

Technische Universität Berlin

Master Arbeit

Grapheneinbettungen und Optimierung

Autor:
Jonas Neukamm

Betreuer und Erstgutachter:
Prof. Dr. Stefan Felsner

Matrikelnummer:
324283

Zweitgutachter:
Dr. Frank Lutz

*Masterarbeit zur Prüfung zum Master of Science
an der*

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

7.6.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

.....

Jonas Neukamm

Zusammenfassung

To Do

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)	2
1.2 Schnyder Woods	3
2 Hauptteil	7
2.1 Harmonische Funktionen	8
2.2 Ecken kompatible Paare	8
3 Algorithmen zur Erkennung von SLTR	9
3.1 SLTR via Zwei-Fluss	9
3.1.1 Schnyder-Wood-Fluss	9
3.1.2 FAA-Fluss	11
3.1.3 Graphen mit wenigen FAAs oder Schnyder Woods	12
3.1.4 Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs	12
Literaturverzeichnis	15

1 Grundlagen

Wir werden uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten V und Kanten $E \subseteq (V \times V)$. Eine Kante uv verbindet die beiden Knoten u und v . Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *planen Graphen*. Sei Für einen planaren Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces) F betrachten. Bei einem planen Graph wird das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet definiert. Für die weiteren Betrachtungen macht es oft Sinn drei Knoten a_1, a_2, a_3 im äusseren Gebiet gesondert zu betrachten und diese die *Aufhängungen* von G zu nennen.

Planare Graphen haben, durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen, in gewissem Sinne besonders schöne Zeichnungen und so ist einer der Fragen mit der sich schon viele Mathematiker auseinander gesetzt haben: "*How to draw a Graph?*"[Tut63]

Bei topologische Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt die sich nur in den Knoten treffen. In den Fünfzigern wurde unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen mit einem beliebigen äusseren Gebiet eine geradlinige Zeichnung existiert. [Fár48]

Definition 1.1 (intern zusammenhängend). Ein Graph G ist zusammenhängend falls für alle Knoten u, v ein Pfad von u nach v existiert. G ist k -zusammenhängend, falls er nach der Entfernung von $k - 1$ beliebigen Knoten weiterhin zusammenhängend ist. Sei G plan mit den Aufhängungen a_1, s_2, a_3 , weiter sei a_∞ ein zusätzlicher Knoten im äusseren Gebiet. Dann ist G *intern k -zusammenhängend*, falls $G \cup \{a_1 a_\infty, a_2 a_\infty, a_a s_\infty\}$ k -zusammenhängend ist.

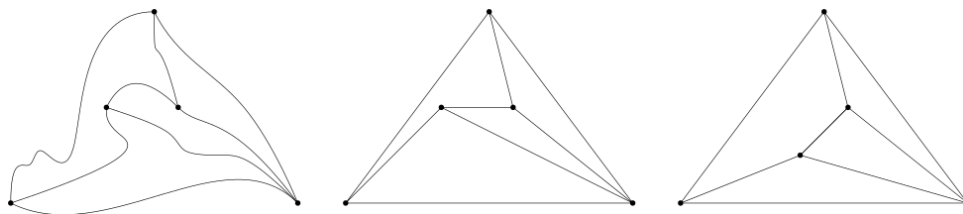


Abbildung 1.1: Planarer Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen und einer konvexen Zeichnung.

In den Siebzigern betrachtete William Thomas Tutte die Unterklasse der drei-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern sogar *konvexe* Zeichnungen existieren, bei denen alle Gebiete die konvexe Polygone umranden. [Tut63]

1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)

Ausgehend von der konvexen Darstellung nach Tutte, kann man sich die Frage stellen unter welchen Voraussetzungen wir einen planaren Graphen so zeichnen können, dass alle Gebiete, inklusive dem Äusseren Dreiecken umranden. Bei der Formalisierung dieser Darstellung und ersten Feststellungen halten wir uns an Nieke Aerts und Stefan Felsner [AF13b].

Definition 1.2 (SLTR). Eine Zeichnung eines planen Graphen G wird Gradlinige Dreiecks Darstellung, im weiteren kurz *SLTR* (für die englische Bezeichnung Straight Line Triangle Representation), genannt falls gilt:

- S1 Alle Kanten Segmente von Geraden
- S2 Alle Gebiete, inklusive dem äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.

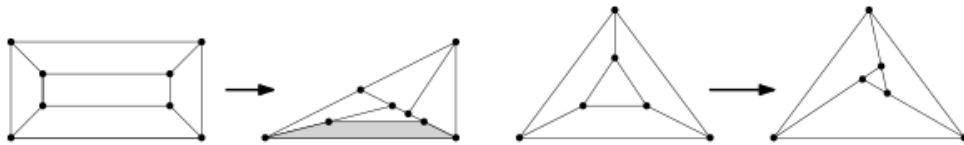


Abbildung 1.2: Links einer der beiden drei-zusammenhängenden Graphen auf acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Um die Problemstellung greifbarer zu machen werden wir planare Graphen zusammen mit den drei Aufhängungen a_1, a_2 und a_3 als designierten Ecken einer möglichen SLTR betrachten. Einen Graphen zusammen mit einem äusseren Gebiet bzw. Aufhängungen zu betrachten, macht auch in sofern Sinn, dass kombinatorische Graphen existieren, von denen manche Einbettungen SLTRs zulassen, andere jedoch nicht, so wie in Abbildung ?? zu sehen.

Proposition 1.3. Sei G ein Graph mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 als äusseren Ecken einer SLTR. Weiter gebe es keinen Knoten von Grad zwei der in beiden angrenzenden Gebieten den Winkel π hat¹. Dann ist G intern-drei-zusammenhängend^{1.1}.

Wir werden also von nun an, der Einfachheit halber intern-drei-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen mit SLTR auf diese

¹Ein solcher Knoten ist keine Aufhängung, da der Aussenwinkel grösser als π ist. Alle anderen Knoten haben $\leq \pi$ Winkel. Somit können wir ihn durch eine gerade Kante zwischen seinen Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten.

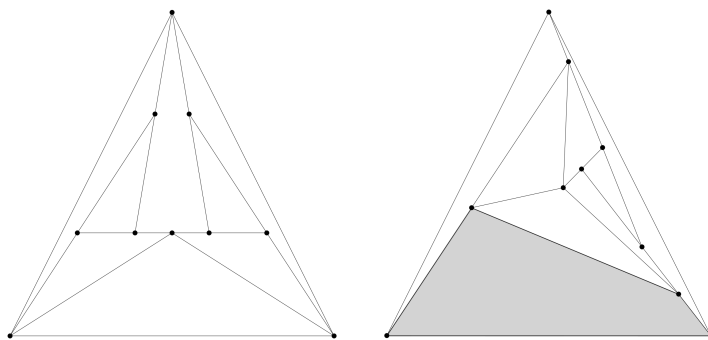


Abbildung 1.3: Der kleinste drei-zusammenhängende kombinatorische Graph mit einer Wahl der Aufhängungen die eine SLTR zulässt und einer Auswahl ohne SLTR.

reduziert werden können.

Zu den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen es für die Existenz von SLTRs gibt und welche algorithmischen Ansätze es bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung gibt haben Aerts und Felsner in [AF13b], [AF13a] und [AF15] schon einige Antworten geliefert, mit denen wir uns in den nächsten beiden Kapiteln beschäftigen werden. Zuerst müssen aber in diesem Kapitel noch ein paar notwendige Konzepte eingeführt werden.

1.2 Schnyder Woods

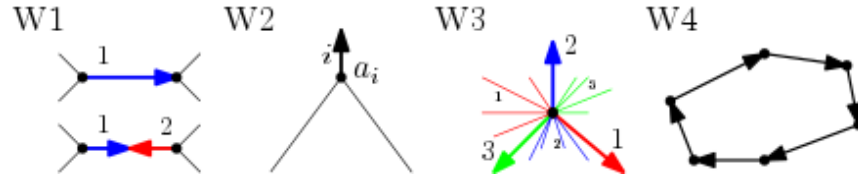
Schnyder Wälder, im weiteren *Schnyder Woods*, wurden zuerst von Walter Schnyder zur Betrachtung der Ordnungs-Dimension planarer Graphen, als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung, betrachtet [Sch89]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer planaren Einbettung auf einem $n - 2 \times n - 2$ Netz [Sch90]. Im Folgenden werden wir die Verallgemeinerung auf 3-zusammenhängende plane Graphen durch Felsner [Fel01] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings einführen und uns dabei an [Fel04] orientieren.

Für den Rest dieses Kapitels meinen wir mit G , wenn nicht weiter spezifiziert, einen 3-zusammenhängenden planen Graphen mit Aufhängungen a_1, s_2, a_3 .

Definition 1.4 (Schnyder Woods). Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von G mit den Labeln 1, 2 und 3, unter Berücksichtigung der folgenden Regeln²:

²Alternativ wird hier auch anschaulicher von rot, grün und blau als Platzhalter für 1, 2 und 3 gesprochen. Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass $i + 1$ und $i - 1$ immer definiert sind.

- W1 Jede Kante ist entweder un- oder bigerichtet. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.
- W2 An jeder Aufhängung a_i existiert eine nach aussen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label i .
- W3 Jeder Knoten v hat Ausgangsgrad eins zu jedem Label. Um v existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.
- W4 Es existiert inneres Gebiet mit gerichteten Zykel in einer Farbe als Rand.



Die Existenz von Schnyder Wood für jeden 3-zusammenhängenden planen Graphen werden wir weiter unten zeigen. Zunächst wollten wir uns mit Resultaten im Bezug auf Einbettungen befassen. Wir wollen hier kurz, das *face-counting*[Fel01] erläutern. Betrachten wir also G zusammen mit einem Schnyder Wald T_1, T_2, T_3 . Nach [Fel04, Korollar 2.5] handelt es sich bei den T_i um gerichtete Bäume mit Wurzeln in a_i . Zu jedem Knoten v existierten also eindeutige Pfade $P_i(v)$ zu den Aufhängungen a_i . Die Pfade von v zu den Aufhängungen treffen sich nach [Fel04, Lemma 2.4] nur in v . Somit können wir zu jedem Knoten v die von den Pfaden $P_{i-1}(v)$ und P_{i+1} und dem äusseren Gebiet begrenzte Region R_i betrachten. Durch das Zählen der Gebiete in den diesen Regionen lässt sich nun eine konvexe Zeichnung von G erzeugen.

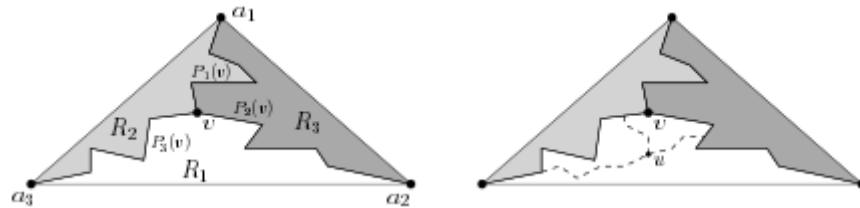


Abbildung 1.4: Regionen zu v und die Inklusion von $R_i(u)$ in $R_i(v)$ falls $u \in R_i(v)$.

Hierzu ordnet man jedem Knoten v seinen Gebiets Vektor (v_1, v_2, v_3) zu, wobei v_i die Anzahl der inneren Gebiete in R_i beschreibt. Nun gilt für jeden Knoten $v_1 + v_2 + v_3 = |F| - 1$. Seien $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0)$ und $\alpha_3 = (0, 0)$, dann erhalten wir die Zeichnung durch die Funktion

$$\mu : v \rightarrow v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3.$$

Nach [Fel04, Theorem 2.7] ist die mit diesen Koordinaten erzeugte Zeichnung planar und konvex. Sie hat sogar noch die schöne Eigenschaft, dass sich die Knoten an jedem innern Gebiet auf dem Rand eines Dreiecks befinden, wie in Abbildung ?? illustriert.

// TODO Schnyder Triangle Bild ?!

Eine weitere Methode um aus Schnyder Woods, über geodätische Einbettung, zu einer konvexen Zeichnung zu gelangen, wird ebenfalls in [Fel04] beschrieben.

Definition 1.5 (Schnyder Labeling). Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung Winkel von G mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1_{en} , 2_{en} und 3_{en} . Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.
- L2 Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1_{en} , 2_{en} und 3_{en} .
- L3 An Aufhängung a_i haben äusseren Winkel die Label $i-1$ und $i+1$ im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label i .

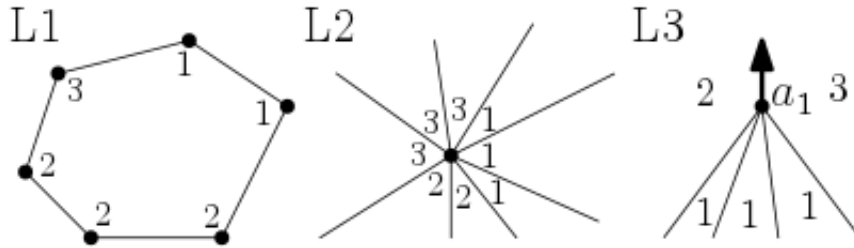


Abbildung 1.5: Aus L1 und L2 folgt, dass es in einem Schnyder Labeling nur Kanten von Typ A oder B, siehe Abbildung ??, gibt.

Durch Abbildung ?? wird eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings geschaffen. Wenn wir uns auf drei-zusammenhängende planare Graphen beschränken, dann ist die dargestellte Abbildung nach [Fel04, Theorem 2.3] eine Bijektion.

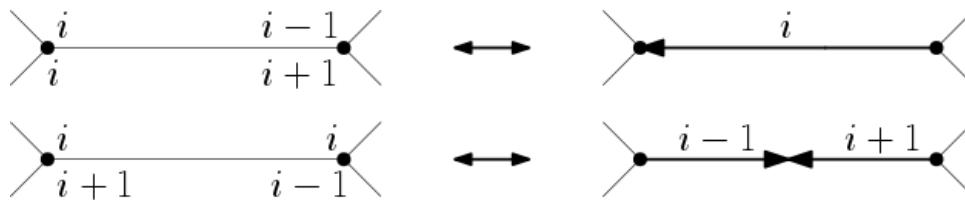


Abbildung 1.6

Mithilfe der Schnyder Labelings können wir kurz auf die Existenz einer Schnyder Woods, bzw. Schnyder Labelings, für einen beliebigen 3-zusammenhängenden planaren Graphen eingehen. Der

// TODO

2 Hauptteil

Sei G ein planer intern 3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nehmen wir für einen Moment an, dass wir schon ein SLTR für G gefunden haben, dann hat jeder Knoten v in maximal einen inzidenten Gebiet f einen flachen Winkel, mit (f, v) bezeichnet, und liegt auf einer Geraden. Jedes Gebiet f hat genau drei Ecken, also $\deg(f) = 3$ flache Winkel. Dies liefert im Umkehrschluss eine notwendige Bedingung für die Existenz einer SLTR, indem wir die Knoten den Gebieten zuordnen.

Definition 2.1 (FAA). Sei $G = (V, E, F)$ ein planer Graph, dann ist eine Fläche Winkel Zuordnung, im weiteren (nach dem englischen *flat-angle-assignment*) mit FAA bezeichnet, ein Matching zwischen Knoten und Gebieten, sodass:

E1 Jedem Gebiet f sind genau $|f| - 3$ Knoten zugeordnet.

E2 Jeder Knoten v ist höchstens einem Gebiet zugeordnet.

Für den Fall, dass Aufhängungen gegeben sind, dann fordern wir zusätzlich:

E3 Die inzidenten Knoten des äusseren Gebietes, die keine Aufhängungen sind, müssen dem äusseren Gebiet zugeordnet werden.

Ein planer Graph kann also nur dann eine SLTR besitzen, falls mindestens ein FAA existiert, jedoch liefert nicht jedes FAA sofort ein SLTR. Ein FAA, das zu einer SLTR korrespondiert, wenn also die zugeordneten Winkel des FAA genau die flachen Winkel der SLTR sind, nennen wir von nun an *Gutes-FAA* oder kurz *GFAA*. Unser Ziel wird es sein solche Guten-FAA, und somit auch SLTRs, zu finden.

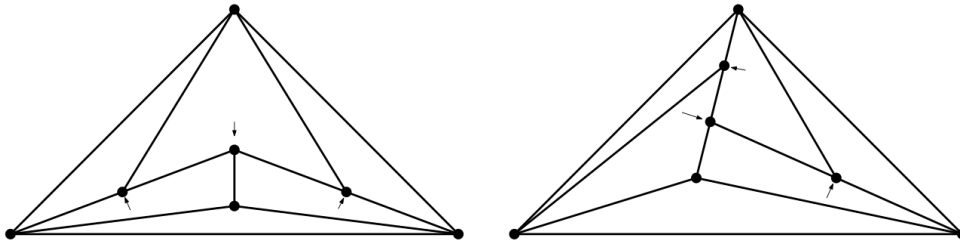


Abbildung 2.1: Ein planer Graph mit einer SLTR und einem FAA, das kein SLTR induziert.

2.1 Harmonische Funktionen

2.2 Ecken kompatible Paare

3 Algorithmen zur Erkennung von SLTR

Im vorherigen Kapitel wurden Kriterien für die Existenz einer SLTR erarbeitet, die allerdings nicht sofort einen Algorithmus, sowohl zur Frage nach der Existenz, als auch zum Erlangen einer spezifischen SLTR liefern. Diesem Thema wollen wir uns nun im folgenden Kapitel zuwenden und dafür zum Einstieg einen von Aerts und Felsner in [AF13b] erarbeiteten Algorithmus betrachten.

3.1 SLTR via Zwei-Fluss

Wir betrachten im folgenden gerichtete Graphen. Das Ziel ist es, für einen gegebenen Graphen sowohl einen Schnyder Wood als auch ein FAA jeweils als Lösung eines Fluss-Problems zu erhalten und diese beiden dann in einem Zwei-Fluss-Problem zu kombinieren, sodass eine Lösung ein Ecken-Kompatibles-Paar gibt und wir somit eine SLTR erhalten. Wir beschäftigen uns also mit der folgenden Problemstellung.

Definition 3.1 (Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem). Sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph, im Weiteren auch Netzwerk genannt, mit den Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$, Paaren von ausgezeichneten Knoten $\{(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)\}$ und positiven Bedarfen $\{d_1, \dots, d_n\}$, dann ist $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein zulässiger Fluss, falls

$$\text{F1 } \forall (u, v) \in E : \sum_{i=1}^n \varphi_i(u, v) \leq c(u, v)$$

$$\text{F2 } \forall u \neq s_i, t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(u, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, u)$$

$$\text{F3 } \forall s_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(s_i, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, s_i) = d_i$$

$$\text{F4 } \forall t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(w, t_i) - \sum_{w \in V} \varphi_i(t_i, w) = d_i$$

Bemerkung. Im Fall $n = 1$ und Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{N}$ impliziert die Existenz eines zulässigen Flusses die Existenz einer ganzzahligen Lösung, sowohl für gerichtete als auch ungerichtete Graphen, und diese lässt sich in polynomineller Zeit bestimmen. Für $n = 2$ und ungerichtete Graphen gilt dies nach [Hu63] ebenfalls. Für uns im Folgenden interessant wäre jedoch, wie wir sehen werden, der Fall $n = 2$ für gerichtete Graphen. Leider ist hier im Allgemeinen die Lösung nur über Lineare Programmierung möglich und befindet sich somit in \mathcal{NP} .

3.1.1 Schnyder-Wood-Fluss

Um einen Schnyder Wood zu erhalten folgen wir [Fel04]. Wir betrachten den Primal-Dual Graphen $G + G^*$ eines planen Graphen G . Hier ist G^* der schwache duale Graph zusammen mit einer Halbkante ins äussere Gebiet von jeder inzidenten Kante aus.

Die Menge der Knoten von $G + G^*$ besteht aus Knoten-Knoten, Kanten-Knoten und Gebiets-Knoten, mit Kanten in $G + G^*$, sowohl zwischen inzidenten Kanten und Knoten, als auch Kanten und Gebieten in G . Somit ist $G + G^*$ bipartit. Falls wir einen Knoten f_∞ für das äussere Gebiet einsetzen und die Halbkanten verlängern sprechen wir vom Abschluss von $G + G^*$. Wir bezeichnen diesen mit \tilde{G} .

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\alpha : V \mapsto \mathbb{N}$ eine Funktion auf G . Eine α -Orientierung ist eine Orientierung auf G , sodass der Ausgrad eines jeden Knoten $\alpha(v)$ entspricht. Das folgende Theorem stammt ebenfalls aus [?].

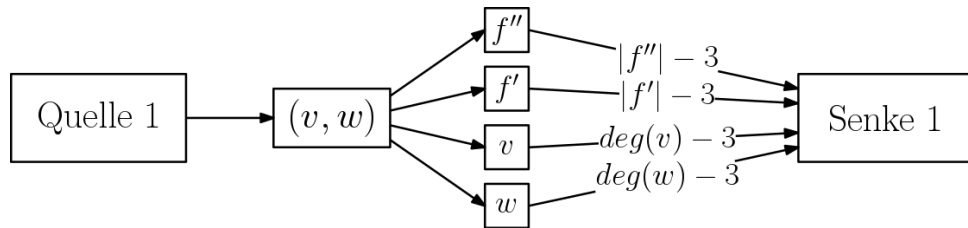
Theorem 3.2. *Sei G ein planer Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, dann sind die folgenden Strukturen in Bijektion:*

- Die Schnyder Wälder auf G .
- Die Schnyder Wälder auf dem (schwachen) dualen Graph G^* .
- Die α_s -Orientierungen des Abschlusses von $G + G^+$ mit $\alpha_s(v) = 3$ für jeden Knoten- und Gebiets-Knoten, $\alpha_s(e) = 1$ für jeden Kanten-Knoten und $\alpha_s(f_\infty) = 0$.

Fusy zeigt in [Fus07] im Zuge der Untersuchung spezifischer α -Funktionen, dass sich α_s -Orientierungen von $G + G^*$ in linearer Zeit berechnen lassen.

Machen wir uns also an die Konstruktion eines Netzwerks \mathcal{N}_S mit einer Quelle und Senke, sodass eine zulässige Lösung φ einer α_s -Orientierung von \tilde{G} entspricht, und somit auch einen Schnyder Wald auf G liefert. Besonderes Augenmerk ist hier auf die Möglichkeit einer späteren Kombination mit einem FAA Fluss gelegt, um ein Zwei-Fluss-Problem zu erstellen, und nicht unbedingt auf Effizienz.

Wie oben schon erwähnt ist \tilde{G} bipartit, Kanten-Knoten haben Grad 4, Knoten-Knoten Grad $\deg(v)$ und Gebiets-Knoten Grad $|f|$. Für eine α_s -Orientierung muss jeder Kanten-Knoten Ausgrad 1, jeder Knoten-Knoten Eingrad $\deg(v) - 3$ und jeder Gebiets-Knoten Eingrad $|f| - 3$ haben. Die Kanten-Knoten am äusseren Gebiet sind in \tilde{G} immer nach aussen orientiert. Somit müssen wir nur die inneren Kanten-Kanten E_{in} betrachten.



Sei \mathcal{N}_S ein Netzwerk mit jeweils einer Quelle s und Senke t , Kanten von der Quelle zu jedem $e \in E_{in}$ mit Kapazität 1, Kanten von den Kanten-Knoten e zu inzidenten Knoten-Knoten v und (inneren) Gebiets-Knoten $f \in F_{in}$ in G ebenfalls mit Kapazität 1, Kanten von $f \in F_{in}$ zur Senke mit Kapazitäten $|f| - 3$, Kanten von den (inneren)

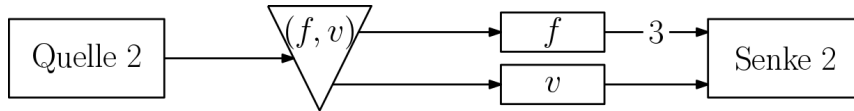
Knoten-Knoten $v \in V_{in} = V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ zur Senke mit Kapazitäten $\deg(v) - 3$ und Kanten von den Aufhängungen a_i zur Senke mit Kapazitäten $\deg(v) - 2$. Die letzte Kapazität resultiert aus dem Fakt, dass die Halbkante in $G + G^*$ immer nach aussen orientiert ist und wir somit nur noch zwei andere Kanten nach aussen orientieren müssen.

Der Bedarf des Netzwerkes entspricht der Anzahl der inneren Kanten von G . Sei nun φ eine zulässige ganzzahlige Lösung, dann hat jeder Kanten-Knoten e Ausgrad 1. Der Fluss entlang einer Auskante von $e \in E_{in}$ in \mathcal{N}_S entspricht dann genau der hin zu e orientierten Kante in $G + G^*$ und die Knoten-Knoten und Gebiets-Knoten haben genau $\deg(v) - 3$ bzw. $|f| - 3$ zu ihnen hin orientierte Kanten. Eine zulässiger ganzzahliger Fluss kodiert also eine α_s -Orientierung auf $G + G^*$. Somit liefert uns φ nach Theorem 3.2 auch einen Schnyder Wald auf G .

3.1.2 FAA-Fluss

Um ein FAA für einen planaren Graphen G zu erhalten müssen wir jedem Gebiet $f \in F$ genau drei Ecken und $|f| - 3$ flache Winkel zuordnen und jeder Knoten darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden, also in diesem flach sein. Falls eine Einbettung und die Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ gegeben sind, müssen wir jedem inneren Gebiet $f \in F_{in}$ drei Ecken und $|f| - 3$ flache Winkel zuweisen und jeder innere Knoten $v \in V_{in}$ darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden. Wir konstruieren ein Netzwerk für den zweiten Fall, dass sich leicht verallgemeinern lässt.

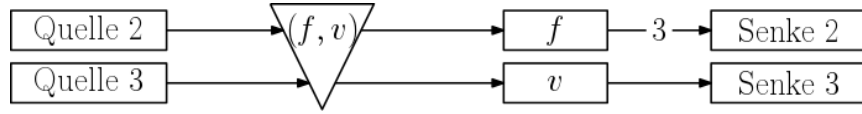
Sei also wieder \mathcal{N}_F ein Netzwerk mit einer Quelle und Senke, einem Knoten für jeden inneren Winkel (f, v) für $v \in V, f \in F_{in}$, Knoten für alle inneren Gebiete f und alle inneren Knoten v . Von der Quelle existiert eine Kante mit Kapazität 1 zu jedem inneren Winkel (f, v) , von jedem inneren Winkel (f, v) jeweils eine Kante zu f und zu v mit Kapazität 1, von jedem inneren Gebiet f eine Kante mit Kapazität 3 zur Senke und zuletzt noch eine Kante von jedem inneren Knoten v zur Senke mit Kapazität 1.



Der Bedarf des Netzwerkes ist $\sum_{f \in F_{in}} |f|$, die Anzahl der inneren Winkel von G . Sei φ ein zulässiger ganzzahliger Fluss, dann entspricht Fluss auf einer Kante $((f, v), f)$ einer Ecke, von f und Fluss auf $((f, v), v)$ einem flachen Winkel, zur Vereinfachung sprechen wir im Weiteren auch von Ecken- respektive Zuweisungs-Fluss. Somit wird jeder innere Winkel entweder dem Gebiet zugewiesen oder als Ecke ausgezeichnet und es kann nur jeweils ein Winkel an jedem inneren Knoten zugewiesen werden. Somit respektiert φ die Bedingungen aus Definition ?? und es existieren nur dann FAAs auf G , falls mindestens eine ganzzahlige Lösung auf \mathcal{N}_F existiert.

Bemerkung. Das oben konstruierte Netzwerk zur Bestimmung von FAAs lässt sich auch als Zwei-Fluss Problem konstruieren, wenn wir für Ecken- und Zuweisungs-Fluss

getrennte Quellen und Senken einführen. Der Bedarf des Ecken-Flusses ist dann $3|F_{in}|$ und der Bedarf des Zuweisung-Flusses $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$.



Eine zulässige ganzzahlige Lösung $\varphi = (\varphi_2, \varphi_3)$ entspricht dann wieder einem FAA auf G , da aus der Ganzzahligkeit folgt, dass ein Winkel entweder von φ_2 oder φ_3 genutzt wird und somit eine Definition ?? respektierende Beschriftung der Winkel vorliegt.

3.1.3 Graphen mit wenigen FAAs oder Schnyder Woods

Sei G ein planer Graph mit nur polynominell vielen Schnyder Woods bzw. FAAs, dann liefern die oben angegebenen Algorithmen auch einen polynominellen Ansatz zur Bestimmung einer SLTR. Wir
TODO

3.1.4 Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs

Nachdem wir nun sowohl für Schnyder Woods als auch für FAAs ein Netzwerk betrachtet haben, für das eine ganzzahlige Lösung eine einen Schnyder Wood bzw. ein FAA für einen planen Graphen G liefert, wollen wir jetzt eine Kombination aus beiden erstellen um somit ein Gutes-FAA bzw. eine SLTR für G zu finden, falls mindestens ein Paar existiert. Für eine einfachere Argumentation in der späteren Analyse des Algorithmus werden wir hier zuerst ein Drei-Fluss-Problem erstellen und dann argumentieren, dass sich dieses, ohne das Netzwerk zu verändern, zu einem Zwei-Fluss-Problem abwandeln lässt.

Wie oben in Abschnitt ?? erwähnt lässt sich ein FAA auch mit einem Zwei-Fluss kodieren und wir können Ecken- und Zuweisungs-Fluss mit den passenden Bedarfen getrennt betrachten. Unser Ziel ist es nun diese drei Flüsse, also Schnyder Wood-, Ecken- und Zuteilungs-Fluss, zu kombinieren. Bei diesem neuen Netzwerk \mathcal{N} muss sicher gestellt werden, dass eine ganzzahlige Lösung ein Ecken-Kompatibles-Paar aus FAA und Schnyder Wood kodiert. ...

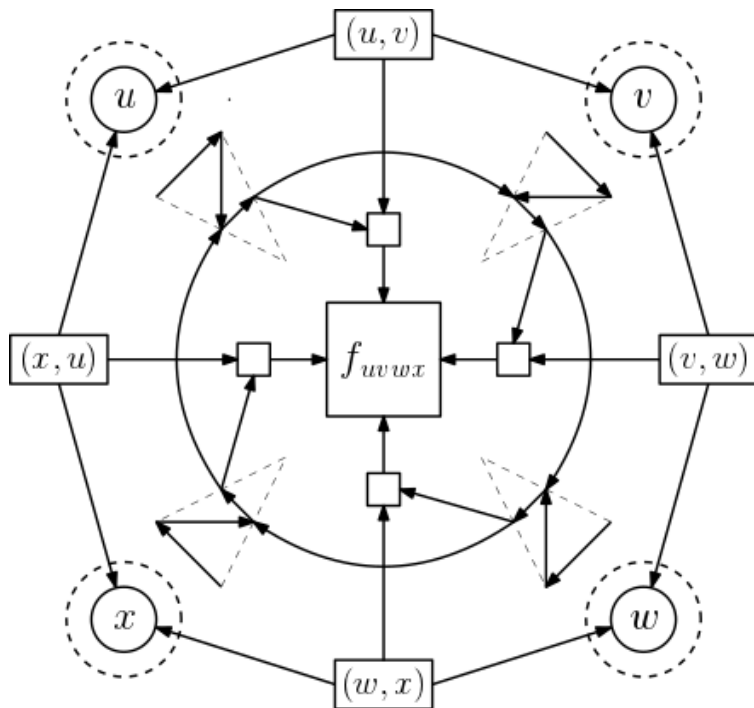


Abbildung 3.1: Basis Skizze für das kombinierte Netzwerk.

Literaturverzeichnis

- [AF13a] Nieke Aerts and Stefan Felsner, *Henneberg steps for triangle representations*, The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, Springer, 2013, pp. 503–509.
- [AF13b] ———, *Straight line triangle representations*, International Symposium on Graph Drawing, Springer, 2013, pp. 119–130.
- [AF15] ———, *Straight line triangle representations via schnyder labelings*, J. Graph Algorithms Appl. **19** (2015), no. 1, 467–505.
- [Fár48] István Fáry, *On straight-line representation of planar graphs*, Acta Sci. Math. **11** (1948), 229–233.
- [Fel01] Stefan Felsner, *Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes*, Order **18** (2001), no. 1, pp. 19–37.
- [Fel04] ———, *Lattice structures from planar graphs*, the electronic journal of combinatorics **11** (2004), no. 1, 15.
- [Fus07] Éric Fusy, *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*, Ph.D. thesis, Citeseer, 2007.
- [Hu63] T Chiang Hu, *Multi-commodity network flows*, Operations research **11** (1963), no. 3, 344–360.
- [Sch89] Walter Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989), no. 4, pp. 323–343.
- [Sch90] ———, *Embedding planar graphs on the grid*, in Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Disc. Algo., Philadelphia, PA, USA (1990), pp. 138–148.
- [Tut63] William Thomas Tutte, *How to draw a graph*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1963), no. 1, 743–767.