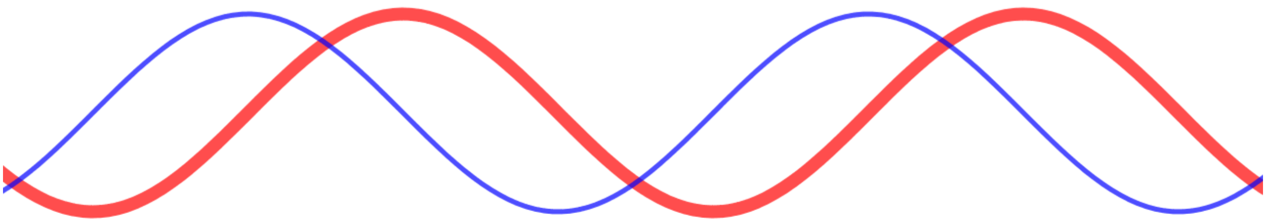
Goniometria e trigonometria

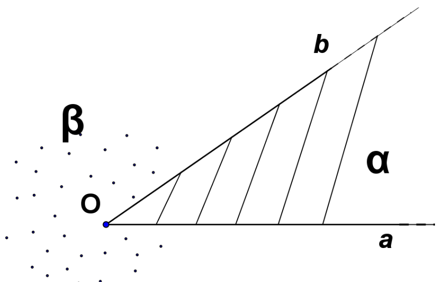
Funzioni goniometriche



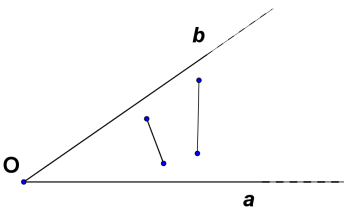
Definizione di angolo

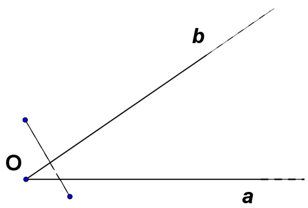
Consideriamo due semirette a, b aventi l'origine O in comune.
Le due semirette individuano due porzioni di piano che sono dette angoli di lati a e b e vertice O. Si presentano tre casi:

1) a e b non appartengono alla stessa retta

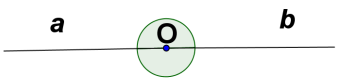


In questo caso abbiamo un **angolo convesso** α (presi comunque due punti appartenenti all'angolo il segmento che li unisce appartiene all'angolo) e un **angolo concavo** β (esistono coppie di punti appartenenti all'angolo tali che il segmento che li unisce non appartiene all'angolo).

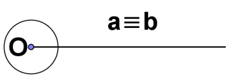




2) a e b appartengono alla stessa retta (ma non coincidono)
In questo caso vengono individuati due angoli uguali (convessi) chiamati **angoli piatti**.



3) a e b coincidono : in questo caso abbiamo **l'angolo nullo** (ci sono solo i lati) e **l'angolo giro** (tutto il piano).



Misura degli angoli

Gli angoli possono essere misurati in gradi o in radianti.

Misure in gradi

grado = $\frac{1}{360}$ (angolo giro)

Angolo giro → 360°
Angolo piato → 180°
Angolo retto → 90°
ecc…

Si usano sottomultipli sessagesimali cioè si considera

il primo → $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ → $1° = 60'$

il secondo → $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$ → $1' = 60''$

Esempio:

$$\frac{1}{4} \text{ di angolo retto} = \left(\frac{90}{4}\right)^{\circ} = 22{,}5° = 22° + (0{,}5)^{\circ} = 22° + (0{,}5 \cdot 60)' = 22° \quad 30'$$

Esempio:

$$\frac{1}{16} \text{angolo retto} = \left(\frac{90}{16}\right)^{\circ} = (5{,}625)^{\circ} = 5° + (0{,}625 \cdot 60)' = 5° \ (37{,}5)' = 5° \ 37' \ (0{,}5 \cdot 60)'' = 5° \ 37' \ 30''$$

Esempi

1) Trasformare in frazioni di grado i seguenti angoli:

a) $$15° \ 30' = \left(15 + \frac{30}{60}\right)^{\circ} = \left(15 + \frac{1}{2}\right)^{\circ} = \left(\frac{31}{2}\right)^{\circ}$$

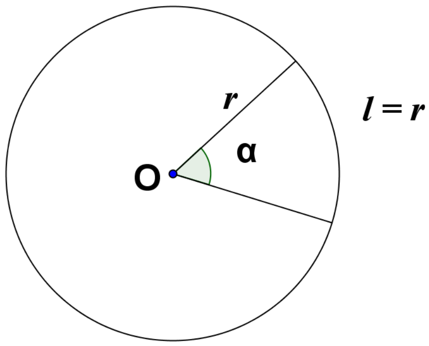
b) $$3° \ 7' \ 1'' = \left(3 + \frac{7}{60} + \frac{1}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{10800 + 420 + 1}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{11221}{3600}\right)^{\circ}$$

2) Trasformare in gradi, primi e secondi la seguente frazione di grado:

$$\left(\frac{1201}{300}\right)^{\circ} = \left(\frac{1200}{300} + \frac{1}{300}\right)^{\circ} = 4° + \left(\frac{1}{300}60\right)' = 4° \ (0{,}2)' = 4° \ (0{,}2 \quad 60)'' = 4° \ 12''$$

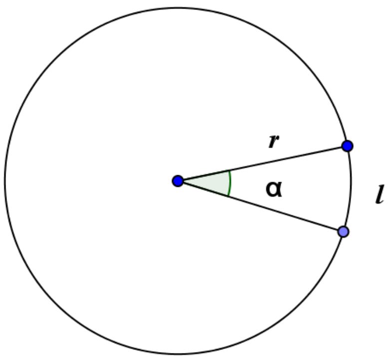
Misure in radianti

radiante = angolo che, tracciata una circonferenza di raggio qualsiasi avente centro nel vertice dell'angolo, sottende un arco uguale al raggio.



Da notare che questa definizione non dipende dalla circonferenza considerata perché se α sottende un arco uguale al raggio per una data circonferenza, allora accadrà lo stesso per ogni circonferenza centrata nel suo vertice.

Per misurare α in radianti traccio una circonferenza di raggio r, con centro il vertice di α e se l è la lunghezza dell'arco sotteso da α avrò che



$$\alpha_r = \frac{l}{r} \quad rad$$

Nota: se $l = r$ trovo $\alpha_r = 1$ rad

Quindi: angolo giro → $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad

angolo piatto → π rad

angolo retto → $\frac{\pi}{2}$ rad

Relazione tra la misura in gradi e la misura in radianti di un angolo α

Indichiamo con α^o la misura in gradi di un angolo α e con α_r la sua misura in radianti.
Avremo che

$$\alpha° : \alpha_r = 360° : 2\pi$$

Questo ci permetterà di determinare α^o se conosciamo α_r e viceversa.

Esempi

1) Esprimere in radianti le seguenti misure espresse in gradi:

a) $\alpha° = 12°$

$$12 : a_r = 360 : 2\pi$$

$$\alpha_r = 12 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{15}$$

b) $\alpha° = 10° 30'$

Trasformo prima in frazione di grado:

$$10° 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{21}{2}\right)^{\circ}$$

$$\alpha_r = \frac{21}{2} \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{120}$$

2) Esprimere in gradi le seguenti misure di angoli espresse in radianti:

a) $\alpha_r = 1$ rad

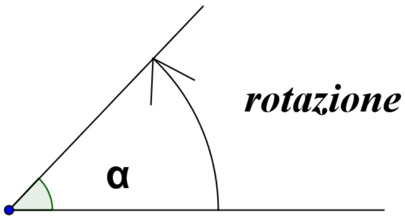
$$\alpha^o : 1 = 360 : 2\pi \Rightarrow \alpha° = 1 \frac{180}{\pi} \quad (\cong 57{,}3°)$$

b) $\alpha_r = \frac{\pi}{3}$ rad

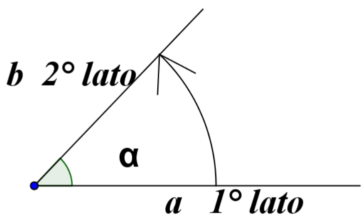
$$\alpha^o : \frac{\pi}{3} = 360 : 2\pi \qquad \Rightarrow \alpha° = \frac{\pi}{3} \frac{180}{\pi} = 60°$$

Angoli orientati

Un angolo, oltre che come parte di piano, può essere associato al concetto di **rotazione** cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

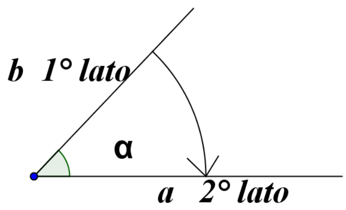


La rotazione però può essere in verso orario o antiorario.
Possiamo stabilire quale considerare come 1° lato (lato origine della rotazione) e allora avremo un angolo "orientato": per convenzione stabilisco di chiamare **positivo** un angolo orientato se la **rotazione** che porta il primo lato sul secondo lato spazzando l'angolo è **antioraria** , negativo se è invece una rotazione oraria.



Con la scrittura $\hat{ab}$ intendiamo che a sia il 1° lato,

Nel nostro esempio $\hat{ab}$ è un angolo positivo.

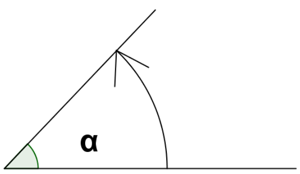


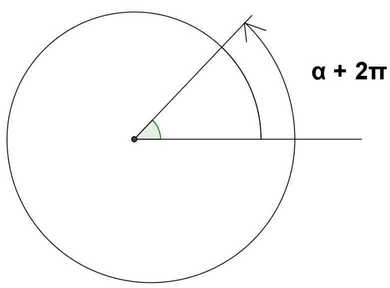
Con la scrittura $\hat{ba}$ intendiamo che il 1° lato sia b .

Nel nostro esempio $\hat{ba}$ è un angolo negativo.

Considerando il concetto di rotazione possiamo avere anche angoli di ampiezza maggiore dell'angolo giro perché possiamo pensare di ruotare di un certo numero k di giri completi: α e $\alpha + 2\pi$ sono angoli rappresentati dalla stessa parte di piano ma associati a rotazioni diverse perché nel secondo angolo ho fatto un giro in più.

In generale scrivendo $\alpha + 2k\pi$ considererò l'angolo associato alla rotazione di ampiezza α più k giri completi (se $k > 0$ ruoto in senso antiorario, se $k < 0$ in senso orario).

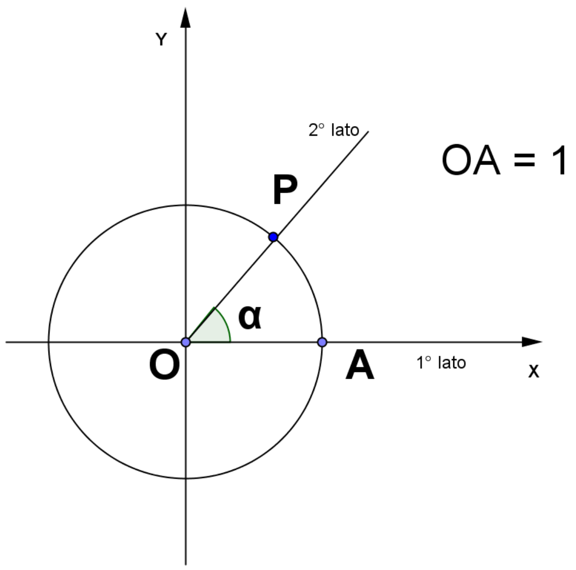




La circonferenza goniometrica

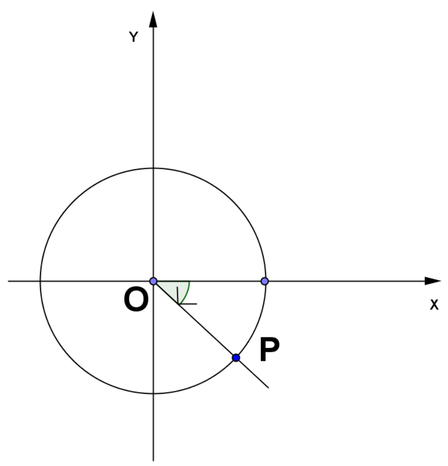
Possiamo rappresentare gli angoli orientati su una circonferenza che viene detta “circonferenza goniometrica”.

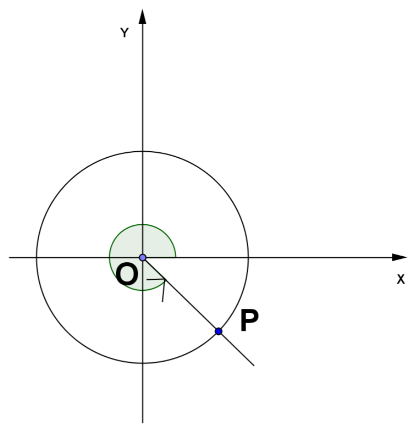
Fissato un sistema di riferimento (O;x,y) la circonferenza goniometrica è una circonferenza di centro l’origine e raggio 1.



Possiamo associare ad un angolo orientato α un punto sulla circonferenza goniometrica riportando il 1° lato dell’angolo sul semiasse positivo delle ascisse: il 2° lato dell’angolo intersecherà la circonferenza in un punto P che risulterà quindi il punto associato all’angolo α.

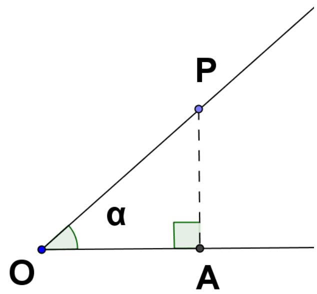
Osserviamo che lo stesso punto P sulla circonferenza è associato a più angoli, non solo perché posso sommare $2k\pi$ ma anche perché posso ruotare in senso orario o antiorario. Per esempio il punto P in figura può rappresentare $-\frac{\pi}{4}$ ma anche $\frac{7}{4}\pi$ (oltre che $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ e $\frac{7}{4}\pi+2k\pi$).





Definizione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto α

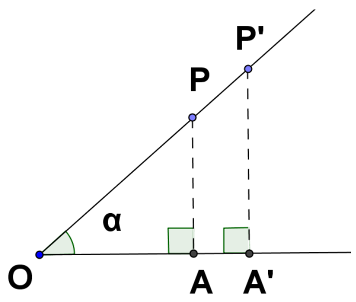
Consideriamo un angolo α acuto.



Prendiamo un punto P appartenente ad un lato (vedi figura) e proiettiamo sull'altro lato e sia A la proiezione. Il triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ è un triangolo rettangolo.

I) Consideriamo il rapporto $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$

Questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P: infatti considerando un altro punto P'e la sua proiezione A' il triangolo $\overset{\Delta}{OP'}A'$ risulta simile al triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ e quindi $\dfrac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$



Questo rapporto viene chiamato seno dell'angolo α ed indicato con la scrittura $sen\alpha$.

Quindi per definizione abbiamo:

$$sen\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$$

Considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo dire che :

$$\boxed{sen\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}$$

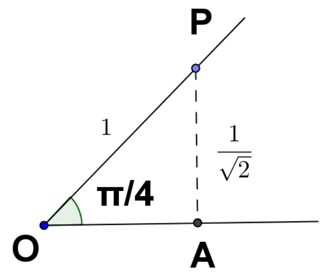
Calcoliamo il seno di qualche angolo.

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45°)

Per semplicità possiamo prendere $\overline{OP} = 1$.

Poiché il triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ in questo caso è metà di un quadrato avremo $\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\overline{OP} = \overline{AP} \cdot \sqrt{2}$).

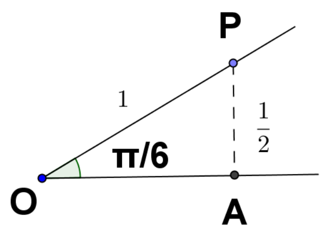
Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$



b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (30°)

Prendiamo sempre $\overline{OP} = 1$. Poiché $\overset{\Delta}{OPA}$ risulta la metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{AP} = \frac{1}{2}$ ($\overline{OP} = 2 \cdot \overline{AP}$).

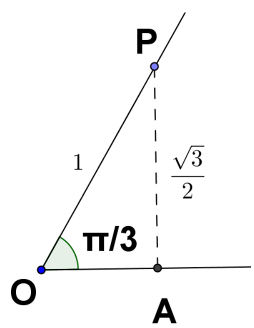
Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$



c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (60°)

Se $\overline{OP} = 1$, poiché $\overset{\Delta}{OPA}$ è la metà di un triangolo equilatero in cui $\overline{AP}$ è l'altezza, avremo $\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$)

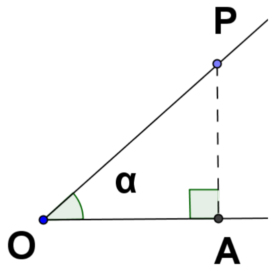
Quindi $\boxed{sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$



Nota

In questi esempi abbiamo considerato angoli "particolari" nel senso che nel triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ siamo riusciti a determinare $\overline{AP}$ in funzione di $\overline{OP}$ sfruttando **proprietà geometriche**.
In generale per calcolare il seno di un angolo occorre fare una costruzione precisa del triangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ e misurare $\overline{AP}$ e $\overline{OP}$.
Noi non dovremo comunque fare queste misurazioni perché il valore del seno di un qualsiasi angolo può essere ricavato da delle "tavole" o, ancora più semplicemente, utilizzando la **calcolatrice**.
Basterà indicare la misura dell'angolo (attenzione all'unità di misura utilizzata : DEG sta per gradi e RAD per radianti)e poi premere il tasto SIN (o viceversa a seconda del tipo di calcolatrice).
Per esempio: $sen 31° = 0{,}5150...$
Naturalmente anche con la calcolatrice ritroveremo per esempio che $sen 30° = 0{,}5$ ecc.

II) Consideriamo il rapporto $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$



Anche questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P (vedi motivazione data in I)). Questo rapporto viene chiamato coseno dell'angolo α e indicato con la scrittura $\cos\alpha$.

Quindi abbiamo $$\cos\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$$

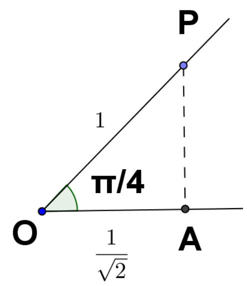
e considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo dire

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}$$

Proviamo a calcolare il coseno di $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

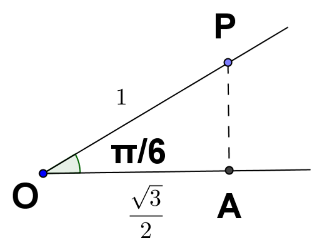
a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Se prendiamo $\overline{OP} = 1$ con le stesse considerazioni fatte per il seno avremo che $\overline{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi



$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

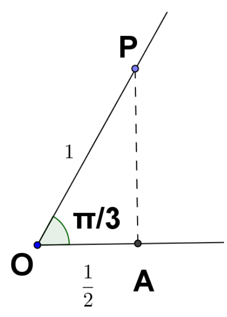


Se $\overline{OP} = 1$ considerando $\overset{\Delta}{OPA}$ come metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Se $\overline{OP} = 1$ avremo $\overline{OA} = \dfrac{1}{2}$ e quindi

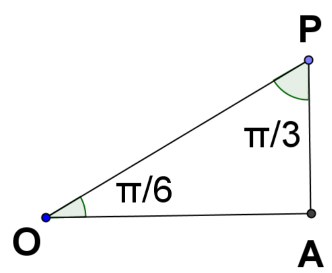


$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$

Osservazione

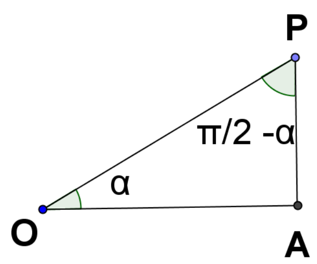
Osserviamo che $sen\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$ e $\cos\frac{\pi}{3}=sen\frac{\pi}{6}$.

Questo dipende chiaramente dal fatto che $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ sono angoli complementari e che quindi il ruolo di cateto adiacente e opposto si scambiano portando ad uno scambio dei valori del seno e del coseno.



$$sen\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \quad ; \quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \quad \Rightarrow \quad sen\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}$$

Questo vale naturalmente per tutte le coppie di angoli complementari:



$$\left.\begin{array}{l} sen\alpha=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \end{array}\right. \Rightarrow sen\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

E' chiaro che vale anche $\cos\alpha=sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

Proprio da questa ultima relazione deriva la denominazione di **coseno** che significa

complementi sinus

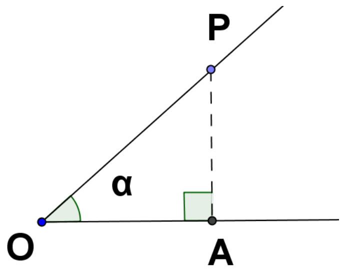
cioè seno dell'angolo complementare.

Nota

Per calcolare il coseno di angoli per i quali non si possono utilizzare proprietà geometriche per determinare $\overline{OA}$ in funzione di $\overline{OP}$ valgono le stesse considerazioni fatte per il seno e quindi utilizzeremo la calcolatrice.

Per esempio: $\cos 31°=0{,}8571...$

III) Consideriamo infine il rapporto $\frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$



Questo rapporto, a differenza dei precedenti, può risultare anche un numero molto grande o molto piccolo in relazione all'angolo α considerato ed è indipendente dalla scelta del punto P per le stesse motivazioni date in I) e II).
Questo rapporto viene chiamato tangente dell'angolo ε e indicato con la scrittura $tg\alpha$, cioè si ha

$$tg\alpha \overset{def}{=} \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$$

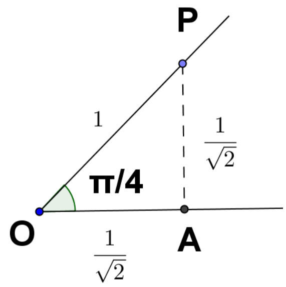
e considerando il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ possiamo scrivere

$$\boxed{tg\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}}$$

Calcoliamo la tangente di $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$.

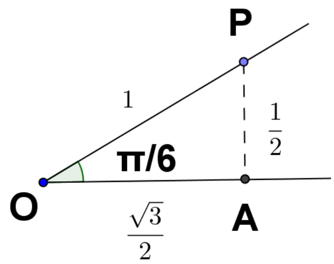
a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Se $\overline{OP} = 1 \;\; \overline{PA} = \overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow tg\frac{\pi}{4} = 1$



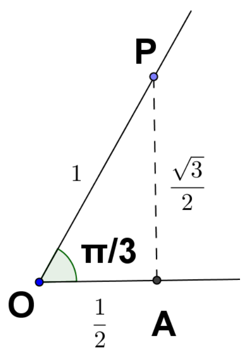
b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Se $\overline{OP} = 1 \;\; \overline{PA} = \frac{1}{2}$, $\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Se $\overline{OP} = 1 \;\; \overline{PA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$



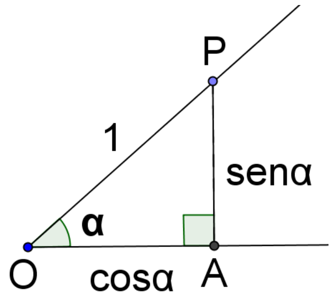
In generale, per calcolare la tangente di un angolo α, per le stesse considerazioni svolte in I) e II) useremo la calcolatrice.

E' importante osservare che

$$\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}}{\dfrac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha} = tg\alpha$$

Estensione della definizione di seno,coseno e tangente

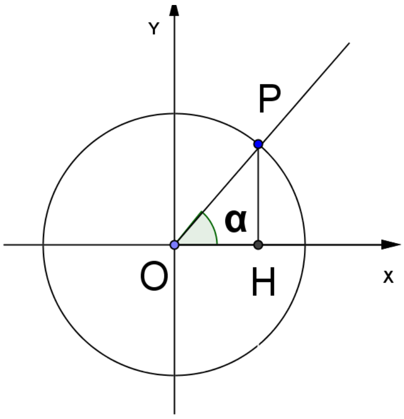
Osserviamo che se nel triangolo $\overset{\Delta}{OAP}$ l'ipotenusa $\overline{OP} = 1$ abbiamo



$$sen\alpha = \overline{AP}$$

$$\cos\alpha = \overline{OA}$$

Questo suggerisce un metodo per estendere la definizione di seno e coseno anche per angoli $\alpha \geq 90°$.
Riportiamo l'angolo α sulla circonferenza goniometrica e poiché $\overline{OP} = 1$ avremo:



$$sen\alpha = \overline{PH} = y_P$$
$$\cos\alpha = \overline{OH} = x_P$$

Diamo allora la seguente definizione di seno e coseno di α:

$$sen\alpha \overset{def}{=} y_P$$
$$\cos\alpha \overset{def}{=} x_P$$

dove P è il punto associato all'angolo orientato α sulla circonferenza goniometrica.

Osserviamo che con questa definizione i valori del seno e del coseno di un angolo possono essere anche negativi, ma che comunque sono numeri compresi tra -1 e 1.

Vediamo meglio come variano i valori di $sen\alpha$ e $\cos\alpha$.

Variazione del seno di un angolo

$\alpha = 0 \rightarrow sen\alpha = 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow sen\alpha = 1$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

$\alpha = \pi \rightarrow sen\alpha = 0$

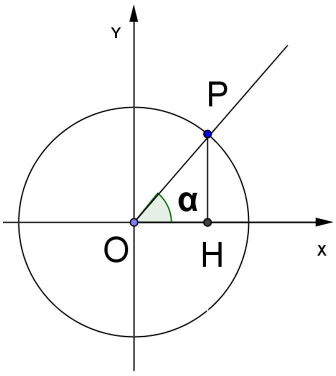
$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

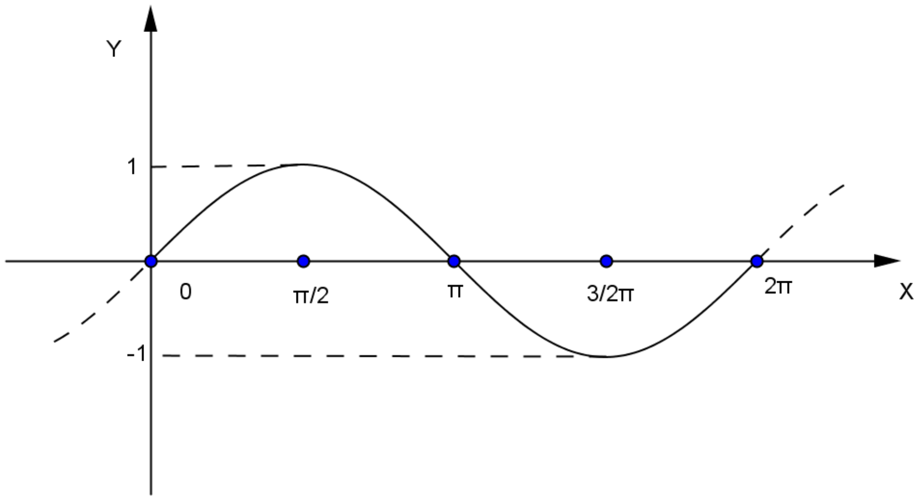
$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow sen\alpha = -1$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

$\alpha = 2\pi \rightarrow sen\alpha = 0$

$$sen\alpha = y_P$$





Osserviamo che il grafico si ripete ogni 2π cioè la funzione $f : x \rightarrow senx$ o $y = senx$ è periodica di periodo 2π.

Variazione del coseno di un angolo

$\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 1$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha = 0$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

$\alpha = \pi \rightarrow \cos\alpha = -1$

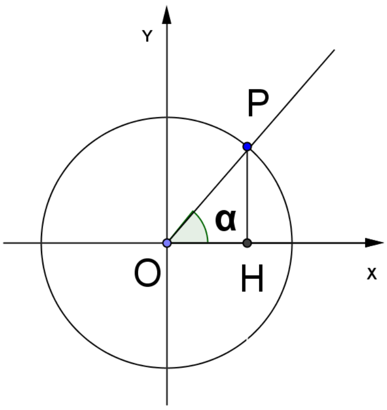
$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

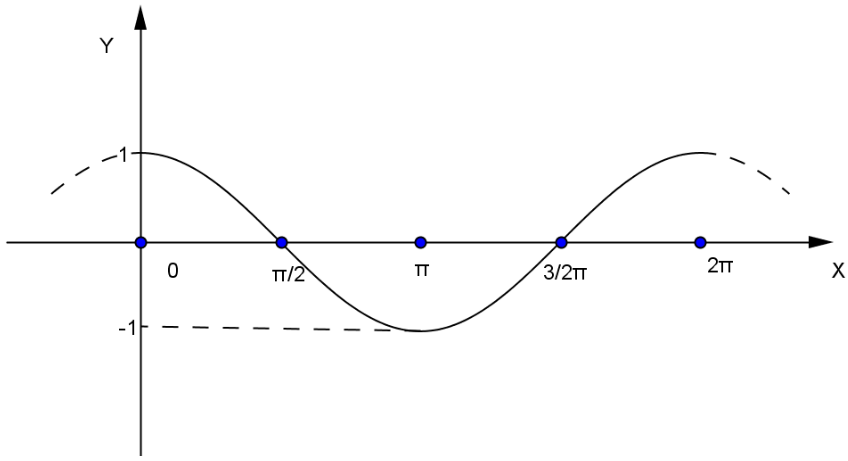
$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \cos\alpha = 0$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$\alpha = 2\pi \rightarrow \cos\alpha = 1$

$\cos\alpha = x_P$





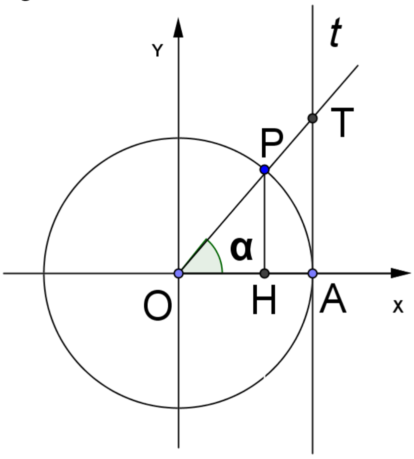
Osserviamo che anche la funzione $f : x \rightarrow \cos x$ cioè $y = \cos x$ è periodica di periodo 2π .

Osservazione

Il grafico di $y = \cos x$ corrisponde a quello di $y = sen x$ “traslato” verso sinistra di $\frac{\pi}{2}$: questo dipende dal fatto che , come vedremo, $\cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Tangente di un angolo orientato

Vediamo come possiamo estendere la definizione di tangente data per un angolo α acuto utilizzando la circonferenza goniometrica.



Tracciamo la tangente t alla circonferenza goniometrica nel punto $A(1;0)$ e consideriamo il punto T di intersezione tra t e il prolungamento del 2° lato dell'angolo α. Osservando i triangoli simili $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OAT}$ potremo scrivere

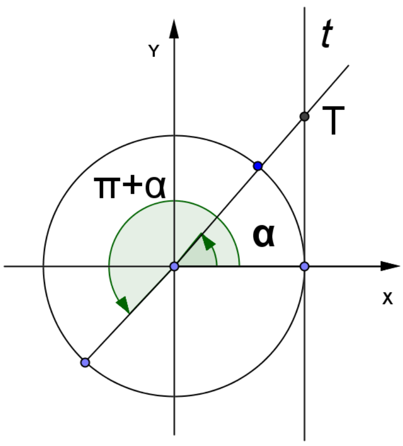
$$tg\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \overline{TA} = y_T$$

Definiamo allora $$tg\alpha \overset{def}{=} y_T$$

dove T è il punto di intersezione del prolungamento del 2° lato dell'angolo α con la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A(1;0).

Osserviamo che per $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\alpha = \frac{3}{2} + 2k\pi$ la tangente non è definita (il 2° lato dell'angolo non incontra la tangente t).

Inoltre osserviamo che α e $\alpha + \pi$ avranno la stessa tangente in quanto sono associati allo stesso punto T.



$$tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$$

Questo significa che, considerando la variazione della tangente, i valori si ripeteranno dopo un periodo di π (e non di 2π come per seno e coseno).

Vediamo come risulta il grafico di $y = tgx$.

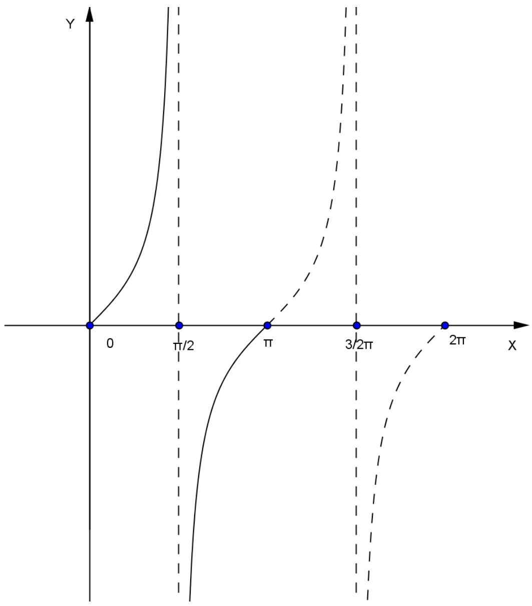
$\alpha = 0 \rightarrow tg\alpha = 0$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori della tangente aumentano e sono positivi

$\alpha = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow$ la tangente non è definita

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori della tangente sono negativi e aumentano

$\alpha = \pi \rightarrow tg\alpha = 0$



$x = \dfrac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale del grafico di y = tgx e in generale $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sono tutti asintoti verticali del grafico.

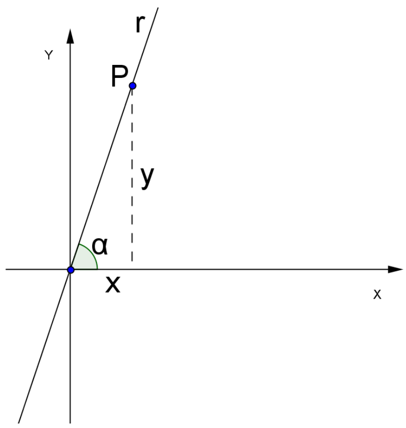
Quindi la funzione $f : x \rightarrow tgx$ o $y = tgx$ è definita per $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ cioè il suo dominio è $\Re - \left\{ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$ ed ha periodo π.

Nota: osserviamo che **il coefficiente angolare di una retta** corrisponde alla tangente goniometrica dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle *x*.

Consideriamo inizialmente una retta passante per l'origine (vedi figura):è chiaro che se

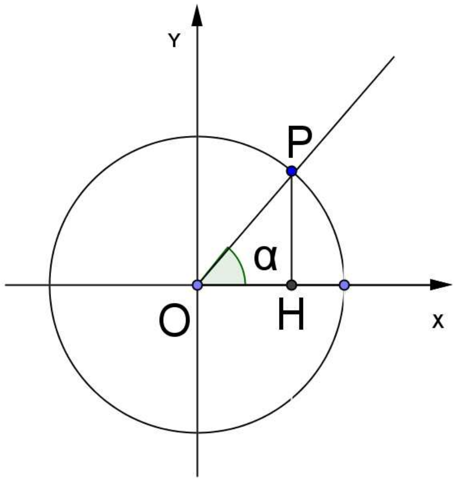
$r : y = mx$

$tga = \dfrac{y}{x} = m$



Relazioni fondamentali tra senα, cosα e tgα

1) Osservando la circonferenza goniometrica ed applicando il teorema di Pitagora si ha subito che



$$\overline{PH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OP}^2$$
$$(sen\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Per convenzione $(sen\alpha)^2$ si scrive $sen^2\alpha$ e quindi scriveremo

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$ ***1° relazione fondamentale***

2) Avevamo già osservato che

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}$$ ***2° relazione fondamentale***

Utilizzando queste relazioni è possibile, conoscendo una funzione goniometrica dell'angolo α, ricavare le altre due supponendo però di sapere in quale "quadrante" si trova l'angolo.

Nota
Vengono definite, oltre al seno, coseno e tangente di un angolo α, anche altre tre funzioni goniometriche:

cosecante $\rightarrow$ $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$

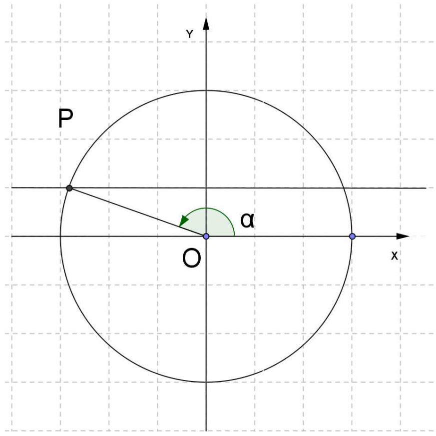
secante $\rightarrow$ $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \quad \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

cotangente $\rightarrow$ $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$

Nota: osserviamo che per $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$ possiamo scrivere che $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$.

Esempi

1) Se $sen\alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determinare $\cos\alpha$ e $tg\alpha$.



Osserviamo che per individuare graficamente l'angolo α possiamo tracciare la retta $y = \frac{1}{3}$: questa individua sulla circonferenza goniometrica due punti e noi dovremo considerare quello del 2° quadrante poiché sappiamo che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Quindi dalla 1° relazione avremo:

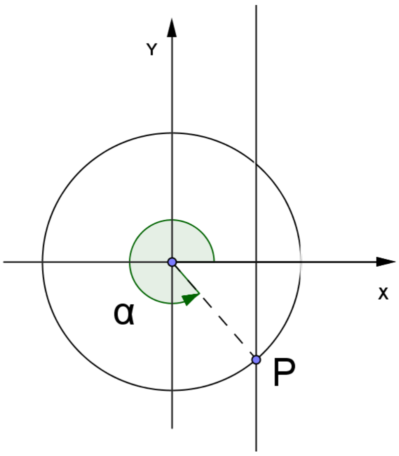
$\cos^2 \alpha = 1 - sen^2\alpha$ e nel nostro caso ,essendo il coseno negativo, abbiamo

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - sen^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Poi dalla 2° relazione abbiamo

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2) Se $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ determina $sen\alpha$ e $tg\alpha$.



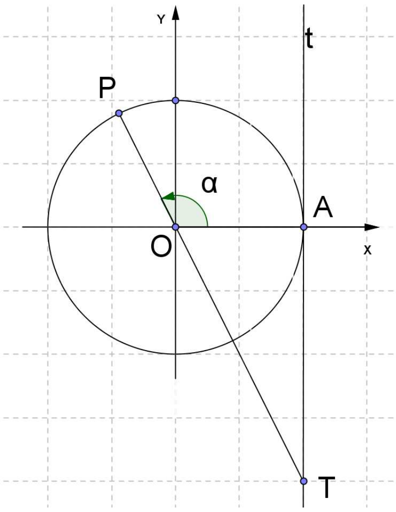
Possiamo intersecare la circonferenza goniometrica con la retta $x = \frac{3}{5}$ per individuare graficamente α.

Osserviamo che il seno di α risulta negativo.

$$sen\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

3) Se $tg\alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determina $sen\alpha$ e $\cos\alpha$.



Possiamo ricavare graficamente α considerando la tangente *t* e su di essa il punto T di ordinata -2: tracciando la retta OT otteniamo i punti associati sulla circonferenza goniometrica

In questo caso dobbiamo risolvere un sistema dove utilizziamo insieme le relazioni fondamentali:

$$\begin{cases} \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = -2 \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\alpha = -2\cos\alpha \\ 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\alpha = +\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Nota: possiamo ricavare una relazione tra $sen\alpha$ e $tg\alpha$, $\cos\alpha$ e $tg\alpha$ in modo da non essere costretti a risolvere il sistema precedente. Infatti possiamo scrivere:

$$sen^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{1} = \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

(abbiamo diviso numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$)

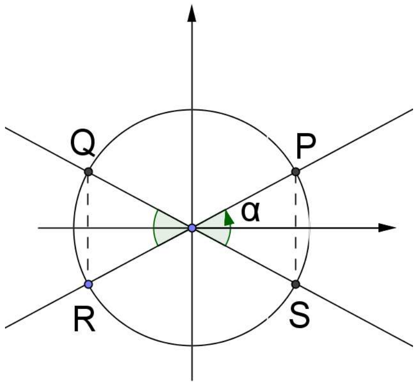
cioè
$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

e analogamente $\cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{1} = \dfrac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha + \cos^2\alpha} = \dfrac{1}{tg^2\alpha + 1}$ (abbiamo diviso numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$).

Angoli associati

Dalla conoscenza delle funzioni goniometriche di un angolo α si possono ricavare informazioni sulle funzioni goniometriche di altri angoli, detti "**angoli associati**" ad α.

Osserviamo la seguente figura: consideriamo i punti Q, R, S simmetrici di P (rispetto all'asse y, all'origine e all'asse x).
Se P è il punto della circonferenza goniometrica che rappresenta α si dimostra facilmente che:



$$Q \to \pi - \alpha$$
$$R \to \pi + \alpha$$
$$S \to 2\pi - \alpha (oppure\ -\alpha)$$

Questi angoli si dicono "angoli associati" ad α. Quindi, ricordando la definizione di seno (y) e coseno(x), abbiamo:

$$\begin{cases} sen(\pi - \alpha) = sen\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

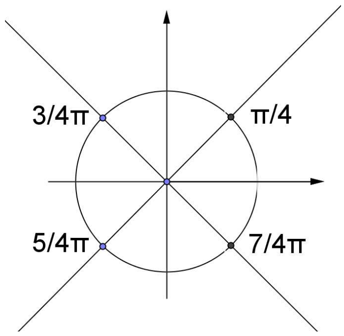
$$\begin{cases} sen(2\pi - \alpha) = -sen\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{aligned} sen(-\alpha) &= -sen\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$$
$$tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$$
$$tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha \qquad tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

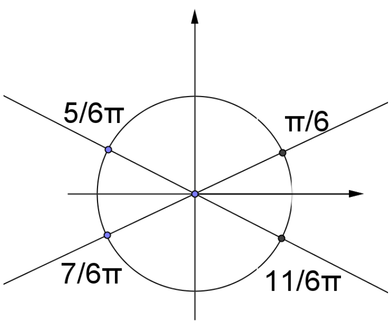
Esempi

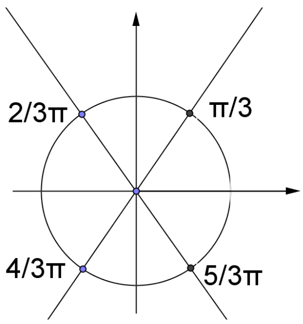
- Angoli associati a $\frac{\pi}{4}$:



Abbiamo quindi $\quad sen\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ecc…

- Angoli associati a $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$:

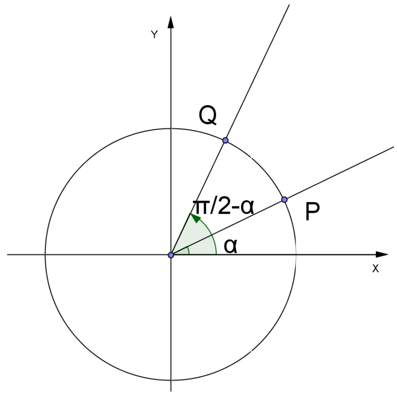




Abbiamo inoltre:

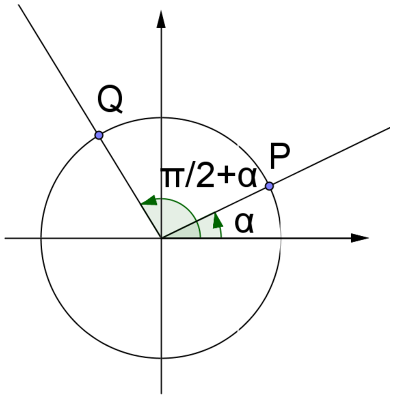
- L'angolo $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (angolo complementare di α)

$$P \to \alpha$$
$$Q \to \frac{\pi}{2}-\alpha$$



I triangoli $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OQK}$ sono uguali poiché sono triangoli rettangoli , $\overline{OQ}=\overline{OP}=1$ e $H\hat{O}P=\alpha=O\hat{Q}K$ quindi, come avevamo già osservato:

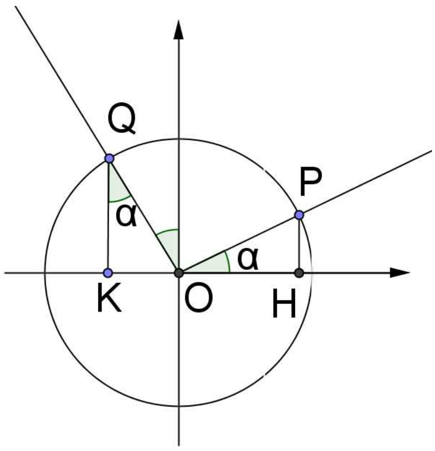
$$\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\alpha \end{cases}$$



- L'angolo $\frac{\pi}{2}+\alpha$:

$$P \to \alpha$$
$$Q \to \frac{\pi}{2}+\alpha$$

I triangoli $\overset{\Delta}{OPH}$ e $\overset{\Delta}{OQK}$ sono uguali ($\overline{OP}=\overline{OQ}=1$ triangoli rettangoli e $P\hat{O}H=\alpha=O\hat{Q}K$) e quindi, considerando i segni:



$$\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=y_Q=x_P=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=x_Q=-y_P=-sen\alpha \end{cases}$$

Di conseguenza:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=\cot g\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=-\cot g\alpha$$

Funzioni sinusoidali

Abbiamo visto come risultano i grafici di $y = senx$ e di $y = \cos x$.

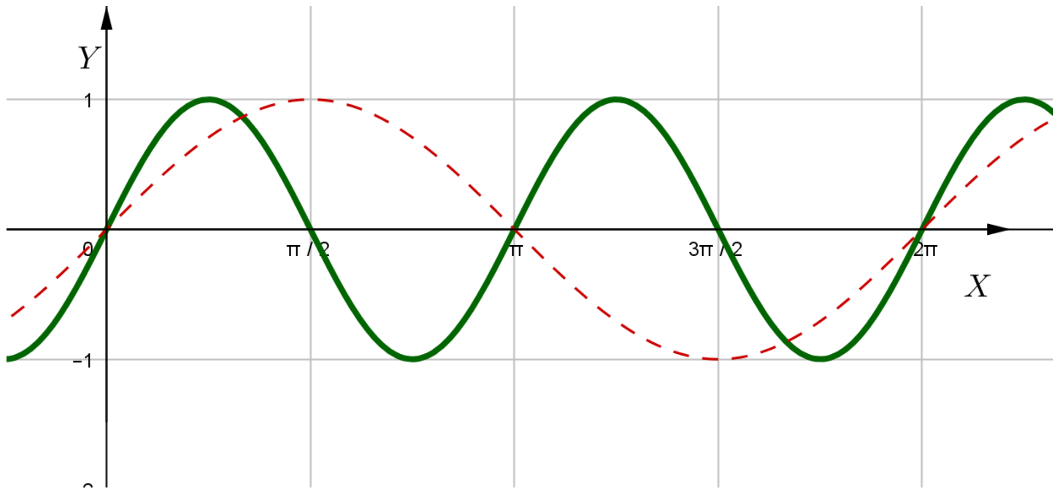
Ma come risulta per esempio il grafico di $y = sen2x$ oppure di $y = 3 \cdot senx$?

Nota: le funzioni con equazione del tipo $y = A \cdot sen(kx + \varphi)$ o $y = A \cdot \cos(kx + \varphi)$ sono dette funzioni sinusoidali.

Vediamo alcuni esempi.

1) Grafico di $\boxed{y = sen2x}$

Osserviamo che se calcoliamo la funzione per $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $y = 1$; per $x = \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 0$ e in conclusione il grafico risulta il seguente:



Il periodo risulta quindi $T = \pi$.

Se tracciamo anche il grafico di $y = senx$ (tratteggiato) possiamo vedere la differenza di periodo.

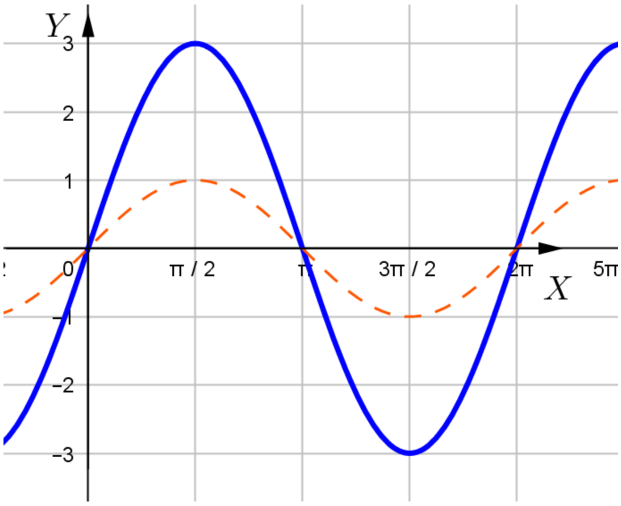
In generale se abbiamo $y = sen(kx)$ il periodo della funzione risulta $T = \frac{2\pi}{k}$ poiché

$$sen[k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)] = sen(kx + 2\pi) = sen(kx)$$

2) Grafico di $\boxed{y = 3 \cdot sen x}$

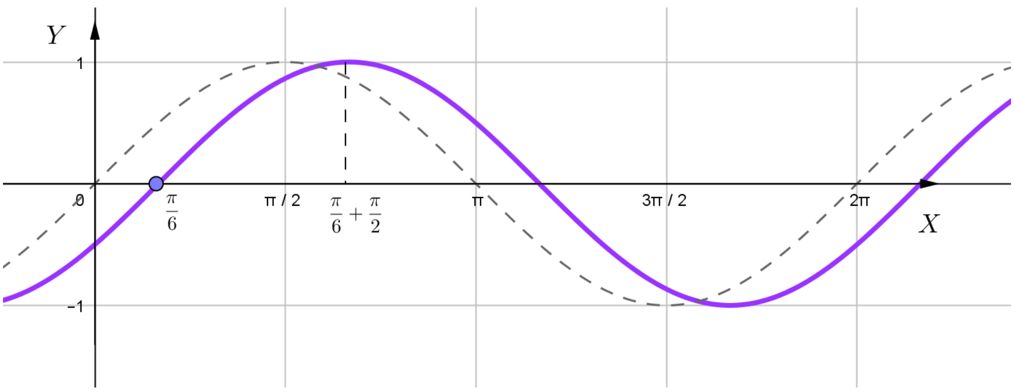
In questo caso il periodo è sempre $T = 2\pi$ ma l'ampiezza dell'oscillazione varia tra -3 e 3 e non più tra -1 e 1 (se tratteggiamo il grafico di $y = sen x$ possiamo vedere la differenza).

In generale il grafico di $y = A \cdot sen x$ oscilla tra $-A$ e A.



3) Come risulta il grafico di $\boxed{y = sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$?

Proviamo a calcolare qualche valore: per $x = \frac{\pi}{6}$ otteniamo $y = 0$, per $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 1$ e in conclusione il grafico risulta traslato verso destra di $\frac{\pi}{6}$.



ESERCIZI
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Determina le rimanenti funzioni goniometriche dell'angolo α e rappresenta α sulla circonferenza:

a. $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

b. $tg\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

c. $sen\alpha = -\frac{3}{5}$ $\qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

d. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

e. $tg\alpha = -3$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

f. $sen\alpha = \frac{1}{5}$ $\qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

g. $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

h. $tg\alpha = -\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

i. $sen\alpha = -\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

2) Calcola le seguenti espressioni:

a. $\cos\frac{7}{6}\pi + tg\frac{2}{3}\pi - sen\frac{3}{4}\pi + tg\frac{5}{6}\pi - sen\frac{4}{3}\pi - tg\frac{5}{3}\pi$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

b. $tg\frac{3}{4}\pi + sen\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{11}{6}\pi + tg\frac{5}{4}\pi$ $[0]$

c. $tg\frac{7}{6}\pi - \cos\frac{5}{3}\pi + sen\frac{5}{6}\pi + tg\frac{11}{6}\pi$ $[0]$

3) Sviluppa le seguenti espressioni:

a. $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - sen(-\alpha) - \cos(\pi+\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - tg(2\pi-\alpha) + \cos(\pi-\alpha)$ $\left[-\frac{1}{tg\alpha}+tg\alpha\right]$

b. $sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha) - sen(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $[1]$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + sen(\pi-\alpha) - tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos(\pi+\alpha)$ $\left[-\frac{1}{tg\alpha}\right]$

d. $tg(\pi-\alpha)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - sen(2\pi-\alpha)$ $[0]$

e. $tg(\pi+\alpha) - \cos(2\pi-\alpha) + sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $[tg\alpha]$

f. $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\alpha) + tg(\alpha+\pi) + tg(-\alpha)$ $[2\cos\alpha]$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni:

a. $y = sen3x$

b. $y = 2\cos x$

c. $y = 2sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

d. $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

e. $y = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

SCHEDA DI VERIFICA
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Ricava le rimanenti funzioni goniometriche di α,determina graficamente α nella circonferenza goniometrica e calcolane il valore approssimato usando la calcolatrice:

a) $sen\alpha = \frac{1}{5} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ [$\cos\alpha = -\frac{2}{5}\sqrt{6}$; $tg\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$]

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{4} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ [$sen\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $tg\alpha = \sqrt{15}$]

c) $tg\alpha = -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ [$sen\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$]

2) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\cos\frac{7}{6}\pi + tg\frac{2}{3}\pi - sen\frac{3}{4}\pi + tg\frac{5}{6}\pi - sen\frac{4}{3}\pi + \cos\frac{7}{4}\pi + tg\frac{4}{3}\pi$ [$-\frac{1}{\sqrt{3}}$]

b) $\cos(\pi-\alpha) + tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) - sen(-\alpha) - \cos(\pi+\alpha) - \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) - tg(2\pi-\alpha)$ [$tg\alpha - \cot g\alpha$]

3) Verifica la seguente identità:

$$\frac{sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(-\alpha) - sen(\pi+\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) + \cot g(-\alpha)} = \frac{tg(\pi-\alpha)}{2(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)}$$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni sinusoidali:

a) $y = 2\cos(3x)$

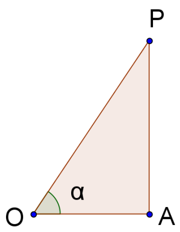
b) $y = \frac{1}{2}sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 4sen(3x)$

d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Triangolo rettangolo

Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ sappiamo che:



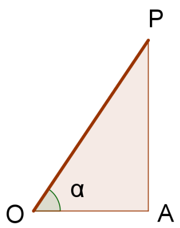
$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}$$

Possiamo perciò utilizzare $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ per determinare gli elementi del triangolo (lati ed angoli).

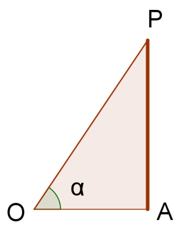
a) Conoscendo l'ipotenusa $\overline{OP}$ e l'angolo α (cioè $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$)



cateto opposto ad α $= \overline{PA} =$ ipotenusa $\cdot sen\alpha$

cateto adiacente ad α $= \overline{OA} =$ ipotenusa $\cdot \cos\alpha$

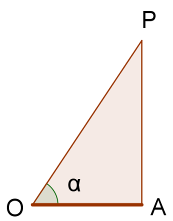
b) Conoscendo il cateto $\overline{AP}$ e l'angolo opposto α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{sen\alpha}$$

$$cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot \cos\alpha$$

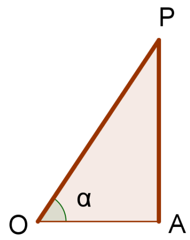
c) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'angolo adiacente α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{\cos\alpha}$$

$$cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot sen\alpha$$

d) Conoscendo il cateto $\overline{PA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ posso trovare



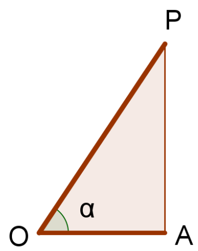
$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}}$$

e quindi anche $\cos\alpha$ e $tg\alpha$

Dalla conoscenza di senα posso risalire all'angolo α (tasto di "inversione" della calcolatrice)

Per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure $\cos\alpha$ poiché $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha$

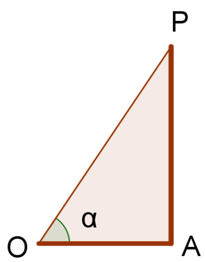
e) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ abbiamo



$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \alpha$$

$\overline{AP}$ con il teorema di Pitagora oppure $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha$

f) Conoscendo i due cateti $\overline{PA}$ e $\overline{OA}$ possiamo determinare



$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \alpha$$ (anche $sen\alpha$ e $\cos\alpha$)

$\overline{OP}$ con il teorema di Pitagora oppure $\overline{OP} = \dfrac{\overline{PA}}{sen\alpha}$

Nota

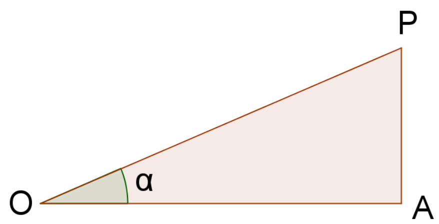
Naturalmente in tutti questi esempi dalla conoscenza di α si può ricavare anche $O\hat{P}A = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

In conclusione, dalla conoscenza di 2 elementi di un triangolo rettangolo, che però non siano due angoli, posso determinare tutti gli altri (si dice **"risolvere"** il triangolo).

Conoscere α equivale a conoscere $sen\alpha$ o $\cos\alpha$ o $tg\alpha$.

Esempi

a) Nel triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ sia l'ipotenusa $\overline{OP} = 2$ e $sen\alpha = \frac{1}{3}$ $\left(\alpha = P\hat{O}A\right)$. Determinare gli altri elementi del triangolo.



$\overline{OP} = 2$

$sen\alpha = \frac{1}{3}$

$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Per determinare $\overline{OA}$ posso anche utilizzare il teorema di Pitagora oppure ricavo

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Se $\beta = O\hat{P}A = \frac{\pi}{2} - \alpha$ abbiamo

$sen\beta = \cos\alpha$

$\cos\beta = sen\alpha$

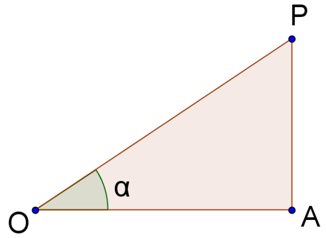
Per avere un'idea della misura degli angoli α e β possiamo utilizzare la calcolatrice premendo, per esempio, il tasto SIN^{-1} che permette di risalire all'angolo che ha come valore del seno il numero indicato.

Prendendo $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ otteniamo $\alpha \cong 19{,}47^{\circ}$.

Infine $\beta = 90° - \alpha \cong (70{,}53)°$

b) $\overline{AP}=3$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$



Se $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ abbiamo $sen\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

Quindi $\overline{OP}=\frac{\overline{AP}}{\frac{3}{5}}=3\cdot\frac{5}{3}=5$ e $\overline{OA}=\overline{OP}\cdot\cos\alpha=5\cdot\frac{4}{5}=4$ (oppure con il teorema di Pitagora).

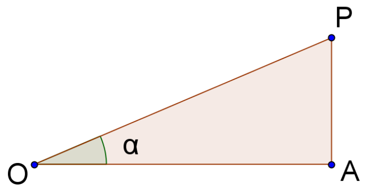
Per ricavare α utilizzando per esempio il tasto $\cos^{-1}$ della calcolatrice abbiamo

$$\cos^{-1}\frac{4}{5}\cong(36{,}86)^\circ$$

e quindi $\beta=O\hat{P}A=90^\circ-\alpha\cong(53{,}14)^\circ$

c) $\overline{OA}=2$

$tg\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$



Se $tg\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ posso ricavare $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ dal sistema

$$\begin{cases}\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$$

oppure ricordare che $sen^2\alpha=\frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$ e $\cos^2\alpha=\frac{1}{tg^2\alpha}$

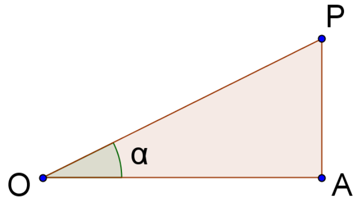
Si ottiene, in ogni caso, che $sen\alpha=\frac{1}{3}$ e $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ da cui $\overline{OP}=\frac{\overline{OA}}{\cos\alpha}=\frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ e

$\overline{AP}=\overline{OP}\cdot sen\alpha=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Utilizzando la calcolatrice $\alpha=tg^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4}\cong(19{,}47)^\circ$ e $\beta=90^\circ-\alpha$

d) $\overline{OP} = 8$

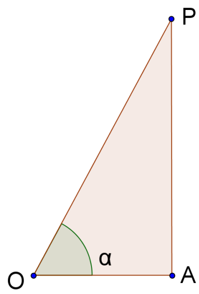
$\overline{AP} = 5$



Posso determinare $sen\alpha = \frac{5}{8}$ e con la calcolatrice $\alpha \cong (38{,}68)^\circ$ e per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure calcolare $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39}$

e) $\overline{OP} = 10$

$\overline{OA} = 4$



Determino $\cos\alpha = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (66{,}42)^\circ$).

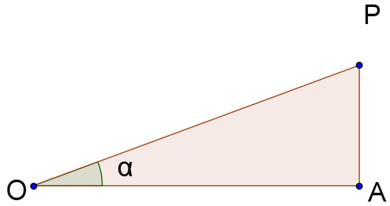
Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare $\overline{AP}$, basterà calcolare

$$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 2\sqrt{21}$$

$sen\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ e avrò

f) $\overline{AP} = 2$

$\overline{OA} = 2\sqrt{15}$

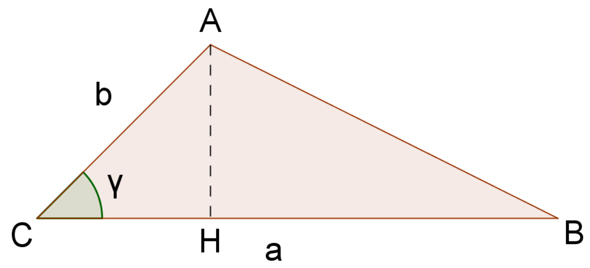


Posso determinare $tg\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ e utilizzando la calcolatrice troviamo che $\alpha \cong (14{,}47)^\circ$).

Per trovare OP possiamo utilizzare il teorema dei Pitagora oppure $\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{sen\alpha}$.

Area di un triangolo

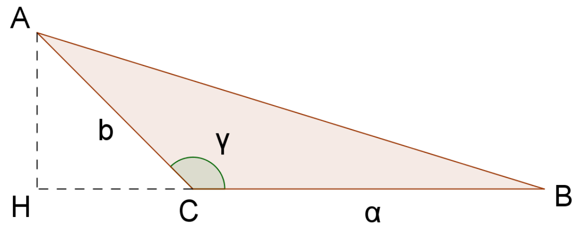
Supponiamo di conoscere due lati di un triangolo e l'angolo compreso: possiamo calcolare l'area?



Tracciamo l'altezza AH : $\overline{AH} = b sen\gamma$

e quindi $\text{area}\,(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

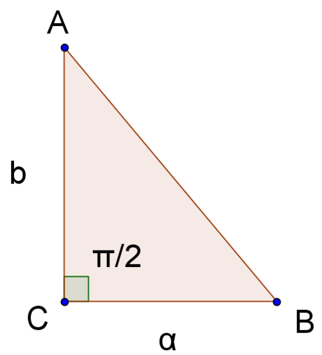
Osserviamo che se anche γ fosse ottuso avremo:



$$\overline{AH} = b \cdot sen(\pi - \gamma) = b \cdot sen\gamma$$

e quindi ancora area $(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

Se, come caso particolare, avessi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ il triangolo sarebbe rettangolo in C e infatti:

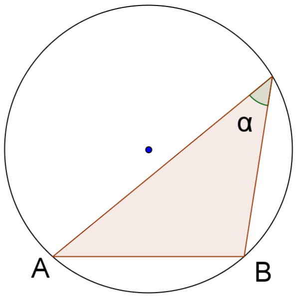


$$area(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} ab$$

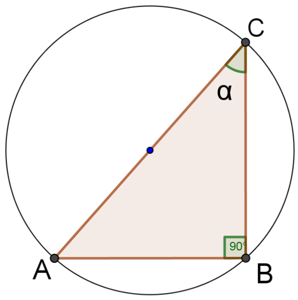
$$sen\gamma = sen\frac{\pi}{2} = 1$$

Lunghezza di una corda di una circonferenza

Consideriamo una corda AB in una circonferenza di raggio r: se conosciamo un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda possiamo trovare $\overline{AB}$?



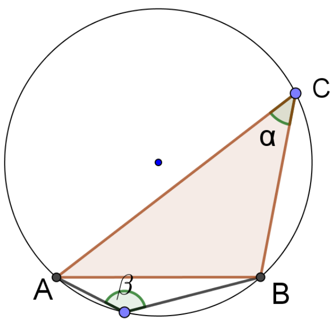
Sappiamo che tutti gli angoli che insistono su AB sono uguali: disegniamo allora quello che ha un lato passante per il centro della circonferenza.



Il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è rettangolo in B e quindi, essendo $\overline{AC} = 2R$:

$$\overline{AB} = 2R \cdot sen\ \alpha$$

Osserviamo che questa relazione vale anche considerando un angolo β come in figura: infatti $\beta = \pi - \alpha$ (α e β sono angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza) e quindi $sen\beta = sen\alpha$



$$\overline{AB} = 2R \cdot sen\beta$$

Quindi in generale abbiamo $\overline{AB} = 2R \cdot seno$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB)

PROBLEMI
TRIANGOLO RETTANGOLO

1) In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{AB} = 2a$ e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo.

[2p = $\frac{9}{2}a$; A = $\frac{3}{4}a^2$]

2) In un triangolo isoscele ABC di base AB , il lato obliquo $\overline{CB} = l$ e $tg\alpha = 2$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo ABC. Determina infine la misura dell'altezza AK relativa al lato obliquo.

[$2p = \frac{2}{5}\sqrt{5}l + 2l$; $A = \frac{2}{5}l^2$; $\overline{AK} = \frac{4}{5}l$]

3) In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo e la base minore misurano a e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ dove α è uno degli angoli adiacenti alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = \frac{9}{2}a$; $A = \frac{5\sqrt{15}}{16}a^2$]

4) In un trapezio rettangolo ABCD la diagonale minore AC misura a, forma un angolo retto con il lato obliquo BC e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ dove α è l'angolo acuto adiacente alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = \frac{22}{5}a$; $A = \frac{68}{75}a^2$]

5) Utilizzando il teorema della corda ricava il lato del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio *r*.

[$l_3 = \sqrt{3}r$, $l_4 = \sqrt{2}r$, $l_6 = r$]

6) In un trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 20 e la base minore DC misura 10. Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, dove α è l'angolo ottuso adiacente alla base minore, determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = 68$; $A = 256$]

7) In un trapezio rettangolo ABCD, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Sapendo che $\overline{AD} = a$ e che $tg(A\hat{B}C) = \frac{3}{4}$, determina perimetro e area del trapezio.

$[\, 2p = \frac{11}{2}a\,;\;\; A = \frac{17}{12}a^2 \,]$

8) L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura a e l'angolo che essa forma con uno dei due cateti ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Calcola perimetro e area del triangolo.

$[\, 2p = 5a\,;\;\; A = \frac{25}{24}a^2 \,]$

9) In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, il raggio della circonferenza inscritta misura r e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina i lati del triangolo.

$[\, \overline{AB} = 2\sqrt{2}r\,;\; \overline{BC} = 3\sqrt{2}r \,]$

10)In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina perimetro e area del triangolo e l'altezza AK relativa a BC.

$[\, 2p = \frac{8}{3}a\,;\; A = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2\,;\; \overline{AK} = \frac{4}{9}\sqrt{2}a \,]$

11) In un trapezio scaleno ABCD la base minore DC è uguale ad uno dei due lati obliqui e si ha $\overline{DC} = \overline{AD} = l$. Sapendo che $D\hat{A}B = \frac{\pi}{4}$ e che $tg(A\hat{B}C) = 2$, determina i lati del trapezio e le funzioni goniometriche di $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

$[\, \overline{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2}+4}{4}\right)l\,;\; \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}l \;\; \hat{C} = \pi - \alpha \,....;\, \hat{D} = \frac{3}{4}\pi \,]$

12) Un trapezio isoscele di base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di raggio r e, indicato con α uno degli angoli alla base, si ha $sen\alpha = \frac{24}{25}$. Determina i lati del trapezio.

$[\, \overline{AB} = \frac{8}{3}r\,;\; \overline{DC} = \frac{3}{2}r\,;\; \overline{CB} = \overline{AD} = \frac{25}{12}r \,]$

Formule goniometriche

Come possiamo calcolare $sen(\alpha+\beta)$ oppure $\cos(\alpha+\beta)$?

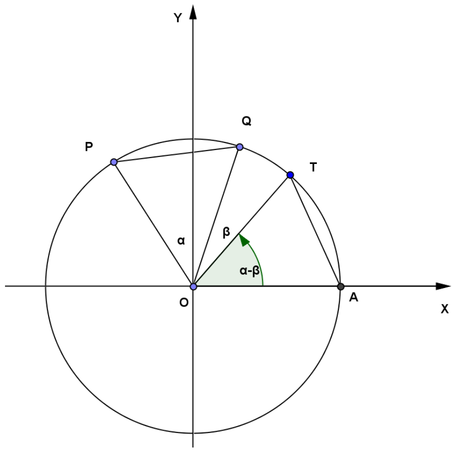
E' chiaro che non può risultare $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha+sen\beta$: se infatti fosse così e per esempio $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ avremo $sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=sen\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}=1+1=2$!

Formule di addizione e sottrazione

a) Cominciamo con questa osservazione: se riportiamo su una circonferenza goniometrica due angoli α e β , per esempio con $\alpha>\beta$ come in figura, possiamo considerare l'angolo $\alpha-\beta$ e riportarlo con il primo lato sul semiasse positivo delle x.

Avremo quindi:

$$P(\cos\alpha;sen\alpha)$$
$$Q(\cos\beta;sen\beta)$$
$$T(\cos(\alpha-\beta);sen(\alpha-\beta))$$
$$A(1;0)$$



Poiché $A\hat{O}T=Q\hat{O}P=\alpha-\beta$ allora avremo anche $\overline{PQ}=\overline{AT}$ e possiamo scrivere:

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha-sen\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+sen^2(\alpha-\beta)$$

Sviluppando abbiamo:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+sen^2\alpha-2sen\alpha sen\beta+sen^2\beta=\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+sen^2(\alpha-\beta)$$

Quindi poiché $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $sen^2\beta+\cos^2\beta=1$, $sen^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1$

Avremo $1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2sen\alpha sen\beta=1+1-2\cos(\alpha-\beta)$

e quindi $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$

Quindi abbiamo ricavato la **formula di sottrazione per il coseno**.

Esempio 1

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Da questa formula possiamo anche ricavare $\cos(\alpha+\beta)$.
Basta infatti scrivere $\alpha+\beta = \alpha - (-\beta)$ e avremo , poiché $\cos(-\beta) = \cos\beta$ mentre $sen(-\beta) = -sen\beta$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + sen\alpha \cdot sen(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$$

Quindi $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta}$

Esempio 2

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

b) Passiamo a determinare le formule per calcolare $sen(\alpha-\beta)$ e $sen(\alpha+\beta)$.

Ricordando che il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare possiamo scrivere:

$$sen(\alpha-\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta - sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot sen\beta$$
$$= sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta$$

Quindi $\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta}$

Allora

$$sen(\alpha+\beta) = sen[\alpha - (-\beta)] = sen\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot sen(-\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta}$$

Esempio 3

$$sen(15°) = sen(45° - 30°) = sen 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

c) Infine calcoliamo $tg(\alpha-\beta)$ e $tg(\alpha+\beta)$:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot se\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\alpha\cdot sen\beta}$$

Se dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ otteniamo:

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Allora $$tg(a+\beta)=tg[\alpha-(-\beta)]=\frac{tg\alpha-tg(-\beta)}{1+tg\alpha\cdot tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Esempio 4

$$tg(15°)=tg(45°-30°)=\frac{tg45°-tg30°}{1+tg45°\cdot tg30°}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Formule di duplicazione

Utilizzando le formule di addizione abbiamo:

a) $sen2\alpha=sen(\alpha+\alpha)=sen\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot sen\alpha=2sen\alpha\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow$

$$\boxed{sen2\alpha=2sen\alpha\cdot\cos\alpha}$$

b) $\cos2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-sen\alpha\cdot sen\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha\Rightarrow$

$$\boxed{\cos2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha}$$

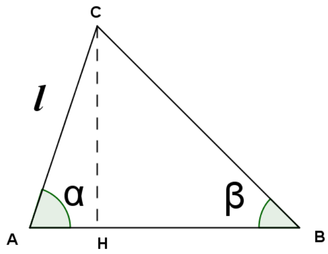
Osservazione: $\cos2\alpha$ può essere sviluppato in due modi diversi utilizzando la relazione $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} 1-sen^2\alpha-sen^2\alpha=1-2sen^2\alpha \\ \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1 \end{array}$$

c) $tg2\alpha=tg(\alpha+\alpha)=\dfrac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg\alpha}=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\quad\Rightarrow\boxed{tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

Problemi svolti

1) Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, acutangolo, sappiamo che $sen\alpha = \frac{4}{5}$ e $tg\beta = 1$. Se $\overline{AC} = l$ determinare BC, AB e $sen\gamma$.



$sen\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$ (α è acuto); $tg\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

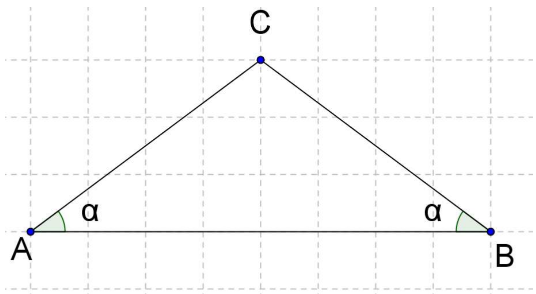
$\overline{AH} = l \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} l$ $\overline{CH} = l \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} l$ $\overline{HB} = \overline{CH} = \frac{4}{5} l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{7}{5} l$

$\overline{CB} = \overline{CH} \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{5}\sqrt{2} l$

$\gamma = \hat{C} = \pi - (\alpha + \beta)$ e quindi

$sen\hat{C} = sen(\pi - (\alpha + \beta)) = sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

2) Dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, sapendo che $sen\alpha = \frac{3}{5}$, con α l'angolo adiacente alla base, determinare le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C}$.



$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$\hat{C} = \pi - 2\alpha \Rightarrow sen\hat{C} = sen(\pi - 2\alpha) = sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

Conoscendo $sen\hat{C}$ possiamo poi determinare anche coseno e tangente.

ESERCIZI
FORMULE GONIOMETRICHE

1) Sviluppa utilizzando le formule di addizione e sottrazione:

a) $sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right]$ b) $sen\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right]$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$

e) $tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ $[-(2+\sqrt{3})]$ f) $tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[2-\sqrt{3}\right]$

2) In un triangolo ABC acutangolo , sapendo che $sen\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, determina il seno dell'angolo $\hat{C}=\gamma$.

$$\left[sen\gamma=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right]$$

3) In un triangolo isoscele ABC gli angoli adiacenti alla base $\alpha=\beta$ hanno il seno uguale a $\frac{1}{4}$. Determina il seno dell'angolo al vertice γ.

$$\left[sen\gamma=\frac{\sqrt{15}}{8}\right]$$

4) In un triangolo isoscele ABC gli angoli adiacenti alla base $\alpha=\beta$ hanno il coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Determina il seno dell'angolo al vertice γ.

$$\left[sen\gamma=\frac{24}{25}\right]$$

5) In un triangolo isoscele ABC di base AB, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\overline{AC}=\overline{BC}=l$. Determina perimetro e area del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C}=\gamma$.

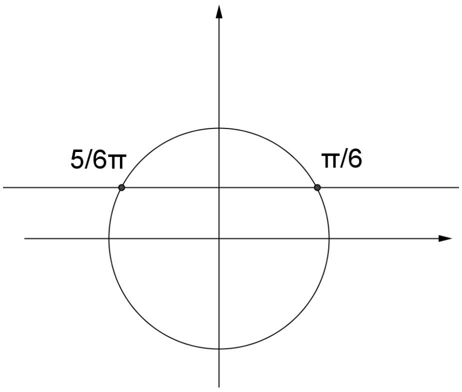
$$[2p=\frac{8}{3}l,\quad A=\frac{2\sqrt{2}}{9}l^2,\quad sen\gamma=\frac{4\sqrt{2}}{9},\quad \cos\gamma=\frac{7}{9},\quad tg\gamma=\frac{4\sqrt{2}}{7}]$$

Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari

a) Consideriamo un' equazione "elementare": $senx = \frac{1}{2}$

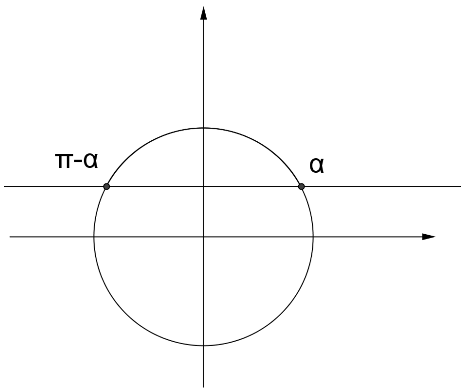
Per risolverla disegniamo la circonferenza goniometrica e tracciamo la retta orizzontale $y = \frac{1}{2}$ (ricordiamo che il seno di un angolo è l'ordinata del punto corrispondente sulla circonferenza goniometrica): troviamo due punti sulla circonferenza goniometrica, che rappresentano gli angoli che hanno il seno uguale ad $\frac{1}{2}$.



Le soluzioni dell'equazione sono quindi:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $senx = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:



$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

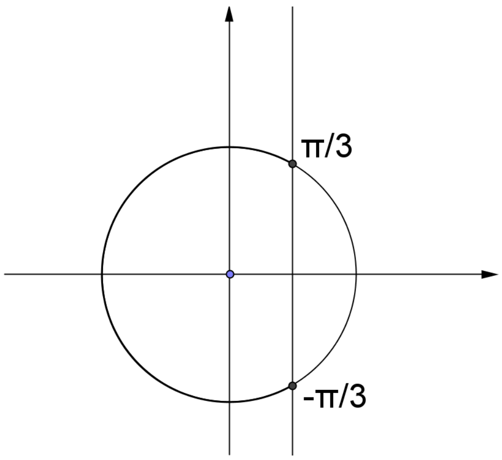
Se considero $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$senx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

b) Vediamo ora una equazione elementare con il coseno: $\cos x = \frac{1}{2}$

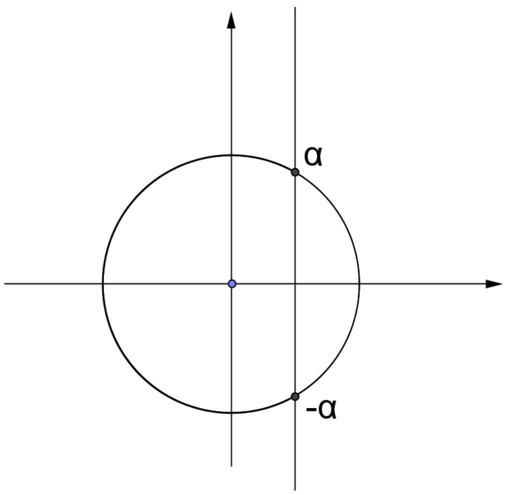
Questa volta tagliamo la circonferenza goniometrica con una retta verticale $x = \frac{1}{2}$ perché il coseno di un angolo è l'ascissa del punto corrispondente sulla circonferenza goniometrica.

Le soluzioni dell'equazioni sono quindi:



$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

In generale se dobbiamo risolvere $\cos x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:



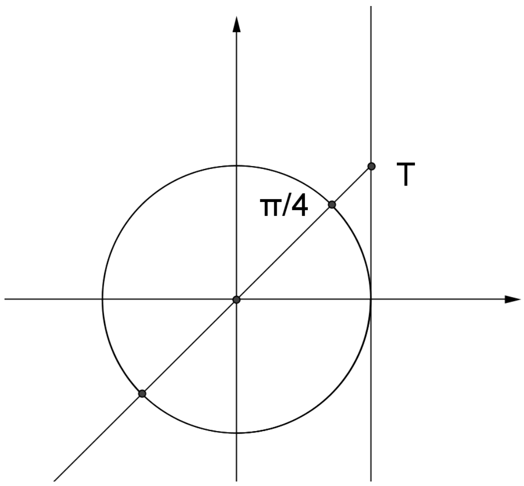
$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = -\alpha + 2k\pi$$

Se $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

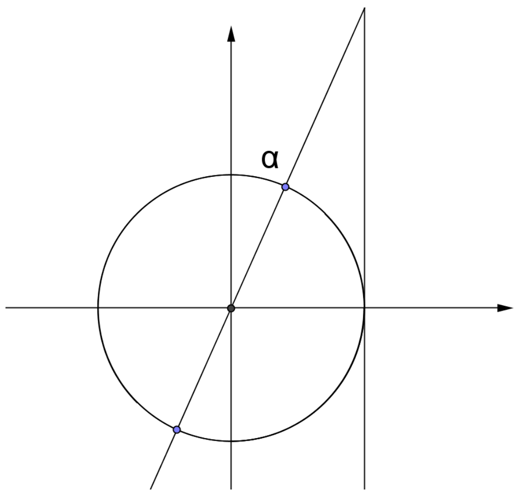
c) Consideriamo infine una equazione elementare con la tangente, per esempio: $tgx = 1$
In questo caso tracciamo la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto (1;0) e individuiamo su di essa il punto T di ordinata uguale a 1: se da T congiungiamo con l'origine otteniamo sulla circonferenza gli angoli aventi tangente uguale a 1.

Per indicare le soluzioni basterà indicare l'angolo minore e poi sommare $k\pi$, quindi le soluzioni dell'equazioni sono:



$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

In generale avremo: $tgx = k \Rightarrow x = \alpha + k\pi$

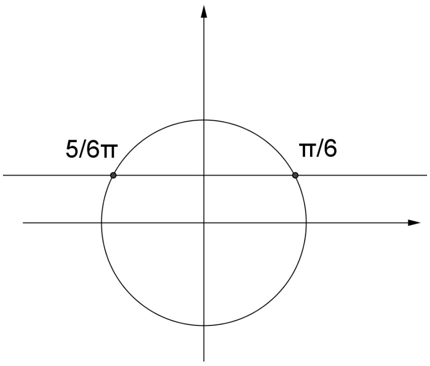


Equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari

Ci sono alcune equazioni che si “riconducono” facilmente ad equazioni elementari.
Vediamo alcuni esempi.

I) a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

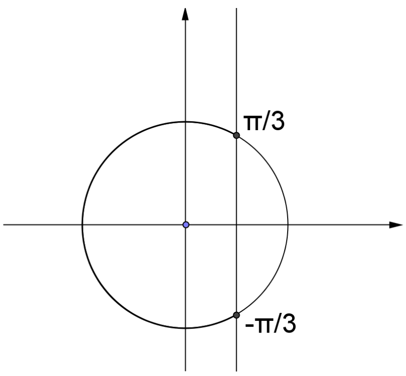
In questo caso non conviene sviluppare con la formula di sottrazione ma considerare $x-\frac{\pi}{4}$ come un unico angolo. Per quello che abbiamo già visto:



$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5}{12}\pi+2k\pi$$
$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}\pi+2k\pi=\frac{13}{12}\pi+2k\pi$$

b) $\cos(2x)=\frac{1}{2}$

Anche in questo caso non conviene sviluppare con la formula di duplicazione ma considerare $2x$ come un unico angolo e per quello che abbiamo già visto avremo:

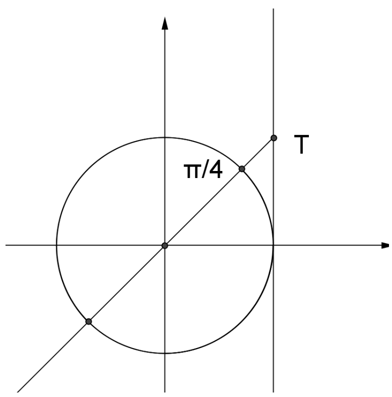


$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$
$$2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

c) $tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

Considerando $3x-\frac{\pi}{6}$ come un angolo avremo:

$$3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow 3x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k\pi$$
$$3x=\frac{5}{12}+k\pi$$
$$x=\frac{5}{36}\pi+k\frac{\pi}{3}$$



II) Vediamo infine i seguenti esempi:

a) $\boxed{sen^2 x + senx - 2 = 0}$

Consideriamola come un'equazione di 2° grado e ricaviamo:

$$senx_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow senx_1 = 1 \cup senx_2 = -2$$

Quindi $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$senx = -2$ nessuna soluzione

b) $\boxed{2\cos^2 x + \cos x = 0}$

Possiamo semplicemente mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (2\cos x + 1) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \end{array}$$

c) $\boxed{tg^2 x + tgx = 0}$

$$tgx(tgx+1) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}$$

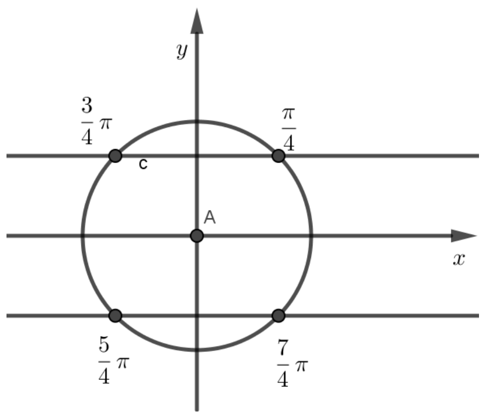
d) $\boxed{\cos^2 x - sen^2 x = 0}$

In questo caso dobbiamo utilizzare la prima relazione fondamentale e sostituire $1 - sen^2 x$ a $\cos^2 x$ (o viceversa):

$$1 - 2sen^2 x = 0 \rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow senx_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Possiamo scrivere le soluzioni così:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



Equazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Esempio 1

Consideriamo la seguente equazione: $\boxed{senx - \cos x - 1 = 0}$

Per determinare x cerchiamo il punto P associato all'angolo x sulla circonferenza goniometrica. Ricordando che

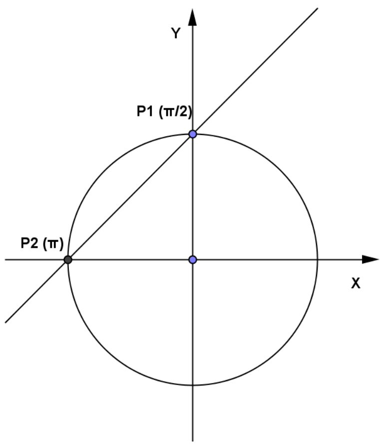
$$senx = y_P$$
$$\cos x = x_P$$

Risolvere l'equazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_P - x_P - 1 = 0 \rightarrow y_P = x_P + 1 \\ x_P^{\ 2} + y_P^{\ 2} = 1 \end{cases}$$

Per non confondere *x* (angolo) con x_P (ascissa del punto P) possiamo indicare x_P con X e y_P con Y. Quindi abbiamo l'intersezione tra una retta e la circonferenza goniometrica:

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Troviamo $P_1(0;1) \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$P_2(-1;0) \rightarrow x = \pi + 2k\pi$

Esempio 2

Consideriamo l'equazione $\boxed{senx - \cos x = 0}$

In questo caso non è necessario ricorrere al metodo grafico: possiamo dividere per $\cos x$ (possiamo supporre $\cos x \neq 0$ perché le soluzioni di $\cos x = 0$,cioè $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, non sono soluzioni dell'equazione) e otteniamo:

$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

ESERCIZI

EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari:

a) $senx=-\frac{1}{2}$

b) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tgx=\sqrt{3}$

d) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

f) $senx=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+2k\pi; x=\pi+2k\pi\right]$

b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ $\left[x=\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{7}{12}\pi+k\pi\right]$

c) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ $\left[x=\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$

d) $sen\cdot 2x=1$ $\left[x=\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

e) $\cos\cdot 3x=-1$ $\left[x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\right]$

f) $tg\cdot 4x=-\sqrt{3}$ $\left[x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{4}\right]$

3) Risolvi le seguenti equazioni riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen^2 x - senx = 0$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ $[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$ $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

e) $2sen^2 x + senx = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2sen^2 x - 3senx + 1 = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

g) $tg^2 x + tgx = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$

h) $\sqrt{3}tg^2 x + tgx = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$

i) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

l) $3tg^2 x + 2\sqrt{3}tgx - 3 = 0$ $[x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

4) Risolvi le seguenti equazioni lineari:

a) $senx + \cos x = 1$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = 2k\pi]$

b) $senx + \cos x = \sqrt{2}$ $[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$

c) $\cos x + \sqrt{3}senx = \sqrt{3}$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - senx + \sqrt{3} = 0$ $[x = \pi + 2k\pi; x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

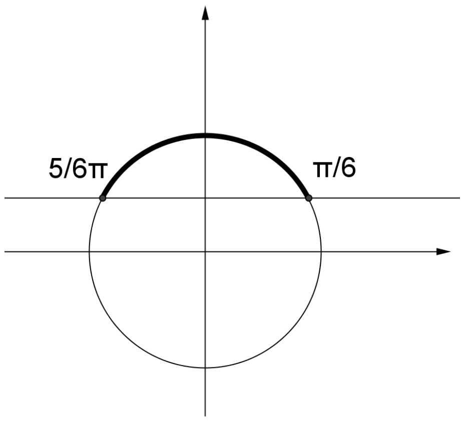
e) $2\cos x + 2senx = \sqrt{3} + 1$ $[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

f) $senx + \cos x = -2$ [impossibile]

Disequazioni goniometriche

Disequazioni goniometriche elementari

a) Riprendiamo gli esempi che abbiamo fatto per le equazioni trasformandoli in disequazioni:

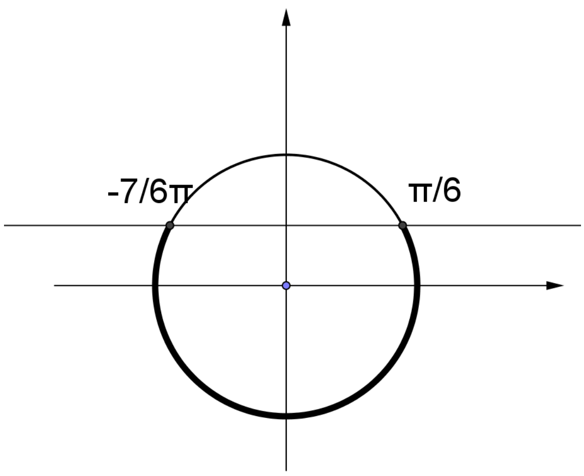


$$senx > \frac{1}{2}$$

Le soluzioni saranno:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

Se invece devo risolvere $senx < \frac{1}{2}$ le soluzioni possono essere scritte così:



$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

oppure

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$$

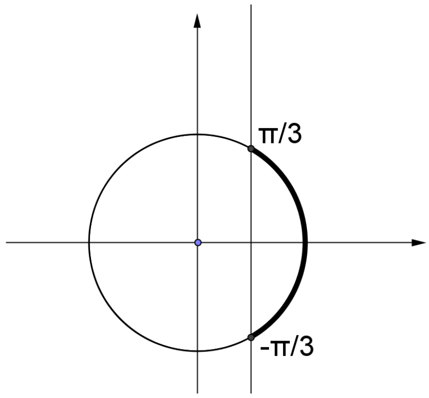
oppure

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Attenzione: non ha senso scrivere $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$!

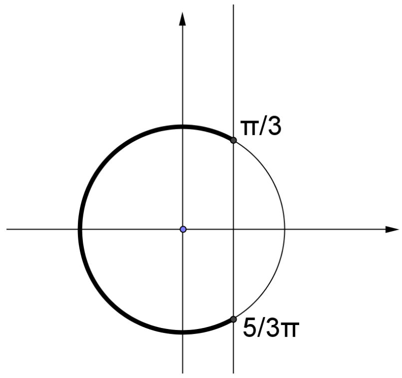
b) $\cos x > \frac{1}{2}$: le soluzioni sono

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

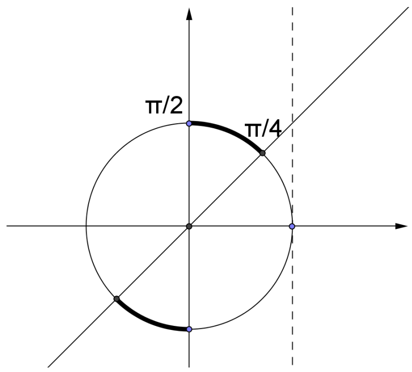


Se invece dobbiamo risolvere $\cos x < \frac{1}{2}$ abbiamo:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$



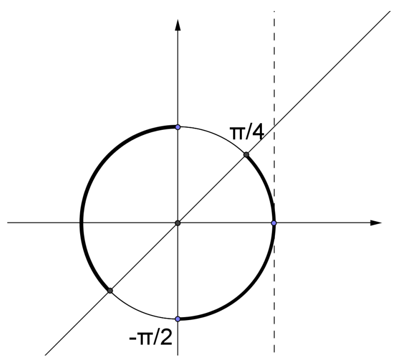
c) $tgx > 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$



Se invece devo risolvere $tgx < 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$

oppure posso scrivere

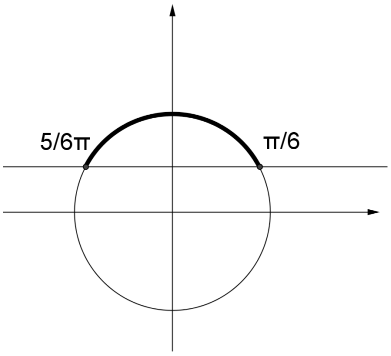
$$k\pi \le x < \frac{\pi}{4} + k\pi \cup \frac{\pi}{2} + k\pi < x \le \pi + k\pi$$



Disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari

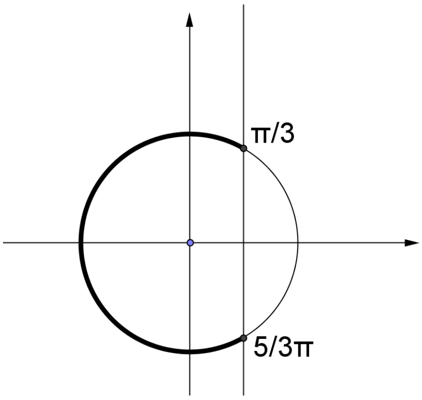
I) a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$

Consideriamo "$x-\frac{\pi}{4}$" tutto insieme:



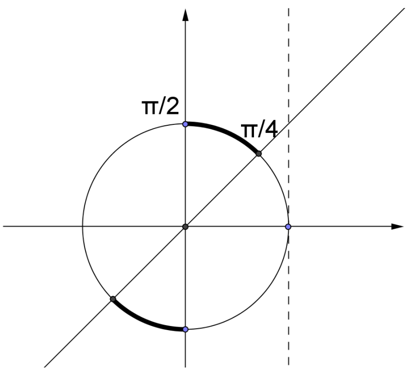
$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{5}{6}\pi+2k\pi$$
$$\frac{5}{12}\pi+2k\pi<x<\frac{13}{12}\pi+2k\pi$$

b) $\cos 2x<\frac{1}{2}\quad\rightarrow$



$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<2x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$$
$$\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi$$

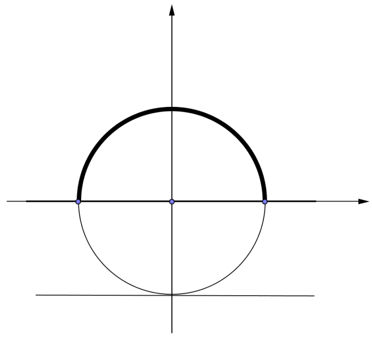
c) $tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)>1\quad\rightarrow$



$$\frac{\pi}{4}+k\pi<3x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\frac{5}{12}\pi+k\pi<3x<\frac{2}{3}\pi+k\pi$$
$$\frac{5}{36}\pi+k\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{9}\pi+k\frac{\pi}{3}$$

II) a) $sen^2 x + senx > 0$

$senx(senx+1) > 0$



Le soluzioni dell'equazione goniometrica associata sono

$$senx = 0, \quad senx = -1$$

e quindi le soluzioni della disequazione sono i valori esterni a -1 e 0 cioè $senx < -1 \cup senx > 0$

$$\Updownarrow$$

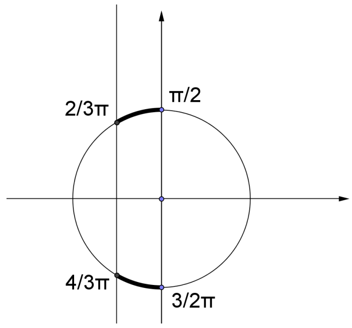
$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

b) $2\cos^2 x + \cos x < 0$

$\cos x(2\cos x + 1) < 0$

$-\frac{1}{2} < \cos x < 0$

(dobbiamo prendere le soluzioni interne alle soluzioni dell'equazione associata)

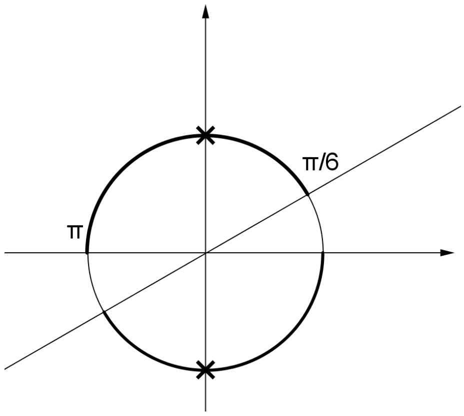


$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \cup \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

c) $\sqrt{3}tg^2 x + tgx > 0$

$tgx(\sqrt{3}tgx - 1) > 0$

$tgx < 0 \cup tgx > \frac{1}{\sqrt{3}}$



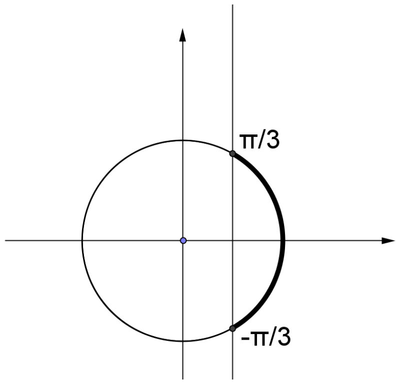
$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \pi + k\pi \text{ con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

d) $2sen^2 x - 3\cos x < 0$

$$2\left(1-\cos^2 x\right) - 3\cos x < 0$$
$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0 \qquad \cos x < -2 \cup \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\left(\cos x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \cup \cos x = -2\right)$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$



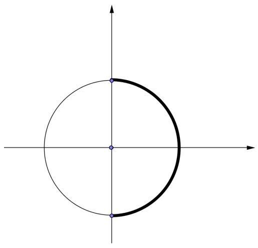
e) $sen2x + \cos x > 0$

Sviluppiamo $sen2x$ con la formula di duplicazione:

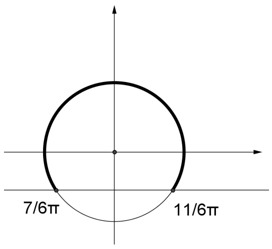
$$2senx\cos x + \cos x > 0$$
$$\cos x\left(2senx + 1\right) > 0$$

Studiamo il segno dei singoli fattori del prodotto:

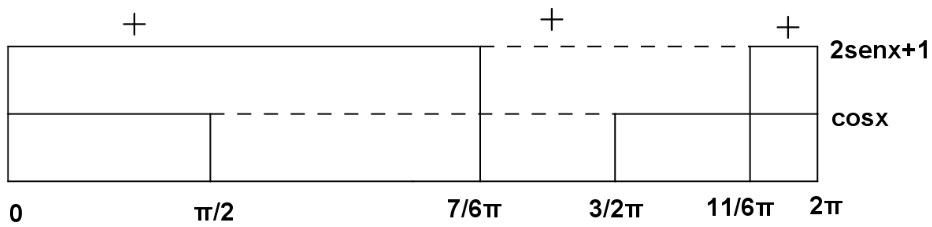
$\cos x > 0 \rightarrow$



$2senx + 1 > 0 \rightarrow senx > -\frac{1}{2}$



Riporto i risultati tra 0 e 2π



Poiché voglio che il prodotto sia positivo avrò:

$$2k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi$$

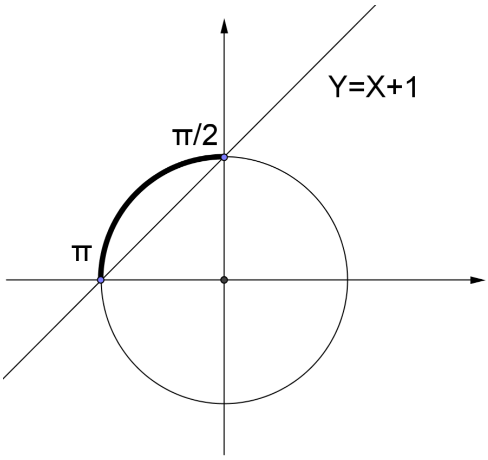
Disequazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Consideriamo per esempio la disequazione:

$$\boxed{senx - \cos x - 1 > 0}$$

Sostituendo $\begin{array}{l} Y = senx \\ X = \cos x \end{array}$ abbiamo:

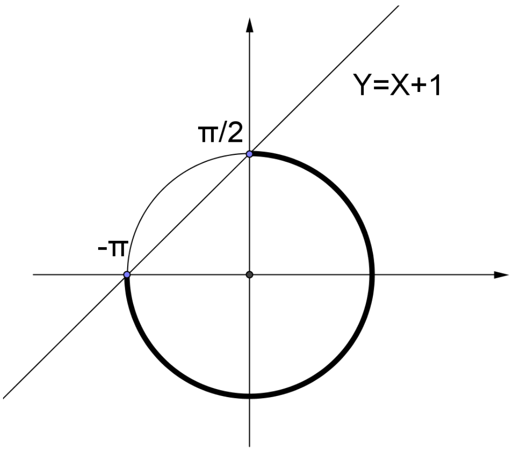
$$\begin{cases} Y - X - 1 > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y > X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



La parte di circonferenza goniometrica in cui i punti hanno Y>X+1 (semipiano "sopra" alla retta y=x+1) è quella indicata in figura e quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

Naturalmente se avessimo dovuto risolvere: $senx - \cos x - 1 < 0 \rightarrow \begin{cases} Y < X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$



la soluzione sarebbe stata:

$$-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Importante

Mentre per le equazioni goniometriche lineari in cui manca il termine noto avevamo detto che potevamo risolvere anche dividendo per cos*x*, nel caso delle disequazioni questo non può essere fatto poiché il coseno di un angolo non è sempre positivo.

ESERCIZI
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche elementari:

a. $senx > -\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

b. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

c. $tgx > \sqrt{3}$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

d. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6} + 2k\pi\right]$

e. $tgx < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

f. $senx < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4} + 2k\pi\right]$

2) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

a. $sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

b. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{5}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

c. $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > -1$ $\left[\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

d. $sen2x < 1$ $\left[x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

e. $\cos\cdot 3x \leq -1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

f. $tg4x < -\sqrt{3}$ $\left[-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}\right]$

3) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

a) $sen^2 x - senx > 0$ $\quad [\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\ ]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$ $\quad [-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} > 0$ $\quad [-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \cup \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x < 0$ $\quad [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \cup \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

e) $2sen^2 x + senx < 0$ $\quad [-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2sen^2 x - 3senx + 1 > 0$ $\quad [-\frac{7}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

g) $tg^2 x + tgx < 0$ $\quad [-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi]$

4) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche lineari:

a) $senx + \cos x > 1$ $\quad [\,2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $senx + \cos x \le \sqrt{2}$ $\quad [\forall x \in R]$

c) $\cos x + \sqrt{3}senx < \sqrt{3}$ $\quad [-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - senx + \sqrt{3} > 0$ $\quad [-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

e) $senx + \cos x > -2$ $\quad [\forall x \in R\ ]$

SCHEDA DI VERIFICA
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) $2\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$ $\qquad [x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi]$

2) $4sen^2 x=3$ $\qquad [x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi; x=\frac{\pi}{3}+2k\pi; x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi; x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi]$

3) $tg^2 x-\sqrt{3}tgx=0$ $\qquad [x=k\pi;\quad x=\frac{\pi}{3}+k\pi]$

4) $3tg^2 x+2\sqrt{3}tgx-3=0$ $\qquad [x=-\frac{\pi}{3}+k\pi;\quad x=\frac{\pi}{6}+k\pi]$

5) $2+3\cos x=2sen^2 x-1$ $\qquad [x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi;\quad x=\pi+2k\pi]$

6) $2\cos^2 x-\cos x<0$ $\qquad [\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\cup\frac{3}{2}\pi+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi]$

7) $\sqrt{3}tg^2 x+tgx>0$ $\qquad [k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\cup\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi]$

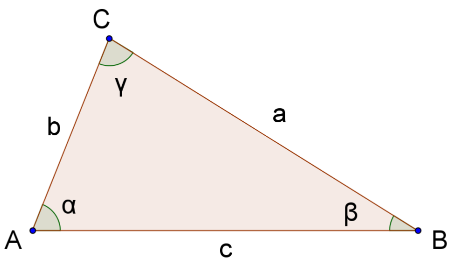
8) $2\cos^2 x+\cos x-1\le 0$ $\qquad [\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi+2k\pi]$

9) $senx>\cos x$ $\qquad \left[\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right]$

10) $\cos x-\sqrt{3}senx>0$ $\qquad \left[-\frac{5}{6}\pi+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

Triangoli qualsiasi

Consideriamo un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ e adottiamo la seguente notazione: nel vertice A l'angolo è α, nel vertice B $\rightarrow \beta$, nel vertice C $\rightarrow \gamma$ e indichiamo con *a* il lato opposto ad A, con *b* quello opposto a B e con *c* quello opposto a C.

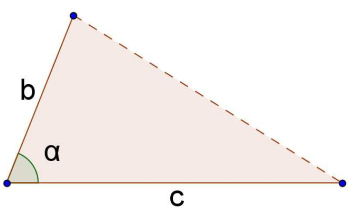


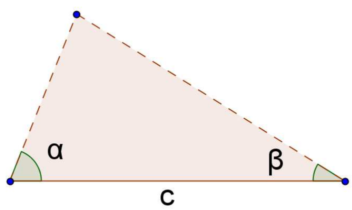
Risolvere un triangolo significa determinare, dalla conoscenza di alcuni elementi, tutti gli altri elementi (lati, angoli). Ricordiamo che, grazie ai criteri di congruenza dei triangoli, un triangolo è determinato se si assegnano:

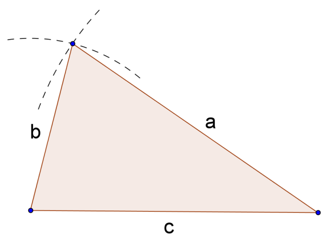
1) due lati e l'angolo compreso;
2) un lato e due angoli;
3) i tre lati (purché naturalmente sia rispettata la relazione che ciascuno sia minore della somma degli altri due)

Nota: se ordiniamo i lati in modo decrescente cioè se per esempio $a \geq b \geq c$ basterà verificare che $a < b + c$ poiché per *b* e *c* sarà verificato sicuramente.

Infatti in ognuno di questi casi è possibile costruire, con riga, compasso e goniometro, un unico triangolo.





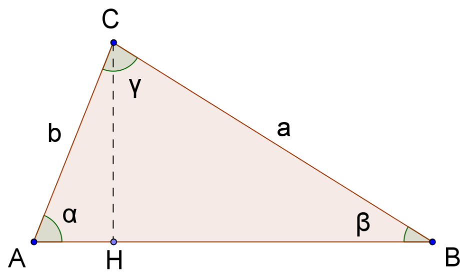


Dimostriamo due teoremi utili per la risoluzione dei triangoli qualsiasi.

Teorema dei seni

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ si ha:

$$\boxed{\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}}$$



Dimostrazione

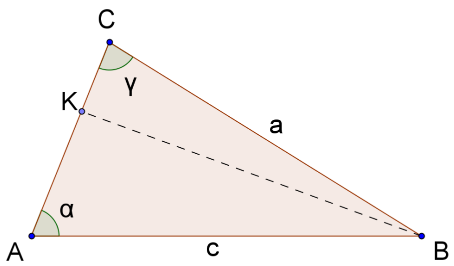
Consideriamo l'altezza CH: possiamo calcolarla in due modi

$$\overline{CH}=b\cdot sen\alpha \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{AHC}\text{)}$$

$$\overline{CH}=a\cdot sen\beta \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{CHB}\text{)}$$

e quindi $a\cdot sen\beta=b\cdot sen\alpha \rightarrow \dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}$

Analogamente tracciando l'altezza BK

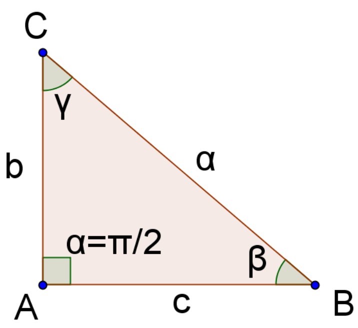


$$\left.\begin{array}{l}\overline{BK}=c\cdot sen\alpha\\ \overline{BK}=a\cdot sen\gamma\end{array}\right. \Rightarrow c\cdot sen\alpha=a\cdot sen\gamma$$

e quindi $\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{c}{sen\gamma}$

Quindi avremo che $\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\gamma}$

Nota: osserviamo che questo teorema vale anche per un triangolo rettangolo. Infatti se per esempio $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ abbiamo $sen\alpha = 1$ e $a = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}$



Osservazione: possiamo calcolare quanto vale questo rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto?

Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo: i lati a, b, c possono essere considerati corde di questa circonferenza e gli angoli α, β, γ angoli alla circonferenza che insistono su queste. Avevamo dimostrato che:

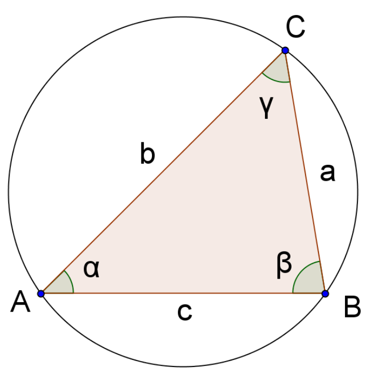
lunghezza corda = $diametro \cdot seno$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda)

e quindi

$$a = 2r \cdot sen\alpha \Rightarrow \frac{a}{sen\alpha} = 2R$$

$$b = 2r \cdot sen\beta \Rightarrow \frac{b}{sen\beta} = 2R$$

$$c = 2r \cdot sen\gamma \Rightarrow \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

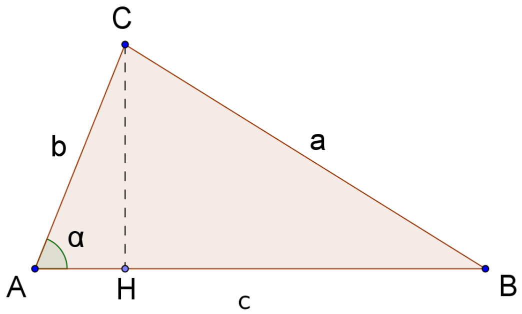


Quindi non solo abbiamo dimostrato che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è sempre lo stesso, per un dato triangolo, ma anche che è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema del coseno

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ vale, per ciascun lato, la seguente relazione:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$



cioè il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto tra questi e il coseno dell'angolo compreso.

Dimostrazione

Consideriamo l'altezza CH e il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ACH}$: avremo

$$\overline{CH} = b \cdot sen\alpha$$
$$\overline{AH} = b \cdot \cos\alpha \Rightarrow \overline{HB} = c - b \cdot \cos\alpha$$

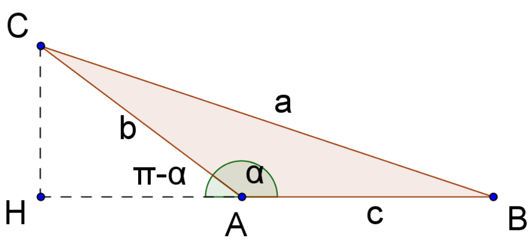
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{CHB}$ abbiamo:

$$a^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha + b^2 \cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2 (sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

e quindi: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Se l'angolo α fosse ottuso avremo: $$\overline{CH} = b \cdot sen(\pi - \alpha) = b \cdot sen\alpha$$

$$\overline{AH} = b \cdot \cos(\pi - \alpha) = -b \cdot \cos\alpha$$



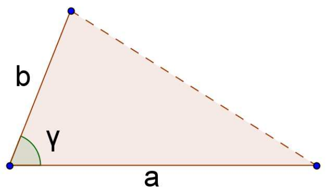
Ma poiché $\overline{HB} = \overline{AH} + AB = c - b\cos\alpha$ e quindi si ritrovano i calcoli precedenti.

Nota: se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il teorema si riduce al teorema di Pitagora e per questo viene anche chiamato teorema di Pitagora generalizzato.

.
Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Vediamo quindi i vari casi che possiamo avere.

1) Supponiamo di conoscere due lati, per esempio a e b, e l'angolo compreso γ.



Troviamo c con il teorema del coseno:

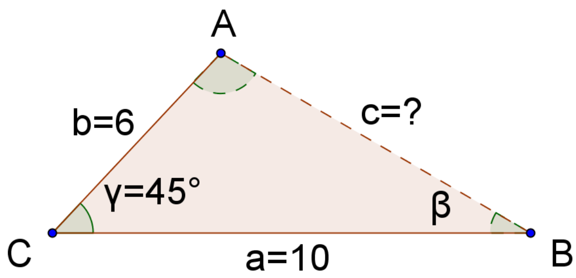
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c = ...$$

Troviamo α con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma} \Rightarrow sen\alpha = ... \rightarrow \alpha = ...$$

Naturalmente $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$

Esempio: $a = 10 \quad b = 6 \quad \gamma = 45°$



$$c^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c \cong 7{,}15$$

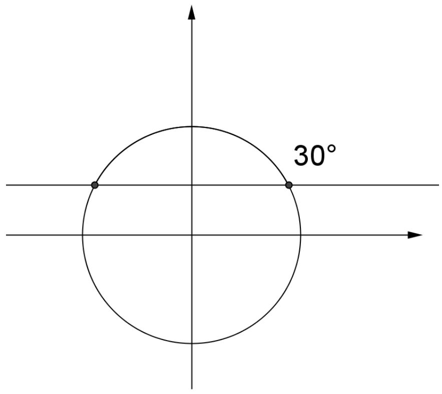
$$\frac{6}{sen\beta} = \frac{7{,}15}{sen\gamma} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}59 \Rightarrow \beta \cong 36{,}4°$$

Di conseguenza $\alpha = 180° - (45° + 36{,}4°) = 98{,}6°$

Nota

Quando usiamo la calcolatrice per trovare quale angolo ha un dato seno o un dato coseno (usando il tasto $\sin^{-1}$ o $\cos^{-1}$) dobbiamo sapere che, per definizione, $\sin^{-1}$ dà come risultati angoli tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (-90° e 90°) e $\cos^{-1}$ dà come risultati angoli tra 0 e π (0 a 180°)

Per esempio se digitiamo $\sin^{-1} 0.5$ otteniamo solo come risultato 30° ed invece sappiamo che anche 180°-30°=150° ha lo stesso seno (oltre a tutti gli angoli ottenuti con aggiungendo $2k\pi$).



Così se per esempio nel risolvere un triangolo utilizzando il teorema dei seni troviamo $sen\alpha = 0.5$ la calcolatrice ci darà solo $\alpha = 30°$ ma non è detto che questo sia il caso dell'angolo del nostro triangolo.

Ricordiamo infatti che in un triangolo con lati disuguali a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

Riprendiamo per esempio il caso del triangolo dell'esempio precedente: risolvendo $sen\beta \cong 0.59$ la calcolatrice ha fornito $\beta \cong 36.4°$. Prendiamo questo valore (e non 180°-36.4°) perché β dovrà essere minore di $\gamma = 45°$ in quanto b<c.

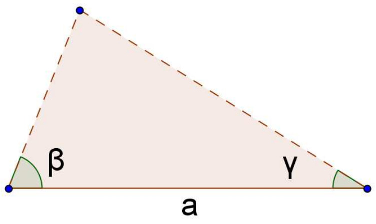
Ma se noi avessimo applicato il teorema dei seni per determinare α avremmo avuto:

$$\frac{10}{sen\alpha} = \frac{7,15}{sen45°} \Rightarrow sen\alpha \cong 0,999$$

e la calcolatrice avrebbe fornito come angolo $\alpha = 81,4°$ che ci avrebbe poi portato a $\beta = 180° - (45° + 81,4°) = 53,6°$ impossibile perché maggiore di 45°.

Quindi in questo caso 81,4° non è il nostro angolo ma dobbiamo prendere $\alpha = 180° - 81,4° = 98,6°$ che infatti ci riporta a $\beta = 180° - (45° + 98,6°) = 36,4°$.

2) Supponiamo di conoscere un lato, per esempio a, e due angoli, per esempio β e γ.



Troviamo b con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}$$

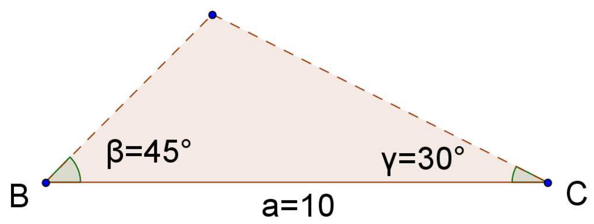
Nota: per calcolare $sen\alpha$ possiamo utilizzare le formule goniometriche poiché

$$sen\alpha = sen(\pi-(\beta+\gamma)) = sen(\beta+\gamma) = sen\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot sen\gamma$$

oppure calcolarne il valore approssimato utilizzare la calcolatrice.

Analogamente troviamo c e naturalmente $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)$.

Esempio: $a=10$ $\beta=45°$ $\gamma=30°$



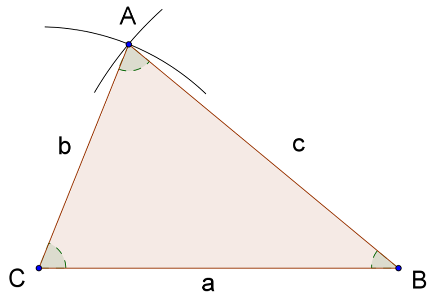
$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}\Rightarrow\frac{10}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Rightarrow b=\frac{20}{\sqrt{3}+1}\cong 7{,}33$$

$$* \; sen\alpha = sen(\pi-(\beta+\gamma)) = sen(\beta+\gamma) = sen\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot sen\gamma == \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}\Rightarrow c\cong 5{,}2$$

Naturalmente $\alpha=180°-(45°+30°)=105°$

3) Supponiamo di conoscere i tre lati a, b, c (ognuno minore della somma degli altri due e maggiore della differenza).



Possiamo applicare il teorema del coseno per trovare un angolo, per esempio α :

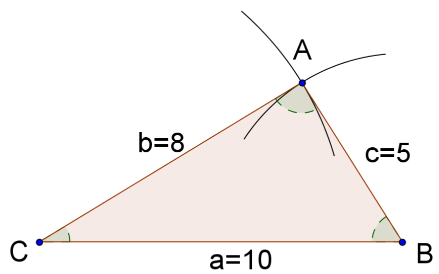
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = ... \Rightarrow \alpha = ...$$

A questo punto applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = ... \Rightarrow \beta = ...$$

Infine $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$

Esempio: $a = 10 \;\; b = 8 \;\; c = 5$



$$10^2 = 8^2 + 5 \;\; - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha \cong -0{,}14 \Rightarrow \alpha \cong 98°$$

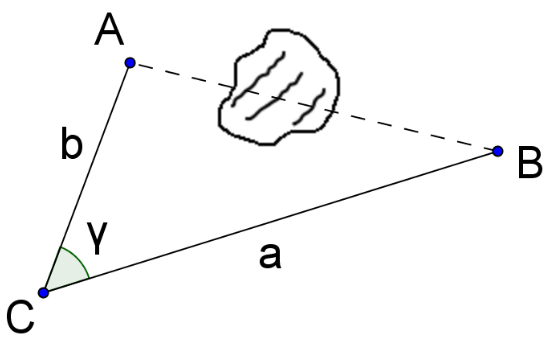
$$\frac{10}{sen98°} = \frac{8}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}792 \Rightarrow \beta \cong 52{,}4°$$

Naturalmente $\gamma = 180° - (52{,}4° + 98°) = 29{,}6°$

Applicazioni della risoluzione di un triangolo qualsiasi

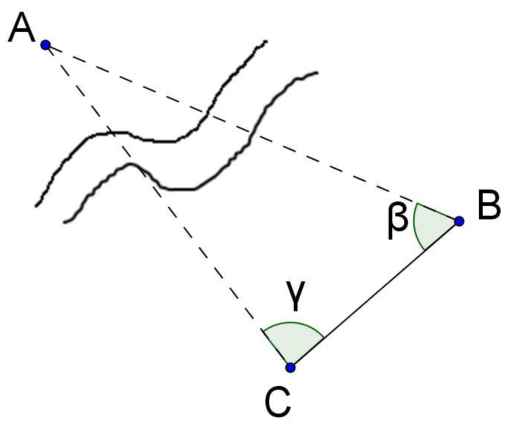
La risoluzione di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi è importante per la topografia.

1) Supponiamo per esempio di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo ma entrambi "accessibili". Posso prendere un 3° punto C, misurare $\overline{AC}, \overline{BC}$ e l'angolo γ.



Quindi conosco, del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, 2 lati e l'angolo compreso. Posso determinare $\overline{AB} = c$.

2) Supponiamo di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo e di cui solo un punto sia "accessibile" (B). Posso fissare un terzo punto C, misurare $\overline{BC}$ e gli angoli β e γ.



Quindi conosco, nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, un lato e i due angoli adiacenti. Il triangolo si può "risolvere" e posso determinare $\overline{AB}$.

ESERCIZI
TRIANGOLI QUALSIASI

1) Risolvi e costruisci con riga, compasso e goniometro oppure con il software Geogebra i seguenti triangoli:

a. $a = 8 \quad b = 4 \quad \gamma = 30°$ $\quad [c \cong 5 \quad \alpha \cong 126{,}9° \quad \beta \cong 23{,}1°]$

b. $a = 8 \quad \beta = 60° \quad \gamma = 45°$ $\quad [b \cong 7{,}2 \quad c \cong 5{,}9 \quad \alpha \cong 75°]$

c. $a = 5 \quad b = 10 \quad c = 9$ $\quad [\alpha = 29{,}9° \quad \beta = 85{,}5° \quad \gamma = 64{,}6°]$

d. $a = 8 \quad b = 5 \quad \gamma = 60°$ $\quad [c = 7 \quad \alpha \cong 81{,}3° \quad \beta \cong 38{,}7°]$

e. $a = 5 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 30°$ $\quad [b \cong 3{,}7 \quad c \cong 2{,}6 \quad \alpha \cong 105°]$

f. $a = 8 \quad b = 10 \quad c = 5$ $\quad [\alpha \cong 52{,}4° \quad \beta \cong 98° \quad \gamma = 29{,}6°]$

g. $a = 10 \quad b = 12 \quad \gamma = 30°$ $\quad [c \cong 6 \quad \alpha \cong 56{,}4° \quad \beta \cong 93{,}6°]$

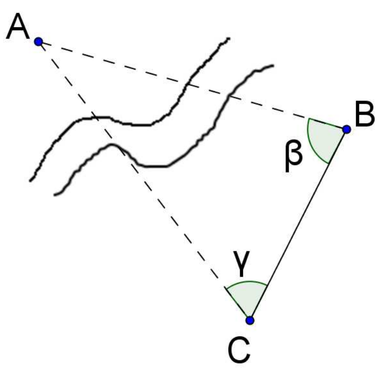
2) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma sono entrambi accessibili. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{AC} = 48$ metri, $\overline{BC} = 40$ metri e $A\hat{C}B = 40°$ Determina $\overline{AB}$.

[$\overline{AB} \cong 31$ metri]

3) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma solo B è accessibile. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{BC} = 100$ metri, $A\hat{B}C = 50°$, $A\hat{C}B = 70°$. Determina $\overline{AB}$.

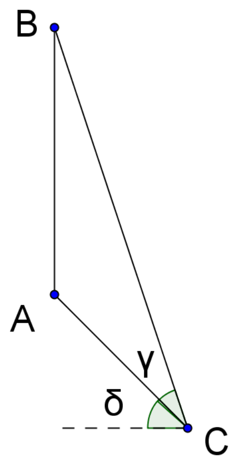
[$\overline{AB} \cong 108{,}5$ metri]

4) Due punti A e B si trovano sulle rive opposte di un fiume. Prendendo un punto C dalla parte B si misura $\overline{BC} = 50m$ $\quad \beta = 76° \quad \gamma = 63°$. Determina $\overline{AB}$.



$[\overline{AB} \cong 68m]$

5) Una torre AB si trova su un pendio: determina $\overline{AB}$ sapendo che AC=10m, $\gamma = 30°, \delta = 45°$.



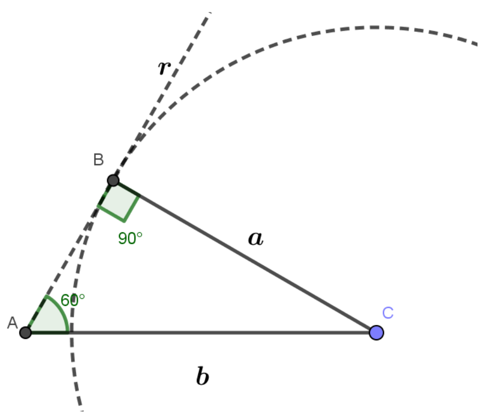
$\left[\overline{AB} = 19{,}3m\right]$

6) Problema svolto

Se per esempio abbiamo b=10 e $\alpha = 60°$ ci sarà un minimo valore di a per cui si può costruire un triangolo?

Osserviamo che tracciando la circonferenza di centro C e raggio a , perché essa intersechi la semiretta r in figura dovrà essere almeno tangente e quindi $a \geq b \cdot sen\alpha$.

In questo caso quindi $a \geq 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3}$



Quindi se $a < b \cdot sen\alpha$ non riusciamo a costruire nessun triangolo;

se $a = b \cdot sen\alpha$ e cioè nel nostro caso $a = 5 \cdot \sqrt{3}$ abbiamo solo un triangolo (rettangolo);

se $5 \cdot \sqrt{3} < a < b$ avremo due triangoli perché la circonferenza di centro C e raggio a intersecherà la semiretta r in due punti;

se $a = b$ avremo un solo triangolo (un'intersezione sarà in A) che in questo caso risulterà equilatero perché isoscele con un angolo di 60°;

se $a > b$ avremo un solo triangolo.

Disegna i vari casi.

SCHEDA DI VERIFICA
TRIANGOLI QUALSIASI

1) In un triangolo si ha $a = 10 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 60°$. Disegna il triangolo con riga e compasso e determina gli elementi mancanti.

$[b \cong 7{,}32\,;\ c \cong 8{,}97\,;\ \alpha = 75°]$

2) Determina la distanza $\overline{AB}$ tra due punti entrambi accessibili sapendo che, preso un terzo punto C, $\overline{BC} = 50m$, $\overline{AC} = 30m$, $tg\ A\hat{C}B = \frac{3}{4}$.

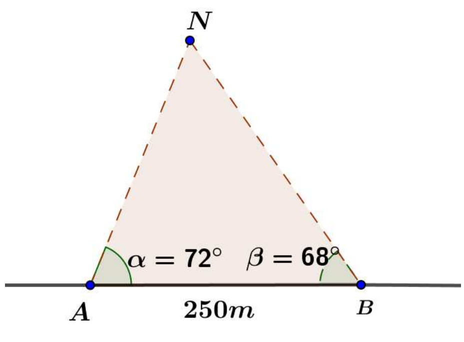
$[\overline{AB} \cong 31{,}62m]$

4) Risolvi il triangolo avente $a = 8 \quad b = 5 \quad c = 10$ e disegnalo.

$[\alpha \cong 52{,}44°,\ \beta \cong 29{,}7°,\ \gamma \cong 97{,}86°]$

5) Come potresti misurare l'altezza di una torre $\overline{AB}$ nel caso in cui la base A della torre non si possa raggiungere (si dice base inaccessibile) ma si trovi comunque su un terreno pianeggiante? (suggerimento: fissa un segmento $\overline{CD}$ sul piano orizzontale dove si trova la base A della torre e "traguarda" dai suoi estremi la cima della torre….).

6) Una nave N si trova a distanza d dalla costa (rettilinea): se da un osservatore sulla costa viene misurato $\alpha = 72°$, $\beta = 68°$ e $\overline{AB} = 250m$ (vedi figura), determina la distanza d della nave dalla costa.



$[d \cong 343m]$

*7) Dimostra che l'area di un quadrilatero si può calcolare con la seguente formula

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot sen\alpha$$

dove d_1 e d_2 sono la lunghezza delle diagonali e α è uno degli angoli formati dalle diagonali (è indifferente quale angolo si consideri).