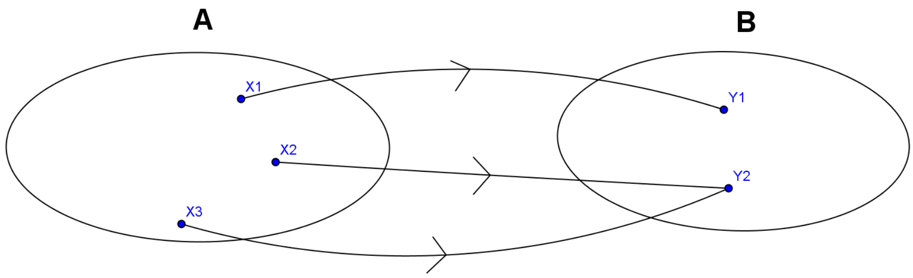
Funzioni

Riprendiamo il concetto di funzione.

Definizione di funzione : una funzione $f : A \to B$, con A e B insiemi non vuoti, è una legge che associa ad **ogni elemento** $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$

$$x \to y = f(x)$$

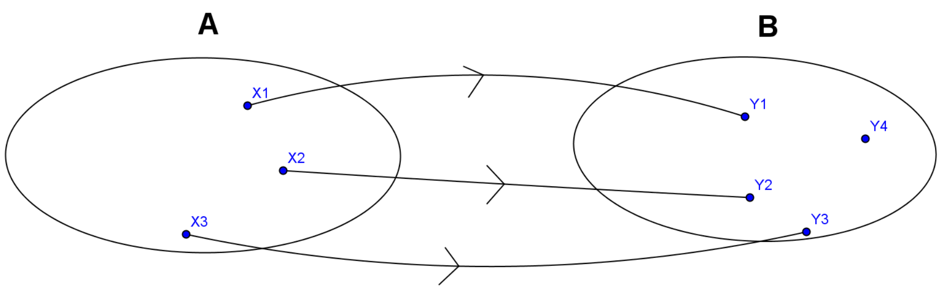
y viene chiamato "immagine" di x e indicato anche con $f(x)$.



Esempio: se consideriamo come insieme A l'insieme degli studenti della classe quinta A del liceo classico di Montevarchi nell'anno scolastico in corso e come insieme B l'insieme dei giorni dell'anno, possiamo considerare la funzione f che associa ad ogni studente la propria data di nascita.

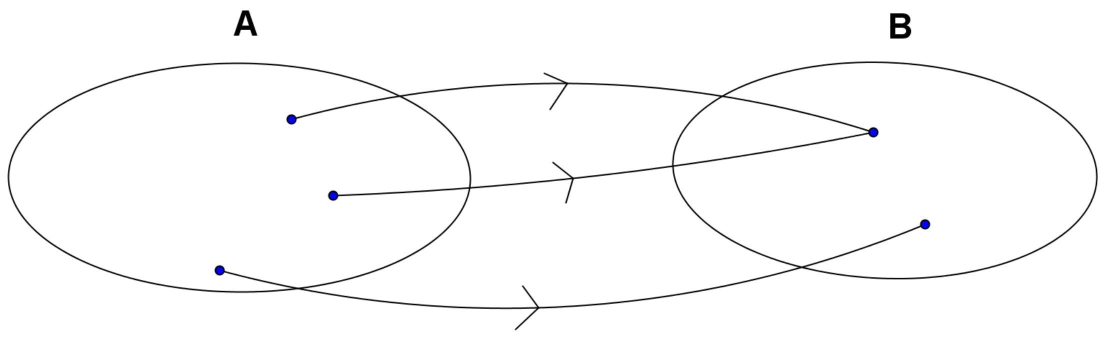
Proprietà di una funzione

- Una funzione f si dice **iniettiva** se ad elementi distinti $(x_1 \neq x_2)$ corrispondono immagini distinte $f(x_1) \neq f(x_2)$



Per esempio la funzione f : studente 5ACL$\to$data di nascita, non è detto che sia iniettiva perché ci potrebbero essere studenti nati nello stesso giorno.

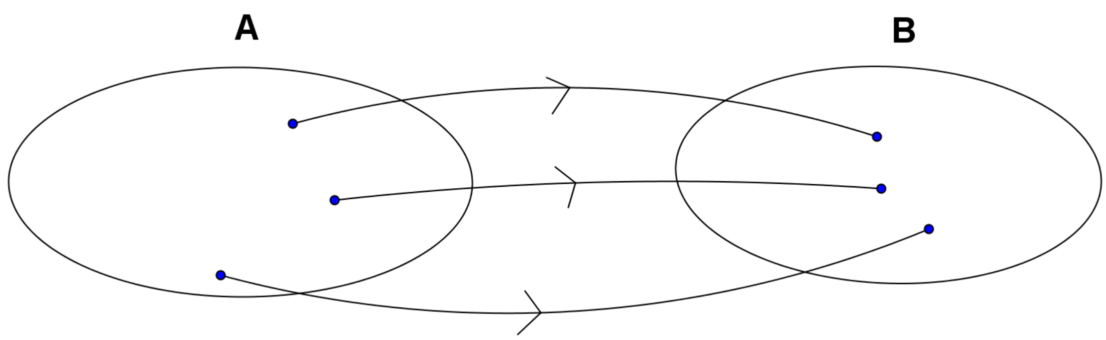
- Una funzione f si dice **suriettiva** se ogni elemento $y \in B$ è l'immagine di almeno un elemento $x \in A$.



Esempio di funzione suriettiva ma non iniettiva

NOTA: se prendiamo come insieme di arrivo B l'insieme delle immagini, ogni funzione diventa suriettiva.

- Una funzione f si dice **biunivoca** quando è iniettiva e suriettiva e quindi quando **ad ogni elemento** $x \in A$ **corrisponde uno e un solo elemento** $y \in B$ **e viceversa.**
  Questa funzione viene anche chiamata "funzione uno-a-uno".



Funzioni reali di variabile reale

Data $f: A \rightarrow B$ se $A, B \subseteq \Re$, cioè A e B sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali, f si dice **funzione reale di variabile reale.**

La variabile $x \in A$ viene detta **variabile indipendente** mentre $y = f(x)$ viene chiamata **variabile dipendente.**

Esempio: $f: x \rightarrow x+1$
è la funzione che associa ad ogni numero reale $x \in \Re$ il suo successivo.

- **Dominio della funzione**: è l'insieme dei numeri reali per cui la funzione risulta definita.

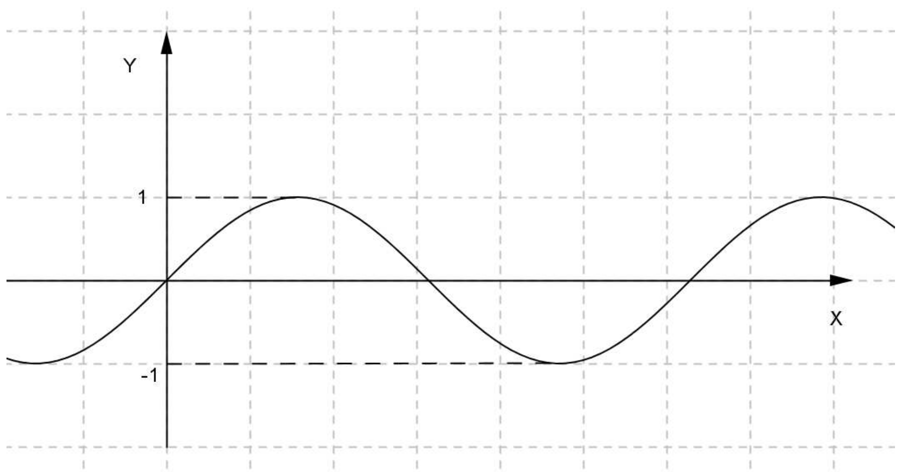
Esempio :
$f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ ha come dominio $D_f = \Re - \{0\}$ poiché per $x = 0$ non è possibile effettuare $\frac{1}{0}$.
Esempio :
$f: x \rightarrow tgx$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ cioè il suo dominio è $Df = \Re - \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$.

- **Codominio della funzione**: è l'insieme delle immagini della funzione.

Esempio : $f: x \rightarrow tgx$ ha come codominio $Cf = \Re$.
Esempio: $f: x \rightarrow senx$ ha come codominio $Cf = [-1;1]$

- **Grafico della funzione**: è l'insieme dei punti (x, y) con $x \in Df$ e $y = f(x)$ rispetto ad un sistema di riferimento.

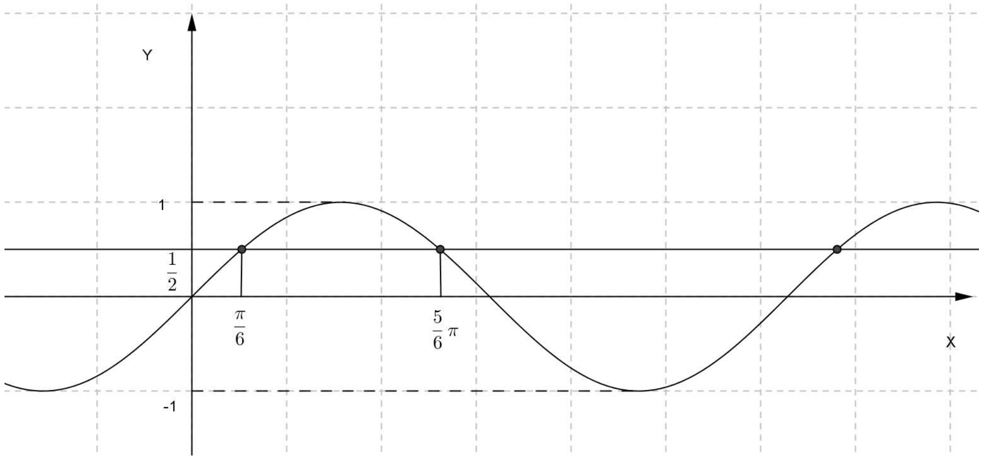
Esempio: il grafico di $y = senx$ è il seguente.



$Df = \Re$
$Cf = [-1,1]$

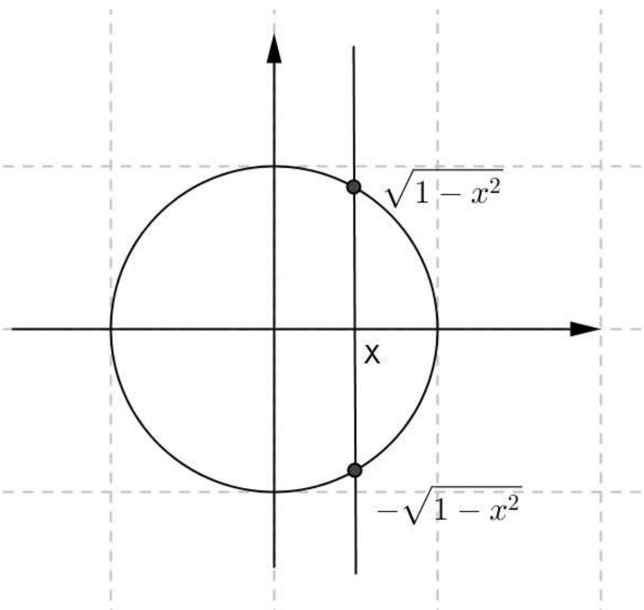
Nota 1: dal grafico di una funzione possiamo vedere se è iniettiva tracciando rette parallele all'asse x: se le rette parallele all'asse x che intersecano il grafico lo intersecano solo in un punto allora si tratta di una funzione iniettiva, altrimenti no.

Infatti per esempio nel grafico di $y = senx$ una retta $y = k$ con $-1 \le k \le 1$ interseca infinite volte il grafico ed infatti $y = senx$ non è una funzione iniettiva.



$$\frac{\pi}{6} \to \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{6}\pi \to \frac{1}{2}$$
ecc.

Nota 2: se una curva è grafico di una funzione allora tagliandola con rette parallele all'asse y dobbiamo avere **al massimo una intersezione** (ad ogni $x \in A$ è associato uno ed un solo $y = f(x) \in B$)
Per esempio una circonferenza non è grafico di una funzione.



$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$
$$x \to \sqrt{1-x^2}$$
$$x \to -\sqrt{1-x^2}$$

Ad un valore $-1 \le x \le 1$ corrispondono due immagini distinte.

ESERCIZI
DOMINIO, CODOMINIO E GRAFICO

Determina dominio, codominio e grafico delle seguenti funzioni:

1. $y = x + 1 \qquad (f : x \to x + 1)$

2. $y = x^2 + 1$

3. $y = \frac{1}{x}$

4. $y = \cos x$

5. $y = tgx$

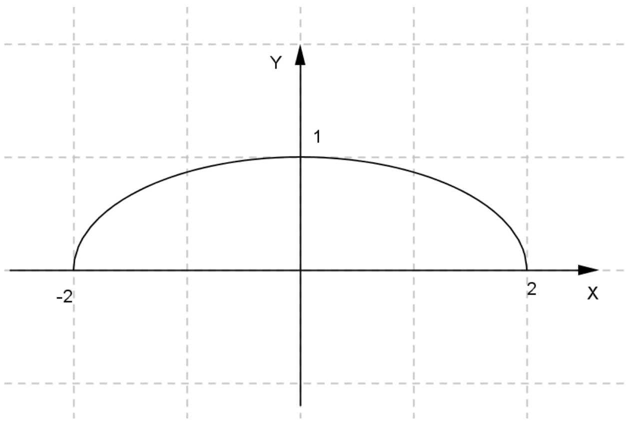
*6. $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

Svolgimento: se eleviamo al quadrato entrambi i membri otteniamo

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(4 - x^2\right) \to \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Si tratta di una ellisse con semiassi $a = 2$, $b = 1$ (centro l'origine e assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani).
Non possiamo però considerare tutta la curva ma solo la parte con $y \geq 0$ poiché la funzione era

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \text{ e quindi } y \geq 0$$



Il dominio: $D_f : -2 \leq x \leq 2$ (infatti si deve avere $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$)
Il codominio : $0 \leq y \leq 1$

7. $y = 2\sqrt{x^2 - 1}$
8. $y = \frac{2x}{x - 1}$

Esempi

1) Se abbiamo una **funzione polinomiale**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

il suo dominio è $\Re$.

Esempio: le funzioni

$$y = x + 1 \;\; ; \;\; y = x^2 - 1 \;\; ; \;\; y = x^3 + x - 2$$

Hanno tutte come dominio $\Re$.

2) Se f è una **funzione razionale fratta** (cioè quoziente di due polinomi) per determinare il suo dominio basterà escludere i valori che annullano il denominatore.

$$f : x \to \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m}$$

$$D_f = \Re - \{x : D(x) = 0\}$$

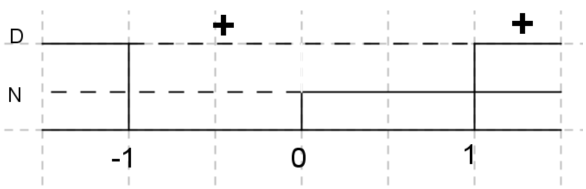
Esempi: $y = \dfrac{1}{x-1}$ ha come dominio $\Re - \{1\}$;

$y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ ha come dominio $\Re - \{\pm 2\}$

3) a) Se $f(x) = \sqrt[2n]{R(x)}$ cioè è una radice con indice pari , il dominio si troverà risolvendo $R(x) \geq 0$

Esempio: $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$

$\dfrac{x}{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow$



$D_f : -1 < x \leq 0 \cup x > 1$

b) Se $f(x) = \sqrt[2n+1]{R(x)}$ cioè *f(x)* è una radice di indice dispari, il duo dominio coinciderà con quello del radicando *R(x)*.

Esempio: $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ $D_f : x \neq 0$

4) Se $f(x)$ è una **funzione goniometrica** ricordiamo che

$$y = senx \qquad D_f = \Re$$
$$y = \cos x \qquad D_f = \Re$$
$$y = tgx \qquad D_f = \Re - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$$

Esempi

$$y = sen\left(x - \frac{\pi}{3} \right) \qquad D_f = \Re$$
$$y = tg\left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \qquad 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$$

5) $f(x) = a^x$ **funzione esponenziale** ha come dominio $\Re$.

Esempio: $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$ ha come dominio $\Re - \{1\}$ perché l'esponente è definito per $x \neq 1$.

6) $f(x) = \log_a x$ **funzione logaritmica** ha come dominio $x > 0$ cioè l'argomento deve essere positivo.

Quindi se per esempio abbiamo $y = \log_a (x-1)$ dovremo porre l'argomento positivo:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Nota: per indicare il logaritmo in base *e* (numero irrazionale $\cong 2{,}7$) scriveremo *ln* , cioè

$$\ln x = \log_e x .$$

ESERCIZI
DOMINI DI FUNZIONI

Determina il dominio delle seguenti funzioni:

1) $y = x^3 + x^2 + 1$ $[\Re]$

2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ $[x \neq \pm 1]$

3) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $[x \leq 0 \cup x > 1]$

4) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ $[x \neq 1]$

5) $y = \sqrt{senx + \cos x}$ $[-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi]$

6) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$ $[x \geq 0]$

7) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $[x \neq 2]$

8) $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x^2 - 9}\right)$ $[-3 < x < 1 \cup x > 3]$

9) $y = \sqrt{\ln x}$ $[x \geq 1]$

10) $y = \sqrt[4]{9^x - 3^x}$ $[x \geq 0]$

11) $y = \dfrac{1}{\ln^2 x - 1}$ $[x > 0 \quad x \neq e, \dfrac{1}{e}]$

12) $y = \sqrt[3]{tgx}$ $[x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$

13) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$ $[0 < x \leq \dfrac{1}{e^2} \cup x \geq e^2]$

14) $y = \dfrac{1}{e^x}$ $[\Re]$

15) $y = senx + tg2x$ $[x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}]$

16) $y=\dfrac{1}{x^3-1}$ [$x\neq 1$]

17) $y=\dfrac{2-x}{x^2-x}$ [$x\neq 0 \quad ; \quad 1$]

18) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$ [$\Re$]

19) $y=\sqrt{x^2-1}$ [$x\leq -1 \quad \cup \quad x\geq 1$]

20) $y=\sqrt{x^3-1}$ [$x\geq 1$]

21) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2-x}}$ [$x\neq 2$]

22) $y=2^{\frac{1}{x}}$ [$x\neq 0$]

23) $y=\sqrt{2^x+1}$ [$\Re$]

24) $y=tg(3x)$ [$x\neq \dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}$]

25) $y=\dfrac{1}{senx}$ [$x\neq k\pi$]

26) $y=\dfrac{1}{tgx}$ [$x\neq k\dfrac{\pi}{2}$]

27) $y=\ln(3-x)$ [$x<3$]

28) $y=\dfrac{1}{\ln x}$ [$x>0, \quad x\neq 1$]

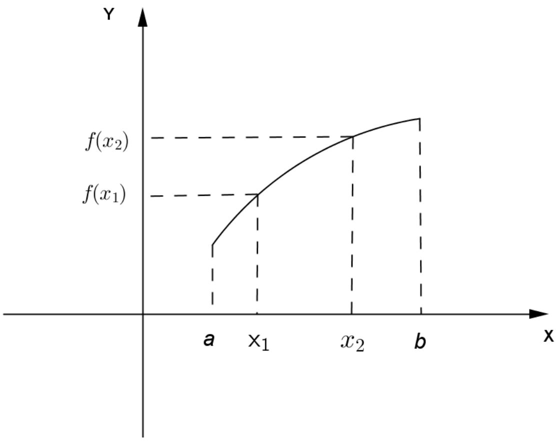
29) $y=\sqrt{3^x-9}$ [$x>2$]

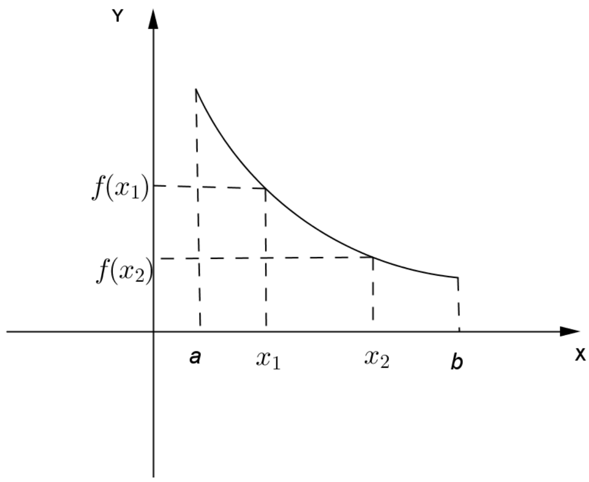
30) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$ [$x\neq 0$]

Caratteristiche di una funzione

Vediamo alcune caratteristiche di una funzione:

1) $f(x)$ si dice funzione crescente in I(a,b) (I intervallo anche illimitato) se per ogni $x_1 < x_2 \in I$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$, mentre si dice decrescente in I per ogni $x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.





Può darsi che una funzione sia crescente (o decrescente) in tutto il dominio oppure crescente in alcuni intervalli e decrescente in altri.

Esempi

$y = x + 1$ è crescente $\forall x \in D_f$

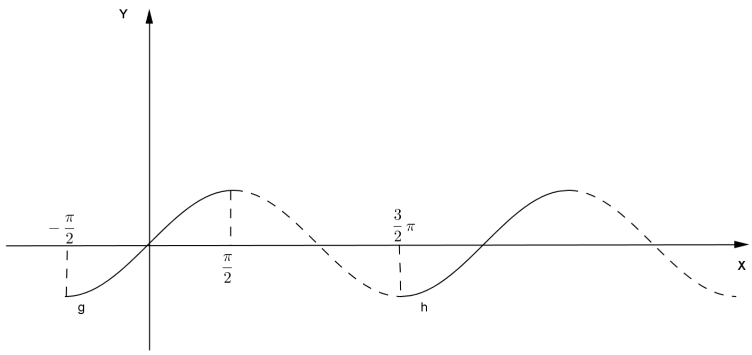
$y = x^2$ è decrescente $\forall x \leq 0$ quindi in $I = (-\infty, 0]$ è crescente $\forall x \geq 0$ cioè in $I = [0, +\infty)$

$y = senx$ è crescente negli intervalli

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

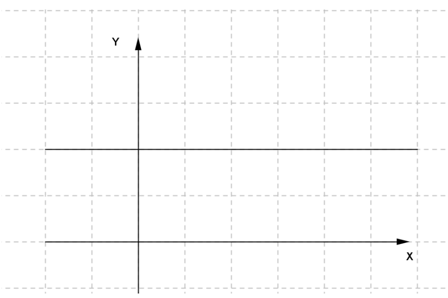
decrescente quando

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$



Nota: naturalmente una funzione può essere costante cioè $f(x) = k \quad \forall x \in D_f$.

Esempio: $y = 2$

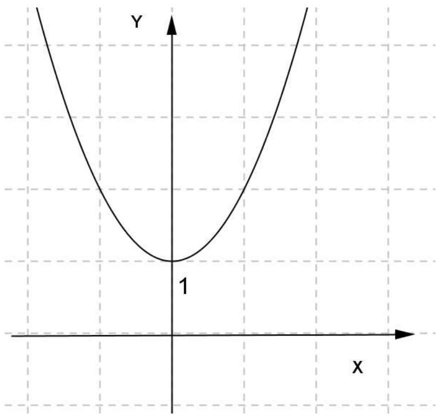


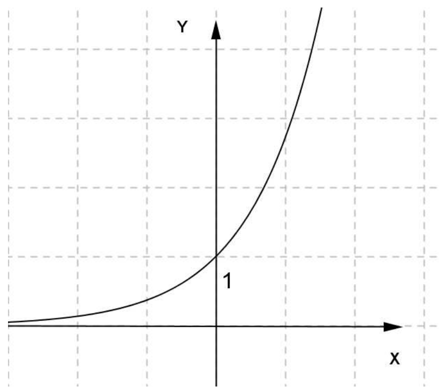
2) **a.** Una funzione $f(x)$ si dice **limitata inferiormente**

- se $f(x) \geq m \quad \forall x \in D_f$ (m si dice minimo della funzione e appartiene al codominio)
- oppure se $f(x) > I \quad \forall x \in D_f$ (I si dice "estremo inferiore" e non appartiene al codominio).

Esempio: $y = x^2 + 1$ ha un minimo $m = 1 \quad f(x) \geq 1 \quad \forall x \in D_f = \Re$

Esempio: $y = e^x$ ha un estremo inferiore $I = 0 \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f = \Re$



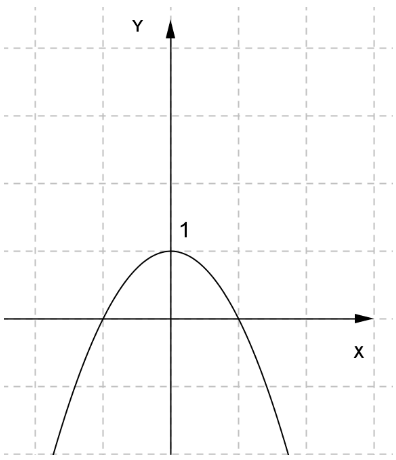


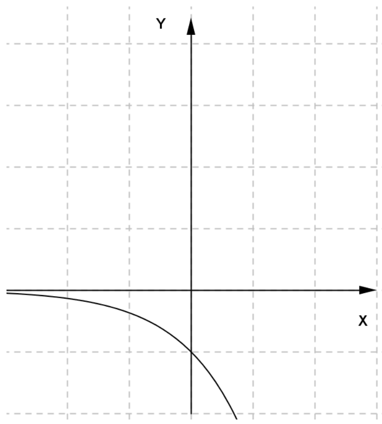
b. Una funzione $f(x)$ si dice **limitata superiormente**

- se $f(x) \leq M \quad \forall x \in D_f$ (M si dice massimo della funzione e appartiene al codominio)
- oppure se $f(x) < S \quad \forall x \in D_f$ (S si dice "estremo superiore" e non appartiene al codominio)

Esempio: $y = -x^2 + 1$ ha massimo $M = 1$: $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Re$

Esempio: $y = -e^x$ ha estremo superiore $S = 0$: $f(x) < 0 \quad \forall x \in \Re$

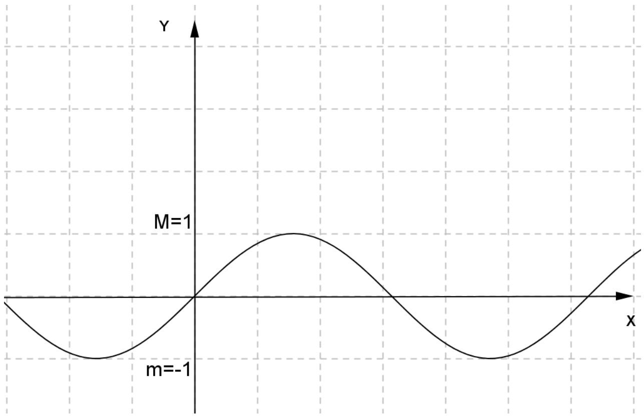


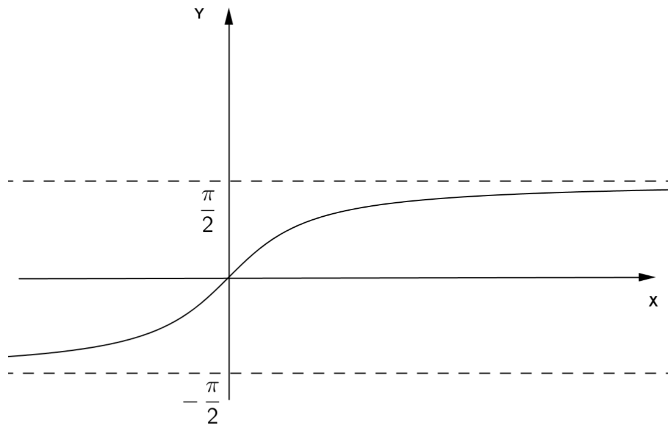


c. $f(x)$ si dice **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente.

Esempio: $y = senx$ è limitata $(m = -1, M = 1)$

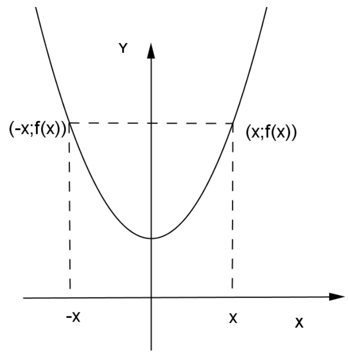
Esempio: $y = arctgx$ è limitata $\left(I = -\frac{\pi}{2}, S = \frac{\pi}{2} \right)$





3) **a.** Una funzione $f(x)$ si dice **pari** quando $f(-x) = f(x)$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Esempio: $y = x^2 + 1$ è pari



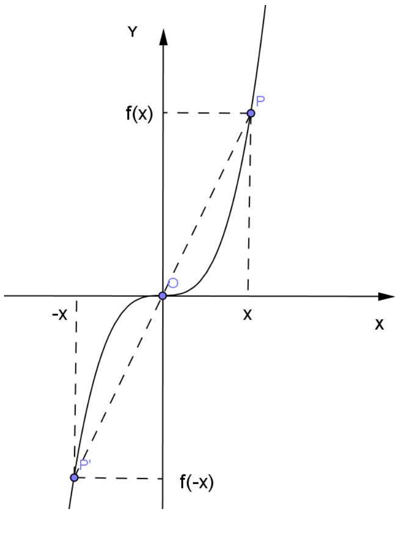
Nota: se in una funzione la variabile x compare solo con esponente "pari" la funzione è pari.

Esempio: $y = \frac{x^4 - 1}{3 + x^2}$ è una funzione pari poiché $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{3 + (-x)^2} = f(x)$

b. Una funzione $f(x)$ si dice **dispari** quando $f(-x) = -f(x)$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento.

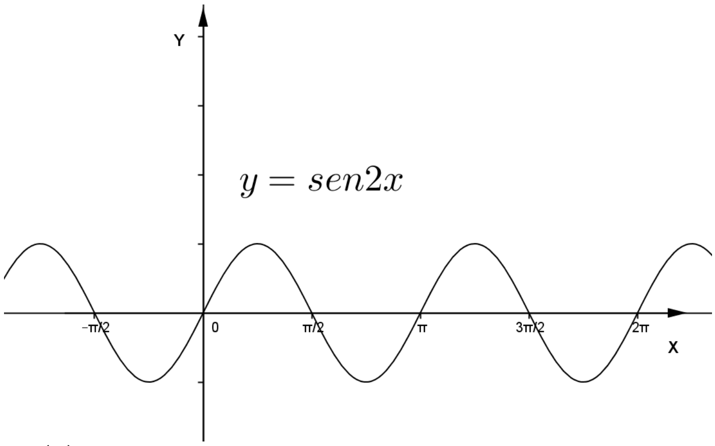
Esempio: $y = x^3$ è dispari

$P(x; f(x))$ $P^{'}(-x; -f(x))$ sono simmetrici rispetto a (0;0)



4) Una funzione $f(x)$ si dice **periodica di periodo T** quando T è il minimo valore per cui

$$f(x+T)=f(x) \quad (\forall x \in D_f)$$



Esempi:

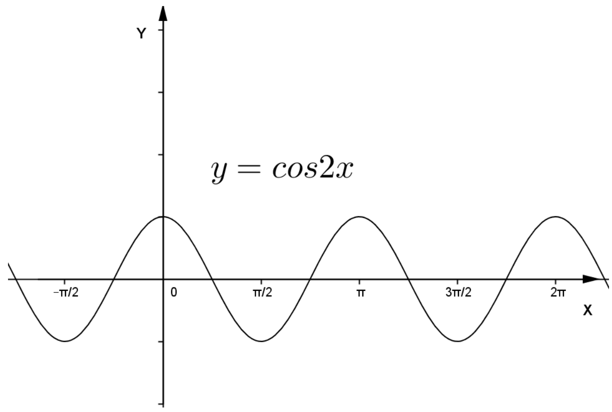
a. $y = senx$ ha periodo $T = 2\pi$

$y = sen2x$ ha periodo $T = \pi$

Infatti
$f(x+\pi)=sen2(x+\pi)=sen(2x+2\pi)=sen2x=f(x)$

In generale $y = senkx$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$

$$f\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)=sen\left[k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)\right]=sen(kx+2\pi)=senkx=f(x)$$



b. $y = \cos x$ ha periodo $T = 2\pi$

$y = \cos 2x$ ha periodo $T = \pi$

In generale $y = \cos kx$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$
poiché

$$f(x+\frac{2\pi}{k})=\cos\left[k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)\right]=\cos(kx+2\pi)=\cos kx=f(x)$$

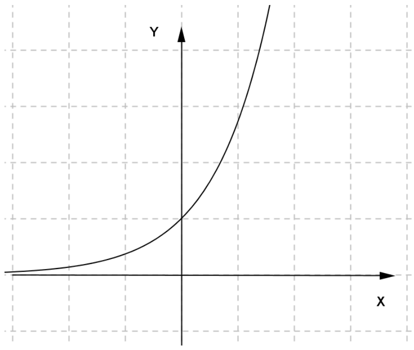
c. $y = tgx$ ha periodo $T = \pi$

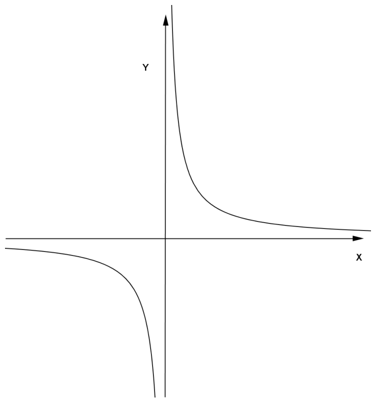
In generale $y = tgkx$ ha periodo $T = \frac{\pi}{k}$ poiché

$$f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)=tg\left[k\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right]=tg(kx+\pi)=tgkx=f(x)$$

5) Una funzione $f(x)$ può avere un **asintoto**

• **orizzontale**: quando il suo grafico si "avvicina"ad una retta orizzontale di equazione $y = k$.
Esempio: $y = e^x$ ha l'asse x come asintoto orizzontale ma solo quando $x \to -\infty$ (parte sinistra del grafico).
Esempio: $y = \frac{1}{x}$ ha l'asse x come asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che quando $x \to -\infty$ (cioè sia a sinistra che a destra).

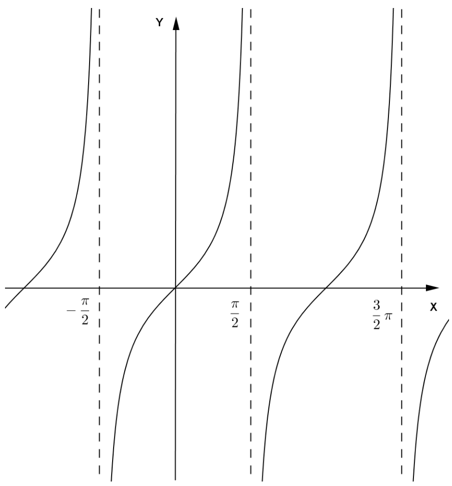


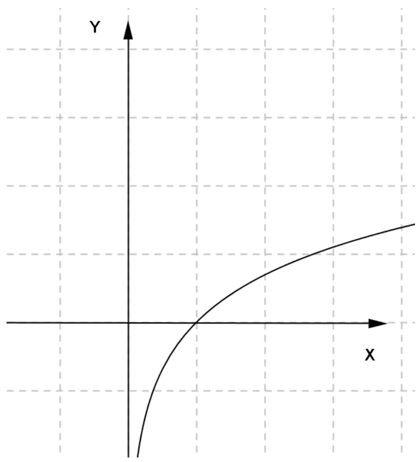


- **verticale**: quando il suo grafico si "avvicina" ad una retta verticale di equazione $x = k$ quando $x \to k$ ($x = k \notin D_f$).

  Esempio: $y = tgx$ ha come asintoti verticali le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

  Esempio: $y = \ln x$ ha come asintoto verticale l'asse y.

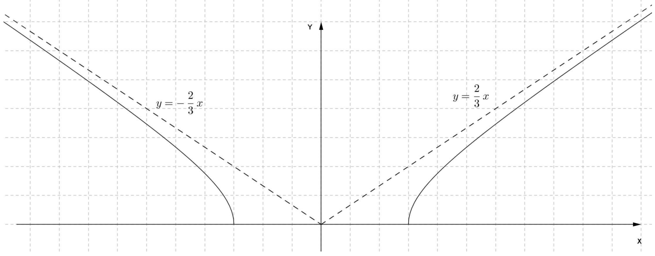




- **obliquo**: quando il suo grafico si "avvicina" ad una retta di equazione $y = mx + q$ quando $x \to +\infty$ e/o $x \to -\infty$

  Esempio: $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^x - 9}$ ($\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$)

  asintoti obliqui $y = \pm\frac{2}{3}x$



ESERCIZI

CARATTERISTICHE DI UNA FUNZIONE

Determina dominio, codominio, grafico e caratteristiche delle seguenti funzioni:

1) $y = \cos 3x$

2) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

3) $y = 3x - 1$

4) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

5) $y = sen 4x$

6) $y = tg 4x$

7) $y = 2x - 1$

8) $y = 2^x$

9) $y = \ln x$

10) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

11) $y = \frac{x-2}{x-3}$

12) $y = x^2 - x$

13) $y = tg 2x$

14) $y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$

15) $y = -x^2$

16) $y = x^2 + 1$

17) $y = 3^x$

18) $y = \log_2 x$

19) $y = 3 - x^2$

20) $y = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

Grafici deducibili dal grafico di f(x)

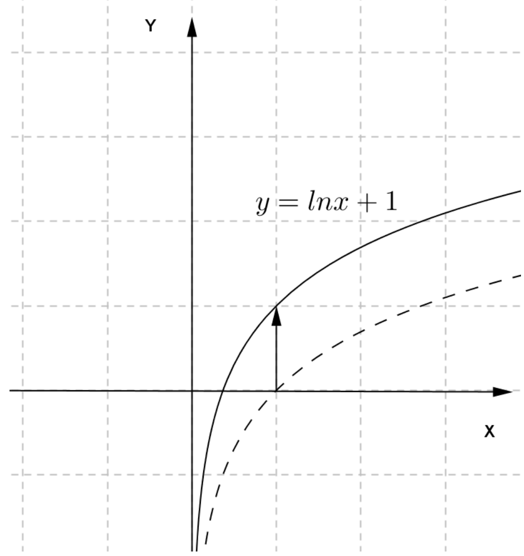
Se conosciamo il grafico G_f di una funzione $f(x)$ possiamo facilmente disegnare anche il grafico di:

- $f(x)+a \qquad a \in \Re$
- $f(x-a) \qquad a \in \Re$
- $-f(x)$
- $f(-x)$
- $|f(x)|$

Vediamo un esempio: consideriamo come funzione $f(x)=\ln x$

a. Come risulterà il grafico di $y=\ln x+1$?

E' chiaro che sarà traslato verso l'alto di 1.

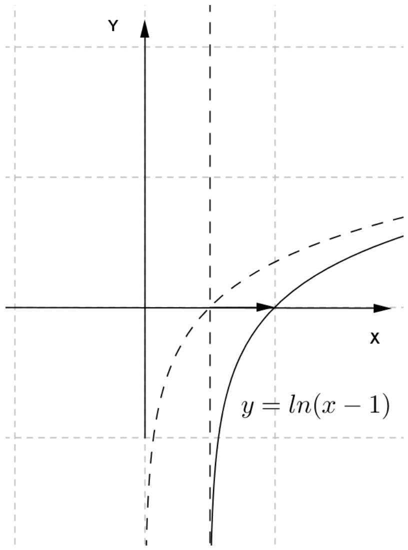


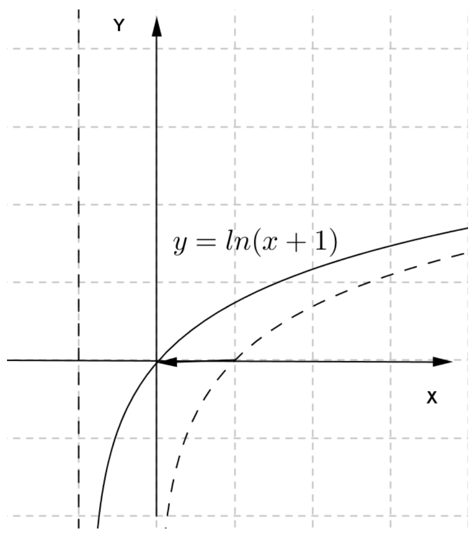
Naturalmente se considero $y=\ln x-1$ traslo verso il basso.

b. Come risulterà il grafico di $y=\ln(x-1)$?

In questo caso il dominio cambia e risulta $x>1$: il grafico è traslato verso destra ed ha asintoto verticale $x=1$.

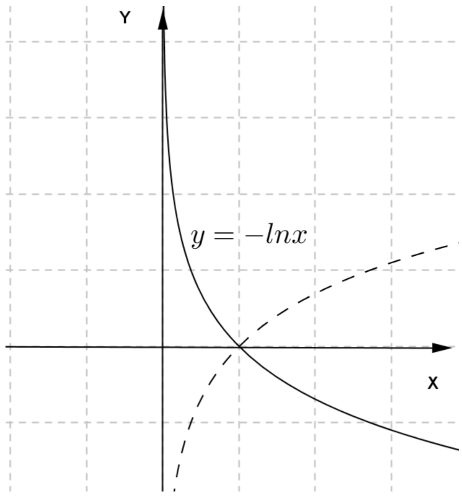
Se invece avessi considerato $y=\ln(x+1)$ il grafico del logaritmo traslava verso sinistra e aveva asintoto verticale $x=-1$ (il dominio: $x>-1$)





b. Come risulta il grafico di $y = -\ln x$?

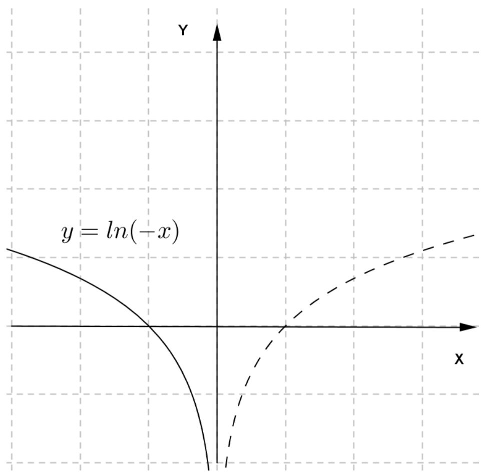
Le immagini risultano opposte e quindi si ha il grafico simmetrico rispetto all'asse x.



c. Come risulta il grafico di $y = \ln(-x)$?

Questa volta il dominio cambia e si ha $-x > 0 \Rightarrow x < 0$.

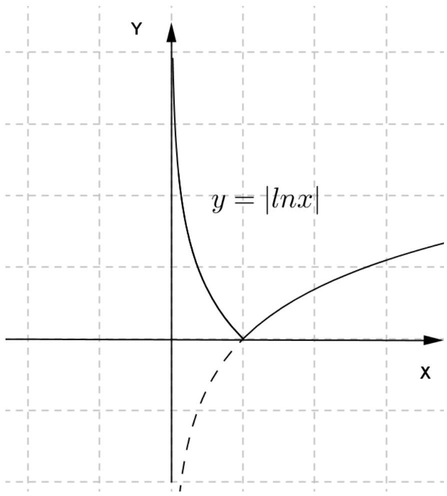
Il grafico sarà simmetrico (di quello del logaritmo) rispetto all'asse y.



d. Come risulta il grafico di $y = |\ln x|$?

Ricordiamo che:

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x \quad \textit{quando} \quad \ln x \geq 0 \quad \textit{cioè} \quad \textit{per} \quad x \geq 1 \\ -\ln x \quad \textit{quando} \quad \ln x < 0 \quad \textit{cioè} \quad \textit{per} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$



Quindi il grafico di $|\ln x|$ coincide con il grafico di $\ln x$ quando questo si trova sopra all'asse x (cioè quando le immagini sono positive), mentre andrà "ribaltato" rispetto all'asse x quando si trova sotto all'asse x (cioè quando le immagini sono negative).

ESERCIZI

GRAFICI DEDUCIBILI

Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

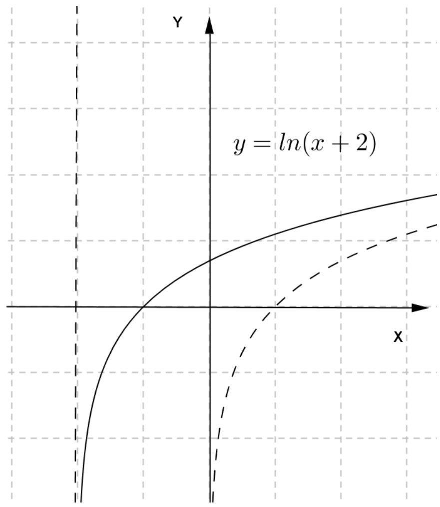
1) $y = \ln(x-2)$ 2) $y = 2^x - 1$ 3) $y = \left|\frac{x}{x-4}\right|$

4) $y = 3^{x-2}$ 5) $y = \ln x - 2$

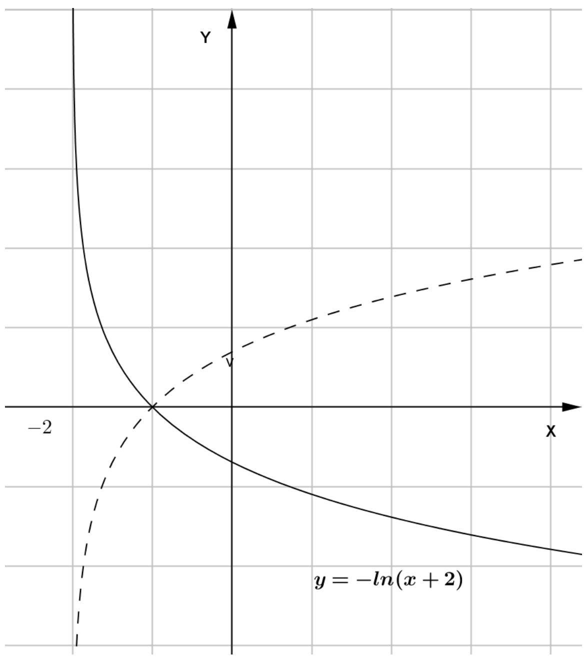
*6) $y = -\ln(x+2)$

Svolgimento:

Partiamo dal grafico di $f(x) = \ln x$ e consideriamo all'inizio il grafico di $y = \ln(x+2)$ (dominio $x > -2$: traslo a sinistra).



Infine consideriamo $y = -\ln(x+2)$ cioè ribaltiamo rispetto all'asse x:



7) $y = |\ln(x-3)|$

8) $y = \ln(x+1)$

9) $y = -\ln(x-3)$

10) $y = |tgx|$

11) $y = -2^x$

12) $y = |\ln(x-4)|$

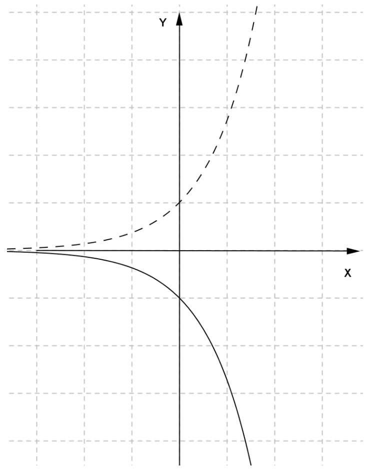
13) $y = \left|\frac{x-2}{x}\right|$

14) $y = 2^{x-1}$

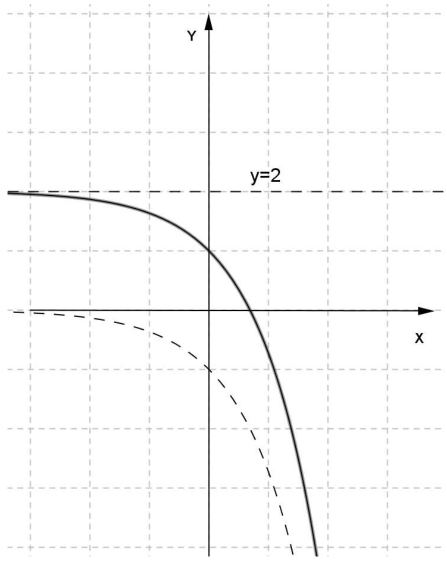
*15) $y = -e^x + 2$

Svolgimento:

Partiamo dal grafico di $f(x) = e^x$ e consideriamo il grafico di $-f(x)$ (simmetrico rispetto all'asse x)



Infine consideriamo $y = -f(x) + 2$ cioè trasliamo verso l'alto di 2 (l'asintoto orizzontale diventa $y = 2$)



Composizione di funzioni

Le funzioni si possono “comporre”.

Se per esempio abbiamo

$$f_1 : x \to x+1$$

$$f_2 : x \to x^2$$

possiamo applicare f_1 e al risultato applicare f_2

$$x \xrightarrow{f_1} x+1 \xrightarrow{f_2} (x+1)^2$$

$y=(x+1)^2$ corrisponde a $f_2 \circ f_1$ che si legge f_2 **composto** f_1 (si scrive vicino alla x la funzione che si applica per prima).

$$f_2 \circ f_1 = f_2(f_1(x))$$

Nota

Notiamo che la composizione tra funzioni non gode della proprietà commutativa cioè:

$$f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$$

Infatti per esempio considerando le funzioni precedenti se applico prima f_2 e poi f_1 ho:

$$x \xrightarrow{f_2} x^2 \xrightarrow{f_1} x^2 + 1$$

$f_1 \circ f_2$ risulta $y = x^2 + 1$ ed è diversa da $y=(x+1)^2$

Nota: si possono comporre anche più di 2 funzioni.

Per esempio $y = \ln^2(x+1)$ può essere pensata come la composizione di

$$x \xrightarrow{f_1} x+1 \xrightarrow{f_2} \ln(x+1) \xrightarrow{f_3} \ln^2(x+1)$$

Funzione inversa

Consideriamo una funzione $f(x)$: per funzione inversa di $f(x)$, indicata con il simbolo $f^{-1}(x)$, intendiamo la funzione che associa all'immagine $f(x)$ il valore x di partenza.

Per esempio se $\quad f(x)\ :\ x \to x+1$

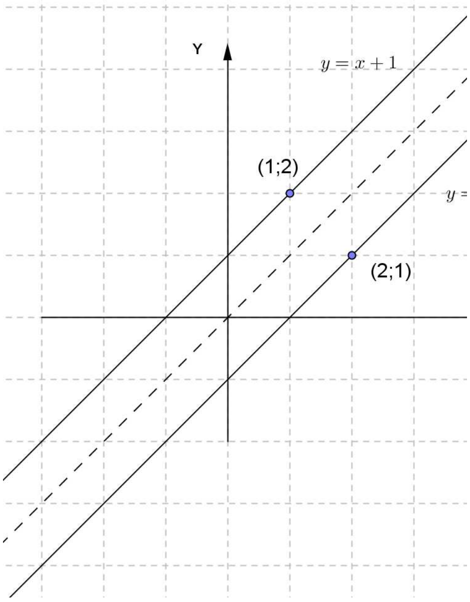
$\qquad\qquad\qquad f^{-1}(x)\ :\ x \to x-1$

Infatti da $\quad y = x+1 \quad$ ricavando $x = y-1$ abbiamo che

$$x \xrightarrow{f} x+1 = y$$

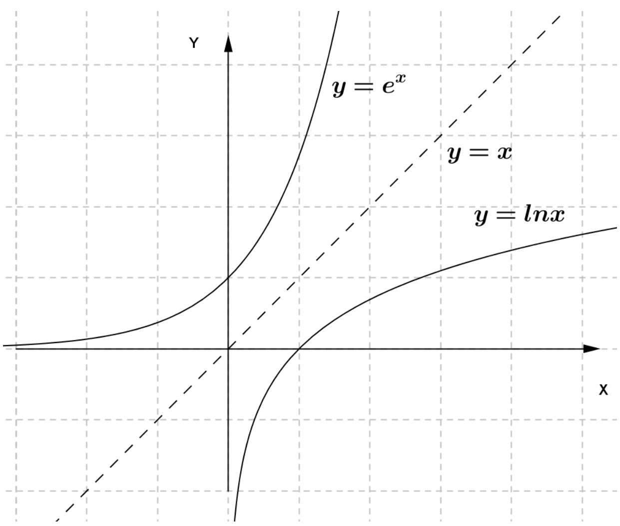
$$x = y-1 \xleftarrow{f^{-1}} y$$

Generalmente poi, invece di scrivere $f^{-1}(y) = y-1$ si scrive $f^{-1}(x) = x-1$.



Riportando i grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ nello stesso sistema di riferimento, notiamo che sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I-III quadrante: infatti se

$$(x, f(x)) \in G_f \to \qquad (f(x), x) \in G_{f^{-1}}$$



La funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale (in figura è stata disegnato il grafico della funzione esponenziale in base e) : osserviamo che il dominio e il codominio si scambiano.

Ma possiamo sempre invertire una funzione?

Perché la f^{-1} sia una funzione occorre che $f(x)$ sia **iniettiva** (come dominio di f^{-1} prenderemo il codominio di f).

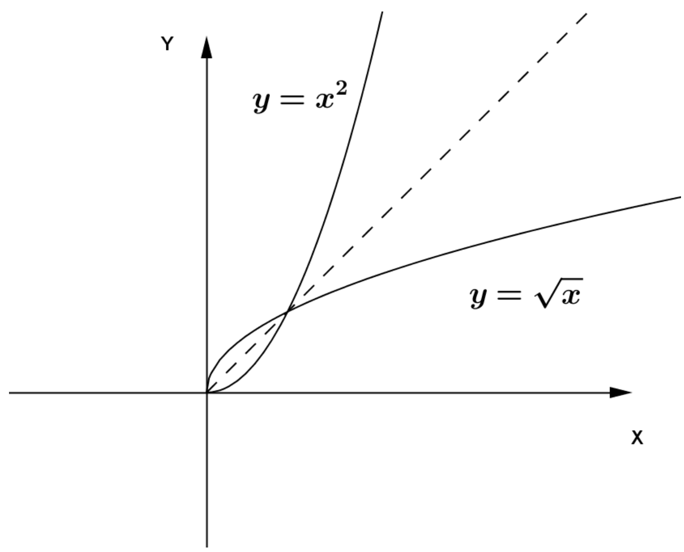
Infatti consideriamo per esempio $f(x)=x^2$.
Se proviamo a ricavare x abbiamo:

$$y=x^2 \qquad\qquad x=\pm\sqrt{y}$$

Ma $y=\pm\sqrt{x}$ non è una funzione! (ad ogni valore di x corrispondono 2 immagini).

In questi casi però, se vogliamo, possiamo decidere di "restringere" il dominio della funzione in modo da renderla iniettiva e poterla così invertire.

Se per esempio consideriamo $y=x^2$ ma solo con $x>0$ la funzione diventa iniettiva e la sua inversa è $y=\sqrt{x}$



Vediamo come sono state definite le funzioni inverse delle funzioni goniometriche.

- **Funzione inversa del seno**

Restringiamo $y = senx$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$: in questo intervallo la funzione è iniettiva.

La funzione inversa si indica con $arcsenx$ (che si legge arcoseno di x ed indica l' angolo il cui seno è di x) ed ha come dominio $[-1;1]$ e come codominio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Esempi

$$arcsen(1) = \frac{\pi}{2} \ ; \ arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

- **Funzione inversa del coseno**

Se restringiamo $y = \cos x$ all'intervallo $[0,\pi]$ possiamo invertire la funzione: la funzione inversa del coseno ristretto a $[0,\pi]$ si chiama $\arccos x$ (arcocoseno di x).

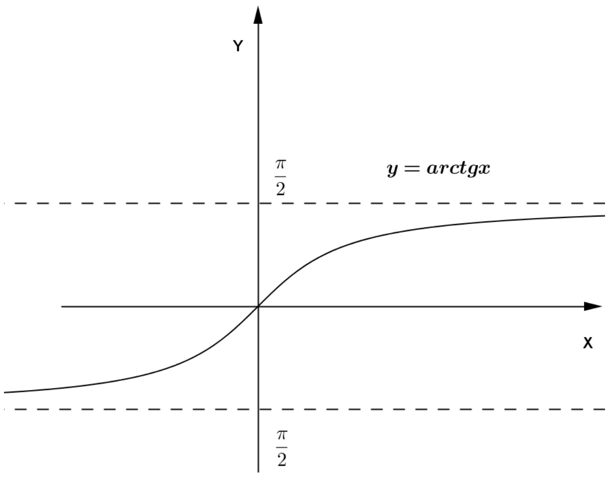
Esempi

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \ ; \ \arccos(1) = 0$$

- **Funzione inversa della tangente**

Se restringiamo la tangente $y = tgx$ all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ possiamo considerare la funzione inversa, indicata con $arctgx$ (arcotangente di x) che ha come dominio $\Re$ e come codominio $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Il grafico è il seguente ed osserviamo che i due asintoti verticali della funzione tangente diventano asintoti orizzontali per la funzione inversa arcotangente.



SCHEDA DI VERIFICA 1
FUNZIONI

1) Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y=\sqrt{\dfrac{x}{3-x^2}}$ $\quad\left[x<-\sqrt{3}\cup 0\le x<\sqrt{3}\right]$

b) $y=arctg\left(\dfrac{x}{x-5}\right)$ $\quad[x\neq 5]$

c) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ $\quad[x<-1\cup x>1]$

d) $y=\sqrt{1-2^x}$ $\quad[x\le 0]$

e) $y=\sqrt{\ln x}$ $\quad[x\ge 1]$

2) Traccia il grafico delle seguenti funzioni indicando anche dominio e caratteristiche:

a) $y=\left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

b) $y=-\ln(3-x)$

c) $y=3^x+1$

d) $y=\sqrt{x^2-4}$

3) a) Date $f_1: x\rightarrow\dfrac{1}{x}$ e $f_2: x\rightarrow\ln x$, scrivi come risultano $f_2\circ f_1$ e $f_1\circ f_2$ e indica i loro domini.

$$\left[f_2\circ f_1: x\rightarrow\ln\left(\frac{1}{x}\right)\qquad D_{f_2\circ f_1}: x>0\qquad ;\qquad f_1\circ f_2: x\rightarrow\frac{1}{\ln x}\qquad D_{f_1\circ f_2}: x>0, x\neq 1\right]$$

b) Determina la funzione inversa di $y=e^x-2$
Traccia i grafici di f e f^{-1} nello stesso sistema di riferimento. Cosa osservi?

c) E' possibile invertire la funzione $y=x^2+1$?
Motiva la risposta. Come si dovrebbe restringere il dominio per invertirla?
Disegna il grafico della funzione inversa nel caso in cui si restringa il dominio di f.

SCHEDA DI VERIFICA 2
FUNZIONI

1) Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \ln\left(\dfrac{x^2 - 9}{x - 2}\right)$ [$-3 < x < 2 \quad \cup \quad x > 3$]

b) $y = \sqrt{5^x - 1}$ [$x \geq 0$]

c) $y = \sqrt[5]{\dfrac{\ln x}{\ln x - 2}}$ [$x > 0 \quad ; \quad x \neq e^2$]

d) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x - 2}\right)$ [$x > 2$]

e) $y = arctg\left(\dfrac{1}{2^x - 8}\right)$ [$x \neq 3$]

2) Traccia il grafico delle seguenti funzioni indicando anche dominio e caratteristiche:

a) $y = |\ln(1 - x)|$ b) $y = e^x + 5$

c) $y = \sqrt{9 - x^2}$ d) $y = -3^x$

3) a) Date $f_1 : x \to 2^x$ e $f_2 : x \to x + 1$, scrivi come risultano $f_2 \circ f_1$ e $f_1 \circ f_2$ e indica i loro domini.

b) Si può invertire la funzione $y = \dfrac{x - 1}{x}$?
Se la risposta è affermativa determina l'inversa.

c) Disegna il grafico della funzione $y = e^x + 3$ e indicane dominio e caratteristiche. Si può invertire? Se la risposta è affermativa determina la funzione inversa.