Funzioni continue

Definizione: *f(x)* si dice continua in $x_0 \in D_f$ quando

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione: *f(x)* si dice continua in $I \subset D_f$ se è continua $\forall x \in I$.

Avevamo già dato questa definizione parlando del $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Punti di discontinuità

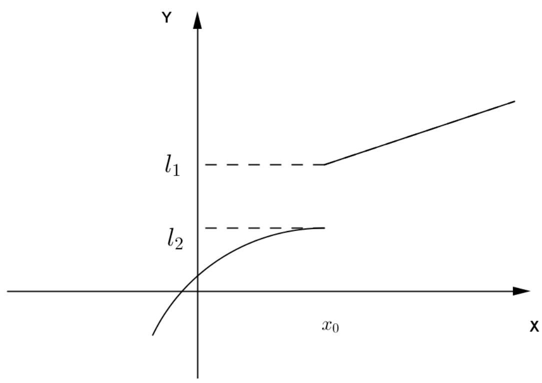
Un punto x_0 (per il quale abbia senso calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ cioè un punto di accumulazione(**) del dominio) si dice punto di discontinuità per f(x) quando non si verifica la (*).

(**) x_0 è un punto di accumulazione quando posso avvicinarmi quanto voglio ad x_0 da destra e/o da sinistra all'interno del dominio di *f(x).*

Si possono avere tre tipi di discontinuità:

- **Discontinuità di prima specie** quando

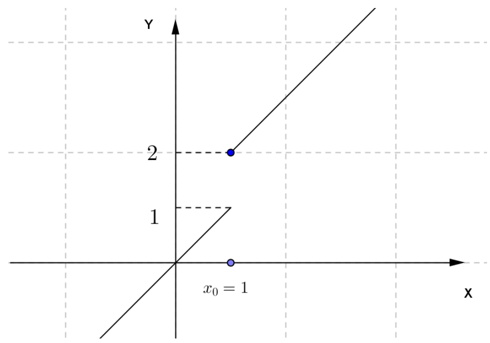
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad con \quad l_1 \neq l_2 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$



Si dice anche che la funzione ha un "salto" in x_0.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

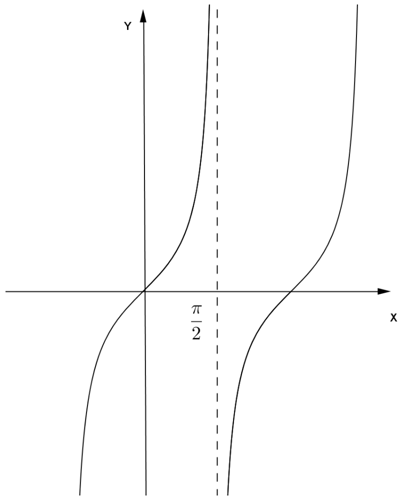


Poiché $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ la funzione ha in $x_0 = 1$ una discontinuità di prima specie.

- **Discontinuità di seconda specie** quando almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ è infinito oppure non esiste.

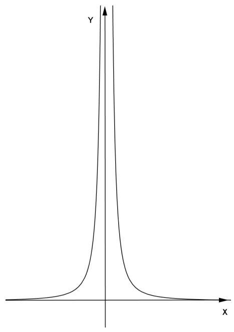
Esempi

1) $f(x) = tgx$



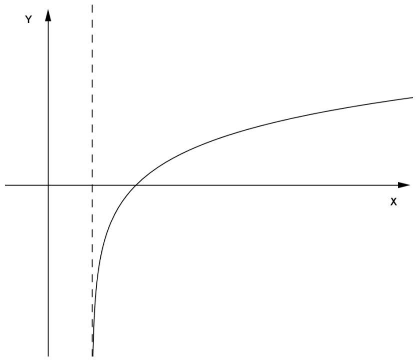
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ è un punto di discontinuità di 2ª specie

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



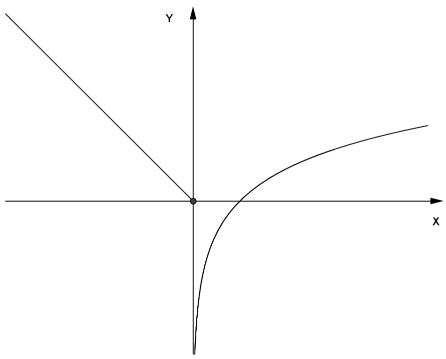
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2ª specie

3) $f(x) = \ln(x-1)$



$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 1$ è punto di discontinuità di 2ª specie.

4) $f(x) = \begin{cases} -x & x \le 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ma $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 0$ punto di discontinuità di 2° specie.

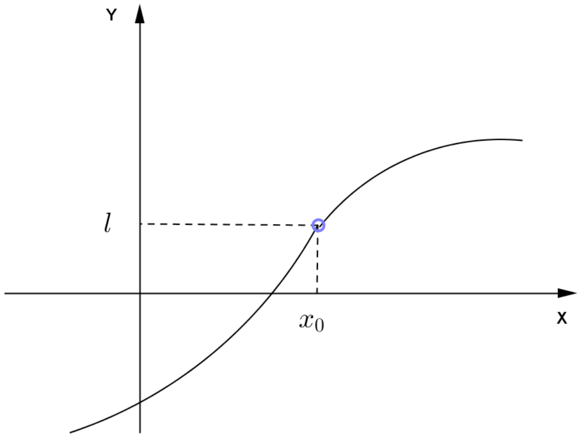
5) $f(x) = sen\dfrac{1}{x}$

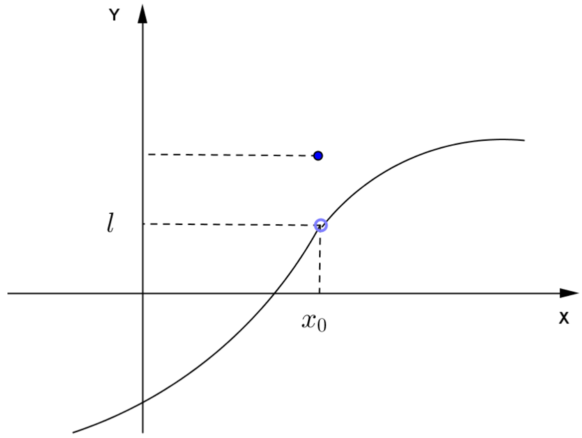
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ non esiste (vedi cap. sui limiti) e quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2° specie.

- **Discontinuità di terza specie** quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ ma } f(x) \text{ non è definita in } x_0 \text{ oppure } f(x_0) \neq l$$

Questa specie di discontinuità viene anche detta discontinuità "eliminabile" perché se $f(x)$ non è definita in x_0 possiamo porre $f(x_0) = l$ oppure, se era già definita, cambiare la definizione di $f(x)$ in x_0 ponendo appunto $f(x_0) = l$ e rendendola così continua in x_0.

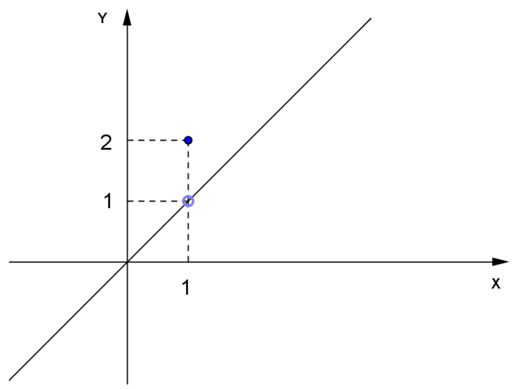




Esempio

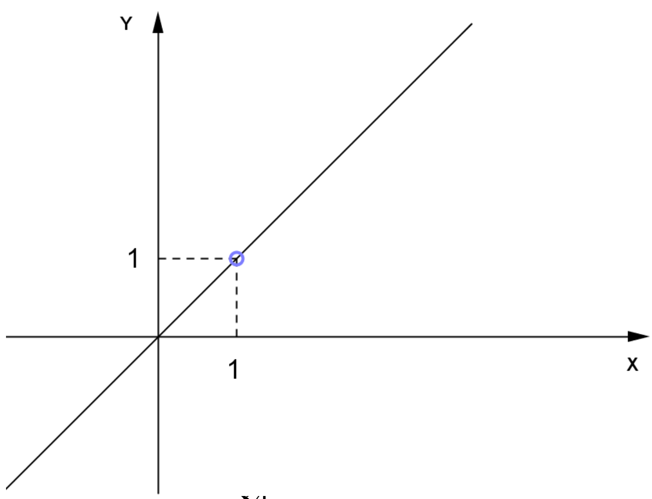
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

ma $\dfrac{x^2 - x}{x-1} = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$



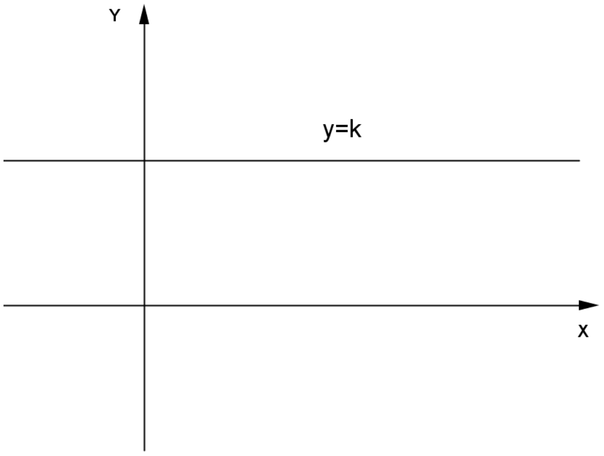
Quindi $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ ma $f(1) = 2 \Rightarrow x_0 = 1$ è un punto di discontinuità di 3^a specie.

Nota: anche $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-1}$ ha in $x_0 = 1$ un punto di discontinuità di 3^a specie poiché $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ (quindi il limite esiste ed è finito) ma la funzione non è definita in $x_0 = 1$.

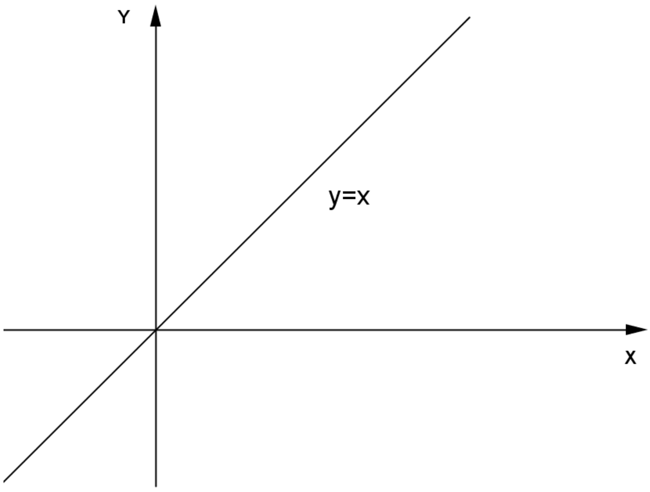


Esempi di funzioni continue

- La funzione costante $f(x)=k$ è continua $\forall x \in \Re$
  Infatti qualunque sia x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x)=k \quad (=f(x_0))$



- La funzione $f(x)=x$ è continua $\forall x \in \Re$ poiché $\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad (=f(x_0))$



- Le funzioni polinomiali $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ sono continue $\forall x \in \Re$

- Le funzioni razionali fratte $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}$ sono continue $\forall x : D(x) \neq 0$

- Le funzioni goniometriche $y=senx,\ \ y=\cos x$ sono continue $\forall x \in \Re$ mentre $y=tgx$ è continua $\forall x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

- La funzione esponenziale $y=a^x \quad (a>0 \quad a \neq 1)$ è continua $\forall x \in \Re$

- La funzione logaritmica $y=\log_a x \quad (a>0 \quad a \neq 1)$ è continua $\forall x>0$

I teoremi sulle funzioni continue

(solo enunciati)

1) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in x_0 allora

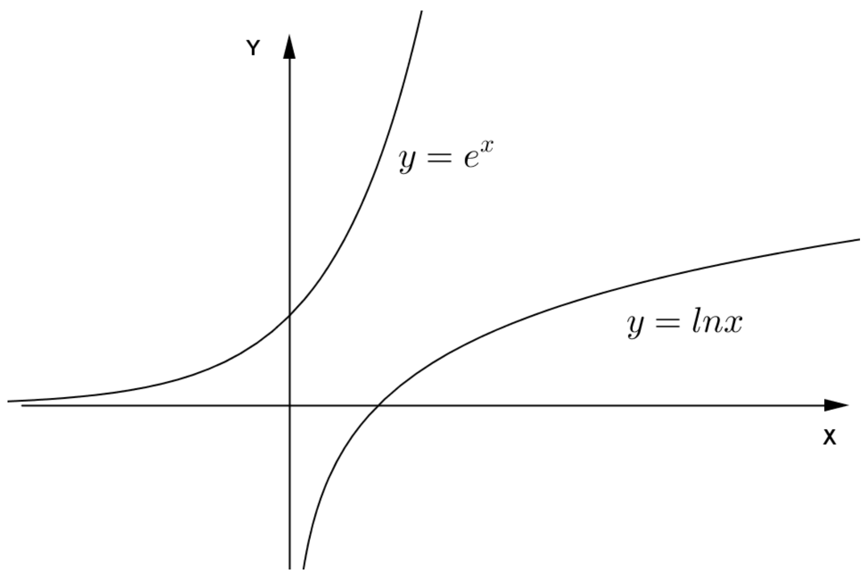
$$f(x) \pm g(x)$$
$$f(x) \cdot g(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (se \quad g(x_0) \neq 0)$$

sono ancora funzioni continue in x_0.
(La dimostrazione si basa sulle operazioni con i limiti…)

2) Se $g(x)$ è una funzione continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è continua in x_0.

3) Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo *I* e strettamente crescente (o decrescente) in *I* allora la funzione f^{-1} è continua in $f(I)$ (immagine di *I*)

Esempio:

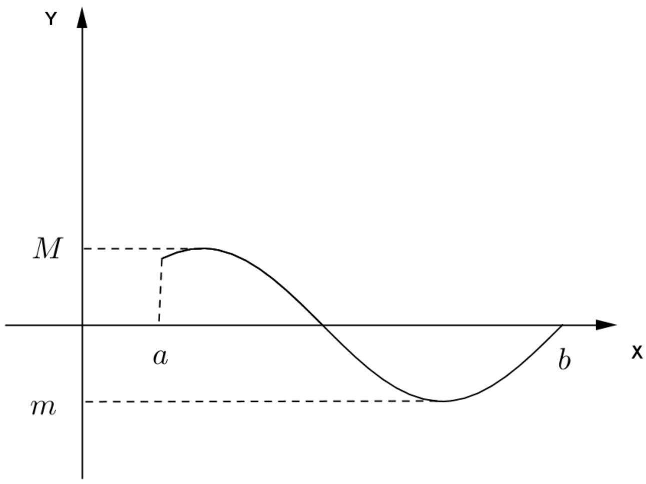


La funzione esponenziale $y = e^x$ è continua in $\Re$ e strettamente crescente.

La funzione logaritmo $y = \ln x$ è continua quando $x > 0$ (infatti il codominio di $y = e^x$ sono i reali positivi).

4) **Teorema di Weierstrass**

Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.

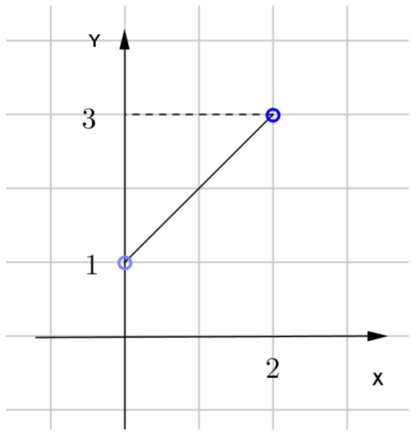


Osservazione: se alcune ipotesi del teorema non sono verificate non è detto infatti che $f(x)$ ammetta massimo e minimo assoluti.

- Se per esempio $f(x)$ è continua su un intervallo non limitato può non avere massimo e minimo assoluti (es. $y = x$; $y = e^x$)

- Se la funzione è continua in (a,b) (intervallo limitato ma aperto) può non avere massimo e minimo assoluti.

  Esempio : $f(x) = x + 1 \qquad 0 < x < 2$

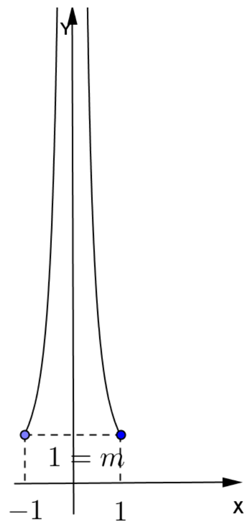
  

  In questo caso i valori 1 e 3 sono estremo inferiore e superiore ma non appartenendo al codominio di f(x) non sono minimo e massimo assoluti.

- Se la funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato ma non è continua in tutti i suoi punti può non avere massimo e minimo assoluti.

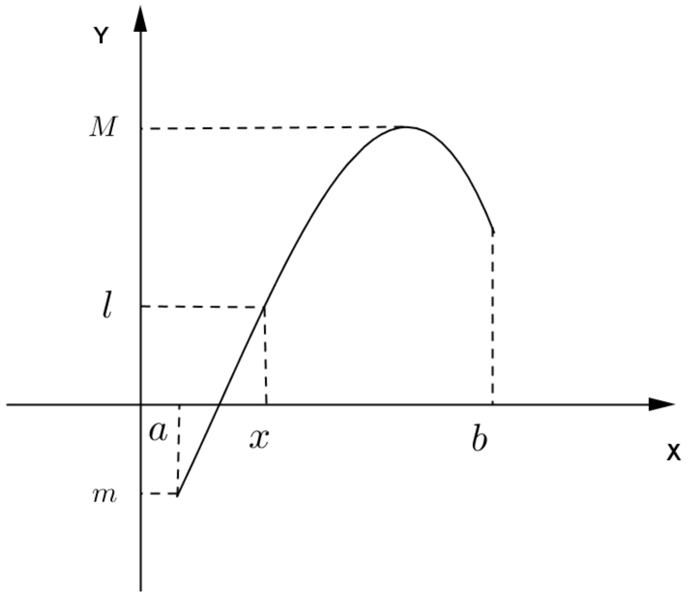
  Esempio: $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad -1 \le x < 1 \quad (x \ne 0)$

  Il minimo assoluto è m=1 ma non c'è massimo assoluto.

5) **Teorema dei valori intermedi**

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo assoluto.

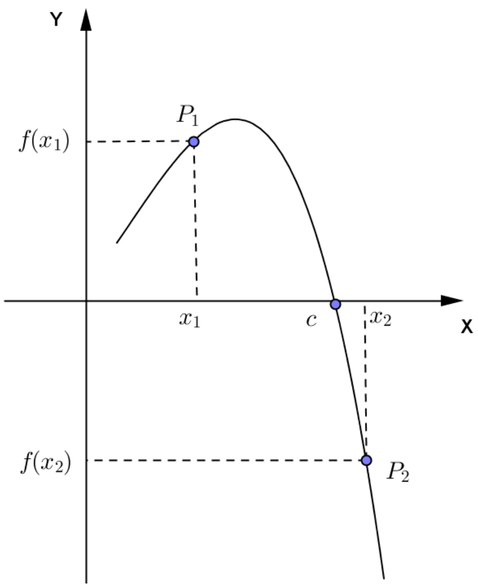


Per ogni $m \le l \le M$
esiste almeno un $x \in [a,b]$:
$f(x) = l$

6) **Teorema di esistenza degli zeri**

Se $f(x)$ è continua in un intervallo I ed esistono x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ aventi immagini $f(x_1), f(x_2)$ discordi allora esiste (almeno) un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(c) = 0$

(c si dice **zero** della funzione)



$f(x_1), f(x_2)$ di segno opposto
$x_1 < c < x_2$

$f(c) = 0$

Infatti è intuitivo che per passare da P_1 (per esempio sopra all'asse x) a P_2 (sotto all'asse x) con un grafico "continuo" almeno una volta il grafico taglierà l'asse x.

NOTA : Questo teorema è utilizzato per studiare l'esistenza di soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$

Esempio: utilizzando il teorema di esistenza degli zeri possiamo dimostrare che un'equazione di 3° grado ammette sempre una soluzione reale.

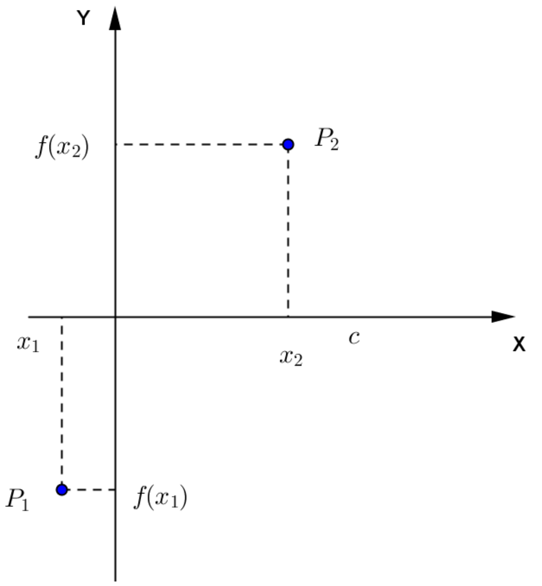
Infatti risolvere l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ significa trovare gli zeri di

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Consideriamo, per semplicità, $a > 0$ (se a fosse negativo basta cambiare segno…) e studiamo i limiti di $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$.

Si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

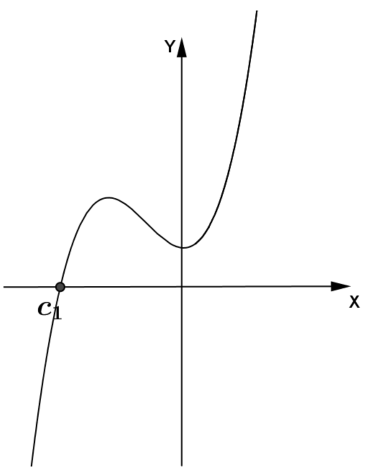
(sono forme indeterminate ma basta mettere in evidenza x^3 …)

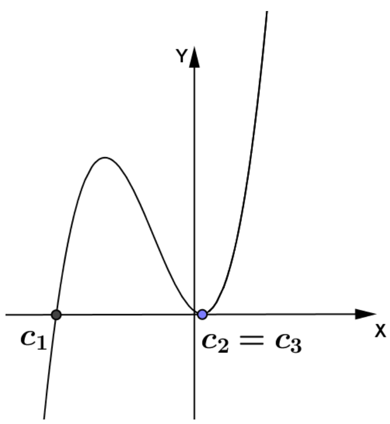


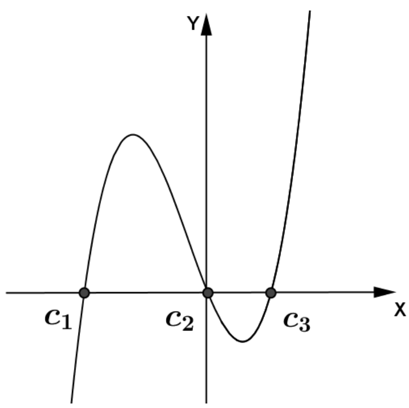
Allora esisteranno $x_1 < x_2$: $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sono discordi (più precisamente $f(x_1)$ negativo e $f(x_2)$ positivo)

Ma allora, per il teorema di esistenza degli zeri (la funzione è chiaramente continua in $\Re$),esisterà almeno un valore c , con $x_1 < c < x_2$: $f(c) = 0$ e quindi l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha almeno una soluzione reale.

Osserviamo inoltre che l'equazione di 3° grado o ha 1 sola soluzione reale oppure ne ha tre (nella figura centrale due sono coincidenti) (più di 3 non può averne).







ESERCIZI
TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

1) Studia i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ [$x = \pm 2$ discontinuità di seconda specie]

b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ [$x = -1$ discontinuità di terza specie]

c) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ [$x = 0$ discontinuità di terza specie]

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ [$x = 0$ discontinuità di seconda specie]

e) $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ [$x = -1$ discontinuità di prima specie]

f) $f(x) = \ln(x+1)$ [$x = -1$ discontinuità di seconda specie]

g) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ [$x = 2$ discontinuità di seconda specie]

2) La funzione $f(x) = x^2 + x$ ammette massimo e minimo assoluti in $[-1,\ 1]$? Determina m ed M.

$$\left[m = -\frac{1}{4}; M = 2 \right]$$

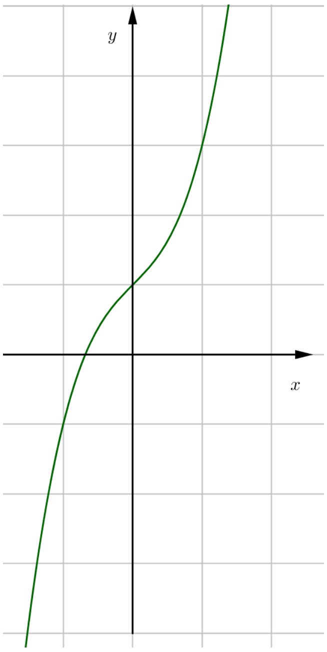
3) Si può applicare il teorema di Weierstrass alla funzione $y = \dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $[-1,\ 1]$? Perché?

$[no]$

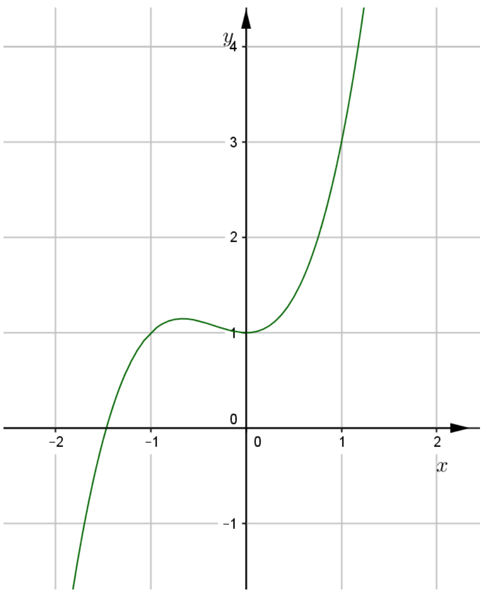
4) L'equazione $x^3 + x^2 - 4 = 0$ ha (almeno) uno zero appartenente all'intervallo $[1,2]$? Perché?

$[si]$

5) Disegna con Geogebra il grafico di $y = x^3 + x + 1$ (vedi figura): utilizzando il teorema di esistenza degli zeri prova che esiste una soluzione reale dell'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ nell'intervallo $[-1;0]$.



6) Utilizzando Geogebra traccia il grafico di $y = x^3 + x^2 + 1$ (vedi figura). Approssima la soluzione x_0 dell'equazione $x^3 + x^2 + 1 = 0$ utilizzando il teorema degli zeri.



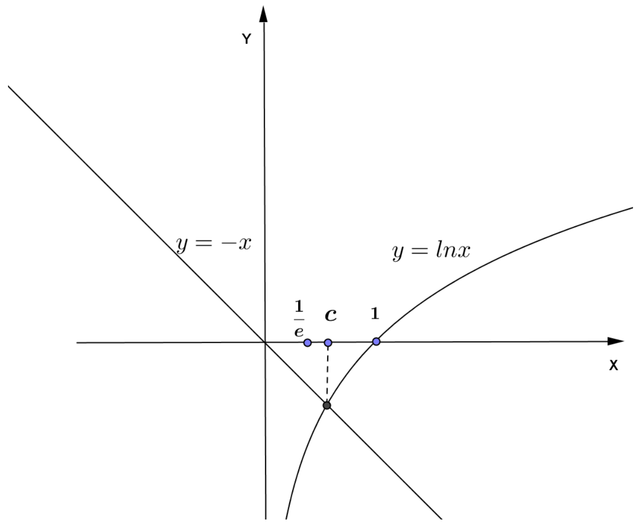
$[-1.5 < x_0 < -1.4]$

7) Studia l'equazione $\ln x + x = 0$

Per capire se l'equazione ha soluzioni possiamo scrivere l'equazione come

$$\ln x = -x$$

e considerare che le soluzioni possono essere pensate come le ascisse dei punti di intersezione tra la curva $y = \ln x$ e la retta $y = -x$.



Quindi graficamente vediamo che c'è una soluzione dell'equazione poiché c'è una intersezione tra i due grafici.

Per approssimare la soluzione dell'equazione possiamo usare quindi il teorema di esistenza degli zeri: considerando la funzione $f(x) = \ln x + x$ osserviamo che:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{1}{e} < 0$ e $f(1) = 0 + 1 = 1 > 0$ e quindi $\quad \exists\ c, \quad \frac{1}{e} < c < 1 \ : f(c) = 0$

Possiamo poi approssimare meglio la soluzione dell'equazione "stringendo" l'intervallo (x_1, x_2) in cui si trova lo zero andando a calcolare $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{e} + 1}{2}\right) = \ldots \ldots$