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0$:

   x^2 – y +k*(y – 1)=0

   Cosa ottieni al variare di k ? Le parabole del fascio hanno una caratteristica comune?
   Si ottengono sempre parabole? Per quale valore di k si ottiene la retta $y = 1$?

2. Prova a inserire l'equazione del fascio ottenuto combinando

   $y = x^2$ e $y = 0$

3. Prova ad inserire l'equazione del fascio ottenuto combinando

   $y = x^2$ e $y = -1$

Descrivi i fasci che ottieni specificando per quali valori di k non si ottengono parabole e trai una conclusione da quanto hai osservato.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 13

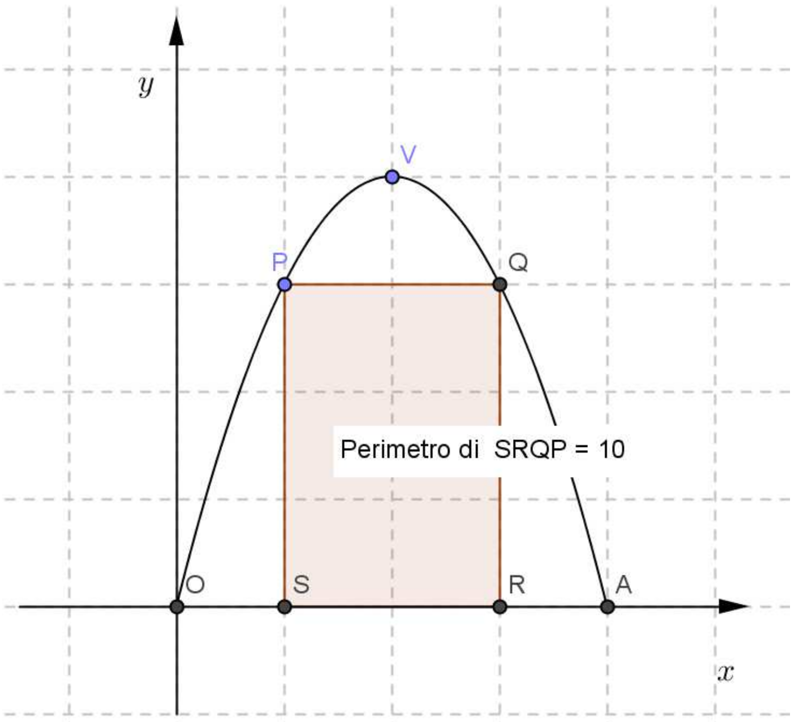
GEOMETRIA ANALITICA
Problemi di massimo e minimo

Consideriamo l'arco della parabola di equazione $y = 4x - x^2$ con $0 \le x \le 4$.
Nota: per disegnare solo l'arco considerato devi usare il comando curva[$k, 4k - k^2, k, 0, 4$].

Sia P un punto appartenente all'arco $\overset{\frown}{OV}$ con V vertice della parabola e tracciamo il rettangolo PQRS inscritto nel segmento parabolico OVA (vedi figura)

Nota: perché il rettangolo resti inscritto nel segmento parabolico quando muoviamo P, dobbiamo costruirlo tracciando da P la parallela all'asse x e intersecare con la parabola (punto Q), la perpendicolare per P all'asse x e intersecare con l'asse x (punto S) , la perpendicolare per Q all'asse x e intersecare con l'asse x (punto R). Descriviamo il rettangolo ripassando per i punti dopo aver selezionato poligono.
Se selezioniamo il comando "distanza o lunghezza" e clicchiamo sul rettangolo avremo la misura del perimetro.

Possiamo così verificare che il valore minimo del perimetro è….e quello massimo è ……e che ci sono coppie di rettangoli diversi con lo stesso perimetro.



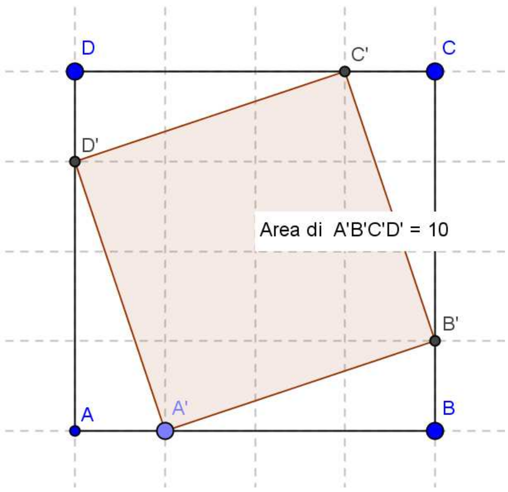
Laboratorio di informatica
SCHEDA 14

GEOMETRIA ANALITICA
Problemi di massimo e minimo

Proviamo a disegnare con Geogebra il quadrato con il quadrato inscritto proposto negli Appunti in uno degli esempi di problema con discussione.

Disegna il quadrato come successione di segmenti aiutandoti con la griglia.
Costruisci un punto A' sul lato AB con il comando "punto su oggetto": per poter costruire i punti B', C', D'in modo che $BB' = AA'$ ecc. puoi usare lo strumento "compasso" prendendo come raggio AA'…..

Alla fine nascondi la costruzione e usando il comando "poligono" ripercorri il quadrato A'B'C'D'.
Utilizza il comando area e seleziona il quadrato A'B'C'D' : verrà calcolata l'area di A'B'C'D'.



Se la costruzione funziona quando "muovi" A' tutto il quadrato A'B'C'D' dovrebbe cambiare restando però inscritto nel quadrato ABCD.

Muovi il punto A': l'area di A'B'C'D' varia tra

- un valore massimo uguale a …………..
- un valore minimo uguale a …………….

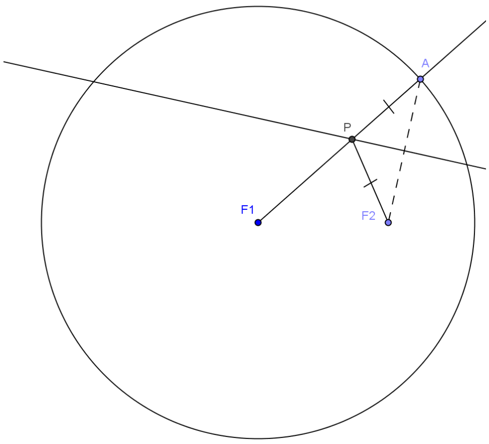
Laboratorio di informatica

SCHEDA 15

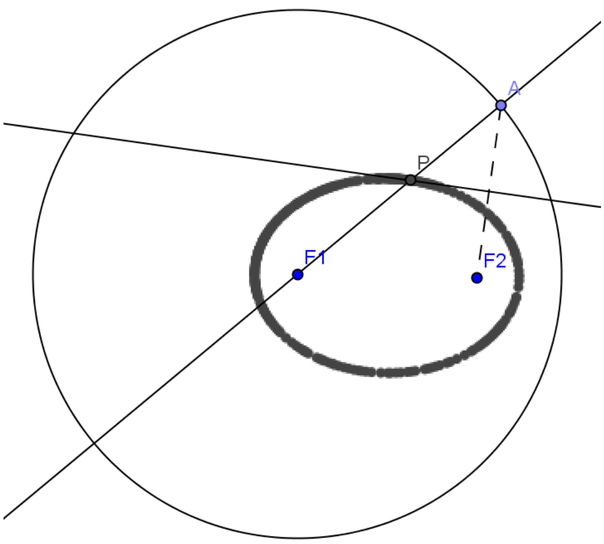
GEOMETRIA ANALITICA

Costruzione dell'ellisse dati i fuochi e l'asse maggiore

Vediamo un metodo per costruire un' ellisse di dati fuochi F1 e F2 e di dato asse maggiore, per esempio 10 ($\overline{F_1F_2} < 10$): creiamo un punto F_1 e un punto F_2 (rinominiamoli) e tracciamo una circonferenza di centro F_1 e raggio 10.
Creiamo un punto A sulla circonferenza (con il comando "punto su oggetto"); tracciamo l'asse del segmento F_2A e intersechiamolo con la retta per F_1 e A: il punto P appartiene all'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e asse maggiore 10 poiché $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{F_1A} = 10$



Attivando la traccia di P e muovendo A otterremo l'ellisse:



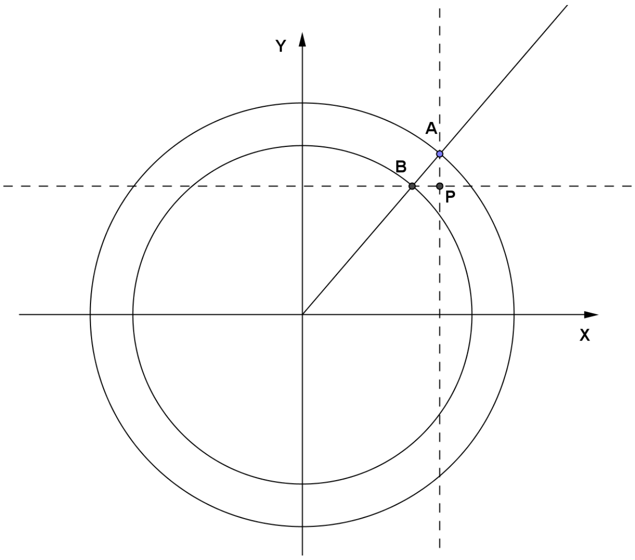
Laboratorio di informatica
SCHEDA 16

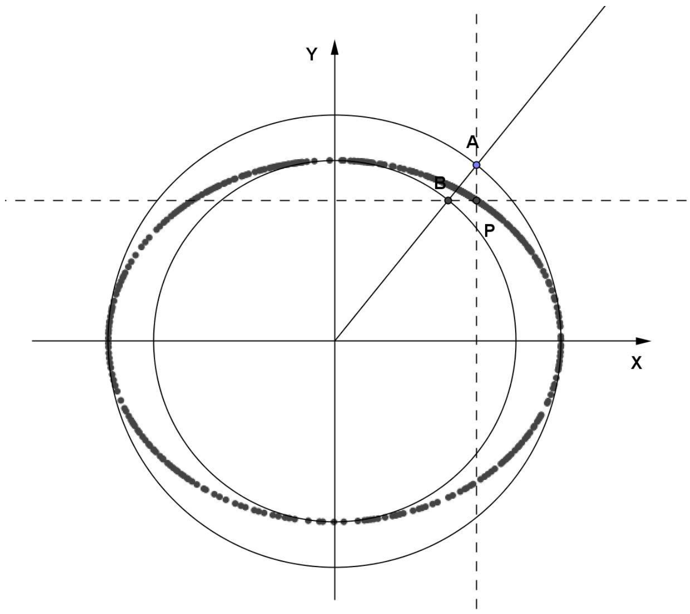
GEOMETRIA ANALITICA
Costruzione dell'ellisse di semiassi assegnati

Possiamo costruire un'ellisse di semiassi assegnati a e b (riferita ai propri assi di simmetria) seguendo questo procedimento:

- traccia la circonferenza di centro l'origine O e raggio a , per esempio 5, e poi la circonferenza di centro l'origine O e raggio b , per esempio 4 con il comando "circonferenza dati centro e raggio";
- crea un punto A sulla prima circonferenza utilizzando il comando "punto su oggetto";
- traccia una semiretta uscente da O e passante per A , interseca questa semiretta anche con l'altra circonferenza con il comando "intersezione di due oggetti": ottieni quindi il punto B;
- traccia la retta per A parallela all'asse y e la retta per B parallela all'asse x e intersecale individuando P;
- attiva la traccia di P e muovi A sulla circonferenza di raggio a .

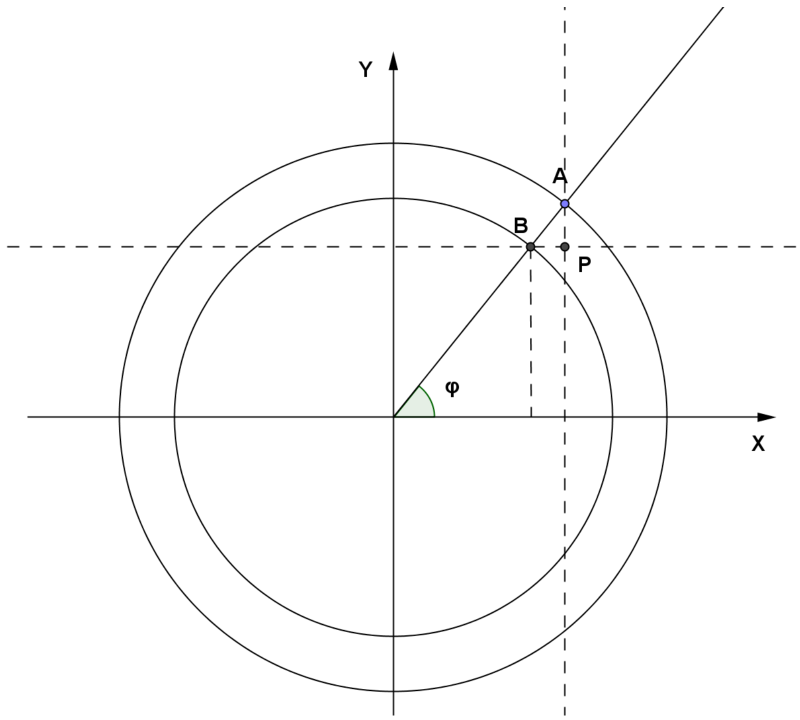
Dovresti ottenere la seguente ellisse:





Ma perché con questo procedimento otteniamo proprio l'ellisse di semiassi a e b ?

Considera l'angolo φ in figura:



Abbiamo che :

$$\begin{cases} x_P = x_A = a \cdot \cos\varphi \\ y_P = y_B = b \cdot sen\varphi \end{cases}$$

Ma allora $\frac{x_P}{a} = \cos\varphi$ e $\frac{y_P}{b} = sen\varphi$ e quindi , poiché tra seno e coseno di un angolo vale la relazione $sen^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, avremo anche:

$$\left(\frac{x_P}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_P}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x_P^{\ 2}}{a^2} + \frac{y_P^{\ 2}}{b^2} = 1$$

cioè il punto P appartiene all'ellisse di semiassi a e b.

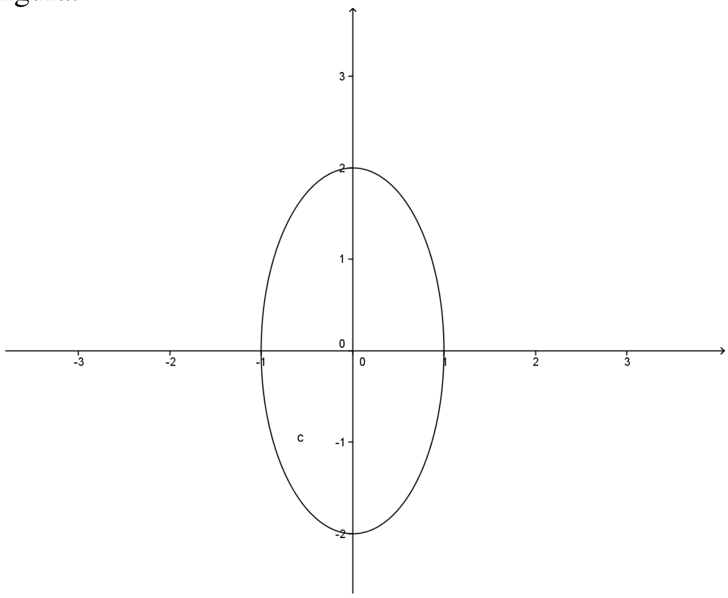
Laboratorio di informatica
SCHEDA 17

GEOMETRIA ANALITICA
Ellisse nel piano cartesiano

1) Prova a inserire l'equazione di un'ellisse, per esempio

x^2+y^2/4=1

Otterrai l'ellisse in figura:



2) Prova a definire uno slider a (semiasse sull'asse x) e uno slider b (semiasse sull'asse y) ricordando di mettere tra le proprietà degli slider che siano positivi e ad inserire

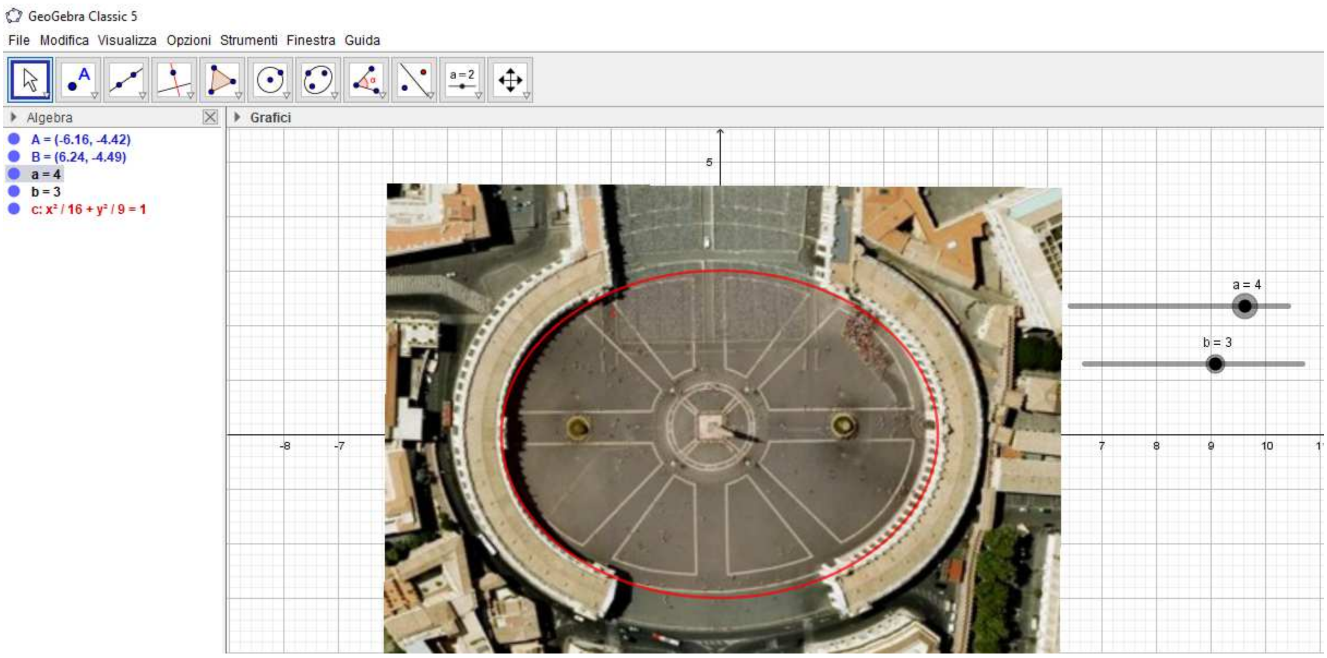
x^2/a^2+y^2/b^2=1

Fai variare gli slider e stampa alcuni esempi.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 18

GEOMETRIA ANALITICA
Piazza S. Pietro è un'ellisse?

Proviamo a copiare la foto della piazza di S. Pietro nel piano (0,x,y) di Geogebra cercando di far coincidere il centro della piazza con l'origine: creiamo due slider a,b e inseriamo l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Variamo il valore degli slider fino a che l'ellisse (che magari coloriamo di rosso) non si sovrappone al contorno della piazza: la piazza viene approssimata abbastanza bene da un'ellisse di semiassi $a=4 \;\; b=3$ (vedi figura).



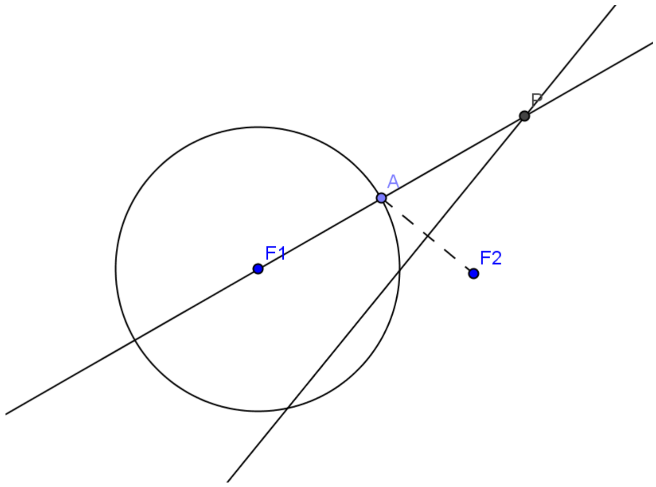
Si può comunque ottenere una migliore approssimazione con un "ovale" cioè raccordando 4 archi di circonferenze di centri diversi.

Esercizio
Trova un'altra opera architettonica che abbia la forma di ellisse e cerca di determinare l'equazione dell'ellisse che l'approssima meglio.

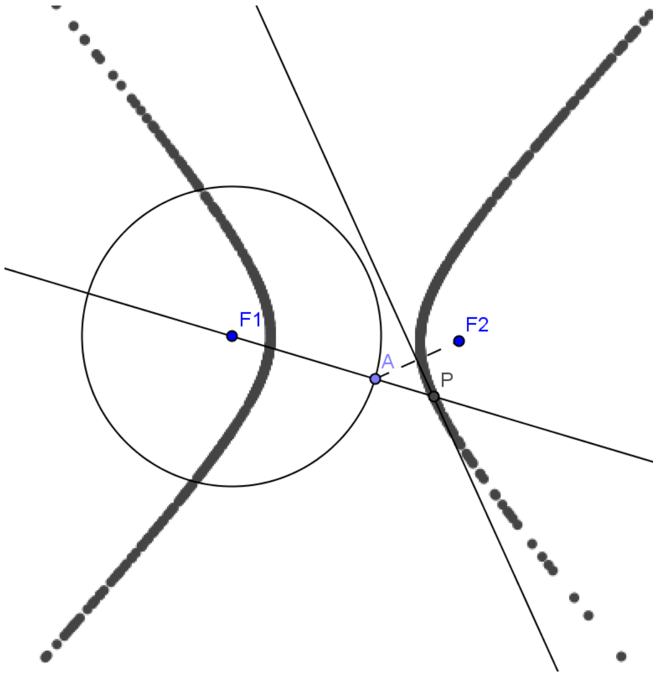
Laboratorio di informatica
SCHEDA 19

GEOMETRIA ANALITICA
Costruzione dell'iperbole dati i fuochi e l'asse trasverso

Possiamo costruire un'iperbole di dati fuochi e dato asse trasverso, per esempio 8 ,con un procedimento analogo a quello utilizzato per l'ellisse nella scheda ellisse.1: l'unica differenza è che questa volta $\overline{F_1F_2} >$ asse trasverso (8).
Abbiamo una costruzione come in figura: è chiaro che P appartiene all'iperbole di fuochi F_1 e F_2 poiché $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{F_1A} = 8$, essendo $\overline{PF_2} = \overline{AP}$.



Attivando la traccia di P e muovendo A avremo l'iperbole:



Laboratorio di informatica
SCHEDA 20

GEOMETRIA ANALITICA
Iperbole nel piano cartesiano

1) Inserisci l'equazione di un'iperbole riferita ai propri assi di simmetria, per esempio

x^2-y^2/4=1

Inserisci l'equazione dei suoi asintoti
y = 2x y = -2x

Stampa il grafico e fai le tue osservazioni.

Inserisci un'altra equazione, magari di un'iperbole con asse trasverso l'asse y, e stampa il grafico.

2) Crea due slider a, b (semiassi dell'iperbole) **positivi** e inserisci l'equazione

x^2/a^2-y^2/b^2=1

e l'equazione degli asintoti
y = b/a*x   e y = -b/a*x

Fai variare gli slider e stampa qualche esempio facendo le tue osservazioni.

3) Crea due slider *a*,*c* positivi e inserisci l'equazione

x^2/a^2-y^2/(c^2-a^2)=1

Disegna i vertici A1=(a,0) A2=(-a,0) e i fuochi F1=(c,0) F2=(-c,0).

Muovi solo lo slider *c* (cioè cambia la posizione dei fuochi e mantenendo costante la posizione dei vertici), stampa qualche grafico e fai le tue osservazioni.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 21

GEOMETRIA ANALITICA
Iperbole equilatera

1) Inserisci l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, per esempio

x*y=1

Prova anche ad inserire l'equazione nella forma

y=1/x

Stampa il grafico.

2) Crea uno slider k e inserisci l'equazione

x*y=k

oppure y=k/x

Muovi k e fai le tue osservazioni.

3) Crea tre slider xc, yc, k e inserisci l'equazione

(x-xc)*(y-yc) = k

Muovi gli slider e fai le tue osservazioni.

Stampa qualche grafico.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 22

GEOMETRIA ANALITICA
Coniche

Crea sei slider a, b, c, d, e, f ed inserisci l'equazione generale di una conica:

a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f=0

Verifica che muovendo gli slider (senza però mettere a,b,c contemporaneamente tutti uguali a zero perché allora si ottiene chiaramente una retta) si possono ottenere tutti i tipi di coniche: parabole, ellissi, circonferenze, iperboli.

1) Verifica che se si ottiene una parabola $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$. Stampa degli esempi.
Per quali valori dei parametri risulta un parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse x o all'asse y? Stampa degli esempi.

2) Verifica che se si ottiene un'ellisse $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$. Stampa degli esempi.

Per quali valori dei parametri si trova un'ellisse con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati? Stampa degli esempi.

Quando si trova una circonferenza?

3) Verifica che se si ottiene un'iperbole $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$. Stampa degli esempi.

In quali casi si ottiene un'iperbole con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati? Stampa degli esempi.

Per quali valori dei parametri si ottiene una funzione omografica? Stampa degli esempi.

Si possono ottenere coppie di rette? Stampa degli esempi.

Laboratorio di informatica
SCHEDA 23

GEOMETRIA ANALITICA
Definizione generale delle coniche

Ricordiamo che una conica può essere definita anche come il luogo dei punti P del piano tali che, fissati un fuoco F e una direttrice dir , si abbia

$$\boxed{\overline{PF} = e \cdot d(P, dir)}$$

Se $e = 1$ $\rightarrow$ **parabola**

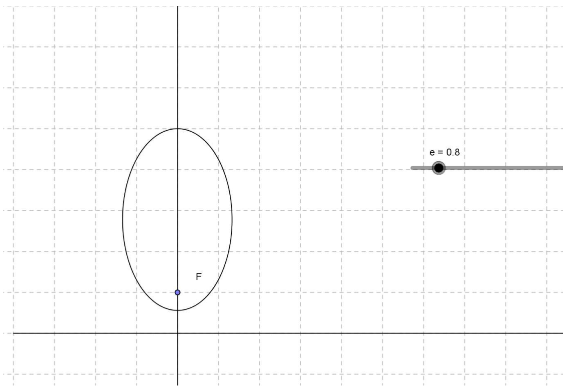
se $0 < e < 1$ $\rightarrow$ **ellisse**

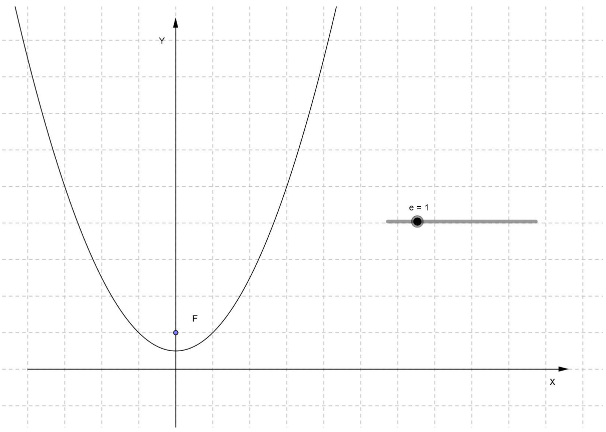
se $e > 1$ $\rightarrow$ **iperbole**

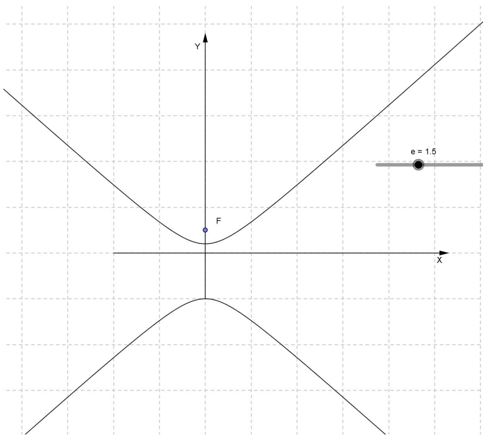
Fissato per esempio fuoco F(0;1) e direttrice l'asse x (y=0), crea uno slider *e* (variabile per esempio da 0 a 5) e inserisci nella barra di inserimento l'equazione corrispondente.

$$\overline{PF}^2 = e^2 \cdot d^2(P, y = 0) \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = e^2 \cdot y^2$$

Varia l'eccentricità e stampa quello che ottieni.







Laboratorio di informatica
SCHEDA 24

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE
Funzioni esponenziali

Funzioni esponenziali

Proviamo a disegnare con Geogebra il grafico di una funzione esponenziale.

Cominciamo con il digitare nella barra in basso

y = 2^x

oppure

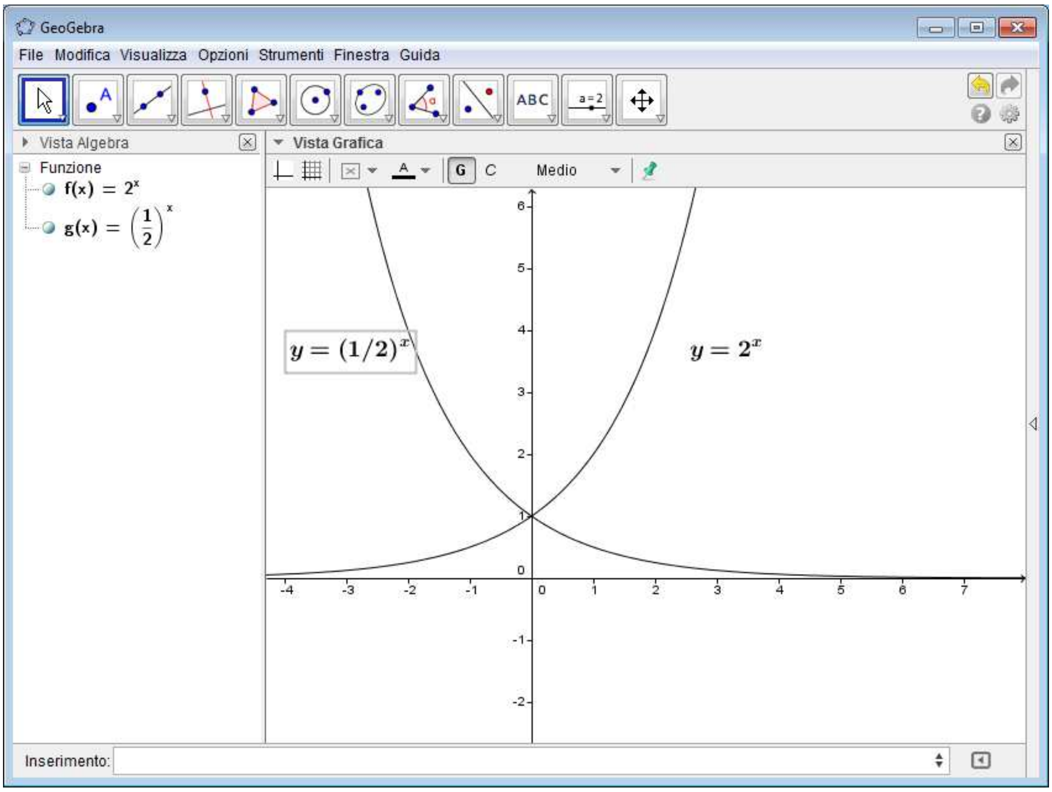
y = (1/2)^x

e osserviamone il diverso andamento.

In generale per visualizzare la funzione esponenziale di base a possiamo creare lo slider a (attenzione : a deve essere positivo) e inserire la funzione

y=a^x

Se attiviamo il pulsante "muovi" e la traccia del grafico (clic con il destro sul grafico e "traccia on") variando la base a otterremo i vari grafici.
Stampa qualche grafico al variare della base a indicandone le differenze.



Laboratorio di informatica
SCHEDA 25

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE
Funzioni logaritmiche

Funzioni logaritmiche

Nel programma Geogebra (versione almeno 5.0) possiamo disegnare i grafici della funzione logaritmica in una qualsiasi base.

Se digitiamo nella barra di inserimento

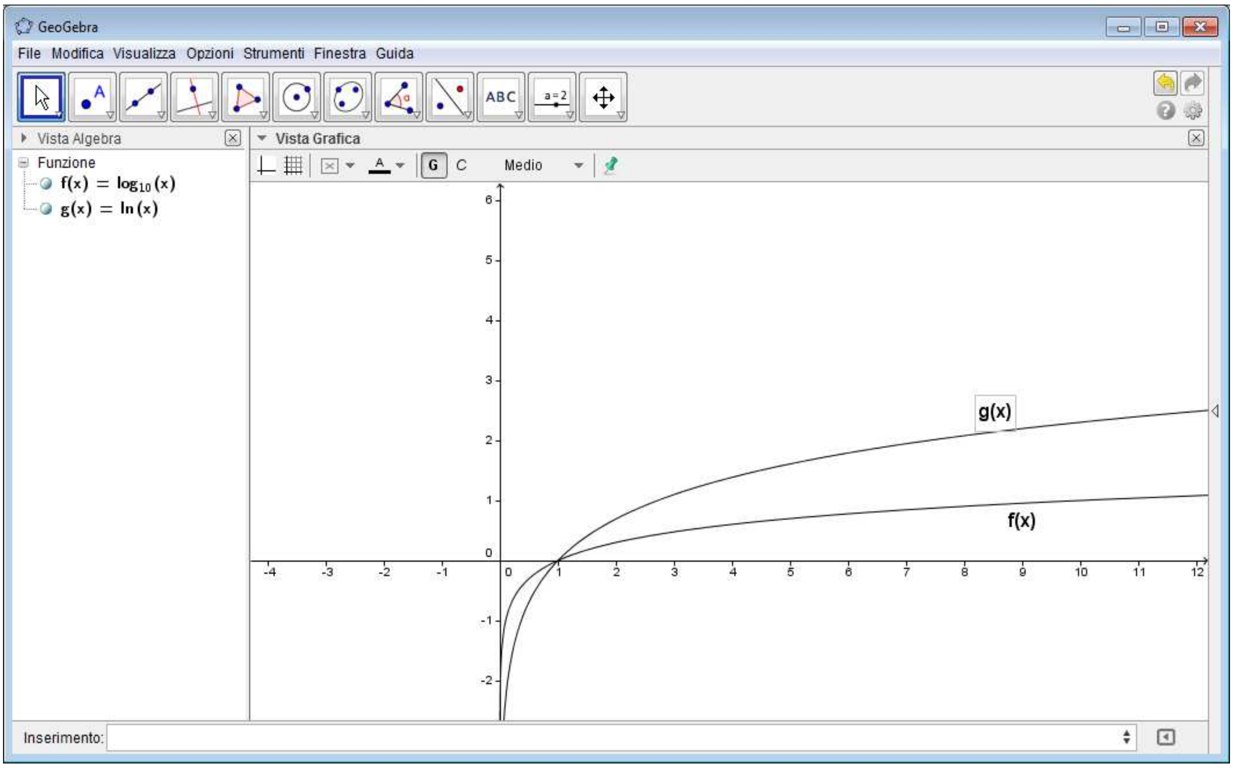
$$y = \log$$

compaiono le varie scelte di completamento: $\log(x)$ sta per logaritmo in base e (che viene indicato con *lnx*); se scriviamo log10(x) viene visualizzato il grafico di $y = \log_{10} x$ (infatti per x=10 si ha y=1) ma possiamo disegnare il logaritmo in base qualsiasi introducendola prima della x.

Per esempio $y = \log(3, x)$ corrisponde a $y = \log_3 x$.

Stampa alcuni grafici e metti in evidenza le differenze.

Crea uno slider a e inserisci $y = \log(a, x)$.
Quale deve essere l'intervallo di variazione di a? Osserva e stampa i grafici che ottieni al variare della base a, indicandone le differenze e facendo le tue osservazioni.



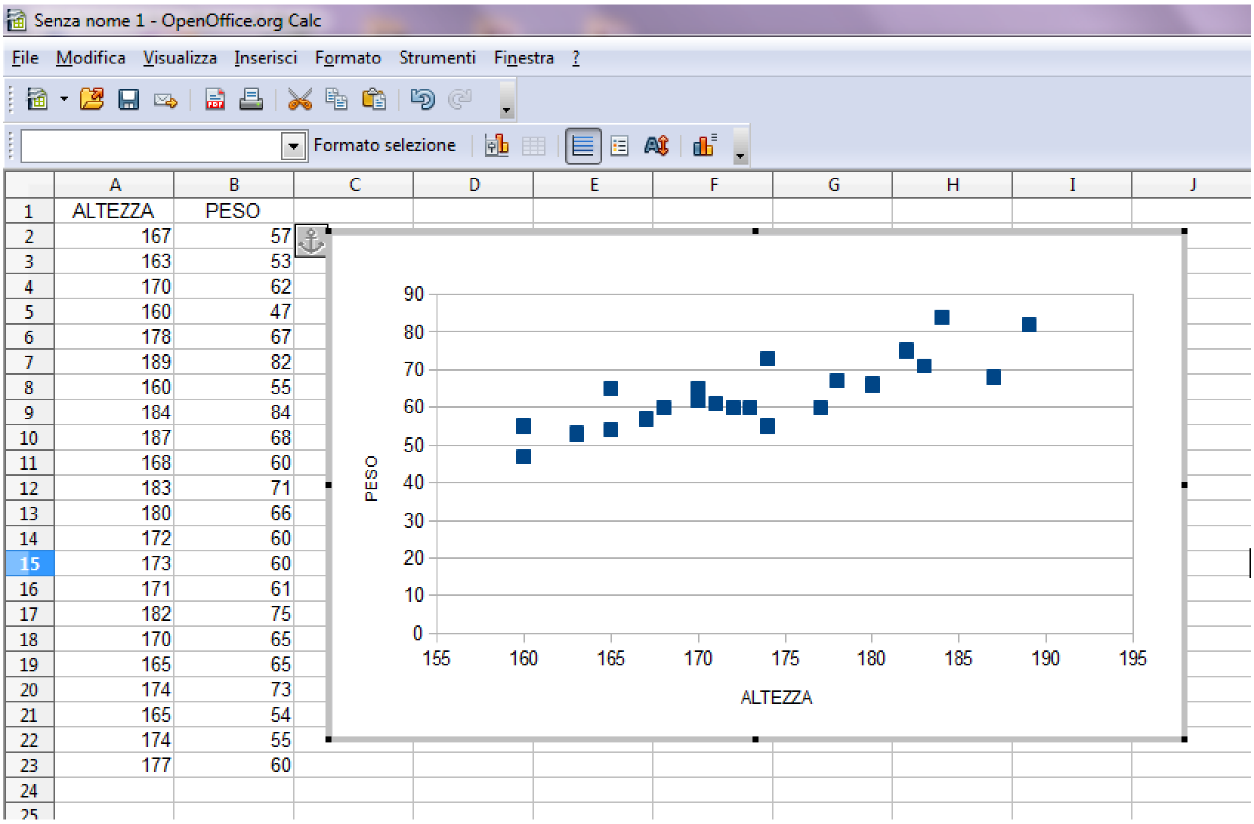
Laboratorio di informatica

SCHEDA 26

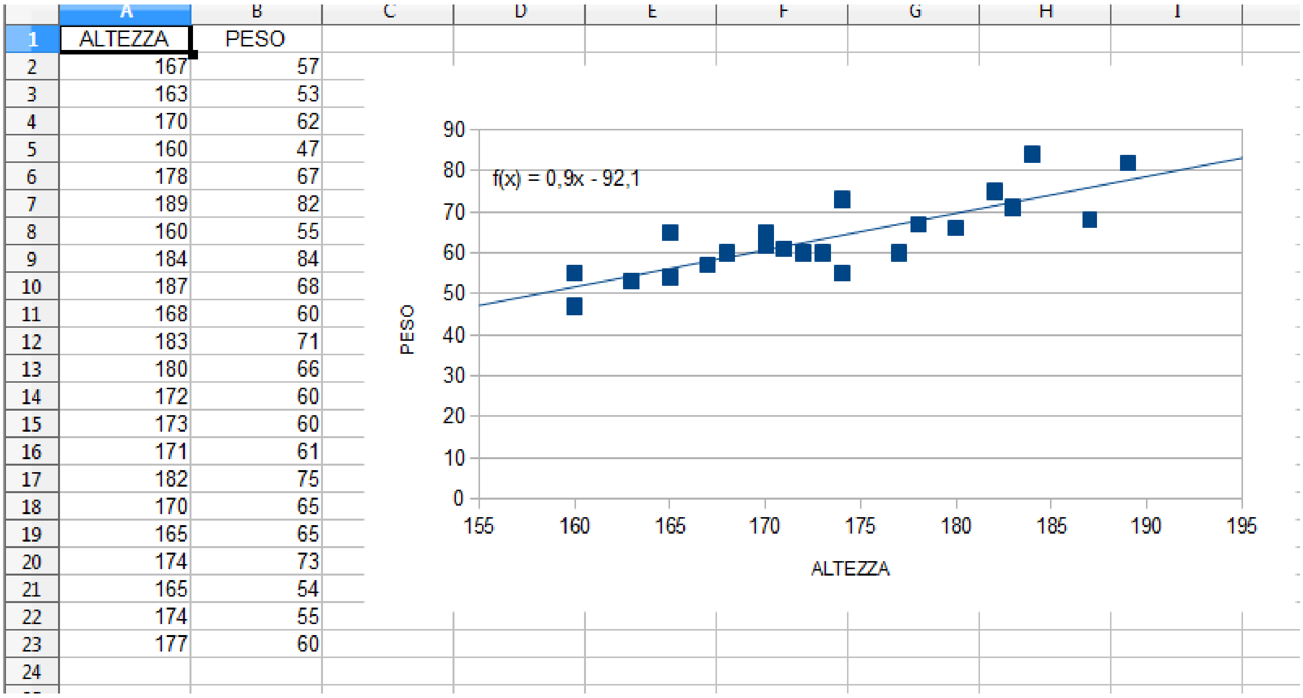
STATISTICA

Tabella a doppia entrata

Consideriamo infine una tabella a doppia entrata come nell'esempio presentato negli Appunti altezza-peso degli studenti di una classe.
Riporta i dati in un foglio di calcolo (potresti anche fare una raccolta dati dei altezza-peso della tua classe) e disegna il grafico (x, y) corrispondente.



Vediamo che i nostri dati sono piuttosto "allineati": se con il tasto destro facciamo clic sui punti del grafico e scegliamo "aggiungi linea di andamento" **verrà disegnata la retta che meglio "interpola"** i nostri dati cioè la retta che più si avvicina alle nostre coppie.



	A	B
1	ALTEZZA	PESO
2	167	57
3	163	53
4	170	62
5	160	47
6	178	67
7	189	82
8	160	55
9	184	84
10	187	68
11	168	60
12	183	71
13	180	66
14	172	60
15	173	60
16	171	61
17	182	75
18	170	65
19	165	65
20	174	73
21	165	54
22	174	55
23	177	60
24		

Possiamo anche scrivere l'equazione della retta (chiamata **retta di regressione**) e scegliere il formato con un solo decimale per i numeri che vi compaiono.

Esercizio 1: verifica che la retta che interpola i dati passa per il punto $(x_M ; y_M)$ dove con x_M si è indicata la media delle altezze e con y_M la media dei pesi.

Esercizio 2 : puoi anche trovare solo **l'inclinazione della retta interpolante** i nostri dati che si trovano nelle celle a2:a23 , b2:b23 con la funzione "regressione lineare".

Se digiti

=regr.lin(b2:b23;a2:a23)

otterrai 0,9.