

Technische Universität Berlin

Master Arbeit

Grapheneinbettungen und Optimierung

Autor:
Jonas Neukamm

Betreuer und Erstgutachter:
Prof. Dr. Stefan Felsner

Matrikelnummer:
324283

Zweitgutachter:
Dr. Frank Lutz

*Masterarbeit zur Prüfung zum Master of Science
an der*

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

17.7.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

.....

Jonas Neukamm

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)	3
2.2	Schnyder Woods	5
2.2.1	Einbettungen via Schnyder Woods	7
2.3	α -Orientierungen	8
2.4	Flüsse auf Graphen	10
3	Hauptteil	13
3.1	SLTRs durch harmonische Funktionen	14
3.1.1	Harmonische Funktionen auf planaren Graphen	16
3.2	Ecken kompatible Paare	18
4	Algorithmen zur Erkennung von SLTRs	33
4.1	SLTRs via Zwei-Fluss	33
4.1.1	Schnyder-Wood-Fluss	33
4.1.2	FAA-Fluss	35
4.1.3	Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs	36
4.2	Nicht ganzzahlige Lösungen	44
4.2.1	Minimale Schnitte in \mathcal{N}_G	46
5	Das Programm	51
5.1	Dokumentation	51
5.2	Visualisierung	52
5.3	Statistische Betrachtung	53
	Literaturverzeichnis	55

1 Einleitung

Diese Arbeit wird sich mit Zeichnungen von einfachen planaren Graphen in der Ebene beschäftigen. Planare Graphen haben durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen in gewissem Sinne besonders schöne Zeichnungen. Und so ist eine der Fragen, mit der sich schon viele Mathematiker*innen auseinander gesetzt haben und der auch hier nachgegangen wird: „*How to draw a Graph?*“ [Tut63]

Beginnen wir mit Varianten von Einbettungen, die wenige Einschränkungen haben. Bei einer topologischen Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt. Hierbei dürfen sich die Kanten nur in den Knoten treffen. Erste Resultate zeigten, dass man diese Kurven auch als Geraden zeichnen kann. So wurde in den Fünfzigern unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen und für jede Wahl eines äusseren Gebietes eine geradlinige und kreuzungsfreie Einbettung existiert [Fár48].

In den Siebzigern betrachtete William Thomas Tutte unter anderem in [Tut63] die Unterklasse der 3-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern *konvexe* Zeichnungen existieren. Bei einer konvexen Einbettung entsprechen die Kantenfogen, die ein Gebiet einschließen, den Randkurven von konvexen Polygonen [Tut63].

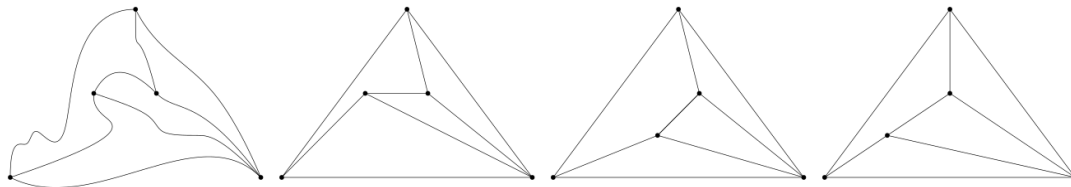


Abbildung 1.1: Der gleiche planare Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen, einer konvexen und einer geradlinigen Dreiecks Zeichnung.

Wir werden uns mit einer spezifischen Form dieser Zeichnungen nach Niek Aerts und Stefan Felsner auseinandersetzen. Es wird gefordert, dass es sich bei eingeschlossenen Polygonen um Dreiecke handelt und das äussere Gebiet ebenfalls dreieckig ist. Wir nennen so eine Darstellung eine *geradlinige Dreiecks Darstellung*. Es ist leicht zu sehen, dass nicht alle planaren Graphen solche Zeichnungen zulassen. Man kann die Klasse der Graphen die eine geradlinige Dreiecks Darstellung zulassen jedoch eingrenzen und Aerts und Felsner haben dies in einigen Publikationen getan [AF13a, AF13b, AF15]. Diese Arbeit wird einen Einblick in ihre Resultate liefern.

Zum Abschluss der Einleitung folgt ein kurzer Überblick über die Struktur der Arbeit. In Kapitel 2 werden zunächst einige zur Verständnis der Arbeit wichtige

Resultate aus der Graphentheorie wiederholt, die jedoch nicht in die Grundlagen der Graphentheorie komplett abdecken können. Kapitel 3 befasst sich mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen an die Existenz von geradlinigen Dreiecks Darstellungen nach [AF13b, AF15]. In Kapitel 4 wird dann aufbauend auf diesen Ergebnissen ein Algorithmus kreiert um eine geradlinige Dreiecks Darstellung eines planaren Graphen zu berechnen, soweit diese existiert. Abschließend wird in Kapitel 5 einen Überblick über Ergebnisse einer Implementierung der erarbeiteten Algorithmen gegeben.

2 Grundlagen

Diese Arbeit wird sich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten V und Kanten $E \subseteq (V \times V)$. Eine Kante $e = (u, v)$ verbindet die beiden Knoten u und v . Ein Pfad von u nach v ist eine Folge von Kanten, die u und v verbindet. Mit dem Grad $\deg(v)$ eines Knoten meinen wir die Anzahl der adjazenten Kanten.

Eine Einbettung eines Graphen in der Ebene ist eine Abbildung $m : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ die die Kanten und Knoten kreuzungsfrei in die Ebene zeichnet. Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *planen Graphen*. Für einen planen Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces) F betrachten, die durch die Kanten und Knoten begrenzten Regionen in der Ebene. Wir bezeichnen das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet. Wir können den Begriff der Einbettung von G auch etwas weiter fassen und mit im nur die Definition der Menge der Gebiete F von G und eines äusseren Gebietes $f_{aus} \in F$ meinen, sodass eine Zeichnung mit diesen Gebieten existiert. Wir nennen dies auch eine *topologische* Einbettung. Diese bildet eine Äquivalenzklasse aller möglichen Zeichnungen von G , die genau die in von der Einbettung definierten Gebiete (inklusive dem Äusseren) haben. Wir werden im Verlauf der Arbeit, wenn wir von Einbettung reden manchmal eine spezifische und manchmal die Äquivalenzklasse meinen. Die Bedeutung sollte sich aber aus dem Kontext ergeben.

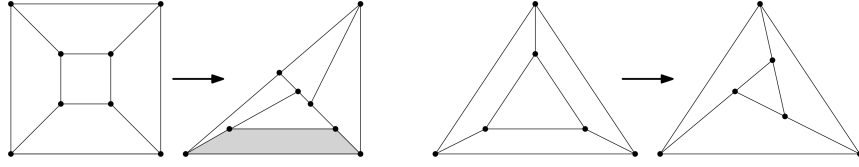
2.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)

Wie in der Einleitung schon geschrieben wurde wird sich diese Arbeit mit der Möglichkeit auseinandersetzen geradlinige Dreiecks Darstellungen für planare Graphen zu finden. Die nächste Definition formalisiert diese Darstellung und wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder auf sie zurück kommen.

Definition 2.1 (SLTR). Eine Zeichnung eines planen Graphen G wird *geradlinige Dreiecksdarstellung*, im weiteren kurz *SLTR* (für die englische Bezeichnung *straight line triangle representation*), genannt falls gilt:

S1 Alle Kanten sind Segmente von Geraden.

S2 Alle Gebiete, inklusive dem Äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.



Abbildungung 2.1: Links einer der beiden 3-zusammenhängenden Graphen auf acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Für die weiteren Betrachtungen ist es nützlich drei Knoten $\{a_1, a_2, a_3\}$, die das äusseren Gebiet berühren, gesondert zu betrachten. Wir nennen sie die *Aufhängungen* von G . a_1, a_2 und a_3 sind dann die designierten Ecken des äusseren Gebietes einer möglichen SLTR. Einen Graphen zusammen mit einem äusseren Gebiet und festen Aufhängungen als Paar zu behandeln ist sinnvoll, wie in Beispiel 2.4 zu sehen ist. Bevor wir zur ersten Proposition kommen wollen wir die Klasse der planaren Graphen, die wir betrachten etwas einschränken. Dabei hilft uns die nächste Definition.

Definition 2.2 (intern- k -zusammenhängend). Ein Graph G ist zusammenhängend falls für alle Knoten u, v ein Pfad von u nach v existiert. G ist *k -zusammenhängend*, falls er nach der Entfernung von $k - 1$ beliebigen Knoten weiterhin zusammenhängend ist.

Sei G plan mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, weiter sei a_∞ ein zusätzlicher Knoten eingefügt im äusseren Gebiet. Dann ist G *intern k -zusammenhängend*, falls $G + v_\infty := (V \cup \{v_\infty\}, E \cup \{(a_1, a_\infty), (a_2, a_\infty), (a_3, a_\infty)\})$ k -zusammenhängend ist.

Für intern-3-zusammenhängende planare Graphen ist die topologische Einbettung nach der Auswahl der Aufhängungen eindeutig (und somit auch die Menge der Gebiete F von G). Die nächste Präposition enthält eine erste notwendige Bedingung für die Existenz von geradlinigen Dreiecksdarstellungen (SLTRs).

Proposition 2.3. [AF13b, Proposition 1.2] Sei G ein planer Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ als äussere Ecken einer SLTR. Weiter gebe es keine inneren Knoten v mit $\deg(v) < 3$. Dann ist G intern-3-zusammenhängend.

Beweis: Sei Δ die SLTR von $G = (V, E)$. Angenommen es existiert eine Menge $U \subseteq V$ in G mit $|U| = 2$, deren Entnahme G in nicht zusammenhängende Komponenten trennt. Wir werden zeigen, dass jeder Teil von $G \setminus U$ eine der Aufhängungen enthält und somit $G + v_\infty$ nicht von U getrennt wird. Jeder innerer Knoten in G hat Grad grösser als zwei. Sei K eine der Komponenten von $G \setminus U$, und sei P ein Pfad der entsteht wenn wir U wieder einfügen. Dann muss K eine Aufhängung enthalten.

Falls U keinen Pfad induziert, dann betrachte die konvexe Hülle von $U \cup K$ in Δ . Mindestens drei der Ecken von $U \cup K$ haben Aussenwinkel grösser als π . Zwei dieser Winkel können an den Knoten aus U liegen, aber der dritte muss ein Winkel sein der schon in Δ existiert. Es handelt sich somit um eine Aufhängung. \square

Bemerkung. Für innere Knoten von Grad 2 in einer SLTR müssen beide angrenzenden Winkel gerade sein. Somit kann man diese Knoten durch eine gerade Kante

zwischen ihren Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten. Wir werden somit von nun an nur intern-3-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen, die eine SLTR zulassen, auf diese reduziert werden können.

Beispiel 2.4. Es existieren planare Graphen, von denen manche Einbettungen SLTRs zulassen, andere jedoch nicht. Betrachten wir den planaren Graphen mit zehn Knoten aus Abbildung 2.2. Mit rot und grün sind die beiden Gebiete markiert die jeweils einmal als das äussere Gebiet festgelegt wurden. Die topologische Einbettung auf der rechten Seite lässt zu dieser Wahl des äusseren Gebietes keine SLTR zu. Das nicht dreieckige Gebiet ist grau eingefärbt. Zu Auswahl auf der linken Seite existiert hingegen eine. Die Aufhängungen sind in beiden Fällen Eindeutig wegen $|f| = 3$. Dies ist der kleinste 3-zusammenhängende kombinatorische Graph, der diese Eigenschaft hat.

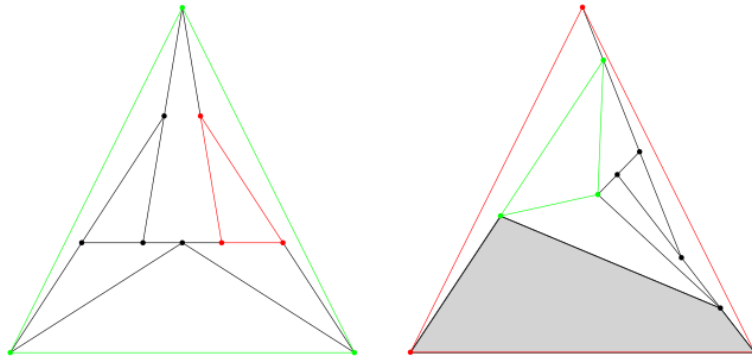


Abbildung 2.2: Zwei topologische Einbettungen des (kombinatorisch) gleichen planaren Graphen, wobei die linke keine SLTR zulässt.

Zu den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von SLTRs gelten und welche algorithmischen Ansätze man bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung verfolgen kann, haben Aerts und Felsner in [AF13a, ?] und [AF15] schon einige Antworten geliefert. Die nächsten zwei Kapitel, werden sich mit diesen auseinandersetzen. Zuvor werden in diesem Kapitel noch einige Konzepte eingeführt, die notwendig sind um der Argumentation zu folgen.

2.2 Schnyder Woods

Betrachten wir einen planaren Graphen mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 . Anschaulich handelt es sich bei einem Schnyder Wald um drei aufspannende Bäume T_1, T_2, T_3 . Jeder der T_i ist hin zu seiner Wurzel a_i gerichtet. Jede der Kanten wird mindestens von einem der Bäume genutzt und Kanten können von zwei der drei Bäume gleichzeitig genutzt werden.

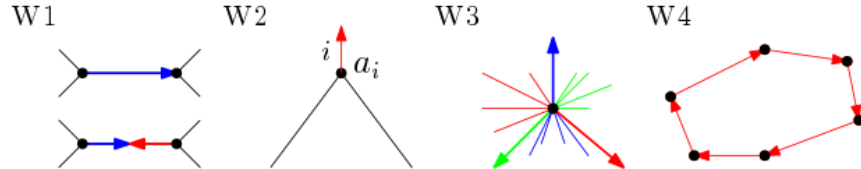
Schnyder Wälder, im weiteren *Schnyder Woods*, wurden zuerst von Walter Schnyder eingeführt. Sie dienen zur Betrachtung der Ordnungs-Dimension planarer Graphen,

als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung [Sch89]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer geradlinigen konvexen Einbettung planarer Triangulierungen auf einem $(|V| - 2) \times (|V| - 2)$ Gitter [Sch90].

Wir wollen hier die Verallgemeinerung auf 3-zusammenhängende planare Graphen durch Felsner [Fel01] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings einführen. Wir orientierten uns an [Fel04]. Für den Rest dieses Kapitels sei G , wenn nicht weiter spezifiziert, ein 3-zusammenhängenden planer Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Definition 2.5 (Schnyder Woods). Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von G mit den Labeln 1, 2 und 3 (alternativ wird hier auch oft rot, grün und blau genutzt)¹, unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- W1 Jede Kante ist entweder in eine oder zwei Richtungen orientiert. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.
- W2 An jeder Aufhängung a_i existiert eine nach aussen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label i .
- W3 Jeder Knoten v hat Ausgangsgrad eins in jedem Label. Um v existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.
- W4 Es existiert kein inneres Gebiet mit einem gerichteten Zykel in einer Farbe als Rand.



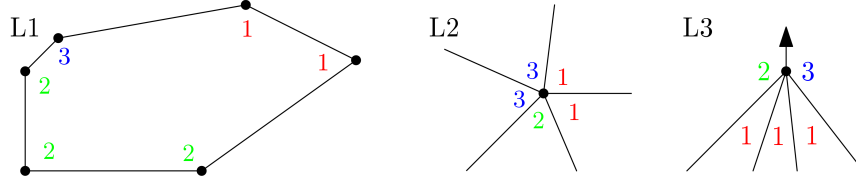
Analog zu den Schnyder Woods, kann man Schnyder Labelings definieren, die zu diesen in Bijektion stehen. Hier betrachten wir nicht zuerst die Kanten eines planaren Graphen sondern die Winkel an den Knoten.

Definition 2.6 (Schnyder Labeling). Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung der Winkel von G mit den Labeln 1, 2 und 3 (oder rot, grün und blau) unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en. Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.

¹Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass $i + 1$ und $i - 1$ immer definiert sind.

- L2 Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1_{en} , 2_{en} und 3_{en} .
- L3 An Aufhängung a_i haben äusseren Winkel die Label $i-1$ und $i+1$ im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label i .



In Abbildung 2.3 wird eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings illustriert. Das nächste Lemma folgt aus L1 und L2.

Lemma 2.7. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 und einem Schnyder Labeling. Dann beinhalten die vier Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn an jeder Kante die Label 1, 2 und 3. Somit hat jede Kante einen der beiden Typen in Abbildung 2.3.*

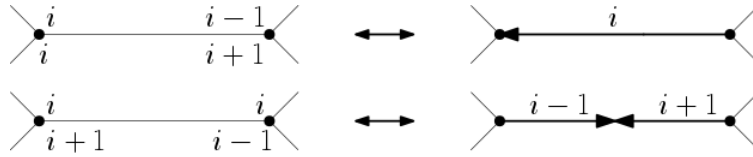


Abbildung 2.3: Bijektion zwischen Schnyder Wood auf der rechten und Schnyder Labeling auf der linken Seite.

Wenn wir uns auf intern-3-zusammenhängende planare Graphen beschränken, dann ist die dargestellte Abbildung nach [Fel04, Theorem 2.3] eine Bijektion. Zu jedem Schnyder Labeling gehört also genau ein Schnyder Wood und anders herum. Dies macht es möglich, wenn sinnvoll, zwischen den beiden Strukturen hin und her zu wechseln. So kann es auch im Verlauf dieser Arbeit vorkommen, dass wir vom einen schreiben, aber implizit Eigenschaften des andern meinen.

2.2.1 Einbettungen via Schnyder Woods

Es existieren einige Anwendungen von Schnyder Woods im Bezug auf Einbettungen. Wie schon erwähnt bezieht sich eines der ersten Resultate auf die konvexe Einbettung auf einem Gitter. Eine Verbesserung des in [Sch90] erreichten ist das im Folgenden skizzierte *face-counting* [Fel01]. Betrachte G mit einem Schnyder Wood T_1, T_2, T_3 . Nach [Fel04, Korollar 2.5] handelt es sich bei den T_i um gerichtete Bäume mit Wurzeln in a_i . Von jedem Knoten v existierten also eindeutige Pfade $P_i(v)$ zu den Aufhängungen a_i . Die Pfade von v zu den Aufhängungen treffen sich nach [Fel04, Lemma 2.4] nur

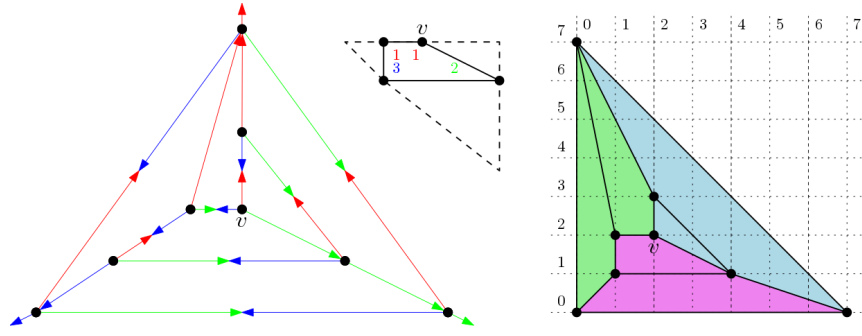


Abbildung 2.4: Eine Schnyder Wood und die durch *face counting* erhaltene Einbettung. Die eingefärbten Gebiete sind die Regionen die den Gebietsvektor (v_1, v_2, v_3) ergeben. In der Mitte ist W5 illustriert.

in v . Wir erhalten also zu jedem Knoten v drei Regionen R_i , die jeweils von den Pfaden $P_{i-i}(v)$ und $P_{i+1}(v)$ und dem äußeren Gebiet eingegrenzt werden. In jeder dieser Regionen können wir nun die eingeschlossenen Gebiete von G zählen. Durch das Zählen der Gebiete in den Regionen zu v lässt sich eine konvexe Zeichnung von G erzeugen.

Hierzu ordnet man jedem Knoten v seinen Gebiets Vektor (v_1, v_2, v_3) zu, wobei v_i die Anzahl der inneren Gebiete in $R_i(v)$ beschreibt. Nun gilt für jeden Knoten $v_1 + v_2 + v_3 = |F| - 1$. Seien $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0)$ und $\alpha_3 = (0, 0)$ die äußeren Ecken unserer Zeichnung. Sie entsprechen ebenfalls den Bildern der Aufhängungen von G . Die Position der inneren Knoten ergibt sich nun durch die Funktion

$$\mu : V \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3.$$

Nach [Fel04, Theorem 2.7] ist die mit diesen Koordinaten erzeugte Zeichnung planar und konvex und passt auf ein $(|F| - 1) \times (|F| - 1)$ -Gitter. Sie hat noch eine weitere Eigenschaft die später von Nutzen sein wird und in Abbildung 2.4 dargestellt ist.

W5 Die Knoten eines inneren Gebietes werden auf die Seiten eines Dreiecks mit den Seiten $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$ mit passenden Konstanten c_i abgebildet. Im inneren dieses Dreiecks befinden sich keine Knoten und die Winkel des Gebietes auf der Seite $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$ haben Label i im Schnyder Labeling.

2.3 α -Orientierungen

Für unseren Algorithmus in Kapitel 4 führen wir nun eine weitere zu Schnyder-Woods und Labelings in Bijektion stehende Struktur auf Graphen ein und halten uns dabei an [Fel04].

Definition 2.8 (α -Orientierung). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $\alpha : V \mapsto \mathbb{N}$ eine Funktion auf G . Eine α -Orientierung ist eine Orientierung der Kanten

von G , sodass der Ausgrad eines jeden Knoten $\alpha(v)$ entspricht. Somit muss gelten

$$\text{outdeg}(v) = \alpha(v).$$

Um von α -Orientierungen zu Schnyder Woods zu gelangen müssen wir Primal-Dual Graphen betrachten die mit den nächsten beiden Definitionen eingeführt werden.

Definition 2.9 (schwacher dualer Graph). Sei G ein planer Graph. G^* der *schwache duale Graph* von G . G^* hat einen (Gebiets-)Knoten für jedes innere Gebiet von G . Für jede innerer Kante in G fügen wir eine Kante zwischen den beiden (Gebiets-)Knoten f, f' in G^* ein, die adjazent zu dieser Kante in G sind.

Definition 2.10 (Primal-Dual Graph). Betrachte einen planen Graphen G und seinen schwacher dualer Graphen G^* . Der *Primal-Dual Graph* $G + G^*$ ist eine Vereinigung der Graphen G und G^* mit einem Knoten an jeder Kantenkreuzung. Die Menge der Knoten von $G + G^*$ besteht aus Knoten-Knoten, Kanten-Knoten und Gebiets-Knoten. Kanten in $G + G^*$ existieren, sowohl zwischen inzidenten Kanten und Knoten, als auch Kanten und Gebieten in G . Hinzu kommen Halbkanten² von den Kanten-Knoten und Knoten-Knoten am äusseren Gebiet von G .

Wenn wir einen Knoten f_∞ für das äussere Gebiet hinzufügen und die Halbkanten zu diesem verlängern spricht man vom *Abschluss* von $G + G^*$.

Es ist leicht zu sehen, dass $G + G^*$ und sein Abschluss bipartit sind. Das folgende Theorem liefert eine Bijektion zwischen den Schnyder Woods auf G und einer bestimmten α -Orientierung auf \tilde{G} , die wir α_s nennen.

Theorem 2.11. *Sei G ein planer Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, dann sind die folgenden Strukturen in Bijektion:*

- A1 Die Schnyder Woods auf G .
- A2 Die Schnyder Woods auf dem (schwachen) dualen Graphen G^* .
- A3 Die α_s -Orientierungen des Abschlusses von $G + G^*$ mit $\alpha_s(v) = \alpha_s(f) = 3$ für jeden Knoten-Knoten v und Gebiets-Knoten f , $\alpha_s(e) = 1$ für jeden Kanten-Knoten e und $\alpha_s(f_\infty) = 0$.

Bemerkung. Wir erhalten aus einem α_s -Orientierung den Schnyder Wood, indem wir den drei Aufhängungen die Label rot, grün und blau geben und dann Schritt für Schritt die Kanten einfärben und dabei die Orientierung der Kanten aus α_s auf G übernehmen erfüllen wir bereits W1 und W2. Wir nun an jedem Knoten an dem wir ankommen W3 bei der Einfärbung berücksichtigen erhalten wir einen eindeutigen Schnyder Wood auf G .

²Kanten mit nur einem Randknoten die immer von diesem weg orientiert sind.

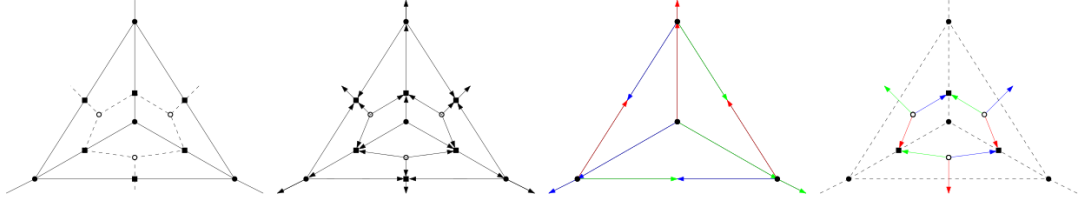


Abbildung 2.5: Der Primal-Duale Graph $K_4 + K_4^*$ mit einer α_s -Orientierung und den zugehörigen Schnyder Woods auf K_4 und K_4^* .

2.4 Flüsse auf Graphen

Wir werden in Kapitel 4 einen gerichteten Graphen \mathcal{N} konstruieren um auf diesem einen maximalen Fluss φ zu finden. Es gibt sehr viele unterschiedliche Arten von Flussproblemen. So kann man zum Beispiel Graphen mit nur einem Paar von Quellen und Senken oder mehreren betrachten und die Kanten können gerichtet oder ungerichtet sein. Im Fall mit mehreren Quellen und Senken werden diese normalerweise als Paare s_i, t_i gehandhabt und es wird gefordert, dass insgesamt Fluss φ_i mit Stärke $d_i \in \mathbb{R}_+$ von s_i zu t_i fließt. Als zusätzliche Einschränkung haben die Kanten e maximale Kapazitäten $c(e) \in \mathbb{R}_+$ die nicht überschritten werden können. Für jede Kante muss also gelten $\varphi(e) \leq c(e)$. Wir werden uns in Kapitel 4 mit einem Fluss der folgenden Form befassen.

Definition 2.12 (Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem). Sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph, im Weiteren auch Netzwerk genannt, mit den Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$, Paaren von ausgezeichneten Knoten $\{(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)\}$ und positiven Bedarfen $\{d_1, \dots, d_n\}$, dann ist $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein zulässiger Fluss, falls

$$F1 \quad \forall (u, v) \in E : \sum_{i=1}^n \varphi_i(u, v) \leq c(u, v)$$

$$F2 \quad \forall u \neq s_i, t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(u, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, u)$$

$$F3 \quad \forall s_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(s_i, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, s_i) = d_i$$

$$F4 \quad \forall t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(w, t_i) - \sum_{w \in V} \varphi_i(t_i, w) = d_i$$

Es folgen zwei bekannte Resultate für den Fall $n = 1$, die später Anwendung finden werden.

Theorem 2.13 (Max-Flow Min-Cut). φ ist ein maximale Fluss in \mathcal{N} , genau dann, wenn für mindestens einen Schnitt $\mathcal{S} \subset E$ gilt $c(\mathcal{S}) = |\varphi|$. Die Kapazität eines minimalen Schnittes entspricht dem maximalen Fluss.

Theorem 2.14 (Ganzzahliger Fluss). Sei \mathcal{N} ein Netzwerk mit einer Quelle und einer Senke und alle Kapazitäten seien ganzzahlig, dann existiert auch ein maximaler Fluss φ , sodass der Fluss auf allen Kanten ganzzahlig ist. Es gilt also $|\varphi(e)| \in \mathbb{N}$ für alle $e \in E$.

Bemerkung. Im Fall $n = 1$ und Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{N}$ impliziert die Existenz eines zulässigen Flusses die Existenz einer ganzzahligen Lösung, sowohl für gerichtete als auch ungerichtete Graphen. Diese lässt sich in polynomineller Zeit bestimmen. Für $n = 2$ und ungerichtete Graphen gilt dies nach [Hu63] ebenfalls. Für diese Arbeit wäre jedoch der Fall $n = 2$ für gerichtete Graphen interessant. Leider ist hier im Allgemeinen die Suche nach einer ganzzahligen Lösung nur über Lineare Programmierung möglich und befindet sich somit in \mathcal{NP} . Es existieren ebenfalls keine analogen Aussagen zum Max-Flow Min-Cut Theorem für gerichtete Netzwerke mit mehr als einer Quelle und Senke, sondern nur Schranken und Annäherungen [LR99].

3 Hauptteil

Sei G ein planer intern 3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nehmen wir für einen Moment an, dass wir schon ein SLTR für G gefunden haben, dann hat jeder Knoten v in maximal einem inzidenten Gebiet f einen flachen Winkel, den wir mit (f, v) bezeichnen, und liegt auf einer Geraden. Jedes Gebiet f hat genau drei Ecken, also $|f| - 3$ flache Winkel. Dies liefert im Umkehrschluss eine notwendige Bedingung für die Existenz einer SLTR. Diese ist in der nächsten Definition festgehalten.

Definition 3.1 (FAA). Sei $G = (V, E, F)$ ein planer Graph. Eine *flache Winkel Zuweisung* ϕ , kurz *FAA* (nach dem englischen *flat angle assignment*), ist eine partielle Zuordnung der Knoten zu den Gebieten. Es muss gelten:

F1 Jedem Gebiet f sind genau $|f| - 3$ Knoten zugewiesen.

F2 Jeder Knoten v ist höchstens einem Gebiet zugewiesen.

Für den Fall, dass Aufhängungen gegeben sind, fordern wir zusätzlich:

F3 Die inzidenten Knoten des äusseren Gebietes, die keine Aufhängungen sind, müssen dem äusseren Gebiet zugewiesen sein.

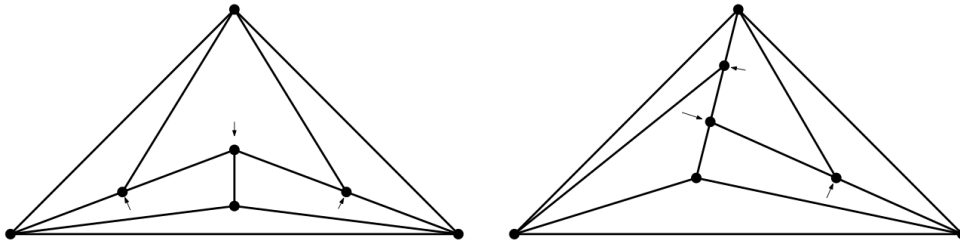


Abbildung 3.1: Ein planer Graph mit einer SLTR und einem FAA, dass keine SLTR induziert. Die Pfeile stellen hier die Zuweisung der Knoten zu den inneren Gebieten da.

Somit induziert jede SLTR genau ein FAA. Ein planer Graph kann also nur dann eine SLTR besitzen, wenn mindestens ein FAA existiert. Jedoch liefert nicht jedes FAA sofort eine SLTR. Um hinreichende Bedingungen für SLTRs zu erhalten, werden sich die nächsten beiden Abschnitten mit zwei Ansätzen nach Aerts und Felsner beschäftigen. Der erste Ansatz aus [AF13b] liefert ein System aus harmonischen Gleichungen aus dessen Lösung eine SLTR folgt. In Teilen darauf basierend, stellt der zweite Ansatz aus [AF15] einen Zusammenhang zwischen Schnyder Woods und FAAs her und die Existenz passender Paare impliziert wieder die Existenz von SLTRs.

3.1 SLTRs durch harmonische Funktionen

Die Beweise zu den in diesem Kapitel aufgestellten Propositionen und Theoremen werden ausgelassen. Sie befinden sich, wenn nicht anders angegeben, in [AF13b]. Zum Einstieg eine weitere Definition, die es ermöglicht eine Beobachtung zu SLTRs festzuhalten.

Definition 3.2 (Begrenzende Zykel und kombinatorisch konvexe Ecken). Sei G ein planer Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem FAA ϕ von G . Sei H ein zusammenhängender Teilgraph von G und $\gamma = \gamma(H)$, der H umrandende Weg in G . Bei γ handelt es sich um die Kanten und Knoten des äusseren Gebiets von H . Knoten und Kanten können mehrfach vorkommen. Wir werden so erhaltene γ als *begrenzende Zykel* bezeichnen. $\text{int}(\gamma)$ sei die Menge aller Knoten, Kanten und Gebiete aus G die im Inneren von γ oder auf γ liegen. Einen Knoten v aus γ bezeichnen wir als *kombinatorisch konvexe Ecke* von γ im Bezug auf ϕ , falls gilt:

- E1 v ist eine Aufhängung, oder
- E2 v ist nicht durch ϕ zugeordnet und es existiert eine Kante $e = (v, w)$ mit $e \notin \text{int}(\gamma)$, oder
- E3 v ist einem Gebiet f zugeordnet, $f \notin \text{int}(\gamma)$ und es existiert eine Kante $e = (v, w)$, sodass $e \notin \text{int}(\gamma)$.

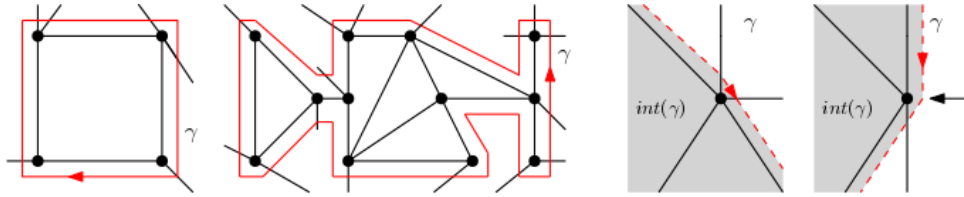


Abbildung 3.2: Auf der linken Seite zwei Beispiele für *begrenzende Zykel* und rechts für *kombinatorisch konvexe Ecken* mit und ohne zugewiesenem Knoten.

Betrachten wir ein SLTR und einen begrenzenden Zykel γ , der nicht von einem Pfad induziert wird. Sei K die konvexe Hülle von γ in der SLTR, dann muss K mindestens drei Ecken haben an denen der Aussenwinkel grösser als π ist. Nun ist der Knoten an dieser Ecke entweder eine Aufhängung oder es muss eine Kante geben die K verlässt, denn in einer SLTR kann kein Winkel (ausser an den Aufhängungen) grösser sein als π (siehe Abbildung 3.2). Somit hat jedes γ drei kombinatorisch konvexe Ecken in der SLTR. Die folgende Präposition nach [AF13b, Prop 2.2, Prop 2.4] hält diese Beobachtung fest.

Proposition 3.3. Sei G ein planer Graph der eine SLTR zulässt. Sei weiter ϕ das von der SLTR induzierte FAA und H ein zusammenhängender Teilgraph von G . Falls v eine geometrisch konvexe Ecke (von γ) in der SLTR ist, dann ist v auch eine kombinatorisch konvexe Ecke (von γ) hinsichtlich ϕ . Somit gilt:

E4 Jeder begrenzende Zykel γ , der nicht von einem Pfad induziert wird, hat hinsichtlich ϕ mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken.

Proposition 3.3 liefert also eine notwendige Bedingung damit ein FAA von einer SLTR induziert sein kann. Dies ist sogar eine hinreichende Bedingung, wie im Verlauf des Kapitels in Theorem 3.10 gezeigt wird. Wir nennen ein FAA, das E4 erfüllt, im Weiteren *Gutes-FAA* oder kurz *GFAA*. Aerts und Felsner zeigen, dass ein Gutes-FAA eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* induziert die *dehnbar* ist und sich somit geradlinig darstellen lässt.

Definition 3.4 (Kontaktfamilie von Pseudosegmenten). Eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* ist eine Familie $\Sigma = \{c_i\}_i$ von einfachen Kurven

$$c_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ mit } c_i(0) \neq c_i(1),$$

sodass alle Kurven c_i, c_j mit $i \neq j$ maximal einen gemeinsamen Punkt haben. Dieser Punkt muss dann ein Endpunkt von mindestens einer der Kurven sein.

Ein GFAA ϕ liefert eine Relation ρ auf den Kanten von G . Zwei Kanten (v, w) und (v, u) , beide adjazent zu f , stehen genau dann in Relation, wenn $\phi(v) = f$. (v, w) und (v, u) müssen also auf der selben Seite des Dreiecks f in der SLTR liegen. Der transitive Abschluss dieser Relation liefert eine Äquivalenzrelation ρ . Die Äquivalenzklassen von ρ bilden eine Kontaktfamilie von Pseudosegmenten.

Nennen wir die Äquivalenzklassen von ρ Kurven, dann gilt nach F2, dass jeder Knoten nur einem Gebiet zugeordnet werden kann und somit auch nur im Inneren von einer Kurve liegt. Die Kurven können sich also nicht kreuzen, sondern es kann nur eine an einer anderen enden. Weiter hat jede Kurve unterschiedliche Anfangs- und Endpunkte und kann sich nicht selbst berühren. Dies kann man so begründen, dass sonst der resultierende begrenzende Zykel γ nur eine beziehungsweise zwei kombinatorisch konvexe Ecken hätte. Dies wäre ein Widerspruch zu E4. Analog können zwei Kurven nicht ihre Anfangs- und Endpunkte teilen, da sonst wieder ein Zykel mit zu wenigen Ecken entstehen würde. Für eine von einem FAA ϕ induzierte Kontaktfamilie schreiben wir auch Σ_ϕ .

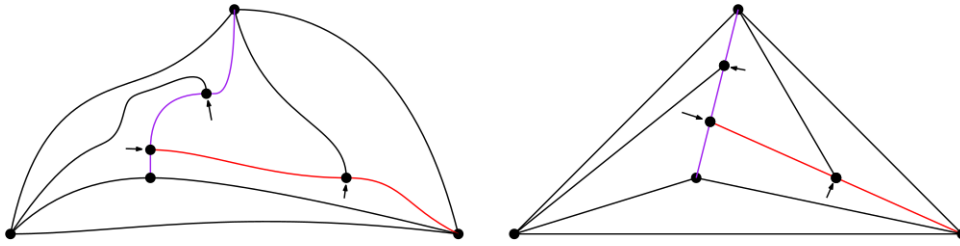


Abbildung 3.3: Die Kanten von G als Kontaktfamilie von Pseudosegmenten induziert durch die Äquivalenzrelation. In rot und grün die beiden Äquivalenzklassen bzw. Kurven, die mehr als eine Kante beinhalten.

Definition 3.5. Sei Σ ein Kontaktfamilie von Pseudosegmenten und $S \subseteq \Sigma$. Wir nennen einen Punkt $p \in S$ einen *freien Punkt*, falls er die folgenden Bedingungen erfüllt.

- p ist ein Endpunkt eines Pseudosegmentes aus S .
- p liegt nicht im Inneren eines Pseudosegmentes aus S .
- p liegt am äusseren Rand von S .
- p ist entweder eine Aufhängung von G oder berührt ein Pseudosegment, welches nicht zu S gehört.

Lemma 3.6. [AF13b, Lemma 2.8] Sei ϕ ein Gutes-FAA auf einem planen und intern 3-zusammenhängenden Graphen. Dann gilt:

E5 Jede Teilmenge $S \subseteq \Sigma_\phi$ mit $|S| \geq 2$ hat mindestens 3 freie Punkte.

Betrachte einen planen, intern 3-zusammenhängenden Graphen G mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem GFAA ϕ . Wenn die von ϕ induzierte Kontaktfamilie Σ_ϕ mit geradlinigen Segmenten darstellbar ist, dann ist diese Darstellung eine zu ϕ passende SLTR für G . Für den Fall, dass eine solche Darstellung $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert, können für die Koordinaten der Segmente und somit auch der Knoten v von G Gleichungen aufgestellt werden. Die Positionen der Knoten v in der Einbettung $f(v)$ müssen diese Gleichungen erfüllen. Das resultierende Gleichungssystem beinhaltet harmonische Funktionen. Zu diesen folgt ein kurzer Überblick.

3.1.1 Harmonische Funktionen auf planaren Graphen

Die Theorie zu (diskreten) harmonischen Funktionen auf planaren Graphen und ihre Anwendung werden in [LV99] ausführlich behandelt. Es handelt sich um eine Diskretisierung von allgemeinen harmonischen Funktionen, also glatten Funktionen $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\Delta f = 0$. Für diese Funktionen gilt, dass der Funktionswert an einem Punkt x , dem Durchschnitt der Funktionswerte auf einem Ball um x entspricht.

Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 3.7 (Harmonische Funktionen). Sei $G = (V, E)$ ein planarer zusammenhängender Graph und $S \subseteq V$. Eine Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir am Knoten $v \in V$ *harmonisch*, falls gilt:

$$\text{H1} \quad \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} (g(u) - g(v)) = 0 \quad \forall v \in V \setminus S$$

Wir können H1 durch das hinzufügen einer nichtnegativen Gewichtsfunktion $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ verallgemeinern. Es gilt $\lambda((v, w)) = \lambda_{vw}$.

$$\text{H2} \quad \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} (g(u) - g(v)) = 0 \quad \forall v \in V \setminus S$$

Ein Knoten für den g nicht harmonisch ist, nennt man *Pol*.

Theorem 3.8. [LV99, Theorem 3.1.2] Für jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq V$ und jede Funktion $g_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau eine Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, die f_S auf V fortsetzt, sodass g in jedem Knoten $v \in V \setminus S$ harmonisch ist. Wir nennen sie die harmonische Fortsetzung.

Ein bekanntes Resultat, dass sich in Form harmonischer Funktionen darstellen lässt, ist Tuttles *rubber-band-representation* aus [Tut63], die konvexe Zeichnungen für planare Graphen liefert. Man stelle sich einen planaren Graphen vor, bei dem jede Kante durch ein idealisiertes Gummiband¹ ersetzt wird. Wähle nun ein äusseres Gebiet und fixiere die Knoten $S \subseteq V$, die in an diesem Gebiet liegen, in zyklischer Reihenfolge und in gleichen Abständen auf einem Kreis in der Ebene. Dies definiert $f_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$. Die restlichen Knoten werden nun von den Bändern in eine neue Position gezogen. Das resultierende Gleichgewicht, das genau dann entsteht, wenn H1 erfüllt ist, entspricht der harmonischen Fortsetzung von f_S auf V , wobei $f(v)$ genau der Position von v in der resultierenden Einbettung entspricht und S die Menge der Pole von f ist. Wir können die Kanten zusätzlich noch mit nicht negativen Gewichten λ_{vw} , versehen um die Einbettung zu verändern. Das folgende Theorem ist das Hauptresultat aus [Tut63].

Theorem 3.9. Sei G ein planarer Graph, dann ist eine Gummiband-Representation (rubber-band-representation) von G eine planare Einbettung in der Ebene.

Die Theorie zu harmonischen Funktionen lässt sich auf SLTRs anwenden. Nehme für den Moment an, dass es existiert eine geradlinige Darstellung der Pseudosegmente. Wir haben also eine geradlinige Einbettung f der von ϕ induzierten Segmente. Dann gilt für jeden Knoten v im Inneren eines Segmentes, also für jeden zugewiesenen Knoten, dass er auf einer Gerade zwischen seinen beiden benachbarten Knoten u, w auf dem Segment liegen muss. Diese Eigenschaft liefert

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1). \quad (3.1)$$

Für die nicht zugewiesenen Knoten aus G muss in einer SLTR gelten, dass sie sich in der konvexen Hülle ihrer Nachbarn befinden. Wir bilden einen (gewichteten) Schwerpunkt und erhalten

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} \geq 0. \quad (3.2)$$

Somit erfüllt die so gegebene Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit einem passend gewählten λ wegen (3.1) und (3.2) in beiden Komponenten H2. Es handelt sich somit bei f_1 und f_2 um harmonische Funktionen, mit den Polen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nach Theorem 3.8, existiert für jede den Beschränkungen entsprechende Wahl von λ jeweils genau eine Funktion f_1, f_2 , welche die Gleichungen erfüllen.

Dies führt uns zum Hauptresultat aus [AF13b]:

¹Die Gummibänder müssen das Hook'sche Gesetz erfüllen, sodass eine Streckung auf Länge l genau Kraft l benötigt.

Theorem 3.10. *Sei G ein intern 3-zusammenhängender, planarer Graph und Σ eine Familie von Pseudosegmenten, induziert von einem FAA, sodass jede Teilfamilie $S \subset \Sigma$ entweder mindestens drei freie Punkte hat, oder maximal ein Element enthält. Die eindeutige Lösung des aus Σ folgenden Gleichungssystems ist eine SLTR.*

Bemerkung. Dies bedeutet, dass die weiter oben in Lemma 3.6 festgehaltene notwendige Bedingung auch eine hinreichende ist. Falls wir schon ein Gutes-FAA gefunden haben, dann können wir mit Hilfe des obigen Ansatzes auch eine Einbettung in der Ebene erhalten. Jedoch gibt es Graphen mit exponentiell vielen FAAs (vergleiche Abbildung 3.4) und es dauert polynomiell lange, um E4 zu überprüfen. Wir erreichen also auf diesem Weg keinen guten Algorithmus.

Aerts und Felsner werfen am Ende des Papers die Frage nach einer *guten* Wahl von λ auf und wie dies die resultierenden Einbettungen beeinflussen kann. Kapitel 5 wird einer möglichen Antwort dieser Frage nachgehen.

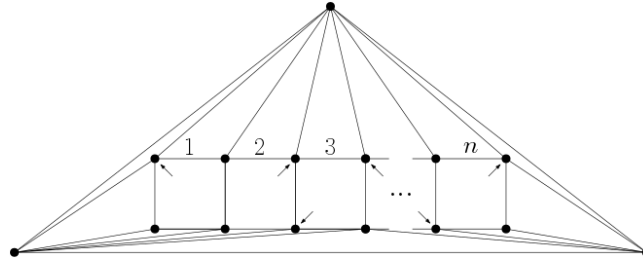


Abbildung 3.4: Der hier abgebildete Graph hat $2n+5$ Knoten. Wenn wir von links nach rechts laufen können wir in jedem der n inneren Gebiete mindestens aus drei Winkeln auswählen um ein FAA zu erstellen. Somit existieren mehr als 3^n FAAs.

3.2 Ecken kompatible Paare

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einer zweiten Charakterisierung von SLTRs auf planaren Graphen nach [AF15] beschäftigen, die eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und FAAs herstellt und so zu einer hinreichenden Bedingung für SLTRs führt. Zum Einstieg folgt die Definition dieses Zusammenhangs.

Definition 3.11 (Ecken Kompatibilität). Ein Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ nenne wir *Ecken kompatibel*, falls:

- K1 Das Schnyder Labeling σ und das FAA ϕ nutzen die selben Aufhängungen.
- K2 In jedem inneren Gebiet haben die drei Ecken aus ϕ drei unterschiedliche Label in σ .

Der Rest dieses Kapitels wird sich mit dem Beweis beschäftigen, dass zu jedem SLTR (mindestens ein) Ecken kompatibles Paar existiert und das anders herum jedes Ecken kompatible Paar eine SLTR induziert.

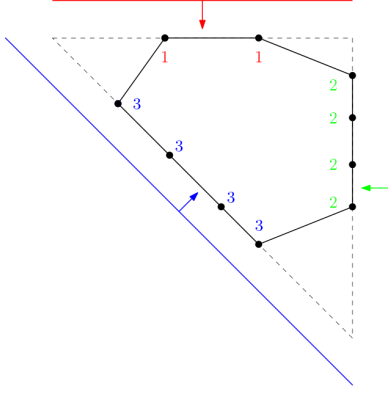


Abbildung 3.5

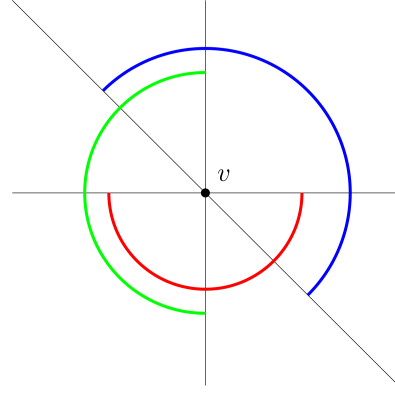


Abbildung 3.6

Theorem 3.12. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. G besitzt genau dann eine SLTR, wenn ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ existiert.*

Wir beweisen zuerst die (deutlich einfachere) Rückrichtung des Theorems. Hier können wir die durch das in Abschnitt 2.2 erklärte *face counting* erhaltene Einbettung nutzen, um zu zeigen, dass jeder begrenzende Zykel γ genau drei kombinatorisch konvexe Ecken besitzt.

Lemma 3.13. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Falls ein Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ Ecken kompatibel ist, dann hat jeder begrenzende Zykel γ genau drei kombinatorisch konvexe Ecken im Bezug auf ϕ .*

Beweis: Sei γ ein begrenzender Zykel und F_{in} die Menge der inneren Gebiete von G . Seien $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0)$ und $\alpha_3 = (0, 0)$ drei linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^2 . D sei die durch *face counting* erhaltene Zeichnung von G mit den Ecken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ein Beispiel einer solchen Zeichnung findet sich in Abbildung 2.4. Betrachte nun den begrenzenden Zykel γ in D . Wir schieben nun, wie in Abbildung 3.5 illustriert, ausgehend von α_i die Geraden $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ über den Graphen. Sei M_i die Menge der zuerst von $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ getroffenen Knoten von γ für $i \in (1, 2, 3)$.

Beobachtung 1 *Alle Knoten um ein inneres Gebiet f mit Label i in f werden von der Gerade $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ zum gleichen Zeitpunkt getroffen. Dies folgt direkt aus Eigenschaft W5 (Abschnitt 2.2), da alle Knoten mit dem selben Label in der Zeichnung auf $c_i(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ platziert werden.*

Beobachtung 2 *Sei $v \in M_i$. Alle Winkel an v im Inneren von γ haben das Label i . Die Geraden teilen die Winkel um einen Knoten (siehe Abbildung 3.6). Die Winkel an v , die von α_i aus gesehen vollständig auf der anderen Seite von $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ liegen, haben Label i .*

Nach Beobachtung 2 sind die Mengen M_1, M_2 und M_3 disjunkt. Wir suchen nun nach drei kombinatorisch konvexen Ecken von γ . Das FAA und das Schnyder Labeling sind Ecken kompatibel und somit hat jedes Gebiet $f \in F_{in}$ einen Winkel mit Label i . Also liegt in jeder Menge M_i ein Knoten v_i , der vom FAA nicht einem Gebiet innerhalb von γ zugewiesen wird. Nehmen wir an $a_i \notin M_i$, denn sonst hätten wir nach E1 eine Ecke gefunden. Da D eine konvexe Zeichnung ist muss v_i einen Nachbarn ausserhalb von γ besitzen. Somit liegt v_i auf γ , ist nicht in γ zugewiesen und hat einen Nachbarn ausserhalb von γ . v_i erfüllt also E2 und somit hat jeder begrenzende Zykel drei kombinatorisch konvexe Ecken (jeweils eine aus jedem M_i). \square

Zusammen mit Theorem 3.10 folgt, dass es sich bei dem FAA um ein Gutes-FAA handelt. Somit induziert das Ecken kompatible Paar ein SLTR von G .

Machen wir uns an den Beweis der Hinrichtung. Zu jedem SLTR können wir ein eindeutiges FAA erstellen indem wir die flachen Winkel der SLTR im FAA zuweisen. Wir müssen also zeigen, dass zu jeder SLTR ein Schnyder Labeling existiert, das zusammen mit dem induzierten FAA ein Ecken kompatibles Paar bildet. Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, der (mindestens) eine SLTR besitzt. Sei Δ eine SLTR von G und sei ϕ das von Δ induzierte FAA.

Vor dem nächsten Lemma müssen wir zwei geometrische Objekte einführen. Beispiele finden sich in Abbildung 3.7.

Definition 3.14 (Unterteilendes Dreieck). Ein *unterteilendes Dreieck* ist ein Dreieck in der Zeichnung einer SLTR von G , sodass gilt:

- Jeder Knoten auf dem Rand des Dreiecks (der keine Ecke des Dreiecks ist) ist entweder ausserhalb oder innerhalb des Dreiecks zugewiesen
- Es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn ausserhalb des Dreiecks hat und es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn im Inneren des Dreiecks hat.

Dieses Dreieck kann Teile des Randes der Zeichnung beinhalten.

Definition 3.15 (teilendes Segment). Ein *teilendes Segment* eines SLTR von G ist eine Menge von Kanten $\{e_1, \dots, e_m\}$, die alle auf einer Gerade liegen, sodass gilt:

- Die Vereinigung der Kanten trennt die Zeichnung in zwei nichtleere Teile.
- Jeder innere Knoten v auf dem Segment ist einem Gebiet zugeordnet, dass zwei Kanten beinhaltet die auf dem Segment liegen. Diese beiden Kanten haben v als Endpunkt.

Um zu zeigen, dass wir zu jeder SLTR ein passendes Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) finden führen wir einen Widerspruchsbeweis. Sei G , ein kleinstmögliches Gegenbeispiel, zu dem kein Paar existiert. Damit seien hier zuerst die minimale Anzahl an Knoten

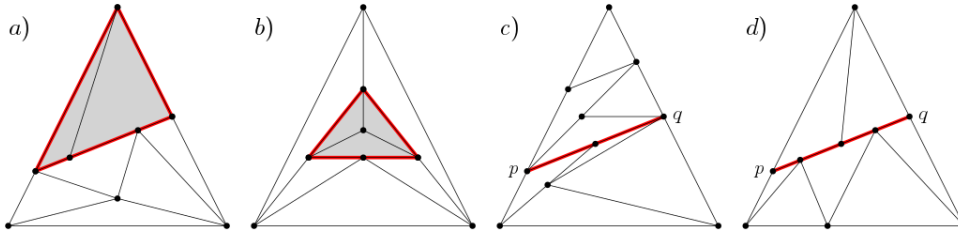


Abbildung 3.7: Beispiele von unterteilenden Dreiecken in a) und b) und teilenden Segmenten in c) und d) jeweils in rot.

und darauf folgend die kleinste Anzahl von Kanten gemeint. Sei Δ eine SLTR von G , ϕ das induzierte FAA und a_1, a_2 und a_3 die Aufhängungen von Δ .

Wir zeigen zuerst zwei Eigenschaften von Δ .

Lemma 3.16. *Ein minimales Gegenbeispiel Δ hat kein unterteilendes Dreieck.*

Beweis: Nehmen wir an, dass Δ ein unterteilendes Dreieck mit den Ecken (a, b, c) beinhaltet. Seien Δ_1 und Δ_2 die Teile von Δ die alles ausserhalb (1) und innerhalb (2) des Dreiecks beinhalten. Der Rand des Dreiecks (a, b, c) liegt in beiden Teilen.

Wir ersetzen Knoten auf dem Rand des Dreiecks die Grad zwei in Δ_i haben mit einer Kante zwischen ihren Nachbarn. Somit sind Δ_1 und Δ_2 SLTRs mit weniger Knoten als Δ . Da sie weniger Knoten haben als Δ können sie keine Gegenbeispiele sein und es existieren zu den SLTRs Δ_i Ecken kompatible Paare (σ_i, ϕ_i) , wobei die ϕ_i die induzierten FAAs von Δ_i sind. Setzen wir die Paare zusammen kommen wir zu einen Widerspruch. Die Ecken a, b, c sind die Aufhängungen von Δ_2 . Wir wählen ihre Label so, dass sie mit den inneren Labeln des (jetzt) leeren Dreiecks in Δ_1 übereinstimmen². Die auf diese Weise kombinierten Schnyder Labelings σ_1 und σ_2 ergeben ein Schnyder Labeling auf G . Die FAAs ϕ_1 und ϕ_2 ergeben zusammen, wenn wir die Zuweisungen an den äusseren Knoten von Δ_2 und den am leeren Dreieck liegenden Knoten von Δ_1 anpassen, ein FAA ϕ für G . Somit folgt die Ecken Kompatibilität aus der Tatsache, dass (σ_1, ϕ_1) und (σ_2, ϕ_2) Ecken kompatibel sind. Die SLTR Δ induziert somit ein Ecken kompatibles Paar und kann kein Gegenbeispiel sein. Δ kann kein unterteilendes Dreieck haben. \square

Lemma 3.17. *Ein minimales Gegenbeispiel Δ hat kein teilendes Segment.*

Bemerkung. Insbesondere bedeutet dies, dass in Δ für jede Aufhängung $\deg(a_i) \geq 3$ gelten muss.

Beweis: Angenommen Δ hat ein teilendes Segment mit den Endpunkten p und q . Falls auf beiden Seiten des teilenden Segmentes eine Aufhängung mit Grad größer als zwei liegt, dann wird ein unterteilendes Segment in Δ induziert (siehe Abbildung 3.7 d)). Falls es sich bei p oder q um eine Aufhängung handelt, bedeutet dies ebenfalls, dass

²Wir können die Label beliebig umbenennen, ohne das Schnyder Labeling zu verändern.

ein unterteilendes Dreieck existiert³. Somit können wir annehmen, dass das teilende Segment zwischen p und q die Aufhängung a_1 von Grad zwei abtrennt. p, q und a_1 bilden also ein Dreieck. Wir betrachten zwei Fälle. Entweder das teilende Segment besteht nur aus der Kante (p, q) (Fall 1) oder es existiert mindestens ein weiterer Knoten auf dem Segment (Fall 2).

1. Fall: Falls p Grad drei und dritten Nachbar p' hat, dann muss die Kante (p', q) existieren und a_1, q, p sind die Ecken eines unterteilenden Dreiecks mit der inneren Kante (p, q) . Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 3.16 und es folgt $\deg(p), \deg(q) \geq 4$. Da $\deg(a_1) = 2$ gelten muss und G intern-3-zusammenhängend ist liegt a_1 alleine auf der einen Seite des Segments und alle anderen Nachbarn von p und q auf der anderen. Wir behaupten, dass mindestens eine der Kanten (a_1, p) und (a_1, q) kontrahierbar ist, sodass der resultierende Graph eine SLTR besitzt. Die Zuweisungen bleiben, bis auf bei p und q , gleich (siehe Abbildung ??, b)). Dieser Schritt ist nicht trivial. Wir nutzen als Kriterium die begrenzenden Zykel aus Definition 3.11. Damit beide Kontraktionen nicht zum erwünschten Ergebnis führen, müssen zwei begrenzende Zykel γ_v, γ_w mit genau drei kombinatorisch konvexen Ecken, p, q und v respektive w , existieren (siehe Abbildung ??, c)). Nur dann induziert die Kontraktion von (a_1, p) und (a_1, q) einen Zykel mit nur zwei Ecken. Und somit hätte der resultierende Graph keine SLTR.

Dieser Fall kann aber nicht auftreten. Seien v, w die Ecken dieser Zykel. Dann existieren Pfade P_{pw} und P_{qw} von p nach w und q nach v . Diese Pfade sind Teil von γ_v beziehungsweise γ_w und enthalten somit keine kombinatorisch konvexen Ecken mit Ausnahme der Endknoten. Die Winkel an diesen Pfaden im Inneren der Zykel sind somit $\geq \pi$. Sei z der Knoten an dem sich P_{pw} und P_{qw} kreuzen. Da z keine Ecke sein kann muss er auf beiden Zyklen γ_v, γ_w zugewiesen sein. Somit müsste der Winkel im inneren der Zykel der an z von P_{pw} und P_{qw} eingeschlossen wird mindesten π sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme das Δ eine SLTR ist (siehe Abbildung ??, c)).

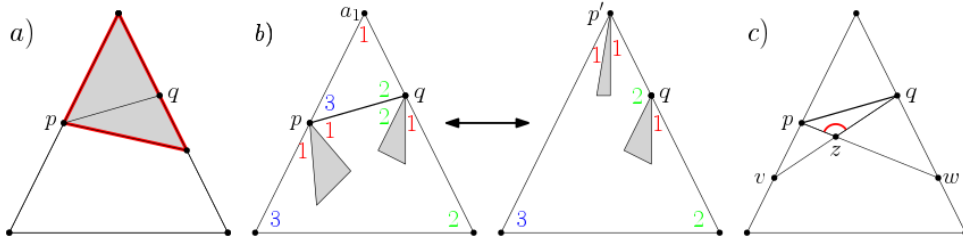


Abbildung 3.8: a) Unterteilendes Dreieck bei Grad 3. b) Kantenkontraktion der Kante (a_1, p) . c) Die Pfade die bei der Kontraktion von (a_1, p) oder (a_1, q) Degeneriertheit induzieren.

Es kann also mindestens eine der Kanten kontrahiert werden. Sei (a_1, p) diese Kante und G' der Graph der durch Kontraktion von (a_1, p) und das Löschen von

³Falls auf der einen Seite des Segmentes nur die Aufhängung a_i liegt wird kein unterteilendes Dreieck impliziert. Jedoch existiert dann mit $\Delta' = \Delta \setminus \{a_1\}$ ein kleineres SLTR (welches dann kein Gegenbeispiel ist) und aus diesem lässt sich ein Ecken kompatibles Paar für Δ bauen.

(p, q) entsteht. Wir erhalten das FAA ϕ' durch löschen der Zuweisung von p aus ϕ . Der Knoten q ist weiterhin dem äusseren Gebiet zugewiesen. Da G' weniger Knoten als G hat ist er kein Gegenbeispiel und wir erhalten einen Schnyder Labeling σ' , das zusammen mit ϕ' ein Ecken kompatibles Paar bildet. Wir können ϕ' zu einem Labeling von G erweitern indem wir, beginnend bei a_1 , im Uhrzeigersinn die Label 1, 2 und 3 im Gebiet a_1, q, p einfügen. Wir erhalten ein Ecken kompatibles Paar.

2. Fall: Sei x der erste Nachbar von p auf dem teilenden Segment. Wir Kontrahieren wieder die Kante (a_1, p) um G' zu erhalten. Bei der Kontraktion müssen keine weiteren Kanten gelöscht werden, wie in Abbildung 3.9 zu sehen ist. Wieder erhalten wir das FAA ϕ' auf G' indem wir die Zuweisung von p aus ϕ löschen. Zu jedem begrenzendem Pfad γ in G , existiert γ' in G' . Falls x eine kombinatorisch konvexe Ecke einer der Zykel γ ist, dann ist er dies auch für γ' , weil keine Kante an x gelöscht wurde.

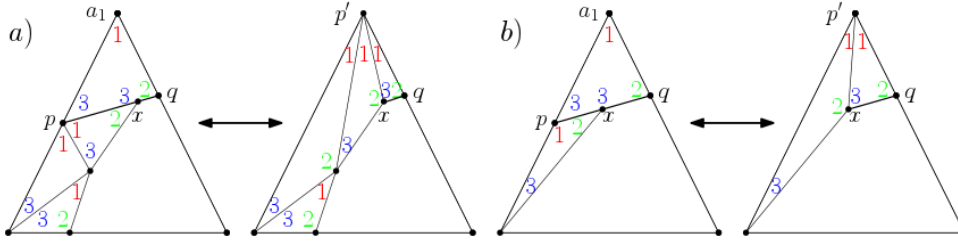


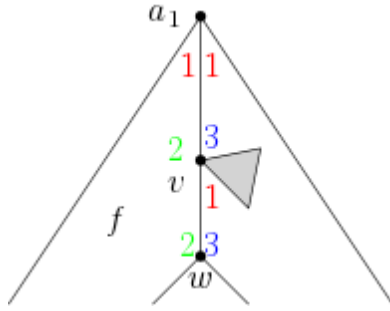
Abbildung 3.9: Zwei Beispiele zur Kontraktion von (a_1, p) mit passendem Schnyder Labeling im zweiten Fall.

Nun ist G' kein Gegenbeispiel und es existiert ein zu ϕ' kompatibles Schnyder Labeling σ' . σ' ist erweiterbar zu einem Labeling σ für G . Füge Label 1 bei a_1 und 3 bei p ein. Δ kann also kein teilendes Segment haben. □

Im nächsten Lemma wird eine Eigenschaft von Ecken kompatiblen Paaren festgehalten, die für den Beweis von Theorem 3.12 nützlich sein wird.

Lemma 3.18. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem Ecken kompatiblen Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling und einem FAA. Sei v ein Nachbar einer Aufhängung a_i . Falls v von ϕ einem Gebiet f zugewiesen ist, das a_i beinhaltet folgt, dass das Label von v in f nur einmal an v vorkommt. Alle anderen Winkel an v haben ein anderes Label.*

Beweis: Nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass v ein Nachbar von a_1 ist und v dem Gebiet f auf der linken Seite der Kante (a_1, v) zugeordnet ist (siehe Abbildung links). Sei w der andere Nachbar von v in f .



Die Kante (a_1, v) hat zwei mal Label 1, jeweils links und rechts von a_1 , und Label 2 am zugewiesenen Winkel von v . Nach Definition 2.6 muss an jeder Kante jedes Label einmal vorkommen. Somit ist das letzte Label an (a_1, v) von Typ 3. Da (σ, ϕ) ein kompatibles Paar ist, muss der Winkel von w in f ebenfalls Label 2 haben, da sonst keine Ecke mit Label 2 existiert (vergleiche Definition 2.5). Um die Kante (v, w) müssen ebenfalls alle Label vorkommen und somit müssen wir 1 und 3 (wie in der Abbildung links) einfügen.

Um v existieren nach L2 im Uhrzeigersinn drei nichtleere Intervalle mit Label 1, 2 und 3. Folglich können die verbliebenen unbekannten Label an v nur von Typ 1 oder 3 sein. \square

Lemma 3.19. *In einem minimalen Gegenbeispiel Δ , kann kein Nachbar x_i einer der Aufhängungen a_i einem Gebiet zugeordnet sein, zu dessen Rand die Kante (a_i, x_i) gehört.*

Bemerkung. Lemma 3.19 impliziert insbesondere, dass die drei Aufhängungen a_1, a_2 und a_3 von Δ ein Dreieck bilden.

Beweis: Angenommen es existiert ein Nachbar x von a_1 , der dem Gebiet f zugewiesen ist und a_1 liegt auf dem Rand von f . Somit tut dies auch die Kante (a_1, x) . Wir werden einen kleineren Graphen G' erstellen und zeigen, dass G' eine SLTR zulässt. Das zu diesem SLTR korrespondierende Schnyder Labeling ϕ' kann man dann zu einem Labeling von G erweitern. Im besten Fall kontrahieren wir eine Kante in G um G' zu erhalten ... TODO

Sei z die dritte Ecke des Gebietes f mit den Ecken a_1 und x . Es kann nur ein solches z geben, da sonst (wie in Abbildung 3.10 a) illustriert) ein unterteilendes Dreieck in Δ existieren müsste. Wir haben aber in Lemma ?? gezeigt, dass dies nicht der Fall sein kann.

Wir können davon ausgehen, dass z und a_1 benachbart sind. Falls nicht muss ein Knoten x' zwischen z und a_1 liegen. Sei z' die Dritte Ecke im Gebiet mit Ecken a_1, x', z' . x' muss in diesem Gebiet eine Ecke sein, da es im zuerst betrachteten zugewiesen ist (siehe Abbildung 3.10, b)). Nun ist entweder z' ein Nachbar von a_1 , oder wir führen den Schritt noch einmal durch und finden x'' . Da a_1 endlich viele Nachbarn hat können wir den Schritt und endlich oft durchführen. Es existiert also ein Gebiet mit a_1, x und z als Ecken und x und z sind Nachbarn von a_1 . Es sei angemerkt, dass x am äusseren Gebiet von G liegen kann.

Wir werden je nach Fall unterschiedliche Ansätze wählen, um G' zu erzeugen. Es folgt eine Übersicht der Fälle, die in Abbildung 3.11 skizziert sind.

1. x und z sind Nachbarn.

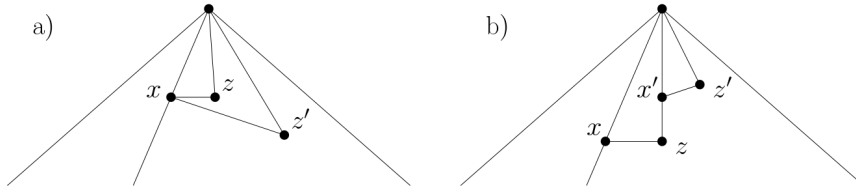


Abbildung 3.10: a) Es können keine zwei Knoten mit geradlinigen Pfaden zu x und a_1 existieren. b) Falls a_1 kein Nachbar von z ist, dann müssen die Knoten x' und z' existieren.

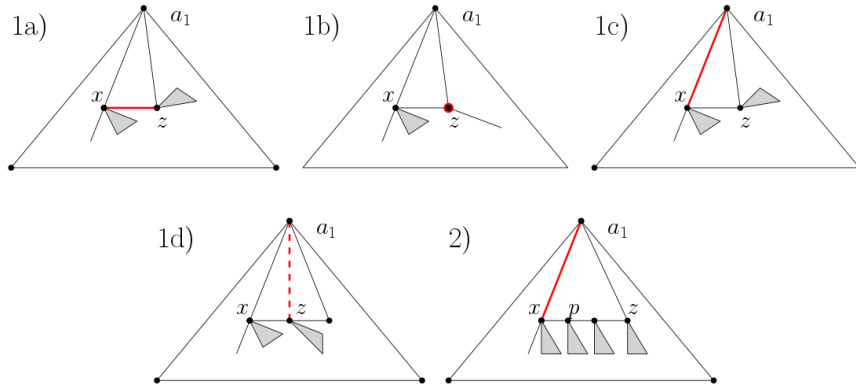


Abbildung 3.11: Die möglichen Fälle bei der Erzeugung von G' . Die durchgezogenen roten Kanten werden kontrahiert. Der rote Knoten und die gestrichelte rote Kante gelöscht.

- a) Falls z dem Gebiet auf der anderen Seite von (x, z) zugewiesen ist, dann kontrahieren wir (x, z) .
- b) Falls $\deg(z)=3$ gilt, löschen wir z und fügen eine passende Kante ein.
- c) Falls (a_1, x) kontrahierbar ist wird sie kontrahiert.
- d) Sonst wird die Kante (a_1, z) gelöscht.

2. x und z sind keine Nachbarn, dann kontrahieren wir die Kante (a_1, x) .

Für jeden dieser Fälle entsteht ein Graph G' der kleiner ist als G und eine SLTR zulässt. Da er kein Gegenbeispiel sein kann besitzt er ein Ecken kompatibles Paar. Das involvierte Schnyder Labeling lässt sich zu einem für G erweitern und dieses ist Ecken kompatibel mit dem von Δ induzierten FAA. Wir werden uns jetzt den einzelnen Fällen im Genaueren zuwenden.

Fall 1a: (x, z) ist eine Kante und somit s, z, a_1 ein echtes Dreieck. Um G' zu erzeugen, löschen wir (a_1, z) und kontrahieren (x, z) . Wir bezeichnen den neuen Knoten mit x' (siehe Abbildung ??). Wir erhalten dass FAA ϕ' indem wir die Zuweisung von x aus ϕ löschen.

□

Lemma 3.20. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ der eine SLTR besitzt. Sei ϕ das von dieser SLTR induzierte FAA. Dann existiert ein Schnyder Labeling σ von G , sodass σ und ϕ ein Ecken kompatibles Paar bilden.*

Beweis: Angenommen das Lemma gilt nicht und sei G ein minimales Gegenbeispiel, wie zuvor mit der minimalen Anzahl an Knoten und unter diesen mit der minimalen Anzahl an Kanten. Sei Δ eine SLTR von G mit den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 und ϕ das induzierte FAA. Wir wollen wieder zu einem Widerspruch gelangen indem wir einen kleineren Graphen G' konstruieren, sodass die folgenden Punkte erfüllt sind.

- G' besitzt ein FAA ϕ' , welches von ϕ indiziert wird.
- Das kompatible Paar (σ', ϕ') von G' induziert ein Schnyder Labeling von G .
- Das so erzeugte Schnyder Labeling σ ist Ecken kompatibel zu ϕ .

Diese Aussagen zusammen erzeugen einen Widerspruch zur Annahme, dass G ein Gegenbeispiel ist. Wir halten einige Beobachtungen aus den vorherigen Lemmata fest.

B1 Δ hat kein unterteilendes Dreieck.

B2 Δ hat kein teilendes Segment und somit keine Aufhängung von Grad 2.

B3 Kein Nachbar x_i einer Aufhängung a_i kann einem Gebiet zugeordnet sein, zu dessen Rand die Kante (a_i, x_i) gehört. Somit bilden die Aufhängungen von Δ ein Dreieck.

Aus B3 folgt, dass sowohl das äussere Gebiet als auch seine drei benachbarten Gebiete (echte) Dreiecke⁴ sind (siehe Abbildung 3.12 links). Wir werden sehen, dass der dritte Knoten in einem der inneren Dreiecke eine wichtige Rolle spielt. Wir bezeichnen den dritten Knoten im Dreieck, das a_i und a_{i+1} enthält, mit q_i (oder einfach nur q).

Der Beweis läuft in drei Schritten. Wir zeigen zuerst, dass in einem minimalen Gegenbeispiel Δ jedes q_i einem angrenzenden Gebiet zugeordnet sein muss (und in diesem einen flachen Winkel hat). Falls dies gilt, zeigen wir, dass wir aus G einen Graphen G' erzeugen können, der einen zugewiesenen Knoten q' auf einer Kante (a_i, q') besitzt und erhalten einen Widerspruch zu B3. Zuletzt zeigen wir, dass wir aus einem Schnyder Labeling σ' von G' ein Labeling σ von G erzeugen können, sodass aus der Ecken Kompatibilität von σ' und ϕ' auch Kompatibilität von σ und ϕ folgt.

Sei f das von a_1, a_2 und q_1 gebildete Dreieck (siehe Abbildung 3.12, a)). Angenommen q_1 wird von ϕ nicht zugeordnet. Entferne die Kante (a_1, a_2) und weise q_1 in dem äusseren Gebiet zu, um G' und σ' zu erhalten. Kein begrenzender Zykel enthält den neu zugewiesenen Winkel an q in seinem Inneren. Falls a_1 und a_2 auf einem begrenzenden Zykel γ' liegen, dann ist q keine Ecke des korrespondierenden Zyklus γ in G sein, sondern muss in seinem Inneren liegen (sonst wäre γ' von einem Pfad induziert). Somit sind die kombinatorisch konvexen Ecken von γ ebensolche von γ .

⁴Sie enthalten nur jeweils ihre drei Ecken als Knoten.

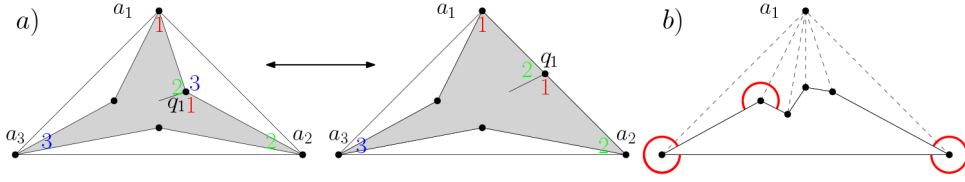


Abbildung 3.12: a) Die Erstellung eines Graphen G' mit weniger Kanten. b) Das Löschen einer Aufhängung resultiert in einem Graphen mit mindestens drei Aussenwinkeln $\geq \pi$.

Da Zykel die q nicht enthalten keine Ecken verlieren, hat jeder begrenzende Zykel in G' mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken. Somit hat G' ein SLTR Δ' und die gerade Winkel werden von ϕ' induziert. Nun ist G' ein Graph mit weniger Kanten als G und somit kein Gegenbeispiel. Wir erhalten also ein Ecken kompatibles Paar (σ', ϕ') . Wir können dies wie in Abbildung 3.12 zu einem Paar für G erweitern.

Nehmen wir also an, dass jedes der q_i in einem Gebiet einen flachen Winkel hat, also von ϕ einem Gebiet zugeordnet wird. Jede Aufhängung a_i muss mindestens einen Nachbarn x_i haben, der nicht zugeordnet ist. Wäre dies nicht der Fall, dann entstünde ein Widerspruch zur Tatsache, dass $G \setminus \{a_1\}$ drei konkave Aussenwinkel hat (siehe Abbildung 3.12, b)). Der Knoten mit Winkel $\geq \pi$, der keine Aufhängung ist, kann zuvor nicht zugeordnet sein. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit q gemeinsame Nachbar von a_1 und a_2 . p_k sei der im Uhrzeigersinn von q ausgehend erste Nachbar von a_1 der nicht zugewiesen ist (In Abbildung 3.13 ist dies p_3).

Wir werden einen Graphen G' (mit der gleichen Anzahl an Knoten und weniger Kanten) aus G erstellen. In diesem Graphen ist p_k einem Gebiet zugeordnet, auf dessen Rand die Kante (a_1, p_k) liegt. Nach Lemma 3.19 muss somit ein Schnyder Labeling σ' existieren, dass Ecken kompatibel mit dem induzierten FAA ϕ' von G' ist. Wir können aus σ' ein Schnyder Labeling σ für G bauen, dass kompatibel zu ϕ ist.

Sei $N_{a_1} = \{q, p_1, \dots, p_k, \dots, p_l, a_3, a_2\}$ die Menge der Nachbarn von a_1 , wobei wir mit q beginnen und im Uhrzeigersinn fortfahren. Durch löschen der Kante (a_1, q) und einfügen der Kante (a_2, p_1) erhalten wir einen neuen Graphen G_1 . Wir nennen den durchgeführten Kantenwechsel um G_1 zu erhalten (nach dem Englischen) einen *flip*. G_1 lässt die SLTR Δ_1 zu. Die vier Knoten a_1, a_2, q und p bilden in Δ ein konvexes Viereck⁵ mit nur einer Diagonalen im Inneren (vergleiche Abbildung 3.13, a) und b)). Die erhaltene Zeichnung Δ_1 ist somit ebenfalls eine SLTR. Falls p_1 zugewiesen ist, wiederholen wir den Schritt (siehe Abbildung 3.13, c)). Wir führen diesen Schritt nur so oft durch, bis wir bei p_k angekommen sind, dem ersten nicht zugewiesenen Nachbar von a_1 , und die Diagonale im konvexen Viereck a_1, a_2, p_{k-1}, p_k flippen. Wir ersetzen also (a_1, p_{k-1}) durch (a_2, p_k) . Nach jedem *flip* erhalten wir ein SLTR Δ_i von G_i und somit ist ϕ_k ein Gutes-FAA.

Um nun den Graphen G' zu erhalten löschen wir die im letzten *flip* hinzugefügte Kante (a_2, p_k) (siehe Abbildung 3.14, b)). G' hat somit eine Kante weniger als G . p_k

⁵ Auf der Geraden zwischen q und p_1 können sich zusätzliche Knoten befinden, doch dies spielt für unsere Argumentation keine Rolle.

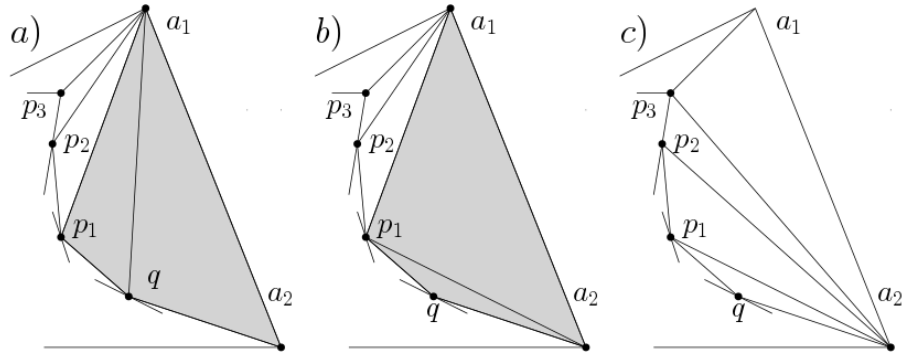


Abbildung 3.13: Das schrittweise Flippen von Kanten.

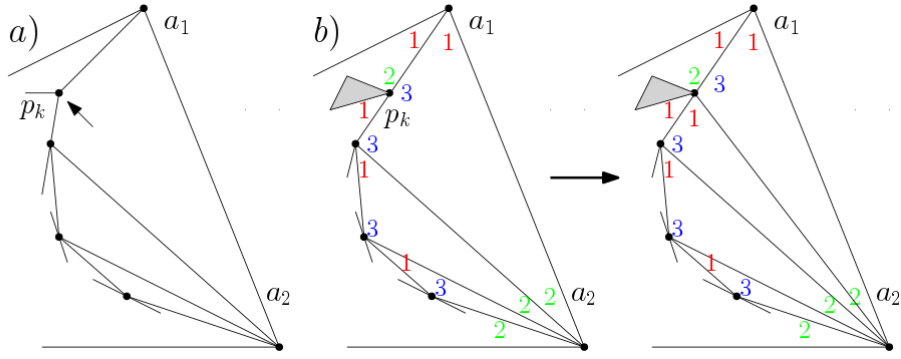
ist in ϕ_k nicht zugewiesen. Sei ϕ' der Erweiterung von ϕ_k um die Zuweisung von p_k zum Gebiet a_1, a_2, p_{k-1}, p_k (siehe Abbildung 3.14, a)). Dann ist ϕ' ein FAA von G' . Wir zeigen als Nächstes, dass es sich bei ϕ' um ein Gutes-FAA handelt.

Betrachten wir einen beliebigen begrenzenden Zykel γ' in G' und sei γ_k der korrespondierende Zykel in G_k . Wir müssen wieder zeigen, dass jeder Zykel mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken hat. Im Fall, dass p_k nicht auf dem Rand von γ' liegt, folgt sofort, dass beide Zyklen die selben kombinatorisch konvexen Ecken haben (und somit beide mindestens drei). Betrachten wir also den Fall, dass p_k auf dem Rand von γ' liegt. Im Fall, dass γ' nur einen Teil der Nachbarn von p_k beinhaltet und nicht den zugewiesenen Winkel einschließt ist p_k sowohl eine kombinatorisch konvexe Ecke von γ_k und somit auch von γ' . Sei also p_k keine kombinatorisch konvexe Ecke von γ' . Falls der zugewiesene Winkel an p_k im Inneren von γ' liegt, aber γ' nicht alle Nachbarn von p_k enthält, muss γ_k mindestens vier kombinatorisch konvexe Ecken besitzen. Die ersten drei sind a_1, a_2 und p_k und die vierte befindet sich auf dem Teil des Randes R vom γ' zwischen p_k und a_2 ⁶. Somit hat γ' mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken. Betrachte den Fall, dass γ' alle Nachbarn von p_k beinhaltet, aber der zugewiesene Winkel nicht im Inneren von γ' liegt. In der SLTR Δ_k ist der Aussenwinkel von γ_k am Knoten p_k somit nicht grösser als π und γ_k muss drei andere (kombinatorisch konvexe) Ecken haben. Diese sind auch kombinatorisch konvexe Ecken von γ' . Somit hat jeder begrenzende Zykel γ' in G' mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken und es folgt, dass ϕ' ein Gutes-FAA ist.

Da G' die gleiche Anzahl an Knoten und weniger Kanten als G kann er kein Gegenbeispiel sein. Es existiert also ein Schnyder Labeling σ' , das Ecken kompatibel zu ϕ' ist. Es bleibt zu zeigen, dass wir aus σ' ein Labeling für G erstellen können, welches dann Ecken kompatibel zu ϕ ist. Wir stützen uns hierfür auf die folgende Eigenschaft, die aus K2 folgt.

K3 In einem Ecken kompatiblen Paar (σ, ϕ) hat jeder zugewiesene Winkel in diesem Gebiet (mindestens) einen benachbarten Winkel mit dem selben Label.

⁶Diese Ecke muss existieren, da der begrenzende Zykel $\tilde{\gamma}$, der sich aus R und der Kante (a_2, p_k) bildet, mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken in G_k hat.

Abbildung 3.14: Ein Schnyder Labeling von G_k erstellt aus einem Labeling von G' .

Das Schnyder Labeling σ' ist eindeutig für Gebiete (TODO) mit a_1 oder a_2 als Ecken und einer geflippten Kante auf dem Rand (siehe Abbildung 3.14, b)). In einem ersten Schritt müssen wir (a_2, p_k) wieder einfügen und σ' eindeutig erweitern (wie in Abbildung 3.14 b) zu sehen).

Die Flips wurden entlang q, p_1, \dots, p_k durchgeführt und nach unserer Annahme haben die Knoten p_1, \dots, p_{k-1} von ϕ' zugewiesene Winkel in G' . Sei $p_0 = q$. Zwei Knoten p_{i-1} und p_i , mit $i \in \{1, \dots, k\}$ in dieser Folge sind nicht zwangsläufig Nachbarn, aber sie sind die Ecken des (dreieckigen) Gebietes a_2, p_{i-1}, p_i und alle Knoten auf dem Rand zwischen p_{i-1} und p_i sind diesem Gebiet zugewiesen (siehe Abbildung 3.15, a)). Wir führen nun Schritt für Schritt, beginnend mit $i = k$, einen *rückwärts flip* durch. Hierfür entfernen wir die Kante (p_i, a_2) wieder und setzen die Kante (p_i, a_1) wieder ein. Merke, dass p_i vor dem Schritt i einen zusätzlichen Nachbarn in G_i (im Verhältnis zu G) hat und somit gilt $\deg(p_i) \geq 4$, weil G intern-3-zusammenhängend ist. Sei α_i der gegen den Uhrzeigersinn auf die Kante zu a_1 folgende Winkel und β_i der im Uhrzeigersinn auf die Kante zu p_{i-1} folgende Winkel (jeweils an p_i). Dann handelt es sich bei diesen Winkeln, wegen $\deg(p_i) \geq 4$, nicht um den Selben. Bei jedem Schritt wird die folgende Invariante eingehalten.

Invariante Vor dem Schritt i hat der Knoten p_i die Label $2, 3, 1, 1$ im Uhrzeigersinn beginnend mit den Winkel α_i und Enden mit β_i (siehe Abbildung 3.15, a)). Zusätzlich bilden das Schnyder Labeling σ'_i und das FAA ϕ'_i ein Ecken kompatibles Paar auf G'_i .

Beginnen wir mit G' . Hier sind die in Abbildung 3.14 b) gewählten Label der Winkel um p_k die einzig mögliche Kombination. Genauso verhält es sich nach dem Einfügen der Kante (a_2, p_k) . Wir erhalten den Graphen G'_k , das Schnyder Labeling σ'_k und das FAA ϕ'_k , wobei σ'_k und ϕ'_k ein Ecken kompatibles Paar bilden. Somit gilt die Invariante vor dem ersten Schritt.

Die Invariante gelte vor Schritt i . In Schritt i entfernen wir die Kante (a_2, p_i) und fügen die Kante (a_1, p_{i-1}) wieder in den Graphen ein. Vor dem *rückwärts flip*, erfüllen die Label um p_i die Invariante und σ'_i und ϕ'_i sind ein Ecken kompatibles Paar. Die folgende Argumentation basiert auf Lemma 2.7 – die Kanten Regel besagt, dass alle drei Label im Uhrzeigersinn an jeder Kante vorkommen – und der Ecken

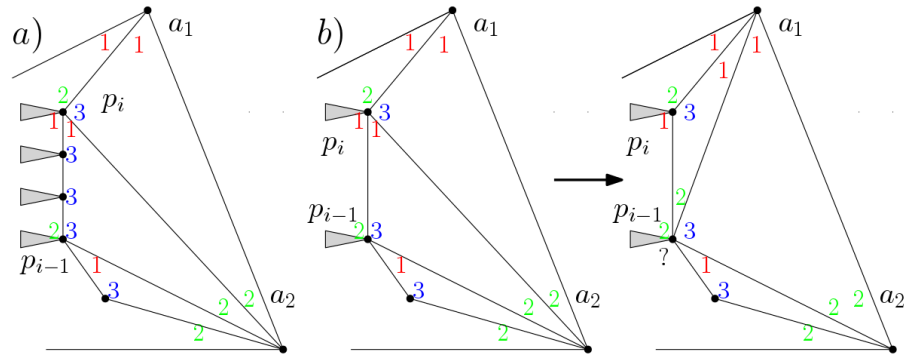


Abbildung 3.15: a) Schnyder Labeling zwischen p_{i-1} und p_i . b) Änderung des Labelings beim rückwärts Flippen.

Kompatibilität von (σ'_i, ϕ'_i) . Die Winkel an p_{i-1} links und rechts der Kante zu p_i haben die Label 2 und 3 (siehe Abbildung 3.15, b)). Der Winkel zwischen p_i und a_2 kann nur Label 3 haben, da er an einer Kante zu a_2 liegt, an deren anderem Ende somit nur Label 2 vorkommt. Der andere Winkel muss Label 2 haben, da er entweder an einer Kante mit zwei 3ern auf der anderen Seite liegt (vergleiche Abbildung 3.15, a)) oder er an der Kante (p_i, p_{i-1}) liegt, nur mit Label 1 an p_i (vergleiche Abbildung 3.15 Mitte).

Führen wir den *rückwärts flip* durch. Wir löschen also die Kante (a_2, p_i) und fügen die Kante (a_1, p_{i-1}) ein, wie in Abbildung 3.15 b). Für fast alle Winkel folgt die Wahl des Labels eindeutig, da σ'_{i-1} ein Schnyder Labeling sein muss. Um die Invariante zu erfüllen müssen wir zeigen, dass wir dem mit ? markierte Winkel Label 1 geben können. Wenn er diese Label schon vor dem Schritt hatte ändert sich nichts und wir sind fertig. Angenommen er hatte nicht Label 1. Da es sich um ein Schnyder Labeling handelt ist die einzig andere Möglichkeit Label 2. Es muss sich bei diesem Winkel, um den an p_{i-1} zugewiesenen handeln. Dies folgt aus der Ecken Kompatibilität, da ein zugewiesener Winkel und seine beiden Nachbarn um einen Knoten nicht alle die gleichen Label haben können. Sonst kommt es, wie in Abbildung 3.16 a), zu einem Widerspruch, weil alle weiteren Winkel an p_{i-1} Label 2 haben und so ein Gebiet keine Ecke mit diesem Label hätte.

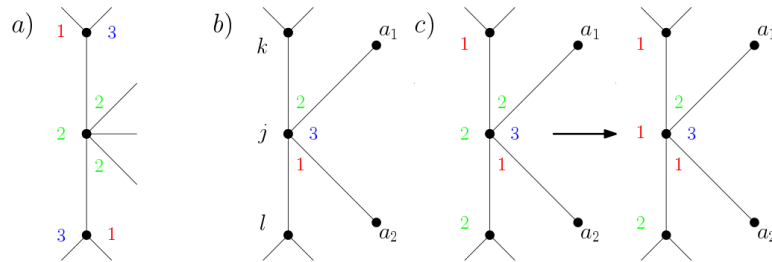


Abbildung 3.16: a) Das Gebiet links kann keine Ecke mit Label 1 haben.

Betrachte Abbildung 3.16 b). Wenn wir $j=2$ setzten, dann folgen sofort die Label

in c). $j=2$ folgt aus der Kanten Regel (Lemma 2.7). Nun muss $l=2$ sein, weil sonst das Gebiet auf der linken Seite keine Ecke mit Label 2 haben könnte. Wir können also das Label auf 1 setzen und erhalten ein Schnyder Labeling σ'_{i-1} (siehe Abbildung 3.16, c)), das Ecken kompatibel mit dem induzierten FAA ϕ'_{i-1} ist, da wir nur das Label eines zugewiesenen Winkels verändert haben.

Wir haben also Schritt i durchgeführt und die Invariante hat bestanden. Per Induktion erhalten wir ein Ecken kompatibles Paar aus einem Schnyder Labeling σ'_0 und einem FAA ϕ'_0 von G . Somit kann G kein Gegenbeispiel sein. Es folgt die Rückrichtung des Theorems. \square

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel erarbeitet um das folgende, weiter oben schon aufgeführte Theorem zu beweisen.

Theorem 3.12. *Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. G besitzt eine SLTR, genau dann wenn ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ existiert.*

Beweis von Theorem 3.12: Sei G ein planer, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Angenommen G besitzt ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ . Nach Lemma 3.13 existiert dann eine SLTR von G .

Angenommen G besitzt eine SLTR, dann existiert nach Lemma 3.20 ein Schnyder Labeling, das Ecken kompatibel mit dem von der SLTR induzierten FAA ist. \square

Theorem 3.12 liefert noch keinen direkten Weg um für einen Graphen die Frage zu beantworten ob er eine SLTR zulässt. Im nächsten Kapitel werden wir uns aber mit einem Algorithmus befassen, der den Zusammenhang aus Theorem 3.12 nutzt um für einen Graphen ein Gutes-FAA zu erkennen.

4 Algorithmen zur Erkennung von SLTRs

Im vorherigen Kapitel wurden Kriterien für die Existenz einer SLTR für G erarbeitet. Diese liefern allerdings nicht sofort einen Algorithmus, weder zur Frage nach der Existenz, noch für das Erlangen einer spezifischen SLTR. Dieses Kapitel wird sich diesem Thema zuwenden und einen von Aerts und Felsner in [AF15] erarbeiteten Algorithmus erläutern und analysieren.

4.1 SLTRs via Zwei-Fluss

Das Ziel ist es, für einen gegebenen Graphen, sowohl einen Schnyder Wood als auch ein FAA jeweils als Lösung eines Fluss-Problems mit einer Quelle und Senke zu erhalten. Diese beiden werden dann in einem Zwei-Fluss-Problem kombiniert, sodass eine zulässige ganzzahlige Lösung ein Ecken-Kompatibles-Paar kodiert und somit eine SLTR resultiert. Wir beschäftigen uns also mit Gerichteten-Multi-Fluss-Problemen auf gerichteten Graphen, die in Definition 2.12 eingeführt wurden.

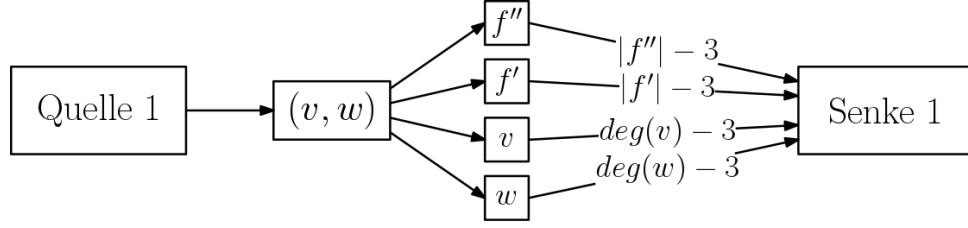
4.1.1 Schnyder-Wood-Fluss

Um einen Schnyder Wood als Fluss-Problem zu kodieren, kann man die in Abschnitt 2.3 eingeführten α_s -Orientierungen auf dem Abschluss von $G + G^*$ nutzen. Fusy zeigt in [Fus07] im Zuge der Untersuchung spezifischer α -Funktionen, dass sich α_s -Orientierungen von $G + G^*$ in linearer Zeit berechnen lassen, sodass wir auch einen Schnyder Wood auf G in linearer Zeit erhalten.

Machen wir uns also an die Konstruktion eines Netzwerks \mathcal{N}_G , sodass ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_s einer α_s -Orientierung von $G + G^*$ entspricht. Nach Theorem 4.3 induziert φ_s somit auch einen Schnyder Wood auf G . Besonderes Augenmerk ist hier auf die Möglichkeit einer späteren Kombination mit einem FAA-Fluss gelegt, um ein Kombiniertes Netzwerk zu erstellen, und nicht unbedingt auf Effizienz.

Wie oben schon erwähnt ist $G + G^*$ bipartit, Kanten-Knoten haben Grad 4, Knoten-Knoten Grad $\deg(v)$ und Gebiets-Knoten Grad $|f|$. Für eine α_s -Orientierung muss nach Definition 4.3 A3 jeder Kanten-Knoten Ausgrad 1, jeder Knoten-Knoten Eingrad $\deg(v) - 3$ und jeder Gebiets-Knoten Eingrad $|f| - 3$ haben. Die Kanten-Knoten am äusseren Gebiet sind in $G + G^*$ immer nach aussen orientiert. Somit können wir nur die inneren Kanten-Kanten E_{in} betrachten und die Orientierung der äusseren Kanten voraus setzen.

Sei \mathcal{N}_G ein Netzwerk mit jeweils einer Quelle s und Senke t , Kanten von der Quelle zu jedem $e \in E_{in}$ mit Kapazität 1, Kanten von den Kanten-Knoten e zu inzidenten

Abbildung 4.1: Der Schnyder Wood Fluss durch eine innere Kante (v, w) .

Knoten-Knoten v und (inneren) Gebiets-Knoten $f \in F_{in}$ in G ebenfalls mit Kapazität 1, Kanten von $f \in F_{in}$ zur Senke mit Kapazitäten $|f| - 3$, Kanten von den (inneren) Knoten-Knoten $v \in V_{in} = V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ zur Senke mit Kapazitäten $\deg(v) - 3$ und Kanten von den Aufhängungen a_i zur Senke mit Kapazitäten $\deg(a_i) - 2$. Die letzte Kapazität resultiert aus dem Fakt, dass die Halbkante in $G + G^*$ von a_i aus immer nach aussen orientiert ist und wir somit nur noch zwei andere Kanten nach aussen orientieren müssen.

Der Bedarf des Netzwerkes entspricht der Anzahl der inneren Kanten von G . Sei nun φ_s eine zulässige ganzzahlige Lösung, dann hat jeder Kanten-Knoten e Ausgrad 1. Der Fluss φ_s entlang einer Auskante von $e \in E_{in}$ in \mathcal{N}_S entspricht dann genau der hin zu e orientierten Kante einer α_s -Orientierung auf $G + G^*$. Die Knoten-Knoten und Gebiets-Knoten haben $\deg(v) - 3$ bzw. $|f| - 3$ von φ_s genutzte Auskanten und somit entspricht hier eine leere Kante in \mathcal{N}_S einer von v bzw. f weg orientierten Kante bezüglich α_s . Für einen zulässigen ganzzahligen Fluss φ_s gilt $|\varphi_s| = |E_{in}|$. Somit hat jede innere Kante Ausgrad 1. Weiter gilt

$$\sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 3 + \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) = |E_{in}|.$$

Somit hat jedes Gebiet und jeder Knoten den passenden Ausgrad und φ_s kodiert eine α_s -Orientierung auf $G + G^*$. Es existiert also genau dann ein Schnyder Wood auf G , wenn eine ganzzahlige Lösung φ_s für \mathcal{N}_S existiert.

Fassen wir zusammen.

Netzwerk 1 (Schnyder Wood). Bei \mathcal{N}_s handelt es sich um ein gerichtetes Netzwerk, das auf Basis von G erstellt wird, um einen Schnyder Wood auf G zu finden. Ein Ausschnitt ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

- \mathcal{N}_s hat eine Quelle s und eine Senke t
- Knoten in \mathcal{N}_s werden für jeden inneren Kante $e \in E_{in}$, jedes innere Gebiet $f \in F_{in}$ und jeden Knoten $v \in V$ aus G erzeugt.
- Es werden gerichtete Kanten der folgenden Typen in \mathcal{N}_S erzeugt:
 - (s, e) von der Quelle zu jeder inneren Kante mit $c(s, e) = 1$
 - $(e, v_1), (e, v_2)$ von jeder inneren Kante zu den Endknoten mit $c(e, v) = 1$

- (e, f) von jeder inneren Kante zu adjazenten Gebieten mit $c(e, f) = 1$
 - (f, t) von den inneren Gebieten zur Senke mit $c(f, t) = 1$
 - (v, t) von den Knoten zur Senke mit $c(v, t) = 1$
 - (f, t) von den inneren Gebieten zur Senke mit $c(f, t) = |f| - 3$
 - (a_i, t) von den Aufhängungen zur Senke mit $c(f, t) = \deg(a_i) - 2$
 - (v, t) von den restlichen Knoten zur Senke mit $c(f, t) = \deg(v) - 3$
- \mathcal{N}_S hat Bedarf $d = |E_{in}|$
- \Rightarrow Ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_s existiert. \Leftrightarrow Es existiert ein Schnyder Wood auf G .

4.1.2 FAA-Fluss

Um ein FAA für einen planaren Graphen G zu erhalten, müssen wir jedem Gebiet $f \in F$ genau drei Ecken und $|f| - 3$ flache Winkel zuordnen. Jeder Knoten darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden, also in diesem flach sein. Falls eine Einbettung und die Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ gegeben sind, müssen wir jedem inneren Gebiet $f \in F_{in}$ drei Ecken und $|f| - 3$ flache Winkel zuweisen und jeder innere Knoten $v \in V_{in}$ darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden. Die Knoten um das äussere Gebiet die keine Aufhängungen sind müssen diesem zugewiesen werden. Wir konstruieren ein Netzwerk für den zweiten Fall, das sich leicht verallgemeinern lässt.

Sei also wieder \mathcal{N}_F ein Netzwerk mit einer Quelle und Senke. Wir erstellen in \mathcal{N}_F Knoten für jeden inneren Winkel (f, v) , mit $v \in V$ und $f \in F_{in}$, Knoten für alle inneren Gebiete $f \in F_{in}$ und alle Knoten $v \in V$. Von der Quelle existiert eine Kante mit Kapazität 1 zu jedem inneren Winkel (f, v) , von jedem inneren Winkel (f, v) jeweils eine Kante zu f und zu v mit Kapazität 1. Zuletzt fügen wir Kanten von jedem inneren Gebiet f zur Senke mit Kapazität 3 und Kanten von jedem Knoten v zur Senke mit Kapazität 1 ein. Der Bedarf des Netzwerks ist $\sum_{f \in F_{in}} |f|$ und entspricht der Anzahl der inneren Winkel von G .

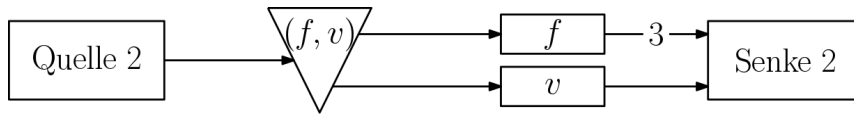


Abbildung 4.2: Der FAA-Fluss durch einen Winkel (f, v) .

Sei φ_F ein zulässiger ganzzahliger Fluss, dann entspricht Fluss auf einer Kante $((f, v), f)$ einer Ecke (eines möglichen GFAAs) von f und Fluss auf $((f, v), v)$ der Zuweisung eines Knoten zu f , also einem flachen Winkel in einem GFAA. Zur Vereinfachung sprechen wir im Weiteren auch von Ecken- und Zuweisungs-Fluss. Somit wird jeder innere Winkel entweder seinem Gebiet zugewiesen oder als Ecke ausgezeichnet. An jedem inneren Knoten kann nur jeweils ein Winkel zugewiesen werden (F2). Von jedem inneren Gebiet f fließt Fluss mit Stärke $|\varphi_s((f, t))| = |f| - 3$ zu Senke. F1 ist

als erfüllt. φ_F respektiert also die Bedingungen aus Definition 3.1 und es existieren nur dann FAAs auf G , wenn mindestens eine ganzzahlige Lösung für \mathcal{N}_F existiert. Eine spezifische Lösung φ_F entspricht genau einem FAA auf G .

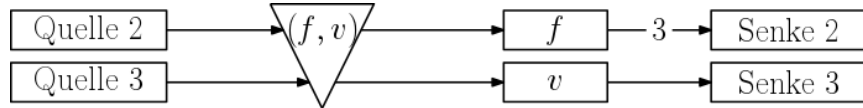
Fassen wir zusammen.

Netzwerk 2 (FAA). Bei \mathcal{N}_F handelt es sich um ein gerichtetes Netzwerk, das auf Basis von G erstellt wird, um ein FAA zu finden. Ein Ausschnitt ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

- \mathcal{N}_F hat eine Quelle s und eine Senke t
- Knoten in \mathcal{N}_F werden für jeden inneren Winkel $(f, v) \in W_{in}$, jedes innere Gebiet $f \in F_{in}$ und jeden Knoten $v \in V$ aus G erzeugt.
- Es werden gerichtete Kanten der folgenden Typen in \mathcal{N}_F erzeugt:
 - $(s, (f, v))$ von der Quelle zu jedem inneren Winkel mit $c(s, (f, v)) = 1$
 - $((f, v), v)$ von jedem inneren Winkel zum Knoten mit $c((f, v), v) = 1$
 - $((f, v), f)$ von jedem inneren Winkel zum Gebiet mit $c((f, v), f) = 1$
 - (f, t) von den inneren Gebieten zur Senke mit $c(f, t) = 3$
 - (v, t) von den Knoten zur Senke mit $c(v, t) = 1$
- \mathcal{N}_F hat Bedarf $d = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

\Rightarrow Ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_F existiert. $\Leftrightarrow G$ hat ein FAA.

Bemerkung. Das oben konstruierte Netzwerk zur Bestimmung von FAAs lässt sich auch als Zwei-Fluss Problem konstruieren, wenn wir für Ecken- und Zuweisungs-Fluss getrennte Quellen und Senken einführen. Der Bedarf des Ecken-Flusses ist dann $3|F_{in}|$ und der Bedarf des Zuweisung-Flusses $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$.



Eine zulässige ganzzahlige Lösung $\varphi_F = (\varphi_e, \varphi_z)$ entspricht dann wieder einem FAA auf G . Aus der Ganzzahligkeit folgt, dass ein Winkel entweder von φ_e (Ecke) oder φ_z (Zuweisung) genutzt wird und somit eine Definition 3.1 respektierende Beschriftung der Winkel vorliegt.

4.1.3 Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs

Im Verlauf des Kapitels haben wir nun sowohl für Schnyder Woods als auch für FAAs ein Netzwerk betrachtet, für das eine ganzzahlige Lösung einen Schnyder Wood bzw. ein FAA für einen planen Graphen G liefert. Wir wollen jetzt eine Kombination aus beiden erstellen die ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ kodiert.

Es folgt die Konstruktion eines Netzwerkes, wir bezeichnen es mit \mathcal{N}_G , welches diesen Wunsch erfüllt. Ein ganzzahliger Fluss φ kodiert dann ein Ecken kompatibles Paar und impliziert somit nach Theorem ?? eine SLTR für G . Es handelt sich hierbei um ein 2-Fluss-Netzwerk.

Wie oben in Abschnitt 4.1.2 erwähnt lässt sich ein FAA auch mit einem Zwei-Fluss kodieren und wir können Ecken- und Zuweisungs-Fluss mit den passenden Bedarfen getrennt betrachten. Wir müssen jetzt diese drei Flüsse, also Schnyder-, Ecken- und Zuweisungs-Fluss in einem Netzwerk kombinieren. In [AF15] ergeben Schnyder- und Ecken-Fluss zusammen Fluss von Typ 1 und der Zuweisungs-Fluss Typ 2. Wir wollen hier analog ein Netzwerk konstruieren in dem wir FAA und Schnyder-Wood Fluss nicht trennen. Der Verständlichkeit wegen werden wir Pfade, die in einer Lösung von einem der drei Flussarten genutzt werden, *Schnyder-Pfad*, *Ecken-Pfad* und *Zuweisungs-Pfad* nennen.

Bei der Kombination der beiden oben konstruierten Netzwerke \mathcal{N}_S und \mathcal{N}_F zu \mathcal{N}_G müssen die Ecken Kompatibilität von Schnyder Labeling und FAA gewährleistet werden. K1 zu erfüllen, also die Nutzung der gleichen Aufhängungen von σ und ϕ , ist kein Problem. Allerdings müssen wir für die zweite Bedingung das Netzwerk etwas komplizierter machen. Betrachten wir als Basis $\mathcal{N}_S \cup \mathcal{N}_F$ und fürs erste nur das Teilnetzwerk um ein inneres Gebiet f , dann sehen wir, dass f in \mathcal{N}_S $|f| - 3$ Schnyder-Fluss aufnimmt, aber $|f|$ Einkanten in \mathcal{N}_S hat. Wir können die drei leeren Kanten für den Ecken-Fluss aus \mathcal{N}_F nutzen. Um K2 zu erfüllen, müssen gewährleisten, dass jede Ecke im Schnyder Labeling ein anderes Label hat. Betrachten wir also die von φ_S induzierte α_S -Orientierung auf dem Abschluss von $G + G^*$. Nach Theorem ?? erhalten wir in Bijektion stehende Schnyder Labelings auf G und G^* .

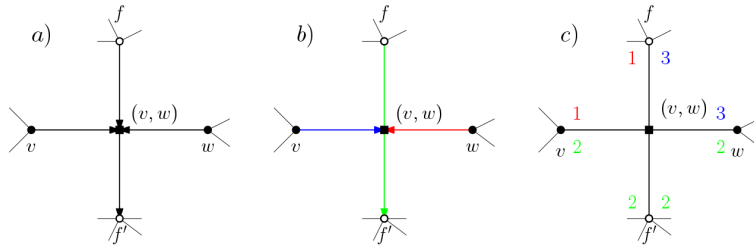


Abbildung 4.3: a) Eine α_S -Orientierung um eine innere Kante von G . b) Teile der korrespondierenden Schnyder Woods auf G und G^* . c) Die induzierten Label, die für G und G^* gleich sind.

Für diese gilt, wie in Abbildung 4.3 skizziert, dass das Label der Ecke eines Gebietes in G und das ihr in $G + G^*$ gegenüberliegenden Label der Ecke eines Gebiets um einen Knoten in G^* gleich sind. Für eine zu v in G^* hin orientierte Kante folgt aus der Bijektion zwischen Schnyder Labelings und Schnyder Woods aus Abschnitt 2.2, dass die Label links und rechts am Ende dieser Kante gleich sind. Somit sind auch die Label in G gleich und wir können die folgende Eigenschaft festhalten.

A1 Die Label, des von α_S induzierten Schnyder Wood auf G , sind zwischen zwei

aufeinander folgenden zu f orientierten Kanten gleich.

Da es genau drei zu f orientierte Kanten gibt müssen wir also dafür sorgen, dass für jedes Paar dieser Kanten eine Ecke zwischen ihnen liegt, da so die drei Ecken unterschiedliche Label haben und wir K2 erfüllen. Um dies zu erlangen implementieren wir eine zyklische Struktur um jedes innere Gebiet, wie in Abbildung ?? skizziert.

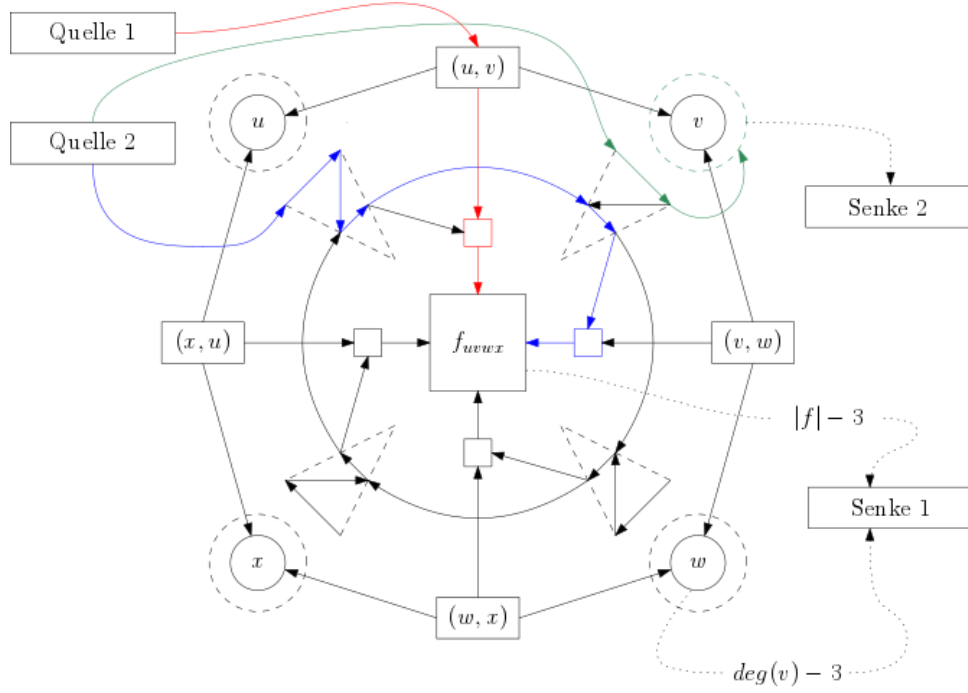


Abbildung 4.4: Eine Skizze des kombinierten Netzwerkes auf einem inneren Gebiet mit $|f| = 4$. Beispielhaft sind Schnyder-Fluss (rot), Ecken-Fluss (blau) und Zuweisungs-Fluss (grün) eingezeichnet.

Betrachten wir zuerst den Schnyder-Fluss. Dieser wird Fluss von Typ 1, also von Quelle 1 zu Senke 1 sein. Für einen Schnyder-Pfad der durch einen Knoten v führt hat sich nichts geändert. Der in der Skizze eingezeichnete Schnyder-Pfad der durch f führt passiert davor einen extra Knoten, wir nennen ihn *kleines Quadrat* der gewährleisten soll, dass von Seite des Gebietes aus entweder ein Schnyder-Pfad oder ein Ecken-Pfad in f mündet. Zuletzt fügen wir wie oben von jedem inneren Gebiet eine Kante mit Kapazität $|f| - 3$ zu Senke 1 ein. Somit kodiert hier eine ganzzahlige Lösung weiterhin einen Schnyder Wood auf G .

Kommen wir nun zum FAA-Fluss, also Fluss von Typ 2. Von Quelle 2 geht genau wie in Abbildung 4.2 eine Kante zu jedem inneren Winkel (f, v) . Ein Zuweisungs-Pfad verlässt diesen Winkel über einen zusätzlich zu v eingefügten Dummy-Knoten v^* . Von jedem v^* geht eine Kante mit Kapazität 1 zu einer Dummy-Senke und von dieser eine Kante mit Kapazität $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ zu Senke 2, wie in Abbildung 4.5 illustriert.

Die Dummy-Knoten sorgen dafür, dass jeder Knoten im FAA nur einmal zugewiesen werden kann, ohne in Konflikt mit dem Schnyder-Fluss zu kommen. Die eingeschobene Dummy-Senke beschränkt die Anzahl der zugewiesenen Knoten, genau wie im zuvor konstruierten FAA-Fluss, auf $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$.

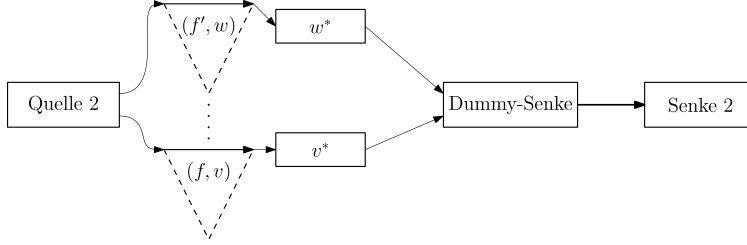


Abbildung 4.5: Der Zuweisungsfluss durch die Winkel, Dummy-Knoten und die zusätzliche Kante vor Senke 2. Die Kante rechts hat Kapazität $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ und alle anderen Kapazität 1.

Es bleibt der Ecken-Fluss. Hier betritt der Pfad das Gebiet f wieder durch einen Winkel und muss es über ein ungenutztes kleines Quadrat verlassen. Die zweite und dritte Kante in jedem Winkeldreieck gewährleisten, dass nicht immer das nächste kleine Quadrat genutzt werden muss. Falls dies von Schnyder-Fluss besetzt ist und der nächste Winkel zugewiesen wird, kann ein Ecken-Pfad den nächsten Winkel passieren. Weiterhin sorgt die erste Kante, die von sowohl Schnyder-, als auch Winkel-Pfaden genutzt werden kann, für eine eindeutige Beschriftung (als Ecke oder nicht) im Falle einer ganzzahligen Lösung. Wie oben existieren auch hier Kanten von jedem inneren Gebiet zu Senke 2 mit Kapazität drei.

Betrachten wir die Bedarfe der beiden Flüsse von Typ 1 und Typ 2, φ_1 bzw. φ_2 . Beide entsprechen jeweils den Bedarfen der oben konstruierten \mathcal{N}_S und \mathcal{N}_F , da mit den gleichen Argumenten wie oben, ein Schnyder Wood und ein FAA kodiert werden können. Jedes Gebiet benötigt genau drei Ecken und $|f| - 3$ zugewiesene Knoten und je ein Schnyder-Pfad führt durch jede innere Kante, $|E_{in}|$. Hier seien wieder E_{in} die inneren Kanten und F_{in} die inneren Gebiete von G . Es gilt also:

- $d_1 = \text{Bedarf}(\varphi_1) = \text{Bedarf}(\varphi_S) = |E_{in}|$
- $d_2 = \text{Bedarf}(\varphi_2) = \text{Bedarf}(\varphi_F) = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

Bevor wir in Theorem 4.1 zeigen, dass eine ganzzahlige Lösung $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auch wirklich ein Ecken kompatibles Paar kodiert, wollen wir noch ein Paar weitere Beobachtungen festhalten. Nehmen wir also an, wir haben eine ganzzahlige Lösung φ gefunden, dann gilt für diese:

- A2 Jede äussere Kante in einem Winkel-Dreieck ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Ecken- oder Zuweisungspfad genutzt.

A3 Jede Kante von einem kleinen Quadrat zu einem inneren Gebiet f ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Schnyder- oder Ecken-Pfad genutzt.

A4 Ein inneres Gebiet f mit $|f| = 3$ kann nicht von Zuweisungs- bzw. Schnyder-Pfaden genutzt werden.

Wir wollen diese Beobachtungen kurz begründen. Für jede mögliche ganzzahlige Lösung φ gilt

$$|\varphi| = |\varphi_1| + |\varphi_2| = |E_{in}| + \sum_{f \in F_{in}} |f|.$$

Da es genau $\sum_{f \in F_{in}} |f|$ innere Winkel gibt und der FAA-Fluss \mathcal{N}_G nur durch diese betreten kann ergibt sich A2. A3 wird aus Gleichung 4.1 weiter unten folgen. Durch ein inneres Gebiet f müssen drei Ecken-Pfade führen und im Fall $|f| = 3$ führt dies zu A4, da kein Platz in den Winkeln für Zuweisungs-Pfade und keine freien kleinen Quadrate für Schnyder-Pfade existieren.

Theorem 4.1. *Sei G ein intern-3-zusammenhängender Graph mit gegebenen Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, dann existiert eine SLTR von G , genau dann wenn ein ganzzahliger zulässiger Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auf \mathcal{N}_G existiert.*

Fassen wir vor dem Beweis noch einmal das Netzwerk zusammen.

Netzwerk 3 (SLTR). Bei \mathcal{N}_G handelt es sich um ein gerichtetes Netzwerk, das auf Basis von G erstellt wird, um eine SLTR von G zu finden. Ein Ausschnitt um ein inneres Gebiet ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

- \mathcal{N}_G hat zwei Quellen s_1, s_2 und zwei Senken t_1, t_2
- Knoten in \mathcal{N}_s werden für jeden innere Kante $e \in E_{in}$, jedes innere Gebiet $f \in F_{in}$ und jeden Knoten $v \in V$ aus G erzeugt.
- Es werden Knoten der folgenden Typen in \mathcal{N}_S erzeugt:
 - Knoten e für jede innere Kante $e \in E_{in}$
 - Knoten v für jeden $v \in V$ und Dummy-Knoten v^* für jeden $v \in V_{in}$
 - Knoten für jedes innere Gebiet f .
 - $|f|$ kleine Quadrate q um jedes innere Gebiet f
 - Vier Knoten w_1, w_2, w_3, w_4 für jedes innere Winkeldreieck
 - Die Dummy-Senke t_d
- Es werden gerichtete Kanten der folgenden Typen in \mathcal{N}_G erzeugt:
 - (s_1, e) von Quelle 1 zu jeder inneren Kante mit $c(s, e) = 1$
 - $(e, v_1), (e, v_2)$ von jeder inneren Kante zu den Endknoten mit $c(e, v) = 1$
 - (e, q) von inneren Kanten zu adjazenten kleinen Quadraten mit $c(e, q) = 1$
 - (q, f) von jeder kleinen Quadraten zu den inneren Gebieten mit $c(q, f) = 1$

- (f, t_1) von den inneren Gebieten zur Senke 1 mit $c(f, t_1) = |f| - 3$
 - (a_i, t_1) von den Aufhängungen zur Senke 1 mit $c(f, t) = \deg(a_i) - 2$
 - (v, t_1) von den restlichen Knoten zur Senke 1 mit $c(f, t) = \deg(v) - 3$
 - $(s_2, (f, v))$ von Quelle 2 zu jedem inneren Winkel mit $c(s_2, (f, v)) = 1$
 - $(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_4)$ in jedem inneren Winkel mit $c(w_i, w_{i+1}) = 1$
 - (t_4, q) von inneren Winkeln zum nächsten kleinen Quadrat mit $c(t_4, q) = 1$
 - (t_4, t'_3) von inneren Winkeln zum nächsten inneren Winkel mit $c(t_4, t'_3) = 1$
 - $((f, v), f)$ von inneren Winkeln zum Gebiet mit $c((f, v), f) = 1$
 - (t_2, v^*) von jedem inneren Winkel zum Dummy-Knoten mit $c(t_2, v^*) = 1$
 - (v^*, t_d) von den Dummy-Knoten zur Dummy-Senke mit $c(f, t) = 1$
 - (t_d, t_2) von der Dummy-Senke zu Senke 2 mit $c(t_d, t_2) = \sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$
- \mathcal{N}_S hat Bedarfe $d_1 = |E_{in}|$ und $d_2 = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

\Rightarrow Ein zulässiger ganzzahliger Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ existiert. \Leftrightarrow Es existiert ein SLTR auf G .

Beweis von Theorem 4.1: Sei G ein intern-3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sei ein ganzzahliger machbarer Fluss auf \mathcal{N}_G . Im ersten Schritt extrahieren wir einen Schnyder-Wood σ und ein FAA ϕ , um dann zu zeigen, dass sie ein Ecken kompatibles Paar bilden. Für einen machbaren Fluss müssen die Bedarfe erfüllt werden. Es gilt somit $|\varphi_1| = |E_{in}|$ und $|\varphi_2| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$.

$$\begin{aligned}
|\varphi_1| + |\varphi_2| &= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}| + |E_{in}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 2|E| - |V| - 1 + 2|F| - |f_{aus}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 2|V| + 2|F| - 1 - |f_{aus}| \\
&= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 2|E| + 3 - |f_{aus}| \\
&= \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)}_{\text{Dummy-Senke zu Senke 2}} + \underbrace{\sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 3}_{\text{Kapazität Senke 2 von den Knoten.}} + \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}|}_{\text{Kanten von den Quadraten zu den inneren Gebieten}}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Die beiden Terme in der rechten unteren Klammer entsprechen den Kapazitäten von den inneren Gebieten zu Senke 1 und Senke 2. Somit sind alle Kanten zu den Senken ausgelastet. Die Kanten von den kleinen Quadraten zu den inneren Gebieten sind ebenfalls ausgelastet. Diese sind die einzigen Kanten in \mathcal{N}_G , die sowohl von φ_1 als auch φ_2 genutzt werden können. Kapazität eins und Ganzzahligkeit von φ impliziert

somit A3.

Beginnen wir mit φ_1 um einen Schnyder Wood, oder genauer eine α_s -Orientierung, zu erhalten. $|\varphi_1| = |E_{in}|$, somit führt durch jede innere Kante ein Schnyder-Pfad und dieser gibt uns die nach aussen gerichtete Kante in α_s . Es bleibt zu zeigen, dass für jedes innere Gebiet und jeden Knoten die Bedingungen aus Theorem 4.3 für eine α_s eingehalten werden. Da alle Kanten von den Knoten zu Senke 1 ausgelastet sind folgt, dass durch jeden inneren Knoten v genau $\deg(v) - 3$ Schnyder-Pfade führen. Somit ergeben die leeren Einkanten von v in \mathcal{N}_G die drei Auskanten für α_s . Für eine Aufhängung a_i folgt analog, dass die beiden ungenutzten Einkanten, zusammen mit der Halbkante ins äußere Gebiet, die Bedingungen der α_s -Orientierung erfüllen. Es bleibt zu zeigen, dass durch jedes innere Gebiet $|f| - 3$ Schnyder-Pfade führen. Der restliche Schnyder-Fluss $|E_{in}| - \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3)$ muss durch die inneren Gebiete führen und aus der ersten und letzten Zeile von Gleichung ?? folgt

$$|E_{in}| - \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3).$$

Somit führen $|f| - 3$ Schnyder-Pfade durch jedes innere Gebiet und wir können die α_s -Orientierung vervollständigen und erhalten einen Schnyder Wood auf G .

Betrachten wir nun φ_2 . Nach A4 sind alle äusseren Kanten in den Winkeln ausgelastet. Falls diese nun in jedem inneren Gebiet von drei Ecken-Pfaden und $|f| - 3$ Zuweisungs-Pfaden genutzt werden, können wir ein FAA extrahieren. Da alle Kanten zu Senke 2 ausgelastet sind, führen $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$ Pfade durch die Dummy-Senke. Somit werden auch $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$ Knoten inneren Gebieten zugewiesen. Indem wir die Pfade zurückverfolgen und sehen aus welchem Gebiet der Zuweisungs-Pfad einen Dummy-Knoten betritt, können wir diese Informationen auslesen. Es bleibt zu zeigen, dass jedem Gebiet genau $|f| - 3$ Knoten zugewiesen werden. Dies gilt, wenn durch jedes Gebiet drei Ecken-Pfade laufen und folgt somit, da die Kanten von den inneren Gebieten zu Senke 2 ausgelastet sind. Wir können also aus φ_2 ein FAA für G extrahieren.

Nun müssen wir zeigen, dass σ und ϕ ein Ecken kompatibles Paar ergeben. C1, dass beide die gleichen Aufhängungen nutzen folgt sofort aus der Konstruktion von \mathcal{N}_G . Es bleibt C2.

Betrachten wir ein Teilnetzwerk (wie in Abbildung 4.4) um ein inneres Gebiet f . Die drei Ecken-Pfade können keine der $|f| - 3$ kleinen Quadrate nutzen die schon von Schnyder-Fluss okkupiert werden. Die drei übrigen kleinen Quadrate nennen wir *verfügbar*. Ausgehend von f folgen wir den Ecken-Pfaden rückwärts zu den verfügbaren kleinen Quadraten. Wenn wir das Quadrat verlassen gelangen wir zur dritten Kante eines Winkeldreiecks (entgegen dem Uhrzeigersinn). Nun verlassen wir das Gebiet entweder über diesen Winkel oder bewegen uns weiter (entgegen dem Uhrzeigersinn) zum nächsten Winkeldreieck. Doch wir werden zeigen, dass dies nur dann geschieht

wenn das kleine Quadrat zwischen diesen nicht *verfügbar* ist. Also betritt zwischen zwei *verfügbaren* kleinen Quadraten ein Ecken-Pfad das Gebiet und die Winkel haben nach A1 unterschiedliche Label.

Behauptung 1 *Seien Q_1, Q_2 und Q_3 , im Uhrzeigersinn, die drei verfügbaren kleinen Quadrate um ein inneres Gebiet f . Dann existiert ein Ecken-Pfad, welcher das Netzwerk über Q_i verlässt. Dieser betritt es in einem Winkel zwischen, im Uhrzeigersinn, Q_{i-1} und Q_i .*

Angenommen dies ist nicht der Fall und nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass der Ecken-Pfad p das Gebiet durch Q_3 verlässt. Der Winkel über den p das Teilnetzwerk um das innere Gebiet betritt liegt also nicht zwischen Q_2 und Q_3 . Angenommen er liegt zwischen Q_1 und Q_2 . Betrachte das letzte Winkeldreck vor Q_2 . Nach unserer Annahme ist die innere Kante dieses Dreiecks von p ausgelastet. Somit kann kein Ecken-Fluss zu Q_2 gelangen und wir erhalten einen Widerspruch, da alle kleinen Quadrate entweder von Ecken- oder von Schnyder-Fluss genutzt werden müssen. Mit dem gleichen Argument kann p das Teilnetzwerk nicht zwischen Q_3 und Q_1 betreten. Somit ist Behauptung 1 wahr.

Behauptung 2 *Alle Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden verfügbaren kleinen Quadraten, haben die selben Label im Schnyder Labeling σ .*

Diese Behauptung folgt aus der in Abbildung 4.3 illustrierten Bijektion zwischen der α_S Orientierung und den Schnyder Labelings auf G und G^* . Die Winkel links und rechts von einem kleinen Quadrat, dass von einem Schnyder-Pfad genutzt wird, haben das gleiche Label in σ , da diese den Einkanten in α_S entsprechen. Die Auskanten entsprechen den verfügbaren kleinen Quadraten, und hier ändern sich die Label.

Diese beiden Behauptungen zusammen zeigen, dass jede Ecke aus ϕ ein anderes Label in σ hat. Somit handelt es sich um ein Ecken Kompatibles Paar (σ, ϕ) .

Wir haben die Rückrichtung gezeigt. Nehmen wir also an, dass eine SLTR für G existiert. Wir müssen nun einen zulässigen ganzzahligen Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auf \mathcal{N}_G konstruieren, der die SLTR kodiert. Nach Theorem ?? existiert ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ , das zu diesem SLTR passt. Betrachte die zu σ gehörige α_S -Orientierung.

Wir beginnen mit einem leeren, wie oben konstruierten Netzwerk \mathcal{N}_G und werden nun Schritt für Schritt einen zulässigen Fluss φ konstruieren.

Zuerst fügen wir für jeden zugewiesenen Winkel einen Pfad von Quelle 2, über die äussere Kante des Winkeldreiecks, den zugehörigen Dummy-Knoten und die Dummy-Senke hin zu Senke 2 ein. Es kommen somit $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ Einheiten Fluss hinzu und die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2 wird ausgelastet.

Als nächsten fügen wir den Fluss hinzu, der die α_S -Orientierung kodiert. Zuerst von Quelle 1 zu jedem inneren Kanten-Knoten e , dann von den inneren Kanten entweder über ein kleines Quadrat in ein angrenzendes Gebiet oder zu einem benachbarten

Knoten je nachdem, wohin die Auskante von e in α_s zeigt. Zuletzt saturieren wir die Kanten von den inneren Knoten und inneren Gebieten zu Senke 1.

Zuletzt müssen wir den Ecken-Fluss einfügen. Ein Ecken-Pfad p entspringt in Quelle 1, nutzt das zugehörige Winkeldreieck (diese sind noch frei) und verlässt das Gebiet über das im Uhrzeigersinn nächste verfügbare kleine Quadrat, wieder.

Es sind alle Kanten hin zu den Senken ausgelastet. Ebenso kann man sehen, dass an keiner Kante die Kapazität überschritten wird. Somit haben wir einen zulässigen ganzzahligen Fluss konstruiert, der eine SLTR kodiert. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

4.2 Nicht ganzzahlige Lösungen

Dieses Kapitel wird sich mit der von Aerts und Felsner offen gelassenen Frage beschäftigen, ob die Erkennung von Graphen mit einer SLTR in \mathcal{P} liegt. Wie in Kapitel 2 erwähnt, impliziert eine nicht ganzzahlige Lösung für ein Multi-Fluss-Problem auf einem gerichteten Graphen mit $n \geq 2$ Paaren von Quellen und Senken, im Allgemeinen nicht die Existenz einer ganzzahligen Lösung. Die Ergebnisse aus Kapitel 5 lassen jedoch die Möglichkeit offen, dass das man für das betrachtete Netzwerk \mathcal{N}_G die folgende Vermutung beweisen kann.

Vermutung 1 *Sei $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf \mathcal{N}_G , dann existiert auch ein ganzzahliger zulässiger Fluss φ und wir können in polynomieller Zeit ein Gutes-FAA aus $\tilde{\varphi}_2$ extrahieren, ohne eine ganzzahlige Lösung zu berechnen.*

Bemerkung. Wenn wir nicht darauf bestehen, dass unsere Lösung ganzzahlig ist, dann lässt sich eine Lösung nach TODO durch lineare Programmierung in polynomieller Zeit finden und das Entscheidungsproblem, ob ein Graph eine SLTR hat läge so in \mathcal{P} .

Um die Argumentation einfacher zu gestalten, werden wir unser 2-Fluss Problem manchmal als 3-Fluss Problem, mit einer Lösung $\varphi = (\varphi_s, \varphi_e, \varphi_z)$, betrachten. Wir erstellen \mathcal{N}_G^* wie zuvor \mathcal{N}_G , nur mit drei Quellen und Senken und weisen Schnyder-, Ecken-, und Zuweisungs-Fluss eigene Typen zu. Man kann leicht sehen, dass Theorem 4.1 in angepasster Form hier ebenfalls gilt und ein zulässiger Fluss $(\varphi_s, \varphi_z, \varphi_e)$ auf \mathcal{N}_G^* genau dann existiert, wenn auch ein zulässiger Fluss (φ_1, φ_2) auf \mathcal{N}_G möglich ist. Die Hinrichtung ist klar. Nehmen wir an (φ_1, φ_2) ist eine ganzzahlige Lösung. Nach Beobachtung A2 gilt, dass die äusseren Kanten eines Winkel-Dreiecks entweder von einem Ecken- oder einem Zuweisungs-Pfad genutzt werden. Diese Kanten sind zusammen mit den Kanten von Quelle 2 zu den Winkeldreiecken die einzigen in \mathcal{N}_G , die von beiden Flüssen genutzt werden. Wir können also φ_2 in $|\varphi_2|$ ganzzahlige Pfade aufteilen und jeden Pfad entweder φ_e oder φ_z zuweisen – je nachdem ob er über die Dummy-Senke führt, oder nicht. Insbesondere folgt mit der gleichen Argumentation:

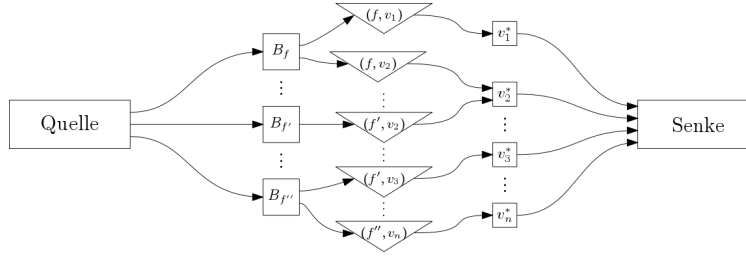


Abbildung 4.6: Skizze des Netzwerkes \mathcal{F}_z . Die Kanten von der Quelle zu einem Beutel B_f hat Kapazität $|f| - 3$ und alle anderen haben Kapazität 1.

O1 Jede beliebige Kombination von φ_s, φ_e und φ_z zu zwei Flüssen und ein zu \mathcal{N}_G analoges Netzwerk hat eine zulässige ganzzahlige Lösung genau dann, wenn eine Lösung für das 3-Fluss-Netzwerk existiert.

Betrachten wir zunächst den zweiten Teil von Vermutung 1.

Lemma 4.2. *Sei $\tilde{\varphi}$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf \mathcal{N}_G und sei W die Menge der vom Zuweisungsfluss $\tilde{\varphi}_z$ genutzten inneren Winkel von G . Dann existiert eine Teilmenge $\phi \subseteq W$, sodass aus jedem Gebiet f genau $|f| - 3$ Winkel in ϕ enthalten sind und in der jeder Knoten v höchstens einmal vorkommt. ϕ kodiert also ein FAA von G .*

Beweis: Wir betrachten das gerichtete Netzwerk \mathcal{F}_z mit einer Quelle s und Senke t , einem Beutel B_f für jedes innere Gebiet f , einem Knoten (f, v) für jeden inneren Winkel und einem Knoten für jeden Dummy-Knoten. Zuerst fügen Kanten mit Kapazität $|f| - 3$ von der Quelle zu jedem Beutel ein. Dann folgen Kanten von den Beuteln B_f zu den Winkeln von f , von den Winkeln (f, v) zu den Dummy-Knoten v^* und zuletzt eine Kante von jedem Dummy-Knoten zu Senke mit Kapazität 1, jeweils mit Kapazität 1. Der maximal mögliche s - t -Fluss in \mathcal{F}_z ist $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$, da die Kanten zu den Beuteln einen Schnitt bilden und wir aus $\tilde{\varphi}_z$ sofort eine zulässige nicht ganzzahlige Lösung $\tilde{\phi}$ für \mathcal{F}_z konstruieren können. Nach Theorem 2.14 existiert somit ein ganzzahliger Fluss ϕ auf \mathcal{F}_z , mit $|\phi| = |\tilde{\phi}| = |\tilde{\varphi}_z| = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$.

ϕ weist nun jedem inneren Gebiet f genau $|f| - 3$ Winkel zu und jeder Knoten v kann nur einmal zugewiesen werden. Wenn wir noch die per Konstruktion von \mathcal{N}_G zugewiesenen Knoten am äusseren Gebiet hinzunehmen, dann kodiert ϕ ein FAA von G . \square

Bemerkung. Es ist uns nicht möglich mit beliebigen Winkeln aus W zu beginnen und Schritt für Schritt für jedes Gebiet $|f| - 3$ Winkel wählen, wie in Abbildung 4.7 illustriert ist.

Wenn wir zeigen können, dass ein wie Lemma 4.2 konstruiertes ϕ ein Gutes-FAA ist, folgt Vermutung 1, da die Existenz eines Guten-FAAs ϕ nach Theorem 4.1 auch die Existenz eines ganzzahligen zulässigen Flusses φ für \mathcal{N}_G impliziert.

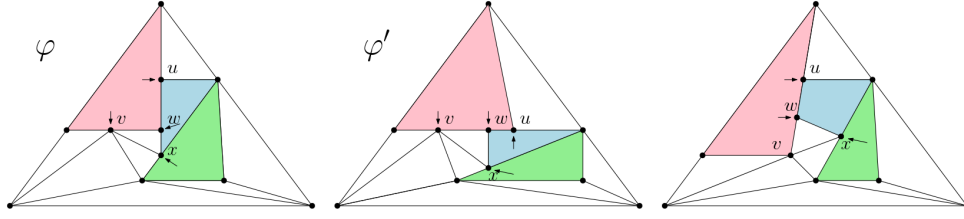


Abbildung 4.7: Die ganzzahligen Flüsse φ und φ' zusammen bilden den zulässigen Fluss $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$, aber wir können nicht anfangen beliebige Winkel aus $\frac{\varphi_z + \varphi'_z}{2}$ zu wählen, um ein FAA zu erhalten. Rechts bleibt kein Knoten für das blaue Gebiet übrig.

4.2.1 Minimale Schnitte in \mathcal{N}_G

Angenommen, es existiert ein Graph G , für den nur eine nicht ganzzahlige Lösung existiert. Sei $\tilde{\varphi}$ dieser nicht ganzzahlige zulässige Fluss auf \mathcal{N}_G , und ϕ ein wie in Lemma 4.2 aus $\tilde{\varphi}$ konstruiertes FAA für G . Sei $\bar{\varphi}_z$ der eindeutige Zuweisungs-Fluss der dieses FAA auf \mathcal{N}_G kodiert. Sei $\bar{\mathcal{N}}_G$, ein Teilnetzwerk von \mathcal{N}_G , aus welchem alle Kanten, die von $\bar{\varphi}_z$ genutzt werden gelöscht wurden. Die Bedarfe sind weiterhin $|E_{in}|$ und $3|F_{in}|$ für den Schnyder- und Ecken-Fluss. Nach der in O1 festgehaltenen Beobachtung können wir, wie in [AF15], φ_s und φ_e zusammenfassen und mit φ_1 bezeichnen. Wir suchen also nach einem zulässigem ganzzahligem Fluss $\varphi_1 = \varphi_s + \varphi_e$ auf $\bar{\mathcal{N}}_G$ mit Bedarf $|E_{in}| + 3|F_{in}|$, da dann auch eine ganzzahlige Lösung (φ_s, φ_e) folgt.

Nach dem Max-Flow Min-Cut Theorem existiert ein zulässiger Fluss auf $\bar{\mathcal{N}}_G$ genau dann, wenn es keinen (Kanten-)Schnitt in $\bar{\mathcal{N}}_G$ mit Kapazität kleiner als $|E_{in}| + 3|F_{in}|$ gibt. Bevor wir fortfahren wollen wir einige Kantentypen aus \mathcal{N}_G benennen.

- E_{Δ} = Die äusseren Kanten in den Winkeldreiecken.
- E_{∇} = Die inneren Kanten in den Winkeldreiecken.
- S_* = Die Kanten von den Dummy-Knoten zur Dummy-Senke.
- V_* = Die Kanten von den Winkeldreiecken zu den Dummy-Knoten.
- E_{\rightarrow} = Die Kanten von Quelle 1 zu den Kanten-Knoten.
- F_{\square} = Die Kanten von den kleinen Quadraten zu inneren Gebieten f .
- V_{\rightarrow} = Die Kanten von den Knoten-Knoten zu Senke 1.

Sei e_d die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2, dann sind sowohl $\mathcal{S}_1 = E_{\Delta} \cup E_{\rightarrow}$, als auch $\mathcal{S}_2 = F_{\square} \cup V_{\rightarrow} \cup \{e_d\}$ minimale Schnitte in \mathcal{N}_G , die alle Quellen und Senken trennen. Wenn wir nur von den Kanten aus E_{Δ} , die in $\bar{\mathcal{N}}_G$ übrig sind, sprechen, schreiben wir \bar{E}_{Δ} . Für die, zu diesen korrespondierenden Kanten im inneren ihrer Winkeldreiecke, schreiben wir \bar{E}_{∇} . Für die Teilmengen von V_* und S_* in $\bar{\mathcal{N}}_G$ schreiben wir \bar{S}_* und \bar{V}_* . Die restlichen Mengen sind vollständig in $\bar{\mathcal{N}}_G$ enthalten.

Seien E_z die von $\bar{\varphi}_z$ genutzten Kanten, die wir aus \mathcal{N}_G entfernen. Dann folgt $|\mathcal{S}_1 \cap E_z| = |E_\Delta \cap E_z| = |\varphi_z|$. Somit ist $\bar{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1 \setminus E_z = \bar{E}_\Delta \cup E_\rightarrow$ ein Schnitt in $\bar{\mathcal{N}}_G$. Analog ist $\bar{\mathcal{S}}_2 = F_\square \cup V_\rightarrow$ ein Schnitt. Für die Kapazität von $\bar{\mathcal{S}}_1$ können wir folgern

$$c(\bar{\mathcal{S}}_1) = c(\bar{E}_\Delta) + c(E_\rightarrow) = c(E_\Delta) - |\varphi_z| + c(E_\rightarrow) = 3|F_{in}| + |E_{in}|,$$

und analog folgt $c(\overline{\mathcal{S}}_2) = 3|F_{in}| + |E_{in}|$.

Falls es sich hierbei um minimale Schnitte handelt, dann würde dies bedeuten, dass eine ganzzahlige Lösung für \mathcal{N}_G existiert, mit deren Hilfe wir, zusammen mit φ_z , eine ganzzahlige zulässige Lösung für \mathcal{N}_G konstruieren könnten, was wiederum ein Widerspruch zu unserer Annahme wäre. Es muss also einen kleineren Schnitt \mathcal{S}_{min} , mit $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$, geben.

Behauptung 3 *Ein minimaler Schnitt \mathcal{S}_{\min} in $\overline{\mathcal{N}}_G$ enthält ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur Kanten von einem der vier Typen $\overline{E}_{\nabla}, \overline{F}_{\square}, V_{\rightarrow}$ und E_{\rightarrow} .*

Kanten auf einem Pfad von der Quelle bis zu einer Kante in \overline{E}_∇ , können durch diese ersetzt werden. Ebenso können Kanten zwischen zwei Winkeldreiecken, oder von einem Winkeldreieck zu einem kleinen Quadrat, durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, nächste Kante in \overline{E}_∇ ersetzt werden. Kanten zwischen einem Kanten-Knoten und einem Knoten-Knoten, oder einem kleinen Quadrat, können durch eine Kante in E_\rightarrow ersetzt werden. Abschliessend können Kanten, von einem inneren Gebiet zu Senke, durch das hinzufügen von allen Kanten aus F_\square an diesem Gebiet, ersetzt werden.

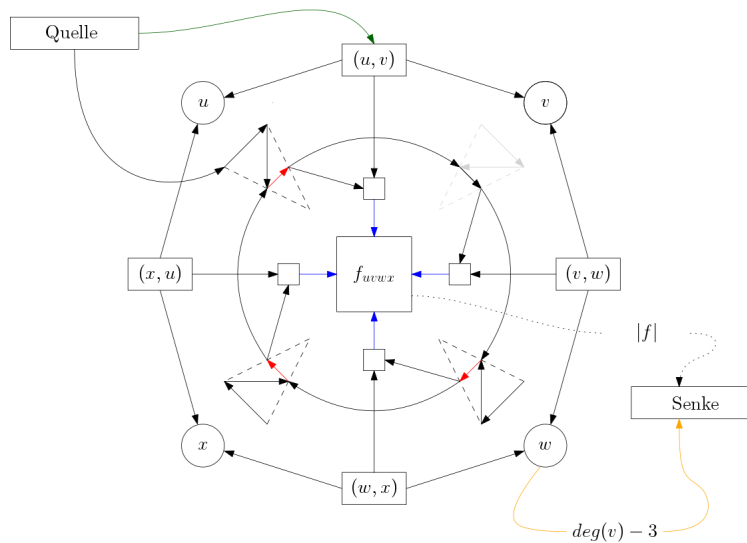


Abbildung 4.8: Die vier Kantentypen \overline{E}_∇ (rot), F_\square (blau), V_\rightarrow (orange) und E_\rightarrow (grün) aus denen sich, nach Behauptungen 3 und 4, ein minimaler Schnitt in $\overline{\mathcal{N}}_G$ zusammensetzt.

Behauptung 4 *Ein minimaler Schnitt \mathcal{S}_{min} in $\overline{\mathcal{N}}_G$ muss ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus jeder der Mengen $\overline{E}_\nabla, F_\square, V_\rightarrow$ und E_\rightarrow mindestens eine, aber aus keiner der Mengen alle Kanten enthalten.*

Falls ein solcher ein Schnitt existiert, dann kann er nicht alle Kanten \overline{E}_∇ enthalten, da sonst $\mathcal{S}_{min} \cup (E_\Delta \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$ gilt. Falls er jedoch keine Kante aus \overline{E}_∇ enthält, dann muss er alle Kanten aus F_\square enthalten und falls er alle Kanten aus F_\square enthält, dann muss er o.B.d.A. auch alle Kanten aus V_\rightarrow enthalten. Es folgt $\mathcal{S}_{min} \cup \{e_d\} \supseteq \mathcal{S}_2$. Angenommen er enthält keine Kante aus F_\square , dann muss er alle Kanten aus \overline{E}_∇ und E_\rightarrow enthalten und es gilt $\mathcal{S}_{min} \cup (E_\Delta \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$. Mit analogen Argumenten folgt der Rest von Behauptung 4.

Nehmen wir also an, dass ein minimaler Schnitt \mathcal{S}_{min} , wie in Behauptungen 3 und 4, existiert mit $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$. Betrachten wir für den Moment das Teilnetzwerk um ein inneres Gebiet in $\overline{\mathcal{N}}_G$. Falls alle drei Kanten aus \overline{E}_∇ in \mathcal{S}_{min} enthalten sind, dann müssen auch o.B.d.A. alle Kanten in E_\rightarrow um dieses Gebiet enthalten sein und falls eine Kante aus \overline{E}_∇ nicht enthalten ist, dann müssen, im Uhrzeigersinn bis zur nächsten enthaltenen Kante aus \overline{E}_∇ , alle Kanten aus F_\square Teil von \mathcal{S}_{min} sein. Falls höchstens eine Kante aus \overline{E}_∇ im Schnitt läge, dann folgt o.B.d.A., dass keine Kante aus \overline{E}_∇ und alle aus F_\square , um das innere Gebiet, enthalten sind.

Angenommen es existieren nur Gebiete in denen entweder alle oder keine Kanten aus \overline{E}_∇ in \mathcal{S}_{min} enthalten sind. Dann existiert ein Kanten-Knoten der, wie in Abbildung 4.9 jeweils eines von beiden berührt. Wir können nun im rechten Gebiet eine Kante aus F_\square durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, folgende Kante aus \overline{E}_∇ ersetzen.

Sei f ein Gebiet,

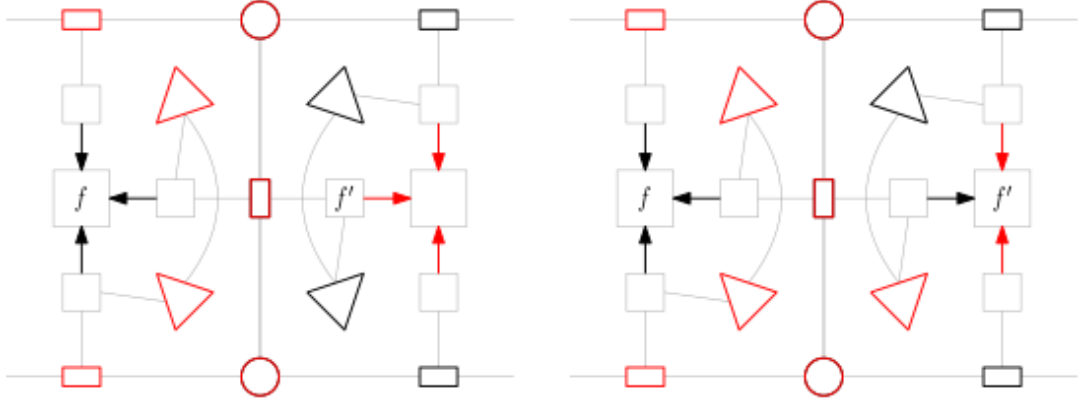


Abbildung 4.9

Lemma 4.3. *Sei \mathcal{N} ein gerichtetes Netzwerk mit einer Quelle s und einer Senke t . Sei \mathcal{S}_{min} ein minimaler Kantenschnitt zwischen s und t und sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}_{min}$. Dann ist $\tilde{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \setminus \mathcal{T}$ ein minimaler Kantenschnitt zwischen s und t in $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$.*

Beweis: Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass \mathcal{N} nur Kanten mit Kapazität 1 enthält. Nach dem *Max-Flow Min-Cut* Theorem existiert ein s - t -Fluss

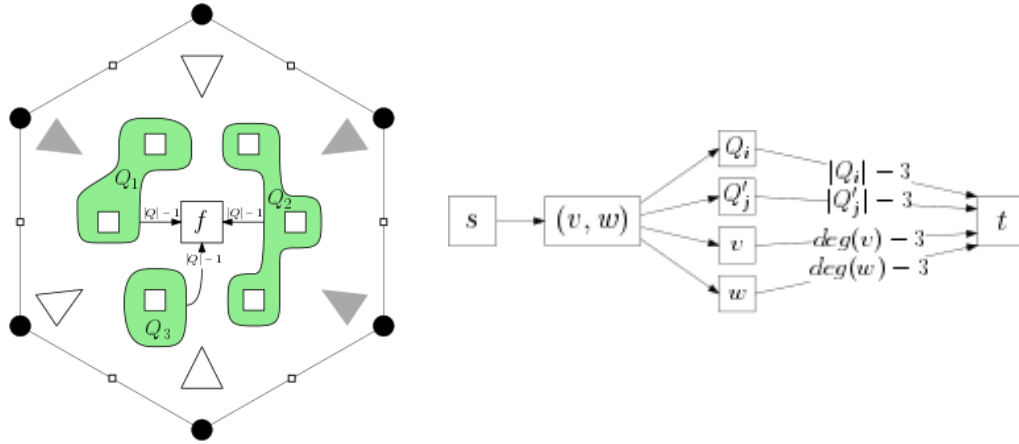


Abbildung 4.10: Auf der linken Seite eine Illustration von $\bar{\varphi}_s$ mit den von $\bar{\varphi}_z$ zugeordneten Winkeln in grau. Auf der rechten Seite das resultierende Netzwerk.

φ mit $|\varphi| = c(\mathcal{S}_{min})$. Nach Theorem 2.14 können wir annehmen, dass wir es sich um einen ganzzahligen Fluss handelt. Wir können diesen Fluss somit in Pfade (TODO) p mit Flussstärke 1 aufteilen. Betrachten wir nun $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$, dann trennt die Entnahme von \mathcal{T} genau $c(\mathcal{T})$ Pfade $p \in P$. Die restlichen Pfade, nennen wir sie $\tilde{p} \in \tilde{P}$, bleiben intakt. Somit existiert ein s - t -Fluss $\tilde{\varphi}$ mit $|\tilde{\varphi}| = c(\mathcal{S}_{min}) - c(\mathcal{T})$. $\tilde{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \setminus \mathcal{T}$ muss somit ein minimaler Schnitt in $\tilde{\mathcal{N}}$ sein, da jedes $p \in \tilde{P}$ genau eine Kante aus $\tilde{\mathcal{S}}_{min}$ nutzt und die Entnahme dieser Kanten, nach Voraussetzung, s und t trennt. \square

5 Das Programm

Wir wollen nun auf eine Implementierung des Algorithmus aus dem vorherigen Abschnitt eingehen. Der Code wurde in SageMath [S⁺18] geschrieben und ist auf Anfrage erhältlich. Das Multi-Fluss-Problem auf \mathcal{N}_G zu gegebenen Bedarfen (d_1, d_2) wird hier, mithilfe des in Sage enthaltenen Solvers *Glpk* [Glp12] für Lineare Programmierung gelöst, welcher ein Paar von Flussgraphen (φ_1, φ_2) ausgibt, falls eine zulässige Lösung existiert und sonst nichts.

Algorithm 1: An algorithm to detect and return a Good-FAA for a plane, internally-3-connected and suspended Graph G .

```

1 Good-FAA ( $G, f_{aus}, \{a_1, a_2, a_3\}$ );
   Input :  $G$ , a planar, internally-3-connected Graph,  $f_{aus}$ , the outer face and
           the suspensions  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .
   Output: A Good-FAA for  $G$ , if possible.
2 if  $G$  has FAA then
3    $(d_1, d_2) \leftarrow$  Demands for  $\mathcal{N}_G$  ;
4   Initialize  $\mathcal{N}_G$  ;
5    $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \leftarrow$  Integral-Multicommodity-Flow( $\mathcal{N}_G$ ) ;
6   if  $|\varphi_1| = d_1$  and  $|\varphi_2| = d_2$  then
7      $\phi \leftarrow$  Good-FAA from  $\varphi_2$  ;
8     return:  $\phi$ 
9   end
10 end

```

Aus einer ganzzahligen Lösung kann man ein Gutes-FAA ϕ aus φ_2 extrahieren indem man die Zuweisungs-Pfade durch die Dummy-Senke zurück verfolgt. Wir betreten jeden passierten Dummy-Knoten v^* aus einem Winkel (f, v) . Diese Winkel ergeben die Zuweisungen ϕ .

5.1 Dokumentation

- Die Kontrolle, ob für G ein FAA existiert ist optional, lässt sich jedoch, zum Beispiel wie zuvor über ein 1-Fluss-Problem, in polynomineller Zeit bestimmen. Somit spart sie im Falle, der nicht Existenz eines FAA Zeit.
- Bei der Initialisierung von \mathcal{N}_G wird das innere Netzwerk in Gebieten f mit $|f| = 3$ weggelassen, da in jeder zulässigen Lösung der Fluss aus den Ecken die

kleinen Quadrate voll ausfüllt. Der Bedarf muss dementsprechend angepasst werden.

- Optional

5.2 Visualisierung

Nehmen wir an, wir haben für einen Graphen G ein Gutes-FAA ϕ gefunden. Für eine SLTR, müssen wir eine zu ϕ passende Einbettung von G finden. Wir werden den in Abschnitt 3.1 erörterten Ansatz über harmonische Funktionen nutzen, um eine SLTR von G zu erhalten.

Wir wollen nun eine Einbettung $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ von G ähnlich der Gummiband-Repräsentation berechnen, die ϕ respektiert. Sei $S \subseteq V$ die Menge der Knoten von f_{aus} . Nach Abschnitt 3.1 gelten die folgenden harmonischen Gleichungen für zugewiesene (oben) und nicht zugewiesene (unten) Knoten.

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1)$$

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} > 0$$

Um zu einer gegebenen Gewichtsfunktion λ eine Lösung zu finden, können wir diese Gleichungen, um die Aufhängungen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ erweitern und als Matrix schreiben.

$$M_\lambda(\vec{v}_x, \vec{v}_y) = \begin{pmatrix} f(A)_x & f(A)_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } (M_\lambda)_{vw} = \begin{cases} -\lambda_{vw} & \text{falls } (v, w) \in E, \\ \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} & \text{falls } v = w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir nun die Pseudo-Inverse (TODO) berechnen, erhalten wir die Lösung

$$f(V) = M_\lambda^{-1} \begin{pmatrix} f(A)_x & f(A)_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun, inspiriert von den *iterativen Tutte Einbettungen* aus [FS17], diese Rechnung mehrmals durchführen und Schritt für Schritt die Gewichtung λ anpassen.

Setzen wir im ersten Durchlauf $\lambda = 1$ erhalten wir eine Gummiband-Repräsentation die ϕ respektiert. Wir wollen nun anhand dieser Einbettung λ verändern um, Iteration für Iteration, eine „schönere“ Einbettung zu erhalten. Halten wir drei Punkte fest, die wir intuitiv, in absteigender Reihenfolge, als Bewertungsmaßstab für eine schöne Einbettung berücksichtigen wollen.

- Alle inneren Gebiete haben eine ähnliche Größe.
- Es existieren keine zu langen oder kurzen Kanten.
- Es existieren keine Ecken mit zu kleinen oder großen Winkeln.

TODO

5.3 Statistische Betrachtung

Für eine statistische Betrachtung der Häufigkeit von Graphen mit SLTRs wurde das Programm auf pseudo-zufällige Graphen laufen lassen. Hier würde eine gleichmäßige Wahl von (intern-)3-zusammenhängenden Graphen unter Umständen andere Ergebnisse liefern. Ein uniformer Algorithmus zur zufälligen Erstellung 3-zusammenhängender planarer Graphen lässt sich zum Beispiel nach einem Ansatz von Fusy aus [Fus07] erstellen. Als Teilschritt der Erstellung eines uniformen Samplers für planare Graphen werden hier 3-zusammenhängende planare Graphen mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit erzeugt. Die Implementierung ist jedoch aufgrund der Auswertung von Erzeugendenfunktionen, nicht trivial. Diese Analyse beschränkt sich daher auf pseudo-zufällig erzeugte Graphen.

In Abbildung 5.1 sind die Ergebnisse für Graphen von vier bis TODO Knoten dargestellt, mit jeweils TODO Graphen für jede Knotenzahl. Wir übergeben dem Programm einen Graphen mit Aufhängungen $\{a_1., a_2, a_3\}$, was im Falle 3-zusammenhängender planer Graphen mit mehr als drei Knoten ein äusseres Gebiet induziert. Ein Punkt in der Abbildung entspricht einem Graphen. Die Farben stehen für eine SLTR (blau), nur ein FAA (rot) oder einen Graphen mit keinem von beiden (grün).

TODO

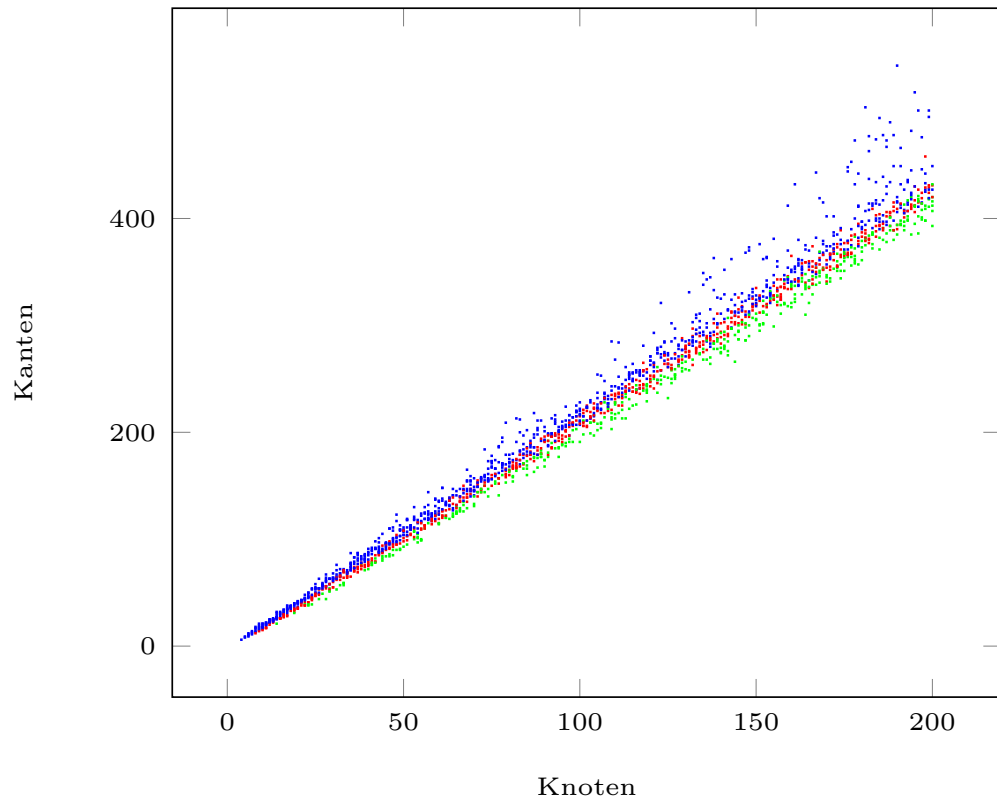


Abbildung 5.1: Anwendung des Programms auf pseudo-zufällige, planare, 3-zusammenhängende Graphen, mit gegebenen Aufhängungen. Jeder Punkt entspricht einem Graphen mit SLTR (blau), nur mit FAA (rot) und ohne FAA (grün).

Literaturverzeichnis

- [AF13a] Nieke Aerts and Stefan Felsner, *Henneberg steps for triangle representations*, The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, Springer, 2013, pp. 503–509.
- [AF13b] ———, *Straight line triangle representations*, International Symposium on Graph Drawing, Springer, 2013, pp. 119–130.
- [AF15] ———, *Straight line triangle representations via schnyder labelings*, J. Graph Algorithms Appl. **19** (2015), no. 1, 467–505.
- [Fár48] István Fáry, *On straight-line representation of planar graphs*, Acta Sci. Math. **11** (1948), 229–233.
- [Fel01] Stefan Felsner, *Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes*, Order **18** (2001), no. 1, pp. 19–37.
- [Fel04] ———, *Lattice structures from planar graphs*, The electronic journal of combinatorics **11** (2004), no. 1, 15.
- [FS17] Stefan Felsner and Manfred Scheucher, *Arrangements of pseudocircles: triangles and drawings*, International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization, Springer, 2017, pp. 127–139.
- [Fus07] Éric Fusy, *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*, Ph.D. thesis, Citeseer, 2007.
- [Glp12] *Gnu Linear Programming Kit (Version 8.3)*, 2012, <http://www.gnu.org/software/glpk/>.
- [Hu63] T Chiang Hu, *Multi-commodity network flows*, Operations research **11** (1963), no. 3, 344–360.
- [LR99] Tom Leighton and Satish Rao, *Multicommodity max-flow min-cut theorems and their use in designing approximation algorithms*, Journal of the ACM (JACM) **46** (1999), no. 6, 787–832.
- [LV99] László Lovász and Katalin Vesztegombi, *Geometric representations of graphs*, Paul Erdos and his Mathematics (1999).
- [S⁺18] W.A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 8.3)*, The Sage Development Team, 2018, <http://www.sagemath.org>.

- [Sch89] Walter Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989), no. 4, pp. 323–343.
- [Sch90] ———, *Embedding planar graphs on the grid*, pp. 138–148.
- [Tut63] William Thomas Tutte, *How to draw a graph*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1963), no. 1, 743–767.