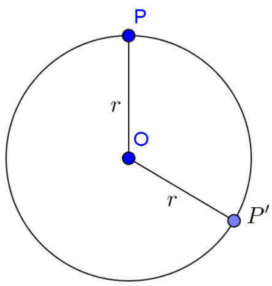
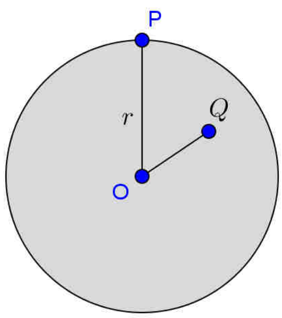
GEOMETRIA EUCLIDEA
Circonferenza e cerchio

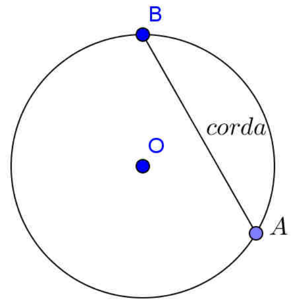
Definizione
Una ***circonferenza*** di centro O e raggio *r* è l'insieme dei punti del piano che hanno da O distanza uguale a *r*.
I segmenti che congiungono il centro O con i punti della circonferenza hanno tutti la stessa lunghezza e sono detti raggi della circonferenza.



Definizione
Un ***cerchio*** di centro O e raggio *r* è l'insieme dei punti del piano la cui distanza da O è minore o uguale a *r* .
La circonferenza di centro O e raggio *r* è quindi il "contorno" del cerchio di centro O e raggio *r* e appartiene al cerchio.

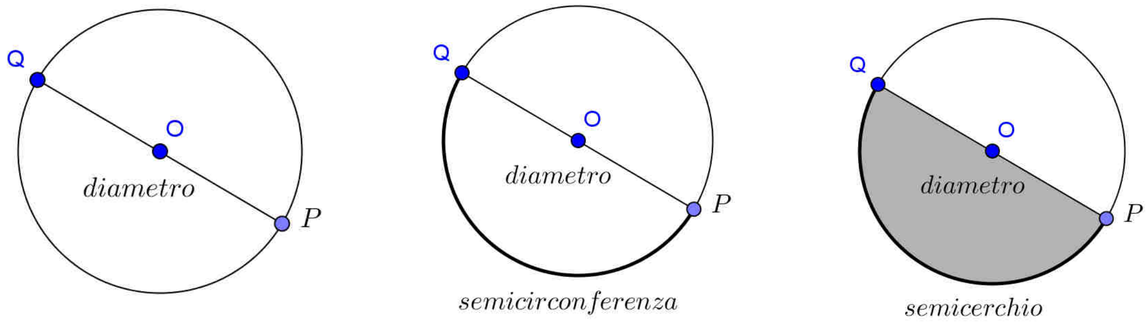


Si chiama ***corda*** il segmento che unisce due punti A e B di una circonferenza: A e B si dicono estremi della corda.



Si chiama ***diametro*** ogni corda passante per il centro della circonferenza.

Ogni diametro divide la circonferenza e il cerchio in due parti dette rispettivamente semicirconferenze e semicerchi.



Dimostriamo subito un importante teorema:

Teorema: *per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza*

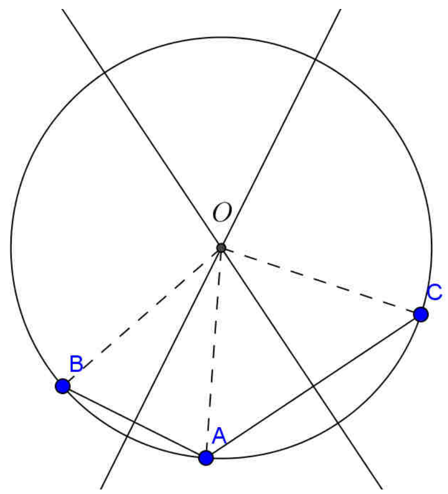
Dimostrazione

Consideriamo tre punti non allineati A, B, C: uniamo A con B e tracciamo l'asse del segmento AB; uniamo A con C e tracciamo l'asse del segmento AC.

Sia O il punto di intersezione dei due assi: poiché O appartiene all'asse di AB si ha $OA \cong OB$, ma poiché appartiene anche all'asse di AC si ha anche $OA \cong OC$.

Quindi per O è equidistante dai tre punti e quindi la circonferenza di centro O e raggio OA passa anche per B e C.

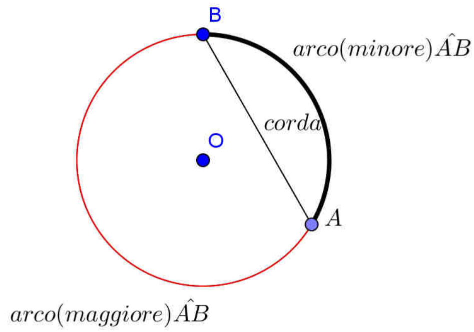
Questa è anche l'unica circonferenza passante per i tre punti dal momento che l'intersezione dei due assi è solo O.



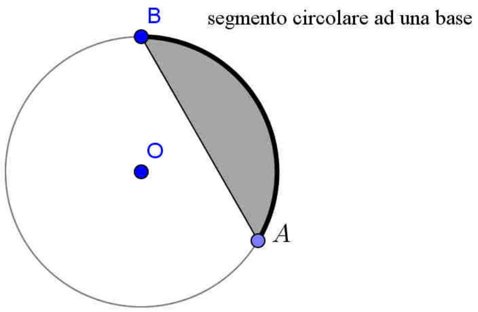
Parti della circonferenza e del cerchio

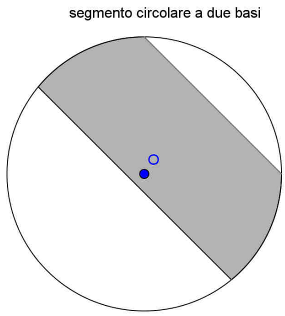
Diamo **qualche altra definizione.**

Le due parti della circonferenza individuate da una corda si dicono **archi**.

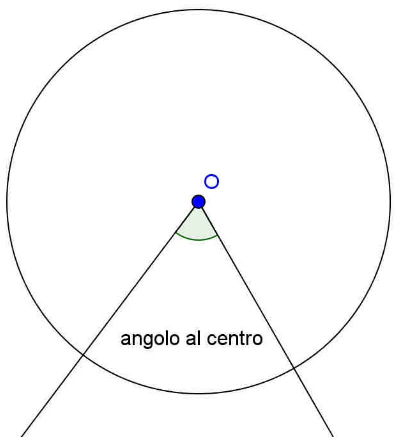


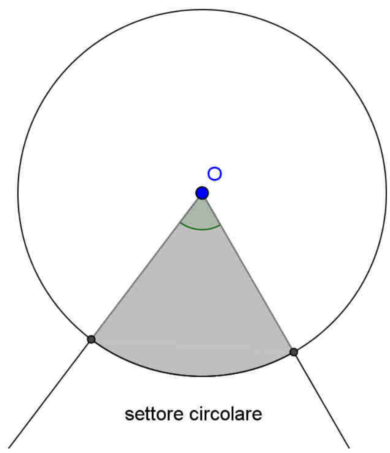
La parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco corrispondente si chiama **segmento circolare ad una base;**
la parte di cerchio compresa tra due corde parallele e i due archi che hanno per estremi gli estremi delle due corde si chiama **segmento circolare a due basi**





Un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza si chiama **angolo al centro.**
L'intersezione tra un cerchio e un suo angolo al centro si chiama **settore circolare**.

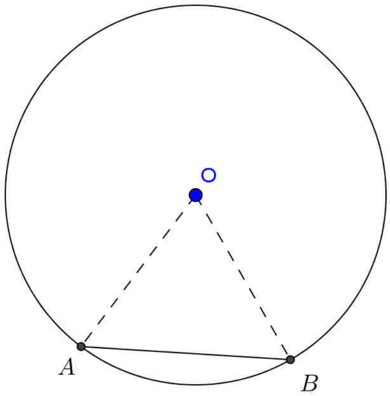




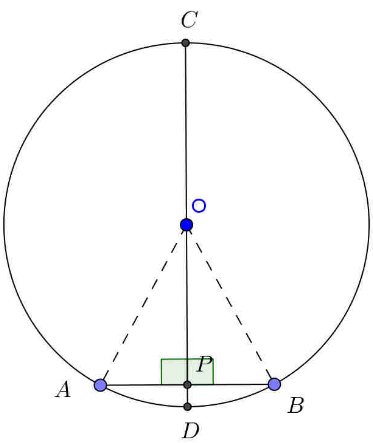
SCHEDA 1
Proprietà delle corde di una circonferenza

1) ***Il diametro è la corda di lunghezza massima***

Dimostrazione: considera una corda AB che non sia un diametro e congiungi A e B con il centro O della circonferenza. Se consideri il triangolo AOB, ricordando che in un triangolo ogni lato è … ……. della somma degli altri due, abbiamo che ………………….. e quindi $\overline{AB} < diametro$.



2) ***Il diametro perpendicolare ad una corda passa per il suo punto medio e viceversa.***

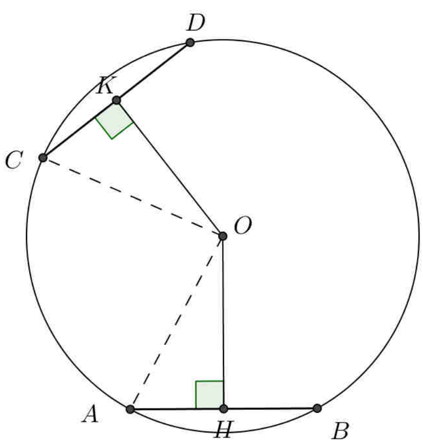


Dimostrazione: chiamiamo P il punto di intersezione tra il diametro CD perpendicolare alla corda AB e la corda AB. Il triangolo AOB è ………….. e quindi l'altezza OP è anche ……………..

In conclusione $AP \cong PB$ cioè P è il punto medio di AB.

Analogamente se un diametro passa per il punto medio di una corda……………………………

3) ***Due corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro della circonferenza e viceversa***



Dimostrazione: consideriamo AB e CD due corde congruenti della stessa circonferenza e tracciamo le distanze OH e OK. Tracciando i raggi AO,CO otteniamo due triangoli rettangoli che risultano…………………….. poiché hanno:

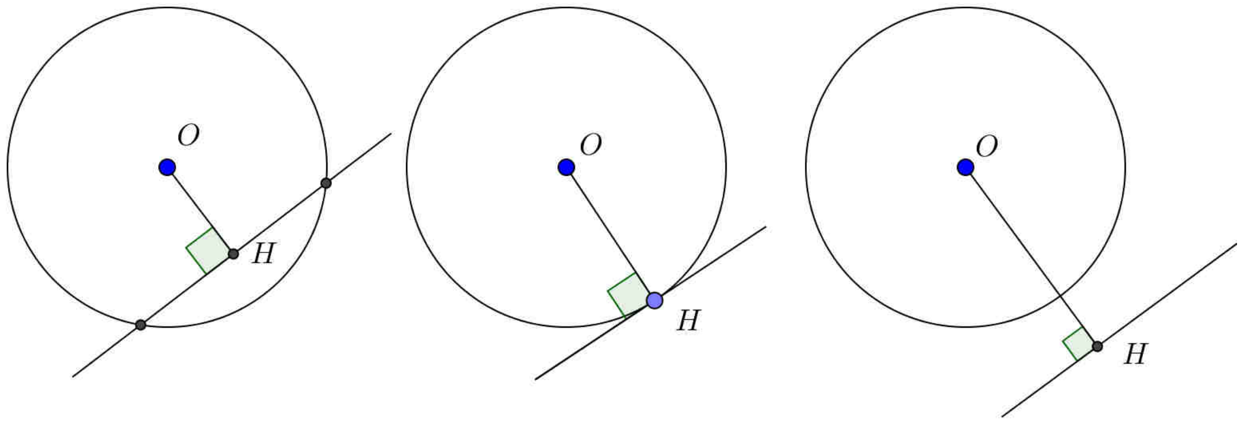
…………………………..

Quindi anche $OH \cong OK$ cioè le due corde hanno la stessa distanza dal centro.

In modo analogo si dimostra che se due corde hanno la stessa distanza dal centro sono congruenti.

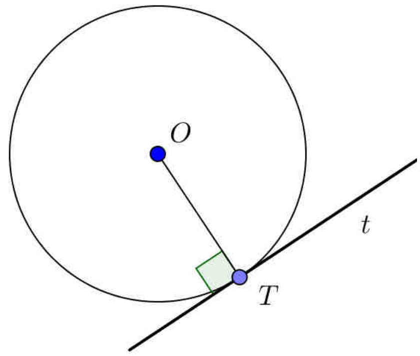
SCHEDA 2
Retta e circonferenza

Definizione
Se una retta ha due punti di intersezione con una circonferenza si dice **secante**;
un solo punto di intersezione con la circonferenza si dice **tangente**;
nessun punto di intersezione con la circonferenza si dice **esterna** alla circonferenza.

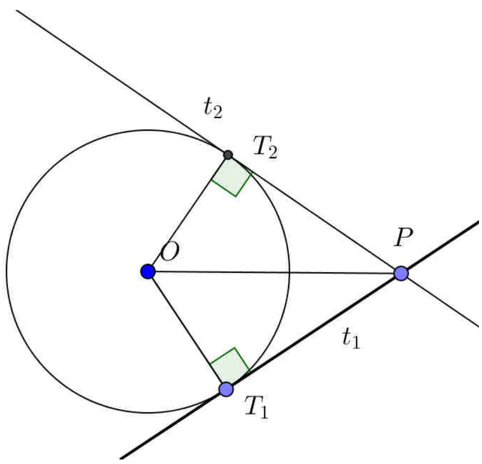


Si osserva che se la retta è secante la sua distanza dal centro della circonferenza è minore del raggio, se è tangente la sua distanza dal centro è uguale al raggio e se è esterna la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio (vale anche il viceversa cioè se la distanza è……………..allora la retta è secante ecc.).

1) ***Se una retta t è tangente ad una circonferenza in un punto T allora il raggio OT è perpendicolare alla retta t*** .



Dimostrazione: poiché la distanza dal centro è …………al raggio (se fosse minore la retta sarebbe secante, se fosse maggiore sarebbe esterna), il raggio OT è necessariamente il segmento perpendicolare la cui misura dà la distanza tra retta e centro.



2)***Se da un punto P esterno ad una circonferenza si tracciano le rette tangenti alla circonferenza e si indicano con T_1, T_2 i punti di tangenza, si ha che $PT_1 \cong PT_2$.***

Dimostrazione: congiungiamo O con P e con T_1, T_2.
I triangoli rettangoli OPT_1, OPT_2 sono congruenti poiché…………………………………….…………………

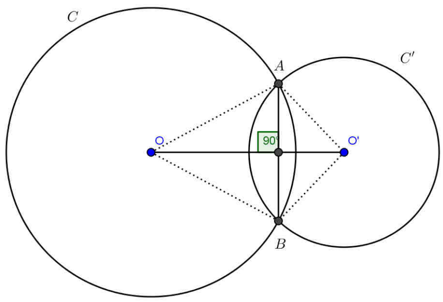
e quindi anche $PT_1 \cong PT_2$

Posizione reciproca tra due circonferenze

Definizione: due circonferenze si dicono "**secanti**" quando hanno due punti in comune.

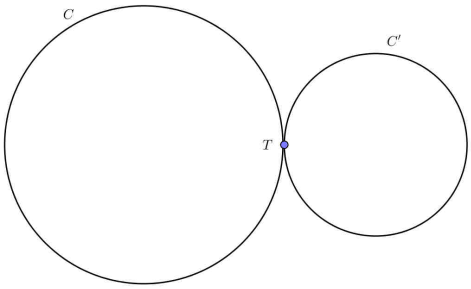
Nota

Osserviamo che il segmento AB è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze: infatti essendo $OA \cong OB$, $O'A \cong O'B \Rightarrow$ O e O' appartengono all'asse di AB e quindi OO' è asse di AB e di conseguenza OO' e AB risultano perpendicolari.

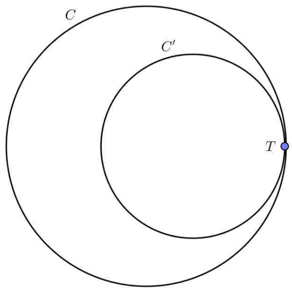


circonferenze secanti

Definizione: due circonferenze si dicono "**tangenti**" quando hanno un solo punto in comune.
Se il centro di una delle due circonferenze è esterno all'altra si dicono tangenti "esternamente", se è interno di dicono tangenti "internamente". Il punto comune si chiama punto di tangenza o di contatto.

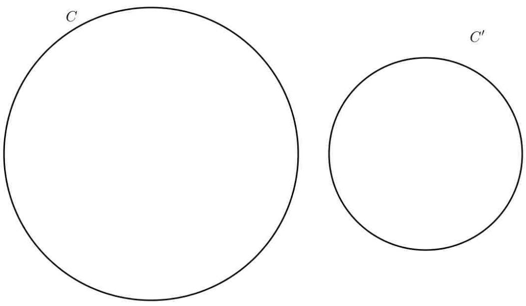


circonferenze tangenti esternamente

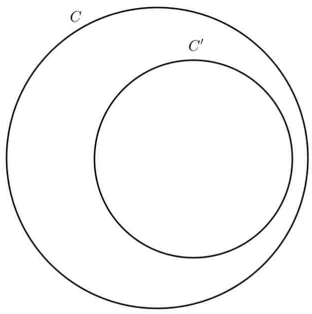


circonferenze tangenti internamente

Definizione: due circonferenze si dicono "**esterne**" quando tutti i punti di una circonferenza sono esterni all'altra e viceversa mentre si dicono **l'una "interna" all'altra** quando tutti i punti di una sono interni all'altra.

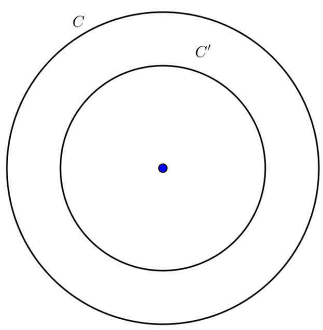


circonferenze esterne



C' interna a C

Definizione: due circonferenze, una interna all'altra, si dicono "**concentriche**" quando hanno lo stesso centro.

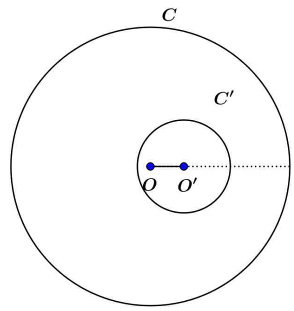


circonferenze concentriche

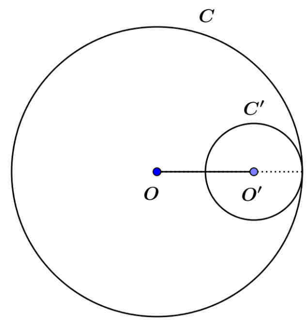
Posizione reciproca tra due circonferenze e distanza tra i loro centri

Consideriamo due circonferenze *C* e *C'* di raggi *r* e *r'* e centri O e O' ed osserviamo la distanza tra i loro centri al variare della loro posizione reciproca (iniziamo con C' interna a *C* e poi allontaniamo gradualmente O' da O).

1) *C'* è interna a *C* $\Leftrightarrow$ $OO' < r - r'$

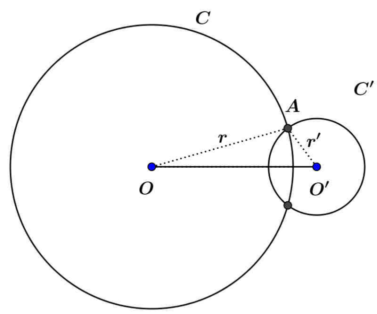


2) *C'* è tangente internamente a *C* $\Leftrightarrow$ $OO' = r - r'$

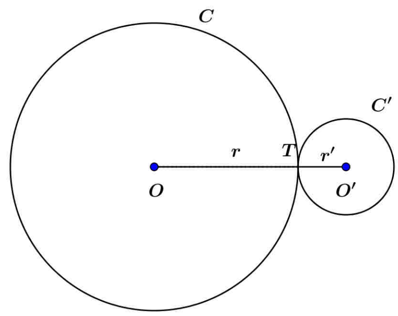


3) *C'* e *C* sono secanti $\Leftrightarrow$ $r - r' < OO' < r + r'$

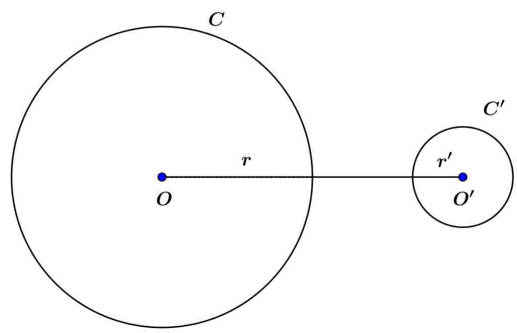
Infatti considerando il triangolo OAO' avremo che il lato OO' è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.



4) *C'* e *C* sono tangenti esternamente $\Leftrightarrow$ $OO' = r + r'$

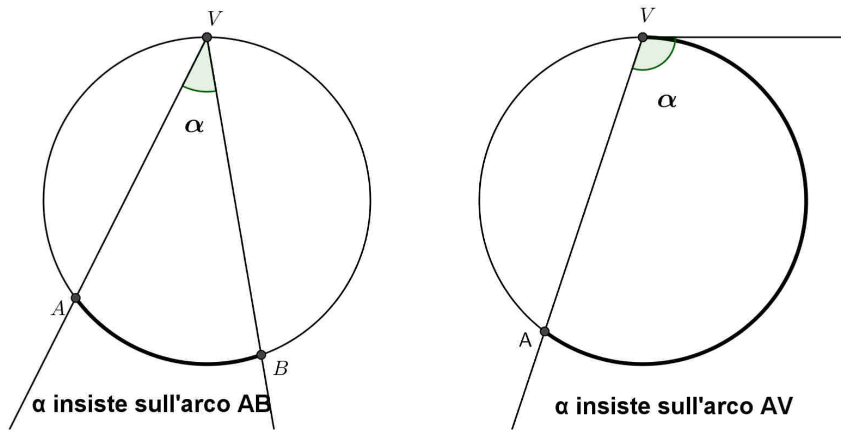


5) *C'* e *C* sono esterne $\Leftrightarrow$ $OO' > r + r'$



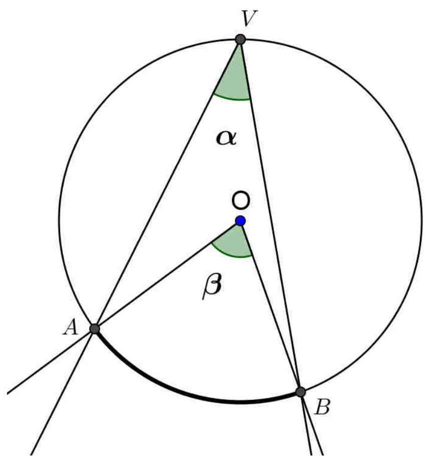
Angoli alla circonferenza e angoli al centro

Definizione: si dice "**angolo alla circonferenza**" un angolo convesso avente il vertice sulla circonferenza e i lati entrambi secanti o uno secante ed uno tangente alla circonferenza.



L'intersezione dell'angolo con la circonferenza è un arco e si dice che l'angolo alla circonferenza **insiste** su tale arco.

Definizione: un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che "insistono" sullo stesso arco si dicono **corrispondenti.**

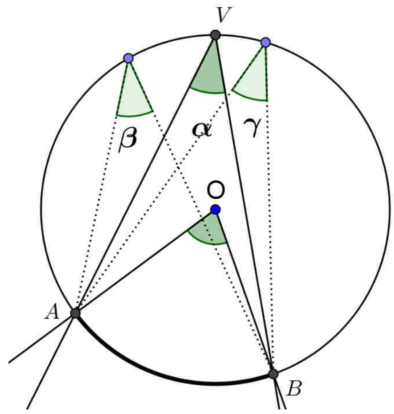


α e β sono angoli corrispondenti

Nota

Ad un angolo alla circonferenza corrisponde un solo angolo al centro "corrispondente" mentre, fissato un angolo al centro, ci sono infiniti angoli alla circonferenza "corrispondenti".

α, β, γ sono tutti angoli alla circonferenza corrispondenti all'angolo al centro $A\hat{O}B$



C'è un'importante proprietà che riguarda gli angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.

Teorema

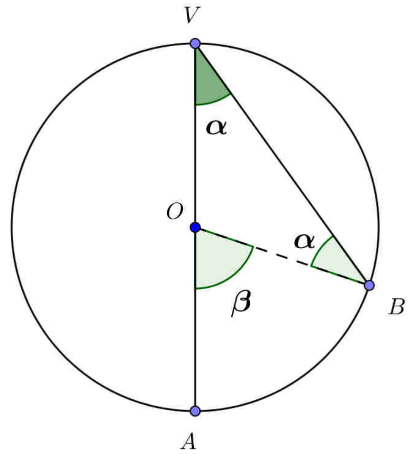
L'angolo al centro è doppio di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.

Dimostrazione

Indichiamo con α l'angolo alla circonferenza e con β il corrispondente angolo al centro.

a) Cominciamo a considerare il caso in cui il centro O della circonferenza appartiene ad un lato dell'angolo alla circonferenza.
Congiungiamo O con B e consideriamo il triangolo isoscele OBV: si avrà quindi $O\hat{B}V \cong \alpha$.

Ma allora, per il teorema dell'angolo esterno, si avrà $\beta \cong \alpha + \alpha = 2\alpha$.

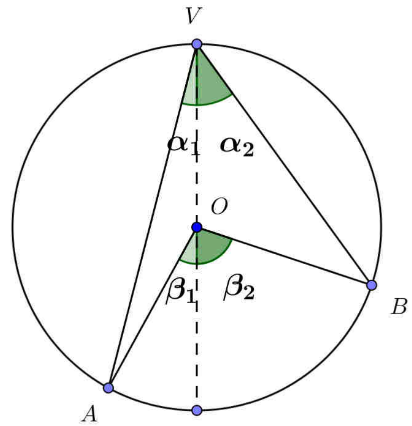


b) Sia O interno all'angolo α. Tracciamo il diametro VO e avremo, per quanto visto prima

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2$$

e quindi

$$\beta \cong \beta_1 + \beta_2 \cong 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$

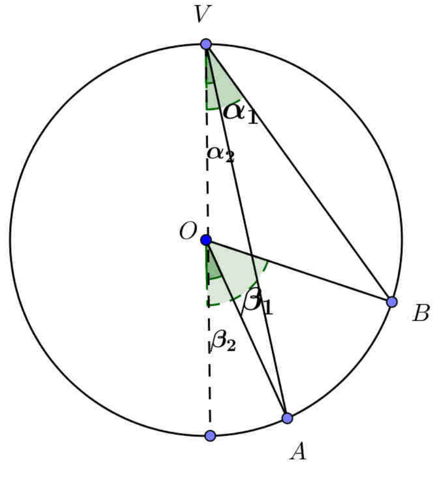


c) Sia O esterno all'angolo α. Tracciamo ancora il diametro VO e consideriamo β come differenza tra β_1 e β_2 (vedi figura). Anche questa volta avremo:

$$\beta_1 \cong 2\alpha_1, \quad \beta_2 \cong 2\alpha_2$$

e quindi

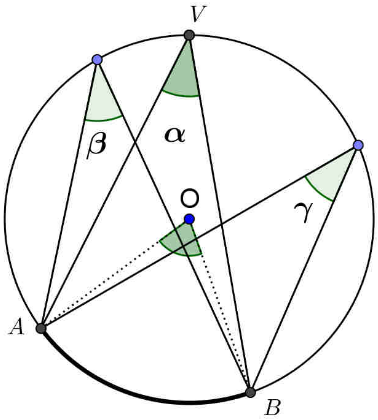
$$\beta \cong \beta_1 - \beta_2 \cong 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha$$



Nota
In modo analogo si dimostra la proprietà anche nel caso in cui l'angolo alla circonferenza ha un lato tangente alla circonferenza.

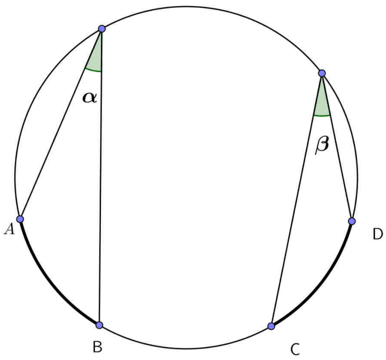
Ci sono alcune importanti conseguenze di questo teorema.

1) Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti poiché sono metà dello stesso angolo al centro.



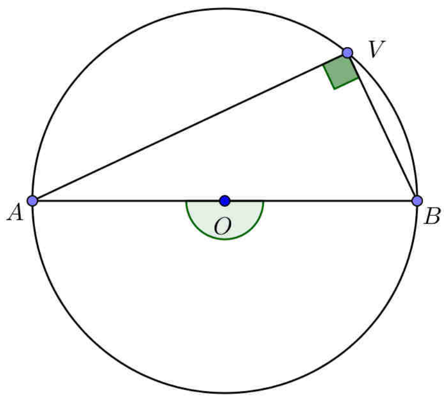
$\alpha \cong \beta \cong \gamma$

2) Angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali sono uguali.



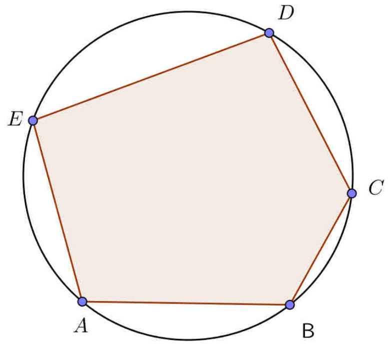
$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \alpha \cong \beta$

3) **Un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto** poiché risulta la metà di un angolo piatto.



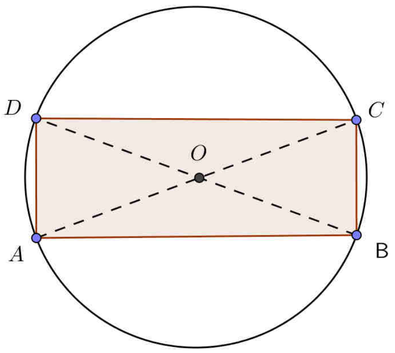
SCHEDA 3
Poligoni inscritti in una circonferenza

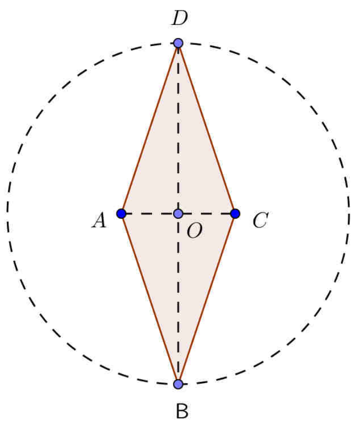
Definizione: un poligono si dice "inscritto" in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza e la circonferenza si dice circoscritta al poligono.



Quali poligoni sono inscrivibili in una circonferenza?

Se consideriamo un rettangolo osserviamo che il punto di incontro delle diagonali è il centro della circonferenza circoscritta poiché risulta alla stessa distanza da tutti i vertici.
Invece se consideriamo un rombo (che non sia un quadrato) non riusciamo a inscriverlo in una circonferenza.

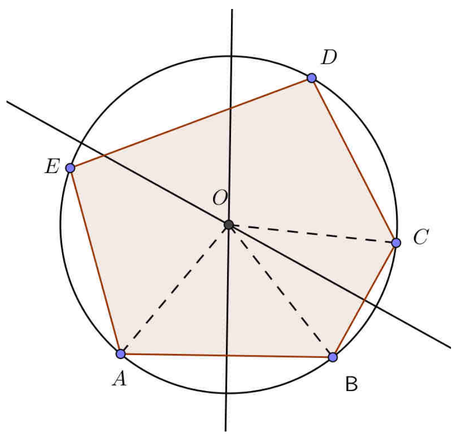




Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere inscritto in una circonferenza?

Consideriamo un poligono inscritto in una circonferenza ed indichiamo con O il centro della circonferenza: risulta che O è alla stessa distanza da tutti i vertici del poligono.

Quindi, ricordando che i punti dell'asse di un segmento sono …………………..dagli estremi del segmento, il centro O dovrà appartenere all'asse di AB, all'asse di BC ecc. (vedi figura).

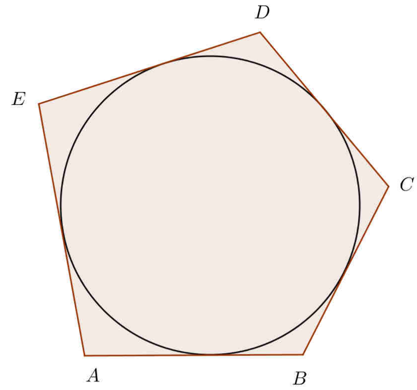


Quindi possiamo concludere che se un poligono è inscritto in una circonferenza gli assi dei suoi lati si incontrano in uno stesso………….. che risulta il ………………….della circonferenza circoscritta.

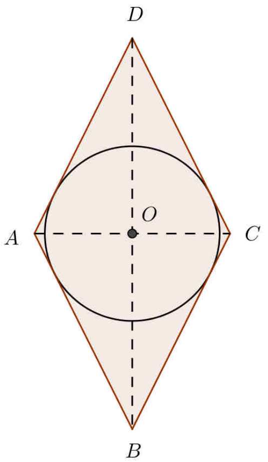
Viceversa è chiaro che se in un poligono gli assi dei lati si incontrano tutti in uno stesso ………, allora il poligono può essere………………….in una circonferenza.

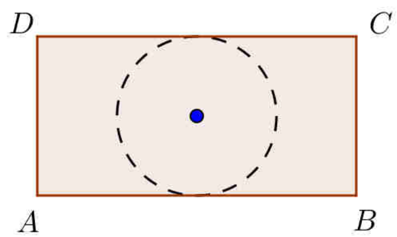
SCHEDA 4
Poligoni circoscritti ad una circonferenza

Definizione: un poligono si dice "circoscritto" ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza e la circonferenza si dice inscritta nel poligono.

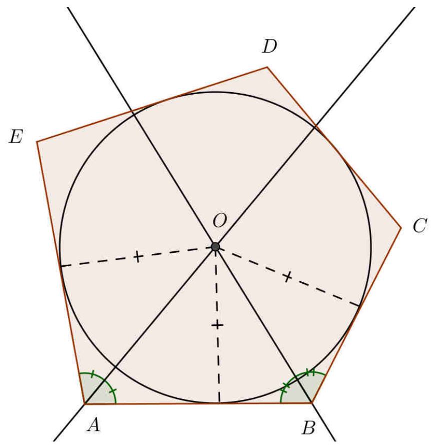


Quali poligoni sono circoscrivibili ad una circonferenza?
Se consideriamo un rombo vediamo che il punto di incontro delle sue diagonali risulta il centro della circonferenza inscritta poiché risulta alla stessa…………………..dai lati del rombo, mentre un rettangolo (che non sia un quadrato) non è circoscrivibile ad una circonferenza.





Qual è la proprietà che permette ad un poligono di essere circoscrivibile ad una circonferenza?
Consideriamo un poligono circoscritto ad una circonferenza ed indichiamo con O il suo centro: osserviamo che O è alla stessa distanza da tutti i lati del poligono.
Quindi, ricordando che i punti della bisettrice di un angolo sono ………………………..dai lati dell'angolo, il centro O dovrà appartenere alla bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, dell'angolo $\hat{B}$ ecc. (vedi figura).



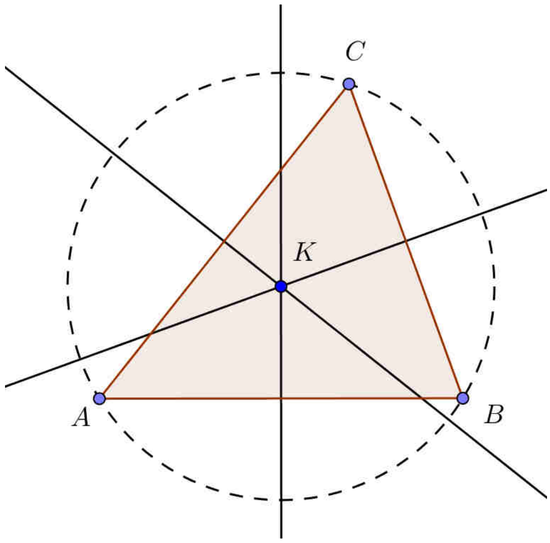
Quindi possiamo concludere che se un poligono è circoscritto ad una circonferenza le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto che risulta il …………….. della circonferenza.
Viceversa è chiaro che se in un poligono le bisettrici degli angoli si incontrano in uno stesso punto, allora il poligono è ……………………….ad una circonferenza e il punto di incontro delle bisettrici ne è il ……………………

Punti notevoli di un triangolo

Circocentro

Abbiamo dimostrato che per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza: quindi in un triangolo gli **assi dei lati** si incontrano in uno stesso punto che viene detto "circocentro" ed è il centro della circonferenza circoscritta.

K è il circocentro del triangolo ABC



Incentro

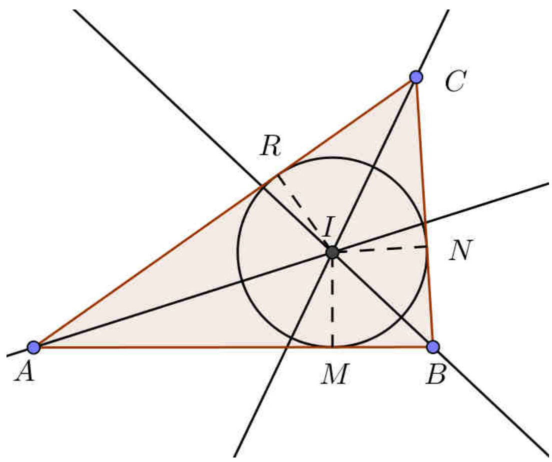
Teorema: in un triangolo le **bisettrici** degli angoli interni si incontrano in uno stesso punto che viene chiamato "incentro" e risulta il centro della circonferenza inscritta.

Dimostrazione: tracciamo le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e sia I il loro punto di intersezione. Tracciamo da I le perpendicolari ai lati e indichiamo con M,N,R i piedi di queste perpendicolari.

$IM \cong IR$ poiché I appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$;

$IM \cong IN$ poiché I appartiene alla bisettrice di $\hat{B}$.

Ma allora, per la proprietà transitiva, $IN \cong IR$ cioè I è equidistante dai lati dell'angolo $\hat{C}$ e quindi I appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.



In conclusione tutte le bisettrici si incontrano in I e poiché I si trova alla stessa distanza dai lati del triangolo risulta il centro della circonferenza inscritta nel triangolo (i lati sono tangenti alla circonferenza).

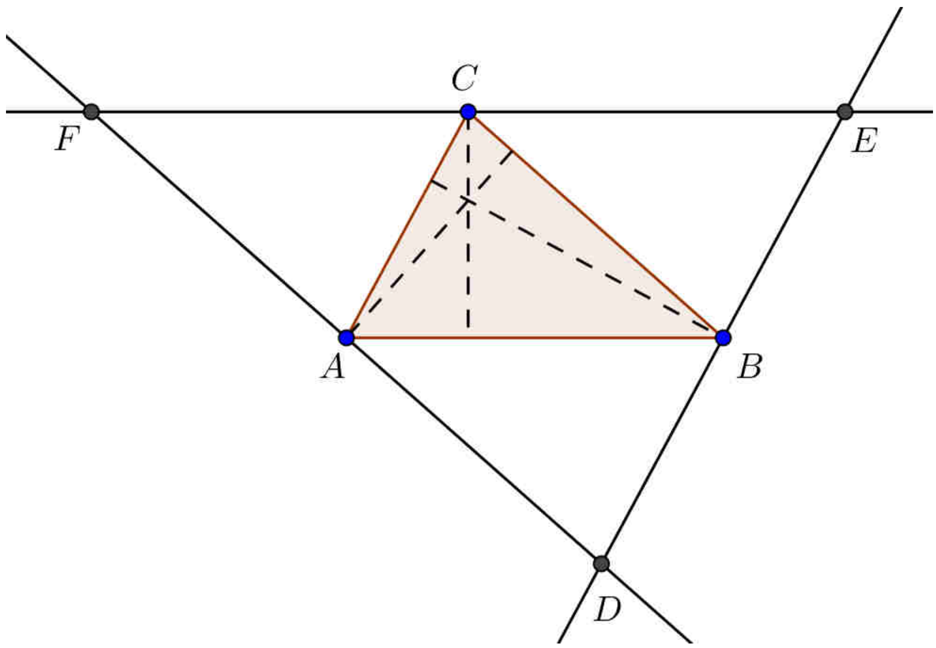
SCHEDA 5
Ortocentro di un triangolo

Dimostriamo che le **altezze** di un triangolo si incontrano in uno stesso punto che viene detto "**ortocentro**" del triangolo.

Consideriamo un triangolo ABC e tracciamo le altezze h_A , h_B , h_C uscenti rispettivamente dal vertice A,B,C.

Tracciamo la retta per A parallela al lato BC, la retta per B parallela al lato AC e la retta per C parallela al alto AB: siano D,E,F i loro punti di intersezione (vedi figura).

Osserviamo che A è il punto medio di DF perché essendo ADBC un parallelogramma si ha $AD \cong$.......... ed essendo ABCF un parallelogramma si ha $BC \cong$.......... e quindi per la proprietà transitiva abbiamo che $AD \cong$........
Inoltre l'altezza h_A essendo perpendicolare a BC è anche perpendicolare a ……… e quindi risulta in conclusione asse del segmento………..

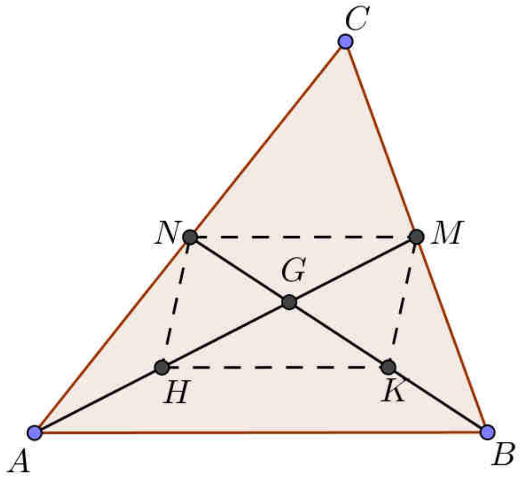


In modo analogo si dimostra che h_B è asse di DE e h_C è asse di ………: ma allora le tre altezze si incontrano in uno stesso punto perché sappiamo che gli assi del triangolo DEF si incontrano in uno stesso punto.

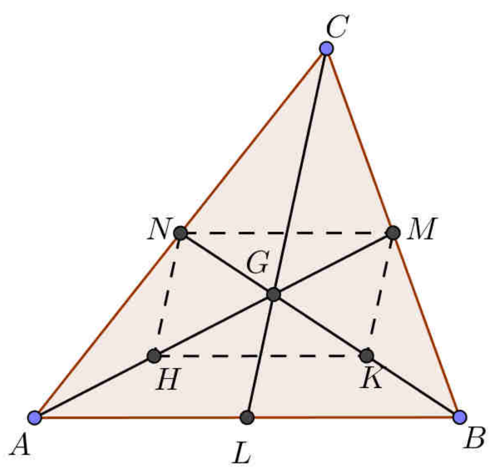
SCHEDA 6
Baricentro di un triangolo

Dimostriamo che le mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto chiamato "**baricentro**" e che **il baricentro divide ogni mediana in due parti tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra**.

Consideriamo un triangolo ABC , tracciamo le due mediane AM e BN e chiamiamo G il loro punto di intersezione. Osserviamo che il segmento NM risulta parallelo ad AB e congruente alla metà di AB.



Consideriamo il punto medio H di AG e il punto medio K di GB: anche HK risulta ……………ad AB e congruente alla sua ………………..
Ma allora il quadrilatero HKMN avendo due lati opposti ………………. e …………………….. risulta un ………………………
Possiamo quindi affermare che le diagonali di HKMN si incontrano nel loro ……………………… e quindi $HG \cong GM$, $KG \cong GN$.
Ma essendo H il punto medio di AG avremo in conclusione che $AG \cong 2 \cdot GM$ ed essendo K il punto medio di GB avremo che $BG \cong 2 \cdot GN$.

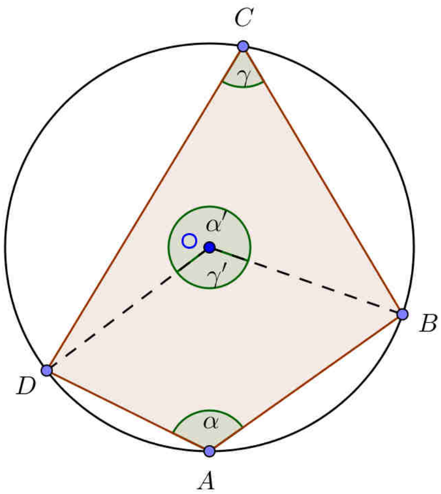


Poiché si può dimostrare in modo analogo che tracciando le mediane BN e CL anch'esse si intersecano in modo da dividersi in parti tali che quella che ha per estremo un vertice è doppia dell'altra, poiché la mediana BN è divisa nello stesso modo sia dal punto di intersezione con Am che da quello con CL, AM e CL devono intersecare BN nello stesso punto G.

Quadrilateri inscritti e circoscritti ad una circonferenza

Teorema: ***in un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.***

Dimostrazione: sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza. Congiungiamo il centro O della circonferenza con B e D: vengono individuati così due angoli al centro α', γ' e quindi $\alpha' = 2\alpha, \gamma' = 2\gamma$



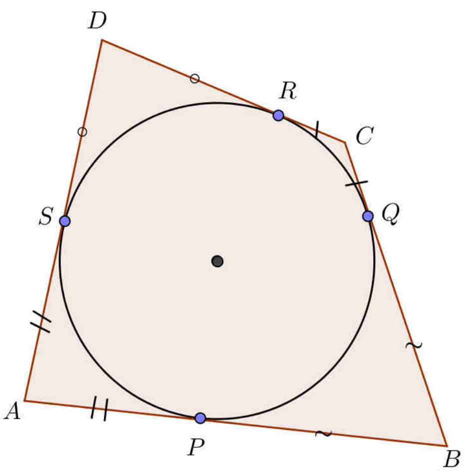
Poiché la somma di α' e γ' è un angolo giro si ha che $\alpha + \gamma = \hat{P}$ cioè α e γ sono supplementari.
Analogamente si può dimostrare anche per l'altra coppia di angoli opposti oppure si ottiene subito ricordando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro.

Vale anche il teorema inverso cioè se in un quadrilatero convesso gli angoli opposti sono supplementari allora è inscrivibile in una circonferenza (omettiamo la dimostrazione).

In conclusione condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia inscrivibile in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.

Teorema: ***in un quadrilatero convesso circoscritto ad una circonferenza la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.***

Dimostrazione: sia ABCD un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza.



Indichiamo con P,Q,R,S i punti di tangenza dei lati con la circonferenza e per la proprietà dei segmenti di tangenza condotti da un punto esterno avremo che

$$AP \cong AS, \quad PB \cong BQ, \quad CR \cong CQ, \quad DR \cong DS$$

Quindi sommando membro a membro abbiamo che

$$AP + PB + CR + DR \cong AS + BQ + CQ + DS$$
$$\rightarrow (AP + PB) + (CR + DR) \cong (AS + DS) + (BQ + CQ)$$

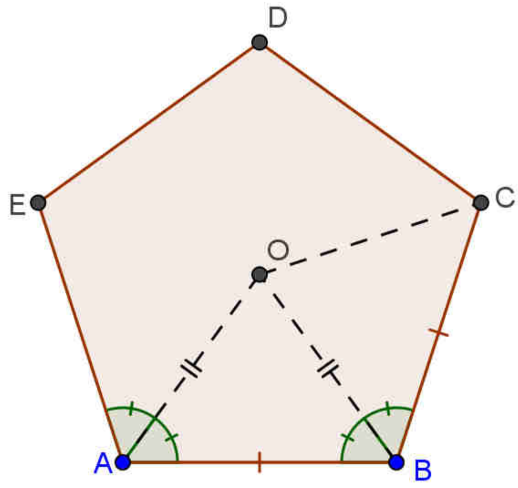
cioè $$AB + DC \cong AD + BC$$

Vale anche il teorema inverso (che non dimostriamo) e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero convesso sia circoscritti bile ad una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia uguale alla somma degli altri due.

Poligoni regolari e circonferenze inscritte e circoscritte

Teorema: un poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza e le due circonferenze hanno lo stesso centro, che viene detto **centro** del poligono.

Dimostrazione: consideriamo un poligono regolare (vedi figura) e tracciamo le bisettrici di due angoli consecutivi $\hat{A}$, $\hat{B}$ e sia O il loro punto di intersezione.

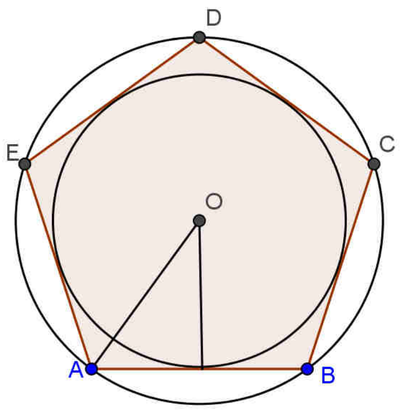


Il triangolo ABO è isoscele poiché ha gli angoli alla base congruenti e quindi $AO \cong BO$.
Congiungendo O con C i triangoli ABO e BCO sono congruenti poiché hanno OB in comune, $AB \cong BC$ e $A\hat{B}O \cong O\hat{B}C$.

Di conseguenza $OC \cong OA$, $O\hat{C}B \cong A\hat{B}O = \frac{1}{2}\hat{B}$

ed essendo il poligono regolare e quindi $\hat{B} \cong \hat{C}$ si ha anche $O\hat{C}B \cong \frac{1}{2}\hat{C}$ cioè OC è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.

Se congiungiamo O con tutti gli altri vertici possiamo ripetere il ragionamento e concludere che O è il **punto di incontro delle bisettrici** e quindi il centro della circonferenza inscritta ma essendo anche **equidistante dai vertici** è anche il centro della circonferenza circoscritta.

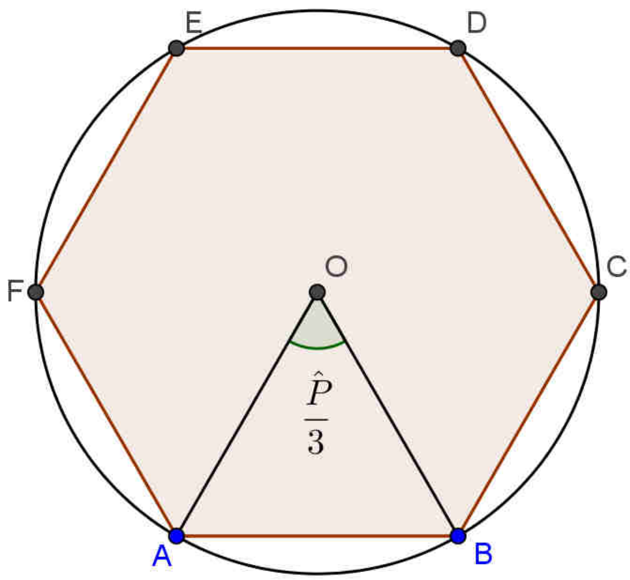


Nota

Il raggio della circonferenza circoscritta si chiama "**raggio**" del poligono mentre il raggio della circonferenza inscritta si chiama "**apotema**" del poligono.

SCHEDA 7
Esagono regolare e circonferenza circoscritta

Consideriamo un esagono regolare ABCDEF e tracciamo la circonferenza circoscritta.



Come risulta il raggio della circonferenza circoscritta?

Congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici A e B: otteniamo un triangolo in cui $A\hat{O}B = \dots\dots\dots\dots$.

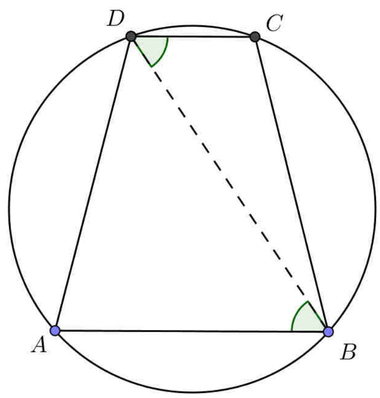
Ma ABO è un triangolo isoscele e quindi gli angoli alla base sono uguali: si avrà quindi che tutti gli angoli del triangolo ABO sono ……….. e quindi il triangolo ABO è…………………………..

In conclusione il raggio della circonferenza circoscritta risulta uguale al ………………….. dell'esagono regolare.

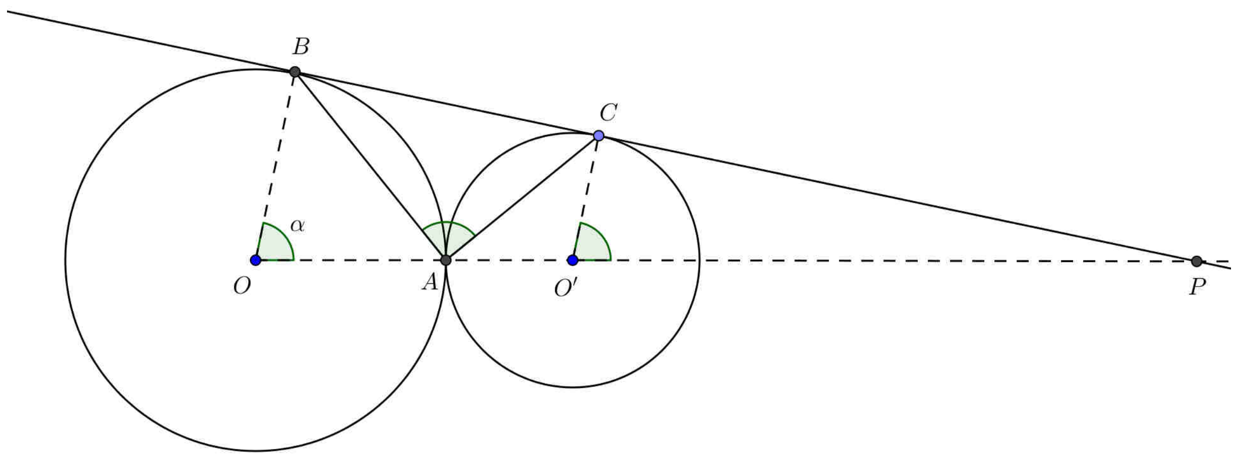
ESERCIZI

1) In una circonferenza congiungi gli estremi di due corde parallele disuguali. Come risulta il quadrilatero che si ottiene?

   Suggerimento: congiungi B con D e considera gli angoli in figura………



2) Considera due circonferenze tangenti esternamente nel punto A. Disegna una tangente comune come in figura e siano B e C i punti di contatto. Come risulta l'angolo $B\hat{A}C$?

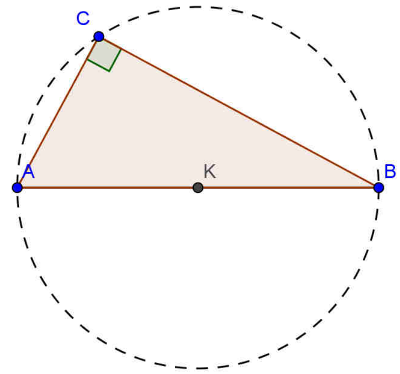


   Suggerimento: congiungi i centri delle circonferenze con i punti di tangenza e con il punto A.

   I triangoli OAB e O'AC sono isosceli e inoltre essendo le rette OB e O'C ……………. gli angoli $B\hat{O}A$ e $C\hat{O}'P$ sono ……………

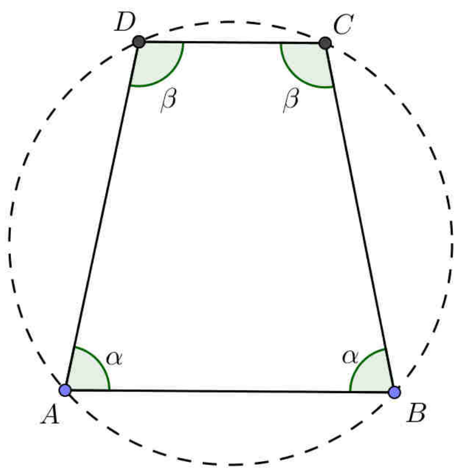
   Allora poiché $B\hat{A}O \cong \frac{\hat{P}-\alpha}{2}$ abbiamo che $B\hat{A}C \cong$.....................

3) Considera un triangolo rettangolo ABC retto in C. Dove si trova il suo circocentro K?



Suggerimento
Ricordando che un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza si ha che il centro K della circonferenza circoscritta coincide con il ……………………………..

4) Considera un trapezio isoscele ABCD. E' sempre inscrivibile in una circonferenza?

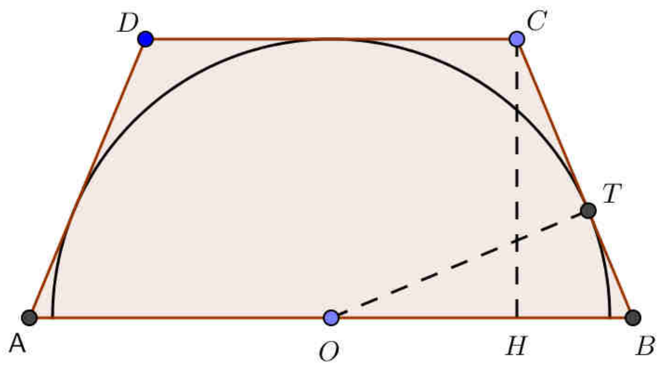


Suggerimento:
Considera gli angoli del trapezio isoscele (vedi figura).

Poiché le basi sono parallele abbiamo che $\alpha + \beta \cong$......... e quindi per il teorema sui quadrilateri inscritti in una circonferenza……………………………………..

5) Disegna due triangoli isosceli ABC e ABD aventi la base AB in comune e i vertici C e D da parti opposte rispetto ad AB. Il quadrilatero ABCD è circoscrivibile ad una circonferenza?

6) Considera un trapezio isoscele ABCD circoscritto ad una semicirconferenza di centro O. Dimostra che il lato obliquo è congruente a metà della base maggiore.



Suggerimento
Disegna il punto T di tangenza sul lato obliquo BC e congiungilo con O, traccia l'altezza CH e confronta i triangoli CHB e OTB: risultano ………………….. poiché………………………..
……………………………………………
Di conseguenza $CB \cong$ ....

7) Disegna un triangolo equilatero e le circonferenze inscritta e circoscritta. Indica con R il raggio della circonferenza circoscritta e con r il raggio di quella inscritta. Dimostra che $R = 2r$.

8) In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, traccia l'altezza AH e da H manda le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC. Dimostra che A,E,H,D sono punti di una stessa circonferenza.

9) Considera due rette (distingui il caso che siano parallele o incidenti): dove si trovano i centri delle circonferenze tangenti?

10) Considera un triangolo rettangolo di cateti AB e AC ed indica con r il raggio della circonferenza inscritta e con R il raggio della circonferenza circoscritta. Dimostra che

$$AB + AC \cong 2r + 2R$$

GEOMETRIA EUCLIDEA
La misura delle grandezze

Definizione

Una **classe** di grandezze geometriche è un insieme di enti geometrici in cui è possibile:

- il confronto tra due qualsiasi elementi dell'insieme;
- l'addizione, che gode della proprietà commutativa e associativa, che associa a due elementi A e B dell'insieme l'elemento A+B appartenente all'insieme detto somma di A e B.

Le grandezze appartenenti ad una stessa classe si dicono **omogenee.**

Sono classi di grandezze omogenee l'insieme dei segmenti, degli angoli, delle superfici piane.

Multiplo di una grandezza

Il multiplo di una grandezza A secondo il numero naturale *n* è la grandezza omogenea ad A

$$B = A + ... + A = nA \quad (n \text{ addendi})$$

Si dice anche che A è sottomultipla di B secondo il numero *n* oppure che A è l'ennesima parte di B e si scrive

$$A = \frac{B}{n} = \frac{1}{n}B$$

Caso particolare

Se n=1 si ha $B = A$ cioè tra i multipli ed i sottomultipli di una grandezza c'è anche la grandezza stessa.

Grandezze commensurabili

Definizione
Due grandezze omogenee A e B si dicono commensurabili quando ammettono una grandezza sottomultipla comune cioè quando esiste una terza grandezza U (omogenea ad A e B) che è contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse cioè tale che

$$A = m \cdot U, \quad B = n \cdot U \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

Quindi poiché $B = n \cdot U \rightarrow U = \frac{1}{n} B$

sostituendo si ha $A = m \cdot \frac{1}{n} B = \frac{m}{n} \cdot B$

Rapporto di grandezze commensurabili

Se $A = \frac{m}{n} B$ chiameremo rapporto tra A e B (e lo indicheremo con $\frac{A}{B}$) il numero razionale $\frac{m}{n}$

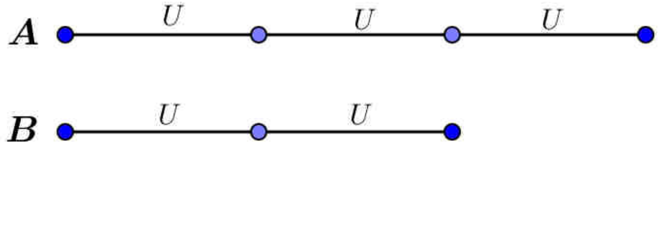
$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{m}{n}}$$

Quindi il rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale.

Esempio

In figura sono disegnate due grandezze A e B tali che

$$A = 3 \cdot U, \quad B = 2 \cdot U \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$

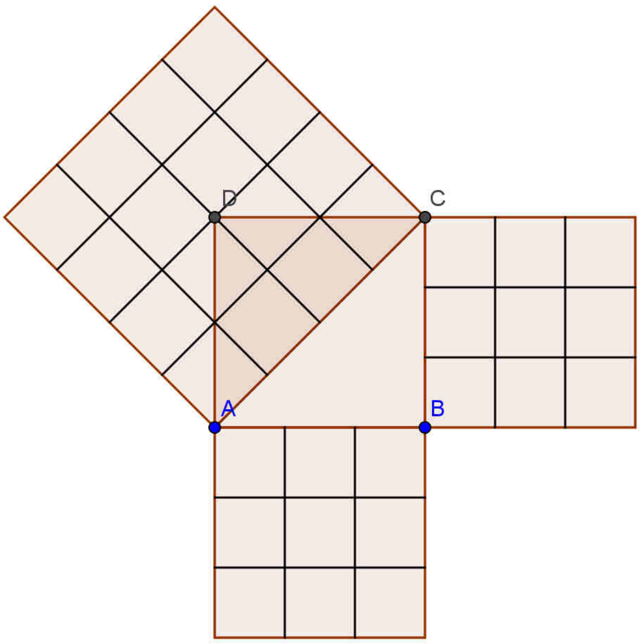


Grandezze incommensurabili

Definizione
Due grandezze omogenee A e B si dicono incommensurabili quando non esiste una grandezza sottomultipla comune.

Esempio: dimostriamo che *il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti incommensurabili.*

Consideriamo un quadrato ABCD e la sua diagonale AC.
Supponiamo per assurdo che il lato AB e la diagonale AC siano segmenti commensurabili cioè supponiamo che esista un segmento EF tale che $AB = n \cdot EF$, $AC = m \cdot EF$ (la figura è solo indicativa).



Applicando il teorema di Pitagora e contando il numero dei "quadratini" di lato congruente ad EF si dovrebbe avere:

$$m^2 = 2n^2$$

Ma questa uguaglianza non può essere vera perché se consideriamo la scomposizione in fattori primi e in particolare quante volte compare il fattore 2, avremo che nel numero m^2 il fattore 2 o non compare mai o compare un numero pari di volte (essendo un quadrato) mentre in $2n^2$ il fattore 2 sarà presente un numero dispari di volte perché c'è un 2 moltiplicato per n^2 in cui il 2 compare o nessuna volta o un numero pari di volte.

In conclusione siamo arrivati ad una contraddizione e questo significa che i segmenti AB e AC non sono commensurabili.

Nota storica

I primi matematici che parlarono di grandezze incommensurabili furono i *Pitagorici*: infatti applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele *furono costretti*, con ragionamenti analoghi a quelli che abbiamo visto, *ad ammettere l'esistenza di grandezze omogenee sprovviste di un sottomultiplo comune*.

Invece essi pensavano che i segmenti fossero costituiti da un numero finito di punti e che quindi fossero tutti commensurabili tra loro. Inoltre ritenevano che tutti i corpi fossero costituiti da corpuscoli tutti uguali disposti in varie forme geometriche e consideravano l'interpretazione geometrica della realtà come un anello di congiunzione tra umano e divino.

La scoperta delle grandezze incommensurabili sembrò quindi ai Pitagorici blasfema e sconcertante tanto che *fu tenuta segreta* e fu proibito ai membri della setta di rivelarla.

Rapporto di grandezze incommensurabili

Si può definire il rapporto tra due grandezze incommensurabili?

Riprendiamo l'esempio del lato l e della diagonale d di un quadrato.
Abbiamo che

$$
\begin{array}{lcl}
l < d < 2l & & 1 < \dfrac{d}{l} < 2 \\
1{,}4l < d < 1{,}5l & \rightarrow & 1{,}4 < \dfrac{d}{l} < 1{,}5 \\
1{,}41l < d < 1{,}42l & & 1{,}41 < \dfrac{d}{l} < 1{,}42 \\
1{,}414l < d < 1{,}415l & & 1{,}414 < \dfrac{d}{l} < 1{,}415 \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Il numero $\dfrac{d}{l}$ è definito come "elemento separatore" dei due insiemi di numeri razionali

$$1,\quad 1{,}4,\quad 1{,}41,\quad 1{,}414,\quad .....$$
$$2,\quad 1{,}5,\quad 1{,}42,\quad 1{,}415,\quad ....$$

che rappresentano i valori approssimati per difetto e per eccesso.

Questo numero viene detto "irrazionale", cioè non razionale, e in questo caso viene indicato con il simbolo $\sqrt{2}$.

In conclusione *se A e B sono grandezze incommensurabili il loro rapporto è un numero irrazionale.*

Misura di una grandezza

Se fissiamo una grandezza U come “unità di misura”, la misura rispetto ad U di una grandezza A, omogenea con U, è il numero reale (razionale o irrazionale) che esprime il rapporto tra A e U e si indica con $\overline{A}$ cioè

$$\overline{A} = \frac{A}{U}$$

Nota importante
La misura di un segmento si dice “**lunghezza**”, quella di un angolo si dice “**ampiezza**” e quella di una superficie piana “**area**”.

Teorema

Il rapporto tra due grandezze omogenee A e B (con $B \neq 0$) *è uguale al rapporto tra le loro misure* (rispetto ad una qualunque unità di misura) cioè

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

Dimostrazione

Indichiamo con U una grandezza, omogenea ad A e B, scelta come unità di misura.

Avremo quindi per esempio:

$$A = aU \text{ e quindi } \overline{A} = a;$$
$$B = bU \text{ e quindi } \overline{B} = b$$

Ricaviamo U dalla relazione $B = bU \rightarrow U = \frac{1}{b}B$ e sostituiamo nell’altra

$A = a \cdot \frac{1}{b}U = \frac{a}{b}B \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

In conclusione quindi

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

Proporzioni tra grandezze

Definizione
Due grandezze omogenee A e B (con $B \neq 0$) e altre due grandezze omogenee C e D (con $D \neq 0$) **si dicono in proporzione** quando il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra la terza e la quarta cioè:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Si scrive anche A : B = C : D e che si legge "A sta a B come C sta a D".

Le quattro grandezze si dicono **termini** della proporzione e in particolare A e B si dicono termini estremi mentre B e C si dicono termini medi.

Nota
Se A, B ,C sono tre grandezze omogenee tra loro e si ha

$$A : B = B : C$$

la grandezza B si chiama *media proporzionale* tra A e C.

Osservazioni

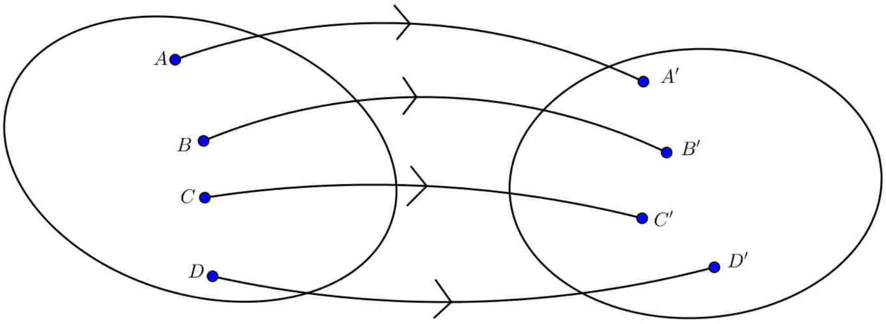
1) Si dimostra facilmente che *se quattro grandezze sono in proporzione allora sono in proporzione anche le loro misure* e viceversa.
   Questo ci permette di estendere le proprietà delle proporzioni tra numeri alle proporzioni tra grandezze .

   Ricordiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche:
   "In una proporzione numerica $a : b = c : d$ **il prodotto dei termini medi è uguale al prodotto dei termini estremi** cioè $a \cdot d = b \cdot c$ (e viceversa se $a \cdot d = b \cdot c$ allora $a : b = c : d$).

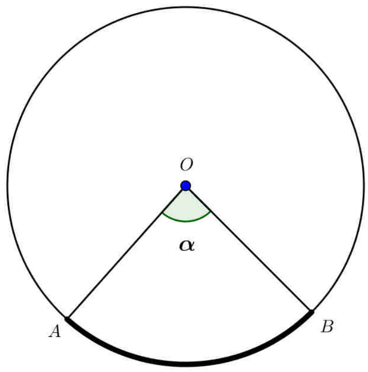
2) Si dimostra facilmente che *date due grandezze omogenee A e B e una terza grandezza C (A,B,C non nulle) esiste ed è unica una quarta grandezza X*, omogenea a C, *tale che*

$$A : B = C : X$$

Definizione
Diciamo che due classi di grandezze sono in ***corrispondenza biunivoca*** quando è possibile associare ad ogni grandezza della prima classe una e una sola grandezza della seconda classe.

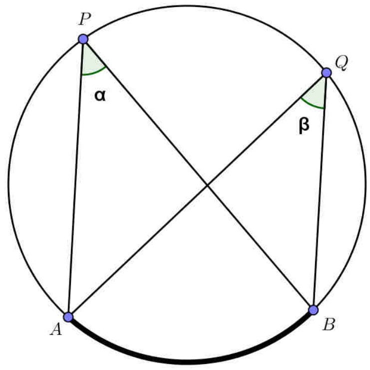


Esempio
Se consideriamo, in un dato cerchio, l'insieme degli angoli al centro e l'insieme degli archi di circonferenza possiamo associare ad ogni angolo al centro l'arco di circonferenza su cui insiste e osservare che si tratta di una corrispondenza biunivoca poiché per ogni angolo al centro c'è uno ed un solo arco di circonferenza su cui insiste.



$$A\hat{O}B \rightarrow arcoAB$$

Esempio
Se invece consideriamo, sempre in un dato cerchio, l'insieme degli angoli alla circonferenza e l'insieme degli archi di circonferenza ed associamo ad un angolo alla circonferenza l'arco di circonferenza su cui insiste, abbiamo che questa non è una corrispondenza biunivoca poiché ad angoli alla circonferenza diversi (anche se di uguale ampiezza) viene associato lo stesso arco di circonferenza.



$\alpha \rightarrow$ arco AB
$\beta \rightarrow$ arco AB

Grandezze direttamente proporzionali

Definizione
Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono **direttamente proporzionali** quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe cioè

$$\forall \; A, B \quad \text{se} \;\; A \to A', \quad B \to B' \;\; \text{si ha} \;\; \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

Grandezze inversamente proporzionali

Definizione
Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono **inversamente proporzionali** quando il rapporto tra due qualunque grandezze della prima classe è uguale al reciproco del rapporto tra le due grandezze corrispondenti della seconda classe cioè

$$\forall \; A, B \quad \text{se} \;\; A \to A', \quad B \to B' \;\; \text{si ha} \;\; \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

Osservazione
In questo caso ,quindi, il prodotto delle misure di due grandezze corrispondenti è costante.

Il criterio della proporzionalità diretta

Come possiamo stabilire se due classi di grandezze sono direttamente proporzionali?

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che:

- a grandezze uguali di una classe corrispondano grandezze uguali dell'altra;
- alla somma di due grandezze qualsiasi di una classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti dell'altra.

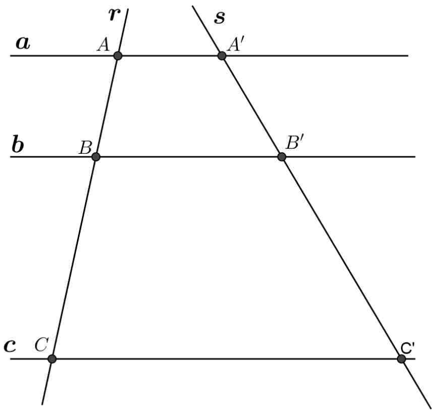
Esempio

Gli angoli al centro e gli archi di circonferenza corrispondenti sono un esempio di classi di grandezze direttamente proporzionali: infatti ad angoli al centro uguali corrispondono archi sottesi uguali e alla somma di angoli al centro corrisponde un arco uguale alla somma degli archi sottesi corrispondenti.

Teorema di Talete

Dimostriamo questo importante teorema riguardante **le classi di grandezze direttamente proporzionali**:
Se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali, ***i segmenti individuati su una trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti individuati sull'altra trasversale.***

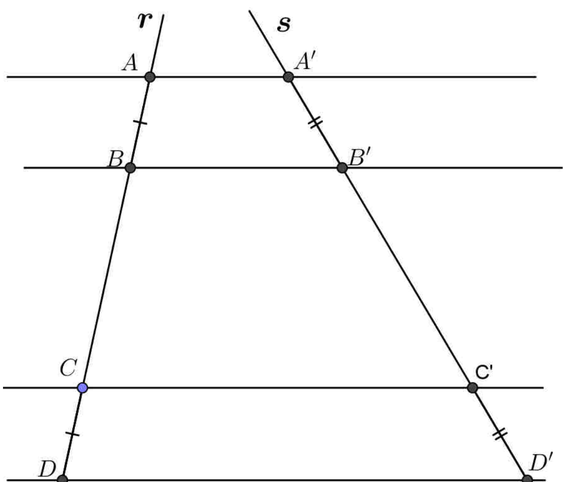
Questo significa, per esempio, che se *a*,*b*,*c* sono tre rette parallele e *r* e *s* sono due trasversali (vedi figura) si ha

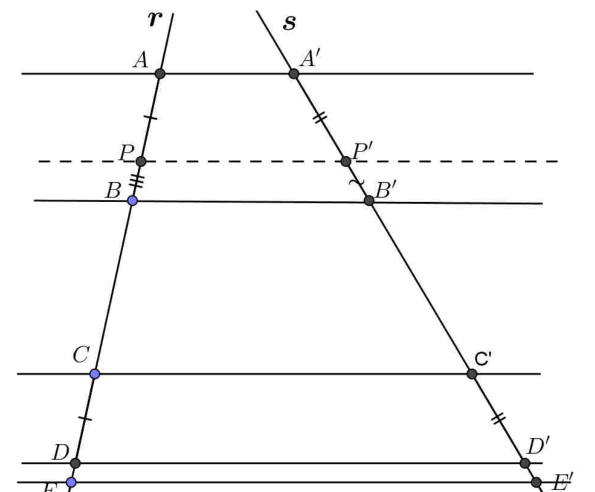


$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Dimostrazione
Osserviamo che:

1) *a segmenti congruenti su r corrispondono segmenti congruenti su s* (vedi scheda 1-quadrilateri);
2) *ad un segmento AB congruente alla somma dei segmenti CD e EF su r corrisponde su s un segmento A'B' congruente alla somma dei segmenti C'D' e E'F' corrispondenti* a CD e EF (si dimostra facilmente tracciando dal punto P che divide AB nelle due parti congruenti a CD e EF la parallela del fascio…).



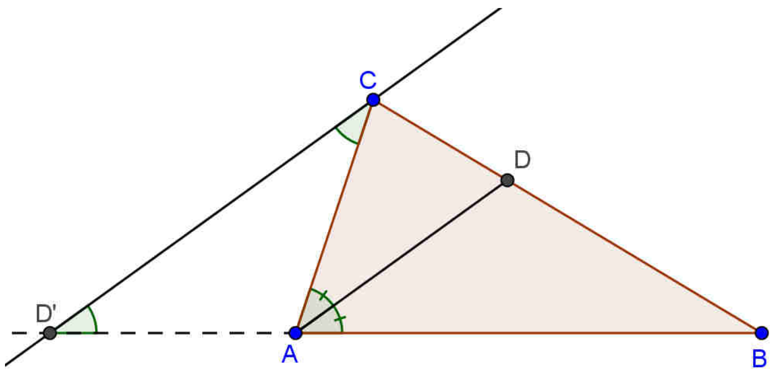


Quindi, per il criterio di proporzionalità diretta i due insiemi di segmenti sono direttamente proporzionali

Problema guidato
Teorema della bisettrice

Considera un triangolo ABC e traccia una bisettrice , per esempio AD dell'angolo $\alpha = B\hat{A}C$. Dimostra che $CD : DB = AC : AB$ cioè **una bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due.**

Suggerimento
Traccia per C la parallela alla bisettrice AD e sia D' il punto in cui questa parallela incontra il prolungamento del lato AB.



Per il teorema di Talete si può dire che

…………………………………………………….

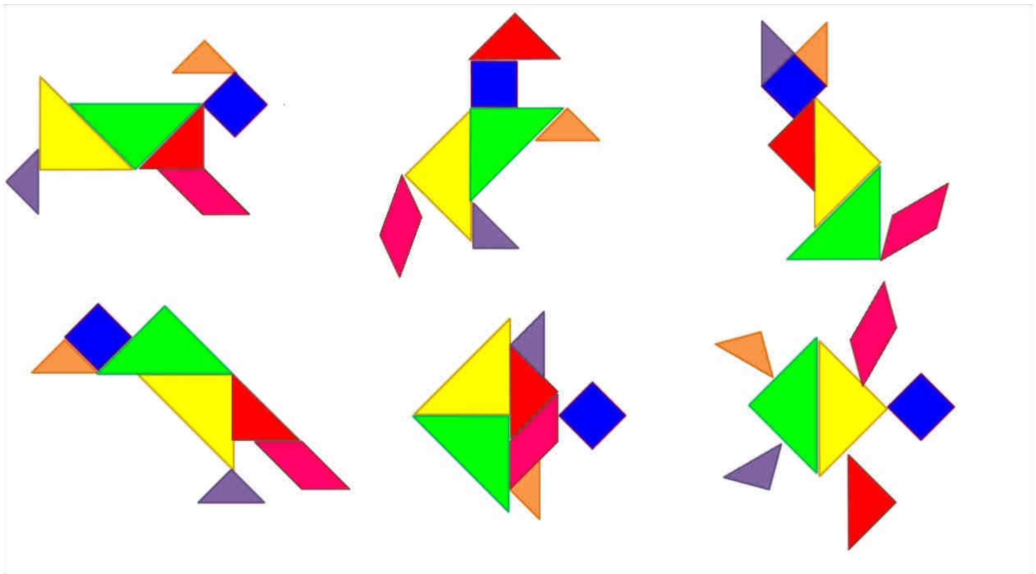
Ma il triangolo ACD', avendo gli angoli alla base congruenti, risulta …………………. e quindi

……………………..

In conclusione quindi abbiamo che ………………………………………

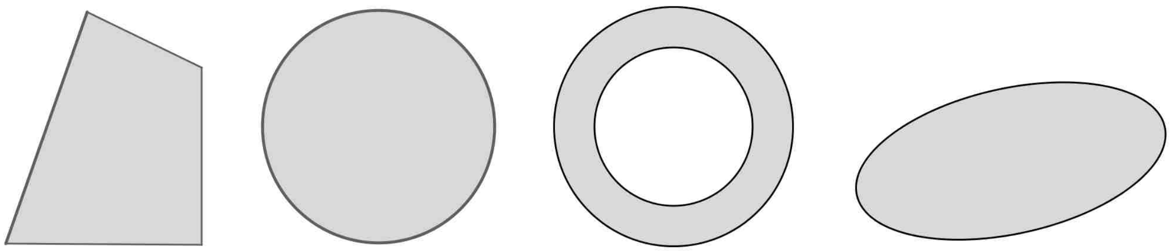
OSSERVAZIONE
Infatti per esempio nel triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e quindi divide la base in parti uguali che stanno quindi nello stesso rapporto dei due lati (che sono uguali).

GEOMETRIA EUCLIDEA
L'equivalenza delle superfici piane



Superficie piana

Il concetto di superficie piana è un **concetto primitivo**: i poligoni, i cerchi o in generale regioni di piano delimitate da una linea chiusa o da più linee chiuse che non si intersecano sono superfici piane.



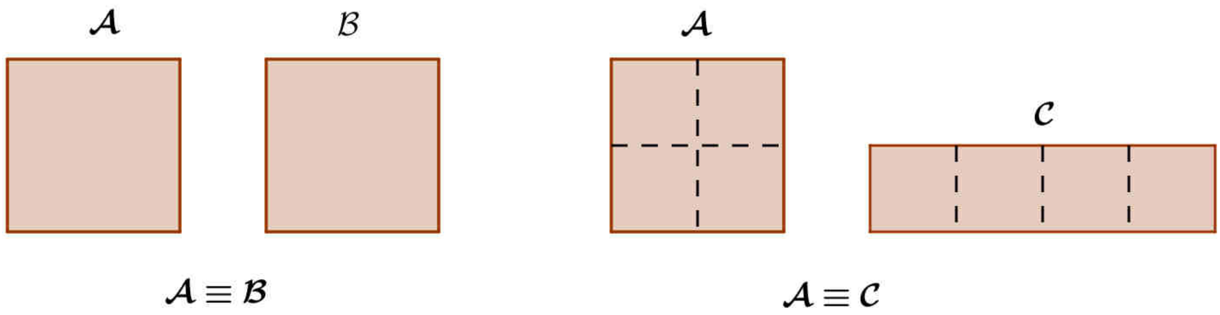
Per indicare una superficie piana useremo lettere maiuscole corsive.

Estensione superficiale

Anche il concetto di estensione superficiale è un **concetto primitivo**. E' chiaro che superfici congruenti hanno la stessa estensione superficiale ma anche superfici non congruenti possono avere la stessa estensione superficiale: se realizziamo modelli in cartoncino di superfici piane aventi la stessa estensione superficiale troviamo che hanno lo stesso "peso".

Definizione

Due superfici piane $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono equivalenti quando hanno la stessa estensione superficiale e scriveremo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.



Ci sono alcuni **postulati** che caratterizzano l'equivalenza tra superfici piane:

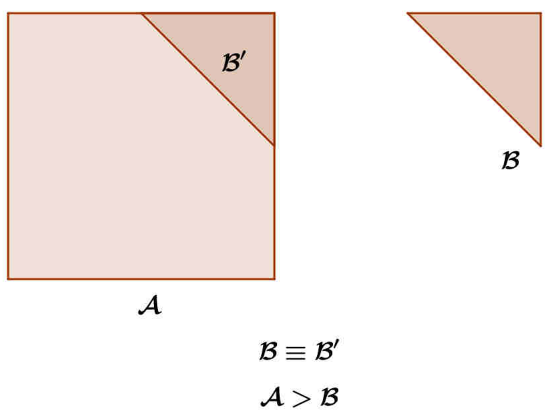
1) Due superfici congruenti sono equivalenti (non è vero il viceversa);

2) L'equivalenza tra superfici gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva;

3) La "somma" di due superfici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (che non hanno punti in comune oppure che hanno in comune solo punti del loro contorno) è la figura formata dall'unione dei punti delle due superfici e si indica con $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Se $\mathcal{C} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$ allora $\mathcal{A}$ si può considerare come differenza tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ e si scrive $\mathcal{A} = \mathcal{C} - \mathcal{B}$. Le superfici somma o differenza di superfici rispettivamente equivalenti sono equivalenti.

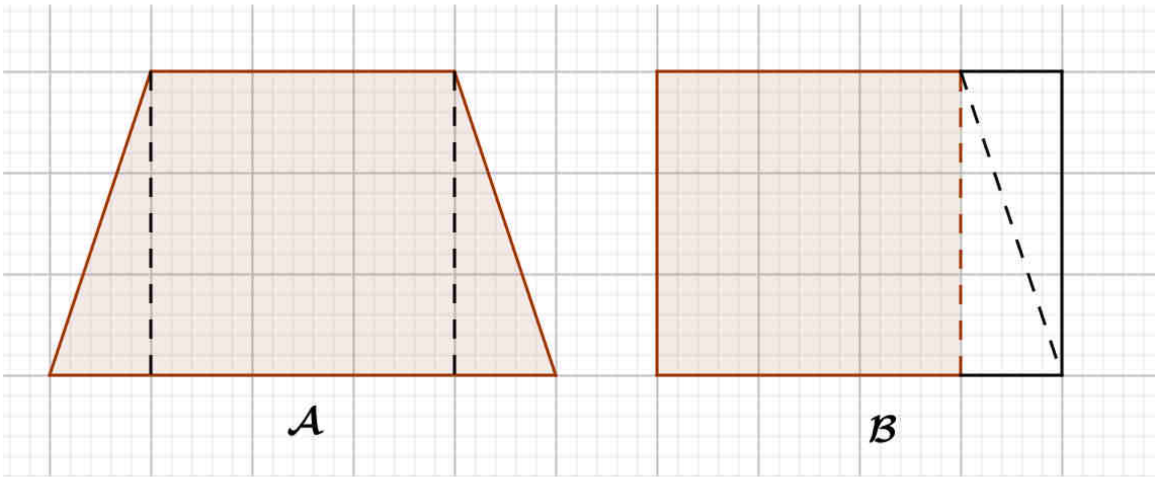
4) Una superficie non può essere equivalente ad una sua parte.

5) Una superficie $\mathcal{A}$ ha maggiore estensione di una superficie $\mathcal{B}$, e si dice che $\mathcal{A}$ è prevalente a $\mathcal{B}$ e si scrive $\mathcal{A} > \mathcal{B}$, se $\mathcal{B}$ è equivalente ad una parte di $\mathcal{A}$



Poligoni equivalenti

Definizione
Due poligoni si dicono **equiscomponibili** o equiscomposti se sono somme di poligoni congruenti.



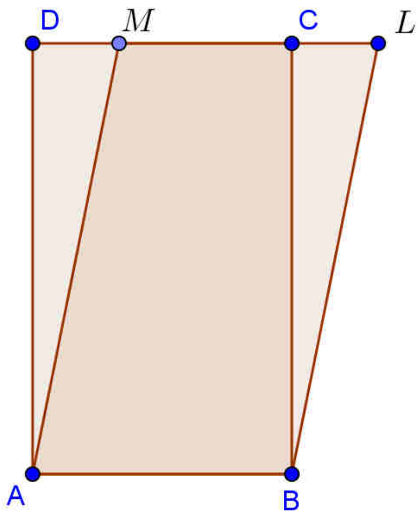
$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono equiscomponibili

Osservazione: è chiaro che **due poligoni equiscomponibili sono equivalenti** (e si può dimostrare che vale anche il viceversa).

Teorema

***Un parallelogramma** e un rettangolo aventi basi e altezze relative congruenti sono equivalenti.*

Dimostrazione



Disegniamo il rettangolo ABCD e il parallelogramma ABLM sovrapponendo le basi come in figura.

Osserviamo che i triangoli ADM e BCL sono congruenti avendo $AD \cong BC$, $AM \cong BL$ e quindi sono anche equivalenti.

Il parallelogramma può essere considerato come la differenza tra il trapezio ABLD e il triangolo ADM e il rettangolo come la differenza tra lo stesso trapezio e il triangolo BCL e quindi parallelogramma e rettangolo sono equivalenti.

Nota: la dimostrazione è la stessa anche nel caso in cui $M \equiv C$ oppure M si trovi oltre C .

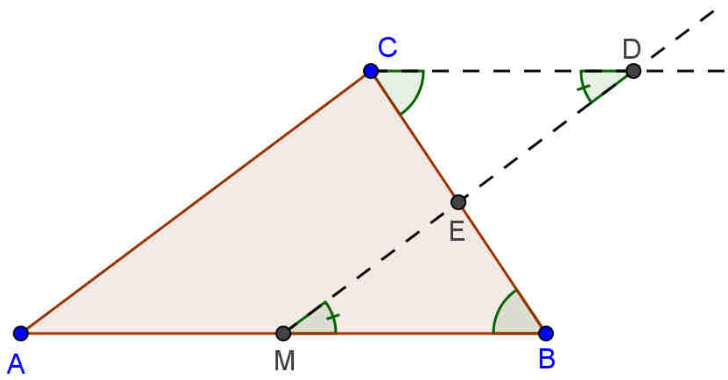
Corollario: *due parallelogrammi che hanno basi e altezze corrispondenti congruenti sono equivalenti* poiché sono entrambi equivalenti ad un rettangolo avente base e altezza congruente.

Teorema

Un triangolo *è equivalente ad un parallelogramma di altezza congruente e base congruente a metà di quella del triangolo.*

Dimostrazione

Consideriamo il triangolo ABC e sia M il punto medio di AB. Conduciamo per M la parallela ad AC e da C la parallela ad AB e sia D il loro punto di intersezione ed E l'intersezione tra BC e MD (vedi figura).



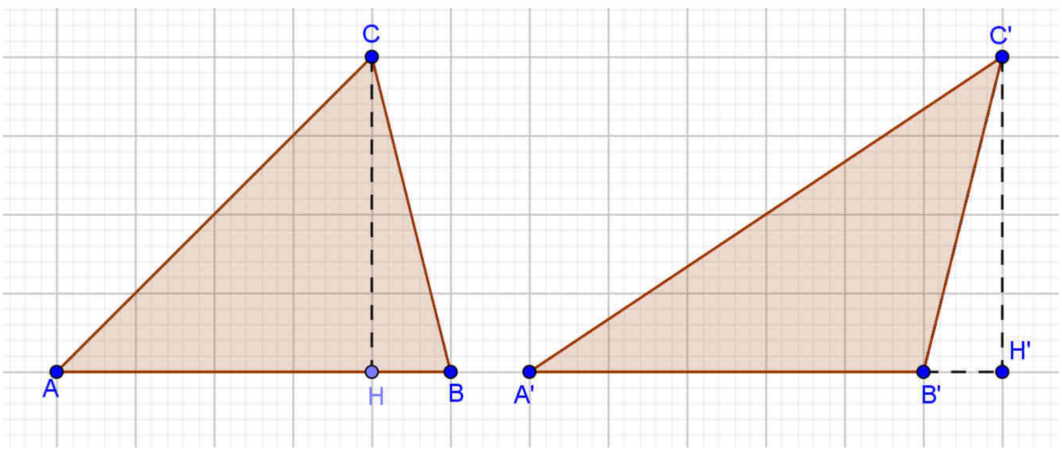
I triangoli MBE e CDE sono congruenti per il 2° criterio poiché :

$$AM \cong MB, \quad AM \cong CD \rightarrow MB \cong CD;$$

$$D\hat{C}E \cong M\hat{B}E, \quad C\hat{D}E \cong E\hat{M}B$$

Quindi il triangolo e il parallelogramma così costruito risultano equiscomposti e di conseguenza equivalenti.

Corollario: *due triangoli aventi le basi e le rispettive altezze congruenti sono equivalenti* poiché equivalenti a parallelogrammi aventi base e altezza congruenti e quindi equivalenti.



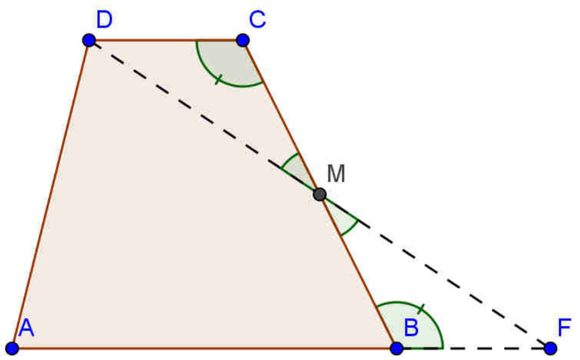
$$ABC \equiv A'B'C'$$

Teorema

Un trapezio *è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e la cui base è uguale alla somma delle basi del trapezio.*

Dimostrazione

Sia ABCD il trapezio: consideriamo il punto medio M del lato BC, congiungiamolo con D e prolunghiamo fino ad incontrare nel punto F il prolungamento di AB (vedi figura).



I triangoli DCM e MBF sono congruenti per il 2° criterio poiché

$$CM \cong MB, \quad D\hat{M}C \cong B\hat{M}F \text{ (opposti al vertice)}, \quad D\hat{C}M \cong M\hat{B}F \text{ (alterni interni)}$$

Di conseguenza $DC \cong BF$ e quindi AF risulta congruente alla somma delle basi del trapezio.

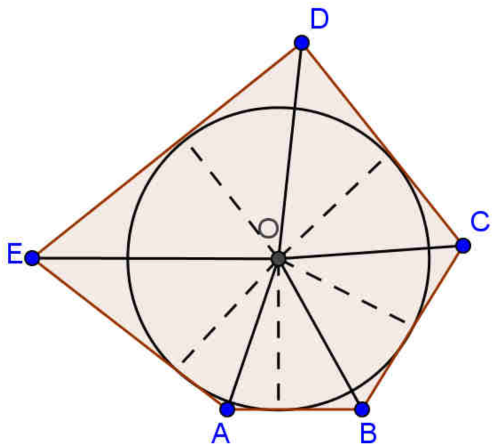
Quindi il trapezio e il triangolo AFD risultano equiscomposti e quindi equivalenti.

Teorema

Un poligono circoscritto ad una circonferenza *è equivalente ad un triangolo avente per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza inscritta nel poligono.*

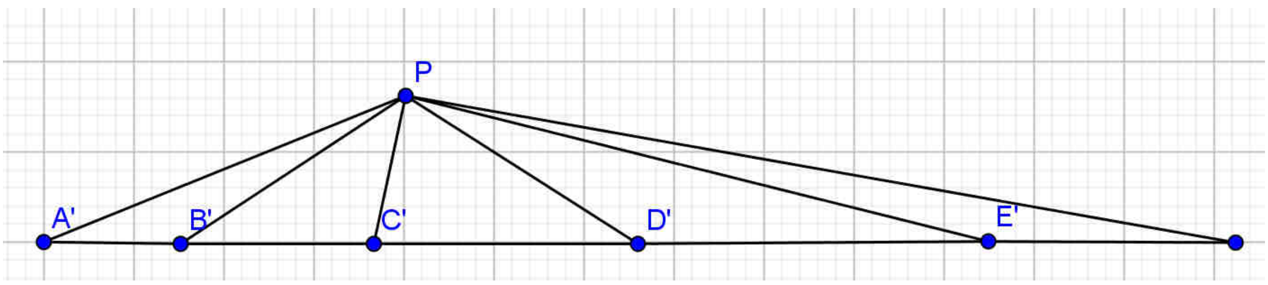
Dimostrazione

Consideriamo un poligono circoscritto ad una circonferenza: congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici.
Il poligono risulta così scomposto in triangoli aventi come basi i lati del poligono e come altezze segmenti congruenti al raggio r della circonferenza.



Se quindi riportiamo sulla stessa retta dei segmenti congruenti ai lati del poligono e consideriamo un punto P tale che $PH \cong r$ (vedi figura), abbiamo che

$$A'B'P \equiv ABO \,, \quad B'C'P \equiv \ldots\ldots\ldots \quad \text{ecc.}$$



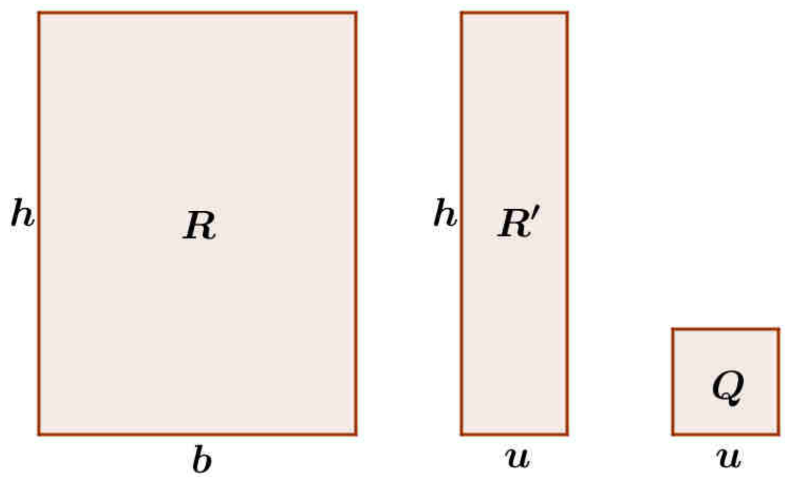
e quindi il poligono è equivalente al triangolo avente per base un segmento congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza inscritta.

Aree dei poligoni

Area di un rettangolo

Utilizzando la proporzionalità diretta possiamo dimostrare che *l'area di un rettangolo è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza.*

Considera il rettangolo dato R avente base di lunghezza b e altezza di lunghezza h e il quadrato Q di lato u di lunghezza 1.
Considera il rettangolo R' avente altezza uguale all'altezza di R e base u.



Se indichiamo con A e A' le aree di R e R' avremo :

- poiché R' e Q hanno la stessa base le loro aree sono direttamente proporzionali alle altezze e quindi

$$A' : 1 = h : 1 \rightarrow A' = h$$ (prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi)

- poiché R e R' hanno la stessa altezza le loro aree sono direttamente proporzionali alle basi e quindi

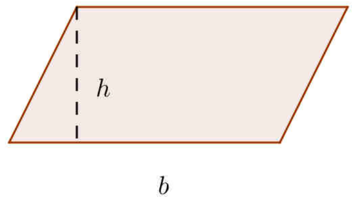
$$A : A' = b : 1 \rightarrow A = A' \cdot b = h \cdot b$$

Nota
Di conseguenza se abbiamo un **quadrato di lato *l*** avremo che l'area risulta:

$$A = l \cdot l = l^2$$

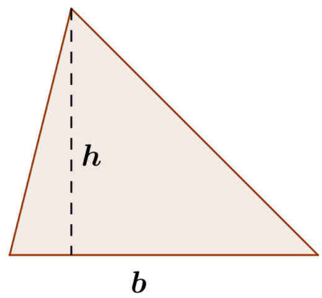
Sapendo che **l'area di un rettangolo** è data dal prodotto della misura della base per la misura dell'altezza e utilizzando i teoremi sull'equivalenza che abbiamo dimostrato, abbiamo che:

- poiché **u*n parallelogramma*** *e un rettangolo aventi basi e altezze relative congruenti sono equivalenti*
  l'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza



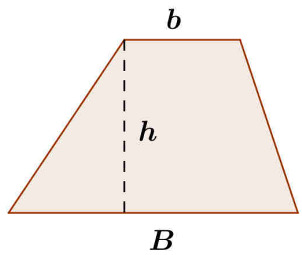
$$A = b \cdot h$$

- poiché u***n triangolo*** *è equivalente ad un parallelogramma di altezza congruente e base congruente a metà di quella del triangolo* l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

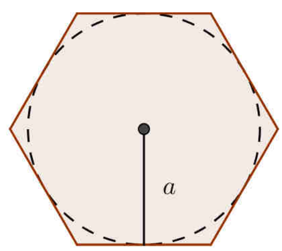
- poiché ***un trapezio*** *è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e la cui base è uguale alla somma delle basi del trapezio* l'area di un trapezio è uguale al prodotto della semisomma delle lunghezze delle basi per la lunghezza dell'altezza



$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- poiché **un poligono regolare di *n* lati** *è equivalente ad un triangolo avente come base il perimetro del poligono e come altezza il raggio della circonferenza inscritta nel poligono*

  l'area di un poligono regolare è uguale al prodotto della lunghezza del semiperimetro (indicato con *p*) per la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta (chiamato apotema ed indicato con *a*).



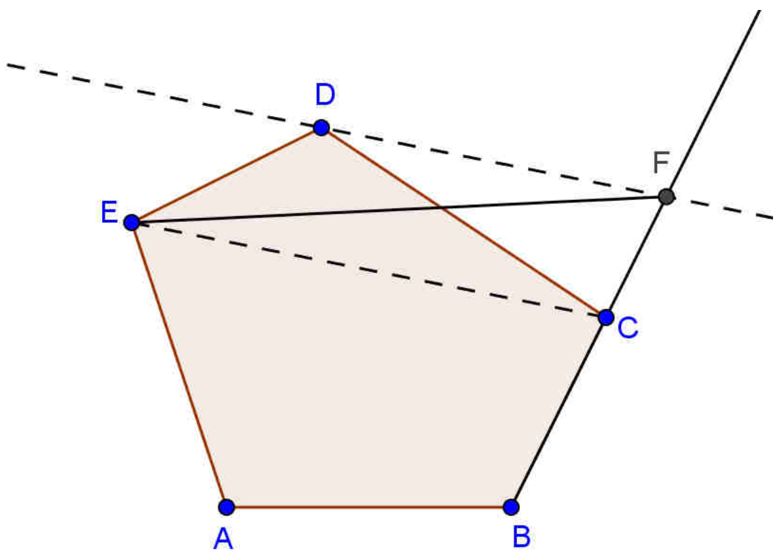
$$A = p \cdot a$$

SCHEDA 1
Da un poligono ad un altro equivalente

Consideriamo per esempio un pentagono ABCDE.
Proviamo *a costruire un poligono con un lato in meno (quindi in questo caso un quadrilatero) che sia però equivalente al poligono di partenza.*

Possiamo procedere così:

- Tracciamo una diagonale, per esempio EC, che individua un triangolo (ECD);
- Costruiamo un triangolo equivalente al triangolo ECD che abbia la stessa base EC: tracciamo la parallela ad EC per D e intersechiamola con il prolungamento di BC (vedi figura) individuando il punto F.



I triangoli ECD e ECF sono equivalenti poiché hanno …………………………………………

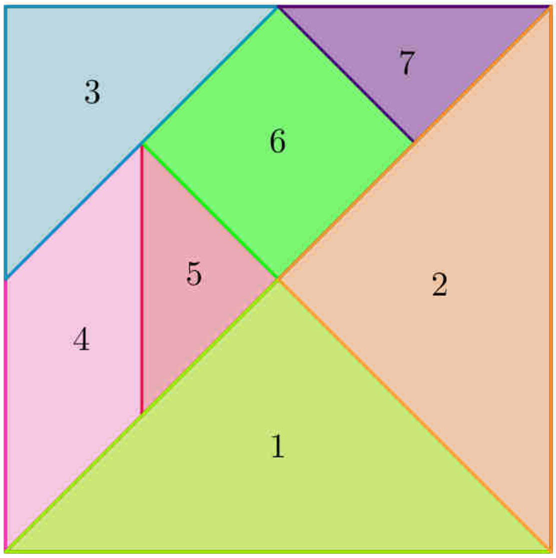
Quindi il pentagono ABCDE è somma di ………………. e di ………………….
e il quadrilatero ABFE è somma di …………………. e di ………………………

In conclusione abbiamo costruito un quadrilatero …………………al pentagono dato.

Osservazione
Ripetendo più volte la costruzione si può quindi sempre arrivare ad un ………….. equivalente al poligono dato.

SCHEDA 2
Il tangram

Il Tangram è un antico gioco cinese: è una specie di puzzle le cui tessere sono 7 figure geometriche ottenute dalla scomposizione di un quadrato (vedi figura).



Le figure sono: due triangoli grandi, due triangoli piccoli, un triangolo medio, un quadrato e un parallelogramma.

Il quadrato è equivalente a ………………………………………………………………..

Il triangolo medio è equivalente a……………………...…………..

Il triangolo grande è equivalente a ………………………………………………………………

Il parallelogramma è equivalente a……………………...………………………………………

Esercizio

Usando tutti i sette pezzi del Tangram si possono costruire 13 poligoni convessi (naturalmente equivalenti)…prova a disegnarne qualcuno!

ESERCIZI

1) Da ciascun vertice di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Indica con A' il punto di intersezione delle parallele condotte da A e B, con B' quello di intersezione tra le parallele condotte da Be C e con C' quello tra le parallele per C e A. Dimostra che i quadrilateri AA'BC, ABCC' e ABB'C sono equivalenti.

2) Disegna due parallelogrammi ABCD e CDEF situati da parti opposte rispetto al alto comune DC. Congiungi A con F e B con E. Dimostra che ABEF è equivalente alla somma dei due parallelogrammi iniziali.

3) Disegna un trapezio ABCD di basi AB e CD ed indica con E il punto di intersezione delle diagonali. Dimostra che i triangoli AED e BCE sono equivalenti.

   Suggerimento: considerali come differenza tra ACD e CDE, DCB e CDE……..

4) Dimostra che un parallelogramma viene diviso dalle sue diagonali in quattro triangoli equivalenti.

5) Disegna un triangolo ABC e traccia la mediana CM. Indica con P il punto medio di CM e congiungi A e B con P. Dimostra che i quattro triangoli AMO, BMP, BCP e CAP sono tra loro equivalenti.

6) Disegna un triangolo ABC ed indica con Me e N i punti medi rispettivamente dei lati AB e BC. Dimostra che i triangoli AMC e ANC sono equivalenti

   Suggerimento: traccia la retta per M e N che risulta…….

7) Dimostra che congiungendo il baricentro di un triangolo con i suoi vertici si ottengono tre triangoli equivalenti.

8) Dato un quadrilatero ABCD considera il quadrilatero MNPQ che ha i vertici nei punti medi dei lati di ABCD. Dimostra che $MNPQ \equiv \frac{1}{2} ABCD$

   Suggerimento: traccia le diagonali del quadrilatero ABCD.
   Osserva che MN risulta parallelo a ……………, PQ risulta parallelo a ……………

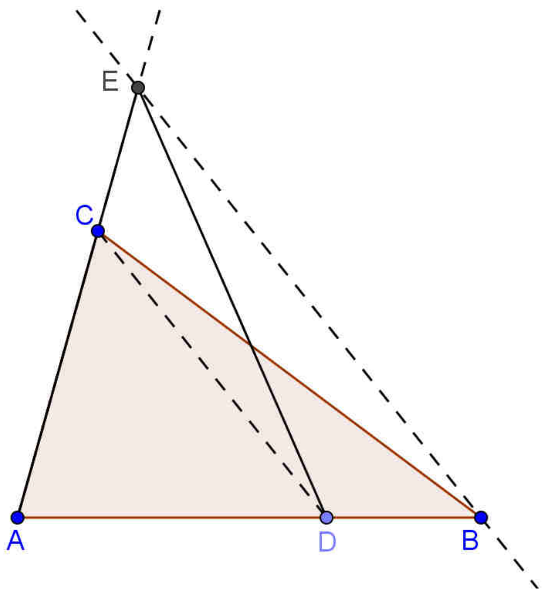
9) ***Dato un triangolo ABC costruisci un triangolo equivalente di base assegnata b.***

Suggerimento

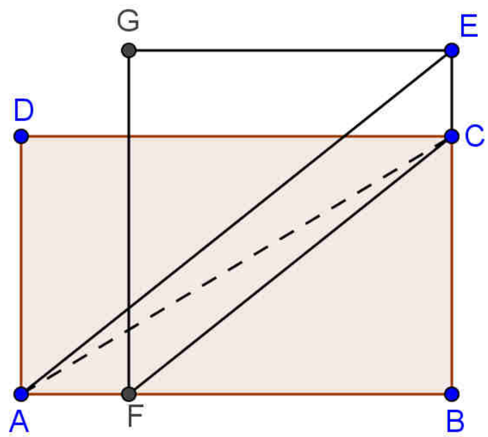
Riporta su AB un segmento $AD \cong b$ e congiungi D con C.

Traccia per B la parallela a CD e sia E il suo punto di intersezione con il prolungamento di AC.

Il triangolo ADE è equivalente al triangolo ABC perché………..



10) ***Dato un rettangolo ABCD, costruire un rettangolo equivalente avente un lato assegnato h.***



Suggerimento: traccia la diagonale AC, riporta su BC un segmento $BE \cong h$ e congiungi A con E.

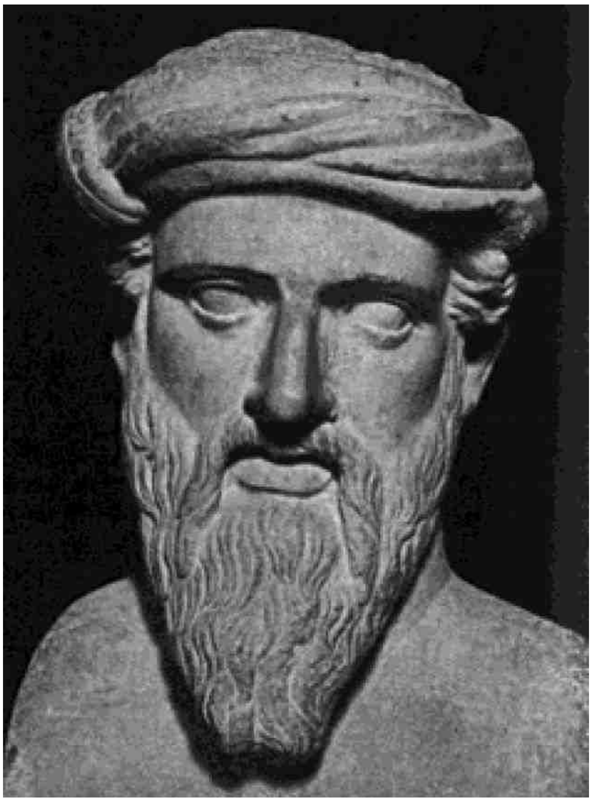
Traccia da C la parallela ad AE e sia F il punto in cui interseca AB (vedi figura).

Osserva che $ABC \equiv FBE$ poiché………..

Costruiamo il rettangolo FBEG di lati FB e BE.

Il rettangolo ABCD risulta quindi equivalente al rettangolo FBEG poiché……………………..

GEOMETRIA EUCLIDEA
I teoremi di Euclide e Pitagora



Vediamo tre importanti teoremi che riguardano i triangoli rettangoli e che si dimostrano utilizzando l'equivalenza delle superfici piane.

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.

Dimostrazione

Costruiamo il quadrato ACDE sul cateto AC e il rettangolo AHGF con $AF \cong AB$ (vedi figura).

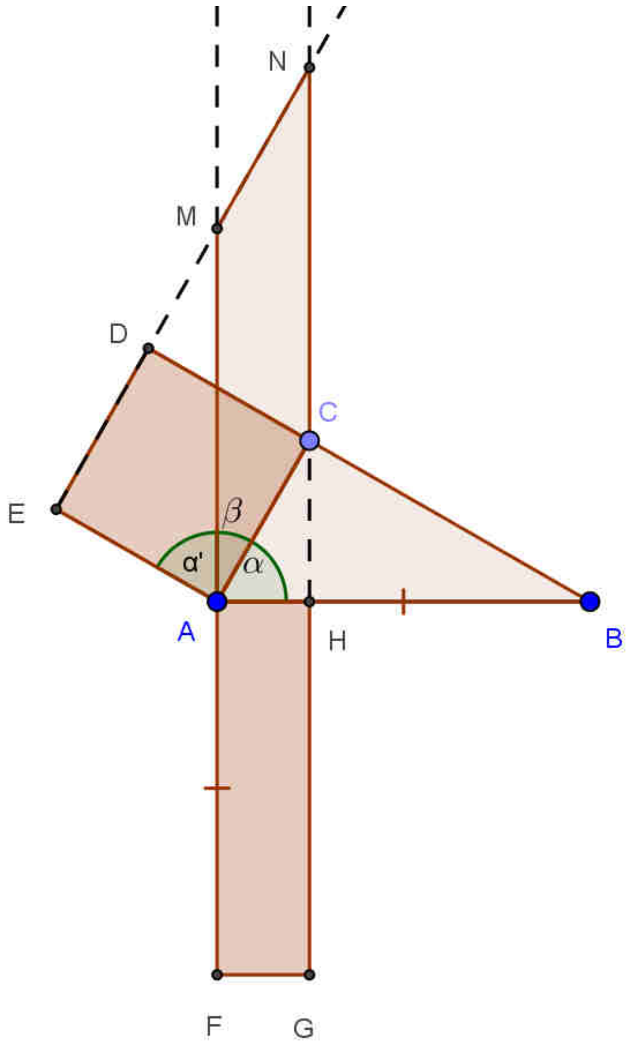
Prolunghiamo il lato ED fino ad intersecare in M e N i prolungamenti di AF e HG.

Il parallelogramma ACNM è equivalente al quadrato ACDE poiché hanno stessa base e stessa altezza (EA).

Consideriamo i triangoli ABC e AME: risultano congruenti poiché

$AC \cong AE, \quad \alpha \cong \alpha'$
poiché complementari dello stesso angolo β

Quindi $\boxed{AM \cong AB}$ e il parallelogramma e il rettangolo risultano equivalenti avendo basi congruenti e uguale altezza (AH).



In conclusione:

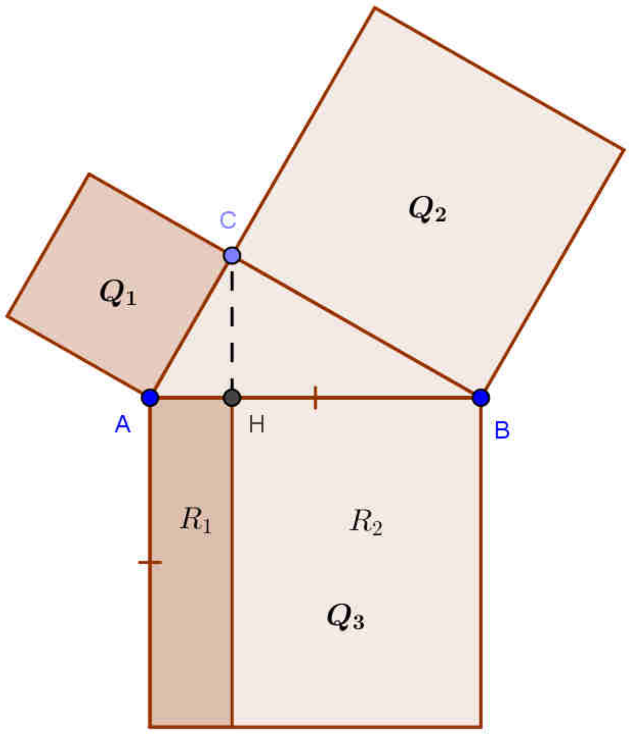
$$\mathcal{Q} \equiv \mathcal{P} \text{ , } \mathcal{P} \equiv \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{Q} \equiv \mathcal{R}$$

cioè il quadrato ACDE costruito su un cateto è equivalente al rettangolo AHGF che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa.

Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Dimostrazione



Disegniamo i quadrati Q_1 , Q_2 sui cateti e il quadrato Q_3 sull'ipotenusa.

Tracciamo l'altezza CH e prolunghiamola in modo da scomporre il quadrato Q_3 nei rettangoli R_1 , R_2 .

Per il primo teorema di Euclide abbiamo che

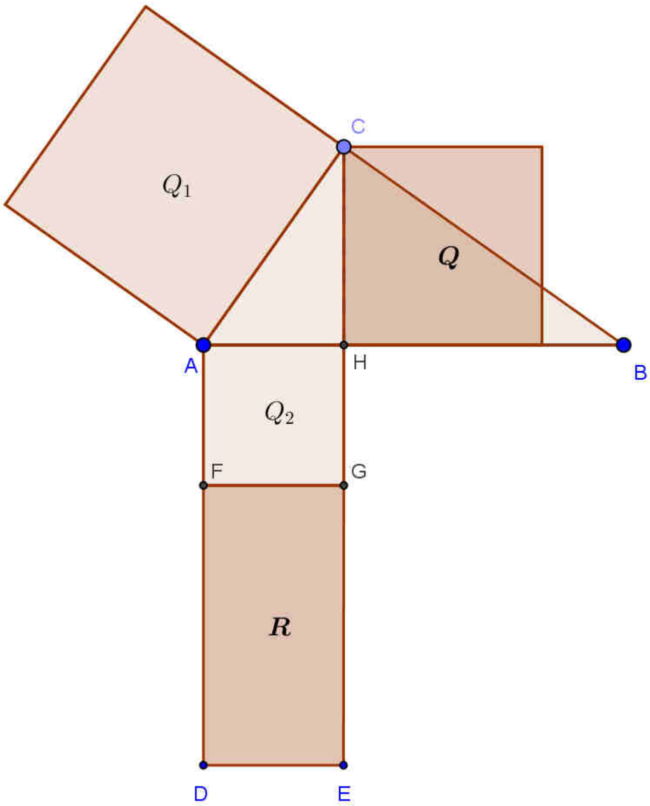
$$Q_1 \equiv R_1 , \quad Q_2 \equiv R_2$$

e quindi

$$Q_1 + Q_2 \equiv R_1 + R_2 \quad \to \quad Q_1 + Q_2 \equiv Q_3$$

Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Disegniamo il quadrato Q_1 di lato AC, il quadrato Q di lato CH e il rettangolo di base AH e altezza $AD \cong AB$.

Consideriamo su AD un punto F tale che $AF \cong AH$ e disegniamo il quadrato Q_2 di lato AH. Indichiamo con R il rettangolo DEGF.

Per il teorema di Pitagora abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + Q \rightarrow Q \equiv Q_1 - Q_2$$

Per il primo teorema di Euclide abbiamo:

$$Q_1 \equiv Q_2 + R \rightarrow R \equiv Q_1 - Q_2$$

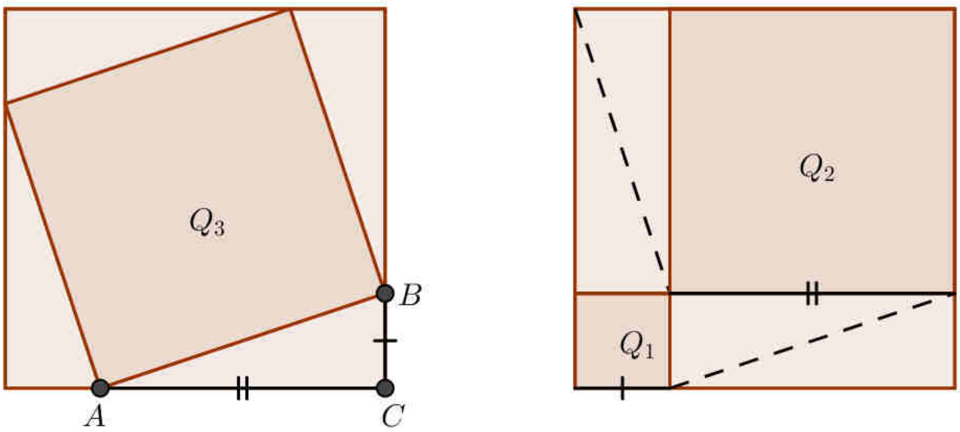
Quindi, per la proprietà transitiva, abbiamo che $Q \equiv R$.

SCHEDA 1
Un'altra dimostrazione del teorema di Pitagora

Possiamo dimostrare il teorema di Pitagora anche senza utilizzare il primo teorema di Euclide.

Considera un triangolo rettangolo ABC: prolunga il cateto AC di un segmento congruente all'altro cateto e costruisci un quadrato Q che ha per lato la somma dei cateti.

Disegna, all'interno del quadrato, il quadrato Q_3 che ha per lato l'ipotenusa del triangolo.



Lo stesso quadrato Q può essere scomposto in due quadrati di lati uguali ai cateti del triangolo ABC e in due rettangoli: tracciando le diagonali dei due rettangoli ci si accorge che

…………………………………………………………………………………………………….

Si può quindi concludere che ……………………………………………………………………….

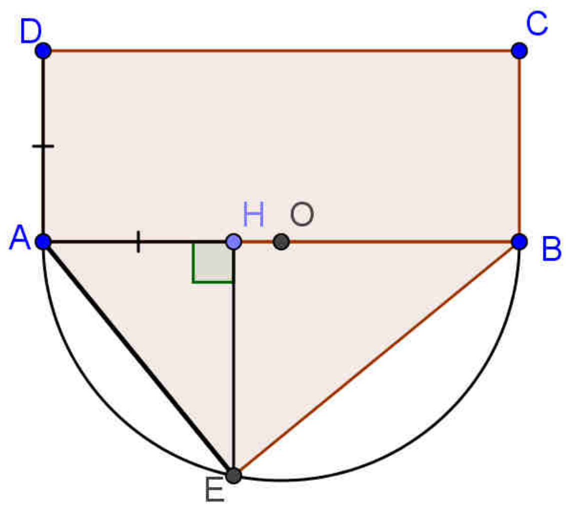
poiché……………………………………………………………………………………………….

SCHEDA 2
Costruzione di un quadrato equivalente ad un rettangolo assegnato

Sia dato un rettangolo ABCD: vogliamo costruire un quadrato ad esso equivalente.

Supponiamo che $AB > BC$ e sia O il punto medio di AB.

Tracciamo la semicirconferenza di centro O e raggio AO esterna al rettangolo.



Consideriamo su AB un punto H tale che $AH \cong AD$ e tracciamo per H la perpendicolare ad AB che incontra in E la semicirconferenza.

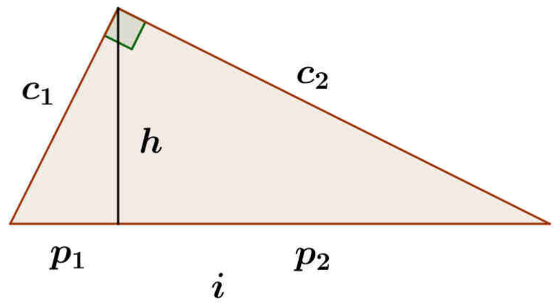
Il triangolo ABE è un triangolo ………………………….

AE è il lato del quadrato equivalente al rettangolo poiché, per il primo teorema di Euclide,………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora

Utilizziamo le **misure** e vediamo come si riscrivono i teoremi di Pitagora ed Euclide per il triangolo rettangolo.
Indichiamo con c_1, c_2, i le misure dei cateti e dell'ipotenusa; con h, p_1, p_2 le misure dell'altezza relativa all'ipotenusa e delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Teorema di Pitagora: poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_1 è c_1^2, l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_2 è c_2^2 e l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa che misura i è i^2 si ha che

$$\boxed{c_1^2 + c_2^2 = i^2}$$

1° Teorema di Euclide: poiché l'area del quadrato costruito sul cateto che misura c_1 è c_1^2 e l'area del rettangolo di dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa è $p_1 \cdot i$ si ha che

$$\boxed{c_1^2 = p_1 \cdot i}$$

e analogamente per l'altro cateto $c_2^2 = p_2 \cdot i$

2° Teorema di Euclide: poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa di misura h risulta h^2 e la misura dell'area del rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $p_1 \cdot p_2$ si ha

$$\boxed{h^2 = p_1 \cdot p_2}$$

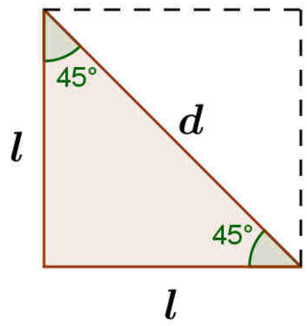
TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI

Inoltre dal teorema di Pitagora si ricavano delle relazioni importanti per due triangoli rettangoli particolari.

Triangolo rettangolo con angoli di 45°

Un triangolo rettangolo con angoli di 45° è metà di un quadrato ed indicando con l il lato e con d la diagonale, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:

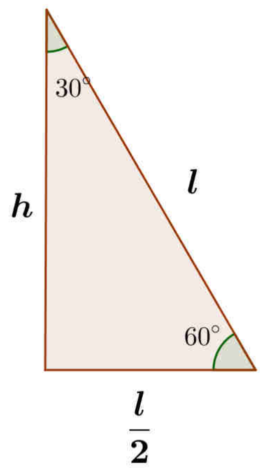
$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$$



Triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° è la metà di un triangolo equilatero e se indichiamo con l la lunghezza del lato e con h la lunghezza dell'altezza, applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:

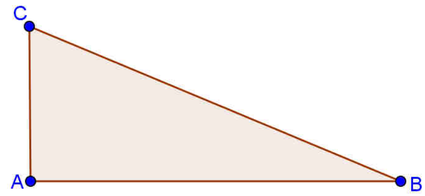
$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$



Problemi svolti

1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{5}{12}$ dell'altro e il perimetro è 60 cm. Quali sono le lunghezze dei cateti?

Considera il triangolo in figura.



Se poniamo $\overline{AB} = x$ abbiamo $\overline{AC} = \frac{5}{12}x$ ed applicando il teorema di Pitagora avremo:

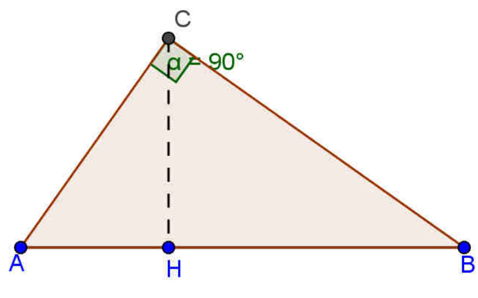
$$\overline{CB} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{12}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{25}{144}x^2} = \frac{13}{12}x$$

Poiché il perimetro è 60 cm abbiamo che

$$x + \frac{5}{12}x + \frac{13}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad \frac{30}{12}x = 60 \quad \rightarrow \quad x = 24$$

Quindi $\quad \overline{AB} = 24cm; \quad \overline{AC} = \frac{5}{12} \cdot 24 = 10cm; \quad \overline{BC} = \frac{13}{12} \cdot 24 = 26cm$

2) Consideriamo un triangolo rettangolo di cui si conoscono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa $\overline{AH} = 3cm$, $\overline{HB} = \frac{16}{3}cm$. Come risultano le lunghezze dei cateti?



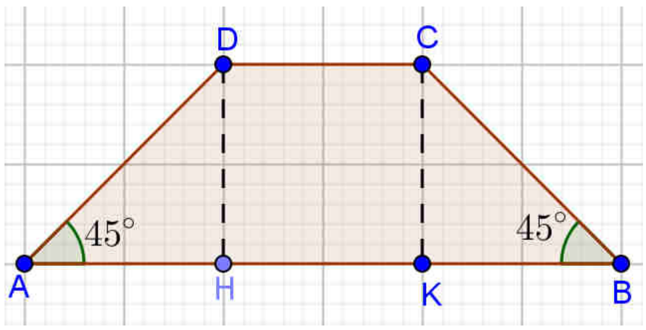
Possiamo usare il 1° teorema di Euclide e, considerando che $\overline{AB} = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}$, abbiamo:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = \frac{25}{3} \cdot 3 = 25 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{25} = 5cm, \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB} = \frac{400}{9} \rightarrow \overline{BC} == \frac{20}{3}cm$$

Nota: avremmo potuto anche usare il 2° teorema di Euclide e determinare prima $\overline{CH}$ e poi, usando il teorema di Pitagora, i cateti.

$$\overline{CH}^2 = 16 \rightarrow \overline{CH} = 4 \ cm \ , \quad \overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5 \ cm, \quad \overline{BC} = \sqrt{16 + \frac{256}{9}} = \frac{20}{3} \ cm$$

3) Considera un trapezio isoscele ABCD avente gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45° e siano H e K i piedi delle altezze (vedi figura). Sapendo che DCKH è un quadrato di lato 5 cm, determina perimetro e area del trapezio.

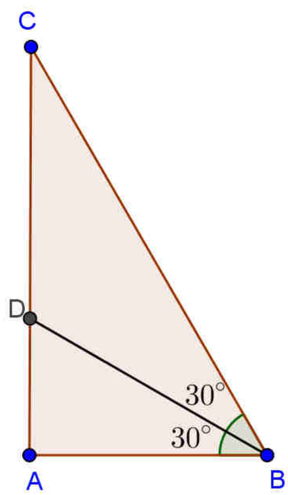


Abbiamo $\overline{AD} = \overline{CB} = 5\sqrt{2}\ \ cm, \quad \overline{AB} = 15\ \ cm$

Quindi $2p = 15 + 5 + 10\sqrt{2} = 20 + 10\sqrt{2}\ \ cm$

$$A = \frac{20 \cdot 5}{2} = 50\ \ cm^2$$

4) Un triangolo rettangolo ABC retto in A ha l'angolo $\hat{B} = 60°$ e la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ misura 6 cm. Come si determinano i lati del triangolo?



Nel triangolo ABD si ha:

$$\overline{AD} = \frac{6}{2} = 3\ \ cm, \quad \overline{AB} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\ \ cm$$

Se poi consideriamo il triangolo ABC avremo che:

$$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB} = 6\sqrt{3}\ \ cm, \quad \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = 9\ \ cm$$

ESERCIZI

1) In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{4}{3}$ dell'altro cateto e l'area è 150 cm^2. Calcola la lunghezza dei cateti e dell'ipotenusa.

[15 *cm*; 20 *cm*; 25 *cm*]

2) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 5 *cm* e l'altezza relativa all'ipotenusa $\frac{12}{5}\ cm$. Determina la lunghezza dei cateti.

[3 cm; 4 cm]

3) In un triangolo rettangolo i cateti stanno tra loro come 3 sta a 4. Sapendo che il perimetro è 6 cm, determina la lunghezza dei cateti dell'ipotenusa.

[2 cm ; $\frac{3}{2}\ cm$, $\frac{5}{2}\ cm$]

4) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che la sua area è a^2 .

[$2\left(\sqrt{2}+1\right)a$]

5) Calcola l'area di un triangolo rettangolo isoscele sapendo che il suo perimetro è uguale a $2+\sqrt{2}\ cm$.

[$\frac{1}{2}\ cm^2$]

6) In un triangolo isoscele il perimetro misura 72 *cm* e l'altezza relativa alla base 24 *cm*. Determina la lunghezza dei lati obliqui e della base.

[26 *cm*; 20 *cm*]

7) Considera un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB}=6\ cm$ e lato obliquo 5 *cm*. Determina il raggio R della circonferenza circoscritta.

[$R=\frac{25}{8}\ cm$]

8) In un trapezio rettangolo ABCD con angoli retti in A e D, si ha che l'angolo adiacente alla base maggiore $\hat{B}=45°$. Sapendo che $\overline{BC}=5\sqrt{2}\ cm$ e che l'area risulta $\frac{45}{2}\ cm^2$, determina la lunghezza delle basi e dell'altezza del trapezio.

[7 *cm* ; 2 *cm* ; 5 *cm*]

9) In un rombo le diagonali sono l'una i $\frac{12}{5}$ dell'altra ed il perimetro del rombo è 26 *cm*. Determina la lunghezza del lato e dell'altezza del rombo.

[$\frac{13}{2}\ cm,\quad \frac{60}{13}\ cm$]

10) Un trapezio isoscele ABCD di base AB è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 10\ cm$. Sapendo che gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano 60°, determina perimetro ed area del trapezio.

[$2p = 25\ cm,\quad A = \frac{75}{4}\sqrt{3}\ cm^2$]

11) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro è $80a$.

[$300\ a^2$]

12) I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 20 *cm* stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. Determina l'area del rettangolo.

[$192\ cm^2$]

13) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 25 *cm* ed un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.

[60 *cm*]

14) In un parallelogramma l'angolo acuto misura 30°, il lato maggiore è quattro volte quello minore e l'area è $450\ cm^2$. Determina le lunghezze dei lati e delle due altezze del parallelogramma.

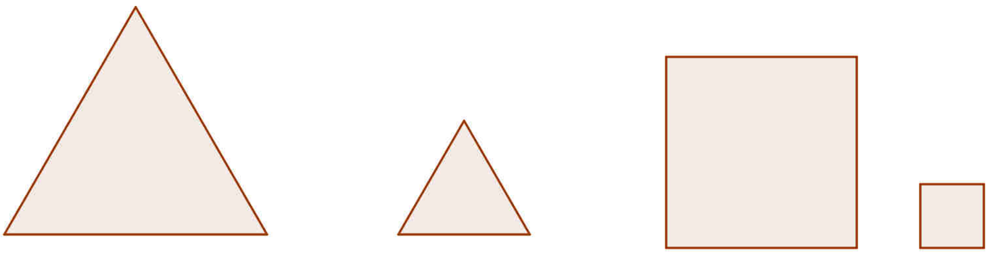
[15 *cm*; 60 *cm*; $\frac{15}{2}\ cm$; $30\ cm$]

15) Disegna un trapezio isoscele ABCD con la base maggiore doppia della minore e gli angoli adiacenti alla base minore di 120°. Traccia le altezze DE e CF. Sapendo che l'area del rettangolo EFCD è $32\sqrt{3}\ cm^2$, calcola area e perimetro del trapezio.

[$48\sqrt{3}\ cm^2$; $40\ cm$]

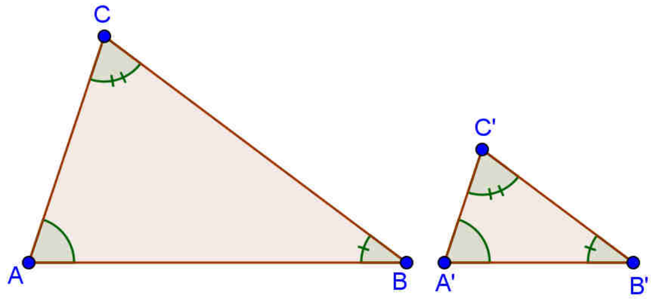
GEOMETRIA EUCLIDEA
Similitudine

Se consideriamo due triangoli equilateri di lato diverso, due quadrati di lato diverso intuitivamente diciamo che hanno *"la stessa forma*".



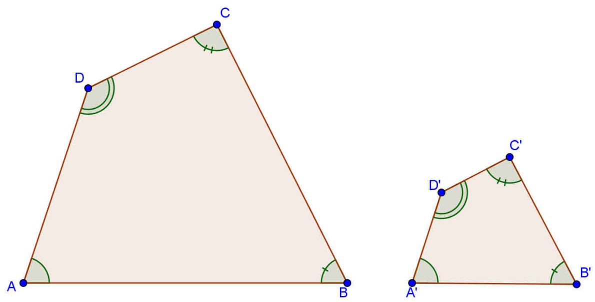
Ma cosa comporta avere la "*stessa forma*"?

Se osserviamo due triangoli della stessa forma (vedi esempio in figura) notiamo che hanno gli angoli ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati opposti ad angoli uguali è sempre lo stesso.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$$

Anche considerando due quadrilateri con la stessa forma notiamo che gli angoli sono ordinatamente uguali e che il rapporto tra lati aventi per estremi vertici di angoli uguali è sempre lo stesso.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

Diamo quindi la seguente definizione:

diciamo "**simili**"**due poligoni con lo stesso numero di lati che hanno gli angoli ordinatamente uguali ed i lati "corrispondenti**" (aventi per estremi vertici di angoli uguali) **in proporzione**.

Il rapporto tra lati corrispondenti viene detto *rapporto di similitudine***.**

Osservazioni

- Se due poligoni sono congruenti sono anche simili (il rapporto di similitudine in questo caso è uguale a 1).

- Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili.

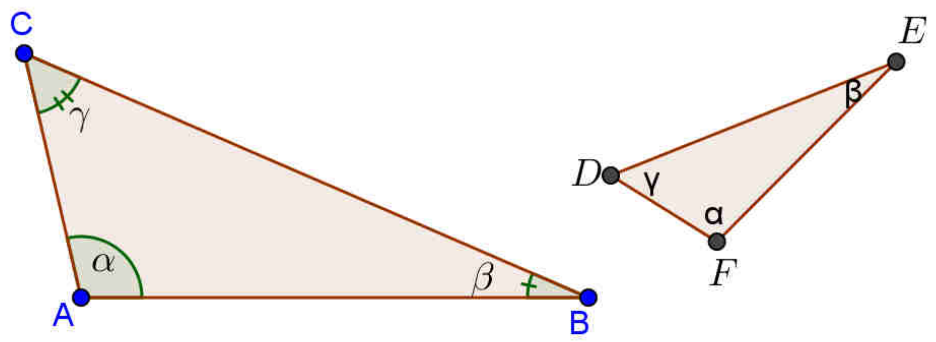
Similitudine dei triangoli

Osservazione

Se due triangoli sono simili conviene indicare con lettere "corrispondenti" (A-A' ; B-B'; C-C') i vertici di angoli corrispondenti uguali ed in questo modo sarà semplice individuare i lati corrispondenti che saranno AB-A'B' ; BC-B'C' ; AC-A'C'.

Ma se i vertici sono indicati in modo diverso è importante individuare gli angoli corrispondenti e di conseguenza i lati corrispondenti (che sono opposti ad angoli corrispondenti).

Per esempio se in figura abbiamo che



$$D\hat{F}E \cong \hat{A}, \quad F\hat{E}D \cong \hat{B}, \quad E\hat{D}F \cong \hat{C}$$

ad AB corrisponde EF perché l'angolo opposto ad AB è γ e quindi nel triangolo EDF gli corrisponde il lato opposto all'angolo congruente a γ cioè EF ecc.
e in conclusione

$$AB : EF = BC : DE = AC : DF$$

A differenza degli altri poligoni, per i triangoli ***l'uguaglianza degli angoli e la proporzionalità tra i lati non sono proprietà indipendenti.***

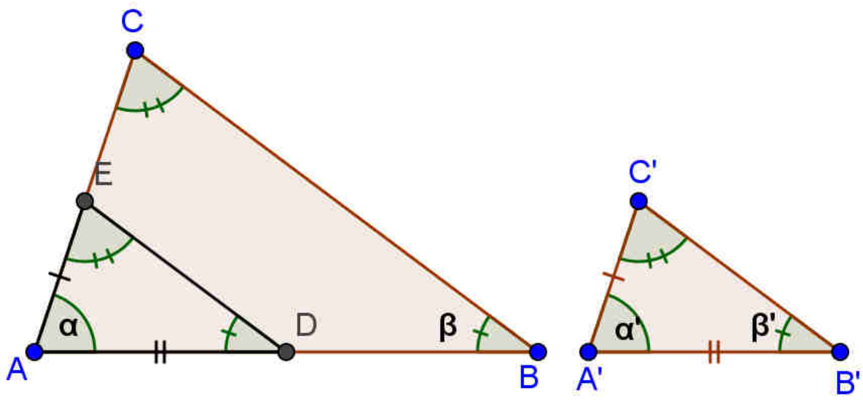
Possiamo infatti dimostrare tre "criteri" per stabilire se due triangoli sono simili.

Primo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente uguali allora sono simili.

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABC e A'B'C' e supponiamo che $\alpha \cong \alpha', \quad \beta \cong \beta'$.
Osserviamo subito che ,essendo la somma degli angoli interni di un triangolo uguale ad un angolo piatto, anche $\gamma \cong \gamma'$.
Supponiamo che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ (altrimenti i triangoli sono congruenti e quindi anche simili) e consideriamo un punto D su AB tale $\overline{AD} \cong \overline{AB'}$ e un punto E su AC in modo che $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.



Congiungendo D con E otteniamo un triangolo ADE congruente ad A'B'C' (primo criterio di congruenza) e quindi $A\hat{E}D \cong \gamma', \quad A\hat{D}E \cong \beta'$.

Ma allora le rette DE e BC sono parallele (angoli corrispondenti uguali) e quindi, per il teorema di Talete,

$$AB : AD = AC : AE \quad \rightarrow \quad AB : A'B' = AC : A'C'$$

Poiché il ragionamento e la costruzione si può ripetere riportando su AC e BC segmenti congruenti a A'C' e B'C' si ottiene anche che

$$AC : A'C' = BC : B'C'$$

Quindi tutti i lati corrispondenti sono in proporzione ed i triangoli sono simili.

Nota

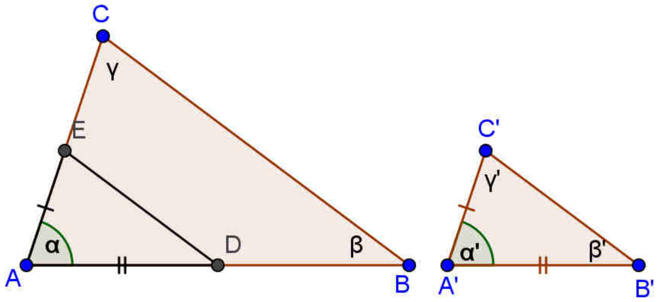
Questo è sicuramente il criterio più utilizzato nei problemi per stabilire se due triangoli sono simili.

Secondo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno un angolo uguale e i lati che lo comprendono in proporzione allora sono simili.

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABC e A'B'C' e supponiamo che $\alpha \cong \alpha'$ e che $AB : A'B' = AC : A'C'$.



Supponiamo anche in questo caso che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ e prendiamo D su AB tale che $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ ed E su AC tale che $\overline{AE} = \overline{A'C'}$.
Congiungendo D con E otteniamo un triangolo ADE congruente ad A'B'C' (primo criterio di congruenza).
Quindi, essendo valida la proporzione $AB : AD = AC : AE$ si deduce che DE è parallelo a BC e quindi $A\hat{D}E = \beta$, $D\hat{E}A = \gamma$ ed i triangoli ABC e ADE sono simili.
Essendo A'B'C' congruente a ADE abbiamo dimostrato che A'B'C' è simile ad ABC.

Terzo criterio di similitudine dei triangoli

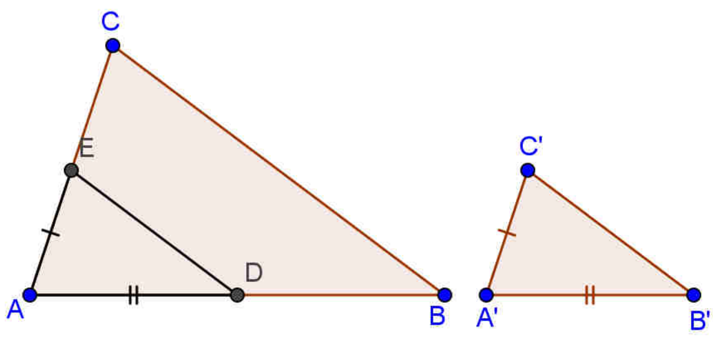
Se due triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione allora sono simili.

Dimostrazione

Supponiamo che

$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

Supponiamo come al solito che $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ e prendiamo D su AB tale che $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ ed E su AC tale che $\overline{AE} = \overline{A'C'}$.



Quindi, essendo valida la proporzione $AB : AD = AC : AE$ si ha che DE è parallelo a BC e quindi ADE è simile a ABC e di conseguenza si ha anche $AB : AD = BC : DE$.

Per ipotesi però $AB : A'B' = BC : B'C'$ e quindi $\overline{B'C'} = \overline{DE}$.

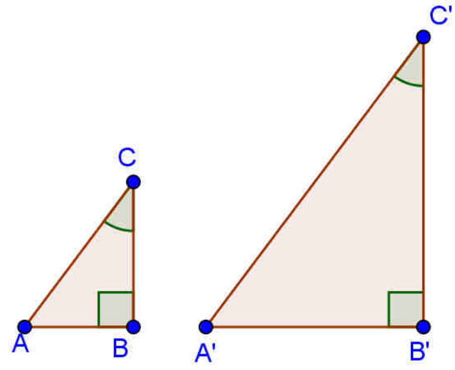
Ma allora i triangoli A'B'C' e ADE sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli e in conclusione A'B'C' è simile a ABC.

SCHEDA 1
Conseguenze del primo criterio di similitudine dei triangoli

1) Due triangoli rettangoli aventi un angolo acuto

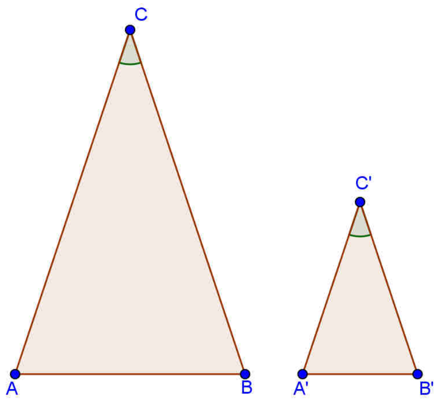
   uguale sono…………………………………..

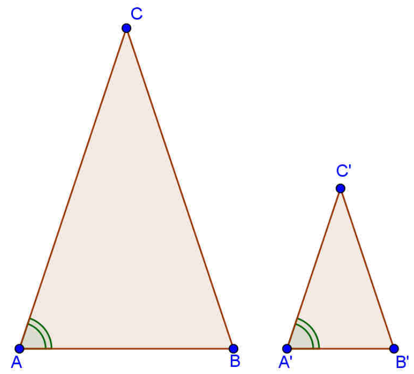
   Infatti………………………………………..



2) Due triangoli isosceli aventi uguale l'angolo al vertice oppure un angolo alla base sono………

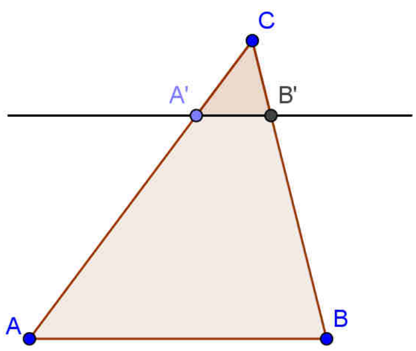
   Infatti…………………………………





3) Tracciando una corda parallela ad un lato di un triangolo ABC si individua un triangolo…......

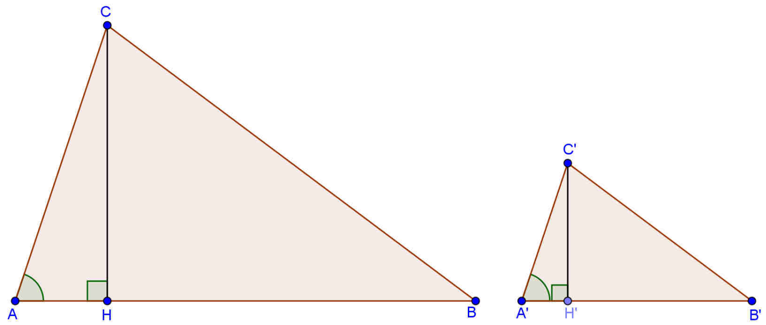
   Infatti………………………………….



SCHEDA 2
Proprietà dei triangoli simili

1) In due triangoli simili le basi stanno tra loro come le rispettive altezze.

Dimostrazione guidata: consideriamo i triangoli simili ABC e A'B'C' e siano CH e C'H' le altezze relative alle basi corrispondenti AB e A'B'.



Poiché i triangoli rettangoli AHC e A'H'C' hanno ……………….. sono simili e quindi

$$AC : A'C' = CH : C'H'$$

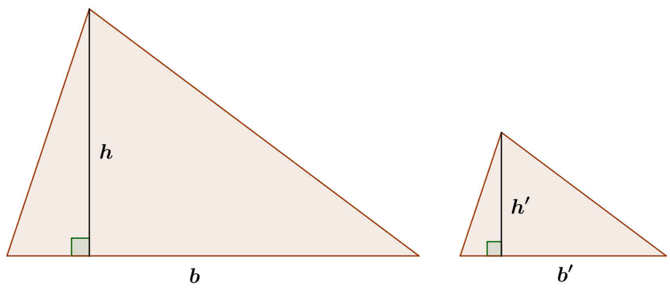
Ma poiché si ha anche che $AC : A'C' = AB : A'B'$, avremo anche che …………………

2) Il rapporto tra le aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Dimostrazione guidata: considerando due triangoli simili aventi basi *b*,*b'* e relative altezze *h*, *h'* aventi rapporto di similitudine *k* (cioè per esempio $\frac{b}{b'} = k$).

Indicando con A e A' le loro aree avremo che

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}b'h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = \text{.........}$$

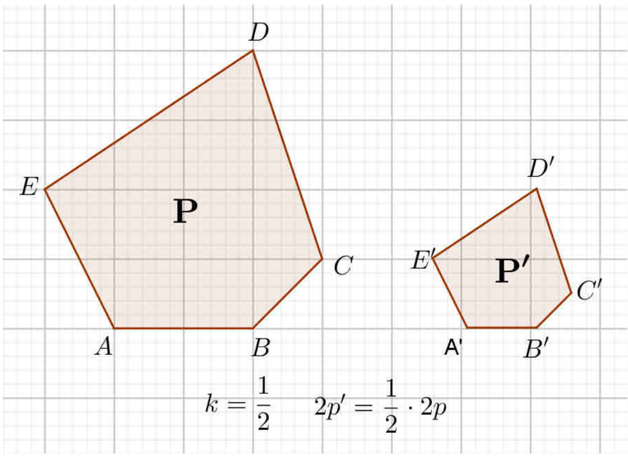


Perimetri e aree di poligoni simili

- *Il rapporto tra i perimetri di due poligoni simili è uguale al rapporto di similitudine.*

Infatti se ABCDE e A'B'C'D'E' sono due poligoni simili e k è il loro rapporto di similitudine , indicando con $2p$, $2p'$ i rispettivi perimetri, si ha:

$$A'B' = kAB\,, \quad B'C' = kBC\,, \quad \ldots \rightarrow A'B' + B'C' + \ldots . = k(AB + BC + \ldots .) \rightarrow 2p' = k \cdot 2p \rightarrow \frac{2p'}{2p} = k$$

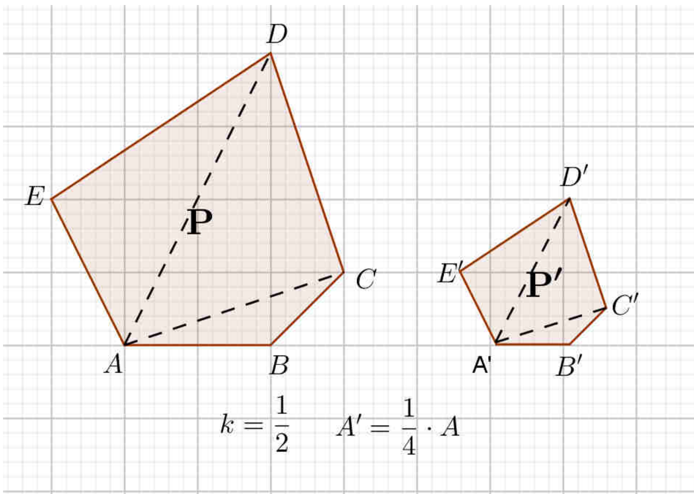


- *Il rapporto tra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.*

Infatti, dividendo i poligoni in triangoli corrispondenti (che saranno simili tutti con lo stesso rapporto di similitudine k), se indichiamo con A e A' le aree dei due poligoni e con A_1, A_1' ; A_2, A_2' *ecc.* le aree dei triangoli corrispondenti, ricordando che

$$A_1' = k^2 A_1\,, \quad A_2' = k^2 A_2 \ldots .$$

avremo che



$$A' = A_1' + A_2' + \ldots . = k^2 (A_1 + A_2 + \ldots) = k^2 \cdot A \rightarrow \frac{A'}{A} = k^2$$

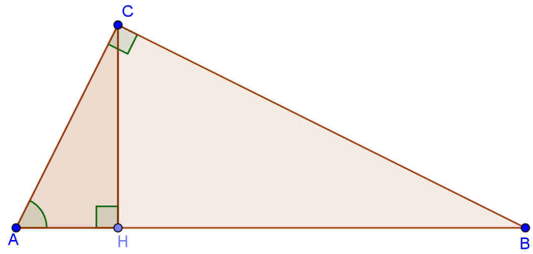
Teoremi di Euclide e similitudine

Possiamo dimostrare i due teoremi di Euclide utilizzando la similitudine dei triangoli che vengono a formarsi quando tracciamo l'altezza relativa all'ipotenusa.

1° teorema di Euclide

"Il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa"

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.



Il triangolo **ACH risulta simile al triangolo ABC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo in comune $\hat{A}$).
Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha:

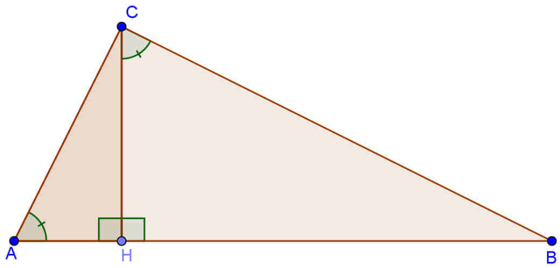
$$AB : AC = AC : AH \quad \rightarrow \quad AC^2 = AB \cdot AH$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al primo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sul cateto AC è AC^2 e l'area del rettangolo avente dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa è $AB \cdot AH$.

2° teorema di Euclide

"Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa"

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa.



Il triangolo **ACH risulta simile al triangolo HBC** poiché si tratta di due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (angolo $H\hat{A}C \equiv H\hat{C}B$ perché complementari dello stesso angolo).
Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione cioè si ha:

$$AH : HC = HC : HB \quad \rightarrow \quad HC^2 = AH \cdot HB$$

Ma quello che abbiamo trovato corrisponde proprio al secondo teorema di Euclide poiché l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è HC^2 e l'area del rettangolo avente dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $AH \cdot HB$.

SCHEDA 3
Proprietà delle secanti e delle tangenti ad una circonferenza

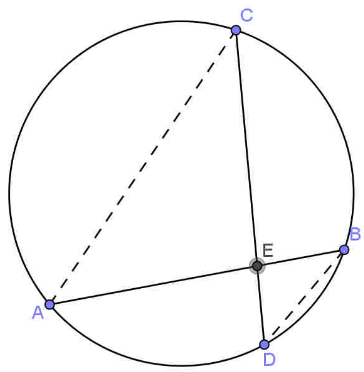
1) Considera una circonferenza e **due corde** AB e CD **che si intersecano** in E.
Prova a dimostrare che si dividono in modo che le due parti dell'una formano i medi e le due parti dell'altra gli estremi di una proporzione cioè :

$$AE : CE = ED : EB$$

Suggerimento: considera i triangoli ACE e EBD.
Risultano simili perché

…………………………………………………………………….

e quindi...…………………………………………………….



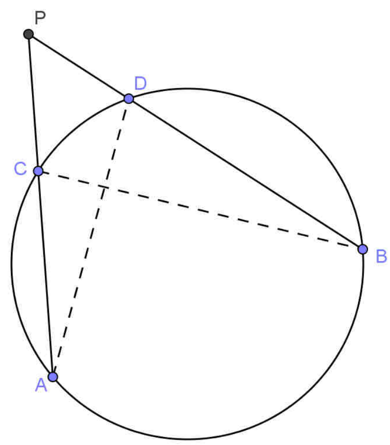
2) Considera una circonferenza e conduci da un punto esterno P **due secanti** PA e PB.
Prova a dimostrare che un'intera secante e la sua parte esterna formano i medi e l'altra secante e la sua parte esterna gli estremi di una proporzione, cioè :

$$PA : PB = PD : PC$$

Suggerimento: considera i triangoli PAD e PBC.
Risultano simili perché

……………………………………………………………………

e quindi...…………………………………………………



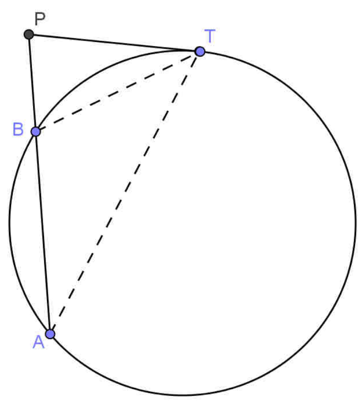
3) Considera una circonferenza e conduci da un punto esterno P **una tangente** PT **una secante** PA. Prova a dimostrare che la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la parte esterna di questa, cioè :

$$PA : PT = PT : PB$$

Suggerimento: considera i triangoli PAT, PTB.
Risultano simili perché

……………………………………………………………………

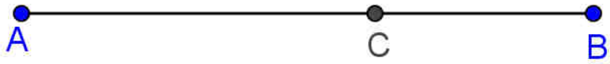
e quindi...……………………



SCHEDA 4
Sezione aurea di un segmento

Dato un segmento AB si chiama "**sezione aurea di AB**" la parte del segmento che risulta media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante di esso, cioè AC è sezione aurea di AB quando

$$\boxed{AB : AC = AC : CB}$$



Come si può determinare AC ?
Poniamo $\overline{AB} = l$, $\overline{AC} = x$
Dobbiamo avere

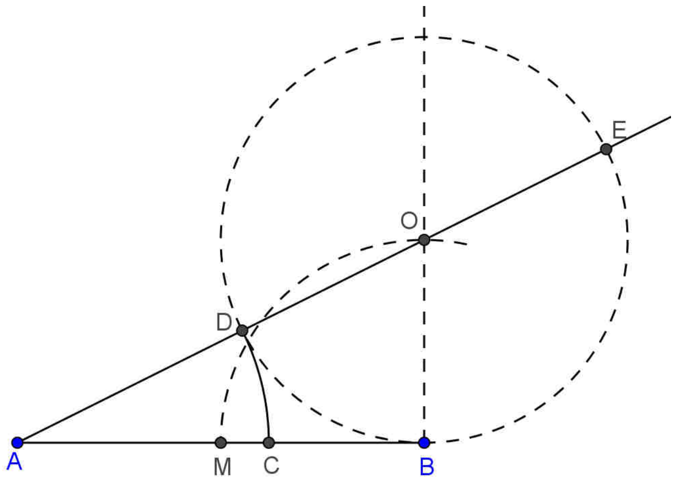
$$l : x = x : (l - x) \Rightarrow x^2 = l(l - x) \Rightarrow x^2 + lx - l^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} \to x = \frac{-l + \sqrt{5}l}{2} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}l$$

(poiché $x = \dfrac{-l - \sqrt{5}l}{2}$, essendo un numero negativo, è una soluzione non accettabile).

Costruzione con riga e compasso della sezione aurea di AB.

Si procede così:

- Considera il punto medio M di AB, puntando il compasso in B con apertura MB ed intersecando con la perpendicolare ad AB per B, individua il punto O;
- Traccia la semiretta uscente da A e passante per O;
- Punta il compasso in O e traccia la circonferenza di centro O e raggio OB, individuando il punto D su AO e il punto E ;
- Riporta AD su AB (puntando in A con apertura AD) ed individua C: AC è la sezione aurea di AB



Infatti:

se $\overline{AB} = l$, $\overline{BO} = \dfrac{l}{2} \to \overline{AO} = \sqrt{l^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}l$

e in conclusione $\overline{AC} = \overline{AD} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}l - \dfrac{l}{2} = \dfrac{(\sqrt{5} - 1)}{2}l$ cioè AC è la sezione aurea di AB.

Nota
Il rapporto aureo e il rettangolo aureo

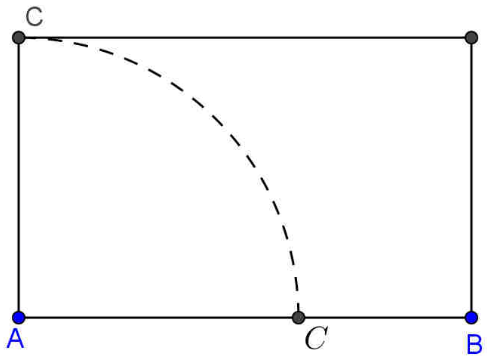
Il rapporto $\frac{AB}{AC}$ è chiamato rapporto aureo (viene indicato con la lettera ϕ).

Ma a quale numero corrisponde?

Abbiamo $$\frac{AB}{AC}=\frac{l}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}l}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cong 1{,}618$$

Il rettangolo in cui le dimensioni sono in rapporto aureo risulta molto "armonioso" e viene detto **"rettangolo aureo**".

Il rettangolo aureo è stato sfruttato nell'arte e in numerose applicazioni: anche le tessere (bancomat, sanitaria ecc.) sono rettangoli aurei (controlla!)



Una curiosità
Se consideriamo la successione (detta "successione di Fibonacci") dei numeri che inizia con i primi due termini uguali a 1 e in cui poi ogni termine successivo è uguale alla somma dei due termini precedenti

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

abbiamo che il rapporto tra un termine e il termine precedente tende sempre di più ad essere uguale a ϕ.

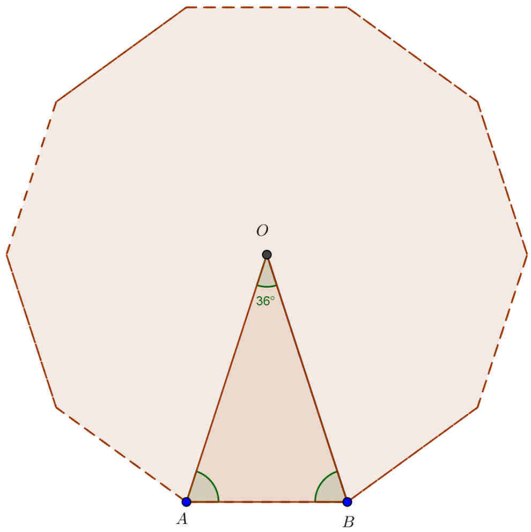
Infatti abbiamo
$$\frac{1}{1}=1;\quad \frac{2}{1}=2;\quad \frac{3}{2}=1{,}5;\quad \frac{5}{3}\cong 1{,}67;\quad \frac{8}{5}=1{,}6;\quad \frac{13}{8}=1{,}625;\quad \frac{21}{13}\cong 1{,}615.....$$

Prova ad approfondire l'argomento.

SCHEDA 5
Il lato del decagono regolare

Consideriamo un decagono regolare e la circonferenza ad esso circoscritta: prova a dimostrare che **il lato del decagono risulta la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta**.

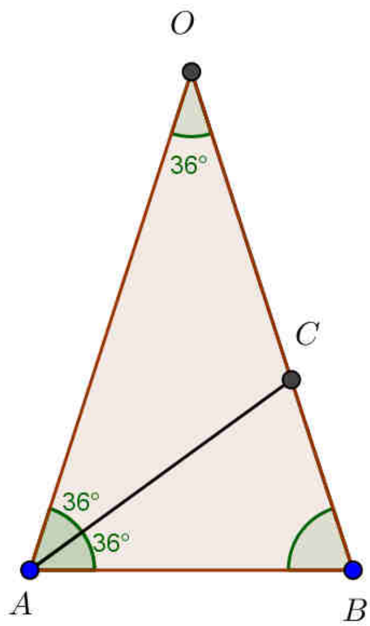
Suggerimento
Congiungi il centro O della circonferenza con due vertici A, B consecutivi del decagono: ottieni un triangolo isoscele il cui angolo al vertice misura ……… e gli angoli alla base misurano ……..



Traccia la **bisettrice** AC dell'angolo alla base $\hat{A}$:

il triangolo ABC risulta………..............al triangolo ABO poiché

………………………………………………………………………



Quindi i lati corrispondenti sono in proporzione e si ha

$$OA : AB = AB : ....$$

Ma poiché i triangoli ACO e ABC sono entrambi ……………, si ha $AC \cong OC \cong AB$ e quindi

$$BC = OA - AB$$

e in conclusione quindi AB risulta…………………………………

ESERCIZI

1) In un triangolo ABC, M e N sono rispettivamente i punti medi di AC e BC. Qual è il rapporto tra i perimetri dei triangoli MCN e ABC? E il rapporto tra le aree?

[$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$]

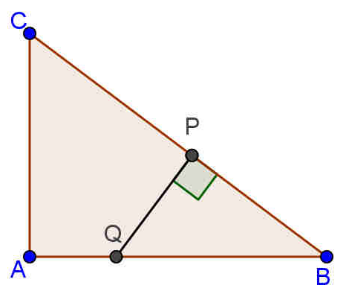
2) Considera un triangolo isoscele ABC avente base $\overline{AB} = 12\ cm$ e altezza $\overline{CH} = 8\ cm$. Considera il punto P su AC tale che $\overline{CP} = 4\ cm$ e traccia il segmento PQ parallelo ad AB con Q sul lato BC. Determina l'area del triangolo PQC.

[$\frac{192}{25}\ cm^2$]

3) Considera un triangolo ABC e siano L,M,N i punti medi dei lati. Come risulta il triangolo LMN rispetto ad ABC?

[simile, perché…..]

4) Dato un triangolo rettangolo ABC, da un punto P dell'ipotenusa BC conduci la perpendicolare all'ipotenusa e supponi che incontri AB in Q (vedi figura). Come risulta BPQ rispetto ad ABC?
Supponi che $\overline{AB} = 8\ cm$, $\overline{AC} = 6\ cm$, $\overline{PB} = 4\ cm$.
Determina perimetro e area di PBQ.



[simile perché…..; $2p = 12\ cm$, $A = 6\ cm^2$]

5) Disegna un parallelogramma ABCD e la sua diagonale AC. Da un punto P di AC traccia le parallele ai lati e dimostra che i parallelogrammi che hanno per diagonale i segmenti AP e PC sono simili.

6) Considera due quadrilateri che hanno tre angoli congruenti e due lati consecutivi in proporzione. Dimostra che sono simili.

Suggerimento: siano ABCD e A'B'C'D' i due quadrilateri aventi gli angoli uguali (se ne hanno tre uguali hanno uguale anche il quarto angolo perché…………………………..) e supponiamo che $AB : A'B' = BC : B'C'$.

Traccia la diagonale AC e A'C': il triangolo ABC è…………… al triangolo A'B'C' per il ……criterio di similitudine e quindi si ha anche che

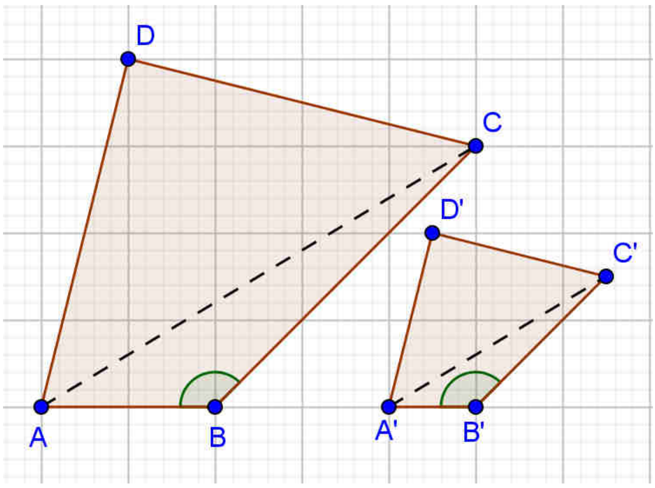
………………………………………

Allora

$D\hat{A}C \cong D'\hat{A'}C'$ e ……………………

E quindi i triangoli ADC e A'D'C' sono simili per il …….criterio e quindi

…………………………………………



7) Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e prolunga il diametro AB dalla parte di B di un segmento $\overline{BC} = 2r$. Traccia da C la tangente *t* alla semicirconferenza sia T il punto di contatto e D il punto di intersezione tra *t* e la perpendicolare condotta da A ad AB. Determina perimetro e area del triangolo ACD.

[$2p = 4(\sqrt{2}+1)r, \quad A = 2\sqrt{2}r^2$]

8) Disegna un trapezio ABCD e indica con O il punto di intersezione tra le diagonali. Traccia per O la corda MN parallela alle basi (con M e N sui lati obliqui).Dimostra che O dimezza MN.

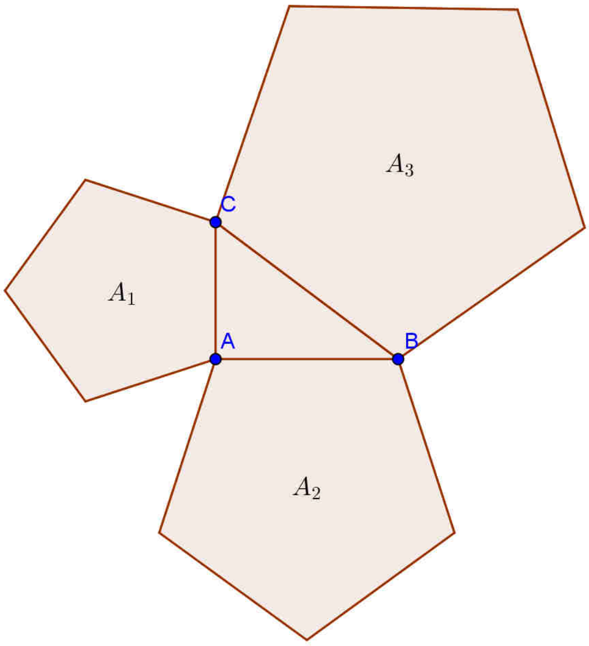
Suggerimento: i triangoli ONC e ABC sono ……………… e il rapporto di similitudine è uguale a $\frac{CN}{CB}$, i triangoli MOD e ABD sono …………………. e il rapporto di similitudine è uguale a ………

Quindi per il teorema di Talete………………………………………………………………

e in conclusione……………………………………………………………………………

9) Considera un **triangolo rettangolo** e costruisci sui suoi lati dei poligoni regolari con lo stesso numero di lati. Dimostra che il **poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui cateti**.

Suggerimento: i poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili tra loro e le loro aree stanno tra loro come i quadrati costruiti su lati corrispondenti cioè



$$A_1 : A_2 = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$$

$$A_3 : A_2 = \overline{CB}^2 : \overline{AB}^2$$

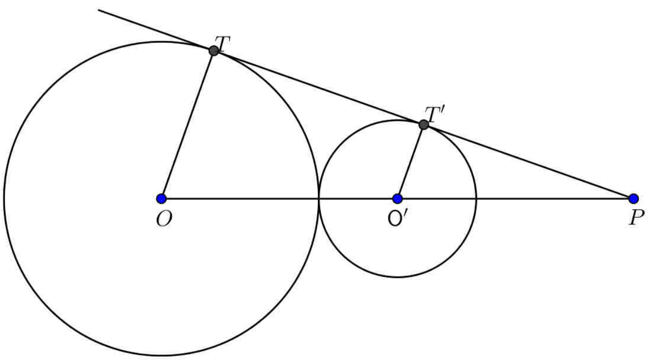
Quindi si ha anche

$$\frac{A_1 + A_2}{A_2} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AB}^2}$$

Allora poiché per il teorema di Pitagora di ha ………………………………………………

possiamo concludere che ……………………………………………………………………

10) Considera due circonferenze tangenti esternamente di raggi 4 cm e 2cm. Indicando con O e O' i loro centri, determina a quale distanza da O' si trova il punto P sulla retta per i centri da cui escono le tangenti comuni alle due circonferenze.

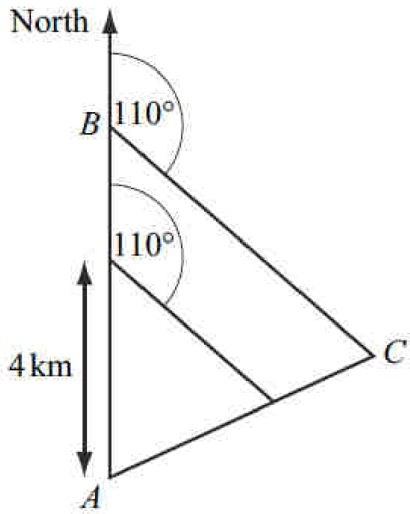


Suggerimento: indica con x la distanza $\overline{O'P}$ e traccia una delle rette tangenti ad entrambe le circonferenze.
Se indichi con T e T' i punti di contatto si osserva che…………......

[$\overline{O'P} = 6 \ cm$]

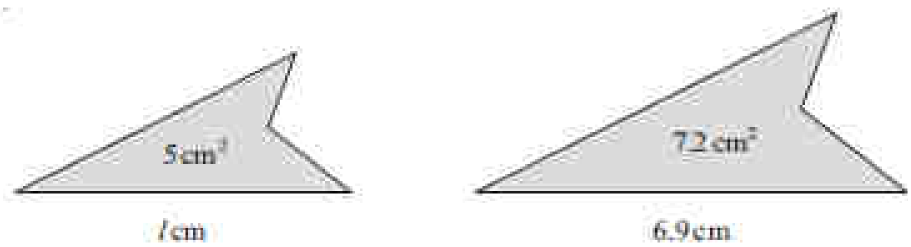
TEST
SIMILARITY

1) The route for the sponsored walk in winter is triangular.



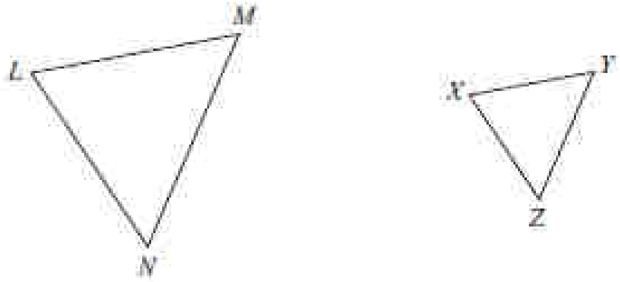
Senior students start at *A*, walk north to *B*, then walk on bearing 110° to *C*.
Then they return to *A*.
AB=*BC*=6 km
Junior students follow a **similar** path but they only walk 4 km North from *A*, then 4 km on a bearing of 110° before returning to A.
Senior students walk a total of 18.9 km.
Calculate the distance walked by junior students.

2) The diagram shows two similar figures.



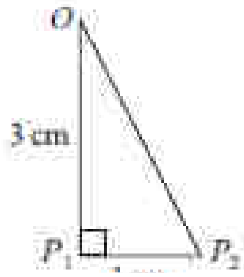
The areas of the figures are 5 cm^2 and 7.2 cm^2. The lengths of the bases are *l* cm and 6.9 cm.
Calculate the value of *l*.

3) A triangle *XYZ* is mathematically similar to triangle *LMN*.



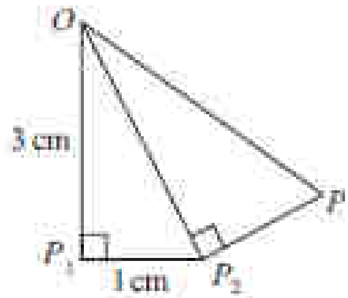
XZ=16 cm and the area of triangle *LMN* is 324 cm^2.Calculate the area of triangle *XYZ*.

4) Sidney draws the triangle OP_1P_2.OP_1=3 cm and P_1P_2=1 cm. Angle OP_1P_2=90°.



(a) Show that $OP_2 = \sqrt{10}$ cm.

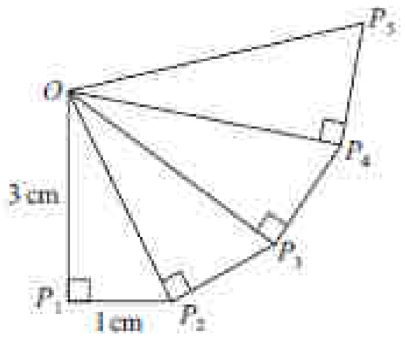
(b) Sidney now draws the lines P_2P_3 and OP_3.
Triangle OP_2P_3 is mathematically similar to triangle OP_1P_2.



(i) Write down the length of P_2P_3 in the form $\frac{\sqrt{a}}{b}$ where *a* and *b* are integers.

(ii) Calculate the length of OP_3 in the form $\frac{c}{d}$ where *c* and *d* are integers.

(c) Sidney continues to add mathematically similar triangles to his drawing.
Find the length of OP_5.



5) Ban and Sarah want to measure the height of a building. Ben is 1.8 m tall and Sarah suggests that he stands next to the building and compares the shadows. She measure his shadow to be 2.4 m long and the shadow of the building to be 16 m long. How tall is the building?

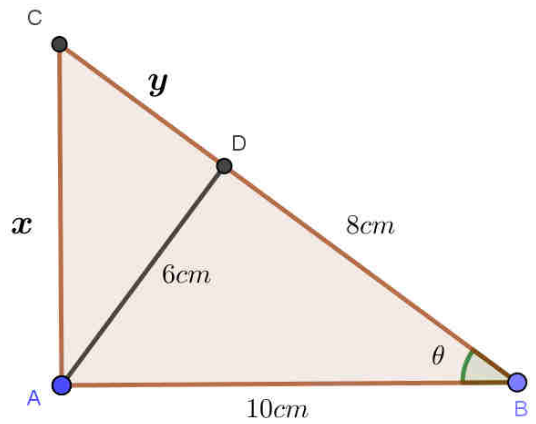
6) A photocopier is set to reduce the lengths of copies to $\frac{2}{3}$ of the original size. If the original document measures 12 cm by 15 cm what will be the dimension of the copy?

7) A photography shop produces enlargements of photos. A 15 cm x 10 cm photo was enlarged so that its longest side was 24 cm. What was the length of the shorter side?

8) A map is reduced to $\frac{3}{5}$ of its original size. A field on the original map measured 25 mm x 35 mm. What will be its dimensions on the image?

9) A map that measures 24 cm by 30 cm is reduced to $\frac{2}{3}$ of its original size. What are the dimensions of the reduced map?

10) In the triangle in the diagram BD = 8 cm, AB = 10 cm, AD = 6 cm, AC = x and CD = y.



(a) Draw the two triangle ABC and DBA in the same orientation and mark on all their angles.
(b) Hence explain why triangle ABC and DBA are similar.
(c) Write down an equation involving x
(d) Solve the equation to find x
(e) Calculate the value of y.

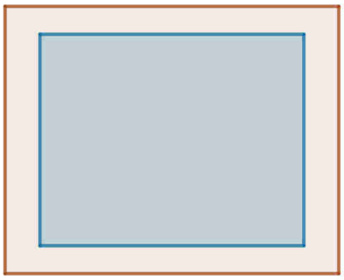
11) A rectangle P is enlarged to a rectangle Q. The dimensions of P are 5 m by 12 m. The shortest side of Q is 6 m.
(a) What is the scale factor of enlargement?
(b) What is the length of the longer side of Q?

12) A right-angled triangle P is enlarged to a triangle Q. The hypotenuse of P is 12 cm and the hypotenuse of Q is 15 cm.

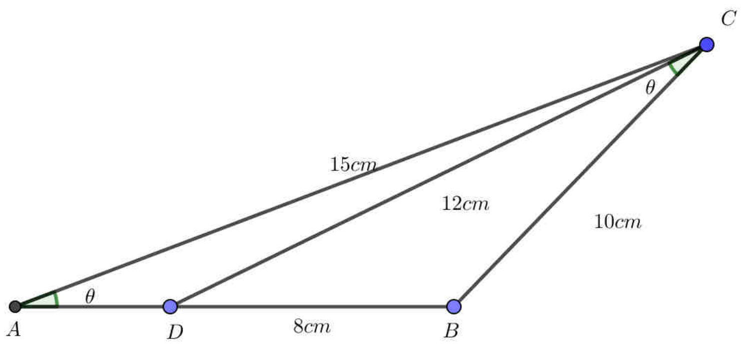
(a) What is the scale factor of enlargement?

(b) If the shortest side of P is 8 cm find the shortest side of Q.

13) A photo 8 cm high and 10 cm wide has a border 2 cm high along the bottom and the top of the photo and *w* cm wide on each side. Find *w* if the original photo is similar to the photo with its border.



14) In the diagram $D\hat{C}B \cong C\hat{A}B = \theta$, DB = 8 cm, DC = 12 cm and CB = 10 cm.



(a) To which triangle is the triangle ABC similar?

(b) Draw triangle ABC and the triangle of part (a) so that they have the same orientation and mark each side clearly.

(c) Find the length AB

(d) Find also the length AC.

15) The distance between Delhi and Calcutta is 1310 Km. On a map they are 26.2 cm apart. Find the scale of the map in the form 1:n.

16) The scale of a map is 1: 20 000 000. On the map the area of a state is 5 cm^2. Calculate the actual area of the state in Km^2.

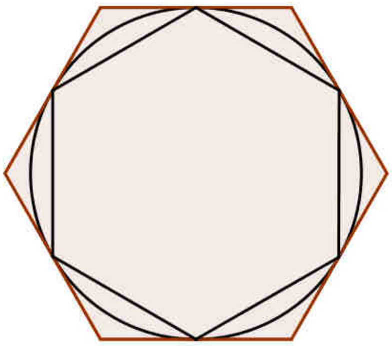
GEOMETRIA EUCLIDEA

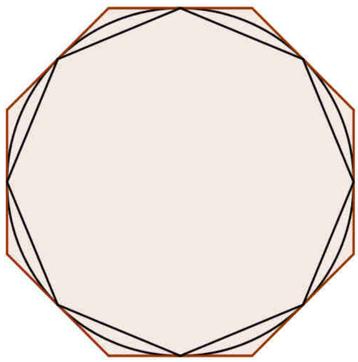
Lunghezza della circonferenza e area del cerchio

Come possiamo determinare la lunghezza di una circonferenza di raggio r ?

Proviamo a considerare *i poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza*: è chiaro che la lunghezza della circonferenza è maggiore del perimetro di un qualunque poligono regolare inscritto e minore del perimetro di un qualunque poligono regolare circoscritto.

Inoltre è intuitivo (e si può comunque dimostrare in modo rigoroso) che la differenza tra il perimetro di un poligono regolare circoscritto e il perimetro di un poligono regolare inscritto con lo stesso numero di lati diventa sempre più piccola aumentando il numero dei lati.



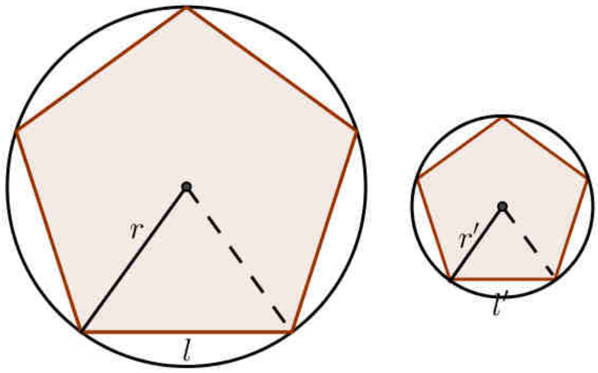


La lunghezza della circonferenza è definita come **l'elemento separatore** tra l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e l'insieme dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza.

Osservazioni

1) Se consideriamo due circonferenze di raggi *r* e *r’* e vi inscriviamo un poligono regolare dello stesso numero di lati, indicando con *2p* il perimetro del poligono inscritto nella circonferenza di raggio r e con *2p’* il perimetro di quello inscritto nella circonferenza di raggio *r’* abbiamo che:

$$2p : 2p' = r : r' \rightarrow \frac{2p}{2p'} = \frac{r}{r'}$$



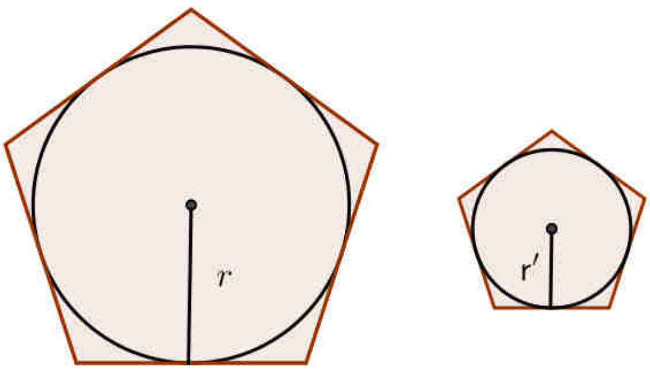
Dimostrazione
Sappiamo che $2p : 2p' = l : l'$.
Considerando la similitudine dei triangoli in figura abbiamo che

$$l : l' = r : r'$$

e quindi in conclusione $2p : 2p' = r : r'$.

2) Analogamente, considerando i poligoni regolari circoscritti dello stesso numero di lati ed indicando con 2P il perimetro del poligono circoscritto alla circonferenza di raggio *r* e con 2P’ quello relativo alla circonferenza di raggio *r’*, abbiamo che:

$$2P : 2P' = r : r' \rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{r}{r'}$$



Lunghezza della circonferenza

Se quindi indichiamo con *c* la lunghezza della circonferenza di raggio *r* e con *c'* la lunghezza della circonferenza di raggio *r'* abbiamo che:

$$\begin{array}{l} 2p < c < 2P \\ 2p' < c' < 2P' \end{array} \rightarrow \quad \frac{2p}{2p'} < \frac{c}{c'} < \frac{2P}{2P'} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$$

Allora possiamo anche scrivere

$$\frac{c}{c'} = \frac{2r}{2r'} \rightarrow \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$$

cioè **il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro è costante e questo rapporto viene indicato con il simbolo** π (pi-greco).

π **è un numero irrazionale**, cioè non si può esprimere con una frazione (la lunghezza della circonferenza e il suo diametro sono grandezze incommensurabili) ed il suo valore approssimato è 3,14.

Quindi in conclusione $\frac{c}{2r} = \pi$, da cui la lunghezza *c* della circonferenza di raggio *r* risulta:

$$\boxed{c = 2\pi\ r}$$

Nota

Per calcolare un'approssimazione di π possiamo calcolare il rapporto tra il perimetro di un poligono regolare inscritto (o circoscritto) alla circonferenza con un numero elevato di lati e il diametro (vedi schede di Geogebra).

Area del cerchio

Procedendo in modo analogo definiamo **l'area del cerchio come l'elemento separatore delle aree dei poligoni regolari inscritti e l'insieme delle aree dei poligoni regolari circoscritti** alla circonferenza.

Poiché l'area di un poligono regolare circoscritto risulta $A = \frac{2p \cdot r}{2}$ l'area A_C del cerchio sarà

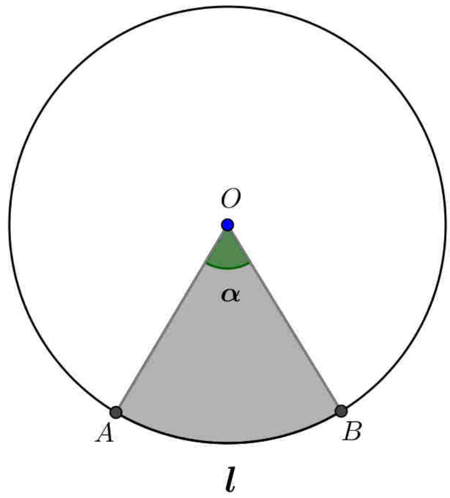
$$A_{cerchio} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

In conclusione l'area del cerchio di raggio *r* risulta

$$\boxed{A_{cerchio} = \pi\ r^2}$$

SCHEDA 1
Lunghezza di un arco di circonferenza e area di un settore circolare

Considera una circonferenza di raggio r e un angolo al centro di ampiezza α, per esempio misurato in gradi.
Indichiamo con l la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo α.



Poiché gli angoli al centro sono direttamente proporzionali ai rispettivi archi di circonferenza abbiamo:

$$l : 2\pi\ r = \alpha° : 360°$$

da cui possiamo ricavare

$$l = \frac{2\pi\ r \cdot \alpha°}{360°}$$

Analogamente, indicando con A_α l'area del settore circolare individuato da α, abbiamo:

……………………………………..

Da cui possiamo ricavare $A_\alpha =$ ………………………

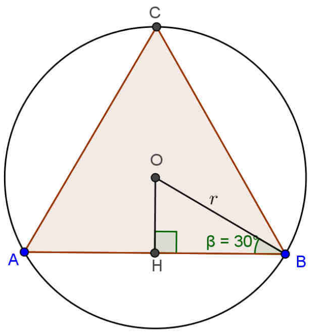
Nota: osserviamo che $A_\alpha = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r$

Infatti $\frac{1}{2} \cdot l \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r \cdot \alpha°}{360°} \cdot r =$ ....

SCHEDA 2
Lati dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza di raggio r

Considera una circonferenza di raggio *r*: determiniamo la lunghezza del lato del

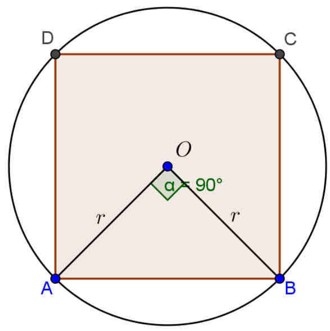
- *triangolo equilatero inscritto*



Considera il triangolo OHB in figura:

$\overline{HB} = ...$ e quindi $\overline{AB} = ...\ldots$

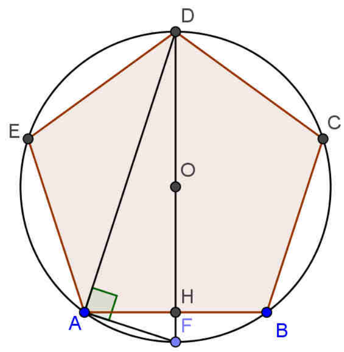
- *quadrato inscritto*



Considera il triangolo AOB in figura:

$\overline{AB} = ...$

- *pentagono regolare inscritto*



Considera il triangolo AFD in figura: il segmento AF corrisponde al lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza e quindi, essendo sezione aurea del raggio, sappiamo che misura $\overline{AF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ ed applicando il 1° teorema di Euclide possiamo ricavare HF:

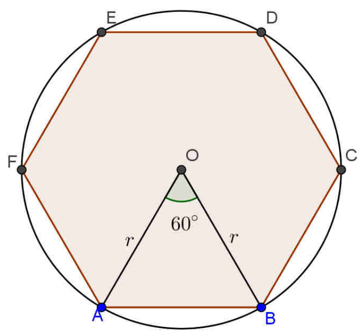
…………………………………………………………………..

e quindi, per differenza DH=…………………

Applicando poi il 2° teorema di Euclide possiamo trovare AH e quindi AB:

……………………………………………………………………………

- *esagono regolare inscritto*



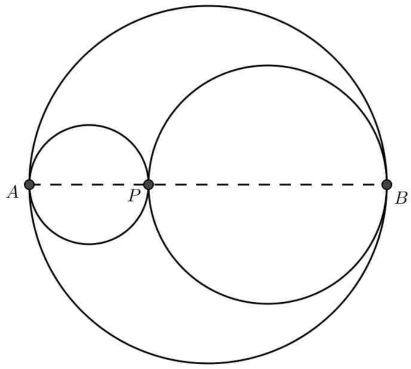
Considera il triangolo ABO in figura:

$\overline{AB} = ...$

ESERCIZI

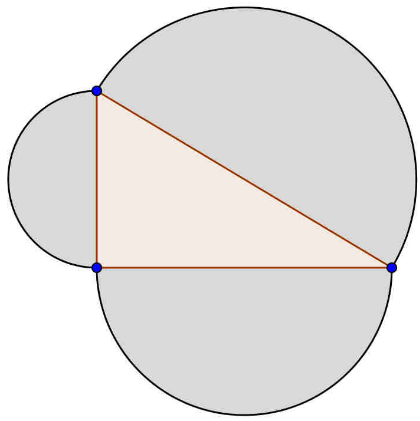
1) Disegna una circonferenza di diametro AB e prendi un punto P su AB: disegna le circonferenze di diametri AP e PB.

   Verifica che la somma della lunghezza delle circonferenze è uguale alla somma della lunghezza della circonferenza di diametro AB.



2) Considera un triangolo rettangolo e disegna sui cateti e sull'ipotenusa dei semicerchi esterni al triangolo.

   Dimostra che il semicerchio costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei semicerchi costruiti sui cateti.



3) Considera un quadrato di lato 4 cm. Disegna la circonferenza inscritta e quella circoscritta. Determina la lunghezza delle due circonferenze e l'area della corona circolare individuata da esse.

   [4π, $4\pi\sqrt{2}$, $A = 4\pi$]

4) Considera una circonferenza di diametro AB e traccia una corda AC che forma un angolo di 60° con AB. Sapendo che la lunghezza della circonferenza è $10\pi\ a$, determina l'area del triangolo ABC.

   [$\frac{25\sqrt{3}}{2}a^2$]

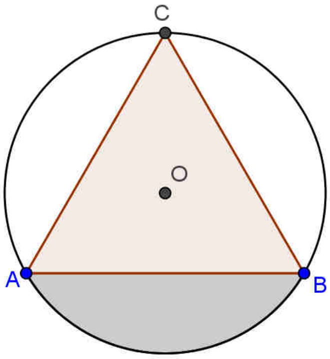
5) In un rombo il lato e la diagonale minore misurano a. Determina l'area del rombo e l'area del cerchio inscritto nel rombo.

   [$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $\frac{3}{16}\pi a^2$]

6) Considera un trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza (la base maggiore si trova sul diametro).
Sapendo che la lunghezza della semicirconferenza è 8π cm e che la differenza delle basi del trapezio è 12 cm, determina il perimetro del trapezio.

[$48\ cm$]

7) Disegna un cerchio di raggio r e inscrivi in esso un triangolo equilatero.



Determina l'area della regione di cerchio delimitata da un lato del triangolo e dall'arco minore corrispondente.

[$\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$]

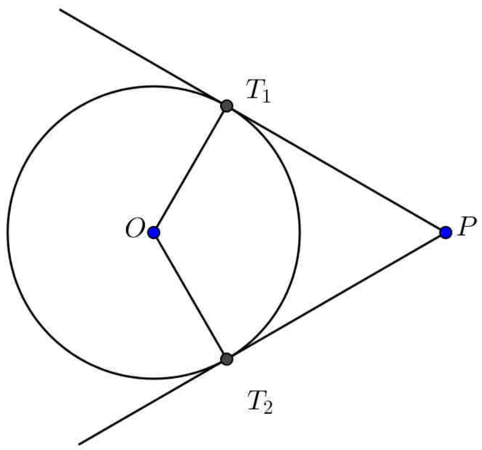
8) In un cerchio di raggio 2 cm è inscritto un quadrato. Determina l'area della regione del cerchio delimitata da un lato del quadrato e dall'arco minore corrispondente.

[$(\pi-2)\ cm^2$]

9) Determina l'area di un settore circolare di un cerchio di raggio r il cui angolo al centro misura 30°.

[$\frac{1}{12}\pi r^2$]

10) Considera un cerchio di area $4\pi\ cm^2$ e sia P un punto a distanza 4 cm dal centro O. Da P conduci le tangenti alla circonferenza e siano T_1, T_2 i punti di contatto. Determina l'area del quadrilatero OT_1PT_2.



[$4\sqrt{3}\ cm^2$]