Simulazioni prova scritta

SIMULAZIONE 1

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x)=\frac{x+a}{e^{bx}}$

1. Si determinino i valori di a e b affinché la funzione passi dal punto $A(1;0)$ e abbia un punto di massimo in $x=2$.

2. Verificato che ciò avviene per $a=-1$ e $b=1$, si studi e si rappresenti il suo grafico Γ in un sistema di assi cartesiani, determinando la tangente che passa per il suo punto di flesso.

3. Detto P un punto appartenente al grafico della funzione situato nel quarto quadrante, si costruisca il rettangolo ottenuto proiettando P sugli assi cartesiani in modo che tale rettangolo abbia area massima.

4. Mostrare, facendo il calcolo, che l'area del triangolo mistilineo delimitato dalla funzione e dagli assi cartesiani nel quarto quadrante è uguale all'area delimitata dalla funzione e dall'asse delle ascisse nel primo quadrante.

PROBLEMA 2

In un piano cartesiano ortogonale Oxy sono assegnati i punti $A(0;1)$ e $B(2;0)$. Si consideri il punto $C(x;0)$ nel semiasse negativo delle ascisse.

1. Determinare il punto C in modo che il rapporto $y=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ sia massimo.

2. Si tracci il grafico della funzione $F(x)=\frac{(2-x)^2}{1+x^2}=\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2$ indipendentemente dalla questione geometrica (si tralasci lo studio della derivata seconda).

3. Si determini l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $F(x)$, la retta di equazione $x=1$ e dagli assi cartesiani.

4. Si dimostri, con il metodo che si preferisce, che $F(x)$ non è invertibile nel suo dominio e si determini un intervallo, contenuto nel dominio, nel quale tale funzione risulti invertibile, motivando esaurientemente la scelta effettuata.

QUESITI

1. Calcolare il valore del seguente limite $\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_1^x \ln t \, dt}{(x-1)^2}$

2. Determina a e b (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;2]$ e determina il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema. Disegna il grafico di $f(x)$.

3. Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse y del sottografico di $y = 1 - x^2$ per $0 \le x \le 1$ e dai una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

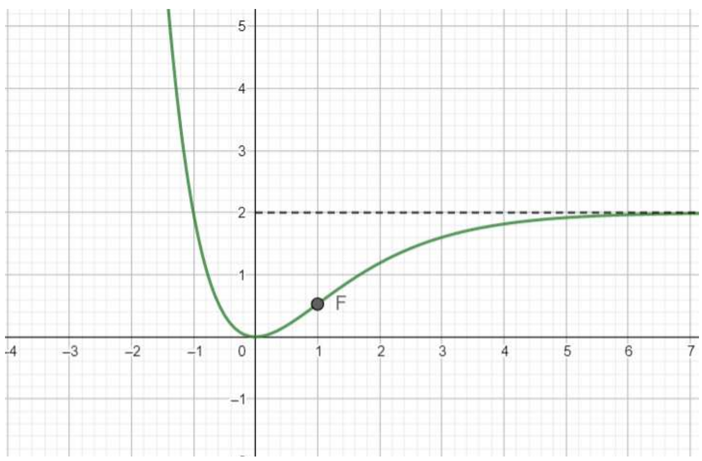
4. Stabilire per quale valore del parametro reale k la funzione di equazione $y = \frac{kx^2 + 1}{(k-1)x^2}$ ha valor medio uguale a 3 nell'intervallo $[1;2]$.

5. Data la funzione $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t+1} dt$, si dimostri che $F(x)$ è invertibile nell'intervallo $x \ge 1$.

6. Sulla curva $y = \ln x$ determinare il punto P nel quale la tangente è parallela alla retta congiungente i punti $A(1;0)$ e $B(e;1)$.

7. Tra tutti i coni circoscritti ad un cilindro di raggio r ed altezza h si trovi quello di minimo volume.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui sotto in cui F è un punto di flesso, determina un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate



SOLUZIONI SIMULAZIONE 1

PROBLEMA 1

1. $a=-1;\quad b=1$
2. $M\left(2,\dfrac{1}{e^2}\right);\quad F\left(3,\dfrac{2}{e^3}\right);\quad t_F : y=-\dfrac{1}{e^3}x+\dfrac{5}{e^3};\quad y=0\quad as.\quad or.per\quad x\to+\infty$
3. $P\left(x;\dfrac{x-1}{e^x}\right);\quad x_M=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
4. $\dfrac{1}{e}$

PROBLEMA 2

1. $C(x;0);\quad x_M=-\dfrac{1}{2}$
2. $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right);\quad m(2;0);\quad y=1\quad as.\quad or.$
3. $\dfrac{3}{4}\pi-2\ln2+1$
4. F(x) non è invertibile perché F’(x) non ha segno costante e quindi F(x) non è iniettiva. Si può invertire restringendo il dominio per esempio ad $0\le x\le 2$.

QUESITI

1. $\dfrac{1}{2}$
2. $a=0;\quad b=2;\quad x_1=\dfrac{7}{16}\quad;\quad x_2=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$
3. $V=\dfrac{\pi}{2}$
4. $k=\dfrac{7}{4}$
5. $F'(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$ risulta positiva per $x\ge1$ e quindi F(x) è crescente e di conseguenza iniettiva e invertibile.
6. $x=e-1$
7. Ponendo x = raggio del cono si ha $x_m=\dfrac{3}{2}r$ -
8. $f'(0)=0$ f’(x) negativa per x<0 e positiva per x>0; massimo in x=1; asse x as. orizz. per $x\to+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

SIMULAZIONE 2

PROBLEMA 1

In un piano cartesiano ortogonale è assegnata la famiglia di funzioni

$$f_a(x)=\frac{x^2}{x^2+a^2}$$

con a parametro non nullo.

1. Si determini il valore del parametro a^2 in modo che la funzione ammetta un flesso nel punto di ascissa $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$;

2. Verificato che $a^2=4$, si tracci il grafico della funzione $f_2(x)$così ottenuta;

3. Si tracci una parallela all'asse x che incontri $f_2(x)$ in due punti A e B; si proiettino A e B sull'asintoto, individuando i punti A' e B' e si determini l'equazione della parallela che rende massima l'area del rettangolo ABB'A';

4. Si calcoli, infine, l'area della regione di piano compresa tra asintoto e grafico.

PROBLEMA 2

In un piano cartesiano ortogonale Oxy è assegnata la funzione $f(x)$) tale che:

$$f'(x)=\frac{2}{(x-1)^2} \text{ e } f(4)=\frac{8}{9}.$$

1. Determina l'espressione analitica di $f(x)$.

2. Verificato che $f(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$, traccia il grafico di $f(x)$ indicando con O e B le sue intersezioni con l'asse delle ascisse e verificando che il grafico della funzione non ammette flessi.

3. Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in O ed indica con A l'ulteriore intersezione di tale tangente con il grafico di $f(x)$.

4. Determina il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo mistilineo OAB, cioè formato dal segmento OA e dall'arco AB del grafico di $f(x)$, attorno all'asse x.

QUESITI

1. Determinare le coppie di valori (a,b) per le quali risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{e^{ax}+bx-1}=\frac{1}{8}$$

2. Determinare il valore di a, b (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & 0\leq x<1 \\ -2x^2+3x+b & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;2]$ determinando il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema e, successivamente, se ne disegni il grafico.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse y del sottografico di $y=4-x^2$ per $0\leq x\leq 2$ e si dia una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

4. Si determini il valor medio di $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ nell'intervallo $[2;5]$, interpretando geometricamente il risultato. Inoltre, si motivi adeguatamente perché non esiste il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo $[0;2]$.

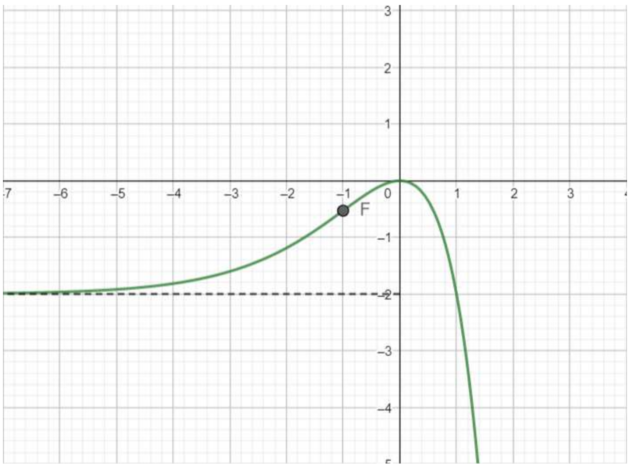
5. Data la funzione $F(x)=\int_0^x (t-1)\cdot e^t\,dt$, si dimostri che $F(x)$ ammette un punto di minimo e se ne determini il valore.

6. Dimostrare, che l'equazione $x\cdot\ln x-1=0$ ammette una ed una sola soluzione reale e si individuino i numeri interi tra cui si trova.

7. Si deve costruire un deposito cilindrico, aperto superiormente, di 3 m^3 di capacità. Il materiale per costruirlo costa 10 $euro/m^2$. Calcolare le dimensioni del deposito in modo che il costo sia il minore possibile.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui accanto, si determini un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate.

N.B.: F è il punto di flesso di $f(x)$.



SOLUZIONI SIMULAZIONE 2

PROBLEMA 1

1. $a^2 = 4$
2. $M\left(2, \frac{1}{e^2}\right)$; $F\left(3, \frac{2}{e^3}\right)$; $y = 1$ as. or.
3. $k = \frac{1}{2}$
4. $A = 2\pi$

PROBLEMA 2

1. $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
2 $O(0;0)$; $B(2;0)$; $y = 1$ *as. or.* **;** $x = 1$ as. vert.
3. $t_O : y = -2x$; $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$
4. $V = \frac{16}{3}\pi$

QUESITI

1. $(4;-4)\,(-4;4)$
2. $a = -3$; $b = -1$; $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{11}{8}$
3. $V = 8\pi$
4. $f(c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\ln 4$; in $[0;2]$ f(x) non è continua
5. $F'(x) = (x-1)\cdot e^x$; $x_m = 1$; $F(1) = 2 - e$
6. $1 < x_o < 2$; $f(x) = x\ln x - 1$; $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2\ln 2 - 1 > 0$
7. $raggio = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$, $altezza = raggio$
8. $f'(0) = 0$ f'(x) positiva per x<0 e negativa per x>0; massimo in x=-1; asse x as. orizz. per $x \to -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$

SIMULAZIONE 3

PROBLEMA 1

In un piano cartesiano ortogonale sono assegnate le parabole:

$$\mathcal{P}_1 : y = ax^2 - 2x + 2 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 : y = 2ax^2 - 2x + 1 \quad \text{con } a \in \Re - \{0\}$$

e si indichino con V_1 e V_2, rispettivamente, i loro vertici.

1. Per quale valore di a il segmento $\overline{V_1V_2}$ ha lunghezza minima?
2. Si consideri ora la funzione $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{2x^2}}$, che esprime la lunghezza del segmento $\overline{V_1V_2}$ avendo posto $a = x$, se ne tracci il grafico determinando, in particolar modo, il punto A in cui tale grafico interseca l'asintoto orizzontale. Il candidato si limiti allo studio della derivata prima.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x il trapezoide limitato dal grafico della funzione e dalle rette $x = x_A$, $x = 3$.
4. Si ponga $a = 1$ nelle equazioni di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e si determini l'area della regione di piano racchiusa tra i grafici delle parabole così ottenute.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = (2 - x)e^x$$

1. Si tracci il grafico della funzione $f(x)$ in un piano cartesiano ortogonale Oxy.

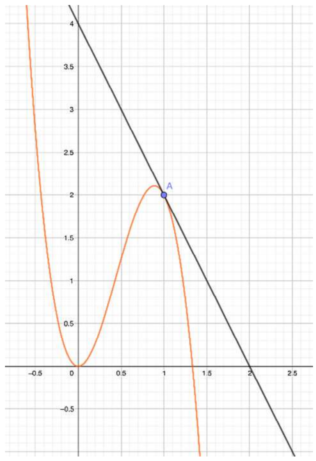
2. Determina l'equazione della retta *t* tangente al grafico di $f(x)$ che passa per il suo punto di flesso. Successivamente determina l'equazione della retta *s* che unisce i punti di intersezione del grafico della funzione con gli assi cartesiani. Si descriva la natura del triangolo ottenuto dall'intersezione delle rette *s, t* e dall'asse delle ascisse.

3. Detto P un punto appartenente al grafico della funzione situato nel primo quadrante, si costruisca il rettangolo ottenuto proiettando P sugli assi cartesiani. Determina P in modo che tale rettangolo abbia area massima.

4. Si calcoli l'area della regione delimitata dal grafico della funzione e dall'asintoto situata nel secondo quadrante.

QUESITI

1. Sia $y = f(x)$ la funzione con derivata continua il cui grafico è rappresentato in figura. La retta tracciata è tangente al grafico di f nel punto $A(1;2)$. Si calcoli il seguente limite:



$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{\ln\sqrt{x}}$$

2. Determinare il valore di a, b (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2 & 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{b}{x-1} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;3]$ determinando il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema e, successivamente, se ne disegni il grafico.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse x del sottografico di $y = \dfrac{2}{\sqrt{4x - x^2}}$ per $1 \leq x \leq 3$ e dai una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

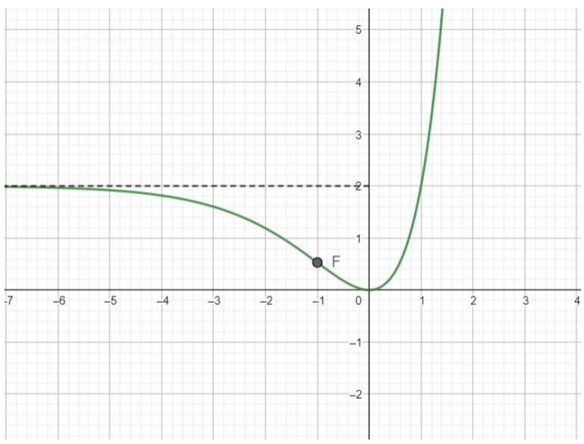
4. Si consideri la funzione $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $[2;5]$. Determinare il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo considerato interpretando geometricamente il risultato.

5. Data la funzione $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$, si determini l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x = e$.

6. Si dimostri, con il metodo che si preferisce, che la funzione $f(x) = 2x + \ln x$ è invertibile e si calcoli la derivata della funzione inversa nel punto $y = 2$.

7. Tra tutti i prismi retti di superficie totale a^2 (con $a > 0$) che hanno come base un triangolo rettangolo isoscele, si determini quello di volume massimo.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui accanto (F è un punto di flesso), si determini un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate.



SOLUZIONI SIMULAZIONE 3

PROBLEMA 1

1. $a = 1$
2. $m\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $x = 0$ as. vert.; $y = 1$ as. or. ; $A\left(\frac{1}{2};1\right)$
3. $V = \left(\frac{10}{3} - \ln 6\right)\pi$
4. $A = \frac{4}{3}$

PROBLEMA 2

1. $M(1;e)$; $F(0;2)$ **;** $y = 0$ as. or. per $x \to -\infty$

2 $t_{(0;2)} : y = x + 2$; $s : y = 2 - x$ **;** $\overset{\Delta}{ABF}$ triangolo rettangolo isoscele

3. $P(x;(2-x)e^{x})$; $P\left(\sqrt{2};\left(2-\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}\right)$

4. $A = 3$

QUESITI

1. -4
2. $a = -\frac{1}{4}$; $b = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$
3. $V = 2\pi \ln 3$
4. $f(c) = \frac{1}{4}$
5. $t : y = x + 1 - e$
6. $D\left(f^{-1}(2)\right) = \frac{1}{3}$
7. $x =$ cateto di base $\to x_M = \frac{a}{\sqrt{3}}$
8. $f'(0) = 0$ minimo in $x = -1$; asse x as. orizz. per $x \to -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$