Technische Universität Berlin

Master Arbeit

Grapheneinbettungen und Optimierung

Autor:
Jonas Neukamm

Matrikelnummer:
324283

Betreuer und Erstgutachter:
Prof. Dr. Stefan Felsner

Zweitgutachter:
Dr. Frank Lutz

Masterarbeit zur Prüfung zum Master of Science

an der

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

7.6.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

....

Jonas Neukamm

Zusammenfassung

To Do

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Diese Arbeit wird sich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten V und Kanten $E \subseteq (\, V \times V\,)$. Eine Kante (u, v) verbindet die beiden Knoten u und v. Ein Pfad von u nach v ist eine Folge von Kanten, die u und v verbindet. Mit dem Grad $deg(v)$ eines Knoten meinen wir die Anzahl der adjazenten Kanten.

Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *planen Graphen.* Für einen planen Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces) F betrachten, die durch die Kanten und Knoten begrenzten Regionen in der Ebene, wobei wird das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet bezeichnen. Für die weiteren Betrachtungen macht es oft Sinn drei Knoten $\{a_1, a_2, a_3\}$ die das äusseren Gebiet berühren gesondert zu betrachten. Wir nennen sie die *Aufhängungen* von G und bezeichnen G als *aufgehängten* Graphen.

Planare Graphen haben durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen in gewissem Sinne besonders schöne Zeichnungen. So ist einer der Fragen, mit der sich schon viele Mathematiker*innen auseinander gesetzt haben und auf die auch in dieser Arbeit eingegangen wird: *"How to draw a Graph?"*[**?**]

Bei einer topologischen Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt, die sich nur in den Knoten treffen. In den Fünfzigern wurde unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen und für jede Wahl eines äusseren Gebietes eine geradlinige und kreuzungsfreie Einbettung existiert [**?**].

Definition 1.1 (intern zusammenhängend)**.** Ein Graph G ist zusammenhängend falls für alle Knoten u, v ein Pfad von u nach v exisitert. G ist *k-zusammenhängend*, falls er nach der Entfernung von $k - 1$ beliebigen Knoten weiterhin zusammanhängend ist. Sei G plan mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, weiter sei a_∞ ein zusätzlicher Knoten eingefügt im äusseren Gebiet. Dann ist G *intern k-zusammenhängend*, falls $G = (V, E \cup \{(a_1, a_\infty), (a_2, a_\infty), (a_3, a_\infty)\})$ k-zusammenhängend ist.

In den Siebzigern betrachtete William Thomas Tutte die Unterklasse der 3-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern sogar *konvexe* Zeichnungen existieren. Bei einer konvexen Einbettung entsprechen die Kantenfogen, die ein Gebiet einschließen, den Randkurven von konvexen Polygonen [**?**].

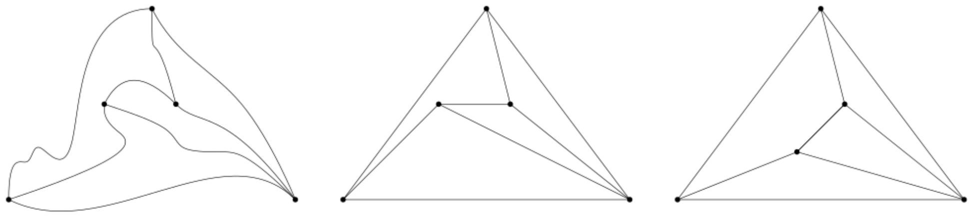


Abbildung 1.1: Planarer Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen und einer konvexen Zeichnung.

1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)

Ausgehend von den konvexen Einbettungen nach Tutte, kann man sich die Frage stellen, unter welchen Vorraussetzungen wir einen planaren Graphen so zeichnen können, dass alle Gebiete Dreiecke umranden. Die Formalisierung dieser Darstellung und erste Folgerungen folgen Nieke Aerts und Stefan Felsner [**?**, **?**].

Definition 1.2 (SLTR)**.** Eine Zeichnung eines planen Graphen G wird *geradlinige Dreiecks Darstellung*, im weiteren kurz *SLTR* (für die englische Bezeichnung *staight line triangle representation*), genannt falls gilt:

S1 Alle Kanten sind Segmente von Geraden.

S2 Alle Gebiete, inklusive dem Äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.

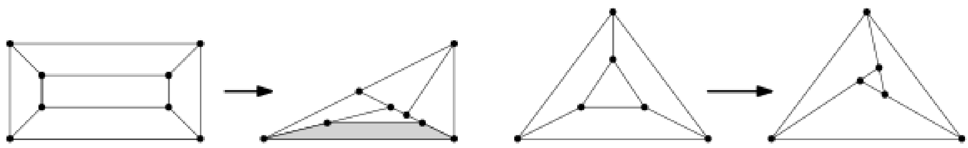


Abbildung 1.2: Links einer der beiden 3-zusammenhängenden Graphen auf acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Um die Problemstellung greifbarer zu machen kann man plane Graphen zusammen mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ betrachten, wobei $\{a_1, a_2, a_3\}$ hier die designierten Ecken des äusseren Gebietes einer möglichen SLTR sind. Einen Graphen zusammen mit einem äusseren Gebiet bzw. festen Aufhängungen als Paar zu behanden ist sinnvoll, weil planare Graphen existieren, von denen manche Einbettungen, SLTRs zulassen, andere jedoch nicht, so wie in Abbildung 1.3 zu sehen. Zumindest für 3-zusammenhängende planare Graphen ist die topologische Einbettung nach der Auswahl der Aufhängungen eindeutig.

Proposition 1.3. *[**?**, Proposition 1.2] Sei G ein planer Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ als äussere Ecken einer SLTR. Weiter gebe es keine inneren Knoten v mit $deg(v) < 3$. Dann ist G intern-3-zusammenhängend.*

Bemerkung. Für innere Knoten von Grad 2 in einer SLTR müssen beide angrenzenden Winkel gerade sein. Somit kann man diese Knoten durch eine gerade Kante zwischen ihren Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten. Wir werden somit von nun an nur intern-3-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen, die eine SLTR zulassen, auf diese reduziert werden können.

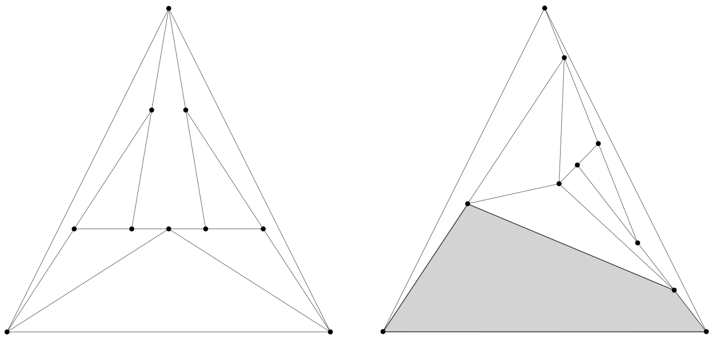


Abbildung 1.3: Der kleinste 3-zusammenhängende kombinatorische Graph mit einer Wahl der Aufhängungen die eine SLTR zulässt und einer Auswahl ohne SLTR.

Zu den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen es für die Existenz von SLTRs gelten und welche algorithmischen Ansätze man bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung verfolgen kann, haben Aerts und Felsner in [**?**], [**?**] und [**?**] schon einige Antworten geliefert. Die nächsten zwei Kapitel, werden sich damit beschäftigen. Zuvor müssen in diesem Kapitel noch ein paar notwendige Konzepte eingeführt werden.

1.2 Schnyder Woods

Schnyder Wälder, im weiteren *Schnyder Woods*, wurden zuerst von Walter Schnyder zur Betrachtung der Ordnungs-Dimension planarer Graphen, als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung, betrachtet [**?**]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer planaren Einbettung auf einem $(n-2) \times (n-2)$ Gitter [**?**]. Dieser Abschnitt führt die Verallgemeinerung auf 3-zusammenhängende plane Graphen durch Felsner [**?**] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings ein und orientiert sich an [**?**].

Für den Rest dieses Kapitels sei G, wenn nicht weiter spezifiziert, ein 3-zusammenhängenden planer Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Definition 1.4 (Schnyder Woods)**.** Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von G mit den Labeln 1, 2 und 3[1], unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

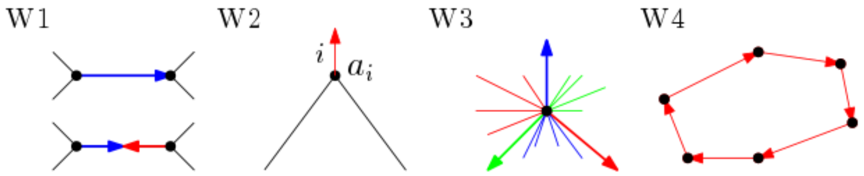
[1] Alternativ wird hier auch anschaulicher von rot, grün und blau als Platzhalter für 1, 2 und 3

W1 Jede Kante ist entweder un- oder bigerichtet. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.

W2 An jeder Aufhängung a_i existiert eine nach aussen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label i.

W3 Jeder Knoten v hat hat Ausgangsgrad eins zu jedem Label. Um v existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.

W4 Es existiert kein inneres Gebiet mit gerichteten Zykel in einer Farbe als Rand.



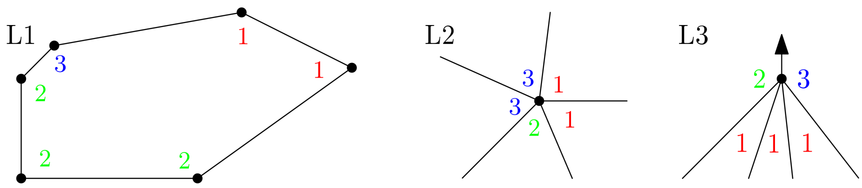
Analog zu den Schnyder Woods, kann man Schnyder Labelings definieren, die zu diesen in Bijektion stehen.

Definition 1.5 (Schnyder Labeling)**.** Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung der Winkel von G mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en. Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.

L2 Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en.

L3 An Aufhängung a_i haben äusseren Winkel die Label i-1 und i+1 im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label i.



In Abbildung 1.4 wird eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings illustriert. Aus L1 und L2 folgt, dass es nur die beiden Kanten Typen aus

gesprochen. Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass $i+1$ und $i-1$ immer definiert sind.

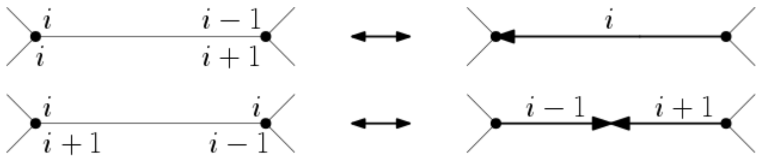


Abbildung 1.4: Bijektion zwischen Schnyder Wood auf der rechten und Schnyder Labeling auf der linken Seite.

der Abbildung geben kann. Wenn wir uns auf 3-zusammenhängende planare Graphen beschränken, dann ist die dargestellte Abbildung nach [**?**, Theorem 2.3] eine Bijektion.

Es existieren einige Anwendungen von Schnyder Woods im Bezug auf Einbettungen. Eine ist das im Folgenden skizzierte *face-counting* [**?**]. Betrachte G mit einem Schnyder Wood T_1, T_2, T_3. Nach [**?**, Korollar 2.5] handelt es sich bei den T_i um gerichtete Bäume mit Wurzeln in a_i. Von jedem Knoten v aus existierten also eindeutige Pfade $P_i(v)$ zu den Aufhängungen a_i. Die Pfade von v zu den Aufhängungen treffen sich nach [**?**, Lemma 2.4] nur in v. Somit können wir zu jedem Knoten v die von den Pfaden $P_{i-i}(v)$ und $P_{i+1}(v)$ und dem äusseren Gebiet begrenzte Region R_i betrachten. Durch das Zählen der Gebiete in den Regionen zu v lässt sich nun eine konvexe Zeichnung von G erzeugen.

Hierzu ordnet man jedem Knoten v seien Gebiets Vektor (v_1, v_2, v_3) zu, wobei v_i die Anzahl der inneren Gebiete in $R_i(v)$ beschreibt. Nun gilt für jeden Knoten $v_1 + v_2 + v_3 = |F| - 1$. Seien $\alpha_1 = (0,1), \alpha_2 = (1,0)$ und $\alpha_3 = (0,0)$ die äusseren Ecken unserer Zeichnung, dann erhalten wir die Position der inneren Knoten durch die Funktion

$$\mu : v \to v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3.$$

Nach [**?**, Theorem 2.7] ist die mit diesen Koordinaten erzeugte Zeichnung planar und konvex und passt auf ein $(|F| - 1) \times (|F| - 1)$-Gitter. Sie hat noch eine weitere Eigenschaft die später von Nutzen ist.

W5 Die Knoten eines inneren Gebietes werden auf die Seiten eines Dreiecks mit den Seiten $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$ mit passenden Konstanten c_i. Im inneren dieses Dreiecks befinden sich keine Knoten und die Winkel des Gebietes auf der Seite $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$ haben Label i im Schnyder Labeling.

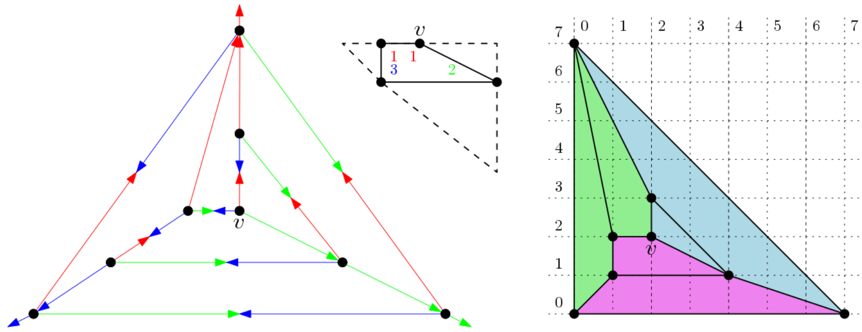


Abbildung 1.5: Eine Schnyder Wood und die durch *face counting* erhaltene Einbettung. Die eingefärbten Gebiete sind die Regionen die den Gebietsvektor (v_1, v_2, v_3) ergeben. In der Mitte ist W5 illustriert.

1.3 α-Orientierungen

Für unseren Algorithmus in Kapitel 3 führen wir eine weitere zu Schnyder-Woods und Labelings in Bijektion stehende Struktur auf Graphen ein und halten uns dabei an [**?**].

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $\alpha : V \mapsto \mathbb{N}$ eine Funktion auf G. Eine $\alpha - Orientierung$ ist eine Orientierung der Kanten von G, sodass der Ausgrad eines jeden Knoten $\alpha(v)$ entspricht. Somit gilt

$$outdeg(v) = \alpha(v).$$

Wir betrachten den Primal-Dual Graphen $G + G^*$ eines planen Graphen G. Hier ist G^* der schwache duale Graph zusammen mit einer Halbkante ins äussere Gebiet von jeder inzidenten Kante aus. Die Menge der Knoten von $G + G^*$ besteht aus Knoten-Knoten, Kanten-Knoten und Gebiets-Knoten. Kanten in $G + G^*$ existieren, sowohl zwischen inzidenten Kanten und Knoten, als auch Kanten und Gebieten in G. Somit ist $G+G^*$ bipartit. Falls wir einen Knoten f_∞ für das äussere Gebiet einsetzten und die Halbkanten verlängern, spricht man vom Abschluss von $G+G^*$ und bezeichnet diesen mit $\tilde{G}$. Das folgende Theorem liefert eine Bijektion zwischen Schnyder Woods auf G und einer bestimmten α-Orientierung auf $\tilde{G}$, die wir α_s nennen.

Theorem 1.6. *Sei G ein planer Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, dann sind die folgenden Strukturen in Bijektion:*

- *Die Schnyder Wälder auf G.*
- *Die Schnyder Wälder auf dem (schwachen) dualen Graphen G^*.*
- *Die α_s-Orientierungen des Abschlusses von $G + G^*$ mit $\alpha_s(v) = \alpha_s(f) = 3$ für jeden Knoten- und Gebiets-Knoten, $\alpha_s(e) = 1$ für jeden Kanten-Knoten und $\alpha_s(f_\infty) = 0$.*

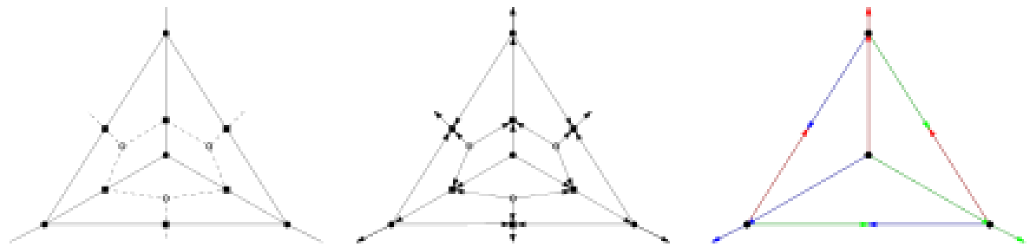


Abbildung 1.6: Der Primal-Duale Graph $K_4 + K_4^*$ mit einer $\alpha_s - Orientiertung$ und dem zugehörigen Schnyder Wood auf K_4.

1.4 Flüsse auf Graphen

Wir werden in Kapitel 3 einen gerichteten Graphen $\mathcal{N}$ konstruieren um auf diesem einen maximalen Fluss zu finden. Wir beschäftigen uns allgemein also mit der folgenden Problematik.

Definition 1.7 (Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem)**.** Sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph, im Weiteren auch Netzwerk genannt, mit den Kapaziäten $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$, Paaren von ausgezeichneten Knoten $\{(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)\}$ und positiven Bedarfen $\{d_1, ..., d_n\}$, dann ist $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ein zulässiger Fluss, falls

F1 $\forall (u, v) \in E : \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u, v) \leq c(u, v)$

F2 $\forall u \neq s_i, t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(u, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, u)$

F3 $\forall s_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(s_i, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, s_i) = d_i$

F4 $\forall t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(w, s_i) - \sum_{w \in V} \varphi_i(s_i, w) = d_i$

Es folgen zwei bekannte Resultate für den Fall $n = 1$, die später Anwendung finden werden.

Theorem 1.8 (Max-Flow Min-Cut)**.** *φ ist ein maximale Fluss in $\mathcal{N}$, genau dann, wenn für mindestens einen Schnitt $\mathcal{S} \subset E$ gilt $c(\mathcal{S}) = |\varphi|$. Die Kapazität eines minimalen Schnittes entspricht dem maximalen Fluss.*

Theorem 1.9 (Ganzzahliger Fluss)**.** *Sei $\mathcal{N}$ ein Netzwerk mit einer Quelle und einer Senke und alle Kapazitäten seien ganzzahlig, dann existiert auch ein maximaler Fluss φ, sodass der Fluss auf allen Kanten ganzzahlig ist. Es gilt also $|\varphi(e)| \in \mathcal{N}$ für alle $e \in E$.*

Bemerkung. Im Fall $n = 1$ und Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{N}$ impliziert die Existenz eines zulässigen Flusses die Existenz einer ganzzahligen Lösung, sowohl für gerichtete als auch ungerichtete Graphen. Diese lässt sich in polynomineller Zeit bestimmen. Für $n = 2$ und ungerichtete Graphen gilt dies nach [?] ebenfalls. Für diese Arbeit wäre jedoch der Fall $n = 2$ für gerichtete Graphen interessant. Leider ist hier im Allgemeinen die Lösung nur über Lineare Programmierung möglich und befindet sich somit in $\mathcal{NP}$.

2 Hauptteil

Sei G ein planer intern 3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nehmen wir für einen Moment an, dass wir schon ein SLTR für G gefunden haben, dann hat jeder Knoten v in maximal einem inzidenten Gebiet f einen flachen Winkel, den wir mit (f, v) bezeichnen, und liegt auf einer Geraden. Jedes Gebiet f hat genau drei Ecken, also $|f| - 3$ flache Winkel. Dies liefert im Umkehrschluss eine notwendige Bedingung für die Existent einer SLTR. Diese ist in der nächsten Definition festgehalten.

Definition 2.1 (FAA)**.** Sei $G = (V, E, F)$ ein planer Graph. Eine Flache Winkel Zuordnung, im weiteren (nach dem englischen *flat-angle-assignment*) mit FAA bezeichnet, ein Matching zwischen Knoten und Gebieten. Es muss gelten:

F1 Jedem Gebiet f sind genau $|f| - 3$ Knoten zugeordnet.

F2 Jeder Knoten v ist höchstens einem Gebiet zugeordnet.

Für den Fall, dass Aufhängungen gegeben sind, fordern wir zusätzlich:

F3 Die inzidenten Knoten des äusseren Gebietes, die keine Aufhängungen sind, müssen dem äusseren Gebiet zugeordnet werden.

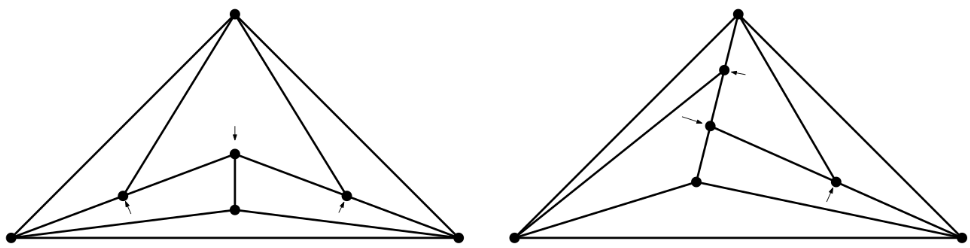


Abbildung 2.1: Ein planer Graph mit einer SLTR und einem FAA, dass keine SLTR induziert. Die Pfeile stellen hier die Zuweisung der Knoten zu den inneren Gebieten da.

Ein planer Graph kann also nur dann eine SLTR besitzen, wenn mindestens ein FAA existiert. Jedoch liefert nicht jedes FAA sofort eine SLTR. Um hinreichende Bedingungen für SLTRs zu erhalten, werden sich die nächsten beiden Abschnitten mit zwei Ansätzen nach Aerts und Felsner beschäftigen. Der erste Ansatz aus [**?**] liefert ein System aus harmonischen Gleichungen aus dessen Lösung eine SLTR folgt. In Teilen darauf basierend, stellt der zweite Ansatz aus [**?**] einen Zusammenhang zwischen Schnyder Woods und FAAs her und die Existenz passender Paare impliziert wieder die Existenz von SLTRs.

2.1 SLTRs durch harmonische Funktionen

Die Beweise zu den in diesem Kapitel aufgestellten Präpositionen und Theoremen werden ausgelassen. Sie befinden sich, wenn nicht anders angegeben, in [**?**] . Zum Einstieg eine weitere Definition, die es ermöglicht eine Beobachtung zu SLTRs festzuhalten.

Definition 2.2 (Begrenzende Zykel und kombinatorisch konvexe Ecken)**.** Sei G ein planer Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem FAA ϕ von G. Sei H ein zusammenhängender Teilgraph von G und $\gamma = \gamma(H)$, der H umrandende Weg in G. Bei γ handelt es sich um die Kanten und Knoten des äusseren Gebiets von H. Knoten und Kanten können mehrfach vorkommen. Wir werden so erhaltene γ als *begrenzende Zykel* bezeichnen. $int(\gamma)$ sei die Menge aller Knoten, Kanten und Gebiete aus G die im Inneren von γ oder auf γ liegen. Einen Knoten v aus γ bezeichnen wir als *kombinatorisch konvexe Ecke* von γ im Bezug auf ϕ, falls gilt:

E1 v ist eine Aufhängung, oder

E2 v ist nicht durch ϕ zugeordnet und es existiert eine Kante $e = (v, w)$ mit $e \notin int(\gamma)$, oder

E3 v ist einem Gebiet f zugeordnet, $f \notin int(\gamma)$ und es existiert eine Kante $e = (v, w)$, sodass $e \notin int(\gamma)$.

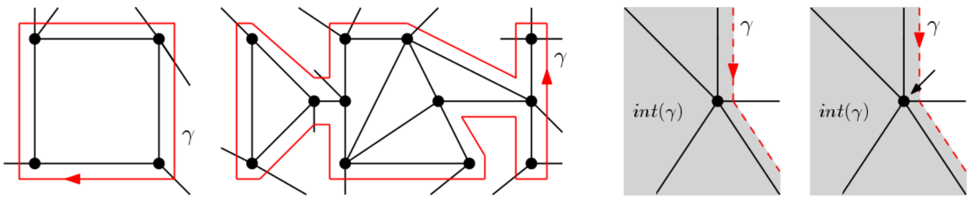


Abbildung 2.2: Auf der linken Seite zwei Beispiele für *begrenzende Zykel* und rechts für *kombinatorisch konvexe Ecken* mit und ohne zugewiesenem Knoten.

Es lässt sich für SLTRs leicht sehen, dass für jeden begrenzenden Zykel γ, der nicht von einem Pfad induziert wird, gilt, dass er mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken besitzt. Die folgende Präposition nach [**?**, Prop 2.2, Prop 2.4] verallgemeinert diese Beobachtung.

Proposition 2.3. *Sei G ein planer Graph der eine SLTR Γ zulässt. Sei weiter ϕ das von Γ induzierte FAA und H ein zusammenhängender Teilgraph von G. Falls v eine geometrisch konvexe Ecke in Γ ist, dann ist v auch eine kombinatorisch konvexe Ecke hinsichtlich ϕ. Somit gilt:*

E4 Jeder begrenzende Zykel γ, der nicht von einem Pfad induziert wird, hat hinsichtlich ϕ mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken.

Proposition 2.3 liefert also eine notwendige Bedingung damit ein FAA von einer SLTR induziert sein kann. Dies ist sogar eine hinreichende Bedingung, wie im Verlauf des Kapitels in Theorem 2.10 gezeigt wird. Wir nennen ein FAA, das E4 erfüllt, im Weiteren *Gutes-FAA* oder kurz *GFAA*. Aerts und Felsner zeigen, dass ein Gutes-FAA eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* induziert die *dehnbar* ist und sich somit geradlinig darstellen lässt.

Definition 2.4 (Kontaktfamilie von Pseudosegmenten)**.** Eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* ist eine Familie $\Sigma = \{c_i\}_i$ von einfachen Kurven

$$c_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \text{ mit } c_i(0) \neq c_i(1),$$

sodass alle Kurven c_i, c_j mit $i \neq j$ maximal einen gemeinsamen Punkt haben. Dieser Punkt muss dann ein Endpunkt von mindestens einer der Kurven sein.

Ein GFAA ϕ liefert eine Relation ρ auf den Kanten von G. Zwei Kanten (v, w) und (v, u), beide adjazent zu f, stehen genau dann in Relation, wenn $\phi(v) = f$. (v, w) und (v, u) müssen also auf der selben Seite des Dreiecks f in der SLTR liegen. Der transitive Abschluss dieser Relation liefert eine Äquivalenzrelation ρ. Die Aquivalenzklassen von ρ bilden eine Kontaktfamilie von Pseudosegmenten. Nennen wir die Äquivalenzklassen von ρ Kurven, dann gilt nach F2, dass jeder Knoten nur im Inneren von einer Kurve liegt und sich die Kurven nicht kreuzen. Weiter hat jede Kurve unterschiedliche Anfangs- und Endpunkte und kann sich nicht selbst berühren, da dann der resultierende begrenzende Zykel γ nur eine beziehungsweise zwei kombinatorisch konvexe Ecken hätte, was ein Widerspruch zu E4 wäre. Analog können zwei Kurven nicht ihre Anfangs- und Endpunkte teilen. Für eine von einem FAA ϕ induzierte Kontaktfamilie schreiben wir auch Σ_ϕ.

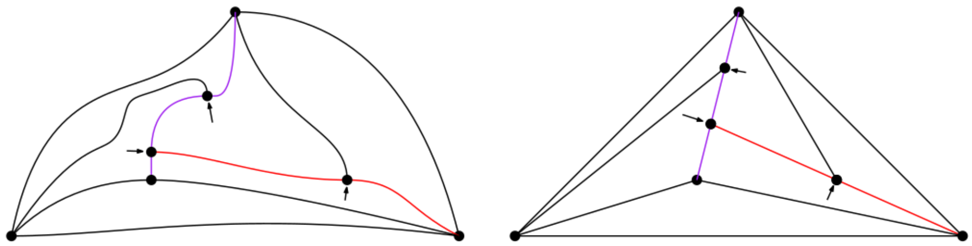


Abbildung 2.3: Die Kanten von G als Kontaktfamilie von Pseudosegmenten induziert durch die Äquivalenzrelation. In rot und grün die beiden Äquivalenzklassen bzw. Kurven, die mehr als eine Kante beinhalten.

Definition 2.5. Sei Σ ein Kontaktfamilie von Pseudosegmenten und $S \subseteq \Sigma$. Wir nennen einen Punkt $p \in S$ einen *freien Punkt*, falls er die folgenden Bedingungen erfüllt.

- p ist ein Endpunkt eines Pseudosegmentes aus S.
- p liegt nicht im Inneren eines Pseudosegmentes aus S.
- p liegt am äusseren Rand von S.

- p ist entweder eine Aufhängung von G oder berührt ein Pseudosegment, welches nicht zu S gehört.

Lemma 2.6. *[**?**, Lemma 2.8] Sei ϕ ein Gutes-FAA auf einem planen und intern 3-zusammenhängenden Graphen. Dann gilt:*

E5 Jede Teilmenge $S \subseteq \Sigma_\phi$ mit $|S| \geq 2$ hat mindestens 3 freie Punkte.

Betrachte einen planen, intern 3-zusammenhängenden Graphen G mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem GFAA ϕ. Wenn die von ϕ induzierte Kontaktfamilie Σ_ϕ mit geradlinigen Segmenten darstellbar ist, dann ist diese Darstellung eine zu ϕ passende SLTR für G. Für den Fall, dass eine solche Darstellung $f : G \to \mathbb{R}^2$ existiert, können für die Koordinaten der Segmente und somit auch der Knoten v von G Gleichungen aufgestellt werden. Die Positionen der Knoten v in der Einbettung $f(v)$ müssen diese Gleichungen erfüllen. Das resultierende Gleichungssystem beinhaltet harmonische Funktionen. Zu diesen folgt ein kurzer Überblick.

2.1.1 Harmonische Funktionen auf planaren Graphen

Die Theorie zu (diskreten) harmonischen Funktionen auf planaren Graphen und ihre Anwendung werden in [**?**] ausführlich behandelt. Es handelt sich um eine Diskretisierung von allgemeinen harmonischen Funktionen, also glatten Funktionen $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $\Delta f = 0$. Für diese Funktionen gilt, dass der Funktionswert an einem Punkt x, dem Durchschnitt der Funktionswerte auf einem Ball um x entspricht.

Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 2.7 (Harmonische Funktionen)**.** Sei $G = (V, E)$ ein planarer zusammenhängender Graph und $S \subseteq V$. Eine Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ nennen wir am Knoten $v \in V$ *harmonisch*, falls gilt:

$$\text{H1} \quad \frac{1}{deg(v)} \sum_{u \in N(v)} (g(u) - g(v)) = 0 \quad \forall v \in V \backslash S$$

Wir können H1 durch das hinzufügen einer nichtnegativen Gewichtsfunktion $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$ verallgemeinern. Es gilt $\lambda((v, w)) = \lambda_{vw}$.

$$\text{H2} \quad \frac{1}{deg(v)} \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv}(g(u) - g(v)) = 0 \quad \forall v \in V \backslash S$$

Ein Knoten für den g nicht harmonisch ist, nennt man *Pol*.

Theorem 2.8. *[**?**, Theorem 3.1.2] Für jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq V$ und jede Funktion $g_S : S \to \mathbb{R}$ existiert genau eine Funktion $g : V \to \mathbb{R}$, die f_S auf V fortsetzt, sodass g in jedem Knoten $v \in V \backslash S$ harmonisch ist. Wir nennen sie die* harmonische Fortsetzung.

Ein bekanntes Resultat, dass sich in Form harmonischer Funktionen darstellen lässt, ist Tuttes *rubber-band-representation* aus [**?**], die konvexe Zeichnungen für planare

Graphen liefert. Man stelle sich einen planaren Graphen vor, bei dem jede Kante durch ein idealisiertes Gummiband[1] ersetzt wird. Wähle nun ein äusseres Gebiet und fixiere die Knoten $S \subseteq V$, die in an diesem Gebiet liegen, in zyklischer Reihenfolge und in gleichen Abständen auf einem Kreis in der Ebene. Dies definiert $f_S : S \to \mathbb{R}^2$. Die restlichen Knoten werden nun von den Bändern in eine neue Position gezogen. Das resultierende Gleichgewicht, das genau dann entsteht, wenn H1 erfüllt ist, entspricht der harmonischen Fortsetzung von f_S auf V, wobei $f(v)$ genau der Position von v in der resultierenden Einbettung entspricht und S die Menge der Pole von f ist. Wir können die Kanten zusätzlich noch mit nicht negativen Gewichten λ_{vw}, versehen um die Einbettung zu verändern. Das folgende Theorem ist das Hauptresultat aus [**?**].

Theorem 2.9. *Sei G ein planarer Graph, dann ist eine Gummiband-Representation (rubber-band-representation) von G eine planare Einbettung in der Ebene.*

Die Theorie zu harmonischen Funktionen lässt sich auf SLTRs anwenden. Nehme für den Moment an, dass es existiert eine geradlinige Darstellung der Pseudosegmente. Wir haben also eine geradlinige Einbettung f der von ϕ induzierten Segmente. Dann gilt für jeden Knoten v im Inneren eines Segmentes, also für jeden zugewiesenen Knoten, dass er auf einer Gerade zwischen seinen beiden benachbarten Knoten u, w auf dem Segment liegen muss. Diese Eigenschaft liefert

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1). \tag{2.1}$$

Für die nicht zugewiesenen Knoten aus G muss in einer SLTR gelten, dass sie sich in der konvexen Hülle ihrer Nachbarn befinden. Wir bilden einen (gewichteten) Schwerpunkt und erhalten

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} \geq 0. \tag{2.2}$$

Somit erfüllt die so gegebene Funktion $f : V \to \mathbb{R}^2$ mit einem passend gewählten λ wegen (2.1) und (2.2) in beiden Komponenten H2. Es handelt sich somit bei f_1 und f_2 um harmonische Funktionen, mit den Polen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nach Theorem 2.8, existiert für jede den Beschränkungen entsprechende Wahl von λ jeweils genau eine Funktion f_1, f_2, welche die Gleichungen erfüllen.
Dies führt uns zum Hauptresultat aus [**?**, Theorem 2.10]:

Theorem 2.10. *Sei G ein intern 3-zusammenhängender, planarer Graph und Σ eine Familie von Pseudosegmenten, induziert von einem FAA, sodass jede Teilfamilie $S \subset \Sigma$ entweder mindestens drei freie Punkte hat, oder maximal ein Element enthält. Die eindeutige Lösung des aus Σ folgenden Gleichungssystems ist eine SLTR.*

Bemerkung. Dies bedeutet, dass die weiter oben in Lemma 2.6 festgehaltene notwendige Bedingung auch eine hinreichende ist. Falls wir schon ein Gutes-FAA gefunden

[1] Die Gummibänder müssen das Hook'sche Gesetzt erfüllen, sodass eine Streckung auf Länge l genau Kraft l benötigt.

haben, dann können wir mit Hilfe des obrigen Ansatzes auch eine Einbettung in der Ebene erhalten. Jedoch gibt es Graphen mit polynominell vielen FAA und es dauert polynominell lange, um E4 zu überprüfen. Wir erreichen also auf diesem Weg keinen Algorithmus in $\mathcal{P}$.
Aerts und Felsner werfen am Ende des Papers die Frage nach einer *guten* Wahl von λ auf und wie dies die resultierenden Einbettungen beeinflussen kann. Dieses Thema wir in Kapitel 5 angegangen.

2.2 Ecken kompatible Paare

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einer zweiten Charakterisierung von SLTRs auf planaren Graphen nach [**?**] beschäftigen, die eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und FAAs herstellt und so zu einer hinreichenden Bedingung für SLTRs führt. Zum Einstieg folgt die Definition dieses Zusammenhanges.

Definition 2.11 (Ecken Kompatibilität)**.** Ein Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ nenne wir *Ecken kompatibel*, falls:

C1 Das Schnyder Labeling σ und das FAA ϕ nutzen die selben Aufhängungen.

C2 In jedem inneren Gebiet haben die drei Ecken aus ϕ drei unterschiedliche Label in σ.

Der Rest dieses Kapitels wird sich mit dem Beweis beschäftigen, dass zu jedem SLTR (mindestens ein) Ecken kompatibles Paar existiert und das anders herum jedes Ecken kompatible Paar eine SLTR induziert.

Theorem 2.12. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. G besitzt eine SLTR, genau dann wenn ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ existiert.*

Wir beweisen zuerst die (deutlich einfachere) Rückrichtung des Theorems. Hier können wir die durch das in Abschnitt 1.2 erklärte *face counting* erhaltene Einbettung nutzen, um zu zeigen, dass jeder begrenzende Zykel γ genau drei kombinatorisch konvexe Ecken besitzt.

Lemma 2.13. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Falls ein Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ Ecken kompatibel ist, dann hat jeder begrenzende Zykel γ genau drei kombinatorisch konvexe Ecken im Bezug auf ϕ.*

Beweis: Sei γ ein begrenzender Zykel und F_{in} die Menge der inneren Gebiete von G. Seien $\alpha_1 = (0, 1), \alpha_2 = (1, 0)$ und $\alpha_3 = (0, 0)$ drei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$. D sei die durch *face counting* erhaltende Zeichnung von G mit den Ecken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ein Beispiel einer solchen Zeichnung findet sich in Abbildung 1.5. Betrachte nun den begrenzenden Zykel γ in D. Wir schieben nun, wie in Abbildung 2.4 illustriert, ausgehend von α_i die Geraden $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ über den Graphen. Sei M_i die Menge der zuerst von $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ getroffenen Knoten von γ für $i \in (1, 2, 3)$.

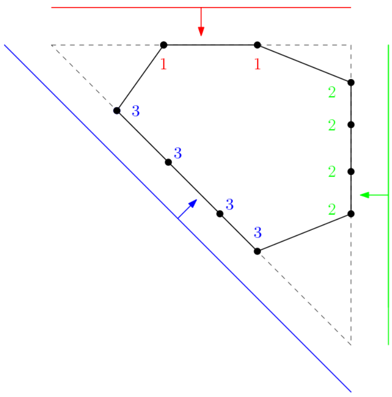


Abbildung 2.4

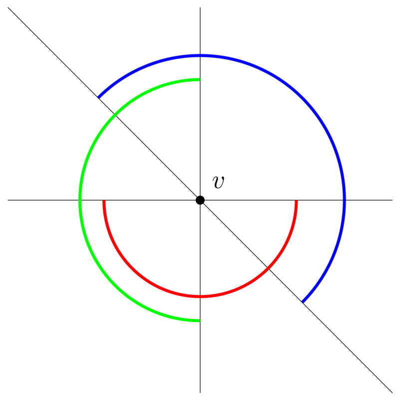


Abbildung 2.5

Beobachtung 1 *Alle Knoten um ein inneres Gebiet f mit Label i in f werden von der Gerade $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ zum gleichen Zeitpunkt getroffen. Dies folgt direkt aus Eigenschaft W5 (Abschnitt 1.2), da alle Knoten mit dem selben Label in der Zeichnung auf $c_i(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ platziert werden.*

Beobachtung 2 *Sei $v \in M_i$. Alle Winkel an v im Inneren von γ haben das Label i. Die Geraden teilen die Winkel um einen Knoten (siehe Abbildung 2.5). Die Winkel an v, die von a_i aus gesehen vollständig auf der anderen Seite von $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ liegen, haben Label i.*

Nach Beobachtung 2 sind die Mengen M_1, M_2 und M_3 disjunkt. Wir suchen nun nach drei kombinatorisch konvexen Ecken von γ. Das FAA und das Schnyder Labeling sind Ecken kompatibel und somit hat jedes Gebiet $f \in F_{in}$ einen Winkel mit Label i. Also liegt in jeder Menge M_i ein Knoten v_i, der vom FAA nicht einem Gebiet innerhalb von γ zugewiesen wird. Nehmen wir an $a_i \notin M_i$, denn sonst hätten wir nach E1 eine Ecke gefunden. Da D eine konvexe Zeichnung ist muss v_i einen Nachbarn ausserhalb von γ besitzen. Somit liegt v_i auf γ, ist nicht in γ zugewiesen und hat einen Nachbarn ausserhalb von γ. v_i erfüllt also E2 und somit hat jeder begrenzende Zykel drei kombinatorisch konvexe Ecken (jeweils eine aus jedem M_i). $\square$

Zusammen mit Theorem 2.10 folgt, dass es sich bei dem FAA um ein Gutes-FAA handelt. Somit induziert das Ecken kompatible Paar ein SLTR von G.

Machen wir uns an den Beweis der Hinrichtung. Zu jedem SLTR können wir ein eindeutiges FAA erstellen indem wir die flachen Winkel der SLTR im FAA zuweisen. Wir müssen also zeigen, dass zu jeder SLTR ein Schnyder Labeling existiert, das zusammen mit dem induzierten FAA ein Ecken kompatibles Paar bildet. Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, der (mindestens) eine SLTR besitzt. Sei Δ eine SLTR von G und sei ϕ das von Δ induzierte FAA.

Vor dem nächsten Lemma müssen wir zwei geometrische Objekte einführen. Beispiele finden sich in Abbildung 2.6.

Definition 2.14 (Unterteilendes Dreieck)**.** Ein *unterteilendes Dreieck* ist ein Dreieck in der Zeichnung einer SLTR von G, sodass gilt:

- Jeder Knoten auf dem Rand des Dreiecks (der keine Ecke des Dreiecks ist) ist entweder ausserhalb oder innerhalb des Dreiecks zugewiesen
- Es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn ausserhalb des Dreiecks hat und es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn im Inneren des Dreiecks hat.

Dieses Dreieck kann Teile des Randes der Zeichnung beinhalten.

Definition 2.15 (teilendes Segment)**.** Ein *teilendes Segment* eines SLTR von G ist eine Menge von Kanten $\{e_1, \ldots, e_m\}$, die alle auf einer Gerade liegen, sodass gilt:

- Die Vereinigung der Kanten trennt die Zeichnung in zwei nichtleere Teile.
- Jeder innere Knoten v auf dem Segment ist einem Gebiet zugeordnet, dass zwei Kanten beinhaltet die auf dem Segment liegen. Diese beiden Kanten haben v als Endpunkt.

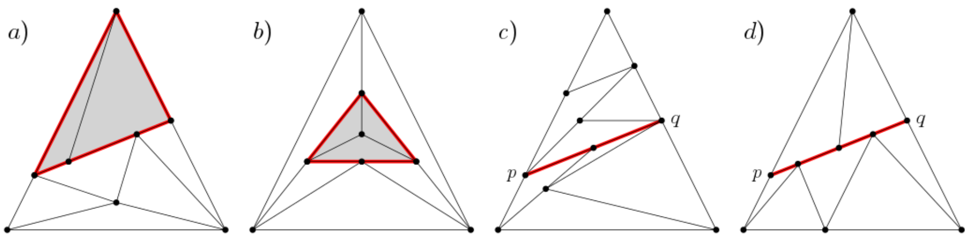


Abbildung 2.6: Beispiele von unterteilenden Dreiecken in a) und b) und teilenden Segmenten in c) und d) jeweils in rot.

Um zu zeigen, dass wir zu jeder SLTR ein passendes Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) finden führen wir einen Widerspruchsbeweis. Sei G, ein kleinstmögliches Gegenbeispiel, zu dem kein Paar existiert. Damit seien hier zuerst die minimale Anzahl an Knoten und darauf folgend die kleinste Anzahl von Kanten gemeint. Sei Δ eine SLTR von G, ϕ das induzierte FAA und a_1, a_2 und a_3 die Aufhängungen von Δ.

Wir zeigen zuerst zwei Eigenschaften von Δ.

Lemma 2.16. *Ein minimales Gegenbeispiel Δ hat kein unterteilendes Dreieck.*

Beweis: Nehmen wir an, dass Δ ein unterteilendes Dreieck mit den Ecken (a, b, c) beinhaltet. Seien Δ_1 und Δ_2 die Teile von Δ die alles ausserhalb (1) und innerhalb (2) des Dreiecks beinhalten. Der Rand des Dreiecks (a, b, c) liegt in beiden Teilen.

Wir ersetzen Knoten auf dem Rand des Dreiecks die Grad zwei in Δ_i haben mit einer Kante zwischen ihren Nachbarn. Somit sind Δ_1 und Δ_2 SLTRs mit weniger Knoten als Δ. Da sie weniger Knoten haben als Δ können sie keine Gegenbeispiele sein und es existieren zu den SLTRs Δ_i Ecken kompatible Paare (σ_i, ϕ_i), wobei die ϕ_i die induzierten FAAs von Δ_i sind. Setzen wir die Paare zusammen kommen wir zu einen Widerspruch. Die Ecken a, b, c sind die Aufhängungen von Δ_2. Wir wählen ihre Label so, dass sie mit den inneren Labeln des (jetzt) leeren Dreiecks in Δ_1 übereinstimmen[2]. Die auf diese Weise kombinierten Schnyder Labelings σ_1 und σ_2 ergeben ein Schnyder Labeling auf G. Die FAAs ϕ_1 und ϕ_2 ergeben zusammen, wenn wir die Zuweisungen an den äusseren Knoten von Δ_2 und den am leeren Dreieck liegenden Knoten von Δ_1 anpassen, ein FAA ϕ für G. Somit folgt die Ecken Kompatibilität aus der Tatsache, dass (σ_1, ϕ_1) und (σ_2, ϕ_2) Ecken kompatibel sind. Die SLTR Δ induziert somit ein Ecken kompatibles Paar und kann kein Gegenbeispiel sein. Somit kann Δ kein unterteilendes Dreieck haben. □

Lemma 2.17. *Ein minimales Gegenbeispiel Δ hat kein teilendes Segment.*

Bemerkung. Insbesondere bedeutet dies, dass in Δ für jede Aufhängung $deg(a_i) \geq 3$ gelten muss.

Beweis: Angenommen Δ hat ein teilendes Segment mit den Endpunkten p und q. Falls auf beiden Seiten des teilenden Segmentes eine Aufhängung mit Grad größer als zwei liegt, dann wird ein unterteilendes Segment in Δ induziert (siehe Abbildung 2.6 d)). Falls es sich bei p oder q um eine Aufhängung handelt, bedeutet dies ebenfalls, dass ein unterteilendes Dreieck existiert[3]. Somit können wir annehmen, dass das teilende Segment zwischen p und q die Aufhängung s_1 von Grad zwei abtrennt. p, q und s_1 bilden also ein Dreieck. Wir betrachten zwei Fälle. Entweder das teilende Segment besteht nur aus der Kante (p, q) (Fall 1) oder es existiert mindestens ein weiterer Knoten auf dem Segment (Fall 2).

<u>1. Fall</u>: Falls p Grad drei und dritten Nachbar p' hat, dann muss die Kante (p', q) existieren und (s_1, q, p) ist ein unterteilendes Dreieck mit der inneren Kante (p, q). Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 2.16 und es folgt $deg(p), deg(q) \geq 4$. Da $deg(s_1) = 2$ gelten muss und G intern-3-zusammenhängend ist liegt s_1 alleine auf der einen Seite des Segments und alle anderen Nachbarn von p und q auf der anderen. Wir behaupten, dass mindestens eine der Kanten (s_1, p) und (s_1, q) kontrahierbar ist, sodass der resultierende Graph ein SLTR besitzt. Die Zuweisungen bleiben, bist auf bei p und q, gleich (siehe Abbildung 2.7, b)). Dieser Schritt ist nicht trivial. Es könnte passieren, dass in beiden Fällen keine SLTR existiert. Wir nutzen als Kriterium die begrenzenden Zykel aus Definition 2.2. Damit beide Kontraktionen nicht zum erwünschten Ergebnis führen, müssen zwei begrenzende Zykel γ_v, γ_w mit genau drei kombinatorisch konvexen Ecken, p, q und v respektive w, existieren (siehe Abbildung 2.7, c)). Nur dann induziert die Kontraktion von (s_1, p) und (s_1, q) einen Zykel mit nur zwei Ecken.

Dieser Fall kann aber nicht auftreten. Seien v, w die Ecken dieser Zykel. Dann existieren Pfade $P_{p \to w}$ und $P_{q \to w}$. Diese Pfade sind Teil vom γ_v und γ_w und enthalten

[2] Wir können die Label beliebig umbenennen, ohne das Schnyder Labeling zu verändern.

[3] Falls auf der einen Seite des Segmentes nur die Aufhängung a_i liegt wird kein unterteilendes Dreieck impliziert. Jedoch existiert dann mit $\Delta' = \Delta \backslash \{s_1\}$ ein kleineres SLTR (welches dann kein Gegenbeispiel ist) und aus diesem lässt sich ein Ecken kompatibles Paar für Δ bauen.

somit keine Ecken ausser an den Enden. Die Winkel an diesen Pfaden im Inneren der Zykel sind somit $\geq \pi$. Sei z der Knoten an dem sich $P_{p\to w}$ und $P_{q\to w}$ kreuzen. Da z keine Ecke sein kann muss er auf beiden Zyklen γ_v, γ_w zugewiesen sein. Somit müsste der Winkel im inneren der Zykel der an z von $P_{p\to w}$ und $P_{q\to w}$ eingeschlossen wird mindesten π sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme das Δ eine SLTR ist (siehe Abbildung 2.7, c)).

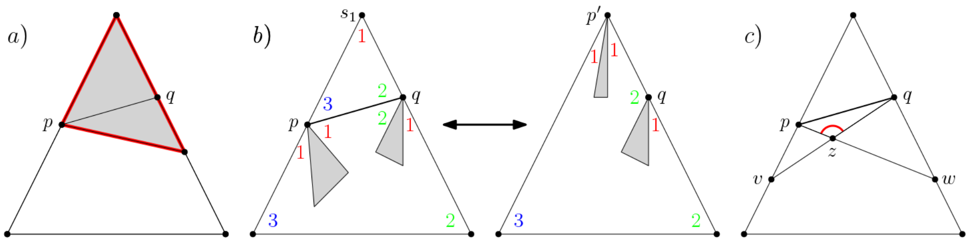


Abbildung 2.7: a) Unterteilendes Dreieck bei Grad 3. b) Kantenkontraktion der Kante (s_1, p). c) Die Pfade die bei der Kontraktion von (s_1, p) oder (s_1, q) Degeneriertheit induzieren.

Es kann also mindestens eine der Kanten kontrahiert werden. Sei (s_1, p) diese Kante und G' der Graph der durch Kontraktion von (s_1, p) und das Löschen von (p, q) entsteht. Wir erhalten das FAA ϕ' durch löschen der Zuweisung von p aus ϕ. Der Knoten q ist weiterhin dem äusseren Gebiet zugewiesen. Da G' weniger Knoten als G hat ist es kein Gegenbeispiel und wir erhalten einen Schnyder Labeling σ', das zusammen mit ϕ' ein Ecken kompatibles Paar bildet. Wir können ϕ' zu einem Labeling von G erweitern indem wir im Uhrzeigersinn die Label $1, 2$ und 3 $\square$

3 Algorithmen zur Erkennung von SLTRs

Im vorherigen Kapitel wurden Kriterien für die Existenz einer SLTR für G erarbeitet. Diese liefern allerdings nicht sofort einen Algorithmus, weder zur Frage nach der Existenz, noch für das Erlangung einer spezifischen SLTR. Dieses Kapitel wird sich diesem Thema zuwenden und einen von Aerts und Felsner in [**?**] erarbeiteten Algorithmus erläutern und analysieren.

3.1 SLTRs via Zwei-Fluss

Das Ziel ist es, für einen gegebenen Graphen, sowohl einen Schnyder Wood als auch ein FAA jeweils als Lösung eines Fluss-Problems zu erhalten. Diese beiden werden dann in einem Zwei-Fluss-Problem kombiniert, sodass eine Lösung ein Ecken-Kompatibles-Paar kodiert und somit eine SLTR resultiert. Wir beschäftigen uns also den in Definition 1.7 eingeführten Gerichteten-Multi-Fluss-Problemen auf gerichteten Graphen.

3.1.1 Schnyder-Wood-Fluss

Um einen Schnyder Wood als Fluss-Problem zu kodieren, kann man die in Abschnitt 1.3 eingeführten α_s-Orientierungen auf dem Abschluss von $G+G^*$ nutzen. Fusy zeigt in [**?**] im Zuge der Untersuchung spezifischer α-Funktionen, dass sich α_s-Orientierungen von $G + G^*$ in linearer Zeit berechnen lassen, sodass wir auch einen Schnyder Wood auf G in linearer Zeit erhalten.

Machen wir uns also an die Konstruktion eines Netzwerks $\mathcal{N}_S$ mit einer Quelle und Senke, sodass eine zulässige Lösung φ_S einer $\alpha_s - Orientierung$ von $\tilde{G}$ entspricht, und somit auch einen Schnyder Wald auf G liefert. Besonderes Augenmerk ist hier auf die Möglichkeit einer späteren Kombination mit einem FAA Fluss gelegt, um ein Kombiniertes Netzwerk zu erstellen, und nicht unbedingt auf Effizienz.

Wie oben schon erwähnt ist $\tilde{G}$ bipartit, Kanten-Knoten haben Grad 4, Knoten-Knoten Grad $deg(v)$ und Gebiets-Knoten Grad $|f|$. Für eine α_s-Orientierung muss jeder Kanten-Knoten Ausgrad 1, jeder Knoten-Knoten Eingrad $deg(v) - 3$ und jeder Gebiets-Knoten Eingrad $|f| - 3$ haben. Die Kanten-Knoten am äusseren Gebiet sind in $\tilde{G}$ immer nach aussen orientiert. Somit müssen wir nur die inneren Kanten-Kanten E_{in} betrachten.

Sei $\mathcal{N}_S$ ein Netzwerk mit jeweils einer Quelle s und Senke t, Kanten von der Quelle zu jedem $e \in E_{in}$ mit Kapazität 1, Kanten von den Kanten-Knoten e zu inzidenten Knoten-Knoten v und (inneren) Gebiets-Knoten $f \in F_{in}$ in G ebenfalls mit Kapazität 1, Kanten von $f \in F_{in}$ zur Senke mit Kapazitäten $|f| - 3$, Kanten von den (inneren)

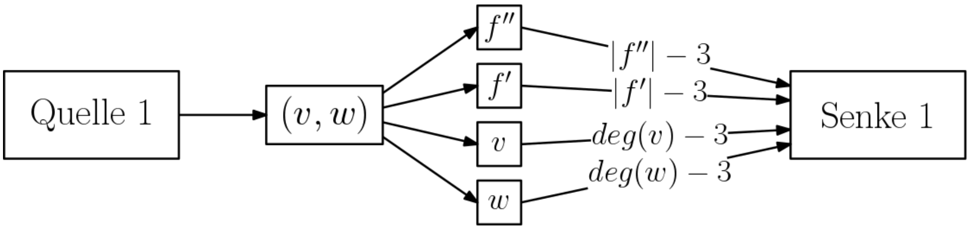


Abbildung 3.1: Der Schnyder Wood Fluss durch eine innere Kante (v, w).

Knoten-Knoten $v \in V_{in} = V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ zur Senke mit Kapazitäten $deg(v) - 3$ und Kanten von den Aufhängungen a_i zur Senke mit Kapazitäten $deg(a_i) - 2$. Die letzte Kapazität resultiert aus dem Fakt, dass die Halbkante in $G + G^*$ von a_i aus immer nach aussen orientiert ist und wir somit nur noch zwei andere Kanten nach aussen orientieren müssen.

Der Bedarf des Netzwerkes entspricht der Anzahl der inneren Kanten von G. Sei nun φ_S eine zulässige ganzzahlige Lösung, dann hat jeder Kanten-Knoten e Ausgrad 1. Der Fluss φ_S entlang einer Auskante von $e \in E_{in}$ in $\mathcal{N}_S$ entspricht dann genau der hin zu e orientierten Kante einer α_s-Orientierung auf $G + G^*$. Die Knoten-Knoten und Gebiets-Knoten haben $deg(v) - 3$ bzw. $|f| - 3$ von φ_S genutzte Auskanten und somit entspricht hier eine leere Kante in $\mathcal{N}_S$ einer von v bzw. f weg orientierten Kante bezüglich α_s. Ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_S kodiert also eine α_s-Orientierung auf $G + G^*$. Somit existiert genau dann ein Schnyder Wald auf G, wenn eine ganzzahlige Lösung φ_S für $\mathcal{N}_S$ existiert.

3.1.2 FAA-Fluss

Um ein FAA für einen planaren Graphen G zu erhalten, müssen wir jedem Gebiet $f \in F$ genau drei Ecken und $|f| - 3$ flache Winkel zuordnen und jeder Knoten darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden, also in diesem flach sein. Falls eine Einbettung und die Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ gegeben sind, müssen wir jedem inneren Gebiet $f \in F_{in}$ drei Ecken und $|f| - 3$ flache Winkel zuweisen und jeder innere Knoten $v \in V_{in}$ darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden. Wir konstruieren ein Netzwerk für den zweiten Fall, das sich leicht verallgemeinern lässt.

Sei also wieder $\mathcal{N}_F$ ein Netzwerk mit einer Quelle und Senke, einem Knoten für jeden inneren Winkel (f, v), mit $v \in V$ und $f \in F_{in}$, Knoten für alle inneren Gebiete f und alle inneren Knoten v. Von der Quelle existiert eine Kante mit Kapazität 1 zu jedem inneren Winkel (f, v), von jedem inneren Winkel (f, v) jeweils eine Kante zu f und zu v mit Kapazität 1, von jedem inneren Gebiet f eine Kante mit Kapazität 3 zur Senke und zuletzt noch eine Kante von jedem inneren Knoten v zur Senke mit Kapazität 1. Der Bedarf des Netzwerks ist $\sum_{f \in F_{in}} |f|$ und entspricht der Anzahl der inneren Winkel von G.

Sei φ_F ein zulässiger ganzzahliger Fluss, dann entspricht Fluss auf einer Kante $((f, v), f)$ einer Ecke (eines möglichen GFAAs) von f und Fluss auf $((f, v), u)$ der Zuweisung eines Knoten zu f, also einem flachen Winkel in einem GFAA. Zur Verein-

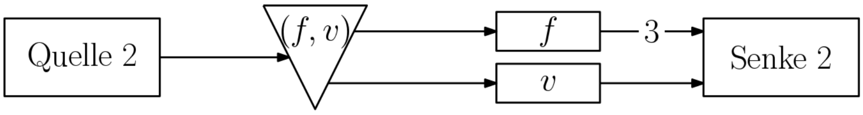
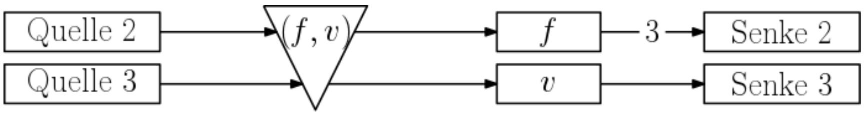


Abbildung 3.2: Der FAA-Fluss durch einen Winkel (f, v).

fachung sprechen wir im Weitern auch von Ecken- respektive Zuweisungs-Fluss. Somit wird jeder innere Winkel entweder dem Gebiet zugewiesen oder als Ecke ausgezeichnet und es kann nur jeweils ein Winkel an jedem inneren Knoten zugewiesen werden. φ_F respektiert also die Bedingungen aus Definition 2.1 und es existieren nur dann FAAs auf G, wenn mindestens eine ganzzahlige Lösung für $\mathcal{N}_F$ existiert. Eine spezifische Lösung φ_F entspricht genau einem FAA auf G.

Bemerkung. Das oben konstruierte Netzwerk zur Bestimmung von FAAs lässt sich auch als Zwei-Fluss Problem konstruieren, wenn wir für Ecken- und Zuweisungs-Fluss getrennte Quellen und Senken einführen. Der Bedarf des Ecken-Flusses ist dann $3|F_{in}|$ und der Bedarf des Zuweisung-Flusses $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$.



Eine zulässige ganzzahlige Lösung $\varphi_F = (\varphi_{F_2}, \varphi_{F_3})$ entspricht dann wieder einem FAA auf G, da aus der Ganzzahligkeit folgt, dass ein Winkel entweder von φ_{F_2} oder φ_{F_3} genutzt wird und somit eine Definition 2.1 respektierende Beschriftung der Winkel vorliegt.

Bemerkung. Nach [**?**] lässt sich für Graphen mit wenigen Schnyder Woods ein Algorithmus erstellen indem wir einen bipartiten Karo erstellen und ein einseitiges perfektes Matching auf diesem finden. TODO

3.1.3 Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs

Im Verlauf des Kapitels haben wir nun sowohl für Schnyder Woods als auch für FAAs ein Netzwerk betrachtet, für das eine ganzzahlige Lösung einen Schnyder Wood bzw. ein FAA für einen planen Graphen G liefert. Wir wollen jetzt eine Kombination aus beiden erstellen die ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ kodiert.

Es folgt die Konstruktion eines Netzwerkes, wir bezeichnen es mit $\mathcal{N}_G$, welches diesen Wunsch erfüllt, für das eine ganzzahlige Lösung ein Ecken kompatibles Paar kodiert und somit nach Theorem 2.12 eine SLTR für G existiert. Leider handelt es sich hierbei um ein 2-Fluss-Netzwerk, aber darauf wollen wir später genauer eingehen.

Wie oben in Abschnitt 3.1.2 erwähnt lässt sich ein FAA auch mit einem Zwei-Fluss kodieren und wir können Ecken- und Zuweisungs-Fluss mit den passenden Bedarfen getrennt betrachten. Wir müssen jetzt diese drei Flüsse, also Schnyder-, Ecken- und Zuweisungs-Fluss in einem Netzwerk kombinieren. In [**?**] ergeben Schnyder- und Ecken-Fluss zusammen Fluss von Typ 1 und der Zuweisungs-Fluss Typ 2. Wir wollen hier analog ein Netzwerk konstruieren in dem wir FAA und Schnyder-Wood Fluss nicht trennen. Der Verständlichkeit wegen werden wir Pfade, die in einer Lösung von einem der drei Flussarten genutzt werden, *Schnyder-Pfad, Ecken-Pfad* und *Zuweisungs-Pfad* nennen.

Bei der Kombination der beiden oben konstruierten Netzwerke $\mathcal{N}_S$ und $\mathcal{N}_F$ zu $\mathcal{N}_G$ müssen die Ecken Kompatibilität von Schnyder Labeling und FAA gewährleistet werden. K1 zu erfüllen, also die Nutzung der gleichen Aufhängungen von σ und ϕ, ist kein Problem. Allerdings müssen wir für K2 das Netzwerk etwas komplizierter machen. Betrachten wir als Basis $\mathcal{N}_S \cup \mathcal{N}_F$ und fürs erste nur ein inneres Gebiet f, dann sehen wir, dass es $|f| - 3$ Schnyder-Fluss aufnimmt, aber $|f|$ Einkanten in $\mathcal{N}_S$ hat, es sind also genau die drei nötigen Kanten für den Ecken-Fluss aus $\mathcal{N}_F$ übrig. Wir müssen gewährleisten, dass jede Ecke im Schnyder Labeling ein anderes Label hat. Betrachten wir also den von φ_S induzierten Schnyder Wood auf G^*. Nach [**?**] können wir diesen aus der α_S-Orientierung ablesen.

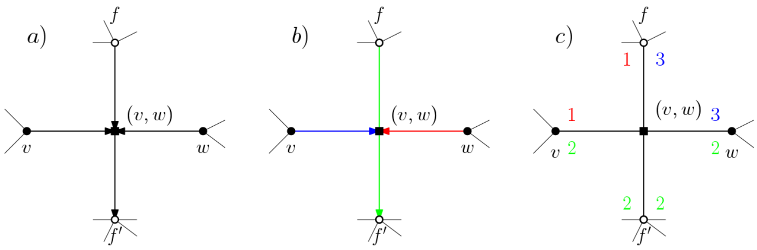


Abbildung 3.3: a) Eine α_s-Orientierung um eine innere Kante von G. b) Teile der korrespondierenden Schnyder Woods auf G und G^*. c) Die induzierten Label, die für G und G^* gleich sind.

Es gilt außerdem, wie in Abbildung 3.3 skizziert, dass die Label der Ecke eines Gebietes in G und das ihr in $G + G^*$ gegenüberliegenden Label der Ecke eines Gebiets um einen Knoten in G^* gleich sind. Für eine zu v in G^* hin orientierte Kante folgt aus der Bijektion zwischen Schnyder Labelings und Schnyder Woods aus Abschnitt 1.2, dass die Label links und rechts am Ende dieser Kante gleich sind. Somit sind auch die Label in G gleich und wir können die folgende Eigenschaft festhalten.

A1 Die Label, des von α_s induzierten Schnyder Wood auf G, sind zwischen zwei aufeinander folgenden zu f orientierten Kanten gleich.

Da es genau drei zu f orientierte Kanten gibt müssen wir also dafür sorgen, dass für jedes Paar dieser Kanten eine Ecke zwischen ihnen liegt, da so die drei Ecken unterschiedliche Label haben und wir K2 erfüllen. Um dies zu erlangen implementieren wir eine zyklische Struktur um jedes innere Gebiet, wie in Abbildung **??** skizziert.

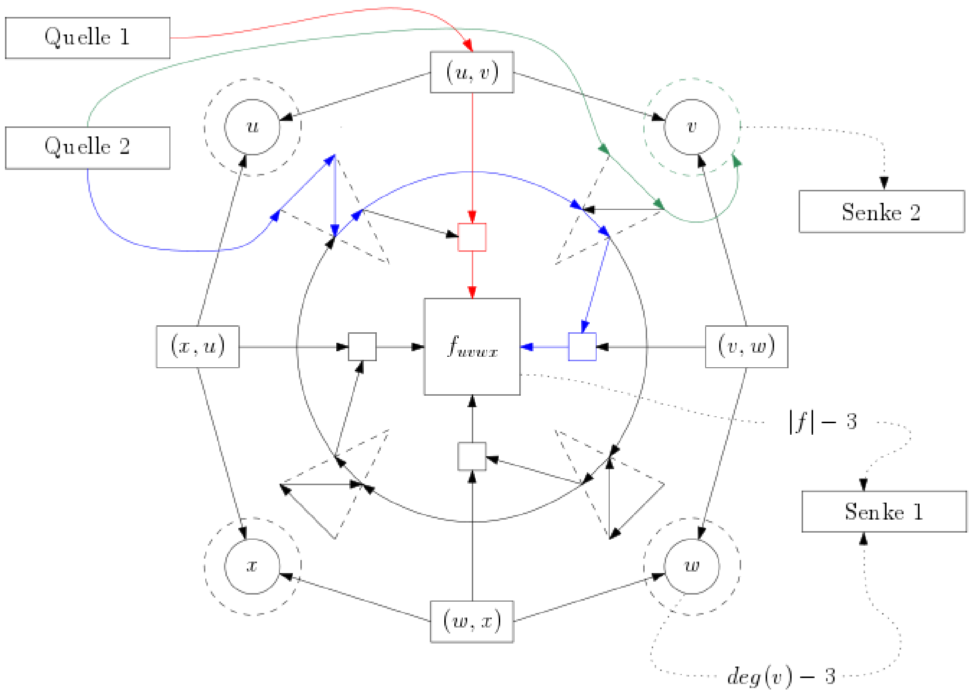


Abbildung 3.4: Eine Skizze des kombinierten Netzwerkes auf einem inneren Gebiet mit $|f| = 4$. Beispielhaft sind Schnyder-Fluss (rot), Ecken-Fluss (blau) und Zuweisungs-Fluss (grün) eingezeichnet.

Betrachten wir zuerst den Schnyder-Fluss. Dieser wird Fluss von Typ 1, also von Quelle 1 zu Senke 1 sein. Für einen Schnyder-Pfad der durch einen Knoten v führt hat sich nichts geändert. Der in der Skizze eingezeichnete Schnyder-Pfad der durch f führt passiert davor einen extra Knoten, wir nennen ihn *kleines Quadrat* der gewährleisten soll, dass von Seite des Gebietes aus entweder ein Schnyder-Pfad oder ein Ecken-Pfad in f mündet. Zuletzt fügen wir wie oben von jedem inneren Gebiet eine Kante mit Kapazität $|f| - 3$ zu Senke 1 ein. Somit kodiert hier eine ganzzahlige Lösung weiterhin einen Schnyder Wood auf G.

Kommen wir nun zum FAA-Fluss, also Fluss von Typ 2. Von Quelle 2 geht genau wie in Abbildung 3.2 eine Kante zu jedem inneren Winkel (f, v). Ein Zuweisungs-Pfad verlässt diesen Winkel über einen zusätzlich zu v eingefügten Dummy-Knoten v^*. Von jedem v^* geht eine Kante mit Kapazität 1 zu einer Dummy-Senke und von dieser eine Kante mit Kapazität $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ zu Senke 2, wie in Abbildung 3.5 illustriert.

Die Dummy-Knoten sorgen dafür, dass jeder Knoten im FAA nur einmal zugewiesen werden kann, ohne in Konflikt mit dem Schnyder-Fluss zu kommen. Die eingeschobene Dummy-Senke beschränkt die Anzahl der zugewiesenen Knoten, genau wie im zuvor konstruierten FAA-Fluss, auf $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$.

Es bleibt der Ecken-Fluss. Hier betritt der Pfad das Gebiet f wieder durch einen Winkel und muss es über ein ungenutztes kleines Quadrat verlassen. Die zweite und dritte Kante in jedem Winkeldreieck gewährleisten, dass nicht immer das nächste

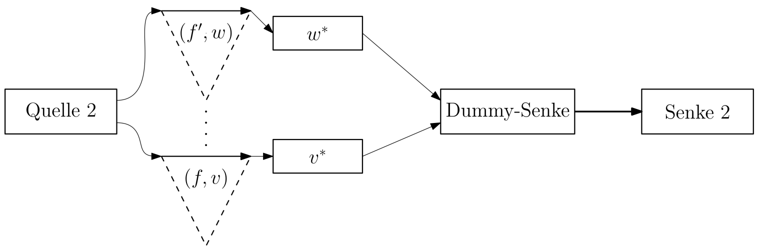


Abbildung 3.5: Der Zuweisungsfluss durch die Winkel, Dummy-Knoten und die zusätzliche Kante vor Senke 2. Die Kante rechts hat Kapazität $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ und alle anderen Kapazität 1.

kleine Quadrat genutzt werden muss. Falls dies von Schnyder-Fluss besetzt ist und der nächste Winkel zugewiesen wird, kann ein Ecken-Pfad den nächsten Winkel passieren. Weiterhin sorgt die erste Kante, die von sowohl Schnyder-, als auch Winkel-Pfaden genutzt werden kann, für eine eindeutige Beschriftung (als Ecke oder nicht) im Falle einer ganzzahligen Lösung. Wie oben existieren auch hier Kanten von jedem inneren Gebiet zu Senke 2 mit Kapazität drei.

Betrachten wir die Bedarfe der beiden Flüsse von Typ 1 und Typ 2, φ_1 bzw. φ_2. Beide entsprechen jeweils den Bedarfen der oben konstruierten $\mathcal{N}_S$ und $\mathcal{N}_F$, da mit den gleichen Argumenten wie oben, ein Schnyder Wood und ein FAA kodiert werden können. Jedes Gebiet benötigt genau drei Ecken und $|f| - 3$ zugewiesene Knoten und je ein Schnyder-Pfad führt durch jede innere Kante, $|E_{in}|$. Hier seien wieder E_{in} die inneren Kanten und F_{in} die inneren Gebiete von G. Es gilt also:

- $d_1 = \text{Bedarf}(\varphi_1) = \text{Bedarf}(\varphi_S) = |E_{in}|$
- $d_2 = \text{Bedarf}(\varphi_2) = \text{Bedarf}(\varphi_F) = \sum_{f \in F_{in}}(|f| - 3) + 3|F_{in}| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

Bevor wir in Theorem 3.1 zeigen, dass eine ganzzahlige Lösung $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auch wirklich ein Ecken kompatibles Paar kodiert, wollen wir noch ein Paar weitere Beobachtungen festhalten. Nehmen wir also an, wir haben eine ganzzahlige Lösung φ gefunden, dann gilt für diese:

A2 Jede äussere Kante in einem Winkel-Dreieck ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Ecken- oder Zuweisungspfad genutzt.

A3 Jede Kante von einem kleinen Quadrat zu einem inneren Gebiet f ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Schnyder- oder Ecken-Pfad genutzt.

A4 Ein inneres Gebiet f mit $|f| = 3$ kann nicht von Zuweisungs- bzw. Schnyder-Pfaden genutzt werden.

Wir wollen diese Beobachtungen kurz begründen. Für jede mögliche ganzzahlige Lösung φ gilt

$$|\varphi| = |\varphi_1| + |\varphi_2| = |E_{in}| + \sum_{f \in F_{in}} |f|.$$

Da es genau $\sum_{f \in F_{in}} |f|$ innere Winkel gibt und der FAA-Fluss $\mathcal{N}_G$ nur durch diese betreten kann ergibt sich A2. A3 wird aus Gleichung 3.1 weiter unten folgen. Durch ein inneres Gebiet f müssen drei Ecken-Pfade führen und im Fall $|f| = 3$ führt dies zu A4, da kein Platz in den Winkeln für Zuweisungs-Pfade und keine freien kleinen Quadrate für Schnyder-Pfade existieren.

Theorem 3.1. *Sei G ein intern-3-zusammenhängender Graph mit gegebenen Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, dann existiert eine SLTR von G, genau dann wenn ein ganzzahliger zulässiger Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auf $\mathcal{N}_G$ existiert.*

Beweis: Sei G ein intern-3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sei ein ganzzahliger machbarer Fluss auf $\mathcal{N}_G$. Im ersten Schritt extrahieren wir einen Schnyder-Wood σ und ein FAA ϕ, um dann zu zeigen, dass sie ein Ecken kompatibles Paar bilden. Für einen machbaren Fluss müssen die Bedarfe erfüllt werden. Es gilt somit $|\varphi_1| = |E_{in}|$ und $|\varphi_2| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$.

$$\begin{aligned}
|\varphi_1| + |\varphi_2| &= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}| + |E_{in}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 2|E| - |V| - 1 + 2|F| - |f_{aus}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (deg(v) - 3) + 2|V| + 2|F| - 1 - |f_{aus}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (deg(v) - 3) + 2|E| + 3 - |f_{aus}| \\
&= \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)}_{\text{Dummy-Senke zu Senke 2}} + \underbrace{\sum_{v \in V} (deg(v) - 3) + 3}_{\text{Kapazität Senke 2 von den Knoten.}} + \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}|}_{\text{Kanten von den Quadraten zu den inneren Gebieten}}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Die beiden Terme in der rechten unteren Klammer entsprechen den Kapazitäten von den inneren Gebieten zu Senke 1 und Senke 2. Somit sind alle Kanten zu den Senken ausgelastet. Die Kanten von den kleinen Quadraten zu den inneren Gebieten sind ebenfalls ausgelastet. Diese sind die einzigen Kanten in $\mathcal{N}_G$, die sowohl von φ_1 als auch φ_2 genutzt werden können. Kapazität eins und Ganzzahligkeit von φ impliziert somit A3.

Beginnen wir mit φ_1 um einen Schnyder Wood, oder genauer eine α_s-Orientierung, zu erhalten. $|\varphi_1| = |E_{in}|$, somit führt durch jede innere Kante ein Schnyder-Pfad und dieser gibt uns die nach aussen gerichtete Kante in α_s. Es bleibt zu zeigen, dass für jedes innere Gebiet und jeden Knoten die Bedingungen aus Theorem 3.3 für eine α_s eingehalten werden. Da alle Kanten von den Knoten zu Senke 1 ausgelastet sind folgt, dass durch jeden inneren Knoten v genau $deg(v) - 3$ Schnyder-Pfade führen. Somit ergeben die leeren Einkanten von v in $\mathcal{N}_G$ die drei Auskanten für α_s. Für eine Aufhängung a_i folgt analog, dass die beiden ungenutzten Einkanten, zusammen mit der Halbkante ins äußere Gebiet, die Bedingungen der α_s-Orientierung erfüllen. Es bleibt zu zeigen, dass durch jedes innere Gebiet $|f| - 3$ Schnyder-Pfade führen. Der restliche Schnyder-Fluss $|E_{in}| - \sum_{v \in V}(deg(v) - 3)$ muss durch die inneren Gebiete führen und aus der ersten und letzten Zeile von Gleichung **??** folgt

$$|E_{in}| - \sum_{v \in V}(deg(v) - 3) = \sum_{f \in F_{in}}(|f| - 3).$$

Somit führen $|f| - 3$ Schnyder-Pfade durch jedes innere Gebiet und wir können die α_s-Orientierung vervollständigen und erhalten einen Schnyder Wood auf G.

Betrachten wir nun φ_2. Nach A4 sind alle äusseren Kanten in den Winkeln ausgelastet. Falls diese nun in jedem inneren Gebiet von drei Ecken-Pfaden und $|f| - 3$ Zuweisungs-Pfaden genutzt werden, können wir ein FAA extrahieren. Da alle Kanten zu Senke 2 ausgelastet sind, führen $\sum_{f \in F_{in}}(|f| - 3)$ Pfade durch die Dummy-Senke. Somit werden auch $\sum_{f \in F_{in}}(|f| - 3)$ Knoten inneren Gebieten zugewiesen. Indem wir die Pfade zurückverfolgen und sehen aus welchem Gebiet der Zuweisungs-Pfad einen Dummy-Knoten betritt, können wir diese Informationen auslesen. Es bleibt zu zeigen, dass jedem Gebiet genau $|f| - 3$ Knoten zugewiesen werden. Dies gilt, wenn durch jedes Gebiet drei Ecken-Pfade laufen und folgt somit, da die Kanten von den inneren Gebieten zu Senke 2 ausgelastet sind. Wir können also aus φ_2 ein FAA für G extrahieren.

Nun müssen wir zeigen, dass σ und ϕ ein Ecken kompatibles Paar ergeben. C1, dass beide die gleichen Aufhängungen nutzen folgt sofort aus der Konstruktion von $\mathcal{N}_G$. Es bleibt C2.

Betrachten wir ein Teilnetzwerk (wie in Abbildung 3.4) um ein inneres Gebiet f. Die drei Ecken-Pfade können keine der $|f| - 3$ kleinen Quadrate nutzen die schon von Schnyder-Fluss okkupiert werden. Die drei übrigen kleinen Quadrate nennen wir *verfügbar*. Ausgehend von f folgen wir den Ecken-Pfaden rückwärts zu den verfügbaren kleinen Quadraten. Wenn wir das Quadrat verlassen gelangen wir zur dritten Kante eines Winkeldreiecks (entgegen dem Uhrzeigersinn). Nun verlassen wir das Gebiet entweder über diesen Winkel oder bewegen uns weiter (entgegen dem Uhrzeigersinn) zum nächsten Winkeldreieck. Doch wir werden zeigen, dass dies nur dann geschieht wenn das kleine Quadrat zwischen diesen nicht *verfügbar* ist. Also betritt zwischen zwei *verfügbaren* kleinen Quadraten ein Ecken-Pfad das Gebiet und die Winkel haben nach A1 unterschiedliche Label.

Behauptung 1 *Seien Q_1, Q_2 und Q_3, im Uhrzeigersinn, die drei verfügbaren kleinen Quadrate um ein inneres Gebiet f. Dann existiert ein Ecken-Pfad, welcher das Netzwerk über Q_i verlässt. Dieser betritt es in einem Winkel zwischen, im Uhrzeigersinn, Q_{i-1} und Q_i.*

Angenommen dies ist nicht der Fall und nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass der Ecken-Pfad p das Gebiet durch Q_3 verlässt. Der Winkel über den p das Teilnetzwerk um das innere Gebiet betritt liegt also nicht zwischen Q_2 und Q_3. Angenommen er liegt zwischen Q_1 und Q_2. Betrachte das letzte Winkeldreck vor Q_2. Nach unserer Annahme ist die innere Kante dieses Dreiecks von p ausgelastet. Somit kann kein Ecken-Fluss zu Q_2 gelangen und wir erhalten einen Widerspruch, da alle kleinen Quadrate entweder von Ecken- oder von Schnyder-Fluss genutzt werden müssen. Mit dem gleichen Argument kann p das Teilnetzwerk nicht zwischen Q_3 und Q_1 betreten. Somit ist Behauptung 1 wahr.

Behauptung 2 *Alle Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden verfügbaren kleinen Quadraten, haben die selben Label im Schnyder Labeling σ.*

Diese Behauptung folgt aus der in Abbildung 3.3 illustrierten Bijektion zwischen der α_S Orientierung und den Schnyder Labelings auf G und G^*. Die Winkel links und rechts von einem kleinen Quadrat, dass von einem Schnyder-Pfad genutzt wird, haben das gleiche Label in σ, da diese den Einkanten in α_s entsprechen. Die Auskanten entsprechen den verfügbaren kleinen Quadraten, und hier ändern sich die Label.

Diese beiden Behauptungen zusammen zeigen, dass jede Ecke aus ϕ ein anderes Label in σ hat. Somit handelt es sich um ein Ecken Kompatibles Paar (σ, ϕ).

Wir haben die Rückrichtung gezeigt. Nehmen wir also an, dass eine SLTR für G existiert. Wir müssen nun einen zulässigen ganzzahligen Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auf $\mathcal{N}_G$ konstruieren, der die SLTR kodiert. Nach Theorem 2.12 existiert ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ, das zu diesem SLTR passt. Betrachte die zu σ gehörige α_s-Orientierung.

Wir beginnen mit einem leeren, wie oben konstruierten Netzwerk $\mathcal{N}_G$ und werden nun Schritt für Schritt einen zulässigen Fluss φ konstruieren.

Zuerst fügen wir für jeden zugewiesenen Winkel einen Pfad von Quelle 2, über die äussere Kante des Winkeldreiecks, den zugehörigen Dummy-Knoten und die Dummy-Senke hin zu Senke 2 ein. Es kommen somit $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ Einheiten Fluss hinzu und die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2 wird ausgelastet.

Als nächsten fügen wir den Fluss hinzu, der die α_s-Orientierung kodiert. Zuerst von Quelle 1 zu jedem inneren Kanten-Knoten e, dann von den inneren Kanten entweder über ein kleines Quadrat in ein angrenzendes Gebiet oder zu einem benachbarten Knoten je nachdem, wohin die Auskante von e in α_s zeigt. Zuletzt saturieren wir die Kanten von den inneren Knoten und inneren Gebieten zu Senke 1.

Zuletzt müssen wir den Ecken-Fluss einfügen. Ein Ecken-Pfad p entspringt in Quelle 1, nutzt das zugehörige Winkeldreieck (diese sind noch frei) und verlässt das Gebiet über das im Uhrzeigersinn nächste verfügbare kleine Quadrat, wieder.

Es sind alle Kanten hin zu den Senken ausgelastet. Ebenso kann man sehen, dass an keiner Kante die Kapazität überschritten wird. Somit haben wir einen zulässigen ganzzahligen Fluss kostruiert, der eine SLTR kodiert. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

□

4 Nicht ganzzahlige Flüsse

Wie in Kapitel 3 erwähnt, impliziert eine nicht ganzzahlige Lösung für ein Multi-Fluss-Problem auf einem gerichteten Graphen mit $n \geq 2$ Paaren von Quellen und Senken, im Allgemeinen nicht die Existenz einer ganzzahligen Lösung. Die Ergebnisse aus Kapitel 5 lassen jedoch die Möglichkeit offen, dass das man für das betrachtete Netzwerk $\mathcal{N}_G$ die folgende Vermutung beweisen kann. Diess Kapitel wird sich mit der von Aerts und Felsner offen gelassenen Frage beschäftigen, ob die Erkennung von Graphen mit einer SLTR in $\mathcal{P}$ liegt.

Vermutung 1 *Sei $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi_1}, \tilde{\varphi_2})$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf $\mathcal{N}_G$, dann existiert auch eine ganzzahlige Lösung φ und wir können in linearer Zeit ein Gutes-FAA aus $\tilde{\varphi_2}$ extrahieren, ohne eine ganzzahlige Lösung zu berechnen.*

Bemerkung. Wenn wir nicht darauf bestehen, dass unsere Lösung ganzzahlig ist, dann lässt sich eine Lösung nach TODO durch lineare Programmierung in polynomineller Zeit finden und das Entscheidungsproblem, ob ein Graph eine SLTR hat läge so in $\mathcal{P}$.

Um die Argumentation einfacher zu gestalten, werden wir unser 2-Fluss Problem manchmal als 3-Fluss Problem, mit einer Lösung $\varphi = (\varphi_s, \varphi_e, \varphi_z)$, betrachten. Wir erstellen also $\mathcal{N}_G^*$, wie zuvor $\mathcal{N}_G$, nur mit drei Quellen und Senken und weisen Schnyder-, Zuweisungs- und Ecken-Fluss eigene Typen zu. Man kann leicht sehen, dass Theorem 3.1 in angepasster Form hier ebenfalls gilt und ein zulässiger Fluss $(\varphi_s, \varphi_e, \varphi_z)$ auf $\mathcal{N}_G^*$ genau dann existiert, wenn auch ein zulässiger Fluss (φ_1, φ_2) auf $\mathcal{N}_G$ möglich ist. Die Hinrichtung ist klar. Nehmen wir an (φ_1, φ_2) ist eine ganzzahlige Lösung. Nach Beobachtung A2 gilt, dass die äusseren Kanten eines Winkel-Dreiecks entweder von einem Ecken- oder einem Zuweisungs-Pfad genutzt werden. Diese Kanten sind zusammen mit den Kanten von Quelle 2 zu den Winkeldreiecken die einzigen in $\mathcal{N}_G$, die von beiden Flüssen genutzt werden. Wir können also φ_2 in $|\varphi_2|$ ganzzahlige Pfade aufteilen und jeden Pfad entweder φ_e oder φ_z zuweisen – je nachdem ob er über die Dummy-Senke führt, oder nicht. Insbesondere folgt mit der gleichen Argumentation:

O1 Jede beliebige Kombination von φ_s, φ_e und φ_z zu zwei Flüssen und ein zu $\mathcal{N}_G$ analoges Netzwerk hat eine zulässige ganzzahlige Lösung genau dann, wenn eine Lösung für das 3-Fluss-Netzwerk existiert.

Betrachten wir zunächst den zweiten Teil von Vermutung 1.

Lemma 4.1. *Sei $\tilde{\varphi}$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf $\mathcal{N}_G$ und sei W die Menge der vom Zuweisungsfluss $\tilde{\varphi}_z$ genutzten inneren Winkel von G. Dann existiert* *eine Teilmenge $\phi \subseteq W$, sodass aus jedem Gebiet f genau $|f|-3$ Winkel in ϕ enthalten sind und in der jeder Knoten v höchstens einmal vorkommt. ϕ kodiert also ein FAA von G.*

Beweis: Wir betrachten das gerichtete Netzwerk $\mathcal{F}_z$ mit einer Quelle s und Senke t, einem Beutel B_f für jedes innere Gebiet f, einem Knoten (f, v) für jeden inneren Winkel und einem Knoten für jeden Dummy-Knoten. Zuerst fügen Kanten mit Kapazität $|f| - 3$ von der Quelle zu jedem Beutel ein. Dann folgen Kanten von den Beuteln B_f zu den Winkeln von f, von den Winkeln (f, v) zu den Dummy-Knoten v^* und zuletzt eine Kante von jedem Dummy-Knoten zu Senke mit Kapazität 1, jeweils mit Kapazität 1. Der maximal mögliche s-t-Fluss in $\mathcal{F}_z$ ist $\sum_{f \in F_{in}}(|f| - 3)$, da die Kanten zu den Beuteln einen Schnitt bilden und wir aus $\tilde{\varphi}_z$ sofort eine zulässige nicht ganzzahlige Lösung $\tilde{\phi}$ für $\mathcal{F}_z$ konstruieren können. Nach Theorem 1.9 existiert somit ein ganzzahliger Fluss ϕ auf $\mathcal{F}_z$, mit $|\phi| = |\tilde{\phi}| = |\tilde{\varphi}_z| = \sum_{f \in F_{in}}(|f| - 3)$.

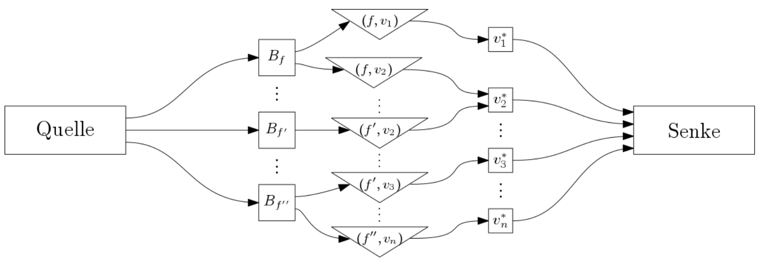


Abbildung 4.1: Skizze des Netzwerkes $\mathcal{F}_z$. Die Kanten von der Quelle zu einem Beutel B_f hat Kapazität $|f| - 3$ und alle anderen haben Kapazität 1.

ϕ weißt nun jedem inneren Gebiet f genau $|f|-3$ Winkel zu und nach Konstruktion kann jeder Knoten v nur einmal zugewiesen werden. Wenn wir noch die per Konstruktion von $\mathcal{N}_G$ zugewiesenen Knoten am äusseren Gebiet hinzunehmen, dann kodiert ϕ ein FAA von G. □

Wenn wir zeigen können, dass das so erhaltene ϕ ein Gutes-FAA ist, folgt Vermutung 1, da die Existenz eines Guten-FAAs ϕ nach Theorem 3.1 auch die Existenz eines ganzzahligen zulässigen Flusses φ für $\mathcal{N}_G$ impliziert. Ein Weg, zu zeigen

Lemma 4.2. *Sei $\tilde{\varphi}$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf $\mathcal{N}_G$ und sei C die Menge der vom Eckensfluss $\tilde{\varphi}_e$ genutzten inneren Winkel von G. Dann existiert eine Teilmenge $\phi \subseteq W$, sodass aus jedem Gebiet f genau $|f| - 3$ Winkel in ϕ enthalten sind und in der jeder Knoten v höchstens einmal vorkommt. ϕ kodiert also ein FAA von G.*

Angenommen, es existiert ein Graph G, für den nur eine nicht ganzzahlige Lösung existiert. Sei $\tilde{\varphi}$ dieser nicht ganzzahlige zulässige Fluss auf $\mathcal{N}_G$, und ϕ ein wie in Lemma 4.1 aus $\tilde{\varphi}$ konstruiertes FAA für G. Sei $\overline{\varphi}_z$ der eindeutige Zuweisungs-Fluss der dieses FAA auf $\mathcal{N}_G$ kodiert. Sei $\overline{\mathcal{N}}_G$, ein Teilnetzwerk von $\mathcal{N}_G$, aus welchem alle Kanten, die von $\overline{\varphi}_z$ genutzt werden gelöscht wurden. Die Bedarfe sind weiterhin $|E_{in}|$ und

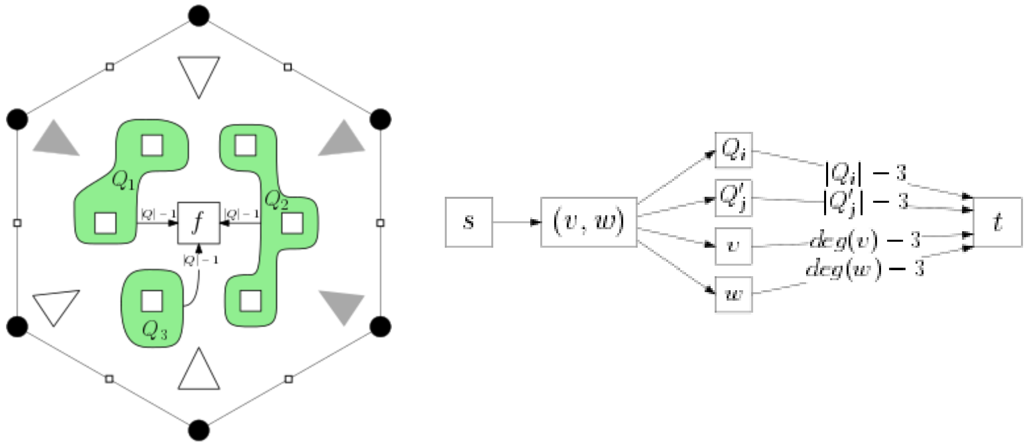


Abbildung 4.2: Auf der linken Seite eine Illustration von $\overline{\varphi}_s$ mit den von $\overline{\varphi}_z$ zugeordneten Winkeln in grau. Auf der rechten Seite das resultierende Netzwerk.

$3|F_{in}|$ für den Schnyder- und Ecken-Fluss. Nach der in O1 festgehaltenen Beobachtung können wir, wie in [**?**], φ_s und φ_e zusammenfassen und mit φ_1 bezeichnen. Wir suchen also nach einem zulässigem ganzzahligem Fluss $\varphi_1 = \varphi_s + \varphi_e$ auf $\overline{\mathcal{N}}_G$ mit Bedarf $|E_{in}| + 3|F_{in}|$, da dann auch eine ganzzahlige Lösung (φ_s, φ_e) folgt.

Bevor wir fortfahren wollen wir einige Kantentypen aus $\mathcal{N}_G$ benennen.

- $E_\triangle$ = Die äusseren Kanten in den Winkeldreiecken.
- $E_\triangledown$ = Die inneren Kanten in den Winkeldreiecken.
- S_* = Die Kanten von den Dummy-Knoten zur Dummy-Senke.
- V_* = Die Kanten von den Winkeldreiecken zu den Dummy-Knoten.
- $E_\rightarrow$ = Die Kanten von Quelle 1 zu den Kanten-Knoten.
- $F_\square$ = Die Kanten von den kleinen Quadraten zu inneren Gebieten f.
- $V_\rightarrow$ = Die Kanten von den Knoten-Knoten zu Senke 1.

Sei e_d die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2, dann sind sowohl $\mathcal{S}_1 = E_\triangle \cup E_\rightarrow$, als auch $\mathcal{S}_2 = F_\square \cup V_\rightarrow \cup \{e_d\}$ minimale Schnitte in $\mathcal{N}_G$, die alle Quellen und Senken trennen. Wenn wir nur von den Kanten aus $E_\triangle$, die in $\overline{\mathcal{N}}_G$ übrig sind, sprechen, schreiben wir $\overline{E}_\triangle$. Für die, zu diesen korrespondierenden Kanten im inneren ihrer Winkeldreiecke, schreiben wir $\overline{E}_\triangledown$. Für die Teilmengen von V_* und S_* in $\overline{\mathcal{N}}_G$ schreiben wir $\overline{S}_*$ und $\overline{V}_*$. Die restlichen Mengen sind vollständig in $\overline{\mathcal{N}}_G$ enthalten.

Seien E_z die von $\overline{\varphi}_z$ genutzen Kanten, die wir aus $\mathcal{N}_G$ entfernen. Dann folgt $|\mathcal{S}_1 \cap E_z| = |E_\triangle \cap E_z| = |\varphi_z|$. Somit ist $\overline{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1 \backslash E_z = \overline{E}_\triangle \cup E_\rightarrow$ ein Schnitt in $\overline{\mathcal{N}}_G$.

Analog ist $\overline{\mathcal{S}}_2 = F_\square \cup V_\rightarrow$ ein Schnitt. Für die Kapazität von $\overline{\mathcal{S}}_1$ können wir folgern

$$c(\overline{\mathcal{S}}_1) = c(\overline{E}_\triangle) + c(E_\rightarrow) = c(E_\triangle) - |\varphi_z| + c(E_\rightarrow) = 3|F_{in}| + |E_{in}|,$$

und analog folgt $c(\overline{\mathcal{S}}_2) = 3|F_{in}| + |E_{in}|$.

Falls es sich hierbei um minimale Schnitte handelt, dann würde dies bedeuten, dass eine ganzzahlige Lösung für $\overline{\mathcal{N}}_G$ existiert, mit deren Hilfe wir, zusammen mit φ_z, eine ganzzahlige zulässige Lösung für $\mathcal{N}_G$ konstruieren könnten, was wiederum ein Widerspruch zu unserer Annahme wäre. Es muss also einen kleineren Schnitt $\mathcal{S}_{min}$, mit $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$, geben.

Behauptung 3 *Ein minimaler Schnitt $\mathcal{S}_{min}$ in $\overline{\mathcal{N}}_G$ enthält ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur Kanten von einem der vier Typen $\overline{E}_\triangledown, F_\square, V_\rightarrow$ und $E_\rightarrow$.*

Kanten auf einem Pfad von der Quelle bis zu einer Kante in $\overline{E}_\triangledown$, können durch diese ersetzt werden. Ebenso können Kanten zwischen zwei Winkeldreiecken, oder von einem Winkeldreieck zu einem kleinen Quadrat, durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, nächste Kante in $\overline{E}_\triangledown$ ersetzt werden. Kanten zwischen einem Kanten-Knoten und einem Knoten-Knoten, oder einem kleinen Quadrat, können durch eine Kante in $E_\rightarrow$ ersetzt werden. Abschliessend können Kanten, von einem inneren Gebiet zu Senke, durch das hinzufügen von allen Kanten aus $F_\square$ an diesem Gebiet, ersetzt werden.

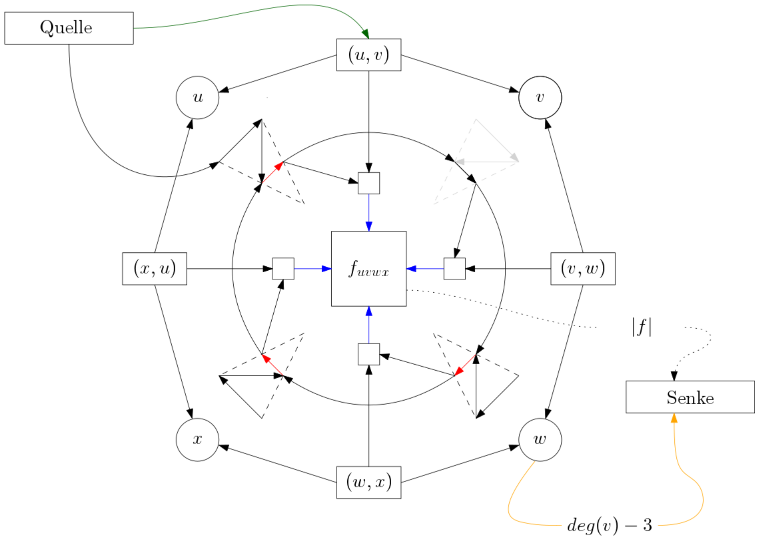


Abbildung 4.3: Die vier Kantentypen $\overline{E}_\triangledown$ (rot), $F_\square$ (blau), $V_\rightarrow$ (orange) und $E_\rightarrow$ (grün) aus denen sich, nach Behauptungen 3 und 4, ein minimaler Schnitt in $\overline{\mathcal{N}}_G$ zusammensetzt.

Behauptung 4 *Ein minimaler Schnitt $\mathcal{S}_{min}$ in $\overline{\mathcal{N}}_G$ muss ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus jeder der Mengen $\overline{E}_\triangledown, F_\square, V_\rightarrow$ und $E_\rightarrow$ mindestens eine, aber aus keiner der Mengen alle Kanten enthalten.*

Falls ein solcher ein Schnitt existiert, dann kann er nicht alle Kanten $\overline{E}_\triangledown$ enthalten, da sonst $\mathcal{S}_{min} \cup (E_\triangle \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$ gilt. Falls er jedoch keine Kante aus $\overline{E}_\triangledown$ enthält, dann muss er alle Kanten aus $F_\square$ enthalten und falls er alle Kanten aus $F_\square$ enthält, dann muss er o.B.d.A. auch alle Kanten aus $V_\rightarrow$ enthalten. Es folgt $\mathcal{S}_{min} \cup \{e_d\} \supseteq \mathcal{S}_2$. Angenommen er enthält keine Kante aus $F_\square$, dann muss er alle Kanten aus $\overline{E}_\triangledown$ und $E_\rightarrow$ enthalten und es gilt $\mathcal{S}_{min} \cup (E_\triangle \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$. Mit analogen Argumenten folgt der Rest von Behauptung 4.

Nehmen wir also an, dass ein minimaler Schnitt $\mathcal{S}_{min}$, wie in Behauptungen 3 und 4, existiert mit $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$. Betrachten wir für den Moment das Teilnetzwerk um ein inneres Gebiet in $\mathcal{N}_G$. Falls alle drei Kanten aus $\overline{E}_\triangledown$ in $\mathcal{S}_{min}$ enthalten sind, dann müssen auch o.B.d.A alle Kanten in $E_\rightarrow$ um dieses Gebiet enthalten sein und falls eine Kante aus $\overline{E}_\triangledown$ nicht enthalten ist, dann müssen, im Uhrzeigersinn bis zur nächsten enthaltenen Kante aus $\overline{E}_\triangledown$, alle Kanten aus $F_\square$ Teil von $\mathcal{S}_{min}$ sein. Falls höchstens eine Kante aus $\overline{E}_\triangledown$ im Schnitt läge, dann folgt o.B.d.A, dass keine Kante aus $\overline{E}_\triangledown$ und alle aus $F_\square$, um das innere Gebiet, enthalten sind.

Angenommen es existieren nur Gebiete in denen entweder alle oder keine Kanten aus $\overline{E}_\triangledown$ in $\mathcal{S}_{min}$ enthalten sind. Dann existiert ein Kanten-Knoten der, wie in Abbildung 4.4 jeweils eines von beiden berührt. Wir können nun im rechten Gebiet eine Kante aus $F_\square$ durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, folgende Kante aus $\overline{E}_\triangledown$ ersetzen.

Sei f ein Gebiet,

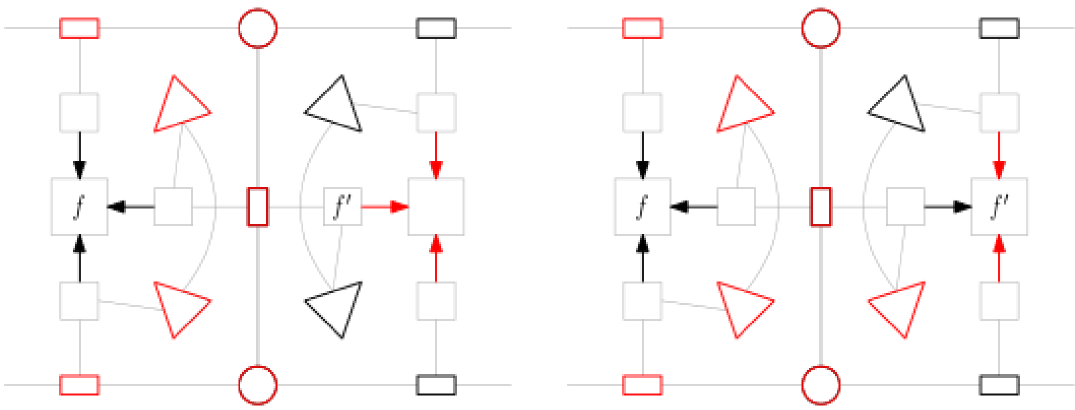


Abbildung 4.4

Lemma 4.3. *Sei $\mathcal{N}$ ein gerichtetes Netzwerk mit einer Quelle s und einer Senke t. Sei $\mathcal{S}_{min}$ ein minimaler Kantenschnitt zwischen s und t und sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}_{min}$. Dann ist $\tilde{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \backslash \mathcal{T}$ ein minimaler Kantenschnitt zwischen s und t in $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \backslash \mathcal{T}$.*

Beweis: Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\mathcal{N}$ nur Kanten mit Kapazität 1 enthält. Nach dem *Max-Flow Min-Cut* Theorem existiert ein s-t-Fluss φ mit $|\varphi| = c(\mathcal{S}_{min})$. Nach Theorem 1.9 können wir annehmen, dass wir es sich um einen ganzzahligen Fluss handelt. Wir können diesen Fluss somit in Pfade (TODO) p

mit Flussstärke 1 aufteilen. Betrachten wir nun $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \backslash \mathcal{T}$, dann trennt die Entnahme von $\mathcal{T}$ genau $c(\mathcal{T})$ Pfade $p \in P$. Die restlichen Pfade, nennen wir sie $\tilde{p} \in \tilde{P}$, bleiben intakt. Somit existiert ein s-t-Fluss $\tilde{\varphi}$ mit $|\tilde{\varphi}| = c(\mathcal{S}_{min}) - c(\mathcal{T})$. $\tilde{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \backslash \mathcal{T}$ muss somit ein minimaler Schnitt in $\tilde{\mathcal{N}}$ sein, da jedes $p \in \tilde{P}$ genau eine Kante aus $\tilde{\mathcal{S}}_{min}$ nutzt und die Entnahme dieser Kanten, nach Voraussetzung, s und t trennt. □

Lemma 4.4. *Sei $\tilde{\varphi}$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf $\mathcal{N}_G$, dann existiert auch mindestens ein ganzzahliger zulässiger Fluss φ auf $\mathcal{N}_G$ und somit auch eine SLTR von G.*

Beweis: Sei $\tilde{\varphi}$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf $\mathcal{N}_G$ und seien $\overline{P}_*$ und $\overline{V}_*$ die nicht von $\tilde{\varphi}$, also genauer von $\tilde{\varphi}_z$, genutzten Kanten aus P_* und V_*. Sei nun $\tilde{\mathcal{N}}_G \subseteq \mathcal{N}_G$ ein Netzwerk, bei dem alle Kanten $e \in \overline{P}_* \cup \overline{V}_*$ aus $\mathcal{N}_G$ gelöscht werden. $\tilde{\varphi}$ ist also weiterhin eine zulässige, nicht ganzzahlige Lösung für $\tilde{\mathcal{N}}_G$.

Betrachten wir für einen Moment das Netzwerk $\tilde{\mathcal{F}}_G$, welches entsteht, wenn wir die Quellen und Senken von $\tilde{\mathcal{N}}_G$ vereinen und nur einen Fluss zwischen der Super-Quelle s und der Super-Senke t betrachten. $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ sind weiterhin minimale Schnitte in $\tilde{\mathcal{F}}_G$ und nach Lemma 4.3 gilt für jede Teilende $\tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}_1$

und $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2$ ein zulässiger, nicht ganzzahliger Fluss auf $\tilde{\mathcal{F}}_G$. Nach Theorem 1.9 existiert somit ein zulässiger und ganzzahliger s-t-Fluss ψ mit $|\psi| = |\tilde{\psi}| = |\tilde{\varphi}|$. Der Fluss ψ saturiert, da $\mathcal{S}_2$ ein minimaler Schnitt ist, die Kante e_d zwischen der Dummy-Senke und der Senke t und wir können diesen Teil des Flusses ψ_z in $\sum_{f \in F_{in}}(|f|-3) = n$ Pfade $\{p_1, ..., p_n\} = P$ mit Flussstärke 1 aufteilen. Jeder dieser Pfade p_i führt nun genau durch einen Knoten v_i^* und einen zugehörigen Winkel (f_i, v_i). Es bleibt zu zeigen, dass durch jedes innere Gebiet f_i in $\tilde{\mathcal{F}}_G$ genau $|f_i| - 3$ Pfade aus P führen.

Die Menge der genutzten Winkel ϕ kodiert nach Lemma 4.1 ein FAA von G, da es sich um eine Teilmenge der von $\tilde{\varphi}_z$ genutzten Winkel handeln muss. Alle anderen, in $\mathcal{N}_G$ möglichen, Pfade zur Dummy-Senke durch die restlichen Winkel wurden, um $\tilde{\mathcal{F}}_G$ zu erhalten, durch die Entfernung von $\overline{P}_*$ und $\overline{V}_*$ getrennt und stehen für ψ und somit für ψ_z nicht zur Verfügung.

Wir können ψ in ψ_z und ψ_1 aufteilen. ψ_1 ist, ebenso wie ψ_z, ganzzahlig. Da wir, um $\tilde{\mathcal{N}}_G$ zu erhalten, nur Kanten gelöscht haben, welche weder von ψ_z, noch von ψ_1 genutzt werden, bildet $\varphi_\psi = (\psi_1, \psi_z)$ einen ganzzahligen Zwei-Fluss auf $\tilde{\mathcal{N}}_G$ und somit auch auf $\mathcal{N}_G$. Für diesen Fluss gilt

$$|\varphi_\psi| = |\psi_1| + |\psi_z| = |\psi| = |\tilde{\varphi}|.$$

Somit handelt es sich bei φ_ψ um eine zulässige ganzzahlige Lösung auf $\mathcal{N}_G$ und nach Theorem 3.1 existiert somit eine SLTR für G. □

Wir haben somit gezeigt, dass mindestens eine Auswahl der Winkel ein Gutes-FAA kodiert. Dies schließt den Beweis von Vermutung 1 fast ab. Der einzige Punkt, der zu zeigen bleibt ist, dass eine beliebige Auswahl der Winkel aus W uns ein Gutes-FAA gibt.

5 Das Programm

Wir wollen nun auf eine Implementierung des Algorithmus aus dem vorherigen Abschnitt eingehen. Der Code wurde in SageMath [**?**] geschrieben und ist auf Anfrage erhältlich. Das Multi-Fluss-Problem auf $\mathcal{N}_G$ zu gegebenen Bedarfen (d_1, d_2) wird hier, mithilfe des in Sage enthaltenen Solvers *Glpk* [**?**] für Lineare Programmierung gelöst, welches ein Paar von Flussgraphen (φ_1, φ_2) ausgibt.

Algorithm 1: An algorithm to detect and return a Good-FAA for a plane, internally-3-connected and suspended Graph G.

Good-FAA $(G, f_{aus}, \{a_1, a_2, a_3\})$;
Input : G, a planar, internally-3-connected Graph, f_{aus}, the outer face and the suspensions $\{a_1, a_2, a_3\}$.
Output : A Good-FAA for G, if possible.
if *G has FAA* **then**
  $(d_1, d_2) \longleftarrow$ Demands for $\mathcal{N}_G$;
  Initialize $\mathcal{N}_G$;
  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \longleftarrow$ Integral-Multicomodity-Flow($\mathcal{N}_G$) ;
  if $|\varphi_1| = d_1$ *and* $|\varphi_2| = d_2$ **then**
    $\phi \longleftarrow$ Good-FAA from φ_2 ;
    return: ϕ
  end
end

Wir können ein Gutes-FAA ϕ aus φ_2 extrahieren indem wir die Zuweisungs-Pfade durch die Dummy-Senke zurück verfolgen. Wir betreten jeden passierten Dummy-Knoten v^* aus einem Winkel (f, v). Diese Winkel ergeben die Zuweisungen ϕ.

Bemerkung. Die Kontrolle, ob für G ein FAA existiert ist optional, lässt sich jedoch, zum Beispiel wie zuvor über ein 1-Fluss-Problem, in polynomineller Zeit bestimmen. Somit spart sie im Falle, der nicht Existenz eines FAA Zeit.

5.1 Visualisierung

Nehmen wir an, wir haben für einen Graphen G ein Gutes-FAA ϕ gefunden. Für eine SLTR, müssen wir eine zu ϕ passende Einbettung von G finden. Wir werden den in Abschnitt 2.1 erörterten Ansatz nutzen, um eine SLTR von G zu erhalten.

Wir wollen nun eine Einbettung $f : V \to \mathbb{R}^2$ von G ähnlich der Gummibad-Repräsentation berechnen, die ϕ respektiert. Sei $S \subseteq V$ die Menge der Knoten von

f_{aus}. Nach Abschnitt 2.1 gelten die folgenden Gleichungen für zugewiesene (oben) und nicht zugewiesene (unten) Knoten.

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1)$$

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} > 0$$

Um zu einer gegebenen Gewichtsfunktion λ eine Lösung zu finden, können wir diese Gleichungen nach der Ergänzung um Gleichungen für die Aufhängungen in einer Matrix zusammenfassen.

$$M_\lambda(\vec{v_x}, \vec{v_y}) = \left(\begin{smallmatrix} f(S)_x & f(S)_y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \text{ mit } (M_\lambda)_{vw} = \begin{cases} -\lambda_{vw} & \text{falls } (v, w) \in E, \\ \sum_{q \in N(v)} \lambda_{qv} & \text{falls } v = w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir nun die Pseudo-Inverse (TODO) berechnen, erhalten wir die Lösung

$$f(V) = M_\lambda^{-1} \left(\begin{smallmatrix} f(S)_x & f(S)_y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right).$$

Wir wollen nun, inspiriert von den *iterativen Tutte Einbettungen* aus [**?**], diese Rechnung mehrmals durchführen und Schritt für Schritt die Gewichtung λ anpassen.

Setzten wir im ersten Durchlauf $\lambda = 1$ erhalten wir eine Gummiband-Repräsentation die ϕ respektiert. Wir wollen nun anhand dieser Einbettung λ verändern um, Iteration für Iteration, eine „schönere“ Einbettung zu erhalten. Halten wir drei Punkte fest, die wir intuitiv, in absteigender Reihenfolge, als Bewertungsmaßstab für eine schöne Einbettung berücksichtigen wollen.

- Alle inneren Gebiete haben eine ähnliche Größe.
- Es existieren keine zu langen oder kurzen Kanten.
- Es existieren keine Ecken mit zu kleinen oder großen Winkeln.

TODO

5.2 Statistische Betrachtung

Für eine statistische Betrachtung der Häufigkeit von Graphen mit SLTRs wurde das Programm auf pseudo-zufällige Graphen laufen lassen. Hier würde eine gleichmäßige Wahl von (intern-)3-zusammenhängenden Graphen unter Umständen andere Ergebnisse liefern. Ein uniformer Algorithmus zur zufälligen Erstellung 3-zusammenhängender planarer Graphen lässt sich zum Beispiel nach einem Ansatz von Fusy aus [**?**] erstellen. Als Teilschritt der Erstellung eines uniformen Samplers für planare Graphen werden hier 3-zusammenhängende planare Graphen mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit

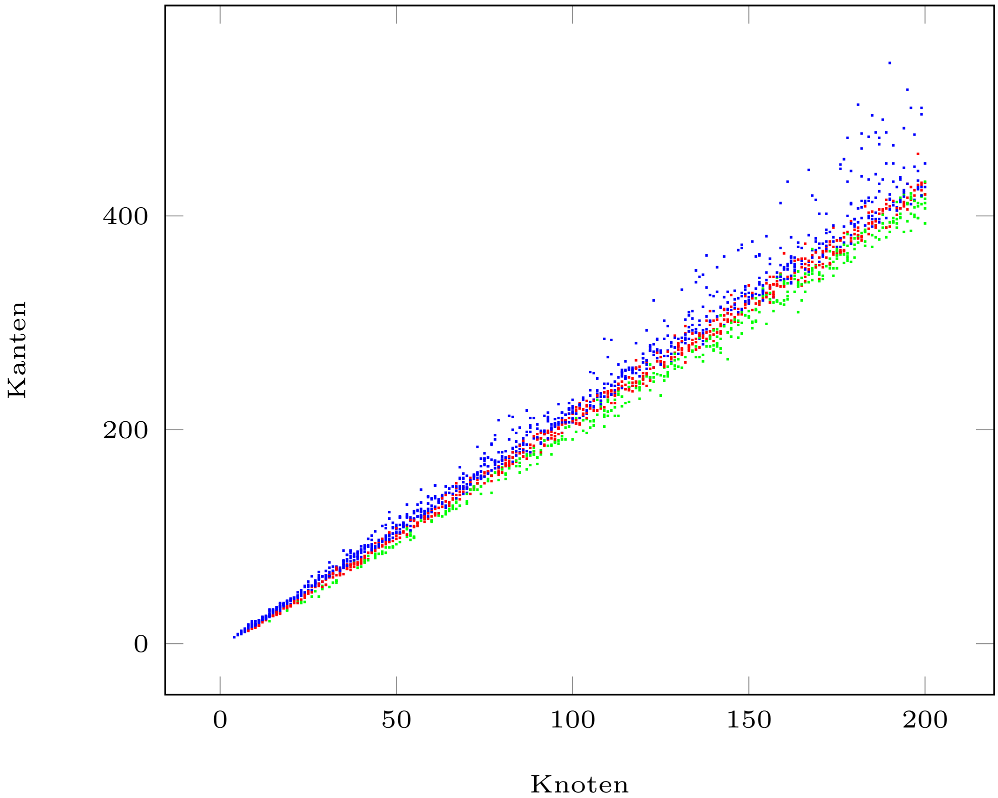


Abbildung 5.1: Anwendung des Programms auf pseudo-zufällige, planare, 3-zusammenhängende Graphen, mit gegebenen Aufhängungen. Jeder Punkt entspricht einem Graphen mit SLTR (blau), nur mit FAA (rot) und ohne FAA (grün).

erzeugt. Die Implementierung ist jedoch aufgrund der Auswertung von Erzeugendenfunktionen, nicht trivial. Diese Analyse beschränkt sich daher auf pseudo-zufällig erzeugte Graphen.

In Abbildung 5.1 sind die Ergebnisse für Graphen von vier bis TODO Knoten dargestellt, mit jeweils TODO Graphen für jede Knotenzahl. Wir übergeben dem Programm einen Graphen mit Aufhängungen $\{a_1., a_2, a_3\}$, was im Falle 3-zusammenhängender planer Graphen mit mehr als drei Knoten ein äusseres Gebiet induziert. Ein Punkt in der Abbildung entspricht einem Graphen. Die Farben stehen für eine SLTR (blau), nur ein FAA (rot) oder einen Graphen mit keinem von beiden (grün).

TODO