

Technische Universität Berlin

Master Arbeit

---

# Grapheneinbettungen und Optimierung

---

*Autor:*  
Jonas Neukamm

*Betreuer und Erstgutachter:*  
Prof. Dr. Stefan Felsner

*Matrikelnummer:*  
324283

*Zweitgutachter:*  
Dr. Frank Lutz

*Masterarbeit zur Prüfung zum Master of Science  
an der*

Technische Universität Berlin  
Institut für Mathematik

7.6.2019



## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

.....

Jonas Neukamm



# Zusammenfassung

To Do



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs) . . . . .	2
1.2 Schnyder Woods . . . . .	3
1.3 $\alpha$ -Orientierungen . . . . .	6
1.4 Flüsse auf Graphen . . . . .	7
<b>2 Hauptteil</b>	<b>9</b>
2.1 SLTRs durch harmonische Funktionen . . . . .	10
2.1.1 Harmonische Funktionen auf planaren Graphen . . . . .	12
2.2 Ecken kompatible Paare . . . . .	14
<b>3 Algorithmen zur Erkennung von SLTRs</b>	<b>27</b>
3.1 SLTRs via Zwei-Fluss . . . . .	27
3.1.1 Schnyder-Wood-Fluss . . . . .	27
3.1.2 FAA-Fluss . . . . .	28
3.1.3 Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs . . . . .	29
3.2 Nicht ganzzahlige Lösungen . . . . .	36
3.2.1 Minimale Schnitte in $\mathcal{N}_G$ . . . . .	37
<b>4 Das Programm</b>	<b>41</b>
4.1 Visualisierung . . . . .	42
4.2 Statistische Betrachtung . . . . .	43
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>45</b>





# 1 Grundlagen

Diese Arbeit wird sich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V \times V)$ . Eine Kante  $(u, v)$  verbindet die beiden Knoten  $u$  und  $v$ . Ein Pfad von  $u$  nach  $v$  ist eine Folge von Kanten, die  $u$  und  $v$  verbindet. Mit dem Grad  $\deg(v)$  eines Knoten meinen wir die Anzahl der adjazenten Kanten.

Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *planen Graphen*. Für einen planen Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces)  $F$  betrachten, die durch die Kanten und Knoten begrenzten Regionen in der Ebene, wobei wird das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet bezeichnen. Für die weiteren Betrachtungen macht es oft Sinn drei Knoten  $\{a_1, a_2, a_3\}$  die das äusseren Gebiet berühren gesondert zu betrachten. Wir nennen sie die *Aufhängungen* von  $G$  und bezeichnen  $G$  als *aufgehängten* Graphen.

Planare Graphen haben durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen in gewissem Sinne besonders schöne Zeichnungen. So ist einer der Fragen, mit der sich schon viele Mathematiker\*innen auseinander gesetzt haben und auf die auch in dieser Arbeit eingegangen wird: "*How to draw a Graph?*" [Tut63]

Bei einer topologischen Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt, die sich nur in den Knoten treffen. In den Fünfzigern wurde unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen und für jede Wahl eines äusseren Gebietes eine geradlinige und kreuzungsfreie Einbettung existiert [Fár48].

**Definition 1.1** (intern zusammenhängend). Ein Graph  $G$  ist zusammenhängend falls für alle Knoten  $u, v$  ein Pfad von  $u$  nach  $v$  existiert.  $G$  ist *k-zusammenhängend*, falls er nach der Entfernung von  $k - 1$  beliebigen Knoten weiterhin zusammenhängend ist. Sei  $G$  plan mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , weiter sei  $a_\infty$  ein zusätzlicher Knoten eingefügt im äusseren Gebiet. Dann ist  $G$  *intern k-zusammenhängend*, falls  $G = (V, E \cup \{(a_1, a_\infty), (a_2, a_\infty), (a_3, a_\infty)\})$  k-zusammenhängend ist.

In den Siebzigern betrachtete William Thomas Tutte die Unterklasse der 3-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern sogar *konvexe* Zeichnungen existieren. Bei einer konvexen Einbettung entsprechen die Kantenfögen, die ein Gebiet einschließen, den Randkurven von konvexen Polygonen [Tut63].

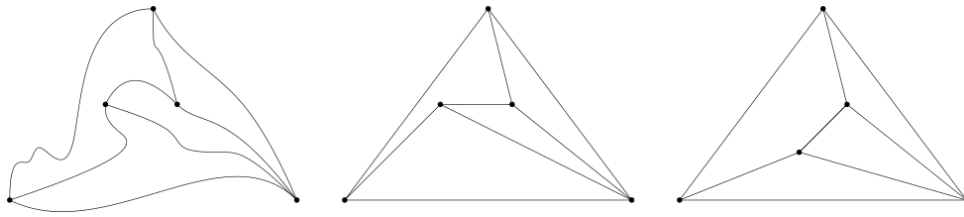


Abbildung 1.1: Planarer Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen und einer konvexen Zeichnung.

## 1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)

Ausgehend von den konvexen Einbettungen nach Tutte, kann man sich die Frage stellen, unter welchen Voraussetzungen wir einen planaren Graphen so zeichnen können, dass alle Gebiete Dreiecke umranden. Die Formalisierung dieser Darstellung und erste Folgerungen folgen Nieke Aerts und Stefan Felsner [AF13b, AF15].

**Definition 1.2** (SLTR). Eine Zeichnung eines planen Graphen  $G$  wird *geradlinige Dreiecks Darstellung*, im weiteren kurz *SLTR* (für die englische Bezeichnung *straight line triangle representation*), genannt falls gilt:

- S1 Alle Kanten sind Segmente von Geraden.
- S2 Alle Gebiete, inklusive dem Äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.

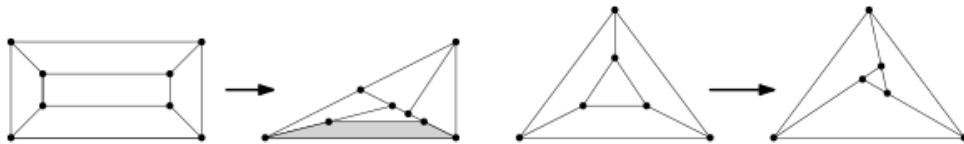


Abbildung 1.2: Links einer der beiden 3-zusammenhängenden Graphen auf acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Um die Problemstellung greifbarer zu machen kann man plane Graphen zusammen mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  betrachten, wobei  $\{a_1, a_2, a_3\}$  hier die designierten Ecken des äusseren Gebietes einer möglichen SLTR sind. Einen Graphen zusammen mit einem äusseren Gebiet bzw. festen Aufhängungen als Paar zu behandeln ist sinnvoll, weil planare Graphen existieren, von denen manche Einbettungen, SLTRs zulassen, andere jedoch nicht, so wie in Abbildung 1.3 zu sehen. Zumindest für 3-zusammenhängende planare Graphen ist die topologische Einbettung nach der Auswahl der Aufhängungen eindeutig.

**Proposition 1.3.** [AF13b, Proposition 1.2] Sei  $G$  ein planer Graph mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  als äussere Ecken einer SLTR. Weiter gebe es keine inneren Knoten  $v$  mit  $\deg(v) < 3$ . Dann ist  $G$  intern-3-zusammenhängend.

**Bemerkung.** Für innere Knoten von Grad 2 in einer SLTR müssen beide angrenzenden Winkel gerade sein. Somit kann man diese Knoten durch eine gerade Kante zwischen ihren Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten. Wir werden somit von nun an nur intern-3-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen, die eine SLTR zulassen, auf diese reduziert werden können.

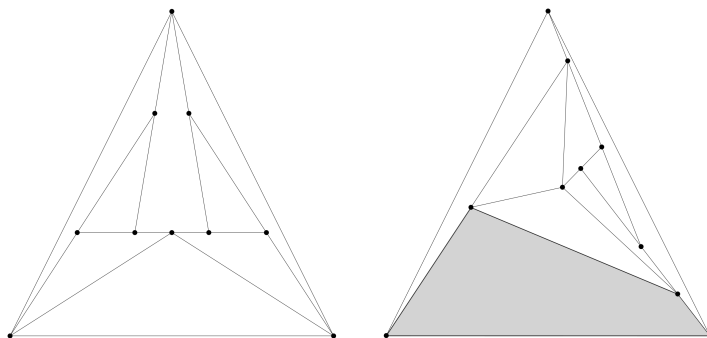


Abbildung 1.3: Der kleinste 3-zusammenhängende kombinatorische Graph mit einer Wahl der Aufhängungen die eine SLTR zulässt und einer Auswahl ohne SLTR.

Zu den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen es für die Existenz von SLTRs gelten und welche algorithmischen Ansätze man bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung verfolgen kann, haben Aerts und Felsner in [AF13b], [AF13a] und [AF15] schon einige Antworten geliefert. Die nächsten zwei Kapitel, werden sich damit beschäftigen. Zuvor müssen in diesem Kapitel noch ein paar notwendige Konzepte eingeführt werden.

## 1.2 Schnyder Woods

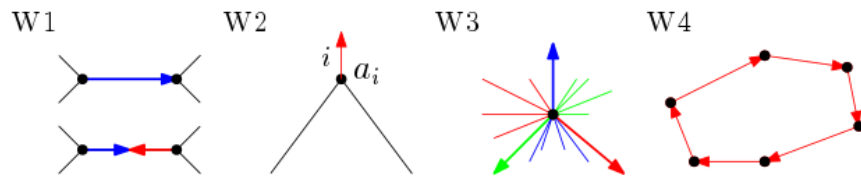
Schnyder Wälder, im weiteren *Schnyder Woods*, wurden zuerst von Walter Schnyder zur Betrachtung der Ordnungs-Dimension planarer Graphen, als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung, betrachtet [Sch89]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer planaren Einbettung auf einem  $(n - 2) \times (n - 2)$  Gitter [Sch90]. Dieser Abschnitt führt die Verallgemeinerung auf 3-zusammenhängende plane Graphen durch Felsner [Fel01] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings ein und orientiert sich an [Fel04].

Für den Rest dieses Kapitels sei  $G$ , wenn nicht weiter spezifiziert, ein 3-zusammenhängenden planer Graph mit Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .

**Definition 1.4** (Schnyder Woods). Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von  $G$  mit den Labeln 1, 2 und 3<sup>1</sup>, unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

<sup>1</sup>Alternativ wird hier auch anschaulicher von rot, grün und blau als Platzhalter für 1, 2 und 3

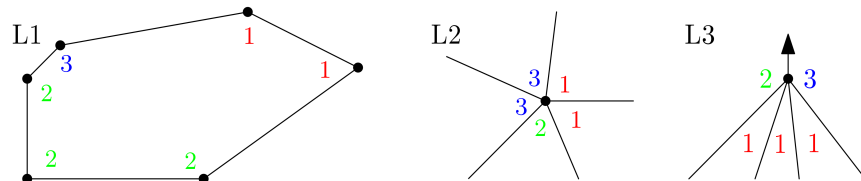
- W1 Jede Kante ist entweder un- oder bigerichtet. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.
- W2 An jeder Aufhängung  $a_i$  existiert eine nach aussen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label  $i$ .
- W3 Jeder Knoten  $v$  hat Ausgangsgrad eins zu jedem Label. Um  $v$  existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.
- W4 Es existiert kein inneres Gebiet mit gerichteten Zykel in einer Farbe als Rand.



Analog zu den Schnyder Woods, kann man Schnyder Labelings definieren, die zu diesen in Bijektion stehen.

**Definition 1.5** (Schnyder Labeling). Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung der Winkel von  $G$  mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en. Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.
- L2 Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en.
- L3 An Aufhängung  $a_i$  haben äusseren Winkel die Label  $i-1$  und  $i+1$  im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label  $i$ .



In Abbildung 1.4 wird eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings illustriert. Das nächste Lemma folgt aus L1 und L2.

gesprochen. Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass  $i + 1$  und  $i - 1$  immer definiert sind.

**Lemma 1.6.** *Sei  $G$  ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen und einem Schnyder Labeling. Dann beinhalten die vier Winkel an einer Kante die Label 1, 2 und 3. Somit hat jede Kante einen der beiden Typen in Abbildung 1.4.*

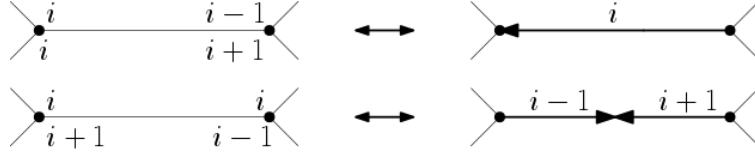


Abbildung 1.4: Bijektion zwischen Schnyder Wood auf der rechten und Schnyder Labeling auf der linken Seite.

Wenn wir uns auf intern-3-zusammenhängende planare Graphen beschränken, dann ist die dargestellte Abbildung nach [Fel04, Theorem 2.3] eine Bijektion.

Es existieren einige Anwendungen von Schnyder Woods im Bezug auf Einbettungen. Eine ist das im Folgenden skizzierte *face-counting* [Fel01]. Betrachte  $G$  mit einem Schnyder Wood  $T_1, T_2, T_3$ . Nach [Fel04, Korollar 2.5] handelt es sich bei den  $T_i$  um gerichtete Bäume mit Wurzeln in  $a_i$ . Von jedem Knoten  $v$  aus existierten also eindeutige Pfade  $P_i(v)$  zu den Aufhängungen  $a_i$ . Die Pfade von  $v$  zu den Aufhängungen treffen sich nach [Fel04, Lemma 2.4] nur in  $v$ . Somit können wir zu jedem Knoten  $v$  die von den Pfaden  $P_{i-1}(v)$  und  $P_{i+1}(v)$  und dem äusseren Gebiet begrenzte Region  $R_i$  betrachten. Durch das Zählen der Gebiete in den Regionen zu  $v$  lässt sich nun eine konvexe Zeichnung von  $G$  erzeugen.

Hierzu ordnet man jedem Knoten  $v$  seinen Gebiets Vektor  $(v_1, v_2, v_3)$  zu, wobei  $v_i$  die Anzahl der inneren Gebiete in  $R_i(v)$  beschreibt. Nun gilt für jeden Knoten  $v_1 + v_2 + v_3 = |F| - 1$ . Seien  $\alpha_1 = (0, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0)$  und  $\alpha_3 = (0, 0)$  die äusseren Ecken unserer Zeichnung, dann erhalten wir die Position der inneren Knoten durch die Funktion

$$\mu : v \rightarrow v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3.$$

Nach [Fel04, Theorem 2.7] ist die mit diesen Koordinaten erzeugte Zeichnung planar und konvex und passt auf ein  $(|F| - 1) \times (|F| - 1)$ -Gitter. Sie hat noch eine weitere Eigenschaft die später von Nutzen ist.

- W5 Die Knoten eines inneren Gebietes werden auf die Seiten eines Dreiecks mit den Seiten  $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$  mit passenden Konstanten  $c_i$ . Im inneren dieses Dreiecks befinden sich keine Knoten und die Winkel des Gebietes auf der Seite  $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$  haben Label  $i$  im Schnyder Labeling.

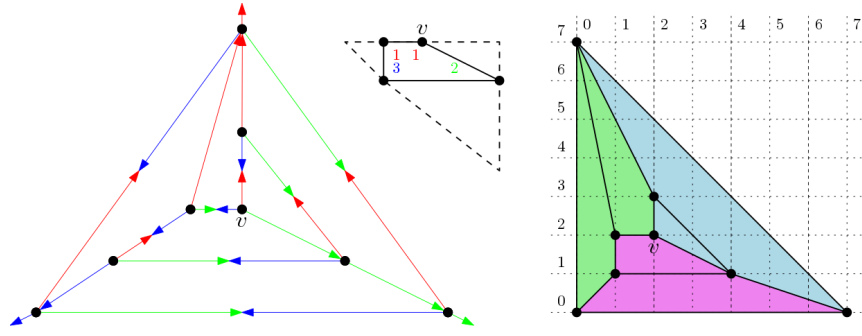


Abbildung 1.5: Eine Schnyder Wood und die durch *face counting* erhaltene Einbettung. Die eingefärbten Gebiete sind die Regionen die den Gebietsvektor  $(v_1, v_2, v_3)$  ergeben. In der Mitte ist W5 illustriert.

### 1.3 $\alpha$ -Orientierungen

Für unseren Algorithmus in Kapitel 3 führen wir eine weitere zu Schnyder-Woods und Labelings in Bijektion stehende Struktur auf Graphen ein und halten uns dabei an [Fel04].

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph und  $\alpha : V \mapsto \mathbb{N}$  eine Funktion auf  $G$ . Eine  $\alpha$ -Orientierung ist eine Orientierung der Kanten von  $G$ , sodass der Ausgrad eines jeden Knoten  $\alpha(v)$  entspricht. Somit gilt

$$\text{outdeg}(v) = \alpha(v).$$

Wir betrachten den Primal-Dual Graphen  $G + G^*$  eines planaren Graphen  $G$ . Hier ist  $G^*$  der schwache duale Graph<sup>2</sup> zusammen mit einer Halbkante ins äussere Gebiet von jeder inzidenten Kante aus. Die Menge der Knoten von  $G + G^*$  besteht aus Knoten-Knoten, Kanten-Knoten und Gebiets-Knoten. Kanten in  $G + G^*$  existieren, sowohl zwischen inzidenten Kanten und Knoten, als auch Kanten und Gebieten in  $G$ . Somit ist  $G + G^*$  bipartit. Falls wir einen Knoten  $f_\infty$  für das äussere Gebiet einsetzen und die Halbkanten verlängern, spricht man vom Abschluss von  $G + G^*$  und bezeichnet diesen mit  $\tilde{G}$ . Das folgende Theorem liefert eine Bijektion zwischen Schnyder Woods auf  $G$  und einer bestimmten  $\alpha$ -Orientierung auf  $\tilde{G}$ , die wir  $\alpha_s$  nennen.

**Theorem 1.7.** *Sei  $G$  ein planer Graph mit Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , dann sind die folgenden Strukturen in Bijektion:*

- Die Schnyder Wälder auf  $G$ .
- Die Schnyder Wälder auf dem (schwachen) dualen Graphen  $G^*$ .
- Die  $\alpha_s$ -Orientierungen des Abschlusses von  $G + G^*$  mit  $\alpha_s(v) = \alpha_s(f) = 3$  für jeden Knoten- und Gebiets-Knoten,  $\alpha_s(e) = 1$  für jeden Kanten-Knoten und

<sup>2</sup> $G^*$  hat einen Knoten für jedes innere Gebiet von  $G$  und eine Kante verbindet zwei Knoten  $f_1, f_2$  falls sie in  $G$  adjazent sind.

$$\alpha_s(f_\infty) = 0.$$

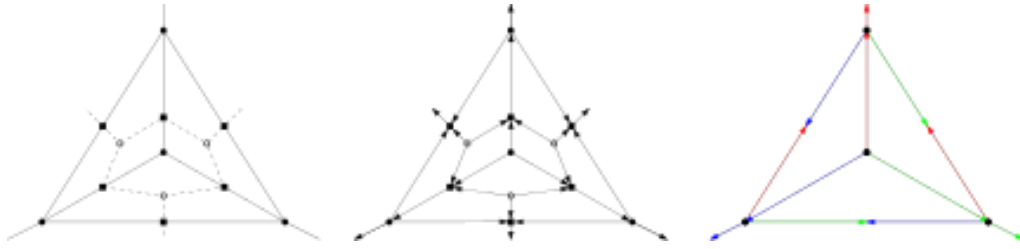


Abbildung 1.6: Der Primal-Duale Graph  $K_4 + K_4^*$  mit einer  $\alpha_s$ -Orientierung und dem zugehörigen Schnyder Wood auf  $K_4$ .

## 1.4 Flüsse auf Graphen

Wir werden in Kapitel 3 einen gerichteten Graphen  $\mathcal{N}$  konstruieren um auf diesem einen maximalen Fluss zu finden. Wir beschäftigen uns allgemein also mit der folgenden Problematik.

**Definition 1.8** (Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem). Sei  $D = (V, E)$  ein gerichteter Graph, im Weiteren auch Netzwerk genannt, mit den Kapazitäten  $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$ , Paaren von ausgezeichneten Knoten  $\{(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)\}$  und positiven Bedarfen  $\{d_1, \dots, d_n\}$ , dann ist  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ein zulässiger Fluss, falls

$$\text{F1 } \forall (u, v) \in E : \sum_{i=1}^n \varphi_i(u, v) \leq c(u, v)$$

$$\text{F2 } \forall u \neq s_i, t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(u, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, u)$$

$$\text{F3 } \forall s_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(s_i, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, s_i) = d_i$$

$$\text{F4 } \forall t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(w, t_i) - \sum_{w \in V} \varphi_i(t_i, w) = d_i$$

Es folgen zwei bekannte Resultate für den Fall  $n = 1$ , die später Anwendung finden werden.

**Theorem 1.9** (Max-Flow Min-Cut).  $\varphi$  ist ein maximale Fluss in  $\mathcal{N}$ , genau dann, wenn für mindestens einen Schnitt  $\mathcal{S} \subset E$  gilt  $c(\mathcal{S}) = |\varphi|$ . Die Kapazität eines minimalen Schnittes entspricht dem maximalen Fluss.

**Theorem 1.10** (Ganzzahliger Fluss). Sei  $\mathcal{N}$  ein Netzwerk mit einer Quelle und einer Senke und alle Kapazitäten seien ganzzahlig, dann existiert auch ein maximaler Fluss  $\varphi$ , sodass der Fluss auf allen Kanten ganzzahlig ist. Es gilt also  $|\varphi(e)| \in \mathbb{N}$  für alle  $e \in E$ .

**Bemerkung.** Im Fall  $n = 1$  und Kapazitäten  $c : E \mapsto \mathbb{N}$  impliziert die Existenz eines zulässigen Flusses die Existenz einer ganzzahligen Lösung, sowohl für gerichtete als

auch ungerichtete Graphen. Diese lässt sich in polynomineller Zeit bestimmen. Für  $n = 2$  und ungerichtete Graphen gilt dies nach [Hu63] ebenfalls. Für diese Arbeit wäre jedoch der Fall  $n = 2$  für gerichtete Graphen interessant. Leider ist hier im Allgemeinen die Lösung nur über Lineare Programmierung möglich und befindet sich somit in  $\mathcal{NP}$ .



## 2 Hauptteil

Sei  $G$  ein planer intern 3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ . Nehmen wir für einen Moment an, dass wir schon ein SLTR für  $G$  gefunden haben, dann hat jeder Knoten  $v$  in maximal einem inzidenten Gebiet  $f$  einen flachen Winkel, den wir mit  $(f, v)$  bezeichnen, und liegt auf einer Geraden. Jedes Gebiet  $f$  hat genau drei Ecken, also  $|f| - 3$  flache Winkel. Dies liefert im Umkehrschluss eine notwendige Bedingung für die Existenz einer SLTR. Diese ist in der nächsten Definition festgehalten.

**Definition 2.1** (FAA). Sei  $G = (V, E, F)$  ein planer Graph. Eine flache Winkel Zuordnung, im weiteren (nach dem englischen *flat-angle-assignment*) mit FAA bezeichnet, ein Matching zwischen Knoten und Gebieten. Es muss gelten:

- F1 Jedem Gebiet  $f$  sind genau  $|f| - 3$  Knoten zugeordnet.
- F2 Jeder Knoten  $v$  ist höchstens einem Gebiet zugeordnet.

Für den Fall, dass Aufhängungen gegeben sind, fordern wir zusätzlich:

- F3 Die inzidenten Knoten des äusseren Gebietes, die keine Aufhängungen sind, müssen dem äusseren Gebiet zugeordnet werden.

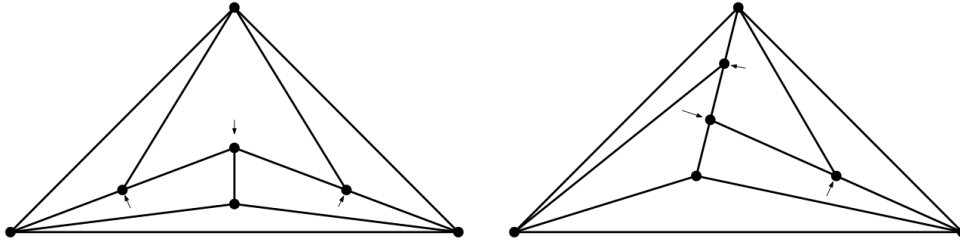


Abbildung 2.1: Ein planer Graph mit einer SLTR und einem FAA, dass keine SLTR induziert. Die Pfeile stellen hier die Zuweisung der Knoten zu den inneren Gebieten da.

Ein planer Graph kann also nur dann eine SLTR besitzen, wenn mindestens ein FAA existiert. Jedoch liefert nicht jedes FAA sofort eine SLTR. Um hinreichende Bedingungen für SLTRs zu erhalten, werden sich die nächsten beiden Abschnitten mit zwei Ansätzen nach Aerts und Felsner beschäftigen. Der erste Ansatz aus [AF13b] liefert ein System aus harmonischen Gleichungen aus dessen Lösung eine SLTR folgt. In Teilen darauf basierend, stellt der zweite Ansatz aus [AF15] einen Zusammenhang zwischen Schnyder Woods und FAAs her und die Existenz passender Paare impliziert wieder die Existenz von SLTRs.

## 2.1 SLTRs durch harmonische Funktionen

Die Beweise zu den in diesem Kapitel aufgestellten Präpositionen und Theoremen werden ausgelassen. Sie befinden sich, wenn nicht anders angegeben, in [AF13b]. Zum Einstieg eine weitere Definition, die es ermöglicht eine Beobachtung zu SLTRs festzuhalten.

**Definition 2.2** (Begrenzende Zykel und kombinatorisch konvexe Ecken). Sei  $G$  ein planer Graph mit Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  und einem FAA  $\phi$  von  $G$ . Sei  $H$  ein zusammenhängender Teilgraph von  $G$  und  $\gamma = \gamma(H)$ , der  $H$  umrandende Weg in  $G$ . Bei  $\gamma$  handelt es sich um die Kanten und Knoten des äusseren Gebiets von  $H$ . Knoten und Kanten können mehrfach vorkommen. Wir werden so erhaltene  $\gamma$  als *begrenzende Zykel* bezeichnen.  $\text{int}(\gamma)$  sei die Menge aller Knoten, Kanten und Gebiete aus  $G$  die im Inneren von  $\gamma$  oder auf  $\gamma$  liegen. Einen Knoten  $v$  aus  $\gamma$  bezeichnen wir als *kombinatorisch konvexe Ecke* von  $\gamma$  im Bezug auf  $\phi$ , falls gilt:

- E1  $v$  ist eine Aufhängung, oder
- E2  $v$  ist nicht durch  $\phi$  zugeordnet und es existiert eine Kante  $e = (v, w)$  mit  $e \notin \text{int}(\gamma)$ , oder
- E3  $v$  ist einem Gebiet  $f$  zugeordnet,  $f \notin \text{int}(\gamma)$  und es existiert eine Kante  $e = (v, w)$ , sodass  $e \notin \text{int}(\gamma)$ .

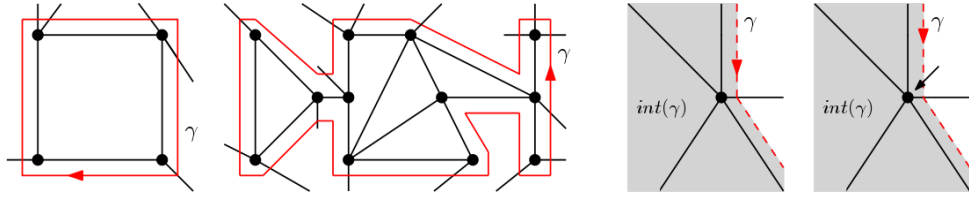


Abbildung 2.2: Auf der linken Seite zwei Beispiele für *begrenzende Zykel* und rechts für *kombinatorisch konvexe Ecken* mit und ohne zugewiesenem Knoten.

Es lässt sich für SLTRs leicht sehen, dass für jeden begrenzenden Zykel  $\gamma$ , der nicht von einem Pfad induziert wird, gilt, dass er mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken besitzt. Die folgende Präposition nach [AF13b, Prop 2.2, Prop 2.4] verallgemeinert diese Beobachtung.

**Proposition 2.3.** Sei  $G$  ein planer Graph der eine SLTR  $\Gamma$  zulässt. Sei weiter  $\phi$  das von  $\Gamma$  induzierte FAA und  $H$  ein zusammenhängender Teilgraph von  $G$ . Falls  $v$  eine geometrisch konvexe Ecke in  $\Gamma$  ist, dann ist  $v$  auch eine kombinatorisch konvexe Ecke hinsichtlich  $\phi$ . Somit gilt:

- E4 Jeder begrenzende Zykel  $\gamma$ , der nicht von einem Pfad induziert wird, hat hinsichtlich  $\phi$  mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken.

Proposition 2.3 liefert also eine notwendige Bedingung damit ein FAA von einer SLTR induziert sein kann. Dies ist sogar eine hinreichende Bedingung, wie im Verlauf des Kapitels in Theorem 2.10 gezeigt wird. Wir nennen ein FAA, das E4 erfüllt, im Weiteren *Gutes-FAA* oder kurz *GFAA*. Aerts und Felsner zeigen, dass ein Gutes-FAA eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* induziert die *dehnbar* ist und sich somit geradlinig darstellen lässt.

**Definition 2.4** (Kontaktfamilie von Pseudosegmenten). Eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* ist eine Familie  $\Sigma = \{c_i\}_i$  von einfachen Kurven

$$c_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ mit } c_i(0) \neq c_i(1),$$

sodass alle Kurven  $c_i, c_j$  mit  $i \neq j$  maximal einen gemeinsamen Punkt haben. Dieser Punkt muss dann ein Endpunkt von mindestens einer der Kurven sein.

Ein GFAA  $\phi$  liefert eine Relation  $\rho$  auf den Kanten von  $G$ . Zwei Kanten  $(v, w)$  und  $(v, u)$ , beide adjazent zu  $f$ , stehen genau dann in Relation, wenn  $\phi(v) = f$ .  $(v, w)$  und  $(v, u)$  müssen also auf der selben Seite des Dreiecks  $f$  in der SLTR liegen. Der transitive Abschluss dieser Relation liefert eine Äquivalenzrelation  $\rho$ . Die Äquivalenzklassen von  $\rho$  bilden eine Kontaktfamilie von Pseudosegmenten. Nennen wir die Äquivalenzklassen von  $\rho$  Kurven, dann gilt nach F2, dass jeder Knoten nur im Inneren von einer Kurve liegt und sich die Kurven nicht kreuzen. Weiter hat jede Kurve unterschiedliche Anfangs- und Endpunkte und kann sich nicht selbst berühren, da dann der resultierende begrenzende Zykel  $\gamma$  nur eine beziehungsweise zwei kombinatorisch konvexe Ecken hätte, was ein Widerspruch zu E4 wäre. Analog können zwei Kurven nicht ihre Anfangs- und Endpunkte teilen. Für eine von einem FAA  $\phi$  induzierte Kontaktfamilie schreiben wir auch  $\Sigma_\phi$ .

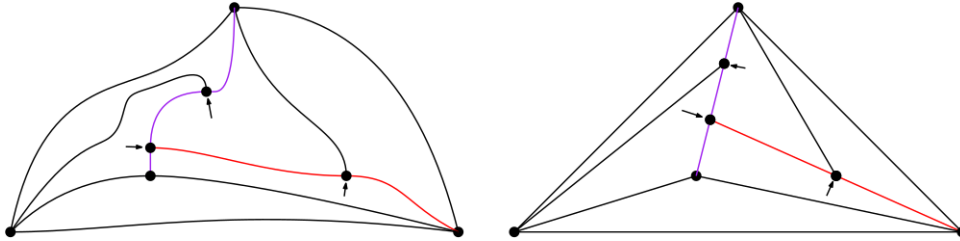


Abbildung 2.3: Die Kanten von  $G$  als Kontaktfamilie von Pseudosegmenten induziert durch die Äquivalenzrelation. In rot und grün die beiden Äquivalenzklassen bzw. Kurven, die mehr als eine Kante beinhalten.

**Definition 2.5.** Sei  $\Sigma$  ein Kontaktfamilie von Pseudosegmenten und  $S \subseteq \Sigma$ . Wir nennen einen Punkt  $p \in S$  einen *freien Punkt*, falls er die folgenden Bedingungen erfüllt.

- $p$  ist ein Endpunkt eines Pseudosegmentes aus  $S$ .
- $p$  liegt nicht im Inneren eines Pseudosegmentes aus  $S$ .

- $p$  liegt am äusseren Rand von  $S$ .
- $p$  ist entweder eine Aufhängung von  $G$  oder berührt ein Pseudosegment, welches nicht zu  $S$  gehört.

**Lemma 2.6.** [AF13b, Lemma 2.8] *Sei  $\phi$  ein Gutes-FAA auf einem planen und intern 3-zusammenhängenden Graphen. Dann gilt:*

*E5 Jede Teilmenge  $S \subseteq \Sigma_\phi$  mit  $|S| \geq 2$  hat mindestens 3 freie Punkte.*

Betrachte einen planen, intern 3-zusammenhängenden Graphen  $G$  mit Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  und einem GFAA  $\phi$ . Wenn die von  $\phi$  induzierte Kontaktfamilie  $\Sigma_\phi$  mit geradlinigen Segmenten darstellbar ist, dann ist diese Darstellung eine zu  $\phi$  passende SLTR für  $G$ . Für den Fall, dass eine solche Darstellung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert, können für die Koordinaten der Segmente und somit auch der Knoten  $v$  von  $G$  Gleichungen aufgestellt werden. Die Positionen der Knoten  $v$  in der Einbettung  $f(v)$  müssen diese Gleichungen erfüllen. Das resultierende Gleichungssystem beinhaltet harmonische Funktionen. Zu diesen folgt ein kurzer Überblick.

### 2.1.1 Harmonische Funktionen auf planaren Graphen

Die Theorie zu (diskreten) harmonischen Funktionen auf planaren Graphen und ihre Anwendung werden in [LV99] ausführlich behandelt. Es handelt sich um eine Diskretisierung von allgemeinen harmonischen Funktionen, also glatten Funktionen  $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $\Delta f = 0$ . Für diese Funktionen gilt, dass der Funktionswert an einem Punkt  $x$ , dem Durchschnitt der Funktionswerte auf einem Ball um  $x$  entspricht.

Dies führt zu der folgenden Definition.

**Definition 2.7** (Harmonische Funktionen). Sei  $G = (V, E)$  ein planarer zusammenhängender Graph und  $S \subseteq V$ . Eine Funktion  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  nennen wir am Knoten  $v \in V$  *harmonisch*, falls gilt:

$$\text{H1} \quad \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} (g(u) - g(v)) = 0 \quad \forall v \in V \setminus S$$

Wir können H1 durch das hinzufügen einer nichtnegativen Gewichtsfunktion  $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  verallgemeinern. Es gilt  $\lambda((v, w)) = \lambda_{vw}$ .

$$\text{H2} \quad \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} (g(u) - g(v)) = 0 \quad \forall v \in V \setminus S$$

Ein Knoten für den  $g$  nicht harmonisch ist, nennt man *Pol*.

**Theorem 2.8.** [LV99, Theorem 3.1.2] *Für jede nichtleere Teilmenge  $S \subseteq V$  und jede Funktion  $g_S : S \rightarrow \mathbb{R}$  existiert genau eine Funktion  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $f_S$  auf  $V$  fortsetzt, sodass  $g$  in jedem Knoten  $v \in V \setminus S$  harmonisch ist. Wir nennen sie die harmonische Fortsetzung.*

Ein bekanntes Resultat, dass sich in Form harmonischer Funktionen darstellen lässt, ist Tuttés *rubber-band-representation* aus [Tut63], die konvexe Zeichnungen für planare Graphen liefert. Man stelle sich einen planaren Graphen vor, bei dem jede Kante durch ein idealisiertes Gummiband<sup>1</sup> ersetzt wird. Wähle nun ein äusseres Gebiet und fixiere die Knoten  $S \subseteq V$ , die in an diesem Gebiet liegen, in zyklischer Reihenfolge und in gleichen Abständen auf einem Kreis in der Ebene. Dies definiert  $f_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Die restlichen Knoten werden nun von den Bändern in eine neue Position gezogen. Das resultierende Gleichgewicht, das genau dann entsteht, wenn H1 erfüllt ist, entspricht der harmonischen Fortsetzung von  $f_S$  auf  $V$ , wobei  $f(v)$  genau der Position von  $v$  in der resultierenden Einbettung entspricht und  $S$  die Menge der Pole von  $f$  ist. Wir können die Kanten zusätzlich noch mit nicht negativen Gewichten  $\lambda_{vw}$ , versehen um die Einbettung zu verändern. Das folgende Theorem ist das Hauptresultat aus [Tut63].

**Theorem 2.9.** *Sei  $G$  ein planarer Graph, dann ist eine Gummiband-Representation (rubber-band-representation) von  $G$  eine planare Einbettung in der Ebene.*

Die Theorie zu harmonischen Funktionen lässt sich auf SLTRs anwenden. Nehme für den Moment an, dass es existiert eine geradlinige Darstellung der Pseudosegmente. Wir haben also eine geradlinige Einbettung  $f$  der von  $\phi$  induzierten Segmente. Dann gilt für jeden Knoten  $v$  im Inneren eines Segmentes, also für jeden zugewiesenen Knoten, dass er auf einer Gerade zwischen seinen beiden benachbarten Knoten  $u, w$  auf dem Segment liegen muss. Diese Eigenschaft liefert

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1). \quad (2.1)$$

Für die nicht zugewiesenen Knoten aus  $G$  muss in einer SLTR gelten, dass sie sich in der konvexen Hülle ihrer Nachbarn befinden. Wir bilden einen (gewichteten) Schwerpunkt und erhalten

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} \geq 0. \quad (2.2)$$

Somit erfüllt die so gegebene Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit einem passend gewählten  $\lambda$  wegen (2.1) und (2.2) in beiden Komponenten H2. Es handelt sich somit bei  $f_1$  und  $f_2$  um harmonische Funktionen, mit den Polen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ . Nach Theorem 2.8, existiert für jede den Beschränkungen entsprechende Wahl von  $\lambda$  jeweils genau eine Funktion  $f_1, f_2$ , welche die Gleichungen erfüllen.

Dies führt uns zum Hauptresultat aus [AF13b, Theorem 2.10]:

**Theorem 2.10.** *Sei  $G$  ein intern 3-zusammenhängender, planarer Graph und  $\Sigma$  eine Familie von Pseudosegmenten, induziert von einem FAA, sodass jede Teilfamilie  $S \subset \Sigma$  entweder mindestens drei freie Punkte hat, oder maximal ein Element enthält. Die eindeutige Lösung des aus  $\Sigma$  folgenden Gleichungssystems ist eine SLTR.*

---

<sup>1</sup>Die Gummibänder müssen das Hook'sche Gesetz erfüllen, sodass eine Streckung auf Länge  $l$  genau Kraft  $l$  benötigt.

**Bemerkung.** Dies bedeutet, dass die weiter oben in Lemma 2.6 festgehaltene notwendige Bedingung auch eine hinreichende ist. Falls wir schon ein Gutes-FAA gefunden haben, dann können wir mit Hilfe des obigen Ansatzes auch eine Einbettung in der Ebene erhalten. Jedoch gibt es Graphen mit polynominell vielen FAA und es dauert polynominell lange, um E4 zu überprüfen. Wir erreichen also auf diesem Weg keinen Algorithmus in  $\mathcal{P}$ .

Aerts und Felsner werfen am Ende des Papers die Frage nach einer *guten* Wahl von  $\lambda$  auf und wie dies die resultierenden Einbettungen beeinflussen kann. Dieses Thema wird in Kapitel 4 angegangen.

## 2.2 Ecken kompatible Paare

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einer zweiten Charakterisierung von SLTRs auf planaren Graphen nach [AF15] beschäftigen, die eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und FAAs herstellt und so zu einer hinreichenden Bedingung für SLTRs führt. Zum Einstieg folgt die Definition dieses Zusammenhangs.

**Definition 2.11** (Ecken Kompatibilität). Ein Paar  $(\sigma, \phi)$  aus einem Schnyder Labeling  $\sigma$  und einem FAA  $\phi$  nenne wir *Ecken kompatibel*, falls:

- C1 Das Schnyder Labeling  $\sigma$  und das FAA  $\phi$  nutzen die selben Aufhängungen.
- C2 In jedem inneren Gebiet haben die drei Ecken aus  $\phi$  drei unterschiedliche Label in  $\sigma$ .

Der Rest dieses Kapitels wird sich mit dem Beweis beschäftigen, dass zu jedem SLTR (mindestens ein) Ecken kompatibles Paar existiert und das anders herum jedes Ecken kompatible Paar eine SLTR induziert.

**Theorem 2.12.** *Sei  $G$  ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .  $G$  besitzt eine SLTR, genau dann wenn ein Ecken kompatibles Paar  $(\sigma, \phi)$  aus einem Schnyder Labeling  $\sigma$  und einem FAA  $\phi$  existiert.*

Wir beweisen zuerst die (deutlich einfachere) Rückrichtung des Theorems. Hier können wir die durch das in Abschnitt 1.2 erklärte *face counting* erhaltene Einbettung nutzen, um zu zeigen, dass jeder begrenzende Zykel  $\gamma$  genau drei kombinatorisch konvexe Ecken besitzt.

**Lemma 2.13.** *Sei  $G$  ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ . Falls ein Paar  $(\sigma, \phi)$  aus einem Schnyder Labeling  $\sigma$  und einem FAA  $\phi$  Ecken kompatibel ist, dann hat jeder begrenzende Zykel  $\gamma$  genau drei kombinatorisch konvexe Ecken im Bezug auf  $\phi$ .*

*Beweis:* Sei  $\gamma$  ein begrenzender Zykel und  $F_{in}$  die Menge der inneren Gebiete von  $G$ . Seien  $\alpha_1 = (0, 1), \alpha_2 = (1, 0)$  und  $\alpha_3 = (0, 0)$  drei linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ .  $D$  sei die durch *face counting* erhaltene Zeichnung von  $G$  mit den Ecken  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Ein Beispiel einer solchen Zeichnung findet sich in Abbildung 1.5. Betrachte nun

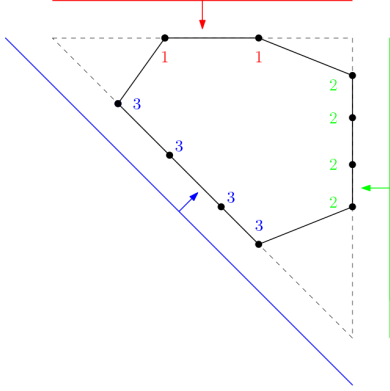


Abbildung 2.4

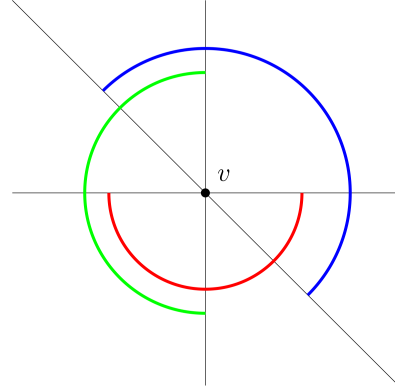


Abbildung 2.5

den begrenzenden Zykel  $\gamma$  in  $D$ . Wir schieben nun, wie in Abbildung 2.4 illustriert, ausgehend von  $\alpha_i$  die Geraden  $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$  über den Graphen. Sei  $M_i$  die Menge der zuerst von  $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$  getroffenen Knoten von  $\gamma$  für  $i \in (1, 2, 3)$ .

**Beobachtung 1** *Alle Knoten um ein inneres Gebiet  $f$  mit Label  $i$  in  $f$  werden von der Gerade  $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$  zum gleichen Zeitpunkt getroffen. Dies folgt direkt aus Eigenschaft W5 (Abschnitt 1.2), da alle Knoten mit dem selben Label in der Zeichnung auf  $c_i(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$  platziert werden.*

**Beobachtung 2** *Sei  $v \in M_i$ . Alle Winkel an  $v$  im Inneren von  $\gamma$  haben das Label  $i$ . Die Geraden teilen die Winkel um einen Knoten (siehe Abbildung 2.5). Die Winkel an  $v$ , die von  $a_i$  aus gesehen vollständig auf der anderen Seite von  $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$  liegen, haben Label  $i$ .*

Nach Beobachtung 2 sind die Mengen  $M_1, M_2$  und  $M_3$  disjunkt. Wir suchen nun nach drei kombinatorisch konvexen Ecken von  $\gamma$ . Das FAA und das Schnyder Labeling sind Ecken kompatibel und somit hat jedes Gebiet  $f \in F_{in}$  einen Winkel mit Label  $i$ . Also liegt in jeder Menge  $M_i$  ein Knoten  $v_i$ , der vom FAA nicht einem Gebiet innerhalb von  $\gamma$  zugewiesen wird. Nehmen wir an  $a_i \notin M_i$ , denn sonst hätten wir nach E1 eine Ecke gefunden. Da  $D$  eine konvexe Zeichnung ist muss  $v_i$  einen Nachbarn ausserhalb von  $\gamma$  besitzen. Somit liegt  $v_i$  auf  $\gamma$ , ist nicht in  $\gamma$  zugewiesen und hat einen Nachbarn ausserhalb von  $\gamma$ .  $v_i$  erfüllt also E2 und somit hat jeder begrenzende Zykel drei kombinatorisch konvexe Ecken (jeweils eine aus jedem  $M_i$ ).  $\square$

Zusammen mit Theorem 2.10 folgt, dass es sich bei dem FAA um ein Gutes-FAA handelt. Somit induziert das Ecken kompatible Paar ein SLTR von  $G$ .

Machen wir uns an den Beweis der Hinrichtung. Zu jedem SLTR können wir ein eindeutiges FAA erstellen indem wir die flachen Winkel der SLTR im FAA zuweisen. Wir müssen also zeigen, dass zu jeder SLTR ein Schnyder Labeling existiert, das zusammen mit dem induzierten FAA ein Ecken kompatibles Paar bildet. Sei  $G$  ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , der

(mindestens) eine SLTR besitzt. Sei  $\Delta$  eine SLTR von  $G$  und sei  $\phi$  das von  $\Delta$  induzierte FAA.

Vor dem nächsten Lemma müssen wir zwei geometrische Objekte einführen. Beispiele finden sich in Abbildung 2.6.

**Definition 2.14** (Unterteilendes Dreieck). Ein *unterteilendes Dreieck* ist ein Dreieck in der Zeichnung einer SLTR von  $G$ , sodass gilt:

- Jeder Knoten auf dem Rand des Dreiecks (der keine Ecke des Dreiecks ist) ist entweder ausserhalb oder innerhalb des Dreiecks zugewiesen
- Es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn ausserhalb des Dreiecks hat und es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn im Inneren des Dreiecks hat.

Dieses Dreieck kann Teile des Randes der Zeichnung beinhalten.

**Definition 2.15** (teilendes Segment). Ein *teilendes Segment* eines SLTR von  $G$  ist eine Menge von Kanten  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , die alle auf einer Gerade liegen, sodass gilt:

- Die Vereinigung der Kanten trennt die Zeichnung in zwei nichtleere Teile.
- Jeder innere Knoten  $v$  auf dem Segment ist einem Gebiet zugeordnet, dass zwei Kanten beinhaltet die auf dem Segment liegen. Diese beiden Kanten haben  $v$  als Endpunkt.

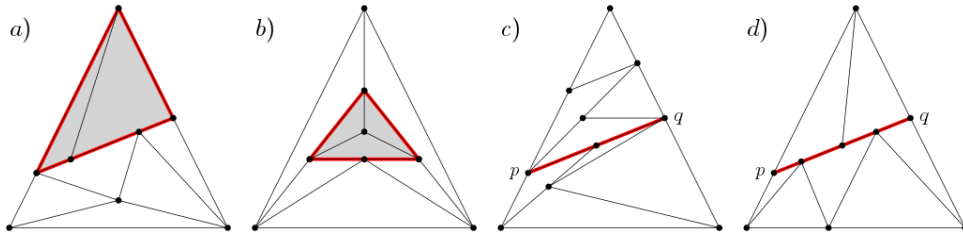


Abbildung 2.6: Beispiele von unterteilenden Dreiecken in a) und b) und teilenden Segmenten in c) und d) jeweils in rot.

Um zu zeigen, dass wir zu jeder SLTR ein passendes Ecken kompatibles Paar  $(\sigma, \phi)$  finden führen wir einen Widerspruchsbeweis. Sei  $G$ , ein kleinstmögliches Gegenbeispiel, zu dem kein Paar existiert. Damit seien hier zuerst die minimale Anzahl an Knoten und darauf folgend die kleinste Anzahl von Kanten gemeint. Sei  $\Delta$  eine SLTR von  $G$ ,  $\phi$  das induzierte FAA und  $a_1, a_2$  und  $a_3$  die Aufhängungen von  $\Delta$ .

Wir zeigen zuerst zwei Eigenschaften von  $\Delta$ .

**Lemma 2.16.** *Ein minimales Gegenbeispiel  $\Delta$  hat kein unterteilendes Dreieck.*



*Beweis:* Nehmen wir an, dass  $\Delta$  ein unterteilendes Dreieck mit den Ecken  $(a, b, c)$  beinhaltet. Seien  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  die Teile von  $\Delta$  die alles ausserhalb (1) und innerhalb (2) des Dreiecks beinhalten. Der Rand des Dreiecks  $(a, b, c)$  liegt in beiden Teilen.

Wir ersetzen Knoten auf dem Rand des Dreiecks die Grad zwei in  $\Delta_i$  haben mit einer Kante zwischen ihren Nachbarn. Somit sind  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  SLTRs mit weniger Knoten als  $\Delta$ . Da sie weniger Knoten haben als  $\Delta$  können sie keine Gegenbeispiele sein und es existieren zu den SLTRs  $\Delta_i$  Ecken kompatible Paare  $(\sigma_i, \phi_i)$ , wobei die  $\phi_i$  die induzierten FAAs von  $\Delta_i$  sind. Setzen wir die Paare zusammen kommen wir zu einem Widerspruch. Die Ecken  $a, b, c$  sind die Aufhängungen von  $\Delta_2$ . Wir wählen ihre Label so, dass sie mit den inneren Labeln des (jetzt) leeren Dreiecks in  $\Delta_1$  übereinstimmen<sup>2</sup>. Die auf diese Weise kombinierten Schnyder Labelings  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ergeben ein Schnyder Labeling auf  $G$ . Die FAAs  $\phi_1$  und  $\phi_2$  ergeben zusammen, wenn wir die Zuweisungen an den äusseren Knoten von  $\Delta_2$  und den am leeren Dreieck liegenden Knoten von  $\Delta_1$  anpassen, ein FAA  $\phi$  für  $G$ . Somit folgt die Ecken Kompatibilität aus der Tatsache, dass  $(\sigma_1, \phi_1)$  und  $(\sigma_2, \phi_2)$  Ecken kompatibel sind. Die SLTR  $\Delta$  induziert somit ein Ecken kompatibles Paar und kann kein Gegenbeispiel sein.  $\Delta$  kann kein unterteilendes Dreieck haben.  $\square$

**Lemma 2.17.** *Ein minimales Gegenbeispiel  $\Delta$  hat kein teilendes Segment.*

**Bemerkung.** Insbesondere bedeutet dies, dass in  $\Delta$  für jede Aufhängung  $\deg(a_i) \geq 3$  gelten muss.

*Beweis:* Angenommen  $\Delta$  hat ein teilendes Segment mit den Endpunkten  $p$  und  $q$ . Falls auf beiden Seiten des teilenden Segmentes eine Aufhängung mit Grad größer als zwei liegt, dann wird ein unterteilendes Segment in  $\Delta$  induziert (siehe Abbildung 2.6 d)). Falls es sich bei  $p$  oder  $q$  um eine Aufhängung handelt, bedeutet dies ebenfalls, dass ein unterteilendes Dreieck existiert<sup>3</sup>. Somit können wir annehmen, dass das teilende Segment zwischen  $p$  und  $q$  die Aufhängung  $a_1$  von Grad zwei abtrennt.  $p, q$  und  $a_1$  bilden also ein Dreieck. Wir betrachten zwei Fälle. Entweder das teilende Segment besteht nur aus der Kante  $(p, q)$  (Fall 1) oder es existiert mindestens ein weiterer Knoten auf dem Segment (Fall 2).

1. Fall: Falls  $p$  Grad drei und dritten Nachbar  $p'$  hat, dann muss die Kante  $(p', q)$  existieren und  $a_1, q, p$  sind die Ecken eines unterteilenden Dreiecks mit der inneren Kante  $(p, q)$ . Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 2.16 und es folgt  $\deg(p), \deg(q) \geq 4$ . Da  $\deg(a_1) = 2$  gelten muss und  $G$  intern-3-zusammenhängend ist liegt  $a_1$  alleine auf der einen Seite des Segments und alle anderen Nachbarn von  $p$  und  $q$  auf der anderen. Wir behaupten, dass mindestens eine der Kanten  $(a_1, p)$  und  $(a_1, q)$  kontrahierbar ist, sodass der resultierende Graph eine SLTR besitzt. Die Zuweisungen bleiben, bis auf bei  $p$  und  $q$ , gleich (siehe Abbildung ??, b)). Dieser Schritt ist nicht trivial. Wir nutzen

<sup>2</sup>Wir können die Label beliebig umbenennen, ohne das Schnyder Labeling zu verändern.

<sup>3</sup>Falls auf der einen Seite des Segmentes nur die Aufhängung  $a_i$  liegt wird kein unterteilendes Dreieck impliziert. Jedoch existiert dann mit  $\Delta' = \Delta \setminus \{a_i\}$  ein kleineres SLTR (welches dann kein Gegenbeispiel ist) und aus diesem lässt sich ein Ecken kompatibles Paar für  $\Delta$  bauen.

als Kriterium die begrenzenden Zykel aus Definition 2.11. Damit beide Kontraktionen nicht zum erwünschten Ergebnis führen, müssen zwei begrenzende Zykel  $\gamma_v, \gamma_w$  mit genau drei kombinatorisch konvexen Ecken,  $p, q$  und  $v$  respektive  $w$ , existieren (siehe Abbildung ??, c)). Nur dann induziert die Kontraktion von  $(a_1, p)$  und  $(a_1, q)$  einen Zykel mit nur zwei Ecken. Und somit hätte der resultierende Graph keine SLTR.

Dieser Fall kann aber nicht auftreten. Seien  $v, w$  die Ecken dieser Zykel. Dann existieren Pfade  $P_{pw}$  und  $P_{qw}$  von  $p$  nach  $w$  und  $q$  nach  $v$ . Diese Pfade sind Teil von  $\gamma_v$  beziehungsweise  $\gamma_w$  und enthalten somit keine kombinatorisch konvexen Ecken mit Ausnahme der Endknoten. Die Winkel an diesen Pfaden im Inneren der Zykel sind somit  $\geq \pi$ . Sei  $z$  der Knoten an dem sich  $P_{pw}$  und  $P_{qw}$  kreuzen. Da  $z$  keine Ecke sein kann muss er auf beiden Zyklen  $\gamma_v, \gamma_w$  zugewiesen sein. Somit müsste der Winkel im inneren der Zykel der an  $z$  von  $P_{pw}$  und  $P_{qw}$  eingeschlossen wird mindesten  $\pi$  sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme das  $\Delta$  eine SLTR ist (siehe Abbildung ??, c)).

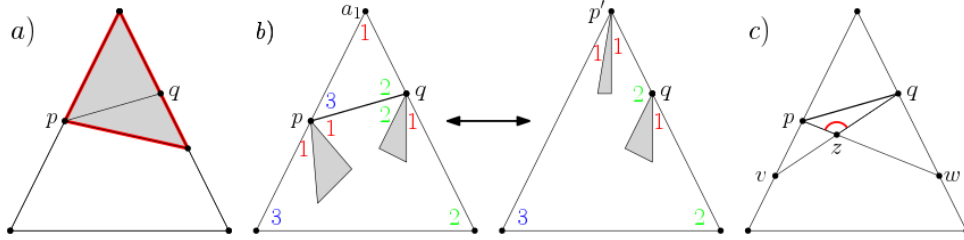


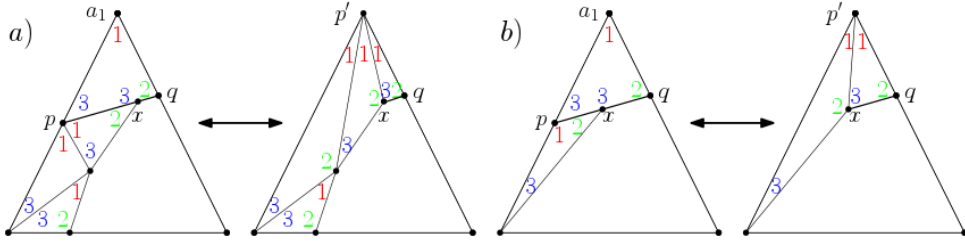
Abbildung 2.7: a) Unterteilendes Dreieck bei Grad 3. b) Kantenkontraktion der Kante  $(a_1, p)$ . c) Die Pfade die bei der Kontraktion von  $(a_1, p)$  oder  $(a_1, q)$  Degeneriertheit induzieren.

Es kann also mindestens eine der Kanten kontrahiert werden. Sei  $(a_1, p)$  diese Kante und  $G'$  der Graph der durch Kontraktion von  $(a_1, p)$  und das Löschen von  $(p, q)$  entsteht. Wir erhalten das FAA  $\phi'$  durch löschen der Zuweisung von  $p$  aus  $\phi$ . Der Knoten  $q$  ist weiterhin dem äusseren Gebiet zugewiesen. Da  $G'$  weniger Knoten als  $G$  hat ist er kein Gegenbeispiel und wir erhalten einen Schnyder Labeling  $\sigma'$ , das zusammen mit  $\phi'$  ein Ecken kompatibles Paar bildet. Wir können  $\phi'$  zu einem Labeling von  $G$  erweitern indem wir, beginnend bei  $a_1$ , im Uhrzeigersinn die Label 1, 2 und 3 im Gebiet  $a_1, q, p$  einfügen. Wir erhalten ein Ecken kompatibles Paar.

2. Fall: Sei  $x$  der erste Nachbar von  $p$  auf dem teilenden Segment. Wir Kontrahieren wieder die Kante  $(a_1, p)$  um  $G'$  zu erhalten. Bei der Kontraktion müssen keine weiteren Kanten gelöscht werden, wie in Abbildung 2.8 zu sehen ist. Wieder erhalten wir das FAA  $\phi'$  auf  $G'$  indem wir die Zuweisung von  $p$  aus  $\phi$  löschen. Zu jedem begrenzendem Pfad  $\gamma$  in  $G$ , existiert  $\gamma'$  in  $G'$ . Falls  $x$  eine kombinatorisch konvexe Ecke einer der Zykel  $\gamma$  ist, dann ist er dies auch für  $\gamma'$ , weil keine Kante an  $x$  gelöscht wurde.

Nun ist  $G'$  kein Gegenbeispiel und es existiert ein zu  $\phi'$  kompatibles Schnyder Labeling  $\sigma'$ .  $\sigma'$  ist erweiterbar zu einem Labeling  $\sigma$  für  $G$ . Füge Label 1 bei  $a_1$  und 3 bei  $p$  ein.  $\Delta$  kann also kein teilendes Segment haben.

□

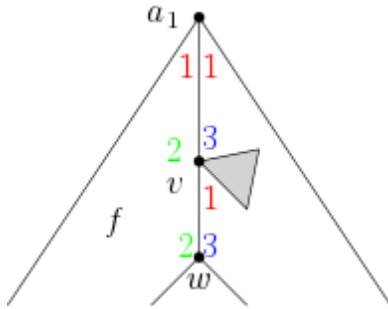


Abbildungung 2.8: Zwei Beispiele zur Kontraktion von  $(a_1, p)$  mit passendem Schnyder Labeling im zweiten Fall.

Im nächsten Lemma wird eine Eigenschaft von Ecken kompatiblen Paaren festgehalten, die für den Beweis von Theorem 2.12 nützlich sein wird.

**Lemma 2.18.** *Sei  $G$  ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  und einem Ecken kompatiblen Paar  $(\sigma, \phi)$  aus einem Schnyder Labeling und einem FAA. Sei  $v$  ein Nachbar einer Aufhängung  $a_i$ . Falls  $v$  von  $\phi$  einem Gebiet  $f$  zugewiesen ist, das  $a_i$  beinhaltet folgt, dass das Label von  $v$  in  $f$  nur einmal an  $v$  vorkommt. Alle anderen Winkel an  $v$  haben ein anderes Label.*

*Beweis:* Nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $v$  ein Nachbar von  $a_1$  ist und  $v$  dem Gebiet  $f$  auf der linken Seite der Kante  $(a_1, v)$  zugeordnet ist (siehe Abbildung links). Sei  $w$  der andere Nachbar von  $v$  in  $f$ .



Die Kante  $(a_1, v)$  hat zwei mal Label 1, jeweils links und rechts von  $a_1$ , und Label 2 am zugewiesenen Winkel von  $v$ . Nach Definition 1.5 muss an jeder Kante jedes Label einmal vorkommen. Somit ist das letzte Label an  $(a_1, v)$  von Typ 3. Da  $(\sigma, \phi)$  ein kompatibles Paar ist, muss der Winkel von  $w$  in  $f$  ebenfalls Label 2 haben, da sonst keine Ecke mit Label 2 existiert (vergleiche Definition 1.4). Um die Kante  $(v, w)$  müssen ebenfalls alle Label vorkommen und somit müssen wir 1 und 3 (wie in der Abbildung links) einfügen.

Um  $v$  existieren nach L2 im Uhrzeigersinn drei nichtleere Intervalle mit Label 1, 2 und 3. Folglich können die verbliebenen unbekannten Label an  $v$  nur von Typ 1 oder 3 sein.  $\square$

**Lemma 2.19.** *In einem minimalen Gegenbeispiel  $\Delta$ , kann kein Nachbar  $x_i$  einer der Aufhängungen  $a_i$  einem Gebiet zugeordnet sein, zu dessen Rand die Kante  $(a_i, x_i)$  gehört.*

**Bemerkung.** Lemma 2.19 impliziert insbesondere, dass die drei Aufhängungen  $a_1, a_2$  und  $a_3$  von  $\Delta$  ein Dreieck bilden.

*Beweis:* TODO  $\square$

**Lemma 2.20.** *Sei  $G$  ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  der eine SLTR besitzt. Sei  $\phi$  das von dieser SLTR induzierte FAA. Dann existiert ein Schnyder Labeling  $\sigma$  von  $G$ , sodass  $\sigma$  und  $\phi$  ein Ecken kompatibles Paar bilden.*

*Beweis:* Angenommen das Lemma gilt nicht und sei  $G$  ein minimales Gegenbeispiel, wie zuvor mit der minimalen Anzahl an Knoten und unter diesen mit der minimalen Anzahl an Kanten. Sei  $\Delta$  eine SLTR von  $G$  mit den Aufhängungen  $a_1, a_2, a_3$  und  $\phi$  das induzierte FAA. Wir wollen wieder zu einem Widerspruch gelangen indem wir einen kleineren Graphen  $G'$  konstruieren, sodass die folgenden Punkte erfüllt sind.

- $G'$  besitzt ein FAA  $\phi'$ , welches von  $\phi$  indiziert wird.
- Das kompatible Paar  $(\sigma', \phi')$  von  $G'$  induziert ein Schnyder Labeling von  $G$ .
- Das so erzeugte Schnyder Labeling  $\sigma$  ist Ecken kompatibel zu  $\phi$ .

Diese Aussagen zusammen erzeugen einen Widerspruch zur Annahme, dass  $G$  ein Gegenbeispiel ist. Wir halten einige Beobachtungen aus den vorherigen Lemmata fest.

B1  $\Delta$  hat kein unterteilendes Dreieck.

B2  $\Delta$  hat kein teilendes Segment und somit keine Aufhängung von Grad 2.

B3 Kein Nachbar  $x_i$  einer Aufhängung  $a_i$  kann einem Gebiet zugeordnet sein, zu dessen Rand die Kante  $(a_i, x_i)$  gehört. Somit bilden die Aufhängungen von  $\Delta$  ein Dreieck.

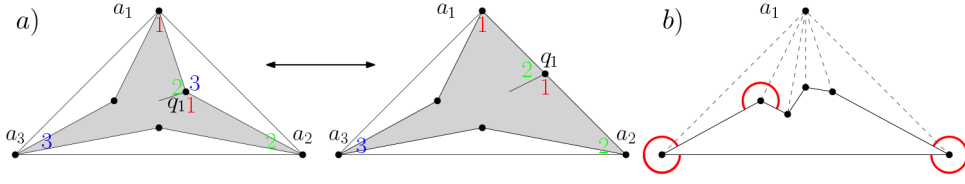
Aus B3 folgt, dass sowohl das äussere Gebiet als auch seine drei benachbarten Gebiete (echte) Dreiecke<sup>4</sup> sind (siehe Abbildung 2.9 links). Wir werden sehen, dass der dritte Knoten in einem der inneren Dreiecke eine wichtige Rolle spielt. Wir bezeichnen den dritten Knoten im Dreieck, das  $a_i$  und  $a_{i+1}$  enthält, mit  $q_i$  (oder einfach nur  $q$ ).

Der Beweis läuft in drei Schritten. Wir zeigen zuerst, dass in einem minimalen Gegenbeispiel  $\Delta$  jedes  $q_i$  einem angrenzenden Gebiet zugeordnet sein muss (und in diesem einen flachen Winkel hat). Falls dies gilt, zeigen wir, dass wir aus  $G$  einen Graphen  $G'$  erzeugen können, der einen zugewiesenen Knoten  $q'$  auf einer Kante  $(a_i, q')$  besitzt und erhalten einen Widerspruch zu B3. Zuletzt zeigen wir, dass wir aus einem Schnyder Labeling  $\sigma'$  von  $G'$  ein Labeling  $\sigma$  von  $G$  erzeugen können, sodass aus der Ecken Kompatibilität von  $\sigma'$  und  $\phi'$  auch Kompatibilität von  $\sigma$  und  $\phi$  folgt.

Sei  $f$  das von  $a_1, a_2$  und  $q_1$  gebildete Dreieck (siehe Abbildung 2.9, a)). Angenommen  $q_1$  wird von  $\phi$  nicht zugeordnet. Entferne die Kante  $(a_1, a_2)$  und weise  $q_1$  in dem äusseren Gebiet zu, um  $G'$  und  $\sigma'$  zu erhalten. Kein begrenzender Zykel enthält den neu zugewiesenen Winkel an  $q$  in seinem Inneren. Falls  $a_1$  und  $a_2$  auf einem begrenzenden Zykel  $\gamma'$  liegen, dann ist  $q$  keine Ecke des korrespondierenden Zyklus  $\gamma$  in  $G$  sein, sondern muss in seinem Inneren liegen (sonst wäre  $\gamma'$  von einem Pfad induziert). Somit sind die kombinatorisch konvexen Ecken von  $\gamma$  ebensolche von  $\gamma$ .

---

<sup>4</sup>Sie enthalten nur jeweils ihre drei Ecken als Knoten.



Abbildungung 2.9: a) Die Erstellung eines Graphen  $G'$  mit weniger Kanten. b) Das Löschen einer Aufhängung resultiert in einem Graphen mit mindestens drei Aussenwinkeln  $\geq \pi$ .

Da Zykel die  $q$  nicht enthalten keine Ecken verlieren, hat jeder begrenzende Zykel in  $G'$  mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken. Somit hat  $G'$  ein SLTR  $\Delta'$  und die gerade Winkel werden von  $\phi'$  induziert. Nun ist  $G'$  ein Graph mit weniger Kanten als  $G$  und somit kein Gegenbeispiel. Wir erhalten also ein Ecken kompatibles Paar  $(\sigma', \phi')$ . Wir können dies wie in Abbildung 2.9 zu einem Paar für  $G$  erweitern.

Nehmen wir also an, dass jedes der  $q_i$  in einem Gebiet einen flachen Winkel hat, also von  $\phi$  einem Gebiet zugeordnet wird. Jede Aufhängung  $a_i$  muss mindestens einen Nachbarn  $x_i$  haben, der nicht zugeordnet ist. Wäre dies nicht der Fall, dann entstünde ein Widerspruch zur Tatsache, dass  $G \setminus \{a_1\}$  drei konkave Aussenwinkel hat (siehe Abbildung 2.9, b)). Der Knoten mit Winkel  $\geq \pi$ , der keine Aufhängung ist, kann zuvor nicht zugeordnet sein. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $q$  gemeinsame Nachbar von  $a_1$  und  $a_2$ .  $p_k$  sei der im Uhrzeigersinn von  $q$  ausgehend erste Nachbar von  $a_1$  der nicht zugewiesen ist (In Abbildung 2.10 ist dies  $p_3$ ).

Wir werden einen Graphen  $G'$  (mit der gleichen Anzahl an Knoten und weniger Kanten) aus  $G$  erstellen. In diesem Graphen ist  $p_k$  einem Gebiet zugeordnet, auf dessen Rand die Kante  $(a_1, p_k)$  liegt. Nach Lemma 2.19 muss somit ein Schnyder Labeling  $\sigma'$  existieren, dass Ecken kompatibel mit dem induzierten FAA  $\phi'$  von  $G'$  ist. Wir können aus  $\sigma'$  ein Schnyder Labeling  $\sigma$  für  $G$  bauen, dass kompatibel zu  $\phi$  ist.

Sei  $N_{a_1} = \{q, p_1, \dots, p_k, \dots, p_l, a_3, a_2\}$  die Menge der Nachbarn von  $a_1$ , wobei wir mit  $q$  beginnen und im Uhrzeigersinn fortfahren. Durch löschen der Kante  $(a_1, q)$  und einfügen der Kante  $(a_2, p_1)$  erhalten wir einen neuen Graphen  $G_1$ . Wir nennen den durchgeführten Kantenwechsel um  $G_1$  zu erhalten (nach dem Englischen) einen *flip*.  $G_1$  lässt die SLTR  $\Delta_1$  zu. Die vier Knoten  $a_1, a_2, q$  und  $p$  bilden in  $\Delta$  ein konvexes Viereck<sup>5</sup> mit nur einer Diagonalen im Inneren (vergleiche Abbildung 2.10, a) und b)). Die erhaltene Zeichnung  $\Delta_1$  ist somit ebenfalls eine SLTR. Falls  $p_1$  zugewiesen ist, wiederholen wir den Schritt (siehe Abbildung 2.10, c)). Wir führen diesen Schritt nur so oft durch, bis wir bei  $p_k$  angekommen sind, dem ersten nicht zugewiesenen Nachbar von  $a_1$ , und die Diagonale im konvexen Viereck  $a_1, a_2, p_{k-1}, p_k$  flippen. Wir ersetzen also  $(a_1, p_{k-1})$  durch  $(a_2, p_k)$ . Nach jedem *flip* erhalten wir ein SLTR  $\Delta_i$  von  $G_i$  und somit ist  $\phi_k$  ein Gutes-FAA.

Um nun den Graphen  $G'$  zu erhalten löschen wir die im letzten *flip* hinzugefügte Kante  $(a_2, p_k)$  (siehe Abbildung 2.11, b)).  $G'$  hat somit eine Kante weniger als  $G$ .  $p_k$

<sup>5</sup> Auf der Geraden zwischen  $q$  und  $p_1$  können sich zusätzliche Knoten befinden, doch dies spielt für unsere Argumentation keine Rolle.

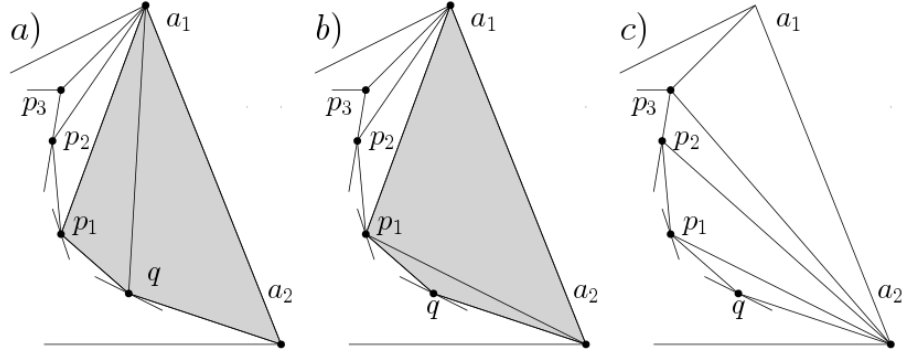


Abbildung 2.10: Das schrittweise Flippen von Kanten.

ist in  $\phi_k$  nicht zugewiesen. Sei  $\phi'$  der Erweiterung von  $\phi_k$  um die Zuweisung von  $p_k$  zum Gebiet  $a_1, a_2, p_{k-1}, p_k$  (siehe Abbildung 2.11, a)). Dann ist  $\phi'$  ein FAA von  $G'$ . Wir zeigen als Nächstes, dass es sich bei  $\phi'$  um ein Gutes-FAA handelt.

Betrachten wir einen beliebigen begrenzenden Zykel  $\gamma'$  in  $G'$  und sei  $\gamma_k$  der korrespondierende Zykel in  $G_k$ . Wir müssen wieder zeigen, dass jeder Zykel mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken hat. Im Fall, dass  $p_k$  nicht auf dem Rand von  $\gamma'$  liegt, folgt sofort, dass beide Zyklen die selben kombinatorisch konvexen Ecken haben (und somit beide mindestens drei). Betrachten wir also den Fall, dass  $p_k$  auf dem Rand von  $\gamma'$  liegt. Im Fall, dass  $\gamma'$  nur einen Teil der Nachbarn von  $p_k$  beinhaltet und nicht den zugewiesenen Winkel einschließt ist  $p_k$  sowohl eine kombinatorisch konvexe Ecke von  $\gamma_k$  und somit auch von  $\gamma'$ . Sei also  $p_k$  keine kombinatorisch konvexe Ecke von  $\gamma'$ . Falls der zugewiesene Winkel an  $p_k$  im Inneren von  $\gamma'$  liegt, aber  $\gamma'$  nicht alle Nachbarn von  $p_k$  enthält, muss  $\gamma_k$  mindestens vier kombinatorisch konvexe Ecken besitzen. Die ersten drei sind  $a_1, a_2$  und  $p_k$  und die vierte befindet sich auf dem Teil des Randes  $R$  vom  $\gamma'$  zwischen  $p_k$  und  $a_2$ <sup>6</sup>. Somit hat  $\gamma'$  mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken. Betrachte den Fall, dass  $\gamma'$  alle Nachbarn von  $p_k$  beinhaltet, aber der zugewiesene Winkel nicht im Inneren von  $\gamma'$  liegt. In der SLTR  $\Delta_k$  ist der Aussenwinkel von  $\gamma_k$  am Knoten  $p_k$  somit nicht grösser als  $\pi$  und  $\gamma_k$  muss drei andere (kombinatorisch konvexe) Ecken haben. Diese sind auch kombinatorisch konvexe Ecken von  $\gamma'$ . Somit hat jeder begrenzende Zykel  $\gamma'$  in  $G'$  mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken und es folgt, dass  $\phi'$  ein Gutes-FAA ist.

Da  $G'$  die gleiche Anzahl an Knoten und weniger Kanten als  $G$  kann er kein Gegenbeispiel sein. Es existiert also ein Schnyder Labeling  $\sigma'$ , das Ecken kompatibel zu  $\phi'$  ist. Es bleibt zu zeigen, dass wir aus  $\sigma'$  ein Labeling für  $G$  erstellen können, welches dann Ecken kompatibel zu  $\phi$  ist. Wir stützen uns hierfür auf die folgende Eigenschaft, die aus C2 folgt.

- C3 In einem Ecken kompatiblen Paar  $(\sigma, \phi)$  hat jeder zugewiesene Winkel in diesem Gebiet (mindestens) einen benachbarten Winkel mit dem selben Label.

<sup>6</sup>Diese Ecke muss existieren, da der begrenzende Zykel  $\tilde{\gamma}$ , der sich aus  $R$  und der Kante  $(a_2, p_k)$  bildet, mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken in  $G_k$  hat.

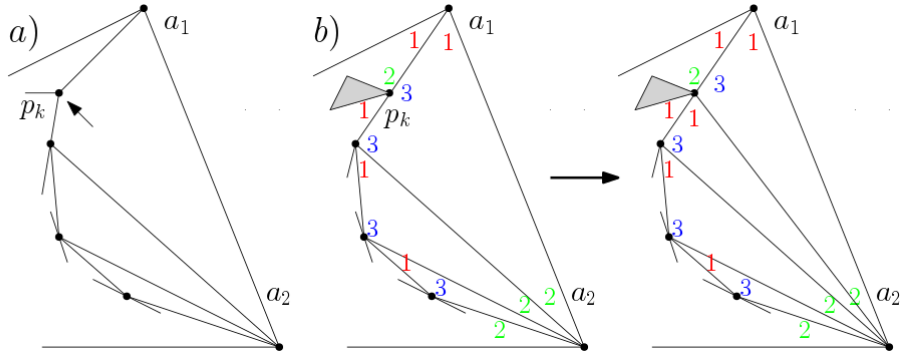


Abbildung 2.11: Ein Schnyder Labeling von  $G_k$  erstellt aus einem Labeling von  $G'$ .

Das Schnyder Labeling  $\sigma'$  ist eindeutig für Gebiete (TODO) mit  $a_1$  oder  $a_2$  als Ecken und einer geflippten Kante auf dem Rand (siehe Abbildung 2.11, b)). In einem ersten Schritt müssen wir  $(a_2, p_k)$  wieder einfügen und  $\sigma'$  eindeutig erweitern (wie in Abbildung 2.11 b) zu sehen).

Die Flips wurden entlang  $q, p_1, \dots, p_k$  durchgeführt und nach unserer Annahme haben die Knoten  $p_1, \dots, p_{k-1}$  von  $\phi'$  zugewiesene Winkel in  $G'$ . Sei  $p_0 = q$ . Zwei Knoten  $p_{i-1}$  und  $p_i$ , mit  $i \in \{1, \dots, k\}$  in dieser Folge sind nicht zwangsläufig Nachbarn, aber sie sind die Ecken des (dreieckigen) Gebietes  $a_2, p_{i-1}, p_i$  und alle Knoten auf dem Rand zwischen  $p_{i-1}$  und  $p_i$  sind diesem Gebiet zugewiesen (siehe Abbildung 2.12, a)). Wir führen nun Schritt für Schritt, beginnend mit  $i = k$ , einen *rückwärts flip* durch. Hierfür entfernen wir die Kante  $(p_i, a_2)$  wieder und setzen die Kante  $(p_i, a_1)$  wieder ein. Merke, dass  $p_i$  vor dem Schritt  $i$  einen zusätzlichen Nachbarn in  $G_i$  (im Verhältnis zu  $G$ ) hat und somit gilt  $\deg(p_i) \geq 4$ , weil  $G$  intern-3-zusammenhängend ist. Sei  $\alpha_i$  der gegen den Uhrzeigersinn auf die Kante zu  $a_1$  folgende Winkel und  $\beta_i$  der im Uhrzeigersinn auf die Kante zu  $p_{i-1}$  folgende Winkel (jeweils an  $p_i$ ). Dann handelt es sich bei diesen Winkeln, wegen  $\deg(p_i) \geq 4$ , nicht um den Selben. Bei jedem Schritt wird die folgende Invariante eingehalten.

**Invariante** Vor dem Schritt  $i$  hat der Knoten  $p_i$  die Label  $2, 3, 1, 1$  im Uhrzeigersinn beginnend mit den Winkel  $\alpha_i$  und Enden mit  $\beta_i$  (siehe Abbildung 2.12, a)). Zusätzlich bilden das Schnyder Labeling  $\sigma'_i$  und das FAA  $\phi'_i$  ein Ecken kompatibles Paar auf  $G'_i$ .

Beginnen wir mit  $G'$ . Hier sind die in Abbildung 2.11 b) gewählten Label der Winkel um  $p_k$  die einzig mögliche Kombination. Genauso verhält es sich nach dem Einfügen der Kante  $(a_2, p_k)$ . Wir erhalten den Graphen  $G'_k$ , das Schnyder Labeling  $\sigma'_k$  und das FAA  $\phi'_k$ , wobei  $\sigma'_k$  und  $\phi'_k$  ein Ecken kompatibles Paar bilden. Somit gilt die Invariante vor dem ersten Schritt.

Die Invariante gelte vor Schritt  $i$ . In Schritt  $i$  entfernen wir die Kante  $(a_2, p_i)$  und fügen die Kante  $(a_1, p_{i-1})$  wieder in den Graphen ein. Vor dem *rückwärts flip*, erfüllen die Label um  $p_i$  die Invariante und  $\sigma'_i$  und  $\phi'_i$  sind ein Ecken kompatibles Paar. Die folgende Argumentation basiert auf Lemma 1.6 – die Kanten Regel besagt, dass alle drei Label im Uhrzeigersinn an jeder Kante vorkommen – und der Ecken

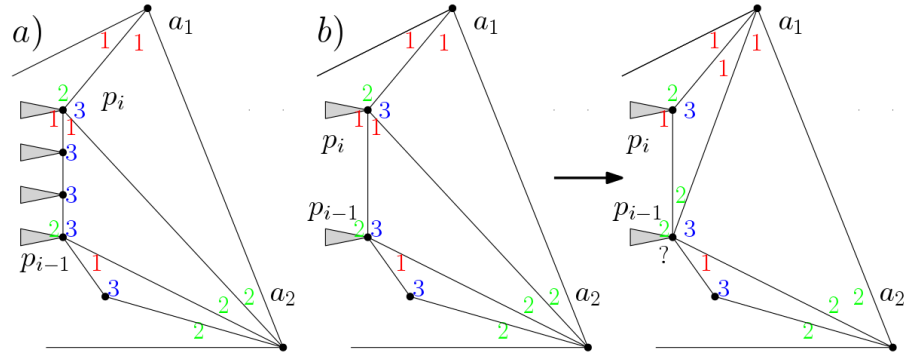


Abbildung 2.12: a) Schnyder Labeling zwischen  $p_{i-1}$  und  $p_i$ . b) Änderung des Labelings beim rückwärts Flippen.

Kompatibilität von  $(\sigma'_i, \phi'_i)$ . Die Winkel an  $p_{i-1}$  links und rechts der Kante zu  $p_i$  haben die Label 2 und 3 (siehe Abbildung 2.12, b)). Der Winkel zwischen  $p_i$  und  $a_2$  kann nur Label 3 haben, da er an einer Kante zu  $a_2$  liegt, an deren anderem Ende somit nur Label 2 vorkommt. Der andere Winkel muss Label 2 haben, da er entweder an einer Kante mit zwei 3ern auf der anderen Seite liegt (vergleiche Abbildung 2.12, a)) oder er an der Kante  $(p_i, p_{i-1})$  liegt, nur mit Label 1 an  $p_i$  (vergleiche Abbildung 2.12 Mitte).

Führen wir den *rückwärts flip* durch. Wir löschen also die Kante  $(a_2, p_i)$  und fügen die Kante  $(a_1, p_{i-1})$  ein, wie in Abbildung 2.12 b). Für fast alle Winkel folgt die Wahl des Labels eindeutig, da  $\sigma'_{i-1}$  ein Schnyder Labeling sein muss. Um die Invariante zu erfüllen müssen wir zeigen, dass wir dem mit ? markierte Winkel Label 1 geben können. Wenn er diese Label schon vor dem Schritt hatte ändert sich nichts und wir sind fertig. Angenommen er hatte nicht Label 1. Da es sich um ein Schnyder Labeling handelt ist die einzig andere Möglichkeit Label 2. Es muss sich bei diesem Winkel, um den an  $p_{i-1}$  zugewiesenen handeln. Dies folgt aus der Ecken Kompatibilität, da ein zugewiesener Winkel und seine beiden Nachbarn um einen Knoten nicht alle die gleichen Label haben können. Sonst kommt es, wie in Abbildung 2.13 a), zu einem Widerspruch, weil alle weiteren Winkel an  $p_{i-1}$  Label 2 haben und so ein Gebiet keine Ecke mit diesem Label hätte.

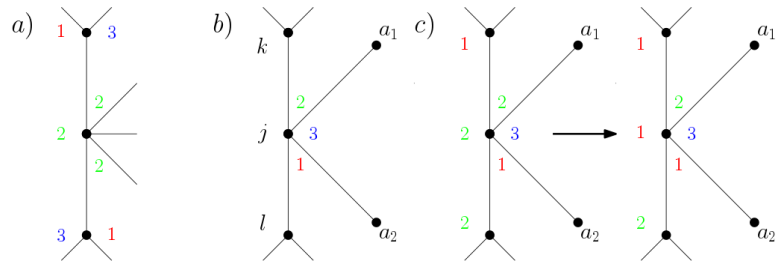


Abbildung 2.13: a) Das Gebiet links kann keine Ecke mit Label 1 haben.

Betrachte Abbildung 2.13 b). Wenn wir  $j=2$  setzten, dann folgen sofort die Label



in c).  $j=2$  folgt aus der Kanten Regel (Lemma 1.6). Nun muss  $l=2$  sein, weil sonst das Gebiet auf der linken Seite keine Ecke mit Label 2 haben könnte. Wir können also das Label auf 1 setzen und erhalten ein Schnyder Labeling  $\sigma'_{i-1}$  (siehe Abbildung 2.13, c)), das Ecken kompatibel mit dem induzierten FAA  $\phi'_{i-1}$  ist, da wir nur das Label eines zugewiesenen Winkels verändert haben.

Wir haben also Schritt  $i$  durchgeführt und die Invariante hat bestand. Per Induktion erhalten wir ein Ecken kompatibles Paar aus einem Schnyder Labeling  $\sigma'_0$  und einem FAA  $\phi'_0$  von  $G$ . Somit kann  $G$  kein Gegenbeispiel sein. Es folgt die Rückrichtung des Theorems.  $\square$

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel um Theorem 2.12 zu beweisen.

*Beweis von Theorem 2.12:* Sei  $G$  ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ . Angenommen  $G$  besitzt ein Ecken kompatibles Paar  $(\sigma, \phi)$  aus einem Schnyder Labeling  $\sigma$  und einem FAA  $\phi$ . Nach Lemma 2.13 existiert dann eine SLTR von  $G$ .

Angenommen  $G$  besitzt eine SLTR, dann existiert nach Lemma 2.20 ein Schnyder Labeling, das Ecken kompatibel mit dem von der SLTR induzierten FAA ist.  $\square$



## 3 Algorithmen zur Erkennung von SLTRs

Im vorherigen Kapitel wurden Kriterien für die Existenz einer SLTR für  $G$  erarbeitet. Diese liefern allerdings nicht sofort einen Algorithmus, weder zur Frage nach der Existenz, noch für das Erlangen einer spezifischen SLTR. Dieses Kapitel wird sich diesem Thema zuwenden und einen von Aerts und Felsner in [AF15] erarbeiteten Algorithmus erläutern und analysieren.

### 3.1 SLTRs via Zwei-Fluss

Das Ziel ist es, für einen gegebenen Graphen, sowohl einen Schnyder Wood als auch ein FAA jeweils als Lösung eines Fluss-Problems zu erhalten. Diese beiden werden dann in einem Zwei-Fluss-Problem kombiniert, sodass eine Lösung ein Ecken-Kompatibles-Paar kodiert und somit eine SLTR resultiert. Wir beschäftigen uns also den in Definition 1.8 eingeführten Gerichteten-Multi-Fluss-Problemen auf gerichteten Graphen.

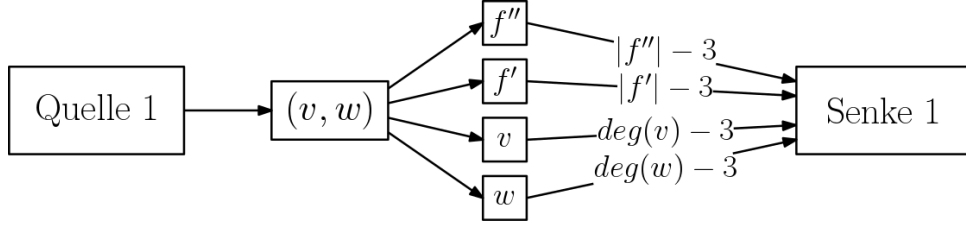
#### 3.1.1 Schnyder-Wood-Fluss

Um einen Schnyder Wood als Fluss-Problem zu kodieren, kann man die in Abschnitt 1.3 eingeführten  $\alpha_s$ -Orientierungen auf dem Abschluss von  $G + G^*$  nutzen. Fusy zeigt in [Fus07] im Zuge der Untersuchung spezifischer  $\alpha$ -Funktionen, dass sich  $\alpha_s$ -Orientierungen von  $G + G^*$  in linearer Zeit berechnen lassen, sodass wir auch einen Schnyder Wood auf  $G$  in linearer Zeit erhalten.

Machen wir uns also an die Konstruktion eines Netzwerks  $\mathcal{N}_S$  mit einer Quelle und Senke, sodass eine zulässige Lösung  $\varphi_S$  einer  $\alpha_s$ -Orientierung von  $\tilde{G}$  entspricht, und somit auch einen Schnyder Wald auf  $G$  liefert. Besonderes Augenmerk ist hier auf die Möglichkeit einer späteren Kombination mit einem FAA Fluss gelegt, um ein Kombiniertes Netzwerk zu erstellen, und nicht unbedingt auf Effizienz.

Wie oben schon erwähnt ist  $\tilde{G}$  bipartit, Kanten-Knoten haben Grad 4, Knoten-Knoten Grad  $\deg(v)$  und Gebiets-Knoten Grad  $|f|$ . Für eine  $\alpha_s$ -Orientierung muss jeder Kanten-Knoten Ausgrad 1, jeder Knoten-Knoten Eingrad  $\deg(v) - 3$  und jeder Gebiets-Knoten Eingrad  $|f| - 3$  haben. Die Kanten-Knoten am äusseren Gebiet sind in  $\tilde{G}$  immer nach aussen orientiert. Somit müssen wir nur die inneren Kanten-Kanten  $E_{in}$  betrachten.

Sei  $\mathcal{N}_S$  ein Netzwerk mit jeweils einer Quelle  $s$  und Senke  $t$ , Kanten von der Quelle zu jedem  $e \in E_{in}$  mit Kapazität 1, Kanten von den Kanten-Knoten  $e$  zu inzidenten Knoten-Knoten  $v$  und (inneren) Gebiets-Knoten  $f \in F_{in}$  in  $G$  ebenfalls mit Kapazität 1, Kanten von  $f \in F_{in}$  zur Senke mit Kapazitäten  $|f| - 3$ , Kanten von den (inneren)

Abbildung 3.1: Der Schnyder Wood Fluss durch eine innere Kante  $(v, w)$ .

Knoten-Knoten  $v \in V_{in} = V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  zur Senke mit Kapazitäten  $\deg(v) - 3$  und Kanten von den Aufhängungen  $a_i$  zur Senke mit Kapazitäten  $\deg(a_i) - 2$ . Die letzte Kapazität resultiert aus dem Fakt, dass die Halbkante in  $G + G^*$  von  $a_i$  aus immer nach aussen orientiert ist und wir somit nur noch zwei andere Kanten nach aussen orientieren müssen.

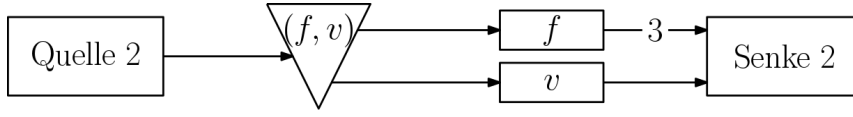
Der Bedarf des Netzwerkes entspricht der Anzahl der inneren Kanten von  $G$ . Sei nun  $\varphi_S$  eine zulässige ganzzahlige Lösung, dann hat jeder Kanten-Knoten  $e$  Ausgrad 1. Der Fluss  $\varphi_S$  entlang einer Auskante von  $e \in E_{in}$  in  $\mathcal{N}_S$  entspricht dann genau der hin zu  $e$  orientierten Kante einer  $\alpha_s$ -Orientierung auf  $G + G^*$ . Die Knoten-Knoten und Gebiets-Knoten haben  $\deg(v) - 3$  bzw.  $|f| - 3$  von  $\varphi_S$  genutzte Auskanten und somit entspricht hier eine leere Kante in  $\mathcal{N}_S$  einer von  $v$  bzw.  $f$  weg orientierten Kante bezüglich  $\alpha_s$ . Ein zulässiger ganzzahliger Fluss  $\varphi_S$  kodiert also eine  $\alpha_s$ -Orientierung auf  $G + G^*$ . Somit existiert genau dann ein Schnyder Wald auf  $G$ , wenn eine ganzzahlige Lösung  $\varphi_S$  für  $\mathcal{N}_S$  existiert.

### 3.1.2 FAA-Fluss

Um ein FAA für einen planaren Graphen  $G$  zu erhalten, müssen wir jedem Gebiet  $f \in F$  genau drei Ecken und  $|f| - 3$  flache Winkel zuordnen und jeder Knoten darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden, also in diesem flach sein. Falls eine Einbettung und die Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  gegeben sind, müssen wir jedem inneren Gebiet  $f \in F_{in}$  drei Ecken und  $|f| - 3$  flache Winkel zuweisen und jeder innere Knoten  $v \in V_{in}$  darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden. Wir konstruieren ein Netzwerk für den zweiten Fall, das sich leicht verallgemeinern lässt.

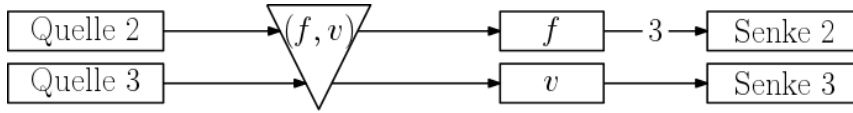
Sei also wieder  $\mathcal{N}_F$  ein Netzwerk mit einer Quelle und Senke, einem Knoten für jeden inneren Winkel  $(f, v)$ , mit  $v \in V$  und  $f \in F_{in}$ , Knoten für alle inneren Gebiete  $f$  und alle inneren Knoten  $v$ . Von der Quelle existiert eine Kante mit Kapazität 1 zu jedem inneren Winkel  $(f, v)$ , von jedem inneren Winkel  $(f, v)$  jeweils eine Kante zu  $f$  und zu  $v$  mit Kapazität 1, von jedem inneren Gebiet  $f$  eine Kante mit Kapazität 3 zur Senke und zuletzt noch eine Kante von jedem inneren Knoten  $v$  zur Senke mit Kapazität 1. Der Bedarf des Netzwerkes ist  $\sum_{f \in F_{in}} |f|$  und entspricht der Anzahl der inneren Winkel von  $G$ .

Sei  $\varphi_F$  ein zulässiger ganzzahliger Fluss, dann entspricht Fluss auf einer Kante  $((f, v), f)$  einer Ecke (eines möglichen GFAs) von  $f$  und Fluss auf  $((f, v), u)$  der Zuweisung eines Knoten zu  $f$ , also einem flachen Winkel in einem GFAA. Zur Verein-

Abbildung 3.2: Der FAA-Fluss durch einen Winkel  $(f, v)$ .

fachung sprechen wir im Weiteren auch von Ecken- respektive Zuweisungs-Fluss. Somit wird jeder innere Winkel entweder dem Gebiet zugewiesen oder als Ecke ausgezeichnet und es kann nur jeweils ein Winkel an jedem inneren Knoten zugewiesen werden.  $\varphi_F$  respektiert also die Bedingungen aus Definition 2.1 und es existieren nur dann FAAs auf  $G$ , wenn mindestens eine ganzzahlige Lösung für  $\mathcal{N}_F$  existiert. Eine spezifische Lösung  $\varphi_F$  entspricht genau einem FAA auf  $G$ .

**Bemerkung.** Das oben konstruierte Netzwerk zur Bestimmung von FAAs lässt sich auch als Zwei-Fluss Problem konstruieren, wenn wir für Ecken- und Zuweisungs-Fluss getrennte Quellen und Senken einführen. Der Bedarf des Ecken-Flusses ist dann  $3|F_{in}|$  und der Bedarf des Zuweisung-Flusses  $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ .



Eine zulässige ganzzahlige Lösung  $\varphi_F = (\varphi_{F_2}, \varphi_{F_3})$  entspricht dann wieder einem FAA auf  $G$ , da aus der Ganzzahligkeit folgt, dass ein Winkel entweder von  $\varphi_{F_2}$  oder  $\varphi_{F_3}$  genutzt wird und somit eine Definition 2.1 respektierende Beschriftung der Winkel vorliegt.

**Bemerkung.** Nach [AF15] lässt sich für Graphen mit wenigen Schnyder Woods ein Algorithmus erstellen indem wir einen bipartiten Karo erstellen und ein einseitiges perfektes Matching auf diesem finden. TODO

### 3.1.3 Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs

Im Verlauf des Kapitels haben wir nun sowohl für Schnyder Woods als auch für FAAs ein Netzwerk betrachtet, für das eine ganzzahlige Lösung einen Schnyder Wood bzw. ein FAA für einen planen Graphen  $G$  liefert. Wir wollen jetzt eine Kombination aus beiden erstellen die ein Ecken kompatibles Paar  $(\sigma, \phi)$  aus einem Schnyder Labeling  $\sigma$  und einem FAA  $\phi$  kodiert.

Es folgt die Konstruktion eines Netzwerkes, wir bezeichnen es mit  $\mathcal{N}_G$ , welches diesen Wunsch erfüllt, für das eine ganzzahlige Lösung ein Ecken kompatibles Paar kodiert und somit nach Theorem ?? eine SLTR für  $G$  existiert. Leider handelt es sich hierbei um ein 2-Fluss-Netzwerk, aber darauf wollen wir später genauer eingehen.

Wie oben in Abschnitt 3.1.2 erwähnt lässt sich ein FAA auch mit einem Zwei-Fluss kodieren und wir können Ecken- und Zuweisungs-Fluss mit den passenden Bedarfen

getrennt betrachten. Wir müssen jetzt diese drei Flüsse, also Schnyder-, Ecken- und Zuweisungs-Fluss in einem Netzwerk kombinieren. In [AF15] ergeben Schnyder- und Ecken-Fluss zusammen Fluss von Typ 1 und der Zuweisungs-Fluss Typ 2. Wir wollen hier analog ein Netzwerk konstruieren in dem wir FAA und Schnyder-Wood Fluss nicht trennen. Der Verständlichkeit wegen werden wir Pfade, die in einer Lösung von einem der drei Flussarten genutzt werden, *Schnyder-Pfad*, *Ecken-Pfad* und *Zuweisungs-Pfad* nennen.

Bei der Kombination der beiden oben konstruierten Netzwerke  $\mathcal{N}_S$  und  $\mathcal{N}_F$  zu  $\mathcal{N}_G$  müssen die Ecken Kompatibilität von Schnyder Labeling und FAA gewährleistet werden. K1 zu erfüllen, also die Nutzung der gleichen Aufhängungen von  $\sigma$  und  $\phi$ , ist kein Problem. Allerdings müssen wir für K2 das Netzwerk etwas komplizierter machen. Betrachten wir als Basis  $\mathcal{N}_S \cup \mathcal{N}_F$  und fürs erste nur ein inneres Gebiet  $f$ , dann sehen wir, dass es  $|f| - 3$  Schnyder-Fluss aufnimmt, aber  $|f|$  Einkanten in  $\mathcal{N}_S$  hat, es sind also genau die drei nötigen Kanten für den Ecken-Fluss aus  $\mathcal{N}_F$  übrig. Wir müssen gewährleisten, dass jede Ecke im Schnyder Labeling ein anderes Label hat. Betrachten wir also den von  $\varphi_S$  induzierten Schnyder Wood auf  $G^*$ . Nach [Fel12] können wir diesen aus der  $\alpha_S$ -Orientierung ablesen.

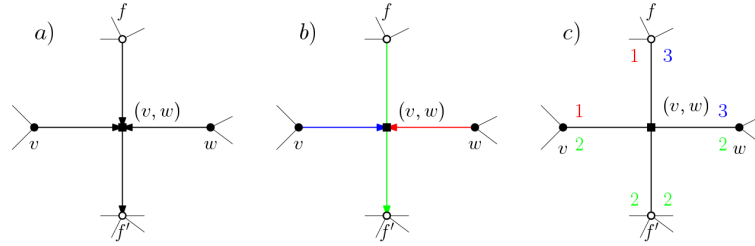


Abbildung 3.3: a) Eine  $\alpha_S$ -Orientierung um eine innere Kante von  $G$ . b) Teile der korrespondierenden Schnyder Woods auf  $G$  und  $G^*$ . c) Die induzierten Label, die für  $G$  und  $G^*$  gleich sind.

Es gilt außerdem, wie in Abbildung 3.3 skizziert, dass die Label der Ecke eines Gebietes in  $G$  und das ihr in  $G + G^*$  gegenüberliegenden Label der Ecke eines Gebietes um einen Knoten in  $G^*$  gleich sind. Für eine zu  $v$  in  $G^*$  hin orientierte Kante folgt aus der Bijektion zwischen Schnyder Labelings und Schnyder Woods aus Abschnitt 1.2, dass die Label links und rechts am Ende dieser Kante gleich sind. Somit sind auch die Label in  $G$  gleich und wir können die folgende Eigenschaft festhalten.

A1 Die Label, des von  $\alpha_S$  induzierten Schnyder Wood auf  $G$ , sind zwischen zwei aufeinander folgenden zu  $f$  orientierten Kanten gleich.

Da es genau drei zu  $f$  orientierte Kanten gibt müssen wir also dafür sorgen, dass für jedes Paar dieser Kanten eine Ecke zwischen ihnen liegt, da so die drei Ecken unterschiedliche Label haben und wir K2 erfüllen. Um dies zu erlangen implementieren wir eine zyklische Struktur um jedes innere Gebiet, wie in Abbildung ?? skizziert.

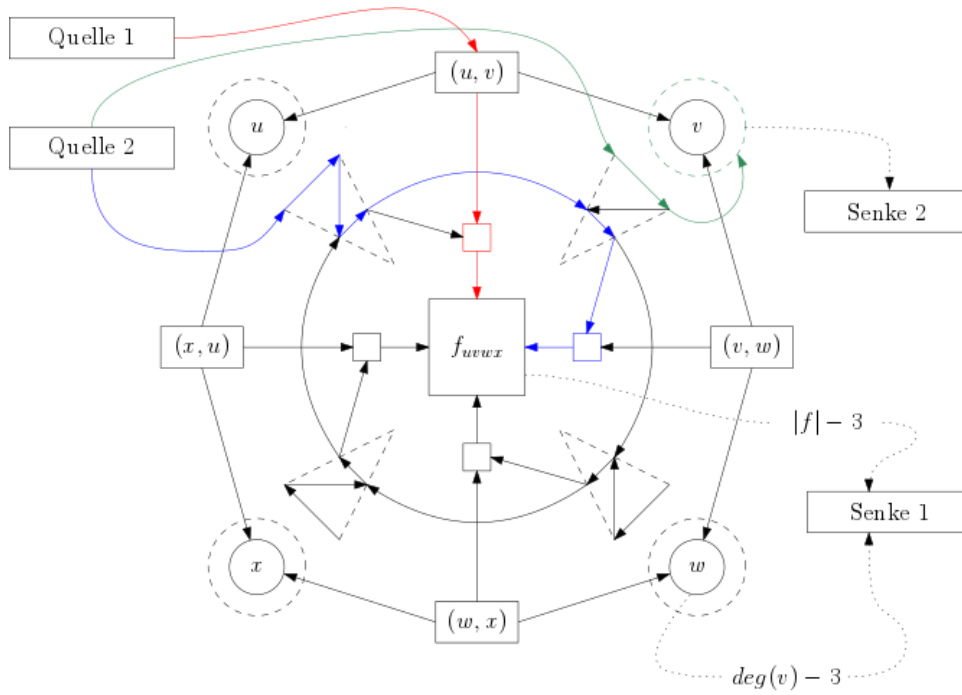


Abbildung 3.4: Eine Skizze des kombinierten Netzwerkes auf einem inneren Gebiet mit  $|f| = 4$ . Beispielhaft sind Schnyder-Fluss (rot), Ecken-Fluss (blau) und Zuweisungs-Fluss (grün) eingezeichnet.

Betrachten wir zuerst den Schnyder-Fluss. Dieser wird Fluss von Typ 1, also von Quelle 1 zu Senke 1 sein. Für einen Schnyder-Pfad der durch einen Knoten  $v$  führt hat sich nichts geändert. Der in der Skizze eingezeichnete Schnyder-Pfad der durch  $f$  führt passiert davor einen extra Knoten, wir nennen ihn *kleines Quadrat* der gewährleisten soll, dass von Seite des Gebietes aus entweder ein Schnyder-Pfad oder ein Ecken-Pfad in  $f$  mündet. Zuletzt fügen wir wie oben von jedem inneren Gebiet eine Kante mit Kapazität  $|f| - 3$  zu Senke 1 ein. Somit kodiert hier eine ganzzahlige Lösung weiterhin einen Schnyder Wood auf  $G$ .

Kommen wir nun zum FAA-Fluss, also Fluss von Typ 2. Von Quelle 2 geht genau wie in Abbildung 3.2 eine Kante zu jedem inneren Winkel  $(f, v)$ . Ein Zuweisungs-Pfad verlässt diesen Winkel über einen zusätzlich zu  $v$  eingefügten Dummy-Knoten  $v^*$ . Von jedem  $v^*$  geht eine Kante mit Kapazität 1 zu einer Dummy-Senke und von dieser eine Kante mit Kapazität  $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$  zu Senke 2, wie in Abbildung 3.5 illustriert.

Die Dummy-Knoten sorgen dafür, dass jeder Knoten im FAA nur einmal zugewiesen werden kann, ohne in Konflikt mit dem Schnyder-Fluss zu kommen. Die eingeschobene Dummy-Senke beschränkt die Anzahl der zugewiesenen Knoten, genau wie im zuvor konstruierten FAA-Fluss, auf  $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ .

Es bleibt der Ecken-Fluss. Hier betritt der Pfad das Gebiet  $f$  wieder durch einen Winkel und muss es über ein ungenutztes kleines Quadrat verlassen. Die zweite und dritte Kante in jedem Winkeldreieck gewährleisten, dass nicht immer das nächste

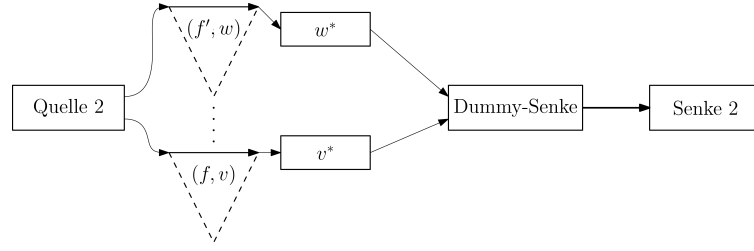


Abbildung 3.5: Der Zuweisungsfluss durch die Winkel, Dummy-Knoten und die zusätzliche Kante vor Senke 2. Die Kante rechts hat Kapazität  $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$  und alle anderen Kapazität 1.

kleine Quadrat genutzt werden muss. Falls dies von Schnyder-Fluss besetzt ist und der nächste Winkel zugewiesen wird, kann ein Ecken-Pfad den nächsten Winkel passieren. Weiterhin sorgt die erste Kante, die von sowohl Schnyder-, als auch Winkel-Pfaden genutzt werden kann, für eine eindeutige Beschriftung (als Ecke oder nicht) im Falle einer ganzzahligen Lösung. Wie oben existieren auch hier Kanten von jedem inneren Gebiet zu Senke 2 mit Kapazität drei.

Betrachten wir die Bedarfe der beiden Flüsse von Typ 1 und Typ 2,  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$ . Beide entsprechen jeweils den Bedarfen der oben konstruierten  $\mathcal{N}_S$  und  $\mathcal{N}_F$ , da mit den gleichen Argumenten wie oben, ein Schnyder Wood und ein FAA kodiert werden können. Jedes Gebiet benötigt genau drei Ecken und  $|f| - 3$  zugewiesene Knoten und je ein Schnyder-Pfad führt durch jede innere Kante,  $|E_{in}|$ . Hier seien wieder  $E_{in}$  die inneren Kanten und  $F_{in}$  die inneren Gebiete von  $G$ . Es gilt also:

- $d_1 = \text{Bedarf}(\varphi_1) = \text{Bedarf}(\varphi_S) = |E_{in}|$
- $d_2 = \text{Bedarf}(\varphi_2) = \text{Bedarf}(\varphi_F) = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

Bevor wir in Theorem 3.1 zeigen, dass eine ganzzahlige Lösung  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  auch wirklich ein Ecken kompatibles Paar kodiert, wollen wir noch ein Paar weitere Beobachtungen festhalten. Nehmen wir also an, wir haben eine ganzzahlige Lösung  $\varphi$  gefunden, dann gilt für diese:

- A2 Jede äussere Kante in einem Winkel-Dreieck ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Ecken- oder Zuweisungspfad genutzt.
- A3 Jede Kante von einem kleinen Quadrat zu einem inneren Gebiet  $f$  ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Schnyder- oder Ecken-Pfad genutzt.
- A4 Ein inneres Gebiet  $f$  mit  $|f| = 3$  kann nicht von Zuweisungs- bzw. Schnyder-Pfaden genutzt werden.

Wir wollen diese Beobachtungen kurz begründen. Für jede mögliche ganzzahlige Lösung  $\varphi$  gilt

$$|\varphi| = |\varphi_1| + |\varphi_2| = |E_{in}| + \sum_{f \in F_{in}} |f|.$$



Da es genau  $\sum_{f \in F_{in}} |f|$  innere Winkel gibt und der FAA-Fluss  $\mathcal{N}_G$  nur durch diese betreten kann ergibt sich A2. A3 wird aus Gleichung 3.1 weiter unten folgen. Durch ein inneres Gebiet  $f$  müssen drei Ecken-Pfade führen und im Fall  $|f| = 3$  führt dies zu A4, da kein Platz in den Winkeln für Zuweisungs-Pfade und keine freien kleinen Quadrate für Schnyder-Pfade existieren.

**Theorem 3.1.** *Sei  $G$  ein intern-3-zusammenhängender Graph mit gegebenen Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , dann existiert eine SLTR von  $G$ , genau dann wenn ein ganzzahliger zulässiger Fluss  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  auf  $\mathcal{N}_G$  existiert.*

*Beweis:* Sei  $G$  ein intern-3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  und  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  sei ein ganzzahliger machbarer Fluss auf  $\mathcal{N}_G$ . Im ersten Schritt extrahieren wir einen Schnyder-Wood  $\sigma$  und ein FAA  $\phi$ , um dann zu zeigen, dass sie ein Ecken kompatibles Paar bilden. Für einen machbaren Fluss müssen die Bedarfe erfüllt werden. Es gilt somit  $|\varphi_1| = |E_{in}|$  und  $|\varphi_2| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$ .

$$\begin{aligned}
|\varphi_1| + |\varphi_2| &= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}| + |E_{in}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 2|E| - |V| - 1 + 2|F| - |f_{aus}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (deg(v) - 3) + 2|V| + 2|F| - 1 - |f_{aus}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (deg(v) - 3) + 2|E| + 3 - |f_{aus}| \\
&= \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)}_{\text{Dummy-Senke zu Senke 2}} + \underbrace{\sum_{v \in V} (deg(v) - 3) + 3}_{\text{Kapazität Senke 2 von den Knoten.}} + \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}|}_{\text{Kanten von den Quadraten zu den inneren Gebieten}}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Die beiden Terme in der rechten unteren Klammer entsprechen den Kapazitäten von den inneren Gebieten zu Senke 1 und Senke 2. Somit sind alle Kanten zu den Senken ausgelastet. Die Kanten von den kleinen Quadraten zu den inneren Gebieten sind ebenfalls ausgelastet. Diese sind die einzigen Kanten in  $\mathcal{N}_G$ , die sowohl von  $\varphi_1$  als auch  $\varphi_2$  genutzt werden können. Kapazität eins und Ganzzahligkeit von  $\varphi$  impliziert somit A3.

Beginnen wir mit  $\varphi_1$  um einen Schnyder Wood, oder genauer eine  $\alpha_s$ -Orientierung, zu erhalten.  $|\varphi_1| = |E_{in}|$ , somit führt durch jede innere Kante ein Schnyder-Pfad und dieser gibt uns die nach aussen gerichtete Kante in  $\alpha_s$ . Es bleibt zu zeigen, dass für jedes innere Gebiet und jeden Knoten die Bedingungen aus Theorem 3.3 für eine  $\alpha_s$  eingehalten werden. Da alle Kanten von den Knoten zu Senke 1 ausgelastet sind folgt, dass durch jeden inneren Knoten  $v$  genau  $deg(v) - 3$  Schnyder-Pfade führen. Somit ergeben die leeren Einkanten von  $v$  in  $\mathcal{N}_G$  die drei Auskanten für  $\alpha_s$ . Für eine Aufhängung  $a_i$  folgt analog, dass die beiden ungenutzten Einkanten, zusammen mit

der Halbkante ins äußere Gebiet, die Bedingungen der  $\alpha_s$ -Orientierung erfüllen. Es bleibt zu zeigen, dass durch jedes innere Gebiet  $|f| - 3$  Schnyder-Pfade führen. Der restliche Schnyder-Fluss  $|E_{in}| - \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3)$  muss durch die inneren Gebiete führen und aus der ersten und letzten Zeile von Gleichung ?? folgt

$$|E_{in}| - \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3).$$

Somit führen  $|f| - 3$  Schnyder-Pfade durch jedes innere Gebiet und wir können die  $\alpha_s$ -Orientierung vervollständigen und erhalten einen Schnyder Wood auf  $G$ .

Betrachten wir nun  $\varphi_2$ . Nach A4 sind alle äusseren Kanten in den Winkeln ausgelastet. Falls diese nun in jedem inneren Gebiet von drei Ecken-Pfaden und  $|f| - 3$  Zuweisungs-Pfaden genutzt werden, können wir ein FAA extrahieren. Da alle Kanten zu Senke 2 ausgelastet sind, führen  $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$  Pfade durch die Dummy-Senke. Somit werden auch  $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$  Knoten inneren Gebieten zugewiesen. Indem wir die Pfade zurückverfolgen und sehen aus welchem Gebiet der Zuweisungs-Pfad einen Dummy-Knoten betritt, können wir diese Informationen auslesen. Es bleibt zu zeigen, dass jedem Gebiet genau  $|f| - 3$  Knoten zugewiesen werden. Dies gilt, wenn durch jedes Gebiet drei Ecken-Pfade laufen und folgt somit, da die Kanten von den inneren Gebieten zu Senke 2 ausgelastet sind. Wir können also aus  $\varphi_2$  ein FAA für  $G$  extrahieren.

Nun müssen wir zeigen, dass  $\sigma$  und  $\phi$  ein Ecken kompatibles Paar ergeben. C1, dass beide die gleichen Aufhängungen nutzen folgt sofort aus der Konstruktion von  $\mathcal{N}_G$ . Es bleibt C2.

Betrachten wir ein Teilnetzwerk (wie in Abbildung 3.4) um ein inneres Gebiet  $f$ . Die drei Ecken-Pfade können keine der  $|f| - 3$  kleinen Quadrate nutzen die schon von Schnyder-Fluss okkupiert werden. Die drei übrigen kleinen Quadrate nennen wir *verfügbar*. Ausgehend von  $f$  folgen wir den Ecken-Pfaden rückwärts zu den verfügbaren kleinen Quadraten. Wenn wir das Quadrat verlassen gelangen wir zur dritten Kante eines Winkeldreiecks (entgegen dem Uhrzeigersinn). Nun verlassen wir das Gebiet entweder über diesen Winkel oder bewegen uns weiter (entgegen dem Uhrzeigersinn) zum nächsten Winkeldreieck. Doch wir werden zeigen, dass dies nur dann geschieht wenn das kleine Quadrat zwischen diesen nicht *verfügbar* ist. Also betritt zwischen zwei *verfügbaren* kleinen Quadraten ein Ecken-Pfad das Gebiet und die Winkel haben nach A1 unterschiedliche Label.

**Behauptung 1** *Seien  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$ , im Uhrzeigersinn, die drei verfügbaren kleinen Quadrate um ein inneres Gebiet  $f$ . Dann existiert ein Ecken-Pfad, welcher das Netzwerk über  $Q_i$  verlässt. Dieser betritt es in einem Winkel zwischen, im Uhrzeigersinn,  $Q_{i-1}$  und  $Q_i$ .*

Angenommen dies ist nicht der Fall und nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass der Ecken-Pfad  $p$  das Gebiet durch  $Q_3$  verlässt. Der Winkel

über den  $p$  das Teilnetzwerk um das innere Gebiet betritt liegt also nicht zwischen  $Q_2$  und  $Q_3$ . Angenommen er liegt zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$ . Betrachte das letzte Winkeldreieck vor  $Q_2$ . Nach unserer Annahme ist die innere Kante dieses Dreiecks von  $p$  ausgelastet. Somit kann kein Ecken-Fluss zu  $Q_2$  gelangen und wir erhalten einen Widerspruch, da alle kleinen Quadrate entweder von Ecken- oder von Schnyder-Fluss genutzt werden müssen. Mit dem gleichen Argument kann  $p$  das Teilnetzwerk nicht zwischen  $Q_3$  und  $Q_1$  betreten. Somit ist Behauptung 1 wahr.

**Behauptung 2** *Alle Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden verfügbaren kleinen Quadraten, haben die selben Label im Schnyder Labeling  $\sigma$ .*

Diese Behauptung folgt aus der in Abbildung 3.3 illustrierten Bijektion zwischen der  $\alpha_s$  Orientierung und den Schnyder Labelings auf  $G$  und  $G^*$ . Die Winkel links und rechts von einem kleinen Quadrat, dass von einem Schnyder-Pfad genutzt wird, haben das gleiche Label in  $\sigma$ , da diese den Einkanten in  $\alpha_s$  entsprechen. Die Auskanten entsprechen den verfügbaren kleinen Quadraten, und hier ändern sich die Label.

Diese beiden Behauptungen zusammen zeigen, dass jede Ecke aus  $\phi$  ein anderes Label in  $\sigma$  hat. Somit handelt es sich um ein Ecken Kompatibles Paar  $(\sigma, \phi)$ .

Wir haben die Rückrichtung gezeigt. Nehmen wir also an, dass eine SLTR für  $G$  existiert. Wir müssen nun einen zulässigen ganzzahligen Fluss  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  auf  $\mathcal{N}_G$  konstruieren, der die SLTR kodiert. Nach Theorem ?? existiert ein Ecken kompatibles Paar  $(\sigma, \phi)$  aus einem Schnyder Labeling  $\sigma$  und einem FAA  $\phi$ , das zu diesem SLTR passt. Betrachte die zu  $\sigma$  gehörige  $\alpha_s$ -Orientierung.

Wir beginnen mit einem leeren, wie oben konstruierten Netzwerk  $\mathcal{N}_G$  und werden nun Schritt für Schritt einen zulässigen Fluss  $\varphi$  konstruieren.

Zuerst fügen wir für jeden zugewiesenen Winkel einen Pfad von Quelle 2, über die äussere Kante des Winkeldreiecks, den zugehörigen Dummy-Knoten und die Dummy-Senke hin zu Senke 2 ein. Es kommen somit  $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$  Einheiten Fluss hinzu und die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2 wird ausgelastet.

Als nächsten fügen wir den Fluss hinzu, der die  $\alpha_s$ -Orientierung kodiert. Zuerst von Quelle 1 zu jedem inneren Kanten-Knoten  $e$ , dann von den inneren Kanten entweder über ein kleines Quadrat in ein angrenzendes Gebiet oder zu einem benachbarten Knoten je nachdem, wohin die Auskante von  $e$  in  $\alpha_s$  zeigt. Zuletzt saturieren wir die Kanten von den inneren Knoten und inneren Gebieten zu Senke 1.

Zuletzt müssen wir den Ecken-Fluss einfügen. Ein Ecken-Pfad  $p$  entspringt in Quelle 1, nutzt das zugehörige Winkeldreieck (diese sind noch frei) und verlässt das Gebiet über das im Uhrzeigersinn nächste verfügbare kleine Quadrat, wieder.

Es sind alle Kanten hin zu den Senken ausgelastet. Ebenso kann man sehen, dass an keiner Kante die Kapazität überschritten wird. Somit haben wir einen zulässigen ganzzahligen Fluss konstruiert, der eine SLTR kodiert. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

□

### 3.2 Nicht ganzzahlige Lösungen

Dieses Kapitel wird sich mit der von Aerts und Felsner offen gelassenen Frage beschäftigen, ob die Erkennung von Graphen mit einer SLTR in  $\mathcal{P}$  liegt. Wie in Kapitel 1 erwähnt, impliziert eine nicht ganzzahlige Lösung für ein Multi-Fluss-Problem auf einem gerichteten Graphen mit  $n \geq 2$  Paaren von Quellen und Senken, im Allgemeinen nicht die Existenz einer ganzzahligen Lösung. Die Ergebnisse aus Kapitel 4 lassen jedoch die Möglichkeit offen, dass das man für das betrachtete Netzwerk  $\mathcal{N}_G$  die folgende Vermutung beweisen kann.

**Vermutung 1** *Sei  $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf  $\mathcal{N}_G$ , dann existiert auch ein ganzzahliger zulässiger Fluss  $\varphi$  und wir können in polynomieller Zeit ein Gutes-FAA aus  $\tilde{\varphi}_2$  extrahieren, ohne eine ganzzahlige Lösung zu berechnen.*

**Bemerkung.** Wenn wir nicht darauf bestehen, dass unsere Lösung ganzzahlig ist, dann lässt sich eine Lösung nach TODO durch lineare Programmierung in polynomieller Zeit finden und das Entscheidungsproblem, ob ein Graph eine SLTR hat läge so in  $\mathcal{P}$ .

Um die Argumentation einfacher zu gestalten, werden wir unser 2-Fluss Problem manchmal als 3-Fluss Problem, mit einer Lösung  $\varphi = (\varphi_s, \varphi_e, \varphi_z)$ , betrachten. Wir erstellen  $\mathcal{N}_G^*$  wie zuvor  $\mathcal{N}_G$ , nur mit drei Quellen und Senken und weisen Schnyder-, Ecken-, und Zuweisungs-Fluss eigene Typen zu. Man kann leicht sehen, dass Theorem 3.1 in angepasster Form hier ebenfalls gilt und ein zulässiger Fluss  $(\varphi_s, \varphi_z, \varphi_e)$  auf  $\mathcal{N}_G^*$  genau dann existiert, wenn auch ein zulässiger Fluss  $(\varphi_1, \varphi_2)$  auf  $\mathcal{N}_G$  möglich ist. Die Hinrichtung ist klar. Nehmen wir an  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ist eine ganzzahlige Lösung. Nach Beobachtung A2 gilt, dass die äusseren Kanten eines Winkel-Dreiecks entweder von einem Ecken- oder einem Zuweisungs-Pfad genutzt werden. Diese Kanten sind zusammen mit den Kanten von Quelle 2 zu den Winkeldreiecken die einzigen in  $\mathcal{N}_G$ , die von beiden Flüssen genutzt werden. Wir können also  $\varphi_2$  in  $|\varphi_2|$  ganzzahlige Pfade aufteilen und jeden Pfad entweder  $\varphi_e$  oder  $\varphi_z$  zuweisen – je nachdem ob er über die Dummy-Senke führt, oder nicht. Insbesondere folgt mit der gleichen Argumentation:

- O1 Jede beliebige Kombination von  $\varphi_s, \varphi_e$  und  $\varphi_z$  zu zwei Flüssen und ein zu  $\mathcal{N}_G$  analoges Netzwerk hat eine zulässige ganzzahlige Lösung genau dann, wenn eine Lösung für das 3-Fluss-Netzwerk existiert.

Betrachten wir zunächst den zweiten Teil von Vermutung 1.

**Lemma 3.2.** *Sei  $\tilde{\varphi}$  ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf  $\mathcal{N}_G$  und sei  $W$  die Menge der vom Zuweisungsfluss  $\tilde{\varphi}_z$  genutzten inneren Winkel von  $G$ . Dann existiert eine Teilmenge  $\phi \subseteq W$ , sodass aus jedem Gebiet  $f$  genau  $|f| - 3$  Winkel in  $\phi$  enthalten sind und in der jeder Knoten  $v$  höchstens einmal vorkommt.  $\phi$  kodiert also ein FAA von  $G$ .*

*Beweis:* Wir betrachten das gerichtete Netzwerk  $\mathcal{F}_z$  mit einer Quelle  $s$  und Senke  $t$ , einem Beutel  $B_f$  für jedes innere Gebiet  $f$ , einem Knoten  $(f, v)$  für jeden inneren

Winkel und einem Knoten für jeden Dummy-Knoten. Zuerst fügen Kanten mit Kapazität  $|f| - 3$  von der Quelle zu jedem Beutel ein. Dann folgen Kanten von den Beuteln  $B_f$  zu den Winkeln von  $f$ , von den Winkeln  $(f, v)$  zu den Dummy-Knoten  $v^*$  und zuletzt eine Kante von jedem Dummy-Knoten zu Senke mit Kapazität 1, jeweils mit Kapazität 1. Der maximal mögliche  $s$ - $t$ -Fluss in  $\mathcal{F}_z$  ist  $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$ , da die Kanten zu den Beuteln einen Schnitt bilden und wir aus  $\tilde{\varphi}_z$  sofort eine zulässige nicht ganzzahlige Lösung  $\tilde{\phi}$  für  $\mathcal{F}_z$  konstruieren können. Nach Theorem 1.10 existiert somit ein ganzzahliger Fluss  $\phi$  auf  $\mathcal{F}_z$ , mit  $|\phi| = |\tilde{\phi}| = |\tilde{\varphi}_z| = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$ .

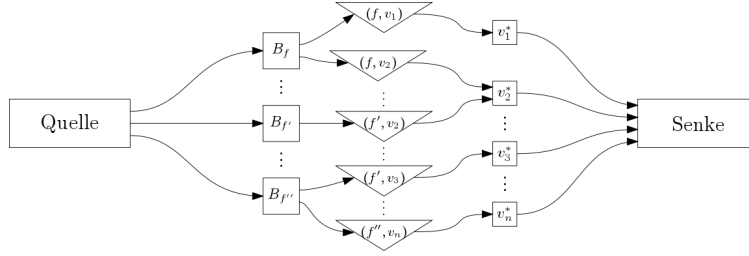


Abbildung 3.6: Skizze des Netzwerkes  $\mathcal{F}_z$ . Die Kanten von der Quelle zu einem Beutel  $B_f$  hat Kapazität  $|f| - 3$  und alle anderen haben Kapazität 1.

$\phi$  weist nun jedem inneren Gebiet  $f$  genau  $|f| - 3$  Winkel zu und jeder Knoten  $v$  kann nur einmal zugewiesen werden. Wenn wir noch die per Konstruktion von  $\mathcal{N}_G$  zugewiesenen Knoten am äusseren Gebiet hinzunehmen, dann kodiert  $\phi$  ein FAA von  $G$ .  $\square$

Wenn wir zeigen können, dass ein so erhaltenes  $\phi$  ein Gutes-FAA ist, folgt Vermutung 1, da die Existenz eines Guten-FAAs  $\phi$  nach Theorem 3.1 auch die Existenz eines ganzzahligen zulässigen Flusses  $\varphi$  für  $\mathcal{N}_G$  impliziert.

### 3.2.1 Minimale Schnitte in $\mathcal{N}_G$

Angenommen, es existiert ein Graph  $G$ , für den nur eine nicht ganzzahlige Lösung existiert. Sei  $\tilde{\varphi}$  dieser nicht ganzzahlige zulässige Fluss auf  $\mathcal{N}_G$ , und  $\phi$  ein wie in Lemma 3.2 aus  $\tilde{\varphi}$  konstruiertes FAA für  $G$ . Sei  $\bar{\varphi}_z$  der eindeutige Zuweisungs-Fluss der dieses FAA auf  $\mathcal{N}_G$  kodiert. Sei  $\bar{\mathcal{N}}_G$ , ein Teilnetzwerk von  $\mathcal{N}_G$ , aus welchem alle Kanten, die von  $\bar{\varphi}_z$  genutzt werden gelöscht wurden. Die Bedarfe sind weiterhin  $|E_{in}|$  und  $3|F_{in}|$  für den Schnyder- und Ecken-Fluss. Nach der in O1 festgehaltenen Beobachtung können wir, wie in [AF15],  $\varphi_s$  und  $\varphi_e$  zusammenfassen und mit  $\varphi_1$  bezeichnen. Wir suchen also nach einem zulässigem ganzzahligem Fluss  $\varphi_1 = \varphi_s + \varphi_e$  auf  $\bar{\mathcal{N}}_G$  mit Bedarf  $|E_{in}| + 3|F_{in}|$ , da dann auch eine ganzzahlige Lösung  $(\varphi_s, \varphi_e)$  folgt.

Nach dem Max-Flow Min-Cut Theorem existiert ein zulässiger Fluss auf  $\bar{\mathcal{N}}_G$  genau dann, wenn es keinen (Kanten-)Schnitt in  $\bar{\mathcal{N}}_G$  mit Kapazität kleiner als  $|E_{in}| + 3|F_{in}|$  gibt. Bevor wir fortfahren wollen wir einige Kantentypen aus  $\mathcal{N}_G$  benennen.

- $E_\Delta$  = Die äusseren Kanten in den Winkeldreiecken.

- $E_{\nabla}$  = Die inneren Kanten in den Winkeldreiecken.
- $S_*$  = Die Kanten von den Dummy-Knoten zur Dummy-Senke.
- $V_*$  = Die Kanten von den Winkeldreiecken zu den Dummy-Knoten.
- $E_{\rightarrow}$  = Die Kanten von Quelle 1 zu den Kanten-Knoten.
- $F_{\square}$  = Die Kanten von den kleinen Quadraten zu inneren Gebieten  $f$ .
- $V_{\rightarrow}$  = Die Kanten von den Knoten-Knoten zu Senke 1.

Sei  $e_d$  die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2, dann sind sowohl  $\mathcal{S}_1 = E_{\Delta} \cup E_{\rightarrow}$ , als auch  $\mathcal{S}_2 = F_{\square} \cup V_{\rightarrow} \cup \{e_d\}$  minimale Schnitte in  $\mathcal{N}_G$ , die alle Quellen und Senken trennen. Wenn wir nur von den Kanten aus  $E_{\Delta}$ , die in  $\overline{\mathcal{N}}_G$  übrig sind, sprechen, schreiben wir  $\overline{E}_{\Delta}$ . Für die, zu diesen korrespondierenden Kanten im inneren ihrer Winkeldreiecke, schreiben wir  $\overline{E}_{\nabla}$ . Für die Teilmengen von  $V_*$  und  $S_*$  in  $\overline{\mathcal{N}}_G$  schreiben wir  $\overline{S}_*$  und  $\overline{V}_*$ . Die restlichen Mengen sind vollständig in  $\overline{\mathcal{N}}_G$  enthalten.

Seien  $E_z$  die von  $\varphi_z$  genutzten Kanten, die wir aus  $\mathcal{N}_G$  entfernen. Dann folgt  $|\mathcal{S}_1 \cap E_z| = |E_{\Delta} \cap E_z| = |\varphi_z|$ . Somit ist  $\overline{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1 \setminus E_z = \overline{E}_{\Delta} \cup E_{\rightarrow}$  ein Schnitt in  $\overline{\mathcal{N}}_G$ . Analog ist  $\overline{\mathcal{S}}_2 = F_{\square} \cup V_{\rightarrow}$  ein Schnitt. Für die Kapazität von  $\overline{\mathcal{S}}_1$  können wir folgern

$$c(\overline{\mathcal{S}}_1) = c(\overline{E}_{\Delta}) + c(E_{\rightarrow}) = c(E_{\Delta}) - |\varphi_z| + c(E_{\rightarrow}) = 3|F_{in}| + |E_{in}|,$$

und analog folgt  $c(\overline{\mathcal{S}}_2) = 3|F_{in}| + |E_{in}|$ .

Falls es sich hierbei um minimale Schnitte handelt, dann würde dies bedeuten, dass eine ganzzahlige Lösung für  $\overline{\mathcal{N}}_G$  existiert, mit deren Hilfe wir, zusammen mit  $\varphi_z$ , eine ganzzahlige zulässige Lösung für  $\mathcal{N}_G$  konstruieren könnten, was wiederum ein Widerspruch zu unserer Annahme wäre. Es muss also einen kleineren Schnitt  $\mathcal{S}_{min}$ , mit  $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$ , geben.

**Behauptung 3** *Ein minimaler Schnitt  $\mathcal{S}_{min}$  in  $\overline{\mathcal{N}}_G$  enthält ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur Kanten von einem der vier Typen  $\overline{E}_{\nabla}$ ,  $F_{\square}$ ,  $V_{\rightarrow}$  und  $E_{\rightarrow}$ .*

Kanten auf einem Pfad von der Quelle bis zu einer Kante in  $\overline{E}_{\nabla}$ , können durch diese ersetzt werden. Ebenso können Kanten zwischen zwei Winkeldreiecken, oder von einem Winkeldreieck zu einem kleinen Quadrat, durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, nächste Kante in  $\overline{E}_{\nabla}$  ersetzt werden. Kanten zwischen einem Kanten-Knoten und einem Knoten-Knoten, oder einem kleinen Quadrat, können durch eine Kante in  $E_{\rightarrow}$  ersetzt werden. Abschliessend können Kanten, von einem inneren Gebiet zu Senke, durch das hinzufügen von allen Kanten aus  $F_{\square}$  an diesem Gebiet, ersetzt werden.

**Behauptung 4** *Ein minimaler Schnitt  $\mathcal{S}_{min}$  in  $\overline{\mathcal{N}}_G$  muss ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus jeder der Mengen  $\overline{E}_{\nabla}$ ,  $F_{\square}$ ,  $V_{\rightarrow}$  und  $E_{\rightarrow}$  mindestens eine, aber aus keiner der Mengen alle Kanten enthalten.*

Falls ein solcher ein Schnitt existiert, dann kann er nicht alle Kanten  $\overline{E}_{\nabla}$  enthalten, da sonst  $\mathcal{S}_{min} \cup (E_{\Delta} \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$  gilt. Falls er jedoch keine Kante aus  $\overline{E}_{\nabla}$  enthält,

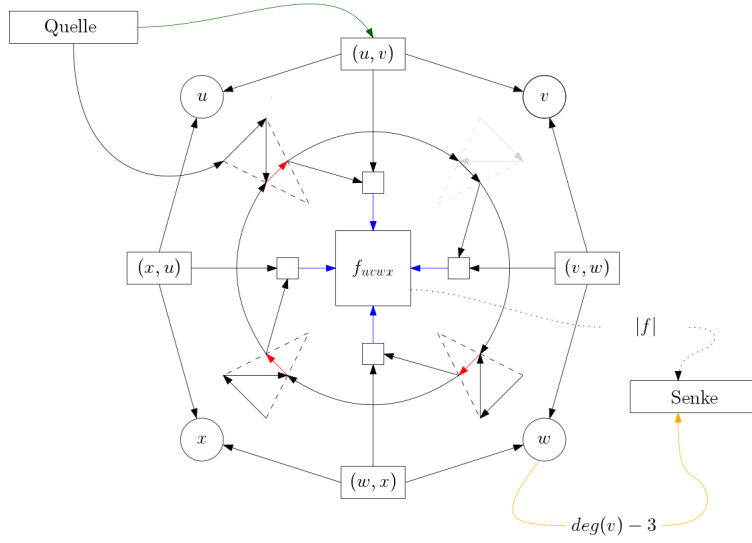


Abbildung 3.7: Die vier Kantentypen  $\overline{E}_\nabla$  (rot),  $F_\square$  (blau),  $V_\rightarrow$  (orange) und  $E_\rightarrow$  (grün) aus denen sich, nach Behauptungen 3 und 4, ein minimaler Schnitt in  $\overline{\mathcal{N}}_G$  zusammensetzt.

dann muss er alle Kanten aus  $F_\square$  enthalten und falls er alle Kanten aus  $F_\square$  enthält, dann muss er o.B.d.A. auch alle Kanten aus  $V_\rightarrow$  enthalten. Es folgt  $\mathcal{S}_{min} \cup \{e_d\} \supseteq \mathcal{S}_2$ . Angenommen er enthält keine Kante aus  $F_\square$ , dann muss er alle Kanten aus  $\overline{E}_\nabla$  und  $E_\rightarrow$  enthalten und es gilt  $\mathcal{S}_{min} \cup (E_\Delta \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$ . Mit analogen Argumenten folgt der Rest von Behauptung 4.

Nehmen wir also an, dass ein minimaler Schnitt  $\mathcal{S}_{min}$ , wie in Behauptungen 3 und 4, existiert mit  $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$ . Betrachten wir für den Moment das Teilnetzwerk um ein inneres Gebiet in  $\overline{\mathcal{N}}_G$ . Falls alle drei Kanten aus  $\overline{E}_\nabla$  in  $\mathcal{S}_{min}$  enthalten sind, dann müssen auch o.B.d.A. alle Kanten in  $E_\rightarrow$  um dieses Gebiet enthalten sein und falls eine Kante aus  $\overline{E}_\nabla$  nicht enthalten ist, dann müssen, im Uhrzeigersinn bis zur nächsten enthaltenen Kante aus  $\overline{E}_\nabla$ , alle Kanten aus  $F_\square$  Teil von  $\mathcal{S}_{min}$  sein. Falls höchstens eine Kante aus  $\overline{E}_\nabla$  im Schnitt läge, dann folgt o.B.d.A., dass keine Kante aus  $\overline{E}_\nabla$  und alle aus  $F_\square$ , um das innere Gebiet, enthalten sind.

Angenommen es existieren nur Gebiete in denen entweder alle oder keine Kanten aus  $\overline{E}_\nabla$  in  $\mathcal{S}_{min}$  enthalten sind. Dann existiert ein Kanten-Knoten der, wie in Abbildung 3.8 jeweils eines von beiden berührt. Wir können nun im rechten Gebiet eine Kante aus  $F_\square$  durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, folgende Kante aus  $\overline{E}_\nabla$  ersetzen.

Sei  $f$  ein Gebiet,

**Lemma 3.3.** *Sei  $\mathcal{N}$  ein gerichtetes Netzwerk mit einer Quelle  $s$  und einer Senke  $t$ . Sei  $\mathcal{S}_{min}$  ein minimaler Kantenschnitt zwischen  $s$  und  $t$  und sei  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}_{min}$ . Dann ist  $\hat{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \setminus \mathcal{T}$  ein minimaler Kantenschnitt zwischen  $s$  und  $t$  in  $\hat{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$ .*

*Beweis:* Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $\mathcal{N}$  nur Kanten

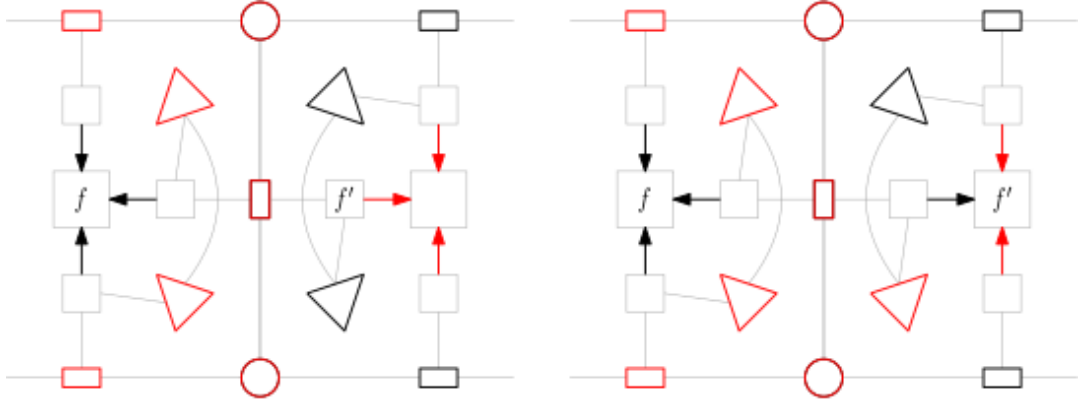
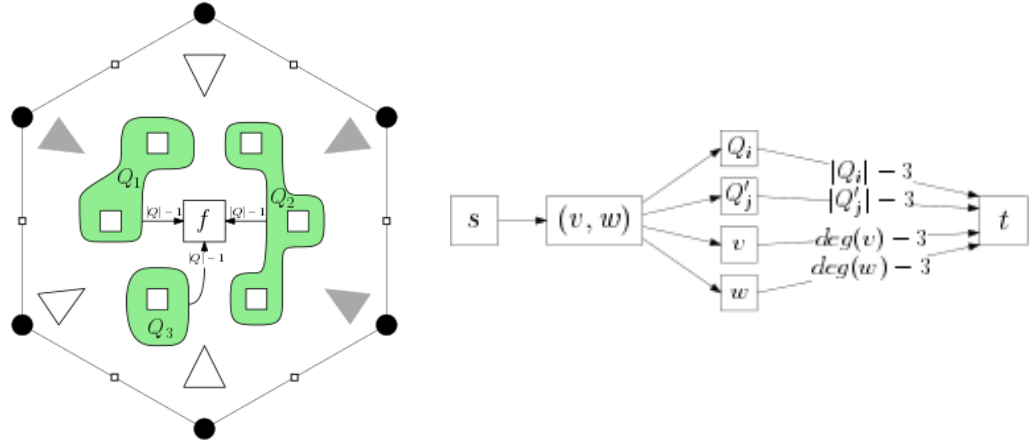


Abbildung 3.8


 Abbildung 3.9: Auf der linken Seite eine Illustration von  $\bar{\varphi}_s$  mit den von  $\bar{\varphi}_z$  zugeordneten Winkeln in grau. Auf der rechten Seite das resultierende Netzwerk.

mit Kapazität 1 enthält. Nach dem *Max-Flow Min-Cut* Theorem existiert ein  $s$ - $t$ -Fluss  $\varphi$  mit  $|\varphi| = c(\mathcal{S}_{min})$ . Nach Theorem 1.10 können wir annehmen, dass wir es sich um einen ganzzahligen Fluss handelt. Wir können diesen Fluss somit in Pfade (TODO)  $p$  mit Flussstärke 1 aufteilen. Betrachten wir nun  $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$ , dann trennt die Entnahme von  $\mathcal{T}$  genau  $c(\mathcal{T})$  Pfade  $p \in P$ . Die restlichen Pfade, nennen wir sie  $\tilde{p} \in \tilde{P}$ , bleiben intakt. Somit existiert ein  $s$ - $t$ -Fluss  $\tilde{\varphi}$  mit  $|\tilde{\varphi}| = c(\mathcal{S}_{min}) - c(\mathcal{T})$ .  $\tilde{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \setminus \mathcal{T}$  muss somit ein minimaler Schnitt in  $\tilde{\mathcal{N}}$  sein, da jedes  $\tilde{p} \in \tilde{P}$  genau eine Kante aus  $\tilde{\mathcal{S}}_{min}$  nutzt und die Entnahme dieser Kanten, nach Voraussetzung,  $s$  und  $t$  trennt.  $\square$



## 4 Das Programm

Wir wollen nun auf eine Implementierung des Algorithmus aus dem vorherigen Abschnitt eingehen. Der Code wurde in SageMath [S<sup>+</sup>18] geschrieben und ist auf Anfrage erhältlich. Das Multi-Fluss-Problem auf  $\mathcal{N}_G$  zu gegebenen Bedarfen  $(d_1, d_2)$  wird hier, mithilfe des in Sage enthaltenen Solvers *Glpk* [Glp12] für Lineare Programmierung gelöst, welcher ein Paar von Flussgraphen  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ausgibt, falls eine zulässige Lösung existiert und sonst nichts.

---

**Algorithm 1:** An algorithm to detect and return a Good-FAA for a plane, internally-3-connected and suspended Graph  $G$ .

---

```

1 Good-FAA ( $G, f_{aus}, \{a_1, a_2, a_3\}$ );
   Input :  $G$ , a planar, internally-3-connected Graph,  $f_{aus}$ , the outer face and
           the suspensions  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .
   Output : A Good-FAA for  $G$ , if possible.
2 if  $G$  has FAA then
3    $(d_1, d_2) \leftarrow$  Demands for  $\mathcal{N}_G$  ;
4   Initialize  $\mathcal{N}_G$  ;
5    $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \leftarrow$  Integral-Multicommodity-Flow( $\mathcal{N}_G$ ) ;
6   if  $|\varphi_1| = d_1$  and  $|\varphi_2| = d_2$  then
7      $\phi \leftarrow$  Good-FAA from  $\varphi_2$  ;
8     return:  $\phi$ 
9   end
10 end

```

---

Aus einer ganzzahligen Lösung kann man ein Gutes-FAA  $\phi$  aus  $\varphi_2$  extrahieren indem man die Zuweisungs-Pfade durch die Dummy-Senke zurück verfolgt. Wir betreten jeden passierten Dummy-Knoten  $v^*$  aus einem Winkel  $(f, v)$ . Diese Winkel ergeben die Zuweisungen  $\phi$ .

Halten wir einige mögliche Veränderungen fest.

- Die Kontrolle, ob für  $G$  ein FAA existiert ist optional, lässt sich jedoch, zum Beispiel wie zuvor über ein 1-Fluss-Problem, in polynomineller Zeit bestimmen. Somit spart sie im Falle, der nicht Existenz eines FAA Zeit.
- Bei der Initialisierung von  $\mathcal{N}_G$  kann das innere Netzwerk in Gebieten  $f$  mit  $|f| = 3$  weggelassen werden, da in jeder zulässigen Lösung der Fluss aus den Ecken die kleinen Quadrate voll ausfüllt. Der Bedarf muss dementsprechend angepasst werden.

- Optional kann der Graph zuerst geteilt werden. Hierfür müssen Knoten  $v_1, v_2, v_3$  existieren die ein Dreieck bilden, sodass dann aus einer äusseren und einer inneren Lösung eine zulässige Lösung konstruiert werden kann.

## 4.1 Visualisierung

Nehmen wir an, wir haben für einen Graphen  $G$  ein Gutes-FAA  $\phi$  gefunden. Für eine SLTR, müssen wir eine zu  $\phi$  passende Einbettung von  $G$  finden. Wir werden den in Abschnitt 2.1 erörterten Ansatz über harmonische Funktionen nutzen, um eine SLTR von  $G$  zu erhalten.

Wir wollen nun eine Einbettung  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $G$  ähnlich der Gummiband-Repräsentation berechnen, die  $\phi$  respektiert. Sei  $S \subseteq V$  die Menge der Knoten von  $f_{aus}$ . Nach Abschnitt 2.1 gelten die folgenden harmonischen Gleichungen für zugewiesene (oben) und nicht zugewiesene (unten) Knoten.

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1)$$

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} > 0$$

Um zu einer gegebenen Gewichtsfunktion  $\lambda$  eine Lösung zu finden, können wir diese Gleichungen, um die Aufhängungen  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  erweitern und als Matrix schreiben.

$$M_\lambda(\vec{v}_x, \vec{v}_y) = \begin{pmatrix} f^{(A)}_x & f^{(A)}_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } (M_\lambda)_{vw} = \begin{cases} -\lambda_{vw} & \text{falls } (v, w) \in E, \\ \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} & \text{falls } v = w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir nun die Pseudo-Inverse (TODO) berechnen, erhalten wir die Lösung

$$f(V) = M_\lambda^{-1} \begin{pmatrix} f^{(A)}_x & f^{(A)}_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun, inspiriert von den *iterativen Tutte Einbettungen* aus [FS17], diese Rechnung mehrmals durchführen und Schritt für Schritt die Gewichtung  $\lambda$  anpassen.

Setzen wir im ersten Durchlauf  $\lambda = 1$  erhalten wir eine Gummiband-Repräsentation die  $\phi$  respektiert. Wir wollen nun anhand dieser Einbettung  $\lambda$  verändern um, Iteration für Iteration, eine „schönere“ Einbettung zu erhalten. Halten wir drei Punkte fest, die wir intuitiv, in absteigender Reihenfolge, als Bewertungsmaßstab für eine schöne Einbettung berücksichtigen wollen.

- Alle inneren Gebiete haben eine ähnliche Größe.
- Es existieren keine zu langen oder kurzen Kanten.
- Es existieren keine Ecken mit zu kleinen oder großen Winkeln.

TODO

## 4.2 Statistische Betrachtung

Für eine statistische Betrachtung der Häufigkeit von Graphen mit SLTRs wurde das Programm auf pseudo-zufällige Graphen laufen lassen. Hier würde eine gleichmäßige Wahl von (intern-)3-zusammenhängenden Graphen unter Umständen andere Ergebnisse liefern. Ein uniformer Algorithmus zur zufälligen Erstellung 3-zusammenhängender planarer Graphen lässt sich zum Beispiel nach einem Ansatz von Fusy aus [Fus07] erstellen. Als Teilschritt der Erstellung eines uniformen Samplers für planare Graphen werden hier 3-zusammenhängende planare Graphen mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit erzeugt. Die Implementierung ist jedoch aufgrund der Auswertung von Erzeugendenfunktionen, nicht trivial. Diese Analyse beschränkt sich daher auf pseudo-zufällig erzeugte Graphen.

In Abbildung 4.1 sind die Ergebnisse für Graphen von vier bis TODO Knoten dargestellt, mit jeweils TODO Graphen für jede Knotenzahl. Wir übergeben dem Programm einen Graphen mit Aufhängungen  $\{a_1., a_2, a_3\}$ , was im Falle 3-zusammenhängender planer Graphen mit mehr als drei Knoten ein äusseres Gebiet induziert. Ein Punkt in der Abbildung entspricht einem Graphen. Die Farben stehen für eine SLTR (blau), nur ein FAA (rot) oder einen Graphen mit keinem von beiden (grün).

TODO

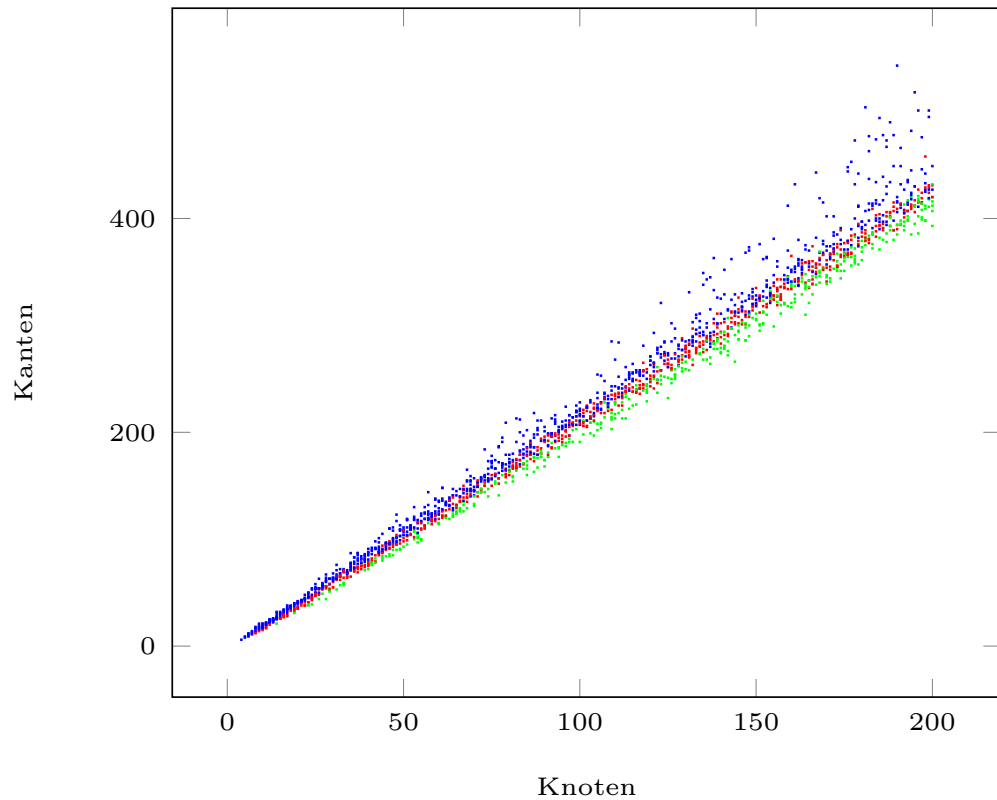


Abbildung 4.1: Anwendung des Programms auf pseudo-zufällige, planare, 3-zusammenhängende Graphen, mit gegebenen Aufhängungen. Jeder Punkt entspricht einem Graphen mit SLTR (blau), nur mit FAA (rot) und ohne FAA (grün).

## Literaturverzeichnis

- [AF13a] Nieke Aerts and Stefan Felsner, *Henneberg steps for triangle representations*, The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, Springer, 2013, pp. 503–509.
- [AF13b] ———, *Straight line triangle representations*, International Symposium on Graph Drawing, Springer, 2013, pp. 119–130.
- [AF15] ———, *Straight line triangle representations via schnyder labelings*, J. Graph Algorithms Appl. **19** (2015), no. 1, 467–505.
- [Fár48] István Fáry, *On straight-line representation of planar graphs*, Acta Sci. Math. **11** (1948), 229–233.
- [Fel01] Stefan Felsner, *Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes*, Order **18** (2001), no. 1, pp. 19–37.
- [Fel04] ———, *Lattice structures from planar graphs*, the electronic journal of combinatorics **11** (2004), no. 1, 15.
- [Fel12] ———, *Geometric graphs and arrangements: some chapters from combinatorial geometry*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [FS17] Stefan Felsner and Manfred Scheucher, *Arrangements of pseudocircles: triangles and drawings*, International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization, Springer, 2017, pp. 127–139.
- [Fus07] Éric Fusy, *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*, Ph.D. thesis, Citeseer, 2007.
- [Glp12] *Gnu Linear Programming Kit (Version 8.3)*, 2012, <http://www.gnu.org/software/glpk/>.
- [Hu63] T Chiang Hu, *Multi-commodity network flows*, Operations research **11** (1963), no. 3, 344–360.
- [LV99] László Lovász and Katalin Vesztergombi, *Geometric representations of graphs*, Paul Erdos and his Mathematics (1999).
- [S<sup>+</sup>18] W.A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 8.3)*, The Sage Development Team, 2018, <http://www.sagemath.org>.

- [Sch89] Walter Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989), no. 4, pp. 323–343.
- [Sch90] ———, *Embedding planar graphs on the grid*, pp. 138–148.
- [Tut63] William Thomas Tutte, *How to draw a graph*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1963), no. 1, 743–767.