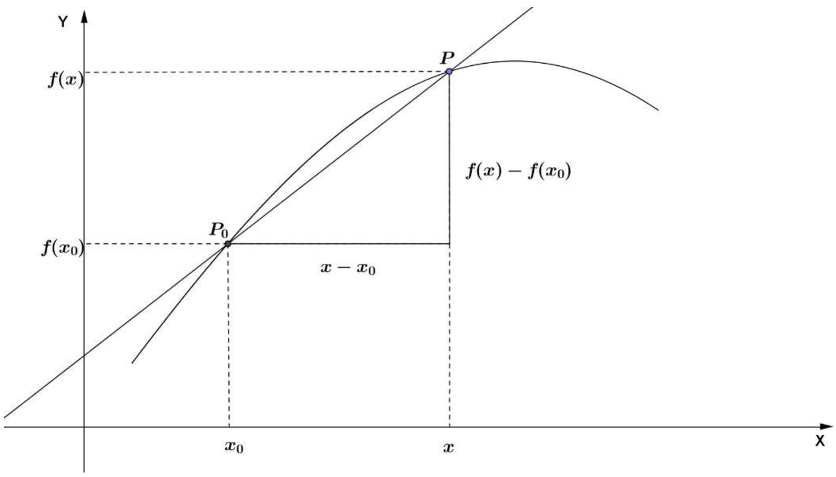
Derivate

Definizione di derivata di f(x) in $x_o \in D_f$

Considero una funzione $f(x)$ e sia $x_0 \epsilon D_f$ e $f(x)$ definita in un intorno completo di x_0.

Consideriamo il rapporto (detto rapporto "incrementale")

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (x \epsilon I_{x_0})$$



È evidente che il rapporto incrementale (cioè degli "incrementi" Δf e Δx) rappresenta il coefficiente angolare della retta P_0P (vedi figura).

Diciamo che $f(x)$ è derivabile in x_0 se **esiste finito**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Questo limite sarà indicato con $f'(x_0)$ e detto derivata di $f(x)$ in x_0.

NOTA1: la derivata in x_0 può essere indicata anche come

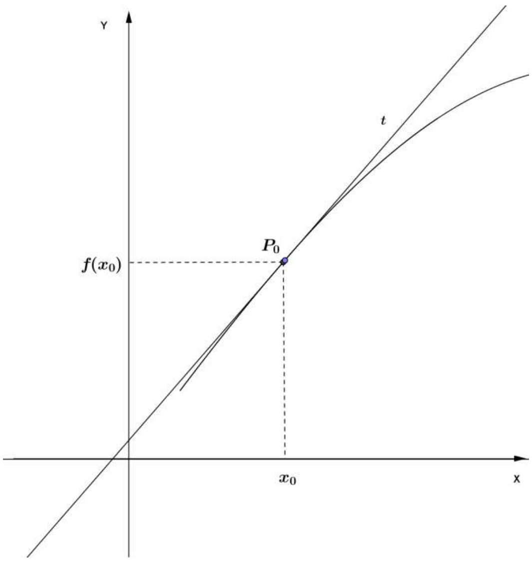
$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} \quad o \quad [Df(x)]_{x=x_0}$$

NOTA2: il rapporto incrementale può essere anche scritto così:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{e calcolare quindi} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Interpretazione geometrica

Poiché il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta PP_0 e poiché per $x \to x_0$ si ha $P \to P_0$ e la retta $P_0P \to$ retta tangente in P_0 si ha che

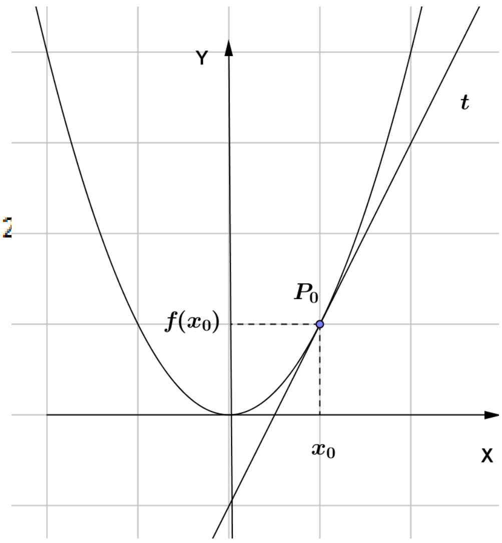


$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_t$$

dove m_t rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.

Poiché nella definizione di $f'(x_0)$ abbiamo chiesto che il limite sia finito non si considererà derivabile in x_0 una funzione che abbia in $P_0(x_0; f(x_0))$ la tangente al grafico parallela all'asse y.

Esempi



1. Considериamo $y = x^2$ e $x_0 = 1$ ($f(x_0) = 1$)

   Calcoliamo

   $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

   Quindi $f'(1) = m_t = 2$.

   La retta tangente avrà equazione

   $$t: y - 1 = 2(x - 1) \to y = 2x - 1$$

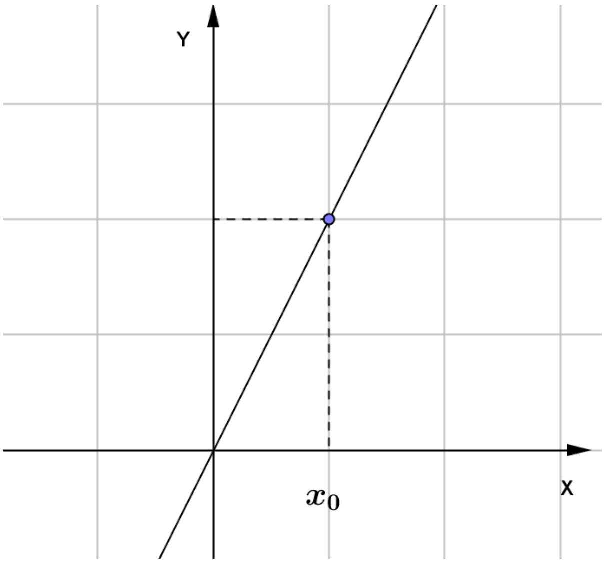
   Proviamo a verificare che l'equazione della tangente sia proprio $y = 2x - 1$: possiamo applicare il "vecchio" metodo del fascio di rette per $P_0(1; 1)$ e intersecare con $y = x^2$ imponendo che $\Delta = 0$.

   $$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - mx + m - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

   $$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \to m^2 - 4m + 4 = 0 \to (m-2)^2 = 0 \to m = 2$$

2. Consideriamo $y = 2x$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 2)$.
   Calcoliamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$



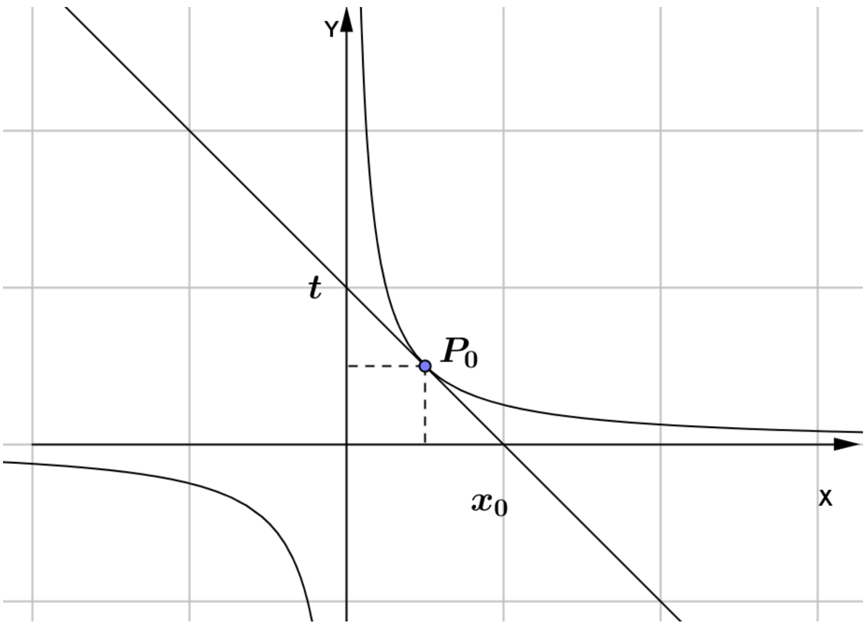
Osserviamo che se considero in generale x_0 ottengo lo stesso risultato:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{2x-2x_o}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{2(x-x_o)}{x-x_o} = 2$$

È chiaro che nel caso in cui il grafico sia una retta, la tangente coincide con il grafico in ogni punto x_0 e quindi $f'(x_0) = 2 \quad \forall x_0 \epsilon R$.

3. Consideriamo $y = \frac{1}{x}$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{x-1}{x(x-1)} = -1$$



ESERCIZI

DEFINIZIONE DI DERIVATA

Calcola $f'(x_0)$ per le seguenti funzioni (disegna anche G_f e t):

1. $f(x) = 3x - 1$ $x_0 = 0$ $[f'(0) = 3]$

2. $f(x) = 4x^2$ $x_0 = 1$ $[f'(1) = 8]$

3. $f(x) = 1 - x^2$ $x_0 = 0$ $[f'(0) = 0]$

4. $f(x) = \frac{2}{x}$ $x_0 = 1$ $[f'(1) = -2]$

5. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $x_0 = 1$ $[f'(1) = -1]$

6. $f(x) = 3$ $x_0 = 4$ $[f'(1) = 0]$

7. $f(x) = x^3$ $x_0 = 2$ $[f'(2) = 12]$

8. $f(x) = \frac{x-1}{x}$ $x_0 = 1$ $[f'(1) = 1]$

9. $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ $x_0 = 1$ $[f'(1) = 3]$

10. $f(x) = 2 - x^3$ $x_0 = 1$ $[f'(1) = -3]$

11. $f(x) = x^2 - 1$ $x_0 = -1$ $[f'(-1) = -2]$

12. $f(x) = 5x + 2$ $x_0 = 3$ $[f'(3) = 5]$

13. $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 2$ $[f'(2) = -\frac{1}{4}]$

14. $f(x) = -5$ $x_0 = 0$ $[f'(0) = 0]$

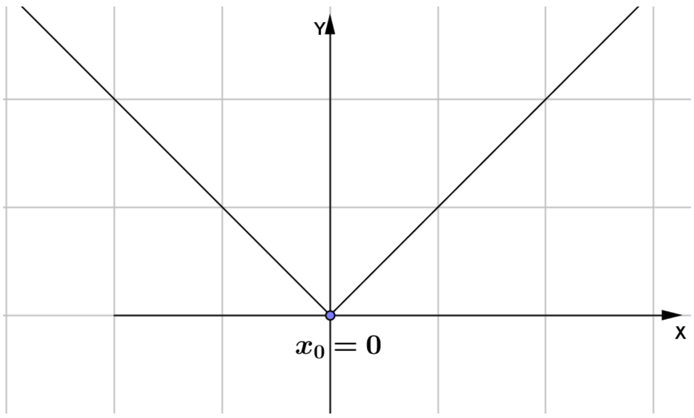
15. $f(x) = x^2$ $x_0 = 3$ $[f'(3) = 6]$

Esempi di funzioni non derivabili in x_o

Vediamo quali possono essere i punti di non derivabilità.

1. a) Consideriamo $f(x) = |x|$ e $x_0 = 0$

$(f(x_0) = 0)$



$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

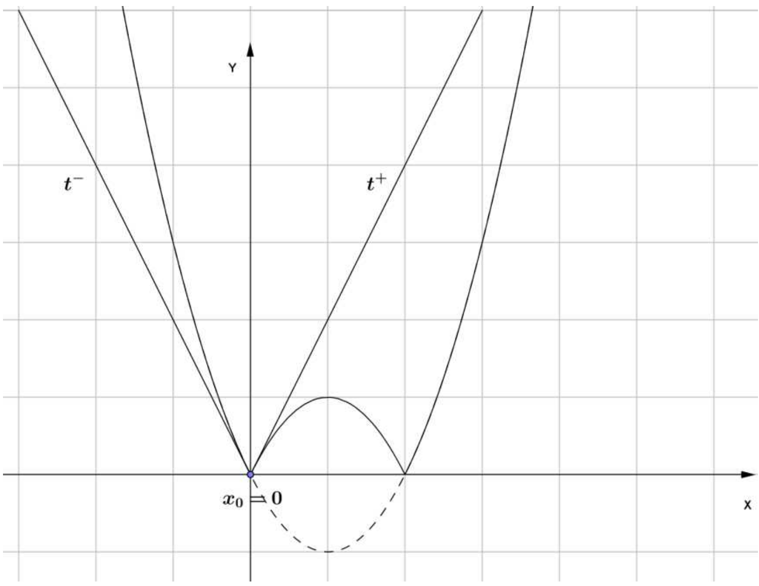
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

In questo caso quindi non esiste il limite del rapporto incrementale perché il limite destro è diverso dal limite sinistro.

È come se avessimo due tangenti in $P_0(x_0; f(x_0))$, una "destra" e una "sinistra" con inclinazioni m_1 e m_2 e x_0 si dice **punto angoloso**.

b)Vediamo un altro esempio di punto angoloso: consideriamo $f(x) = |x^2 - 2x|$ e $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$



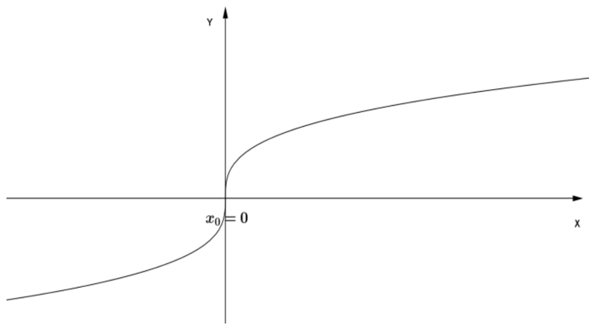
Ricorda che per tracciare il grafico di $f(x)$ prima si disegna la parabola $y = x^2 - 2x$ e poi si ribalta rispetto all'asse x la parte negativa.

Anche in questo caso abbiamo un punto angoloso in x_0 poiché:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = -2 \quad (m_{t^-})$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-(x^2 - 2x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x(x-2)}{x} = 2 \quad (m_{t^+})$$

2. Consideriamo $f(x) = \sqrt[5]{x}$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.

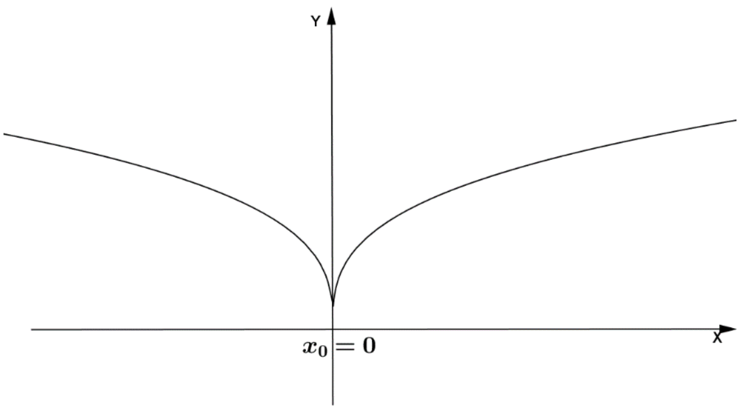


$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

In questo caso, il limite del rapporto incrementale esiste ma è infinito: la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$ al grafico è parallela all'asse delle y (nel nostro caso coincide con l'asse delle y). Diremo perciò che $y = \sqrt[5]{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

Punti di non derivabilità di questo tipo si chiamano "**punti a tangente verticale**".

3. Consideriamo $f(x) = |\sqrt[5]{x}|$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.



Poiché $f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{x} \; quando \; x \geq 0 \\ -\sqrt[5]{x} \; quando \; x < 0 \end{cases}$

occorre distinguere il limite destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt[5]{x^2}} = -\infty$$

Quindi in questo caso il limite non esiste e i limiti destro e sinistro sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$: diciamo che x_0 è una "**cuspide**".

ESERCIZI

PUNTI DI NON DERIVABILITA'

Per ciascuna delle seguenti funzioni studia i punti di non derivabilità:

1. $f(x) = |x-2|$ [$x_0 = 2$ punto angoloso]

2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ [$x_0 = -1$ punto a tangente verticale; $x_0 = 1$ punto a tangente verticale]

3. $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$ [$x_0 = -1$ punto a tangente verticale]

4. $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^2}$ [$x_0 = 1$ cuspide]

5. $f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|$ [$x_0 = 1$ punto angoloso]

6. $f(x) = |x^2-1|$ [$x_0 = -1$ punto angoloso$x_0 = 1$ punto angoloso]

7. $f(x) = |1-x|$ [$x_0 = 1$ punto angoloso]

8. $f(x) = \left|\frac{2x}{x-1}\right|$ [$x_0 = 0$ punto angoloso]

9. $f(x) = |x| + 1$ [$x_0 = 0$ punto angoloso]

10. $f(x) = \sqrt{x}$ [$x_0 = 0$ punto a tangente verticale]

11. $f(x) = \sqrt{x-1}$ [$x_0 = 1$ punto a tangente verticale]

12. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ [$x_0 = -1$ punto a tangente verticale; $x_0 = 1$ punto a tangente verticale]

Continuità e derivabilità

Teorema

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 allora $f(x)$ è continua in x_0.

Questa proprietà risulta immediata considerando il significato geometrico della derivata in x_0 in quanto se in $P_0(x_0, f(x_0))$ il grafico ha una tangente non può esserci una discontinuità in x_0, ma per completezza ne riportiamo anche una dimostrazione di tipo "algebrico".

Ricordiamo che per dimostrare la continuità di $f(x)$ in x_0 dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Allora se scriviamo $f(x)$ nel seguente modo:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

e calcoliamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

poiché $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ (per ipotesi $f(x)$ è derivabile in x_0), passando al limite avrò:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

Osservazione

Non è vero il viceversa cioè ***se $f(x)$ è continua in x_0 non è detto che sia derivabile in x_0.***

Basta infatti ricordare i punti di non derivabilità (punto angoloso, punto di flesso a tangente verticale, cuspide): in questi punti la funzione è continua ma non derivabile.

FUNZIONE DERIVATA

La funzione che associa $x \to f'(x)$ viene detta **funzione derivata** di $f(x)$ ed indicata con

$$f'(x) \text{ o } Df(x) \text{ o } \frac{df}{dx} \text{ (notazione di Leibniz)}$$

Esempio

Consideriamo $f(x) = x^2$.

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale lasciando come variabile x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Quindi $x \xrightarrow{f'} 2x$ e possiamo scrivere:

$$f'(x) = 2x \text{ o } D(x^2) = 2x$$

Se dobbiamo quindi calcolare, per esempio, la derivata di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 3$ non dovremo far altro che sostituire $x = 3$ in $f'(x) = 2x$ cioè $f'(3) = 6$.

Quindi conoscere $f'(x)$ mi permette di calcolare la derivata di $f(x)$ in qualsiasi punto x_0 semplicemente con una sostituzione.

Dobbiamo quindi, per prima cosa, determinare le funzioni derivate delle funzioni elementari.

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- Derivata di $f(x) = k$ (funzione costante)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

Quindi $D(k) = 0$

- Derivata di $f(x) = x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Quindi $D(x) = 1$

- Derivata di $f(x) = senx$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{senx - senx_0}{x - x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(x_0 + h) - senx_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{senx_0 cosh + cosx_0 senh - senx_0}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{senx_0(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx_0 senh}{h}$$

Poiché

$$\lim_{h \to 0} \frac{cosh - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(cosh - 1)(cosh + 1)}{h \quad (cosh + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{cos^2 h - 1}{h(cosh + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-sen^2 h}{h(cosh + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\mathrm{senh}}{\mathrm{h}} \frac{(senh)}{(cosh + 1)} = (-1) \cdot 0 = 0$$

Si ha:

$$senx_0 \cdot 0 + cosx_0 \left(\frac{senh}{h}\right) = cosx_0 \cdot 1 = cosx_0$$

Quindi $D(senx) = cosx$

- Derivata di $f(x) = cosx$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{cosx - cosx_0}{x-x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{cos(x_0+h)-cosx_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cosx_0cosh - senx_0senh - cosx_0}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{cosx_0(cosh-1)}{h} - \frac{senx_0(senh)}{h} = -senx_0$$

Quindi $D(cosx) = -senx$

- Derivata di $f(x) = lnx$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{lnx - lnx_0}{x-x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{ln(x_0+h)-lnx_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\cdot\frac{ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\cdot 1 = \frac{1}{x_0}$$

Quindi $D(\ln x) = \frac{1}{x}$

In generale $D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$ (si dimostra in modo analogo).

- Derivata di $f(x) = e^x$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = (poniamo\ x - x_0 = h) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h} = e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}$$

Quindi $D(e^x) = e^x$

In generale $D(a^x) = a^x \cdot lna$ (si dimostra in modo analogo).

Ricapitolando:

$D(k) = 0$

$D(x) = 1$

$D(senx) = cosx$

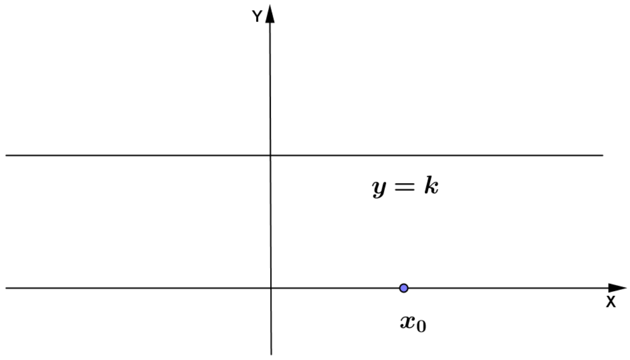
$D(cosx) = -senx$

$D(lnx) = \frac{1}{x}$ $\quad D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

$D(e^x) = e^x$ $\quad D(a^x) = a^x lna$

Osservazioni

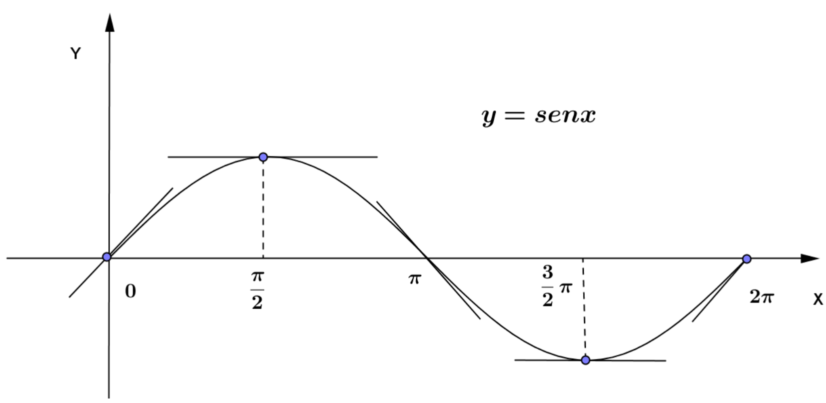
1. $D(k) = 0$: infatti il grafico di $y = k$ è una retta parallela all'asse x e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico e quindi ha coefficiente angolare $m = 0$.



2. $D(x) = 1$: infatti la retta $y = x$ ha coefficiente angolare $m = 1$ e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico di $f(x)$.

3. $D(senx) = cosx$

Osservando l'inclinazione delle tangenti al grafico di $y = senx$ possiamo verificare, per esempio, il valore della derivata in $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ecc.



SCHEDA DI LAVORO

COSTRUIRE LA FUNZIONE DERIVATA CON GEOGEBRA

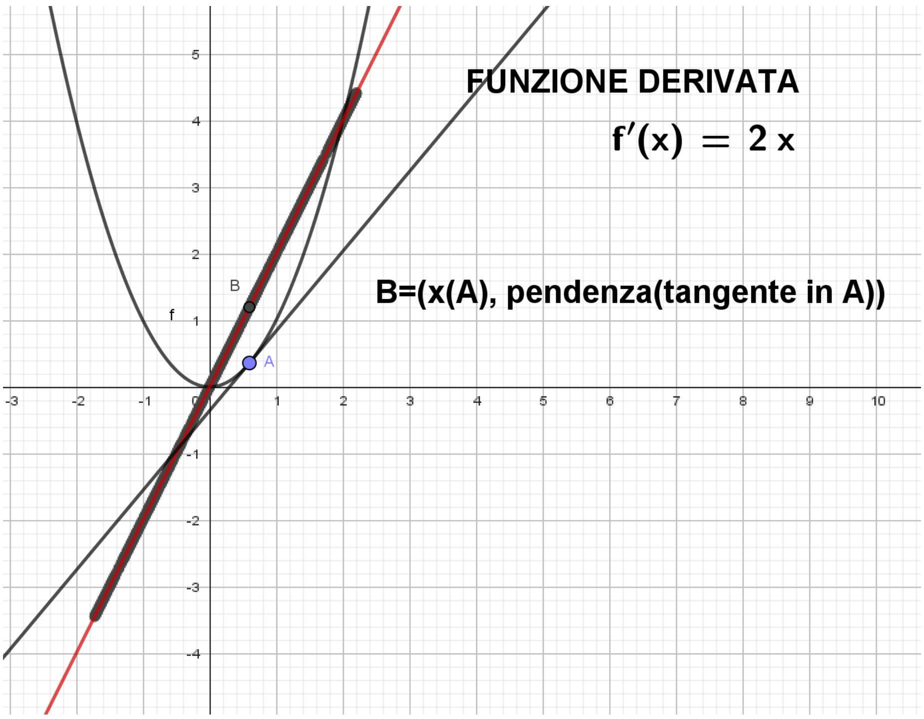
Proviamo a costruire la funzione derivata di una data funzione utilizzando il comando pendenza(retta) di Geogebra.

Sappiamo che la derivata di f(x) in un punto x_0 è il coefficiente angolare della tangente al grafico di f(x) nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

Per ottenere la funzione derivata, per esempio di $f(x)=x^2$, possiamo seguire questo procedimento:

- inseriamo una funzione, per esempio $y = x^2$;
- con punto su oggetto creiamo un punto A sul grafico di $y = x^2$;
- con il comando retta tangente in un punto disegniamo la retta (g) tangente in A al grfico;
- inseriamo da tastiera il punto $B = (x(A), pendenza(g)$;
- attiviamo la traccia di B e muoviamo A.

Otterremo così il grafico della funzione derivata che in questo caso risulta $f^{'}(x)=2x$.



Nota: possiamo anche controllare inserendo f' che dà come risultato la derivata di f.

Esercizio: scegli un'altra funzione, costruisci la derivata con la traccia di B e verifica che si tratta della f'(x).

Regole di derivazione

Derivata della somma di due funzioni

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Quindi $\boxed{D(f(x)+g(x))=D(f(x))+D(g(x))}$

Naturalmente questa regola vale anche per la somma di più di due funzioni.

Esempio:

$$D(x+senx+2)=D(x)+D(senx)+D(2)=1+cosx$$

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=(si\ somma\ e\ si\ sottrae\ f(x_0)g(x))$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Nota: $f(x)$ e $g(x)$ essendo per ipotesi derivabili in x_0 sono anche continue e quindi $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$).

Quindi

$$\boxed{D(f(x)\cdot g(x))=D(f(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot D(g(x))}$$

Esempio:

$$D(x\cdot senx)=D(x)senx+xD(senx)=senx+x\cdot cosx$$

Nota

In particolare

$$D\big(kf(x)\big)=kD(f(x))$$

Infatti

$$D\big(kf(x)\big)=D(k)f(x)+kD\big(f(x)\big)=kD(f(x))$$

Questa regola si può estendere al prodotto di più di due funzioni e risulta:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f) \cdot g \cdot h + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

Infatti:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f \cdot (gh)) = D(f) \cdot gh + f \cdot D(gh) = D(f) \cdot gh + f[D(g) \cdot h + g \cdot D(h)]$$
$$= D(f)gh + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

Esempio:

$$D(x \cdot senx \cdot cosx) = 1 \cdot senx \cdot cosx + x \cdot cosx \cdot cosx + x \cdot senx(-senx)$$

- In particolare $D(x^n) = nx^{n-1}$ poiché:

  $$D(x^n) = D\left(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\ volte}\right) = 1 \cdot \underbrace{x \cdots x}_{n-1\ volte} + \underbrace{x \cdot 1 \cdots x}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{x \cdots x \cdot 1}_{n-1\ volte} = nx^{n-1}$$

  e

  $$D(f^n(x)) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Poiché

$$D(f^n(x)) = D\left(f\underbrace{(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{n\ volte}\right) =$$

$$= f'(x) \cdot \underbrace{f(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \underbrace{f(x) \cdot f'(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{f(x) \cdots f(x) \cdot f'(x)}_{n-1\ volte} = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Esempi

$$D(x^3) = 3x^2$$

$$D(sen^3(x)) = 3sen^2x \cdot cosx$$

$$D(ln^2x) = 2lnx \cdot \frac{1}{x}$$

$$D(cos^4x) = 4cos^3x(-senx)$$

$$D(x^5) = 5x^4$$

Derivata della funzione reciproca di $f(x)$ $(f(x) \neq 0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]\frac{1}{f(x)f(x_0)}$$
$$= (f(x) \text{è } continua\ in\ x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

Esempi:

1) $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

2) $D\left(\frac{1}{senx}\right) = -\frac{\cos x}{sen^2 x}$

In particolare

a) $D(x^{-n}) = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$

Quindi $\boxed{D(x^k) = kx^{k-1}}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(x^{-2}) = -2x^{-3}$

b) $D(f^{-n}(x)) = D\left(\frac{1}{f^n(x)}\right) = -\frac{nf^{n-1}(x)f'(x)}{f^{2n}(x)} = -nf^{-n-1}(x)f'(x)$

Quindi $\boxed{D\left(f^k(x)\right) = kf^{k-1}(x)f'(x)}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(sen^{-2}x) = -2sen^{-3}x \cdot cosx$

Derivata del quoziente di due funzioni

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D\big(f(x)\big)g(x) - f(x)D\big(g(x)\big)}{g^2(x)}}$$

Esempi:

1) $$D(tgx) = D\left(\frac{senx}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cdot\cos x - senx\cdot(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2) $$D(\cot gx) = D\left(\frac{\cos x}{senx}\right) = \frac{-senx\cdot senx - \cos x\cdot\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1}{sen^2 x}$$

3) $$D\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = \frac{D(x-2)\cdot(x^2+1) - (x-2)\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-(x-2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Nota

La derivata di $f(x) = tgx$ può anche essere scritta $D(tgx) = 1 + tg^2x$.

Infatti:

$$D(tgx) = \frac{1}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = 1 + tg^2x$$

La derivata di $f(x) = cotgx$ si può scrivere anche così:

$$D(cotgx) = -\frac{1}{sen^2x} = \frac{-sen^2x - cos^2x}{sen^2x} = -1 - cotg^2x$$

ESERCIZI

REGOLE DI DERIVAZIONE

Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

1. $D(2x+tgx)$ $\left[2+\frac{1}{\cos^2 x}\right]$

2. $D\left(\frac{x+2}{3x^2-4}\right)$ $\left[-\frac{3x^2+12x+4}{(3x^2-4)^2}\right]$

3. $D(x\ln x)$ $[\ln x+1]$

4. $D((3x+1)2^x)$ $[3\cdot 2^x+(3x+1)2^x\cdot\ln 2]$

5. $D(sen^2x+\frac{\pi}{2})$ $[2senx\cos x]$

6. $D\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

7. $D\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$ $\left[\frac{2senx}{\cos^3 x}\right]$

8. $D\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ $\left[-\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\right]$

9. $D\left(\frac{\cos^2 x+1}{senx}\right)$ $\left[\frac{-\cos x(2sen^2x+\cos^2 x+1)}{sen^2x}\right]$

10. $D(x^3\cdot ln^2x)$ $[3x^2\cdot\ln^2 x+2x^2\cdot\ln x]$

11. $D(log_2^3x)$ $\left[3\log_2^2 x\cdot\frac{1}{x}\log_2 e\right]$

12. $D((x+1)^2(x^2-2)^3)$ $[2(x+1)(x^2-2)^3+3(x+1)^2(x^2-2)^2\cdot 2x]$

13. $D\left(\frac{senx+\cos x}{\cos^2 x}\right)$ $\left[\frac{\cos^2 x+2sen^2x+senx\cos x}{\cos^3 x}\right]$

14. $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^3}\right]$

15. $D\left(\frac{2}{senx}\right)$ $\left[-\frac{2\cos x}{sen^2x}\right]$

16. $D\left(x^5 + 6x\right)$ $\left[5x^4 + 6\right]$

17. $D\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$ $\left[x^2 + x\right]$

18. $D\left(x^4 - 3x^2 - 4\right)$ $\left[4x^3 - 6x\right]$

19. $D\left(x^3 - 2\cos x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\left[3x^2 + 2senx\right]$

20. $D\left(x^2 \cdot \cos x\right)$ $\left[2x \cdot \cos x - x^2 \cdot senx\right]$

21. $D\left(2 \cdot senx \cdot \cos x\right)$ $\left[2\left(\cos^2 x - sen^2 x\right)\right]$

22. $D\left(5 \cdot e^x \cdot senx\right)$ $\left[5 \cdot e^x \left(senx + \cos x\right)\right]$

23. $D\left(x \cdot \ln x - senx\right)$ $\left[\ln x + 1 - \cos x\right]$

24. $D\left(\frac{1}{3-x}\right)$ $\left[\frac{1}{(3-x)^2}\right]$

25. $D\left(\frac{5+x}{2x}\right)$ $\left[-\frac{5}{2x^2}\right]$

26. $D\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

27. $D\left(\frac{x^3-2x+1}{x+3}\right)$ $\left[\frac{2x^3+9x^2-7}{(x+3)^2}\right]$

28. $D\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ $\left[\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right]$

29. $D\left(\frac{\ln x - 2}{x}\right)$ $\left[\frac{3-\ln x}{x^2}\right]$

30. $D\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$ $\left[\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right]$

Derivata di una funzione composta

Si può dimostrare che:

$$\boxed{D\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Esempi

a) $D\left(sen(2x)\right) = \cos(2x) \cdot 2 = 2 \cdot \cos(2x)$

b) $D(\ln(x^2+1)) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$

c) $D(\ln(sen3x)) = \frac{1}{sen3x} \cdot cos3x\ 3 = 3cotg3x$

d) $D\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Nota

In particolare usando questa regola di derivazione possiamo calcolare la derivata di $f(x)^{g(x)}$.

$$D\left(f(x)^{g(x)}\right) = D\left(e^{\ln f(x)^{g(x)}}\right) = D\left(e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\right) = ecc.$$

Esempio:

$$D((x+1)^x) = D\left(e^{x\cdot \ln(x+1)}\right) = e^{x\cdot \ln(x+1)}\left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right] = (x+1)^x\left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right]$$

Se in particolare deriviamo $f^{\alpha}(x)$, con $\alpha \in \Re$, abbiamo:

$$D\left(f^{\alpha}(x)\right) = D\left(e^{\ln f^{\alpha}(x)}\right) = D\left(e^{\alpha \cdot \ln f(x)}\right) = f^{\alpha}(x)\left(\alpha \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$$

In particolare si ha che per $\alpha \in \Re$ $\boxed{D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}}$

Quindi:

$$D(\sqrt{x}) = D\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = D\left(f(x)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Esempi

a) $D(\sqrt[3]{x}) = D\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

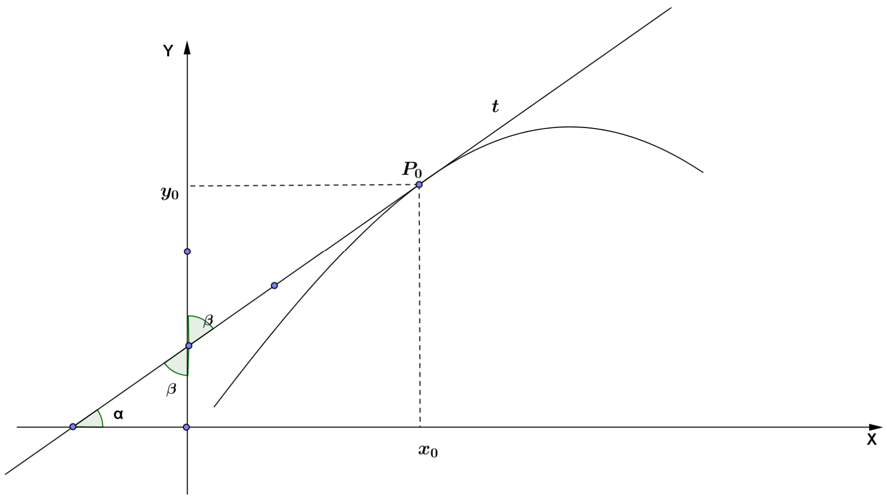
b) $D(\sqrt[3]{cosx}) = D\left(cosx^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}cosx^{-\frac{2}{3}}(-senx) = -\frac{senx}{3\sqrt[3]{cosx^2}}$

Derivata della funzione inversa

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora $x = f^{-1}(y)$ (funzione inversa di $f(x)$) è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$\boxed{[D(f^{-1}(y))]_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Dimostrazione



Poiché $f'(x_0) = tg\alpha$ e $D\left(f^{-1}(y_0)\right) = tg\beta$ essendo $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ si ha:

$$[D(f^{-1}(y))]_{y=y_0} = tg\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Determiniamo la derivata delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche:

a. $D(arcsenx) = \frac{1}{D(seny)} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ poiché

$y = arcsenx \rightarrow x = seny$

Osserviamo che $cosy = \sqrt{1 - sen^2y}$ poiché $y \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi $cosy > 0$

b. $D(arccosx) = \frac{1}{D(cosy)} = \frac{1}{-seny} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ poiché

$y = arccosx \rightarrow x = cosy$

c. $D(arctgx) = \frac{1}{D(tgy)} = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2}$ poiché $y = arctgx \rightarrow x = tgy$

d. $D(arccotgx) = \frac{1}{D(cotgy)} = -\frac{1}{1+cotg^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$

Osservazione: $D(arcsenx + arcosx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, infatti $arcsenx + arcosx = \frac{\pi}{2}$ e quindi la derivata di una costante è zero.

ESERCIZI

DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA
DERIVATA DI ARCOSENO, ARCOCOSENO E ARCOTANGENTE

1) $D(ln3x)$ $\left[\ \frac{1}{x}\ \right]$

2) $D(sen4x)$ $[\ 4 \cdot cos4x\ ]$

3) $D(\cos^3 2x)$ $[-6cos^2 2x \cdot sen2x\ ]$

4) $D(ln^2(4x+1))$ $\left[\ \frac{8\ln(4x+1)}{4x+1}\ \right]$

5) $D\left(tg^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\left[\ 2 \cdot tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\ \right]$

6) $D(e^{\frac{x-1}{x}})$ $\left[\ e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\ \right]$

7) $D(2^{x^2+1})$ $[\ ln2 \cdot 2^{x^2+1} \cdot 2x\ ]$

8) $D\left(\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right)$ $\left[\ -\frac{2x}{x^2+1}\ \right]$

9) $D\left(\frac{1}{2} \cdot sen\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\left[\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ \right]$

10) $D\left(\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\left[\ -6 \cdot sen\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

11) $D\left(tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\left[\ \frac{2}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}\ \right]$

12) $D(e^{-x})$ $[\ -e^{-x}\ ]$

13) $D(\sqrt{senx + cosx})$ $\quad [\ \frac{cosx - senx}{2\sqrt{senx+cosx}}\ ]$

14) $D(\ln(\frac{x}{x^2+1}))$ $\quad [\ \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}\ ]$

15) $D(\sqrt{\frac{x}{x^2-1}})$ $\quad [\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\ ]$

16) $D(\sqrt[3]{\frac{x}{x-2}})$ $\quad [-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}\ ]$

17) $D(arcsen(3x+1))$ $\quad [\ \frac{3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}\ ]$

18) $D\left(arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $\quad [\ -\frac{1}{x^2+1}\ ]$

19) $D(\arccos(2x+1))$ $\quad [-\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}\ ]$

20) $D\left(arct\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$ $\quad [\ \frac{1}{2x^2+2x+1}\ ]$

21) $D\left(e^{\sqrt{x^2-1}}\right)$ $\quad [\ e^{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ ]$

22) $D\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)$ $\quad [\ -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}\ ]$

23) $D(arcsen(x+2))$ $\quad [\ \frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}\ ]$

24) $D((1+3x)^x)$ $\quad [\ (1+3x)^x \left[ln(1+3x) + \frac{3x}{1+3x}\right]\ ]$

25) $D(\sqrt[4]{x^2-2})$ $\quad [\ \frac{1}{2}x(x^2-2)^{-\frac{3}{4}}\ ]$

Ricapitolando

$$D(f(x)+g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$$

$$D(f(x)\cdot g(x)) = D(f(x))\cdot g + f(x)\cdot D(g(x))$$

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f)\cdot g - f\cdot D(g)}{g^2(x)}$$

$$D\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$[D(f^{-1}(y))]_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

In particolare:

$$D\left(kf(x)\right) = k\cdot D(f(x))$$

$$D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} \; (\alpha \in R)$$

$$D(f(x)^{\alpha}) = \alpha\cdot f(x)^{\alpha-1}\cdot f'(x) \quad (\alpha \in R)$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$D\left(\ln f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$D(tgx) = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$D(cotgx) = -\frac{1}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$$

$$D(arcsenx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(arccosx) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D(arccotgx) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
REGOLE DI DERIVAZIONE

1. $D(3x + cotgx)$ $\left[\ 3 - \frac{1}{sen^2x}\ \right]$

2. $D(\frac{2}{x} + lnx)$ $[\ -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}\ ]$

3. $D(2cos^3x)$ $[\ 2 \cdot 3cos^2x(-senx) = -6senxcos^2x\ ]$

4. $D((x \cdot ln^3x)$ $[\ ln^3 x + x \cdot 3ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = ln^3x + 3ln^2x\ ]$

5. $D(\sqrt{\frac{x-1}{x}})$ $[\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\left[\frac{x-(x-1)}{x^2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1}{x^2}\ ]$

6. $D(e^{\frac{x-1}{x^2+1}})$ $[\ e^{\frac{x-1}{x^2+1}}\left[\frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2}\right] = e^{\frac{x-1}{x^2+1}}\left[\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\right]\ ]$

7. $D(arcsen\frac{1}{x})$ $[\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\sqrt{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}\ ]$

8. $D(arctg2x)$ $\left[\ \frac{1}{1+4x^2}2 = \frac{2}{1+4x^2}\ \right]$

9. $D((x+1) \cdot e^x)$ $[\ e^x + (x+1)e^x = e^x(1 + x + 1) = e^x(2 + x)\ ]$

10. $D(\arccos(\frac{2x}{x-3}))$ $[\ -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{x-3})^2}}\left[\frac{2(x-3)-2x}{(x-3)^2}\right] = \frac{6}{(x-3)^2}\sqrt{\frac{(x-3)^2}{9-6x-3x^2}}\ ]$

11. $D(\frac{senx-cosx}{cosx+1})$ $[\ \frac{(cosx+senx)(cosx+1)-(senx-cosx)(-senx)}{(cosx+1)^2}\ ]$

12. $D(\frac{x}{x^3+1})$ $[\ \frac{x^3+1-x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}\ ]$

13. $D\left(\sqrt{e^{x-2}}\right)$ $[\ \frac{1}{2\sqrt{e^{x-2}}}e^{x-2}\ ]$

14. $D((x+2)^{x-1})$ $[\ (x+2)^{x-1}(\ln(x+2) + \frac{x-1}{x+2})\ ]$

15. $D\left(\frac{1}{sen^2 x}\right)$ $\left[-\frac{2senxcosx}{sen^4 x} = -\frac{2cosx}{sen^3 x} \right]$

16. $D\left(\frac{senx}{2cosx-1}\right)$ $\left[\frac{cosx(2cosx-1)+2sen^2 x}{(2cosx-1)^2} \right]$

17. $D\left(cotg^3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\left[3cotg^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{sen^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\right) = \frac{-3cotg^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{sen^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \right]$

18. $D(4^{2x+1})$ $\left[4^{2x+1}\cdot ln4\cdot 2 = 2\ln 4\cdot 4^{2x+1} \right]$

19. $D(\arccos(1-3x))$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}(-3) = \frac{3}{\sqrt{1-(1-3x)^2}} \right]$

20. $D\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}\right)$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}}\cdot\frac{(-x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2} \right]$

21. $D(arctg(2x+1))$ $\left[\frac{1}{1+(2x+1)^2}\cdot 2 = \frac{2}{1+(2x+1)^2} \right]$

22. $D((1+3x)^x)$ $\left[(1+3x)^x\left(\ln(1+3x)+x\cdot\left(\frac{1}{1+3x}\right)\cdot 3\right) \right]$

23. $D\left(\frac{e^x+1}{2-e^x}\right)$ $\left[\frac{e^x(2-e^x)+(e^x+1)e^x}{(2-e^x)^2} = \frac{3e^x}{(2-e^x)^2} \right]$

24. $D\left(ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\right)$ $\left[\left(\frac{x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} \right]$

25. $D\left(e^{\sqrt{x^2-1}}\right)$ $\left[e^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right]$

26. $D(arcsen(3x-1))$ $\left[\frac{3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} \right]$

27. $D\left(arctg\left(\frac{x-3}{x-1}\right)\right)$ $\left[\frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{2}{(x-1)^2} \right]$

28. $D\left(\sqrt{\frac{x^4-1}{x}}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^4-1}}\cdot\frac{(3x^4+1)}{x^2} \right]$

29. $D\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ $\left[e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]$

30. $D(ln^3(2x-1))$ $\left[3ln^2(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot 2 = \frac{6ln^2(2x-1)}{2x-1} \right]$

Problemi

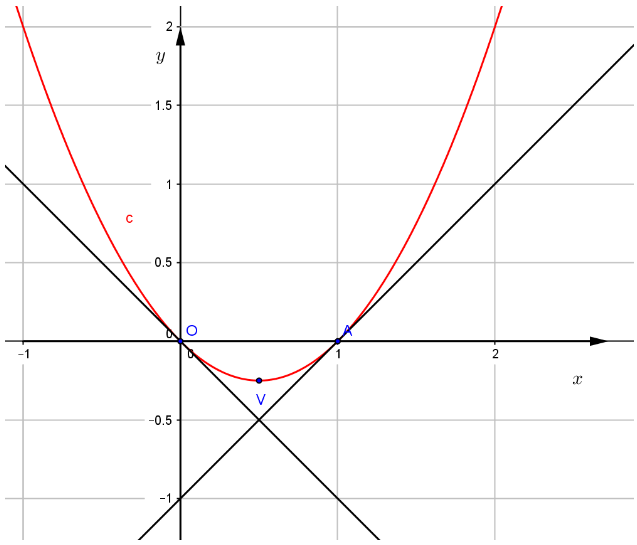
Vediamo alcuni problemi di geometria analitica in cui, per la condizione di tangenza, possiamo utilizzare la derivata.

Esempio 1

Data la parabola di equazione $y = x^2 - x$, determina l'equazione della retta tangente alla parabola nell'origine e nel suo punto $A(1;0)$.
Disegna la parabola e le due tangenti.

Svolgimento

Disegniamo la parabola, dopo aver determinato il suo vertice e le intersezioni con gli assi: il vertice risulta $V\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ e le intersezioni $O(0;0)$, $A(1;0)$



Calcoliamo, con le regole di derivazione, la derivata dell'equazione della parabola:

$$y' = 2x - 1$$

Se calcoliamo la derivata in $x = 0$ avremo il coefficiente angolare della tangente in $O(0;0)$:

$$y'(0) = -1 \rightarrow t_{(0;0)} : y = -x$$

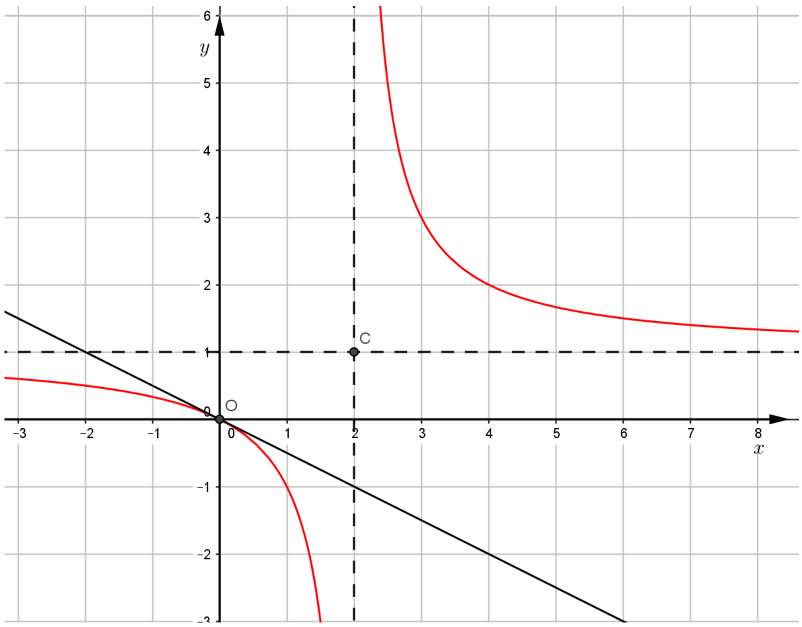
Se calcoliamo la derivata in $x = 1$ avremo il coefficiente angolare della tangente in $A(1;0)$:

$$y'(1) = 1 \rightarrow t_{(1;0)} : y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

Esempio 2

Data la funzione omografica di equazione $y=\frac{x}{x-2}$, determina l'equazione della retta tangente all'iperbole nell'origine.
Disegna l'iperbole e la tangente in (0;0).

Svolgimento
Disegniamo l'iperbole: il centro risulta $C(2;1)$ e quindi l'iperbole ha asintoto verticale $x=2$ e asintoto orizzontale $y=1$.
Inoltre si osserva che l'iperbole passa per O(0;0).



Calcoliamo la derivata della funzione e calcoliamola in $x=0$:

$$y'=D\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{x-2-x}{(x-2)^2}=-\frac{2}{(x-2)^2}$$

$$y'(0)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Quindi l'equazione della tangente all'iperbole in $O(0;0)$ avrà coefficiente angolare $m_t=-\frac{1}{2}$ ed equazione $t_{(0;0)}: y=-\frac{1}{2}x$.

Esempio 3

Determina l'equazione di una parabola P con asse di simmetria parallelo all'asse delle y, passante per $A(-1;4)$ e tangente in $T(0;1)$ alla retta $y=-x+1$.

Svolgimento

L'equazione generica della parabola con asse parallelo all'asse y è del tipo è $y=ax^2+bx+c$

Per determinare i tre parametri possiamo imporre il passaggio per A, per T e la condizione di tangenza. Abbiamo quindi:

$A(-1;4) \rightarrow 4=a-b+c$

$T(0;1) \rightarrow 1=c$

Per la condizione di tangenza possiamo calcolare la derivata in $x=0$

$$y'=2ax+b$$

$$y'(0)=b$$

Se la tangente in $x=0$ è la retta $y=-x+1$ il suo coefficiente angolare è $m=-1$ e quindi

$$y'(0)=b=-1$$

In conclusione abbiamo il seguente sistema :

$$\begin{cases} 4=a-b+c \\ 1=c \\ b=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

L'equazione della parabola risulta quindi $P: y=2x^2-x+1$

Esempio 4

Determina i coefficienti a e b di $y=\frac{ax+b}{x^2}$ sapendo che il grafico ha in $T(1;3)$ la retta tangente di equazione $4x+y-7=0$.

Determiniamo $y'=-\frac{ax+2b}{x^3}$ e $y'(1)=-a-2b$.

Poiché $t: y=-4x+7$ il coefficiente angolare è $m=-4$.

Risolviamo quindi imponendo anche il passaggio per T:

$$\begin{cases} -a-2b=-4 \\ 3=a+b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Derivate successive di una funzione

Come abbiamo definito la funzione derivata di $f(x)$, possiamo definire la funzione derivata di $f'(x)$, che indicheremo con $f''(x)$ e chiameremo derivata seconda di $f(x)$ e così via.

Esempio1

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$
$$D\big(f'(x)\big) = f''(x) = 12x^2 + 12x$$
$$D\big(f''(x)\big) = f'''(x) = 24x + 12$$
$$D\big(f'''(x)\big) = f^{(4)}(x) = 24$$
$$D\left(f^{(4)}(x)\right) = f^{(5)}(x) = 0$$

Osserviamo che $f(x)$ è un polinomio di grado 4:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq 5$$

Analogamente se $f(x)$ è un polinomio di grado k si avrà:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq k+1$$

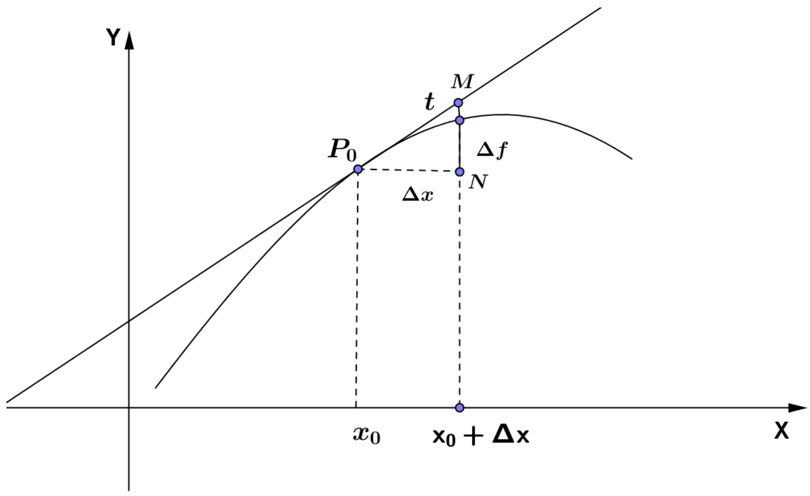
Esempio2

$$f(x) = senx$$
$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -senx$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = senx$$
....

Esempio 3

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
....

Differenziale di una funzione



Passando da x_0 a $x_0 + \Delta x$ la funzione subisce un **incremento** $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ **che può essere approssimato** con $\overline{MN}$ che viene detto differenziale di $f(x)$ in x_0 ed indicato con $df(x_o)$ (l'errore che si compie approssimando Δf con $df(x_o)$ aumenta all'aumentare di Δx) . Poiché

$$\frac{\overline{MN}}{\Delta x} = f'(x_o) \rightarrow \overline{MN} = f'(x_o) \cdot \Delta x$$

in conclusione si ha $df(x_o) = f'(x_o) \cdot \Delta x$

Nota

Se consideriamo $f(x) = x$ si avrebbe che il differenziale, essendo $f'(x) = 1$, risulterebbe $dx = \Delta x$: per questo motivo spesso si scrive anche

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

In generale, considerando x_0 variabile , si ha che il differenziale della funzione $f(x)$ risulta

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

da cui

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$ (detta notazione di Leibniz)

Esempio

Consideriamo per esempio $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$:

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(1) = 2$

$df(1) = 2dx.$

Il differenziale di $f(x) = x^2$ sarà $d(x^2) = 2x dx$.

Significati della derivata in fisica

Due fondamentali concetti della cinematica di un punto materiale sono basati sulla derivata: la *velocità* e l'*accelerazione*.

Supponiamo di considerare un punto materiale P che si muove su una traiettoria rettilinea con legge oraria $s = s(t)$.

La velocità istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

L'accelerazione istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = s''(t_0)$$

Esempi

1. Se consideriamo $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (moto uniformemente accelerato) troviamo:

$$v(t) = s'(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = v'(t) = a$$

2. Se considero $s(t) = s_0 sen\omega t$ (moto armonico)

$$v(t) = s'(t) = \omega s_0 cos\omega t$$

$$a(t) = v'(t) = -\omega^2 s_0 sen\omega t$$

come avevamo ricavato studiando il moto armonico come proiezione di un moto circolare.

3. Se due punti materiali hanno leggi orarie
$s_1(t) = t^2$
$s_2(t) = 2t^2 - 3t$

si incontrano in un istante successivo a $t = 0$? E quando accade quale velocità possiedono?

$2t^2 - 3t = t^2 \rightarrow t^2 - 3t = 0 \rightarrow t(t-3) = 0 \rightarrow t = 0, t = 3$
$v_1(t) = 2t \rightarrow v_1(3) = 6$
$v_2(t) = 4t - 3 \rightarrow v_2(3) = 9$

PROBLEMI SULLE DERIVATE

1) Determina l'equazione della tangente alla curva di equazione $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ nel suo punto di intersezione con l'asse y. [$y = -x + 1$]

2) Scrivi le equazioni delle tangenti alla curva di equazione $y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$ nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. [$y = 4x - 4$; $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$; $y = 4x + 8$]

3) Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x^2 + x$ nel suo punto P di ascissa x=1. [$y = 3x - 1$]

4) Un corpo si muove su una traiettoria rettilinea con legge oraria $s(t) = 4\ln t - 2t^2$ dove lo spazio è misurato in metri e il tempo in secondi con $t > 0$. Dopo aver determinato la velocità v(t) e l'accelerazione a(t) determina in quale istante risulta v=0 m/s e in quale istante $a = -20\frac{m}{s^2}$ [t=1 s ; t=0,5 s]

5) Un oggetto si muove in linea retta secondo la legge oraria $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 1$ (il tempo è misurato in secondi e la posizione in metri). Calcola in quali istanti la velocità è 3 m/s. Determina l'istante in cui l'accelerazione è nulla.
[t=1 s ; t=3 s ; t=2 s]

6) Una corrente attraversa la sezione di un conduttore. La carica q che attraversa la sezione nell'intervallo [0,t] risulta $q(t) = 3t$ (misurando la carica in Coulomb e il tempo in secondi). Qual è l'intensità di corrente che circola nel conduttore?
[i(t)= 3 A]

7) La carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'intervallo [0,t] risulta $q(t) = sen(2\pi t)$ (misurando la carica in Coulomb e il tempo in secondi). Qual è l'intensità di corrente che circola nel conduttore?
[i(t)=2πcos(2πt) A]

8) In un circuito LC la carica q(t) presente sulle armature del condensatore risulta $q(t) = q_0 \cdot sen(\omega t)$. Verifica che $q''(t) = -\frac{1}{LC} \cdot q(t)$ solo se $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

9) Due punti materiali si muovono sulla stessa traiettoria rettilinea con leggi orarie $s_1(t) = t^3$ e $s_2(t) = t^2 + 2t$. Dopo l'istante t=0 (in cui si trovano entrambi nell'origine del sistema di riferimento) in quale istante si trovano nella stessa posizione? In quell'istante quali sono le loro velocità?

[12 m/s; 6 m/s]

10) Una spira conduttrice circolare di raggio 10 cm è disposta perpendicolarmente ad un campo magnetico che varia nel tempo secondo la legge B(t)=3t. Determina la f.e.m. indotta attraverso la spira. Se la resistenza della spira è 2 Ω qual è l'intensità della corrente indotta?

[$f.e.m = 3 \cdot \pi \cdot 10^{-2} V$; $i = 1{,}5 \cdot \pi \cdot 10^{-2} A$]

SCHEDA DI VERIFICA 1

1) Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a) $y = \ln^2(3x-1)$

b) $y = \dfrac{\cos x - 3senx}{1+senx}$

c) $y = \sqrt{1-e^{2-x}}$

d) $y = 3^{\frac{1}{x}}$

e) $y = tg^2(2x - \dfrac{\pi}{4})$

f) $y = (x+2)arctg\,\dfrac{x}{3}$

g) $y = (3x^2+2)^x$

h) $y = arcsen(2x+1)$

2) Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata, eventuali punti di non derivabilità e disegnane il grafico.

a) $f(x) = \left|\dfrac{2-x}{x-4}\right|$ b) $f(x) = \sqrt{9x^2-1}$

Problema 1

Determina l'equazione della funzione omografica $\Im$ passante per P(1,1) e avente in (0,0) la stessa tangente della parabola di equazione $y = 2x - x^2$. Disegna le due curve e scrivi l'equazione della tangente comune.

Problema 2

Determina a, b, c in modo che la curva di equazione $y = \dfrac{ax^2+bx}{x+c}$ abbia nell'origine come tangente la retta di equazione $y = x$ e come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 2x+1$.

SOLUZIONI
SCHEDA 1

1.

a. $2\ln(3x-1)\cdot\frac{1}{3x-1}\cdot 3=\frac{6\ln(3x-1)}{3x-1}$

b. $\frac{(-senx-3cosx)(1+senx)-cosx(cosx-3senx)}{(1+senx)^2}=\frac{-(senx+3cosx+1)}{(1+senx)^2}$

c. $\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2-x}}}(-e^{2-x})(-1)=\frac{e^{2-x}}{2\sqrt{1-e^{2-x}}}$

d. $3^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\ln 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

e. $2tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot 2=\frac{4tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$

f. $arctg\frac{x}{3}+(x+2)\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{1}{3}=arctg\frac{x}{3}+\frac{3(x+2)}{9+x^2}$

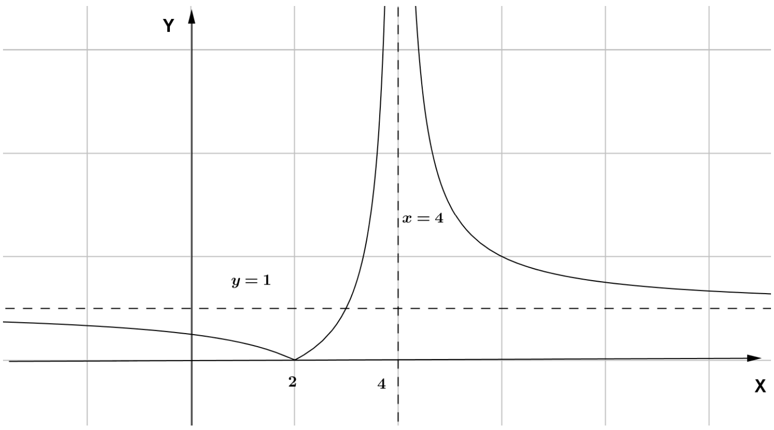
g. $(3x^2+2)^x\left[\ln(3x^2+2)+x\cdot\frac{1}{3x^2+2}\cdot 6x\right]=(3x^2+2)^x\left[\ln(3x^2+2)+\frac{6x^2}{3x^2+2}\right]$

h. $\frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$

2.

a. $f(x)=\left|\frac{2-x}{x-4}\right|$

$Df: R\setminus\{4\}$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1\to y=1$ *asintoto orizzontale*

$\lim_{x\to 4} f(x)=+\infty\to x=4$ *asintoto verticale* discontinuità di 2ª specie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{x-4} & 2 < x < 4 \\ -\dfrac{2-x}{x-4} & x \leq 2 \cup x > 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-4)^2} & 2 < x < 4 \\ -\dfrac{2}{(x-4)^2} & x < 2 \cup x > 4 \end{cases}$$

Quindi $x = 2$ è punto angoloso $(\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{2}, \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{2})$

b. $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

$Df: x \leq -\dfrac{1}{3} \cup x \geq \dfrac{1}{3}$

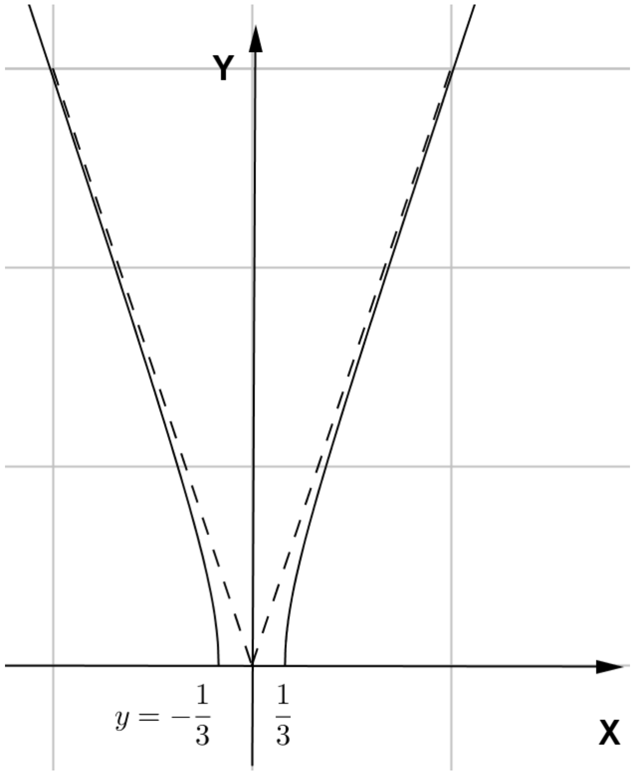
Funzione continua

$y = \pm 3x$ asintoti obliqui

$f'(x) = \dfrac{9x}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

$x = -\frac{1}{3},\ x = \frac{1}{3}$ punti a tangente verticale

$(\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-} f'(x) = -\infty, \lim_{x\to \frac{1}{3}^+} f'(x) = +\infty)$



Problema 1: $\Im : y = \dfrac{2x}{x+1}$; $t_{(0;0)} : y = 2x$

Problema 2: $a = 2$; $b = c = -1$

SCHEDA DI VERIFICA 2

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a. $D(sen^2x cosx)$

b. $D(\frac{tgx}{senx-cosx})$

c. $D(2^{3x+1})$

d. $D(ln^3(1-2x))$

e. $D(\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}})$

f. $D(\sqrt{lnx-1})$

g. $D(\sqrt[3]{e^{2x}-1})$

h. $D(arcsen\frac{2x}{x-1})$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata ed eventuali punti di non derivabilità:

a. $f(x) = \left|\frac{1}{x-1}\right|$

b. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

c. $f(x) = |lnx|$

d. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$

Problema 1
Determina l'equazione della parabola P con asse di simmetria $x = 2$ e tangente in $T(4;0)$ alla retta di equazione $4x - y - 16 = 0$.

Problema 2
Determina i coefficienti a e b dell'equazione $f(x) = \frac{ax+b}{x^2}$ in modo che la curva da essa rappresentata passi per $T(1;3)$ e sia tangente in T alla retta di equazione
$y = -4x + 7$.

SOLUZIONI
SCHEDA 2

1. a. $2senx\cos^2 x - sen^3 x$

b. $\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(senx-cosx)-tgx(cosx+senx)}{(senx-cosx)^2}$

c. $2^{3x+1} \cdot ln2 \cdot 3$

d. $3ln^2(1-2x) \cdot \frac{1}{1-2x}(-2) = -\frac{6ln^2(1-2x)}{1-2x}$

e. $\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}} \cdot \frac{(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$

f. $\frac{1}{2\sqrt{lnx-1}} \cdot \frac{1}{x}$

g. $\frac{e^{2x} \cdot 2}{3\sqrt[3]{(e^{2x}-1)^2}}$

h. $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(x-1)^2}}} \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right)$

2. a. $Df = R \setminus \{1\}$; $x = 1$ asintoto verticale ; $y = 0$ asintoto orizzontale

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x > 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 1 \end{cases}$$

b. $Df: x \leq -1 \cup x \geq 1$; $y = \pm x$ asintoti obliqui ; $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $x = \pm 1$ punti a tangente verticale

c. $Df: x > 0$, $x = 0$ asintoto verticale; $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ -\frac{1}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$;

$x = 1$ punto angoloso

d. $Df = R$, $y = x$ asintoto obliquo, $f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$;

$x = 1$ flesso a tangente verticale

Problema 1: $y = x^2 - 4x$

Problema 2: $a = 2$; $b = 1$

SCHEDA DI VERIFICA 3

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a. $D\left(ln\frac{x-1}{x}\right)$

b. $D\left(\sqrt{\frac{senx}{2cosx-1}}\right)$

c. $D\left(arctg^2\left(\frac{2x}{x+3}\right)\right)$

d. $D\left((x-2)^{3x-1}\right)$

e. $D\left(x\cdot arcsen(3x-1)\right)$

f. $D\left((x^2+1)e^{-x}\right)$

g. $D\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$

h. $D\left(tg^3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata, eventuali punti di non derivabilità e disegnare il grafico:

a. $y=\left|\frac{x}{2-x}\right|$

b. $y=\sqrt{1-x^2}$

Problema 1

Determina l'equazione della parabola P con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate passante per $P(2;0)$ e avente in $(0;0)$ la stessa tangente di $y=\frac{x}{1-x}$.

Disegna le due curve e scrivi l'equazione della tangente comune.

$[\wp: y=-\frac{1}{2}x^2+x\ ;t: y=x]$

Problema 2

Data la funzione $y=\frac{ax^2+bx+c}{x}$, determina a, b, c in modo che abbia in $(1;0)$ come tangente la retta di equazione $x-y-1=0$ e che abbia asintoto obliquo parallelo alla retta $y=\frac{1}{2}x$.

[a$=\frac{1}{2}$; $b=0$; $c=-\frac{1}{2}$]

SOLUZIONI
SCHEDA 3

1. a. $\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x(x-1)}$

b. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2cosx-1}{senx}}\cdot\frac{2-cosx}{(2cosx-1)^2}$

c. $2arctg\left(\frac{2x}{x+3}\right)\cdot\frac{6}{5x^2+6x+9}$

d. $(x-2)^{3x-1}\left[3\ln(x-2)+\frac{3x-1}{x-2}\right]$

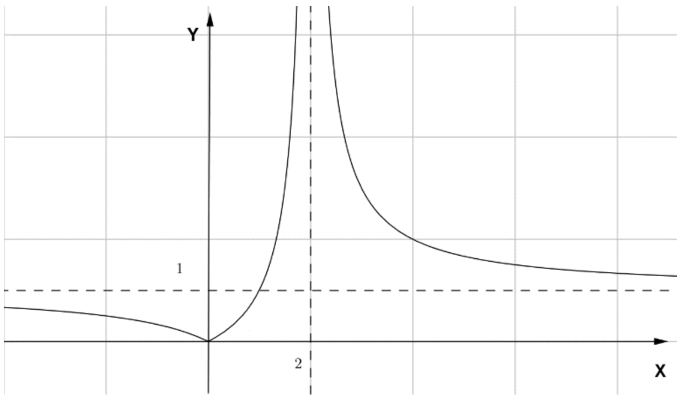
e. $arcsen(3x-1)+x\cdot\frac{3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}$

f. $2xe^{-x}+(x^2+1)\cdot e^{-x}(-1)=e^{-x}(2x-x^2-1)$

g. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$

h. $3tg^2(x-\frac{\pi}{3})\cdot\frac{1}{cos^2(x-\frac{\pi}{3})}$

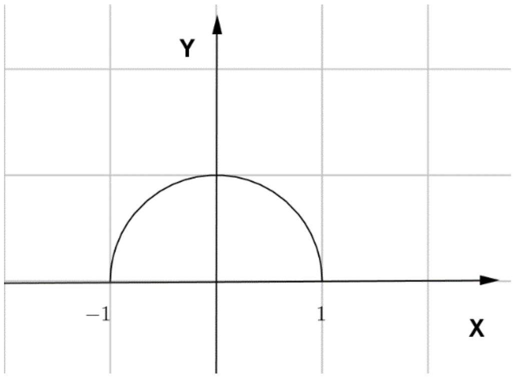
2. a. $Df=R\setminus\{2\}$



$x=2$ asintoto verticale (discontinuità di seconda specie)
$y=1$ asintoto orizzontale

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{(2-x)^2} & 0<x<2\\ -\frac{2}{(2-x)^2} & x<0\ \cup x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^-}f'(x)=-\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to0^+}f'(x)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}x=0$$ punto angoloso



b. $Df=-1\le x\le1$
$y^2=1-x^2\Rightarrow x^2+y^2=1$
Circonferenza di centro $(0;0)$ e raggio 1

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\lim_{x\to-1^+}f'(x)=+\infty\to x=-1$ punto a tangente verticale

$\lim_{x\to1^-}f'(x)=-\infty\to x=1$ punto a tangente verticale