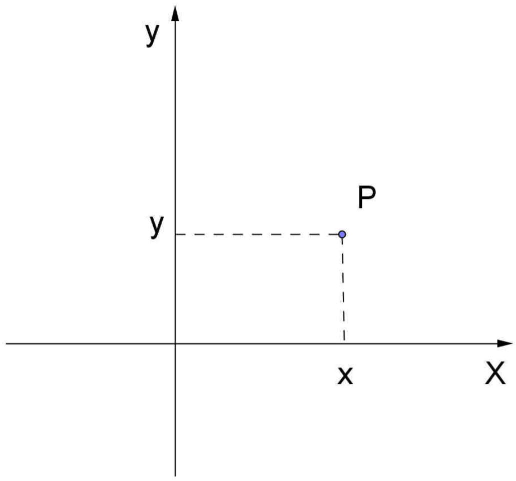
Il piano cartesiano

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.
In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** *(x;y)* di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata *(x;y)* di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).
Il numero ***x*** si chiama ***ascissa*** del punto P e il numero ***y*** si chiama ***ordinata*** del punto P.
x e *y* si dicono anche **coordinate** del punto P.



Nota

E' importante sottolineare che $(x;y)$ è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.

Osservazione:

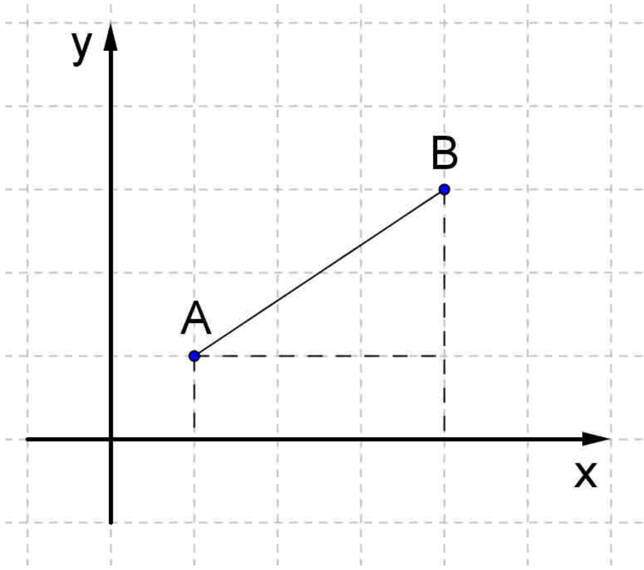
I punti sull'asse x hanno ordinata y = 0;
i punti sull'asse y hanno ascissa x = 0.

Inoltre osserviamo che i punti che si trovano nel cosiddetto I° quadrante (vedi figura) hanno ascissa e ordinata positive, quelli del II° quadrante ascissa negativa e ordinata positiva ecc.

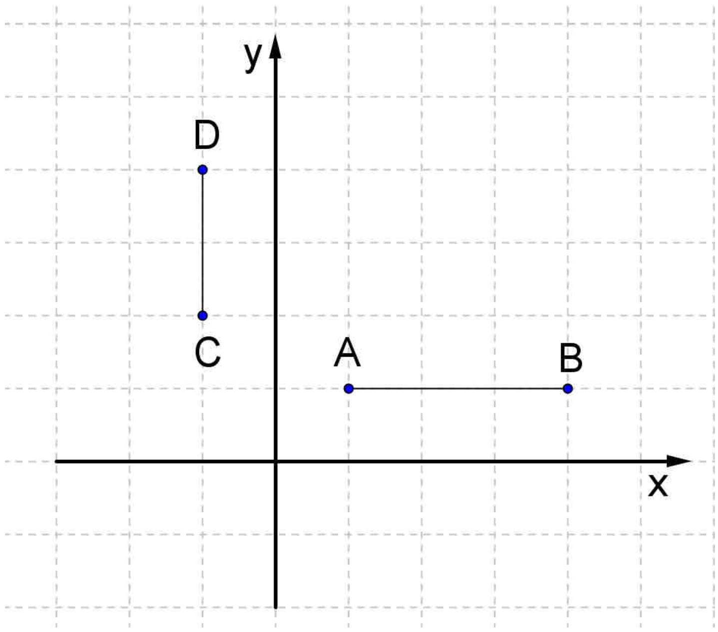
Distanza tra due punti

Per determinare la distanza tra due punti A(x_A,y_A) e B(x_B,y_B) possiamo applicare il teorema di Pitagora (vedi figura):

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Se i punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata la distanza è data dal valore assoluto della differenza delle ascisse o delle ordinate : per esempio in figura $\overline{AB} = |x_B - x_A|$ e $\overline{CD} = |y_D - y_C|$.

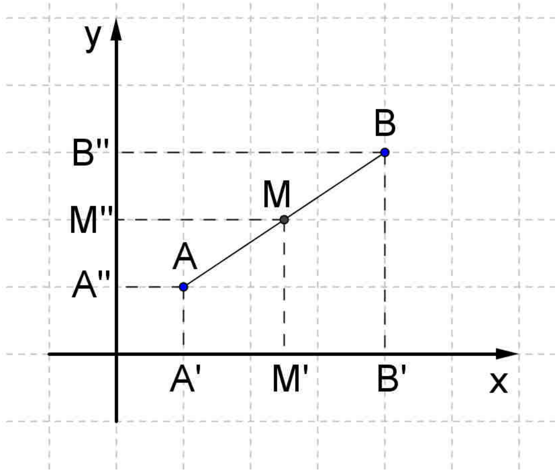


Punto medio di un segmento

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB possiamo considerare le proiezioni di A, M e B sull'asse x e poi sull'asse y e, sfruttando il teorema di Talete, affermare che:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



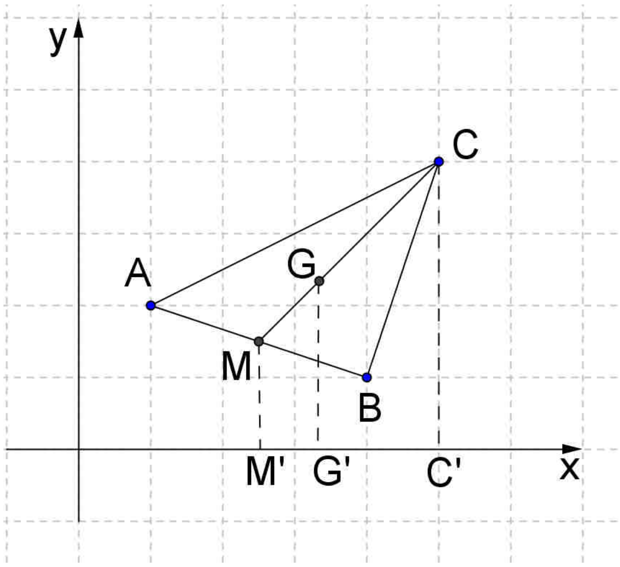
Baricentro di un triangolo

Per determinare le coordinate del baricentro G di un triangolo di vertici assegnati A(x_A,y_A) B(x_B,y_B) C(x_C,y_C) posiamo considerare per esempio la mediana CM (vedi figura) e ricordare che G la divide in due parti una doppia dell'altra.

Proiettando M,G,C prima sull'asse x e poi sull'asse y sempre per il teorema di Talete potremo scrivere:

$$x_C - x_G = 2(x_G - x_M) \Rightarrow x_G = \frac{2x_M + x_C}{3}$$

$$y_C - y_G = 2(y_G - y_M) \Rightarrow y_G = \frac{2y_M + y_C}{3}$$



Quindi, ricordando che

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

si ha che

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

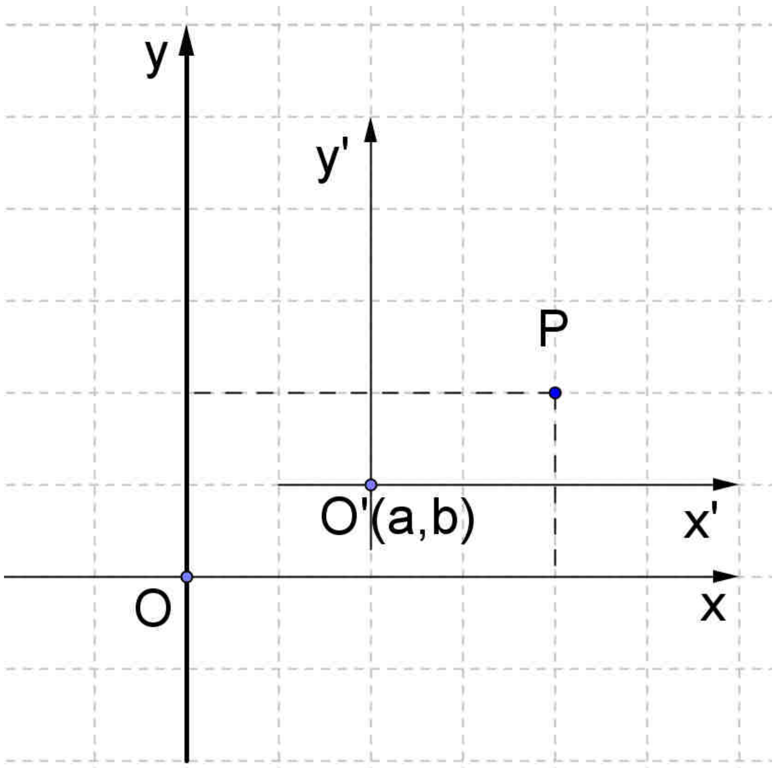
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Traslazione del sistema di riferimento

A volte può essere utile traslare il sistema di riferimento spostando l'origine in un punto O'(a,b) e chiaramente le coordinate dei punti si modificano .

Se indichiamo con (x',y') le coordinate nel nuovo sistema di riferimento avremo,come si capisce dalla figura, le seguenti relazioni tra le vecchie coordinate (x,y) e le nuove coordinate (x',y') di un punto P:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$



ESERCIZI

1. Dato il triangolo di vertici A(1,2) B(5,4) C(6,0) determina perimetro,area e coordinate del baricentro.
   (per determinare l'area puoi considerare il rettangolo in cui è inscritto il triangolo e …)

$$\left[2p = 2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}, A = 9, G(4,2)\right]$$

2. Verifica che il triangolo di vertici A(3,5) B(0,2) C(4,-2) è un triangolo rettangolo. Calcola perimetro e area.

$$\left[2p = 12\sqrt{2}, A = 12\right]$$

3. Verifica che il triangolo di vertici A(1,3) B(5,7) C(7,1) è isoscele, determina la misura dell'altezza relativa alla base, calcola perimetro, area e coordinate del baricentro G.

$$\left[2p = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{10}, A = 16, G(\frac{13}{3};\frac{11}{3})\right]$$

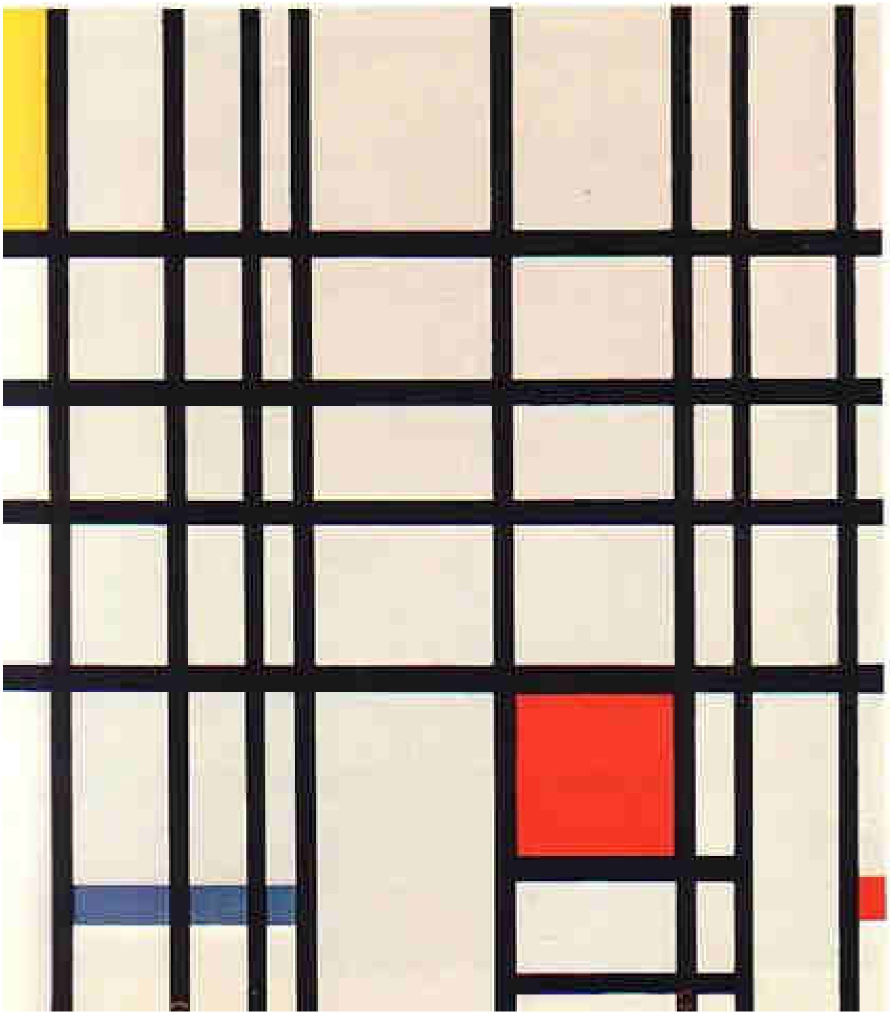
4. Considera il quadrilatero di vertici A(2,3) B(7,3) C(4,7) D(-1,7).Di quale quadrilatero si tratta? Determina perimetro e area.

$$\left[2p = 20, A = 20\right]$$

5. Considera il quadrilatero di vertici A(4,0) B(7,3) C(4,6) D(1,3).
   Di quale figura si tratta?

   Se il sistema di riferimento viene traslato portando l'origine nel punto di incontro delle diagonali, quali sono le nuove coordinate dei vertici della figura?

La retta nel piano cartesiano



Abbiamo visto come, fissato un sistema di riferimento, a ciascun punto sia possibile associare una coppia ordinata di numeri reali (le sue coordinate).

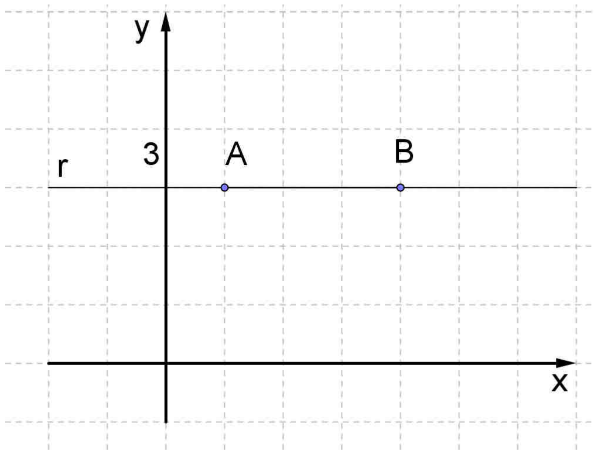
Se adesso consideriamo una retta come la potremo individuare?

Non possiamo dare le coordinate di tutti i suoi punti ma forse possiamo cercare una relazione che riguarda le coordinate (x,y) di un suo generico punto.

Cominciamo con il considerare una retta parallela all'asse x:osserviamo che tutti i suoi punti hanno la stessa ordinata.
Se per esempio prendiamo la retta in figura potremo scrivere

$$y= 3$$

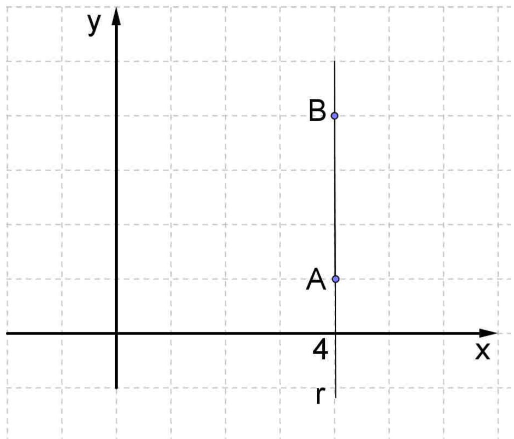
e dire che y=3 è l'**equazione** di questa retta perché tutti i suoi punti hanno ordinata uguale a 3 e tutti i punti del piano che hanno ordinata 3 appartengono a questa retta.



Quindi, in generale, **una retta parallela all'asse x avrà equazione y=k** dove k è un numero reale.
In particolare **l'asse x avrà equazione y=0.**

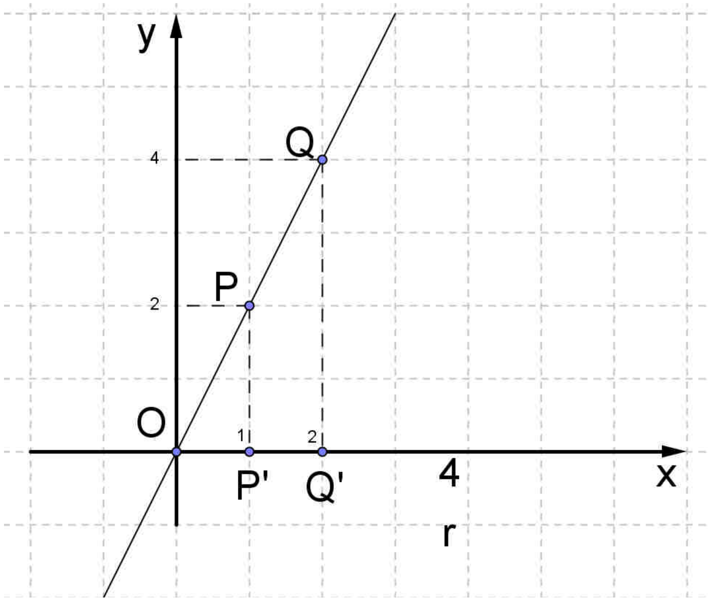
Analogamente se consideriamo una retta parallela all'assey (vedi figura) osserviamo che tutti i suoi punti hanno la stessa ascissa , nel nostro caso 4, equindi l'equazione che descrive la retta sarà x=4.

In generale **una retta parallela all'assey avrà equazione x=k** e in particolare **l'asse y avrà equazione x=0.**



Consideriamo adesso una retta passante per l'origine degli assi (vedi figura): se P e Q sono due punti appartenenti alla retta, per la similitudine dei triangoli in figura OPP' e OQQ' potremo scrivere

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \quad \text{cioè} \quad \frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q} = 2$$

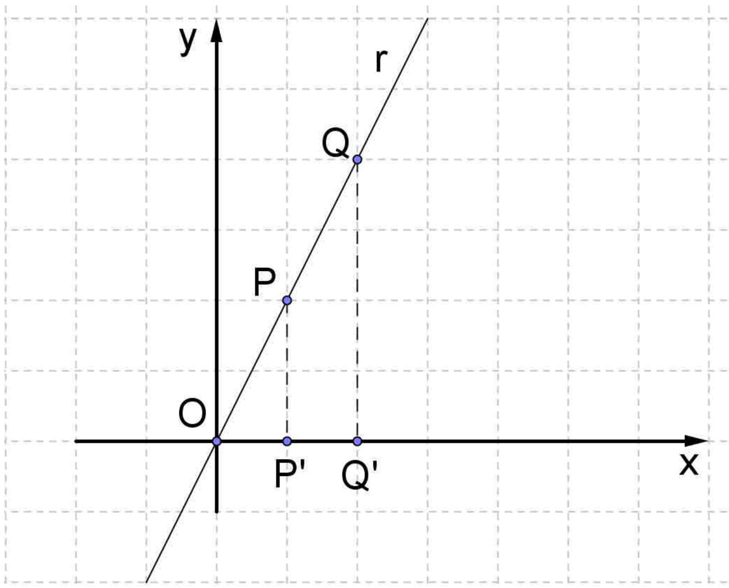


e quindi in generale potremo dire che l'equazione della retta è nel nostro esempio $\frac{y}{x} = 2$ che possiamo scrivere y=2x.

In generale per una retta passante per l'origine potremo considerare i triangoli in figura OPP' e OQQ' e potremo scrivere

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} = m$$

cioè $\frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q} = m$



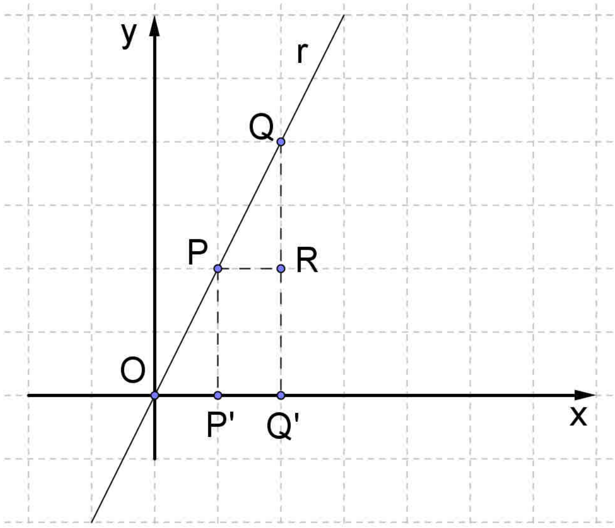
Quindi l'equazione di **una retta per l'origine** sarà :

$$\boxed{y = mx}$$

m viene detto **coefficiente angolare** della retta ed indica l'inclinazione della retta.
Osserviamo che se $m > 0$ la retta appartiene al I –III quadrante (infatti le coordinate dei punti sono entrambe positive o negative e quindi il rapporto è un numero positivo) mentre se $m < 0$ la retta appartiene al II- IV quadrante (le coordinate dei punti sono discordi e quindi il loro rapporto è negativo).
Osserviamo inoltre che l'asse x ha inclinazione m = 0 (l'equazione risulta infatti y = 0), ma che all'asse y non può essere associato un coefficiente angolare .

NOTA
Facciamo notare che per trovare il coefficiente angolare posso considerare anche due punti qualsiasi P e Q appartenenti alla retta e esprimere m utilizzando il triangolo PQR (vedi figura) scrivendo

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

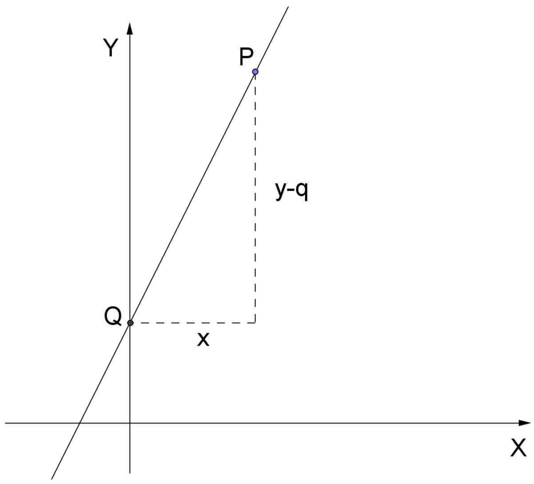


Consideriamo infine una retta non passante per l'origine O(0,0) e non parallela agli assi (vedi figura).
Consideriamo il punto Q(0;q) in cui interseca l'asse y ed esprimiamo il coefficiente angolare m considerando un punto generico $P(x;y)$ e il punto Q.
Abbiamo:

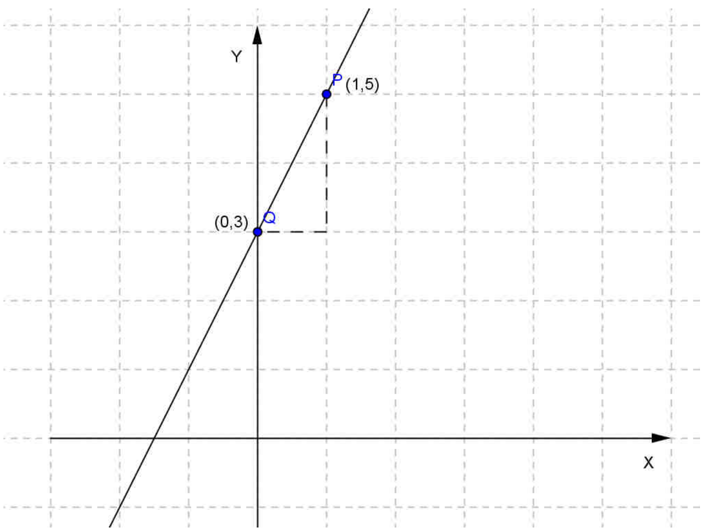
$$m = \frac{y-q}{x} \Rightarrow y - q = m \cdot x$$

Quindi:

$$\boxed{y = mx + q}$$



Nell'equazione q viene detta **ordinata all'origine** poiché corrisponde all'ordinata del punto della retta avente ascissa nulla.
In figura per esempio è stata rappresentata la retta di equazione y = 2x +3.



Problema: è possibile scrivere un'equazione che riesca a rappresentare qualsiasi retta ?

Abbiamo già fatto notare che all'asse y non poteva essere associato un coefficiente angolare e lo stesso vale per le rette parallele all'assey: l'equazione y = mx +q non riesce quindi a rappresentare tutte le rette del piano cartesiano.

Osserviamo invece la seguente equazione:

$$ax + by + c = 0$$

Proviamo a far variare i parametri a, b, c:

se a = 0 e b $\neq 0$ possiamo ricavare y = $-\frac{c}{b}$ e quindi otteniamo le rette parallele all'assex (per c = 0 abbiamo proprio l'asse x);

se a $\neq 0$ e b = 0 possiamo ricavare x = $-\frac{c}{a}$ e quindi otteniamo le rette parallele all'asse y (per c = 0 abbiamo proprio l'assey);

se a $\neq 0$ e b $\neq 0$ ma c = 0 otteniamo y = $-\frac{a}{b}$x cioè le rette per l'origine;

e infine se a $\neq 0$, b $\neq 0$ e c $\neq 0$ otteniamo y = $-\frac{a}{b}$x - $\frac{c}{b}$ cioè le rette del tipo y = mx +q.

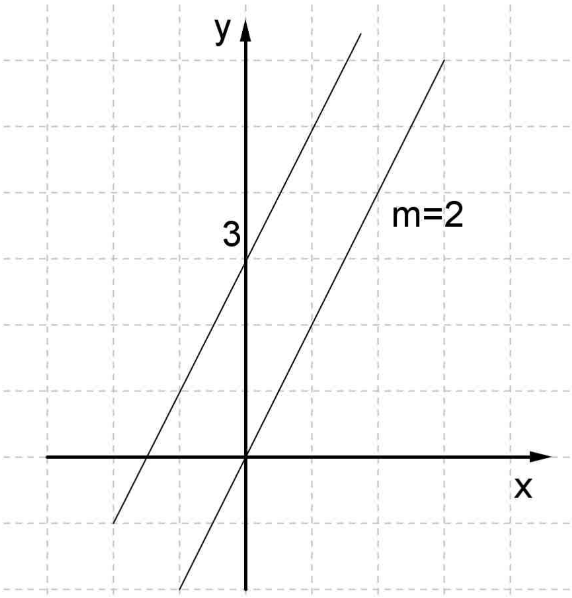
Quindi l'equazione

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

rappresenta tutte le rette nel piano cartesiano e per questo viene detta **equazione generale** di una retta.

Rette parallele

Per quello che abbiamo detto è chiaro che due rette, non parallele all'asse y, sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

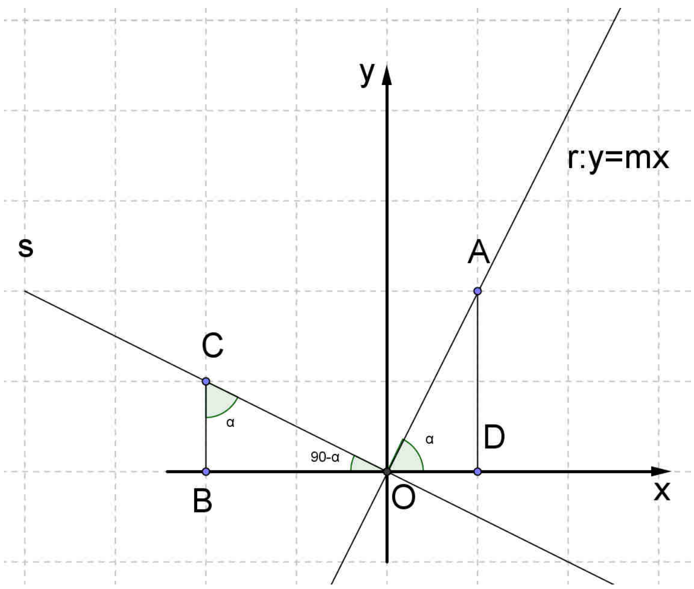


Vediamo in figura le rette di equazione $y = 2x$ e $y = 2x + 3$.

Rette perpendicolari

Consideriamo una retta per l'origine r di equazione $y = mx$ (per semplicità sia $m > 0$) e costruiamo il triangolo OAD come in figura prendendo cioè $\overline{OD} = 1$ e $\overline{AD} = m$.

A questo punto disegniamo il triangolo OCB prendendo $\overline{BC} = 1$ e $\overline{OB} = m$ (vedi figura) e tracciamo la retta s che avrà quindi equazione $y = -\frac{1}{m}x$.

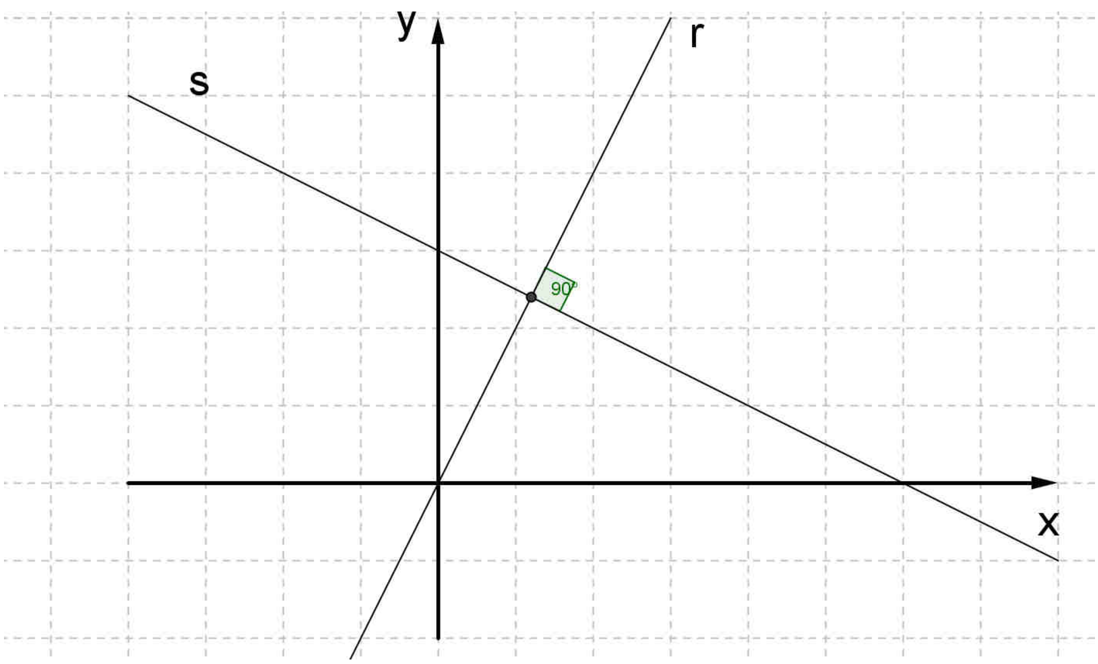


Poiché i triangoli OAD e OCB sono uguali per costruzione, avranno tutti gli angoli uguali e in particolare $A\hat{O}D = B\hat{C}O = \alpha$ e allora essendo $B\hat{O}C = 90° - \alpha$ avremo che l'angolo $A\hat{O}C = 90°$ cioè le rette r e s sono perpendicolari.

La relazione che abbiamo trovato tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari passanti per l'origine vale naturalmente anche per rette perpendicolari non passanti per l'origine poiché quello che conta è il coefficiente angolare.

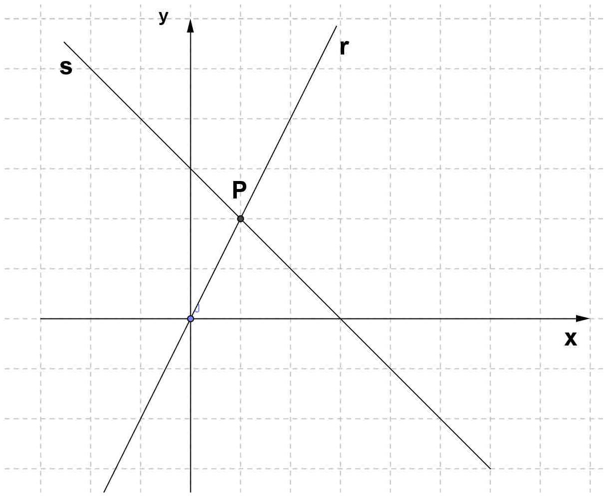
Quindi possiamo dire che se una retta ha coefficiente angolare m , una retta con coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$ risulta ad essa perpendicolare (e viceversa se due rette sono perpendicolari e non parallele agli assi i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro).

Vediamo per esempio in figura le rette perpendicolari di equazione y = 2x e y = $-\frac{1}{2}$ x +3.



Intersezione tra due rette

Supponiamo di avere due rette non parallele, per esempio $y = 2x$ e $y = -x + 3$ come in figura e di voler trovare le coordinate del loro punto P di intersezione.



In questo caso le coordinate si possono determinare facilmente anche osservando la figura: $P(1;2)$.

Ma in generale come possiamo trovarle?

Poiché $P \in r$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di r.
Poiché $P \in s$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di s.

Quindi le coordinate $(x; y)$ del punto di intersezione devono verificare entrambe le equazioni cioè sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Infatti risolvendo abbiamo:

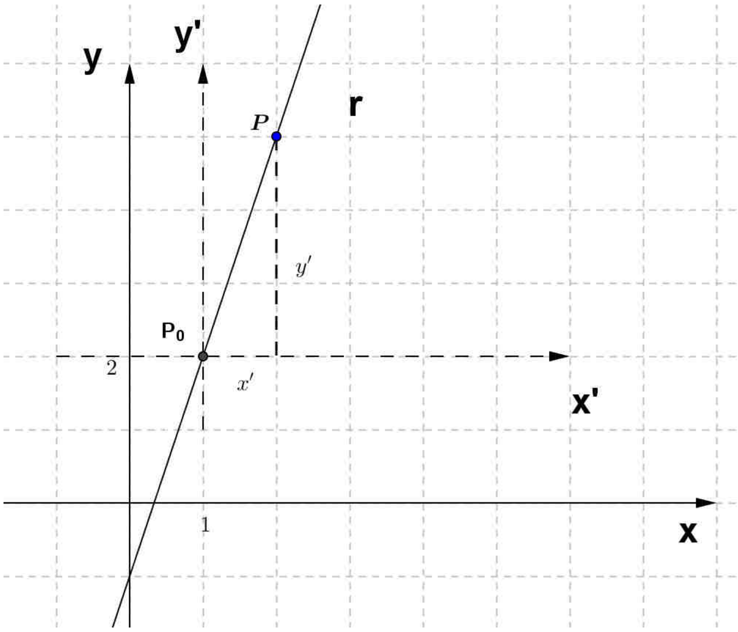
$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

In generale quindi per trovare le coordinate del punto di intersezione di due rette basterà **risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

Nota: se le rette sono parallele il sistema non avrà soluzione.

Equazione di una retta passante per un punto assegnato $P_0(x_o; y_o)$ ed avente un coefficiente angolare assegnato m

Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta passante per $P_0(1;2)$ e avente coefficiente angolare $m = 3$.



Se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine nel punto $P_0(1;2)$ avremo che , per un punto qualunque $P(x; y)$, la relazione tra le "nuove" coordinate (x', y') riferite al sistema traslato e le "vecchie" coordinate (x, y) riferite al sistema iniziale sarà

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Ma nel nuovo sistema di riferimento sappiamo che l'equazione di r è

$$y' = 3x'$$

e quindi, tornando a x e y , otteniamo

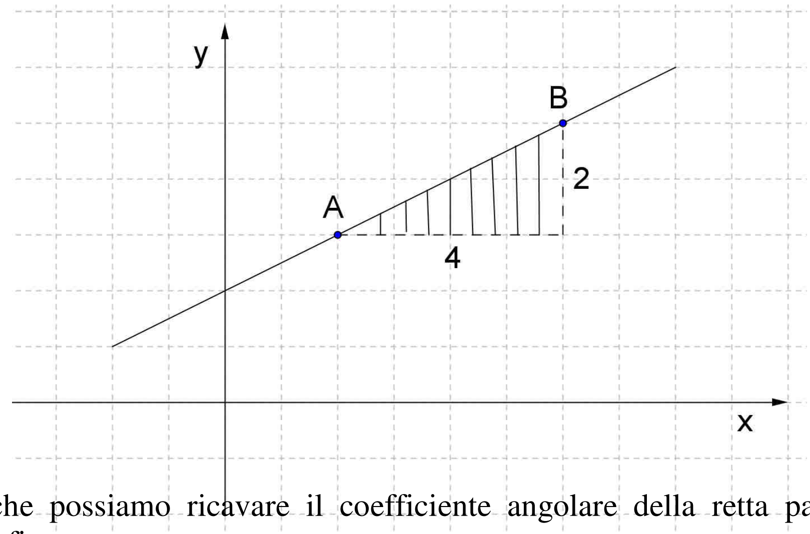
$$y - 2 = 3(x - 1)$$

In generale, quindi, la retta passante per $P_0(x_o; y_o)$ con coefficiente angolare m avrà equazione:

$$\boxed{y - y_o = m \cdot (x - x_o)}$$

Equazione della retta passante per due punti assegnati

Supponiamo di volere trovare l'equazione della retta passante per $A(2;3)$ e $B(6;5)$.



Osserviamo che possiamo ricavare il coefficiente angolare della retta partendo dal triangolo tratteggiato in figura:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e nel nostro esempio $m = \frac{1}{2}$.

A questo punto possiamo utilizzare l'equazione della retta per A, per esempio, con coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$: $\qquad y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

In generale l'equazione della retta passante per $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ avrà equazione:

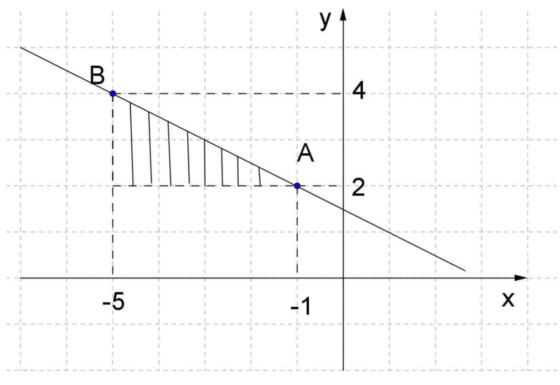
$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

che può essere anche scritta $\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$.

Nota: se per ricavare m ci si affida al piano quadrettato occorre fare attenzione ai coefficienti angolari negativi.

Per esempio le misure dei cateti del triangolo tratteggiato sono ancora 2 e 4 ma in questo caso è chiaro che $m = -\frac{1}{2}$.

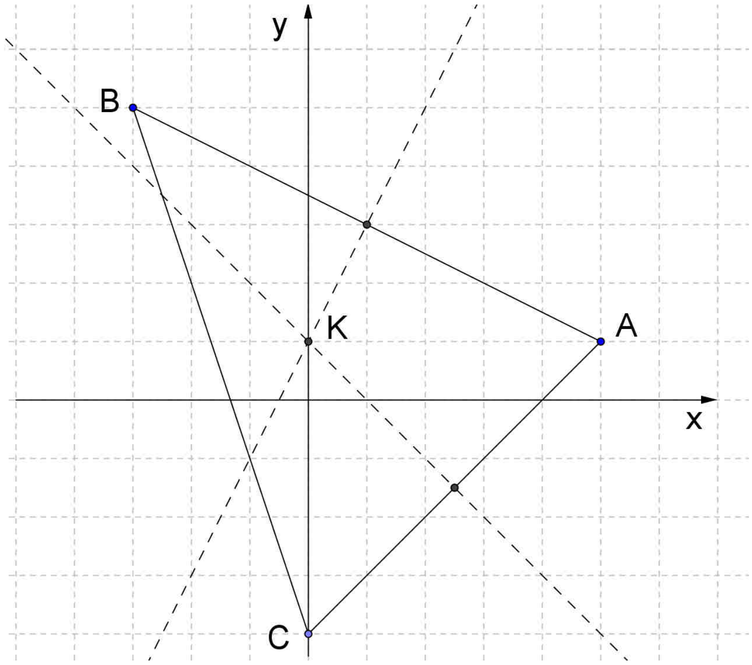
Infatti $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{-5 + 1} = -\frac{1}{2}$



Problema

A questo punto si possono già risolvere molti problemi collegati con la retta. Vediamone uno.

Dati tre punti $A(5;1)$ $B(-3;5)$ $C(0;-4)$ considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ e determina le coordinate del circocentro K (centro della circonferenza circoscritta $\equiv$ intersezione degli assi dei lati del triangolo) e dell'ortocentro H (intersezione delle altezze).



Ricerca del circocentro K

Dobbiamo intersecare due assi del triangolo, per esempio K $\begin{cases} asse_{AB} \\ asse_{AC} \end{cases}$

Poiché l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio, dobbiamo trovare

$$M_{AB}(1;3) \qquad m_{AB} = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m_{asseAB} = 2$$

$$M_{AC}\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right) \qquad m_{AC} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad m_{asseAC} = -1$$

Avremo quindi:

$$K \qquad \begin{cases} y-3 = 2(x-1) \\ y+\frac{3}{2} = -(x-\frac{5}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ y = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = -x+1 \\ y = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ricerca dell'ortocentro H

Dobbiamo intersecare due altezze, per esempio

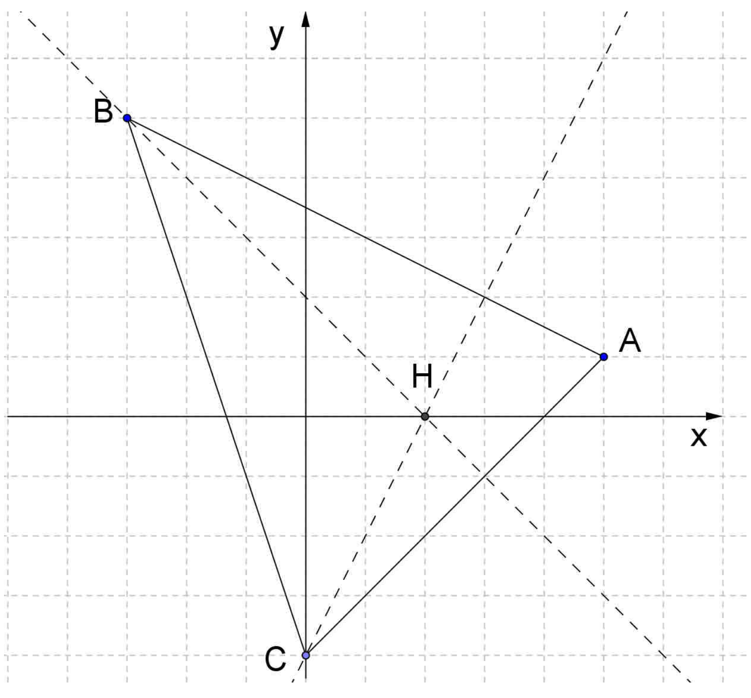
$$H \quad \begin{cases} h_B & altezza\ \ uscente\ \ da\ \ B \\ h_C & altezza\ \ uscente\ \ da\ \ C \end{cases}$$

$$h_B\ :\ m_{AC} = 1 \Rightarrow m_{hB} = -1$$

$$h_C\ :\ m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{hC} = 2$$

Quindi avremo:

$$H \ \begin{cases} y-5=-(x+3) \\ y+4=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+2 \\ y=2x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2=2x-4 \\ y=2x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$



Distanza di un punto P da una retta r

In molti casi è utile conoscere la distanza di un punto P da una retta r.
Potremo tracciare la retta per P perpendicolare ad r, trovare il punto H di intersezione con r e poi calcolare la distanza $\overline{HP}$. Questo procedimento risulta piuttosto lungo.
Vogliamo dimostrare che se

$$r: ax+by+c=0 \qquad P(x_o; y_o)$$

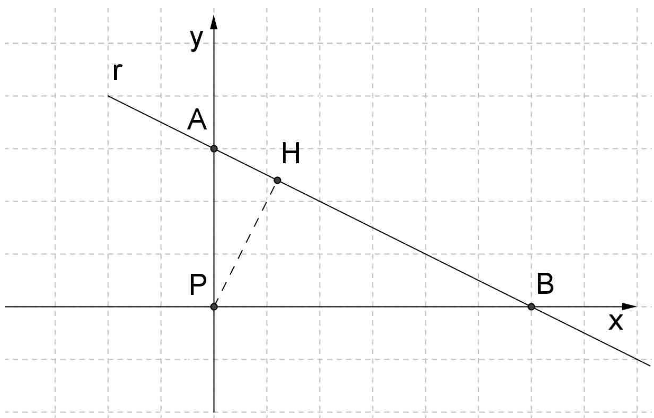
$$d(P,r)=\frac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1. Cominciamo con il considerare $P(0;0)$

$$r: ax+by+c=0$$

$A(0;-\frac{c}{b})$

$B(-\frac{c}{a};0)$



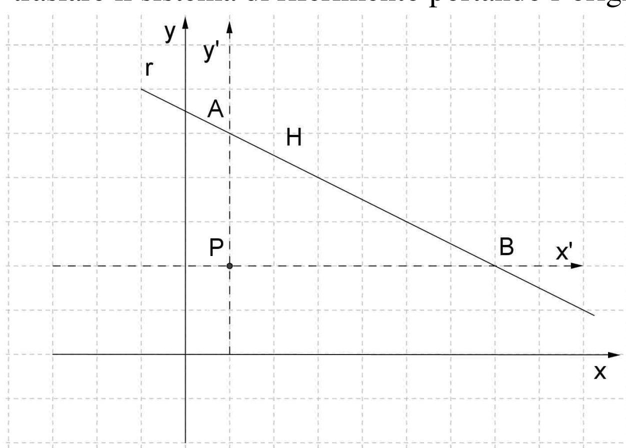
Consideriamo il triangolo $\overset{\Delta}{APB}$: $\overline{PH}$ è l'altezza relativa all'ipotenusa e quindi poiché

$$\overline{AB}=\sqrt{\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}}=\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

si ottiene

$$\overline{PH}=\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\left|\frac{c}{b}\right|\cdot\left|\frac{c}{a}\right|}{\left|\frac{c}{ab}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2. Se $P\neq(0;0)$ possiamo traslare il sistema di riferimento portando l'origine in P.



Sappiamo che $\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + x_o \\ y = y' + y_o \end{cases}$

L'equazione della retta r nel nuovo sistema di riferimento sarà quindi:

$$a(x' + x_o) + b(y' + y_o) + c = 0$$

$$ax' + by' + ax_o + by_o + c = 0$$

Poiché il termine noto è $ax_o + by_o + c$ e, nel nuovo sistema di riferimento P coincide con l'origine, utilizzando la formula trovata precedentemente avremo:

$$d(P,r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

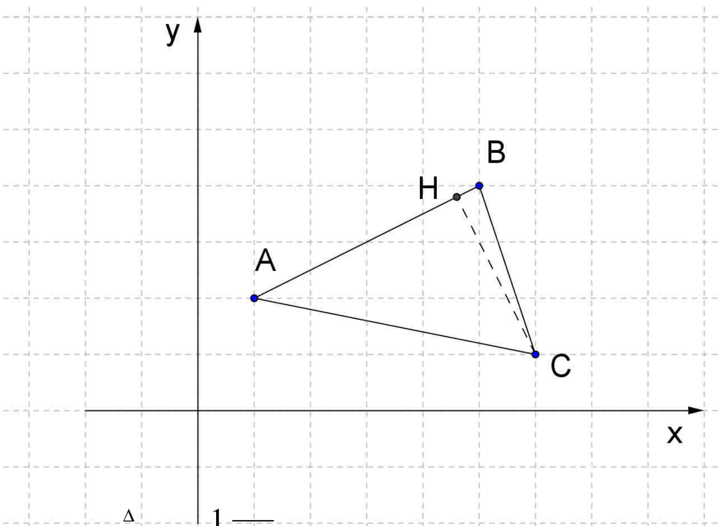
Problema: calcolo dell'area di un triangolo

Determina l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ in figura.

$A(1;2)$

$B(5;4)$

$C(6;1)$



Possiamo calcolare $\quad area(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot d(C, r_{AB})$

$\overline{AB} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

r_{AB} : $m = \frac{1}{2} \quad y - 2 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$

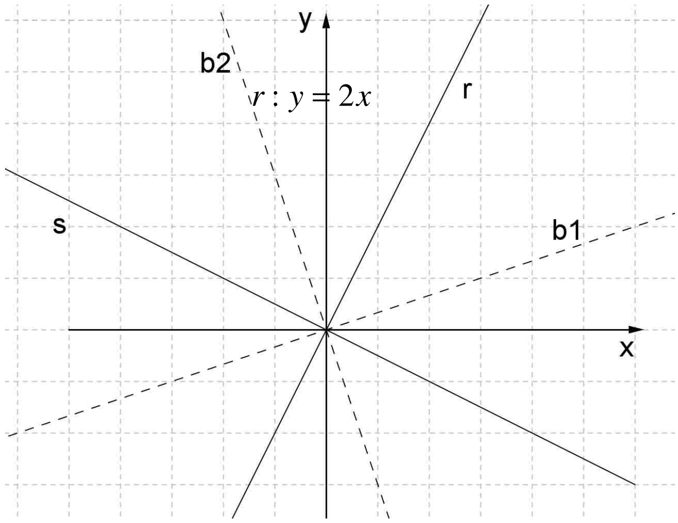
$d(C, r_{AB}) = \frac{|6 - 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$

Quindi: $area(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} = 7$

Equazioni delle bisettrici
degli angoli individuati da due rette

Supponiamo di dover risolvere il seguente problema: date le rette di equazione $r: y = 2x$ $s: y = -\frac{1}{2}x$, determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli individuati da esse.

$s: y = -\frac{1}{2}x$



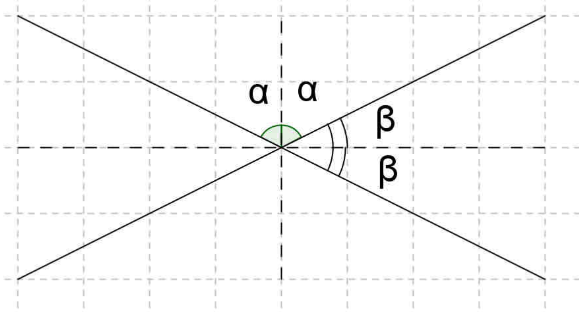
Ricordiamo che se $P(x; y)$ appartiene ad una bisettrice dovrà essere $d(P, r) = d(P, s)$.

Quindi , scrivendo $\begin{array}{l} r: 2x - y = 0 \\ s: x + 2y = 0 \end{array}$ dovrà essere $\frac{|2x - y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{5}}$

E quindi possiamo avere due casi:

$$2x - y = x + 2y \Rightarrow x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \qquad (b_1)$$
$$2x - y = -(x + 2y) \Rightarrow 3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x \qquad (b_2)$$

Osserviamo che le due bisettrici sono tra loro perpendicolari.
Infatti osservando la figura è chiaro che $2\alpha + 2\beta = 180°$ e quindi $\alpha + \beta = 90°$



ESERCIZI

1. Disegna le rette aventi le seguenti equazioni:

   a) y=3x b) $y=-\frac{2}{3}x$ c) $y=\frac{1}{4}x$

   d) y=3x+1 e) $y=-\frac{2}{3}x+3$ f) $y=\frac{1}{4}x-2$

2. Disegna le rette aventi le seguenti equazioni:

   a) 2x+y=0 b) 3x-y=0 c) x-2y+2=0

   d) 2x-y+1=0 e) 2x-4=0 f) 5y-15=0

3. Date le rette di equazione y=2x , $y=-\frac{1}{2}x+5$, $y=\frac{1}{3}x$ determina perimetro e area del triangolo individuato dalle rette e verifica che si tratta di un triangolo rettangolo isoscele.

   [$2p=4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$; A = 10]

4. Dati i punti A(1;3) B(3;7) C(7;-1) determina le equazioni delle rette passanti per A,B per B,C ,per A,C. Calcola il perimetro del triangolo. Determina le coordinate del baricentro G e dell'ortocentro H del triangolo.

   [y=2x+1;y=-2x+13; $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$; $2p=2\sqrt{5}+2\sqrt{13}+4\sqrt{5}$; $G(\frac{11}{3};3)$; $H(0;\frac{5}{2})$]

5. Considera i punti A(2;2) B(4;6) C(8;4).Determina le equazioni delle rette dei lati e verifica che si tratta di un triangolo rettangolo isoscele. Determina perimetro e area. Determina le coordinate di baricentro, ortocentro e circocentro e verifica che sono allineati.

   [y=2x-2 ; $y=-\frac{1}{2}x+8$; $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$; $2p=4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$; A=10 ; $G(\frac{14}{3};4)$; H(4;6); K(5;3)]

6. Considera i punti A(-3;0) B(3;2) C(5;-2). Determina le coordinate del circocentro K del triangolo ABC.

   [$K(\frac{6}{7};-\frac{11}{7})$]

7. Dati i punti A(-2;1) B(2;5) C(5;-1) determina:

   a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;
   b) il perimetro e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$;
   c) le coordinate del baricentro G e dell'ortocentro H del triangolo.

   [$y=x+3; y=-2x+9; y=-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}; 2p=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{53}; A=18$; $G(\frac{5}{3};\frac{5}{3})$; $H(\frac{4}{3};\frac{8}{3})$]

8. Dati i punti A(0;1) B(2;4) C(5;2) determina:

   a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;

   b) il perimetro e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ (verifica anche che è un triangolo rettangolo);

   c) le coordinate del circocentro K del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$[\ y=\frac{3}{2}x+1;\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{16}{3};\ y=\frac{1}{5}x+1; 2p=2\sqrt{13}+\sqrt{26}; A=\frac{13}{2}; K(\frac{5}{2};\frac{3}{2})\ ]$$

9. Dati i punti A(0;4) B(2;6) C(5;5) D(1;1) determina:

   a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, C e D, D e A;
   b) verifica che ABCD è un trapezio isoscele e determina perimetro e area.

$$[\ y=x+4;\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{20}{3};\ y=x;\ y=-3x+4; 2p=2\sqrt{10}+6\sqrt{2}; A=12]$$

10. Dati i punti A(0;3) B(2;7) C(6;5) D(4;1)

   a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, C e D, D e A;
   b) verifica che ABCD è un quadrato e calcolane perimetro e area;
   c) determina le coordinate del centro di simmetria O del quadrato ABCD.

$$[\ y=2x+3;\ y=-\frac{1}{2}x+8;\ y=2x-7;\ y=-\frac{1}{2}x+3; 2p=8\sqrt{5}; A=20; O(3;4)]$$

11. Dati i punti A(-2;3) B(1;6) C(4;0)

   a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;
   b) determina le coordinate del baricentro G, dell'ortocentro H e del circocentro K del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ e verifica che sono allineati.

$$[\ y=x+5;\ y=-2x+8;\ y=-\frac{1}{2}x+2 \quad G(1;3)\ \ \mathrm{H}(0;4)\ \ K(\frac{3}{2};\frac{5}{2})\ ]$$

12. Date le rette di equazione
   $r: y=3x-1$
   $s: x+3y-17=0$
   $t: x-y-1=0$
   a) determina le coordinate dei punti di intersezione $A(r,s)$ $B(s,t)$ $C(r,t)$;

   b) verifica che $\overset{\Delta}{ABC}$ è un triangolo rettangolo;

   c) determina il perimetro e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

[A(2;5) B(5;4) C(0;-1) $2p=3\sqrt{10}+5\sqrt{2}; A=10$]

13. Calcola l'area del triangolo di vertici A(3;2) B(10;3) C(6;7). [A=16]

14. Calcola l'area del triangolo di vertici A(1;-2) B(3;-4) C(-1;3). [A=3]

15. Calcola l'area del triangolo di vertici A(-3;1) B(-2;-5) C(4;-1) [A=20]

16. Calcola la distanza d tra le rette di equazione y=2x e y=2x +3. [$d = \frac{3}{\sqrt{5}}$]

17. Calcola la distanza d tra le rette di equazione x-y+1=0 e x-y-4=0. [d=$\frac{5}{\sqrt{2}}$]

18. Calcola la distanza d tra le rette di equazione 2x+y=0 e 2x+y-3=0. [$d = \frac{3}{\sqrt{5}}$]

19. a) Considera i punti A(-4;1) B(1;6) C(4;-3) . Determina le equazioni delle rette r_{AB} (retta passante per i punti A e B), r_{AC} (retta passante per i punti A e C) e r_{BC} (retta passante per i punti B e C).

    b) Determina perimetro e area del triangolo ABC.

    c) Determina le coordinate dell'ortocentro H.

    d) Determina le coordinate del circocentro K.

    e) Determina le coordinate del baricentro G e verifica che H, K e G sono allineati.

    [$r_{AB} : y = x + 5; r_{BC} : y = -3x + 9; r_{AC} : x + 2y + 2 = 0$
    $2p = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{10} + 4\sqrt{5}; A = 30; H(-1;2); K(1;1); G(\frac{1}{3};\frac{4}{3})$]

20. a) Considera le rette $r_1 ; x + 2y - 12 = 0$ $r_2 : 2x + y - 12 = 0$ e $r_3 : y = -\frac{1}{2}x + 3$. Disegnale e determina le coordinate di $A(r_1, asse y)$ $B(r_1, r_2)$ e $C(r_2, r_3)$.

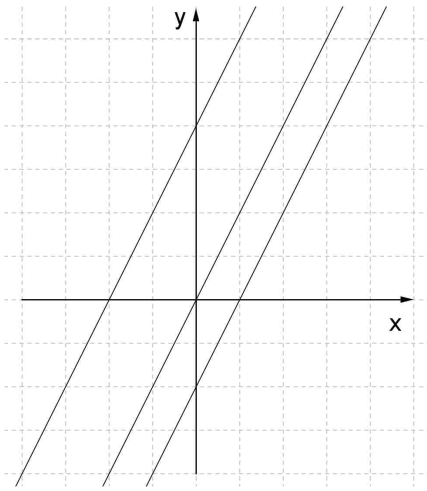
    b) Determina l'equazione della retta r_4 parallela alla retta r_2 e passante per A e indica con D l'intersezione tra r_3 e r_4. Come risulta il quadrilatero ABCD ?

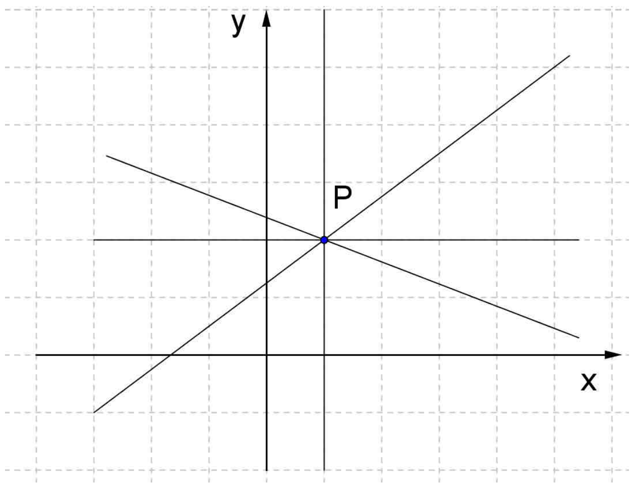
    c) Determina perimetro e area di ABCD.

    [A(0;6) B(4;4) C(6;0) $r_4 : y = -2x + 6$; D(2;2) ABCD è un rombo; $2p = 8\sqrt{5}$ Area=12]

Fasci di rette

Per fascio di rette si intende o l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data oppure l'insieme di tutte le rette passanti per un punto dato.





Per esempio, per indicare il fascio di rette parallele alla retta $y = 2x$ scriverò:

$y = 2x + k$ (k è detto parametro)

Al variare di k (che rappresenta in questo caso l'ordinata all'origine) ottengo tutte le rette del fascio.

Per indicare, per esempio, il fascio di rette passanti per il punto P(1;2) scriverò:

$$y - 2 = k(x - 1) \quad \cup \quad x = 1$$

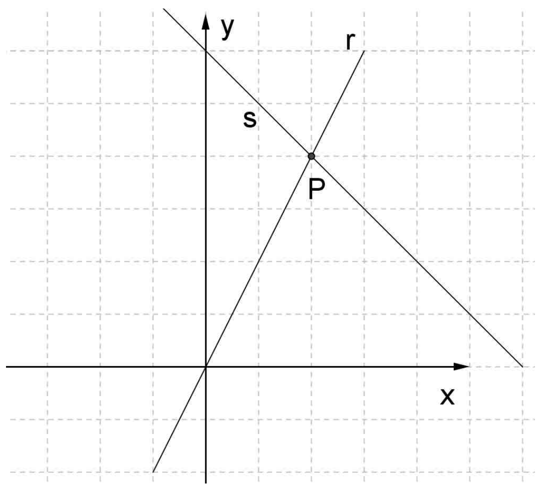
In questo caso k rappresenta il coefficiente angolare. La retta $x = 1$ deve essere indicata a parte poiché non si ottiene per nessun valore di k.

Fascio individuato da due rette "generatrici"

a) Consideriamo le due rette in figura

$r: y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$

$s: y = -x + 6 \Rightarrow x + y - 6 = 0$.



Per indicare il fascio di rette "**generato**" da r e s , cioè l'insieme delle rette passanti per il loro punto di intersezione P(2;4) posso scrivere così:

$$k(2x - y) + x + y - 6 = 0$$

Infatti si tratta, al variare di k, dell'equazione di una retta passante per P(2;4) poiché sostituendo x=2 y=4 si annulla sia $2x - y$ che $x + y - 6 = 0$.

Le rette r e s si chiamano "**generatrici" del fascio**.

Si osserva facilmente che se k=0 si ottiene $x + y - 6 = 0$ cioè la retta s, ma per quale valore di k otteniamo la retta r?
Proviamo per esempio ad assegnare a k il valore 1: $2x - y + x + y - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

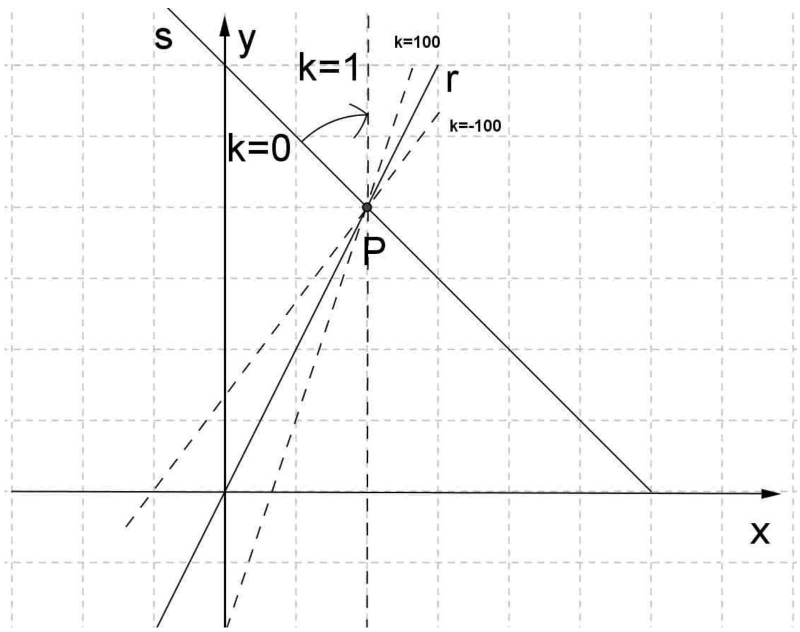
Osserviamo che se assegniamo a k un valore grande in valore assoluto, per esempio k=100 o k=-100, troviamo delle rette molto vicine a r poiché è come se il termine $(x + y - 6)$ diventasse trascurabile. Per esempio:

k=100 $\Rightarrow 201x - 99y - 6 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{201}{99}x + \dfrac{6}{99}$

k=-100 $\Rightarrow -199x + 101y - 6 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{199}{101}x + \dfrac{6}{101}$

Si stabilisce quindi di associare a r il valore "infinito" (∞) di k.

Quindi
$$k = \infty \Rightarrow 2x - y = 0$$
$$k = 0 \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

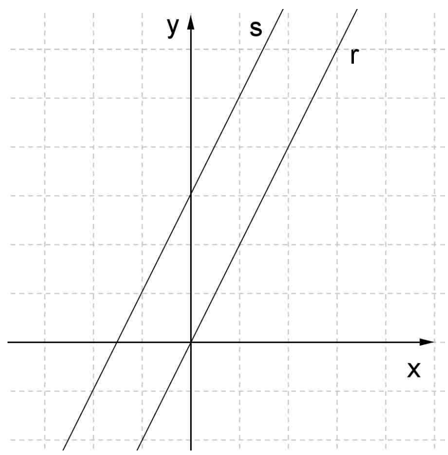


Osserviamo infine che i valori di k, nel nostro esempio, aumentano quando si ruota in senso orario: se infatti vogliamo andare dalla retta corrispondente a k=0 a quella corrispondente a k=1, senza toccare la retta $k=\infty$, dobbiamo ruotare in senso orario: quindi partendo da r e ruotando in senso orario si hanno valori da $-\infty$ a $+\infty$.

b) Consideriamo le due rette in figura:

$r: y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$

$s: y = 2x + 3 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$



Se considero l'equazione:

$$k(2x - y) + 2x - y + 3 = 0 \qquad \Rightarrow 2(k+1)x - (k+1)y + 3 = 0$$

al variare di k (con $k \neq -1$) ottengo rette parallele ad r e s.
Si tratta quindi di un fascio di rette parallele (m=2) in cui

$$k = 0 \Rightarrow s$$

$$k = \infty \Rightarrow r$$

r e s sono le "generatrici" del fascio.

Problema

Considera il fascio $k(2x-y)+x+y-6=0$.

a) Determina per quale valore di k si ottiene la retta parallela all'asse x e per quale valore di k si ottiene la retta parallela all'asse y.
Se sviluppiamo l'equazione data del fascio otteniamo $(2k+1)x+(1-k)y-6=0$.
Quindi avremo
una retta parallela all'asse x se $2k+1=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$
una retta parallela all'asse y se $1-k=0 \Rightarrow k=1$

b) Determina per quale valore di k si ottiene la retta passante per P(4;5).
Basterà sostituire le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$k(2\cdot 4-5)+4+5-6=0 \Rightarrow 3k+3=0 \Rightarrow k=-1$$

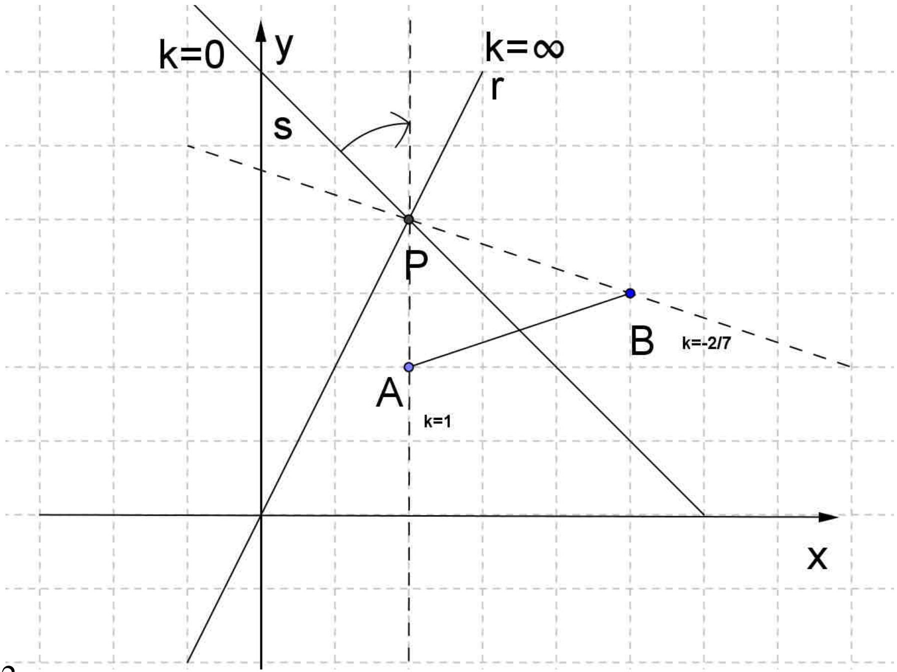
c) Determina per quale valore di k si ottiene una retta parallela alla bisettrice del I-III quadrante.
Poiché il coefficiente angolare delle rette del fascio risulta $m=\frac{2k+1}{k-1}$ dovrà essere

$$\frac{2k+1}{k-1}=1 \Rightarrow 2k+1=k-1 \Rightarrow k=-2$$

d) Determina per quali valori di k si ottengono rette che intersecano il segmento AB in figura in cui si ha A(2;2) e B(5;3).

$$k_A : k(2\cdot 2-2)+2+2-6=0 \Rightarrow 2k=2 \Rightarrow k=1$$

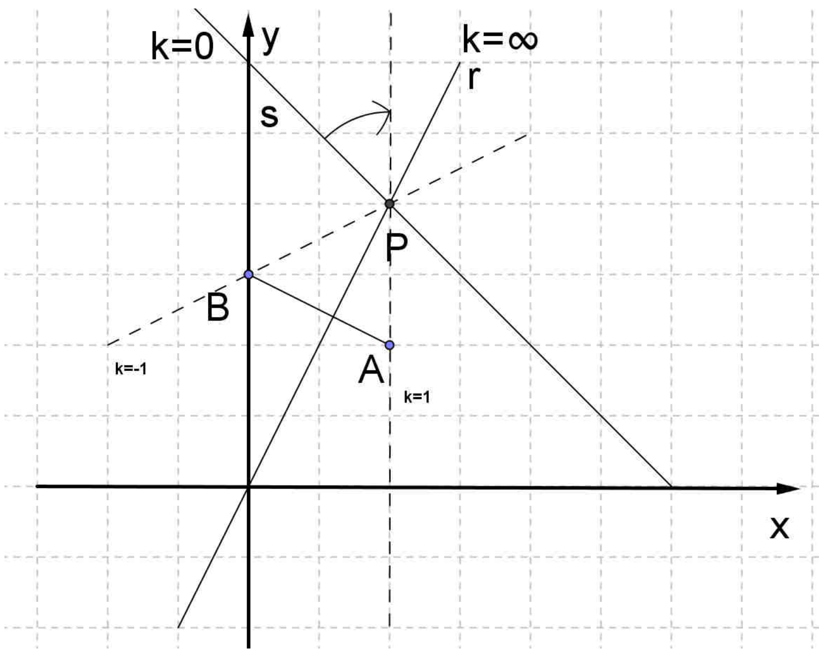
$$k_B : k(2\cdot 5-3)+5+3-6=0 \Rightarrow 7k=-2 \Rightarrow k=-\frac{2}{7}$$



Quindi se $-\frac{2}{7} \leq k \leq 1$ le rette intersecano il segmento.

Nota: se **il segmento AB interseca la retta generatrice corrispondente a** $k=\infty$ occorre fare attenzione. Consideriamo per esempio A(2;2) ma B(0;3):

$k_B : k(-3)+3-6=0 \Rightarrow -3k=3 \Rightarrow k=-1$



Le rette che intersecano il segmento AB si avranno, in questo caso, per $k \leq -1 \cup k \geq 1$ (osserva come aumentano i valori di k).

Problemi sui fasci di rette

1. Scrivi come risultano i fasci di rette aventi le seguenti equazioni:

   a) $y = x + k$;

   b) $y = -\frac{1}{2}x + k$;

   c) $y = mx + 2$;

   d) $y - 3 = m(x - 1)$

2. Considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(-4;1) B(-3;-1) C(-1;3). Nel fascio di rette parallele alla retta per B e C determina quella che stacca su ABC un triangolo AB'C' tale che $area(\overset{\Delta}{AB'C'}) = \frac{1}{4}area(\overset{\Delta}{ABC})$.

   [y=2x+7]

3. Per quali valori di k le rette di equazione y=2x+k intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ dell'esercizio precedente?

   [$5 \le k \le 9$]

4. Considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(-2;0) B(1;9) C(7;7). Determina perimetro e area. Calcola le coordinate del baricentro G, dell'ortocentro H e del circocentro K. Determina l'equazione della retta parallela alla retta per B e C che stacca un triangolo AB'C' tale che $area(\overset{\Delta}{AB'C'}) = \frac{1}{4}area(\overset{\Delta}{ABC})$.

   [$2p = 5\sqrt{10} + \sqrt{130}; A = 30; G(2;\frac{16}{3}); H(1;9); K(\frac{5}{2};\frac{7}{2}); y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$]

5. Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(1;3) B(3;7) C(7;-1) determina per quali valori di k le rette del fascio $y = \frac{1}{2}x + k$ intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

   [$-\frac{9}{2} \le k \le \frac{11}{2}$]

6. Considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ dell'esercizio precedente: per quale valore di k la retta del fascio $y = -2x + k$ stacca un triangolo $\overset{\Delta}{AB'C'}$ di area 4?

[k=9]

7. Studia i seguenti fasci di rette ,disegna le rette generatrici ed indica con C l'eventuale centro del fascio:

a) $(k-1)x + ky + k + 3 = 0$ [C(3;-4)]

b) $(k+1)x - (k-1)y - k - 3 = 0$ [C(2;1)]

c) $2kx - (k+3)y - k - 1 = 0$ [$C(\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$]

d) $(2k-1)x + ky + 3 = 0$ [C(3;-6)]

e) $(1+k)x + (2-k)y - 4 - k = 0$ [C(2;1)]

f) $(1-k)x + (1+k)y - 2(k+2) = 0$ [C(1;3)]

g) $(1+k)x - (1+k)y + 2 = 0$ [rette parallele con m=1]

8. Studia il fascio di rette di equazione

$$(2k-1)x + ky - 5 = 0$$

e determina:

a) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse x;

b) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse y;

c) il valore di k per cui si ha una retta parallela alla retta di equazione y=x;

d) i valori di k per cui le rette del fascio intersecano il segmento AB con A(1;0) e B(3;2).

[$C(-5,10); k = \frac{1}{2}; k = 0; k = \frac{1}{3}; 1 \le k \le 3$]

9. Studia il fascio di rette di equazione $(2+k)x+(k-1)y+3-k=0$ e determina:

a) il valore di k per cui si ha una retta parallela alla retta di equazione y=-x;

b) i valori di k per cui le rette del fascio intersecano il segmento AB con A(0;0) B(2;0);

c) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse x;

d) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse y.

$[C(-\frac{2}{3};\frac{5}{3}); k=\infty; k \le -7 \cup k \ge 3; k=-2; k=1]$

10. Studia il fascio di rette di equazione $k(x-2y+8)+3x+y+3=0$ e determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ dove A(1;1) B(3;-2) e C(-1;-5).

[C(-2;3); $-1 \le k \le \frac{5}{17}$]

11. Studia il fascio di rette di equazione $(x-2y)+k(2x+y+1)=0$ e determina:

a) per quali valori di k le rette del fascio intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(0;0) B(2;2) C(4;-1);

b) per quale valore di k si ha una retta perpendicolare alla retta di equazione y=x.

$[C(-\frac{2}{5};-\frac{1}{5}); -\frac{3}{4} \le k \le \frac{2}{7}; k=-3]$

12. Studia $F: k(x-2y+2)+3x+y-8=0$ e determina:

a) per quali valori di k le rette del fascio intersecano il segmento AB con A(4;4) e B(6;2);

b)per quale valore di k si ha una retta parallela alla retta di equazione $y=-2x$.

[C(2;2) ; $k \le -3 \cup k \ge 4; k=-\frac{1}{5}$]

13. a) Studia il fascio di rette di equazione $F: \ k(y-3)+3x-2y+6=0$.

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano il segmento AB con $A(3;4), \quad B(3;2)$.

c) Determina per quali valori di k si ottiene una retta parallela all'asse x, all'asse y .

d) Determina per quali valori di k si ottengono rette che staccano sugli assi coordinati segmenti di uguale lunghezza.

$$\left[C(0;3); \quad k \le -7 \cup k \ge 11; \quad k=\infty; \quad k=2; \quad k=-1 \cup k=5\right]$$

14. a) Studia il fascio di rette di equazione $F: \ k(x-3)+x-2y+7=0$.

b) Determina per quale valore di k si ha la retta del fascio parallela alla retta $2x+y=0$.

c) Determina per quali valori di k si hanno le rette del fascio parallele all'asse x e all'asse y.

d) Per quale valore di k si ottiene la retta passante per l'origine?

e) Per quali valori di k si ottengono rette che intersecano il segmento OA con $O(0;0); \quad A(6;0)$?

f) Per quali valori di k si ottiene una retta del fascio che individua, detto P il suo punto di intersezione con l'asse x , un triangolo OCP (C centro del fascio) di area 10?

$$\left[C(3;5); \quad k=-5; \quad k=-1, \quad k=\infty; \quad k=\frac{7}{3}; \quad k \le -\frac{13}{3} \cup k \ge \frac{7}{3}; \quad k=\frac{3}{7} \cup k=-11\right]$$

15. a) Studia il fascio di rette di equazione $F: \ k(x+y)+x+y-2=0$.

b) Determina per quali valori di k si ottengono rette del fascio che hanno distanza $2\cdot\sqrt{2}$ dall'origine.

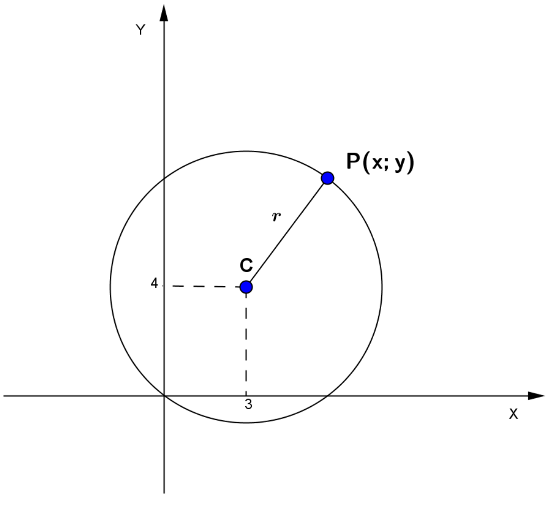
c) Determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano il semiasse positivo delle y.

[fascio di rette parallele con $m=-1$; $k_1=-\frac{1}{2}, \quad k_2=-\frac{3}{2}; \quad k>-1$]

La circonferenza nel piano cartesiano

Abbiamo già studiato la circonferenza di raggio *r* e centro C come l'insieme di punti per i quali la distanza da C è uguale a *r* : ora vogliamo studiare la circonferenza nel piano cartesiano.

Consideriamo la circonferenza in figura in cui il centro è $C(3;4)$ e il raggio $r = 5$: se indichiamo con $P(x; y)$ un punto della circonferenza avremo, per definizione, che la distanza tra P e C è uguale a 5.



Per scrivere l'equazione che rappresenta questa circonferenza basterà scrivere la proprietà di tutti i suoi punti cioè $\overline{PC} = 5$

Avremo $$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 5$$

ed elevando al quadrato entrambi i membri avremo:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

In generale l'equazione di una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(x_C; y_C)$ e raggio r sarà quindi

$$\boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2}$$

Sviluppando otteniamo

$$x^2-2x_C x+x_C{}^2+y^2-2y_C y+y_C{}^2-r^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x_C x-2y_C y+x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=0$$

Si pone
$$\begin{cases} -2x_C=a \rightarrow x_C=-\dfrac{a}{2} \\ -2y_C=b \rightarrow y_C=-\dfrac{b}{2} \\ x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=c \rightarrow r=\sqrt{x_C{}^2+y_C{}^2-c} \end{cases}$$

Quindi abbiamo $\quad x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \begin{cases} C\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2}\right) \\ r=\sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{b}{2}\right)^2-c} \end{cases}$

Osservazioni

Abbiamo visto che l'equazione di una circonferenza è molto diversa da quella di una retta: è un'equazione di 2° grado in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali (se sono diversi da 1 si può dividere tutta l'equazione per il valore del coefficiente di x^2 e y^2) e in cui manca il termine *xy*.Inoltre, per avere una circonferenza "reale", dovrà essere

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c\geq 0 \qquad \text{(ricorda che } r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}\ \text{)}$$

Se r = 0 la circonferenza "degenera" in un solo punto.

Esempi

1) $x^2+y^2=1$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e $r = 1$.
   In generale $x^2+y^2=r^2$ e l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e raggio r.

2) $2x^2+2y^2-4x+2y=0 \rightarrow x^2+y^2-2x+y=0$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(1;-\frac{1}{2})$ e raggio $r=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3) $x^2+y^2+4=0$ non rappresenta una circonferenza reale perché $r=\sqrt{-4}\notin\Re$.

4) $x^2+y^2+ax+by=0$ è l'equazione di una circonferenza passante per l'origine (c = 0).

Problemi

1) Determina l'equazione della circonferenza avente **centro C assegnato** e **passante per un punto A assegnato**.

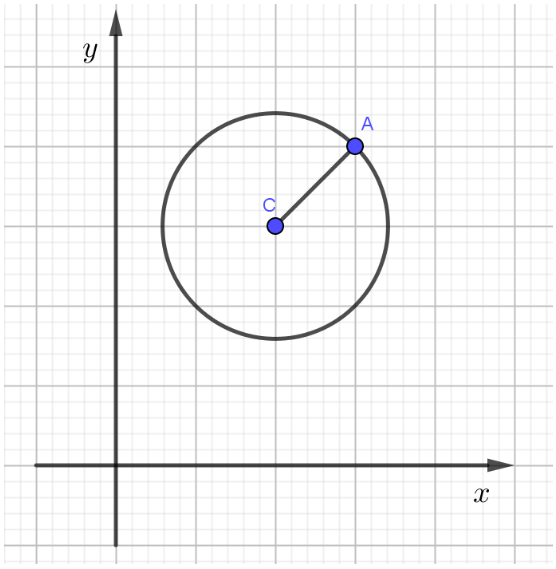
E' chiaro che basterà calcolare raggio = $\overline{AC}$.

Esempio: determina l'equazione della circonferenza avente centro $C(2;3)$ e passante per il punto $A(3;4)$.

Abbiamo $\overline{CA} = \sqrt{2}$.

Quindi l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$



2) **Determina l'equazione della circonferenza C passante per tre punti A,B,C non allineati** (è come cercare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$).

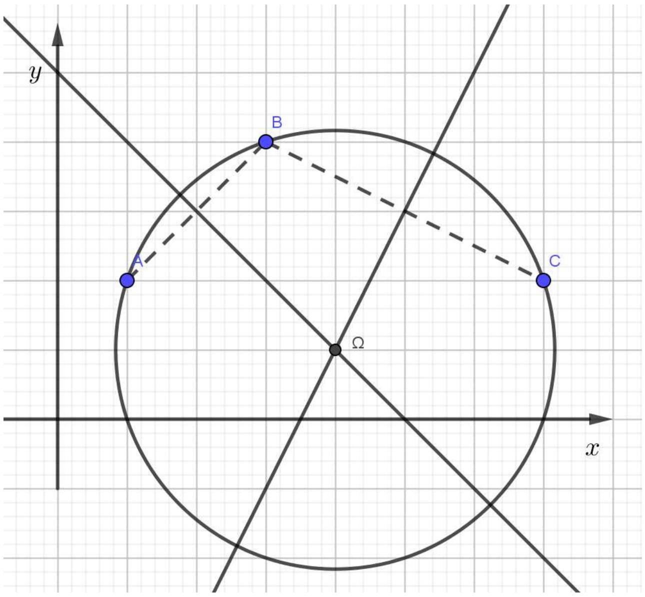
Il centro della circonferenza si può trovare intersecando l'asse del segmento AB con l'asse del segmento BC: così facendo, infatti, troviamo un punto che è equidistante da A,B,C e quindi è il centro della circonferenza.
Per trovare il raggio basta calcolare la distanza del centro trovato da uno qualsiasi dei tre punti.

Esempio: determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(7;2)$.

- Determiniamo l'asse di AB: il punto medio ha coordinate $(2;3)$e l'inclinazione dell'asse è $m = -1$ e quindi abbiamo
  $y - 3 = -(x-2) \rightarrow y = -x + 5$
- Determiniamo l'asse di BC: il punto medio ha coordinate $(5;3)$ e l'inclinazione è $m = 2$ e quindi abbiamo
  $y - 3 = 2(x-5) \rightarrow y = 2x - 7$

Intersechiamo i due assi indicando con Ω il centro della circonferenza (non possiamo usare la lettera C perché faremo confusione con il punto C assegnato).

$$\Omega\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \rightarrow \ldots\ldots \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$



A questo punto determiniamo il raggio calcolando , per esempio, la distanza $\overline{A\Omega} = \sqrt{10}$ e in conclusione l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Naturalmente possiamo anche sviluppare i calcoli:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

NOTA

Questo problema può essere risolto anche sostituendo le coordinate dei tre punti nell'equazione generale $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e risolvendo il sistema.

$$\begin{matrix} A(x_A, y_A) \rightarrow \\ B(x_B, y_B) \rightarrow \\ C(x_C, y_C) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x_A^{\ 2} + y_A^{\ 2} + ax_A + by_A + c = 0 \\ x_B^{\ 2} + y_B^{\ 2} + ax_B + by_B + c = 0 \\ x_C^{\ 2} + y_C^{\ 2} + ax_C + by_C + c = 0 \end{cases}$$

Le incognite sono *a,b,c*.

I calcoli sono in genere più faticosi e quindi **è preferibile il primo metodo**.

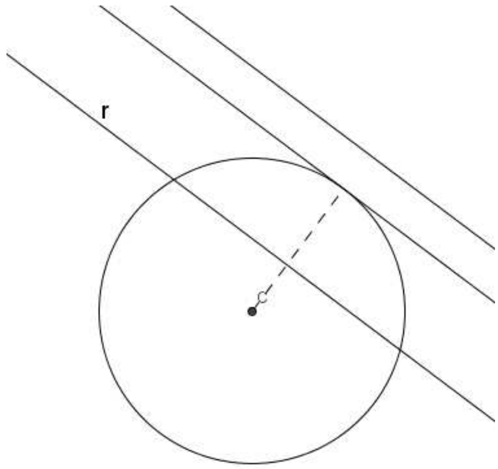
Retta e circonferenza

Una retta r può essere esterna, tangente o secante ad una circonferenza $\mathcal{C}$.

La retta è esterna quando $d(C,r) > raggio$

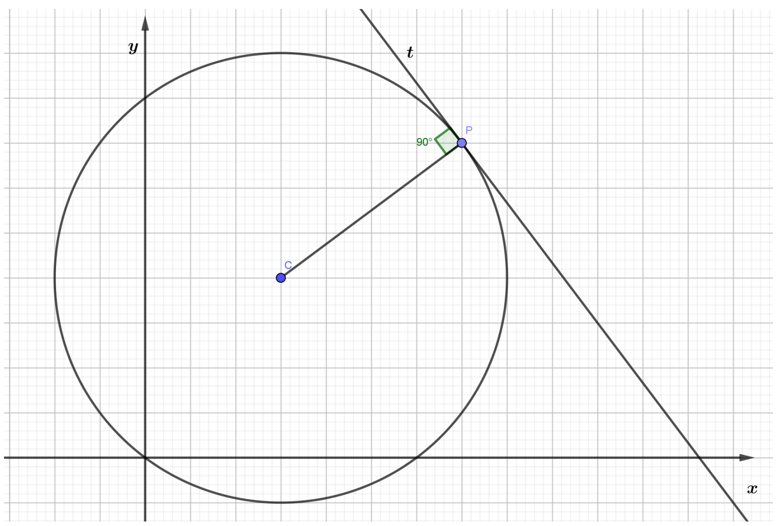
La retta è tangente quando $d(C,r) = raggio$

La retta è secante quando $d(C,r) < raggio$



Rette tangenti ad una circonferenza

1) Risolviamo il seguente problema: data la circonferenza $\mathcal{C}$ in figura e considerato il suo punto $P(7;7)$ **determinare la retta t tangente in P alla circonferenza $\mathcal{C}$.**

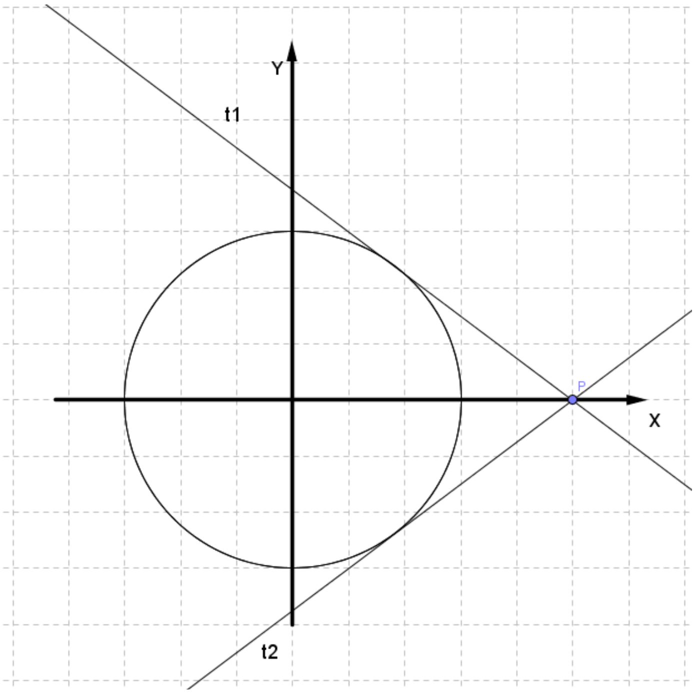


Possiamo, nel fascio di rette passanti per P, individuare quella la cui distanza da C è uguale a 5 (raggio di $\mathcal{C}$), ma c'è un procedimento più veloce.

Basta infatti osservare **che la retta *t* risulterà perpendicolare al raggio CP** e quindi:

$$m_{CP} = \frac{3}{4} \rightarrow m_t = -\frac{4}{3} \rightarrow t: y - 7 = -\frac{4}{3}(x - 7)$$

2) Risolviamo adesso il seguente problema: data la circonferenza $\mathcal{C}$ in figura e considerato il punto P(5;0), **determinare le rette t_1 e t_2 tangenti alla circonferenza uscenti da P.**



$\mathcal{C}: x^2+y^2=9$

P(5,0)

Consideriamo la generica retta passante per P

$$y = m(x-5) \rightarrow mx - y - 5m = 0$$

Dobbiamo cercare le rette che hanno distanza 3 (raggio=3) dal centro di $\mathcal{C}$ (0,0) e quindi

$$\frac{|-5m|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \rightarrow |-5m| = 3\sqrt{m^2+1}$$

Elevando al quadrato:

$$25m^2 = 9(m^2+1)$$

$$16m^2 = 9 \rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \rightarrow m = \pm\frac{3}{4}$$

Quindi

$$t_1 : \quad y = -\frac{3}{4}(x-5)$$

$$t_2 : \quad y = \frac{3}{4}(x-5)$$

La condizione di tangenza

Questo problema poteva essere risolto anche in un altro modo.

Ricordiamo che se intersechiamo una retta con una circonferenza possiamo avere:

nessun punto di intersezione — se r è esterna a $\mathcal{C}$

1 solo punto di intersezione (o meglio due punti coincidenti) — se r è tangente a $\mathcal{C}$

2 punti di intersezione — se r è secante a $\mathcal{C}$

Algebricamente questo significa che risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione circonferenza C} \\ \text{equazione retta r} \end{cases}$$

troveremo un'equazione di 2° grado il cui Δ sarà:

$\Delta < 0$ se r è esterna a $\mathcal{C}$

$\Delta = 0$ se **r è tangente a** $\mathcal{C}$: questa viene detta "**condizione di tangenza**"

$\Delta > 0$ se r è secante a $\mathcal{C}$

Quindi il problema poteva essere risolto impostando il sistema tra la circonferenza e la generica retta passante per P e poi imponendo che il discriminante dell'equazione che si ottiene dopo aver sostituito sia nullo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \rightarrow x^2 + m^2(x^2 - 10x + 25) = 9 \rightarrow (1+m^2)x^2 - 10m^2x + 25m^2 - 9 = 0 \\ y = m(x-5) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\Delta}{4} = 25m^4 - (1+m^2)(25m^2 - 9) = 0}$$

Svolgendo i calcoli abbiamo:

$$25m^4 - 25m^2 + 9 - 25m^4 + 9m^2 = 0 \rightarrow 16m^2 = 9 \rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \rightarrow m = \pm\frac{3}{4}$$

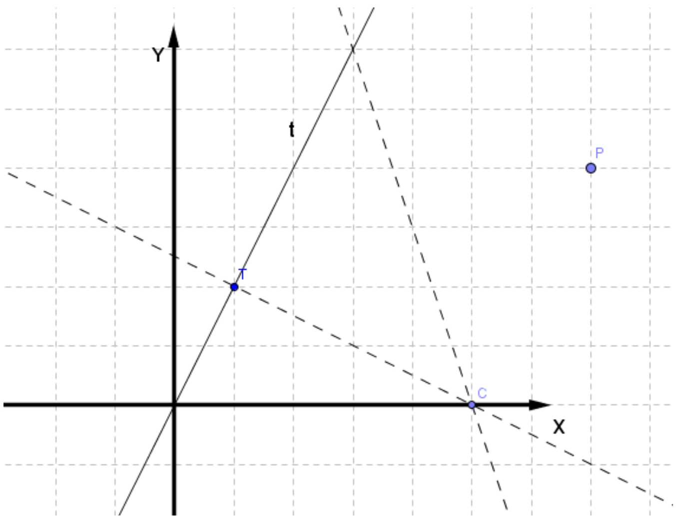
Altri problemi sulla circonferenza

1) Determina la circonferenza **avente centro C assegnato e tangente ad una retta t assegnata**.
Per esempio: C(1;3) t: y=-x ($\rightarrow$x+y=0).
Basterà calcolare raggio = distanza (centro, tangente)

Nel nostro caso $r = \frac{|1+3|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$$\mathcal{C}\ :\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$$

2) Determina l' equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ **tangente in un punto T ad una retta assegnata t e passante per un punto P assegnato**.
Per esempio: t: y=2x T(1;2) P(7;4)



Possiamo individuare il centro C della circonferenza intersecando l' asse del segmento TP con la retta per T perpendicolare a t

$$\begin{cases} asse_{TP} : y-3 = -3(x-4) & \Rightarrow y = -3x+15 \\ perp.\cdot per \cdot T \cdot a \cdot t : y-2 = -\frac{1}{2}(x-1) & \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow C(5;0)$$

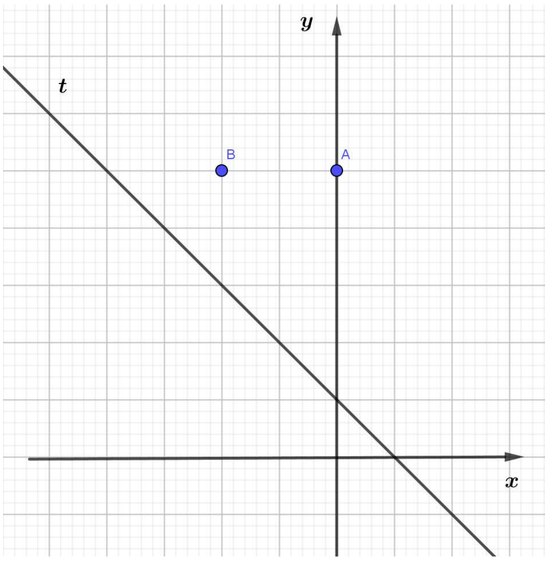
Naturalmente $r = \overline{TC} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$$\mathcal{C}\ :\ (x-5)^2 + y^2 = 20$$

(*) Questo problema si può risolvere anche considerando l'equazione generale $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e imponendo il passaggio per T, per P e la condizione di tangenza a t (si ottiene un sistema di 3 equazioni nelle incognite *a,b,c*).

3) Determina l'equazione della circonferenza C **tangente ad una retta t assegnata e passante per due punti A e B assegnati**.

Per esempio t: $y=-x+1$ e A(0;5) B(-2;5).



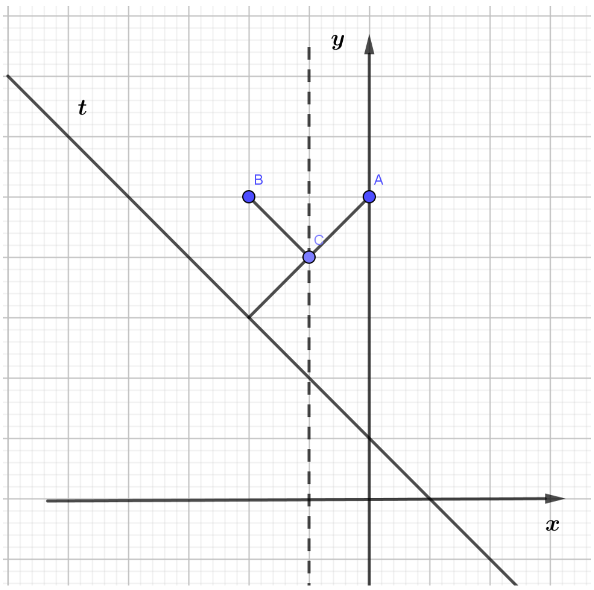
Se la circonferenza deve passare per A e B il suo centro dovrà appartenere all'asse del segmento AB che risulta la retta di equazione $x=-1$.

Quindi possiamo dire che il centro dovrà essere del tipo

$$C(-1;y)$$

Ma perché la circonferenza sia tangente alla retta t **la distanza di C da t dovrà essere uguale al raggio** $\overline{CA}$ (o $\overline{CB}$).

Dopo aver scritto l'equazione della tangente in forma implicita $x+y-1=0$, possiamo impostare questa uguaglianza:



$$d(C,t)=\overline{CA}$$

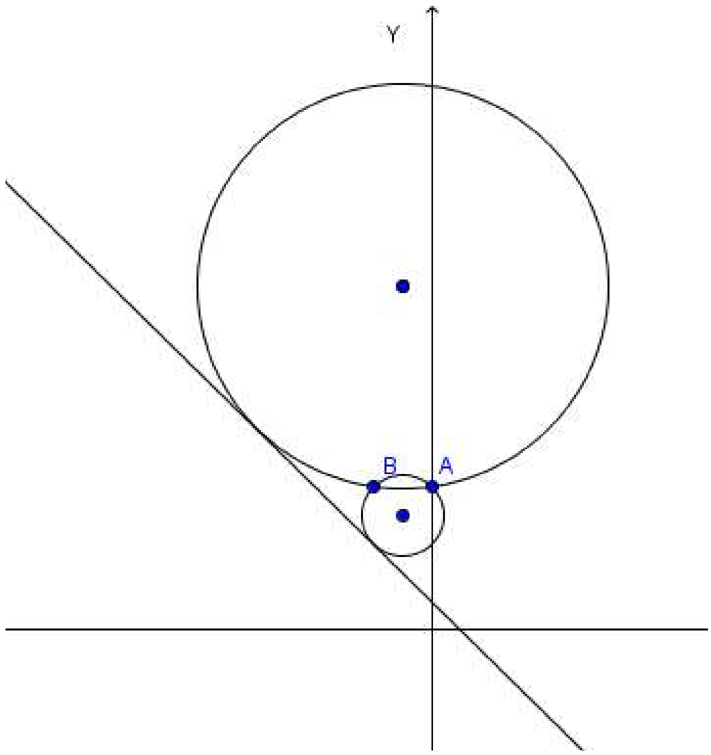
$$\frac{|-1+y-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{1+(y-5)^2} \rightarrow \frac{|y-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{y^2-10y+26}$$

$$\frac{(y-2)^2}{2}=y^2-10y+26.....$$

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione:

$$y^2-16y+48=0 \rightarrow y_{1,2}=8\pm 4$$

In conclusione abbiamo due centri $C_1(-1;4)$, $C_2(-1;12)$ e quindi **due circonferenze** che risultano tangenti a *t* e passanti per A e B.



Nota: questo problema poteva anche essere in modo "algebrico" nel seguente modo: consideriamo l'equazione generale di una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e imponiamo il passaggio per i punti A e B e la condizione di tangenza.

$$\begin{array}{l} passaggio \cdot per \cdot A \rightarrow \\ passaggio \cdot per \cdot B \rightarrow \\ (*) cond.\tan genza \rightarrow \end{array} \begin{cases} 25 + 5b + c = 0 \\ 4 + 25 - 2a + 5b + c = 0 \\ \Delta = (a - b - 2)^2 - 8(1 + b + c) = 0 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \begin{cases} x^2 + (1 - x)^2 + ax + b(1 - x) + c = 0 \rightarrow 2x^2 + (a - b - 2)x + 1 + b + c = 0 \\ .... \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo **due terne di soluzioni** (a, b, c) cioè due circonferenze che soddisfano le condizioni richieste.

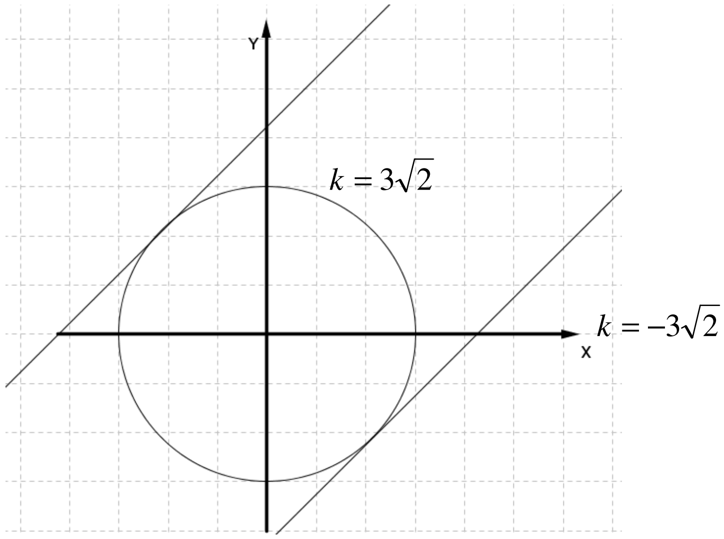
In particolare in questo caso abbiamo

$(2;-8;15) \rightarrow C_1(-1;4)$ e $(2;-24;95) \rightarrow C_2(-1;12)$.

Circonferenza e fascio di rette

Esempio 1

a) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}:\ y = x + k$ intersecano la circonferenza $\mathcal{C}:\ x^2 + y^2 = 9$.



Si tratta di un fascio di rette parallele aventi $m = 1$.

Per determinare le rette del fascio che intersecano la circonferenza basterà determinare le rette del fascio che sono tangenti alla circonferenza , cioè le rette del fascio che hanno distanza dal centro (0;0) uguale al raggio della circonferenza cioè uguale a 3.

Per prima cosa dobbiamo scrivere l'equazione delle rette del fascio in forma implicita:

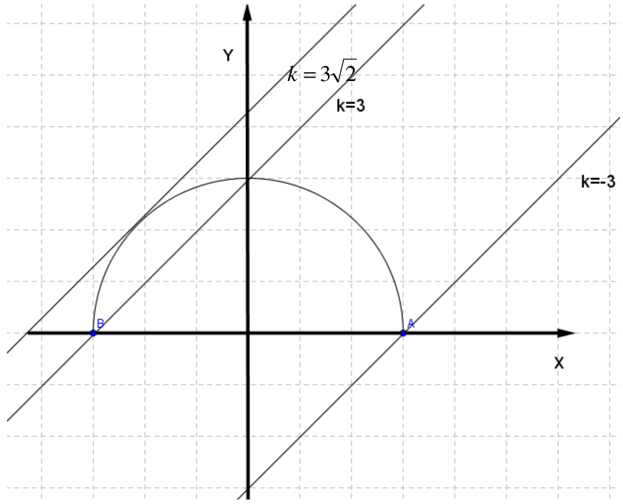
$$\mathcal{F}:\ x - y + k = 0$$

Calcoliamo la distanza tra la generica retta del fascio e il centro della circonferenza $C(0;0)$ e poniamo questa distanza uguale a 3:

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow k = \pm 3\sqrt{2}$$

Quindi quando $-3\sqrt{2} \le k \le 3\sqrt{2}$ le rette del fascio intersecano $\mathcal{C}$.

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio precedente intersecano la semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$ situata nel 1° e 2° quadrante ($y \geq 0$) e **in quanti punti**.



In questo caso occorre determinare il valore di k delle rette del fascio passanti per A e B.

k_A $A(0;3)$ $\qquad 0 = 3 + k \rightarrow k = -3$

k_B $B(-3;0)$ $\qquad 0 = -3 + k \rightarrow k = 3$

Quindi:

per $-3 \leq k < 3$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 1 solo punto;

per $3 \leq k \leq 3\sqrt{2}$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 2 punti (il punto di tangenza viene contato due volte).

Nota: il problema poteva essere proposto anche come soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1 soluzione per $-3 \leq k < 3$

2 soluzioni per $3 \leq k \leq 3\sqrt{2}$

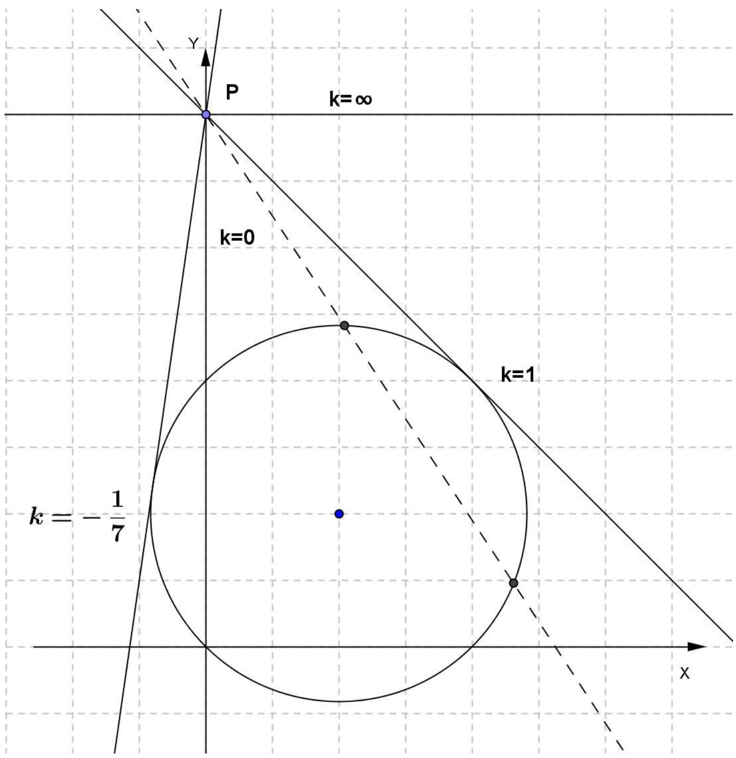
Esempio 2

a) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}: x + ky - 8k = 0$ intersecano la circonferenza $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$.

Studiando il fascio si trova che si tratta di un fascio di rette passanti per P(0;8) e che le generatrici sono le rette : $\begin{array}{l} k = 0 \rightarrow x = 0 \\ k = \infty \rightarrow y = 8 \end{array}$

Determiniamo i valori di k corrispondenti alle rette tangenti: applicando la formula della distanza dal centro C(2;2) della circonferenza e ponendola uguale a $2\sqrt{2}$ (raggio) otteniamo i valori $k_1 = 1$ e $k_2 = -\frac{1}{7}$.

Quindi quando $-\frac{1}{7} \le k \le 1$ le rette del fascio intersecano la circonferenza (in due punti).



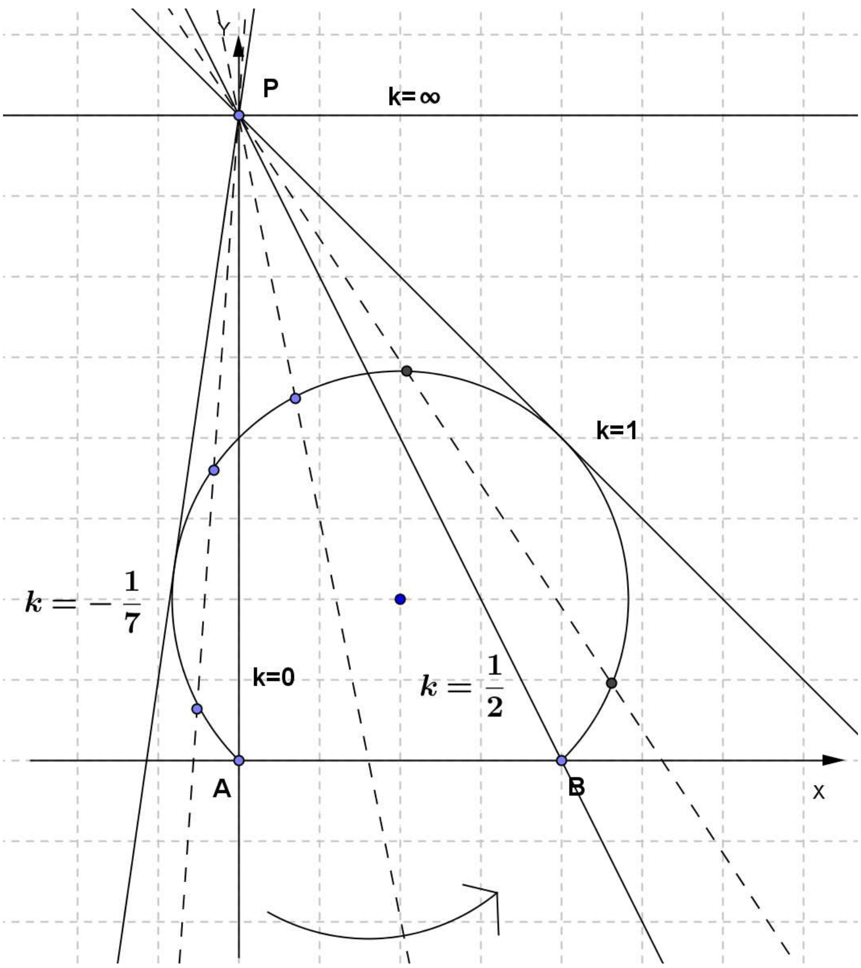
b) Determina per quali valori di k le rette del fascio precedente intersecano la semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$ situata nel 1° e 2° quadrante ($y \geq 0$) e in quanti punti.

Sostituendo le coordinate di A(0;0) troviamo il valore $k_A = 0$ della retta per A e sostituendo quelle di B(4;0) troviamo il valore $k_B = \frac{1}{2}$ della retta del fascio passante per B.

Quindi:

per $-\frac{1}{7} \leq k \leq 0 \cup \frac{1}{2} \leq k \leq 1$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 2 punti;

per $0 < k < \frac{1}{2}$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 1 punto.



ESERCIZI

1) Disegna le circonferenze aventi le seguenti equazioni:

a) $x^2+y^2=4$

b) $x^2+y^2-2x-2y=0$

c) $x^2+y^2-4y+3=0$

d) $3x^2+3y^2-6x=0$

e) $x^2+y^2+1=0$

f) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

2) Determina l'equazione della circonferenza sapendo che:

a) ha centro C(1;1) e passa per P(3;2); $[(x-1)^2+(y-1)^2=5]$

b) passa per (0;0) , A(4;2) B(2;2) ; $[(x-3)^2+(y+1)^2=10]$

c) passa per (0;0) A(-2;4) B(6;0) ; $[(x-3)^2+(y-4)^2=25]$

d) passa per A(1;-1) B(1;3) C(-3;3) ; $[(x+1)^2+(y-1)^2=8]$

e) passante per O(0;0) e A(4;0) e avente il centro appartenente alla retta di equazione $y=\frac{1}{2}x+1$; $[(x-2)^2+(y-2)^2=8]$

f) ha centro C(0;0) ed è tangente alla retta t: y=-x+3; $\left[x^2+y^2=\frac{9}{2}\right]$

g) è tangente alla retta t: $y=-x$ nel punto T(0;0) e passa per A(0;2) ;
$[x^2+y^2-2x-2y=0]$

h) è tangente alla retta t: $y=2x-1$ nel punto T(1;1) e passa per A(1;-1)
$[(x-3)^2+y^2=5]$

3) Determina la tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2+y^2+4x-2y=0$ nel suo punto T(0;2).

$[y=-2x+2]$

4) Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2+y^2=25$ determina la retta tangente nel suo punto T(3;4) e le tangenti uscenti dal punto $P(0;-\frac{25}{4})$.

$[t: 3x+4y-25=0 \quad t_{1,2}: y=\pm\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}]$

5) Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ determina le rette tangenti ad essa uscenti da (0;0).

$[y=x \;\; ; \;\; y=-\frac{1}{7}x]$

6) Determina la retta tangente in (0;0) alla circonferenza di equazione $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

$[y=-\frac{3}{4}x]$

7) Data $\mathcal{C}$: $x^2+y^2=4$ determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}: y=x+k$ intersecano la circonferenza.

$[-2\sqrt{2}\le k\le 2\sqrt{2}]$

8) Data $\mathcal{C}: x^2+y^2=9$ determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $x+y-5+ky=0$ intersecano la circonferenza.

$[k\le-\frac{7}{3}\cup k\ge\frac{1}{3}]$

9) Data la circonferenza di equazione $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ determina per quali valori di k le rette del fascio:
a) $\mathcal{F}_1: y=-x+k$
b) $\mathcal{F}_2: x-8+k(2x-y-4)=0$
intersecano la circonferenza.

$\left[5-5\sqrt{2}\le k\le 5+5\sqrt{2}\,;\; k\le-\frac{4}{5}\cup k\ge 0\right]$

10) Data la circonferenza C: $x^2+y^2-4x-4y=0$, determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $y=x+k$ intersecano:

a) l'intera circonferenza ; $[-4\le k\le 4]$

b) la parte di circonferenza che si trova nel 3° e 4° quadrante $(y\le 0)$ (specificando il numero delle intersezioni).

[1 intersezione per $-4<k\le 0$ e 2 intersezioni coincidenti per $k=-4$]

11) Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, determina per quali valori di k le rette del fascio

$$\mathcal{F} : \; y - 4 + k(x + y - 6) = 0$$

intersecano la circonferenza.

$$[-2 \le k \le -\frac{2}{3}]$$

12) Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ 2x + y + k = 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

[1 soluzione per $-8 < k \le -4$; 2 soluzioni per $-4\sqrt{5} \le k \le -8$]

13)

a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ tangente in $T(1;2)$ alla retta $t : y = 2x$ e passante per il punto $A(7;4)$. Disegnala ed indica con C il suo centro.

b) Determina le tangenti alla circonferenza uscenti dal punto P(15;0) e indicati con T_1 e T_2 i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero PT_1CT_2.

c) Nel fascio di rette di equazione $y = 2x + k$ determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano $\mathcal{C}$.

[$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0$; $t_{1,2} : y = \pm\frac{1}{2}(x - 15)$; area (PT_1CT_2) = 40 ; $-20 \le k \le 0$]

14) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ tangente in (0;0) alla retta $t : y = \frac{3}{4}x$ e avente il centro C appartenente alla retta $y = -x - 1$.

b) Determina i punti P appartenenti a t tali che $area(\overset{\Delta}{OPC}) = 25$.

[$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ $P_1(8;6)$ $P_2(-8;-6)$]

15) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta e della circonferenza inscritta al triangolo di vertici O(0;0) , A(4;0) e B(0;3).

[$x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$]

16) Determina l'equazione della circonferenza tangente alla retta t: y=-1 e passante per i punti A (1;1) e B (1;7).

$$[x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0]$$

17) Determina l'equazione della circonferenza tangente alla retta t: $y = x - 1$ e passante per i punti A (-2;1) e B (0;3).

$$[2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 3 = 0]$$

18) Determina l'equazione della circonferenza tangente all'asse x e passante per i punti A (1;2) e B (3;4).

$$[x^2 + y^2 + 10x - 20y + 25 = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0]$$

19) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A(0;2) B(2;0) e O(0;0).

b)Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: y=x+k intersecano $\mathcal{C}$.

c)Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$ intersecano la parte di $\mathcal{C}$ con y ≥ 0. Specificare in quanti punti.

[$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$; $-2 \le k \le 2$; 1 intersezione per $-2 < k < 0$, 2 intersezioni per $0 \le k \le 2 \cup k = -2$]

20) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A(-1; 3) e B(1; -1) e il cui centro appartiene alla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$.

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $x - y - 3 + k(x-3) = 0$ intersecano la circonferenza e per quali valori (e in quanti punti) intersecano la $\mathcal{C}$ con $y \ge 0$.

[$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$; $-3 \le k \le -\frac{1}{2}$; 2 intersezioni per $-3 \le k \le -1$]

21) Determina l'equazione della circonferenza tangente agli assi coordinati e passante per $A(1;-2)$. [$x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$]

22) a) Determina l'equazione della circonferenza avente centro C(2; 1) e tangente alla retta $t: y = x + 2$.

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $y = x + k$ staccano sulla circonferenza una corda di lunghezza 2.

[$\mathcal{C}$: $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$; $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}$]

APPROFONDIMENTO

Fasci di circonferenze

Supponiamo di avere due circonferenze

$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \mathcal{C}_2: \ x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

Se consideriamo l'equazione

$$k(x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1) + x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

cioè $$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (ka_1 + a_2)x + (kb_1 + b_2)y + kc_1 + c_2 = 0$$

è chiaro che sarà, al variare di k, con $k \neq -1$, ancora una circonferenza (reale quando $x_c^{\ 2} + y_c^{\ 2} - c \geq 0$).Si parla quindi di fascio di circonferenze generato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Per $k = 0$ si ottiene $\mathcal{C}_2$, mentre per $k = \infty$ si ottiene $\mathcal{C}_1$ (ragionamento analogo a quello svolto per i fasci di rette). Naturalmente a seconda di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si otterranno vari tipi di fasci.

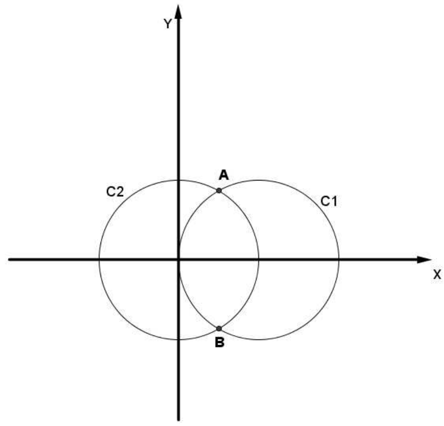
Esempio 1: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ secanti

Consideriamo per esempio le circonferenze in figura e studiamo il fascio da esse generato.

$\mathcal{C}_1 \ : \ x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad C_1(1;0) \quad r_1 = 1$

$\mathcal{C}_2 : \ x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad C_2(0;0) \quad r_2 = 1$

$\mathcal{F}: \qquad k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (k \neq -1)$



Qualunque sia il valore assegnato a $k \ \ (k \neq -1)$, si otterrà una circonferenza anch'essa passante per A e B: infatti sia sostituendo le coordinate di A che di B si otterrà $k \cdot 0 + 0 = 0$.

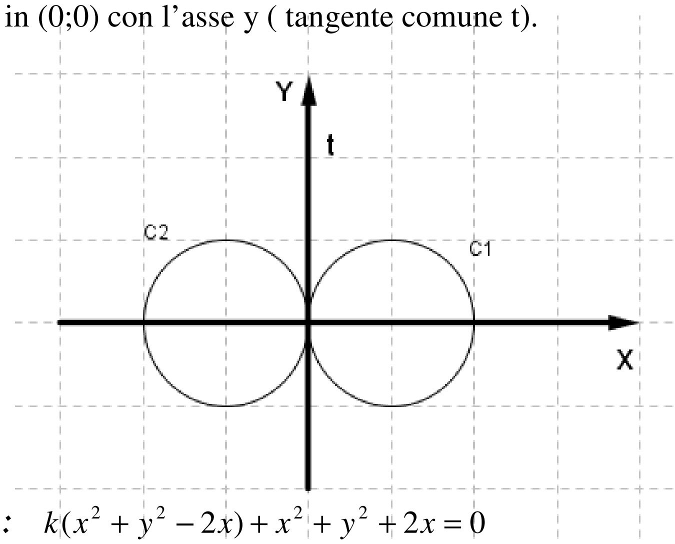
(*) Osserviamo che, per qualunque valore di k, con k ≠ -1, si ottengono circonferenze reali. Infatti:

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2kx - 1 = 0 \qquad \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}x - \frac{1}{k+1} = 0$$

$$C(\frac{k}{k+1};0) \qquad r = \sqrt{\frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1}} = \sqrt{\frac{k^2 + k + 1}{(k+1)^2}} \qquad \frac{k^2 + k + 1}{(k+1)^2} > 0 \ \ \forall k \neq -1$$

Esempio 2: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tangenti

Consideriamo le circonferenze in figura, tangenti in (0;0) con l'asse y (tangente comune t).



$\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ C_1 (1;0) r_1=1

$\mathcal{C}_2$: $x^2 + y^2 + 2x = 0$ C_1(-1;0) r_2=1

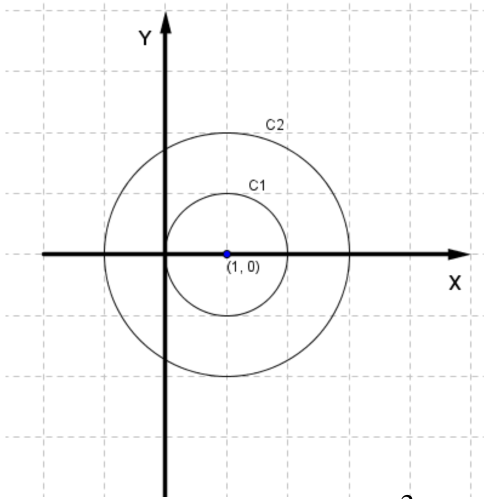
Consideriamo il fascio generato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$: $\mathcal{F}$: $k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 + 2x = 0$

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2x(1-k) = 0 \qquad r = \sqrt{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2}$$

Si osserva che intersecando una qualunque circonferenza del fascio con la retta t : x=0 si ottiene solo, come soluzione (0;0) e quindi tutte le circonferenze del fascio sono tangenti in (0;0) all'asse y. Il fascio generato da due circonferenze tangenti in T ad una retta t è costituito da circonferenze tangenti in T a t (che si ottiene per $k = -1$).

Esempio 3 : $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ concentriche

Consideriamo le circonferenze in figura:



$\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$\mathcal{C}_2$: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ $C_2(1;0)$ $r_2 = 2$

$\mathcal{F}$: $k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

Sviluppando : $(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2x(k+1) - 3 = 0 \quad \rightarrow (k \neq -1): \quad x^2 + y^2 - 2x - \dfrac{3}{k+1} = 0$

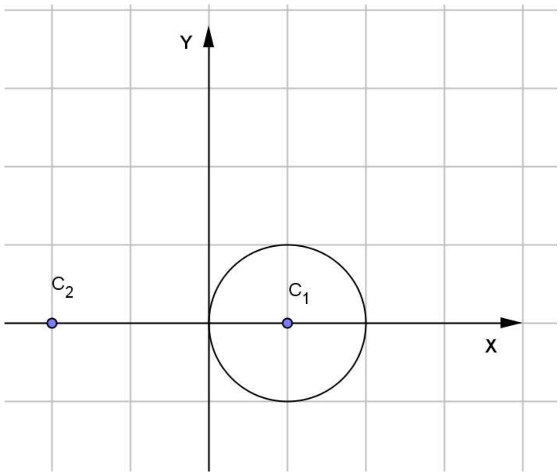
Osserviamo che C(1 ; 0) cioè che tutte le circonferenze hanno lo stesso centro di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e

Quindi avremo circonferenze $r = \sqrt{1 + \dfrac{3}{k+1}} = \sqrt{\dfrac{k+4}{k+1}}$ reali solo se

$$\frac{k+4}{k+1} \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -4 \cup k > -1 \ (k \neq -1)$$

Esempio 4: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ non aventi punti in comune e non concentriche

Consideriamo le circonferenze in figura:



$\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ $\quad C_1(1;0) \quad r_1 = 1$

$\mathcal{C}_2$: $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$ $\quad C_2(-2;0) \quad r_2 = 0$

Consideriamo

$\mathcal{F}$: $\quad k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

Sviluppando : $\quad (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2x(2-k) + 4 = 0$

Dividendo per $k+1$ $\;(k \neq -1)$: $\quad x^2 + y^2 + \dfrac{2(2-k)}{k+1}x + \dfrac{4}{k+1} = 0$

$$C\left(\frac{k-2}{k+1};0\right) \qquad\qquad r = \sqrt{\frac{(k-2)^2}{(k+1)^2} - \frac{4}{k+1}}$$

Quindi ho circonferenze reali solo se $\dfrac{(k-2)^2}{(k+1)^2} - \dfrac{4}{k+1} \geq 0$ cioè, sviluppando i calcoli, quando

$$k \leq 0 \cup k \geq 8 \text{ con } k \neq -1$$

Nota: abbiamo considerato i fasci di circonferenze ottenuti "combinando" le equazioni di due circonferenze. **Ma cosa si ottiene "combinando" l'equazione di una circonferenza con l'equazione di una retta**?

$$\mathcal{F}: \; k(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$kx^2 + ky^2 + (ka_1 +{}_2)x + (kb_1 + b_2)y + kc_1 + c_2 = 0$$

Se $k \neq 0$ (e verifica la condizione di realtà per il raggio), **ottengo quindi un fascio di circonferenze** ed è semplice dimostrare che:

- se r e $\mathcal{C}$ sono secanti si ottiene un fascio di circonferenze secanti (passanti per i punti di intersezione tra r e $\mathcal{C}$);

- se r e $\mathcal{C}$ sono tangenti si ottiene un fascio di circonferenze tangenti nel punto di tangenza tra r e $\mathcal{C}$ (r è la tangente comune);

- se r e $\mathcal{C}$ non hanno punti in comune si ottiene un fascio di circonferenze che non intersecano né r né $\mathcal{C}$ e il cui centro appartiene alla retta passante per il centro C di $\mathcal{C}$ e perpendicolare alla retta r.

Problemi svolti

1) Come si può scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze passanti per A(0; 4) e B(0; 0)?

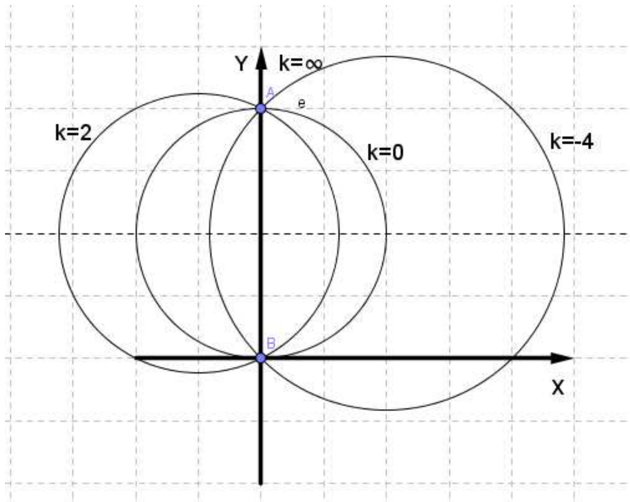
Possiamo combinare una circonferenza per A e B , per esempio quella di diametro AB:

$$\mathcal{C}: \; x^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

con la retta per A e B che in questo caso è l'asse y cioè la retta di equazione $x = 0$.

In conclusione una possibile equazione del fascio risulta

$$\mathcal{F}: \; x^2 + y^2 - 4y + kx = 0$$



Osservazioni

Il centro della circonferenza del fascio è $C(-\frac{k}{2};2)$ cioè appartiene all'asse di AB ($y = 2$).

Nota: potevamo risolvere questo problema anche considerando l'equazione generica di una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e imponendo il passaggio per A e B

$$\begin{cases} 16 + 4b + c = 0 \rightarrow b = -4 \\ c = 0 \end{cases}$$

L'equazione del fascio sarà: $F_C : x^2 + y^2 + ax - 4y = 0$ dove il parametro è a ed è praticamente uguale a quella che avevamo ricavato precedentemente.

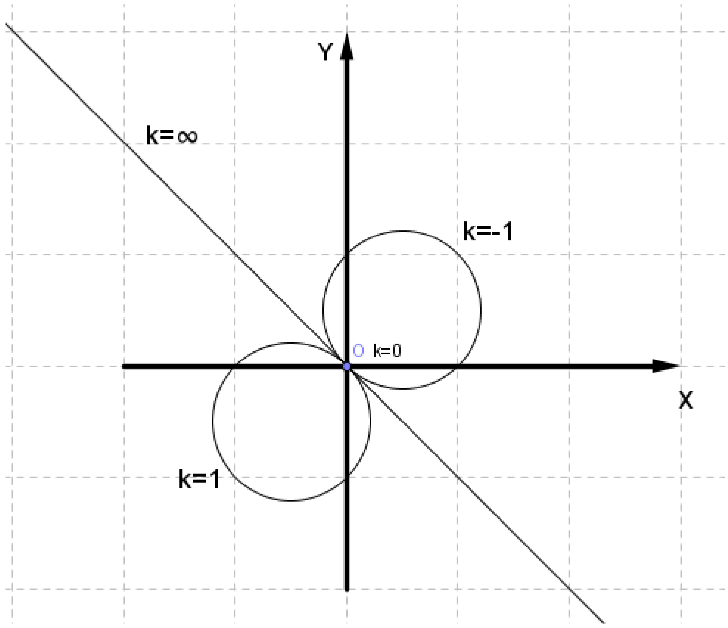
2) Come si può **s**crivere l'equazione di un fascio di circonferenze tangenti in T(0; 0) alla retta $t : y = -x$?

Possiamo combinare l'equazione di una circonferenza tangente in T alla retta t con l'equazione di t.

Per semplificare i calcoli possiamo scegliere come circonferenza tangente la circonferenza (degenere) di raggio nullo e centro T(0; 0) $\rightarrow x^2 + y^2 = 0$

Abbiamo quindi

$$x^2 + y^2 + k(x + y) = 0$$



3) Come si può **s**crivere l'equazione di un fascio di circonferenze aventi centro C(1;2)?

In questo caso possiamo semplicemente usare l'equazione

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

dove r sarà il parametro.
oppure considerare l'equazione generale della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e porre

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2} = 1 & \rightarrow \ a = -2 \\ -\dfrac{b}{2} = 2 & \rightarrow \ b = -4 \end{cases}$$

da cui abbiamo che l'equazione del fascio risulta

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - c = 0$$

Calcoliamo il raggio

$$r = \sqrt{1 + 4 - c} = \sqrt{5 - c}$$

Avremo circonferenze reali quando

$$5 - c \geq 0 \quad \rightarrow \quad c \leq 5$$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1) a) Determina l'equazione della circonferenza **C** avente centro C(3,-1) e tangente alla retta t: 3x+y+2 =0. Disegnala e determina le coordinate del punto T di tangenza.

$[\, x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0;\ T(0;-2)\,]$

b) Nel fascio di rette **F**: y = $-\frac{1}{3}x + k$ determina per quali valori di k le rette intersecano la circonferenza **C.**

$[-\frac{10}{3} \le k \le \frac{10}{3}]$

2) a) Determina l'equazione della circonferenza **C** tangente in T(0,1) alla retta t : $y = -x + 1$ e passante per $(-4;1)$. Disegnala ed indica con C il suo centro.

$[\, x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0\,]$

b) Determina le equazioni delle tangenti alla circonferenza uscenti dal punto P(-2,-5) e, detti T_1 e T_2 i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero TT_1PT_2.

$[\, y = x - 3;\ y = -x - 7;\ \mathrm{A}(TT_1PT_2) = 12\,]$

3) a) Determina l'equazione della circonferenza **C** passante per i punti A (6, -5) B(-1, 2) C(6,1). Disegnala ed indica con Ω il suo centro.

$[\, x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0\,]$

b) Dopo aver studiato il fascio di rette di equazione

F : 2x – y +9 + k (y + 1)= 0

determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano la circonferenza.

$[\, k \le -\frac{5}{3} \cup k \ge \frac{5}{2}\,]$

4) Dato il fascio di circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + k(x + y - 3) = 0$$

a) studialo e disegna le generatrici;

[fascio circonferenze secanti in A(1;2) e B(2;1) $\forall k \in \Re$]

b) determina il valore di k per il quale si ottiene la circonferenza di centro (2;2) e disegnala;

$[\, k = -2\,]$

c) determina per quali valori di k si ottengono circonferenze di raggio $\sqrt{5}$ e disegnale.

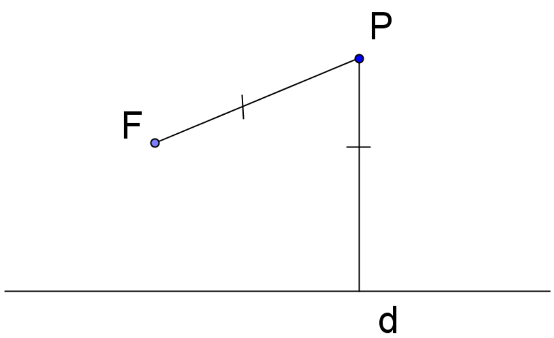
$[\, k_1 = -4\ \ k_2 = 2\,]$

Parabola

Nella classe seconda abbiamo già studiato il grafico della funzione $y = ax^2 + bx + c$, che risulta essere una curva chiamata "parabola".
La parabola può essere però più in generale definita come "luogo di punti" che godono della seguente proprietà:

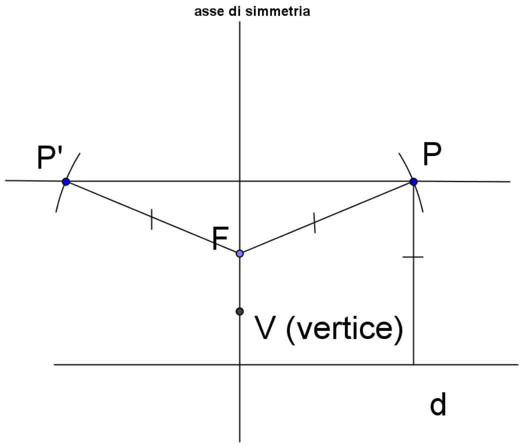
Definizione

Dati nel piano una retta d e un punto $F \notin d$, si dice parabola $\mathcal{P}$ di direttrice d e fuoco F il "luogo geometrico" dei punti P del piano (cioè l'insieme dei punti del piano) ***equidistanti*** *da d e da F cioè tali che $\overline{PF} = d(P,d)$.*



Osservazioni

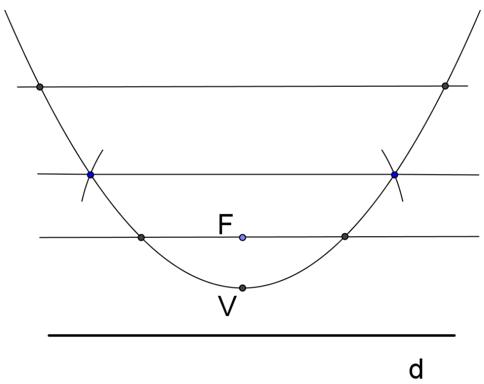
1. Possiamo subito individuare un punto "particolare" della parabola: il punto che si trova sulla perpendicolare a d per F viene detto **vertice della parabola** e indicato con V.



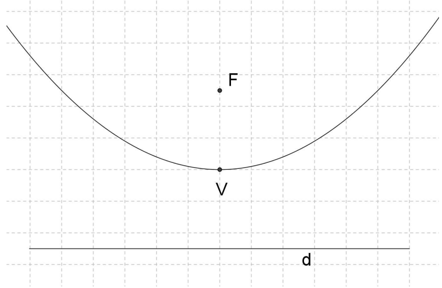
2. Per individuare dei punti di $\mathcal{P}$ possiamo tracciare una retta r parallela a d e puntare il compasso in F con apertura uguale alla distanza tra r e d. Si individuano due punti P , P' simmetrici rispetto alla retta per F perpendicolare a d che è quindi **l'asse di simmetria** della parabola.

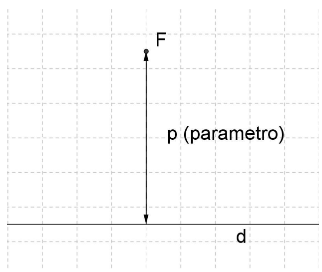
3. Osserviamo inoltre che non ci sono punti della parabola "al di sotto" del vertice (se s è la retta per V parallela a d i punti di $\mathcal{P}$ si trovano nel semipiano individuato da s contenente F).

4. Determinando qualche punto di $\mathcal{P}$ si osserva che la curva risulta aperta e illimitata.



5. Allontanando il fuoco F dalla direttrice d la "forma" della parabola risulta più "larga".





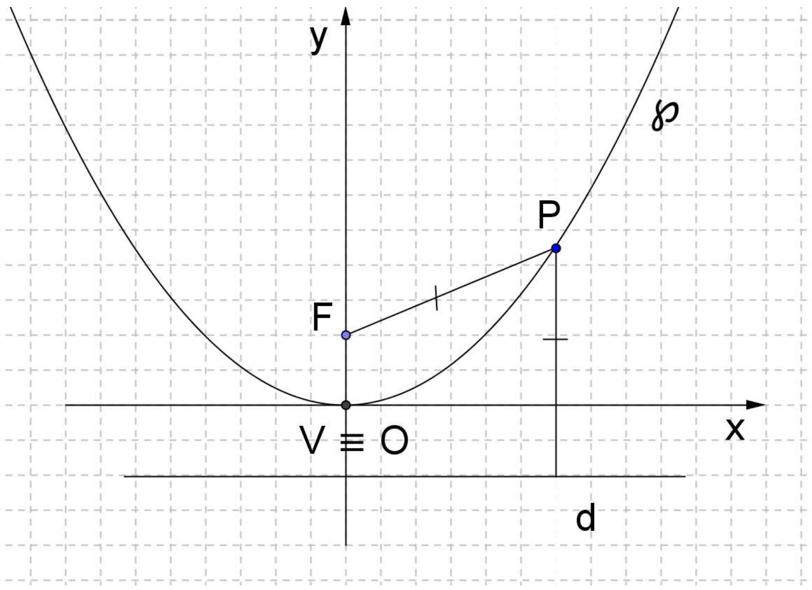
La distanza tra F e d viene chiamata **parametro** della parabola ed indicata con p: maggiore è p e maggiore è l'apertura della parabola.

LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

Cominciamo con il considerare il caso in cui l'asse di simmetria della parabola sia parallelo all'asse y del sistema di riferimento.

a) **Supponiamo inoltre che il vertice coincida con l'origine del sistema di riferimento cioè** $V(0;0)$.



Consideriamo per esempio $F(0;2)$ $d: y=-2$ (vedi figura).
Per determinare l'equazione di $\mathcal{P}$ consideriamo un generico punto $P(x;y)$ e imponiamo che sia equidistante da F e da d :

$$\overline{PF} = d(P,d) \qquad (d: y+2=0)$$

Possiamo elevare al quadrato per evitare le radici quadrate e abbiamo quindi:

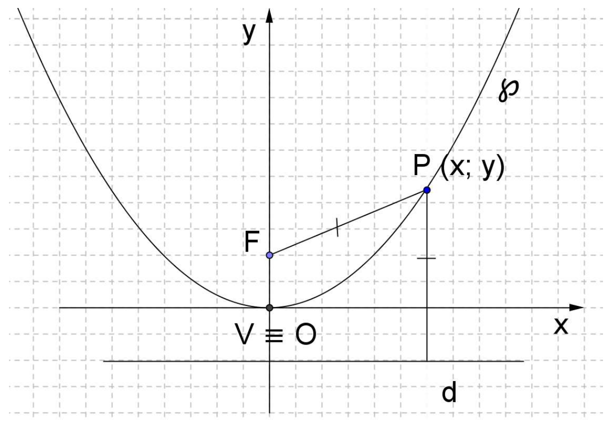
$$\overline{PF}^2 = (d(P,d))^2$$

E sviluppando:

$$x^2 + (y-2)^2 = (y+2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \Rightarrow x^2 = 8y \Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2$$

Quindi l'equazione di $\mathcal{P}$ risulta $y = \frac{1}{8}x^2$.

In generale, indicando con p il parametro, avremo $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$ e $d: y=-\dfrac{p}{2}$



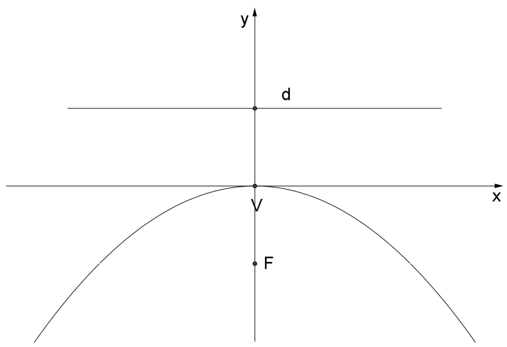
$$\overline{PF}^2 = (d(P,dir))^2$$

$$x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=y^2+py+\frac{p^2}{4} \Rightarrow x^2=2py \Rightarrow y=\frac{1}{2p}x^2$$

Generalmente si pone $a=\dfrac{1}{2p}$ e quindi l'equazione della parabola con vertice $V(0;0)$ e asse di simmetria $\equiv asse y$ risulta:

$$y=ax^2$$

Da notare che se il fuoco si trova sotto alla direttrice, come nella figura seguente, avremo $y=-\dfrac{1}{2p}x^2$ e quindi in questo caso si pone $a=-\dfrac{1}{2p}$.



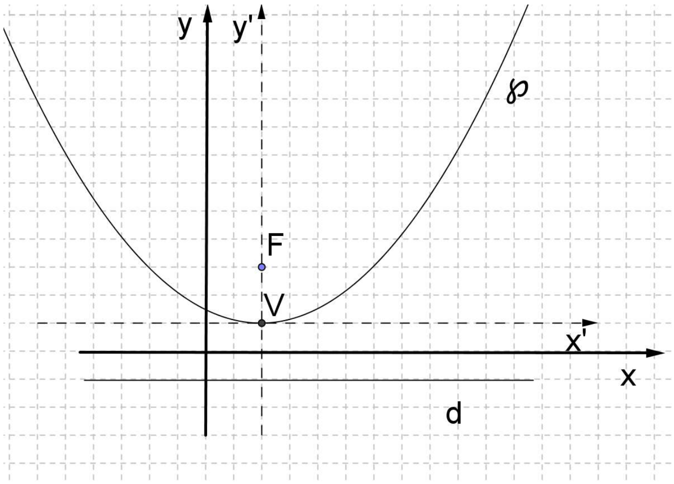
In conclusione l'equazione della parabola di vertice $V(0;0)$, asse di simmetria $\equiv asse y$ e parametro p (p>0 perché rappresenta la distanza tra fuoco e direttrice) risulta

$$y=ax^2$$

- $a=\dfrac{1}{2p}$ se $\mathcal{P}$ è rivolta verso l'alto ($a>0$)
- $a=-\dfrac{1}{2p}$ se $\mathcal{P}$ è rivolta verso il basso ($a<0$)

b) Consideriamo adesso il caso in cui il vertice V non coincida con (0;0).

Sia per esempio $V(2;1)$, $p = 4$ e la parabola sia rivolta verso l'alto.



Supponiamo di traslare il sistema di riferimento in modo che il vertice della parabola coincida con la nuova origine.

La relazione tra le coordinate (x;y) e quelle (x';y') sarà: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Ma nel nuovo sistema di riferimento possiamo scrivere l'equazione di $\mathcal{P}$:

$$y' = \frac{1}{8}(x')^2 \qquad \left(a = \frac{1}{2p} = \frac{1}{8} \right)$$

e quindi nel sistema di riferimento (O;x;y) avremo

$$y - 1 = \frac{1}{8}(x-2)^2$$

In generale se $V(x_V; y_V)$ avremo: $\quad y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$

Se sviluppiamo abbiamo: $y = ax^2 - 2ax_V x + a \cdot x_V{}^2 + y_V$ e ponendo (*) $\begin{cases} -2ax_V = b \\ ax_V{}^2 + y_V = c \end{cases}$

Otteniamo

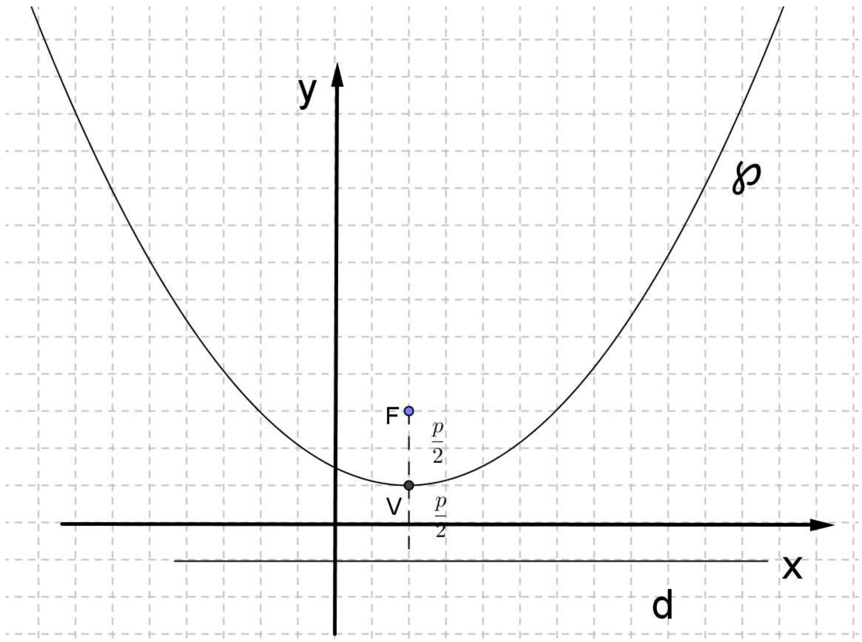
$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse di simmetria parallelo all'asse y

Dalle relazioni (*) possiamo ricavare che le coordinate del vertice sono

$$\begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = -\dfrac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

Possiamo anche ricavare delle formule per esprimere le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice in funzione di a, b, c.



Se l'equazione della parabola è $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ abbiamo (vedi figura):

$$\begin{cases} x_F = x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_F = y_V + \dfrac{p}{2} = y_V + \dfrac{1}{4a} = -\dfrac{(b^2 - 4ac)}{4a} + \dfrac{1}{4a} = \dfrac{-\Delta + 1}{4a} \end{cases}$$

e quindi $$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta + 1}{4a}\right)$$

Per l'equazione della direttrice avremo:

$$y = y_V - \frac{p}{2} \Rightarrow y = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} - \frac{1}{4a} \Rightarrow direttrice: y = \frac{-\Delta - 1}{4a}$$

Se $a < 0$ abbiamo $p = -\dfrac{1}{2a}$ ma il fuoco sta sotto al vertice e quindi dobbiamo sottrarre $\dfrac{p}{2}$ mentre la direttrice sopra al vertice e quindi dobbiamo sommare $\dfrac{p}{2}$ e quindi si ottengono le stesse formule.

Disegnare una parabola di equazione assegnata

1) Disegnare la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 + 4x + 3$, determinare le coordinate del suo fuoco F, l'equazione della direttrice d e l'equazione del suo asse di simmetria.

Per disegnare una parabola occorre innanzitutto individuare il suo vertice V.

Sappiamo che $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$

Per determinare l'ordinata del vertice possiamo utilizzare la relazione $y_V = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$ ma, più semplicemente, possiamo sostituire l'ascissa del vertice nell'equazione della parabola (infatti $V \in \mathcal{P}$ e quindi le sue coordinate verificano l'equazione di $\mathcal{P}$).

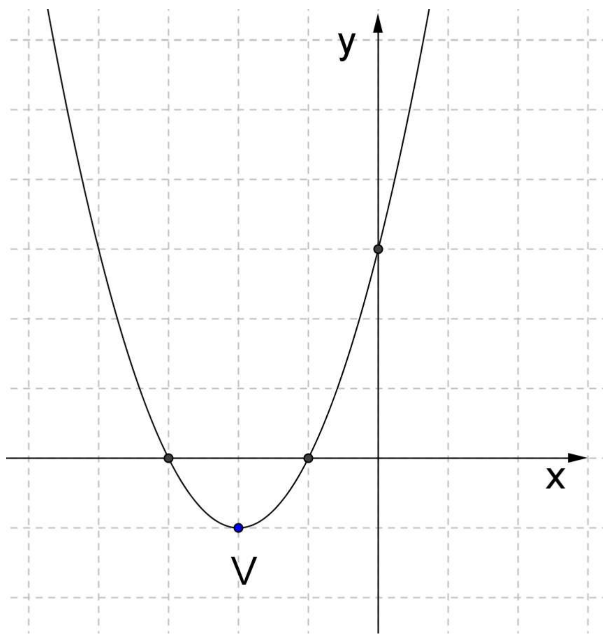
Quindi avremo: $y_V = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$

Per disegnare la parabola possiamo poi individuare qualche altro punto, per esempio le intersezioni con gli assi del sistema di riferimento:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi avremo:



L'equazione dell'asse di simmetria di $\mathcal{P}$ è $x = -2$.

Come possiamo determinare le coordinate di F e l'equazione della direttrice d ?
La parabola è rivolta verso l'alto e quindi $a = \frac{1}{2p}$.
Possiamo allora ricavare il parametro p :

$$1 = \frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Ricordando che il vertice dista $\frac{p}{2}$ sia da F che dalla direttrice d , avremo

$$F\left(-2;-1+\frac{1}{4}\right) = \left(-2;-\frac{3}{4}\right)$$

$$d : y = -1 - \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{5}{4}$$

2) Disegnare la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 3$.

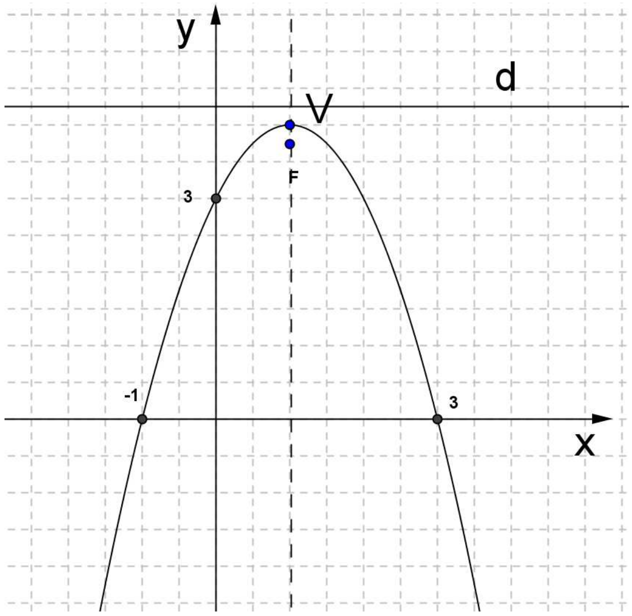
Procedendo come nel precedente problema si ottiene

$$V(1;4) \ , \quad a = -\frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

e quindi:

$$F\left(1;4-\frac{1}{4}\right) = \left(1;\frac{15}{4}\right) \qquad d : y = 4 + \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{17}{4}$$

asse di simmetria: $x = 1$



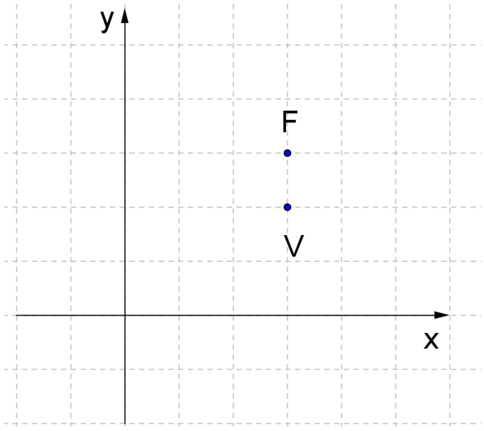
Problemi

Determinare l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y conoscendo:

a) *Vertice V e fuoco F*

Possiamo determinare il parametro p e quindi a e quindi l'equazione sarà: $y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$.

Esempio: $V(3;2)$ e $F(3;3)$



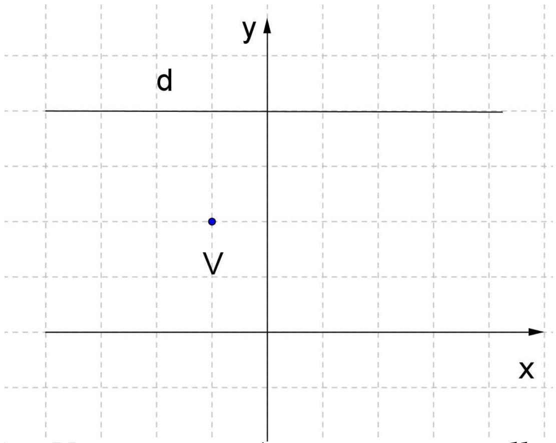
$$\frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2p} = \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{P}: \; y - 2 = \frac{1}{4}(x-3)^2$$

b) *Vertice V e direttrice d*

Possiamo determinare il parametro p da cui troviamo a e poi utilizziamo l'equazione $y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$.

Esempio: $V(-1;2) \quad d: y = 4$

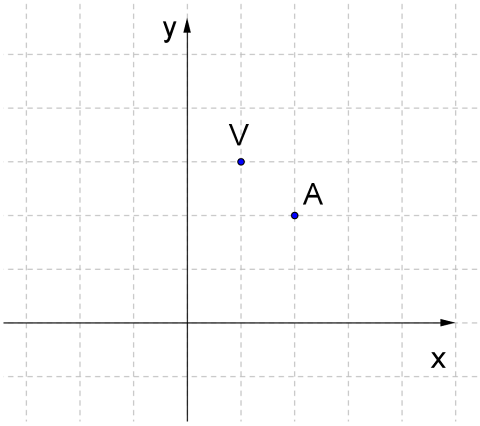


$$\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4 \quad a = -\frac{1}{2p} = -\frac{1}{8}$$

$$\mathcal{P}: \; y - 2 = -\frac{1}{8}(x+1)^2$$

c) *Vertice V e un punto A appartenente alla parabola*

Esempio: $V(1;3) \quad A(2;2)$



L'equazione di $\mathcal{P}$ sarà : $y - 3 = a \cdot (x-1)^2$

Sostituendo le coordinate di A:

$$2 - 3 = a \cdot (2-1)^2 \Rightarrow a = -1$$

E quindi $\mathcal{P}: \; y - 3 = -(x-1)^2$

d) *Le coordinate di tre punti A,B,C appartenenti alla parabola*

In questo caso dobbiamo utilizzare l'equazione $y = ax^2 + bx + c$.

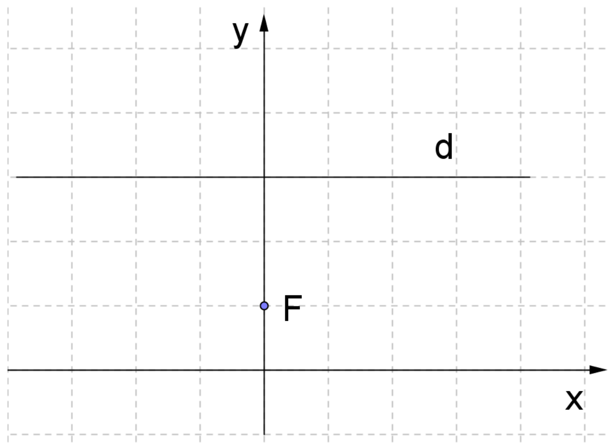
Esempio: $A(-1;5)$ $B(2;2)$ $C(3;5)$
Sostituiamo le coordinate dei punti nell'equazione generale:

$$\begin{array}{l} A \to \\ B \to \\ C \to \end{array} \begin{cases} 5 = a - b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ 5 = 9a + 3b + c \end{cases} \ldots\ldots \to \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Quindi l'equazione della parabola è $y = x^2 - 2x + 2$

e) *Fuoco F e direttrice d*

Esempio: $F(0;1)$ $d : y = 3$



Possiamo ricavare $V(0;2)$ $p = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2p} = -\frac{1}{4}$ e quindi l'equazione della parabola sarà:

$$\mathcal{P} \ : \ y - 2 = -\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

Oppure possiamo utilizzare la definizione:

$$P(x; y) \in \mathrm{P} \Leftrightarrow \overline{PF}^2 = (d(P, dir))^2$$

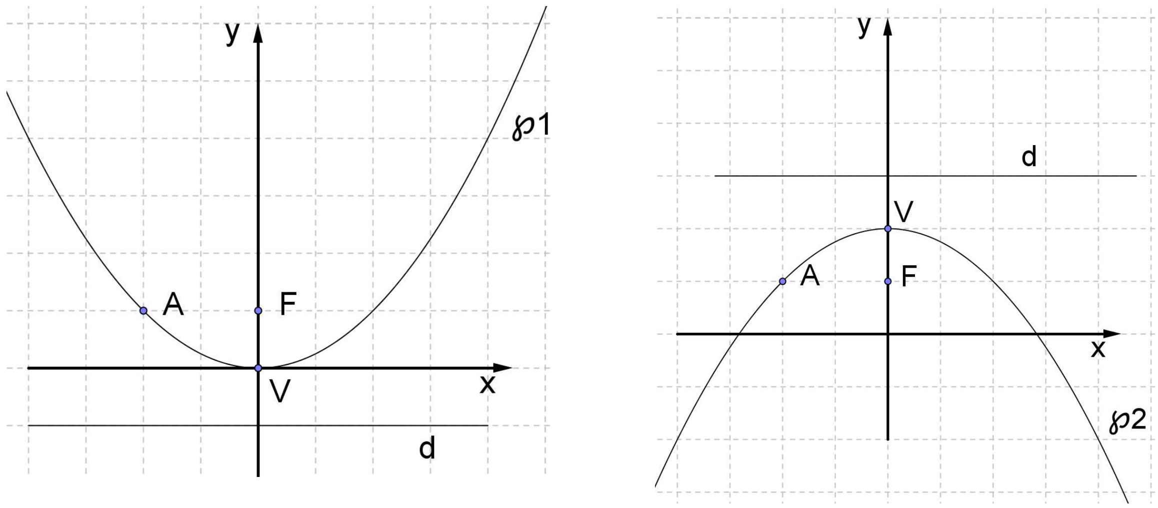
$$x^2 + (y-1)^2 = (y-3)^2 \ldots\ldots \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

f) *Il fuoco F e le coordinate di un punto A ∈ $\mathcal{P}$*

Esempio: $F(0;1)$ $A(-2;1)$

$$\begin{array}{l} x_F \rightarrow \\ y_F \rightarrow \\ A \rightarrow \end{array} \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ \dfrac{1-(b^2-4ac)}{4a} = 1 \\ 1 = 4a - 2b + c \end{cases} \;\ldots\ldots \rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4} \\ b = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a_2 = -\dfrac{1}{4} \\ b = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Anche in questo caso abbiamo ottenuto un sistema di 2° grado e abbiamo trovato due soluzioni distinte cioè due parabole. Puoi risolvere il problema con un procedimento "geometrico"?



g) *L'equazione della direttrice d e le coordinate di due punti appartenenti alla parabola*

Esempio: $d : y = \dfrac{9}{4}$ $A(-1;1)$ $B(2;-2)$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ d \end{array} \begin{cases} 1 = a - b + c \\ -2 = 4a + 2b + c \\ -\dfrac{(1+b^2-4ac)}{4a} = \dfrac{9}{4} \end{cases} \quad \ldots\ldots.$$

Osserviamo che si ottiene un sistema di 2° grado: in questo caso abbiamo due soluzioni distinte (a_1, b_1, c_1) (a_2, b_2, c_2) cioè due parabole che verificano le condizioni assegnate.

In quali casi si ha una sola parabola oppure nessuna parabola con asse parallelo all'asse y? Puoi trovare le parabole con un procedimento "geometrico"?

PARABOLA E RETTA

Per determinare le intersezioni tra una parabola con asse parallelo all'asse y, quindi di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e una retta $y = mx + q$, quindi non parallela all'asse y, basterà risolvere il sistema formato dalle due equazioni.

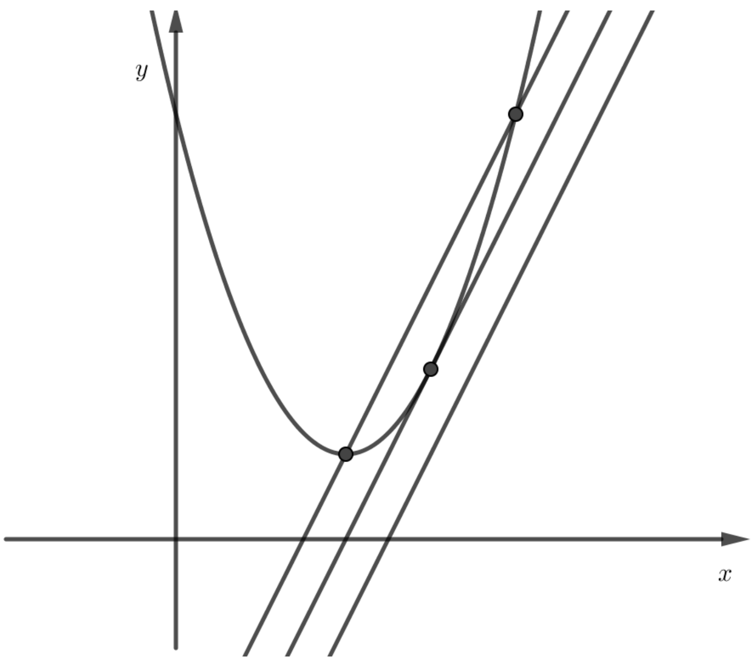
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Il sistema è di secondo grado e potremo avere tre casi:

- **la retta è secante** cioè ha due intersezioni distinte con la parabola e quindi in questo caso il discriminante dell'equazione risolvente è positivo ($\Delta > 0$);

- **la retta è tangente** alla parabola cioè ha due intersezioni coincidenti con la parabola ($\Delta = 0$);

- **la retta è esterna** alla parabola cioè non ha nessuna intersezione con la parabola ($\Delta < 0$)



Esempi

Consideriamo la parabola $\boxed{y = x^2 - 4x + 5}$.

a) Consideriamo la retta $y = 2x - 3$ e vediamo come risulta rispetto alla parabola.
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2x - 3 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Quindi la retta è secante e i due punti di intersezione sono $(2;1)$, $(4;5)$

b) Consideriamo la retta $y = 2x - 4$ e vediamo come risulta rispetto alla parabola.
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2x - 4 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

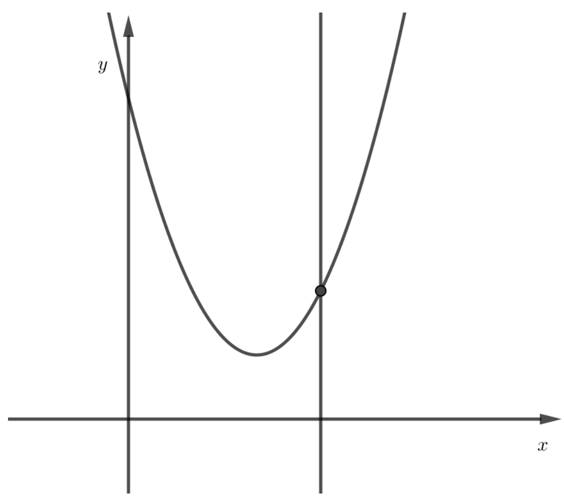
Quindi la retta è tangente e il punto di tangenza è $(3;2)$.

c) Consideriamo la retta $y = 2x - 5$ e vediamo come risulta rispetto alla parabola.
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2x - 5 \rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

In questo caso la retta è esterna e non ci sono intersezioni tra la retta e la parabola.

NOTA
Se invece la retta è parallela all'asse y cioè ha equazione $x = k$ avremo **sempre un solo punto di intersezione** con la parabola.



Esempio
Consideriamo sempre la parabola $\boxed{y = x^2 - 4x + 5}$.
Consideriamo per esempio la retta $x = 3$
Avremo

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Rette tangenti ad una parabola

Esempio 1

Dato **un punto P appartenente ad una parabola** $\mathcal{P}$, con asse parallelo all'asse y, **come si determina la retta per P tangente alla parabola**?

Riprendiamo per esempio la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ e consideriamo il suo punto $P(3;2)$.
Consideriamo l'equazione di una generica retta passante per P:

$$y - 2 = m(x-3) \rightarrow y = 2 + m(x-3)$$

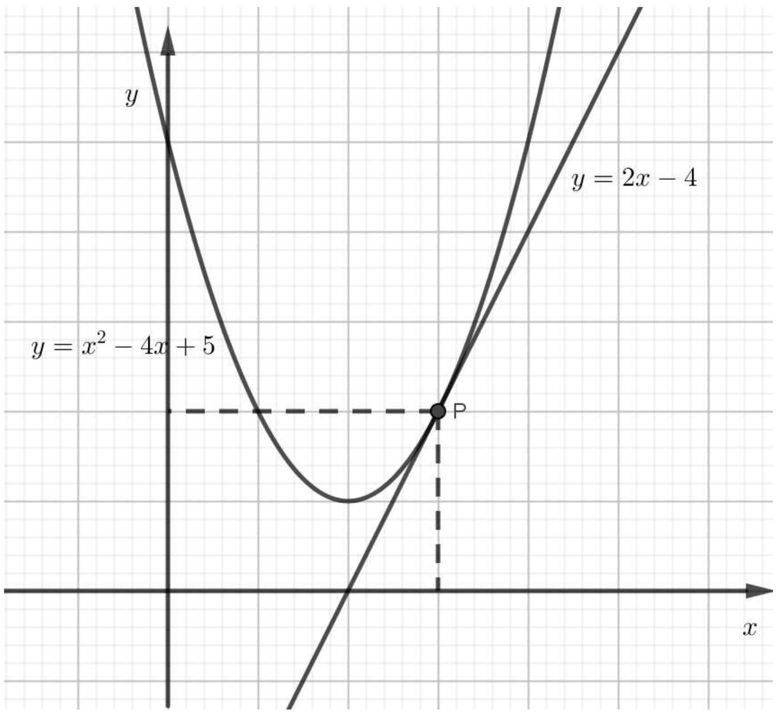
Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2 + m(x-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 + m(x-3) \rightarrow x^2 - (4+m)x + 3 + 3m = 0 \\ y = ... \end{cases}$$

Per determinare l'inclinazione della retta tangente basta **imporre che l'equazione di secondo grado** $x^2 - (4+m)x + 3 + 3m = 0$ **abbia discriminante uguale a zero** (si dice anche imporre la ***"condizione di tangenza"***) cioè:

$$(4+m)^2 - 4(3+3m) = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \rightarrow (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2$$

Quindi l'equazione della tangente in P alla parabola sarà: $y = 2(x-3) + 2 \rightarrow y = 2x - 4$



Esempio 2

Consideriamo : $\mathcal{P}$: $y=\frac{1}{4}x^2-x$ e il punto esterno alla parabola $P(0;-4)$: come si determinano **le rette per P tangenti alla parabola**?

Consideriamo l'equazione di una retta generica passante per P

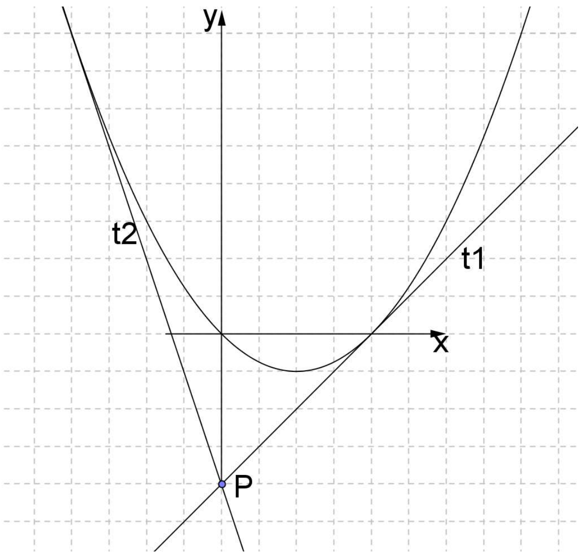
$$y+4=mx \rightarrow y=mx-4$$

Per determinare le tangenti dobbiamo impostare il sistema **e imporre la "condizione di tangenza"**:

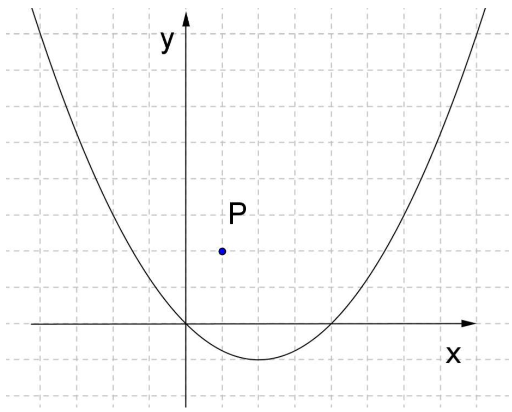
$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2-x \\ y=mx-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2-x=mx-4 \\ .... \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-4(1+m)x+16=0 \\ .... \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4}=4(1+m)^2-16=0 \Rightarrow \quad m_1=1 \rightarrow t_1 : y=x-4$$

$$m_2=-3 \rightarrow t_2 : y=-3x-4$$



Osservazione
Se P è "interno" alla parabola non ci sono rette tangenti.



Esempio 3

Come si determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y sapendo che deve avere in un punto T una tangente assegnata *t* e passare da un dato punto A ?

Consideriamo per esempio $t: y = 3x - 3 \quad T(1;0) \quad A(2;2)$
Scriviamo l'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y

$$y = ax^2 + bx + c$$

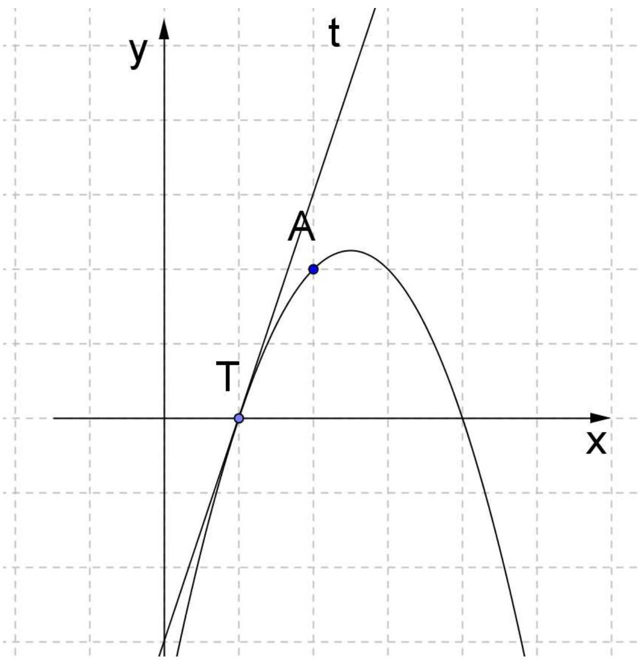
Impostiamo il sistema formato dall'equazione della retta e della parabola e imponiamo la condizione di tangenza:

$$\begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c = 3x - 3 \\ .... \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 + (b-3)x + c + 3 = 0 \\ ..... \end{cases}$$

$\Delta = (b-3)^2 - 4a(c+3) = 0$ (condizione di tangenza)

Quindi avremo: $\begin{matrix} T \rightarrow \\ A \rightarrow \\ cond.\tan g \end{matrix} \quad \begin{cases} 0 = a + b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ (b-3)^2 - 4a(c+3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -4 \end{cases}$

$\mathcal{P}: y = -x^2 + 5x - 4$

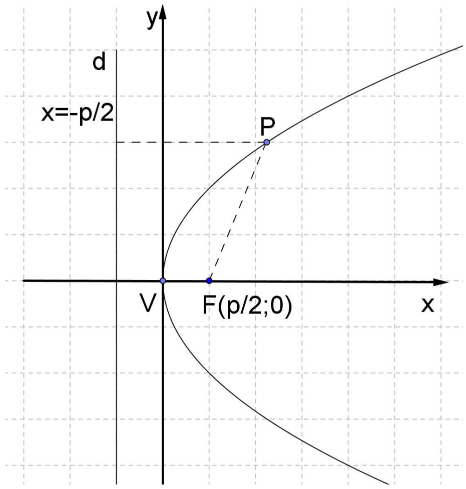


Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x

Consideriamo adesso il caso in cui l'asse di simmetria della parabola sia parallelo all'asse x del sistema di riferimento.

a) **Se il vertice** $V \equiv (0;0)$ avremo:

$$\overline{PF}^2 = (d(P,dir))^2$$



$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Sviluppando otteniamo l'equazione della parabola

$\mathcal{P}$: $x = \frac{1}{2p}y^2$ e ponendo $a = \frac{1}{2p}$

$\mathcal{P}$: $x = a \cdot y^2$

Analogamente se $\mathcal{P}$ è rivolta verso sinistra, cioè $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ e $d: x = \frac{p}{2}$ otteniamo $x = -\frac{1}{2p}y^2$.

Quindi, in generale, l'equazione di una parabola $\mathcal{P}$ con $V(0;0)$, asse di simmetria $\equiv assex$ e parametro p risulta

$$x = a \cdot y^2$$

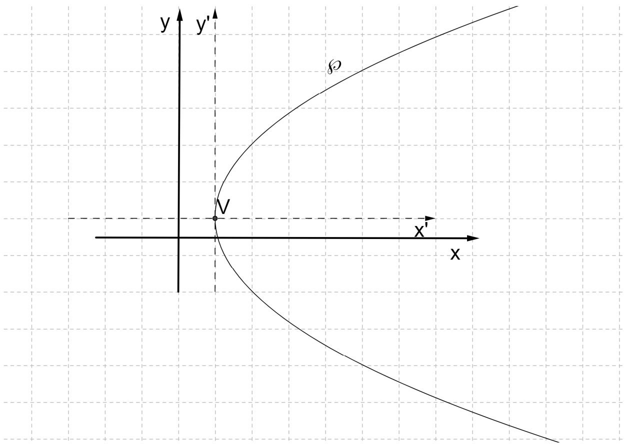
dove

- $a = \frac{1}{2p}$ se $\mathcal{P}$ è rivolta verso destra
- $a = -\frac{1}{2p}$ se $\mathcal{P}$ è rivolta verso sinistra

b) **Se il vertice** $V(x_V\,;y_V)$ trasliamo il sistema di riferimento.

Poiché le equazioni le collegano le vecchie e le nuove coordinate sono $\begin{cases} x' = x - x_V \\ y' = y - y_V \end{cases}$

avremo quindi $\mathcal{P}$: $x' = a\cdot(y')^2$ cioè $x - x_V = a\cdot(y - y_V)^2$



Sviluppando otteniamo : $x = ay^2 - 2ay_V\,y + a\cdot y_V{}^2 + x_V$

Ponendo $(*)\begin{cases} -2ay_V = b \\ a\cdot y_V{}^2 + x_V = c \end{cases}$ abbiamo

$$\mathcal{P}\ :\ x = ay^2 + by + c$$

il cui vertice V ha coordinate $V\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$ che si ricavano da (*) ;

il cui fuoco F ha coordinate $F\left(\frac{-\Delta+1}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$ (basta svolgere considerazioni analoghe a quelle viste per la parabola con asse parallelo all'asse y);

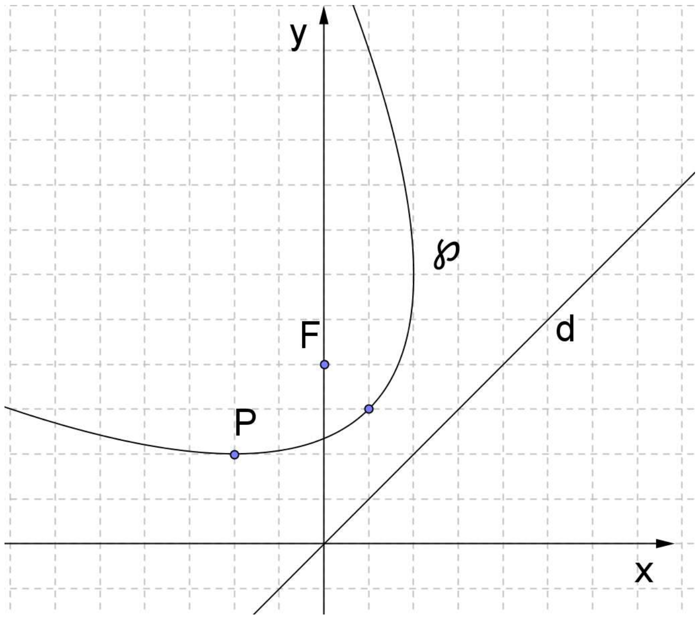
la cui direttrice ha equazione $d: x = \frac{-\Delta - 1}{4a}$

In pratica sia nell'equazione di $\mathcal{P}$ che nelle coordinate di V, F e nell'equazione della direttrice x e y sono scambiati rispetto alla parabola con asse parallelo all'asse y.

I problemi relativi a parabole con asse parallelo all'asse x sono del tutto analoghi a quelli considerati per parabole con asse parallelo all'asse y.

Parabola con asse di simmetria non parallelo agli assi coordinati

Facciamo solo un esempio: determiniamo l'equazione della parabola avente fuoco $F(0;4)$ e direttrice $d: y = x$ (quindi $x - y = 0$).



Applichiamo la definizione:

$$\overline{PF}^2 = (d(P, dir))^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + (y-4)^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$$

Sviluppando otteniamo:

$$\mathcal{P} : x^2 + y^2 + 2xy - 16y + 32 = 0$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto un'equazione di 2° grado in x e y in cui compare, a differenza di quanto accade per la circonferenza, il termine in xy.

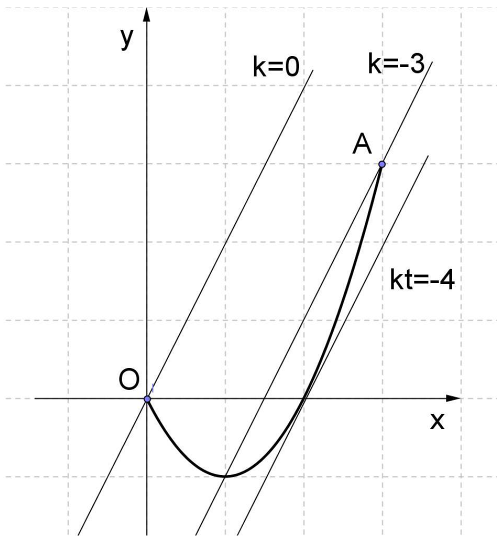
Nota: il nostro studio si limiterà alle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y o all'asse x.

PARABOLA E FASCIO DI RETTE

1) Consideriamo il seguente sistema contenente una “limitazione”:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x + k \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

Risolverlo significa studiare le intersezioni rea l’arco di parabola in figura e il fascio di rette $y = 2x + k$.



Osserviamo che occorre determinare i valori di k corrispondenti alle rette del fascio passanti per gli estremi dell’arco di parabola $\overset{\frown}{OA}$ e il valore di k corrispondente alla retta tangente.

k_O $\quad 0 = 0 + k \to k_O = 0$

k_A $\quad 3 = 6 + k \to k_A = -3$

k_t $\quad \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x + k \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - 2x = 2x + k \\ \ldots\ldots \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - 4x - k = 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$

La condizione di tangenza risulta: $\frac{\Delta}{4} = 4 + k = 0 \to k_t = -4$

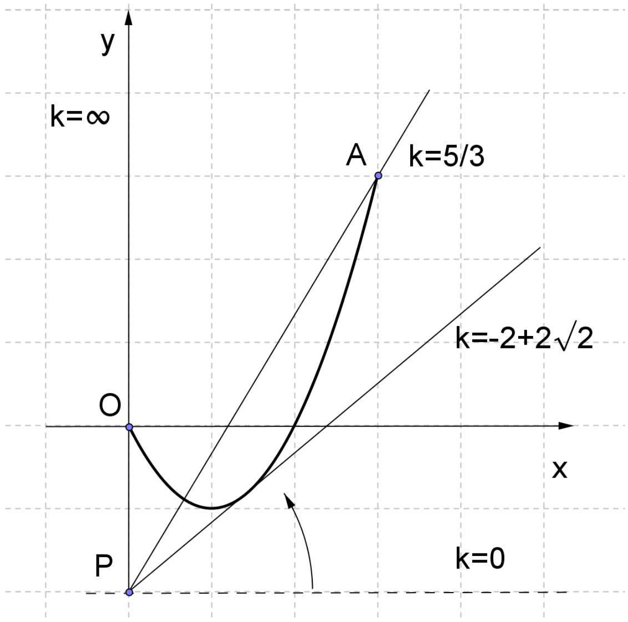
Osservando il disegno abbiamo quindi:

1 soluzione (intersezione) $-3 < k \le 0$

2 soluzioni (intersezioni) $-4 \le k \le -3$

2) Consideriamo adesso l'intersezione dello stesso arco di parabola con un fascio di rette passanti per un punto:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ kx - y - 2 = 0 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$$ fascio di rette passanti per P(0;-2) con rette generatrici $\begin{matrix} k = 0 \to y = -2 \\ k = \infty \to x = 0 \end{matrix}$



In questo caso il valore di k corrispondente alla retta del fascio per (0;0) è $k = \infty$

k_A $\qquad 3k - 3 - 2 = 0 \to k_A = \dfrac{5}{3}$

k_t $\qquad \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ kx - 2 = y \end{cases} \to \begin{cases} x_2 - 2x = kx - 2 \\ ..... \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - (2+k)x + 2 = 0 \\ .... \end{cases}$

La condizione di tangenza è : $\Delta = (2+k)^2 - 8 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$

Osservando come aumentano i valori di k, si deduce che il valore che ci interessa è quello positivo cioè $k_t = -2 + 2\sqrt{2}$.

In conclusione abbiamo:

1 soluzione (intersezione) $k > \dfrac{5}{3}$

2 soluzioni (intersezioni) $-2 + 2\sqrt{2} \le k \le \dfrac{5}{3}$

Problemi di "massimo e minimo"

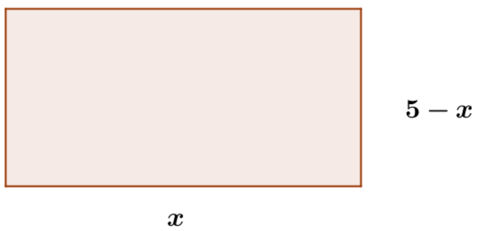
Esempio 1

Vogliamo costruire un recinto rettangolare ed abbiamo un filo lungo 10 metri. Qual è la massima area che possiamo recintare?

Supponiamo di indicare con x una dimensione del nostro recinto rettangolare ABCD : avremo chiaramente che

$$0 \leq x \leq 5$$

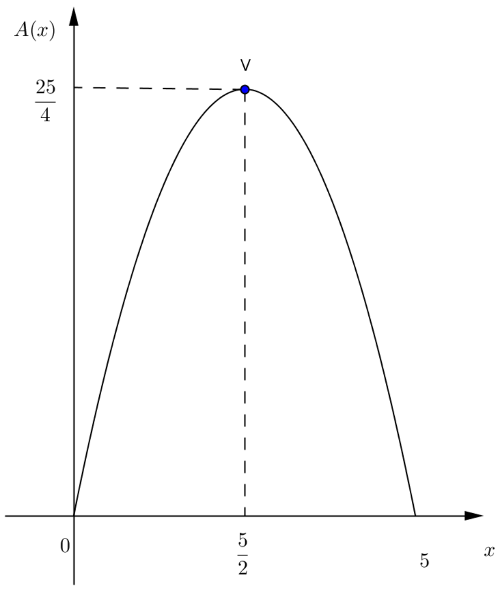
L'altra dimensione sarà quindi $5 - x$ (il semiperimetro è 5 metri).



Quindi l'area del recinto sarà: $A(x) = x(5 - x)$

Sviluppando abbiamo $A(x) = 5x - x^2$

cioè un'espressione di secondo grado e quindi il grafico dell'area sarà l'arco di parabola in figura:

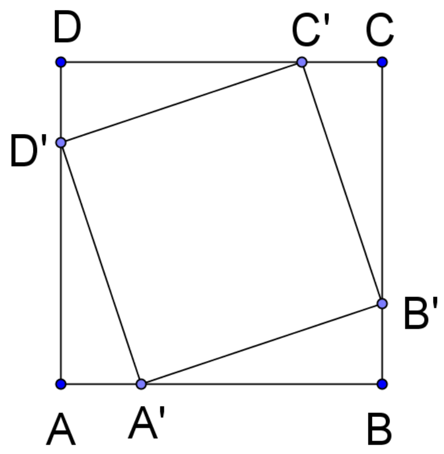


E' quindi chiaro che l'area massima si avrà prendendo $x = \frac{5}{2}$ e risulterà $\frac{25}{4}$.

Osserviamo che per $x = \frac{5}{2}$ l'altra dimensione del rettangolo risulta $\overline{BC} = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ e quindi il recinto di area massima è un quadrato.

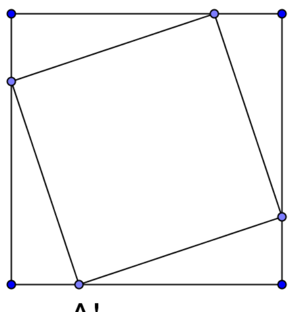
Esempio 2

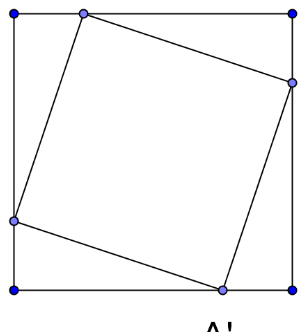
Dato il quadrato ABCD di lato l considera il quadrato A'B'C'D' inscritto in ABCD costruito prendendo $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$ (vedi figura).



Quali valori può assumere l'area di A'B'C'D'?

E' chiaro che l'area di A'B'C'D' sarà al massimo l^2 (= area di ABCD). Inoltre si osserva che per ogni valore possibile dell'area ci sono sempre due quadrati A'B'C'D' che hanno quell'area (vedi figura).

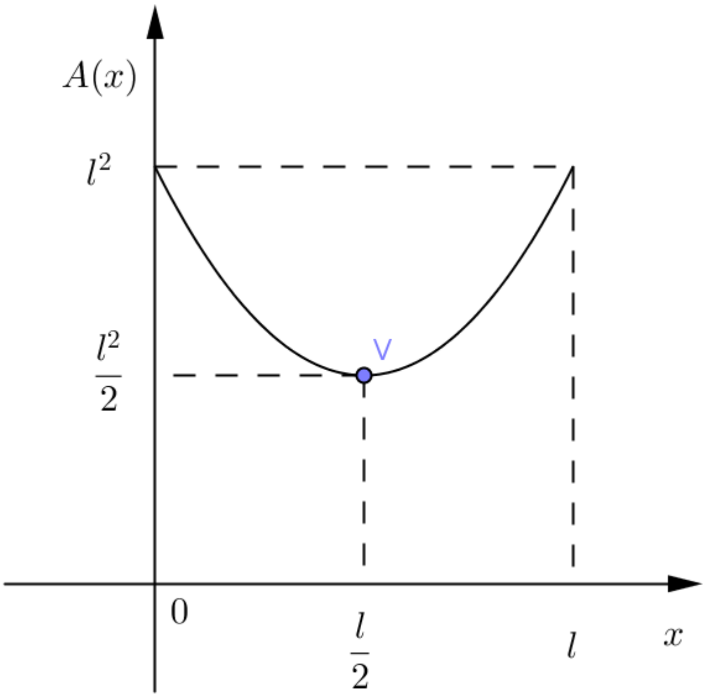




Ma cerchiamo di calcolare l'area del quadrato A'B'C'D'.
Possiamo porre $x = \overline{AA'}$ con la limitazione $0 \le x \le l$.
L'area di A'B'C'D' allora risulta (applicando il teorema di Pitagora al triangolo A'BB'):

$$A(x) = \overline{A'B'}^2 = x^2 + (l - x)^2 = 2x^2 - 2lx + l^2$$

Ma nel piano cartesiano il grafico di $A(x)$ è una parabola ed ha vertice $V\left(\frac{l}{2};\frac{l^2}{2}\right)$



Quindi osservando il grafico dell'area abbiamo che :

- l'area minima risulta $\frac{l^2}{2}$ (cioè metà dell'area del quadrato ABCD) e si ha quando $x=\frac{l}{2}$ cioè quando A' coincide con il punto medio del lato AB;
- l'area massima è l^2 (area del quadrato ABCD) e si ha quando $x=0$, $x=l$ cioè quando A' coincide con A o con B.

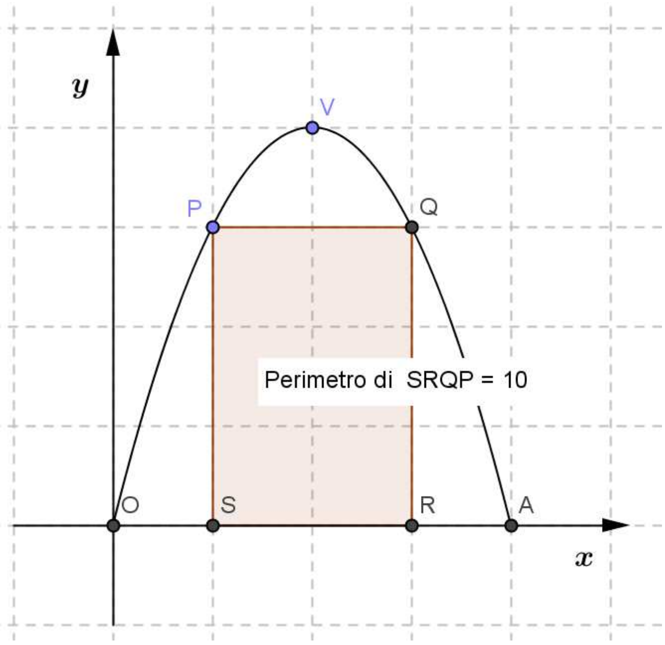
Inoltre è anche chiaro che per ogni valore k dell'area compresa tra $\frac{l^2}{2}$ e l^2 ci sono sempre due diversi quadrati inscritti con quel valore dell'area.

Esempio 3

Considera la parabola di equazione $y = 4x - x^2$ con $0 \le x \le 4$ e un punto $P \in \overset{\frown}{OV}$ dove V è il vertice della parabola.

Traccia il rettangolo PQRS inscritto nella parte di piano delimitata dall'arco di parabola a e dall'asse x : come varia il perimetro ?

Puoi provare a disegnare l'arco di parabola con Geogebra e ad inscrivere il rettangolo (vedi scheda relativa): variando la posizione di P possiamo farci un'idea di come varia il perimetro di PQRS….



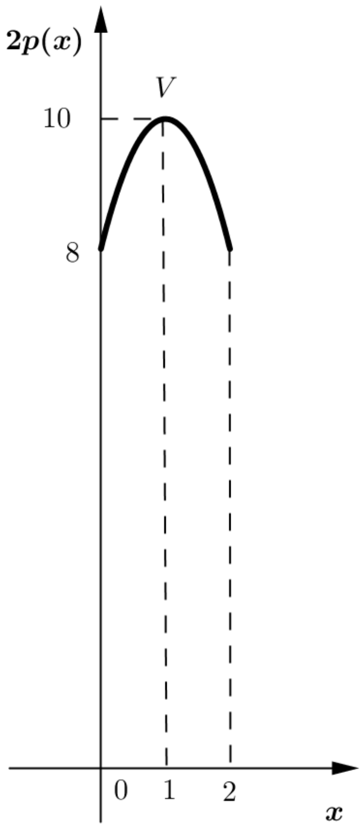
Proviamo ad esprimere il perimetro di PQRS in funzione dell'ascissa x del punto P.
Innanzitutto abbiamo che $P(x; 4x - x^2)$ con $0 \le x \le 2$ e quindi .
Per la simmetria della parabola avremo poi che $\overline{PQ} = 4 - 2x$.

In conclusione:

$$2p(x) = 2(4x - x^2) + 2(4 - 2x) \rightarrow 2p(x) = -2x^2 + 4x + 8$$

Quindi il perimetro del rettangolo è espresso da un'espressione di secondo grado ed il suo grafico sarà una parabola.

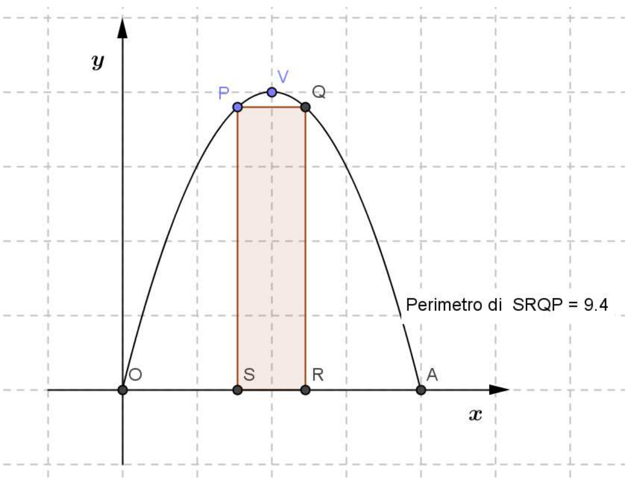
Disegniamo quindi la parabola $2p(x) = -2x^2 + 4x + 8$ per $0 \le x \le 2$: il vertice sarà $V(1;10)$ e avremo per $x = 0 \to 2p = 8$ e per $x = 2 \to 2p = 8$.

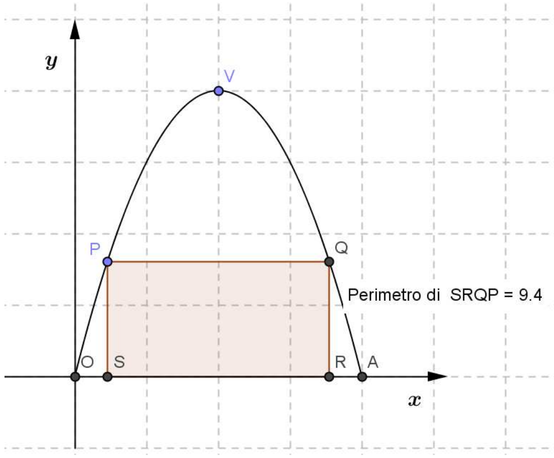


Quindi :

- il perimetro minimo sarà 8 quando $x = 0$ cioè quando $P \equiv O$ e quando $x = 2$ cioè quando $P \equiv V$;
- il perimetro massimo sarà 10 e si avrà per $x = 1$ cioè quando $P(1;3)$.

E' anche chiaro che fissando un valore del perimetro compreso tra 8 e 10 si avranno sempre due diversi rettangoli con quel perimetro.





ESERCIZI

I) Disegna le seguenti parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y e determinane fuoco e direttrice:

1) $y = x^2 - 2x$ [$V(1;-1)$ $F\left(1;-\frac{3}{4}\right)$ $d: y = -\frac{5}{4}$]

2) $y = x^2 - 4x + 4$ [$V(2;0)$ $F\left(2;\frac{1}{4}\right)$ $d: y = -\frac{1}{4}$]

3) $y = 1 - x^2$ [$V(0;1)$ $F\left(0;\frac{3}{4}\right)$ $d: y = \frac{5}{4}$]

4) $y = x - 2x^2$ [$V\left(\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right)$ $F\left(\frac{1}{4};0\right)$ $d: y = \frac{1}{4}$]

5) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ [$V\left(3;-\frac{9}{2}\right)$ $F(3;-4)$ $d: y = -5$]

6) $y = 4 - x^2$ [$V(0;4)$ $F\left(0;\frac{15}{4}\right)$ $d: y = \frac{17}{4}$]

7) $y = x^2 + 1$ [$V(0;1)$ $F\left(0;\frac{5}{4}\right)$ $d: y = \frac{3}{4}$]

8) $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ [$V(2;-1)$ $F(2;0)$ $d: y = -2$]

9) $y = -x^2 - 1$ [$V(0;-1)$ $F\left(0;-\frac{5}{4}\right)$ $d: y = -\frac{3}{4}$]

10) $y = 2x^2 - 4$ [$V(0;-4)$ $F\left(0;-\frac{31}{8}\right)$ $d: y = -\frac{33}{8}$]

II) Determina l'equazione della parabola avente:

11) $F(0;0)$ $d: y=-2$ $[\,y=\frac{1}{4}x^2-1]$

12) $F(2;2)$ $d: y=3$ $[\,y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}]$

13) $F(0;1)$ $V(0;-1)$ $[\,y=\frac{1}{8}x^2-1]$

14) $V(3;0)$ $d: y=-3$ $[\,y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}]$

15) Asse parallelo asse y, $V(1;1)$, passante per $P(3;2)$ $[\,y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}]$

16) Asse parallelo asse y, passante per $A(1;0)$ $B(3;0)$ $C(4;3)$ $[\,y=x^2-4x+3]$

17) Asse parallelo asse y, passante per $A\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ $B(0;-1)$ $C\left(1;-\frac{5}{2}\right)$ $[\,y=\frac{1}{2}x^2-2x-1]$

18) Asse di simmetria parallelo asse y, $F(0;0)$, passante per $A(2;0)$

$[\,y=\frac{1}{4}x^2-1\ ;\ \ y=-\frac{1}{4}x^2+1\,]$

19) Direttrice $d: y=0$, passante per $A(0;2)$ e $B(2;1)$

$[\,y=\frac{1}{4}x^2-x+2\ ;\ \ y=\frac{5}{4}x^2-3x+2\,]$

20) Direttrice $d: y=\frac{3}{4}$,passante per $A(0;2)$ e $B(3;5)$

$[\,y=x^2-2x+2\ ;\ \ y=\frac{2}{9}x^2+\frac{1}{3}x+2\,]$

21) Direttrice $d: y=-\frac{5}{4}$, passante per $A(0;0)$ e $B(3;3)$

$[\,y=x^2-2x\ ;\ \ y=\frac{2}{9}x^2+\frac{1}{3}x\,]$

22) Direttrice $d: y=-1$, passante per $A(1;0)$ e $B(3;1)$

$[\,y=\frac{1}{4}(x-1)^2\ ;\ \ y=\frac{5}{4}\left(x-\frac{9}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\,]$

23) Direttrice $d: y=0$,passante per $A(-1;1)$ e $B(1;1)$ $[\,y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\,]$

24) Asse di simmetria parallelo asse y, $F(0;1)$,passante per $P(0;2)$ $[\,y=-\frac{1}{4}x^2+2\,]$

III) Disegna le seguenti parabole con asse di simmetria parallelo all'asse x e determinane fuoco e direttrice:

25) $x = y^2 - 3y + 2$ $\qquad [V\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right) \quad F\left(0;\frac{3}{2}\right) \quad d: x = -\frac{1}{2}]$

26) $x = 4 - y^2$ $\qquad [V(4;0) \quad ; \quad F\left(\frac{15}{4};0\right) \quad d: x = \frac{17}{4}]$

27) $x = \frac{1}{4}y^2 + y$ $\qquad [V(-1;-2)\,;F(0;-2) \quad d: x = -2]$

28) $x = -\frac{1}{2}y^2 + 2$ $\qquad [V(2;0) \; ; \; F\left(\frac{3}{2};0\right) \quad d: x = \frac{5}{2}]$

29) $x = y^2 + 1$ $\qquad [V(1;0)\,; \quad F\left(\frac{5}{4};0)\right) \quad d: x = \frac{3}{4}]$

IV) Determina l'equazione della parabola avente:

30) $F(1;0) \quad d: x = 0$ $\qquad [x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}]$

31) $F(0;0) \quad V(2;0)$ $\qquad [x = -\frac{1}{8}y^2 + 2]$

32) $V(-1;1) \quad d: x = 1$ $\qquad [x = -\frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{9}{8}]$

33) Asse parallelo asse x , $V(0;0)$, passante per $P(-2;1)$ $\qquad [x = -2y^2]$

34) Asse parallelo asse x , passante per $A(0;0)$ $B(2;1)$ $C(1;2)$ $\qquad [x = -\frac{3}{2}y^2 + \frac{7}{2}y]$

35) Asse di simmetria parallelo asse x, $F(0;1)$, passante per $A(0;2)$

$[x = -\frac{1}{2}y^2 + y \; ; \; x = \frac{1}{2}y^2 - y]$

V) Problemi vari

36) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $y = x^2 - 2x$ e determina l'equazione della tangente t a $\mathcal{P}$ in (0;0) e le equazioni delle tangenti $t_{1,2}$ uscenti dal punto P(3;-1).

[$t : y = -2x \,; t_1 : y = -1 , t_2 : y = 8x - 25$]

37) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $x = 4 - y^2$ e determina le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione con l'asse y.

[$y = -\frac{1}{4}x + 2$; $y = \frac{1}{4}x - 2$]

38) Disegna la parabola $\mathcal{P}$: $x = y^2 + 1$ e determina le equazioni delle tangenti uscenti dall'origine.

[$y = \pm\frac{1}{2}x$]

39) Determina l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse di simmetria parallelo all'asse y , tangente in T(-1;0) alla retta $t : y = 2x + 2$ e passante per A(2;-3).

[$y = 1 - x^2$]

40) Determina l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse di simmetria parallelo all'asse x , tangente in T(0;0) alla retta $t : y = x$ e passante per A(3;2).

[$x = \frac{1}{4}y^2 + y$]

41) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti alla retta $t : 2x + y + 1 = 0$ e passanti per A(0;0) e B(1;1).

[$y = x^2$; $y = 9x^2 - 8x$]

42) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse x, tangenti alla retta $t : x + 2y + 2 = 0$ e passanti per A(0;0) e B(2;2).

[$x = \frac{1}{2}y^2$; $x = \frac{9}{2}y^2 - 8y$]

VI) Parabola e fasci di rette

43) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x + k \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$ [1 sol. $-1 \le k < 1$; 2 sol. $1 \le k \le \frac{5}{4}$]

44) $\begin{cases} x = y^2 + 1 \\ y = x + k \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ [2 sol. $-1 \le k \le -\frac{3}{4}$]

45) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = -x + k \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ [1 sol. $0 \le k < 2$; 2 sol. $2 \le k \le \frac{9}{4}$]

46) $\begin{cases} y = x^2 - 5x \\ k(3x - 2y) + x - 2 = 0 \\ 0 \le x \le 5 \end{cases}$ [1 sol. $k \ge -\frac{1}{5}$]

47) $\begin{cases} x = -y^2 + 1 \\ k(x + y - 2) + y = 0 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$

[1sol.$-\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$;2sol.$\frac{2}{3} \le k \le 1 \cup k = -\frac{1}{3}$]

48) $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ kx + y - 2(k+1) = 0 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$ [1 sol. $k \le -1 \cup k \ge 1$]

49) $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + k \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ [1 sol. $-2 < k \le 0$,2 sol. $-\frac{9}{4} \le k \le -2$]

VII) Esercizi di ricapitolazione

50) Determina l'equazione della parabola avente fuoco $F(0;\frac{1}{2})$ e direttrice d: $y=-\frac{1}{2}$ .Disegnala, indica con V il suo vertice e sia A il suo punto di ascissa x =1. Determina l'equazione della tangente t alla parabola in A e , detta B l'intersezione di t con la direttrice d , determina l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABV}$.

[$y=\frac{1}{2}x^2$; $y=x-\frac{1}{2}$; $area(\overset{\Delta}{ABV})=\frac{1}{4}$]

51) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y tangente in T(0;-3) alla retta 4x-y-3=0 e passante per A(-5;2). Disegnala ed indica con V il suo vertice. Determina per quali valori di k le rette del fascio $F: y=2x+k$ intersecano l'arco $\overset{\frown}{VT}$ della parabola e in quanti punti.

[$y=x^2+4x-3$; 2 intersezioni $-4\le k\le -3$]

52) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all' asse x aventi come direttrice l'asse y e passanti per i punti A(-5;-2) e B(-5;6). Disegnale. Detta ***P*** la parabola avente il vertice di ascissa maggiore, determina per quali valori di k le rette del fascio $F: ky-x-2(k+3)=0$ intersecano, e in quanti punti, l'arco $\overset{\frown}{AB}$ di ***P***.

[$x=-\frac{1}{4}(y-2)^2-1$; $x=-\frac{1}{16}(y-2)^2-4$;1 inter. $k\le -\frac{1}{4}\cup k\ge \frac{1}{4}$]

53) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x avente vertice V(-1;1) e passante per A(3;3). Disegnala e detto B il punto della parabola simmetrico di A rispetto all'asse della parabola, determina un punto P appartenente all'arco $\overset{\frown}{VA}$ della parabola tale che area($\overset{\Delta}{VPB}$) = 3.

[$x=y^2-2y$; P(0;2)]

54) Determina l'equazione della parabola avente fuoco $F(0;1)$ e direttrice d: $y=3$. Disegnala, indica con V il suo vertice e sia P il suo punto di ascissa x = 2. Determina l'equazione della tangente t alla parabola in P.

[$y=-\frac{1}{4}x^2+2$ $y=-x+3$]

55) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y tangente in T(0;2) alla retta 2x+y-2=0 e passante per A(6;8). Disegnala ed indica con V il suo vertice. Determina l'area del triangolo $\hat{TVA}$.

[$y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$; $area(\overset{\Delta}{TVA})=12$]

56) Determina le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse x aventi come fuoco F(0;0) e passanti per il punto A($-\frac{3}{2}$;2). Disegnale.

[$x=\frac{1}{8}y^2-2$; $x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}$]

57) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x avente vertice V(-1;0) e passante per A(8;3). Disegnala e determina per quali valori di k le rette del fascio $F: y=\frac{1}{3}x+k$ intersecano l'arco $\overset{\frown}{VA}$ della parabola e in quanti punti. Per quale punto P $\in \overset{\frown}{VA}$ il triangolo $\overset{\Delta}{VPA}$ ha area massima?

[$x=y^2-1$; 2 inters. $\frac{1}{3}\le k\le\frac{13}{12}$; $P(\frac{5}{4};\frac{3}{2})$]

58) Disegna la parabola di equazione $y=2x-\frac{1}{3}x^2$ e indica con A e B i suoi punti di intersezione con l'asse x. Determina la retta parallela all'asse x che interseca l'arco $\overset{\frown}{AB}$ della parabola in C e D tali che, detti C' e D' le proiezioni ortogonali di C e D sull'asse x, si abbia $2p(CC'D'D)=\frac{34}{3}$.

[$y=\frac{5}{3}$]

VIII)Problemi di massimo e minimo

59) Dato un rettangolo ABCD avente $\overline{AB}=10a$ e $\overline{BC}=6a$,considera A', B', C', D' tali che $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}$. Come varia l'area del parallelogramma A'B'C'D' ?

[$A_{\min}=28a^2$, $A_{\max}=60a^2$]

60) Dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ avente perimetro $2p=16a$ e base $\overline{AB}=6a$,considera un punto P appartenente al lato AC e, tracciata per P la parallela alla base AB che interseca in Q il lato BC, studia l' $area(\overset{\Delta}{PQH})$, dove H è il punto medio di AB.

[$A_{\min}=0$, $A_{\max}=3a^2$]

61) Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ avente cateti $\overline{AB}=4a$ e $\overline{AC}=3a$, considera P appartenente ad AC e tracciata la parallela per P ad AB e detto Q il punto di intersezione con BC, studia l' $area(APQR)$ dove R è la proiezione ortogonale di Q su AB.

[$A_{\min}=0$, $A_{\max}=3a^2$]

62) Dato il triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ avente $2p = 36a$ e base $\overline{AB} = 10a$ considera un rettangolo PQRS inscritto in esso, con PQ parallelo ad AB e RS sulla base AB, e studia l' $area(PQRS)$.

[$A_{\min} = 0, \quad A_{\max} = 30a^2$]

63) Dato il trapezio rettangolo ABCD avente altezza $\overline{AD} = 4a$, base minore $\overline{CD} = 4a$ e lato obliquo $\overline{CB} = 5a$, considera un punto P sul lato obliquo e, tracciata la perpendicolare per P a BC e detto Q il punto di intersezione con AB, studia l' $area(\overset{\Delta}{PQB})$.

[$A_{\min} = 0, \quad A_{\max} = \frac{50}{3}a^2$]

64) Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto dall'altezza di 1 metro da terra con velocità iniziale $v_o = 10m/s$. Dopo quanto tempo raggiunge la massima altezza? Qual è la massima altezza raggiunta? (Considera l'accelerazione di gravità $g \cong 10m/s^2$)

[$1\,s$; $h_{\max} = 6m$]

65) Considera un triangolo ABC avente $C\hat{A}B = 60°, \quad A\hat{B}C = 30°, \quad \overline{AB} = 10$. Considera un punto P appartenente al lato AC e disegna il rettangolo PQRS "inscritto" nel triangolo ABC cioè avente PQ parallelo ad AB (Q appartenente al lato BC) e RS su AB . Qual è la massima area del rettangolo inscritto PQRS ?

[$A_{\max} = \frac{25}{4}\sqrt{3}$]

66) Sia ABCD un rombo di perimetro $20a$ e avente la diagonale maggiore $\overline{BD} = \frac{4}{3} \cdot \overline{AC}$.
Considera un rettangolo PQRS inscritto nel rombo. Qual è l'area massima di PQRS ?

[$A_{\max} = 12a^2$]

67) Considera un triangolo acutangolo ABC avente base $\overline{AB} = a$ e altezza $\overline{CH} = h$.
Considera il rettangolo PQRS inscritto nel triangolo (P appartenente al lato AC, Q appartenente al lato BC con PQ parallelo ad AB ed RS su AB): qual è il massimo valore dell'area di PQRS?

[$A_{\max} = \frac{ah}{4}$]

68) Una compagnia aerea decide di stabilire il prezzo di un biglietto di un volo nel modo seguente: 200 euro + 10 euro per ogni posto che resta libero. Sapendo che l'aereo dispone di 150 posti, quanti posti devono rimanere liberi perché la compagnia aerea ottenga il massimo ricavo? Quanto risulta il massimo ricavo?

[65; € 72250]

APPROFONDIMENTO

Il “fuoco” della parabola

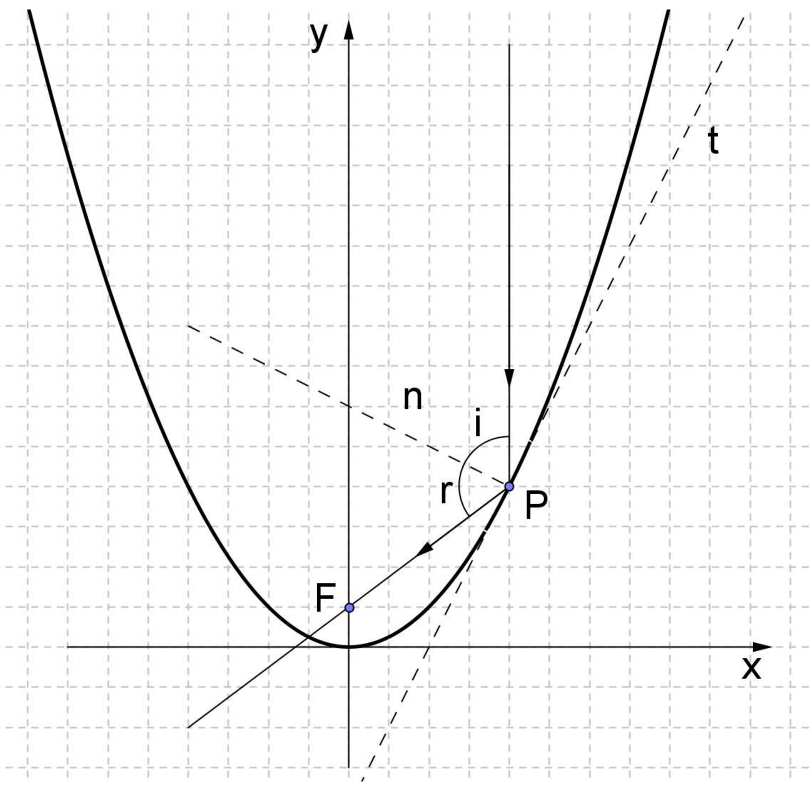
Perché il fuoco della parabola si chiama così?

Se consideriamo una qualunque retta *r* parallela all’asse di simmetria della parabola, indicato con P il suo punto di intersezione con la parabola, tracciata la tangente *t* in P alla parabola e la perpendicolare *n* alla tangente, l’angolo formato dalla retta *r* e *n* è uguale all’angolo formato tra *n* e la retta per P e F.

Se quindi immaginiamo che la retta *r* sia un raggio di luce “incidente” su uno specchio abbiamo che il raggio “riflesso” passa per il fuoco della parabola (per la legge della riflessione infatti l’angolo di incidenza è uguale all’angolo di riflessione): se abbiamo un fascio di raggi paralleli all’asse della parabola, tutti i raggi riflessi passeranno per il fuoco e quindi nel fuoco ci sarà concentrazione di luce e calore.

Verifichiamolo con un esempio.

Consideriamo $\mathcal{P}$: $y = x^2$, raggio incidente $x = 1 \rightarrow x - 1 = 0$, punto di incidenza $P(1;1)$.



Calcolato $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$ possiamo determinare la retta PF:

$$m_{PF} = \frac{3}{4} \to y-1 = \frac{3}{4}(x-1) \to 3x-4y+1=0.$$

Vogliamo vrificare che $\hat{i} = \hat{r}$ (vedi figura).

Troviamo innanzitutto l'equazione della normale e per farlo dobbiamo prima determinare il coefficiente angolare m_t della tangente t alla parabola in P(1;1).

$$\begin{cases} y-1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx-m+1 \\ x^2 = mx-m+1 \to x^2-mx+m-1=0 \end{cases}$$

Ponendo $\Delta = 0$ dell'equazione di secondo grado ottenuta abbiamo

$$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \Rightarrow m = 2$$

Quindi l'equazione della normale n sarà : $y-1 = -\frac{1}{2}(x-1) \to x+2y-3=0$.

Se $\hat{i} = \hat{r}$ allora n e t devono essere le bisettrici degli angoli formati dalla retta $x-1=0$ e dalla retta $3x-4y+1=0$.

Per determinare le equazioni delle bisettrici calcoliamo e uguagliamo la distanza dalle due rette di un generico punto P(x;y):

$$|x-1| = \frac{|3x-4y+1|}{5}$$

Quindi

$x-1 = \frac{3x-4y+1}{5} \to x+2y-3=0$ che è **l'equazione della retta** n

$x-1 = -\frac{(3x-4y+1)}{5} \to 2x-y-1=0$ retta t

Nota: questa proprietà vale anche se consideriamo onde elettromagnetiche in generale (infatti la luce è una particolare onda elettromagnetiche) e ci spiega perché le antenne che servono a raccogliere un segnale elettromagnetico hanno forma "parabolica": le onde riflesse si concentreranno nel fuoco dell'antenna!

Ellisse

Definizione

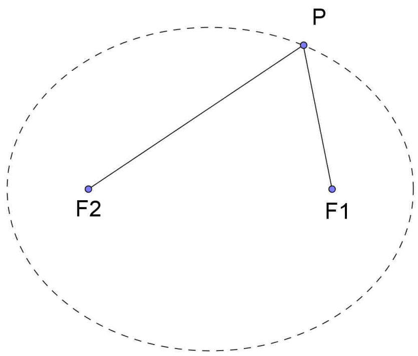
Dati due punti F_1 e F_2 si dice ellisse $\mathcal{E}$ il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la somma delle distanze da F_1 e F_2 cioè tali che

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante}$$

F_1 **e** F_2 **si dicono fuochi dell'ellisse.**

Osservazioni

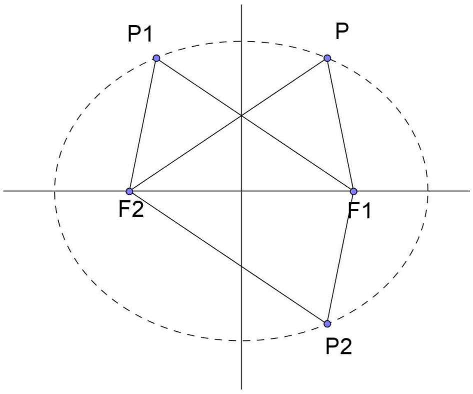
1) Dati F_1 e F_2 e il valore della costante (che deve maggiore di $\overline{F_1F_2}$) possiamo tracciare l'ellisse corrispondente in questo modo: prendiamo uno spago di lunghezza uguale alla costante assegnata e fissiamone le estremità ai due fuochi.
Tenendolo teso con un lapis, la punta del lapis scorrendo ci darà il disegno dell'ellisse.



$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} =$ lunghezza spago costante

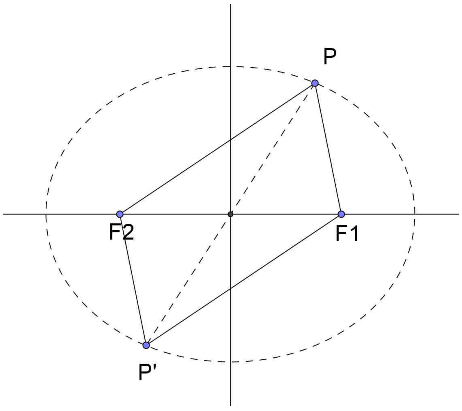
Vediamo quindi che l'ellisse è una curva chiusa, simile ad una circonferenza un po' schiacciata.

2) Osserviamo che l'ellisse possiede due assi di simmetria: la retta passante per F_1 e F_2 e l'asse del segmento F_1F_2.

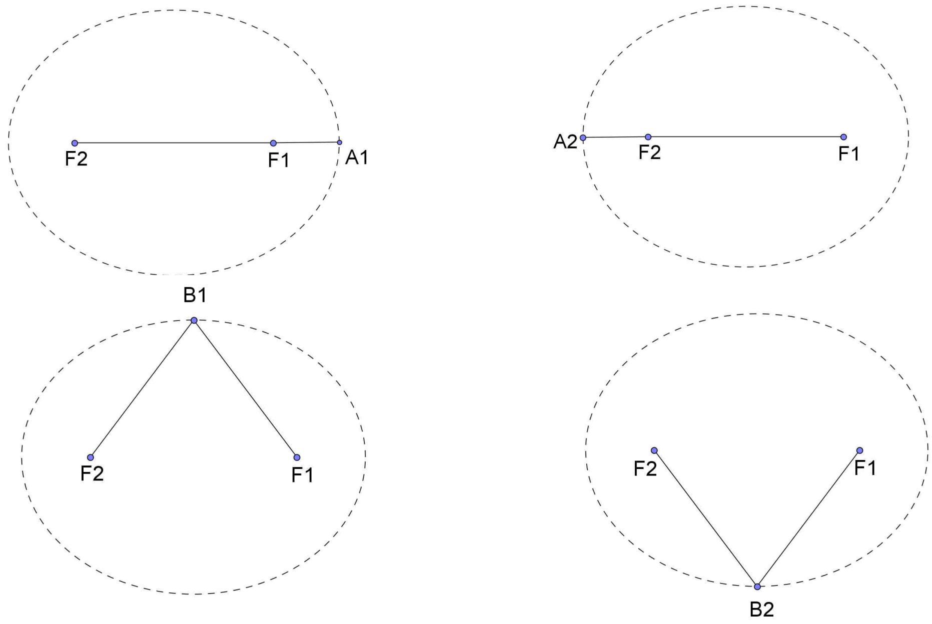


Infatti se P$\in \mathcal{E}$ anche P_1 (simmetrico di P rispetto all'asse di F_1F_2) e P_2 (simmetrico di P rispetto alla retta per F_1 e F_2) appartengono all'ellisse.

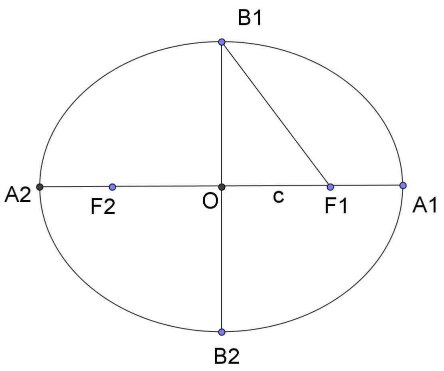
Inoltre il punto di incontro degli assi di simmetria è centro di simmetria dell'ellisse (cioè se P$\in \mathcal{E}$ anche P' $\in \mathcal{E}$) e viene chiamato "centro" dell'ellisse.



3) Osserviamo che, facendo scorrere il lapis, ci sono 4 posizioni "estreme" cioè quattro punti dell'ellisse che vengono chiamati "vertici" dell'ellisse.



Osserviamo che $\overline{A_1A_2}$ = lunghezza dello spago=costante e che risulta maggiore di $\overline{B_1B_2}$.



$\overline{A_1A_2}$ viene detto asse maggiore (contiene i fuochi)

$\overline{B_1\,B_2}$ viene detto asse minore

Osserviamo che, indicando con *c* la semidistanza focale, poiché $\overline{B_1F_1}$ = semiasse maggiore = B_1F_2 applicando il teorema di Pitagora al triangolo $O\overset{\Delta}{F_1}B_1$ abbiamo:

$$c^2 = (\text{ semiasse maggiore })^2 - (\text{ semiasse minore })^2$$

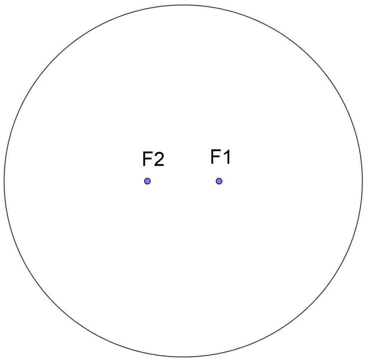
4) La "forma" più o meno schiacciata dell'ellisse dipende dal rapporto tra $\overline{F_1F_2}$ (distanza focale) e la costante assegnata.

Si definisce eccentricità *e* dell'ellisse $e = \dfrac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse maggiore}}$

Poiché la semidistanza focale è minore del semiasse maggiore si ha:

$$0 < e < 1$$

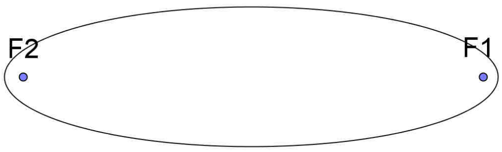
Se $\overline{F_1F_2}$ è molto minore della costante (cioè *c* molto minore del semiasse maggiore) si ottengono ellissi piuttosto "tonde" (simili ad una circonferenza) e l'eccentricità risulta molto vicina a 0.



Caso limite $e = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow F_1 \equiv F_2$

Si ha una circonferenza

Se $\overline{F_1F_2}$ è molto vicino (anche se minore) al valore della costante si hanno ellissi "schiacciate" e l'eccentricità è vicina a 1.



Caso limite
$e = 1 \Leftrightarrow c = semiasse.maggiore \Rightarrow$
semiasse minore = 0

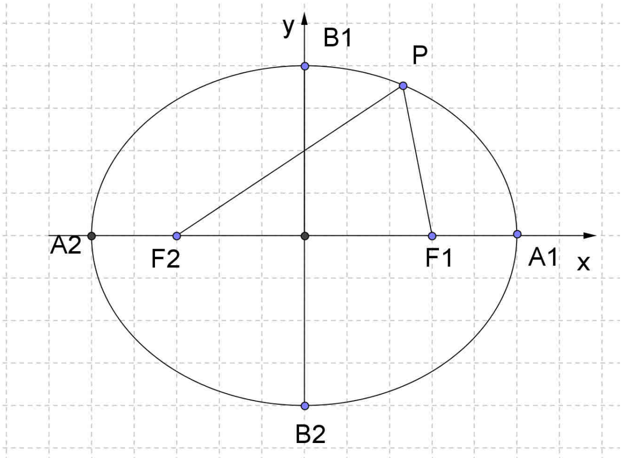
Si ha il segmento F_1F_2.

L'ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

L'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano dipenderà da come si fissa il sistema di riferimento. Cominciamo con il caso più semplice in cui gli assi di simmetria dell'ellisse coincidono con gli assi coordinati.

Ellisse con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati

a) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse x (quindi l'asse maggiore di $\mathcal{E}$ è sull'asse x).
Facciamo un esempio:



$F_1(3;0)$
$F_2(-3;0)$

costante = asse maggiore =10

Possiamo disegnare l'ellisse poiché sapendo che

$$c^2 = (\text{ semiasse maggiore })^2 - (\text{ semiasse minore })^2$$

otteniamo che semiasse minore = 4.

Per ricavare l'equazione di $\mathcal{E}$ impostiamo la definizione:

$$P(x;y)\ :\ \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 100 - 20 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$$

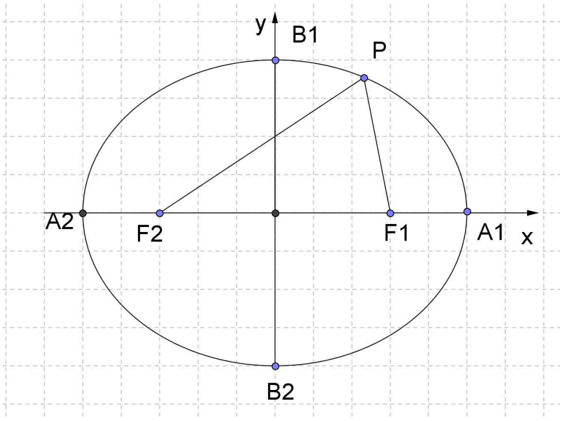
$$20 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 100 + 12x \Rightarrow 5 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25[(x+3)^2 + y^2] = (25+3x)^2 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Dividendo entrambi i membri per 400 abbiamo: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Generalizziamo: consideriamo $F_{1,2}(\pm c;0)$ e indichiamo con a e b i due semiassi.

Nel nostro caso $a > b$ poiché i fuochi si trovano sull'asse x.



$F_{1,2}\ (\pm c\ ;0)$

$A_{1,2}(\pm a;0)$

$B_{1,2}\ (0\ ;\ \pm\ b)$

$a > b$

$c^2 = a^2 - b^2$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$

$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$

$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$

$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + c^2x^2 + 2ca^2x$

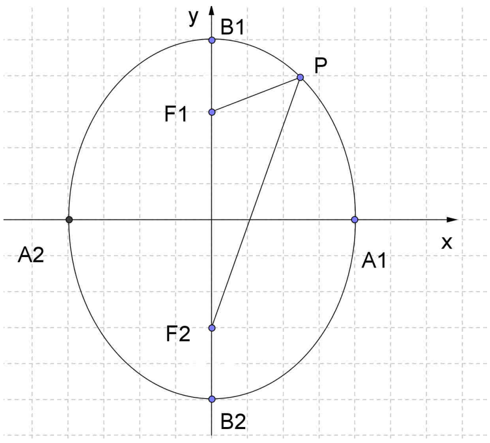
$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Ma $a^2 - c^2 = b^2$ e quindi: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividendo entrambi i membri per a^2b^2:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

b) Supponiamo che i fuochi si trovino sull'asse y : in questo caso l'asse maggiore dell'ellisse è $\overline{B_1B_2}$ cioè $b > a$ e $c^2 = b^2 - a^2$.



$F_{1,2}$ (0; $\pm c$)

$A_{1,2}$ ($\pm a$; 0)

$B_{1,2}$ (0; $\pm b$)

$b > a$

$c^2 = b^2 - a^2$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$$

Sviluppando in modo analogo a quanto fatto in a) otteniamo ancora $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avendo sostituito $b^2 - c^2 = a^2$).

In conclusione **l'equazione di un'ellisse i cui assi di simmetria coincidono con gli assi coordinati** risulta

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

dove a e b sono i semiassi dell'ellisse

se $a > b$ allora i fuochi $F_{1,2}$ ($\pm c$; 0) appartengono all'asse x ($c^2 = a^2 - b^2$)

se $b > a$ allora i fuochi $F_{1,2}$ (0; $\pm c$) appartengono all'asse y ($c^2 = b^2 - a^2$)

Poiché l'eccentricità $e = \frac{c}{semiasse.maggiore}$ nel caso in cui

$a > b \Rightarrow e = \frac{c}{a}$

$b > a \Rightarrow e = \frac{c}{b}$

Problemi sull'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria

1) **Disegnare un'ellisse di equazione assegnata**

Per disegnare un'ellisse occorre conoscere i suoi semiassi. Se l'equazione è data nella forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ è molto semplice risalire ad a e b .

Esempio: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad a=5 \quad b=4$

Se l'equazione non si presenta nella forma "normale" possiamo fare dei passaggi per riportarcela.

Esempio: $x^2+16y^2=16 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+y^2=1 \Rightarrow a=4 \quad b=1$

Esempio: $4x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \quad b=1$

Esempio: $9x^2+4y^2=16 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a=\frac{4}{3} \quad b=2$

2) **Determinare l'equazione di un'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria**

Basterà determinare a e b e quindi occorreranno due condizioni (indipendenti). Vediamo alcuni casi.

a) *Passaggio dell'ellisse per due punti (non simmetrici rispetto all'asse x o all'asse y o all'origine)*

Esempio: $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right) \quad P_2\left(-\frac{1}{2};-\sqrt{3}\right)$

Sostituendo P_1 nell'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e analogamente P_2 abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{\frac{3}{4}}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{\frac{1}{4}}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}b^2+a^2=a^2b^2 \\ \frac{1}{4}b^2+3a^2=a^2b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}b^2+a^2=\frac{1}{4}b^2+3a^2 \\ ..... \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4}b^2 \\ \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^4 \to b^2 = \frac{1}{4}b^4 \to b^2 = 4 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{E}: \; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

b*) Conoscenza di un fuoco e di un vertice*

Esempio: $F_1(2;0) \quad A_1(3;0)$

Quindi $c = 2 \quad a = 3$ e poiché i fuochi appartengono all'asse x $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

c) *Conoscenza di un fuoco e dell'eccentricità*

Esempio: $F_1(3;0) \quad e = \frac{1}{2}$

Poiché $F_1 \in$ asse x $e = \frac{c}{a}$ e quindi $\frac{1}{2} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 6$.

Inoltre $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$ e quindi $\mathcal{E}: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

d) *Conoscenza di un vertice e dell'eccentricità*

Esempio: $A_1(4;0) \quad e = \frac{1}{2}$

Sappiamo quindi che $a = 4$ ma non sappiamo dove si trovano i fuochi e quindi si possono avere due casi (due diverse ellissi che soddisfano le condizioni):

se $a > b \Rightarrow e = \frac{c}{a}$ e $\frac{1}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 2$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$ e abbiamo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

se $a < b \Rightarrow e = \frac{c}{b}$ e $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{c}{b} \to c = \frac{b}{2} \\ c^2 = b^2 - a^2 \to c^2 = b^2 - 16 \end{cases}$

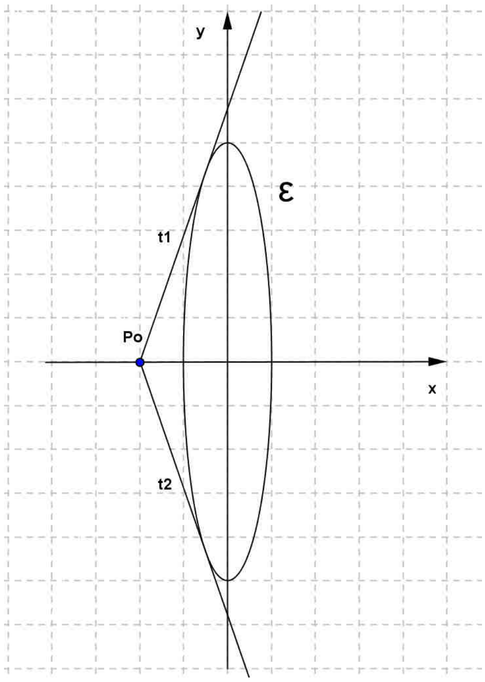
e risolvendo abbiamo $b^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{64}{3}} = 1$

Rette tangenti ad un'ellisse

Consideriamo un'ellisse $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e un punto $P_o(x_o; y_o)$ assegnato.

a) **Se** P_o **non appartiene all'ellisse** ed è esterno all'ellisse esisteranno due rette tangenti a $\mathcal{E}$ uscenti da P_o.

Per determinarle basterà procedere come al solito considerando il fascio di rette per P_o e imponendo la condizione di tangenza.



Esempio: $\mathcal{E}: x^2+\frac{y^2}{25}=1 \quad P_o(-2;0)$

$$\begin{cases} y=m(x+2) \\ x^2+\frac{y^2}{25}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=m(x+2) \\ 25x^2+m^2(x+2)^2=25 \end{cases}$$

E sviluppando la seconda equazione abbiamo:

$(25+m^2)x^2+4m^2x+4m^2-25=0$

$\frac{\Delta}{4}=4m^4-(25+m^2)\cdot(4m^2-25)=0$ (condizione di tangenza)

…….

$m^2=\frac{25}{3} \Rightarrow m_{1,2}=\pm\frac{5}{\sqrt{3}}$

$$t_{1,2}: y=\pm\frac{5}{\sqrt{3}}(x+2) \quad \text{equazioni delle tangenti}$$

b) **Se** P_o **appartiene all'ellisse** ci sarà una sola tangente.
Per determinarla possiamo procedere come in a) ma possiamo dimostrare che la retta tangente t avrà equazione

$$t: \frac{x_o x}{a^2}+\frac{y_o y}{b^2}=1$$

Questa formula viene detta "**formula dello sdoppiamento**".

Per dimostrarla potremmo procedere in modo analogo al caso precedente impostando cioè un sistema tra la retta generica passante per P_o e poi sfruttare l'appartenenza del punto all'ellisse ma possiamo anche pensare di ottenere l'ellisse trasformando una circonferenza di centro l'origine e raggio 1 con la trasformazione

$$\begin{cases} x' = a \cdot x \\ y' = b \cdot y \end{cases}$$

Infatti sostituendo nell'equazione della circonferenza $C : x^2 + y^2 = 1$ otteniamo proprio

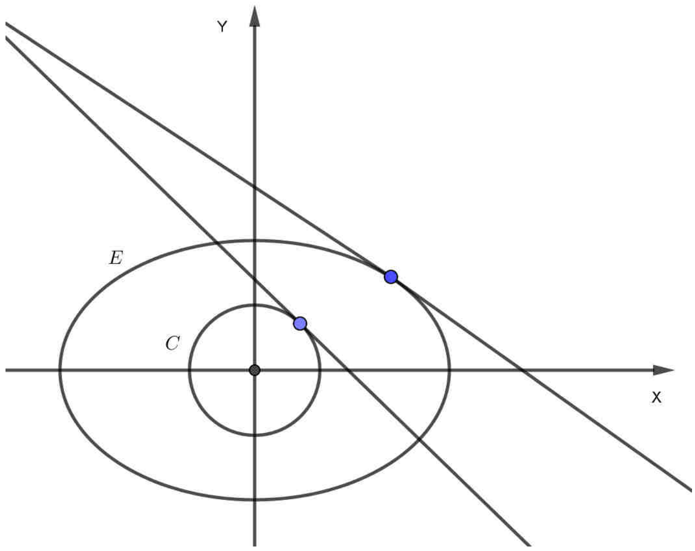
$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

cioè l'ellisse di semiassi a e b.

Possiamo trovare l'equazione della tangente alla circonferenza in P_o sfruttando il fatto che la sua inclinazione è perpendicolare al raggio OP_o :

$$m = -\frac{x_o}{y_o} \rightarrow t : y - y_o = -\frac{x_o}{y_o}(x - x_o) \rightarrow y_o y - y_o^{\ 2} = -x_o x + x_o^{\ 2} \rightarrow x_o x + y_o y = x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2}$$

e poiché $P_o \in C \rightarrow x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2} = 1$ e in conclusione $\boxed{t : x_o x + y_o y = 1}$



A questo punto basta applicare la trasformazione alla tangente t per trovare la tangente all'ellisse nel suo punto $P_o'(x_o', y_o')$:

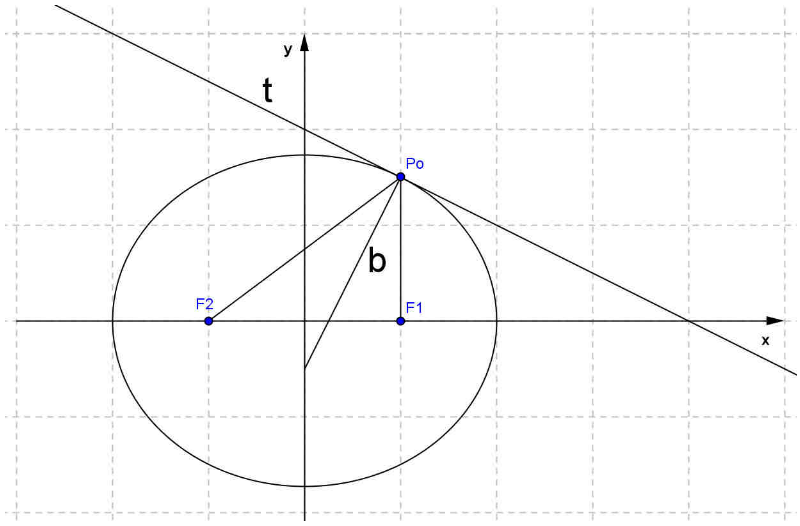
$$\frac{x_o'}{a} \cdot \frac{x'}{a} + \frac{y_o'}{b} \cdot \frac{y'}{b} = 1 \rightarrow \frac{x_o' x'}{a^2} + \frac{y_o' y'}{b^2} = 1$$

e quindi riscrivendo le coordinate dell'ellisse come x,y abbiamo che la tangente ad un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nel suo punto di coordinate $P_o(x_o, y_o)$ è

$$t : \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

Osservazione

Si può dimostrare che la tangente t in P_o all'ellisse è perpendicolare alla bisettrice b dell'angolo $F_1\hat{P_o}F_2$ .Vediamo solo un esempio:



$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$
$$F_{1,2}(\pm 1\ ;\ 0)$$
$$P_o\left(1;\frac{3}{2}\right)$$

Determiniamo le equazioni delle rette per F_1 e P_o e per F_2 e P_o:

$$r_{F_1P_o}: x=1 \rightarrow x-1=0$$
$$r_{F_2P_o}: y=\frac{3}{4}(x+1) \rightarrow 3x-4y+3=0$$

Determiniamo le bisettrici degli angoli formati da queste due rette: $|x-1|=\dfrac{|3x-4y+3|}{5}$

a) $\quad x-1=\dfrac{3x-4y+3}{5} \rightarrow .....y=-\dfrac{1}{2}x+2$

b) $\quad x-1=\dfrac{-3x+4y-3}{5} \rightarrow .....y=2x-\dfrac{1}{2}$ equazione di b

Ma applicando la formula dello sdoppiamento vediamo che la tangente t è proprio $y=-\dfrac{1}{2}x+2$:

$$\frac{x}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{y}{3}=1 \rightarrow ....y=-\frac{1}{2}x+2$$

Quindi t_{P_o} e $b_{F_1\hat{P_o}F_2}$ sono perpendicolari ($m_t=-\dfrac{1}{2}$; $m_b=2$).

Nota: da questa proprietà deriva la denominazione di fuochi data a F_1 e F_2.
Se infatti consideriamo uno specchio ellittico di fuochi F_1 e F_2 **ogni raggio luminoso incidente uscente da** F_1 **, tipo** F_1P_o**, avrà sempre come raggio riflesso un raggio passante per** F_2 cioè P_oF_2 : in questo modo infatti l'angolo di incidenza $\hat{i}$ sarà uguale all'angolo di riflessione $\hat{r}$.

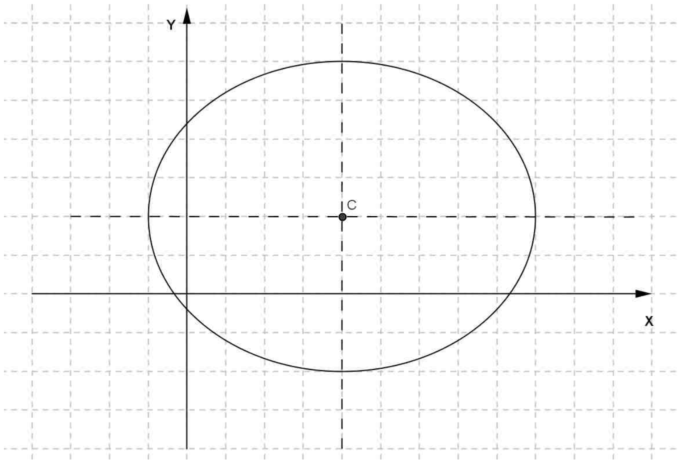
Ellisse con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati

Supponiamo che gli assi di simmetria dell'ellisse non coincidano con gli assi coordinati ma siano paralleli ad essi.
Se il centro dell'ellisse è $C(x_C; y_C)$ traslando il sistema di riferimento in modo da portare l'origine in C, l'equazione di $\mathcal{E}$ sarà:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

Ma poiché $\begin{cases} x' = x - x_C \\ y' = y - y_C \end{cases}$ avremo:

$$\mathcal{E} : \quad \frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1$$



Esempio

Determinare l'equazione dell'ellisse avente centro $C(4;2)$ (assi di simmetria sono $x=4$, $y=2$) sapendo che $a=5$; $b=4$.

L'equazione sarà

$$\mathcal{E} : \frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

Possiamo anche sviluppare e otteniamo:

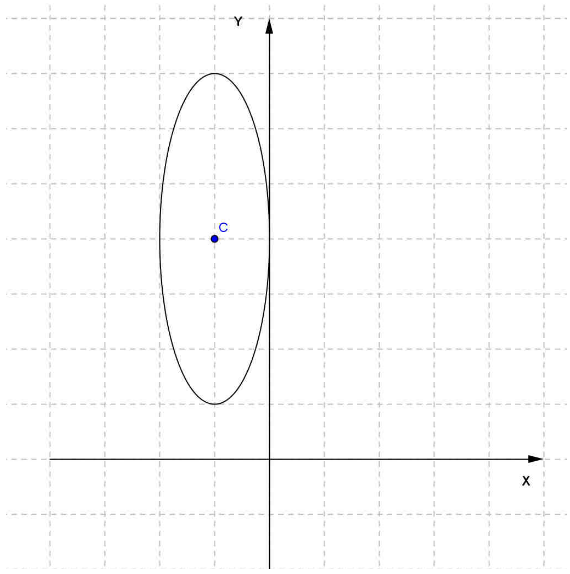
$16(x^2-8x+16)+25(y^2-4y+4)=400$
$16x^2+25y^2-128x-100y-44=0$

Problemi sull'ellisse
con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati

1) **Disegnare un'ellisse di equazione assegnata**

Se l'equazione è data nella forma $\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1$ è molto semplice.

Esempio: $\mathcal{E}$: $(x+1)^2+\frac{(y-4)^2}{9}=1$



$C(-1;4)$
$a=1$
$b=3$

Se invece l'equazione è stata "sviluppata" occorre riportarsi alla forma $\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1$ per riconoscere le coordinate del centro e i semiassi.

Esempio: : $\mathcal{E}$: $16x^2+25y^2-128x-100y-44=0$

Spostiamo il termine noto e mettiamo in evidenza in questo modo:

$$16(x^2-8x)+25(y^2-4y)=44$$

"Completiamo" i quadrati ,"bilanciando" dall'altra parte:

$$16(x^2-8x+16)+25(y^2-4y+4)=44+(16\cdot 16)+(25\cdot 4)$$

$$16(x-4)^2+25(y-2)^2=400$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

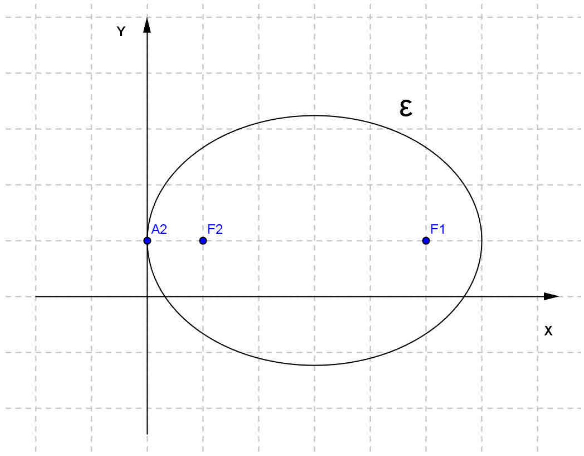
Quindi $C(4;2)$ $a=5$, $b=4$.

2) **Determinare l'equazione di un'ellisse con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati**

Basterà determinare il centro e i due semiassi. Facciamo solo qualche esempio.

a) *Conoscenza dei fuochi e di un vertice*

Esempio: $F_1(5;1)$ $F_2(1;1)$ $A_2(0;1)$



Si osserva che il centro dovrà essere C(3;1); inoltre $c = 2$ e $a = 3$.
Di conseguenza $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.
In conclusione possiamo scrivere:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

b) *Conoscenza dei fuochi e dell'eccentricità*

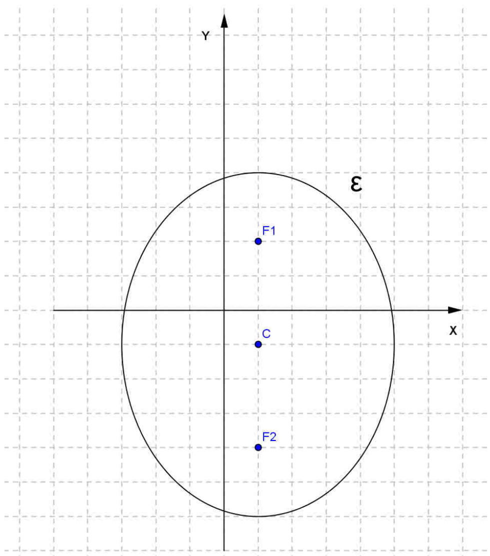
Esempio: $F_1(1;2)$ $F_2(1;-4)$ $e = \frac{3}{5}$

E' chiaro che C(1;-1) e $c = 3$.

Poiché in questo caso $e = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{3}{b} \Rightarrow b = 5$.

Di conseguenza $a^2 = b^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

e quindi $\mathcal{E}: \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

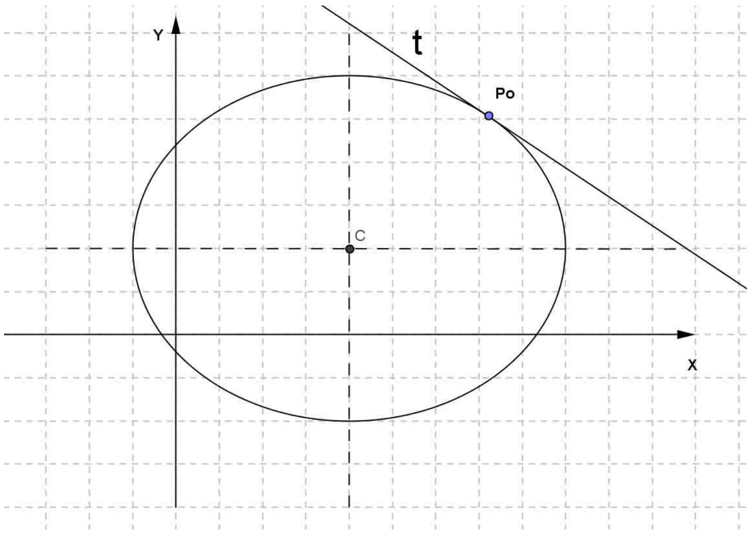


Rette tangenti ad un'ellisse con assi paralleli agli assi coordinati

Data l'ellisse $\mathcal{E}$: $\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1$ e un punto $P_o(x_o;y_o)$:

a) se $P_o \notin \mathcal{E}$ ed è "esterno" si determinano due rette tangenti come abbiamo già visto per l'ellisse con assi coincidenti con gli assi coordinati;
b) se $P_o \in \mathcal{E}$ possiamo applicare la formula dello "sdoppiamento" per determinare l'equazione della tangente considerando la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - x_C \\ y' = y - y_C \end{cases}$$



$$t : \frac{(x_o - x_C)\cdot(x-x_C)}{a^2}+\frac{(y_o-y_C)\cdot(y-y_C)}{b^2}=1$$

Esempio

Consideriamo $\mathcal{E}$: $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ e $P_o\left(7;\frac{26}{5}\right)\in \mathcal{E}$.

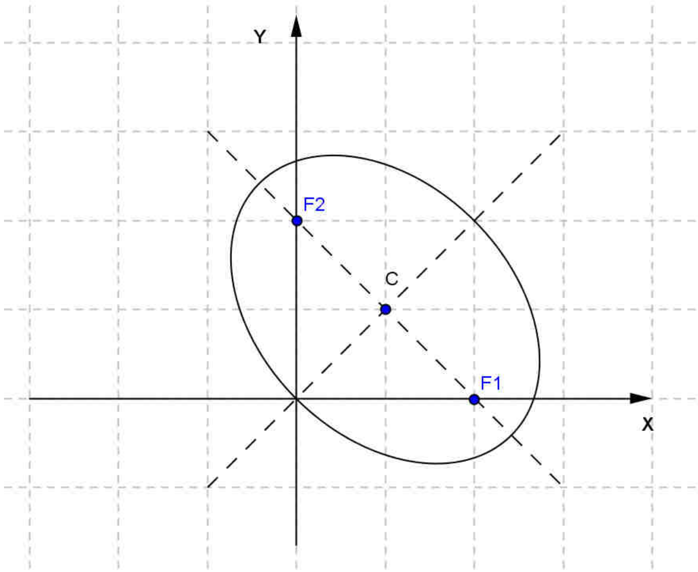
Applicando la formula dello sdoppiamento come abbiamo detto otteniamo:

$$t: \quad \frac{(7-4)\cdot(x-4)}{25}+\frac{\left(\frac{26}{5}-2\right)\cdot(y-2)}{16}=1$$

Svolgendo i calcoli: $\frac{3\cdot(x-4)}{25}+\frac{16}{5}\cdot\frac{(y-2)}{16}=1 \Rightarrow 3(x-4)+5(y-2)=25 \Rightarrow 3x+5y-47=0$

Ellisse con assi di simmetria non paralleli agli assi coordinati

Facciamo solo un esempio.
Determinare l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ avente fuochi $F_1(1;0)$ $F_2(0;1)$ e asse maggiore uguale a 2.



Applicando la definizione abbiamo:

$$P(x;y) \text{ tale che } \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2$$

Quindi: $$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2$$

E sviluppando i calcoli si può determinare l'equazione di $\mathcal{E}$.

Osserviamo, per disegnarla, che

$$C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \; c = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; a = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Gli assi di simmetria hanno equazione:

asse contenente i fuochi (asse maggiore): $y = -x + 1$

asse non contenente i fuochi (asse minore): $y = x$

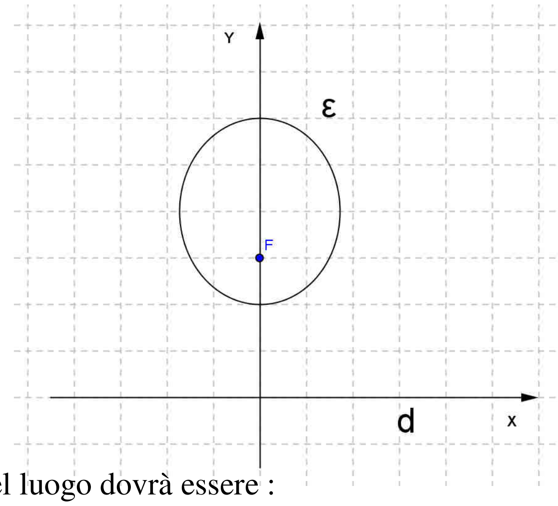
Un'altra definizione di ellisse

Proviamo a risolvere il seguente problema.
Data una retta d e un punto $F \notin d$ *, determinare il luogo geometrico dei punti P del piano tali che*

$$\frac{\overline{PF}}{dist(P,d)} = \frac{1}{2}$$

(*) Osserviamo che il luogo dei punti P tali che $\frac{\overline{PF}}{dist(P,d)} = 1$ è la parabola di fuoco F e direttrice *d.*

Fissiamo u sistema di riferimento, per esempio prendiamo come asse x la retta *d* e fissiamo l'asse y e l'unità di misura in modo tale che $F(0;1)$ (basta prendere come asse y la retta per F perpendicolare a *d*….).



Quindi se P(x;y) è un punto del luogo dovrà essere :

$$\overline{PF}^2 = \frac{1}{4}(dist(P, assex))^2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}y^2 .... \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{\left(y - \frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

Si tratta quindi di un'ellisse con centro $C\left(0; \frac{4}{3}\right)$ e semiassi $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $b = \frac{2}{3}$.

Inoltre essendo $c^2 = b^2 - a^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$. Quindi F è un fuoco dell'ellisse e l'eccentricità risulta $e = \frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

In generale infatti si può dimostrare che:

Data una retta d e un punto $F \notin d$ *, il luogo geometrico dei punti P del piano tali che*

$$\frac{\overline{PF}}{dist(P,d)} = e \text{ con } e \text{ costante } 0 < e < 1$$

risulta un'ellisse avente un fuoco in F ed eccentricità uguale ad e.

ESERCIZI

I) Disegna le seguenti ellissi e determina vertici e fuochi

1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ [$a=2$ $b=1$ $F_{1,2}(\pm\sqrt{3};0)$]

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ [$a=3$ $b=4$ $F_{1,2}\left(0;\pm\sqrt{7}\right)$]

3) $4x^2+9y^2=36$ [$a=3$ $b=2$ $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5};0\right)$]

4) $x^2+4y^2=1$ [$a=1$ $b=\frac{1}{2}$ $F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$]

5) $9x^2+4y^2=1$ [$a=\frac{1}{3}$ $b=\frac{1}{2}$ $F_{1,2}\left(0;\pm\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$]

6) $x^2+9y^2=36$ [$a=6$ $b=2$ $F_{1,2}\left(\pm4\sqrt{2};0\right)$]

7) $4x^2+y^2-16=0$ [$a=2$ $b=4$ $F_{1,2}\left(0;\pm2\sqrt{3}\right)$]

II) **Determina l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ avente assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati sapendo che:**

8) $A_1(3;0)$ $F_1(2;0)$ [$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$]

9) $B_2(0;-4)$ $F_1(3;0)$ [$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$]

10) $F_{1,2}(\pm 2;0)$ $e=\frac{1}{2}$ [$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$]

11) $F_{1,2}(0;\pm 3)$ $e=\frac{1}{3}$ [$\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{81}=1$]

12) $A_1(4;0)$ fuochi $\in$ asse x ed $e=\frac{1}{4}$ [$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$]

13) $A_1(1;0)$ fuochi $\in$ asse y ed $e=\frac{1}{2}$ [$x^2+\frac{3}{4}y^2=1$]

14) $F_1(3;0)$ e passante per $P\left(3;\frac{16}{5}\right)$ [$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$]

15) $B_1(0;2)$ e passante per $P\left(\frac{1}{2};\sqrt{3}\right)$ [$x^2+\frac{y^2}{4}=1$]

16) fuochi $\in$ asse x , $e=\frac{1}{2}$ e passante per $P\left(1;\frac{3}{2}\right)$ [$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$]

III) Rette tangenti ad un'ellisse

17) Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $\mathcal{E}: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ uscenti dal punto $P(3;0)$.
[$t_{1,2}: y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(x-3)$]

18) Determina l'equazione della tangente t all'ellisse $\mathcal{E}: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ nel suo punto $P\left(3;\frac{16}{5}\right)$.
[$t: 3x+5y-25=0$]

19) Determina l'equazione della tangente t all'ellisse $\mathcal{E}: x^2+4y^2=4$ nel suo punto $P\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
[$t: x+2\sqrt{3}y-4=0$]

20) Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $\mathcal{E}: 9x^2+y^2=9$ uscenti dal punto $P(0;4)$.
[$t_{1,2}: y=\pm\sqrt{7}x+4$]

IV) Esercizi di ricapitolazione

21) Determina l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ avente fuochi $F_1(1;2)$ $F_2(7;2)$ ed eccentricità $e=\frac{3}{5}$.
Determina inoltre l'equazione della retta tangente ad $\mathcal{E}$ in $P\left(1;\frac{26}{5}\right)$.
[$\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1 \quad t: 3x-5y+23=0$]

22) Determina equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ avente $B_1(0;0)$, $B_2(0;4)$, fuochi appartenenti all'asse y ed eccentricità $e=\frac{1}{2}$. Detto F_1 il fuoco di ordinata maggiore e A_1 e A_2 gli altri vertici, determina l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ passante per A_1, A_2, F_1.
[$\mathcal{E}: \frac{x^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$, $\mathcal{P}: y=-\frac{1}{3}x^2+3$]

23) Determina l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ avente $A_1(0;0)$ $A_2(6;0)$ e fuoco $F_1(3+\sqrt{5};0)$.
Determina inoltre per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}: y=\frac{2}{3}x+k$ intersecano $\mathcal{E}$.
[$\mathcal{E}: \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $-2-2\sqrt{2}\le k\le -2+2\sqrt{2}$]

24) Determina l'equazione dell'ellisse avente come assi di simmetria gli assi coordinati, passante per P(-3;3), avente i fuochi sull'asse x ed eccentricità $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Disegnala e determina i fuochi $F_{1,2}$. Determina l'equazione della tangente t in P all'ellisse ed indica con A il suo punto di intersezione con l'asse y. Calcola l'area di $P\overset{\Delta}{A}F_1$ dove F_1 è il fuoco di ascissa positiva.

$$[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1\,;t:x-3y+12=0\,;\ A(P\overset{\Delta}{A}F_1)=\sqrt{6}+6\ ]$$

25) Determina l'equazione dell'ellisse avente vertici $A_1(-4;-2)$ $A_2(4;-2)$ e passante per $P(\frac{16}{5};1)$. Disegnala e determina i fuochi $F_{1,2}$. Determina l'equazione della tangente in P all'ellisse e, detto F il suo punto di intersezione con l'asse y, determina l'equazione della parabola avente fuoco F e direttrice l'asse x. Disegna la parabola.

$$[\frac{x^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1\,;\ t:5x+3y-19=0\ ;\ y=\frac{3}{38}x^2+\frac{19}{6}\ ]$$

26) Determina l'equazione dell'ellisse avente come assi di simmetria gli assi coordinati, un vertice $A_1(2;0)$ e passante per il punto $P(-1;\frac{\sqrt{3}}{2})$. Disegnala e determinane i fuochi. Determina le tangenti all'ellisse uscenti da Q(-3;0).

$$[\frac{x^2}{4}+y^2=1\ ;\ F_{1,2}(\pm\sqrt{3};0)\ ;\ t_{1,2}:y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(x+3)\ ]$$

27) Determina l'equazione dell'ellisse avente fuochi $F_1(0;0)$ e $F_2(0;2)$ ed eccentricità $e=\frac{1}{3}$. Disegnala e determina le coordinate dei vertici. Determina l'equazione della tangente t nel punto P dell'ellisse di intersezione con l'asse x e avente ascissa maggiore. Verifica che la bisettrice dell'angolo F_1PF_2 è perpendicolare a t.

$$[\frac{x^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{9}=1\ ;\ A_{1,2}(\pm 2\sqrt{2};1)\qquad B_{1,2}(0;1\pm 3)\ \ t:3x-y-8=0\ ]$$

28) Disegna l'ellisse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ e trova per quali valori di k le rette del fascio $y=x+k$ intersecano l'ellisse e in quanti punti.

[2 intersezioni $-\sqrt{41}\le k\le\sqrt{41}$]

29) Disegna la curva di equazione $y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ e determina per quali valori di k le rette del fascio $y=\frac{1}{2}x+k$ intersecano la curva data e in quanti punti.

[1 intersezione $-1\leq k<1$; 2 intersezioni $1\leq k\leq\sqrt{2}$]

30) Data l'ellisse di equazione $4x^2+y^2-8x=0$ e detti $B_{1,2}$ i vertici sull'asse maggiore, determina l'equazione della circonferenza passante per O(0;0), B_1 e B_2.

[$x^2+y^2-5x=0$]

31) Determina l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi di simmetria avente fuoco $F_1(\frac{3}{2};0)$ e passante per $P(\frac{3}{2};4)$. Disegnala. Determina l'equazione della parabola avente fuoco F_1 e direttrice l'asse y.

[$\frac{4x^2}{81}+\frac{y^2}{18}=1$; $x=\frac{1}{3}y^2+\frac{3}{4}$]

32) Determina l'equazione dell'ellisse avente fuochi $F_1(0;0)$ e $F_2(0;4)$ ed eccentricità $e=\frac{1}{2}$. Dopo aver determinato l'ordinata del punto P di ascissa x=3 appartenente all'ellisse e nel primo quadrante, determina l'equazione della retta t tangente in P all'ellisse ed indica con Q il punto di intersezione di t con l'asse x. Detto P' il simmetrico di P rispetto al centro dell'ellisse, calcola l'area del triangolo $P\overset{\Delta}{Q}P'$.

[$\frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$, P(3;4); t: $2x+y-10=0$; $A(P\overset{\Delta}{Q}P')=16$]

33) Determina per quali valori di k le rette del fascio di equazione $kx-y-3k=0$ intersecano, e in quanti punti, l'ellisse di equazione $x^2+4y^2=4$.

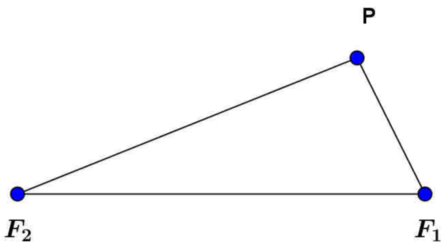
[2 intersezioni $-\frac{1}{\sqrt{5}}\leq k\leq\frac{1}{\sqrt{5}}$]

Iperbole

Definizione
Dati due punti F_1 e F_2 si dice iperbole $\Im$ il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da F_1 e F_2 cioè tali che

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = costante$$

F_1 e F_2 si dicono **fuochi** dell'iperbole.



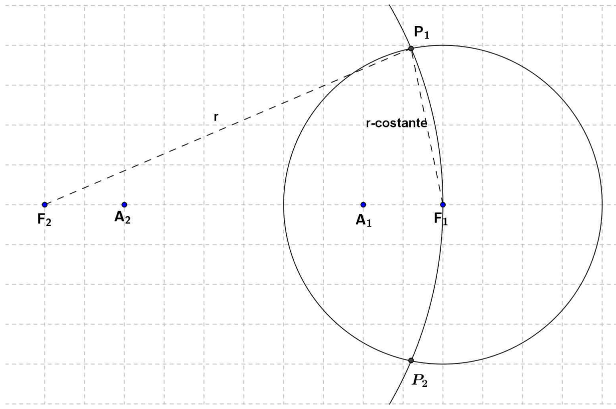
Osserviamo che deve essere $\overline{F_1F_2} > costante$ perché nel triangolo $F_1\overset{\Delta}{F_2}P$ si ha $\overline{F_1F_2} > \left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right|$ poiché un lato è sempre maggiore della differenza degli altri due.

Osservazioni

1) *Cerchiamo di capire come risulta un'iperbole.*

Consideriamo per esempio $\overline{F_1F_2} = 10$ e la $costante = 6$.

Per individuare qualche punto del luogo possiamo fare così : tracciamo una circonferenza di centro F_2 e raggio r (per esempio r =10) e la intersechiamo con la circonferenza di centro F_1 e raggio $r-$ *costante* (quindi di raggio 4). I punti P_1 e P_2 individuati appartengono all'iperbole poiché

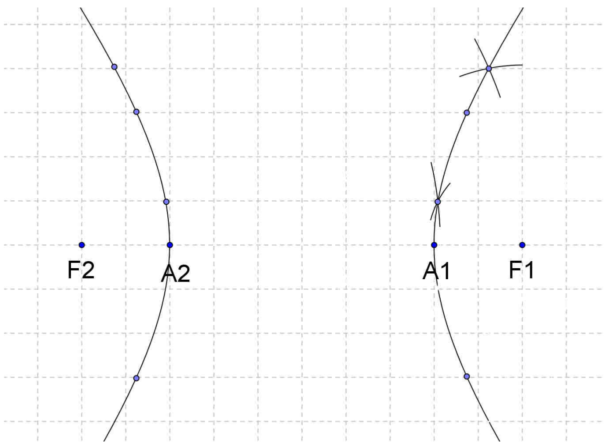


$$\overline{P_1F_2} - \overline{P_1F_1} = r - (r - costante) = costante$$

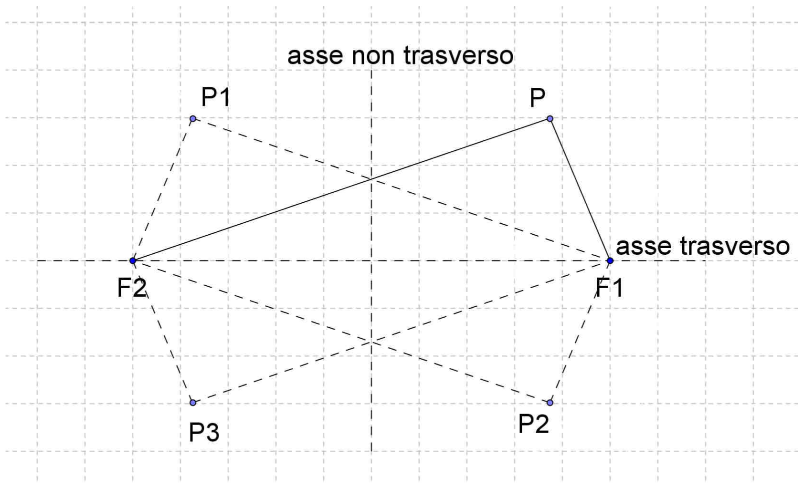
e analogamente per P_2.

Osserviamo poi che sul segmento F_1F_2 ci sono due punti A_1 e A_2 del luogo facilmente individuabili (vedi figura) e che $\overline{A_1A_2}$ = *costante* = 6: i punti A_1 e A_2 della curva sono detti "***vertici***"dell'iperbole.

Se determiniamo vari punti avremo una curva come nella seguente figura:



2) L'iperbole è simmetrica rispetto alla retta per F_1e F_2, che viene chiamata **"*asse trasverso*"** poiché interseca la curva, e all'asse del segmento F_1F_2 , che viene detto **"*asse non trasverso*"** perché non interseca la curva.
Naturalmente il punto di incontro dei due assi di simmetria risulta *centro di simmetria* dell'iperbole



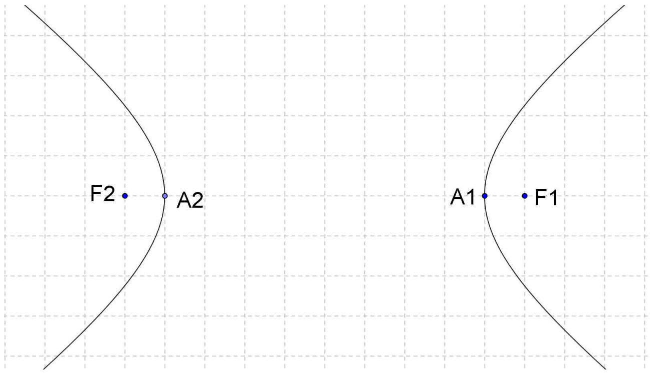
3) L'iperbole non è "limitata", come l'ellisse o la circonferenza, poiché ci sono punti della curva anche molto lontani dai fuochi dato che nella definizione del luogo è in gioco la differenza delle distanze da F_1 e F_2.

4) La"forma" dell'iperbole dipende dal rapporto tra $\overline{F_1F_2}$ e la costante.

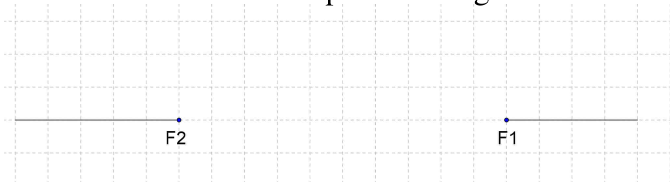
Questo rapporto viene chiamato **eccentricità** *e* dell'iperbole e risulta sempre maggiore di 1 dato che $\overline{F_1F_2} > costante$

$$e = \frac{\overline{F_1F_2}}{\cos\tan te} = \frac{\overline{F_1F_2}}{\overline{A_1A_2}}$$

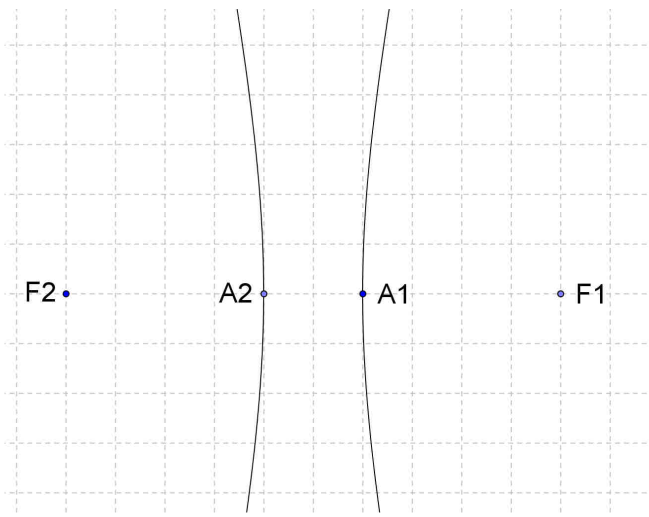
Se *e* è di poco maggiore di 1 (cioè se $\overline{F_1F_2}$ è di poco maggiore di A_1A_2) si hanno iperboli come nella figura seguente:



Nota: se $\overline{F_1F_2} = \overline{A_1A_2} = costante$ cioè se $e = 1$ l'iperbole "degenera" nelle due semirette in figura.



Se e è molto maggiore di 1 , cioè se $\overline{F_1F_2}$ è molto maggiore di $\overline{A_1A_2}$, si hanno iperboli come nella figura seguente:

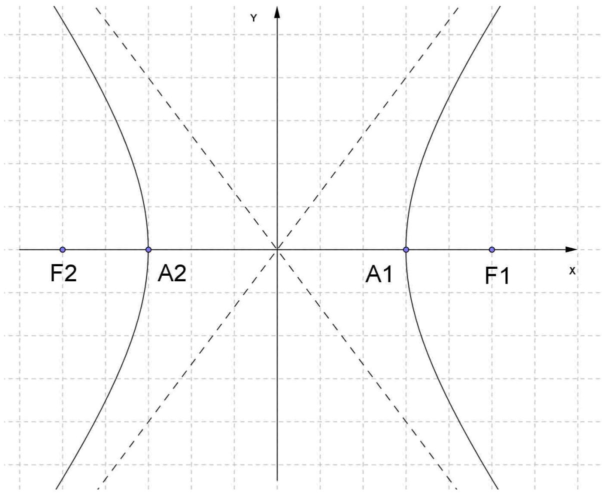


L'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

Iperbole con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che gli assi di simmetria dell'iperbole coincidano con gli assi coordinati.
Si possono presentare due casi: l'asse trasverso (quello su cui si trovano fuochi e vertici) è l'asse x oppure è l'asse y.

a) **Asse trasverso coincidente con l'asse x**
Determiniamo l'equazione dell'iperbole considerando per esempio $F_{1,2}(\pm 5;0)$ e la costante uguale a 6.



Se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 6$ cioè

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$(x-5)^2 + y^2 = (x+5)^2 + y^2 + 36 \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$20x + 36 = \pm 12 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$5x + 9 = \pm 3 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$25x^2 + 81 + 90x = 9(x^2 + 10x + 25 + y^2)$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

Dividendo entrambi i membri per 144 otteniamo:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Osserviamo che i vertici sono $A_{1,2}(\pm 3;0)$ e che per determinare le coordinate degli altri punti possiamo ricavare y:

$$y = \pm \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^2 - 9}$$

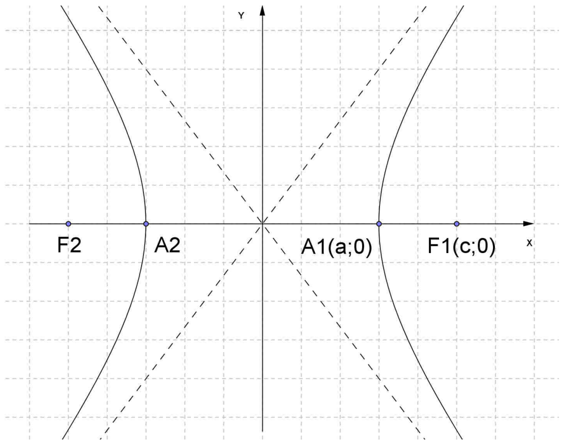
Osserviamo che quando si considera l'ascissa x molto grande in valore assoluto si ha :

$$\sqrt{x^2-9} \cong |x| \text{ e quindi } y = \pm\frac{4}{3}x$$

cioè l'iperbole tende ad avvicinarsi alle rette $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Queste rette sono dette "*asintoti*" dell'iperbole dal greco $\alpha - \sigma\upsilon\nu - \tau\alpha\nu\gamma o$ (non-insieme-tocco) perché l'iperbole, pur avvicinandosi molto a queste rette, non le interseca.

Generalizziamo: se indichiamo con $2c$ la distanza $\overline{F_1F_2}$ e con $2a$ la distanza $\overline{A_1A_2} = \cos\tan te$ avremo:



Se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ cioè

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$(x-c)^2+y^2 = (x+c)^2+y^2+4a^2 \pm 4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$4cx+4a^2 = \pm 4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$cx+a^2 = \pm a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$c^2x^2+a^4+2ca^2x = a^2\cdot(x^2+c^2+2cx+y^2)$$

$$(c^2-a^2)\cdot x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

Poiché $c > a$ $c^2-a^2 > 0$ e allora possiamo indicarlo come un quadrato cioè porre $c^2-a^2 = b^2$

Sostituendo abbiamo:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividendo entrambi i membri per a^2b^2 otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

equazione dell'iperbole con $F_{1,2}(\pm c;0)$ $A_{1,2}(\pm a;0)$ $b^2 = c^2-a^2$

eccentricità $e = \frac{c}{a}$

Per determinare l'equazione degli asintoti ricaviamo la y dall'equazione dell'iperbole.
Dopo alcuni semplici passaggi otteniamo:

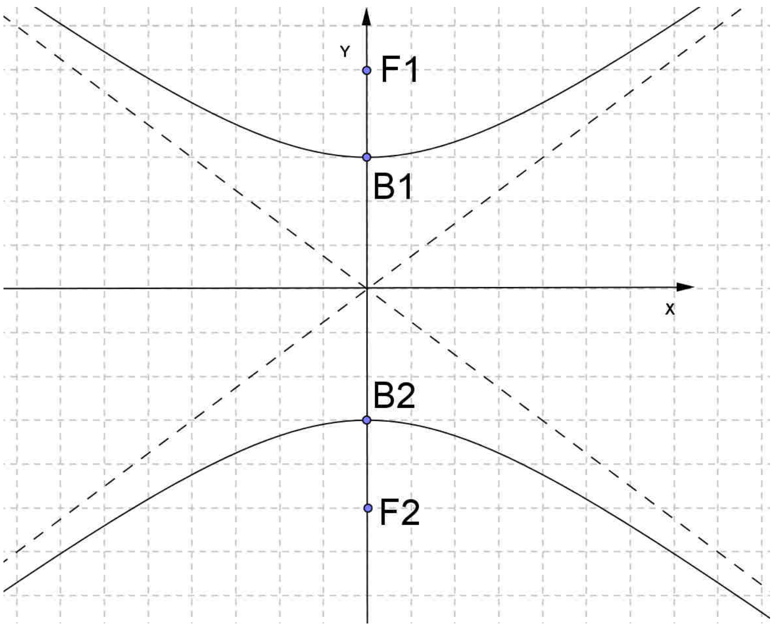
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Quindi se $|x|$ è grande $\sqrt{x^2 - a^2} \approx |x|$ e $y \approx \pm \frac{b}{a}x$ cioè gli asintoti hanno equazione

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

b) **Asse trasverso coincidente con l'asse y**

I vertici si trovano sull'asse y : se li indichiamo con $B_{1,2}(0;\pm b)$ avremo:



$F_{1,2}(0;\pm c)$
$B_{1,2}(0;\pm b)$
$c > b$

Se $P(x;y) \in \Im$ dovrà essere $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2b$ e sviluppando si ottiene , posto $c^2 - b^2 = a^2$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

equazione dell'iperbole con $F_{1,2}(0;\pm c)$ $B_{1,2}(0;\pm b)$ $a^2 = c^2 - b^2$

eccentricità $e = \frac{c}{b}$

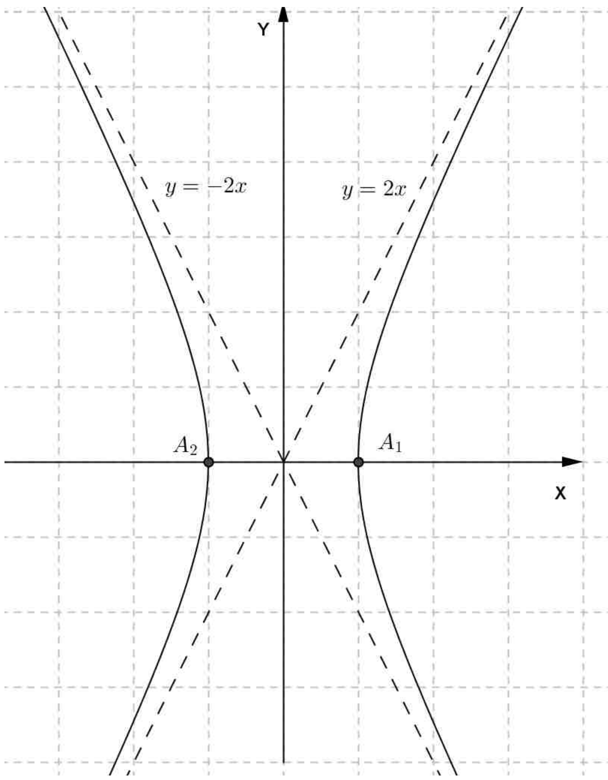
asintoti : $y = \pm \frac{b}{a}x$

Problemi

I) Disegnare un'iperbole di equazione assegnata

Per disegnare in modo "approssimato" un'iperbole disegniamo i vertici e gli asintoti.

Esempio : disegniamo l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.
Essendo $a = 1, \quad b = 2$ e asse trasverso l'asse x, abbiamo $A_{1,2}(\pm 1; 0)$, asintoti : $y = \pm 2x$.
Disegniamo la posizione dei vertici e tratteggiamo gli asintoti.
Infine disegniamo l'iperbole.



Se l'equazione non si presenta in forma "normale" faremo dei passaggi per ricondurla alla forma normale (come per l'ellisse).

Esempi

a) $x^2 - 16y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

b) $4x^2 - y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$

c) $9x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{16}{9}} - \frac{y^2}{4} = 1$

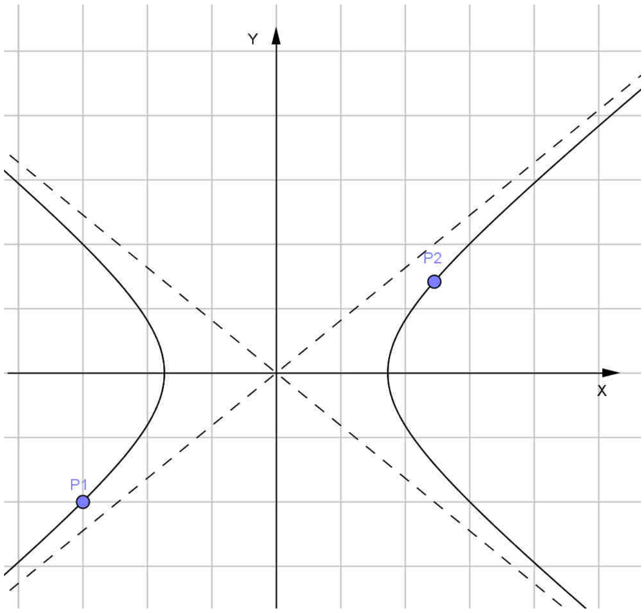
II) Determinare l'equazione di un'iperbole

a) *Conoscenza di due punti dell'iperbole (non simmetrici rispetto agli assi o all'origine) e del suo asse focale.*

Esempio: asse focale coincidente con l'asse x , $P_1(-3;-2)$ $P_2\left(\sqrt{6};\sqrt{2}\right)$.

Poiché l'asse focale è l'asse x l'equazione sarà del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Sostituendo avremo: $\begin{cases} \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1 \\ \frac{6}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1 \end{cases} \quad \ldots\ldots \rightarrow \begin{cases} a^2=3 \\ b^2=2 \end{cases}$



b) *Conoscenza dei fuochi e dei vertici*

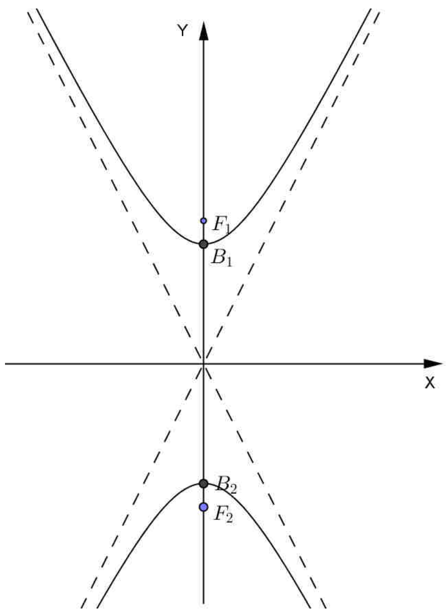
Esempio: $B_{1,2}(0;\pm 4)$ $F_{1,2}\left(0;\pm 2\sqrt{5}\right)$

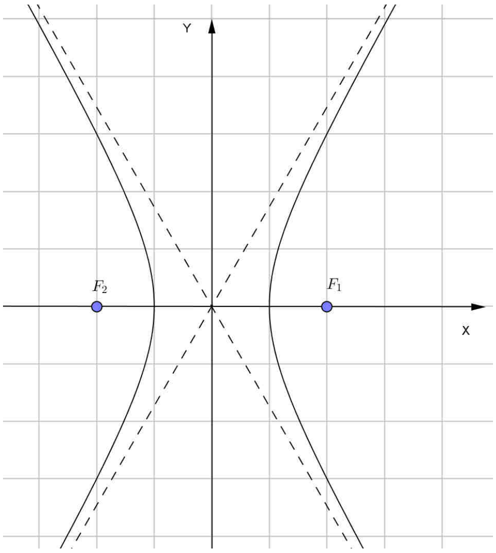
L'equazione sarà del tipo : $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

Poiché $b=4$ e $c=2\sqrt{5}$

$a^2=c^2-b^2=20-16=4$ e quindi

$$\Im : \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$$





c) *Conoscenza dei fuochi e dell'eccentricità*

Esempio: $F_{1,2}(\pm 2;0)$ $e = 2$

Poiché in questo caso $e = \frac{c}{a}$ sarà $2 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 1$

Inoltre $b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$ e quindi

$$\Im : x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

d) *Conoscenza dei vertici e dell'eccentricità*

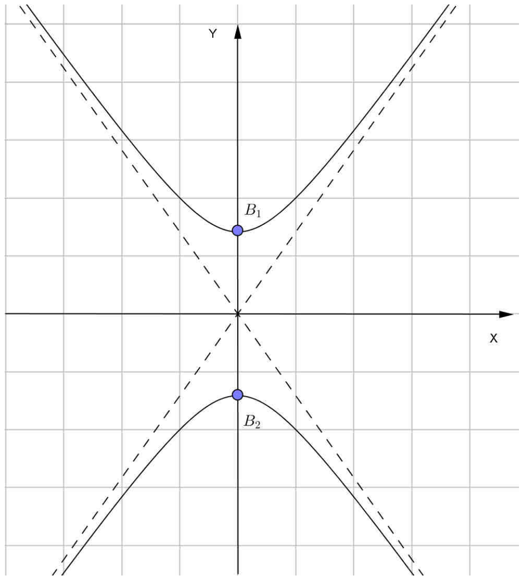
Esempio: $B_{1,2}(0;\pm\sqrt{2})$ $e = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Poiché l'asse trasverso è l'asse y sarà $e = \frac{c}{b}$ e quindi

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

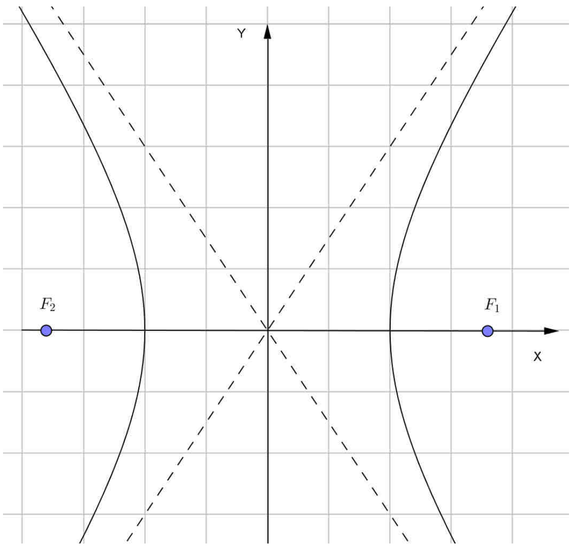
Inoltre $a^2 = c^2 - b^2 = 3 - 2 = 1$ e quindi

$$\Im : \frac{y^2}{2} - x^2 = 1$$



e) *Conoscenza dei fuochi e degli asintoti*

Esempio: $F_{1,2}(\pm\sqrt{13};0)$ asintoti: $y = \pm\frac{3}{2}x$



$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ \frac{9}{4}a^2 = 13 - a^2 \rightarrow a^2 = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

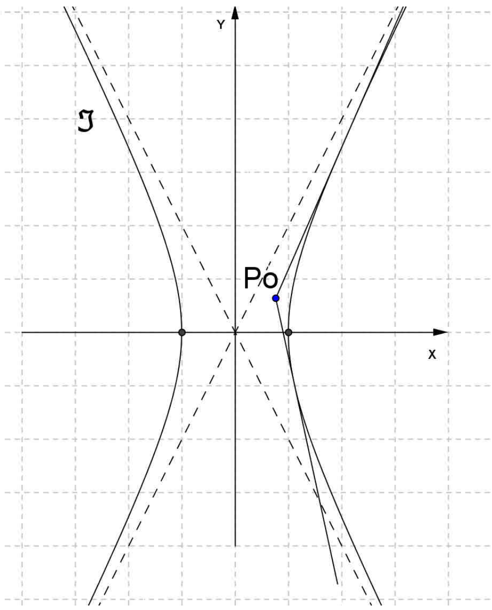
Quindi abbiamo:

$$\Im : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Rette tangenti ad un'iperbole

Consideriamo un'iperbole $\Im$ con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati e un punto P_o assegnato.

a) Se $P_o \notin \Im$ ed è "esterno" a $\Im$ (vedi figura) esisteranno due rette tangenti ad $\Im$ uscenti da P_o e per determinarle si procederà con il solito metodo (vedi ellisse).



b) Se $P_o \in \Im$ avremo una sola tangente come che può essere determinata come in a) oppure utilizzando la "formula dello sdoppiamento" (la dimostrazione è analoga a quella svolta per l'ellisse).

Se $\Im : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $P_o(x_o; y_o) \in \Im$ l'equazione della tangente è

$$t : \frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

Analogamente se $\Im : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ avremo $\frac{y_o y}{b^2} - \frac{x_o x}{a^2} = 1$.

Esempio: $\Im : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $P_o\left(5; -\frac{3}{2}\right) \in \Im$

$t : \frac{5x}{16} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{4} = 1 \rightarrow 5x + 6y = 16$

Iperbole traslata

Sia $\Im$ un'iperbole i cui **assi di simmetria** non coincidono con gli assi coordinati ma sono **paralleli agli assi del sistema di riferimento** che per brevità chiameremo iperbole "traslata".

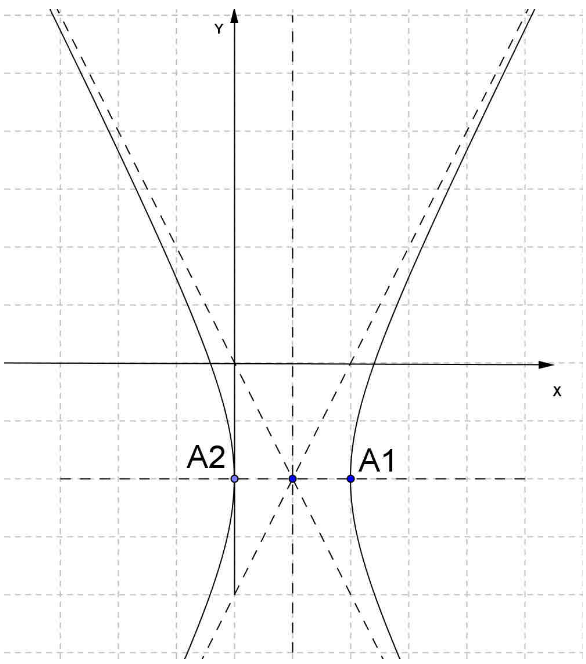
Sia $C(x_C; y_C)$ il centro dell'iperbole (gli assi di simmetria sono quindi $x = x_C$, $y = y_C$).

Analogamente a quanto visto per l'ellisse, se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine in C avremo che l'equazione di $\Im$ risulterà alla fine:

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2} - \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(y-y_C)^2}{b^2} - \frac{(x-x_C)^2}{a^2} = 1$$

Esempio: $\Im : (x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

Il centro è $C(1;-2)$, $a = 1$, $b = 2$; asse focale parallelo all'asse x.



I vertici sono $A_1(2;-2)$ $A_2(0;-2)$ e gli asintoti hanno equazione $y + 2 = \pm 2 \cdot (x-1)$.

Problemi
Iperbole traslata

1) **Disegnare un'iperbole traslata di equazione assegnata**

Se l'equazione è nella forma

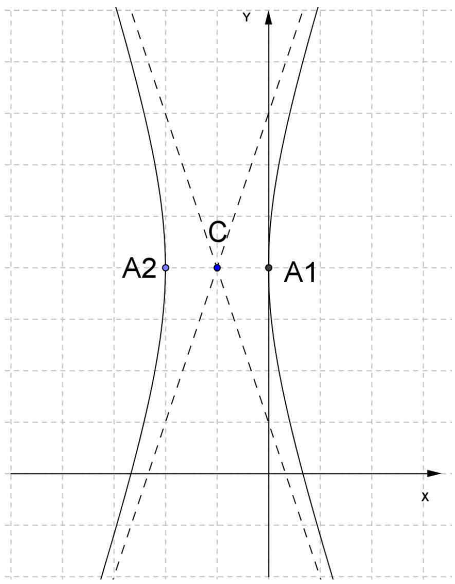
$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}-\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(y-y_C)^2}{b^2}-\frac{(x-x_C)^2}{a^2}=1$$

È molto semplice.

Esempio:

$$\Im:(x+1)^2-\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

Osserviamo che $C(-1;4) \quad a=1 \quad b=3$

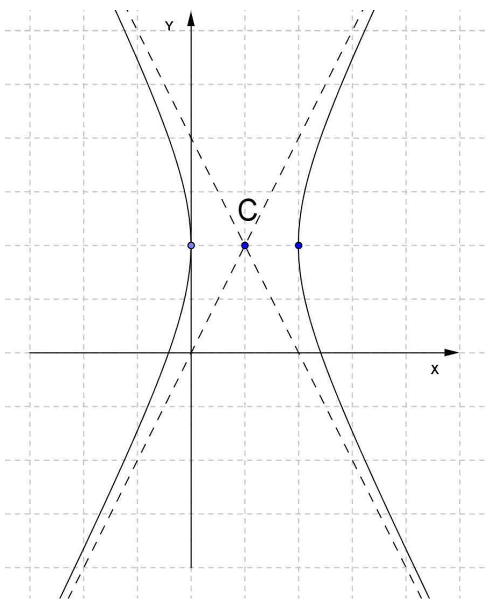


Se invece l'equazione è stata "sviluppata" occorre riportarla nella forma in cui si individuano il centro, a e b con il metodo già visto per l'ellisse.

Esempio: $\Im:4x^2-y^2-8x+4y-4=0$

$$4(x^2-2x)-(y^2-4y)=4$$
$$4(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)=4+4-4$$
$$4(x-1)^2-(y-2)^2=4$$
$$(x-1)^2-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

Quindi $C(1;2)$ $a=1$ $b=2$.

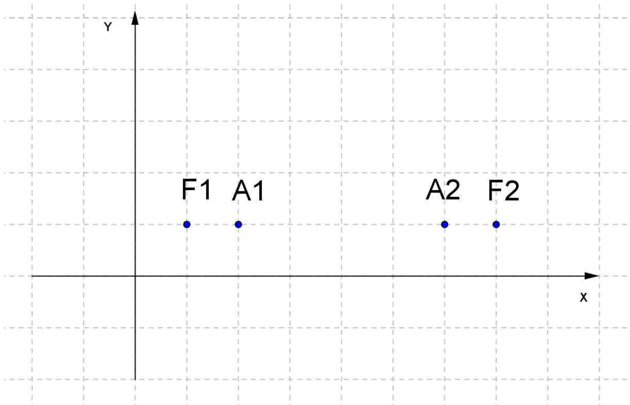


2) **Determinare l'equazione di un'iperbole traslata**

Vediamo qualche esempio:

a) *Conoscenza dei fuochi e dei vertici*

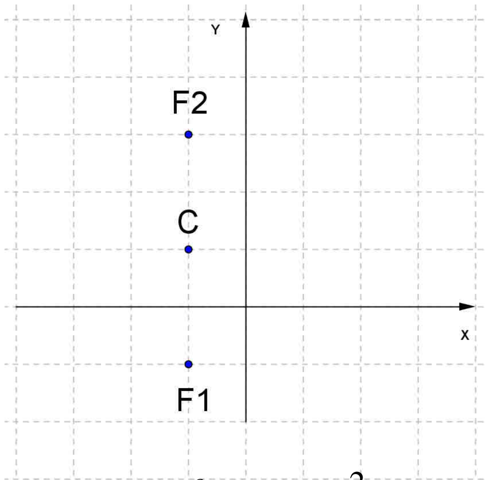
Esempio: $F_1(1;1)$ $F_2(7;1)$ $A_1(2;1)$ $A_2(6;1)$



Dai fuochi possiamo ricavare il centro C(4;1) e $c = 3$.
Osservando la posizione dei vertici abbiamo $a = 2$.
Quindi $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$.
In conclusione: $\Im : \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

b) *Conoscenza dei fuochi e dell'eccentricità*

Esempio: $F_1(-1;-1)$ $F_2(-1;3)$ $e = 2$



Sarà C(-1;1) e $c = 2$

Essendo l'asse focale parallelo all'asse y avremo $e = \frac{c}{b}$ cioè $2 = \frac{2}{b} \Rightarrow b = 1$.

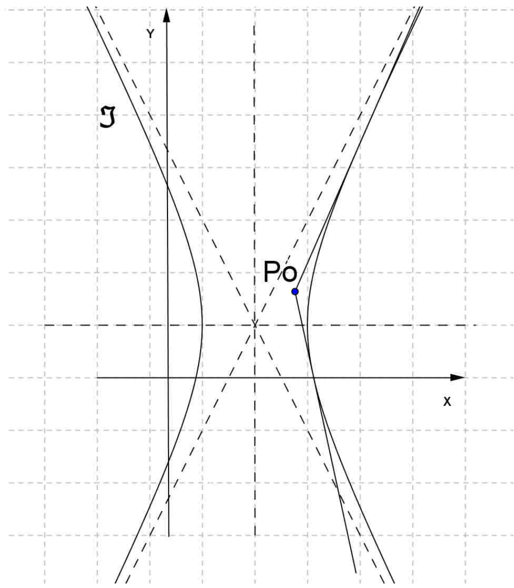
Inoltre $a^2 = c^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$ e quindi:

$$\Im : (y-1)^2 - \frac{(x+1)^2}{3} = 1$$

Rette tangenti ad un'iperbole traslata

Sia $\Im$ un'iperbole con assi paralleli agli assi coordinati e $P_o(x_o;y_o)$ un punto assegnato.

a) Se $P_o \notin \Im$ ed è "esterno" a $\Im$ (vedi figura) si determinano le equazioni delle due rette tangenti a $\Im$ uscenti da P_o con il solito metodo.



b) Se $P_o \in \Im$ possiamo utilizzare la "formula dello sdoppiamento" (vedi ellisse con assi paralleli agli assi coordinati).

Esempio: $\Im : \dfrac{(x-x_C)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1 \quad P_o(x_o;y_o) \in \Im$

$$t : \frac{(x_o-x_C)\cdot(x-x_C)}{a^2} - \frac{(y_o-y_C)\cdot(y-y_C)}{b^2} = 1$$

Quindi se per esempio $\Im : (y-1)^2 - \dfrac{(x+1)^2}{3} = 1$ e $P_o(2;3) \in \Im$

$t : (3-1)\cdot(y-1) - \dfrac{(2+1)\cdot(x+1)}{3} = 1$

$2(y-1)-(x+1)=1$

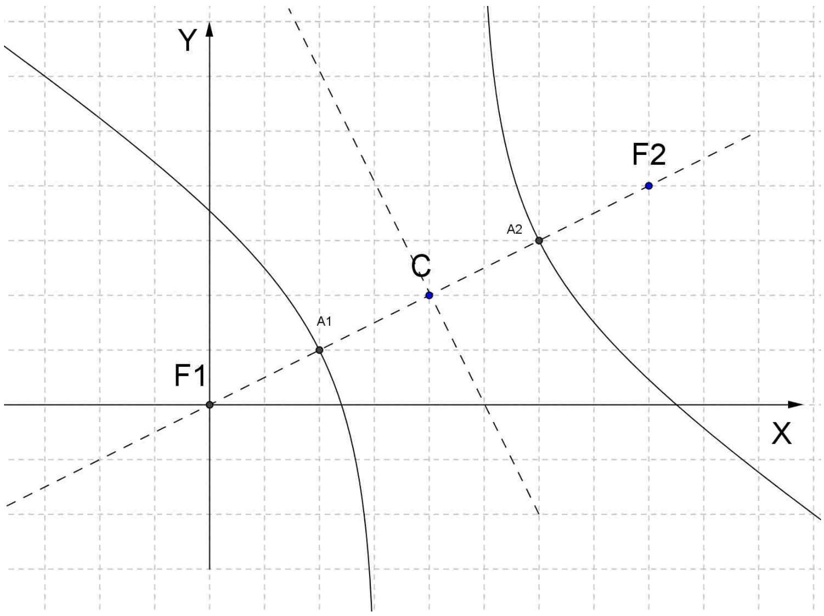
$x-2y+4=0$

Iperbole con assi di simmetria non paralleli agli assi coordinati

Facciamo solo un esempio.

Determinare il luogo dei punti P(x;y) del piano tali che

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2\sqrt{5} \quad \text{dove} \quad F_1(0;0) \quad \text{e} \quad F_2(8;4)$$



P(x;y) : $\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-8)^2 + (y-4)^2} = \pm 2\sqrt{5}$

Sviluppando i calcoli si determina l'equazione di $\Im$.

Osserviamo che:

- il centro è C(4;2)
- gli assi di simmetria hanno equazione $y = \frac{1}{2}x$ e $y - 2 = -2(x-4)$

Inoltre abbiamo che la semidistanza focale è $c = 2\sqrt{5}$ e che la distanza tra i vertici è $\overline{A_1A_2} = 2\sqrt{5}$.

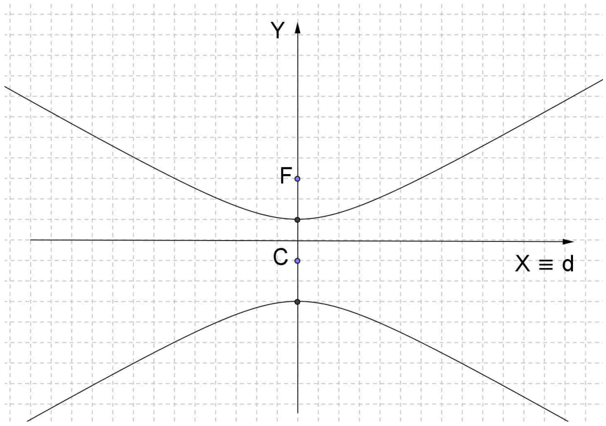
I vertici sono $A_1(2;1)$ e $A_2(6;3)$.

Un'altra definizione di iperbole

Avevamo visto che si poteva dare una definizione dell'ellisse più "simile" a quella data per la parabola. Vediamo se la stessa cosa si può fare per l'iperbole.
Consideriamo il seguente problema: *Data una retta* d *e un punto* $F \notin d$*, determinare il luogo geometrico dei punti P del piano tali che*

$$\frac{\overline{PF}}{dist(P,d)} = 2$$

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che asse x$\equiv$ d e che F(0;1)



P(x;y) appartiene al luogo $\Leftrightarrow \overline{PF}^2 = 4\cdot(dist(P,assex))^2$ cioè

$$x^2 + (y-1)^2 = 4y^2 \rightarrow ..... \frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Abbiamo quindi trovato un'iperbole di centro $C\left(0;-\frac{1}{3}\right)$, asse focale $\equiv$ asse y , $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{2}{3}$.

Quindi $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{16}{9} \rightarrow c = \frac{4}{3}$.

Perciò F(0;1) è un fuoco dell'iperbole e l'eccentricità risulta $e = \frac{c}{b} = 2$.

In generale si può dimostrare che, data una retta d e un punto $F \notin d$, il luogo dei punti P tali che

$$\frac{\overline{PF}}{dist(P,d)} = e \quad \text{dove } e \text{ è una costante } >1$$

risulta un'iperbole avente un fuoco in F ed eccentricità e.

In conclusione il luogo dei punti P tali che $\frac{\overline{PF}}{dist(P,d)} = k$ risulta :

- una parabola se $k = 1$
- un'ellisse se $0 < k < 1$ (k è l'eccentricità dell'ellisse)
- un'iperbole se $k > 1$ (k è l'eccentricità dell'iperbole)

IPERBOLE EQUILATERA

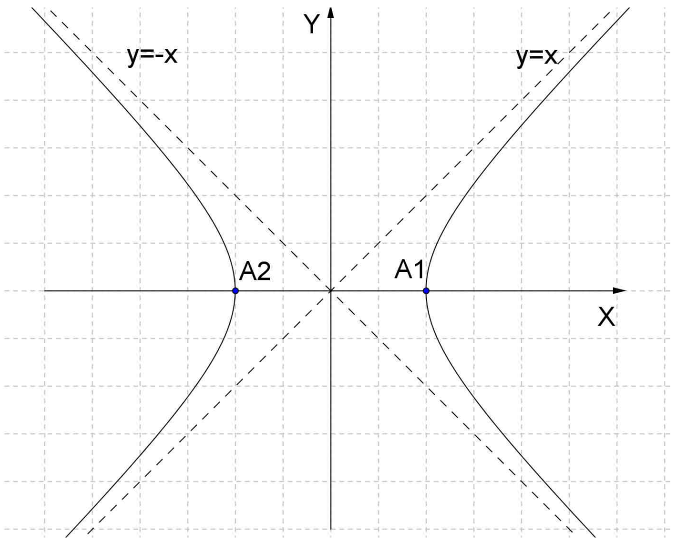
Un'iperbole si dice equilatera quando $a = b$: gli asintoti hanno quindi inclinazione ± 1 e risultano perpendicolari. Viceversa se gli asintoti sono perpendicolari abbiamo che $a = b$ poiché se

$$\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a} \right) = -1 \Rightarrow -\frac{b^2}{a_2} = -1 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow a = b$$

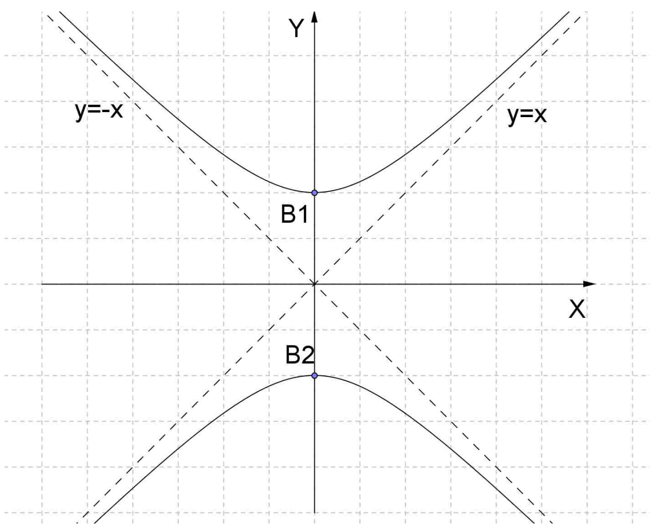
Osserviamo che per un'iperbole equilatera risulta $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}a \Rightarrow e = \sqrt{2}$ cioè l'eccentricità è sempre $e = \sqrt{2}$.

L'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria è quindi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$ se l'asse trasverso è l'asse x



oppure $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = a^2$ se l'asse trasverso è l'asse y



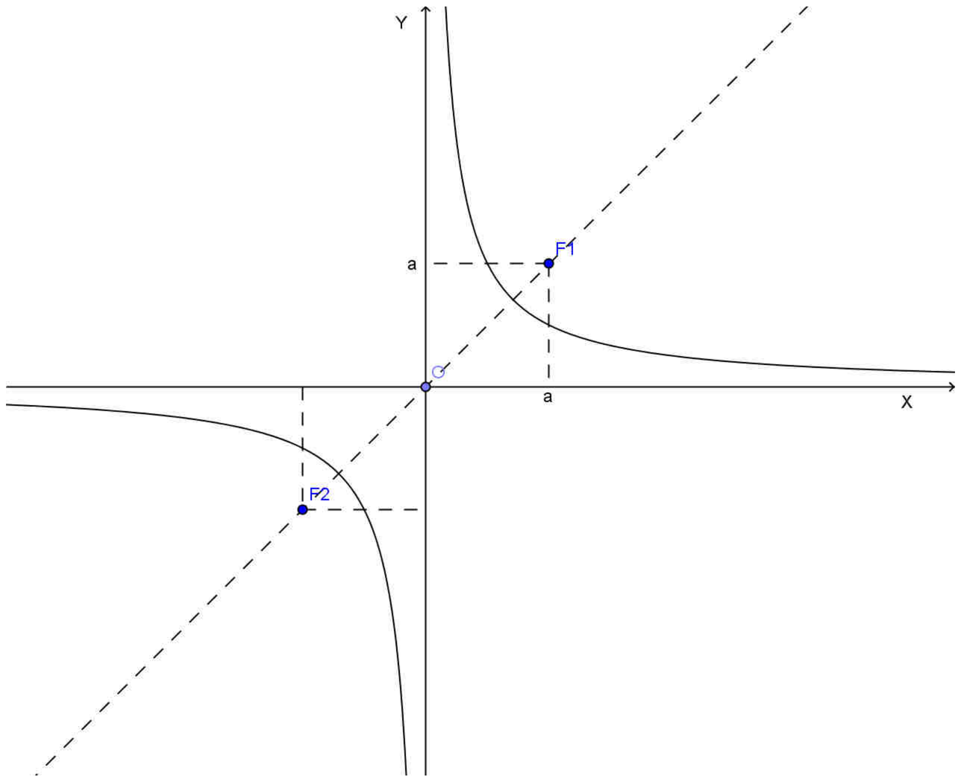
Equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

Se l'iperbole è equilatera possiamo prendere i suoi asintoti come sistema di riferimento: vediamo come risulta l'equazione in questo caso.

Consideriamo l'iperbole equilatera in figura: i fuochi si trovano sulla retta $y = x$ e le coordinate dei fuochi in questo sistema di riferimento saranno

$$F_1(a;a) \qquad F_2(-a;-a)$$

poiché $c = \sqrt{2}a$ e l'ascissa e l'ordinata dei fuochi rappresentano la misura del lato di un quadrato di diagonale c.



Applicando quindi la definizione di iperbole come luogo geometrico abbiamo:

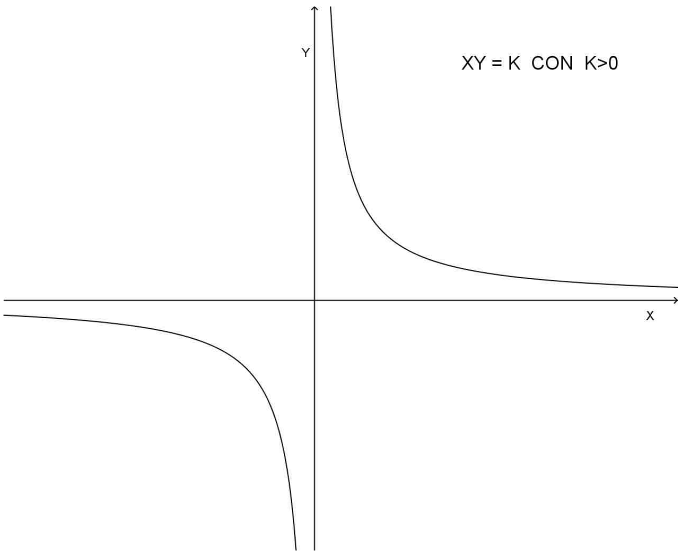
$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$$

cioè $$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = \pm 2a$$

Sviluppando con passaggi analoghi a quelli visti quando abbiamo ricavato l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria otteniamo

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

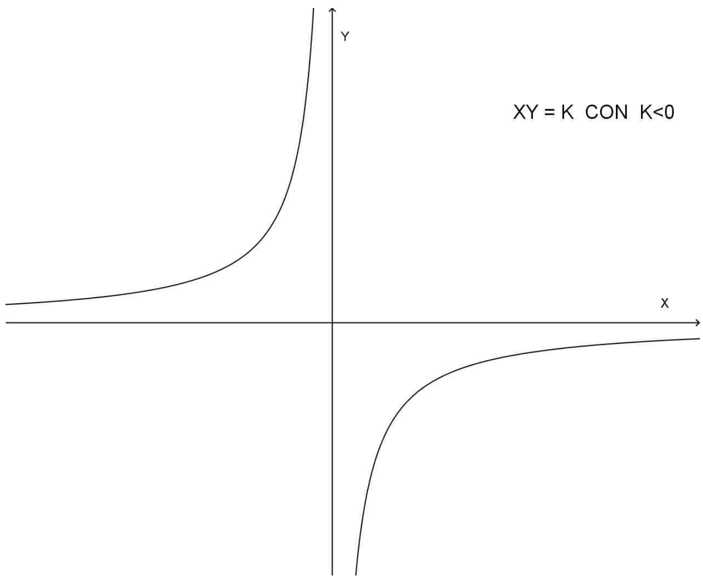
cioè un'equazione del tipo $xy = k$ con $k > 0$



Se i fuochi si trovano sulla retta $y = -x$ otteniamo, con analoghi passaggi

$$xy = -\frac{a^2}{2}$$

cioè un'equazione del tipo $xy = k$ con $k < 0$

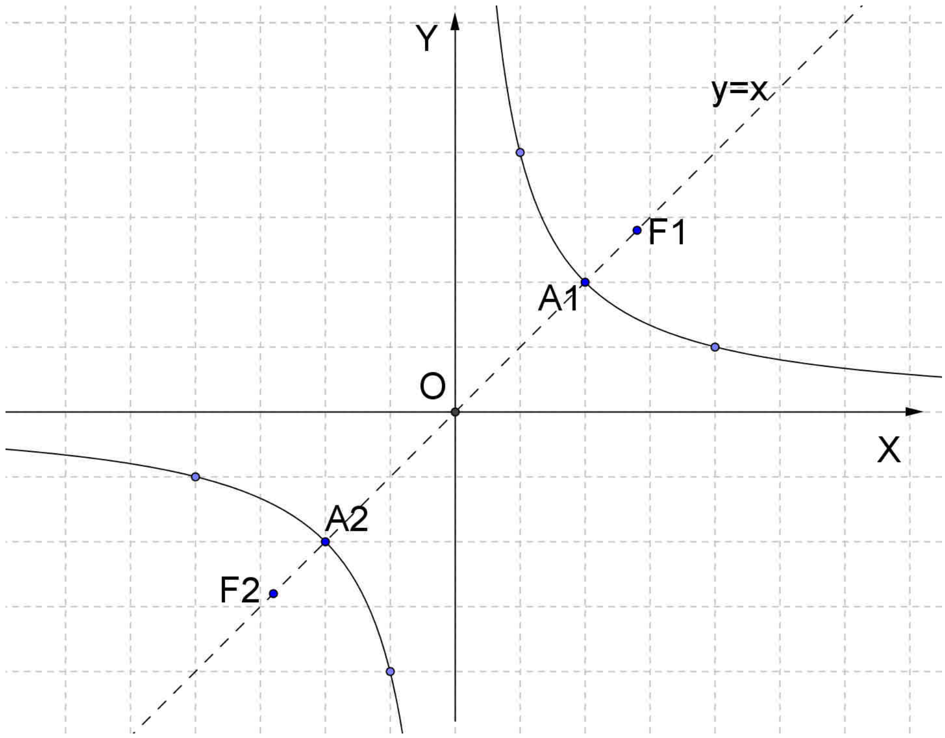


Problemi
Iperbole equilatera

1) Disegna l'iperbole $xy = 4$ e determinane i vertici e i fuochi.

Per disegnare $xy = 4$ possiamo determinare qualche punto appartenente all'iperbole: poiché $y = \frac{4}{x}$ si ottiene per esempio $(1;4)$ $(2;2)$ $(4;1)$.

Naturalmente, essendo la curva simmetrica rispetto all'origine avremo anche $(-1;-4)$ $(-2;-2)$ $(-4;-1)$.



Per determinare i vertici basta intersecare la curva con la retta $y = x$ (asse di simmetria trasverso):

$$\begin{cases} y = x \\ xy = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \pm 2 \end{cases} \quad A_1(2;2) \quad A_2(-2;-2)$$

Poiché $\overline{OA_1} = a = 2\sqrt{2}$ e le coordinate dei fuochi, in questo sistema di riferimento, sono $F_1(a;a)$ $F_2(-a;-a)$ avremo:

$$F_1(2\sqrt{2};2\sqrt{2}) \quad F_2(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$$

2) Determina l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti sapendo che passa per il punto $P(1;2)$.

(*) Osserviamo che per determinare l'equazione di $\Im: xy = k$ è sufficiente una condizione.

Basterà sostituire in $xy = k$ le coordinate $P(1;2)$:

$$1 \cdot 2 = k \Rightarrow k = 2$$

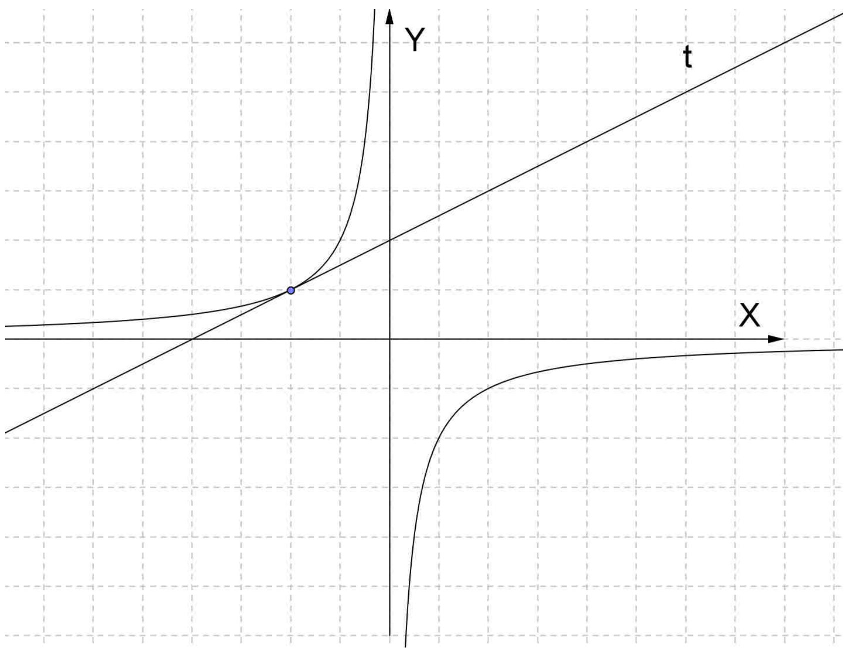
e quindi $\Im: xy = 2$

3) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti sapendo che è tangente alla retta di equazione $t: x - 2y + 1 = 0$.
In questo caso basterà impostare la "condizione di tangenza":

$$\begin{cases} xy = k \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2y-1) \cdot y = k \\ x = 2y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y^2 - y - k = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 8k \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$$

Quindi $\Im: xy = -\frac{1}{8}$



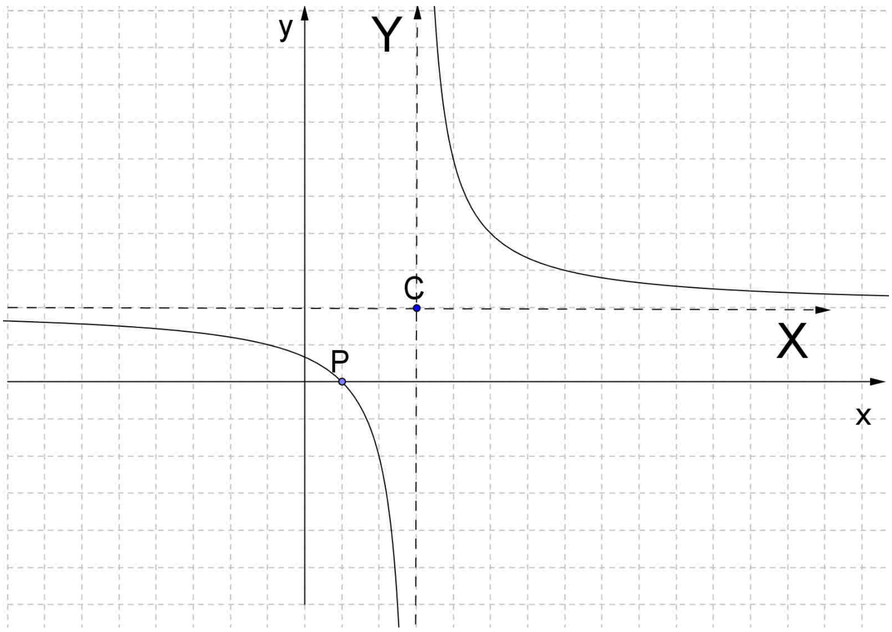
Iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati
Funzione omografica

Abbiamo visto che l'equazione dell'iperbole equilatera con asintoti coincidenti con gli assi coordinati è del tipo $xy = k$.

E se gli asintoti non coincidono con gli assi coordinati ma sono comunque paralleli ad essi?

Vediamo un esempio: supponiamo che il centro dell'iperbole sia $C(3;2)$ e che gli asintoti abbiano equazione $x = 3$, y=2 .

Supponiamo inoltre che l'iperbole passi per il punto $P(1;0)$ (vedi figura).



Se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine in C cioè:

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

l'iperbole avrà equazione $XY = 4$:per determinare k=4 basta sostituire in $XY = k$ le coordinate di P che nel nuovo sistema di riferimento sono $(-2;-2)$.

Quindi $\Im : (x-3)\cdot(y-2) = 4$

E sviluppando avremo:

$$xy - 2x - 3y + 6 = 4 \rightarrow y(x-3) = 2x - 2 \rightarrow y = \frac{2x-2}{x-3}$$

In generale , quindi, l'equazione di un'iperbole equilatera di centro $C(x_C ; y_C)$ con asintoti paralleli agli assi coordinati avrà equazione:

$$(x - x_C) \cdot (y - y_C) = k$$

che sviluppata dà un'equazione del tipo: $\boxed{y = \dfrac{ax + b}{cx + d}}$

Questa funzione viene anche chiamata **funzione omografica**.

Osserviamo che :

a) $c \neq 0$ poiché se $c = 0$ otteniamo una retta;

b) $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$ poiché se $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = m \Rightarrow y = m \cdot \dfrac{(cx + d)}{cx + d}$ che per $x \neq -\dfrac{d}{c}$ dà la retta $y = m$

Ma se abbiamo l'equazione $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ come possiamo determinare il centro dell'iperbole?

Torniamo all'esempio iniziale: sviluppando i calcoli avevamo ottenuto $y = \dfrac{2x - 2}{x - 3}$.

- Osserviamo che questa funzione è definita per $x \neq 3$ (per x=3 il denominatore si annulla) e quindi $x = 3$ sarà l'ascissa del centro cioè $x = 3$ sarà l'asintoto verticale (infatti non c'è nessun punto dell'iperbole con ascissa 3).

- Inoltre quando x è grande in valore assoluto i termini $b = -2$ e $d = -3$ nell'equazione diventano trascurabili nel calcolo del valore di y e $y \cong \dfrac{2x}{x}$ e quindi semplificando la x si ottiene $y \cong 2$. Quindi $y = 2$ è l'asintoto orizzontale cioè $y = 2$ è l'ordinata del centro: i rami dell'iperbole, quando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ si avvicinano alla retta $y = 2$.

In generale quindi se abbiamo la funzione omografica $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ poiché per $x = -\dfrac{d}{c}$ il denominatore si annulla e per $x \to \infty$ $y \cong \dfrac{a}{c}$ il centro C avrà coordinate

$$C\left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c}\right)$$

Problemi
Funzione omografica

1) Disegna la funzione omografica di equazione:

$$y = \frac{2x-4}{1-x}$$

Si ricava subito, da quanto abbiamo detto, che il centro è $C(1;-2)$.
Possiamo quindi disegnare gli asintoti che saranno le rette di equazione $x=1$ e $y=-2$.

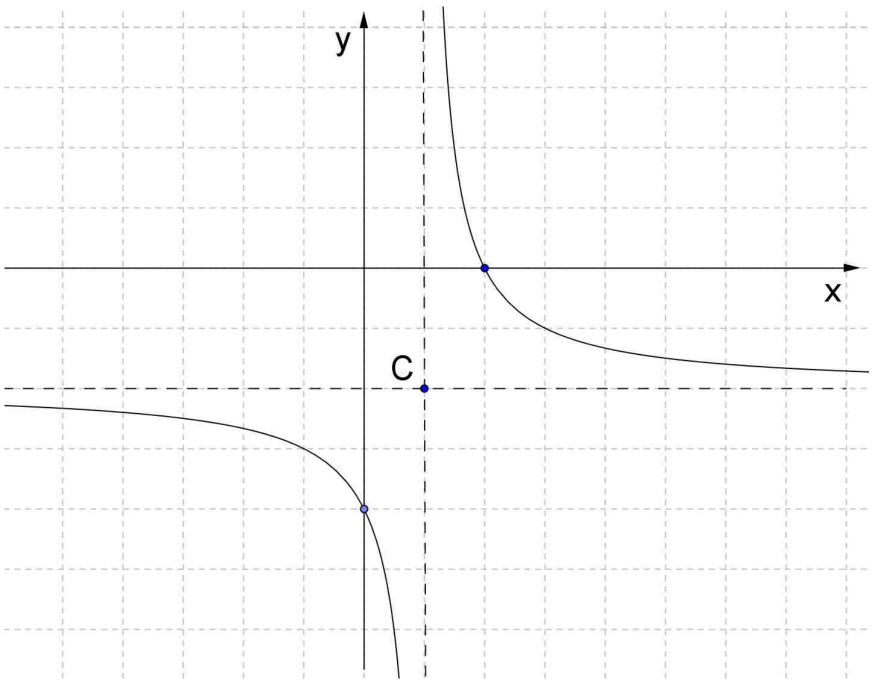
Per disegnare l'iperbole, dopo aver trovato il centro e tracciato gli asintoti,possiamo determinare per esempio l'intersezione dell'iperbole con l'asse x ponendo $y=0$.

$$\begin{cases} y = \frac{2x-4}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Conoscendo il punto $(2;0)$, per la simmetria rispetto a C, ricaviamo che anche $(0;-4)$ apparterrà all'iperbole (del resto ponendo $x=0$ si ottiene proprio $y=-4$).

Inoltre possiamo ricavare facilmente anche altri punti (vedi figura) ricordando che rispetto al centro l'equazione dell'iperbole sarebbe stata $XY=k$ e in questo caso abbiamo $k=2$.

Otteniamo in conclusione il seguente disegno:



2) Per determinare l'equazione di una funzione omografica (iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati) occorrono *tre condizioni indipendenti.*

Questo risulta chiaro se scriviamo l'equazione nella forma

$\Im : (x - x_C) \cdot (y - y_C) = k$ (in cui abbiamo tre parametri x_C , y_C, k)

oppure se consideriamo l'equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ma dividiamo numeratore e denominatore per c (ricordiamo che $c \neq 0$) ottenendo

$y = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$ cioè $y = \dfrac{a'x + b'}{x + d'}$ (in cui compaiono solo i tre parametri a' , b' , d')

Quindi possiamo anche scrivere l'equazione della funzione omografica nella forma

$$y = \frac{a'x + b'}{x + d'}$$

Vediamo qualche esempio.

a) *Conoscenza del centro C dell'iperbole e passaggio per un punto P*
Esempio: $C(1;3)$ $P(0;0)$
Consideriamo l'equazione $(x - x_C) \cdot (y - y_C) = k$: poiché il centro è $C(1;3) \rightarrow (x-1) \cdot (y-3) = k$
Sostituendo le coordinate di P avremo: $(-1) \cdot (-3) = k \Rightarrow k = 3$

In conclusione $\Im : (x-1) \cdot (y-3) = 3$

b) *Conoscenza dell'equazione di un asintoto e passaggio per due punti* P_1 , P_2
Esempio: asintoto : $x = 2$; $P_1(0;0)$ $P_2(1;1)$
Consideriamo l'equazione nella forma $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$ (vedi osservazione precedente).
Il centro è $C(-d;a)$ e poiché un asintoto è $x = 2$ avremo $x_C = 2$ cioè $-d = 2$.
Quindi abbiamo

$$\begin{cases} c = 1 \\ -d = 2 \rightarrow d = -2 \\ \dfrac{b}{d} = 0 (passaggio.per.P_1) \rightarrow b = 0 \\ \dfrac{a+b}{1+d} = 1 (passaggio.per.P_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -2 \\ b = 0 \\ a = -1 \end{cases} \rightarrow \quad \Im : y = \frac{-x}{x-2}$$

c) *Conoscenza del passaggio per tre punti* P_1 P_2 P_3

In questo caso basterà sostituire le coordinate dei punti nell'equazione $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$: otterremo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a,b,d.

ESERCIZI

I) **Disegna le seguenti iperbol**i indicando le coordinate dei vertici, l'equazione degli asintoti e le coordinate dei fuochi.

1) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ $\quad$ [$A_{1,2}(\pm 2;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$; $y = \pm\frac{1}{2}x$]

2) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{10};0)$; $y = \pm 3x$]

3) $y^2 - x^2 = 1$ $\quad$ [$B_{1,2}(0;\pm 1)$; $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{2})$; $y = \pm x$]

4) $4x^2 - y^2 = 4$ $\quad$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$; $y = \pm 2x$]

5) $4y^2 - 9x^2 = 36$ $\quad$ [$B_{1,2}(0;\pm 3)$; $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{13})$; $y = \pm\frac{3}{2}x$]

6) $x^2 - 4y^2 = 1$ $\quad$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\frac{\sqrt{5}}{2};0)$; $y = \pm\frac{1}{2}x$]

7) $y^2 - 9x^2 = 1$ $\quad$ [$B_{1,2}(0;\pm 1)$; $F_{1,2}(0;\pm\frac{\sqrt{10}}{3})$; $y = \pm 3x$]

8) $4x^2 - 4y^2 = 8$ $\quad$ [$A_{1,2}(\pm\sqrt{2};0)$; $F_{1,2}(\pm 2;0)$; $y = \pm x$]

9) $9y^2 - 16x^2 = 1$ $\quad$ [$B_{1,2}(0;\pm\frac{1}{3})$; $F_{1,2}(0;\pm\frac{5}{12})$; $y = \pm\frac{4}{3}x$]

10) $y^2 - x^2 = -1$ $\quad$ [$A_{1,2}(\pm 1;0)$; $F_{1,2}(\pm\sqrt{2};0)$; $y = \pm x$]

II) Determina l'equazione dell'iperbole $\Im$, riferita ai suoi assi di simmetria, avente:

11) $A_{1,2}(\pm 2;0)$ $e=2$ [$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$]

12) $B_{1,2}(0;\pm 1)$ $F_{1,2}(0;\pm 2)$ [$y^2-\frac{x^2}{3}=1$]

13) $A_{1,2}(\pm 1;0)$ asintoti $y=\pm 2x$ [$x^2-\frac{y^2}{4}=1$]

14) $F_{1,2}(\pm 2;0)$ asintoti $y=\pm x$ [$x^2-y^2=2$]

15) $e=\sqrt{10}$, fuochi appartenenti all'asse x, passante per $P(\sqrt{5};6)$ [$x^2-\frac{y^2}{9}=1$]

III) Rette tangenti

16) Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole $\Im : x^2-y^2=4$ uscenti dal punto $P(1;0)$.

[$y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)$]

17) Determina l'equazione della tangente all'iperbole $\Im : \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ nel suo punto $P(4;3\sqrt{3})$.

[$t: 3x-\sqrt{3}y-3=0$]

18) Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole $\Im : \frac{y^2}{4}-x^2=1$ uscenti dal punto P(0;1).

[$t_{1,2} : y=\pm\sqrt{3}x+1$]

19) Determina l'equazione della tangente all'iperbole $\Im : y^2-x^2=1$ nel suo punto $P(1;\sqrt{2})$.

[$t: x-\sqrt{2}y+1=0$]

IV)Problemi vari

20) Determina l'equazione dell'iperbole avente fuochi $F_1(0;2)$ $F_2(4;2)$ ed eccentricità $e=2$. Disegnala e determina le equazioni dei suoi asintoti.

$$[\,\Im:(x-2)^2-\frac{(y-2)^2}{3}=1 \quad y-2=\pm\sqrt{3}(x-2)\,]$$

21) Disegna l'iperbole di equazione $\Im: 4x^2-y^2+2y+3=0$.
Determina il centro C, i vertici, i fuochi e gli asintoti. Disegna $\Im$.

[$C(0;1)$; $B_{1,2}(0;1\pm 2)$; $F_{1,2}(0;1\pm\sqrt{5})$; asintoti : $y=\pm 2x+1$]

22) Determina l'equazione dell'iperbole $\Im$ avente vertici $A_1(0;0)$ $A_2(-2;0)$ e asintoti di equazione $y=\pm 3(x+1)$. Disegnala e determina la sua eccentricità. Verificato che $P(1;3\sqrt{3})$ appartiene all'iperbole, determina l'equazione della tangente all'iperbole in P.

$$[\,\Im:(x+1)^2-\frac{y^2}{9}=1 \ ; \ e=\sqrt{10} \ ; \quad t:6x-\sqrt{3}y+3=0\,]$$

23) Determina l'equazione dell'iperbole $\Im$ avente fuochi $F_{1,2}(\pm\sqrt{2};3)$ e coefficienti angolari degli asintoti $m_{1,2}=\pm 1$. Disegnala, determina vertici ed eccentricità. Determinato il punto A di ascissa maggiore in cui $\Im$ interseca l'asse x, scrivi l'equazione della tangente in A all'iperbole.

[$x^2-(y-3)^2=1$; $A_{1,2}(\pm 1;3)$; $e=\sqrt{2}$; $A(\sqrt{10};0)$; $t_A:\sqrt{10}x+3y-10=0$]

V) Esercizi sull'iperbole equilatera

24) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti sapendo che passa per il punto $P(1;3)$. Disegnala e determina vertici e fuochi.

[$\Im: xy=3$, $A_{1,2}(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$, $F_{1,2}(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{6})$]

25) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti sapendo che è tangente alla retta $t: y=-x+2$. Disegnala e determina vertici e fuochi.

[$\Im: xy=1$, $A_{1,2}(\pm 1;\pm 1)$, $F_{1,2}(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})$]

26) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti avente vertice $A_1(2;-2)$. Disegnala e, detto P il suo punto di ascissa x=1, determina l'equazione della tangente all'iperbole in P.

[$\Im: xy=-4$, $t_P: y=4x-8$]

27) Disegna l'iperbole equilatera $y = \frac{x-1}{x}$ (funzione omografica). Determina i suoi vertici.

[$A_1(1;0)$ $A_2(-1;2)$]

28) Disegna l'iperbole equilatera $y = \frac{2-x}{x-3}$ (funzione omografica) e detto A il suo punto di intersezione con l'asse x, determina la tangente in A all'iperbole.

[$A(2;0)$, $t_A : y = x - 2$]

29) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera avente asintoti $x = 2$ e $y = 1$ e passante per (0;0). Disegnala e determina la tangente all'iperbole in (0;0).

[$\Im : y = \frac{x}{x-2}$, $t_{(0;0)} : y = -\frac{1}{2}x$]

30) Determina l'equazione della funzione omografica passante per $A(-2;0)$ $B(0;2)$ $C\left(1;\frac{3}{2}\right)$. Disegnala e verifica che A e B sono i vertici dell'iperbole.

[$\Im : y = \frac{x+2}{x+1}$]

31) Determina l'equazione della funzione omografica tangente in (0;0) alla retta $t : y = -x$ e passante per $P\left(3;\frac{3}{2}\right)$. Disegnala.

[$\Im : y = \frac{x}{x-1}$]

32) Determina l'equazione della funzione omografica tangente in $A(-1;-1)$ alla retta $t : y = x$ e avente asintoto $x = -2$. Disegnala.

[$\Im : y = -\frac{1}{x+2}$]

33) Determina l'equazione della funzione omografica tangente in $A(4;0)$ alla retta $t : x - 4y - 4 = 0$ e passante per $B(-2;3)$. Disegnala.

[$\Im : y = \frac{x-4}{x}$]

34) Disegna l'iperbole di equazione $\Im : y = \frac{2x+1}{x+1}$. Detto A il suo punto di intersezione con l'asse y, determina l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse di simmetria parallelo all'asse x avente il vertice V nel centro di simmetria di $\Im$ e passante per A.

[$\mathcal{P} : x = y^2 - 4y + 3$]

35) Disegna la funzione omografica $\Im : y = \frac{2x}{1-x}$ e determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ avente in (0;0) la stessa tangente di $\Im$ e passante per $A(4;0)$.

[$\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$]

VI) Esercizi di ricapitolazione

36) Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria avente fuochi $F_1(\sqrt{10};0)$ $F_2(-\sqrt{10};0)$ e asintoti di equazione $y=\pm 3x$. Disegnala e calcolane l'eccentricità. Sia P il punto dell'iperbole situato nel 2° quadrante e avente ordinata uguale a 4: determina l'equazione della tangente t all'iperbole in P e, detta Q l'intersezione di t con l'asse x, determina l'area del triangolo $\overset{\Delta}{PQO}$ (O origine del sistema di riferimento).

$$[\, x^2-\frac{y^2}{9}=1 \ ;\ e=\sqrt{10} \ ;\ t: y=-\frac{15}{4}x-\frac{9}{4} \ ;\ area(\overset{\Delta}{PQO})=\frac{6}{5} \,]$$

37) Determina l'equazione dell'iperbole avente fuochi $F_1(0;4)$ $F_2(0;0)$ ed eccentricità e=2. Disegnala e scrivi l'equazione degli asintoti. Determina le coordinate dei punti A e B in cui l'iperbole taglia l'asse x e le equazioni delle tangenti in A e B all'iperbole. Detti A' e B' i punti simmetrici di A e B rispetto al centro C dell'iperbole determina perimetro e area del quadrilatero ABA'B'.

$$[\,(y-2)^2-\frac{x^2}{3}=1 \ ;\ A(3;0)\ \ B(-3;0) \ ;\ x+2y-3=0 \ ;\ x-2y+3=0 \ ;\ 2p=20 \ ;\ \text{A}=24]$$

38) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti tangente alla retta di equazione $y=x+3$. Disegnala e determina le coordinate dei suoi vertici e dei suoi fuochi. Determina l'equazione della circonferenza tangente nei vertici all'iperbole.

$$[\, xy=-\frac{9}{4} ;\ A_1(-\frac{3}{2};\frac{3}{2})\ \ A_2(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}) \ ;\ F_{1,2}(\pm\frac{3}{\sqrt{2}};\mp\frac{3}{\sqrt{2}}) \ ;\ x^2+y^2=\frac{9}{2}]$$

39) Determina l'equazione della funzione omografica avente come asintoto orizzontale la retta di equazione y=3 e passante per i punti A(-1;2) e B(1;0). Disegnala e determinane i vertici. Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e passante per A B e C (centro dell'iperbole).

$$[\, y=\frac{3x-3}{x-2} \ ;\ A_{1,2}(2\pm\sqrt{3};3\pm\sqrt{3}) \ ;\ y=\frac{4}{3}x^2-x-\frac{1}{3} \,]$$

40) a)Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi di simmetria avente fuochi $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$ e passante per il punto $P(2\sqrt{2};1)$. Disegnala indicando vertici, asintoti e calcola la sua eccentricità.

b) Determina l'equazione della tangente t all'iperbole nel punto P e, detta Q l'intersezione di t con l'asse y, determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per O, A_1 (vertice dell'iperbole di ascissa positiva) e Q.

$$[\ \Im: \frac{x^2}{4}-y^2=1 \ ;\ A_{1,2}(\pm 2;0) \ ;\ y=\pm\frac{1}{2}x \ ;$$

$$e=\frac{\sqrt{5}}{2}\ \ t:\sqrt{2}x-2y-2=0 \ ;\ \mathcal{C}: x^2+y^2-2x+y=0 \quad]$$

41) a) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera $\Im$ riferita ai propri asintoti tangente alla retta $t: y = 6x + 12$. Disegna l'iperbole ed indica le coordinate dei vertici $A_{1,2}$ e dei fuochi $F_{1,2}$.

b) Detto T il punto di tangenza di t, calcola l'area del triangolo $A_1\overset{\Delta}{A_2}T$.

[$\Im: xy = -6$; $A_{1,2}(\mp\sqrt{6};\pm\sqrt{6})$; $F_{1,2}(\mp 2\sqrt{3};\pm 2\sqrt{3})$; $area(A_1\overset{\Delta}{A_2}T) = 5\sqrt{6}$]

42) a) Determina l'equazione della funzione omografica $\Im$ avente come asintoto orizzontale la retta $y = 2$ e passante per $A(-2;0)$ e $B(0;4)$. Disegnala ed indica con C il suo centro.

b) Determina l'equazione della retta t tangente in A all'iperbole. Determina l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse di simmetria parallelo all'asse x , tangente a t in A e passante per B. Disegna $\mathcal{P}$.

[$\Im: y = \dfrac{2x+4}{x+1}$; $t: y = -2x - 4$; $\mathcal{P}: x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}y - 2$]

43) a) Determina l'equazione dell'iperbole $\Im$ riferita ai propri assi di simmetria avente fuochi $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{10})$ e asintoti $y = \pm\dfrac{1}{3}x$. Disegnala indicando con B_1 il suo vertice di ordinata positiva.

b) Sia P il punto dell'iperbole situato nel 1° quadrante avente ascissa $x = 4$. Determina la tangente in P all'iperbole e, detto Q il suo punto di intersezione con l'asse y, calcola l'area del triangolo $B_1\overset{\Delta}{Q}P$.

[$\Im: y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$; $P\left(4;\dfrac{5}{3}\right)$; $t: 4x - 15y + 9 = 0$; $area(B_1\overset{\Delta}{Q}P) = \dfrac{4}{5}$]

44) a) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera $\Im$ riferita ai propri asintoti sapendo che è tangente alla retta $t: y = -x + 3$. Disegnala e determina i vertici $A_{1,2}$ e i fuochi $F_{1,2}$.

b) Determina un punto (o i punti) appartenenti alla retta t tale che l'area del triangolo $P\overset{\Delta}{A_1}A_2$ sia uguale a $\dfrac{15}{2}$.

[$\Im: xy = \dfrac{9}{4}$; $A_{1,2}\left(\pm\dfrac{3}{2};\pm\dfrac{3}{2}\right)$; $F_{1,2}\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}};\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$; $P_1(4;-1)$ $P_2(-1;4)$]

45) a) Determina l'equazione della funzione omografica $\Im$ avente come asintoto verticale la retta $x = 3$ e passante per i punti $A(2;-1)$ e $B(0;1)$. Disegnala , indica con C il suo centro e determina l'equazione della tangente t all'iperbole in B.

b) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ tangente in B alla retta t e avente il centro sull'asintoto verticale di $\Im$.

[$\Im: y = \dfrac{2x-3}{x-3}$; $t: y = -\dfrac{1}{3}x + 1$; $\mathcal{C}: (x-3)^2 + (y-10)^2 = 90$]

Le coniche

Le "sezioni" di un cono

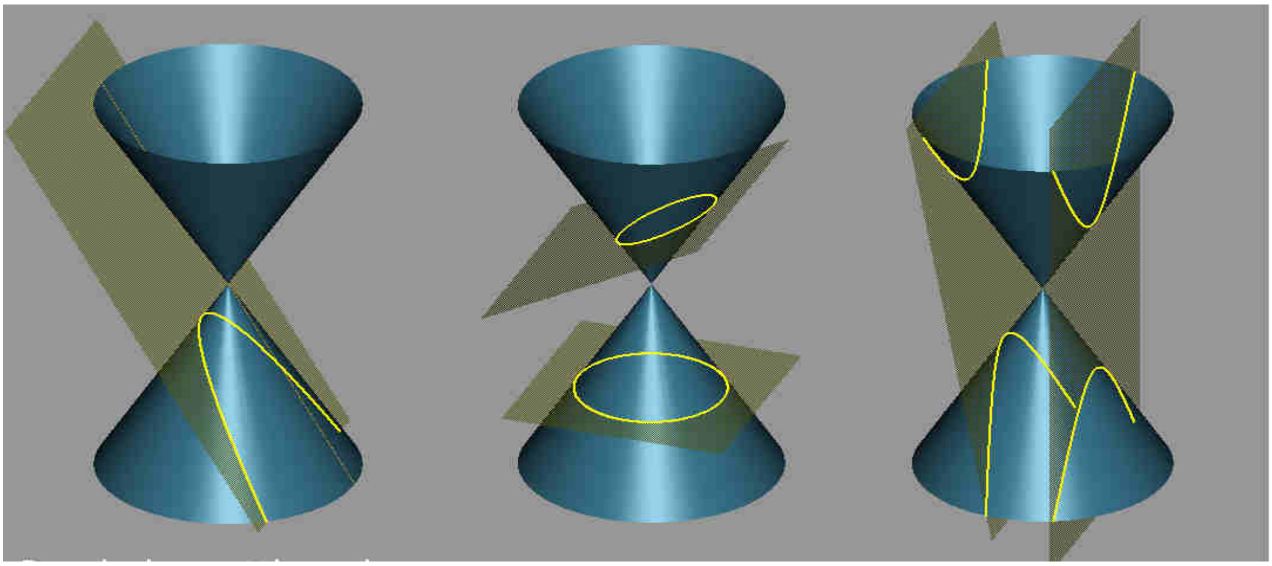
Parabola, ellisse, circonferenza, iperbole sono dette "**coniche**" poiché si possono ottenere sezionando un cono a doppia falda.

Infatti:

se il piano incontra tutte le generatrici si ottiene un'ellisse o una circonferenza se il piano è perpendicolare all'asse di simmetria del cono;

se il piano è parallelo ad una generatrice del cono si ottiene una parabola;

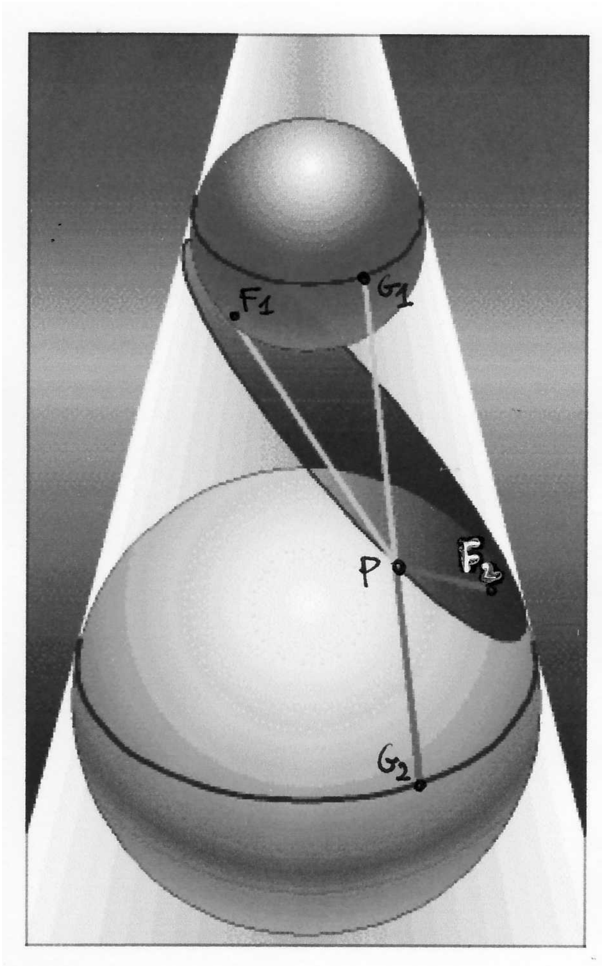
se il piano è parallelo a due generatrici del cono si ottiene un'iperbole.



Ma come si può dimostrare che queste "sezioni" corrispondono effettivamente alla definizione dei luoghi geometrici che abbiamo dato?

Dimostriamolo per esempio per l'ellisse (in modo analogo possiamo farlo per l'iperbole o la parabola).

Consideriamo le due sfere che sono tangenti al piano che individua la curva-sezione e al cono
(vedi figura).



Ciascuna sfera tocca il cono secondo una circonferenza e il piano della curva-sezione in un punto: indichiamo questi due punti di tangenza con F_1 ed F_2.

Sia P un generico punto sulla curva-sezione: ci proponiamo di dimostrare che la somma delle distanze $d(F_1, P) + d(F_2, P)$ rimane costante al muoversi del punto P lungo la curva e che quindi si tratta di un'ellisse.

La retta passante per P e il vertice del cono interseca le due circonferenze in due punti che denotiamo con G_1 e G_2.

Quando P si muove sulla curva-sezione, G_1 e G_2 si muovono ciascuno su una circonferenza.

Si ha $\overline{F_1P} = \overline{G_1P}$ e $\overline{F_2P} = \overline{G_2P}$ poiché entrambi i segmenti appartengono a rette tangenti alla stessa sfera.

Di conseguenza la somma delle distanze $d(F_1, P) + d(F_2, P)$ è uguale alla somma delle distanze $d(G_1, P) + d(G_2,P)$ che corrisponde alla lunghezza del segmento fra G_1 e G_2 (dato che P si trova sulla retta per G_1 e G_2) e rimane costante al variare di P sulla curva-sezione.

Questo dimostra che la curva-sezione è un'ellisse secondo la definizione che abbiamo dato come luogo geometrico e che i punti di contatto F_1 e F_2 sono quelli che noi avevamo chiamato fuochi.

Un po' di storia….

Ma perché ellisse, parabola e iperbole si chiamano così?

Lo studio delle coniche si è sviluppato nel corso di diversi secoli. Per quanto si sa le sue origini risalgono a **Menecmo** (350 a.C.) che considerava solo <u>sezioni con piani perpendicolari ad una generatrice</u> del cono:

se il cono è ad angolo retto sezionandolo con un piano perpendicolare ad una generatrice si ottiene una parabola;

se il cono è ad angolo ottuso si trova l'iperbole;

se il cono è ad angolo acuto si trova l'ellisse.

Anche Euclide (360-300 a.C.) si interessò alle coniche sulle quali scrisse ben 4 libri andati poi perduti e la trattazione fu poi completata, dal punto di vista teorico, negli otto libri 'Le coniche' di **Apollonio** (200 a.C.).

Si dice che sia stato Apollonio, tra l'altro, ad aver introdotto i nomi "ellisse", "parabola", e "iperbole": ellisse vuol dire mancanza, iperbole significa "andare oltre", e parabola, "mettere accanto".Infatti ragionando in termini moderni l'equazione della parabola può essere scritta

$$y^2 = lx$$

cioè la parabola gode della proprietà per cui, preso un qualunque punto sulla curva, il quadrato costruito sull'ordinata risulta uguale al rettangolo avente per dimensioni l'ascissa ed un parametro l.

Se per comodità scegliamo un riferimento tale che un vertice della curva sia nell'origine, come per la parabola precedente, l'equazione di ellisse e dell'iperbole diventano

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oppure

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e quindi svolgendo i calcoli e ricavando y^2 si ottiene , ponendo $l = \frac{2b^2}{a}$

$$y^2 = lx - \frac{x^2b^2}{a^2}$$ cioè $y^2 < lx$ per l'ellisse (mancante)

oppure $$y^2 = lx + \frac{x^2b^2}{a^2}$$ cioè $y^2 > lx$ per l'iperbole (in eccesso).

Equazione generale delle coniche

L'equazione generale di una conica è

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

con a,b,c non tutti nulli poiché altrimenti otteniamo una retta.

Vediamo come, al variare dei vari coefficienti, si ottengano tutte le coniche (eventualmente anche "degeneri") aiutandoci con Geogebra.

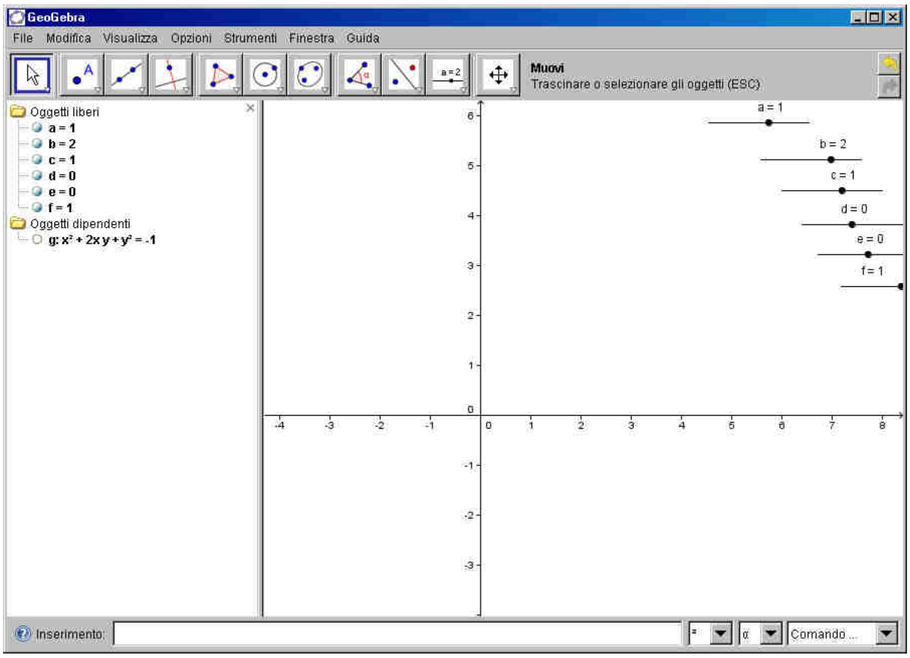
Concentriamoci sulla parte di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2$

1) Supponiamo che sia un quadrato cioè sia

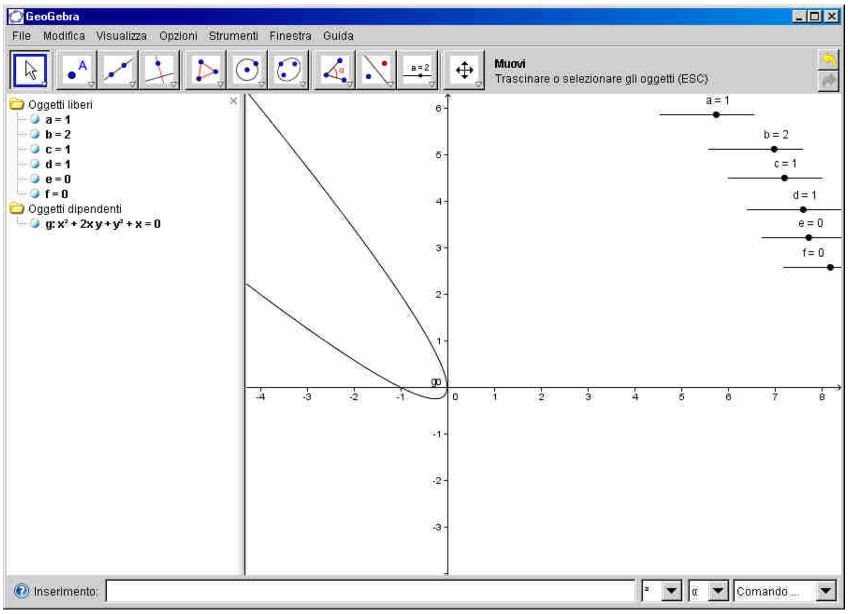
$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Consideriamo per esempio che $a = c = 1$ e $b = 2$: la parte di secondo grado si può scrivere quindi come $(x + y)^2$ e allora possiamo ottenere, al variare di e, d, f

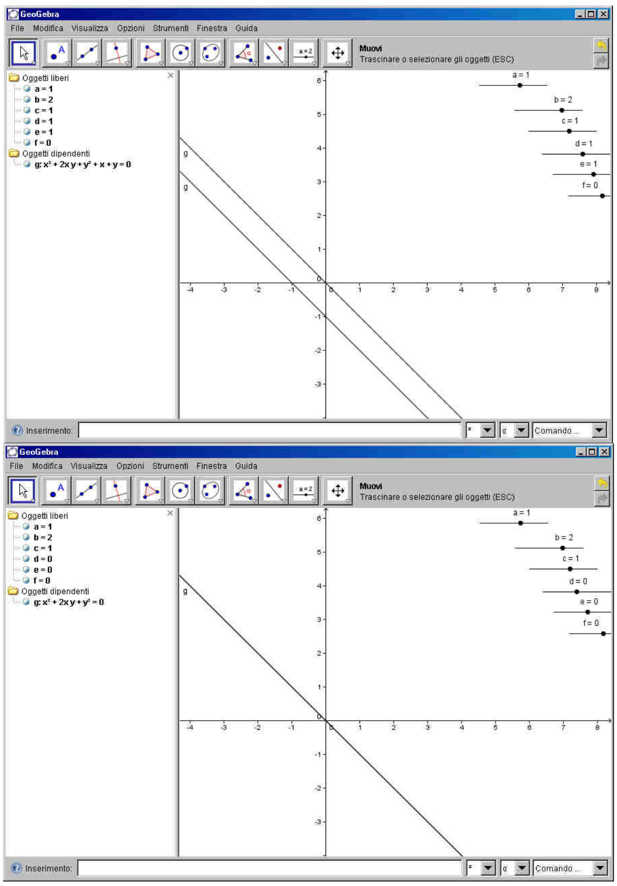
a)nessun punto reale (ponendo per esempio $d = e = 0$ $f = 1$)



b)una parabola con asse di simmetria parallelo alla retta $x + y = 0$ cioè con inclinazione $m = -1$ (ponendo per esempio $d = 1$ $e = f = 0$)

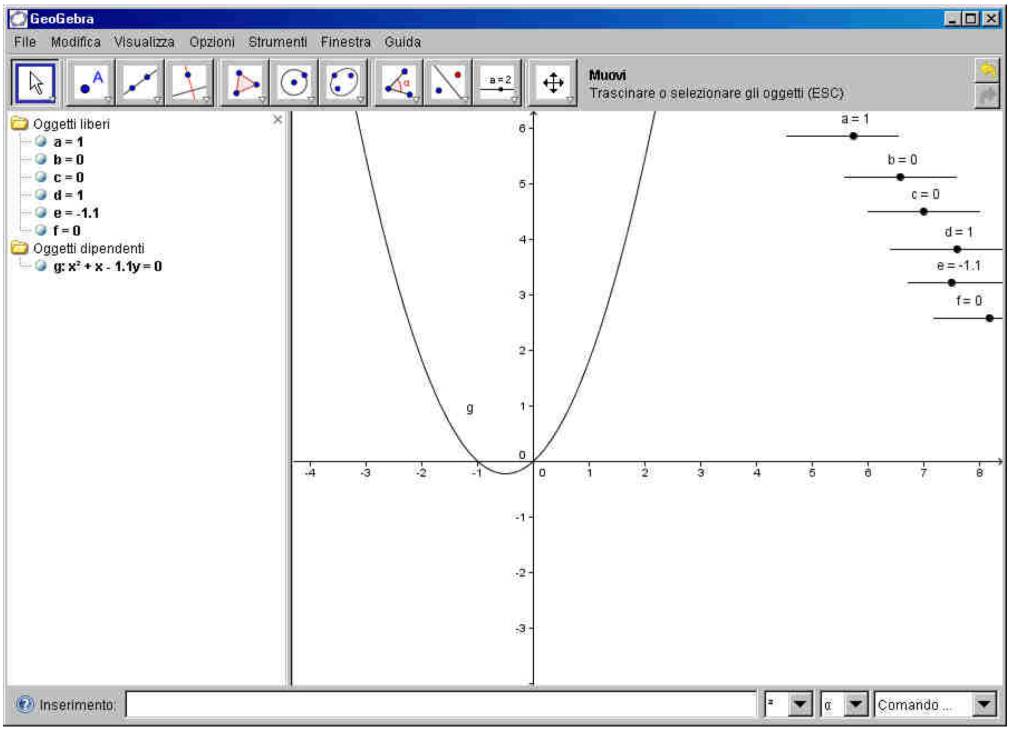


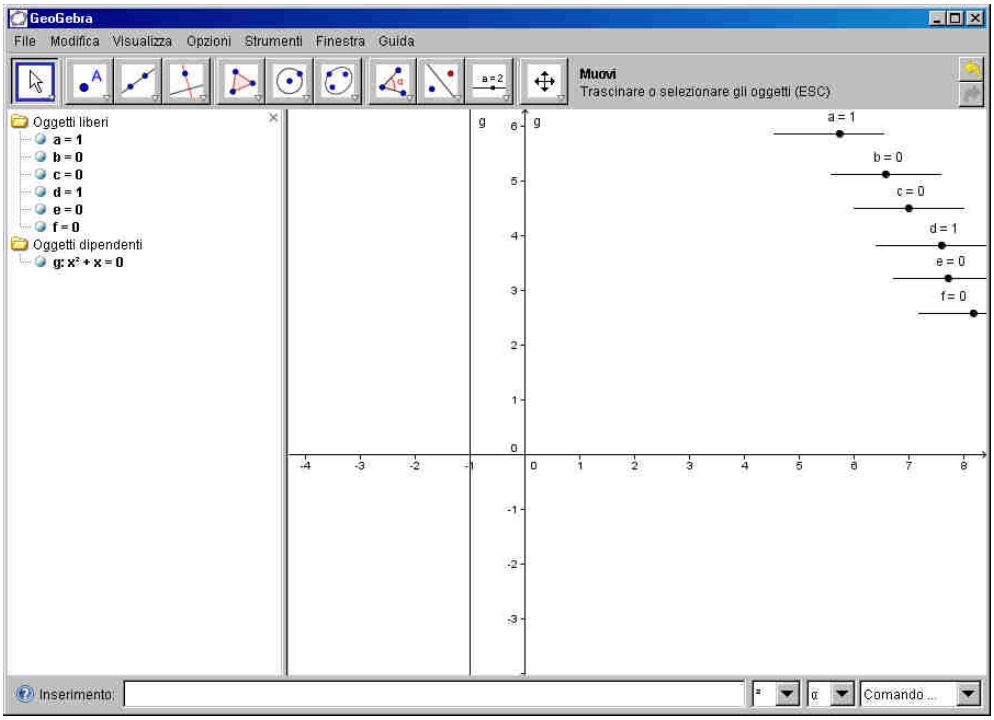
c)due rette parallele di inclinazione $m = -1$ (di cui una $x + y = 0$) eventualmente coincidenti



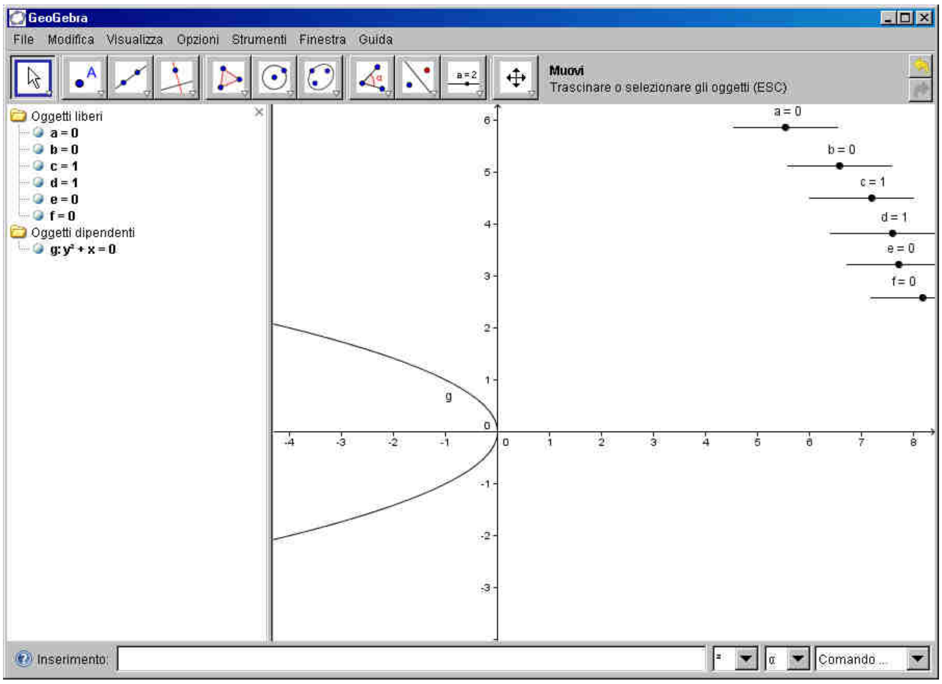
Casi particolari:

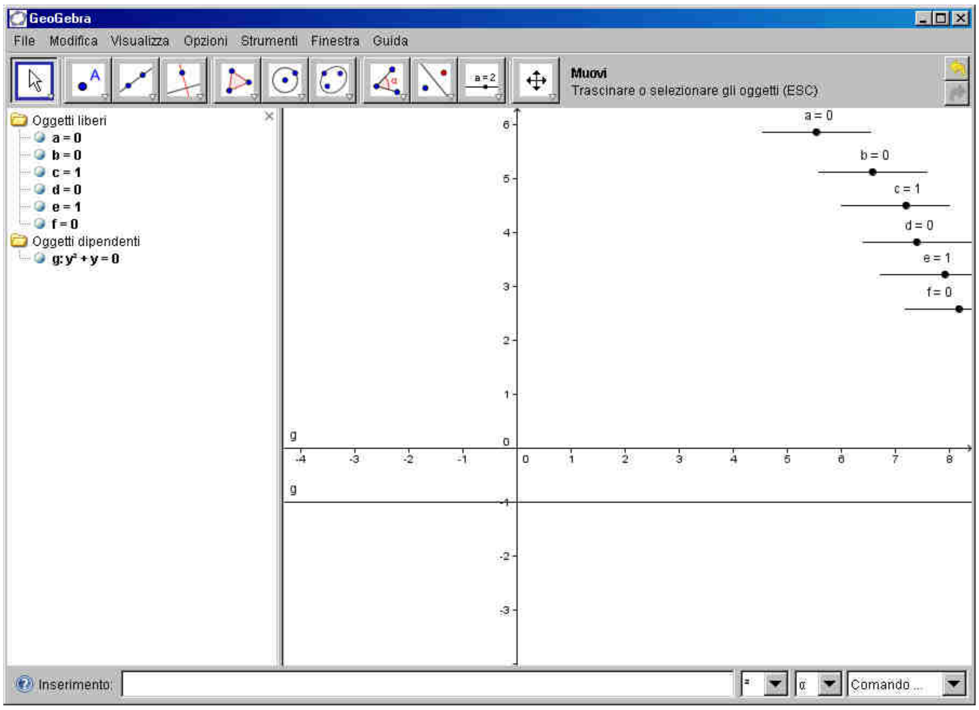
a) Se $b = c = 0$ si ottiene una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y poiché rimane solo ax^2 e quindi la retta è $x = 0$ cioè l'asse y (che può degenerare in una coppia di rette parallele (di cui una l'asse y) eventualmente coincidenti.





b) Se $a = b = 0$ si ottiene una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x poiché rimane solo cy^2 cioè la retta $y = 0$ (asse x) che può degenerare in una coppia di rette parallele all'asse x (di cui una l'asse x) eventualmente coincidenti.





2) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ …continua tu.

3) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ….continua tu.

Le coniche e la fisica

Le coniche sono importanti anche nello studio della fisica: la traiettoria di un corpo lanciato con velocità avente una componente orizzontale non nulla della velocità nel campo gravitazionale terrestre è una parabola, le orbite dei pianeti intorno al Sole sono ellittiche…

Lo storico della matematica Carl Boyer afferma infatti che fu "la matematica pura di Apollonio che, 1800 anni più tardi, rese possibile i *Principia* di Newton; quest'opera, a sua volta, ha permesso agli scienziati d'oggi di mandare l'uomo sulla Luna….

Nello sviluppo della matematica si è spesso dato il caso che argomenti che originariamente potevano essere giustificati come "degni per se stessi" si siano rivelati più tardi di valore inestimabile per l'uomo pratico".

Ma i pianeti non sono gli unici oggetti a orbitare intorno al Sole: ogni anno, infatti, sono avvistate nuove *comete*, che sono oggetti del sistema solare.

Le traiettorie delle comete possono essere:

ellittiche e in questo caso la cometa è periodica, come ad esempio la *cometa di Halley* (la periodicità di questa cometa fu scoperta da Edmund Halley, 1656-1742, fisico e astronomo amico di Newton), che transita per il vertice dell'ellisse più vicino al Sole (il *perielio*) circa ogni 76 anni (l'ultimo passaggio è stato nel 1986);

orbite aperte (paraboliche o iperboliche) : la cometa ha una velocità troppo elevata per essere catturata dal Sole e, dopo essere passata al perielio, si allontana definitivamente.

Che tipo d'ellissi descrivono i pianeti e le comete periodiche?

Le orbite delle comete periodiche sono molto schiacciate (eccentriche), mentre le orbite dei pianeti sono ellissi poco schiacciate cioè molto vicine ad una circonferenza ed infatti calcolando la loro eccentricità abbiamo valori vicino allo zero.