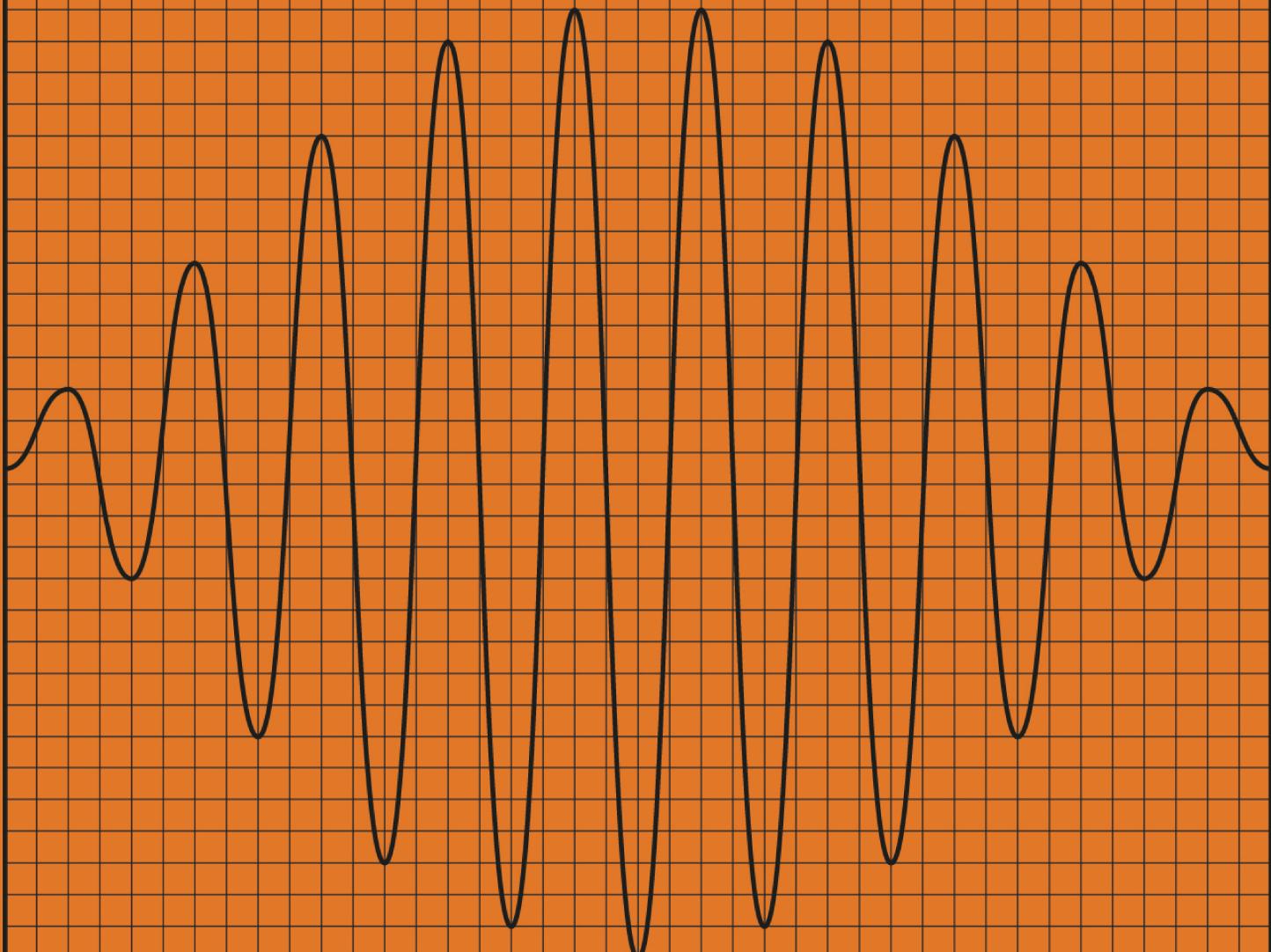


Appunti di Matematica

Indirizzo Scientifico

4

Cecilia Magni



Prefazione

Gli “**Appunti di Matematica**” sono un corso di matematica “open source” per i Licei , con una versione per l’indirizzo scientifico ed una per l’indirizzo umanistico, cioè un corso di matematica scaricabile gratuitamente per le classi dalla prima alla quinta del Liceo.

Queste dispense sono nate per i miei studenti del liceo, sia scientifico che classico, perché mi rendevo conto che non si orientavano nella “parte teorica” del libro di testo, spesso troppo formale e “faticosa” e che non tutti riuscivano a “prendere appunti” durante le spiegazioni.

La parte teorica è per questo sviluppata con un linguaggio semplice e si integra con la parte applicativa in cui sono stati proposti, oltre ad un certo numero di esercizi per arrivare ad impadronirsi delle “tecniche” di calcolo, problemi più stimolanti da un punto di vista logico, problemi collegati alla realtà , “schede di lavoro” da svolgere in piccoli gruppi e qualche test in inglese: volutamente non ho inserito esercizi troppo complicati dal punto di vista del calcolo in modo che lo sforzo dello studente si concentri sulla ricerca e sullo sviluppo del procedimento risolutivo.

La sezione relativa al **laboratorio di informatica** è particolarmente curata: ho utilizzato il software di geometria dinamica “Geogebra” (liberamente scaricabile dalla rete) e predisposto delle “schede” in modo che gli studenti possano lavorare in modo autonomo.

Mi auguro che queste dispense, che ho usato in classe come libro di testo per molti anni e che sono edite in questo sito con licenza Creative Commons (attribuisci -non commerciale- condividi allo stesso modo), possano essere utili ad altri docenti per costruire, integrandole con materiale personale, il proprio libro di testo che in questo modo , oltre al vantaggio di essere **gratuito** per gli studenti, potrebbe essere facilmente aggiornato e modificato ogni anno in relazione alle specifiche esigenze della classe.

Voglio infatti ricordare che ormai da diversi anni (comma 2-bis dell’articolo 6 della legge 128/2013) il Ministero della Pubblica Istruzione ha specificato che i docenti non sono obbligati ad adottare testi in commercio ma possono decidere di utilizzare proprie dispense come testo di riferimento per la propria attività didattica.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi Laura Corti, Francesco Degl’Innocenti, Antonella Lepore, Emma Massi e Piero Sbardellati che mi hanno aiutata nella fase di digitalizzazione del testo manoscritto e sostenuta in questo lungo ed impegnativo progetto.

Cecilia Magni

Progetto Matematica in rete

Cecilia Magni

APPUNTI DI MATEMATICA 4

Indirizzo Scientifico

Editore: Matematicainrete.it

Anno di edizione : 2024

Formato: ebook (PDF)

Licenza:

Creative Commons BY NC SA (attribuzione – non commerciale – condividi allo stesso modo)

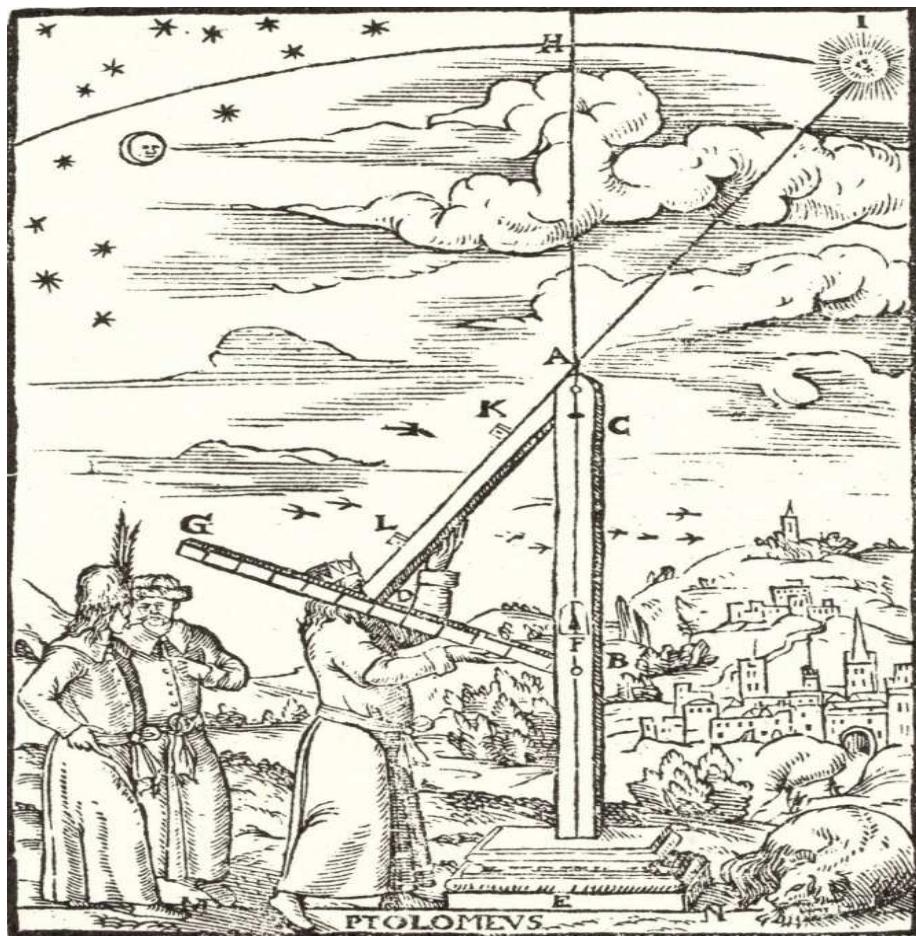
CODICE ISBN: 978-88-943828-6-0

APPUNTI DI MATEMATICA 4
Indirizzo scientifico

Indice

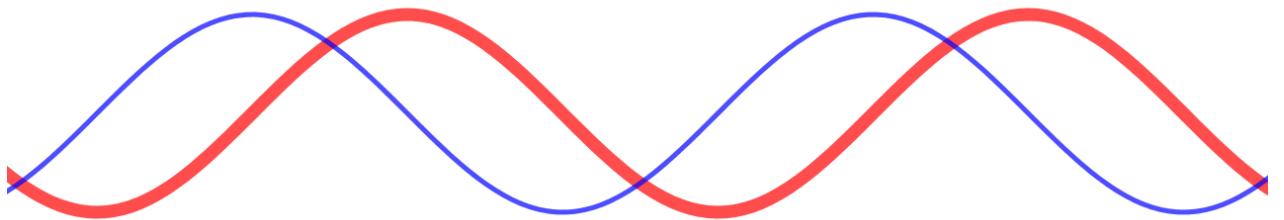
1. Goniometria e trigonometria	1
1. Funzioni goniometriche	2
2. Triangolo rettangolo	32
3. Formule goniometriche	46
4. Equazioni goniometriche e problemi	66
5. Disequazioni goniometriche	85
6. Triangolo qualsiasi	100
7. Complementi di trigonometria	116
2. Trasformazioni geometriche	120
3. Numeri complessi	146
4. Geometria dello spazio	161
5. Calcolo combinatorio	202
6. Calcolo delle probabilità	214
7. Laboratorio di informatica	250

Goniometria e trigonometria



1. Funzioni goniometriche
2. Triangolo rettangolo
3. Formule goniometriche
4. Equazioni goniometriche
5. Disequazioni goniometriche
6. Triangoli qualsiasi
7. Complementi di trigonometria

Funzioni goniometriche

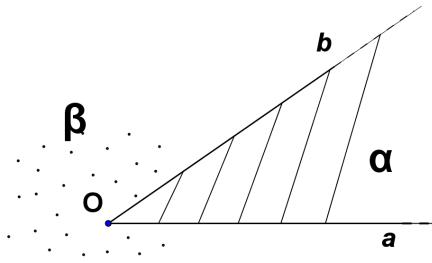


Definizione di angolo

Consideriamo due semirette a, b aventi l'origine O in comune.

Le due semirette individuano due porzioni di piano che sono dette angoli di lati a e b e vertice O.
Si presentano tre casi:

1) a e b non appartengono alla stessa retta

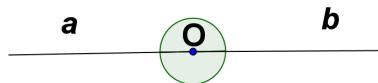


In questo caso abbiamo un **angolo convesso** α (presi comunque due punti appartenenti all'angolo il segmento che li unisce appartiene all'angolo) e un **angolo concavo** β (esistono coppie di punti appartenenti all'angolo tali che il segmento che li unisce non appartiene all'angolo).

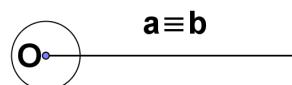


2) a e b appartengono alla stessa retta (ma non coincidono)

In questo caso vengono individuati due angoli uguali (convessi) chiamati **angoli piatti**.



3) a e b coincidono : in questo caso abbiamo l'**angolo nullo** (ci sono solo i lati) e l'**angolo giro** (tutto il piano).



Misura degli angoli

Gli angoli possono essere misurati in gradi o in radianti.

Misure in gradi

$$\text{grado} = \frac{1}{360} \text{ (angolo giro)}$$

$$\text{Angolo giro} \rightarrow 360^\circ$$

$$\text{Angolo piatto} \rightarrow 180^\circ$$

$$\text{Angolo retto} \rightarrow 90^\circ$$

ecc...

Si usano sottomultipli sessualiimali cioè si considera

$$\text{il primo} \rightarrow 1' = \left(\frac{1}{60} \right)^\circ \rightarrow 1^\circ = 60'$$

$$\text{il secondo} \rightarrow 1'' = \left(\frac{1}{60} \right)' \rightarrow 1' = 60''$$

Esempio:

$$\frac{1}{4} \text{ di angolo retto} = \left(\frac{90}{4} \right)^\circ = 22,5^\circ = 22^\circ + (0,5)^\circ = 22^\circ + (0,5 \cdot 60)' = 22^\circ 30'$$

Esempio:

$$\frac{1}{16} \text{ angolo retto} = \left(\frac{90}{16} \right)^\circ = (5,625)^\circ = 5^\circ + (0,625 \cdot 60)' = 5^\circ (37,5)' = 5^\circ 37' (0,5 \cdot 60)'' = 5^\circ 37' 30''$$

Esempi

1) Trasformare in frazioni di grado i seguenti angoli:

$$\text{a)} \quad 15^\circ 30' = \left(15 + \frac{30}{60} \right)^\circ = \left(15 + \frac{1}{2} \right)^\circ = \left(\frac{31}{2} \right)^\circ$$

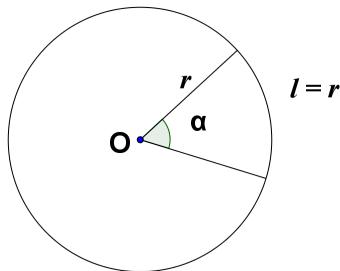
$$\text{b)} \quad 3^\circ 7' 1'' = \left(3 + \frac{7}{60} + \frac{1}{3600} \right)^\circ = \left(\frac{10800 + 420 + 1}{3600} \right)^\circ = \left(\frac{11221}{3600} \right)^\circ$$

2) Trasformare in gradi, primi e secondi la seguente frazione di grado:

$$\left(\frac{1201}{300} \right)^\circ = \left(\frac{1200}{300} + \frac{1}{300} \right)^\circ = 4^\circ + \left(\frac{1}{300} \cdot 60 \right)' = 4^\circ (0,2)' = 4^\circ (0,2 \cdot 60)'' = 4^\circ 12''$$

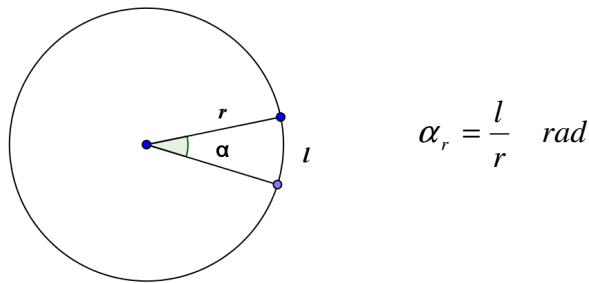
Misure in radianti

radiante = angolo che, tracciata una circonferenza di raggio qualsiasi avente centro nel vertice dell'angolo, sottende un arco uguale al raggio.



Da notare che questa definizione non dipende dalla circonferenza considerata perché se α sottende un arco uguale al raggio per una data circonferenza, allora accadrà lo stesso per ogni circonferenza centrata nel suo vertice.

Per misurare α in radianti traccio una circonferenza di raggio r , con centro il vertice di α e se l è la lunghezza dell'arco sotteso da α avrà che



Nota: se $l = r$ trovo $\alpha_r = 1 \text{ rad}$)

Quindi:

angolo giro	\rightarrow	$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$
angolo piatto	\rightarrow	$\pi \text{ rad}$
angolo retto	\rightarrow	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Nota

La misura degli angoli in radianti è preferibile a quella in gradi perché risulta molto più semplice calcolare la lunghezza l dell'arco di circonferenza corrispondente: infatti se α è misurato in radianti si ha che $l = \alpha \cdot r$

Relazione tra la misura in gradi e la misura in radianti di un angolo α

Indichiamo con α° la misura in gradi di un angolo α e con α_r la sua misura in radianti. Avremo che

$$\alpha^\circ : \alpha_r = 360^\circ : 2\pi$$

Questo ci permetterà di determinare α° se conosciamo α_r e viceversa.

Esempi

1) Esprimere in radianti le seguenti misure espresse in gradi:

a) $\alpha^\circ = 12^\circ$

$$12 : \alpha_r = 360 : 2\pi$$

$$\alpha_r = 12 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{15}$$

b) $\alpha^\circ = 10^\circ 30'$

Trasformo prima in frazione di grado:

$$10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60} \right)^\circ = \left(\frac{21}{2} \right)^\circ$$

$$\alpha_r = \frac{21}{2} \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{120}$$

2) Esprimere in gradi le seguenti misure di angoli espresse in radianti:

a) $\alpha_r = 1 \text{ rad}$

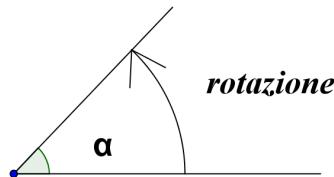
$$\alpha^\circ : 1 = 360 : 2\pi \Rightarrow \alpha^\circ = 1 \frac{180}{\pi} (\cong 57,3^\circ)$$

b) $\alpha_r = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

$$\alpha^\circ : \frac{\pi}{3} = 360 : 2\pi \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{\pi}{3} \frac{180}{\pi} = 60^\circ$$

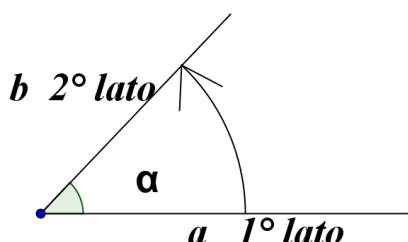
Angoli orientati

Un angolo, oltre che come parte di piano, può essere associato al concetto di **rotazione** cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

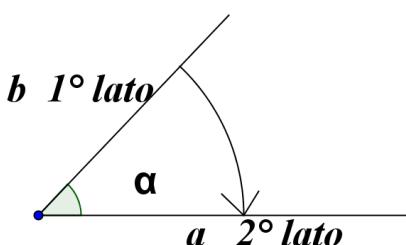


La rotazione però può essere in verso orario o antiorario.

Possiamo stabilire quale considerare come 1° lato (lato origine della rotazione) e allora avremo un angolo “orientato”: per convenzione stabilisco di chiamare **positivo** un angolo orientato se la **rotazione** che porta il primo lato sul secondo lato spazzando l'angolo è **antioraria**, negativo se è invece una rotazione oraria.



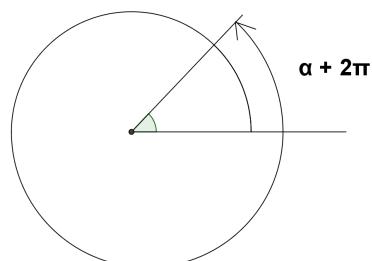
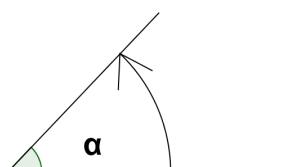
Con la scrittura \hat{ab} intendiamo che a sia il 1° lato,
Nel nostro esempio \hat{ab} è un angolo positivo.



Con la scrittura \hat{ba} intendiamo che il 1° lato sia b .
Nel nostro esempio \hat{ba} è un angolo negativo.

Considerando il concetto di rotazione possiamo avere anche angoli di ampiezza maggiore dell'angolo giro perché possiamo pensare di ruotare di un certo numero k di giri completi: α e $\alpha + 2\pi$ sono angoli rappresentati dalla stessa parte di piano ma associati a rotazioni diverse perché nel secondo angolo ho fatto un giro in più.

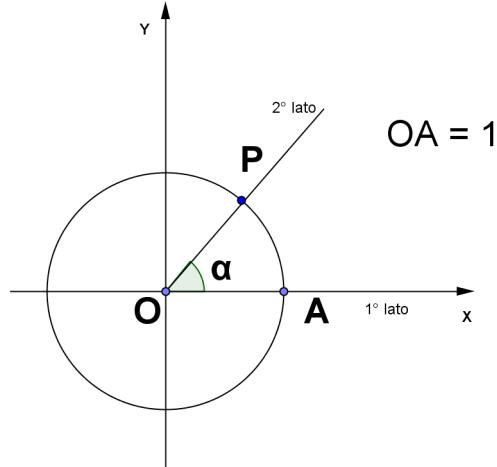
In generale scrivendo $\alpha + 2k\pi$ considererò l'angolo associato alla rotazione di ampiezza α più k giri completi (se $k > 0$ ruoto in senso antiorario, se $k < 0$ in senso orario).



La circonferenza goniometrica

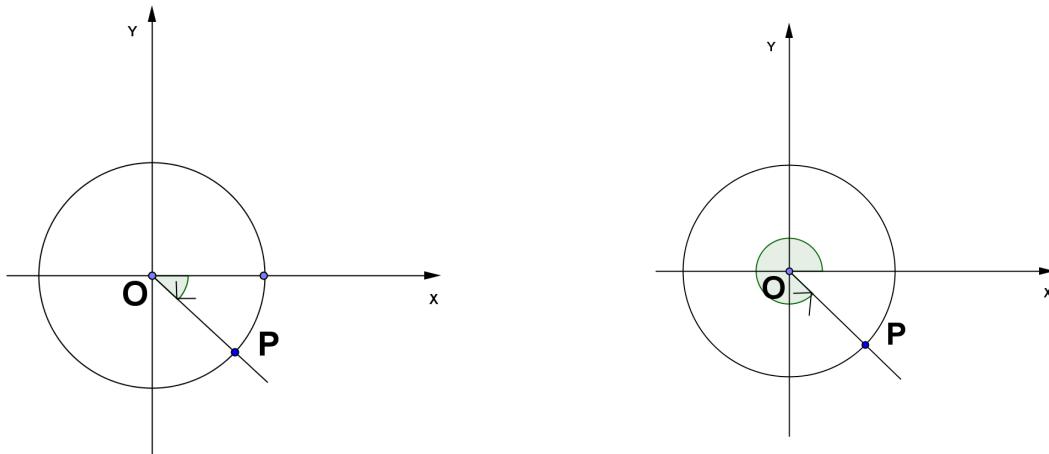
Possiamo rappresentare gli angoli orientati su una circonferenza che viene detta “circonferenza goniometrica”.

Fissato un sistema di riferimento $(O;x,y)$ la circonferenza goniometrica è una circonferenza di centro l’origine e raggio 1.



Possiamo associare ad un angolo orientato α un punto sulla circonferenza goniometrica riportando il 1° lato dell’angolo sul semiasse positivo delle ascisse: il 2° lato dell’angolo intersecherà la circonferenza in un punto P che risulterà quindi il punto associato all’angolo α .

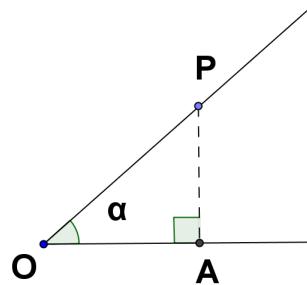
Osserviamo che lo stesso punto P sulla circonferenza è associato a più angoli, non solo perché posso sommare $2k\pi$ ma anche perché posso ruotare in senso orario o antiorario. Per esempio il punto P in figura può rappresentare $-\frac{\pi}{4}$ ma anche $\frac{7}{4}\pi$ (oltre che $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi$).



Esercizio: rappresenta gli angoli di 30° , 45° , 60° ecc. sulla circonferenza goniometrica.

Definizione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto α

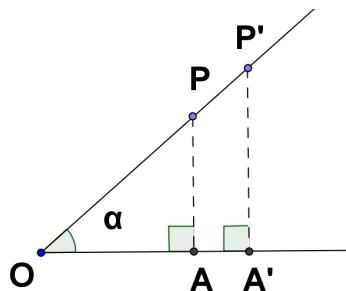
Consideriamo un angolo α acuto.



Prendiamo un punto P appartenente ad un lato (vedi figura) e proiettiamo sull'altro lato e sia A la proiezione. Il triangolo $\triangle OPA$ è un triangolo rettangolo.

I) Consideriamo il rapporto $\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$

Questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P : infatti considerando un altro punto P' e la sua proiezione A' il triangolo $\triangle OP'A'$ risulta simile al triangolo $\triangle OPA$ e quindi

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$$


Questo rapporto viene chiamato seno dell'angolo α ed indicato con la scrittura $\sin\alpha$.

Quindi per definizione abbiamo:

$$\sin\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$$

Considerando il triangolo rettangolo $\triangle OPA$ possiamo dire che :

$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}}$
--

Calcoliamo il seno di qualche angolo.

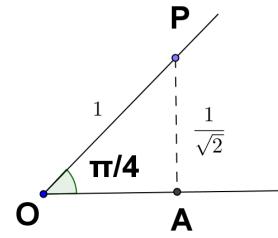
a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45°)

Per semplicità possiamo prendere $\overline{OP} = 1$.

Poiché il triangolo $\triangle OPA$ in questo caso è metà di un quadrato avremo $\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\overline{OP} = \overline{AP} \cdot \sqrt{2}$).

Quindi

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

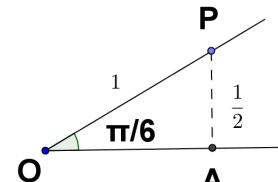


b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (30°)

Prendiamo sempre $\overline{OP} = 1$. Poiché $\triangle OPA$ risulta la metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{AP} = \frac{1}{2}$ ($\overline{OP} = 2 \cdot \overline{AP}$).

Quindi

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$$

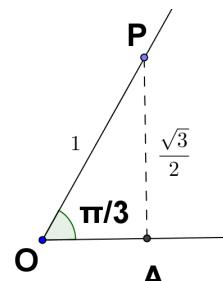


c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (60°)

Se $\overline{OP} = 1$, poiché $\triangle OPA$ è la metà di un triangolo equilatero in cui \overline{AP} è l'altezza, avremo $\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Quindi

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



Nota

In questi esempi abbiamo considerato angoli "particolari" nel senso che nel triangolo $\triangle OPA$ siamo riusciti a determinare \overline{AP} in funzione di \overline{OP} sfruttando **proprietà geometriche**.

In generale per calcolare il seno di un angolo occorre fare una costruzione precisa del triangolo $\triangle OPA$ e misurare \overline{AP} e \overline{OP} .

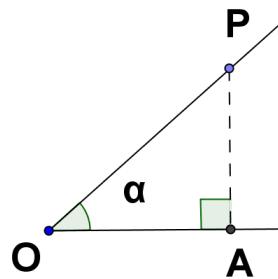
Noi non dovremo comunque fare queste misurazioni perché il valore del seno di un qualsiasi angolo può essere ricavato da delle "tavole" o, ancora più semplicemente, utilizzando la **calcolatrice**.

Basterà indicare la misura dell'angolo (attenzione all'unità di misura utilizzata : DEG sta per gradi e RAD per radianti) e poi premere il tasto SIN (o viceversa a seconda del tipo di calcolatrice).

Per esempio: $\sin 31^\circ = 0,5150\dots$

Naturalmente anche con la calcolatrice ritroveremo per esempio che $\sin 30^\circ = 0,5$ ecc.

II) Consideriamo il rapporto $\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$



Anche questo rapporto risulta minore di 1 ed è indipendente dalla scelta del punto P (vedi motivazione data in I)). Questo rapporto viene chiamato coseno dell'angolo α e indicato con la scrittura $\cos \alpha$.

Quindi abbiamo

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \quad \text{def}$$

e considerando il triangolo rettangolo $\triangle OPA$ possiamo dire

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa}}}$$

Proviamo a calcolare il coseno di $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Se prendiamo $\overline{OP} = 1$ con le stesse considerazioni fatte per il seno che $\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

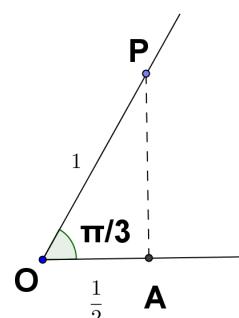
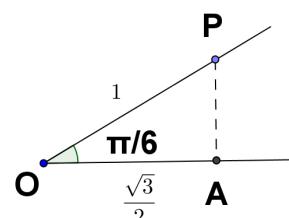
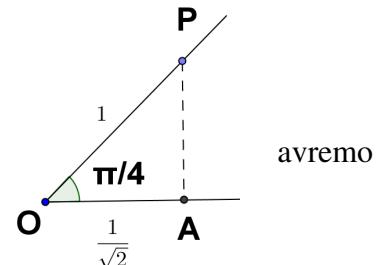
Se $\overline{OP} = 1$ considerando $\triangle OPA$ come metà di un triangolo equilatero avremo $\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Se $\overline{OP} = 1$ avremo $\overline{OA} = \frac{1}{2}$ e quindi

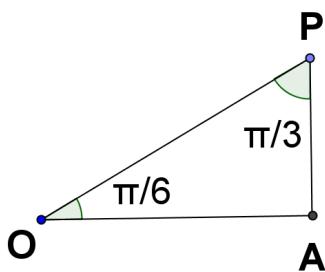
$$\boxed{\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$



Osservazione

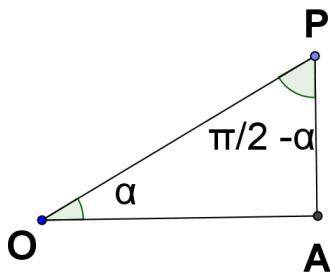
Osserviamo che $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$ e $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6}$.

Questo dipende chiaramente dal fatto che $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ sono angoli complementari e che quindi il ruolo di cateto adiacente e opposto si scambiano portando ad uno scambio dei valori del seno e del coseno.



$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} ; \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$$

Questo vale naturalmente per tutte le coppie di angoli complementari:



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{aligned}$$

E' chiaro che vale anche $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Proprio da questa ultima relazione deriva la denominazione di **coseno** che significa

complementi sinus

cioè seno dell'angolo complementare.

Nota

Per calcolare il coseno di angoli per i quali non si possono utilizzare proprietà geometriche per determinare \overline{OA} in funzione di \overline{OP} valgono le stesse considerazioni fatte per il seno e quindi utilizzeremo la calcolatrice.

Per esempio: $\cos 31^\circ = 0,8571\dots$

III) Consideriamo infine il rapporto $\frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$

Questo rapporto, a differenza dei precedenti, può risultare anche un numero molto grande o molto piccolo in relazione all'angolo α considerato ed è indipendente dalla scelta del punto P per le stesse motivazioni date in I) e II).

Questo rapporto viene chiamato tangente dell'angolo α e indicato con la scrittura $\tan \alpha$, cioè si ha

$$\tan \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}$$

e considerando il triangolo rettangolo $\triangle OPA$ possiamo scrivere

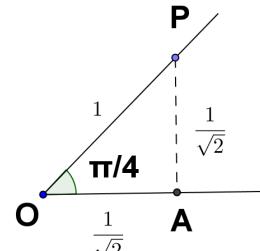
$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{cateto adiacente ad } \alpha}}$$

$$\text{Nota: } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{cateto adiacente ad } \alpha} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \tan \alpha$$

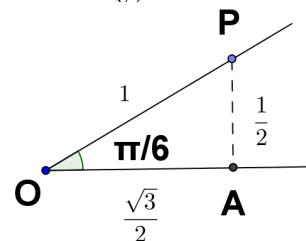
Esempi

Calcoliamo la tangente di $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$.

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$

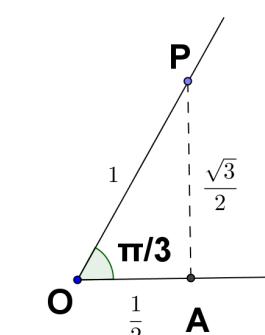


Se $\overline{OP} = 1$ $\overline{PA} = \overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1$



b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Se $\overline{OP} = 1$ $\overline{PA} = \frac{1}{2}$, $\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Se $\overline{OP} = 1$ $\overline{PA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{OA} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

In generale, per calcolare la tangente di un angolo α , per le stesse considerazioni svolte in I) e II) useremo la calcolatrice.

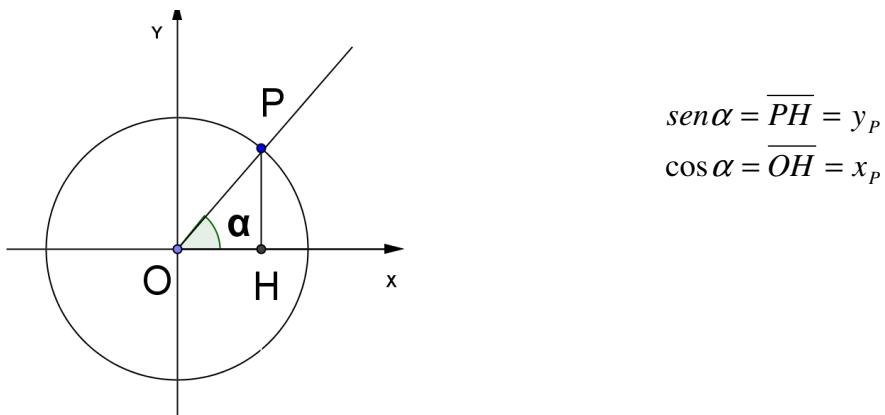
Estensione della definizione di seno, coseno e tangente

Osserviamo che se nel triangolo $\triangle OAP$ l'ipotenusa $\overline{OP} = 1$ abbiamo



Questo suggerisce un metodo per estendere la definizione di seno e coseno anche per angoli $\alpha \geq 90^\circ$.

Riportiamo l'angolo α sulla circonferenza goniometrica e poiché $\overline{OP} = 1$ avremo:



Diamo allora la seguente definizione di seno e coseno di α :

$$\begin{aligned} \text{sen}\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} y_p \\ \cos\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} x_p \end{aligned}$$

dove P è il punto associato all'angolo orientato α sulla circonferenza goniometrica.

Osserviamo che con questa definizione i valori del seno e del coseno di un angolo possono essere anche negativi, ma che comunque sono numeri compresi tra -1 e 1.

Vediamo meglio come variano i valori di $\text{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

Variazione del seno di un angolo

$$\alpha = 0 \rightarrow \sin \alpha = 0$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \alpha = 1$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

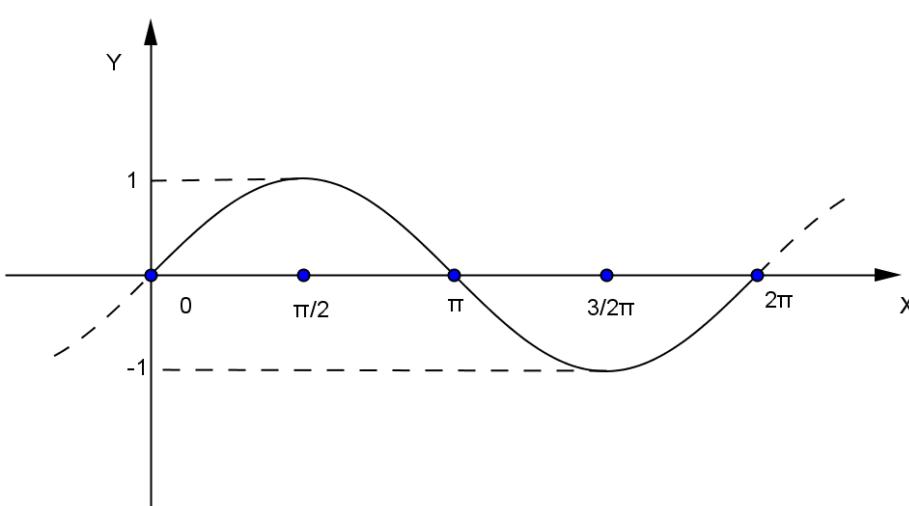
$$\alpha = \pi \rightarrow \sin \alpha = 0$$

$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

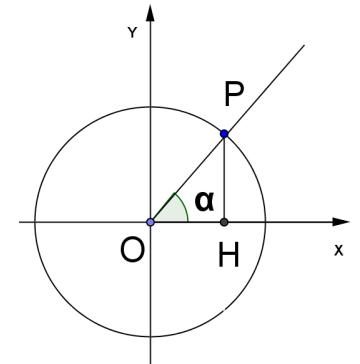
$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \sin \alpha = -1$$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

$$\alpha = 2\pi \rightarrow \sin \alpha = 0$$



$$\sin \alpha = y_P$$



Osserviamo che il grafico si ripete ogni 2π cioè la funzione $y = \sin x$ è periodica di periodo 2π .

Variazione del coseno di un angolo

$$\alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha = 1$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori diminuiscono da 1 a 0

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \alpha = 0$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori diminuiscono da 0 a -1

$$\alpha = \pi \rightarrow \cos \alpha = -1$$

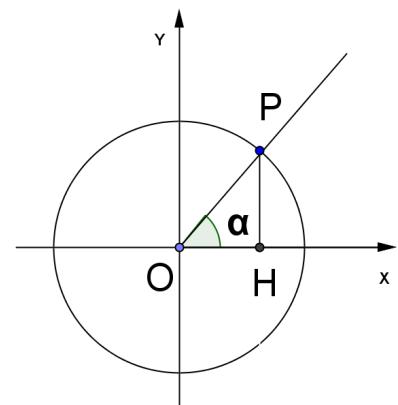
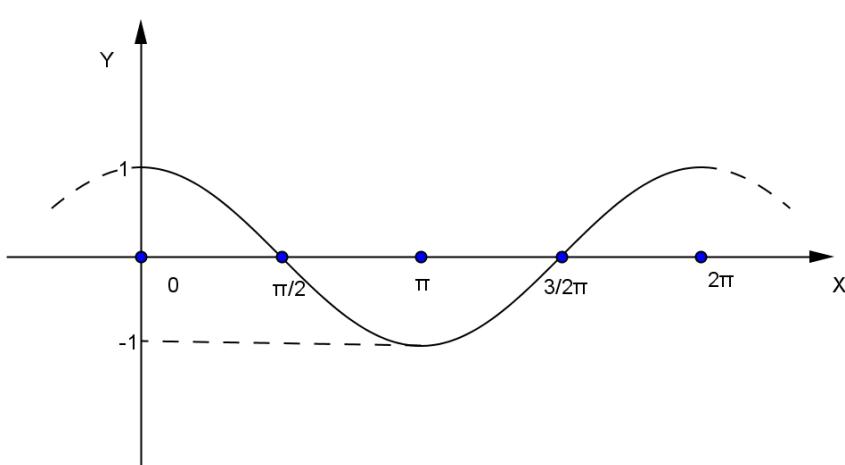
$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \rightarrow$ i valori aumentano da -1 a 0

$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \cos \alpha = 0$$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \rightarrow$ i valori aumentano da 0 a 1

$$\alpha = 2\pi \rightarrow \cos \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = x_P$$



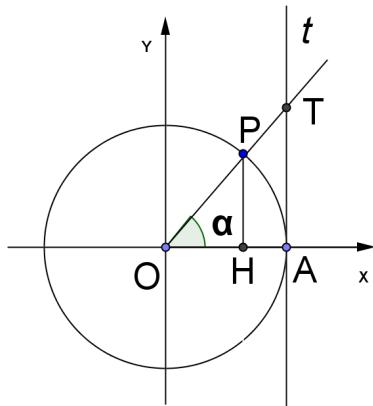
Osserviamo che anche la funzione $y = \cos x$ è periodica di periodo 2π .

Osservazione

Il grafico di $y = \cos x$ corrisponde a quello di $y = \sin x$ "traslato" verso sinistra di $\frac{\pi}{2}$: questo dipende dal fatto che, come vedremo, $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Tangente di un angolo orientato

Vediamo come possiamo estendere la definizione di tangente data per un angolo α acuto utilizzando la circonferenza goniometrica



Tracciamo la tangente t alla circonferenza goniometrica nel punto $A(1;0)$ e consideriamo il punto T di intersezione tra t e il prolungamento del 2° lato dell'angolo α .

Osservando i triangoli simili $\triangle OPH$ e $\triangle OAT$ potremo scrivere

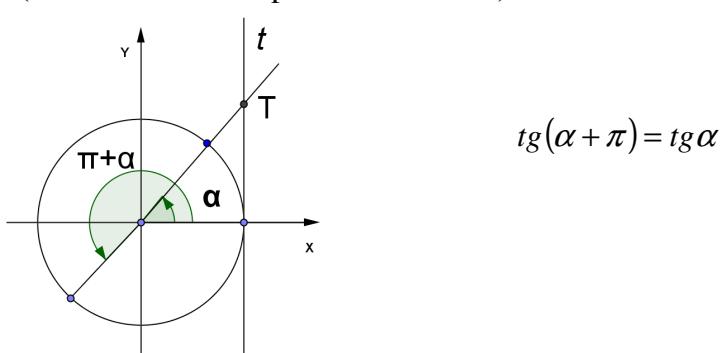
$$\tan \alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \overline{TA} = y_T$$

Definiamo allora in generale $\tan \alpha = y_T$

dove T è il punto di intersezione del prolungamento del 2° lato dell'angolo α con la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $A(1;0)$.

Note

- 1) Osserviamo che per $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ la tangente non è definita (il 2° lato dell'angolo non incontra la tangente t).
- 2) Osserviamo che α e $\alpha + \pi$ avranno la stessa tangente in quanto sono associati allo stesso punto T : questo significa che, considerando la variazione della tangente, i valori si ripeteranno dopo un periodo di π (e non di 2π come per seno e coseno).



Funzioni goniometriche

Vediamo come risulta il grafico di $y = \tan x$.

$$\alpha = 0 \rightarrow \tan \alpha = 0$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ i valori della tangente aumentano e sono positivi

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ la tangente non è definita

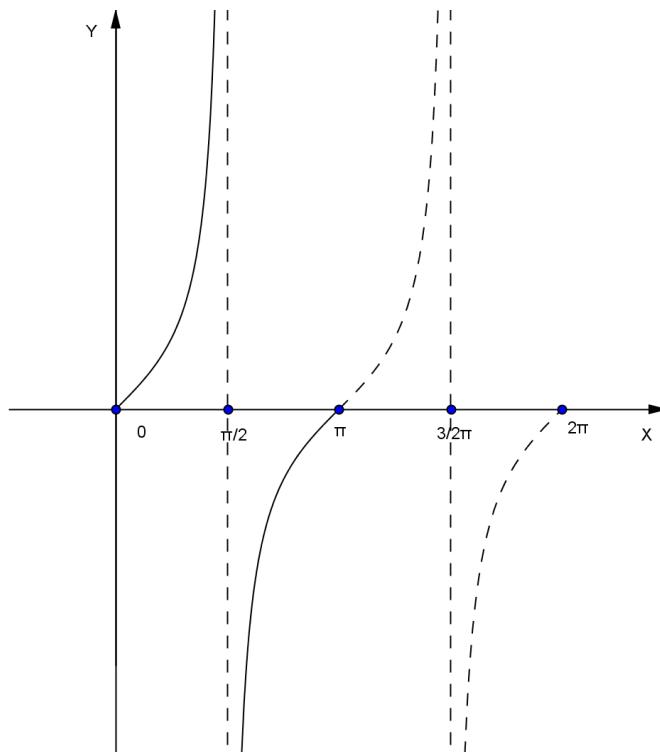
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow$ i valori della tangente sono negativi e aumentano

$$\alpha = \pi \rightarrow \tan \alpha = 0$$

$x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale del grafico di $y = \tan x$

($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono gli asintoti verticali del grafico)

Quindi la funzione $y = \tan x$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ed ha periodo π .



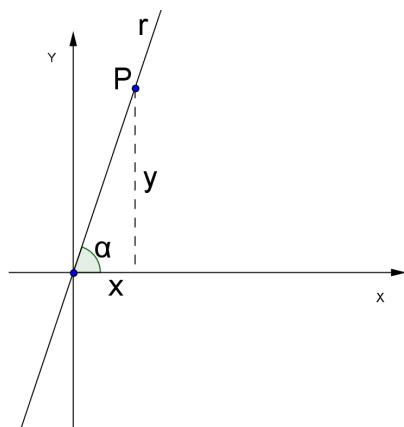
Tangente di un angolo e coefficiente angolare di una retta

Osserviamo che il **coefficiente angolare di una retta** corrisponde alla **tangente goniometrica** dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle x.

Consideriamo inizialmente una retta passante per l'origine (vedi figura): è chiaro che se

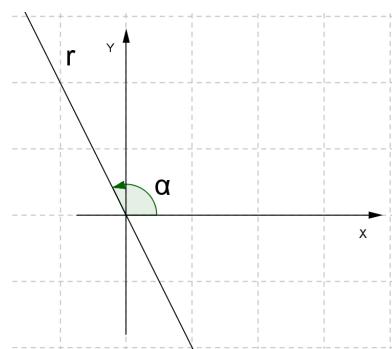
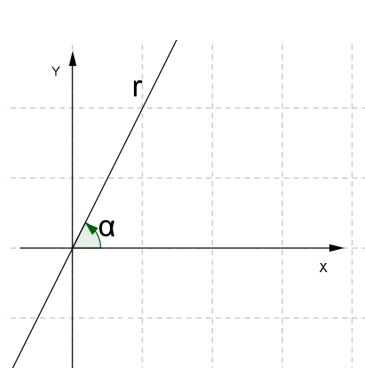
$$r : y = mx$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = m$$

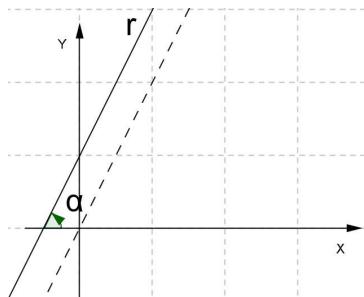


Se per esempio considero $y = 2x$ ho che $\operatorname{tg} \alpha = 2$ (α è acuto $\Rightarrow m > 0$); se invece per esempio considero $y = -2x$ ho che $\operatorname{tg} \alpha = -2$

(se α è ottuso $\Rightarrow m < 0$)



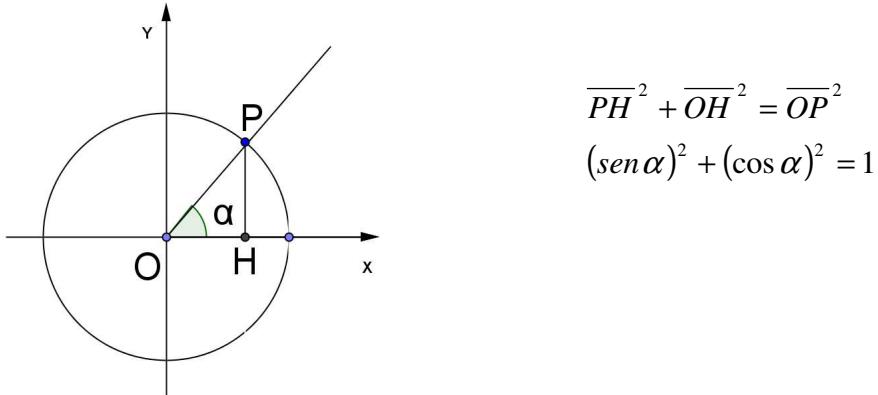
Se la retta non passa per l'origine il suo coefficiente angolare continua ad avere lo stesso significato.



$$y = 2x + 1 \quad \operatorname{tg} \alpha = 2$$

Relazioni fondamentali tra sena, cosa e tga

1. Osservando la circonferenza goniometrica ed applicando il teorema di Pitagora si ha subito che



Per convenzione $(\operatorname{sen} \alpha)^2$ si scrive $\operatorname{sen}^2 \alpha$ e quindi scriveremo

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 1^{\circ} \text{ relazione fondamentale}$$

2. Inoltre, come abbiamo già osservato:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad 2^{\circ} \text{ relazione fondamentale}$$

Utilizzando queste relazioni è possibile, conoscendo una funzione goniometrica dell'angolo α , ricavare le altre due supponendo però di sapere in quale "quadrante" si trova l'angolo.

Esempi

1) Se $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determinare $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$.

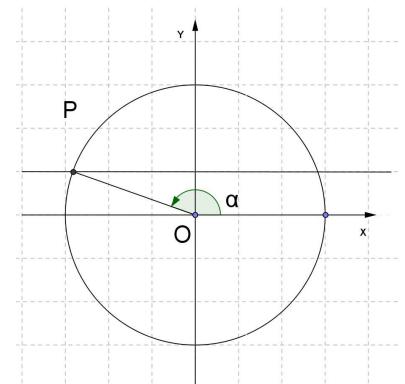
Osserviamo che per individuare graficamente l'angolo α possiamo tracciare la retta $y = \frac{1}{3}$: questa individua sulla circonferenza goniometrica due punti e noi dovremo considerare quello del 2° quadrante poiché sappiamo che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Quindi dalla 1° relazione avremo:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \quad \text{e nel nostro caso, essendo il coseno negativo,}$$

$$\text{abbiamo} \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

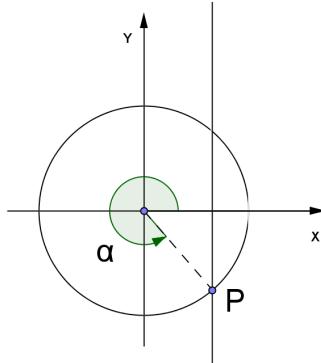
$$\text{Poi dalla 2° relazioneabbiamo} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$



Funzioni goniometriche

2) Se $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ determina $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$.

Possiamo intersecare la circonferenza goniometrica con la retta $x = \frac{3}{5}$ per individuare graficamente α .



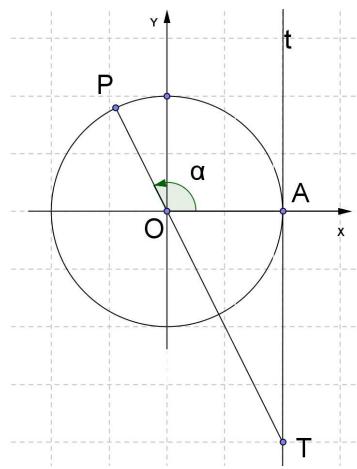
Osserviamo che il seno di α risulta negativo.

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

3) Se $\tan \alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ determina $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

Possiamo ricavare graficamente α considerando la tangente t e su di essa il punto T di ordinata -2 : tracciando la retta OT otteniamo i punti associati sulla circonferenza goniometrica



In questo caso dobbiamo risolvere un sistema dove utilizziamo insieme le relazioni fondamentali:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = -2 \cos \alpha \\ 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = +\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Nota: possiamo ricavare una relazione tra $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$, $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$ in modo da non essere costretti a risolvere il sistema precedente.

Infatti possiamo scrivere:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo diviso numeratore e denominatore per $\cos^2 \alpha$.

Quindi

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$$

Analogamente dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 \alpha$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{1} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$$

abbiamo

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$$

Per esempio nell'esercizio 3) avremo potuto procedere così:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{(-2)^2}{(-2)^2 + 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{(-2)^2 + 1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)\end{aligned}$$

Cosecante, secante e cotangente di un angolo

Vengono definite, oltre al seno, coseno e tangente di un angolo α , anche altre tre funzioni goniometriche:

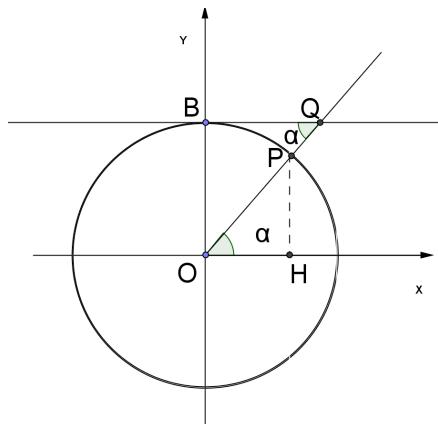
$$\text{cosecante} \rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$$

$$\text{secante} \rightarrow \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\text{cotangente} \rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$$

Nota: osserviamo che per $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ possiamo scrivere che $\cot g \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

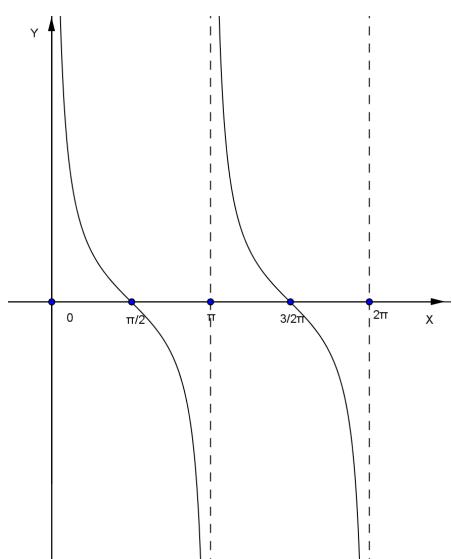
Possiamo ottenere la cotangente di α intersecando il secondo lato dell'angolo con la tangente della circonferenza goniometrica in $(0;1)$



Poiché i triangoli $\triangle OPH$ e $\triangle OBQ$ sono simili abbiamo:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{OH}{PH} = \frac{BQ}{OB} = BQ = x_Q \quad (\text{ascissa di } Q)$$

Il grafico di $y = \cot x$ risulta

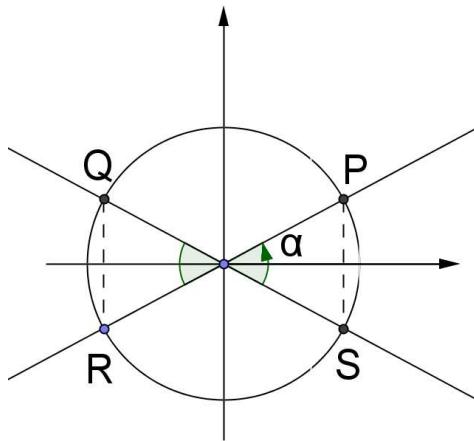


Infatti se $\alpha \rightarrow 0$ ma è positivo avremmo valori grandi valori di $\cot \alpha$ ($\cos \alpha \rightarrow 1$ e $\sin \alpha \rightarrow 0$) mentre se $\alpha \rightarrow \pi$ ed è minore di π avremo valori molto piccoli perché il coseno sarà negativo e il seno positivo ($\rightarrow 0$).

Angoli associati

Dalla conoscenza delle funzioni goniometriche di un angolo α si possono ricavare informazioni sulle funzioni goniometriche di altri angoli, detti “angoli associati” ad α .

Osserviamo la seguente figura:



Consideriamo i punti Q, R, S simmetrici di P (rispetto all’asse y, all’origine e all’asse x).

Se P è il punto della circonferenza goniometrica che rappresenta α si dimostra facilmente che:

$$Q \rightarrow \pi - \alpha$$

$$R \rightarrow \pi + \alpha$$

$$S \rightarrow 2\pi - \alpha \text{ (oppure } -\alpha)$$

Questi angoli si dicono “angoli associati” ad α .

Quindi, ricordando la definizione di seno (y) e coseno(x), avremo:

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha & \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

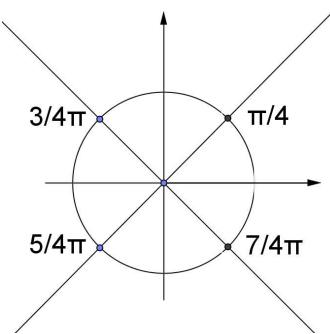
Di conseguenza

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

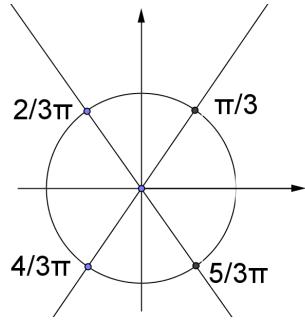
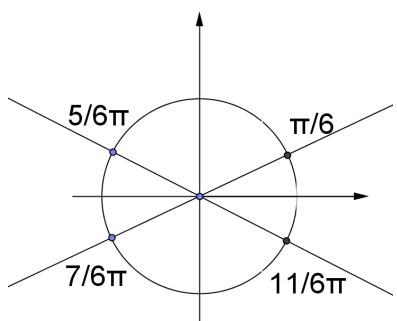
$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

Consideriamo per esempio gli angoli associati a $\frac{\pi}{4}$:



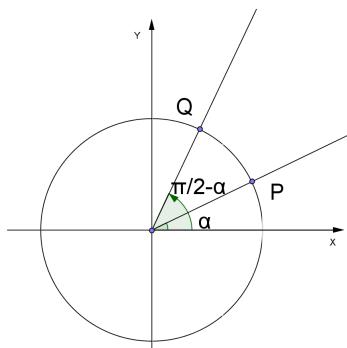
Abbiamo quindi $\sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ecc...

Vediamo gli angoli associati a $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$:



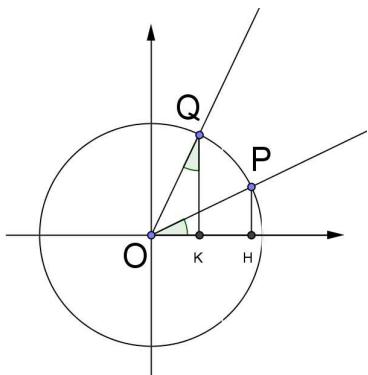
Esercizio: calcola: $\sin \frac{7}{6}\pi$, $\tan \frac{5}{3}\pi$ ecc...

Ci sono anche altri 2 angoli associati ad α : $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (angolo complementare di α) e $\frac{\pi}{2} + \alpha$.



$$P \rightarrow \alpha$$

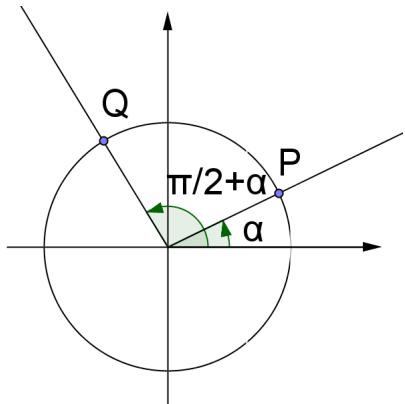
$$Q \rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha$$



I triangoli $\triangle OPH$ e $\triangle OQK$ sono uguali poiché sono triangoli rettangoli, $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$ e $\hat{HOP} = \alpha = \hat{OQK}$ quindi

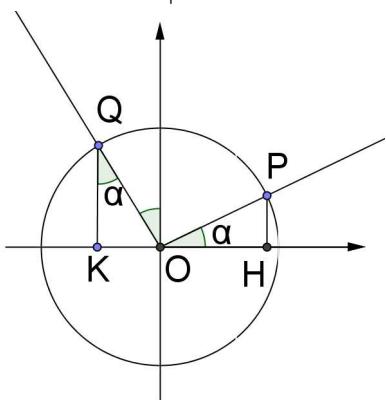
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{come avevamo già osservato})$$

Vediamo $\frac{\pi}{2} + \alpha$:



$$P \rightarrow \alpha$$

$$Q \rightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha$$



I triangoli $\triangle OPH$ e $\triangle OQK$ sono uguali
 $(\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$ triangoli rettangoli e
 $\angle POH = \alpha = \angle OQK)$ e quindi, considerando i segni:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = y_Q = x_P = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = x_Q = -y_P = -\sin \alpha \end{cases}$$

Di conseguenza:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot g \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot g \alpha$$

Funzioni sinusoidali

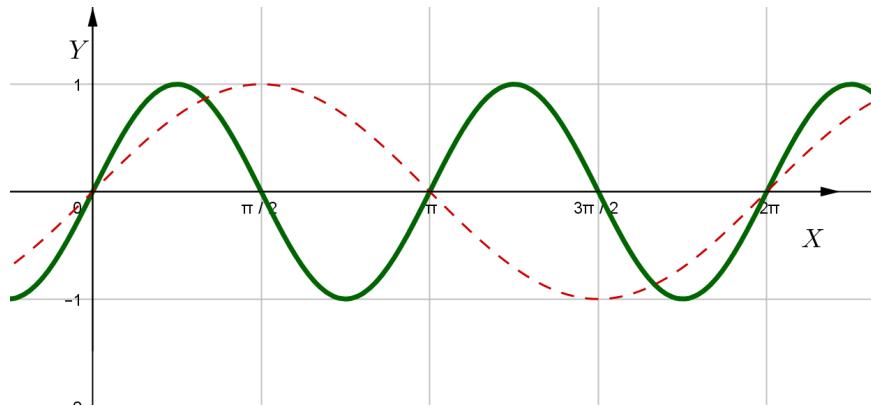
Abbiamo visto come risultano i grafici di $y = \sin x$ e di $y = \cos x$.

Ma come risultano i grafici di funzioni cosiddette sinusoidali del tipo $y = A \cdot \sin(kx + \varphi)$ o $y = A \cdot \cos(kx + \varphi)$?

Consideriamo prima alcuni esempi.

1) Come risulta il grafico di $y = \sin 2x$?

Osserviamo che se calcoliamo la funzione per $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $y = 1$; per $x = \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 0$ e in conclusione il grafico risulta il seguente:



Il periodo risulta quindi $T = \pi$.

Se tracciamo anche il grafico di $y = \sin x$ (tratteggiato) possiamo vedere la differenza di periodo.

In generale $y = \sin(kx)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$ poiché

$$\sin[k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)] = \sin(kx + 2\pi) = \sin(kx)$$

Nota

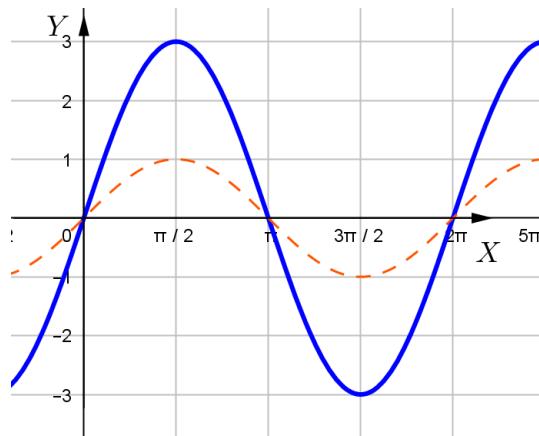
Quindi se sappiamo che il periodo T di una funzione sinusoidale è uguale a T , la sua equazione sarà del tipo

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

2) Come risulta il grafico di $y = 3 \cdot \sin x$?

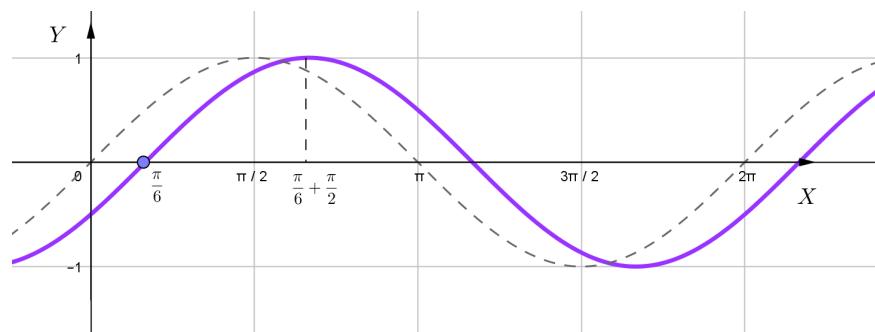
In questo caso il periodo è sempre $T = 2\pi$ ma l'ampiezza dell'oscillazione varia tra -3 e 3 e non più tra -1 e 1 (se tratteggiamo il grafico di $y = \sin x$ possiamo vedere la differenza).

Quindi in generale il grafico di $y = A \cdot \sin x$ oscilla tra $-A$ e A .



3) Come risulta il grafico di $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$?

Proviamo a calcolare qualche valore: per $x = \frac{\pi}{6}$ otteniamo $y = 0$, per $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ troviamo $y = 1$ e in conclusione il grafico risulta traslato verso destra di $\frac{\pi}{6}$.

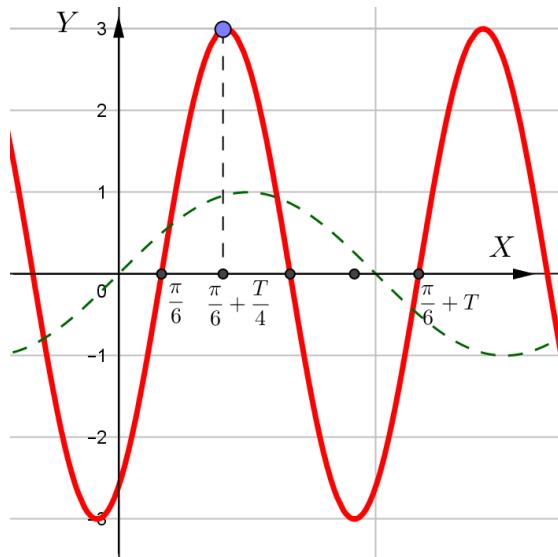


4) Come risulta il grafico di $y = 3 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{3})$?

Conviene scrivere l'equazione mettendo in evidenza il coefficiente di x :

$$y = 3 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Il periodo sarà $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, l'ampiezza dell'oscillazione sarà tra -3 e 3 e il grafico risulterà spostato verso destra di $\frac{\pi}{6}$ poiché $2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.



Nota: per ottenere il valore delle x corrispondente al primo massimo sommiamo $\frac{T}{4}$ (in questo caso $\frac{\pi}{4}$) a $\frac{\pi}{6}$ e così via per ottenere il valore in cui taglia di nuovo l'asse x ecc.

Conclusione

In generale quindi possiamo concludere che la funzione sinusoidale

$$y = A \cdot \sin(kx + \varphi)$$

oscilla tra $-A$ e A , ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$ ed è traslata del vettore $\left(-\frac{\varphi}{k}, 0\right)$.

ESERCIZI
FUNZIONI GONIOMETRICHE

- 1) Determina le rimanenti funzioni goniometriche dell'angolo α e rappresenta α sulla circonferenza:

a. $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

b. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

c. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5}$ $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

d. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

e. $\operatorname{tg} \alpha = -3$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

f. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{5}$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

g. $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

h. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

i. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

2) Calcola le seguenti espressioni:

a. $\cos \frac{7}{6}\pi + \operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi - \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi + \operatorname{tg} \frac{5}{6}\pi - \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi - \operatorname{tg} \frac{5}{3}\pi$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$

b. $\operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi + \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi - \cos \frac{11}{6}\pi + \operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi$ [0]

c. $\operatorname{tg} \frac{7}{6}\pi - \cos \frac{5}{3}\pi + \operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi + \operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi$ [0]

3) Sviluppa le seguenti espressioni:

a. $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \operatorname{sen}(-\alpha) - \cos(\pi + \alpha) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) + \cos(\pi - \alpha)$ $\left[-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right]$

b. $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cdot \cos(-\alpha) - \operatorname{sen}(\pi + \alpha) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ [1]

c. $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \operatorname{sen}(\pi - \alpha) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos(\pi + \alpha)$ $\left[-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right]$

d. $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$ [0]

e. $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos(2\pi - \alpha) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$ $[\operatorname{tg} \alpha]$

f. $\operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \cos(-\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha + \pi) + \operatorname{tg}(-\alpha)$ $[2 \cos \alpha]$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni:

a. $y = \operatorname{sen} 3x$

b. $y = 2 \cos x$

c. $y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}x \right)$

d. $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$

e. $y = 2 \cos(2x - \pi)$

SCHEMA DI VERIFICA
FUNZIONI GONIOMETRICHE

1) Ricava le rimanenti funzioni goniometriche di α , determina graficamente α nella circonferenza goniometrica e calcolane il valore approssimato usando la calcolatrice:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $[\cos \alpha = -\frac{2}{5}\sqrt{6}; \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}]$

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ $[\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}; \tan \alpha = \sqrt{15}]$

c) $\tan \alpha = -\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ $[\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}; \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}]$

2) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\cos \frac{7}{6}\pi + \tan \frac{2}{3}\pi - \sin \frac{3}{4}\pi + \tan \frac{5}{6}\pi - \sin \frac{4}{3}\pi + \cos \frac{7}{4}\pi + \tan \frac{4}{3}\pi$ $[-\frac{1}{\sqrt{3}}]$

b) $\cos(\pi - \alpha) + \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \sin(-\alpha) - \cos(\pi + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \tan(2\pi - \alpha)$ $[\tan \alpha - \cot \alpha]$

3) Verifica la seguente identità:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)\cos(-\alpha) - \sin(\pi + \alpha)\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cot(-\alpha)} = \frac{\tan(\pi - \alpha)}{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}$$

4) Disegna i grafici delle seguenti funzioni sinusoidali:

a) $y = 2 \cos(3x)$

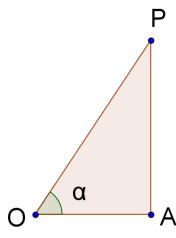
b) $y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 4 \sin(3x)$

d) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Triangolo rettangolo

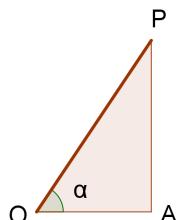
Dato il triangolo rettangolo $\triangle OPA$ sappiamo che:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} \\ \cos \alpha &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{cateto adiacente ad } \alpha} \end{aligned}$$

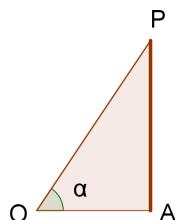
Possiamo perciò utilizzare $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ per determinare gli elementi del triangolo (lati ed angoli).

- a) Conoscendo l'ipotenusa \overline{OP} e l'angolo α (cioè $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$)



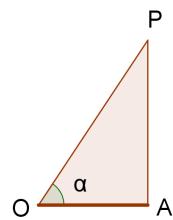
$$\begin{aligned} \text{cateto opposto ad } \alpha &= \overline{PA} = \text{ipotenusa} \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \text{cateto adiacente ad } \alpha &= \overline{OA} = \text{ipotenusa} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

- b) Conoscendo il cateto \overline{AP} e l'angolo opposto α



$$\begin{aligned} \text{ipotenusa} &= \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \text{cateto adiacente ad } \alpha &= \text{ipotenusa} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

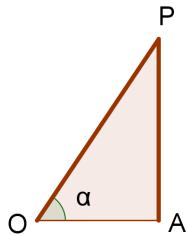
- c) Conoscendo il cateto \overline{OA} e l'angolo adiacente α



$$\begin{aligned} \text{ipotenusa} &= \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\cos \alpha} \\ \text{cateto opposto ad } \alpha &= \text{ipotenusa} \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Triangolo rettangolo

d) Conoscendo il cateto \overline{PA} e l'ipotenusa \overline{OP} posso trovare



$$\sin \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}}$$

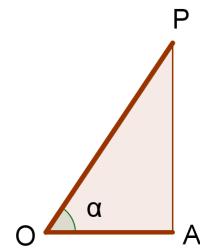
e quindi anche $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$
Dalla conoscenza di $\sin \alpha$ posso risalire all'angolo α (tasto di "inversione" della calcolatrice).

Per determinare \overline{OA} posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure $\cos \alpha$ poiché $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha$

e) Conoscendo il cateto \overline{OA} e l'ipotenusa \overline{OP} abbiamo

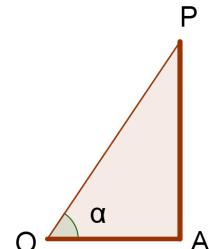
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \alpha$$

\overline{AP} con il teorema di Pitagora oppure $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \sin \alpha$



f) Conoscendo i due cateti \overline{PA} e \overline{OA} possiamo determinare

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \alpha$$



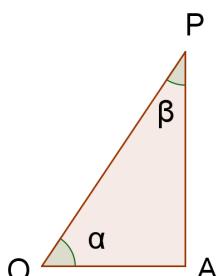
Possiamo determinare \overline{OP} applicando il teorema di Pitagora oppure con la relazione $\overline{OP} = \frac{\overline{PA}}{\sin \alpha}$

Nota: naturalmente in tutti questi esempi dalla conoscenza di α si può ricavare anche $\hat{OPA} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

In conclusione, dalla conoscenza di 2 elementi di un triangolo rettangolo, che però non siano due angoli, posso determinare tutti gli altri (si dice "risolvere" il triangolo).

Conoscere α equivale a conoscere $\sin \alpha$ o $\cos \alpha$ o $\tan \alpha$.

Osserviamo che si ha



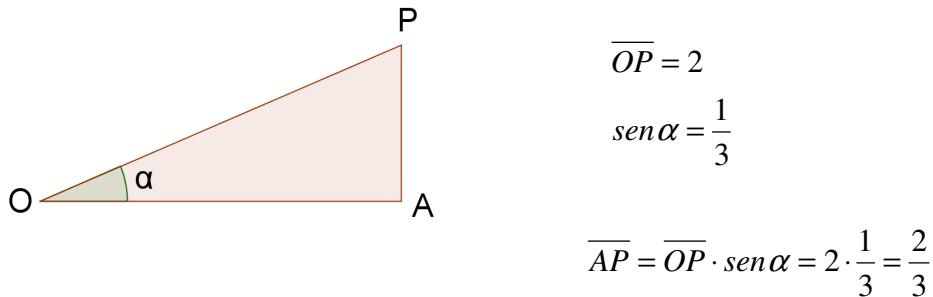
$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{cateto adiacente a } \beta}{\text{ipotenusa}} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{cateto opposto a } \beta}{\text{ipotenusa}} = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$$

Esempi

- a) Nel triangolo rettangolo $\triangle OPA$ sia l'ipotenusa $\overline{OP} = 2$ e $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ($\alpha = \hat{POA}$). Determinare gli altri elementi del triangolo.



Per determinare \overline{OA} posso anche utilizzare il teorema di Pitagora oppure ricavo

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Se $\beta = \hat{OPA} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ abbiamo

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

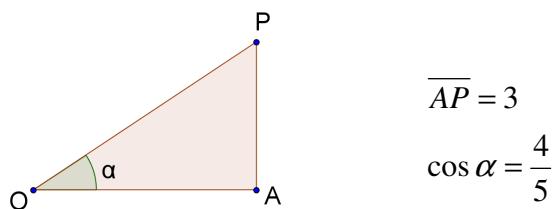
$$\cos \beta = \sin \alpha$$

Per avere un'idea della misura degli angoli α e β possiamo utilizzare la calcolatrice premendo, per esempio, il tasto SIN^{-1} che permette di risalire all'angolo che ha come valore del seno il numero indicato.

Prendendo $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ otteniamo $\alpha \cong 19,47^\circ$.

Infine $\beta = 90^\circ - \alpha \cong (70,53)^\circ$

b)



$$\text{Se } \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ abbiamo } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

Triangolo rettangolo

Quindi $\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{\frac{3}{5}} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$

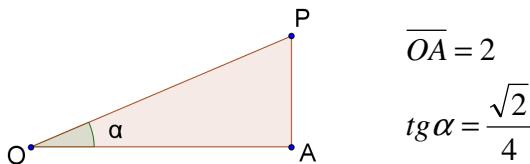
e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$ (oppure con il teorema di Pitagora)

Per ricavare α utilizzando per esempio il tasto \cos^{-1} della calcolatrice abbiamo

$$\cos^{-1} \frac{4}{5} \cong (36,86)^\circ$$

e quindi $\beta = \overset{\wedge}{OPA} = 90^\circ - \alpha \cong (53,14)^\circ$

c)



$$\overline{OA} = 2$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Se $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ posso ricavare $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

oppure ricordare che $\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$ e $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$

Si ottiene, in ogni caso, che $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ da cui

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OA}}{\cos \alpha} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{e } \overline{AP} = \overline{OP} \cdot \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizzando la calcolatrice $\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{4} \cong (19,47)^\circ$ e $\beta = 90^\circ - \alpha$

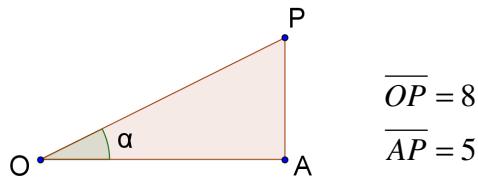
Nota: il problema poteva essere risolto anche così

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \tan \alpha \Rightarrow \overline{AP} = \overline{OA} \cdot \tan \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e \overline{OP} si può trovare con il teorema di Pitagora.

Triangolo rettangolo

d)

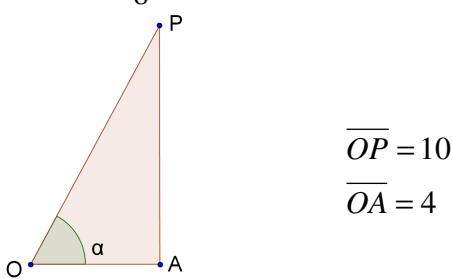


$$\overline{OP} = 8$$

$$\overline{AP} = 5$$

Penso determinare $\sin \alpha = \frac{5}{8}$ e con la calcolatrice $\alpha \approx (38,68)^\circ$ e per determinare \overline{OA} posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure calcolare $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39}$

e)



$$\overline{OP} = 10$$

$$\overline{OA} = 4$$

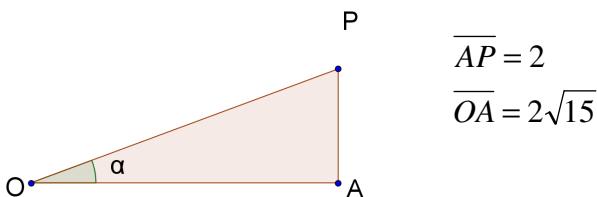
Determino $\cos \alpha = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (con la calcolatrice $\alpha \approx (66,42)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare \overline{AP} , basterà calcolare

$$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \sin \alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 2\sqrt{21}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ e avrò}$$

f)



$$\overline{AP} = 2$$

$$\overline{OA} = 2\sqrt{15}$$

Penso determinare $\tan \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ (con la calcolatrice $\alpha \approx (14,47)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare \overline{OP} basta ricavare $\sin \alpha$ (o $\cos \alpha$) da $\tan \alpha$. Risoluzione

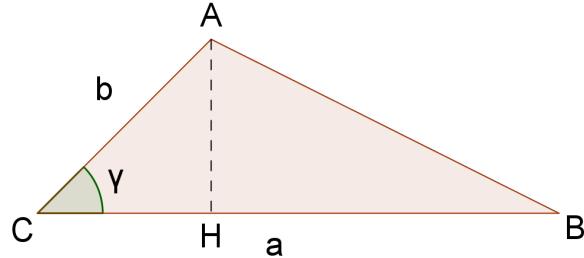
Per esempio

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + 1} = \frac{1}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

Area di un triangolo

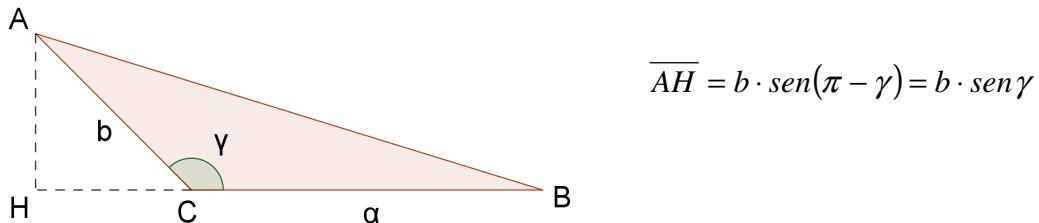
Supponiamo di conoscere due lati di un triangolo e l'angolo compreso: possiamo calcolare l'area?



Tracciamo l'altezza AH : $\overline{AH} = b \cdot \operatorname{sen} \gamma$

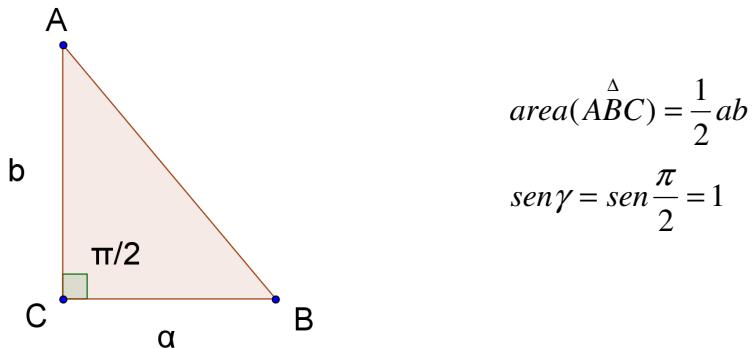
$$\text{e quindi area } (\triangle ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma.$$

Osserviamo che se anche γ fosse ottuso avremo:



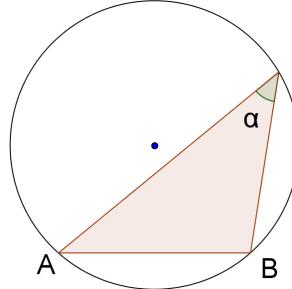
$$\text{e quindi ancora area } (\triangle ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma.$$

Se, come caso particolare, avessi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ il triangolo sarebbe rettangolo in C e infatti:

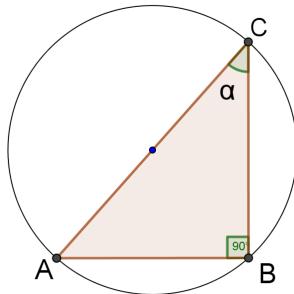


Lunghezza di una corda di una circonferenza

Consideriamo una corda AB in una circonferenza di raggio r : se conosciamo un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda possiamo trovare \overline{AB} ?



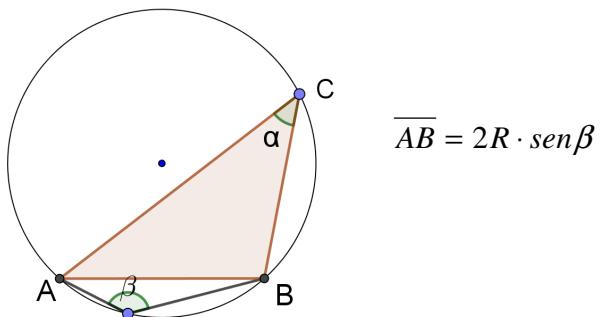
Sappiamo che tutti gli angoli che insistono su AB sono uguali: disegniamo allora quello che ha un lato passante per il centro della circonferenza.



Il triangolo $\triangle ABC$ è rettangolo in B e quindi, essendo $\overline{AC} = 2R$ abbiamo:

$$\overline{AB} = 2R \cdot \sin \alpha$$

Osserviamo che questa relazione vale anche considerando un angolo β come in figura: infatti $\beta = \pi - \alpha$ (α e β sono angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza) e quindi $\sin \beta = \sin \alpha$



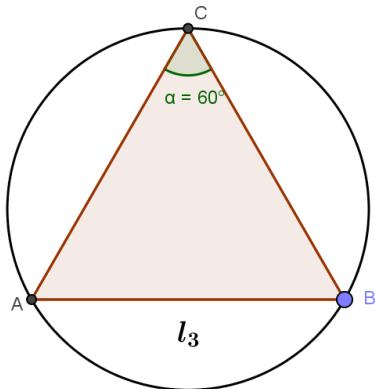
Quindi in generale quindi abbiamo il cosiddetto “**teorema della corda**”

$$\overline{AB} = 2R \cdot \sin(\text{angolo alla circonferenza che insiste sulla corda } AB)$$

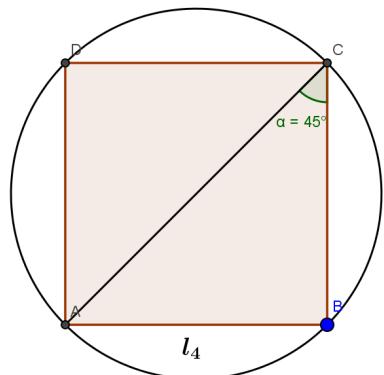
Triangolo rettangolo

NOTA

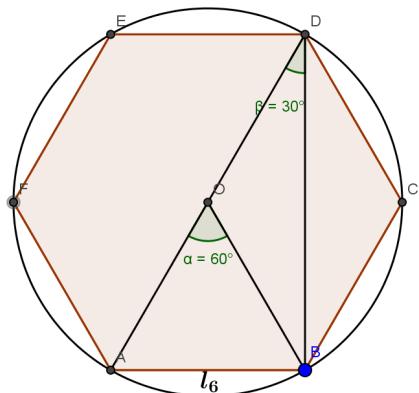
Utilizzando questo teorema possiamo ricavare facilmente il lato del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio r .



$$l_3 = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot r$$



$$l_4 = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot r$$

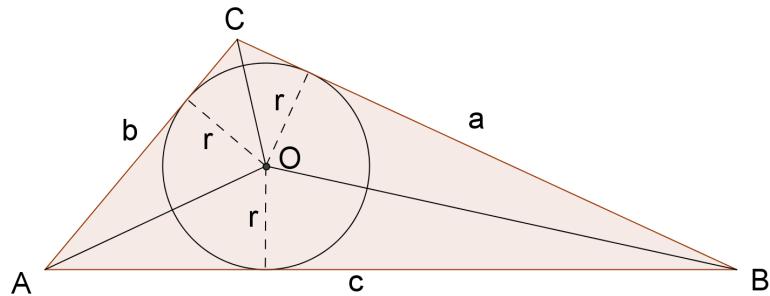


$$l_6 = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2r \cdot \frac{1}{2} = r$$

Circonferenza inscritta e circoscritta ad un triangolo

Dato un triangolo $\triangle ABC$ come possiamo calcolare il raggio R della circonferenza circoscritta e il raggio r della circonferenza inscritta?

Cominciamo con la circonferenza inscritta.



L'area del triangolo $\triangle ABC$ è data dalla somma delle aree dei triangoli aventi base a , b , c e altezza r e quindi:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r \quad \text{ma } \frac{a+b+c}{2} = p(\text{semiperimetro})$$

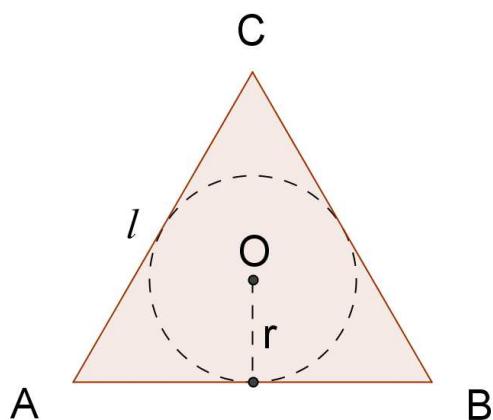
$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$\text{e quindi } S = r \cdot p \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

Quindi conoscendo l'area S e il semiperimetro possiamo calcolare il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo.

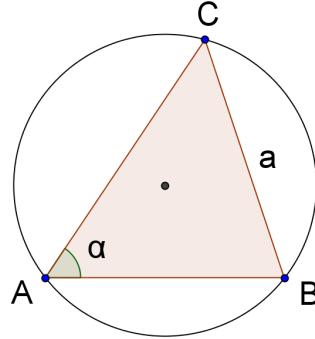
Esempio: in un triangolo equilatero $\triangle ABC$ di lato l abbiamo:

$$r = \left(\frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3} \right) \cdot \frac{1}{\left(3 \frac{l}{2} \right)} = \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2}\sqrt{3} \right)$$



Triangolo rettangolo

Consideriamo ora la circonferenza circoscritta al triangolo



Ricordando che la corda $\overline{BC} = \text{diametro} \cdot \sin\alpha$

$$a = 2R \cdot \sin\alpha \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin\alpha} \quad (1)$$

Naturalmente è anche $R = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$

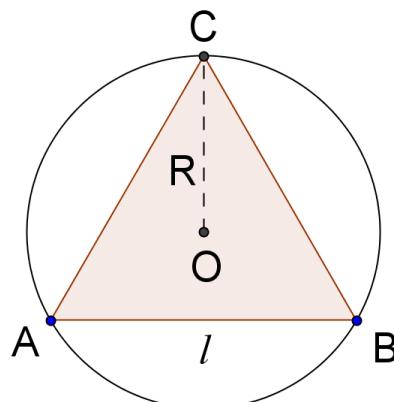
Possiamo anche scrivere, moltiplicando nella (1) per $b \cdot c$ numeratore e denominatore, e ricordando che $\frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \text{area}(\triangle ABC) = S$

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2\sin\alpha \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

Quindi conoscendo i lati del triangolo e l'area posso determinare R.

Esempio: in un triangolo equilatero $\triangle ABC$ di lato l abbiamo:

$$R = \frac{l \cdot l \cdot l}{4 \cdot \frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \left(= \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3} \right)$$



PROBLEMI
TRIANGOLO RETTANGOLO

1. In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{AB} = 2a$ e $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = \hat{ABC}$). Determina perimetro e area del triangolo.

$$[2p = \frac{9}{2}a ; A = \frac{3}{4}a^2]$$

2. In un triangolo isoscele ABC di base AB , il lato obliquo $\overline{CB} = l$ e $\tan \alpha = 2$ ($\alpha = \hat{ABC}$). Determina perimetro e area del triangolo ABC. Determina infine la misura dell'altezza AK relativa al lato obliquo.

$$[2p = \frac{2}{5}\sqrt{5}l + 2l ; A = \frac{2}{5}l^2 ; \overline{AK} = \frac{4}{5}l]$$

3. In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo e la base minore misurano a e $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ dove α è uno degli angoli adiacenti alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = \frac{9}{2}a ; A = \frac{5\sqrt{15}}{16}a^2]$$

4. In un trapezio rettangolo ABCD la diagonale minore AC misura a , forma un angolo retto con il lato obliquo BC e $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ dove α è l'angolo acuto adiacente alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = \frac{22}{5}a ; A = \frac{68}{75}a^2]$$

5. In un triangolo isoscele ABC di base AB il lato obliquo misura $2a$ e $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dove α è l'angolo alla base. Determina la misura delle altezze CH e AK del triangolo.

$$[\overline{CH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}a ; \overline{AK} = \frac{8}{5}a]$$

6. In un trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 20 e la base minore DC misura 10. Sapendo che $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, dove α è l'angolo ottuso adiacente alla base minore, determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = 68 ; A = 256]$$

Triangolo rettangolo

7. In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ si prolunga il diametro dalla parte di B e si considera un punto P tale che, tracciata da P la tangente t alla semicirconferenza e detto T il punto di tangenza, si abbia $\sin(\hat{APT}) = \frac{3}{5}$. Tracciata la tangente t' alla semicirconferenza in A e detto Q il punto di intersezione tra t e t', determina perimetro e area del triangolo $\triangle APQ$.

$$[2p = 8r ; A = \frac{8}{3}r^2]$$

8. Dato un trapezio rettangolo ABCD avente l'altezza $\overline{AD} = a$, $\sin(\hat{BAC}) = \frac{3}{5}$ (AB base maggiore, AC diagonale minore), $\cos(\hat{ABC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determina perimetro e area di ABCD.

$$[2p = \frac{17}{3}a + \sqrt{3}a ; A = \frac{8+3\sqrt{3}}{6}a^2]$$

9. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 2a$ si consideri il punto medio O di BC e si tracci la perpendicolare a BC per O, indicando con M l'intersezione di questa con il cateto AB. Sapendo che $\tan(\hat{ABC}) = \frac{3}{4}$, determinare il perimetro del quadrilatero ACOM.

$$[2p = \frac{33}{10}a]$$

10. In un trapezio rettangolo ABCD, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Sapendo che $\overline{AD} = a$ e che $\tan(\hat{ABC}) = \frac{3}{4}$, determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = \frac{11}{2}a ; A = \frac{17}{12}a^2]$$

11. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura a e l'angolo che essa forma con uno dei due cateti ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Calcola perimetro e area del triangolo.

$$[2p = 5a ; A = \frac{25}{24}a^2]$$

Triangolo rettangolo

12. In un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB , il raggio della circonferenza inscritta misura r e $\cos(\hat{A}BC) = \frac{1}{3}$. Determina i lati del triangolo.

$$[\overline{AB} = 2\sqrt{2}r; \overline{BC} = 3\sqrt{2}r]$$

13. In un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB , $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ e $\cos(\hat{A}BC) = \frac{1}{3}$. Determina perimetro e area del triangolo e l'altezza AK relativa a BC .

$$[2p = \frac{8}{3}a; A = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2; \overline{AK} = \frac{4}{9}\sqrt{2}a]$$

14. In un trapezio scaleno $ABCD$ la base minore DC è uguale ad uno dei due lati obliqui e si ha $\overline{DC} = \overline{AD} = l$. Sapendo che $\hat{D}AB = \frac{\pi}{4}$ e che $\tan(\hat{ABC}) = 2$, determina i lati del trapezio e le funzioni goniometriche di \hat{C} e \hat{D} .

$$[\overline{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2} + 4}{4}\right)l; \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}l; \hat{C} = \pi - \alpha \dots; \hat{D} = \frac{3}{4}\pi]$$

15. Un trapezio isoscele di base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di raggio r e, indicato con α uno degli angoli alla base, si ha $\sin\alpha = \frac{24}{25}$. Determina i lati del trapezio.

$$[\overline{AB} = \frac{8}{3}r; \overline{DC} = \frac{3}{2}r; \overline{CB} = \overline{AD} = \frac{25}{12}r]$$

16. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 3a$ si ha $\cot(\hat{ABC}) = 2$. Considera P su BC tale che $\overline{BP} = a$ e traccia da P la perpendicolare all'ipotenusa che incontra il cateto AB in Q . Determina l'area del quadrilatero $AQPC$.

$$\left[\frac{31}{20}a^2 \right]$$

SCHEMA DI VERIFICA
Funzioni goniometriche e triangolo rettangolo

1) Determina graficamente α nella circonferenza goniometrica, ricava le rimanenti funzioni goniometriche di α e infine calcola il valore approssimato di α con la calcolatrice:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $\tan \alpha = 4$ $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

2) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\sin \frac{2}{3}\pi + \tan \frac{2}{3}\pi + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos \frac{7}{6}\pi + \sin(-\frac{\pi}{4}) + \cos \frac{7}{4}\pi + \tan \frac{4}{3}\pi$

b) $\sin(\pi - \alpha) - \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \sin(\pi + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \cos(2\pi - \alpha) + \cot g(\pi + \alpha)$

3) Disegna il grafico di

a) $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $y = \frac{3}{2}\cos(2x)$

Problema 1

Considera un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ e sia $\hat{tg}(ABC) = 3$. Determina perimetro e area del triangolo.

$$[2p = 2 \cdot \sqrt{10}a + 2a; \quad A = 3a^2]$$

Problema 2

In un trapezio isoscele ABCD l'altezza è uguale alla base minore $\overline{CD} = l$ e $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dove α è l'angolo adiacente alla base minore. Determina il perimetro e l'area del trapezio.

$$[2p = 6l + 2 \cdot \sqrt{5}l; \quad A = 3l^2]$$

Formule goniometriche

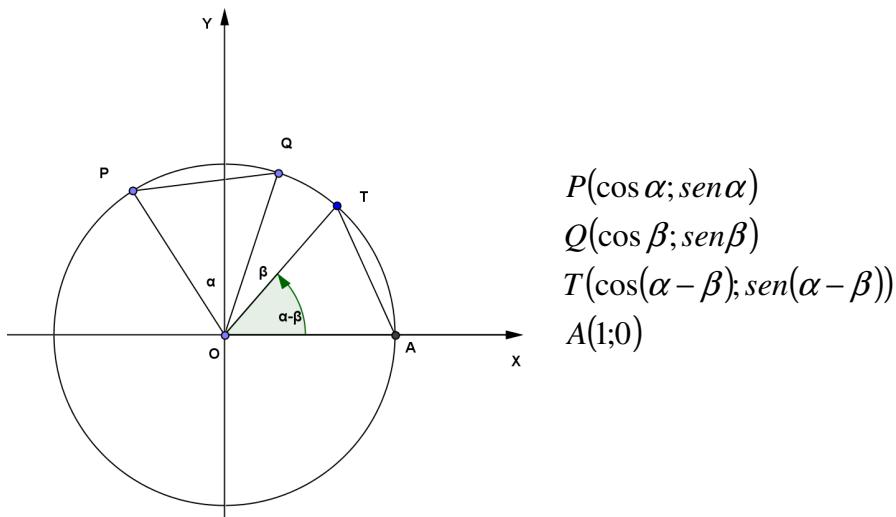
Come possiamo calcolare $\sin(\alpha + \beta)$?

E' chiaro che non può risultare $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$: se infatti fosse così e per esempio $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ avremo $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$!

Dobbiamo ricavare delle relazioni che ci permetteranno di calcolare il seno, il coseno e la tangente di una somma o di una differenza di angoli.

Formule di addizione e sottrazione

1) Cominciamo con questa osservazione: se riportiamo su una circonferenza goniometrica due angoli α e β , per esempio con $\alpha > \beta$ come in figura, possiamo considerare l'angolo $\alpha - \beta$ e riportarlo con il primo lato sul semiasse positivo delle x. Avremo quindi:



Poiché $\hat{AOT} = \hat{QOP} = \alpha - \beta$ allora avremo anche $\overline{PQ} = \overline{AT}$ e possiamo scrivere:

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

e sviluppandoabbiamo:

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

Quindi poiché: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, $\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1$
avremo: $1 + 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = 1 + 1 - 2 \cos(\alpha - \beta)$

e quindi

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

Esempio

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} + 1)$$

Da questa formula possiamo anche ricavare $\cos(\alpha + \beta)$: basta infatti scrivere $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$.

Quindi avremo, poiché $\cos(-\beta) = \cos \beta$ mentre $\sin(-\beta) = -\sin \beta$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

e quindi

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Esempio

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1)$$

2) Come si possono ricavare $\sin(\alpha - \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$?

Ricordando che il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Allora

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos \alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Esempio

$$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1)$$

3) E come si calcola $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ e $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$?

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

Se dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ otteniamo:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}}$$

Allora $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}[\alpha - (-\beta)] = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(-\beta)}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}}$$

Esempio

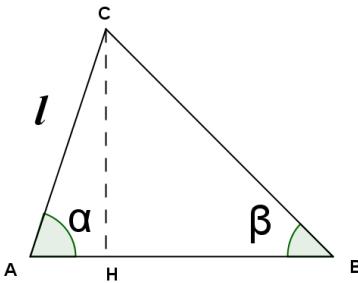
$$\operatorname{tg}(15^\circ) = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ}{1 + \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\operatorname{tg}(75^\circ) = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}30^\circ}{1 - \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

Applicazioni delle formule di addizione

Esempio 1

Dato il triangolo $\triangle ABC$, acutangolo, sappiamo che $\sin \hat{A} = \frac{4}{5}$ e $\tan \hat{B} = 1$. Se $\overline{AC} = l$ possiamo risolvere il triangolo, cioè determinare tutti gli altri suoi elementi?



$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad (\alpha \text{ è acuto})$$

$$\tan \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\overline{AH} = l \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}l$$

$$\overline{CH} = l \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}l$$

$$\overline{HB} = \overline{CH} = \frac{4}{5}l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{7}{5}l$$

$$\overline{CB} = \overline{CH} \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{5}\sqrt{2}l$$

$$\hat{C} = \pi - (\alpha + \beta) \quad \text{e}$$

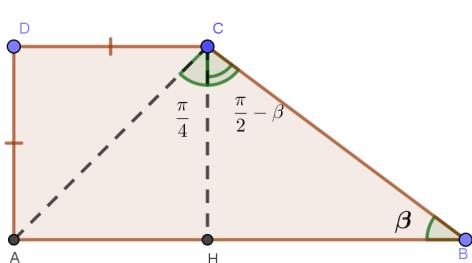
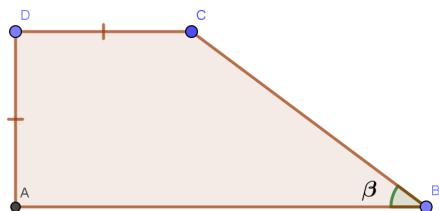
$$\sin \hat{C} = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

Esempio 2

Dato il trapezio rettangolo ABCD in cui

$$\overline{AD} = \overline{CD} = l, \quad \sin(\hat{ABC}) = \frac{3}{5}, \text{ come si possono}$$

calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo \hat{ACB} ?



Osserviamo che $\hat{ACH} = \frac{\pi}{4}$ e che $\hat{BCH} = \frac{\pi}{2} - \beta$ e quindi $\hat{ACB} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{3}{4}\pi - \beta$ e utilizzando le formule si possono trovare seno, coseno e tangente.

$$\text{Per esempio: } \sin\left(\frac{3}{4}\pi - \beta\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin\beta = \dots$$

Esempio 3

Vediamo come le funzioni del tipo $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ possano essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $y = A \cdot \sin(x + \varphi)$ utilizzando le formule di addizione.

Consideriamo per esempio $y = \sin x + \cos x$

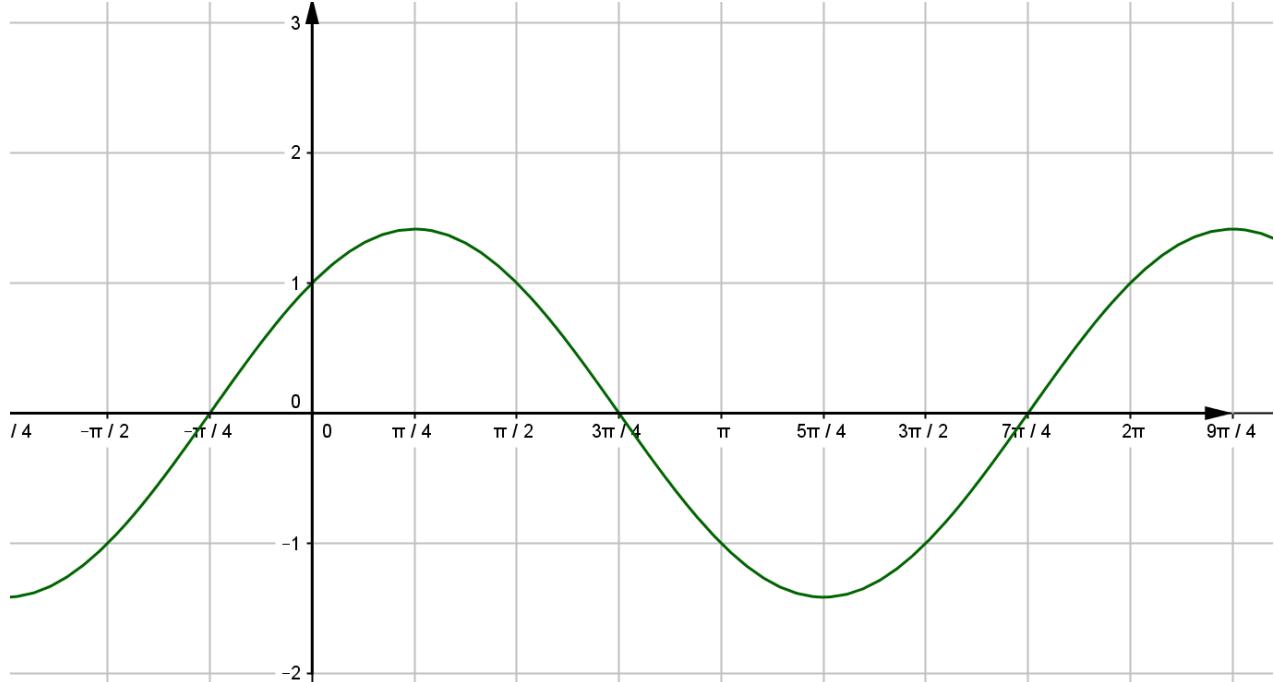
Sviluppiamo $A \cdot \sin(x + \varphi)$ e imponiamo che risulti uguale a $\sin x + \cos x$.

$$A \cdot (\sin x \cdot \cos \varphi + \cos x \cdot \sin \varphi) = \sin x + \cos x \rightarrow A \cdot \cos \varphi \cdot \sin x + A \cdot \sin \varphi \cdot \cos x = \sin x + \cos x \rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos \varphi = 1 \\ A \cdot \sin \varphi = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{A \cdot \sin \varphi}{A \cdot \cos \varphi} = 1 \rightarrow \tan \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \\ A^2 \cdot \sin^2 \varphi + A^2 \cdot \cos^2 \varphi = 2 \rightarrow A^2 = 2 \rightarrow A = \sqrt{2} \end{cases}$$

Quindi $y = \sin x + \cos x$ corrisponde a $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ come si può verificare con Geogebra:

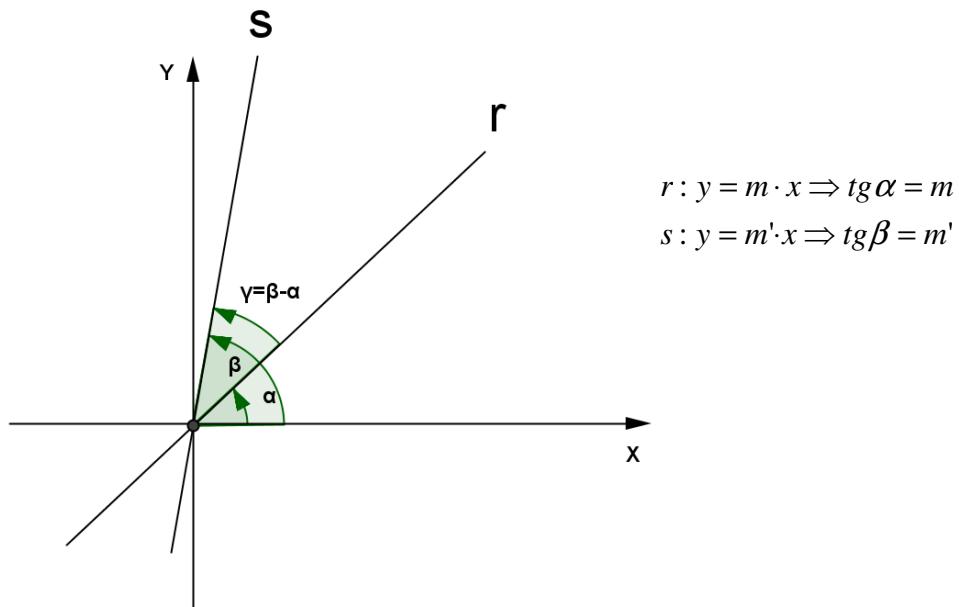
digitando nella barra di inserimento $y = \sin x + \cos x$ abbiamo infatti il seguente grafico:



Angolo formato tra due rette

Ricordando che il coefficiente angolare di una retta, nel piano cartesiano, è uguale alla tangente dell'angolo α formato dalla retta con il semiasse positivo delle x, possiamo ricavare l'angolo (o la tangente dell'angolo) formato da due rette di equazione assegnata?

Per semplicità disegniamo due rette per l'origine con coefficienti angolari positivi.

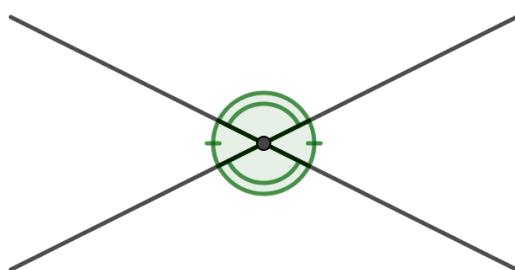


L'angolo acuto γ formato da r e s avrà tangente

$$\tan \gamma = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{m' - m}{1 + m \cdot m'}$$

Nota

In generale osserviamo che due rette (non perpendicolari) formano una coppia di angoli acuti (congruenti perché opposti al vertice) e una coppia di angoli ottusi congruenti e ricordando che la tangente di un angolo acuto è positiva mentre la tangente goniometrica di un angolo ottuso è negativa se vogliamo la tangente goniometrica dell'angolo acuto, che dovrà risultare positiva, dovremo applicare la formula in modo da avere un risultato positivo.



Esempio 1

Considera le rette di equazione :

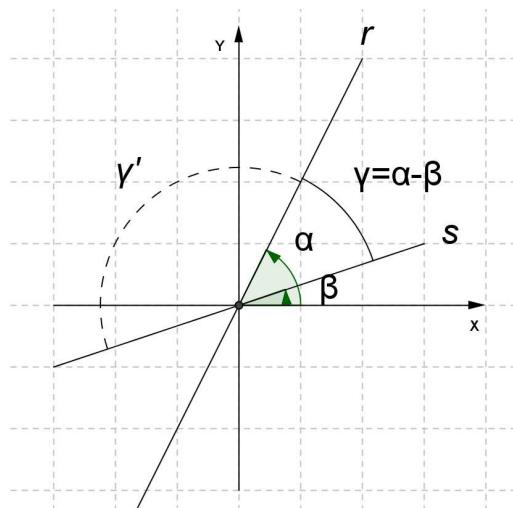
$$r : y = 2x \quad m = 2$$

$$s : y = \frac{1}{3}x \quad m' = \frac{1}{3}$$

$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

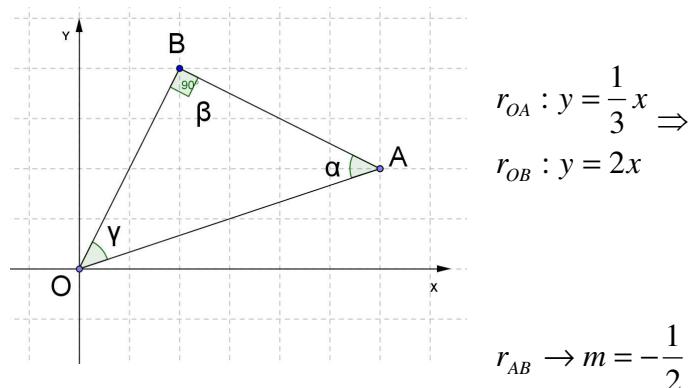
Naturalmente abbiamo anche

$$\gamma' = \pi - \gamma = \frac{3}{4}\pi$$



Esempio 2

Dato il triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(6;2)$, $B(2;4)$, determina le tangenti goniometriche dei suoi angoli.



$$r_{OA} : y = \frac{1}{3}x \Rightarrow \tan \hat{AOB} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = \hat{AOB} = \frac{\pi}{4}$$

$$r_{AB} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

La tangente di β non può essere calcolata perché r_{OB} è perpendicolare a r_{AB} e quindi $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = \gamma$$

Infatti $\triangle OAB$ è un triangolo rettangolo isoscele.

Formule di duplicazione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo 2α ?

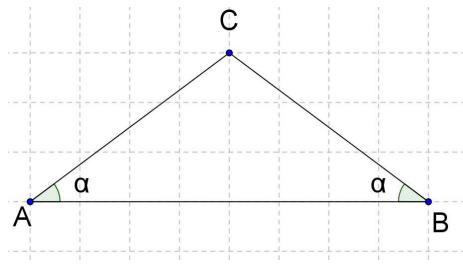
Utilizzando le formule di addizione abbiamo:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}$$

Esempio: dato un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB , se sappiamo che $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, con α l'angolo adiacente alla base, possiamo determinare le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice \hat{C} ?



$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \pi - 2\alpha \\ \sin \hat{C} &= \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

Conoscendo $\sin \hat{C}$ possiamo poi determinare anche coseno e tangente.

Osservazione: $\cos 2\alpha$ può essere sviluppato in due modi diversi utilizzando la relazione $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &\quad \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

Formule di bisezione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$?

Osserviamo che $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$. Proviamo a sviluppare

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

a) Se sostituiamo $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

b) Se sostituiamo $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Ricaviamo infine una formula per calcolare $\tan \frac{\alpha}{2}$:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = ^* \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = ^{**} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

*Nota: moltiplico numeratore e denominatore per $\cos \frac{\alpha}{2}$

**Nota: $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin \alpha$

Se avessimo moltiplicato per $\sin \frac{\alpha}{2}$ avremmo ottenuto invece:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1}{2} \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Osserviamo che le due espressioni sono equivalenti poiché:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Esempio 1: dato un triangolo isoscele acutangolo $\triangle ABC$ di base AB, se conosciamo $\sin \hat{C} = \frac{24}{25}$ e il lato $\overline{BC} = l$, possiamo risolvere il triangolo?

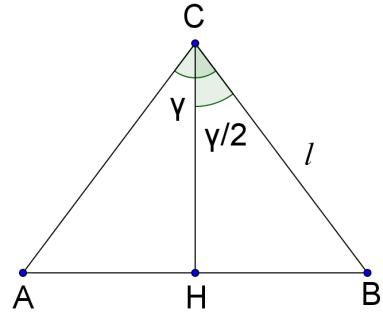
Ponendo $\hat{C} = \gamma$ è chiaro che per risolvere il triangolo abbiamo bisogno delle funzioni goniometriche dell'angolo $\frac{\gamma}{2}$.

$$\sin \gamma = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25}$$

(poiché il triangolo è acutangolo il coseno è positivo)

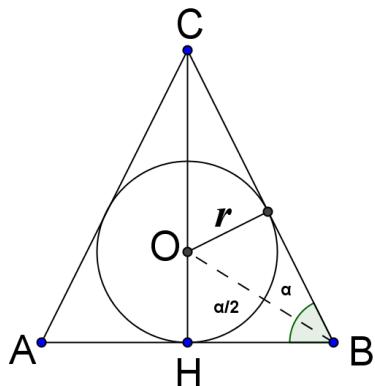
$$\text{Quindi } \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Allora } \overline{HB} = \frac{3}{5}l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{6}{5}l \quad \text{e} \quad \hat{A} = \hat{B} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$$



Esempio 2: dato un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB, se conosciamo $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ (α = angolo adiacente alla base) e il raggio r della circonferenza inscritta, possiamo risolvere il triangolo?

$$\sin \alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13} \quad (\alpha \text{ è acuto})$$



$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} \rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OH}}{\overline{HB}} \Rightarrow \overline{HB} = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}r \Rightarrow \overline{AB} = 3r$$

$$\overline{CB} = \frac{\overline{HB}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{2}r}{\frac{5}{13}} = \frac{39}{10}r$$

$$\hat{C} = \pi - 2\alpha \Rightarrow \sin \hat{C} = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Altre formule

1) Proviamo a ricavare $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ in funzione della $\tan \frac{\alpha}{2}$.

$$\sin \alpha = \sin 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Possiamo a questo punto dividere per 1 e ricordare che 1 può essere pensato anche come $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ e dividendo numeratore e denominatore per } \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ avremo}$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Analogamente:

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{e quindi}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Queste formule si chiamano formule “**parametriche**” perché esprimono seno e coseno di un angolo in funzione del “parametro” $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ e saranno utili nella classe quinta per la risoluzione di alcuni integrali particolari.

Possiamo esprimere anche $\tan \alpha$ in funzione di $t = \tan \frac{\alpha}{2}$:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

2) Possiamo anche ricavare delle formule per esprimere il prodotto tra il seno di un angolo e il seno (o il coseno) di un altro o per esprimere la somma del seno di un angolo con il seno (o coseno) di una altro cioè per esempio, $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, $\sin\alpha \cdot \cos\beta$ ecc. oppure $\sin\alpha + \sin\beta$, $\cos\alpha + \cos\beta$ ecc.

Osserviamo per esempio che:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$$

Quindi:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Esercizio 1

Analogamente se voglio ricavare $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ oppure $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ posso partire da.....

D'altra parte se poniamo

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

avremo $\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Esercizio 2

Analogamente per ottenere un'espressione di $\cos p + \cos q$ considera

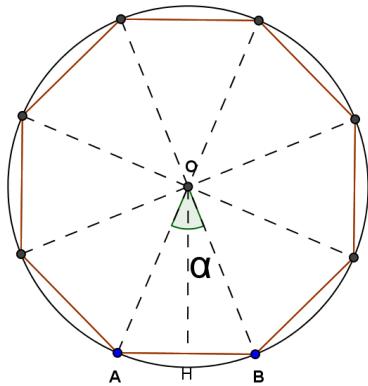
$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \dots \rightarrow \\ \cos(\alpha - \beta) &= \dots \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \dots$$

e procedi dopo aver posto $\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$

Formule di bisezione e lati dei poligoni regolari inscritti ad una circonferenza

1) Lato dell'ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r



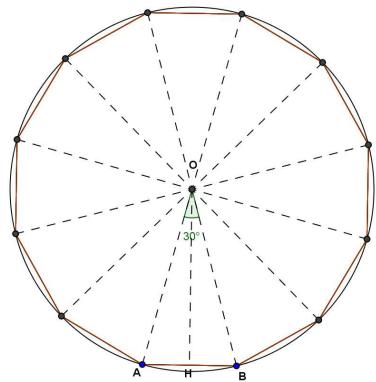
Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot \sin \frac{\pi}{8}$ avremo:

$$l_8 = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{8}$$

Osservazione: si può anche ricorrere al teorema della corda per ottenere lo stesso risultato in quanto l'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB è la metà di $\alpha = \hat{AOB} = \frac{\pi}{4}$.

Per calcolare $\sin \frac{\pi}{8}$ si può applicare la formula di bisezione ricavando $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \dots$

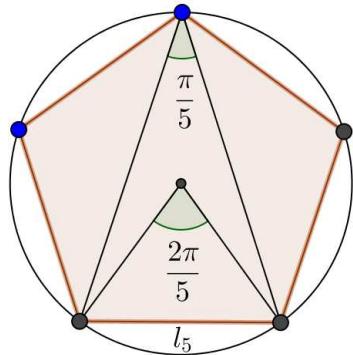
2) Lato del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r



Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot \sin \frac{\pi}{12}$ abbiamo che $l_{12} = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{12}$ e per calcolare

$\sin \frac{\pi}{12}$ possiamo usare la formula di bisezione.

3) Pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r



Analogamente ai casi precedenti abbiamo che il lato l_5 del pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r risulta

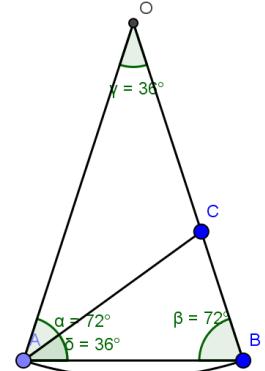
$$l_5 = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{5}$$

Se scriviamo $\sin \frac{\pi}{5} = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{10} = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}$ possiamo calcolare $\sin \frac{\pi}{5}$ se conosciamo seno e coseno di $\frac{\pi}{10}$

NOTA

Consideriamo il decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r : se $AB = l_{10}$ vediamo che, tracciata la bisettrice AC dell'angolo

\hat{BAC} , i triangoli ABO e ABC sono simili poiché l'angolo \hat{BAO} risulta 72° e quindi \hat{BAC} è 36° come l'angolo \hat{AOB} .



Quindi possiamo scrivere la seguente proporzione

$$r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10}) \Leftrightarrow l_{10}^2 = r^2 - r \cdot l_{10} = 0 \Leftrightarrow l_{10}^2 + r \cdot l_{10} - r^2 = 0 \Rightarrow l_{10} = \frac{-r \pm \sqrt{5}r}{2} \rightarrow l_{10} = \frac{(\sqrt{5}-1)r}{2}$$

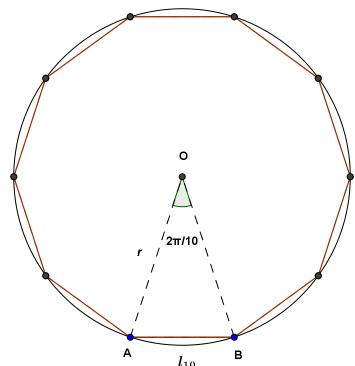
D'altra parte per il teorema della corda vale anche che:

$$l_{10} = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{10}$$

e quindi confrontando le due espressioni possiamo ricavare:

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Da cui possiamo anche ricavare $\cos \frac{\pi}{10}$ e in conclusione $\sin \frac{\pi}{5}$.



PROBLEMI
TRIANGOLO RETTANGOLO E FORMULE GONIOMETRICHE

- 1) In un triangolo ABC il lato $\overline{AC} = l$, $\tan \alpha = 2$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$. Determina gli altri lati del triangolo e $\sin \gamma$.

$$[\overline{AB} = \frac{11\sqrt{5}}{15}l, \quad \overline{CB} = \frac{2\sqrt{5}}{3}l, \quad \sin \gamma = \frac{11\sqrt{5}}{25}]$$

- 2) In un triangolo isoscele ABC di base AB, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = l$. Determina perimetro e area del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C} = \gamma$.

$$[2p = \frac{8}{3}l, \quad A = \frac{2\sqrt{2}}{9}l^2, \quad \sin \gamma = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \quad \cos \gamma = \frac{7}{9}, \quad \tan \gamma = \frac{4\sqrt{2}}{7}]$$

- 3) In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, il lato obliquo misura l e $\cos \hat{C} = \frac{7}{25}$. Determina perimetro e area del triangolo.

$$[2p = \frac{16}{5}l; \quad A = \frac{12}{25}l^2]$$

- 4) Un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB e avente $\cos \hat{C} = \frac{1}{4}$ è inscritto in una circonferenza di raggio r . Determina i lati del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo alla base.

$$[\overline{AB} = \frac{\sqrt{15}}{2}r; \quad \overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}r; \quad \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \dots]$$

- 5) In un trapezio rettangolo ABCD, la base maggiore $\overline{AB} = 56$, il lato obliquo $\overline{BC} = 50$ e $\cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \frac{7}{25}$. Determina base minore e altezza del trapezio. Dopo aver verificato che il trapezio è circoscivibile ad una circonferenza, detto O il suo centro, calcola $\sin(\hat{C}\hat{O}\hat{D})$.

$$[\overline{DC} = 42; \quad \overline{AD} = 48; \quad \sin(\hat{C}\hat{O}\hat{D}) = \frac{7}{5\sqrt{2}}]$$

- 6) Considera una semicirconferenza di raggio r e centro O e sia ABCD un trapezio rettangolo ad essa circoscritto. Sapendo che $\cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \frac{1}{3}$ (AB base maggiore del trapezio), determina i lati del trapezio e calcola $\sin(\hat{O}\hat{C}\hat{B})$.

$$[\overline{AB} = r + \frac{3}{2\sqrt{2}}r; \quad \overline{CB} = \frac{3}{2\sqrt{2}}r; \quad \overline{DC} = r + \frac{r}{\sqrt{2}}; \quad \overline{AD} = r; \quad \sin(\hat{O}\hat{C}\hat{B}) = \sqrt{\frac{2}{3}}]$$

- 7) Considera il trapezio isoscele ABCD, circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r e centro O, avente $\sin(\hat{A}BC) = \frac{4}{5}$ (AB base maggiore del trapezio, BC lato obliquo). Determina i lati del trapezio e $\sin(O\hat{C}B)$.

$$[\overline{CB} = \overline{AD} = \frac{5}{4}r ; \overline{AB} = \frac{5}{2}r ; \overline{DC} = r ; \sin(O\hat{C}B) = \frac{2}{\sqrt{5}}]$$

- 8) Un trapezio rettangolo ABCD (base maggiore AB) è circoscritto ad una circonferenza di centro O e raggio r e $\cos(\hat{A}BC) = \frac{5}{13}$ ($\hat{A}BC$ = angolo adiacente alla base maggiore).

Determina i lati del trapezio e $\sin(O\hat{C}B)$.

$$[\overline{CB} = \frac{13}{6}r ; \overline{AD} = 2r ; \overline{DC} = \frac{5}{3}r ; \overline{AB} = \frac{5}{2}r ; \sin(O\hat{C}B) = \frac{3}{\sqrt{13}}]$$

- 9) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r : y = \frac{1}{2}x$, $s : y = 2x$. Disegna le due rette e l'angolo γ . Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ .

$$[\tan \gamma = \frac{3}{4}, \quad \gamma \approx 36,87^\circ]$$

- 10) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r : y = \frac{1}{2}x$, $s : y = -\frac{1}{2}x$. Disegna le due rette e l'angolo γ . Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ .

$$[\tan \gamma = \frac{4}{3}, \quad \gamma \approx 53,13^\circ]$$

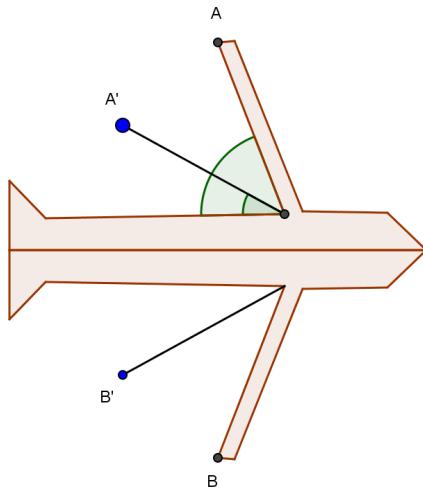
SCHEDE DI LAVORO

Trigonometria nella realtà

1) Apertura alare

Quanto varia l'apertura alare di un aereo dalla fase di decollo alla fase di volo?

Supponiamo che l'ala dell'aereo sia lunga 16 metri e che durante il decollo di abbia $\alpha = 70^\circ$, mentre si abbia $\alpha' = 30^\circ$ durante il volo. Di quanto varia \overline{AB} (apertura alare) cioè quanto risulta $\overline{AB} - \overline{A'B'}$?

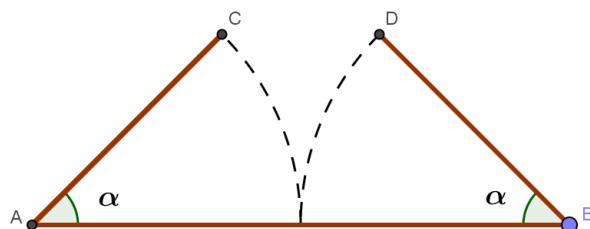


[circa 14 m]

2) Cancello con apertura automatica

Considera un cancello automatico costituito da due parti uguali lunghe 2,5 m ciascuna.

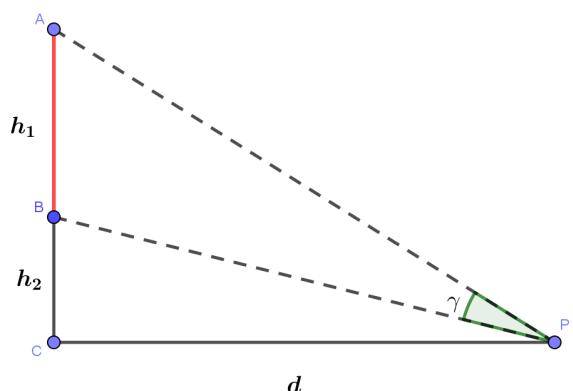
Indica con α l'angolo in figura (che varia durante l'apertura del cancello) e calcola l'apertura \overline{CD} in funzione di α . Per quale angolo si ha un'apertura di 2,5 m? E di 1 metro?



[60° ; circa 37°]

3) Angolo di visuale

Supponiamo di voler fotografare la cupola del duomo di Firenze alta $h_1 = 68$ m che si trova su una base di altezza $h_2 = 55$ metri di altezza. Se ti sei posizionato a 100 metri dalla base della cupola qual è il tuo angolo di visuale?



Suggerimento

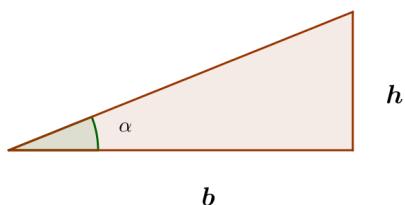
Rappresentando la cupola con il segmento AB e la base con il segmento BC, quando ti posizioni in P vedrai la cupola sotto l'angolo di visuale γ : si tratta quindi di determinare γ in funzione dei tuoi dati.

$$[\gamma \cong 22^\circ]$$

4) Piste da sci

Le piste da sci sono classificate in **blu, rosse e nere** a seconda della pendenza massima che si può trovare percorrendo la pista e rispettivamente è stabilito che siano blu se in tutti i tratti la pendenza risulta sempre inferiore al 25%, rosse se sono presenti tratti con pendenza compresa tra il 25% e il 40% e nere se ci sono tratti con pendenza tra il 40% e il 75%.

Ricordando che per pendenza si intende la tangente dell'angolo formato dalla pista con l'orizzontale cioè $\tan \alpha = \frac{h}{b}$ (vedi figura), trova quali sono i massimi angoli di inclinazione che si possono avere in una pista blu, rossa o nera.



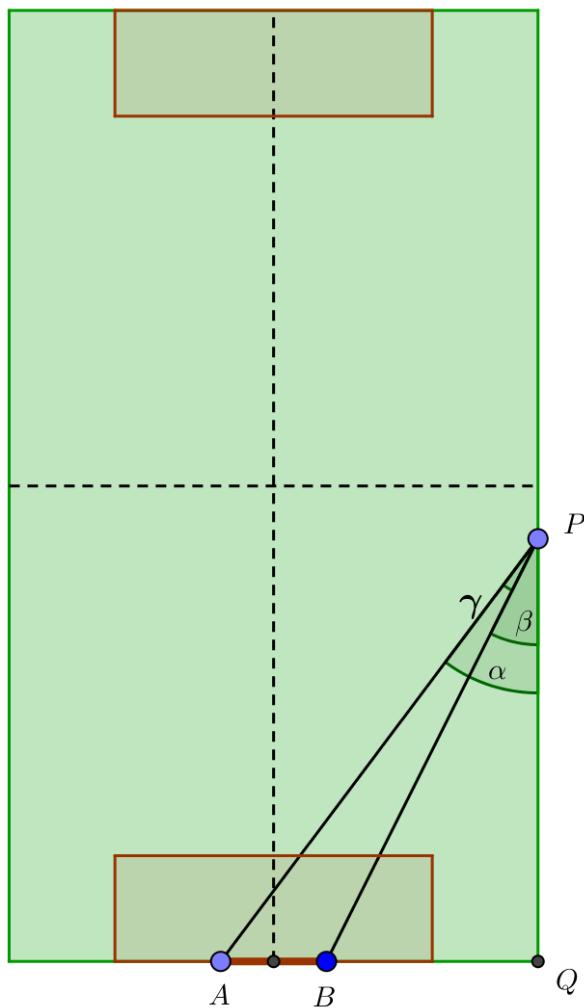
Suggerimento

Inclinazione del 25% significa quindi che $\tan \alpha = 0,25 \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,25) \cong 14^\circ$ ecc.

$$[\max \alpha_{\text{blu}} \cong 14^\circ, \quad \max \alpha_{\text{rossa}} \cong 21,8^\circ, \quad \max \alpha_{\text{nera}} \cong 36,9^\circ]$$

5) **Tiro in porta**

Considera un giocatore che calcia un fallo laterale dalla posizione P: indicando con γ l'angolo sotto cui vede la porta AB e supponendo di indicare con $\overline{PQ} = x$ la sua distanza dal fondo campo, determina $\operatorname{tg}\gamma$ in funzione di x ($\overline{AB} = 7,32m$ e le dimensioni del campo di calcio sono $68m \cdot 105m$).



$$[\operatorname{tg}\gamma \cong \frac{7,32x}{x^2 + 1143}]$$

SCHEMA PER IL RECUPERO
FUNZIONI GONIOMETRICHE E FORMULE GONIOMETRICHE

1) Calcola

a) $\operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi + \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi - \cos \frac{11}{6}\pi + \operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi$ [0]

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(-\alpha) - \operatorname{sen}(\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ [1]

c) $\cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{sen}(-\alpha) - \cos(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$
 $[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cot}\alpha]$

2) Calcola

a) $\operatorname{sen}(75^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \dots$ $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right]$

b) $\cos 75^\circ = \dots$ $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right]$

c) $\operatorname{sen} 15^\circ = \dots$ \dots

d) $\operatorname{tg} 15^\circ = \dots$ $\left[2 - \sqrt{3} \right]$

3) Verifica le seguenti identità:

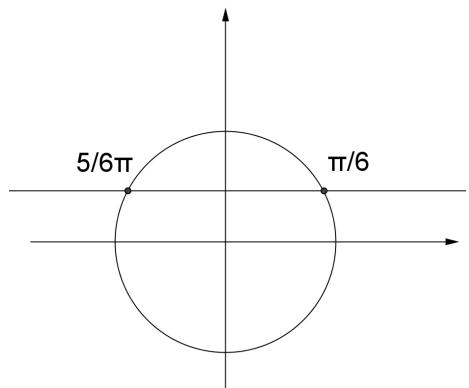
a) $\cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + 1 = 2 \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)$

b) $\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha)$

Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari

- a) Consideriamo per esempio l' equazione "elementare" $\sin x = \frac{1}{2}$.

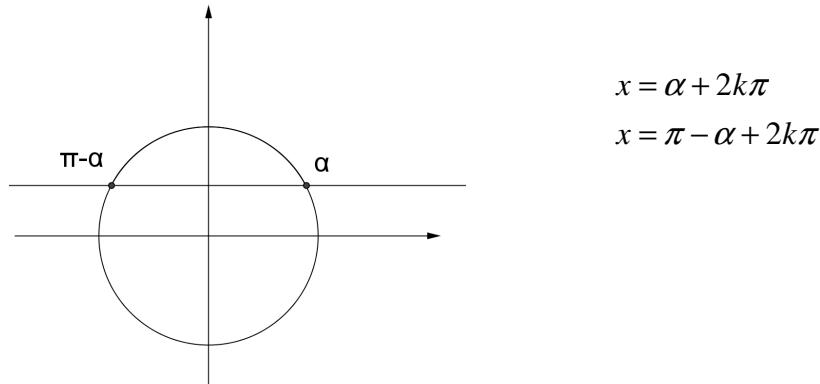


Le soluzioni saranno:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

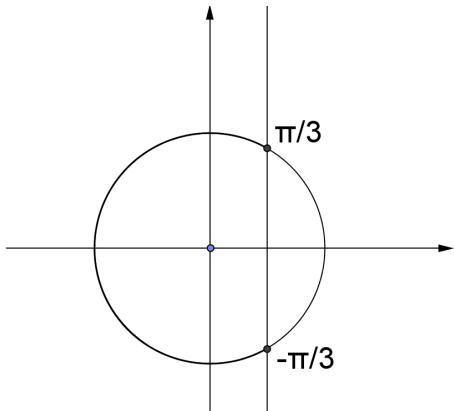
In generale se abbiamo $\sin x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:



Se considero $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

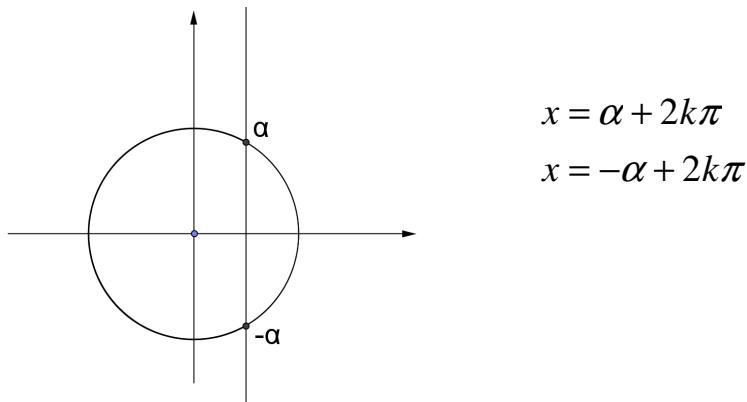
b) Consideriamo l'equazione elementare $\cos x = \frac{1}{2}$.



$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $\cos x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo come soluzioni



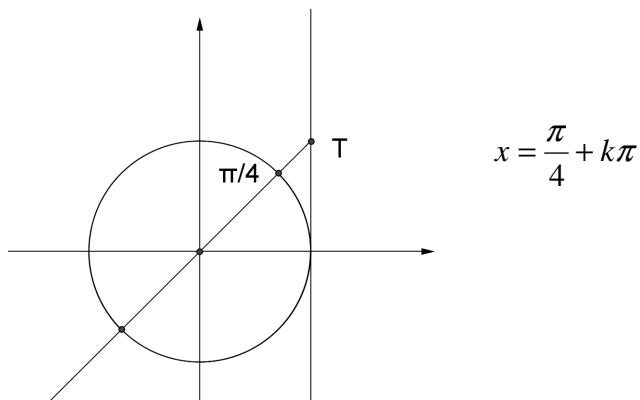
$$x = \alpha + 2k\pi$$

$$x = -\alpha + 2k\pi$$

Se $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

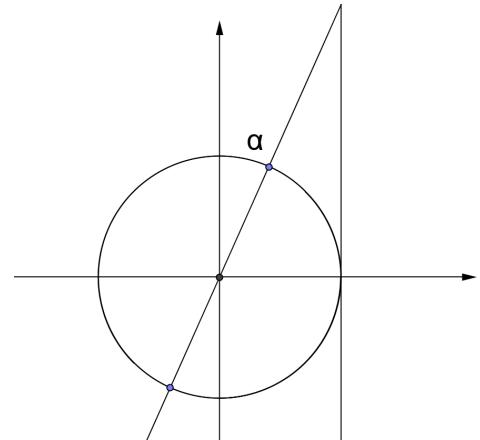
c) Consideriamo l'equazione elementare $\operatorname{tg} x = 1$.



$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

In generale quindi

$$\operatorname{tg} x = k \Rightarrow x = \alpha + k\pi$$

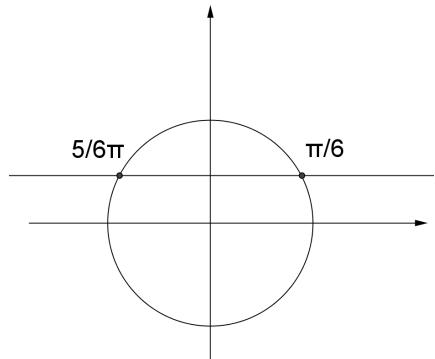


Equazioni goniometriche “riconducibili” ad equazioni elementari

1) Vediamo i seguenti esempi:

$$a) \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

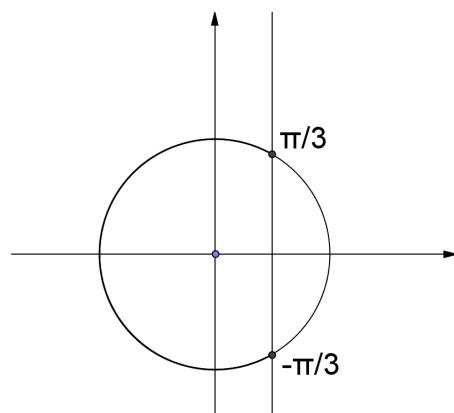
In questo caso non conviene sviluppare con la formula di sottrazione! Consideriamo $x - \frac{\pi}{4}$ come un unico angolo. Per quello che abbiamo già visto:



$$\begin{aligned} x - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} &= \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{6}\pi + 2k\pi = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi \end{aligned}$$

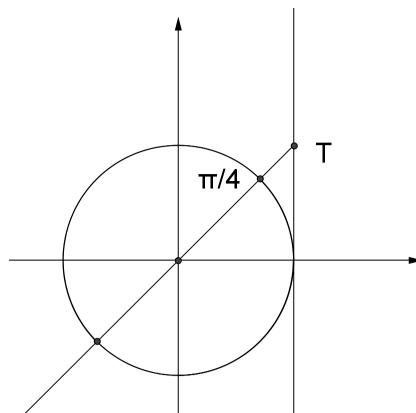
$$b) \quad \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

Anche in questo caso non conviene sviluppare con la formula di duplicazione ma considerare $2x$ come un unico angolo e per quello che abbiamo già visto avremo:



$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ 2x &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{aligned}$$

$$c) \quad \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$



Considerando $3x - \frac{\pi}{6}$ come un angolo avremo:

$$3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$3x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$$

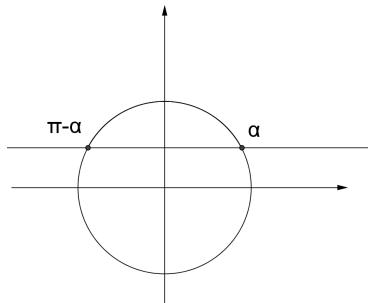
$$x = \frac{5}{36}\pi + k\frac{\pi}{3}$$

Equazioni goniometriche

2) Consideriamo i seguenti esempi:

a) $\sin \cdot 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso seno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure se sono supplementari. Quindi:



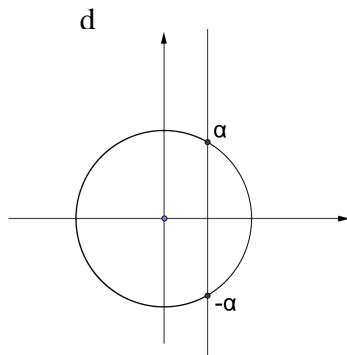
$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

b) $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso coseno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure sono opposti. Quindi:

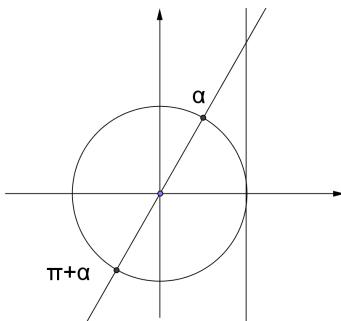


$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

c) $\tan 2x = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli (diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi$) hanno la stessa tangente quando sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica o differiscono di π , quindi potremo semplicemente scrivere:



$$2x = x - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

3) Vediamo infine i seguenti esempi:

a) $\boxed{\sin^2 x + \sin x - 2 = 0}$

Consideriamola come un'equazione di 2° grado e ricaviamo:

$$\sin x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \sin x_1 = 1 \cup \sin x_2 = -2$$

Quindi $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $\sin x = -2$ nessuna soluzione

b) $\boxed{2\cos^2 x + \cos x = 0}$

Possiamo semplicemente mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (2\cos x + 1) = 0$$

e quindi avremo:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

c) $\boxed{\tan^2 x + \tan x = 0}$

$$\tan x (\tan x + 1) = 0$$

$$\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Equazioni goniometriche

d) $\cos^2 x + \sin x = 0$

In questo caso dobbiamo utilizzare la prima relazione fondamentale e sostituire $1 - \sin^2 x$ a $\cos^2 x$.

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{nessuna soluzione}$$

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{utilizzando la calcolatrice abbiamo}$$

$$\begin{aligned} x &= \alpha + 2k\pi && \text{con } \alpha \equiv -38^\circ \\ x &= \pi - \alpha + 2k\pi \end{aligned}$$

e) $\sin 2x + \cos x = 0$

In questo caso gli argomenti del seno e del coseno sono diversi: possiamo riportarci all'angolo x utilizzando la formula di duplicazione.

$$2\sin x \cdot \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (2\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\begin{aligned} \sin x &= -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \\ &\quad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \end{aligned}$$

f) $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 0$

Utilizzando la formula di bisezione avremo:

$$\frac{1 - \cos x}{2} + \cos x = 0$$

$$1 - \cos x + 2\cos x = 0$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

Equazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Consideriamo la seguente equazione:

$$\boxed{\sin x - \cos x - 1 = 0}$$

Per determinare x cerchiamo il punto P associato all'angolo x sulla circonferenza goniometrica. Ricordando che

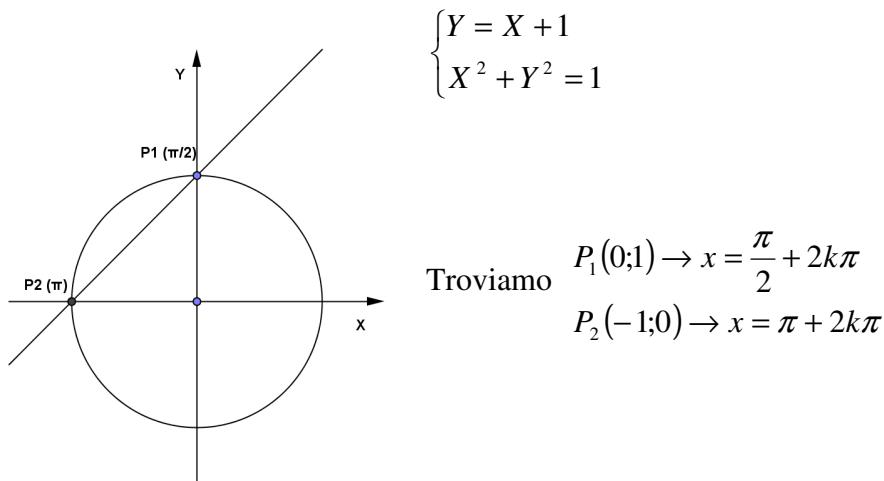
$$\sin x = y_p$$

$$\cos x = x_p$$

Risolvere l'equazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_p - x_p - 1 = 0 \rightarrow y_p = x_p + 1 \\ x_p^2 + y_p^2 = 1 \end{cases}$$

Per non confondere x (angolo) con x_p (ascissa del punto P) possiamo indicare x_p con X e y_p con Y . Quindi abbiamo l'intersezione tra una retta e la circonferenza goniometrica:



Osservazione: non sempre occorre utilizzare questo “metodo grafico”.

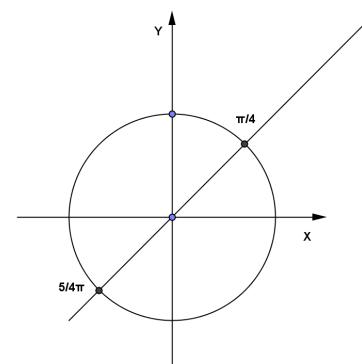
Esempio: $\boxed{\sin x - \cos x = 0}$

Possiamo dividere per $\cos x$ (possiamo supporre $\cos x \neq 0$ perché le soluzioni di $\cos x = 0$, cioè $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, non sono soluzioni dell'equazione) e otteniamo:

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Con il metodo grafico avremmo ottenuto lo stesso risultato:

$$\begin{cases} Y - X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$



Equazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno

Esempio 1:

$$senx \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$$

Basta mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (senx + \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$senx + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 2:

$$sen^2 x + (1 - \sqrt{3})senx \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

Proviamo a dividere per $\cos^2 x$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione):

$$\operatorname{tg}^2 x + (1 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 3:

$$(3 + \sqrt{3})sen^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)senx \cdot \cos x = 3$$

Possiamo moltiplicare il termine noto per $sen^2 x + \cos^2 x$ poiché $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ e avremo:

$$(3 + \sqrt{3})sen^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)senx \cdot \cos x = 3 \cdot (sen^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sqrt{3}sen^2 x + (\sqrt{3} - 1)senx \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1)\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

ESERCIZI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari:

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\tan x = \sqrt{3}$

f) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari:

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi \right]$$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \right]$$

c) $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\left[x = \frac{\pi}{12} + k\pi \right]$$

d) $\sin 2x = 1$

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

e) $\cos 3x = -1$

$$\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right]$$

f) $\tan 4x = -\sqrt{3}$

$$\left[x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4} \right]$$

3) Ricordando le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli associati, risolvi le seguenti equazioni:

a) $\sin 2x = \sin x$

$$\left[x = 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right]$$

b) $\cos 3x = \cos 2x$

$$\left[x = 2k\pi; x = \frac{2}{5}k\pi \right]$$

c) $\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

$$\left[x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \right]$$

Equazioni goniometriche

4) Risolvi le seguenti equazioni riconducibili ad equazioni elementari:

- a) $\sin^2 x - \sin x = 0$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ $[x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$
- c) $\sqrt{3}\tan^2 x - 4\tan x + \sqrt{3} = 0$ $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$
- d) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$
- e) $2\sin^2 x + \sin x = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$
- f) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$
- g) $\tan^2 x + \tan x = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$
- h) $\sqrt{3}\tan^2 x + \tan x = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$
- i) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$
- l) $3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ $[x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

5) Risolvi le seguenti equazioni:

- a) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$ $[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$
- b) $2\cos^2 x - \sin x = 1$ $[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- c) $\tan x \cdot \sin x = \sqrt{3}\sin x$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$
- d) $\sin x = \tan x$ $[x = k\pi]$
- e) $2\sin x \cdot \cos x + 2\cos x = 1 + \sin x$ $[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- f) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ $[x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$
- g) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2 + 3\tan x$ $[x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi]$
- h) $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$
- i) $2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$
- l) $\sin x = \cos \frac{x}{2}$ $[x = \pi + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi; x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi]$

Equazioni goniometriche

6) Risolvi le seguenti equazioni lineari:

- a) $\sin x + \cos x = 1$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = 2k\pi]$
- b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ $[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$
- c) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$
- d) $\sqrt{3}\cos x - \sin x + \sqrt{3} = 0$ $[x = \pi + 2k\pi; x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$
- e) $2\cos x + 2\sin x = \sqrt{3} + 1$ $[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$
- f) $\sin x + \cos x = -2$ [impossibile]

7) Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado in seno e coseno:

- a) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ $[x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi]$
- b) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi]$
- c) $\sqrt{3}\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$
- d) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$
- e) $4\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$
- f) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$

8) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

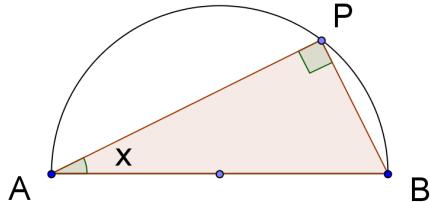
- a) $2\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 x$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$
- b) $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$
- c) $\tan 2x - 3\tan x = 0$ $[x = k\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi]$

Problemi ed equazioni goniometriche

Esempio 1

Consideriamo questo problema: data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, consideriamo su di essa un punto P e determiniamo, ponendo $x = \hat{BAP}$, l'area del triangolo $\triangle ABP$ in funzione di x .

- Determina per quale valore di x si ottiene area uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2} r^2$.
- Qual è il valore massimo e minimo dell'area?



Limiti di x : il valore di x potrà variare da 0 (quando $P \equiv B$) a $\frac{\pi}{2}$ (quando $P \equiv A$).

Poiché il triangolo $\triangle ABP$ è retto in P avremo:

$$\overline{AP} = 2r \cdot \cos x$$

$$\overline{PB} = 2r \cdot \sin x$$

$$Area_{\triangle ABP}(x) = \frac{1}{2} \cdot 2r \cos x \cdot 2r \sin x = 2r^2 \sin x \cos x$$

a) Dobbiamo risolvere l'equazione

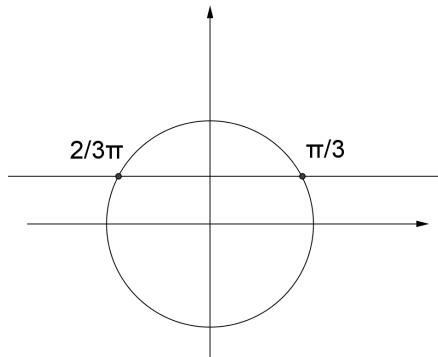
$$2r^2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

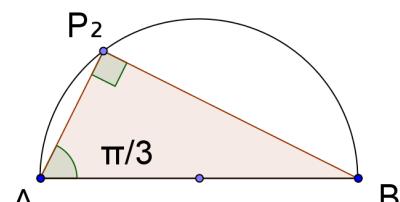
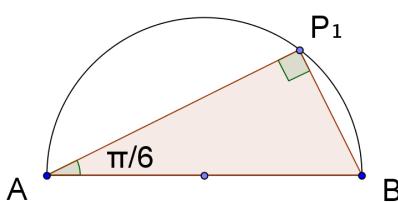
Poiché $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x \leq \pi$ e quindi

$$2x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$2x = \frac{2}{3}\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

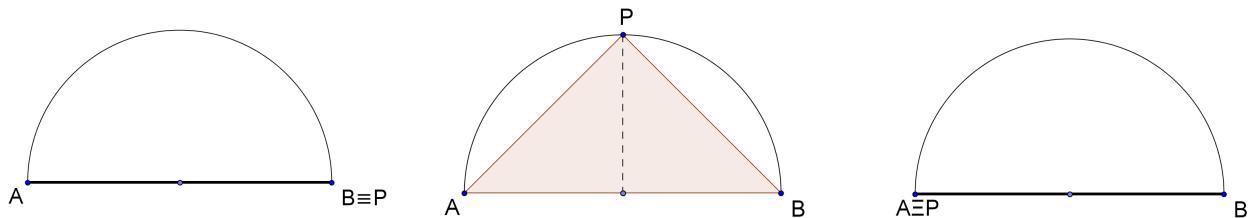


Il problema ha quindi 2 soluzioni, corrispondenti a triangoli uguali.



Equazioni goniometriche

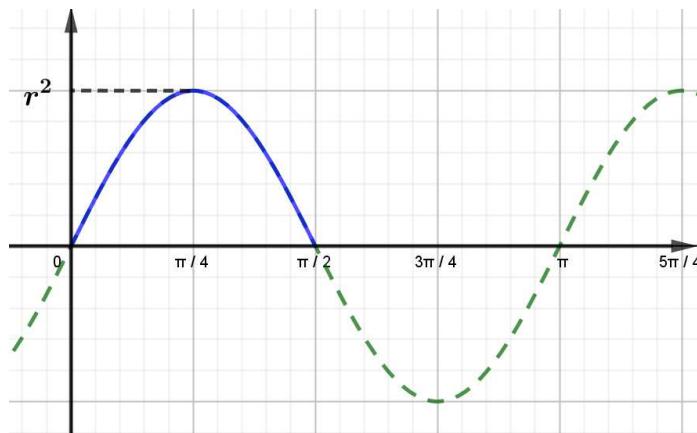
b) E' chiaro che, dal momento che l'area del triangolo $\triangle ABP$ può essere calcolata come $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$ essendo la base AB fissa e variando l'altezza PH , l'area massima si avrà quando PH è massima e quindi per $\overline{PH} = r$ cioè quando $x = \frac{\pi}{4}$ e il triangolo è un triangolo rettangolo isoscele e che l'area minima si avrà quando PH è minima cioè $\overline{PH} = 0$ e $x = 0 (P \equiv B) \cup x = \frac{\pi}{2} (P \equiv A)$.



Considerando l'area come una funzione dell'angolo x abbiamo visto che

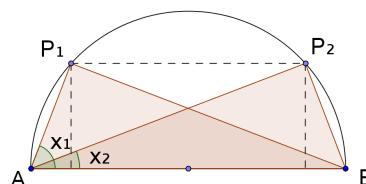
$$A(x) = 2r^2 \sin x \cos x \rightarrow A(x) = r^2 \sin 2x$$

Il grafico di $A(x)$ risulta



Quindi ritroviamo che per $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ l'area vale 0 e che per $x = \frac{\pi}{4}$ si ha il massimo valore dell'area (r^2).

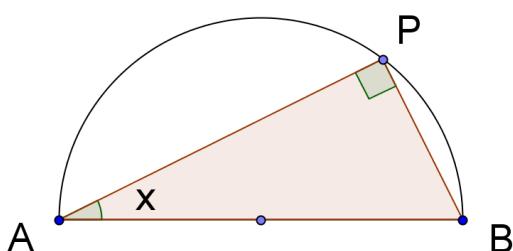
Inoltre ci sono sempre 2 triangoli uguali in corrispondenza di un certo valore dell'area (cioè due valori diversi di x che danno lo stesso valore dell'area): infatti, come si può osservare dalla figura, per un dato valore di PH si trovano due punti sulla semicirconferenza.



Esempio 2

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, consideriamo su di essa un punto P e, ponendo $x = \overset{\wedge}{BAP}$, determinare il perimetro del triangolo ABP in funzione di x.

- a) Per quale valore di x il perimetro risulta $2r(1 + \sqrt{2})$?
- b) Qual è il valore massimo e minimo del perimetro del triangolo ABP?



$$\begin{aligned}x &= \overset{\wedge}{BAP} \\0 &\leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \overline{AP} &= 2r \cos x \\ \overline{BP} &= 2r \sin x\end{aligned}$$

Quindi $2p_{ABP}(x) = 2r \sin x + 2r \cos x + 2r$

a) Per determinare per quale x il perimetro risulta uguale a $2r(1 + \sqrt{2})$ dobbiamo risolvere l'equazione:

$$2r \cos x + 2r \sin x + 2r = 2r(1 + \sqrt{2})$$

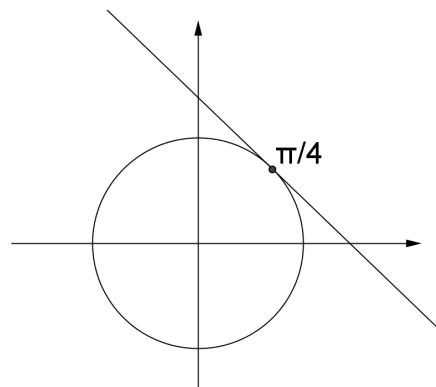
$$2r \cos x + 2r \sin x = 2r\sqrt{2}$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}$$

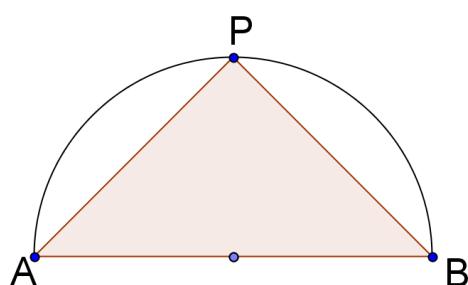
$$\begin{cases} X + Y = \sqrt{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{2} - Y \\ 2 - 2\sqrt{2} + Y^2 + Y^2 = 1 \dots \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ è l'unica soluzione del problema



Infatti: $\overline{AP} = \overline{BP} = r\sqrt{2}$ $2p_{ABP} = 2r + 2r\sqrt{2} = 2r(1 + \sqrt{2})$



b) Osserviamo che si ha il minimo perimetro di $\triangle ABP$ quando $P \equiv B(x=0)$ oppure $P \equiv A\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ perché in questi casi il triangolo degenera in 2 diametri sovrapposti e il perimetro vale $4r$.

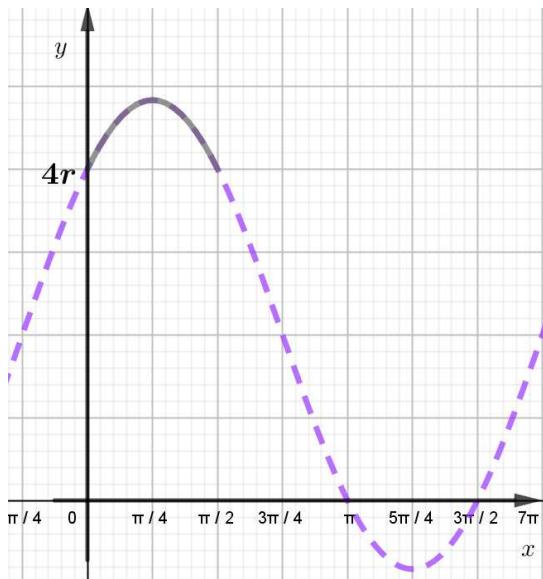
Per determinare il massimo perimetro possiamo disegnare il grafico della funzione $2p(x)$: basterà traslare di $2r$ verso l'alto il grafico di $y = 2r(\sin x + \cos x)$.

Per disegnare $y = 2r(\sin x + \cos x)$ ricordiamo che abbiamo visto che le funzioni del tipo $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ possono essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $y = A \cdot \sin(x + \varphi)$.

$$A \cdot (\sin x \cdot \cos \varphi + \cos x \cdot \sin \varphi) = 2r(\sin x + \cos x) \rightarrow A \cdot \cos \varphi \cdot \sin x + A \cdot \sin \varphi \cdot \cos x = 2r \sin x + 2r \cos x \rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos \varphi = 2r \\ A \cdot \sin \varphi = 2r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{A \cdot \sin \varphi}{A \cdot \cos \varphi} = 1 \rightarrow \tan \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \\ A^2 = 8r^2 \rightarrow A = 2\sqrt{2} \cdot r \end{cases}$$

Quindi abbiamo che $y = 2r(\sin x + \cos x)$ corrisponde a $y = 2\sqrt{2} \cdot r \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e in conclusione il grafico di $2p_{ABP}(x)$ risulta il seguente (disegnato solo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) :



Quindi si ha il massimo perimetro di $\triangle ABP$ quando $x = \frac{\pi}{4}$ e sostituendo si trova che risulta

$$2p\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2r(1 + \sqrt{2})$$

Anche in questo caso, fissato un valore del perimetro compreso tra $4r$ e $2r(1 + \sqrt{2})$, si avranno sempre due valori di x corrispondenti (cioè due triangoli congruenti che hanno quel dato perimetro).

PROBLEMI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

- 1) Si consideri una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e ponì $\hat{BAP} = x$. Determina per quale x si ha $area(ACBP) = (\sqrt{3} + 1)r^2$.

$$[x = \frac{\pi}{4}]$$

- 2) Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ si consideri il trapezio isoscele $ABCD$ inscritto nella semicirconferenza e si ponga $\hat{BAD} = x$. Determinare per quale x si ha $2p(ABCD) = 5r$.

$$[x = \frac{\pi}{3}]$$

- 3) Si consideri una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e un trapezio isoscele $CDEF$ circoscritto alla semicirconferenza. Posto $\hat{DCF} = x$ determina x per il quale si ha $area(CDEF) = \sqrt{3}r^2$.

$$[x = \frac{\pi}{3}]$$

- 4) Considera una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e un punto P su di essa. Costruisci il quadrato $PBRQ$ esternamente alla semicirconferenza. Determina la posizione di P in modo che si abbia $area(ABRQ) = 3r^2$. Poni $\hat{BAP} = x$.

$$[x = \frac{\pi}{4}]$$

- 5) Considera una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e un punto P su di essa. Costruisci il triangolo equilatero PBD esternamente alla semicirconferenza e determina P per cui si abbia $area(ABDP) = \sqrt{3}r^2$. Poni $\hat{PAB} = x$.

$$[x = \frac{\pi}{2}, x = arctg \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

- 7) Considera una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ una corda PQ parallela ad AB . Posto $\hat{AOP} = x$ e costruito il triangolo equilatero PQR , con R esterno alla semicirconferenza, determina x in modo che si abbia $area(POQR) = \sqrt{3}r^2$.

$$[x = 0, x = \frac{\pi}{6}]$$

8) Dato un triangolo isoscele ABC avente base AB e altezza $\overline{CH} = 2a$, posto $A\hat{C}H = x$, considera il punto D, punto medio dell' altezza CH, e traccia le sue proiezioni ortogonali M e N rispettivamente su AC e CB. Determina x in modo che $2p(CMDN) = 2a\sqrt{2}$.

$$[x = \frac{\pi}{4}]$$

9) Considera una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e la corda $\overline{AC} = r$. Sia P un punto appartenente alla semicirconferenza non contenente C e ponì $P\hat{A}B = x$. Determina x in modo che si abbia $area(APC) = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$.

$$[x = 0, x = \frac{\pi}{6}]$$

10) Sia ABO un settore circolare con $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e $\overline{AO} = \overline{OB} = r$. Si consideri un punto P appartenente all' arco AB e si ponga $A\hat{O}P = x$. Si consideri la proiezione ortogonale H del punto P su AO , il segmento PP' parallelo ad AO e sia K la proiezione ortogonale di P' su AO. Determina x in modo che $area(HPP'K) = \frac{r^2}{2\sqrt{3}}$.

$$[x = \frac{\pi}{6}]$$

11) Considera una circonferenza di raggio r e le corde $\overline{AB} = r$ e $\overline{BC} = r\sqrt{3}$. Considera un punto P appartenente alla semicirconferenza AC non contenente B. Determina P in modo che $2p(ABCP) = 2r(1 + \sqrt{3})$. Ponì $P\hat{A}C = x$.

$$[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}]$$

12) Si consideri una semicirconferenza di diametro AB= 2r e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e ponì $B\hat{A}P = x$. Studia la funzione $A(x) = area(ACBP)$.

$$\left[A(x) = r^2 \left(\sin 2x + \sqrt{3} \right), \quad \max = r^2 (1 + \sqrt{3}) \text{ per } x = \frac{\pi}{4}; \quad \min = \sqrt{3}r^2 \text{ per } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \right]$$

SCHEMA DI VERIFICA
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Risolvli le seguenti equazioni goniometriche

1. $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ $[x = \frac{17}{12}\pi + 2k\pi; x = \frac{25}{12}\pi + 2k\pi]$
2. $\tan^2(3x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}$ $[x = \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}]$
3. $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ $[x = -\frac{7}{12}\pi + 2k\pi; x = \frac{\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3}]$
4. $2\sin^2 x - 2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 5\cos x + 1$ $[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$
5. $\sin x = \cos x - \sqrt{2}$ $[x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi]$
6. $\cos x + \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 1$ $[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$
7. $2\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin x \cos x + (\sqrt{3} + 1)\cos^2 x = 1$ $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi]$
8. $\sqrt{3} \cos 2x + 1 = \sin 2x$ $[x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7}{12}\pi + k\pi]$

Problema 1

Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e sia P un punto su di essa. Disegna il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza e determina $x = \hat{PAB}$ in modo che $2p(ACBP) = 2(2 + \sqrt{2})r$.

$$[x = \frac{\pi}{4}]$$

Problema 2

Considera una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e traccia la corda $\overline{AC} = r\sqrt{3}$. Determina un punto P (poni $\hat{BAP} = x$) appartenente alla semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$ non contenente C tale che l'area del quadrilatero ACBP sia uguale a $\sqrt{3}r^2$.

$$[x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}]$$

Problema 3

Si consideri una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e si costruisca il quadrato ACDB esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e ponli $\hat{BAP} = x$. Studia la funzione $A(x) = \text{area}(ACDP)$.

$$\left[A(x) = r^2(\sin 2x + 4), \quad \max = 5r^2 \text{ per } x = \frac{\pi}{4}; \quad \min = 4r^2 \text{ per } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \right]$$

SCHEDA PER IL RECUPERO
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

$$1) \cos x = -\frac{1}{2} \quad \left[x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right]$$

$$2) \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \cup x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$3) \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \right]$$

$$4) \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi \cup x = \frac{\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$5) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$6) \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad \left[x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \right]$$

$$7) 2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \left[x = k\pi \cup x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right]$$

$$8) 2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \left[x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$9) \tan^2 x - \tan x = 0 \quad \left[x = k\pi \cup x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$10) \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \quad \left[x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$11) \sin x - \cos x = 1 \quad \left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup x = \pi + 2k\pi \right]$$

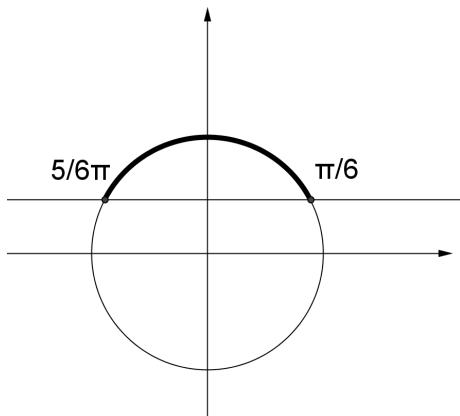
$$12) \sin x = \cos x - 1 \quad \left[x = 2k\pi \cup x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

$$13) \sin x + \cos x = 0 \quad \left[x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

Disequazioni goniometriche

Disequazioni goniometriche elementari

a) Riprendiamo gli esempi che abbiamo fatto per le equazioni trasformandoli in disequazioni:



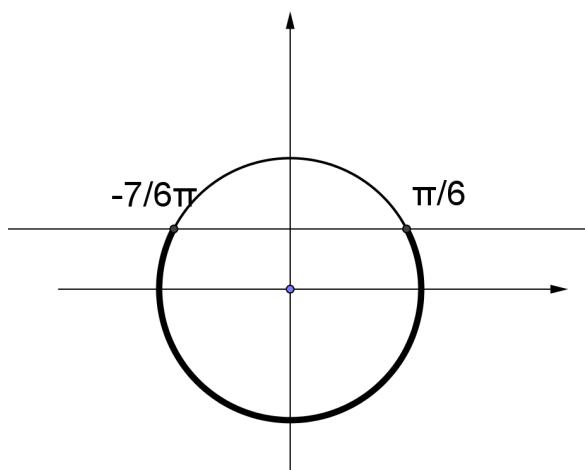
$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Le soluzioni saranno:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

Se invece devo risolvere:

$$\sin x < \frac{1}{2}$$



le soluzioni possono essere scritte così:

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

oppure

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$$

oppure

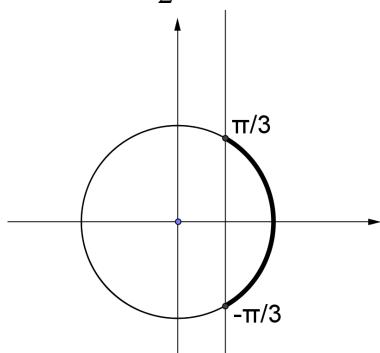
$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Attenzione: non ha senso scrivere $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$!

b) $\cos x > \frac{1}{2}$:

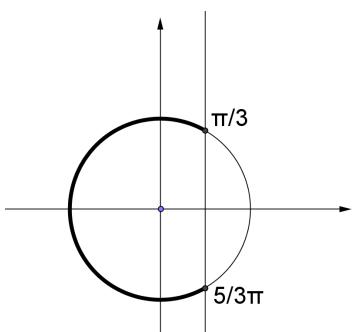
le soluzioni sono:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

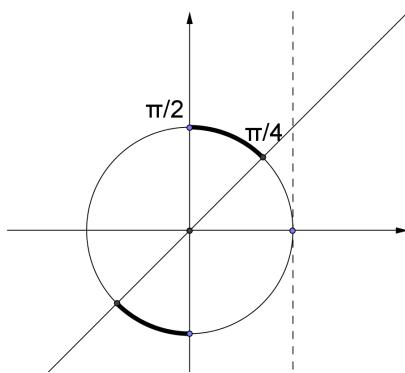


Se invece dovessi risolvere $\cos x < \frac{1}{2}$ avrei:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$



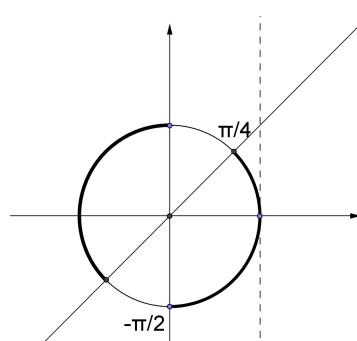
c) $\operatorname{tg} x > 1 \rightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$



Se invece devo risolvere $\operatorname{tg} x < 1 \rightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$

oppure posso scrivere

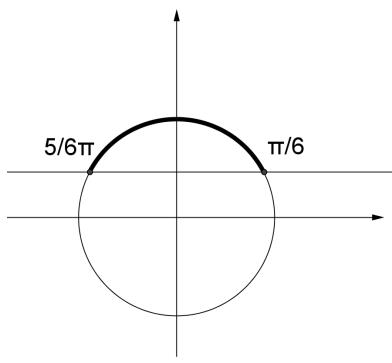
$$k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi \cup \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi$$



Disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari

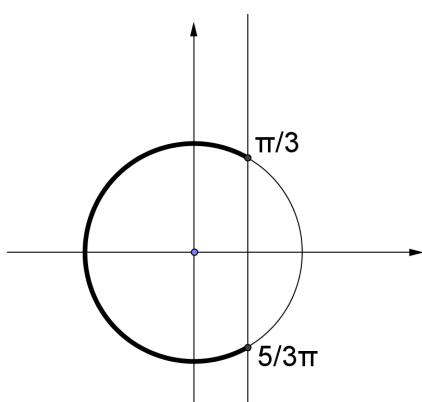
1) Come per le equazioni possiamo avere casi così:

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$: consideriamo “ $x - \frac{\pi}{4}$ ” tutto insieme:



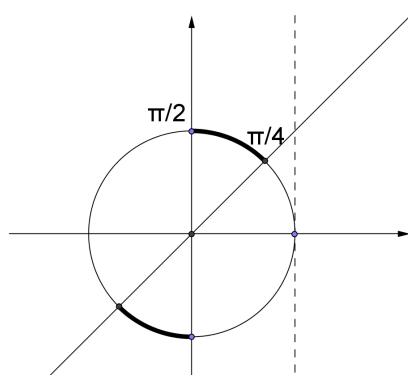
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + 2k\pi &< x - \frac{\pi}{4} < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ \frac{5}{12}\pi + 2k\pi &< x < \frac{13}{12}\pi + 2k\pi \end{aligned}$$

b) $\cos 2x < \frac{1}{2} \rightarrow$



$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} + 2k\pi &< 2x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6} + k\pi &< x < \frac{5}{6}\pi + k\pi \end{aligned}$$

c) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) > 1 \rightarrow$

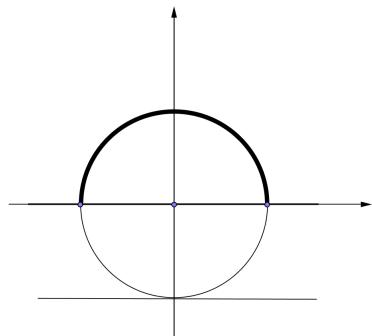


$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + k\pi &< 3x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{5}{12}\pi + k\pi &< 3x < \frac{2}{3}\pi + k\pi \\ \frac{5}{36}\pi + k\frac{\pi}{3} &< x < \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Disequazioni goniometriche

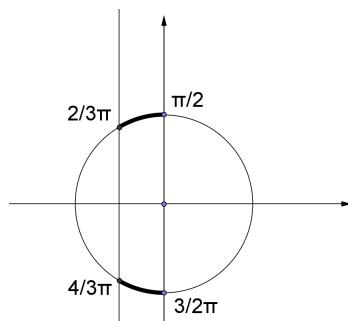
2)

a) $\sin^2 x + \sin x > 0$
 $\sin x(\sin x + 1) > 0$
 $\sin x < -1 \cup \sin x > 0$
 \Updownarrow
 $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$



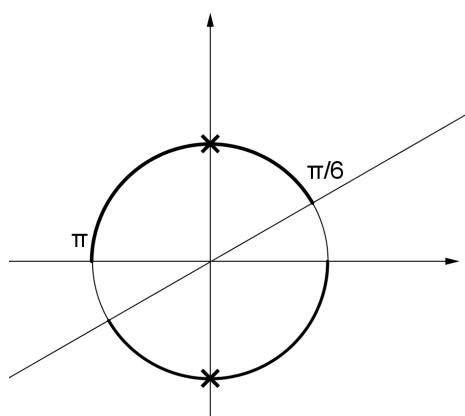
b)

$2\cos^2 x + \cos x < 0$
 $\cos x(2\cos x + 1) < 0$
 $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$
 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \cup \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$



c)

$\sqrt{3}\tan^2 x - \tan x > 0$
 $\tan x(\sqrt{3}\tan x - 1) > 0$
 $\tan x < 0 \cup \tan x > \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \pi + k\pi \text{ con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

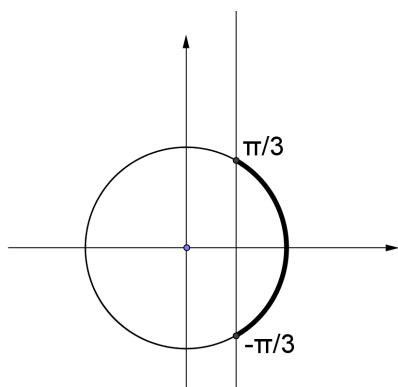
d)

$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x < 0$
 $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0$

$2\sin^2 x - 3\cos x < 0$

$\cos x < -2 \cup \cos x > \frac{1}{2}$

$(\cos x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \cup \cos x = -2)$



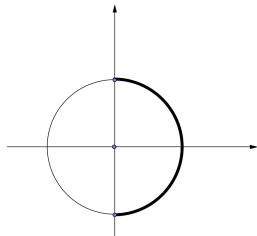
$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Disequazioni goniometriche

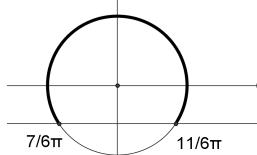
e) $\boxed{\sin 2x + \cos x > 0}$
 $2\sin x \cos x + \cos x > 0$
 $\cos x(2\sin x + 1) > 0$

Studio il segno dei singoli fattori del prodotto:

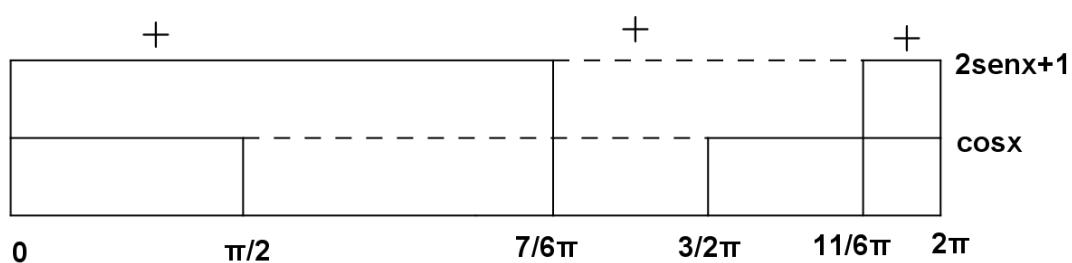
$\cos x > 0 \rightarrow$



$2\sin x + 1 > 0 \rightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$



Riporto i risultati tra 0 e 2π



Poiché voglio che il prodotto sia positivo avrò:

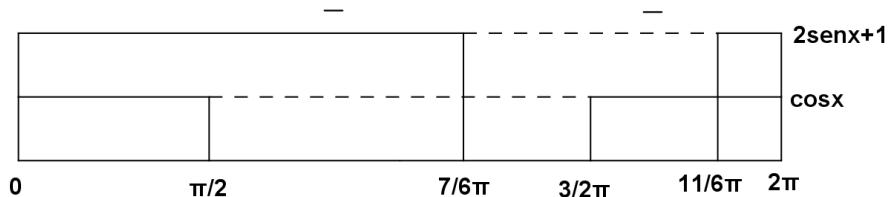
$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

f) $\boxed{\frac{\cos x}{2\sin x + 1} < 0}$

Anche in questo caso studio il segno del numeratore e del denominatore e alla fine prendo le zone dove ho una combinazione di segni che mi dà risultato negativo.

N: $\cos x > 0 \rightarrow$ vedi sopra

D: $2\sin x + 1 > 0 \rightarrow$ vedi sopra



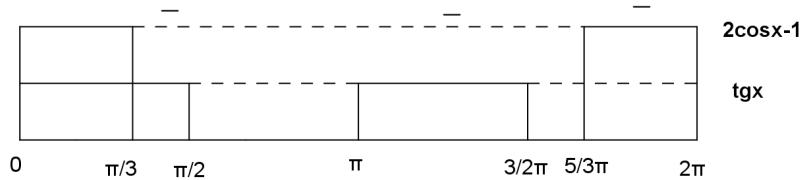
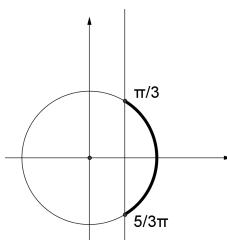
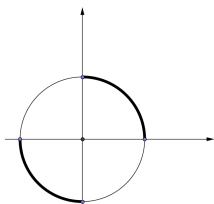
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

Osservazione: se devo studiare il segno di un prodotto o di un quoziente in cui compaiono funzioni goniometriche di periodo diverso dovrò fare il grafico finale considerando il minimo comune multiplo dei 2 periodi.

Esempio 1:
$$\frac{\operatorname{tg}x}{2\cos x - 1} < 0$$

N: $\operatorname{tg}x > 0$

D: $2\cos x - 1 > 0 \rightarrow \cos x > \frac{1}{2}$



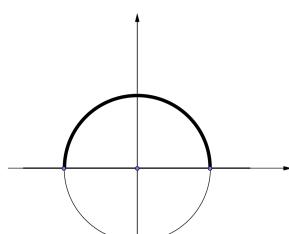
0 $\pi/3$ $\pi/2$ π $3/2\pi$ $5/3\pi$ 2π

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

Esempio 2: $\operatorname{sen}3x \cdot \operatorname{tg}x > 0$

Il minimo comune multiplo tra $T_1 = \frac{2}{3}\pi$ e $T_2 = \pi$ è 2π .

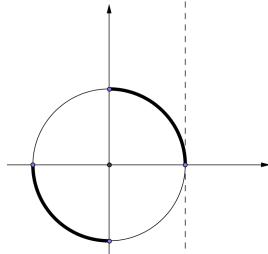
$\operatorname{sen}3x > 0$



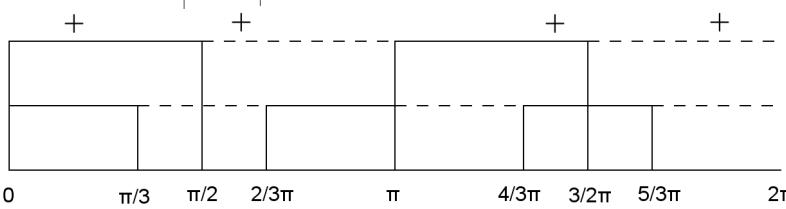
$$2k\pi < 3x < \pi + 2k\pi$$

$$\frac{2}{3}k\pi < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$$

$\operatorname{tg}x > 0$



$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



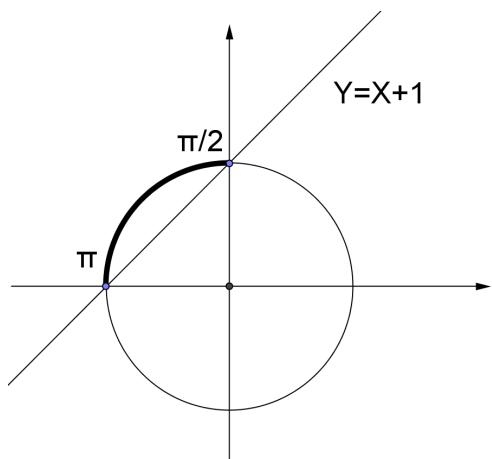
Disequazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Riprendiamo l'esempio fatto per le equazioni lineari:

$$\boxed{\sin x - \cos x - 1 > 0} \quad (\text{ma questa volta mettiamo } >)$$

Sostituendo $Y = \sin x$ avremo:
 $X = \cos x$

$$\begin{cases} Y - X - 1 > 0 \rightarrow \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} Y > X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

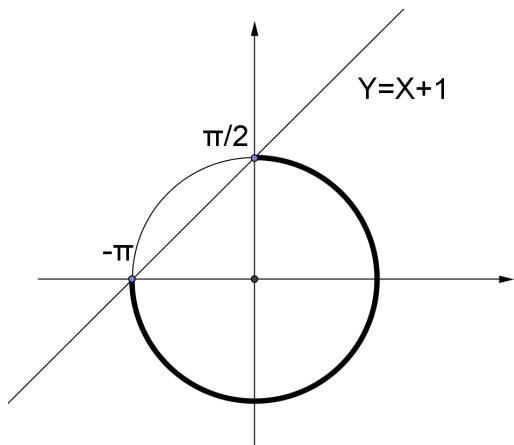


La parte di circonferenza goniometrica in cui i punti hanno $Y > X + 1$ (semipiano "sopra" alla retta $y = x + 1$) è quella indicata in figura e quindi le soluzioni della disequazione sono:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

Se avessimo dovuto risolvere:

$$\sin x - \cos x - 1 < 0 \rightarrow \begin{cases} Y < X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Le soluzioni possono essere scritte:

$$-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

oppure spezzando:

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Importante

Mentre per le equazioni goniometriche lineari in cui manca il termine noto avevamo detto che potevamo risolvere anche dividendo per cosx, nel caso delle disequazioni questo non può essere fatto poiché il coseno di un angolo non è sempre positivo.

Consideriamo per esempio la disequazione:

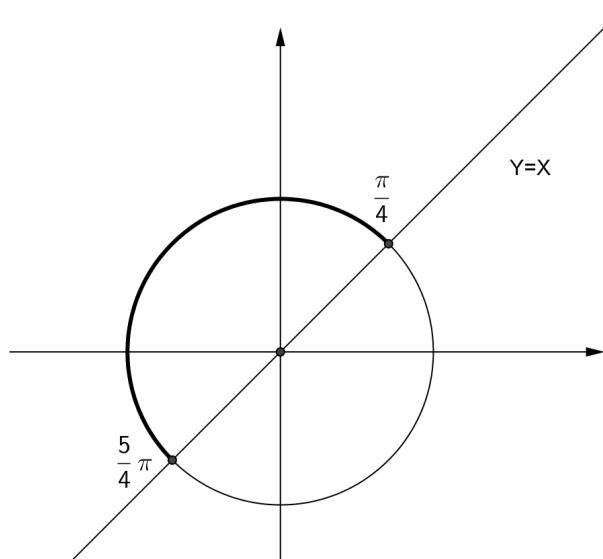
$$\sin x - \cos x > 0$$

Non possiamo dividere per cosx perché il segno del coseno varia.

Dobbiamo quindi necessariamente applicare il metodo grafico, sostituendo cioè $\sin x = Y$; $\cos x = X$ e intersecando con la circonferenza goniometrica.

$$\begin{cases} Y - X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y > X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Possiamo disegnare facilmente la retta $Y = X$ e quindi considerare in questo caso il semipiano “sopra” alla retta poiché abbiamo $Y > X$: avremo quindi come parte della circonferenza goniometrica quella evidenziata in figura.



In conclusione la soluzione della disequazione sarà data da

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

Disequazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno omogenee o riconducibili ad omogenee

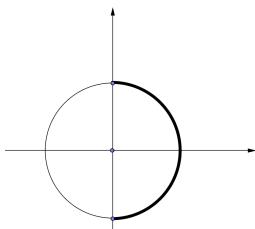
Vediamo infine come si risolvono le disequazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno.

a) $\boxed{\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x > 0}$

$$\cos x(\sin x + \cos x) > 0$$

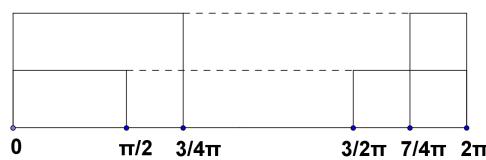
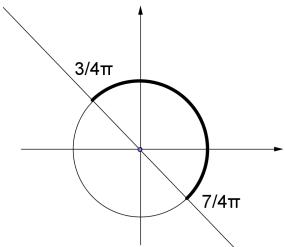
Studio il seno dei singoli fattori:

$$\cos x > 0$$



$$\sin x + \cos x > 0$$

$$\begin{cases} Y + X > 0 \rightarrow Y > -X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Le soluzioni sono quindi

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \cup \frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

b) $\boxed{\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x < 0}$

1° metodo: sostituiamo a

$$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$$

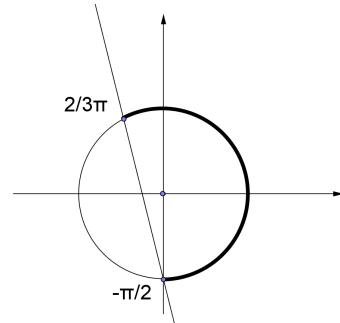
e otteniamo: $\sin 2x + (2 + \sqrt{3})\cos 2x + 1 > 0$

Abbiamo quindi ottenuto una disequazione lineare ma l'angolo è $2x$. Poniamo $Y = \sin 2x$, $X = \cos 2x$.

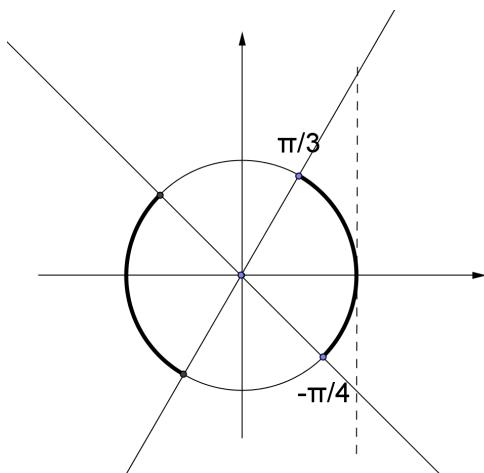
Risolviamo. $\begin{cases} Y + (2 + \sqrt{3})X + 1 > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \dots\dots$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$



2° metodo: dividiamo per $\cos^2 x$ (è positivo) ma controlliamo se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione della disequazione. Sostituendo nell'equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ abbiamo $1+0+0$ che non è minore di 0 e quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione.



$$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} < 0 \dots$$

$$-1 < \tan x < \sqrt{3}$$

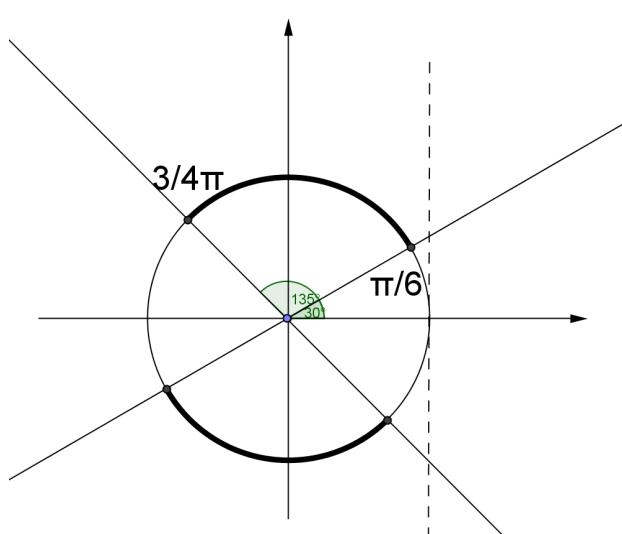
$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$

(come infatti avevamo già trovato con il primo metodo)

c) $\boxed{[3 + \sqrt{3}] \sin^2 x + 2 \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cdot \cos x > 3}$

Moltiplichiamo 3 per $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ e dividiamo poi per $\cos^2 x$: sostituendo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow 3 + \sqrt{3}$ ed è maggiore di 3 $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione.

Avremo $\sqrt{3} \tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - 1 > 0$
 $\tan x < -1 \cup \tan x > \frac{1}{\sqrt{3}}$



Poiché $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione della disequazione possiamo scrivere:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

ESERCIZI
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Riprendiamo gli esercizi sulle equazioni goniometriche e trasformiamoli in disequazioni:

1) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche elementari:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a. $\sin x > -\frac{1}{2}$ | $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \right]$ |
| b. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right]$ |
| c. $\tan x > \sqrt{3}$ | $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$ |
| d. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6} + 2k\pi \right]$ |
| e. $\tan x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi \right]$ |
| f. $\sin x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4} + 2k\pi \right]$ |

2) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

- | | |
|--|---|
| a. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \right]$ |
| b. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$ | $\left[-\frac{5}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$ |
| c. $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > -1$ | $\left[\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi \right]$ |
| d. $\sin 2x < 1$ | $\left[x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$ |
| e. $\cos 3x \leq -1$ | $\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right]$ |
| f. $\tan 4x < -\sqrt{3}$ | $\left[-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4} \right]$ |

Disequazioni goniometriche

3) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche riconducibili a disequazioni elementari:

a) $\sin^2 x - \sin x > 0$ $[\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$ $[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3}\tan^2 x - 4\tan x + \sqrt{3} > 0$ $[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \cup \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x < 0$ $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \cup \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

e) $2\sin^2 x + \sin x < 0$ $[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi \cup \pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 > 0$ $[-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

g) $\tan^2 x + \tan x < 0$ $[-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi]$

h) $\sqrt{3}\tan^2 x + \tan x > 0$ $[k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \cup \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi]$

i) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$ $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi]$

l) $3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 3 \leq 0$ $[-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi]$

4) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche lineari:

a) $\sin x + \cos x > 1$ $[2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ $[\forall x \in R]$

c) $\cos x + \sqrt{3}\sin x < \sqrt{3}$ $[-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - \sin x + \sqrt{3} > 0$ $[-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

e) $2\cos x + 2\sin x \geq \sqrt{3} + 1$ $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

f) $\sin x + \cos x > -2$ $[\forall x \in R]$

Disequazioni goniometriche

5) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche (omogenee o riconducibili ad omogenee) di 2° grado in seno e coseno:

a) $3\sin^2 x - \cos^2 x > 0$ $[\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi]$

b) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x < 0$ $[k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi]$

c) $\sqrt{3}\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x > 0$ $[-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

d) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x < \frac{1}{2}$ $[-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi]$

e) $4\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x \leq 1$ $[k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi]$

f) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x > 2$ $[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi]$

6) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche:

a) $2\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} > \frac{1}{2}\sin^2 x$ $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

b) $(\sin x + \cos x)^2 \geq \cos 2x$ $[k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi]$

c) $\tan 2x - 3\tan x < 0$ $[k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \cup \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi]$

d) $\frac{\sin x - \cos x}{2\cos^2 x - 1} > 0$ $[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi]$

e) $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} < 0$ $[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \cup \frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

f) $\frac{\tan^2 x - 1}{\sin 2x} > 0$ $[\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \pi + k\pi]$

SCHEMA DI VERIFICA
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche:

1. $2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) < \sqrt{3}$ $[\frac{5}{12}\pi + 2k\pi < x < \frac{25}{12}\pi + 2k\pi]$

2. $4 \sin^2 x < 3$ $[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \cup \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi]$

3. $\tan^2 x - \sqrt{3} \tan x > 0$ $[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi]$

4. $2 + 3 \cos x \geq 2 \sin^2 x - 1$ $[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \cup x = \pi + 2k\pi]$

5. $2 \cos^2 x - \cos x < 0$ $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi]$

6. $\frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{\tan^2 x - 1} < 0$ $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$

7. $\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} \cos(x + \frac{\pi}{3}) > 1$ $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

8. $\sqrt{3} \sin 2x > 2 \cos^2 x - 2$ $[k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi]$

SCHEMA PER IL RECUPERO
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

$$1) \cos x > -\frac{1}{2} \quad \left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right]$$

$$2) \sin x > -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$3) \tan x > -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$$

$$4) \sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$5) \tan 2x < -1 \quad \left[-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right]$$

$$6) 2\sin^2 x - \sin x < 0 \quad \left[2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \right]$$

$$7) 3\tan^2 x - 1 < 0 \quad \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \right]$$

$$8) 2\cos^2 x - 1 > 0 \quad \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$9) \tan^2 x - \tan x < 0 \quad \left[k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$10) \cos^2 x - \sin^2 x > 0 \quad \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$11) \sin x - \cos x < 1 \quad \left[-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

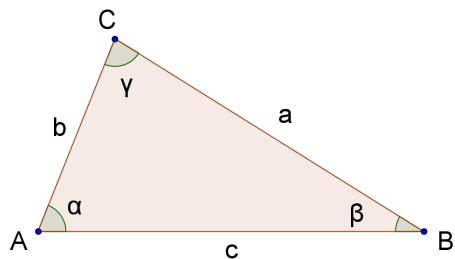
$$12) \sin x - \sqrt{3} \cos x < 0 \quad \left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$13) \sin x - \cos x > 0 \quad \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

Triangoli qualsiasi



Consideriamo un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ e adottiamo la seguente notazione: nel vertice A l'angolo è α , nel vertice B β , nel vertice C γ e indichiamo con a il lato opposto ad A, con b quello opposto a B e con c quello opposto a C.

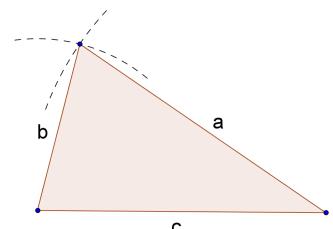
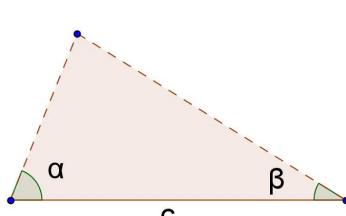
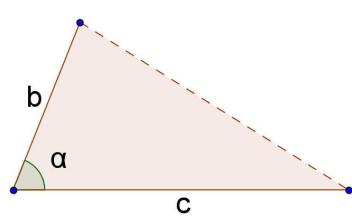


Risolvere un triangolo significa determinare, dalla conoscenza di alcuni elementi, tutti gli altri elementi (lati, angoli). Ricordiamo che, grazie ai criteri di congruenza dei triangoli, un triangolo è determinato se si assegnano:

- 1) due lati e l'angolo compreso;
- 2) un lato e due angoli;
- 3) i tre lati (purché naturalmente sia rispettata la relazione che ciascun lato sia minore della somma degli altri due)

Nota: se ordiniamo i lati in modo decrescente cioè se per esempio $a \geq b \geq c$ basterà verificare che $a < b + c$ poiché per b e c sarà verificato sicuramente.

Infatti in ognuno di questi casi è possibile costruire, con riga, compasso e goniometro, un unico triangolo.



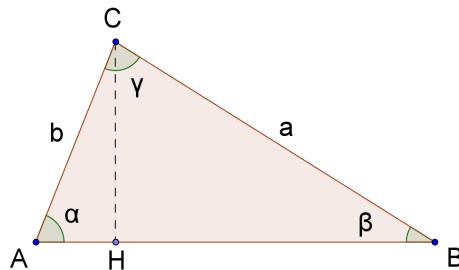
Triangoli qualsiasi

Dimostriamo due teoremi utili per la risoluzione dei triangoli qualsiasi.

Teorema dei seni

In un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ si ha:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Dimostrazione

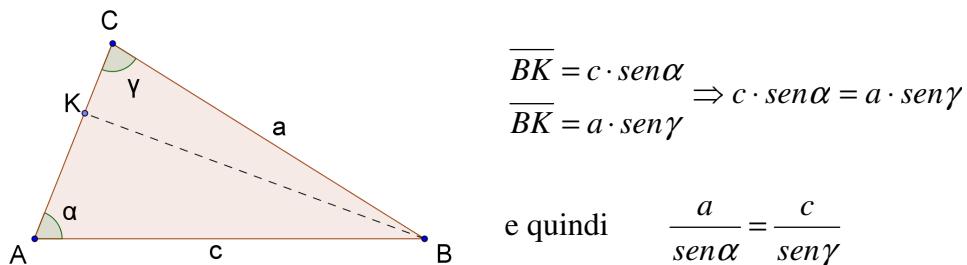
Consideriamo l'altezza CH : possiamo calcolarla in due modi

$$CH = b \cdot \sin \alpha \quad (\text{nel triangolo } \triangle AHC)$$

$$CH = a \cdot \sin \beta \quad (\text{nel triangolo } \triangle CHB)$$

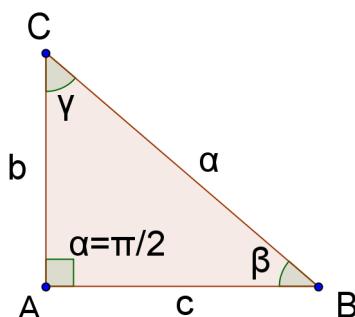
$$\text{e quindi } a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Analogamente tracciando l'altezza BK



$$\text{Quindi avremo che } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Nota: osserviamo che questo teorema vale anche per un triangolo rettangolo. Infatti se per esempio $\alpha = \frac{\pi}{2}$ abbiamo $\sin \alpha = 1$ e $a = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$



Triangoli qualsiasi

Osservazione: possiamo calcolare quanto vale questo rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto?

Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo: i lati a, b, c possono essere considerati corde di questa circonferenza e gli angoli α, β, γ angoli alla circonferenza che insistono su queste. Avevamo dimostrato che:

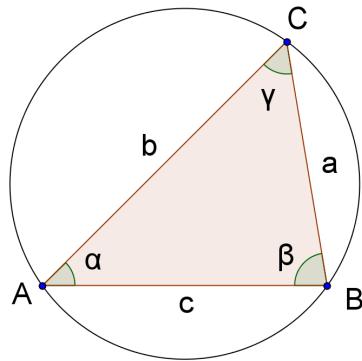
lunghezza corda = *diametro* · *seno* (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda)

e quindi

$$a = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$$

$$b = 2r \cdot \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2R$$

$$c = 2r \cdot \operatorname{sen}\gamma \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

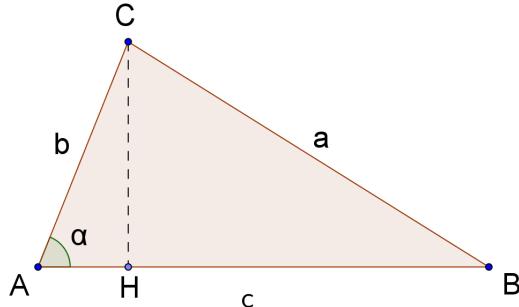


Quindi non solo abbiamo dimostrato che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è sempre lo stesso, per un dato triangolo, ma anche che è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema del coseno

In un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ vale, per ciascun lato, la seguente relazione:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$



cioè il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto tra questi e il coseno dell'angolo compreso.

Dimostrazione

Consideriamo l'altezza CH e il triangolo rettangolo $\triangle ACH$:

avremo $\frac{CH}{AC} = \sin \alpha$
 $\frac{CH}{AH} = \cos \alpha \Rightarrow CH = c - b \cdot \cos \alpha$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle CHB$ abbiamo:

$$\begin{aligned} a^2 &= CH^2 + HB^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \\ a^2 &= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

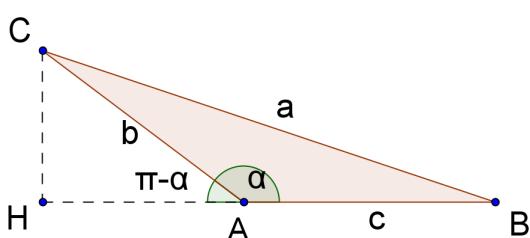
e quindi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Se l'angolo α fosse ottuso avremo:

$$CH = b \cdot \sin(\pi - \alpha) = b \cdot \sin \alpha$$

$$AH = b \cdot \cos(\pi - \alpha) = -b \cdot \cos \alpha$$



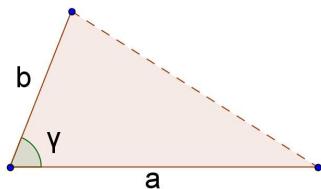
Ma poiché $HB = AH + AB = c - b \cos \alpha$ e quindi si ritrovano i calcoli precedenti.

Nota: se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il teorema si riduce al teorema di Pitagora e per questo viene anche chiamato teorema di Pitagora generalizzato.

Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Riprendiamo la risoluzione di un triangolo.

- 1) Supponiamo di conoscere due lati, per esempio a e b , e l'angolo compreso γ .



Troviamo c con il teorema del coseno:

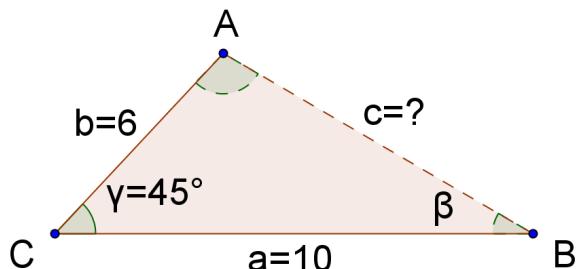
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \Rightarrow c = \dots$$

Troviamo α con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \dots \rightarrow \alpha = \dots$$

Naturalmente $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$

Esempio: $a = 10$ $b = 6$ $\gamma = 45^\circ$



$$c^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c \approx 7,15$$

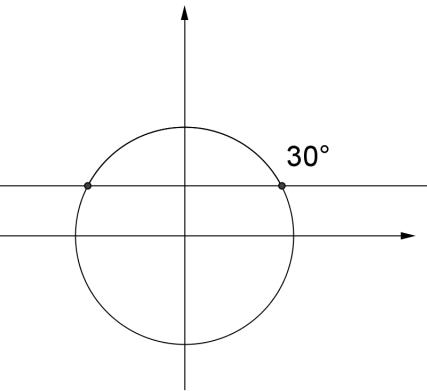
$$\frac{6}{\sin \beta} = \frac{7,15}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \sin \beta \approx 0,59 \Rightarrow \beta \approx 36,4^\circ$$

Di conseguenza $\alpha = 180^\circ - (45^\circ + 36,4^\circ) = 98,6^\circ$

Nota

Quando usiamo la calcolatrice per trovare quale angolo ha un dato seno o un dato coseno (usando il tasto \sin^{-1} o \cos^{-1}) dobbiamo sapere che, per definizione, \sin^{-1} dà come risultati angoli tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (-90° e 90°) e \cos^{-1} dà come risultati angoli tra 0 e π (0 a 180°)

Per esempio se digitiamo $\sin^{-1} 0.5$ otteniamo solo come risultato 30° ed invece sappiamo che anche $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ha lo stesso seno (oltre a tutti gli angoli ottenuti con aggiungendo $2k\pi$).



Così se per esempio nel risolvere un triangolo utilizzando il teorema dei seni troviamo $\sin \alpha = 0.5$ la calcolatrice ci darà solo $\alpha = 30^\circ$ ma non è detto che questo sia il caso dell'angolo del nostro triangolo.

Ricordiamo infatti che in un triangolo con lati diseguali a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

Riprendiamo per esempio il caso del triangolo dell'esempio precedente: risolvendo $\sin \beta \approx 0.59$ la calcolatrice ha fornito $\beta \approx 36.4^\circ$. Prendiamo questo valore (e non $180^\circ - 36.4^\circ$) perché β dovrà essere minore di $\gamma = 45^\circ$ in quanto $b < c$.

Ma se noi avessimo applicato il teorema dei seni per determinare α avremmo avuto:

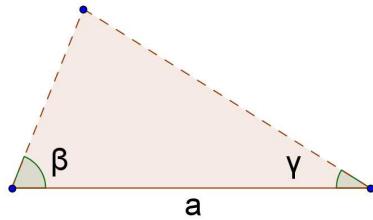
$$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{7.15}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \sin \alpha \approx 0.999$$

e la calcolatrice avrebbe fornito come angolo $\alpha = 81.4^\circ$ che ci avrebbe poi portato a $\beta = 180^\circ - (45^\circ + 81.4^\circ) = 53.6^\circ$ impossibile perché maggiore di 45° .

Quindi in questo caso 81.4° non è il nostro angolo ma dobbiamo prendere $\alpha = 180^\circ - 81.4^\circ = 98.6^\circ$ che infatti ci riporta a $\beta = 180^\circ - (45^\circ + 98.6^\circ) = 36.4^\circ$.

Triangoli qualsiasi

2) Supponiamo di conoscere un lato, per esempio a , e due angoli, per esempio β e γ .



Troviamo b con il teorema dei seni:

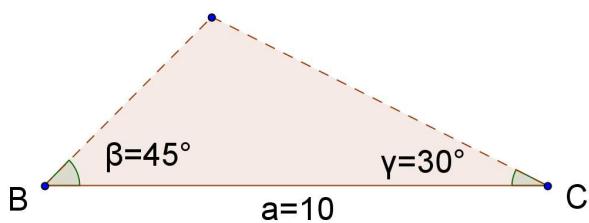
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad * \sin \alpha = \sin(\pi - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow b \dots$$

Analogamente troviamo c .

Naturalmente $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$.

Esempio: $a = 10$ $\beta = 45^\circ$ $\gamma = 30^\circ$



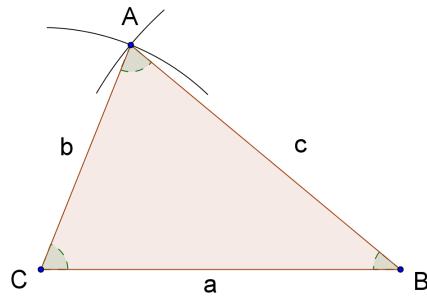
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{3}+1} = \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow b = \frac{20}{\sqrt{3}+1} \approx 7,33$$

$$\begin{aligned} * \sin \alpha &= \sin(\pi - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot \sin \gamma = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{b}{\sin \beta} &= \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c \approx 5,2 \end{aligned}$$

$$\text{Naturalmente } \alpha = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$$

Triangoli qualsiasi

- 3) Supponiamo di conoscere i tre lati a, b, c (ognuno minore della somma degli altri due e maggiore della differenza).



Possiamo applicare il teorema del coseno per trovare un angolo, per esempio α :

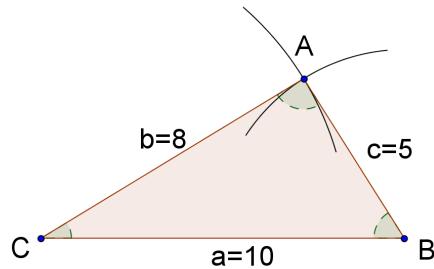
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \dots \Rightarrow \alpha = \dots$$

A questo punto applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \dots \Rightarrow \beta = \dots$$

Infine $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$

Esempio: $a = 10$ $b = 8$ $c = 5$



$$10^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha \approx -0,14 \Rightarrow \alpha \approx 98^\circ$$

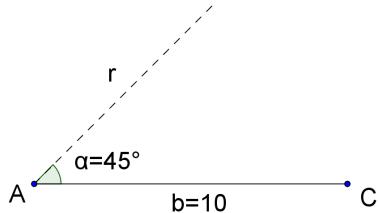
$$\frac{10}{\sin 98^\circ} = \frac{8}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta \approx 0,792 \Rightarrow \beta \approx 52,4^\circ$$

$$\text{Naturalmente } \gamma = 180^\circ - (52,4^\circ + 98^\circ) = 29,6^\circ$$

Problema

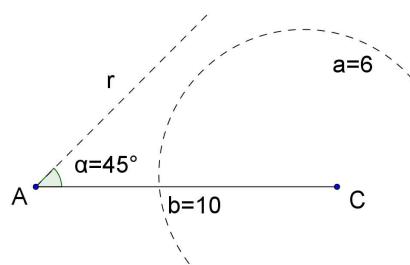
Se conosciamo due lati, per esempio a e b , e l'angolo opposto ad uno di essi, per esempio α , possiamo individuare il triangolo?

Proviamo a disegnare il lato b e l'angolo α considerando per esempio $b=10$ $\alpha=45^\circ$.

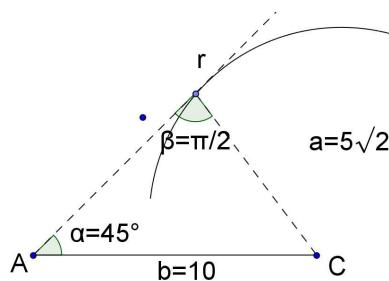


Per tracciare il lato a possiamo puntare il compasso in C con apertura a e ci sono vari casi:

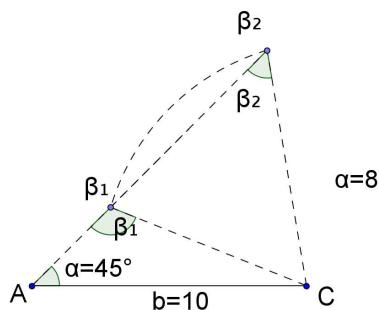
- la circonferenza non interseca la semiretta r e quindi non si ottiene nessun triangolo (per esempio nella figura $a=6$)



- la circonferenza è tangente alla semiretta e quindi si trova un triangolo rettangolo ($\beta = \frac{\pi}{2}$) e in questo caso si ha $a = b \cdot \sin \alpha$ (infatti in figura $a = 10 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$).

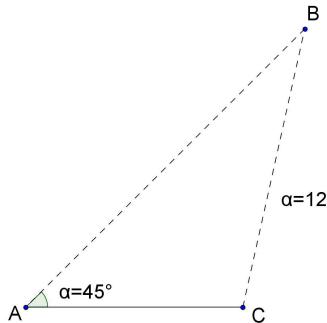


- la circonferenza è secante con la semiretta in due punti e ci sono 2 triangoli (in figura $a = 8$)



Triangoli qualsiasi

- la circonferenza taglia la semiretta in un solo punto (e interseca in un altro punto il suo prolungamento) e quindi trovo 1 triangolo (in figura $a=12$)



Infatti applicando il teorema dei seni ho:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

e quindi abbiamo:

se $\sin \beta > 1$ cioè $a < b \cdot \sin \alpha$ non si trova nessun β ;

se $\sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$ e $a = b \cdot \sin \alpha$ abbiamo 1 triangolo (rettangolo);

se $\sin \beta < 1$ i sono due casi: se $b \cdot \sin \alpha < a < b$ abbiamo due triangoli oppure se $a \geq b$ 1 solo triangolo.

Infatti se per esempio $a=8$ (caso in cui $b \cdot \sin \alpha < a < b$) abbiamo:

$$\frac{\frac{8}{1}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{10}{8\sqrt{2}} (\approx 0,886)$$

$$\beta_1 \approx 62^\circ$$

$$\beta_2 \approx 117,5^\circ$$

abbiamo 2 triangoli

Se invece $a=12$ ($a > b$) abbiamo

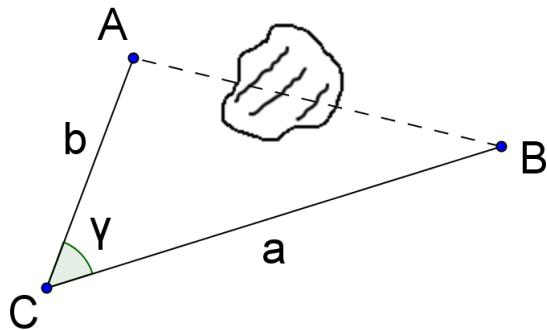
$$\frac{\frac{12}{1}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sin \beta} \rightarrow \sin \beta = \frac{10}{12\sqrt{2}} (\approx 0,59) \rightarrow \beta_1 \approx 36,2^\circ (\beta_2 \approx 143^\circ \text{ non acc.})$$

abbiamo 1 triangolo

Applicazioni

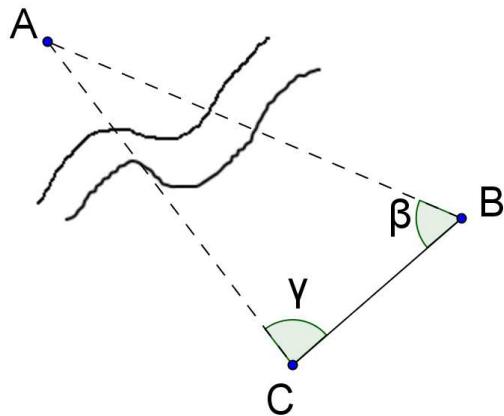
La risoluzione di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi è importante per la topografia.

- 1) Supponiamo per esempio di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo ma entrambi “accessibili”. Posso prendere un 3° punto C, misurare $\overline{AC}, \overline{BC}$ e l’angolo γ .



Quindi conosco, del triangolo $\triangle ABC$, 2 lati e l’angolo compreso. Posso determinare $\overline{AB} = c$.

- 2) Supponiamo di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo e di cui solo un punto sia “accessibile” (B). Posso fissare un terzo punto C, misurare \overline{BC} e gli angoli β e γ .



Quindi conosco, nel triangolo $\triangle ABC$, un lato e i due angoli adiacenti. Il triangolo si può “risolvere” e posso determinare \overline{AB} .

PROBLEMI
TRIANGOLI QUALSIASI

1) Risovi e costruisci con riga, compasso e goniometro oppure con il software Geogebra i seguenti triangoli:

a. $a = 8 \quad b = 4 \quad \gamma = 30^\circ \quad [c \cong 5 \quad \alpha \cong 126,9^\circ \quad \beta \cong 23,1^\circ]$

b. $a = 8 \quad \beta = 60^\circ \quad \gamma = 45^\circ \quad [b \cong 7,2 \quad c \cong 5,9 \quad \alpha \cong 75^\circ]$

c. $a = 5 \quad b = 10 \quad c = 9 \quad [\alpha = 29,9^\circ \quad \beta = 85,5^\circ \quad \gamma = 64,6^\circ]$

d. $a = 8 \quad b = 5 \quad \gamma = 60^\circ \quad [c = 7 \quad \alpha \cong 81,3^\circ \quad \beta \cong 38,7^\circ]$

e. $a = 5 \quad \beta = 45^\circ \quad \gamma = 30^\circ \quad [b \cong 3,7 \quad c \cong 2,6 \quad \alpha \cong 105^\circ]$

f. $a = 8 \quad b = 10 \quad c = 5 \quad [\alpha \cong 52,4^\circ \quad \beta \cong 98^\circ \quad \gamma = 29,6^\circ]$

g. $a = 10 \quad b = 12 \quad \gamma = 30^\circ \quad [c \cong 6 \quad \alpha \cong 56,4^\circ \quad \beta \cong 93,6^\circ]$

2) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma sono entrambi accessibili. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{AC} = 48$ metri, $\overline{BC} = 40$ metri e $\hat{A}CB = 40^\circ$. Determina \overline{AB} .

$[\overline{AB} \cong 31 \text{ metri}]$

3) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma solo B è accessibile. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{BC} = 100$ metri, $\hat{A}BC = 50^\circ$, $\hat{A}CB = 70^\circ$. Determina \overline{AB} .

$[\overline{AB} \cong 108,5 \text{ metri}]$

4) Si può costruire un triangolo con $b=10$, $\alpha = 60^\circ$ e $a = 8$?

[no]

5) Fissati $b=10$ e $\alpha = 60^\circ$ qual è il minimo valore di a per cui si può costruire un triangolo? Come risulta il triangolo?

$[a = 5\sqrt{3}]$

6) Risovi il triangolo con $b=10$, $\alpha = 60^\circ$, $a=9$.

$$\begin{cases} c_1 \cong 7,5 & \beta_1 \cong 74^\circ & \gamma_1 = 46^\circ \\ c_2 \cong 2,5 & \beta_2 \cong 106^\circ & \gamma_2 = 14^\circ \end{cases}$$

Triangoli qualsiasi

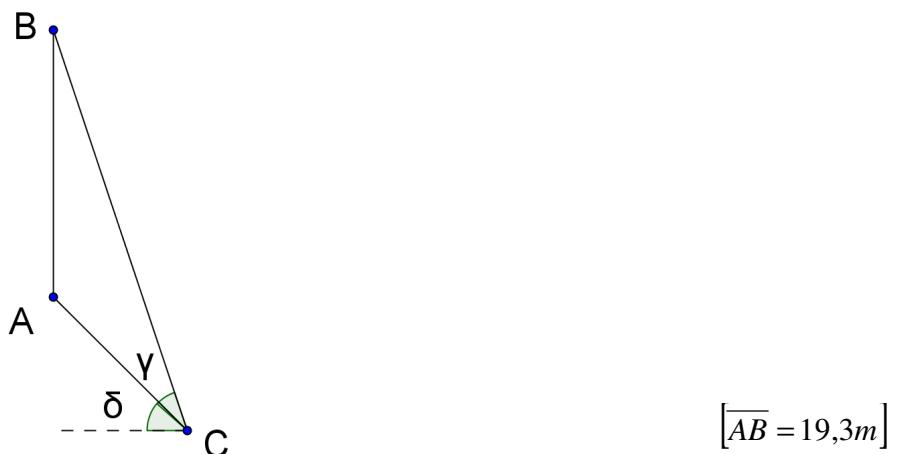
7) Risolvi il triangolo con $b=10$, $\alpha = 60^\circ$, $a=10$.

$$[\text{triangolo equilatero } c=10, \beta = \gamma = 60^\circ]$$

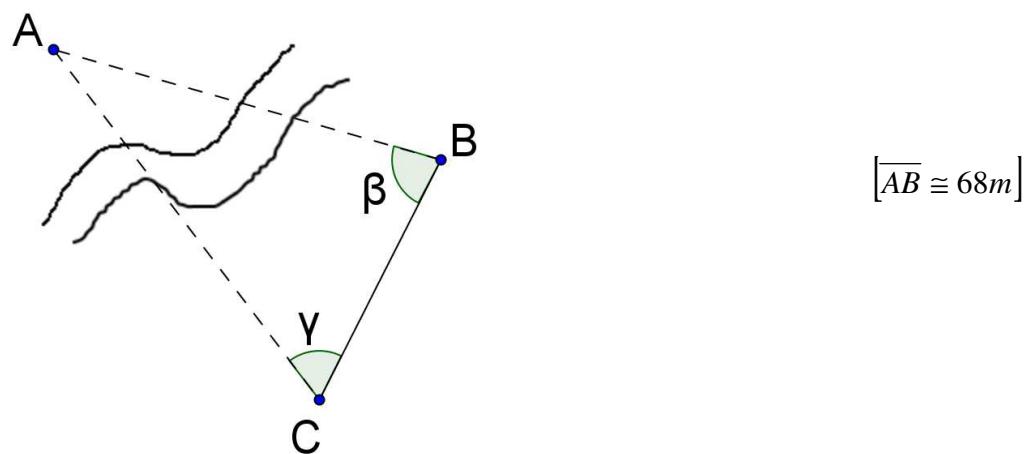
8) Risolvi il triangolo con $b = 10$ $\alpha = 60^\circ$ $a = 12$ e disegnalo.

$$[c \cong 13,3 \quad \beta \cong 46^\circ \quad \gamma \cong 74^\circ]$$

9) Una torre AB si trova su un pendio: determina \overline{AB} sapendo che $AC=10m$, $\gamma = 30^\circ$, $\delta = 45^\circ$.



10) Due punti A e B si trovano sulle rive opposte di un fiume. Prendendo un punto C dalla parte B si misura $\overline{BC} = 50m$ $\beta = 76^\circ$ $\gamma = 63^\circ$. Determina \overline{AB} .



**SCHEMA DI VERIFICA
TRIANGOLI QUALSIASI**

- 1) In un triangolo si ha $a = 10$ $\beta = 45^\circ$ $\gamma = 60^\circ$. Disegna il triangolo con riga e compasso e determina gli elementi mancanti.

$$[b \approx 7,32; c \approx 8,97; \alpha = 75^\circ]$$

- 2) Sapendo che $a = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ il triangolo è univocamente determinato? Risovi e disegna.

$$[c_1 = 10 \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad c_2 = 5 \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}\pi \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{6}]$$

- 3) Determina la distanza \overline{AB} tra due punti entrambi accessibili sapendo che, preso un terzo punto C, $\overline{BC} = 50m$, $\overline{AC} = 30m$, $\tan \hat{A}CB = \frac{3}{4}$.

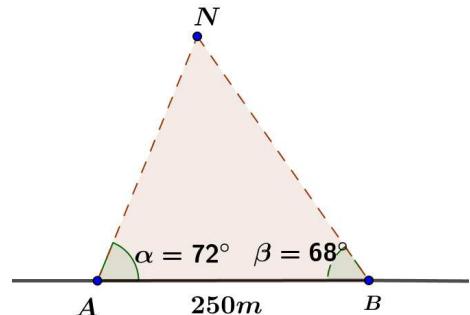
$$[\overline{AB} \approx 31,62m]$$

- 4) Risovi il triangolo avente $a = 4$ $b = \frac{5}{2}$ $c = 5$ e disegnalo.

$$[\alpha \approx 52,44^\circ, \beta \approx 29,7^\circ, \gamma \approx 97,86^\circ]$$

- 5) Come potresti misurare l'altezza di una torre \overline{AB} nel caso in cui la base A della torre non si possa raggiungere (si dice base inaccessibile) ma si trovi comunque su un terreno pianeggiante? (suggerimento: fissa un segmento \overline{CD} sul piano orizzontale dove si trova la base A della torre e "traguarda" dai suoi estremi la cima della torre....).

- 6) Una nave N si trova a distanza d dalla costa (rettilinea): se da un osservatore sulla costa viene misurato $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 68^\circ$ e $\overline{AB} = 250m$ (vedi figura), determina la distanza d della nave dalla costa.



$$[d \approx 343m]$$

- 7) Dimostra che l'area di un quadrilatero si può calcolare con la seguente formula

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

dove d_1 e d_2 sono la lunghezza delle diagonali e α è uno degli angoli formati dalle diagonali (è indifferente quale angolo si consideri).

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE E TRIANGOLI QUALSIASI

I) Risovi le seguenti disequazioni goniometriche

1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$
2. $\operatorname{tg}^2 x - 3 \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$
3. $\operatorname{sen}x - \sqrt{3}\cos x < \sqrt{3}$ $\left[-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right]$
4. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{3}\operatorname{sen}x - \cos x} > 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right]$
5. $2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}2x > 1$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi \right]$

II) Risovi i seguenti problemi:

- 1) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $AC = 50m$, $BC = 70m$, $\cos \hat{ACB} = \frac{1}{2}$. Determina \overline{AB} .
 $\left[\overline{AB} = 62,5m \right]$
- 2) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo una posizione C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 12Km$, $\hat{CBA} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}(\hat{ACB}) = 2$, determina \overline{AB} .
 $\left[\overline{AB} \cong 12,96 \text{ km} \right]$
- 3) Determina e disegna il triangolo (o i triangoli) aventi, usando le consuete convenzioni, $a = 6$, $b = 5$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
 $\left[\beta \cong 46,2^\circ, \quad \gamma \cong 73,8^\circ, \quad c \cong 6,65 \right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
TRIANGOLO RETTANGOLO E TRIANGOLI QUAISIASI

- 1) In un triangolo isoscele ABC, la base $\overline{AB} = 10a$ e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = \hat{ABC}$). Determina perimetro e area del triangolo ABC.

$$\left[2p = \frac{80}{3}a; \quad A = \frac{100}{3}a^2 \right]$$

- 2) In un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ si ha $\tg \alpha = 3$ ($\alpha = \hat{ABC}$). Determina perimetro e area del triangolo.

$$\left[2p = 2 \cdot (1 + \sqrt{10})a; \quad A = 3a^2 \right]$$

- 3) In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo misura l , la base minore $\overline{CD} = 2l$ e $\sen \alpha = \frac{3}{5}$ (α = angolo adiacente alla base maggiore). Determina perimetro e area del trapezio.

$$\left[2p = \frac{38}{5}l; \quad A = \frac{42}{25}l^2 \right]$$

- 4) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $\overline{AC} = 30 \text{ m}$; $\overline{BC} = 25 \text{ m}$; $\cos(\hat{ACB}) = \frac{1}{3}$. Determina \overline{AB} .

$$\left[\overline{AB} \approx 32 \text{ m} \right]$$

- 5) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo un punto C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 40 \text{ m}$; $\hat{CBA} = \frac{\pi}{4}$; $\tg(\hat{ACB}) = 2$, determina \overline{AB} .

$$\left[\overline{AB} \approx 37,6 \text{ m} \right]$$

- 6) Considera un triangolo ABC in cui $\overline{BC} = 10$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$. Determina perimetro e area.

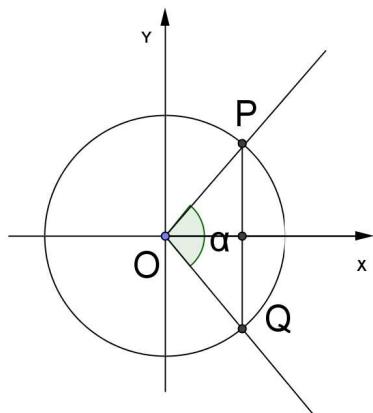
$$\left[2p = 20 + 10\sqrt{3}; \quad A = 25\sqrt{3} \right]$$

Complementi di trigonometria

Breve storia delle funzioni goniometriche

Lo studio della trigonometria nasce con gli **astronomi della scuola di Alessandria di Egitto** ed infatti la prima ad essere sviluppata fu la trigonometria sferica cioè lo studio dei triangoli sferici (tracciati sulla superficie di una sfera e i cui lati sono archi di cerchio).

Il fondatore della trigonometria è considerato **Ipparco da Rodi** (II sec a.C.) che visse ad Alessandria ma la maggior parte delle notizie sui metodi trigonometrici alessandrini ci vengono dal massimo astronomo dell'antichità, **Tolomeo** (II sec d.C.) che scrisse "Composizione matematica" mutata poi in "Grande Composizione" e chiamata infine *Almagesto* (nome arabo che deriva dal greco *μεγιστη*, il massimo) in cui pose le basi della teoria astronomica.



Nella trigonometria alessandrina invece di utilizzare il seno di un angolo, così come l'abbiamo definito, si usava la funzione "corda" $c(\alpha)$

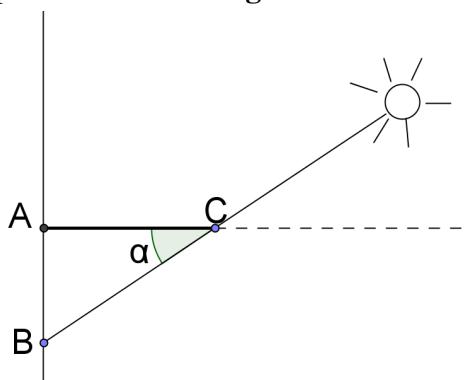
$$c(\alpha) = \overline{PQ} \quad (\text{corda sottesa dall'angolo } \alpha)$$

$$(\text{praticamente } \overline{PQ} = 2 \sin \frac{\alpha}{2})$$

Il seno come lo definiamo attualmente fu introdotto in **India** e furono calcolati i seni degli angoli (tavola dei seni) intorno al V sec. d.C.

Furono sempre gli astronomi indiani ad introdurre il **coseno** definito come seno dell'angolo complementare e la **tangente** definita come l'ombra che un'asta infissa perpendicolarmente su un

muro verticale (gnomon) e di lunghezza 1, proietta sul muro per una data altezza del sole sull'orizzonte (angolo α) (si tradusse in latino con "umbra versa"**). Il termine tangente fu introdotto solo nel 1600.

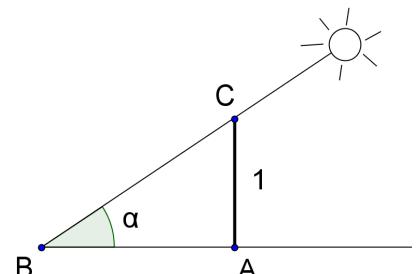


$$\overline{AC} = 1$$

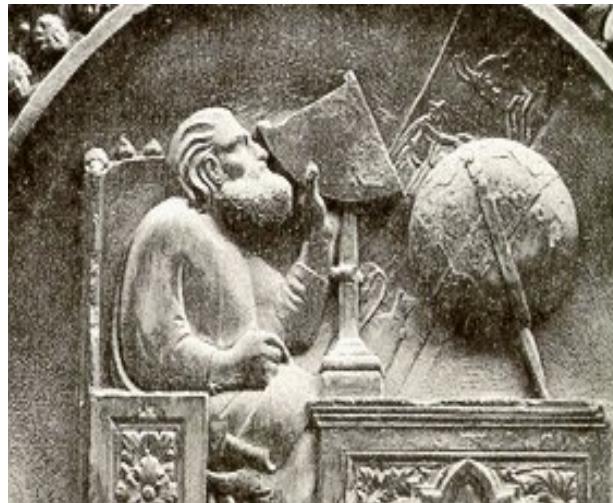
$$\overline{AB} = \tan \alpha$$

La cotangente (tangente dell'angolo complementare) era definita come l'ombra proiettata da un orologio orizzontale ("umbra recta")

$$\overline{AB} = \cot \alpha$$



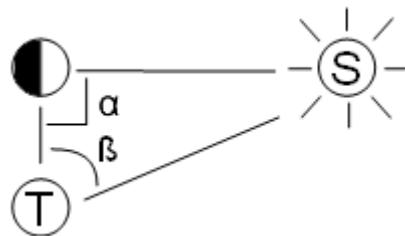
Trigonometria e astronomia



Aristarco e le distanze Terra-Sole e Terra-Luna

E' stato l'astronomo greco **Aristarco** a studiare questo problema: nell'unica sua opera a noi pervenuta, cioè il breve trattato *Sulle dimensioni e distanze del Sole e della Luna*, ha cercato di confrontare la distanza Terra-Luna e la distanza Terra-Sole.

Quando la luna è in quadratura, ossia è illuminata per metà, essa, con la Terra e il Sole, forma il triangolo rettangolo mostrato in figura ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). Misurando in tale condizione l'angolo β compreso tra la direzione Terra-Luna e la direzione Terra-Sole è possibile calcolare il rapporto tra il cateto e l'ipotenusa di un triangolo simile.



Terra, Luna e Sole durante una quadratura

Aristarco stimò l'angolo $\beta = 87^\circ$ (di conseguenza $\hat{L}ST = 3^\circ$) e stimò il rapporto tra la distanza Terra-Luna e Terra-Sole (il nostro $\text{sen}3^\circ$) come compreso tra $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{18}$: quindi il Sole risultava circa 20 volte più lontano della Luna rispetto alla Terra.

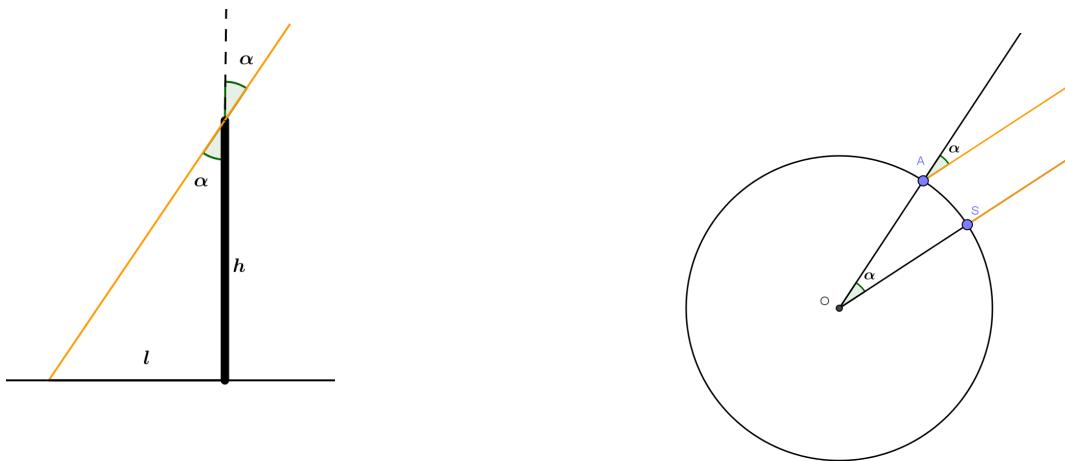
In realtà l'angolo $\beta = 89^\circ 50'$ e quindi la distanza Terra-Sole è circa 400 volte la distanza Terra-Luna, ma il metodo di Aristarco è comunque uno dei primi esempi di un metodo trigonometrico applicato per la risoluzione di un problema astronomico.

Eratostene e la misura del raggio terrestre

Il matematico, geografo ed astronomo Eratostene (III secolo a.C.), era direttore della grande biblioteca di Alessandria d'Egitto quando formulò il metodo per calcolare le dimensioni della Terra. Dai suoi studi, era venuto a conoscenza del fatto che a Syene (l'attuale Assuan), a mezzogiorno del solstizio d'estate, il Sole si trovava proprio sullo zenith, tanto che il fondo di un pozzo profondo ne veniva illuminato, perciò un bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante non avrebbe proiettato alcuna ombra in terra. Invece ad Alessandria questo non succedeva mai, gli obelischi proiettavano comunque la loro ombra sul terreno.

Eratostene perciò, per procedere con i suoi calcoli, ipotizzò la Terra perfettamente sferica ed il Sole sufficientemente distante da considerare paralleli i raggi che la investono. Inoltre assunse che Alessandria e Syene si trovassero sullo stesso meridiano.

Durante il solstizio d'estate calcolò l'angolo di elevazione del Sole ad Alessandria, misurando l'ombra proiettata proprio da un bastone piantato in terra.



Indicando con:

- h : lunghezza del palo
- l : lunghezza dell'ombra proiettata dal palo sul terreno
- α : angolo di elevazione del Sole

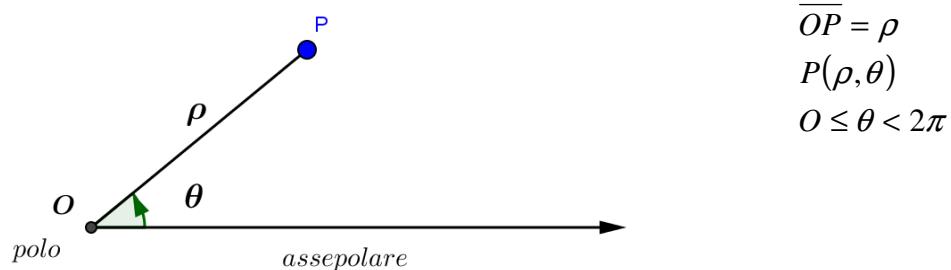
dalla misura di h e l Eratostene ricavò α che risultò circa 1/50 di angolo giro cioè $7^\circ 12'$.

Quindi anche la distanza tra le due città (che era stimata 5000 stadia e che corrisponde a circa 800 Km) doveva essere 1/50 della circonferenza terrestre che quindi risultava essere 250000 stadia cioè circa 40000 Km, valore straordinariamente vicino a quello ottenuto con metodi moderni (40.075 km).

Una volta stabilito un valore per essa, il raggio terrestre si ricavava dalla nota relazione che lega la circonferenza ed il suo raggio.

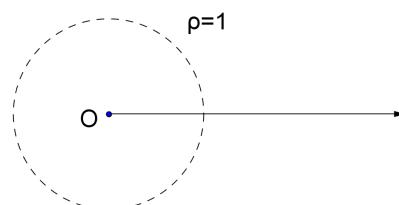
Le coordinate polari

Se nel piano fissiamo una semiretta di origine O (orientata) possiamo individuare la posizione di un qualsiasi punto P indicando la sua distanza da O e l'angolo orientato θ formato tra la semiretta fissata e la semiretta OP.

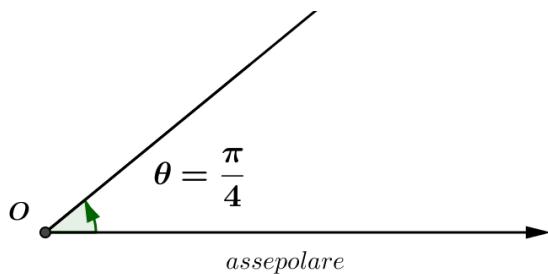


La semiretta si chiama asse polare, O si dice polo e si parla di sistema di riferimento polare.
 (ρ, θ) si dicono le coordinate polari di P: ρ si chiama modulo e θ si chiama argomento.

Se scriviamo $\rho = 1$ questa risulta, in coordinate polari, l'equazione della circonferenza di centro il polo O e raggio $r = 1$ poiché tutti i suoi punti hanno distanza $\rho = 1$.

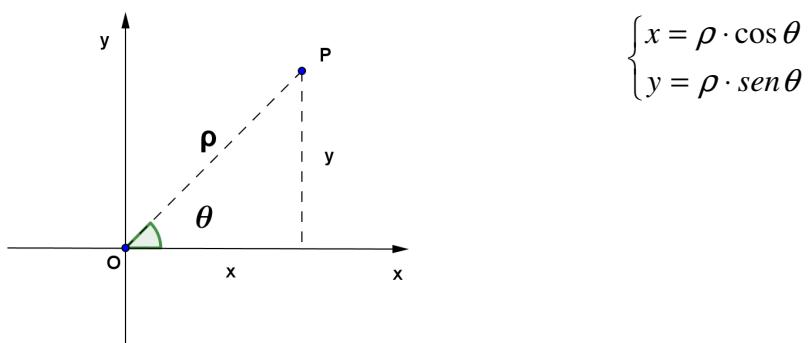


Se scriviamo $\theta = \frac{\pi}{4}$ avremo la semiretta in figura:



Nota

Possiamo passare da coordinate polari a coordinate cartesiane osservando:



Le trasformazioni geometriche



Definizione

Una trasformazione geometrica dei punti del piano è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano: ad ogni punto P del piano corrisponde uno e un solo punto P' del piano e viceversa.

Studieremo alcune importanti trasformazioni geometriche quali **isometrie** e **similitudini**.

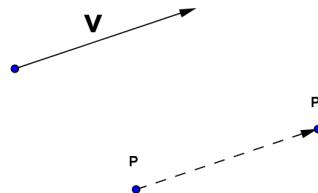
Isometrie (o movimenti rigidi)

Le isometrie (*ισο = uguale* , *μετρία = misura*) sono le trasformazioni geometriche che conservano la distanza tra i punti cioè se A e B sono una qualunque coppia di punti del piano e A' e B' sono le loro immagini (i punti trasformati di A e B) allora si ha che

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

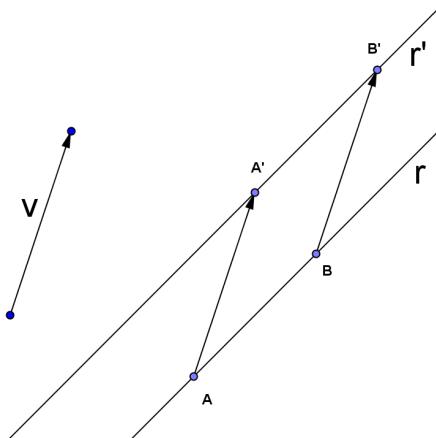
Traslazione

E' l'isometria in cui, fissato un vettore \vec{v} , tutti i punti del piano si spostano secondo il vettore \vec{v} (vedi figura).

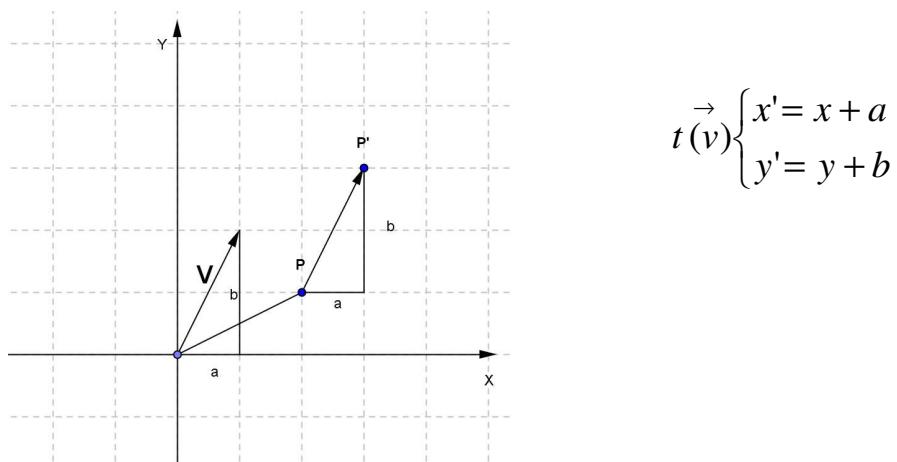


Indicheremo la traslazione di vettore \vec{v} con il simbolo $t(\vec{v})$.

Si può facilmente dimostrare che se una retta r si trasforma in r' si ha che $r \parallel r'$.



Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, possiamo anche determinare l'*equazione della traslazione* di vettore $\vec{v}(a,b)$ (a e b coordinate di \vec{v} considerando il suo primo estremo nell'origine): si osserva che $P(x,y) \rightarrow P'(x+a, y+b)$ e quindi possiamo scrivere



Traslazione di una curva di equazione assegnata

Come possiamo trovare l'equazione di una curva di data equazione traslata secondo una traslazione $\vec{t}(v)$?

Esempio

Consideriamo per esempio la retta $r : y = 2x + 1$ e la traslazione $t(3,1)$.

Sappiamo quindi che le equazioni della traslazione sono

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

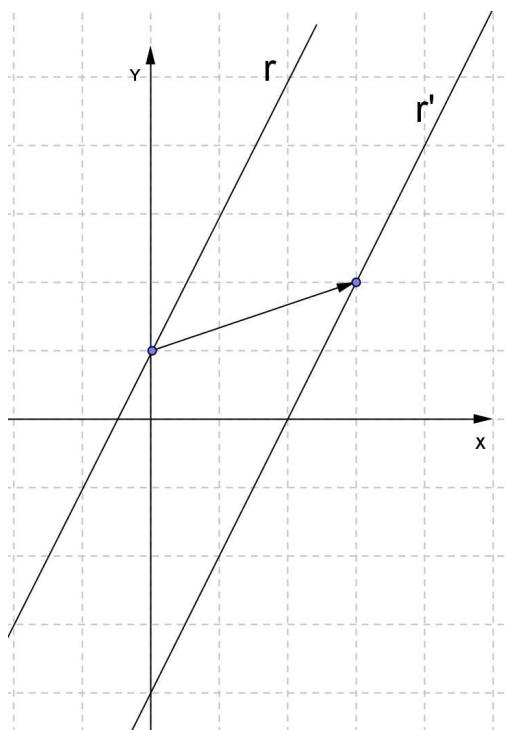
Per poter scrivere l'equazione di r' occorre ricavare x e y dalle equazioni della traslazione e sostituire nell'equazione di r .

Abbiamo

$$\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Sostituendo: $y' - 1 = 2 \cdot (x' - 3) + 1 \Rightarrow y' = 2x' - 4$

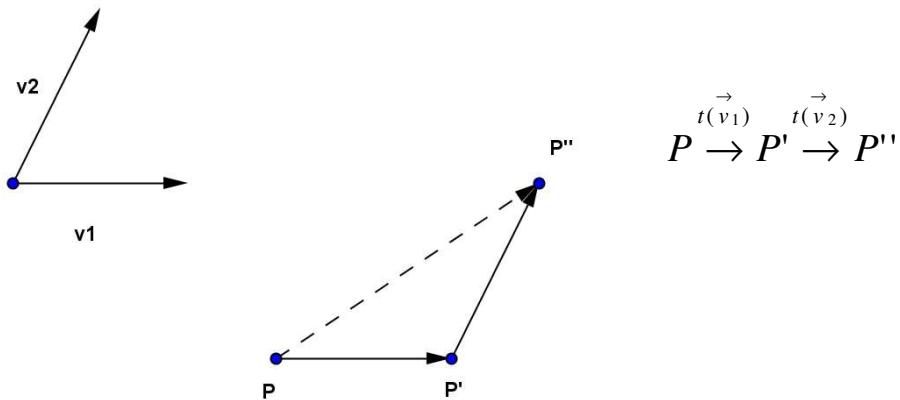
Se poi chiamiamo di nuovo x e y le coordinate abbiamo che l'equazione di r' risulta $y = 2x - 4$ (come si può verificare dal disegno).



Composizione di traslazioni

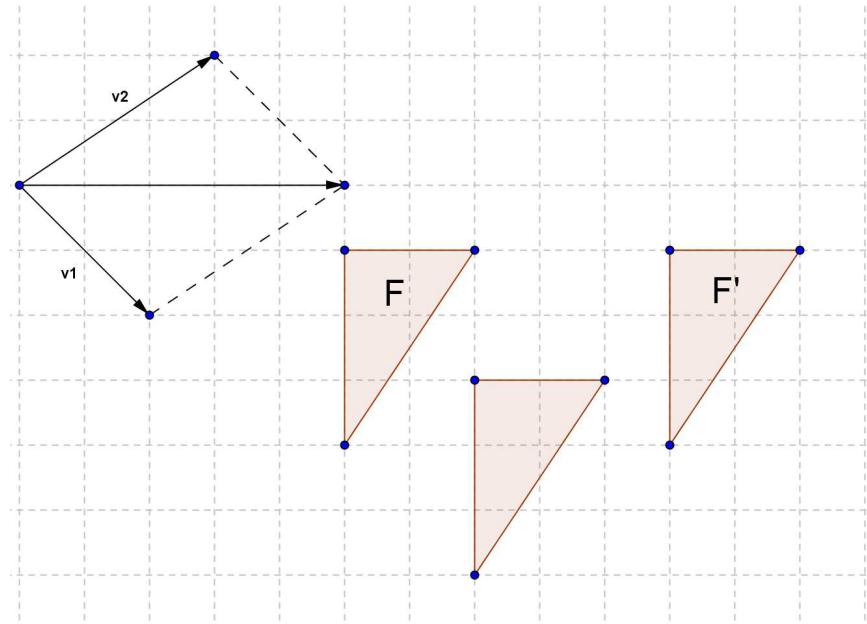
Comporre due trasformazioni significa farle agire “in successione” .

In particolare se P è un punto del piano e $t(\vec{v}_1)$, $t(\vec{v}_2)$ sono due traslazioni di vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , la composizione $t(\vec{v}_2) \circ t(\vec{v}_1)$ agirà così:



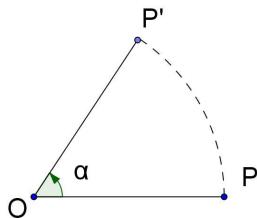
Attenzione: quando si scrive $t(\vec{v}_2) \circ t(\vec{v}_1)$ si intende che agisca prima $t(\vec{v}_1)$: in questo caso però non cambia niente se faccio $t(\vec{v}_1) \circ t(\vec{v}_2)$ e si dice che la composizioni di traslazioni gode della proprietà commutativa.

Come risulta la trasformazione $t(\vec{v}_2) \circ t(\vec{v}_1)$? (vedi scheda relativa del laboratorio di informatica)



Rotazione

Una rotazione è individuata dal centro di rotazione O e dall'ampiezza dell'angolo (orientato) α della rotazione: la indicheremo con $R(O, \alpha)$.

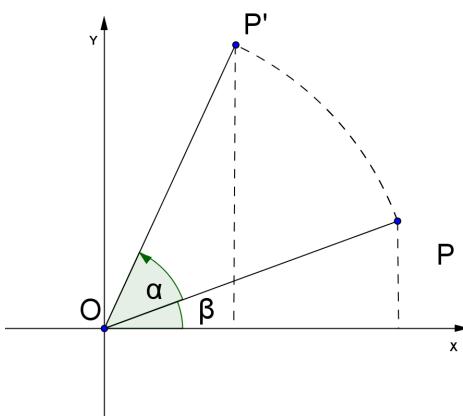


Nel caso della rotazione esiste un punto del piano che viene trasformato in se stesso (il centro di rotazione) e viene detto punto “**unito**”. Osserviamo invece che nella traslazione $t(\vec{v})$ non c’è nessun punto unito. Si può dimostrare che se $r \rightarrow r'$ le rette r e r' formano un angolo uguale ad α .

I) Rotazione con centro coincidente con l’origine del sistema di riferimento

Ricaviamo l’equazione della rotazione $R(O, \alpha)$ (O = origine del sistema di riferimento).

Osservando la figura si ha:



$$\begin{cases} x' = \overline{OP'} \cdot \cos(\alpha + \beta) = \overline{OP} \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = (\overline{OP} \cdot \cos \beta) \cdot \cos \alpha - (\overline{OP} \cdot \sin \beta) \cdot \sin \alpha \\ y' = \overline{OP'} \cdot \sin(\alpha + \beta) = \overline{OP} \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) = (\overline{OP} \cdot \cos \beta) \cdot \sin \alpha + (\overline{OP} \cdot \sin \beta) \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Ma $x = \overline{OP} \cdot \cos \beta$ e quindi
 $y = \overline{OP} \cdot \sin \beta$

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

All’equazione della rotazione $R(O, \alpha)$ si può quindi associare la “matrice” $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Esempi

1) La rotazione di $\alpha = \frac{\pi}{2}$ intorno all'origine del sistema di riferimento risulta:

$$R\left(O; \frac{\pi}{2}\right) \begin{cases} x' = x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - y \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ y' = x \cdot \sin \frac{\pi}{2} + y \cdot \cos \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

2) La rotazione di $\alpha = \pi$ intorno all'origine del sistema di riferimento risulta:

$$R(O; \pi) \begin{cases} x' = x \cdot \cos \pi - y \cdot \sin \pi \\ y' = x \cdot \sin \pi + y \cdot \cos \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

3) Le equazioni della rotazione di centro O e angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sono:

$$R(O, \frac{\pi}{4}) \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}$$

Problema

Come si ottiene l'equazione di una curva ruotata secondo una data rotazione $R(O, \alpha)$?

Consideriamo per esempio l'**iperbole** $x^2 - y^2 = 1$ e applichiamo la rotazione $R(O, \frac{\pi}{4})$.

Abbiamo visto che le equazioni della rotazione $R(O, \frac{\pi}{4})$ sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}$$

Ma per ottenere l'equazione dell'iperbole ruotata dobbiamo ricavare la x e la y (come abbiamo fatto nell'esempio della traslazione).

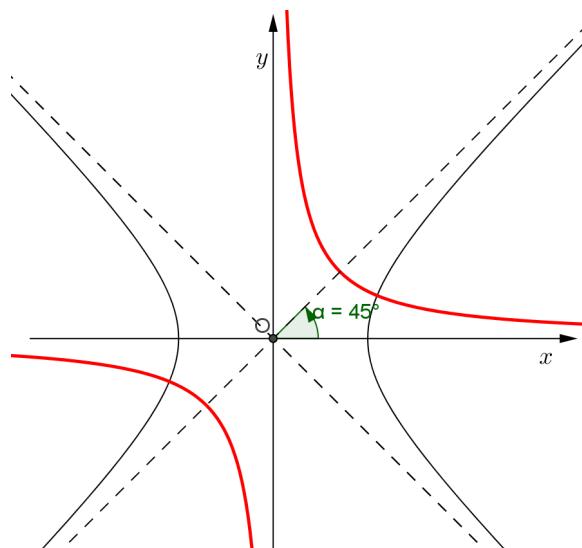
Per evitare di fare questi calcoli, possiamo pensare che la trasformazione che porta $P'(x', y') \rightarrow P(x, y)$ è la trasformazione “inversa” cioè la rotazione $R(O, -\frac{\pi}{4})$ e che ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} x = \cos(-\frac{\pi}{4})x' - \sin(\frac{\pi}{4})y' \\ y = \sin(\frac{\pi}{4})x' + \cos(-\frac{\pi}{4})y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x') \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $x^2 - y^2 = 1$ ed otteniamo:

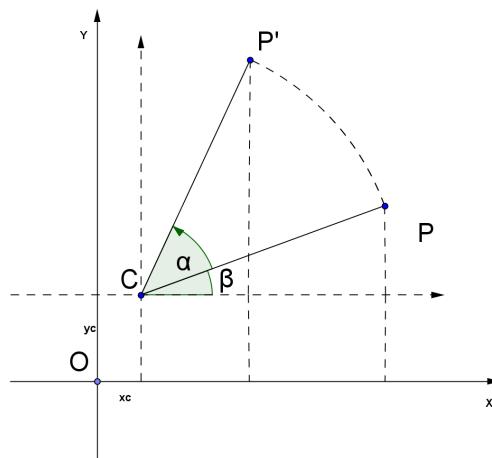
$$\frac{1}{2} \cdot (x' + y')^2 - \frac{1}{2} \cdot (y' - x')^2 = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x' \cdot y' = \frac{1}{2}$$

Quindi l'equazione dell'iperbole ruotata risulta $x \cdot y = \frac{1}{2}$.



II) Rotazione con centro diverso dall'origine del sistema di riferimento

Se il centro C della rotazione è diverso dall'origine O del sistema di riferimento, basta considerare che rispetto ad un sistema di riferimento di origine C le coordinate di P sarebbero $x - x_C$ e $y - y_C$ e le coordinate di P' $x' - x_C$ e $y' - y_C$ e quindi avremo:



$$\begin{cases} x' - x_C = (x - x_C) \cdot \cos \alpha - (y - y_C) \cdot \sin \alpha \\ y' - y_C = (x - x_C) \cdot \sin \alpha + (y - y_C) \cdot \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = (x - x_C) \cdot \cos \alpha - (y - y_C) \cdot \sin \alpha + x_C \\ y' = (x - x_C) \cdot \sin \alpha + (y - y_C) \cdot \cos \alpha + y_C \end{cases}$$

e sviluppando

$$(*) R(C, \alpha) \begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + p \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + q \end{cases}$$

NOTA

Per determinare le coordinate del centro della rotazione avente le equazioni (*) dobbiamo ricercare il "punto fisso".

Esempio: determinare centro e angolo della rotazione avente equazioni

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

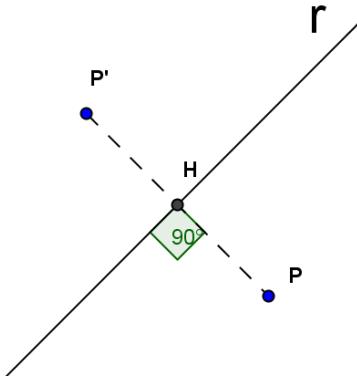
Osservando le equazioni abbiamo che $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Per trovare il centro C ricerchiamo il "punto fisso" cioè risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} -y + 1 = x \\ x + 2 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y + 1 \\ -y + 1 + 2 = y \rightarrow 2y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Simmetria assiale

La simmetria rispetto ad una retta r (asse della simmetria) (e che indicheremo con S_r) trasforma tutti i punti come mostrato in figura con $\overline{PH} = \overline{P'H}$.



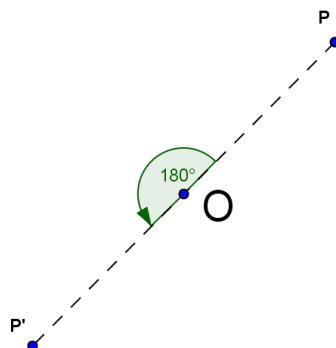
Tutti i punti della retta r sono fissi (punti “uniti”).

Osservazione: componendo una simmetria assiale con se stessa si trova la situazione iniziale (si dice che si ottiene la trasformazione identica indica con id):

$$S_r \circ S_r = id$$

Nota

La rotazione di centro O e angolo $\alpha = 180^\circ$ viene anche detta **simmetria centrale** (di centro O) ed ha la stessa proprietà della simmetria assiale cioè $R(O,180^\circ) \circ R(O,180^\circ) = id$.



Composizione di due simmetrie assiali

E’ facile verificare che componendo **due simmetrie assiali con assi paralleli** si ottiene una **traslazione** di vettore perpendicolare alle rette e di modulo doppio della distanza tra le rette, mentre componendo **due simmetrie assiali con assi incidenti** si ottiene una **rotazione** intorno al punto di intersezione delle due rette e di angolo doppio dell’angolo formato dalle due rette.(vedi Appunti 1).

Nota: è importante l’ordine in cui si eseguono le trasformazioni: infatti se per esempio $S_{r_2} \circ S_{r_1}$ dà una data traslazione , $S_{r_1} \circ S_{r_2}$ dà la traslazione opposta.

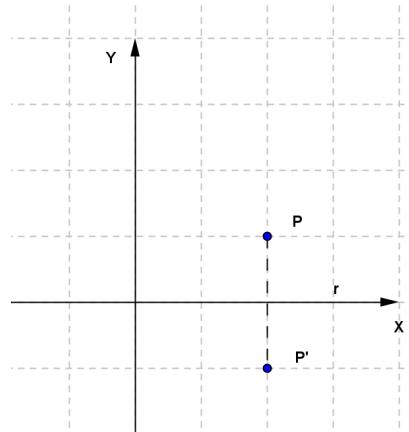
Le trasformazioni geometriche

Vediamo come risulta nel piano cartesiano l'equazione della simmetria assiale rispetto alla retta r .

Vediamo solo alcuni semplici casi.

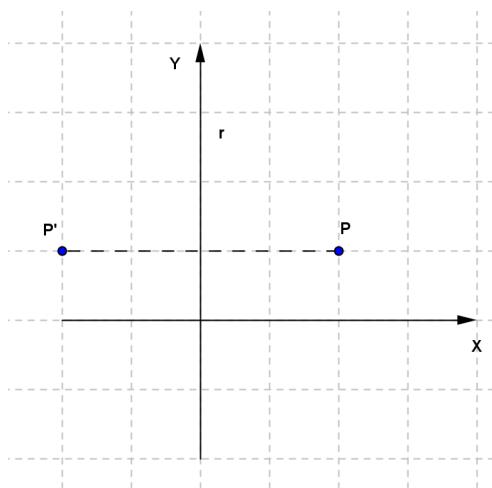
a) Se r coincide con l'asse x le equazioni sono chiaramente le seguenti

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



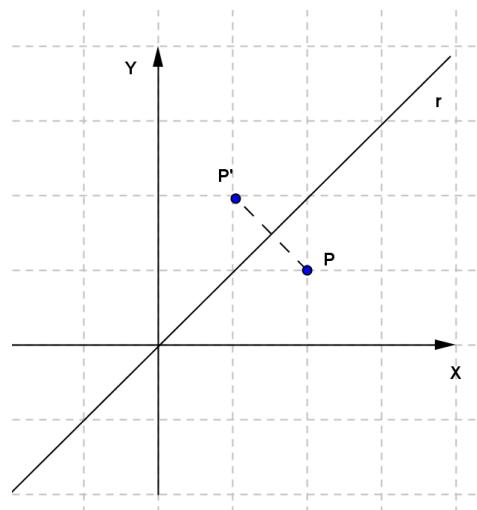
b) Se r coincide con l'asse y le equazioni sono chiaramente le seguenti

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



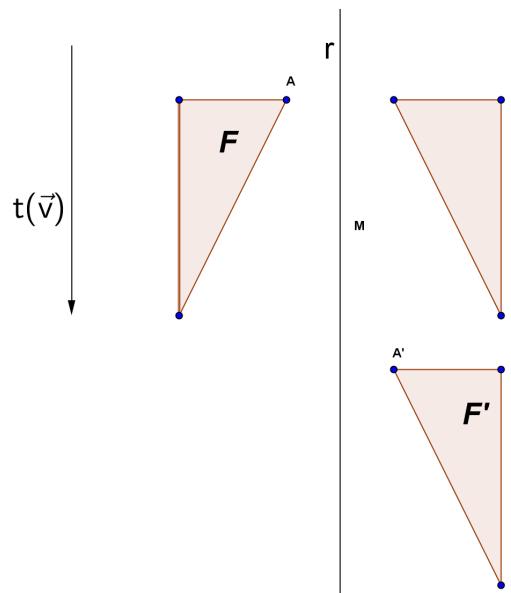
c) Se r coincide con la bisettrice del primo e terzo quadrante le equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



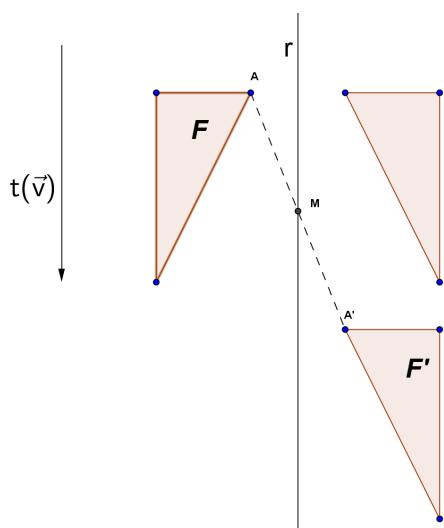
Glissosimmetria

Consideriamo la composizione di una simmetria assiale con una traslazione di vettore parallelo all'asse di simmetria: questa isometria viene chiamata “simmetria con scorrimento” o **“glissosimmetria”** da francese significa scivolare.



Osservazioni

Osserviamo che l'ordine in cui si applica simmetria e traslazione è indifferente e che il punto medio di due punti corrispondenti appartiene all'asse di simmetria.



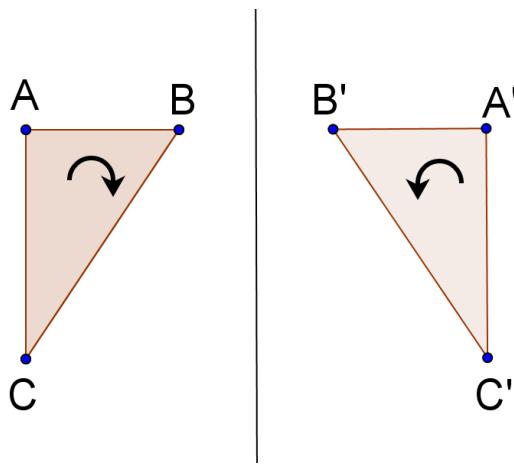
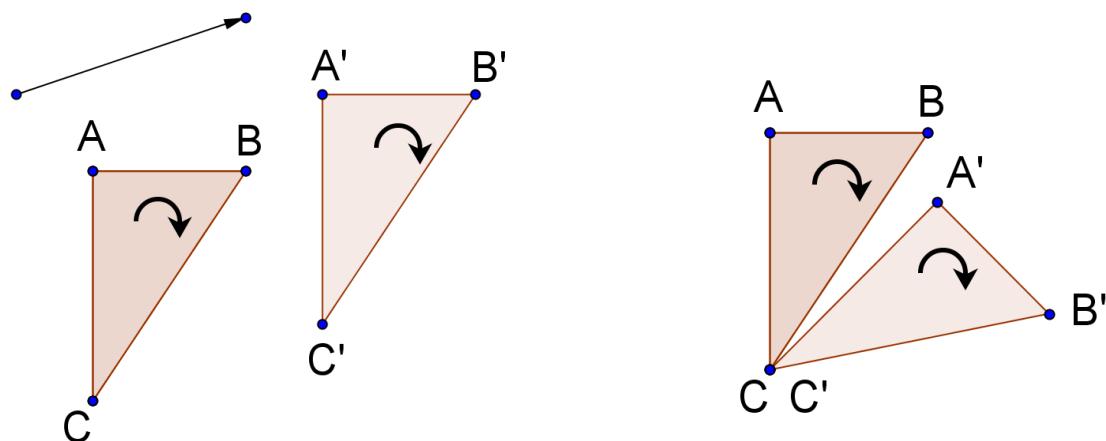
Nota importante

Si può dimostrare che ogni isometria è una **traslazione** o una **rotazione** o una **simmetria assiale** o una **glissosimmetria**.

Isometrie dirette e inverse

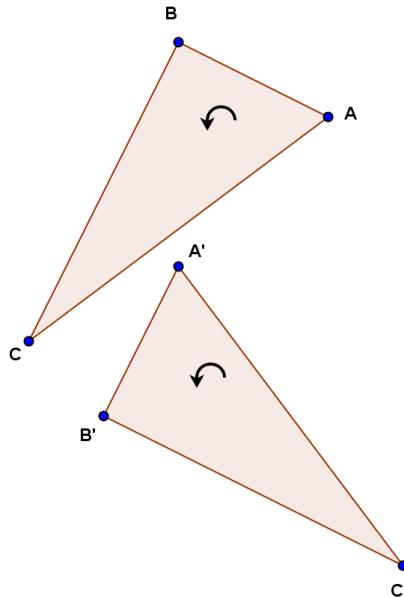
Consideriamo una figura F e la sua trasformata F' secondo una certa isometria: se immaginiamo di percorrere la figura toccando i vertici di F nell'ordine A, B, C e quelli di F' nell'ordine A', B', C' vediamo la traslazione e la rotazione conservano “l’**orientamento**” di una figura mentre la simmetria assiale (e quindi la glissosimmetria) non lo conservano (vedi figura).

Per questo **traslazioni e rotazioni** vengono dette **isometrie “dirette”** e la **simmetria assiale** e la **glissosimmetria** vengono dette **isometrie “inverse”**



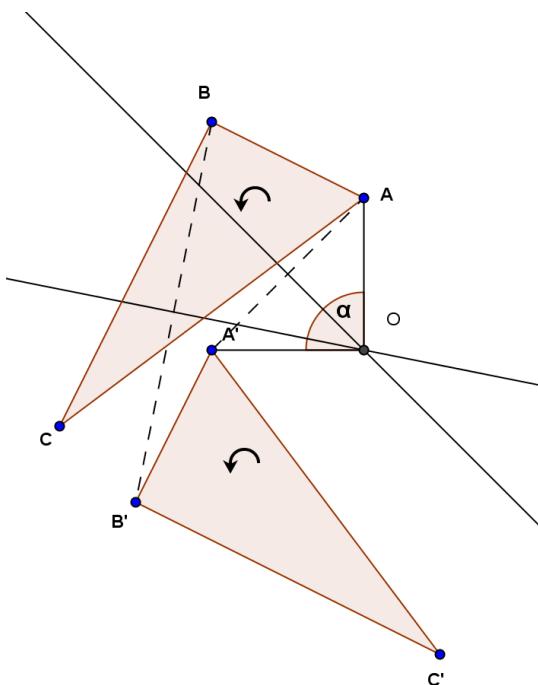
Esempio 1

Dati i triangoli F e F' in figura qual è l'isometria che trasforma $F \rightarrow F'$?



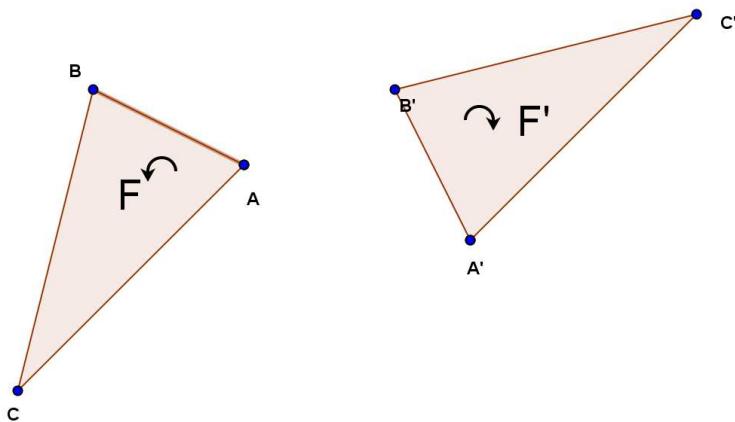
Si tratta di un'isometria "diretta" perché l'orientamento della figura è conservato e quindi dal momento che non è chiaramente una traslazione non può che essere una rotazione.

Per determinare il centro di rotazione possiamo pensare che i punti A e A' hanno la stessa distanza dal centro e lo stesso accade per B e B' : il centro O di rotazione è quindi l'intersezione degli assi di AA' e BB' e l'angolo di rotazione è $\alpha = \hat{AOA}'$.



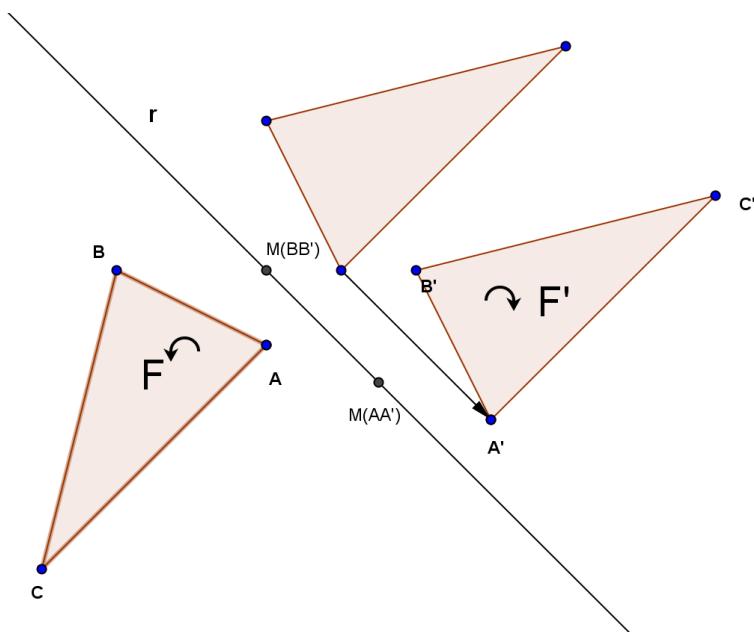
Esempio 2

Determina l'isometria tale che $F \rightarrow F'$



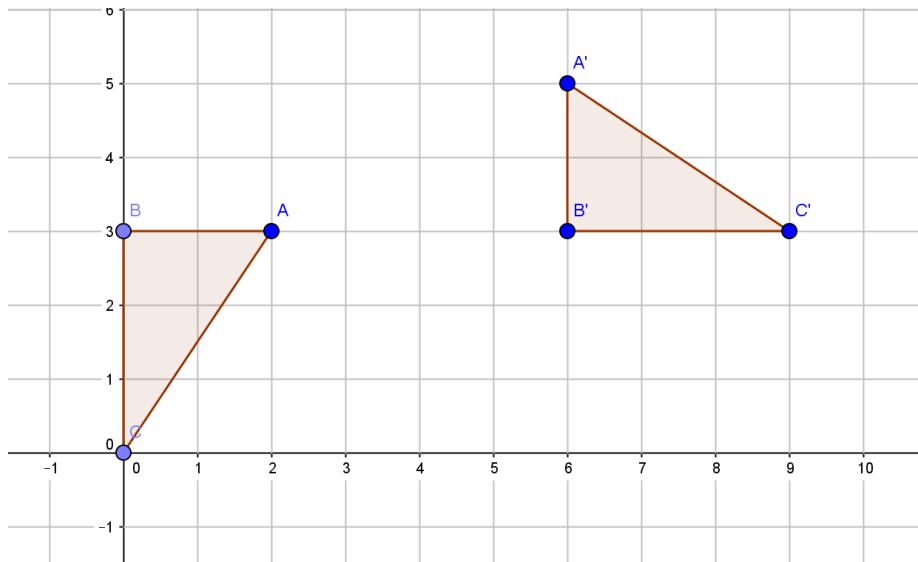
Poiché questa volta **si tratta di un'isometria "inversa"** si può trattare di una simmetria assiale o di una gliso simmetria e dal momento che l'asse di AA' non coincide con quella di BB' vuol dire che si tratta di una gliso simmetria.

Si può quindi procedere ricordando che il punto medio di punti corrispondenti appartiene all'asse di simmetria e quindi l'asse di simmetria sarà la retta r passante per i punti medi di coppie di punti corrispondenti, per esempio $M(A, A')$ e $M(B, B')$, e si individuerà poi facilmente il vettore traslazione parallelo a r .



Esercizi svolti

- 1) Determina l'isometria che porta il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'.



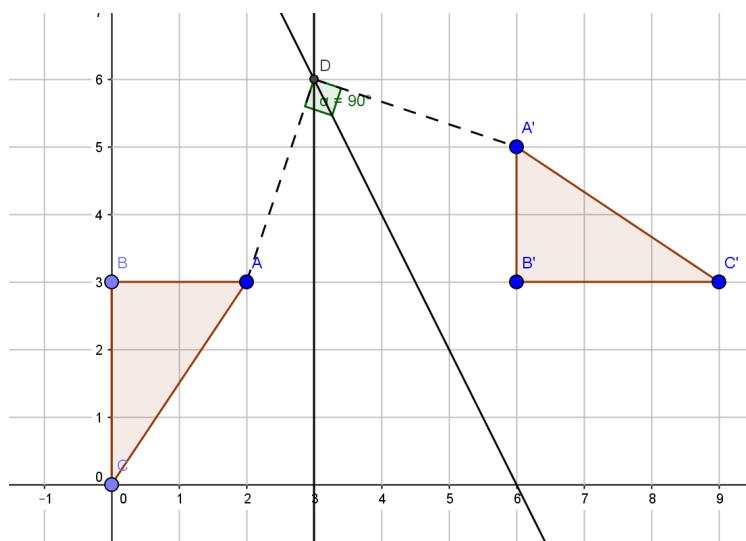
Svolgimento

Per prima controlliamo l'orientamento di ABC e A'B'C': hanno lo stesso orientamento e quindi potrò trasformare ABC in A'B'C' applicando un'isometria diretta (traslazione o rotazione).

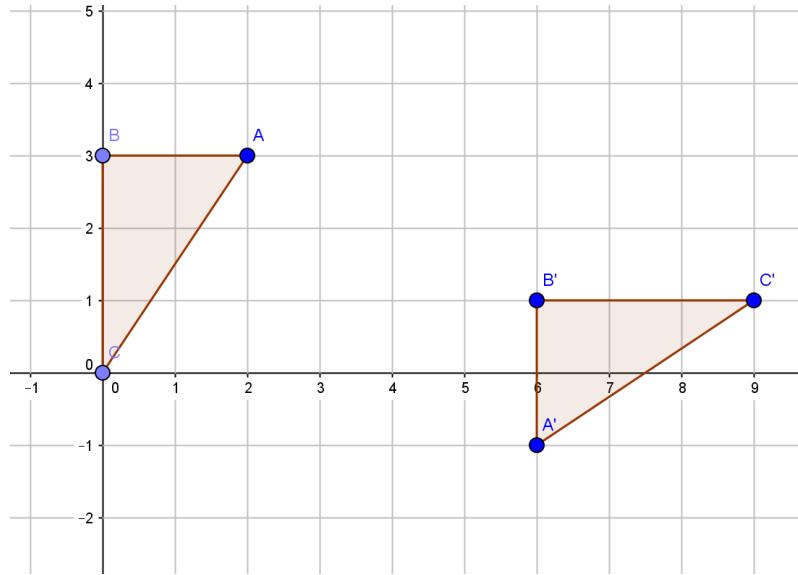
Dal momento che si vede subito che non si può andar bene una traslazione cerchiamo una rotazione che porti ABC in A'B'C'.

Possiamo determinare il centro O della rotazione: dal momento che il centro O sarà alla stessa distanza da A e A' e anche alla stessa distanza da B e B', si troverà intersecando gli assi di AA' e BB'.

L'angolo della rotazione sarà naturalmente per esempio $\hat{AOA'}$ che nel nostro esempio è 90° .



- 2) Determina l'isometria che porta il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'.



Svolgimento

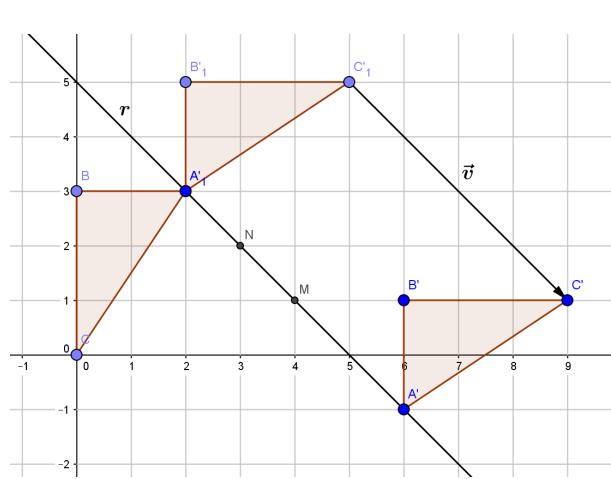
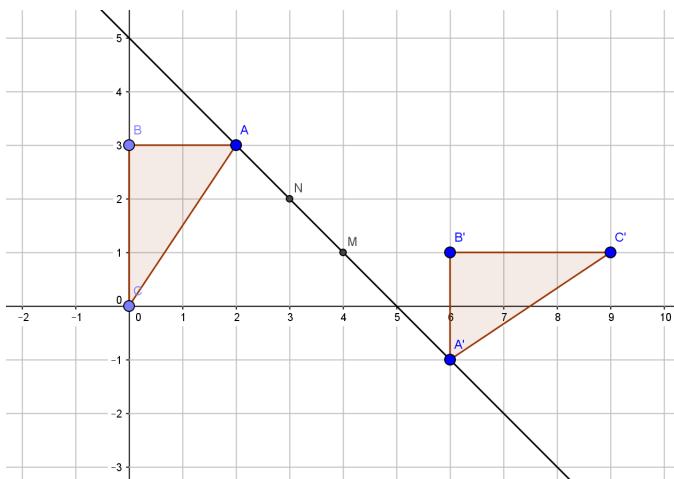
Per prima cosa controlliamo se l'orientamento del triangolo iniziale e finale coincidono.

Se percorro il triangolo seguendo l'ordine $A \rightarrow B \rightarrow C$ giro in senso antiorario, mentre se percorro il triangolo $A'B'C'$ seguendo l'ordine $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ giro in senso orario: quindi l'orientamento della figura finale è cambiato e devo cercare un'isometria inversa (simmetria assiale o glissosimmetria).

Si vede subito che non si tratta di una simmetria assiale e quindi cerco una **glissosimmetria** che porti ABC in $A'B'C'$: devo individuare l'asse di simmetria e il vettore traslazione (parallelo all'asse di simmetria).

Per determinare l'asse di simmetria, per la proprietà della glissosimmetria, basta individuare il punto medio M di una coppia di punti corrispondenti, per esempio A e A' , e il punto medio N di un'altra coppia di punti corrispondenti, per esempio B, B' : la retta per M e N è l'asse di simmetria.

Infine applichiamo al triangolo ABC la simmetria rispetto alla retta MN per poter individuare il vettore traslazione (vedi figura).



PROBLEMI ISOMETRIE

- 1) Come si trasforma la retta di equazione $y = 3x + 1$ applicando la traslazione $t(1,4)$?

Scrivi le equazioni della trasformazione.

$$[\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 4 \end{cases} \quad y = 3x + 2]$$

- 2) Come si trasforma la parabola di equazione $y = x^2$ applicando la traslazione $t(1,-2)$?

$$[y = x^2 - 2x - 1]$$

- 3) Applica alla curva $y = \sin x$ la traslazione $t\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Come risulta l'equazione della curva traslata? A cosa corrisponde?

$$[y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right); y = -\cos x]$$

- 4) Come si trasforma l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$ applicando $R(O;45^\circ)$?

Scrivi le equazioni della trasformazione.

$$[\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases} \quad x \cdot y = 2]$$

- 5) Componi la rotazione di centro O e angolo 90° con la traslazione di vettore $(2;2)$: scrivi le equazioni della trasformazione composta. Di quale trasformazione si tratta?

Si ottiene la stessa cosa applicando prima la traslazione e poi la rotazione cioè eseguendo $R(O,90^\circ) \circ t(2;2)$?

Suggerimento: $(x; y) \rightarrow (-y; x) \rightarrow (-y + 2; x + 2)$ quindi...

Dopo aver osservato che deve essere una rotazione poiché risulta un'isometria diretta in quanto composizione di isometrie dirette e non può essere una traslazione, per determinare il centro O' della rotazione ricordiamo che O' è l'unico punto "unito".....

$$[\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 2 \end{cases} \quad R(O'(0;2), 90^\circ); \text{ no}]$$

- 6) Componi la rotazione $R(O;90^\circ)$ con la simmetria rispetto alla retta $y = x$: scrivi le equazioni della trasformazione composta. Di cosa si tratta?

Se consideri invece $R(O;90^\circ) \circ S_{y=x}$ cosa ottieni?

$$[S_{assex} \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}; \quad S_{assey} \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}]$$

Le trasformazioni geometriche

7) Considera la composizione $t(1;2) \circ S_{asse_x}$ e scrivi le equazioni della trasformazione composta.

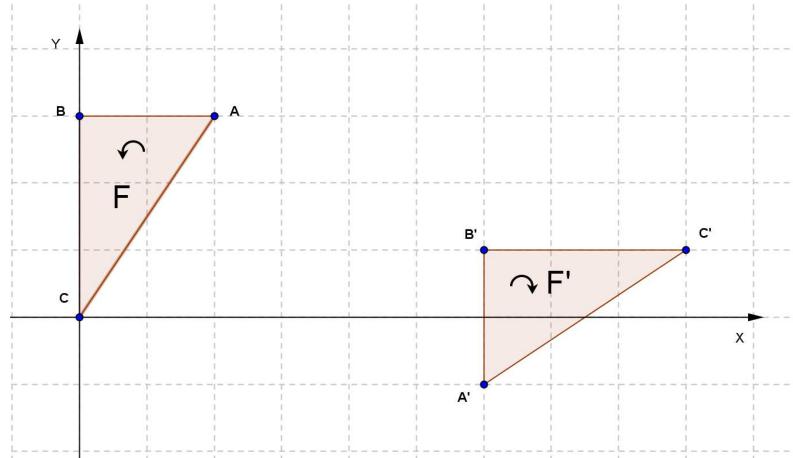
Come si trasforma la curva $y = 2^x$ applicando questa trasformazione composta?

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y + 2 \end{cases} \quad y = -2^{x-1} + 2$$

8) Considera l'esercizio precedente. Si ottiene lo stesso risultato applicando prima la traslazione e poi la simmetria? Come risulta l'equazione della curva trasformata da $S_{asse_x} \circ t(1;2)$?

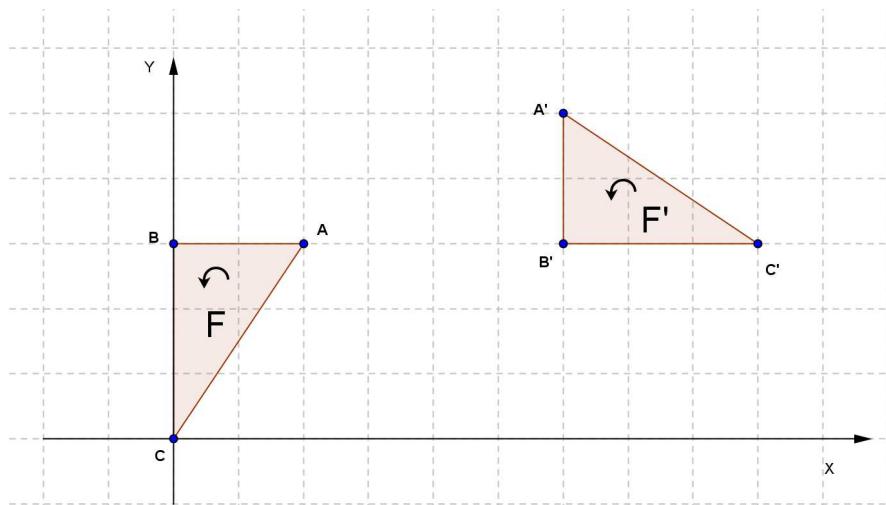
[no ; $y = -2^{x-1} - 2$]

9) Determina l'isometria che trasforma $F \rightarrow F'$.



[glissosimmetria di asse $r : y = -x + 5$ e traslazione di vettore $\vec{v}(4; -4)$]

10) Determina l'isometria che trasforma $F \rightarrow F'$.



[$R(O'(3;6);90^\circ)$]

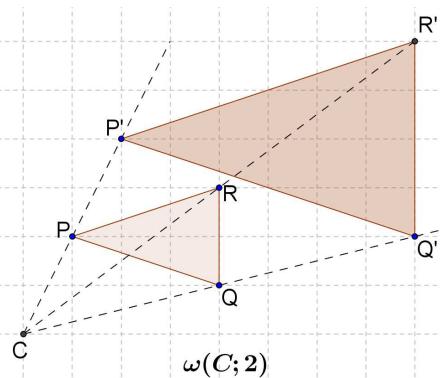
Similitudini

Omotetia

Si chiama omotetia di centro C e rapporto k (con k numero reale diverso da zero) e la indicheremo con $\omega(C, k)$, quella trasformazione geometrica tale che se

$$P \rightarrow P' \text{ si ha } \vec{CP}' = k \vec{CP}$$

Consideriamo una semplice figura, per esempio un triangolo PQR (vedi figura): vediamo come si trasforma applicando un'omotetia di centro C e rapporto $k = 2$

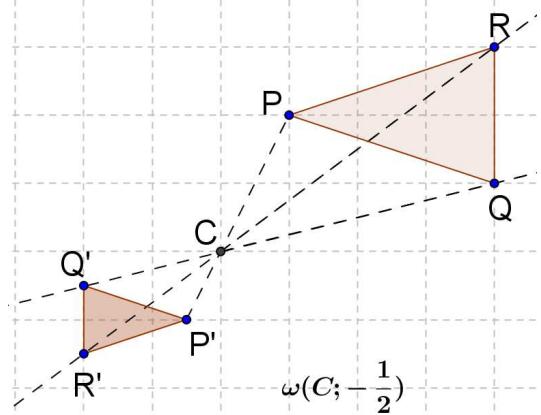
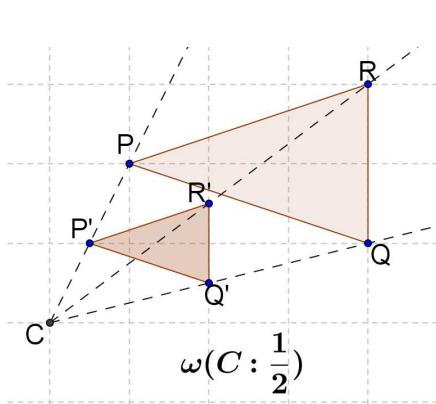


Il triangolo $P'Q'R'$ risulta avere i lati di lunghezza doppia rispetto a quelli di PQR e angoli corrispondenti uguali cioè i triangoli sono simili ma anche “ugualmente disposti” (che è poi il significato della parola *omotetia*).

Infatti da come è stata definita si ricava facilmente che

- una retta viene trasformata in una retta ad essa parallela e quindi **si conservano le ampiezze degli angoli**;
- **il rapporto tra segmenti corrispondenti è uguale a k** cioè $\overline{P'Q'} = k \cdot \overline{PQ}$;

Nota: se $k > 0$ due punti corrispondenti si trovano sulla stessa semiretta di origine C mentre se $k < 0$ punti corrispondenti appartengono a semirette opposte di origine il centro dell'omotetia.

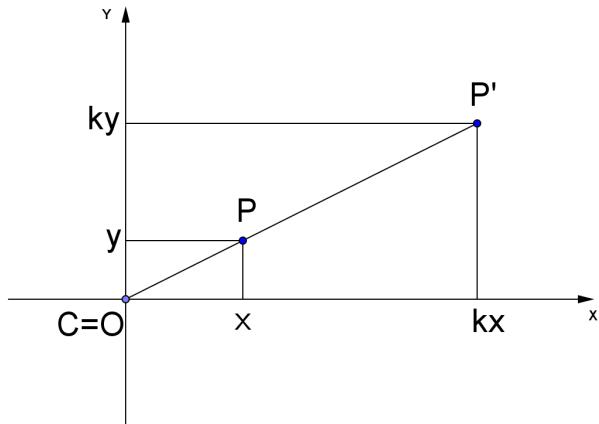


In conclusione l'omotetia ingrandisce o riduce una figura (a seconda che $|k| > 1$ o $|k| < 1$), lasciandone inalterata la forma e naturalmente se $k = 1$ si ha la trasformazione identica.

Le equazioni di un'omotetia nel piano cartesiano

a) Se il centro $C \equiv O$ (origine del sistema di riferimento), dal momento che se $P(x; y) \rightarrow P'(x'; y')$ si ha $\vec{OP} = k \vec{OP}'$, per il teorema di Talete dovrà essere $x' = kx$ e $y' = ky$ e quindi abbiamo:

$$\omega(O, k) \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$



b) Se il centro C dell'omotetia non coincide con O (origine del sistema di riferimento) possiamo pensare di traslare il sistema di riferimento portando l'origine in C : le coordinate di P nel sistema di riferimento traslato risultano $(x - x_C; y - y_C)$ e quelle di P' $(x' - x_C; y' - y_C)$ e quindi abbiamo:

$$\omega(C, k) \begin{cases} x' - x_C = k \cdot (x - x_C) \\ y' - y_C = k \cdot (y - y_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = k \cdot (x - x_C) + x_C \\ y' = k \cdot (y - y_C) + y_C \end{cases}$$

Se sviluppiamo abbiamo $\begin{cases} x' = kx - kx_C + x_C \\ y' = ky - ky_C + y_C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

Quindi le equazioni dell'omotetia $\omega(C, k)$ si presentano in genere nella forma $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

dove k è il rapporto di omotetia, ma come si determina il centro?

Possiamo ricavarlo ricercando il punto "unito" della trasformazione (il punto cioè che si trasforma in se stesso).

Esempio: per trovare il centro dell'omotetia di equazioni $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 4 \end{cases}$

possiamo risolvere

$$\begin{cases} 2x + 1 = x \\ 2y - 4 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

e quindi si tratta dell'omotetia di rapporto $k = 2$ e centro $C(-1; 4)$.

Composizione di omotetie

1) Componendo due omotetie di rapporti k_1 e k_2 e aventi lo stesso centro C si ottiene un'omotetia dello stesso centro e di rapporto $k_1 \cdot k_2$.

Infatti se consideriamo per semplicità $C \equiv O$

$$(x; y) \xrightarrow{\omega_1} (k_1 x, k_1 y) \xrightarrow{\omega_2} (k_2(k_1 x), k_2(k_1 y)) = (k_1 \cdot k_2 \cdot x, k_1 \cdot k_2 \cdot y)$$

2) Componendo due omotetie di rapporti k_1 e k_2 ma aventi **centri diversi** si ottiene un'omotetia (rispetto ad un altro centro) quando $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ o una traslazione se $k_1 \cdot k_2 = 1$.

Esempi

a) Consideriamo $\omega_2((1;2);2) \circ \omega_1((0;0);3)$

Dal momento che

$$\omega_1 \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases} \text{ e } \omega_2 \begin{cases} x'-1 = 2(x-1) \\ y'-2 = 2(y-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-2 \end{cases}$$

$$(x; y) \xrightarrow{\omega_1} (3x; 3y) \xrightarrow{\omega_2} (2(3x)-1; 2(3y)-2)$$

e quindi la trasformazione composta avrà equazioni $\begin{cases} x' = 6x-1 \\ y' = 6y-2 \end{cases}$

Si tratta quindi di un'omotetia di centro $C\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$ (che si ricava cercando il punto “unito”) e rapporto $k = 6$.

b) Consideriamo $\omega_2((1;2);2) \circ \omega_1\left((0;0); \frac{1}{2}\right)$

$$\omega_1 \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \omega_2 \begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-2 \end{cases}$$

$$(x; y) \xrightarrow{\omega_1} \left(\frac{1}{2}x; \frac{1}{2}y\right) \xrightarrow{\omega_2} \left(2\left(\frac{1}{2}x\right)-1; 2\left(\frac{1}{2}y\right)-2\right)$$

e quindi la trasformazione composta avrà equazioni $\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y-2 \end{cases}$ cioè è una traslazione.

Similitudine

Si chiama similitudine la trasformazione ottenuta componendo un'omotetia con una isometria.

Se $A \rightarrow A'$ e $B \rightarrow B'$ si ha $\overline{A'B'} = k \overline{AB}$ con $k > 0$.

k è chiamato **rappporto di similitudine** (corrisponde al valore assoluto del rapporto di omotetia dell'omotetia associata).

Come l'omotetia anche la similitudine conserva il rapporto tra le lunghezze, conserva l'ampiezza degli angoli.

Osservazioni

Le omotetie sono quindi particolari similitudini.

Le isometrie possono essere considerate particolari similitudini ($k = 1$).

Esempio

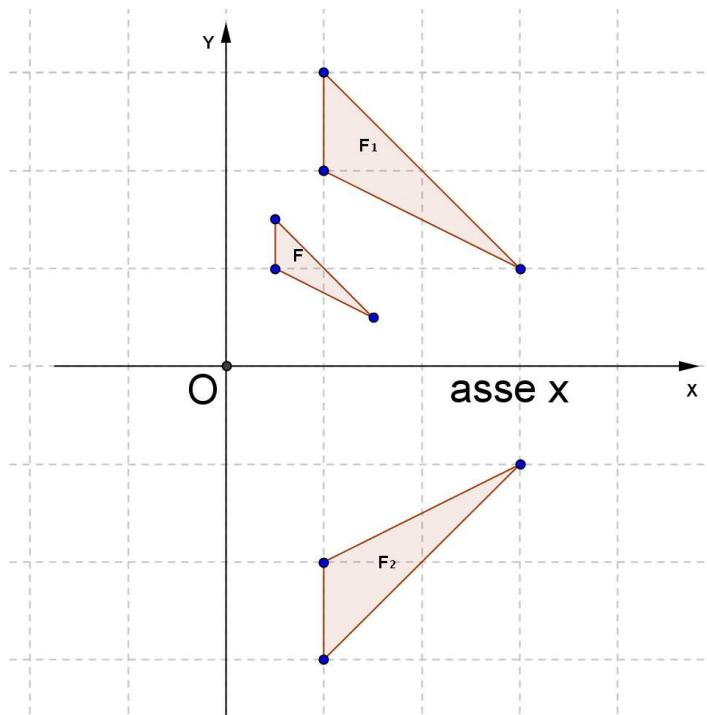
Consideriamo la similitudine ottenuta componendo un'omotetia di centro O(0;0) e rapporto $k = 2$ con la simmetria rispetto all'asse x.

Avremo:

$$(x; y) \xrightarrow{\omega} (2x; 2y) \xrightarrow{s_{\text{asse} x}} (2x; -2y)$$

In conclusione le equazioni di questa similitudine saranno: $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -2y \end{cases}$

Vediamo per esempio come viene trasformato il triangolo in figura.



PROBLEMI SIMILITUDINI

- 1) Considera la similitudine ottenuta componendo l'omotetia $\omega(O,2)$, con O=origine del sistema di riferimento, con la traslazione $t_{v(1;2)}$ traslazione di vettore $\vec{v}(1;2)$.
- Scrivi le equazioni della similitudine
 - Trasforma il triangolo $\triangle ABC$ con $A(2;2)$ $B(6;4)$ $C(1;4)$. Come risulta l'area di $A'B'C'$ rispetto a quella di ABC ?

$$[\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases} \quad A'(5;6) \quad B'(13;10) \quad C'(3;10) ; \text{ area } (A'B'C') = 4 \cdot \text{area } (ABC)]$$

- 2) a) Determina le equazioni dell'omotetia di centro $O'(2;2)$ e rapporto 2.
- b) Componi l'omotetia precedente con $\omega\left(O, \frac{1}{2}\right)$. Come risulta la trasformazione composta?
- $$[\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 2 \end{cases} ; \quad t_{\vec{v}} \text{ traslazione di vettore } \vec{v}(-1;-1)]$$
- 3) Considera l'omotetia di equazioni $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$. Qual è il suo centro? [(2;1)]
- 4) Considera la similitudine ottenuta componendo l'omotetia di centro O e rapporto 3 con la simmetria rispetto alla retta $y = x$.
- Determina le equazioni della similitudine.
 - Trasforma il quadrato ABCD con $A(1;1)$ $B(3;2)$ $C(4;0)$ $D(2;-1)$. Come risulta l'area di $A'B'C'D'$ rispetto a quella di ABCD? L'orientamento della figura viene conservato?

$$[\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x \end{cases} ; \quad \text{area}(A'B'C'D') = 9 \cdot \text{area } (ABCD) ; \text{ no }]$$

- 5) Considera la similitudine ottenuta componendo $R(O;90^\circ) \circ \omega(O,2)$.
- Determina le equazioni della similitudine.
 - Trasforma il triangolo ABC con $A(3;1)$ $B(3;3)$ $C(2;1)$. L'orientamento della figura viene conservato?

$$[\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases} ; \quad A'(-2;6) \quad B'(-6;6) \quad C'(-2;4) ; \text{ sì }]$$

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

1) Considera la traslazione di vettore $\vec{v}(2;-1)$, Scrivi le equazioni della traslazione $t_{\vec{v}}$.

Come si trasforma la retta $r: y = 2x + 3$? Come si trasforma la circonferenza $C: x^2 + y^2 = 1$?

$$[\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}; r': y = 2x - 2; C': x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0]$$

2) Considera la traslazione di vettore $\vec{v}_1(2;1)$ e la traslazione di vettore $\vec{v}_2(-3;0)$.

Determina le equazioni della trasformazione composta $t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1}$. Se componiamo in ordine inverso la trasformazione composta cambia? A quale trasformazione corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}; \text{no } ; t_{\vec{v}} \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2]$$

3) Considera la rotazione $R\left((0;0); \frac{\pi}{3}\right)$. Scrivi le equazioni della rotazione. Come si trasforma la

retta $r: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$?

$$[\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}; r': x = 0]$$

4) Considera la rotazione di equazioni:

Di quale rotazione si tratta?

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$[R((1;1); 45^\circ)]$$

5) Come si trasforma l'iperbole di equazione $xy = 2$ applicando la rotazione $R((0;0); 45^\circ)$? Scrivi le equazioni della trasformazione.

$$[\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}; \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1]$$

6) Trasforma la parabola $P : y = x^2 - 4x + 5$:

- a) con la simmetria rispetto all'asse x;
- b) con la simmetria rispetto all'asse y.

$$[y = -x^2 + 4x - 5; \quad y = x^2 + 4x + 5]$$

7) Considera il triangolo ABC avente $A(0;2)$, $B(2;4)$, $C(1;6)$ e il triangolo A'B'C' con $A'(6;2)$, $B'(8;0)$, $C'(7;-2)$. Determina l'isometria che trasforma ABC in A'B'C'.

$$[\text{glissosimmetria di asse } r : y = 2 \text{ e traslazione di vettore } \vec{v} = (6:0)]$$

8) Considera la traslazione di vettore $\vec{v} = (2;1)$ e la rotazione $R((0;0);90^\circ)$. Scrivi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo:

a) $t_{\vec{v}} \circ R$. A cosa corrisponde?

b) $R \circ t_{\vec{v}}$. A cosa corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}, \quad R\left(\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); 90^\circ\right) \quad ; \quad \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}, \quad R\left(\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); 90^\circ\right)]$$

9) Cosa si ottiene componendo la simmetria S_{asse_x} con S_{asse_y} ?

$$[R((0;0);180^\circ)]$$

10) Determina le equazioni della simmetria rispetto ad una retta $r : x = k$.

$$[\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}]$$

11) Considera $r_1 : x = 2$ e $r_2 : x = 4$.

a) Come risulta $S_{r_2} \circ S_{r_1}$?

b) Come risulta $S_{r_1} \circ S_{r_2}$?

$$[t_{(4;0)} \quad ; \quad t_{(-4;0)}]$$

12) Scrivi le equazioni della trasformazione $S_{\text{asse}_y} \circ S_{y=x}$. A cosa corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad R((0;0);90^\circ)]$$

13) Come risultano le equazioni della trasformazione $S_{\text{asse}_y} \circ S_{y=x} \circ S_{\text{asse}_x}$. A cosa corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}, \quad S_{y=x}]$$

14) a) Scrivi le equazioni della glissosimmetria di asse $r : y = x$ e vettore $\vec{v} = (3;3)$.

b) Come si trasforma l'ellisse $E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

$$[\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 3 \end{cases}, \quad E' : (x - 3)^2 + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1]$$

15) Determina come si trasforma la retta $r : y = -x + 1$ applicando l'omotetia $\omega((0;0);2)$.

$$[r' : y = -x + 2]$$

16) a) Determina le equazioni di $\omega_2((1;2);3) \circ \omega_1((0;0);2)$. A cosa corrisponde?

b) Determina le equazioni di $\omega_1((0;0);2) \circ \omega_2((1;2);3)$. A cosa corrisponde?

$$[\begin{cases} x' = 6x - 2 \\ y' = 6y - 4 \end{cases}, \quad \omega\left(\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right); 6\right) \quad \begin{cases} x' = 6x - 4 \\ y' = 6y - 8 \end{cases}, \quad \omega\left(\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right); 6\right)]$$

17) Scrivi le equazioni della similitudine $R((1;2);90^\circ) \circ \omega((0;0);2)$. Trasforma la circonferenza $C : x^2 + y^2 = 1$. Disegna C'.

$$[\begin{cases} x' = -2y + 3 \\ y' = 2x + 1 \end{cases}; \quad C' : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0]$$

18) Scrivi le equazioni della trasformazione ottenuta componendo l'omotetia di centro (0;0) e rapporto $k = 3$ con la traslazione di vettore $v(2;1)$.

Si tratta di una omotetia rispetto a quale centro C?

$$[\begin{cases} x' = 3x + 2 \\ y' = 3y + 1 \end{cases}; \quad C\left(-1; -\frac{1}{2}\right)]$$

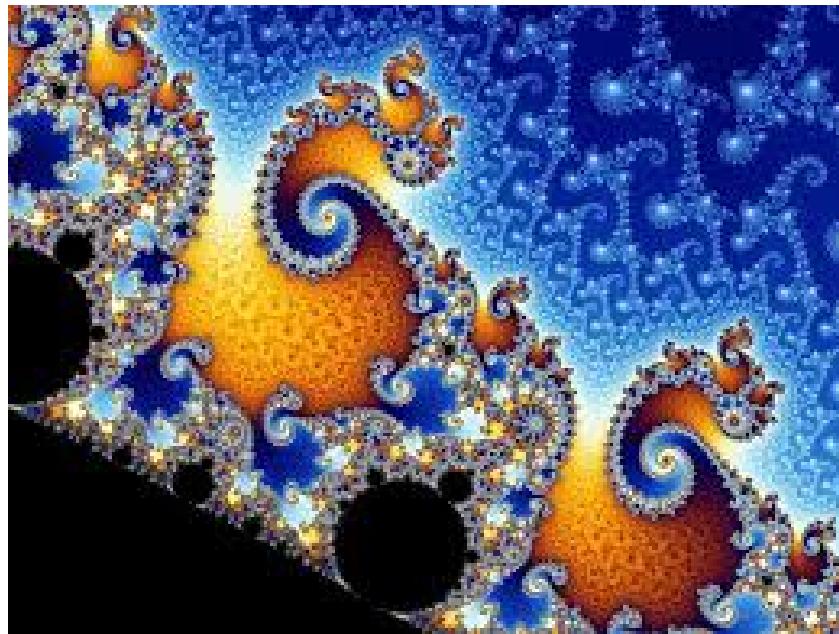
19) Scrivi come risultano le equazioni della trasformazione $\omega_2((1;2);\frac{1}{3}) \circ \omega_1((0;0);3)$. Quindi di quale trasformazione si tratta?

$$[\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3} \\ y' = y + \frac{4}{3} \end{cases}; \quad \text{traslazione } t\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)]$$

20) Scrivi come risulta la composizione $S_{asse} \circ \omega((2;-1); -2)$.

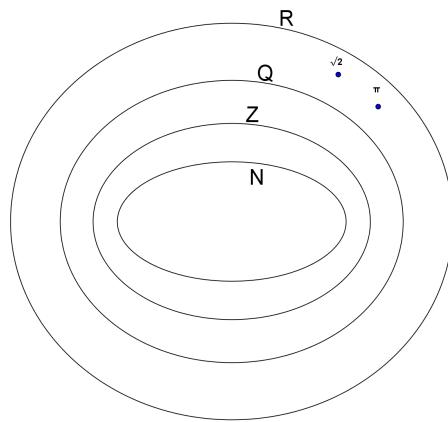
$$[\begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}]$$

I numeri complessi



Abbiamo visto come dall'insieme **N** dei numeri naturali si passi all'insieme **Z** dei numeri relativi per poter effettuare sempre la sottrazione e poi all'insieme **Q** dei numeri razionali per poter effettuare sempre la divisione (naturalmente con divisore diverso da zero).

Abbiamo infine ampliato il nostro insieme numerico con i numeri “irrazionali” cioè con i numeri decimali illimitati aperiodici ($\sqrt{2}, \pi$ ecc.) ottenendo così l'insieme **R** dei numeri reali.



Ma i matematici non si sono fermati ai numeri reali ed hanno ampliato anche **R** definendo l'insieme **C** dei numeri “complessi”.

I numeri complessi

Nel 1545 il matematico italiano Girolamo Cardano aveva pubblicato nella sua opera *Ars Magna* la formula risolutiva delle equazioni di terzo e quarto grado (gli “scopritori” di tali formule erano stati altri matematici quali Scipione Del Ferro, Tartaglia e Ferrari).

Ma in certi casi la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado sembrava non funzionare...

Per esempio considerando l’equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$, si verifica facilmente che $x = 4$ è soluzione mentre applicando la formula risolutiva si ottengono radici quadrate di numeri negativi...

Fu il matematico Raffaele Bombelli a proporre di operare sulle radici quadrate di numeri negativi trattandole come “*quantità silvestri*” (letteralmente “selvatiche”) svolgendo i calcoli con esse fino ad arrivare al risultato.

Il termine di numeri immaginari fu coniato solo in seguito da Cartesio.

Inizialmente ci fu molta diffidenza verso questi nuovi numeri e lo stesso Bombelli che li aveva introdotti li considerava essenzialmente *artifici* per risolvere alcuni problemi.



Raffaele Bombelli

Solo alla fine del Settecento i numeri complessi , espressi dalla scrittura $a+bi$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ cioè $i^2 = -1$, vennero riconosciuti come vero e proprio insieme numerico (contenente l’insieme dei numeri reali) e fu il matematico Eulero, nel 1777, a indicare $\sqrt{-1}$ con il simbolo i .



Carl Friedrich Gauss

Il matematico Gauss ideò la rappresentazione geometrica dei numeri complessi associando al numero complesso $a+bi$ il punto (a,b) del piano (fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale).

Alla fine dell’Ottocento ci fu la prima applicazione dei numeri complessi alla realtà: i numeri complessi furono utilizzati per sviluppare la teoria delle correnti alternate.

Ma partiamo dalla definizione.

Definizione di numero complesso

Forma algebrica

Chiamiamo numero complesso z , espresso in forma algebrica, l'espressione

$$z = a + bi \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1$$

a viene detta "parte reale"

bi viene detta "parte immaginaria" (b è chiamato coefficiente della parte immaginaria).

Osservazione

Se $a = 0$ abbiamo quello che viene chiamato "numero immaginario"; se $b = 0$ abbiamo un numero reale.

Quindi i numeri reali sono numeri complessi aventi coefficiente nullo della parte immaginaria e diciamo quindi che l'insieme \mathbf{C} è un'estensione di \mathbf{R} .

Definizione: due numeri complessi del tipo $a + bi$ e $a - bi$ aventi cioè la stessa parte reale e parti immaginarie opposte si dicono numeri complessi "coniugati".

Se per esempio consideriamo le soluzioni in campo complesso dell'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ abbiamo due soluzioni complesse coniugate:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Operazioni tra numeri complessi

Vediamo come sono definite le operazioni tra numeri complessi:

- addizione: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- sottrazione: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- moltiplicazione: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Infatti sviluppando con le usuali regole di calcolo avremmo:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- divisione:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Esempi

$$1) \quad (2 + i) + (3 - 4i) = 5 - 3i$$

$$2) \quad (2 + i) - (3 - 4i) = -1 + 5i$$

$$3) \quad (2 + i) \cdot (3 - 4i) = 6 - 8i + 3i + 4 = 10 - 5i$$

$$4) \quad \frac{2 + i}{3 - 4i} = \frac{(2 + i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{2 + 11i}{25}$$

ESERCIZI
OPERAZIONI TRA NUMERI COMPLESSI

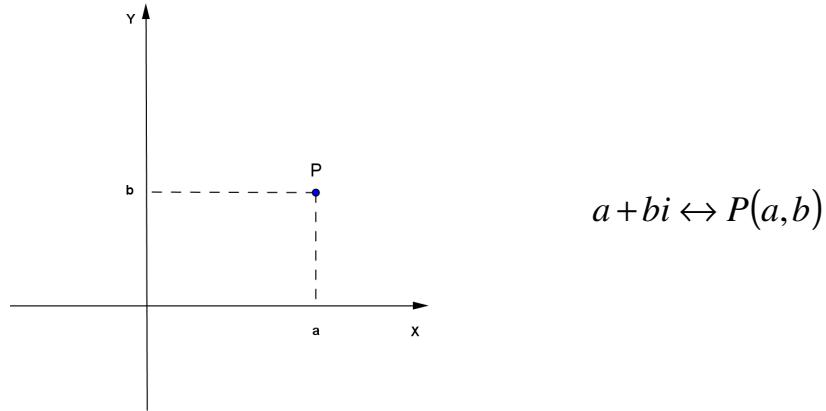
Sviluppa:

1. $(2+i) + (3-4i)$ [$5-3i$]
2. $(3-2i) - (1+i)$ [$2-3i$]
3. $(5+2i) \cdot (2-i)$ [$12-i$]
4. $(2-i) \cdot (2+i)$ [5]
5. $(4+3i) \cdot i$ [$-3+4i$]
6. $\frac{2+i}{4+2i}$ [$\frac{1}{2}$]
7. $\frac{5-2i}{5+2i}$ [$\frac{21}{29} - \frac{20}{29}i$]
8. $(1+i)^2$ [$2i$]
9. $(1+i)^3$ [$-2+2i$]
10. $\frac{1-i}{4+2i} + \frac{1}{i}$ [$\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i$]
11. $(3+2i) \cdot (3-2i) + 4i$ [$13+4i$]
12. $(2-i)^2 - (i-1) \cdot (2+3i)$ [$8-3i$]
13. $\frac{2+3i}{1-i} + 2i \cdot (4-i)$ [$\frac{3}{2} + \frac{21}{2}i$]
14. $(2-i)^2 - (i+4)^3$ [$-49-51i$]
15. $\frac{(5-i) \cdot (1+i)}{1-i}$ [$1+5i$]

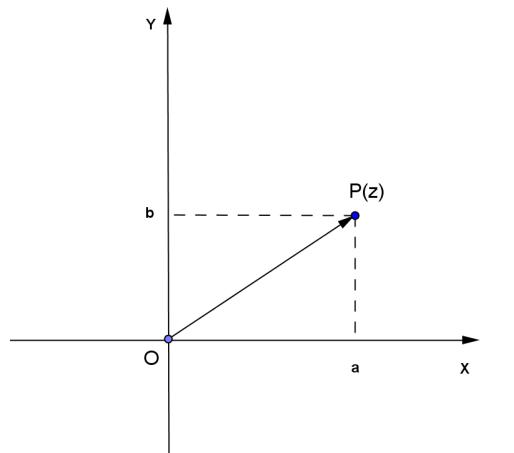
Rappresentazione geometrica di un numero complesso

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (O, x, y) si può associare ad ogni numero complesso $a + bi$ un punto $P(a, b)$ del piano e viceversa.

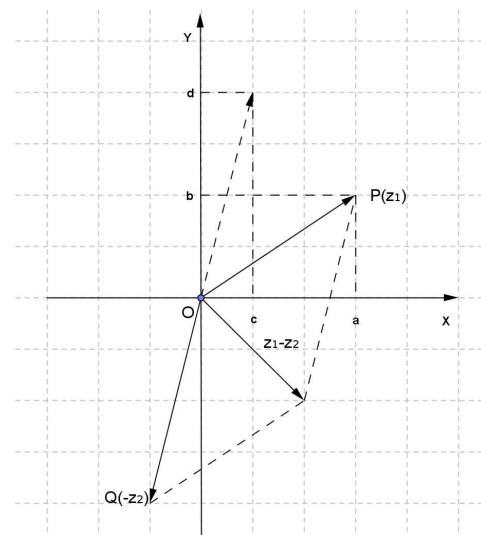
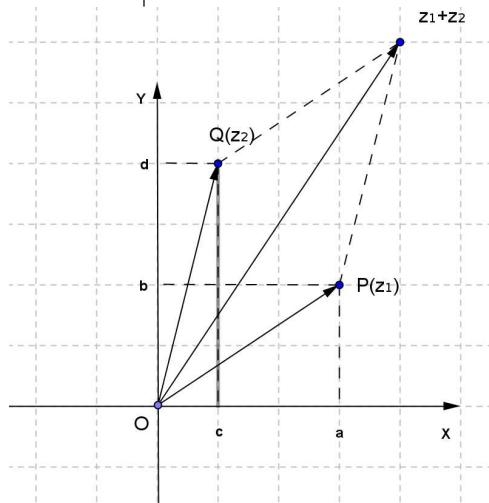
Il piano in cui si rappresenta l'insieme **C** dei numeri complessi viene chiamato piano complesso (o piano di Gauss).



Quindi i punti dell'asse x sono associati ai numeri reali (l'asse x è detto asse reale) e i punti dell'asse y sono associati ai numeri immaginari (l'asse y è detto asse immaginario).

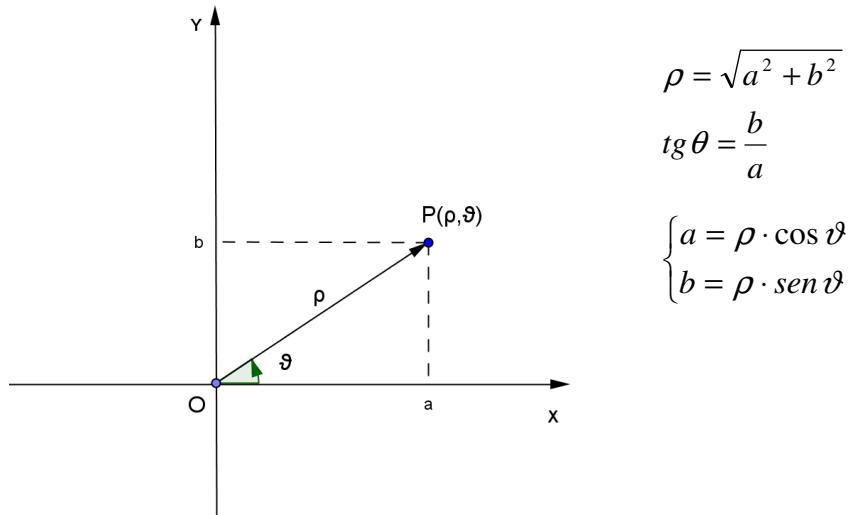


Possiamo anche associare al numero complesso $z = a + bi$ **il vettore \vec{OP}** con $P(a, b)$: ci accorgiamo che la somma tra numeri complessi z_1 e z_2 corrisponde alla somma tra i vettori corrispondenti con la regola del parallelogramma e la differenza alla differenza tra vettori.



Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato il numero complesso $z = a + bi$ se esprimiamo il suo punto associato nel piano complesso $P(a,b)$ in coordinate polari abbiamo:



Il numero complesso può quindi anche essere scritto nella forma (detta trigonometrica):

$$z = \rho \cdot (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

Nota: ρ viene detto **modulo** di z e ϑ viene detto **argomento** di z ($0 \leq \theta < 2\pi$).

Esempio

Consideriamo il numero complesso (espresso in forma algebrica) $z = \sqrt{3} + i$.

Come possiamo esprimere in forma trigonometrica?

Considerando il punto associato nel piano complesso $P(\sqrt{3}, 1)$ in questo caso abbiamo:

$$\rho = 2 \text{ e } \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \vartheta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{6} \text{ e quindi} \quad z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

ESERCIZI
RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO COMPLESSO

Passa dalla forma algebrica alla forma trigonometrica rappresentando il numero complesso nel piano di Gauss:

1. $z = 2 + 2i$

$$[z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)]$$

2. $z = 1 - i$

$$[z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)]$$

3. $z = -2i$

$$[z = 2 \cdot \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)]$$

4. $z = -\frac{1}{4}$

$$[z = \frac{1}{4} \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)]$$

5. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$[z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}]$$

6. $z = -\sqrt{3} - i$

$$[z = 2 \cdot \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right)]$$

7. $z = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

$$[z = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)]$$

8. $z = 1 + i$

$$[z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)]$$

9. $z = \sqrt{3} + i$

$$[z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)]$$

10. $z = i$

$$[z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}]$$

Prodotto e quoziente tra numeri complessi espressi in forma trigonometrica

Utilizzando la forma trigonometrica le operazioni di moltiplicazione e divisione tra numeri complessi risultano immediate.

Prodotto di numeri complessi

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) * \rho_2 \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + i(\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)] = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

In conclusione il prodotto di due numeri complessi risulta un numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei due numeri cioè:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

Quoziente di numeri complessi

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)}{\rho_2 \cdot (\cos \beta + i \sin \beta)} = \frac{\rho_1 \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta - i \sin \beta)}{\rho_2 \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) \cdot (\cos \beta - i \sin \beta)} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left[\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta + i(\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} \right] = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

In conclusione il quoziente di due numeri complessi risulta un numero complesso avente per modulo il rapporto tra i moduli e per argomento la differenza degli argomenti dei due numeri cioè:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)]$$

Nota

Da un punto di vista “geometrico” le operazioni di prodotto e quoziente tra numeri complessi possono quindi essere viste come l’applicazione di una rotazione composta con un’omotetia: infatti se il numero z_2 ha modulo ρ_2 e angolo associato β , il prodotto $z_1 \cdot z_2$ si trova ruotando z_1 dell’angolo β e poi applicando l’omotetia $\omega(O; \rho_2)$ mentre il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$ si trova ruotando

z_1 dell’angolo $-\beta$ e poi applicando l’omotetia $\omega(O; \frac{1}{\rho_2})$. In particolare moltiplicare un

numero complesso \vec{z} per un numero complesso di modulo 1 e argomento β equivale a ruotare \vec{z} di β , mentre dividerlo per un numero complesso di modulo 1 e argomento β equivale a ruotare \vec{z} di $-\beta$. In particolare moltiplicare un numero complesso \vec{z} per i equivale a ruotarlo di 90° .

ESERCIZI
PRODOTTO E QUOZIENTE TRA NUMERI COMPLESSI

1) Calcola il prodotto dei seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad z_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) & z_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) & [z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{3}i] \\
 2. \quad z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) & z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) & [z_1 \cdot z_2 = i] \\
 3. \quad z_1 = \frac{4}{3} \cdot \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) & z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) & [z_1 \cdot z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i] \\
 4. \quad z_1 = \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) & z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{11}{4}\pi + i \sin \frac{11}{4}\pi \right) & [z_1 \cdot z_2 = -2i] \\
 5. \quad z_1 = \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) & z_2 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) & [z_1 \cdot z_2 = -1]
 \end{array}$$

2) Calcola il quoziente tra i seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad z_1 = 6 \cdot \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) & z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) & [\frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i] \\
 2. \quad z_1 = \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) & z_2 = \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) & [\frac{z_1}{z_2} = -1] \\
 3. \quad z_1 = \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right) & z_2 = \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) & [\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i] \\
 4. \quad z_1 = \cos 0 + i \sin 0 & z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) & [\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{3} - i] \\
 5. \quad z_1 = \cos 0 + i \sin 0 & z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} & [\frac{z_1}{z_2} = -i]
 \end{array}$$

Potenza di un numero complesso

Utilizzando la forma trigonometrica $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ si ottiene subito che

$$z^n = \rho^n (\cos(n \cdot \vartheta) + i \sin(n \cdot \vartheta))$$

Risoluzioni di equazioni in campo complesso

Si può dimostrare il seguente teorema (chiamato teorema fondamentale dell'algebra):

Un'equazione di grado n con coefficienti complessi ha n soluzioni complesse.

NOTA

Quindi anche se l'equazione ha coefficienti reali questo teorema ci assicura che ci saranno n soluzioni complesse: in particolare quindi un'equazione di secondo grado con coefficienti reali ha sempre due soluzioni complesse.

Esempi

1) Risolviamo per esempio l'equazione $z^2 + z + 1 = 0$

$$\text{Applicando la formula risolutiva abbiamo: } z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

2) Risolviamo l'equazione $z^3 = 1$

Se dovessimo risolvere l'equazione in campo reale ,cioè considerando l'insieme dei numeri reali, avremo solo $x = 1$ come soluzione, ma in campo complesso?
Scriviamo z in forma trigonometrica e calcoliamo il cubo:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \rightarrow z^3 = \rho^3 \cdot (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$$

Scriviamo il numero 1 in forma trigonometrica $1 = \cos 0 + i \sin 0$

$$\text{Dovrà essere } \rho^3 \cdot (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) = \cos 0 + i \sin 0$$

e quindi

$$\rho^3 = 1 \rightarrow \rho = 1$$

$$3\theta = 0 + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}$$

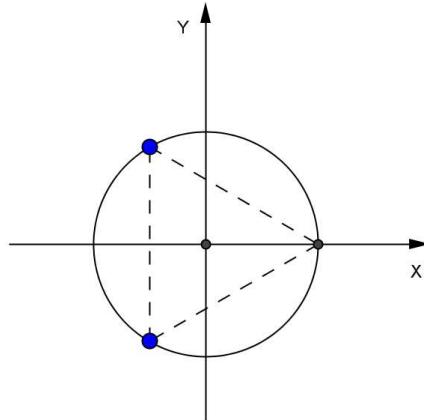
Avrò quindi tre soluzioni :

$$\text{per } k = 0 \rightarrow \theta = 0; \quad k = 1 \rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi; \quad k = 2 \rightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \quad z_3 = \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

I numeri complessi

Possiamo rappresentare le tre soluzioni nel piano complesso ed osservare che risultano i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1.



3) Risolviamo in campo complesso l'equazione $z^4 = 1$

In campo reale $x^4 = 1 \rightarrow x = \pm 1$ cioè abbiamo due soluzioni, ma in campo complesso?

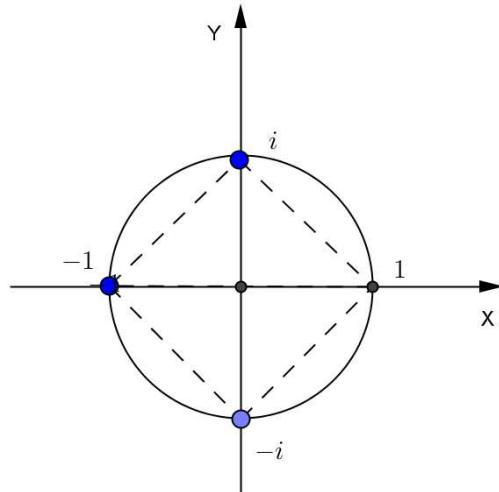
Dal momento che in questo caso abbiamo

$$\rho^4 \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)) = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\text{avremo } \rho = 1, \quad \theta = \frac{2k\pi}{4} \rightarrow \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_3 = \pi, \quad \theta_4 = \frac{3}{2}\pi$$

cioè in conclusione le soluzioni sono:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = -i$$



In generale le soluzioni dell'equazione $|z^n| = 1$, dal momento che dovrà essere

$$\rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\rho^n = 1 \rightarrow \rho = 1 \text{ e}$$

$$n\theta = 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow \theta_1 = 0 \\ k=1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{n} \\ \dots \\ k=n-1 \Rightarrow \theta_n = \frac{2(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

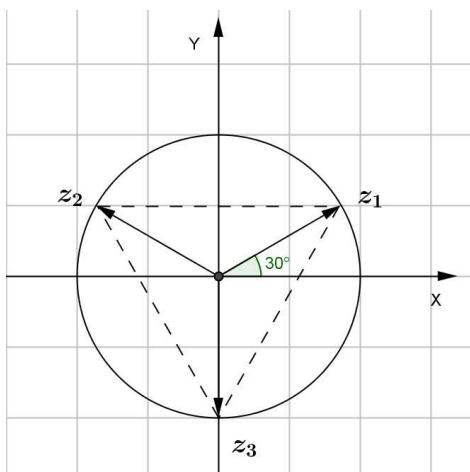
saranno **n soluzioni distinte** (associate ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza goniometrica partendo da (1;0)).

4) Consideriamo l'equazione $z^3 = 8i$. In questo caso abbiamo

$$\rho^3 \cdot (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{e quindi } \rho = 2, \quad \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right), \quad z_3 = 2 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)$$

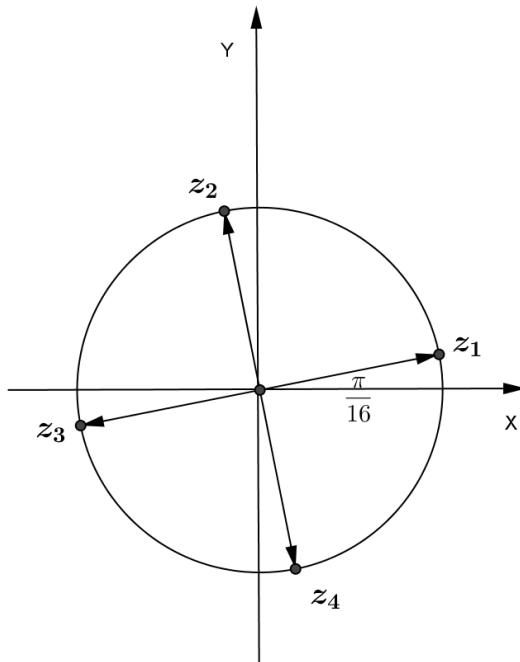


5) Risolviamo $z^4 = 1 + i$

In questo caso $\rho^4 \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

e quindi

$$\rho = \sqrt[8]{2}, \quad \theta = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{16} + k \frac{\pi}{2}, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3$$



In generale per risolvere l'equazione $z^n = z_0$ dove z_0 è un generico numero complesso $z_0 = \rho_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ avremo

$$\boxed{\rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \rho_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \rho^n &= \rho_0 \rightarrow \rho = \sqrt[n]{\rho_0} \\ n\theta &= \theta_0 + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

e quindi avremo **n soluzioni** associate ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$ partendo da $\theta = \frac{\theta_0}{n}$.

ESERCIZI
POTENZA DI UN NUMERO COMPLESSO

1) Calcola le potenze dei seguenti numeri complessi dopo averli trasformati in forma trigonometrica e rappresentale nel piano di Gauss:

a) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $z^2 = \dots, z^3 = \dots, \dots, z^6 = \dots$

$$[z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; z^3 = -1 ; z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ; z^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ; z^6 = 1]$$

b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ $z^2 = \dots, z^3 = \dots, \dots, z^8 = \dots$

$$[z^2 = 4i ; z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i ; z^4 = -16 ; z^5 = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i ; z^6 = -64i ; z^7 = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}i ; z^8 = 2^8]$$

2) Risovi in campo complesso le seguenti equazioni e rappresenta le soluzioni nel piano complesso:

a) $z^2 = i$ $[z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i]$

b) $z^2 = -4i$ $[z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i]$

c) $z^3 = 8i$ $[z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -2i]$

d) $z^4 = \sqrt{2}$ $[z_1 = \sqrt[8]{2}, z_2 = \sqrt[8]{2}i, z_3 = -\sqrt[8]{2}, z_4 = -\sqrt[8]{2}i]$

e) $z^5 = 1$ $[z = \left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4]$

f) $z^5 = i$ $[z = \left(\cos \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi \right) \right), k = 0, 1, 2, 3, 4]$

SCHEMA DI VERIFICA

I)

Risvoli in campo complesso le seguenti equazioni di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$ scrivendo le soluzioni sia in forma algebrica che in forma trigonometrica e rappresentandole sul piano; verifica infine che la somma delle soluzioni corrisponde a $-\frac{b}{a}$ e che il prodotto corrisponde a $\frac{c}{a}$.

1. $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

$$[z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_1 = \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi; \quad z_2 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi]$$

2. $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$$[z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i; \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)]$$

3. $z^2 - 2z + 4 = 0$

$$[z_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right); \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)]$$

II)

Risvoli in campo complesso la seguente equazione di quarto grado: $z^4 = 1$ e rappresenta le soluzioni nel piano complesso.

$$[z_{1,2} = \pm 1; \quad z_{3,4} = \pm i]$$

Geometria euclidea dello spazio



Rette e piani nello spazio

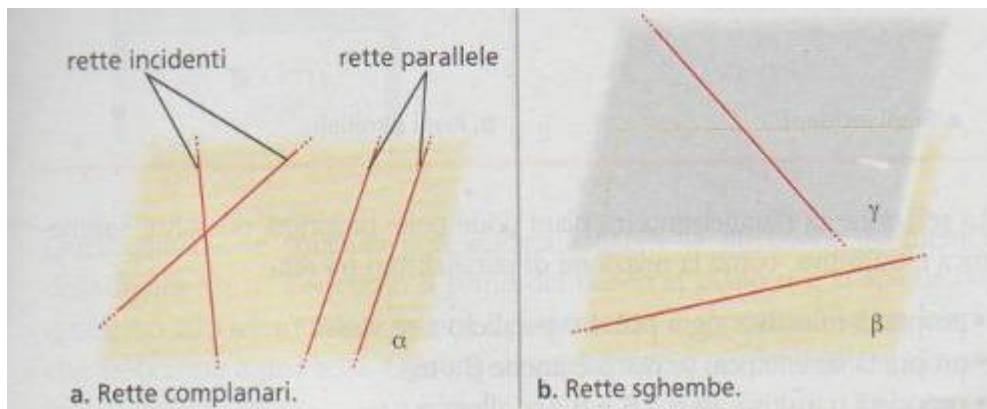
Una **retta** è individuata in modo univoco da due punti.

Un **piano** può essere individuato in modo univoco da:

- tre punti non allineati
- una retta e un punto esterno ad essa
- due rette incidenti
- due rette parallele

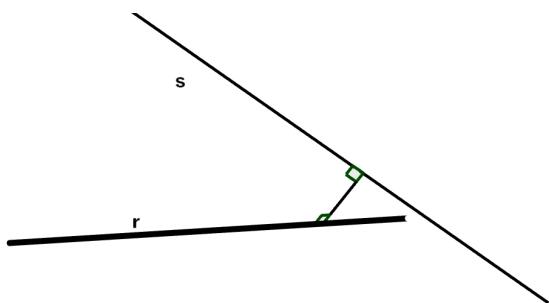
Posizione reciproca di due rette nello spazio

Due rette nello spazio possono essere:



- **parallele:** sono due rette **complanari** che non hanno punti in comune
- **incidenti:** sono due rette **complanari** che hanno un punto in comune
- **sghembe:** sono rette che **non sono complanari**
(e che perciò non hanno nessun punto in comune)

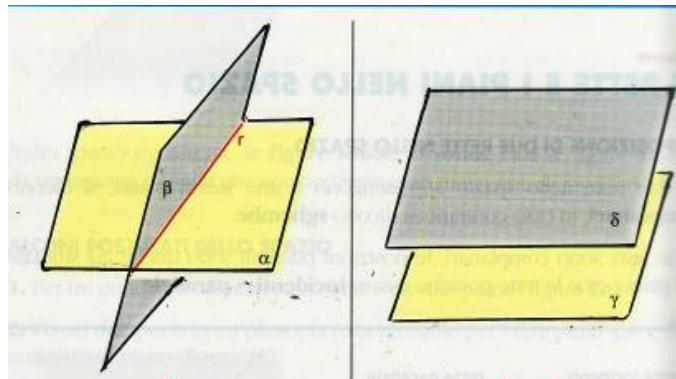
Date due rette sghembe r e s la **distanza** tra r e s è la lunghezza del segmento perpendicolare ad entrambe.



Posizione reciproca di due piani nello spazio

Due piani nello spazio possono essere:

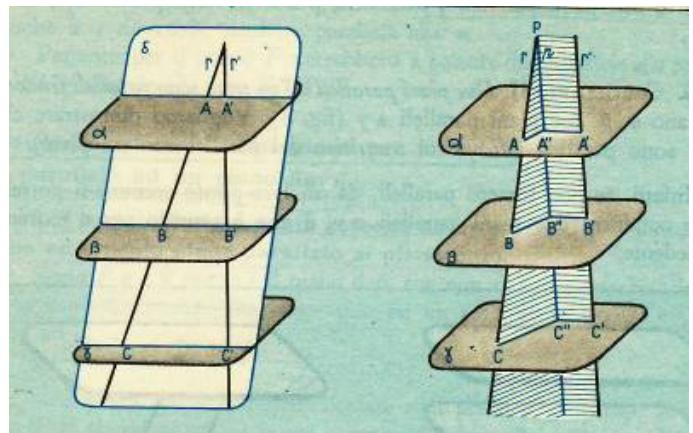
- **paralleli:** sono due piani che non hanno punti in comune
- **incidenti:** sono due piani che hanno una retta in comune



Per i piani paralleli vale il

Teorema di Talete nello spazio

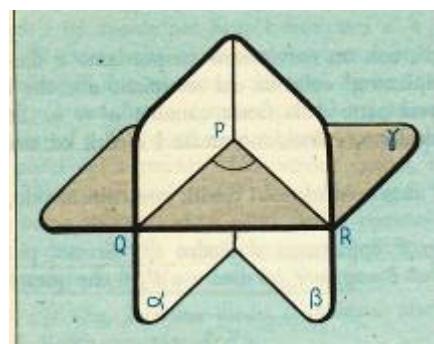
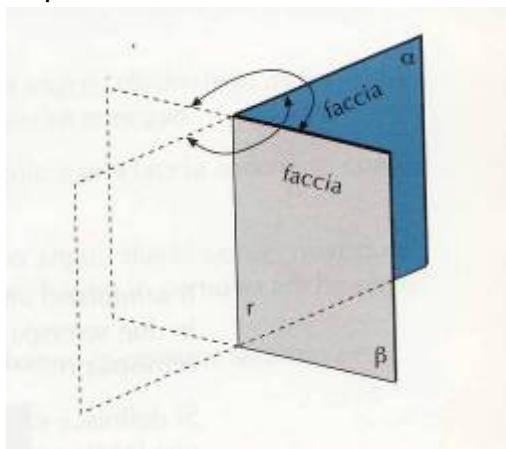
Un fascio di piani paralleli intersecati da due trasversali intercetta su di esse segmenti corrispondenti proporzionali.



Diedro

Due piani incidenti, hanno invece una retta in comune e dividono lo spazio in quattro parti chiamati **diedri** o angoli diedri. La retta comune ai due piani è detta **spigolo** del diedro.

Dato un diedro, le sezioni del diedro ottenute con piani perpendicolari allo spigolo sono angoli tutti congruenti. La misura di una qualunque sezione normale di un diedro è la misura dell'ampiezza del diedro stesso, perciò se la sezione normale del diedro $\alpha\beta$ è 60° , diremo che il diedro $\alpha\beta$ misura 60° .



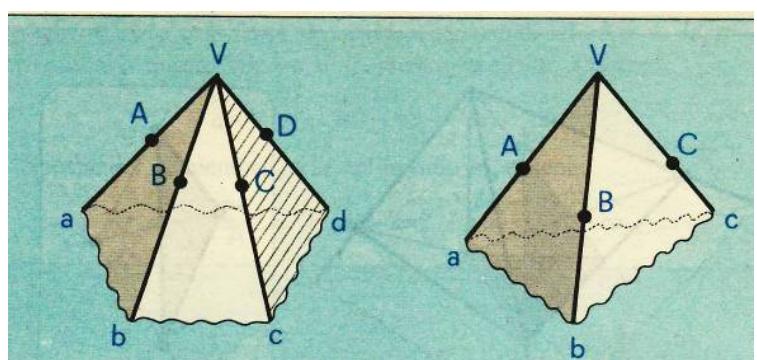
Angoloide

L'**angoloide** è la parte di spazio individuata da n ($n \geq 3$) semirette aventi origine comune, a tre a tre non complanari e tali che il piano individuato da due semirette successive lasci tutte le altre dalla stessa parte.

Le semirette sono dette **spigoli** dell'angoloide, la loro origine comune è il **vertice** e gli angoli formati da due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide.

Un angoloide con tre spigoli o facce è detto angoloide **triedro** o semplicemente **triedro**, con quattro facce abbiamo un angoloide **tetraedro**.

Vale la seguente proprietà: **in ogni angoloide di vertice V la somma degli angoli in V delle facce è minore di un angolo giro.**



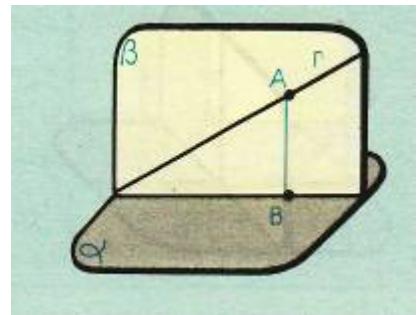
Posizione reciproca di una retta e di un piano nello spazio

Data una retta r ed un piano α

- r è parallela ad α se non hanno punti in comune
- r appartiene ad α se tutti i punti di r sono anche punti di α
- r è incidente con α se r e α hanno un punto P in comune

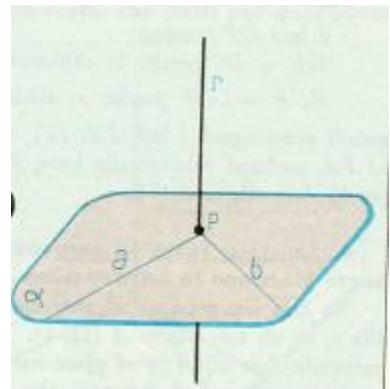
In questo ultimo caso la retta r forma un **angolo** con il piano α

Tale angolo si ottiene proiettando i punti di r su α ed è minore dell'angolo che r forma con una qualunque altra retta di α passante per il punto di intersezione P .



Un caso particolare del precedente si ha quando l'angolo che r forma con α è 90° .

Diremo che r è perpendicolare al piano α se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza P .



Il teorema delle tre perpendicolari

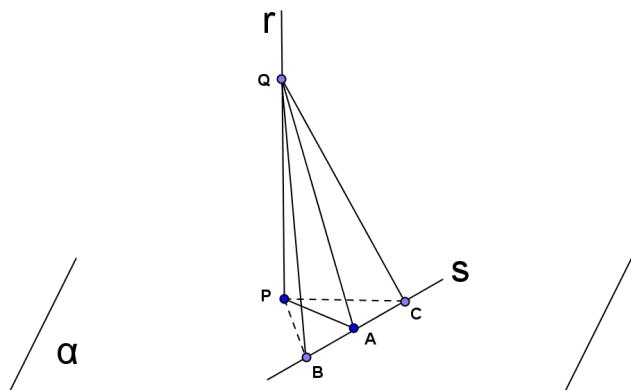
Se dal piede P di una retta r perpendicolare ad un piano α , si traccia la perpendicolare AP ad una retta s del piano α , se Q è un qualunque punto su r , allora QA è perpendicolare alla retta s .

Prendiamo i punti B e C sulla retta s in modo che $\overline{BA} = \overline{AC}$.

Si osserva che i triangoli $\triangle PAB$ e $\triangle PAC$ sono congruenti e quindi $\overline{PB} = \overline{PC}$.

Ma allora anche i triangoli $\triangle QPB$ e $\triangle QPC$ sono congruenti e quindi $\overline{QB} = \overline{QC}$.

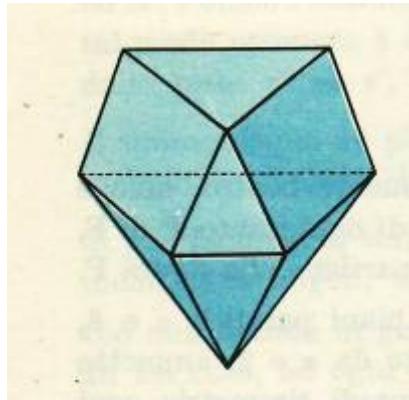
Allora il triangolo $\triangle QBC$ è isoscele e poiché QA è mediana risulta anche altezza e quindi QA è perpendicolare alla retta s .



Poliedri

Definizione di poliedro

Si chiama **poliedro convesso** la porzione di spazio delimitata da poligoni a due a due non complanari tale che ogni lato dell'uno sia in comune ad un altro di essi e il piano individuato da ogni poligono lasci tutti gli altri dalla stessa parte.



Per tutti i poliedri convessi vale la

Relazione di Euler

Dato un qualunque poliedro convesso, indicato con F il numero delle facce, con V il numero dei vertici e con S il numero degli spigoli si ha che $F+V=S+2$

Dimostrazione

Consideriamo una sola faccia: $F=1$ e $V=S$, per cui

$$F+V=S+1. \quad (*)$$

Aggiungiamo un'altra faccia: F aumenterà di 1 e se V aumenta di x , S aumenterà della quantità $x+1$, e quindi vale ancora che

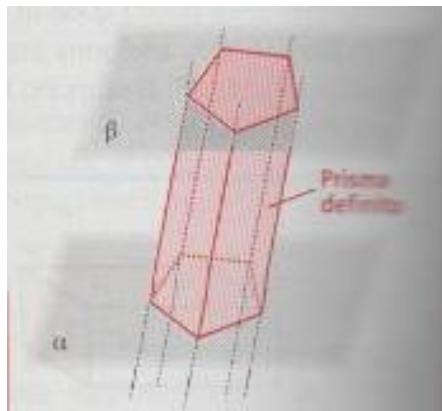
$$(F+1)+(V+x)=(S+x+1)+1$$

e la relazione (*) resta invariata.

Continuiamo ad aggiungere così una faccia alla volta in modo che alla fine rimanga da aggiungere solo l'ultima faccia: in questo caso F aumenterà di 1 e V e S rimarranno invariati, perciò si avrà

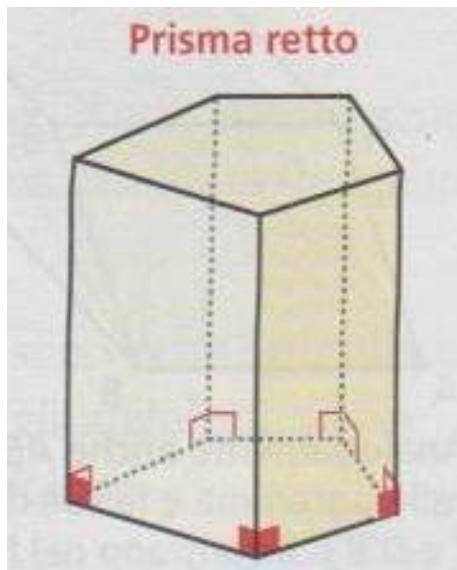
$$F+V=S+2$$

Prisma



Un **prisma** è un poliedro delimitato da due basi uguali e ugualmente disposte su piani paralleli, avente per facce laterali dei parallelogrammi ottenuti congiungendo i vertici corrispondenti dei poligoni di base.

La distanza tra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma.



Un prisma è **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi e se perciò le facce laterali sono rettangoli.

In un prisma retto gli spigoli laterali sono anche altezze.

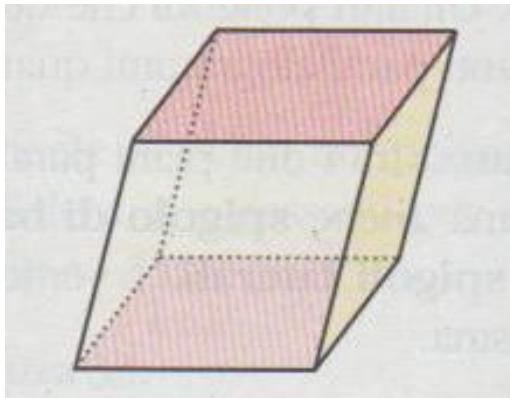
Un prisma retto è **regolare** se ciascuna delle basi è un poligono regolare.

Volume e superficie di un prisma retto

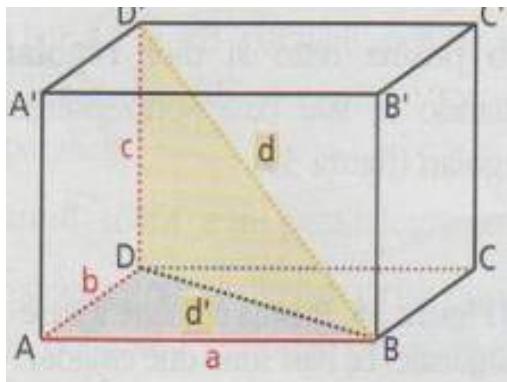
$$\boxed{\begin{aligned} S_L &= 2p_{base} \cdot h \\ S_T &= 2 \cdot S_{base} + S_L \\ V &= S_{base} \cdot h \end{aligned}}$$

Parallelepipedo

Un **parallelepipedo** è un prisma in cui anche le basi sono parallelogrammi.



Le facce del parallelepipedo sono a due a due congruenti e parallele.



Un parallelepipedo è **rettangolo** se ha per facce rettangoli a due a due opposti, congruenti e paralleli. E' un prisma retto che ha per basi dei rettangoli.

Volume e superficie di un parallelepipedo rettangolo

$$S_L = 2p_{base} \cdot h = 2(a+b)c$$

$$S_T = 2 \cdot S_{base} + S_L = 2ab + 2(a+b)c = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = S_{base} \cdot h = abc$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubo

Il cubo o esaedro regolare è un poliedro che ha per facce sei quadrati uguali.

E' evidente che il cubo è un particolare parallelepipedo, avente le tre dimensioni uguali:
 $a=b=c=l$.

Volume , superficie , diagonale di un cubo di lato l

$$S_T = 6l^2$$

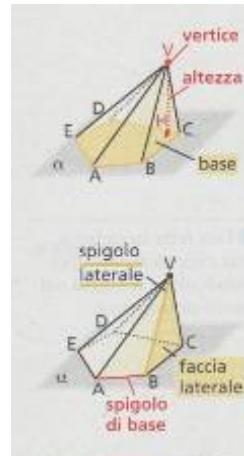
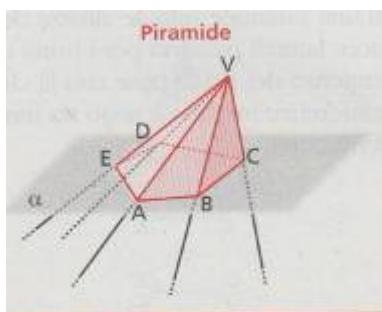
$$V = S_{base} \cdot h = l^3$$

$$d = \sqrt{(\sqrt{2}l)^2 + l^2} = \sqrt{3}l$$

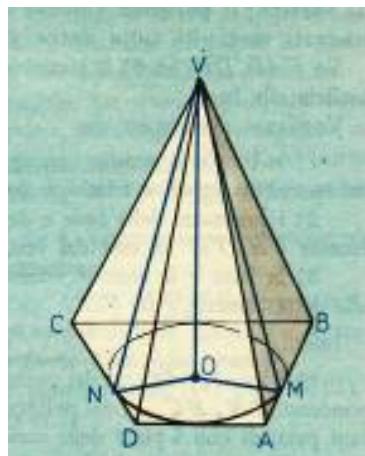
Piramide

La **piramide** si ottiene tagliando un angoloide con un piano che non passi per il vertice e che incontri tutti gli spigoli. E' perciò un poliedro limitato da un poligono (base) e da triangoli (facce laterali).

A seconda del tipo di poligono di base si parla di piramide triangolare o tetraedro, quadrangolare, pentagonale....



L'**altezza** della piramide è la distanza dal vertice V al piano della base.



Una piramide dice **retta** se il poligono di base è circoscrivibile ad una circonferenza e l'altezza cade nel centro di questa.

Se una piramide è retta, le **altezze delle facce laterali sono tutte uguali e prendono il nome di apotema che indichiamo con a** .

Una piramide retta si dice **regolare** se il poligono di base è un poligono regolare.

Superficie e volume di una piramide retta

$$a^2 = h^2 + r^2$$

$$S_L = \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

$$S_T = S_{base} + S_L = S_{base} + \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

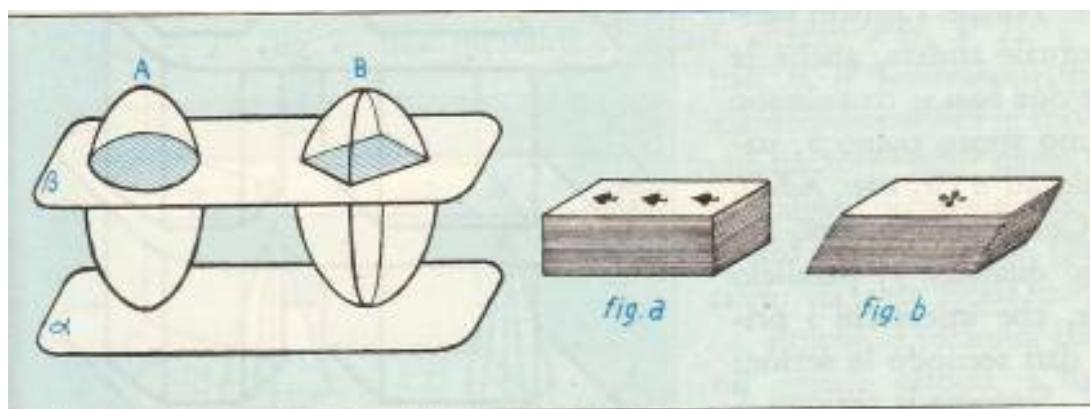
$$V = \frac{1}{3}S_{base} \cdot h$$

Volume della piramide

Per ricavare il volume della piramide enunciamo prima di tutto il

Principio di Cavalieri

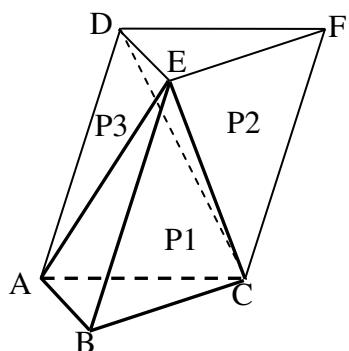
Due solidi che si possono disporre rispetto ad un piano in modo che ogni piano parallelo a questo individui su di essi sezioni equivalenti, sono tra loro equivalenti, hanno cioè lo stesso volume.



Utilizzando questo principio si può dimostrare (provaci...) che **due piramidi che hanno basi equivalenti e stessa altezza hanno lo stesso volume.**

Passiamo ora a dimostrare la formula per ricavare il volume di una piramide.

a) Iniziamo dimostrando la formula per una **piramide a base triangolare**.



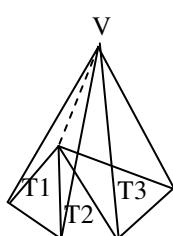
Consideriamo la piramide a base triangolare $ABCE$ e costruiamo un prisma avente la stessa base ABC e BE come spigolo laterale.

Il piano ACE divide il prisma in due piramidi: la piramide $ABCE$ (P_1) e la piramide $ADFCE$ (P_2+P_3) che può essere scomposta nelle piramidi P_2 e P_3 dal piano EDC . Si osserva che P_2 e P_3 , avendo basi ADC e DFC equivalenti (entrambe metà dello stesso parallelogrammo), e la stessa altezza (avendo lo stesso vertice E) sono equivalenti. D'altra parte P_2 e P_1 sono equivalenti avendo basi ABC e EFG congruenti e stessa altezza (quella del prisma).

Segue che **P_1 , P_2 , e P_3 sono equivalenti** e la piramide P_1 ha volume pari alla terza parte del prisma.

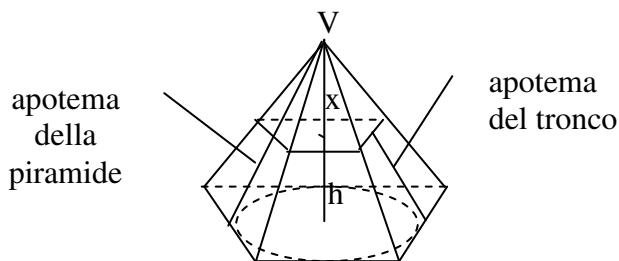
b) Poiché **una qualunque piramide a base poligonale può essere scomposta in più piramidi a base triangolare aventi tutte la stessa altezza** si ha che

$$V = \frac{1}{3} S_{T_1} \cdot h + \frac{1}{3} S_{T_2} \cdot h + \dots + \frac{1}{3} S_{T_n} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\text{base}} \cdot h$$



Tronco di piramide

Il **tronco di piramide** si ottiene tagliando una piramide con un piano parallelo alla base.



Nel tronco di piramide retta le altezze delle facce laterali, che sono tutte trapezi, sono tutte uguali e prendono il nome di **apotema del tronco** a_t .

L'**altezza** del tronco di piramide è la distanza tra i piani delle basi .

Un tronco di piramide si dice **tronco di piramide retta** se è stato ottenuto sezionando una piramide retta.

Un tronco di piramide retta si dice **tronco di piramide regolare** se il poligono di base è regolare.

Volume e superficie di un tronco di piramide retta

Indichiamo con B la base maggiore e con b quella minore

$$S_L = \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t]$$

$$S_T = B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t]$$

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb}) \cdot h$$

Dimostriamo la formula per il volume.

Per la similitudine si ha $\frac{x^2}{(x+h)^2} = \frac{b}{B}$ da cui $\frac{x}{x+h} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$

e quindi si ha

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{B} &= \sqrt{b}(x+h) \\ x &= \frac{\sqrt{b} \cdot h}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} \cdot h(\sqrt{B} + \sqrt{b})}{B - b} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}B(x+h) - \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}[Bh + (B-b)x] = \frac{1}{3}[Bh + \sqrt{b} \cdot h(\sqrt{B} + \sqrt{b})] = \\ &= \frac{1}{3}[Bh + h\sqrt{Bb} + bh] = \frac{h}{3}[B + b + \sqrt{Bb}] \end{aligned}$$

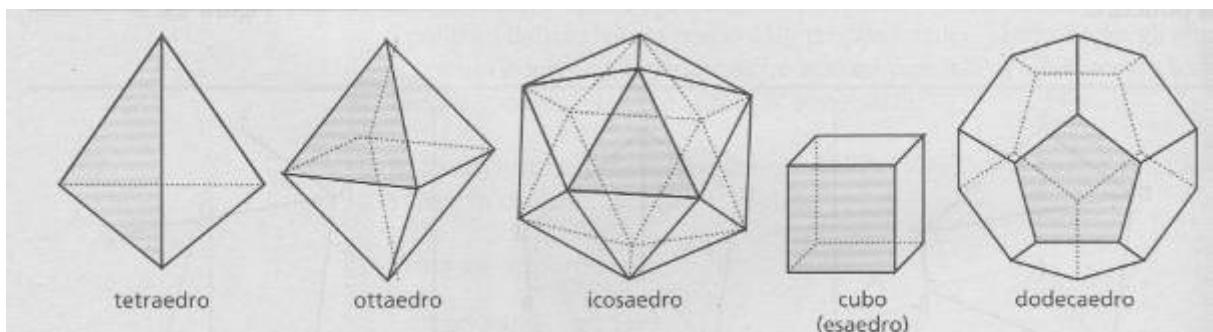
Poliedri regolari

Un **poliedro** convesso si dice **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari tutti uguali e i suoi angoloidi sono uguali.

Quanti sono i poliedri regolari?

Ricordiamo che in un angoloide le facce sono almeno tre e che la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro. Ciò limita la possibilità di ottenere poliedri regolari a cinque casi.

Poligoni regolari	Numero di facce in un vertice	Somma degli angoli delle facce	Nome del poliedro	N. Vertici	N. Spigoli	N. Facce
Triangoli equilateri (angoli 60 °)	3	180°<360°	Tetraedro	4	6	4
	4	240°<360°	Ottaedro	6	12	8
	5	300°<360°	Icosaedro	12	30	20
	6	360°=360°	Non esiste			
Quadrati (angoli di 90°)	3	270°<360°	Cubo o Esaedro	8	12	6
	4	360°=360°	Non esiste			
Pentagoni (angoli di 108°)	3	324°<360°	Dodecaedro	20	30	12
	4	432°>360°	Non esiste			
Esagoni (angoli 120°)	3	360°=360°	Non esiste			



Storicamente lo studio dei poliedri regolari si fa risalire a Pitagora nella cui scuola assunsero un ruolo magico e vennero chiamate figure cosmiche. Platone li collegava alle forme degli elementi della natura:

- cubo = particelle di terra
- tetraedro = fuoco
- ottaedro = aria
- icosaedro = acqua
- dodecaedro = la forma dell'Universo

PROBLEMI
POLIEDRI

1. Considera un tetraedro regolare di spigolo l . Determina superficie e volume. Determina l'angolo diedro α formato da due facce del tetraedro.

$$[S = \sqrt{3}l^2; V = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3; \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 70,5^\circ]$$

2. Considera un ottaedro regolare di spigolo l . Determina superficie e volume.

$$[S = 2\sqrt{3}l^2; V = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3]$$

3. Considera una piramide retta avente per base un triangolo equilatero $\triangle ABC$ di lato l e avente angolo diedro $A\hat{H}V = \frac{\pi}{3}$ (AH altezza del triangolo relativa a BC). Determina superficie e volume della piramide.

$$[S = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2; V = \frac{\sqrt{3}}{24}l^3]$$

4. Considera una piramide retta avente per base un quadrato $ABCD$ di lato l e $O\hat{H}V = \frac{\pi}{4}$ (O centro del quadrato, H punto medio di un lato del quadrato, V = vertice piramide) determina superficie e volume della piramide.

$$[S = l^2(1 + \sqrt{2}); V = \frac{l^3}{6}]$$

5. Considera una piramide retta avente per base un esagono regolare di lato l . Se $O\hat{H}V = \frac{\pi}{3}$ dove O è il centro dell'esagono, H il punto medio di uno spigolo di base e V il vertice, determina superficie e volume della piramide.

$$[S = 9\frac{\sqrt{3}}{2}l^2; V = \frac{3}{4}\sqrt{3}l^3]$$

6. Considera una piramide avente per base un rettangolo ABCD con $\overline{AB} = 2l$ e $\overline{BC} = l$ e avente il piede dell'altezza O = punto di incontro delle diagonali di base. Se $\hat{OHV} = \frac{\pi}{3}$ (dove H = punto medio di BC, V = vertice piramide) determina superficie e volume della piramide.

$$[S = (4 + \sqrt{13})l^2; V = \frac{2}{3}\sqrt{3}l^3]$$

7. Considera una piramide P di altezza h e vertice V e tagliala con un piano parallelo alla base, distante h' da V, individuando così una piramide P' di altezza h' . Dimostra che tra il volume V di P e il volume V' di P' esiste la relazione:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$$

8. A quale distanza h' dal vertice V di un tetraedro regolare VABC di altezza h si deve condurre un piano parallelo alla base $\triangle ABC$ in modo da staccare un tetraedro VA'B'C' avente volume pari alla metà del volume del tetraedro VABC?

$$[h' = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot h]$$

9. Determina lo spigolo dell'ottaedro regolare inscritto in un cubo di spigolo l (si congiungono i centri delle facce del cubo).

$$[\frac{l}{2}\sqrt{2}]$$

10. Determina lo spigolo del cubo inscritto in un ottaedro regolare di spigolo l .

$$[\frac{\sqrt{2}}{3}l]$$

11. Determina lo spigolo del tetraedro regolare inscritto in un tetraedro regolare di spigolo l .

$$[\frac{l}{3}]$$

Solidi di rotazione

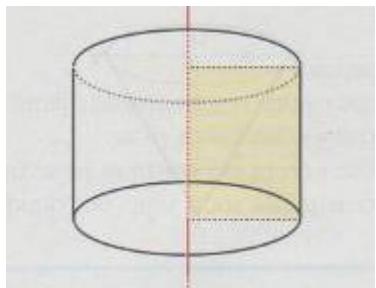
Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno ad una retta r secondo un angolo α .

Se α è un angolo giro allora si dice che la rotazione è **completa**.

In ogni rotazione completa ogni punto P della figura piana descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare a r passante per P .

Fra i solidi di rotazione iniziamo con lo studiare cilindro, cono e sfera.

Cilindro circolare retto (o semplicemente cilindro)



Il **cilindro circolare retto** (o semplicemente cilindro) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

Il lato attorno a cui ruota il rettangolo è detto **altezza** del cilindro.

Gli altri due lati perpendicolari all'**altezza** sono detti **raggi di base**.

Un cilindro si dice **equilatero** quando $h=2r$

Volume e superficie di un cilindro

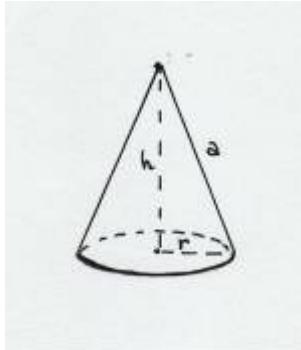
$$\begin{aligned} S_L &= 2p_{base} \cdot h = 2\pi r \cdot h \\ S_T &= 2 \cdot B + S_L = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \\ V &= Bh = \pi r^2 \cdot h \end{aligned}$$

La formula del volume è analoga a quella del prisma poiché per il principio di Cavalieri il cilindro è equivalente ad un prisma che ha base equivalente e uguale altezza.

- Un prisma retto è inscritto in un cilindro se le basi del prisma sono inscritte nelle basi del cilindro
- Un prisma retto è circoscritto ad un cilindro se le basi del prisma sono poligoni circoscritti ai cerchi di base del cilindro ed ogni faccia laterale del prisma è tangente alla superficie laterale del cilindro.

Cono circolare retto (o semplicemente cono)

Il **cono circolare retto** (o semplicemente cono) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti.



Il lato attorno a cui ruota il triangolo è detto **altezza** h del cono. L'altro cateto è il **raggio di base** r . L'ipotenusa del triangolo rettangolo descrive la superficie laterale ed è detta **apotema** a .

Un cono si dice **equilatero** quando $a=2r$, cioè quando la sezione che si ottiene tagliandolo con un piano perpendicolare alla base passante per il vertice è un triangolo equilatero.

Volume e superficie di un cono

$$\begin{aligned} S_L &= \frac{1}{2} 2p_{base} \cdot a = \pi r \cdot a \\ S_T &= B + S_L = \pi r^2 + \pi r \cdot a \\ V &= \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \end{aligned}$$

La formula del volume è analoga a quella della piramide poiché per il principio di Cavalieri il cono è equivalente ad una piramide avente la stessa altezza e la cui base abbia la stessa area della base del cono.

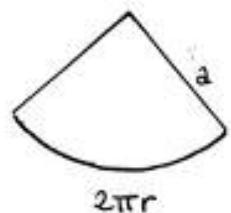
La formula dell'area della superficie laterale si ottiene dal fatto che tale superficie può essere sviluppata in un settore circolare di raggio pari all'apotema a .

L'area A di un settore circolare di lunghezza l si ricava dalla proporzione

$$A : \pi r^2 = l : 2\pi r \rightarrow A = \frac{\pi r^2 l}{2\pi r} = \frac{1}{2} l \cdot r$$

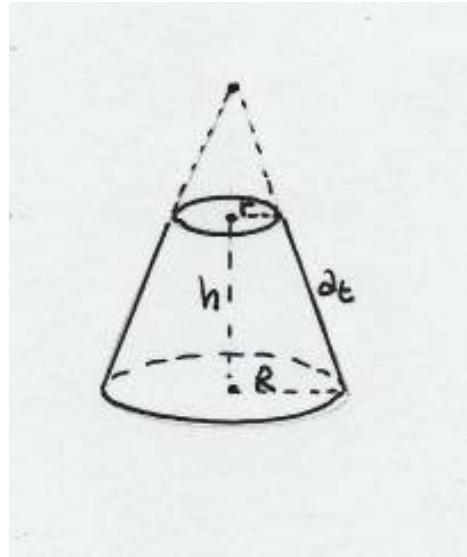
cioè $A = \frac{1}{2} \cdot arco \cdot raggio$ e quindi nel nostro caso

$$S_l = \frac{1}{2} (2\pi r) \cdot a = \pi \cdot r \cdot a$$



Tronco di cono

Il **tronco di cono** si ottiene tagliando un cono con un piano parallelo alla base , oppure può essere pensato come la rotazione completa di un trapezio rettangolo intorno al lato perpendicolare alle basi.



Volume e superficie di un tronco di cono

Con una simbologia ed una dimostrazione analoga a quella vista per il tronco di piramide si ha, indicando con B la base maggiore di raggio R , con b quella minore di raggio r e con a_t l'apotema del tronco:

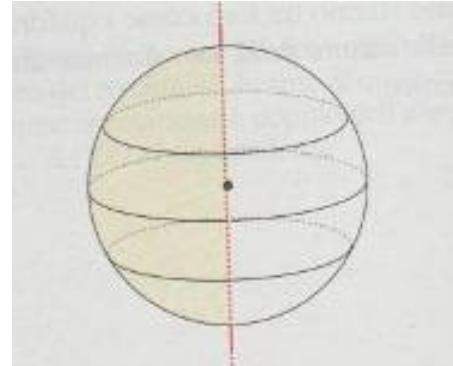
$$\boxed{\begin{aligned} S_L &= \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t] = \frac{1}{2}[(2\pi R + 2\pi r) \cdot a_t] = \pi(R+r) \cdot a_t \\ S_T &= B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t] = \pi[R^2 + r^2 + (R+r)a_t] \\ V &= \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb}) \cdot h = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \end{aligned}}$$

Sfera

La sfera è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un semicerchio intorno al diametro, oppure è l'insieme dei punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è minore o uguale alla lunghezza di un segmento assegnato detto raggio.

I punti per cui la suddetta distanza dal centro è pari al raggio formano la **superficie sferica**.

Tagliando la superficie sferica con un qualunque piano α si ottiene una circonferenza che ha raggio massimo quando α passa per il centro.



Volume e superficie di una sfera

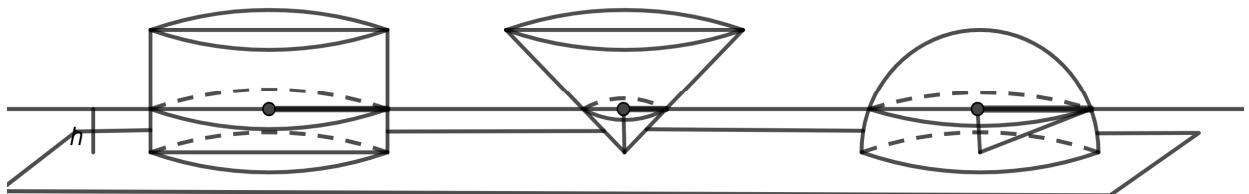
$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Volume della sfera

Dimostriamo la formula per il volume mediante passi successivi.

- 1) Un cilindro avente raggio e altezza r è equivalente alla somma di un cono avente raggio e altezza r e di una semisfera di raggio r .



Infatti se taglio i tre solidi con un piano parallelo ad una distanza h dal piano di appoggio, le sezioni hanno aree rispettivamente πr^2 , πh^2 e $\pi(r^2 - h^2)$ che sono quindi legate dalla seguente relazione

$$\pi r^2 = \pi h^2 + \pi(r^2 - h^2)$$

- 2) Per il principio di Cavalieri si ha

volume cilindro = volume semisfera + volume cono e quindi

$$\text{volumesfera} = V = 2(\text{volumecilindro} - \text{volumecono}) = 2\left(\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

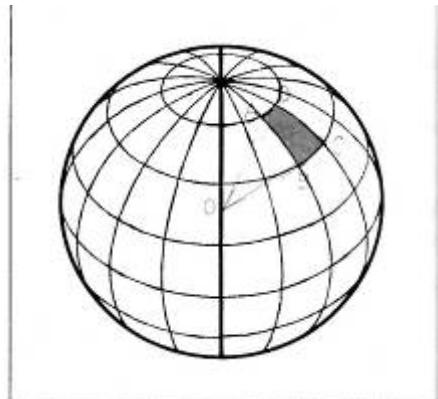
Superficie della sfera

Dimostriamo ora in modo intuitivo e non rigoroso la formula della misura della superficie.

Supponiamo di dividere la superficie sferica in aree A_1, A_2, \dots, A_n individuate da paralleli e meridiani.

Possiamo considerare il volume come la somma dei volumi delle n “piramidi” di base A_i e altezza r .

Quindi



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}A_1r + \frac{1}{3}A_2r + \dots + \frac{1}{3}A_nr$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

Parti della superficie sferica e della sfera

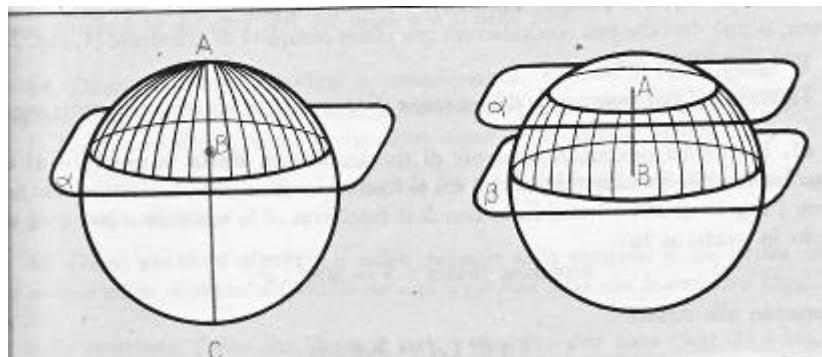
Calotta (segmento sferico ad una base) e zona sferica (segmento sferico a due basi).

Dato un piano α secante una sfera, esso divide la sua superficie sferica in due parti ciascuna delle quali è detta **calotta** (la circonferenza della sezione è detta **base** della calotta, il diametro della sfera passante per il centro della base della calotta, incontra la calotta in un punto detto **vertice** e la distanza del vertice al centro della base è detta **altezza** della calotta).

Se invece consideriamo la sfera tagliata da un piano, individuiamo due parti ciascuna delle quali è detta **segmento sferico ad una base**.

Due piani paralleli dividono una superficie sferica in tre parti: due calotte e la parte compresa tra i due piani chiamata **zona sferica** (la distanza tra i centri delle basi della zona sferica è l'**altezza** della zona).

Considerando la sfera tagliata da due piani paralleli, la parte compresa tra i due piani è detta **segmento sferico a due basi**.



Fuso sferico

Si chiama **fuso sferico** ciascuna delle due parti in cui resta divisa una superficie sferica da due semipiani aventi come origine una retta passante per il centro della sfera.

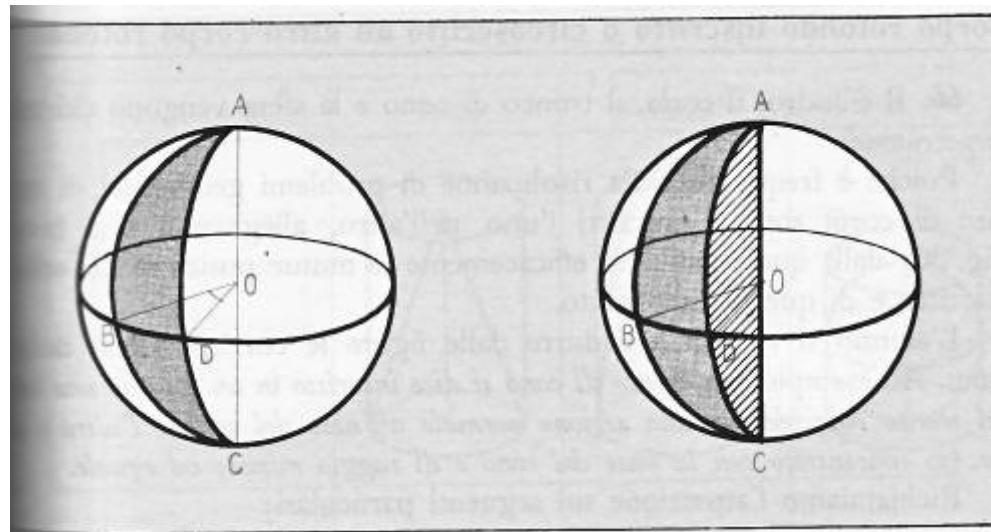
Detta α l'ampiezza del diedro si ha che

$$S_f : 4\pi R^2 = \alpha^\circ : 360^\circ$$

Spicchio sferico

Lo **spicchio sferico** è la parte di sfera delimitata da un fuso sferico e dai due semicerchi, lati del fuso

$$V_s : \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha^\circ : 360^\circ$$



Altri solidi di rotazione

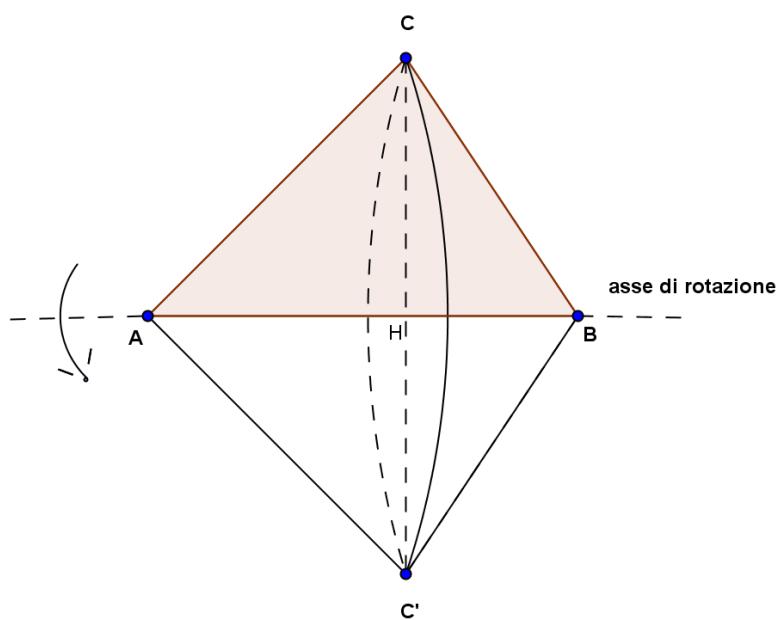
Oltre a cilindro, cono, sfera possiamo studiare molti altri solidi ottenuti dalla rotazione completa di una figura attorno ad una retta.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1

Consideriamo un triangolo, per esempio acutangolo, $\triangle ABC$ e ruotiamolo intorno alla base AB .

Nella rotazione il vertice C descriverà una circonferenza di raggio \overline{CH} (vedi figura) e il solido risulterà costituito da due coni di raggio \overline{CH} uniti per la base.



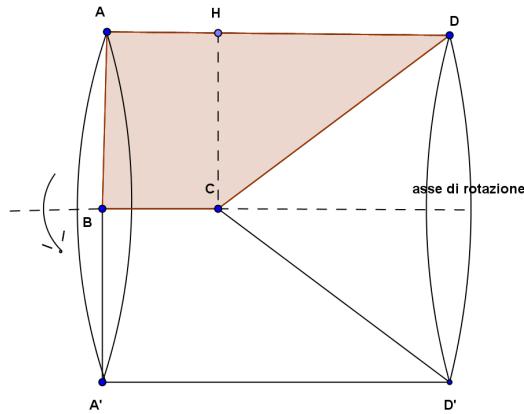
Possiamo calcolare superficie e volume del solido ottenuto:

$$S = \pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{AC} + \pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{CB} \quad (\text{somma delle superfici laterali dei due coni})$$

$$V = \frac{\pi}{3} \overline{CH}^2 \cdot \overline{AH} + \frac{\pi}{3} \overline{CH}^2 \cdot \overline{HB} = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{CH}^2 (\overline{AH} + \overline{HB}) = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{CH}^2 \cdot \overline{AB}$$

Esempio 2

Consideriamo il solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo ABCD intorno alla sua base minore.



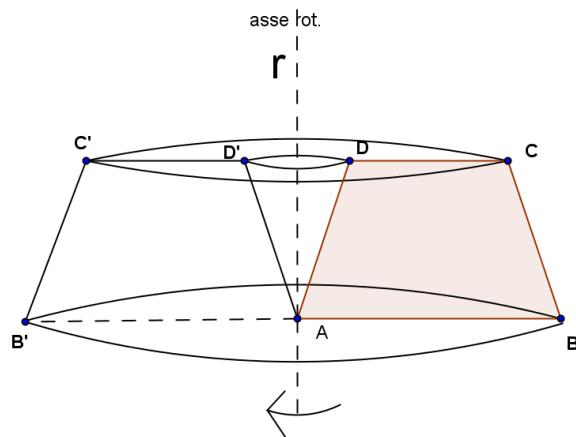
In questo caso otteniamo un *cilindro \ cono* (un cilindro a cui si sottrae un cono) e quindi:

$$S = B_{\text{cilindro}} + S_{l(\text{cilindro})} + S_{l(\text{cono})} = \pi \overline{AB}^2 + 2\pi \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \pi \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

$$V = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} = \pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{AD} - \frac{1}{3} \pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{HD}$$

Esempio 3

Consideriamo il solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio isoscele ABCD attorno alla retta r (vedi figura).



Si ottiene un *tronco di cono \ cono* e quindi:

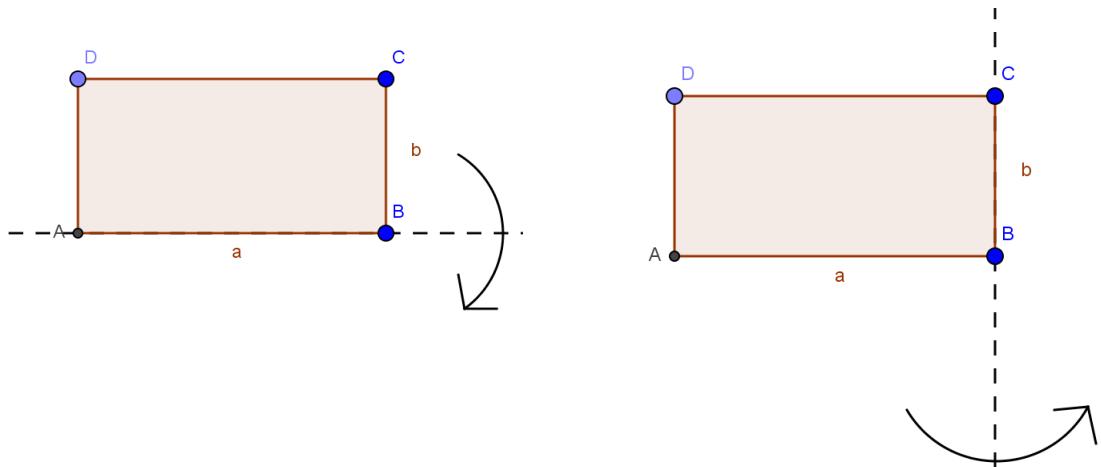
$$S = B_{\text{tronco}} + b_{\text{tronco}} - b_{\text{cono}} + S_{l(\text{tronco})} + S_{l(\text{cono})}$$

$$V = V_{\text{tronco}} - V_{\text{cono}}$$

PROBLEMI
SOLIDI DI ROTAZIONE

1. Considera un rettangolo ABCD di dimensioni $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e determina superficie e volume del cilindro che si ottiene :

- a) ruotandolo intorno ad AB;
b) ruotandolo intorno a BC.



$$[S_1 = 2\pi b^2 + 2\pi ab; \quad V_1 = \pi a \cdot b^2; \quad S_2 = 2\pi a^2 + 2\pi ab; \quad V_2 = \pi a^2 b]$$

2. Considera un triangolo rettangolo ABC di cateti $\overline{AB} = a$; $\overline{AC} = b$. Determina superficie S e volume V del cono che si ottiene:

- c) ruotandolo intorno al cateto AB;
d) ruotandolo intorno al cateto AC

$$[S_1 = \pi b^2 + \pi \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2}; \quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi a b^2; \quad S_2 = \pi a^2 + \pi a \cdot \sqrt{a^2 + b^2}; \quad V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi a^2 b]$$

3. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo isoscele ABC intorno all' ipotenusa AB. Sapendo che i cateti misurano $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, determina superficie e volume del solido.

$$[S = \sqrt{2} \pi a^2; \quad V = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi a^3]$$

4. Considera un trapezio isoscele ABCD avente lato obliquo $\overline{BC} = l$ e base minore $\overline{CD} = l$ e gli angoli adiacenti alla base maggiore uguali a $\frac{\pi}{3}$. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio intorno alla base maggiore AB e determinane superficie e volume.

$$[S = 2\sqrt{3} \pi l^2; \quad V = \pi l^3]$$

5. Considera un triangolo ABC avente $\cos(\hat{CAB}) = -\frac{3}{5}$, $\overline{AC} = l$ e $\hat{ABC} = \frac{\pi}{6}$. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo intorno al lato AB e determinane la superficie.

$$[S = \frac{52}{25}\pi d^2]$$

6. Considera un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2l$ e poni gli angoli alla base uguali ad x. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo intorno alla retta per A perpendicolare ad AB e determinane superficie e volume (in funzione di x). Per quale x il volume risulta $2\pi\sqrt{3}l^3$?

$$[S(x) = 4\pi d^2(1 + \frac{1}{\cos x}); V(x) = 2\pi d^3 \operatorname{tg} x; x = \frac{\pi}{3}]$$

7. Considera un trapezio rettangolo ABCD avente base maggiore $\overline{AB} = 2l$, base minore $\overline{CD} = l$ e $\hat{ABC} = \frac{\pi}{4}$. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base minore CD e determinane superficie e volume.

$$[S = \pi d^2(5 + \sqrt{2}); V = \frac{5}{3}\pi d^3]$$

8. Determina il raggio r della sfera inscritta e il raggio R della sfera circoscritta ad un cono di raggio l e altezza $2l$.

$$[r = \frac{2l}{\sqrt{5}+1}; R = \frac{5}{4}l]$$

9. Determina il raggio r della sfera inscritta e il raggio R della sfera circoscritta ad un cono equilatero di diametro l .

$$[r = \frac{l}{6}\sqrt{3}; R = \frac{l}{\sqrt{3}}]$$

10. Determina il raggio r della sfera inscritta e il raggio R della sfera circoscritta ad un

- a) cubo di spigolo l ;
- b) tetraedro regolare di spigolo l ;
- c) ottaedro regolare di spigolo l .

$$[r = \frac{l}{2}; R = \frac{l\sqrt{3}}{2}; r = \frac{l\sqrt{6}}{12}; R = \frac{l\sqrt{6}}{4}; r = \frac{l}{\sqrt{6}}; R = \frac{l}{\sqrt{2}}]$$

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE GEOMETRIA DELLO SPAZIO

1) Sia ABCV una piramide retta avente per base un triangolo equilatero $\triangle ABC$ di lato l . Detto O il piede dell'altezza VO e posto $x = \hat{OB}V$, determina superficie e volume della piramide in funzione di x. Per quale x il volume risulta $V = \frac{l^3}{12}$?

$$[S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 x + 1} \right); V(x) = \frac{l^3}{12} \operatorname{tg} x; x = \frac{\pi}{4}]$$

2) Considera una piramide avente per base un rettangolo ABCD con $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = 2a$. Supponendo che l'altezza cada nel punto di incontro O delle diagonali di base e detto $x = \hat{OH}V$, dove H è il punto medio di BC, determina, in funzione di x, superficie e volume della piramide. Per quale valore di x il volume risulta $V = \frac{a^3}{\sqrt{3}}$?

$$[S(x) = 2a^2 + \frac{a^2}{\cos x} + \frac{a^2}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4}; V(x) = \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} x; x = \frac{\pi}{3}]$$

3) Considera il triangolo $\triangle ABC$ avente $\overline{AB} = \overline{AC} = l$ e $\hat{CAB} = \frac{2}{3}\pi$. Determina superficie e volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa di $\triangle ABC$ intorno ad AB.

$$[S = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} + 1) \pi l^2; V = \frac{\pi}{4} l^3]$$

4) Considera un trapezio rettangolo ABCD retto in A e in D, avente $\overline{AD} = \overline{DC} = a$ e base maggiore $\overline{AB} = 2a$. Determina superficie e volume del solido che si ottiene ruotando ABCD intorno alla retta per BC (lato obliquo).

$$[S = 4\sqrt{2}\pi a^2; V = \frac{7}{6}\sqrt{2}\pi a^3]$$

- 5) Considera una piramide retta avente per base un quadrato ABCD di lato l . Detto O il piede dell'altezza OV e posto $x = \hat{OCV}$, determina, in funzione di x, superficie e volume della piramide.

Determina per quale x il volume risulta $V = \frac{\sqrt{2}}{6} l^3$.

Se la piramide viene sezionata con un piano parallelo alla base staccando un segmento $\overline{VK} = \frac{1}{3} \overline{VO}$, determina il rapporto tra il volume del tronco di piramide che si ottiene e il volume della piramide ABCDV.

$$[S(x) = l^2 \left(1 + \sqrt{2 \tan^2 x + 1} \right); V(x) = \frac{\sqrt{2}}{6} l^3 \tan x; x = \frac{\pi}{4}; \frac{V_{tronco}}{V_{piramide}} = \frac{26}{27} =]$$

- 6) Considera un triangolo $\triangle ABC$ avente $\overline{AB} = \frac{25}{2}a$, $\tan B\hat{A}C = \frac{4}{3}$, $\tan A\hat{B}C = \frac{3}{4}$. Determina superficie e volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di $\triangle ABC$ intorno alla retta per C parallela ad AB.

$$[S = 255\pi a^2; V = 300\pi a^3]$$

- 7) Considera una piramide retta avente per base un quadrato ABCD di lato l e, detto H il punto medio di BC e O il centro del quadrato, supponi che $\hat{O}\hat{H}V = \frac{\pi}{3}$.

Determina superficie e volume della piramide.

Determina il raggio r della sfera inscritta.

$$[S = 3l^2; V = \frac{\sqrt{3}}{6} l^3; r = \frac{l\sqrt{3}}{6}]$$

- 8) Dato un cono di raggio r e altezza h , esprimi in funzione di r e h il raggio r_i della sfera inscritta nel cono e il raggio r_c della sfera circoscritta al cono.

$$[r_i = \frac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}; r_c = \frac{r^2 + h^2}{2h}]$$

- 9) Considera una piramide retta di vertice V e avente per base un triangolo equilatero $\triangle ABC$ di lato l . Indicato con O il piede dell'altezza, sapendo che $\hat{OAV} = \frac{\pi}{6}$, determina superficie e volume della piramide. Calcola inoltre (approssimandolo con l'uso della calcolatrice) l'angolo diedro α formato tra la faccia laterale e il piano di base della piramide.

$$[S = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4} \right) l^2 ; V = \frac{\sqrt{3}}{36} l^3 ; \alpha \approx 49,14^\circ]$$

- 10) Considera una piramide avente per base un triangolo rettangolo $\triangle ABC$, retto in A , con $\overline{AB} = 3a$ e $\overline{AC} = 4a$. Sia $\overline{AV} = a$ l'altezza della piramide. Determina superficie e volume della piramide. Determina inoltre il volume del tronco di piramide ottenuto sezionando la piramide data con un piano parallelo alla base passante per il punto medio di VA .

$$[S = 16a^2 ; V = 2a^3 ; V_T = \frac{7}{4}a^3]$$

- 11) Considera un trapezio isoscele di base minore $\overline{DC} = 2l$ e lato obliquo di misura l . Se $\hat{ABC} = \hat{BAD} = \frac{\pi}{4}$ determina la superficie e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base minore.

$$[S = \pi d^2 (3\sqrt{2} + 2) \quad V = \frac{(3 + \sqrt{2})}{3} \pi d^3]$$

- 12) Considera un triangolo $\triangle ABC$ avente $\cos \hat{A} = -\frac{7}{25}$ e $\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$ e $\overline{AB} = 5l$. Disegna il solido che si ottiene dalla rotazione completa di $\triangle ABC$ intorno alla retta per AB . Calcola superficie e volume.

$$[S = \frac{312}{5} \pi d^2 ; V = \frac{192}{5} \pi d^3]$$

- 13) Considera una piramide avente per base il quadrato $ABCD$ di lato l e avente altezza $\overline{VA} = l$ (osserva che non si tratta di una piramide retta). Determina superficie e volume della piramide (ricorda il teorema delle tre perpendicolari...).

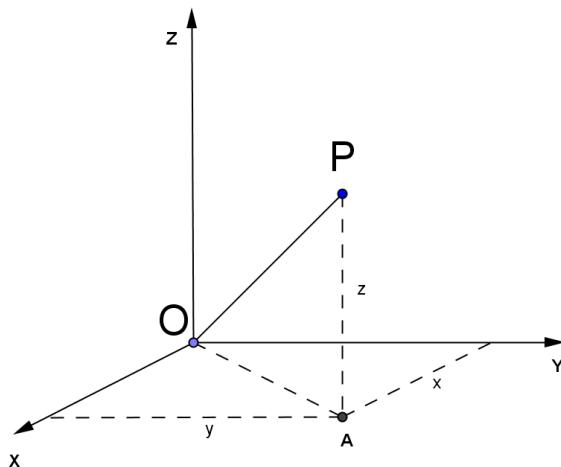
$$[S = 2l^2 + \sqrt{2}l^2 ; V = \frac{l^3}{3}]$$

Geometria analitica dello spazio

Il sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio

Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio è costituito da tre rette x , y , z incidenti in O (origine), a due a due perpendicolari ed orientate come in figura: un qualsiasi punto P del piano è quindi individuato da una terna ordinata di numeri reali $(x; y; z)$ detti rispettivamente ascissa, ordinata e quota.

Il punto $A(x; y)$ rappresenta la proiezione di P sul piano Oxy.



Distanza di un punto dall'origine del sistema

La distanza \overline{OP} si può calcolare determinando prima $\overline{OA}^2 = x^2 + y^2$ e poi applicando ancora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAP (retto in A): $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + z^2$.

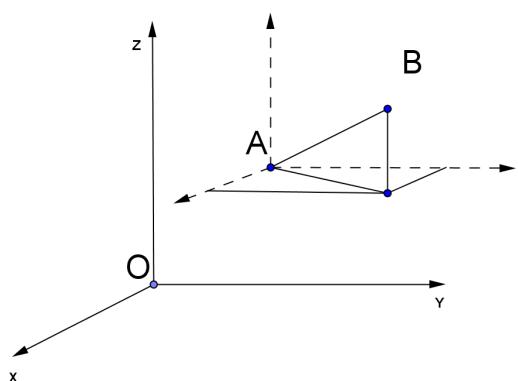
In conclusione :

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Distanza tra due punti

Dati due punti $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$ la distanza \overline{AB} si calcola in modo analogo al procedimento usato per la distanza di un punto dall'origine, pensando di portare l'origine del sistema di riferimento in A e si ha quindi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Vettori

Nella geometria analitica dello spazio è particolarmente utile saper operare con i vettori.

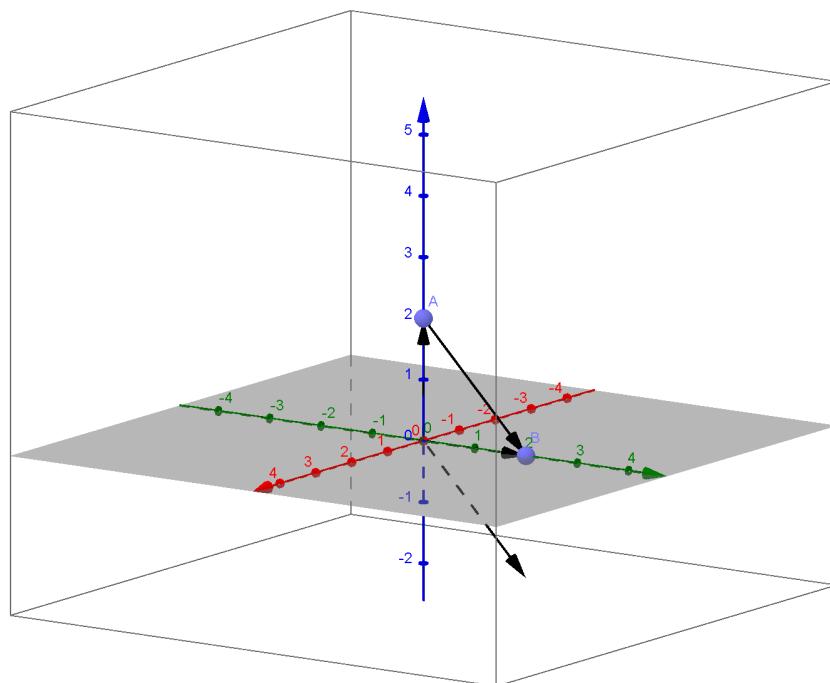
Osserviamo che ad un punto $P(x; y; z)$ possiamo sempre associare il vettore \overrightarrow{OP} dove O è l'origine del sistema di riferimento.

Somma di vettori

Se consideriamo i vettori \overrightarrow{OA} con $A(x_A; y_A; z_A)$ e \overrightarrow{OB} con $B(x_B; y_B; z_B)$ si dimostra facilmente che $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un vettore applicato nell'origine e avente come secondo estremo il punto $(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B)$.

Differenza di vettori

Se consideriamo i vettori \overrightarrow{OA} con $A(x_A; y_A; z_A)$ e \overrightarrow{OB} con $B(x_B; y_B; z_B)$ si osserva che $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ è un vettore applicato nell'origine e avente come secondo estremo il punto $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ è parallelo al vettore \overrightarrow{AB} .



Consideriamo per esempio $A(0,0,2)$ e $B(0,2,0)$: il vettore $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ha come secondo estremo $(0,2,-2)$ ed è parallelo al vettore \overrightarrow{AB}

Prodotto scalare

Consideriamo due vettori $\overrightarrow{OA}(x_A, y_A, z_A) = \vec{a}$ e $\overrightarrow{OB}(x_B, y_B, z_B) = \vec{b}$: sappiamo che il loro prodotto scalare è definito come $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$ con α l'angolo compreso tra i due vettori.

Possiamo calcolare il prodotto scalare utilizzando le coordinate dei due vettori: considerando che congiungendo gli estremi dei due vettori si forma un triangolo di lati a, b, c possiamo applicare il teorema del coseno ed abbiamo :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Quindi abbiamo che

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha = a \cdot b \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

A questo punto sviluppando abbiamo che

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \left(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} (2x_A \cdot x_B + 2y_A \cdot y_B + 2z_A \cdot z_B) = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B \end{aligned}$$

In conclusione quindi il prodotto scalare tra due vettori $\overrightarrow{OA}(x_A, y_A, z_A) = \vec{a}$ e $\overrightarrow{OB}(x_B, y_B, z_B) = \vec{b}$ risulta:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_A, y_A, z_A) \cdot (x_B, y_B, z_B) = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B}$$

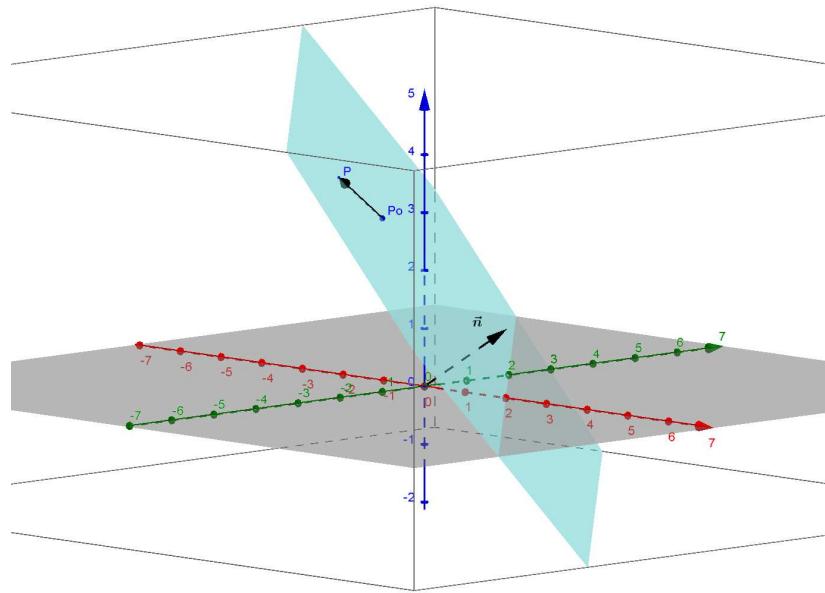
Vettori perpendicolari

Se due vettori sono perpendicolari (quindi l'angolo compreso è $\alpha = \frac{\pi}{2}$) il loro prodotto scalare è nullo e quindi, per quello che abbiamo visto, la condizione di perpendicolarità risulta

$$\boxed{x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B = 0}$$

Equazione di un piano

Consideriamo un piano α : possiamo individuarlo conoscendo un vettore $\vec{n}(a,b,c)$ perpendicolare ad esso (viene chiamato **vettore normale**) e un punto $P_o(x_o, y_o, z_o) \in \alpha$.
 (figura realizzata con Geogebra 3D)



$P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_o P}$ è perpendicolare ad \vec{n} e quindi il prodotto scalare $(a, b, c) \cdot (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = 0$ cioè

$$a \cdot (x - x_o) + b \cdot (y - y_o) + c \cdot (z - z_o) = 0$$

Sviluppando abbiamo

$$ax + by + cz - (ax_o + by_o + cz_o) = 0$$

Ponendo $-(ax_o + by_o + cz_o) = d$ possiamo scrivere in definitiva

$$ax + by + cz + d = 0$$

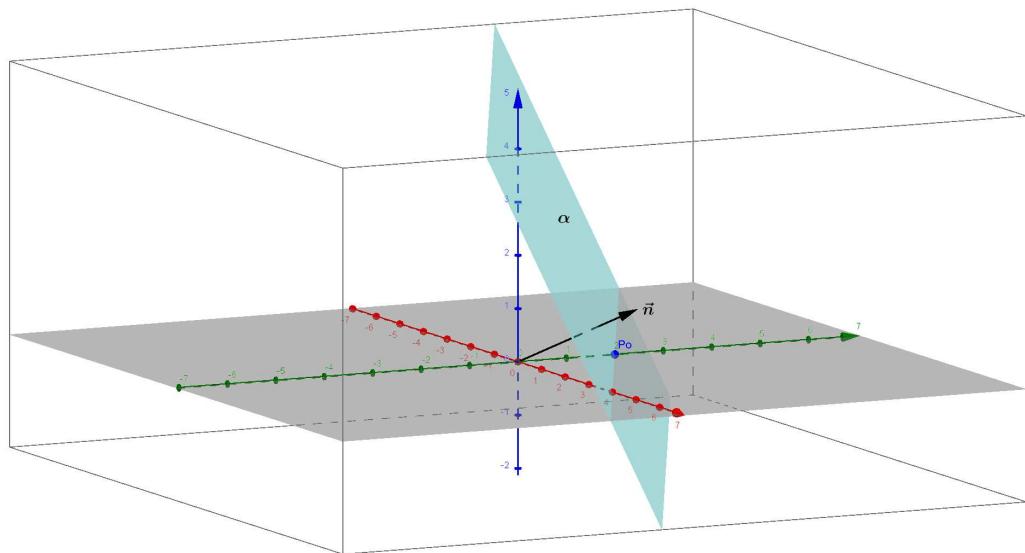
che quindi rappresenta l'equazione di un piano α perpendicolare al vettore $\vec{n}(a, b, c)$.
 Osserviamo che se $d = 0$ il piano α passa per l'origine O del sistema di riferimento.

Esempio

Supponiamo di avere $\vec{n}(1,2,1)$ e $P_o(0,2,0)$.

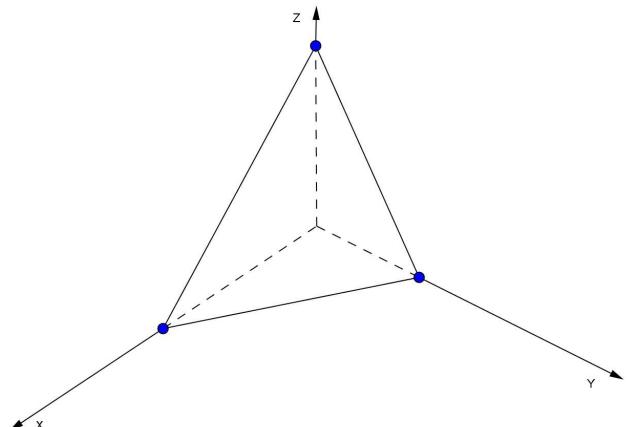
Il piano di vettore normale \vec{n} passante per P_o avrà equazione:

$$x + 2 \cdot (y - 2) + z = 0 \rightarrow x + 2y + z - 4 = 0$$



Nota: se non abbiamo a disposizione un software 3D e dobbiamo disegnare un piano di data equazione possiamo aiutarci trovando le intersezioni con gli assi.

Nel nostro caso per esempio abbiamo $A(4,0,0)$, $P_o(0,2,0)$, $B(0,0,4)$



Osservazioni

Il piano Oyz ha equazione $x = 0$ e un piano parallelo al piano Oyz ha equazione $x = k$.

Il piano Oxz ha equazione $y = 0$ e un piano parallelo al piano Oxz ha equazione $y = k$.

Il piano Oxy ha equazione $z = 0$ e un piano parallelo al piano Oxy ha equazione $z = k$.

Se $c = 0 \Rightarrow \alpha$ è parallelo all'asse z;

Se $b = 0 \Rightarrow \alpha$ è parallelo all'asse y;

Se $a = 0 \Rightarrow \alpha$ è parallelo all'asse x.

Piani paralleli

Due piani $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono paralleli quando i vettori normali sono paralleli e quindi quando $(a', b', c') = k(a, b, c) \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

Se si ha $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}$ i due piani sono coincidenti.

Piani perpendicolari

Due piani $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono perpendicolari quando i vettori normali sono perpendicolari cioè quando il loro prodotto scalare è nullo e quindi quando

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0.$$

Piano passante per tre punti non allineati

Come si determina l'equazione di un piano passante per tre punti assegnati?

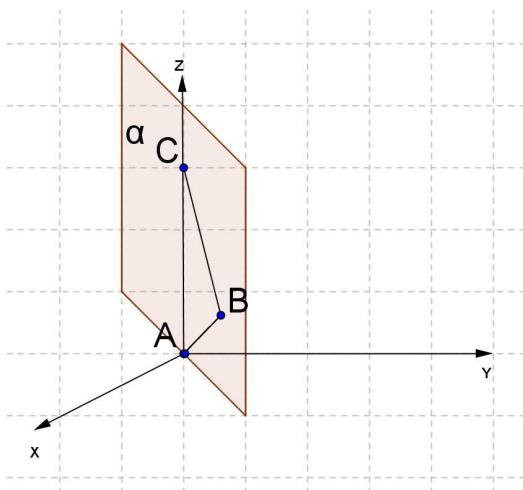
Consideriamo per esempio $A(0;0;0)$, $B(1;1;1)$ e $C(0;0;3)$.

Per determinare le incognite a, b, c, d dell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ possiamo sostituire nell'equazione generale le coordinate dei punti e risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 3c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a \\ c = 0 \end{cases}$$

Quindi l'equazione del piano è del tipo: $ax - ay = 0$ e poiché $a \neq 0$ (altrimenti a, b, c sarebbero tutti nulli) dividendo per a possiamo scrivere $x - y = 0$.

Osserviamo che il piano passa per l'asse z.



Equazione di una retta

L'equazione di una retta nello spazio può essere espressa come intersezione di due piani non paralleli e quindi abbiamo:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad (\text{con } \frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c} \text{ non uguali tra loro})$$

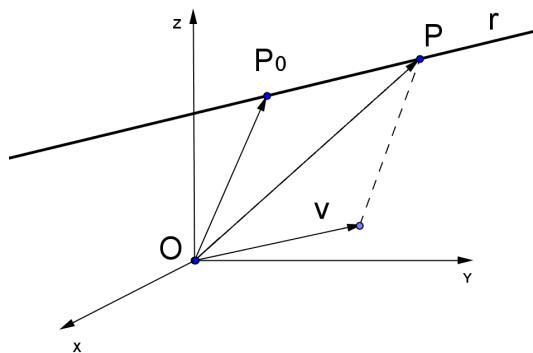
Osservazione: naturalmente coppie diverse di piani incidenti possono rappresentare la stessa retta.

Ma c'è un modo più significativo di scrivere le equazioni di una retta r : se conosciamo un punto $P_0 \in r$ e la **direzione della retta** data da un vettore parallelo alla retta $\vec{v}(a, b, c)$ (chiamato vettore direzione), un qualsiasi punto $P(x, y, z) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P}$ è parallelo a \vec{v} cioè

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot a \\ y - y_0 = t \cdot b \\ z - z_0 = t \cdot c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}$$

dove t è un parametro reale (da qui il nome di **equazioni parametriche** della retta)

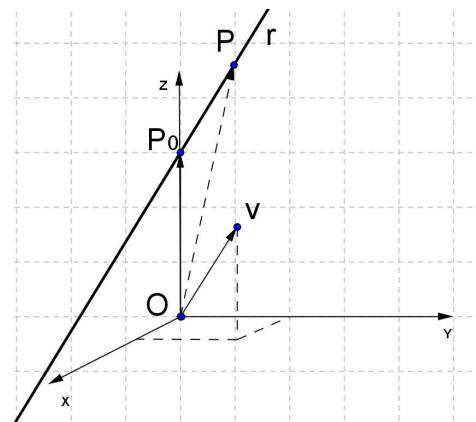
Nella figura seguente è stato disegnato il punto P corrispondente al valore del parametro $t = 1$.



Esempio

Le equazioni parametriche della retta r di direzione $\vec{v}(1,2,2)$ passante per $P_0(0,0,3)$ sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t \\ z = 3 + 2 \cdot t \end{cases}$$



Osservazioni

a) Le equazioni parametriche possono anche essere scritte anche in forma più compatta (è la scrittura che compare nella “vista algebra” di Geogebra 3D):

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(a, b, c)$$

b) Se $\vec{v}(a, b, c)$ è il vettore direzione della retta, lo sono anche i vettori $k \vec{v}(ka, kb, kc)$ con $k \neq 0$

c) Se una retta è data come intersezione di due piani possiamo determinare la sua equazione parametrica ponendo una variabile (tra quelle che compaiono nelle equazioni dei due piani) uguale al parametro t e ricavando le altre in funzione di t .

Per esempio se abbiamo $\begin{cases} 2x - z + 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ e poniamo $x = t$ otteniamo $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t + 3 \end{cases}$

Retta passante per due punti

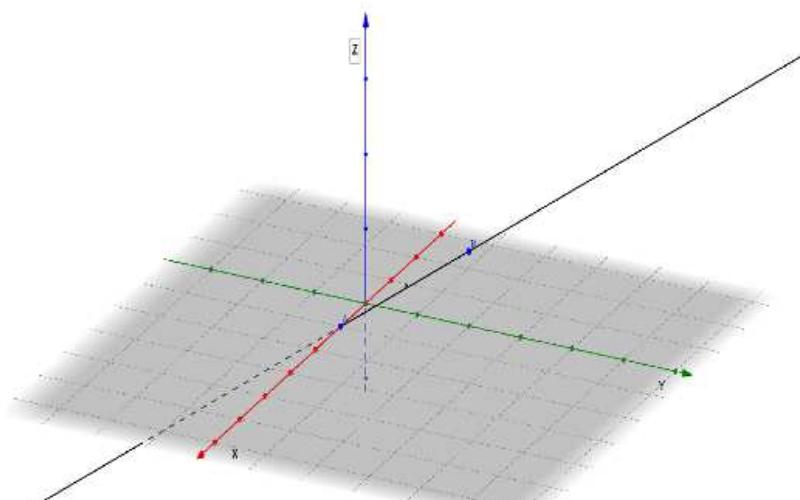
Come possiamo determinare le equazioni parametriche della retta passante per due punti assegnati?

Consideriamo per esempio i punti $A(1,0,0)$ e $B(0,2,1)$.

Se consideriamo i vettori associati ai due punti cioè $\overrightarrow{OA}(1,0,0)$ e $\overrightarrow{OB}(0,2,1)$ appare evidente che la direzione della retta per A e B è data dal vettore \overrightarrow{AB} (o dal vettore opposto) e quindi possiamo prendere come vettore direzione il vettore differenza $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ cioè $\vec{v}(-1,2,1)$ e scrivere le equazioni parametriche scegliendo come punto P_o il punto A oppure B (a piacere).

Per esempio possiamo scrivere: $r_{AB} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

Ecco come appare questa retta utilizzando Geogebra 3D :



Posizione reciproca di due rette

Sappiamo che due rette possono essere incidenti o parallele (se sono complanari) oppure sghembe.

Vediamo come possiamo dedurre dalle equazioni informazioni sulla loro posizione reciproca.

1) Consideriamo per esempio le rette seguenti

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

Si osserva che i vettori direzione delle due rette $(1; 2; -2)$, $(2; 4; -4)$ sono paralleli e quindi le rette sono parallele (non sono coincidenti perché si verifica facilmente che non hanno punti in comune).

2) Consideriamo ora le rette di equazione

$$r : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

In questo caso i vettori direzione $(3; 2; -1)$, $(1; 3; 0)$ non sono paralleli. Vediamo allora se le rette hanno un punto in comune oppure no.

Prendiamo il sistema formato dalle equazioni relative a due coordinate, per esempio alla y e alla z

$$\begin{cases} 2t = 5 + 3\lambda \\ 1 - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato per ora $y = 2$, $z = 0$: andiamo a questo punto a sostituire i valori dei parametri nelle rispettive equazioni per trovare l'ascissa:

$$r \rightarrow x = 2, \quad s \rightarrow x = 2$$

Dal momento che abbiamo trovato la stessa ascissa le rette sono incidenti nel punto $P(2; 2; 0)$.

Nota: se due rette incidenti hanno vettori direzione perpendicolari allora sono perpendicolari.

3) Se nell'esempio precedente sostituisco $2t$ al posto di $3t$ nell'ascissa di r cioè

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

quando vado a sostituire i valori trovati di t e λ non trovo più lo stesso valore anche per l'ascissa e quindi le rette non hanno punti in comune e, non essendo parallele, sono sghembe.

Distanza tra un punto e un piano

Consideriamo un piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P_o(x_o; y_o; z_o)$.

Per calcolare la distanza del punto P_o dal piano α si dimostra una formula analoga al caso piano distanza punto – retta cioè si ha

$$d((x_o; y_o; z_o); ax + by + cz + d = 0) = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Nota: per dimostrare questa formula basta considerare l'equazione della retta per P_o perpendicolare ad α (che avrà come vettore direzione $(a; b; c)$, intersecarla con α e detto H il punto di intersezione , calcolare $\overline{P_oH}$.

Esempio: considera il piano $\alpha : x + y + z = 0$ e il punto $P_0(1; 2; 1)$.

Applicando la formula abbiamo:

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Controlliamo determinando la retta r passante per P_0 perpendicolare al piano α e intersecandola con α : si individua così il punto Q, proiezione ortogonale di P_0 su α , e la distanza tra P_0 e α risulta uguale alla distanza $\overline{P_0Q}$:

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+t \end{cases} \rightarrow 1+t + 2+t + 1+t = 0 \rightarrow t = -\frac{4}{3} \rightarrow Q \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \overline{P_0Q} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Distanza tra un punto e una retta

Dato un punto P_o e una retta r ($P_o \notin r$) , per trovare la distanza tra P_o e r si deve trovare l'equazione del piano α per P_o perpendicolare ad r , intersecare α con la retta r e detto H il punto di intersezione calcolare $\overline{P_oH}$.

Esempio: considera il punto $P_0(0; 0; 1)$ e la retta $r \begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}$

Il piano per P_0 perpendicolare a r risulta $(x; y; z-1) \cdot (1; 1; 1) = 0 \rightarrow x + y + z - 1 = 0$: l'intersezione H tra α e r risulta

$$t + 2 + t + t - 1 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{3} \rightarrow H \left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3} \right)$$

$$\text{In conclusione } d(r; P_0) = \overline{P_0H} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

Equazioni di superfici

Considereremo solo un semplice esempio e per un approfondimento rimandiamo alla scheda 36 del laboratorio di informatica.

Superficie di una sfera

Qual è l' equazione di una superficie sferica di centro $C(x_c; y_c; z_c)$ e raggio r ?

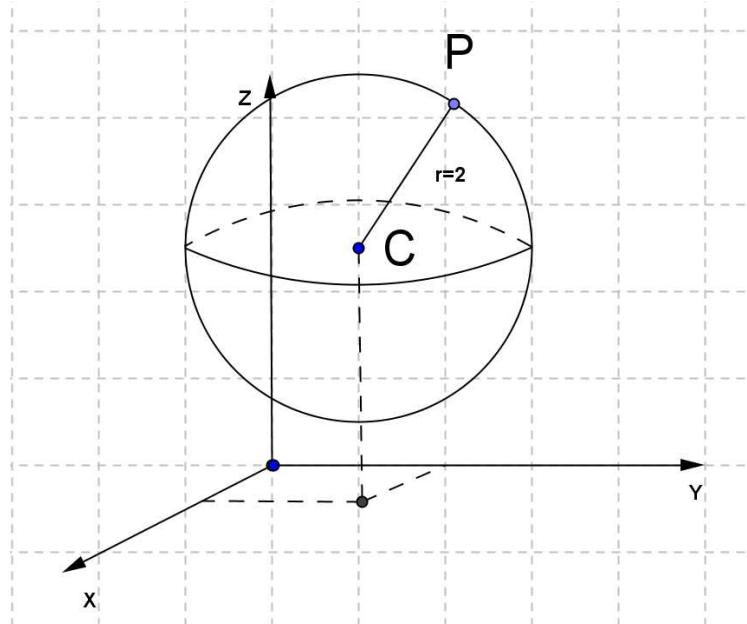
Poiché tutti i punti $P(x; y; z)$ appartenenti alla superficie sferica hanno distanza $\overline{PC} = r$ avremo:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

Esempio

Se $C(1;2;3)$ e $r = 2$ abbiamo:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$



PROBLEMI
GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

I) Piani nello spazio

1. Scrivi l'equazione del piano passante per i punti $A(1;0;0)$ $B(0;-3;1)$ $C(2;-2;0)$.

$$[2x + y + 5z - 2 = 0]$$

2. Determina l'equazione del piano α passante per $P(-1;1;1)$ e parallelo al piano β di equazione $x - 2y + z - 3 = 0$

$$[x - 2y + z + 2 = 0]$$

3. Determina la distanza tra l'origine e il piano passante per i punti $A(1;0;0)$ $B(0;1;0)$ $C(0;0;1)$.

$$[\frac{1}{\sqrt{3}}]$$

4. Determina la distanza tra i piani $\alpha: x - y = 0$ e $\beta: x - y + 2 = 0$ ($\alpha \parallel \beta$)

$$[\sqrt{2}]$$

5. Come risultano i piani $\alpha: 2x + y + z + 1 = 0$ e $\beta: 4x + 2y + 2z - 1 = 0$?

[paralleli]

6. Come risultano i piani $\alpha: x - y = 0$ e $\beta: x + y = 0$?

[perpendicolari]

7. Verifica che i punti $A(1;0;0)$ $B(0;2;0)$ $C(0;0;1)$ e $D\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ sono complanari e determina l'equazione del piano passante per essi.

$$[2x + y + 2z - 2 = 0]$$

II) Rette nello spazio

1. Determina le equazioni parametriche della retta r passante per $A(-1;4;-5)$ e $B(0;3;-3)$.

a) Il punto $P(1;2;-1)$ appartiene alla retta?

b) Determina l'intersezione di r con il piano xy .

$$[r \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases}; P \in r; \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)]$$

2. Scrivi la retta $r \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ in forma parametrica.

$$[\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}]$$

3. Come risultano le seguenti rette?

$$r \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = -2t \end{cases}; s \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

[parallele]

4. Come risultano le rette seguenti?

$$r \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 2t \end{cases}; s \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

[sgembe]

5. Come risultano $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1; 1; 1)$

$$s : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(-1; 1; 0) ?$$

[incidenti e perpendicolari]

6. Determina la retta passante per $P(2; 0; 0)$ e perpendicolare al piano $x - y = 0$

$$[(x, y, z) = (2; 0; 0) + t(1; -1; 0)]$$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

1. Determina l'equazione del piano passante per i punti $A(1;0;2)$, $B(0;1;3)$, $C(0;0;3)$.

$$[x + z - 3 = 0]$$
2. Determina l'equazione del piano passante per i punti $A(-1;0;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;2)$.

$$[x - z + 2 = 0]$$
3. Determina l'equazione del piano passante per il punto $P(-3;2;4)$ e parallelo al piano di equazione $3x - 2y - z = 5$.

$$[3x - 2y - z + 17 = 0]$$
4. Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per $P(4;-2;5)$ e avente come vettore direzione $\vec{v}(-1;4;0)$.

$$[\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 5 \end{cases}]$$
5. Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per i punti $A(-2;1;0)$ e $B(1;3;-1)$.

$$[\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}]$$
6. Determina le equazioni parametriche della retta $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

$$[\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}t \\ y = 1 - \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}]$$
7. Come risultano le rette $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$? [sghembe]
8. Come risultano le rette $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -1 - 6\lambda \end{cases}$? [parallele]

9. Determina l'equazione della retta passante per il punto $P(-2;5;6)$ perpendicolare alla retta di

equazioni
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$[\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 5 - 4t \\ z = 6 - 4t \end{cases}]$$

10. Come risultano le rette
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$
 ?

[incidenti in $P(-2;4;1)$]

11. Come risulta la retta
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$$
 rispetto al piano di equazione $x + 2y - z + 1 = 0$?

[incidente nel punto $P(-8;2;-3)$]

12. Come risulta la retta
$$\begin{cases} 2x + z = 7 \\ y = 6 \end{cases}$$
 rispetto al piano di equazione $4x - 3y + 2z - 1 = 0$?

[parallela]

13. Determina la distanza del punto $P(1;2;-1)$ dal piano di equazione $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

$$[\frac{\sqrt{14}}{2}]$$

14. Determina la distanza tra i piani $\alpha: x - 2y - z - 2 = 0$, $\beta: x - 2y - z + 3 = 0$.

$$[\frac{5\sqrt{6}}{6}]$$

15. Determina l'equazione del piano passante per il punto $P(1;2;-3)$ e parallelo al piano di equazione $x - 2y - 3z - 5 = 0$. Calcola la distanza tra essi.

$$[x - 2y - 3z - 6 = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{14}}]$$

Calcolo combinatorio



Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio può essere enunciato così:

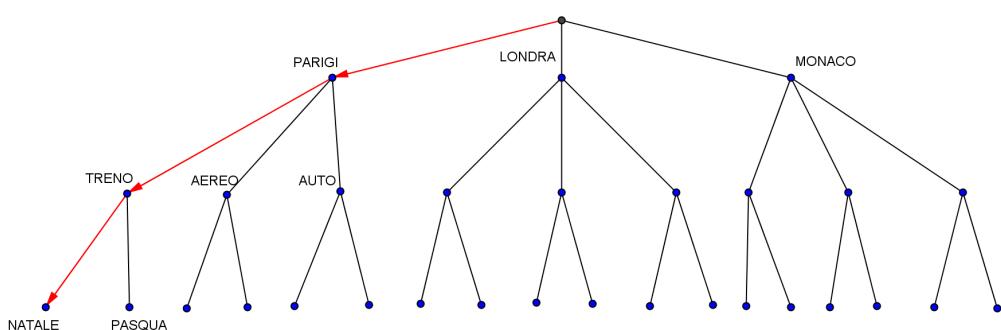
“Se dobbiamo fare N scelte e la prima scelta può essere fatta in n_1 modi, la seconda scelta in n_2 modi e così via fino all’N-esima scelta che può essere fatta in n_N modi, allora la successione delle N scelte può essere fatta in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots \cdot n_N$ modi diversi.”

Facciamo un esempio: supponiamo di voler organizzare una vacanza e di poter scegliere

- la meta tra Parigi, Londra e Monaco
- il mezzo di trasporto tra treno, aereo e auto
- il periodo tra vacanze di Natale e vacanze di Pasqua

In quanti modi diversi possiamo organizzare la nostra vacanza?

Possiamo rappresentare la situazione con un “grafo ad albero”:



Ci accorgiamo che percorrendo i vari “rami” dell’albero abbiamo vacanze diverse: per esempio seguendo le frecce in figura abbiamo Parigi, in treno, a Natale.

Quindi, poiché ogni percorso-vacanza termina nell’ultimo livello, per sapere quante vacanze diverse possiamo organizzare basta contare le “terminazioni” dell’albero, che sono 18.

E’ chiaro anche che il numero delle “terminazioni” si ottiene moltiplicando 3 (possibilità per la prima scelta) * 3 (possibilità per la seconda scelta)*2 (possibilità per la terza scelta) secondo il principio fondamentale del calcolo combinatorio che abbiamo enunciato.

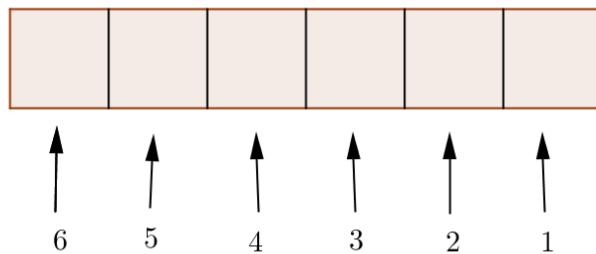
Permutazioni

Se abbiamo n oggetti distinti e dobbiamo metterli in “fila”(quindi l’ordine è importante) **quante “file” (permutazioni) diverse possiamo fare?**

Consideriamo per esempio la parola *scuola*: **quanti anagrammi si possono fare?**

Gli oggetti in questo caso sono le sei lettere della parola s,c,u,o,l,a e sono tutte distinte.

Immaginiamo di riempire in successione sei caselle (per formare l’anagramma cioè la nostra “fila”): per riempire la prima casella ho 6 possibili scelte (posso usare una delle sei lettere), per riempire la seconda casella però ho solo 5 possibili scelte perché una lettera l’ho già usata e non posso ripeterla e così via fino al riempimento dell’ultima casella per la quale ho solo 1 scelta.



Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio avremo

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

possibili “file” cioè permutazioni dei 6 oggetti distinti (le lettere *s,c,u,o,l,a*).

In generale il numero delle permutazioni di n elementi distinti sarà dato dal prodotto

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

che viene indicato con il simbolo

$$n!$$

e si legge **n fattoriale**.

Il numero delle **permutazioni di n elementi distinti** viene in genere indicato con P_n e quindi abbiamo:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Osservazioni

$n!$ cresce molto rapidamente: per esempio $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$ ecc.

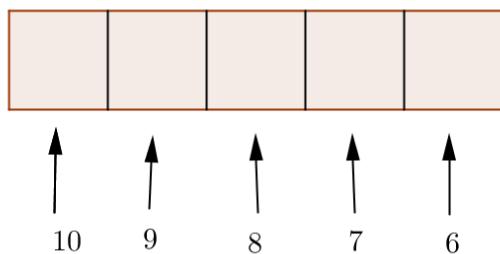
Si ha inoltre che $n! = n \cdot (n - 1)!$

Per convenzione si pone $0! = 1$

Disposizioni semplici

Consideriamo adesso questo problema: *quanti diversi codici di 5 cifre distinte si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*

E' chiaro che anche in questo caso l'ordine è importante: si tratta di scegliere come riempire 5 caselle potendo scegliere tra un insieme di 10 elementi e quindi, ragionando come nell'esempio precedente, avremo 10 possibilità di scelta per la cifra da mettere nella prima casella, 9 (perché le cifre devono essere distinte) possibilità di scelta per la seconda casella e così via...



In conclusione possiamo comporre

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

codici diversi con cifre distinte.

In questo caso si parla di disposizioni di ordine 5 su 10 oggetti distinti e il loro numero si indica con il simbolo $D_{10,5}$.

Generalizzando **il numero delle disposizioni semplici cioè senza ripetizioni di k elementi scelti tra n elementi distinti** è

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Note

E' chiaro che $k \leq n$ e che nel caso in cui $k = n$ si ritrova il numero delle permutazioni P_n .

L'ultimo fattore risulta $n - k + 1 = n - (k - 1)$ perché quando si riempie l'ultima casella (la k -esima) abbiamo già scelto $k-1$ elementi e quindi abbiamo ancora solo $n-(k-1)$ possibilità.

Osservazione

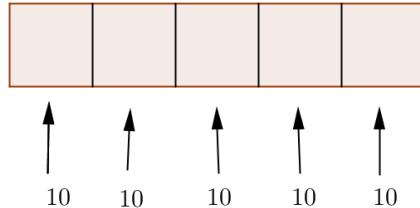
Possiamo esprimere il numero delle disposizioni $D_{n,k}$ anche utilizzando i fattoriali: se moltiplichiamo e dividiamo per $(n-k)!$ abbiamo :

$$D_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione

Riprendiamo l'esempio precedente: *quanti sono i codici di 5 cifre anche ripetute che si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*

Se in questo caso posso ripetere le cifre per ogni casella da riempire avrò sempre 10 possibilità.



Quindi avrò $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ codici diversi.

In generale il numero delle disposizioni con ripetizione (possono ripetere gli elementi) di ordine k su n oggetti distinti si indica con $D_{n,k}^{rip}$ e risulta

$$D_{n,k}^{rip} = n^k$$

Nota 1

Mentre se consideriamo le disposizioni semplici (senza ripetizione) $D_{n,k}$ è chiaro che dovrà essere $k \leq n$, nel caso delle disposizioni con ripetizione $D_{n,k}^{rip}$ si può avere anche $k > n$.

Per esempio se consideriamo la schedina del totocalcio in cui ci sono 13 caselle (corrispondenti alle varie partite di campionato di una data domenica) che si possono riempire con i simboli 1,2,X (1=vittoria della squadra che gioca in casa; 2=vittoria della squadra che gioca fuori casa; X=pareggio) le possibili schedine sono $D_{3,13}^{rip} = 3^{13}$ e in questo caso $k=13$ e $n=3$.

Nota 2

Abbiamo sempre considerato che gli elementi (di cui consideriamo le permutazioni o le disposizioni) siano distinti (cioè diversi tra loro): **ma se alcuni degli n elementi coincidono?**

Come facciamo per esempio se dobbiamo calcolare quanti anagrammi si possono formare con la parola *classe* in cui due lettere sono uguali?

Possiamo considerare all'inizio gli oggetti (le lettere) come se fossero tutti diversi (per esempio pensando di associare alle due s due colori diversi) e quindi avremo $6!$ permutazioni.

Ma poiché in realtà due lettere coincidono permutandole tra loro ho sempre lo stesso anagramma: per esempio *classe* e *classe* rappresentano lo stesso anagramma e così per ciascuna altra coppia tipo *lcasse lcasse* in conclusione avrò solo $\frac{6!}{2!}$ permutazioni.

In generale quindi se n_1 elementi coincidono tra loro, n_2 elementi sono uguali tra loro ecc. dovremo dividere $n!$ per $n_1!$, $n_2!$ ecc.

Per esempio gli anagrammi della parola *mamma* saranno $\frac{5!}{2!3!}$.

Combinazioni semplici

Cominciamo con il seguente problema.

"Nel gioco del poker ad ogni giocatore vengono distribuite 5 carte da un mazzo di 32. In quanti modi diversi può essere servito un giocatore?"

Osserviamo subito che due gruppi di cinque carte sono diversi solo se differiscono per almeno una carta mentre non è importante in quale ordine sono arrivate le cinque carte.

I modi possibili in cui ciascun giocatore può essere servito è quindi inferiori al numero delle disposizioni semplici di 32 elementi a gruppi di 5: più precisamente ogni mano corrisponde a 5! disposizioni diverse.

Quindi il numero dei gruppi di cinque carte diverse sarà dato da:

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 201376$$

Generalizzando viene data la seguente definizione:

Si chiama combinazione semplice di ordine k su n elementi distinti ($k \leq n$) ***un gruppo (non mi interessa l'ordine) di k elementi scelti tra gli n elementi.***

Se indichiamo con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni di ordine k su n elementi per quanto osservato in precedenza si ha

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Il numero delle combinazioni $C_{n,k}$ si indica anche con il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge "n su k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)!$ si ottiene

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Occorre inoltre osservare che avendo posto $0!=1$ segue che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Proprietà

Prima proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Infatti abbiamo

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Questa proprietà può essere facilmente spiegata osservando che ad ogni k-sottoinsieme in un insieme di n elementi corrisponde un (n-k)-sottoinsieme (sottoinsieme complementare).

Seconda proprietà

Per $1 \leq k \leq n-1$ vale

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Possiamo dimostrare questa proprietà algebricamente (utilizzando la formula per calcolare il coefficiente binomiale e sviluppando), oppure facendo un esempio.

Supponiamo di estrarre tre carte da un mazzo di 40 carte: in quanti modi diversi posso farlo?

E' chiaro che ci sono $\binom{40}{3}$ combinazioni.

Ma in quante di queste compare il "settebello" (sette di quadri)? Saranno le combinazioni di ordine 2 su 39 elementi cioè $\binom{39}{2}$ dal momento che mi rimangono solo da scegliere due carte su 39 carte perché poi aggiungo il "settebello".

E in quante combinazioni il "settebello" non c'è? Questa volta saranno le combinazioni di ordine 3 su 39 elementi cioè $\binom{39}{3}$ poiché devo scegliere tre carte solo tra 39 carte (tolgo il settebello).

Ma il numero totale delle combinazioni iniziali sarà dato dalla somma del numero delle combinazioni dove c'è il "settebello" con il numero delle combinazioni dove il "settebello" non c'è e quindi dovrà essere

$$\binom{40}{3} = \binom{39}{2} + \binom{39}{3}$$

Combinazioni e coefficienti della potenza di un binomio

Il numero delle combinazione $C_{n,k}$ si ritrova anche sviluppando la potenza di un binomio.

Consideriamo infatti

$$(a+b)^n \quad \text{con } n \in \mathbf{N} \quad \text{e} \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Poiché per definizione

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) \quad n \text{ volte}$$

i termini dello sviluppo sono tutti di grado n e del tipo

$$a^{n-k}b^k \quad (0 \leq k \leq n)$$

cioè ottenuti prendendo a in $(n-k)$ tra gli n fattori $(a+b)$ e, di conseguenza, b fra i k rimanenti.

Pertanto i termini di questo tipo sono tanti quante sono le combinazioni di ordine k su n elementi, cioè il coefficiente di $a^{n-k}b^k$ è $\binom{n}{k}$.

Quindi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Per questo il numero di combinazioni $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ viene anche chiamato **coefficiente binomiale**.

I coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^0$ $(a+b)^1$ $(a+b)^2$... $(a+b)^n$ si possono scrivere in modo da formare un triangolo chiamato **triangolo di Tartaglia**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

Osservando il triangolo di Tartaglia si possono fare alcune considerazioni:

1. I primi e gli ultimi termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia sono uguali a 1 e questo coincide con il fatto che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. In ogni riga i termini equidistanti dagli estremi sono uguali, in accordo con la prima proprietà che abbiamo visto per le combinazioni.
3. Ogni termine intermedio di una riga si ottiene, in accordo con la seconda proprietà che abbiamo visto per le combinazioni, sommando nella riga precedente il termine di ugual posto con quello che lo precede.
4. *La somma dei termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia è una potenza di 2 e precisamente:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & =2^0 \\
 1 & 1 & & & & & =2^1 \\
 1 & 2 & 1 & & & & =2^2 \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & =2^3 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & =2^4 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & =2^5
 \end{array}$$

cioè vale la proprietà

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Infatti se, nella formula della potenza del binomio, consideriamo $a = b = 1$ abbiamo

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Osservazione

Quindi il numero totale di tutti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi (sottoinsiemi con 0,1,2,...,n elementi) è uguale a 2^n .

SCHEMA DI LAVORO

I cavalieri della tavola rotonda

In quanti modi diversi possono sedersi attorno alla tavola rotonda i 12 cavalieri?

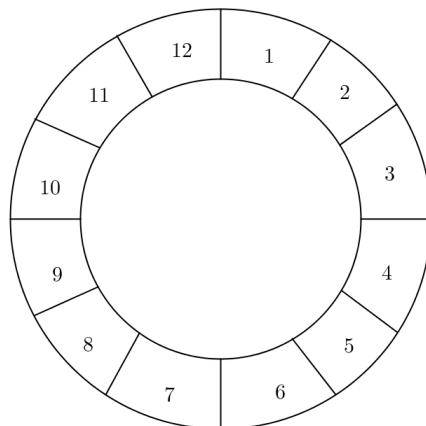
Indichiamo i cavalieri con i numeri da 1 a 12.

E' chiaro che se la tavola fosse "diritta" la risposta sarebbe $12!$ (numero delle permutazioni di 12 elementi distinti) ma ci accorgiamo che le 12 permutazioni del tipo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 1 \\
 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 1 & 2
 \end{array}$$

.....
.....

danno origine alla stessa "permutazione circolare".



Quindi i modi diversi in cui i 12 cavalieri potranno sedersi attorno alla tavola rotonda saranno soltanto

.....

In generale quindi avremo che il numero delle "permutazioni circolari" di n oggetti distinti sarà:

.....

PROBLEMI
CALCOLO COMBINATORIO

1. Con le cifre 1,2,3,4,5,6,7,8,9 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare?
[504]
2. Dei numeri dell'esercizio precedente quanti sono dispari ? Quanti sono pari ? Quanti terminano con la cifra 9 ? Quanti sono maggiori di 700 ?
[280; 224; 56; 168]
3. Quanti anagrammi si possono formare con la parola “studente”?
[10080]
4. Con le cifre 1,2,3,5,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono fare? Quanti sono pari? Quanti sono divisibili per 5? E se si possono ripetere le cifre?
[a. 60 ; 24 ; 12 b. 125; 50 ; 25]
5. Consideriamo sul piano 6 punti tali che a tre a tre non siano allineati. Quanti triangoli si possono disegnare scegliendo come vertici i sei punti?
[20]
6. Quante sono le diagonali di un poligono convesso di n lati?
[$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$]
7. Quanti incontri singolari si possono organizzare con 6 giocatori di tennis ?
[15]
8. Quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto ?
[4005]
9. Quante formazioni diverse si possono formare con 11 giocatori facendo giocare tutti i giocatori in tutti i ruoli ?
[11!]
10. Quanti sono gli anagrammi della parola liceo ?
[5!]
11. Quanti sono gli anagrammi della parola babbo ?
[20]
12. Dati 10 punti distinti del piano a tre a tre non allineati, quante rette si ottengono congiungendoli due a due ?
[45]

13.Giocando a poker in quanti modi diversi si possono avere in mano 4 assi ?

[28]

14.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte da un mazzo di 40 carte ?

[91390]

15.Quante partite si giocano in un campionato composto da 15 squadre ? (considera che c'è andata e ritorno).

[210]

16.Il codice di una cassaforte è composto da 5 lettere scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone. Se le lettere possono essere anche ripetute, quanti codici diversi si possono impostare ?

[11881376]

17.Le targhe automobilistiche sono costituite da due lettere seguite da tre cifre seguite a loro volta da due lettere. Se le lettere sono scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone, quante targhe diverse si possono comporre ?

[456976000]

18.L'ultimo giorno di scuola i 20 studenti della IV B si salutano e ognuno abbraccia tutti gli altri. Quanti abbracci si sono scambiati ?

[190]

19.Per effettuare una gita 9 amici hanno a disposizione una Panda e una Tipo : in quanti modi possono distribuirsi tra le due macchine supponendo che 4 salgano nella Panda e 5 nella Tipo ?

[126]

20.Considera la situazione del problema precedente: in quanti modi possono distribuirsi se i proprietari delle auto vogliono guidare (giustamente) ognuno la propria auto ?

[35]

21.In una scuola, che comprende un liceo classico e un liceo scientifico, la rappresentanza degli studenti al Consiglio di Istituto è formata da 4 studenti del liceo scientifico e da 2 studenti del classico. Se nelle liste sono presenti 10 studenti per lo scientifico e 4 per il classico, in quanti modi diversi può essere formata la rappresentanza degli studenti ?

[1260]

22.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte di cuori da un mazzo di 40 carte ?

[210]

23.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte dello stesso seme da un mazzo di 40 ?

[840]

24. Quante sono le schedine del totocalcio diverse con 12 risultati esatti ? (in quanti modi diversi si può fare 12) [26]

25. Con le cifre 1,2,4,6,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare? Quanti di questi sono pari?

[60; 48]

26. Quanti sono gli anagrammi della parola “matematica” ?

[151200]

27. In quanti modi diversi si possono pescare tre carte da un mazzo di 40 carte?

[9880]

28. 10 amici per fare una gita hanno a disposizione due auto e un motorino. Se su ogni auto salgono quattro persone e due persone sul motorino, in quanti modi diversi possono sistemarsi? E se i proprietari delle auto e del motorino vogliono guidare il proprio mezzo?

[3150; 140]

29. Quante sono le possibili schedine del totocalcio con 11 risultati esatti?

[312]

30. 12 amici, dopo una cena, si salutano ed ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?

[66]

31. In una classe di 22 studenti, di cui 12 femmine e 10 maschi, si deve formare un gruppo per una ricerca costituito da tre maschi e tre femmine. In quanti modi diversi si può formare il gruppo?

[26400]

32. Considera la situazione dell'esercizio precedente: se tra i maschi ci sono due gemelli, quanti sono i gruppi in cui i due gemelli non sono insieme?

[24640]

33. Nell'ippica è chiamata “corsa tris” una corsa in cui gli scommettitori devono indovinare i cavalli che arriveranno al 1°, 2°,3° posto. Se partono 10 cavalli, quali sono i possibili ordini di arrivo?

[720]

34. In una classe di 24 alunni si devono eleggere i due rappresentanti di classe. In quanti modi diversi si può fare questa scelta?

[276]

Calcolo delle probabilità

Ogni giorno ci troviamo a dover affrontare situazioni “incerte” in cui, per prendere delle decisioni, più o meno consapevolmente facciamo delle valutazioni di “probabilità”.



Girolamo Cardano

Il “calcolo delle probabilità” è nato a partire dal Cinquecento per risolvere problemi legati al **gioco dei dadi**: i primi studi si trovano nel *Liber de ludo aleae* di Girolamo Cardano (scritto nel 1526, ma pubblicato solo nel 1663) e in *Sopra le scoperte dei dadi* di Galileo Galilei (scritto probabilmente nel 1612).

La parola evento aleatorio, cioè casuale, deriva appunto dalla parola latina “alea” che significa dado.

La nascita del concetto moderno di probabilità viene attribuito a Blaise Pascal (1623-1662) e a Pierre de Fermat (1601-1665) e fu poi sviluppato da Huygens, Bernoulli e Laplace nel Settecento e Ottocento.

Nel Novecento infine Finetti e Kolmogorov hanno elaborato teorie più formali della probabilità.



Pierre de Fermat

Definizione classica della probabilità di un evento

Consideriamo anche noi un dado (non truccato cioè ogni faccia ha la stessa “probabilità di uscire quando il dado viene lanciato): qual è la probabilità che esca un dato numero quando il dado viene lanciato?



Le facce sono numerate da 1 a 6 e, se il dado non è truccato, hanno tutte la stessa probabilità di uscire.

Se scommettiamo sull'uscita del sei abbiamo quindi 1 caso favorevole su sei possibili risultati.

Chiamiamo E (evento) l'uscita del 6 e definiamo probabilità di un evento E il rapporto tra il numero dei “casi favorevoli ad E ” e quello dei “casi possibili” (supposto che questi siano tutti ugualmente probabili).

Cioè:
$$p(E) = \frac{\text{n}^{\circ} \text{ casi favorevoli}}{\text{n}^{\circ} \text{ casi possibili}}$$

Quindi, nel nostro caso

$$p(E) = \frac{1}{6}$$

Osserviamo che, per come è stata definita, la probabilità di un evento è sempre un numero compreso tra 0 e 1 poiché n° casi favorevoli $\leq n^{\circ}$ casi possibili.

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Se $p(E)=0$ vuol dire che il n° casi favorevoli = 0 e quindi **E è un evento impossibile**.

Se $p(E)=1$ abbiamo n° casi favorevoli = n° casi possibili e quindi **E è un evento certo**.

Per esempio: $p(\text{esce il } 9) = 0$

$$p(\text{esce un numero compreso tra } 1 \text{ e } 6) = 1$$

Noi considereremo questa definizione di probabilità di un evento ma ci sono anche altre definizioni di probabilità di un evento: vediamole brevemente.

Definizione di probabilità di un evento come frequenza relativa

Non sempre possiamo stabilire il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Consideriamo per esempio un dado “truccato”: in questo caso per calcolare la probabilità all’evento “esce il 6” non possiamo usare la definizione classica perché i casi possibili non sono equiprobabili in quanto l’uscita delle varie facce non ha la stessa probabilità (ma non sappiamo quale faccia è stata “appesantita”).

Possiamo però definire la probabilità di un evento come “**frequenza relativa dell’evento in un numero molto elevato di prove**”.

Infatti se riprendiamo l’esempio del lancio del dado non truccato e consideriamo come evento E l’uscita del 6, se lo lanciamo **n volte** e otteniamo il 6 **m volte**, calcolando la frequenza relativa dell’uscita del sei cioè il rapporto $\frac{m}{n}$ vedremo che **se n è grande**

$$\frac{m}{n} \approx 0,1\bar{6} \cong \frac{1}{6}$$

Ritroviamo quindi il valore della probabilità dell’evento calcolata in modo classico.

In conclusione nel caso del dado truccato possiamo fare un grande numero di lanci e calcolare la frequenza relativa dell’uscita del 6 ed assumerla come probabilità dell’uscita del 6.

Definizione di probabilità di un evento come “grado di fiducia”

Ma se l’evento non può essere ripetuto e voglio lo stesso associargli una probabilità?

Questo accade spesso quando facciamo una scommessa : nel gioco dei cavalli la corsa non può essere ripetuta....

In questo caso possiamo ricorrere a quella che viene chiamata definizione “soggettiva” della probabilità di un evento: definisco probabilità dell’evento E uguale al rapporto tra la somma R(rischio) che sono disposto a pagare in una scommessa e la somma S che riceverò nel caso in cui l’evento si verifichi (e se sono disposto anche a scambiare i ruoli nella scommessa).

Se per esempio sono disposto a perdere $R = 1$ euro per vincere $S = 6$ euro (quindi un guadagno di 5 euro) nel caso che E si verifichi vuol dire che associo all’evento E probabilità $p(E) = \frac{1}{6}$.

Se invece, per esempio, sono disposto a perdere $R = 1$ euro per vincere $S = 2$ euro (quindi guadagnare 1 euro) vuol dire che il mio grado di fiducia sul verificarsi dell’evento è $p(E) = \frac{1}{2}$: il rischio e il guadagno sono uguali perché penso che la probabilità di vincere o di perdere sia la stessa.

Probabilità dell'evento contrario

Sia E un evento: indichiamo con \bar{E} l'evento contrario di E cioè $\bar{E} = E$ non si verifica. E' chiaro che, poiché E si verifica o non si verifica, che

$$n^{\circ}\text{ casi possibili} = n^{\circ}\text{ casi favorevoli ad } E + n^{\circ}\text{ casi favorevoli a } \bar{E}$$

e quindi $p(\bar{E}) = \frac{n^{\circ}\text{ casi possibili} - n^{\circ}\text{ casi favorevoli ad } E}{n^{\circ}\text{ casi possibili}} = 1 - p(E)$

Esempio: qual è la probabilità, lanciando un dado, che non esca il 6?

$$p(\text{non esce il } 6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Osservazione

A volte, per calcolare la probabilità di un evento E, conviene calcolare $p(\bar{E})$ e poi calcolare

$$p(E) = 1 - p(\bar{E})$$

Esempio

Qual è la probabilità che in una stanza in cui ci sono 23 persone ci siano almeno due persone che sono nate lo stesso giorno dell'anno e che quindi festeggiano il compleanno nello stesso giorno?

Escludiamo gli anni bisestili in modo che la probabilità di avere il compleanno in un dato giorno o in un altro siano eventi equiprobabili.

Supponiamo di considerare l'evento contrario cioè

\bar{E} = non ci sono due persone che hanno lo stesso compleanno

Per determinare la probabilità di \bar{E} consideriamo le 23 persone come 23 caselle ordinate da riempire, ciascuna con la data del proprio compleanno: i casi favorevoli a \bar{E} saranno

$$D_{365,23} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - 22)$$

dal momento che se per il primo ho 365 possibilità, per il secondo solo 364 perché non posso ripetere il giorno di nascita del primo e così via, mentre i casi possibili saranno

$$D_{365,23}^{rip} = (365)^{23}$$

$$\text{In conclusione } p(E) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}}$$

Se calcoliamo $p(E)$ scopriamo che risulta circa 0,51!!

Quindi se in una stanza ci sono 23 persone, la probabilità che almeno due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno supera il 50%.

Questo risultato non è affatto intuitivo....

Giochi d'azzardo

Consideriamo due giocatori A e B che scommettono sul verificarsi di un dato evento E.

Supponiamo per esempio che A e B scommettano sull'uscita del 6 nel lancio di un dado.

A scommette sull'uscita del 6, mentre B scommette sulla non-uscita del 6 (evento contrario).

Il giocatore A mette sul tavolo una somma S_A mentre il giocatore B mette sul tavolo una somma S_B : se E accade vince A e prende tutto quello che c'è sul tavolo cioè guadagna S_B , se E non accade vince B e guadagna S_A .

In quale rapporto devono essere S_A e S_B perché il gioco si possa considerare equo?

Innanzitutto osserviamo che il gioco si dice equo quando il guadagno medio dei due giocatori è lo stesso: calcoliamo quindi il “guadagno medio” di A e di B cioè il guadagno del giocatore A e del giocatore B in n partite diviso il numero delle partite.

Se il giocatore A vince m volte il **guadagno medio di A** risulta

$$g_A = \frac{S_B \cdot m - S_A \cdot (n-m)}{n} = S_B \cdot \frac{m}{n} - S_A \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

ma $\frac{m}{n}$ può essere considerato vicino a $p(E) = \frac{1}{6}$ e $1 - \frac{m}{n}$ può essere considerato vicino a

$$p(\bar{E}) = \frac{5}{6} \text{ e quindi } g_A = S_B \cdot p(E) - S_A \cdot p(\bar{E})$$

Ma poiché

$$g_B = \frac{S_A \cdot (n-m) - S_B \cdot m}{n} = -g_A$$

per avere $g_A = g_B$ dovrà essere $g_A = g_B = 0$

Quindi il gioco è equo quando **il guadagno medio di entrambi i giocatori è zero cioè quando**

$$S_B \cdot p(E) - S_A \cdot p(\bar{E}) = 0$$

cioè quando:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{p(E)}{p(\bar{E})}$$

Perciò nel nostro esempio (uscita del 6 nel lancio di un dado) se il gioco è equo e il giocatore che scommette sull'uscita del 6 gioca 1 euro, l'altro giocatore deve mettere sul tavolo 5 euro poiché il rapporto tra $p(E)$ e $p(\bar{E})$ è di 1 a 5 (1 caso favorevole contro 5 casi sfavorevoli).

Nota

Spesso non ci sono due giocatori effettivi ma **solo un giocatore** che rischia una certa **somma r** (il **rischio** che nell'esempio precedente era per A la somma S_A da pagare all'altro giocatore) nella speranza di guadagnare una **somma g** (il **guadagno** per A nell'esempio precedente è S_B) se un evento E si verifica.

Per esempio nelle scommesse sui cavalli se un cavallo è dato 1 a 5 vuol dire che se rischio su quel cavallo **r = 1** (1 euro), se il cavallo vince guadagno **g = 5** (5 euro) (si riscuote $r+g$).

Quindi **il gioco è equo** quando

$$\boxed{\frac{r}{g} = \frac{p(E)}{p(\bar{E})}}$$

Probabilità totale

Consideriamo il lancio di un dado e i due eventi:

$$A = \{ \text{esce un numero pari} \}$$

$$B = \{ \text{esce un numero divisibile per 5} \}$$

$$\text{Osserviamo che } p(A) = \frac{3}{6} \text{ e che } p(B) = \frac{1}{6}$$

Se consideriamo l'evento "unione" cioè l'evento

$$A \cup B = \{ \text{esce un numero pari o divisibile per 5} \}$$

come risulta la probabilità di $A \cup B$?

Si osserva che ci sono 4 casi favorevoli (2,4,5,6) e 6 casi possibili e quindi

$$p(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

Quindi in questo caso abbiamo che

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

perché non ci sono eventi favorevoli in comune cioè gli eventi A e B sono cioè "incompatibili".

Due eventi si dicono **incompatibili** quando hanno "intersezione nulla" cioè non possono verificarsi contemporaneamente.

E se due eventi non sono incompatibili?

Consideriamo per esempio l'evento

$$C = \{ \text{esce un numero divisibile per 3} \}$$

e calcoliamo la probabilità di $A \cup C = \{ \text{esce un numero pari o divisibile per 3} \}$.

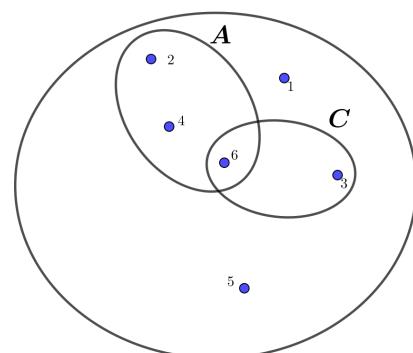
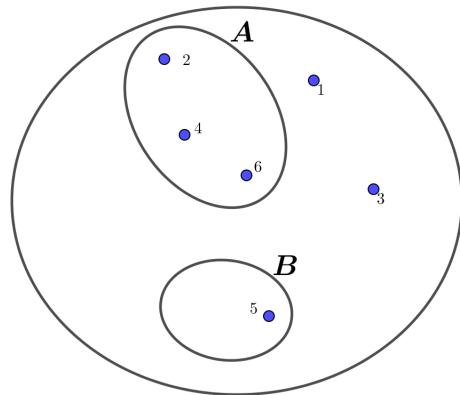
Se calcoliamo la probabilità richiesta come rapporto tra numero di casi favorevoli (4) e numero dei casi possibili (6) abbiamo $p(A \cup C) = \frac{4}{6}$ ma se sommiamo

$p(A) = \frac{3}{6}$ e $p(C) = \frac{2}{6}$ otteniamo $\frac{5}{6}$ perché i due eventi non sono incompatibili dal momento che il "6" è sia un numero pari che divisibile per 3.

Quindi, per non contare due volte lo stesso evento favorevole, dopo aver sommato le probabilità di A e di B dobbiamo togliere la probabilità dell'intersezione dei due eventi (l'uscita del 6) che ha probabilità $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ed infatti $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

Quindi in generale

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

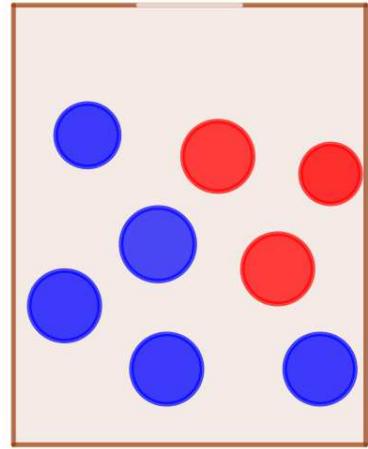


Probabilità composta

Supponiamo di estrarre due palline da un sacchetto contenente 8 palline di cui 3 rosse e 5 blu: qual è la probabilità di estrarre due palline rosse?

Consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{la prima pallina estratta è rossa} \} \\ B &= \{ \text{la seconda pallina estratta è rossa} \} \end{aligned}$$



Primo caso

Se prima di estrarre la seconda pallina rimesco la prima estratta nel sacchetto la probabilità di estrarre una pallina rossa nella seconda estrazione non dipende dal risultato della prima estrazione.

Indicando con R_1, R_2, R_3 le 3 palline rosse e con B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 le 5 palline blu possiamo calcolare la probabilità richiesta osservando che le coppie ordinate favorevoli sono $3 \cdot 3$ e quelle possibili $8 \cdot 8$ e che quindi

$$p(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 8} = p(A) \cdot p(B)$$

Gli eventi A e B si dicono “**eventi indipendenti**” poiché la probabilità di B non dipende dal fatto che A si sia verificato o meno.

Secondo caso

Se prima di procedere alla seconda estrazione **non rimesco** la prima pallina estratta nel sacchetto in questo caso i casi favorevoli sono $3 \cdot 2$ coppie ordinate e i casi possibili sono $8 \cdot 7$ coppie ordinate e quindi

$$p(A \cap B) = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7}$$

Gli eventi A e B in questo caso sono eventi “**dipendenti**” in quanto, non rimettendo la pallina estratta nel sacchetto, le palline che possiamo pescare scendono a 7 e il numero delle palline rosse dipende dall'esito della prima estrazione.

Abbiamo $p(A) = \frac{3}{8}$ e se indichiamo con $p(B/A)$ la probabilità che B si verifichi supponendo che A si sia verificato (si legge “**probabilità di B condizionato ad A**”) è chiaro che risulta

$$p(B/A) = \frac{2}{7}$$

e quindi in questo caso $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$

In conclusione la probabilità “composta” di A e B risulta

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad \text{se gli eventi sono indipendenti}$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \quad \text{se gli eventi sono dipendenti}$$

ESEMPIO

Alcuni problemi di calcolo delle probabilità spesso si possono risolvere sia utilizzando la definizione di probabilità come rapporto tra numero dei casi favorevoli e numero dei casi possibili e quindi utilizzando il calcolo combinatorio per calcolarli, oppure sfruttando la regola della probabilità composta.

Consideriamo per esempio il seguente problema.

Estraendo due carte da un mazzo di 40 carte toscane e senza rimettere la prima carta estratta, calcola la probabilità di estrarre due re.



Prima strategia risolutiva: possiamo applicare la definizione classica e quindi calcolare il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

$$\text{Numero casi favorevoli} = C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ (ci sono 4 re e ne pescò 2);}$$

$$\text{Numero dei casi possibili} = C_{40,2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$$

$$\text{In conclusione } p(E) = \frac{6}{780} = \frac{1}{130}$$

Seconda strategia risolutiva: possiamo considerare che l'evento E corrisponda a $A \cap B$ con $A = \{ \text{la prima carta che pescò è un re} \}$ e $B = \{ \text{la seconda carta che pescò è un re} \}$.

Poiché non si rimette nel mazzo la prima carta pescata, A e B non sono indipendenti e abbiamo:

$$p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}, \quad p(B/A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13} \rightarrow p(E) = p(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}$$

Osservazione

Naturalmente le due strategie conducono allo stesso risultato ma in genere è più semplice ragionare in termini di probabilità composta.

PROBLEMI
PROBABILITA' TOTALE E COMPOSTA

1. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o un asso?
[2/5]
2. Lanciando un dado non truccato, qual è la probabilità che esca un numero pari o un numero maggiore di 4?
[2/3]
3. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o una carta di cuori?
[19/40]
4. Sullo scaffale di una libreria ci sono 10 libri di matematica, 9 di fisica e 6 di arte. Qual è la probabilità che prendendo un libro a caso questo sia di fisica o di arte?
[3/5]
5. Un'urna contiene 12 palline rosse, 8 palline gialle e 10 palline nere. Estraendo una pallina, qual è la probabilità che esca:
 - a) una pallina non nera;
 - b) una pallina gialla o nera;
 - c) una pallina verde.
[2/3;3/5;0]
6. Da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola se ne estrae uno. Qual è la probabilità che questo sia:
 - a) Un multiplo di 5
 - b) Un numero maggiore di 63;
 - c) Multiplo di 5 o maggiore di 63;
 - d) Pari o dispari;
 - e) Divisibile per 11 o per 19.
[1/5; 3/10; 13/30; 1; 2/15]
7. Da un mazzo di 40 carte si estraе prima una carta e poi una seconda. Qual è la probabilità di aver pescato una coppia di assi se:
 - a) Si rimette la prima carta nel mazzo;
 - b) Non si rimette la prima carta nel mazzo
[1/100; 1/130]
8. Calcolare la probabilità che lanciando una moneta tre volte escano tre teste.
[1/8]
9. In un'urna ci sono 5 palline nere e 7 palline bianche. Calcolare la probabilità che esca prima una pallina nera e poi una pallina bianca senza rimettere la prima nell'urna.
[35/132]

10. La probabilità che Marco colpisca il centro di un bersaglio è 0,25, la probabilità che lo colpisca Paolo è 0,10. Sapendo che i lanci sono indipendenti, qual è la probabilità che:
- Tutti e due colpiscono il centro del bersaglio;
 - Solo Paolo colpisca il bersaglio
 - Nessuno dei due colpisca il bersaglio

[0,025; 0,075; 0,675]

11. Si lancia un dado non truccato per due volte. Qual è la probabilità che esca almeno un 6?

[11/36]

12. Un ladro vuole rubare il portafoglio chiuso dentro una valigia sigillata da un lucchetto con una combinazione di 3 cifre.
- Qual è la probabilità che al primo tentativo il ladro apra la valigia?
 - Quanto vale la probabilità se il ladro sa che la cifra finale della combinazione è 9?

[1/1000; 1/100]

13. In una classe di 25 alunni, ci sono 15 ragazze. Il professore di matematica interroga sempre a coppie. Qual è la probabilità che:
- Siano interrogate due ragazze;
 - Siano interrogati un ragazzo ed una ragazza;
 - Nessuna ragazza

[7/20; 1/2; 3/20]

14. Un'urna contiene 12 biglie bianche e 8 biglie nere. Qual è la probabilità che, estraendo tre palline rimettendo ogni pallina estratta nell'urna, siano tutte bianche. Quanto vale se invece ogni pallina estratta non viene rimessa nell'urna?

[27/125; 11/57]

15. In un supermercato la probabilità che sia aperta la cassa 1 è 0,57, mentre che sia aperta la cassa 2 è 0,45.
- I due eventi sono incompatibili?
 - Se l'apertura della cassa 1 è indipendente dall'apertura della cassa 2, qual è la probabilità che siano entrambe aperte?
 - E che siano entrambe chiuse?
 - E che sia aperta solo la cassa 2?

[no, perché?; 0,2565; 0,2365; 0,1935]

16. [Prova Invalsi 2014] È stato effettuato un sondaggio su un campione di 1500 donne di età compresa tra i 25 ed i 55 anni per conoscere la loro opinione su una rivista mensile dedicata alla salute. Si sono ottenuti i seguenti risultati:

	Occupate	Disoccupate
Giudizio positivo	450	276
Giudizio negativo	367	407

- a. Quante sono le donne che hanno espresso un giudizio positivo?
 - b. Quante sono le donne disoccupate intervistate?
 - c. Scegliendo a caso una delle donne intervistate, qual è la probabilità che abbia espresso un giudizio positivo?
 - d. Scegliendo a caso una delle donne intervistate, tra quelle che hanno espresso un giudizio positivo, qual è la probabilità che sia una donna occupata?

[726; 683; 121/250; 75/121]

17. [Prova Invalsi 2014] *Prato fiorito* è un gioco per computer che si gioca su una scacchiera, cliccando sui riquadri della scacchiera, a volte si può scoprire un fiore nascosto. Per esempio in una scacchiera 9x9 ci sono nascosti 10 fiori.

- a) Qual è la probabilità di scoprire al primo tentativo un fiore nella scacchiera appena descritta?

A. 1/9 B. 1/81 C. 10/80 D. 10/81

b) È possibile personalizzare il gioco impostando le dimensioni della scacchiera (cioè il numero di righe e di colonne) ed il numero di fiori nascosti. Se si gioca con una scacchiera 12x20, quale deve essere il numero di fiori nascosti affinché la probabilità di scoprire un fiore al primo tentativo sia 1/8?

[D; 30]

18. [Prova Invalsi 2015] Da un mazzo di 52 carte (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori e picche) sono stati tolti i 4 assi.

 - Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?
 - Da un mazzo di 52 carte uguale al precedente sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione, la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è $\frac{6}{45}$. Quante carte di fiori sono state tolte?

[1/4; 7]

19. [Prova Invalsi 2015] Nel foglietto contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce “Effetti collaterali” si legge che:

 - il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini
 - il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.

I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti uno dall’altro.

 - a) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco **non** abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in percentuale.
 - b) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti **entrambi** gli effetti collaterali?

A. 9% B. 0.14% C. 14% D. 0.9%

[93%; B]

20. [Prova Invalsi 2015] Un'urna contiene 40 palline identiche tranne che per il colore: 23 sono rosse e 17 blu. Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Entrambe sono blu. Senza reintrodurre le due palline stratte, si estrae dall'urna una terza pallina. Qual è la probabilità che anche la terza pallina sia blu?

[15/38]

Calcolo delle probabilità

21. [Prova Invalsi 2015] Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci sia spetta di ottenere un numero maggiore di 4?

- A. circa 100 B. circa 50 C. circa 30 D. circa 150

[A]

22. [Prova Invalsi 2016] Quale tra i seguenti numeri **non** può rappresentare la probabilità di un evento?

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{11}{15}$ C. $\frac{8}{7}$ D. $\frac{20}{27}$

[C; perché?]

23. [Prova Invalsi 2016] Nella scatola A vi sono 6 palline verdi e 4 rosse. Nella scatola B vi sono invece 12 palline verdi e 5 rosse. Quante palline verdi si devono spostare dalla scatola B alla scatola A affinché la probabilità di estrarre una pallina verde da A sia uguale a quella di estrarre una pallina verde da B?

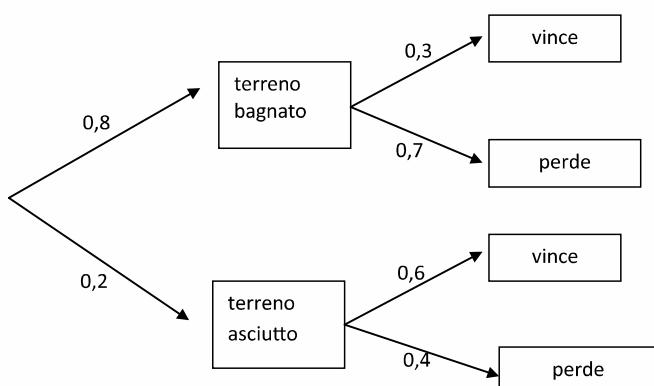
- A. 5 B. 7 C. 2 D. 4

[C]

24. [Prova Invalsi 2017] In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara:

- 0,3 se il terreno è bagnato
- 0,6 se il terreno è asciutto.

La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



Il diagramma può aiutare a determinare, per esempio, la probabilità che il terreno sia asciutto e che la moto M perda la gara. Essa è $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara?

[0,36]

25. [Prova Invalsi 2017] Una fabbrica utilizza due diverse macchine M_1 e M_2 che lavorano indipendentemente l'una dall'altra. Ciascuna delle due macchine produce chiavette USB da 16 GB e da 32GB nelle percentuali descritte dalla seguente tabella:

	Chiavette USB da 16 GB	Chiavette USB da 32 GB	Totale
M_1	18%	42%	60%
M_2	22%	18%	40%
Totale	40%	60%	100%

- a) Qual è la probabilità di estrarre dalla produzione della fabbrica una chiavetta USB da 16 GB prodotta da M_1 ?

Qual è la probabilità che una chiavetta USB estratta dalla produzione della fabbrica sia da 16GB?

[18%; 40%]

Probabilità di k successi in n prove indipendenti

In molti casi è' molto importante calcolare **la probabilità di ottenere un dato numero di successi in un dato numero di prove.**

Facciamo un esempio.

Qual è la probabilità di rispondere correttamente a 6 domande di un test di 10 domande ognuna con 3 alternative (A,B,C) di cui una sola corretta, rispondendo a caso?

In questo caso il successo è “risposta corretta” e le prove sono le 10 domande del test.



Proviamo a calcolare questa probabilità **in termini di probabilità composta di eventi indipendenti:** infatti la probabilità di rispondere bene a 6 domande corrisponde alla probabilità di rispondere bene a 6 domande e rispondere male a 4 domande.

Poiché la probabilità di rispondere bene ad una domanda è $p = \frac{1}{3}$ e la probabilità di rispondere male ad una domanda è $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ la probabilità di rispondere bene per esempio alle prime 6 domande e male alle ultime quattro è $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Attenzione: le sei risposte corrette non sono necessariamente le prime sei...dobbiamo quindi considerare che le 6 risposte corrette potrebbero essere le prime sei, ma anche la seconda, la terza ecc. fino alla settima...

Le sei risposte corrette possono essere scelte in $C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = 210$ modi, e quindi per calcolare la probabilità totale dovremo sommare per 210 volte $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$ e quindi avremo, in conclusione, indicando con X il numero di risposte esatte

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cong 0,057$$

Generalizzando abbiamo **che la probabilità di ottenere k successi** (le risposte giuste) **in n prove indipendenti** (nel nostro caso le 10 domande a cui rispondiamo a caso) in cui in ogni prova abbiamo probabilità di successo p risulta:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Questa “distribuzione” di probabilità, proprio per la presenza del coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = C_{n,k}$, viene chiamata **“distribuzione binomiale”**.

Osservazione

Può essere più significativo chiedersi: *“Qual è la probabilità di rispondere correttamente ad almeno 6 domande (in un test come sopra), cioè qual è la probabilità di superare il test?”*

Innanzitutto è importante considerare che i test che fanno “superare” la prova sono quelli in cui si è risposto correttamente a 6 domande (lo studente prenderà 6) **oppure** quelli in cui si è risposto correttamente a 7 domande **oppure** quelli in cui si è risposto correttamente a 8 domande e così via fino al test in cui si è risposto bene a tutte e 10 le domande.

Abbiamo:

$$P(X = 6) = \frac{210 \cdot 2^4}{3^{10}} ; \quad P(X = 7) = \frac{120 \cdot 2^3}{3^{10}} ; \quad P(X = 8) = \frac{45 \cdot 2^2}{3^{10}} ; \quad P(X = 9) = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}} ;$$

$$P(X = 10) = \frac{1}{3^{10}}$$

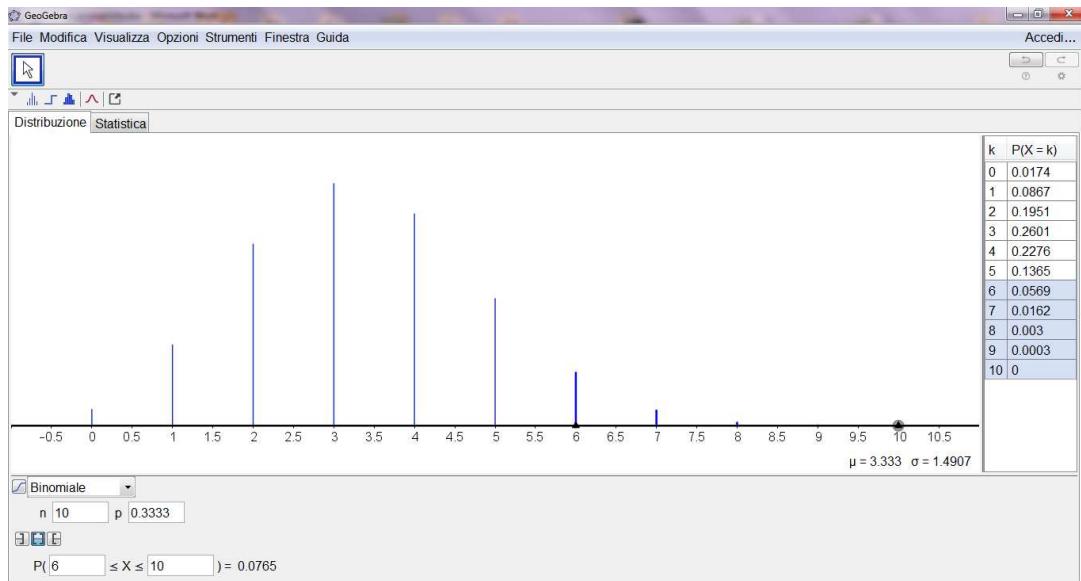
e calcolando $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \cong 0,077$

In conclusione **uno studente che risponde a caso ad un test di questo tipo ha probabilità del 7,7% di superare il test.**

Calcolo delle probabilità

Nota

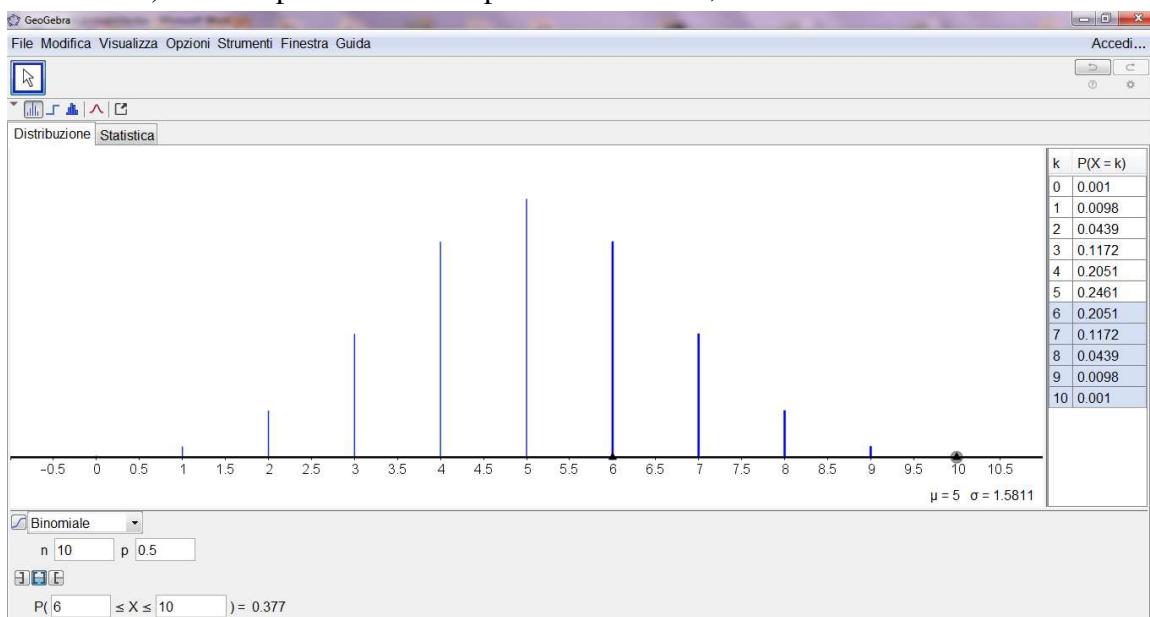
Possiamo rappresentare i valori della probabilità di rispondere correttamente a 0, 1 ,2 ,3 , ecc domande del test utilizzando Geogebra (calcolatore di probabilità-distribuzione binomiale-n=10 p=1/3) ed anche calcolare per esempio la probabilità “cumulata” di rispondere correttamente ad almeno 6 domande.



Osserviamo che il massimo valore di probabilità si ha per $k=3$ cioè rispondendo a caso ad un testo di 10 domande con tre alternative la probabilità più alta è quella di indovinare tre risposte.

Naturalmente le probabilità cambiano se cambia il numero delle alternative a ciascuna domanda.

Riportiamo l'andamento per un test di 10 domande vero-falso (in questo caso $p = \frac{1}{2}$): notiamo che la distribuzione è in questo caso simmetrica rispetto al valore di massima probabilità che è 5 (risposte corrette) e che la probabilità di superarlo cresce a 0,377.

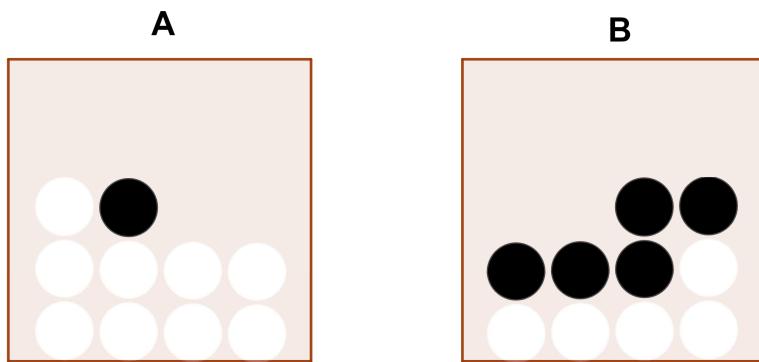


Teorema di Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) ha ricavato una formula matematica che permette di **rivalutare la probabilità di un evento** quando si sa che un dato evento si è verificato : si parla di probabilità “a posteriori”.

Consideriamo il seguente esempio: supponiamo di avere due urne A e B contenenti ciascuna 10 palline bianche e nere.

Sappiamo che nell’urna A c’è una sola pallina nera (e quindi 9 palline bianche) mentre nell’urna B ci sono 5 palline nere e 5 palline bianche.



Supponiamo di estrarre una pallina da un’urna a caso (non sappiamo cioè da dove abbiamo estratto) e supponiamo di vedere che abbiamo estratto una pallina bianca.

Qual è la probabilità di aver estratto dall’urna A cioè qual è $p(A \setminus bianca)$?

Inizialmente, cioè prima di vedere il colore della pallina, la probabilità di estrarre da A o da B è la stessa cioè $\frac{1}{2}$ (probabilità a priori) ma dopo aver visto il colore bianco della pallina (e conoscendo la composizione delle due urne) ci aspettiamo che la probabilità di aver pescato dall’urna A sia maggiore di $\frac{1}{2}$ (probabilità a posteriori).

Poiché la probabilità $p(A \cap bianca) = p(A) \cdot p(bianca \setminus A)$

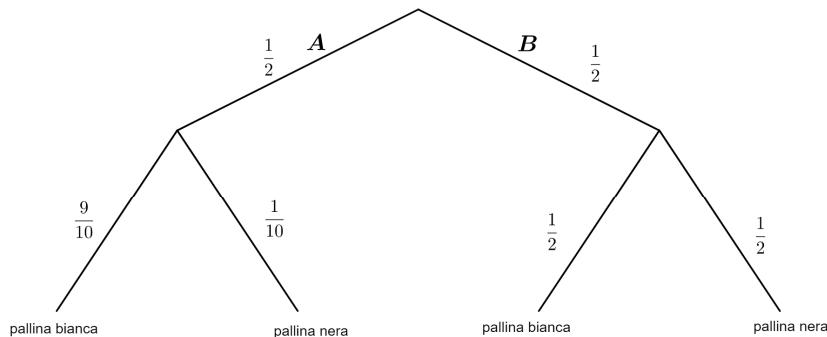
ma anche $p(A \cap bianca) = p(bianca) \cdot p(A \setminus bianca)$

abbiamo che $p(A) \cdot p(bianca \setminus A) = p(bianca) \cdot p(A \setminus bianca) \Rightarrow p(A \setminus bianca) = \frac{p(A) \cdot p(bianca \setminus A)}{p(bianca)}$

Calcolo delle probabilità

Ma la probabilità $p(bianca)$ può essere calcolata utilizzando il grafo ad albero:

$$p(bianca) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{20}$$



In conclusione abbiamo:
$$p(A_1/bianca) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{14}{20}} = \frac{9}{14}$$

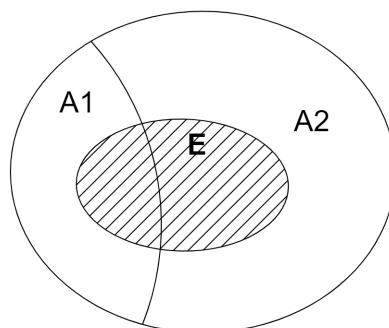
In generale dato un evento E (che nel nostro esempio è l'estrazione di una pallina bianca) e per esempio due eventi A_1, A_2 che costituiscono **una “partizione” dello spazio degli eventi** cioè eventi incompatibili la cui unione dà lo spazio degli eventi (quindi $p(A_1) + p(A_2) = 1$) e che nel nostro esempio sono estrarre dall'urna A oppure estrarre dall'urna B di cui si conoscono le probabilità $p(A_1), p(A_2)$ dette probabilità “a priori” **ed E è un evento che si è verificato**, il teorema di Bayes afferma che

$$p(A_1/E) = \frac{p(A_1) \cdot p(E/A_1)}{p(E)}$$

$$p(A_2/E) = \frac{p(A_2) \cdot p(E/A_2)}{p(E)}$$

con $p(E) = p(A_1) \cdot p(E/A_1) + p(A_2) \cdot p(E/A_2)$

e le probabilità $p(A_1/E), p(A_2/E)$ sono dette **probabilità “a posteriori”** di A_1, A_2 cioè dopo che E si è verificato.



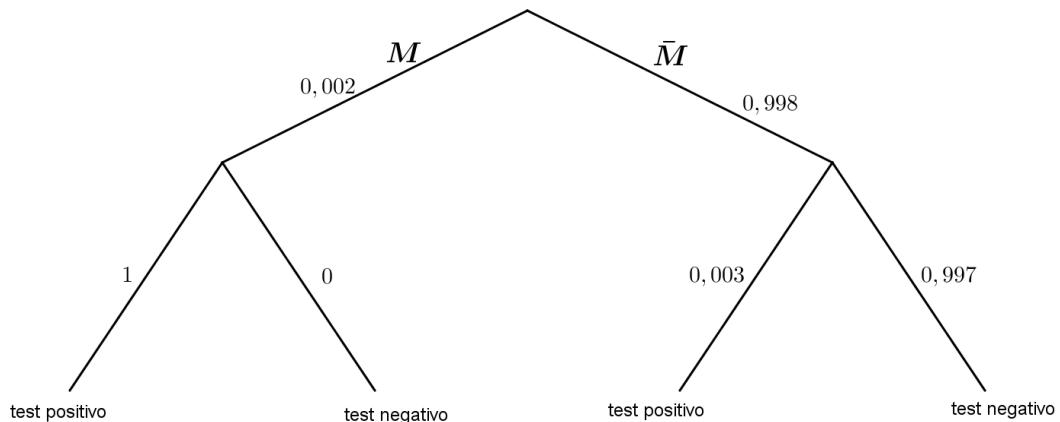
Vediamo un altro esempio maggiormente significativo: supponiamo che l'incidenza di una data infezione sia dello 0,2% cioè in pratica scegliendo a caso un individuo della popolazione e indicando con M l'evento "l'individuo è affetto da quella malattia" supponiamo che $P(M) = 0,002$ (**probabilità a priori**) e di conseguenza, indicando con \bar{M} l'evento "l'individuo non è affetto da quella malattia", si abbia $P(\bar{M}) = 0,998$.

Supponiamo inoltre che sia stato messo a punto un test rapido in cui se un soggetto è affetto da quella malattia, allora la probabilità che il test sia positivo è pari al 100% cioè, indicando con T^+ l'evento "il test è positivo", $P(T^+ / M) = 1$ ma che il test fornisca anche dei "falsi positivi" cioè si possa avere un risultato positivo anche sulle persone non affette da quella malattia nello 0,3 % dei casi, cioè supponiamo che $P(T^+ / \bar{M}) = 0,003$.

Se una persona risulta positiva al test qual è la probabilità che sia effettivamente malata?

Possiamo cioè calcolare la probabilità $p(M / T^+)$ (**probabilità a posteriori**)?

Innanzitutto rappresentiamo i nostri dati con un diagramma ad albero:



Calcoliamo $p(T^+)$:
$$p(T^+) = p(M) \cdot p(T^+ / M) + p(\bar{M}) \cdot p(T^+ / \bar{M})$$

Nel nostro esempio abbiamo: $p(T^+) = 0,002 \cdot 1 + 0,998 \cdot 0,003 = 0,002 + 0,00299 \cong 0,005$

Abbiamo quindi:

$$p(M / T^+) = \frac{p(M) \cdot p(T^+ / M)}{p(T^+)} = \frac{1 \cdot 0,002}{0,005} = 0,4$$

PROBLEMI
TEOREMA DI BAYES

1) Il 22% degli individui appartenenti a una data popolazione adulta risulta fumatore (F). E' noto inoltre che l'85% dei fumatori ed il 20% dei non fumatori sono affetti da malattie respiratorie (M). Determina la probabilità che una persona affetta da malattie respiratorie sia un fumatore.

$$[P(\text{fumatore/malato}) = P(F/M) = 0,55]$$

2) Una compagnia di assicurazioni ritiene che gli assicurati possano essere suddivisi in due classi: a rischio di incidente e non a rischio di incidente. Le loro statistiche mostrano che una persona a rischio avrà un incidente di qualche tipo all'interno del periodo di un anno con probabilità 0,4, mentre tale probabilità è pari a 0,2 per le persone non a rischio.

- a) Supponiamo che il 30 % delle persone sia a rischio, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente nel primo anno di polizza?
- b) Supponiamo che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dalla prima stipulazione della polizza. Qual è la probabilità che sia a rischio?

$$[0,26 ; 0,46]$$

3) Un'azienda produce penne: la probabilità che una penna sia difettosa è del 5%. Il controllo di qualità accetta tutte le penne senza difetti e scarta il 90% delle penne difettose (quindi il 10% delle penne difettose passa il controllo).

Qual è la probabilità che una penna che ha superato il controllo di qualità sia difettosa?

$$[0,05\% \text{ circa}]$$

4) Supponiamo che un'indagine statistica abbia rilevato che in Italia il 20% delle persone soffra di ipertensione e che tra gli ipertesi il 60% sia fumatore. Sappiamo inoltre che tra le persone non ipertese il 50% sono comunque fumatori.

Supponendo che una persona sia un fumatore, quale risulta la probabilità che sia iperteso?

$$[23\% \text{ circa}]$$

SCHEDE DI LAVORO

SCHEDA 1

Qual è la probabilità di indovinare un codice segreto?



“Qual è la probabilità, al primo tentativo, di scoprire una password costituita da una successione di cinque cifre scelte tra le dieci cifre 0,1,2....9?”

Osservazione iniziale

Bisognerà distinguere il caso in cui le cifre si possono ripetere oppure no.

1) Caso in cui le cifre si possono ripetere

Il numero di tutte le pw di 5 cifre (anche ripetute) che si possono formare è

.....

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

$$p(\text{indovinare la pw}) = \dots$$

2) Caso in cui le cifre sono distinte

Il numero di tutte le pw di 5 cifre distinte che si possono formare è

.....

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

$$p(\text{indovinare la pw}) = \dots$$

SCHEDA 2

Il problema del doppio sei

Nel 1654 Blaise **Pascal**, frequentando i salotti aristocratici e letterari di corte, aveva conosciuto il Cavalier De Méré famoso giocatore d'azzardo che aveva posto a Pascal il seguente problema:

Conviene scommettere sull'uscita di almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o sull'uscita di almeno un doppio 6 lanciando 24 volte 2 dadi?

Pascal riuscì a risolvere il problema e risolvendolo gettò le basi della teoria della probabilità.

Proviamoci anche noi utilizzando quello che abbiamo visto sulla probabilità dell'evento contrario.



Blaise Pascal

Qual è la probabilità che esca almeno un sei in quattro lanci di un dado?

$$p(\text{almeno un 6 in quattro lanci}) = 1 - p(\text{non esce mai il 6 in quattro lanci}) =$$

$$1 - \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \cong 0,517$$

E qual è la probabilità che esca almeno una volta 6-6 lanciando due dadi per 24 volte?

$$p(\text{almeno un 6-6 in 24 lanci}) = 1 - p(\text{non esce mai il 6-6 in 24 lanci}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0,491$$

Quindi conviene scommettere sull'uscita di almeno un sei in quattro lanci di un dado !

SCHEDA 3
Qual è la probabilità di essere interrogato?

“L’insegnante di matematica deve interrogare ancora tutti gli studenti della IVB e decide di chiamarne 5. Se gli studenti della IVB sono 27 qual è la probabilità che un dato studente sia interrogato?”

Osservazioni

Chiamiamo Tommaso lo studente.

Indichiamo con E l’evento “l’insegnante chiama 5 studenti e tra loro c’è Tommaso”: calcoliamo il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli.

In quanti modi diversi l’insegnante può scegliere i 5 studenti da interrogare? (spiega il tuo ragionamento)

.....
.....

Ma quanti sono i possibili gruppi di cinque studenti che contengono Tommaso? (spiega il tuo ragionamento)

.....
.....

Quindi la probabilità che Tommaso sia interrogato risulta.....



SCHEDA 4

Qual è la somma più probabile nel lancio di due dadi?

Lanciando due dadi (non truccati cioè tutte le facce hanno la stessa probabilità di uscire) qual è la somma più probabile?

I numeri che possono uscire su ciascun dado sono 1,2,3,4,5,6 e quindi le possibili somme sono 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.

Cominciamo con somma $S = 2$.

In quanti modi posso avere somma $S = 2$?

Solo in 1 modo: (1,1). Quindi poiché i casi possibili sono $6 \cdot 6 = 36$ (infatti le coppie sono (1,1); (1,2); ecc....) avrò

$$p(S = 2) = \frac{1}{36}.$$

Vediamo la probabilità delle altre somme....

$p(S=3)=\frac{2}{36}$ poiché i casi favorevoli sono due (1,2) e (2,1)

$p(S=4)=\dots$ poiché i casi favorevoli sono ...

$p(S=5)=\dots$

$p(S=6)=\dots$

$p(S=7)=\dots$

$p(S=8)=\dots$

$p(S=9)=\dots$

$p(S=10)=\dots$

$p(S=11)=\dots$

$p(S=12)=\dots$

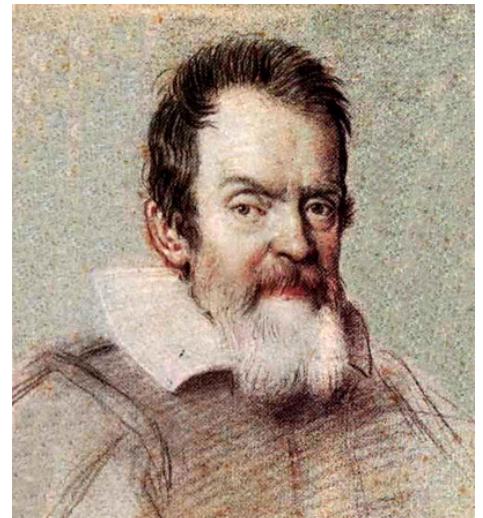
E così scopriamo che conviene scommettere su somma $S = \dots$

Esercizio: traccia un grafico cartesiano in cui sull'asse x poni i valori della somma S e sull'asse y la probabilità corrispondente.



SCHEDA 5

Qual è la somma più probabile nel lancio di tre dadi?



Se lanciamo tre dadi e consideriamo la somma dei punti che si presentano, su quale somma conviene scommettere?

Ai tempi di Galileo Galilei alcuni giocatori incalliti si erano accorti che la somma 10 compariva più frequentemente della somma 9, ma questo sembrava strano perché

la **somma 9** si può avere in sei casi 6-2-1; 5-3-1; 5-2-2; 4-4-1; 4-3-2; 3-3-3

e anche la **somma 10** si può avere in sei casi 6-3-1; 6-2-2; 5-4-1; 5-3-2; 4-4-2; 4-3-3

Chiesero quindi spiegazione di questo a Galileo...

Suggerimento

Considera l'uscita dei tre numeri sui tre dadi come **terne ordinate**: i casi possibili sono quindi

.....

Per determinare il numero dei casi favorevoli considera le terne che danno una data somma.

Per esempio per avere somma 9 posso avere

6-2-1 in **sei modi** (6,2,1), (2,6,1) ecc.;

5-3-1 in

Ecc.

In conclusione

$$p(S = 9) = \dots$$

$$p(S = 10) = \dots$$

$$p(S = 11) = \dots$$

$$p(S = 12) = \dots$$

Quindi su quale somma conviene scommettere ?

SCHEDA 6
Qual è la probabilità di vincere al lotto?



*“Se gioco un numero al **LOTTO** (su una determinata ruota) qual è la probabilità di vincere? (si parla di probabilità di vincere un “estratto semplice”)”*

Ricordiamo che nel gioco del LOTTO vengono estratti (su ciascuna Ruota) 5 numeri tra 90 numeri (da 1 a 90).

Quante sono le cinquine possibili?.....

Quanti sono le cinquine in cui compare il numero che ho giocato?.....

Quindi la probabilità che esca il numero che ho giocato è.....

“Se gioco due numeri, qual è la probabilità di vincere (cioè la probabilità che tra i cinque estratti ci siano i due numeri che ho giocato) ?”(si chiama ambo secco)

.....
“E qual è la probabilità di vincere giocando tre numeri (probabilità di fare un terno-secco) , quattro numeri (quaterna secca), cinque numeri (cinquina)?”

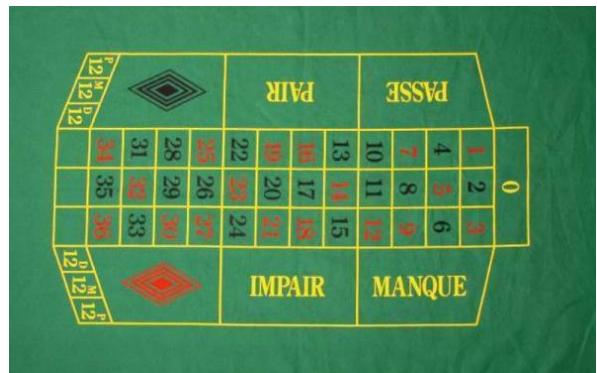
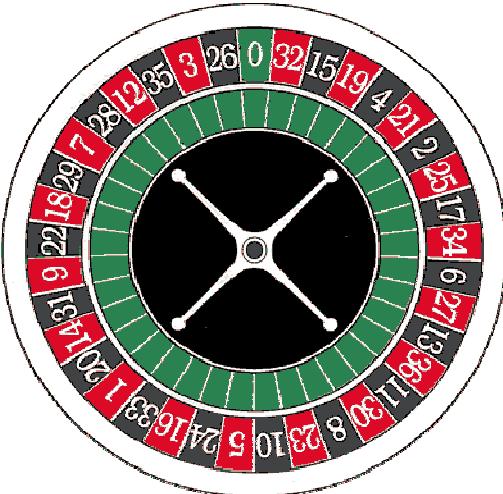
Nel gioco del lotto l'estratto-semplice viene pagato 11,232 volte la posta, l'ambo 250 volte la posta, il terno 4250 volte la posta , la quaterna 80000 volte la posta, la cinquina 1000000 di volte la posta : **secondo te il gioco del LOTTO è un gioco equo ?**

Fai una breve ricerca per scoprire come è nato il gioco del LOTTO.

SCHEDA 7

Rien ne va plus!

Nel gioco della roulette francese ci sono 36 numeri rossi e neri alternati da 1 a 36 e lo zero (verde).



Si può puntare su:

- sull'uscita di un dato numero;
- su un “cavallino” cioè si mette la fiche a “cavallino” su due numeri e si vince se esce uno dei due;
- sull'uscita di un numero compreso in una data dozzina (1-12; 13-24; 25-36);
- sull'uscita di un numero tra 18 numeri (1-18; 19-36);
- sull'uscita di un numero pari;
- sull'uscita di un numero dispari;
- sull'uscita di un rosso o di un nero.

Il gioco della roulette francese è un gioco equo?

Vediamo le varie “puntate”:

- L'uscita di un dato numero viene data 35 a 1 cioè se il rischio è r abbiamo un guadagno $g = 35 \cdot r$.
Calcoliamo la probabilità che esca un dato numero.....
Ti sembra che questa scommessa sia equa?
- L'uscita di un numero pari (dispari) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero pari.....
- L'uscita di un numero rosso (nero) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero rosso.....
- L'uscita di un numero compreso tra 18 numeri (1-18; 19-36) viene data 1 a 1
- L'uscita di un numero compreso in una dozzina viene data 2 a 1
- L'uscita di un numero a cavallo tra due viene data 17 a 1

NOTA: ora capisci perché si dice che “*lo zero è a favore del banco*”?

SCHEDA 8

Qual è la probabilità di vincere al totocalcio?



Riempiendo a caso la schedina, qual è la probabilità di fare 13 al TOTOCALCIO?

Riempiendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 12 al TOTOCALCIO?

Riempiendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 11 al TOTOCALCIO?

.....

La schedina del totocalcio è costituita da 13 caselle che devono essere riempite con 1,2,X (possibili risultati di tredici partite di campionato di una data domenica) : 1= vince la squadra che gioca in casa, 2= vince la squadra che gioca in trasferta, X= pareggio.

$$p(13) = \dots$$

$$p(12) = \dots$$

$$p(11) = \dots$$

SCHEDA 9

Il gioco interrotto e la divisione della posta



*Due giocatori, A e B, hanno deciso di giocare una serie di partite ed hanno stabilito che vincerà tutto quello che vincerà per primo **3 partite**. Hanno scommesso 18 euro ciascuno quindi la posta in gioco è di 36 euro. Ad un certo punto però, quando stanno **2 a 1** per A (cioè A ha vinto due partite e B solo una) devono interrompere il gioco: come è giusto che dividano la posta?"*

Osservazione iniziale

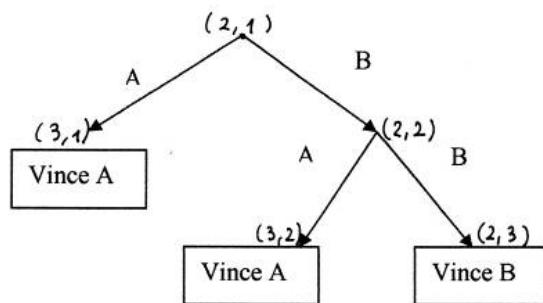
La posta andrà divisa in relazione alle probabilità che hanno di vincere ciascun giocatore al momento dell'interruzione del gioco...

Il problema è quindi quello di calcolare la probabilità che hanno di vincere i due giocatori nel momento in cui il gioco viene interrotto.

Qual è la probabilità che hanno i due giocatori di vincere?

Si suppone che i due giocatori siano da considerarsi di pari abilità e che quindi ad ogni partita abbiamo la stessa probabilità di aggiudicarsi il punto.

Puoi rappresentare la situazione con un grafo ad albero in cui se mi sposto a sinistra vince A , se mi sposto a destra vince B e in cui indico il punteggio che si è raggiunto dopo la partita.



Quindi $p(\text{vince} - A) = \dots$

Invece B per vincere deve vincere sia la prima che la seconda partita e quindi la sua probabilità di vittoria è $p(\text{vince} - B) = \dots$

In conclusione i 36 euro della posta vanno suddivisi in rapporto di

SCHEDA 10
Calcolo delle probabilità per....salvarsi la vita!

Ad un condannato a morte viene data una possibilità di salvarsi: deve disporre 4 palline , 2 bianche e 2 nere, in due urne (mettendo almeno una pallina in ogni urna) e poi scegliere, bendato, un'urna ed estrarre una pallina.

Se estrarrà una pallina bianca avrà salva la vita.

Come gli conviene disporre le palline nelle urne per avere la massima probabilità di estrarre una pallina bianca e quindi di non essere giustiziato?

Suggerimento: ricorda che la probabilità di scegliere l'urna A o B risulta

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$$

Analizza le possibili disposizioni delle palline nelle due urne A e B:

.....
.....

Calcola, in ogni caso, la probabilità che ha di estrarre una pallina bianca utilizzando la probabilità condizionata:

$$p(\text{bianca}) = p(A) \cdot p(\text{bianca} / A) + p(B) \cdot p(\text{bianca} / B)$$

.....
.....
.....

SCHEDA 11
Stanlio e Ollio

Stanlio e Ollio la sera giocano a carte e chi perde paga da bere.

Ollio perde per 10 serate di seguito e comincia a sospettare che Stanlio sia un baro.



Supponiamo che a priori Ollio abbia fiducia nell'amico e attribuisca probabilità alta al fatto che Stanlio sia onesto (O) , per esempio $p(O) = 0,95$. (di conseguenza $p(B) = \dots\dots$)

Supponiamo che Stanlio ed Ollio siano giocatori di pari abilità e che quindi la probabilità che Stanlio vinca 10 volte di seguito sia $p(W_{10}) = \dots\dots$

Se applichiamo il teorema di Bayes possiamo calcolare la probabilità che Stanlio sia un baro (B) supponendo che abbia vinto 10 volte di seguito (W_{10}):

$$p(B/W_{10}) = \dots\dots\dots$$

Suggerimento: è chiaro che la probabilità che Stanlio vinca 10 volte di seguito supponendo che sia un baro è 1.

Esercizio: prova a generalizzare il problema indicando con n il numero delle vincite consecutive di Stanlio e determinando $p(B/W_n)$.

Rappresenta graficamente l'andamento di $p(B/W_n)$ al variare di n . Per quale valore di n la probabilità che Stanlio sia un baro supera il 50%?

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE
CALCOLO DELLE PROBABILITA'

1. Una cassaforte ha un codice di 4 cifre scelte tra 0,1,2...9 (che si possono ripetere). Qual è la probabilità di indovinare il codice al primo tentativo?

$$[\frac{1}{10^4}]$$

2. In una classe di 20 studenti ci sono 12 maschi e 8 femmine. Se l'insegnante interroga due studenti, qual è la probabilità che siano interrogate due femmine?

$$[\frac{14}{95}]$$

3. Due giocatori A e B scommettono sull'uscita della somma uguale a 12 nel lancio di due dadi: A scommette sull'uscita della somma uguale a 12 e B sull'evento contrario.

Se A vince € 35, quanto deve vincere B perché il gioco sia equo?

$$[€ 1]$$

4. Se il gioco del totocalcio fosse equo, rischiando € 1 quanto dovremmo vincere facendo 13?

$$[€1594322]$$

5. Se il gioco del lotto fosse un gioco equo, rischiando € 1 quanto dovremmo vincere nel caso in cui indovinassimo tutti e cinque i numeri di una ruota?

$$[€ 43949267]$$

6. In 4 lanci di una moneta (non truccata) qual è la probabilità che esca sempre testa? E che esca almeno una volta testa? E due volte testa e due volte croce?

$$[\frac{1}{2^4}; \quad \frac{15}{16}; \quad \frac{3}{8}]$$

7. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono tre: qual è la probabilità di aver pescato 3 sette?

$$[\frac{1}{2470}]$$

8. Pescando tre carte da un mazzo di 40 carte , qual è la probabilità di pescare il sette di quadri?

$$[\frac{3}{40}]$$

9. Giocando a poker, qual è la probabilità di avere in mano 4 re ?

$$[\frac{1}{7192}]$$

10. Supponendo che tutti gli studenti debbano ancora essere interrogati, qual è la probabilità che ha uno studente di essere interrogato se l'insegnante chiama a caso tre persone e nella classe ci sono 20 studenti?

$$[\frac{3}{20}]$$

11. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità che siano 4 assi?

$$[\frac{1}{91390}]$$

12. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità di avere esattamente 3 assi?

$$[\frac{72}{45695}]$$

13. Si lancia una moneta 5 volte di seguito. Qual è la probabilità che escano almeno tre teste?

$$[\frac{1}{2}]$$

14. Qual è la probabilità, ricevendo 5 carte da un mazzo di 32, di avere esattamente tre assi?

$$[\frac{27}{3596}]$$

15. Giocando a poker (prendo cinque carte da un mazzo di 32) qual è la probabilità di avere 5 carte di cuori?

$$[\frac{1}{3596}]$$

16. Estraendo 5 carte da un mazzo di 32, qual è la probabilità di estrarre cinque carte dello stesso seme?

$$[\frac{1}{899}]$$

17. Lanciando due dadi, qual è la probabilità di ottenere somma 7?

$$[\frac{1}{6}]$$

18. Qual è la probabilità di fare 10 al totocalcio? (indovinare 10 risultati su tredici partite)

$$[\frac{2288}{3^{13}}]$$

19. Qual è la probabilità che esca il 90 sulla ruota di Firenze? (probabilità di un estratto semplice cioè si gioca solo il 90 e si vince se viene estratto tra i cinque numeri della ruota di Firenze)

$$[\frac{1}{18}]$$

20. Da un mazzo di 40 carte si estraggono tre carte. Qual è la probabilità che siano tutte di cuori?
E qual è la probabilità che siano tutte dello stesso seme?

$$[\frac{3}{247} ; \frac{12}{247}]$$

21. Lanciando due monete qual è la probabilità di:

- a) avere due teste;
- b) avere almeno una testa;
- c) avere la stessa faccia (o due teste o due croci).

$$[\frac{1}{4} ; \frac{3}{4} ; \frac{1}{2}]$$

22. Lanciando tre monete qual è la probabilità di :

- a) avere tre teste;
- b) avere almeno una testa;
- c) avere esattamente una testa.

$$[\frac{1}{8} ; \frac{7}{8} ; \frac{3}{8}]$$

23. In una classe di 23 studenti ci sono 10 maschi e 13 femmine. Vengono eletti i due rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che:

- a) siano entrambe femmine;
- b) siano entrambi maschi;
- c) siano un maschio e una femmina.

$$[\frac{78}{253} ; \frac{45}{253} ; \frac{130}{253}]$$

24. Si mescolano 10 carte e se ne danno 5 al giocatore A e 5 al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

$$[252]$$

25. Si mescolano 10 carte e si distribuiscono 3 al giocatore A e tre al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

$$[4200]$$

26. Qual è la probabilità di fare 9 al totocalcio? (9 risultati corretti)

$$[\text{circa } 0,007]$$

27. Vuoi acquistare un nuovo televisore e nel negozio ci sono tre modelli con prezzi 540 euro, 608 euro, 654 euro. Inoltre vuoi acquistare un decoder per il vecchio televisore e ci sono due modelli al costo rispettivamente di 32 euro e 48 euro. Scegliendo a caso sia il televisore che il decoder qual è la probabilità di spendere meno di 700 euro? E più di 650 euro?

$$[\frac{5}{6}; \frac{1}{2}]$$

28. Il numero di serie di una banconota è formato da una lettera (scelta nell'alfabeto a 26 lettere) e 11 numeri (scelti tra le cifre da 0 a 9). Quanti numeri di serie distinti si possono generare?

Scelto a caso un numero di serie qual è la probabilità che esso inizi con una vocale e termini con un numero pari diverso da zero?

$$[26 \cdot 10^{11}; \frac{1}{13}]$$

29. Due amiche pranzano al ristorante e scelgono dal menù (a caso e ciascuna indipendentemente dall'altra) un antipasto, un primo e un dessert . Supponendo che nel menù ci siano 6 antipasti, 8 primi e 4 dessert calcola:

- a) la probabilità che scelgano lo stesso antipasto;
- b) la probabilità che scelgano lo stesso antipasto e lo stesso primo;
- c) la probabilità che scelgano stesso antipasto, stesso primo e stesso dessert.

$$[\frac{1}{6}; \frac{1}{48}; \frac{1}{192}]$$

30. Tre persone prendono l'ascensore a piano terra di un edificio a 6 piani. Supponendo che ciascuna persona scenda a caso a uno dei piani dell'edificio calcola:

- a) la probabilità che scendano tutte al primo piano;
- b) la probabilità che scendano tutte allo stesso piano.

$$[\frac{1}{216}; \frac{1}{36}]$$

31. In una città ci sono 6 hotel e un dato giorno tre persone prenotano ciascuna una camera in uno degli hotel (in modo casuale). Qual è la probabilità che le tre persone si trovino in tre hotel diversi?

$$[\frac{5}{9}]$$

32. Sette amici , quattro ragazzi e tre ragazze, vanno al cinema e si siedono accanto sulla stessa fila. Calcola la probabilità che :

- a) i ragazzi siano tutti vicini tra loro;
- b) le ragazze siano tutte vicine tra loro;
- c) i ragazzi siano tutti vicini tra loro e le ragazze tutte vicine tra loro.

$$[\frac{4}{35}; \frac{1}{7}; \frac{2}{35}]$$

Calcolo delle probabilità

33. Qual è la probabilità che tra quattro amici almeno due di essi siano nati nello stesso mese?

$$[\frac{41}{96} \equiv 43\%]$$

34. In un ufficio bancario ci sono due sportelli A,B di cui almeno uno sempre aperto: la probabilità che A sia aperto è 0,7 e la probabilità che B sia aperto è 0,6. Qual è la probabilità che siano aperti entrambi gli sportelli?

$$[0,3]$$

35. Due cacciatori, che colpiscono il bersaglio con probabilità rispettive 85% e 75%, sparano (una sola volta) contemporaneamente ad una lepre. Qual è la probabilità che la lepre non venga colpita?

$$[3,75\%]$$

36. Si hanno a disposizione due monete, una regolare e una truccata in modo che la probabilità che esca testa sia $\frac{1}{3}$. Si sceglie a caso una delle due monete e si lancia: qual è la probabilità che esca testa?

$$[\frac{5}{12}]$$

37. In un'urna A sono contenute 5 palline bianche e 5 palline nere, mentre in un'urna B ci sono 4 palline bianche e 6 nere. Si sceglie a caso un'urna e si pesca una pallina: qual è la probabilità che sia nera?

$$[\frac{11}{20}]$$

38. Un'urna contiene 5 palline bianche e 10 nere e una seconda urna contiene 6 palline bianche e 2 nere. Scegliendo a caso un'urna ed estraendo una pallina, qual è la probabilità che sia bianca?

$$[\frac{13}{24}]$$

39. Due macchine producono lo stesso pezzo meccanico: la prima produce il 40% dei pezzi e il 95% è senza difetti mentre il 6% dei pezzi prodotti dalla seconda è difettoso. Qual è la probabilità che, prendendo a caso un pezzo, questo risulti difettoso?

$$[5,6\%]$$

40. Il 60% di un gruppo di ammalati di colite è stato sottoposto alla somministrazione di un nuovo farmaco e il 70% ha ottenuto un miglioramento. Il 30% della restante parte del gruppo non sottoposta al trattamento ha comunque ottenuto un miglioramento. Calcola la probabilità che un paziente abbia preso il nuovo farmaco supponendo che sia migliorato.

$$[\frac{7}{9}]$$

41. Secondo i dati statistici la prova del palloncino (effettuata sui guidatori per vedere se sono in stato di ebbrezza) ha esito positivo sul 5% delle persone controllate. Sempre secondo i dati raccolti il 98% delle persone con risultato positivo era effettivamente ubriaca e il 2% delle persone con esito negativo è comunque ubriaca.

Calcola la probabilità che, essendo una persona ubriaca, venga segnalata con la prova del palloncino (il test abbia cioè risultato positivo).

$$[\frac{49}{68}]$$

42. Un gruppo di escursionisti organizza una gita in montagna. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità di raggiungere la metà pari al 60% e che quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.

a) Qual è la probabilità che un escursionista scelto a caso nel gruppo raggiunga la metà?

b) Sapendo che un escursionista ha raggiunto la metà, con quale probabilità appartiene al gruppo degli escursionisti allenati?

$$[0,85; 0,76]$$

43. Un gruppo di bagnanti è costituito per il 65% da persone di carnagione scura (S) e per il rimanente 35% da persone di carnagione chiara (C). L'uso non appropriato di creme solari fa sì che si abbia una percentuale di persone danneggiate dal sole (U) del 10% se di carnagione scura e del 60% se di carnagione chiara.

Sapendo che un bagnante scelto a caso si è ustionato al sole, con che probabilità egli ha una carnagione chiara?

$$[0,76]$$

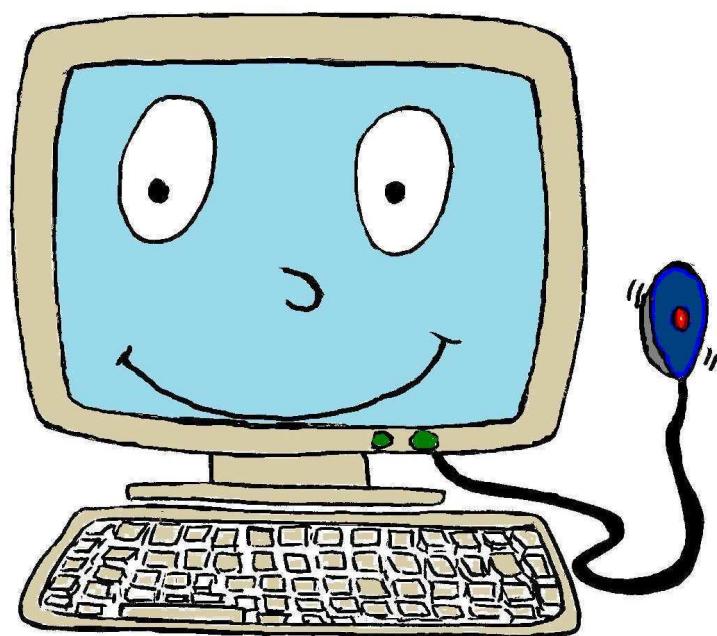
44. Un test clinico ha un'affidabilità del 98% cioè se una persona malata si sottopone al test questo risulta positivo nel 98% dei casi. Il test può però generare anche dei "falsi positivi" nella percentuale dell'1% (cioè se una persona non malata si sottopone al test si ha un risultato positivo nell'1% dei casi).

Statisticamente è noto che la malattia colpisce lo 0,5% della popolazione.

Se una persona risulta positiva al test, qual è la probabilità che sia effettivamente malata?

$$[\text{circa } 0,33]$$

Laboratorio di informatica



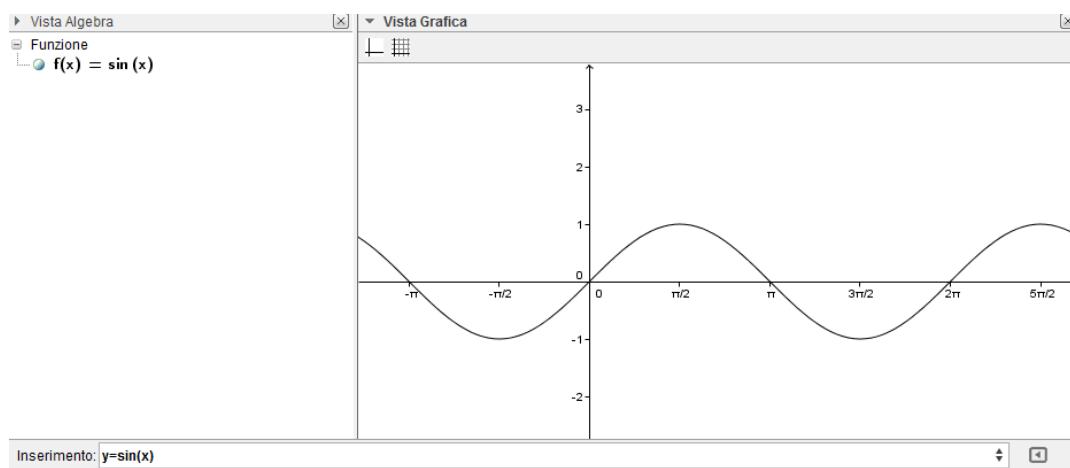
FUNZIONI SINUSOIDALI SCHEMA 1

Riprendiamo il software Geogebra e utilizziamolo per lo studio delle funzioni sinusoidali.

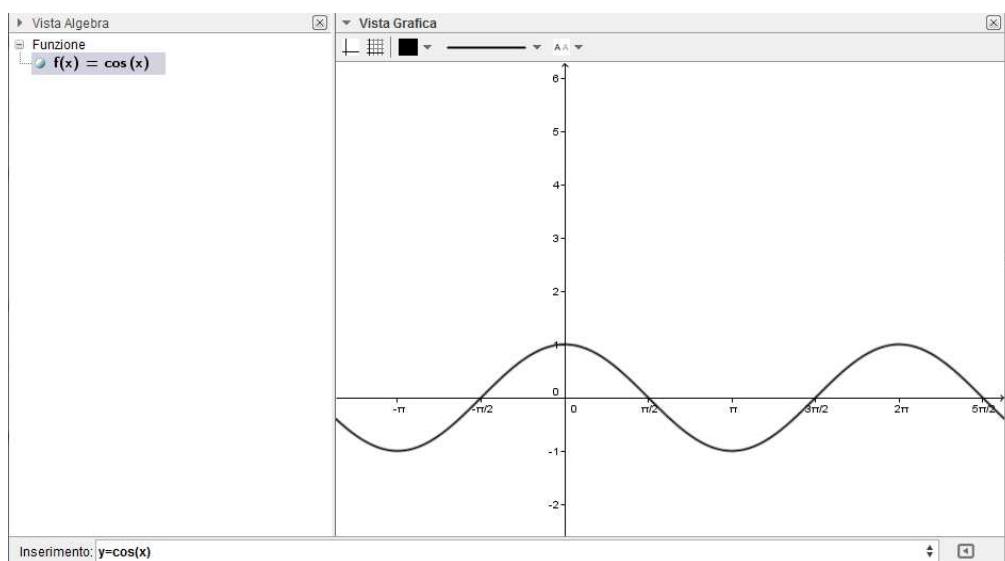
Possiamo scegliere come unità di misura sull'asse x $\frac{\pi}{2}$ digitando:

Opzioni – avanzate - preferenze vista grafica - asse x – unità π - distanza $\frac{\pi}{2}$

1) Cominciamo con l'inserire l'equazione di $y = \sin(x)$ (dobbiamo scrivere sin e mettere le parentesi intorno all'argomento della funzione): comparirà il grafico della funzione seno: osserviamo che il periodo è 2π e che l'ampiezza della funzione è 1.



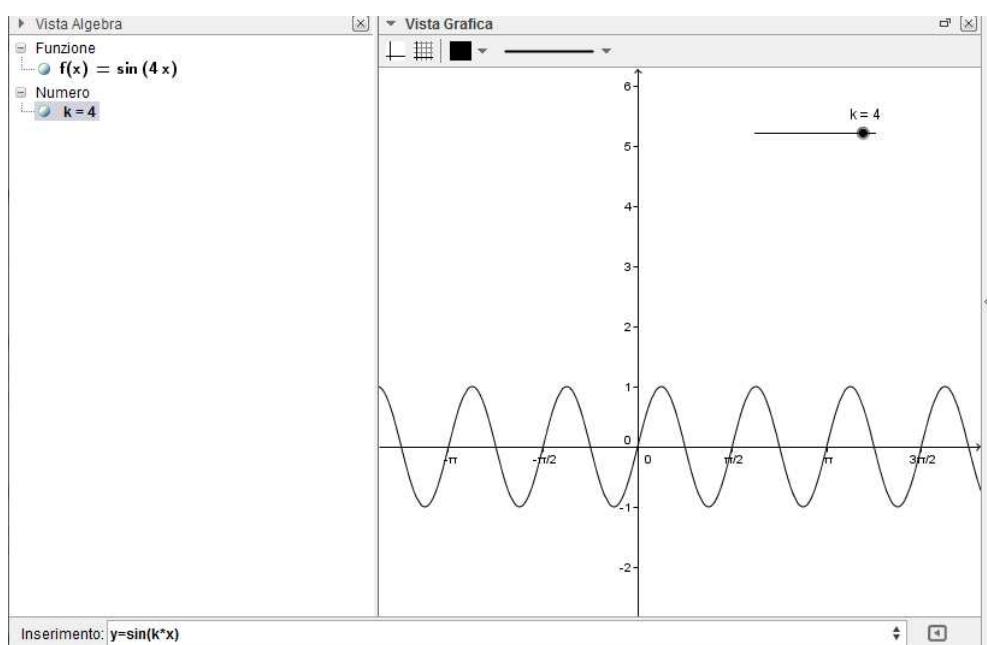
2) Inseriamo poi l'equazione $y = \cos(x)$. Osserviamo che anche il periodo del coseno è 2π e che l'ampiezza delle oscillazioni è 1.



Inoltre il grafico del coseno risulta uguale a quello del seno ma traslato di $\frac{\pi}{2}$.

3) Proviamo a studiare adesso la funzione $y = \sin(k * x)$ utilizzando uno "slider" k.

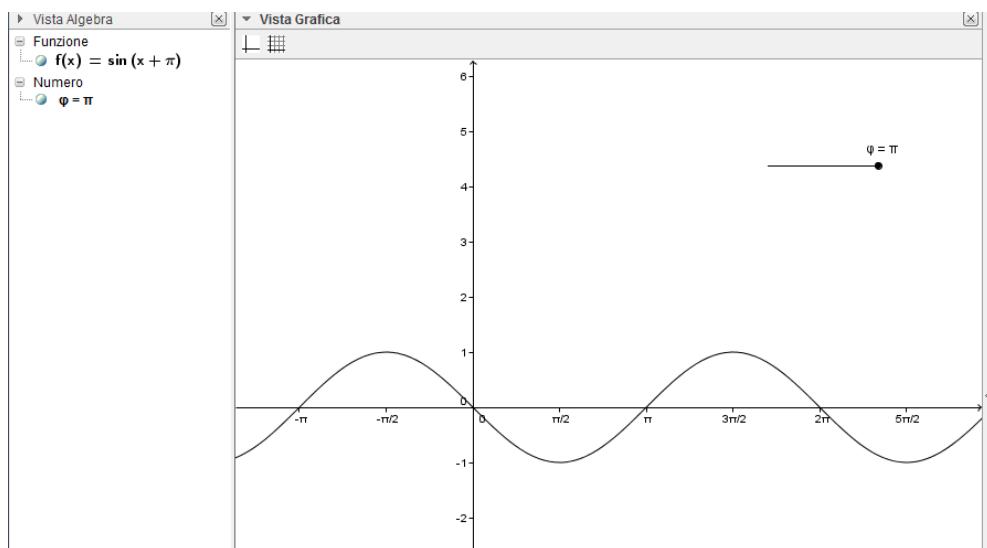
Attivando la funzione "muovi" (primo pulsante da sinistra nella barra in alto) possiamo capire che k determina il periodo della funzione. Per esempio la funzione in figura ha k = 4 ed ha un periodo di $\frac{2\pi}{4}$ poiché nello spazio di 2π si è ripetuta quattro volte.



Quindi in generale la funzione $y = \sin(k * x)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$.

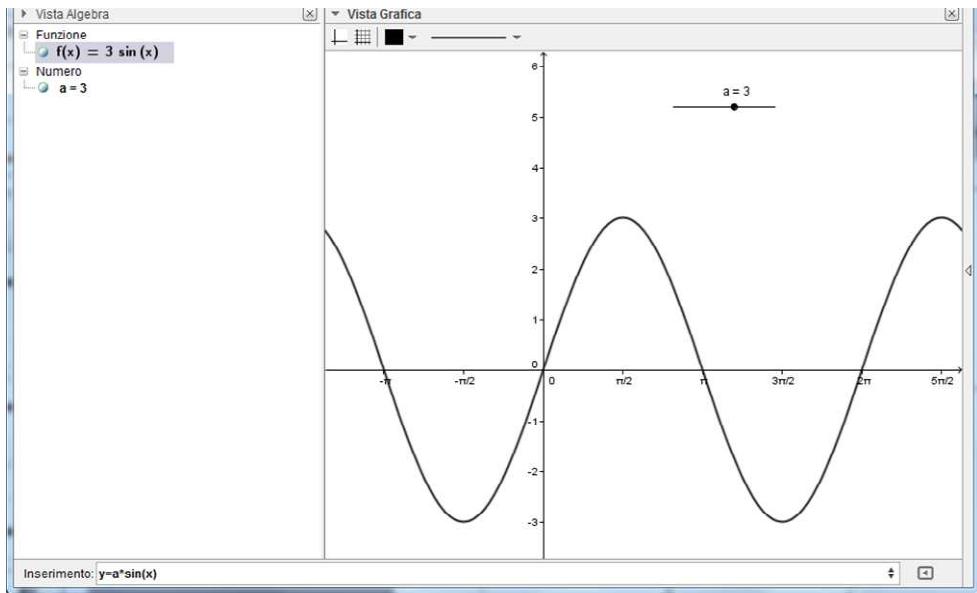
4) Proviamo a studiare $y = \sin(x + \varphi)$ utilizzando uno slider φ .

Ci accorgiamo che variando φ il grafico del seno trasla orizzontalmente: se per esempio $\varphi = \pi$ il grafico trasla del vettore $(-\pi, 0)$.



Notiamo inoltre che se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ otteniamo il grafico del coseno: infatti $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

5)Vediamo infine cosa accade se poniamo un parametro davanti alla funzione, cioè studiamo $y = a * \sin(x)$. Ci accorgiamo che cambia l'ampiezza dell'oscillazione del grafico: per esempio nel grafico in figura dove $a = 3$ i valori oscillano tra -3 e 3 .



Esercizio 1

Prova a scrivere

$$y = a * \sin(k * x + \varphi)$$

dopo aver creato tre slider a , k , φ .

Fissa dei valori dei parametri, stampa il grafico corrispondente e controlla come risultano periodo, ampiezza dell'oscillazione e vettore traslazione rispetto a $y = \sin x$.

Esercizio 2

Ripeti l'esercizio precedente utilizzando la funzione $y = \cos(x)$ cioè studia la funzione

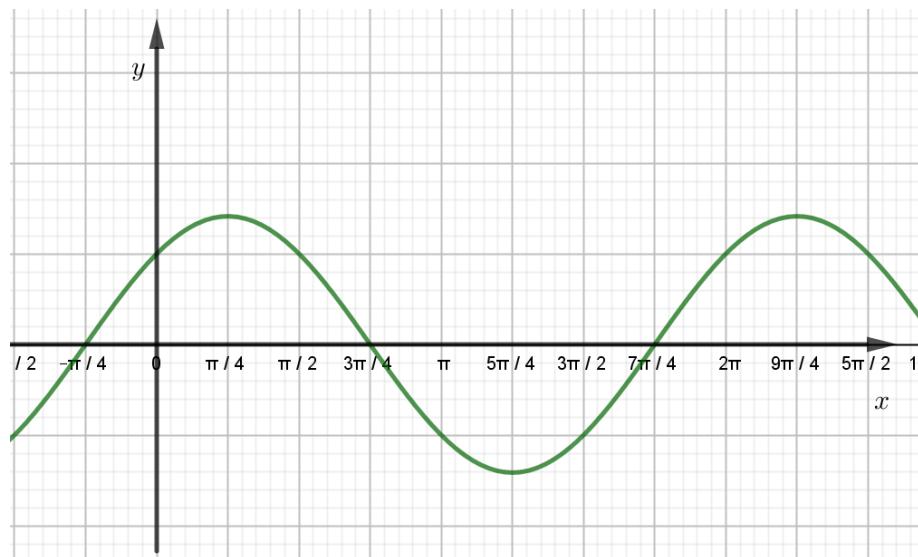
$$y = a * \cos(k * x + \varphi)$$

**FUNZIONI SINUSOIDALI
SCHEMA 2**

Somma di funzioni sinusoidali

Cosa si ottiene sommando due funzioni sinusoidali?

1) Cominciamo per esempio inserendo nella barra di inserimento $y = \sin x + \cos x$



Osserviamo che si tratta di una funzione sinusoidale di periodo 2π con ampiezza maggiore di 1 e traslata.

Osservando il grafico ci accorgiamo che la traslazione è di $\frac{\pi}{4}$ e che l'ampiezza vale

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Infatti inseriamo $y = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (ricorda che per inserire $\sqrt{2}$ devi digitare `sqrt(2)`) otteniamo un grafico che si sovrappone al precedente!

2) Crea due slider a,b e inserisci

$$y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$$

Cosa si ottiene al variare di a e b ?

Stampa degli esempi.

Nota: supponiamo che la funzione $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ corrisponda a $y = A \cdot \sin(x + \varphi)$.

Se sviluppiamo $\sin(x + \varphi)$ con la formula di addizione abbiamo

$$A \cdot (\sin x \cdot \cos \varphi + \cos x \cdot \sin \varphi) = (A \cdot \cos \varphi) \cdot \sin x + (A \cdot \sin \varphi) \cdot \cos x$$

e quindi perché le due equazioni risultino uguali dovrà essere:

$$\begin{cases} A \cdot \cos \varphi = a \\ A \cdot \sin \varphi = b \end{cases}$$

Quindi, dividendo membro a membro si avrà che:

$$\frac{A \cdot \sin \varphi}{A \cdot \cos \varphi} = \frac{b}{a} \rightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a} \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ indica l'angolo, compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, la cui tangente è uguale $\frac{b}{a}$).

Infine per determinare l'ampiezza A possiamo sostituire in una delle due uguaglianze oppure, dopo aver elevato al quadrato, sommare e ricavare A :

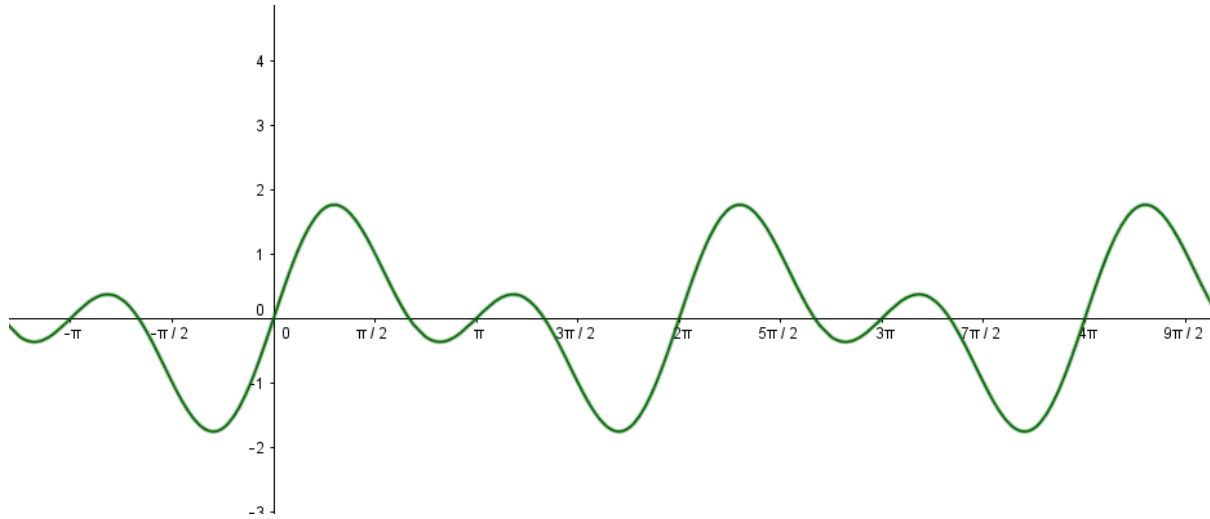
$$A^2 \cdot \sin^2 \varphi + A^2 \cdot \cos^2 \varphi = a^2 + b^2 \rightarrow A^2 \cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = a^2 + b^2 \rightarrow A^2 = a^2 + b^2 \rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Infatti nell'esempio iniziale avevamo $a = 1$, $b = 1 \rightarrow A = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Esercizio: trova A e φ nel caso in cui $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

3) Vediamo ora cosa otteniamo sommando funzioni sinusoidali di diverso periodo.

Cominciamo inserendo l'equazione $y = \sin(x) + \sin(2 * x)$



Quindi in questo caso non si ottiene una funzione sinusoidale, ma si ottiene comunque una funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ (come si osserva dal grafico).

Infatti sommando una funzione periodica di periodo 2π ($\sin x$) con una funzione periodica di periodo π ($\sin 2x$) è chiaro che il minimo valore per cui si ritrovano gli stessi valori per entrambe, e quindi per la loro somma, è 2π .

Esercizio: per ciascuna delle seguenti funzioni indica se sono periodiche e in caso affermativo determina il periodo.

a) $y = \sin(2 * x) + \sin(3 * x)$

b) $y = \sin(2 * x) + \sin(4 * x)$

c) $y = \sin((5/2) * x) + \sin((5/3) * x)$

d) $y = \sin(x) + \sin(2 * \pi * x)$

e) $y = \sin((\pi * x) + \sin((2 * \pi * x))$

In generale in quale caso la funzione $y = \sin(k_1 x) + \sin(k_2 x)$ risulta periodica? E in caso affermativo qual è il suo periodo?

FUNZIONI SINUSOIDALI SCHEMA 3

Equazione di un'onda armonica

Proviamo a simulare con Geogebra la propagazione di un'onda armonica trasversale su una corda.
Ricordiamo che l'equazione di un'onda armonica lungo una corda è del tipo

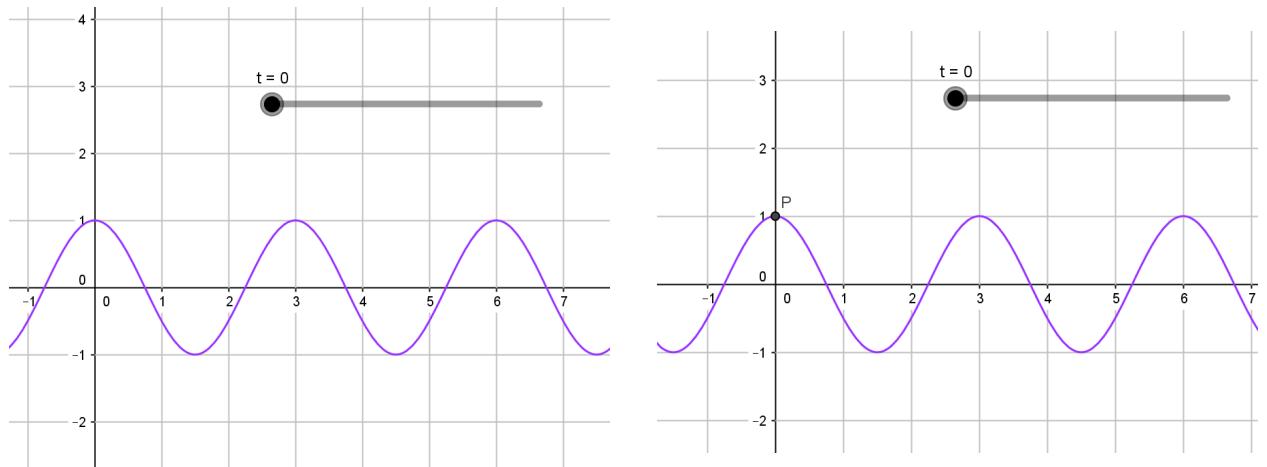
$$y(x,t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

dove y rappresenta lo spostamento di un punto del mezzo materiale (corda) che si trova a distanza x dalla sorgente, A l'ampiezza dell'onda, T il periodo e λ la lunghezza d'onda.

Consideriamo per esempio un'onda che abbia $A = 1\text{cm}$ $T=1\text{ s}$; $\lambda = 3\text{ cm}$.

Creiamo lo slider tempo t facendolo variare per esempio da 0 a 3 con incremento 0.01, con crescente una sola volta e velocità 4 (per ottenere un risultato più realistico) e inseriamo l'equazione $y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} * x - \frac{2\pi}{1} * t\right)$.

Se poniamo $t=0$ compare la configurazione in figura in cui si vede che la lunghezza d'onda risulta $\lambda = 3$: il grafico è come una "foto" scattata all'istante $t=0$.



Creiamo un punto P con il tasto apposito "punto su oggetto" in modo che appartenga alla curva e quindi rappresenti un punto della corda che sta oscillando: possiamo per esempio prendere $(0,1)$ che per $t = 0$ si trova sul grafico.

Per simulare la propagazione dell'onda basta cliccare sullo **slider t** con il tasto destro del mouse scegliendo "**animazione attiva**": in questo modo faremo scorrere il tempo e vedremo l'onda propagarsi verso destra mentre il punto P oscilla verticalmente intorno alla sua posizione di equilibrio.

Esercizio : crea anche gli slider A (ampiezza), T (periodo) e λ (lunghezza d'onda) e inserisci di nuovo l'equazione d'onda utilizzando tutti i parametri.

Varia un parametro per volta, stampa i tuoi esempi e fai le tue osservazioni.

FUNZIONI SINUSOIDALI SCHEMA 4

Composizione armonica di un'onda sonora

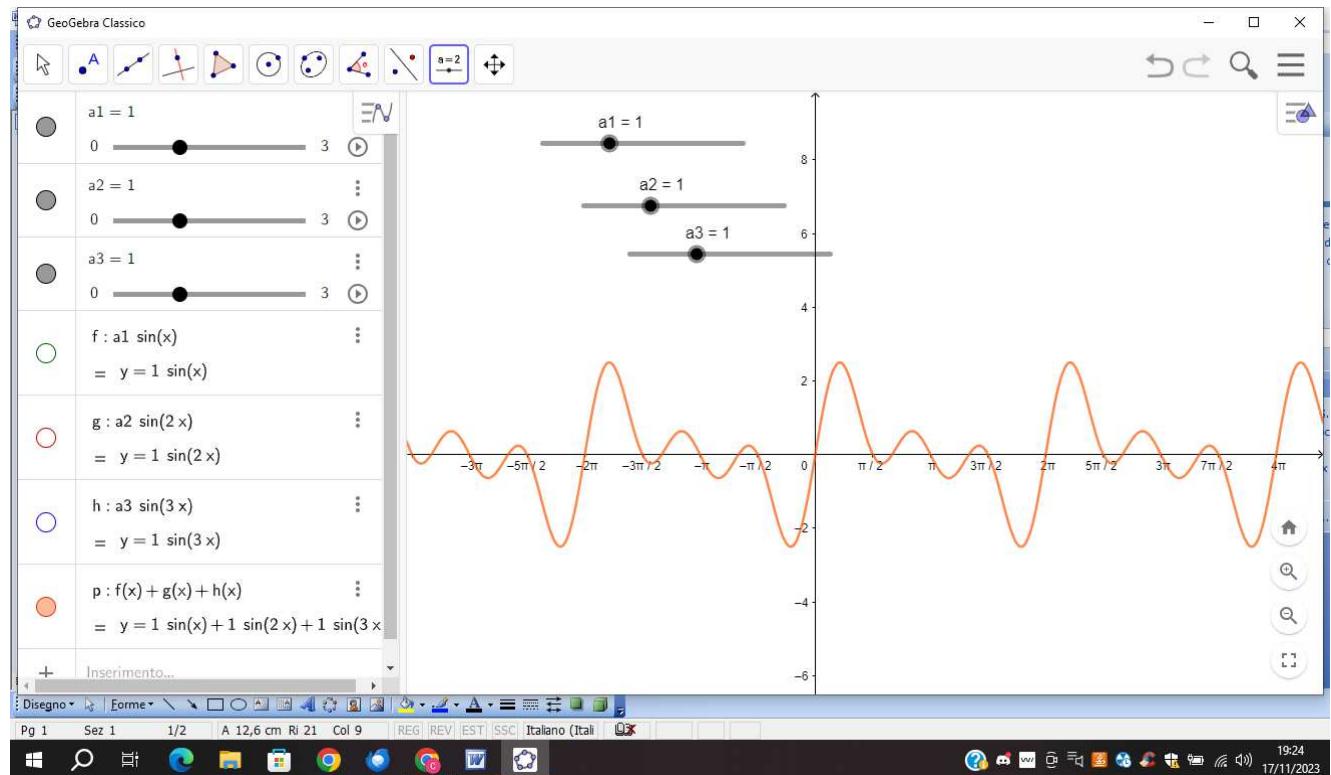
Qualsiasi suono complesso (non sinusoidale) di frequenza f può essere ottenuto sommando suoni puri (sinusoidali) di frequenze $f, 2f, 3f$ ecc. di opportuna ampiezza a_1, a_2, a_3 ecc.

Considereremo per semplicità solo suoni composti da 3 "armoniche": creiamo solo 3 slider a_1, a_2, a_3 che definiamo tra 0 e 3 con incremento 1 (per semplicità).

Inseriamo le equazioni delle tre sinusoidi:

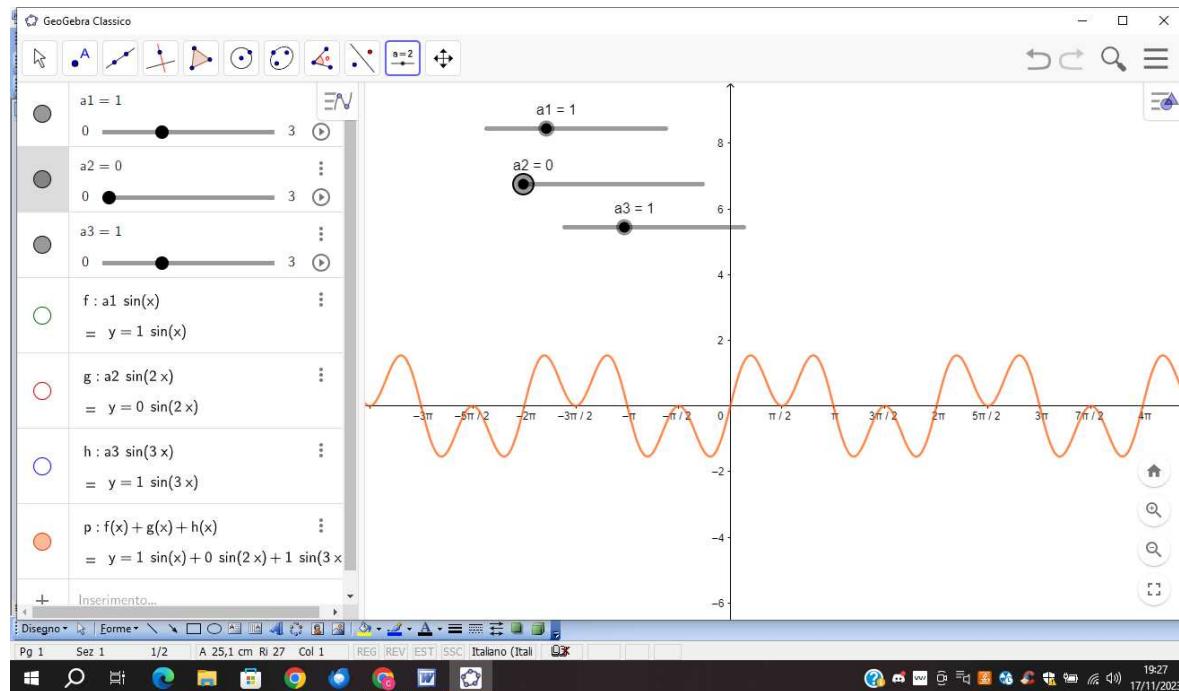
$y = a_1 \cdot \sin x, \quad y = a_2 \cdot \sin 2x, \quad y = a_3 \cdot \sin 3x$ (che saranno etichettate con f, g, h e avranno frequenza $f, 2f, 3f$ con $f = \frac{1}{2\pi}$) e inseriamo la loro somma scrivendo $y = f + g + h$ (che sarà etichettata con p).

Se nascondiamo f,g,h e gli assi avremo (per i valori $a_1=1, a_2=1, a_3=1$) la funzione seguente che avrà una forma non sinusoidale ma ancora frequenza f :



Possiamo variare gli slider e vedere come varia la forma del suono complesso che ha le tre armoniche di ampiezze a_1, a_2, a_3 .

Per esempio azzerando a_2 (cioè eliminando l'armonica (la sinusoide) con frequenza $2f$ otteniamo una forma molto diversa:



Esercizio

Prova a realizzare un “gioco” in cui viene disegnata una funzione $y = b_1 \cdot \sin x + b_2 \cdot \sin 2x + b_3 \cdot \sin 3x$ in cui b_1, b_2, b_3 sono scelti in modo random (la funzione verrà etichettata come q) scrivendo $b1=randombetween[0,3]$ ecc. se per esempio vogliamo che vengano scelti tra 0,1,2,3.

Colora la funzione con il blu e la precedente funzione p di rosso.

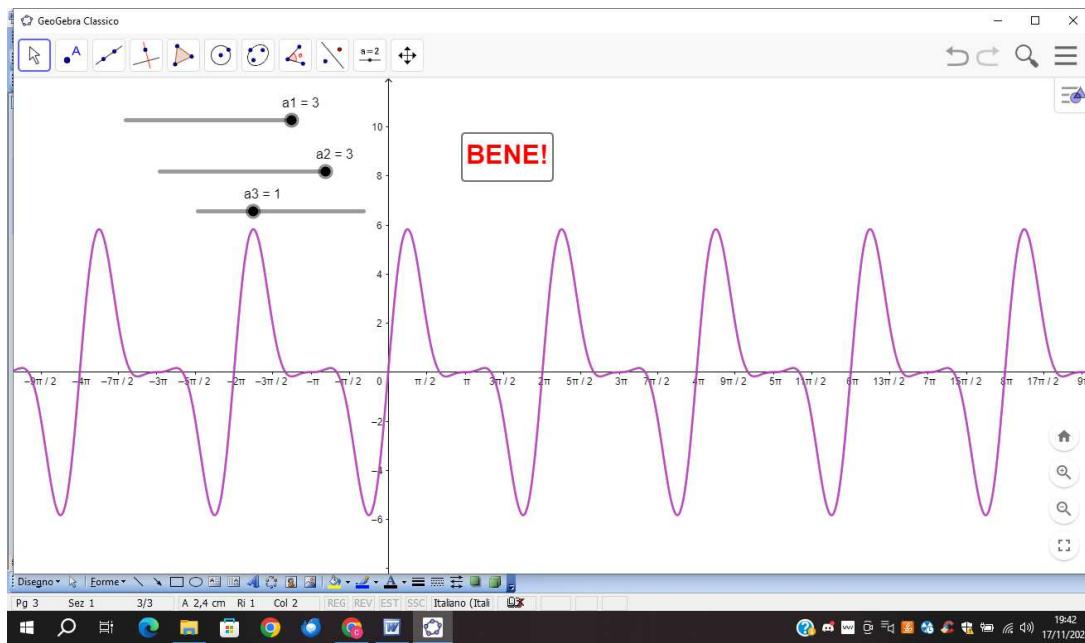
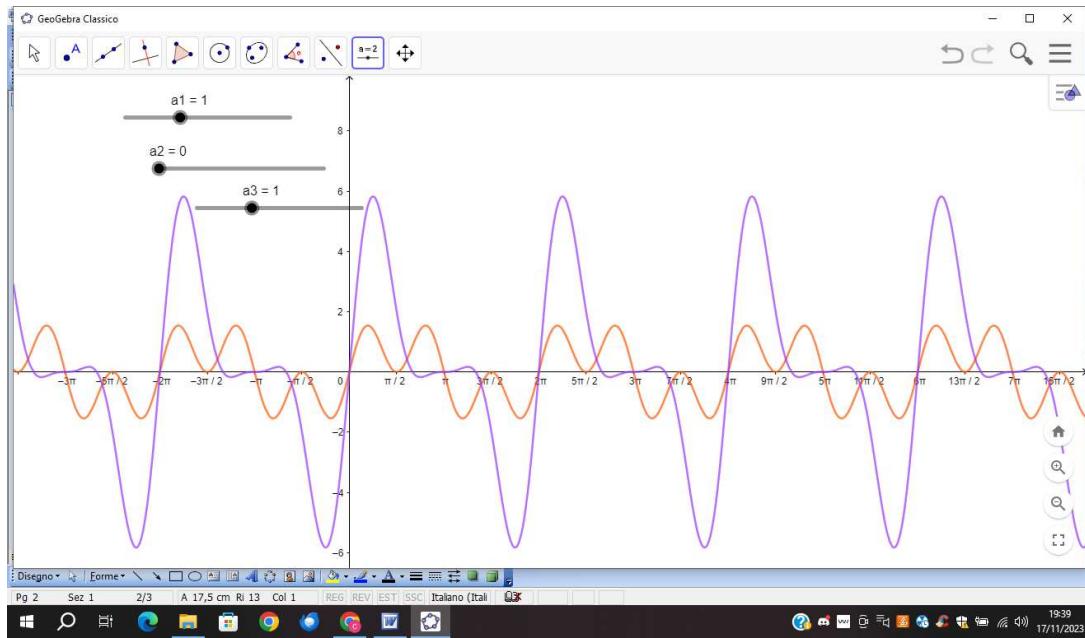
Inserendo il comando:

```
se(p==q, "BENE")
```

otterrai che quando vari i valori di a_1, a_2, a_3 ed ottieni la coincidenza delle due funzioni ti comparirà la scritta “BENE!” (puoi anche scrivere “indovinato!”) cioè hai indovinato i valori delle ampiezze delle tre armoniche che compongono il suono complesso blu generato a caso.

Naturalmente devi nascondere la vista algebra (altrimenti vedi quali sono i valori casuali scelti).

Esempio:



Esercizio 2

Registra un suono e visualizzane la forma con un'applicazione dello smartphone che simula un oscilloscopio (per esempio emetti un suono con la tua voce): inserisci l'immagine che ottieni con l'applicazione e che rappresenta la “forma” del suono registrato.

Ricercane la sua composizione armonica con Geogebra cioè cerca di trovare la giusta combinazione dei parametri delle prime tre armoniche per avvicinarsi il più possibile alla “forma” dell’onda sonora registrata.

**FUNZIONI SINUSOIDALI
SCHEMA 5**

Il fenomeno dei battimenti

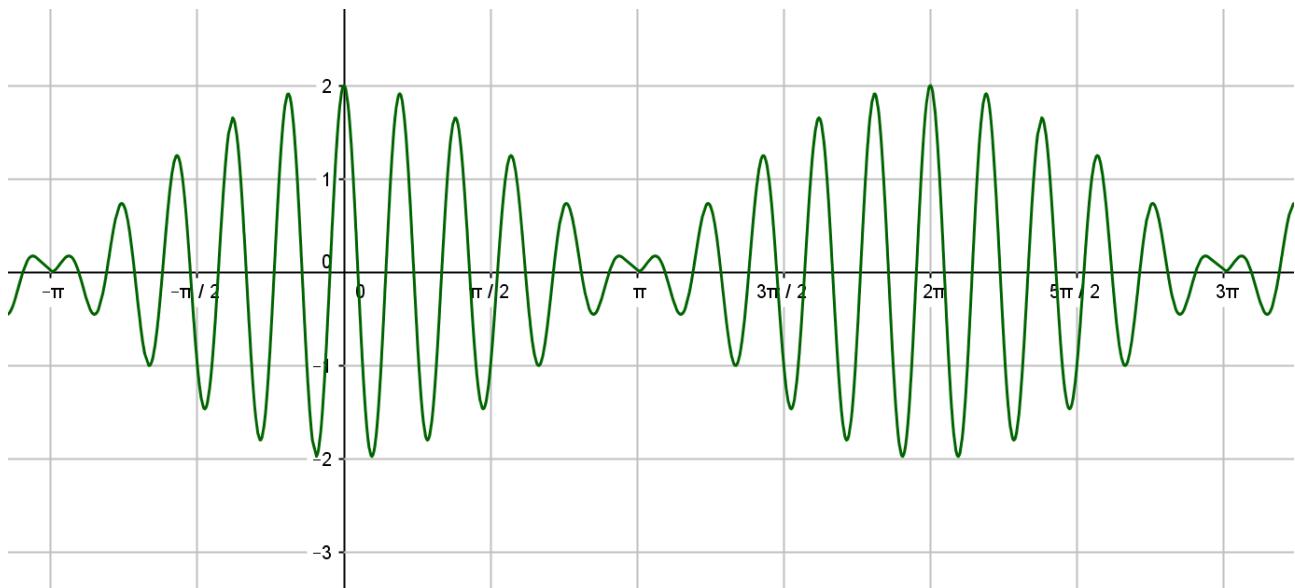
Se sommiamo due onde armoniche di **stessa ampiezza e frequenza molto vicina** otteniamo un'onda periodica la cui ampiezza varia come in figura: si parla di **“battimenti”** perché se le onde sono onde sonore si percepiscono delle “ondate” di intensità maggiore ad intervalli regolari (appunto i battimenti).

Considera l'oscillazione complessiva di un punto al variare del tempo

$$y = \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

Prendi per esempio $2\pi \cdot f_1 = 10 \rightarrow f_1 = \frac{10}{2\pi}$ e $2\pi \cdot f_2 = 11 \rightarrow f_2 = \frac{11}{2\pi}$ e , sostituendo per semplicità al tempo la variabile x , inserisci:

$$y = \cos(10x) + \cos(11x)$$



Si osserva che la frequenza dei “battimenti” risulta $\frac{1}{2\pi}$ e quindi è la differenza tra f_2 e f_1 .

Esercizio

Inserisci un altro esempio, stampalo e verifica che la frequenza dei “battimenti” risulta sempre $f_2 - f_1$.

**FUNZIONI SINUSOIDALI
SCHEMA 6**

Simulazione di un'onda stazionaria su una corda fissata ai due estremi

Vediamo come possiamo simulare con Geogebra le oscillazioni chiamate onde stazionarie che si possono avere su una corda di lunghezza L fissata ai due estremi.

Ricordiamo che le onde stazionarie si ottengono quando la corda viene eccitata con onde di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$.

L'onda stazionaria si ha per l'interferenza tra l'onda progressiva

$$y = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

con l'onda regressiva

$$y = -A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

che viene riflessa "capovolta" quando l'onda arriva all'estremo destro.

Prendi per esempio $\lambda = 6$, $A = 1$, $T = 1$.

Crea lo slider t variabile per esempio tra 0 e 5 con incremento 0.01, crescente solo una volta e velocità 2.

Inserisci

$$\begin{aligned} y &= \cos\left(\frac{2\pi}{6} \cdot x - \frac{2\pi}{1} \cdot t\right), 0 \leq x \leq 6 \\ y &= -\cos\left(\frac{2\pi}{6} \cdot x + \frac{2\pi}{1} \cdot t\right), 0 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

Inserisci poi **la somma** tra le due funzioni (se vengono nominate f e g basterà scrivere f+g nella barra di inserimento), nascondi le due onde lasciando visibile solo la loro somma e scegli per lo slider t **animazione attiva**: vedrai l'onda stazionaria oscillare con un nodo centrale oltre ai nodi negli estremi.

Esercizio 1

Riporta qualche "foto" dell'onda al variare di t evidenziando un punto sulla corda per seguirne le oscillazioni.

Esercizio 2

Crea un altro slider n variabile tra 1 e 5 con incremento 1 e inserisci da tastiera $\lambda = \frac{12}{n}$.

Inserisci nella barra di inserimento l'onda progressiva e l'onda regressiva di lunghezza d'onda λ , periodo $T = 1$ s e ampiezza $A = 1$ cm e sommala: verifica che al variare di n si hanno le diverse onde stazionarie che si possono avere sulla corda.

Stampa i vari casi.

TRIGONOMETRIA
SCHEMA 1

Costruzione di un triangolo

Sappiamo che un triangolo è univocamente determinato se conosciamo:

- due lati e l'angolo compreso;
- un lato e due angoli;
- tre lati (purché ogni lato sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza)

Esercizio 1

Supponendo di adottare l'usuale convenzione di indicare con a il lato opposto al vertice A, ecc. e con α l'angolo di vertice A ecc., costruisci , utilizzando gli opportuni strumenti di Geogebra e spiegando passo passo la tua costruzione, un triangolo avente:

- $a=10, b=8, \gamma = 30^\circ$
- $a=10, \beta = 45^\circ, \gamma = 70^\circ$
- $a=10, b=8, c=5$

Esercizio 2

Se si conoscono due lati e un angolo non compreso tra essi il triangolo è individuato?

Considera per esempio $a=6, b=8, \alpha = 45^\circ$.

Suggerimento: parti dal disegnare il segmento $\overline{AC} = b = 8$ e l'angolo $\hat{A} = 45^\circ$ con il comando angolo di una data misura (e poi traccia la semiretta di origine A).

Traccia la circonferenza di centro C e raggio a ...

Trovi un solo triangolo?

Considerando $b=8$ e $\alpha = 45^\circ$ **per quali valori di a** si ha

nessun triangolo.....

un solo triangolo

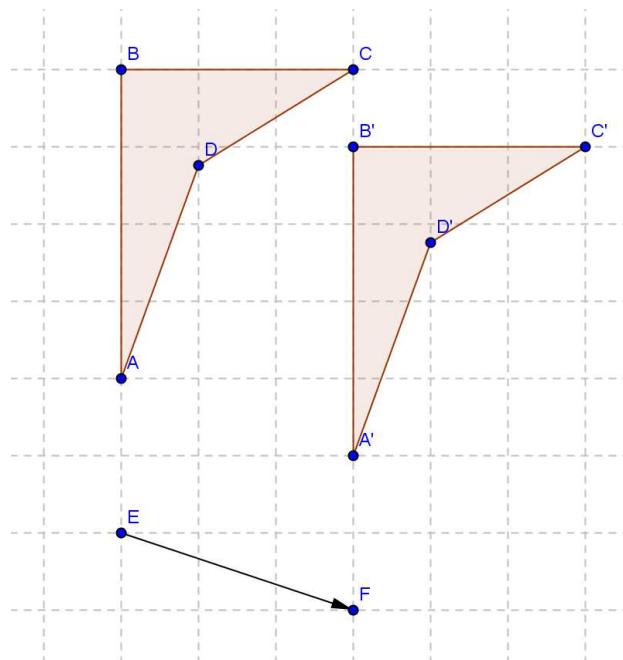
due triangoli.....

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE SCHEMA 1

Traslazione

Disegniamo un poligono (comando poligono), disegniamo un vettore (comando vettore tra due punti) e poi attiviamo il comando “traslazione”: selezioniamo il poligono e poi il vettore traslazione e otterremo una copia del poligono traslato.

Per esempio:



Osservazioni

Prova a trascinare qualche punto del poligono variandone così la forma: cosa osservi?
 Come risultano i lati corrispondenti del poligono iniziale e del poligono traslato?
 Prova a modificare anche il vettore traslazione e stampa qualche esempio.

Domanda

Se abbiamo traslato una figura di un vettore \vec{v} con quale traslazione possiamo ritornare alla situazione iniziale?
 Stampa un esempio.

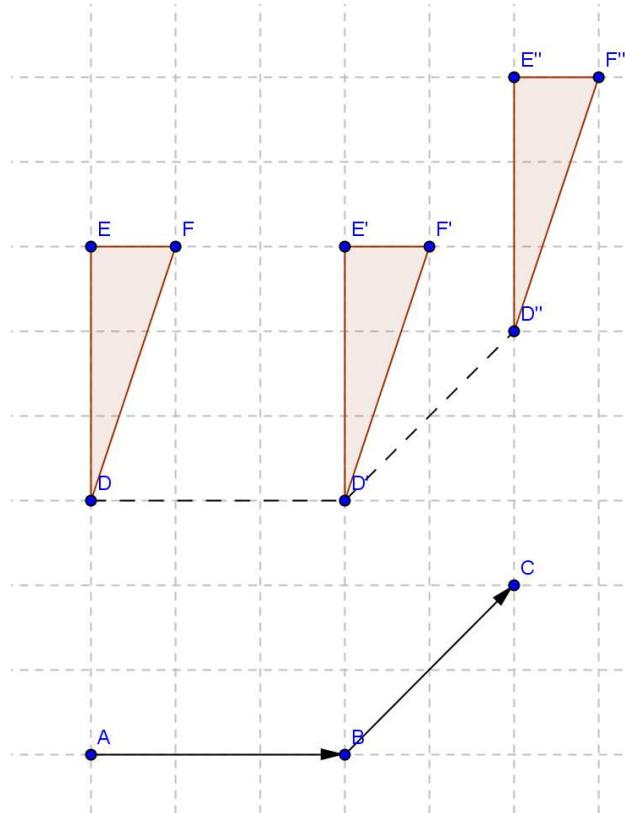
**TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEMA 2**

Composizione di due traslazioni

Eseguendo in successione cioè componendo due traslazioni, che indicheremo con t_{v_1} e t_{v_2} , come si trasforma una figura?

Applichiamo ad un poligono la traslazione del primo vettore e poi, sul risultato, la traslazione del secondo vettore: possiamo ottenere il poligono finale direttamente dal poligono iniziale con una sola traslazione?

Descrivi quale traslazione dobbiamo fare per saltare il passaggio intermedio e fai una verifica della tua congettura (puoi aiutarti lavorando sul piano quadrettato).

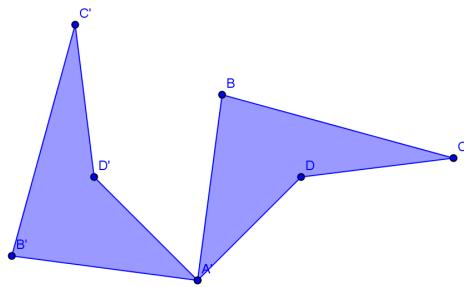


TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE SCHEMA 3

Rotazione

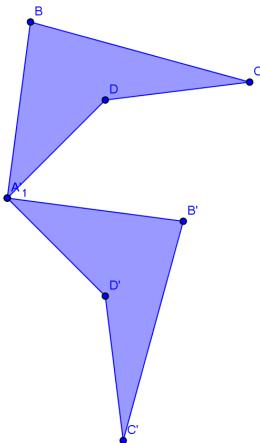
Disegniamo un poligono e scegliamo il comando “rotazione”: per ruotare il poligono dobbiamo selezionarlo e selezionare il centro di rotazione (cliccare su un punto), la misura in gradi dell’angolo di rotazione e il verso della rotazione (introducendo questi dati nella finestra che si apre).

Per esempio nel disegno seguente il poligono iniziale è stato ruotato intorno al suo vertice A di 90° in senso antiorario.



Possiamo ottenere lo stesso risultato anche ruotando la figura di 270° in senso orario (prova). Nella figura seguente il poligono è stato ruotato di 90° in senso orario (oppure di 270° in senso antiorario).

Fai anche tu qualche prova di rotazione e stampala.



Esercizio 1

Verifica che se $r \rightarrow r'$ cioè la retta r si trasforma nella retta r' applicando la rotazione $R(O, \alpha)$, le rette r e r' formano un angolo uguale ad α .

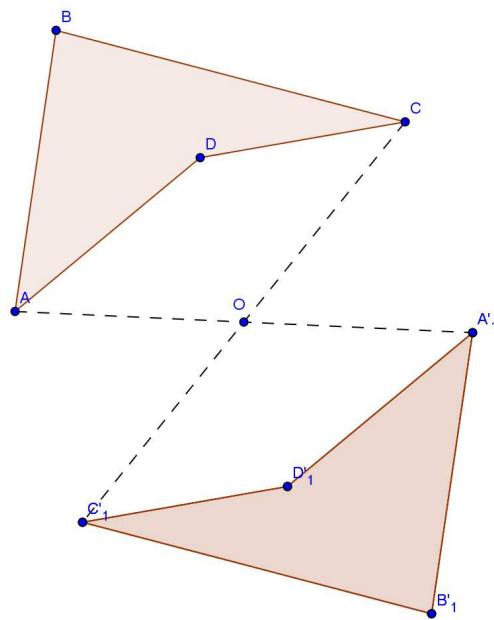
Esercizio 2

Crea uno slider α (tipo angolo) da inserire come angolo di rotazione e assegnagli un incremento a scelta: disegna una figura poligonale a piacere e poi (dopo aver attivato la traccia) ruotala intorno ad un punto scelto a piacere dell’angolo α e poi muovi lo slider. Per quali valori dell’incremento di α la figura “si chiude” cioè si torna dopo un certo numero di rotazioni alla figura iniziale? Stampa i tuoi esempi.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE SCHEMA 4

Rotazione di 180°

Proviamo a ruotare di 180° intorno ad un punto O un poligono:



Osservazioni

Sia ruotando in verso orario che antiorario il risultato è lo stesso.

Se eseguendo la rotazione $A \rightarrow A'$ si osserva che O è il punto medio del segmento AA' e questo vale per tutte le coppie di punti corrispondenti secondo questa trasformazione.

La rotazione di 180° intorno ad un punto O viene anche chiamata **simmetria di centro O** e in Geogebra c'è anche un apposito pulsante indicato con la dicitura “simmetria centrale”.

Prova ad utilizzare il comando “simmetria centrale” rispetto ad un punto O e verifica che ottieni lo stesso risultato che ruotando la tua figura di 180° intorno ad O.

**TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEMA 5**

Equazione della rotazione

Sappiamo che l'equazione della rotazione $R(O, \alpha)$ ($O =$ origine del sistema di riferimento) è

$$\begin{cases} x' = \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y \\ y' = \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \end{cases}$$

Con Geogebra possiamo applicare la trasformazione utilizzando la matrice corrispondente alla sua equazione.

Nel nostro caso la matrice è

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Supponiamo di voler ruotare un poligono che abbiamo costruito con il comando “poligono” (per esempio il triangolo in figura) e che è stato denominato poli1.

Possiamo quindi procedere così:

- creiamo uno slider α che mi permetterà di cambiare l'angolo della rotazione (ricorda di indicare , quando definisci lo slider, che si tratta di un angolo e fallo variare per esempio da 0° a 360° con incremento di 10°);
- introduciamo la matrice dalla barra di inserimento digitando:

$$M = \{\{\cos(\alpha), -\sin(\alpha)\}, \{\sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$$

(attenzione a digitare bene le parentesi: praticamente viene inserita la prima riga e la seconda riga);

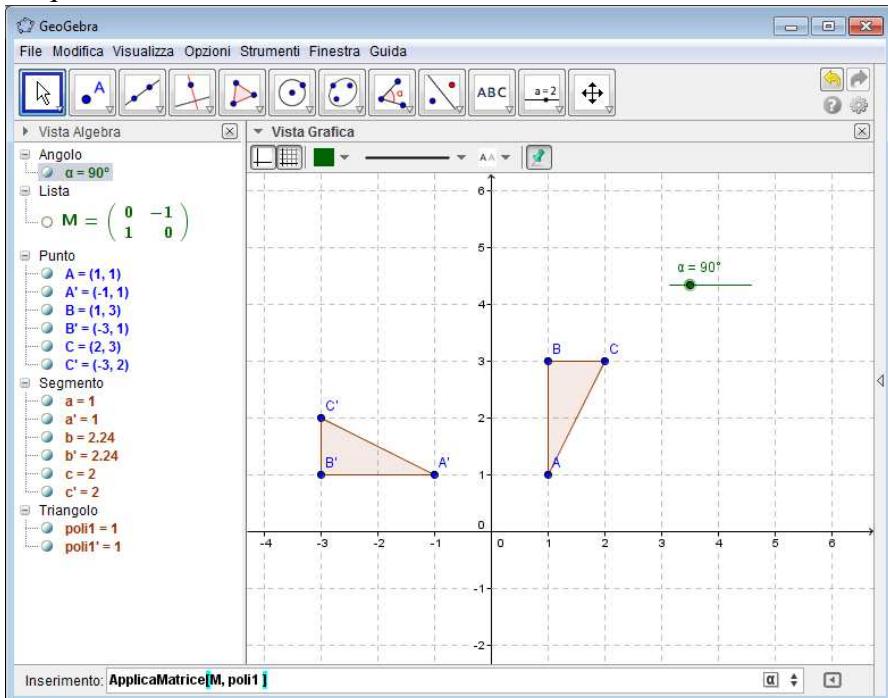
- digitiamo nella barra di inserimento il comando

applicamatrice[M,poli1]

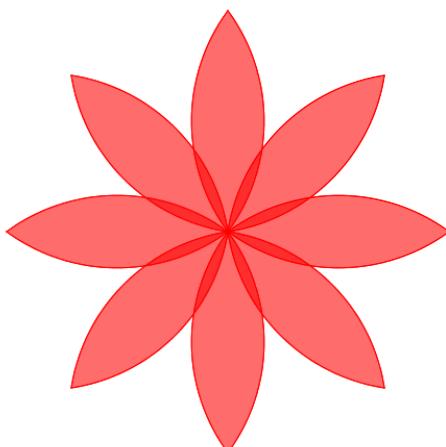
Vedremo comparire sullo schermo il poligono ruotato di α (nella figura $\alpha = 90^\circ$ e infatti i valori della matrice risultano $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se variamo lo slider α vedremo cambiare il poligono ruotato e arrivati a 360° torneremo sul poligono iniziale!

Prova a stampare qualche caso.



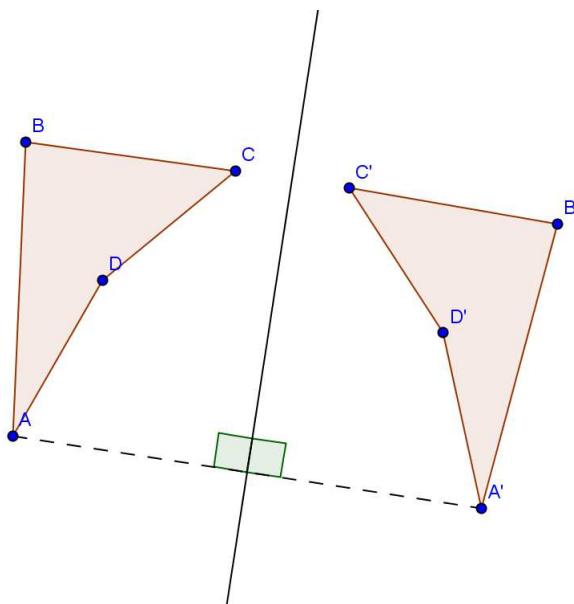
Esercizio: prova a disegnare un “petalo” di centro l’origine costruendo due archi c e c’ (usa arco per tre punti e la simmetria assiale...) e poi inserisci applicatrice[M,c] e applica matrice[M,c’]. Variando lo slider α (dopo aver attivato la traccia di c e c’) e mettendo l’incremento di 45° dovresti ottenere un bel “fiore”!
(usa anche il colore....)



TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 6

Simmetria assiale

Disegniamo un poligono, tracciamo una retta e scegliamo il comando “simmetria assiale”: selezioniamo il poligono e poi l’asse di simmetria (la retta) per ottenere la figura simmetrica rispetto a quella retta.



Osservazione

Se osserviamo due qualsiasi punti corrispondenti , per esempio A e A’, ci accorgiamo che l’asse di simmetria è asse del segmento AA’.

Prova ad utilizzare il pulsante “muovi” e a trascinare qualche vertice del poligono oppure a cambiare l’asse di simmetria e verifica che l’asse di simmetria è sempre l’asse dei punti corrispondenti.

Osserva inoltre che se una retta è perpendicolare all’asse di simmetria la retta simmetrica coincide con la retta stessa ma si scambiano le due semirette individuate dall’intersezione con l’asse.

Se un poligono viene trasformato con una simmetria assiale e poi sul poligono trasformato eseguiamo la stessa simmetria assiale, torniamo al poligono di partenza: questo significa che “componendo” cioè eseguendo in successione la stessa simmetria assiale è come se non si fosse realizzata nessuna trasformazione

Se indichiamo la simmetria di asse r con S_r , scriveremo che $S_r \circ S_r = \text{identità}$ (\circ è il simbolo della composizione).

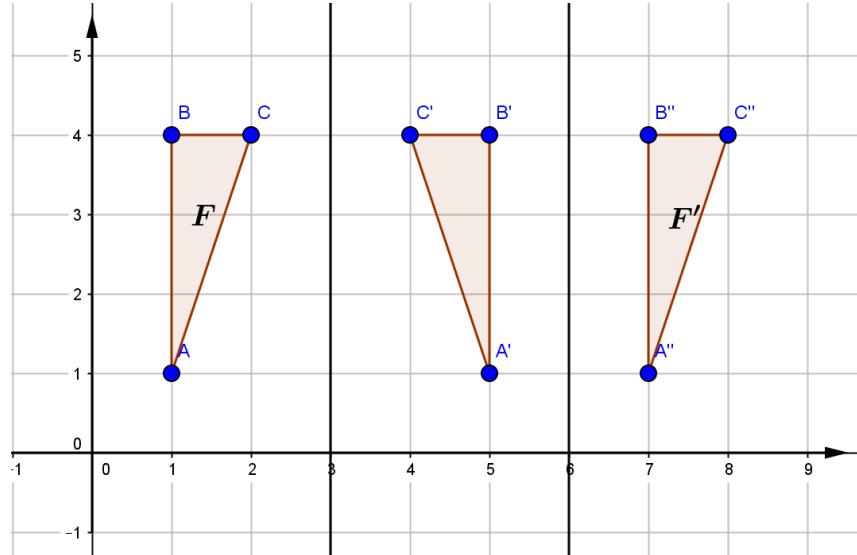
Questo non accadeva né per le traslazioni né per le rotazioni eccettuata quella di 180° .

**TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEMA 7**

Composizione di due simmetrie assiali

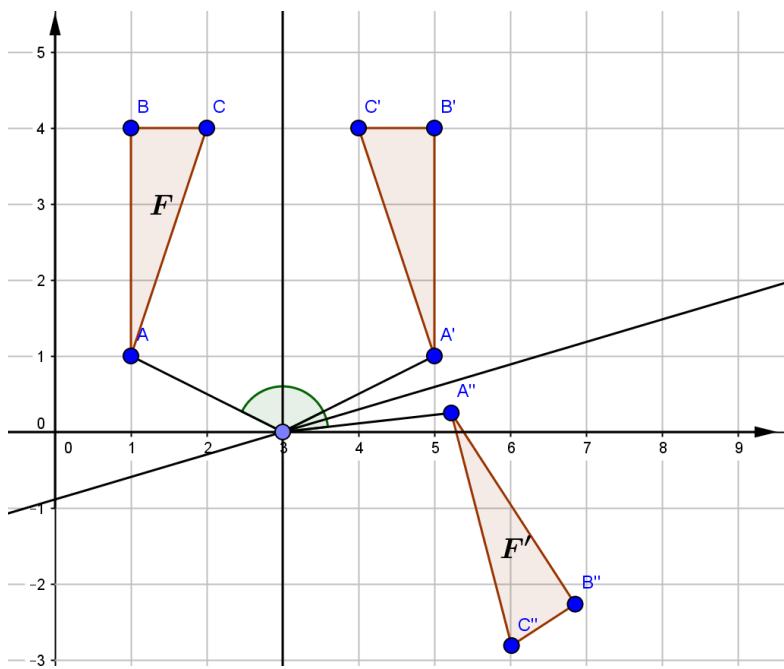
a) Composizione di due simmetrie con assi paralleli

Fai un esempio come in figura: le figure F e F' sembrano traslate di un determinato vettore: quale?



b) Composizione di due simmetrie con assi incidenti

Fai un esempio come in figura: le figure F e F' sembrano ruotate: intorno a quale punto e di quale angolo?



**TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEMA 8**

Composizione di due rotazioni

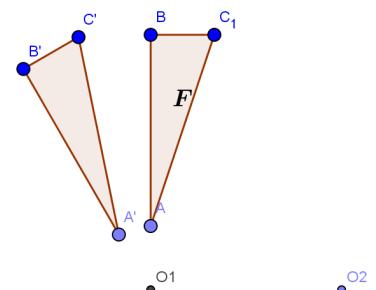
1) Composizione di due rotazioni con lo stesso centro

Disegna un poligono, scegli un punto O e applica al tuo poligono per esempio prima $R(O; \alpha)$ e poi $R(O; \beta)$: cosa si ottiene?

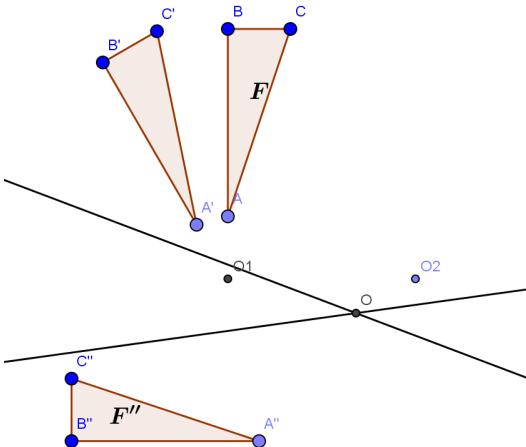
Stampa il tuo esempio.

2) Composizione di due rotazioni con centri diversi

Componi per esempio una rotazione di centro O_1 e angolo 30° con una rotazione di centro un altro punto O_2 e angolo 60° come in figura: poiché la figura iniziale e finale hanno lo stesso orientamento se vogliamo ottenere la figura finale con un'unica trasformazione, questa sarà sicuramente un'isometria diretta e poiché si nota che non può essere una traslazione sarà una rotazione e per determinare il centro di rotazione possiamo intersecare gli assi dei segmenti aventi per estremi punti corrispondenti, per esempio AA'' , BB'' .



Individuato il centro di rotazione O si può verificare che si ottiene la figura finale ruotando intorno ad O di $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$



Esercizio

Disegna un poligono a piacere, scegli due centri di rotazione e due angoli: componi le rotazioni e verifica che la composizione corrisponde ad una rotazione (individua centro e angolo).

Ma si ottiene sempre una rotazione?

Prova a comporre la rotazione di centro O1 e angolo per esempio 60° (antiorario) con una rotazione di centro O2 e angolo 300° (antiorario): stampa il tuo esempio e fai le tue osservazioni.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE SCHEMA 9

Isometrie che mutano una figura in se stessa

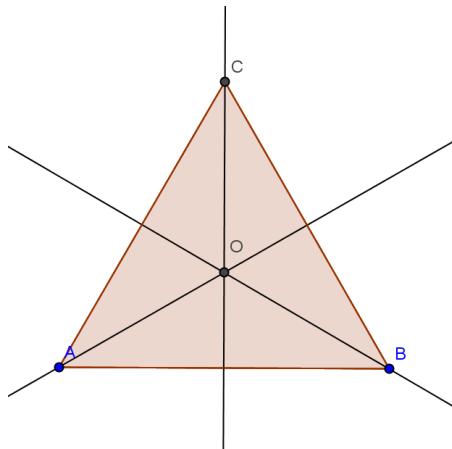
Il triangolo equilatero

Quali sono le isometrie che trasformano in se stesso un triangolo equilatero?

Dopo aver disegnato un triangolo equilatero (comando poligono regolare) traccia gli assi dei lati

.....

Ci sono solo simmetrie assiali che trasformano il triangolo equilatero in se stesso?



E se il triangolo fosse solo isoscele?

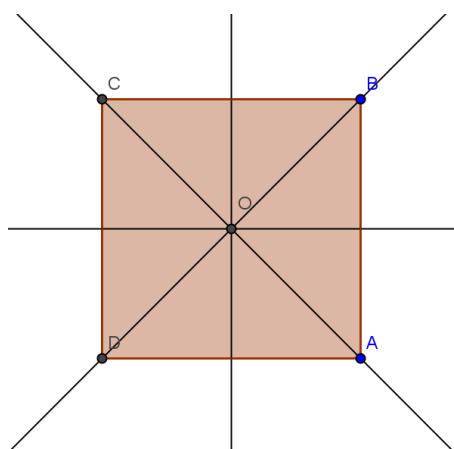
Il quadrato

Quali isometrie trasformano in se stesso un quadrato?

Dopo aver disegnato un quadrato (comando poligono regolare) traccia le mediane e le diagonali.

Prova ad eseguire le simmetrie di assi le mediane e le diagonali: cosa osservi?

Ci sono altre isometrie che trasformano in se stesso il quadrato?



Esercizio: cerca le isometrie che trasformano in sé un rettangolo, un rombo e un parallelogramma.

**TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEMA 10**

Omotetie

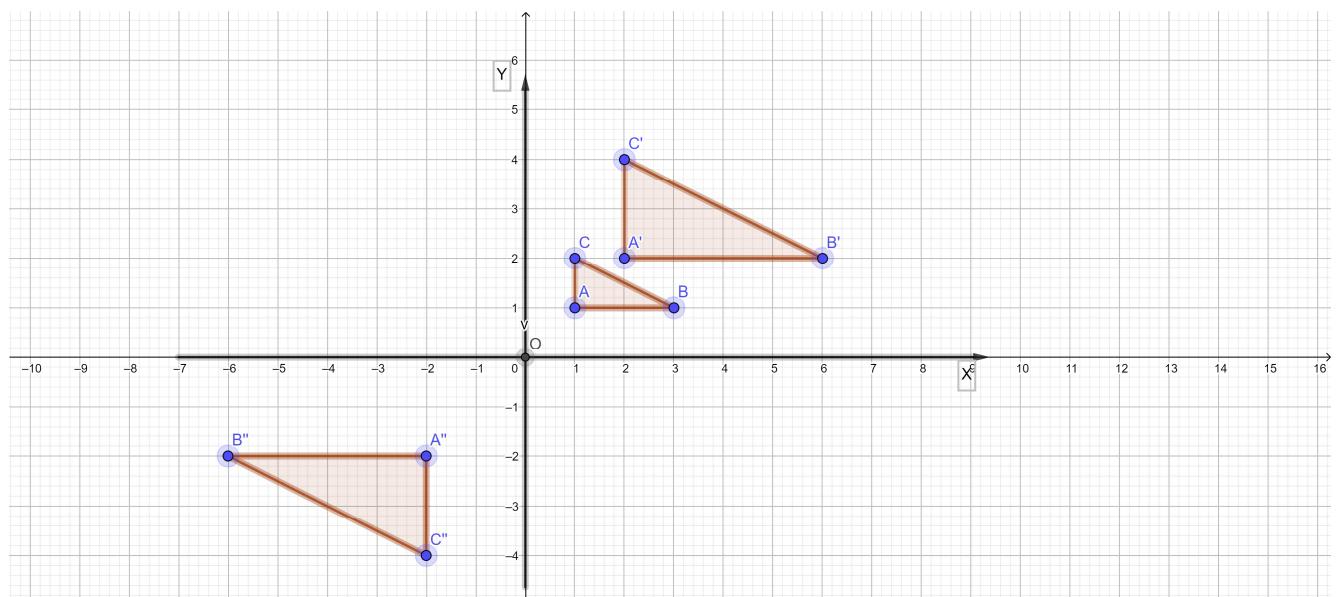
Per applicare ad una data figura un'omotetia di centro C e rapporto k possiamo utilizzare il comando “omotetia” di Geogebra: occorre selezionare l’oggetto a cui applicare l’omotetia, il centro dell’omotetia e poi digitare il rapporto di omotetia.

Prova ad utilizzare il comando e stampa degli esempi.

Cosa si ottiene componendo due omotetie?

a)Omotetie con lo stesso centro

Prova a fare un esempio come in figura.



b)Omotetie con centri distinti

Prova a fare degli esempi.

Suggerimento: se consideri omotetie di rapporti k_1 e k_2

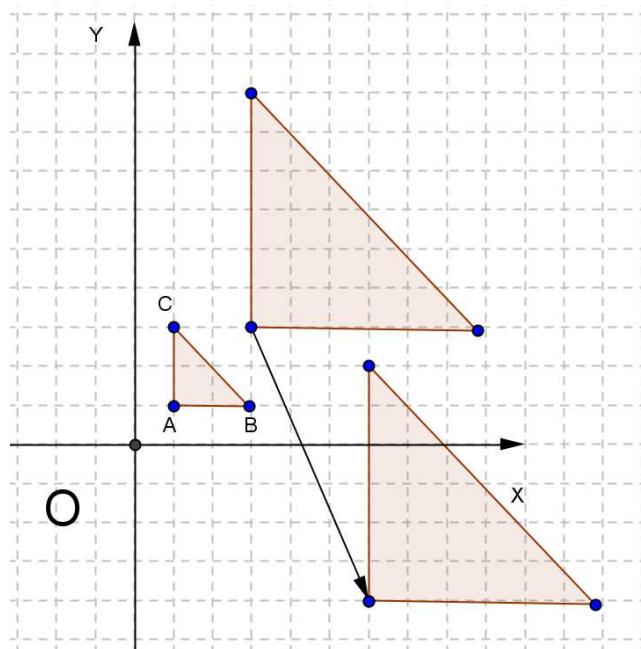
se $k_1 \cdot k_2 = 1$ si ha.....

se $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ si ha.....

**TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEMA 11**

Similitudini

- a) Componi un'omotetia di centro $O(0;0)$ e rapporto $k = 3$ con una traslazione $t(3;-7)$ (considera come figura da trasformare un triangolo ABC, vedi esempio).



Scrivi le equazioni della similitudine ottenuta.

Prova ad invertire l'ordine di applicazione delle due trasformazioni: si ottiene la stessa similitudine?

- b) Componi la stessa omotetia dell'esercizio precedente con una rotazione $R(O;90)$: stampa il disegno di come si trasforma il triangolo ABC e scrivi le equazioni della similitudine.

- c) Componi la stessa omotetia dell'esercizio precedente con una simmetria rispetto all'asse y: stampa il disegno di come si trasforma il triangolo ABC e scrivi le equazioni della similitudine.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
SCHEDA 12

Similitudini “ricorsive”: i frattali

I frattali sono figure in cui la stessa struttura si ripete su scala via via più piccola (si parla anche di figure “autosimilari”).

Per disegnare un frattale con Geogebra possiamo utilizzare una “**macro**” : costruiamo un nuovo strumento (la macro) che , a partire da degli “oggetti iniziali” dopo una serie di operazioni (che costituiscono appunto la macro) genererà degli “oggetti finali”.

Facciamo un esempio e costruiamo una macro che, partendo da un punto A e un punto B disegni una “casina” di lato AB.

Tracciamo prima un segmento di estremi A,B e un quadrato di lato AB con il comando poligono regolare di 4 lati (possiamo anche colorarlo) ; disegniamo poi un triangolo rettangolo isoscele sopra al quadrato (tracciamo il punto medio del lato superiore del quadrato, la perpendicolare per il punto medio e dopo aver fatto l’ intersezione con la circonferenza di centro il punto medio e passante per il vertice del quadrato disegniamo il poligono “tetto” (che possiamo anche colorare).

A questo punto selezioniamo: **Strumenti - crea nuovo strumento -**

Compare una finestra in cui dobbiamo indicare quali sono gli oggetti finali, gli oggetti iniziali e il nome della macro.

Per inserire gli oggetti finali (cioè quadrato e triangolo) possiamo anche cliccarli sul foglio di lavoro (compariranno nella lista degli oggetti finali). Quindi abbiamo:

Oggetti finali: Poli1 poli2 (poli1 è il quadrato, poli2 è il triangolo)

Oggetti iniziali: punto A , punto B

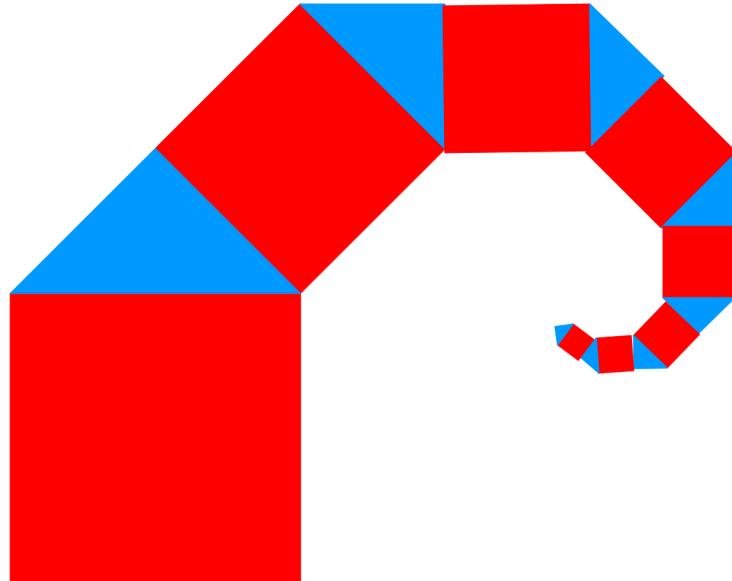
Nome dello strumento: casina

Fine

Nota: possiamo anche inserire un’**icona** che ci ricordi il risultato della macro (in caso contrario comparirà semplicemente il simbolo di strumento cioè una chiave inglese): dobbiamo prima selezionare la nostra casina , esportala come immagine , salvarla e poi caricarla come “icona” del nostro strumento.

In questo modo abbiamo creato la macro “casina”: se quindi , dopo il primo disegno, attiviamo la macro e clicchiamo sul lato del tetto verrà disegnata un’altra casina (più piccola perché parte con il lato del quadrato più piccolo) e così via ..

Avremo quindi un disegno come il seguente:



Nota : se vogliamo visualizzare tutta la nostra costruzione in sequenza possiamo usare i comandi

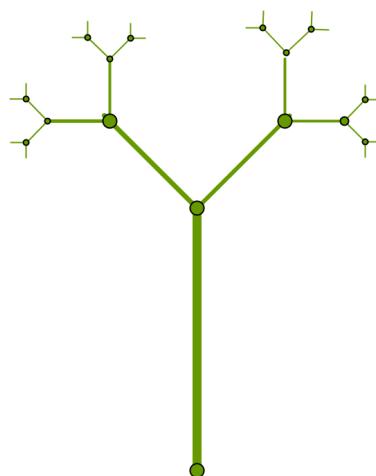
Opzioni – Avanzate – Preferenze grafici – Mostra pulsante Esegui

Impostando il tempo tra un’operazione e la successiva di 0,5 s e premendo Esegui sarà ripetuta in successione veloce tutta la vostra costruzione!

La costruzione può essere riportata all’inizio o anche solo indietro di una operazione con gli appositi pulsanti o stoppata in qualsiasi momento premendo il tasto Esegui.

Esercizio

Prova a definire un’altra macro per disegnare un albero come in figura...e poi costruisci il tuo frattale!



NUMERI COMPLESSI

NUMERI COMPLESSI SCHEMA 1

Il piano complesso

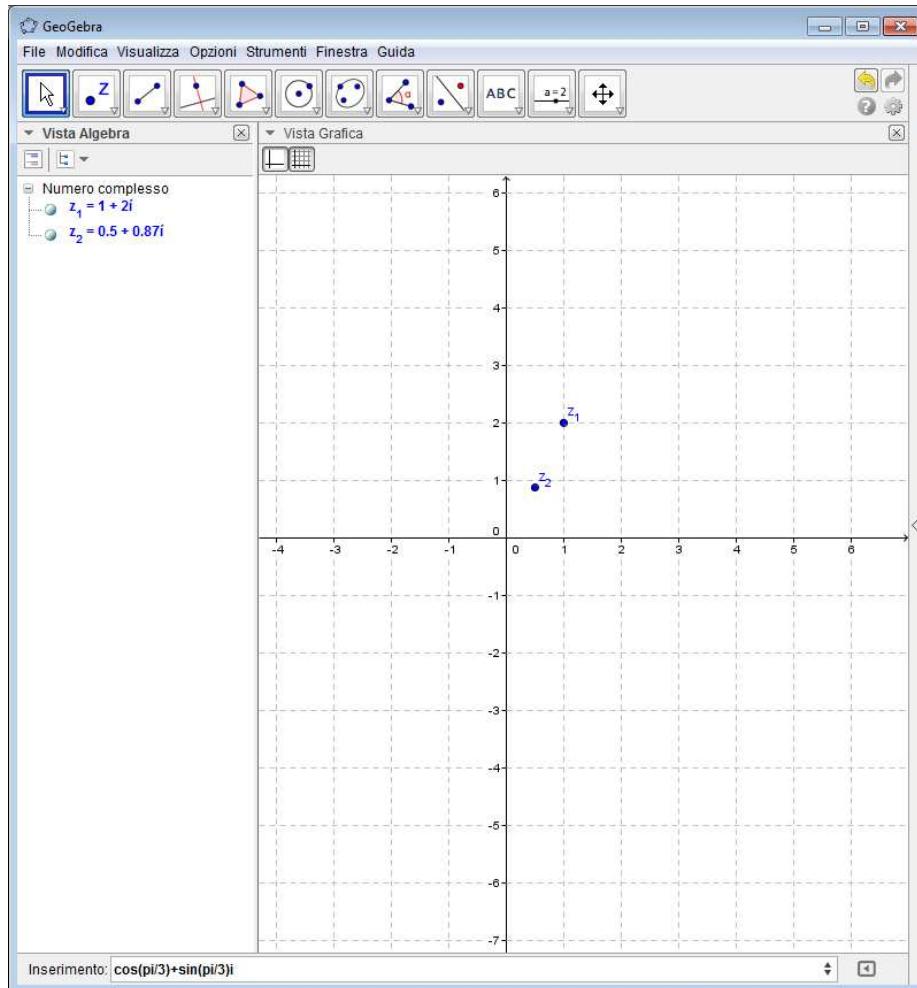
Geogebra consente di lavorare anche con i numeri complessi nella loro rappresentazione geometrica (piano complesso).

Possiamo **introdurre da tastiera**, nella barra di inserimento, l'espressione algebrica o trigonometrica di un numero complesso che comparirà nel piano complesso come punto z.

Proviamo per esempio a digitare (ricordando di scrivere a+bi e non a+ib) :

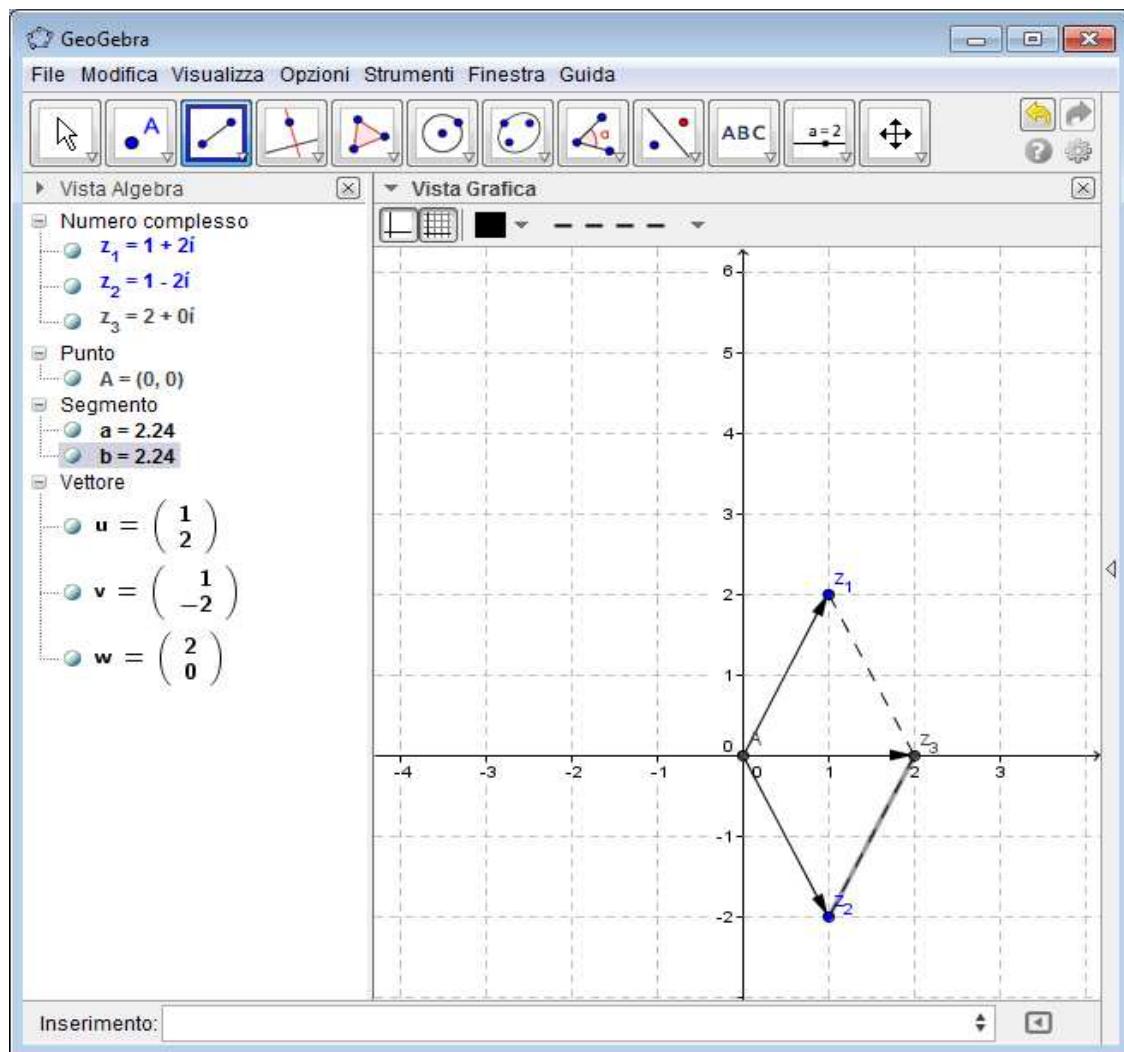
$$1+2i \text{ oppure } \cos(\pi/3)+\sin(\pi/3)i$$

Avremo i punti z_1 , z_2 come in figura.



Proviamo a fare qualche operazione tra numeri complessi.

Consideriamo per esempio due numeri complessi coniugati : introduciamo da tastiera $1+2i$ $1-2i$. Se digitiamo z_1+z_2 otterremo il numero reale 2 (vedi figura).



Provate a sottrarre i due numeri complessi digitando z_1-z_2 : cosa ottieni?

E moltiplicando i due numeri complessi coniugati cioè inserendo z_1*z_2 cosa si ottiene?

Esercizio

Inserisci da tastiera due numeri complessi $z1$ e $z2$: digita $z1+z2$, $z1-z2$, $z1*z2$, $z1/z2$ e controlla i risultati che compaiono nel piano complesso.

Nota: puoi direttamente creare punti sul piano complesso attivando il pulsante “numero complesso” (nella lista dei comandi sotto “nuovo punto”) e vedrai comparire la corrispondente espressione algebrica nella finestra algebra (se è aperta). Prova a creare qualche punto.

**NUMERI COMPLESSI
SCHEMA 2**

Radici complesse dell'unità

Abbiamo visto che le soluzioni in campo complesso dell'equazione $z^n = 1$ sono date dai numeri complessi $z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Possiamo rappresentare queste soluzioni nel piano complesso utilizzando il comando di Geogebra "successione".

La sintassi del comando "successione" è :

`successione[<oggetto dipendente da un parametro>,parametro, valore iniziale, valore finale]`

Se vogliamo per esempio far comparire i punti (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) possiamo digitare:

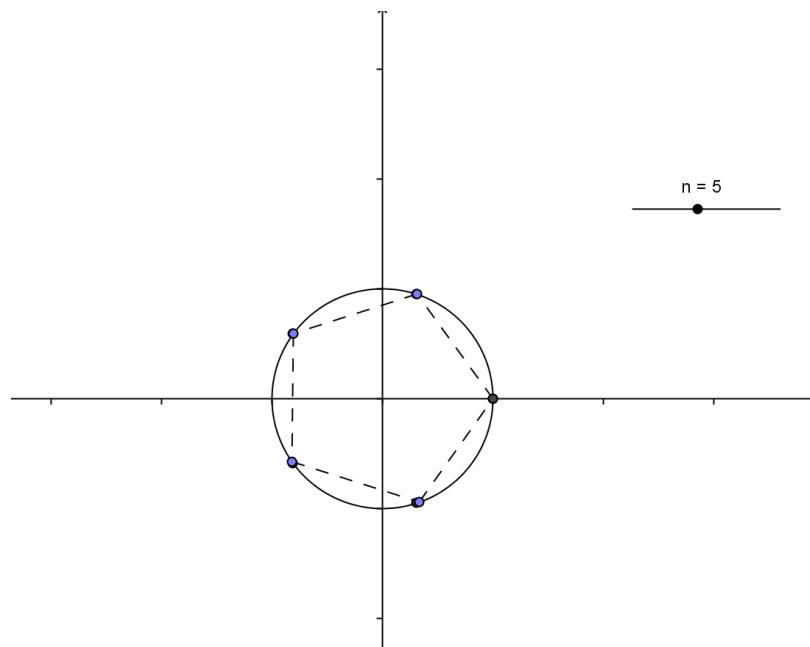
`lista=successione[(1,k),k,1,4]`

Nel nostro caso per avere una successione che disegni le soluzioni in campo complesso dell'equazione $z^n = 1$ possiamo creare uno slider n (variabile tra 1 e 10, per esempio, con incremento 1) e poi introdurre nella riga di inserimento:

`soluzioni=successione[(cos(2*k*pi/n),sin(2*k*pi/n)),k,0,n-1]`

(attenzione a non dimenticare nessuna parentesi!)

Se per esempio poniamo $n=5$ otterremo la figura seguente (i segmenti tratteggiati sono stati aggiunti per evidenziare che le soluzioni sono i vertici di un pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1). Prova a variare n e stampa vari casi.



GEOMETRIA DELLO SPAZIO

INTRODUZIONE A GEOGEBRA 3D

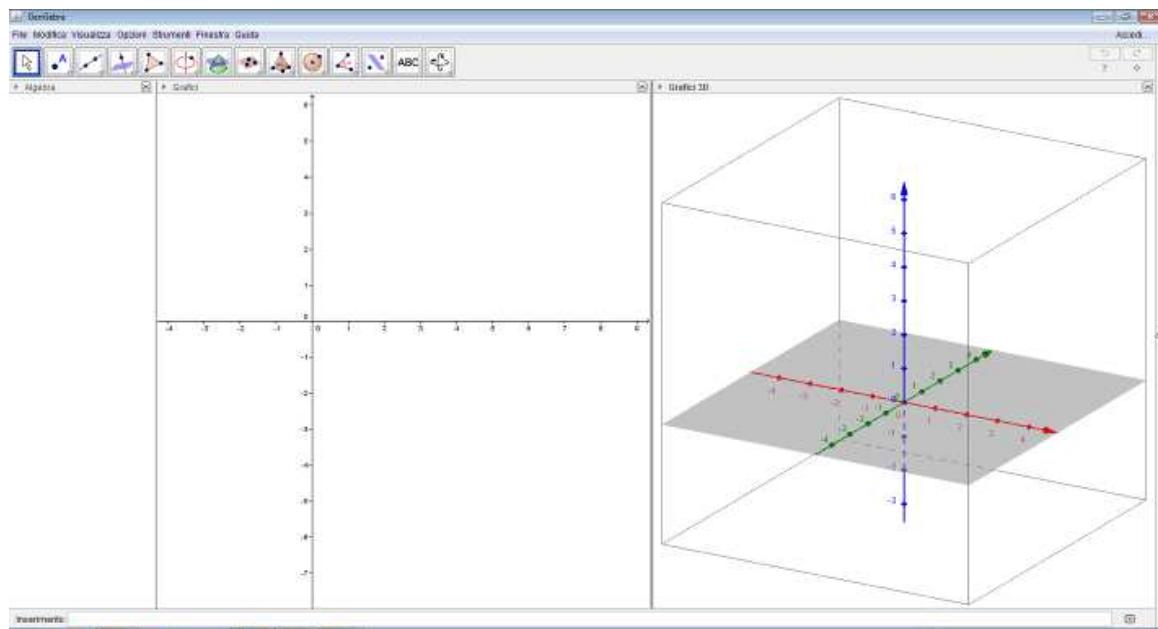
La versione 5 di Geogebra prevede anche la possibilità di lavorare in ambiente 3D.

Basta aprire Visualizza - Grafici 3D: sullo schermo, oltre all'ambiente 2D con il sistema di riferimento (O,x,y), comparirà una terna di assi cartesiani (O,x,y,z) e **la barra degli strumenti 3D**.

(Possiamo fare comparire la barra dei comandi 2D/3D cliccando con il tasto del mouse sulla zona grafici 2D/3D)

Notiamo inoltre che è presente anche la vista “algebra” e la barra di inserimento.

Proviamo i vari comandi dei pulsanti della barra 3D (un pulsante può aprire vari comandi) .

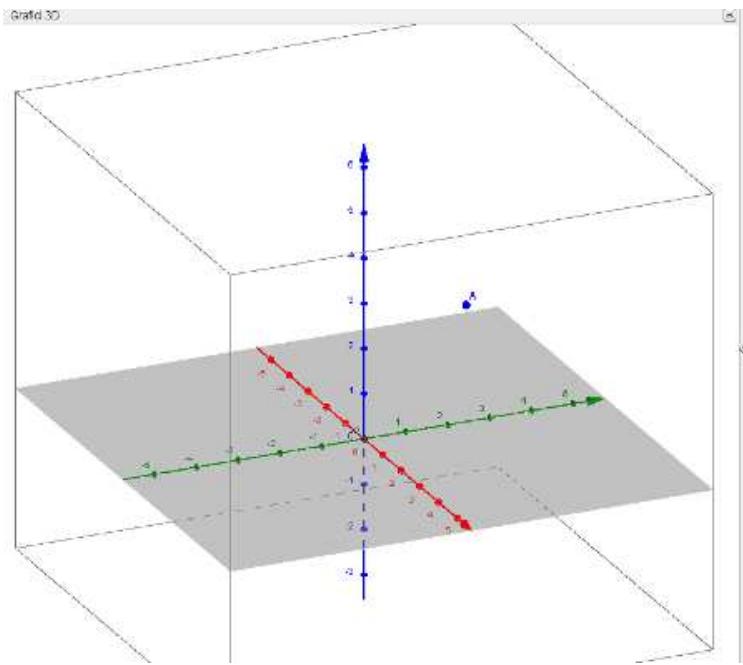


Pulsante “Muovi”: funziona come nei grafici 2D, ma un punto può essere mosso solo in orizzontale (compaiono delle frecce orizzontali) o, facendo un secondo clic, in verticale (parallelamente all’asse z) quando compaiono delle frecce verticali.

Pulsante “Punto”: ci sono vari comandi che si possono scegliere a partire da questo pulsante come nei grafici 2D (punto su oggetto, intersezione, punto medio ecc).

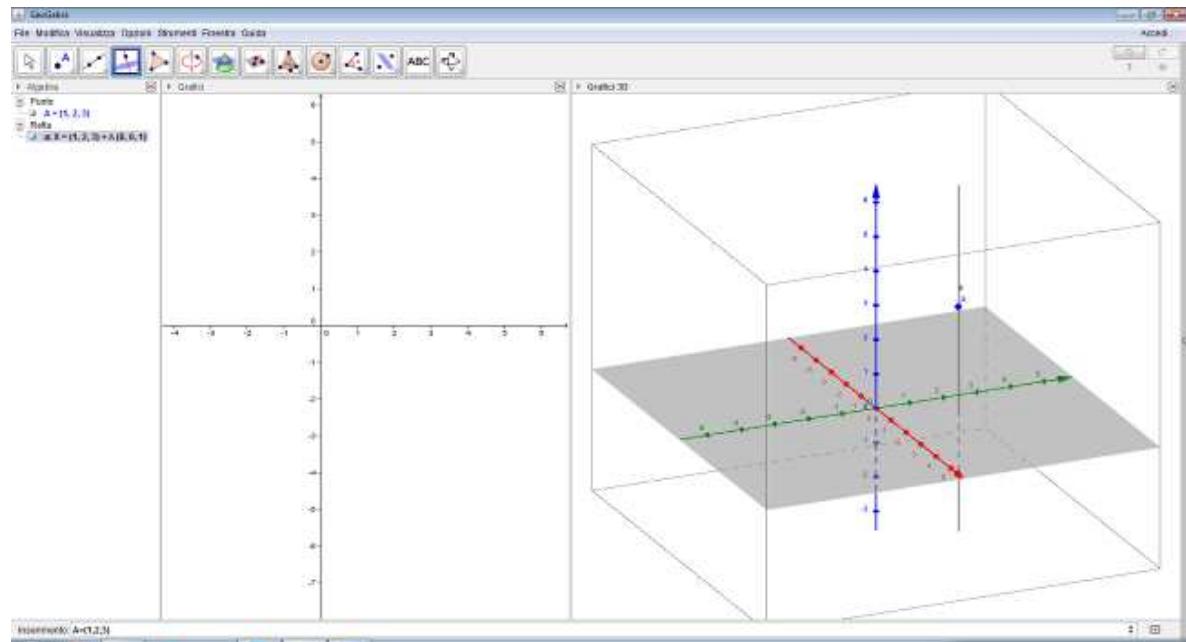
Possiamo però creare un punto direttamente solo sul piano xy : se vogliamo un punto non appartenente al piano xy dobbiamo prima creare un punto sul piano xy e poi, facendo clic con il mouse per far apparire le frecce verticali, possiamo variarne la quota.

Possiamo comunque creare un punto anche inserendolo da tastiera: per esempio digitando $A=(1,2,3)$.



Pulsante “Retta” : questo comando ed i comandi collegati hanno lo stesso funzionamento che nei grafici 2D.

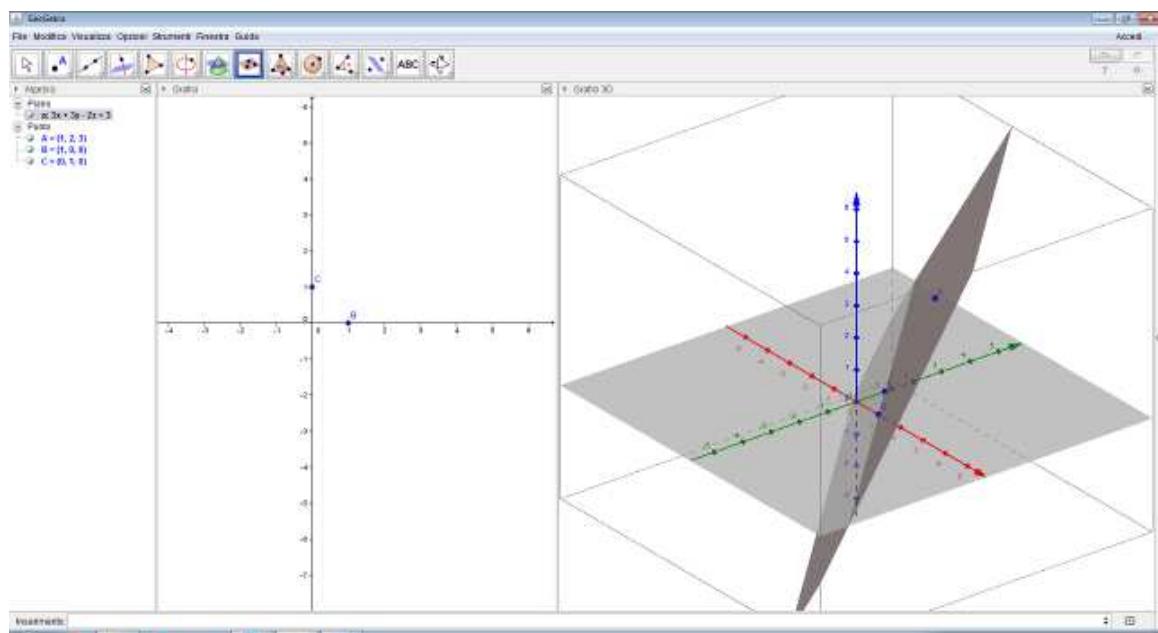
Pulsante “Retta perpendicolare” : se per esempio vogliamo la retta per il precedente punto $A(1,2,3)$ perpendicolare al piano (O,xy) basta cliccare su A e poi sul piano xy : comparirà anche l’equazione parametrica della retta $X = (1,2,3) + \lambda(0,0,1)$.



Pulsante “poligono”, “circonferenza”, “testo” ecc. funzionano come per i grafici 2D.

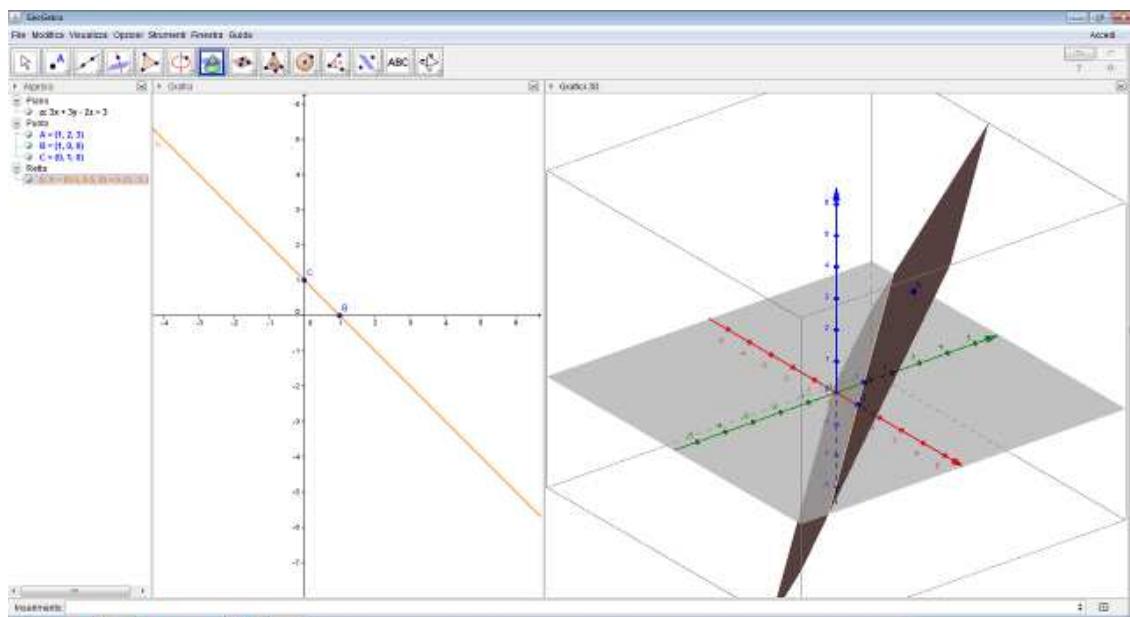
Pulsante “Piano per tre punti”(e gli altri comandi collegati quali piano parallelo e piano perpendicolare): selezionando tre punti non complanari viene creato il piano passante per essi e compare la sua equazione nella vista algebra.

Creati per esempio anche i punti $B=(1,0,0)$ e $C=(0,1,0)$ selezionando A,B,C abbiamo **il piano a** (viene denominato con una lettera nella vista algebra) in figura:



Osserviamo che l’equazione risulta $a : 3x + 3y - 2z = 3$ (e possiamo verificare algebricamente che è corretta) e che i punti B e C sul piano xy compaiono anche nella vista 2D.

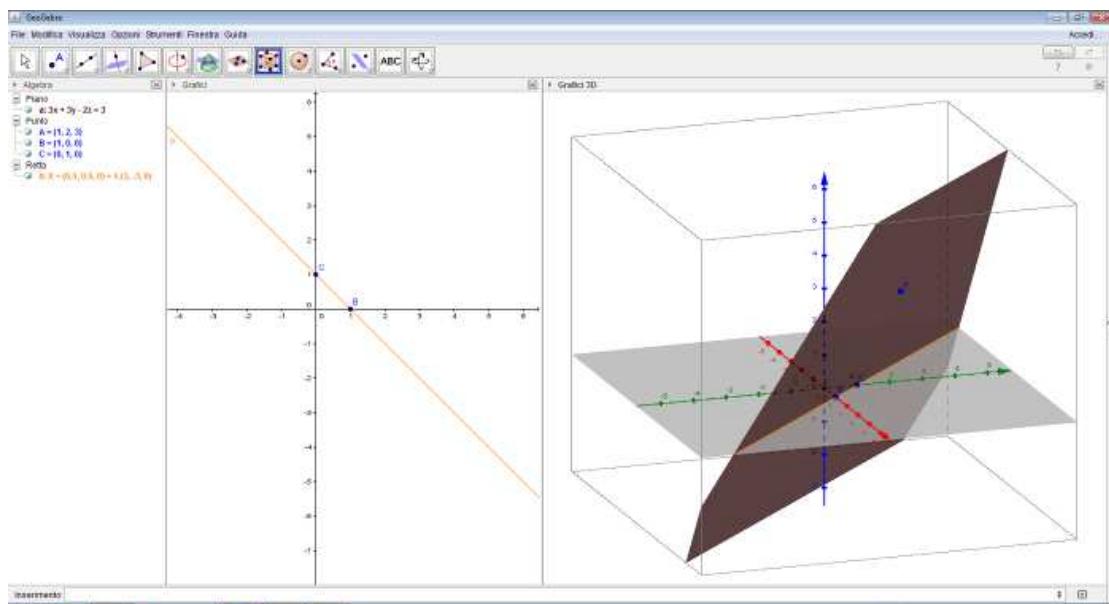
Possiamo intersecare il piano a con il piano xy utilizzando il comando “interseca due superfici” e comparirà la retta intersezione (anche nella vista 2D).



In particolare **la rotazione della “vista”** (molto utile per esplorare una figura solida) può essere facilmente ottenuta **tenendo premuto il tasto destro del mouse** (posizionato nella zona grafici 3D) e muovendo il mouse.

Ecco come appare la figura precedente dopo aver ruotato la vista :

Pulsante “piramide”: ci sono una serie di comandi per creare piramidi, prismi, coni, cilindri, tetraedro regolare, cubo ecc.



In particolare il comando “estruzione in piramide o cono” permette di “tirare sù” una piramide (o un cono) partendo da un poligono di base (o da una circonferenza) e nello stesso modo funziona “estruzione in prisma o cilindro”.

Ogni comando ha comunque una piccola guida sul suo utilizzo che compare quando viene selezionato e il mouse si trova nel triangolino in basso a destra.

Nota

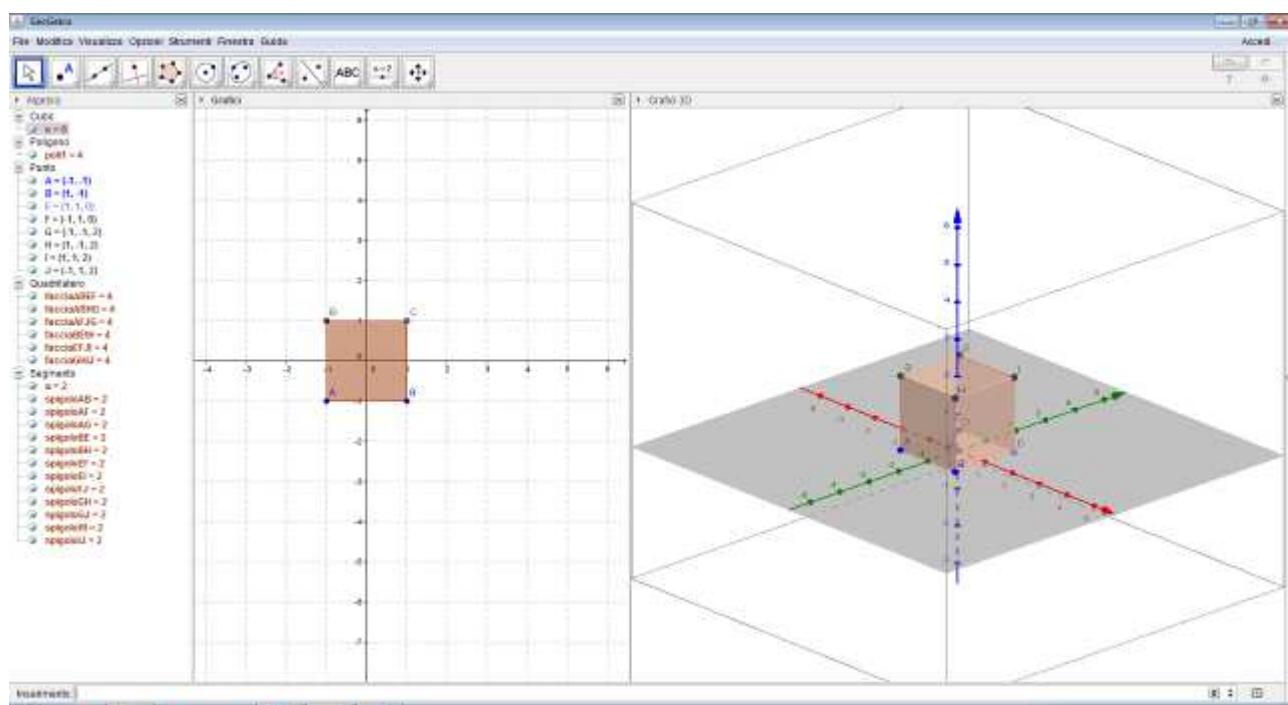
Ci sono anche i comandi per creare i poliedri regolari cubo, tetraedro ecc. digitando direttamente nella barra di inserimento.

Come esempio riportiamo la costruzione di un cubo: costruiamo prima nella zona grafici 2D un quadrato di lato AB (usando per esempio il comando poligono regolare) e poi digitiamo direttamente nella barra di inserimento

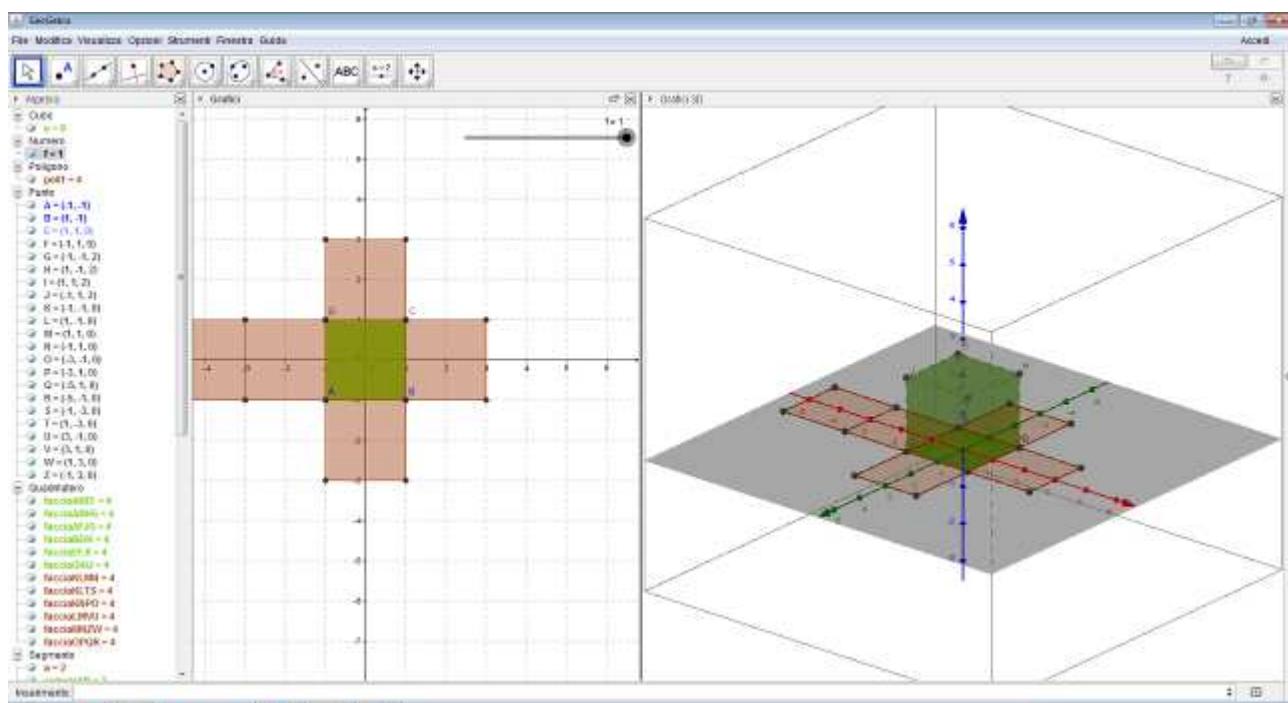
cubo[A,B]

Nota: per evitare che vengano indicati nella figura le etichette dei vari spigoli possiamo digitare Opzioni- etichettatura- nessun nuovo oggetto.

Laboratorio di informatica



Un comando molto interessante è “sviluppo piano” che fornisce lo sviluppo piano di un poliedro: viene automaticamente anche creato uno slider e se attiviamo muovi e variamo lo slider da 0 a 1 vedremo il poliedro che “si apre” fino al suo sviluppo sul piano xy.



Ci sono infine i pulsanti che permettono di creare una sfera, di fare trasformazioni geometriche, di inserire un testo. Inoltre premendo il tasto destro del mouse nella zona 3D compare un menù (assi, griglia, ecc.) che permette di nascondere/visualizzare gli assi, la griglia sul piano xy ecc.

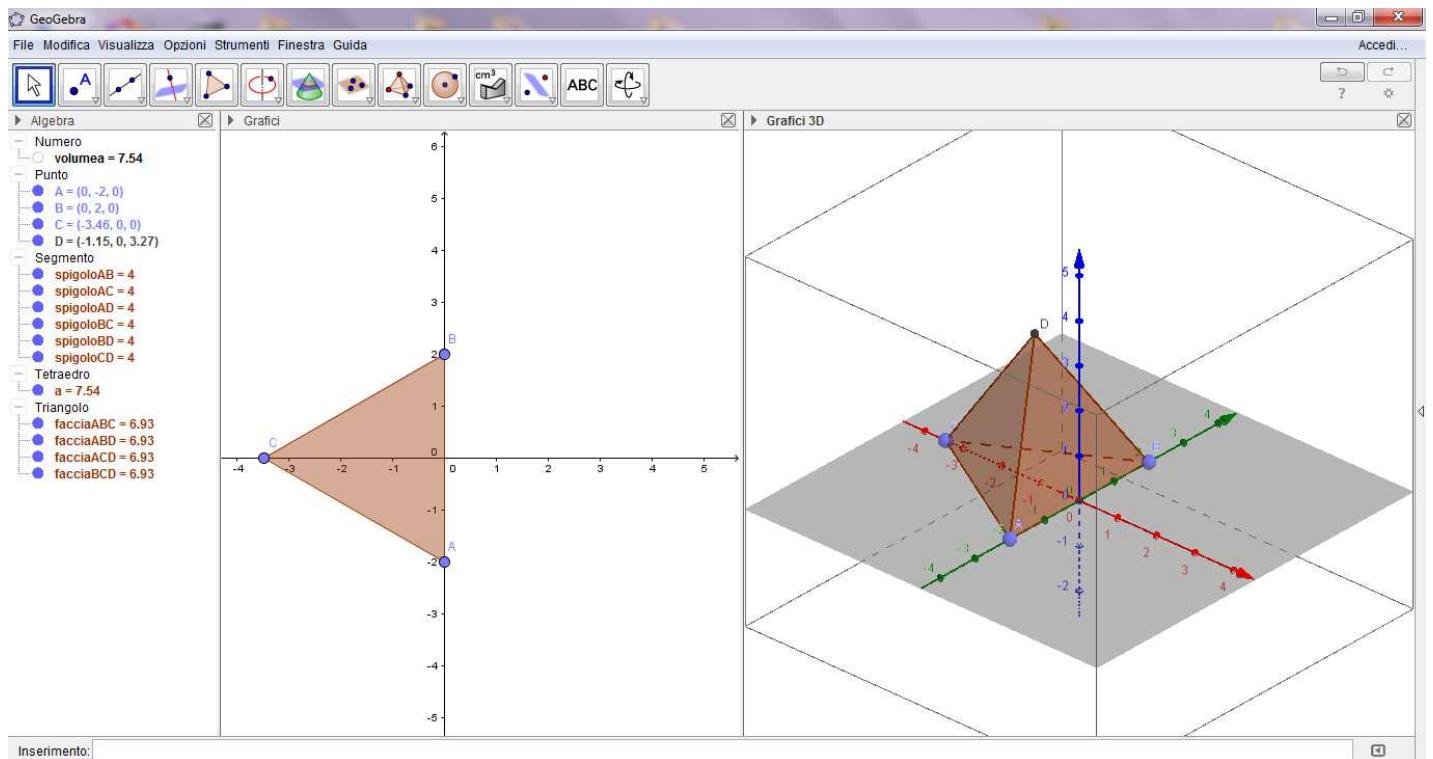
GEOMETRIA DELLO SPAZIO SCHEMA 1

Tetraedro regolare

Scegliamo dal Menù 3D tetraedro regolare.

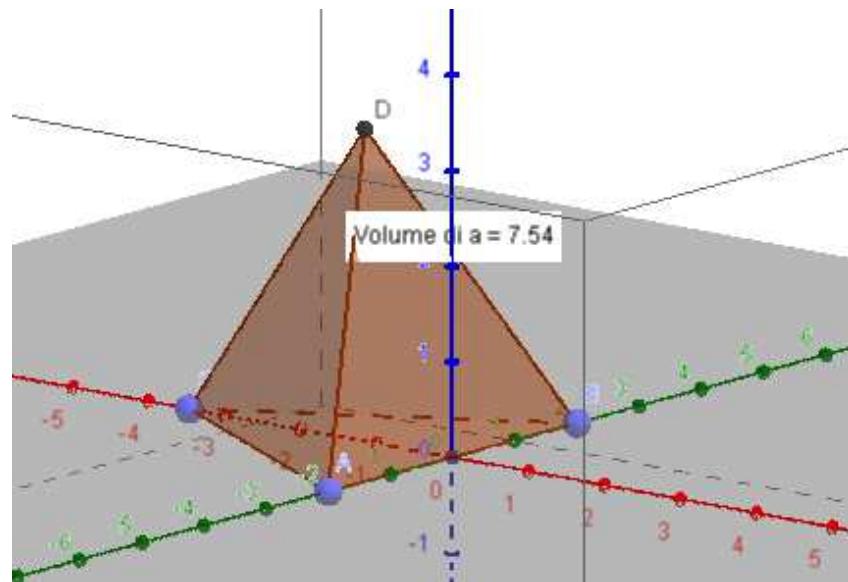
Facciamo clic su dei punti del piano xy, per esempio $A = (0, -2, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ (possiamo controllare le coordinate nella vista algebra ed eventualmente muovere il punto se non abbiamo creato proprio questi due punti).

Verrà creato un tetraedro di spigolo $\overline{AB} = 4$ con la faccia ABC sul piano xy (la faccia sul piano xy viene visualizzata anche nella vista 2D).



Possiamo ruotare la vista grafica per vederlo da angolazioni diverse.

Possiamo scegliere dai vari comandi “volume” e facendo clic sul tetraedro verrà visualizzato il volume:



Esercizio 1: verifica l'esattezza del valore del volume indicato.

Suggerimento: abbiamo ricavato (vedi esercizio 1 sui poliedri) che il volume di un tetraedro regolare di spigolo l risulta $V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$ e quindi nel nostro caso abbiamo...

Esercizio 2: calcola l'angolo diedro formato da due facce.

Suggerimento: traccia il segmento DO (O origine del sistema di riferimento) e poi misura l'angolo \hat{DOC} . Controlla il risultato con l'esercizio 1 sui poliedri.

Esercizio 3: fai lo sviluppo piano del tetraedro (puoi renderlo più dinamico utilizzando uno slider come indicato nella guida a Geogebra 3D).

Stampa il tuo sviluppo.

Esercizio 4: applica al tetraedro una simmetria rispetto al piano xy. Stampa il poliedro che ottieni.

Esercizio 5: costruisci i baricentri delle 4 facce del tetraedro e congiungile.

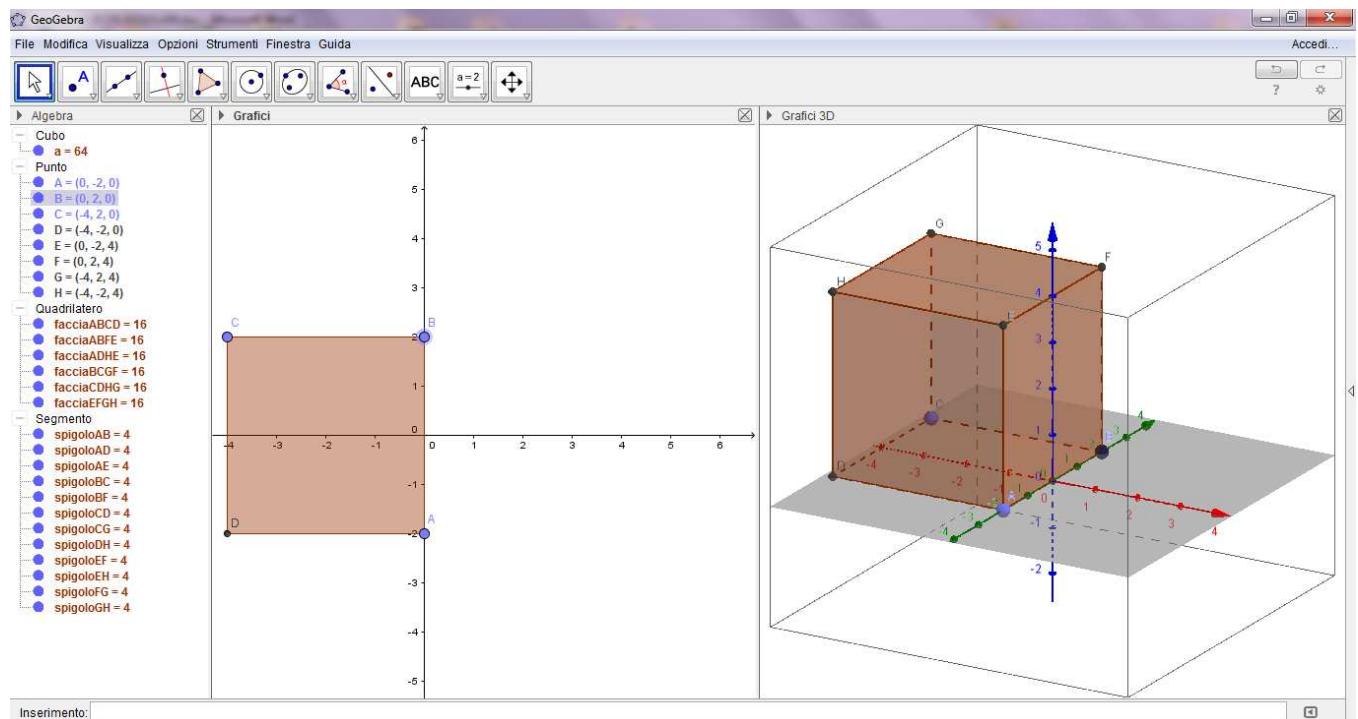
Verifica che si tratta di un tetraedro (inserito).

Stampa il tetraedro inserito.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO SCHEMA 2

Cubo

Costruiamo un cubo con il comando cubo: come nella scheda precedente dopo aver scelto il comando cubo facciamo clic su due punti del piano xy, per esempio $A = (0, -2, 0)$, $B = (0, 2, 0)$. Comparirà il cubo in figura:



Anche in questo caso sceglio il comando “volume” e verifichiamo il risultato.

Esercizio 1: traccia una diagonale del cubo e verifica (usando il comando misura di un segmento) che risulta $d = \sqrt{3}l$ dove l è la misura dello spigolo.

Esercizio 2: dopo aver costruito i centri delle facce , congiungili e verifica che si ottiene un ottaedro regolare. Stampa l’ottaedro così costruito.

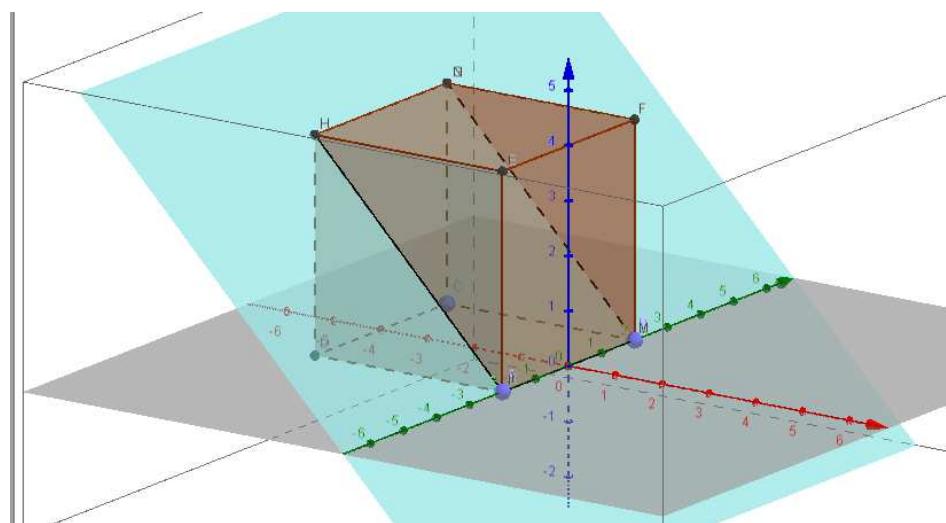
Esercizio 3: sviluppa il cubo nel piano. Stampa lo sviluppo piano.

Le sezioni del cubo

Quali sono le possibili sezioni di un cubo?

Con il comando “piano per tre punti” selezioniamo tre punti per creare il piano sezione e intersechiamo con le facce del cubo: è chiaro che con un piano parallelo ad una faccia si ottiene un quadrato, ma si possono ottenere molte altre sezioni...

Per esempio nella figura seguente il piano passa per due spigoli opposti e si ottiene come sezione un rettangolo.



Quali altre sezioni puoi ottenere ?

Puoi ottenere un triangolo equilatero? Prendendo il piano passante per i punti...

Puoi ottenere un trapezio isoscele?

Puoi ottenere un pentagono?

Puoi ottenere un esagono regolare? Prendendo il piano passante per i punti...

Perché non si può ottenere come sezione un poligono con sette o più lati?

Suggerimento: prova a creare tre punti su tre spigoli con il comando “punto su oggetto”, poi costruisci il piano passante per essi e individua (con intersezione superfici) la sezione: attiva “muovi” e prova a muovere i punti e osserva come varia la sezione.

Quando ti sembra di aver trovato il piano che dà come sezione una data figura spiega perché si tratta veramente di quella figura (congruenza di segmenti ecc.).

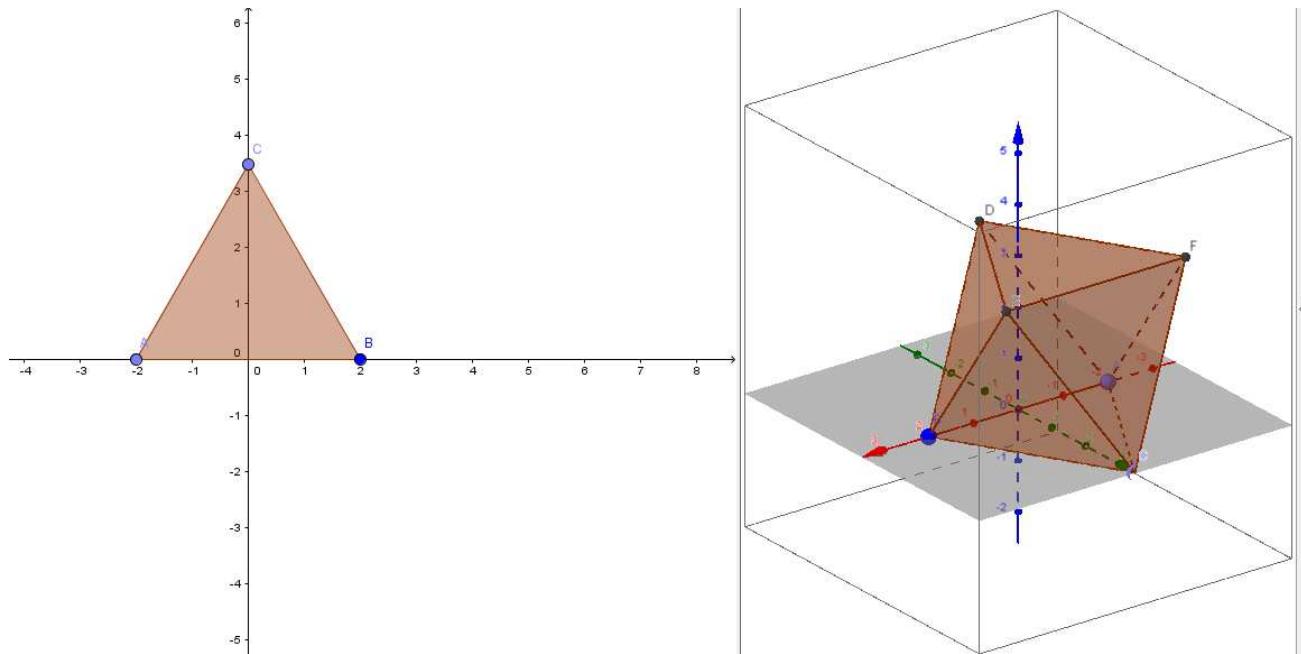
**GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEMA 3**

Ottaedro regolare

Proviamo a costruire , dopo aver creato due punti A e B, un ottaedro regolare con il comando

ottaedro[A,B]

Nella figura seguente i punti sono $A=(-2,0,0)$ $B=(2,0,0)$: il software disegna la faccia triangolare di lato AB (completando il triangolo equilatero in senso antiorario) sul piano xy.



Esercizio 1

Sviluppa nel piano l'ottaedro (stampa il suo sviluppo).

Esercizio 2

Prova a costruire un ottaedro che abbia il quadrato-base comune delle due piramidi uguali sul piano xy.

Suggerimento: puoi costruire un quadrato sul piano xy e poi (usando il comando piramide) costruire la piramide di base il quadrato e alzando il vertice finché nella vista algebra non vedi che gli spigoli laterali sono uguali a quelli di base: per ottenere l'altra piramide basta che tu faccia una simmetria rispetto al piano xy.

Esercizio 3

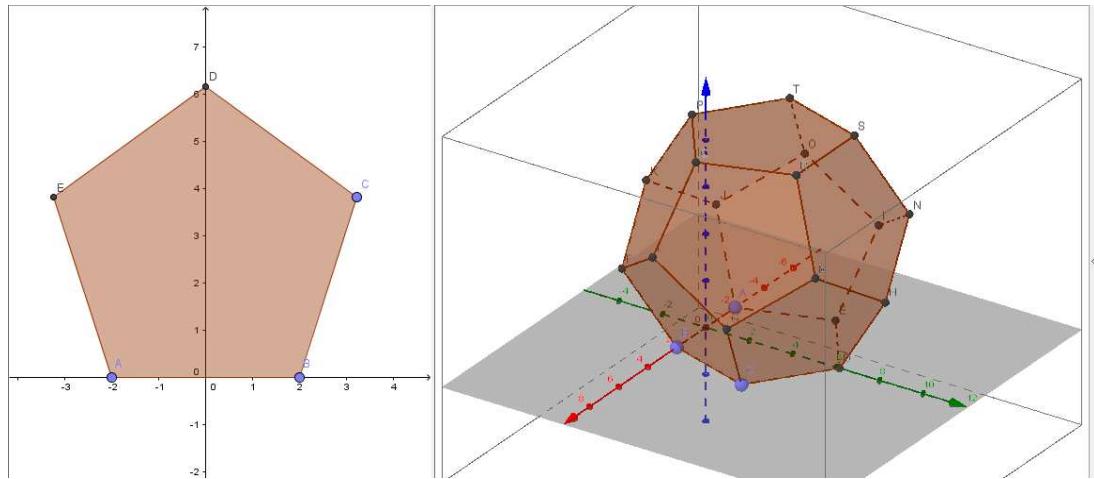
Costruisci il poliedro avente per vertici i baricentri delle facce dell'ottaedro regolare.

**GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEMA 4**

Dodecaedro e icosaedro regolari

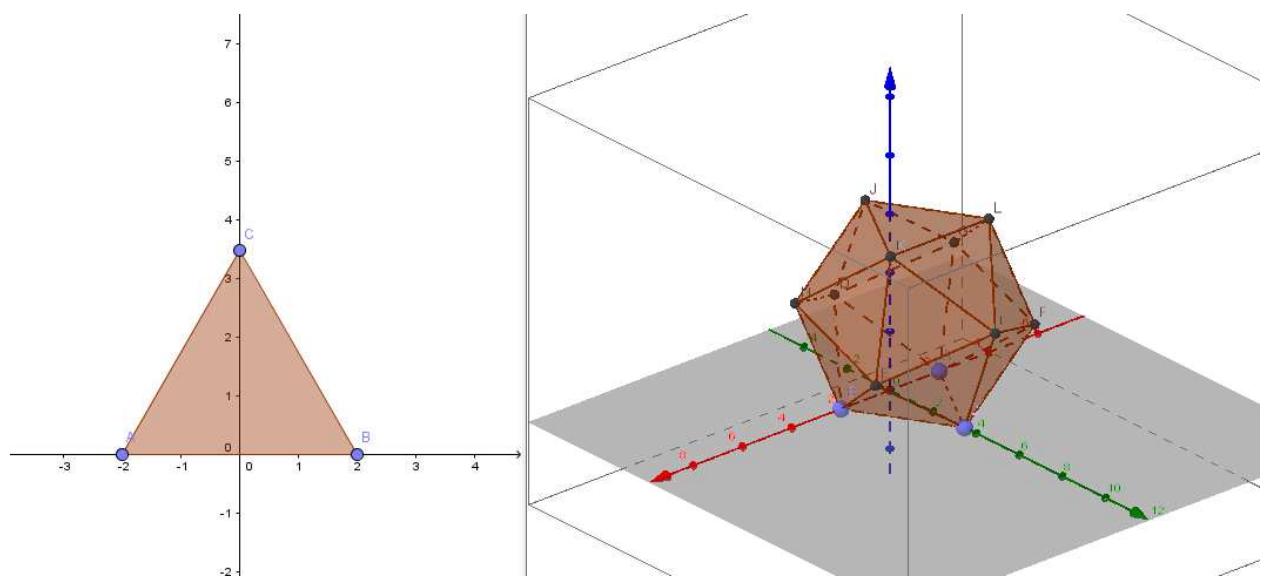
Analogamente a quanto visto per gli altri poliedri regolari, dopo aver creato due punti A,B inserisci nella barra di inserimento il comando

Dodecaedro [A,B]



Costruisci infine, dopo aver creato due punti, l'icosaedro regolare con il comando

Icosaedro [A,B]



GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEMA 5

Pallone da calcio
(Icosaedro troncato)

Come possiamo ottenere, partendo da un icosaedro, un poliedro molto simile al pallone da calcio?

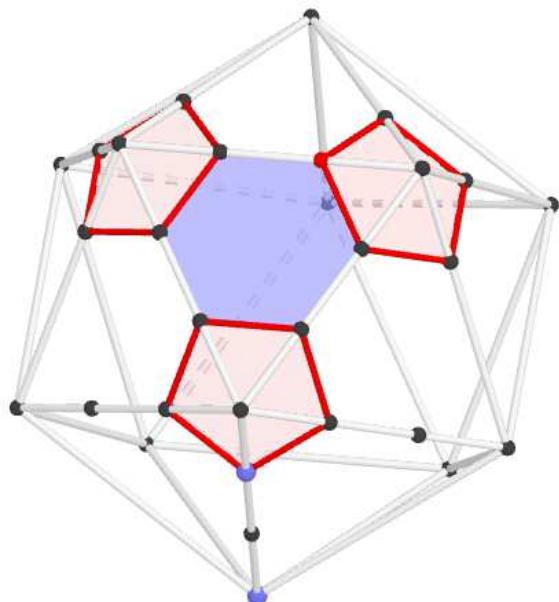
Prova a seguire questo procedimento:

- Disegna un icosaedro;
- Considera un angoloide dell'icosaedro: se sugli spigoli che convergono nel vertice dell'angoloide prendiamo dei punti tutti alla stessa distanza dal vertice e li congiungiamo, otterremo un pentagono regolare e se vogliamo che, ripetendo l'operazione per tutti gli angoloidi, oltre a individuare dei pentagoni regolari rimangano esagoni regolari aventi il lato della stessa lunghezza del lato dei pentagoni, dovremo dividere ciascun spigolo in tre parti uguali.
- Come puoi individuare su ciascun spigolo due punti in modo che rimanga diviso in tre parti uguali?

Suggerimento: potresti utilizzare l'omotetia di rapporto 1/3.



Alla fine, con un po' di pazienza, dovresti ottenere un disegno tipo quello in figura.
Stampa il tuo pallone da calcio.



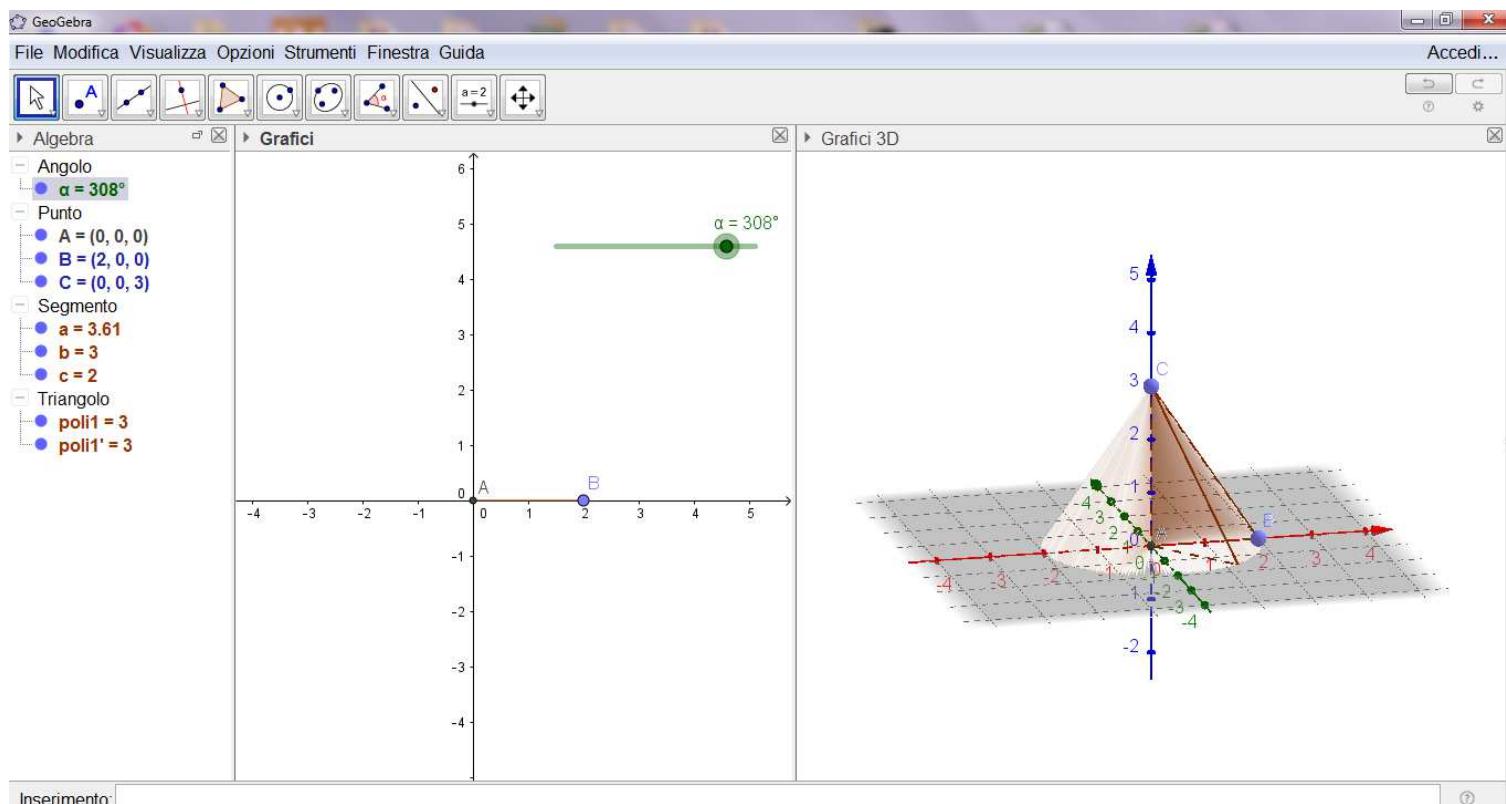
GEOMETRIA DELLO SPAZIO SCHEMA 6

Cono e cilindro

Possiamo generare un cono ruotando un triangolo rettangolo intorno ad uno dei suoi cateti.

- Creiamo un triangolo rettangolo nell'ambiente 3D con il comando poligono (per esempio di vertici $(0,0,0)$; $(2,0,0)$ $(0,0,3)$) e creiamo uno slider α (angolo) che vari tra 0° e 360° ;
- scegliamo dal menù “**rotazione assiale**”;
- selezioniamo il triangolo, poi per esempio l'asse z come asse di rotazione e poi inseriamo lo slider α come angolo di rotazione.

Attiviamo “traccia attiva” cliccando con il tasto destro del mouse sul poligono e “animazione attiva” cliccando con il destro sullo slider: il triangolo descriverà un cono.



Esercizio

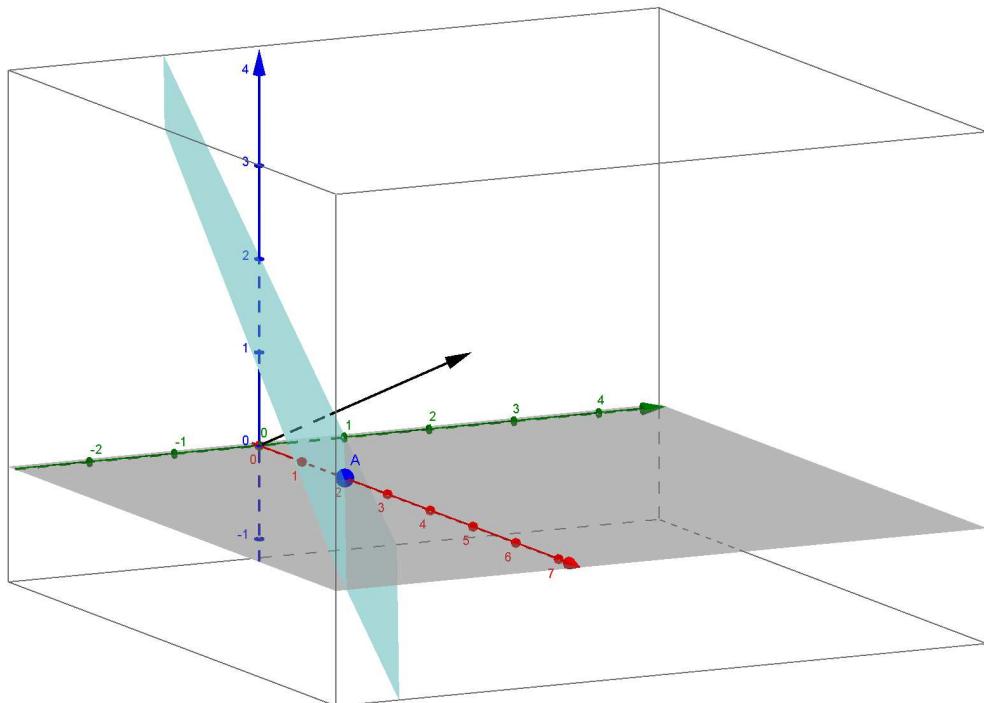
Prova a costruire un cilindro ruotando un rettangolo attorno ad un lato.

**GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEMA 7**

Equazione di un piano

Piano passante per un punto dato e perpendicolare ad una direzione data(direzione normale)

Inseriamo nella barra di inserimento un punto, per esempio $A = (2,0,0)$ e un vettore normale al piano, per esempio $n = (1,2,1)$: selezioniamo il comando “piano perpendicolare” clicchiamo su A e n e otterremo il piano in figura.



Se controlliamo nella vista algebra troviamo l’equazione

$$x + 2y + z = 2$$

che infatti si ottiene sviluppando $(1,2,1) \cdot (x - 2, y, z) = 0$ come abbiamo visto studiando l’equazione del piano passante per un punto assegnato e avente una direzione normale assegnata.

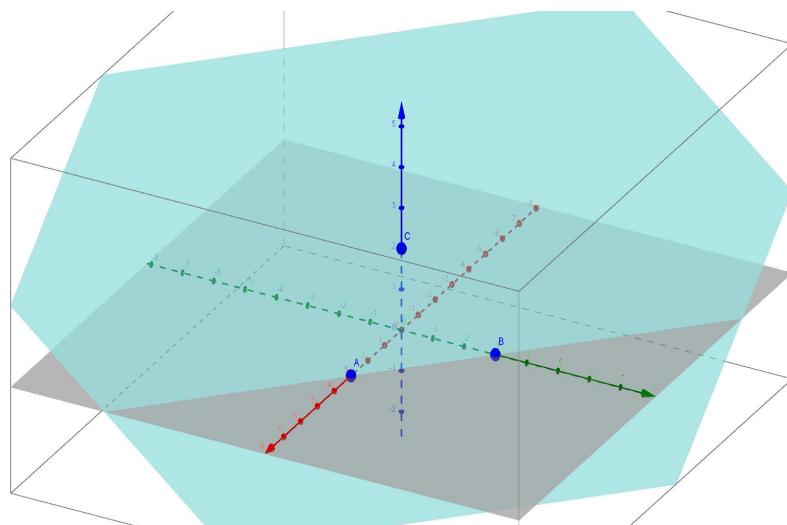
Esercizio 1

Piano passante per tre punti non allineati

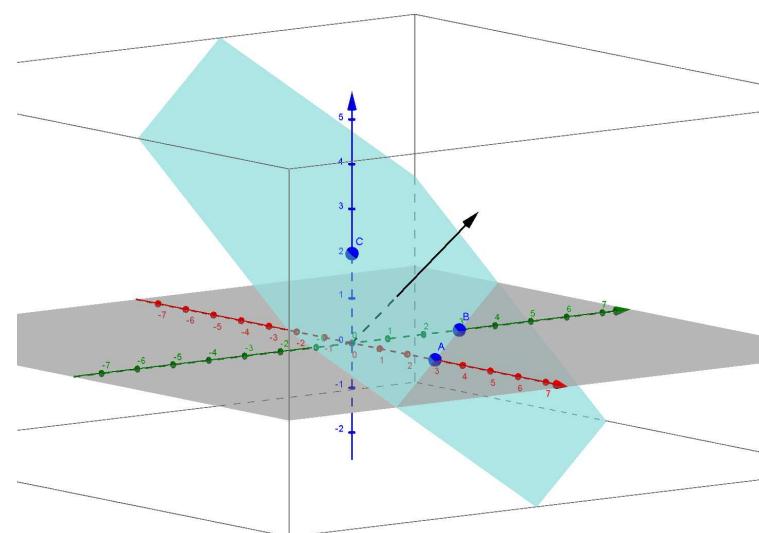
Inseriamo tre punti da tastiera, per esempio $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$, $C = (0,0,2)$, sceglieremo il comando “piano per tre punti” e creiamo il piano α passante per i punti A,B,C.

Nella vista algebra comparirà l’equazione del piano $2x + 2y + 3z = 6$.

Imposta il sistema per determinare il piano per A,B,C e verifica che ottieni la stessa equazione (o una equivalente).



Puoi digitare nella barra di inserimento $n = (2,2,3)$ e controllare che si tratta proprio del vettore normale al piano.



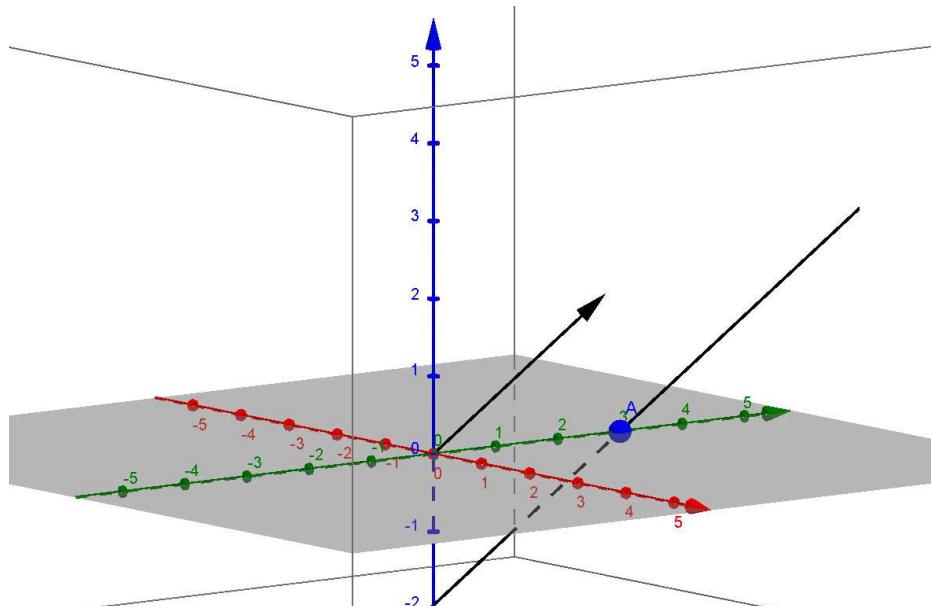
Esercizio 2

Prova ad inserire nella barra di inserimento l’equazione di alcuni piani in cui uno dei coefficienti o più di uno sono uguali a zero (es: $x + 2y + 1 = 0$, $x + 3z = 0$, $y - z - 2 = 0$, $z = 3$ ecc.) e fai le tue osservazioni.

**GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEMA 8**

Equazione di una retta nello spazio

Inseriamo nella barra di inserimento un vettore (vettore direzione della retta) per esempio $v = (1,2,2)$ e un punto, per esempio $A = (0,3,0)$. Scegliamo il comando “retta parallela”: selezioniamo A e poi il vettore \vec{v} e otterremo la retta seguente



Nella vista algebra avremo **l'equazione parametrica della retta**

$$X = (0,3,0) + \lambda(1,2,2)$$

dove la X sta per (x, y, z) .

Esercizio 1

Inserisci i punti $A = (2,1,0)$ e $B = (1,0,3)$ e traccia la retta passante per essi usando sia il comando “retta” che il comando appena visto (il vettore direzione sarà.....) e verifica che in ogni caso ottieni equazioni equivalenti.

Stampa il tuo lavoro.

Esercizio 2

Disegna i piani $\alpha : x + y + z = 0$ e $\beta : z = 0$ (puoi direttamente inserire l'equazione nella barra di inserimento) e intersecali usando il comando “interseca due superfici”.

Controlla nella vista algebra e spiega perché l'equazione parametrica della retta risulta in quel modo.

Esercizio 3

Inserisci nella barra di inserimento le equazioni di due piani (non paralleli), attiva il comando “interseca superfici” e verifica che l'equazione della retta che compare nella vista algebra corrisponda effettivamente alla soluzione del sistema formato dalle equazioni dei due piani.

**GEOMETRIA DELLO SPAZIO
SCHEMA 9**

Le superfici algebriche del secondo ordine (quadriche)

Le superfici algebriche del primo ordine sono i piani poiché la loro equazione risulta

$$ax + by + cz + d = 0$$

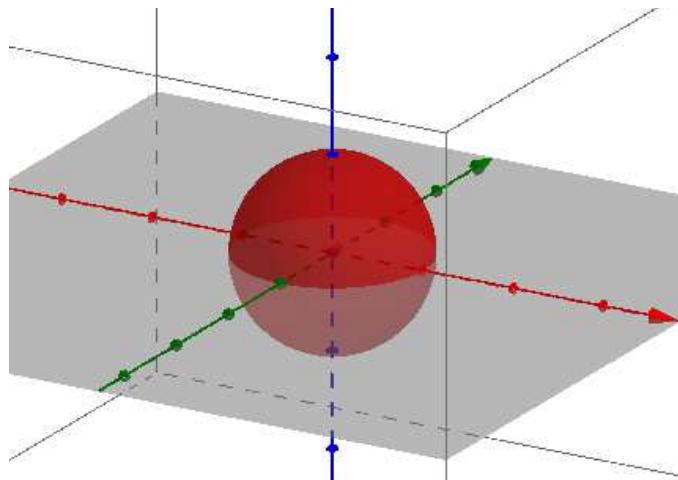
Le superfici algebriche del secondo ordine sono dette “quadriche” e sono le superfici che si possono rappresentare con un’equazione di secondo grado in x,y,z .

Le quadriche hanno cioè equazioni del tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + l = 0$$

Superficie sferica

Inseriamo l’equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: otteniamo una superficie sferica di centro l’origine e raggio 1.



Esercizio

Quale sarà l’equazione di una sfera di centro $C = (1,2,3)$ e raggio 2?

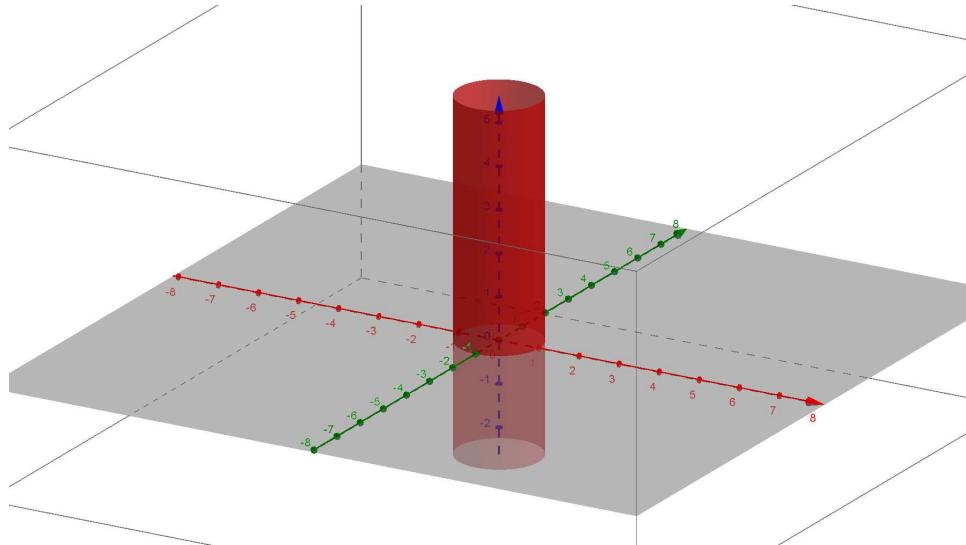
Inseriscila da tastiera e stampala.

Prova a costruire una sfera anche con il comando “sfera-dati il centro e un punto” oppure “sfera-dato il centro e il raggio”: controlla l’equazione corrispondente nella vista algebra. Stampa i tuoi esempi.

Cilindro circolare retto

Prova ad inserire nella barra di inserimento un'equazione del tipo $x^2 + y^2 = 1$.

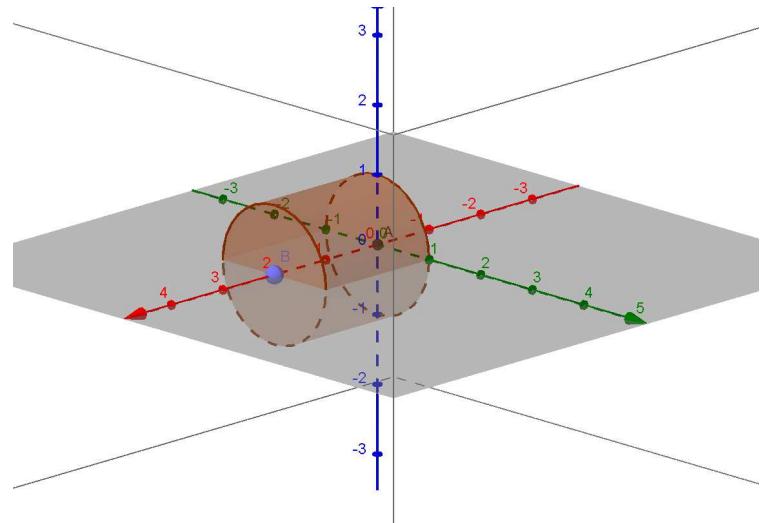
Sai spiegare perché si ottiene una superficie cilindrica indefinita avente asse l'asse z ?



Stampa anche le superfici corrispondenti alle equazioni $x^2 + z^2 = 1$; $y^2 + z^2 = 1$.

Per ottenere un cilindro definito puoi usare il comando “cilindro”: devi selezionare due punti (che saranno i centri delle circonferenze di base) e il raggio: nella figura seguente sono stati selezionati (dopo averli creati) A(0,0,0) B(2,0,0) e raggio 1.

Nota: nella vista algebra compaiono le equazioni (parametriche) delle circonferenze di base, l’area della base e della superficie laterale.



Cilindro iperbolico e parabolico

- Inserisci nella barra di inserimento l'equazione $x^2 - y^2 = 1$

Nella vista algebra compare la denominazione di questa superficie che viene detta “cilindro iperbolico”: perché ?

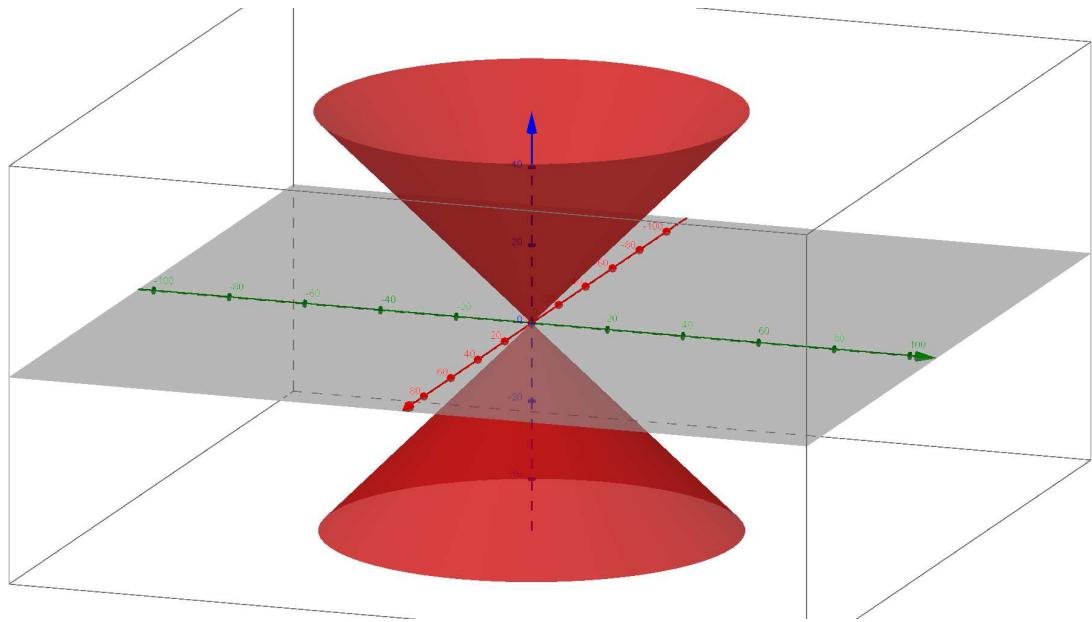
In modo analogo studia le superfici aventi equazione $x^2 - z^2 = 1$, $y^2 - z^2 = 1$, $x * y = 1$.

- Se inserisci l'equazione $x - y^2 = 0$ nella vista algebra compare la denominazione “cilindro parabolico”: perché?

Cono

Inserisci l'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Si ottiene un cono...prova a spiegare perché.



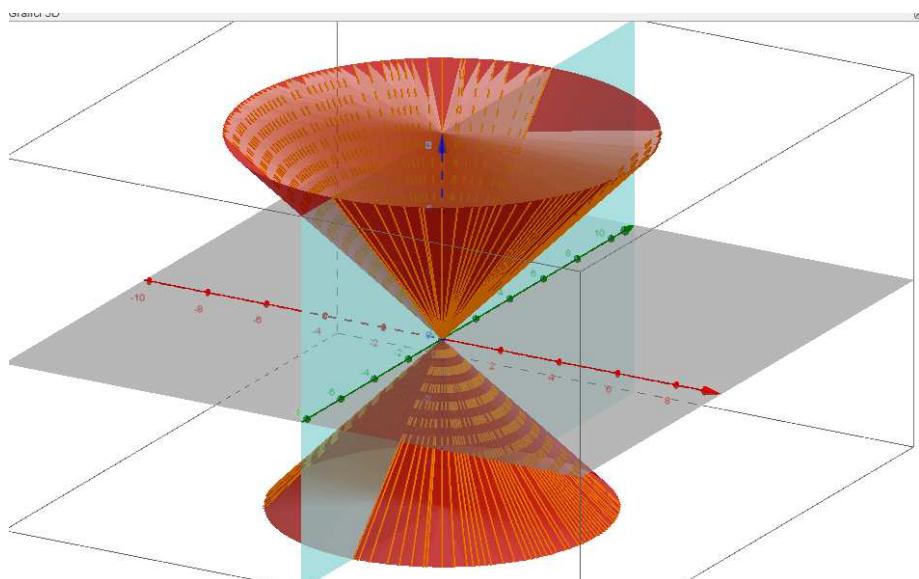
La stessa superficie si può ottenere ruotando una retta intorno (in questo caso) all'asse z .

Se intersechiamo con il piano $x = 0$ troviamo la coppia di rette

$$y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow (y+z) \cdot (y-z) = 0 \Leftrightarrow z = y \cup z = -y$$

Creiamo uno slider angolo α (variabile tra 0° e 360°) , scegliamo il comando “rotazione assiale”, selezioniamo una retta (per esempio $z = y$) e l'asse z: attiviamo la traccia e muoviamo lo slider.

Otterremo proprio la superficie conica già visualizzata.

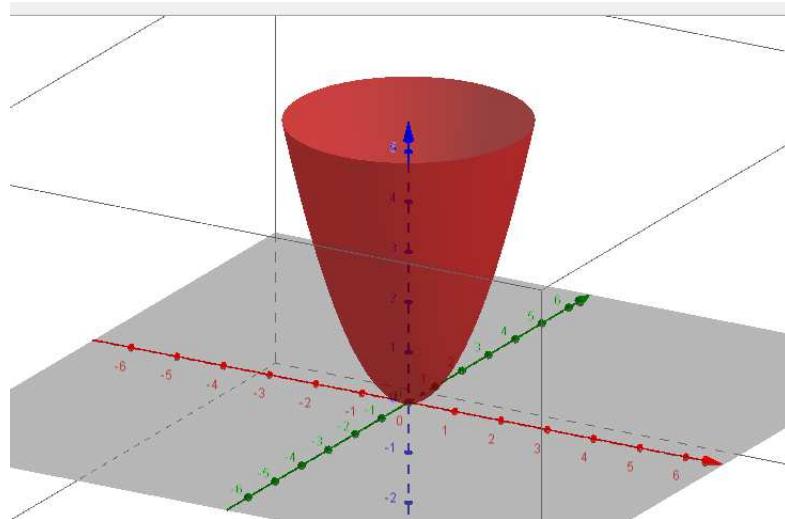


Esercizio

Prova ad inserire $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Paraboloide di rotazione

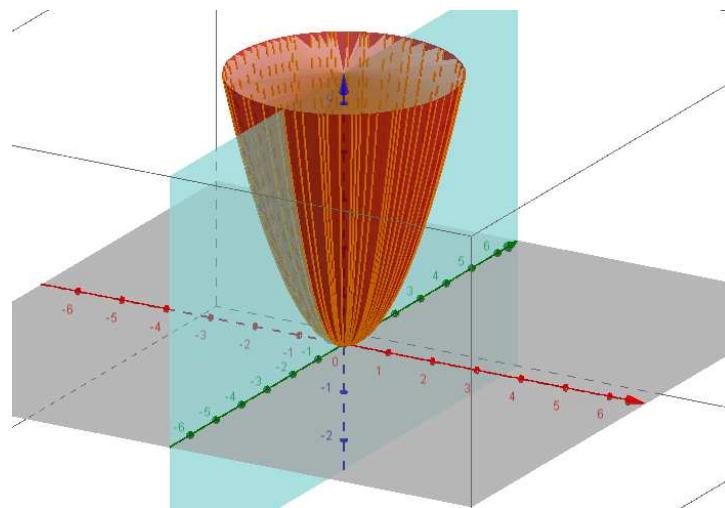
Inserendo nella barra di inserimento l'equazione $x^2 + y^2 - z = 0$ otteniamo il seguente paraboloide di rotazione.



Verifichiamo che la superficie si ottiene ruotando una parabola intorno al suo asse: interseciamo con il piano $x = 0$ e selezioniamo “interseca superfici” per ottenere la parabola.

Creiamo uno slider α (angolo) variabile tra 0° e 360° : selezioniamo “rotazione assiale”, selezioniamo la parabola, l’asse z, attiviamo la traccia e muoviamo lo slider.

La parabola durante la sua rotazione descrive proprio la superficie già presente sullo schermo.



Esercizio

Inserisci l’equazione $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ Cosa ottieni? Nella vista algebra dovrebbe comparire come viene chiamata questa superficie. Perché?

Inserisci l’equazione $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ Cosa ottieni? E se inserisci $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = -1$?