

Le trasformazioni geometriche



Definizione

Una trasformazione geometrica dei punti del piano è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano: ad ogni punto P del piano corrisponde uno e un solo punto P' del piano e viceversa.

Studieremo alcune importanti trasformazioni geometriche quali **isometrie** e **similitudini**.

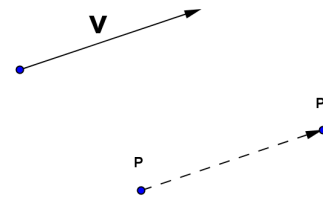
Isometrie (o movimenti rigidi)

Le isometrie ($\iota\sigma o = uguale$, $\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha = misura$) sono le trasformazioni geometriche che conservano la distanza tra i punti cioè se A e B sono una qualunque coppia di punti del piano e A' e B' sono le loro immagini (i punti trasformati di A e B) allora si ha che

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

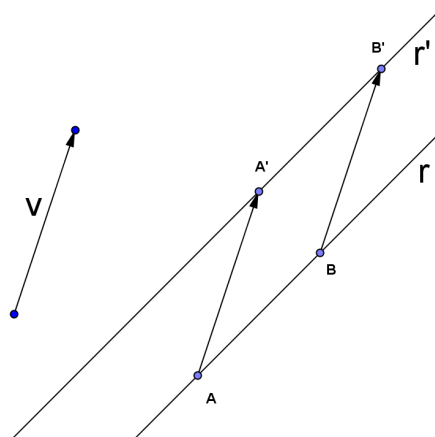
Traslazione

E' l'isometria in cui, fissato un vettore \vec{v} , tutti i punti del piano si spostano secondo il vettore \vec{v} (vedi figura).

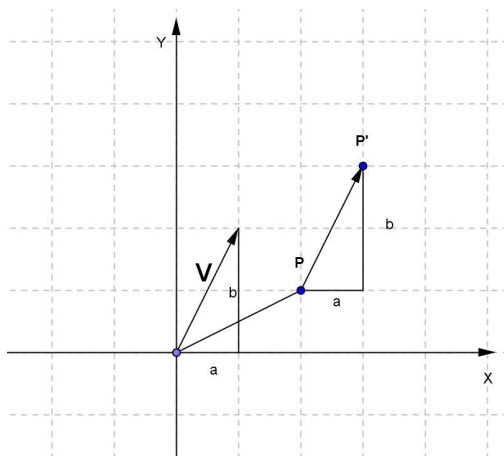


Indicheremo la traslazione di vettore \vec{v} con il simbolo $t(\vec{v})$.

Si può facilmente dimostrare che se una retta r si trasforma in r' si ha che $r \parallel r'$.



Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale , possiamo anche determinare l'equazione della traslazione di vettore $\vec{v}(a,b)$ (a e b coordinate di \vec{v} considerando il suo primo estremo nell'origine): si osserva che $P(x, y) \rightarrow P'(x+a, y+b)$ e quindi possiamo scrivere



$$t(\vec{v}) \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Traslazione di una curva di equazione assegnata

Come possiamo trovare l'equazione di una curva di data equazione traslata secondo una traslazione $t(\vec{v})$?

Esempio

Consideriamo per esempio la retta $r : y = 2x + 1$ e la traslazione $t(3,1)$.
Sappiamo quindi che le equazioni della traslazione sono

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

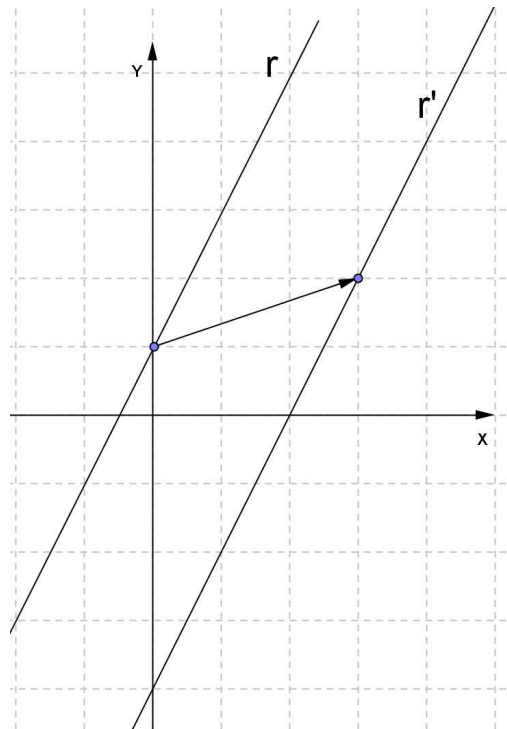
Per poter scrivere l'equazione di r' occorre ricavare x e y dalle equazioni della traslazione e sostituire nell'equazione di r .

Abbiamo

$$\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Sostituendo: $y' - 1 = 2 \cdot (x' - 3) + 1 \Rightarrow y' = 2x' - 4$

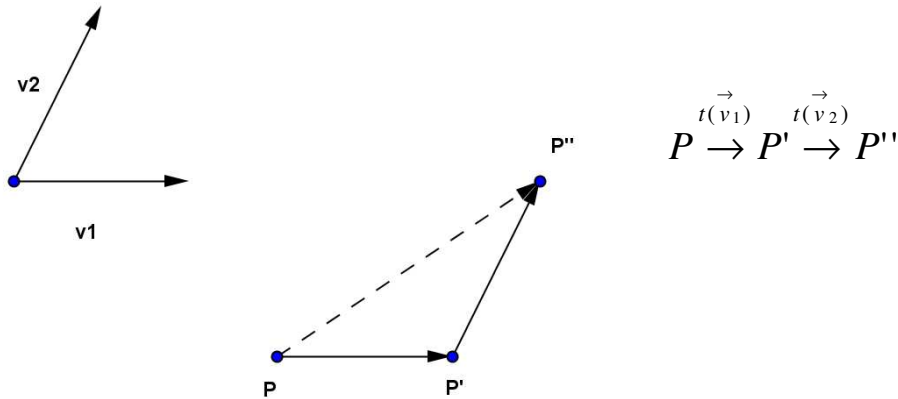
Se poi chiamiamo di nuovo x e y le coordinate abbiamo che l'equazione di r' risulta $y = 2x - 4$ (come si può verificare dal disegno).



Composizione di traslazioni

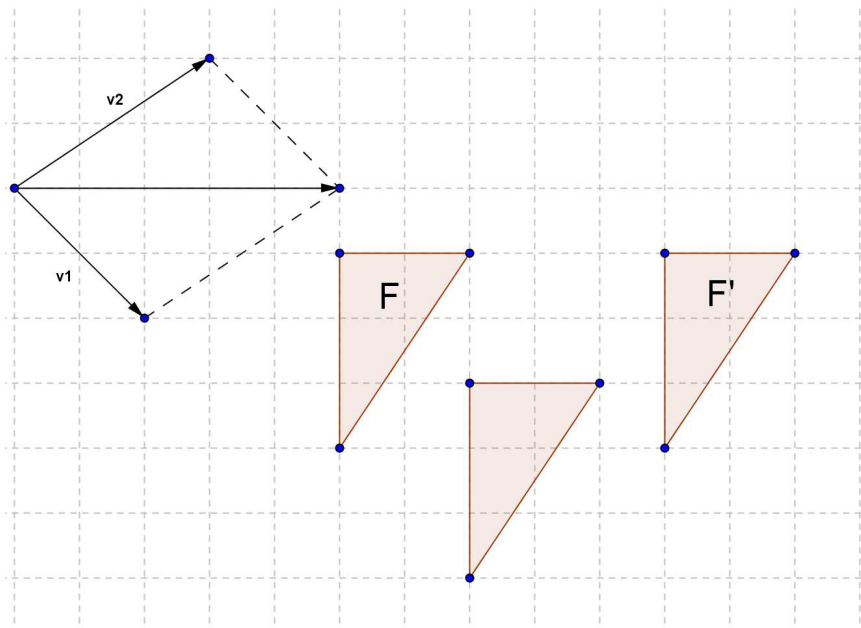
Comporre due trasformazioni significa farle agire “in successione”.

In particolare se P è un punto del piano e $t(\vec{v}_1)$, $t(\vec{v}_2)$ sono due traslazioni di vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , la composizione $t(\vec{v}_2) \circ t(\vec{v}_1)$ agirà così:



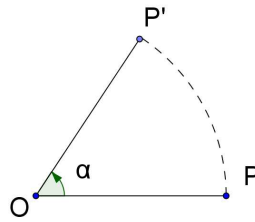
Attenzione: quando si scrive $t(\vec{v}_2) \circ t(\vec{v}_1)$ si intende che agisca prima $t(\vec{v}_1)$: in questo caso però non cambia niente se faccio $t(\vec{v}_1) \circ t(\vec{v}_2)$ e si dice che la composizione di traslazioni gode della proprietà commutativa.

Come risulta la trasformazione $t(\vec{v}_2) \circ t(\vec{v}_1)$? (vedi scheda relativa del laboratorio di informatica)



Rotazione

Una rotazione è individuata dal centro di rotazione O e dall'ampiezza dell'angolo (orientato) α della rotazione: la indicheremo con $R(O, \alpha)$.

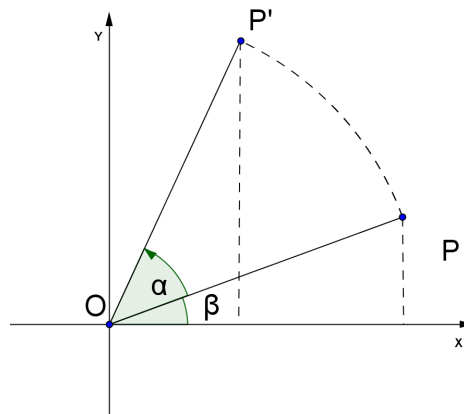


Nel caso della rotazione esiste un punto del piano che viene trasformato in se stesso (il centro di rotazione) e viene detto punto “**unito**”. Osserviamo invece che nella traslazione $t(\vec{v})$ non c'è nessun punto unito. Si può dimostrare che se $r \xrightarrow{R(O, \alpha)} r'$ le rette r e r' formano un angolo uguale ad α .

I) Rotazione con centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento

Ricaviamo l'equazione della rotazione $R(O, \alpha)$ (O = origine del sistema di riferimento).

Osservando la figura si ha:



$$\begin{cases} x' = \overline{OP'} \cdot \cos(\alpha + \beta) = \overline{OP} \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = (\overline{OP} \cdot \cos \beta) \cdot \cos \alpha - (\overline{OP} \cdot \sin \beta) \cdot \sin \alpha \\ y' = \overline{OP'} \cdot \sin(\alpha + \beta) = \overline{OP} \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) = (\overline{OP} \cdot \cos \beta) \cdot \sin \alpha + (\overline{OP} \cdot \sin \beta) \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Ma $x = \overline{OP} \cdot \cos \beta$ e quindi $\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases}$
 $y = \overline{OP} \cdot \sin \beta$

All'equazione della rotazione $R(O, \alpha)$ si può quindi associare la “matrice” $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Esempi

- 1) La rotazione di $\alpha = \frac{\pi}{2}$ intorno all'origine del sistema di riferimento risulta:

$$R\left(O; \frac{\pi}{2}\right) \begin{cases} x' = x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - y \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ y' = x \cdot \sin \frac{\pi}{2} + y \cdot \cos \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

- 2) La rotazione di $\alpha = \pi$ intorno all'origine del sistema di riferimento risulta:

$$R(O; \pi) \begin{cases} x' = x \cdot \cos \pi - y \cdot \sin \pi \\ y' = x \cdot \sin \pi + y \cdot \cos \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

- 3) Le equazioni della rotazione di centro O e angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sono:

$$R\left(O, \frac{\pi}{4}\right) \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}$$

Problema

Come si ottiene l'equazione di una curva ruotata secondo una data rotazione $R(O, \alpha)$?

Consideriamo per esempio l'**iperbole** $x^2 - y^2 = 1$ e applichiamo la rotazione $R\left(O, \frac{\pi}{4}\right)$.

Abbiamo visto che le equazioni della rotazione $R\left(O, \frac{\pi}{4}\right)$ sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}$$

Ma per ottenere l'equazione dell'iperbole ruotata dobbiamo ricavare la x e la y (come abbiamo fatto nell'esempio della traslazione).

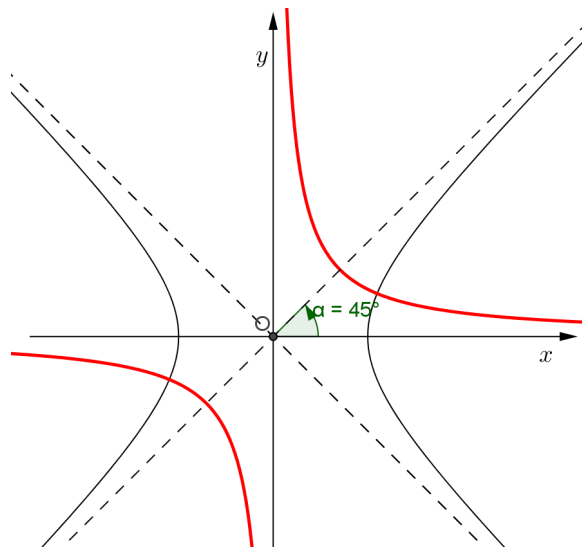
Per evitare di fare questi calcoli, possiamo pensare che la trasformazione che porta $P'(x', y') \rightarrow P(x, y)$ è la trasformazione “inversa” cioè la rotazione $R\left(O, -\frac{\pi}{4}\right)$ e che ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)x' - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y' \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x' + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x') \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $x^2 - y^2 = 1$ ed otteniamo:

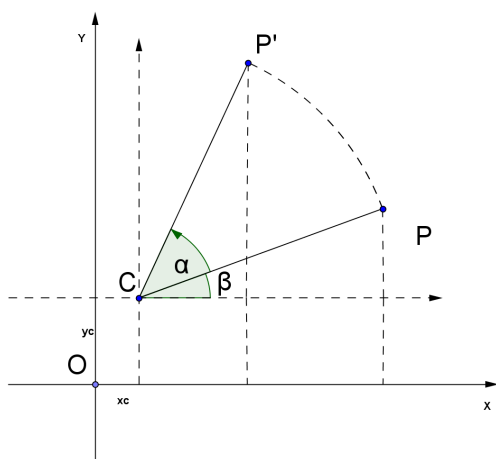
$$\frac{1}{2} \cdot (x' + y')^2 - \frac{1}{2} \cdot (y' - x')^2 = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x' \cdot y' = \frac{1}{2}$$

Quindi l'equazione dell'iperbole ruotata risulta $x \cdot y = \frac{1}{2}$.



II) Rotazione con centro diverso dall'origine del sistema di riferimento

Se il centro C della rotazione è diverso dall'origine O del sistema di riferimento, basta considerare che rispetto ad un sistema di riferimento di origine C le coordinate di P sarebbero $x - x_C$ e $y - y_C$ e le coordinate di P' $x' - x_C$ e $y' - y_C$ e quindi avremo:



$$\begin{cases} x' - x_C = (x - x_C) \cdot \cos \alpha - (y - y_C) \cdot \sin \alpha \\ y' - y_C = (x - x_C) \cdot \sin \alpha + (y - y_C) \cdot \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = (x - x_C) \cdot \cos \alpha - (y - y_C) \cdot \sin \alpha + x_C \\ y' = (x - x_C) \cdot \sin \alpha + (y - y_C) \cdot \cos \alpha + y_C \end{cases}$$

e sviluppando

$$(*) R(C, \alpha) \begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + p \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + q \end{cases}$$

NOTA

Per determinare le coordinate del centro della rotazione avente le equazioni (*) dobbiamo ricercare il “punto fisso”.

Esempio: determinare centro e angolo della rotazione avente equazioni

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

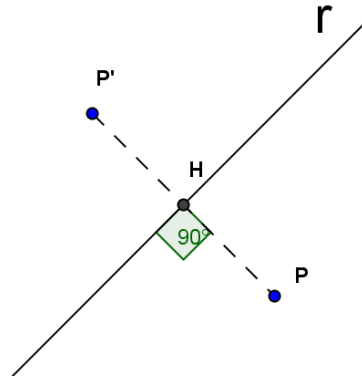
Osservando le equazioni abbiamo che $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Per trovare il centro C ricerchiamo il “punto fisso” cioè risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} -y + 1 = x \\ x + 2 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y + 1 \\ -y + 1 + 2 = y \rightarrow 2y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Simmetria assiale

La simmetria rispetto ad una retta r (asse della simmetria) (e che indicheremo con S_r) trasforma tutti i punti come mostrato in figura con $\overline{PH} = \overline{P'H}$.



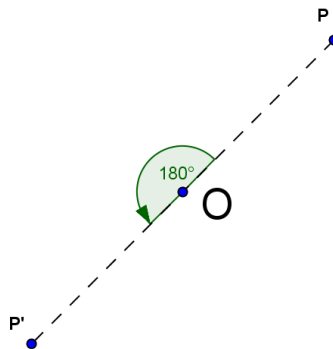
Tutti i punti della retta r sono fissi (punti “uniti”).

Osservazione: componendo una simmetria assiale con se stessa si trova la situazione iniziale (si dice che si ottiene la trasformazione identica indicata con id):

$$S_r \circ S_r = id$$

Nota

La rotazione di centro O e angolo $\alpha = 180^\circ$ viene anche detta **simmetria centrale** (di centro O) ed ha la stessa proprietà della simmetria assiale cioè $R(O, 180^\circ) \circ R(O, 180^\circ) = id$.



Composizione di due simmetrie assiali

E' facile verificare che componendo **due simmetrie assiali con assi paralleli** si ottiene una **traslazione** di vettore perpendicolare alle rette e di modulo doppio della distanza tra le rette, mentre componendo **due simmetrie assiali con assi incidenti** si ottiene una **rotazione** intorno al punto di intersezione delle due rette e di angolo doppio dell'angolo formato dalle due rette.(vedi Appunti 1).

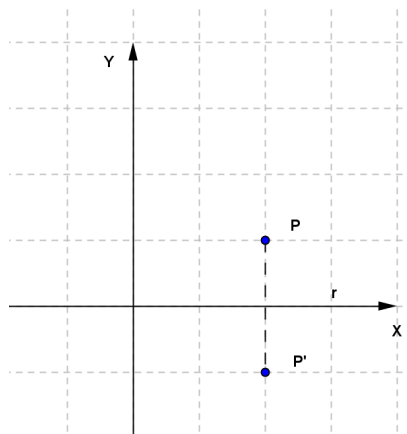
Nota: è importante l'ordine in cui si eseguono le trasformazioni: infatti se per esempio $S_{r_2} \circ S_{r_1}$ dà una data traslazione, $S_{r_1} \circ S_{r_2}$ dà la traslazione opposta.

Vediamo come risulta nel piano cartesiano l'equazione della simmetria assiale rispetto alla retta r .

Vediamo solo alcuni semplici casi.

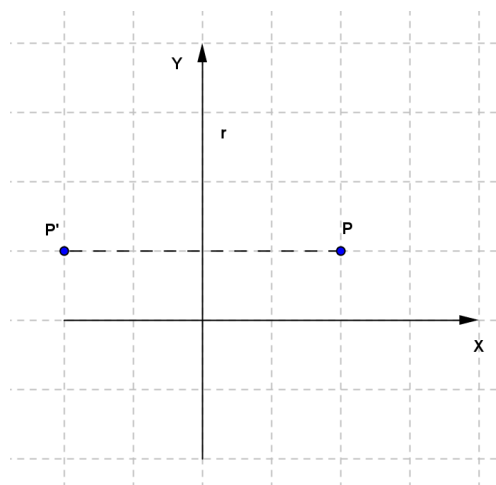
a) Se r coincide con l'asse x le equazioni sono chiaramente le seguenti

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



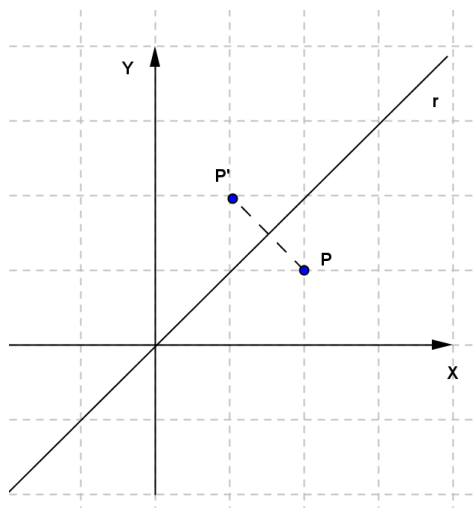
b) Se r coincide con l'asse y le equazioni sono chiaramente le seguenti

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



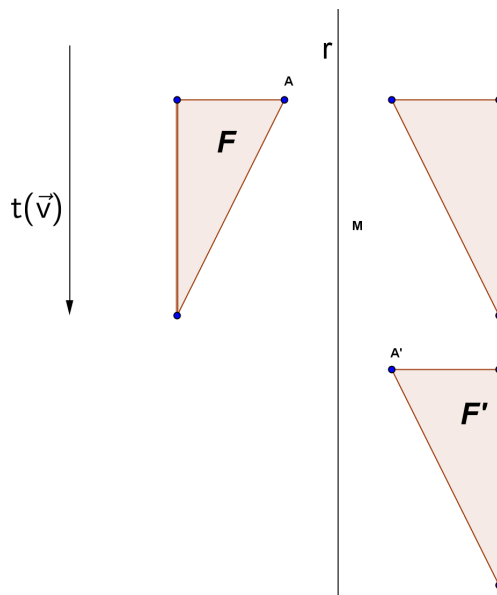
c) Se r coincide con la bisettrice del primo e terzo quadrante le equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



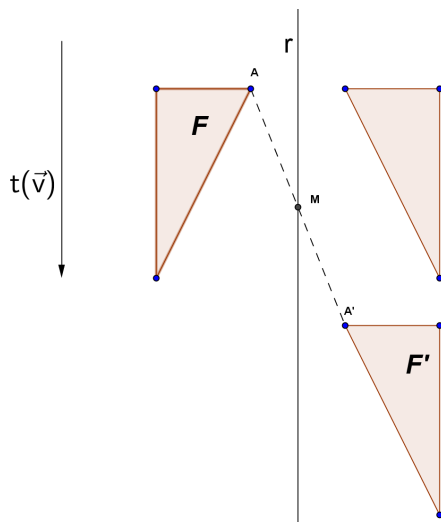
Glissosimmetria

Consideriamo la composizione di una simmetria assiale con una traslazione di vettore parallelo all'asse di simmetria: questa isometria viene chiamata “simmetria con scorrimento” o “**glissosimmetria**” da glisser che in francese significa scivolare.



Osservazioni

Osserviamo che l'ordine in cui si applica simmetria e traslazione è indifferente e che il punto medio di due punti corrispondenti appartiene all'asse di simmetria.



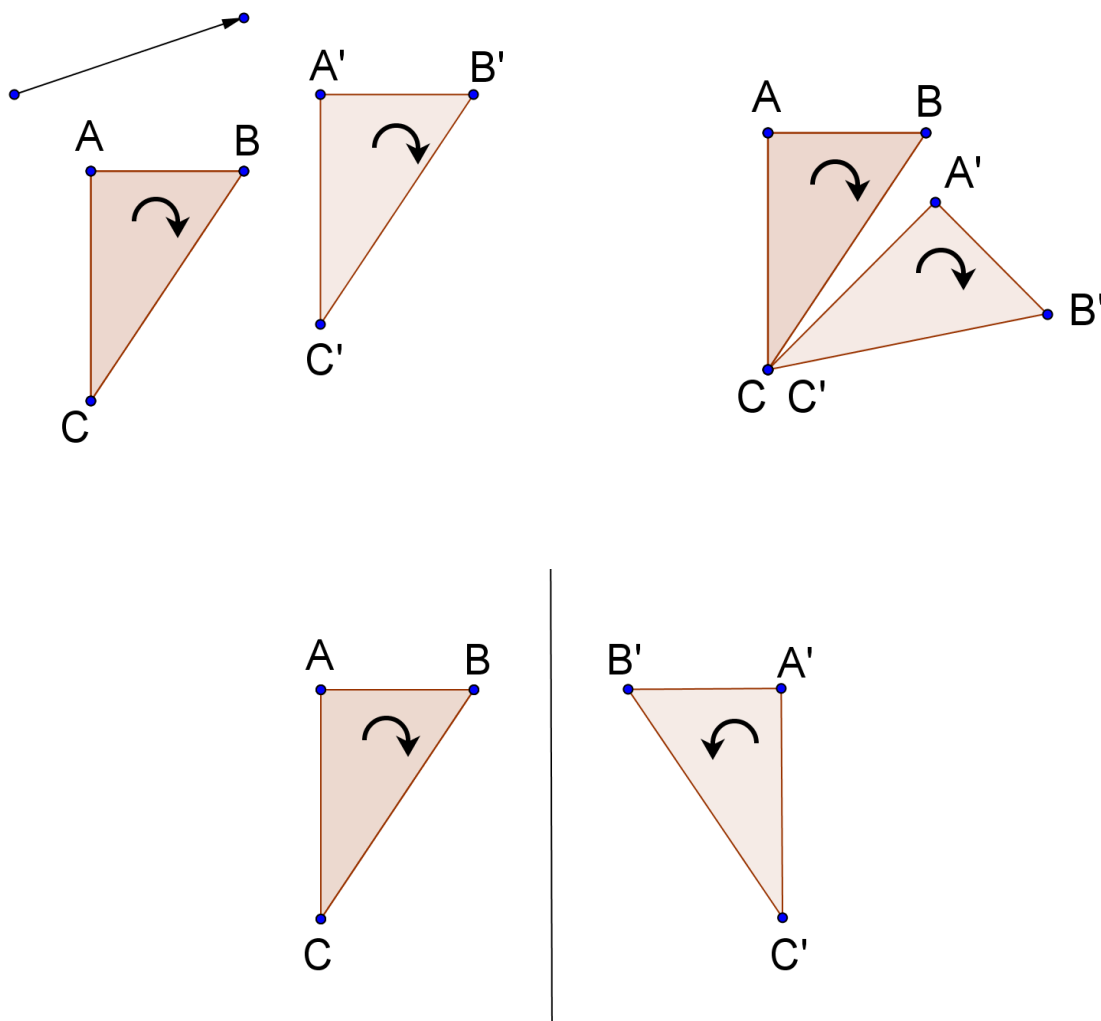
Nota importante

Si può dimostrare che ogni isometria è una **traslazione** o una **rotazione** o una **simmetria assiale** o una **glissosimmetria**.

Isometrie dirette e inverse

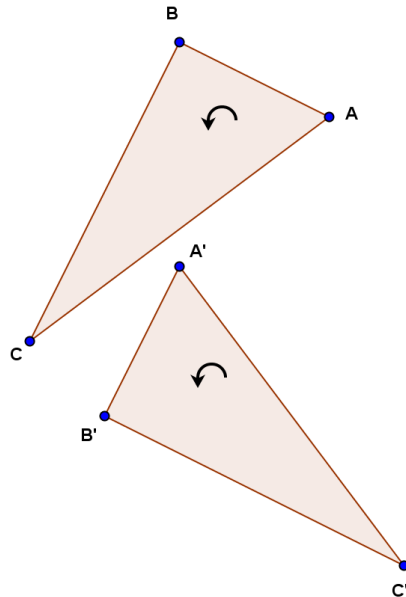
Consideriamo una figura F e la sua trasformata F' secondo una certa isometria: se immaginiamo di percorrere la figura toccando i vertici di F nell'ordine A, B, C e quelli di F' nell'ordine A', B', C' vediamo la traslazione e la rotazione conservano “l'**orientamento**” di una figura mentre la simmetria assiale (e quindi la glissosimmetria) non lo conservano (vedi figura).

Per questo **traslazioni e rotazioni** vengono dette **isometrie “dirette”** e la **simmetria assiale** e la **glissosimmetria** vengono dette **isometrie “inverse”**



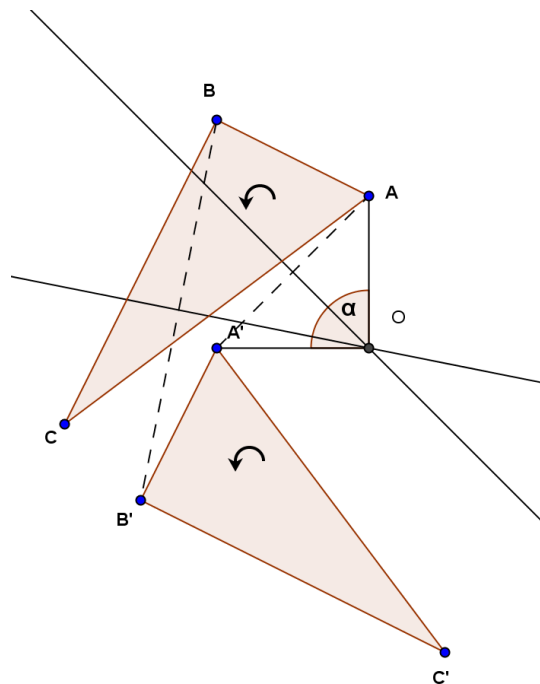
Esempio 1

Dati i triangoli F e F' in figura qual è l'isometria che trasforma $F \rightarrow F'$?



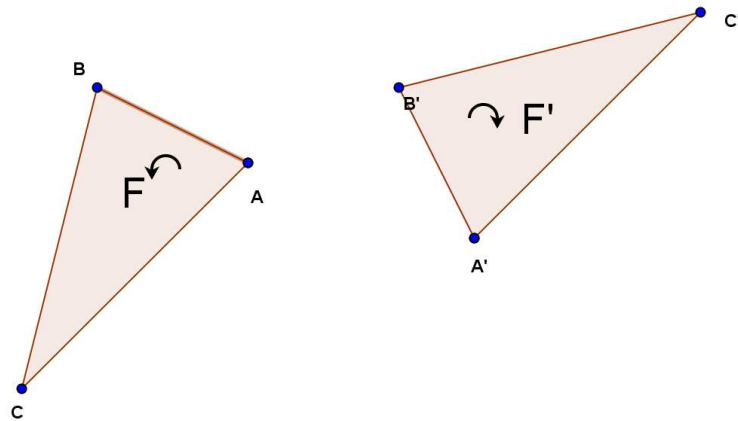
Si tratta di un'isometria “diretta” perché l'orientamento della figura è conservato e quindi dal momento che non è chiaramente una traslazione non può che essere una rotazione.

Per determinare il centro di rotazione possiamo pensare che i punti A e A' hanno la stessa distanza dal centro e lo stesso accade per B e B' : il centro O di rotazione è quindi l'intersezione degli assi di AA' e BB' e l'angolo di rotazione è $\alpha = \widehat{AOA'}$.



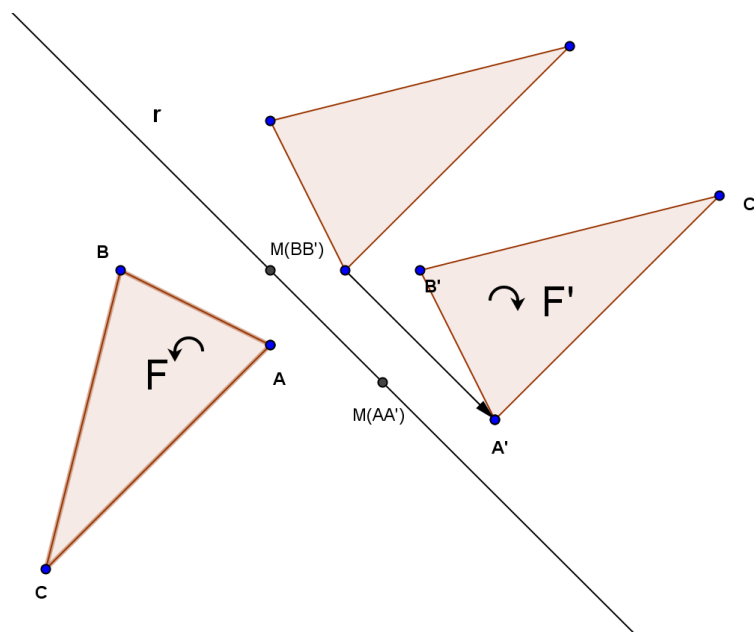
Esempio 2

Determina l'isometria tale che $F \rightarrow F'$



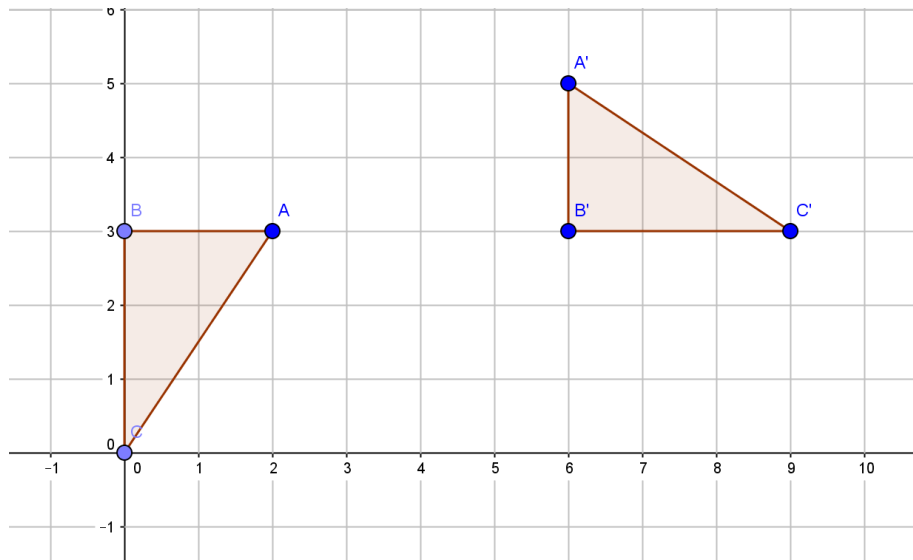
Poiché questa volta **si tratta di un'isometria “inversa”** si può trattare di una simmetria assiale o di una glisso simmetria e dal momento che l'asse di AA' non coincide con quella di BB' vuol dire che si tratta di una glisso simmetria.

Si può quindi procedere ricordando che il punto medio di punti corrispondenti appartiene all'asse di simmetria e quindi l'asse di simmetria sarà la retta r passante per i punti medi di coppie di punti corrispondenti, per esempio $M(A,A')$ e $M(B,B')$, e si individuerà poi facilmente il vettore traslazione parallelo a r .



Esercizi svolti

1) Determina l'isometria che porta il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'.



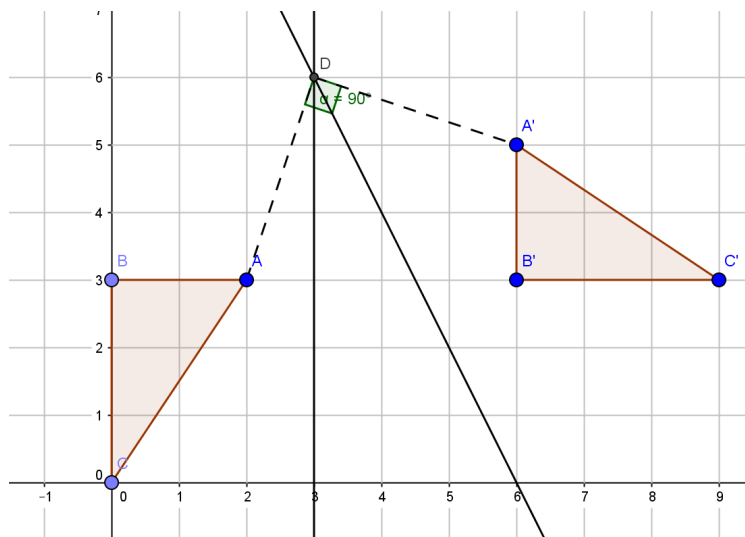
Svolgimento

Per prima controlliamo l'orientamento di ABC e A'B'C': hanno lo stesso orientamento e quindi potrò trasformare ABC in A'B'C' applicando un'isometria diretta (traslazione o rotazione).

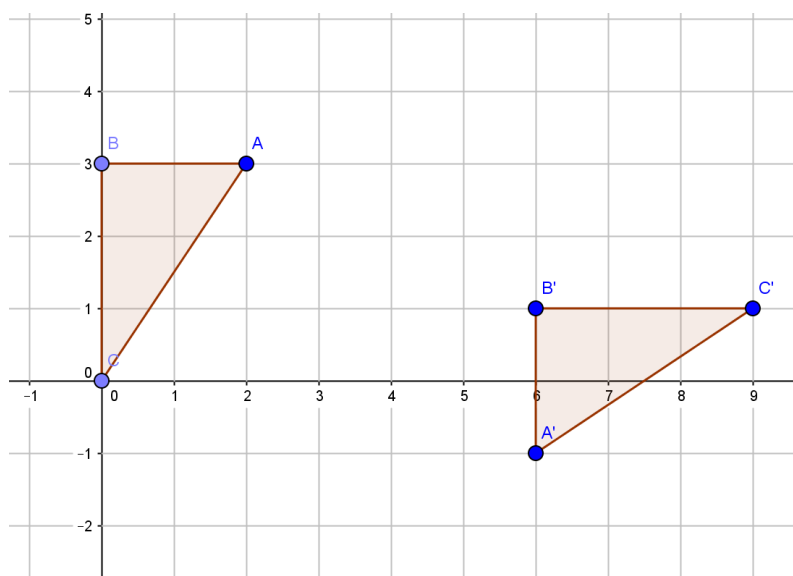
Dal momento che si vede subito che non si può andar bene una traslazione cerchiamo una rotazione che porti ABC in A'B'C'.

Possiamo determinare il centro O della rotazione: dal momento che il centro O sarà alla stessa distanza da A e A' e anche alla stessa distanza da B e B', si troverà intersecando gli assi di AA' e BB'.

L'angolo della rotazione sarà naturalmente per esempio $\widehat{AOA'}$ che nel nostro esempio è 90° .



2) Determina l'isometria che porta il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'.



Svolgimento

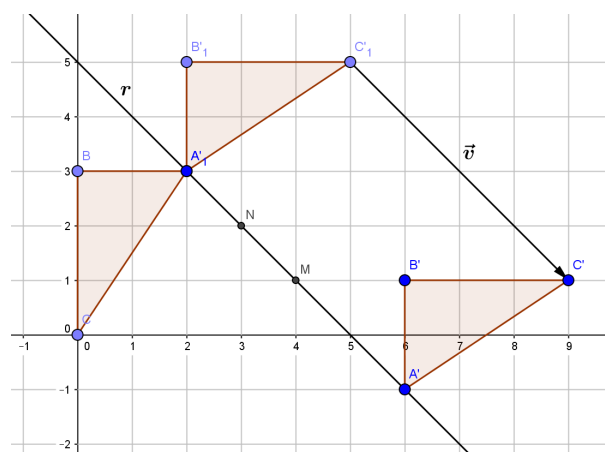
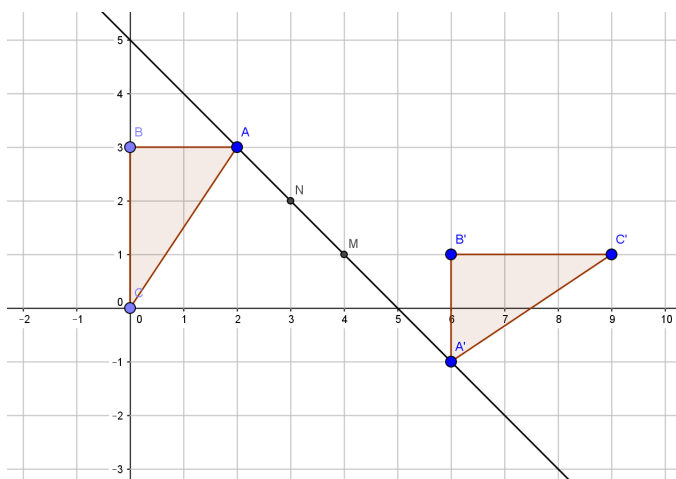
Per prima cosa controlliamo se l'orientamento del triangolo iniziale e finale coincidono.

Se percorro il triangolo seguendo l'ordine $A \rightarrow B \rightarrow C$ giro in senso antiorario, mentre se percorro il triangolo A'B'C' seguendo l'ordine $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ giro in senso orario: quindi l'orientamento della figura finale è cambiato e devo cercare un'isometria inversa (simmetria assiale o glisso simmetria).

Si vede subito che non si tratta di una simmetria assiale e quindi cerco una **glissosimmetria** che porti ABC in A'B'C': devo individuare l'asse di simmetria e il vettore traslazione (parallelo all'asse di simmetria).

Per determinare l'asse di simmetria, per la proprietà della glisso simmetria, basta individuare il punto medio M di una coppia di punti corrispondenti, per esempio A e A', e il punto medio N di un'altra coppia di punti corrispondenti, per esempio B, B': la retta per M e N è l'asse di simmetria.

Infine applichiamo al triangolo ABC la simmetria rispetto alla retta MN per poter individuare il vettore traslazione (vedi figura).



PROBLEMI ISOMETRIE

- 1) Come si trasforma la retta di equazione $y = 3x + 1$ applicando la traslazione $t(1,4)$?
Scrivi le equazioni della trasformazione.

$$\left[\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 4 \end{cases} \quad y = 3x + 2 \right]$$

- 2) Come si trasforma la parabola di equazione $y = x^2$ applicando la traslazione $t(1,-2)$?

$$[y = x^2 - 2x - 1]$$

- 3) Applica alla curva $y = \sin x$ la traslazione $t\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Come risulta l'equazione della curva traslata? A cosa corrisponde?

$$[y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right); y = -\cos x]$$

- 4) Come si trasforma l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$ applicando $R(O; 45^\circ)$?
Scrivi le equazioni della trasformazione.

$$\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases} \quad x \cdot y = 2 \right]$$

- 5) Componi la rotazione di centro O e angolo 90° con la traslazione di vettore $(2;2)$: scrivi le equazioni della trasformazione composta. Di quale trasformazione si tratta?
Si ottiene la stessa cosa applicando prima la traslazione e poi la rotazione cioè eseguendo $R(O, 90^\circ) \circ t(2;2)$?

Suggerimento: $(x; y) \rightarrow (-y; x) \rightarrow (-y + 2; x + 2)$ quindi...

Dopo aver osservato che deve essere una rotazione poiché risulta un'isometria diretta in quanto composizione di isometrie dirette e non può essere una traslazione, per determinare il centro O' della rotazione ricordiamo che O' è l'unico punto "unito"....

$$\left[\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 2 \end{cases} \quad R(O'(0;2), 90^\circ); \text{no} \right]$$

- 6) Componi la rotazione $R(O; 90^\circ)$ con la simmetria rispetto alla retta $y = x$: scrivi le equazioni della trasformazione composta. Di cosa si tratta?
Se consideri invece $R(O; 90^\circ) \circ S_{y=x}$ cosa ottieni?

$$[S_{assex} \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}; S_{assey} \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}]$$

7) Considera la composizione $t(1;2) \circ S_{assex}$ e scrivi le equazioni della trasformazione composta.

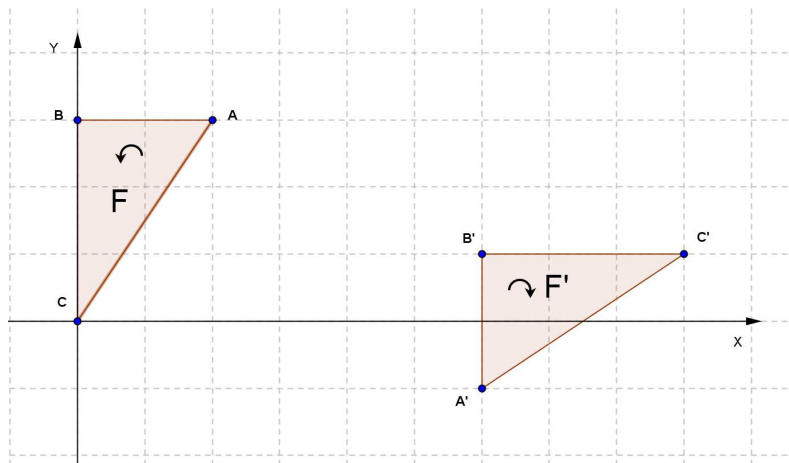
Come si trasforma la curva $y = 2^x$ applicando questa trasformazione composta?

$$\left[\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y + 2 \end{cases} \quad y = -2^{x-1} + 2 \right]$$

8) Considera l'esercizio precedente. Si ottiene lo stesso risultato applicando prima la traslazione e poi la simmetria? Come risulta l'equazione della curva trasformata da $S_{assex} \circ t(1;2)$?

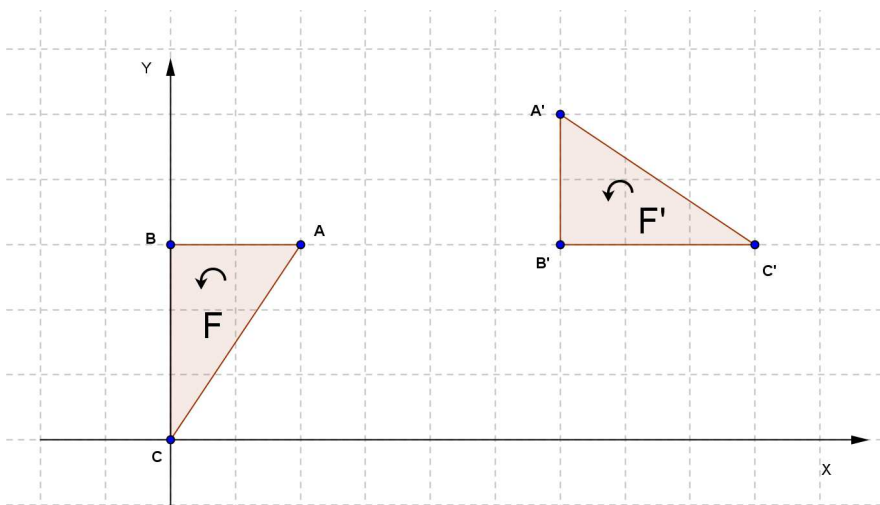
$$[\text{no} ; y = -2^{x-1} - 2]$$

9) Determina l'isometria che trasforma $F \rightarrow F'$.



[glissosimmetria di asse $r : y = -x + 5$ e traslazione di vettore $\vec{v}(4;-4)$]

10) Determina l'isometria che trasforma $F \rightarrow F'$.



$$[R(O'(3;6);90^\circ)]$$

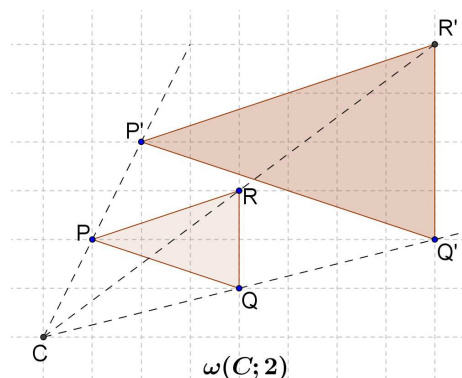
Similitudini

Omotetia

Si chiama omotetia di centro C e rapporto k (con k numero reale diverso da zero) e la indicheremo con $\omega(C, k)$, quella trasformazione geometrica tale che se

$$P \rightarrow P' \text{ si ha } \vec{CP'} = k \vec{CP}$$

Consideriamo una semplice figura, per esempio un triangolo PQR (vedi figura): vediamo come si trasforma applicando un'omotetia di centro C e rapporto $k = 2$

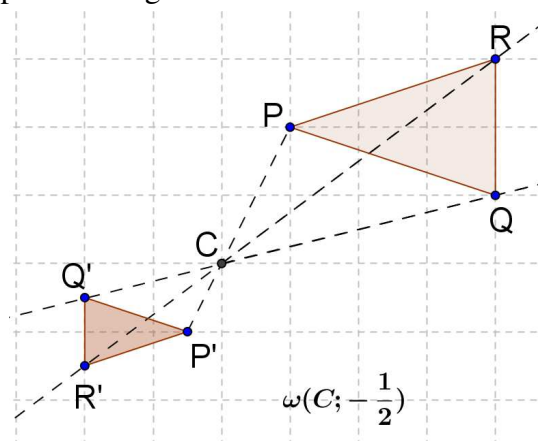
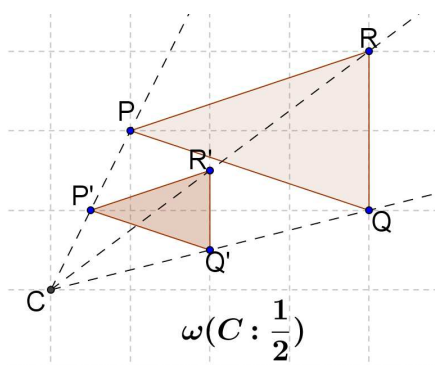


Il triangolo $P'Q'R'$ risulta avere i lati di lunghezza doppia rispetto a quelli di PQR e angoli corrispondenti uguali cioè i triangoli sono simili ma anche “ugualmente disposti” (che è poi il significato della parola *omotetia*).

Infatti da come è stata definita si ricava facilmente che

- una retta viene trasformata in una retta ad essa parallela e quindi **si conservano le ampiezze degli angoli**;
- **il rapporto tra segmenti corrispondenti è uguale a k** cioè $\overline{P'Q'} = k \cdot \overline{PQ}$;

Nota: se $k > 0$ due punti corrispondenti si trovano sulla stessa semiretta di origine C mentre se $k < 0$ punti corrispondenti appartengono a semirette opposte di origine il centro dell'omotetia.

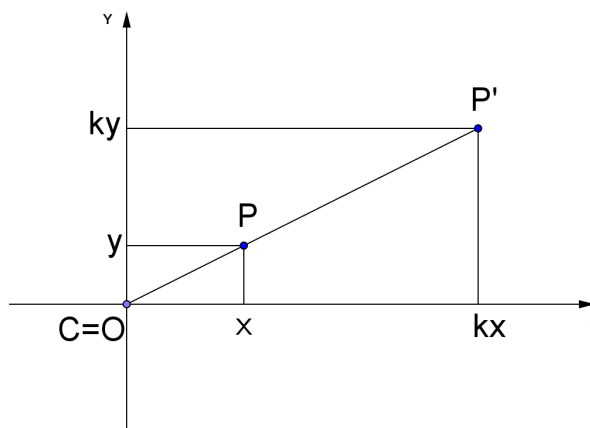


In conclusione l'omotetia ingrandisce o riduce una figura (a seconda che $|k| > 1$ o $|k| < 1$), lasciandone inalterata la forma e naturalmente se $k = 1$ si ha la trasformazione identica.

Le equazioni di un'omotetia nel piano cartesiano

a) Se il centro $C \equiv O$ (origine del sistema di riferimento), dal momento che se $P(x; y) \rightarrow P'(x'; y')$ si ha $\vec{OP'} = k \vec{OP}$, per il teorema di Talete dovrà essere $x' = kx$ e $y' = ky$ e quindi abbiamo:

$$\omega(O, k) \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$



b) Se il centro C dell'omotetia non coincide con O (origine del sistema di riferimento) possiamo pensare di traslare il sistema di riferimento portando l'origine in C : le coordinate di P nel sistema di riferimento traslato risultano $(x - x_C; y - y_C)$ e quelle di P' $(x' - x_C; y' - y_C)$ e quindi abbiamo:

$$\omega(C, k) \begin{cases} x' - x_C = k \cdot (x - x_C) \\ y' - y_C = k \cdot (y - y_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = k \cdot (x - x_C) + x_C \\ y' = k \cdot (y - y_C) + y_C \end{cases}$$

Se sviluppiamo abbiamo $\begin{cases} x' = kx - kx_C + x_C \\ y' = ky - ky_C + y_C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

Quindi le equazioni dell'omotetia $\omega(C, k)$ si presentano in genere nella forma $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

dove k è il rapporto di omotetia, ma come si determina il centro?

Possiamo ricavarlo ricercando il punto "unito" della trasformazione (il punto cioè che si trasforma in se stesso).

Esempio: per trovare il centro dell'omotetia di equazioni $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 4 \end{cases}$

possiamo risolvere

$$\begin{cases} 2x + 1 = x \\ 2y - 4 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

e quindi si tratta dell'omotetia di rapporto $k = 2$ e centro $C(-1; 4)$.

Composizione di omotetie

1) Componendo due omotetie di rapporti k_1 e k_2 e aventi lo stesso centro C si ottiene un'omotetia dello stesso centro e di rapporto $k_1 \cdot k_2$.

Infatti se consideriamo per semplicità $C \equiv O$

$$(x; y) \xrightarrow{\omega_1} (k_1 x, k_1 y) \xrightarrow{\omega_2} (k_2 (k_1 x), k_2 (k_1 y)) = (k_1 \cdot k_2 \cdot x, k_1 \cdot k_2 \cdot y)$$

2) Componendo due omotetie di rapporti k_1 e k_2 ma aventi **centri diversi** si ottiene un'omotetia (rispetto ad un altro centro) quando $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ o una traslazione se $k_1 \cdot k_2 = 1$.

Esempi

a) Consideriamo $\omega_2((1;2);2) \circ \omega_1((0;0);3)$

Dal momento che

$$\omega_1 \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases} \text{ e } \omega_2 \begin{cases} x' - 1 = 2(x - 1) \\ y' - 2 = 2(y - 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 2 \end{cases}$$

$$(x; y) \xrightarrow{\omega_1} (3x; 3y) \xrightarrow{\omega_2} (2(3x) - 1; 2(3y) - 2)$$

e quindi la trasformazione composta avrà equazioni $\begin{cases} x' = 6x - 1 \\ y' = 6y - 2 \end{cases}$

Si tratta quindi di un'omotetia di centro $C\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$ (che si ricava cercando il punto “unito”) e rapporto $k = 6$.

b) Consideriamo $\omega_2((1;2);2) \circ \omega_1\left((0;0); \frac{1}{2}\right)$

$$\omega_1 \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \omega_2 \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 2 \end{cases}$$

$$(x; y) \xrightarrow{\omega_1} \left(\frac{1}{2}x; \frac{1}{2}y\right) \xrightarrow{\omega_2} \left(2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1; 2\left(\frac{1}{2}y\right) - 2\right)$$

e quindi la trasformazione composta avrà equazioni $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$ cioè è una traslazione.

Similitudine

Si chiama similitudine la trasformazione ottenuta componendo un'omotetia con una isometria.

Se $A \rightarrow A'$ e $B \rightarrow B'$ si ha $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$ con $k > 0$.

k è chiamato **rapporto di similitudine** (corrisponde al valore assoluto del rapporto di omotetia dell'omotetia associata).

Come l'omotetia anche la similitudine conserva il rapporto tra le lunghezze, conserva l'ampiezza degli angoli.

Osservazioni

Le omotetie sono quindi particolari similitudini.

Le isometrie possono essere considerate particolari similitudini ($k = 1$).

Esempio

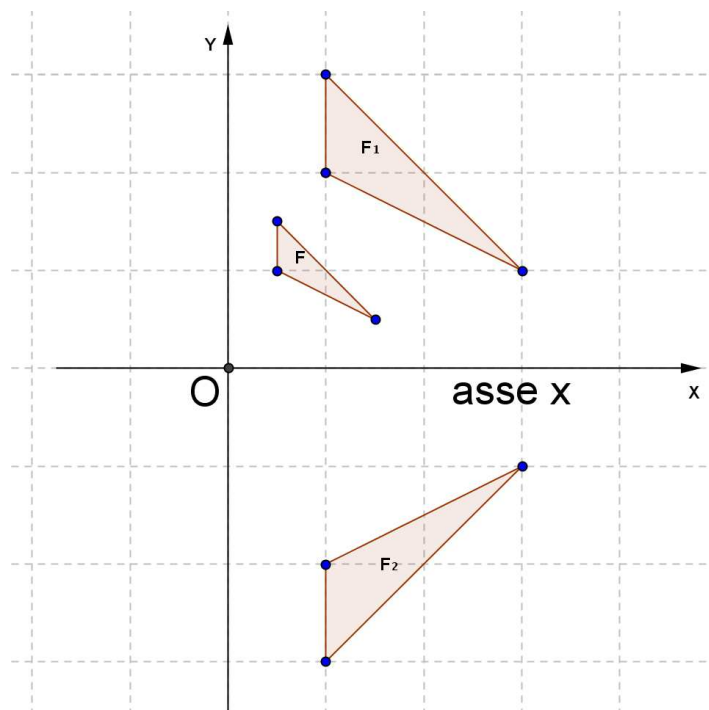
Consideriamo la similitudine ottenuta componendo un'omotetia di centro $O(0;0)$ e rapporto $k = 2$ con la simmetria rispetto all'asse x .

Avremo:

$$(x; y) \xrightarrow{\omega} (2x; 2y) \xrightarrow{s_{asse x}} (2x; -2y)$$

In conclusione le equazioni di questa similitudine saranno: $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -2y \end{cases}$

Vediamo per esempio come viene trasformato il triangolo in figura.



PROBLEMI SIMILITUDINI

- 1) Considera la similitudine ottenuta componendo l'omotetia $\omega(O,2)$, con O=origine del sistema di riferimento, con la traslazione $t_{\vec{v}(1;2)}$ traslazione di vettore $\vec{v}(1;2)$.

a) Scrivi le equazioni della similitudine

- b) Trasforma il triangolo $\triangle ABC$ con $A(2;2)$ $B(6;4)$ $C(1;4)$. Come risulta l'area di $A'B'C'$ rispetto a quella di ABC ?

$$\left[\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases} \quad A'(5;6) \quad B'(13;10) \quad C'(3;10) ; \text{area}(A'B'C') = 4 \cdot \text{area}(ABC) \right]$$

- 2) a) Determina le equazioni dell'omotetia di centro $O'(2;2)$ e rapporto 2.

b) Componi l'omotetia precedente con $\omega\left(O, \frac{1}{2}\right)$. Come risulta la trasformazione composta?

$$\left[\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 2 \end{cases} ; t_{\vec{v}} \text{ traslazione di vettore } \vec{v}(-1;-1) \right]$$

- 3) Considera l'omotetia di equazioni $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$. Qual è il suo centro? [(2;1)]

- 4) Considera la similitudine ottenuta componendo l'omotetia di centro O e rapporto 3 con la simmetria rispetto alla retta $y = x$.

a) Determina le equazioni della similitudine.

- b) Trasforma il quadrato ABCD con $A(1;1)$ $B(3;2)$ $C(4;0)$ $D(2;-1)$. Come risulta l'area di $A'B'C'D'$ rispetto a quella di ABCD ? L'orientamento della figura viene conservato?

$$\left[\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x \end{cases} ; \text{area}(A'B'C'D') = 9 \cdot \text{area}(ABCD) ; \text{no} \right]$$

- 5) Considera la similitudine ottenuta componendo $R(O;90^\circ) \circ \omega(O,2)$.

a) Determina le equazioni della similitudine.

- b) Trasforma il triangolo ABC con $A(3;1)$ $B(3;3)$ $C(2;1)$. L'orientamento della figura viene conservato?

$$\left[\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases} ; A'(-2;6) \quad B'(-6;6) \quad C'(-2;4) ; \text{sì} \right]$$

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

1) Considera la traslazione di vettore $\vec{v}(2;-1)$, Scrivi le equazioni della traslazione $t_{\vec{v}}$.

Come si trasforma la retta $r: y = 2x + 3$? Come si trasforma la circonferenza $C: x^2 + y^2 = 1$?

$$\left[\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} ; r': y = 2x - 2 ; C': x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0 \right]$$

2) Considera la traslazione di vettore $\vec{v}_1(2;1)$ e la traslazione di vettore $\vec{v}_2(-3;0)$.

Determina le equazioni della trasformazione composta $t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1}$. Se componiamo in ordine inverso la trasformazione composta cambia ? A quale trasformazione corrisponde ?

$$\left[\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} ; no ; t_{\vec{v}} \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \right]$$

3) Considera la rotazione $R\left((0;0);\frac{\pi}{3}\right)$. Scrivi le equazioni della rotazione. Come si trasforma la

retta $r: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$?

$$\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} ; r': x = 0 \right]$$

4) Considera la rotazione di equazioni:

Di quale rotazione si tratta?

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$[R((1;1);45^\circ)]$$

5) Come si trasforma l'iperbole di equazione $xy = 2$ applicando la rotazione $R((0;0);45^\circ)$? Scrivi le equazioni della trasformazione.

$$\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases} ; \frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1 \right]$$

6) Trasforma la parabola $P: y = x^2 - 4x + 5$:

a) con la simmetria rispetto all'asse x ;

b) con la simmetria rispetto all'asse y .

$$[y = -x^2 + 4x - 5; \quad y = x^2 + 4x + 5]$$

7) Considera il triangolo ABC avente $A(0;2)$, $B(2;4)$, $C(1;6)$ e il triangolo $A'B'C'$ con $A'(6;2)$, $B'(8;0)$, $C'(7;-2)$. Determina l'isometria che trasforma ABC in $A'B'C'$.

$$[\text{glissosimmetria di asse } r: y = 2 \text{ e traslazione di vettore } \vec{v} = (6;0)]$$

8) Considera la traslazione di vettore $\vec{v} = (2;1)$ e la rotazione $R((0;0);90^\circ)$. Scrivi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo:

a) $t_{\vec{v}} \circ R$. A cosa corrisponde?

b) $R \circ t_{\vec{v}}$. A cosa corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}, \quad R\left(\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); 90^\circ\right) ; \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}, \quad R\left(\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); 90^\circ\right)]$$

9) Cosa si ottiene componendo la simmetria $S_{asse\ x}$ con $S_{asse\ y}$?

$$[R((0;0);180^\circ)]$$

10) Determina le equazioni della simmetria rispetto ad una retta $r: x = k$.

$$[\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}]$$

11) Considera $r_1: x = 2$ e $r_2: x = 4$.

a) Come risulta $S_{r_2} \circ S_{r_1}$?

b) Come risulta $S_{r_1} \circ S_{r_2}$?

$$[t_{(4;0)} ; \quad t_{(-4;0)}]$$

12) Scrivi le equazioni della trasformazione $S_{asse\ y} \circ S_{y=x}$. A cosa corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad R((0;0);90^\circ)]$$

13) Come risultano le equazioni della trasformazione $S_{asse\ y} \circ S_{y=x} \circ S_{asse\ x}$. A cosa corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}, \quad S_{y=x}]$$

14) a) Scrivi le equazioni della glissosimmetria di asse $r: y = x$ e vettore $\vec{v} = (3;3)$.

b) Come si trasforma l'ellisse $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

$$\left[\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 3 \end{cases}, \quad E': (x-3)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \right]$$

15) Determina come si trasforma la retta $r: y = -x + 1$ applicando l'omotetia $\omega((0;0);2)$.

$$[r': y = -x + 2]$$

16) a) Determina le equazioni di $\omega_2((1;2);3) \circ \omega_1((0;0);2)$. A cosa corrisponde?

b) Determina le equazioni di $\omega_1((0;0);2) \circ \omega_2((1;2);3)$. A cosa corrisponde?

$$\left[\begin{cases} x' = 6x - 2 \\ y' = 6y - 4 \end{cases}, \quad \omega\left(\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right); 6\right) \begin{cases} x' = 6x - 4 \\ y' = 6y - 8 \end{cases}, \quad \omega\left(\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right); 6\right) \right]$$

17) Scrivi le equazioni della similitudine $R((1;2);90^\circ) \circ \omega((0;0);2)$. Trasforma la circonferenza $C: x^2 + y^2 = 1$. Disegna C' .

$$\left[\begin{cases} x' = -2y + 3 \\ y' = 2x + 1 \end{cases}; \quad C': x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \right]$$

18) Scrivi le equazioni della trasformazione ottenuta componendo l'omotetia di centro $(0;0)$ e rapporto $k = 3$ con la traslazione di vettore $v(2;1)$.

Si tratta di una omotetia rispetto a quale centro C ?

$$\left[\begin{cases} x' = 3x + 2 \\ y' = 3y + 1 \end{cases}; \quad C\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \right]$$

19) Scrivi come risultano le equazioni della trasformazione $\omega_2((1;2);\frac{1}{3}) \circ \omega_1((0;0);3)$. Quindi di quale trasformazione si tratta?

$$\left[\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3} \\ y' = y + \frac{4}{3} \end{cases}; \quad \text{traslazione } t\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) \right]$$

20) Scrivi come risulta la composizione $S_{assex} \circ \omega((2;-1);-2)$.

$$\left[\begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = 2y + 3 \end{cases} \right]$$