Technische Universität Berlin

Master Arbeit

Grapheneinbettungen und Optimierung

Autor:
Jonas Neukamm

Matrikelnummer:
324283

Betreuer und Erstgutachter:
Prof. Dr. Stefan Felsner

Zweitgutachter:
Dr. Frank Lutz

A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science

an der

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

7.6.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

....

Jonas Neukamm

Zusammenfassung

To Do

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Es wird im weiteren davon ausgegangen, dass grundsätzliche Resultate der Graphentheorie, zum Beispiel durch den Besuch einer einführenden Vorlesung, bekannt sind. Es wird auf gängige Notation zurück gegriffen und, wo sinnvoll, auf die englische Terminologie verwiesen oder diese genutzt.
Wir werden uns weitestgehend mit einfachen, planaren Graphen befassen, also solche die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die Kreuzungsfreie Einbettungen in der Ebene existieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten V und Kanten $E \subseteq \binom{V}{2}$. Eine Kante uv verbindet die beiden Knoten u und v. Für einen planaren Graphen können wir auch die Menge der Gebiete (engl. faces) F betrachten. Hierbei bezeichnen wir das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet. Wir werden drei Knoten s_1, s_2, s_3 im äusseren Gebiet oft gesondert betrachten und diese als *Aufhängungen* bezeichnen.

Definition 1.1 (intern zusammenhängend)**.** Ein Graph G ist zusammenhängen falls für alle Knoten u, v ein Pfad von u nach v exisitert. G ist *k-zusammenhängend*, falls er nach der Entfernung von $k-1$ beliebigen Knoten weiterhin zusammanhängend ist. Sei G planar mit den Aufhängungen s_1, s_2, s_3. Weiter sei s_* ein zusätzlicher Knoten im äusseren Gebiet. Dann ist G *intern k-zusammenhängend*, falls $G \cup \{s_1s_*, s_2s_*, s_3s_*\}$ k-zusammenhängend ist.

1.1 SLTRs

Wir wollen uns mit einer speziellen Darstellung planarer Graphen befassen bei der jedes Gebiet drei ausgewiesene Knoten, die Ecken, hat und alle anderen Knoten auf geraden Linien zwischen diesen Ecken liegen.

Definition 1.2 (SLTR)**.** Eine Zeichnung eines planen Graphen G wird Gradlinige Dreiecks Darstellung, im weiteren kurz *SLTR* (kurz für die englische Bezeichnung Staight Line Triangle Representation), genannt falls gilt:

S1 Alle Kanten Segmente von Geraden

S2 Alle Gebiete, inklusive dem äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.

Wenn die Aufhängungen s_1, s_2, s_3 gegeben sind, dann sind diese auch die Ecken des äusseren Gebietes.

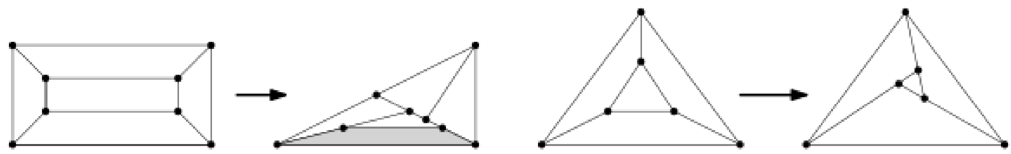

Abbildung 1.1: Links einer der beiden 3-zusammenhängende Graph auf acht Knoten ohne SLTR hat und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

1.2 Schnyder Woods

Schnyder Woods wurden zuerst von Walter Schnyder zur Betrachung der Ordungs-Dimension planarer Graphen, als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung, betrachtet [Sch89]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer planaren Einbettung auf einem $n-2 \times n-2$ Netz[Sch90]. Im Folgenden werden wir die Verallgemeinerung auf drei-zusammenhängende plane Graphen durch Felsner [Fel01] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings einführen.

Wir bezeichnen eine Kreuzungsfreie Einbettung eines planaren Graphen G in der Ebene als *planen Graph*. Für den Rest dieses Kapitels sei G ein 3-zusammenhängender planer Graph mit den Aufhängungen s_1, s_2, s_3 angeordnet im Uhrzeigersinn im äusseren Gebiet.

Definition 1.3 (Schnyder Woods)**.** Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von G mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln[1]:

W1 Jede Kante ist entweder un- oder bigerichtet. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.

W2 An jeder Aufhängung s_i exisitert eine nach ausssen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label i.

W3 Jeder Knoten v hat hat Ausgangsgrad eins zu jedem Label. Um v existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.

W4 Es existiert kein gerichteter Zykel mit einem Label.

Definition 1.4 (Schnyder Labeling)**.** Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung Winkel von G mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

[1] Alternativ kann hier auch anschaulicher einfach von rot, blau und grün gesprochen werden. Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass $i+1$ und $i-1$ immer definiert sind.

L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en. Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.

L2 An Aufhängung s_i haben äusseren Winkel die Label i-1 und i+1 im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label i.
Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1en, 2en und 3en.

// TODO BILD!!

Theorem 1.5. *Schnyder Woods und Schnyder Labelings stehen in Bijektion zueinander. // TODO*

// TODOBILD

Literaturverzeichnis

[Fel01] Stefan Felsner, *Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes*, Order **18** (2001), no. 1, pp. 19–37.

[Sch89] Walter Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989), no. 4, pp. 323–343.

[Sch90] ______, *Embedding planar graphs on the grid*, in Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Disc. Algo., Phildadelphia, PA, USA (1990), pp. 138–148.