

Technische Universität Berlin

Master Arbeit

Grapheneinbettungen und Optimierung

Autor:
Jonas Neukamm

Betreuer und Erstgutachter:
Prof. Dr. Stefan Felsner

Matrikelnummer:
324283

Zweitgutachter:
Dr. Frank Lutz

*A thesis submitted in fulfillment of the requirements
for the degree of Master of Science*

an der

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

7.6.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

.....

Jonas Neukamm

Zusammenfassung

To Do

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)	2
1.2	Schnyder Wälder	3
	Literaturverzeichnis	5

1 Einleitung

Wir werden uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten V und Kanten $E \subseteq (V \times V)$. Eine Kante uv verbindet die beiden Knoten u und v . Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *planen Graphen*. Für einen planaren Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces) F betrachten. Bei einem planen Graph wird das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet definiert. Für die weiteren Betrachtungen macht es oft Sinn drei Knoten a_1, a_2, a_3 im äusseren Gebiet gesondert zu betrachten und diese die *Aufhängungen* von G zu nennen.

Planare Graphen haben, durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen, in gewissem Sinne besonders schöne Zeichnungen und so ist einer der Fragen mit der sich schon viele Mathematiker auseinander gesetzt haben: "*How to draw a Graph?*" [Tut63]

Bei topologische Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt die sich nur in den Knoten treffen. In den Fünfzigern wurde unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen mit einem beliebigen äusseren Gebiet eine geradlinige Zeichnung existiert. [Fár48]

Definition 1.1 (intern zusammenhängend). Ein Graph G ist zusammenhängend falls für alle Knoten u, v ein Pfad von u nach v existiert. G ist k -zusammenhängend, falls er nach der Entfernung von $k - 1$ beliebigen Knoten weiterhin zusammenhängend ist. Sei G plan mit den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 , weiter sei a_∞ ein zusätzlicher Knoten im äusseren Gebiet. Dann ist G *intern k -zusammenhängend*, falls $G \cup \{a_1 a_\infty, a_2 a_\infty, a_3 a_\infty\}$ k -zusammenhängend ist.

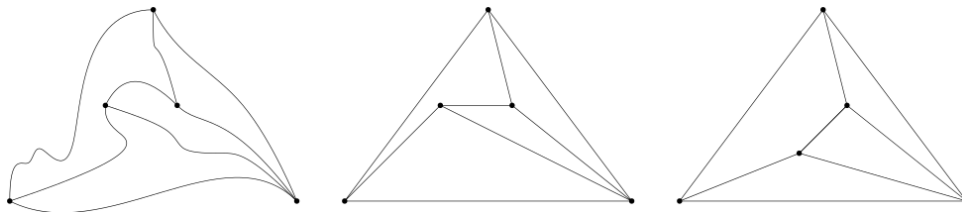


Abbildung 1.1: Planarer Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen und einer konvexen Zeichnung.

In den Siebzigern betrachtete William Thomas Tutte die Unterklasse der drei-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern sogar *konvexe* Zeichnungen existieren, bei denen alle Gebiete die konvexe Polygone umranden. [Tut63]

1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)

Ausgehend von der konvexen Darstellung nach Tutte, kann man sich die Frage stellen unter welchen Voraussetzungen wir einen planaren Graphen so zeichnen können, dass alle Gebiete, inklusive dem Äusseren Dreiecken umranden. Bei der Formalisierung dieser Darstellung und ersten Feststellungen halten wir uns an Nieke Aerts und Stefan Felsner [AF13b].

Definition 1.2 (SLTR). Eine Zeichnung eines planen Graphen G wird Gradlinige Dreiecks Darstellung, im weiteren kurz *SLTR* (für die englische Bezeichnung Straight Line Triangle Representation), genannt falls gilt:

- S1 Alle Kanten Segmente von Geraden
- S2 Alle Gebiete, inklusive dem äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.

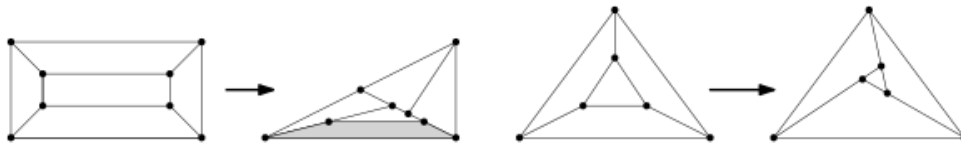


Abbildung 1.2: Links einer der beiden drei-zusammenhängenden Graphen auf acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Um die Problemstellung greifbarer zu machen werden wir planare Graphen zusammen mit den drei Aufhängungen a_1, a_2 und a_3 als designierten Ecken einer möglichen SLTR betrachten. Einen Graphen zusammen mit einem äusseren Gebiet bzw. Aufhängungen zu betrachten, macht auch in sofern Sinn, dass kombinatorische Graphen existieren, von denen manche Einbettungen SLTRs zulassen, andere jedoch nicht, so wie in Abbildung 1.3 zu sehen.

Proposition 1.3. Sei G ein Graph mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 als äusseren Ecken einer SLTR. Weiter gebe es keinen Knoten von Grad zwei der in beiden angrenzenden Gebieten den Winkel π hat¹. Dann ist G intern-drei-zusammenhängend^{1.1}.

Wir werden also von nun an, der Einfachheit halber intern-drei-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen mit SLTR auf diese

¹Ein solcher Knoten ist keine Aufhängung, da der Aussenwinkel grösser als π ist. Alle anderen Knoten haben $\leq \pi$ Winkel. Somit können wir ihn durch eine gerade Kante zwischen seinen Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten.

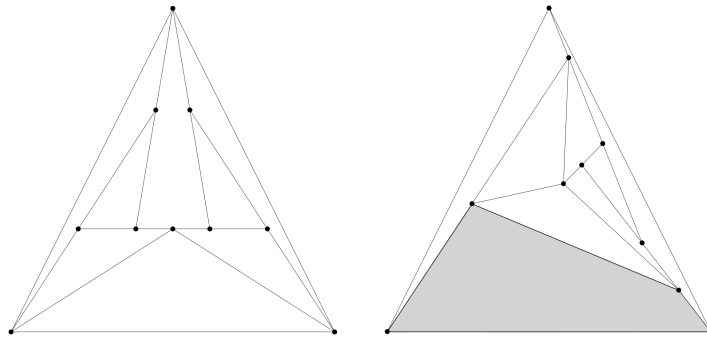


Abbildung 1.3: Der kleinste drei-zusammenhängende Graph mit einer einer SLTR Einbettung und einer Auswahl der Aufhängung die kein SLTR zulässt.

reduziert werden können.

Zu den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen es für die Existenz von SLTRs gibt und welche algorithmischen Ansätze es bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung gibt haben Aerts und Felsner in [AF13b], [AF13a] und [AF15] schon einige Antworten geliefert, mit denen wir uns in den nächsten beiden Kapiteln beschäftigen werden. Zuerst müssen aber in diesem Kapitel noch ein paar notwendige Konzepte eingeführt werden.

1.2 Schnyder Wälder

Schnyder Wälder, im weiteren *Schnyder Woods* wurden zuerst von Walter Schnyder zur Betrachtung der Ordnungs-Dimension planarer Graphen, als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung, betrachtet [Sch89]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer planaren Einbettung auf einem $n - 2 \times n - 2$ Netz [Sch90]. Im Folgenden werden wir die Verallgemeinerung auf drei-zusammenhängende plane Graphen durch Felsner [Fel01] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings einführen.

Definition 1.4 (Schnyder Woods). Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von G mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln²:

- W1 Jede Kante ist entweder un- oder bigerichtet. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.
- W2 An jeder Aufhängung s_i existiert eine nach aussen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label i .

²Alternativ kann hier auch anschaulicher einfach von rot, blau und grün gesprochen werden. Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass $i + 1$ und $i - 1$ immer definiert sind.

W3 Jeder Knoten v hat hat Ausgangsgrad eins zu jedem Label. Um v existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.

W4 Es existiert kein gerichteter Zykel mit einem Label.

Definition 1.5 (Schnyder Labeling). Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung Winkel von G mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en. Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.
- L2 An Aufhängung a_i haben äusseren Winkel die Label $i-1$ und $i+1$ im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label i .
Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en.

// TODO BILD!!

Theorem 1.6. *Schnyder Woods und Schnyder Labelings stehen in Bijektion zueinander.* // TODO

// TODOBILD

Literaturverzeichnis

- [AF13a] Nieke Aerts and Stefan Felsner, *Henneberg steps for triangle representations*, The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, Springer, 2013, pp. 503–509.
- [AF13b] ———, *Straight line triangle representations*, International Symposium on Graph Drawing, Springer, 2013, pp. 119–130.
- [AF15] ———, *Straight line triangle representations via schnyder labelings*, J. Graph Algorithms Appl. **19** (2015), no. 1, 467–505.
- [Fár48] István Fáry, *On straight-line representation of planar graphs*, Acta Sci. Math. **11** (1948), 229–233.
- [Fel01] Stefan Felsner, *Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes*, Order **18** (2001), no. 1, pp. 19–37.
- [Sch89] Walter Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989), no. 4, pp. 323–343.
- [Sch90] ———, *Embedding planar graphs on the grid*, in Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Disc. Algo., Philadelphia, PA, USA (1990), pp. 138–148.
- [Tut63] William Thomas Tutte, *How to draw a graph*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1963), no. 1, 743–767.