

Technische Universität Berlin

Master Arbeit

---

# Grapheneinbettungen und Optimierung

---

*Autor:*  
Jonas Neukamm

*Betreuer und Erstgutachter:*  
Prof. Dr. Stefan Felsner

*Matrikelnummer:*  
324283

*Zweitgutachter:*  
Dr. Frank Lutz

*Masterarbeit zur Prüfung zum Master of Science  
an der*

Technische Universität Berlin  
Institut für Mathematik

7.6.2019



## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

.....

Jonas Neukamm



# Zusammenfassung

To Do



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs) . . . . .	2
1.2 Schnyder Woods . . . . .	3
<b>2 Hauptteil</b>	<b>7</b>
2.1 Harmonische Funktionen . . . . .	7
2.2 Ecken kompatible Paare . . . . .	7
<b>3 Algorithmen zur Erkennung von SLTR</b>	<b>9</b>
3.1 SLTR via Zwei-Fluss . . . . .	9
3.1.1 Schnyder-Wood-Fluss . . . . .	9
3.1.2 FAA-Fluss . . . . .	11
3.1.3 Das Zwei-Fluss Netzwerk . . . . .	11
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>13</b>





# 1 Grundlagen

Wir werden uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten  $V$  und Kanten  $E \subseteq (V \times V)$ . Eine Kante  $uv$  verbindet die beiden Knoten  $u$  und  $v$ . Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *planen Graphen*. Sei Für einen planaren Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces)  $F$  betrachten. Bei einem planen Graph wird das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet definiert. Für die weiteren Betrachtungen macht es oft Sinn drei Knoten  $a_1, a_2, a_3$  im äusseren Gebiet gesondert zu betrachten und diese die *Aufhängungen* von  $G$  zu nennen.

Planare Graphen haben, durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen, in gewissem Sinne besonders schöne Zeichnungen und so ist einer der Fragen mit der sich schon viele Mathematiker auseinander gesetzt haben: "*How to draw a Graph?*"[Tut63]

Bei topologische Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt die sich nur in den Knoten treffen. In den Fünfzigern wurde unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen mit einem beliebigen äusseren Gebiet eine geradlinige Zeichnung existiert. [Fár48]

**Definition 1.1** (intern zusammenhängend). Ein Graph  $G$  ist zusammenhängend falls für alle Knoten  $u, v$  ein Pfad von  $u$  nach  $v$  existiert.  $G$  ist  $k$ -zusammenhängend, falls er nach der Entfernung von  $k - 1$  beliebigen Knoten weiterhin zusammenhängend ist. Sei  $G$  plan mit den Aufhängungen  $a_1, a_2, a_3$ , weiter sei  $a_\infty$  ein zusätzlicher Knoten im äusseren Gebiet. Dann ist  $G$  *intern  $k$ -zusammenhängend*, falls  $G \cup \{a_1 a_\infty, a_2 a_\infty, a_3 a_\infty\}$   $k$ -zusammenhängend ist.

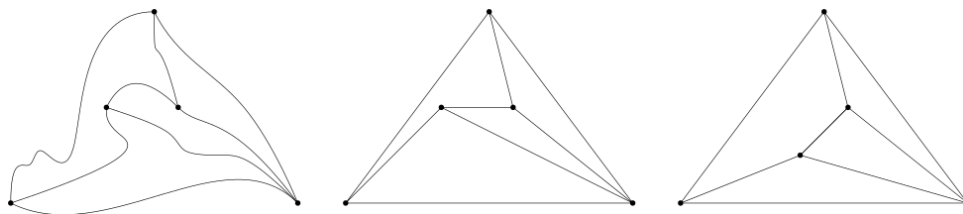


Abbildung 1.1: Planarer Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen und einer konvexen Zeichnung.

In den Siebzigern betrachtete William Thomas Tutte die Unterklasse der drei-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern sogar *konvexe* Zeichnungen existieren, bei denen alle Gebiete die konvexe Polygone umranden. [Tut63]

## 1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)

Ausgehend von der konvexen Darstellung nach Tutte, kann man sich die Frage stellen unter welchen Voraussetzungen wir einen planaren Graphen so zeichnen können, dass alle Gebiete, inklusive dem Äusseren Dreiecken umranden. Bei der Formalisierung dieser Darstellung und ersten Feststellungen halten wir uns an Niek Aerts und Stefan Felsner [AF13b].

**Definition 1.2** (SLTR). Eine Zeichnung eines planen Graphen  $G$  wird Gradlinige Dreiecks Darstellung, im weiteren kurz *SLTR* (für die englische Bezeichnung Straight Line Triangle Representation), genannt falls gilt:

- S1 Alle Kanten Segmente von Geraden
- S2 Alle Gebiete, inklusive dem äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.

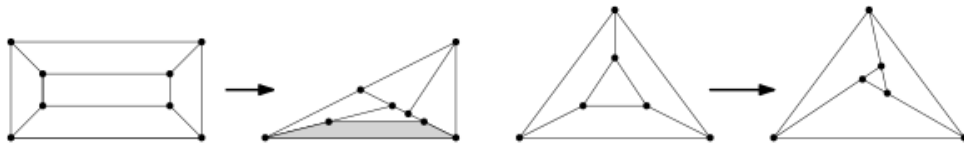


Abbildung 1.2: Links einer der beiden drei-zusammenhängenden Graphen auf acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Um die Problemstellung greifbarer zu machen werden wir planare Graphen zusammen mit den drei Aufhängungen  $a_1, a_2$  und  $a_3$  als designierten Ecken einer möglichen SLTR betrachten. Einen Graphen zusammen mit einem äusseren Gebiet bzw. Aufhängungen zu betrachten, macht auch in sofern Sinn, dass kombinatorische Graphen existieren, von denen manche Einbettungen SLTRs zulassen, andere jedoch nicht, so wie in Abbildung ?? zu sehen.

**Proposition 1.3.** Sei  $G$  ein Graph mit Aufhängungen  $a_1, a_2, a_3$  als äusseren Ecken einer SLTR. Weiter gebe es keinen Knoten von Grad zwei der in beiden angrenzenden Gebieten den Winkel  $\pi$  hat<sup>1</sup>. Dann ist  $G$  intern-drei-zusammenhängend<sup>1.1</sup>.

Wir werden also von nun an, der Einfachheit halber intern-drei-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen mit SLTR auf diese

<sup>1</sup>Ein solcher Knoten ist keine Aufhängung, da der Aussenwinkel grösser als  $\pi$  ist. Alle anderen Knoten haben  $\leq \pi$  Winkel. Somit können wir ihn durch eine gerade Kante zwischen seinen Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten.

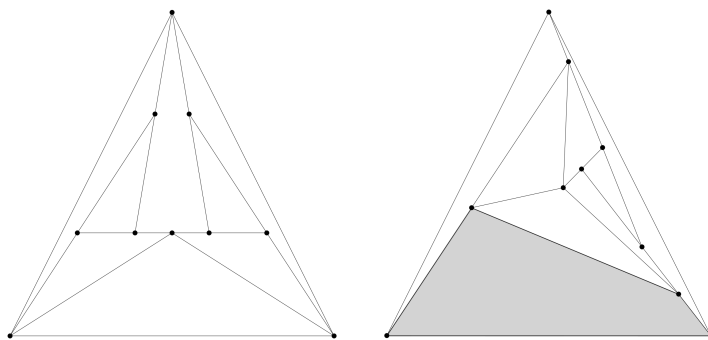


Abbildung 1.3: Der kleinste drei-zusammenhängende kombinatorische Graph mit einer Wahl der Aufhängungen die eine SLTR zulässt und einer Auswahl ohne SLTR.

reduziert werden können.

Zu den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen es für die Existenz von SLTRs gibt und welche algorithmischen Ansätze es bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung gibt haben Aerts und Felsner in [AF13b], [AF13a] und [AF15] schon einige Antworten geliefert, mit denen wir uns in den nächsten beiden Kapiteln beschäftigen werden. Zuerst müssen aber in diesem Kapitel noch ein paar notwendige Konzepte eingeführt werden.

## 1.2 Schnyder Woods

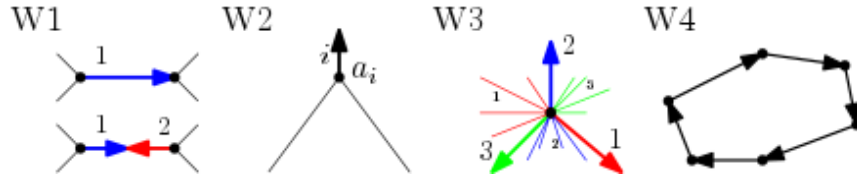
Schnyder Wälder, im weiteren *Schnyder Woods*, wurden zuerst von Walter Schnyder zur Betrachtung der Ordnungs-Dimension planarer Graphen, als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung, betrachtet [Sch89]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer planaren Einbettung auf einem  $n - 2 \times n - 2$  Netz [Sch90]. Im Folgenden werden wir die Verallgemeinerung auf 3-zusammenhängende plane Graphen durch Felsner [Fel01] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings einführen und uns dabei an [?] orientieren.

Für den Rest dieses Kapitels meinen wir mit  $G$ , wenn nicht weiter spezifiziert, einen 3-zusammenhängenden planen Graphen mit Aufhängungen  $a_1, s_2, a_3$ .

**Definition 1.4** (Schnyder Woods). Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von  $G$  mit den Labeln 1, 2 und 3, unter Berücksichtigung der folgenden Regeln<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>Alternativ wird hier auch anschaulicher von rot, grün und blau als Platzhalter für 1, 2 und 3 gesprochen. Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass  $i + 1$  und  $i - 1$  immer definiert sind.

- W1 Jede Kante ist entweder un- oder bigerichtet. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.
- W2 An jeder Aufhängung  $a_i$  existiert eine nach aussen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label  $i$ .
- W3 Jeder Knoten  $v$  hat Ausgangsgrad eins zu jedem Label. Um  $v$  existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.
- W4 Es existiert inneres Gebiet mit gerichteten Zykel in einer Farbe als Rand.



Die Existenz von Schnyder Wood für jeden 3-zusammenhängenden planen Graphen werden wir weiter unten zeigen. Zunächst wollten wir uns mit Resultaten im Bezug auf Einbettungen befassen. Wir wollen hier kurz, das *face-counting*[Fel01] erläutern. Betrachten wir also  $G$  zusammen mit einem Schnyder Wald  $T_1, T_2, T_3$ . Nach [?, Korollar 2.5] handelt es sich bei den  $T_i$  um gerichtete Bäume mit Wurzeln in  $a_i$ . Zu jedem Knoten  $v$  existierten also eindeutige Pfade  $P_i(v)$  zu den Aufhängungen  $a_i$ . Die Pfade von  $v$  zu den Aufhängungen treffen sich nach [?, Lemma 2.4] nur in  $v$ . Somit können wir zu jedem Knoten  $v$  die von den Pfaden  $P_{i-1}(v)$  und  $P_{i+1}$  und dem äusseren Gebiet begrenzte Region  $R_i$  betrachten. Durch das Zählen der Gebiete in den diesen Regionen lässt sich nun eine konvexe Zeichnung von  $G$  erzeugen.

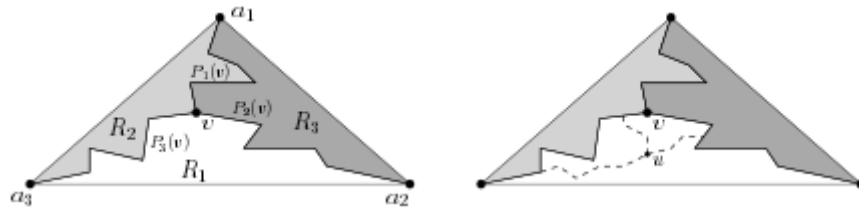


Abbildung 1.4: Regionen zu  $v$  und die Inklusion von  $R_i(u)$  in  $R_i(v)$  falls  $u \in R_i(v)$ .

Hierzu ordnet man jedem Knoten  $v$  seinen Gebiets Vektor  $(v_1, v_2, v_3)$  zu, wobei  $v_i$  die Anzahl der inneren Gebiete in  $R_i$  beschreibt. Nun gilt für jeden Knoten  $v_1 + v_2 + v_3 = |F| - 1$ . Seien  $\alpha_1 = (0, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0)$  und  $\alpha_3 = (0, 0)$ , dann erhalten wir die Zeichnung durch die Funktion

$$\mu : v \rightarrow v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3.$$

Nach [?, Theorem 2.7] ist die mit diesen Koordinaten erzeugte Zeichnung planar und konvex. Sie hat sogar noch die schöne Eigenschaft, dass sich die Knoten an jedem innern Gebiet auf dem Rand eines Dreiecks befinden, wie in Abbildung ?? illustriert.

// TODO Schnyder Triangle Bild ?!

Eine weitere Methode um aus Schnyder Woods, über geodätische Einbettung, zu einer konvexen Zeichnung zu gelangen, wird ebenfalls in [?] beschrieben.

**Definition 1.5** (Schnyder Labeling). Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung Winkel von  $G$  mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von  $1_{\text{en}}$ ,  $2_{\text{en}}$  und  $3_{\text{en}}$ . Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.
- L2 Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von  $1_{\text{en}}$ ,  $2_{\text{en}}$  und  $3_{\text{en}}$ .
- L3 An Aufhängung  $a_i$  haben äusseren Winkel die Label  $i-1$  und  $i+1$  im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label  $i$ .

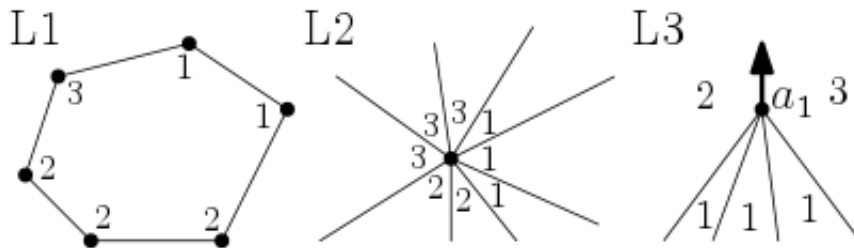


Abbildung 1.5: Aus L1 und L2 folgt, dass es in einem Schnyder Labeling nur Kanten von Typ A oder B, siehe Abbildung ??, gibt.

Durch Abbildung ?? wird eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings geschaffen. Wenn wir uns auf drei-zusammenhängende planare Graphen beschränken, dann ist die dargestellte Abbildung nach [?, Theorem 2.3] eine Bijektion.

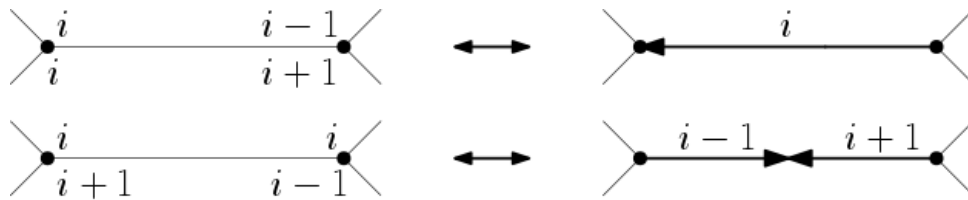


Abbildung 1.6

Mithilfe der Schnyder Labelings können wir kurz auf die Existenz einer Schnyder Woods, bzw. Schnyder Labelings, für einen beliebigen 3-zusammenhängenden planaren Graphen eingehen. Der

// TODO



## 2 Hauptteil

In diesem Kapitel wollen wir uns mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von SLTRs auseinandersetzen. Hierzu führen wir zuerst eine in gewisser Weise schwächere Bedingung für planare Graphen ein.

**Definition 2.1** (FAA). Sei  $G = (V, E, F)$  ein planer Graph, dann ist eine Fläche Winkel Zuordnung, im weiteren (nach dem englischen *flat angle assignment*) mit FAA bezeichnet, ein Matching zwischen Knoten und Gebieten, sodass:

A1 Jedem Gebiet  $f$  sind genau  $\deg(f) - 3$  Knoten zugeordnet.

A2 Jeder Knoten  $v$  ist höchstens einem Gebiet zugeordnet.

Für den Fall das wir einen Graph mit Aufhängungen betrachten, dann fordern wir zusätzlich:

A3 Die inzidenten Knoten am äusseren Gebiet, die keine Aufhängungen sind, müssen dem äusseren Gebiet zugeordnet werden.

Somit gibt uns ein SLTR auch ein FAA, in die andere Richtung gilt dies aber im allgemeinen nicht.

### 2.1 Harmonische Funktionen

### 2.2 Ecken kompatible Paare





## 3 Algorithmen zur Erkennung von SLTR

Im vorherigen Kapitel wurden Kriterien für die Existenz einer SLTR erarbeitet, die allerdings nicht sofort einen Algorithmus, sowohl zur Frage nach der Existenz, als auch zum Erlangen einer spezifischen SLTR liefern. Diesem Thema wollen wir uns nun im folgenden Kapitel zuwenden und dafür zum Einstieg einen von Aerts und Felsner in [AF13b] erarbeiteten Algorithmus betrachten.

### 3.1 SLTR via Zwei-Fluss

Wir betrachten im folgenden gerichtete Graphen. Das Ziel ist es, für einen gegebenen Graphen sowohl einen Schnyder Wood als auch ein FAA jeweils als Lösung eines Fluss-Problems zu erhalten und diese beiden dann in einem Zwei-Fluss-Problem zu kombinieren, sodass eine Lösung ein Ecken-Kompatibles-Paar gibt und wir somit eine SLTR erhalten. Wir beschäftigen uns also mit der folgenden Problemstellung.

**Definition 3.1** (Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem). Sei  $D = (V, E)$  ein gerichteter Graph, im Weiteren auch Netzwerk genannt, mit den Kapazitäten  $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$ , Paaren von ausgezeichneten Knoten  $\{(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)\}$  und positiven Bedarfen  $\{d_1, \dots, d_n\}$ , dann ist  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ein zulässiger Fluss, falls

$$\text{F1 } \forall (u, v) \in E : \sum_{i=1}^n \varphi_i(u, v) \leq c(u, v)$$

$$\text{F2 } \forall u \neq s_i, t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(u, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, u)$$

$$\text{F3 } \forall s_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(s_i, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, s_i) = d_i$$

$$\text{F4 } \forall t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(w, t_i) - \sum_{w \in V} \varphi_i(t_i, w) = d_i$$

Im Fall  $n = 1$  und Kapazitäten  $c : E \mapsto \mathbb{N}$  impliziert die Existenz eines zulässigen Flusses die Existenz einer ganzzahligen Lösung. Für  $n = 2$  und wir ungerichtete Netzwerke zeigt [?] die selbe Eigenschaft. Dies gilt jedoch im Fall  $n \geq 2$  für gerichtete Graphen nicht mehr.

#### 3.1.1 Schnyder-Wood-Fluss

Um einen Schnyder Wood zu erhalten folgen wir [Fel04]. Wir betrachten den Primal-Dual Graphen  $G + G^*$  eines planen Graphen  $G$ . Hier ist  $G^*$  der schwache duale Graph zusammen mit einer Halbkante ins äussere Gebiet von jeder inzidenten Kante aus. Die Menge der Knoten von  $G + G^*$  besteht aus Knoten-Knoten, Kanten-Knoten und Gebiets-Knoten, mit Kanten in  $G + G^*$ , sowohl zwischen inzidenten Kanten und

Knoten, als auch Kanten und Gebieten in  $G$ . Somit ist  $G + G^*$  bipartit. Falls wir einen Knoten  $f_\infty$  für das äussere Gebiet einsetzen und die Halbkanten verlängern sprechen wir vom Abschluss von  $G + G^*$ . Wir bezeichnen diesen mit  $\tilde{G}$ .

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $\alpha : V \mapsto \mathbb{N}$  eine Funktion auf  $G$ . Eine  $\alpha$ -Orientierung ist eine Orientierung auf  $G$ , sodass der Ausgrad eines jeden Knoten  $\alpha(v)$  entspricht. Das folgende Theorem stammt ebenfalls aus [Fel04].

**Theorem 3.2.** *Sei  $G$  ein planer Graph mit Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , dann sind die folgenden Strukturen in Bijektion:*

- Die Schnyder Wälder auf  $G$ .
- Die Schnyder Wälder auf dem (schwachen) dualen Graph  $G^*$ .
- Die  $\alpha_s$ -Orientierungen des Abschlusses von  $G + G^+$  mit  $\alpha_s(v) = 3$  für jeden Knoten- und Gebiets-Knoten,  $\alpha_s(e) = 1$  für jeden Kanten-Knoten und  $\alpha_s(f_\infty) = 0$ .

Fusy zeigt in [Fus07] im Zuge der Untersuchung spezifischer  $\alpha$ -Funktionen, dass sich  $\alpha_s$ -Orientierungen von  $G + G^*$  in linearer Zeit berechnen lassen.

Machen wir uns also an die Konstruktion eines Netzwerks  $\mathcal{N}$  mit einer Quelle und Senke, sodass eine zulässige Lösung  $\varphi$  einer  $\alpha_s$ -Orientierung von  $\tilde{G}$  entspricht, und somit auch einen Schnyder Wald auf  $G$  liefert. Besonderes Augenmerk ist hier auf die Möglichkeit einer späteren Kombination mit einem FAA Fluss gelegt, um ein Zwei-Fluss-Problem zu erstellen, und nicht unbedingt auf Effizienz.

Wie oben schon erwähnt ist  $\tilde{G}$  bipartit, Kanten-Knoten haben Grad 4, Knoten-Knoten Grad  $\deg(v)$  und Gebiets-Knoten Grad  $\deg(f)$ . Für eine  $\alpha_s$ -Orientierung muss jeder Kanten-Knoten Ausgrad 1, jeder Knoten-Knoten Eingrad  $\deg(v) - 3$  und jeder Gebiets-Knoten Eingrad  $\deg(f) - 3$  haben. Die Kanten-Knoten am äusseren Gebiet sind in  $\tilde{G}$  immer nach aussen orientiert. Somit müssen wir nur die inneren Kanten-Kanten  $E_{in}$  betrachten.

Sei  $\mathcal{N}$  ein Netzwerk mit jeweils einer Quelle  $s$  und Senke  $t$ , Kanten von der Quelle zu jedem  $e \in E_{in}$  mit Kapazität 1, Kanten von den Kanten-Knoten  $e$  zu inzidenten Knoten-Knoten  $v$  und (inneren) Gebiets-Knoten  $f \in F_{in}$  in  $G$  ebenfalls mit Kapazität 1, Kanten von  $f \in F_{in}$  zur Senke mit Kapazitäten  $\deg(f) - 3$ , Kanten von den (inneren) Knoten-Knoten  $v \in V_{in} = V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  zur Senke mit Kapazitäten  $\deg(v) - 3$  und Kanten von den Aufhängungen  $a_i$  zur Senke mit Kapazitäten  $\deg(v) - 2$ . Die letzte Kapazität resultiert aus dem Fakt, dass die Halbkante in  $G + G^*$  immer nach aussen orientiert ist und wir somit nur noch zwei andere Kanten nach aussen orientieren müssen.

Der Bedarf des Netzwerkes entspricht der Anzahl der inneren Kanten von  $G$ . Sei  $\varphi$  eine zulässige ganzzahlige Lösung, dann hat jeder Kanten-Knoten  $e$  Ausgrad 1. Der Fluss entlang einer Auskante von  $e \in E_{in}$  in  $\mathcal{N}$  entspricht dann genau der hin zu  $e$  orientierten Kante in  $G + G^*$ . Somit entspricht  $\varphi$  einem Schnyder Wald auf  $G$ .

### 3.1.2 FAA-Fluss

Um ein FAA auf  $G$  mit gegebenen Aufhängungen  $\{a_1, a_2, a_3\}$  zu erhalten müssen wir jedem inneren Gebiet  $f \in F_{in}$  genau drei Ecken und  $\deg(f) - 3$  flache Winkel zuordnen und jeder innere Knoten darf maximal einem Gebiet zugeordnet, also in diesem flach, sein.

Sei also wieder  $\mathcal{N}$  ein Netzwerk mit einer Quelle und Senke, einem Knoten für jeden inneren Winkel  $(f, v)$  für  $v \in V, f \in F_{in}$ , und Knoten für alle inneren Gebiete  $f$  und alle Knoten  $v$ . Von der Quelle existiert eine Kante mit Kapazität 1 zu jedem inneren Winkel  $(f, v)$ , von jedem inneren Winkel  $(f, v)$  jeweils eine Kante zu  $f$  und zu  $v$  mit Kapazität 1, von jedem inneren Gebiet  $f$  eine Kante mit Kapazität 3 zur Senke und zuletzt noch eine Kante von jedem inneren Knoten  $v$  zur Senke mit Kapazität 1.

Der Bedarf des Netzwerks ist  $\sum_{f \in F_{in}} \deg(f)$ , die Anzahl der inneren Winkel von  $G$ . Sei  $\varphi$  ein zulässiger ganzzahlige Fluss, dann entspricht Fluss auf einer Kante  $((f, v), f)$  einer Ecke von  $f$  und Fluss auf  $((f, v), v)$  einem flachen Winkel. Somit entspricht die eine Auskante von  $e$  die von  $\varphi$  genutzt wird der von  $e$  weg orientierten Kante auf  $G + G^*$  und die Knoten- und Gebiets-Knoten haben genau  $\deg(v) - 3$  bzw.  $\deg(f) - 3$  zu ihnen orientierte Kanten. Eine zulässiger ganzzahliger Fluss kodiert also ein FAA.

### 3.1.3 Das Zwei-Fluss Netzwerk

Nachdem wir nun sowohl für Schnyder Woods als auch für FAAs ein Netzwerk betrachtet haben, für das eine ganzzahlige Lösung eine einen Schnyder Wood bzw. ein FAA auf  $G$  liefert, wollen wir jetzt eine Kombination aus beiden erstellen, um ein



## Literaturverzeichnis

- [AF13a] Nieke Aerts and Stefan Felsner, *Henneberg steps for triangle representations*, The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, Springer, 2013, pp. 503–509.
- [AF13b] ———, *Straight line triangle representations*, International Symposium on Graph Drawing, Springer, 2013, pp. 119–130.
- [AF15] ———, *Straight line triangle representations via schnyder labelings*, J. Graph Algorithms Appl. **19** (2015), no. 1, 467–505.
- [Fár48] István Fáry, *On straight-line representation of planar graphs*, Acta Sci. Math. **11** (1948), 229–233.
- [Fel01] Stefan Felsner, *Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes*, Order **18** (2001), no. 1, pp. 19–37.
- [Fel04] ———, *Lattice structures from planar graphs*, the electronic journal of combinatorics **11** (2004), no. 1, 15.
- [Fus07] Éric Fusy, *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*, Ph.D. thesis, Citeseer, 2007.
- [Sch89] Walter Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989), no. 4, pp. 323–343.
- [Sch90] ———, *Embedding planar graphs on the grid*, in Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Disc. Algo., Philadelphia, PA, USA (1990), pp. 138–148.
- [Tut63] William Thomas Tutte, *How to draw a graph*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1963), no. 1, 743–767.