Limiti di una funzione

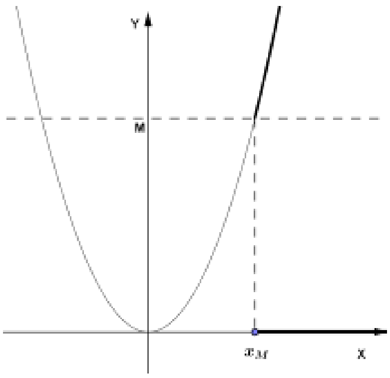
Definizioni

I) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$

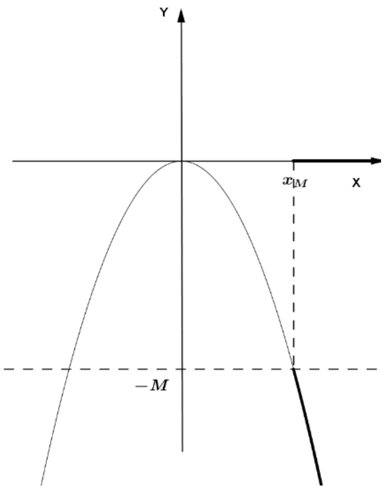
Cominciamo a studiare il "comportamento" di una funzione quando la x *diventa sempre più grande*: scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e leggeremo "limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$". Si possono avere vari casi.

a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x > x_M \quad f(x) > M$

Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y = x^2$



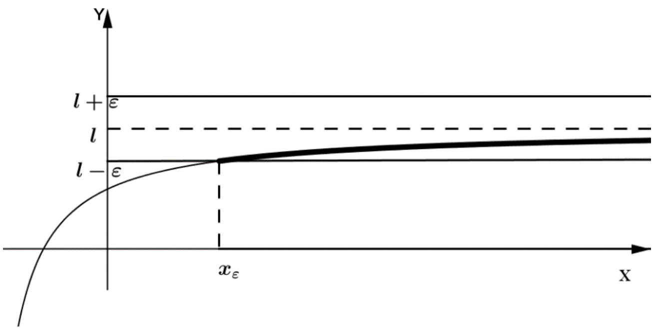
b) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x > x_M \quad f(x) < -M$



Nota: in figura è rappresentato il grafico di $y = -x^2$

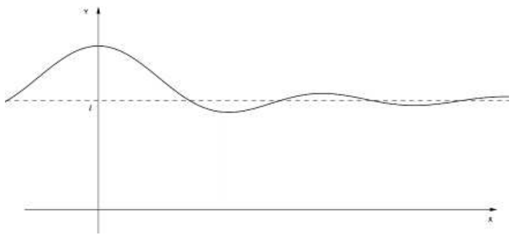
c) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l}$

Si ha che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ quando $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x > x_\varepsilon \quad l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$



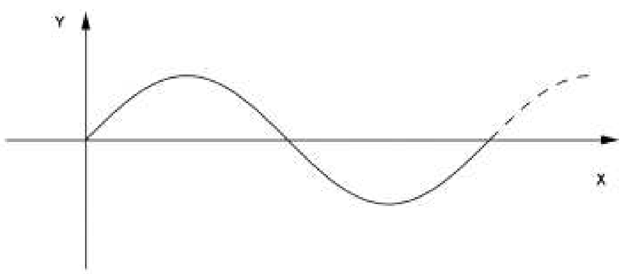
La retta $y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Nota: non dobbiamo pensare che l'asintoto non possa essere intersecato dal grafico.
Possiamo anche avere grafici come il seguente: la cosa essenziale è che le oscillazioni si "smorzino" cioè che la distanza fra il grafico e la retta $y = l$ tenda a 0.



d) $\boxed{\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$

Consideriamo $f(x) = \operatorname{sen} x$. Qual è il suo limite quando $x \to +\infty$?
In questo caso che $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ in quanto la funzione oscilla e non ha un "comportamento definitivo".

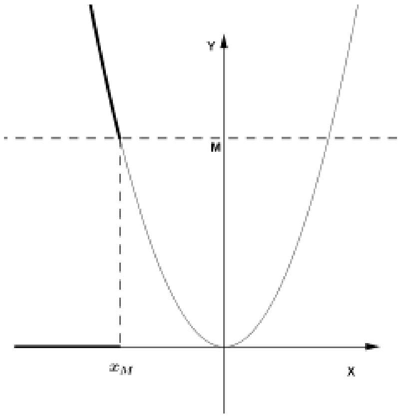


Nota: anche $y=cosx$ e $y=tgx$ e in generale le funzioni periodiche non hanno limite quando $x \to +\infty$.

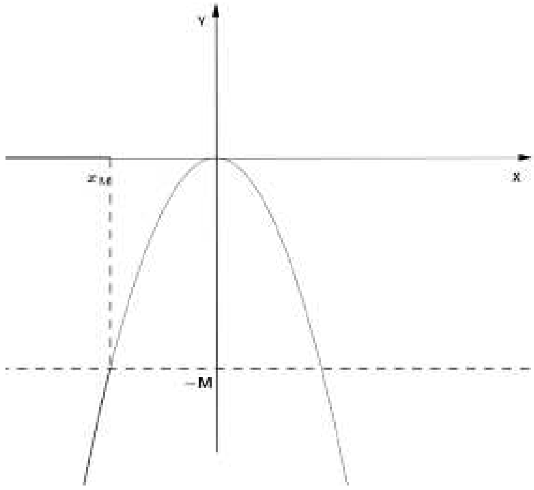
II) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)}$

a) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x < x_M \quad f(x) > M$

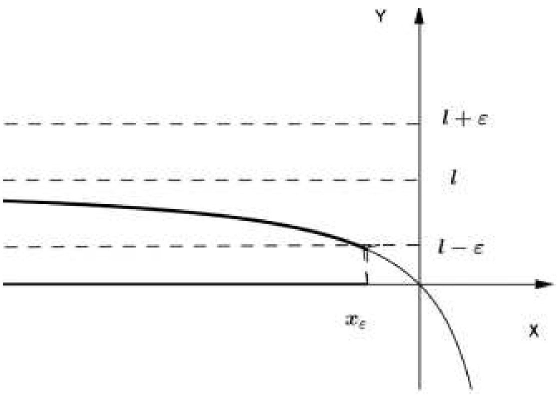
Osserviamo che questa volta consideriamo $x < x_M$ perché $x \to -\infty$.



b) Analogamente $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ quando $\forall M > 0 \quad \exists \quad x_M : \forall \quad x < x_M \quad f(x) < -M$



c) Analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : \forall x < x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



$y = l$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

d) $\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)$ quando la $f(x)$ per $x \to -\infty$ non cresce sempre di più o non decresce sempre di più e neppure si avvicina ad un valore l: per esempio anche $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.

III) $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ dove } x_0 \notin D_f}$

Studiamo adesso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ dove $x_0 \notin D_f$ ma è un punto a cui posso "avvicinarmi" quanto voglio e poiché possiamo avvicinarci a x_0 sia "da destra" che "da sinistra" consideriamo sia $\lim_{x\to x_o^+} f(x)$ che $\lim_{x\to x_o^-} f(x)$.

a) Il limite è infinito

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$

Abbiamo

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists\ I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \ f(x) > M$

e

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists\ I_{x_o}^+ : \forall x \in I_{x_o}^+ \ f(x) < -M$

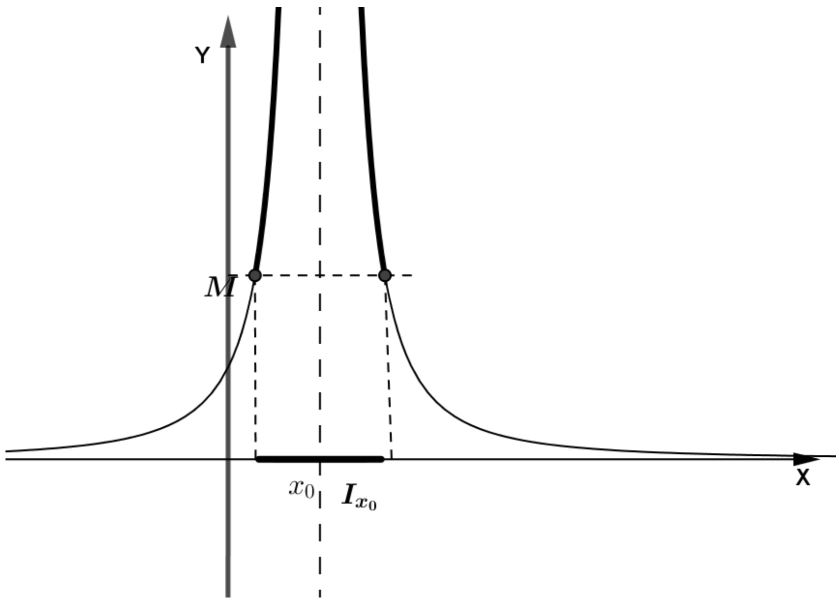
Invece

$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists\ I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \ f(x) > M$

e

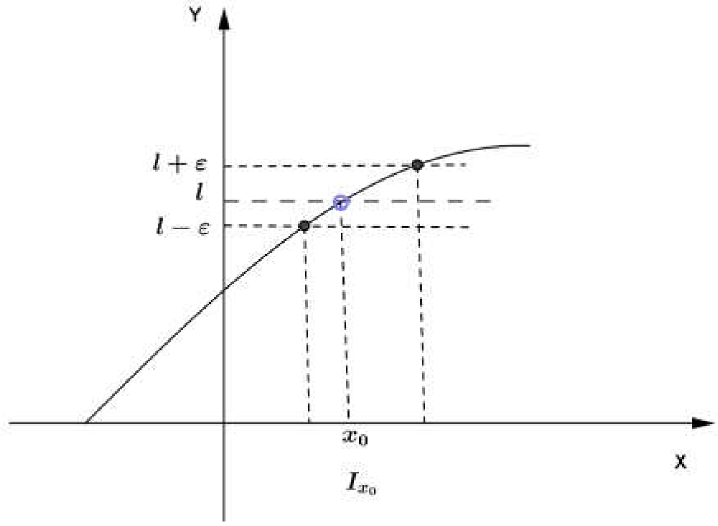
$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty$ quando $\forall M > 0 \ \ \exists\ I_{x_o}^- : \forall x \in I_{x_o}^- \ f(x) < -M$

La retta $x = x_o$ è **asintoto verticale** per la funzione : il "comportamento" può essere diverso da destra e a sinistra oppure lo stesso (in figura è rappresentato il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ che è un esempio in cui $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty$ con $x_0 = 1$.



b) Il limite è un numero finito

$\boxed{\lim_{x \to x_o} f(x) = l}$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_o} : \forall x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$



Esempio
Considera la funzione

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad D_f : x \neq 1$

Calcoliamo il limite quando x tende a 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

c) Il limite non esiste

Esempio

Consideriamo $y = sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Il suo dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Proviamo a calcolare

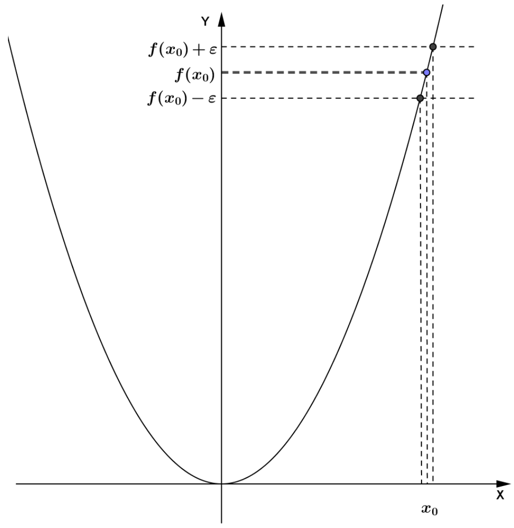
$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Quando $x \to 0^+$ abbiamo che $z \to +\infty$ ma sappiamo che $\lim_{z \to +\infty} \operatorname{sen} z$ non esiste.
Analogamente se $x \to 0^-$ avremo che $z \to -\infty$ e $\lim_{z \to -\infty} \operatorname{sen} z$ non esiste.

Quindi possiamo concludere che $\lim_{x \to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ non esiste.

IV) $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) quando\ x_0 \epsilon D_f}$

a) Abbiamo $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_o} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

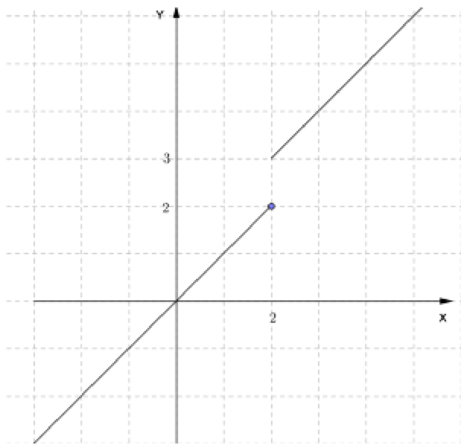


In questo **caso la funzione si dirà continua in x_0**.

b) Vediamo un altro caso considerando il seguente esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & per\ x \le 2 \\ x + 1 & per\ x > 2 \end{cases}$$

Si tratta di una funzione definita "a tratti" cioè la funzione ha una definizione per $x \le 2$ e un'altra definizione per $x > 2$. Il suo grafico risulta "spezzato":



In questo caso abbiamo un limite destro diverso dal limite sinistro poiché:

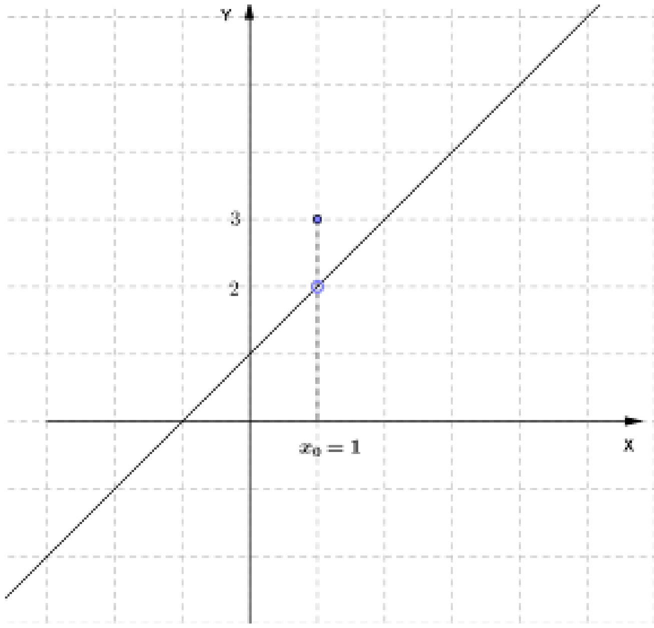
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

In generale se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$ $(l_1 \neq l_2)$ diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 1° specie o "salto".**

c) Consideriamo questa funzione

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & per\ x \neq 1 \\ 3 & per\ \ x=1 \end{cases}$$

Quanto vale $\lim_{x \to 1} f(x)$?



Quando ci avviciniamo a $x_0 = 1$ i valori della funzione si avvicinano a 2 e il fatto che $f(1) = 3$ non ha importanza perché dobbiamo vedere il comportamento della funzione quando $x \to x_0 = 1$ e quindi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2\ (\neq f(1) = 3)$$

In questo caso quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

e diciamo che **in x_0 la funzione ha una discontinuità di 3° specie o "eliminabile"** poiché potremo "ridefinire" $f(x)$ in $x_0 = 1$ associando il valore del limite per $x \to 1$.

d) Possiamo avere una funzione per cui **non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ con $x_0 \in D_f$?**

Se consideriamo $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & per\ \ x \neq 0 \\ 1 & per\ \ x=0 \end{cases}$

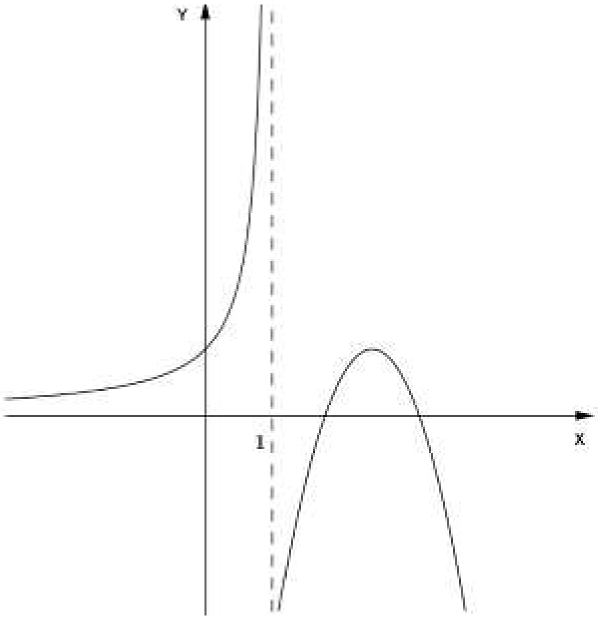
abbiamo che $x_0 = 0$ è nel dominio (per definizione $f(0) = 1$) ma, poiché il valore del limite non dipende dal valore della funzione in x_0, abbiamo che $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste perché, come avevamo già visto, non esiste $\lim_{x \to 0} sen\frac{1}{x}$.

Nota: anche in questo caso si dice che $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

ESERCIZI
LIMITI

I) Per verificare la comprensione del concetto di limite proviamo a **"leggere" i limiti di un grafico assegnato.** Consideriamo per esempio il seguente grafico:

a)



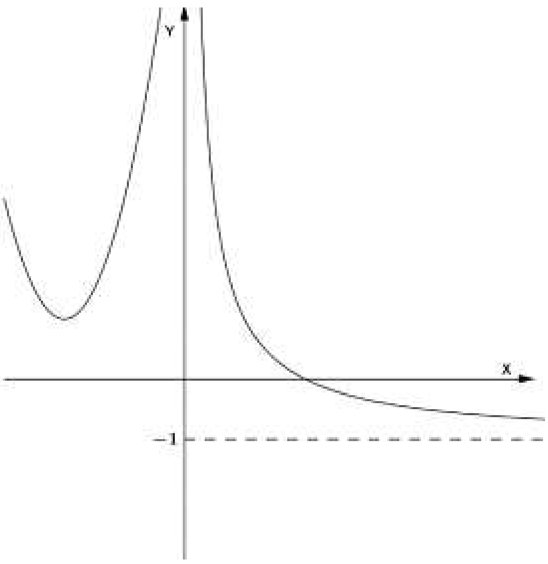
Vediamo che $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e abbiamo:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\quad y = 0$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$

$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ $\quad x = 1$ è asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b)



Abbiamo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\quad$ ($x = 0$ asintoto verticale)

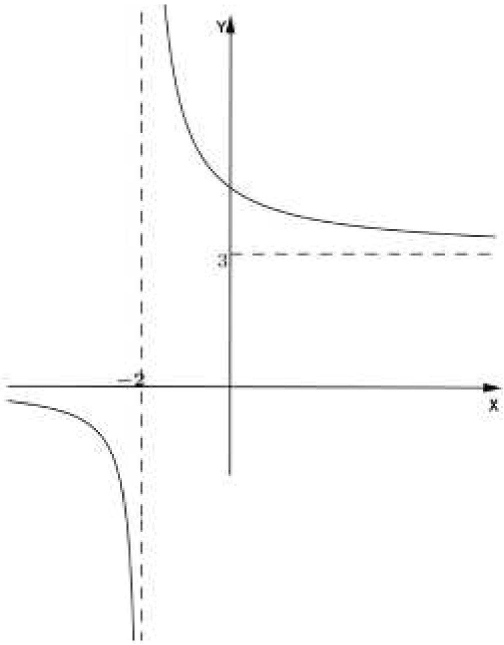
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$ $\quad$ ($y = -1$ asintoto orizzontale) c)

$D_f = \cdots$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \cdots \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \cdots \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$



d)

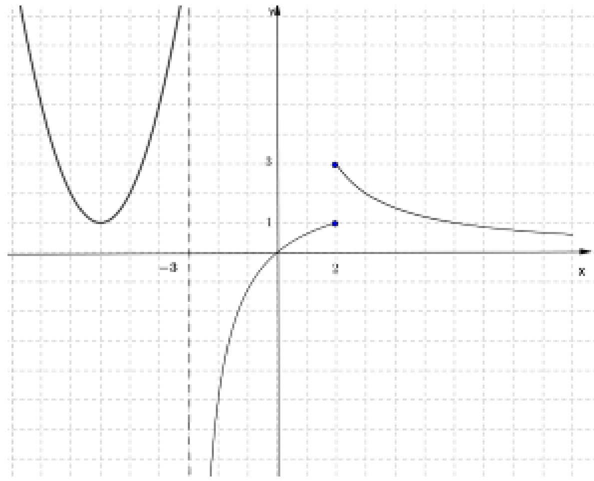
$D_{f=\cdots}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \cdots$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \ldots.. \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \ldots.. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots..$



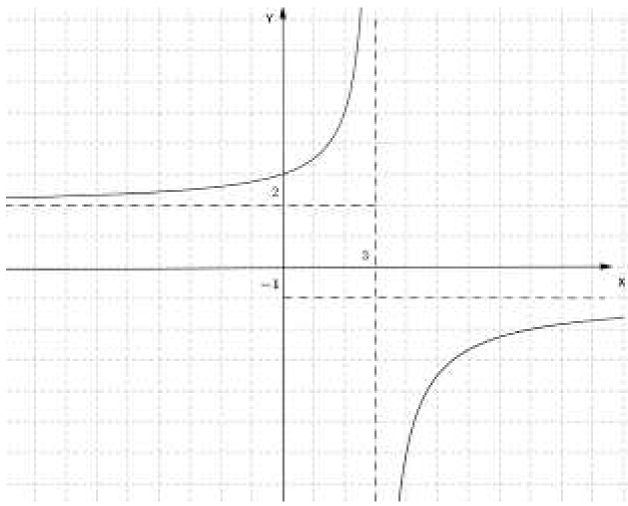
$D_f = \ldots..$

……………………..

……………………….

………………………..

………………………..

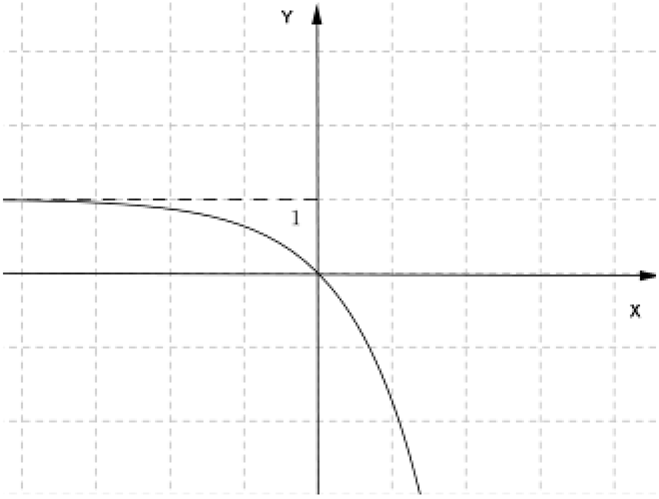


II) Proviamo adesso a fare l'esercizio "inverso" cioè a **disegnare un grafico che abbia dei limiti assegnati.**

a) $D_f = \mathbb{R}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Un grafico potrebbe essere:

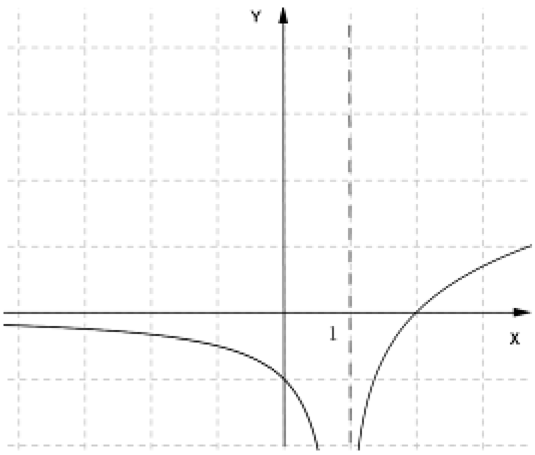


b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Possiamo pensare ad un grafico così:



Naturalmente questo è solo un esempio, ci possono essere grafici diversi, ma con gli stessi limiti.

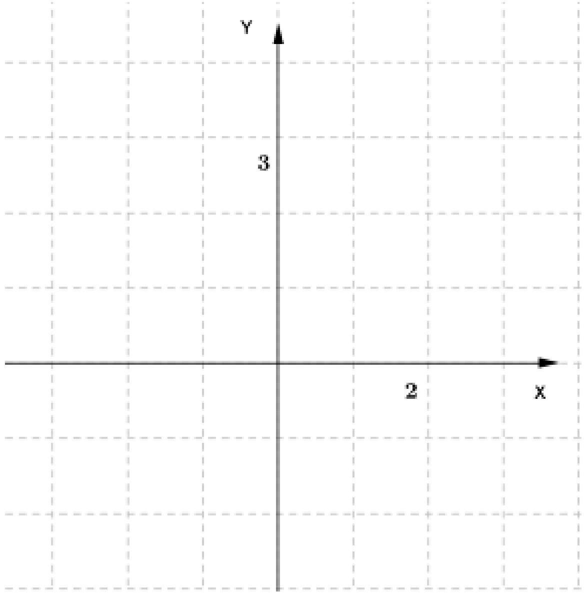
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Come potrebbe essere un grafico che presenta questi limiti?

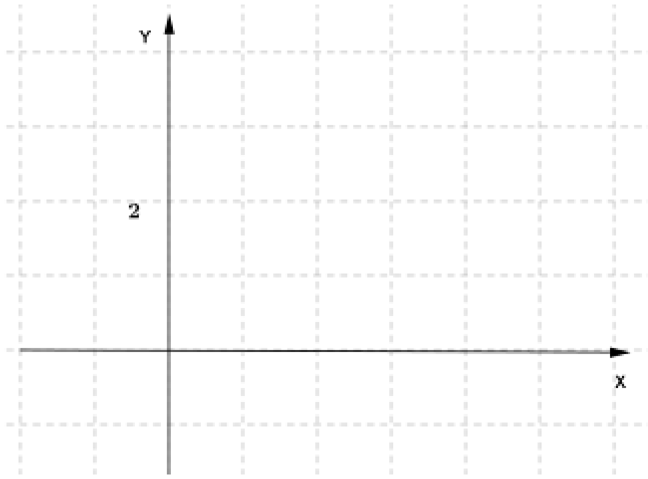


d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

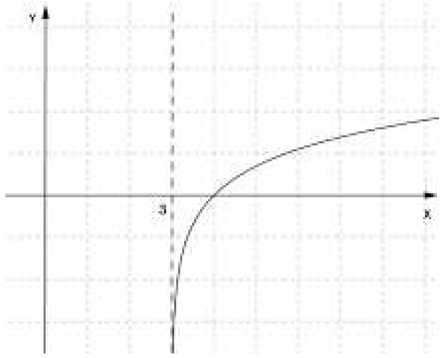
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$



Come potrebbe essere un grafico che presenta questi limiti?

III) Tracciamo dei grafici conosciuti e indichiamone i limiti:

a) $f(x) = \ln(x-3)$

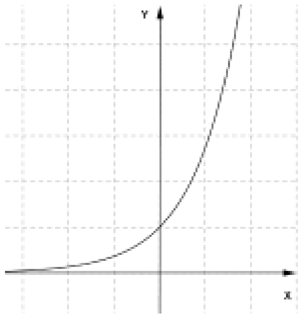


$D_f\colon x > 3$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \quad x = 3$ asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = e^x$

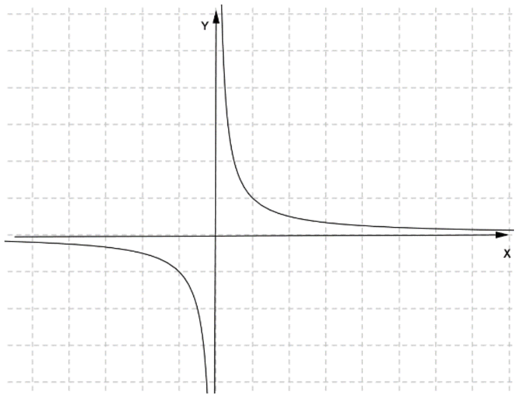


$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$



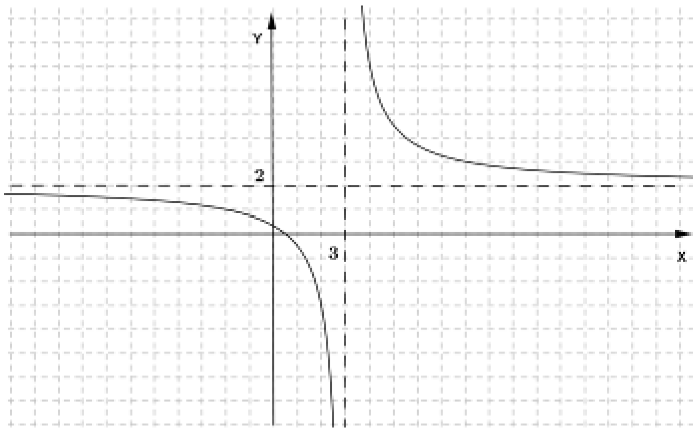
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases} \quad x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

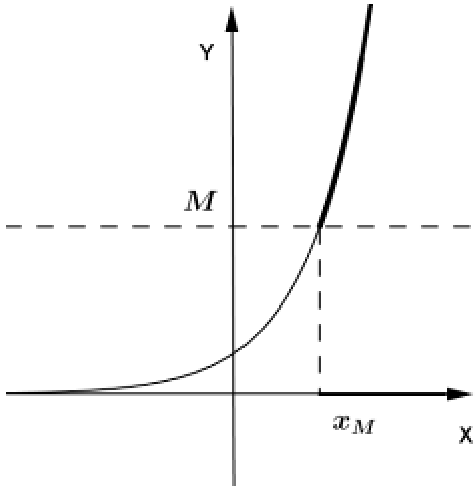
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

IV) Possiamo **"verificare"** i limiti utilizzando la definizione formale.

a) Consideriamo $f(x) = e^x$ e verifichiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Per verificarlo dobbiamo far vedere che:



$$\forall M > 0 \ \exists x_M : \forall x > x_M \quad f(x) > M$$

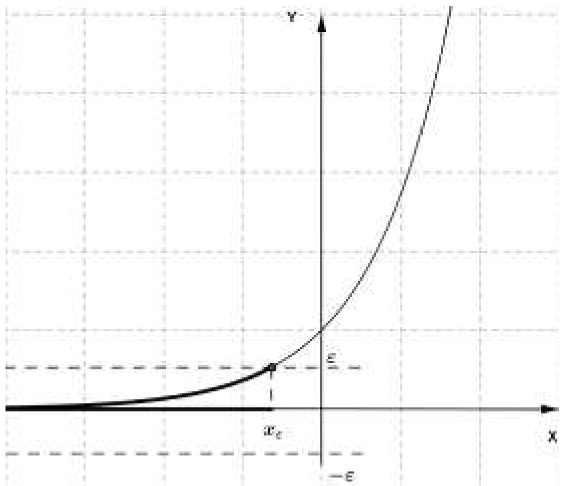
Consideriamo l'ultima disequazione e risolviamola:

$$e^x > M \quad \Leftrightarrow x > \ln M$$

Quindi $x_M = \ln M$ cioè $\forall x > x_M (= \ln M)$ avrò $e^x > M$

Se, per esempio, $M = 100$ avrei che per $x > \ln 100 \Rightarrow e^x > 100$.

b) Consideriamo sempre $f(x) = e^x$ e verifichiamo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



Dobbiamo verificare che

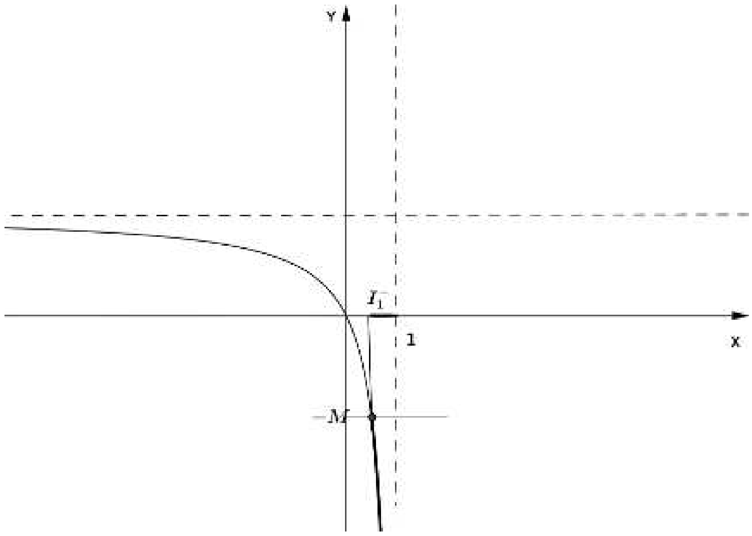
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon : \forall x < x_\varepsilon \quad -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$
$$(l = 0)$$

Risolvendo l'ultima disequazione abbiamo
(essendo e^x sempre positivo è maggiore di $-\varepsilon$):

$$e^x < \varepsilon \to x < \ln \varepsilon$$

Quindi $x_\varepsilon = \ln \varepsilon$ e abbiamo verificato il limite.
Se, per esempio, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\quad \forall x < \ln \frac{1}{100} \Rightarrow e^x < \frac{1}{100}$

c) Consideriamo $f(x) = \frac{2x}{x-1}$



- Verifichiamo che $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ cioè che

  $\forall M > 0\ \exists I_1^- :\ \forall x \in I_1^-\ f(x) < -M$

  Risolviamo allora

  $\frac{2x}{x-1} < -M \rightarrow \qquad \frac{2x+M(x-1)}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{(2+M)x-M}{x-1} < 0\ (*)$

Poiché ci stiamo interessando al limite sinistro, possiamo porre $x < 1$ e quindi $x - 1 < 0$: allora perché sia verificata $(*)$ dovremo avere

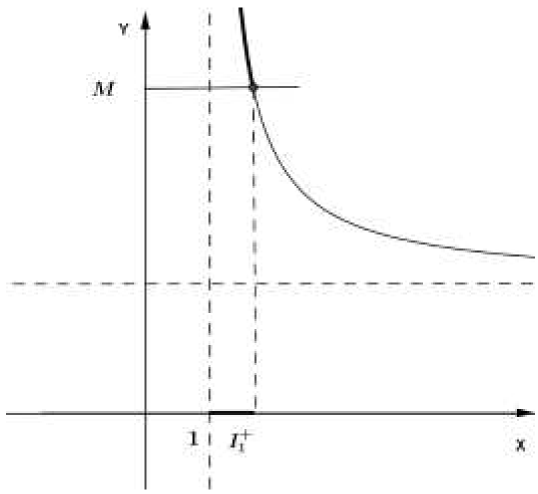
$$(2+M)x - M > 0 \rightarrow x > \frac{M}{2+M}$$

(posso dividere per $2 + M$ senza cambiare il verso della disuguaglianza perché $2 + M$ è positivo).

Quindi l'intorno sinistro di $x_0 = 1$ I_1^- è $\left(\frac{M}{2+M}, 1\right)$: se per esempio $M = +10$ quando $\frac{10}{12} < x < 1$ si ha $f(x) < -10$.

- Verifichiamo che $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ cioè che $\forall M > 0\ \exists I_1^+ :\ \forall x \in I_1^+\ \ f(x) > M$

Risolviamo



$\frac{2x}{x-1} > M \rightarrow \frac{2x-M(x-1)}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{(2-M)x+M}{x-1} > 0\ (*)$

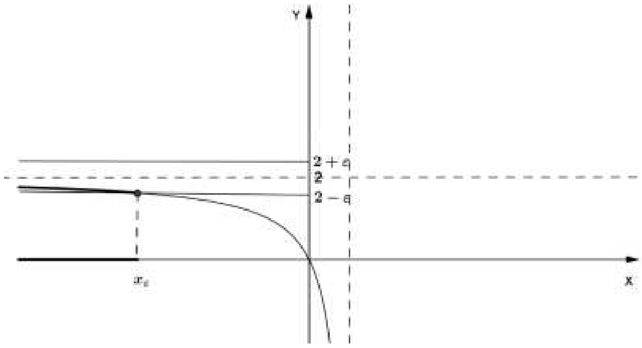
Poiché studiamo il limite destro, possiamo porre $x > 1$ e quindi $x - 1 > 0$: allora la disequazione $(*)$ sarà verificata se

$$(2-M)x + M > 0 \rightarrow x < -\frac{M}{2-M}$$

(inverto la diseguaglianza perché $2 - M$ è negativo).

Quindi l'intorno destro I_1^+ è $\left(1, \frac{M}{M-2}\right)$: se per es. $M = 10$ quando $1 < x < \frac{10}{8}$ si ha $f(x) > 10$.

- Verifichiamo che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ cioè che



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \quad : \quad \forall x < x_\varepsilon \quad 2 - \varepsilon < \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon$

Risolviamo

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} > 2 - \varepsilon \to \frac{2x-(2-\varepsilon)(x-1)}{x-1} > 0 \\ \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon \to \frac{2x-(2+\varepsilon)(x-1)}{x-1} < 0 \end{cases}$$

Poiché stiamo studiando il limite per $x \to -\infty$ possiamo porre $x - 1 < 0$ e quindi il sistema di disequazioni si semplifica così:

$$\begin{cases} 2x - (2-\varepsilon)(x-1) < 0 \to \cdots \to \varepsilon x + 2 - \varepsilon < 0 \to x < \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon} \\ 2x - (2+\varepsilon)(x-1) > 0 \to \cdots \to 2 + \varepsilon - \varepsilon x > 0 \to x < \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon} \end{cases}$$

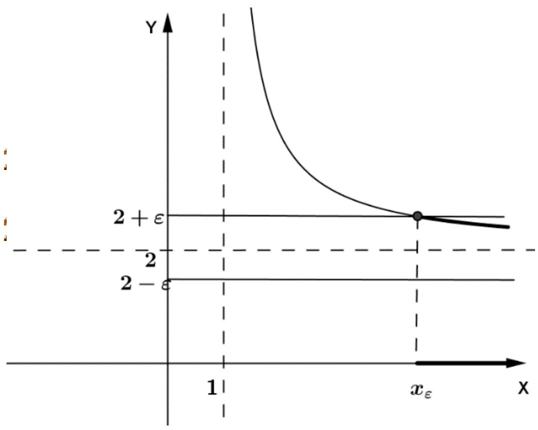
$\Rightarrow x < \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}$ e quindi $x_\varepsilon = \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}$ (se per esempio $\varepsilon = \frac{1}{100}$ $x_\varepsilon = -199$)

- Verifichiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ cioè che

  $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, x_\varepsilon \;: \forall\, x > x_\varepsilon \;\; 2 - \varepsilon < \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon$

  Risolviamo

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} > 2 - \varepsilon \to (stavolta\, (x-1) > 0) \to \\ \frac{2x}{x-1} < 2 + \varepsilon \to (stavolta\, (x-1) > 0) \to \end{cases}$$



$$\ldots \to \begin{cases} \varepsilon x + 2 - \varepsilon > 0 \to x > \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon} \\ 2 + \varepsilon - \varepsilon x < 0 \to x > \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon} \end{cases} \to \quad x > \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}$$

Quindi $x_\varepsilon = \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}$

Se per esempio $\varepsilon = \frac{1}{100} \to x_\varepsilon = 201$.

ESERCIZI
VERIFICHE DI LIMITI

1) $\lim_{x\to+\infty}(3^x+1)=+\infty$ $[x_M=\log_3(M-1)]$

2) $\lim_{x\to-\infty}(3^x+1)=1$ $[x_\varepsilon=\log_3\varepsilon]$

3) $\lim_{x\to2^+}\ln(x-2)=-\infty$ $[I_2^+=(2,\ 2+e^{-M})]$

4) $\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ $[x_M=2+e^M]$

5) Verifica i limiti di $f(x)=\frac{1}{x-1}$

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ $\left[x_\varepsilon=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ $\left[x_\varepsilon=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ $\left[I_1^-=\left(1-\frac{1}{M},1\right)\right]$
- $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ $\left[I_1^+=\left(1,1+\frac{1}{M}\right)\right]$

6) Verifica i limiti di $f(x)=\frac{x}{x-1}$

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ $\left[x_\varepsilon=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ $\left[x_\varepsilon=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right]$
- $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ $\left[I_1^-=\left(\frac{M}{M+1},1\right)\right]$
- $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ $\left[I_1^+=\left(1,\frac{M}{M-1}\right)\right]$

SCHEDA DI VERIFICA

LIMITI DI UNA FUNZIONE

1. Disegna il grafico delle seguenti funzioni ed indica dominio, caratteristiche e limiti significativi:

   a. $y = -\ln(x+4)$

   b. $y = \left|\dfrac{1-x}{x+3}\right|$

   c. $y = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Disegna il grafico di una funzione che abbia i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Disegna il grafico di $y = \frac{1}{x-3}$, scrivi i limiti significativi ed esegui la verifica.

4. Disegna il grafico di $y = \ln(x+1)$, scrivi i limiti significativi ed esegui la verifica.

Teoremi sui limiti

Teorema dell'unicità del limite

Se esiste $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)$ allora è unico.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che si abbia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$, per esempio $l_2 > l_1$.

Fissiamo $\varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}$: per la definizione di limite avremo che

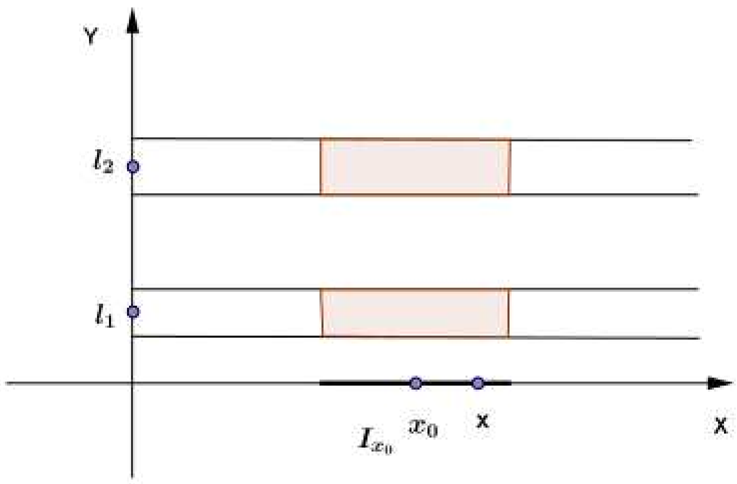
$\exists I_1(x_0) : \forall x \in I_{1\,x_0}(\cap D_f \setminus \{x_0\})\ l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\exists I_2(x_0) : \forall x \in I_{2\,x_0}(\cap D_f \setminus \{x_0\})\ l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

Allora se consideriamo $I_{x_0} = I_1 \cap I_2$ dovremmo avere

$$\forall x \in I_{x_0} \qquad l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$$

Ma, poiché le due strisce non si intersecano, questo non è possibile per la definizione stessa di funzione e quindi siamo caduti in contraddizione.



Teorema del confronto
(teorema dei due carabinieri)

Se per $f(x), g(x), h(x)$ si ha

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\} \text{ e se } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

allora si ha anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Dimostrazione

Per definizione sappiamo che fissato $\varepsilon > 0$

$$\exists I_1(x_0) \text{ in cui } \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\exists I_2(x_0) \text{ in cui } \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

e quindi considerando x appartenente all'intersezione dei due intorni e ricordando che per ipotesi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ avremo
$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$
e quindi
$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Teorema della permanenza del segno

a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0 \Rightarrow \exists I_{x_0}$ in cui (eccettuato al più x_0) $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

Dimostrazione
Consideriamo $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$: per definizione $\exists I_{x_0}$ in cui

$$l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$$

Quindi se $l > 0$ $\quad f(x) > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0$
se $l < 0$ $\quad f(x) < l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} < 0$

b) Se $\exists I_{x_0}$ in cui $f(x) > 0$ (oppure $f(x) < 0$) e se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \quad l \geq 0$ (oppure $l \leq 0$).

Dimostrazione

Supponiamo per esempio che $\exists I_{x_0}$ in cui $f(x) > 0$.
Se per assurdo $l < 0 \Rightarrow$ (*per il punto a) appena dimostrato*) $\exists I'_{x_0}$ in cui $f(x) < 0$ ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi.

Calcolo dei limiti

Limite della somma di due funzioni

Supponiamo di dover calcolare
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} (f(x) + g(x))$
e di conoscere $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$.

Possiamo dire che il limite della somma delle due funzioni sarà la somma dei limiti?

Occorre considerare vari casi e consideriamo per esempio $x \to x_0$.

a) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ dimostriamo che

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$

Fissato $\varepsilon > 0$, considero $\frac{\varepsilon}{2}$: per definizione
$\exists\, I_1(x_0)$ in cui $l_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ e
$\exists\, I_2(x_0)$ in cui $l_2 - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < l_2 + \frac{\varepsilon}{2}$

Se considero $I = I_1 \cap I_2$ varranno entrambe le relazioni e sommando membro a membro avremo:

$$l_1 - \frac{\varepsilon}{2} + l_2 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + g(x) < l_1 + \frac{\varepsilon}{2} + l_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$
cioè
$$(l_1 + l_2) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (l_1 + l_2) + \varepsilon$$

e quindi $$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$$

b) Se $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = l$ e $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = +\infty$ (oppure $-\infty$)

si dimostra facilmente che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty \quad \text{(oppure } -\infty\text{)}$$

(lo stesso se $\lim f(x) = \infty$ e $\lim g(x) = l$).

c) Se $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = +\infty$ è chiaro (la dimostrazione è semplice) che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

e che, analogamente, se $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = -\infty$ anche

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) + g(x)) = -\infty$$

d) Ma se $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = -\infty$ (o viceversa)?

Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = 2x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) = x$ ho $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

- $f(x) = 2x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -2x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) \equiv 0$ ho $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 0$

- $f(x) = 2x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -3x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) = -x$ ho $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$

- $f(x) = x + 1$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = -x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Poiché $f(x) + g(x) \equiv 1$ ho $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 1$

Quindi è chiaro che **in questo caso non c'è una regola generale**: si dice che si ha una **"forma indeterminata"** nel senso che

$$\operatorname{Lim}_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) + g(x)) \quad \text{quando} \quad f(x) \to +\infty \text{ e } g(x) \to -\infty$$

non può essere determinato a priori e il limite dovrà essere calcolato caso per caso con particolari accorgimenti.

Riassumiamo quindi i vari casi in questa tabella:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)+g(x)$
l_1	l_2	l_1+l_2
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**forma indeterminata**

Limite del prodotto di due funzioni

In questo caso abbiamo la seguente situazione:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)\cdot g(x)$
l_1	l_2	$l_1\cdot l_2$
$l\neq 0$	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)
$\boldsymbol{l=0}$	∞	**forma indeterminata**
∞	∞	∞ (regola dei segni del prodotto)

Quando scriviamo “regola dei segni del prodotto” significa che

se $\lim f(x)=l>0$ e $\lim g(x)=+\infty$ allora $\lim f(x)\cdot g(x)=+\infty$

se $\lim f(x)=l<0$ e $\lim g(x)=+\infty$ allora $\lim f(x)\cdot g(x)=-\infty$

e così via.

Ma perché $0 \cdot \infty$ risulta una forma indeterminata?

Vediamo qualche esempio:

- $f(x) = x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) \equiv 1$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 1$

- $f(x) = x^2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = x$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

- $f(x) = x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  $g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ma poiché $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ho $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$

Quindi è chiaro che **non c'è una regola generale per questo limite**: dovremo calcolarlo caso per caso con opportuni passaggi.

Limite della funzione reciproca

Abbiamo i seguenti casi (la dimostrazione è semplice):

$\lim f(x)$	$\lim \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$l = 0^+$ (cioè $f(x) > 0$)	$+\infty$
$l = 0^-$ (cioè $f(x) < 0$)	$-\infty$
∞	0

Limite del quoziente di due funzioni

Osservando che $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ otteniamo:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 \neq 0$	$\frac{l_1}{l_2}$
$l_1 \neq 0$	$l_2 = 0$	∞ (regola dei segni)
l_1	∞	0
∞	l_2	∞ (regola dei segni)
∞	∞	**forma indeterminata**
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	**forma indeterminata**

Abbiamo due forme indeterminate perché

$\frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0$ (forma indeterminata del prodotto)

$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$ (forma indeterminata del prodotto)

In conclusione, nel calcolo dei limiti, si presentano 4 forme "indeterminate":

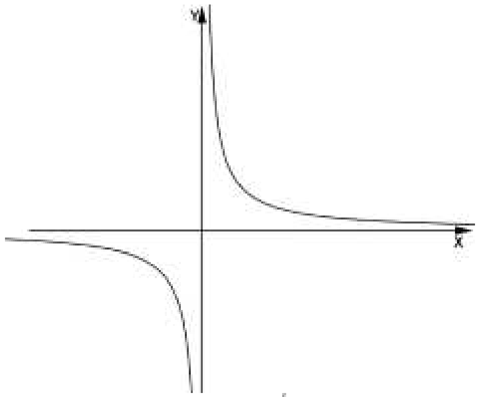
- $+\infty - \infty$ (per la somma)
- $0 \cdot \infty$ (per il prodotto)
- $\frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}$ (per il quoziente)

Esempi

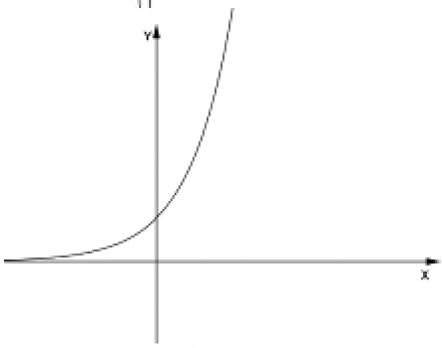
Daremo per scontata la continuità e la conoscenza dei limiti significativi delle funzioni elementari.

Per esempio:

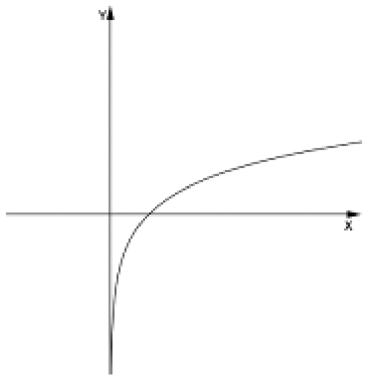
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$



$$\lim_{x\to -\infty} e^x=0$$
$$\lim_{x\to +\infty} e^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to 3} e^x=e^3$$

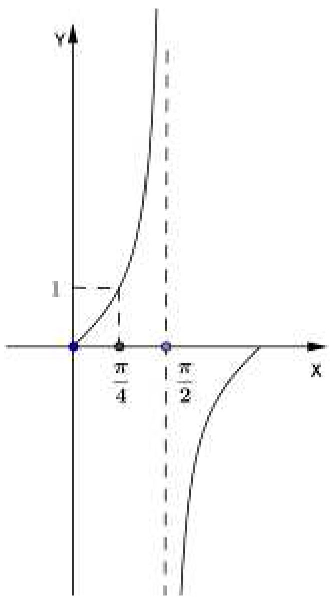


$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0$$



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tgx=+\infty,\qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tgx=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} tg\,x=tg\frac{\pi}{4}=1$$



Esempi di calcolo di limiti

a) Limiti di somme di funzioni

- $\lim_{x\to 1} x^2 + 2x - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 + 3x^3 = (+\infty + \infty) = +\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} e^x + x = (0 - \infty) = -\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} \ln x + 3 = (+\infty + 3) = +\infty$

- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x + 2x = (+\infty + \pi) = +\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \operatorname{sen} x = (+\infty + 0) = +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x$

  $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ ma non esiste $\lim_{x\to +\infty} \sin x$

Osserviamo però che $x + \operatorname{sen} x \geq x - 1$ e poiché

$$\lim_{x\to +\infty} (x - 1) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} x + \operatorname{sen} x = +\infty$$

- $\lim_{x\to +\infty} x^2 - x \quad (+\infty - \infty)$

Si tratta della forma indeterminata $(+\infty - \infty)$: **nel caso di funzioni polinomiali possiamo mettere in evidenza** e uscire dalla forma di indecisione:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 - x = \lim_{x\to +\infty} x(x - 1) = \big(+\infty \cdot (+\infty)\big) = +\infty$$

- $\lim_{x\to -\infty} x^2 - x = (+\infty + \infty) = +\infty$

- $\lim_{x\to -\infty} x^2 + x = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to -\infty} x(x + 1) = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty-\infty)$

Si tratta di una forma indeterminata: possiamo fare una specie di “razionalizzazione”:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-(x^2+1)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)} \quad \left(-\frac{2}{+\infty}\right) = 0$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1} \qquad (+\infty-\infty)$

Si tratta ancora di una forma indeterminata, ma non conviene fare come prima perché x^2 non si semplificherebbe e avremmo un’altra forma indeterminata $(\frac{\infty}{\infty})$.
Possiamo mettere in evidenza x^2 e portare fuori dalla radice: ricordiamo che $\sqrt{x^2}=|x|$, ma se il limite è $x\to+\infty$ allora x è positivo e $|x|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2-\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}}-\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}}\right) \qquad (+\infty\cdot\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{n° pos.}})=+\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} \qquad (+\infty-\infty)$

Anche in questo caso non conviene “razionalizzare” ma occorre mettere in evidenza:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{3+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}}-\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}}\right) = \left(+\infty(\sqrt{3}-1)\right) = +\infty$$

b) Limiti di prodotti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} x\cdot e^x = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \cos x\cdot \ln x = \left(1\cdot(-\infty)\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} (\ln x+1)^2 = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} x\cdot tg\, x = \left(\frac{\pi}{2}\cdot(-\infty)\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x\cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to +\infty} x\cdot \operatorname{arctg} x = \left(+\infty\cdot\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2\cdot \ln x = \left((+\infty)(+\infty)\right) = +\infty$

c) Limiti di quozienti di funzioni

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{2x} = \left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

  $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$

  $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \left(-\frac{\infty}{0^+} = -\infty\cdot\left(\frac{1}{0^+}\right) = (-\infty)\cdot(+\infty)\right) = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x+2}$: Si tratta di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$: possiamo raccogliere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)\right)} = 2$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x+3}$: anche in questo caso è una forma $\frac{\infty}{\infty}$ e raccogliendo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x\left(1+\left(\frac{3}{x}\right)\right)} = \left(\frac{+\infty\cdot 2}{1}\right) = +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x^3\left(1+\left(\frac{5}{x^3}\right)\right)} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = 0$

Osserviamo che $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}}$ con $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinomi risulterà:

∞ se grado $P_1(x) >$ grado $P_2(x)$
$l = \frac{coefficiente\ termine\ di\ grado\ \max di\ P_1(x)}{coefficiente\ termine\ di\ grado\ \max di\ P_2(x)}$ se grado $P_1(x) =$ grado $P_2(x)$
0 se grado $P_1(x) <$ grado $P_2(x)$

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Risulta una forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}\right)$, ma non conviene mettere in evidenza come prima perché $x \to 2$ e non $x \to \infty$ e quindi non otterremmo termini che tendono a zero: in questo caso scomponendo e semplificando abbiamo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$$

ESERCIZI
CALCOLO DI LIMITI

Calcola i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^3 + 2x$ [$+\infty$]

2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^2-1}$ [$-\infty$]

3. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$ [0]

4. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$ [$+\infty$]

5. $\lim_{x\to 2} x^2 + x - 3$ [3]

6. $\lim_{x\to 1} \ln x + 3x^2$ [3]

7. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x$ [$\pi/6$]

8. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - 5x$ [$-\infty$]

9. $\lim_{x\to 2} (x-2)\ln x$ [0]

10. $\lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \ln x$ [$+\infty$]

11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2+5}$ [$+\infty$]

12. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{3x^2-2}$ [1/3]

13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-2}{2x^2+1}$ [$+\infty$]

14. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{2x^3+x+2}$ [0]

15. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{3x+1}$ [1/3]

16. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x+1}{x^2-2x-5}$ [$+\infty$]

17. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{2x^3+x+1}$ [$\frac{1}{2}$]

18. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3}{2x^3+1}$ [0]

19. $\lim_{x+\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+5}$ [0]

20. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$ [$+\infty$]

21. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+4}$ [0]

22. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2+1}$ [$-\infty$]

23. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+5}$ [$-\infty$]

24. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5+x^2}{3x^2-1}$ [$\frac{1}{3}$]

25. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+x-3}$ [$\frac{\sqrt{2}}{4}$]

26. $\lim_{x\to+\infty} \frac{9-x^2}{3-x}$ [$+\infty$]

27. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4}-\sqrt{3x^2+1}$ [$-\infty$]

28. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$ [6]

29. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ [3]

30. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{4x^4+x+2}$ [$\frac{1}{4}$]

Limite di una funzione composta

Supponiamo di dover determinare $\lim_{x\to x_o} g(f(x))$ oppure $\lim_{x\to\infty} g(f(x))$.

Si può dimostrare che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (l può essere anche $\pm\infty$ oppure si può trattare di un limite per $x\to\infty$) allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y)$

Esempi

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} e^{\operatorname{tg} x} \underset{\downarrow}{=} \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$

  $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \underset{\downarrow}{=} \lim_{y\to1} \ln y = 0$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

- $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) = \lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = \lim_{y\to0^+} \ln y = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$

Nota importante

Per calcolare il limite di $f(x)^{g(x)}$ si scrive $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$ e si calcola come limite di una funzione composta.

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)} =^{(*)} \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

$$(*)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\frac{2x}{x+1} = +\infty$$

ESERCIZI

LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

1. $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{x-1}}$ $[e]$

2. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ $\left[+\frac{\pi}{2}\right]$

3. $\lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $[+\infty]$

4. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ $[0]$

5. $\lim_{x \to 2} \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$ $[\ln 4]$

6. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ $[-\infty]$

7. $\lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{3x}{x+1}}$ $[8]$

8. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^x$ $[0]$

9. $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

10. $\lim_{x \to +\infty} \arccos\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

11. $\lim\limits_{x+\infty} e^{\frac{1-x^2}{x+2}}$ [0]

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\left(\dfrac{3+x^4}{3x^3-1}\right)$ [$\dfrac{\pi}{2}$]

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\left(\dfrac{x^3+1}{x^2+2}\right)$ [$-\dfrac{\pi}{2}$]

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^3+1}{2x^2-5}}$ [$+\infty$]

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^3-7}\right)$ [$-\infty$]

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} arcsen\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+1}\right)$ [$\dfrac{\pi}{2}$]

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+x-2}\right)$ [$\dfrac{\pi}{4}$]

18. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)^x$ [$+\infty$]

19. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^4+1}{x^4}}$ [e]

20. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{5x^2-1}$ [$-\infty$]

21. $\lim\limits_{x\to-1} 2^{\frac{x^2-1}{x+1}}$ [$\dfrac{1}{4}$]

22. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{2x+3}{x}}$ [$+\infty$]

23. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$ [0]

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{3-2x^2}\right)$ [$\dfrac{\pi}{3}$]

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3+5}{x^3-x+1}\right)^x$ [$+\infty$]

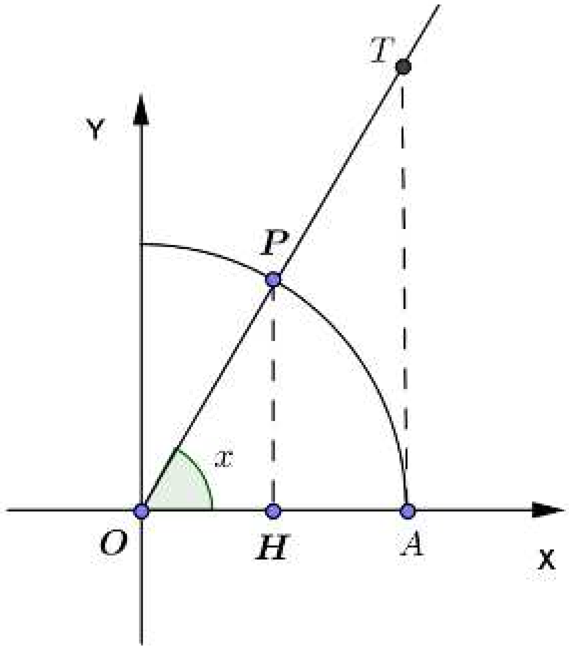
Limiti notevoli

Studiamo due limiti "notevoli" (cioè degni di nota)

1. $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1}$ (x misura dell'angolo in radianti)

Se consideriamo $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ vediamo che si tratta di una forma indeterminata.

Cominciamo con lo studiare $\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}\,x}{x}$.



Considerando la circonferenza goniometrica osserviamo che la misura dell'arco $\widehat{AP}=x$ (radianti) e che (intuitivamente)

$\overline{PH}<\widehat{AP}<\overline{AT}$ e quindi (ricordando la definizione di seno e tangente)

$$\text{sen}\,x<x<\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$$

Dividendo per $\text{sen}\,x$ ($\sin x>0$) abbiamo:

$$1<\frac{x}{\text{sen}\,x}<\frac{1}{\cos x}$$

e passando ai reciproci (e invertendo le disuguaglianze) avremo:

$$1>\frac{\text{sen}\,x}{x}>\cos x$$

Passando al limite, poiché $\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$, per il teorema del confronto abbiamo che:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1$$

Ma anche $\lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1$ poiché $f(x)=\frac{\text{sen}\,x}{x}$ è una funzione pari : infatti $f(-x)=\frac{\text{sen}(-x)}{(-x)}=-\frac{\text{sen}\,x}{-x}=f(x)$ e quindi in conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1$$

NOTA: se invece x è la misura in gradi si può dimostrare che $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\frac{\pi}{180}$

Esempi

Vediamo qualche esempio di limite che può essere calcolato utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}=\lim_{y\to 0}2\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}y}{y}\right)$$

moltiplico e divido per 2   pongo $y=2x$ 1

Abbiamo quindi ritrovato il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{y}=1$ e in conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}=2$$

In generale avremo (con analoghi passaggi)

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}kx}{x}=k}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)=1$$

1   1

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}x)^2}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=\frac{1}{2}$$

1

1

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+2x}{\operatorname{sen}2x-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x+2x}{x}}{\frac{\operatorname{sen}2x-3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)+2}{\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{x}\right)-3}=\frac{3}{(-1)}=-3$$

dividiamo numeratore e denominatore per x 2

2. $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$

Se proviamo a calcolarlo ricordando che

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}\rightarrow \qquad e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

otteniamo all'esponente una forma indeterminata $(\infty\cdot 0)$.

Se, utilizzando la calcolatrice, proviamo a calcolare $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ sostituendo a x numeri molto grandi, notiamo che ci stabilizziamo su un numero che risulta circa

2,71…..

Si può dimostrare infatti che:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

dove $\boldsymbol{e}$ = **numero di Nepero** (base dei logaritmi "naturali") e con la scrittura $x\to\infty$ si intende che il limite vale sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$.

NOTA

Vediamo come il calcolo di alcuni limiti che si presentano in forma indeterminata si possa ricondurre a questo limite notevole:

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$

ponendo $\frac{1}{x}=y$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2}=e^{2}$

dividiamo e moltiplichiamo per 2 l'esponente

$\frac{x}{2}=y$

In generale (con analoghi passaggi)

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{\alpha}}$$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

Cercando di calcolare il limite passando alla forma esponenziale troviamo all'esponente una forma indeterminata.

Proviamo quindi a ricondurci al limite notevole $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

- Scriviamo

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$$

- Sottraiamo e sommiamo 1 all'esponente

$$\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1+1}=\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1$$

- Ricordiamo che

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$$

Quindi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1=e^2\cdot 1=e^2$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$

Quindi, in generale,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}$$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}(=\ln a)$

$a^x-1=y$
$a^x=1+y$
$x=\log_a(1+y)$

In particolare

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

ESERCIZI
LIMITI NOTEVOLI

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ $[3]$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ $[2]$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x}{4x - \operatorname{sen} x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-\cos x}$ $[+\infty]$

5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$ $[1]$

6. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ $[e^3]$

7. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x$ $[e^{-5}]$

8. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ $[e^{-1}]$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$ $[2]$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$ $[\ln 2]$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

CALCOLO DI LIMITI

1. $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ $[+\infty]$

2. $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $[-\infty]$

3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{x-2}$ $[+\infty]$

4. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}$ $[0]$

5. $\lim_{x\to -\infty} x^3-x^2$ $[-\infty]$

6. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-2}$ $[+\infty]$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x+x}{\operatorname{sen} x+2x}$ $[1]$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x+2x}{4x}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{2\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$ $[2]$

10. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ $[\sqrt{2}]$

11. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^x$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

12. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x^2+2}\right)^x$ $[0]$

13. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ $[1]$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{1-3^x}{2x}$ $\left[-\frac{\ln 3}{2}\right]$

15. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x$ $[e^3]$

Asintoti di una funzione

Asintoti verticali e orizzontali

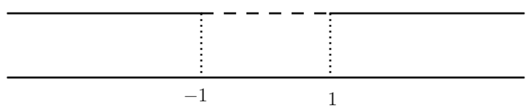
Esempio: consideriamo la funzione $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Il suo dominio è costituito dai numeri reali con $x \neq \pm 1$ (valori che annullano il denominatore).

Il grafico di questa funzione avrà degli asintoti ?

Proviamo a calcolare i limiti quando $x \to 1$ e quando $x \to -1$: osserviamo che sarà necessario distinguere limite destro e sinistro e per semplificare il calcolo possiamo schematizzare il segno del denominatore con un disegno:

$$x^2 - 1 > 0 \to x < -1 \cup x > 1$$



$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

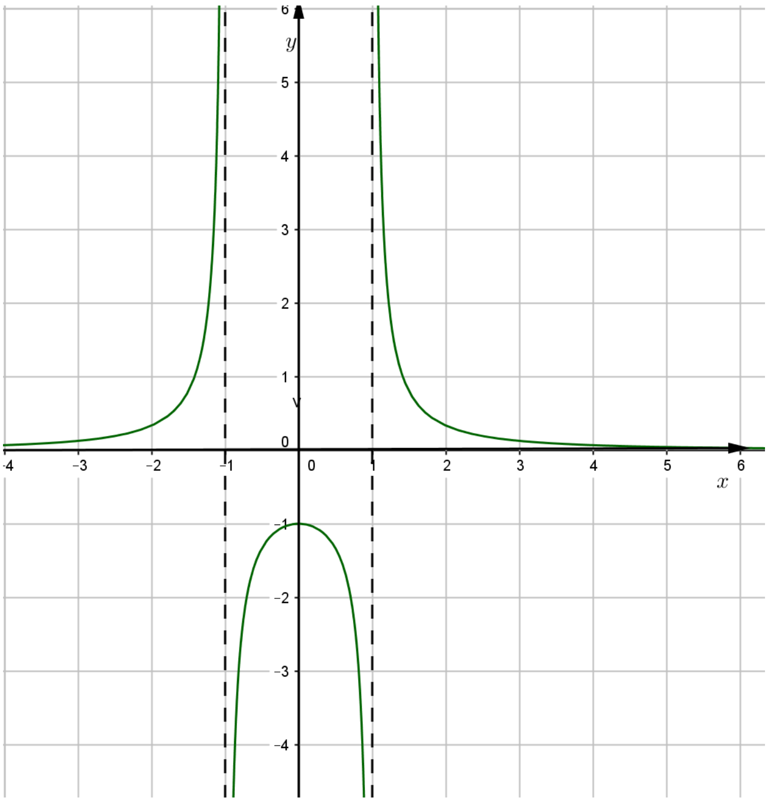
Il grafico ha quindi **due asintoti verticali** di equazione $x = -1$ e $x = 1$.

Come risultano i limiti quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$?

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0$ e quindi l'asse x è **asintoto orizzontale**.

Non siamo ancora in grado di disegnare il grafico della funzione (dobbiamo ancora sviluppare il calcolo delle derivate che ci permetterà di individuare eventuali punti di massimo, minimo e "flesso") ma possiamo verificare che gli asintoti che abbiamo individuato sono corretti utilizzando Geogebra.

Inserendo nella barra di inserimento $y = 1/(x\text{^}2 - 1)$ otteniamo il seguente grafico che conferma quello che abbiamo trovato con il calcolo dei limiti:



In conclusione

- se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ e/o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \Rightarrow x = x_0$ è asintoto verticale

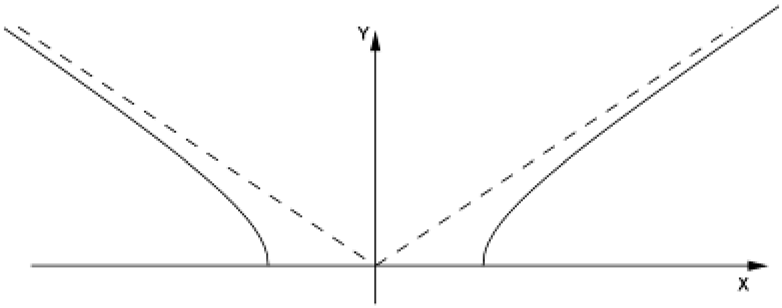
- se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Rightarrow y = l$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l' \Rightarrow y = l'$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

Asintoti obliqui

Ma come possiamo determinare, con il calcolo dei limiti, un asintoto obliquo del grafico di f(x)?

Ricordiamo che il grafico di una funzione può avere anche due asintoti obliqui diversi (vedi figura).



Consideriamo per esempio $x \to +\infty$.

Quali sono le condizioni che si devono verificare perché il grafico di $f(x)$ abbia come asintoto obliquo la retta $y = mx + q$ per $x \to +\infty$?

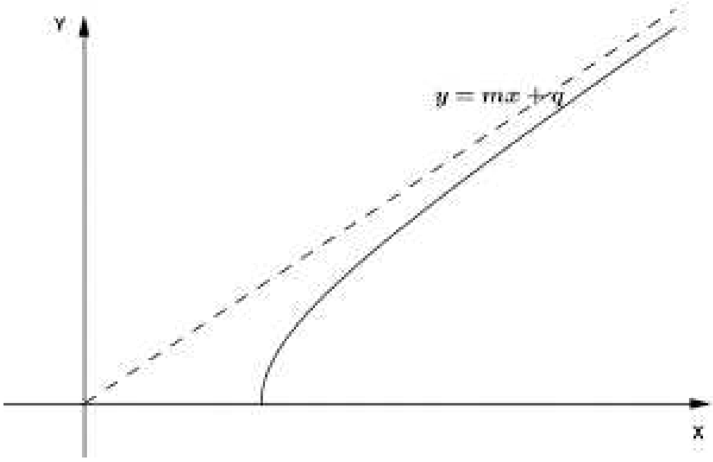
1) E' chiaro che se per $x \to +\infty$ il grafico si avvicina alla retta $y = mx + q$ dovrà essere

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

2) A questo punto se $f(x) \simeq mx + q$ per $x \to +\infty$ allora $\frac{f(x)}{x} \simeq m + \left(\frac{q}{x}\right)$

e quindi $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad (m \neq 0)$$

3) Infine dovrà anche essere $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$



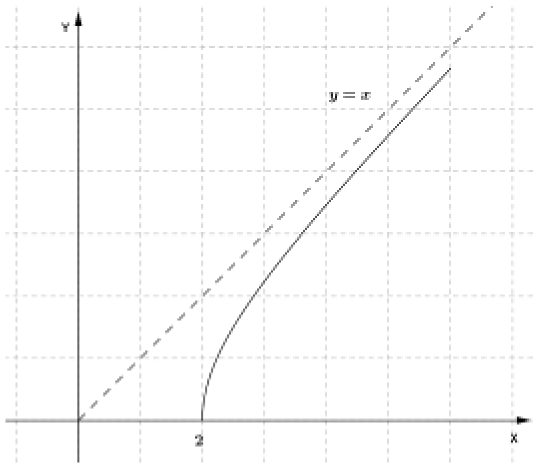
Esempi *(ricerca di asintoti obliqui)*

1) Verifichiamo $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ha asintoto obliquo $y=x$ per $x\to+\infty$ (si tratta infatti di un "pezzo" di iperbole equilatera).

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}=1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=\left(\frac{-4}{+\infty}\right)=0 \qquad (q)$$



2) Vediamo se $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ ha asintoti obliqui.

Cominciamo a studiare i limiti per $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \qquad (m)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=-1 \qquad (q)$$

Quindi $y=x-1$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Per $x\to-\infty$ si ottiene lo stesso asintoto (verificalo).

NOTA: osserviamo che **una funzione razionale fratta** *f(x)* **in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore avrà sempre un asintoto obliquo** (lo stesso per $x\to\pm\infty$) (che si può ottenere anche facendo la divisione tra il polinomio "numeratore" e il polinomio "denominatore").

3) Studiamo $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ $\quad (D_f: x \leq -1 \ \cup \ x \geq 1)$

- Cominciamo con $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

- Vediamo cosa succede per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 2 \quad (m)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to -\infty} -x - \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} -\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) =$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = -\left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0 \quad (q)$$

Quindi $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

4) Studiamo $f(x) = \operatorname{sen} x + x$. Vediamo per esempio $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad (\operatorname{sen} x \text{ è limitato tra -1 e 1})$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \qquad \textbf{non esiste}$$

Quindi la funzione non ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (analogamente per $x \to -\infty$).

Osserviamo quindi che se anche sono verificate le prime due condizioni non è detto che sia verificata la terza condizione e che quindi esista l'asintoto obliquo.

Esempio

Ora che abbiamo esaminato anche il metodo di ricerca di eventuali asintoti obliqui, possiamo, data una funzione, determinare **tutti i suoi eventuali asintoti**.

Consideriamo, per esempio $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$.

Per prima cosa determiniamo il dominio di $f(x)$: $D_f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Per determinare eventuali asintoti cominceremo proprio studiando i limiti quando $x \to 1$ o $x \to -1$.

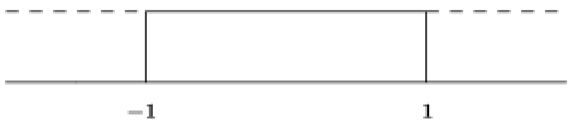
È importante in questo caso distinguere limite destro e limite sinistro:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \left(\frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \left(\frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$$

Quindi $x = -1$ è asintoto verticale.

Nota: per stabilire il segno dello zero al denominatore basta ricordare che $1 - x^2 > 0$ quando $-1 < x < 1$.



Quindi se $x \to -1^-$ avrò 0^-

se $x \to -1^+$ avrò 0^+

ecc...

Analogamente:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$$

Quindi $x = 1$ è asintoto verticale.

Poiché il dominio della funzione me lo permette, passo al calcolo dei limiti quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

In questo caso mi rendo subito conto che si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore e quindi ci sarà un asintoto obliquo (lo stesso sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$).

Lo determino studiando i limiti per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x - x^3} = -2 \quad (m)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{1 - x^2} + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = 0 \quad (q)$$

Quindi $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.

Infatti alla stessa conclusione si arriva facendo la divisione fra numeratore e denominatore della funzione:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & -x^2 + 1 \\ \hline -2x^3 \;\; 2x & -2x \\ \hline // & \end{array}$$

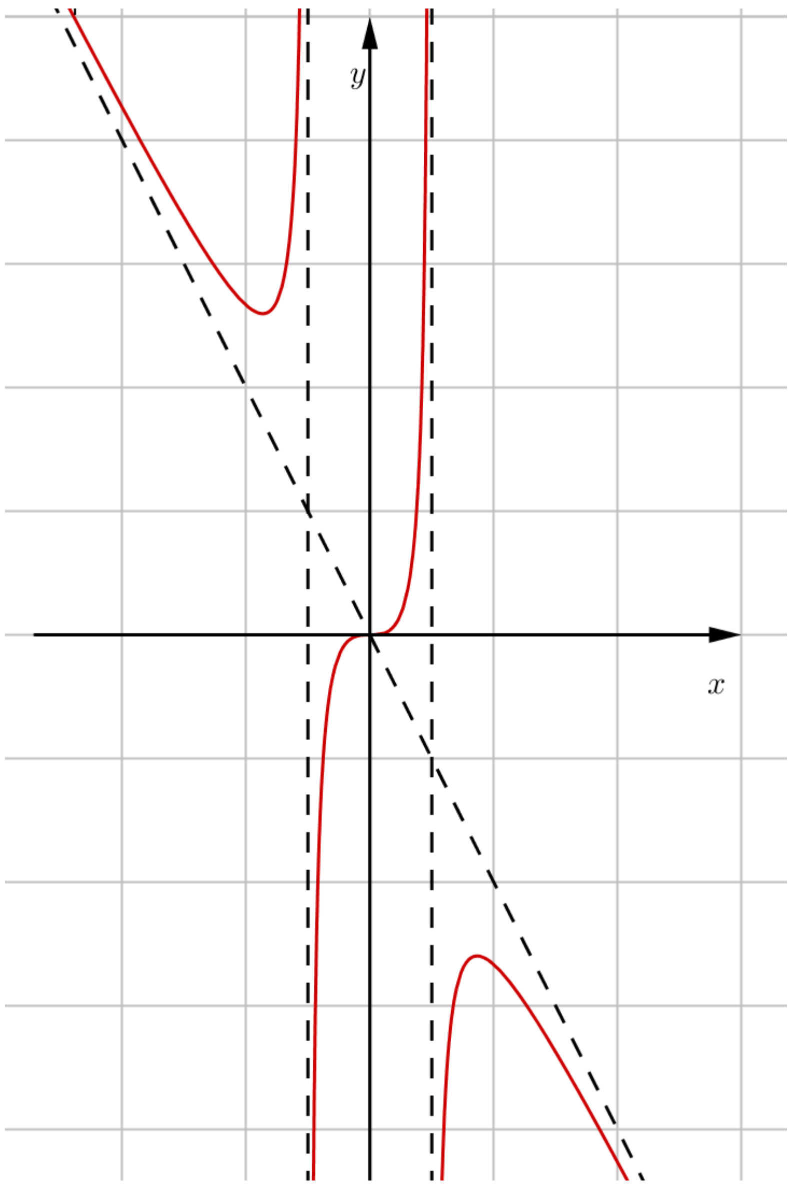
$\frac{2x^3}{1-x^2} = -2x + \frac{2x}{1-x^2}$ e quindi poiché $\frac{2x}{1-x^2} \to 0$ per $x \to \infty$ si ha che $f(x) \simeq -2x$

In conclusione la funzione $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$ ha

$x = -1$ e $x = 1$ come asintoti verticali

$y = -2x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

Controlliamo il grafico che si ottiene con Geogebra se inseriamo $y = \dfrac{2x^3}{1-x^2}$: osserviamo che il grafico ha in effetti sia i due asintoti verticali che l'asintoto obliquo che abbiamo individuato con il calcolo dei limiti.



ESERCIZI
ASINTOTI

Determina gli asintoti delle seguenti funzioni:

1) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ $[x = -1\ as.vert.; x = 1\ as.vert.; y = x\ as.obl.]$

2) $y = \frac{x^4}{x^4-16}$ $[x = -2\ as\ vert.; x = 2\ as.vert.; y = 1\ as.orizz.]$

3) $y = \frac{2x^4}{x^3-1}$ $[x = 1\ as.vert.; y = 2x\ as.obliquo]$

4) $y = \frac{x^2}{3x-1}$ $[x = \frac{1}{3}\ as.vert.; y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\ as.obl.]$

5) $y = \frac{1-x^2}{x^2-9}$ $[x = -3\ as.vert.; x = 3\ as.vert.; y = -1\ as.orizz.]$

6) $y = 2x - \sqrt{x^2-3}$ $[y = 3x\ as.obl.\ per\ x \to -\infty; y = x\ as.obl.\ per\ x \to +\infty]$

7) $y = \sqrt{x^2-4} - x$ $[y = -2x\ as.obl.\ per\ x \to -\infty; y = 0\ as.orizz.\ per\ x \to +\infty]$

8) $y = \sqrt{4x^2+1} - 3x$ $[y = -5x\ as.obl.\ per\ x \to -\infty; y = -x\ as.obl.\ per\ x \to +\infty]$

9) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $[x = 0\ a.v.; y = -1\ a.o.\ per\ x \to -\infty; y = 1\ a.o.\ per\ x \to +\infty]$

10) $y = x - \sqrt{x^2-9}$ $[y = 2x\ as.obl.\ per\ x \to -\infty\ e\ y = 0\ as.orizz.\ per\ x \to +\infty]$

11) $y = \ln\left(\frac{x-4}{x-1}\right)$ $[y = 0 \; as. orizz. \; per \; x \to \pm\infty; x = 1 \; as. vert.; x = 4 \; as. vert.]$

12) $y = e^{\frac{x-4}{x}}$ $[y = e \; as. orizz. \; per \; x \to \pm\infty; x = 0 \; as. vert.]$

13) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $[y = 1 \; as. orizz. \; per \; x \to \pm\infty; x = 2 \; as. vert.]$

14) $y = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ $[x = 1 \; as. vert.; x = 0 \; as. vert.; y = 0 \; as. orizz. \; per \; x \to \pm\infty]$

15) $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $[y = 1 \; as. orizz. \; per \; x \to \pm\infty; x = -1 \; as. vert.; x = 1 \; as. vert.]$

16) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$ $[y = 2x \; as. obl.; x = 1 \; as. vert,; x = -1 \; as. vert.]$

17) $y = \frac{\sqrt{x^2-4}-1}{x}$ $[y = -1 \; as. orizz. \; per \; x \to -\infty; y = 1 \; as. orizz. \; per \; x \to +\infty]$

18) $y = x - \sqrt{x^2 - x}$ $[y = 2x - \frac{1}{2} \; as. obl. \; per \; x \to -\infty; y = \frac{1}{2} \; as. orizz. \; per \; x \to +\infty]$

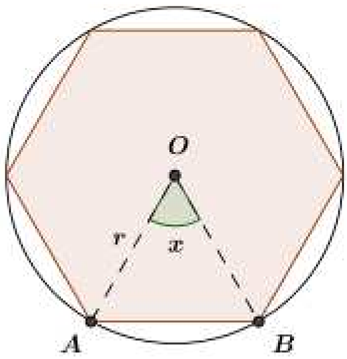
19) $y = \frac{1-3x-x^2}{x+3}$ $[y = -x \; as. obl. \; per \; x \to \pm\infty; x = -3 \; as. vert.]$

20) $y = \frac{2x^3-1}{x^2-9}$ $[y = 2x \; as. obl. \; per \; x \to \pm\infty; x = -3 \; as. vert.; x = 3 \; as. vert.]$

Problemi e calcolo di limiti

Esempio svolto

Consideriamo un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r e centro O: sia x l'angolo (in radianti) in figura.



Determinare l'area $A(x)$ del poligono regolare e calcolare $\lim_{x \to o^+} A(x)$.

Per calcolare l'area del poligono possiamo determinare l'area del triangolo $A\hat{B}O$ e poi moltiplicarla per il numero di lati del poligono.

$$area(A\hat{B}O) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \operatorname{sen} x = \frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{sen} x$$

Il numero dei lati del poligono è $\frac{2\pi}{x}$.

Quindi $$A(x) = \frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{2\pi}{x}$$

$$A(x) = \pi r^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} A(x) = \lim_{x \to 0^+} \pi r^2 \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}_{\to 1} = \pi r^2$$

Infatti quando $x \to 0^+$ il numero dei lati del poligono tende all'infinito e l'area del poligono tende all'area del cerchio di raggio r.

Complemento
Successioni e serie numeriche

Successioni

Una successione numerica è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cioè una legge che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $f(n)$ che in genere viene indicato con la scrittura a_n o b_n ecc. (elemento n-esimo della successione o termine n-esimo).

Esempio 1: $f: n \to \frac{1}{n}$ cioè $a_n = \frac{1}{n}$

I termini di questa successione (definita per $n \neq 0$) sono:

$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3} \dots$

Esempio 2: $f: n \to n^2$ cioè $a_n = n^2$.

In questo caso si ha:

$a_0 = 0 \;\; a_1 = 1, a_2 = 4 , a_3 = 9 \dots$

Esempio 3: $f: n \to (-1)^n$ cioè $a_n = (-1)^n$.

Stavolta abbiamo:

$a_0 = 1 ,\; a_1 = -1, a_2 = 1,\; a_3 = -1 \dots$

Possiamo studiare $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e si possono presentare tre casi:

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ in questo caso si dice che **la successione converge a *l* .**

  Per esempio $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *oppure* $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$: allora **la successione si dice divergente.**

  Per esempio $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

- Se $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ in tal caso **la successione si dice indeterminata**.

  Se per esempio consideriamo $a_n = (-1)^n$ i termini della successione saranno:

  $$1 \quad ; \quad -1 \quad ;1 \quad ; \quad -1 \quad \dots.$$

  e quindi in questo caso non esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Serie numeriche

Data una successione numerica a_n posso considerare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$$

Consideriamo la successione s_n delle somme "parziali":

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$
$$...$$
$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Se consideriamo $\lim_{n\to+\infty} s_n$ si possono presentare tre casi:

- $\lim_{n\to+\infty} s_n = S$: si dice che **la serie converge** e S è chiamata "somma" della serie;
- $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ ($+\infty$ o $-\infty$) : si dice che **la serie diverge** ;
- non esiste $\lim_{n\to+\infty} s_n$: si dice che **la serie è indeterminata**.

Esempio

Una serie particolarmente importante è la cosiddetta serie geometrica (somma dei termini di una successione geometrica):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n + ...$$

E' chiaro che se $a = 1$ la serie diverge.
Consideriamo $a \neq 1$.
Osserviamo che la successione delle somme parziali può anche essere scritta così:

$$s_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Calcolando $\lim_{n\to+\infty} s_n$ avremo:

- se $a > 1$ la serie diverge a $+\infty$
- se $a \leq -1$ la serie è indeterminata
- se $-1 < a < 1$ la serie converge a $S = \frac{1}{1-a}$ poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

poiché in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$

SCHEDA DI VERIFICA 1

1) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^3}{3x^2 - 1}$

b. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-3}$

c. $\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{2x^3+1}{x^2}$

d. $\lim_{x \to -\infty} \text{arctg} \frac{x^2-2}{2x}$

e. $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x^3-1}{2-x}}$

f. $\lim_{x \to +\infty} (2+x)^{x+1}$

2) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{x + \text{sen}\, 2x}{3x + \text{sen}\, 3x}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{2x}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{4x}$

d. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$

3) Determina dominio e asintoti delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{4 - x^2}$

b. $f(x) = x - \sqrt{4x^2 - 1}$

4) Problema

Determina l'area $A(x)$ del trapezio isoscele ABCD inscritto in semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ indicando con x l'angolo adiacente alla base maggiore e calcola i limiti significativi di $A(x)$.

SCHEDA DI VERIFICA 2

1) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-x^2}{2x^2+1}$

b. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}$

c. $\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x^3+1}{x^3}$

d. $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+1}{x}}$

e. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{2-x}$

f. $\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{x+2}$

2) Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$

b. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$

c. $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$

d. $\lim_{x\to0} \frac{2^x-1}{5x}$

3) Determina dominio e asintoti delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{1-x^2}$

b. $f(x)=x-\sqrt{9x^2-1}$

4) **Problema**
Determina il perimetro $2p(x)$ del trapezio isoscele ABCD inscritto in semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ indicando con x l'angolo adiacente alla base maggiore e calcola i limiti significativi di $2p(x)$.