

Calcolo delle probabilità

Ogni giorno ci troviamo a dover affrontare situazioni “incerte” in cui, per prendere delle decisioni, più o meno consapevolmente facciamo delle valutazioni di “probabilità”.



Girolamo Cardano

Il “calcolo delle probabilità” è nato a partire dal Cinquecento per risolvere problemi legati al **gioco dei dadi**: i primi studi si trovano nel *Liber de ludo aleae* di Girolamo Cardano (scritto nel 1526, ma pubblicato solo nel 1663) e in *Sopra le scoperte dei dadi* di Galileo Galilei (scritto probabilmente nel 1612).

La parola evento aleatorio, cioè casuale, deriva appunto dalla parola latina “alea” che significa dado.

La nascita del concetto moderno di probabilità viene attribuito a Blaise Pascal (1623-1662) e a Pierre de Fermat (1601-1665) e fu poi sviluppato da Huygens, Bernoulli e Laplace nel Settecento e Ottocento.

Nel Novecento infine Finetti e Kolmogorov hanno elaborato teorie più formali della probabilità.



Pierre de Fermat

Definizione classica della probabilità di un evento

Consideriamo anche noi un dado (non truccato cioè ogni faccia ha la stessa “probabilità di uscire quando il dado viene lanciato”): qual è la probabilità che esca un dato numero quando il dado viene lanciato?



Le facce sono numerate da 1 a 6 e, se il dado non è truccato, hanno tutte la stessa probabilità di uscire.

Se scommettiamo sull’uscita del sei abbiamo quindi 1 caso favorevole su sei possibili risultati.

Chiamiamo E (evento) l’uscita del 6 e definiamo probabilità di un evento E il rapporto tra il numero dei “casi favorevoli ad E ” e quello dei “casi possibili” (supposto che questi siano tutti ugualmente probabili).

Cioè:

$$p(E) = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$$

Quindi, nel nostro caso

$$p(E) = \frac{1}{6}$$

Osserviamo che, per come è stata definita, la probabilità di un evento è sempre un numero compreso tra 0 e 1 poiché $\text{n° casi favorevoli} \leq \text{n° casi possibili}$.

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Se $p(E)=0$ vuol dire che il $\text{n° casi favorevoli} = 0$ e quindi **E è un evento impossibile.**

Se $p(E)=1$ abbiamo $\text{n° casi favorevoli} = \text{n° casi possibili}$ e quindi **E è un evento certo.**

Per esempio:

$$p(\text{esce il 9}) = 0$$

$$p(\text{esce un numero compreso tra 1 e 6}) = 1$$

Noi considereremo questa definizione di probabilità di un evento ma ci sono anche altre definizioni di probabilità di un evento: vediamole brevemente.

Definizione di probabilità di un evento come frequenza relativa

Non sempre possiamo stabilire il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Consideriamo per esempio un dado “truccato”: in questo caso per calcolare la probabilità all’evento “esce il 6” non possiamo usare la definizione classica perché i casi possibili non sono equiprobabili in quanto l’uscita delle varie facce non ha la stessa probabilità (ma non sappiamo quale faccia è stata “appesantita”).

Possiamo però definire la probabilità di un evento come **“frequenza relativa dell’evento in un numero molto elevato di prove”**.

Infatti se riprendiamo l’esempio del lancio del dado non truccato e consideriamo come evento E l’uscita del 6, se lo lanciamo **n volte** e otteniamo il 6 **m volte**, calcolando la frequenza relativa dell’uscita del sei cioè il rapporto $\frac{m}{n}$ vedremo che **se n è grande**

$$\frac{m}{n} \approx 0,1\bar{6} \cong \frac{1}{6}$$

Ritroviamo quindi il valore della probabilità dell’evento calcolata in modo classico.

In conclusione nel caso del dado truccato possiamo fare un grande numero di lanci e calcolare la frequenza relativa dell’uscita del 6 ed assumerla come probabilità dell’uscita del 6.

Definizione di probabilità di un evento come “grado di fiducia”

Ma se l’evento non può essere ripetuto e voglio lo stesso associargli una probabilità?

Questo accade spesso quando facciamo una scommessa : nel gioco dei cavalli la corsa non può essere ripetuta....

In questo caso possiamo ricorrere a quella che viene chiamata definizione “soggettiva” della probabilità di un evento: definisco probabilità dell’evento E uguale al rapporto tra la somma R(rischio) che sono disposto a pagare in una scommessa e la somma S che riceverò nel caso in cui l’evento si verifichi (e se sono disposto anche a scambiare i ruoli nella scommessa).

Se per esempio sono disposto a perdere $R = 1$ euro per vincere $S = 6$ euro (quindi un guadagno di 5 euro) nel caso che E si verifichi vuol dire che associo all’evento E probabilità $p(E) = \frac{1}{6}$.

Se invece, per esempio, sono disposto a perdere $R = 1$ euro per vincere $S = 2$ euro (quindi guadagnare 1 euro) vuol dire che il mio grado di fiducia sul verificarsi dell’evento è $p(E) = \frac{1}{2}$: il rischio e il guadagno sono uguali perché penso che la probabilità di vincere o di perdere sia la stessa.

Probabilità dell'evento contrario

Sia E un evento: indichiamo con \bar{E} l'evento contrario di E cioè $\bar{E} = E$ non si verifica.
 E' chiaro che, poiché E si verifica o non si verifica, che

$$n^{\circ}\text{casi possibili} = n^{\circ}\text{casi favorevoli ad } E + n^{\circ}\text{casi favorevoli a } \bar{E}$$

e quindi
$$p(\bar{E}) = \frac{n^{\circ}\text{casi possibili} - n^{\circ}\text{casi favorevoli ad } E}{n^{\circ}\text{casi possibili}} = 1 - p(E)$$

Esempio: qual è la probabilità, lanciando un dado, che non esca il 6?

$$p(\text{non esce il 6}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Osservazione

A volte, per calcolare la probabilità di un evento E , conviene calcolare $p(\bar{E})$ e poi calcolare

$$p(E) = 1 - p(\bar{E})$$

Esempio

Qual è la probabilità che in una stanza in cui ci sono 23 persone ci siano almeno due persone che sono nate lo stesso giorno dell'anno e che quindi festeggiano il compleanno nello stesso giorno?

Escludiamo gli anni bisestili in modo che la probabilità di avere il compleanno in un dato giorno o in un altro siano eventi equiprobabili.

Supponiamo di considerare l'evento contrario cioè

\bar{E} = non ci sono due persone che hanno lo stesso compleanno

Per determinare la probabilità di \bar{E} consideriamo le 23 persone come 23 caselle ordinate da riempire, ciascuna con la data del proprio compleanno: i casi favorevoli a \bar{E} saranno

$$D_{365,23} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - 22)$$

dal momento che se per il primo ho 365 possibilità, per il secondo solo 364 perché non posso ripetere il giorno di nascita del primo e così via, mentre i casi possibili saranno

$$D_{365,23}^{rip} = (365)^{23}$$

In conclusione
$$p(E) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}}$$

Se calcoliamo $p(E)$ scopriamo che risulta circa 0,51!!

Quindi se in una stanza ci sono 23 persone, la probabilità che almeno due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno supera il 50%.

Questo risultato non è affatto intuitivo....

Giochi d'azzardo

Consideriamo due giocatori A e B che scommettono sul verificarsi di un dato evento E.

Supponiamo per esempio che A e B scommettano sull'uscita del 6 nel lancio di un dado.

A scommette sull'uscita del 6, mentre **B scommette sulla non-uscita del 6** (evento contrario).

Il giocatore A mette sul tavolo una somma S_A mentre il giocatore B mette sul tavolo una somma S_B : se E accade vince A e prende tutto quello che c'è sul tavolo cioè guadagna S_B , se E non accade vince B e guadagna S_A .

In quale rapporto devono essere S_A e S_B perché il gioco si possa considerare equo?

Innanzitutto osserviamo che il gioco si dice equo quando il guadagno medio dei due giocatori è lo stesso: calcoliamo quindi il "guadagno medio" di A e di B cioè il guadagno del giocatore A e del giocatore B in n partite diviso il numero delle partite.

Se il giocatore A vince m volte il **guadagno medio di A** risulta

$$g_A = \frac{S_B \cdot m - S_A \cdot (n - m)}{n} = S_B \cdot \frac{m}{n} - S_A \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

ma $\frac{m}{n}$ può essere considerato vicino a $p(E) = \frac{1}{6}$ e $1 - \frac{m}{n}$ può essere considerato vicino a

$$p(\overline{E}) = \frac{5}{6} \text{ e quindi } g_A = S_B \cdot p(E) - S_A \cdot p(\overline{E})$$

Ma poiché

$$g_B = \frac{S_A \cdot (n - m) - S_B \cdot m}{n} = -g_A$$

per avere $g_A = g_B$ dovrà essere $g_A = g_B = 0$

Quindi il gioco è equo quando **il guadagno medio di entrambi i giocatori è zero cioè quando**

$$S_B \cdot p(E) - S_A \cdot p(\overline{E}) = 0$$

cioè quando:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{p(E)}{p(\overline{E})}$$

Perciò nel nostro esempio (uscita del 6 nel lancio di un dado) se il gioco è equo e il giocatore che scommette sull'uscita del 6 gioca 1 euro, l'altro giocatore deve mettere sul tavolo 5 euro poiché il rapporto tra $p(E)$ e $p(\overline{E})$ è di 1 a 5 (1 caso favorevole contro 5 casi sfavorevoli).

Nota

Spesso non ci sono due giocatori effettivi ma **solo un giocatore** che rischia una certa **somma r** (il **rischio** che nell'esempio precedente era per A la somma S_A da pagare all'altro giocatore) nella speranza di guadagnare una **somma g** (il **guadagno** per A nell'esempio precedente è S_B) se un evento E si verifica.

Per esempio nelle scommesse sui cavalli se un cavallo è dato 1 a 5 vuol dire che se rischio su quel cavallo $r = 1$ (1 euro), se il cavallo vince guadagno $g = 5$ (5 euro) (si riscuote $r+g$).

Quindi **il gioco è equo** quando

$$\boxed{\frac{r}{g} = \frac{p(E)}{p(\overline{E})}}$$

Probabilità totale

Consideriamo il lancio di un dado e i due eventi:

$A = \{ \text{esce un numero pari} \}$

$B = \{ \text{esce un numero divisibile per 5} \}$

Osserviamo che $p(A) = \frac{3}{6}$ e che $p(B) = \frac{1}{6}$

Se consideriamo l'evento "unione" cioè l'evento

$$A \cup B = \{ \text{esce un numero pari o divisibile per 5} \}$$

come risulta la probabilità di $A \cup B$?

Si osserva che ci sono 4 casi favorevoli (2,4,5,6) e 6 casi possibili e quindi

$$p(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

Quindi in questo caso abbiamo che

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

perché non ci sono eventi favorevoli in comune cioè gli eventi A e B sono cioè "incompatibili". Due eventi si dicono **incompatibili** quando hanno "intersezione nulla" cioè non possono verificarsi contemporaneamente.

E se due eventi non sono incompatibili?

Consideriamo per esempio l'evento

$$C = \{ \text{esce un numero divisibile per 3} \}$$

e calcoliamo la probabilità di $A \cup C = \{ \text{esce un numero pari o divisibile per 3} \}$.

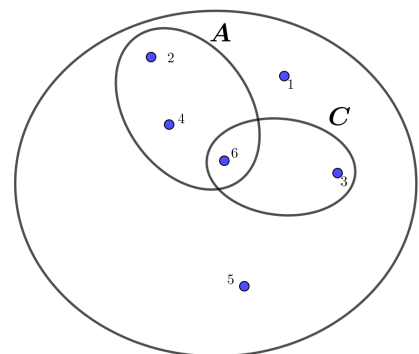
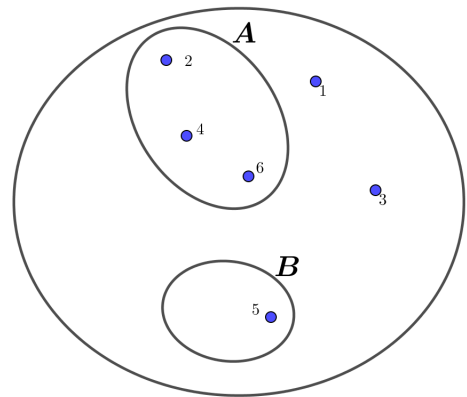
Se calcoliamo la probabilità richiesta come rapporto tra numero di casi favorevoli (4) e numero dei casi possibili (6) abbiamo $p(A \cup C) = \frac{4}{6}$ ma se sommiamo

$p(A) = \frac{3}{6}$ e $p(C) = \frac{2}{6}$ otteniamo $\frac{5}{6}$ perché i due eventi non sono incompatibili dal momento che il "6" è sia un numero pari che divisibile per 3.

Quindi, per non contare due volte lo stesso evento favorevole, dopo aver sommato le probabilità di A e di C dobbiamo togliere la probabilità dell'intersezione dei due eventi (l'uscita del 6) che ha probabilità $p(A \cap C) = \frac{1}{6}$ ed infatti $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

Quindi in generale

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Probabilità composta

Supponiamo di estrarre due palline da un sacchetto contenente 8 palline di cui 3 rosse e 5 blu: qual è la probabilità di estrarre due palline rosse?

Consideriamo gli eventi

$$A = \{ \text{la prima pallina estratta è rossa} \}$$

$$B = \{ \text{la seconda pallina estratta è rossa} \}$$

Primo caso

Se prima di estrarre la seconda pallina rimetto la prima estratta nel sacchetto la probabilità di estrarre una pallina rossa nella seconda estrazione non dipende dal risultato della prima estrazione.

Indicando con R_1, R_2, R_3 le 3 palline rosse e con B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 le 5 palline blu possiamo calcolare la probabilità richiesta osservando che le coppie ordinate favorevoli sono $3 \cdot 3$ e quelle possibili $8 \cdot 8$ e che quindi

$$p(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 8} = p(A) \cdot p(B)$$

Gli eventi A e B si dicono “**eventi indipendenti**” poiché la probabilità di B non dipende dal fatto che A si sia verificato o meno.

Secondo caso

Se prima di procedere alla seconda estrazione **non rimetto** la prima pallina estratta nel sacchetto in questo caso i casi favorevoli sono $3 \cdot 2$ coppie ordinate e i casi possibili sono $8 \cdot 7$ coppie ordinate e quindi

$$p(A \cap B) = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7}$$

Gli eventi A e B in questo caso sono eventi “**dipendenti**” in quanto, non rimettendo la pallina estratta nel sacchetto, le palline che possiamo pescare scendono a 7 e il numero delle palline rosse dipende dall’esito della prima estrazione.

Abbiamo $p(A) = \frac{3}{8}$ e se indichiamo con $p(B/A)$ la probabilità che B si verifichi supponendo che A si sia verificato (si legge “**probabilità di B condizionato ad A**”) è chiaro che risulta

$$p(B/A) = \frac{2}{7}$$

e quindi in questo caso $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$

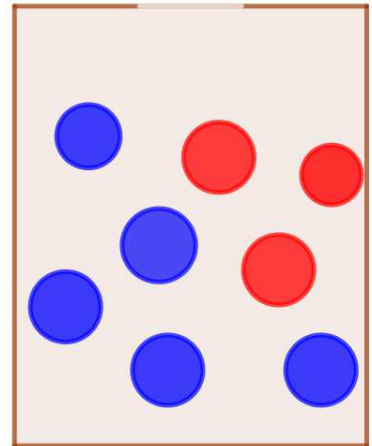
In conclusione la probabilità “composta” di A e B risulta

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

se gli eventi sono indipendenti

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

se gli eventi sono dipendenti



ESEMPIO

Alcuni problemi di calcolo delle probabilità spesso si possono risolvere sia utilizzando la definizione di probabilità come rapporto tra numero dei casi favorevoli e numero dei casi possibili e quindi utilizzando il calcolo combinatorio per calcolarli, oppure sfruttando la regola della probabilità composta.

Consideriamo per esempio il seguente problema.

Estraendo due carte da un mazzo di 40 carte toscane e senza rimettere la prima carta estratta, calcola la probabilità di estrarre due re.



Prima strategia risolutiva: possiamo applicare la definizione classica e quindi calcolare il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Numero casi favorevoli = $C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (ci sono 4 re e ne pesco 2);

Numero dei casi possibili = $C_{40,2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$

In conclusione $p(E) = \frac{6}{780} = \frac{1}{130}$

Seconda strategia risolutiva: possiamo considerare che l'evento E corrisponda a $A \cap B$ con $A = \{ \text{la prima carta che pesco è un re} \}$ e $B = \{ \text{la seconda carta che pesco è un re} \}$.

Poiché non si rimette nel mazzo la prima carta pescata, A e B non sono indipendenti e abbiamo:

$$p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}, \quad p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13} \rightarrow p(E) = p(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}$$

Osservazione

Naturalmente le due strategie conducono allo stesso risultato ma in genere è più semplice ragionare in termini di probabilità composta.

PROBLEMI
PROBABILITA' TOTALE E COMPOSTA

1. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o un asso?
[2/5]
2. Lanciando un dado non truccato, qual è la probabilità che esca un numero pari o un numero maggiore di 4?
[2/3]
3. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o una carta di cuori?
[19/40]
4. Sullo scaffale di una libreria ci sono 10 libri di matematica, 9 di fisica e 6 di arte. Qual è la probabilità che prendendo un libro a caso questo sia di fisica o di arte?
[3/5]
5. Un'urna contiene 12 palline rosse, 8 palline gialle e 10 palline nere. Estrahendo una pallina, qual è la probabilità che esca
 - a) una pallina non nera;
 - b) una pallina gialla o nera;
 - c) una pallina verde.
[2/3;3/5;0]
6. Da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola se ne estrae uno. Qual è la probabilità che questo sia:
 - a) Un multiplo di 5
 - b) Un numero maggiore di 63;
 - c) Multiplo di 5 o maggiore di 63;
 - d) Pari o dispari;
 - e) Divisibile per 11 o per 19.
[1/5; 3/10; 13/30; 1; 2/15]
7. Da un mazzo di 40 carte si estrae prima una carta e poi una seconda. Qual è la probabilità di aver pescato una coppia di assi se:
 - a) Si rimette la prima carta nel mazzo;
 - b) Non si rimette la prima carta nel mazzo
[1/100; 1/130]
8. Calcolare la probabilità che lanciando una moneta tre volte escano tre teste.
[1/8]
9. In un'urna ci sono 5 palline nere e 7 palline bianche. Calcolare la probabilità che esca prima una pallina nera e poi una pallina bianca senza rimettere la prima nell'urna.
[35/132]

10. La probabilità che Marco colpisca il centro di un bersaglio è 0,25, la probabilità che lo colpisca Paolo è 0,10. Sapendo che i lanci sono indipendenti, qual è la probabilità che:
- a) Tutti e due colpiscano il centro del bersaglio;
 - b) Solo Paolo colpisca il bersaglio
 - c) Nessuno dei due colpisca il bersaglio

[0,025; 0,075; 0,675]

11. Si lancia un dado non truccato per due volte. Qual è la probabilità che esca almeno un 6?

[11/36]

12. Un ladro vuole rubare il portafoglio chiuso dentro una valigia sigillata da un lucchetto con una combinazione di 3 cifre.
- a) Qual è la probabilità che al primo tentativo il ladro apra la valigia?
 - b) Quanto vale la probabilità se il ladro sa che la cifra finale della combinazione è 9?

[1/1000; 1/100]

13. In una classe di 25 alunni, ci sono 15 ragazze. Il professore di matematica interroga sempre a coppie. Qual è la probabilità che:
- a) Siano interrogate due ragazze;
 - b) Siano interrogati un ragazzo ed una ragazza;
 - c) Nessuna ragazza

[7/20; 1/2; 3/20]

14. Un'urna contiene 12 biglie bianche e 8 biglie nere. Qual è la probabilità che, estraendo tre palline rimettendo ogni pallina estratta nell'urna, siano tutte bianche. Quanto vale se invece ogni pallina estratta non viene rimessa nell'urna?

[27/125; 11/57]

15. In un supermercato la probabilità che sia aperta la cassa 1 è 0,57, mentre che sia aperta la cassa 2 è 0,45.
- a) I due eventi sono incompatibili?
 - b) Se l'apertura della cassa 1 è indipendente dall'apertura della cassa 2, qual è la probabilità che siano entrambe aperte?
 - c) E che siano entrambe chiuse?
 - d) E che sia aperta solo la cassa 2?

[no, perché?; 0,2565; 0,2365; 0,1935]

16. [Prova Invalsi 2014] È stato effettuato un sondaggio su un campione di 1500 donne di età compresa tra i 25 ed i 55 anni per conoscere la loro opinione su una rivista mensile dedicata alla salute. Si sono ottenuti i seguenti risultati:

	Occupate	Disoccupate
Giudizio positivo	450	276
Giudizio negativo	367	407

- a. Quante sono le donne che hanno espresso un giudizio positivo?
- b. Quante sono le donne disoccupate intervistate?
- c. Scegliendo a caso una delle donne intervistate, qual è la probabilità che abbia espresso un giudizio positivo?
- d. Scegliendo a caso una delle donne intervistate, tra quelle che hanno espresso un giudizio positivo, qual è la probabilità che sia una donna occupata?

[726; 683; 121/250; 75/121]

17. [Prova Invalsi 2014] *Prato fiorito* è un gioco per computer che si gioca su una scacchiera, cliccando sui riquadri della scacchiera, a volte si può scoprire un fiore nascosto. Per esempio in una scacchiera 9x9 ci sono nascosti 10 fiori.

- a) Qual è la probabilità di scoprire al primo tentativo un fiore nella scacchiera appena descritta?
A. 1/9 B. 1/81 C. 10/80 D. 10/81
- b) È possibile personalizzare il gioco impostando le dimensioni della scacchiera (cioè il numero di righe e di colonne) ed il numero di fiori nascosti. Se si gioca con una scacchiera 12x20, quale deve essere il numero di fiori nascosti affinché la probabilità di scoprire un fiore al primo tentativo sia 1/8?

[D; 30]

18. [Prova Invalsi 2015] Da un mazzo di 52 carte (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori e picche) sono stati tolti i 4 assi.

- a) Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?
- b) Da un mazzo di 52 carte uguale al precedente sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione, la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è 6/45. Quante carte di fiori sono state tolte?

[1/4; 7]

19. [Prova Invalsi 2015] Nel foglietto contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce “Effetti collaterali” si legge che:

- il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini
 - il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.
- I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti uno dall'altro.
- a) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco **non** abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in percentuale.
 - b) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti **entrambi** gli effetti collaterali?

A. 9% B. 0,14% C. 14% D. 0,9%

[93%; B]

20. [Prova Invalsi 2015] Un'urna contiene 40 palline identiche tranne che per il colore: 23 sono rosse e 17 blu. Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Entrambe sono blu. Senza reintrodurre le due palline stratte, si estrae dall'urna una terza pallina. Qual è la probabilità che anche la terza pallina sia blu?

[15/38]

21. [Prova Invalsi 2015] Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci sia spetta di ottenere un numero maggiore di 4?

- A. circa 100 B. circa 50 C. circa 30 D. circa 150

[A]

22. [Prova Invalsi 2016] Quale tra i seguenti numeri **non** può rappresentare la probabilità di un evento?

- A. $2/3$ B. $11/15$ C. $8/7$ D. $20/27$

[C; perché?]

23. [Prova Invalsi 2016] Nella scatola A vi sono 6 palline verdi e 4 rosse. Nella scatola B vi sono invece 12 palline verdi e 5 rosse. Quante palline verdi si devono spostare dalla scatola B alla scatola A affinché la probabilità di estrarre una pallina verde da A sia uguale a quella di estrarre una pallina verde da B?

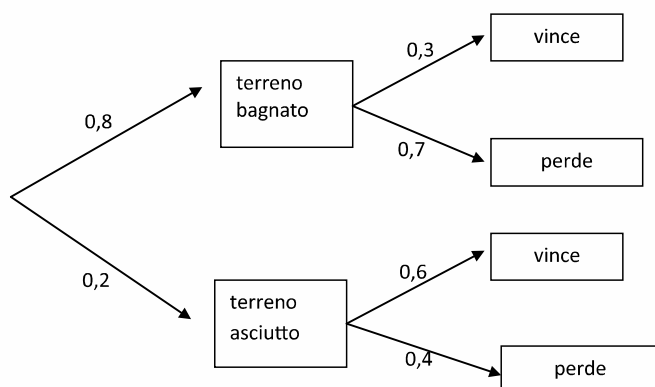
- A. 5 B. 7 C. 2 D. 4

[C]

24. [Prova Invalsi 2017] In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara:

- 0,3 se il terreno è bagnato
- 0,6 se il terreno è asciutto.

La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



Il diagramma può aiutare a determinare, per esempio, la probabilità che il terreno sia asciutto e che la moto M perda la gara. Essa è $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara?

[0,36]

25. [Prova Invalsi 2017] Una fabbrica utilizza due diverse macchine M_1 e M_2 che lavorano indipendentemente l'una dall'altra. Ciascuna delle due macchine produce chiavette USB da 16 GB e da 32GB nelle percentuali descritte dalla seguente tabella:

	Chiavette USB da 16 GB	Chiavette USB da 32 GB	Totale
M_1	18%	42%	60%
M_2	22%	18%	40%
Totale	40%	60%	100%

a) Qual è la probabilità di estrarre dalla produzione della fabbrica una chiavetta USB da 16 GB prodotta da M_1 ?

Qual è la probabilità che una chiavetta USB estratta dalla produzione della fabbrica sia da 16GB?

[18%; 40%]

Probabilità di k successi in n prove indipendenti

In molti casi è molto importante calcolare la **probabilità di ottenere un dato numero di successi in un dato numero di prove**.

Facciamo un esempio.

*Qual è la probabilità di **rispondere correttamente a 6 domande** di un test di 10 domande ognuna con 3 alternative (A,B,C) di cui una sola corretta, **rispondendo a caso** ?*

In questo caso il successo è “risposta corretta” e le prove sono le 10 domande del test.



Proviamo a calcolare questa probabilità **in termini di probabilità composta di eventi indipendenti**: infatti la probabilità di rispondere bene a 6 domande corrisponde alla probabilità di rispondere bene a 6 domande e rispondere male a 4 domande.

Poiché la probabilità di rispondere bene ad una domanda è $p = \frac{1}{3}$ e la probabilità di rispondere

male ad una domanda è $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ la probabilità di rispondere bene per esempio alle prime 6

domande e male alle ultime quattro è $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Attenzione: le sei risposte corrette non sono necessariamente le prime sei...dobbiamo quindi considerare che le 6 risposte corrette potrebbero essere le prime sei, ma anche la seconda, la terza ecc. fino alla settima...

Le sei risposte corrette possono essere scelte in $C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = 210$ modi, e

quindi per calcolare la probabilità totale dovremo sommare per 210 volte $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$ e quindi

avremo, in conclusione, indicando con X il numero di risposte esatte

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cong 0,057$$

Generalizzando abbiamo **che la probabilità di ottenere k successi** (le risposte giuste) **in n prove indipendenti** (nel nostro caso le 10 domande a cui rispondiamo a caso) in cui in ogni prova abbiamo probabilità di successo p risulta:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Questa “distribuzione” di probabilità, proprio per la presenza del coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = C_{n,k}$, viene chiamata “**distribuzione binomiale**”.

Osservazione

Può essere più significativo chiedersi: “*Qual è la probabilità di rispondere correttamente ad almeno 6 domande (in un test come sopra), cioè qual è la probabilità di superare il test?*”

Innanzitutto è importante considerare che i test che fanno “superare” la prova sono quelli in cui si è risposto correttamente a 6 domande (lo studente prenderà 6) **oppure** quelli in cui si è risposto correttamente a 7 domande **oppure** quelli in cui si è risposto correttamente a 8 domande e così via fino al test in cui si è risposto bene a tutte e 10 le domande.

Abbiamo:

$$P(X = 6) = \frac{210 \cdot 2^4}{3^{10}} ; \quad P(X = 7) = \frac{120 \cdot 2^3}{3^{10}} ; \quad P(X = 8) = \frac{45 \cdot 2^2}{3^{10}} ; \quad P(X = 9) = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}} ;$$

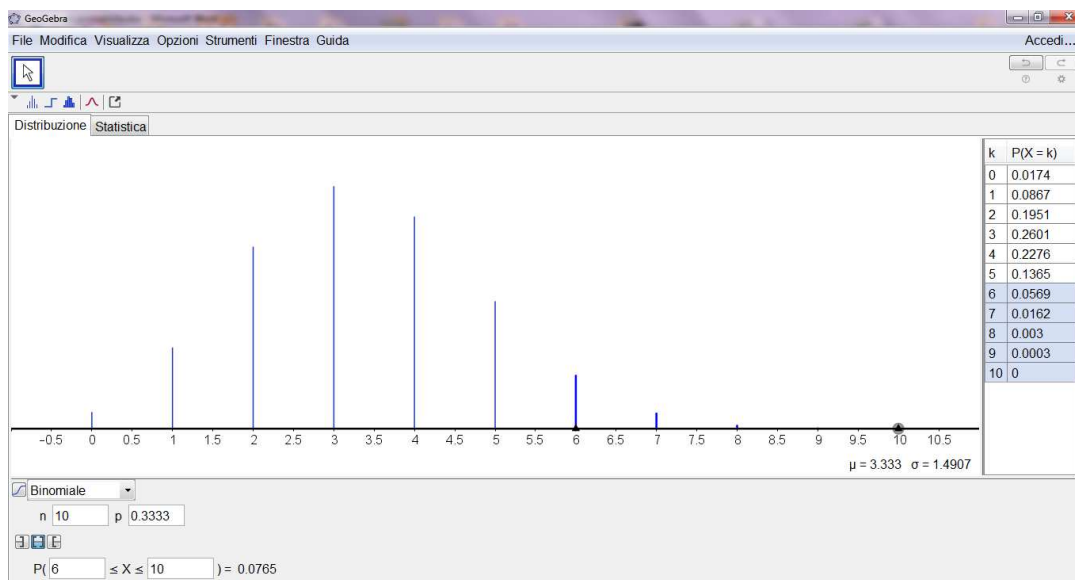
$$P(X = 10) = \frac{1}{3^{10}}$$

e calcolando $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \cong 0,077$

In conclusione **uno studente che risponde a caso ad un test di questo tipo ha probabilità del 7,7% di superare il test.**

Nota

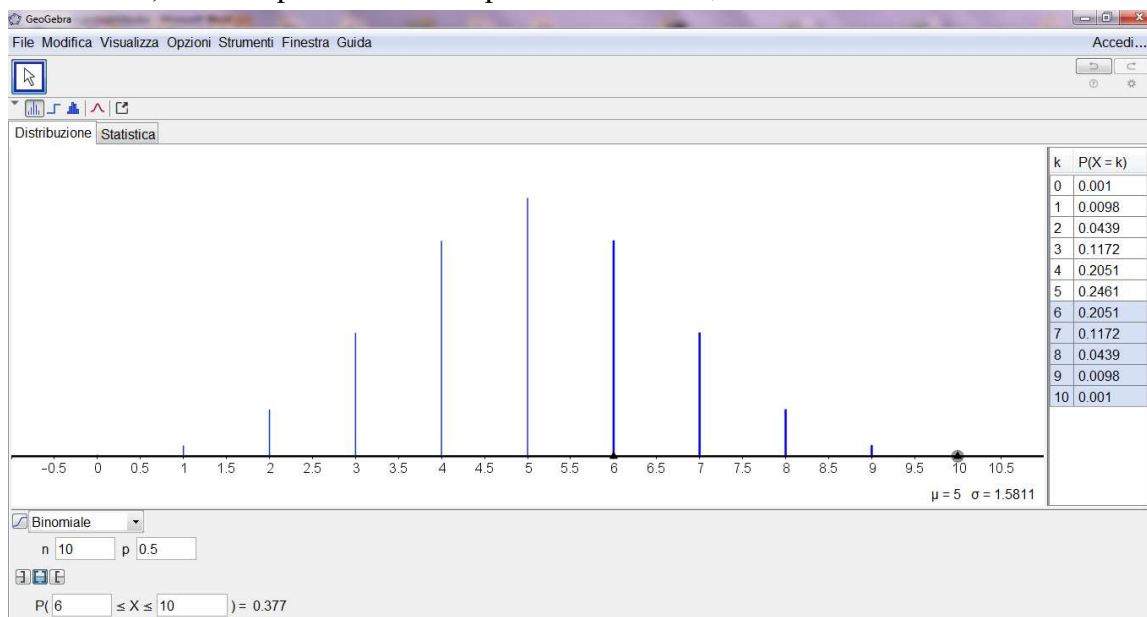
Possiamo rappresentare i valori della probabilità di rispondere correttamente a 0, 1, 2, 3, ecc domande del test utilizzando Geogebra (calcolatore di probabilità-distribuzione binomiale- $n=10$ $p=1/3$) ed anche calcolare per esempio la probabilità “cumulata” di rispondere correttamente ad almeno 6 domande.



Osserviamo che il massimo valore di probabilità si ha per $k=3$ cioè rispondendo a caso ad un test di 10 domande con tre alternative la probabilità più alta è quella di indovinare tre risposte.

Naturalmente le probabilità cambiano se cambia il numero delle alternative a ciascuna domanda.

Riportiamo l'andamento per un test di 10 domande vero-falso (in questo caso $p = \frac{1}{2}$): notiamo che la distribuzione è in questo caso simmetrica rispetto al valore di massima probabilità che è 5 (risposte corrette) e che la probabilità di superarlo cresce a 0,377.

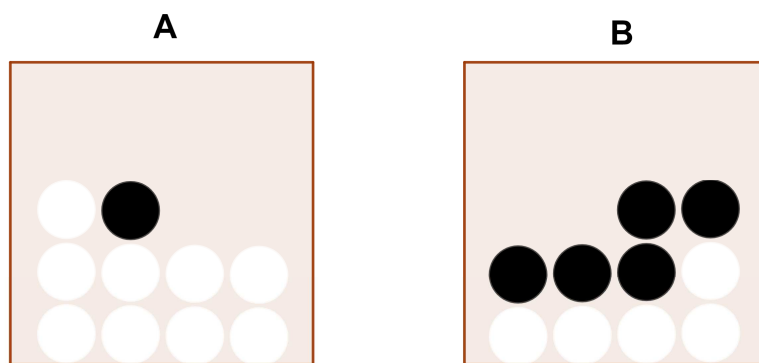


Teorema di Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) ha ricavato una formula matematica che permette di **rivalutare la probabilità di un evento** quando si sa che un dato evento si è verificato : si parla di probabilità “a posteriori”.

Consideriamo il seguente esempio: supponiamo di avere due urne A e B contenenti ciascuna 10 palline bianche e nere.

Sappiamo che nell’urna A c’è una sola pallina nera (e quindi 9 palline bianche) mentre nell’urna B ci sono 5 palline nere e 5 palline bianche.



Supponiamo di estrarre una pallina da un’urna a caso (non sappiamo cioè da dove abbiamo estratto) e supponiamo di vedere che abbiamo estratto una pallina bianca.

Qual è la probabilità di aver estratto dall’urna A cioè qual è $p(A/bianca)$?

Inizialmente, cioè prima di vedere il colore della pallina, la probabilità di estrarre da A o da B è la stessa cioè $\frac{1}{2}$ (probabilità a priori) ma dopo aver visto il colore bianco della pallina (e conoscendo la composizione delle due urne) ci aspettiamo che la probabilità di aver pescato dall’urna A sia maggiore di $\frac{1}{2}$ (probabilità a posteriori).

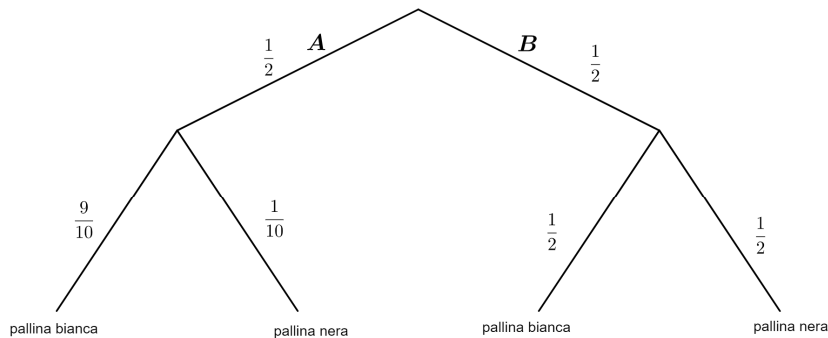
Poiché la probabilità $p(A \cap bianca) = p(A) \cdot p(bianca/A)$

ma anche $p(A \cap bianca) = p(bianca) \cdot p(A/bianca)$

abbiamo che $p(A) \cdot p(bianca/A) = p(bianca) \cdot p(A/bianca) \Rightarrow p(A/bianca) = \frac{p(A) \cdot p(bianca/A)}{p(bianca)}$

Ma la probabilità $p(\text{bianca})$ può essere calcolata utilizzando il grafo ad albero:

$$p(\text{bianca}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{20}$$



In conclusione abbiamo:

$$p(A/\text{bianca}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{14}{20}} = \frac{9}{14}$$

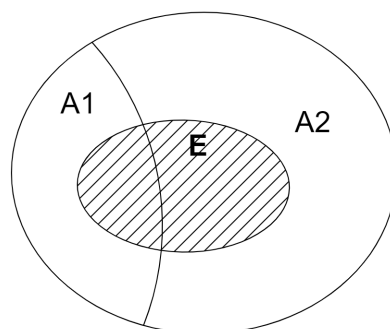
In generale dato un evento E (che nel nostro esempio è **l'estrazione di una pallina bianca**) e per esempio due eventi A_1 , A_2 che costituiscono una **“partizione” dello spazio degli eventi** cioè eventi incompatibili la cui unione dà lo spazio degli eventi (quindi $p(A_1) + p(A_2) = 1$) e che nel nostro esempio sono estrarre dall'urna A oppure estrarre dall'urna B di cui si conoscono le probabilità $p(A_1)$, $p(A_2)$ dette probabilità “a priori” ed **E è un evento che si è verificato**, il teorema di Bayes afferma che

$$p\left(\frac{A_1}{E}\right) = \frac{p(A_1) \cdot p\left(\frac{E}{A_1}\right)}{p(E)}$$

$$p\left(\frac{A_2}{E}\right) = \frac{p(A_2) \cdot p\left(\frac{E}{A_2}\right)}{p(E)}$$

con $p(E) = p(A_1) \cdot p(E/A_1) + p(A_2) \cdot p(E/A_2)$

e le probabilità $p\left(\frac{A_1}{E}\right)$, $p\left(\frac{A_2}{E}\right)$ sono dette **probabilità “a posteriori”** di A_1, A_2 cioè dopo che E si è verificato.



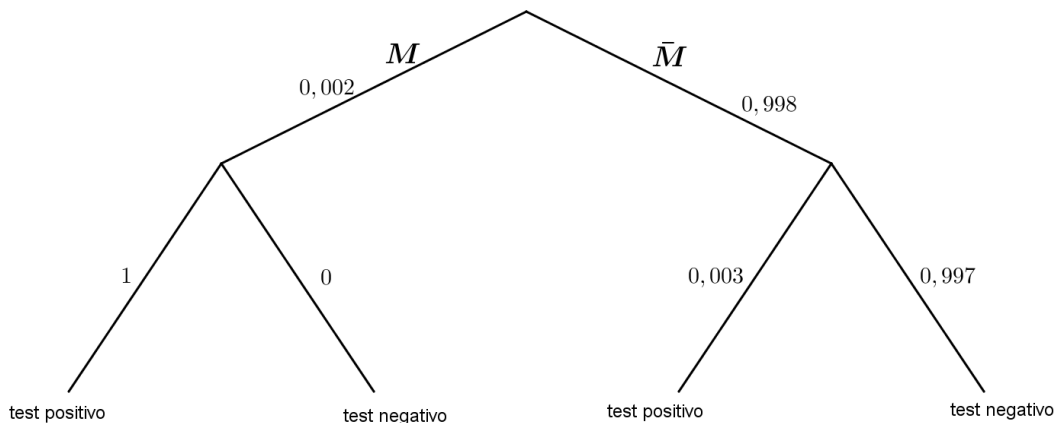
Vediamo un altro esempio maggiormente significativo: supponiamo che l'incidenza di una data infezione sia dello 0,2% cioè in pratica scegliendo a caso un individuo della popolazione e indicando con M l'evento "l'individuo è affetto da quella malattia" supponiamo che $P(M) = 0,002$ (**probabilità a priori**) e di conseguenza, indicando con \bar{M} l'evento "l'individuo non è affetto da quella malattia", si abbia $P(\bar{M}) = 0,998$.

Supponiamo inoltre che sia stato messo a punto un test rapido in cui se un soggetto è affetto da quella malattia, allora la probabilità che il test sia positivo è pari al 100% cioè, indicando con T^+ l'evento "il test è positivo", $P(T^+ / M) = 1$ ma che il test fornisca anche dei "falsi positivi" cioè si possa avere un risultato positivo anche sulle persone non affette da quella malattia nello 0,3 % dei casi, cioè supponiamo che $P(T^+ / \bar{M}) = 0,003$.

Se una persona risulta positiva al test qual è la probabilità che sia effettivamente malata?

Possiamo cioè calcolare la probabilità $p\left(\frac{M}{T^+}\right)$ (**probabilità a posteriori**)?

Innanzitutto rappresentiamo i nostri dati con un diagramma ad albero:



Calcoliamo $p(T^+)$:

$$p(T^+) = p(M) \cdot p\left(\frac{T^+}{M}\right) + p(\bar{M}) \cdot p\left(\frac{T^+}{\bar{M}}\right)$$

Nel nostro esempio abbiamo: $p(T^+) = 0,002 \cdot 1 + 0,998 \cdot 0,003 = 0,002 + 0,00299 \cong 0,005$

Abbiamo quindi:

$$p\left(\frac{M}{T^+}\right) = \frac{p(M) \cdot p\left(\frac{T^+}{M}\right)}{p(T^+)} = \frac{1 \cdot 0,002}{0,005} = 0,4$$

PROBLEMI
TEOREMA DI BAYES

- 1) Il 22% degli individui appartenenti a una data popolazione adulta risulta fumatore (F). E' noto inoltre che l'85% dei fumatori ed il 20% dei non fumatori sono affetti da malattie respiratorie (M). Determina la probabilità che una persona affetta da malattie respiratorie sia un fumatore.

$$[P (\text{fumatore/malato}) = P(F / M) = 0,55]$$

- 2) Una compagnia di assicurazioni ritiene che gli assicurati possano essere suddivisi in due classi: a rischio di incidente e non a rischio di incidente. Le loro statistiche mostrano che una persona a rischio avrà un incidente di qualche tipo all'interno del periodo di un anno con probabilità 0,4, mentre tale probabilità è pari a 0,2 per le persone non a rischio.

a) Supponiamo che il 30 % delle persone sia a rischio, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente nel primo anno di polizza?

b) Supponiamo che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dalla prima stipulazione della polizza. Qual è la probabilità che sia a rischio?

$$[0,26 ; 0,46]$$

- 3) Un'azienda produce penne: la probabilità che una penna sia difettosa è del 5%. Il controllo di qualità accetta tutte le penne senza difetti e scarta il 90% delle penne difettose (quindi il 10% delle penne difettose passa il controllo).

Qual è la probabilità che una penna che ha superato il controllo di qualità sia difettosa?

$$[0,05\% \text{ circa}]$$

- 4) Supponiamo che un'indagine statistica abbia rilevato che in Italia il 20% delle persone soffre di ipertensione e che tra gli ipertesi il 60% sia fumatore. Sappiamo inoltre che tra le persone non ipertese il 50% sono comunque fumatori.

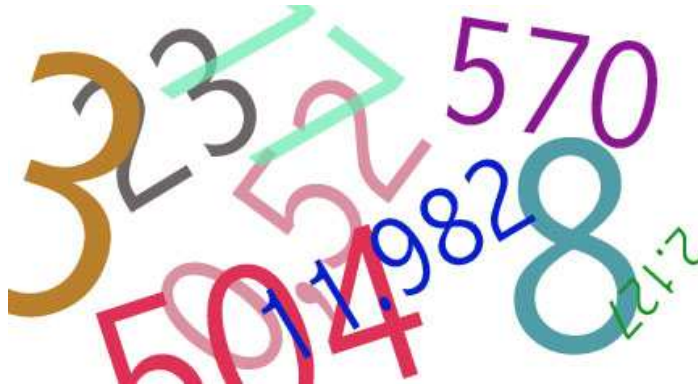
Supponendo che una persona sia un fumatore, quale risulta la probabilità che sia iperteso?

$$[23\% \text{ circa}]$$

SCHEDE DI LAVORO

SCHEDA 1

Qual è la probabilità di indovinare un codice segreto?



*“Qual è la probabilità, al primo tentativo, di scoprire una password costituita da una successione **di cinque cifre** scelte tra le dieci cifre 0,1,2,...9?”*

Osservazione iniziale

Bisognerà distinguere il caso in cui le cifre si possono ripetere oppure no.

1) Caso in cui le cifre si possono ripetere

Il numero di tutte le pw di 5 cifre (anche ripetute) che si possono formare è

.....

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

$$p(\text{indovinare la pw}) = \dots\dots$$

2) Caso in cui le cifre sono distinte

Il numero di tutte le pw di 5 cifre distinte che si possono formare è

.....

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

$$p(\text{indovinare la pw}) = \dots\dots$$

SCHEDA 2

Il problema del doppio sei

Nel 1654 Blaise **Pascal**, frequentando i salotti aristocratici e letterari di corte, aveva conosciuto il Cavalier De Méré famoso giocatore d'azzardo che aveva posto a Pascal il seguente problema:

Conviene scommettere sull'uscita di almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o sull'uscita di almeno un doppio 6 lanciando 24 volte 2 dadi?

Pascal riuscì a risolvere il problema e risolvendolo gettò le basi della teoria della probabilità.

Proviamoci anche noi utilizzando quello che abbiamo visto sulla probabilità dell'evento contrario.



Blaise Pascal

Qual è la probabilità che esca almeno un sei in quattro lanci di un dado?

p(almeno un 6 in quattro lanci) = 1 – p(non esce mai il 6 in quattro lanci) =

$$1 - \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \cong 0,517$$

E qual è la probabilità che esca almeno una volta 6-6 lanciando due dadi per 24 volte?

p(almeno un 6-6 in 24 lanci) = 1- p(non esce mai il 6-6 in 24 lanci) = 1 – $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0,491$

Quindi conviene scommettere sull'uscita di almeno un sei in quattro lanci di un dado !

SCHEDA 3

Qual è la probabilità di essere interrogato?

“L’insegnante di matematica deve interrogare ancora tutti gli studenti della IVB e decide di chiamarne 5. Se gli studenti della IVB sono 27 qual è la probabilità che un dato studente sia interrogato?”

Osservazioni

Chiamiamo Tommaso lo studente.

Indichiamo con E l’evento “l’insegnante chiama 5 studenti e tra loro c’è Tommaso”: calcoliamo il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli.

In quanti modi diversi l’insegnante può scegliere i 5 studenti da interrogare? (spiega il tuo ragionamento)

.....
.....

Ma quanti sono i possibili gruppi di cinque studenti che contengono Tommaso? (spiega il tuo ragionamento)

.....
.....

Quindi la probabilità che Tommaso sia interrogato risulta.....



SCHEMA 4

Qual è la somma più probabile nel lancio di due dadi?

Lanciando due dadi (non truccati cioè tutte le facce hanno la stessa probabilità di uscire) qual è **la somma più probabile**?

I numeri che possono uscire su ciascun dado sono 1,2,3,4,5,6 e quindi le possibili somme sono 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.

Cominciamo con somma $S = 2$.

In quanti modi posso avere somma $S = 2$?

Solo in 1 modo: (1,1). Quindi poiché i casi possibili sono $6 \cdot 6 = 36$ (infatti le coppie sono (1,1); (1,2); ecc....) avrò

$$p(S = 2) = \frac{1}{36}.$$

Vediamo la probabilità delle altre somme....

$$p(S=3) = \frac{2}{36} \text{ poiché i casi favorevoli sono due (1,2) e (2,1)}$$

$$p(S=4) = \dots \text{ poiché i casi favorevoli sono } \dots$$

$$p(S=5) = \dots$$

$$p(S=6) = \dots$$

$$p(S=7) = \dots$$

$$p(S=8) = \dots$$

$$p(S=9) = \dots$$

$$p(S=10) = \dots$$

$$p(S=11) = \dots$$

$$p(S=12) =$$

E così scopriamo che conviene scommettere su somma $S = \dots$

Esercizio: traccia un grafico cartesiano in cui sull'asse x poni i valori della somma S e sull'asse y la probabilità corrispondente.



SCHEMA 5

Qual è la somma più probabile nel lancio di tre dadi?



Se lanciamo tre dadi e consideriamo la somma dei punti che si presentano, su quale somma conviene scommettere?

Ai tempi di Galileo Galilei alcuni giocatori incalliti si erano accorti che la somma 10 compariva più frequentemente della somma 9, ma questo sembrava strano perché

la **somma 9** si può avere in sei casi 6-2-1; 5-3-1; 5-2-2; 4-4-1; 4-3-2; 3-3-3

e anche la **somma 10** si può avere in sei casi 6-3-1; 6-2-2; 5-4-1; 5-3-2; 4-4-2; 4-3-3

Chiesero quindi spiegazione di questo a Galileo...

Suggerimento

Considera l'uscita dei tre numeri sui tre dadi come **terne ordinate**: i casi possibili sono quindi

.....

Per determinare il numero dei casi favorevoli considera le terne che danno una data somma.

Per esempio per avere somma 9 posso avere

6-2-1 in **sei modi** (6,2,1), (2,6,1) ecc.;

5-3-1 in

Ecc.

In conclusione

$$p(S = 9) = \dots$$

$$p(S = 10) = \dots$$

$$p(S = 11) = \dots$$

$$p(S = 12) = \dots$$

Quindi su quale somma conviene scommettere ?

SCHEDA 6

Qual è la probabilità di vincere al lotto?



*“Se gioco un numero al **LOTTO** (su una determinata ruota) qual è la probabilità di vincere? (si parla di probabilità di vincere un “estratto semplice”)”*

Ricordiamo che nel gioco del LOTTO vengono estratti (su ciascuna Ruota) 5 numeri tra 90 numeri (da 1 a 90).

Quante sono le cinquine possibili?.....

Quanti sono le cinquine in cui compare il numero che ho giocato?.....

Quindi la probabilità che esca il numero che ho giocato è.....

“Se gioco due numeri, qual è la probabilità di vincere (cioè la probabilità che tra i cinque estratti ci siano i due numeri che ho giocato) ?”(si chiama ambo secco)

.....

“E qual è la probabilità di vincere giocando tre numeri (probabilità di fare un terno-secco) , quattro numeri (quaterna secca), cinque numeri (cinquina)?”

.....

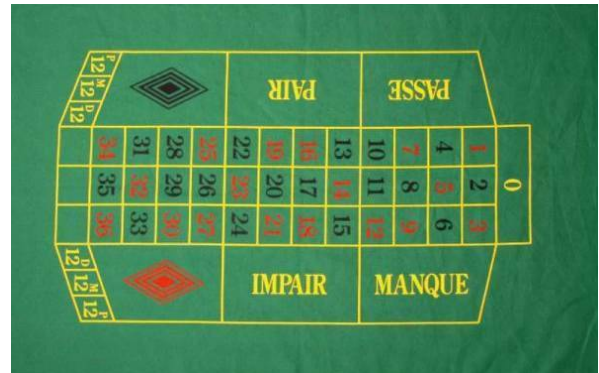
Nel gioco del lotto l’estratto-semplice viene pagato 11,232 volte la posta, l’ambo 250 volte la posta, il terno 4250 volte la posta , la quaterna 80000 volte la posta, la cinquina 1000000 di volte la posta : **secondo te il gioco del LOTTO è un gioco equo ?**

Fai una breve ricerca per scoprire come è nato il gioco del LOTTO.

SCHEMA 7

Rien ne va plus!

Nel gioco della roulette francese ci sono 36 numeri rossi e neri alternati da 1 a 36 e lo zero (verde).



Si può puntare su:

- sull'uscita di un dato numero;
- su un "cavallo" cioè si mette la fiche a "cavallo" su due numeri e si vince se esce uno dei due;
- sull'uscita di un numero compreso in una data dozzina (1-12; 13-24; 25-36);
- sull'uscita di un numero tra 18 numeri (1-18; 19-36);
- sull'uscita di un numero pari;
- sull'uscita di un numero dispari;
- sull'uscita di un rosso o di un nero.

Il gioco della roulette francese è un gioco equo?

Vediamo le varie "puntate":

- L'uscita di un dato numero viene data 35 a 1 cioè se il rischio è r abbiamo un guadagno $g = 35 \cdot r$.
Calcoliamo la probabilità che esca un dato numero.....
Ti sembra che questa scommessa sia equa?
- L'uscita di un numero pari (dispari) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero pari.....
- L'uscita di un numero rosso (nero) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero rosso.....
- L'uscita di un numero compreso tra 18 numeri (1-18;19-36) viene data 1 a 1
- L'uscita di un numero compreso in una dozzina viene data 2 a 1
- L'uscita di un numero a cavallo tra due viene data 17 a 1

NOTA: ora capisci perché si dice che "lo zero è a favore del banco"?

SCHEDA 8

Qual è la probabilità di vincere al totocalcio?

Riempendo a caso la schedina, qual è la probabilità di fare 13 al TOTOCALCIO?

Riempendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 12 al TOTOCALCIO?

Riempendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 11 al TOTOCALCIO?

.....

La schedina del totocalcio è costituita da 13 caselle che devono essere riempite con 1,2,X (possibili risultati di tredici partite di campionato di una data domenica) : 1= vince la squadra che gioca in casa, 2= vince la squadra che gioca in trasferta, X= pareggio.

$$p(13) = \dots$$

$$p(12) = \dots$$

$$p(11) = \dots$$

SCHEDA 9

Il gioco interrotto e la divisione della posta



Due giocatori, A e B, hanno deciso di giocare una serie di partite ed hanno stabilito che vincerà tutto quello che vincerà per primo **3 partite**. Hanno scommesso 18 euro ciascuno quindi la posta in gioco è di 36 euro. Ad un certo punto però, quando stanno **2 a 1** per A (cioè A ha vinto due partite e B solo una) devono interrompere il gioco: **come è giusto che dividano la posta?**”

Osservazione iniziale

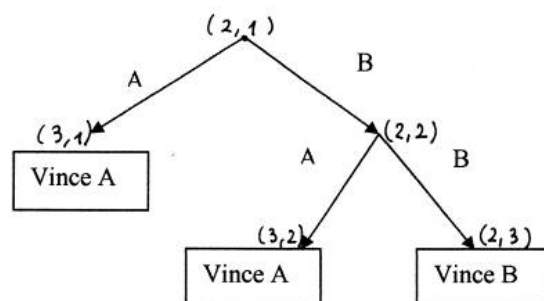
La posta andrà divisa in relazione alle probabilità che hanno di vincere ciascun giocatore al momento dell'interruzione del gioco...

Il problema è quindi quello di calcolare la probabilità che hanno di vincere i due giocatori nel momento in cui il gioco viene interrotto.

Qual è la probabilità che hanno i due giocatori di vincere?

Si suppone che i due giocatori siano da considerarsi di pari abilità e che quindi ad ogni partita abbiamo la stessa probabilità di aggiudicarsi il punto.

Puoi rappresentare la situazione con un grafo ad albero in cui se mi sposto a sinistra vince A, se mi sposto a destra vince B e in cui indico il punteggio che si è raggiunto dopo la partita.



Quindi $p(\text{vince} - A) = \dots$

Invece B per vincere deve vincere sia la prima che la seconda partita e quindi la sua probabilità di vittoria è $p(\text{vince} - B) = \dots$

In conclusione i 36 euro della posta vanno suddivisi in rapporto di

SCHEDA 10

Calcolo delle probabilità per....salvarsi la vita!

Ad un condannato a morte viene data una possibilità di salvarsi: deve disporre 4 palline , 2 bianche e 2 nere, in due urne (mettendo almeno una pallina in ogni urna) e poi scegliere, bendato, un'urna ed estrarre una pallina.

Se estrarrà una pallina bianca avrà salva la vita.

Come gli conviene disporre le palline nelle urne per avere la massima probabilità di estrarre una pallina bianca e quindi di non essere giustiziato?

Suggerimento: ricorda che la probabilità di scegliere l'urna A o B risulta

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$$

Analizza le possibili disposizioni delle palline nelle due urne A e B:

.....
.....

Calcola, in ogni caso, la probabilità che ha di estrarre una pallina bianca utilizzando la probabilità condizionata:

$$p(\text{bianca}) = p(A) \cdot p(\text{bianca} / A) + p(B) \cdot p(\text{bianca} / B)$$

.....
.....
.....

SCHEMA 11
Stanlio e Ollio

Stanlio e Ollio la sera giocano a carte e chi perde paga da bere.

Ollio perde per 10 serate di seguito e comincia a sospettare che Stanlio sia un baro.



Supponiamo che a priori Ollio abbia fiducia nell'amico e attribuisca probabilità alta al fatto che Stanlio sia onesto (O), per esempio $p(O) = 0,95$. (di conseguenza $p(B) = \dots\dots\dots$)

Supponiamo che Stanlio ed Ollio siano giocatori di pari abilità e che quindi la probabilità che Stanlio vinca 10 volte di seguito sia $p(W_{10}) = \dots\dots\dots$

Se applichiamo il teorema di Bayes possiamo calcolare la probabilità che Stanlio sia un baro (B) supponendo che abbia vinto 10 volte di seguito (W_{10}):

$$p(B/W_{10}) = \dots\dots\dots$$

Suggerimento: è chiaro che la probabilità che Stanlio vinca 10 volte di seguito supponendo che sia un baro è 1.

Esercizio: prova a generalizzare il problema indicando con n il numero delle vincite consecutive di Stanlio e determinando $p(B/W_n)$.

Rappresenta graficamente l'andamento di $p(B/W_n)$ al variare di n. Per quale valore di n la probabilità che Stanlio sia un baro supera il 50%?

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE
CALCOLO DELLE PROBABILITA'

1. Una cassaforte ha un codice di 4 cifre scelte tra 0,1,2...9 (che si possono ripetere). Qual è la probabilità di indovinare il codice al primo tentativo?

$$\left[\frac{1}{10^4} \right]$$

2. In una classe di 20 studenti ci sono 12 maschi e 8 femmine. Se l'insegnante interroga due studenti, qual è la probabilità che siano interrogate due femmine?

$$\left[\frac{14}{95} \right]$$

3. Due giocatori A e B scommettono sull'uscita della somma uguale a 12 nel lancio di due dadi: A scommette sull'uscita della somma uguale a 12 e B sull'evento contrario.
Se A vince € 35, quanto deve vincere B perché il gioco sia equo?

$$[\text{€ } 1]$$

4. Se il gioco del totocalcio fosse equo, rischiando € 1 quanto dovremmo vincere facendo 13?

$$[\text{€ } 1594322]$$

5. Se il gioco del lotto fosse un gioco equo, rischiando € 1 quanto dovremmo vincere nel caso in cui indovinassimo tutti e cinque i numeri di una ruota?

$$[\text{€ } 43949267]$$

6. In 4 lanci di una moneta (non truccata) qual è la probabilità che esca sempre testa? E che esca almeno una volta testa? E due volte testa e due volte croce?

$$\left[\frac{1}{2^4}; \frac{15}{16}; \frac{3}{8} \right]$$

7. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono tre: qual è la probabilità di aver pescato 3 sette?

$$\left[\frac{1}{2470} \right]$$

8. Pescando tre carte da un mazzo di 40 carte, qual è la probabilità di pescare il sette di quadri?

$$\left[\frac{3}{40} \right]$$

9. Giocando a poker, qual è la probabilità di avere in mano 4 re ?

$$\left[\frac{1}{7192} \right]$$

10. Supponendo che tutti gli studenti debbano ancora essere interrogati, qual è la probabilità che ha uno studente di essere interrogato se l'insegnante chiama a caso tre persone e nella classe ci sono 20 studenti?

$$\left[\frac{3}{20} \right]$$

11. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità che siano 4 assi?

$$\left[\frac{1}{91390} \right]$$

12. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità di avere esattamente 3 assi?

$$\left[\frac{72}{45695} \right]$$

13. Si lancia una moneta 5 volte di seguito. Qual è la probabilità che escano almeno tre teste?

$$\left[\frac{1}{2} \right]$$

14. Qual è la probabilità, ricevendo 5 carte da un mazzo di 32, di avere esattamente tre assi?

$$\left[\frac{27}{3596} \right]$$

15. Giocando a poker (prendo cinque carte da un mazzo di 32) qual è la probabilità di avere 5 carte di cuori?

$$\left[\frac{1}{3596} \right]$$

16. Estraendo 5 carte da un mazzo di 32, qual è la probabilità di estrarre cinque carte dello stesso seme?

$$\left[\frac{1}{899} \right]$$

17. Lanciando due dadi, qual è la probabilità di ottenere somma 7?

$$\left[\frac{1}{6} \right]$$

18. Qual è la probabilità di fare 10 al totocalcio? (indovinare 10 risultati su tredici partite)

$$\left[\frac{2288}{3^{13}} \right]$$

19. Qual è la probabilità che esca il 90 sulla ruota di Firenze? (probabilità di un estratto semplice cioè si gioca solo il 90 e si vince se viene estratto tra i cinque numeri della ruota di Firenze)

$$\left[\frac{1}{18} \right]$$

20. Da un mazzo di 40 carte si estraggono tre carte. Qual è la probabilità che siano tutte di cuori? E qual è la probabilità che siano tutte dello stesso seme?

$$\left[\frac{3}{247} ; \frac{12}{247} \right]$$

21. Lanciando due monete qual è la probabilità di:

- a) avere due teste;
- b) avere almeno una testa;
- c) avere la stessa faccia (o due teste o due croci).

$$\left[\frac{1}{4} ; \frac{3}{4} ; \frac{1}{2} \right]$$

22. Lanciando tre monete qual è la probabilità di :

- a) avere tre teste;
- b) avere almeno una testa;
- c) avere esattamente una testa.

$$\left[\frac{1}{8} ; \frac{7}{8} ; \frac{3}{8} \right]$$

23. In una classe di 23 studenti ci sono 10 maschi e 13 femmine. Vengono eletti i due rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che:

- a) siano entrambe femmine;
- b) siano entrambi maschi;
- c) siano un maschio e una femmina.

$$\left[\frac{78}{253} ; \frac{45}{253} ; \frac{130}{253} \right]$$

24. Si mescolano 10 carte e se ne danno 5 al giocatore A e 5 al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

$$[252]$$

25. Si mescolano 10 carte e si distribuiscono 3 al giocatore A e tre al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

$$[4200]$$

26. Qual è la probabilità di fare 9 al totocalcio? (9 risultati corretti)

[circa 0,007]

27. Vuoi acquistare un nuovo televisore e nel negozio ci sono tre modelli con prezzi 540 euro, 608 euro, 654 euro. Inoltre vuoi acquistare un decoder per il vecchio televisore e ci sono due modelli al costo rispettivamente di 32 euro e 48 euro. Scegliendo a caso sia il televisore che il decoder qual è la probabilità di spendere meno di 700 euro? E più di 650 euro?

[$\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}$]

28. Il numero di serie di una banconota è formato da una lettera (scelta nell'alfabeto a 26 lettere) e 11 numeri (scelti tra le cifre da 0 a 9). Quanti numeri di serie distinti si possono generare? Scelto a caso un numero di serie qual è la probabilità che esso inizi con una vocale e termini con un numero pari diverso da zero?

[$26 \cdot 10^{11}$; $\frac{1}{13}$]

29. Due amiche pranzano al ristorante e scelgono dal menù (a caso e ciascuna indipendentemente dall'altra) un antipasto, un primo e un dessert . Supponendo che nel menù ci siano 6 antipasti, 8 primi e 4 dessert calcola:

- a) la probabilità che scelgano lo stesso antipasto;
- b) la probabilità che scelgano lo stesso antipasto e lo stesso primo;
- c) la probabilità che scelgano stesso antipasto, stesso primo e stesso dessert.

[$\frac{1}{6}$; $\frac{1}{48}$; $\frac{1}{192}$]

30. Tre persone prendono l'ascensore a piano terra di un edificio a 6 piani. Supponendo che ciascuna persona scenda a caso a uno dei piani dell'edificio calcola:

- a) la probabilità che scendano tutte al primo piano;
- b) la probabilità che scendano tutte allo stesso piano.

[$\frac{1}{216}$; $\frac{1}{36}$]

31. In una città ci sono 6 hotel e un dato giorno tre persone prenotano ciascuna una camera in uno degli hotel (in modo casuale). Qual è la probabilità che le tre persone si trovino in tre hotel diversi?

[$\frac{5}{9}$]

32. Sette amici , quattro ragazzi e tre ragazze, vanno al cinema e si siedono accanto sulla stessa fila. Calcola la probabilità che :

- a) i ragazzi siano tutti vicino tra loro;
- b) le ragazze siano tutte vicine tra loro;
- c) i ragazzi siano tutti vicini tra loro e le ragazze tutte vicine tra loro.

[$\frac{4}{35}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{35}$]

33. Qual è la probabilità che tra quattro amici almeno due di essi siano nati nello stesso mese?

$$\left[\frac{41}{96} \cong 43\% \right]$$

34. In un ufficio bancario ci sono due sportelli A,B di cui almeno uno sempre aperto: la probabilità che A sia aperto è 0,7 e la probabilità che B sia aperto è 0,6. Qual è la probabilità che siano aperti entrambi gli sportelli?

$$[0,3]$$

35. Due cacciatori, che colpiscono il bersaglio con probabilità rispettive 85% e 75%, sparano (una sola volta) contemporaneamente ad una lepre. Qual è la probabilità che la lepre non venga colpita?

$$[3,75\%]$$

36. Si hanno a disposizione due monete, una regolare e una truccata in modo che la probabilità che esca testa sia $\frac{1}{3}$. Si sceglie a caso una delle due monete e si lancia: qual è la probabilità che esca testa?

$$\left[\frac{5}{12} \right]$$

37. In un'urna A sono contenute 5 palline bianche e 5 palline nere, mentre in un'urna B ci sono 4 palline bianche e 6 nere. Si sceglie a caso un'urna e si pesca una pallina: qual è la probabilità che sia nera?

$$\left[\frac{11}{20} \right]$$

38. Un'urna contiene 5 palline bianche e 10 nere e una seconda urna contiene 6 palline bianche e 2 nere. Scegliendo a caso un'urna ed estraendo una pallina, qual è la probabilità che sia bianca?

$$\left[\frac{13}{24} \right]$$

39. Due macchine producono lo stesso pezzo meccanico: la prima produce il 40% dei pezzi e il 95% è senza difetti mentre il 6% dei pezzi prodotti dalla seconda è difettoso. Qual è la probabilità che, prendendo a caso un pezzo, questo risulti difettoso?

$$[5,6\%]$$

40. Il 60% di un gruppo di ammalati di colite è stato sottoposto alla somministrazione di un nuovo farmaco e il 70% ha ottenuto un miglioramento. Il 30% della restante parte del gruppo non sottoposta al trattamento ha comunque ottenuto un miglioramento. Calcola la probabilità che un paziente abbia preso il nuovo farmaco supponendo che sia migliorato.

$$\left[\frac{7}{9} \right]$$

41. Secondo i dati statistici la prova del palloncino (effettuata sui guidatori per vedere se sono in stato di ebbrezza) ha esito positivo sul 5% delle persone controllate. Sempre secondo i dati raccolti il 98% delle persone con risultato positivo era effettivamente ubriaca e il 2% delle persone con esito negativo è comunque ubriaca.

Calcola la probabilità che, essendo una persona ubriaca, venga segnalata con la prova del palloncino (il test abbia cioè risultato positivo).

$$\left[\frac{49}{68} \right]$$

42. Un gruppo di escursionisti organizza una gita in montagna. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità di raggiungere la meta pari al 60% e che quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.

a) Qual è la probabilità che un escursionista scelto a caso nel gruppo raggiunga la meta?

b) Sapendo che un escursionista ha raggiunto la meta, con quale probabilità appartiene al gruppo degli escursionisti allenati?

$$[0,85 ; 0,76]$$

43. Un gruppo di bagnanti è costituito per il 65% da persone di carnagione scura (S) e per il rimanente 35% da persone di carnagione chiara (C). L'uso non appropriato di creme solari fa sì che si abbia una percentuale di persone danneggiate dal sole (U) del 10% se di carnagione scura e del 60 % se di carnagione chiara.

Sapendo che un bagnante scelto a caso si è ustionato al sole, con che probabilità egli ha una carnagione chiara?

$$[0,76]$$

44. Un test clinico ha un'affidabilità del 98% cioè se una persona malata si sottopone al test questo risulta positivo nel 98% dei casi. Il test può però generare anche dei "falsi positivi" nella percentuale dell'1% (cioè se una persona non malata si sottopone al test si ha un risultato positivo nell'1% dei casi).

Statisticamente è noto che la malattia colpisce lo 0,5% della popolazione.

Se una persona risulta positiva al test, qual è la probabilità che sia effettivamente malata?

$$[\text{circa } 0,33]$$