GEOMETRIA EUCLIDEA

Introduzione

La parola geometria deriva dalle parole greche
geo (terra) e **metron** (misura)

ed è nata per risolvere problemi di misurazione dei terreni al tempo degli antichi Egizi nel VI secolo a.C.
Nella scuola del 1° ciclo (elementare e media) la geometria viene presentata in modo "intuitivo", osservando e sperimentando.
Nel 2° ciclo (scuola superiore) lo studio della geometria viene affrontato in modo "razionale": partendo da alcuni concetti e proprietà iniziali tutto il resto viene rigorosamente "dimostrato".

Lo studio "razionale" della geometria si deve al grande matematico greco Euclide, vissuto ad Alessandria d'Egitto nel III secolo a.C.
Euclide riunì in tredici libri, chiamati gli "Elementi", le conoscenze geometriche dell'epoca mettendo al centro della sua opera il ragionamento rigoroso e la deduzione logica.

Partendo da alcuni "**enti primitivi**" (oggetti primitivi) e da proprietà iniziali di questi enti (i "**postulati**") si dimostrano con la sola deduzione logica i teoremi che esprimono le proprietà delle figure geometriche.

Approfondimento storico

Fai una ricerca sugli studi e la vita dei seguenti matematici dell'antichità:

1. Talete (VI sec. a.C.)
2. Pitagora (V sec. a.C.) (discepolo di Talete)
3. Euclide (III sec. a.C.)
4. Archimede (III sec. a.C.) (di poco posteriore ad Euclide)

Definizioni

Una definizione è una frase in cui si spiega cos'è un dato oggetto a cui diamo un dato nome.
Per esempio: "Un quadrato è un quadrilatero con i lati uguali e gli angoli congruenti".

Ci accorgiamo subito che questa definizione si basa su altri concetti (quadrilatero, lato, angolo, congruenza) e quindi prima di poter dare questa definizione dobbiamo definire quadrilatero, angolo, lato ecc…

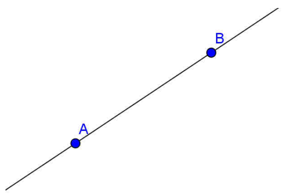
È chiaro che si innesca un procedimento "a ritroso" ed è necessario che alcuni oggetti siano considerati "primitivi" (detti enti primitivi) e non sia data per essi alcuna definizione.

Gli enti primitivi della geometria euclidea sono: il punto, **la retta** e **il piano**.

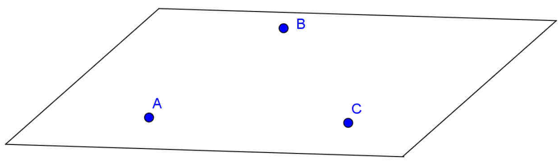
Postulati

I postulati sono proprietà degli enti primitivi che non vengono dimostrate e che si chiede (postulato viene dal verbo latino "postulare" che significa appunto "chiedere") di accettare come vere.
I postulati presenti negli "Elementi" di Euclide sono molti, noi ve vedremo solo alcuni.
Cominciamo con i seguenti tre postulati:

1° postulato: per due punti passa una ed una sola retta.

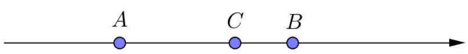


2° postulato: per tre punti non allineati (cioè non appartenenti alla stessa retta) passa uno e un solo piano.



3° postulato: la retta è un insieme ordinato di punti e fra due punti esiste sempre almeno un altro punto (quindi la retta è costituita da infiniti punti).

A precede B
C si trova tra A e B



Teoremi

Un teorema è un'affermazione da provare mediante un ragionamento.
Generalmente un teorema è costituito da una parte iniziale che viene chiamata "**ipotesi**" e da una parte finale detta "**tesi**" cioè l'affermazione che dobbiamo dimostrare.

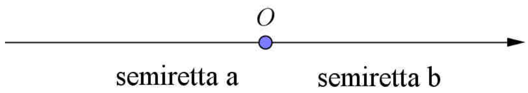
$$\text{Se "ipotesi"} \underset{(allora)}{\Rightarrow} \text{"tesi"}$$

La dimostrazione di un teorema è l'insieme dei passaggi logici che mi permettono, partendo dall'"ipotesi", di giungere alla "tesi".

Nota: scambiando l'ipotesi con la tesi si ha il teorema inverso (che può essere vero o meno).

Cominciamo con alcune definizioni:

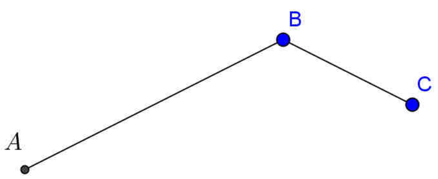
Semiretta: data una retta orientata e un suo punto O vengono individuate due semirette di origine O formate dai punti che precedono e seguono O.



Segmento: data una retta orientata e due suoi punti A e B chiamiamo segmento AB l'insieme dei punti compresi tra A e B.

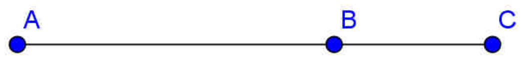
A e B si dicono estremi del segmento.

Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno in comune un estremo.



AB e BC sono segmenti consecutivi.

Due segmenti si dicono **adiacenti** quando sono consecutivi e appartengono alla stessa retta

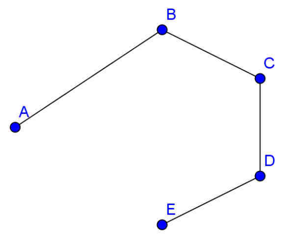


AB e BC sono adiacenti

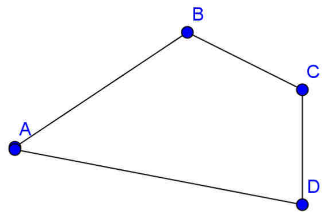
Poligonale: è costituita da una serie di segmenti in cui ciascun segmento e il successivo sono consecutivi.

Una poligonale può essere aperta o chiusa (se l'ultimo estremo coincide con il primo).

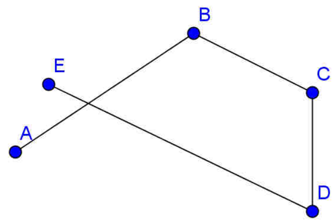
Una poligonale può essere intrecciata se almeno 2 segmenti non consecutivi si intersecano.



poligonale aperta



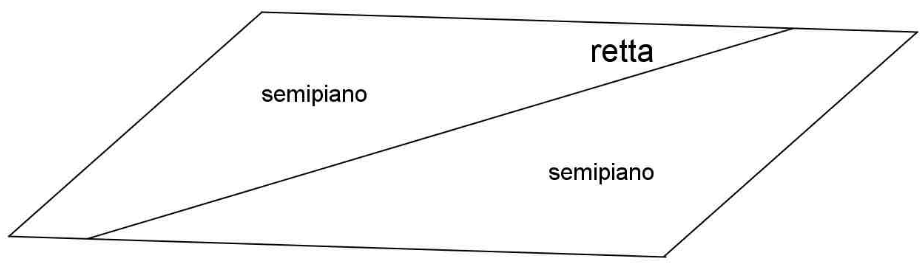
poligonale chiusa



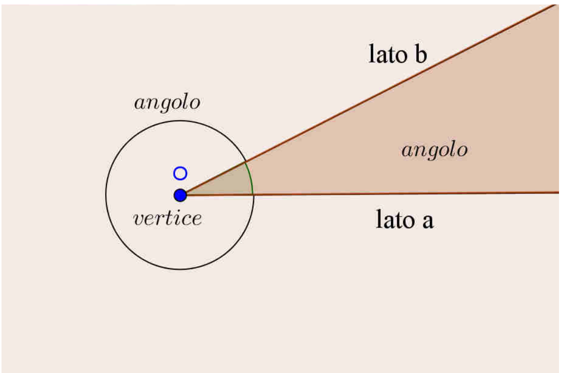
poligonale intrecciata

Semipiani: data una retta di un piano, essa divide il piano in due semipiani.

La retta si chiama origine dei due semipiani.

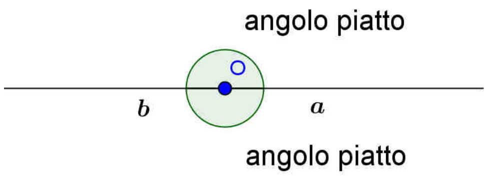


Angolo: due semirette aventi l'origine in comune individuano due parti del piano chiamate angoli.

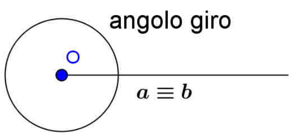


Le semirette si dicono lati dell'angolo, l'origine delle due semirette si chiama vertice dell'angolo.

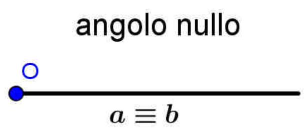
Angolo piatto: quando i suoi lati sono semirette opposte (coincide con un semipiano).



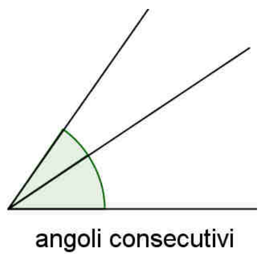
Angolo giro: quando i suoi lati sono semirette coincidenti (coincide con l'intero piano).



Angolo nullo: quando i suoi lati sono semirette coincidenti ma non ci sono altri punti eccetto quelli dei lati.



Angoli consecutivi: se hanno in comune il vertice e un lato.



Angoli adiacenti:se sono consecutivi e i lati non comuni appartengono alla stessa retta.

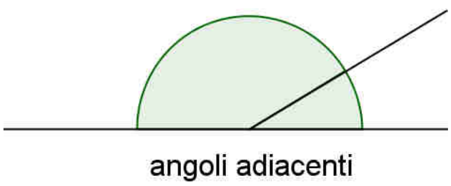


Figure concave e figure convesse

Una figura è convessa se congiungendo due suoi punti qualsiasi A, B il segmento AB è tutto contenuto nella figura. Se non è convessa, una figura si dice concava.

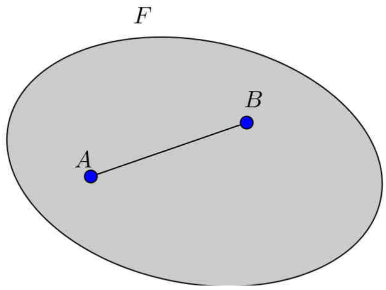


figura convessa

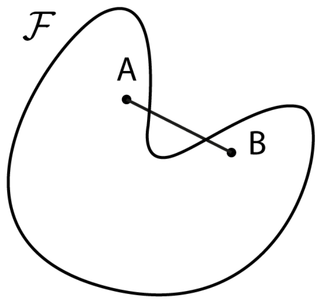
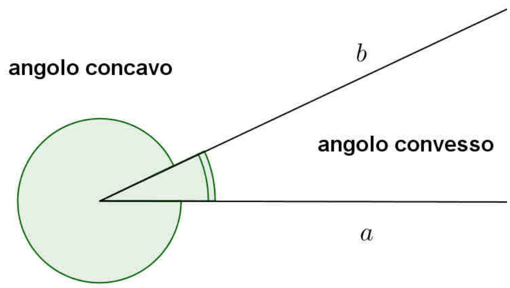


figura concava

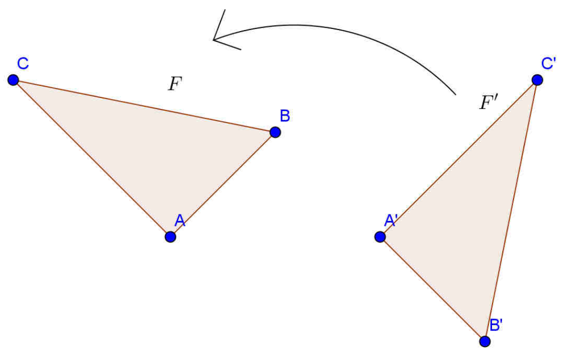
Per esempio quando *a* e *b* sono due semirette non appartenenti alla stessa retta e non coincidenti e aventi l'origine in comune, vengono individuati un angolo convesso e uno concavo.



NOTA: l'angolo piatto, l'angolo giro e l'angolo nullo sono convessi.

Figure congruenti

Diremo che due figure sono "congruenti" se sono sovrapponibili mediante un movimento rigido.



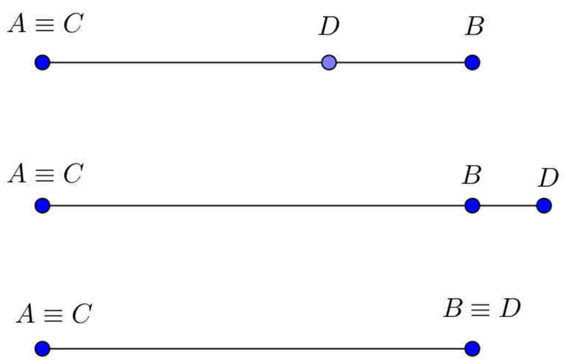
$F \cong F'$ ($\cong$ sta per congruente)

Naturalmente se $F_1 \cong F_2$ e $F_2 \cong F_3$ allora $F_1 \cong F_3$ (proprietà transitiva della congruenza).

Segmenti

Se due segmenti sono **congruenti** si dirà che hanno la **stessa lunghezza**.

- **Confronto di segmenti**: si riporta un segmento sull'altro in modo che due estremi coincidano. Si possono avere tre casi:

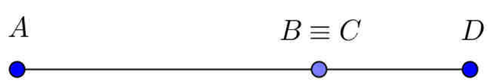


a) se il secondo estremo D cade internamente ad AB si ha AB>CD;

b) se il secondo estremo D cade esternamente ad AB allora AB<CD;

c) se il secondo estremo D coincide con B allora AB$\cong$CD.

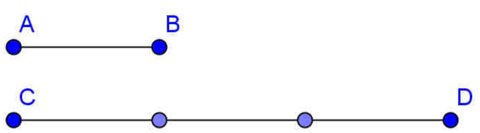
- **Somma di segmenti**: dati AB e CD riportiamo CD in modo che sia adiacente ad AB (B$\equiv$C).



La somma sarà il segmento AD.

- **Multiplo di un segmento AB**: dato un segmento AB con $n\overline{AB}$ (n numero naturale maggiore di 1) è il segmento uguale alla somma di n segmenti congruenti ad AB.

Esempio: $\overline{CD} = 3 \cdot \overline{AB}$



Possiamo anche dire che AB è sottomultiplo di CD cioè che $AB = \frac{1}{3} CD$

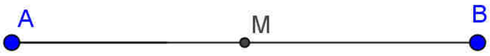
- **Sottrazione di segmenti**: dati AB e CD con AB>CD la differenza tra AB e CD è il segmento che addizionato a CD dà AB

$$AB - CD \cong DB$$

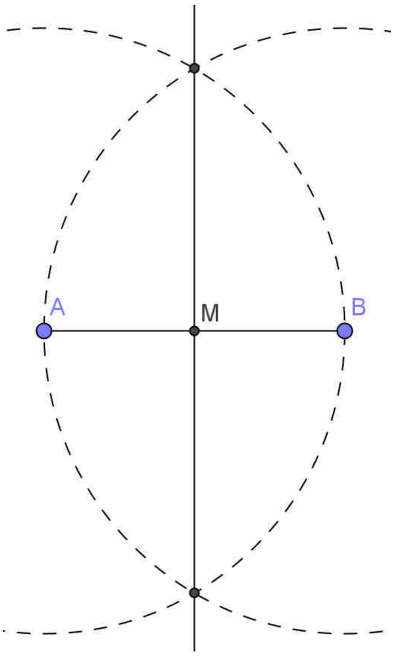
Punto medio di un segmento

Il punto medio di un segmento AB è il suo punto M che lo divide in due segmenti congruenti.

$AM \cong MB$



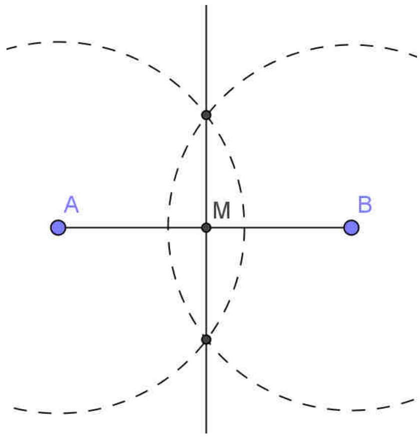
NOTA
Per costruire il punto medio di un segmento con riga e compasso si procede così:



- si punta il compasso in A con apertura AB
- si punta il compasso in B con la stessa apertura
- si congiungono i due punti di intersezione delle due circonferenze
- il punto individuato sul segmento è il punto medio

Potremo dare solo in seguito la "giustificazione" di questo procedimento.

Osservazione: l'apertura del compasso può essere anche diversa da AB purché sia maggiore della metà di AB (e uguale quando puntiamo in A e in B).

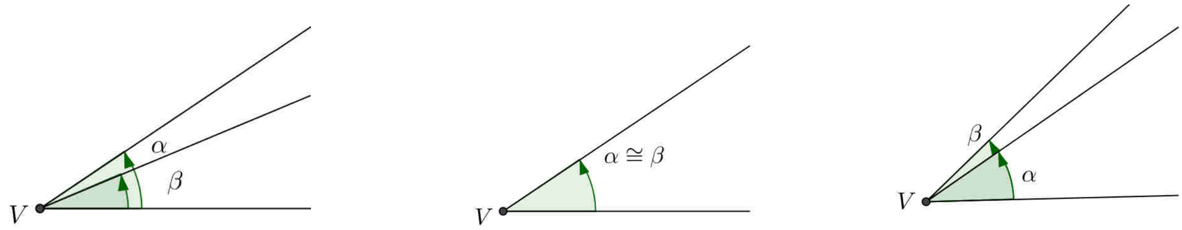


Angoli

Confronto di angoli

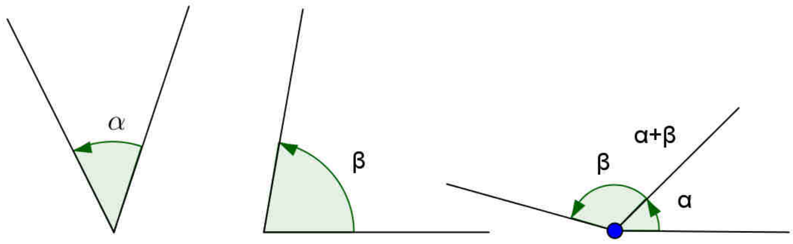
Si riporta un angolo sull'altro in modo che coincidano i vertici e un lato.

a) Se il secondo lato di β è interno ad α diremo che $\beta < \alpha$
b) Se anche il secondo lato di β è sovrapposto allora $\alpha \cong \beta$ (α congruente a β)
c) Se il secondo lato di β è esterno ad α allora $\beta > \alpha$.

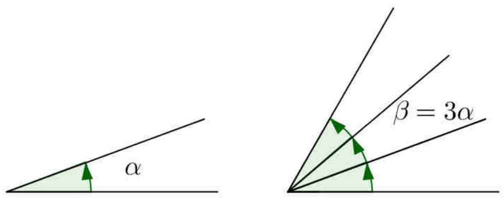


Definizione: se due angoli sono congruenti si dice che hanno la stessa "ampiezza".

- **SOMMA di angoli**: dati due angoli α e β si riporta β in modo che risultino consecutivi e si chiama somma di $\alpha + \beta$ l'angolo che ha per lati i lati non comuni.

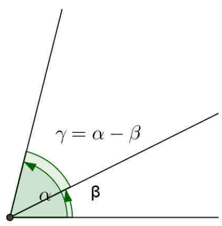


- **MULTIPLO di un angolo α :** dato un angolo α e un numero naturale $n > 1$, $n\alpha$ è l'angolo uguale alla somma di n angoli congruenti ad α .



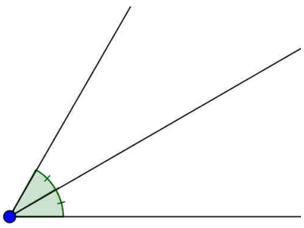
Possiamo anche dire che $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ (sottomultiplo di β)

- **DIFFERENZA tra angoli**: dati due angoli α e β con $\alpha > \beta$ o $\alpha \cong \beta$, la differenza $\alpha - \beta$ è l'angolo che addizionato a β dà α



Bisettrice di un angolo

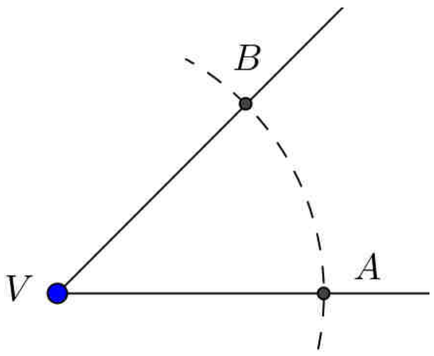
La bisettrice di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti.



Costruzione della bisettrice di un angolo (con riga e compasso).

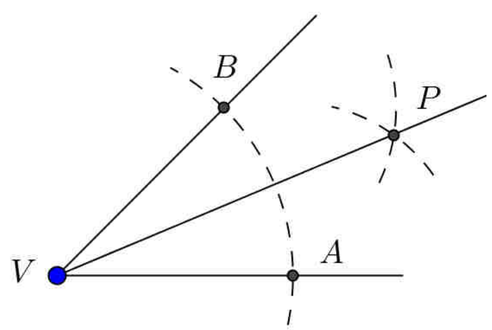
Possiamo procedere così:

- puntiamo il compasso nel vertice V dell'angolo con apertura a piacere e individuiamo i punti A e B sui lati dell'angolo.



- puntiamo il compasso in A con apertura a piacere (anche diversa dalla precedente) e poi in B con la stessa apertura tracciando cosi due archi di circonferenza che si intersecheranno in P.

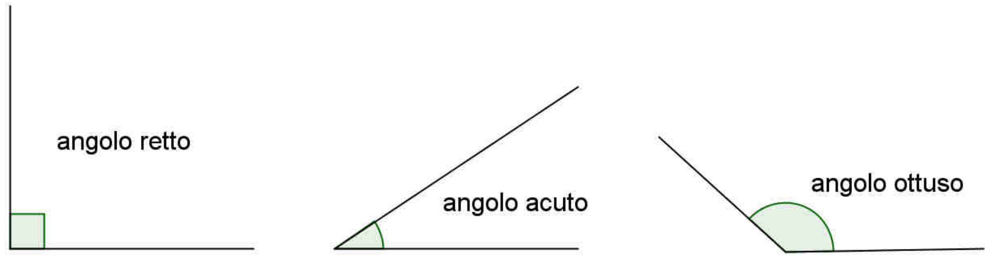
- tracciamo la semiretta VP: è la bisettrice



NOTA: la "giustificazione " di questo procedimento potremo darla solo in seguito.

Angoli retti, acuti, ottusi

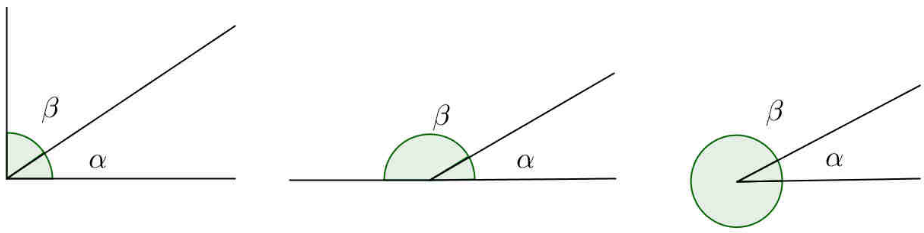
- Un angolo si dice retto se è metà di un angolo piatto;
- Un angolo si dice acuto se è minore di un angolo retto;
- Un angolo si dice ottuso se è minore di un angolo piatto e maggiore di un angolo retto.



Indicheremo con $\hat{P}$ un angolo piatto, con $\hat{R}$ un angolo retto.

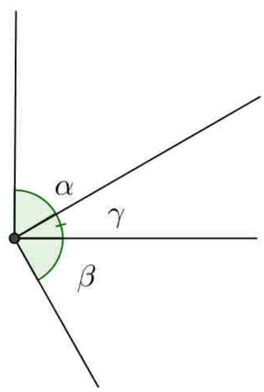
Angoli complementari, supplementari, esplementari

- Due angoli si dicono complementari se la loro somma è un angolo retto;
- Due angoli si dicono supplementari se la loro somma è un angolo piatto;
- Due angoli si dicono esplementari se la loro somma è un angolo giro.



$\alpha+\beta=\hat{R}$ $\qquad$ $\alpha+\beta=\hat{P}$ $\qquad$ $\alpha+\beta=2\hat{P}$

Osservazione: se due angoli α e β sono complementari di uno stesso angolo γ (o di angoli congruenti) allora sono congruenti.



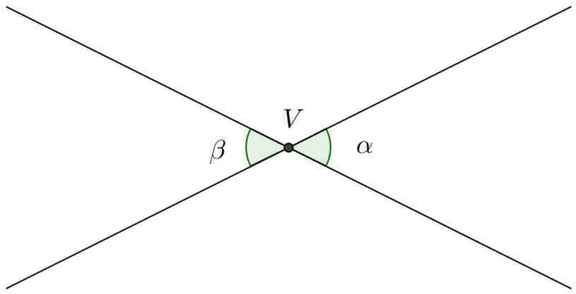
Se $\alpha+\gamma\cong\hat{R}\Rightarrow\alpha\cong\hat{R}-\gamma$

Se $\beta+\gamma\cong\hat{R}\Rightarrow\beta\cong\hat{R}-\gamma$

Quindi $\alpha\cong\beta$

Angoli opposti al vertice

Due angoli si dicono opposti al vertice se hanno in comune il vertice e i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



α e β sono opposti al vertice

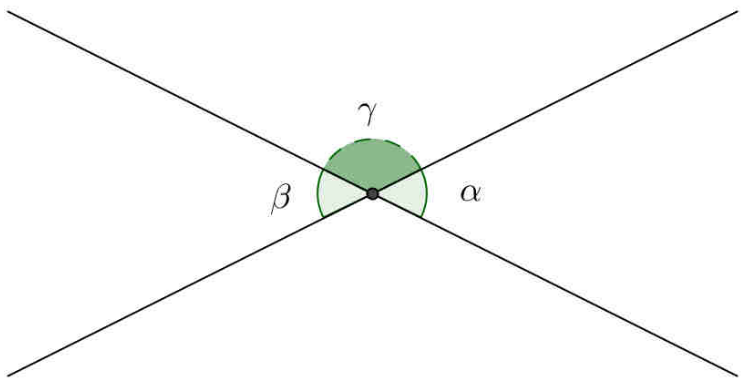
Teorema: *se α e β sono angoli opposti al vertice allora sono congruenti.*

Ipotesi: α e β sono angoli opposti al vertice.
Tesi: $\alpha \cong \beta$

Dimostrazione: osservando la figura abbiamo che

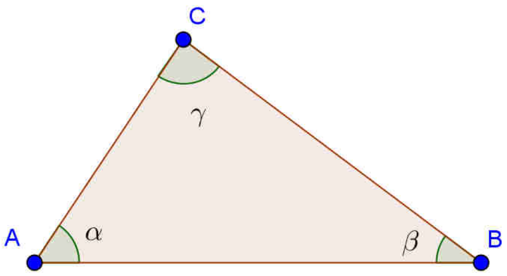
$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \gamma \cong \hat{P} \Rightarrow \alpha \cong \hat{P} - \gamma \\ \\ \beta + \gamma \cong \hat{P} \Rightarrow \beta \cong \hat{P} - \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cong \beta$$

cioè angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti.



GEOMETRIA EUCLIDEA
I triangoli

Definizione: un triangolo è l'insieme dei punti del piano costituiti da una poligonale chiusa di tre lati e dai suoi punti interni.

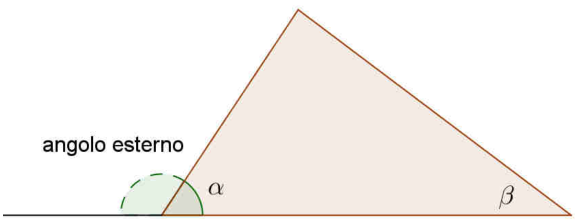


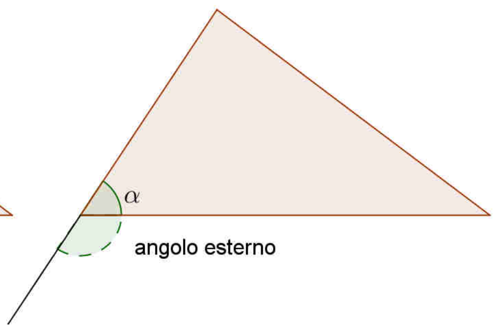
A, B, C vertici del triangolo

α, β, γ angoli interni

AB, BC, AC lati del triangolo

I punti estremi dei tre lati si chiamano **vertici** del triangolo.
I lati della poligonale si chiamano **lati** del triangolo.
Gli angoli compresi tra due lati si dicono angoli interni.
Gli angoli compresi tra un lato e il prolungamento di un altro lato si dicono esterni. Per ogni angolo interno ci sono due angoli esterni (congruenti).

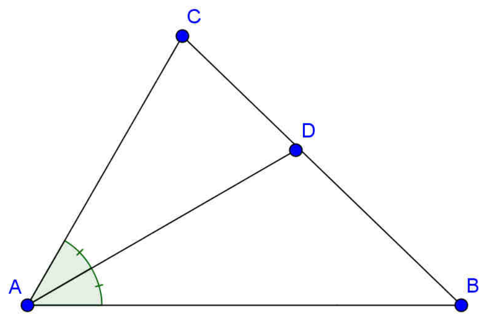




NOTA: α si dice angolo compreso tra i lati AC e AB ecc… α e β si chiamano angoli "adiacenti" al lato AB.

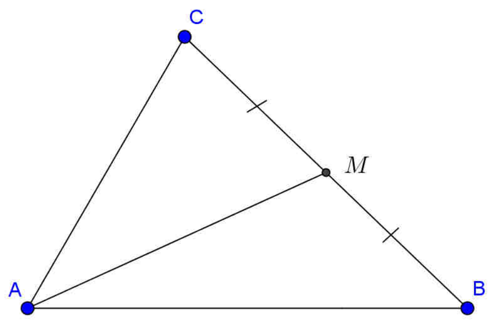
Bisettrici, mediane, altezze

- La bisettrice dell'angolo α (nel vertice A) è la parte di bisettrice di α contenuta nel triangolo.



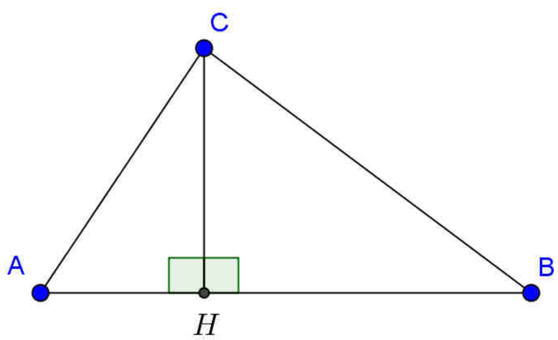
AD bisettrice relativa al vertice A

- La mediana relativa ad un lato è il segmento che congiunge il punto medio del lato con il vertice opposto.



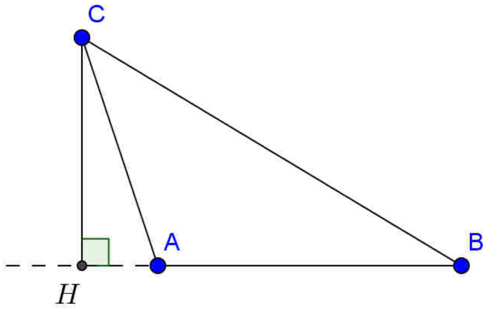
AM è la mediana relativa a BC

- L'altezza relativa ad un lato è il segmento condotto dal vertice opposto perpendicolarmente al lato considerato

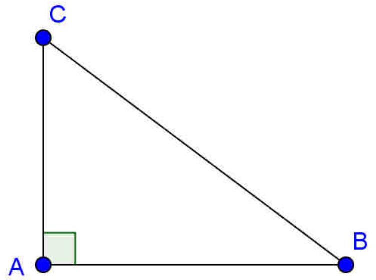


CH è l'altezza relativa ad AB

Attenzione: l'altezza può essere un segmento esterno al triangolo o coincidere con un lato.



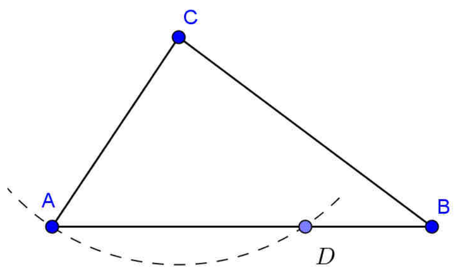
CH è esterna al triangolo $A\hat{B}C$



CA è l'altezza relativa ad AB e coincide con il lato

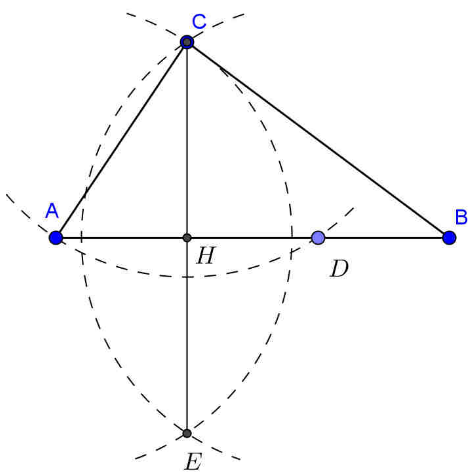
Costruzione dell'altezza con riga e compasso

- Puntiamo in C con apertura AC e tracciamo un arco per individuare su AB il punto D



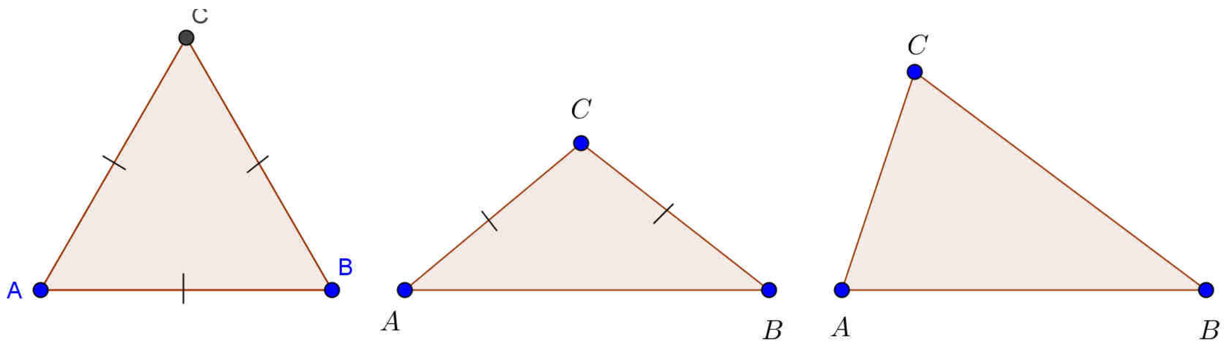
- Puntiamo in A con la stessa apertura e poi in D sempre con la stessa apertura e intersecando i due archi troviamo E (oltre a C); congiungendo C con E e intersecando con AB troviamo H.

CH è l'altezza cercata



Classificazione dei triangoli rispetto ai lati

- Un triangolo si dice equilatero quando ha i tre lati congruenti.
- Un triangolo si dice isoscele quando ha due lati congruenti.
- Un triangolo si dice scaleno quando i tre lati sono diversi tra loro.



triangolo equilatero triangolo isoscele triangolo scaleno

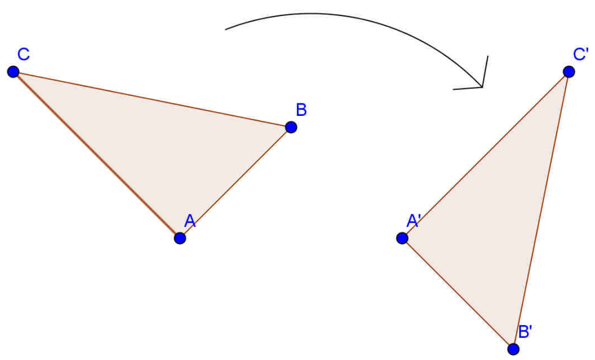
NOTA

Nel triangolo isoscele i lati congruenti vengono detti lati "obliqui" e il lato non congruente viene chiamato "base".
Gli angoli adiacenti alla base di un triangolo isoscele sono detti "angoli alla base".

Congruenza dei triangoli

Definizione: due triangoli sono congruenti se sono "sovrapponibili" punto per punto (se esiste un movimento rigido che li porta a sovrapporsi).

Ci sono tre "**criteri**" che ci permettono di capire se due triangoli sono congruenti e vengono chiamati **criteri di congruenza dei triangoli**.

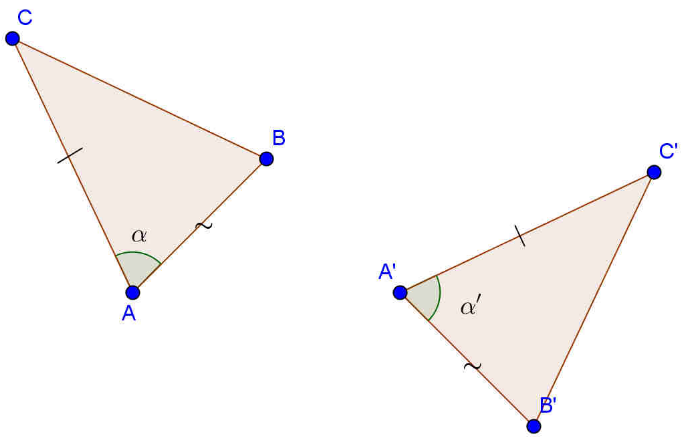


$A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ sono congruenti se esiste un movimento rigido che li porta a coincidere

Il primo criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso allora sono congruenti.

Ipotesi:
$AB \cong A'B'$
$AC \cong A'C'$
$\alpha \cong \alpha'$
Tesi: $\overset{\Delta}{ABC} \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$

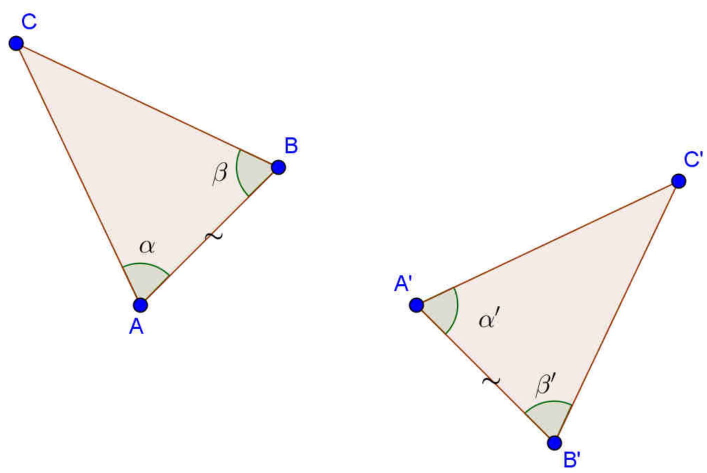


Dimostrazione: spostiamo il triangolo $A'B'C'$ in modo da far coincidere $A'B'$ con AB e l'angolo α' con α.
Poiché $A'C' \cong AC$ anche $C' \equiv C$ e quindi poiché coincidono i tre vertici i due triangoli sono congruenti.

Il secondo criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.

Ipotesi:
$AB \cong A'B'$
$\alpha \cong \alpha'$
$\beta \cong \beta'$
Tesi: $\overset{\Delta}{ABC} \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$



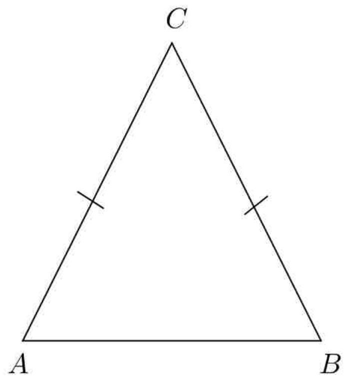
Dimostrazione: spostiamo $A'B'C'$ in modo che $A'B'$ coincida con AB. Poiché $\alpha' \cong \alpha$ la semiretta che contiene il lato $A'C'$ si sovrappone alla semiretta che contiene AC; poiché $\beta' \cong \beta$ la semiretta che contiene $B'C'$ si sovrappone a quella che contiene BC e in conclusione coincideranno i loro punti di intersezione cioè C' coinciderà con C e quindi i triangoli saranno sovrapposti e quindi congruenti.

Proprietà del triangolo isoscele

Teorema 1: s*e* $\overset{\Delta}{ABC}$ *è un triangolo isoscele allora gli angoli alla base sono congruenti*

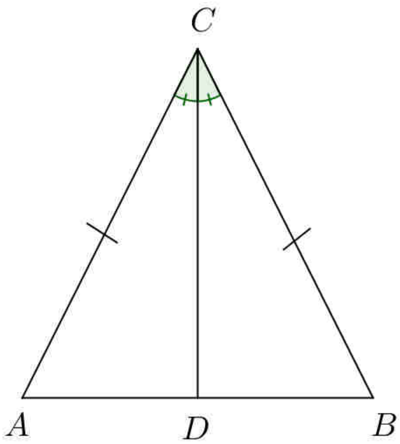
Ipotesi: $AC \cong BC$

Tesi: $\hat{A} \cong \hat{B}$



Dimostrazione

Tracciamo la bisettrice CD dell'angolo $\hat{C}$ e consideriamo i triangoli ACD e CDB .



Abbiamo che:

$AC \cong BC$ per ipotesi
$A\hat{C}D \cong D\hat{C}B$ per costruzione
CD in comune e quindi ACD è congruente a DCB per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.

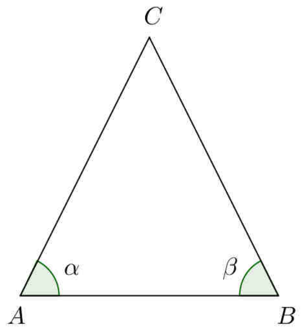
Quindi avremo anche $\hat{A} \cong \hat{B}$.

Teorema 2 (*inverso del teorema 1*)

Se $\overset{\Delta}{ABC}$ è un triangolo con due angoli congruenti allora è isoscele cioè ha due lati uguali.

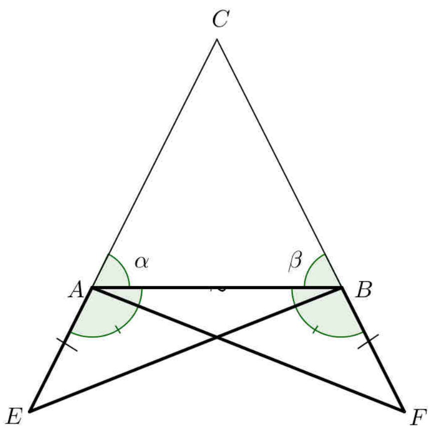
Ipotesi: $\alpha \cong \beta$

Tesi: $AC \cong BC$



Dimostrazione
Prolunghiamo i lati AC e CB di due segmenti congruenti AE, BF. Congiungiamo E con B e F con A.
Osserviamo che gli angoli $E\hat{A}B$ e $A\hat{B}F$ essendo supplementari di angoli uguali (α e β) sono uguali.

a) Consideriamo i triangoli $\overset{\Delta}{AEB}$ e $\overset{\Delta}{ABF}$: questi triangoli sono congruenti per il primo criterio avendo



$AE \cong BF$ per costruzione;
AB in comune;

$E\hat{A}B = A\hat{B}F$

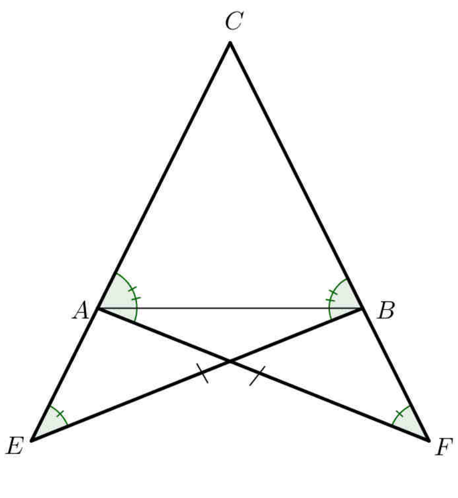
In particolare allora avremo anche:

$EB \cong AF$

$\hat{E} \cong \hat{F}$

$E\hat{B}A \cong F\hat{A}B$

b) Ora consideriamo i triangoli $\overset{\Delta}{CBE}$ e $\overset{\Delta}{AFC}$: sono congruenti per il secondo criterio di congruenza perché $EB \cong AF$; $\hat{E} \cong \hat{F}$; $E\hat{B}C \cong F\hat{A}C$ perché somma di angoli congruenti.



Se i triangoli $\overset{\Delta}{CBE}$ e $\overset{\Delta}{AFC}$ sono congruenti in particolare avremo $AC \cong BC$ (come volevamo dimostrare).

Teorema 3

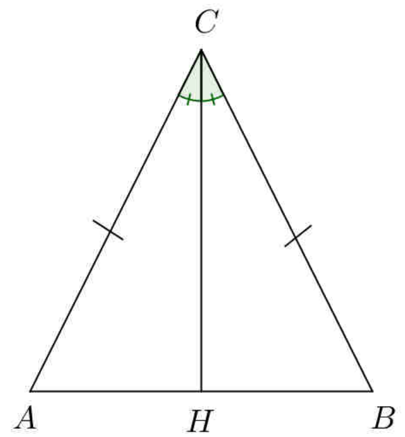
Se $\overset{\Delta}{ABC}$ è un triangolo isoscele allora la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana.

Ipotesi:

$AC \cong BC$

CH bisettrice $\Rightarrow A\hat{C}H \cong H\hat{C}B$

Tesi:
CH altezza e mediana



Dimostrazione

I triangoli $\overset{\Delta}{ACH}$ e $\overset{\Delta}{HCB}$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza poiché si ha:
$AC \cong BC$, CH in comune e $A\hat{C}H \cong H\hat{C}B$.

Di conseguenza abbiamo che :

- $AH \cong HB$ e quindi H è il punto medio di AB e CH è mediana;

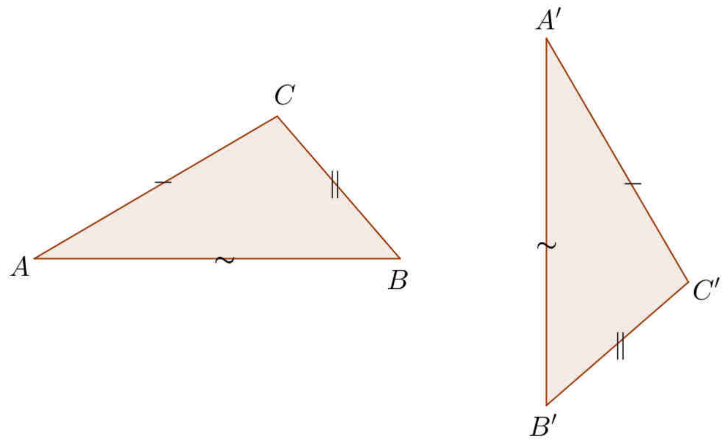
- $A\hat{H}C \cong B\hat{H}C$ ma essendo angoli supplementari dovranno essere entrambi retti e quindi CH è anche altezza.

Il terzo criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno i lati rispettivamente congruenti allora sono congruenti.

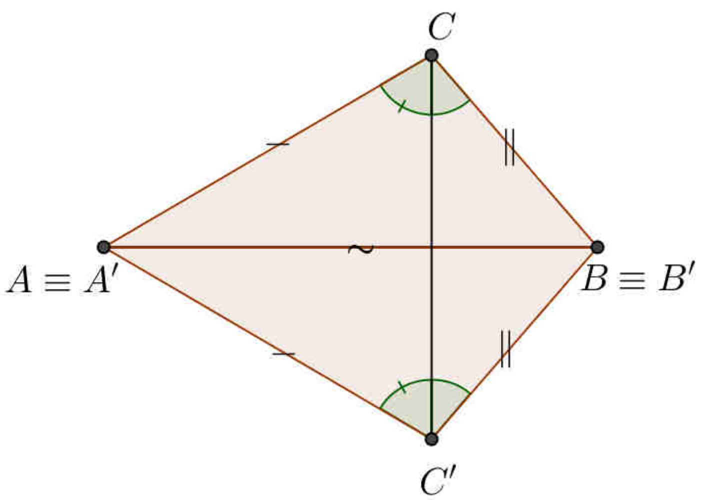
Ipotesi: $AC \cong A'C'$, $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$

Tesi: $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$



Dimostrazione

Trasliamo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ e facciamo coincidere $A'B'$ con AB e ponendo C' nel semipiano opposto a C. Congiungiamo C con C' e osserviamo che i triangoli $A\overset{\Delta}{C}C'$ e $B\overset{\Delta}{C}C'$ risultano entrambi isosceli.



Quindi per il teorema 1 sul triangolo isoscele avremo che:

$A\hat{C}C' \cong C\hat{C'}A$, $B\hat{C}C' \cong C\hat{C'}B \Rightarrow A\hat{C}B \cong A\hat{C'}B$ perché somma di angoli congruenti.

Quindi i triangoli $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (due lati rispettivamente congruenti e l'angolo compreso).

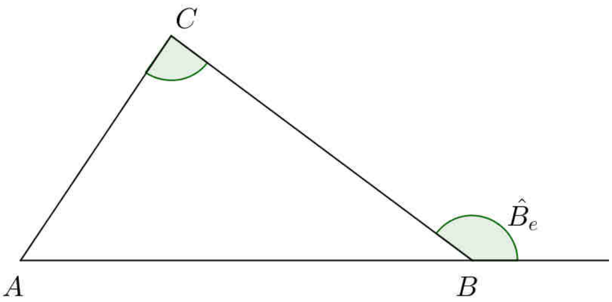
Teorema dell'angolo esterno

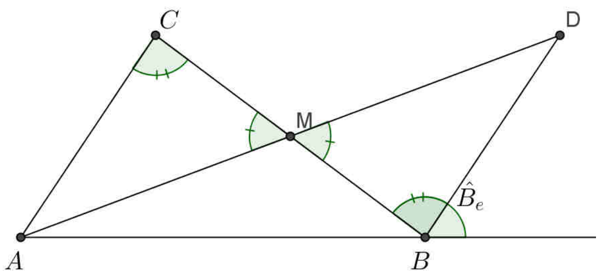
In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso.

Dimostrazione

Consideriamo per esempio l'angolo esterno $\hat{B}_e$.

Iniziamo col dimostrare che $\hat{B}_e > \hat{C}$.



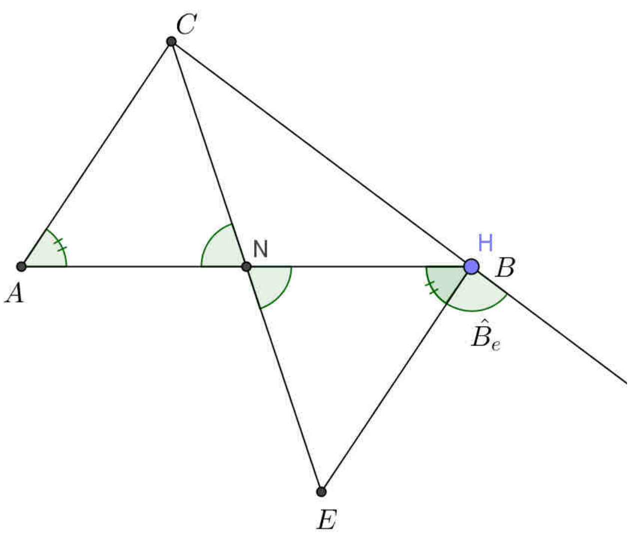


Tracciamo la mediana AM e prolunghiamola di $MD \cong AM$. I triangoli $A\overset{\Delta}{M}C$ e $M\overset{\Delta}{B}D$ sono congruenti per il primo criterio perché hanno uguali due lati e l'angolo compreso (opposti al vertice).

Quindi sarà anche $\hat{C} \cong M\hat{B}D$. Ma l'angolo $M\hat{B}D$ è interno a $\hat{B}_e$ e quindi $M\hat{B}D < \hat{B}_e$.

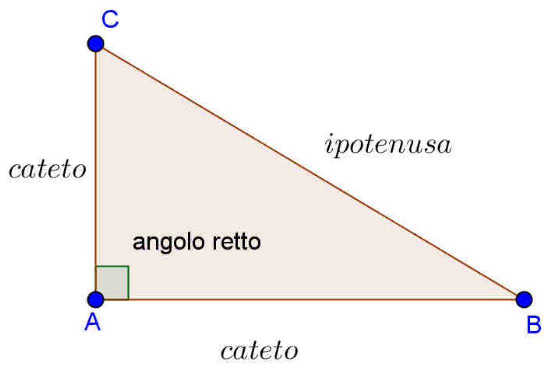
In conclusione $\hat{C} \cong M\hat{B}D < \hat{B}_e$.

Si può fare una dimostrazione analoga per dimostrare che $\hat{B}_e > \hat{A}$ (si traccia la mediana CN ecc.).



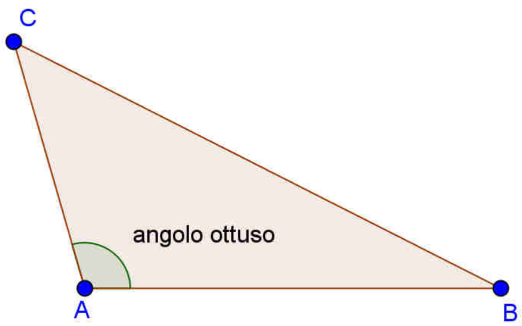
Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli

Triangolo rettangolo: triangolo con un angolo retto

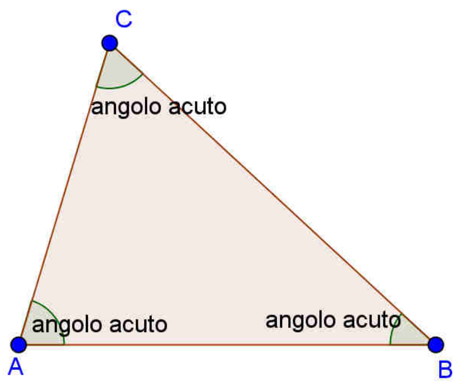


I lati che formano l'angolo retto si chiamano **cateti** e il lato opposto all'angolo retto si chiama **ipotenusa**.

Triangolo ottusangolo: triangolo con un angolo ottuso



Triangolo acutangolo: triangolo con tutti gli angoli acuti

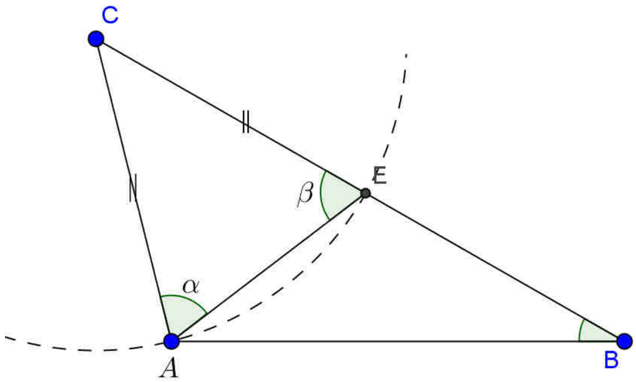


Teorema: *in un triangolo (non equilatero) a lato maggiore si oppone angolo maggiore.*

Dimostrazione

Ipotesi: $BC > AC$

Tesi: $\hat{A} > \hat{B}$



Puntando il compasso in C con apertura CA individuiamo E e quindi $CE \cong AC$.

congiungiamo A con E: poiché il triangolo $\overset{\Delta}{AEC}$ è isoscele i suoi angoli alla base sono uguali cioè si ha $\alpha \cong \beta$. Ma β è un angolo esterno del triangolo $\overset{\Delta}{ABE}$ e quindi $\beta > \hat{B}$.

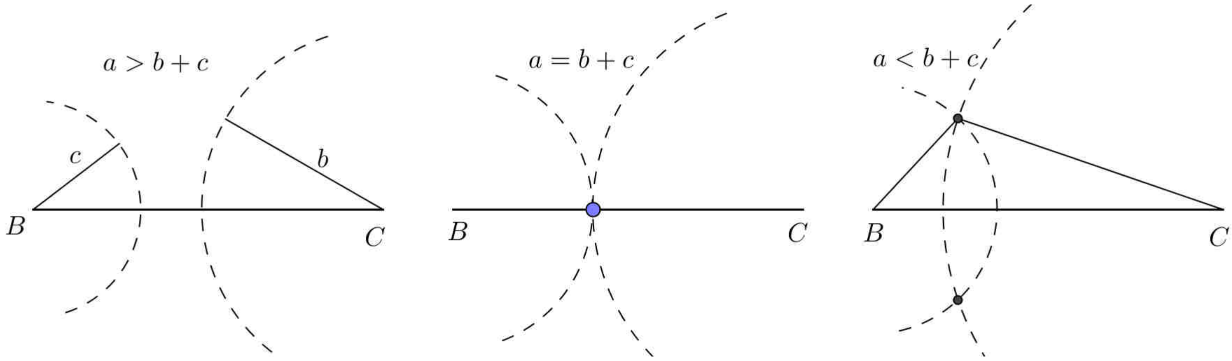
Ma α è interno ad $\hat{A}$ e quindi si ha $\alpha < \hat{A}$.

In conclusione si ha: $\hat{A} > \alpha \cong \beta > \hat{B}$ come volevamo dimostrare.

Teorema: *in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.*

Dimostrazione

Supponiamo di voler costruire con riga e compasso un triangolo di lati di lunghezza assegnata *a,b,c* e supponiamo che $a \geq b \geq c$.
Tracciamo il segmento BC di lunghezza a : per costruire il triangolo con riga e compasso puntiamo il compasso in B con apertura c e in C con apertura b e il triangolo si ottiene solo se $a < b + c$ (vedi anche la scheda di Geogebra).
(E' poi chiaro che la diseguaglianza vale anche per b e c).

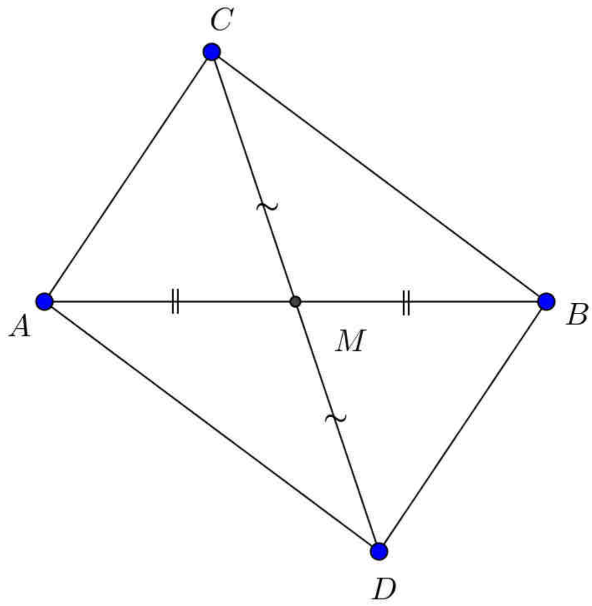


ESERCIZI

1) Considera un triangolo ABC qualsiasi e considera il punto medio M del lato AB. Traccia la mediana CM e prolungala, dalla parte di M, di un segmento $MD \cong CM$. Dimostra che il triangolo ABD è congruente al triangolo ABC.

Svolgimento guidato

Ipotesi: $AM \cong MB$, $CM \cong MD$
Tesi: $ABC \cong ABD$



Dimostrazione

I triangoli AMC e MBD sono congruenti per il primo criterio perché hanno

………………………

………………………

………………………

Quindi si avrà anche $AC \cong BD$, $C\hat{A}M \cong M\hat{B}D$.
Ma allora i triangoli ABC e ABD sono congruenti per il primo criterio avendo:

……………..

AB in comune

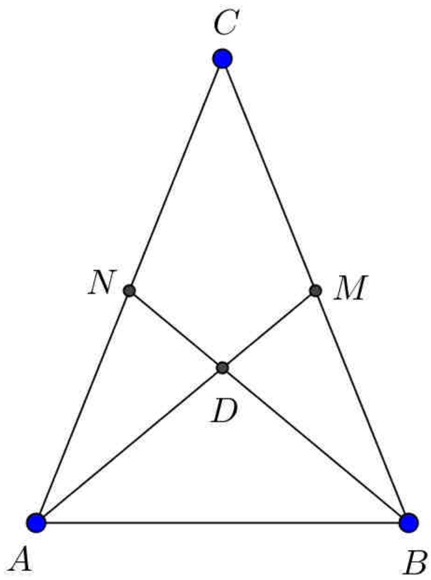
………………

2) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, traccia le mediane AM, BN relative ai lati obliqui e sia D il loro punto di intersezione. Dimostra che il triangolo ABD è isoscele.

Svolgimento guidato

Ipotesi: ABC triangolo isoscele di base AB;
M,N punti medi rispettivamente di BC e AC

Tesi: ABD triangolo isoscele



Dimostrazione

Poiché $AC \cong BC$, se N e M sono i punti medi avremo anche $AN \cong BM$.
I triangoli ABN e ABM sono congruenti per il primo criterio perché hanno:

AB in comune;

………………….

…………………..

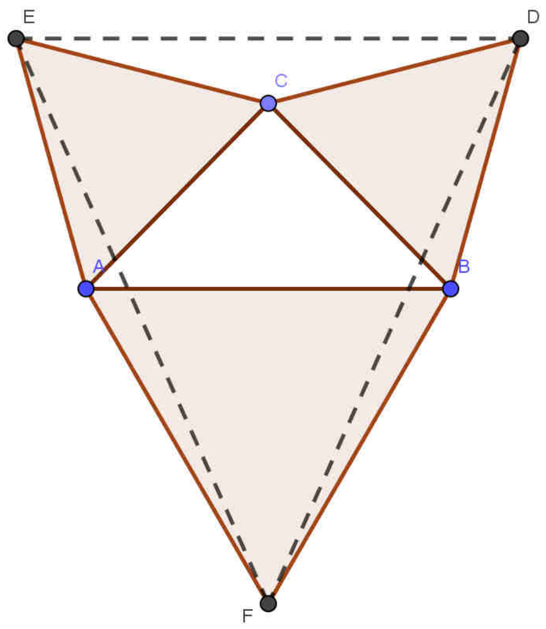
Di conseguenza anche gli angoli $M\hat{A}B$ e $N\hat{B}A$ sono congruenti e allora il triangolo ABD, avendo gli angoli alla base congruenti, risulta ……………………

3) Con il software Geogebra disegna un triangolo isoscele ABC di base AB e disegna su ciascun lato un triangolo equilatero: ABF, BCD, ACE.
Come ti sembra che risulti il triangolo DEF? Come potresti dimostrarlo?
E se ABC fosse stato equilatero?

Svolgimento guidato

Disegna il triangolo isoscele ABC:
costruisci un segmento AB, il suo punto medio M, la perpendicolare per M ad AB;
prendi un punto C su questa retta come "punto su oggetto" e congiungi con A e B;
nascondi la costruzione in modo che rimanga solo il triangolo isoscele ABC.

Disegna sui lati di ABC i triangoli equilateri con il comando "poligono regolare" (scegliendo 3 come numero di lati) e congiungi i vertici come in figura (rinomina i vertici).



Il triangolo DEF è …………… e si può verificare usando il comando "distanza" e misurando i segmenti ………………………………...
Per dimostrarlo possiamo osservare che i triangoli FDB e FAE sono …………… per il …………..criterio di congruenza dei triangoli avendo:

……………………………………………………………………………………………...

Quindi anche $FD \cong FE$ e il triangolo FDE è isoscele.

Se ABC fosse stato equilatero DEF sarebbe stato equilatero poiché ………….........................

4) Considera un triangolo isoscele ABC di base AB e traccia le bisettrici AE e BF degli angoli alla base. Indica con M il loro punto di intersezione. Dimostra che $AM \cong MB$.

5) Rispettivamente sui lati congruenti AC e BC del triangolo isoscele ABC considera due segmenti congruenti $CE \cong CF$: congiungi B con E e A con F ed indica con D il punto di intersezione dei segmenti BE e AF. Dimostra che il triangolo ABD è isoscele.

6) Disegna un triangolo ABC in cui la bisettrice AS è anche mediana. Dimostra che il triangolo ABC è isoscele.
Suggerimento: prolunga la bisettrice AS di un segmento $SE \cong AS$ e congiungi E con B. I triangoli ACS e BSE sono ………., il triangolo ABE è …………

7) Disegna due triangoli isosceli diversi tra loro ABC e ABD posti sulla stessa base AB, con i vertici C e D opposti rispetto alla base.. Dimostra che il segmento CD divide a metà la base AB. CD ha altre proprietà?

8) Nel triangolo equilatero ABC disegna le bisettrici degli angoli A e B ed indica con E il loro punto di intersezione. Dimostra che i triangoli ABE, BEC, AEC sono congruenti.

9) Sui lati di un triangolo equilatero ABC considera tre punti R, S, T in modo che risulti $AR \cong BS \cong CT$. Congiungi i tre punti. Dimostra che il triangolo RST è equilatero.

10) Dimostra che le mediane di un triangolo equilatero sono congruenti.

11) ***Motiva la costruzione con riga e compasso del punto medio di un segmento***.

Ricorda che la costruzione è la seguente: dato un segmento AB si punta il compasso prima in A e poi in B con la stessa apertura, maggiore di $\frac{AB}{2}$, e si individuano due punti C e D intersezione degli archi tracciati. Perché intersecando CD con AB si determina il punto medio di AB?

12) ***Motiva la costruzione con riga e compasso della bisettrice di un angolo.***

Ricorda che la costruzione è la seguente: dato un angolo di vertice O e lati a e b si punta il compasso nel vertice O e si traccia un arco con apertura a piacere individuando così due punti A e B sui lati dell'angolo. Si punta il compasso in A e in B con la stessa apertura e si individua un punto C……

13) Nel triangolo isoscele ABC di base AB, la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A incontra il prolungamento del lato BC nel punto E e la bisettrice dell'angolo esterno di vertice B incontra il prolungamento del lato AC nel punto F. Dimostra che i triangoli ABF e ABE sono congruenti.

14)

a) Considera un triangolo isoscele ABC di base BC e traccia l'altezza AH. Considera un punto Q su AH e dimostra che BQC è isoscele.

b) Prolunga QC dalla parte di Q fino ad incontrare AB in R e prolunga BQ fino ad incontrare AC in S. Dimostra che $BR \cong SC$.

15) Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB da ambo le parti di due segmenti congruenti AF e BE. Dimostra che i triangoli AEC e BCF sono congruenti.

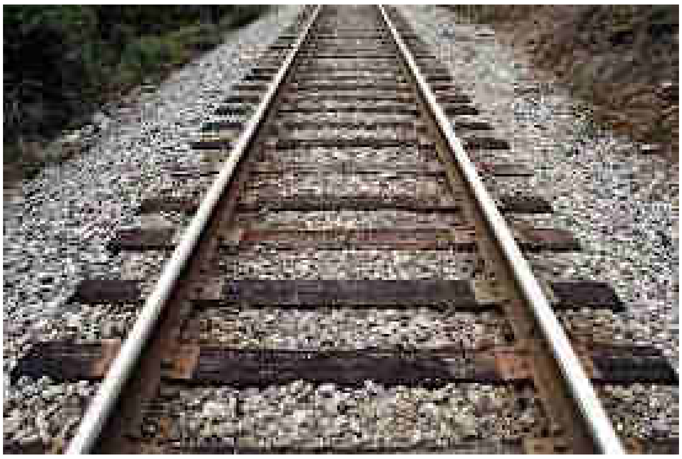
16) Nel triangolo ABC scegli a caso tre punti: D su AB, E su BC, F su AC. Dimostra che la somma dei lati del triangolo DEF è minore della somma dei lati del triangolo ABC.

Suggerimento: nel triangolo ADF si ha che $FD < AF + AD$ ……

17) Sui lati congruenti AB e AC di un triangolo isoscele disegna rispettivamente i segmenti AM e AN fra loro congruenti. Congiungi i punti M e N con il punto medio H della base BC. Dimostra che il triangolo MNH è isoscele.

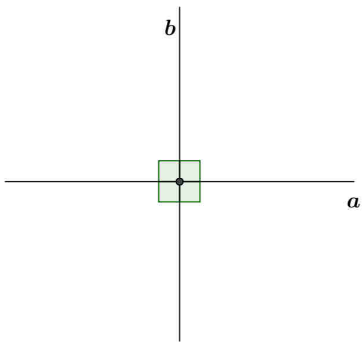
18) Disegna un triangolo isoscele ABC di base BC. Prolunga i lati AB e AC dalla parte di B e di C di due segmenti BD e CE tra loro congruenti. Indica con M il punto medio della base BC. Dimostra che i triangoli ADM e AEM sono congruenti.

GEOMETRIA EUCLIDEA
Rette perpendicolari e parallele



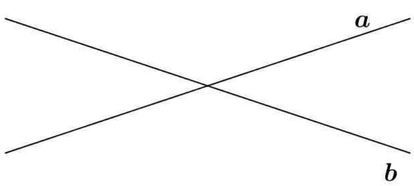
Rette perpendicolari

Definizione: *due rette incidenti* (che cioè si intersecano in un punto) *si dicono perpendicolari quando dividono il piano in quattro angoli retti.*

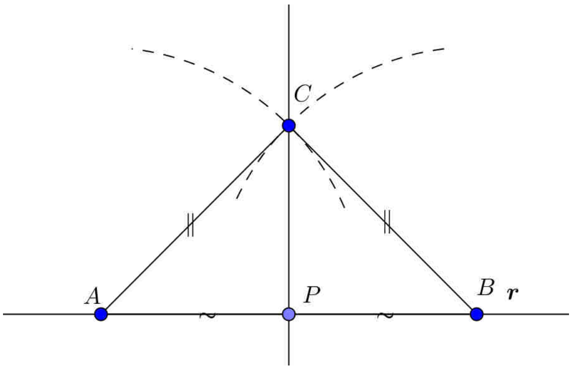


Per indicare che la retta *a* è perpendicolare alla retta *b* si scrive $a \perp b$.

Due rette incidenti che non sono perpendicolari si dicono *oblique.*

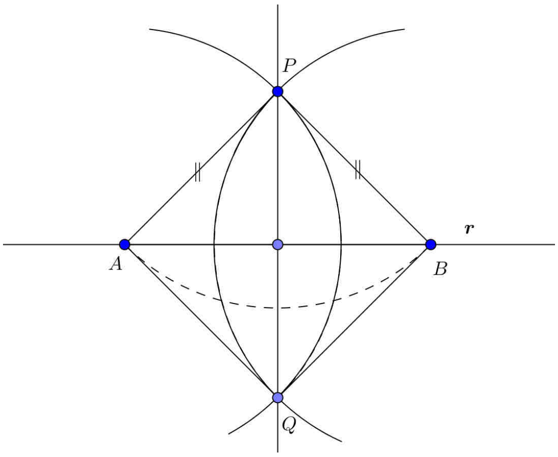


Teorema : *esistenza e unicità della perpendicolare per un punto dato P ad una retta data r.*



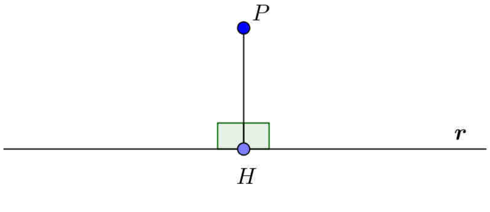
a) Supponiamo che $P \in r$.

Consideriamo due punti A,B appartenenti ad r tali che $AP \cong PB$. Puntando con il compasso in A con apertura a scelta (maggiore di AP) e in B con la stessa apertura individuiamo C tale che $AC \cong BC$. Congiungendo P con C si ha la retta perpendicolare cercata poiché nel triangolo isoscele ABC la mediana CP è anche altezza.



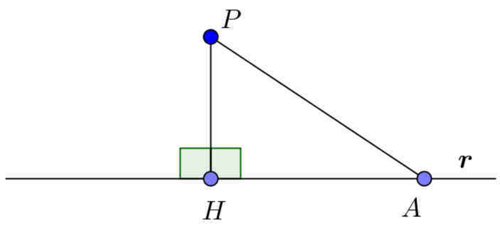
b) Supponiamo che $P \notin r$.
Puntiamo il compasso in P con un'apertura sufficiente ad intersecare in due punti A, B la retta r . Con la stessa apertura puntiamo il compasso in A e B e troviamo P e Q come intersezione dei due archi. Congiungendo P e Q troviamo la retta perpendicolare cercata: infatti i triangoli APQ e PQB sono triangoli isosceli uguali per il 3° criterio (AP ≅ PB, AQ ≅ BQ, PQ in comune) e quindi $A\hat{P}Q \cong Q\hat{P}B$. Ma allora nel triangolo isoscele APB PQ risulta bisettrice e quindi anche perpendicolare ad AB.

Definizione: la **distanza di un punto P da una retta** ***r*** , $P \notin r$, *è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto P e il piede della perpendicolare condotta da P a r .*



H si chiama "*piede della perpendicolare*"
$\overline{PH}$ = distanza di P da r
H si dice anche "*proiezione ortogonale di P su r* "

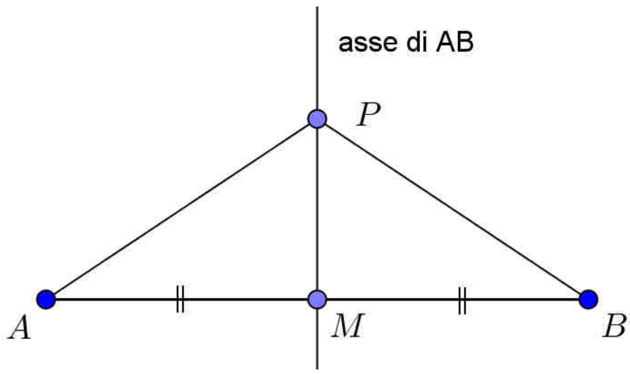
Teorema: *la distanza* $\overline{PH}$ *è minore di ogni segmento obliquo condotto da P a r .*



Il triangolo PHA è rettangolo e il cateto PH è minore dell'ipotenusa PA.

Definizione: *dato un segmento AB, si chiama* **asse di AB** *la retta perpendicolare ad AB passante per il suo punto medio.*

Teorema: *i punti appartenenti all'asse del segmento AB sono equidistanti da A e B e viceversa un punto equidistante da A e B appartiene all'asse di AB.*

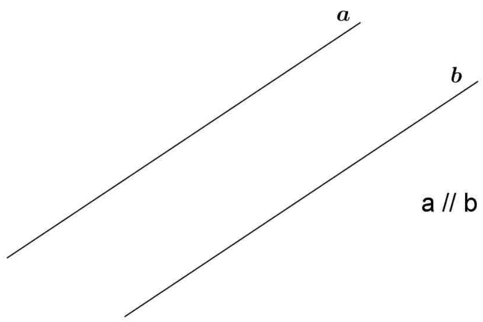


a) Se P appartiene all'asse del segmento AB i triangoli AMP e BMP sono congruenti per il 1° criterio ($AM \cong MB \cong$ $A\hat{M}P \cong B\hat{M}P \cong$ angolo retto , MP in comune) e quindi $PA \cong PB$.

b) Viceversa se P è equidistante da A e B cioè $PA \cong PB$ allora il triangolo ABP è isoscele : se M è il punto medio di AB , PM è mediana ma in un triangolo isoscele è anche altezza e quindi la retta per P e M è perpendicolare ad AB e in conclusione è l'asse di AB .

Rette parallele

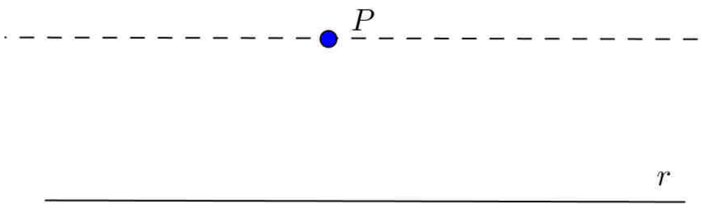
Definizione: *due rette distinte si dicono parallele quando non hanno nessun punto in comune.*



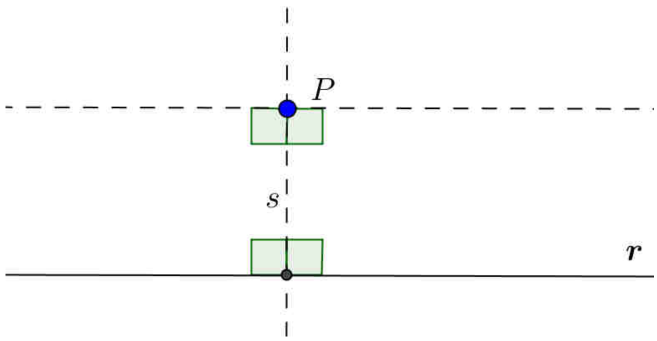
Enunciamo adesso un importante postulato (negli Elementi di Euclide è il quinto nella lista dei postulati).

Postulato dell'unicità della parallela per P ad una retta data

Data una retta r e un punto P non appartenente a r, esiste una e ***una sola retta passante per P e parallela a r****.*



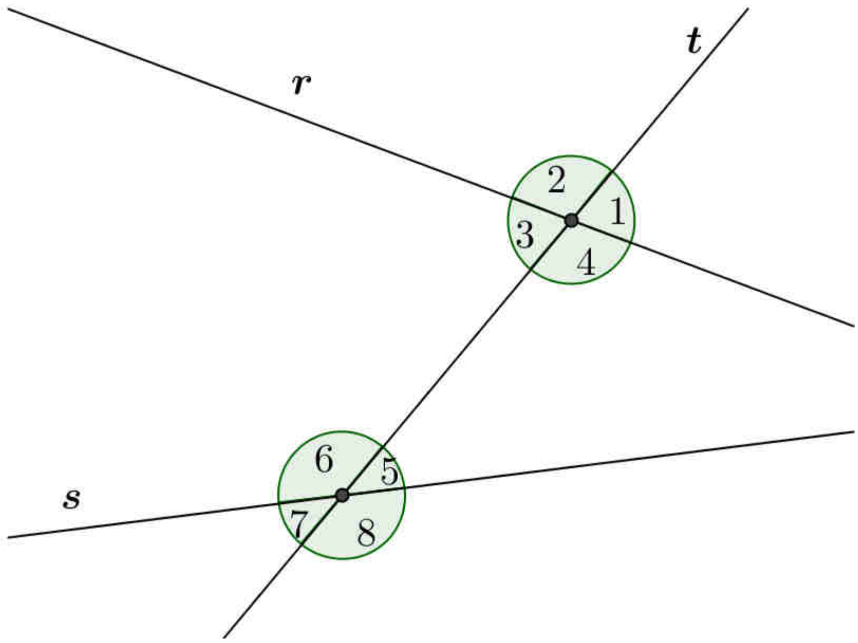
Nota: l'esistenza della parallela si può ricavare facilmente perché dato un punto P e una retta r, con $P \notin r$, si può costruire una retta per P parallela ad r per esempio tracciando la retta *s* passante per P e perpendicolare a *r* e poi la retta per P perpendicolare ad s (che risulterà parallela a r).



Invece (partendo dagli altri postulati) non è possibile dimostrare che la parallela per P alla retta *r* è unica ed è per questo che si introduce questo postulato : si possono costruire geometrie (le cosiddette "**geometrie non euclidee**") in cui questo postulato non è valido mentre rimangono validi tutti gli altri.

NOTA

Prima di enunciare alcuni teoremi relativi alle rette parallele introduciamo la denominazione usata per indicare i vari angoli formati da due rette *r* e *s* tagliate da terza retta *t* (detta trasversale)
Consideriamo due rette *r* e *s* intersecate da una terza retta *t* (che viene chiamata *trasversale*): si vengono a formare otto angoli che vengono così denominati



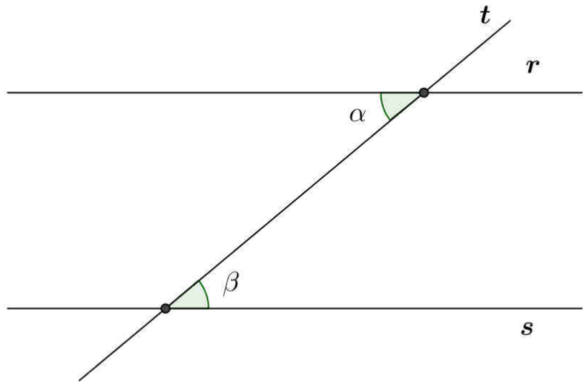
Angoli alterni interni: angoli 3-5; 4,6
Angoli alterni esterni: angoli 1-7; 2-8

Angoli corrispondenti: angoli 1-5; 4-8; 3-7; 2-6

Angoli coniugati interni: angoli 4-5; 3-6
Angoli coniugati esterni: angoli 1-8; 2-7

Vediamo adesso alcuni importanti teoremi riguardanti le rette parallele.

Teorema 1: *se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.*

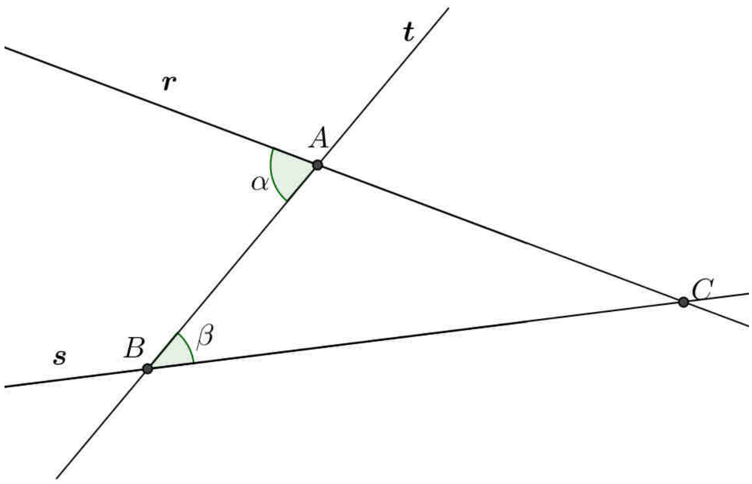


Ipotesi: $\alpha \cong \beta$
Tesi: $r \,//\, s$

Dimostrazione

Facciamo una dimostrazione che viene chiamata "**per assurdo**": *supponiamo cioè che la tesi del teorema sia falsa* (cioè nel nostro caso supponiamo che le rette non siano parallele) *e facciamo vedere che in questo caso arriviamo ad una contraddizione*. *Quindi la tesi del teorema deve essere vera.*

Supponiamo quindi che le rette *r* e *s* non siano parallele e che si incontrino in un punto C.



Se consideriamo il triangolo ABC, per il teorema dell'angolo esterno si dovrà avere

$$\alpha > \beta$$

ma questo contraddice la nostra ipotesi!

Non è possibile quindi che *r* e *s* siano incidenti e allora in conclusione sono parallele.

Più in generale abbiamo il seguente teorema:

Teorema 1 generalizzato: *se due rette tagliate da una trasversale formano*

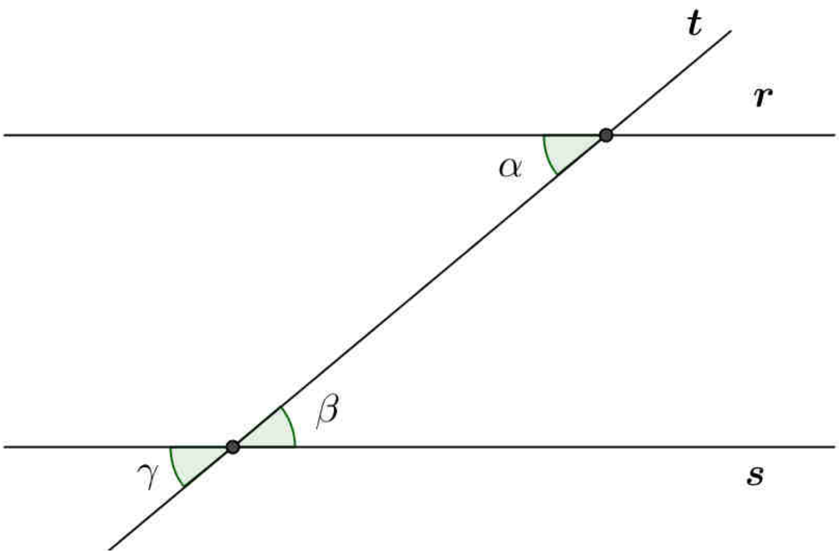
- *angoli alterni interni (esterni o interni) congruenti oppure*
- *angoli corrispondenti congruenti oppure*
- *angoli coniugati (interni o esterni) supplementari*

allora sono parallele.

Dimostrazione

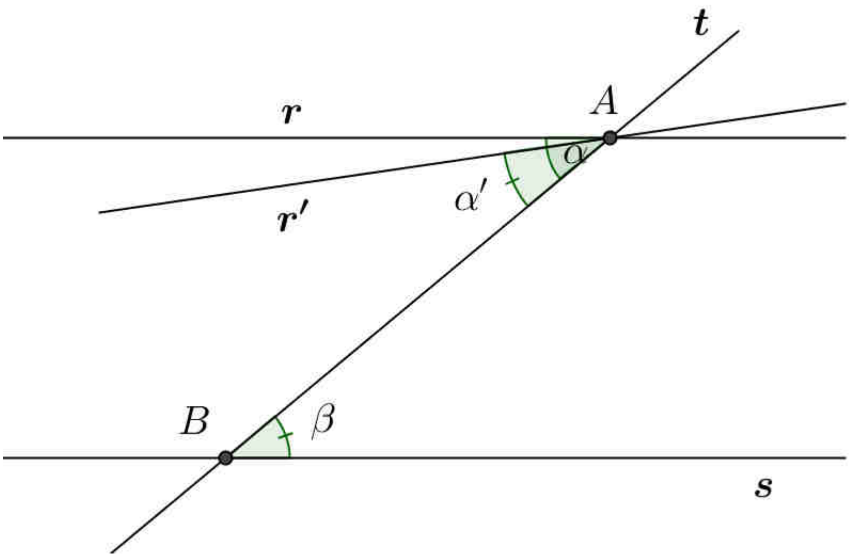
La dimostrazione è molto semplice poiché sfruttando l'uguaglianza degli angoli opposti al vertice o la proprietà che gli angoli adiacenti sono supplementari si possono dimostrare tutti i casi elencati a partire dal teorema precedente.

Dimostriamo per esempio che se $\alpha \cong \gamma$ (angoli corrispondenti congruenti) allora le rette sono parallele.
Poiché $\gamma \cong \beta$ (angoli opposti al vertice) avremo anche $\alpha \cong \beta$ (angoli alterni interni) e quindi per il teorema precedente le rette sono parallele.



Teorema 2 (*inverso del precedente*): *se due rette sono parallele cioè* $r // s$ *, allora tagliandole con una qualunque retta t (trasversale) si formano angoli alterni interni congruenti.*

Ipotesi: $r // s$
Tesi: $\alpha \cong \beta$



Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $\alpha > \beta$: posso allora tracciare per A una retta *r'* tale che $\alpha' \cong \beta$.
Ma allora, per il teorema precedente, abbiamo che *r'* è parallela a *s* .

Di conseguenza per A passano due rette (*r* e *r'*) parallele ad *s* e questo è in contraddizione con il postulato dell'unicità della parallela per un punto ad una data retta.

Poiché con un ragionamento analogo possiamo cadere in contraddizione anche supponendo che $\alpha < \beta$ (basta considerare la retta per B tale che…), dobbiamo concludere che $\alpha \cong \beta$.

Più in generale abbiamo il seguente teorema

Teorema 2 generalizzato: *se due rette sono parallele, allora tagliandole con una trasversale formano:*

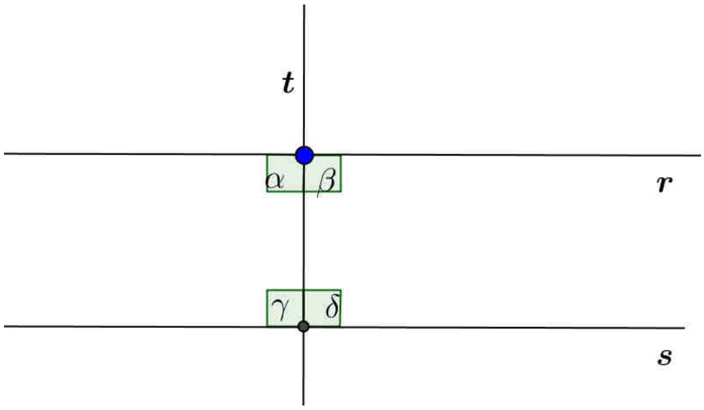
- *angoli alterni (interni e esterni) congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati (interni e esterni) supplementari.*

E' chiaro che la dimostrazione si basa, come per la generalizzazione del teorema 1, su considerazioni sulla congruenza degli angoli opposti al vertice ecc.

Osservazioni

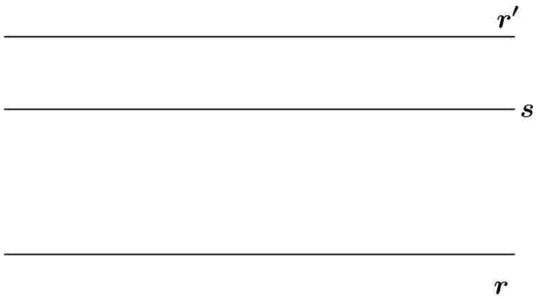
1) Se *r//s* allora se $t \perp r \Rightarrow t \perp s$

Infatti se α e β sono retti allora lo sono anche γ e δ.



2) Se *r//s e s//r'* $\Rightarrow r // r'$

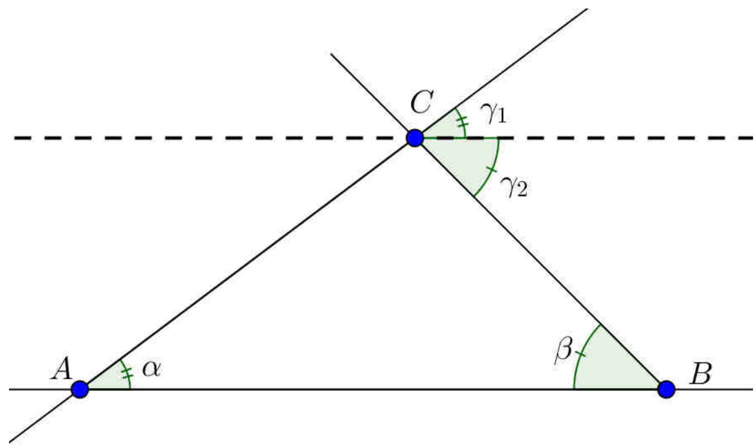
Infatti se *r* e *r'* fossero incidenti in P allora per P passerebbero due parallele a *s* in contraddizione con il postulato dell'unicità della parallela.



Da quest'ultimo teorema sulle rette parallele si deduce una proprietà molto importante dei triangoli.

Teorema *: la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto*

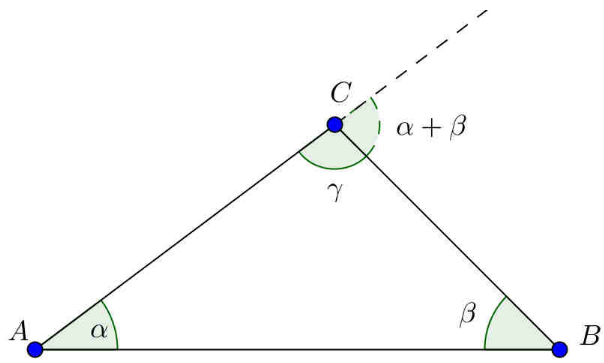
1) Dimostriamo prima che *in un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.*



Dimostrazione: tracciamo per C la retta parallela alla retta passante per A e B: abbiamo che

$\gamma_1 \cong \alpha$ perché corrispondenti rispetto alla trasversale AC;
$\gamma_2 \cong \beta$ perché alterni interni rispetto alla trasversale BC.
Quindi $\hat{C}_e = \gamma_1 + \gamma_2 \cong \alpha + \beta = \hat{A} + \hat{B}$

2) Dimostriamo ora che in un triangolo la somma degli angoli interni è congruente ad un angolo piatto.



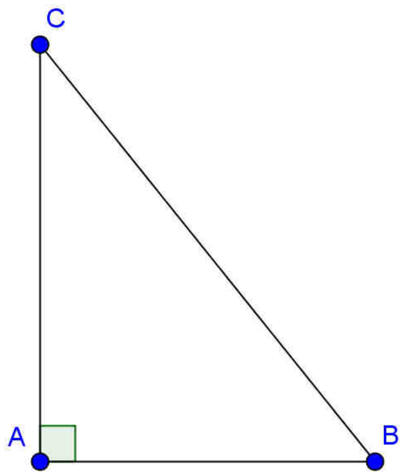
Dimostrazione: sappiamo, per teorema precedente, che $\hat{C}_e \cong \alpha + \beta$ ma poiché $\hat{C}_e$ è adiacente a γ risulta supplementare di γ e quindi abbiamo che

$$\alpha + \beta + \gamma \cong \hat{P}$$

Vediamo altre importanti proprietà dei triangoli che derivano da questo teorema.

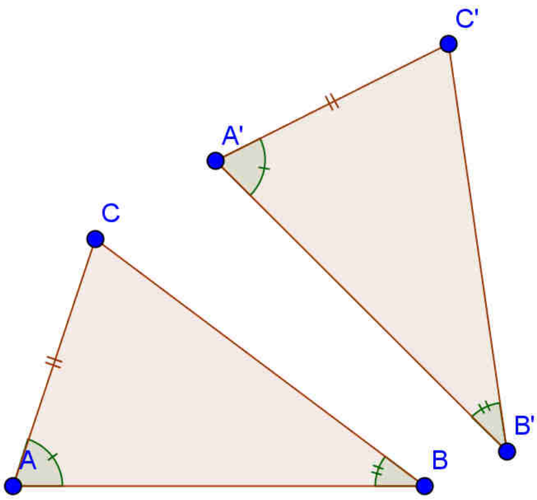
1) ***Se ABC è un triangolo rettangolo, gli angoli acuti sono complementari***

Infatti abbiamo che : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{R} + \hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} \cong \hat{R}$ ($\hat{R}$ = angolo retto)



2) ***Se due triangoli hanno un lato e due angoli rispettivamente congruenti allora sono congruenti*** (*secondo criterio di congruenza dei triangoli generalizzato*).

Se infatti i due triangoli hanno due angoli congruenti, poiché la somma degli angoli interni è congruente ad un angolo piatto, anche il terzo angolo risulta necessariamente congruente e quindi al triangolo si può applicare il secondo criterio di congruenza dei triangoli.



3) ***Due triangoli rettangoli che hanno, oltre all'angolo retto, due elementi ordinatamente congruenti , che non siano i due angoli, sono congruenti***
(*criterio di congruenza per i triangoli rettangoli*)

Esaminiamo i vari casi.

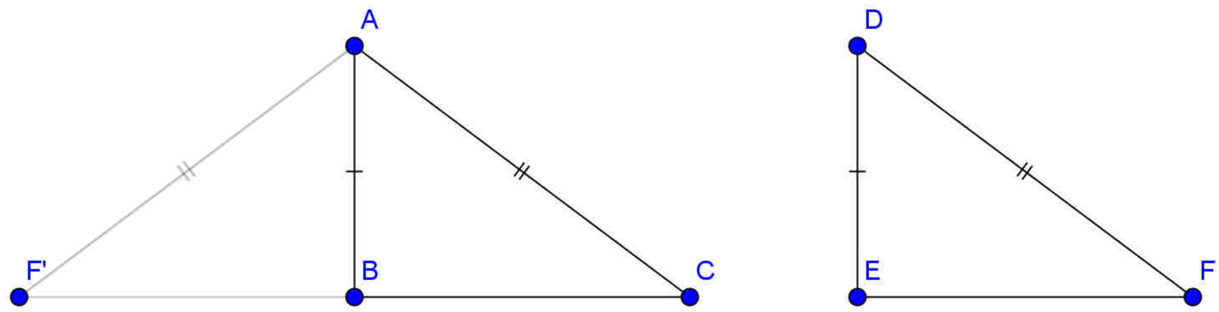
a) Se i due triangoli hanno i cateti rispettivamente congruenti risultano congruenti per il primo criterio di congruenza.

b) Se i due triangoli hanno congruenti un lato qualsiasi e un angolo acuto sono congruenti per il secondo criterio generalizzato.

c) Se i due triangoli hanno congruenti un cateto e l'ipotenusa vediamo come si dimostra che sono congruenti.

Consideriamo i triangoli rettangoli ABC e EDF retti in B ed E ed aventi

$$AB \cong DE \text{ e } AC \cong DF$$



Riportiamo il triangolo DEF nel semipiano di origine AB e che non contiene C in modo che il segmento DE coincida con il segmento AB e sia F' la nuova posizione del vertice F.

I punti F', B , C risultano allineati poiché gli angoli $F'\hat{B}A$ e $C\hat{B}A$ essendo retti e consecutivi sono adiacenti.

Se consideriamo allora il triangolo F'AC questo risulterà isoscele per ipotesi con altezza AB: ma allora AB è anche mediana e si ha

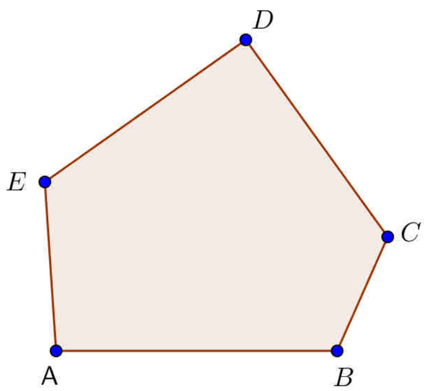
$$BC \cong F'B \text{ ma poiché } F'B \cong EF \text{ per la proprietà transitiva si ha } BC \cong EF$$

Ma allora i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio.

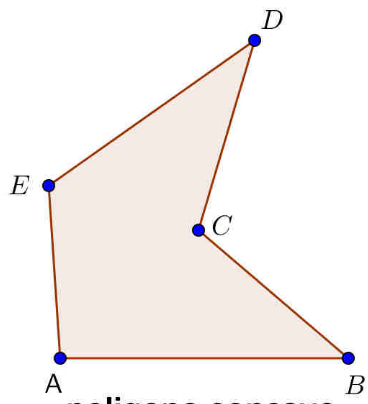
Poligoni

Definizione: si chiama “**poligono**” l’insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa non intrecciata e dai suoi punti interni.

I punti A,B,C,D ecc. si dicono vertici del poligono, il segmenti AB, BC ecc. si dicono lati del poligono.
Un poligono con più di tre lati può essere concavo o convesso (vedi figura).
Nel seguito, se non sarà specificato, *quando parleremo di poligono intenderemo poligono convesso.*



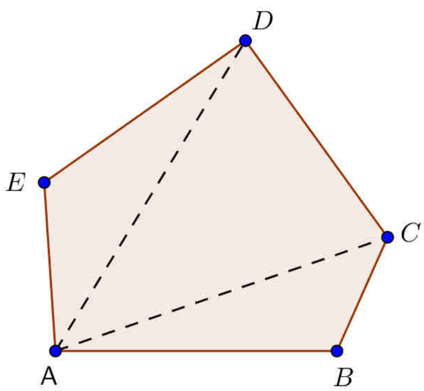
poligono convesso



poligono concavo

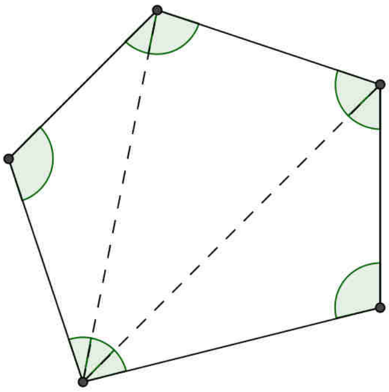
Un poligono viene denominato in modo diverso a seconda del numero dei lati: triangolo (3), quadrilatero (4), pentagono (5), esagono (6), eptagono (7), ottagono(8), ennagono(9), decagono (10) ecc.

Le **diagonali** di un poligono sono i segmenti che congiungono due vertici non consecutivi: in figura per esempio sono state disegnate le diagonali uscenti da A.



Un poligono si dice **regolare** se ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti.
Per esempio un triangolo equilatero è un poligono regolare.

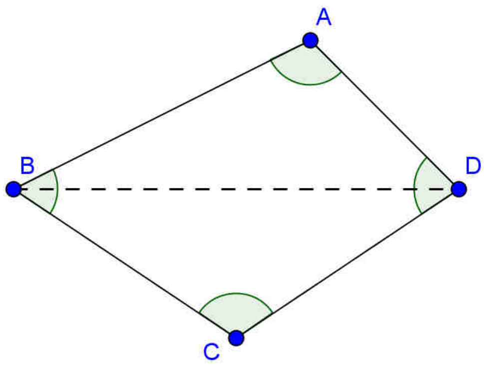
Teorema: *la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati risulta* $(n-2)\cdot \hat{P}$



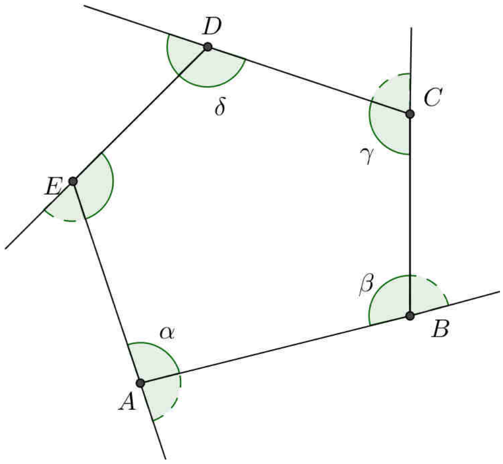
Dividiamo il poligono in *n-2* triangoli tracciando le diagonali uscenti da un dato vertice: poiché la somma degli angoli interni di ogni triangolo è congruente ad un angolo piatto avremo che la somma degli angoli interni di un poligono convesso sarà uguale a $(n-2)\cdot \hat{P}$

Esempio: se $n=4$ cioè se consideriamo un quadrilatero convesso avremo che la somma degli angoli interni risulta $(4-2)\cdot \hat{P} = 2\cdot \hat{P}$ (angolo giro).

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} \cong 2\cdot \hat{P}$ (angolo giro)



Teorema: *la somma degli angoli esterni di un poligono convesso risulta sempre congruente ad un angolo giro.*
Consideriamo un poligono convesso di *n* lati.
Abbiamo che :



$\hat{A}_e+\alpha \cong \hat{P}$; $\hat{B}_e+\beta \cong \hat{P}$ ecc.

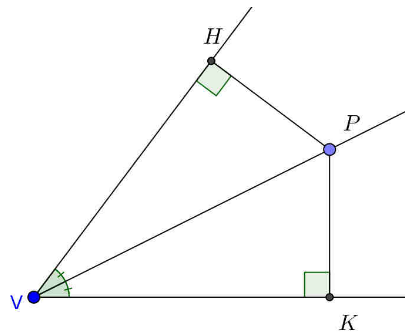
Quindi : $(\hat{A}_e+\alpha)+\left(\hat{B}_e+\beta\right)+... \cong n\cdot \hat{P}$

Ma poiché $\alpha+\beta+.... \cong (n-2)\cdot \hat{P} \Leftrightarrow \alpha+\beta+... \cong n\cdot \hat{P}-2\cdot \hat{P}$
si avrà in conclusione che

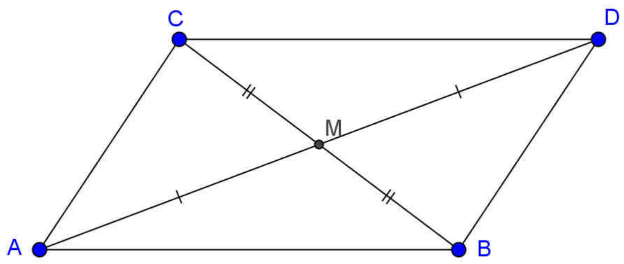
$$\hat{A}_e+\hat{B}_e+... \cong 2\cdot \hat{P}$$

ESERCIZI

*1) *Dimostra che tutti i punti appartenenti alla bisettrice di un angolo dato sono equidistanti dai lati dell'angolo.*
Suggerimento: se P è un qualsiasi punto della bisettrice dell'angolo di vertice V, tracciamo le perpendicolari PH e PK ai lati dell'angolo. I triangoli rettangoli VPH e VKP risultano ………….poiché hanno ………………………………………e quindi $PH \cong PK$

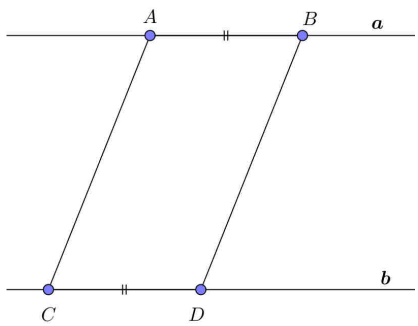


2) Dato un triangolo ABC, prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che la retta DB è parallela ad AC e la retta CD è parallela ad AB.



3) Dato il triangolo isoscele ABC di base AB, dimostra che la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C è parallela alla base.

4) Considera due rette parallele a e b . Sulle due rette scegli due segmenti congruenti AB e CD come in figura. Dimostra che $AC \cong BD$ e che la retta AC // retta BD.
Suggerimento: congiungi A con D e dimostra che i triangoli ACD e ADB sono congruenti….



5) Dal vertice C del triangolo ABC traccia il segmento CD congruente ad AB e parallelo alla retta per A e B. Dimostra che il triangolo BCD è congruente al triangolo ABC.

6) Dato un triangolo isoscele ABC, traccia una retta parallela alla base AB che intersechi i lati obliqui. Essa incontra il lato AC in E e il lato BC in F. Dimostra che il triangolo ECF è isoscele. Dimostra inoltre che $EB \cong AF$.

7) Da ogni vertice del triangolo ABC traccia la retta parallela al lato opposto. Dimostra che i tre triangoli che si formano sono congruenti al triangolo ABC.

8) Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB di un segmento $BE \cong AC$. Dimostra che $A\hat{B}C \cong 2 \cdot B\hat{E}C$.

9) Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB in modo che l'angolo $\hat{A}$ sia doppio dell'angolo al vertice $\hat{C}$. La bisettrice AD dell'angolo $\hat{A}$ divide il triangolo dato in due triangoli ADC e ABD. Dimostra che i due triangoli sono isosceli.

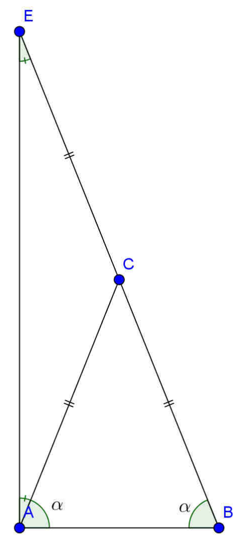
10) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, traccia l'altezza AD relativa al lato obliquo BC. Dimostra che l'angolo $D\hat{A}B$ è metà dell'angolo $\hat{C}$.

11) Considera un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB e traccia l'altezza CH relativa ad AB. Dimostra che i triangoli ACH e CHB hanno gli angoli congruenti a quelli di ABC.

12) Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB, traccia una retta *r* perpendicolare ad AB in modo che incontri il lato AC in E e il prolungamento del lato BC in F. Dimostra che il triangolo ECF è isoscele sulla base EF.
Suggerimento: traccia la retta che contiene l'altezza CH……

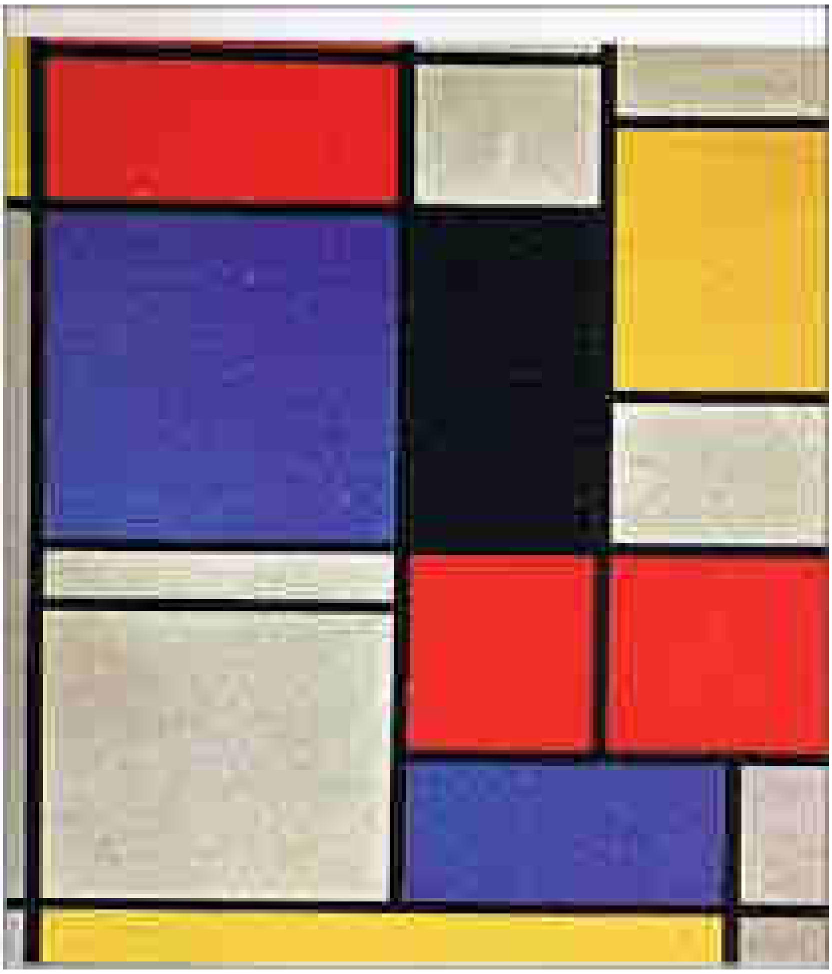
13) Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB. Prolunga il lato BC di un segmento $CE \cong CB$ e poi congiungi E con A. Dimostra che il triangolo ABE è rettangolo in A.

Suggerimento: gli angoli $E\hat{A}C$ e $C\hat{E}A$ sono congruenti e $A\hat{C}B \cong E\hat{A}C + C\hat{E}A$ …l'angolo $E\hat{C}A \cong 2\alpha$ (per il teorema dell'angolo esterno) ….



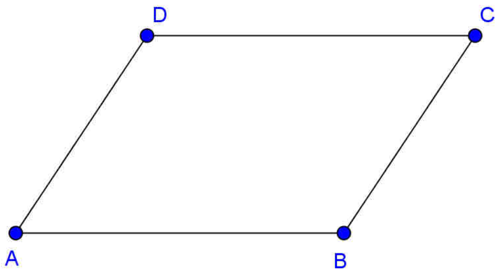
GEOMETRIA EUCLIDEA
I quadrilateri

Il



Il parallelogramma

Definizione: *un parallelogramma è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli*



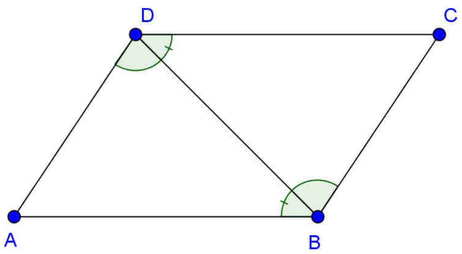
AB // DC

AD // BC

Teorema : *se ABCD è un parallelogramma allora*

- *ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;*
- *i lati opposti sono congruenti;*
- *gli angoli opposti sono congruenti;*
- *gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari;*
- *le diagonali si incontrano nel loro punto medio*

Dimostrazione



Tracciamo la diagonale BD: i triangoli ABD e BDC sono congruenti per il 2° criterio di congruenza dei triangoli poiché hanno :

BD in comune ,

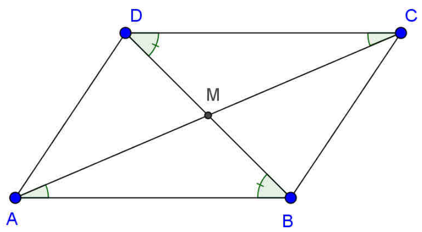
$A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$ (alterni interni delle parallele AB,DC)

$A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ (alterni interni delle parallele AD,BC)

Analogamente, tracciando l'altra diagonale, individuiamo triangoli congruenti.
Di conseguenza gli angoli opposti del parallelogramma sono congruenti e i lati opposti sono congruenti.

Gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari perché coniugati interni delle rette parallele AB, DC oppure AD,BC.

Per dimostrare l'ultima proprietà, tracciate entrambe le diagonali e detto M il loro punto di intersezione, consideriamo i triangoli ABM e DCM: sono congruenti per il 2° criterio avendo:



$AB \cong DC$, $A\hat{B}M \cong M\hat{D}C$ (alterni interni) , $B\hat{A}M \cong M\hat{C}D$ (alterni interni)

Quindi abbiamo anche $AM \cong MC$, $BM \cong MD$
cioè le diagonali si tagliano scambievolmente a metà.

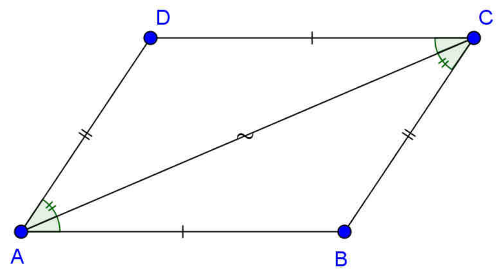
Teorema: *se un quadrilatero convesso ha una delle seguenti proprietà*

a) i lati opposti congruenti
b) gli angoli opposti congruenti
c) le diagonali che si incontrano nel loro punto medio
d) due lati opposti congruenti e paralleli

allora risulta un parallelogramma.

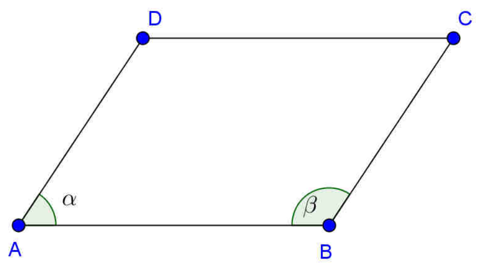
Dimostrazione

a) Tracciamo la diagonale AC: i triangoli ABC e ACD sono congruenti per il 3° crietrio.



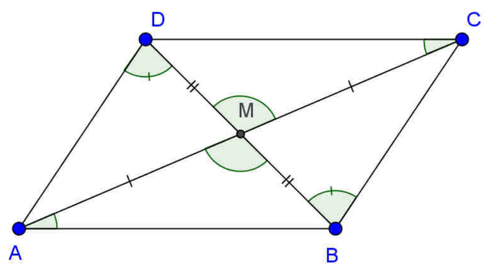
Ma allora $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ e quindi AB // DC , ma si ha anche $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ e quindi AD // BC .

b) Se gli angoli opposti sono congruenti, poiché la somma degli angoli interni è $2 \cdot \hat{P}$ (e angoli piatti) $\Rightarrow \alpha + \beta \cong \hat{P}$. Ma α e β sono coniugati interni delle rette AD, BC tagliate dalla trasversale AB e quindi AD // BC.



Analogamente $\hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P}$ e di conseguenza AB // DC .

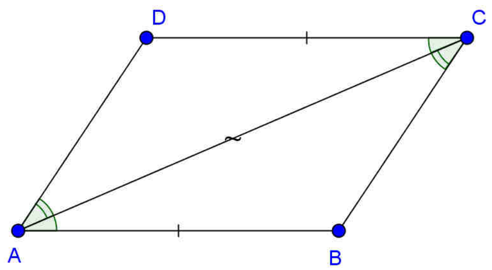
c) I triangoli ABM e CDM sono congruenti per il 1° criterio poiché :



$A\hat{M}B \cong C\hat{M}D$ (angoli opposti al vertice)
$AM \cong MC$, $BM \cong MD$ (per ipotesi)

Di conseguenza $B\hat{A}M \cong M\hat{C}D$ e quindi AB // DC.
Analogamente i triangoli AMD e BMC sono congruenti e quindi $A\hat{D}M \cong M\hat{B}C \Rightarrow$ AD // BC .

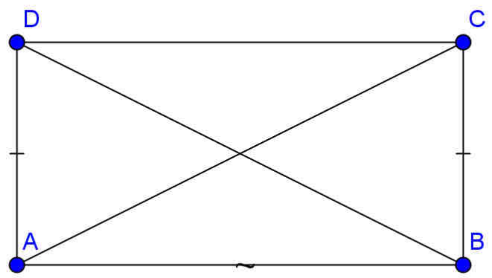
d) Tracciamo la diagonale AC: i triangoli ABC e ACD sono congruenti per il 1° criterio (vedi figura) $\Rightarrow D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ (angoli alterni interni) e quindi AD // BC .



Il rettangolo

Definizione : *un rettangolo è un parallelogramma avente tutti gli angoli tra loro congruenti (quindi tutti retti).*

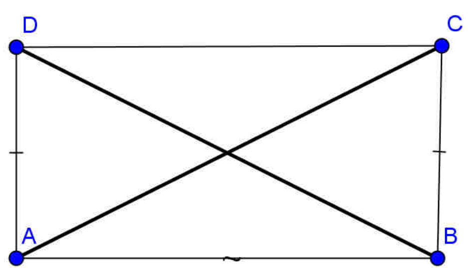
Teorema: *un rettangolo ha le diagonali congruenti*



Ipotesi: ABCD rettangolo
Tesi: $AC \cong BD$

I triangoli ABD e ABC sono congruenti per il 1° criterio poiché hanno:
$AD \cong BC$ (lati opposti di un parallelogramma);
AB in comune;
$\hat{A} \cong \hat{B}$ (angolo retto)
Di conseguenza avremo anche $AC \cong BD$

Teorema: *se un parallelogramma ha le diagonali congruenti allora è un rettangolo.*

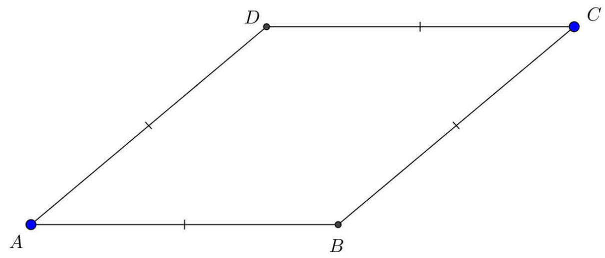


Ipotesi: ABCD parallelogramma con $AC \cong BD$
Tesi: ABCD è un rettangolo

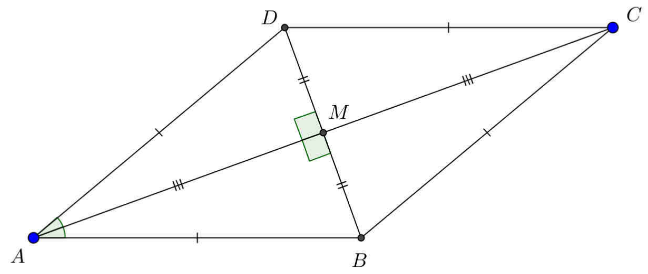
I triangoli ABD e ABC sono congruenti per il 3° criterio e quindi avremo anche $D\hat{A}B \cong A\hat{B}C$.
Ma poiché ABCD è un parallelogramma, questi angoli sono supplementari e quindi, se sono uguali, sono angoli retti.

Il rombo

Definizione : *un rombo è un parallelogramma aventi tutti i lati tra loro congruenti.*

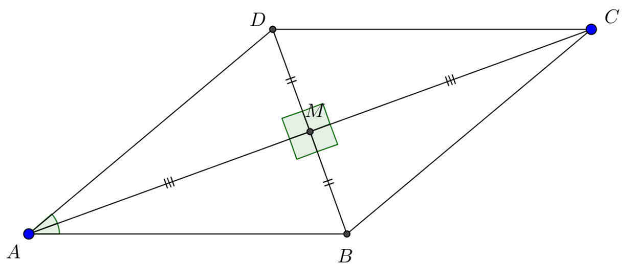


Teorema : *in un rombo le diagonali sono perpendicolari e bisettrici degli angoli.*



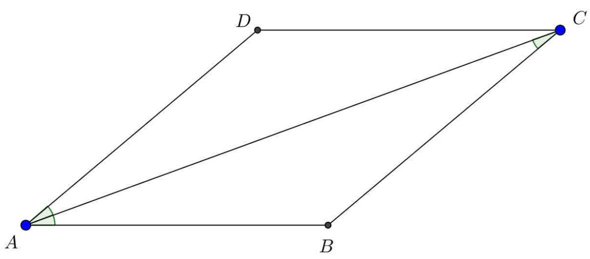
Poiché il rombo è un parallelogramma le sue diagonali si incontrano nel loro punto medio.
Ma il triangolo ABD risulta isoscele e poiché AM è mediana è anche altezza e bisettrice.
In modo analogo considerando il triangolo ACD la mediana DM è anche altezza e bisettrice.

Teorema: *se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari allora è un rombo.*



Poiché ABCD è un parallelogramma le diagonali si incontrano nel loro punto medio e quindi $AM \cong MC$. Quindi i triangoli AMD e DMC sono congruenti per il 1° criterio e allora abbiamo $AD \cong DC$ e quindi ABCD è un rombo.

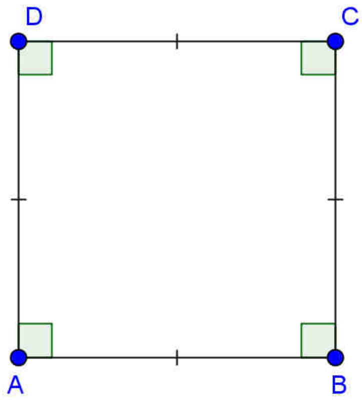
Teorema : *se un parallelogramma ha una diagonale bisettrice di un angolo allora è un rombo.*



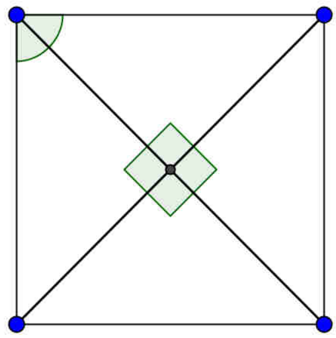
Per ipotesi $D\hat{A}C \cong C\hat{A}B$ ma $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ (alterni interni) $\Rightarrow$ ABC è isoscele $\Rightarrow$ $AB \cong BC$ e quindi ABCD è un rombo.

Il quadrato

Definizione : *un quadrato è un parallelogramma avente i lati e gli angoli congruenti (è un rettangolo e un rombo)*



Quindi gode delle proprietà del rettangolo e del rombo.
Un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari fra loro e bisettrici degli angoli.



Teorema

a) se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari allora è un quadrato

b) se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo allora è un quadrato

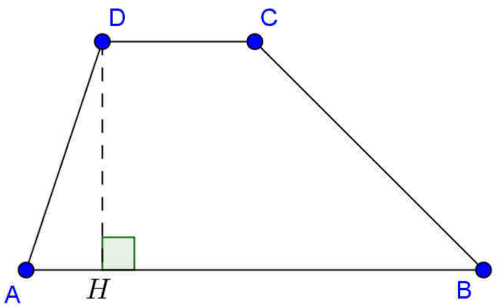
Dimostrazione

a) Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti è un rettangolo e se le diagonali sono perpendicolari è un rombo.
Di conseguenza, essendo un rettangolo e un rombo, è un quadrato.

b) Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti è un rettangolo e se una diagonale è bisettrice di un angolo è un rombo e quindi è un quadrato.

Il trapezio

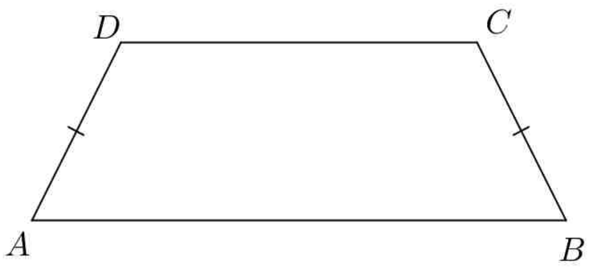
Definizione: *un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli.*



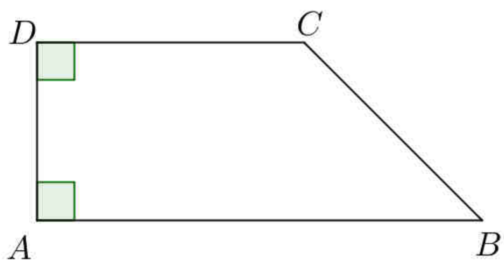
AB // DC

I lati paralleli si chiamano **basi** (base maggiore, base minore); la distanza tra le basi è detta **altezza** del trapezio; i lati non paralleli si dicono **lati obliqui** del trapezio.

Un trapezio si dice **isoscele** se ha i lati obliqui congruenti.
Un trapezio si dice **rettangolo** se uno dei lati obliqui è perpendicolare alle basi (e quindi la sua lunghezza è uguale all'altezza).

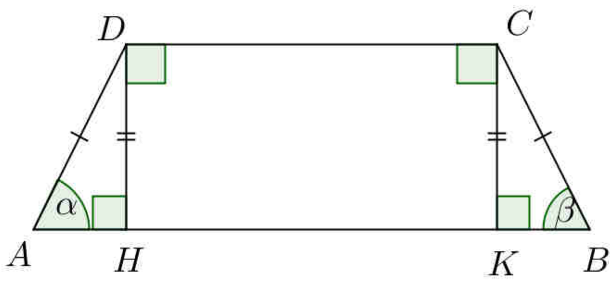


trapezio isoscele



trapezio rettangolo

Teorema: *in un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.*
Dimostrazione



Tracciamo le altezze DK, CH: poiché il quadrilatero DCHK è un rettangolo avremo $DK \cong CH$.
Quindi i triangoli rettangoli ADK e HBC sono congruenti (hanno congruenti ipotenua-cateto) e di conseguenza $\alpha \cong \beta$.

Inoltre, poiché $\hat{D}$ è supplementare di $\hat{A} = \alpha$ e $\hat{C}$ supplementare di $\hat{B} = \beta$, avremo anche $\hat{D} \cong \hat{C}$

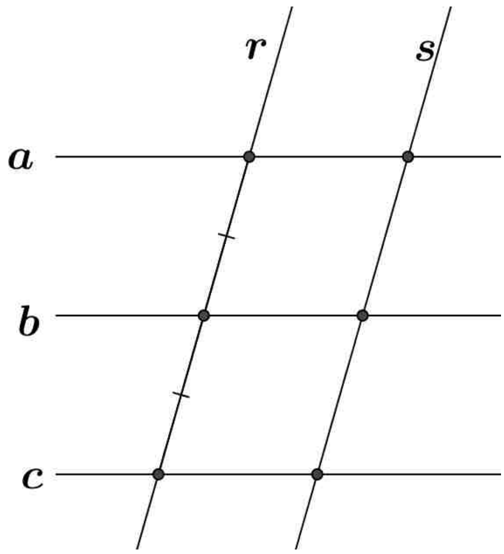
Teorema: *se in un trapezio gli angoli adiacenti a una delle basi sono congruenti allora il trapezio è isoscele.*
Dimostrazione

Supponiamo per esempio che $D\hat{A}B \cong A\hat{B}C$. Come nel teorema precedente tracciamo le altezze CH, CK ed abbiamo che $DK \cong CH$. Quindi i triangoli ADK e HBC sono congruenti….

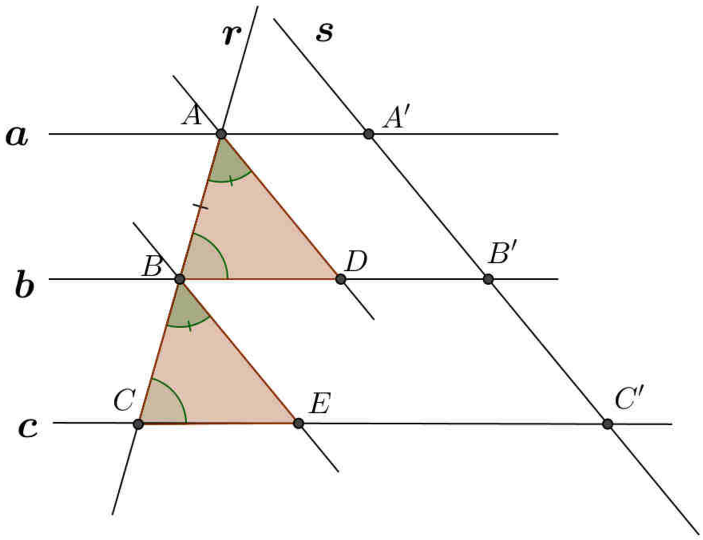
SCHEDA 1

Consideriamo tre rette parallele a,b,c tagliate da due rette r e s: ***se i segmenti intercettati sulla retta r sono congruenti allora anche i segmenti intercettati sulla retta s sono congruenti***.

1) Supponiamo che $r // s$: in questo caso ……………………………………………………



2) Supponiamo che r e s siano incidenti:



tracciamo la retta per A parallela ad s che individua sulla retta b un punto D: essendo AA'B'B un parallelogramma avremo $AD \cong A'B'$;

tracciamo per B la retta parallela ad s che individua sulla retta c un punto E: essendo BB'C'E un parallelogramma avremo $BE \cong B'C'$.

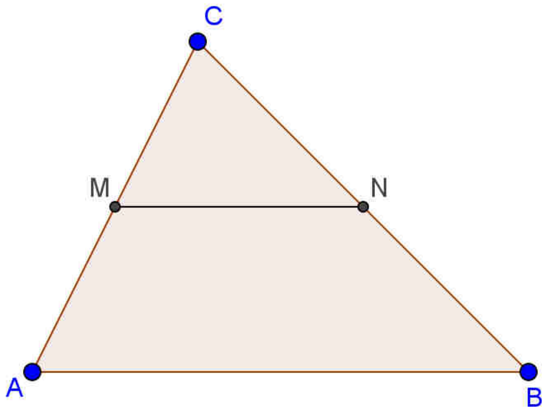
Consideriamo i triangoli ABD e BCE : risultano congruenti per il secondo criterio poiché

………………………………………………………………………………………………

Di conseguenza $AD \cong BE$ e quindi …………………………..

SCHEDA 2

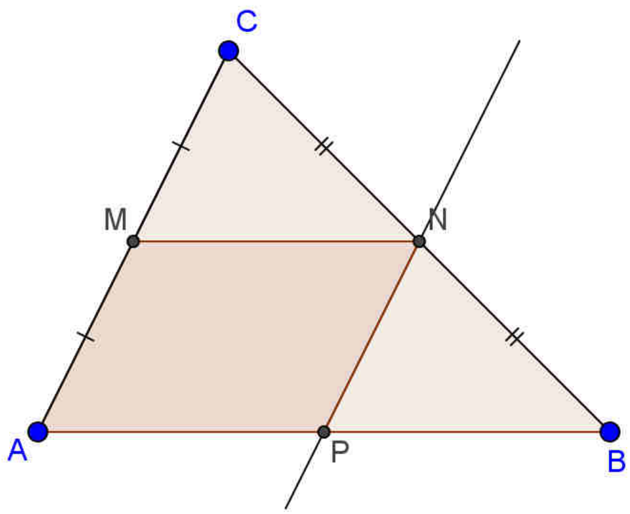
Consideriamo un triangolo ABC e congiungiamo i punti medi M e N di due lati (vedi figura).
Come risulta il segmento MN?



Supponiamo di tracciare la retta per C parallela ad AB: se tracciamo anche la parallela per M questa, per quello visto nella scheda 1, dovrebbe incontrare il lato BC nel punto medio N e quindi coincide con la retta MN.
In conclusione MN è ……………………..al lato AB.

Inoltre possiamo dimostrare che $MN \cong \frac{1}{2} AB$.

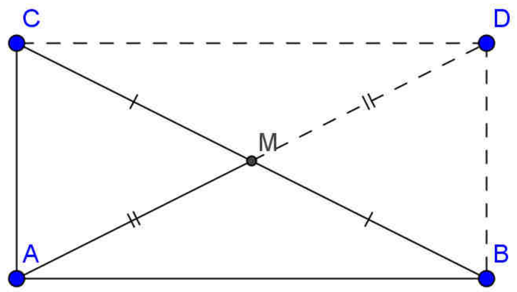
Infatti se tracciamo per N la retta parallela ad AC che incontra in P il lato AB avremo che MNPA risulta un ………………………… e inoltre, sempre pensando che ci sia anche una retta per B parallela a AC ed applicando il risultato della scheda 1, $AP \cong PB$.



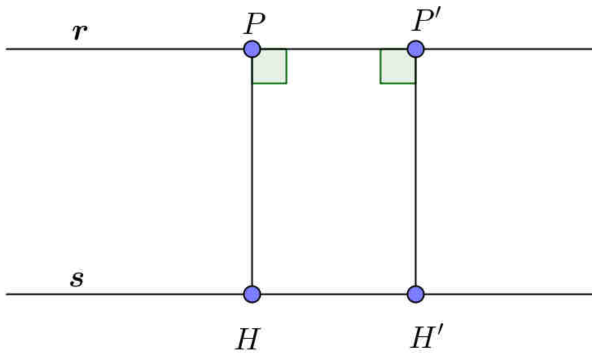
In conclusione quindi…………………………

ESERCIZI

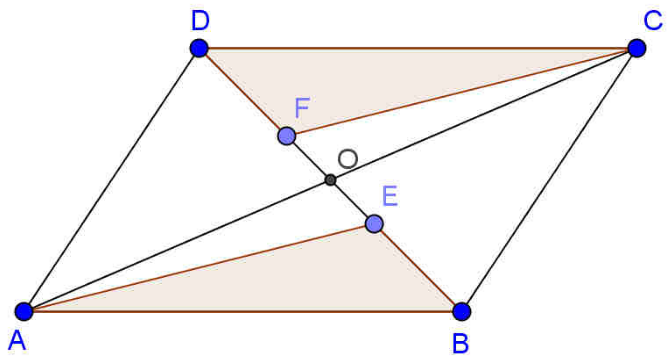
1) Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.
Suggerimento: prolunga la mediana AM di un segmento $MD \cong AM$ e considera ABDC….



2) Dimostra che, date due rette parallele r e s, ogni punto di ciascuna retta ha la stessa distanza dall'altra.
Suggerimento: se $PH \perp r \Rightarrow PH \perp s$ ….



3) Considera un parallelogramma ABCD le cui diagonali si intersecano in O. Scelti E e F come in figura con $OE \cong OF$ dimostra che i triangoli AEB e CFD sono congruenti.



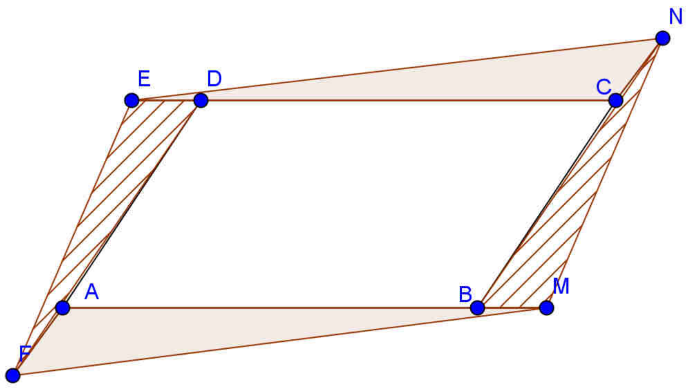
4) Disegna un triangolo ABC e la mediana CM; prolunga CM di un segmento $MD \cong CM$. Dimostra che ADBC è un parallelogramma.

5) Nel triangolo ABC prolunga il lato AC di un segmento $CE \cong AC$ e il lato BC di un segmento $CF \cong BC$. Dimostra che ABEF è un parallelogramma.

6) In un parallelogramma ABCD traccia le perpendicolari da A e da B alla retta CD e chiama rispettivamente H e K i piedi delle perpendicolari. Dimostra che i triangoli AHD e BKC sono congruenti.

7) In un parallelogramma ABCD traccia le bisettrici degli angoli interni $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Esse si incontrano in E. Dimostra che $A\hat{E}B$ è un angolo retto.

8) In un parallelogramma ABCD prolunga, sempre nello stesso verso, ogni lato in modo da ottenere i segmenti BM, CN, DE, AF congruenti tra loro. Dimostra che EFMN è un parallelogramma.
Suggerimento: i triangoli AFM e ECN sono congruenti poiché….; i triangoli BMN e EDF sono congruenti poiché…. e quindi….



9) Nel triangolo isoscele ABC di base AB, prolunga i lati AC e BC dei segmenti CE e CF congruenti a BC. Dimostra che il quadrilatero ABEF è un rettangolo.

10) Dato il triangolo rettangolo ABC, con l'angolo retto in A, da un punto P dell'ipotenusa traccia il segmento PH perpendicolare ad AB e poi PK perpendicolare a AC. Dimostra che AHPK è un rettangolo.

11) Nel parallelogramma ABCD le bisettrici dei quattro angolo, incontrandosi, determinano il quadrilatero EFGH. Dimostra che è un rettangolo.

12) Nel rombo ABCD, M,N,E,F sono i punti medi dei lati. Dimostra che il quadrilatero MNEF è un rettangolo.

13) Nel rombo ABCD l'angolo $\hat{A}$ è doppio dell'angolo $\hat{B}$. Dimostra che la diagonale minore AC è congruente al lato del rombo.

14) Dimostra che, se su una diagonale di un rombo si prendono due punti equidistanti dagli estremi, unendo tali punti con gli altri due vertici del rombo si ottiene un altro rombo.

15) Considera un triangolo rettangolo isoscele ABC con angolo retto in A. La mediana AM è prolungata di un segmento ME congruente ad AM. Dimostra che il quadrilatero ABEC è un quadrato.

16) Disegna un rettangolo ABCD e su ogni lato costruisci, esternamente al rettangolo, quattro triangoli rettangoli isosceli in modo che i lati del rettangolo siano le ipotenuse dei triangoli. Indica con P, Q, R, S i vertici degli angoli retti. Dimostra che PQRS è un quadrato.

17) Nel quadrato ABCD indica con M, N, E, F i punti medi dei lati. Dimostra che MNEF è un quadrato. Se M, N, E, Fsono diversi dai punti medi ma tali che $AM \cong BN \cong EC \cong DF$ si può ancora dire che MNEF risulta un quadrato?

18) Disegna un quadrato ABCD e prolunga AB di un segmento BE, BC di un segmento CF, CD di un segmento DG, DA di un segmento AH, tutti congruenti tra loro. Dimostra che EFGH è un quadrato.

19) Considera un triangolo isoscele ABC di base AB e traccia le altezze AH e BK. Dimostra che ABHK è un trapezio isoscele.

20) Dimostra che le diagonali di un trapezio isoscele sono congruenti.

21) Dimostra che se un trapezio ha le diagonali congruenti allora è isoscele.
Suggerimento: se CD è la base minore, traccia le altezze CH e DK e considera i triangoli CHA e DKB ….

22) Dimostra che in un trapezio isoscele le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore sono congruenti.

23) In un trapezio ABCD le diagonali AC e BD, incontrandosi nel punto O, formano i triangoli isosceli ABO e CDO. Dimostra che il trapezio è isoscele.

24) Dimostra che due trapezi sono congruenti se hanno i lati ordinatamente congruenti.
Suggerimento: devi dimostrare che i trapezi hanno anche tutti gli angoli ordinatamente congruenti.
Da un estremo della base minore traccia una retta parallela a uno dei lati obliqui….

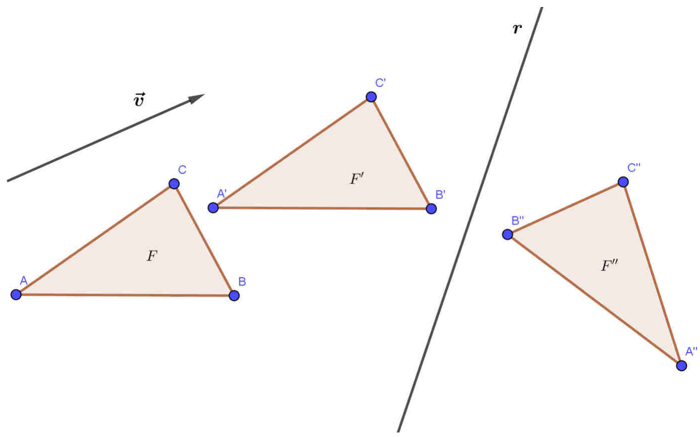
25) Considera un trapezio isoscele con i lati obliqui congruenti alla base minore. Dimostra che le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

GEOMETRIA EUCLIDEA
Isometrie

Le isometrie del piano sono trasformazioni geometriche che conservano forma e dimensione di della figura a cui sono applicate: se trasformiamo una figura del piano con un'isometria **la figura trasformata è congruente alla figura iniziale** ed infatti il termine isometria deriva dal greco e significa *iso* = stessa *metria* = misura.
Le principali isometrie del piano sono:

- traslazioni;
- rotazioni intorno ad un punto di un dato angolo;
- simmetrie rispetto ad una retta.

Le isometrie possono anche essere "composte" tra loro cioè *applicate in successione*: se ad una figura F, per esempio al triangolo ABC in figura, applichiamo la traslazione del vettore $\vec{v}$ e poi alla figura F' che abbiamo ottenuto applichiamo la simmetria rispetto alla retta *r* otterremo la figura F''.

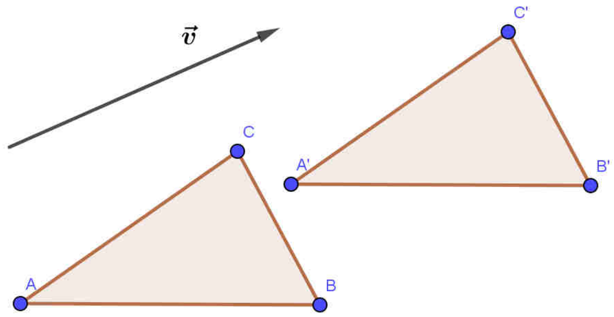


Nota: l'ordine in cui si eseguono le trasformazioni è importante, cioè invertendo l'ordine delle trasformazioni il risultato finale spesso cambia. Se nel nostro esempio avessimo prima effettuato la simmetria e poi la traslazione non avremmo ottenuto la stessa figura finale (fai la prova).
Utilizzeremo il software Geogebra per esplorare le isometrie.

Traslazione di un dato vettore

Disegna un triangolo ABC (con il comando poligono), poi costruisci un vettore con il comando "**vettore**" selezionando con il mouse un punto e poi un altro punto.

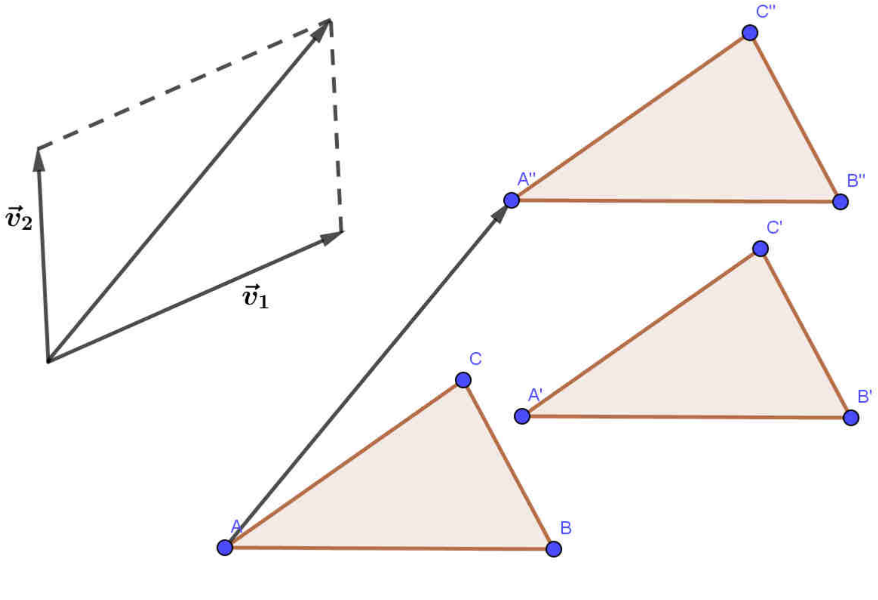
Attiva il pulsante *"traslazione*" : seleziona il triangolo che vuoi traslare e poi il vettore che hai costruito.



Osserva che i lati corrispondenti del triangolo risultano………………………………………

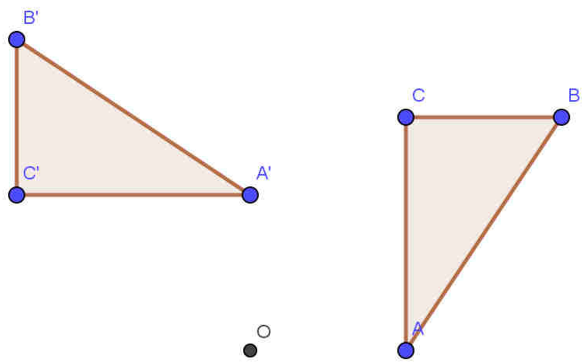
Composizione di traslazioni

La composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ corrisponde alla traslazione di vettore $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ cioè alla traslazione del vettore "somma" dei due vettori e in questo caso l'ordine in cui si eseguono le due traslazioni è indifferente.



Rotazione intorno ad un punto

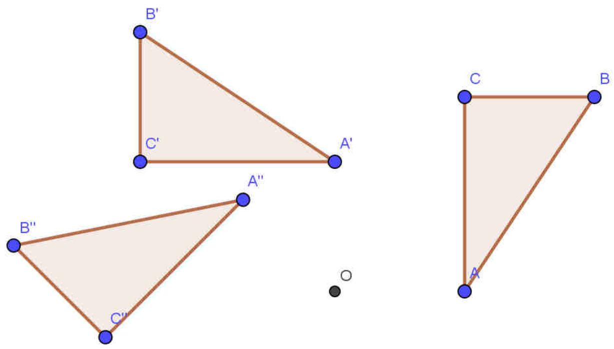
Costruiamo un punto O (centro di rotazione), un poligono e **attiviamo il pulsante "rotazione"** : seleziona prima l'oggetto da ruotare , nel nostro caso il poligono, poi il centro di rotazione O e poi digita la misura dell'angolo di rotazione (per esempio 90°): osserviamo che viene chiesto di specificare se la rotazione deve essere in senso orario o antiorario (se inseriamo $-90°$ antiorario corrisponde a 90° orario).



Osserviamo che i lati corrispondenti della figura formano lo stesso angolo dell'angolo di rotazione (nel nostro esempio 90°).

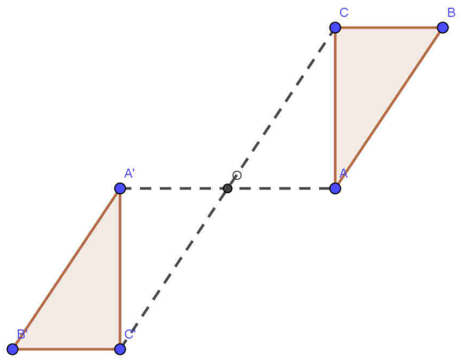
Composizione di rotazioni aventi lo stesso centro
Se le rotazioni hanno lo stesso centro otteniamo una rotazione avente lo stesso centro e come angolo la somma algebrica degli angoli (considerando positivi gli angoli "antiorari" e negativi quelli "orari").

In figura il triangolo è stato prima ruotato di 90° e poi di 45° intorno ad O.



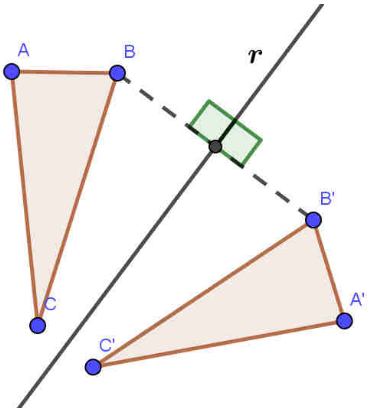
Rotazione di 180° intorno ad O (simmetria di centro O)

Se ruotiamo una figura di 180° vediamo che i punti corrispondenti si trovano alla stessa distanza da O sulla stessa retta ma da parti opposte: questa particolare rotazione viene anche chiamata simmetria di centro O.



Simmetria rispetto ad una retta
Simmetria assiale

Fissata una retta r e costruito un poligono attiviamo il comando "simmetria assiale": selezioniamo il poligono e poi la retta.

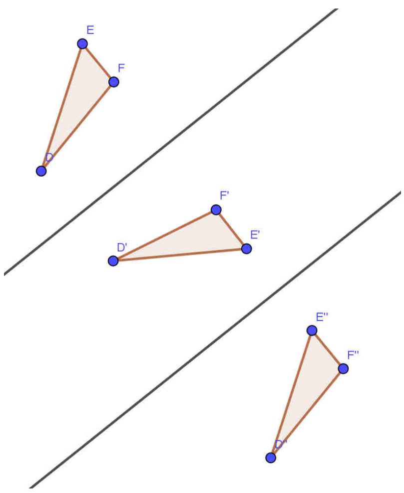


La retta asse di simmetria è asse del segmento che ha per estremi punti corrispondenti.

Osservazione
Consideriamo la figura: se percorriamo il poligono iniziale seguendo l'ordine delle lettere A.B.C giriamo in senso orario, mentre se percorriamo il poligono simmetrico sempre seguendo l'ordine A', B', C' stiamo girando in senso antiorario.

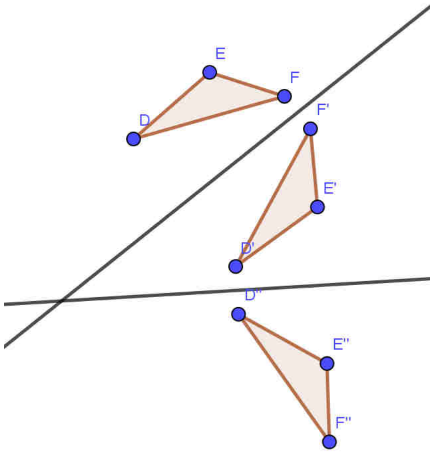
Composizione di due simmetrie assiali

a) Se gli assi di simmetria sono paralleli otteniamo ……………..



E' importante l'ordine in cui si eseguono le due trasformazioni?

b) Se gli assi di simmetria sono incidenti otteniamo ……………



E' importante l'ordine in cui si eseguono le due trasformazioni?