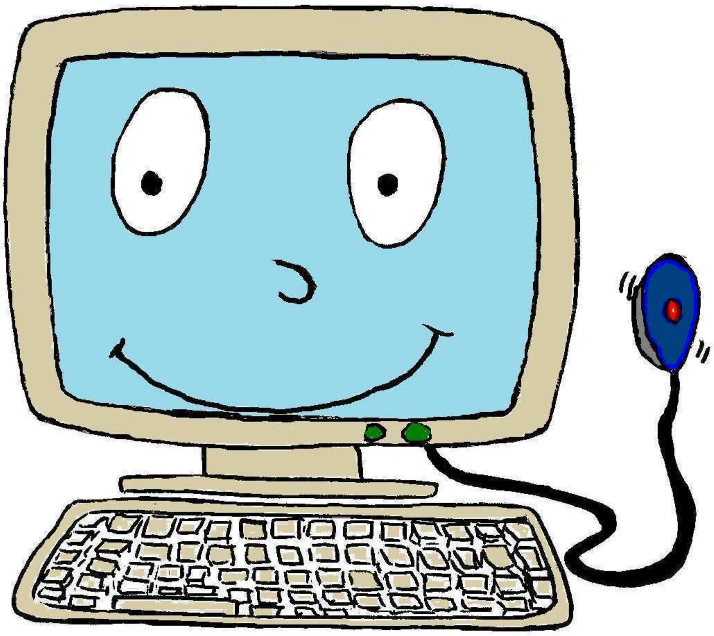
Laboratorio di informatica



FUNZIONI SINUSOIDALI

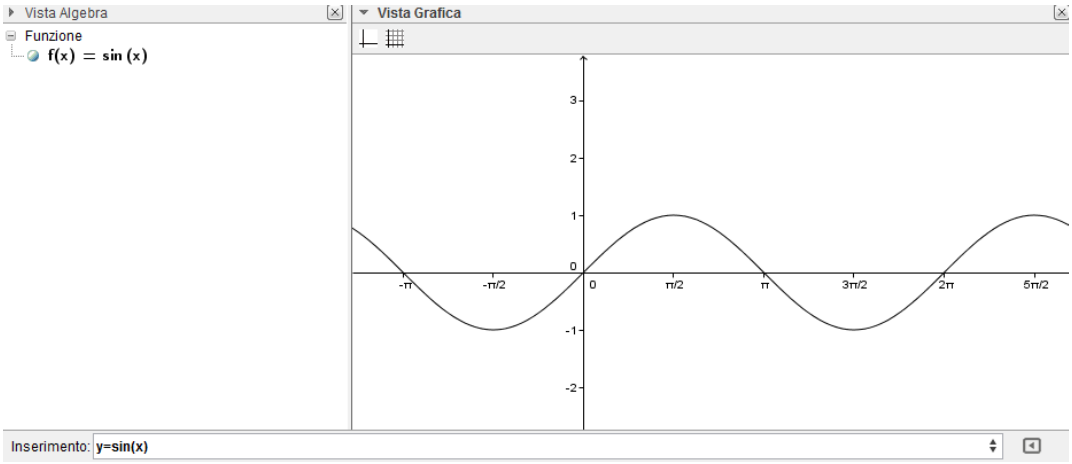
SCHEDA 1

Riprendiamo il software Geogebra e utilizziamolo per lo studio delle funzioni sinusoidali.

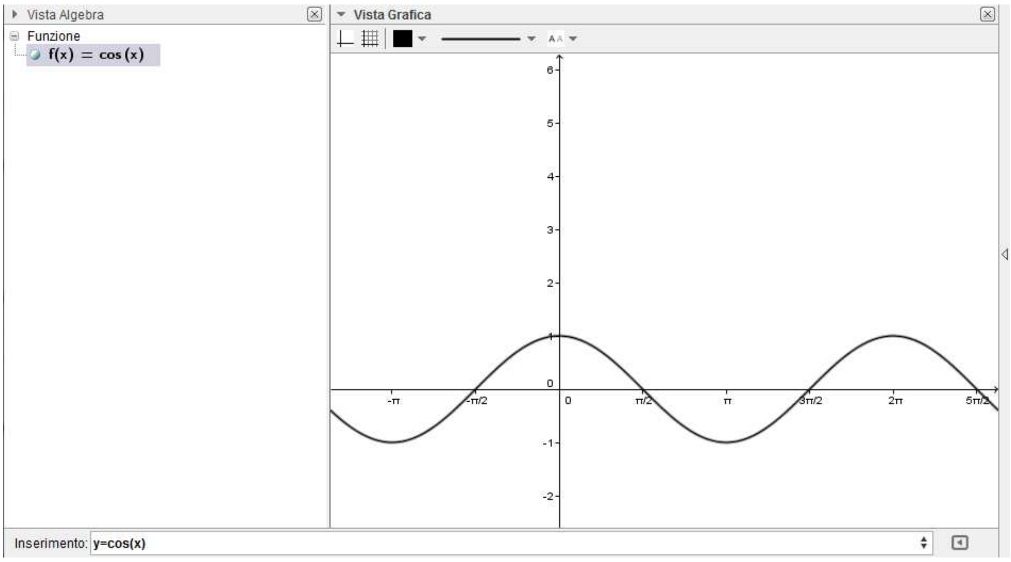
Possiamo scegliere come unità di misura sull'asse x $\frac{\pi}{2}$ digitando:

Opzioni – avanzate - preferenze vista grafica - asse x – unità π - distanza $\frac{\pi}{2}$

1)Cominciamo con l'inserire l'equazione di $y = \sin(x)$ (dobbiamo scrivere sin e mettere le parentesi intorno all'argomento della funzione): comparirà il grafico della funzione seno: osserviamo che il periodo è 2π e che l'ampiezza della funzione è 1.

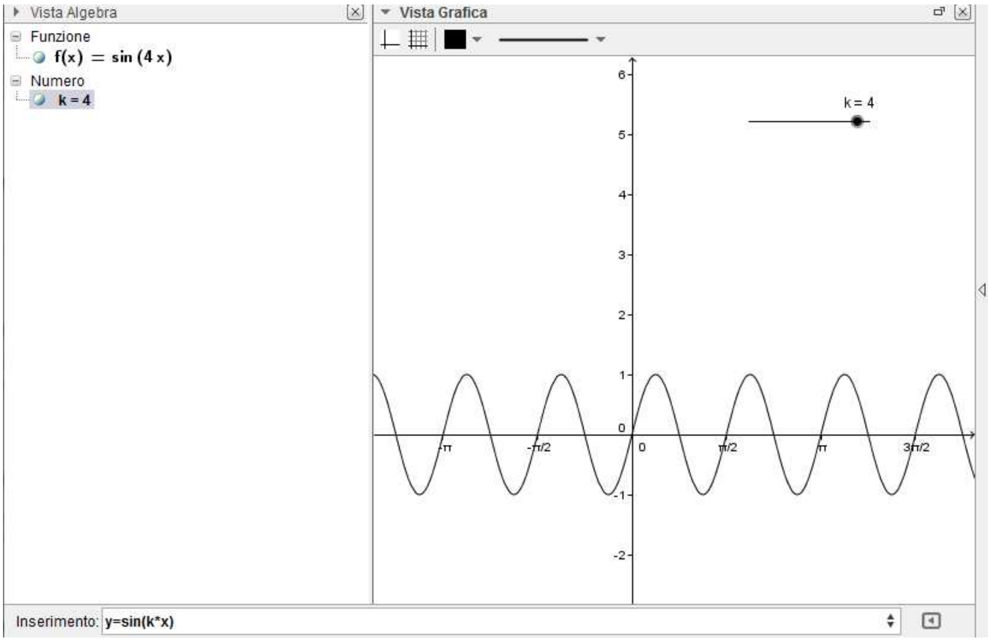


2)Inseriamo poi l'equazione $y = \cos(x)$ .Osserviamo che anche il periodo del coseno è 2π e che l'ampiezza delle oscillazioni è 1.



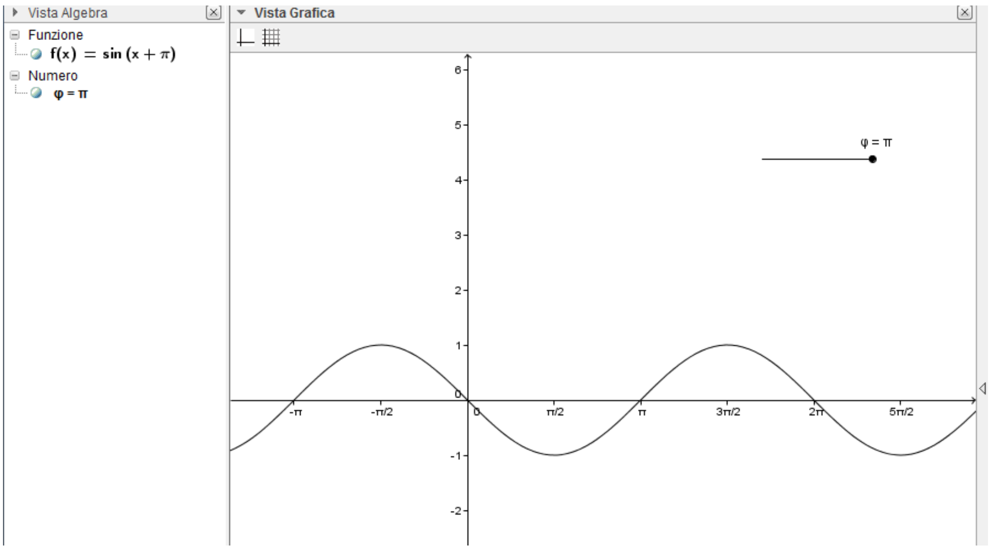
Inoltre il grafico del coseno risulta uguale a quello del seno ma traslato di $\frac{\pi}{2}$.

3)Proviamo a studiare adesso la funzione $y = \sin(k * x)$ utilizzando uno "slider" k.
Attivando la funzione "muovi" (primo pulsante da sinistra nella barra in alto) possiamo capire che k determina il periodo della funzione. Per esempio la funzione in figura ha k = 4 ed ha un periodo di $\frac{2\pi}{4}$ poiché nello spazio di 2π si è ripetuta quattro volte.



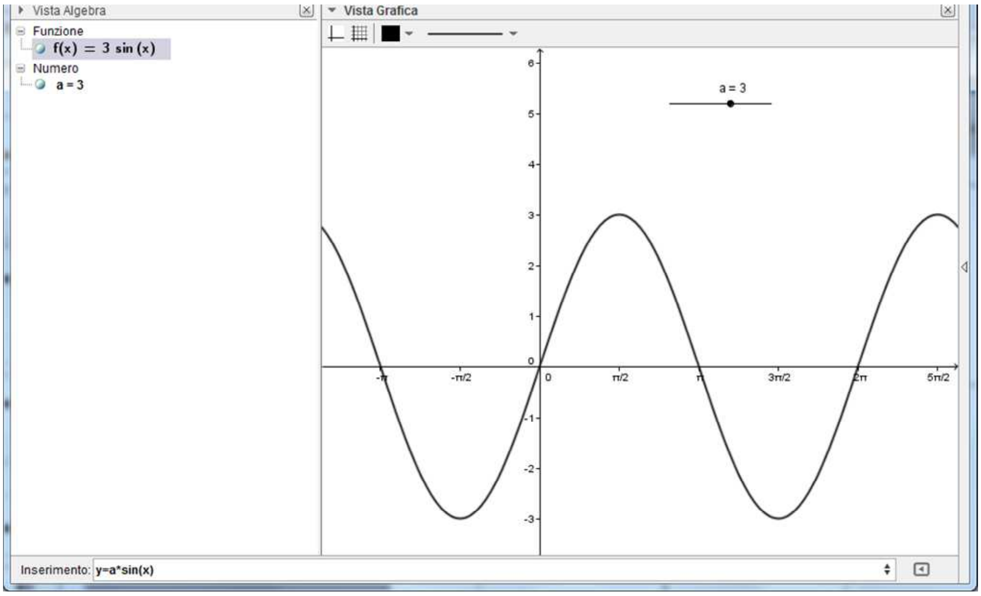
Quindi in generale la funzione $y = \sin(k * x)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$.

4)Proviamo a studiare $y = \sin(x + \varphi)$ utilizzando uno slider φ.
Ci accorgiamo che variando φ il grafico del seno trasla orizzontalmente: se per esempio $\varphi = \pi$ il grafico trasla del vettore $(-\pi, 0)$.



Notiamo inoltre che se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ otteniamo il grafico del coseno: infatti $\cos x = sen(x + \frac{\pi}{2})$

5)Vediamo infine cosa accade se poniamo un parametro davanti alla funzione, cioè studiamo $y = a * \sin(x)$. Ci accorgiamo che cambia l'ampiezza dell'oscillazione del grafico: per esempio nel grafico in figura dove a = 3 i valori oscillano tra -3 e 3 .



Esercizio 1

Prova a scrivere

$$y = a * \sin(k * x + \varphi)$$

dopo aver creato tre slider a , k , φ .

Fissa dei valori dei parametri, stampa il grafico corrispondente e controlla come risultano periodo, ampiezza dell'oscillazione e vettore traslazione rispetto a $y = senx$.

Esercizio 2

Ripeti l'esercizio precedente utilizzando la funzione $y = \cos(x)$ cioè studia la funzione

$$y = a * \cos(k * x + \varphi)$$

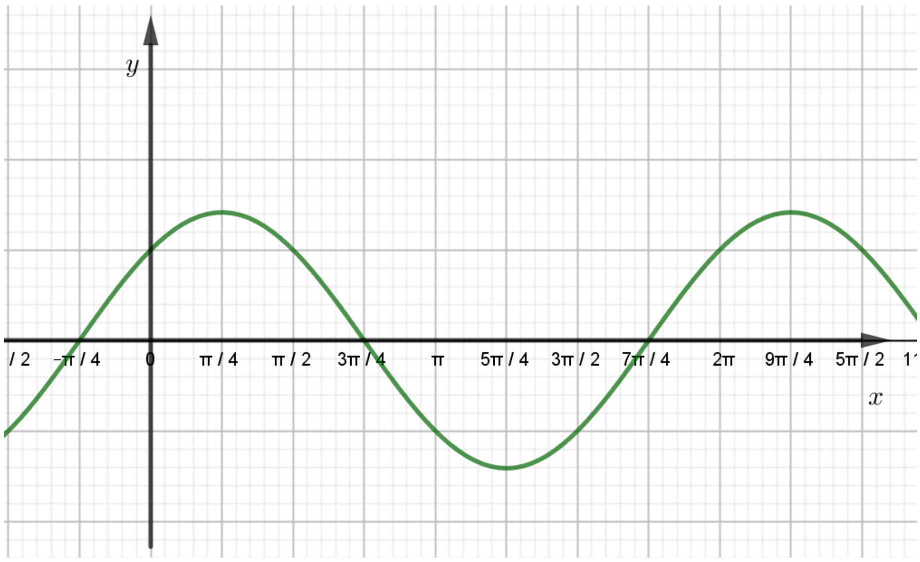
FUNZIONI SINUSOIDALI

SCHEDA 2

Somma di funzioni sinusoidali

Cosa si ottiene sommando due funzioni sinusoidali?

1) Cominciamo per esempio inserendo nella barra di inserimento $y = \sin x + \cos x$



Osserviamo che si tratta di una funzione sinusoidale di periodo 2π con ampiezza maggiore di 1 e traslata.

Osservando il grafico ci accorgiamo che la traslazione è di $\frac{\pi}{4}$ e che l'ampiezza vale

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Infatti inseriamo $y = \sqrt{2} \cdot sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (ricorda che per inserire $\sqrt{2}$ devi digitare sqrt(2)) otteniamo un grafico che si sovrappone al precedente!

2) Crea due slider *a*,*b* e inserisci

$$\boxed{y = a \cdot senx + b \cdot \cos x}$$

Cosa si ottiene al variare di a e b?

Stampa degli esempi.

Nota: supponiamo che la funzione $y = a \cdot senx + b \cdot \cos x$ corrisponda a $y = A \cdot sen(x + \varphi)$.

Se sviluppiamo $sen(x + \varphi)$ con la formula di addizione abbiamo

$$A \cdot (senx \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot sen\varphi) = (A \cdot \cos\varphi) \cdot senx + (A \cdot sen\varphi) \cdot \cos x$$

e quindi perché le due equazioni risultino uguali dovrà essere:

$$\begin{cases} A \cdot \cos\varphi = a \\ A \cdot sen\varphi = b \end{cases}$$

Quindi, dividendo membro a membro si avrà che:

$$\frac{A \cdot sen\varphi}{A \cdot \cos\varphi} = \frac{b}{a} \rightarrow tg\varphi = \frac{b}{a} \rightarrow \varphi = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

($arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ indica l'angolo, compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, la cui tangente è uguale $\frac{b}{a}$).
Infine per determinare l'ampiezza A possiamo sostituire in una delle due uguaglianze oppure, dopo aver elevato al quadrato, sommare e ricavare A:

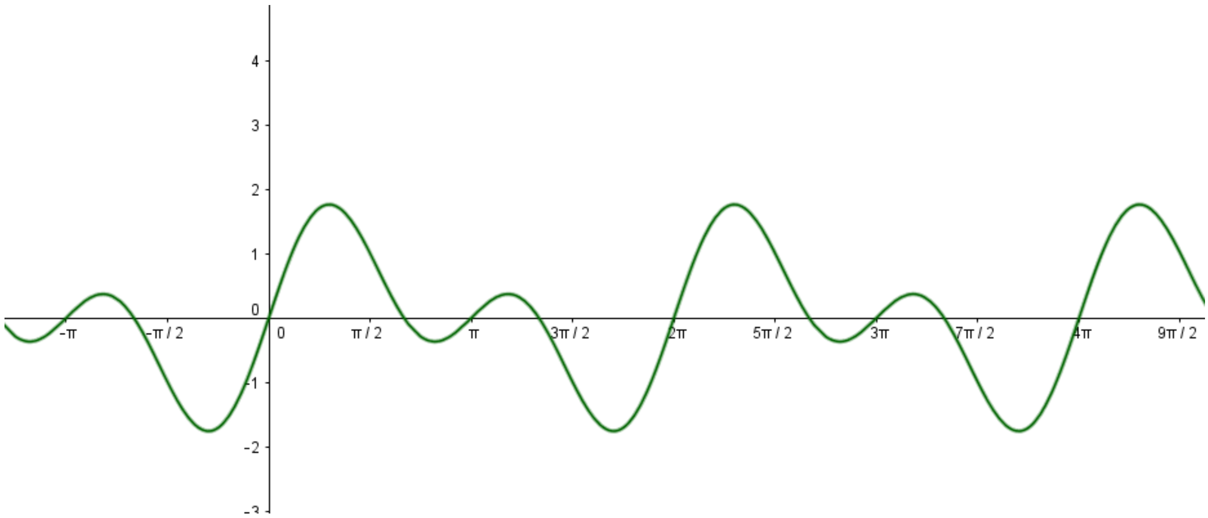
$$A^2 \cdot sen^2\varphi + A^2 \cdot \cos^2\varphi = a^2 + b^2 \rightarrow A^2 \cdot (sen^2\varphi + \cos^2\varphi) = a^2 + b^2 \rightarrow A^2 = a^2 + b^2 \rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Infatti nell'esempio iniziale avevamo $a = 1, \quad b = 1 \rightarrow A = \sqrt{2}, \quad \varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4}$

Esercizio: trova A e φ nel caso in cui $y = \sqrt{3}senx + \cos x$

3) Vediamo ora cosa otteniamo sommando funzioni sinusoidali di diverso periodo.

Cominciamo inserendo l'equazione $y = \sin(x) + \sin(2 * x)$



Quindi in questo caso non si ottiene una funzione sinusoidale, ma si ottiene comunque una funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ (come si osserva dal grafico).

Infatti sommando una funzione periodica di periodo 2π (senx) con una funzione periodica di periodo π (sen2x) è chiaro che il minimo valore per cui si ritrovano gli stessi valori per entrambe, e quindi per la loro somma, è 2π .

Esercizio: per ciascuna delle seguenti funzioni indica se sono periodiche e in caso affermativo determina il periodo.

a) $y = \sin(2 * x) + \sin(3 * x)$

b) $y = \sin(2 * x) + \sin(4 * x)$

c) $y = \sin((5/2) * x) + \sin((5/3) * x)$

d) $y = \sin(x) + \sin(2 * pi * x)$

e) $y = \sin((pi * x) + \sin((2 * pi * x)$

In generale in quale caso la funzione $y = \sin(k_1 x) + \sin(k_2 x)$ risulta periodica? E in caso affermativo qual è il suo periodo?

FUNZIONI SINUSOIDALI

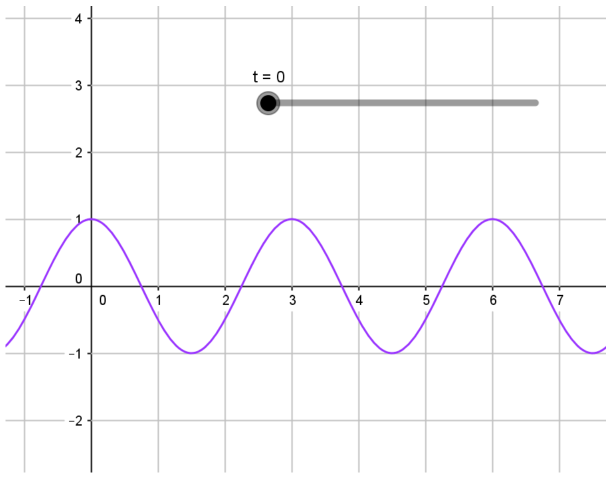
SCHEDA 3

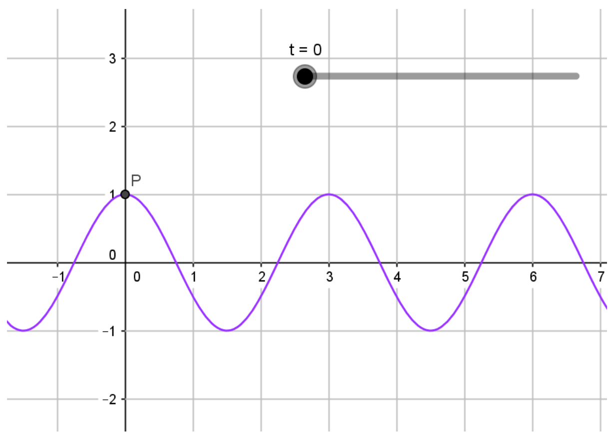
Equazione di un'onda armonica

Proviamo a simulare con Geogebra la propagazione di un'onda armonica trasversale su una corda.
Ricordiamo che l'equazione di un'onda armonica lungo una corda è del tipo

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

dove *y* rappresenta lo spostamento di un punto del mezzo materiale (corda) che si trova a distanza *x* dalla sorgente, A l'ampiezza dell'onda, T il periodo e λ la lunghezza d'onda.
Consideriamo per esempio un'onda che abbia $A = 1cm$ T=1 s ; $\lambda = 3$ cm.
Creiamo lo slider tempo t facendolo variare per esempio da 0 a 3 con incremento 0.01 , con crescente una sola volta e velocità 4 (per ottenere un risultato più realistico) e inseriamo l'equazione $y = \cos(\frac{2\pi}{3} * x - \frac{2\pi}{1} * t)$.
Se poniamo t=0 compare la configurazione in figura in cui si vede che la lunghezza d'onda risulta $\lambda = 3$: il grafico è come una "foto" scattata all'istante t=0.





Creiamo un punto P con il tasto apposito "punto su oggetto" in modo che appartenga alla curva e quindi rappresenti un punto della corda che sta oscillando: possiamo per esempio prendere (0,1) che per $t = 0$ si trova sul grafico.

Per simulare la propagazione dell'onda basta cliccare sullo **slider t** con il tasto destro del mouse scegliendo **"animazione attiva**: in questo modo faremo scorrere il tempo e vedremo l'onda propagarsi verso destra mentre il punto P oscilla verticalmente intorno alla sua posizione di equilibrio.

Esercizio : crea anche gli slider A (ampiezza),T (periodo) e λ (lunghezza d'onda) e inserisci di nuovo l'equazione d'onda utilizzando tutti i parametri.

Varia un parametro per volta, stampa i tuoi esempi e fai le tue osservazioni.

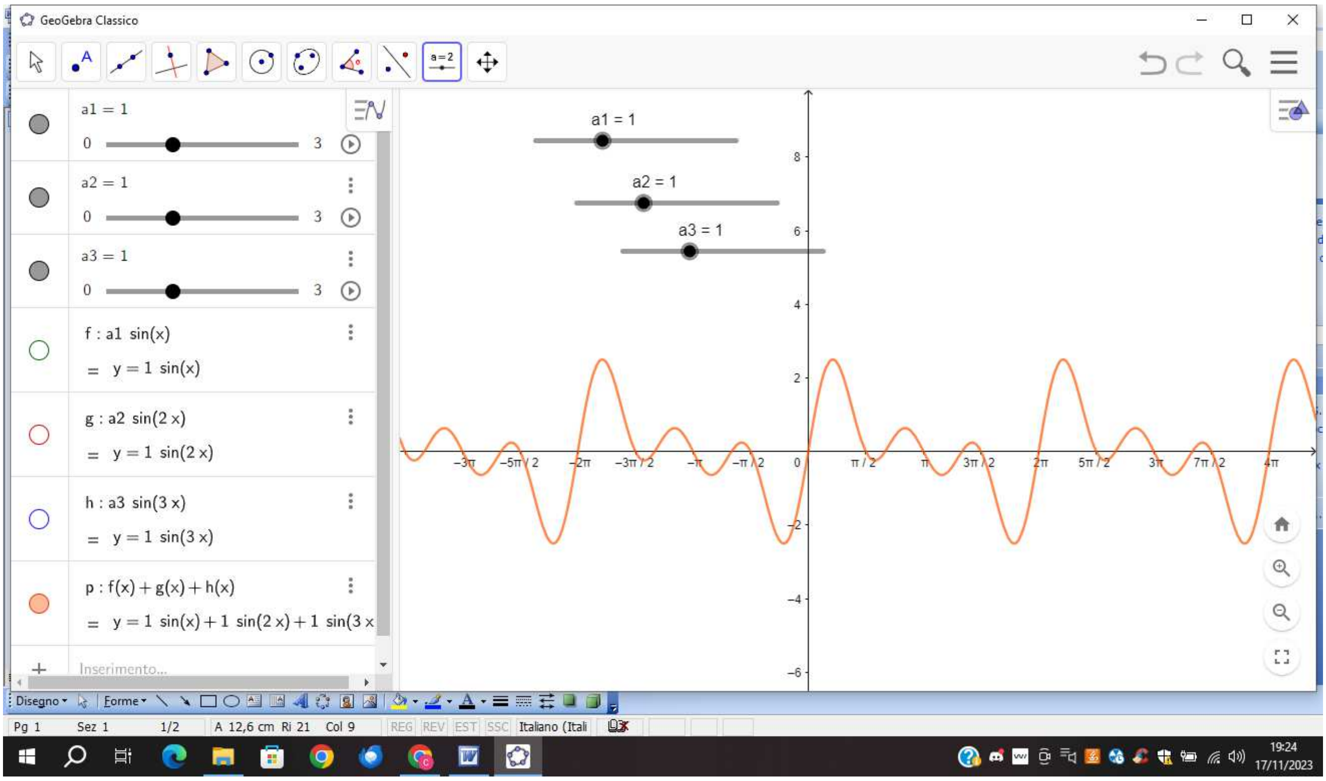
FUNZIONI SINUSOIDALI
SCHEDA 4

Composizione armonica di un'onda sonora

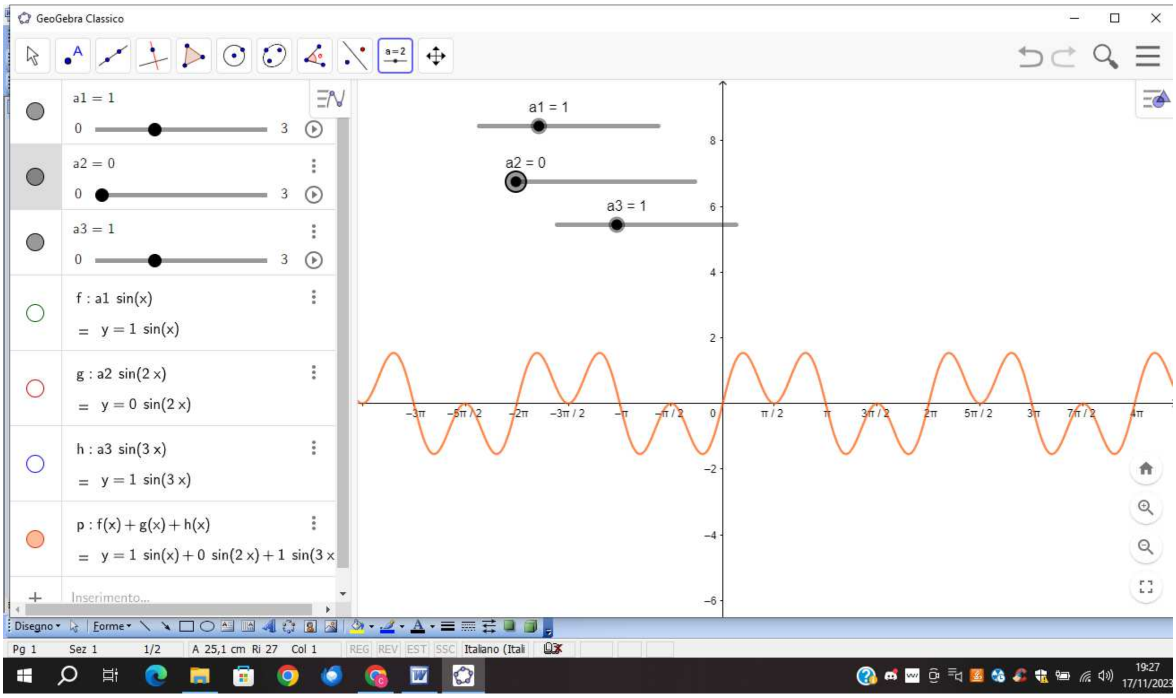
Qualsiasi suono complesso (non sinusoidale) di frequenza *f* può essere ottenuto sommando suoni puri (sinusoidali) di frequenze *f*, 2*f*, 3*f* ecc. di opportuna ampiezza a1, a2, a3 ecc.

Considereremo per semplicità solo suoni composti da 3 "armoniche": creiamo solo 3 slider a1, a2, a3 che definiamo tra 0 e 3 con incremento 1 (per semplicità).

Inseriamo le equazioni delle tre sinusoidi:
$y = a_1 \cdot \sin x$, $y = a_2 \cdot \sin 2x$, $y = a_3 \sin 3x$ (che saranno etichettate con f, g, h e avranno frequenza *f*, 2*f*, 3*f* con $f = \dfrac{1}{2\pi}$) e inseriamo la loro somma scrivendo $y = f + g + h$ (che sarà etichettata con p).
Se nascondiamo f,g,h e gli assi avremo (per i valori a1=1, a2=1, a3=1) la funzione seguente che avrà una forma non sinusoidale ma ancora frequenza *f* :



Possiamo variare gli slider e vedere come varia la forma del suono complesso che ha le tre armoniche di ampiezze a1, a2, a3.
Per esempio azzerando a2 (cioè eliminando l'armonica (la sinusoide) con frequenza 2*f* otteniamo una forma molto diversa:



Esercizio

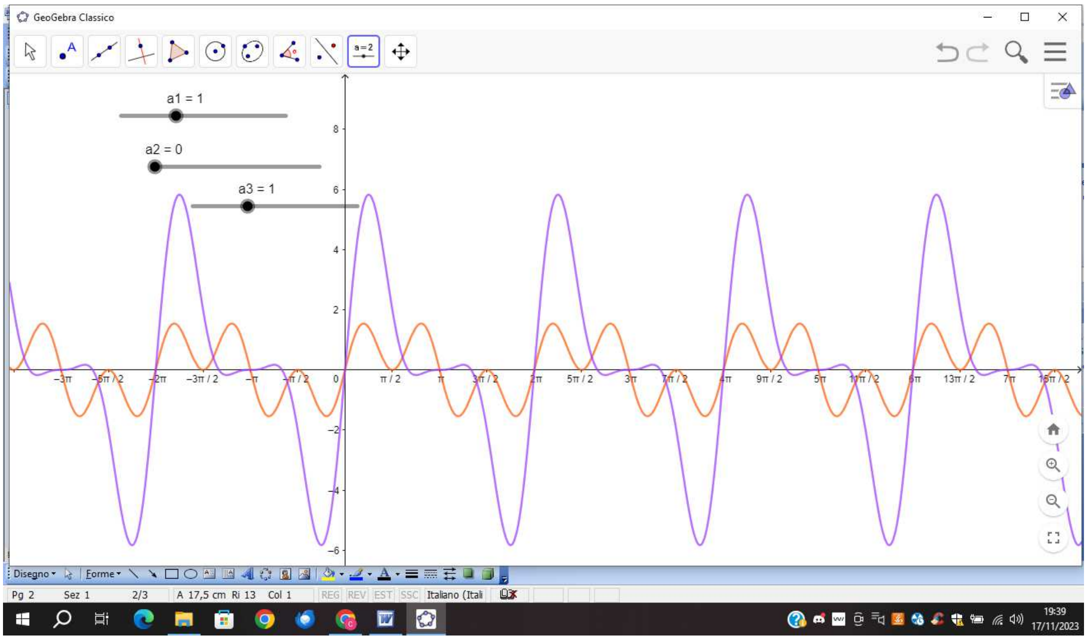
Prova a realizzare un "gioco" in cui viene disegnata una funzione $y = b_1 \cdot \sin x + b_2 \cdot \sin 2x + b_3 \cdot \sin 3x$ in cui b1,b2,b3 sono scelti in modo random (la funzione verrà etichettata come q) scrivendo b1=randombetween[0,3] ecc. se per esempio vogliamo che vengano scelti tra 0,1,2,3.
Colora la funzione con il blu e la precedente funzione p di rosso.
Inserendo il comando:

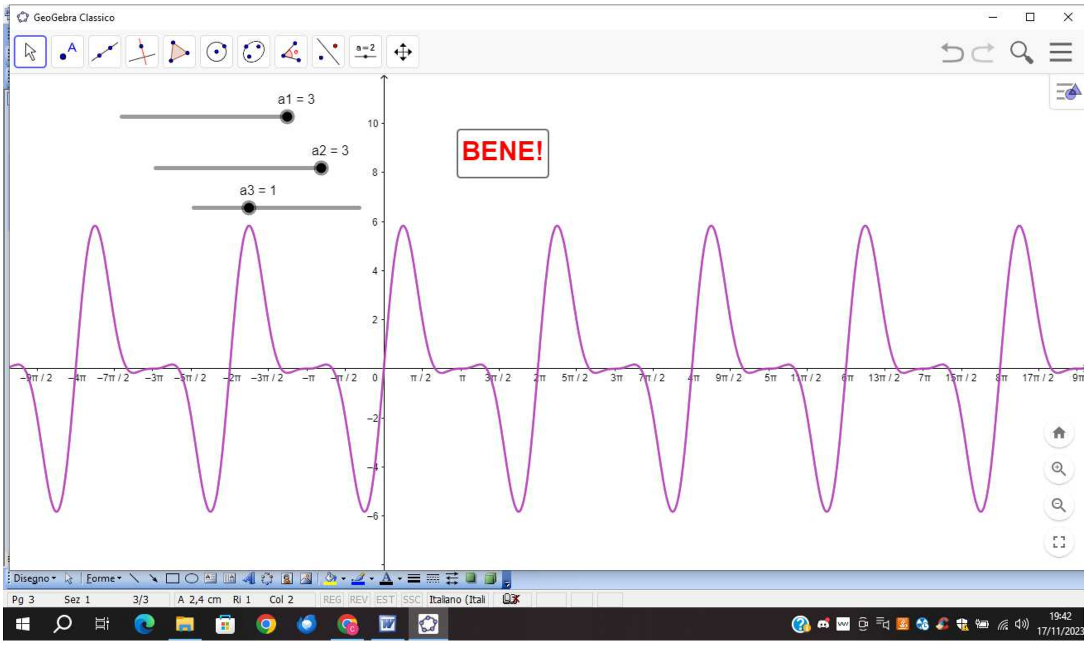
se(p==q, "BENE")

otterrai che quando vari i valori di a1, a2, a3 ed ottieni la coincidenza delle due funzioni ti comparirà la scritta "BENE!" (puoi anche scrivere "indovinato!") cioè hai indovinato i valori delle ampiezze delle tre armoniche che compongono il suono complesso blu generato a caso.

Naturalmente devi nascondere la vista algebra (altrimenti vedi quali sono i valori casuali scelti).

Esempio:





Esercizio 2

Registra un suono e visualizzane la forma con un'applicazione dello smartphone che simula un oscilloscopio (per esempio emetti un suono con la tua voce): inserisci l'immagine che ottieni con l'applicazione e che rappresenta la "forma" del suono registrato.

Ricercane la sua composizione armonica con Geogebra cioè cerca di trovare la giusta combinazione dei parametri delle prime tre armoniche per avvicinarsi il più possibile alla "forma" dell'onda sonora registrata.

FUNZIONI SINUSOIDALI
SCHEDA 5

Il fenomeno dei battimenti

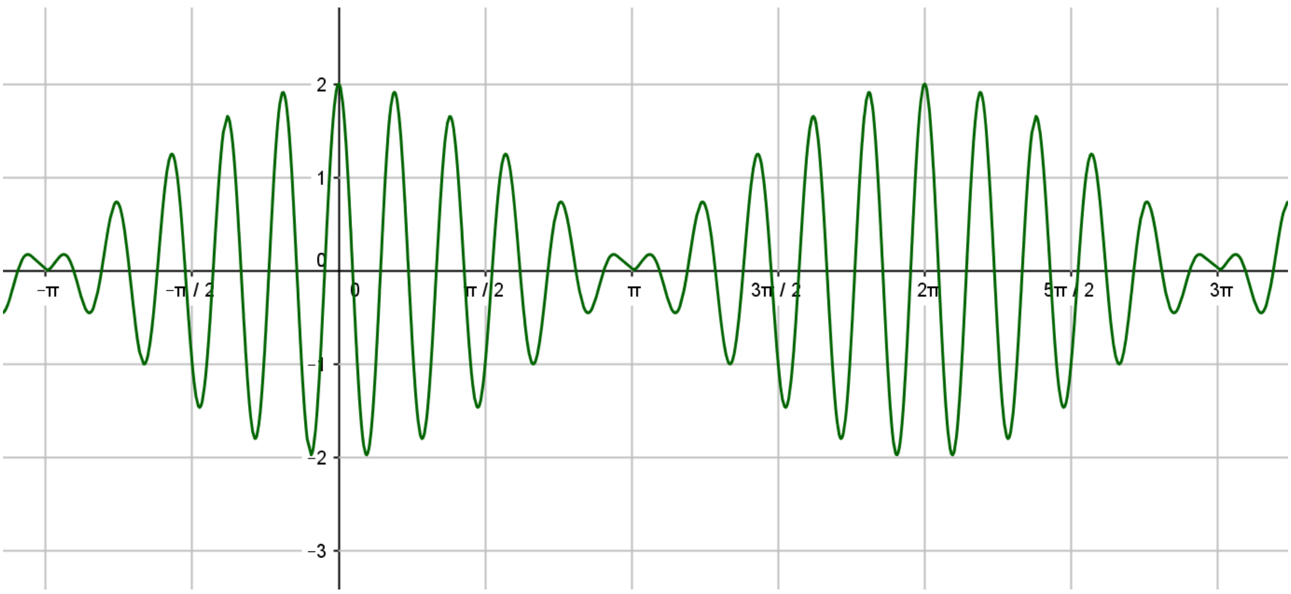
Se sommiamo due onde armoniche di **stessa ampiezza e frequenza molto vicina** otteniamo un'onda periodica la cui ampiezza varia come in figura: si parla di "**battimenti"** perché se le onde sono onde sonore si percepiscono delle "ondate" di intensità maggiore ad intervalli regolari (appunto i battimenti).

Considera l'oscillazione complessiva di un punto al variare del tempo

$$y = \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

Prendi per esempio $2\pi \cdot f_1 = 10 \rightarrow f_1 = \dfrac{10}{2\pi}$ e $2\pi \cdot f_2 = 11 \rightarrow f_2 = \dfrac{11}{2\pi}$ e ,sostituendo per semplicità al tempo la variabile x , inserisci:

$$y = \cos(10x) + \cos(11x)$$



Si osserva che la frequenza dei "battimenti" risulta $\dfrac{1}{2\pi}$ e quindi è la differenza tra f_2 e f_1.

Esercizio

Inserisci un altro esempio, stampalo e verifica che la frequenza dei "battimenti" risulta sempre $f_2 - f_1$.

FUNZIONI SINUSOIDALI

SCHEDA 6

Simulazione di un'onda stazionaria su una corda fissata ai due estremi

Vediamo come possiamo simulare con Geogebra le oscillazioni chiamate onde stazionarie che si possono avere su una corda di lunghezza L fissata ai due estremi.

Ricordiamo che le onde stazionarie si ottengono quando la corda viene eccitata con onde di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$.

L'onda stazionaria si ha per l'interferenza tra l'onda progressiva

$$y = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

con l'onda regressiva

$$y = -A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

che viene riflessa "capovolta" quando l'onda arriva all'estremo destro.

Prendi per esempio $\lambda = 6$, $A = 1$, $T = 1$.

Crea lo slider t variabile per esempio tra 0 e 5 con incremento 0.01 , crescente solo una volta e velocità 2.

Inserisci

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{6} \cdot x - \frac{2\pi}{1} \cdot t\right), 0 \le x \le 6$$

$$y = -\cos\left(\frac{2\pi}{6} \cdot x + \frac{2\pi}{1} \cdot t\right), 0 \le x \le 6$$

Inserisci poi **la somma** tra le due funzioni (se vengono nominate f e g basterà scrivere f+g nella barra di inserimento) , nascondi le due onde lascando visibile solo la loro somma e scegli per lo slider t **animazione attiva**: vedrai l'onda stazionaria oscillare con un nodo centrale oltre ai nodi negli estremi.

Esercizio 1

Riporta qualche "foto" dell'onda al variare di t evidenziando un punto sulla corda per seguirne le oscillazioni.

Esercizio 2

Crea un altro slider n variabile tra 1 e 5 con incremento 1 e inserisci da tastiera $\lambda = \frac{12}{n}$.

Inserisci nella barra di inserimento l'onda progressiva e l'onda regressiva di lunghezza d'onda λ, periodo $T = 1$ s e ampiezza $A = 1$ cm e sommale: verifica che al variare di n si hanno le diverse onde stazionarie che si possono avere sulla corda.

Stampa i vari casi.

TRIGONOMETRIA
SCHEDA 1

Costruzione di un triangolo

Sappiamo che un triangolo è univocamente determinato se conosciamo:

- due lati e l'angolo compreso;
- un lato e due angoli;
- tre lati (purché ogni lato sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza)

Esercizio 1

Supponendo di adottare l'usuale convenzione di indicare con *a* il lato opposto al vertice A, ecc. e con α l'angolo di vertice A ecc., costruisci , utilizzando gli opportuni strumenti di Geogebra e spiegando passo passo la tua costruzione, un triangolo avente:

- a=10, b=8, $\gamma = 30°$
- a=10, $\beta = 45°$, $\gamma = 70°$
- a=10, b=8 , c=5

Esercizio 2

Se si conoscono due lati e un angolo non compreso tra essi il triangolo è individuato?

Considera per esempio a=6 , b=8 $\alpha = 45°$.

Suggerimento: parti dal disegnare il segmento $\overline{AC} = b = 8$ e l'angolo $\hat{A} = 45°$ con il comando angolo di una data misura (e poi traccia la semiretta di origine A).
Traccia la circonferenza di centro C e raggio *a* …
Trovi un solo triangolo?

Considerando b=8 e $\alpha = 45°$ **per quali valori di *a*** si ha

nessun triangolo………………………..

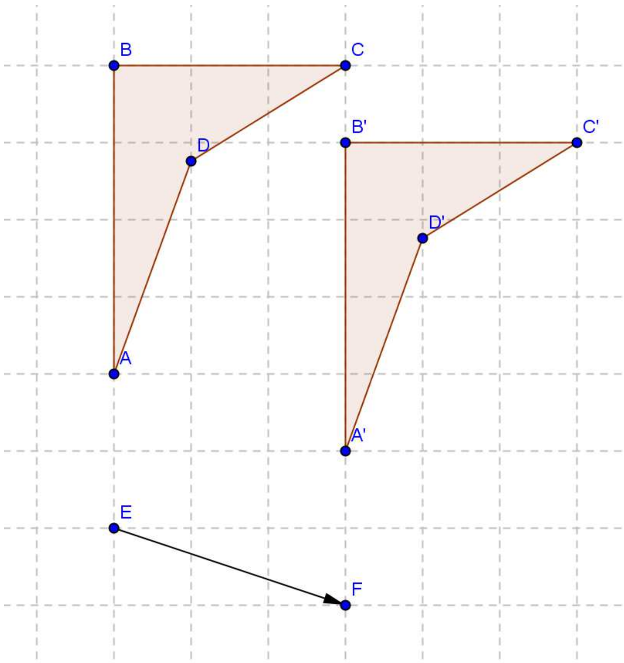
un solo triangolo …………………………

due triangoli……………………………….

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 1

Traslazione

Disegniamo un poligono (comando poligono), disegniamo un vettore (comando vettore tra due punti) e poi attiviamo il comando "traslazione": selezioniamo il poligono e poi il vettore traslazione e otterremo una copia del poligono traslata.
Per esempio:



Osservazioni

Prova a trascinare qualche punto del poligono variandone così la forma: cosa osservi?
Come risultano i lati corrispondenti del poligono iniziale e del poligono traslato?
Prova a modificare anche il vettore traslazione e stampa qualche esempio.

Domanda

Se abbiamo traslato una figura di un vettore $\vec{v}$ con quale traslazione possiamo ritornare alla situazione iniziale?
Stampa un esempio.

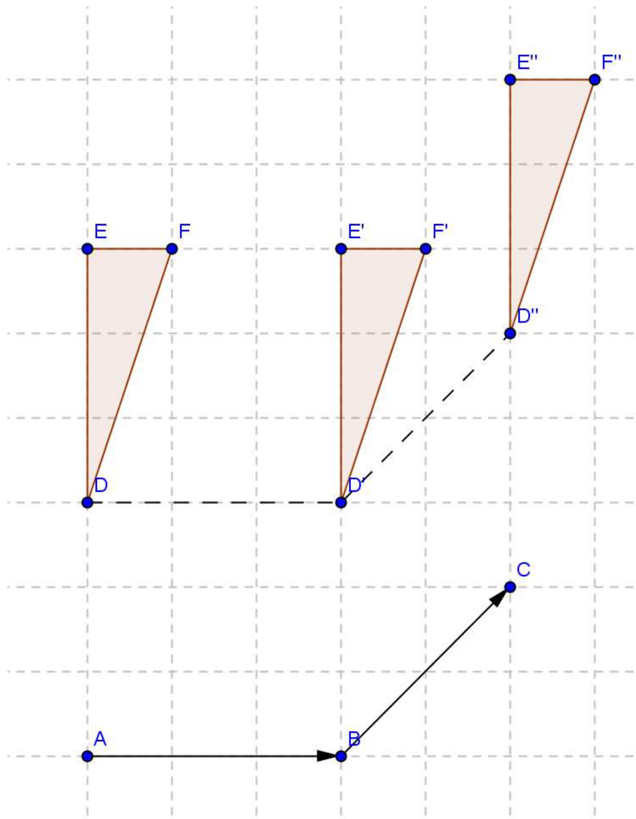
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

SCHEDA 2

Composizione di due traslazioni

Eseguendo in successione cioè componendo due traslazioni, che indicheremo con t_{v_1} e t_{v_2} , come si trasforma una figura?

Applichiamo ad un poligono la traslazione del primo vettore e poi , sul risultato, la traslazione del secondo vettore : possiamo ottenere il poligono finale direttamente dal poligono iniziale con una sola traslazione?
Descrivi quale traslazione dobbiamo fare per saltare il passaggio intermedio e fai una verifica della tua congettura (puoi aiutarti lavorando sul piano quadrettato).

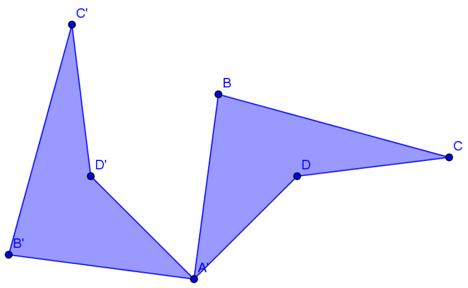


TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

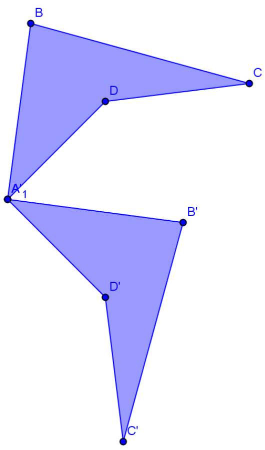
SCHEDA 3

Rotazione

Disegniamo un poligono e scegliamo il comando "rotazione": per ruotare il poligono dobbiamo selezionarlo e selezionare il centro di rotazione (cliccare su un punto) , la misura in gradi dell'angolo di rotazione e il verso della rotazione (introducendo questi dati nella finestra che si apre).
Per esempio nel disegno seguente il poligono iniziale è stato ruotato intorno al suo vertice A di 90° in senso antiorario.



Possiamo ottenere lo stesso risultato anche ruotando la figura di 270° in senso orario (prova) .
Nella figura seguente il poligono è stato ruotato di 90° in senso orario (oppure di 270° in senso antiorario).
Fai anche tu qualche prova di rotazione e stampala.



Esercizio 1
Verifica che se $r \to r'$ cioè la retta *r* si trasforma nella retta *r'* applicando la rotazione $R(O,\alpha)$, le rette *r* e *r'* formano un angolo uguale ad α .

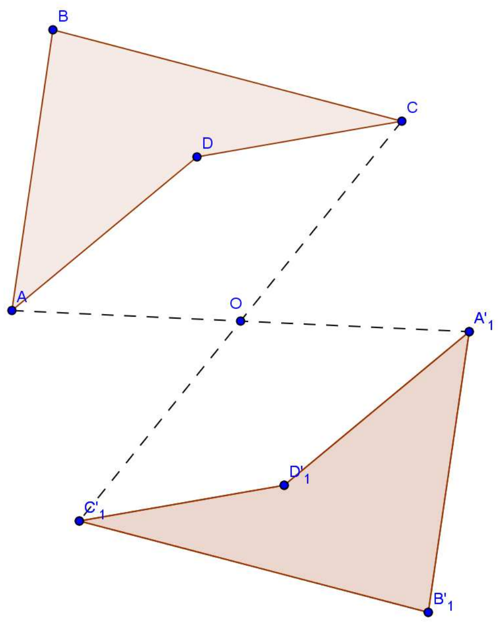
Esercizio 2
Crea uno slider α (tipo angolo) da inserire come angolo di rotazione e assegnagli un incremento a scelta: disegna una figura poligonale a piacere e poi (dopo aver attivato la traccia) ruotala intorno ad un punto scelto a piacere dell'angolo α e poi muovi lo slider. Per quali valori dell'incremento di α la figura "si chiude" cioè si torna dopo un certo numero di rotazioni alla figura iniziale?
Stampa i tuoi esempi.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

SCHEDA 4

Rotazione di 180°

Proviamo a ruotare di 180° intorno ad un punto O un poligono:



Osservazioni

Sia ruotando in verso orario che antiorario il risultato è lo stesso.
Se eseguendo la rotazione $A \rightarrow A'$ si osserva che O è il punto medio del segmento AA' e questo vale per tutte le coppie di punti corrispondenti secondo questa trasformazione.

La rotazione di 180° intorno ad un punto O viene anche chiamata **simmetria di centro O** e in Geogebra c'è anche un apposito pulsante indicato con la dicitura "simmetria centrale".

Prova ad utilizzare il comando "simmetria centrale" rispetto ad un punto O e verifica che ottieni lo stesso risultato che ruotando la tua figura di 180° intorno ad O.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 5

Equazione della rotazione

Sappiamo che l'equazione della rotazione $R(O,\alpha)$ (O= origine del sistema di riferimento) è

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha \cdot x - sen\alpha \cdot y \\ y' = sen\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{cases}$$

Con Geogebra possiamo applicare la trasformazione utilizzando la matrice corrispondente alla sua equazione.

Nel nostro caso la matrice è

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Supponiamo di voler ruotare un poligono che abbiamo costruito con il comando "poligono" (per esempio il triangolo in figura) e che è stato denominato poli1.

Possiamo quindi procedere così:

- creiamo uno slider α che mi permetterà di cambiare l'angolo della rotazione (ricorda di indicare , quando definisci lo slider, che si tratta di un angolo e fallo variare per esempio da 0° a 360° con incremento di 10°);

- introduciamo la matrice dalla barra di inserimento digitando:

  $$M = \{\{\cos(\alpha), -\sin(\alpha)\}, \{\sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$$

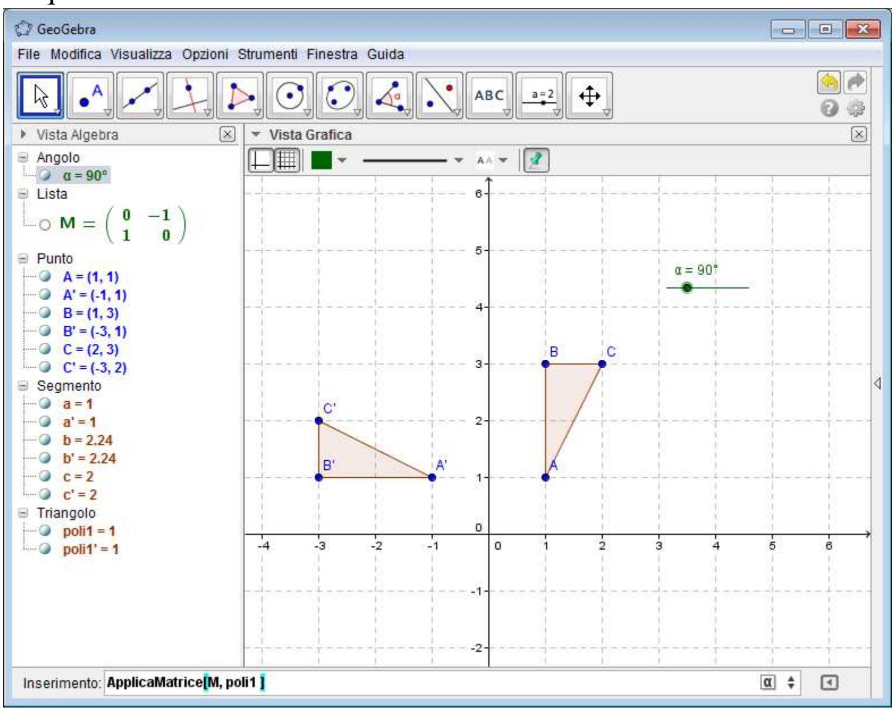
  (attenzione a digitare bene le parentesi: praticamente viene inserita la prima riga e la seconda riga);

- digitiamo nella barra di inserimento il comando

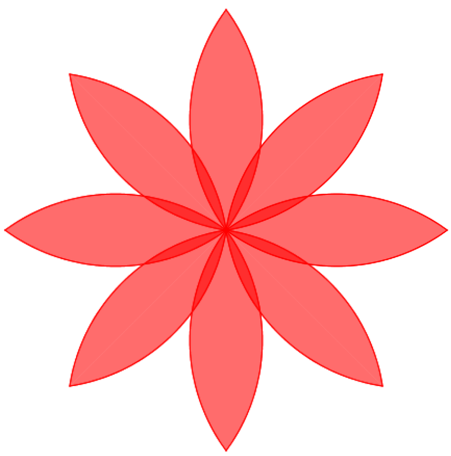
  applicamatrice[M,poli1]

Vedremo comparire sullo schermo il poligono ruotato di α (nella figura $\alpha = 90°$ e infatti i valori della matrice risultano $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se variamo lo slider α vedremo cambiare il poligono ruotato e arrivati a 360° torneremo sul poligono iniziale!
Prova a stampare qualche caso.



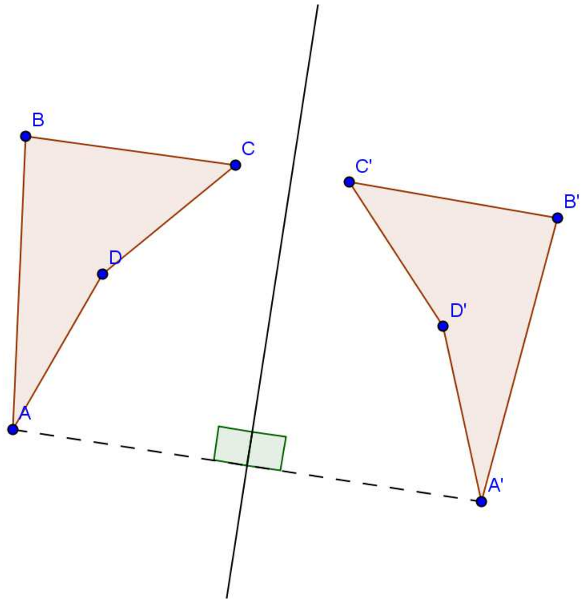
Esercizio: prova a disegnare un “petalo”di centro l’origine costruendo due archi c e c’(usa arco per tre punti e la simmetria assiale…) e poi inserisci applicatrice[M,c] e applica matrice[M,c’].
Variando lo slider α (dopo aver attivato la traccia di c e c’) e mettendo l’incremento di 45° dovresti ottenere un bel “fiore”!
(usa anche il colore….)



TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 6

Simmetria assiale

Disegniamo un poligono, tracciamo una retta e scegliamo il comando “simmetria assiale”: selezioniamo il poligono e poi l’asse di simmetria (la retta) per ottenere la figura simmetrica rispetto a quella retta.



Osservazione

Se osserviamo due qualsiasi punti corrispondenti , per esempio A e A’, ci accorgiamo che l’asse di simmetria è asse del segmento AA’.

Prova ad utilizzare il pulsante “muovi” e a trascinare qualche vertice del poligono oppure a cambiare l’asse di simmetria e verifica che l’asse di simmetria è sempre l’asse dei punti corrispondenti.

Osserva inoltre che se una retta è perpendicolare all’asse di simmetria la retta simmetrica coincide con la retta stessa ma si scambiano le due semirette individuate dall’intersezione con l’asse.

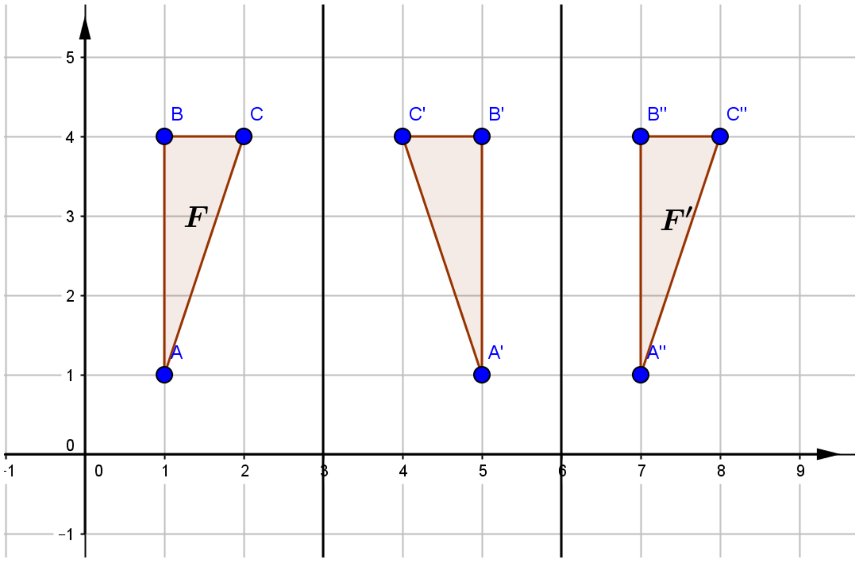
Se un poligono viene trasformato con una simmetria assiale e poi sul poligono trasformato eseguiamo la stessa simmetria assiale, torniamo al poligono di partenza: questo significa che “componendo” cioè eseguendo in successione la stessa simmetria assiale è come se non si fosse realizzata nessuna trasformazione
Se indichiamo la simmetria di asse r con S_r scriveremo che $S_r \circ S_r = identità$ ($\circ$ è il simbolo della composizione).
Questo non accadeva né per le traslazione né per le rotazioni eccettuata quella di 180°.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 7

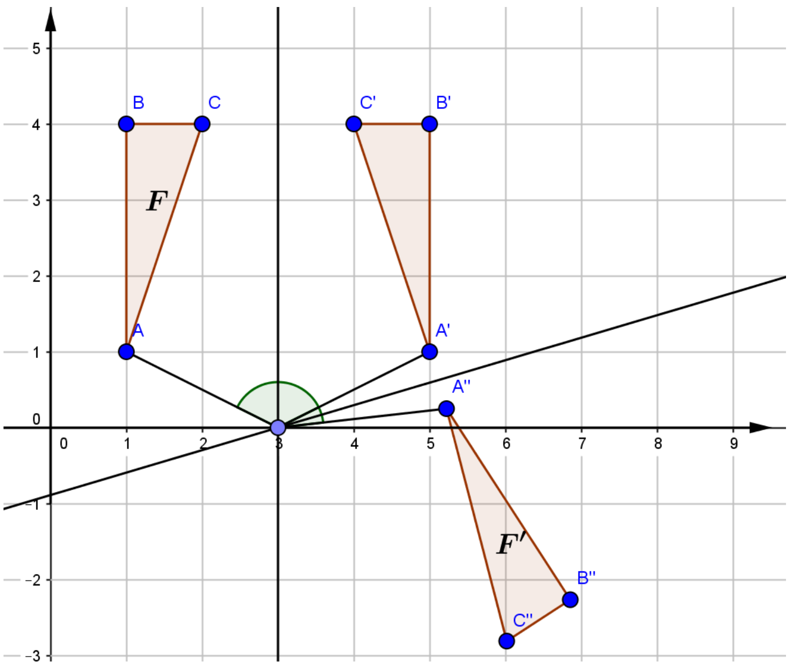
Composizione di due simmetrie assiali

a) Composizione di due simmetrie con **assi paralleli**

Fai un esempio come in figura: le figure F e F’ sembrano traslate di un determinato vettore: quale?



b) Composizione di due simmetrie con **assi incidenti**
Fai un esempio come in figura: le figure F e F’ sembrano ruotate: intorno a quale punto e di quale angolo?



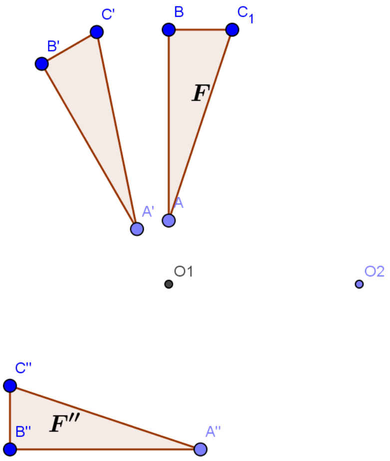
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 8

Composizione di due rotazioni

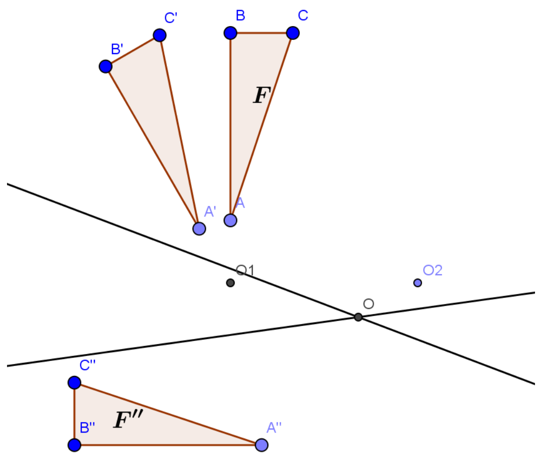
1) Composizione di due rotazioni con lo stesso centro
Disegna un poligono, scegli un punto O e applica al tuo poligono per esempio prima $R(O;\alpha)$ e poi $R(O;\beta)$: cosa si ottiene?
Stampa il tuo esempio.

2) Composizione di due rotazioni con centri diversi

Componi per esempio una rotazione di centro O_1 e angolo 30° con una rotazione di centro un altro punto O_2 e angolo 60° come in figura: poiché la figura iniziale e finale hanno lo stesso orientamento se vogliamo ottenere la figura finale con un'unica trasformazione, questa sarà sicuramente un'isometria diretta e poiché si nota che non può essere una traslazione sarà una rotazione e per determinare il centro di rotazione possiamo intersecare gli assi dei segmenti aventi per estremi punti corrispondenti, per esempio AA'', BB''.



Individuato il centro di rotazione O si può verificare che si ottiene la figura finale ruotando intorno ad O di $30° + 60° = 90°$



Esercizio
Disegna un poligono a piacere, scegli due centri di rotazione e due angoli: componi le rotazioni e verifica che la composizione corrisponde ad una rotazione (individua centro e angolo).

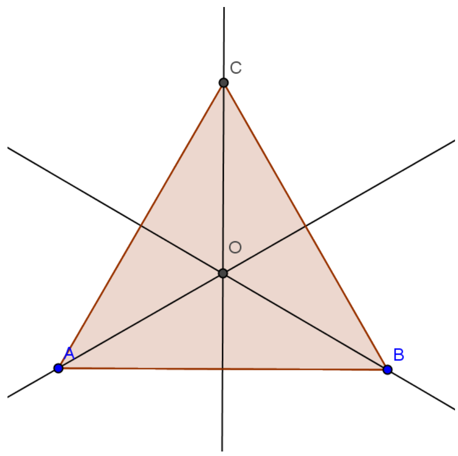
Ma si ottiene sempre una rotazione?
Prova a comporre la rotazione di centro O1 e angolo per esempio 60° (antiorario) con una rotazione di centro O2 e angolo 300° (antiorario): stampa il tuo esempio e fai le tue osservazioni.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

SCHEDA 9

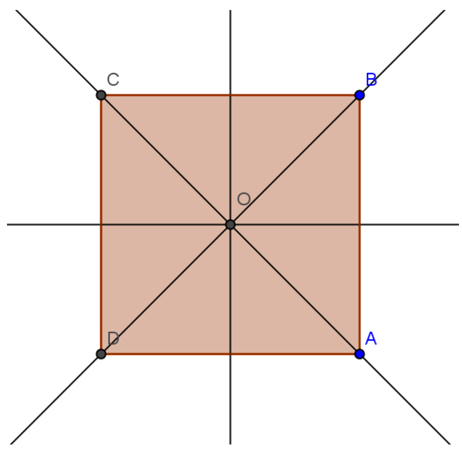
Isometrie che mutano una figura in se stessa

Il triangolo equilatero
Quali sono le isometrie che trasformano in se stesso un triangolo equilatero?
Dopo aver disegnato un triangolo equilatero (comando poligono regolare) traccia gli assi dei lati …..
Ci sono solo simmetrie assiali che trasformano il triangolo equilatero in se stesso?



E se il triangolo fosse solo isoscele?

Il quadrato
Quali isometrie trasformano in se stesso un quadrato?
Dopo aver disegnato un quadrato (comando poligono regolare) traccia le mediane e le diagonali.
Prova ad eseguire le simmetrie di assi le mediane e le diagonali: cosa osservi?
Ci sono altre isometrie che trasformano in se stesso il quadrato?



Esercizio: cerca le isometrie che trasformano in sé un rettangolo,un rombo e un parallelogramma.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 10

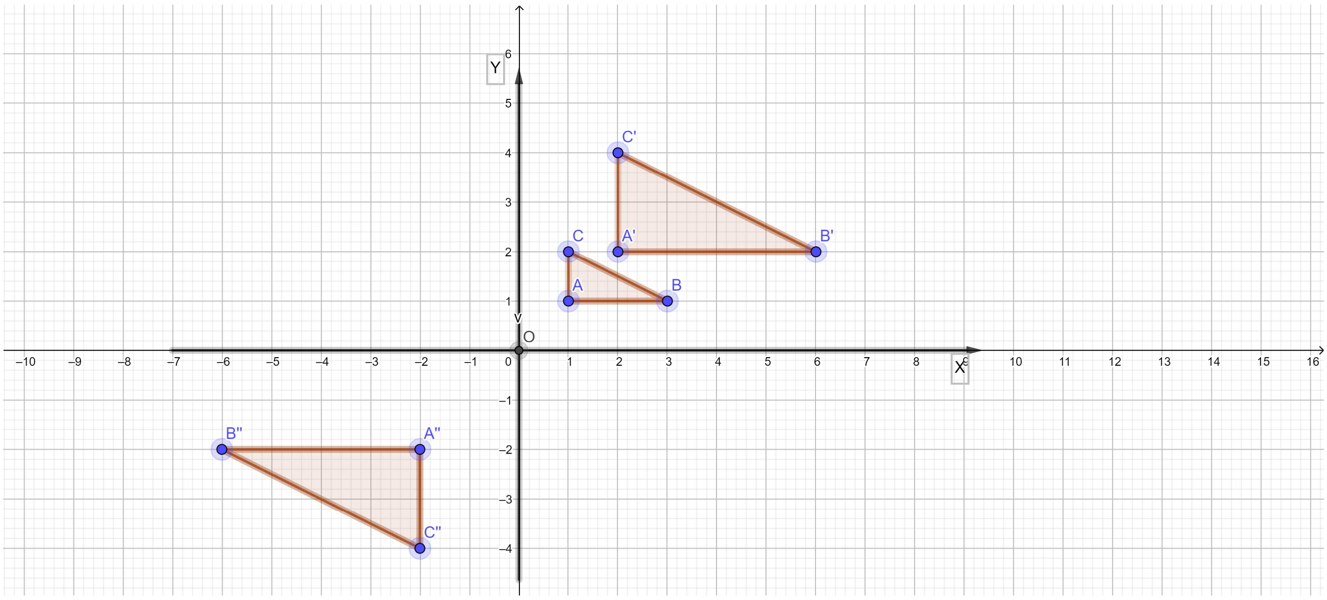
Omotetie

Per applicare ad una data figura un'omotetia di centro C e rapporto k possiamo utilizzare il comando "omotetia" di Geogebra: occorre selezionare l'oggetto a cui applicare l'omotetia, il centro dell'omotetia e poi digitare il rapporto di omotetia.

Prova ad utilizzare il comando e stampa degli esempi.

Cosa si ottiene componendo due omotetie?

a)Omotetie con lo stesso centro
Prova a fare un esempio come in figura.



b)Omotetie con centri distinti

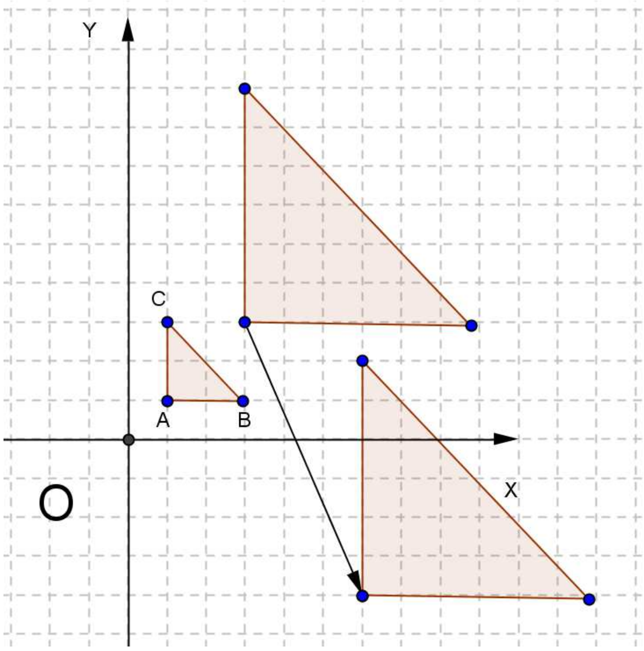
Prova a fare degli esempi.

Suggerimento: se consideri omotetie di rapporti k_1 e k_2
se $k_1 \cdot k_2 = 1$ si ha……………………………
se $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ si ha……………………………..

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 11

Similitudini

a) Componi un'omotetia di centro O(0;0) e rapporto $k = 3$ con una traslazione $t(3;-7)$ (considera come figura da trasformare un triangolo ABC, vedi esempio).



Scrivi le equazioni della similitudine ottenuta.

Prova ad invertire l'ordine di applicazione delle due trasformazioni: si ottiene la stessa similitudine?

b) Componi la stessa omotetia dell'esercizio precedente con una rotazione $R(O;90)$: stampa il disegno di come si trasforma il triangolo ABC e scrivi le equazioni della similitudine.

c) Componi la stessa omotetia dell'esercizio precedente con una simmetria rispetto all'asse y: stampa il disegno di come si trasforma il triangolo ABC e scrivi le equazioni della similitudine.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

SCHEDA 12

Similitudini “ricorsive”: i frattali

I frattali sono figure in cui la stessa struttura si ripete su scala via via più piccola (si parla anche di figure “autosimilari”).

Per disegnare un frattale con Geogebra possiamo utilizzare una “**macro”** : costruiamo un nuovo strumento (la macro) che , a partire da degli “oggetti iniziali” dopo una serie di operazioni (che costituiscono appunto la macro) genererà degli “oggetti finali”.

Facciamo un esempio e costruiamo una macro che, partendo da un punto A e un punto B disegni una “casina” di lato AB.

Tracciamo prima un segmento di estremi A,B e un quadrato di lato AB con il comando poligono regolare di 4 lati (possiamo anche colorarlo) ; disegniamo poi un triangolo rettangolo isoscele sopra al quadrato (tracciamo il punto medio del lato superiore del quadrato, la perpendicolare per il punto medio e dopo aver fatto l’ intersezione con la circonferenza di centro il punto medio e passante per il vertice del quadrato disegniamo il poligono “tetto” (che possiamo anche colorare).

A questo punto selezioniamo: **Strumenti - crea nuovo strumento** -

Compare una finestra in cui dobbiamo indicare quali sono gli oggetti finali, gli oggetti iniziali e il nome della macro.
Per inserire gli oggetti finali (cioè quadrato e triangolo) possiamo anche cliccarli sul foglio di lavoro (compariranno nella lista degli oggetti finali). Quindi abbiamo:

Oggetti finali: Poli1 poli2 (poli1 è il quadrato, poli2 è il triangolo)

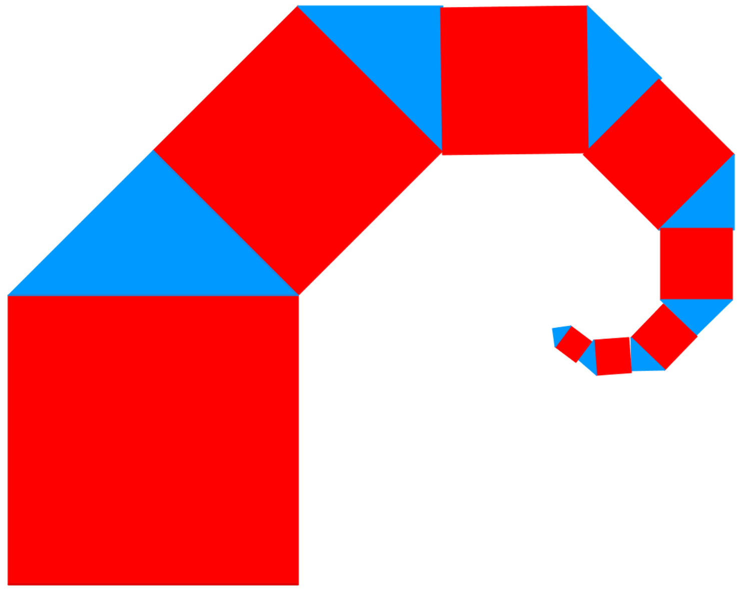
Oggetti iniziali: punto A , punto B

Nome dello strumento: casina

Fine

Nota: possiamo anche inserire un’**icona** che ci ricordi il risultato della macro (in caso contario comparirà semplicemente il simbolo di strumento cioè una chiave inglese): dobbiamo prima selezionare la nostra casina , esportala come immagine , salvarla e poi caricarla come “icona” del nostro strumento.

In questo modo abbiamo creato la macro “casina”: se quindi , dopo il primo disegno, attiviamo la macro e clicchiamo sul lato del tetto verrà disegnata un’altra casina (più piccola perché parte con il lato del quadrato più piccolo) e così via ..
Avremo quindi un disegno come il seguente:

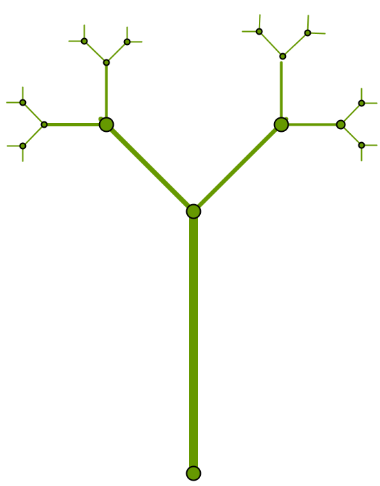


Nota : se vogliamo visualizzare tutta la nostra costruzione in sequenza possiamo usare i comandi

Opzioni – Avanzate – Preferenze grafici – Mostra pulsante Esegui

Impostando il tempo tra un'operazione e la successiva di 0,5 s e premendo Esegui sarà ripetuta in successione veloce tutta la vostra costruzione!
La costruzione può essere riportata all'inizio o anche solo indietro di una operazione con gli appositi pulsanti o stoppata in qualsiasi momento premendo il tasto Esegui.

Esercizio
Prova a definire un'altra macro per disegnare un albero come in figura…e poi costruisci il tuo frattale!



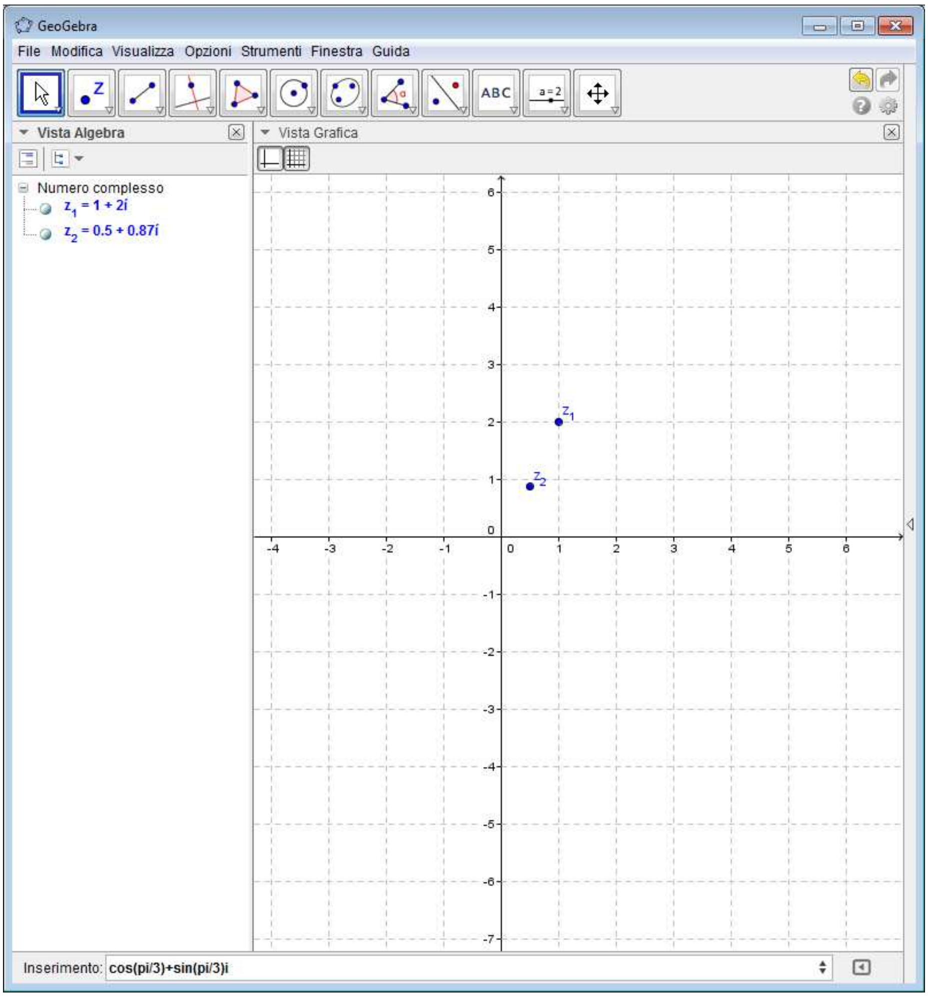
NUMERI COMPLESSI
SCHEDA 1

Il piano complesso

Geogebra consente di lavorare anche con i numeri complessi nella loro rappresentazione geometrica (piano complesso).
Possiamo **introdurre da tastiera**, nella barra di inserimento, l'espressione algebrica o trigonometrica di un numero complesso che comparirà nel piano complesso come punto z.
Proviamo per esempio a digitare (ricordando di scrivere a+bi e non a+ib) :

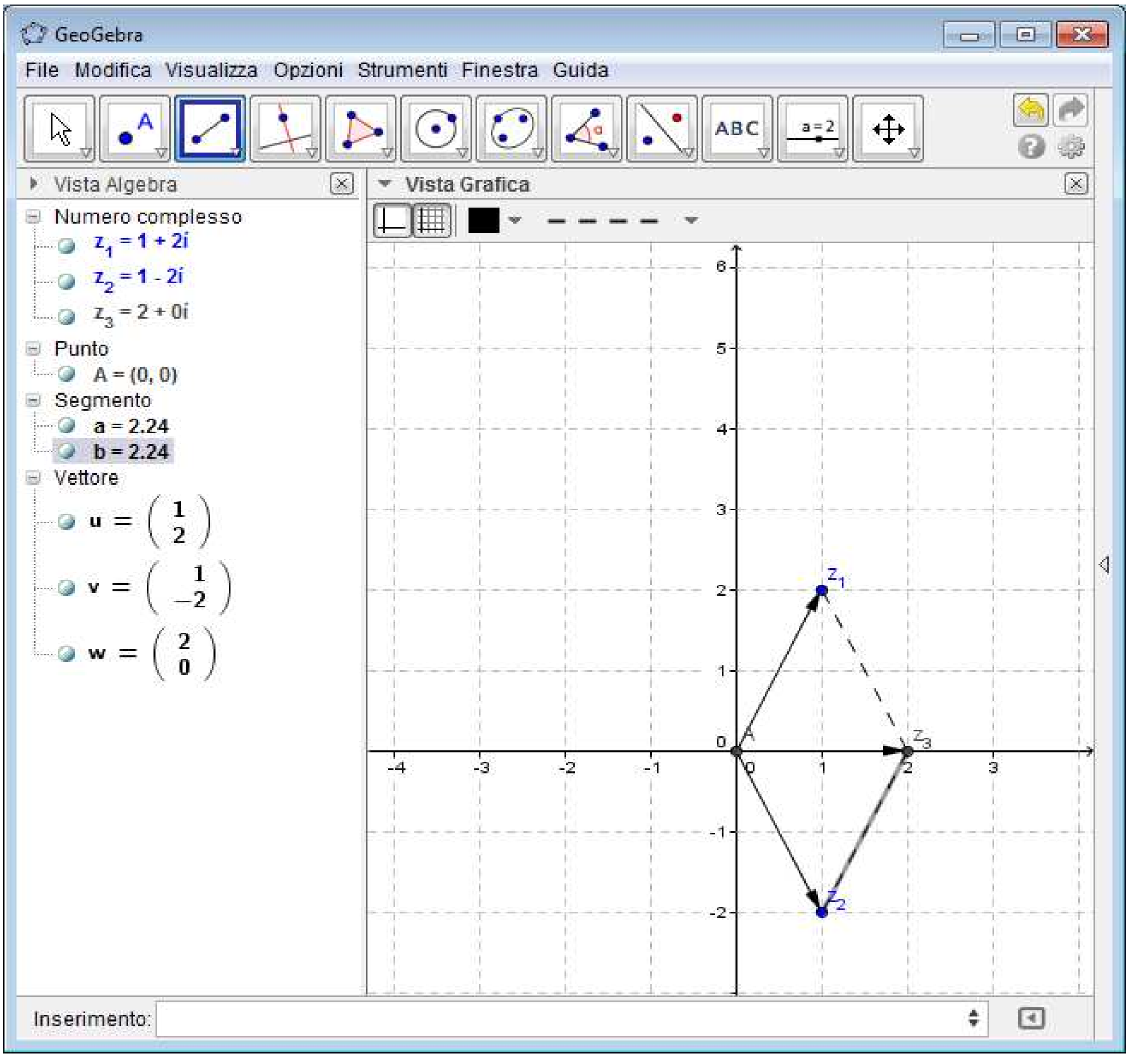
1+2i oppure cos(pi/3)+sin(pi/3)i

Avremo i punti z_1 , z_2 come in figura.



Proviamo a fare qualche operazione tra numeri complessi.

Consideriamo per esempio due numeri complessi coniugati : introduciamo da tastiera 1+2i 1-2i.
Se digitiamo z_1+z_2 otterremo il numero reale 2 (vedi figura).



Provate a sottrarre i due numeri complessi digitando z_1-z_2: cosa ottieni?

E moltiplicando i due numeri complessi coniugati cioè inserendo z_1*z_2 cosa si ottiene?

Esercizio
Inserisci da tastiera due numeri complessi z1 e z2: digita z1+z2, z1-z2,z1*z2, z1/z2 e controlla i risultati che compaiono nel piano complesso.

Nota: puoi direttamente creare punti sul piano complesso attivando il pulsante "numero complesso" (nella lista dei comandi sotto "nuovo punto") e vedrai comparire la corrispondente espressione algebrica nella finestra algebra (se è aperta). Prova a creare qualche punto.

NUMERI COMPLESSI
SCHEDA 2

Radici complesse dell'unità

Abbiamo visto che le soluzioni in campo complesso dell'equazione $z^n = 1$ sono date dai numeri complessi $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}$ con $k = 0,1,2,...n-1$.
Possiamo rappresentare queste soluzioni nel piano complesso utilizzando il comando di Geogebra "successione".
La sintassi del comando "successione"è :

successione[<oggetto dipendente da un parametro>,parametro,valore iniziale,valore finale]

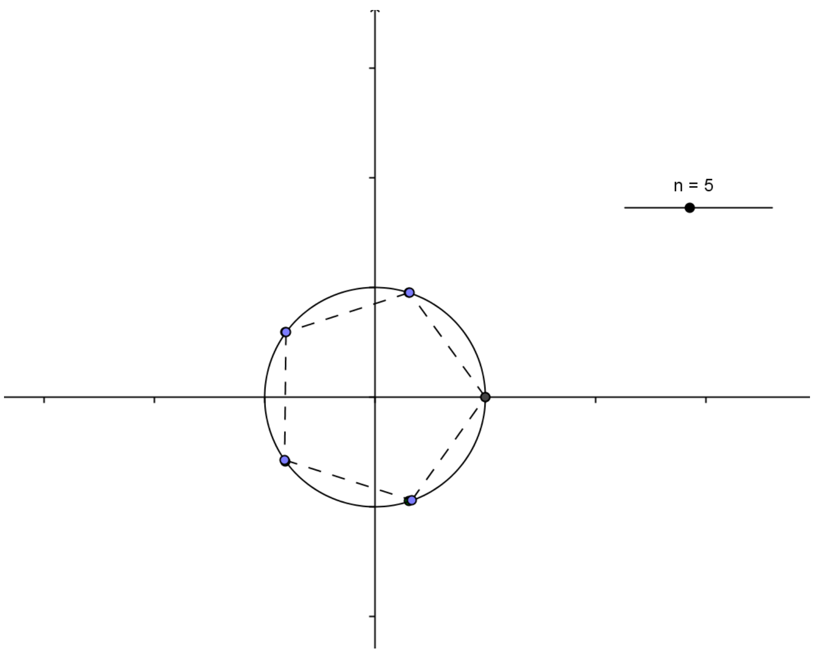
Se vogliamo per esempio far comparire i punti (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) possiamo digitare:

lista=successione[(1,k),k,1,4]

Nel nostro caso per avere una successione che disegni le soluzioni in campo complesso dell'equazione $z^n = 1$ possiamo creare uno slider n (variabile tra 1 e 10, per esempio, con incremento 1) e poi introdurre nella riga di inserimento:

soluzioni=successione[(cos(2*k*pi/n),sin(2*k*pi/n)),k,0,n-1]

(attenzione a non dimenticare nessuna parentesi!)
Se per esempio poniamo n=5 otterremo la figura seguente (i segmenti tratteggiati sono stati aggiunti per evidenziare che le soluzioni sono i vertici di un pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1). Prova a variare n e stampa vari casi.

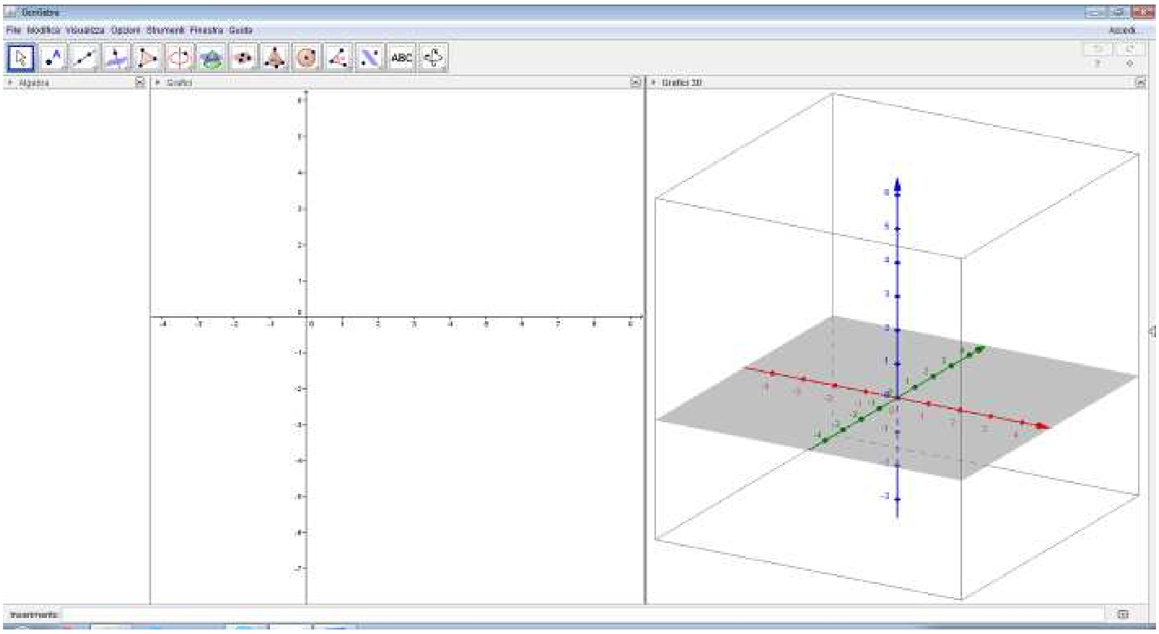


GEOMETRIA DELLO SPAZIO

INTRODUZIONE A GEOGEBRA 3D

La versione 5 di Geogebra prevede anche la possibilità di lavorare in ambiente 3D.
Basta aprire Visualizza - Grafici 3D: sullo schermo, oltre all'ambiente 2D con il sistema di riferimento (O,x,y), comparirà una terna di assi cartesiani (O,x,y,z) e **la barra degli strumenti 3D.**
(Possiamo fare comparire la barra dei comandi 2D/3D cliccando con il tasto del mouse sulla zona grafici 2D/3D)
Notiamo inoltre che è presente anche la vista "algebra" e la barra di inserimento.

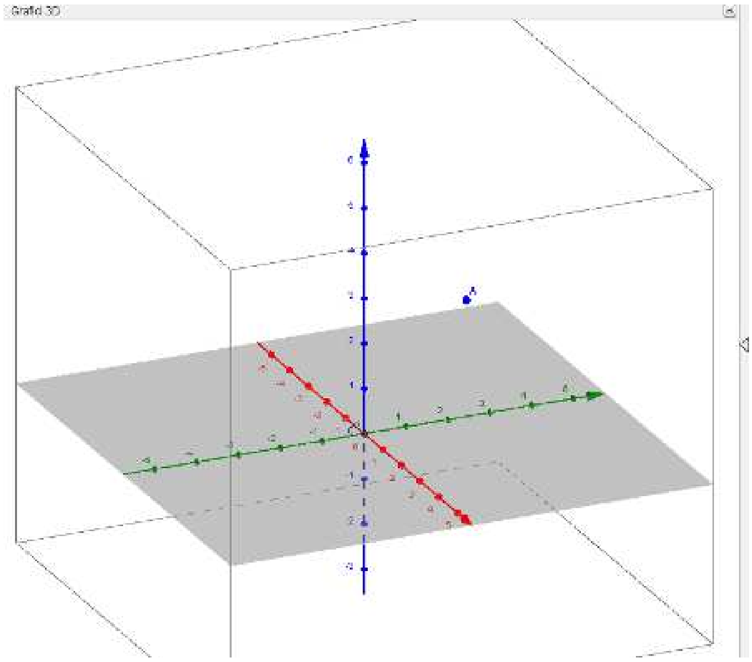
Proviamo i vari comandi dei pulsanti della barra 3D (un pulsante può aprire vari comandi) .



Pulsante "Muovi": funziona come nei grafici 2D, ma un punto può essere mosso solo in orizzontale (compaiono delle frecce orizzontali) o, facendo un secondo clic, in verticale (parallelamente all'asse z) quando compaiono delle frecce verticali.

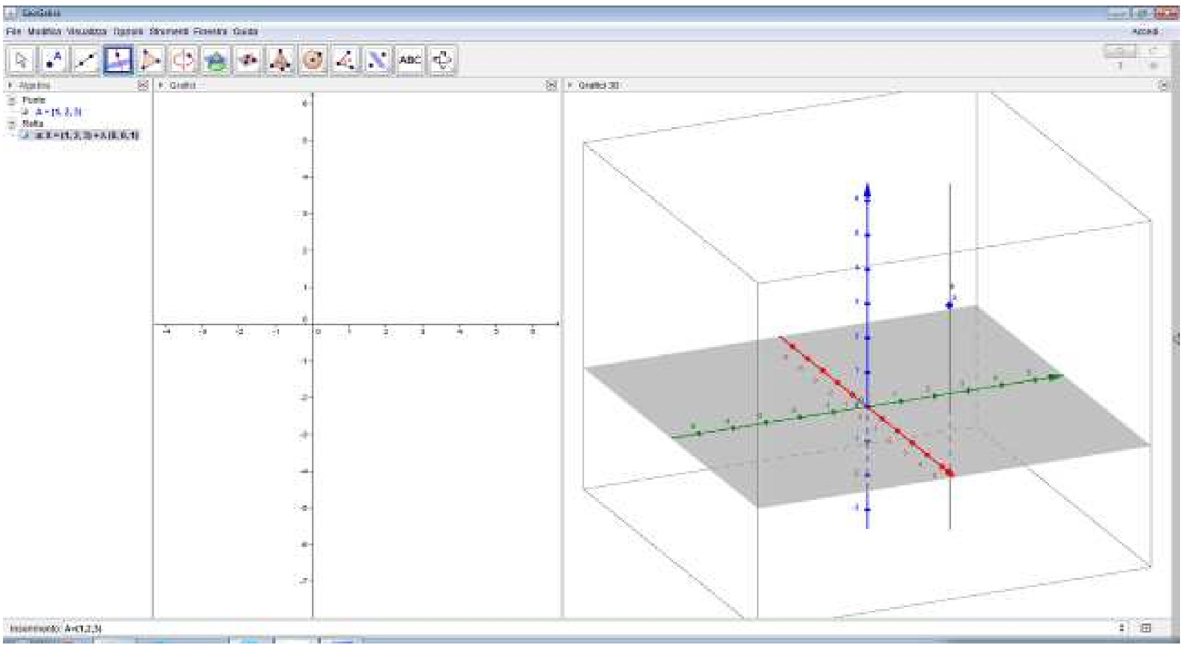
Pulsante "Punto": ci sono vari comandi che si possono scegliere a partire da questo pulsante come nei grafici 2D (punto su oggetto, intersezione, punto medio ecc).
Possiamo però creare un punto direttamente solo sul piano xy: se vogliamo un punto non appartenente al piano xy dobbiamo prima creare un punto sul piano xy e poi, facendo clic con il muose per far apparire le frecce verticali, possiamo variarne la quota.

Possiamo comunque creare un punto anche inserendolo da tastiera: per esempio digitando A=(1,2,3).



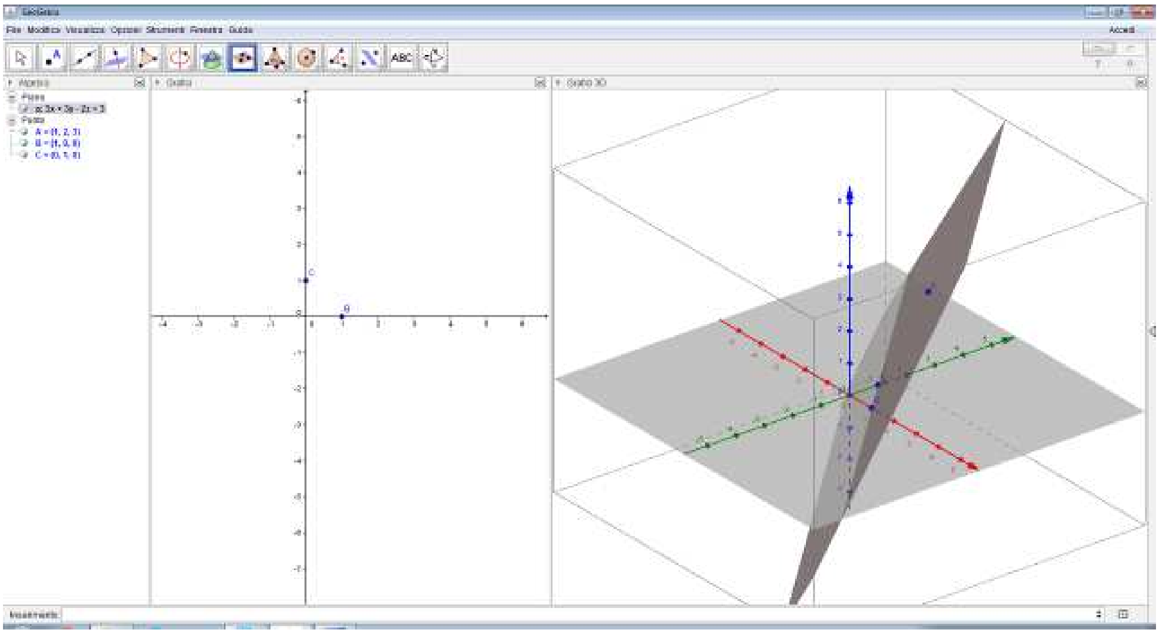
Pulsante “Retta” :questo comando ed i comandi collegati hanno lo stesso funzionamento che nei grafici 2D.

Pulsante “Retta perpendicolare” : se per esempio vogliamo la retta per il precedente punto A(1,2,3) perpendicolare al piano (O,xy) basta cliccare su A e poi sul piano xy: comparirà anche l’equazione parametrica della retta $X = (1,2,3) + \lambda(0,0,1)$.

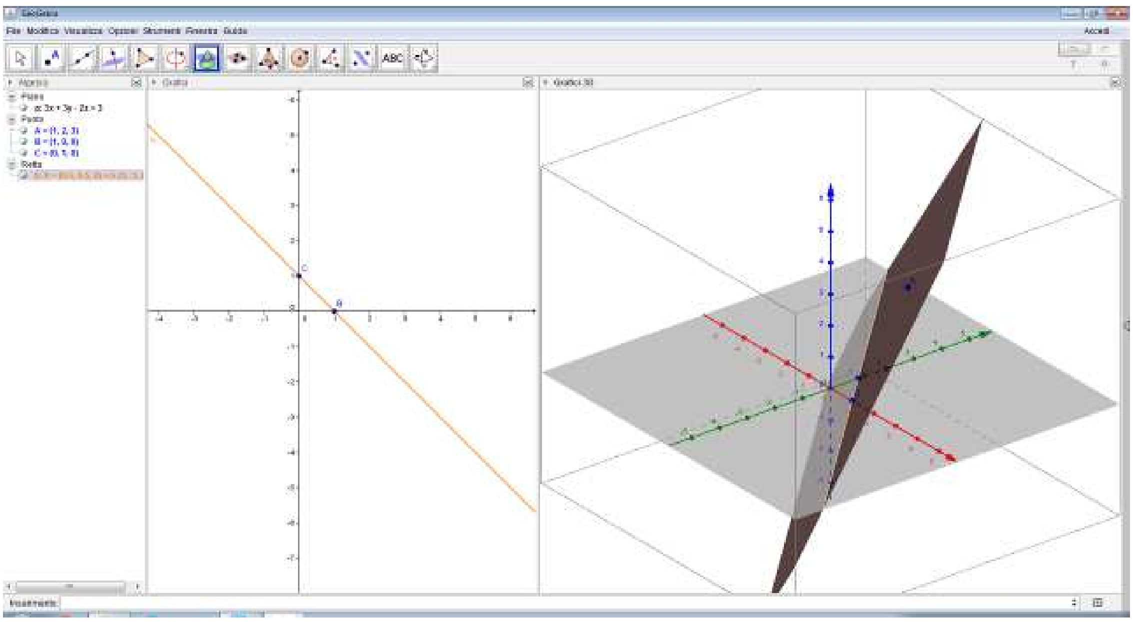


Pulsante “poligono”, “circonferenza”, “testo” ecc. funzionano come per i grafici 2D.

Pulsante "Piano per tre punti"(e gli altri comandi collegati quali piano parallelo e piano perpendicolare): selezionando tre punti non complanari viene creato il piano passante per essi e compare la sua equazione nella vista algebra.
Creati per esempio anche i punti B=(1,0,0) e C=(0,1,0) selezionando A,B,C abbiamo **il piano a** (viene denominato con una lettera nella vista algebra) in figura:

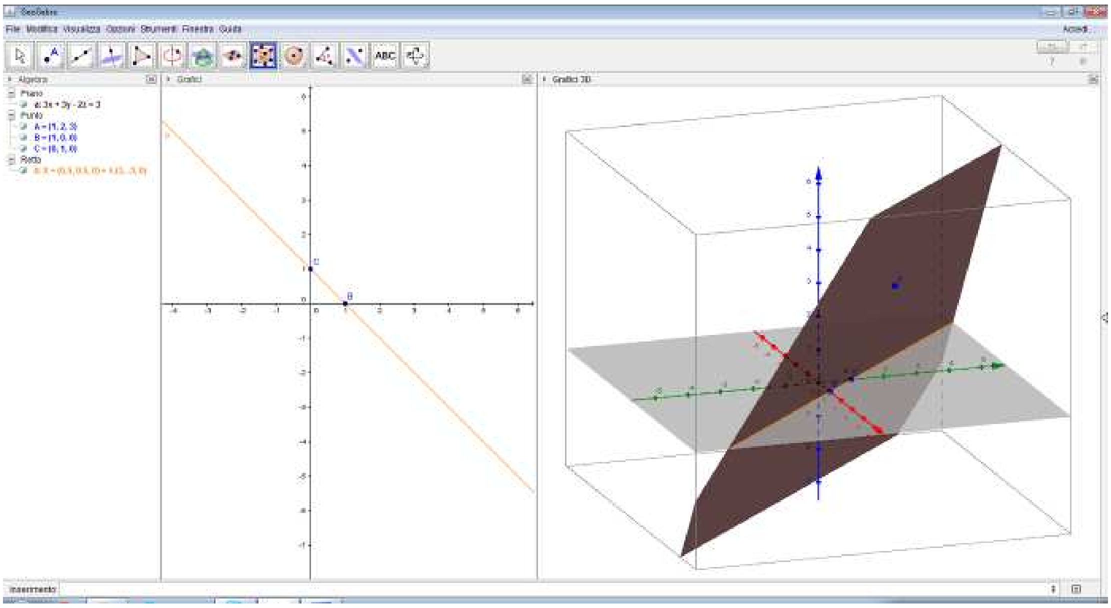


Osserviamo che l'equazione risulta $a: 3x+3y-2z=3$ (e possiamo verificare algebricamente che è corretta) e che i punti B e C sul piano xy compaiono anche nella vista 2D.
Possiamo intersecare il piano a con il piano xy utilizzando il comando "interseca due superfici" e comparirà la retta intersezione (anche nella vista 2D).



In particolare **la rotazione della "vista"** (molto utile per esplorare una figura solida) può essere facilmente ottenuta **tenendo premuto il tasto destro del mouse** (posizionato nella zona grafici 3D) e muovendo il mouse.
Ecco come appare la figura precedente dopo aver ruotato la vista :

Pulsante "piramide": ci sono una serie di comandi per creare piramidi, prismi, coni, cilindri, tetraedro regolare, cubo ecc.



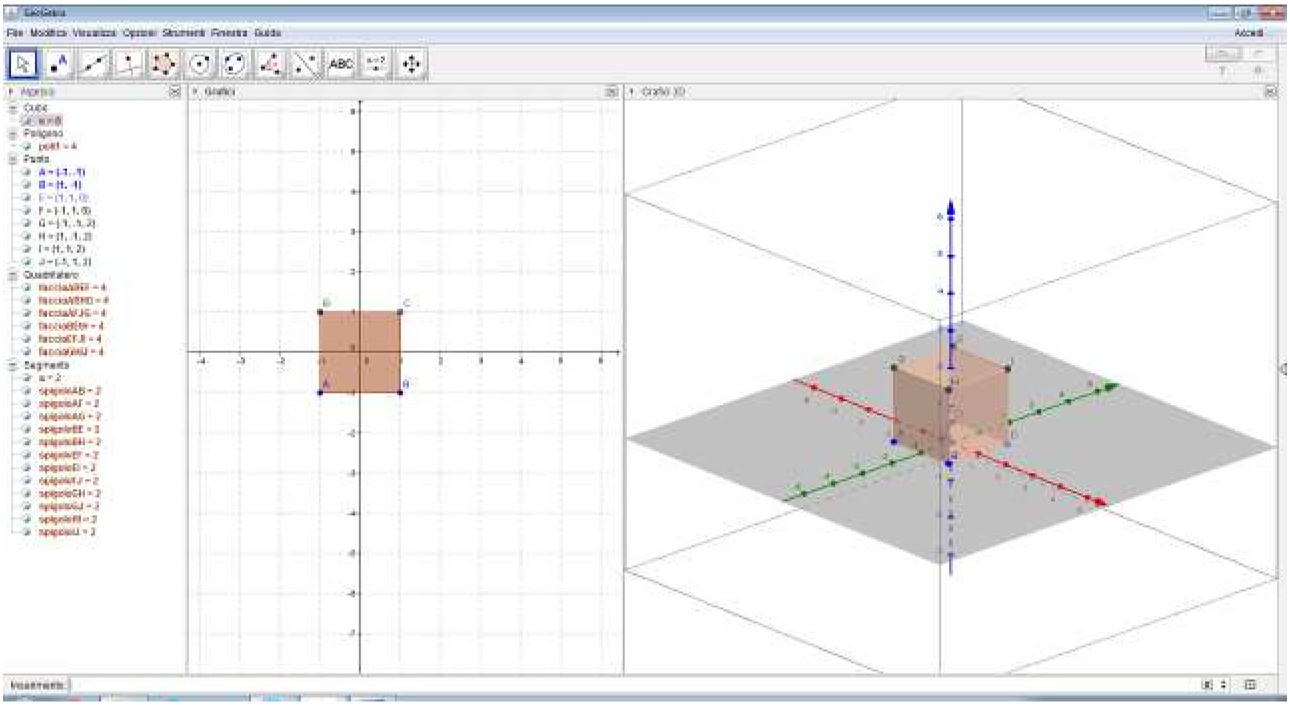
In particolare il comando "estrusione in piramide o cono" permette di "tirare sù" una piramide (o un cono) partendo da un poligono di base (o da una circonferenza) e nello stesso modo funziona "estrusione in prisma o cilindro".
Ogni comando ha comunque una piccola guida sul suo utilizzo che compare quando viene selezionato e il mouse si trova nel triangolino in basso a destra.

Nota
Ci sono anche i comandi per creare i poliedri regolari cubo, tetraedro ecc. digitando direttamente nella barra di inserimento.

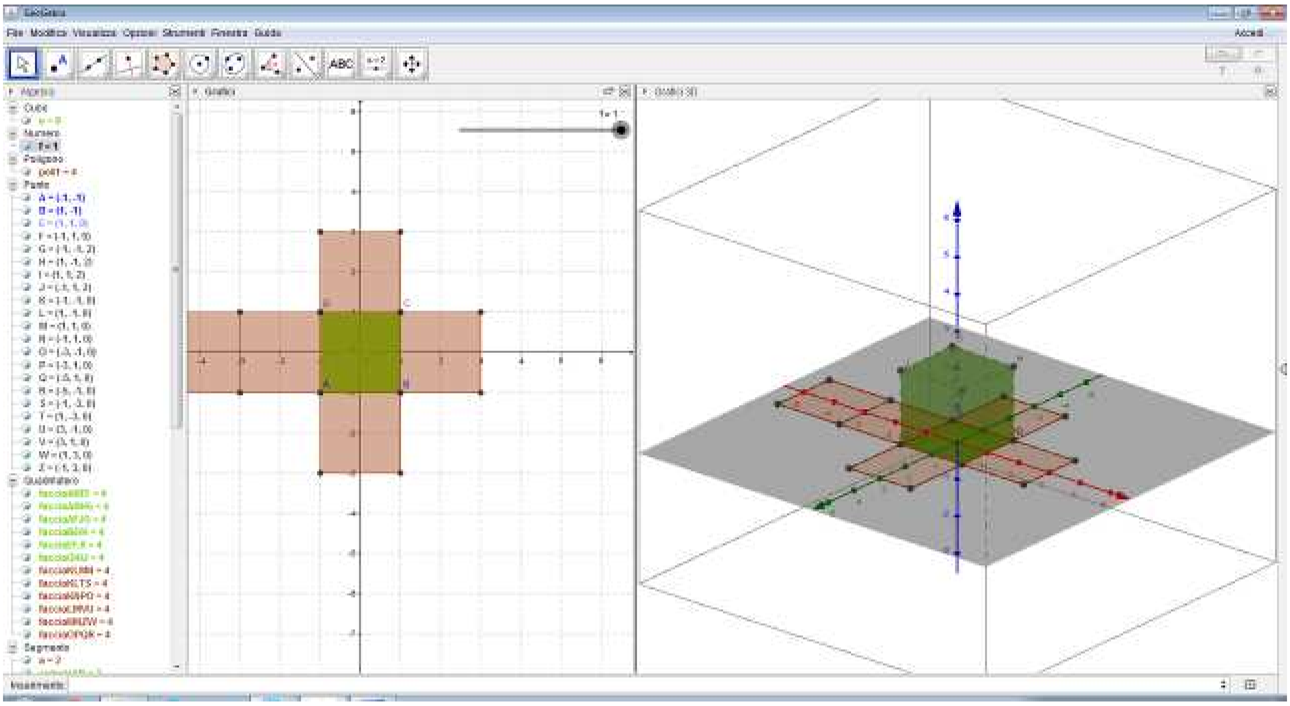
Come esempio riportiamo la costruzione di un cubo: costruiamo prima nella zona grafici 2D un quadrato di lato AB (usando per esempio il comando poligono regolare) e poi digitiamo direttamente nella barra di inserimento

cubo[A,B]

Nota: per evitare che vengano indicati nella figura le etichette dei vari spigoli possiamo digitare Opzioni- etichettatura- nessun nuovo oggetto.



Un comando molto interessante è "sviluppo piano" che fornisce lo sviluppo piano di un poliedro: viene automaticamente anche creato uno slider e se attiviamo muovi e variamo lo slider da 0 a 1 vedremo il poliedro che "si apre" fino al suo sviluppo sul piano xy.

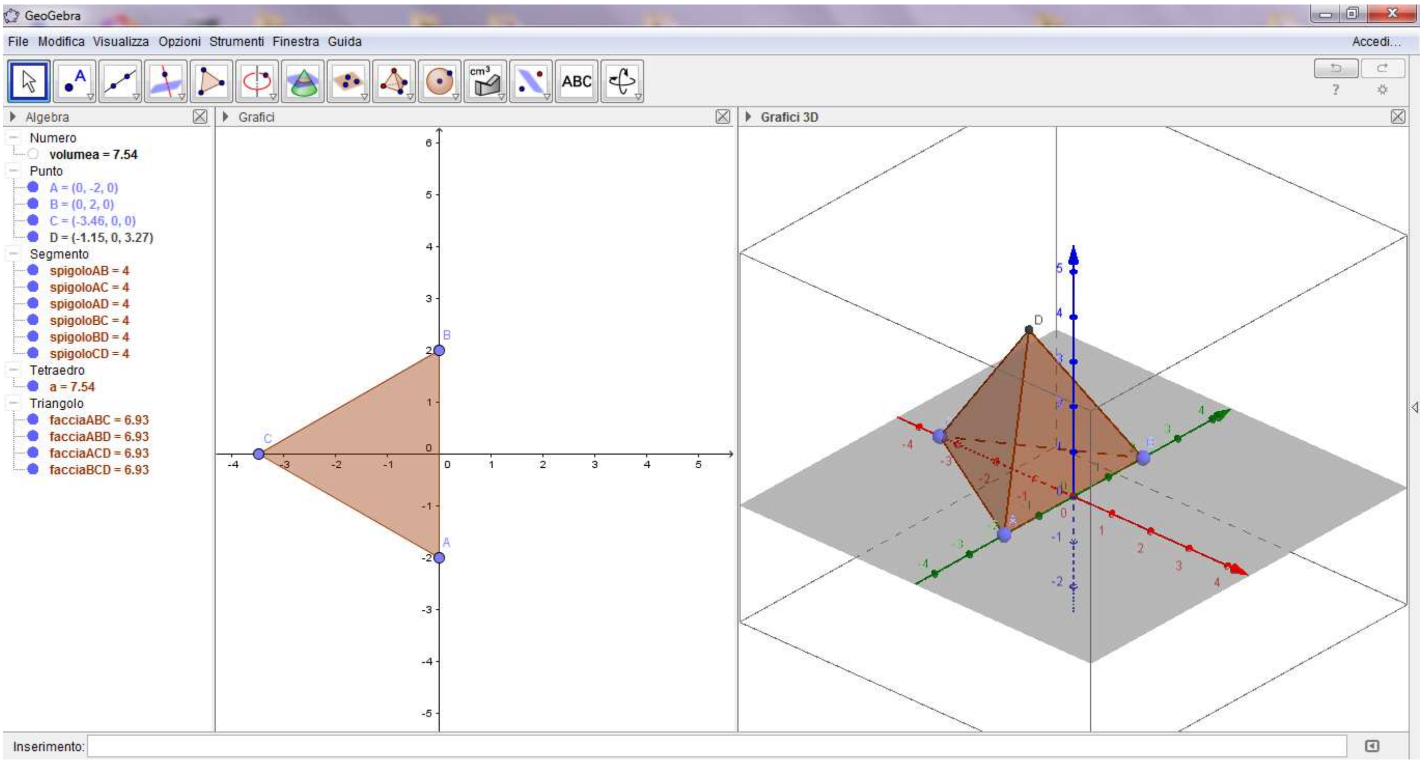


Ci sono infine i pulsanti che permettono di creare una sfera, di fare trasformazioni geometriche, di inserire un testo. Inoltre premendo il tasto destro del mouse nella zona 3D compare un menù (assi, griglia, ecc.) che permette di nascondere/visualizzare gli assi, la griglia sul piano xy ecc.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEDA 1

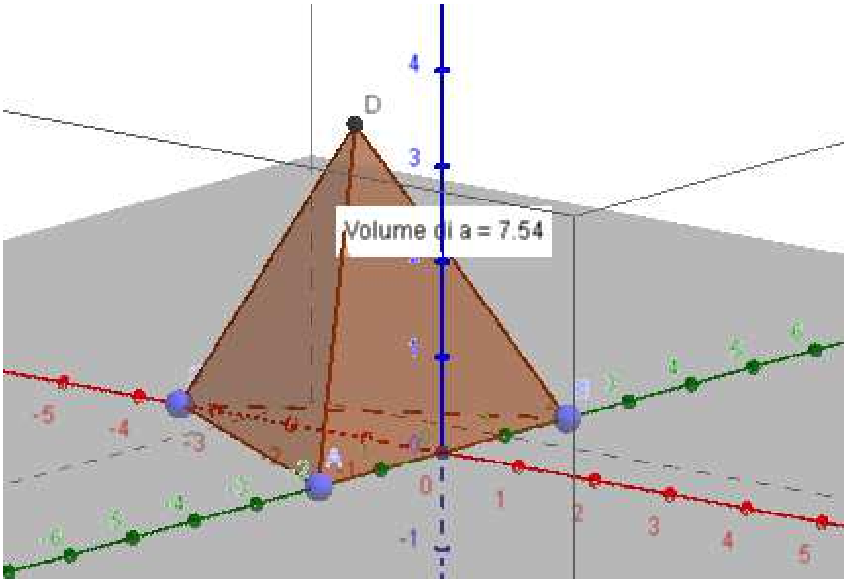
Tetraedro regolare

Scegliamo dal Menù 3D tetraedro regolare.
Facciamo clic su dei punti del piano xy, per esempio $A=(0,-2,0)$, $B=(0,2,0)$ (possiamo controllare le coordinate nella vista algebra ed eventualmente muovere il punto se non abbiamo creato proprio questi due punti).
Verrà creato un tetraedro di spigolo $\overline{AB}=4$ con la faccia ABC sul piano xy (la faccia sul piano xy viene visualizzata anche nella vista 2D).



Possiamo ruotare la vista grafica per vederlo da angolazioni diverse.

Possiamo scegliere dai vari comandi “volume” e facendo clic sul tetraedro verrà visualizzato il volume:



Esercizio 1: verifica l’esattezza del valore del volume indicato.
Suggerimento: abbiamo ricavato (vedi esercizio 1 sui poliedri) che il volume di un tetraedro regolare di spigolo *l* risulta $V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$ e quindi nel nostro caso abbiamo…

Esercizio 2: calcola l’angolo diedro formato da due facce.
Suggerimento: traccia il segmento DO (O origine del sistema di riferimento) e poi misura l’angolo $D\hat{O}C$ .Controlla il risultato con l’esercizio 1 sui poliedri.

Esercizio 3: fai lo sviluppo piano del tetraedro (puoi renderlo più dinamico utilizzando uno slider come indicato nella guida a Geogebra 3D.
Stampa il tuo sviluppo.

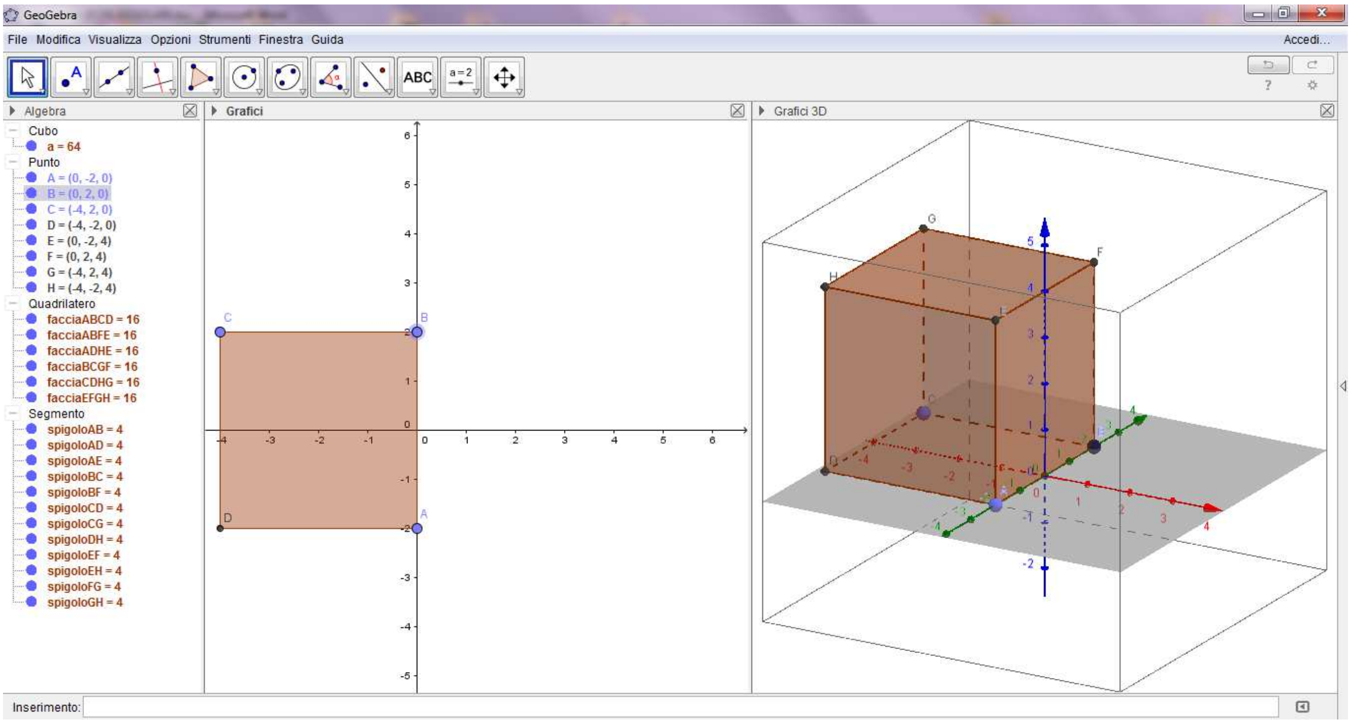
Esercizio 4: applica al tetraedro una simmetria rispetto al piano xy. Stampa il poliedro che ottieni.

Esercizio 5: costruisci i baricentri delle 4 facce del tetraedro e congiungile.
Verifica che si tratta di un tetraedro (inscritto).
Stampa il tetraedro inscritto.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEDA 2

Cubo

Costruiamo un cubo con il comando cubo: come nella scheda precedente dopo aver scelto il comando cubo facciamo clic su due punti del piano xy, per esempio $A=(0,-2,0)$, $B=(0,2,0)$.
Comparirà il cubo in figura:



Anche in questo caso scegliamo il comando “volume” e verifichiamo il risultato.

Esercizio 1: traccia una diagonale del cubo e verifica (usando il comando misura di un segmento) che risulta $d=\sqrt{3}l$ dove l è la misura dello spigolo.

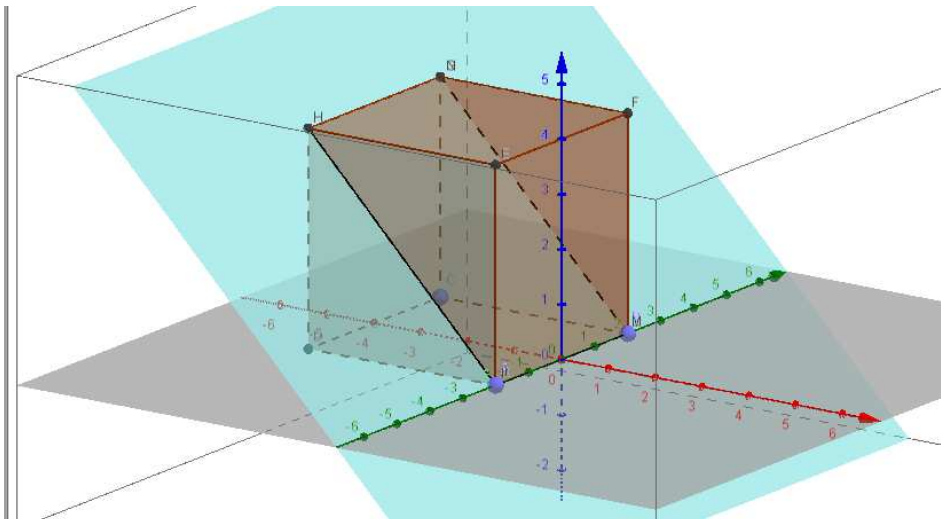
Esercizio 2: dopo aver costruito i centri delle facce , congiungili e verifica che si ottiene un ottaedro regolare. Stampa l’ottaedro così costruito.

Esercizio 3: sviluppa il cubo nel piano. Stampa lo sviluppo piano.

Le sezioni del cubo

Quali sono le possibili sezioni di un cubo?

Con il comando “piano per tre punti” selezioniamo tre punti per creare il piano sezione e intersechiamo con le facce del cubo: è chiaro che con un piano parallelo ad una faccia si ottiene un quadrato, ma si possono ottenere molte altre sezioni…
Per esempio nella figura seguente il piano passa per due spigoli opposti e si ottiene come sezione un rettangolo.



Quali altre sezioni puoi ottenere ?

Puoi ottenere un triangolo equilatero?Prendendo il piano passante per i punti…

Puoi ottenere un trapezio isoscele?

Puoi ottenere un pentagono?

Puoi ottenere un esagono regolare? Prendendo il piano passante per i punti…

Perché non si può ottenere come sezione un poligono con sette o più lati?

Suggerimento: prova a creare tre punti su tre spigoli con il comando “punto su oggetto”, poi costruisci il piano passante per essi e individua (con intersezione superfici) la sezione: attiva “muovi” e prova a muovere i punti e osserva come varia la sezione.

Quando ti sembra di aver trovato il piano che dà come sezione una data figura spiega perché si tratta veramente di quella figura (congruenza di segmenti ecc.).

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

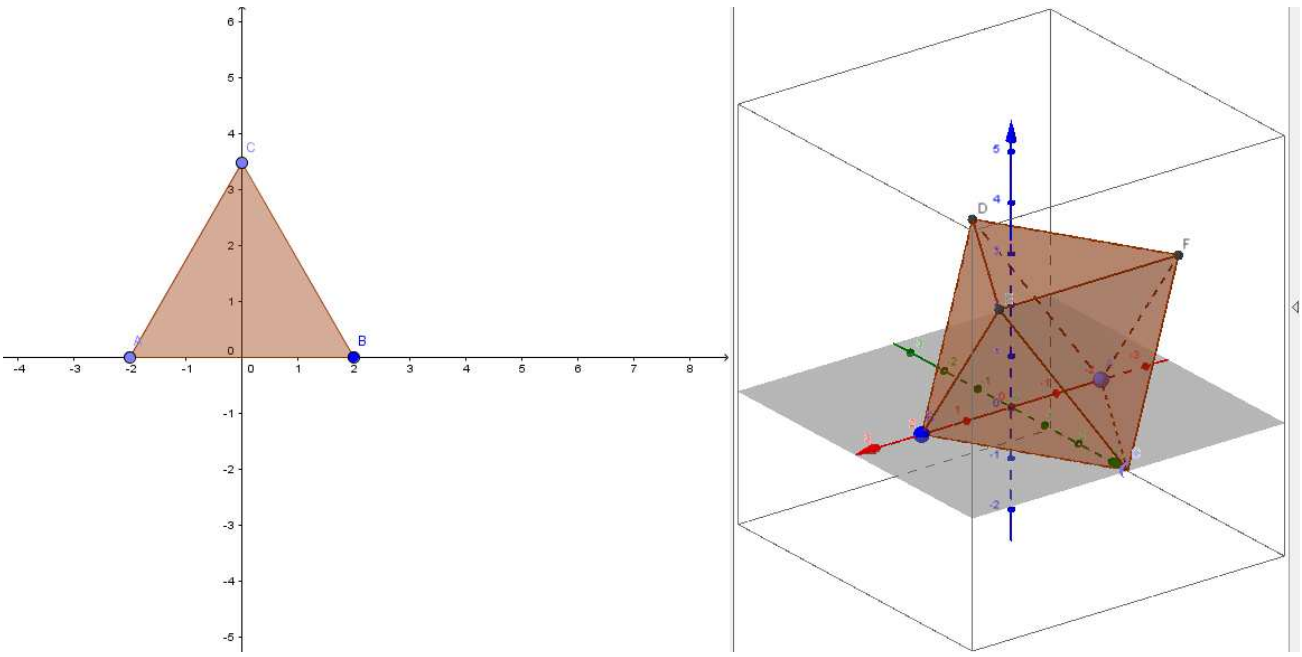
SCHEDA 3

Ottaedro regolare

Proviamo a costruire , dopo aver creato due punti A e B, un ottaedro regolare con il comando

ottaedro[A,B]

Nella figura seguente i punti sono A=(-2,0,0) B=(2,0,0) : il software disegna la faccia triangolare di lato AB (completando il triangolo equilatero in senso antiorario) sul piano xy.



Esercizio 1
Sviluppa nel piano l'ottaedro (stampa il suo sviluppo).

Esercizio 2
Prova a costruire un ottaedro che abbia il quadrato-base comune delle due piramidi uguali sul piano xy.
Suggerimento: puoi costruire un quadrato sul piano xy e poi (usando il comando piramide) costruire la piramide di base il quadrato e alzando il vertice finché nella vista algebra non vedi che gli spigoli laterali sono uguali a quelli di base: per ottenere l'altra piramide basta che tu faccia una simmetria rispetto al piano xy.

Esercizio 3
Costruisci il poliedro avente per vertici i baricentri delle facce dell'ottaedro regolare.

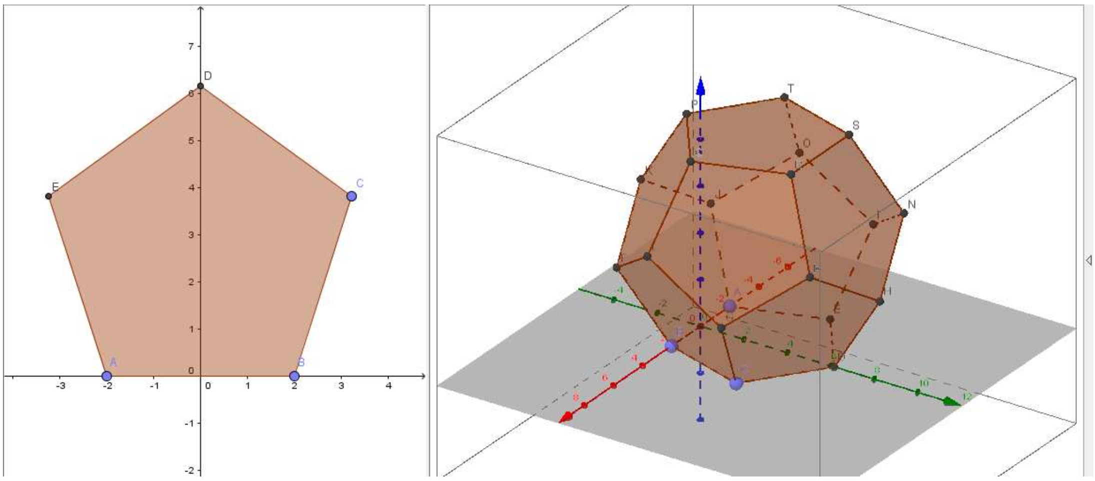
GEOMETRIA DELLO SPAZIO

SCHEDA 4

Dodecaedro e icosaedro regolari

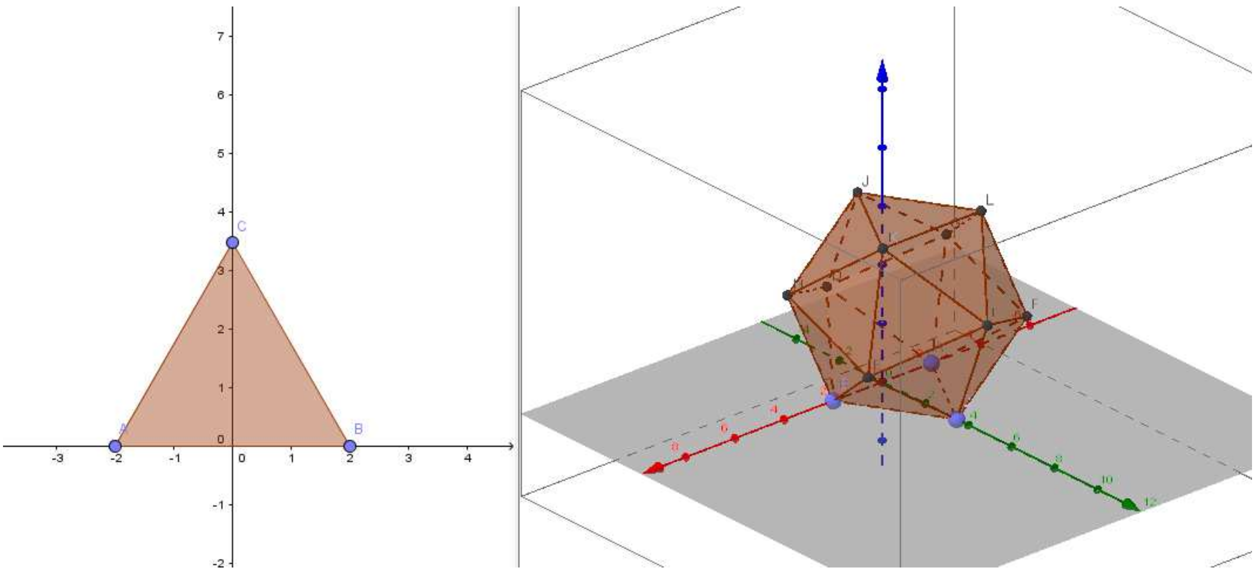
Analogamente a quanto visto per gli altri poliedri regolari, dopo aver creato due punti A,B inserisci nella barra di inserimento il comando

Dodecaedro [A,B]



Costruisci infine, dopo aver creato due punti, l’icosaedro regolare con il comando

Icosaedro [A,B]



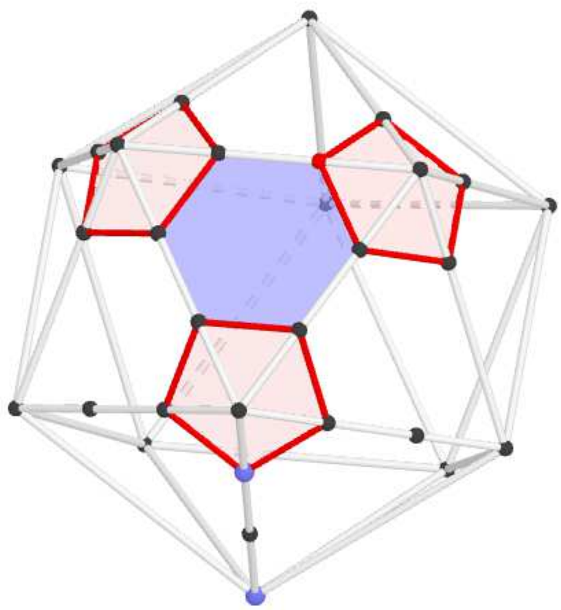
GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEDA 5

Pallone da calcio
(Icosaedro troncato)

Come possiamo ottenere, partendo da un icosaedro, un poliedro molto simile al pallone da calcio?

Prova a seguire questo procedimento:
- Disegna un icosaedro;
- Considera un angoloide dell'icosaedro: se sugli spigoli che convergono nel vertice dell'angoloide prendiamo dei punti tutti alla stessa distanza dal vertice e li congiungiamo, otterremo un pentagono regolare e se vogliamo che, ripetendo l'operazione per tutti gli angoloidi, oltre a individuare dei pentagoni regolari rimangano esagoni regolari aventi il lato della stessa lunghezza del lato dei pentagoni, dovremo dividere ciascun spigolo in tre parti uguali.
- Come puoi individuare su ciascun spigolo due punti in modo che rimanga diviso in tre parti uguali?
  Suggerimento: potresti utilizzare l'omotetia di rapporto 1/3.

Alla fine , con un po' di pazienza, dovresti ottenere un disegno tipo quello in figura.
Stampa il tuo pallone da calcio.



GEOMETRIA DELLO SPAZIO

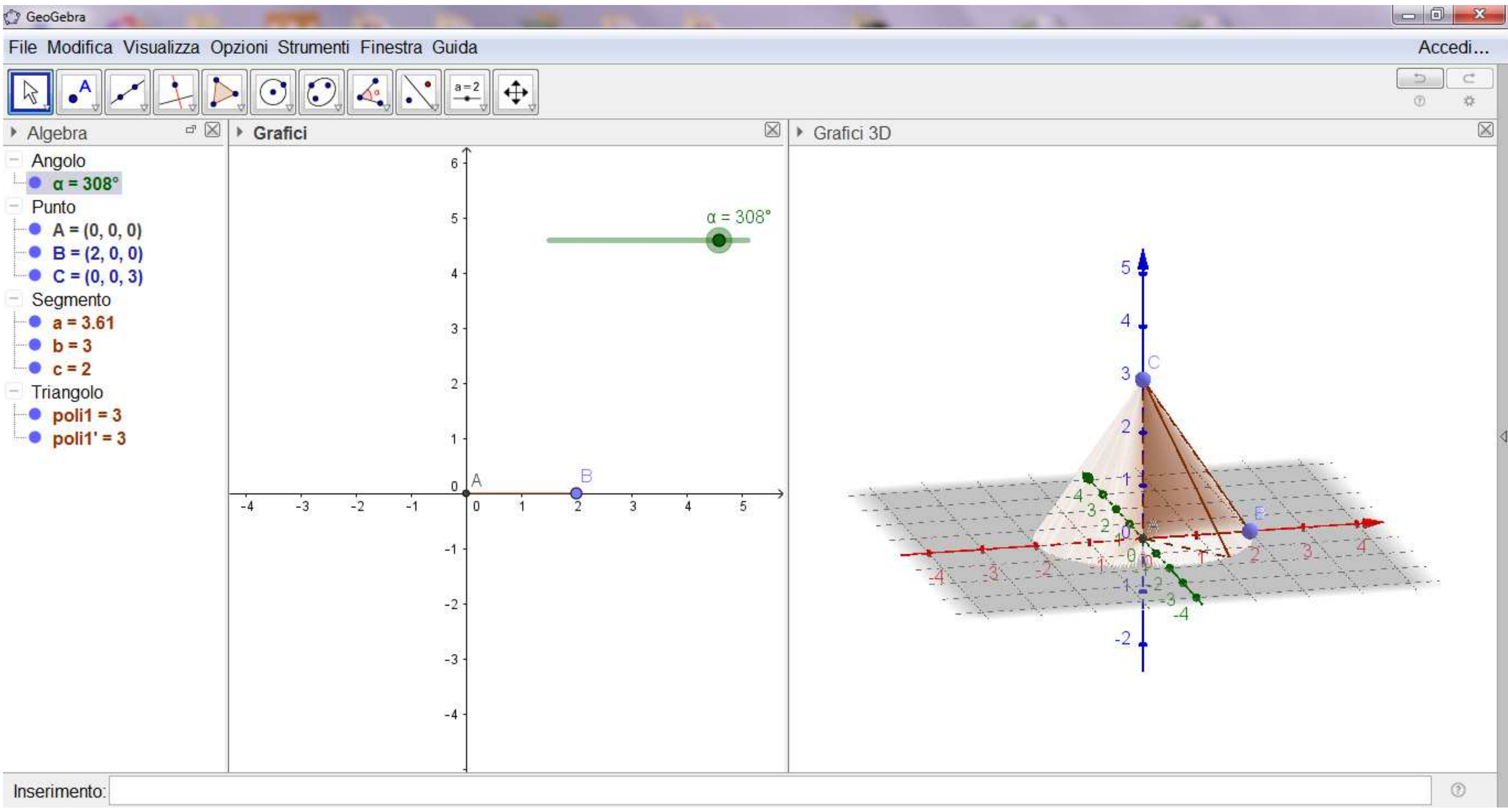
SCHEDA 6

Cono e cilindro

Possiamo generare un cono ruotando un triangolo rettangolo intorno ad uno dei suoi cateti.

- Creiamo un triangolo rettangolo nell'ambiente 3D con il comando poligono (per esempio di vertici (0,0,0) ; (2,0,0) (0,0,3) e creiamo uno slider α (angolo) che vari tra 0° e 360°;
- scegliamo dal menù "**rotazione assiale**";
- selezioniamo il triangolo, poi per esempio l'asse z come asse di rotazione e poi inseriamo lo slider α come angolo di rotazione.

Attiviamo "traccia attiva" cliccando con il tasto destro del mouse sul poligono e "animazione attiva" cliccando con il destro sullo slider: il triangolo descriverà un cono.



Esercizio

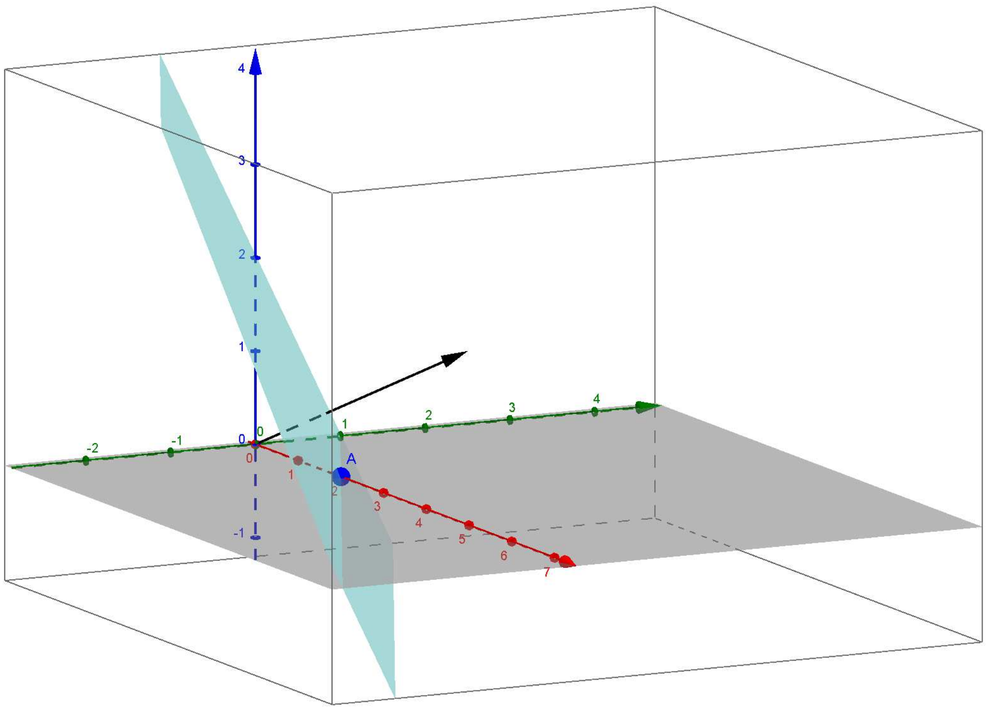
Prova a costruire un cilindro ruotando un rettangolo attorno ad un lato.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEDA 7

Equazione di un piano

Piano passante per un punto dato e perpendicolare ad una direzione data(direzione normale)

Inseriamo nella barra di inserimento un punto, per esempio $A = (2,0,0)$ e un vettore normale al piano, per esempio $n = (1,2,1)$: selezioniamo il comando “piano perpendicolare” clicchiamo su A e n e otterremo il piano in figura.



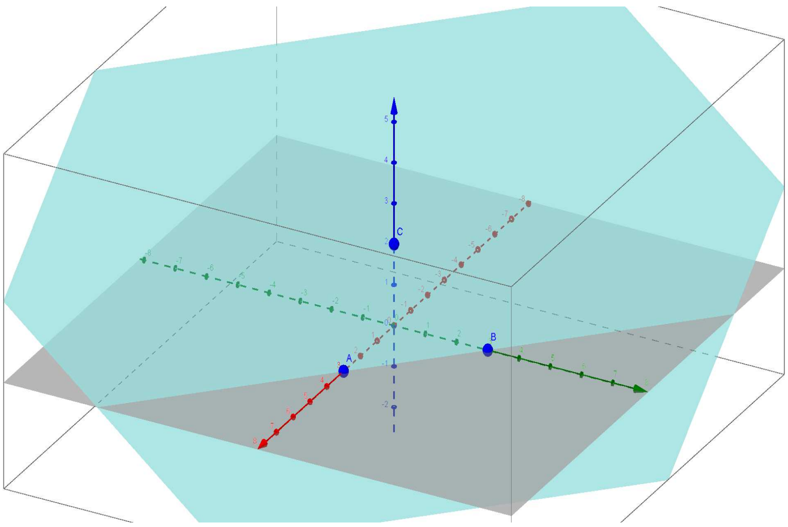
Se controlliamo nella vista algebra troviamo l’equazione

$$x + 2y + z = 2$$

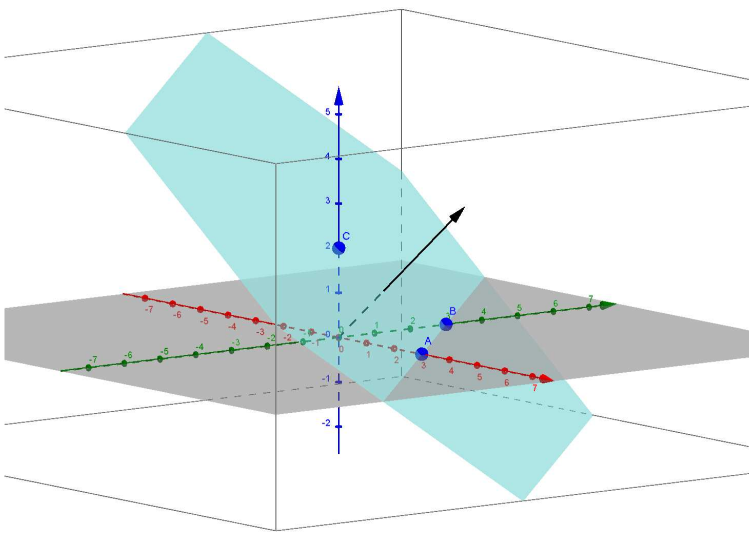
che infatti si ottiene sviluppando $(1,2,1)\cdot(x-2, y, z) = 0$ come abbiamo visto studiando l’equazione del piano passante per un punto assegnato e avente una direzione normale assegnata.

Esercizio1
Piano passante per tre punti non allineati
Inseriamo tre punti da tastiera, per esempio $A=(3{,}0{,}0)$, $B=(0{,}30)$, $C=(0{,}0{,}2)$,scegliamo il comando “piano per tre punti” e creiamo il piano α passante per i punti A,B,C.

Nella vista algebra comparirà l’equazione del piano $2x+2y+3z=6$.
Imposta il sistema per determinare il piano per A,B,C e verifica che ottieni la stessa equazione (o una equivalente).



Puoi digitare nella barra di inserimento $n=(2{,}2{,}3)$ e controllare che si tratta proprio del vettore normale al piano.



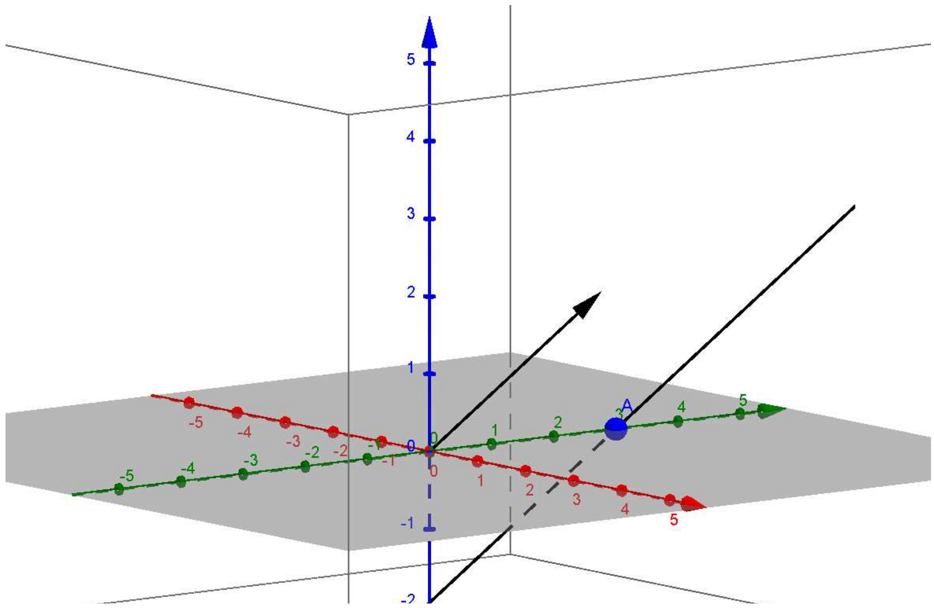
Esercizio 2
Prova ad inserire nella barra di inserimento l’equazione di alcuni piani in cui uno dei coefficienti o più di uno sono uguali a zero (es: $x+2y+1=0$, $x+3z=0$, $y-z-2=0$, $z=3$ ecc.) e fai le tue osservazioni.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

SCHEDA 8

Equazione di una retta nello spazio

Inseriamo nella barra di inserimento un vettore (vettore direzione della retta) per esempio $v = (1,2,2)$ e un punto, per esempio $A = (0,3,0)$. Scegliamo il comando "retta parallela": selezioniamo A e poi il vettore $\vec{v}$ e otterremo la retta seguente



Nella vista algebra avremo **l'equazione parametrica della retta**

$$X = (0,3,0) + \lambda(1,2,2)$$

dove la X sta per (x, y, z).

Esercizio 1
Inserisci i punti $A = (2,1,0)$ e $B = (1,0,3)$ e traccia la retta passante per essi usando sia il comando "retta" che il comando appena visto (il vettore direzione sarà…..) e verifica che in ogni caso ottieni equazioni equivalenti.
Stampa il tuo lavoro.

Esercizio 2
Disegna i piani $\alpha : x + y + z = 0$ e $\beta : z = 0$ (puoi direttamente inserire l'equazione nella barra di inserimento) e intersecali usando il comando "interseca due superfici".
Controlla nella vista algebra e spiega perché l'equazione parametrica della retta risulta in quel modo.

Esercizio 3
Inserisci nella barra di inserimento le equazioni di due piani (non paralleli), attiva il comando "interseca superfici" e verifica che l'equazione della retta che compare nella vista algebra corrisponda effettivamente alla soluzione del sistema formato dalle equazioni dei due piani.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

SCHEDA 9

Le superfici algebriche del secondo ordine (quadriche)

Le superfici algebriche del primo ordine sono i piani poiché la loro equazione risulta

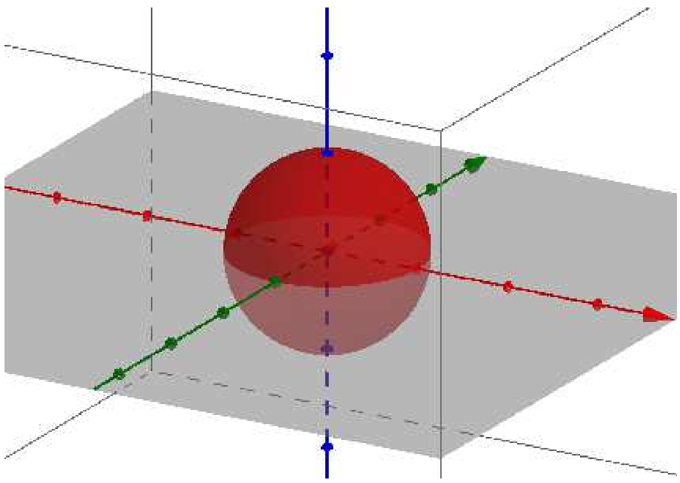
$$ax + by + cz + d = 0$$

Le superfici algebriche del secondo ordine sono dette "quadriche" e sono le superfici che si possono rappresentare con un'equazione di secondo grado in x,y,z .
Le quadriche hanno cioè equazioni del tipo

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + l = 0}$$

Superficie sferica

Inseriamo l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: otteniamo una superficie sferica di centro l'origine e raggio 1.



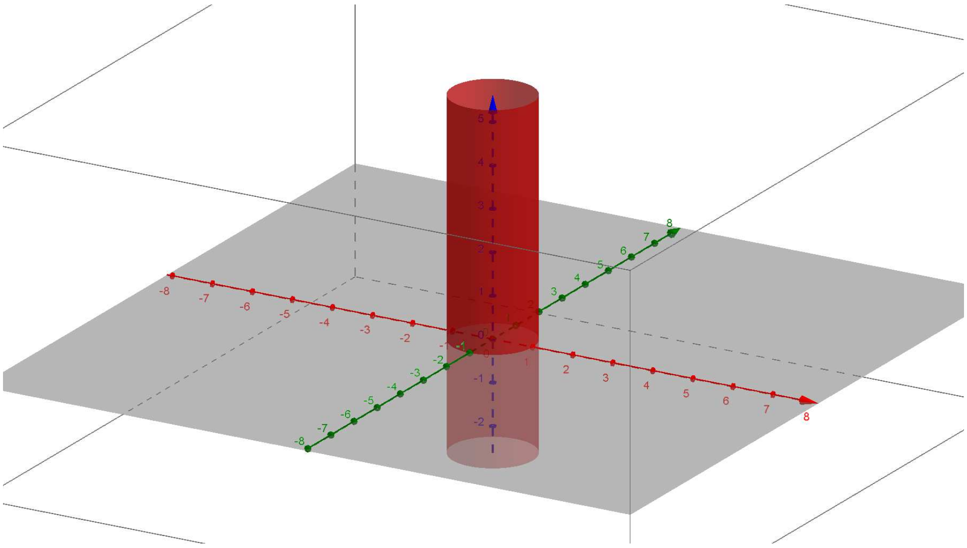
Esercizio

Quale sarà l'equazione di una sfera di centro $C = (1,2,3)$ e raggio 2?
Inseriscila da tastiera e stampala.
Prova a costruire una sfera anche con il comando "sfera-dati il centro e un punto" oppure "sfera-dato il centro e il raggio": controlla l'equazione corrispondente nella vista algebra. Stampa i tuoi esempi.

Cilindro circolare retto

Prova ad inserire nella barra di inserimento un'equazione del tipo $x^2 + y^2 = 1$.

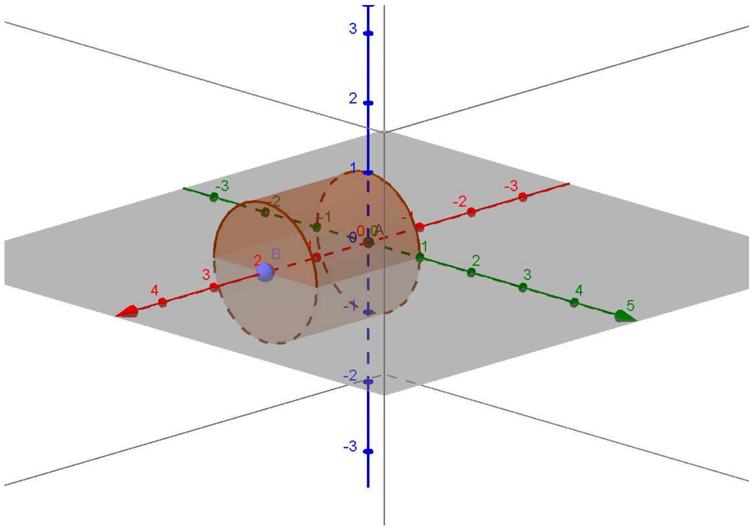
Sai spiegare perché si ottiene una superficie cilindrica indefinita avente asse l'asse z ?



Stampa anche le superfici corrispondenti alle equazioni $x^2 + z^2 = 1$; $y^2 + z^2 = 1$.

Per ottenere un cilindro definito puoi usare il comando "cilindro": devi selezionare due punti (che saranno i centri delle circonferenze di base) e il raggio: nella figura seguente sono stati selezionati (dopo averli creati) A(0,0,0) B(2,0,0) e raggio 1.

Nota: nella vista algebra compaiono le equazioni (parametriche) delle circonferenze di base,l'area della base e della superficie laterale.



Cilindro iperbolico e parabolico

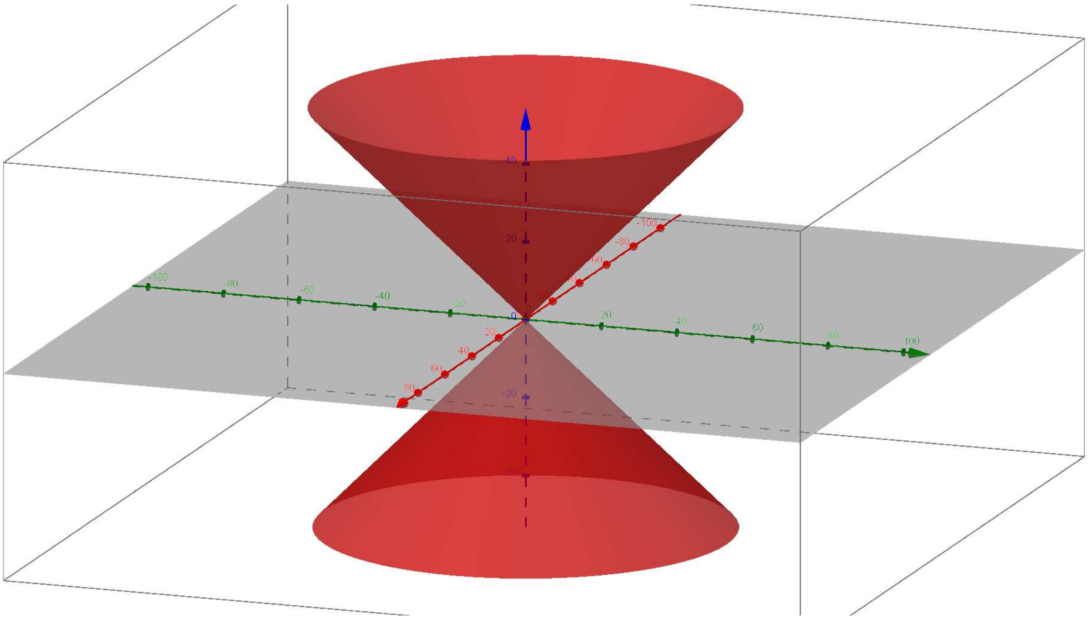
- Inserisci nella barra di inserimento l'equazione $x^2 - y^2 = 1$
  Nella vista algebra compare la denominazione di questa superficie che viene detta "cilindro iperbolico": perché ?

In modo analogo studia le superfici aventi equazione $x^2 - z^2 = 1$, $y^2 - z^2 = 1$, $x * y = 1$.

- Se inserisci l'equazione $x - y^2 = 0$ nella vista algebra compare la denominazione "cilindro parabolico": perché?

Cono

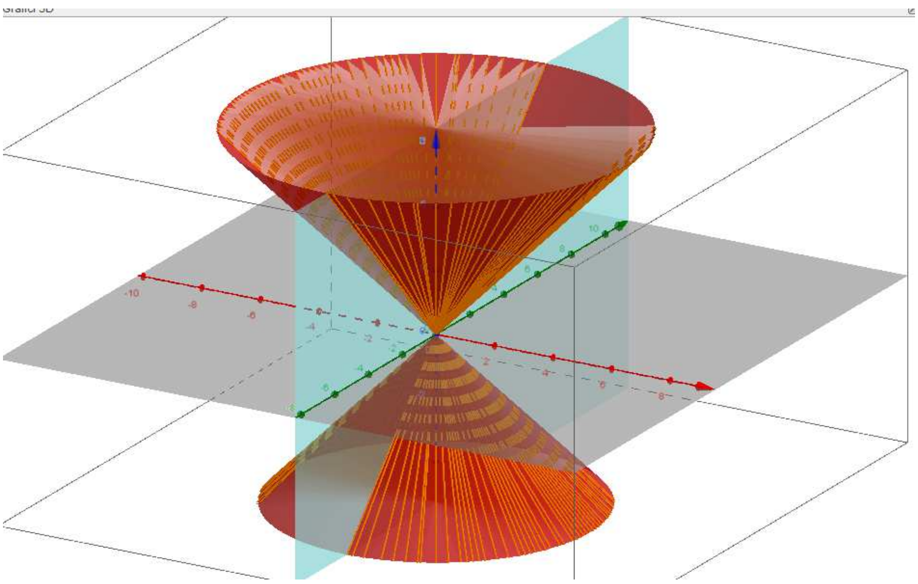
Inserisci l'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
Si ottiene un cono…prova a spiegare perché.



La stessa superficie si può ottenere ruotando una retta intorno (in questo caso) all'asse z .
Se intersechiamo con il piano $x = 0$ troviamo la coppia di rette

$$y^2 - z^2 = 0 \leftrightarrow (y+z)\cdot(y-z) = 0 \leftrightarrow z = y \cup z = -y$$

Creiamo uno slider angolo α (variabile tra 0° e 360°) , scegliamo il comando "rotazione assiale",selezioniamo una retta (per esempio $z = y$) e l'asse z: attiviamo la traccia e muoviamo lo slider.
Otterremo proprio la superficie conica già visualizzata.

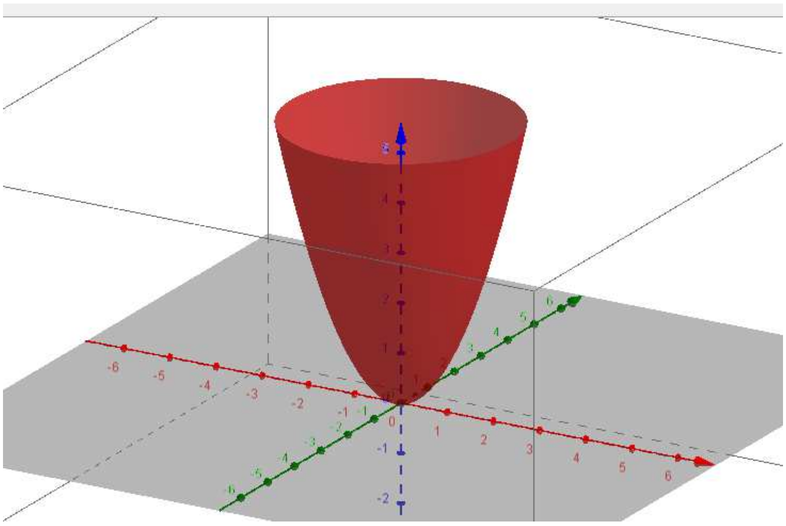


Esercizio

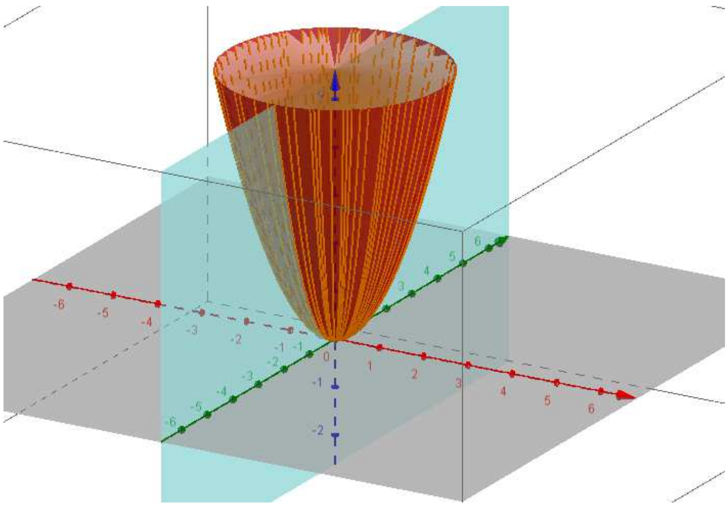
Prova ad inserire $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Paraboloide di rotazione

Inserendo nella barra di inserimento l’equazione $x^2 + y^2 - z = 0$ otteniamo il seguente paraboloide di rotazione.



Verifichiamo che la superficie si ottiene ruotando una parabola intorno al suo asse: intersechiamo con il piano $x = 0$ e selezioniamo “interseca superfici” per ottenere la parabola.
Creiamo uno slider α (angolo) variabile tra 0° e 360°: selezioniamo “rotazione assiale”, selezioniamo la parabola , l’asse z , attiviamo la traccia e muoviamo lo slider.
La parabola durante la sua rotazione descrive proprio la superficie già presente sullo schermo.



Esercizio

Inserisci l’equazione $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ Cosa ottieni? Nella vista algebra dovrebbe comparire come viene chiamata questa superficie. Perché?

Inserisci l’equazione $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ Cosa ottieni? E se inserisci $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = -1$?