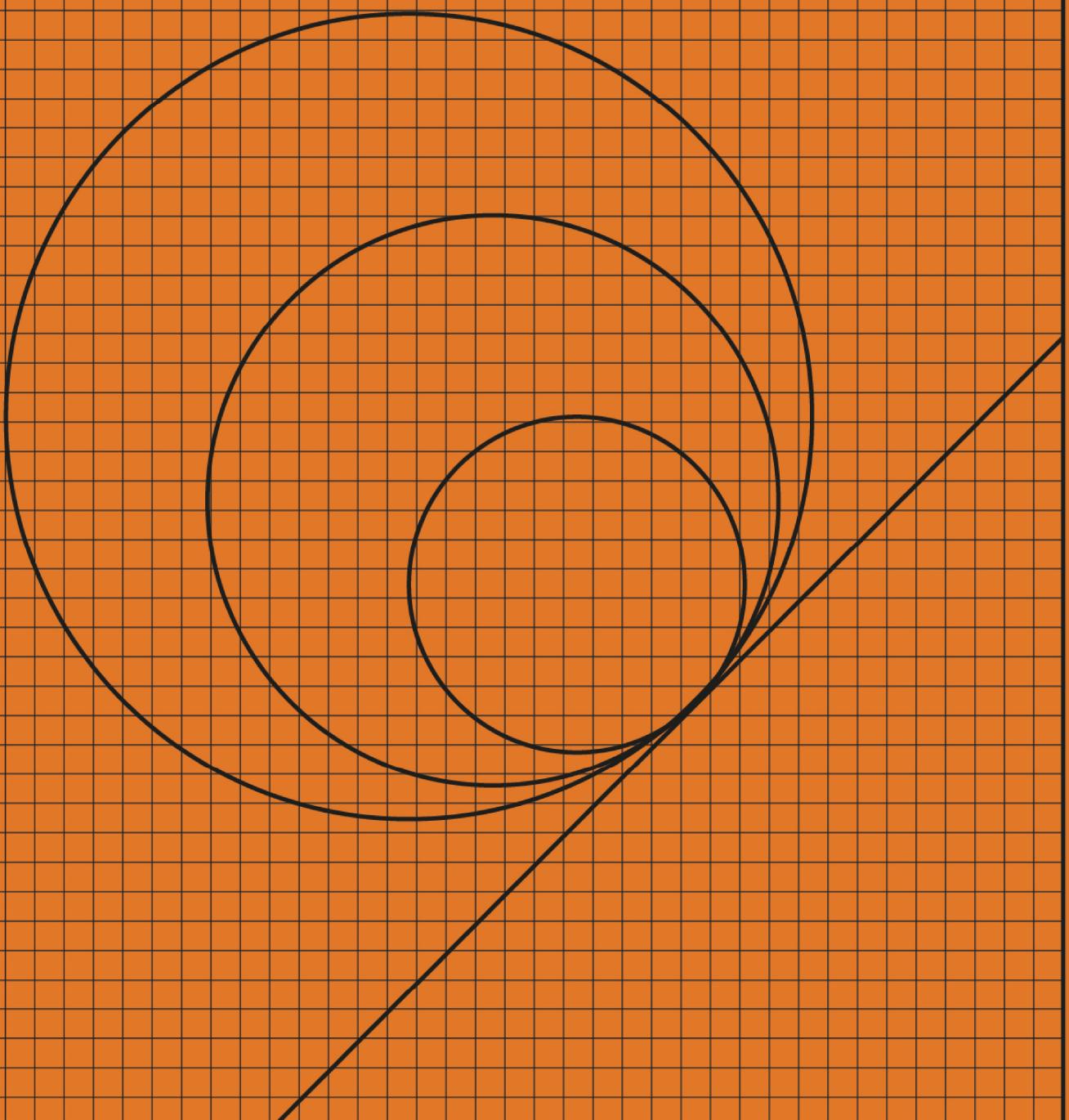


Appunti di Matematica

Indirizzo Scientifico

2

Cecilia Magni



Prefazione

Gli “**Appunti di Matematica**” sono un corso di matematica “open source” per i Licei , con una versione per l’indirizzo scientifico ed una per l’indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella “parte teorica” del libro di testo, spesso troppo formale e “faticosa” e che non tutti riuscivano a “prendere appunti” durante le spiegazioni.

La parte teorica è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e si integra con la parte applicativa in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle “tecniche” di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , “schede di lavoro” da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica “Geogebra” (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle “schede” in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), possano essere utili ad altri docenti per costruire, integrandole con materiale personale, il proprio libro di testo che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti, potrebbe essere facilmente aggiornato e modificato ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell’articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl’Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

Cecilia Magni

Progetto Matematica in rete

Cecilia Magni

APPUNTI DI MATEMATICA 2

Indirizzo Scientifico

Editore: Matematicainrete.it

Anno di edizione : 2024

Formato: ebook (PDF)

Licenza:

Creative Commons BY NC SA (attribuzione – non commerciale – condividi allo stesso modo)

CODICE ISBN: 978-88-943828-2-2

APPUNTI DI MATEMATICA 2

Indirizzo Scientifico

Indice

1.	SISTEMI DI PRIMO GRADO	1
2.	IL PIANO CARTESIANO, LE ISOMETRIE E LA RETTA	
1.	Il piano cartesiano	13
2.	Le isometrie nel piano cartesiano	18
3.	La retta nel piano cartesiano	25
3.	I RADICALI	59
4.	LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO	86
5.	LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO	
1.	Disequazioni di secondo grado	116
2.	Disequazioni di grado superiore al secondo	122
3.	Disequazioni fratte	125
4.	Sistemi di disequazioni	126
6.	COMPLEMENTI DI ALGEBRA	
1.	Equazioni e disequazioni con il valore assoluto	137
2.	Equazioni di grado superiore al secondo	141
3.	Sistemi di secondo grado	147
4.	Equazioni irrazionali	151
5.	Disequazioni irrazionali	156
7.	INTRODUZIONE AL CALCOLO DELLE PROBABILITA'	160
8.	GEOMETRIA EUCLIDEA	
1.	La circonferenza	169
2.	Misura delle grandezze. Proporzioni tra grandezze	190
3.	L'equivalenza delle superfici piane	200
4.	I teoremi di Euclide e di Pitagora	212
5.	Similitudine	224
6.	Lunghezza della circonferenza e area del cerchio	244
9.	LABORATORIO DI INFORMATICA	251

Sistemi di primo grado

Consideriamo il seguente problema:

Determina due numeri la cui somma è 10 e la cui differenza è 1.

Possiamo risolvere questo problema utilizzando due incognite x, y per indicare i due numeri cercati.

Avremo quindi che dovrà essere (indicando con x il maggiore):

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

La parentesi graffa sta ad indicare che le due equazioni devono essere soddisfatte entrambe e diciamo che abbiamo un “sistema” di due equazioni (che in questo caso risulta di primo grado in due incognite).

Ma come possiamo “risolvere” questo sistema di equazioni cioè **determinare i valori di x e di y che le soddisfano entrambe ?**

Possiamo ricavare l’incognita x dalla prima equazione e sostituirla nella seconda equazione, poi continuare a sviluppare la seconda equazione (che contiene a questo punto solo l’incognita y) e ricavare alla fine il valore di y .

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ 10 - y - y = 1 \quad \rightarrow 10 - 2y = 1 \quad \rightarrow 2y = 9 \rightarrow y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

A questo punto non ci rimane che sostituire il valore che abbiamo trovato di y nella prima equazione e determinare anche il valore dell’incognita x :

$$\begin{cases} x = 10 - \frac{9}{2} = \frac{11}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

In conclusione i due numeri sono $\frac{11}{2}, \frac{9}{2}$.

METODI DI RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI PRIMO GRADO

Vediamo quindi i metodi con cui possiamo risolvere un sistema di primo grado in due incognite. Innanzitutto è opportuno svolgere eventualmente dei calcoli per portarlo nella forma cosiddetta “normale”:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Consideriamo per esempio il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) + 2(y-1) = -\frac{1}{2}x - 2 \\ 2(x-3) - (y+1) = x - 6 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli per ricondurre il sistema a “forma normale”:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 + 2y - 2 = -\frac{1}{2}x - 2 \rightarrow x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 6 - y - 1 - x + 6 = 0 \rightarrow x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto: $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

Vediamo alcuni metodi per risolverlo.

METODO DI SOSTITUZIONE

- Come abbiamo fatto nel primo esempio considerato, ricaviamo una incognita dalla prima o dalla seconda equazione (in genere da quella in cui l’incognita si ricava più facilmente): ricaviamo per esempio la x dalla prima equazione

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

- Sostituiamo l’espressione trovata per la x nella seconda equazione e, svolgendo i calcoli, determiniamo la y

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ -2y + 1 - y - 1 = 0 \Rightarrow -3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

- Torniamo nella prima equazione e sostituiamo a y il valore trovato, determinando così il valore della x e quindi la soluzione del sistema $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

METODO DEL CONFRONTO

Consideriamo sempre il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

- Ricaviamo la stessa incognita da entrambe le equazioni, per esempio la x

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

- Uguagliamo le due espressioni trovate e determiniamo la y ; riscriviamo inoltre una delle due equazioni

$$\begin{cases} -2y + 1 = y + 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

- Sostituiamo il valore trovato per la y nell'altra equazione e troviamo anche la x e quindi la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

METODO DI RIDUZIONE o di addizione e sottrazione

Conviene utilizzare questo metodo quando un'incognita compare con lo stesso coefficiente nelle due equazioni (o con coefficienti opposti).

- Per esempio nel nostro caso abbiamo l'incognita x compare con lo stesso coefficiente nelle due equazioni: allora sottraiamo “membro a membro” le due equazioni ottenendo un'equazione equivalente che contiene però la sola incognita y

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \\ \hline / 3y / = 0 \end{array}$$

- Combiniamo l'equazione ottenuta con una delle due equazioni del sistema e sostituiamo il valore trovato per la y per determinare la x

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nota: se i coefficienti di un'incognita sono opposti si “sommano” membro a membro le equazioni in modo da eliminare un'incognita.

Sistemi determinati, indeterminati, impossibili

Quante soluzioni può avere un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite ?

Dal momento che sia utilizzando il metodo di sostituzione che quello del confronto otteniamo ad un certo punto un'equazione di primo grado in una incognita, se questa è “determinata” (ha una soluzione) avremo una sola soluzione del sistema, se è “indeterminata” (verificata per tutti i valori dell’incognita) anche il sistema sarà indeterminato e se infine l’equazione è impossibile (nessuna soluzione) anche il sistema non avrà nessuna soluzione.

Esempi

1) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 1 - 2y + y = 0 \rightarrow 1 - y = 0 \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2(1) = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi la soluzione $(-1;1)$ e si dice “**determinato**”.

2) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 1 - 2y + 2y = 0 \rightarrow 1 = 0 \end{cases} \quad \text{equazione impossibile}$$

Il sistema non ha nessuna soluzione e si dice “**impossibile**”.

3) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2(1 - 2y) + 4y = 2 \rightarrow 2 - 4y + 4y = 2 \rightarrow 2 = 2 \end{cases} \quad \text{equazione ind.}$$

Il sistema ha quindi infinite soluzioni cioè tutte le coppie $(x;y)$ per cui si abbia che $x=1-2y$ e si dice “**indeterminato**”.

Per esempio:

se fisso $y = 0 \rightarrow x = 1 - 2 \cdot 0 = 1$ e quindi la coppia $(1;0)$ è soluzione del sistema;

se fisso $y = 1 \rightarrow x = 1 - 2(1) = -1$ e quindi la coppia $(-1;1)$ è un’altra soluzione del sistema e così via.....

Problemi di geometria risolubili con sistemi

Esempio

Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

Indichiamo con x la base e con y l'altezza.



Avremo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ 2y = \frac{2}{3}x \end{cases} \begin{cases} x + y = 24 \rightarrow x + \frac{1}{3}x = 24 \rightarrow \frac{4}{3}x = 24 \rightarrow x = 18 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

Quindi abbiamo: $\begin{cases} x = 18 \\ y = 6 \end{cases}$

COMPLEMENTO

Sistemi di tre equazioni di primo grado in tre incognite

Esempio

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

Ricaviamo un'incognita da una equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$\begin{cases} x = -y \\ -2y - z = 0 \\ -3y - y + 2z = 8 \Rightarrow -4y + 2z = 8 \end{cases}$$

Ricaviamo un'altra incognita (tra la seconda e la terza equazione) e sostituiamo:

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -2y \\ -4y - 4y = 8 \Rightarrow -8y = 8 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

e sostituendo $y = -1$ avremo:

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

La soluzione è quindi la terna $(1; -1; 2)$.

Nota

Naturalmente posso avere sistemi con infinite soluzioni (indeterminati) o nessuna soluzione (impossibili).

Per esempio:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{è impossibile}$$

mentre

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ha infinite soluzioni del tipo } (x; -x; 0)$$

Esercizi

- 1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ [(6,3)]
- 2) $\begin{cases} 5x + y = 20 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}$ [(4,0)]
- 3) $\begin{cases} x - 6y + 5 = 3 - 7y + 10 + 2x + 2 \\ x + y = 6 - 8 \end{cases}$ [(-6,4)]
- 4) $\begin{cases} 5(5x - 2) = 20x - 2(y - 3) \\ 2(x - 5) - 12y = 21(1 - y) \end{cases}$ [(2,3)]
- 5) $\begin{cases} (x + 2)^2 - 3x + 2y = 9 + x^2 \\ -5x + 3(x - 3) + x - y = -6 \end{cases}$ [(-11,8)]
- 6) $\begin{cases} x - 2 = \frac{y}{3} - 1 + \frac{x}{2} \\ \frac{5x + 3y}{6} - 3 = \frac{2x - y}{4} + \frac{7}{12} \end{cases}$ [(4,3)]
- 7) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{3}, -4 \right) \right]$
- 8) $\begin{cases} (x + 2)^2 - 1 = x^2 - 5y \\ 4x - 1 = -y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}, -1 \right) \right]$
- 9) $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ 18x - 6y = -1 \end{cases}$ [impossibile]
- 10) $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x - \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

11)
$$\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1) + y - 3 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(x+1) \end{cases} \quad [(-1,3)]$$

12)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \quad [\text{indeterminato}]$$

13)
$$\begin{cases} 1 - 4y - \frac{1}{3}x = 0 \\ \frac{2}{3}x + 8y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad [\text{impossibile}]$$

14)
$$\begin{cases} 3x + 2(y-4)^2 = 36 + 2y^2 - 15y + 2x \\ 3(y-1) + 2[x - (x-1)^2] = -2 - 2x(x-2) \end{cases} \quad [(3,-1)]$$

15)
$$\begin{cases} (x-2y)^2 - (x-y)^2 - y(3y-2x) = x+y-2 \\ \frac{2x-y}{3} - \frac{x+2y}{6} - \frac{x-y}{2} = 0 \end{cases} \quad [(2,0)]$$

16)
$$\begin{cases} 3y + 24 + (y-2)^2 + 4y = 4x + y^2 + 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \quad [(3,-4)]$$

17)
$$\begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{1}{5}x = 5 \\ 2x - \frac{5}{6}y + 3 = 8 \end{cases} \quad [(5,6)]$$

18)
$$\begin{cases} \frac{x+2y}{3} + 1 = \frac{1}{3} \\ 3x + 5y = -4 \end{cases} \quad [(2,-2)]$$

19)
$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + y = -2 \\ \frac{4}{5}y + x = 2 - \frac{x}{2} \end{cases} \quad [(4,-5)]$$

20)
$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}y = -\frac{15}{4} \\ \frac{y-x}{2} - 1 = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \left[\left(-3, \frac{1}{2} \right) \right]$$

21)
$$\begin{cases} (x-1)^2 - 3y = x^2 - 7 \\ \frac{3x-y}{2} + 3 = y + \frac{3}{2} \end{cases}$$
 [(1,2)]

22)
$$\begin{cases} \frac{2x+4y}{3} + \frac{1}{2}x + 1 = 0 \\ 2(5+2x-y) + \frac{x+2y}{3} = 0 \end{cases}$$
 [(-2,1)]

23)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{16} - \frac{x-y}{4} = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$$
 [(3,5)]

24)
$$\begin{cases} (x-2)(x+2) + y = (1-x)^2 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{2} = 0 \end{cases}$$
 \left[\left(\frac{19}{8}, \frac{1}{4}\right)\right]

25) In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo.

[25cm,15cm]

26) Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo sapendo che la somma di $\frac{1}{10}$ della maggiore e di $\frac{1}{9}$ della minore è 19 cm e che, diminuendo la maggiore di 10 cm e aumentando di 9 cm la minore le due diagonali diventano congruenti.

[100cm,81cm]

27) Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo sapendo che il perimetro è 14 cm e che l'altezza supera la base di 1 cm.

[5cm]

28) Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio sapendo che l'area è 32 cm^2 , l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm.

[10cm,6cm]

- 29) In un rombo la somma delle diagonali è 34 cm, i $\frac{3}{4}$ della maggiore superano di 8 cm la minore. Determina il perimetro del rombo. $[52\text{cm}]$
- 30) Calcola l'area di un triangolo sapendo che i $\frac{3}{5}$ dell'altezza sono 54 cm e che il doppio della base supera di 46 cm l'altezza. $[3060\text{cm}^2]$
- 31) Il perimetro di un rettangolo è 94 cm e la base supera di 11 cm il doppio dell'altezza. Calcola l'area. $[420\text{cm}^2]$
- 32) Calcola l'area di un trapezio rettangolo sapendo che il lato obliquo è 10 cm, che la base maggiore è il triplo della minore e che la somma delle basi è 16 cm. $[48\text{cm}^2]$
- 33) Determina il perimetro di un trapezio isoscele sapendo che la sua area è 52 cm^2 , che la base maggiore supera di 6 cm la base minore e che l'altezza è 4 cm. $[36\text{cm}]$
- 34) L'area di un trapezio rettangolo è 72 cm^2 . La somma delle basi è 24 cm e la loro differenza è 8 cm. Determina il perimetro. $[40\text{cm}]$
- 35) In un trapezio isoscele gli angoli alla base sono di 60° e il perimetro è 35 cm. Sapendo che la base maggiore è $\frac{3}{2}$ della minore, calcola le misure dei lati del trapezio. $[10\text{cm},15\text{cm},5\text{cm},5\text{cm}]$
- 36) Sappiamo che la somma delle diagonali di un rombo è 66 cm e che la loro differenza è 18 cm. Calcola l'area del rombo. $[504\text{cm}^2]$
- 37) Il perimetro di un trapezio isoscele è 72 cm. Calcola l'area del trapezio sapendo che il lato obliquo è uguale alla metà della base minore e che la somma dei $\frac{3}{8}$ della base maggiore con il lato obliquo è 22 cm. $[208\text{cm}^2]$

38) Calcola l'area di un trapezio isoscele sapendo che le basi differiscono di 6 cm, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 cm e che il lato obliquo è 5 cm.

$$[48 \text{ cm}^2]$$

39) Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l'area del rettangolo diminuisce di 2 cm^2 .

$$[8 \text{ cm}; 4 \text{ cm}]$$

40) Calcola il perimetro di un rombo sapendo che le sue diagonali differiscono di $2a$ e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di $5a$.

$$[20a]$$

41) Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato.

$$[24 \text{ cm}^2; 20 \text{ cm}]$$

42) In un rombo la diagonale maggiore supera la minore di 6 cm e la somma tra i $\frac{3}{7}$ della maggiore e $\frac{1}{3}$ della minore è 30 cm. Determina le diagonali.

$$[36 \text{ cm}; 42 \text{ cm}]$$

43) In un trapezio rettangolo la somma delle basi misura $10a$ e la semidifferenza delle lunghezze delle basi è $\frac{2}{3}$ della base minore. Sapendo inoltre che l'altezza è uguale alla base minore determina il perimetro del trapezio.

$$[18a]$$

TEST
SIMULTANEOUS EQUATIONS

- 1)** Thilo and Toby buy some boats and trains from the toy shop.
The cost of one boat is b cents and the cost of one train is t cents.
- (a) Toby buys 3 boats and 4 trains for \$5.70. Complete this equation
- $$3b+4t= \dots\dots\dots$$
- (b) Thilo buys 1 boat and 2 trains for \$2.40. Write this information as an equation.
- $$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$
- (c) Solve your two equations to find the cost of a boat and the cost of a train. You must show all your working.
- Cost of a boat =cents
Cost of a train =cents
- 2)** Pens cost p cents and pencils cost q cents.
- (a) Aisha buys 3 pens and 5 pencils for \$2.20. Write down an equation representing this cost in cents.
- $$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$
- (b) Bishen buys 4 pens and 10 pencils for \$3.50. Write down an equation representing this cost in cents.
- $$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$
- (c) Solve your equations to find the value of p and the value of q .
- $p = \dots\dots\dots$ cents
 $q = \dots\dots\dots$ cents
- 3)** Solve the simultaneous equations.

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 18 \\2x - y &= 19\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \dots\dots\dots \\y &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$

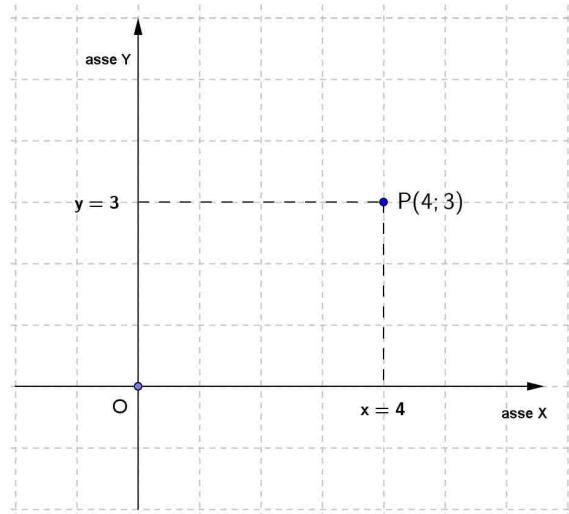
Il piano cartesiano

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.

In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** $(x;y)$ di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata $(x;y)$ di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).

Il numero x si chiama **ascissa** del punto P e il numero y si chiama **ordinata** del punto P.
 x e y si dicono anche **coordinate** del punto P.



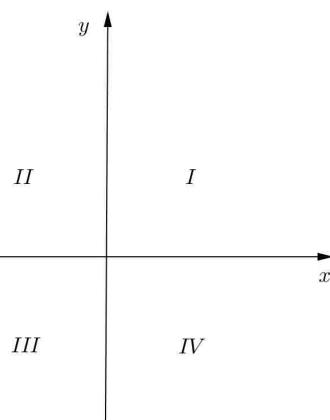
Nota

E' importante sottolineare che $(x;y)$ è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.

Osservazione

I punti sull'asse x hanno ordinata $y=0$; i punti sull'asse y hanno ascissa $x=0$.

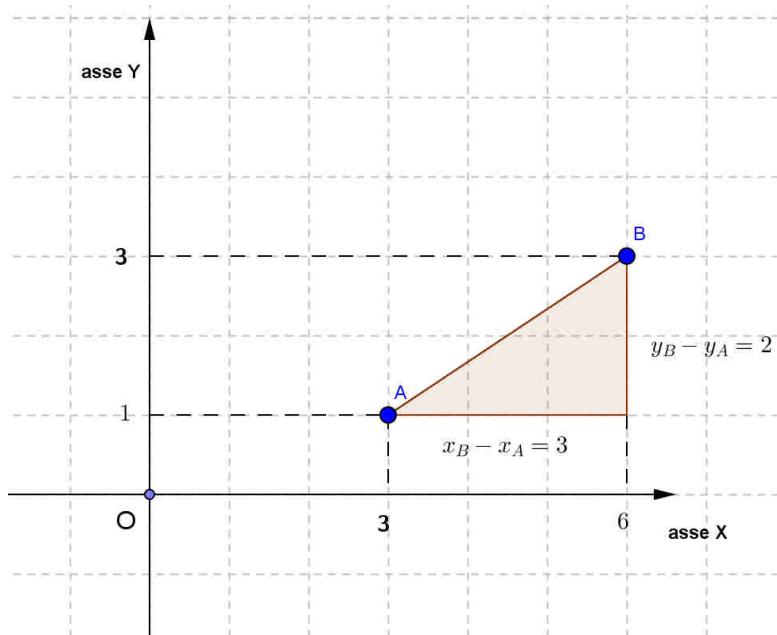
Inoltre osserviamo che i punti che si trovano nel cosiddetto I° quadrante (vedi figura) hanno ascissa e ordinata positive, quelli del II° quadrante ascissa negativa e ordinata positiva ecc.



Distanza tra due punti

Come possiamo calcolare la lunghezza del segmento che congiunge due punti assegnati?

Consideriamo per esempio $A(3;1)$, $B(6;3)$. Come possiamo determinare \overline{AB} ?

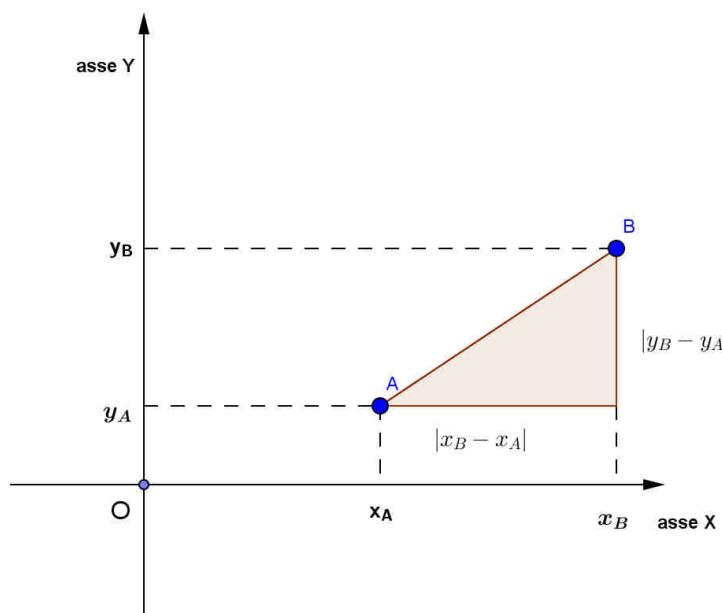


Consideriamo il triangolo in figura ed applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

In generale se $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ abbiamo che

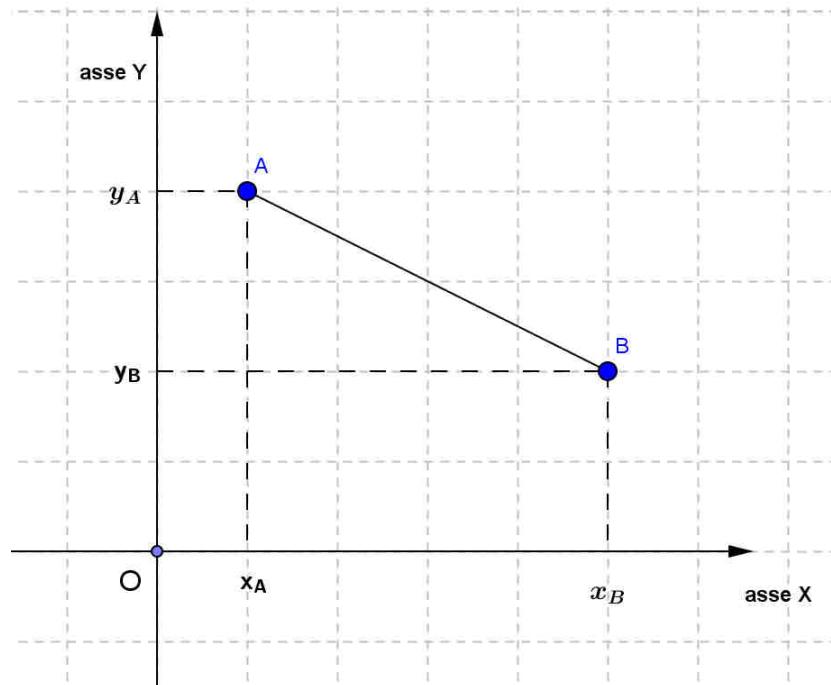
$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$



Nota

Le misure dei cateti del triangolo corrispondono al **valore assoluto della differenza tra le ascisse** e il **valore assoluto della differenza tra le ordinate** dei punti.

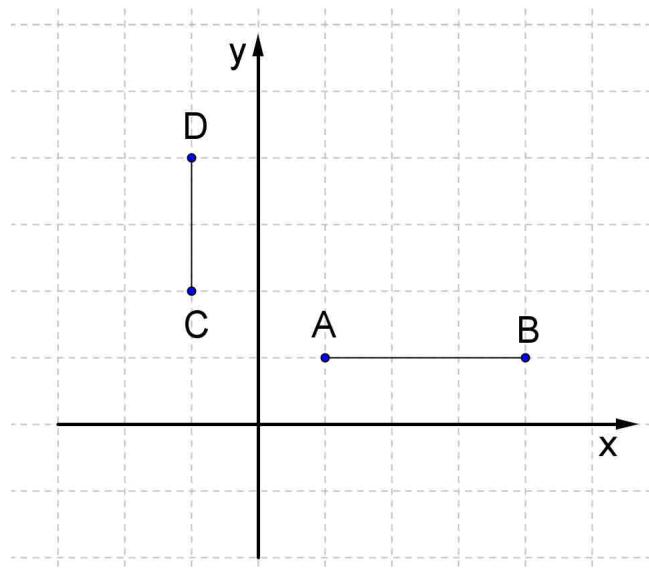
Se per esempio avessi $A(1;4)$, $B(5;2)$ i cateti del triangolo avrebbero lunghezza
 $|x_B - x_A| = 4$, $|y_B - y_A| = 2$



Caso particolare

E' chiaro che se i punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata la distanza è data dal valore assoluto della differenza delle ascisse o delle ordinate.

Per esempio in figura $\overline{AB} = |x_B - x_A| = 3$ e $\overline{CD} = |y_D - y_C| = 2$.

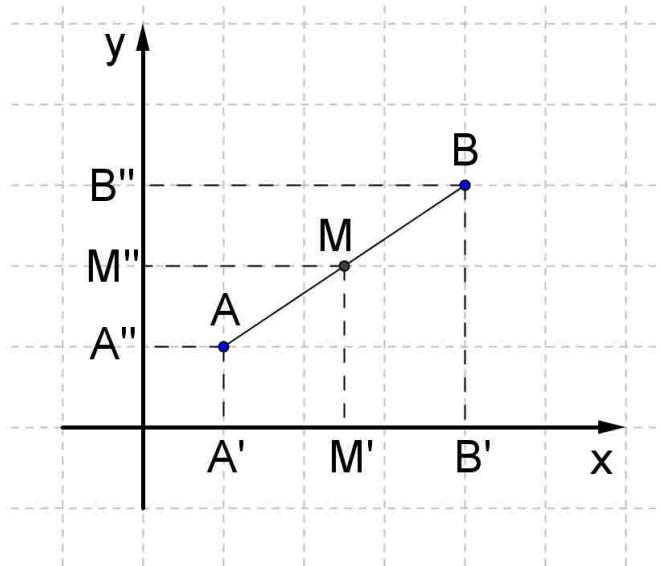


Punto medio di un segmento

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB possiamo considerare le proiezioni di A, M e B sull'asse x e poi sull'asse y e, sfruttando un teorema dimostrato sulle rette parallele, affermare che $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$, $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$ e quindi:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

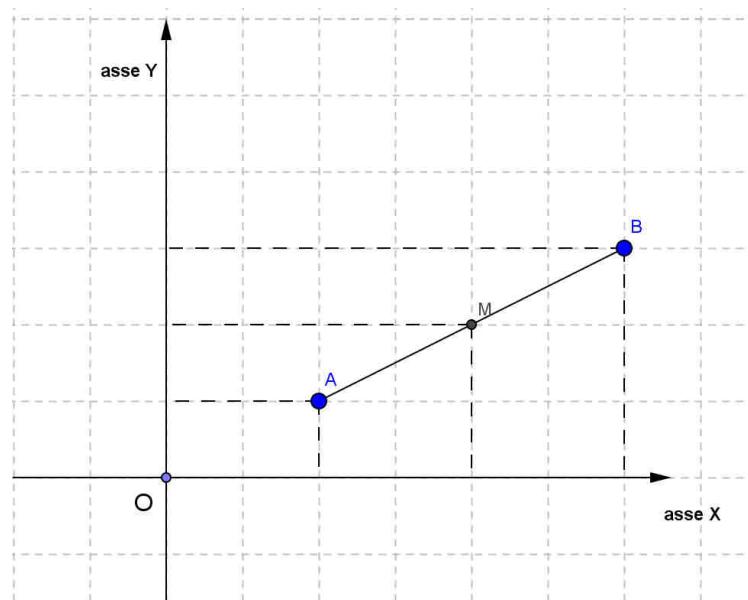
$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Esempio

Consideriamo per esempio $A(2;1)$, $B(6;3)$.

Il punto medio del segmento AB risulta essere $M\left(\frac{2+6}{2}=4; \frac{1+3}{2}=2\right)$.



Esercizi

1) Dati i punti $A(1;2)$, $B(7;2)$, $C(4;6)$, disegna il triangolo ABC e determinane perimetro e area.

$$[2p = 16; A = 12]$$

2) Dati i punti $A(4;2)$, $B(6;3)$, $C(5;5)$, disegna il triangolo ABC e verifica che $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ e che quindi (essendo verificato il teorema di Pitagora) si tratta di un triangolo rettangolo. Determina perimetro e area.

$$[2p = 2\sqrt{5}, A = \frac{5}{2}]$$

3) Dati i punti $A(2;2)$, $B(4;3)$, $C(2;6)$, disegna il triangolo ABC e determinane perimetro e area. Detto M il punto medio di AC, determina la lunghezza della mediana MB.

$$[2p = 4 + \sqrt{5} + \sqrt{13}; A = 4; \overline{BM} = \sqrt{5}]$$

4) Dati i punti $A(2;3)$, $B(7;3)$, $C(3;5)$, disegna il triangolo ABC e detto M il punto medio di AB, verifica che $\overline{CM} = \overline{AM} = \overline{MB} = \frac{5}{2}$. Come risulta il triangolo ABC?

[triangolo rettangolo]

5) Dati i punti $O(0;0)$; $A(4;2)$; $B(4;5)$; $C(0;3)$, disegna il quadrilatero OABC e verifica che si tratta di un parallelogramma. Determina le coordinate del punto di incontro delle sue diagonali.

$$[\left(2; \frac{5}{2} \right)]$$

6) Dati i punti $A(1;-2)$; $B(4;2)$; $C(1;6)$; $D(-2;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un rombo. Determina perimetro e area. Determina le coordinate del punto M in cui si intersecano le sue diagonali.

$$[2p = 20; A = 24; M(1;2)]$$

7) Dati i punti $A(1;-1)$; $B(4;0)$; $C(3;3)$; $D(0;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un quadrato. Determina perimetro, area e le coordinate del punto M di intersezione delle sue diagonali.

$$[2p = 4\sqrt{10}; A = 10; M(2;1)]$$

8) Dati i punti $A(1;2)$; $B(4;1)$; $C(4;6)$; $D(1;5)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un trapezio isoscele. Determina perimetro e area.

$$[2p = 8 + 2\sqrt{10}; A = 12]$$

Isometrie nel piano cartesiano

Le isometrie nel piano sono trasformazioni che associano ad ogni punto del piano uno ed un solo punto del piano in modo tale che, se A e B sono una qualsiasi coppia di punti del piano e A' e B' sono i loro punti trasformati, si abbia

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Infatti il termine isometria deriva dal greco e significa *iso* = stessa *metria* = misura.

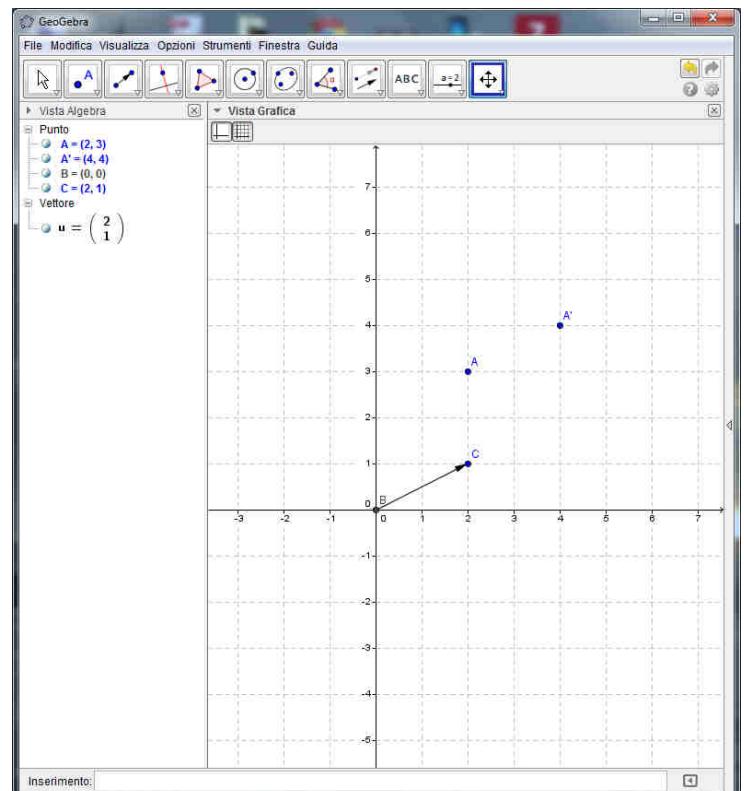
Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, studiamo alcune isometrie utilizzando il software “Geogebra”.

Traslazione

Visualizza gli assi del sistema di riferimento cartesiano.

Disegna un punto A (comando “nuovo punto”), costruisci un vettore con il comando “**vettore tra due punti**” e **poi attiva il pulsante “traslazione”**: devi selezionare il punto che vuoi traslare e poi il vettore traslazione.

Visualizza la “vista algebra” e osserva come cambiano le coordinate del punto A.



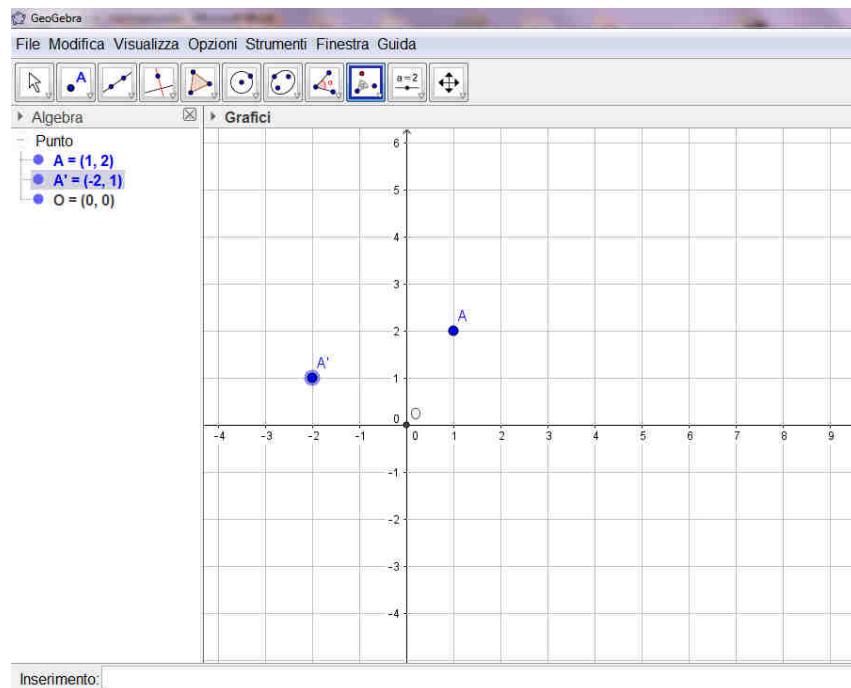
Se scegliamo, come in figura, il vettore $(2;1)$ ed indichiamo con $t_{(2;1)}$ la traslazione di vettore $(2;1)$ osserviamo che in generale abbiamo

$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(2;1)}} P'(x + 2; y + 1)$$

Rotazione di 90° intorno all'origine

Visualizza il sistema di riferimento e considera le rotazioni intorno a O (origine del sistema di riferimento). Crea il punto origine O.

Disegna un punto A e attiva il pulsante “rotazione” : seleziona prima l'oggetto da ruotare , nel nostro caso il punto, poi il centro di rotazione (nel nostro esempio O) e poi digita la misura dell'angolo di rotazione (90°).

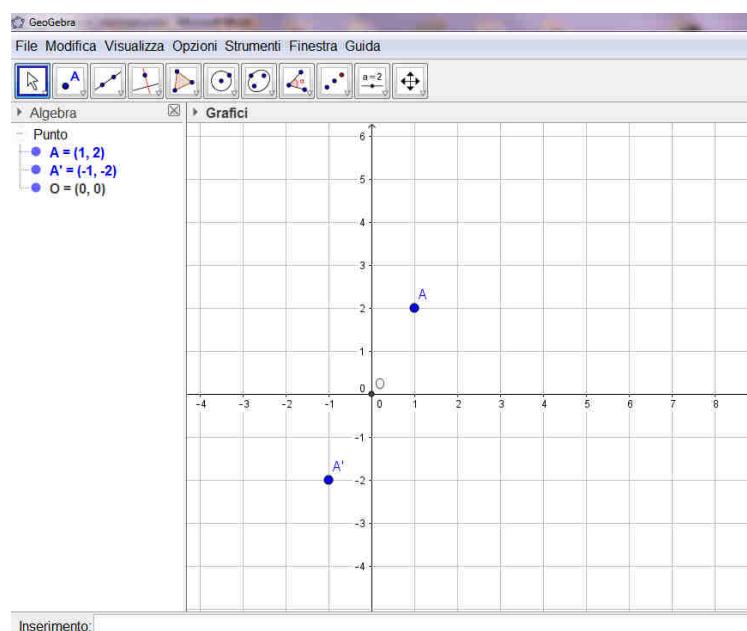


Osserva nella “vista algebra” come cambiano le coordinate del punto A.

Se indichiamo con R_{90° la rotazione di 90° intorno all'origine possiamo scrivere

$$P(x; y) \xrightarrow{R_{90^\circ}} P'(-y; x)$$

Rotazione di 180° intorno all'origine



Prova a ruotare di 180° intorno ad O (origine del sistema di riferimento) un punto A e osserva come cambiano le sue coordinate.

Se indichiamo con R_{180° la rotazione di 180° intorno all'origine possiamo dire che

$$P(x; y) \xrightarrow{R_{180^\circ}} P'(-x; -y)$$

Simmetria assiale

Simmetria rispetto all'asse x

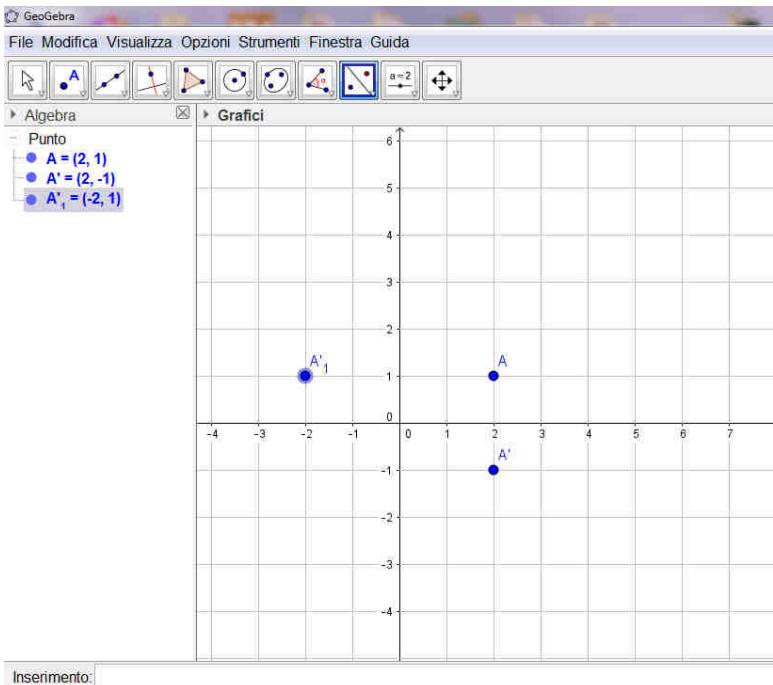
Disegna un punto e osserva come cambiano le sue coordinate se lo trasformi con una simmetria assiale rispetto all'asse x : attivato il comando “simmetria assiale” devi selezionare il punto e poi l'asse di simmetria.

$$\text{In generale: } P(x; y) \xrightarrow{S_{\text{asse}x}} P'(x; -y)$$

Simmetria rispetto all'asse y

E se la simmetria è rispetto all'asse y?
 Come cambiano le coordinate del punto ?

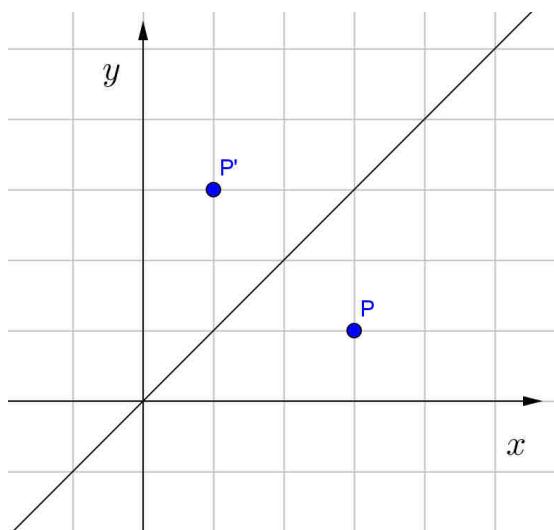
$$\text{In generale } P(x; y) \xrightarrow{S_{\text{asse}y}} P'(-x; y)$$



Simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

Disegna la bisettrice del primo e terzo quadrante (basta usare la griglia ed inclinare la retta secondo la diagonale dei quadretti) e prova a trasformare il punto P con la simmetria assiale rispetto alla bisettrice: come cambiano le coordinate del punto?

$$\text{In generale } P(x; y) \rightarrow P'(y; x)$$

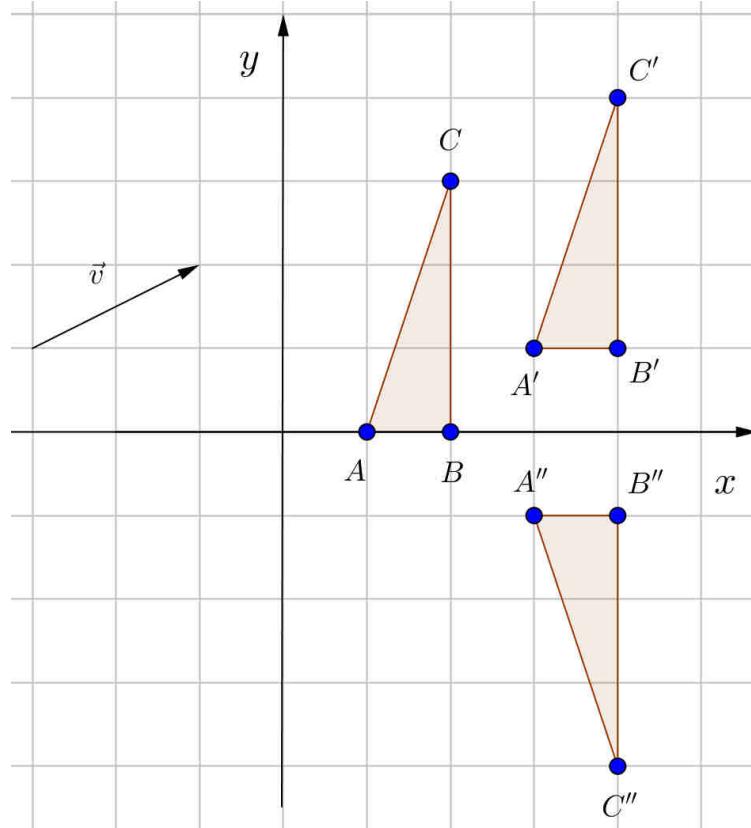


Composizione di isometrie

Le isometrie possono anche essere “composte” tra loro cioè applicate in successione: se ad una figura F , per esempio al triangolo ABC in figura, applichiamo la traslazione $t_{(2;1)}$ e poi alla figura F' che abbiamo ottenuto applichiamo la simmetria di asse x otterremo la figura F'' .

Nel nostro esempio la “composizione “ di isometrie trasforma in generale:

$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(2;1)}} P'(x + 2; y + 1) \xrightarrow{S_{asse}} (x + 2; -(y + 1))$$



Nota

L'ordine in cui si eseguono le trasformazioni è importante, cioè invertendo l'ordine delle trasformazioni il risultato finale può cambiare.

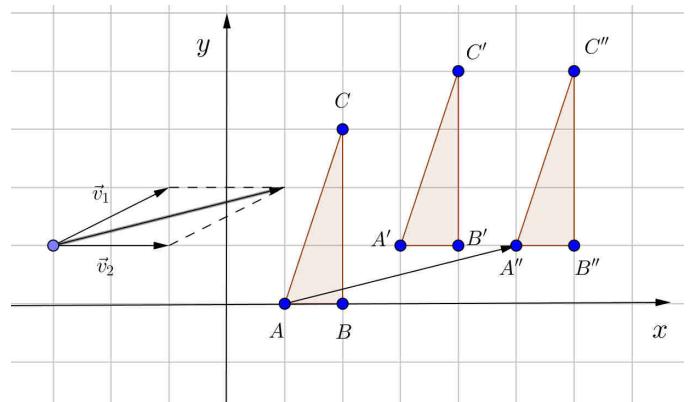
Se nel nostro esempio avessimo prima effettuato la simmetria e poi la traslazione non avremmo ottenuto la stessa figura finale (fai la prova).

Osservazioni

- 1) La composizione di due traslazioni $t_{(a;b)}$ e $t_{(c;d)}$ corrisponde alla traslazione $t_{(a+c;b+d)}$ cioè alla traslazione del vettore “somma” dei due vettori.

Per esempio

$$P(x; y) \xrightarrow{t_{(2;1)}} P'(x+2; y+1) \xrightarrow{t_{(2;0)}} (x+4; y+1)$$

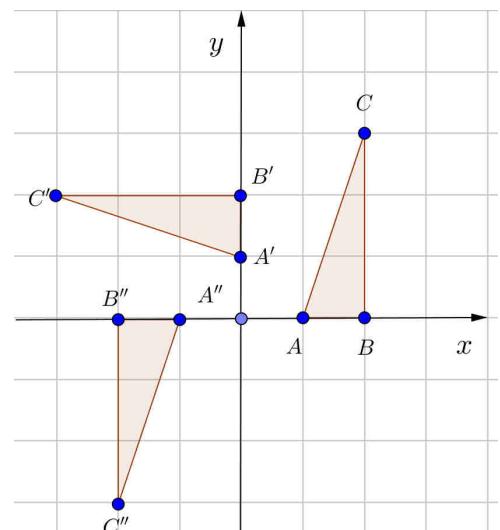


Nota: se provi ad effettuare prima la traslazione di vettore (2;0) e poi la traslazione di vettore (2;1) si ottiene la stessa figura finale.

In questo caso l’ordine in cui si effettuano le traslazioni non è importante.

- 2) La composizione di due rotazioni $R(O;90^\circ)$ corrisponde ad una rotazione $R(O;180^\circ)$ che viene chiamata anche **simmetria di centro O**.

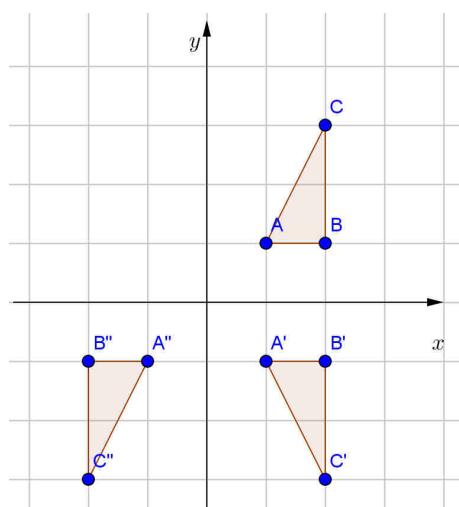
$$P(x; y) \xrightarrow{R(O;90^\circ)} P'(-y; x) \xrightarrow{R(O;90^\circ)} (-x; -y)$$



- 3) Se applichiamo ad una figura la simmetria rispetto all’asse x e alla figura trasformata applichiamo di nuovo la simmetria rispetto all’asse x ritorniamo sulla figura iniziale.

Lo stesso accade con la simmetria rispetto all’asse y o alla bisettrice del I-III quadrante e in generale per qualunque simmetria assiale.

Se applichiamo ad una figura, per esempio il triangolo ABC in figura, la simmetria rispetto all’asse x e poi la simmetria rispetto all’asse y vediamo che la composizione corrisponde a



ESERCIZI

- 1)** Considera il triangolo di vertici $A(3;1); B(4;1); C(4;3)$. Applica al triangolo le seguenti isometrie e disegna ogni volta ABC e il triangolo trasformato A'B'C' indicando le coordinate di A', B', C':
- la traslazione di vettore $\vec{v}(2;1)$;
 - la rotazione $R(O;90^\circ)$;
 - la rotazione $R(O;180^\circ)$;
 - la simmetria rispetto all'asse x;
 - la simmetria rispetto all'asse y;
- 2)** Considera il parallelogramma ABCD con $A(4;1); B(6;1); C(8;4); D(6;4)$. Applica al parallelogramma le seguenti isometrie disegnando ogni volta il parallelogramma ABCD e il suo trasformato A'B'C'D':
- la traslazione di vettore $\vec{v}(-3;1)$;
 - la rotazione $R(O;90^\circ)$;
 - la rotazione $R(O;180^\circ)$;
 - la simmetria rispetto all'asse x;
 - la simmetria rispetto all'asse y;
- 3)** Considera il triangolo ABC di vertici $A(2;1); B(6;1); C(4;7)$. Applica al triangolo la traslazione $t_{(2;3)}$ e, al triangolo traslato A'B'C', applica la simmetria rispetto all'asse x. Disegna il triangolo finale A''B''C'' e scrivi le coordinate dei suoi vertici.

$$[A''(4,-4), B''(8,-4), C''(6,-10)]$$

- 4)** Considera il rombo di vertici $A(1,2), B(2,-1), C(3,2), D(2,5)$: applica al rombo prima tra la simmetria rispetto all'asse y e alla figura ottenuta la traslazione di vettore $(-2,-1)$. Disegna la figura finale A''B''C''D''.

Si sarebbe ottenuta lo stessa figura finale invertendo l'ordine delle isometrie cioè applicando prima la traslazione e poi la simmetria?

$$[A''(-3,1), B''(-4,-2), C''(-5,1), D''(-4,4)]$$

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico –
 - Geometria analitica -
 Isometrie nel piano cartesiano

5) Considera il triangolo ABC con $A(1;1)$; $B(4;2)$; $C(3;5)$: applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x; y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse y seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (-x; -y)]$$

b) la rotazione $R(O; 90^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (-y; -x)]$$

c) la rotazione $R(O; 90^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

$$[(x; y) \rightarrow (y; x)]$$

d) la traslazione di vettore $(-2; 0)$ seguita dalla traslazione di vettore $(0; 3)$

$$[(x; y) \rightarrow (x - 2; y + 3)]$$

e) la traslazione di vettore $(2; 1)$ seguita dalla traslazione di vettore $(-2; -1)$

$$[(x; y) \rightarrow (x; y)]$$

f) la traslazione di vettore $(2; 1)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (x + 2; -y - 1)]$$

6) Considera il trapezio ABCD con $A(1;1)$; $B(4;1)$; $C(2;3)$; $D(1;3)$: applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x; y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse x e poi la simmetria rispetto alla bisettrice del I-III quadrante

$$[(x; y) \rightarrow (-y; x)]$$

b) la $R(O; 180^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

$$[(x; y) \rightarrow (x; -y)]$$

c) la $R(O; 180^\circ)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

$$[(x; y) \rightarrow (-x; y)]$$

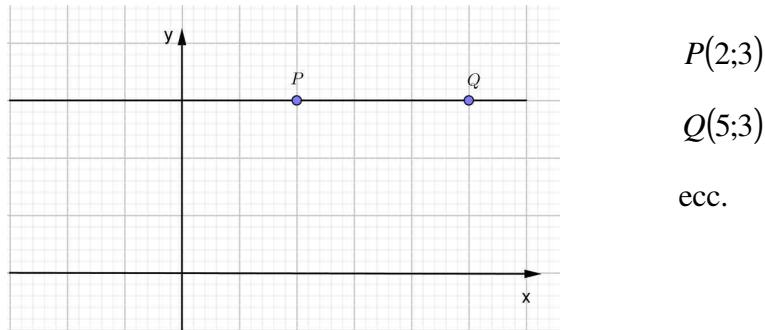
d) la traslazione di vettore $(0, 3)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

$$[(x; y) \rightarrow (-x; y + 3)]$$

La retta nel piano cartesiano

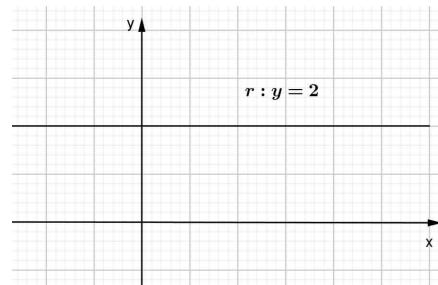
Rette parallele agli assi cartesiani

Consideriamo la retta r in figura: i punti della retta hanno sempre ordinata uguale a 3.



Scrivendo $y = 3$ indichiamo tutti i punti che hanno ordinata uguale a 3, cioè tutti e soli i punti della retta r . Diciamo allora che $y = 3$ è l'equazione della retta r (o associata alla retta o che descrive la retta)

Quindi se diciamo di considerare la retta di equazione $y = 2$ disegneremo la retta in figura.

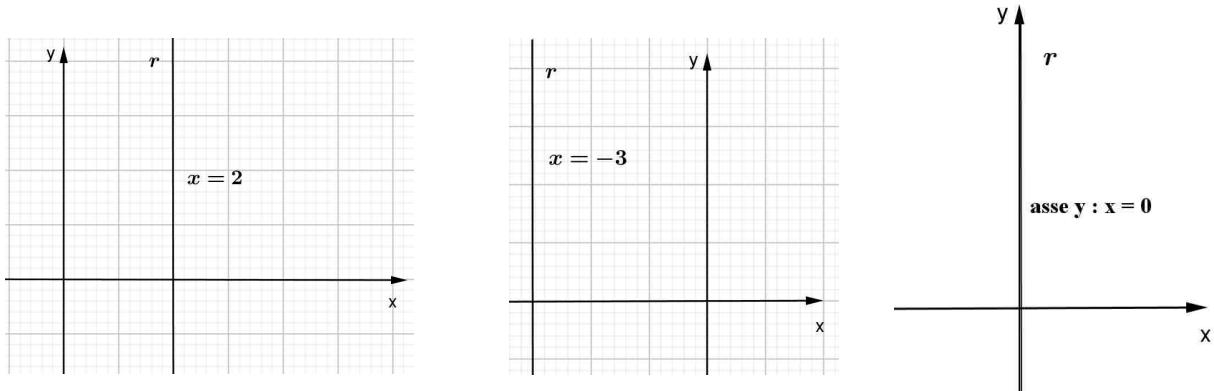


Osservazione: l'asse x avrà equazione $y = 0$

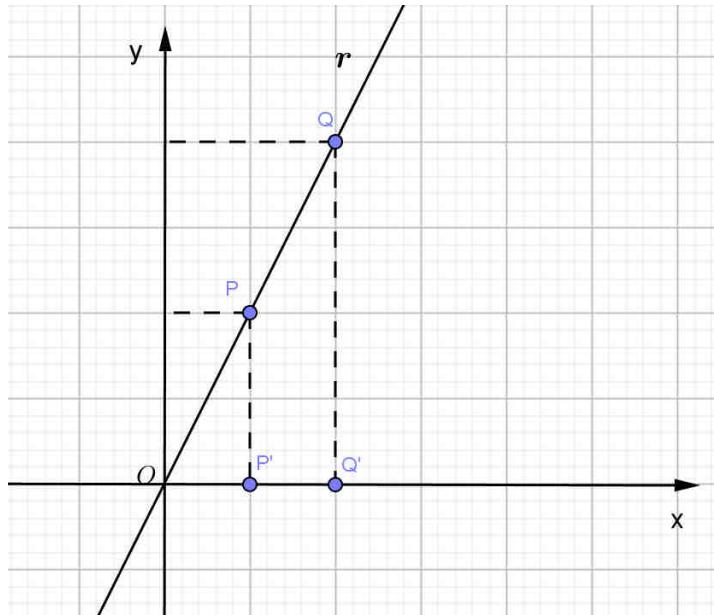
In generale quindi una retta parallela all'asse x avrà equazione $y = k$ (k numero reale)

Analogamente una retta parallela all'asse y avrà tutti i punti con la stessa ascissa e quindi avrà un'equazione del tipo $x = k$ (k numero reale).

Per esempio in figura abbiamo $x = 2$, $x = -3$, $x = 0$ (asse y).



Retta passante per l'origine



Consideriamo ora la seguente retta r passante per l'origine O del sistema di riferimento.

Osserviamo che (per la similitudine dei triangoli $OP'P$, $OQ'Q$, ecc) il rapporto tra l'ordinata y e l'ascissa x di un qualsiasi punto su r è sempre 2.

Cioè

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{QQ'}{OQ'} = \dots = \frac{y_p}{x_p} = 2$$

In generale se $P(x; y) \in r$ (cioè se P appartiene alla retta r) si osserva che $\frac{y}{x} = 2$.

Ma questa relazione può anche essere scritta

$$y = 2x$$

L'equazione $y = 2x$ è quindi l'equazione della retta r (descrive la relazione tra ascissa e ordinata dei suoi punti).

Il coefficiente 2 è chiamato **coefficiente angolare della retta** (o inclinazione o pendenza) e in generale indicato con m .

Quindi in generale una retta passante per l'origine ha equazione

$$y = mx$$

dove m è un numero reale ed è detto coefficiente angolare della retta.

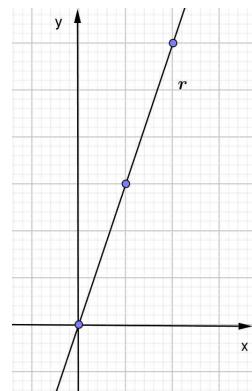
Esempi

Proviamo a disegnare alcune rette conoscendo la loro equazione.

a) $y = 3x$

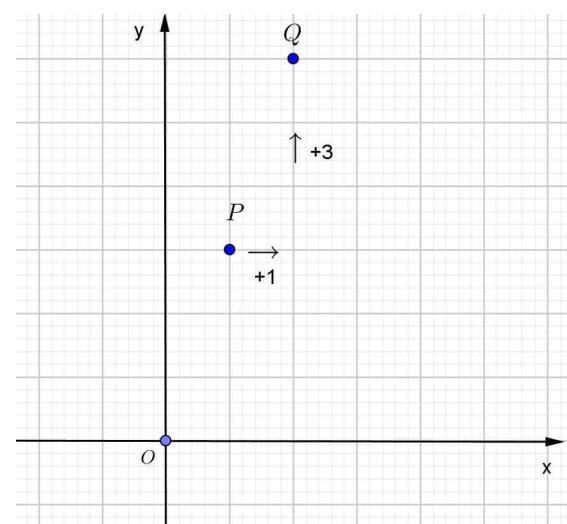
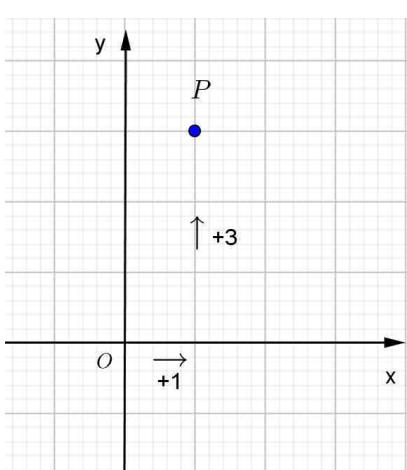
Potremo fare una tabella, assegnando dei valori alla x e determinando i corrispondenti valori della y .

x	y
0	0
1	3
2	6



C'è però un metodo più veloce che utilizza la "quadrettatura" del foglio:

- partiamo dall'origine O (sappiamo che la retta passa per O);
- per determinare un altro punto di r consideriamo il coefficiente angolare m e ricordiamo che $m = \frac{y}{x}$. Nel nostro caso abbiamo $m = 3$: possiamo pensare 3 come $\frac{3}{1}$ e quindi se ci spostiamo orizzontalmente di 1 quadretto ($x=1$) e saliamo in verticale di 3 quadretti ($y=+3$) partendo dall'origine troviamo un punto P di r .
- possiamo ripetere il procedimento partendo da P per trovare un altro punto Q e così via (l'inclinazione è sempre la stessa!).



In questo modo, anche senza fare la tabella, individuiamo vari punti e possiamo disegnare la retta.

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- La retta nel piano cartesiano -

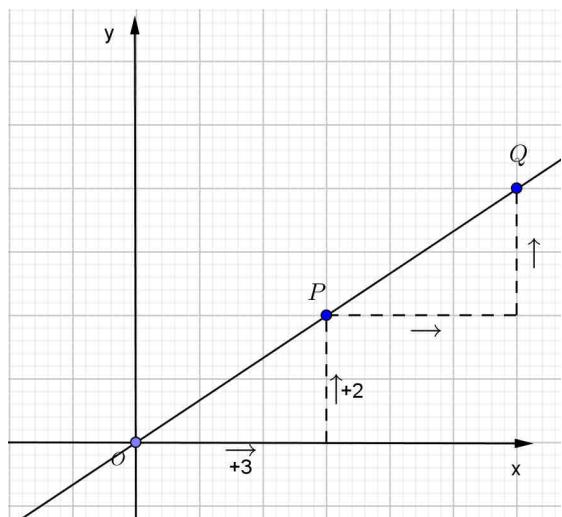
b) $y = \frac{2}{3}x$

In questo caso il coefficiente angolare è $m = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$

Possiamo disegnare la retta utilizzando la quadrettatura: partendo da O possiamo spostarci orizzontalmente di 3 quadretti e poi salire verticalmente di 2 quadretti.

Ripetendo il procedimento più volte troveremo vari punti senza dover fare calcoli.

Nota: attenzione a non confondere lo spostamento “orizzontale” (x) con lo spostamento “verticale” (y).



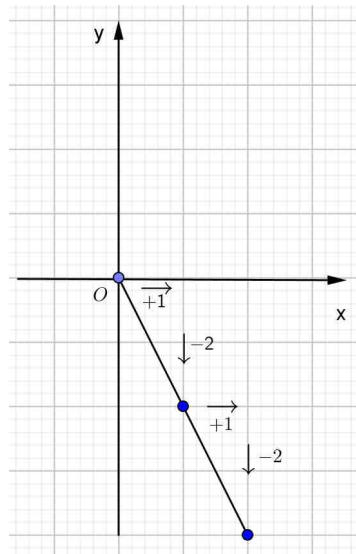
c) $y = -2x$

Facciamo la tabella

x	y
0	0
1	-2
2	-4
-1	2

E se usiamo il procedimento sul piano quadrettato?

In questo caso $m = -2 = \frac{-2}{1}$ quindi, partendo da O, ci spostiamo a destra di 1 (x) e **scendiamo verticalmente** di 2 poiché $y = -2$.

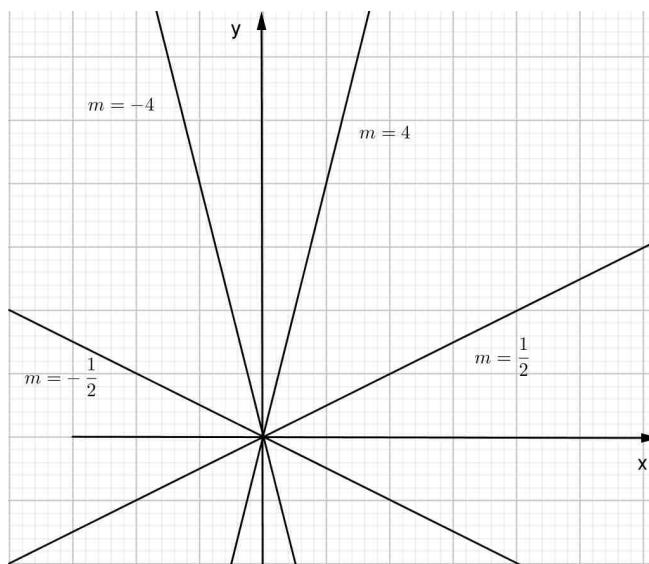


Osservazioni

- 1)** Per quanto abbiamo visto l'equazione $y = mx$ rappresenta una retta passante per l'origine O del sistema di riferimento.

Se $m > 0$ la retta si trova nel I e III quadrante;

Se $m < 0$ la retta si trova nel II e IV quadrante.



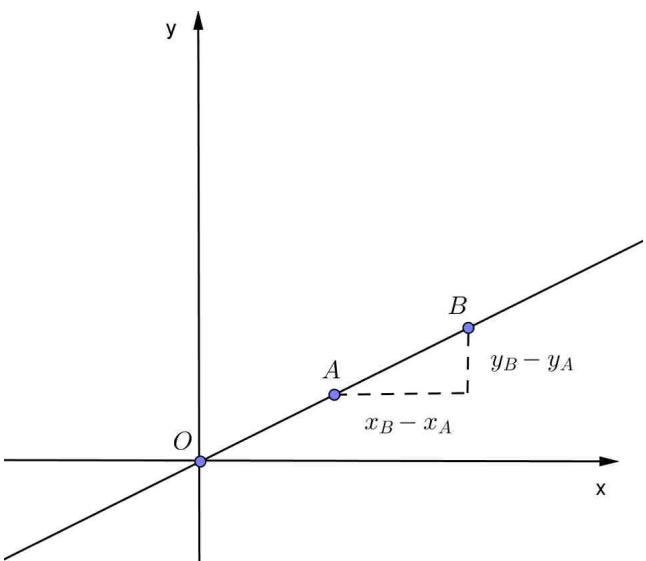
- 2)** Osserviamo infine che l'asse y, pur essendo una retta per O, non può essere descritta da un'equazione di questo tipo poiché non possiamo associaragli un coefficiente angolare (l'ascissa di tutti i suoi punti è 0 e non possiamo dividere per 0).

3)

Abbiamo visto che il coefficiente angolare m di una retta per l'origine corrisponde al rapporto $\frac{y}{x}$ se $P(x; y) \in r$.

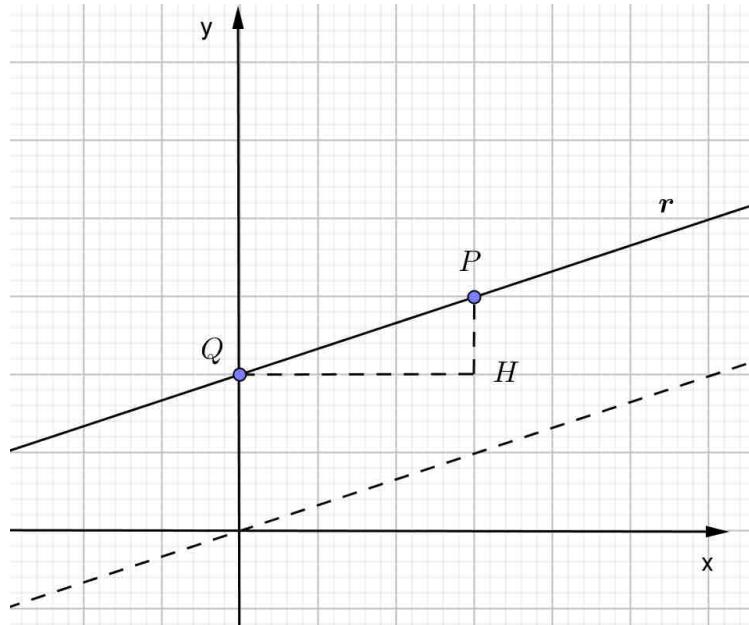
Se consideriamo due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ appartenenti a r osserviamo che si ha:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$



Retta non parallela agli assi e non passante per l'origine

Consideriamo infine una retta r non parallela agli assi coordinati e non passante per l'origine come quella in figura. Come possiamo determinare la sua equazione?



Consideriamo il punto in cui la retta interseca l'asse y :

nel nostro caso $Q(0; 2)$

Ricaviamo il coefficiente angolare considerando il triangolo in figura PHQ (poiché posso ricavare m da una coppia qualsiasi di punti di r):

$$m = \frac{1}{3}$$

L'equazione della retta non sarà però $y = \frac{1}{3}x$ perché la retta non passa per l'origine: se tracciamo

$y = \frac{1}{3}x$ ci accorgiamo che rispetto ad essa i punti di r hanno sempre l'ordinata aumentata di 2. e quindi l'equazione di r risulta:

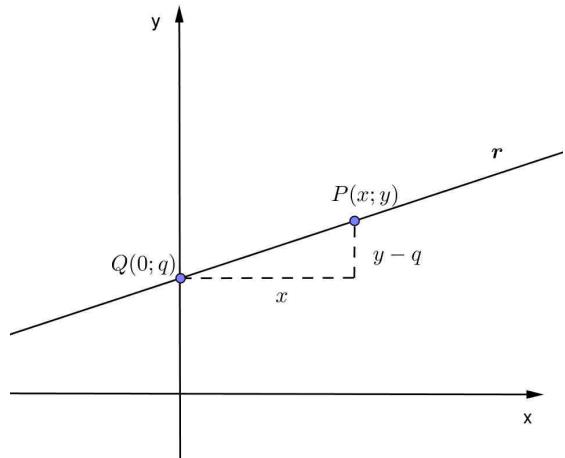
$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

In generale, se indichiamo con $Q(0; q)$ il punto di intersezione della retta con l'asse y , considerando un generico punto $P \in r$ avremo (vedi figura):

$$\frac{y - q}{x} = m \Rightarrow y - q = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + q}$$

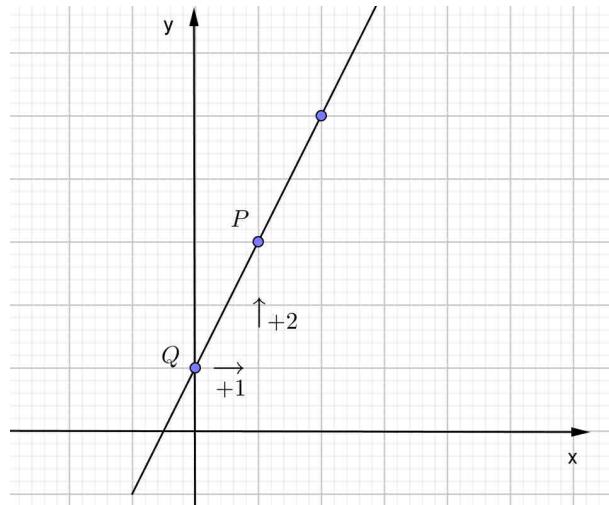
m è il coefficiente angolare

q è l'ordinata del punto di intersezione di r con l'asse y e viene anche detta “**ordinata all'origine**” perché è l'ordinata del punto di ascissa $x = 0$.



Esempi

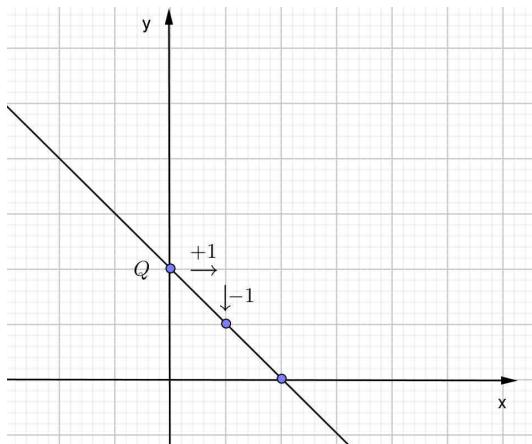
- a) Disegniamo la retta di equazione $y = 2x + 1$ ($m=2$; $q=1$)



Partiamo da $Q(0;1)$: spostiamoci di 1 e saliamo di 2 (poiché $m = 2 = \frac{2}{1}$) e così via.

Naturalmente possiamo trovare anche le coordinate dei punti facendo la “tabella” x,y ma il procedimento sul piano quadrettato è più veloce.

- b) Disegniamo la retta di equazione $y = -x + 2$ ($m = -1$; $q = 2$)



EQUAZIONE GENERALE DELLA RETTA

C’è un’equazione che comprende tutti i casi ?

Se consideriamo l’equazione

$$ax + by + c = 0$$

dove a, b, c sono coefficienti reali, al variare del valore dei coefficienti abbiamo tutti i casi.

Se $a = 0$ e $b \neq 0$ abbiamo rette del tipo $y = -\frac{c}{b}$ e quindi parallele all’asse x;

Se $a \neq 0$ e $b = 0$ abbiamo rette del tipo $x = -\frac{c}{a}$ cioè rette parallele all’asse y;

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ma $c = 0$ abbiamo $y = -\frac{a}{b}x$ cioè rette passanti per O (diverse dall’asse x)

Se $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$ abbiamo

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

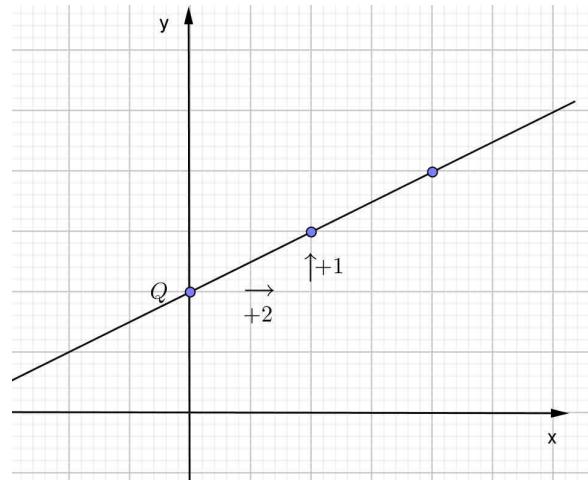
e quindi rette non passanti per l’origine e non parallele agli assi.

Esempio

Disegna la retta di equazione $x - 2y + 4 = 0$

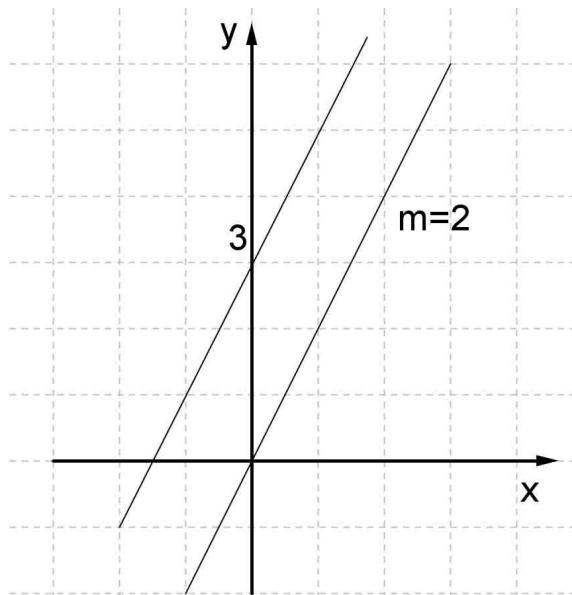
Ricaviamo la y: $2y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

e quindi $m = \frac{1}{2}$ e $q = 2$.



Rette parallele

Per quello che abbiamo detto è chiaro che due rette, non parallele all'asse y , sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

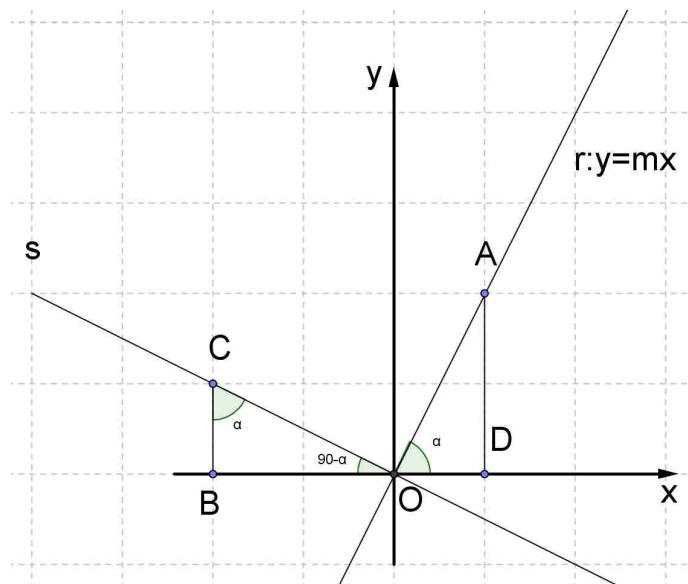


Vediamo in figura le rette di equazione $y = 2x$ e $y = 2x + 3$.

Rette perpendicolari

Consideriamo una retta per l'origine r di equazione $y = mx$ (per semplicità sia $m > 0$) e costruiamo il triangolo OAD come in figura prendendo cioè $\overline{OD} = 1$ e $\overline{AD} = m$.

A questo punto disegniamo il triangolo OCB prendendo $\overline{BC} = 1$ e $\overline{OB} = m$ (vedi figura) e tracciamo la retta s che avrà quindi equazione $y = -\frac{1}{m}x$.



- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
 - La retta nel piano cartesiano -

Poiché i triangoli OAD e OCB sono uguali per costruzione, avranno tutti gli angoli uguali e in particolare $\hat{AOD} = \hat{BCO} = \alpha$ e allora essendo $\hat{BOC} = 90^\circ - \alpha$ avremo che l'angolo $\hat{AOC} = 90^\circ$ cioè le rette r e s sono perpendicolari.

La relazione che abbiamo trovato tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari passanti per l'origine vale naturalmente anche per rette perpendicolari non passanti per l'origine poiché quello che conta è il coefficiente angolare.

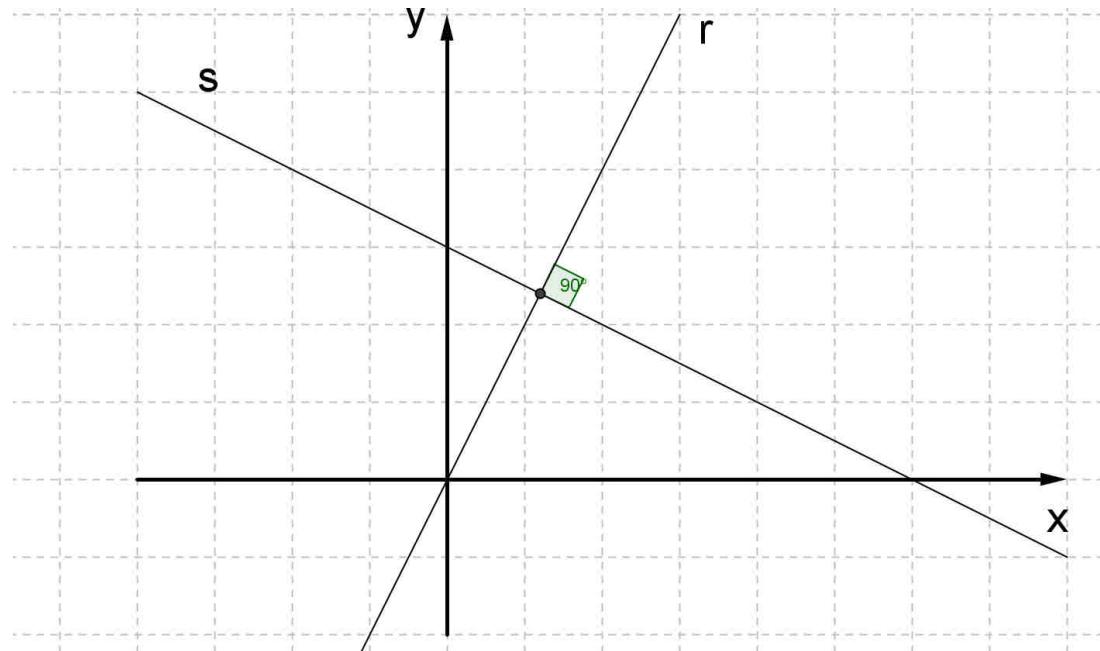
Quindi possiamo dire che se una retta ha coefficiente angolare m , una retta con coefficiente angolare

$$m' = -\frac{1}{m}$$

risulta ad essa perpendicolare (e viceversa se due rette sono perpendicolari e non parallele agli assi i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro).

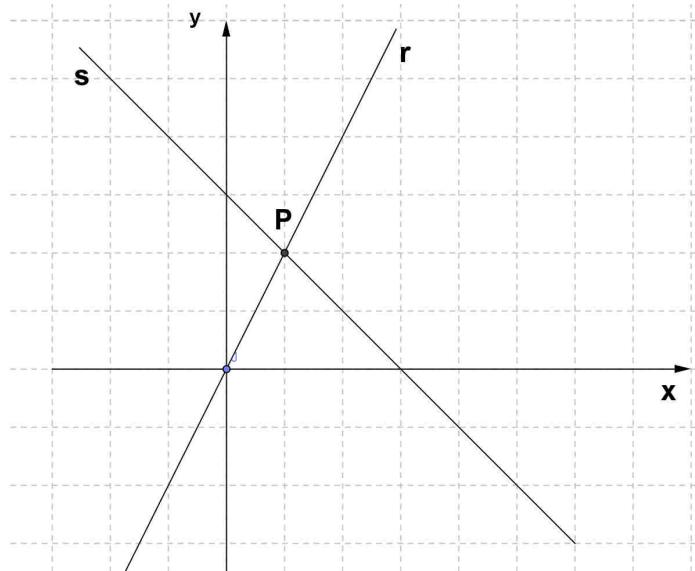
Vediamo per esempio in figura le rette perpendicolari di equazione

$$y = 2x \text{ e } y = -\frac{1}{2}x + 3$$



INTERSEZIONE TRA DUE RETTE

Supponiamo di avere due rette non parallele, per esempio $y = 2x$ e $y = -x + 3$ come in figura e di voler trovare le coordinate del loro punto P di intersezione.



In questo caso le coordinate si possono determinare facilmente anche osservando la figura: $P(1;2)$.

Ma in generale come possiamo trovare il punto di intersezione?

Poiché $P \in r$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di r e poiché $P \in s$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di s : quindi le coordinate $(x; y)$ del punto di intersezione devono verificare entrambe le equazioni cioè sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Infatti risolvendo abbiamo:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

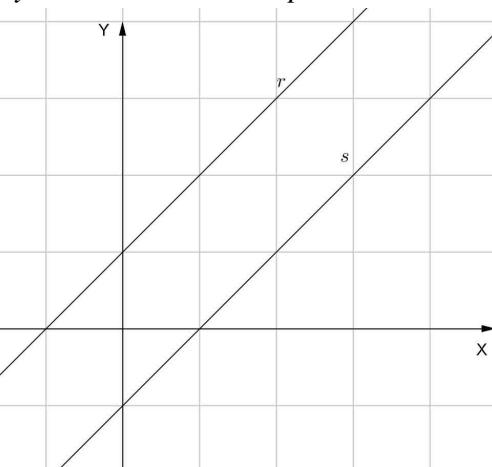
In generale quindi per trovare le coordinate del punto di intersezione di due rette basterà **risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

Quindi possiamo avere tre casi:

- Se le rette sono **incidenti** come nel nostro esempio abbiamo un punto di intersezione cioè una soluzione $(x_0; y_0)$ del sistema risulta “*determinato*”;
- Se le rette sono **parallele** allora non c’è nessun punto “comune”, quindi nessuna soluzione del sistema e il sistema risulta “*impossibile*”.

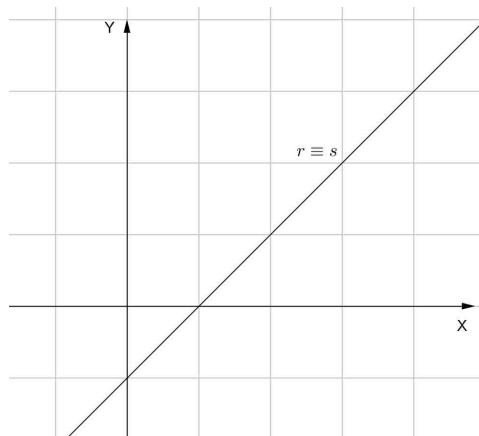
Esempio

$$\begin{cases} r : x - y + 1 = 0 \\ s : x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y - 1 - y - 1 = 0 \rightarrow -2 = 0 \text{ impossibile} \end{cases}$$



- Se le rette sono coincidenti cioè le equazioni rappresentano la **stessa retta**, i punti sono tutti comuni e il sistema ha infinite soluzioni e risulta “*indeterminato*”.

Esempio



$$\begin{cases} r : 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \\ s : x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Infatti se ricavo $x = y + 1$ dalla prima equazione e sostituisco nella seconda equazione trovo $0=0$.

Tutti i punti della retta sono soluzioni del sistema.

**Equazione di una retta passante per un punto assegnato $P_0(x_o; y_o)$
 ed avente un coefficiente angolare assegnato m**

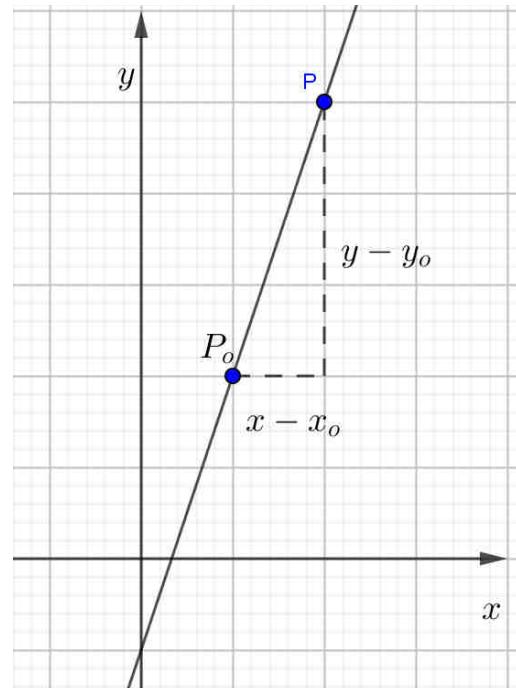
Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta passante per $P_0(1;2)$ e avente coefficiente angolare $m = 3$.

Se consideriamo un punto $P(x; y)$ sulla retta avremo che

$$\frac{y-2}{x-1} = 3 \rightarrow y-2 = 3 \cdot (x-1)$$

Sviluppando abbiamo quindi che l'equazione della retta risulta:

$$y = 2 + 3x - 3 \rightarrow y = 3x - 1$$



In generale se indichiamo con $(x_o; y_o)$ le coordinate del punto P_o avremo

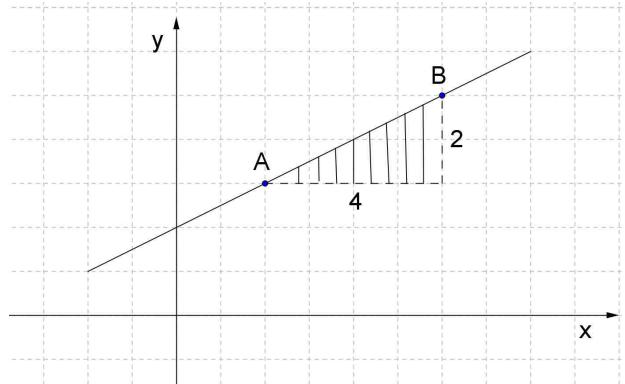
$$\frac{y - y_o}{x - x_o} = m \rightarrow y - y_o = m \cdot (x - x_o)$$

cioè l'equazione della retta passante per $P_o(x_o; y_o)$ e avente coefficiente angolare m risulta

$y - y_o = m \cdot (x - x_o)$

Equazione della retta passante per due punti assegnati

Supponiamo di volere trovare l'equazione della retta passante per $A(2;3)$ e $B(6;5)$.



Osserviamo che possiamo ricavare il coefficiente angolare della retta partendo dal triangolo tratteggiato in figura:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e nel nostro esempio quindi abbiamo $m = \frac{1}{2}$.

A questo punto possiamo utilizzare l'equazione della retta per A, per esempio, con coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$ e abbiamo $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

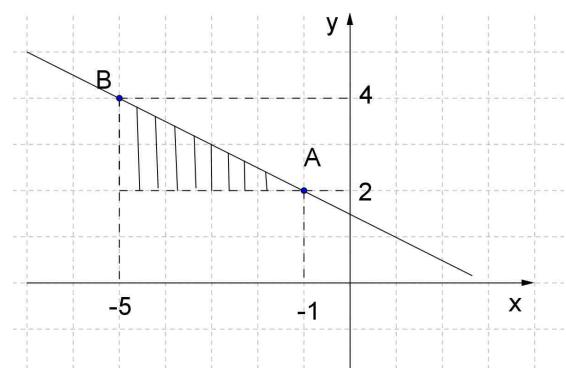
In generale per determinare l'equazione della retta passante per $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ si determina prima il coefficiente angolare e poi si sfrutta l'equazione della retta passante per un punto (possiamo scegliere A o B) con coefficiente angolare dato.

Se per esempio consideriamo il passaggio per A abbiamo:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

Attenzione: se per ricavare m ci si affida al piano quadrettato occorre fare attenzione ai coefficienti angolari negativi. Per esempio le misure dei cateti del triangolo tratteggiato in figura sono ancora 2 e 4 ma in questo caso è chiaro che $m = -\frac{1}{2}$.

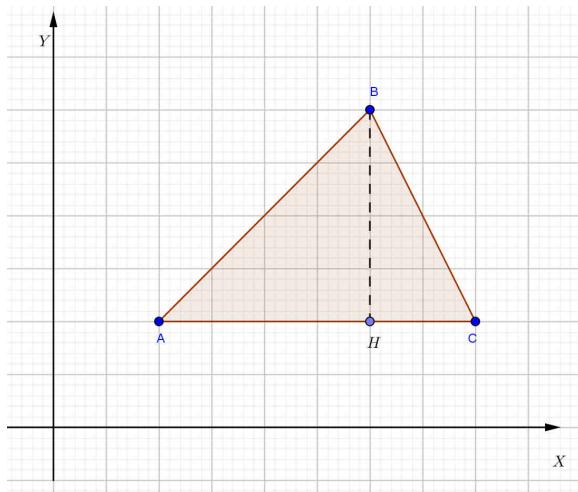
$$\text{Infatti } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{-5 + 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$



Area di un triangolo di vertici assegnati

Come possiamo, in generale, determinare l'area di un triangolo ABC conoscendo le coordinate dei vertici?

1) Consideriamo un esempio: $A(2;2)$ $B(6;6)$ $C(8;2)$.



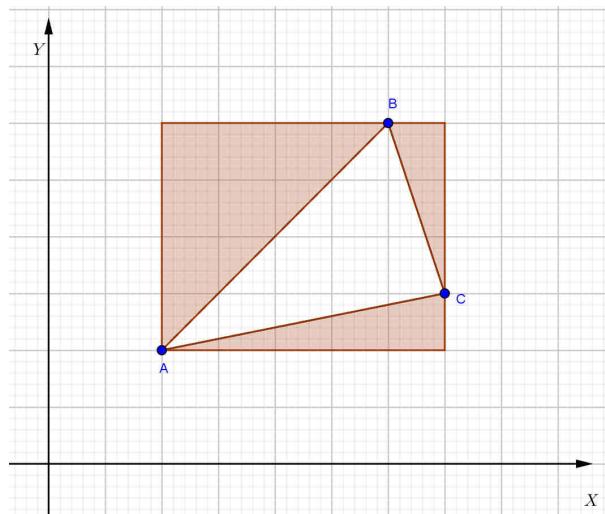
È chiaro che in questo caso conviene considerare AC come base perché l'altezza BH corrisponde alla differenza tra l'ordinata di B e quella di A (o C).

Si ha cioè $BH = 4$ e quindi

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12$$

Quindi è piuttosto facile determinare l'area di ABC se un lato è parallelo ad uno degli assi.

2) Consideriamo adesso $A(2;2)$ $B(6;6)$ $C(7;3)$



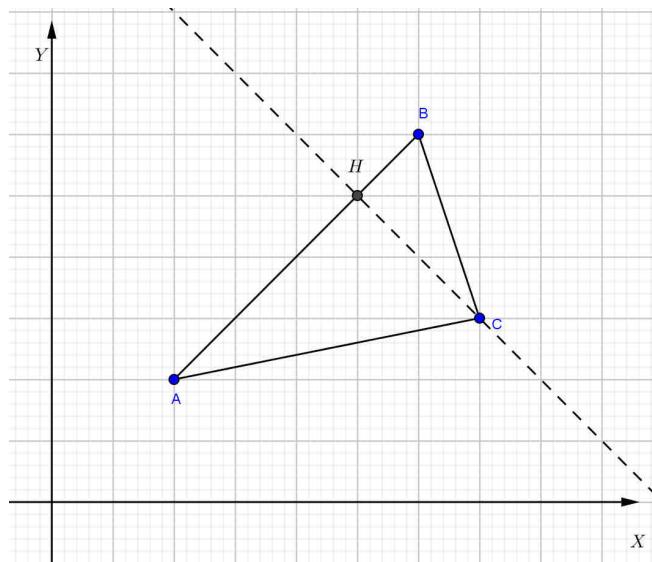
Possiamo in questo caso *in scrivere il triangolo in un rettangolo* (vedi figura) e determinare l'area di ABC sottraendo all'area del rettangolo le aree dei triangoli tratteggiati (facili da calcolare).

Abbiamo in questo caso: $\text{area } ABC = \text{area rettangolo} - \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 8 \right) = 20 - 12 = 8$

Ma potevamo determinare **l'altezza relativa ad una base?**

Proviamo a considerare AB come base: per trovare l'altezza CH (vedi figura) dobbiamo prima determinare le coordinate di H.

Per trovare H dobbiamo intersecare la retta per A e B con la retta per C perpendicolare a r_{AB} .



$$r_{AB} : y - 2 = x - 2 \Rightarrow y = x$$

$$h_C : y - 3 = -(x - 7) \Rightarrow y = -x + 10$$

$$H : \begin{cases} y = x \\ y = -x + 10 \end{cases} \Rightarrow x = -x + 10 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

Quindi $HC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ e in conclusione, essendo $AB = \sqrt{32}$ ritroviamo

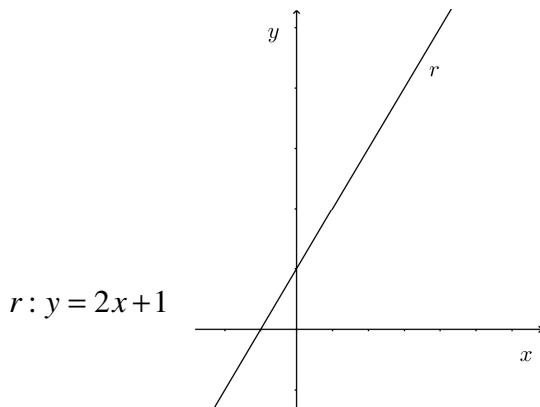
$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{256} = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

Questo secondo procedimento risulta quindi più “laborioso” del primo ma in seguito dimostreremo una formula che ci permetterà di trovare velocemente la distanza CH e allora converrà usare questo metodo per calcolare l’area.

APPROFONDIMENTI

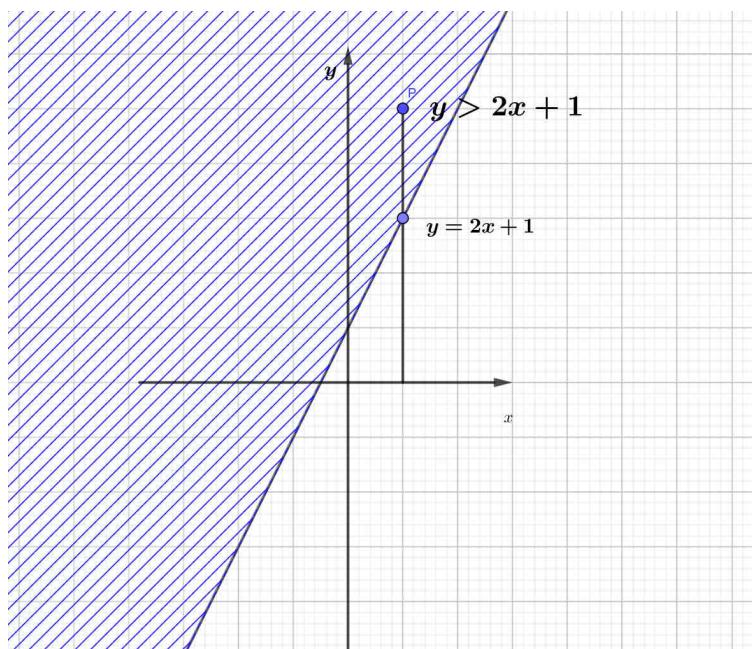
Disequazioni di primo grado in due incognite

Consideriamo la retta di equazione $y = 2x + 1$.



Cosa rappresenta la disequazione $y > 2x + 1$?

I punti del piano che hanno ordinata (y) maggiore di $2 \cdot$ ascissa+1 ($2x + 1$) sono tutti quelli che si trovano nel semipiano individuato da r indicato in figura (semipiano “sopra” ad r).



Per ogni $P(x; y)$ del semipiano abbiamo

$$y_p > 2x_p + 1$$

Quindi mentre l’equazione $y = 2x + 1$ rappresenta i punti sulla retta r , la disequazione $y > 2x + 1$ rappresenta i punti del semipiano “sopra” ad r .

È chiaro che $y < 2x + 1$ rappresenta il semipiano “sotto” ad r .

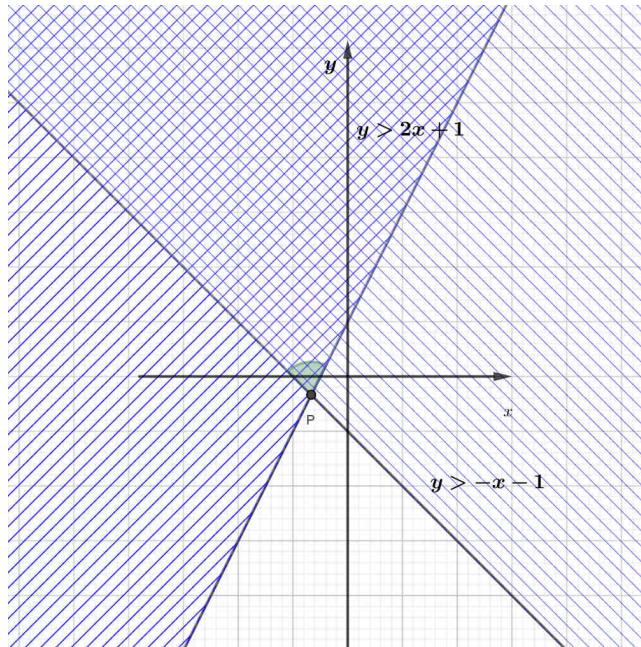
Osservazione: e se abbiamo $x + y + 1 > 0$?

Basta “esplicitare” y ed abbiamo $y > -x - 1$: le soluzioni della disequazione sono tutti i punti del semipiano “sopra” alla retta $y = -x - 1$.

Sistemi di disequazioni di primo grado in due incognite

Esempio: cosa rappresenta il sistema $\begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ y > 2x + 1 \end{cases}$?

Disegniamo i semipiani ed intersechiamoli: otteniamo un “angolo”.



$$\begin{cases} r : x + y + 1 > 0 \rightarrow y > -x - 1 \\ s : y > 2x + 1 \end{cases}$$

Il vertice dell’angolo è il punto in cui si incontrano $y = -x - 1$ e $y = 2x + 1$.

$$P \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \begin{cases} 2x + 1 = -x - 1 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ \Rightarrow y = 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi abbiamo l’angolo α in figura di vertice $P\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

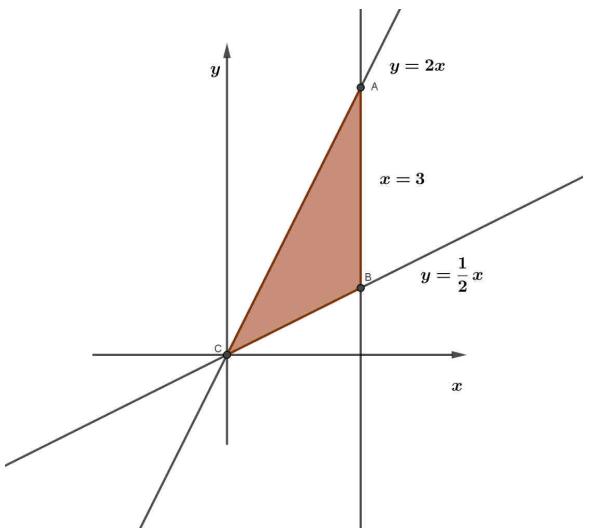
Esempio

Cosa rappresenta il sistema $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$?

Splicitiamo la y nelle varie disequazioni:

$$\begin{cases} y < 2x \\ y > \frac{1}{2}x \\ x < 3 \end{cases}$$

Otteniamo la zona di piano triangolare tratteggiata in figura.



ESERCIZI

1. Disegna le seguenti rette:

- a) $x = 5; y = -3$
- b) $y = 4x; y = -4x$
- c) $y = \frac{1}{2}x; y = -\frac{1}{2}x$
- d) $y = \frac{3}{5}x; y = -\frac{3}{5}x$
- e) $y = \frac{5}{4}x; y = -\frac{4}{5}x$

2. Disegna le seguenti rette:

- a) $y = x + 4 ; y = -2x - 3 ; y = -\frac{1}{2}x + 2$
- b) $y = 3x - 1 ; y = \frac{1}{2}x - 2 ; y = -2x + 5$

3. Disegna le rette aventi equazione:

- a) $3x + y = 0 ; x - 2y + 4 = 0 ; 5y - 15 = 0 ; 4x - 2 = 0$
- b) $2x - 3y + 6 = 0 ; x - y = 0 ; 2x + y - 1 = 0 ; 3 - x = 0$

4. Determina l'equazione della retta:

- a) passante per $A(2;5)$ e avente $m = 2$
- b) passante per $A(1;0)$ e parallela alla retta di equazione $y = x$
- c) passante per $P(-1;3)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x - 2y - 2 = 0$
- d) passante per $P(0;-2)$ e parallela alla retta di equazione $3x - y = 0$

5. Determina la retta passante per il punto $A(2;3)$ e avente coefficiente angolare $m = -1$. Disegnala.

$$[y = -x + 5]$$

6.Determina l'equazione della retta passante per $P(3;0)$ e parallela alla retta $y = \frac{1}{2}x + 3$. Disegna le due rette.

$$[y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}]$$

7.Determina l'equazione della retta passante per $P(-2;1)$ e perpendicolare alla retta $y = -3x + 1$. Disegnale.

$$[y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}]$$

8.Determina l'equazione della retta passante per i punti $A(2;-4)$ e $B(0;1)$ e disegnala.

$$[y = -\frac{5}{2}x + 1]$$

9.Determina l'equazione della retta passante per i punti $A(-1;-3)$ e $B(1;-1)$ e disegnala.

$$[y = x - 2]$$

10.Disegna le rette $y = 3x$, $y = 4 - x$ e, dopo aver determinato il loro punto di intersezione A, determina l'equazione della retta passante per A e parallela alla retta di equazione $x - 2y = 0$.

$$[y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}]$$

11.Determina l'equazione della retta r passante per i punti $A(-1;3)$, $B(2;2)$ e disegnala. Determina poi l'equazione della retta passante per A e perpendicolare a r .

$$[y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}; \quad y = 3x + 6]$$

12.Dati i punti $A(-3;3)$; $B(-2;5)$; $C(0;4)$; $D(-1;2)$, determina le equazioni delle rette passanti per A-B ; B-C ; C-D e D-A e verifica che individuano un quadrato. Disegnale.

$$[y = 2x + 9; \quad y = -\frac{1}{2}x + 4; \quad y = 2x + 4; \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}]$$

13. Disegna nel piano cartesiano le rette aventi le seguenti equazioni ed indica come risultano

- a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ [incidenti in $P\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$]
- b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ [incidenti in $P\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$]
- c) $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ [rette parallele, sistema impossibile]
- d) $\begin{cases} 2(x-3) + y + 5 = 0 \\ 4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ [rette coincidenti, sistema indeterminato]
- e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ [rette incidenti in $P(2;3)$]
- f) $\begin{cases} y = 3 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$ [rette incidenti in $P\left(\frac{3}{2}; 3\right)$]

14. Determina l'area del triangolo di vertici:

- a) $A(-1;2)$ $B(5;5)$ $C(6;1)$. [$Area = \frac{39}{2}$]
- b) $A(-2;-1)$; $B(0;3)$; $C(3;0)$. [$Area = 9$]
- c) $A(1;1)$; $B(1;4)$; $C(4;3)$. [$Area = \frac{9}{2}$]
- d) $A(1;-1)$; $B(5;-1)$; $C(2;-3)$. [$Area = 4$]
- e) $A(1;2)$; $B(3;4)$; $C(4;1)$ determinando l'altezza relativa ad AB. [$Area = 4$]

15. Determina l'equazione della retta s per $A(2;3)$ parallela alla retta $r : y = \frac{1}{2}x$. Indica con B l'intersezione di s con l'asse y.

Tracciata la retta per A parallela all'asse y e detta C la sua intersezione con r, indica come risulta il quadrilatero ABCO e determinane l' area.

[$s : y = \frac{1}{2}x + 2$; $B(0;2)$; $C(2;1)$; parallelogramma ; $A = 4$]

16. Considera i punti $A(-1;3)$ e $B(2;6)$.

- a) Determina l'equazione della retta per A e B;
- b) considera il quadrato avente lato AB e centro $(2;3)$.

Quali sono le coordinate degli altri due vertici C e D? Determina l'area di ABCD.

$$[r_{AB} : y = x + 4; C(5;3)D(2;0); A = 18]$$

17. Considera i punti $A(0;3)$, $B(3;5)$, $C(5;2)$.

- a) Determina le equazioni delle rette r_{AB} , r_{BC} , r_{AC}
- b) Verificare che ABC è un triangolo rettangolo isoscele
- c) Determina l'area di ABC.

$$[r_{AB} : y = \frac{2}{3}x + 3; r_{BC} : 3x + 2y - 19 = 0, r_{AC} : y = -\frac{1}{5}x + 3; A = \frac{13}{2}]$$

18. Considera il triangolo di vertici $A(5;1)$, $B(-3;5)$ e $C(0;-4)$. Determina le coordinate del circocentro K del triangolo (ricorda che il circocentro è il punto di intersezione degli assi dei lati del triangolo).

$$[K(0;1)]$$

19. Considera il triangolo dell'esercizio precedente. Determina le coordinate dell'ortocentro H del triangolo (ricorda che l'ortocentro è il punto di intersezione delle altezze del triangolo).

$$[H(2;0)]$$

20. Considera il triangolo dell'esercizio precedente.

- a) Determina le coordinate del baricentro G del triangolo (ricorda che il baricentro è l'intersezione delle mediane).
- b) Verifica che circocentro K, ortocentro H e baricentro G sono allineati.
Su quale retta si trovano?

$$[G(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}), H, K, G \in r : y = -\frac{1}{2}x + 1]$$

21. Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(2;5)$, $C(3;0)$. Determina l'equazione dell'altezza h_C uscente da C e detto H il suo punto di intersezione con il lato AB, determina l'area del triangolo ABC considerando il lato AB come base.

Confronta il risultato con quello che avresti ottenuto usando il metodo "elementare" di considerare il rettangolo all'interno del quale si trova il triangolo.

$$[Area(ABC) = 9]$$

22. Considera i punti $A(-2;1)$, $B(1;4)$, $C(3;2)$. Determina circocentro K, ortocentro H e baricentro G del triangolo ABC e verifica che sono allineati.

$$[K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); H(1;4); G\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)]$$

23. Considera i punti $(A-5;1)$, $B(0;6)$, $C(3;-3)$.

Determina le coordinate dell'ortocentro H.

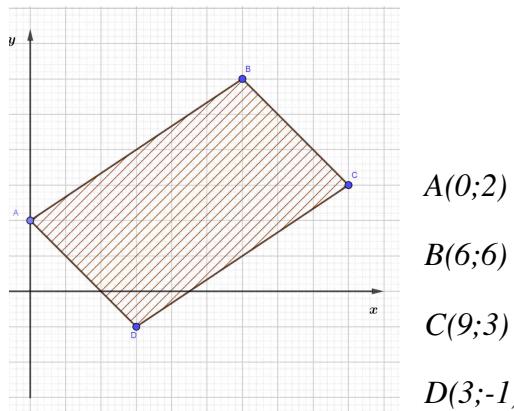
$$[H(-2;2)]$$

24. Considera le rette $r : x + 2y + 5 = 0$, $s : y = 2 - 2x$, $t : x - 2y + 9 = 0$.

Determina le intersezioni delle rette indicandole con A,B,C.

$$A(3;-4), \quad B(-7;1), \quad C(-1;4)]$$

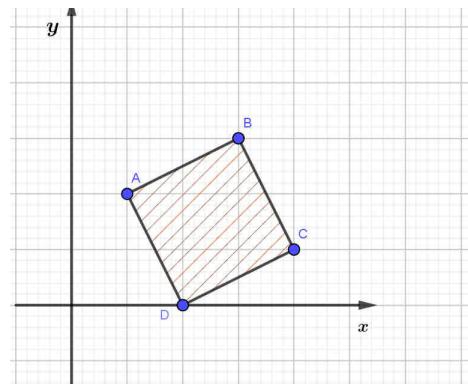
25. Considera la zona tratteggiata in figura. Qual è il sistema di disequazioni ad essa corrispondente?



26. Disegna la zona di piano corrispondente al seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - y < 0 \\ y - 4 < 0 \\ 2x + y > 0 \end{cases}$$

27. Considera la zona tratteggiata in figura. Qual è il sistema di disequazioni ad essa corrispondente?



28. Disegna la zona di piano corrispondente al seguente sistema di disequazioni:
- $$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

29. Matematica e dieta

Supponi di seguire una dieta in cui:

- puoi mangiare solo pasta e carne;
- 1 g di pasta fornisce 2 kcal (chilocalorie) e 1 g di carne fornisce in media 3 kcal;
- devi ogni giorno assumere tra le 1500 kcal e 2100 kcal;
- se indichi con x i grammi di pasta e con y i grammi di carne, la quantità di pasta (x) deve essere almeno $\frac{1}{5}$ della quantità totale di cibo ($x+y$) e al massimo $\frac{1}{3}$ del totale ($x+y$).

- a) Scriviamo le disequazioni corrispondenti alle indicazioni precedenti:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 1500 \\ 2x + 3y \leq 2100 \\ x \geq \frac{1}{5}(x + y) \\ x \leq \frac{1}{3}(x + y) \end{cases}$$

- b) Rappresenta nel piano cartesiano la zona di punti $(x;y)$ compatibili con la dieta.
 c) Mangiare 200 g di pasta e 500 g di carne (in un giorno) rientra nella tua dieta?

30. Disequazioni e test

Uno studente deve affrontare una verifica costituita da 10 domande teoriche a risposta multipla e 5 problemi a risposta aperta. Ogni risposta corretta alle domande teoriche vale 2 punti, ogni problema corretto 5 punti. Per ottenere una valutazione sufficiente si deve rispondere ad almeno 6 domande e risolvere almeno 2 problemi.

La valutazione uguale a 9 corrisponde ad un punteggio complessivo compreso tra 35 e 40 punti.

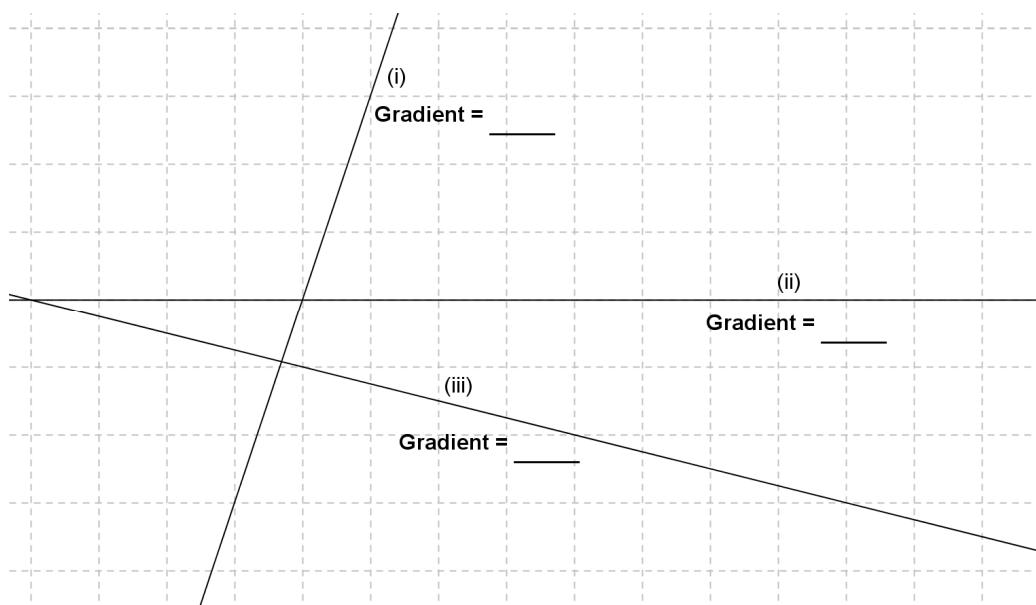
Se indichi con $x = n^{\circ}$ risposte corrette alle domande
 $y = n^{\circ}$ problemi svolti correttamente da uno studente,

quali sono le coppie (x,y) che danno una valutazione 9?

Rappresenta la situazione in un sistema di riferimento $(0;x,y)$ e trasforma le condizioni descritte in un sistema di disequazioni.

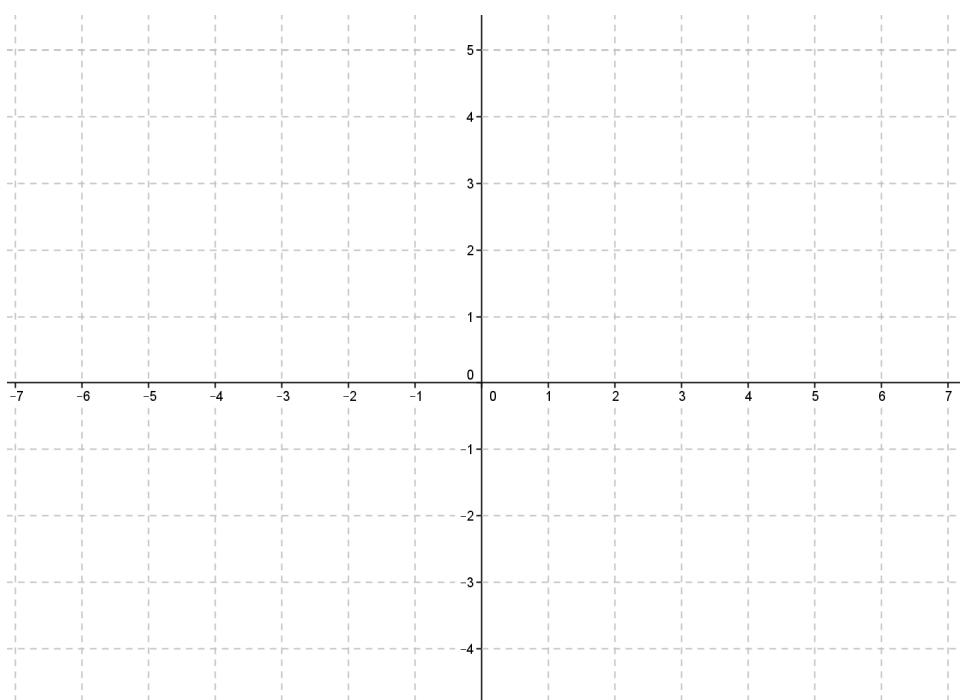
TEST 1 STRAIGHT LINES

1) Find the gradient of the following straight lines.



2) Write down the gradient and y-intercept of the following lines. Sketch the lines on the axes below.

- (i) $y = 3x - 1$ Gradient: _____ y-intercept: _____
(ii) $y = -2x + 3$ Gradient: _____ y-intercept: _____
(iii) $y = \frac{3}{2}x + 1$ Gradient: _____ y-intercept: _____
(iv) $y = -\frac{x}{2} - 2$ Gradient: _____ y-intercept: _____



3) For each equation below:

- rearrange the equation so it is in the form $y = mx + c$

- hence state the gradient and y-intercept

- draw the line on the axes below

(i) $x + y = 2$ Gradient: _____

y-intercept: _____

(ii) $3x - y = 2$ Gradient: _____

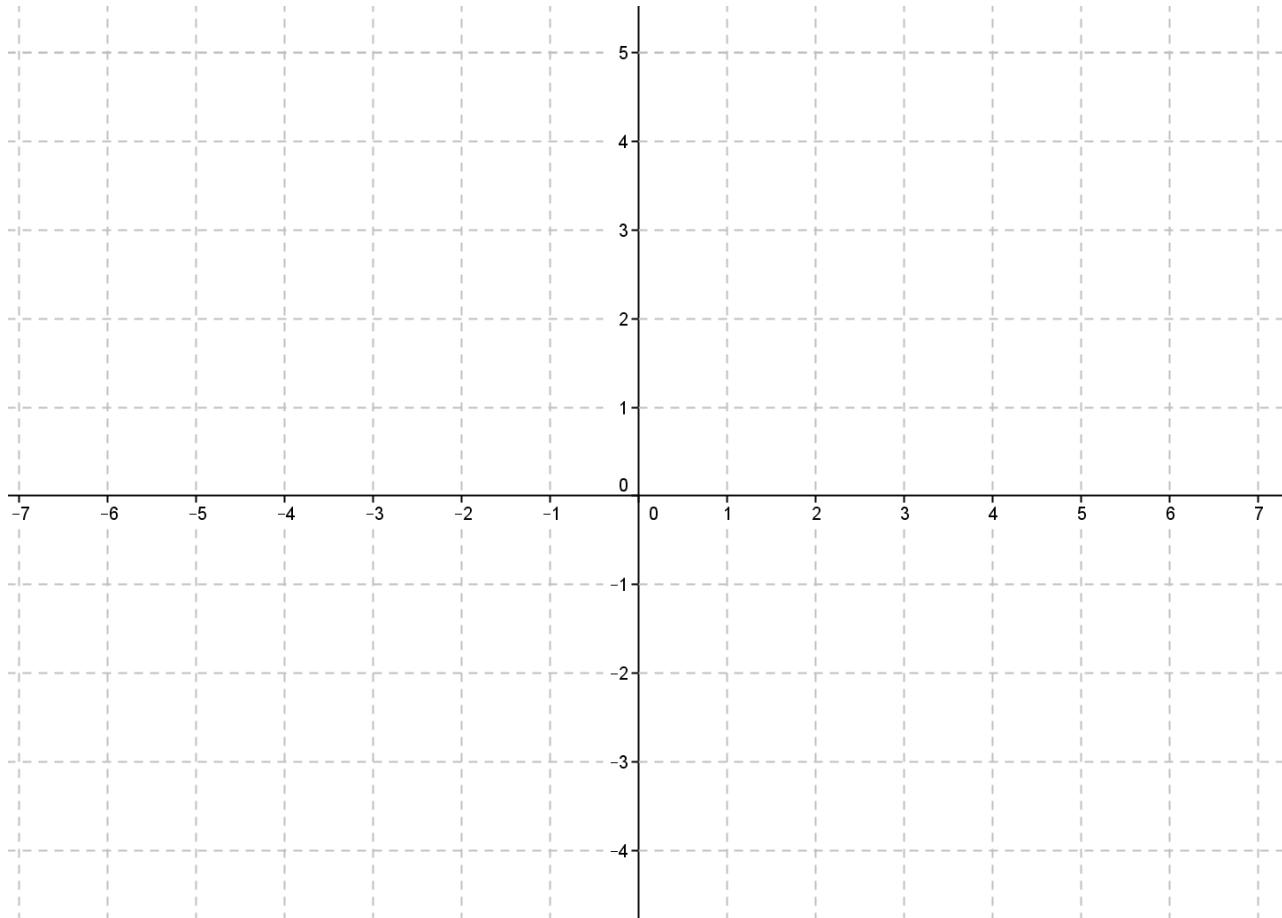
y-intercept: _____

(iii) $2x + 4y - 9 = 0$ Gradient: _____

y-intercept: _____

(iv) $3x - 2y = 8$ Gradient: _____

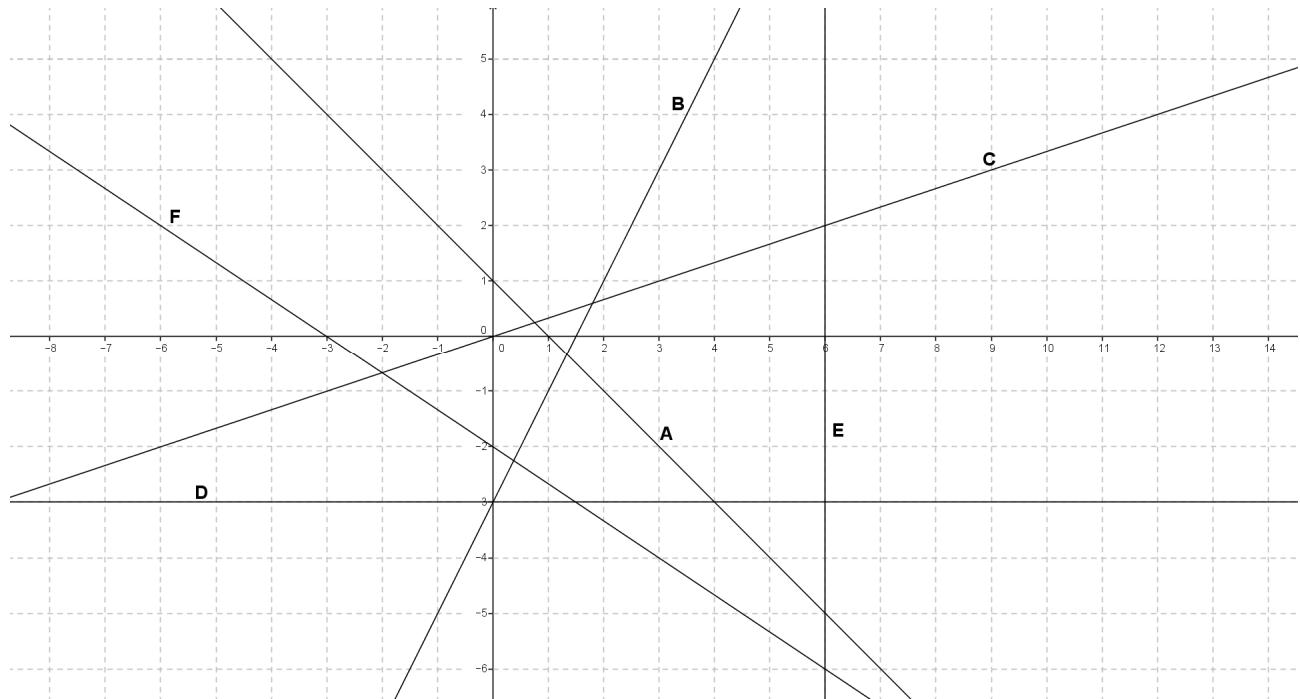
y-intercept: _____



4) Rearrange the equations of these lines so they are in the form $ax + by + c = 0$

(i) $y = -\frac{x}{3} - 2$ (ii) $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{3}$

5) Write down the equations of the lines below.



A: _____

B: _____

C: _____

D: _____

E: _____

F: _____

6) Complete the table:

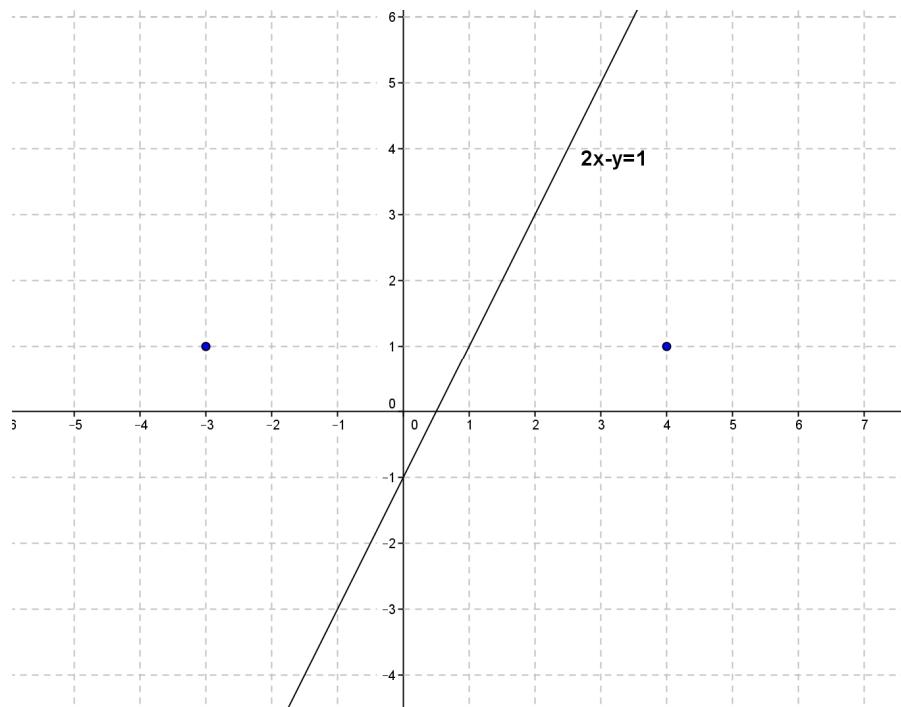
Gradient of line	Gradient of perpendicular
1	
	-4
$-\frac{2}{3}$	
	$\frac{2}{3}$
0.3	

7) Find the equation of these lines.

(i) parallel to $2x - y = 1$ going through $(4,1)$

(ii) perpendicular to $2x - y = 1$ going through $(-3,1)$

(iii) Draw these two lines on the grid below.



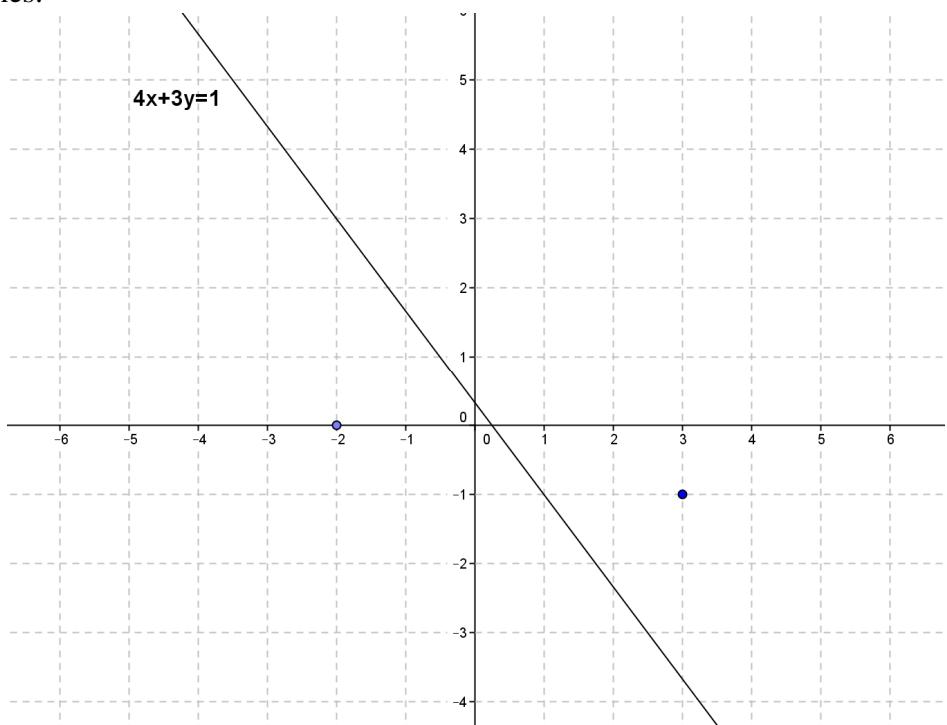
8) Find the equation of these lines.

Give your answers in the form $ax + by + c = 0$ where a, b and c are integers.

(i) parallel to $4x + 3y = 1$ going through $(-2,0)$

(ii) perpendicular to $4x + 3y = 1$ going through $(3,-1)$

(iii) Draw these two lines on the grid .



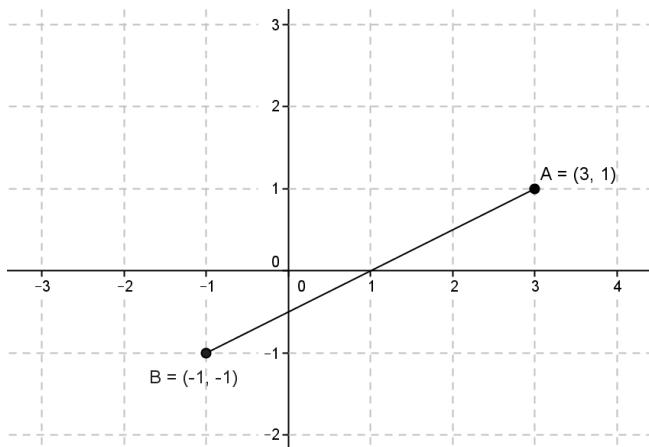
9) Point A, B, C have co-ordinates (4,1), (6,-2) and (-1,-9) respectively.

(i) Find the co-ordinates of the mid-point AC.

(ii) Find the equation of the line through B perpendicular to AC. Give your answer in the form $ax + by + c = 0$.

10) Given the coordinates of the end points of these lines, find the length, mid-point and gradient of each line.

(i)

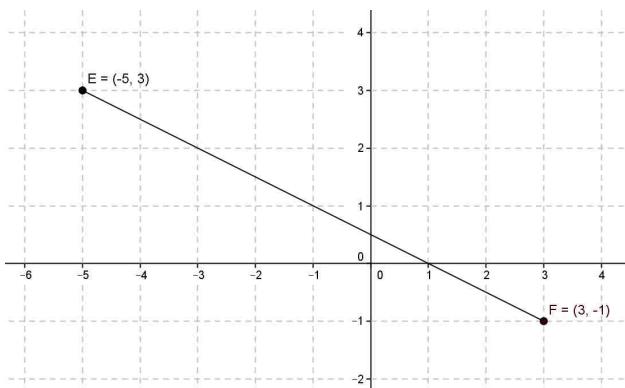


Length: _____

Mid-point: _____

Gradient: _____

(ii)



Length: _____

Mid-point: _____

Gradient: _____

11) The mid-point of A(-1,5) and B(m, n) is (2,5). Find the value of m and n .

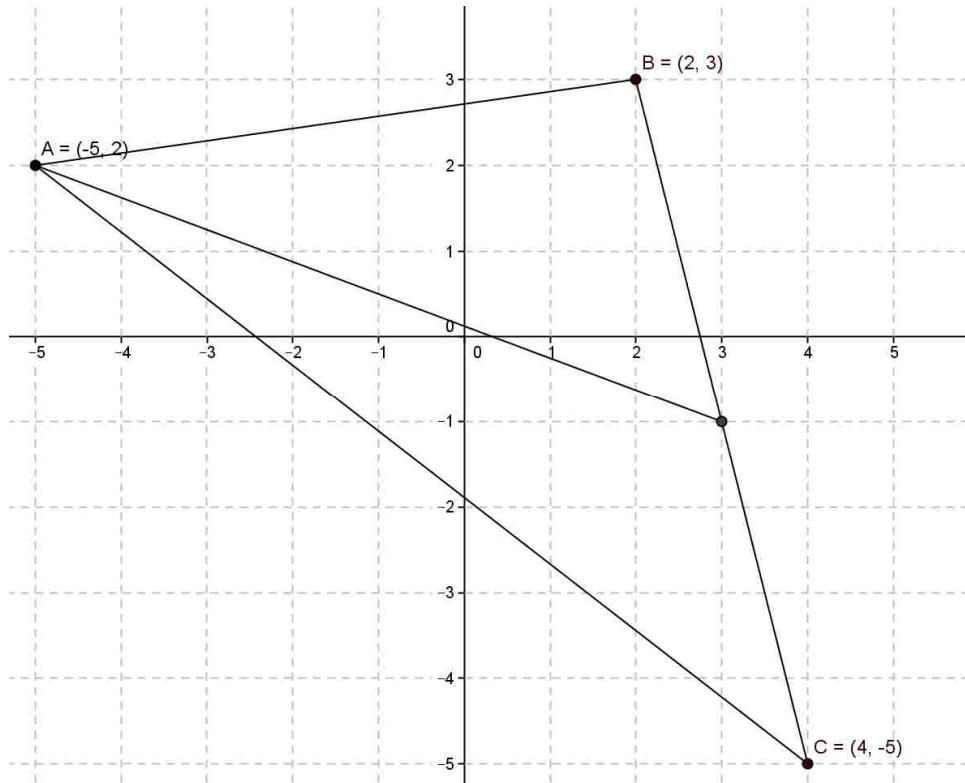
12) Find the equation of the perpendicular bisector of A(2,4) and B (-6,0).

13) The line l_1 is given by $x - 3y = 6$. The point P is (-3,2).

Find the equation of the line perpendicular to l_1 that goes through P.

14) The median of a triangle is the line that joins a vertex to the mid-point of the opposite side. A triangle is formed by the points A(-5,2), B(2,3) and C(4,-5).

Find the equation of the median from the point A as shown.

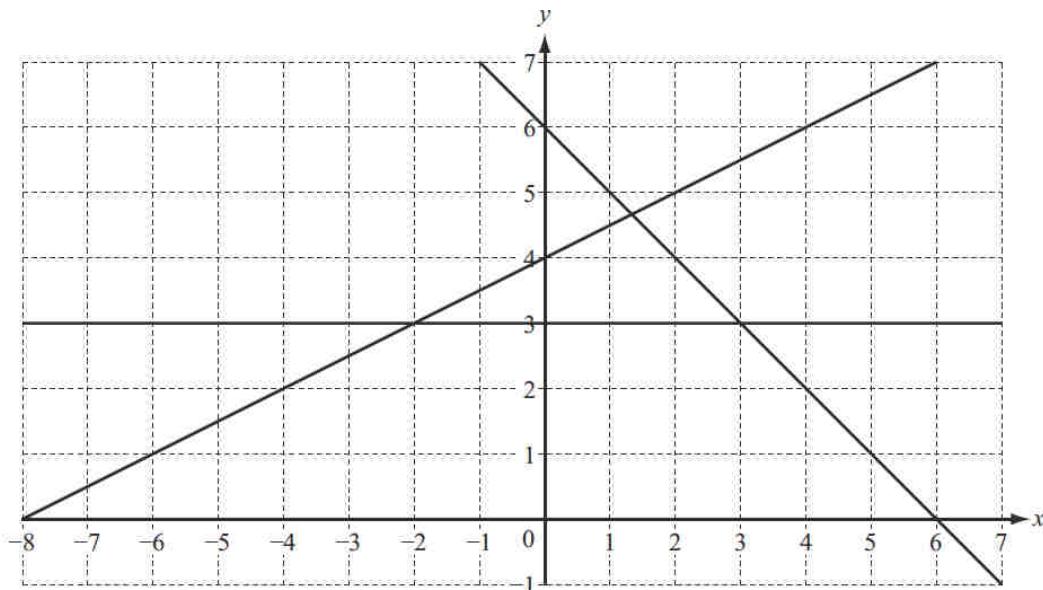


TEST 2 LINEAR PROGRAMMING

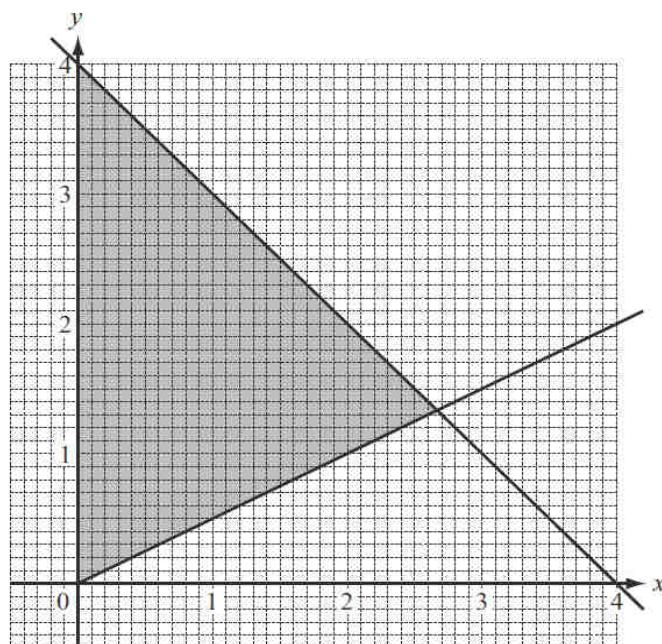
1) The region **R** contains points which satisfy the inequalities:

$$y \leq \frac{1}{2}x + 4 \quad , \quad y \geq 3 \quad \text{and} \quad x + y \geq 6 .$$

On the grid, label with the letter **R** the region which satisfies these inequalities.
 You must shade the **unwanted** regions.



2) Find the three inequalities which define the shaded region:



3) Pablo plants x lemon trees and y orange trees.

- (a) (i) He plants at least 4 lemon trees.

Write down an inequality in x to show this information

- (ii) Pablo plants at least 9 orange trees.

Write down an inequality in y to show this information

- (iii) The greatest possible number of trees he can plant is 20.

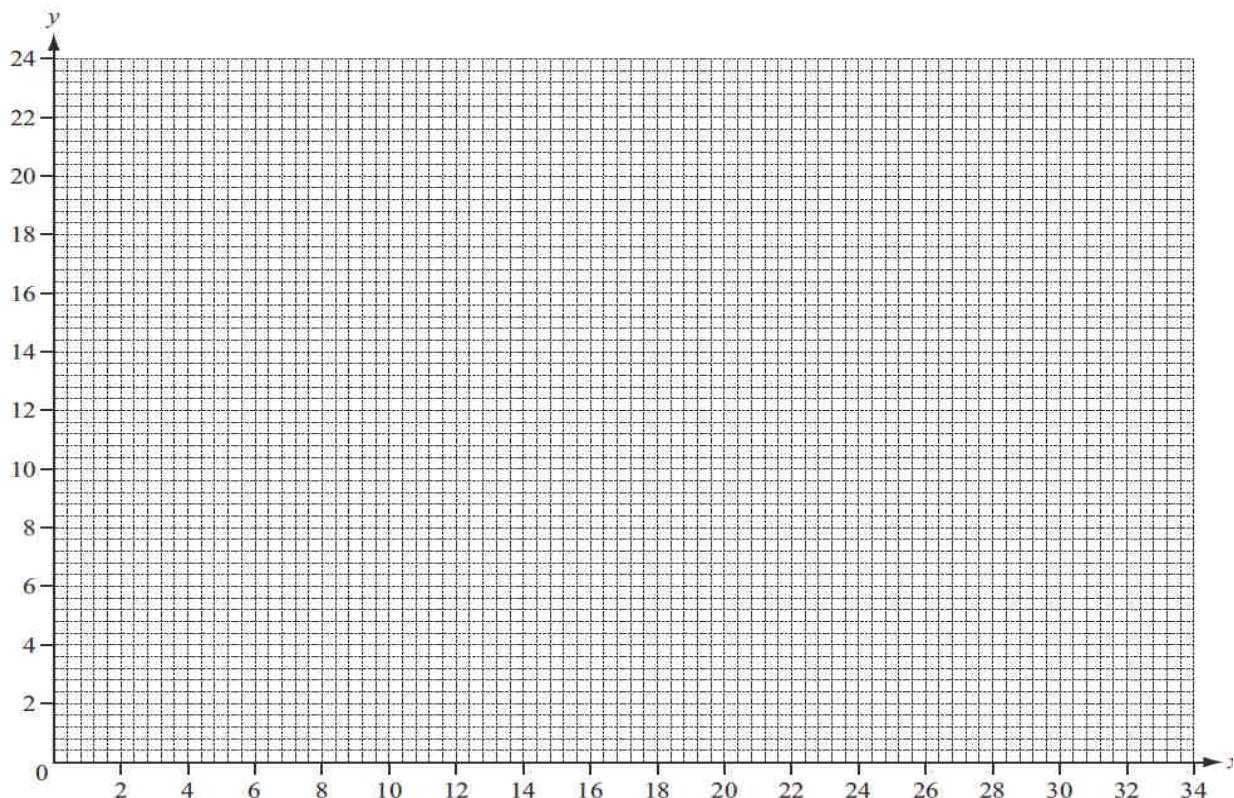
Write down an inequality in x and y to show this information

- (b) Lemon trees cost \$5 each and orange trees cost \$10 each.

The maximum Pablo can spend is \$170.

Write down an inequality in x and y and show that it simplifies to $x + 2y \leq 34$

- (c) (i) On the grid, draw four lines to show the four inequalities and shade the **unwanted** regions.



- (ii) Calculate the smallest cost when Pablo buys a total of 20 trees.

4) Peter wants to plant x plum trees and y apple trees. He wants at least 3 plum trees and at least 2 apple trees.

(a) Write down one inequality in x and one inequality in y to represent these conditions.

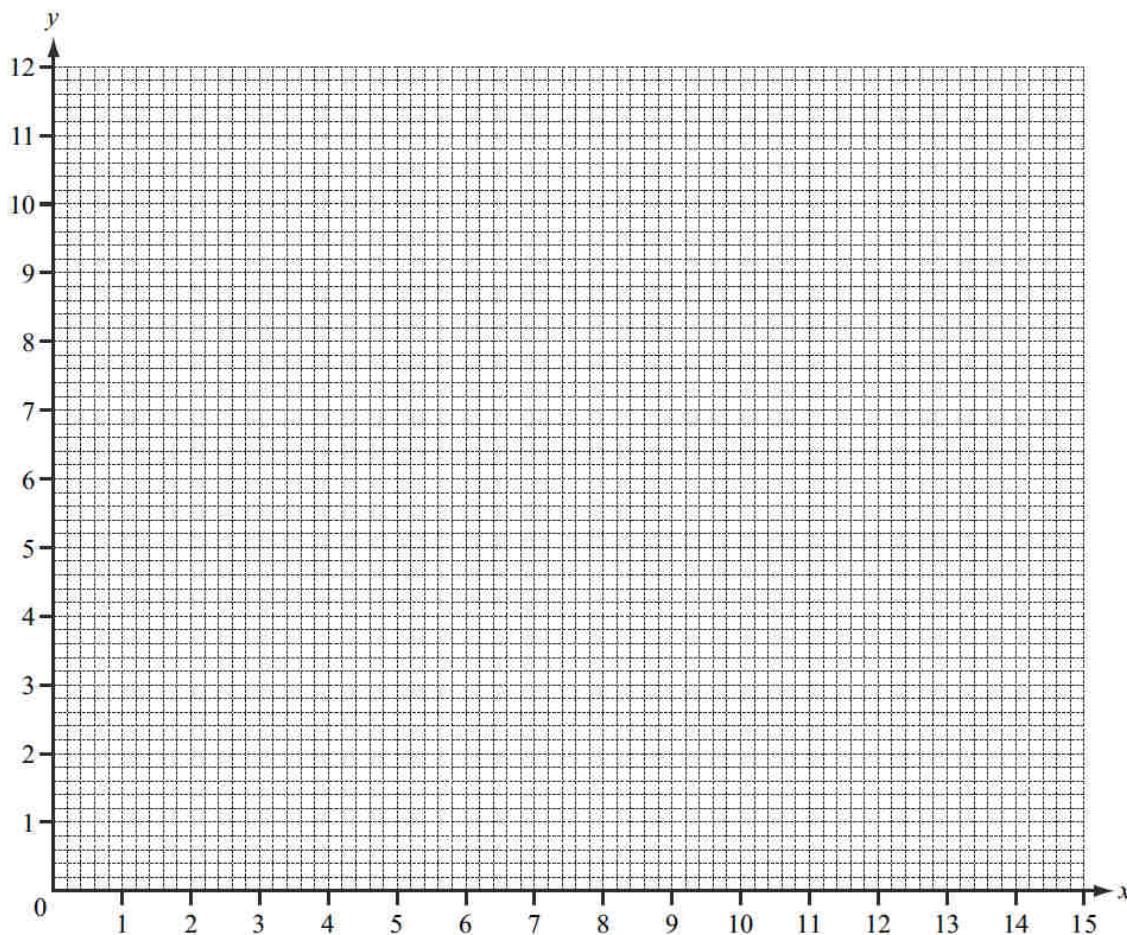
(b) There is space on his land for no more than 9 trees.

Write down one inequality in x and y to represent this condition.

(c) Plum trees cost \$6 and apple trees cost \$14.

Peter wants to spend no more than \$84.

Write down an inequality in x and y , and show that it simplifies to $3x + 7y \leq 42$.



(d) On the grid, draw four lines to show the four inequalities and shade the **unwanted** regions.

(e) Calculate the smallest cost when Peter buys a total of 9 trees.

5) By shading the unwanted region, show the region defined by the inequalities:

$$x \geq 2 \quad y > 1 \quad x + y < 6$$

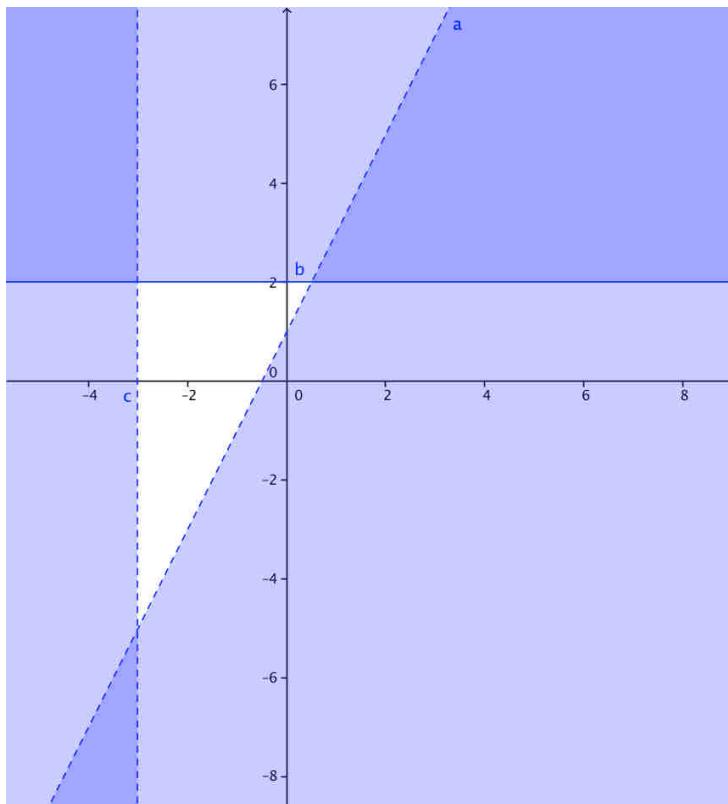
- 6) By shading the unwanted region, show the region defined by the inequalities

$$x \leq 4 \quad y < 2x + 1 \quad 5x + 2y > 20$$

- 7) By shading the unwanted region, show the region defined by the inequalities

$$x \geq 1 \quad y \leq -x + 8 \quad y \geq x + 2 \quad y \geq 4$$

- 8) Write down the inequalities, which define the unshaded region shown below:



- 9) Tiago does some work during the school holidays. In one week he spends x hours cleaning cars and y hours repairing cycles. The time he spends repairing cycles is at least equal to the time he spends cleaning cars. This can be written as $y \geq x$. He spends no more than 12 hours working. He spends at least 4 hours cleaning cars.

- (a) Write down two more inequalities in x and/or y to show this information.
- (b) Draw x and y -axes from 0 to 12, using a scale of 1cm to represent 1 unit on each axis.
- (c) Draw three lines to show the three inequalities. Shade the unwanted regions.
- (d) Tiago receives \$3 each hour for cleaning cars and \$1.50 each hour for repairing cycles.
- (i) What is the least amount he could receive?
- (ii) What is the largest amount he could receive?

I radicali

$$\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} + \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{2}$$

I) Consideriamo l'operazione che associa ad un numero il suo quadrato

$$x \rightarrow x^2$$

Per esempio:

$$\begin{aligned} 3 &\rightarrow 3^2 = 9 \\ (-3) &\rightarrow (-3)^2 = 9 \\ 2 &\rightarrow 2^2 = 4 \\ (-2) &\rightarrow (-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Possiamo definire l'operazione inversa? È possibile, dato un numero a , individuare un numero di cui a è il quadrato?

$$\begin{aligned} ? &\leftarrow 9 \\ ? &\leftarrow -5 \end{aligned}$$

1° osservazione

Ci accorgiamo subito che se $a < 0$ non troviamo nessun numero che elevato al quadrato dia come risultato a .

Quindi dovremo limitare il campo ai numeri positivi $a \geq 0$.

2° osservazione

Se consideriamo per esempio $a = 9$ abbiamo due numeri che hanno come quadrato 9

$$\begin{aligned} 3 &\leftarrow 9 & (3^2 = 9) \\ (-3) &\leftarrow 9 & ((-3)^2 = 9) \end{aligned}$$

Ma poiché non possiamo associare ad un'operazione due risultati i matematici hanno stabilito di prendere il numero positivo (nel nostro caso 3)

$$3 \leftarrow 9$$

Il simbolo usato per indicare l'operazione inversa del "fare il quadrato" e chiamata radice quadrata di a è

$$\sqrt{a}$$

Quindi, per esempio, abbiamo $\sqrt{9} = 3$ mentre non associamo (per ora) nessun significato alla scrittura $\sqrt{-9}$.

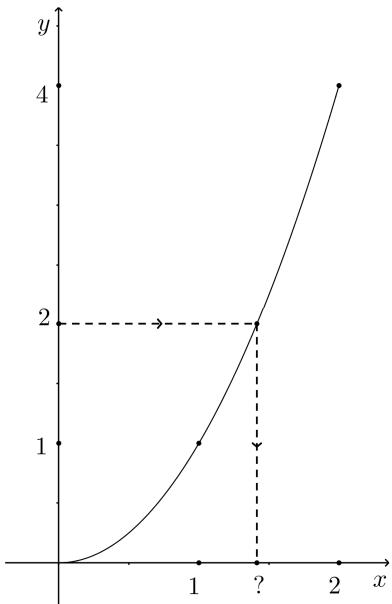
Nota: il simbolo $\sqrt{}$ è la stilizzazione di r che sta per "radice".

Problema

Ma se estraiamo la radice quadrata di un numero che non è un quadrato, per esempio $a = 2$, il simbolo $\sqrt{2}$ quale numero rappresenta?

$$\sqrt{2} = ?$$

Rappresentiamo nel piano cartesiano la funzione $f : x \rightarrow x^2$ con $x \geq 0$



Per capire quale numero è $\sqrt{2}$ possiamo seguire la “strada” indicata in figura.

È chiaro che sarà un numero compreso tra 1 e 2, ma possiamo scriverlo come una frazione?

Se usiamo la calcolatrice, digitando $\sqrt{2}$ otteniamo

$$1,414213562\dots$$

Sappiamo che i numeri razionali corrispondono a numeri decimali finiti o illimitati **periodici** mentre questo numero non sembra avere un periodo....

Il periodo potrebbe essere molto lungo e magari potrei non essermi accorto della ripetizione...

Ma in realtà fin dall'antichità è stato “**dimostrato**” che $\sqrt{2}$ non è un numero periodico perché non può essere scritto come frazione.

Infatti il ragionamento è questo: supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2}$ corrisponda ad un numero razionale. Possiamo sempre ridurlo ai minimi termini cioè considerare a e b primi tra loro

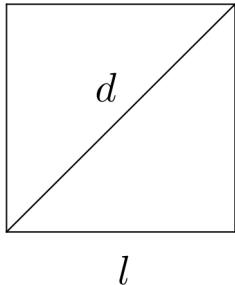
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Ma allora se a è pari (e quindi b non può esserlo perché sono primi tra loro) allora a^2 è divisibile per 4 mentre $2b^2$ non lo è (b^2 è dispari $\Rightarrow 2b^2$ è divisibile per 2 ma non per 4); se a è dispari $\Rightarrow a^2$ è dispari mentre $2b^2$ è pari.

Quindi non può sussistere l'uguaglianza $a^2 = 2b^2$.

NOTA 1

$\sqrt{2}$ corrisponde al rapporto tra la misura della diagonale e il lato di un quadrato.
 La scoperta che diagonale e lato di un quadrato non sono “confrontati” tra loro (cioè il loro rapporto non è un numero razionale) fu fatta dalla scuola pitagorica e tenuta segreta per lungo tempo.



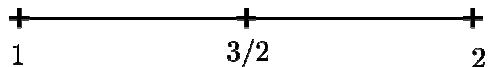
Infatti, dal teorema di Pitagora abbiamo
 $d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot l$

NOTA 2

Come possiamo determinare un’approssimazione decimale di $\sqrt{2}$ senza usare la calcolatrice?

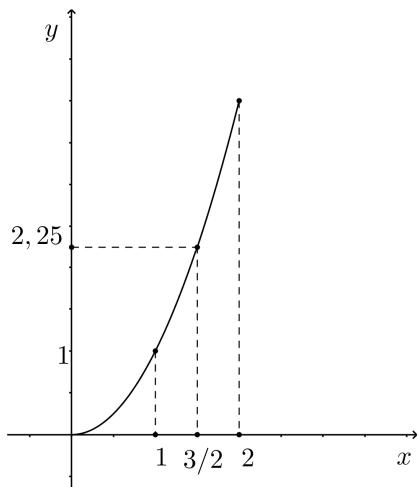
Abbiamo visto chiaramente che $1 < \sqrt{2} < 2$

Proviamo a dividere a metà l’intervallo $[1;2]$:



troviamo $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

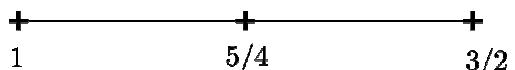
Come possiamo stabilire se $\sqrt{2}$ si trova tra 1 e $\frac{3}{2}$ oppure tra $\frac{3}{2}$ e 2?



Proviamo ad elevare al quadrato $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25 > 2$

Quindi $1 < \sqrt{2} < 1,5$

Dividiamo ancora a metà l’intervallo $[1; \frac{3}{2}]$:



troviamo $\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$. $\sqrt{2}$ si troverà tra 1 e $\frac{5}{4}$ oppure tra $\frac{5}{4}$ e $\frac{3}{2}$?

Elevando al quadrato abbiamo $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1,5625 < 2$ e quindi $1,25 < \sqrt{2} < 1,5$

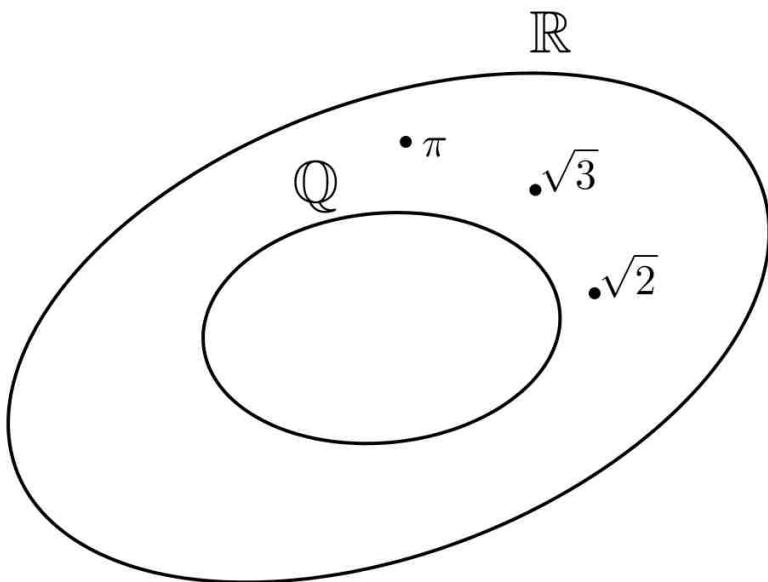
Possiamo andare avanti: prova tu

Ma allora $\sqrt{2}$ che numero è?

I matematici hanno chiamato i **numeri decimali illimitati aperiodici** (a = senza – periodo) numeri irrazionali (cioè non razionali) ed hanno chiamato **numeri reali** \mathbb{R} l'unione dei **numeri razionali e irrazionali**.

Non ci sono solo $\sqrt{2}$ (o $\sqrt{3}$ ecc..) tra i numeri irrazionali: in seguito sono stati scoperti anche altri numeri che hanno una rappresentazione decimale illimitata aperiodica ma che non sono radici.

Un esempio è π che rappresenta il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro.



NOTA

Inizialmente avevamo considerato i numeri naturali N , avevamo poi ampliato N perché fosse sempre possibile effettuare la sottrazione tra due numeri ottenendo Z ;

per poter sempre eseguire la divisione tra numeri interi appartenenti a Z avevamo introdotto l'insieme dei numeri razionali Q ;

per poter eseguire l'operazione inversa della potenza abbiamo infine introdotto i numeri irrazionali che, uniti ai razionali, danno l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} .

II) È chiaro che, come abbiamo definito l'operazione di radice quadrata come operazione inversa dell'elevamento al quadrato, possiamo cercare di definire l'operazione di radice cubica come operazione inversa dell'elevamento al cubo.

Per esempio se consideriamo $x \rightarrow x^3$ ci accorgiamo che non ci sono i problemi trovati nel caso dell'elevamento al quadrato perché si ottengono come risultati numeri positivi e negativi e non ci sono numeri diversi che danno lo stesso risultato.

Per esempio:

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow 2^3 = 8 \\ -2 &\rightarrow (-2)^3 = -8 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} 2 &\leftarrow 8 \\ -2 &\leftarrow -8 \end{aligned}$$

Possiamo indicare l'estrazione di radice cubica di a con il simbolo

$$\sqrt[3]{a}$$

(a può essere sia negativo che positivo e il numero $\sqrt[3]{a}$ può risultare sia positivo che negativo).

Quindi:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Anche in questo caso, se a non è un cubo, cosa rappresenta $\sqrt[3]{a}$?

Per esempio, $\sqrt[3]{2}$ che tipo di numero è?

Anche in questo caso, come per $\sqrt{2}$, ci troviamo di fronte ad un numero decimale illimitato aperiodico, quindi ad un numero irrazionale.

III) È chiaro che possiamo considerare l'operazione inversa dell'elevamento a potenza n -esima in generale.

- Se n è **pari** il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

avrà significato solo se $a \geq 0$ (elevando ad una potenza pari si ottengono sempre numeri positivi) e indicherà un numero positivo o nullo.

- Se n è **dispari** il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

avrà sempre significato e potrà essere sia positivo che negativo.

In generale $\sqrt[n]{a}$ si chiama più brevemente “radicale” (o radice n -esima di a)

$$\begin{cases} n & \text{viene chiamato INDICE del radicale} \\ a & \text{viene chiamato RADICANDO} \end{cases}$$

Per quello che abbiamo precedentemente osservato **i radicali possono essere numeri razionali o irrazionali.**

Esempi

$$\sqrt{25} = 5 \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \text{ (numero irrazionale)}$$

$$\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$$

Nota importante

Osserviamo che se n è dispari possiamo ricondurci ad avere un radicando positivo.
Per esempio:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Radicali equivalenti

Consideriamo radicali del tipo

$$\sqrt[n]{a^m}$$

con $a^m \geq 0$ perché anche nel caso di indice dispari ci si può ricondurre a considerare il radicando positivo o nullo.

m viene detto esponente del radicando.

Anche se sono scritti in forma diversa, due radicali possono rappresentare lo stesso numero?

Consideriamo per esempio $\sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{4}$: se proviamo con la calcolatrice otteniamo lo stesso numero!

Se scriviamo $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$ notiamo che rispetto a $\sqrt{2}$ indice ed esponente del radicando sono stati moltiplicati per 2.

Inoltre osserviamo che elevando alla quarta otteniamo lo stesso numero:

$$(\sqrt{2})^4 = [(\sqrt{2})^2]^2 = 2^2$$

$$(\sqrt[4]{2^2})^4 = 2^2$$

Abbiamo quindi individuato questa proprietà

Moltiplicando per uno stesso numero naturale ($\neq 0$) INDICE e ESPONENTE del radicando di un radicale si ottiene un radicale “equivalente” (a cui è associato cioè lo stesso numero reale).

Nota

E’ un po’ come quando, moltiplicando per uno stesso numero naturale ($\neq 0$) numeratore e denominatore di una frazione si ottiene una frazione equivalente (cioè associata allo stesso numero razionale).

Naturalmente (per simmetria) se dividiamo indice ed esponente del radicando di un radicale per un divisore comune si ottiene un radicale equivalente.

$$\sqrt{2} \xrightarrow{\leftarrow} \sqrt[4]{2^2}$$

In simboli quindi abbiamo

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Riduzione di radicali allo stesso indice

Come possiamo “confrontare”(cioè stabilire qual è il maggiore) due radicali come $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$?

Possiamo “ridurli” allo stesso indice utilizzando la proprietà precedente: conviene prendere come indice il **minimo comune multiplo dei due indici**, nel nostro caso

$$m.c.m.(2,3) = 6$$

Quindi

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} \text{ (moltiplico per 3 indice ed esponente del radicando)}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} \text{ (moltiplico per 2 indice ed esponente del radicando)}$$

Quindi ora confronto i radicandi ed ottengo

$$\sqrt[6]{2^3} < \sqrt[6]{3^2} \quad (8 < 9)$$

Radicali simili

Quando due radicali hanno **stesso indice, stesso radicando** e differiscono al massimo per un fattore che li moltiplica (detto coefficiente del radicale) si dicono **simili**.

Per esempio $\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$ sono radicali simili

Esempio

$\sqrt[4]{9}$ e $2\sqrt[4]{3}$ sono simili?

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

Quindi sono simili.

Operazioni con i radicali

- **Addizione e sottrazione**

Possiamo sommare o sottrarre tra loro due radicali **solo se sono simili**.

Esempio: $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (1+3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Se i radicali non sono simili non possiamo fare niente.

Esempio: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ va lasciato così!

NOTA: ricorda che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$!!

Se infatti elevi al quadrato $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ottieni

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 5 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

Mentre se elevi al quadrato $\sqrt{5}$ ottieni 5!

- **Moltiplicazione e divisione**

- a) **Radicali con lo stesso indice**

Esempio: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = ?$

Proviamo a scrivere $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3}$: se eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza otteniamo

$$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = 2 \cdot 3$$

$$(\sqrt{2 \cdot 3})^2 = 2 \cdot 3$$

E quindi l'uguaglianza è vera.

Quindi in generale

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

b) Radicali con indice diverso

Esempio: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = ?$

Possiamo provare a ridurli allo stesso indice e poi procedere come nel caso precedente.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}$$

Analogamente per la divisione:

a')
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

b')
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2}}$$

“Trasportare fuori” dal segno di radice

Possiamo scrivere in modo diverso $\sqrt{32}$?

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

\downarrow
Proprietà della moltiplicazione

Quindi utilizzando la regola della moltiplicazione “a ritroso” a volte possiamo scrivere in modo diverso un radicale (nel nostro caso *diciamo che abbiamo trasportato un fattore fuori dal segno di radice*).

Questo può essere importante quando dobbiamo sommare o sottrarre radicali (che a prima vista non sembrano simili).

Esempio

$$\sqrt{32} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

- **Potenza di un radicale**

Come risulta la potenza di un radicale?

Per esempio: $(\sqrt{5})^3 = ?$

Poiché abbiamo $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5^3}$ in generale possiamo dire che la potenza di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza n -esima del radicando. In simboli:

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

- **Radice di un radicale**

E se dobbiamo calcolare la radice di un radicale?

Come risulterà, per esempio:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = ?$$

Proviamo a vedere se $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

Elevando alla sesta entrambi i membri abbiamo lo stesso risultato:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6 &= [(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3]^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \\ (\sqrt[6]{2})^6 &= 2 \end{aligned}$$

Quindi in generale la radice m -esima di un radicale con indice n sarà un radicale che ha per indice il prodotto $m \cdot n$ e lo stesso radicando

$$\boxed{\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$$

Osservazione: è chiaro che $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2}$ cioè in generale

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

“Razionalizzazione” del denominatore di una frazione

- I. Consideriamo la frazione $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Possiamo trasformarla in una frazione equivalente che non abbia radici al denominatore?

Possiamo moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{2}$ e otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E se fosse stato $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$?

In questo caso moltiplicando per $\sqrt[3]{2}$ avrei ottenuto al denominatore $\sqrt[3]{2^2}$ e non mi sarei “sbarazzato” del radicale. Moltiplicando però per $\sqrt[3]{2^2}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

In generale quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

- II. A volte si trovano frazioni del tipo $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Come possiamo, in questo caso, “razionalizzare” il denominatore?

Ricordando il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ possiamo moltiplicare per $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ numeratore e denominatore

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(-1)} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Analogamente, se avessimo avuto $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

moltiplicando per $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(-1)} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Radicali e potenze con esponente razionale

I radicali possono essere anche scritti come potenze con esponente razionale e le **proprietà usuali delle potenze corrispondono alle proprietà che abbiamo visto per i radicali.**

Scriviamo

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0)$$

Per esempio:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{2} &= 2^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt[4]{8} &= \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{8}} &= \sqrt[4]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

Osserviamo che

- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}}$

Infatti $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1+1}{2+3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

Infatti $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5}$

- $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Infatti $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$

Infatti $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{2}$

- $(\sqrt{2})^3 = (2^{\frac{1}{2}})^3 = 2^{\frac{3}{2}}$

- $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$

Infatti $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

RADICALI LETTERALI

CAMPO DI ESISTENZA DI UN RADICALE LETTERALE

Radicali con indice pari

Abbiamo visto che il radicando deve essere positivo o nullo. Se quindi abbiamo

$$\sqrt{a-1}$$

dovrà essere $a-1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

$a \geq 1$ viene chiamato **campo di esistenza** del radicale $\sqrt{a-1}$.

Radicali con indice dispari

Se l'indice è dispari il radicando può essere negativo, positivo o nullo. Se per esempio abbiamo

$$\sqrt[3]{a-1}$$

non c'è nessuna limitazione per a e quindi il campo di esistenza è l'insieme dei numeri reali:

$$\text{C.E. } \forall a \in \mathbb{R}$$

Naturalmente se consideriamo un'espressione letterale contenente delle *frazioni*, i denominatori dovranno essere diversi da zero.

Per esempio il campo di esistenza di $\sqrt[3]{\frac{1}{a-1}}$ sarà $a \neq 1$ (tutti i valori di a escluso $a=1$).

OPERAZIONI CON RADICALI LETTERALI

Dobbiamo premettere la seguente definizione:

Valore assoluto di un numero reale: il valore assoluto di un numero reale x è indicato con la notazione $|x|$ ed è definito:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi $|x|$ è sempre positivo o nullo.

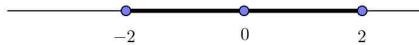
Esempi

$$|5| = 5$$

$$|-3| = -(-3) = +3$$

$$|x| = 2 \Rightarrow x = -2 \cup x = 2$$

Se abbiamo $|x| < 2$ vuol dire che $-2 < x < 2$



Se abbiamo $|x| > 2$ vuol dire che $x < -2 \cup x > 2$



OSSERVAZIONE IMPORTANTE

- $\sqrt{x^2}$ è uguale a x ?

Osserviamo che, per esempio che $\sqrt{3^2} = 3$ e che $\sqrt{(-3)^2} = 3$

Quindi, solo se $x \geq 0$ vale $\sqrt{x^2} = x$, mentre se $x < 0 \rightarrow \sqrt{x^2} = -x$.

Quindi, ricordando la definizione di valore assoluto di un numero, abbiamo che:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Lo stesso vale per $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ ecc..., cioè

$$\text{se } n \text{ è pari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

- $\sqrt[3]{x^3}$ è uguale a x ?

Osserviamo che, per esempio, $\sqrt[3]{3^3} = 3$ e $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

Quindi in questo caso $\sqrt[3]{x^3} = x$ e in generale

$$\text{se } n \text{ è dispari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = x$$

Trasporto fuori dalla radice

Quando trasportiamo fuori dalla radice occorre ricordare quanto sopra osservato.

Per esempio:

- $\sqrt{a^3 + a^2} = \sqrt{a^2(a+1)} = |a|\sqrt{a+1}$ (C.E. $a \geq -1$)
- $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt{a}$ (non importa mettere $|a^2|$ perché $a^2 \geq 0$; C.E. $a \geq 0$)

Se l'indice è dispari non ci sono particolari problemi

- $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a} = a \cdot \sqrt[3]{a}$
- $\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

ESERCIZI

1) Trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili

a) $\sqrt{24}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[5]{64}$

b) $\sqrt{18}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

2) Svolgi le operazioni tra radicali

a) $\sqrt{18} + \sqrt{2}$ [$4\sqrt{2}$]

b) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$ [$\sqrt[3]{2}$]

c) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{36}$ [$3 + \sqrt{6}$]

d) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$ [$2\sqrt[3]{3}$]

e) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{15}$ [$2\sqrt{30}$]

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ [$\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2}$]

g) $\sqrt{50} \cdot \sqrt[3]{2}$ [$5\sqrt[6]{2^5}$]

h) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$ [$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$]

i) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{3}}$ [$2\sqrt[6]{\frac{4}{27}}$]

l) $(\sqrt{3})^3$ [$3\sqrt{3}$]

m) $(\sqrt[4]{8})^2$ [$2\sqrt{2}$]

n) $\sqrt{\sqrt{3}}$ [$\sqrt[4]{3}$]

o) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ [$\sqrt[6]{2}$]

3) $3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{50}$ [0]

4) $2\sqrt{3} - \sqrt{48} - \sqrt{27}$ [$-5\sqrt{3}$]

5) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$ [$6\sqrt{2}$]

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- I radicali -

- 6) $2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{27} - \sqrt{18} + 3\sqrt{\frac{2}{9}}$ $[\frac{23}{2}\sqrt{3} - 10\sqrt{2}]$
- 7) $\sqrt{\frac{3}{9}} + \frac{1}{10}\sqrt{125} - \frac{1}{4}\sqrt{20} + \sqrt{45} - \frac{1}{3}\sqrt{12}$ $[3\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{3}]$
- 8) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{12} - \sqrt{6})\sqrt{12}$ $[6(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 4)]$
- 9) $(2\sqrt{7} - 3)(2\sqrt{7} + 3) - (\sqrt{7} + 1)^2 - (\sqrt{7} - 2)^2$ $[2\sqrt{7}]$
- 10) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})(2\sqrt{5} + \sqrt{3})$ $[17]$
- 11) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ $[1]$
- 12) $\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} - \sqrt{8}$ $[\frac{3}{2}\sqrt{2}]$
- 13) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \sqrt{45}$ $[\frac{10\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}]$
- 14) $(\sqrt[3]{2})^4 + \sqrt[3]{54}$ $[5\sqrt[3]{2}]$
- 15) $\sqrt{18} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\sqrt{32}}$ $[2\sqrt[6]{32}]$
- 16) $\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt{2}} + \sqrt{10}$ $[\frac{3}{2}\sqrt{10}]$
- 17) $\sqrt{\sqrt{32}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ $[\frac{5}{2}\sqrt[4]{2}]$
- 18) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \sqrt{8}$ $[\sqrt{2} - 1]$
- 19) $2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{125} - 3\sqrt{20} + 8\sqrt{5}$ $[\frac{3}{2}\sqrt{5}]$
- 20) $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ $[\frac{21}{2}\sqrt[3]{3}]$
- 21) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ $[-4 - \sqrt{6}]$
- 22) $(1 - 2\sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2 - 3$ $[12]$

- 23) $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\frac{\sqrt{2}}{2}} + (1-\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$ $[\frac{30-17\sqrt{2}}{7}]$
- 24) $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{3}} - (1-\sqrt{2})^2$ $[2\sqrt{2}-2]$
- 25) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}(3\sqrt{2}+1)$ $[\sqrt{2}-4]$
- 26) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) : \frac{2}{\sqrt{3}-2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ $[0]$
- 27) $[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^2 - (2-\sqrt[4]{4})^2 - 4\sqrt{2}$ $[-5]$
- 28) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} \right) : \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right)$ $[\frac{3\sqrt{3}-6}{5}]$
- 29) $(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$ $[10]$
- 30) $\frac{1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{2+2\sqrt{5}}{2} + \sqrt{20} + \frac{1}{\sqrt{5}+1}$ $[\frac{5+11\sqrt{5}}{4}]$
- 31) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{32}$ $[\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}]$
- 32) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1-\sqrt{3}}$ $[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-4}{2}]$

33) Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

34) Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}; \quad \frac{3}{\sqrt{7}+1}; \quad \frac{5}{\sqrt{6}-1}$ $[\sqrt{2}+1; \frac{\sqrt{7}-1}{2}; \sqrt{6}+1]$

$$\text{b) } \frac{4}{\sqrt{5}+1}; \quad \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}; \quad \frac{10}{\sqrt{3}-1} \quad [\sqrt{5}-1; \sqrt{5}+\sqrt{2}; 5(\sqrt{3}+1)]$$

35) Determina il campo di esistenza dei seguenti radicali

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{2a-3} & [a \geq \frac{3}{2}] \\ \text{b) } & \sqrt[4]{a^2 - 2a + 1} & [\forall a \in \mathbb{R}] \\ \text{c) } & \sqrt{a+1} & [a \geq -1] \end{aligned}$$

36) Determina il campo di esistenza dei seguenti radicali

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt[3]{a+2} & [\forall a \in \mathbb{R}] \\ \text{b) } & \sqrt[3]{\frac{1}{a}} & [a \neq 0] \\ \text{c) } & \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 - 2a + 1}} & [a \neq 1] \end{aligned}$$

$$37) (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2) \quad [\text{C.E. } a \geq 0; a \neq 4]$$

$$38) (\sqrt{2a} + \sqrt{3a})^2 \quad [\text{C.E. } a \geq 0; (5+2\sqrt{6})a]$$

$$39) \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 1}} \cdot \sqrt{a-1} \quad [\text{C.E. } a > 1; \frac{1}{\sqrt{a-1}}]$$

$$40) \sqrt[3]{a^3 b} + \frac{a}{2} \cdot \sqrt[6]{b^2} \quad [\frac{3}{2} a \cdot \sqrt[3]{b}]$$

$$41) \sqrt[3]{a^3 - 3a^2 + 3a - 1} + 2 - a \quad [1]$$

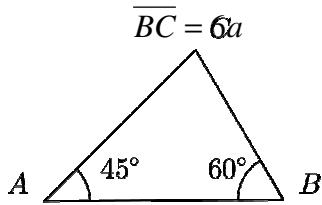
$$42) \sqrt{\frac{x-2}{x+4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2 - 4x + 4}} \quad [\text{C.E. } x < -4 \cup x > 2; \frac{1}{\sqrt{(x+4) \cdot (x-2)}}]$$

Problemi

43) In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{BC} = 12\text{cm}$ e $\hat{A} = 120^\circ$. Determinare perimetro e area del triangolo.

$$[2p = 8\sqrt{3} + 12\text{cm}; A = 12\sqrt{3}\text{cm}^2]$$

44) Considera il triangolo ABC in figura. Determina perimetro e area del triangolo.

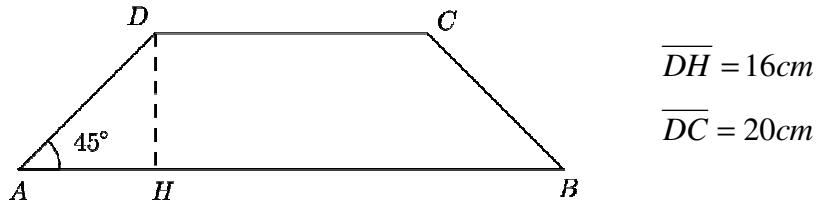


$$[2p = 3a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}); A = \frac{9a^2(3 + \sqrt{3})}{2}]$$

45) L'area di un esagono regolare è $216\sqrt{3}\text{cm}^2$. Determinare il perimetro.

$$[2p = 72\text{cm}]$$

46) Considera il trapezio isoscele in figura. Determina perimetro e area.



$$[2p = 72 + 32\sqrt{2}\text{cm}; A = 576\text{cm}^2]$$

47) Considera un trapezio isoscele $ABCD$ avente base minore $\overline{CD} = 10a$, lato obliqui $\overline{AD} = \overline{BC} = 12a$ e gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano 30° . Determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = 44a + 12a\sqrt{3}; A = 12a^2(5 + 3\sqrt{3})]$$

48) Considera un triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$. Sapendo che $\hat{BAC} = 30^\circ$, determina perimetro e area del triangolo.

$$[2p = (3 + \sqrt{3})r; A = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2]$$

49) Considera i punti $A(2;2)$, $B(8;5)$, $C(-1;8)$.

a) Determina perimetro e area del triangolo ABC .

b) Detto M il punto medio di BC , determina \overline{AM} e verifica che $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

$$[2p = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{10}; A = \frac{45}{2}; \overline{AM} = \frac{3}{2}\sqrt{10}]$$

50) Considera le rette $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 2x - 6$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Determina i loro punti di intersezione A , B , C , D .

Come risulta il quadrilatero $ABCD$? Calcola perimetro a area.

$$[2p = 8\sqrt{5}; A = 12]$$

51) Considera i punti $A(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$, $B(\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$, $C(2;4)$.

Determina perimetro e area del triangolo ABC . Come risulta il triangolo ABC ?

Detto M il punto medio di AB , calcola \overline{CM} . La retta per C e M è perpendicolare alla retta per A e B ?

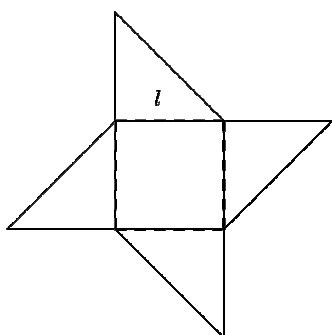
$$[2p = 5\sqrt{2} + \sqrt{10}; A = 5]$$

52) Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(3;0)$, $C(3;6)$ e determina il baricentro G .

Detto M il punto medio di AC , verifica che $\overline{BG} = 2\overline{GM}$.

$$[BG = \frac{4\sqrt{5}}{3}; GM = \frac{2\sqrt{5}}{3}]$$

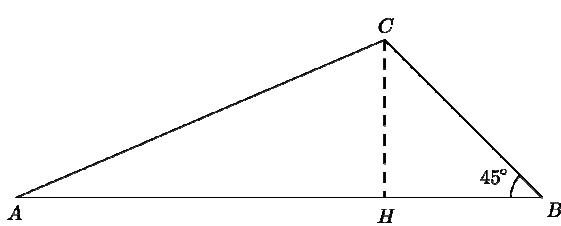
53) Considera il disegno in figura e calcola perimetro e area.



(lato del quadrato = l)

$$[2p = 4(\sqrt{2} + 1)l; A = 3l^2]$$

54) Considera il triangolo ABC in figura. Determina perimetro e area del triangolo.



$$\overline{CH} = 2$$

$$\overline{AC} = 6$$

$$[2p = 6\sqrt{2} + 8; A = 4\sqrt{2} + 2]$$

Scheda 1

Calcolo della radice quadrata di un numero con il metodo di Erone

Vediamo il metodo ideato dal matematico greco Erone di Alessandria (vissuto nel I secolo d. C.) per calcolare la radice quadrata di un numero positivo k .

Il numero x tale che $x^2 = k$ da un punto di vista geometrico corrisponde al lato x di un quadrato di area k .

Consideriamo per esempio $k = 2$: vogliamo trovare il lato di un quadrato che abbia area 2.

Possiamo partire da un rettangolo di area 2 e cercare di passare ad un successivo rettangolo di area uguale ma in cui le dimensioni diventino via via più uguali cioè che si avvicini ad un quadrato.

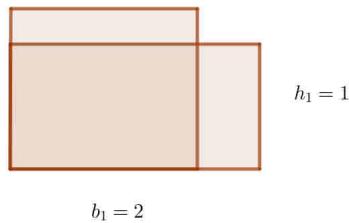
Come primo rettangolo prendiamo per esempio un rettangolo di base $b_1 = 2$: la sua altezza, perché abbia area 2, dovrà essere $h_1 = \frac{2}{b_1} = \frac{2}{2} = 1$.



$$b_1 = 2$$

Per avvicinarsi ad un quadrato possiamo prendere la **media aritmetica** delle due dimensioni come base del successivo rettangolo e ricalcolare l'altezza in modo che l'area ancora 2:

$$b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5; \quad h_2 = \frac{2}{b_2} \approx 1,33$$



$$b_1 = 2$$

Possiamo procedere con lo stesso metodo per determinare le dimensioni del rettangolo successivo:

$$b_3 = \frac{b_2 + h_2}{2} \approx 1,4166; \quad h_3 = \frac{2}{b_3} \approx 1,4117$$

Osserviamo che la differenza tra b e h solo già al terzo passo è molto piccola!

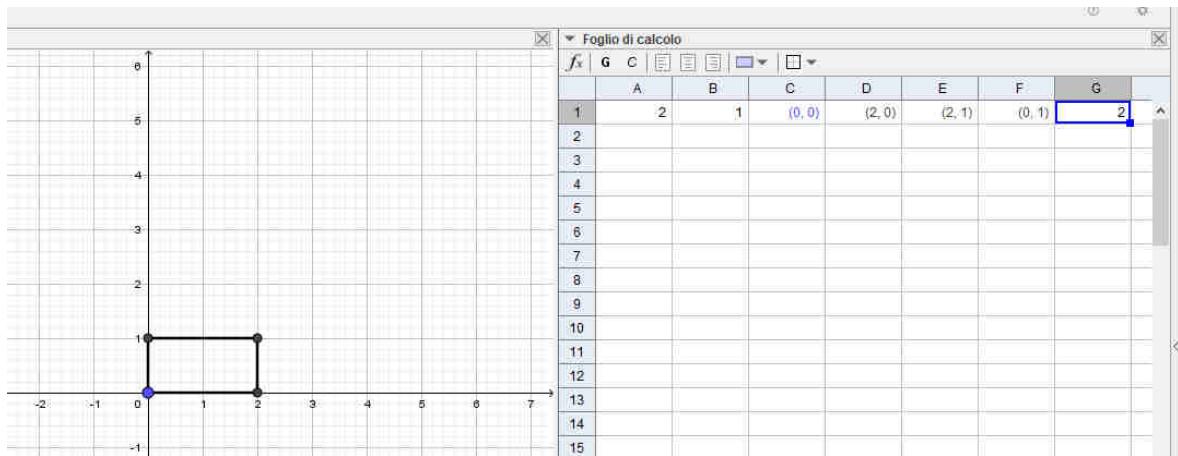
Se per esempio ci accontentiamo di un'approssimazione $\sqrt{2}$ alla seconda cifra decimale possiamo già fermarci poiché la seconda cifra decimale delle due dimensioni è la stessa e scriveremo che $\sqrt{2} \approx 1,41$, mentre se vogliamo avere un'approssimazione più precisa, per esempio alla terza cifra decimale, dobbiamo andare avanti con il nostro metodo.

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- I radicali -

Esercizio: utilizziamo il **foglio di calcolo di Geogebra** e disegniamo anche i rettangoli corrispondenti.

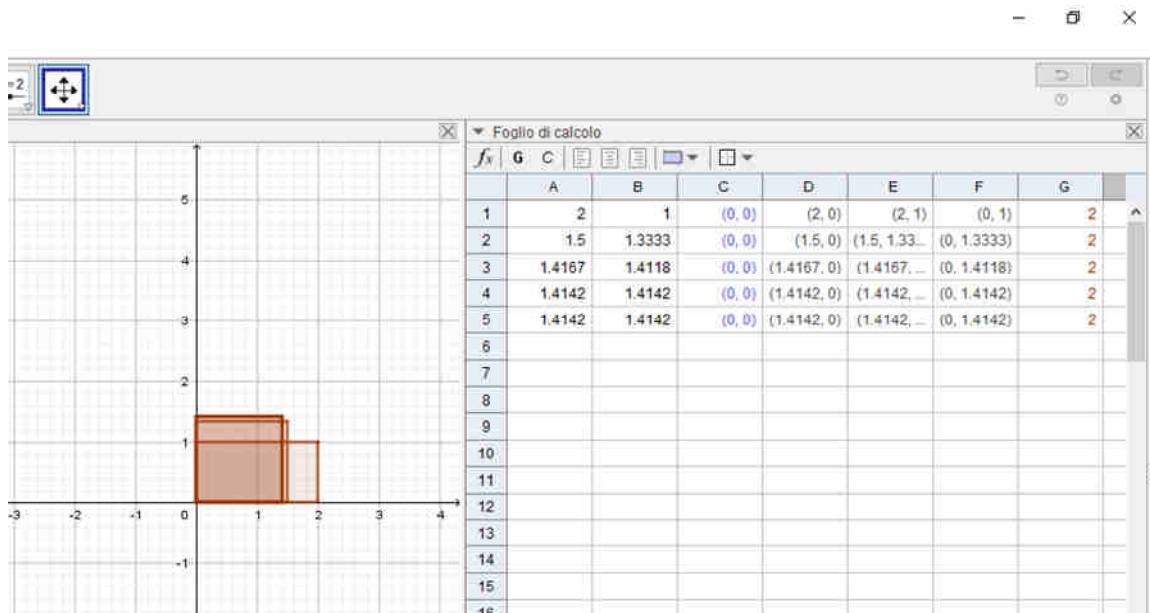
Apriamo il foglio di calcolo (visualizza “foglio di calcolo”) e nel piano cartesiano scegiamo “etichettatura- nessun nuovo oggetto”.

Inseriamo nella cella A1 la base 2, nella cella B1 altezza $2/a1$, e nelle celle C1, D1, E1, F1 le coordinate dei vertici del primo rettangolo (0,0) (a1,0) (a1,b1) (0,b1) mentre nella cella G1 scriviamo il comando poligono(c1,d1,e1,f1): comparirà il primo rettangolo (vedi figura).



Inseriamo in a2 la media aritmetica di a1 e b1 cioè $(a1+b1)/2$ e nella cella b2 $2/a2$ e poi nelle celle c2,d2,e2,f2 le coordinate del secondo rettangolo (0,0) (a2,0) (a2,b2) (0,b2) e nella cella G2 il comando poligono (c2,d2,e2,f2).

Selezioniamo le celle da a2 a g2 e trasciniamo con il mouse l’angolo in basso a destra dell’ultima cella per copiare le formule: se per esempio scegliamo opzioni-arrotondamento quarta cifra decimale, vediamo che già con pochi passaggi siamo arrivati ad una corretta approssimazione di $\sqrt{2}$.



Scheda 2

Calcolo della radice cubica di un numero con il metodo di Erone

Cercare un numero x tale che $x^3 = k$ (k positivo) corrisponde a cercare il lato di un cubo di volume uguale a k .

Consideriamo per esempio $k = 2$: possiamo partire con un parallelepipedo di base quadrata di lato $a_1 = b_1 = 1$ (per esempio) e altezza $c_1 = \frac{2}{a_1^2} = 2$.

Possiamo poi prendere un parallelepipedo che abbia come lato del quadrato la media aritmetica delle dimensioni del parallelepipedo precedente $a_2 = b_2 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$ e per altezza $c_2 = \frac{2}{a_2^2}$ in modo che abbia ancora volume 2.

Continuando così si arriva a determinare un'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$.

Esercizio 1

Anche in questo caso prova ad usare il foglio di calcolo di Geogebra per calcolare un'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ fino alla quinta cifra decimale e confronta con il risultato fornito dalla tua calcolatrice.

Foglio di calcolo			
G9	A	B	C
	1	1	2
2	1.33333	1.33333	1.125
3	1.26389	1.26389	1.25202
4	1.25993	1.25993	1.2599
5	1.25992	1.25992	1.25992
6	1.25992	1.25992	1.25992
7	1.25992	1.25992	1.25992
8	1.25992	1.25992	1.25992
9	1.25992	1.25992	1.25992
10	1.25992	1.25992	1.25992
11	1.25992	1.25992	1.25992
12	1.25992	1.25992	1.25992
13			

Esercizio 2

Generalizzando il metodo di Erone prova a calcolare un'approssimazione di $\sqrt[4]{2}$ fino alla quinta cifra decimale e confronta il tuo risultato con quello fornito dalla calcolatrice.

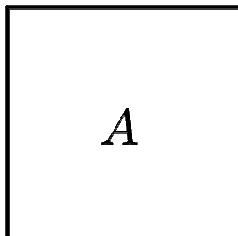
Suggerimento: in questo caso non c'è più un'analogia con la geometria poiché il nostro spazio ha tre dimensioni ma puoi comunque cercare di seguire il procedimento precedente.

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1; \quad d_1 = \frac{2}{a_1^3};$$

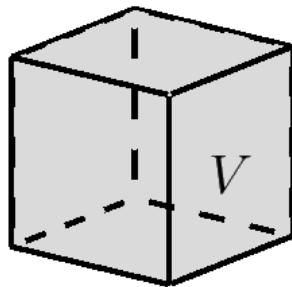
$$a_2 = b_2 = c_2 = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \quad d_2 = \frac{2}{a_2^3}$$

Scheda 3

- a) Considera un quadrato di lato l .
Costruisci un quadrato di area $2A$.



- b) Considera un cubo di lato l .
Qual è il lato di un cubo di volume $2V$?



Nota

Questo secondo problema è un problema antico.

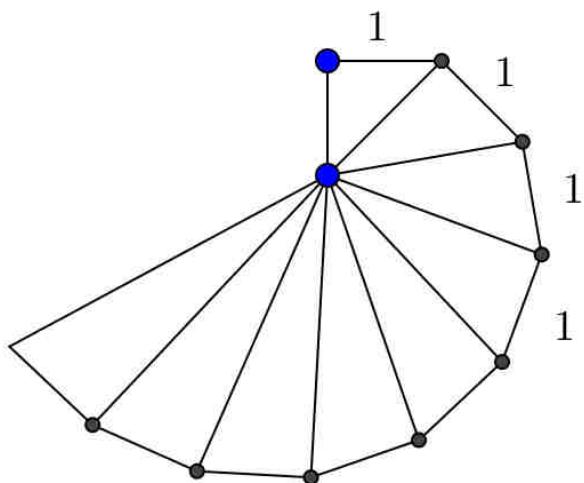
Secondo la leggenda, per far cessare la peste, gli ateniesi si rivolsero all'oracolo di Delfi che chiese loro di costruire un altare di Apollo (che aveva forma cubica) di volume doppio del precedente.

Gli ateniesi costruirono un altare di lato doppio, ma la peste non cessò....

Scheda 4

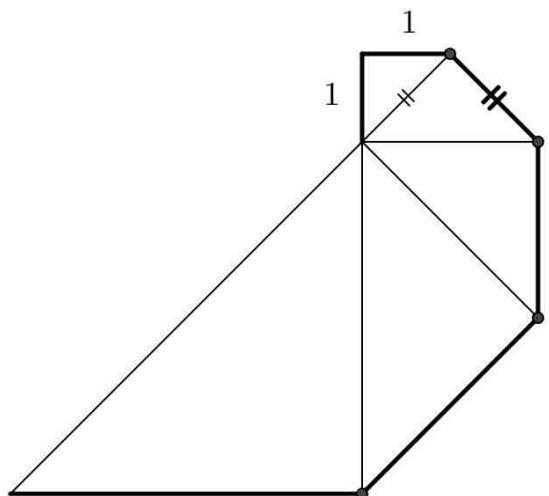
a) Considera la seguente costruzione:

- disegna un triangolo rettangolo isoscele di cateti uguali a 1;
- a partire da questo disegna un altro triangolo rettangolo avente come cateti l'ipotenusa del primo e 1 (vedi figura);
- ripeti la costruzione (disegnala con Geogebra).



Scrivi come risultano le lunghezze delle ipotenuse dei vari triangoli.

b) Costruisci una nuova spirale disegnando questa volta sempre triangoli rettangoli isosceli (partendo sempre da quello con cateti 1).



Come risulta la lunghezza del contorno indicato in figura?

c) Costruisci una spirale ideando una tua regola di iterazione.

SCHEDA DI VERIFICA

I. Radicali numerici e letterali

- 1) $\sqrt{20} + 3\sqrt{5} + (\sqrt{5} - 1)^2$ [$6 + 3\sqrt{5}$]
- 2) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[6]{4} + (\sqrt[3]{2} - 1)^3$ [$\sqrt[7]{2} - \sqrt[3]{4} + 1$]
- 3) $\frac{1}{\sqrt{5}-1} + (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) + \frac{1}{4}\sqrt{125}$ [$\frac{6\sqrt{5}+5}{4}$]
- 4) $\frac{1}{2}\sqrt{18} + \sqrt{\sqrt{2}} + \sqrt[4]{32} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ [$2\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$]
- 5) $\sqrt{\frac{a+1}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^3}{a+1}}$ [C.E. $a \geq 0$; \sqrt{a}]
- 6) $\sqrt{4a^2 - 8a + 4}$ [$2|a-1|$]
- 7) $\sqrt[3]{\frac{a^3 - 6a^2 + 12a - 8}{8a^3}}$ [C.E. $a \neq 0$; $\frac{a-2}{2a}$]
- 8) $\sqrt{x^4y} + \frac{x^2}{2}\sqrt[4]{y^2}$ [C.E. $y \geq 0$; $\frac{3}{2}x^2\sqrt{y}$]
- 9) $\sqrt{c^2a^2 + c^2b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ [C.E. a e b non entrambi nulli; $|c|$]

II. Problemi

- 1) Considera un trapezio rettangolo $ABCD$ avente base maggiore AB che forma un angolo di 45° con il lato obliquo.
Sapendo che la base minore è uguale all'altezza e misura l , determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = (4 + \sqrt{2})l ; A = \frac{3}{2}l^2]$$

- 2) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza.
Sapendo che il lato obliquo misura l e che la base maggiore forma un angolo di 60° con il lato obliquo, determina perimetro, area del trapezio e il raggio della semicirconferenza.

$$[2p = 5l ; A = \frac{3}{4}\sqrt{3}l^2 ; r = \frac{l}{2}\sqrt{3}]$$

Le equazioni di secondo grado



Un’equazione è di secondo grado se, dopo aver applicato i principi di equivalenza, si può scrivere nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Nota: c è anche detto **termine noto**.

Esempio

Sviluppiamo la seguente equazione:

$$x(x-1) + 3x = (2x-1)(2x+1)$$

$$\begin{aligned} x^2 - x + 3x &= 4x^2 - 1 \rightarrow x^2 - x + 3x - 4x^2 + 1 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un’equazione di secondo grado ridotta in forma “normale”.

Una **soluzione** (chiamata anche “radice”) **dell’equazione** è **un valore che sostituito all’incognita rende vera l’uguaglianza fra i due membri**.

Esempio : $x^2 - 5x + 6 = 0$ è un’equazione di 2° grado.

$x = 2$ è soluzione poiché, sostituendo, abbiamo

$$\begin{aligned} 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 &= 0 \\ 4 - 10 + 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Risolvere un’equazione di 2° grado significa **ricercare le sue soluzioni**.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Cominciamo con qualche esempio.

1) Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 - 1 = 0$$

Possiamo ricavare

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \text{cioè} \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

Abbiamo perciò due soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infatti se sostituiamo:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 &= 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 &= 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

2) Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 + 1 = 0$$

In questo caso $x^2 = -\frac{1}{4}$: non ci sono soluzioni reali poiché nessun quadrato risulta negativo.

3) Consideriamo l'equazione :

$$3x^2 - x = 0$$

Come possiamo risolverla ? Proviamo a mettere in evidenza x:

$$x(3x - 1) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo:

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Quindi le soluzioni sono : $x_1 = 0 \quad \cup \quad x_2 = \frac{1}{3}$

4) Ma se l'equazione è completa, cioè con a, b, c diversi da zero?

Consideriamo, per esempio : $x^2 + 4x - 5 = 0$

Potremmo cercare di scomporre $x^2 + 4x - 5$ (magari applicando la regola di Ruffini), ma non sempre questo metodo funziona.

Cerchiamo un procedimento che possa sempre funzionare cioè proviamo a riportare l'equazione nella forma

$$(\dots\dots\dots)^2 = \text{numero}$$

in modo da poterla poi risolvere se il *numero* è positivo oppure dire che non ha soluzioni reali se il *numero* risulta negativo.

- Cominciamo a spostare il termine noto: nel nostro caso abbiamo

$$x^2 + 4x = 5$$

- **“Completiamo” il quadrato**, cerchiamo cioè di aggiungere un numero in modo che $x^2 + 4x + ..$ risulti il quadrato di un binomio.

E' chiaro che $4x$ dovrà essere il doppio prodotto e quindi dividendo il coefficiente 4 per 2 otteniamo il 2° termine del binomio

$$\frac{4}{2} = 2$$

Aggiungiamo quindi 2^2 ad entrambi i membri per il principio di equivalenza ed abbiamo:

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

In questo modo possiamo scrivere

$$(x + 2)^2 = 9$$

- A questo punto, essendo 9 un numero positivo, possiamo risolvere scrivendo

$$x + 2 = \pm\sqrt{9}$$

$$x + 2 = \pm 3$$

$$x = -2 \pm 3$$

```

graph TD
    A[x = -2 ± 3] --> B[x = -2 + 3 = 1]
    A --> C[x = -2 - 3 = -5]
  
```

Abbiamo quindi trovato due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = -5$$

Formula risolutiva di un'equazione di secondo grado

Proviamo a generalizzare, utilizzando le lettere, il procedimento che abbiamo seguito nell'ultimo esempio.

Consideriamo

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

- Spostiamo il termine noto:

$$ax^2 + bx = -c$$

- Prima di completare il quadrato dividiamo tutto per a (i calcoli risulteranno più semplici):

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- Completiamo il quadrato: ricordiamo che, dovendo essere $\frac{b}{a}x$ il doppio prodotto,

$$\text{dobbiamo aggiungere il quadrato di: } \frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{2a}$$

Quindi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

E facendo qualche calcolo:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

- a) Se $b^2 - 4ac \geq 0$ possiamo andare avanti ed abbiamo:

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

- b) Se $b^2 - 4ac < 0$ non abbiamo soluzioni reali

Nota: $b^2 - 4ac$ viene chiamato “*discriminante*” dell’equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ed indicato con la lettera Δ .

Poniamo cioè $\Delta = b^2 - 4ac$.

Osservazione 1

Se $\Delta > 0$ le soluzioni dell'equazione sono “distinte” cioè sono due valori diversi (vedi esempio 4: $x^2 + 4x - 5 = 0$).

Se $\Delta = 0$ le soluzioni sono “coincidenti” cioè abbiamo un unico valore.

Esempio: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Infatti $x^2 + 4x + 4$ è il quadrato di $x + 2$ e quindi abbiamo:

$$(x + 2)^2 = 0$$

Il quadrato è nullo se

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad (x_1 = x_2 = -2)$$

Osservazione 2

Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si ha $b = 0$ oppure $c = 0$ (si dice che l'equazione non è completa) *non conviene usare la formula risolutiva* generale che abbiamo trovato ma procedere come abbiamo fatto nei primi due esempi.

Generalizziamo quegli esempi usando le lettere.

- Se $b = 0$ abbiamo $ax^2 + c = 0$.

Spostiamo il termine noto:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

- a) Se $-\frac{c}{a} \geq 0$ allora $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ (la scrittura $x_{1,2}$ indica che ci sono due soluzioni x_1 , x_2).

Vedi l'esempio 1: $4x^2 - 1 = 0$.

- b) Se $-\frac{c}{a} < 0$ allora l'equazione non ha soluzioni reali (vedi esempio 2: $4x^2 + 1 = 0$).

- Se $c = 0$ abbiamo $ax^2 + bx = 0$

Mettiamo in evidenza la x : $x(ax + b) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo quindi:

$$x_1 = 0 \text{ oppure } ax + b = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

(vedi l'esempio 3: $3x^2 - x = 0$).

La formula ridotta

Quando **il coefficiente b è un numero pari** possiamo utilizzare una formula “semplificata” chiamata “ridotta”.

Infatti se $b = 2\beta$ abbiamo:

$$x_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - ac}}{2a} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Quindi, essendo $\beta = \frac{b}{2}$, possiamo scrivere:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Osservazione: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4} = \frac{\Delta}{4}$

Esempio: $x^2 - 2x - 35 = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 35} = 1 \pm 6$$

$x_1 = 1 + 6 = 7$
 $x_2 = 1 - 6 = -5$

Somma e prodotto delle soluzioni

Consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$.

Somma delle soluzioni

Proviamo a sommare le soluzioni x_1, x_2 ottenute con la formula risolutiva:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}\end{aligned}$$

In conclusione si ha:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Prodotto delle soluzioni

Vediamo cosa si ottiene moltiplicando le soluzioni:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \\&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\end{aligned}$$

In conclusione so ha:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Nota

Quindi, ponendo $x_1 + x_2 = s$, $x_1 \cdot x_2 = p$ possiamo anche scrivere

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - sx + p = 0$$

Scomposizione di $ax^2 + bx + c$

- 1) Se $\Delta > 0$ abbiamo due soluzioni distinte dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = \\ &= a[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

In conclusione

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Esempio: scomponiamo $2x^2 - x - 1$.

Calcoliamo le soluzioni dell'equazione associata $2x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$x_1 = 1$
 $x_2 = -\frac{1}{2}$

Quindi $2x^2 - x - 1 = 2(x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

- 2) Se $\Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ e abbiamo $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_1)$ cioè:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Esempio : scomponiamo $4x^2 - 12x + 9$.

Considero $4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{4} = \frac{3}{2}$ e quindi $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

Infatti $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ che risulta equivalente a $4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

- 3) Se $\Delta < 0$ l'equazione associata non ha soluzioni reali e quindi *il trinomio non si può scomporre in "campo reale"* (si dice irriducibile in \mathbb{R}).

Esempio : consideriamo $x^2 + x + 1$.

Poiché l'equazione associata $x^2 + x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$ il trinomio risulta irriducibile in \mathbb{R} .

Regola di Cartesio

Consideriamo un’equazione di secondo grado completa $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$.

Prendiamo in esame i segni dei coefficienti a, b, c e chiamiamo “permanenza” la presenza di coefficienti consecutivi dello stesso segno e “variazione” la presenza di coefficienti consecutivi discordi.

Esempi

Nell’equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ abbiamo $a = 1, b = -3, c = 2$ e quindi due “variazioni”.

Nell’equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$ abbiamo $a = 1, b = 3, c = 2$ e quindi due “permanenze”.

Nell’equazione $x^2 - x - 2 = 0$ abbiamo $a = 1, b = -1, c = -2$ e quindi una “variazione” e una “permanenza”.

Dimostriamo che

- ad ogni “permanenza” corrisponde una **soluzione negativa**;
- ad ogni “variazione” corrisponde una **soluzione positiva**.

Dimostrazione

Osserviamo innanzitutto che possiamo supporre $a > 0$: infatti se a risultasse negativo possiamo moltiplicare tutti i termini per -1 ed ottenere così un’equazione equivalente (cioè con le stesse soluzioni) e con lo stesso numero di permanenze e variazioni ma con $a > 0$.

- a) Supponiamo che ci siano due permanenze cioè che si abbia $\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array}$

Avremo quindi $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \rightarrow$ soluzioni concordi, ma essendo $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ saranno *entrambe negative*.

- b) Supponiamo che ci siano due variazioni cioè si abbia $\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array}$

Avremo quindi $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \rightarrow$ soluzioni concordi, ma essendo $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ saranno *entrambe positive*.

- c) Supponiamo che ci siano una variazione ed una permanenza cioè si abbia $\begin{array}{ccc} + & - & - \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array}$

Avremo $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \rightarrow$ soluzioni discordi e quindi una positiva e una negativa.

- d) Supponiamo che ci siano una permanenza e una variazione cioè $\begin{array}{ccc} + & + & - \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array}$

In questo caso $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \rightarrow$ soluzioni discordi e quindi una positiva e una negativa.

Equazioni di secondo grado contenenti un parametro

Se un'equazione di secondo grado contiene una lettera, che spesso prende il nome di *parametro*, si possono cercare i valori da attribuire alla lettera perché sia verificata una certa condizione.

Esempi

- 1)** Per quali valori di k l'equazione $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ ha due soluzioni reali distinte?

Dovrà essere $\Delta = (2k-1)^2 - 4(k^2 - 1) > 0$

Quindi sviluppando:

$$\begin{aligned} 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4 &> 0 \\ -4k + 5 &> 0 \\ 4k - 5 &< 0 \\ k &< \frac{5}{4} \end{aligned}$$

- 2)** Per quali valori di k l'equazione $x^2 - (k+1)x + 1 = 0$ ha due soluzioni reali coincidenti?

Dovrà essere $\Delta = (k+1)^2 - 4 = 0 \rightarrow k^2 + 2k + 1 - 4 = 0 \rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0$

$$k_{1,2} = -1 \pm 2$$

$k_1 = -1 + 2 = 1$
 $k_2 = -1 - 2 = -3$

- 3)** Per quali valori di k l'equazione $x^2 - (2k-3)x + k^2 = 0$ non ha soluzioni reali?

Dovrà essere:

$$\begin{aligned} \Delta = (2k-3)^2 - 4k^2 &< 0 \rightarrow 4k^2 - 12k + 9 - 4k^2 < 0 \\ \rightarrow -12k + 9 &< 0 \rightarrow 12k - 9 > 0 \\ k &> \frac{3}{4} \end{aligned}$$

I problemi di secondo grado

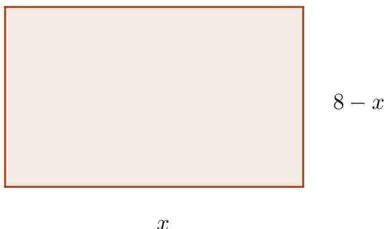
Spesso risolvendo un problema (di geometria analitica, euclidea ecc.), dopo aver posto come incognita x la misura di un segmento o qualche altra quantità, ci si trova a dover risolvere un'equazione di secondo grado. Vediamo qualche esempio.

Esempio 1

Determina le lunghezze dei lati di un rettangolo di area 15 cm^2 e perimetro 16 cm .

Possiamo risolvere questo problema in due modi:

- a) Se $2p = 16 \text{ cm} \rightarrow p = 8 \text{ cm}$ (semiperimetro). Quindi, se indichiamo con x un lato del rettangolo, l'altro risulterà $8 - x$.



Ma dal momento che l'area è 15 cm^2 avremo:

$$x(8 - x) = 15 \rightarrow 8x - x^2 = 15 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado che risolta dà:

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$$

The equation $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$ is shown above a branching arrow. One branch of the arrow points upwards to the value 5, and the other branch points downwards to the value 3.

Osserviamo che se $x = 5$ allora l'altra dimensione è $8 - 5 = 3$ e che se $x = 3$ allora l'altra dimensione è $8 - 3 = 5$, cioè le dimensioni del rettangolo sono in ogni caso 3 e 5.

- b) Se l'area del rettangolo misura 15 cm^2 , indicato con x un lato, l'altro sarà $\frac{15}{x}$ ($x \neq 0$) e poiché il perimetro misura 16 cm avremo:

$$2\left(x + \frac{15}{x}\right) = 16 \rightarrow x + \frac{15}{x} = 8 \rightarrow x^2 + 15 = 8x \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

ed abbiamo ritrovato l'equazione precedente.

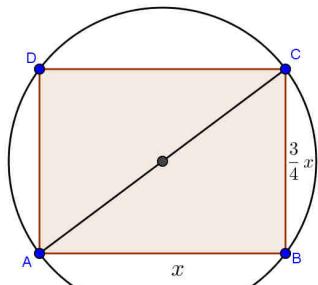
Esempio 2

I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 30 cm stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. Determina l'area del rettangolo.

Se indichiamo con x la misura di un lato, l'altro lato sarà $\frac{3}{4}x$ ed

applicando il teorema di Pitagora (ricordiamo che il diametro coincide con la diagonale del rettangolo) avremo:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 30^2$$



Sviluppando:

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 900 \rightarrow \frac{25}{16}x^2 = 900 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow x = 24$$

($x^2 = 576 \rightarrow x = \pm 24$ ma è accettabile solo la soluzione positiva).

Quindi l'altro lato risulta $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ e possiamo calcolare l'area del rettangolo è :

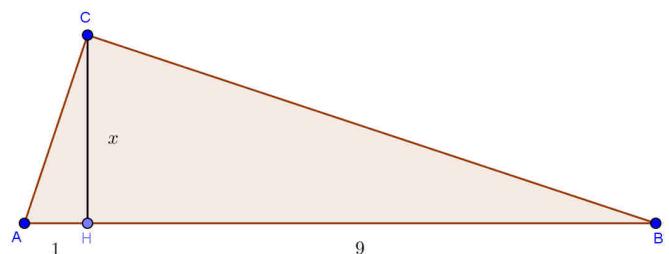
$$A = 24 \cdot 18 = 432 \text{ cm}^2$$

Esempio 3

Calcola l'area di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa è lunga 10 cm e che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono proporzionali ai numeri 1 e 9.

Innanzitutto, se AH e HB sono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa si ottiene subito che

$$\overline{AH} = 1 \text{ cm}, \quad \overline{HB} = 9 \text{ cm}$$



Se indichiamo con x la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, applicando il **secondo teorema di Euclide** abbiamo che

$$x^2 = 1 \cdot 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

($x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$ ma la soluzione negativa non è accettabile poiché x rappresenta una misura).

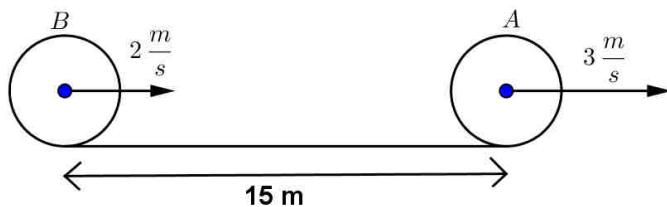
In conclusione l'area del triangolo risulta

$$A = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Esempio 4

Due ciclisti A e B stanno viaggiando uno dietro l'altro sullo stesso rettilineo con velocità

$$v_A = 3 \frac{m}{s}, \quad v_B = 2 \frac{m}{s}$$



Nell'istante in cui B si trova 15 m dietro ad A, comincia ad accelerare con $a = 0,5 \frac{m}{s^2}$, mentre A mantiene la stessa velocità. *In quanto tempo B raggiungerà A?*

Indichiamo con s_A lo spazio percorso dal ciclista A in un tempo t : poiché il moto di A è rettilineo uniforme si avrà

$$s_A = 3t \quad (s = v \cdot t)$$

Poiché invece B comincia ad accelerare con accelerazione costante $a = 0,5 \frac{m}{s^2}$, lo spazio s_B sarà

$$s_B = 2t + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot t^2 \quad \left(s = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \right)$$

Dal momento che B raggiungerà A quando $s_B = s_A + 15$ dovremo avere:

$$\begin{aligned} 2t + \frac{1}{4}t^2 &= 3t + 15 \\ \rightarrow \frac{1}{4}t^2 - t - 15 &= 0 \rightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \end{aligned}$$

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 60} = 2 \pm 8$$

10
-6 (non accettabile)

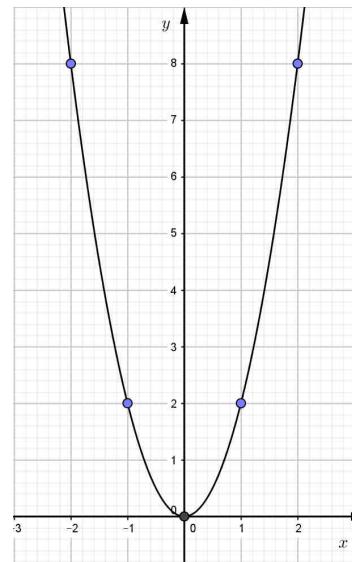
Quindi B raggiungerà A dopo 10 secondi.

La funzione $y = ax^2 + bx + c$

Vediamo come risulta, nel piano cartesiano, il grafico della funzione “quadratica” $y = ax^2 + bx + c$. Vediamo alcuni esempi e cominciamo con una funzione del tipo $y = ax^2$.

a) $y = 2x^2$

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8

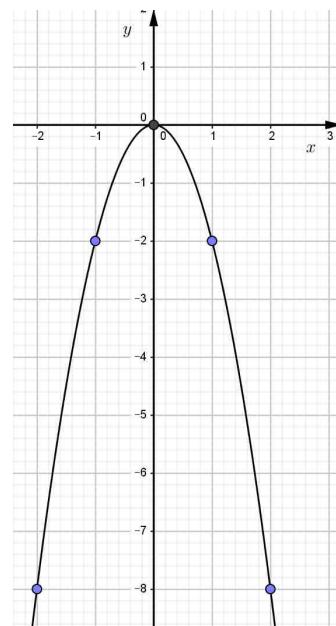


La curva che otteniamo si chiama “parabola”: è simmetrica rispetto all’asse y e il punto in cui interseca l’asse di simmetria è chiamato “vertice” (nel nostro esempio il vertice è $V(0;0)$).

Se il coefficiente a di x^2 è positivo come nel nostro esempio, la parabola è rivolta verso l’alto.

Se invece proviamo a disegnare $y = -2x^2$ ($a < 0$), avremo una parabola rivolta verso il basso:

x	y
-2	-8
-1	-2
0	0
1	-2
2	-8

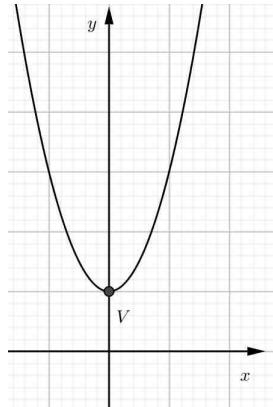


Osservazione

Se aumentiamo il valore assoluto di a la parabola “si stringe”: basta per esempio confrontare nello stesso sistema di riferimento $y = x^2$ con $y = 2x^2$.

b) $y = 2x^2 + 1$

E' chiaro che questa parabola risulta traslata del vettore $\vec{v}(0;1)$ rispetto alla parabola $y = 2x^2$ ed ha quindi il vertice in $V(0;1)$.



c) $y = 2x^2 - 4x + 4$

Possiamo disegnare il grafico per punti ed accorgersi che otteniamo un grafico della stessa forma dei precedenti.

Se il vertice è $V(x_V; y_V)$ è chiaro che l'equazione della parabola sarà del tipo

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

Cerchiamo allora di fare dei passaggi per scrivere l'equazione della parabola in quella forma.

- Spostiamo il termine noto $y - 4 = 2x^2 - 4x$
- Mettiamo in evidenza il coefficiente di x^2 tra il termine con x^2 e quello con x

$$y - 4 = 2(x^2 - 2x)$$

- “Completiamo” il quadrato nella parentesi.

Perché $x^2 - 2x$ diventi lo sviluppo del quadrato di un binomio manca +1 ma poiché è tutto moltiplicato per 2, all'altro membro devo aggiungere $2 \cdot 1 = 2$ cioè:

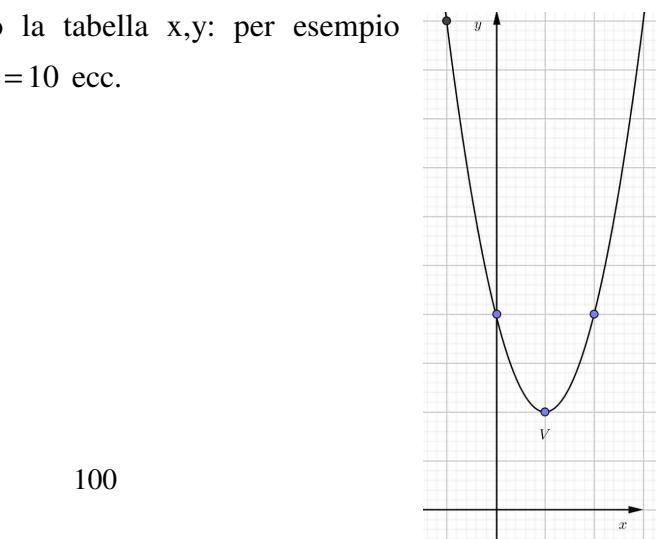
$$y - 4 + 2 = 2(x^2 - 2x + 1)$$

$y - 2 = 2(x - 1)^2$

Quindi la nostra parabola ha $a = 2$ e vertice $V(1;2)$.

Possiamo controllare anche facendo la tabella x,y: per esempio $y(-1) = 2(-1)^2 - 4(-1) + 4 = 2 + 4 + 4 = 10$ ecc.

x	y
-1	10
0	4
1	2
2	4
3	10



Osservazione

Ma c'è un modo per determinare il vertice senza dover fare tutti questi passaggi?

Ripetiamo il procedimento seguito partendo dall'equazione generale della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

Abbiamo:

$$y - c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) \rightarrow y - c + \frac{b^2}{4a} = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \rightarrow y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

Quindi, ricordando che l'espressione deve corrispondere a $y - y_V = a(x - x_V)^2$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} x_V &= -\frac{b}{2a} \\ y_V &= -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \end{aligned}$$

Osserviamo che possiamo memorizzare solo

$x_V = -\frac{b}{2a}$

perché possiamo poi trovare l'ordinata del vertice sostituendo l'ascissa trovata nell'equazione della parabola.

Per esempio nel nostro caso l'equazione della parabola è

$$y = 2x^2 - 4x + 4$$

e quindi possiamo subito scrivere

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = 1 \rightarrow y_V = 2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$$

Abbiamo quindi ritrovato il vertice $V(1;2)$.

Esercizio svolto

Disegna la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$.

Per prima cosa determiniamo il vertice:

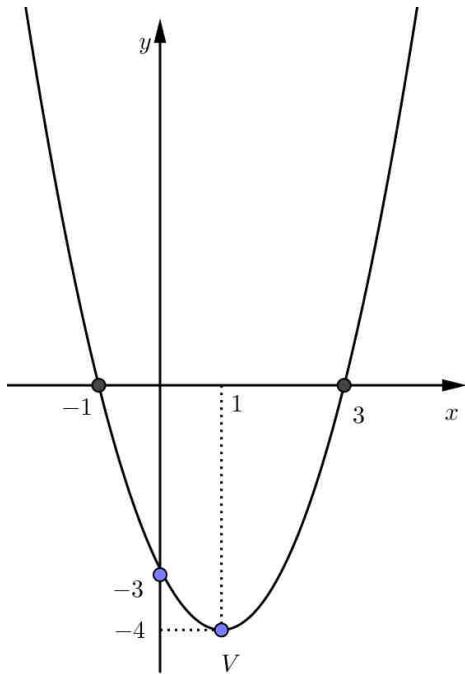
$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow y_V = 1 - 2 - 3 = -4$$

Il vertice è quindi $V(1;-4)$.

Per disegnare la parabola è importante determinare l'intersezione con l'asse y , che si ottiene ponendo $x = 0$ e, se ci sono, le intersezioni con l'asse x che si ottengono ponendo $y = 0$ e quindi risolvendo l'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$.

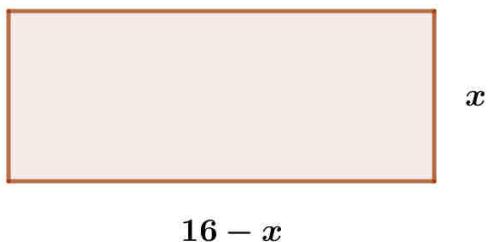
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Problema svolto

Supponiamo di voler costruire una piscina rettangolare e di aver già comprato il rivestimento del bordo che dovrà essere lungo 32 m. Quali sono le dimensioni della piscina di area massima? E' chiaro che se indichiamo con x una dimensione del rettangolo che rappresenta la piscina avremo che l'altra dimensione è $16 - x$.

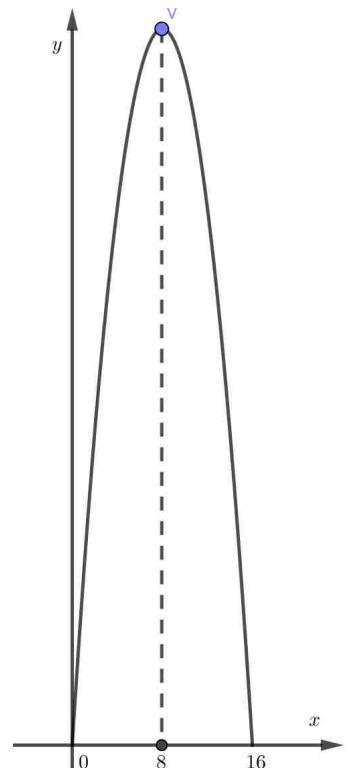


Se indichiamo con y l'area abbiamo quindi

$$y = x \cdot (16 - x)$$

Se sviluppiamo ci accorgiamo che si tratta di una parabola rivolta verso il basso, avente il vertice in $V(8;64)$.

Quindi *il valore massimo dell'area si ha per $x=8$* (ascissa del vertice della parabola) e per questo valore di x l'altra dimensione risulta $16 - 8 = 8$ cioè la piscina di perimetro 32 m e massimo perimetro risulta **quadrata** ed ha area di $64m^2$.



ESERCIZI

I) Risovi le seguenti equazioni

- 1) $2 - x^2 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$; $9x^2 = 0$ [$\pm\sqrt{2}$; 0, 6; $x=0$ (doppia)]
- 2) $7x - 5x^2 = 0$; $4 + 3x^2 = 0$; $25 = 9x^2$ [0, $\frac{7}{5}$; impossibile; $\pm\frac{5}{3}$]
- 3) $\frac{1}{2}x^2 = 0$; $1 - x^2 = 0$; $9x^2 - 12x = 0$ [$x=0$ (doppia); ± 1 ; 0, $\frac{4}{3}$]
- 4) $-3x^2 = -12$; $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{5}x$; $\frac{1}{2}x^2 - 18 = 0$ [± 2 ; 0, $\frac{4}{5}$; ± 6]
- 5) $-4x^2 = 36$; $2x^2 - \frac{8}{3}x = 0$; $4 - x^2 = 0$ [impossibile; 0, $\frac{4}{3}$; ± 2]
- 6) $3\sqrt{5}x^2 = 0$; $16x^2 = 1$; $-3x^2 + 6x = 0$ [$x=0$ (doppia); $\pm\frac{1}{4}$; 0, 2]
- 7) $4x^2 - 2 = 0$ [$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$]
- 8) $2x^2 + 1 = 0$ [impossibile]
- 9) $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ [$x_1 = 0$; $x_2 = -6$]
- 10) $(x-3) \cdot (x+3) = 3x \cdot (x-1) + 3x - 9$ [$x_1 = x_2 = 0$]
- 11) $x \cdot (x+3) + 1 = (1+x)^2 - 2x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x\right)$ [$x_1 = 0$; $x_2 = -3$]
- 12) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ [$x_1 = 2\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$]
- 13) $\frac{1}{2}(x-4)^2 + \frac{1}{3}(x-6) = \frac{2}{3}$ [$x_1 = 2$; $x_2 = \frac{16}{3}$]

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- Le equazioni di secondo grado -

$$14) \frac{(2-x)(2+x)}{2} + \frac{2}{3}x = \frac{7}{3} - \frac{2}{15}x - \frac{(2x-1)^2}{5} \quad [x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}]$$

$$15) \frac{10-2x}{x^2-9} + \frac{1-x}{3-x} = \frac{3}{2x+6} + \frac{23}{2x^2-18} \quad [x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{3}{2}]$$

$$16) \frac{x}{x+3} = \frac{6}{x-3} - \frac{27-x^2}{9-x^2} \quad [x = \frac{15}{2}; \quad -3 \quad \text{non accettabile}]$$

$$17) \frac{2x}{2x-1} - \frac{(8x^2+3)}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1} \quad [x_1 = 0; \quad x_2 = -1]$$

$$18) \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-x^2} = \frac{x}{x^2-x} \quad [x_{1,2} = \pm \sqrt{2}]$$

$$19) 3\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x^2} \quad [x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{3}{2}]$$

$$20) \frac{x}{5} = \frac{x+2}{x-2} - \frac{4}{5} \quad [x_1 = 6; \quad x_2 = -3]$$

$$21) \frac{1}{x} - \frac{1}{10} = \frac{1}{x+5} \quad [x_1 = 5; \quad x_2 = -10]$$

$$22) \frac{9}{x^2+6x} - \frac{x-2}{2x+12} = \frac{1}{2x} \quad [x_1 = 4; \quad x_2 = -3]$$

$$23) \frac{x}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{21-x}{x^2-9} \quad [\text{impossibile}]$$

$$24) \frac{8}{x-1} - 3 = \frac{6}{x+1} - \frac{x^2+x-3}{x^2-1} \quad [x_1 = \frac{7}{2}; \quad x_2 = -2]$$

$$25) \frac{x+7}{3x^2-7x+2} + 2 = \frac{3-x}{x-2} \quad [x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{14}{9}]$$

$$26) \frac{1}{1-x^2} = \frac{2x}{4x-4} \quad [\text{impossibile}]$$

$$27) \frac{5}{3}(2x-3)(x+1) = 10x-5 \quad [x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{7}{2}]$$

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- Le equazioni di secondo grado -

28) $3x^2 + \frac{3}{2} - \frac{(x+2)}{2} = \frac{3-x}{2} - (1+x^2)$ [$x_1 = x_2 = 0$]

29) $\sqrt{5}(x^2 - 1) + 1 = x^2$ [$x_{1,2} = \pm 1$]

30) $11x + (x-2)^2 + (2x+1)(x-3) = (x+1)^2 - 14$ [impossibile]

31) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ [$-\frac{1}{2}, 3$]

32) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ [$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$]

33) $x^2 - x + 2 = 0$ [impossibile]

34) $x^2 + 5x + 6 = 0$ [$x_1 = -3, x_2 = -2$]

35) $x^2 - 5\sqrt{2}x + 12 = 0$ [$x_1 = 2\sqrt{2}, x_2 = 3\sqrt{2}$]

36) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$ [$x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$]

37) $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} = 0$ [$x_1 = x_2 = -\frac{4}{5}$]

38) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 6 = 0$ [$x_1 = -2\sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$]

39) $(2x+1)^2 - x^2 - (x-1)^2 = (2x+3)(2x-3) + 1$ [$x_1 = -1, x_2 = 4$]

40) $(2-3x)(x-2) + 3(x-1)^2 = (x-1)(x+3)$ [$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$]

41) $(1-x)^2 = 2x + \frac{x^2 - 3x + 7}{2}$ [$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$]

42) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x(x+2) - 5x + \frac{1}{6} = \frac{x}{3}(x-5)$ [$x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$]

43) $\frac{6-3x}{5} + \frac{x^2+2}{15} - x = \frac{4-x^2}{3}$ [$x_1 = 0, x_2 = 4$]

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- Le equazioni di secondo grado -

44) $(x-1)^3 = x^2(x-1) - (x+3)(x-2) - 19$ [$x_1 = -2, \quad x_2 = 6$]

45) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right) + 2$ [$x_1 = -5, \quad x_2 = 0$]

46) $\frac{2x}{15} + \frac{x^2 + x}{6} = \frac{(x+2)(x+1)}{10}$ [$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$]

47) $\frac{2}{3}\left(\frac{6+x}{2} - \frac{x-3}{4}\right) = \frac{(x-2)^2}{12} - \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$ [$x_1 = -2, \quad x_2 = 12$]

48) $\frac{3x}{x+2} = \frac{3}{x}$ [$x_1 = 2, \quad x_2 = -1$]

49) $\frac{3x+1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2 + x}$ [$x_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{2}$]

50) $\frac{1}{x} - 3 = \frac{1+x}{x-2}$ [$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$]

51) $\frac{x+3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$ [$x_1 = 3, \quad x_2 = 1$ (*non accettabile*)]

52) $\frac{x-5}{x+3} + \frac{80}{x^2 - 9} = \frac{1}{2} + \frac{x-8}{3-x}$ [impossibile]

53) $x^2 + 8x - 9 = 0$ [$x_1 = -9, \quad x_2 = 1$]

54) $10x^2 + 8x + 5 = 0$ [impossibile]

55) $9 + 16x^2 + 24x = 0$ [$x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}$]

56) $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$ [$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$]

57) $x^2 = \frac{1}{3}(2x+1)$ [$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 1$]

58) $\frac{7}{4} - 3x - x^2 = 0$ [$x_1 = -\frac{7}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$]

59) $3x^2 + 4x - 4 = 0$ $[x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -2]$

60) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 2x + 3 - 2\sqrt{3} = 0 \rightarrow 3x^2 - 2(2\sqrt{3} - 1)x + 3 - 2\sqrt{3} = 0$

Svolgimento:

calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = (2\sqrt{3} - 1)^2 - 3(3 - 2\sqrt{3}) = 12 + 1 - 4\sqrt{3} - 9 + 6\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$

Osserviamo che scrivendo 4 come $3 + 1$ possiamo pensare $2\sqrt{3}$ come il doppio prodotto nello sviluppo del quadrato di $\sqrt{3} + 1$ e quindi abbiamo:

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 2\sqrt{3} = 3 + 1 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 1 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$$

In conclusione: $x_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} - 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{3} \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} - 2}{3}$

61) $\frac{3x-2}{x-1} = \frac{x}{x+1} - 3 - \frac{2x}{1-x^2}$

Svolgimento:

le condizioni di esistenza sono

$$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

$$1-x^2 = (1-x)(1+x) \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 1$$

Sviluppiamo: $\frac{(3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x-1) - 3(x^2 - 1) + 2x}{(x-1)(x+1)} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$ (non accettabili)

Poiché le soluzioni sono entrambe non accettabili l'equazione è impossibile.

62) $\frac{x-3}{x-1} + 2 = \frac{x-3}{x+2} + \frac{x-13}{x^2+x-2}$ $[x_1 = 0, \quad x_2 = -2]$ (non accettabile)

63) $\frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{x+2}{x-3}$ $[x_1 = 0, \quad x_2 = 2]$ (non accettabile)

64) $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2} = \frac{5-x^2}{x^2-x-6}$ $[x_1 = 1, \quad x_2 = -4]$

65) $\frac{x+7}{3x^2-7x+2} + 2 = \frac{3-x}{x-2}$ $[x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{14}{9}]$

66) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x-3} + 4 = \frac{30+5x^2-36x}{x^2-7x+12}$ $[x_1 = -2, \quad x_2 = -3]$

II) Scomponi i seguenti trinomi di secondo grado:

67) $6x^2 + 13x + 7$ [$6(x+1)\left(x+\frac{7}{6}\right)$]

68) $4x^2 - 8x + 3$ [$4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$]

69) $x^2 + 6x + 5$ [$(x+1) \cdot (x+5)$]

70) $2x^2 - 4x + 5$ [irriducibile]

71) $5x^2 + 4x + \frac{4}{5}$ [$5 \cdot \left(x + \frac{2}{5}\right)^2$]

72) $4a^2 - 4a - 3$ [$(2a-3) \cdot (2a+1)$]

III) Considera le seguenti equazioni contenenti un parametro:

73) Per quale valore di k l'equazione $kx^2 - 2(k+1)x + 4 = 0$ ha soluzioni coincidenti?
[$k = 1$]

74) Per quali valori di k l'equazione $2kx^2 + kx - x = 0$ ha soluzioni reali distinte?
[$k \neq 0; k \neq 1$]

75) Per quali valori di a l'equazione $x^2 - (a-2)x - a = 0$ ha soluzioni reali ?
[$\forall a \in \Re$]

76) Per quali valori di k l'equazione $x^2 - 2kx + 5k - 6 = 0$ ha soluzioni reali coincidenti?
[$k_1 = 2; k_2 = 3$]

77) Per quali valori di k l'equazione $6x^2 + (2k-3)x - k = 0$ ha soluzioni reali?
[$\forall k \in \Re$]

78) Per quali valori di k l'equazione $kx^2 + (4k-1)x + 4k = 0$ ($k \neq 0$) ha soluzioni reali distinte?
[$k < \frac{1}{8}, k \neq 0$]

- 79) Per quali valori di k l'equazione $x^2 + (2k - 2)x + k^2 + 2 = 0$ ha soluzioni reali?

$$[k \leq -\frac{1}{2}]$$

- 80) Per quali valori di a l'equazione $x^2 + (2a - 1)x + a^2 = 0$ non ha soluzioni reali?

$$[a > \frac{1}{4}]$$

- 81) Discuti, al variare di k , le soluzioni dell'equazione $kx^2 - 2(k+1)x + 4 = 0$.

$$[k = 0 \rightarrow x = 2, \quad k = 1 \rightarrow x_1 = x_2 = 2, \quad k \neq 0, \quad k \neq 1 \rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{k}]$$

- 82) Per quali valori di k l'equazione $x^2 - kx - 20k^2 = 0$ ha soluzioni reali coincidenti?

$$[k = 0]$$

IV) Risovi i seguenti problemi di secondo grado

- 83) Un quadrato ha il perimetro di 24 cm. Un rettangolo ha lo stesso perimetro mentre l'area è $\frac{3}{4}$ di quella del quadrato. Determina le dimensioni del rettangolo.

$$[3 \text{ cm}; 9 \text{ cm}]$$

- 84) Un rettangolo di area 20 cm^2 ha l'altezza minore della base di 1 cm. Calcola il perimetro del rettangolo.

$$[2p = 18 \text{ cm}]$$

- 85) Un rettangolo ha le dimensioni di 5 cm e 2 cm. Vogliamo incrementare la base e l'altezza di una stessa quantità in modo da ottenere un secondo rettangolo che abbia l'area di 70 cm^2 . Determina tale quantità.

$$[5 \text{ cm}]$$

- 86) Un rettangolo ha il perimetro $2p = 14 \text{ cm}$ e l'area $A = 10 \text{ cm}^2$. Determina le sue dimensioni.

$$[2; 5]$$

- 87) In una semicirconferenza di raggio $r = \frac{13}{2} \text{ cm}$ è inscritto un triangolo avente perimetro $2p = 30 \text{ cm}$. Determina la misura dei cateti.

$$[5, 12]$$

- 88) In un trapezio rettangolo di area 12 cm^2 , l'altezza supera di 1 cm la base minore e la base maggiore è il triplo della minore. Determina il perimetro del trapezio.

$$[2p = 16 \text{ cm}]$$

- 89) In un rombo di perimetro $80a$, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è $48a$. Determina l'area del rombo.

$$[A = 384a^2]$$

- 90) In un triangolo rettangolo l'area misura 120cm^2 e il cateto maggiore supera di 4 cm il doppio del cateto minore. Determina il perimetro del triangolo.

$$[2p = 60\text{cm}]$$

- 91) In un triangolo isoscele la base supera di 1 cm l'altezza e il perimetro è 8 cm. Determina l'area del triangolo.

$$[A = 3\text{cm}^2]$$

- 92) Se in un quadrato un lato viene aumentato del 25% e un altro viene diminuito del 50%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato iniziale diminuita di 6cm^2 . Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

$$[4 \text{ cm}]$$

- 93) In un triangolo rettangolo un cateto misura 1 cm in più dell'altro e l'ipotenusa è 5 cm. Determina i cateti del triangolo.

$$[3 \text{ cm} ; 4 \text{ cm}]$$

- 94) Se in un quadrato un lato viene aumentato del 20% e un altro viene diminuito del 20%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato diminuita di 1 cm^2 . Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

$$[5 \text{ cm}]$$

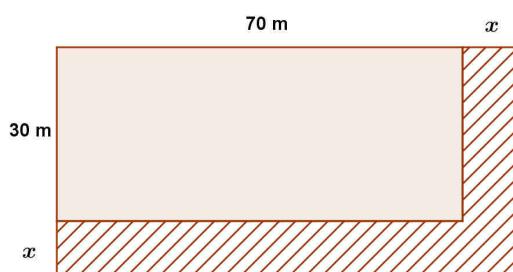
- 95) L'area di un rombo è 24 cm^2 e una diagonale supera l'altra di 2 cm. Determina il perimetro del rombo.

$$[2p = 20 \text{ cm}]$$

- 96) In un triangolo isoscele la base supera di 3 cm il lato obliquo e l'altezza è 12 cm. Determina il perimetro.

$$[2p = 48 \text{ cm}]$$

- 97) Il proprietario di un terreno deve cederne una parte di area 416 m^2 per la costruzione di una strada (vedi figura). Calcola x .



$$[x = 4 \text{ m}]$$

- 98) Un rettangolo è inscritto in una circonferenza di raggio 13 cm e il suo perimetro è 68 cm. Determina i lati del rettangolo.

[10 cm; 24 cm]

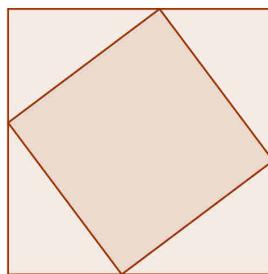
- 99) In un triangolo isoscele base e altezza stanno tra loro come 3 sta a 2 e il perimetro è 16 cm. Determina l'area.

[12 cm²]

- 100) Un rettangolo ha area 40 cm^2 e i suoi lati misurano uno 3 cm in più dell'altro. Se si allungano entrambi i lati della stessa misura, si ottiene un rettangolo la cui area è 30 cm^2 in più dell'area iniziale. Determina il perimetro del nuovo rettangolo.

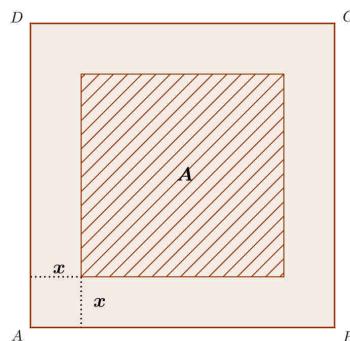
[34 cm]

- 101) In un quadrato di area 49 cm^2 è inscritto un quadrato di area 25 cm^2 . Determina il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dal quadrato inscritto nel quadrato più grande.



[12 cm]

- 102) Osserva la figura: sapendo che l'area del quadrato ABCD è 256 cm^2 e che $A = 100 \text{ cm}^2$ quanto vale x ?



[3 cm]

- 103) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro misura $80a$.
[$300 a^2$]
- 104) Due triangoli rettangoli congruenti hanno un cateto in comune, l'altro posto su rette parallele. Il perimetro di ciascun triangolo è $108a$, mentre quello del poligono individuato da essi è $144a$. Determina la lunghezza del cateto comune e dell'ipotenusa.
[$36a$; $45a$]
- 105) In un trapezio rettangolo una base è doppia dell'altra, l'altezza supera di 1 cm la base minore e l'area è 3 cm^2 . Determina l'altezza del trapezio.
[2 cm]
- 106) In un rombo di perimetro $100k$, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è $60k$. Determina l'area del rombo.
[$600 k^2$]
- 107) Il diametro di una semicirconferenza misura 15 cm. Calcola la lunghezza dei tre lati di un triangolo inscritto nella semicirconferenza sapendo che i due lati distinti dal diametro sono uno i $\frac{3}{4}$ dell'altro.
[$15 \text{ cm}; 12 \text{ cm}; 9 \text{ cm}$]
- 108) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 25 cm e supera di 9 cm una delle proiezioni dei cateti. Determina l'area del triangolo.
[150 cm^2]
- 109) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 50 cm e un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.
[120 cm]
- 110) Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa ed è anche il doppio dell'altra proiezione aumentato di $2a$. Determina l'area del triangolo.
[$150 a^2$]

- 111) In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ volte il cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto misura $\frac{4}{5}\sqrt{5} \text{ cm}$. Determina il perimetro del triangolo.

$$[2p = (12 + 4\sqrt{5}) \text{ cm}]$$

- 112) L'area di un triangolo rettangolo è 80 cm^2 . Determina l'ipotenusa sapendo che un cateto diminuito di 4 cm è pari al doppio dell'altro cateto.

$$[4\sqrt{29} \text{ cm}]$$

V) La funzione $y = ax^2 + bx + c$

- 113) **Disegna le seguenti parabole** determinando le coordinate del vertice, eventuali punti di intersezione con l'asse x e l'intersezione con l'asse y:

a) $y = 4x - x^2$. [$V(2;4)$; $(0;0)$ $(4;0)$]

b) $y = x^2 - 2x + 1$. [$V(1;0)$; $(0;1)$]

c) $y = x^2 - 2x$ [$V(1;-1)$; $(0;0)$; $(2;0)$]

d) $y = -2x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$]

e) $y = x^2 - 2x + 3$ [$V(1;2)$; $(0;3)$]

f) $y = -x^2 - 2x$ [$V(-1;1)$; $(0;0)$; $(-2;0)$]

g) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ [$V(2;-1)$; $(2 \pm \sqrt{2};0)$; $(0;1)$]

h) $y = -x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $(\pm 1;0)$]

i) $y = -x^2 + 2$ [$V(0;2)$, $(\pm \sqrt{2},0)$]

l) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ [$V(0;-2)$, $(\pm 2;0)$]

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
 - Le equazioni di secondo grado -

m) $y = x^2 - 4x$ [$V(2;-4)$, $(0;0)$ $(4;0)$]

n) $y = -x^2 + 2x - 1$ [$V(1;0)$; $(0;-1)$]

o) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ [$V\left(1;-\frac{1}{2}\right)$; $(0;-1)$]

p) $y = 5x^2 - 4x - 1$ [$V\left(\frac{2}{5};-\frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{5};0\right)$ $(1;0)$; $(0;-1)$]

114) Scrivi l'equazione delle parabole seguenti e disegnale:

a) $V(1;3)$, $a = 1$ [$y = x^2 - 2x + 4$]

b) $V(0;-2)$, $a = -\frac{1}{2}$ [$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$]

c) $V(-1;0)$, $a = 3$ [$y = 3x^2 + 6x + 3$]

d) $V(0;0)$, $a = -4$ [$y = -4x^2$]

e) $V(-1;4)$, $a = 2$ [$y = 2x^2 + 4x + 6$]

f) $V(1;1)$, $a = -1$ [$y = -x^2 + 2x$]

Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado è una disequazione del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ oppure } ax^2 + bx + c < 0$$

(oppure $ax^2 + bx + c \geq 0$ o $ax^2 + bx + c \leq 0$)

I) Cominciamo considerando disequazioni in cui $a > 0$

Esempio 1 $x^2 - 4x + 3 > 0$

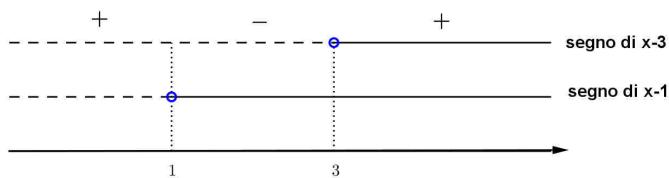
Consideriamo l'equazione di secondo grado corrispondente (detta equazione “**associata**”):

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 2 \pm 1 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

Quindi, ricordando che se $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni x_1, x_2 allora $ax^2 + bx + c$ si scomponete in $a(x - x_1)(x - x_2)$, abbiamo $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ e per determinare il segno di $x^2 - 4x + 3$ possiamo studiare il segno di $(x - 1)$ ed il segno di $(x - 3)$.

$$\begin{aligned} x - 1 > 0 &\rightarrow x > 1 \\ x - 3 > 0 &\rightarrow x > 3 \end{aligned}$$

Rappresentiamo la situazione con il cosiddetto “**grafico dei segni**” in cui indichiamo con una **linea continua il segno positivo** e con una **linea tratteggiata il segno negativo**.

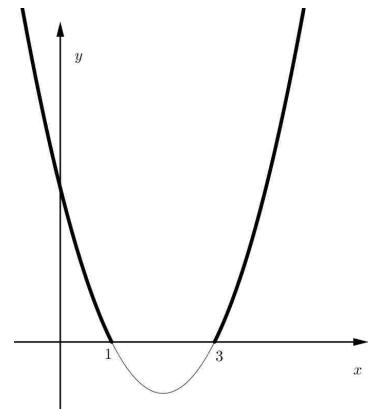


Allora per la regola dei segni del prodotto avremo $x^2 - 4x + 3 > 0 \rightarrow x < 1 \cup x > 3$
(valori esterni alle soluzioni dell'equazione associata)

Interpretazione grafica

Possiamo disegnare la parabola “associata” alla disequazione, cioè la parabola $y = x^2 - 4x + 3$: il vertice risulta $V(2; -1)$ e naturalmente le intersezioni con l'asse x si ottengono dalle soluzioni dell'equazione precedente e sono $(1; 0)$, $(3; 0)$. Quindi risolvere la disequazione $x^2 - 4x + 3 > 0$ equivale a individuare la **zona della parabola che si trova al di sopra dell'asse x** ed infatti osservando il grafico abbiamo che:

$$y > 0 \rightarrow x < 1 \cup x > 3$$



Esempio 2 $x^2 + 2x + 1 > 0$

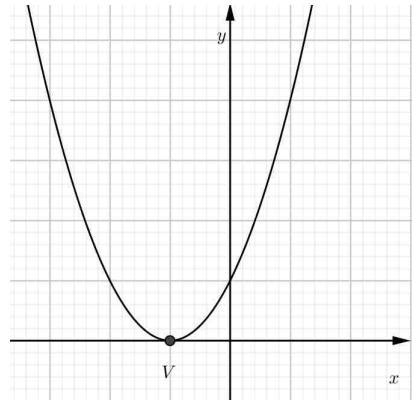
In questo caso l'equazione associata ha $\Delta = 0$ ed infatti si tratta del quadrato di un binomio:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

È chiaro quindi che la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ eccetto $x = -1$ in cui il trinomio si annulla e quindi scriveremo $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1$.

Graficamente osserviamo che la parabola $y = x^2 + 2x + 1$, rivolta verso l'alto, è tangente all'asse delle x nel suo vertice $(-1; 0)$ e quindi

$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1$$



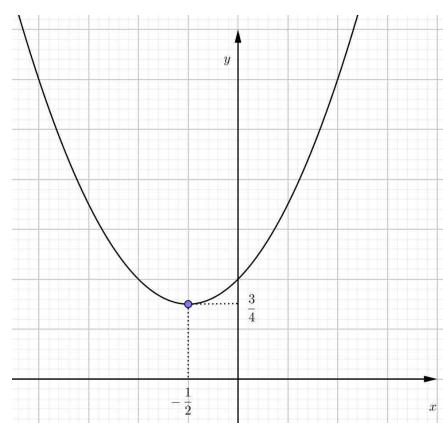
Esempio 3 $x^2 + x + 1 > 0$

Considerando l'equazione associata $x^2 + x + 1 = 0$: in questo caso abbiamo $\Delta = 1 - 4 < 0$ e quindi non ci sono soluzioni reali.

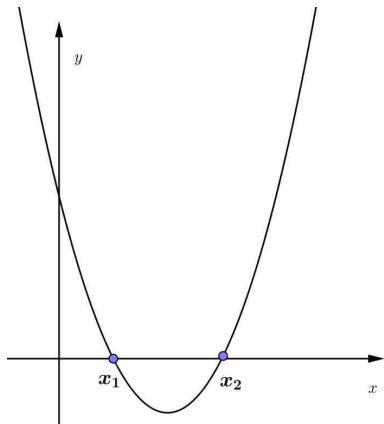
Graficamente abbiamo la parabola $y = x^2 + x + 1$ che ha

vertice $V\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ ed è rivolta verso l'alto: si ha perciò

$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



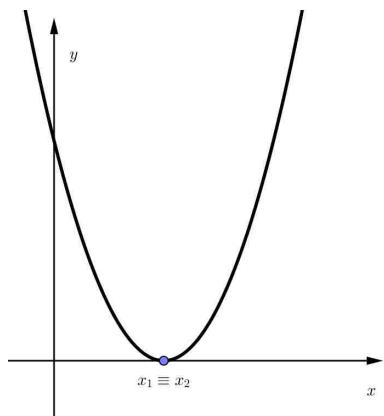
Riassumiamo le soluzioni delle disequazioni in cui $a > 0$
Parabola rivolta verso l'alto



$\Delta > 0$
$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow x < x_1 \cup x > x_2$ (valori esterni)
$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow x_1 < x < x_2$ (valori interni)

$$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow x \leq x_1 \cup x \geq x_2)$$

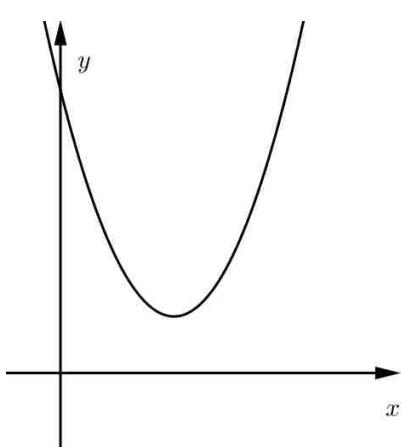
$$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow x_1 \leq x \leq x_2)$$



$\Delta = 0$
$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}, x \neq x_1$
$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale}$

$$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R})$$

$$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow x = x_1)$$



$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$
$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale}$

$$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R})$$

$$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale})$$

II) Consideriamo adesso disequazioni in cui $a < 0$

Esempio 1
$$-x^2 + 2x > 0$$

Per risolvere l'equazione associata $-x^2 + 2x = 0$ mettiamo in evidenza la x :

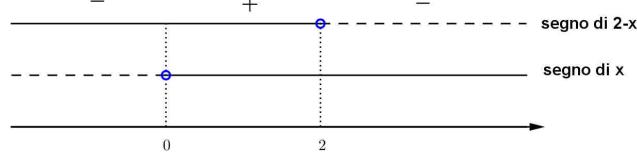
$$-x^2 + 2x = x(-x + 2)$$

$$\text{quindi } -x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0 \cup x = 2.$$

Per determinare il segno di $-x^2 + 2x$ studiamo il segno di x e di $2-x$:

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ 2-x > 0 \rightarrow x < 2 \end{array}$$

Il grafico dei segni è :

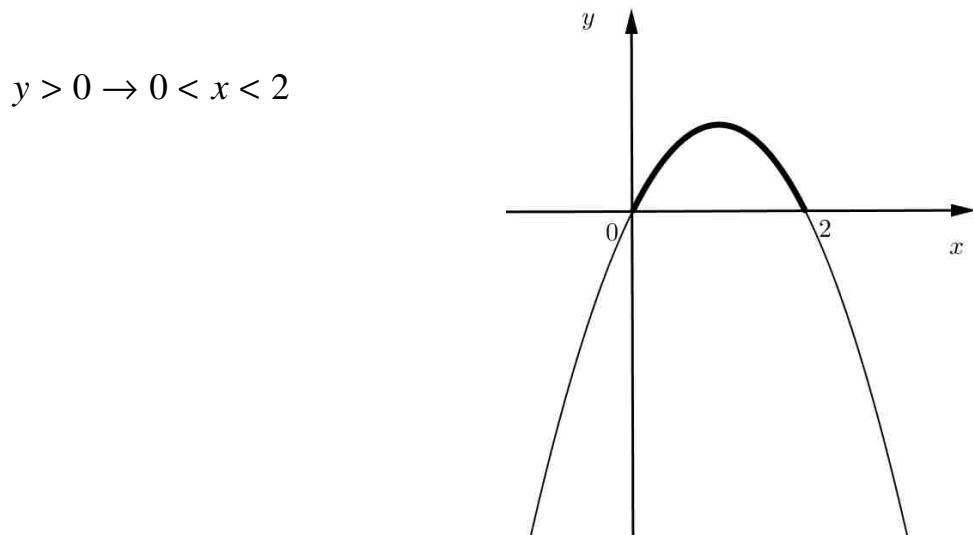


$$\text{Quindi } -x^2 + 2x > 0 \rightarrow 0 < x < 2$$

(valori interni alle soluzioni dell'equazione associata)

Interpretazione grafica

Disegniamo la parabola $y = -x^2 + 2x$: questa volta la **parabola è rivolta verso il basso** e quindi

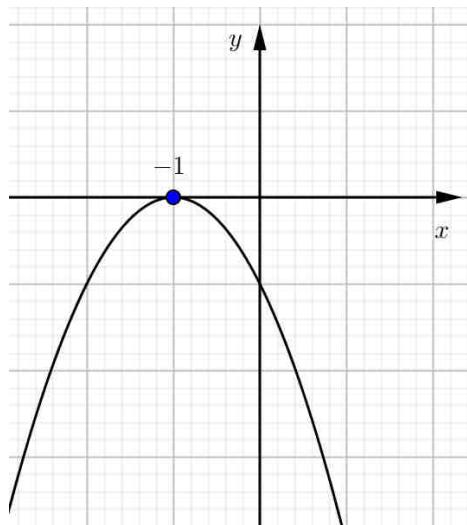


Esempio 2 $-x^2 - 2x - 1 > 0$

In questo caso abbiamo che l'equazione associata ha $\Delta = 0$.

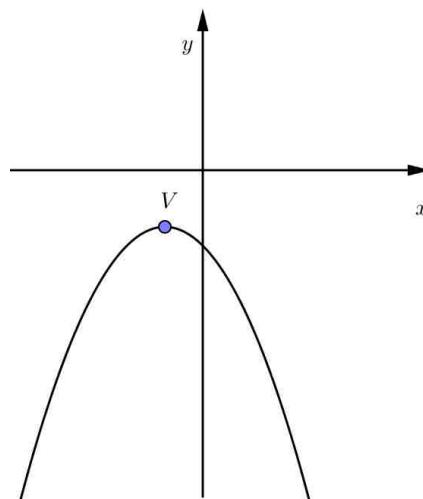
Infatti $-x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x + 1)^2$

Quindi la disequazione non ha **nessuna soluzione** ed infatti la parabola è rivolta verso il basso ed ha vertice in $(-1; 0)$.

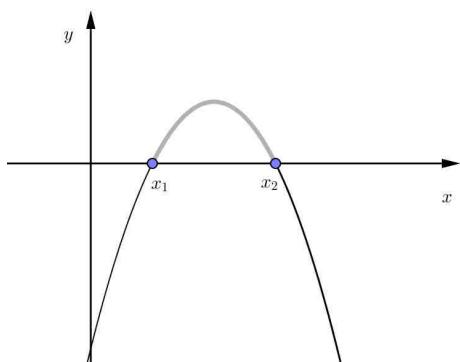


Esempio 3 $-x^2 - x - 1 > 0$

In questo caso abbiamo che l'equazione associata ha $\Delta < 0$ e quindi non ci sono soluzioni reali: quindi la parabola associata, che è rivolta verso il basso ed ha vertice $V\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, non interseca l'asse x e **la disequazione non ha nessuna soluzione**.

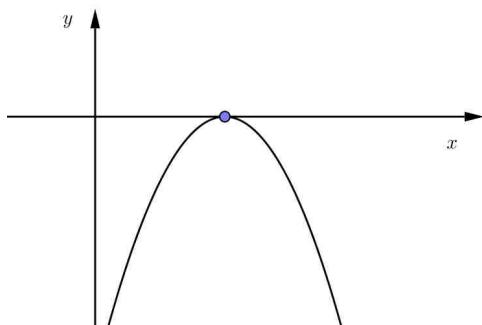


Riassumiamo le soluzioni delle disequazioni in cui $a < 0$
Parabola rivolta verso il basso



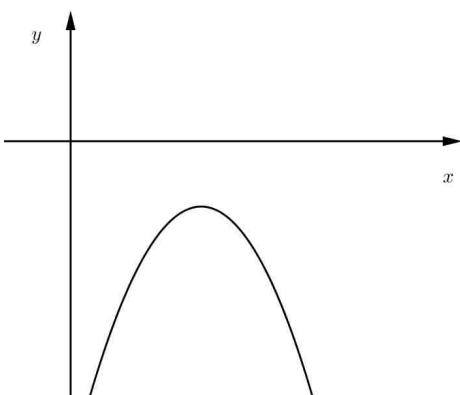
$$\begin{aligned}\Delta &> 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 &\rightarrow x_1 < x < x_2 \\ ax^2 + bx + c < 0 &\rightarrow x < x_1 \cup x > x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c \geq 0 &\rightarrow x_1 \leq x \leq x_2) \\ (ax^2 + bx + c \leq 0 &\rightarrow x \leq x_1 \cup x \geq x_2)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Delta &= 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 &\rightarrow \text{nessuna soluzione reale} \\ ax^2 + bx + c < 0 &\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c \geq 0 &\rightarrow x = x_1) \\ (ax^2 + bx + c \leq 0 &\rightarrow \forall x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Delta &< 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 &\rightarrow \text{nessuna soluzione reale} \\ ax^2 + bx + c < 0 &\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c \geq 0 &\rightarrow \text{nessuna soluzione reale}) \\ (ax^2 + bx + c \leq 0 &\rightarrow \forall x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Nota importante

Quando in una disequazione si ha $a < 0$ conviene moltiplicare per -1 ed invertire la diseguaglianza riconducendosi al caso di $a > 0$.

In questo modo possiamo fare riferimento sempre al caso della parabola rivolta verso l'alto.

Vediamo come si poteva procedere nel caso degli ultimi tre esempi:

- 1) $-x^2 + 2x > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 0 \rightarrow 0 < x < 2$
- 2) $-x^2 - 2x - 1 > 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 < 0 \rightarrow (x+1)^2 < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale};$
- 3) $-x^2 - x - 1 > 0 \rightarrow x^2 + x + 1 < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale}$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Esempio 1

Consideriamo la disequazione $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

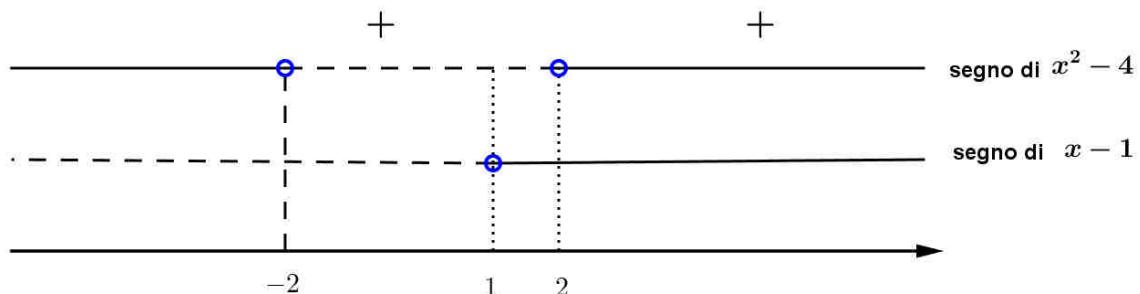
Proviamo a scomporre il polinomio (raccoglimento parziale):

$$x^2(x-1) - 4(x-1) > 0 \rightarrow (x-1)(x^2 - 4) > 0$$

Possiamo quindi studiare il segno dei singoli fattori

$$\begin{aligned} x-1 &> 0 \rightarrow x > 1 \\ x^2 - 4 &> 0 \rightarrow x < -2 \cup x > 2 \end{aligned}$$

Riportiamo questi risultati nel “grafico dei segni”:



Abbiamo quindi $(x-1)(x^2 - 4) > 0$ per $-2 < x < 1 \cup x > 2$.

Esempio 2

Consideriamo la disequazione $x^3 - 2x^2 + 1 < 0$

Scomponiamo utilizzando la regola di Ruffini:

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 \\ -x^3 \quad x^2 \\ \hline -x^2 \\ +x^2 \quad -x \\ \hline // \quad -x \quad +1 \\ +x \quad -1 \\ \hline // \quad // \end{array}$$

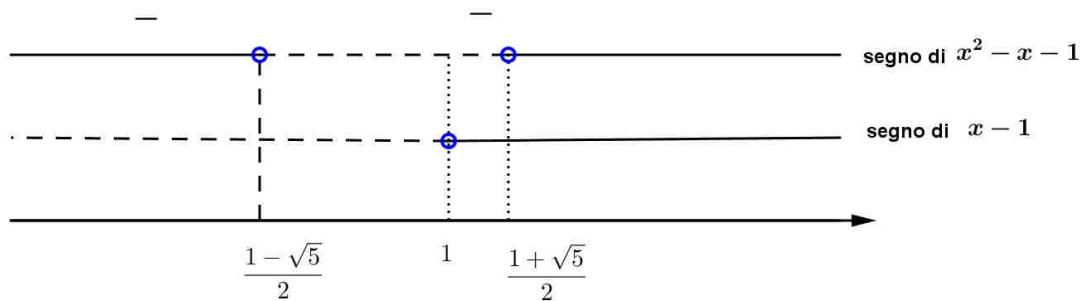
$$+1 \left| \begin{array}{c} x-1 \\ \hline x^2-x-1 \end{array} \right.$$

$$\text{Quindi } x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$$

Studiamo il segno dei singoli fattori (si imposta sempre il fattore >0)

$$\begin{aligned} x-1 > 0 &\rightarrow x > 1 \\ x^2 - x - 1 > 0 &\rightarrow (x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}) \quad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cup x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Riportiamo questi risultati nel “grafico dei segni”:



Poiché la disequazione è $x^3 - 2x^2 + 1 < 0$, la soluzione è

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cup 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esempio 3

Consideriamo la disequazione $x^3 - 1 > 0$

Sappiamo che possiamo scomporre il polinomio dato come differenza di cubi per cui

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Studiamo il segno dei singoli fattori

$$\begin{aligned} x - 1 &> 0 \rightarrow x > 1 \\ x^2 + x + 1 &> 0 \quad (a > 0, \Delta < 0) \rightarrow \forall x \in R \end{aligned}$$



Quindi $x^3 - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

Osservazione

Quando in un prodotto un fattore è positivo $\forall x \in R$, possiamo anche non considerarlo perché non fa cambiare il segno del prodotto.

Esempio 4

Consideriamo la disequazione $x^3 + 2x^2 \leq 0$

Basta mettere in evidenza:

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2) \leq 0$$

Poiché $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$ possiamo anche non considerarlo e studiare solo il segno di $(x + 2)$:

$$x^2(x + 2) \leq 0 \rightarrow (x + 2) \leq 0 \rightarrow x + 2 \leq 0 \rightarrow x \leq -2$$

Disequazioni fratte

Esempio

Risolviamo la seguente disequazione fratta:

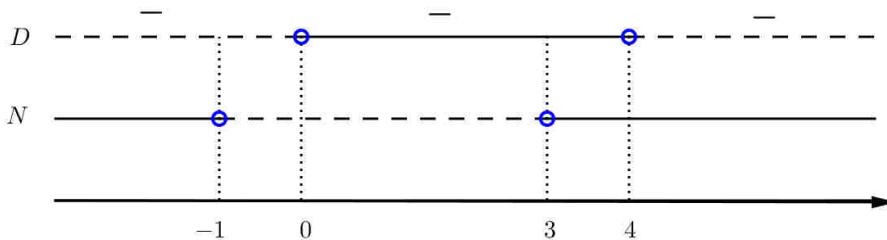
$$\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore:

$$N > 0 \quad x^2 - 2x - 3 > 0 \quad (x_{1,2} = 1 \pm 2) \rightarrow x < -1 \cup x > 3$$

$$D > 0 \quad 4x - x^2 > 0 \rightarrow x(4-x) > 0, \quad (x_1 = 0, x_2 = 4) \rightarrow 0 < x < 4$$

Grafico dei segni:



Poiché dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$ la soluzione sarà: $x < -1 \cup 0 < x < 3 \cup x > 4$.

NOTA 1

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} \leq 0$, dobbiamo considerare tra le soluzioni anche $x = -1$ e $x = 3$, ma non $x = 0$ e $x = 4$ perché per quei valori il denominatore si annulla (C.E. della frazione algebrica: $x \neq 0, x \neq 4$).

La soluzione risulta quindi:

$$x \leq -1 \cup 0 < x \leq 3 \cup x > 4$$

NOTA 2

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$, il procedimento sarebbe stato lo stesso solo che alla fine, dal grafico dei segni, avremmo considerato i valori di x che danno segno complessivo positivo.

La soluzione di $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$ risulta quindi:

$$-1 < x < 0 \cup 3 < x < 4$$

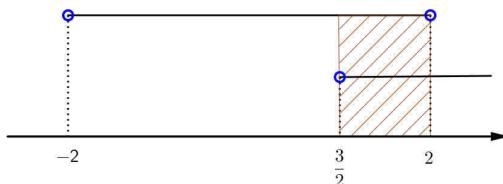
Sistemi di disequazioni

Esempio 1

Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$

Dobbiamo risolvere ciascuna disequazione del sistema ed intersecare le soluzioni per ottenere le soluzioni “comuni”.

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2} \\ x^2 - 4 < 0 \rightarrow -2 < x < 2 \end{cases}$$



quindi la soluzione del sistema è $\frac{3}{2} < x < 2$.

NOTA IMPORTANTE

Quando si intersecano le soluzioni delle disequazioni **non si deve mai aggiungere il tratteggio!**

Il tratteggio indica “segno negativo” nel grafico dei segni ma in questo caso **non stiamo facendo un grafico dei segni!**

Esempio 2

Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ \frac{x-3}{x^2 - 5x + 4} > 0 \end{cases}$

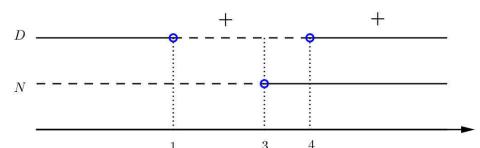
Per la prima disequazione abbiamo $x(x-2) < 0$, quindi $0 < x < 2$

Per la seconda disequazione dobbiamo studiare i segni di numeratore e denominatore:

$$N > 0 \quad x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

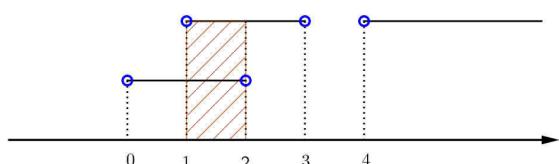
$$D > 0$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \quad (x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4) \rightarrow x < 1 \cup x > 4$$



Quindi la soluzione della seconda disequazione è: $1 < x < 3 \cup x > 4$.

A questo punto dobbiamo intersecare le soluzioni della prima e della seconda disequazione. Le soluzioni comuni sono:



Perciò la soluzione del sistema è: $1 < x < 2$.

Esempio 3

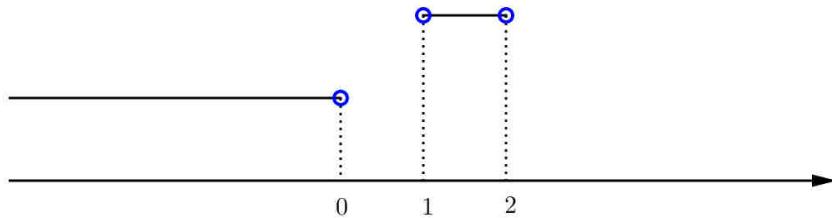
Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} \frac{x^2+1}{x} < 0 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$

Prima disequazione: $\frac{x^2+1}{x} < 0$

Osservo che $x^2 + 1 > 0 \forall x \in R$ e quindi la disequazione ha come soluzione $x < 0$.

Seconda disequazione: $x^2 - 3x + 2 < 0$ ($x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$) $\rightarrow 1 < x < 2$.

Grafico per individuare le soluzioni “comuni”

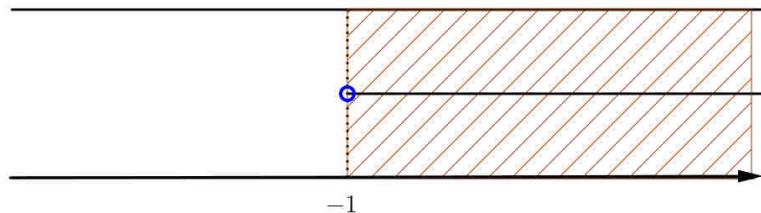


Quindi non ci sono soluzioni comuni: $S = \emptyset$ (l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto) per cui il sistema è “impossibile”.

Esempio 4

Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^3 + 1 > 0 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 + 1 > 0 \rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) > 0 \rightarrow x > -1 & (x^2 - x + 1 \text{ è sempre positivo}) \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \rightarrow (x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in R \end{cases}$$



Pertanto la soluzione è $x > -1$.

Esercizi

I) Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado

- 1) $x^2 + 3x + 2 > 0$ $[x < -2 \cup x > -1]$
- 2) $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \cup x > 2]$
- 3) $x^2 - 2x + 10 > 0$ $[\forall x \in R]$
- 4) $x^2 - 2x - 8 > 0$ $[x < -2 \cup x > 4]$
- 5) $x^2 + 4x + 5 < 0$ $[\text{nessuna soluzione reale}]$
- 6) $-x^2 + 3x - 2 > 0$ $[1 < x < 2]$
- 7) $x(x+3) \leq -2x$ $[-5 \leq x \leq 0]$
- 8) $-x^2 + 9 \leq 0$ $[x \leq -3 \cup x \geq 3]$
- 9) $x^2 + 10x + 34 < 0$ $[\text{nessuna soluzione reale}]$
- 10) $-x(x-4) < 3$ $[x < 1 \cup x > 3]$
- 11) $9x^2 + 4 > 0$ $[\forall x \in R]$
- 12) $81x^2 + 18x + 1 \leq 0$ $\left[x = -\frac{1}{9} \right]$
- 13) $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$ $[-4 \leq x \leq -2]$
- 14) $6x^2 + x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3} \right]$
- 15) $x^2 - 8x + 20 > 0$ $[\forall x \in R]$
- 16) $\frac{1}{2}(x-1) \leq x^2 - x$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \cup x \geq 1 \right]$
- 17) $9x^2 - 30x + 25 > 0$ $\left[\forall x \in R - \left\{ \frac{5}{3} \right\} \right]$
- 18) $-x^2 - 3 \geq 0$ $[\text{nessuna soluzione reale}]$

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- Disequazioni di secondo grado -

19) $x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{15}{8} > 0$

$$\left[x < -\frac{3}{4} \cup x > \frac{5}{2} \right]$$

20) $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 < 0$

$$\left[\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2} \right]$$

21) $x^2 - 6x + 1 > 0$

$$[x < 3 - 2\sqrt{2} \cup x > 3 + 2\sqrt{2}]$$

22) $3x^2 + 8x - 3 < 0$

$$\left[-3 < x < \frac{1}{3} \right]$$

23) $2x^2 - 4x - 1 > 0$

$$\left[x < \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \cup x > \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right]$$

24) $x^2 + 3x + 8 > 0$

$$[\forall x \in R]$$

25) $-x^2 + 3x - 10 > 0$

$$[\text{nessuna soluzione reale}]$$

26) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

$$\left[1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5} \right]$$

27) $-2x^2 + 4x + 6 \geq 0$

$$[-1 \leq x \leq 3]$$

28) $x^2 - 6x + 12 > 0$

$$[\forall x \in R]$$

29) $7x^2 - 12x - 4 > 0$

$$\left[x < -\frac{2}{7} \cup x > 2 \right]$$

30) $-12x^2 + 4x + 1 < 0$

$$\left[x < -\frac{1}{6} \cup x > \frac{1}{2} \right]$$

31) $4x^2 - 3x + 1 < 0$

$$[\text{nessuna soluzione reale}]$$

32) $3x^2 + x + 2 < 0$

$$[\text{nessuna soluzione reale}]$$

33) $x^2 - 6x + 9 > 0$

$$[\forall x \in R - \{3\}]$$

34) $-2x^2 + x + 1 > 0$

$$\left[-\frac{1}{2} < x < 1 \right]$$

35) $-5x^2 + 4x + 1 \leq 0$

$$\left[x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1 \right]$$

36) $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$

$$[\forall x \in R]$$

37) $8x^2 - 24x + 18 \leq 0$

$$\left[x = \frac{3}{2} \right]$$

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- Disequazioni di secondo grado -

38) $-27x^2 + 18x - 3 \geq 0$

$$\left[x = \frac{1}{3} \right]$$

39) $x^2 - 2x < 0$

$$[0 < x < 2]$$

40) $1 - x^2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$[-2 \leq x \leq 0]$$

41) $\frac{13+9x^2}{9} - \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{3}(4x+1) > 0$

$$[\forall x \in R]$$

42) $-6x + \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) - 9(-1)^2 < 0$

$$\left[x < -\frac{7}{2} \cup x > -\frac{5}{2} \right]$$

43) $\frac{1-x+x^2}{2} + \frac{x(3x+16)}{8} - \frac{3x^2+2}{4} \leq x^2 + \frac{5x-4}{3}$

$$\left[x \leq -\frac{4}{3} \cup x \geq \frac{8}{7} \right]$$

44) $\left(\frac{1}{3} + x\right)^2 - \frac{1}{3} \geq x - \frac{1}{4}$

$$[\forall x \in R]$$

45) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$$\left[x \leq -1 \cup x \geq \frac{1}{2} \right]$$

46) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \leq x - \frac{1}{4}$

$$\left[x = \frac{5}{6} \right]$$

47) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) > \frac{x}{12}(\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1)$

$$\left[x < -\frac{1}{3} \cup x > \frac{3}{4} \right]$$

48) $x^2 \geq \frac{1}{2}(x+1)$

$$\left[x < -\frac{1}{2} \cup x > 1 \right]$$

49) $\frac{1}{2}x\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2}x^2\right) + x - \frac{1}{6} < \frac{5}{6}x$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

50) $(x+1)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}(x+1) \leq 0$

$$\left[x = -\frac{3}{4} \right]$$

51) $2\left(5 - \frac{13}{8}x\right) > (x+2)^2$

$$\left[-8 < x < \frac{3}{4} \right]$$

52) $\sqrt{3}x^2 - x + \frac{1}{2} \geq x\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

$$\left[x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cup x \geq 1 \right]$$

II) Risolvere graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado

53) $x^2 - 1 > 0$ $[x < -1 \cup x > 1]$

54) $4 - x^2 < 0$ $[x < -2 \cup x > 2]$

55) $x^2 - 2x + 1 < 0$ *[nessuna soluzione reale]*

56) $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \cup x > 2]$

57) $-x^2 - 2x < 0$ $[x < -2 \cup x > 0]$

58) $x^2 - 4x + 6 > 0$ $[\forall x \in R]$

59) $x^2 + 4x + 3 < 0$ $[-3 < x < -1]$

60) $x^2 + 5 > 0$ $[\forall x \in R]$

61) $x^2 - 8x > 0$ $[x < 0 \cup x > 8]$

62) $-x^2 + 16 \leq 0$ $[x \leq -4 \cup x \geq 4]$

III) Risolvere le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo

63) $3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 < 0$ $\left[x < -\frac{2}{3} \right]$

64) $x^4 + x^3 < 0$ $[-1 < x < 0]$

65) $x^4 - 2x^2 \geq 0$ $[x < -1 \cup x > 1]$

66) $x^4 - 1 > 0$ $[x < -1 \cup x > 1]$

67) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 > 0$ $\left[-1 < x < \frac{1}{2} \cup x > 1 \right]$

68) $6x^3 + x^2 - 11x - 6 \geq 0$ $\left[-1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \cup x \geq \frac{3}{2} \right]$

69) $x^2 - 2x^3 \leq 0$ $\left[x \geq \frac{1}{2} \cup x = 0 \right]$

70) $x^3 + 1 > 0$ $[x > -1]$

IV) Risolvere le seguenti disequazioni fratte

- 71) $\frac{x}{9x^2 - 6x} > 0$ $\left[x > \frac{2}{3} \right]$
- 72) $\frac{x^2 + 4x - 5}{2x - 3} < 0$ $\left[x < -5 \cup 1 < x < \frac{3}{2} \right]$
- 73) $\frac{x^2 - 2x + 1}{6x} > 0$ $[x > 0, x \neq 1]$
- 74) $\frac{3}{x-2} + x + 2 \geq 0$ $[-1 \leq x \leq 1 \cup x > 2]$
- 75) $\frac{x^2 + 1}{2x^2} > 0$ $[\forall x \in R - \{0\}]$
- 76) $\frac{5-x^2}{5x+x^2} \leq 0$ $\left[x < -5 \cup -\sqrt{5} \leq x < 0 \cup x \geq \sqrt{5} \right]$
- 77) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 8} < 0$ $[-4 < x < 1]$
- 78) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 7x + 6} \geq 0$ $[x \leq -1 \cup 1 < x \leq 4 \cup x > 6]$
- 79) $\frac{(x^2 - x + 2)}{x-1} + 4 > 0$ $[x < 1 \cup 2 < x < 3]$
- 80) $\frac{6+x}{x} < \frac{2}{x+1}$ $[-3 < x < -2 \cup -1 < x < 0]$
- 81) $1 \leq \frac{14}{3(x+2)} + \frac{4}{3x-3}$ $[-2 < x \leq 0 \cup 1 < x \leq 5]$
- 82) $\frac{3}{x^2 - 2x + 1} + \frac{3+x}{x-1} > 0$ $[x < -2 \cup x > 0 \ e \ x \neq 1]$
- 83) $\frac{2x}{x^2 - 9} > \frac{1}{x-3} - \frac{x-2}{x^2 - 6x + 9}$ $\left[-3 < x < 1 \cup x > \frac{3}{2} \right]$
- 84) $\frac{81-x^4}{x^2 - 3x} \geq 0$ $[-3 \leq x < 0]$

V) Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

- 85)
$$\begin{cases} 2x - x^2 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x + 6 - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$[-1 < x < 0 \cup 2 < x < 3]$$
- 86)
$$\begin{cases} 3 + x^2 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \end{cases}$$

$$[3 < x < 4]$$
- 87)
$$\begin{cases} x^2 - 5x - 7 > 0 \\ -x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$[S = \emptyset]$$
- 88)
$$\begin{cases} 8x^2 + 6x - 9 > 0 \\ x^2 + 8x \leq 0 \end{cases}$$

$$\left[-8 \leq x < -\frac{3}{2} \right]$$
- 89)
$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 - 3x} \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$[x > 3]$$
- 90)
$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 7x - 3x^2 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3} \right]$$
- 91)
$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 < 0 \\ \frac{x+2}{2} \geq 1 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases}$$

$$[x > 7]$$
- 92)
$$\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 > 0 \\ x(x+2) < 8 \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases}$$

$$[-4 < x < -3]$$
- 93)
$$\begin{cases} 3 - x^2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ x + 4x^2 - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\left[-1 < x < -\frac{1}{2} \right]$$

VI) Risolvere i seguenti problemi

94) Problema svolto

Consideriamo un'equazione di secondo grado contenente un parametro reale k , per esempio

$$x^2 + (k+1)x + 2 - k = 0$$

Possiamo chiederci per quali valori del parametro k l'equazione ha soluzioni reali, cioè per quali valori di k si ha $\Delta \geq 0$.

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione:

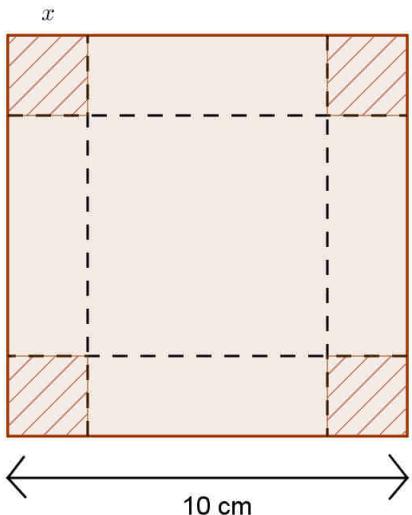
$$(k+1)^2 - 4(2-k) \geq 0 \rightarrow k^2 + 2k + 1 - 8 + 4k \geq 0 \rightarrow k^2 + 6k - 7 \geq 0$$

da cui si ricava ($k_{1,2} = -3 \pm 4 \rightarrow k_1 = -7, k_2 = 1$)

$$k \leq -7 \cup k \geq 1$$

95) Problema guidato

Da una lamiera quadrata di lato 10 cm vogliamo ritagliare quattro quadrati uguali di lato x (vedi figura) in modo che, ripiegando lungo i lati tratteggiati, si possa costruire una “scatola”. Per quali valori di x la scatola ha superficie maggiore di 84 cm²?



L'area della base della scatola risulta $(10-2x)^2$. Le quattro pareti della scatola hanno area $4(10-2x)x$, quindi:

$$(10-2x)^2 + 4(10-2x)x > 84 \rightarrow \dots$$

Poiché $x > 0$ perché....., allora la soluzione è

Oppure (più semplicemente): $100 - 4x^2 > 84$ da cui si ha

96) Per quali valori di m l'equazione $x^2 - 2(m-2)x + 9 = 0$ ha soluzioni reali?

$$[m \leq -1 \cup m \geq 5]$$

97) Per quali valori di k l'equazione $x^2 - kx + 2x - \frac{k^2 - 5k}{4} = 0$ ha due soluzioni reali distinte?

$$\left[k < \frac{1}{2} \cup k > 4 \right]$$

98) Per quali valori di a l'equazione $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ non ammette soluzioni reali?

$$[a < 1 \cup a > 6]$$

99) Problema svolto

Per quali valori di k l'equazione $(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0$ ha radici reali e positive?

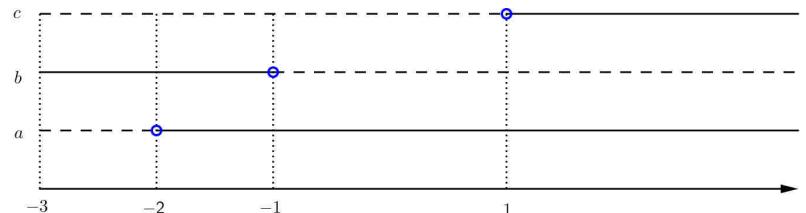
Innanzitutto calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 + (k+2)(1-k) = \dots = k+3$; quindi affinché si abbiano radici reali occorre che $\frac{\Delta}{4} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -3$.

Per il segno delle soluzioni possiamo studiare il segno dei coefficienti e ricordare che, per la regola di Cartesio, ad una variazione corrisponde una radice positiva.

$$a : (k+2) > 0 \Leftrightarrow k > -2$$

$$b : -2(k+1) > 0 \Leftrightarrow k < -1$$

$$c : -(1-k) > 0 \Leftrightarrow k > 1$$



Quindi ho due variazioni (vale a dire due soluzioni positive) per

$$-3 \leq k < -2 \cup k > 1$$

100) Determina per quali valori di k l'equazione $(k-5)x^2 - 4kx + k - 2 = 0$ ammette due soluzioni reali e negative.

$$[1 \leq k < 2]$$

101) Determina per quali valori di a l'equazione $(2a+3)x^2 - (a+4)x + 1 = 0$

a) ha soluzioni reali;

b) ha due soluzioni positive.

$$\left[\forall a \in R; a > -\frac{3}{2} \right]$$

102) Data l'equazione $x^2 - 2(k-2)x + k^2 = 0$, determinare per quali valori di k l'equazione:

- a) ammette soluzioni reali
- b) ammette soluzioni negative

$$[k \leq 1; \quad k \leq 1, k \neq 0]$$

103) Per quali valori di k le soluzioni di $(k-2)x^2 + (2k+1)x + 3 = 0$ sono discordi?

$$[k < 2]$$

104) Data l'equazione $(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0$, determinare per quali valori di k :

- a) ha soluzioni reali e distinte;
- b) ha soluzioni reali e positive;
- c) ha soluzioni reali e negative;
- d) ha soluzioni reali e discordi.

$$[a) k > -3, k \neq 2; b) -3 < k < -2 \cup k > 1; c) \exists k \in R; d) -2 < k < 1]$$

105) Un rettangolo ha l'area di 50 cm^2 . Quanto deve misurare la sua base b affinché il perimetro non superi i 30 cm ?

$$[5 \leq b \leq 10]$$

106) In un triangolo rettangolo la differenza tra i cateti è 1 cm . Quale deve essere la misura x del cateto minore in modo che l'area non superi i 15 cm^2 ?

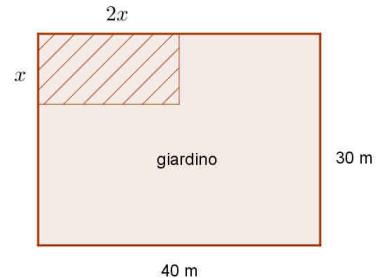
$$[0 < x \leq 5 \text{ cm}]$$

107) Considera due circonferenze concentriche di raggi 4 cm e $x \text{ cm}$ con $x < 4$. Come deve essere il raggio x perché l'area della circonferenza interna sia minore di $\frac{1}{4}$ dell'area della circonferenza di raggio 4 cm ?

$$[0 < x < 2 \text{ cm}]$$

108) In un appezzamento rettangolare di terreno $30 \text{ m} \times 40 \text{ m}$ si vuole costruire una casa come in figura qui sotto.

Quale deve essere x (in metri) in modo che il giardino abbia una superficie di almeno 1000 m^2 ?



$$[0 < x \leq 10 \text{ m}]$$

109) In un trapezio rettangolo la base minore è uguale all'altezza e la base maggiore supera di 2 cm la base minore. Quale deve essere la misura della base minore x perché l'area del trapezio non superi i 20 cm^2 ?

$$[0 < x \leq 4 \text{ cm}]$$

Complementi di algebra

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

Equazioni con valori assoluti

Esempi

1) $|x-1| = 2$

È chiaro che ci sono due casi:

$$x-1=2 \Rightarrow x=3 \text{ oppure } x-1=-2 \Rightarrow x=-1$$

2) $|x-1| = -2 ?$

In questo caso non c'è nessuna soluzione poiché il valore assoluto è sempre positivo o nullo e non può essere uguale a -2.

3) $|x-1| = 2x+3$

Ci sono due casi:

- se $x-1 \geq 0 \Rightarrow x-1 = 2x+3$
- se $x-1 < 0 \Rightarrow -(x-1) = 2x+3$

Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 = 2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) = 2x+3 \Rightarrow -x+1 = 2x+3 \Rightarrow 3x = -2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x = -4 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 1 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi poiché $x = -4$ non è maggiore o uguale a 1 la soluzione non è accettabile e abbiamo solo $x = -\frac{2}{3}$ come soluzione dell'equazione ($-\frac{2}{3} < 1$).

NOTA

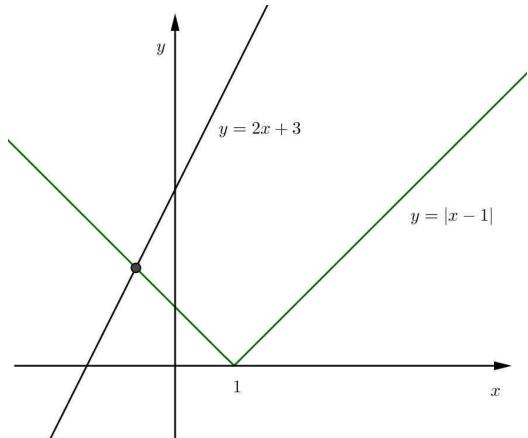
Possiamo anche risolvere graficamente l'equazione intersecando il grafico di $y = |x-1|$ con il grafico di $y = 2x+3$.

$$y = \begin{cases} x-1 & se \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$$

Si osserva che l'unica intersezione si trova tra
 $y = -x+1$ e $y = 2x+3$ e che

$$-x+1 = 2x+3 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

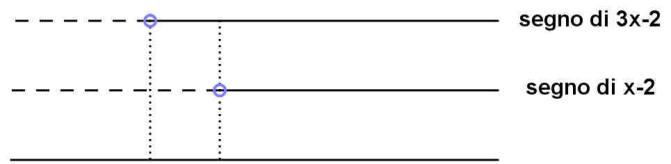
4) $|x-2| = |3x-2|$



Studiamo i segni di $x-2$ e $3x-2$:

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$



Quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{2}{3} \\ -(x-2) = -(3x-2) \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} < x \leq 2 \\ -(x-2) = 3x-2 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ x-2 = 3x-2 \end{array} \right.$$

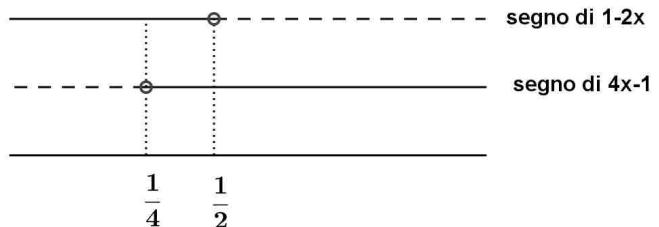
$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{2}{3} \\ x=0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} < x \leq 2 \\ x=1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ x=0 \quad non \quad accettabile \end{array} \right.$$

Quindi ho soluzioni: $x = 0$ e $x = 1$

5) $|4x-1| - |1-2x| = 4x-2$

$$4x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

$$1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{4} \\ -(4x-1) - (1-2x) = 4x-2 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 4x-1 - (1-2x) = 4x-2 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ 4x-1 + 1 - 2x = 4x-2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{3} \quad non \quad acc. \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ x = 0 \quad non \quad acc. \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Quindi ho solo la soluzione $x = 1$.

Disequazioni con valori assoluti

Esempi

1) $|x-2| > 1$

Dovrà essere $x-2 < -1 \cup x-2 > 1$ (ricorda che $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \cup x > a$)

Quindi avremo $x-2 < -1 \cup x-2 > 1$

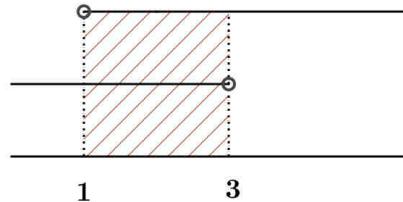
$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ x < 1 & \cup & x > 3 \end{array}$$

2) $|x-2| < 1$

Ricordando che $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ abbiamo: $-1 < x-2 < 1$

Quindi

$$\begin{cases} x-2 < 1 \\ x-2 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \end{cases}$$



Intersechiamo le soluzioni delle due disequazioni. Otteniamo alla fine: $1 < x < 3$

3) $|x-2| < -3$

È chiaro che non ci sono soluzioni poiché il valore assoluto è sempre maggiore o uguale a zero e non può essere minore di -3.

4) $|x-2| < 2x+1$

Dobbiamo distinguere due casi, a seconda del segno di $x-2$:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 < 2x+1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2 < 0 \\ -(x-2) < 2x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x > -3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2 < 0 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



$$x \geq 2 \cup \frac{1}{3} < x < 2 \rightarrow x > \frac{1}{3}$$

Nota: se nella disequazione sono presenti più valori assoluti si procede in modo analogo a quanto visto nel caso delle equazioni.

Esercizi

1. Risolvi le seguenti equazioni contenenti valori assoluti:

- a) $|3-x|=4$ [-1;7]
- b) $|1+x|=2x$ [1]
- c) $|3-4x|=x-1$ [impossibile]
- d) $5x-|1-2x|=x+1$ $\left[\frac{1}{3}\right]$
- e) $|x|=|3x+4|$ [-2;-1]
- f) $|2x-5|=x-2$ $[3;\frac{7}{3}]$
- g) $|3-x|-|7-2x|=4+2x$ [-8]
- h) $|3-2x|+|5-x|=7-2x$ $[\frac{5}{3}; 1]$

2. Risolvi le seguenti disequazioni di primo grado contenenti valori assoluti:

- a) $|5-2x|>4+x$ $[x < \frac{1}{3} \cup x > 9]$
- b) $|3+2x|<4x+1$ $[x > 1]$
- c) $|x-4|\leq 1+|x|$ $[x \geq \frac{3}{2}]$
- d) $|3-2x|-x<|x|$ $[x > \frac{3}{4}]$
- e) $|5-x|\geq 7-x$ $[x \geq 6]$
- f) $|x+2|\geq \frac{1}{2}x+3$ $[x \leq -\frac{10}{3} \cup x \geq 2]$
- g) $|4x+1|\leq |2x+1|$ $[-\frac{1}{3} \leq x \leq 0]$
- h) $|x+1|<|2x-4|$ $[x < 1 \cup x > 5]$

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Come per le equazioni di 2° grado, esistono formule risolutive anche per le equazioni di 3° e 4° grado ma non le studieremo perché sono troppo complesse, mentre si può dimostrare che non ci sono formule risolutive generali per le equazioni di grado superiore al quarto.

Noi consideriamo solo alcuni tipi particolari di equazioni di grado superiore al secondo che possono essere risolte attraverso la scomposizione in fattori.

Esempi

1) $x^3 - 2x^2 = 0$

Per risolvere questa equazione basta “raccogliere” x^2 :

$$x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow (\text{per la legge di annullamento del prodotto}) \quad x^2 = 0 \quad \cup \quad x-2 = 0$$

Quindi $x_1 = x_2 = 0 \quad \cup \quad x_3 = 2$

L’equazione data ha quindi 3 soluzioni reali di cui due coincidenti.

2) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$

Possiamo effettuare un raccoglimento parziale:

$$\begin{aligned} x^2(x-2) + 2(x-2) &= 0 \\ (x-2)(x^2 + 2) &= 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \quad \cup \quad x^2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Quindi avrò solo la soluzione reale $x_1 = 2$ poiché $x^2 + 2 = 0$ non ha soluzioni reali.

3) $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

Proviamo a cercare un valore di x che annulla $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Vediamo che $P(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ e quindi $x^3 - 2x^2 + 1$ è divisibile per $x-1$ ed effettuando la divisione abbiamo che

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$$

Allora le soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4) $4x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

Nota: ricordiamo che se il coefficiente del termine di grado massimo del polinomio $P(x)$ (a coefficienti interi) è uguale a 1, il valore che eventualmente annulla $P(x)$ va ricercato tra i divisori del termine noto (nel nostro esempio potevamo provare solo +1 e -1) ma se invece il coefficiente del termine di grado massimo è diverso da 1 si provano le frazioni del tipo

$$\frac{\text{divisore del termine noto}}{\text{divisore del termine di grado massimo}}$$

In questo caso il valore che eventualmente annulla il polinomio va ricercato tra $\frac{\text{divisori di 1}}{\text{divisori di 4}}$

Proviamo a sostituire $x = -\frac{1}{2}$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{8}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 1 \\ - 4x^3 - 2x^2 \\ \hline // - 4x^2 + 1 \\ + 4x^2 + 2x \\ \hline // + 2x + 1 \\ - 2x - 1 \\ \hline // // \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} \\ \hline 4x^2 - 4x + 2 \end{array} \right.$$

Quindi: $4x^3 - 2x^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 4x + 2)$

Poiché $4x^2 - 4x + 2 = 0$ non ha soluzioni reali ($\Delta < 0$), l'equazione ha solo la soluzione reale $x_1 = -\frac{1}{2}$

5) Equazioni “binomie”

- Come si risolve $x^4 = 32$?

Le soluzioni sono $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{32} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm2\sqrt[4]{2}$
poiché sia $\sqrt[4]{32}$ che $-\sqrt[4]{32}$ elevati alla quarta danno 32

E se avessi avuto $x^4 = -32$?
E' chiaro che in questo caso non c'è nessuna soluzione.

Quindi se ho $x^n = a$ con **n pari** avrò : **se** $a \geq 0$ due soluzioni opposte $\pm\sqrt[n]{a}$
se $a < 0$ nessuna soluzione reale

- Come si risolve $x^5 = 32$?

La soluzione è $x = \sqrt[5]{32}$ cioè $x = 2$ poiché $32 = 2^5$.

E se avessi avuto $x^5 = -32$?

In questo caso la soluzione è $x = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

Quindi se ho $x^n = a$ con **n dispari** avrò: $x = \sqrt[n]{a}$

6) Equazioni “trinomie”

- Considera l’equazione $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Se poniamo $x^2 = z$ e sostituiamo, otteniamo un’equazione di 2° grado

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 \quad z_2 = 3$$

Quindi

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$$

- Considera l’equazione $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

Se poniamo $x^3 = z$ abbiamo

$$z^2 - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 3 \quad z_2 = -1$$

Quindi

$$x^3 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{3}$$

$$x^3 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1$$

In generale se l’equazione si presenta nella forma

$a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$

$(n$ intero positivo, $a \neq 0$)

possiamo porre $\boxed{x^n = z}$ e risolvere l’equazione di 2° grado in z

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

risolvendo infine $x^n = z_1 \cup x^n = z_2$ (se z_1, z_2 esistono)

Nota: nel caso di $n = 2$ l’equazione viene anche chiamata “**biquadratica**”.

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

- 1) $x^4 - 4x^2 = 0$ [0; ± 2]
- 2) $x - x^5 = 0$ [0; ± 1]
- 3) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ [0; 3]
- 4) $4x^3 + 4x^2 - x = 1$ $\left[-1; \pm \frac{1}{2} \right]$
- 5) $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$ $\left[0; \frac{1}{2}; -\frac{4}{3} \right]$
- 6) $4x^3 + 3x^2 - 8x - 6 = 0$ $\left[\pm \sqrt{2}; -\frac{3}{4} \right]$
- 7) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ $\left[\pm \sqrt{3}; \frac{1}{3} \right]$
- 8) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$ $\left[-\frac{1}{3} \right]$
- 9) $x^3 - 7x + 6 = 0$ [-3; 1; 2]
- 10) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$ [1; 3]
- 11) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1 \right]$
- 12) $2x^3 - 5x - 6 = 0$ [2]
- 13) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$ $\left[-2; \frac{1}{3}; 1 \right]$
- 14) $\frac{1}{4}x^3 - 2 = 0$ [2]
- 15) $3x^3 + 375 = 0$ [-5]
- 16) $x^7 + 1 = 0$ [-1]

- 17) $(3x+5)^4 - 16 = 0$ $\left[-1; -\frac{7}{3}\right]$
- 18) $(x^4 - 1)^8 = 1$ $[0; \pm\sqrt[4]{2}]$
- 19) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ $[\pm 1; \pm 2]$
- 20) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ $[\pm 1]$
- 21) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ $[-3; 2]$
- 22) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ $[-1; 2]$
- 23) $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$ $[\pm 1; \pm\sqrt{3}]$
- 24) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $[\pm 2; \pm 3]$
- 25) $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$ $[\pm 4]$
- 26) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ [impossibile]
- 27) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{2}; \pm\sqrt{3}\right]$
- 28) $x^4 - 5x^2 - 24 = 0$ $[\pm 2\sqrt{2}]$
- 29) $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$ $[\pm 2\sqrt{2}; \pm 2]$
- 30) $\frac{1}{x^2} - 3 = \frac{1+x^2}{x^2 - 2}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right]$

SISTEMI DI SECONDO GRADO

di 2 equazioni in 2 incognite

Esempio 1

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Poiché il grado di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni del sistema, si tratta di un sistema di 2° grado. Per risolverlo possiamo ricavare un'incognita dall'equazione di 1° grado e sostituire nell'altra equazione.

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ (1-y)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow 1 - 2y + y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2y^2 - 2y = 0 \rightarrow y(y-1) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Abbiamo trovato quindi **due soluzioni** (1;0) (0;1)

Esempio 2

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow x = \sqrt{2} - y \quad \begin{cases} (\sqrt{2}-y)^2 + y^2 = 1 \\ x = \sqrt{2} - y \end{cases} \rightarrow 2 - 2\sqrt{2}y + y^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} 2y^2 - 2\sqrt{2}y + 1 = 0 \\ x_{1,2} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \rightarrow (\sqrt{2}y - 1)^2 = 0 \rightarrow y_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

In questo caso abbiamo solo **una soluzione** (è in realtà una soluzione “doppia”, cioè sono due soluzioni coincidenti)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ cioè } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

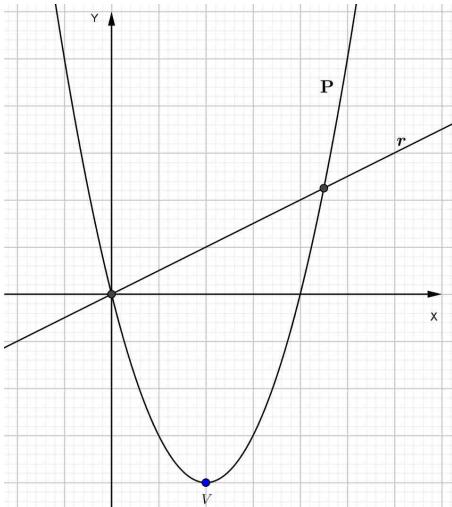
Esempio 3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow x = 2 - y \quad \begin{cases} (2-y)^2 + y^2 = 1 \\ x = 2 - y \end{cases} \rightarrow 4 - 4y + y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2y^2 - 4y + 3 = 0$$

Poiché $2y^2 - 4y + 3 = 0$ non ha soluzioni reali ($\Delta < 0$) il sistema **non ha soluzione**.

Problema: consideriamo la parabola $P : y = x^2 - 4x$ e la retta $r : y = \frac{1}{2}x$.

Come si determinano i loro punti di intersezione?



$$P : y = x^2 - 4x$$

$$r : y = \frac{1}{2}x$$

Disegniamo la parabola (completiamo il quadrato ed individuiamo il vertice...)

$$y = x^2 - 4x \rightarrow y + 4 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow y + 4 = (x - 2)^2 \quad V(2; -4)$$

Le sue intersezioni con l'asse x sono $(0;0)$ $(4;0)$

Disegniamo la retta $r : y = \frac{1}{2}x$

Si vede facilmente che un punto di intersezione tra P e r è $(0;0)$ ma come possiamo determinare le coordinate dell'altro punto di intersezione?

Basterà risolvere il sistema formato dall'equazione di P e di r

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Si tratta di un **sistema di 2° grado** (in cui l'incognita y è già “ricavata” e basterà sostituire nell'equazione di P)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x = 0 \rightarrow x(2x - 9) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = \frac{9}{2} \\ y_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Quindi i punti di intersezione tra P e r sono $O(0;0)$ $P\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{4}\right)$

se la retta r è tangente alla parabola P otteniamo solo una soluzione (in realtà due coincidenti) mentre se r è esterna alla parabola P non ci sono punti di intersezione e il sistema è impossibile. Anche se r è parallela all'asse y e P è con asse parallelo ad asse y, c'è un solo punto di intersezione.

Esercizi

I) Determina i punti di intersezione tra retta e parabola e disegnane il grafico

a)
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$
 [nessuna intersezione]

b)
$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -2x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$
 $[(1;4)]$

c)
$$\begin{cases} y = 5 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$
 $[(-2;5) ; (4;5)]$

d)
$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$
 $[(3;0) ; (-1;-8)]$

II) Risovi i seguenti sistemi di secondo grado in 2 incognite

a)
$$\begin{cases} x^2 + y = -8 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$$
 $[(1;-9)]$

b)
$$\begin{cases} 3x - y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$
 $[(1;1) ; (6;-4)]$

c)
$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 19 - xy = (x + y)^2 \end{cases}$$
 $[(-1;-3) ; (1;3)]$

d)
$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + xy + 4 = 0 \end{cases}$$
 $[(0;2) ; (2;4)]$

e)
$$\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
 $[(2;4) ; (4;2)]$

f)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
 $[(0;1) ; (1;0)]$

g)
$$\begin{cases} xy = \frac{3}{4} \\ x + y = 2 \end{cases}$$
 $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right) ; \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \right]$

III) Problemi risolubili con sistemi di secondo grado

1) Un rettangolo ha l'area di 12 m^2 e il perimetro di 14 m. Determina la lunghezza dei suoi lati.

[3m; 4m]

2) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 10 m e il perimetro 24 m. Determina la lunghezza dei cateti.

[6m; 8m]

3) In un triangolo rettangolo l'area è 96 cm^2 e la somma dei cateti è 28 cm. Determina la lunghezza dei cateti.

[12cm; 16cm]

4) In un cerchio di raggio 25 cm è inscritto un rettangolo il cui perimetro è 140 cm. Calcola l'area del rettangolo.

[1200cm²]

5) Un triangolo isoscele ha il perimetro di 16 cm e l'altezza di 4 cm. Determina la lunghezza dei lati.

[6cm; 5cm; 5cm]

6) In un rombo l'area misura $96 l^2$ e la somma delle diagonali è $28 l$. Determina il lato del rombo.

[10l]

7) Un rettangolo ha il perimetro che misura $28 r$. Sapendo che il raggio della circonferenza circoscritta misura $5r$, determina i lati del rettangolo.

[6r; 8r]

EQUAZIONI IRRAZIONALI

Un’equazione ad una incognita si dice irrazionale quando contiene radicali nel cui radicando compare l’incognita. Vediamo degli esempi.

Equazioni irrazionali con radici quadrate

$$1) \quad \sqrt{x+7} = x+1$$

Se eleviamo al quadrato entrambi i membri otteniamo:

$$\begin{aligned} x+7 &= (x+1)^2 \Rightarrow x+7 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -3 \cup x_2 = 2 \end{aligned}$$

Verifichiamo se le soluzioni trovate sono soluzioni dell’equazione di partenza.

$$x = -3 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{-3+7} = 2 & (\text{primo membro}) \\ -3+1 = -2 & (\text{secondo membro}) \end{cases}$$

$$x = 2 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2+7} = 3 & (\text{primo membro}) \\ 2+1 = 3 & (\text{secondo membro}) \end{cases}$$

Quindi solo $x = 2$ è soluzione dell’equazione irrazionale.

Nota

Elevando al quadrato entrambi i membri non si ottiene un’equazione equivalente, cioè con le stesse soluzioni dell’equazione di partenza.

Infatti se partiamo dall’equazione $A(x) = B(x)$ ed eleviamo al quadrato entrambi i membri abbiamo

$$A^2(x) = B^2(x) \Leftrightarrow [A(x) - B(x)] \cdot [A(x) + B(x)] = 0$$

e quindi le soluzioni di $A^2(x) = B^2(x)$ sono le soluzioni dell’equazione $A(x) - B(x) = 0$ (che è l’equazione di partenza $A(x) = B(x)$) ma anche quelle dell’equazione $A(x) + B(x) = 0$

Per decidere se le soluzioni sono accettabili dobbiamo necessariamente fare la verifica?

Il secondo membro, essendo uguale ad una radice quadrata, dovrà essere necessariamente positivo o nullo e quindi **basterà mettere la condizione**

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Quindi confrontando le soluzioni con questa condizione possiamo stabilire, anche senza eseguire la verifica con la sostituzione, che $x = -3$ non è accettabile.

$$2) \quad \sqrt{x+7} - 1 = x$$

Per prima cosa dobbiamo “isolare” il radicale, e quindi abbiamo

$$\sqrt{x+7} = x + 1$$

Quindi si procede come nell’esempio precedente.

$$3) \quad \sqrt{3x-2} = x$$

Risolviamo il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} 3x-2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo l’equazione $3x-2 = x^2$ otteniamo le soluzioni $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ che risultano entrambe accettabili (essendo verificata la condizione $x \geq 0$).

$$4) \quad \sqrt{3x-2} = 2$$

La **concordanza di segno tra i due membri** in questo caso è automaticamente soddisfatta poiché la radice quadrata (positiva) ha sempre lo stesso segno di 2 (numero positivo).

In conclusione in questo caso basta elevare al quadrato entrambi i membri e risolvere:

$$3x-2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$5) \quad \sqrt{3x-2} = -2$$

In questo caso non c’è concordanza di segno tra i due membri e quindi non c’è nessuna soluzione.

6) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3}$

In questo caso la concordanza del segno tra i due membri è automaticamente verificata ma **dobbiamo porre la condizione di esistenza dei due radicali.**

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$$

Elevando al quadrato entrambi i membri otteniamo

$$2x+1 = x-3 \Rightarrow x = -4$$

Quindi la soluzione non è accettabile e l'equazione non ha nessuna soluzione.

7) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 1$

Le condizioni da imporre sarebbero piuttosto complesse (esistenza dei radicali e la concordanza del segno dei due membri) e quindi in questo caso conviene semplicemente verificare con la sostituzione se le soluzioni ottenute elevando al quadrato entrambi i membri sono o meno accettabili.

$$x-2 = x+1 + 1 - 2 \cdot \sqrt{x+1} \rightarrow 2 \cdot \sqrt{x+1} = 4 \rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \rightarrow x+1 = 4 \rightarrow x = 3$$

Verifichiamo se $x=3$ è soluzione dell'equazione data:

$$x = 3 \rightarrow \sqrt{3-2} = 1 \quad (\text{primo membro})$$

$$x = 3 \rightarrow \sqrt{3+1} - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (\text{secondo membro})$$

Quindi $x = 3$ è soluzione dell'equazione data.

NOTA

Tutto quello che abbiamo detto per le radici quadrate vale per qualsiasi **radice di indice pari**, cioè per risolvere l'equazione irrazionale

$$\sqrt[2n]{A(x)} = B(x)$$

impostiamo il sistema :

$$\begin{cases} A(x) = B^{2n}(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$

Equazioni irrazionali con radici cubiche

Esempio

Consideriamo l'equazione

$$\sqrt[3]{x - x^3} = 1 - x$$

Eleviamo entrambi i membri al cubo in modo da eliminare la radice.

Abbiamo:

$$x - x^3 = (1 - x)^3 \Rightarrow \dots x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Dobbiamo verificare se le soluzioni sono accettabili?

No, perché **elevando al cubo entrambi i membri otteniamo un'equazione equivalente** (cioè con le stesse soluzioni).

Infatti:

$$A^3(x) = B^3(x) \Leftrightarrow A^3(x) - B^3(x) = 0 \Leftrightarrow [A(x) - B(x)] \cdot [A^2(x) + A(x) \cdot B(x) + B^2(x)] = 0$$

e per la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni sono date dalla soluzione di $A(x) - B(x) = 0$ (che è l'equazione iniziale) e di $A^2(x) + A(x) \cdot B(x) + B^2(x) = 0$ che ha come uniche soluzioni $A(x) = B(x) = 0$.

Dobbiamo porre condizioni di esistenza del radicale?

No, perché per la radice cubica il radicando può essere sia negativo che positivo o nullo.

In conclusione quindi **per risolvere l'equazione irrazionale data basta elevare al cubo entrambi i membri dell'equazione**.

NOTA

Questo vale in generale per tutte le equazioni con radicali di indice dispari del tipo

$$\sqrt[2n+1]{A(x)} = B(x)$$

che si risolvono semplicemente elevando a $2n+1$ entrambi i membri dell'equazione.

ESERCIZI

$$1) \quad x + \sqrt{22 - 3x} = 6 \quad [x = 2]$$

$$2) \quad \sqrt{4 - x} = x - 2 \quad [x = 3]$$

$$3) \quad \sqrt{3x - 2} = \frac{3x + 2}{5} \quad [x_1 = 1 \cup x_2 = 6]$$

$$4) \quad 2 \cdot \sqrt{1 - 5x} = 5 - x \quad [x_1 = -3 \cup x_2 = -7]$$

$$5) \quad \sqrt{x^2 - 25} + \sqrt{x^2 - 10x} = 0 \quad [\text{impossibile}]$$

$$6) \quad \sqrt[3]{x^3 - 6x + 2} = x \quad [x = \frac{1}{3}]$$

$$7) \quad \sqrt[5]{x^5 - x^2 + 4} = x \quad [x = \pm 2]$$

$$8) \quad \sqrt[3]{x + 5} = x - 1 \quad [x = 3]$$

$$9) \quad \sqrt[4]{1 - x} = x - 1 \quad [x = 1]$$

$$10) \quad \sqrt[3]{3x - 1} + \sqrt[3]{x + 7} = 0 \quad [x = -\frac{3}{2}]$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Disequazioni con radici quadrate (o di indice pari)

Esempi

1) $\sqrt{4-9x^2} > 2+x$

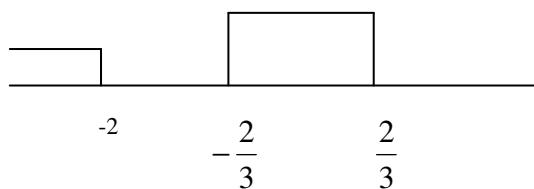
Osserviamo che si richiede che $2+x$ sia minore di una radice quadrata (che è positiva) e quindi potrebbe essere sia negativo che positivo.

- Se $2+x < 0$ la diseguaglianza sarà sicuramente verificata purché la radice quadrata $\sqrt{4-9x^2}$ esista cioè quando $4-9x^2 \geq 0$.
- Se $2+x \geq 0$ dobbiamo elevare al quadrato entrambi i membri (ma in questo caso non importa porre $4-9x^2 \geq 0$ poiché se deve essere $4-9x^2 > (2+x)^2$ allora $4-9x^2$ è sicuramente positivo).

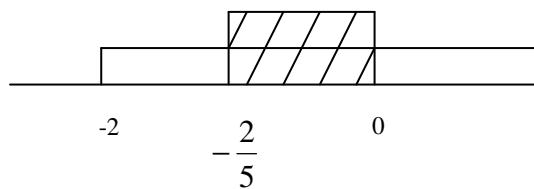
Quindi per risolvere questa disequazione dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} 2+x < 0 \\ 4-9x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 4-9x^2 > (2+x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -2 \\ -\frac{2}{5} < x < 0 \end{cases}$$



nessuna soluzione



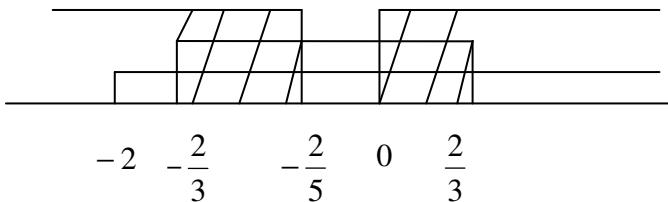
$$\cup \quad -\frac{2}{5} < x < 0$$

Quindi la soluzione della disequazione è: $-\frac{2}{5} < x < 0$

$$2) \quad \sqrt{4-9x^2} < 2+x$$

In questo caso $2+x$ dovendo essere maggiore di una radice quadrata (positiva, quando esiste) dovrà essere positivo e quindi abbiamo:

$$\begin{cases} 2+x > 0 \\ 4-9x^2 \geq 0 \\ 4-9x^2 < (2+x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x < -\frac{2}{5} \cup x > 0 \end{cases}$$



Quindi la soluzione della disequazione è: $-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{2}{5} \cup 0 < x \leq \frac{2}{3}$

$$3) \quad \sqrt{x^2 - 1} > 2$$

In questo caso dobbiamo confrontare la radice quadrata con un numero.

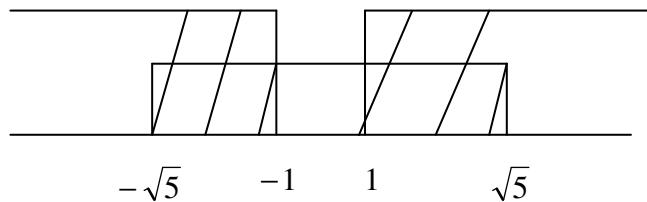
Poiché il numero è positivo dobbiamo elevare semplicemente al quadrato entrambi i membri della disequazione (è inutile porre anche $x^2 - 1 \geq 0$ poiché $x^2 - 1 > 4$ è una richiesta più forte):

$$x^2 - 1 > 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\sqrt{5} \cup x > \sqrt{5}$$

$$4) \quad \sqrt{x^2 - 1} < 2$$

In questo caso oltre ad elevare al quadrato è necessario anche mettere la condizione di esistenza del radicando:

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 4 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \\ x \leq -1 \cup x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{5} < x \leq -1 \cup 1 \leq x < \sqrt{5}$$



Nota: quello che abbiamo detto per le disequazioni con radici quadrate vale in generale quando abbiamo radici con indice pari.

Disequazioni con radici cubiche (o di indice dispari)

Analogamente a quanto visto per le equazioni irrazionali, anche nel caso delle disequazioni con radici cubiche (o in generale di indice dispari), quando ci siamo riportati alla forma

$$\sqrt[3]{A(x)} > B(x) \text{ oppure } \sqrt[3]{A(x)} < B(x)$$

possiamo semplicemente elevare al cubo entrambi i membri.

Esempio

Consideriamo la seguente disequazione irrazionale

$$\boxed{\sqrt[3]{x} < x}$$

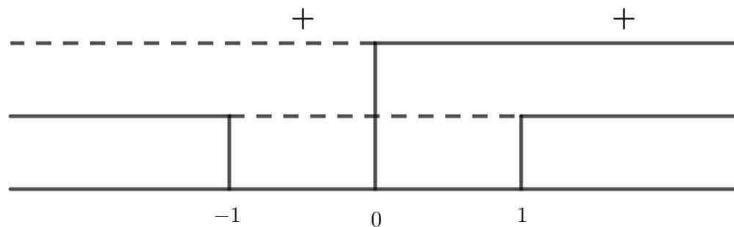
Eleviamo al cubo entrambi i membri e svolgiamo i calcoli:

$$x < x^3 \rightarrow x^3 - x > 0 \rightarrow x(x^2 - 1) > 0$$

Per risolvere l'ultima disequazione dobbiamo studiare il segno dei singoli fattori del prodotto:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ x^2 - 1 > 0 &\Leftrightarrow x < -1 \cup x > 1 \end{aligned}$$

Riportiamo le soluzioni in un grafico dei segni:



Abbiamo in conclusione che le soluzioni della disequazione sono:

$$-1 < x < 0 \cup x > 1$$

Esercizi

- 1) $\sqrt{3-x+x^2} > x$ [$x < 3$]
- 2) $x+6 > \sqrt{4x-x^2}$ [$0 \leq x \leq 4$]
- 3) $\sqrt{x^2-x} > x$ [$x < 0$]
- 4) $x+\sqrt{x^2+4x+8} > 0$ [$x > -2$]
- 5) $\sqrt{3x-2} > 4$ [$x > 6$]
- 6) $\sqrt{1-x} + 2 > 0$ [$x \leq 1$]
- 7) $\sqrt{x^2-x-6} < \frac{1}{2}x+1$ [$3 \leq x < \frac{14}{3}$]
- 8) $\sqrt{4x^2-4x-8} > x+1$ [$x < -1 \cup x > 3$]
- 9) $\sqrt{x^2+1} < -2x-1$ [$x < -\frac{4}{3}$]
- 10) $\sqrt{x+9} + \sqrt{9x+x^2} > 0$ [$x \geq 0$]
- 11) $3x+\sqrt{6x^2-6} < 4 \cdot (x-1)$ [*impossibile*]
- 12) $\sqrt{16-x^2} - x \geq 4$ [$-4 \leq x \leq 0$]
- 13) $2 \leq x + \sqrt{x^2-1}$ [$x \geq \frac{5}{4}$]
- 14) $\sqrt[3]{x-1} > 2$ [$x > 9$]
- 15) $\sqrt[3]{x-2} < -1$ [$x < 1$]

Introduzione al calcolo delle probabilità



Eventi certi, impossibili, aleatori

Supponiamo di lanciare un dado e consideriamo i seguenti “eventi”:

$$E_1 = \{ \text{esce un numero compreso tra 1 e 6 (estremi inclusi)} \}$$

$$E_2 = \{ \text{esce il numero 7} \}$$

$$E_3 = \{ \text{esce il numero 2} \}$$

L’evento E_1 è “certo”: infatti lanciando un dado possono uscire i numeri da 1 a 6.
L’evento E_2 è “impossibile”.

L’evento E_3 è possibile ma non è certo e viene detto “aleatorio”.

Il termine “aleatorio” deriva da “alea” che in latino significa proprio “dado” e per gli antichi il lancio del dado era il tipico esempio di situazione casuale.

Nota

Il calcolo delle probabilità è nato proprio in relazione ai giochi di dadi e vedremo come Galileo fu interpellato da alcuni giocatori del “gioco dei tre dadi”.

È chiaro però che non tutti gli eventi aleatori hanno la stessa “probabilità” di accadere (di verificarsi). Se per esempio considero $E_4 = \{ \text{esce un numero pari} \}$, scommettereste su $E_3 = \{ \text{esce il numero 2} \}$ o su E_4 ?

È chiaro che l’evento E_4 ha più probabilità di verificarsi di E_3 : infatti se consideriamo che i casi possibili nel caso del lancio di un dado non truccato sono l’uscita dei numeri 1,2,3,4,5,6 vediamo che perché accada E_3 ho solo un caso favorevole {2} mentre perché si verifichi E_4 ho i tre casi favorevoli {2} {4} {6}.

Ma come è definita la probabilità di un evento E?

Probabilità di un evento E

Definizione “classica”

La probabilità (classica) di un evento E è data dal *rappporto tra il numero dei casi favorevoli ad E e il numero dei casi possibili (tutti ugualmente possibili)*

$$p(E) = \frac{n^{\circ} \text{ casi favorevoli}}{n^{\circ} \text{ casi possibili}}$$

Nel nostro esempio

$$\begin{aligned} p(E_1) &= 1 && \text{(evento certo)} \\ p(E_2) &= 0 && \text{(evento impossibile)} \\ p(E_3) &= \frac{1}{6} \\ p(E_4) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

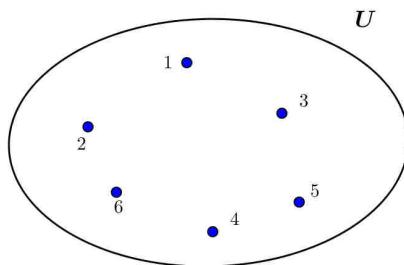
Osserviamo che essendo n° casi favorevoli $\leq n^{\circ}$ casi possibili si ha che la probabilità di un evento E è un numero compreso tra 0 e 1

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Eventi ed insiemi

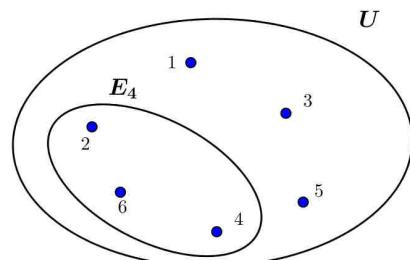
Possiamo rappresentare gli eventi utilizzando gli insiemi.

Considerando sempre il lancio di un dado, l’insieme di tutti gli eventi “elementari” (chiamato insieme universo U) sarà:



L’evento E_4 sarà rappresentato da un sottoinsieme di U

$$E_4 = \{2, 4, 6\}$$



Poiché $E_1 \equiv U$ si ha che E_1 è l’evento certo;
 $E_2 = \emptyset$ si ha che E_2 è l’evento impossibile.

Definizione “frequentista”

La definizione che abbiamo dato della probabilità di un evento viene detta definizione “classica” e presuppone che gli eventi “elementari” siano tutti ugualmente possibili cioè, per esempio nel lancio di un dado, che il dado non sia truccato.

Ma se il dado fosse truccato?

(mettendo una massa attaccata ad una faccia sarà più probabile l’uscita della faccia opposta rispetto alle altre).

In questo caso potrei lanciare il dado moltissime volte e annotare il numero di volte che è uscita ciascuna faccia.

Esempio

1	2	3	4	5	6
52	10	12	9	13	4
numero volte che è uscito in 100 lanci					
frequenza relativa f dell’uscita del numero	$\frac{52}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{13}{100}$

Potrei in questo caso considerare la frequenza relativa $f(E)$ come una valutazione della probabilità dell’evento E.

Si può verificare che al crescere del numero N delle prove (nel nostro caso lanci del dado) il valore $f(E)$ tende a stabilizzarsi intorno ad un valore ben preciso e definiamo **probabilità statistica o frequentista** la frequenza relativa dell’evento calcolata effettuando un numero N molto grande di prove (nelle stesse condizioni).

Naturalmente occorre supporre che sia possibile fare molte prove tutte nelle stesse condizioni e questo a volte non è possibile.

Qual è per esempio la probabilità che oggi piova?

Ottiene qual è la probabilità che un dato cavallo vinca una data corsa?

In relazione alle informazioni che abbiamo (possiamo per esempio aver consultato le previsioni metereologiche oppure conoscere le precedenti prestazioni del cavallo) esprimeremo la probabilità di un evento come “**grado di fiducia**” sul verificarsi di quell’evento.

Vediamo meglio cosa si intende.

Definizione “soggettiva”
Misura del “grado di fiducia”

La probabilità soggettiva di un evento E è data dal *rapporto tra la somma r che sono disposto a “rischiare” su E (che quindi perdo se l’evento non si verifica) per vincere una somma s = r+g (g rappresenta il guadagno) nel caso che E si verifichi.*

$$p(E) = \frac{r}{s} \quad \text{con} \quad s = r + g$$

Nota

Anche in questo caso la probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1.

Se sono certo che E non può verificarsi non rischierò niente ($r=0$) e quindi la probabilità associata risulta nulla.

D’altra parte è chiaro che mi aspetti di non guadagnare niente ($g=0$) scommettendo su un evento certo e in questo caso la probabilità associata a questo evento risulterà 1.

Esempio

Quando, nelle corse dei cavalli, gioco un cavallo 5 a 1 vuol dire che il guadagno sarà 5 volte la somma che rischio (se rischio 1 euro guadagnerò 5 euro) e quindi vuol dire che valuto la probabilità di vittoria di quel cavallo:

$$p(\text{vittoria} \text{ cavallo}) = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

Osservazione

Naturalmente se scommetto su un evento E di cui posso calcolare la probabilità secondo la definizione classica, il gioco sarà “equo” se il valore $\frac{r}{s}$ corrisponde alla valutazione “classica”.

Se per esempio scommettiamo su $E = \{ \text{esce il numero } 6 \text{ nel lancio di un dado} \}$, se rischiamo $r=1$ euro dovrà essere $s = 6$ euro (cioè $g = 5$ euro) poiché la probabilità dell’evento E risulta, secondo la valutazione classica, $\frac{1}{6}$.

Negli esempi seguenti tratteremo eventi di cui si può valutare la probabilità secondo la definizione classica.

Evento contrario

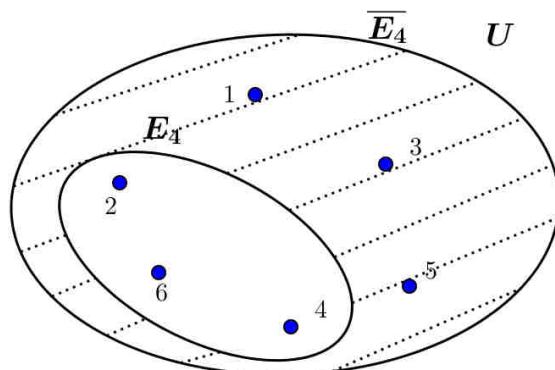
Se E è un evento indicheremo con \bar{E} l'evento contrario.

Per esempio se considero

$$E_4 = \{ \text{ nel lancio di un dado esce un numero pari } \}$$

avremo $\bar{E}_4 = \{ \text{ nel lancio di un dado non esce un numero pari } \}$

Da un punto di vista insiemistico l'evento contrario \bar{E} è rappresentato dall'insieme complementare di E (rispetto all'insieme universo U)



È chiaro quindi che $p(\bar{E}) = \frac{n^{\circ} \text{ casi possibili} - n^{\circ} \text{ casi favorevoli ad } E}{n^{\circ} \text{ casi possibili}} = 1 - p(E)$

Problema *Lancio di due dadi*

Consideriamo il lancio di due dadi (non truccati): possiamo avere

$$\begin{array}{lll}
 (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\
 (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 (6,1) & (6,2) & \dots & (6,6)
 \end{array}$$



L'evento (1,2) è diverso dall'evento (2,1): per non confondere i due dadi possiamo pensare che siano di colori diversi, quindi l'uscita della coppia 1-2 può avvenire in due modi diversi.

Ci sono quindi 36 eventi elementari. Qual è la probabilità di $E_1 = \{$ nel lancio di due dadi esce il doppio 6 } ?

È chiaro che $p(E_1) = \frac{1}{36}$ (se facessi una scommessa lo giocherei 35 a 1).

Qual è la probabilità di avere una certa somma S ?

- $p(S = 2) = ?$

Per avere somma 2 devo avere (1,1) e questo è l'unico caso favorevole.

Quindi $p(S = 2) = \frac{1}{36}$

- $p(S = 3) = ?$

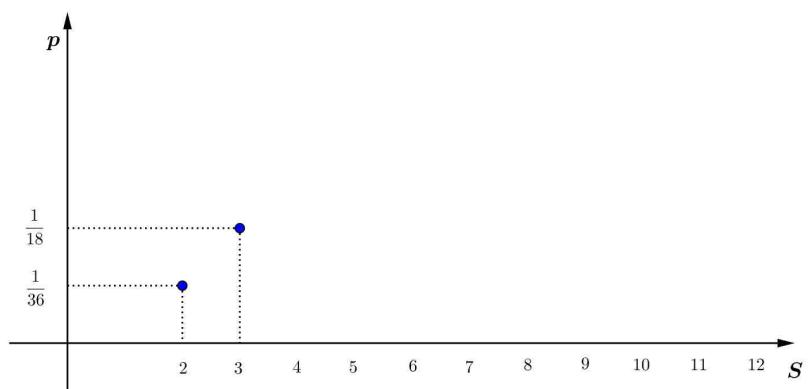
Posso ottenere somma 3 in due casi: (1,2) (2,1) e quindi

$$p(S = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

ecc...

Esercizio: qual è la somma S più probabile?

Prova anche a fare un “grafico” in cui sull’asse delle ascisse metti i valori di S che si possono ottenere e sull’asse delle ordinate le corrispondenti probabilità.



Questo grafico rappresenta la “distribuzione di probabilità” della somma S.

Esercizio: nella storia del calcolo delle probabilità è curioso ricordare che dei giocatori incalliti chiesero a Galileo su quale somma convenisse scommettere **lanciando tre dadi**. Tu cosa consiglieresti?

ESERCIZI

1) Lanciando due volte una moneta, qual è la probabilità che esca per due volte testa?

$$\left[\frac{1}{4} \right]$$

2) Nel gioco del “pari-dispari” (che consiste nell’aprire alcune dita della mano e sommare i punti dei due giocatori) è indifferente scommettere sul pari o sul dispari ?

[solo se si decide che si può “gettare” il pugno chiuso]

3) Lanciando tre volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere almeno una volta croce? (puoi pensare che sia l’evento contrario di “esce sempre testa”...)

$$\left[\frac{7}{8} \right]$$

4) Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane qual è la probabilità che:

- sia un asso; $\left[\frac{1}{10} \right]$
- sia una carta di picche; $\left[\frac{1}{4} \right]$
- sia una figura; $\left[\frac{3}{10} \right]$
- sia il “settebello”. $\left[\frac{1}{40} \right]$

5) Lanciando due dadi qual è la probabilità che:

- escano numeri uguali $\left[\frac{1}{6} \right]$
- escano due numeri pari $\left[\frac{1}{4} \right]$
- escano due numeri primi $\left[\frac{1}{4} \right]$

**TEST
PROBABILITY**

1) Tom has 50 model cars. He has 10 blue cars and 19 red cars. He has no yellow cars.

a) Tom chooses a car at random. Write down the probability that it is

- (i) red,
- (ii) red or blue,
- (iii) not blue,
- (iv) yellow.

b) The probability that a car is damaged is 1. How many cars are damaged?

2) The probability that FC Victoria wins the cup is 0.18. Work out the probability that they do **not** win the cup.

3) A whole number is picked at random from the numbers 1 to 200, inclusive.

a) What is the probability that is **more than** 44? Give your answer as

- (i) a fraction in its lowest terms,
- (ii) a decimal

b) What is the probability that the number is **at least** 180?

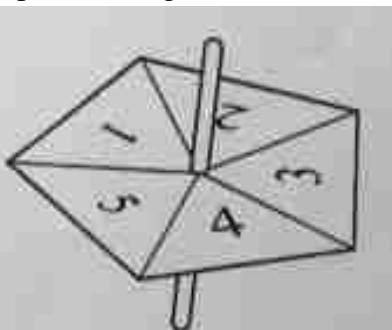
4) After training, the shirts are washed. There are 5 red, 3 blue and 6 green shirts. One shirt is taken from the washing machine at random. Find the probability that is

- a) red
- b) blue or green
- c) white

5) Celine buys a bag of 24 tulip bulbs. There are 8 red bulbs and 5 white bulbs. All of the other bulbs are yellow. Celine chooses a bulb at random from the bag.

- a) Write down the probability that the bulb is red or white.
- b) Write down the probability that the bulb is yellow.

6) Jonah uses a fair five-sided spinner in a game.



a) What is the probability that the spinner lands on

- (i) 3,
- (ii) an even number,
- (iii) a number greater than 5?

b) Jonah spins the spinner 25 times and records the results in a frequency table.

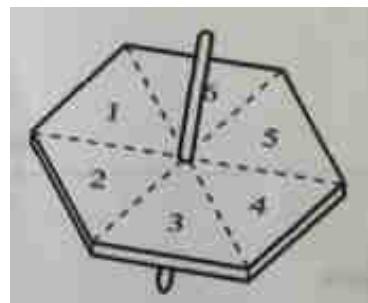
Number that the spinner lands on	Frequency
1	8
2	4
3	5
4	
5	2

- (i) Fill in the missing number.
- (ii) Write down the mode.

7) The diagram shows a six-sided spinner.

a) Amy spins a **biased** spinner and the probability she gets a two is $\frac{5}{36}$. Find the probability she

- (i) does not get a two,
- (ii) gets a seven,
- (iii) gets a number on the spinner that is less than 7.



b) Joel spins his blue spinner 99 times and gets a two 17 times.

Write down the relative frequency of getting a two with Joel's spinner.

c) The relative frequency of getting a two with Piero's spinner is $\frac{21}{102}$.

Which of the three spinners, Amy's, Joel's or Piero's, is most likely to give a two?

8) A bag contains 5 black beads, 7 white beads and 4 blue beads.

a) Mohini picks a bead at random. What is the probability that it is.

- (i) black,
- (ii) not black?

b) One of the 16 beads is lost. The probability that Mohini picks a black bead is now $\frac{1}{3}$.

What can you say about the colour of the lost bead?

9) a) The diagram shows 5 discs. One disc is chosen at random.

- (i) Which is most likely to be chosen?
- (ii) What is the probability that the number on the disc is even?
- (iii) What is the probability that the number on the disc is even and a factor of 20?

4
4
5
6
8

b) A disc is chosen at random from the discs with even numbers. What is the probability that the number on the disc is a factor of 20?

GEOMETRIA EUCLIDEA

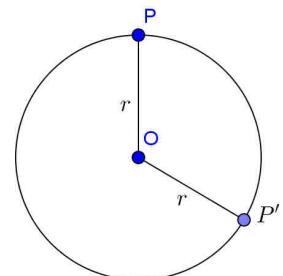
Circonferenza e cerchio



Definizione

Una **circonferenza** di centro O e raggio r è l'insieme dei punti del piano che hanno da O distanza uguale a r .

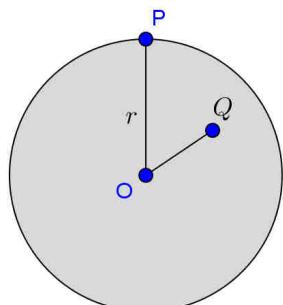
I segmenti che congiungono il centro O con i punti della circonferenza hanno tutti la stessa lunghezza e sono detti raggi della circonferenza.



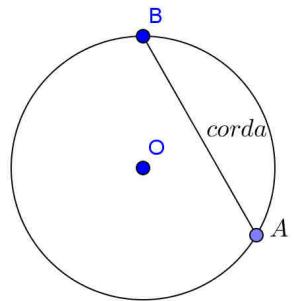
Definizione

Un **cerchio** di centro O e raggio r è l'insieme dei punti del piano la cui distanza da O è minore o uguale a r .

La circonferenza di centro O e raggio r è quindi il “contorno” del cerchio di centro O e raggio r e appartiene al cerchio.

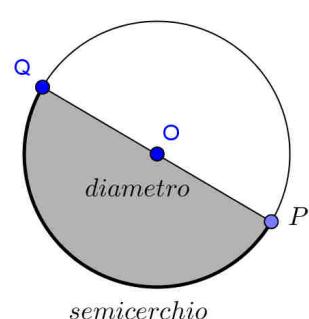
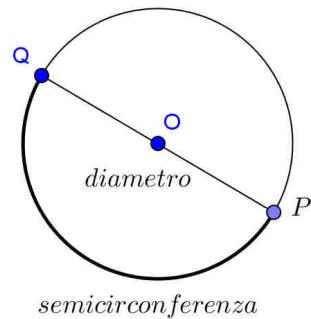
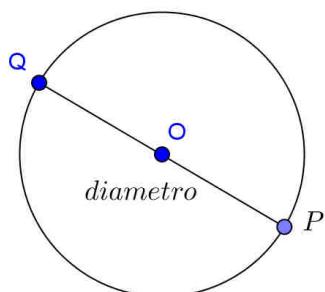


Si chiama **corda** il segmento che unisce due punti A e B di una circonferenza: A e B si dicono estremi della corda.



Si chiama **diametro** ogni corda passante per il centro della circonferenza.

Ogni diametro divide la circonferenza e il cerchio in due parti dette rispettivamente semicirconferenze e semicerchi.



Dimostriamo subito un importante teorema:

Teorema: *per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza*

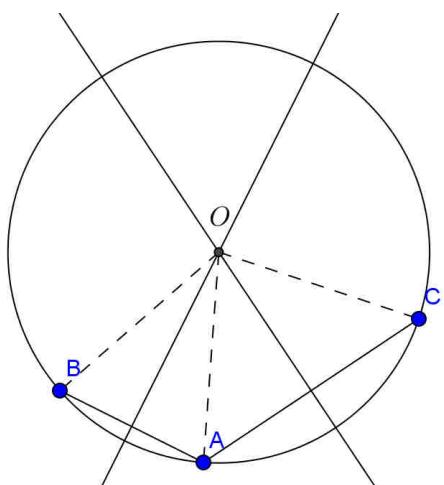
Dimostrazione

Consideriamo tre punti non allineati A, B, C: uniamo A con B e tracciamo l'asse del segmento AB; uniamo A con C e tracciamo l'asse del segmento AC.

Sia O il punto di intersezione dei due assi: poiché O appartiene all'asse di AB si ha $OA \cong OB$, ma poiché appartiene anche all'asse di AC si ha anche $OA \cong OC$.

Quindi per O è equidistante dai tre punti e quindi la circonferenza di centro O e raggio OA passa anche per B e C.

Questa è anche l'unica circonferenza passante per i tre punti dal momento che l'intersezione dei due assi è solo O.



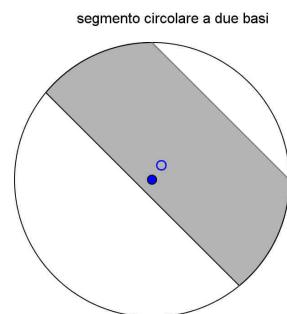
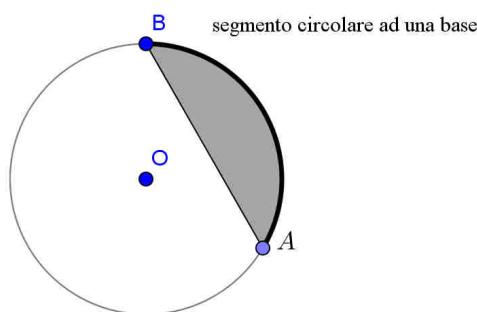
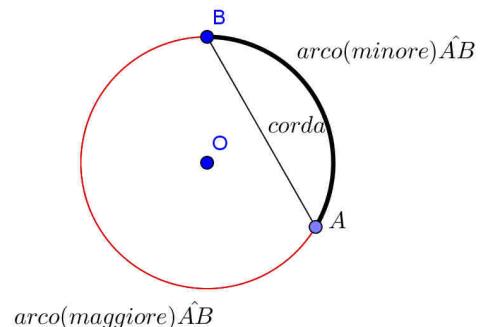
Parti della circonferenza e del cerchio

Diamo qualche altra definizione.

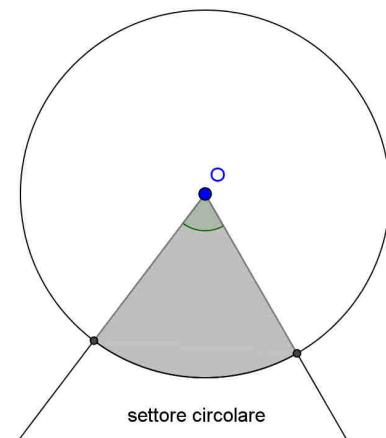
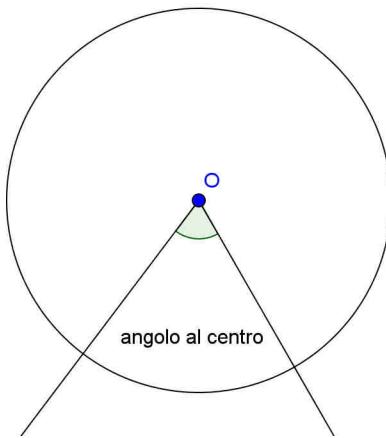
Le due parti della circonferenza individuate da una corda si dicono **archi**.

La parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco corrispondente si chiama **segmento circolare ad una base**;

la parte di cerchio compresa tra due corde parallele e i due archi che hanno per estremi gli estremi delle due corde si chiama **segmento circolare a due basi**



Un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza si chiama **angolo al centro**. L'intersezione tra un cerchio e un suo angolo al centro si chiama **settore circolare**.

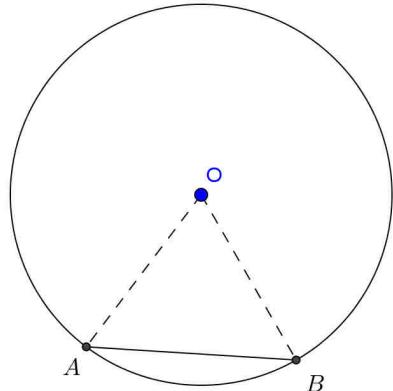


SCHEMA 1

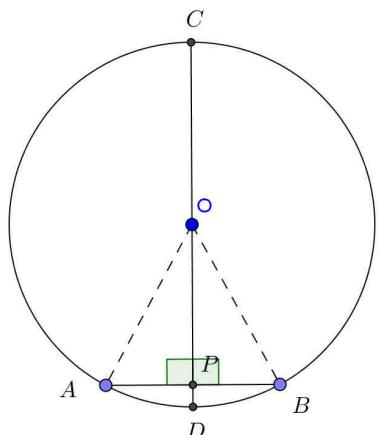
Proprietà delle corde di una circonferenza

1) Il diametro è la corda di lunghezza massima

Dimostrazione: considera una corda AB che non sia un diametro e congiungi A e B con il centro O della circonferenza. Se consideri il triangolo AOB, ricordando che in un triangolo ogni lato è della somma degli altri due, abbiamo che e quindi $\overline{AB} < \text{diametro}$.



2) Il diametro perpendicolare ad una corda passa per il suo punto medio e viceversa.

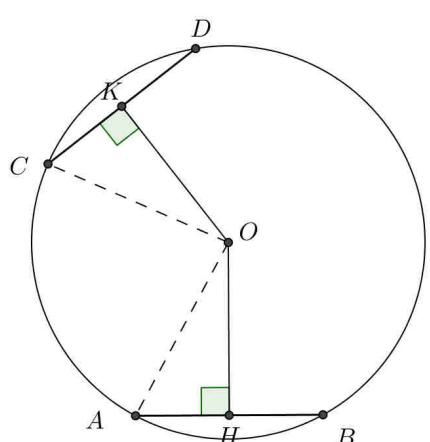


Dimostrazione: chiamiamo P il punto di intersezione tra il diametro CD perpendicolare alla corda AB e la corda AB. Il triangolo AOB è e quindi l'altezza OP è anche

In conclusione $AP \cong PB$ cioè P è il punto medio di AB.

Analogamente se un diametro passa per il punto medio di una corda.....

3) Due corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro della circonferenza e viceversa



Dimostrazione: consideriamo AB e CD due corde congruenti della stessa circonferenza e tracciamo le distanze OH e OK. Tracciando i raggi AO, CO otteniamo due triangoli rettangoli che risultano..... poiché hanno:

.....
 Quindi anche $OH \cong OK$ cioè le due corde hanno la stessa distanza dal centro.

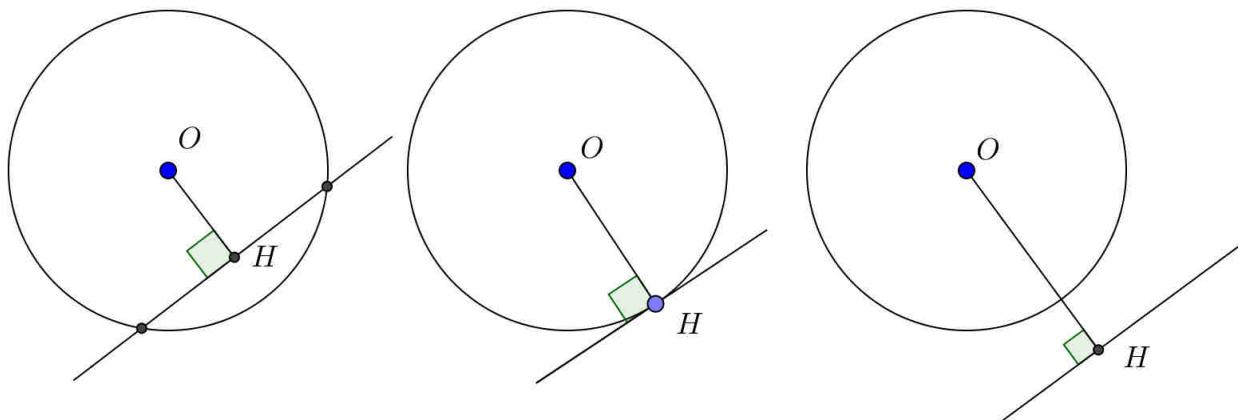
In modo analogo si dimostra che se due corde hanno la stessa distanza dal centro sono congruenti.

SCHEMA 2

Retta e circonferenza

Definizione

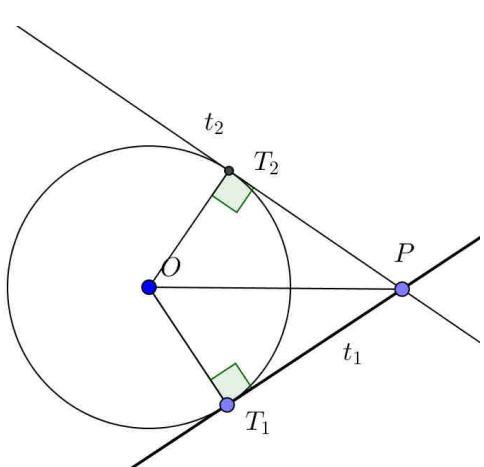
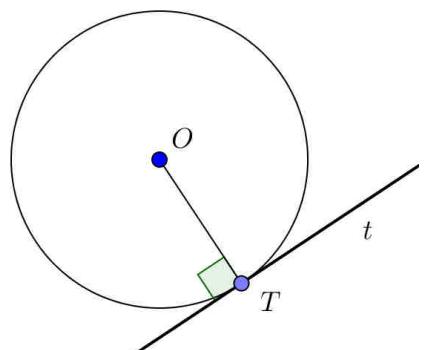
Se una retta ha due punti di intersezione con una circonferenza si dice **secante**;
 un solo punto di intersezione con la circonferenza si dice **tangente**;
 nessun punto di intersezione con la circonferenza si dice **esterna** alla circonferenza.



Si osserva che se la retta è secante la sua distanza dal centro della circonferenza è minore del raggio, se è tangente la sua distanza dal centro è uguale al raggio e se è esterna la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio (vale anche il viceversa cioè se la distanza è allora la retta è secante ecc.).

1) **Se una retta t è tangente ad una circonferenza in un punto T allora il raggio OT è perpendicolare alla retta t .**

Dimostrazione: poiché la distanza dal centro è al raggio (se fosse minore la retta sarebbe secante, se fosse maggiore sarebbe esterna), il raggio OT è necessariamente il segmento perpendicolare la cui misura dà la distanza tra retta e centro.



2) **Se da un punto P esterno ad una circonferenza si tracciano le rette tangenti alla circonferenza e si indicano con T_1 , T_2 i punti di tangenza, si ha che $PT_1 \cong PT_2$.**

Dimostrazione: congiungiamo O con P e con T_1 , T_2 . I triangoli rettangoli OPT_1 , OPT_2 sono congruenti poiché.....

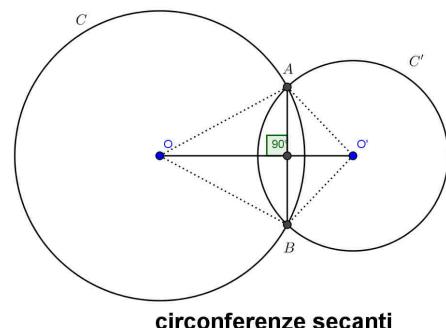
e quindi anche $PT_1 \cong PT_2$

Posizione reciproca tra due circonferenze

Definizione: due circonferenze si dicono “**secanti**” quando hanno due punti in comune.

Nota

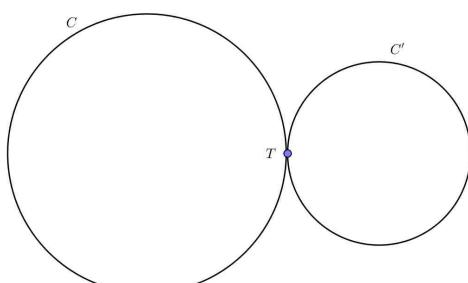
Osserviamo che il segmento AB è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze: infatti essendo $OA \cong OB$, $O'A \cong O'B \Rightarrow O$ e O' appartengono all'asse di AB e quindi OO' è asse di AB e di conseguenza OO' e AB risultano perpendicolari.



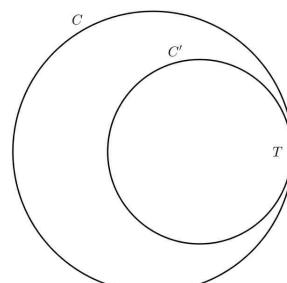
circonferenze secanti

Definizione: due circonferenze si dicono “**tangenti**” quando hanno un solo punto in comune.

Se il centro di una delle due circonferenze è esterno all'altra si dicono tangenti “esternamente”, se è interno di dicono tangenti “internamente”. Il punto comune si chiama punto di tangenza o di contatto.

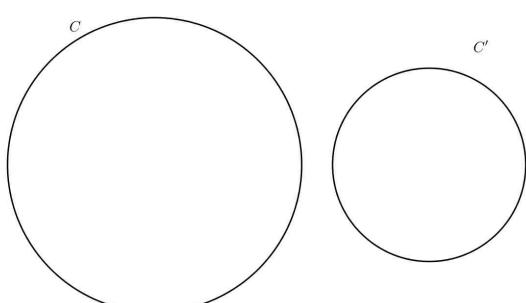


circonferenze tangenti esternamente

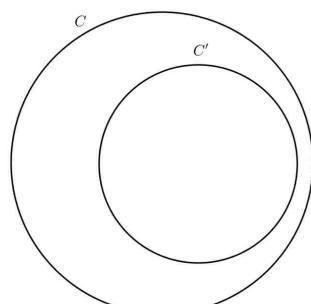


circonferenze tangenti internamente

Definizione: due circonferenze si dicono “**esterne**” quando tutti i punti di una circonferenza sono esterni all'altra e viceversa mentre si dicono l'una “**interna**” all'altra quando tutti i punti di una sono interni all'altra.

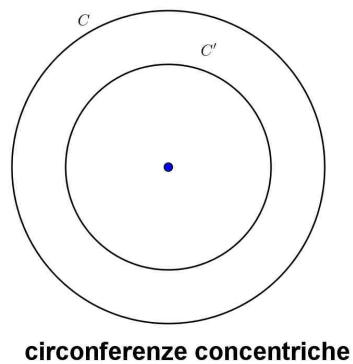


circonferenze esterne



C' interna a C

Definizione: due circonferenze, una interna all'altra, si dicono “**concentriche**” quando hanno lo stesso centro.

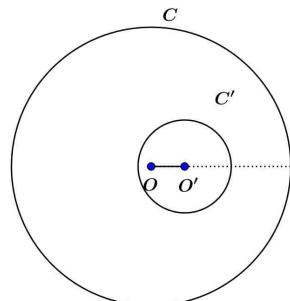


circonferenze concentriche

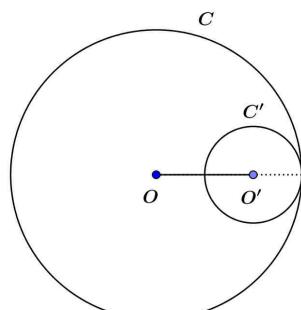
Posizione reciproca tra due circonferenze e distanza tra i loro centri

Consideriamo due circonferenze C e C' di raggi r e r' e centri O e O' ed osserviamo la distanza tra i loro centri al variare della loro posizione reciproca (iniziamo con C' interna a C e poi allontaniamo gradualmente O' da O).

- 1) C' è interna a $C \Leftrightarrow OO' < r - r'$

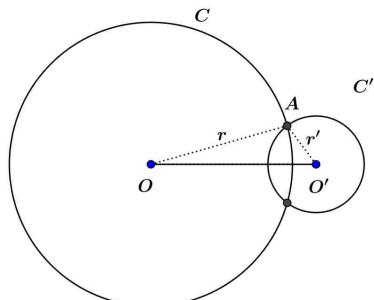


- 2) C' è tangente internamente a $C \Leftrightarrow OO' = r - r'$

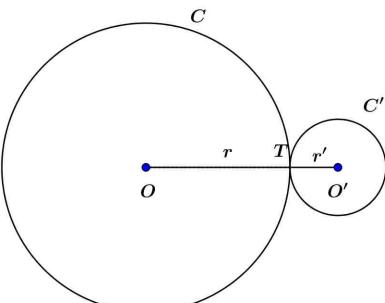


- 3) C' e C sono secanti $\Leftrightarrow r - r' < OO' < r + r'$

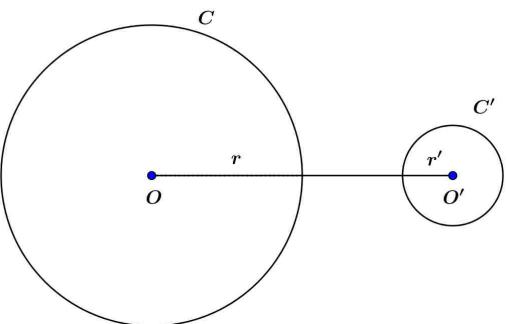
Infatti considerando il triangolo $OO'A$ avremo che il lato OO' è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.



- 4) C' e C sono tangenti esternamente $\Leftrightarrow OO' = r + r'$

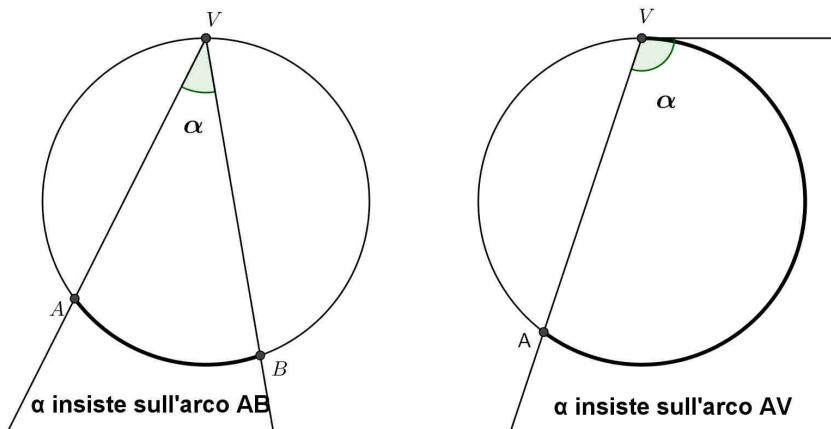


- 5) C' e C sono esterne $\Leftrightarrow OO' > r + r'$



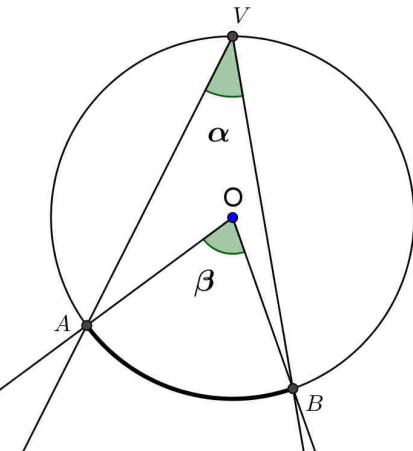
Angoli alla circonferenza e angoli al centro

Definizione: si dice “**angolo alla circonferenza**” un angolo convesso avente il vertice sulla circonferenza e i lati entrambi secanti o uno secante ed uno tangente alla circonferenza.



L’intersezione dell’angolo con la circonferenza è un arco e si dice che l’angolo alla circonferenza **insiste** su tale arco.

Definizione: un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che “insistono” sullo stesso arco si dicono **corrispondenti**.

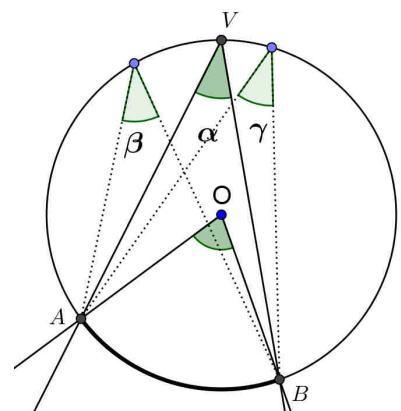


α e β sono angoli corrispondenti

Nota

Ad un angolo alla circonferenza corrisponde un solo angolo al centro “corrispondente” mentre, fissato un angolo al centro, ci sono infiniti angoli alla circonferenza “corrispondenti”.

α , β , γ sono tutti angoli alla circonferenza corrispondenti all’angolo al centro \hat{AOB}



C'è un'importante proprietà che riguarda gli angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.

Teorema

L'angolo al centro è doppio di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.

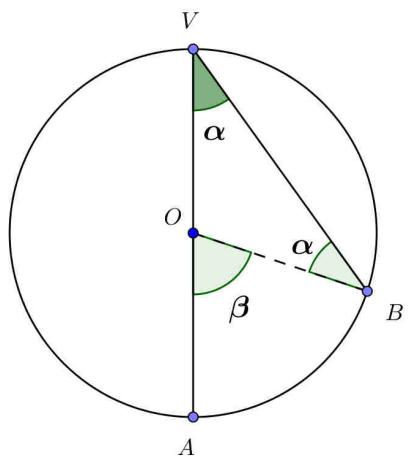
Dimostrazione

Indichiamo con α l'angolo alla circonferenza e con β il corrispondente angolo al centro.

- a) Cominciamo a considerare il caso in cui il centro O della circonferenza appartiene ad un lato dell'angolo alla circonferenza.

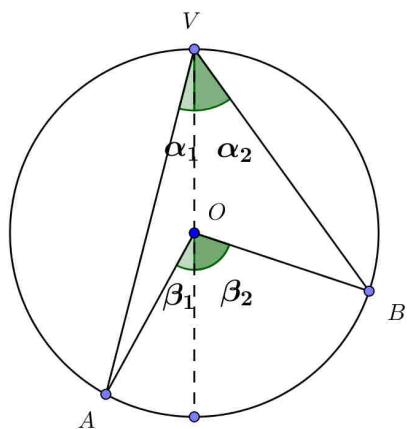
Congiungiamo O con B e consideriamo il triangolo isoscele OBV : si avrà quindi $\hat{OBV} \cong \alpha$.

Ma allora, per il teorema dell'angolo esterno, si avrà $\beta \cong \alpha + \alpha = 2\alpha$.



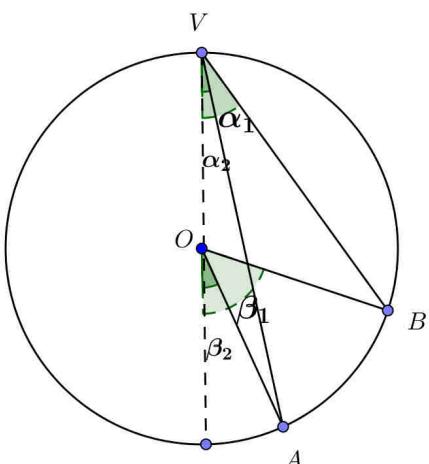
- b) Sia O interno all'angolo α . Tracciamo il diametro VO e avremo, per quanto visto prima

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2 \\ \text{e quindi} \\ \beta \cong \beta_1 + \beta_2 \cong 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$



- c) Sia O esterno all'angolo α . Tracciamo ancora il diametro VO e consideriamo β come differenza tra β_1 e β_2 (vedi figura). Anche questa volta avremo:

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2 \\ \text{e quindi} \\ \beta \cong \beta_1 - \beta_2 \cong 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha$$

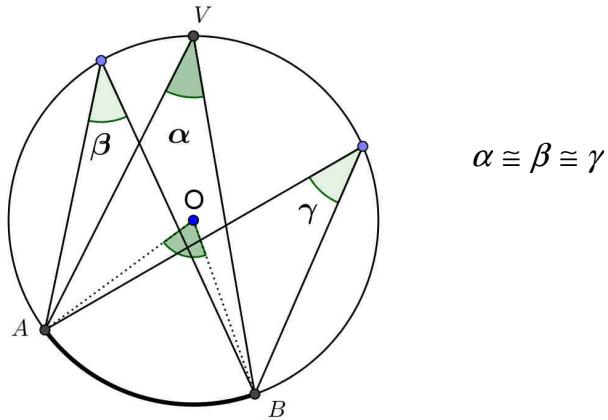


Nota

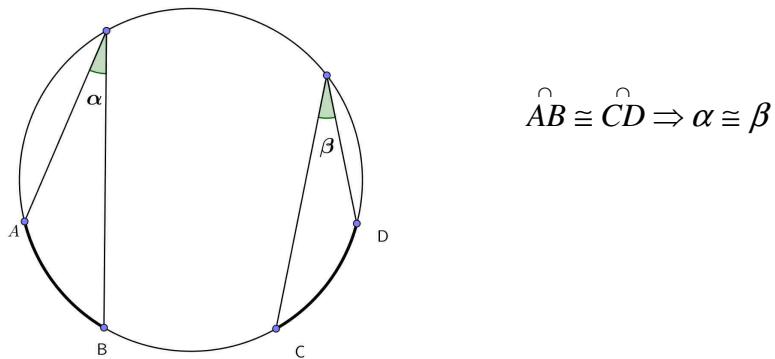
In modo analogo si dimostra la proprietà anche nel caso in cui l'angolo alla circonferenza ha un lato tangente alla circonferenza.

Ci sono alcune importanti conseguenze di questo teorema.

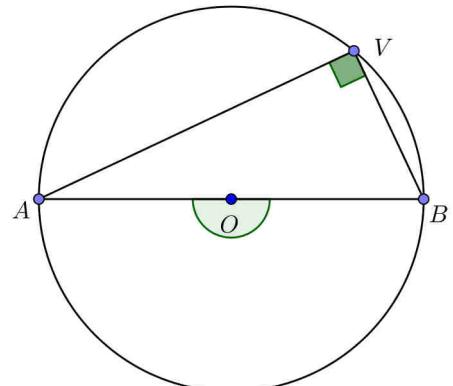
- 1) Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti poiché sono metà dello stesso angolo al centro.



- 2) Angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali sono uguali.

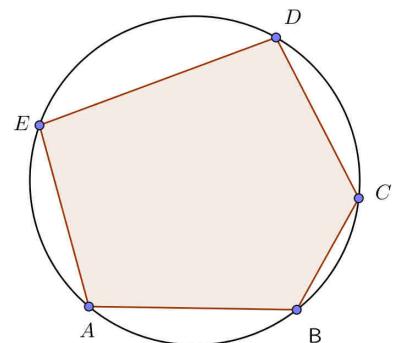


- 3) **Un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto** poiché risulta la metà di un angolo piatto.



SCHEDA 3
Polygoni inscritti in una circonferenza

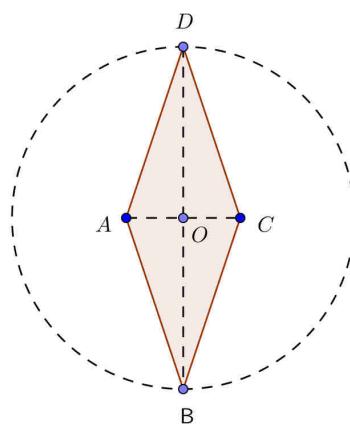
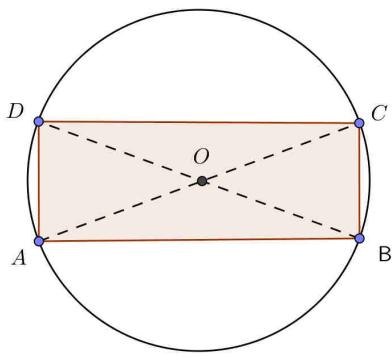
Definizione: un poligono si dice “inscritto” in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza e la circonferenza si dice circoscritta al poligono.



Quali poligoni sono inscrivibili in una circonferenza?

Se consideriamo un rettangolo osserviamo che il punto di incontro delle diagonali è il centro della circonferenza circoscritta poiché risulta alla stessa distanza da tutti i vertici.

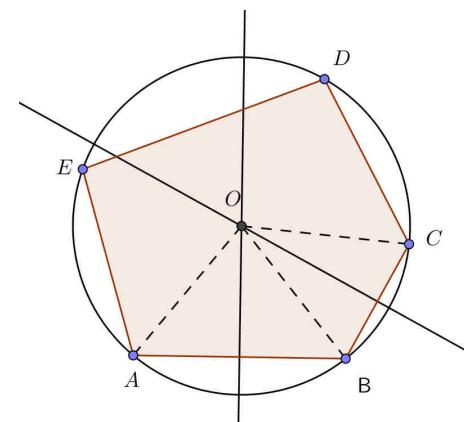
Invece se consideriamo un rombo (che non sia un quadrato) non riusciamo a inscriverlo in una circonferenza.



Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere inscritto in una circonferenza?

Consideriamo un poligono inscritto in una circonferenza ed indichiamo con O il centro della circonferenza: risulta che O è alla stessa distanza da tutti i vertici del poligono.

Quindi, ricordando che i punti dell'asse di un segmento sonodagli estremi del segmento, il centro O dovrà appartenere all'asse di AB, all'asse di BC ecc. (vedi figura).



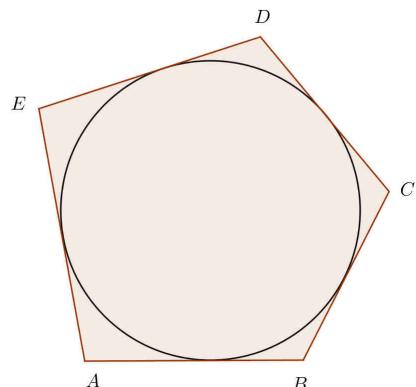
Quindi possiamo concludere che se un poligono è inscritto in una circonferenza gli assi dei suoi lati si incontrano in uno stesso..... che risulta ildella circonferenza circoscritta.

Viceversa è chiaro che se in un poligono gli assi dei lati si incontrano tutti in uno stesso, allora il poligono può essere.....in una circonferenza.

SCHEMA 4

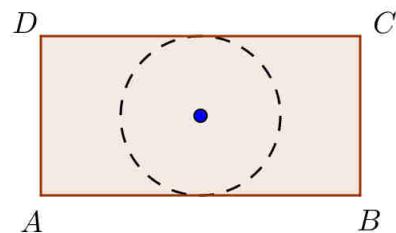
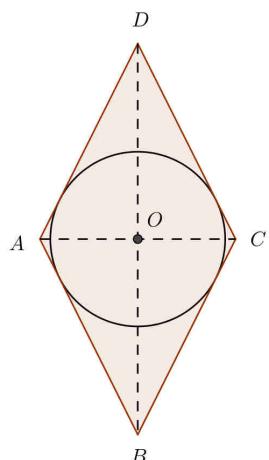
Poligoni circoscritti ad una circonferenza

Definizione: un poligono si dice “circoscritto” ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza e la circonferenza si dice inscritta nel poligono.



Quali poligoni sono circoscrivibili ad una circonferenza?

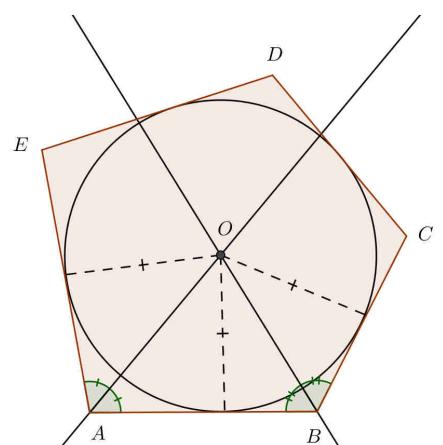
Se consideriamo un rombo vediamo che il punto di incontro delle sue diagonali risulta il centro della circonferenza inscritta poiché risulta alla stessa.....dai lati del rombo, mentre un rettangolo (che non sia un quadrato) non è circoscrivibile ad una circonferenza.



Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere circoscrivibile ad una circonferenza?

Consideriamo un poligono circoscritto ad una circonferenza ed indichiamo con O il suo centro: osserviamo che O è alla stessa distanza da tutti i lati del poligono.

Quindi, ricordando che i punti della bisettrice di un angolo sonodai lati dell'angolo, il centro O dovrà appartenere alla bisettrice dell'angolo \hat{A} , dell'angolo \hat{B} ecc. (vedi figura).



Quindi possiamo concludere che se un poligono è circoscritto ad una circonferenza le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto che risulta il della circonferenza.

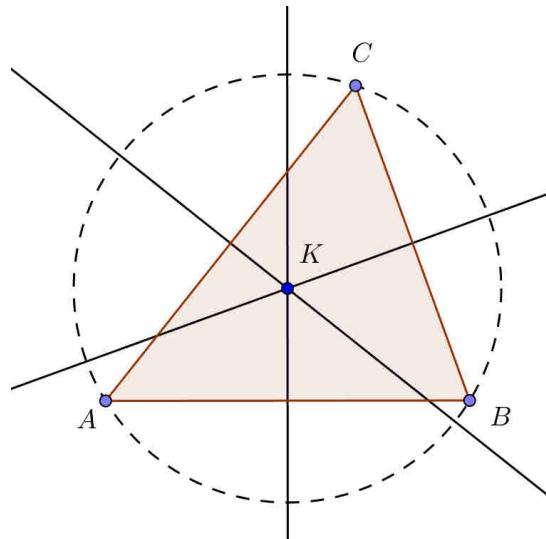
Viceversa è chiaro che se in un poligono le bisettrici degli angoli si incontrano in uno stesso punto, allora il poligono èad una circonferenza e il punto di incontro delle bisettrici ne è il

Punti notevoli di un triangolo

Circocentro

Abbiamo dimostrato che per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza: quindi in un triangolo gli **assi dei lati** si incontrano in uno stesso punto che viene detto “circocentro” ed è il centro della circonferenza circoscritta.

K è il circocentro del triangolo ABC



Incentro

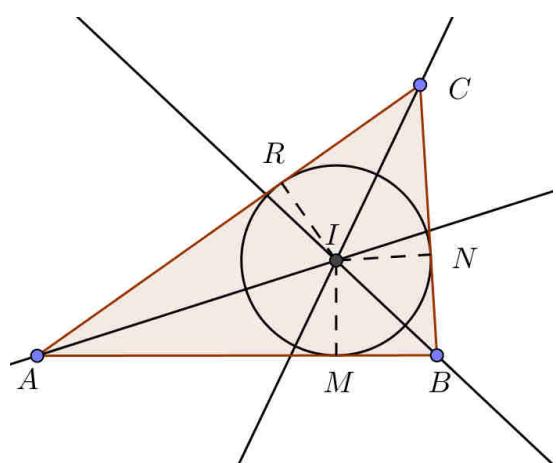
Teorema: in un triangolo le **bisettrici** degli angoli interni si incontrano in uno stesso punto che viene chiamato “incentro” e risulta il centro della circonferenza inscritta.

Dimostrazione: tracciamo le bisettrici degli angoli \hat{A} e \hat{B} e sia I il loro punto di intersezione. Tracciamo da I le perpendicolari ai lati e indichiamo con M,N,R i piedi di queste perpendicolari.

$IM \cong IR$ poiché I appartiene alla bisettrice di \hat{A} ;

$IM \cong IN$ poiché I appartiene alla bisettrice di \hat{B} .

Ma allora, per la proprietà transitiva, $IN \cong IR$ cioè I è equidistante dai lati dell'angolo \hat{C} e quindi I appartiene anche alla bisettrice dell'angolo \hat{C} .



In conclusione tutte le bisettrici si incontrano in I e poiché I si trova alla stessa distanza dai lati del triangolo risulta il centro della circonferenza inscritta nel triangolo (i lati sono tangenti alla circonferenza).

SCHEMA 5
Ortocentro di un triangolo

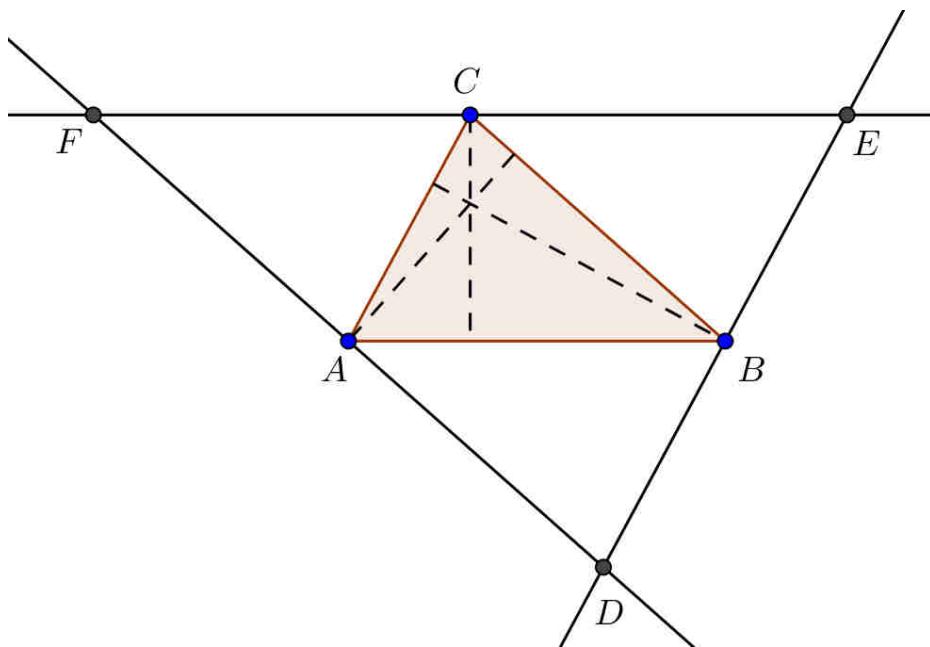
Dimostriamo che le **altezze** di un triangolo si incontrano in uno stesso punto che viene detto **“ortocentro”** del triangolo.

Consideriamo un triangolo ABC e tracciamo le altezze h_A , h_B , h_C uscenti rispettivamente dal vertice A,B,C.

Tracciamo la retta per A parallela al lato BC, la retta per B parallela al lato AC e la retta per C parallela al lato AB: siano D,E,F i loro punti di intersezione (vedi figura).

Osserviamo che A è il punto medio di DF perché essendo ADBC un parallelogramma si ha $AD \cong \dots$ ed essendo ABCF un parallelogramma si ha $BC \cong \dots$ e quindi per la proprietà transitiva abbiamo che $AD \cong \dots$.

Inoltre l’altezza h_A essendo perpendicolare a BC è anche perpendicolare a e quindi risulta in conclusione asse del segmento.....

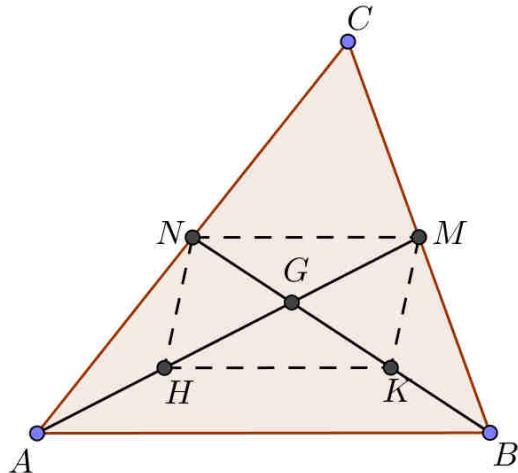


In modo analogo si dimostra che h_B è asse di DE e h_C è asse di: ma allora le tre altezze si incontrano in uno stesso punto perché sappiamo che gli assi del triangolo DEF si incontrano in uno stesso punto.

SCHEMA 6
Baricentro di un triangolo

Dimostriamo che le mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto chiamato “**baricentro**” e che il **baricentro divide ogni mediana in due parti tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra**.

Consideriamo un triangolo ABC , tracciamo le due mediane AM e BN e chiamiamo G il loro punto di intersezione. Osserviamo che il segmento NM risulta parallelo ad AB e congruente alla metà di AB.

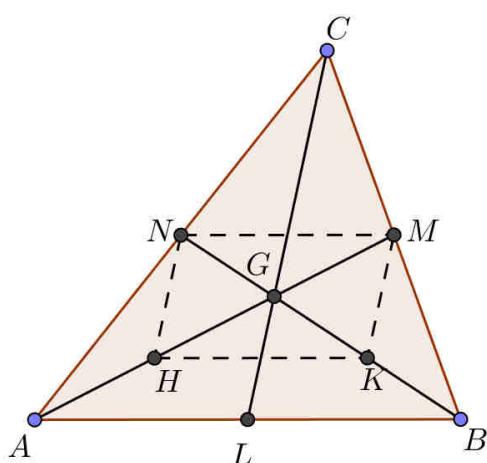


Consideriamo il punto medio H di AG e il punto medio K di GB: anche HK risultaad AB e congruente alla sua

Ma allora il quadrilatero HKMN avendo due lati opposti e risulta un

Possiamo quindi affermare che le diagonali di HKMN si incontrano nel loro e quindi $HG \cong GM$, $KG \cong GN$.

Ma essendo H il punto medio di AG avremo in conclusione che $AG \cong 2 \cdot GM$ ed essendo K il punto medio di GB avremo che $BG \cong 2 \cdot GN$.



Poiché si può dimostrare in modo analogo che tracciando le mediane BN e CL anch'esse si intersecano in modo da dividersi in parti tali che quella che ha per estremo un vertice è doppia dell'altra, poiché la mediana BN è divisa nello stesso modo sia dal punto di intersezione con Am che da quello con CL, AM e CL devono intersecare BN nello stesso punto G.

Quadrilateri inscritti e circoscritti ad una circonferenza

Teorema: *in un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.*

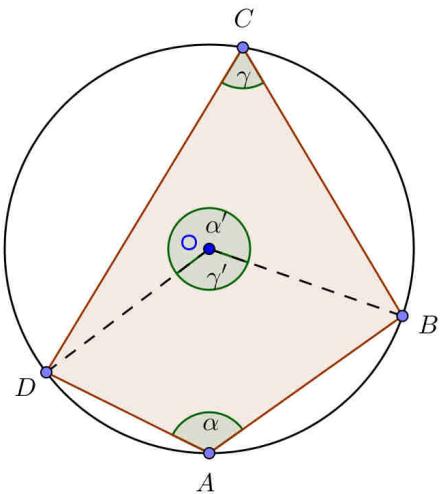
Dimostrazione: sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza. Congiungiamo il centro O della circonferenza con B e D: vengono individuati così due angoli al centro α' , γ' e quindi $\alpha' = 2\alpha$, $\gamma' = 2\gamma$

Poiché la somma di α' e γ' è un angolo giro si ha che

$$\alpha + \gamma = \hat{P} \text{ cioè } \alpha \text{ e } \gamma \text{ sono supplementari.}$$

Analogamente si può dimostrare anche per l'altra coppia di angoli opposti oppure si ottiene subito ricordando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro.

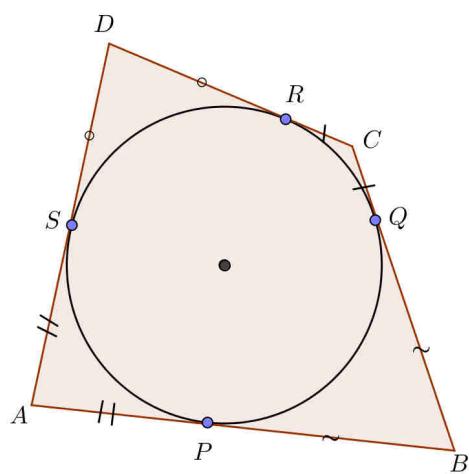
Vale anche il teorema inverso cioè se in un quadrilatero convesso gli angoli opposti sono supplementari allora è inscrivibile in una circonferenza (omettiamo la dimostrazione).



In conclusione condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia inscrivibile in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.

Teorema: *in un quadrilatero convesso circoscritto ad una circonferenza la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.*

Dimostrazione: sia ABCD un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza.



Indichiamo con P,Q,R,S i punti di tangenza dei lati con la circonferenza e per la proprietà dei segmenti di tangenza condotti da un punto esterno avremo che

$$AP \cong AS, \quad PB \cong BQ, \quad CR \cong CQ, \quad DR \cong DS$$

Quindi sommando membro a membro abbiamo che

$$\begin{aligned} AP + PB + CR + DR &\cong AS + BQ + CQ + DS \\ \rightarrow (AP + PB) + (CR + DR) &\cong (AS + DS) + (BQ + CQ) \end{aligned}$$

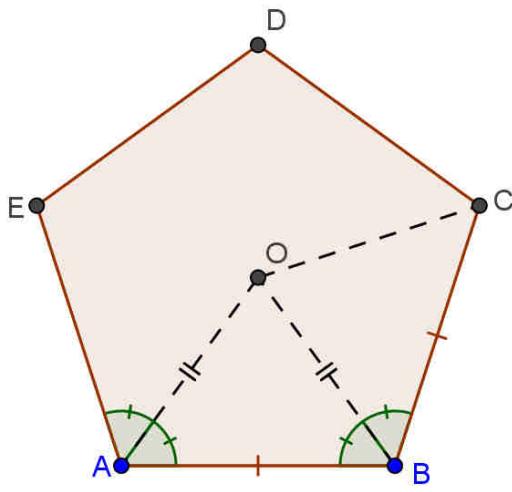
$$\text{cioè} \quad AB + DC \cong AD + BC$$

Vale anche il teorema inverso (che non dimostriamo) e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia circoscritto ad una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia uguale alla somma degli altri due.

Poligoni regolari e circonference inscritte e circoscritte

Teorema: un poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza e le due circonference hanno lo stesso centro, che viene detto **centro** del poligono.

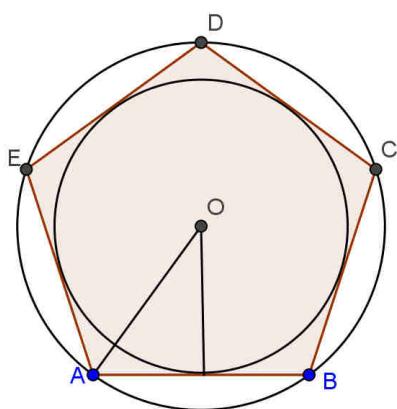
Dimostrazione: consideriamo un poligono regolare (vedi figura) e tracciamo le bisettrici di due angoli consecutivi \hat{A} , \hat{B} e sia O il loro punto di intersezione.



Il triangolo ABO è isoscele poiché ha gli angoli alla base congruenti e quindi $AO \cong BO$. Congiungendo O con C i triangoli ABO e BCO sono congruenti poiché hanno OB in comune, $AB \cong BC$ e $\hat{ABO} \cong \hat{OBC}$.

Di conseguenza $OC \cong OA$, $\hat{OCB} \cong \hat{ABO} = \frac{1}{2} \hat{B}$ ed essendo il poligono regolare e quindi $\hat{B} \cong \hat{C}$ si ha anche $\hat{OCB} \cong \frac{1}{2} \hat{C}$ cioè OC è bisettrice dell'angolo \hat{C} .

Se congiungiamo O con tutti gli altri vertici possiamo ripetere il ragionamento e concludere che O è il **punto di incontro delle bisettrici** e quindi il centro della circonferenza inscritta ma essendo anche **equidistante dai vertici** è anche il centro della circonferenza circoscritta.

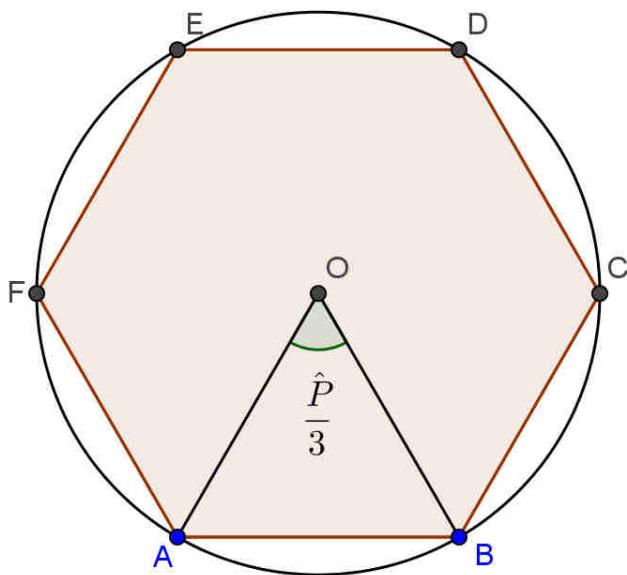


Nota

Il raggio della circonferenza circoscritta si chiama “**raggio**” del poligono mentre il raggio della circonferenza inscritta si chiama “**apotema**” del poligono.

SCHEDA 7
Esagono regolare e circonferenza circoscritta

Consideriamo un esagono regolare ABCDEF e tracciamo la circonferenza circoscritta.



Come risulta il raggio della circonferenza circoscritta?

Congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici A e B: otteniamo un triangolo in cui
 $\hat{AOB} = \dots$.

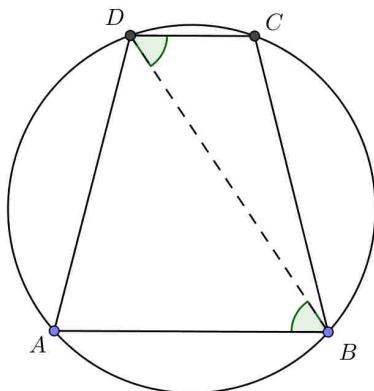
Ma ABO è un triangolo isoscele e quindi gli angoli alla base sono uguali: si avrà quindi che tutti gli angoli del triangolo ABO sono e quindi il triangolo ABO è.....

In conclusione il raggio della circonferenza circoscritta risulta uguale al dell'esagono regolare.

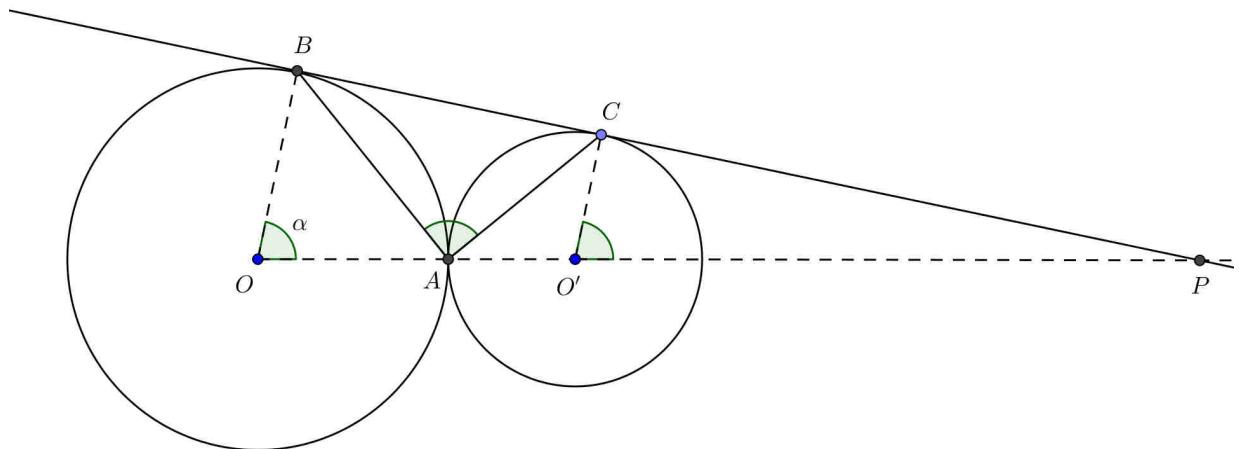
ESERCIZI

- 1) In una circonferenza congiungi gli estremi di due corde parallele disuguali. Come risulta il quadrilatero che si ottiene?

Suggerimento: congiungi B con D e considera gli angoli in figura.....



- 2) Considera due circonferenze tangenti esternamente nel punto A. Disegna una tangente comune come in figura e siano B e C i punti di contatto. Come risulta l'angolo \hat{BAC} ?



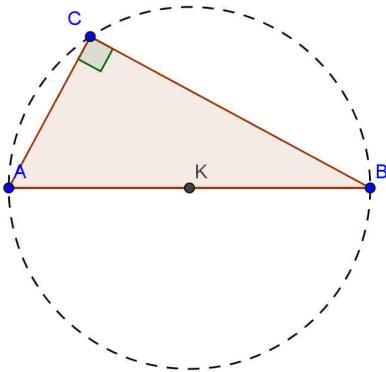
Suggerimento: congiungi i centri delle circonferenze con i punti di tangenza e con il punto A.

I triangoli OAB e O'AC sono isosceli e inoltre essendo le rette OB e O'C gli angoli \hat{BOA} e $\hat{C'O'P}$ sono

Allora poiché $\hat{BAO} \cong \frac{\hat{P} - \alpha}{2}$ abbiamo che $\hat{BAC} \cong$

- Appunti di Matematica 2 - Liceo Scientifico -
 - Geometria euclidea -
 La circonferenza. I poligoni inscritti e circoscritti

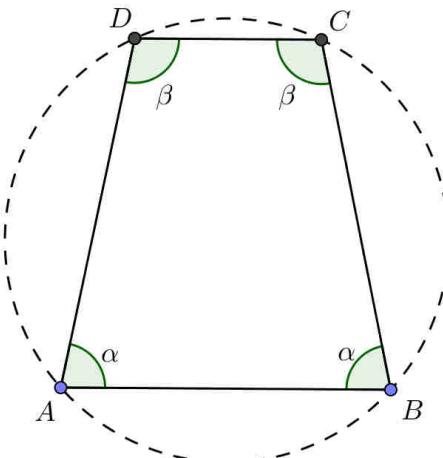
- 3) Considera un triangolo rettangolo ABC retto in C. Dove si trova il suo circocentro K?



Suggerimento

Ricordando che un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza si ha che il centro K della circonferenza circoscritta coincide con il

- 4) Considera un trapezio isoscele ABCD. E' sempre inscrivibile in una circonferenza?

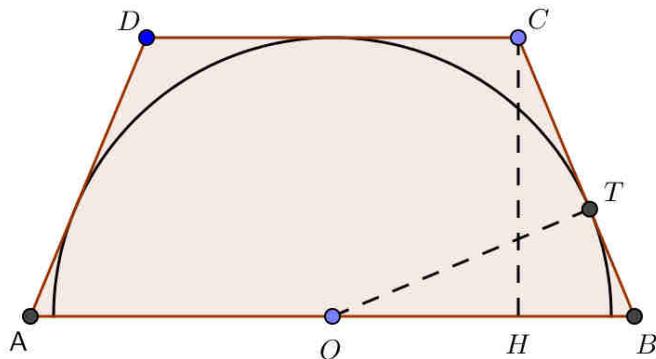


Suggerimento:

Considera gli angoli del trapezio isoscele (vedi figura).

Poiché le basi sono parallele abbiamo che $\alpha + \beta \approx \dots$ e quindi per il teorema sui quadrilateri inscritti in una circonferenza.....

- 5) Disegna due triangoli isosceli ABC e ABD aventi la base AB in comune e i vertici C e D da parti opposte rispetto ad AB. Il quadrilatero ABCD è circoscrivibile ad una circonferenza?
- 6) Considera un trapezio isoscele ABCD circoscritto ad una semicirconferenza di centro O. Dimostra che il lato obliquo è congruente a metà della base maggiore.



Suggerimento

Disegna il punto T di tangenza sul lato obliquo BC e congiungilo con O, traccia l'altezza CH e confronta i triangoli CHB e OTB: risultano poiché.....

 Di conseguenza $CB \cong \dots$

- 7) Disegna un triangolo equilatero e le circonference inscritta e circoscritta. Indica con R il raggio della circonferenza circoscritta e con r il raggio di quella inscritta. Dimostra che $R = 2r$.
- 8) In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, traccia l'altezza AH e da H manda le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC. Dimostra che A,E,H,D sono punti di una stessa circonferenza.
- 9) Considera due rette (distingui il caso che siano parallele o incidenti): dove si trovano i centri delle circonference tangenti?
- 10) Considera un triangolo rettangolo di cateti AB e AC ed indica con r il raggio della circonferenza inscritta e con R il raggio della circonferenza circoscritta. Dimostra che

$$AB + AC \cong 2r + 2R$$

GEOMETRIA EUCLIDEA

La misura delle grandezze

Definizione

Una **classe** di grandezze geometriche è un insieme di enti geometrici in cui è possibile:

- il confronto tra due qualsiasi elementi dell'insieme;
- l'addizione, che gode della proprietà commutativa e associativa, che associa a due elementi A e B dell'insieme l'elemento A+B appartenente all'insieme detto somma di A e B.

Le grandezze appartenenti ad una stessa classe si dicono **omogenee**.

Sono classi di grandezze omogenee l'insieme dei segmenti, degli angoli, delle superfici piane.

Multiplo di una grandezza

Il multiplo di una grandezza A secondo il numero naturale n è la grandezza omogenea ad A

$$B = A + \dots + A = nA \quad (n \text{ addendi})$$

Si dice anche che A è sottomultipla di B secondo il numero n oppure che A è l'ennesima parte di B e si scrive

$$A = \frac{B}{n} = \frac{1}{n} B$$

Caso particolare

Se $n=1$ si ha $B = A$ cioè tra i multipli ed i sottomultipli di una grandezza c'è anche la grandezza stessa.

Grandezze commensurabili

Definizione

Due grandezze omogenee A e B si dicono commensurabili quando ammettono una grandezza sottomultipla comune cioè quando esiste una terza grandezza U (omogenea ad A e B) che è contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse cioè tale che

$$A = m \cdot U, \quad B = n \cdot U \quad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

Quindi poiché $B = n \cdot U \rightarrow U = \frac{1}{n} B$

sostituendo si ha $A = m \cdot \frac{1}{n} B = \frac{m}{n} \cdot B$

Rapporto di grandezze commensurabili

Se $A = \frac{m}{n} B$ chiameremo rapporto tra A e B (e lo indicheremo con $\frac{A}{B}$) il numero razionale $\frac{m}{n}$

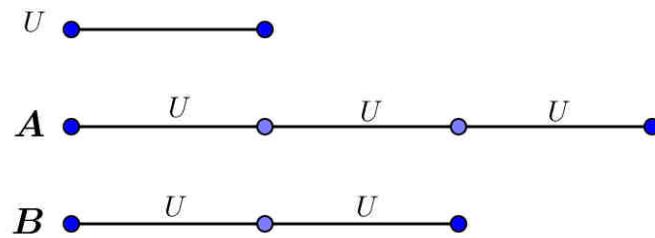
$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{m}{n}}$$

Quindi il rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale.

Esempio

In figura sono disegnate due grandezze A e B tali che

$$A = 3 \cdot U, \quad B = 2 \cdot U \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$



Grandezze incommensurabili

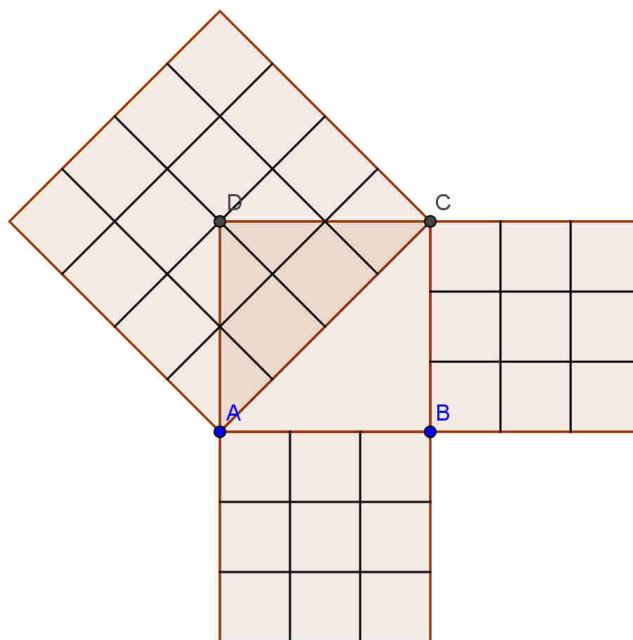
Definizione

Due grandezze omogenee A e B si dicono incommensurabili quando non esiste una grandezza sottomultipla comune.

Esempio: dimostriamo che *il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti incommensurabili*.

Consideriamo un quadrato ABCD e la sua diagonale AC.

Supponiamo per assurdo che il lato AB e la diagonale AC siano segmenti commensurabili cioè supponiamo che esista un segmento EF tale che $AB = n \cdot EF$, $AC = m \cdot EF$ (la figura è solo indicativa).



Applicando il teorema di Pitagora e contando il numero dei “quadratini” di lato congruente ad EF si dovrebbe avere:

$$m^2 = 2n^2$$

Ma questa uguaglianza non può essere vera perché se consideriamo la scomposizione in fattori primi e in particolare quante volte compare il fattore 2, avremo che nel numero m^2 il fattore 2 o non compare mai o compare un numero pari di volte (essendo un quadrato) mentre in $2n^2$ il fattore 2 sarà presente un numero dispari di volte perché c’è un 2 moltiplicato per n^2 in cui il 2 compare o nessuna volta o un numero pari di volte.

In conclusione siamo arrivati ad una contraddizione e questo significa che i segmenti AB e AC non sono commensurabili.

Nota storica

I primi matematici che parlarono di grandezze incommensurabili furono i *Pitagorici*: infatti applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele furono costretti, con ragionamenti analoghi a quelli che abbiamo visto, *ad ammettere l'esistenza di grandezze omogenee sprovviste di un sottomultiplo comune*.

Invece essi pensavano che i segmenti fossero costituiti da un numero finito di punti e che quindi fossero tutti commensurabili tra loro. Inoltre ritenevano che tutti i corpi fossero costituiti da corpuscoli tutti uguali disposti in varie forme geometriche e consideravano l'interpretazione geometrica della realtà come un anello di congiunzione tra umano e divino.

La scoperta delle grandezze incommensurabili sembrò quindi ai Pitagorici blasfema e sconcertante tanto che *fu tenuta segreta* e fu proibito ai membri della setta di rivelarla.

Rapporto di grandezze incommensurabili

Si può definire il rapporto tra due grandezze incommensurabili?

Riprendiamo l'esempio del lato l e della diagonale d di un quadrato.

Abbiamo che

Il numero $\frac{d}{l}$ è definito come "elemento separatore" dei due insiemi di numeri razionali

$$1, \quad 1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad \dots \\ 2, \quad 1.5, \quad 1.42, \quad 1.415, \quad \dots$$

che rappresentano i valori approssimati per difetto e per eccesso.

Questo numero viene detto “irrazionale”, cioè non razionale, e in questo caso viene indicato con il simbolo $\sqrt{2}$.

In conclusione se A e B sono grandezze incommensurabili il loro rapporto è un numero irrazionale.

Misura di una grandezza

Se fissiamo una grandezza U come “unità di misura”, la misura rispetto ad U di una grandezza A , omogenea con U , è il numero reale (razionale o irrazionale) che esprime il rapporto tra A e U e si indica con \overline{A} cioè

$$\overline{A} = \frac{A}{U}$$

Nota importante

La misura di un segmento si dice “**lunghezza**”, quella di un angolo si dice “**ampiezza**” e quella di una superficie piana “**area**”.

Teorema

Il rapporto tra due grandezze omogenee A e B (con $B \neq 0$) è uguale al rapporto tra le loro misure (rispetto ad una qualunque unità di misura) cioè

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

Dimostrazione

Indichiamo con U una grandezza, omogenea ad A e B , scelta come unità di misura.

Avremo quindi per esempio:

$$\begin{aligned} A &= aU \text{ e quindi } \overline{A} = a; \\ B &= bU \text{ e quindi } \overline{B} = b \end{aligned}$$

Ricaviamo U dalla relazione $B = bU \rightarrow U = \frac{1}{b}B$ e sostituiamo nell’altra

$$A = a \cdot \frac{1}{b}U = \frac{a}{b}B \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

In conclusione quindi

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

Proporzioni tra grandezze

Definizione

Due grandezze omogenee A e B (con $B \neq 0$) e altre due grandezze omogenee C e D (con $D \neq 0$) si dicono in proporzione quando il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra la terza e la quarta cioè:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Si scrive anche $A : B = C : D$ e che si legge “A sta a B come C sta a D”.

Le quattro grandezze si dicono **termini** della proporzione e in particolare A e B si dicono termini estremi mentre B e C si dicono termini medi.

Nota

Se A, B ,C sono tre grandezze omogenee tra loro e si ha

$$A : B = B : C$$

la grandezza B si chiama *media proporzionale* tra A e C.

Osservazioni

1) Si dimostra facilmente che *se quattro grandezze sono in proporzione allora sono in proporzione anche le loro misure* e viceversa.

Questo ci permette di estendere le proprietà delle proporzioni tra numeri alle proporzioni tra grandezze .

Ricordiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche:

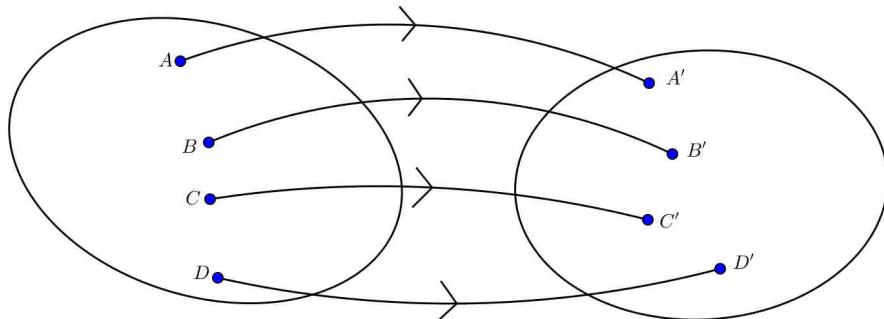
“In una proporzione numerica $a : b = c : d$ il prodotto dei termini medi è uguale al prodotto dei termini estremi cioè $a \cdot d = b \cdot c$ (e viceversa se $a \cdot d = b \cdot c$ allora $a : b = c : d$).

2) Si dimostra facilmente che *date due grandezze omogenee A e B e una terza grandezza C (A,B,C non nulle) esiste ed è unica una quarta grandezza X, omogenea a C, tale che*

$$A : B = C : X$$

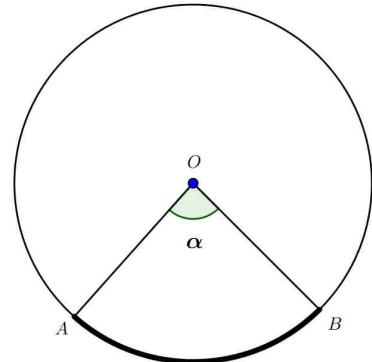
Definizione

Diciamo che due classi di grandezze sono in **corrispondenza biunivoca** quando è possibile associare ad ogni grandezza della prima classe una e una sola grandezza della seconda classe.



Esempio

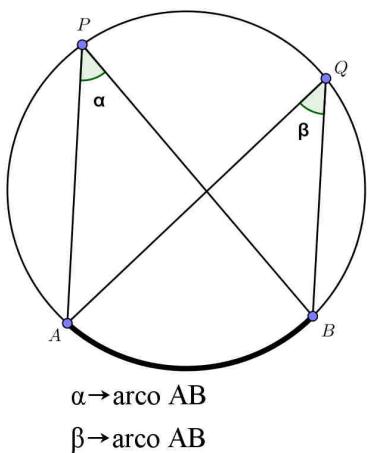
Se consideriamo, in un dato cerchio, l'insieme degli angoli al centro e l'insieme degli archi di circonferenza possiamo associare ad ogni angolo al centro l'arco di circonferenza su cui insiste e osservare che si tratta di una corrispondenza biunivoca poiché per ogni angolo al centro c'è uno ed un solo arco di circonferenza su cui insiste.



$$A\hat{O}B \rightarrow \text{arco } AB$$

Esempio

Se invece consideriamo, sempre in un dato cerchio, l'insieme degli angoli alla circonferenza e l'insieme degli archi di circonferenza ed associamo ad un angolo alla circonferenza l'arco di circonferenza su cui insiste, abbiamo che questa non è una corrispondenza biunivoca poiché ad angoli alla circonferenza diversi (anche se di uguale ampiezza) viene associato lo stesso arco di circonferenza.



Grandezze direttamente proporzionali

Definizione

Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono **direttamente proporzionali** quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe cioè

$$\forall A, B \text{ se } A \rightarrow A', B \rightarrow B' \text{ si ha } \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

Grandezze inversamente proporzionali

Definizione

Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono **inversamente proporzionali** quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al reciproco del rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe cioè

$$\forall A, B \text{ se } A \rightarrow A', B \rightarrow B' \text{ si ha } \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

Osservazione

In questo caso ,quindi, il prodotto delle misure di due grandezze corrispondenti è costante.

Il criterio della proporzionalità diretta

Come possiamo stabilire se due classi di grandezze sono direttamente proporzionali?

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che:

- a grandezze uguali di una classe corrispondano grandezze uguali dell'altra;
- alla somma di due grandezze qualsiasi di una classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti dell'altra.

Esempio

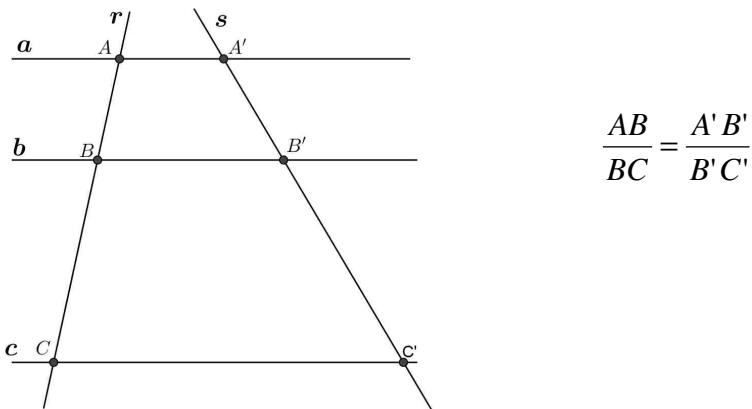
Gli angoli al centro e gli archi di circonferenza corrispondenti sono un esempio di classi di grandezze direttamente proporzionali: infatti ad angoli al centro uguali corrispondono archi sottratti uguali e alla somma di angoli al centro corrisponde un arco uguale alla somma degli archi sottratti corrispondenti.

Teorema di Talete

Dimostriamo questo importante teorema riguardante le **classi di grandezze direttamente proporzionali**:

Se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali, i segmenti individuati su una trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti individuati sull'altra trasversale.

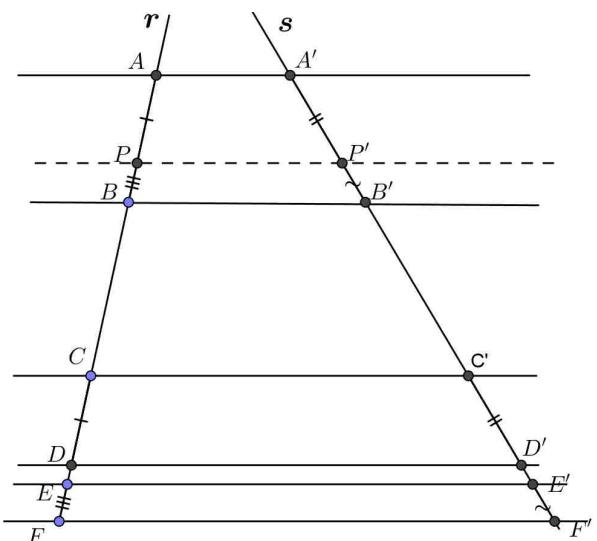
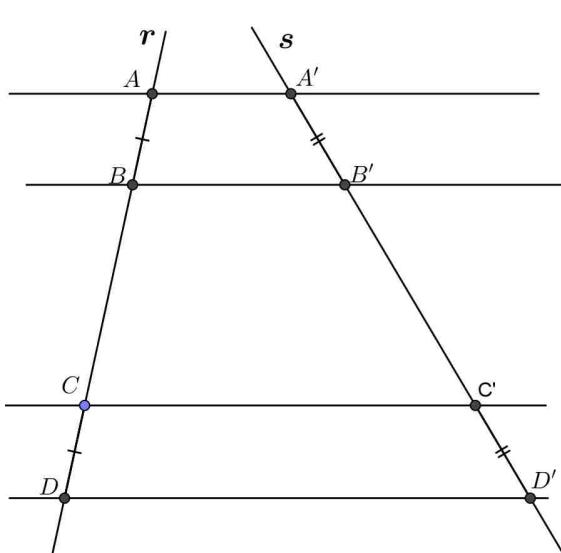
Questo significa, per esempio, che se a, b, c sono tre rette parallele e r e s sono due trasversali (vedi figura) si ha



Dimostrazione

Osserviamo che:

- 1) *a segmenti congruenti su r corrispondono segmenti congruenti su s (vedi scheda 1-quadrilateri);*
- 2) *ad un segmento AB congruente alla somma dei segmenti CD e EF su r corrisponde su s un segmento $A'B'$ congruente alla somma dei segmenti $C'D'$ e $E'F'$ corrispondenti a CD e EF (si dimostra facilmente tracciando dal punto P che divide AB nelle due parti congruenti a CD e EF la parallela del fascio...).*



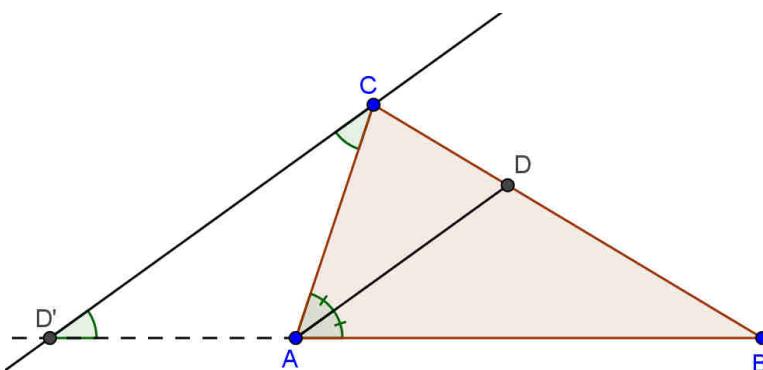
Quindi, per il criterio di proporzionalità diretta i due insiemi di segmenti sono direttamente proporzionali

Problema guidato *Teorema della bisettrice*

Considera un triangolo ABC e traccia una bisettrice , per esempio AD dell'angolo $\alpha = \hat{BAC}$. Dimostra che $CD : DB = AC : AB$ cioè **una bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due.**

Suggerimento

Traccia per C la parallela alla bisettrice AD e sia D' il punto in cui questa parallela incontra il prolungamento del lato AB.



Per il teorema di Talete si può dire che

.....

Ma il triangolo ACD', avendo gli angoli alla base congruenti, risulta e quindi

.....

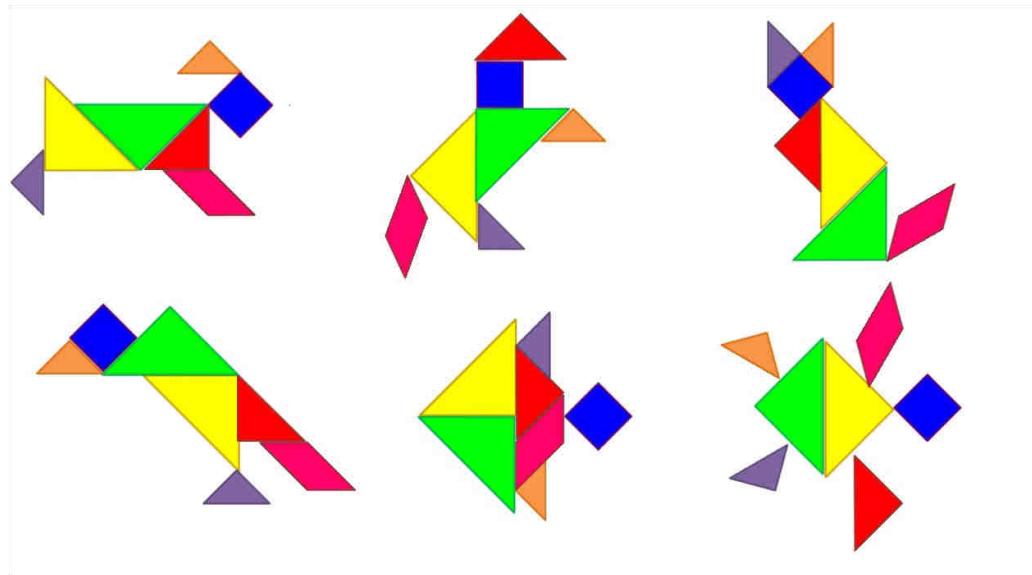
In conclusione quindi abbiamo che

OSSERVAZIONE

Infatti per esempio nel triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e quindi divide la base in parti uguali che stanno quindi nello stesso rapporto dei due lati (che sono uguali).

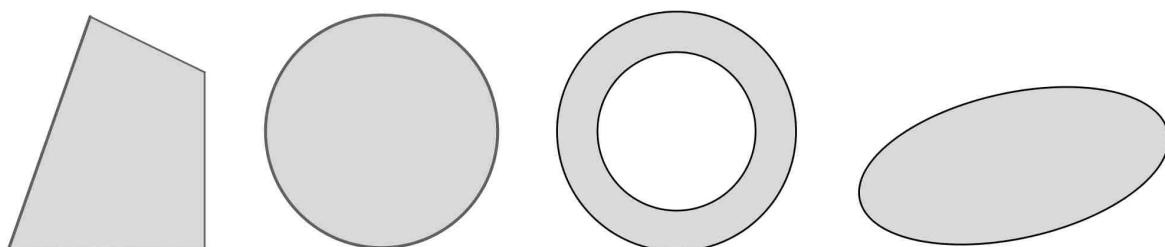
GEOMETRIA EUCLIDEA

L'equivalenza delle superfici piane



Superficie piana

Il concetto di superficie piana è un **concetto primitivo**: i poligoni, i cerchi o in generale regioni di piano delimitate da una linea chiusa o da più linee chiuse che non si intersecano sono superfici piane.



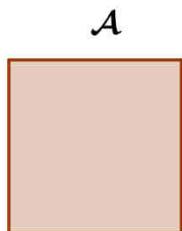
Per indicare una superficie piana useremo lettere maiuscole corsive.

Estensione superficiale

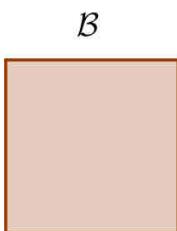
Anche il concetto di estensione superficiale è un **concetto primitivo**. E' chiaro che superfici congruenti hanno la stessa estensione superficiale ma anche superfici non congruenti possono avere la stessa estensione superficiale: se realizziamo modelli in cartoncino di superfici piane aventi la stessa estensione superficiale troviamo che hanno lo stesso "peso".

Definizione

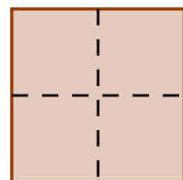
Due superfici piane \mathcal{A} e \mathcal{B} si dicono equivalenti quando hanno la stessa estensione superficiale e scriveremo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.



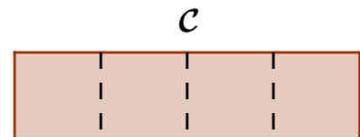
$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$



$$\mathcal{A}$$

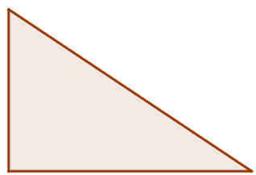


$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$$



Ci sono alcuni **postulati** che caratterizzano l'equivalenza tra superfici piane:

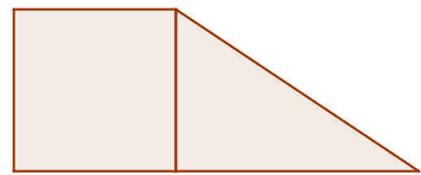
- 1) Due superfici congruenti sono equivalenti (non è vero il viceversa);
- 2) L'equivalenza tra superfici gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva;
- 3) La “somma” di due superfici \mathcal{A} e \mathcal{B} (che non hanno punti in comune oppure che hanno in comune solo punti del loro contorno) è la figura formata dall'unione dei punti delle due superfici e si indica con $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Se $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ allora \mathcal{A} si può considerare come differenza tra \mathcal{C} e \mathcal{B} e si scrive $\mathcal{A} = \mathcal{C} - \mathcal{B}$. Le superfici somma o differenza di superfici rispettivamente equivalenti sono equivalenti.



$$\mathcal{A}$$

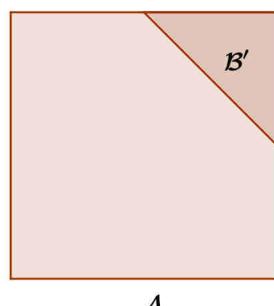


$$\mathcal{B}$$



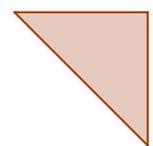
$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

- 4) Una superficie non può essere equivalente ad una sua parte.
- 5) Una superficie \mathcal{A} ha maggiore estensione di una superficie \mathcal{B} , e si dice che \mathcal{A} è prevalente a \mathcal{B} e si scrive $\mathcal{A} > \mathcal{B}$, se \mathcal{B} è equivalente ad una parte di \mathcal{A}



$$\mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}'$$

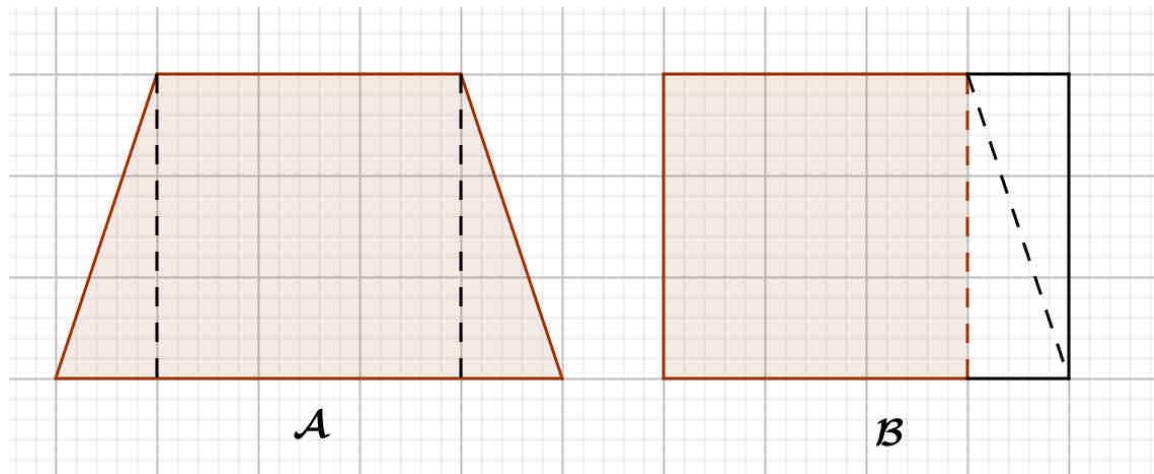


$$\mathcal{B}$$

Poligoni equivalenti

Definizione

Due poligoni si dicono **equiscomponibili** o equiscomposti se sono somme di poligoni congruenti.



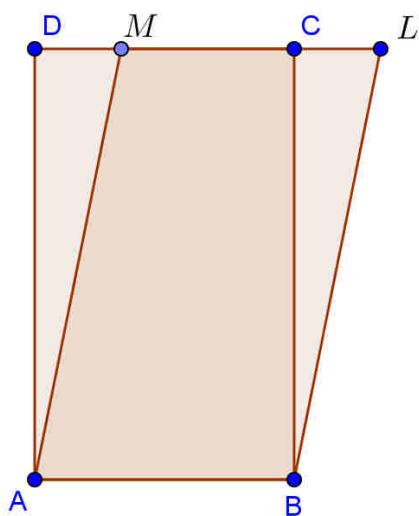
\mathcal{A} e \mathcal{B} sono equiscomponibili

Osservazione: è chiaro che **due poligoni equiscomponibili sono equivalenti** (e si può dimostrare che vale anche il viceversa).

Teorema

Un parallelogramma e un rettangolo aventi basi e altezze relative congruenti sono equivalenti.

Dimostrazione



Disegniamo il rettangolo ABCD e il parallelogramma ABML sovrapponendo le basi come in figura.

Osserviamo che i triangoli ADM e BCL sono congruenti avendo $AD \cong BC$, $AM \cong BL$ e quindi sono anche equivalenti.

Il parallelogramma può essere considerato come la differenza tra il trapezio ABLD e il triangolo ADM e il rettangolo come la differenza tra lo stesso trapezio e il triangolo BCL e quindi parallelogramma e rettangolo sono equivalenti.

Nota: la dimostrazione è la stessa anche nel caso in cui $M \equiv C$ oppure M si trovi oltre C .

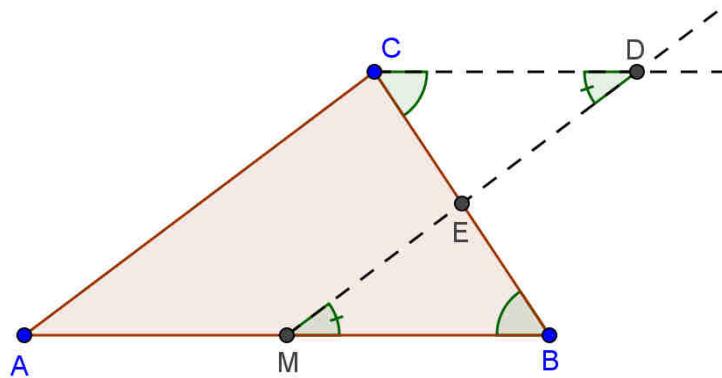
Corollario: due parallelogrammi che hanno basi e altezze corrispondenti congruenti sono equivalenti poiché sono entrambi equivalenti ad un rettangolo avente base e altezza congruente.

Teorema

Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma di altezza congruente e base congruente a metà di quella del triangolo.

Dimostrazione

Consideriamo il triangolo ABC e sia M il punto medio di AB. Conduciamo per M la parallela ad AC e da C la parallela ad AB e sia D il loro punto di intersezione ed E l'intersezione tra BC e MD (vedi figura).



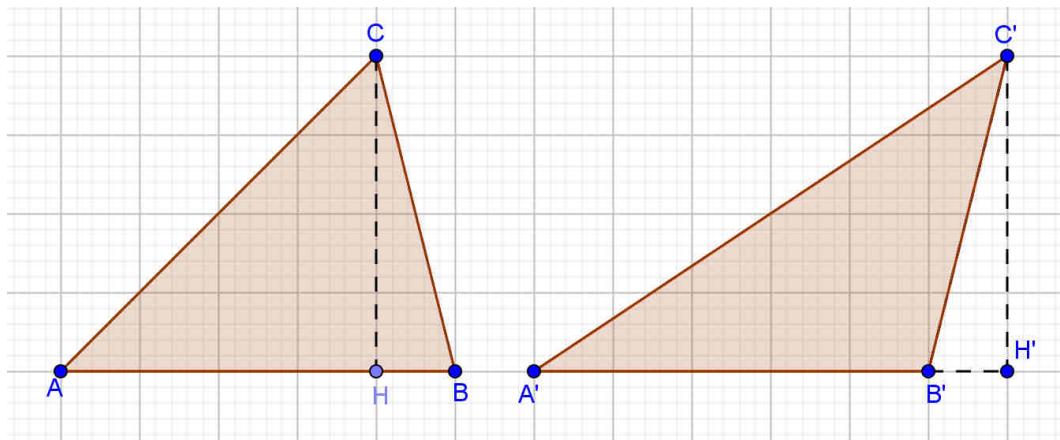
I triangoli MBE e CDE sono congruenti per il 2° criterio poiché :

$$AM \cong MB, \quad AM \cong CD \rightarrow MB \cong CD;$$

$$\hat{DCE} \cong \hat{MBE}, \quad \hat{CDE} \cong \hat{EMB}$$

Quindi il triangolo e il parallelogramma così costruito risultano equiscomposti e di conseguenza equivalenti.

Corollario: due triangoli aventi le basi e le rispettive altezze congruenti sono equivalenti poiché equivalenti a parallelogrammi aventi base e altezza congruenti e quindi equivalenti.



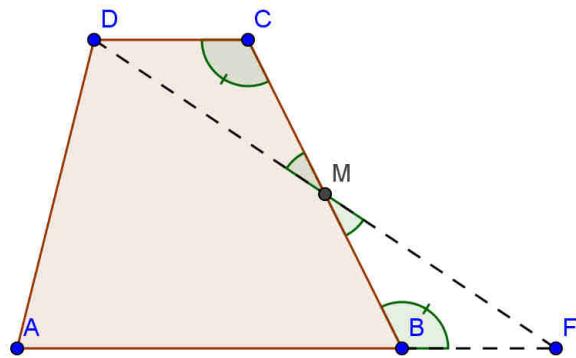
$$ABC \equiv A'B'C'$$

Teorema

Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e la cui base è uguale alla somma delle basi del trapezio.

Dimostrazione

Sia ABCD il trapezio: consideriamo il punto medio M del lato BC, congiungiamolo con D e prolunghiamo fino ad incontrare nel punto F il prolungamento di AB (vedi figura).



I triangoli DCM e MBF sono congruenti per il 2° criterio poiché

$$CM \cong MB, \quad \hat{DMC} \cong \hat{BMF} \text{ (opposti al vertice)}, \quad \hat{DCM} \cong \hat{MBF} \text{ (alterni interni)}$$

Di conseguenza $DC \cong BF$ e quindi AF risulta congruente alla somma delle basi del trapezio.

Quindi il trapezio e il triangolo AFD risultano equiscomposti e quindi equivalenti.

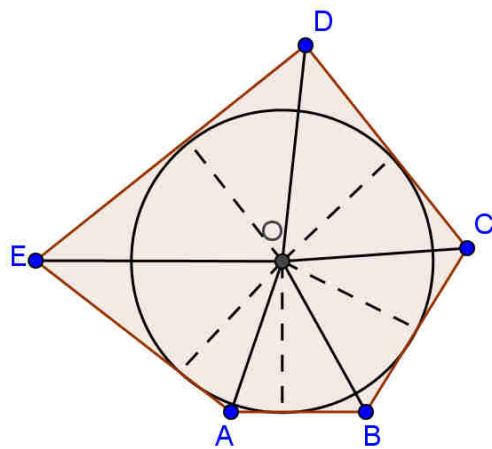
Teorema

Un poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo avente per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza inscritta nel poligono.

Dimostrazione

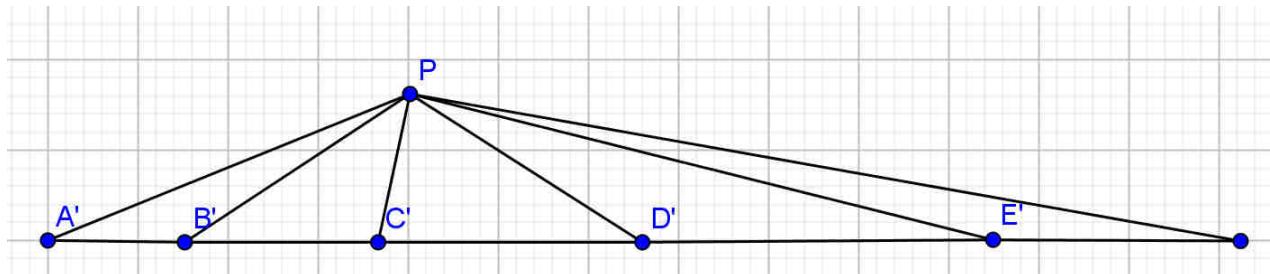
Consideriamo un poligono circoscritto ad una circonferenza: congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici.

Il poligono risulta così scomposto in triangoli aventi come basi i lati del poligono e come altezze segmenti congruenti al raggio r della circonferenza.



Se quindi riportiamo sulla stessa retta dei segmenti congruenti ai lati del poligono e consideriamo un punto P tale che $PH \equiv r$ (vedi figura), abbiamo che

$$A'B'P \equiv ABO, \quad B'C'P \equiv \dots\dots \quad \text{ecc.}$$



e quindi il poligono è equivalente al triangolo avente per base un segmento congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza inscritta.

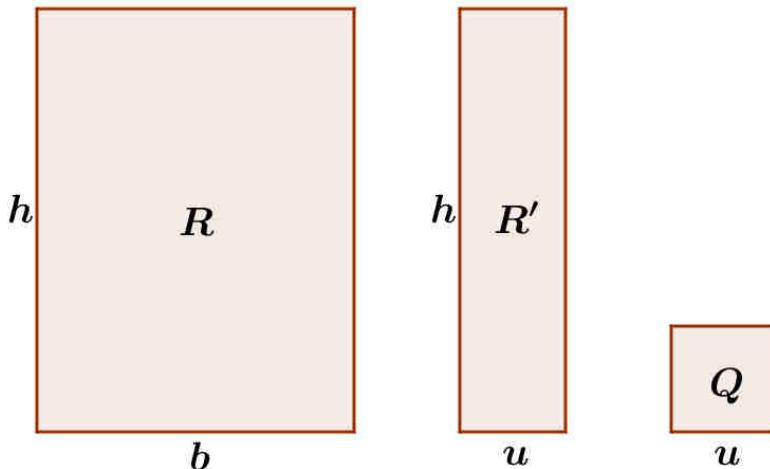
Arene dei poligoni

Area di un rettangolo

Utilizzando la proporzionalità diretta possiamo dimostrare che *l'area di un rettangolo è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza*.

Considera il rettangolo dato R avente base di lunghezza b e altezza di lunghezza h e il quadrato Q di lato u di lunghezza 1.

Considera il rettangolo R' avente altezza uguale all'altezza di R e base u .



Se indichiamo con A e A' le aree di R e R' avremo :

- poiché R' e Q hanno la stessa base le loro aree sono direttamente proporzionali alle altezze e quindi

$$A':1 = h : 1 \rightarrow A' = h \quad (\text{prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi})$$

- poiché R e R' hanno la stessa altezza le loro aree sono direttamente proporzionali alle basi e quindi

$$A : A' = b : 1 \rightarrow A = A' \cdot b = h \cdot b$$

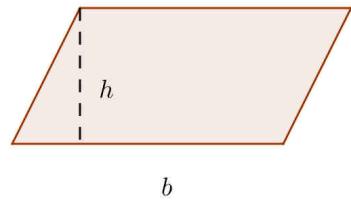
Nota

Di conseguenza se abbiamo un **quadrato di lato l** avremo che l'area risulta:

$$A = l \cdot l = l^2$$

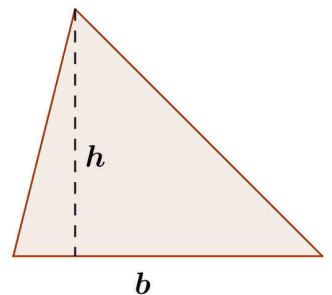
Sapendo che l'**area di un rettangolo** è data dal prodotto della misura della base per la misura dell'altezza e utilizzando i teoremi sull'equivalenza che abbiamo dimostrato,abbiamo che:

- poiché **un parallelogramma e un rettangolo aventi basi e altezze relative congruenti sono equivalenti**
l'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza



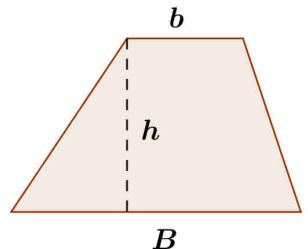
$$A = b \cdot h$$

- poiché **un triangolo è equivalente ad un parallelogramma di altezza congruente e base congruente a metà di quella del triangolo** l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

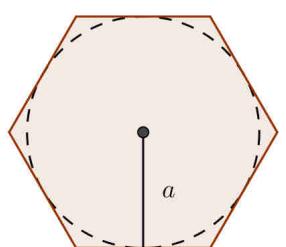
- poiché **un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e la cui base è uguale alla somma delle basi del trapezio** l'area di un trapezio è uguale al prodotto della semisomma delle lunghezze delle basi per la lunghezza dell'altezza



$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- poiché **un poligono regolare di n lati è equivalente ad un triangolo avente come base il perimetro del poligono e come altezza il raggio della circonferenza inscritta nel poligono**

l'area di un poligono regolare è uguale al prodotto della lunghezza del semiperimetro (indicato con p) per la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta (chiamato apotema ed indicato con a).



$$A = p \cdot a$$

SCHEMA 1

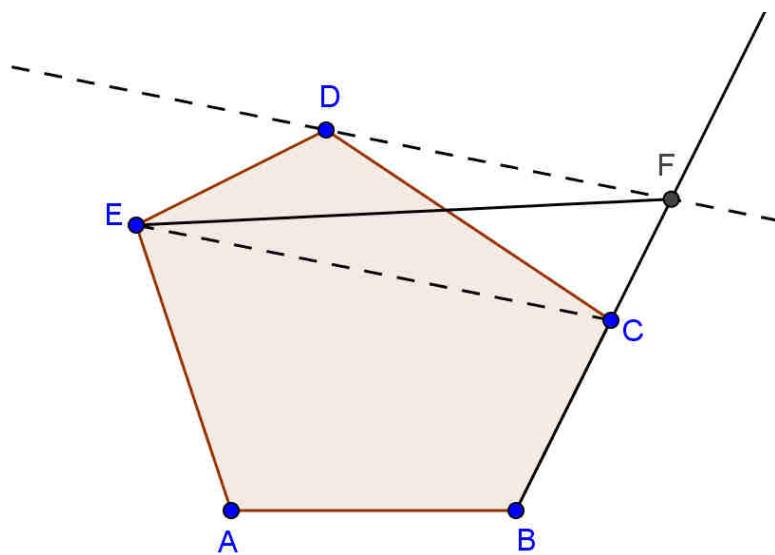
Da un poligono ad un altro equivalente

Consideriamo per esempio un pentagono ABCDE.

Proviamo a costruire un poligono con un lato in meno (quindi in questo caso un quadrilatero) che sia però equivalente al poligono di partenza.

Possiamo procedere così:

- Tracciamo una diagonale, per esempio EC, che individua un triangolo (ECD);
- Costruiamo un triangolo equivalente al triangolo ECD che abbia la stessa base EC: tracciamo la parallela ad EC per D e intersechiamola con il prolungamento di BC (vedi figura) individuando il punto F.



I triangoli ECD e ECF sono equivalenti poiché hanno

Quindi il pentagono ABCDE è somma di e di
e il quadrilatero ABFE è somma di e di

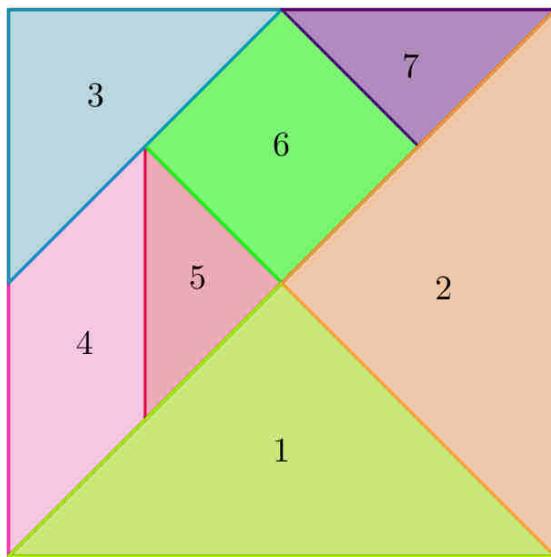
In conclusione abbiamo costruito un quadrilatero al pentagono dato.

Osservazione

Ripetendo più volte la costruzione si può quindi sempre arrivare ad un equivalente al poligono dato.

SCHEMA 2
Il tangram

Il Tangram è un antico gioco cinese: è una specie di puzzle le cui tessere sono 7 figure geometriche ottenute dalla scomposizione di un quadrato (vedi figura).



Le figure sono: due triangoli grandi, due triangoli piccoli, un triangolo medio, un quadrato e un parallelogramma.

Il quadrato è equivalente a

Il triangolo medio è equivalente a.....

Il triangolo grande è equivalente a

Il parallelogramma è equivalente a.....

Esercizio

Usando tutti i sette pezzi del Tangram si possono costruire 13 poligoni convessi (naturalmente equivalenti)... prova a disegnarne qualcuno!

ESERCIZI

- 1) Da ciascun vertice di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Indica con A' il punto di intersezione delle parallele condotte da A e B, con B' quello di intersezione tra le parallele condotte da B e C e con C' quello tra le parallele per C e A. Dimostra che i quadrilateri AA'BC, ABCC' e ABB'C sono equivalenti.
- 2) Disegna due parallelogrammi ABCD e CDEF situati da parti opposte rispetto al alto comune DC. Congiungi A con F e B con E. Dimostra che ABEF è equivalente alla somma dei due parallelogrammi iniziali.
- 3) Disegna un trapezio ABCD di basi AB e CD ed indica con E il punto di intersezione delle diagonali. Dimostra che i triangoli AED e BCE sono equivalenti.

Suggerimento: considerali come differenza tra ACD e CDE, DCB e CDE.....

- 4) Dimostra che un parallelogramma viene diviso dalle sue diagonali in quattro triangoli equivalenti.
- 5) Disegna un triangolo ABC e traccia la mediana CM. Indica con P il punto medio di CM e congiungi A e B con P. Dimostra che i quattro triangoli AMO, BMP, BCP e CAP sono tra loro equivalenti.
- 6) Disegna un triangolo ABC ed indica con M e N i punti medi rispettivamente dei lati AB e BC. Dimostra che i triangoli AMC e ANC sono equivalenti

Suggerimento: traccia la retta per M e N che risulta.....

- 7) Dimostra che congiungendo il baricentro di un triangolo con i suoi vertici si ottengono tre triangoli equivalenti.
- 8) Dato un quadrilatero ABCD considera il quadrilatero MNPQ che ha i vertici nei punti medi dei lati di ABCD. Dimostra che $MNPQ \equiv \frac{1}{2} ABCD$

Suggerimento: traccia le diagonali del quadrilatero ABCD.

Osserva che MN risulta parallelo a , PQ risulta parallelo a

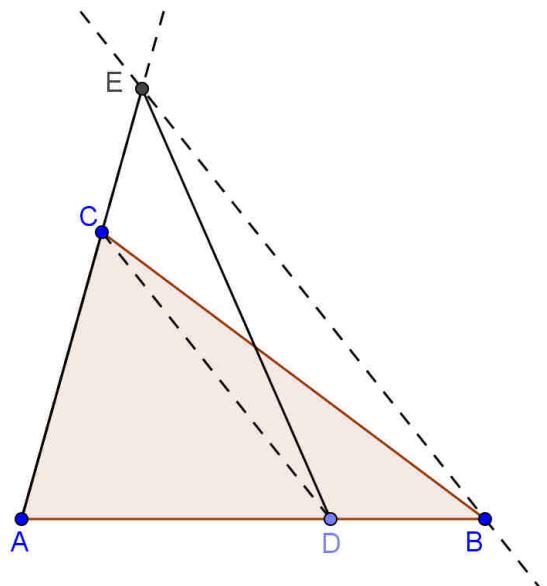
9) *Dato un triangolo ABC costruisci un triangolo equivalente di base assegnata b.*

Suggerimento

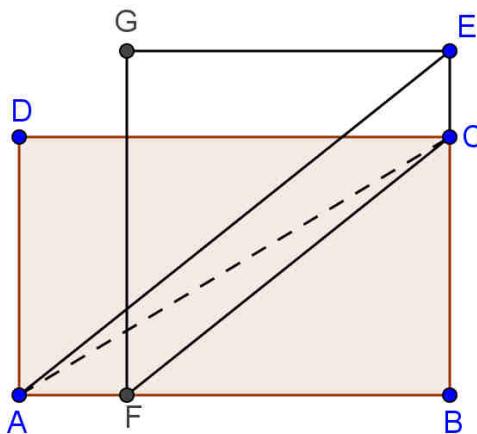
Riporta su AB un segmento $AD \cong b$ e congiungi D con C.

Traccia per B la parallela a CD e sia E il suo punto di intersezione con il prolungamento di AC.

Il triangolo ADE è equivalente al triangolo ABC perché.....



10) *Dato un rettangolo ABCD, costruire un rettangolo equivalente avente un lato assegnato h.*



Suggerimento: traccia la diagonale AC, riporta su BC un segmento $BE \cong h$ e congiungi A con E.

Traccia da C la parallela ad AE e sia F il punto in cui interseca AB (vedi figura).

Osserva che $ABC \equiv FBE$ poiché.....

Costruiamo il rettangolo FBEG di lati FB e BE.

Il rettangolo ABCD risulta quindi equivalente al rettangolo FBEG poiché.....

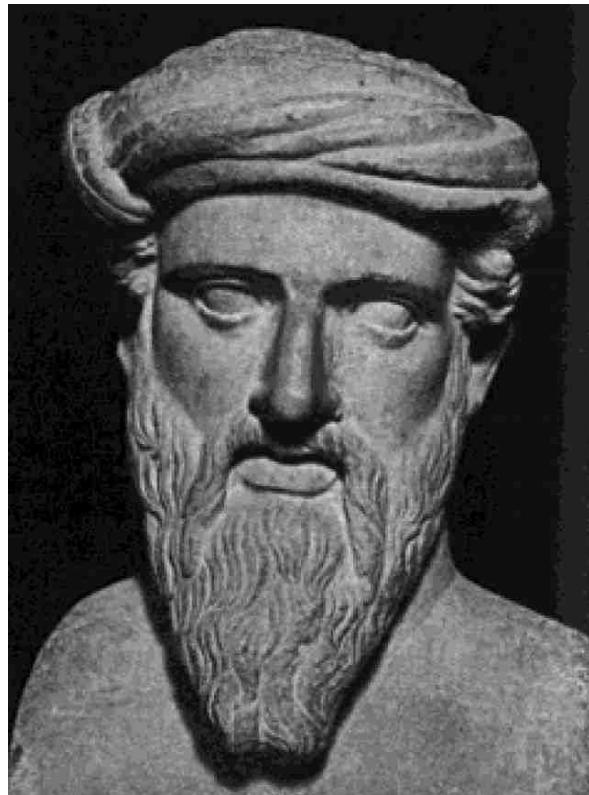
- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -

- Geometria euclidea -

I teoremi di Euclide e di Pitagora

GEOMETRIA EUCLIDEA

I teoremi di Euclide e Pitagora



Vediamo tre importanti teoremi che riguardano i triangoli rettangoli e che si dimostrano utilizzando l'equivalenza delle superfici piane.

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.

Dimostrazione

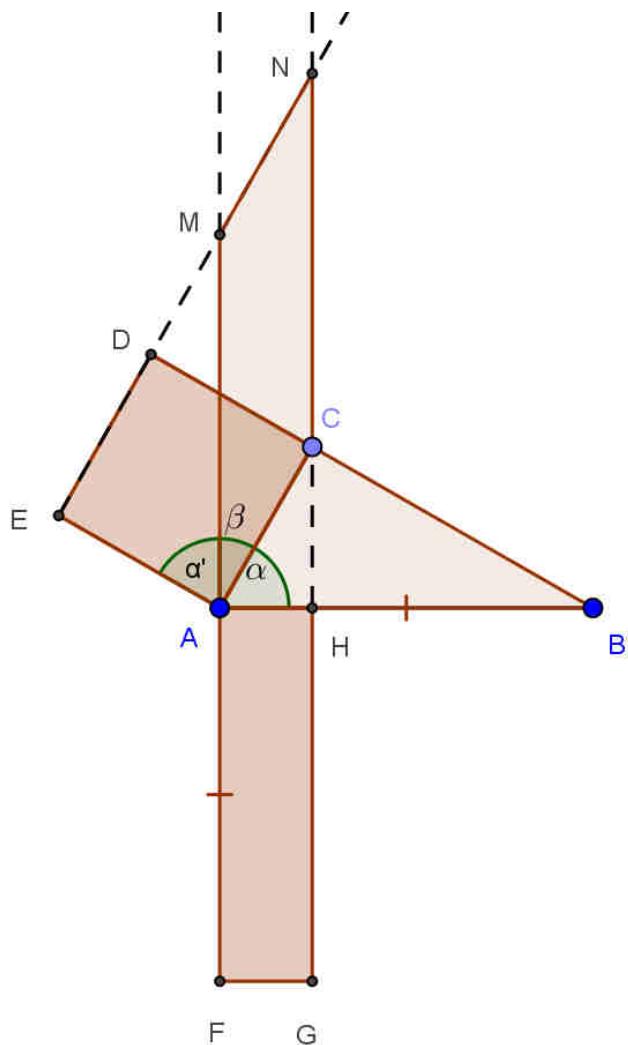
Costruiamo il quadrato ACDE sul cateto AC e il rettangolo AHGF con $AF \cong AB$ (vedi figura).

Prolunghiamo il lato ED fino ad intersecare in M e N i prolungamenti di AF e HG.

Il parallelogramma ACNM è equivalente al quadrato ACDE poiché hanno stessa base e stessa altezza (EA).

Consideriamo i triangoli ABC e AME: risultano congruenti poiché

$AC \cong AE$, $\alpha \cong \alpha'$
poiché complementari dello stesso angolo β



Quindi $AM \cong AB$ e il parallelogramma e il rettangolo risultano equivalenti avendo basi congruenti e uguale altezza (AH).

In conclusione:

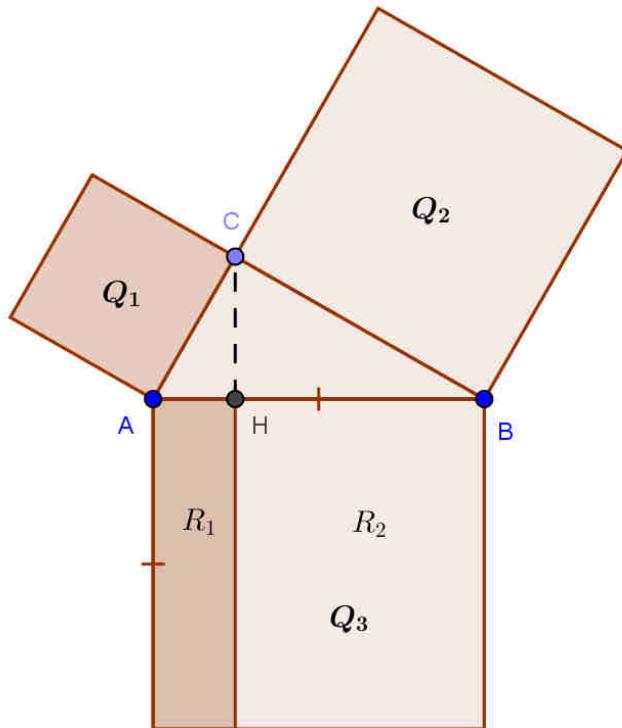
$$Q \equiv P, P \equiv R \rightarrow Q \equiv R$$

cioè il quadrato ACDE costruito su un cateto è equivalente al rettangolo AHGF che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.

Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Dimostrazione



Disegniamo i quadrati Q_1 , Q_2 sui cateti e il quadrato Q_3 sull'ipotenusa.

Tracciamo l'altezza CH e prolunghiamola in modo da scomporre il quadrato Q_3 nei rettangoli R_1 , R_2 .

Per il primo teorema di Euclide abbiamo che

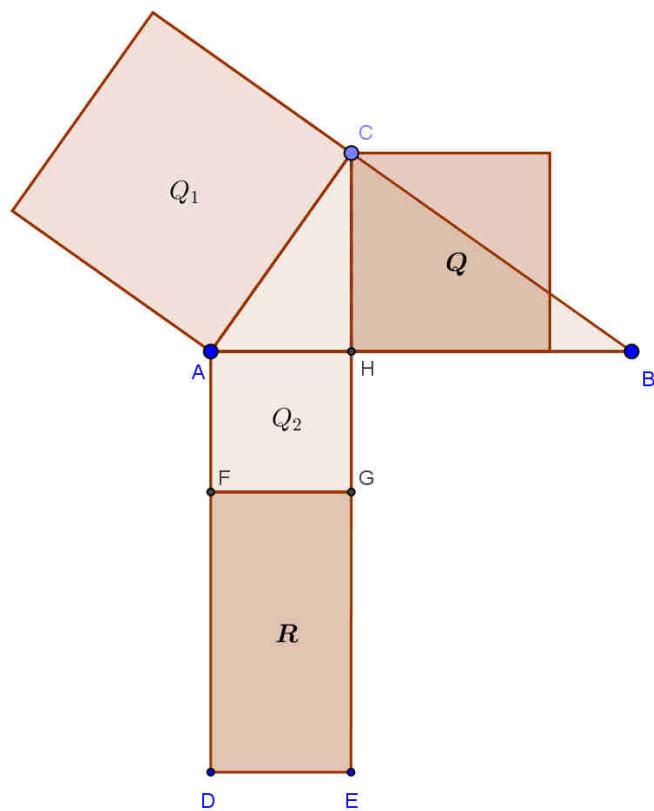
$$Q_1 \equiv R_1, \quad Q_2 \equiv R_2$$

e quindi

$$Q_1 + Q_2 \equiv R_1 + R_2 \quad \rightarrow \quad Q_1 + Q_2 \equiv Q_3$$

Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Disegniamo il quadrato Q_1 di lato AC , il quadrato Q di lato CH e il rettangolo di base AH e altezza $AD \cong AB$.

Consideriamo su AD un punto F tale che $AF \cong AH$ e disegniamo il quadrato Q_2 di lato AH . Indichiamo con R il rettangolo $DEGF$.

Per il teorema di Pitagora abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + Q \rightarrow Q \equiv Q_1 - Q_2$$

Per il primo teorema di Euclide abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + R \rightarrow R \equiv Q_1 - Q_2$$

Quindi, per la proprietà transitiva, abbiamo che $Q \equiv R$.

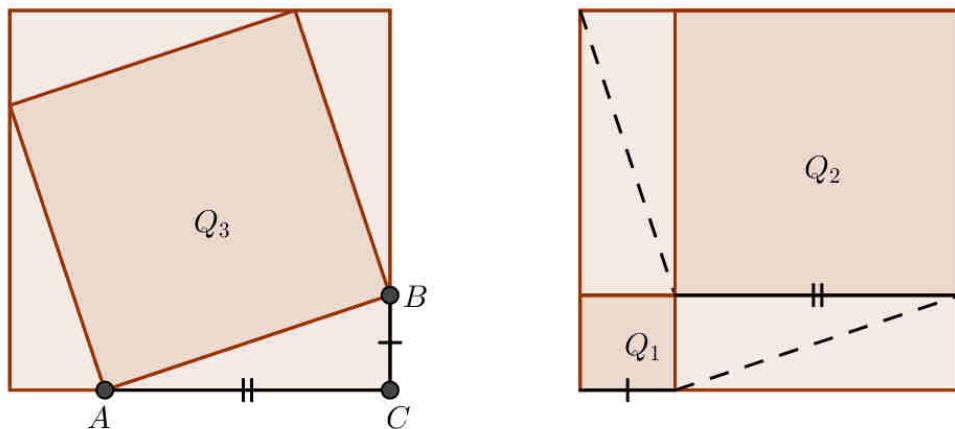
SCHEMA 1

Un'altra dimostrazione del teorema di Pitagora

Possiamo dimostrare il teorema di Pitagora anche senza utilizzare il primo teorema di Euclide.

Considera un triangolo rettangolo ABC: prolunga il cateto AC di un segmento congruente all'altro cateto e costruisci un quadrato Q che ha per lato la somma dei cateti.

Disegna, all'interno del quadrato, il quadrato Q_3 , che ha per lato l'ipotenusa del triangolo.



Lo stesso quadrato Q può essere scomposto in due quadrati di lati uguali ai cateti del triangolo ABC e in due rettangoli: tracciando le diagonali dei due rettangoli ci si accorge che

.....

Si può quindi concludere che

poiché.....

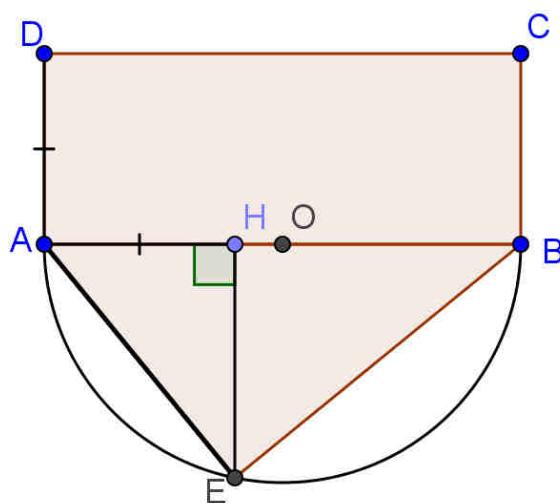
SCHEMA 2

Costruzione di un quadrato equivalente ad un rettangolo assegnato

Sia dato un rettangolo ABCD: vogliamo costruire un quadrato ad esso equivalente.

Supponiamo che $AB > BC$ e sia O il punto medio di AB.

Tracciamo la semicirconferenza di centro O e raggio AO esterna al rettangolo.



Consideriamo su AB un punto H tale che $AH \cong AD$ e tracciamo per H la perpendicolare ad AB che incontra in E la semicirconferenza.

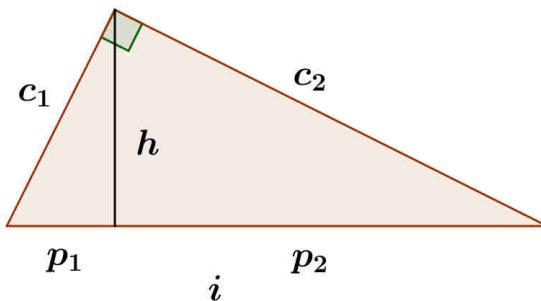
Il triangolo ABE è un triangolo

AE è il lato del quadrato equivalente al rettangolo poiché, per il primo teorema di Euclide,.....

Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora

Utilizziamo le **misure** e vediamo come si riscrivono i teoremi di Pitagora ed Euclide per il triangolo rettangolo.

Indichiamo con c_1 , c_2 , i le misure dei cateti e dell'ipotenusa; con h , p_1 , p_2 le misure dell'altezza relativa all'ipotenusa e delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Teorema di Pitagora: poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_1 è c_1^2 , l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_2 è c_2^2 e l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa che misura i è i^2 si ha che

$$c_1^2 + c_2^2 = i^2$$

1° Teorema di Euclide: poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_1 è c_1^2 e l'area del rettangolo di dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa è $p_1 \cdot i$ si ha che

$$c_1^2 = p_1 \cdot i$$

e analogamente per l'altro cateto $c_2^2 = p_2 \cdot i$

2° Teorema di Euclide: poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa di misura h risulta h^2 e la misura dell'area del rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $p_1 \cdot p_2$ si ha

$$h^2 = p_1 \cdot p_2$$

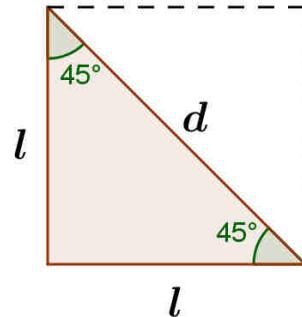
TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI

Inoltre dal teorema di Pitagora si ricavano delle relazioni importanti per due triangoli rettangoli particolari.

Triangolo rettangolo con angoli di 45°

Un triangolo rettangolo con angoli di 45° è metà di un quadrato ed indicando con l il lato e con d la diagonale, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:

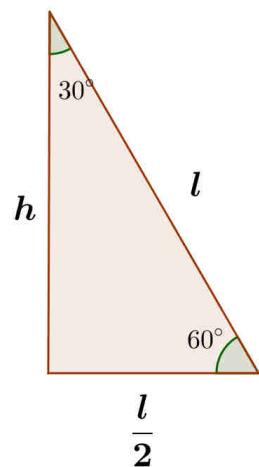
$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$$



Triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° è la metà di un triangolo equilatero e se indichiamo con l la lunghezza del lato e con h la lunghezza dell'altezza, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:

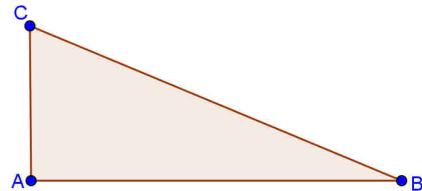
$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$



Problemi svolti

- 1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{5}{12}$ dell'altro e il perimetro è 60 cm. Quali sono le lunghezze dei cateti?

Considera il triangolo in figura.



Se poniamo $\overline{AB} = x$ abbiamo $\overline{AC} = \frac{5}{12}x$ ed applicando il teorema di Pitagora avremo:

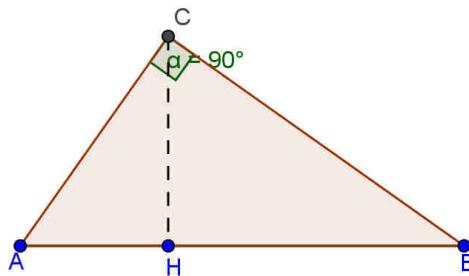
$$\overline{CB} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{12}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{25}{144}x^2} = \frac{13}{12}x$$

Poiché il perimetro è 60 cm abbiamo che

$$x + \frac{5}{12}x + \frac{13}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad \frac{30}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad x = 24$$

Quindi $\overline{AB} = 24\text{cm}; \overline{AC} = \frac{5}{12} \cdot 24 = 10\text{cm}; \overline{BC} = \frac{13}{12} \cdot 24 = 26\text{cm}$

- 2) Consideriamo un triangolo rettangolo di cui si conoscono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa $\overline{AH} = 3\text{cm}$, $\overline{HB} = \frac{16}{3}\text{cm}$. Come risultano le lunghezze dei cateti?



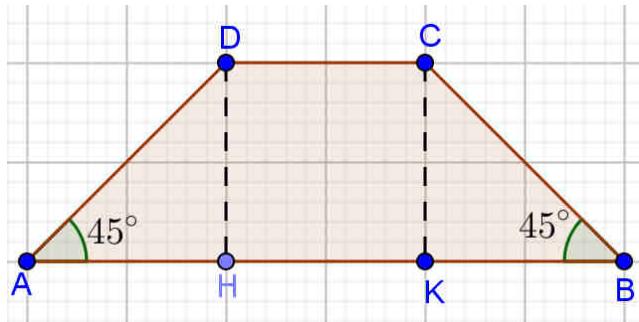
Possiamo usare il 1° teorema di Euclide e, considerando che $\overline{AB} = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}$, abbiamo:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = \frac{25}{3} \cdot 3 = 25 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{25} = 5\text{cm}, \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB} = \frac{400}{9} \rightarrow \overline{BC} = \frac{20}{3}\text{cm}$$

Nota: avremmo potuto anche usare il 2° teorema di Euclide e determinare prima \overline{CH} e poi, usando il teorema di Pitagora, i cateti.

$$\overline{CH}^2 = 16 \rightarrow \overline{CH} = 4\text{ cm}, \quad \overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5\text{ cm}, \quad \overline{BC} = \sqrt{16+\frac{256}{9}} = \frac{20}{3}\text{ cm}$$

- 3) Considera un trapezio isoscele ABCD avente gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45° e siano H e K i piedi delle altezze (vedi figura). Sapendo che DCKH è un quadrato di lato 5 cm, determina perimetro e area del trapezio.



Abbiamo $\overline{AD} = \overline{CB} = 5\sqrt{2}$ cm, $\overline{AB} = 15$ cm

$$\text{Quindi } 2p = 15 + 5 + 10\sqrt{2} = 20 + 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A = \frac{20 \cdot 5}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

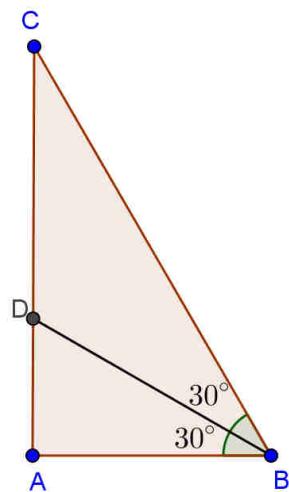
- 4) Un triangolo rettangolo ABC retto in A ha l'angolo $\hat{B} = 60^\circ$ e la bisettrice dell'angolo \hat{B} misura 6 cm. Come si determinano i lati del triangolo?

Nel triangolo ABD si ha:

$$\overline{AD} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}, \quad \overline{AB} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Se poi consideriamo il triangolo ABC avremo che:

$$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB} = 6\sqrt{3} \text{ cm}, \quad \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = 9 \text{ cm}$$



ESERCIZI

- 1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{4}{3}$ dell'altro cateto e l'area è 150 cm^2 . Calcola la lunghezza dei cateti e dell'ipotenusa.

[15 cm; 20 cm; 25 cm]

- 2) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 5 cm e l'altezza relativa all'ipotenusa $\frac{12}{5} \text{ cm}$. Determina la lunghezza dei cateti.

[3 cm; 4 cm]

- 3) In un triangolo rettangolo i cateti stanno tra loro come 3 sta a 4. Sapendo che il perimetro è 6 cm , determina la lunghezza dei cateti dell'ipotenusa.

[$2 \text{ cm}; \frac{3}{2} \text{ cm}, \frac{5}{2} \text{ cm}$]

- 4) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che la sua area è a^2 .

[$2(\sqrt{2}+1)a$]

- 5) Calcola l'area di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che il suo perimetro è uguale a $2 + \sqrt{2} \text{ cm}$.

[$\frac{1}{2} \text{ cm}^2$]

- 6) In un triangolo isoscele il perimetro misura 72 cm e l'altezza relativa alla base 24 cm . Determina la lunghezza dei lati obliqui e della base.

[26 cm; 20 cm]

- 7) Considera un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ e lato obliquo 5 cm . Determina il raggio R della circonferenza circoscritta.

[$R = \frac{25}{8} \text{ cm}$]

- 8) In un trapezio rettangolo ABCD con angoli retti in A e D, si ha che l'angolo adiacente alla base maggiore $\hat{B} = 45^\circ$. Sapendo che $\overline{BC} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ e che l'area risulta $\frac{45}{2} \text{ cm}^2$, determina la lunghezza delle basi e dell'altezza del trapezio.

[7 cm ; 2 cm ; 5 cm]

- 9) In un rombo le diagonali sono l'una i $\frac{12}{5}$ dell'altra ed il perimetro del rombo è 26 cm .

Determina la lunghezza del lato e dell'altezza del rombo.

$$[\frac{13}{2} \text{ cm}, \frac{60}{13} \text{ cm}]$$

- 10) Un trapezio isoscele ABCD di base AB è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 10\text{ cm}$. Sapendo che gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano 60° , determina perimetro ed area del trapezio.

$$[2p = 25\text{ cm}, A = \frac{75}{4}\sqrt{3}\text{ cm}^2]$$

- 11) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro è $80a$.

$$[300 a^2]$$

- 12) I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 20 cm stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. Determina l'area del rettangolo.

$$[192\text{ cm}^2]$$

- 13) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 25 cm ed un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.

$$[60\text{ cm}]$$

- 14) In un parallelogramma l'angolo acuto misura 30° , il lato maggiore è quattro volte quello minore e l'area è 450 cm^2 . Determina le lunghezze dei lati e delle due altezze del parallelogramma.

$$[15\text{ cm}; 60\text{ cm}; \frac{15}{2}\text{ cm}; 30\text{ cm}]$$

- 15) Disegna un trapezio isoscele ABCD con la base maggiore doppia della minore e gli angoli adiacenti alla base minore di 120° . Traccia le altezze DE e CF. Sapendo che l'area del rettangolo EFCD è $32\sqrt{3}\text{ cm}^2$, calcola area e perimetro del trapezio.

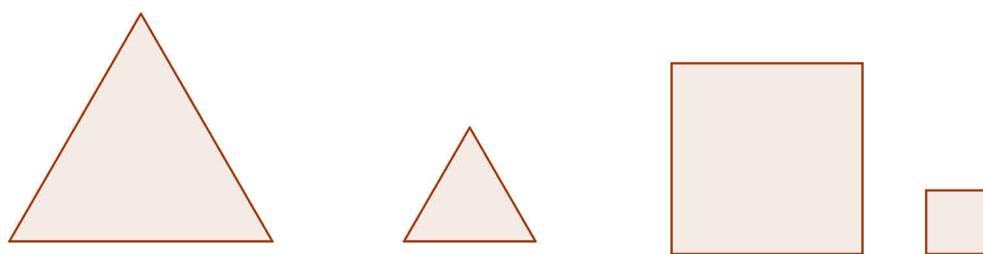
$$[48\sqrt{3}\text{ cm}^2; 40\text{ cm}]$$

GEOMETRIA EUCLIDEA

Similitudine

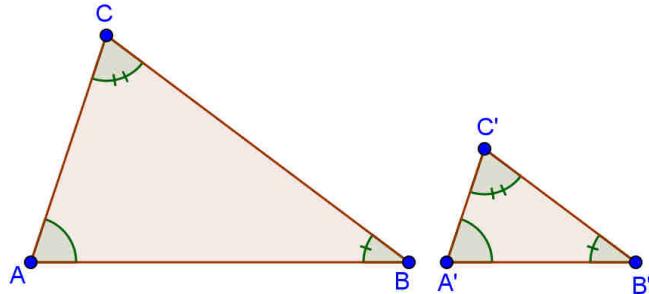


Se consideriamo due triangoli equilateri di lato diverso, due quadrati di lato diverso intuitivamente diciamo che hanno “*la stessa forma*”.



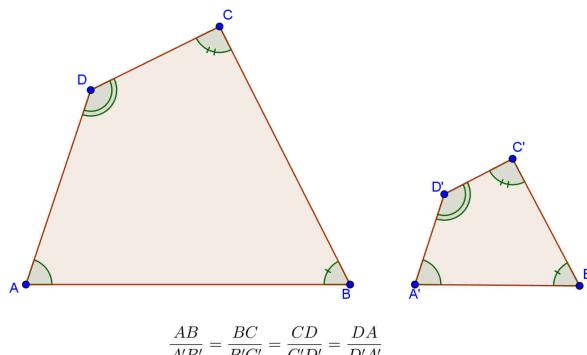
Ma cosa comporta avere la “*stessa forma*”?

Se osserviamo due triangoli della stessa forma (vedi esempio in figura) notiamo che hanno gli angoli ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati opposti ad angoli uguali è sempre lo stesso.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$$

Anche considerando due quadrilateri con la stessa forma notiamo che gli angoli sono ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati aventi per estremi vertici di angoli uguali è sempre lo stesso.



Diamo quindi la seguente definizione:

diciamo **“simili” due poligoni con lo stesso numero di lati che hanno gli angoli ordinatamente uguali ed i lati “corrispondenti”** (aventi per estremi vertici di angoli uguali) **in proporzione**.

Il rapporto tra lati corrispondenti viene detto *rapporto di similitudine*.

Osservazioni

- Se due poligoni sono congruenti sono anche simili (il rapporto di similitudine in questo caso è uguale a 1).
- Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili.

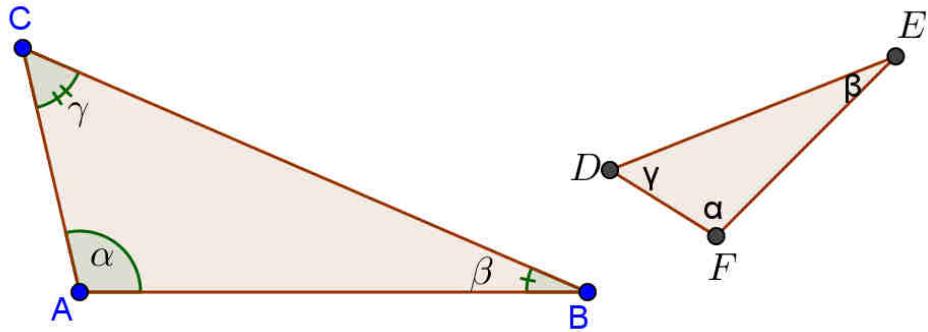
Similitudine dei triangoli

Osservazione

Se due triangoli sono simili conviene indicare con lettere “corrispondenti” (A-A’ ; B-B’; C-C’) i vertici di angoli corrispondenti uguali ed in questo modo sarà semplice individuare i lati corrispondenti che saranno AB-A’B’ ; BC-B’C’ ; AC-A’C’.

Ma se i vertici sono indicati in modo diverso è importante individuare gli angoli corrispondenti e di conseguenza i lati corrispondenti (che sono opposti ad angoli corrispondenti).

Per esempio se in figura abbiamo che



$$\hat{DFE} \cong \hat{A}, \quad \hat{FED} \cong \hat{B}, \quad \hat{EDF} \cong \hat{C}$$

ad AB corrisponde EF perché l’angolo opposto ad AB è γ e quindi nel triangolo EDF gli corrisponde il lato opposto all’angolo congruente a γ cioè EF ecc.
e in conclusione

$$AB : EF = BC : DE = AC : DF$$

A differenza degli altri poligoni, per i triangoli ***l’uguaglianza degli angoli e la proporzionalità tra i lati non sono proprietà indipendenti.***

Possiamo infatti dimostrare tre “criteri” per stabilire se due triangoli sono simili.

Primo criterio di similitudine dei triangoli

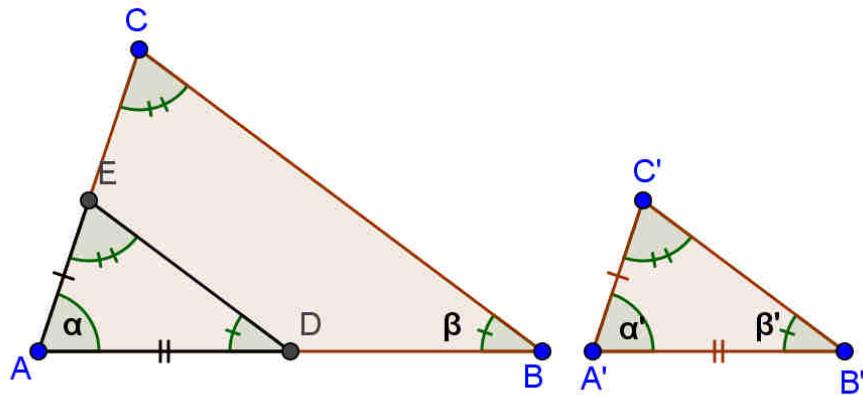
Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente uguali allora sono simili.

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABC e A'B'C' e supponiamo che $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$.

Osserviamo subito che, essendo la somma degli angoli interni di un triangolo uguale ad un angolo piatto, anche $\gamma \cong \gamma'$.

Supponiamo che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ (altrimenti i triangoli sono congruenti e quindi anche simili) e consideriamo un punto D su AB tale $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ e un punto E su AC in modo che $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.



Congiungendo D con E otteniamo un triangolo ADE congruente ad A'B'C' (primo criterio di congruenza) e quindi $\hat{AED} \cong \gamma'$, $\hat{ADE} \cong \beta'$.

Ma allora le rette DE e BC sono parallele (angoli corrispondenti uguali) e quindi, per il teorema di Talete,

$$AB : AD = AC : AE \quad \rightarrow \quad AB : A'B' = AC : A'C'$$

Poiché il ragionamento e la costruzione si può ripetere riportando su AC e BC segmenti congruenti a A'C' e B'C' si ottiene anche che

$$AC : A'C' = BC : B'C'$$

Quindi tutti i lati corrispondenti sono in proporzione ed i triangoli sono simili.

Nota

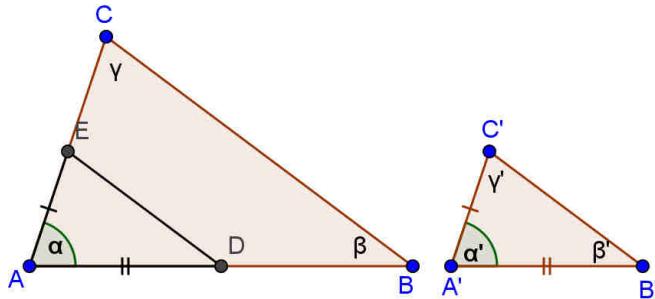
Questo è sicuramente il criterio più utilizzato nei problemi per stabilire se due triangoli sono simili.

Secondo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno un angolo uguale e i lati che lo comprendono in proporzione allora sono simili.

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABC e A'B'C' e supponiamo che $\alpha \cong \alpha'$ e che $AB : A'B' = AC : A'C'$.



Supponiamo anche in questo caso che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ e prendiamo D su AB tale che $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ ed E su AC tale che $\overline{AE} = \overline{A'C'}$.

Congiungendo D con E otteniamo un triangolo ADE congruente ad A'B'C' (primo criterio di congruenza).

Quindi, essendo valida la proporzione $AB : AD = AC : AE$ si deduce che DE è parallelo a BC e quindi $\hat{ADE} = \beta$, $\hat{DEA} = \gamma$ ed i triangoli ABC e ADE sono simili.

Essendo A'B'C' congruente a ADE abbiamo dimostrato che A'B'C' è simile ad ABC.

Terzo criterio di similitudine dei triangoli

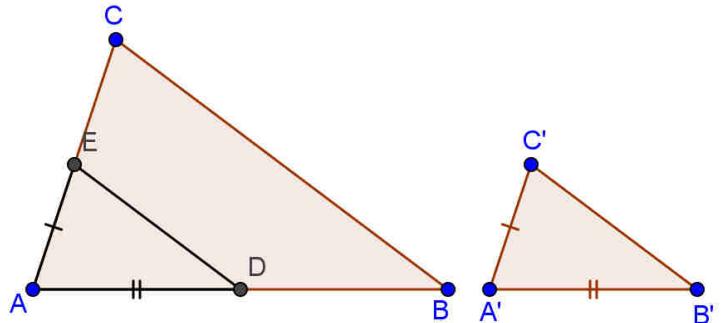
Se due triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione allora sono simili.

Dimostrazione

Supponiamo che

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$$

Supponiamo come al solito che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ e prendiamo D su AB tale che $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ ed E su AC tale che $\overline{AE} = \overline{A'C'}$.



Quindi, essendo valida la proporzione

$AB : AD = AC : AE$ si ha che DE è parallelo a BC e quindi ADE è simile a ABC e di conseguenza si ha anche $AB : AD = BC : DE$.

Per ipotesi però $AB : A'B' = BC : B'C'$ e quindi $\overline{B'C'} = \overline{DE}$.

Ma allora i triangoli A'B'C' e ADE sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli e in conclusione A'B'C' è simile a ABC.

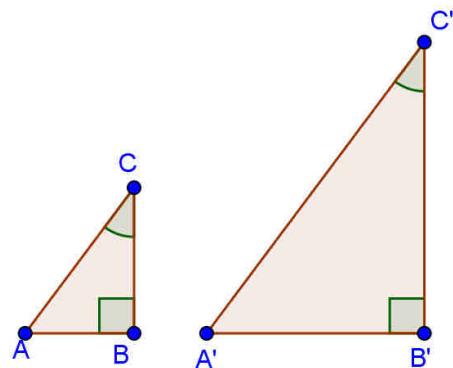
SCHEMA 1

Conseguenze del primo criterio di similitudine dei triangoli

1) Due triangoli rettangoli aventi un angolo acuto

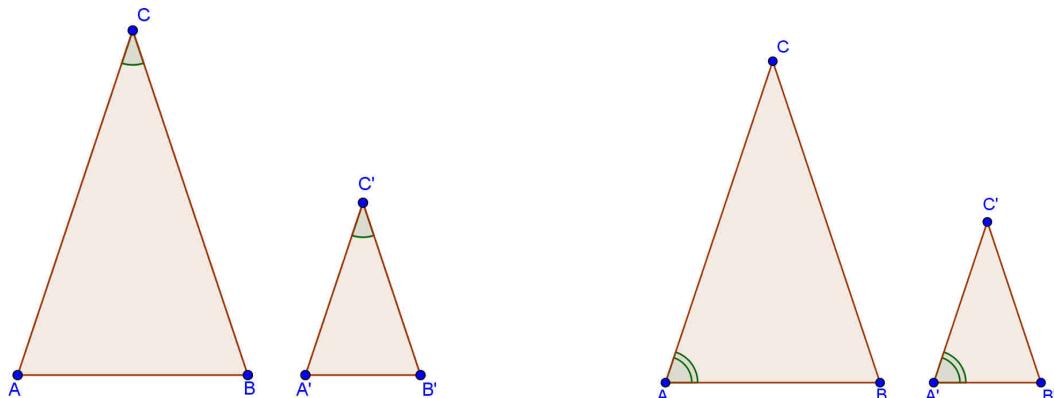
uguale sono.....

Infatti.....



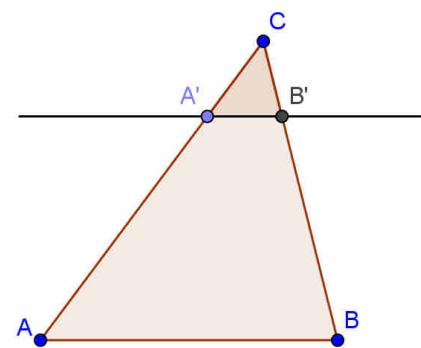
2) Due triangoli isosceli aventi uguale l'angolo al vertice oppure un angolo alla base sono.....

Infatti.....



3) Tracciando una corda parallela ad un lato di un triangolo ABC si individua un triangolo.....

Infatti.....

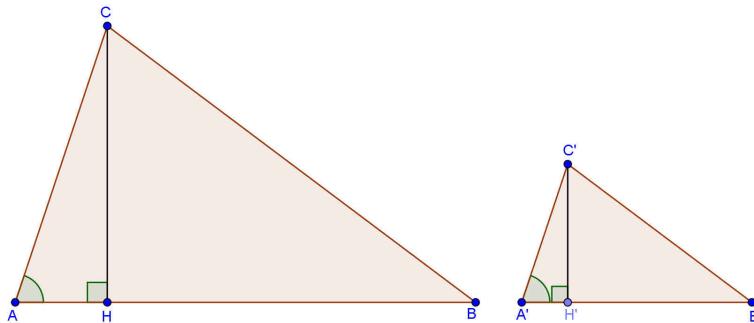


SCHEMA 2

Proprietà dei triangoli simili

1) In due triangoli simili le basi stanno tra loro come le rispettive altezze.

Dimostrazione guidata: consideriamo i triangoli simili ABC e A'B'C' e siano CH e C'H' le altezze relative alle basi corrispondenti AB e A'B'.



Poiché i triangoli rettangoli AHC e A'H'C' hanno sono simili e quindi

$$AC : A'C' = CH : C'H'$$

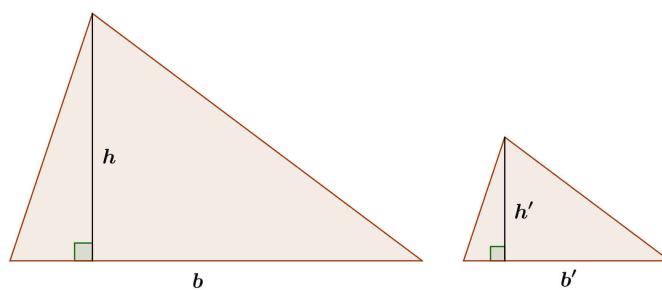
Ma poiché si ha anche che $AC : A'C' = AB : A'B'$, avremo anche che

2) Il rapporto tra le aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Dimostrazione guidata: considerando due triangoli simili aventi basi b, b' e relative altezze h, h' aventi rapporto di similitudine k (cioè per esempio $\frac{b}{b'} = k$).

Indicando con A e A' le loro aree avremo che

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}b'h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = \dots$$

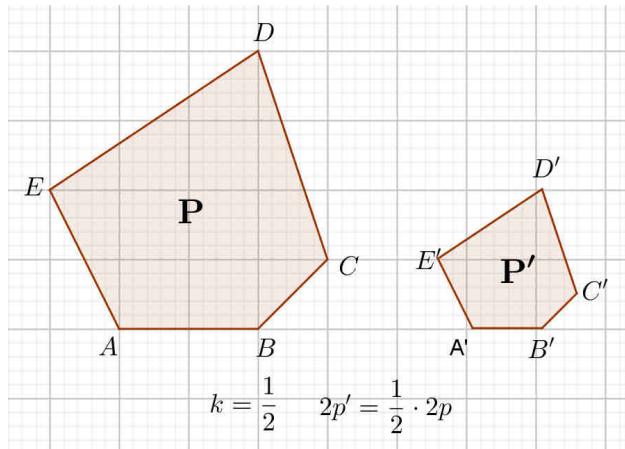


Perimetri e aree di poligoni simili

- Il rapporto tra i perimetri di due poligoni simili è uguale al rapporto di similitudine.

Infatti se $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ sono due poligoni simili e k è il loro rapporto di similitudine , indicando con $2p$, $2p'$ i rispettivi perimetri, si ha:

$$A'B'=kAB, \quad B'C'=kBC, \quad \dots \rightarrow A'B'+B'C'+\dots = k(AB+BC+\dots) \rightarrow 2p'=k \cdot 2p \rightarrow \frac{2p'}{2p} = k$$

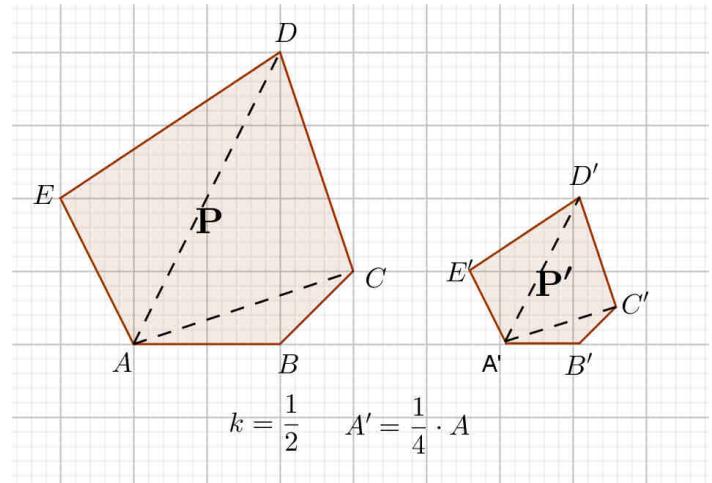


- Il rapporto tra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Infatti, dividendo i poligoni in triangoli corrispondenti (che saranno simili tutti con lo stesso rapporto di similitudine k), se indichiamo con A e A' le aree dei due poligoni e con $A_1, A'_1 ; A_2, A'_2 ; \dots$ le aree dei triangoli corrispondenti, ricordando che

$$A_1' = k^2 A_1, \quad A_2' = k^2 A_2, \dots$$

avremo che



$$A = A_1 + A_2 + \dots = k^2 (A_1 + A_2 + \dots) = k^2 \cdot A \rightarrow \frac{A'}{A} = k^2$$

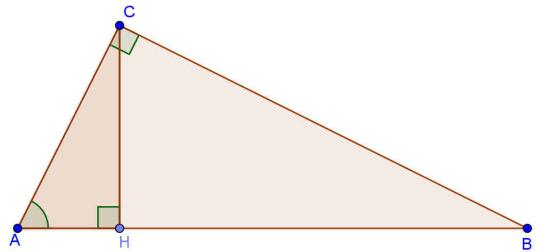
Teoremi di Euclide e similitudine

Possiamo dimostrare i due teoremi di Euclide utilizzando la similitudine dei triangoli che vengono a formarsi quando tracciamo l'altezza relativa all'ipotenusa.

1° teorema di Euclide

"Il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa"

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.



Il triangolo **ACH** risulta simile al triangolo **ABC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo in comune \hat{A}).

Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha:

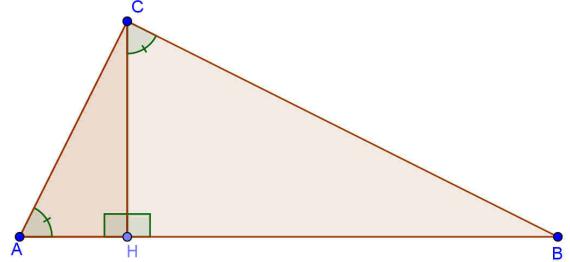
$$AB : AC = AC : AH \rightarrow AC^2 = AB \cdot AH$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al primo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sul cateto AC è AC^2 e l'area del rettangolo avente dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa è $AB \cdot AH$.

2° teorema di Euclide

"Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa"

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.



Il triangolo **ACH** risulta simile al triangolo **HBC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo $\hat{HAC} \equiv \hat{HCB}$ perché complementari dello stesso angolo). Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha:

$$AH : HC = HC : HB \rightarrow HC^2 = AH \cdot HB$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al secondo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è HC^2 e l'area del rettangolo avente dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $AH \cdot HB$.

SCHEMA 3

Proprietà delle secanti e delle tangenti ad una circonferenza

- 1) Considera una circonferenza e **due corde** AB e CD che si intersecano in E.

Prova a dimostrare che si dividono in modo che le due parti dell'una formano i medi e le due parti dell'altra gli estremi di una proporzione cioè :

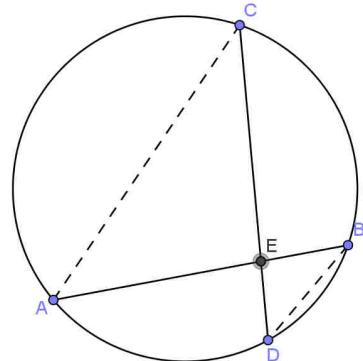
$$AE : CE = ED : EB$$

Suggerimento: considera i triangoli ACE e EBD.

Risultano simili perché

.....

e quindi.....



- 2) Considera una circonferenza e conduci da un punto esterno P **due secanti** PA e PB.

Prova a dimostrare che un'intera secante e la sua parte esterna formano i medi e l'altra secante e la sua parte esterna gli estremi di una proporzione, cioè :

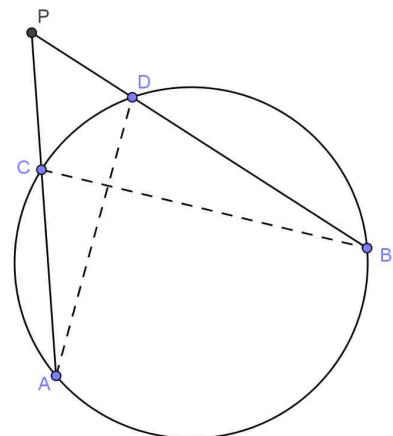
$$PA : PB = PD : PC$$

Suggerimento: considera i triangoli PAD e PBC.

Risultano simili perché

.....

e quindi.....



- 3) Considera una circonferenza e conduci da un punto esterno P **una tangente** PT **una secante** PA. Prova a dimostrare che la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la parte esterna di questa, cioè :

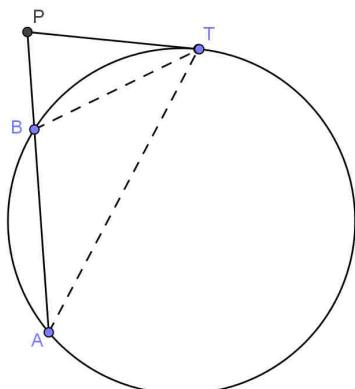
$$PA : PT = PT : PB$$

Suggerimento: considera i triangoli PAT, PTB.

Risultano simili perché

.....

e quindi.....

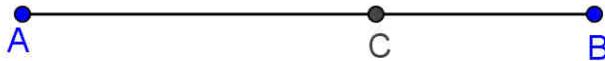


SCHEMA 4

Sezione aurea di un segmento

Dato un segmento AB si chiama “**sezione aurea di AB**” la parte del segmento che risulta media proporzionale tra l’intero segmento e la parte restante di esso, cioè AC è sezione aurea di AB quando

$$AB : AC = AC : CB$$



Come si può determinare AC ?

Poniamo $\overline{AB} = l$, $\overline{AC} = x$

Dobbiamo avere

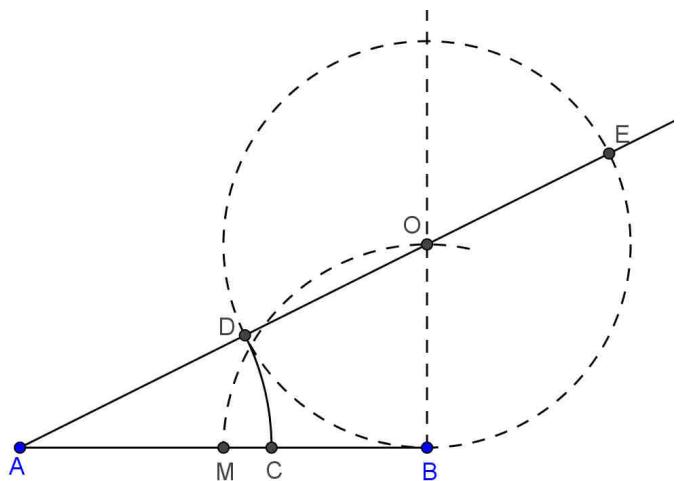
$$l : x = x : (l - x) \Rightarrow x^2 = l(l - x) \Rightarrow x^2 + lx - l^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} \rightarrow x = \frac{-l + \sqrt{5}l}{2} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}l$$

(poiché $x = \frac{-l - \sqrt{5}l}{2}$, essendo un numero negativo, è una soluzione non accettabile).

Costruzione con riga e compasso della sezione aurea di AB.

Si procede così:

- Considera il punto medio M di AB, puntando il compasso in B con apertura MB ed intersecando con la perpendicolare ad AB per B, individua il punto O;
- Traccia la semiretta uscente da A e passante per O;
- Punta il compasso in O e traccia la circonferenza di centro O e raggio OB, individuando il punto D su AO e il punto E;
- Riporta AD su AB (puntando in A con apertura AD) ed individua C: AC è la sezione aurea di AB



Infatti:

$$\text{se } \overline{AB} = l, \quad \overline{BO} = \frac{l}{2} \rightarrow \overline{AO} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}l$$

$$\text{e in conclusione } \overline{AC} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}l - \frac{l}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}l \text{ cioè AC è la sezione aurea di AB.}$$

Nota

Il rapporto aureo e il rettangolo aureo

Il rapporto $\frac{AB}{AC}$ è chiamato rapporto aureo (viene indicato con la lettera ϕ).

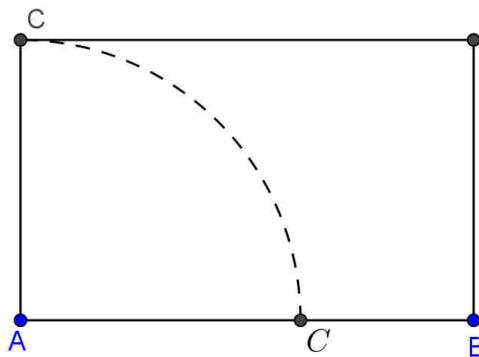
Ma a quale numero corrisponde?

Abbiamo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{l}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}l} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,618$$

Il rettangolo in cui le dimensioni sono in rapporto aureo risulta molto “armonioso” e viene detto “rettangolo aureo”.

Il rettangolo aureo è stato sfruttato nell’arte e in numerose applicazioni: anche le tessere (bancomat, sanitaria ecc.) sono rettangoli aurei (controlla!)



Una curiosità

Se consideriamo la successione (detta “successione di Fibonacci”) dei numeri che inizia con i primi due termini uguali a 1 e in cui poi ogni termine successivo è uguale alla somma dei due termini precedenti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

abbiamo che il rapporto tra un termine e il termine precedente tende sempre di più ad essere uguale a ϕ .

Infatti abbiamo

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} \cong 1,67; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} \cong 1,615\dots$$

Prova ad approfondire l’argomento.

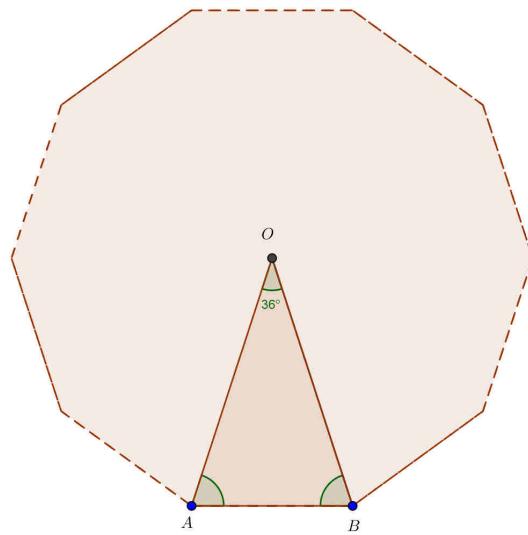
SCHEMA 5

Il lato del decagono regolare

Consideriamo un decagono regolare e la circonferenza ad esso circoscritta: prova a dimostrare che **il lato del decagono risulta la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta**.

Suggerimento

Congiungi il centro O della circonferenza con due vertici A, B consecutivi del decagono: ottieni un triangolo isoscele il cui angolo al vertice misura e gli angoli alla base misurano



Traccia la **bisettrice** AC dell'angolo alla base \hat{A} :

il triangolo ABC risulta.....al triangolo ABO poiché

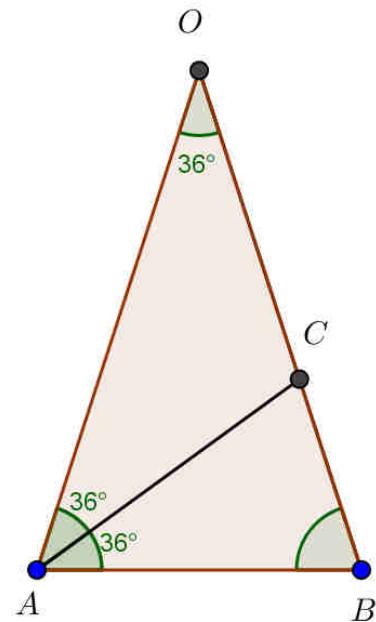
.....

Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione e si ha

$$OA : AB = AB : \dots$$

Ma poiché i triangoli ACO e ABC sono entrambi, si ha $AC \cong OC \cong AB$ e quindi

$$BC = OA - AB$$



e in conclusione quindi AB risulta.....

ESERCIZI

- 1) In un triangolo ABC, M e N sono rispettivamente i punti medi di AC e BC. Qual è il rapporto tra i perimetri dei triangoli MCN e ABC? E il rapporto tra le aree?

$$[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$$

- 2) Considera un triangolo isoscele ABC avente base $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$ e altezza $\overline{CH} = 8 \text{ cm}$. Considera il punto P su AC tale che $\overline{CP} = 4 \text{ cm}$ e traccia il segmento PQ parallelo ad AB con Q sul lato BC. Determina l'area del triangolo PQC.

$$[\frac{192}{25} \text{ cm}^2]$$

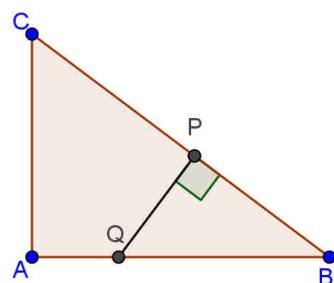
- 3) Considera un triangolo ABC e siano L,M,N i punti medi dei lati. Come risulta il triangolo LMN rispetto ad ABC?

[simile, perché.....]

- 4) Dato un triangolo rettangolo ABC, da un punto P dell'ipotenusa BC conduci la perpendicolare all'ipotenusa e supponi che incontri AB in Q (vedi figura). Come risulta BPQ rispetto ad ABC?

Supponi che $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$, $\overline{PB} = 4 \text{ cm}$.

Determina perimetro e area di PBQ.



[simile perché.....; $2p = 12 \text{ cm}$, $A = 6 \text{ cm}^2$]

- 5) Disegna un parallelogramma ABCD e la sua diagonale AC. Da un punto P di AC traccia le parallele ai lati e dimostra che i parallelogrammi che hanno per diagonale i segmenti AP e PC sono simili.

- 6) Considera due quadrilateri che hanno tre angoli congruenti e due lati consecutivi in proporzione. Dimostra che sono simili.

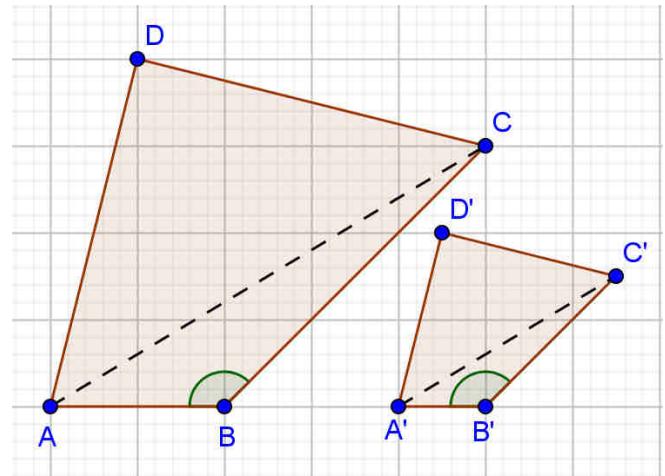
Suggerimento: siano ABCD e A'B'C'D' i due quadrilateri aventi gli angoli uguali (se ne hanno tre uguali hanno uguale anche il quarto angolo perché.....) e supponiamo che $AB : A'B' = BC : B'C'$.

Traccia la diagonale AC e A'C': il triangolo ABC è..... al triangolo A'B'C' per il criterio di similitudine e quindi si ha anche che

.....
Allora

$$\hat{D}AC \cong \hat{D}'A'C' \text{ e } \dots$$

E quindi i triangoli ADC e A'D'C' sono simili per il criterio e quindi



- 7) Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e prolunga il diametro AB dalla parte di B di un segmento $\overline{BC} = 2r$. Traccia da C la tangente t alla semicirconferenza sia T il punto di contatto e D il punto di intersezione tra t e la perpendicolare condotta da A ad AB. Determina perimetro e area del triangolo ACD.

$$[2p = 4(\sqrt{2} + 1)r, \quad A = 2\sqrt{2}r^2]$$

- 8) Disegna un trapezio ABCD e indica con O il punto di intersezione tra le diagonali. Traccia per O la corda MN parallela alle basi (con M e N sui lati obliqui). Dimostra che O dimezza MN.

Suggerimento: i triangoli ONC e ABC sono e il rapporto di similitudine è uguale a $\frac{CN}{CB}$, i triangoli MOD e ABD sono e il rapporto di similitudine è uguale a

Quindi per il teorema di Talete.....

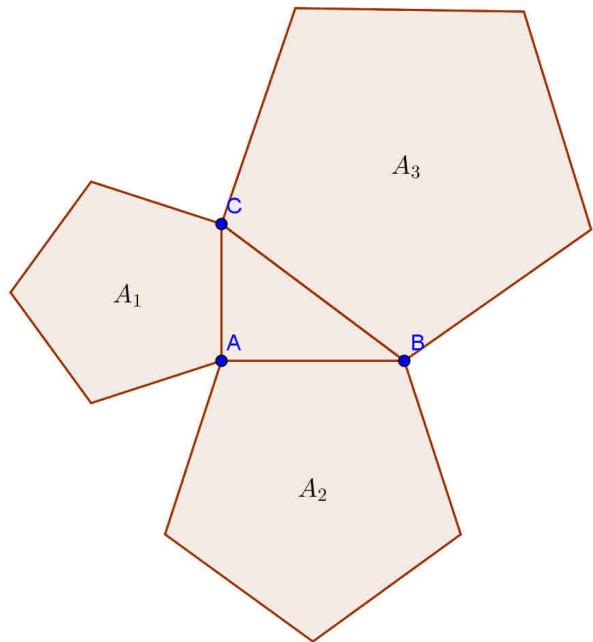
e in conclusione.....

- 9) Considera un **triangolo rettangolo** e costruisci sui suoi lati dei poligoni regolari con lo stesso numero di lati. Dimostra che il **poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui cateti**.

Suggerimento: i poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili tra loro e le loro aree stanno tra loro come i quadrati costruiti su lati corrispondenti cioè

$$A_1 : A_2 = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$$

$$A_3 : A_2 = \overline{CB}^2 : \overline{AB}^2$$



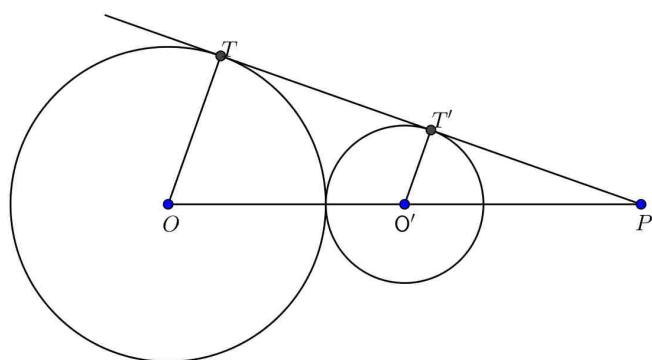
Quindi si ha anche

$$\frac{A_1 + A_2}{A_2} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AB}^2}$$

Allora poiché per il teorema di Pitagora si ha

possiamo concludere che

- 10) Considera due circonferenze tangenti esternamente di raggi 4 cm e 2cm. Indicando con O e O' i loro centri, determina a quale distanza da O' si trova il punto P sulla retta per i centri da cui escono le tangenti comuni alle due circonferenze.



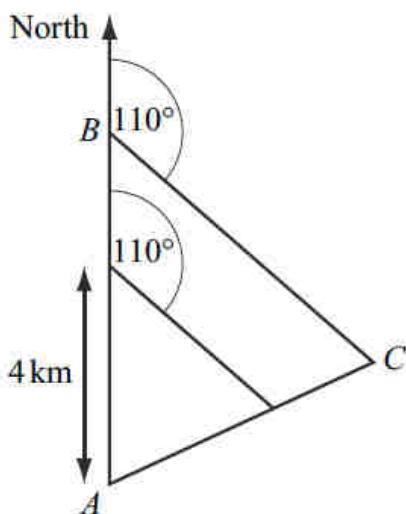
Suggerimento: indica con x la distanza $O'P$ e traccia una delle rette tangenti ad entrambe le circonferenze.

Se indichi con T e T' i punti di contatto si osserva che.....

$$[\overline{O'P} = 6 \text{ cm}]$$

**TEST
SIMILARITY**

- 1) The route for the sponsored walk in winter is triangular.



Senior students start at A , walk north to B , then walk on bearing 110° to C .
Then they return to A .

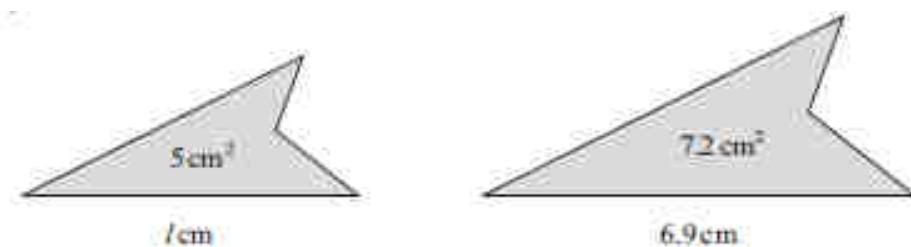
$$AB=BC=6 \text{ km}$$

Junior students follow a **similar** path but they only walk 4 km North from A , then 4 km on a bearing of 110° before returning to A .

Senior students walk a total of 18.9 km .

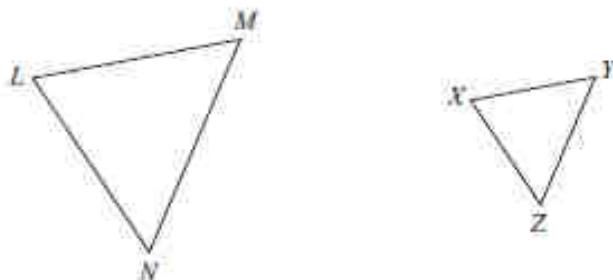
Calculate the distance walked by junior students.

- 2) The diagram shows two similar figures.



The areas of the figures are 5 cm^2 and 7.2 cm^2 . The lengths of the bases are $l \text{ cm}$ and 6.9 cm . Calculate the value of l .

- 3) A triangle XYZ is mathematically similar to triangle LMN .



$XZ=16$ cm and the area of triangle LMN is 324 cm^2 . Calculate the area of triangle XYZ .

- 4) Sidney draws the triangle OP_1P_2 . $OP_1=3$ cm and $P_1P_2=1$ cm. Angle $OP_1P_2=90^\circ$.

(a) Show that $OP_2 = \sqrt{10}$ cm.

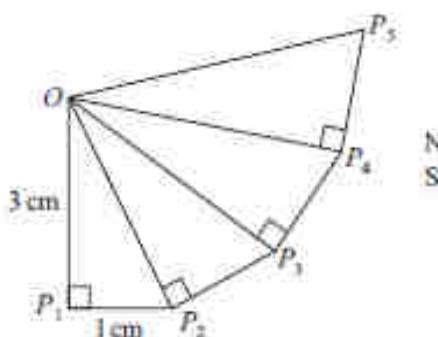
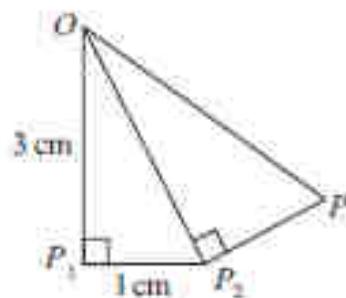
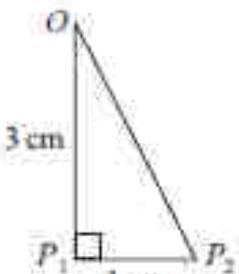
(b) Sidney now draws the lines P_2P_3 and OP_3 .

Triangle OP_2P_3 is mathematically similar to triangle OP_1P_2 .

(i) Write down the length of P_2P_3 in the form $\frac{\sqrt{a}}{b}$ where a and b are integers.

(ii) Calculate the length of OP_3 in the form $\frac{c}{d}$ where c and d are integers.

(c) Sidney continues to add mathematically similar triangles to his drawing.
 Find the length of OP_5 .



- 5) Ben and Sarah want to measure the height of a building. Ben is 1.8 m tall and Sarah suggests that he stands next to the building and compares the shadows. She measures his shadow to be 2.4 m long and the shadow of the building to be 16 m long. How tall is the building?

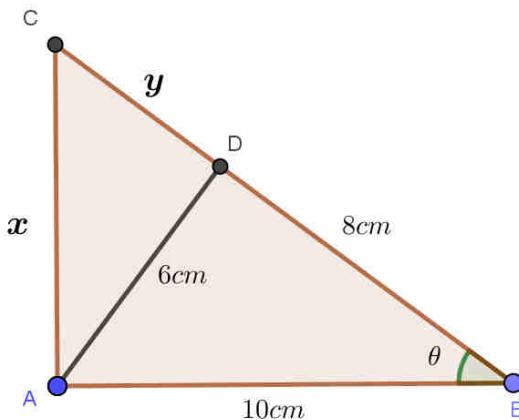
6) A photocopier is set to reduce the lengths of copies to $\frac{2}{3}$ of the original size. If the original document measures 12 cm by 15 cm what will be the dimension of the copy?

7) A photography shop produces enlargements of photos. A 15 cm x 10 cm photo was enlarged so that its longest side was 24 cm. What was the length of the shorter side?

8) A map is reduced to $\frac{3}{5}$ of its original size. A field on the original map measured 25 mm x 35 mm. What will be its dimensions on the image?

9) A map that measures 24 cm by 30 cm is reduced to $\frac{2}{3}$ of its original size. What are the dimensions of the reduced map?

10) In the triangle in the diagram $BD = 8 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$, $AD = 6 \text{ cm}$, $AC = x$ and $CD = y$.



- (a) Draw the two triangles ABC and DBA in the same orientation and mark on all their angles.
- (b) Hence explain why triangles ABC and DBA are similar.
- (c) Write down an equation involving x
- (d) Solve the equation to find x
- (e) Calculate the value of y.

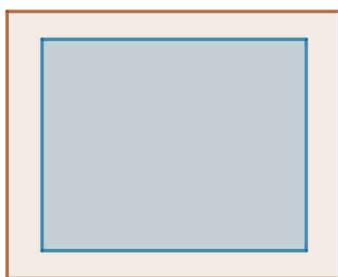
11) A rectangle P is enlarged to a rectangle Q. The dimensions of P are 5 m by 12 m. The shortest side of Q is 6 m.

- (a) What is the scale factor of enlargement?
- (b) What is the length of the longer side of Q?

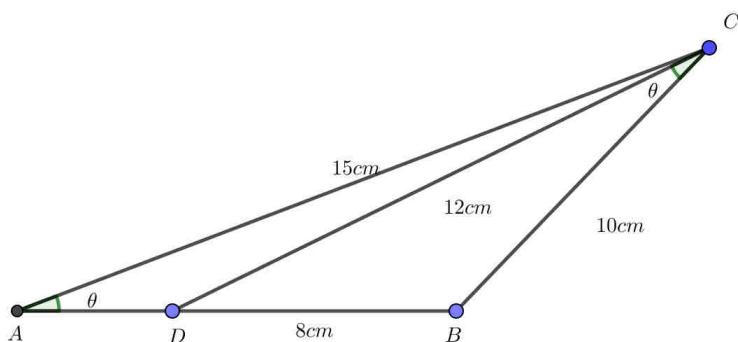
12) A right-angled triangle P is enlarged to a triangle Q. The hypotenuse of P is 12 cm and the hypotenuse of Q is 15 cm.

- (a) What is the scale factor of enlargement?
- (b) If the shortest side of P is 8 cm find the shortest side of Q.

13) A photo 8 cm high and 10 cm wide has a border 2 cm high along the bottom and the top of the photo and w cm wide on each side. Find w if the original photo is similar to the photo with its border.



14) In the diagram $D\hat{C}B \cong C\hat{A}B = \theta$, $DB = 8$ cm, $DC = 12$ cm and $CB = 10$ cm.



- (a) To which triangle is the triangle ABC similar?
- (b) Draw triangle ABC and the triangle of part (a) so that they have the same orientation and mark each side clearly.
- (c) Find the length AB
- (d) Find also the length AC.

15) The distance between Delhi and Calcutta is 1310 Km. On a map they are 26.2 cm apart. Find the scale of the map in the form 1:n.

16) The scale of a map is 1: 20 000 000. On the map the area of a state is 5 cm^2 . Calculate the actual area of the state in Km^2 .

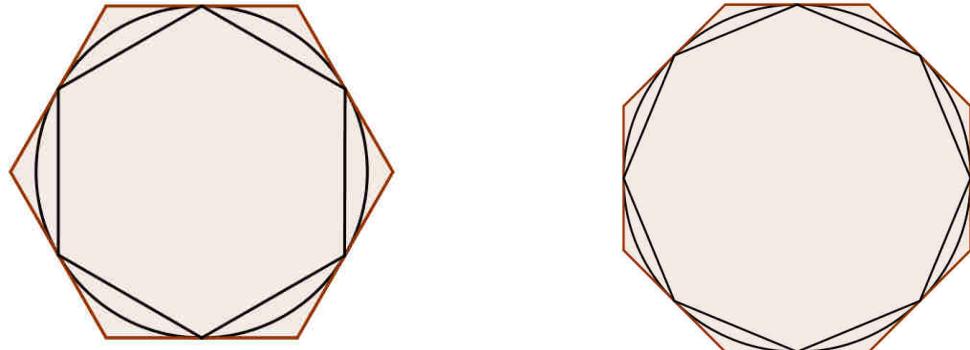
GEOMETRIA EUCLIDEA

Lunghezza della circonferenza e area del cerchio

Come possiamo determinare la lunghezza di una circonferenza di raggio r ?

Proviamo a considerare i *poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza*: è chiaro che la lunghezza della circonferenza è maggiore del perimetro di un qualunque poligono regolare inscritto e minore del perimetro di un qualunque poligono regolare circoscritto.

Inoltre è intuitivo (e si può comunque dimostrare in modo rigoroso) che la differenza tra il perimetro di un poligono regolare circoscritto e il perimetro di un poligono regolare inscritto con lo stesso numero di lati diventa sempre più piccola aumentando il numero dei lati.

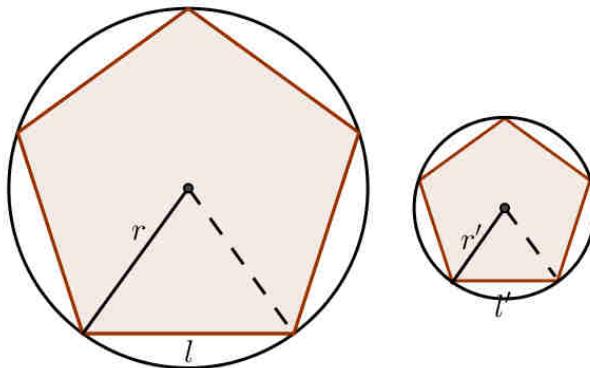


La lunghezza della circonferenza è definita come **l'elemento separatore** tra l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza.

Osservazioni

1) Se consideriamo due circonferenze di raggi r e r' e vi inscriviamo un poligono regolare dello stesso numero di lati, indicando con $2p$ il perimetro del poligono inscritto nella circonferenza di raggio r e con $2p'$ il perimetro di quello inscritto nella circonferenza di raggio r' abbiamo che:

$$2p : 2p' = r : r' \rightarrow \frac{2p}{2p'} = \frac{r}{r'}$$



Dimostrazione

Sappiamo che $2p : 2p' = l : l'$.

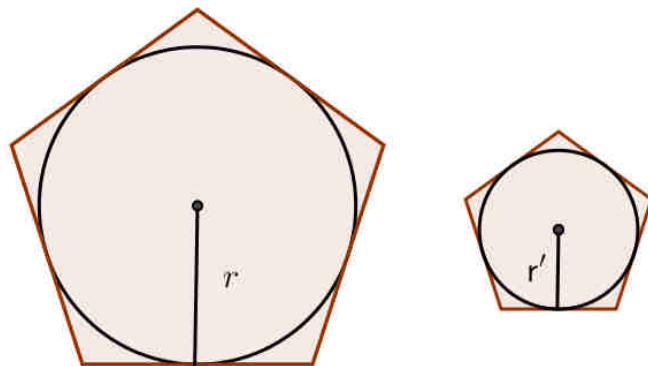
Considerando la similitudine dei triangoli in figura abbiamo che

$$l : l' = r : r'$$

e quindi in conclusione $2p : 2p' = r : r'$.

2) Analogamente, considerando i poligoni regolari circoscritti dello stesso numero di lati ed indicando con $2P$ il perimetro del poligono circoscritto alla circonferenza di raggio r e con $2P'$ quello relativo alla circonferenza di raggio r' , abbiamo che:

$$2P : 2P' = r : r' \rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{r}{r'}$$



Lunghezza della circonferenza

Se quindi indichiamo con c la lunghezza della circonferenza di raggio r e con c' la lunghezza della circonferenza di raggio r' abbiamo che:

$$\begin{aligned} 2p < c < 2P \\ 2p' < c' < 2P' \end{aligned} \rightarrow \quad \frac{2p}{2p'} < \frac{c}{c'} < \frac{2P}{2P'} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$$

Allora possiamo anche scrivere

$$\frac{c}{c'} = \frac{2r}{2r'} \rightarrow \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$$

cioè il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro è costante e questo rapporto viene indicato con il simbolo π (pi-greco).

π è un numero irrazionale, cioè non si può esprimere con una frazione (la lunghezza della circonferenza e il suo diametro sono grandezze incommensurabili) ed il suo valore approssimato è 3,14.

Quindi in conclusione $\frac{c}{2r} = \pi$, da cui la lunghezza c della circonferenza di raggio r risulta:

$$c = 2\pi r$$

Nota

Per calcolare un'approssimazione di π possiamo calcolare il rapporto tra il perimetro di un poligono regolare inscritto (o circoscritto) alla circonferenza con un numero elevato di lati e il diametro (vedi schede di Geogebra).

Area del cerchio

Procedendo in modo analogo definiamo l'**area del cerchio come l'elemento separatore delle aree dei poligoni regolari inscritti e l'insieme delle aree dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza**.

Poiché l'area di un poligono regolare circoscritto risulta $A = \frac{2p \cdot r}{2}$ l'area A_c del cerchio sarà

$$A_{cerchio} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

In conclusione l'area del cerchio di raggio r risulta

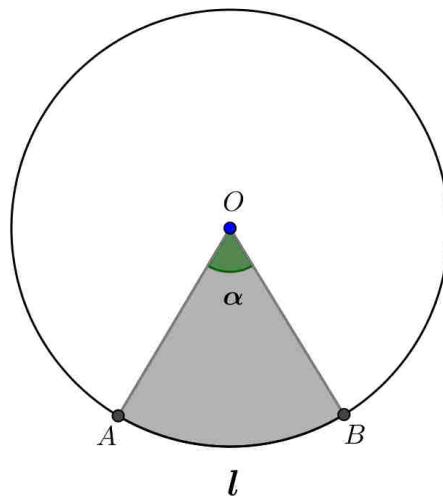
$$A_{cerchio} = \pi r^2$$

SCHEMA 1

Lunghezza di un arco di circonferenza e area di un settore circolare

Considera una circonferenza di raggio r e un angolo al centro di ampiezza α , per esempio misurato in gradi.

Indichiamo con l la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo α .



Poiché gli angoli al centro sono direttamente proporzionali ai rispettivi archi di circonferenza abbiamo:

$$l : 2\pi r = \alpha^\circ : 360^\circ$$

da cui possiamo ricavare

$$l = \frac{2\pi r \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$$

Analogamente, indicando con A_α l'area del settore circolare individuato da α ,abbiamo:

.....

Da cui possiamo ricavare $A_\alpha = \dots$

Nota: osserviamo che $A_\alpha = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r$

Infatti $\frac{1}{2} \cdot l \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} \cdot r = \dots$

SCHEMA 2

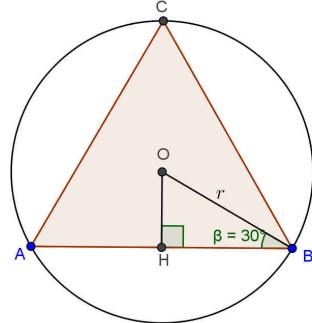
Lati dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza di raggio r

Considera una circonferenza di raggio r : determiniamo la lunghezza del lato del

- *triangolo equilatero inscritto*

Considera il triangolo OHB in figura:

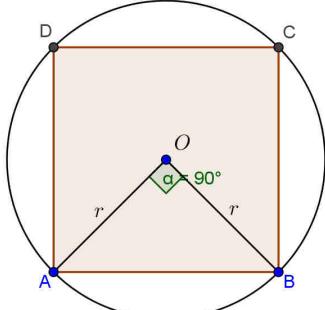
$$\overline{HB} = \dots\dots\dots \text{ e quindi } \overline{AB} = \dots\dots\dots$$



- *quadrato inscritto*

Considera il triangolo AOB in figura:

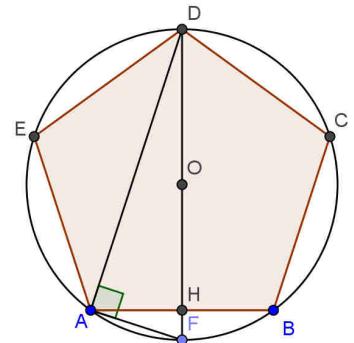
$$\overline{AB} = \dots\dots\dots$$



- *pentagono regolare inscritto*

Considera il triangolo AFD in figura: il segmento AF corrisponde al lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza e quindi, essendo sezione aurea del raggio, sappiamo che misura $\overline{AF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ ed applicando il 1° teorema di Euclide possiamo ricavare HF:

.....



e quindi, per differenza DH=.....

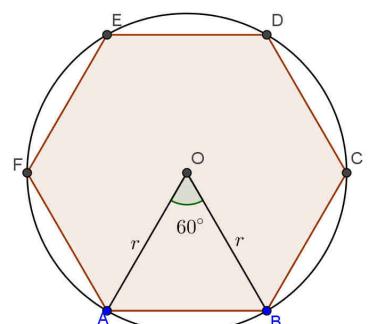
Applicando poi il 2° teorema di Euclide possiamo trovare AH e quindi AB:

.....

- *esagono regolare inscritto*

Considera il triangolo ABO in figura:

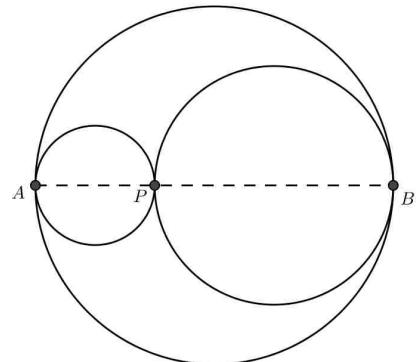
$$\overline{AB} = \dots\dots\dots$$



ESERCIZI

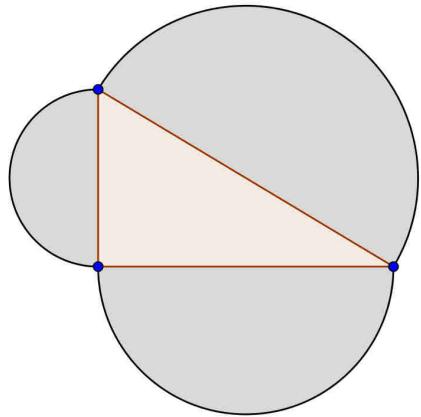
- 1) Disegna una circonferenza di diametro AB e prendi un punto P su AB: disegna le circonferenze di diametri AP e PB.

Verifica che la somma della lunghezza delle circonferenze è uguale alla somma della lunghezza della circonferenza di diametro AB.



- 2) Considera un triangolo rettangolo e disegna sui cateti e sull'ipotenusa dei semicerchi esterni al triangolo.

Dimostra che il semicerchio costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei semicerchi costruiti sui cateti.



- 3) Considera un quadrato di lato 4 cm. Disegna la circonferenza inscritta e quella circoscritta. Determina la lunghezza delle due circonferenze e l'area della corona circolare individuata da esse.

$$[4\pi, \quad 4\pi\sqrt{2}, \quad A = 4\pi]$$

- 4) Considera una circonferenza di diametro AB e traccia una corda AC che forma un angolo di 60° con AB. Sapendo che la lunghezza della circonferenza è 10π cm, determina l'area del triangolo ABC.

$$\left[\frac{25\sqrt{3}}{2} a^2 \right]$$

- 5) In un rombo il lato e la diagonale minore misurano a . Determina l'area del rombo e l'area del cerchio inscritto nel rombo.

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} a^2, \quad \frac{3}{16} \pi a^2 \right]$$

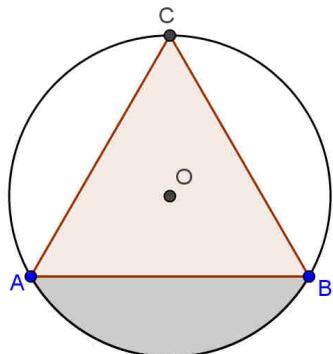
- 6) Considera un trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza (la base maggiore si trova sul diametro).

Sapendo che la lunghezza della semicirconferenza è 8π cm e che la differenza delle basi del trapezio è 12 cm, determina il perimetro del trapezio.

$$[48 \text{ cm}]$$

- 7) Disegna un cerchio di raggio r e inscrivi in esso un triangolo equilatero.

Determina l'area della regione di cerchio delimitata da un lato del triangolo e dall'arco minore corrispondente.



$$[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2]$$

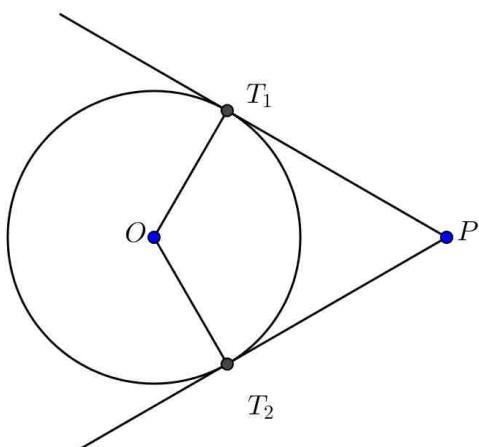
- 8) In un cerchio di raggio 2 cm è inscritto un quadrato. Determina l'area della regione del cerchio delimitata da un lato del quadrato e dall'arco minore corrispondente.

$$[(\pi - 2) \text{ cm}^2]$$

- 9) Determina l'area di un settore circolare di un cerchio di raggio r il cui angolo al centro misura 30° .

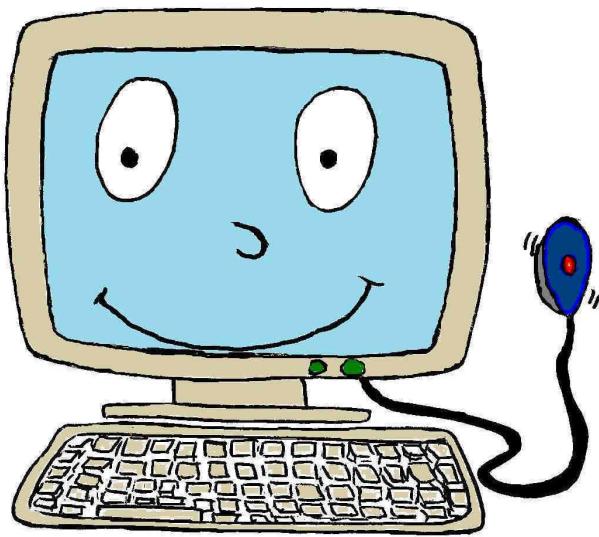
$$[\frac{1}{12} \pi r^2]$$

- 10) Considera un cerchio di area $4\pi \text{ cm}^2$ e sia P un punto a distanza 4 cm dal centro O . Da P conduci le tangenti alla circonferenza e siano T_1, T_2 i punti di contatto. Determina l'area del quadrilatero OT_1PT_2 .



$$[4\sqrt{3} \text{ cm}^2]$$

Laboratorio di informatica

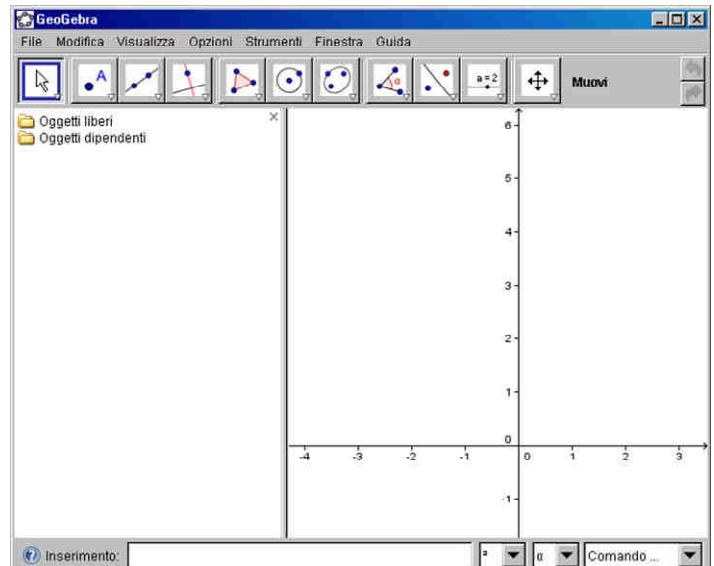


GEOMETRIA ANALITICA CON GEOGEBRA

Oltre che per lo studio della geometria euclidea, come abbiamo fatto lo scorso anno, il software Geogebra (geometria + algebra) **può essere utilizzato per lo studio della geometria analitica**.

Apriamo il programma: comparirà un piano cartesiano con dei pulsanti in alto che hanno funzioni simili a quelle di Cabri (disegnare punti, rette, circonferenze ecc.) e in basso una riga dove è possibile **inserire coordinate di punti o equazioni**.

Se per esempio digito (1,1) nella finestra grafica compare il punto corrispondente : posso anche assegnare un nome al punto, per es. B=(1,1) , altrimenti viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (A, B, C ...).



Se digito $y = x$ compare nella finestra grafica la retta corrispondente: per darle un nome basta digitare, per esempio, r : $y = x$ altrimenti il nome viene assegnato automaticamente seguendo l'ordine alfabetico (a,b,c...).

Esercizio: prova a digitare coordinate di punti e equazioni di rette.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 1

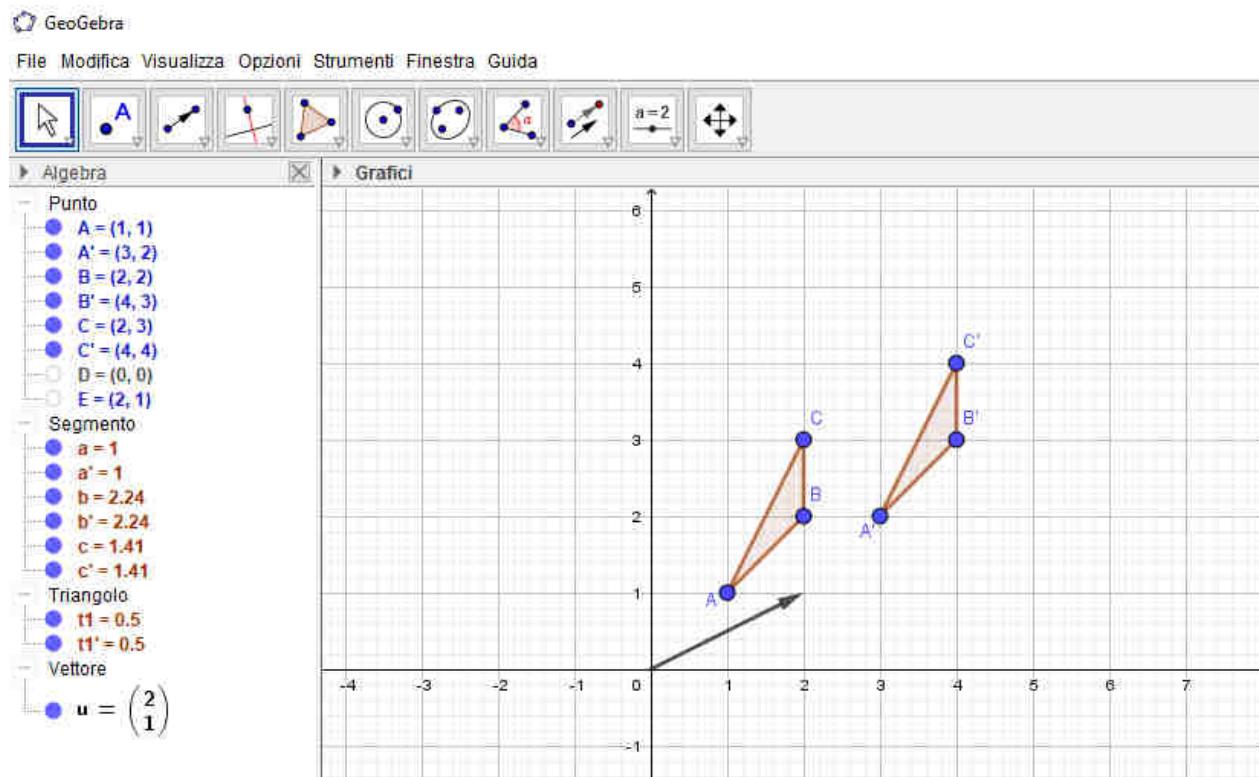
GEOMETRIA ANALITICA *Isometrie*

Proviamo ad applicare ad una figura, per esempio un poligono, delle **isometrie** cioè traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali.

Disegna per esempio nel piano cartesiano quadrettato di Geogebra un triangolo come in figura con il comando poligono (puoi evitare che vengano scritte le “etichette” sui lati digitando Opzioni - etichettatura -solo i nuovi punti) e **applica al triangolo**:

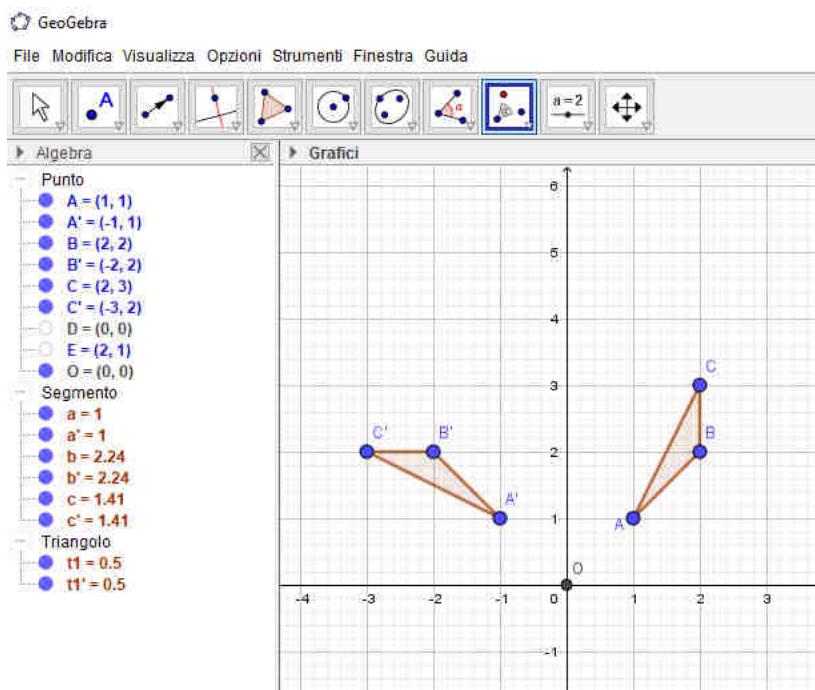
- a) **una traslazione di vettore (2;1)**: crea il vettore facendolo partire dall’origine, scegli dalla barra degli strumenti il comando “traslazione”, fai clic con il mouse sul triangolo (zona interna) e poi sul vettore.

Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo traslato (controlla la zona a sinistra dello schermo, la vista “algebra” dove compaiono le coordinate dei vertici del poligono).

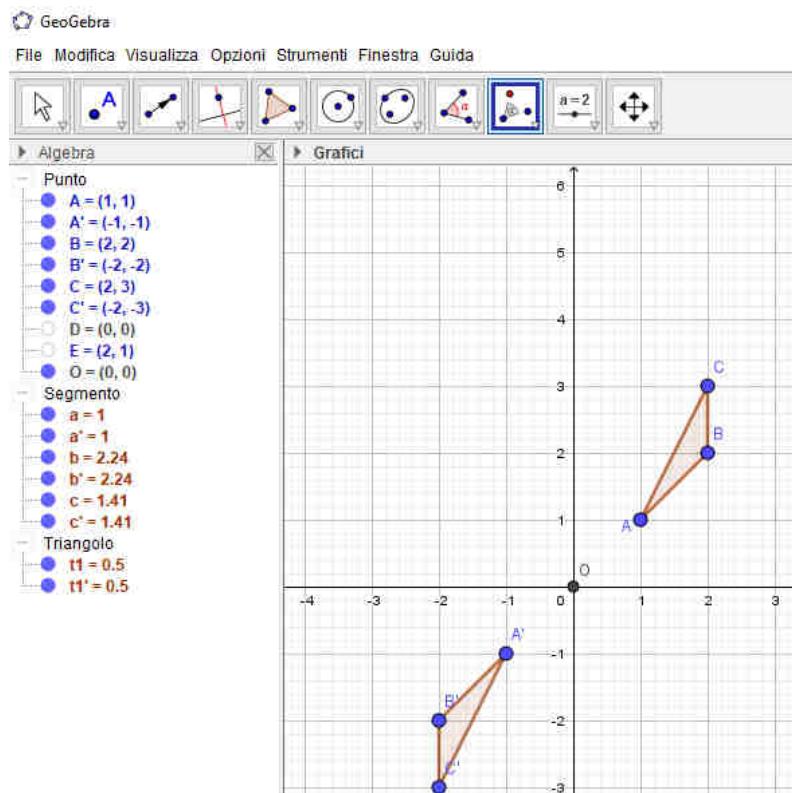


- b) una rotazione di 90° intorno all'origine:** crea il punto $O(0;0)$ con il comando “punto”, scegli dalla barra degli strumenti il comando “rotazione”, fai clic sul triangolo, poi sul punto O (centro della rotazione) e poi inserisci l'angolo della rotazione (90°).

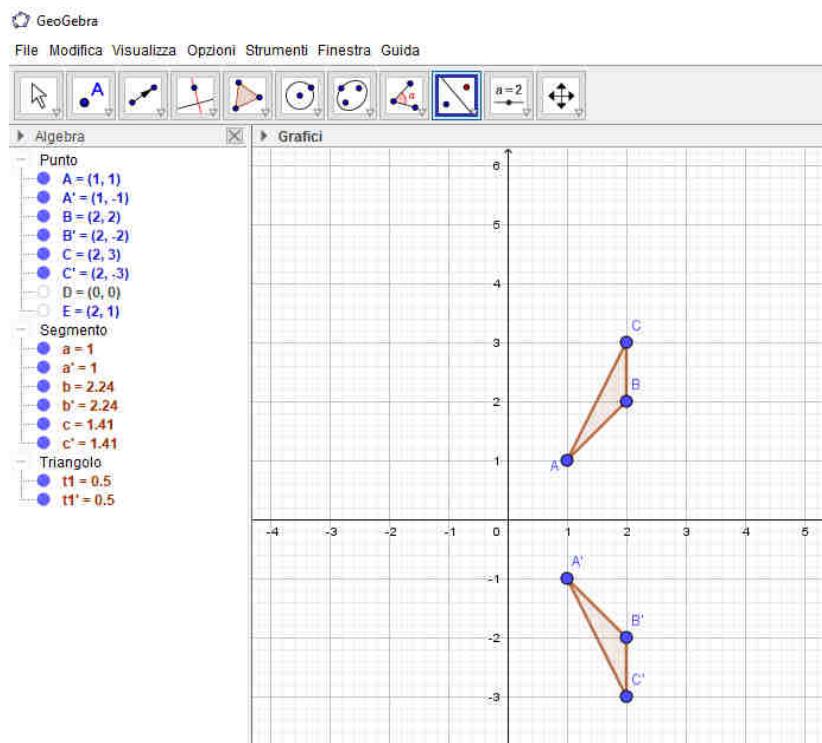
Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo ruotato di 90° intorno all'origine.



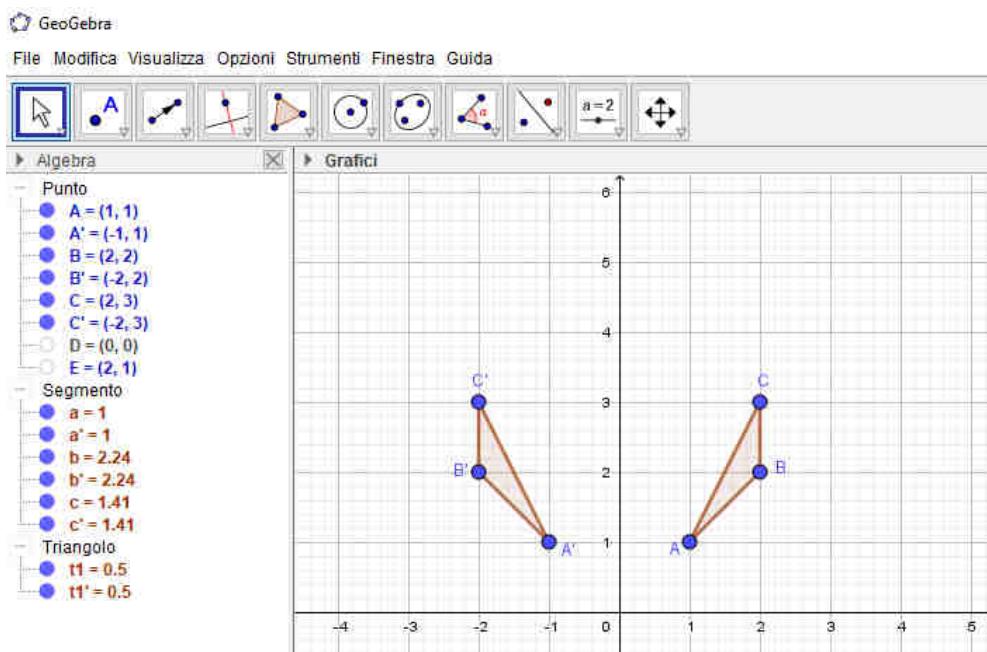
- c) rotazione di 180° intorno all'origine:** scegli il comando “rotazione”, clic sul triangolo, sul punto O e questa volta inserisci 180° . Osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo ruotato di 180° intorno all'origine.



- d) **una simmetria rispetto all'asse x:** scegli “simmetria assiale”, clic sul triangolo poi sull'asse x : osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico rispetto all'asse x.



- e) **una simmetria rispetto all'asse y:** scegli “simmetria assiale”, clic sul triangolo poi sull'asse y : osserva come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico rispetto all'asse y.



Esercizio: prova ad applicare al triangolo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo/terzo quadrante (prima costruisci la retta bisettrice...). Come risultano le coordinate dei vertici del triangolo simmetrico?

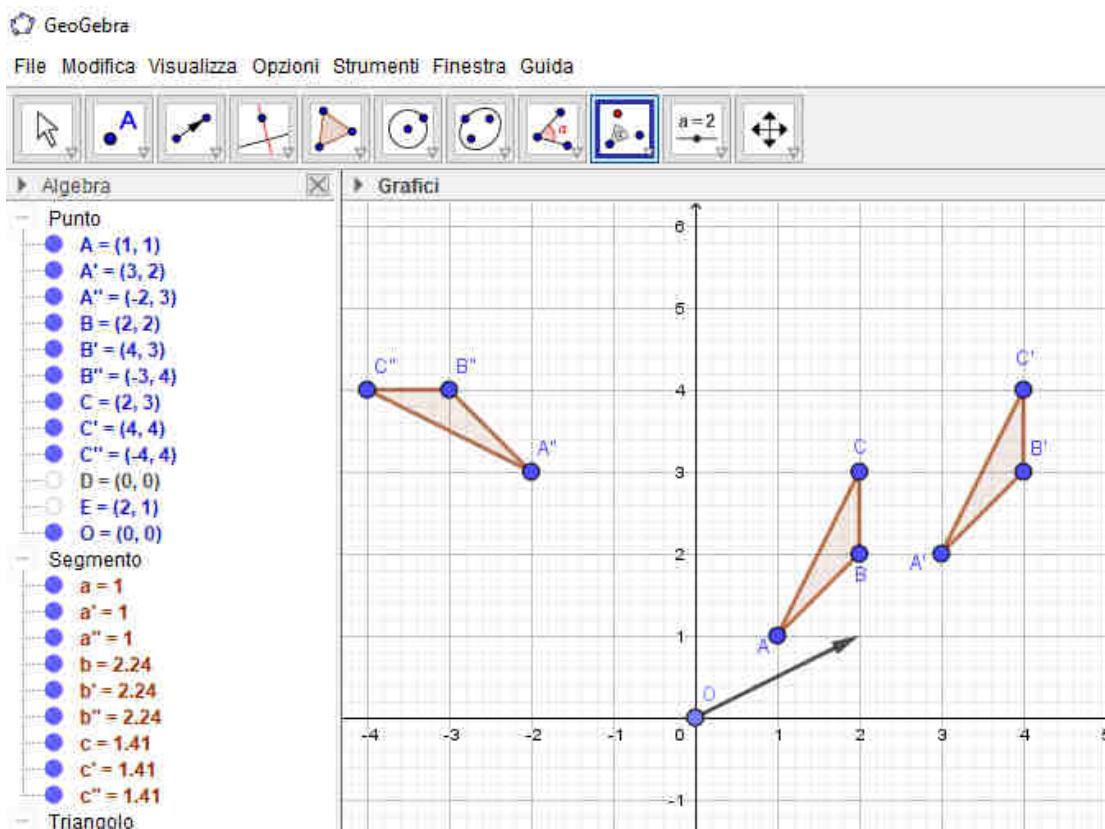
Laboratorio di informatica

SCHEMA 2

GEOMETRIA ANALITICA *Composizione di isometrie*

Cosa significa “comporre” più isometrie?

Considera per esempio il triangolo della scheda 1: per applicargli per esempio la composizione della traslazione di vettore $(2;1)$ con la rotazione (intorno all’origine) di 90° applichiamo al triangolo la traslazione di vettore $(2;1)$ e *al triangolo traslato applichiamo la rotazione di 90° intorno all’origine.*



Osservazione

Osserviamo che *l’ordine in cui vengono eseguite le isometrie è importante*: prova ad applicare al triangolo ABC prima la rotazione di 90° intorno all’origine e poi, al triangolo ruotato, applica la traslazione di vettore $(2;1)$.

Ottieni lo stesso triangolo finale?

Stampa la figura che ottieni in questo caso.

Laboratorio di informatica

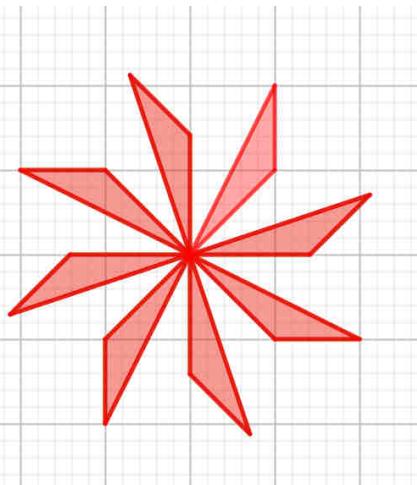
SCHEDA 3

GEOMETRIA ANALITICA *Composizione di isometrie*

Utilizzando la composizione di isometrie puoi realizzare anche disegni “gradevoli” a vedersi.

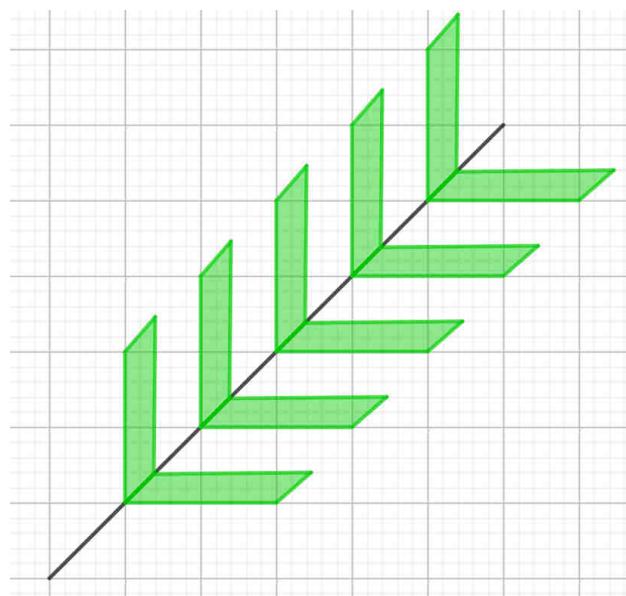
Esercizio 1

Prova a disegnare il fiore in figura con successive rotazioni di intorno all'origine di un triangolo.



Esercizio 2

Prova a disegnare la “felce” in figura: devi utilizzare sia traslazioni che la simmetria rispetto alla retta del “gambo”.



Esercizio 3

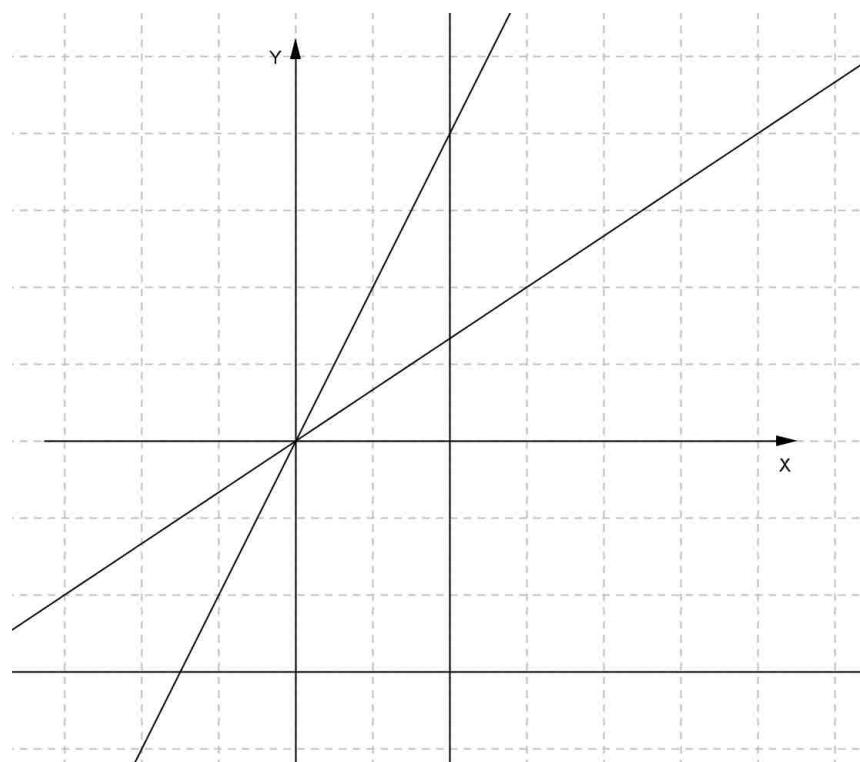
Realizza un tuo disegno utilizzando una figura geometrica e la composizione di isometrie.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 4

GEOMETRIA ANALITICA *La retta*

Nel piano quadrettato di Geogebra disegna alcune rette con il comando retta per due punti , quali per esempio $x=2$, $y=-3$, $y=2x$, $y=\frac{2}{3}x$ aiutandoti con la quadrettatura e controlla che nella “vista algebra” l’equazione visualizzata sia quella che volevi.



Inserisci puoi nella barra di inserimento direttamente l’equazione di alcune rette quali per esempio $y = -2x$, $y = \frac{1}{3}x + 4$, $y = -\frac{5}{4}x - 2$ e controlla, nel piano quadrettato, la loro倾inazione ed eventualmente l’ordinata all’origine.

Stampa le rette.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 5

GEOMETRIA ANALITICA *Equazione esplicita di una retta*

Per capire il significato del coefficiente angolare m e dell'ordinata all'origine q , quando la retta è scritta nella forma $y = mx + q$, possiamo usare lo strumento di Geogebra chiamato “slider”.

Creazione dello “slider”

Prima di tutto dobbiamo “creare” lo slider.

Attiviamo il pulsante in alto in cui compare la scritta “slider”, mettiamo il cursore in un punto qualsiasi del piano cartesiano e facciamo clic con il mouse: comparirà un trattino e ci verrà chiesto di inserire il nome, il campo di variazione dello slider (per esempio nel nostro caso possiamo chiamarlo m e scegliamo di farlo variare, per esempio, tra -10 e 10) e il suo incremento (possiamo per esempio scegliere 1: variando il valore dello slider si passerà per esempio da 3 a 4 e così via).

Inserimento dell’equazione contenente lo slider creato

Inseriamo nella barra di inserimento l’equazione $y = mx$ (in alcune versioni di Geogebra occorre mettere * per indicare la moltiplicazione) e osserviamo che compare subito la rappresentazione della retta per l’origine corrispondente al valore che viene sempre dato inizialmente allo slider (uguale a 1).

Per visualizzare come cambia la retta al variare di m attiviamo nel primo pulsante in alto a sinistra il comando “**muovi**”.

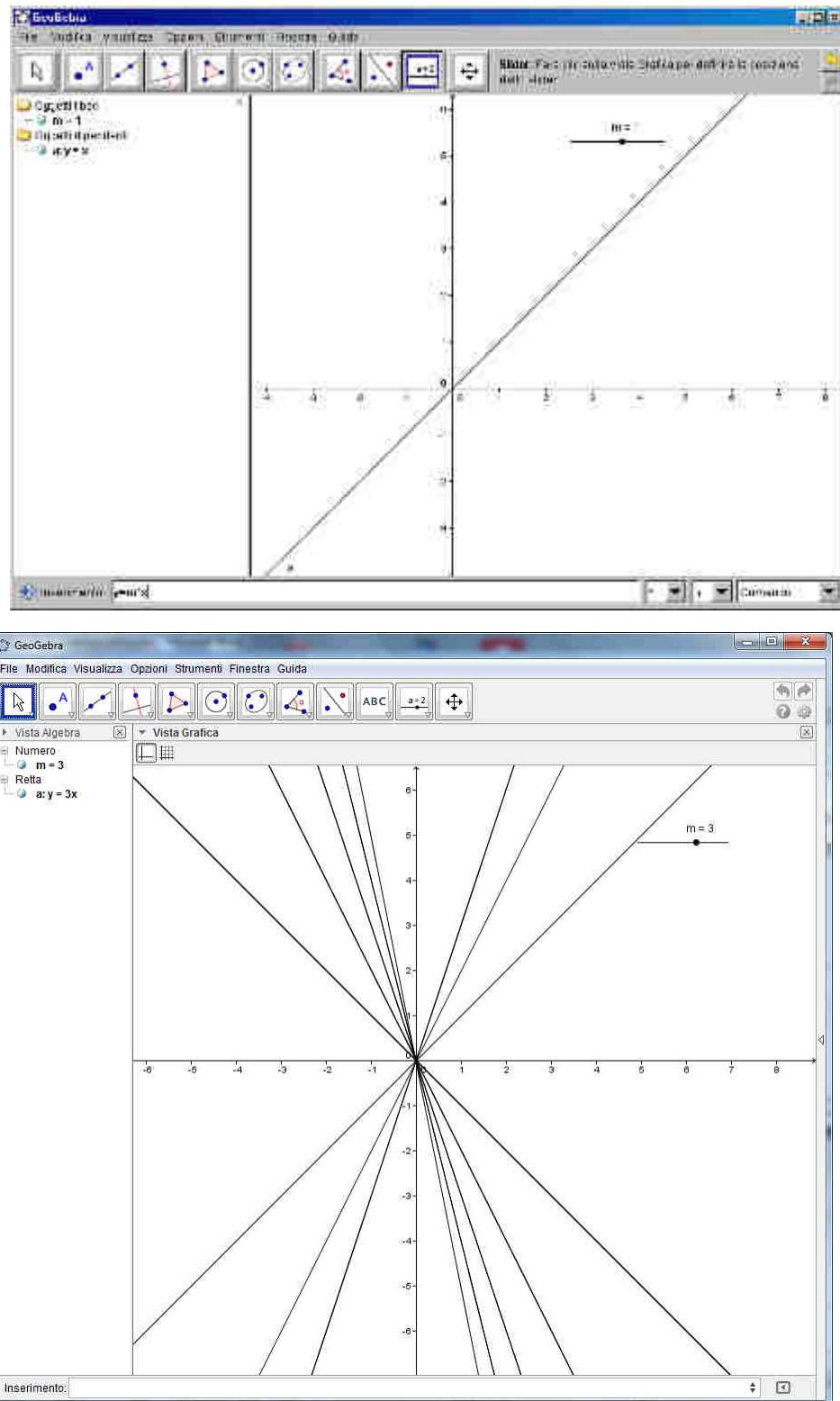
Posizioniamoci sullo slider (comparirà una manina) e trasciniamo lo slider (cambia il suo valore): la retta per l’origine cambia e quindi ci rendiamo conto che variando m varia l’inclinazione della retta.

Possiamo anche visualizzare insieme tutte le rette corrispondenti ai vari valori dello slider scegliendo, dopo essersi posizionati sulla retta e premuto il tasto destro del mouse, la funzione “traccia attiva” (in alcune versioni si trova “traccia on”) : a questo punto muovendo m compariranno tutte le rette corrispondenti.

Posso anche inserire un valore dello slider digitandolo nella riga di inserimento in basso.

Possiamo anche vedere automaticamente la variazione dello slider con : Modifica - proprietà fondamentale - animazione attiva.

- Appunti di Matematica 2 – Liceo Scientifico -
- Laboratorio di informatica -



Ora prova a creare un altro slider (chiamalo q) e ad inserire $y = mx + q$.
Fai variare q e stampa qualche esempio.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 6

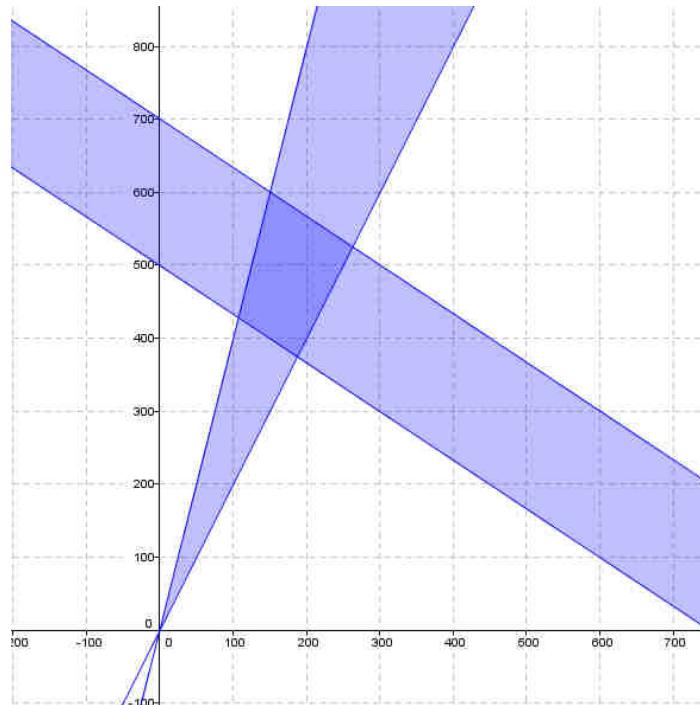
GEOMETRIA ANALITICA *Disequazioni di primo grado in x e y*

Proviamo a risolvere con Geogebra il problema “Matematica e dieta” presentato tra gli esercizi sulle disequazioni di primo grado in x e y.

Abbiamo visto che per risolvere il problema dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 1500 \\ 2x + 3y \leq 2100 \\ x \geq \frac{1}{5}(x + y) \\ x \leq \frac{1}{3}(x + y) \end{cases}$$

Possiamo inserire le disequazioni nella barra di inserimento (per scrivere il \leq scriveremo \leq) e otteniamo:



Possiamo quindi osservare che per esempio mangiare 200 g di pasta e 500 g di carne rientra nella nostra dieta poiché il punto (200,500) fa parte della zona colorata (corrispondente al sistema di disequazioni).

Laboratorio di informatica

SCHEDA 7

GEOMETRIA ANALITICA

Disequazioni di primo grado in x e y

Proviamo a risolvere con Geogebra il problema “Disequazioni e test” sulle disequazioni di primo grado in x e y .

Poiché per avere la sufficienza il docente vuole che si risponda ad almeno 6 domande e si risolvano almeno 2 problemi, indicando con x il numero di risposte corrette e con y il numero dei problemi risolti correttamente ,le prime due condizioni saranno: $6 \leq x \leq 10$ e $2 \leq y \leq 5$.

Inoltre se vogliamo vedere in quali casi si prende un punteggio tra 35 e 40, dal momento che ogni risposta corretta vale 2 punti ed ogni problema corretto vale 5 punti avremo anche:

$$35 \leq 2x + 5y \leq 40$$

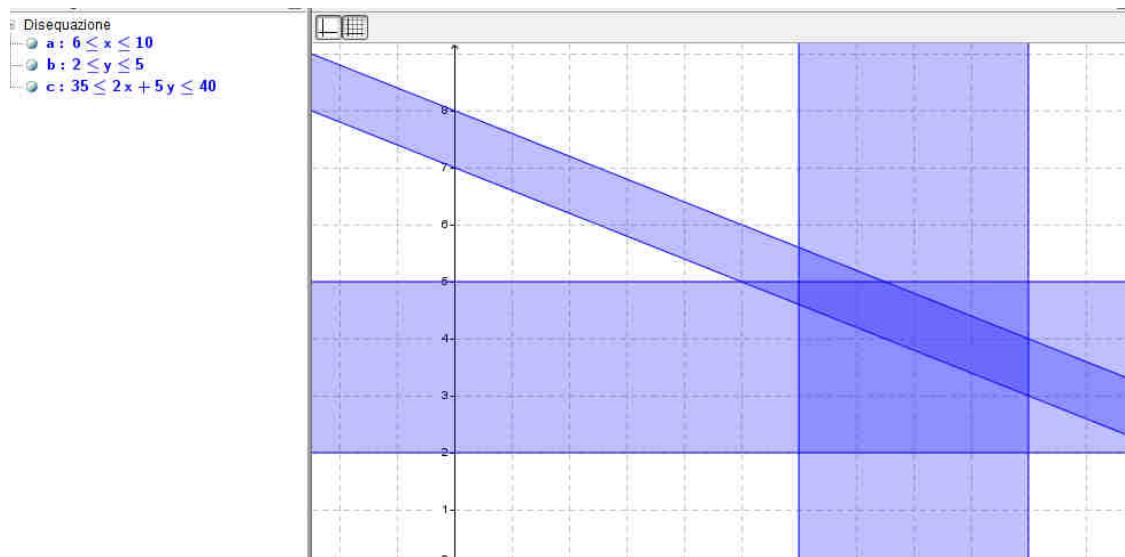
In conclusione per ottenere la parte di piano individuata dal sistema:

$$\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ 2 \leq y \leq 5 \\ 35 \leq 2x + 5y \leq 40 \end{cases}$$

Basterà digitare nella barra di inserimento:

$6 \leq x \leq 10$ ecc

Otteniamo la figura seguente:



Osserviamo che le coppie contenute nella zona “colorata” (che portano ad un punteggio tra 35 e 40) sono : (6;5) (7;5) (8;4) (9;4) (10;3) (10;4).

Laboratorio di informatica

SCHEDA 8

GEOMETRIA ANALITICA *Province della Toscana*

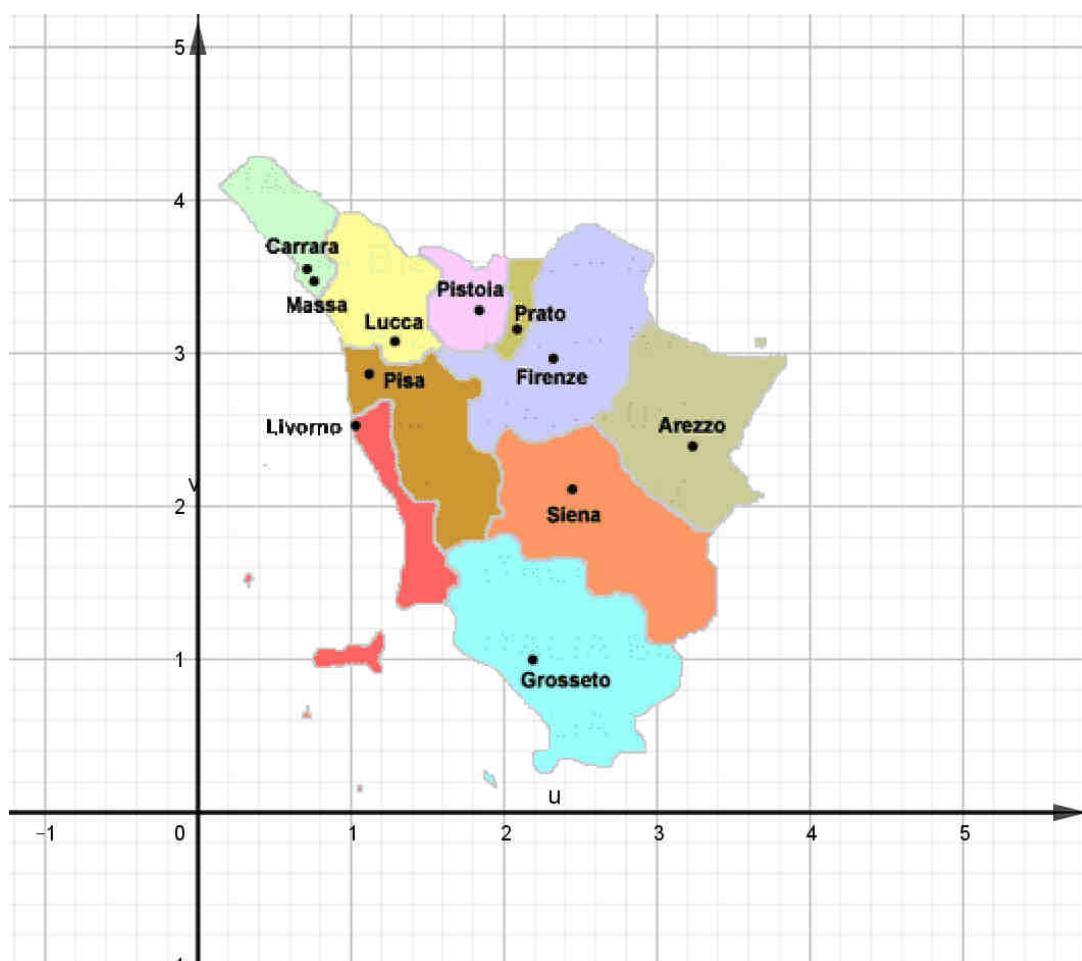
Inserisci l'immagine della Toscana (scaricala da Internet) come in figura e poi scrivi un sistema di disequazioni in x e y che individua la zona della provincia di:

a) Arezzo

.....
.....
.....
.....

b) Firenze

.....
.....
.....
.....



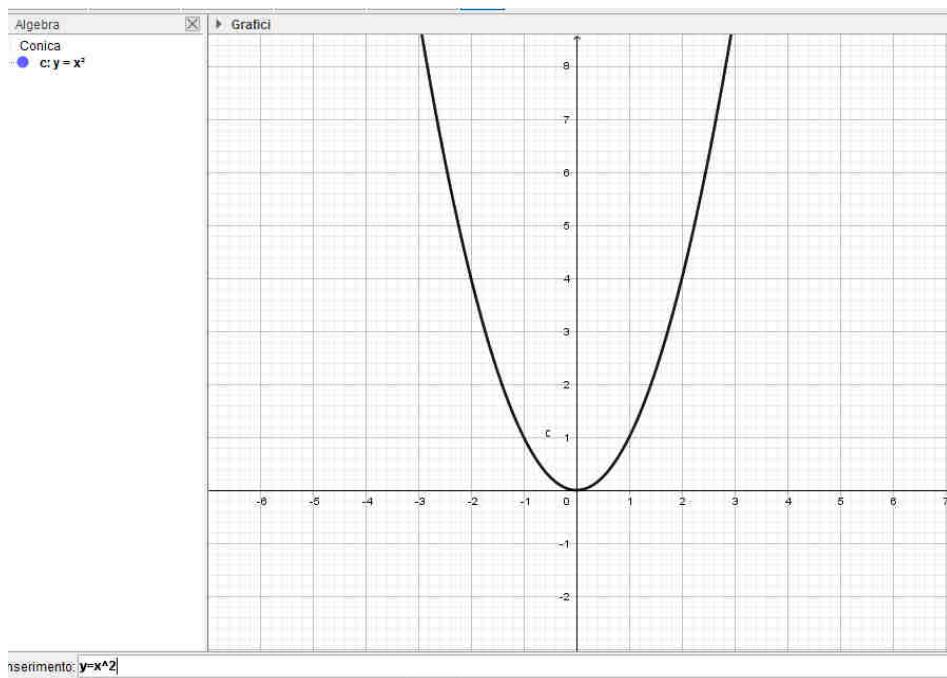
Laboratorio di informatica

SCHEMA 9

GEOMETRIA ANALITICA

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

- Proviamo a disegnare la parabola di equazione $y = x^2$ inserendone l'equazione nella barra di inserimento (in fondo al foglio di lavoro): otteniamo una parabola con il vertice in $(0;0)$ e rivolta verso l'alto.



- Prova ad inserire altre equazioni del tipo $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ e stampa le parabole corrispondenti controllando che il vertice abbia ascissa $x_V = -\frac{b}{2a}$
- Crea tre slider a, b, c e poi inserisci nella barra di inserimento l'equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Prova a “muovere” uno slider alla volta e fai le tue osservazioni.

Se aumenti il valore di a come cambia la forma della parabola?
Se a è **negativo** come è rivolta la parabola?
Stampa degli esempi.

- Crea tre slider a , x_V , y_V e inserisci nella barra di inserimento l'equazione

$$y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$$

Stampa degli esempi al variare del valore degli slider.

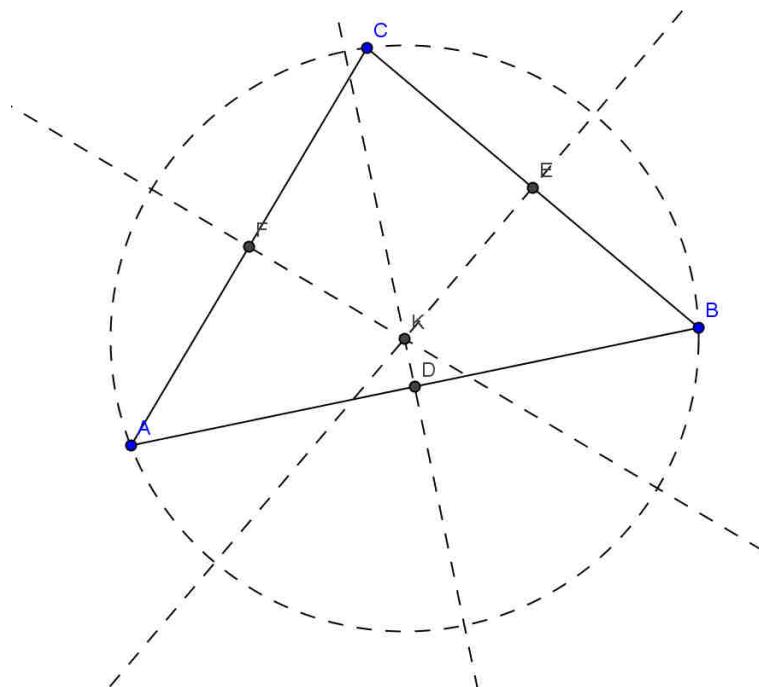
Laboratorio di informatica

SCHEMA 10

GEOMETRIA EUCLIDEA *Circocentro di un triangolo*

Per costruire il circocentro di un triangolo possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono)
- Con il comando punto medio costruiamo i punti medi dei tre lati
- Disegniamo gli assi dei lati utilizzando il comando “retta perpendicolare” facendo clic sul punto medio e poi clic sul lato
- Intersechiamo due assi e verifichiamo che anche il terzo passa per quel punto che è appunto il circocentro (indicato con K).



Nota: possiamo anche usare il comando “asse” per tracciare l’asse di un lato...

Osservazione: attivando il comando “Muovi” e spostando un vertice del triangolo (quindi modificando il triangolo) osserviamo che il circocentro può cadere anche esternamente al triangolo e che è sempre alla stessa distanza dai vertici del triangolo: infatti se tracciamo una circonferenza di centro il circocentro e passante per un vertice , passa anche per gli altri due vertici.

Il nome “circocentro” deriva proprio dal fatto che è **centro** della circonferenza **circoscritta** al triangolo.

In quale caso il circocentro cade su un lato?

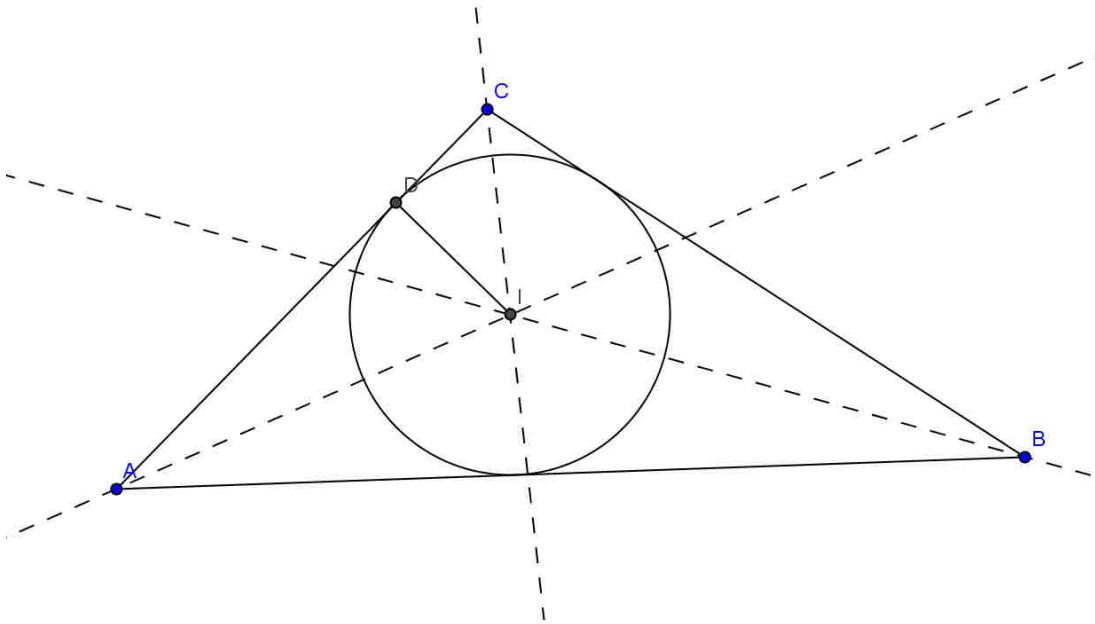
Laboratorio di informatica

SCHEMA 11

GEOMETRIA EUCLIDEA *Incentro di un triangolo*

Per costruire l'incentro di un triangolo (intersezione delle bisettrici) possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono)
- Con il comando “bisettrice” costruiamo le bisettrici degli angoli (nascondiamo le bisettrici degli angoli esterni del triangolo)
- Intersechiamo due bisettrici e verifichiamo che anche la terza passa per quel punto che è appunto l'incentro (indicato con I).



Osservazione: attivando il comando “Muovi” e spostando un vertice del triangolo (quindi modificando il triangolo) osserviamo che l'incentro cade sempre internamente al triangolo e che è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo cioè è alla stessa distanza dai lati del triangolo: per tracciare la circonferenza inscritta possiamo usare il comando retta perpendicolare (dall'incentro ad un lato) per trovare il punto di tangenza (nella figura D) e poi tracciare la circonferenza di centro I e passante per D.

Il nome “incentro” deriva proprio dal fatto che è **centro** della circonferenza **inscritta** al triangolo.

Laboratorio di informatica

SCHEMA 12

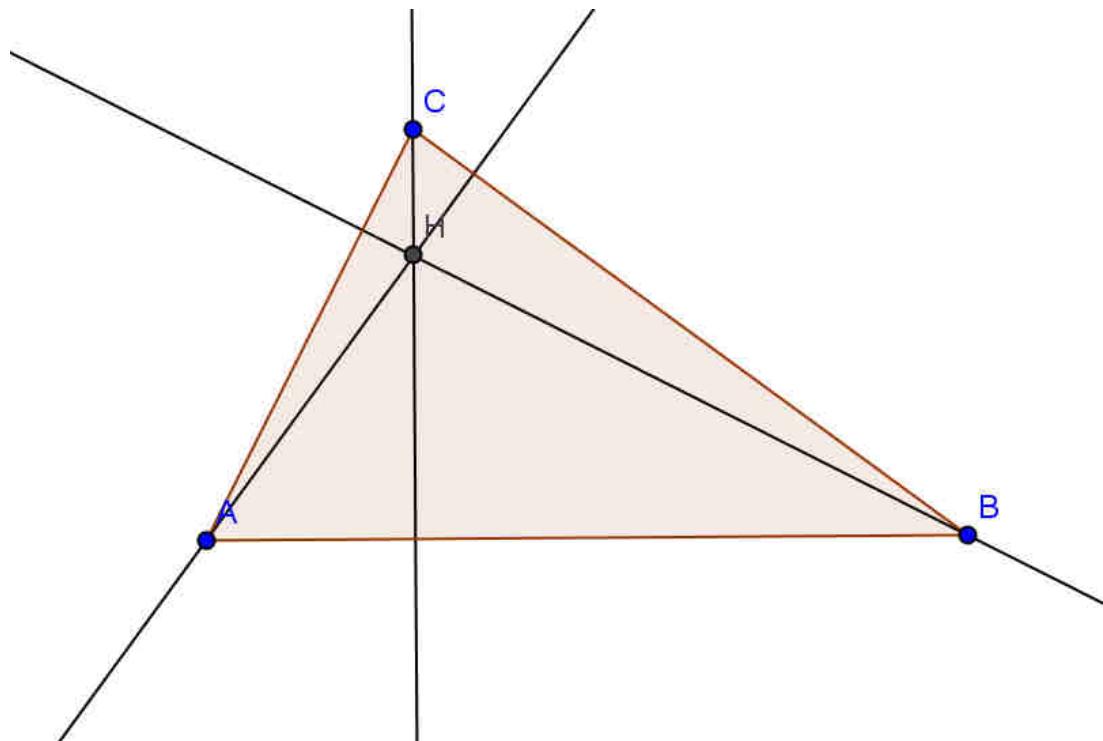
GEOMETRIA EUCLIDEA *Ortocentro di un triangolo*

Per costruire l'ortocentro di un triangolo (intersezione delle altezze) possiamo procedere così:

- Disegniamo il triangolo (possiamo scegliere il comando segmento e fare tre segmenti consecutivi che si chiudano oppure scegliere poligono);
- con il comando “retta perpendicolare” costruiamo le altezze relative ai vari lati del triangolo;
- intersechiamo due altezze e verifichiamo che anche la terza passa per quel punto che è appunto l'ortocentro (indicato in genere con H: puoi modificare il nome del punto facendo clic con il destro e utilizzando il comando “rinomina”).

Se modifichi il triangolo con il comando “muovi” in quale caso H coincide con un vertice?
Stampa questo caso.

L'ortocentro può cadere esternamente al triangolo? Stampa un caso in cui cade esternamente.



Laboratorio di informatica

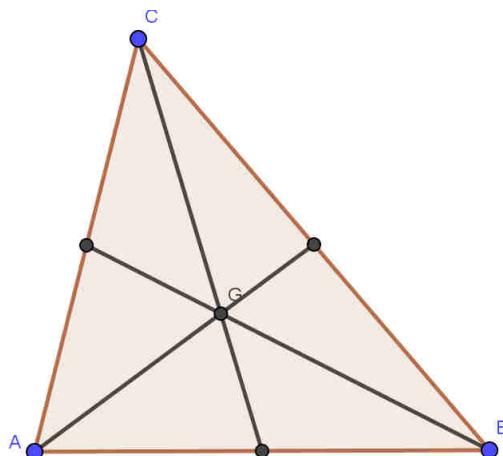
SCHEMA 13

GEOMETRIA EUCLIDEA *Baricentro di un triangolo*

Disegna un triangolo ABC utilizzando il comando poligono.

Per tracciare le mediane devi costruire il punto medio di ogni lato (c'è il comando “punto medio”) e poi congiungere, con il comando “segmento” ogni vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

Infine utilizzando il comando “intersezione” interseca due mediane: vedrai che le tre mediane si intersecano nello stesso punto (che in genere viene indicato con la lettera G perché g è l'iniziale della parola “gravità” e la forza di gravità di un corpo è applicata proprio nel suo baricentro).



Metti alla prova la tua costruzione!

Per verificare che le tre mediane passano sempre per uno stesso punto prova a “trascinare” uno dei vertici modificando il triangolo.

Il baricentro può cadere fuori del triangolo?

Osservi qualche proprietà particolare?

Stampa qualche esempio.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 14

GEOMETRIA EUCLIDEA

Baricentro, ortocentro e circocentro di un triangolo

Disegniamo un triangolo ABC e poi, con le costruzioni che abbiamo visto nelle schede precedenti, costruiamo il baricentro G, l'ortocentro H e il circocentro K (possiamo rinominare questi punti con queste lettere cliccando con il destro e scegliendo Rinomina).

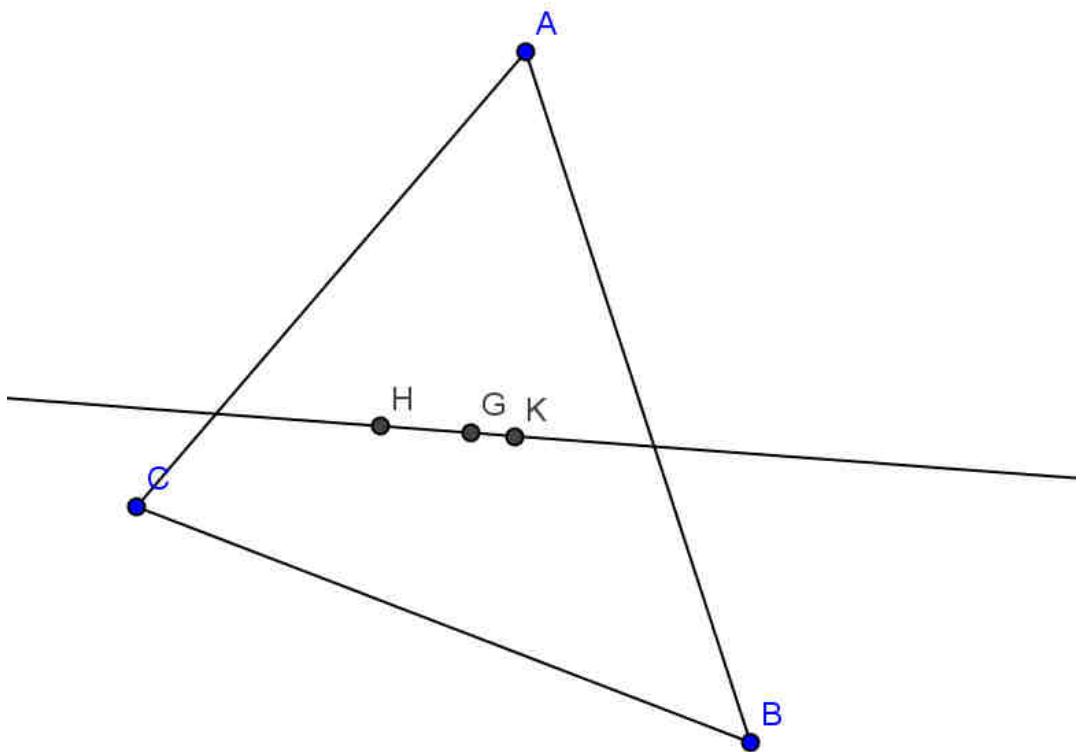
Per evitare che il disegno sia troppo appesantito possiamo nascondere le varie altezze, mediane assi cliccando con il destro , selezionare “mostra oggetto” e lasciare solo i punti H,K,G.

Tracciamo la retta per H e K, per esempio, e verifichiamo che passa anche per G.

Nota: se attiviamo il comando muovi e modifichiamo la forma del triangolo vediamo che i tre punti continuano ad essere allineati.

In quale caso i tre punti coincidono?

In quale caso si trovano su un'altezza (che è anche mediana e asse) del triangolo?



Laboratorio di informatica

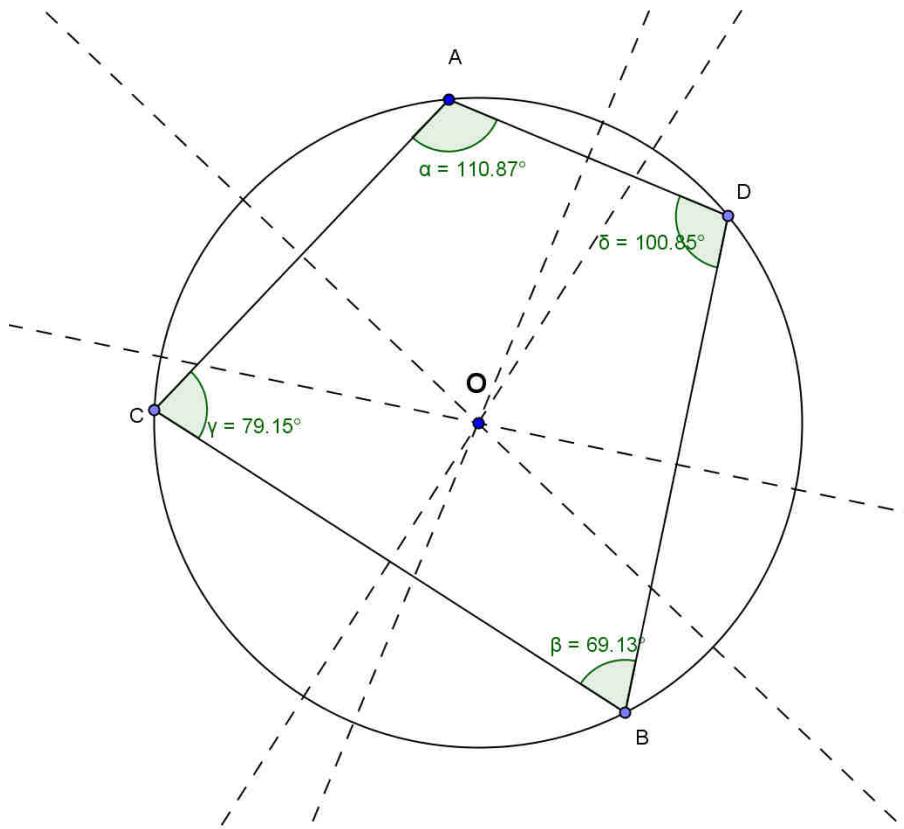
SCHEDA 15

GEOMETRIA EUCLIDEA

Quadrilatero inscritto in una circonferenza

Verifichiamo che se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza gli assi dei suoi lati passano tutti per uno stesso punto, che è il centro della circonferenza circoscritta, e che gli angoli opposti sono supplementari.

Tracciamo una circonferenza con il comando “circonferenza centro-punto”;
con il comando “punto su oggetto” creiamo altri tre punti sulla circonferenza;
con il comando “segmento tra due punti” costruiamo il quadrilatero inscritto nella circonferenza;
con il comando “asse di un segmento” tracciamo gli assi dei lati e verifichiamo che passano tutti per il centro della circonferenza;
con il comando “angolo” evidenziamo gli angoli interni del quadrilatero e verifichiamo che gli angoli opposti sono supplementari.



Nota: prova ad attivare il pulsante “muovi” e a muovere un vertice del quadrilatero.
Noterai che le proprietà continuano ad essere verificate.
Stampa qualche esempio.

Laboratorio di informatica

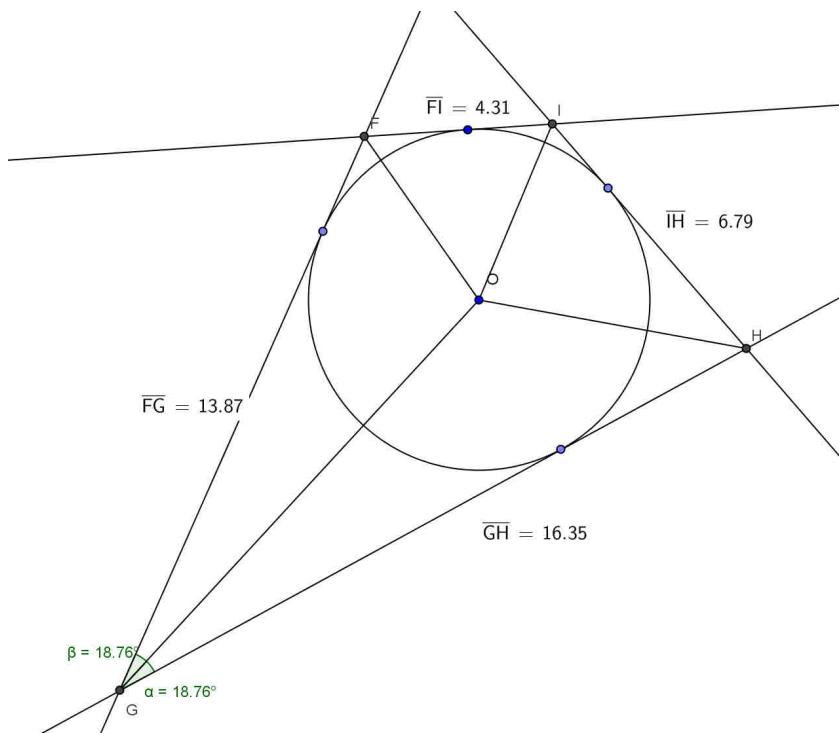
SCHEMA 16

GEOMETRIA EUCLIDEA

Quadrilatero circoscritto ad una circonferenza

Verifichiamo che se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto , che è il centro della circonferenza inscritta, e che la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

Disegniamo una circonferenza (comando circonferenza centro-punto); creiamo altri tre punti sulla circonferenza (punto su oggetto); con il comando “tangenti ad una circonferenza” tracciamo le tangenti alla circonferenza nei suoi quattro punti; intersechiamo le tangenti ottenendo il quadrilatero circoscritto (con il comando intersezione di due oggetti abbiamo i vertici); congiungiamo i vertici con il centro della circonferenza e verifichiamo con il comando “angolo” che i segmenti tracciati sono bisettrici (che quindi si incontrano tutte in un punto che è il centro della circonferenza inscritta); con il comando “distanza” misuriamo la lunghezza dei lati verificando che la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.



Nota: prova ad attivare “muovi” e muovi i punti sulla circonferenza.
 Anche se il quadrilatero circoscritto cambia, continuano ad essere verificate le due proprietà.
 Stampa qualche esempio.

Laboratorio di informatica

SCHEMA 17

GEOMETRIA EUCLIDEA

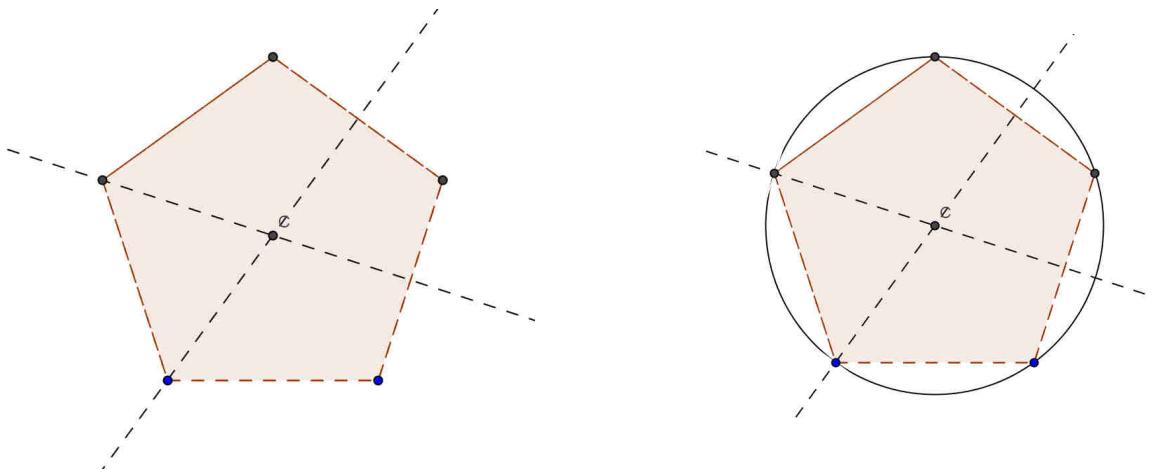
Circonferenza inscritta e circoscritta ad un poligono regolare

Verifichiamo che un poligono regolare è sempre inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza e che le due circonference hanno lo stesso centro.

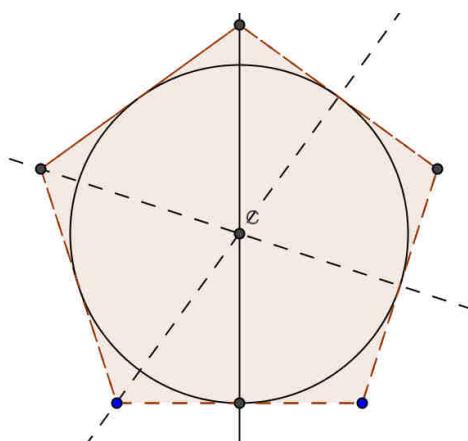
Consideriamo per esempio un pentagono regolare: possiamo usare il comando poligono regolare e inserire come numero di lati 5.

Per determinare il centro della circonferenza inscritta e circoscritta possiamo tracciare sia le bisettrici di due angoli ed intersecarle che gli assi di due lati ed intersecarli.

Determinato il **centro C**, usando il comando “circonferenza di dato centro e passante per un punto” possiamo tracciare la circonferenza circoscritta (basta farla passare per un vertice del pentagono).



Per tracciare la circonferenza inscritta possiamo tracciare da C la perpendicolare ad un lato del pentagono, intersecare con il lato ottenendo il punto di tangenza e poi usare il comando circonferenza centro-punto facendola passare per il punto di tangenza.



Esercizio: ripeti la costruzione per triangolo equilatero, quadrato ed esagono regolare.

Laboratorio di informatica

SCHEDA 18

GEOMETRIA EUCLIDEA *Parallelogramma e triangoli equivalenti*

Disegna un parallelogramma:

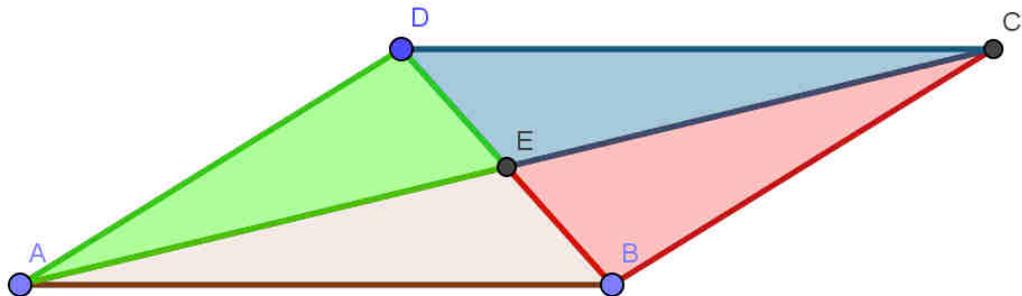
traccia un segmento AB e un segmento consecutivo AD;

traccia la retta per B parallela ad AD e la retta per D parallela ad AB e intersecale (punto C);
traccia i segmenti BC e CD e poi nascondi la costruzione.

Traccia le diagonali AC e BD e intersecale (punto E).

Come risultano i triangoli ABE, BCE, DCE, ADE ?

Prova a modificare la figura trascinando A o B o D.



Suggerimento:

Costruisci i poligoni ABE ecc. e calcolane l'area.

Cosa osservi?

.....

Prova a dimostrare quello che hai verificato con Geogebra.

.....

.....

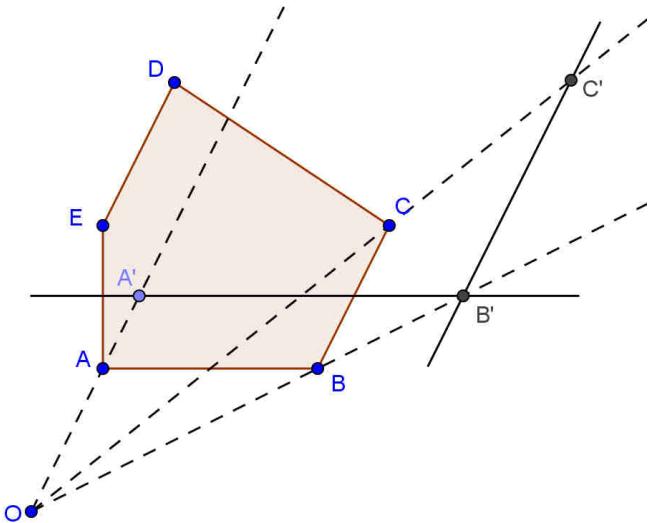
Laboratorio di informatica

SCHEMA 19

GEOMETRIA EUCLIDEA *Poligoni “omotetici”*

Prova a seguire questo procedimento:

- disegna un poligono (irregolare) ABCDE usando il comando “poligono”;
- crea un punto O (esterno al poligono);
- traccia le semirette uscenti da O e passanti per i vertici del poligono;
- sulla semiretta per A fissa un punto A' (comando “punto su oggetto”);
- traccia per A' la parallela al lato AB del poligono e individua sulla semiretta per B un punto B';
- continua nello stesso modo (traccia da B' la parallela al lato BC e individua C' ...);



Il poligono così ottenuto A'B'C'D'E' risulta simile a ABCDE per il teorema di Talete e

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \dots = k = \text{rapporto di similitudine.}$$

Osserviamo che A'B'C'D'E' risulta anche *disposto nello stesso modo* di ABCDE e per questo viene detto “**omotetico**” (dal greco “stessa posizione”)

In Geogebra c’è proprio il comando “**omotetia**”: basta selezionare il poligono che vogliamo trasformare, selezionare un punto (centro O dell’omotetia) e il rapporto di similitudine.

Esercizio

Prova a trasformare un poligono a scelta fissando O ma variando il rapporto k .
 Stampa i tuoi esempi.

Laboratorio di informatica

SCHEMA 20

GEOMETRIA EUCLIDEA *Poligoni simili*

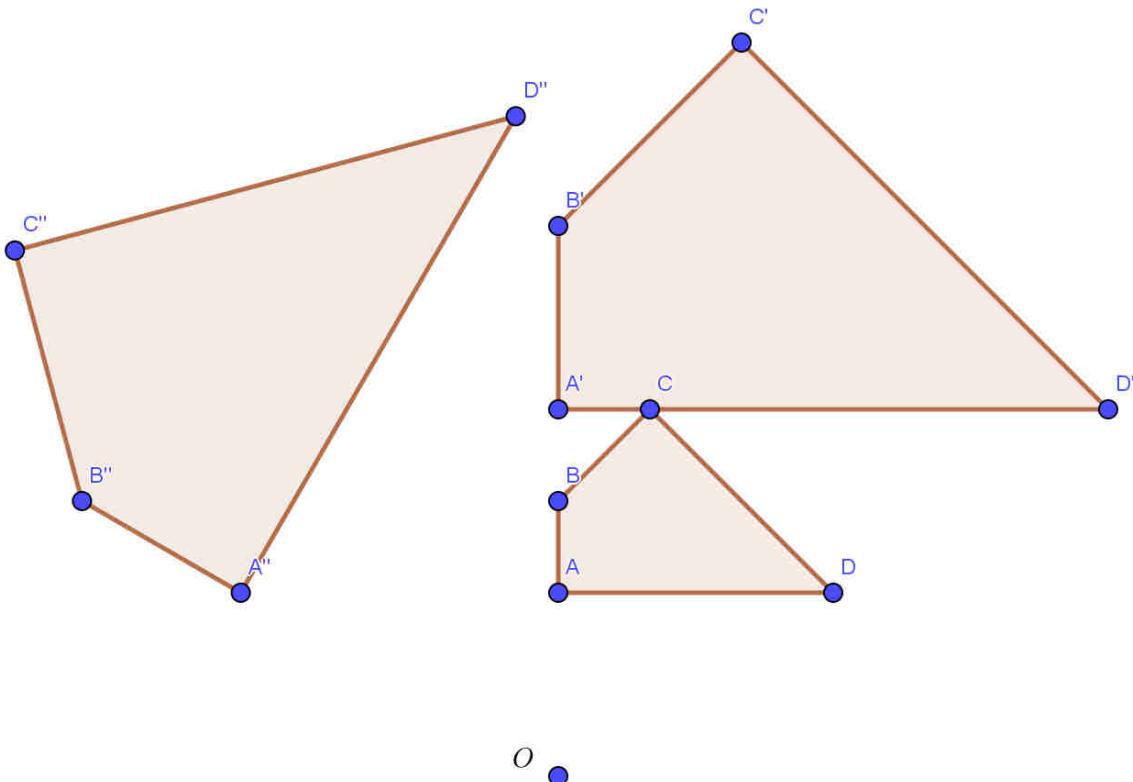
Per disegnare un poligono simile ad un poligono dato puoi utilizzare la composizione di un'omotetia e di un'isometria.

Esercizio

Disegna un poligono.

Fissa un punto O come centro dell'omotetia, seleziona "omotetia" e applicala al poligono selezionando centro e rapporto di omotetia.

Scegli un'isometria (traslazione, rotazione, simmetria assiale) ed applicala al poligono "omotetico" che hai ottenuto: stampa qualche esempio tipo quello in figura in cui è stata applicata un'omotetia di centro O e rapporto 2 e poi una rotazione di 60° intorno ad O.



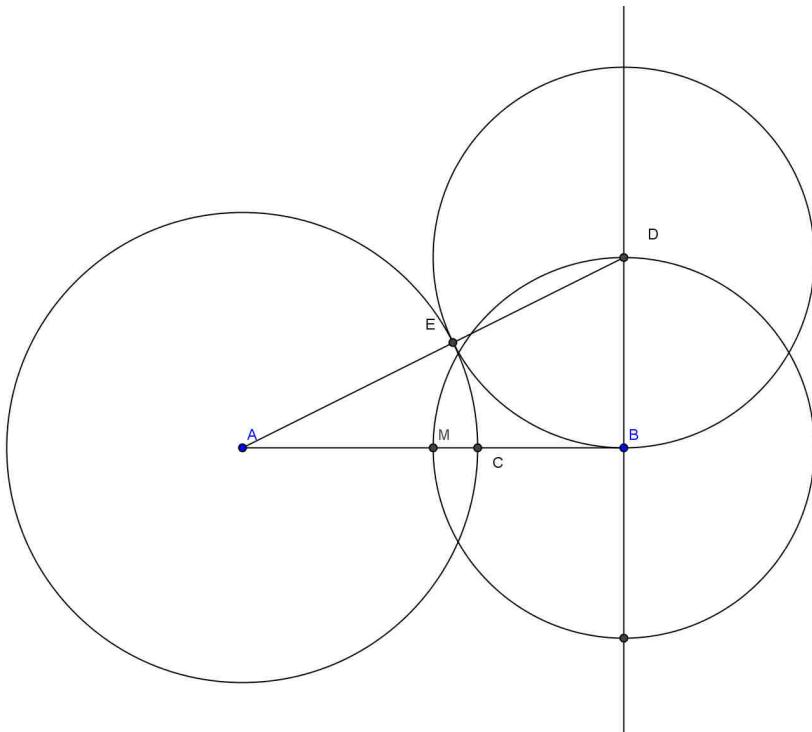
Laboratorio di informatica

SCHEDA 21

GEOMETRIA EUCLIDEA *Sezione aurea di un segmento*

Dato un segmento AB costruiamo con Geogebra la sua sezione aurea AC seguendo il procedimento spiegato negli Appunti:

- disegniamo il punto medio M di AB;
- tracciamo la retta perpendicolare ad AB passante per B e intersechiamola con la circonferenza di centro B e raggio MB ottenendo il punto D;
- congiungiamo D con A e intersechiamo con la circonferenza di centro D e raggio DB ottenendo il punto E;
- con centro in A e apertura AE riportiamo AE su AB determinando C: AC è la sezione aurea di AB



Poiché si tratta di una costruzione piuttosto lunga conviene creare uno “strumento” che la effettui in modo automatico quando vogliamo introducendo i punti estremi di un segmento.

Per far questo scegliamo nella barra in alto “Strumenti” – crea nuovo strumento – inseriamo come oggetti iniziali i punti A e B e come oggetto finale il punto C- diamo il nome sezione aurea.

Nota: se vogliamo possiamo anche associare un’icona -immagine al nostro strumento (dobbiamo però prima creare un file immagine) che altrimenti sarà raffigurato con l’icona generica della chiave inglese.

Ricorda di salvare il file in cui hai creato lo strumento in modo da poter riaprire questo file e utilizzare il tuo strumento.

Laboratorio di informatica

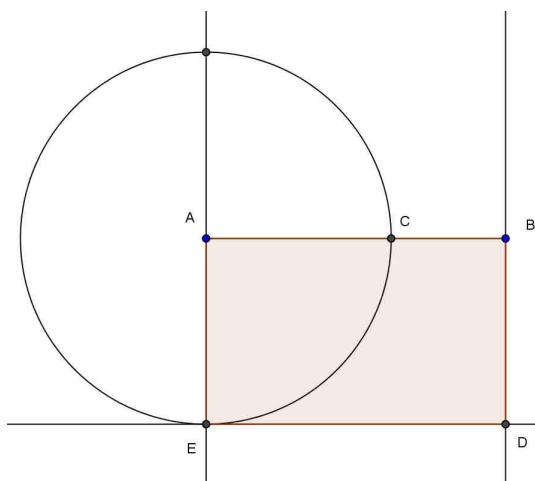
SCHEDA 22

GEOMETRIA EUCLIDEA *Costruzione di un rettangolo “aureo”*

Utilizzando Geogebra possiamo costruire un rettangolo aureo avente cioè le dimensioni in rapporto aureo.

Partiamo da un segmento AB (che sarà la dimensione maggiore del rettangolo) e costruiamo la sua sezione aurea AC utilizzando lo strumento “sezione aurea” che abbiamo creato (vedi scheda sezione aurea di un segmento).

Poi, utilizzando più volte il comando retta perpendicolare per un punto ad una data retta, costruiamo il rettangolo avente come dimensioni AB e la sezione aurea AC=BD : abbiamo ottenuto un rettangolo “aureo”.



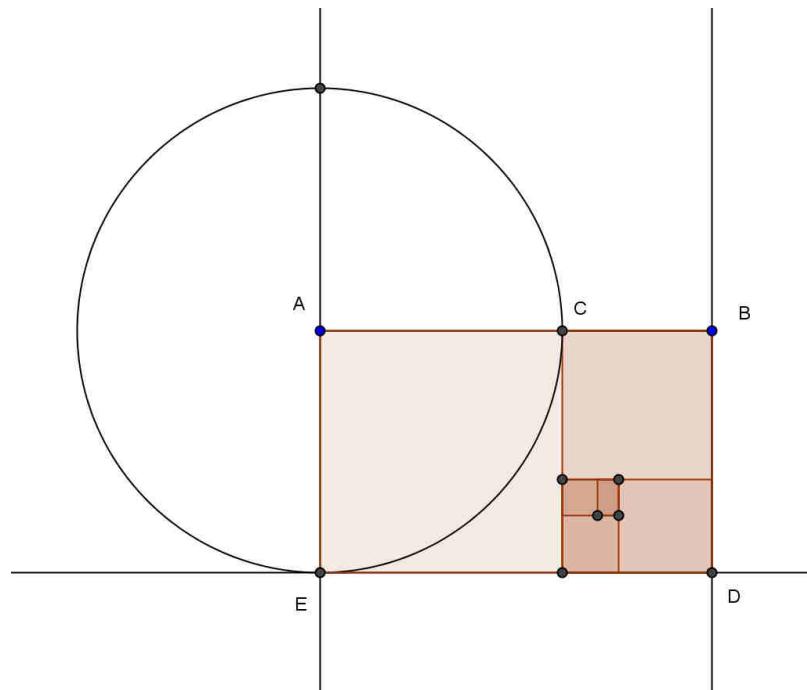
Nota

Possiamo anche **creare uno strumento** che, dati due punti A e B, disegni un rettangolo aureo avente come dimensione maggiore AB

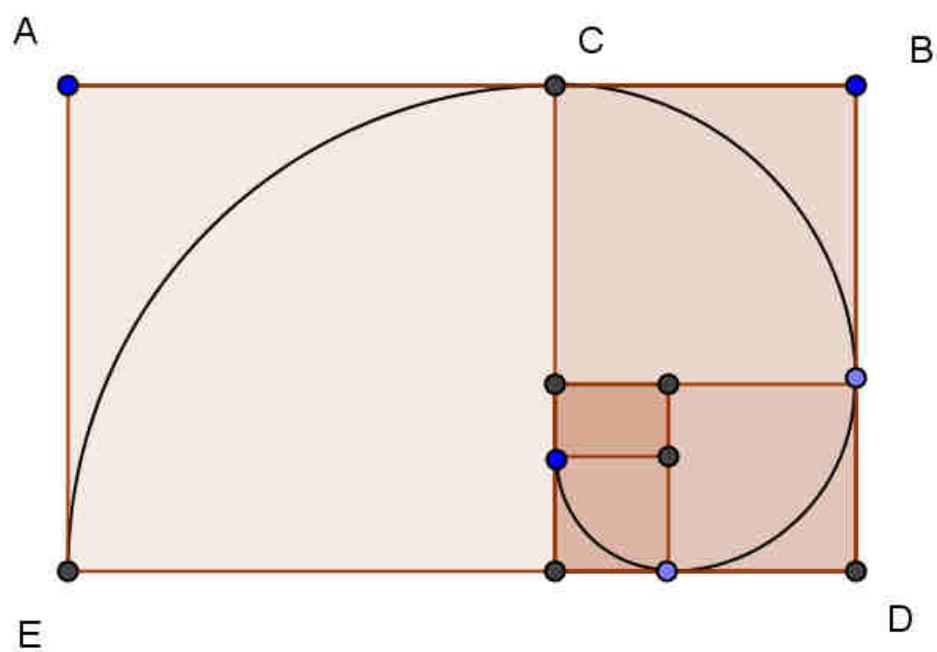
- strumenti
- crea nuovo strumento
- oggetti iniziali : punto A e punto B
- oggetti finali: punto D, poligono ABDE
- nome strumento: rettangolo aureo
- fine

Usando ripetutamente questo strumento possiamo costruire una successione di rettangoli aurei uno dentro l’altro: attivato lo strumento, dopo aver selezionato i primi due punti e costruito il primo rettangolo, basta continuare selezionando gli estremi della dimensione minore del primo rettangolo e così di seguito. Prova!

Ricorda di salvare il file se non vuoi perdere la costruzione dello strumento.



Puoi anche abbellire la tua costruzione disegnando degli archi di circonferenza come in figura....



Laboratorio di informatica

SCHEDA 23

GEOMETRIA EUCLIDEA

Poligono regolare inscritto in una data circonferenza

Supponiamo di avere una circonferenza di dato raggio, per esempio $r = 3$ come in figura.

Come possiamo inscriverci un poligono regolare di n lati?

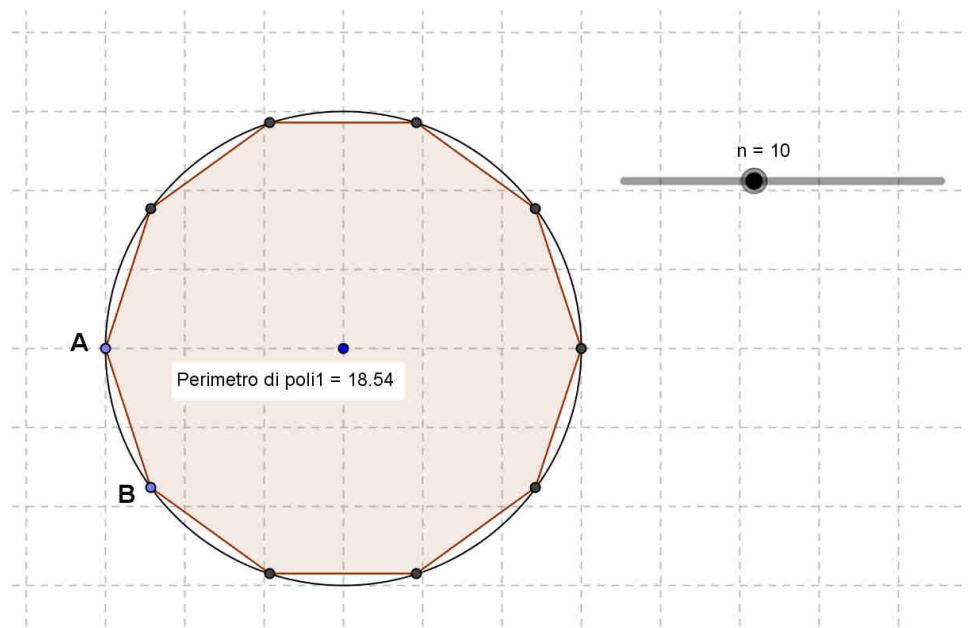
Possiamo procedere così:

- prendiamo un punto su di essa (A) con il comando punto su oggetto;
- creiamo uno slider n variabile da 3 a 20 (per esempio) con incremento 1 ;
- selezioniamo il comando Ruota oggetto e ruotiamo il punto A intorno al centro della circonferenza di $360^\circ/n$ ottenendo il punto B;
- selezioniamo il comando “poligono regolare” e clicchiamo su A e B e poi indichiamo come numero di lati n.

Abbiamo ottenuto il poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza : variando lo slider n varia il poligono.

Se selezioniamo il comando “distanza” e misuriamo il perimetro del poligono inscritto, al crescere dei lati vediamo che il rapporto tra il perimetro del poligono e il diametro (nel nostro caso uguale a 6) della circonferenza si avvicina al valore di $\pi \approx 3,14$ (vedi in figura il caso di n = 10).

Stampa degli esempi.



Laboratorio di informatica

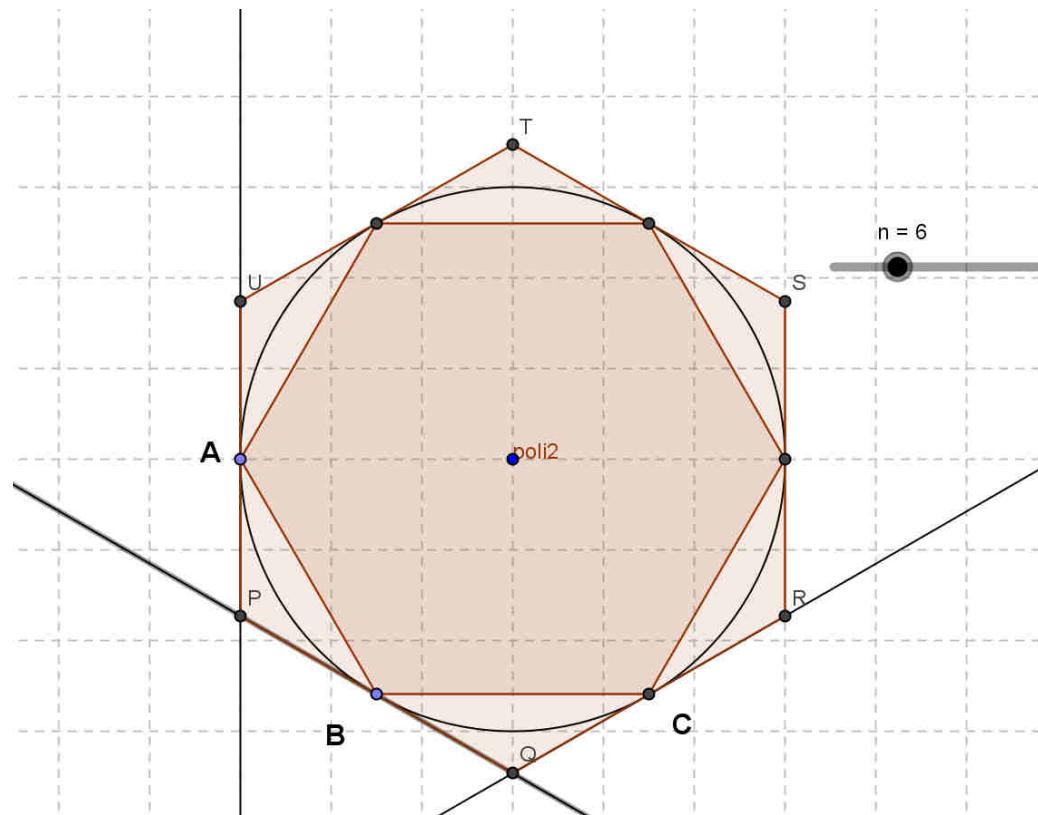
SCHEMA 24

GEOMETRIA EUCLIDEA

Poligono regolare circoscritto ad una data circonferenza

Data una circonferenza di raggio dato (per esempio $r = 3$) come possiamo costruire *il poligono regolare circoscritto con n lati?*

Possiamo riprendere la costruzione precedente, tracciare le tangenti in tre punti consecutivi A, B, C del poligono inscritto, intersecare le tangenti ed ottenere così il lato PQ del poligono regolare circoscritto con lo stesso numero di lati che può essere poi tracciato con il comando poligono regolare (nella figura c'è il caso n = 6).



Anche in questo caso con il comando “distanza” possiamo calcolare il perimetro del poligono regolare circoscritto alla circonferenza e controllare che, al crescere del numero dei lati, il rapporto tra perimetro e diametro si avvicina al valore di $\pi \approx 3,14$.

Rispetto al rapporto che si otteneva con i perimetri dei poligoni inscritti (minore di 3,14..) abbiamo in questo caso un rapporto sempre maggiore di 3,14...

Stampa degli esempi.

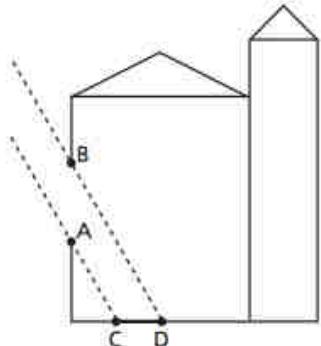
Prova Invalsi

Simulazione

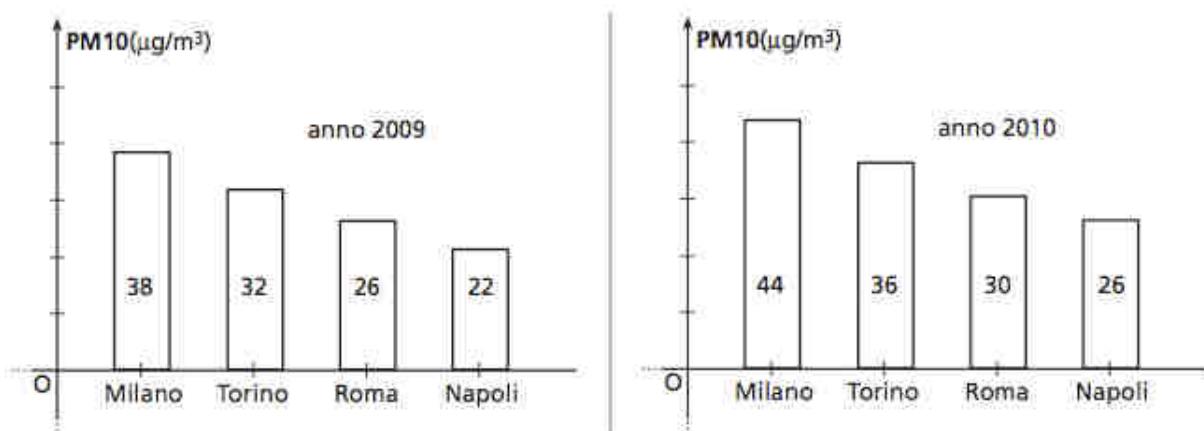
1. In una bella giornata di primavera, la luce del sole entra in una chiesa attraverso una vetrata, proiettandone l'immagine sul pavimento.

Sapendo che l'altezza AB della vetrata misura 4 m, e i raggi del sole sono inclinati di 60° rispetto al suolo, qual è la lunghezza della proiezione CD della vetrata sul pavimento?

- A. 2 m B. $\sqrt{3}$ m C. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ m D. 3 m



2. I due istogrammi in figura rappresentano i valori medi annuali (ipotetici) della concentrazione di polveri sottili (PM10), in microgrammi per m^3 , nell'aria di quattro città italiane, in due anni successivi. In quale città si è verificato in un anno il maggior aumento percentuale della concentrazione di PM10?



- A. Milano B. Roma C. Torino D. Napoli

3. Qual è il valore della seguente potenza? $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

- A. $\frac{9}{4}$ B. $-\frac{9}{4}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $-\frac{4}{9}$

4. Quale tra le seguenti relazioni *non* rappresenta una corrispondenza di inversa proporzionalità tra x e y ?

- A. $x = \frac{3}{y}$ B. $x \cdot y = 3$ C. $y = \frac{3}{x}$ D. $\frac{x}{y} = 3$

5. Affinché un quadrilatero sia un parallelogramma è sufficiente che:

- A. due lati opposti siano congruenti.
- B. due angoli opposti siano congruenti.
- C. due lati opposti siano paralleli.
- D. le diagonali si dividano reciprocamente a metà.

6. Per la tua videocamera digitale hai bisogno di due pile stilo identiche, e ti ricordi di averne messe due coppie, di tipo diverso, dentro un sacchetto. Qual è la probabilità che, estraendone due a caso, esse siano dello stesso tipo?

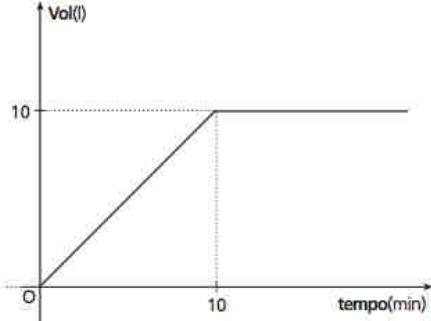
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

7. Quale fra le seguenti espressioni è un numero irrazionale?

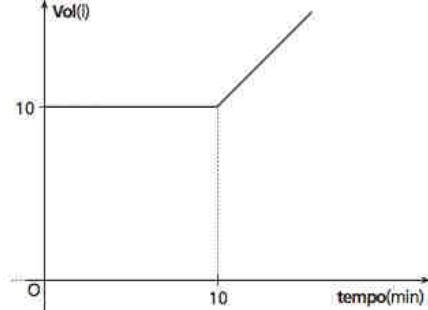
- A. $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)$ B. $\frac{3}{5} - 1, \overline{6}$ C. $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)^2 - \frac{13}{4}$ D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2$

8. In un certo istante una vasca contiene 10 litri d'acqua. Dopo 10 minuti, da un rubinetto comincia a scendere altra acqua, in quantità di un litro al minuto. Quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento del volume d'acqua contenuta nella vasca, al passare del tempo?

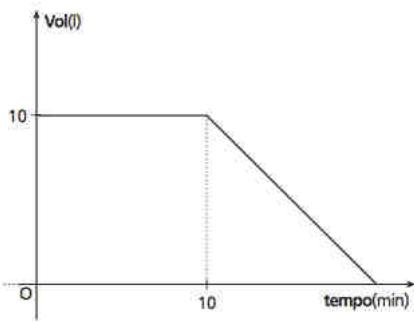
A.



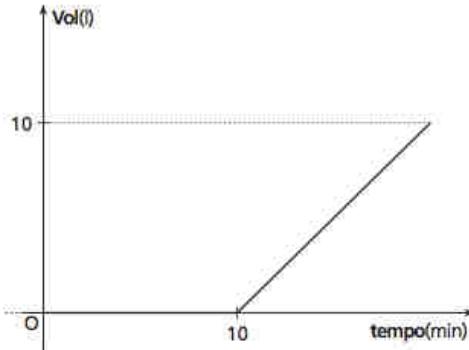
B.



C.



D.



9. Aldo, Bruno, Carlo e Dario stanno giocando al parco. In un primo momento, si riuniscono tutti su una piccola pedana. Da lì, Aldo va verso nord per 1 m, Bruno va verso est per 2 m, Carlo va verso sud per 3 m. Di quanti metri deve andare Dario verso ovest, affinché le posizioni ABCD dei quattro amici formino un trapezio con base maggiore CD?

- A. 4 m B. 5 m C. 6 m D. 7 m

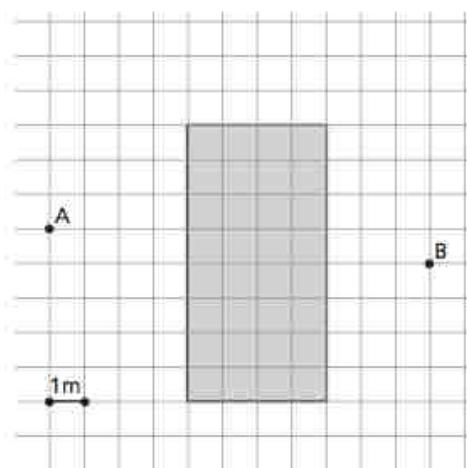
10. Da un mazzo di 40 carte (10 carte per ogni seme) qual è la probabilità di pescare una figura di cuori o di quadri?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{1}{10}$

11. Dati i polinomi $A(x) = 3x^2 - 7x - 1$ $B(x) = 2x^3 - 5x^2 - 1$, l'espressione
 $C(x) = 2x \cdot A(x) - 3 \cdot B(x)$:

- A. non è un polinomio.
- B. è il polinomio $C(x) = x^2 - 2x + 3$.
- C. è il polinomio $C(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$.
- D. è il monomio $C(x) = x^2$.

12. Dall'altra parte di una piscina rettangolare Alice (A) riconosce la sua amica Bianca (B). Quanti metri deve percorrere almeno Alice per raggiungere Bianca, senza attraversare l'acqua della piscina?



- A. 12 m B. 14 m C. 16 m D. 18 m

13. Anna e Marco hanno in tasca la stessa somma di denaro. Marco dà 10 euro ad Anna, in restituzione di un prestito, e dice ad Anna: "Se tu mi regalassi 1 euro, ora io avrei esattamente la metà dei tuoi soldi". Qual era la cifra inizialmente posseduta da ciascuno dei due?

- A. € 30 B. € 27 C. € 36 D. € 21

14. Una comitiva di 30 donne e 20 uomini si prepara per un viaggio organizzato. Si rileva che il peso medio dei bagagli delle donne è di 20 kg, quello degli uomini invece è di 15 kg. Qual è il peso medio dei bagagli, se non si fanno distinzioni di sesso?

- A. 16 kg B. 17,5 kg C. 18 kg D. 19,5 kg

15. Qual è il polinomio risultante dallo sviluppo della seguente espressione?

$$(a+b-c)^2 - (a+b)^2 - (b-c)^2$$

- A. $a^2 + b^2 - 2bc$
- B. $-b^2 - 2ac$
- C. $b^2 + 2ac$
- D. $-a^2$

- Appunti di Matematica 2 – Liceo scientifico -
- Prova Invalsi -

16. Il tuo orologio da polso segna le 11:40. Qual è l'angolo tra la lancetta delle ore e quella dei minuti?

- A. 90° B. 100° C. 110° D. 120°

17. Il prezzo di una confezione di pasta è salito da 80 centesimi a 1 euro. Qual è stato l'aumento percentuale?

- A. 20 % B. 25 % C. 0,20 % D. 0,25 %

18.

Osserva la seguente tabella.

x	y
-1	0
0	3
2	9
3	12

Quale tra le seguenti equazioni può esprimere la relazione fra x e y ?

- | | |
|---------------------|---------------------|
| A. $3y - x + 3 = 0$ | C. $3x - y + 3 = 0$ |
| B. $y = x + 1$ | D. $y = 2x + 6$ |

19. In un triangolo isoscele ABC , la base AB è congruente all'altezza CH relativa alla base. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo e l'area del quadrato costruito sul lato obliquo?

- | | | | |
|------------------|------------------|-------------------------|------------------|
| A. $\frac{2}{5}$ | B. $\frac{3}{4}$ | C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | D. $\frac{1}{2}$ |
|------------------|------------------|-------------------------|------------------|

20. Consideriamo i seguenti numeri reali: $a = \sqrt{15}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{17} - 1$. Quale tra le seguenti proposizioni è vera?

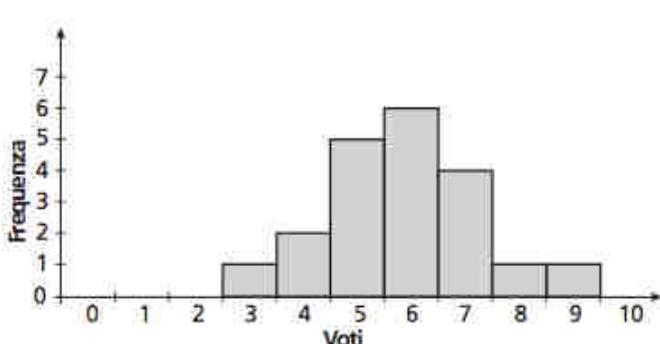
- A. $a < b < c$
- B. $b < a < c$
- C. $c < b < a$
- D. $b < c < a$

21.

Quali valori si possono dare ad a e b perché l'equazione $ax^2 + 3bx = 6$ abbia come soluzione $x = 2$?

- A. $a = 1, b = 5$ B. $a = 0, b = 1$ C. $a = 0, b = 2$ D. $a = 1, b = 1$

22. L'istogramma illustra l'andamento di un compito di matematica:



Qual è la frequenza relativa dei voti 6, sul totale dei voti sufficienti?

- | | |
|-------------------|------------------|
| A. $\frac{3}{10}$ | B. $\frac{1}{2}$ |
| C. 6 | D. 1 |

23. Si vuole ritagliare via da un foglio rettangolare una parte triangolare, in questo modo: a partire da un punto P che sta a $\frac{1}{3}$ di uno dei lati, si taglia il foglio parallelamente alla diagonale che parte dal vertice del foglio più vicino a P.

Se l'area dell'intero foglio misurava 90 cm^2 , quanto misura l'area del triangolo?

- A. 10 cm^2
- B. 20 cm^2
- C. 30 cm^2
- D. Non si può sapere: mancano le misure dei lati.

24. Se la lunghezza del bordo di una pizza normale è 100cm e si prepara una “maxi” stendendo due impasti (mantenendo spessore e forma circolare), qual è la lunghezza del bordo della pizza “maxi”?

- A. 140 cm circa
- B. 160 cm circa
- C. 180 cm circa
- D. 200 cm

25. Quale tra le seguenti coppie di funzioni è rappresentata nel piano cartesiano da rette aventi in comune solamente il punto $(1; 3)$?

- A. $y = 4x - 1, \quad y = x + 2.$
- C. $y = 4x - 1, \quad y = -x + 5.$
- B. $y = x + 2, \quad y = x + 3$
- D. $y = 4x - 1, \quad y = -1 + 4x$

26. Quale fra le seguenti terne di punti del piano cartesiano non può costituire la terna dei vertici di un triangolo?

- A. $(0;0), (0;1), (1;0)$
- C. $(0;1), (-5;-1), (5;3)$
- B. $(0;1), (3;2), (4;4)$
- D. $(-1;0), \left(0; -\frac{1}{4}\right), (1;-1)$

27. Dati a, b, c interi positivi non nulli, l'uguaglianza:
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

- A. è sempre verificata.
- B. è soddisfatta per infiniti valori di c .
- C. è soddisfatta per ogni coppia di interi positivi a e b se e solo se $c = 1$.
- D. è soddisfatta solamente dalla terna $a = 1, b = 1, c = 1$.

28. Qual è il polinomio quoziante della divisione $[(x^3)^2 + (x^2)^3] : x^2$?

- A. $2x^4$
- B. $2x^3$
- C. $x^7 + x^6$
- D. $x^3 + x^6$

29. Si consideri la seguente funzione razionale fratta:

$$\frac{x-3}{2x-1} + \frac{1}{9x^2+1}$$

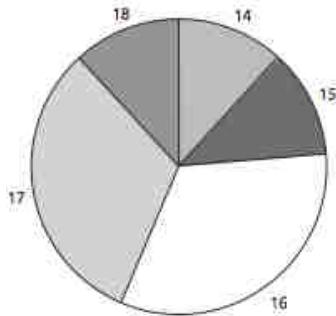
Essa perde di significato per:

- A. $x = 3$ B. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = -\frac{1}{3}$ D. $x = 9$

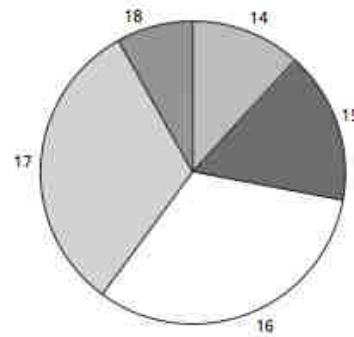
30. In un gruppo giovanile di atletica, i 25 ragazzi che ne fanno parte si distribuiscono per età secondo la tabella seguente.

Quale dei seguenti grafici a torta rappresenta correttamente la distribuzione delle età?

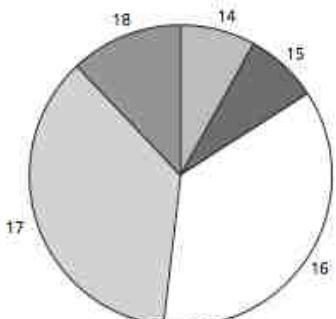
Età (anni)	frequenza
14	3
15	4
16	8
17	8
18	2



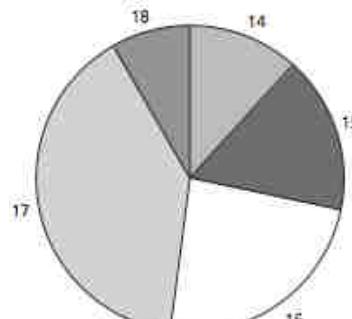
A.



B.



C.



D.

RISPOSTE

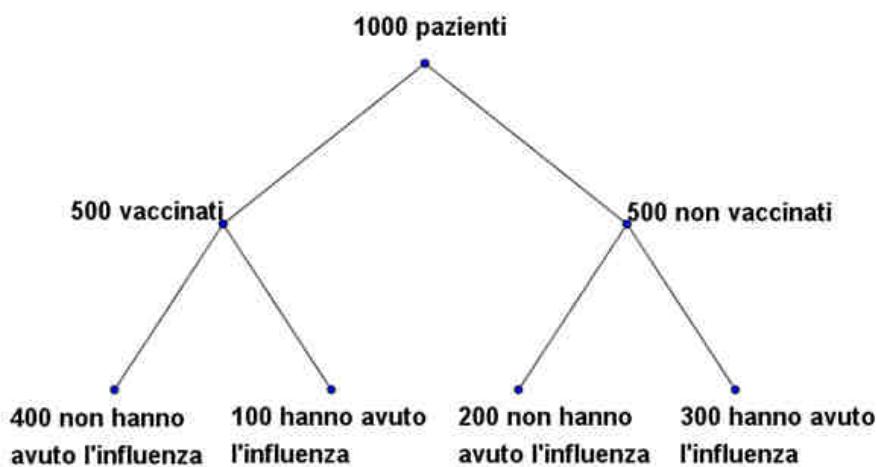
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	D	C	D	D	B	C	B	C	C	B	B	B	C	B

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	B	C	A	D	B	B	B	A	A	C	C	A	B	B

Invalsi 2018/19

PROVA DI ESEMPIO

1. Osserva il seguente diagramma ad albero. Dei 1000 pazienti di un medico solo 500 sono stati vaccinati contro l'influenza. Dopo alcuni mesi si è riscontrato che l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza mentre il 40% dei non vaccinati non ha avuto l'influenza.



- a. Utilizzando i dati del diagramma ad albero completa la seguente tabella.

	Non hanno avuto l'influenza	Hanno avuto l'influenza	TOTALE
Vaccinati	400	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Non vaccinati	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
TOTALE	<input type="text"/>	400	1000

- b. Qual è la probabilità che una persona scelta a caso dal campione di pazienti abbia avuto l'influenza?
- A) 80%
B) 60%
C) 50%
D) 40%
- c. Qual è la probabilità che un paziente, preso a caso tra coloro che sono stati vaccinati, abbia avuto l'influenza?
Risposta: %

2. Una fabbrica utilizza due diverse stampanti, S_1 e S_2 per produrre biglietti d'auguri. La probabilità che un biglietto stampato da S_1 sia difettoso è del 3%, mentre la probabilità che un biglietto stampato da S_2 sia difettoso è del 2%.
- a. La probabilità che un biglietto stampato da S_2 sia senza difetti è
- A) 0.02
B) 0.03
C) 0.97
D) 0.98
- b. Per la realizzazione di biglietti d'auguri S_1 e S_2 lavorano in serie, cioè ogni biglietto viene stampato prima da S_1 e poi da S_2 . Si sa che gli eventi “ S_1 produce un biglietto **non** difettoso” e “ S_2 produce un biglietto **non** difettoso” sono fra loro indipendenti. La probabilità che un biglietto **non** sia difettoso dopo essere stato stampato sia da S_1 che da S_2 è
- A) 98%
B) 95.06%
C) 6%
D) 1.95%
3. In un'industria una macchina A produce in un minuto il triplo di cialde di caffè rispetto a una macchina B. Quando le macchine A e B lavorano contemporaneamente producono in tutto 40 cialde al minuto. Se la macchina B viene sostituita con una macchina identica ad A, quante cialde potranno essere prodotte complessivamente in un minuto?
- A) 40
B) 50
C) 60
D) 80
4. Individua, fra i seguenti problemi, quello che può essere risolto dall'equazione $1/2(x-20)=200$.
- A) La differenza tra un numero x e 10 è uguale a 200. Calcola x .
- B) In un negozio ho acquistato un articolo che costava x euro. Calcola x sapendo che nel portafoglio avevo 200 euro e me ne sono rimasti 20.
- C) A scuola una mattina sono assenti 20 studenti. Il 50% dei presenti è uguale a 200. Calcola il numero totale x di alunni della scuola.
- D) La differenza tra un numero x e 20 è uguale a 100. Calcola x .

5. Anna ha speso presso un'edicola un quinto del denaro con cui è uscita da casa, in cartoleria la metà del denaro rimanente. Dopo i due acquisti le sono rimasti 20€.

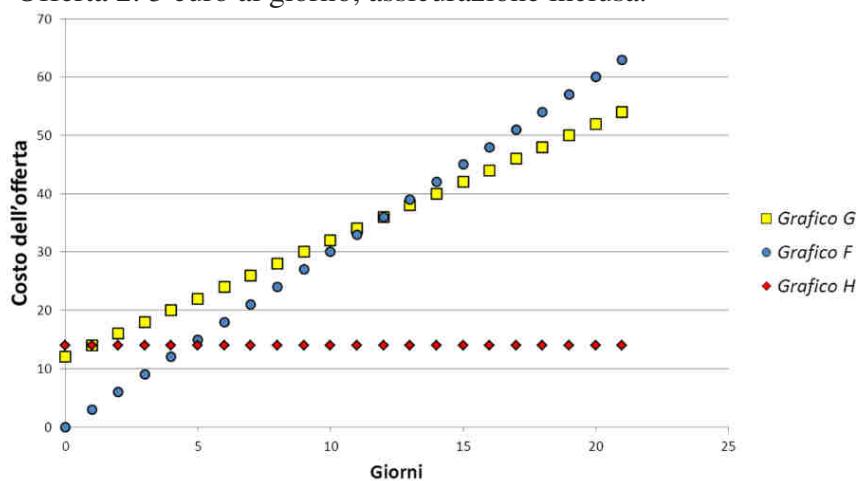
- a. Qual è la quantità di denaro con cui Anna è uscita da casa? €
 - b. Quale delle seguenti equazioni consente di determinare la quantità di denaro x con cui Anna è uscita da casa?
- A $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 20 = x$
- B $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}x = x + 20$
- C $\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x + 20 = x$
- D $\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x + 20 = x$

6. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	V	F
1. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $ab < a^2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a^2 < b^2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a + b < a$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

7. Tre amici si preparano a trascorrere una vacanza di alcune settimane e vogliono noleggiare una tenda. Confrontano le offerte di due negozi:

- Offerta 1: 2 euro al giorno per il noleggio della tenda più un costo fisso di 12 euro per l'assicurazione obbligatoria.
- Offerta 2: 3 euro al giorno, assicurazione inclusa.

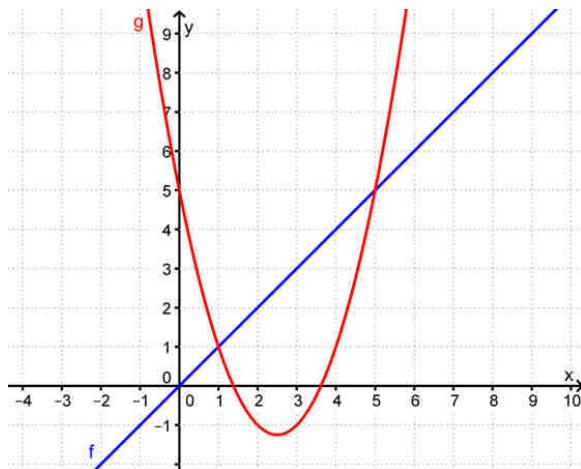


In figura sono rappresentati i grafici F, G e H. Solo due di essi rappresentano le offerte 1 e 2:

- Appunti di Matematica 2 – Liceo scientifico -
- Prova Invalsi -

- a. Completa la tabella associando a ciascuna offerta il nome del grafico corrispondente.
- Offerta 1 --> Grafico
 Offerta 2 --> Grafico
- b. Quanto pagherebbero i tre amici per una vacanza di 25 giorni se scegliersero l'offerta 1?
- Risposta: Euro
- c. Completa le due formule che esprimono il costo totale C al variare del numero n di giorni.
- Offerta 1 --> $C = \dots$
 Offerta 2 --> $C = \dots$
8. In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni f e g definite, nell'insieme dei numeri reali, dalle formule $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 5x + 5$.

Autandoti
di f e g , indica
affermazioni è



anche con i grafici
se ciascuna delle seguenti
vera (V) o falsa (F).

1. $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$

V

F

2. $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1$ o $x = 5$

V

F

3. $g(x) > f(x)$ se e solo se $x < 1$ o $x > 5$

V

F

4. $f(x) > 0$ se e solo se $1 < x < 5$

V

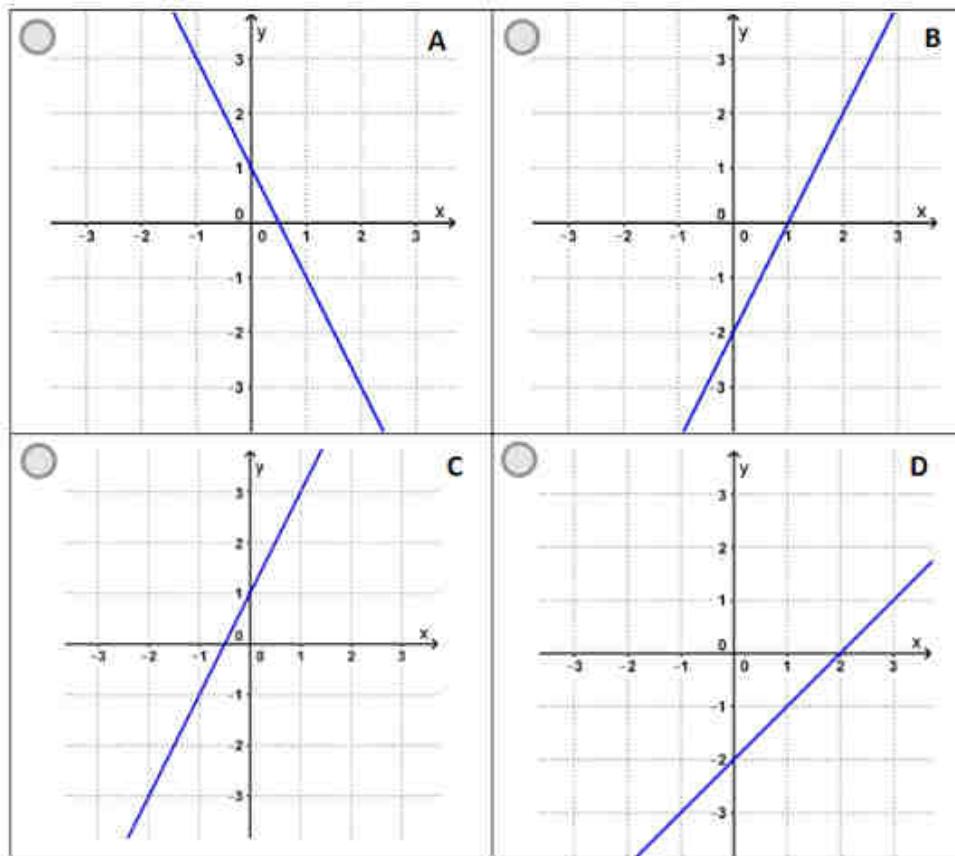
F

9. Considera la funzione definita da: $y = -2x + 1$

a. Quale valore di y si ottiene per $x = 0$?

b. Quale valore di x si ottiene per $y = 0$?

c. Quale dei seguenti grafici può rappresentare questa funzione?

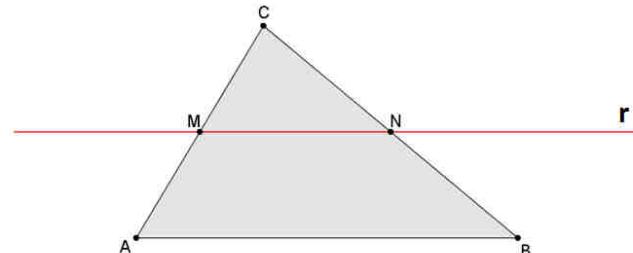


10. Sia dato un triangolo ABC . La retta r passa per il punto medio M del lato AC ed è parallela al lato AB .

Si vuole dimostrare che la retta r interseca il lato CB nel suo punto medio N .

Completa il testo di questa dimostrazione scegliendo tra i seguenti termini e prestando attenzione al fatto che ogni termine può essere utilizzato una sola volta.

Termini fra cui scegliere:



congruenti

corrispondenti

parallele

Talete

Euclide

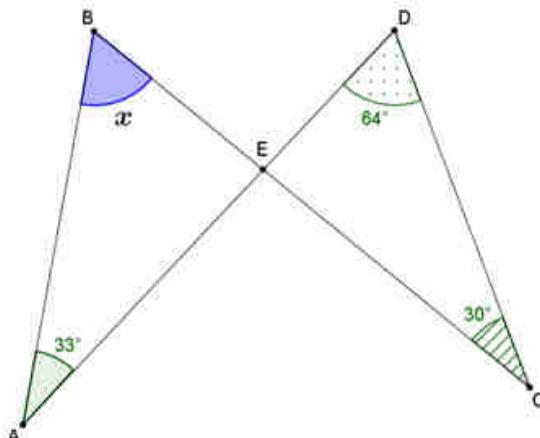
AM

perpendicolari

CN

Considera le rette AB e MN fra loro..... Per il teorema di esse intercettano sulle rette AC e CB segmenti fra loro proporzionali. Poiché per ipotesi è congruente a MC allora CN e NB sono il che equivale a dimostrare la tesi.

11. Osserva la figura.



Giulia afferma che l'ampiezza x dell'angolo ABE è 61° .

Giulia ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

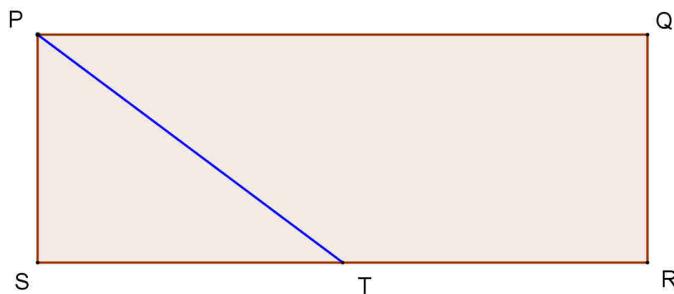
Giulia ha ragione, perché

.....
.....
.....
.....
.....

Giulia non ha ragione, perché

.....
.....
.....
.....
.....

12. PQRS è un rettangolo e T è il punto medio di SR.



Qual è il rapporto tra l'area del triangolo PST e l'area del rettangolo PQRS?

Risposta:

- 13.** Nella figura seguente il lato della griglia quadrettata misura 10.

Il perimetro della regione colorata misura:

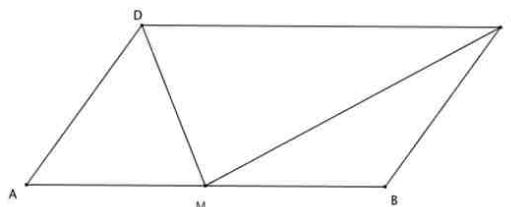
- A) $25\pi + 60$
 - B) $25\pi + 100$
 - C) $50\pi + 60$
 - D) $50\pi + 100$
- 14.** Un barattolo di forma cilindrica ha il diametro di base di 6,6 cm e l'altezza di 14 cm . Qual è la capacità del barattolo?

- A) Esattamente $\frac{1}{2}$ litro
- B) Poco meno di $\frac{1}{2}$ litro
- C) Esattamente $\frac{1}{3}$ di litro
- D) Poco meno di $\frac{1}{3}$ di litro

- 15.** Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	V	F
1. Se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, allora gli assi dei suoi lati si intersecano in un unico punto		
2. Se un quadrilatero è circoscritto a una circonferenza, allora le bisettrici dei suoi angoli interni si intersecano in un unico punto		
3. Se un quadrilatero ha tre angoli retti, allora è un rettangolo		

- 16.** M è il punto medio del lato AB del parallelogramma $ABCD$.



Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	V	F
1. I triangoli AMD e MBC hanno la stessa area		
2. L'area del triangolo DMC è il doppio dell'area del triangolo MBC		
3. Le altezze dei triangoli AMD e MBC relative ai lati AD e BC sono congruenti		
4. L'area del triangolo AMD è $\frac{1}{3}$ dell'area del parallelogramma $ABCD$		

RISPOSTE

Domanda	Risposta corretta
1a	Prima riga: " 100" " 500"; seconda riga: " 200" " 300" " 500"; terza riga: " 600"
1b	D
1c	20
2a	D
2b	B
3	C
4	C
5a	50
5b	C
6	F – V – F – V
7a	Offerta 1 : grafico G; offerta 2 : grafico F
7b	62
7c	Offerta 1: $12+2n$; Offerta 2: $3n$
8	V – V – V – F
9a	1
9b	1/ 2
9c	A
10	Nell'ordine: " parallele"; " Talete"; " AM"; " congruenti"
11	Giulia ha ragione perché Accettabili tutte le risposte che utilizzino le due seguenti informazioni: Gli angoli DEC e BEA hanno stessa ampiezza perché sono angoli opposti al vertice; La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°
12	1/ 4
13	A
14	B
15	V – V – V
16	V – V – V – F