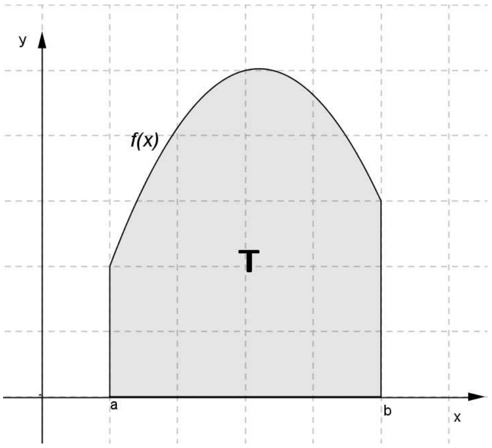
Integrali definiti

Definizione dell'integrale definito

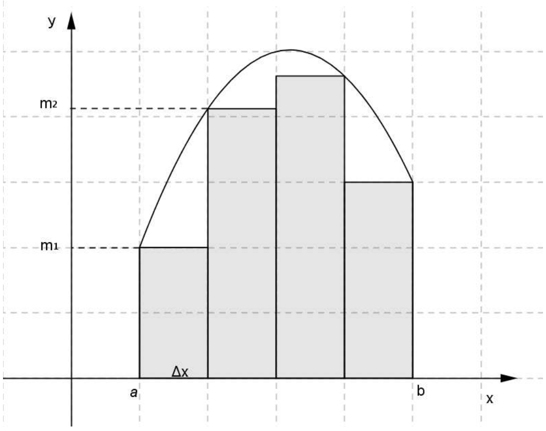
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato e supponiamo che $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$.



Consideriamo la regione T delimitata dal grafico di *f(x)*, dalle rette $x=a$, $x=b$ e dall'asse delle ascisse (regione denominata **trapezoide**):

$$T = \{(x;y) / \ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

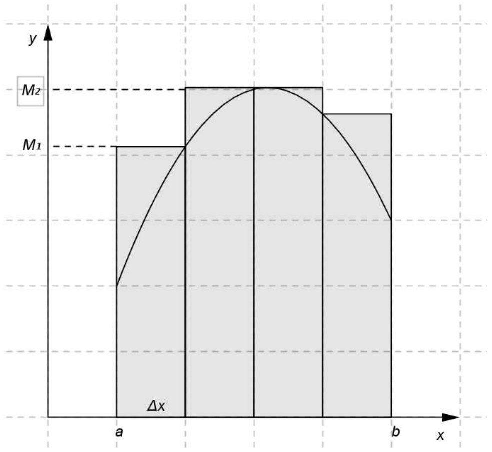
Consideriamo una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ in intervalli di uguale ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Poiché in ciascuno di questi intervalli *f(x)* è continua, per il teorema di Weierstrass, assume un valore minimo ed un valore massimo: indichiamo con m_i e M_i il minimo ed il massimo di *f(x)* nell'i-esimo intervallo.



Analizziamo i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i minimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo inscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo inscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

$$m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + m_3 \cdot \Delta x + ... = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$$



Passiamo adesso a considerare i rettangoli aventi come basi gli intervalli di ampiezza Δx e come altezza i massimi: la loro unione viene detta **plurirettangolo circoscritto** nel trapezoide.

L'area del plurirettangolo circoscritto sarà data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli:

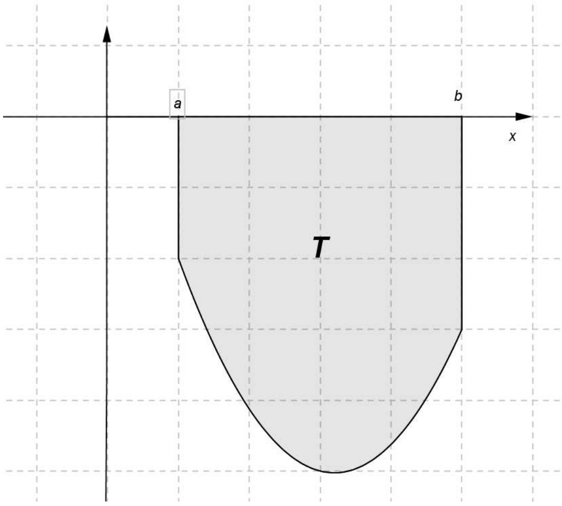
$$M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \cdots = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$$

Se aumentiamo n cioè il numero degli intervalli in cui l'intervallo è suddiviso, è intuitivo dedurre che l'area del plurirettangolo inscritto si avvicina all'area del plurirettangolo circoscritto; infatti è possibile dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$$

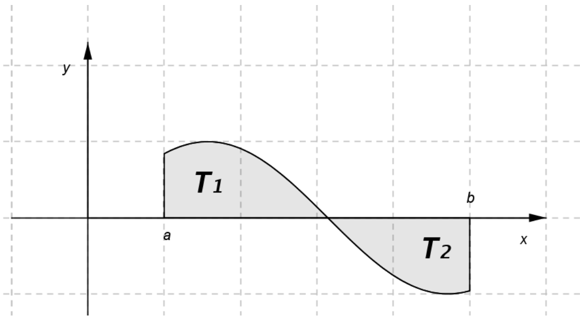
Questo limite viene indicato con il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ e si legge **integrale definito tra *a* e *b* di *f(x)* in dx.**

Osserviamo che il simbolo di integrale è la deformazione del simbolo di sommatoria, che i valori m_i o M_i tendono al valore della funzione e Δx tende a dx.



Nel caso in cui $f(x) \geq 0$, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale all'area del trapezoide T.

È, però, abbastanza chiaro che, nel caso in cui $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx = \text{-}area\ T$.

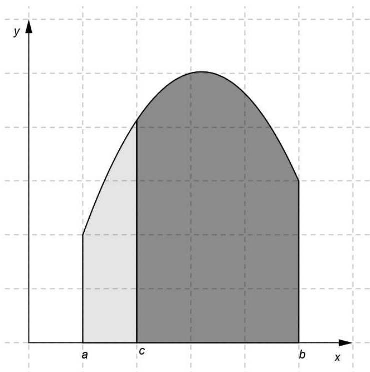


Se, infine, $f(x)$ non ha segno costante, l'integrale definito tra a e b è quindi uguale a $\int_a^b f(x)dx = area\ T_1\text{-}area T_2$.

Proprietà dell'integrale definito

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
   In questo caso il trapezoide è ridotto ad un segmento

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ con $a \leq c \leq b$



Teorema fondamentale del calcolo integrale

Si può dimostrare che data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua si ha:

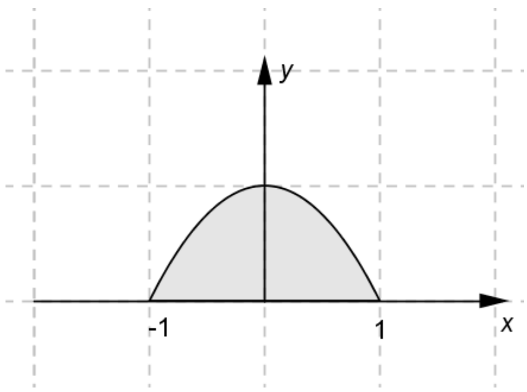
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)}$$

dove $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$

Nota: la quantità $\varphi(b) - \varphi(a)$ in genere viene indicata con la scrittura $[\varphi(x)]_a^b$

Esempi di calcolo di integrali definiti

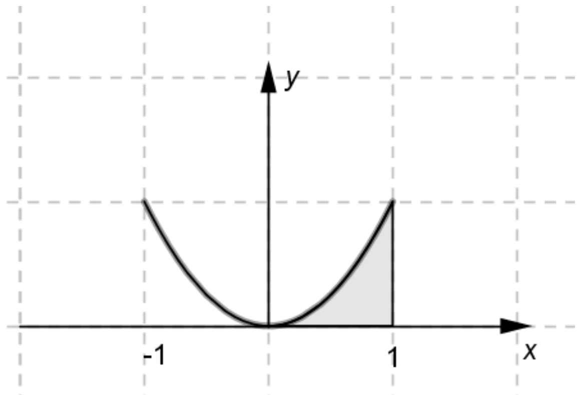
1) $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$



2) Calcoliamo $\int_0^1 x^2 \, dx$

Abbiamo che $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Quindi l'area compresa tra la parabola di equazione $y = x^2$, l'asse x e la retta $x = 1$ misura $\frac{1}{3}$.

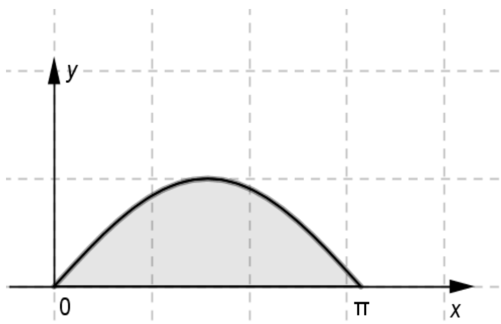


3) Calcoliamo $\int_0^{\pi} senx \, dx$

Abbiamo

$\int_0^{\pi} senx \, dx = [-cosx]_0^{\pi} = -cos\pi-(-cos0) = 2$

Quindi l'area della regione colorata misura 2.

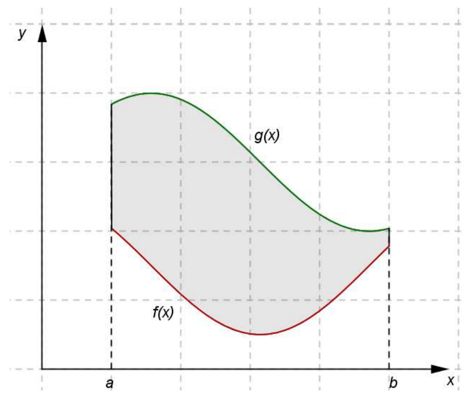


Area della parte di piano delimitata dal grafico di due funzioni

Consideriamo due funzioni *f(x)* e *g(x)* continue nell'intervallo $[a, b]$ tali che

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e supponiamo che i grafici si trovino entrambi sopra l'asse *x* come in figura.



Possiamo considerare la parte di piano compresa tra i due grafici:

$$T = \{(x, y) / a \le x \le b, \quad f(x) \le y \le g(x)\}$$

Risulta subito evidente che $\boxed{\text{area T} = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx}$

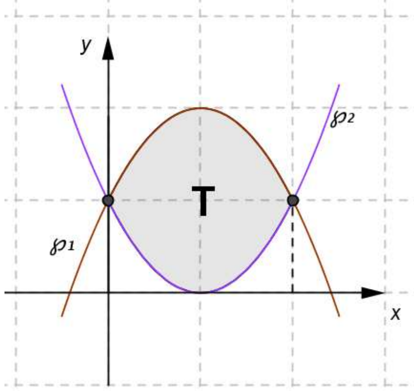
e questo vale in generale, purché $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ (si dimostra facilmente) .

Esempio: determinare l'area della regione di piano compresa tra $\mathcal{P}_1: y = -x^2 + 2x + 1$ e $\mathcal{P}_2: y = x^2 - 2x + 1$

Rappresentiamo graficamente le parabole: $\mathcal{P}_1$ ha vertice $V_1(1,2)$, $\mathcal{P}_2$ ha vertice $V_2(1,0)$ e le loro intersezioni sono i punti $(0,1)$ e $(2,1)$.

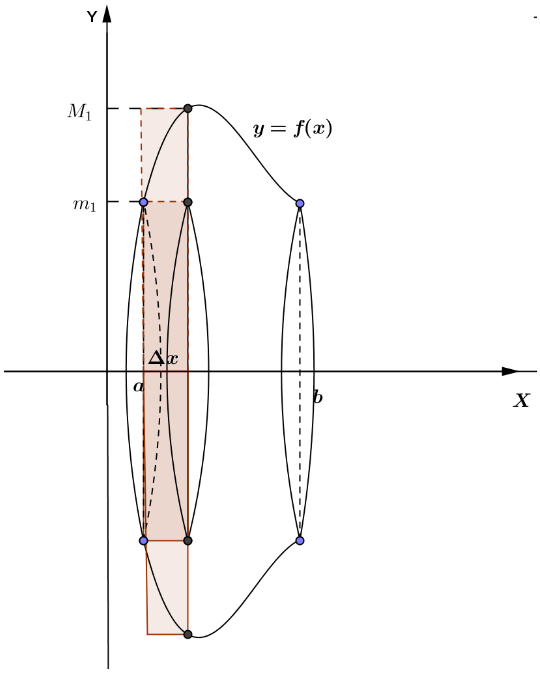
L'area richiesta si ottiene calcolando:

$$\int_0^2 [(-x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)]dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



Volume di un solido di rotazione

Consideriamo una funzione $f:[a,b] \to \Re$ continua e supponiamo che $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$.
Se **ruotiamo il trapezoide T attorno all'asse x** otteniamo un solido di rotazione.



Come possiamo calcolarne il volume?

Se dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ ed in ciascuna consideriamo il minimo m_i ed il massimo M_i (come avevamo fatto quando abbiamo introdotto il concetto di integrale definito) possiamo osservare che il volume V del solido di rotazione sarà compreso tra il volume del "pluricilindro inscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo inscritto nel trapezoide e il volume del "pluricilindro circoscritto" ottenuto facendo ruotare il plurirettangolo circoscritto al trapezoide.

Abbiamo quindi, considerando che i raggi dei vari cilindri inscritti corrispondono a m_i, mentre quelli dei cilindri circoscritti corrispondono a M_i:

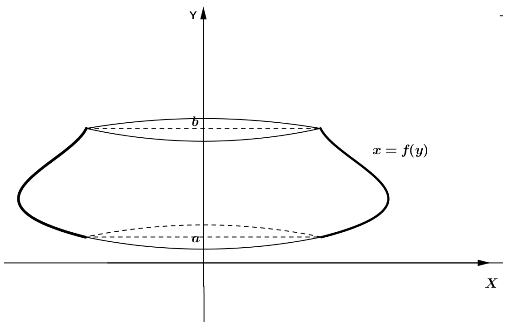
$$V_{in} = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 \Delta x \qquad V_{circ} = \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 \Delta x$$

Facendo tendere il numero degli intervalli all'infinito $\lim\limits_{n\to+\infty} \Sigma \pi \cdot {m_i}^2 \cdot \Delta x = \lim\limits_{n\to+\infty} \Sigma \pi \cdot {M_i}^2 \cdot \Delta x = V$

Quindi si tratta di un integrale definito cioè:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x) \; dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \; dx}$$

Se invece consideriamo la funzione $x = f(y)$ definita tra a e b il cui trapezoide ruota intorno all'asse y, il volume del solido di rotazione ottenuto risulta naturalmente:

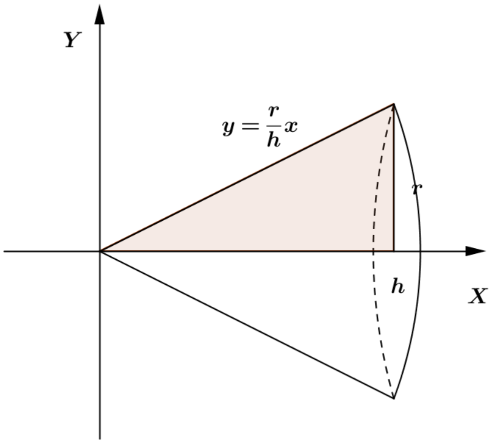


$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b f^2(y) \; dy}$$

Esempio 1

Ricaviamo la formula per determinare il volume di un cono utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere un cono di raggio r ed altezza h posso ruotare il trapezoide individuato dalla retta di equazione $y = \frac{r}{h} x$



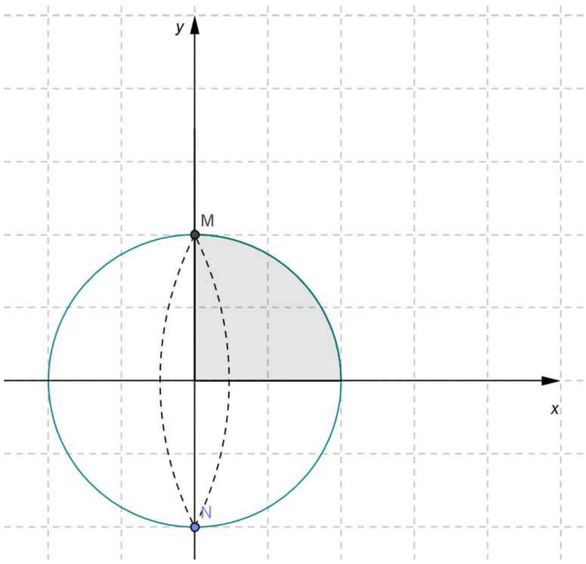
Quindi:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Esempio 2

Ricaviamo la formula per determinare il volume di una sfera di raggio *r* utilizzando il calcolo integrale.

Per ottenere una sfera di raggio *r*, possiamo ruotare la semicirconferenza avente centro (0,0) e raggio *r*, la cui equazione è data da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.



Per la simmetria possiamo scrivere:

$$V = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2}{3} r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

COMPLEMENTO
Applicazioni in fisica dell'integrale definito

Moto rettilineo di un punto materiale

Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo secondo una legge oraria

$$s = s(t)$$

Sappiamo che $v(t) = s'(t)$ e che $a(t) = v'(t)$, quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2)\text{-}s(t_1) \quad \text{ed anche} \quad \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2)\text{-}v(t_1)$$

Esempio: sapendo che l'accelerazione di un punto materiale è costante $a(t) = a$, che $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$, determinare la legge oraria.

Iniziamo con l'integrare l'accelerazione tra 0 e t: $\int_0^t a\, dt = [at]_0^t = at$.

Sappiamo quindi che $at = v(t)\text{-}v(0)$ e poiché $v(0) = v_0$, possiamo ricavare $v(t)$:

$$v(t) = at + v_o$$

A questo punto possiamo integrare $v(t)$ per risalire a $s(t)$:

$$\int_0^t v(t)dt = \int_0^t (at + v_0)dt = \left[a\frac{t^2}{2} + v_0 t\right]_0^t = a\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Ma sappiamo che $\int_0^t \ v(t)dt = s(t)\text{-}s(0)$ e che $s(0) = s_0$ quindi:

$$a\frac{t^2}{2} + v_0 t = s(t)\text{-}s_0$$

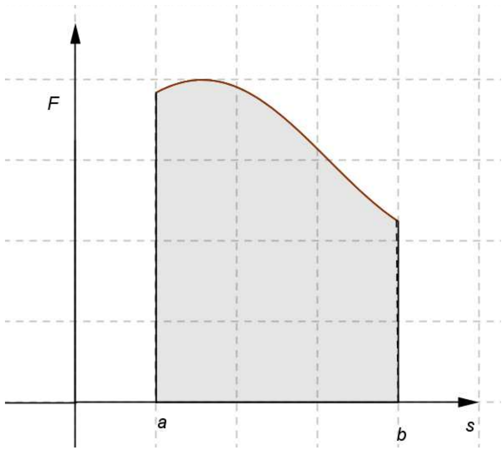
da cui

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Che rappresenta, come è noto, la legge oraria del moto uniformemente accelerato.

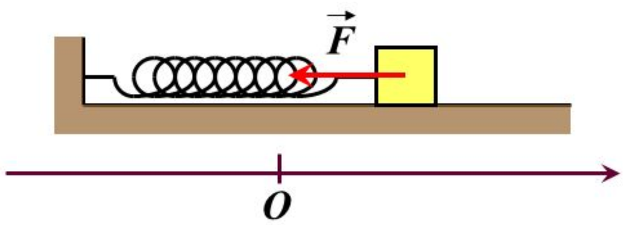
Lavoro di una forza

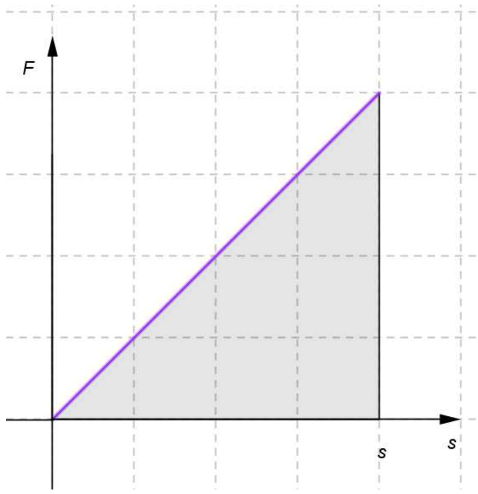
Il lavoro di una forza la cui intensità dipende dalla posizione cioè $F = F(s)$ ed avente direzione parallela allo spostamento, essendo uguale alla somma di tanti lavori relativi a piccoli spostamenti Δs, risulta l'area sottesa dal grafico di $F = F(s)$ nel sistema di riferimento (s, F) e quindi:



$$L = \int_a^b F(s)ds$$

Esempio 1: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica $F = Ks$ quando il suo punto di applicazione si sposta da 0 a s (è uguale all'energia potenziale elastica di un punto materiale di massa m, in posizione s, attaccato ad una molla di costante elastica K).





Il lavoro della forza elastica è dato da

$$L = \int_0^s Ks\, ds = \left[K\frac{s^2}{2}\right]_0^s = K\frac{s^2}{2}$$

Esempio 2: possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica $F(r) = K\frac{Qq}{r^2}$ che agisce su una carica q nel campo generato dalla carica Q, quando si sposta da distanza r_A a distanza r_B lungo una linea di forza.

$$L = \int_{r_A}^{r_B} K\frac{Qq}{r^2}dr = KQq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = KQq\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right)$$

ESERCIZI

INTEGRALI DEFINITI

I) Calcola i seguenti integrali definiti interpretandoli anche geometricamente:

1) $\int_0^1 2x\ dx$ $[1]$

2) $\int_0^3 (3-x)\ dx$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

3) $\int_0^2 x^2 dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

4) $\int_{-1}^1 x^3 dx$ $[0]$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$ $[1]$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx dx$ $[1]$

7) $\int_{-1}^2 (4-x)\ dx$ $\left[\frac{21}{2}\right]$

8) $\int_0^{\pi} \cos x\ dx$ $[0]$

9) $\int_0^1 (x^3+1)\ dx$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\ dx$ $[\ln\sqrt{2}]$

11) $\int_0^1 e^x dx$ $[e-1]$

12) $\int_0^4 \sqrt{x}\ dx$ $\left[\frac{16}{3}\right]$

13) $\int_{-2}^2 (4-x^2)\ dx$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen2x\ dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

PROBLEMI

INTEGRALI DEFINITI

1) Calcola l'area delimitata dalla parabola di equazione $y = 2x - x^2$ e l'asse *x*. Disegna la parabola.

$$\left[\frac{4}{3}\right]$$

2) Disegna la curva di equazione $y = x^3$ e determina l'area della regione di piano compresa tra il suo grafico, l'asse *x* e la retta $x = 1$.

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

3) Disegna $y = e^x$ e le rette di equazione $x = -1$, $x = 1$. Determina l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $y = e^x$, le rette e l'asse *x*.

$$\left[e - \frac{1}{e}\right]$$

4) Calcola l'area della regione T compresa tra la parabola $P_1 : y = x^2 - 3x + 2$ e la parabola $P_2 : y = -x^2 + x + 2$. [area T = $\frac{8}{3}$]

5) Determina l'area della regione A di piano delimitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$

(viene detto "segmento parabolico"). [$\frac{4}{3}$]

6) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = x^2$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$. Disegna il solido.

$$\left[\frac{\pi}{5}\right]$$

7) Calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano T delimitata dal grafico di $y = x^2$, dall'asse y e dalla retta $y = 1$. Disegna il solido.

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

8) Determina l'area della regione piana T compresa tra il grafico di $y = x^2$ e quello della retta $y = x$. Disegna i due grafici e indica la superficie richiesta.

$$\left[\frac{1}{6}\right]$$

9) Disegna la parabola $\mathcal{P}: y = 2x\text{-}x^2$ e determina le equazioni delle tangenti t_1 e t_2 nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

a) Calcola l'area della regione finita delimitata dalle tangenti e da $\mathcal{P}$; [$\frac{2}{3}$]

b) Calcola il volume del solido ottenuto ruotando la regione di piano compresa tra $\mathcal{P}$ e l' asse x, intorno all'asse x.

$$\left[V = \frac{16}{5}\pi \right]$$

10) Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse y la regione piana T delimitata dal grafico di $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$.

$$\left[V = \frac{2}{5}\pi \right]$$

11) Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = 2$, $s(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

[$s(t) = t^2$]

12) Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = 3$, $s(0) = 1$ e $v(0) = 0$.

$$\left[s(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1 \right]$$

13) Determina la legge oraria $s(t)$ di un punto materiale avente $a(t) = t$, $s(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

$$\left[s(t) = \frac{t^3}{6} \right]$$

14) Determina la legge oraria di un punto materiale avente $a(t) = \cos t$, $v(0) = 0$, $s(0) = 2$.

$$[s(t) = -\cos t + 3]$$

15) Determina la legge oraria di un punto materiale avente $a(t) = -sent$, $v(0) = 1$, $s(0) = 0$.

$$[s(t) = sent]$$