



Grapheneinbettungen und Optimierung

Autor:
Jonas Neukamm

Betreuer und Erstgutachter:
Prof. Dr. Stefan Felsner

Matrikelnummer:
324283

Zweitgutachter:
Dr. Frank Lutz

*Masterarbeit zur Prüfung zum Master of Science
an der*

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

17.7.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

.....

Jonas Neukamm

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Geradlinige Dreiecks-Darstellungen (SLTRs)	3
2.2	Schnyder Woods	6
2.2.1	Einbettungen via Schnyder Woods	9
2.3	α -Orientierungen	10
2.4	Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem	13
3	Bedingungen für die Existenz von SLTRs	15
3.1	SLTRs durch harmonische Funktionen	16
3.1.1	Harmonische Funktionen auf planaren Graphen	20
3.1.2	Das resultierende Gleichungssystem	21
3.2	Ecken kompatible Paare	22
4	Algorithmen zur Erkennung von SLTRs	37
4.1	SLTRs via Zwei-Fluss	37
4.1.1	Schnyder-Wood-Fluss	37
4.1.2	FAA-Fluss	39
4.1.3	Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs	41
4.2	Nicht ganzzahlige Lösungen	48
4.2.1	Minimale Schnitte in \mathcal{N}_G	51
5	Das Programm	55
5.1	Visualisierung	56
5.1.1	Probleme bei der Wahl von λ	57
5.1.2	Eine heuristisch gute Wahl von λ	59
5.2	Experimentelle Rechnungen	59
5.3	Dokumentation	61
	Literaturverzeichnis	63

1 Einleitung

Wir werden uns in dieser Arbeit mit Zeichnungen von einfachen planaren Graphen in der Ebene beschäftigen. Planare Graphen haben durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen in gewissem Sinne besonders „schöne“ Zeichnungen. Aus diesem Grund ist eine der Fragen, mit der sich schon viele Mathematiker*innen auseinander gesetzt haben: „*How to draw a Graph?*“ [Tut63]. Mit dieser Frage werden wir uns auch im nun Folgenden beschäftigen.

Beginnen wir mit Varianten von Einbettungen, die wenige Einschränkungen haben. Bei einer topologischen Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt. Hierbei dürfen sich die Kanten nur in den Knoten treffen. Erste mathematische Arbeiten hierzu zeigten, dass man diese Kurven auch als Geraden zeichnen kann. So wurde in den fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen und für jede Wahl eines äusseren Gebietes eine geradlinige und kreuzungsfreie Einbettung existiert [Fár48].

In den siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts betrachtete William Thomas Tutte die Unterklasse der 3-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern *konvexe* Zeichnungen existieren [Tut63]. Bei einer konvexen Einbettung bilden die Kantenfolgen, die ein Gebiet einschließen, die Randkurven von konvexen Polygonen.

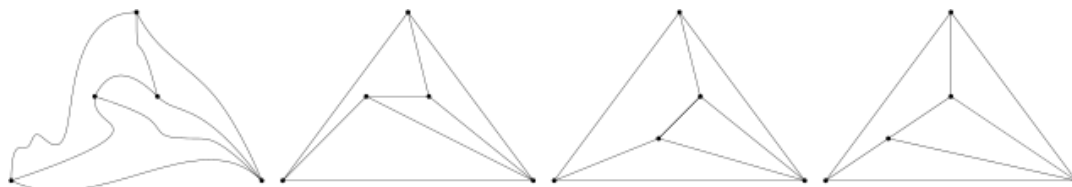


Abbildung 1.1 – Der gleiche planare Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen, einer konvexen und einer geradlinigen Dreiecks-Darstellung.

Im Weiteren folgt eine Auseinandersetzung mit einer spezifischen Form dieser Zeichnungen nach Nieke Aerts und Stefan Felsner. Wir fordern, dass alle Gebiete, inklusive dem Äußeren, nicht degenerierte Dreiecke einschließen. Wir nennen so eine Darstellung eine *geradlinige Dreiecks-Darstellung*. Nicht alle planaren Graphen haben solche Zeichnungen, wie wir im Verlauf der Arbeit sehen werden. Man kann die Klasse der Graphen, die eine geradlinige Dreiecks-Darstellung zulassen, jedoch eingrenzen und Aerts und Felsner haben dies in einigen Publikationen getan [AF13a, AF13b, AF15].

Der Beitrag dieser Arbeit zum Thema liegt in der Implementierung eines von Aerts und Felsner entwickelten Algorithmus. Die Existenz einer geradlinigen Dreiecks-

Darstellung wird in diesem als ganzzahlige Lösung eines Multi-Fluss-Problems charakterisiert. Die Lösung eines solchen Problems ist im Allgemeinen NP-schwer. Experimentelle Rechenergebnisse legen aber den Schluss nahe, dass sich geradlinigen Dreiecks-Darstellungen in polynomineller Zeit berechnen lassen. So kann man die Vermutung aufstellen, dass nicht ganzzahlige Lösungen zu Berechnung von geradlinigen Dreiecks-Darstellungen genügen. Auch wenn wir den Beweis dieser Vermutung noch nicht gefunden haben, hilft sie bei der Beschleunigung des Algorithmus von Aerts und Felsner. Wir werden Indizien für die Korrektheit der Vermutung und mögliche Beweisansätze besprechen und zum Abschluss die Darstellung von errechneten geradlinigen Dreiecks-Darstellungen betrachten. Es folgt ein kurzer Überblick der Struktur der Arbeit.

In Kapitel 2 wiederholen wir zunächst zur Verständnis der Arbeit wichtige Resultate aus der Graphentheorie. Kapitel 3 befasst sich mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von geradlinigen Dreiecks-Darstellungen. In Kapitel 4 wird aufbauend auf diesen Ergebnissen ein Algorithmus entwickelt, um eine geradlinige Dreiecks-Darstellung eines planaren Graphen zu berechnen, falls diese existiert. Abschließend wird in Kapitel 5 einen Überblick über die Ergebnisse einer Implementierung der erarbeiteten Algorithmen gegeben.

2 Grundlagen

Wir werden uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten V und der Menge der Kanten $E \subseteq (V \times V)$. Eine Kante $e = (u, v)$ verbindet die beiden Knoten u und v . Einen Graphen G , definiert als Kombination der Mengen von Knoten und Kanten nennen wir auch einen *kombinatorischen* Graphen. Ein Pfad von u nach v ist eine Folge von Kanten $\{(u, w_1), (w_1, w_2), \dots, (w_k, v)\} \subset E$ die u und v verbindet. Mit dem Grad $\deg(v)$ eines Knoten meinen wir die Anzahl der adjazenten Kanten, der Kanten die v als einen Endpunkt haben.

Eine Einbettung (oder Zeichnung) eines Graphen in der Ebene ist eine Abbildung $m : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ die die Kanten und Knoten kreuzungsfrei in die Ebene zeichnet. Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *ebenen Graphen*. Für einen ebenen Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces) F betrachten, das heißt die durch die Kanten und Knoten begrenzten Regionen in der Ebene. Wir bezeichnen das unbeschränkte Gebiet als das *äußere* Gebiet. Wir können den Begriff der Einbettung von G auch etwas weiter fassen und mit diesem nur die Definition der Menge der Gebiete F von G und eines äußeren Gebietes $f_{aus} \in F$ meinen, sodass mindestens eine planare Zeichnung mit diesen Gebieten existiert. Wir nennen dies auch eine *kombinatorische* Einbettung. Die kombinatorische Einbettung bildet eine Äquivalenzklasse aller möglichen Zeichnungen von G . In enthalten sind alle Zeichnungen von G deren Gebiete (inklusive dem Äußeren) denen der kombinatorischen Einbettung entsprechen. Wir werden im Verlauf der Arbeit, wenn wir von Einbettung reden manchmal eine spezifische Zeichnung und manchmal ihre Äquivalenzklasse meinen. Die Bedeutung sollte sich jedoch aus dem Kontext ergeben.

2.1 Geradlinige Dreiecks-Darstellungen (SLTRs)

Wir werden uns in dieser Arbeit mit Möglichkeiten auseinandersetzen, geradlinige Dreiecks-Darstellungen für planare Graphen zu finden. Die englische Bezeichnung der geradlinigen Dreiecks-Darstellungen lautet straight line triangle representation, kurz SLTR. Die nächste Definition formalisiert diese Darstellung.

Definition 2.1 (SLTR). Eine Zeichnung eines ebenen Graphen G wird *SLTR* genannt falls gilt:

- S1 Alle Kanten sind Segmente von Geraden.

S2 Alle Gebiete, inklusive dem Äußeren, sind nicht-degenerierte Dreiecke.

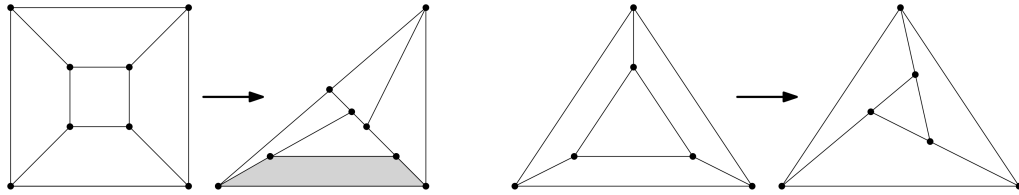


Abbildung 2.1 – Links einer der beiden 3-zusammenhängenden Graphen mit acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Für die weiteren Betrachtungen ist es nützlich die drei Knoten $\{a_1, a_2, a_3\}$, die das äußere Gebiet berühren, gesondert zu betrachten. Wir nennen sie die *Aufhängungen* von G . Die Knoten a_1, a_2 und a_3 sind dann die designierten Ecken des äußeren Gebietes einer möglichen SLTR. Einen Graphen zusammen mit einem äußeren Gebiet und festen Aufhängungen als Paar zu behandeln ist sinnvoll, wie in Beispiel 2.2 zu sehen sein wird.

Beispiel 2.2. Es existieren planare Graphen, von denen manche Einbettungen SLTRs zulassen, andere jedoch nicht. Betrachten wir den planaren Graphen mit zehn Knoten aus Abbildung 2.2. Mit rot und grün sind die beiden Gebiete markiert die jeweils einmal als das äußere Gebiet festgelegt wurden. Die kombinatorische Einbettung auf der rechten Seite lässt zu dieser Wahl des äußeren Gebietes keine SLTR zu. Das nicht dreieckige Gebiet ist grau eingefärbt. Zu Auswahl auf der linken Seite existiert hingegen eine. Dies ist der kleinste 3-zusammenhängende kombinatorische Graph, der diese Eigenschaft hat.

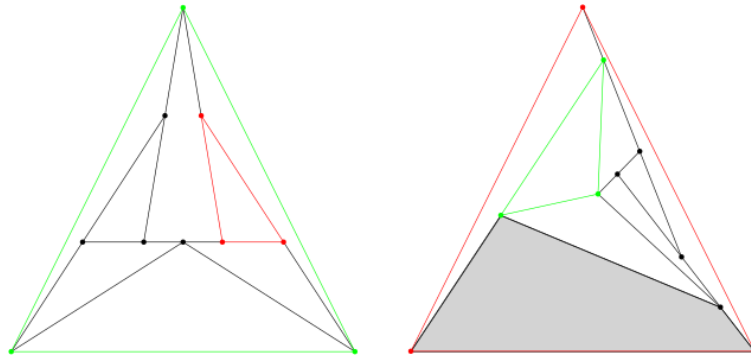


Abbildung 2.2 – Zwei topologische Einbettungen des (kombinatorisch) gleichen planaren Graphen, wobei die linke keine SLTR zulässt.

Bevor wir zur ersten Proposition kommen werden wir die Klasse der planaren Graphen, die wir betrachten wollen etwas weiter einschränken. Dabei hilft uns die nächste Definition.

Definition 2.3 (intern- k -zusammenhängend). Ein Graph G ist zusammenhängend falls für alle Knoten u, v ein Pfad von u nach v existiert. G ist k -zusammenhängend, falls er nach der Entfernung von $k - 1$ beliebigen Knoten weiterhin zusammenhängend ist. Sei G eben mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, weiter sei a_∞ ein zusätzlicher Knoten eingefügt im äußeren Gebiet. Dann ist G intern k -zusammenhängend, falls $G + a_\infty := (V \cup \{a_\infty\}, E \cup \{(a_1, a_\infty), (a_2, a_\infty), (a_3, a_\infty)\})$ k -zusammenhängend ist.

Die nächste Präposition enthält eine erste notwendige Bedingung für die Existenz von geradlinigen Dreiecksdarstellungen (SLTRs).

Proposition 2.4. [AF13b, Proposition 1.2] Sei G ein ebener Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ als äußere Ecken einer SLTR. Weiter gelte für alle Knoten $v \in V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ $\deg(v) \geq 3$. Dann ist G intern-3-zusammenhängend.

Beweis: Sei Δ die SLTR von $G = (V, E)$. Angenommen es existiert eine Menge $U \subseteq V$ in G mit $|U| = 2$, deren Entnahme G in nicht zusammenhängende Komponenten trennt. Wir werden zeigen, dass jeder Teil von $G \setminus U$ eine der Aufhängungen enthält und somit $G + a_\infty$ nicht von U getrennt wird. Da G intern-3-zusammenhängend ist können nur die Aufhängungen a_i Grad zwei haben. Sei K eine der Komponenten von $G \setminus U$. Betrachte $K \cup U$ als induzierten Teilgraphen von G . Falls $K \cup U$ ein Pfad ist, also nur Knoten von Grad zwei oder eins enthält, dann kann nur $K = \{a_i\}$ gelten.

Falls $K \cup U$ kein Pfad ist, betrachte die konvexe Hülle von $U \cup K$ in Δ . Mindestens drei der Ecken von $U \cup K$ haben Außenwinkel grösser als π (an diesen Ecken befinden sich Knoten aus $U \cup K$). Zwei dieser Winkel können an den Knoten aus U liegen, aber der dritte muss ein Winkel sein, der schon in Δ existiert. Es handelt sich somit um eine Aufhängung. \square

Bemerkung. Für innere Knoten von Grad 2 in einer SLTR müssen die beiden angrenzenden Winkel gerade sein. Somit kann man diese Knoten durch eine gerade Kante zwischen ihren Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten. Knoten von Grad eins können nicht existieren, da sie nicht aus dem Rand eines Dreiecks liegen können. Wir werden somit von nun an nur intern-3-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen, die eine SLTR zulassen, auf diese reduziert werden können.

Für 3-zusammenhängende planare Graphen mit mehr als drei Knoten ist die kombinatorische Einbettung nach Hassler Whitney bis auf Wahl des äußeren Gebietes eindeutig [Whi33]. Zusammen mit der nächsten Proposition definiert somit die Wahl von Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, die in mindestens einem gemeinsamen Gebiet liegen, ein eindeutiges äußeres Gebiet f_{aus} .

Proposition 2.5. Sei G ein planarer 3-zusammenhängender Graph und $\{a_1, a_2, a_3\} \subset V$. Dann existiert höchstens ein Gebiet f , das adjazent zu a_1, a_2, a_3 ist.

Beweis: Angenommen es existieren zwei Gebiete f, f' die a_1, a_2 und a_3 enthalten. Dann berühren sich diese Gebiete an mehr als einer Kante (vergleiche Abbildung 2.3 links). Im grauen Gebiet müssen Knoten liegen, da G 3-zusammenhängend ist. Wenn

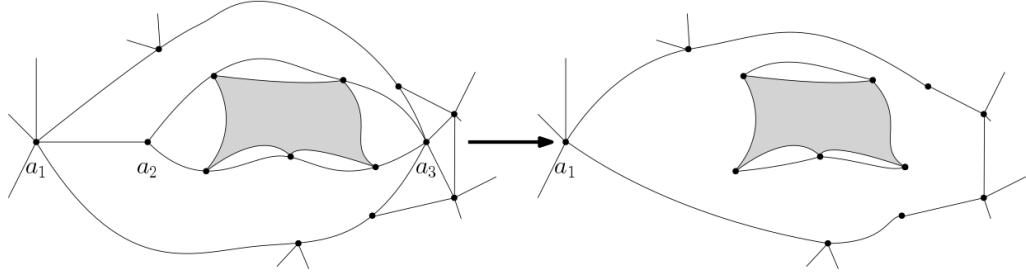


Abbildung 2.3 – Die entnehme der Knoten a_2 und a_3 trennt G , was zu einem Widerspruch zum 3-Zusammenhang führt.

wir aber nun a_2 und a_3 entfernen, dann teilen wir G in zwei nicht zusammenhängende Gebiete. Es kann somit nur ein Gebiet f geben, in welchem die a_1, a_2 und a_3 liegen. \square

Bemerkung. Wir könnten uns somit für 3-zusammenhängende planare Graphen auf die Wahl von Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ beschränken. Für eine kombinatorische Einbettung folgt dann ein eindeutiges äußeres Gebiet f_{aus} . Für nur intern-3-zusammenhängende planare Graphen gilt dies nicht. Wir betrachten somit im Folgenden ebene Graphen mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ im äußeren Gebiet.

Mit den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von SLTRs gelten und welche algorithmischen Ansätze man bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung verfolgen kann, werden wir uns in den nächsten beiden Kapiteln auseinandersetzen. Zuvor werden in diesem Kapitel noch einige Konzepte eingeführt, die notwendig sind, um der Argumentation zu folgen.

2.2 Schnyder Woods

Betrachten wir einen ebenen Graphen mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 . Anschaulich handelt es sich bei einem Schnyder Wald um drei Aufspannende Bäume T_1, T_2, T_3 , sodass jeder der Bäume T_i zu seiner Wurzel a_i hin gerichtet ist. Jede der Kanten wird mindestens von einem der Bäume genutzt und Kanten können von zwei der drei Bäume gleichzeitig genutzt werden.

Schnyder Wälder, im weiteren nach der englischen Bezeichnung *Schnyder Woods*, wurden zuerst von Walter Schnyder eingeführt [Sch89]. Es handelt sich um eine Färbung und Orientierung der inneren Kanten einer Triangulierung. Sie dienen zur Betrachtung der von planaren Graphen induzierten Ordnungen. In einer weiteren Arbeit wurden mit ihrer Hilfe geradlinige und konvexe Einbettungen (planarer) Triangulierungen auf einem $(|V| - 2) \times (|V| - 2)$ Gitter erzeugt [Sch90].

Wir wollen hier die Verallgemeinerung auf 3-zusammenhängende planare Graphen durch Felsner und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings einführen [Fel01]. Wir orientierten uns dabei an einem Lehrbuch von Felsner [Fel04]. Für den Rest dieses Kapitels sei G , wenn nicht weiter spezifiziert, ein 3-zusammenhängenden ebener Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Definition 2.6 (Schnyder Woods). Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von G mit den Labeln 1, 2 und 3¹ (alternativ wird hier auch oft rot, grün und blau genutzt), unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- W1 Jede Kante ist entweder in eine oder zwei Richtungen orientiert. Falls sie bigerichtet ist, haben beide Richtungen unterschiedliche Label.
- W2 An jeder Aufhängung a_i existiert eine nach außen gerichtete Halbkante² mit Label i .
- W3 Jeder Knoten v hat Ausgangsgrad eins in jedem Label. Um v existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.
- W4 Es existiert kein inneres Gebiet mit einem gerichteten Zykel in einer Farbe als Rand.

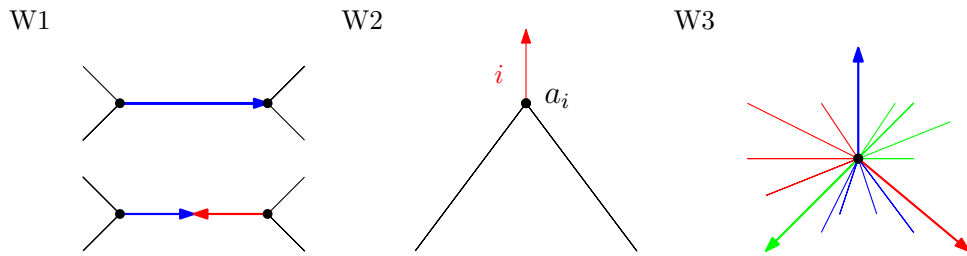


Abbildung 2.4 – Illustration der ersten drei Bedingungen für Schnyder Woods.

Analog zu den Schnyder Woods, kann man Schnyder Labelings definieren, die zu diesen in Bijektion stehen. Hier betrachten wir nicht zuerst die Kanten eines planaren Graphen sondern die Winkel an den Knoten.

Definition 2.7 (Schnyder Labeling). Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung der Winkel von G mit den Labeln 1, 2 und 3 (oder rot, grün und blau) unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von $1en$, $2en$ und $3en$. Am äußeren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.
- L2 Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von $1en$, $2en$ und $3en$.
- L3 An den Aufhängungen a_i haben die äußeren Winkel die Label $i-1$ und $i+1$ im Uhrzeigersinn mit der Halbkante dazwischen. Die inneren Winkel haben das Label i .

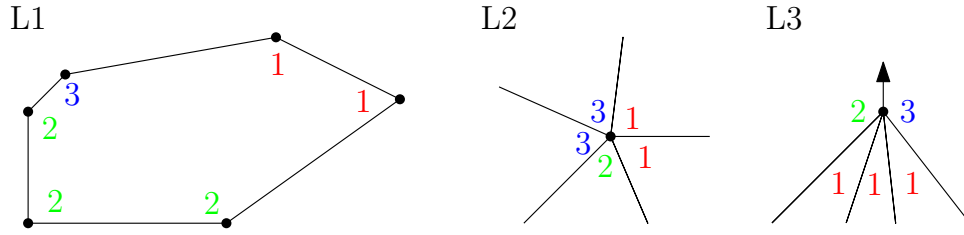


Abbildung 2.5 – Illustration der drei Bedingungen für Schnyder Labelings.

In Abbildung 2.6 wird eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings illustriert. Das nächste Lemma folgt aus den Bedingungen L1 und L2.

Lemma 2.8. *Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 und einem Schnyder Labeling. Dann beinhalten die vier Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn an jeder Kante die Label 1, 2 und 3. Somit hat jede Kante einen der beiden Typen in Abbildung 2.6.*

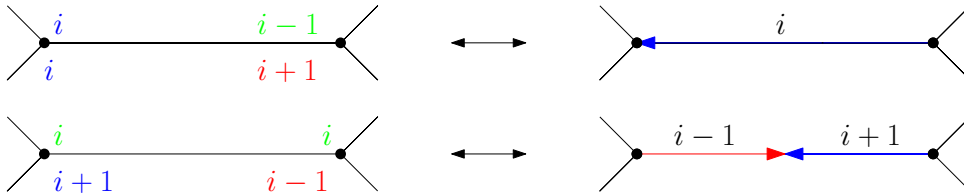


Abbildung 2.6 – Bijektion zwischen Schnyder Wood auf der rechten und Schnyder Labeling auf der linken Seite.

Theorem 2.9. *Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 . Der in Abbildung 2.6 dargestellte Zusammenhang erzeugt eine Bijektion zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings auf G .*

Dies macht es möglich, wenn für Darstellung und Verständnis sinnvoll, zwischen den beiden Strukturen hin und her zu wechseln. So kann es im Verlauf dieser Arbeit vorkommen, dass wir vom einen schreiben, aber implizit Eigenschaften des anderen meinen. Für die von uns im Folgenden betrachteten Graphen existiert mindestens ein Schnyder Wood. Dies belegt das nächste Theorem nach Ezra Miller [Mil02, Theorem A].

Theorem 2.10. *Sei G ein ebener Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. G ist genau dann intern-3-zusammenhängend, wenn ein Schnyder Wood auf G mit den Ecken $\{a_1, a_2, a_3\}$ existiert.*

¹Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass $i + 1$ und $i - 1$ immer definiert sind.

²Eine Halbkante ist eine Kante mit nur einem Endpunkt.

2.2.1 Einbettungen via Schnyder Woods

Es existieren einige Anwendungen von Schnyder Woods in Bezug auf Einbettungen. Wie schon erwähnt, bezieht sich eines der ersten Resultate auf die konvexe Einbettung auf einem Gitter. Das im Folgenden skizzierte *face-counting* nach Felsner (deutsch: Gebiete zählen), erzeugt eine Einbettung auf einem kleineren Gitter als nach Schnyder [Fel01]. Betrachte G mit einem Schnyder Wood T_1, T_2, T_3 . Es handelt es sich bei den Bäumen T_i um gerichtete Bäume mit Wurzeln in a_i [Fel04, Korollar 2.5]. Von jedem Knoten v aus existierten also eindeutige Pfade $P_i(v)$ zu den Aufhängungen a_i . Jeweils zwei der Pfade von v zu den Aufhängungen haben v als einzigen gemeinsamen Knoten [Fel04, Lemma 2.4]. Wir können somit zu jedem Knoten v drei Regionen R_i definieren, die jeweils von den Pfaden $P_{i-1}(v)$ und $P_{i+1}(v)$ und dem äußeren Gebiet eingegrenzt werden³. In jeder dieser Regionen können wir nun die eingeschlossenen Gebiete von G zählen. Durch das Zählen der Gebiete in den Regionen zu v lässt sich eine konvexe Zeichnung von G erzeugen.

Hierzu ordnet man jedem Knoten v seinen *Gebietsvektor* (v_1, v_2, v_3) zu, wobei v_i die Anzahl der inneren Gebiete in $R_i(v)$ beschreibt. In Abbildung 2.7 sind auf der rechten Seite die Regionen von v eingefärbt. Seien $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0)$ und $\alpha_3 = (0, 0)$ die äußeren Ecken unserer Zeichnung. Sie entsprechen ebenfalls den Bildern der Aufhängungen von G . Die Position der inneren Knoten ergibt sich nun durch die Funktion

$$\mu : V \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3.$$

Theorem 2.11 (Theorem 2.7 [Fel04]). *Sei G ein ebener Graph mit einem Schnyder Wood σ und den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 . Sei (v_1, v_2, v_3) der, unter Berücksichtigung von σ berechnete, Gebietsvektor von $v \in V$, mit $v_i = \text{Anzahl der Gebiete in } R_i(v)$. Dann ist die Zeichnung $\mu(G)$ konvex.*

Die mit diesen Koordinaten erzeugte Einbettung von G ist planar, konvex und passt, falls G 3-zusammenhängend ist, auf ein $(|F| - 1) \times (|F| - 1)$ -Gitter [Fel04, Korollar 2.8]. Sie hat noch eine weitere Eigenschaft, die später von Nutzen sein wird und die in der nächsten Proposition festgehalten ist. Dies ist in Abbildung 2.7 in der Mitte skizziert.

Proposition 2.12. *Sei G ein ebener Graph mit einem Schnyder Wood σ und den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 . Für $\mu(G)$, die durch face-counting erzeugte Einbettung von G , gilt:*

W5 Die Knoten eines inneren Gebietes werden auf die Seiten eines Dreiecks mit den Seiten $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$ mit passenden Konstanten c_i abgebildet. Im inneren dieses Dreiecks befinden sich keine Knoten. Die Winkel im Inneren des Gebietes an den Knoten auf der Seite $c_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1})$ haben Label i im Schnyder Labeling.

³Ein Beispiel für diese Regionen findet sich in Abbildung 2.7 auf der rechten Seite.

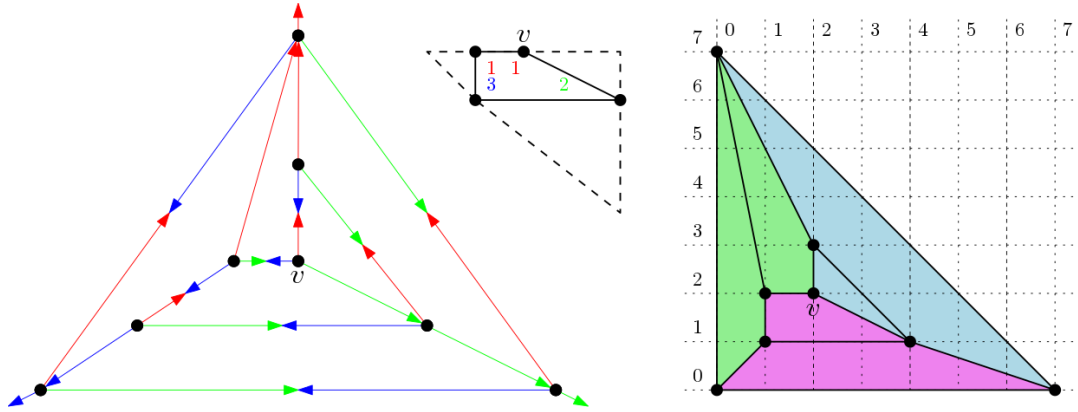


Abbildung 2.7 – Eine Schnyder Wood auf G und die durch face-counting erhaltene Einbettung von G . Die eingefärbten Gebiete sind die Regionen die den Gebietsvektor (v_1, v_2, v_3) ergeben. In der Mitte ist W5 illustriert.

2.3 α -Orientierungen

Für den Algorithmus in Kapitel 4 führen wir nun eine weitere zu Schnyder-Woods und Labelings in Bijektion stehende Struktur auf Graphen ein und folgen dabei weiter Felsners Lehrbuch [Fel04].

Definition 2.13 (α -Orientierung). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $\alpha : V \mapsto \mathbb{N}$ eine Funktion auf G . Eine α -Orientierung ist eine Orientierung der Kanten von G , sodass der Ausgangsgrad⁴ eines jeden Knoten $\alpha(v)$ entspricht, dass heißt

$$\text{outdeg}(v) = \alpha(v).$$

Um von α -Orientierungen zu Schnyder Woods zu gelangen müssen wir Primal-Dual Graphen betrachten, die mit den nächsten beiden Definitionen eingeführt werden.

Definition 2.14 (schwacher dualer Graph). Sei G ein ebener Graph. Wir definieren G^* , den *schwachen dualen Graphen* von G . G^* hat einen (Gebiets-)Knoten für jedes innere Gebiet von G . Für jede innerer Kante in G fügen wir eine Kante zwischen den beiden (Gebiets-)Knoten f, f' in G^* ein, die adjazent zu dieser Kante in G sind.

Definition 2.15 (Primal-Dual Graph). Betrachte einen ebenen Graphen G und seinen schwachen dualen Graphen G^* . Der *Primal-Dual Graph* $G + G^*$ ist eine Vereinigung der Graphen G und G^* . Wenn wir G und G^* übereinander legen, dann kreisen sich jeweils eine Kante aus G und eine aus G^* . An so einer Kantenkreuzung fügen wir in $G + G^*$ einen Knoten ein und verbinden ihn mit den adjazenten Knoten aus G und G^* . Die Menge der Knoten von $G + G^*$ besteht aus Knoten-Knoten (Knoten in G), Kanten-Knoten (an den Kreuzungen) und Gebiets-Knoten (Knoten in G^*).

⁴Der Ausgangsgrad eines Knoten v entspricht der Anzahl der adjazenten Kanten von v , die von v weg gerichtet sind.

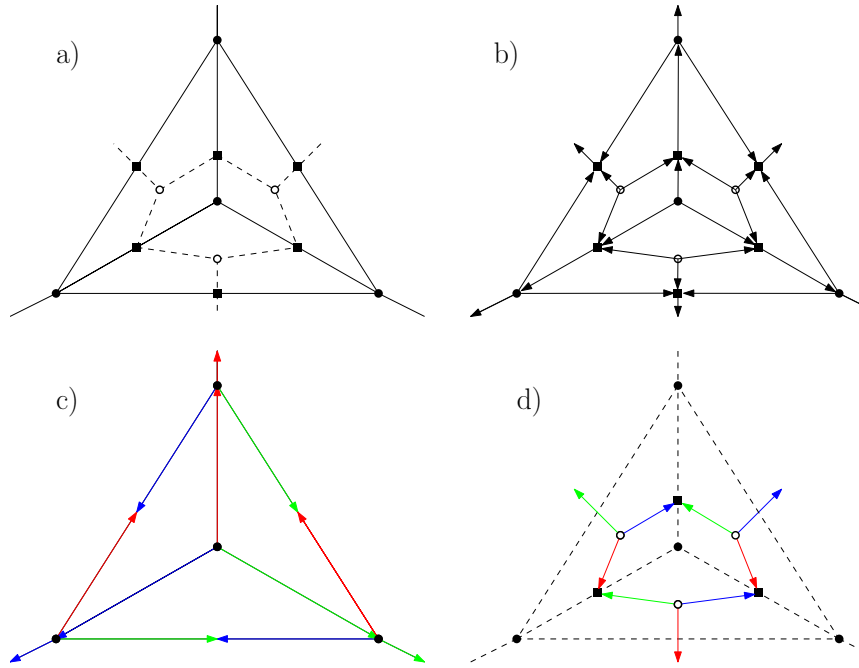


Abbildung 2.8 – a) Der Primal-Duale Graph $K_4 + K_4^*$. b) Mit einer α_s -Orientierung und c) den zugehörigen Schnyder Woods auf K_4 d) und K_4^* .

Kanten in $G + G^*$ existieren, sowohl zwischen inzidenten Kanten und Knoten, als auch Kanten und Gebieten in G . Hinzu kommen Halbkanten von den Kanten-Knoten und Knoten-Knoten am äußeren Gebiet von G . Wenn wir einen Knoten f_∞ für das äußere Gebiet hinzufügen und die Halbkanten zu diesem verlängern spricht man vom *Abschluss* von $G + G^*$. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.8 a) zu sehen.

Wir trennen bei der Erzeugung jede Kante in zwei Teile. Die Kanten-Knoten auf der einen und die Knoten-Knoten und Gebiets-Knoten auf der anderen Seite bilden Bipartition. Somit sind $G + G^*$ und sein Abschluss bipartit. Das folgende Theorem liefert eine Bijektion zwischen den Schnyder Woods auf G und einer bestimmten α -Orientierung auf dem Abschluss von $G + G^*$, die wir α_s nennen [Fel04, Propositionen 2.13, 2.14].

Theorem 2.16. *Sei G ein ebener Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, dann stehen die folgenden Strukturen in Bijektion:*

- A1 Die Schnyder Woods auf G .
- A2 Die Schnyder Woods auf dem (schwachen) dualen Graphen G^* .
- A3 Die α_s -Orientierungen des Abschlusses von $G + G^*$ mit $\alpha_s(v) = \alpha_s(f) = 3$ für jeden Knoten-Knoten v und Gebiets-Knoten f , $\alpha_s(e) = 1$ für jeden Kanten-Knoten e und $\alpha_s(f_\infty) = 0$.

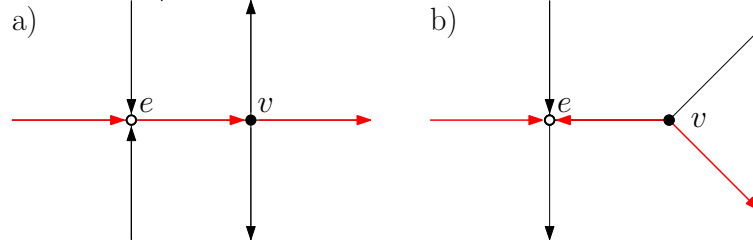


Abbildung 2.9 – Die zwei Fälle der geraden Pfad Regel beim Betreten eines Knoten f aus G oder G^* . In rot der gewählte und somit eingefärbte Pfad.

Wir erklären kurz die erhaltene Bijektion von A1 und A2 zu A3. Angenommen wir haben ein Paar in Bijektion stehender Schnyder Woods σ, σ^* auf G und G^* . Die von σ und σ^* induzierte Orientierung der Kanten von $G + G^*$ ist eine α_s -Orientierung.

Angenommen wir haben eine α_s -Orientierung auf dem Abschluss von $G + G^*$. Sie induziert die Orientierung der Kanten der resultierenden Schnyder Woods σ und σ^* . Wir müssen jedoch noch die Label bestimmen. Dies erfolgt mit Hilfe der geraden Pfad Regel.

Gerader Pfad Regel: Beginnen wir auf einer beliebigen Kante von $G + G^*$. Wenn wir einen Kanten-Knoten e betreten, dann verlassen wir diesen auf der gegenüberliegenden Seite (wir folgen der zugrunde liegenden Kante in G bzw. G^*). Wenn wir einen Knoten-Knoten oder Gebiets-Knoten v betreten und über eine Kante kommen die zu v orientiert ist, dann laufen wir auf der gegenüberliegenden, von v weg orientierten Kante, weiter⁵ (vergleiche Abbildung 2.9 a). Falls wir v über eine von v weg orientierte Kante betreten, dann hängt unsere Wahl der Auskante von der Orientierung am letzten Kanten-Knoten e ⁶ ab. Falls dort die Auskante auf der rechten Seite liegt, wählen wir jetzt die rechte⁷ von v weg orientierte Kante, sonst die linke (vergleiche Abbildung 2.9 b). Falls wir a_∞ erreichen laufen wir nicht weiter.

Betrachten wir einen Pfad nach der Regel, der mit einer gerichteten Kante $e \in G + G^*$ beginnt. Dann endet er in a_∞ [Fel01, Lemma 15]. Der letzte passierte Knoten muss nun entweder eine der Aufhängungen von G oder G^* sein. Wir Färben den Pfad in der Farbe dieser Aufhängung. Die so erhaltene Orientierung und Färbung auf den Kanten von G und G^* entspricht zwei in Bijektion stehenden Schnyder Woods σ und σ^* [Fel01].

⁵Es existieren genau drei von v weg orientierte Kanten und wir wählen die von uns aus gesehen Mittlere.

⁶Wir betreten Kanten-Knoten nur über zu diesen hin orientierte Kanten.

⁷Falls wir v durch eine von v weg orientierte Kante betreten, dann bleiben noch zwei andere übrig.

2.4 Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem

Wir werden in Kapitel 4 einen gerichteten Graphen \mathcal{N} auf Basis von G konstruieren, sodass ein maximaler Fluss φ einer SLTR von G entspricht. Es gibt sehr viele unterschiedliche Arten von Flussproblemen. So kann man zum Beispiel Graphen mit nur einem Paar von Quellen und Senken oder mit jeweils mehreren betrachten und die Kanten können gerichtet oder ungerichtet sein. Im Fall von mehreren Quellen und Senken werden diese normalerweise als Paare s_i, t_i gehandhabt und es wird gefordert, dass insgesamt Fluss φ_i mit Stärke $d_i \in \mathbb{R}_+$ von s_i zu t_i fließt. Als zusätzliche Einschränkung haben die Kanten e maximale Kapazitäten $c(e) \in \mathbb{R}_+$ die nicht überschritten werden können. Für jede Kante muss also gelten $\varphi(e) \leq c(e)$. Wir werden uns in Kapitel 4 mit einem Fluss der folgenden Form befassen.

Definition 2.17 (Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem). Sei $\mathcal{N} = (V, E)$ ein gerichteter Graph, im Weiteren auch Netzwerk genannt, mit den Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$, Paaren von ausgezeichneten Knoten $\{(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)\} \subset V \times V$ und positiven Bedarfen $\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}_+^n$. Dann bilden die Funktionen $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{R}_+^{|E|}$ einen zulässigen Fluss $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ auf \mathcal{N} , falls

$$\text{M1 } \forall (u, v) \in E : \sum_{i=1}^n \varphi_i(u, v) \leq c(u, v)$$

$$\text{M2 } \forall u \neq s_i, t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(u, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, u)$$

$$\text{M3 } \forall s_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(s_i, w) - \sum_{w \in V} \varphi_i(w, s_i) = d_i$$

$$\text{M4 } \forall t_i : \sum_{w \in V} \varphi_i(w, t_i) - \sum_{w \in V} \varphi_i(t_i, w) = d_i$$

Mit $|\varphi_i|$ bezeichnen wir die Menge des Flusses von s_i nach t_i .

Definition 2.18. Wir nennen die Kantenmenge $S \subseteq \mathcal{N}_G(E)$ einen *Schnitt* in \mathcal{N}_G , falls seine Entnahme alle Paare $\{s_i, t_i\}$ trennt. Die Kantenmenge S ist ein *minimaler Schnitt*, falls für alle anderen Schnitte \tilde{S} gilt: $c(S) \leq c(\tilde{S})$.

Es folgen zwei bekannte Resultate für den Fall $n = 1$. Das erste Theorem stammt von Ford und Fulkerson [FF56].

Theorem 2.19 (Max-Flow Min-Cut). *Der maximale zulässige Fluss auf einem Netzwerk \mathcal{N} mit einer Quelle und Senke entspricht der Kapazität eines minimalen Schnittes.*

Ein maximaler Fluss lässt sich zum Beispiel mit dem Edmonds-Karp-Algorithmus in polynomineller Zeit bestimmen [KV18, Theorem 8.15]. Ein direktes Resultat folgt nach Danzig und Fulkerson [FF56]

Theorem 2.20 (Ganzzahliger Fluss). *Sei \mathcal{N} ein Netzwerk mit einer Quelle und einer Senke und ganzzahligen Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{N}$. Sei $\tilde{\varphi}$ ein nicht ganzzahliger Fluss auf \mathcal{N} . Dann existiert auch ein Fluss φ , mit $|\tilde{\varphi}| = |\varphi|$, sodass der Fluss φ auf allen Kanten ganzzahlig ist.*

Nach dem Max-Flow Min-Cut Theorem impliziert die Kapazität eines minimalen Schnittes im eindimensionalen Fall die Stärke eines maximalen Flusses. Für $n = 2$ existieren für ungerichtete Graphen analoge Aussagen nach T. Chiang Hu [Hu63]. Für diese Arbeit wäre im Folgenden jedoch der Fall $n = 2$ für gerichtete Graphen interessant. Es existieren jedoch keine analogen Aussagen zum Max-Flow Min-Cut Theorem, welche für Gerichtete-Multi-Fluss-Probleme mit mindestens zwei Quellen und Senken aussagekräftig wären, sondern nur Schranken und Annäherungen [LR99].

Im eindimensionalen Fall mit ganzzahligen Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{N}$ impliziert die Existenz eines zulässigen Flusses nach Theorem 2.20 die Existenz einer ganzzahligen Lösung, sowohl für gerichtete als auch für ungerichtete Graphen. Die Unterscheidung zwischen ganzzahligen und nicht ganzzahligen Flüssen ist relevant, da das Entscheidungsproblem, ob ein solcher Fluss existiert, im mehrdimensionalen Fall in unterschiedlichen Komplexitätsklassen liegt. Die Berechnung eines nicht (zwangsläufig) ganzzahligen zulässigen Flusses φ auf \mathcal{N} ist für den ein- und mehrdimensionalen Fall über eine LP-Formulierung in polynomieller Zeit möglich [KV18, Theorem 4.18]. Für ganzzahlige Lösungen gilt dies selbst in einfachen Fällen im Allgemeinen nicht und somit kann auch keine analoge Formulierung zu Theorem 2.20 existieren.

Theorem 2.21 ([EIS75]). *Die Berechnung einer ganzzahligen Lösung eines Gerichtetes-Multi-Fluss-Problems auf einem Netzwerk \mathcal{N} mit zwei Paaren $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2)\}$ und Kapazitäten $c : E \mapsto \mathbb{N}$ ist sogar dann NP-schwer, wenn \mathcal{N} keine gerichteten Zykel hat.*

NP-schwere Entscheidungsprobleme lassen sich nicht in polynomieller Zeit lösen. Somit existiert kein im Allgemeinen gültiger deterministischer polynomieller Algorithmus zur Berechnung eines zulässigen ganzzahligen Flusses für ein Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem für den Fall $n \geq 2$.

3 Bedingungen für die Existenz von SLTRs

Wir werden in diesem Kapitel weitere notwendige und zwei hinreichende Bedingungen für die Existenz von SLTRs erarbeiten. Als ersten Schritt wollen wir jedoch eine notwendige Eigenschaft festhalten.

Sei G ein ebener intern 3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nehmen wir für einen Moment an, dass wir schon eine SLTR für G gefunden haben. Für die Zeichnung müssen die folgenden Bedingungen gelten:

- Jeder Knoten $v \in V$ hat in maximal einem inzidenten Gebiet f einen flachen Winkel, also Winkel π .
- Jedes Gebiet $f \in F$ (inklusive dem Äußeren) hat genau drei Ecken. Es muss also in jedem Gebiet $|f| - 3$ flache Winkel an Knoten geben¹.

Diese Bedingungen liefern eine notwendige Bedingung für die Existenz einer SLTR. Sie ist in der nächsten Definition festgehalten.

Definition 3.1 (FAA). Sei $G = (V, E, F)$ ein ebener Graph. Eine *flache Winkel Zuweisung* ϕ , kurz *FAA* (nach dem englischen *flat angle assignment*), ist eine partielle Zuordnung der Knoten zu den Gebieten. Es muss gelten:

F1 Jedem Gebiet f sind genau $|f| - 3$ Knoten zugewiesen.

F2 Jeder Knoten v ist höchstens einem Gebiet zugewiesen.

Für den Fall, dass Aufhängungen gegeben sind, fordern wir zusätzlich:

F3 Die inzidenten Knoten des äußeren Gebietes, die keine Aufhängungen sind, müssen dem äußeren Gebiet zugewiesen sein.

Beispiel 3.2. Links und rechts in Abbildung 3.6 sehen wir den selben planaren Graphen G mit zwei unterschiedlichen Zeichnungen. Das äußere Gebiet ist bei beiden das selbe. Die Pfeile stellen hier die Zuweisung der Knoten zu den inneren Gebieten da (also das FAA). Auf der rechten Seite sehen wir eine SLTR von G mit dem passenden FAA. Auf der linken Seite ist ein FAA eingezeichnet, das keine SLTR induziert.

Somit induziert jede SLTR genau ein FAA. Ein ebener Graph kann also nur dann eine SLTR besitzen, wenn mindestens ein FAA existiert. Wie in Beispiel 3.2 gezeigt, induziert jedoch nicht jedes FAA eine SLTR. Unser Ziel ist die Erarbeitung eines Algorithmus zu Erkennung von SLTRs und für diesen werden hinreichende

¹ $|f|$ sei die Menge der adjazenten Knoten an f .

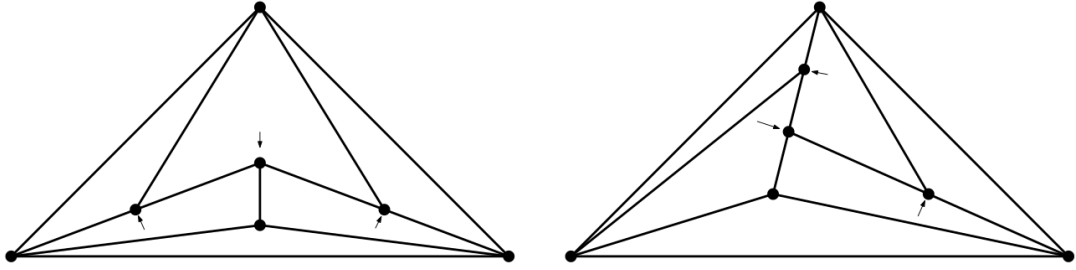


Abbildung 3.1 – Der selbe planare Graph mit zwei FAA, von denen nur das rechte eine SLTR induziert.

Bedingungen für ihre Existenz benötigt. Deswegen werden sich die nächsten beiden Abschnitten mit zwei Arbeiten von Aerts und Felsner beschäftigen. Das Hauptresultat der ersten liefert ein Gleichungssystem, das harmonische Funktionen beinhaltet. Eine Lösung dieses Systems liefert eine SLTR [AF13b]. In Teilen darauf basierend, stellt die zweite Arbeit einen Zusammenhang zwischen Schnyder Woods und FAAs her und die Existenz passender Paare impliziert wieder die Existenz von SLTRs [AF15].

3.1 SLTRs durch harmonische Funktionen

Die Beweise zu den in diesem Kapitel aufgestellten Propositionen und Theoremen werden ausgelassen. Sie befinden sich, wenn nicht anders angegeben, in [AF13b]. Zum Einstieg eine weitere Definition, die es ermöglicht eine Beobachtung zu SLTRs festzuhalten.

Definition 3.3 (Begrenzende Zykel und kombinatorisch konvexe Ecken). Sei G ein ebener Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem FAA ϕ von G . Sei H ein zusammenhängender Teilgraph von G und $\gamma = \gamma(H)$, der H umrandende Weg in G , das heißt γ ist eine Folge aus Kanten und Knoten die H in G begrenzt. Knoten und Kanten können in γ mehrfach vorkommen (vergleiche Abbildung 3.2). Wir werden so erhaltene γ als *begrenzende Zykel* bezeichnen. Die Menge der Knoten, Kanten und Gebiete aus G die im Inneren von γ oder auf γ liegen nennen wir $\text{int}(\gamma)$. Einen Knoten v aus γ bezeichnen wir als *kombinatorisch konvexe Ecke* von γ im Bezug auf ϕ , falls gilt:

- E1 v ist eine Aufhängung, oder
- E2 v ist nicht durch ϕ zugeordnet und es existiert eine Kante $e = (v, w)$ mit $e \notin \text{int}(\gamma)$, oder
- E3 v ist einem Gebiet f zugeordnet, $f \notin \text{int}(\gamma)$ und es existiert eine Kante $e = (v, w)$, sodass $e \notin \text{int}(\gamma)$.

Bemerkung. Angenommen wir haben einen ebenen Graphen G mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und ein FAA auf G gegeben. Um aus diesem FAA eine SLTR zu erzeugen

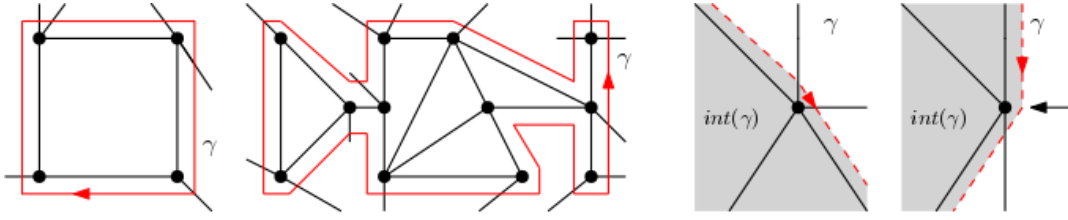


Abbildung 3.2 – Auf der linken Seite zwei Beispiele für *begrenzende Zyklen* und rechts für *kombinatorisch konvexe Ecken* mit und ohne zugewiesenem Knoten.

müssen wir die Gebiete in die Form von Dreiecken bringen. Stellen wir uns vor, dass alle Knoten auf einem Haufen liegen. Als erstes „ziehen“ wir die Aufhängungen auseinander, um uns dann Stück für Stück nach innen vorzuarbeiten. Sind wir so bei einem Restgraphen H angekommen, dann brauchen wir mindestens drei Knoten auf Rand $(\gamma(H))$ an denen wir „ziehen“ können um H in eine konvexe Form zu bringen, ohne dabei einen flachen Winkel des FAA zu verletzen. Kombinatorisch konvexe Ecken entsprechen anschaulich gesehen diesen Knoten.

Beispiel 3.4. Betrachten wir eine SLTR und einen begrenzenden Zyklus γ , der nicht von einem Pfad induziert wird. In Abbildung 3.3 ist so eine SLTR mit dem begrenzenden Zyklus in rot abgebildet. Sei K die konvexe Hülle von γ in der SLTR. Sie ist hier grau unterlegt. Dann muss jede Ecke von K einen Außenwinkel grösser als π haben. Und da K nicht von einem Pfad induziert ist müssen mindestens drei Ecken existieren (die drei roten Kreise). Es handelt sich um geometrisch konvexe Ecken in der SLTR. Nun ist der Knoten v an dieser Ecke entweder eine Aufhängung (wie unten links) oder es muss eine Kante geben die K verlässt, denn in einer SLTR kann kein Winkel (ausser an den Aufhängungen) grösser sein als π . Wenn der Knoten v an der Ecke keine Aufhängung ist dann existiert also mindestens eine Kante $(v, w) \notin K$. Es handelt sich also bei v auch um eine kombinatorisch konvexe Ecke von γ . Somit hat γ mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken in der SLTR.

Die Beobachtung aus dem Beispiel gilt allgemein für SLTRs und begrenzende Zyklen. Die folgende Präposition nach [AF13b, Prop 2.2, Prop 2.4] hält sie fest.

Proposition 3.5. *Sei G ein ebener Graph der eine SLTR zulässt. Sei weiter ϕ das von der SLTR induzierte FAA. Sei H ein zusammenhängender Teilgraph von G (kein Pfad) und $\gamma = \gamma(H)$ sein begrenzender Zyklus. Falls v eine geometrisch konvexe Ecke von γ in der SLTR ist, dann ist v auch eine kombinatorisch konvexe Ecke von γ hinsichtlich ϕ . Somit gilt:*

E4 Jeder begrenzende Zyklus γ , der nicht von einem Pfad induziert wird, hat hinsichtlich ϕ mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken.

Proposition 3.5 liefert also eine notwendige Bedingung damit ein FAA von einer SLTR induziert sein kann. Dies ist sogar eine hinreichende Bedingung, wie im Verlauf des Kapitels in Theorem 3.13 gezeigt wird.

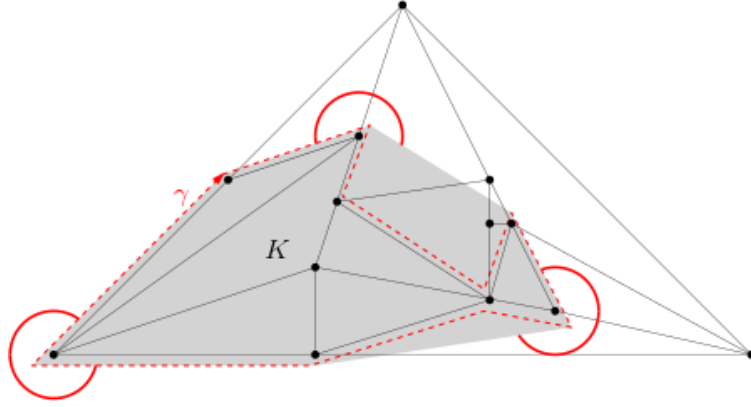


Abbildung 3.3 – Eine SLTR eines Graphen mit einem begrenzenden Zykel γ in rot. Die roten Kreise stellen drei geometrisch und kombinatorisch konvexe Ecken von γ dar.

Definition 3.6 (Gutes-FAA). Wir nennen ein FAA, das E4 aus Proposition 3.5 erfüllt, im Weiteren *Gutes-FAA* oder kurz *GFAA*.

Aerts und Felsner zeigen, dass ein Gutes-FAA eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* induziert die *dehnbar* ist und sich somit geradlinig darstellen lässt.

Definition 3.7 (Kontaktfamilie von Pseudosegmenten). Eine *Kontaktfamilie von Pseudosegmenten* ist eine Familie $\Sigma = \{c_i\}_{i \in I}$ von einfachen Kurven

$$c_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ mit } c_i(0) \neq c_i(1),$$

sodass alle Kurven c_i, c_j mit $i \neq j$ maximal einen gemeinsamen Punkt haben. Dieser Punkt muss dann ein Endpunkt von mindestens einer der Kurven sein.

Ein GFAA ϕ liefert eine Relation ρ auf den Kanten von G . Zwei Kanten (v, w) und (v, u) , beide adjazent zu f , stehen genau dann in Relation, wenn $\phi(v) = f$. (v, w) und (v, u) müssen also auf der selben Seite des Dreiecks f in der SLTR liegen. Der transitive Abschluss dieser Relation liefert eine Äquivalenzrelation ρ . Die Äquivalenzklassen von ρ bilden eine Kontaktfamilie von Pseudosegmenten.

Nennen wir die Äquivalenzklassen von ρ Kurven, dann gilt nach F2, dass jeder Knoten nur einem Gebiet zugeordnet werden kann und somit auch nur im Inneren von einer Kurve liegt. Die Kurven können sich also nicht kreuzen, sondern es kann nur eine an einer anderen enden. Weiter hat jede Kurve unterschiedliche Anfangs- und Endpunkte und kann sich nicht selbst berühren. Dies kann man so begründen, dass sonst der resultierende begrenzende Zykel γ nur eine beziehungsweise zwei kombinatorisch konvexe Ecken hätte. Das wäre ein Widerspruch zu E4. Analog können zwei Kurven nicht ihre Anfangs- und Endpunkte teilen, da sonst wieder ein Zykel mit zu wenigen Ecken entstehen würde. Für eine von einem FAA ϕ induzierte Kontaktfamilie schreiben wir auch Σ_ϕ .

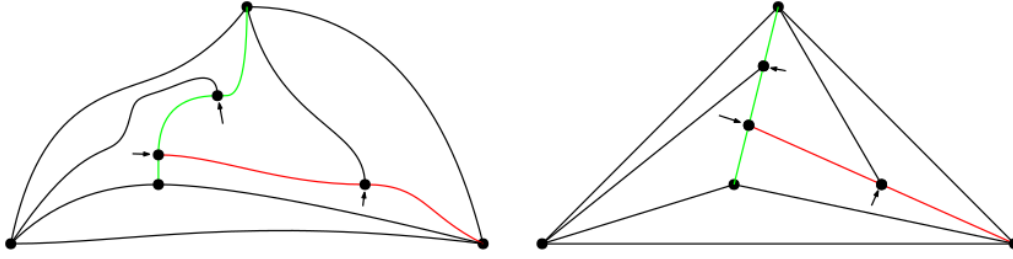


Abbildung 3.4 – Die Kanten von G als Kontaktfamilie von Pseudosegmenten induziert durch die Äquivalenzrelation. In rot und grün die beiden Äquivalenzklassen bzw. Kurven, die mehr als eine Kante beinhalten.

Definition 3.8. Sei Σ ein Kontaktfamilie von Pseudosegmenten und $S \subseteq \Sigma$. Wir nennen einen Punkt $p \in S$ einen *freien Punkt*, falls er die folgenden Bedingungen erfüllt.

- p ist ein Endpunkt eines Pseudosegmentes aus S .
- p liegt nicht im Inneren eines Pseudosegmentes aus S .
- p liegt am äußeren Rand von S .
- p ist entweder eine Aufhängung von G oder berührt ein Pseudosegment, welches nicht zu S gehört.

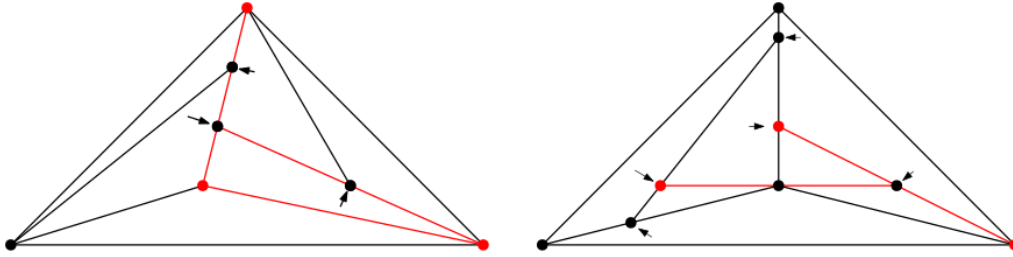


Abbildung 3.5 – Zwei SLTRs mit Teilfamilien von Pseudosegmenten in rot und den freien Punkten dieser Familien ebenfalls in rot.

Lemma 3.9. [AF13b, Lemma 2.8] Sei ϕ ein Gutes-FAA auf einem ebenen und intern 3-zusammenhängenden Graphen. Dann gilt:

E5 Jede Teilmenge $S \subseteq \Sigma_\phi$ mit $|S| \geq 2$ hat mindestens 3 freie Punkte.

Betrachte einen ebenen, intern 3-zusammenhängenden Graphen G mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem GFAA ϕ . Wenn die von ϕ induzierte Kontaktfamilie Σ_ϕ mit geradlinigen Segmenten darstellbar ist, dann ist diese Darstellung eine zu ϕ passende SLTR für G . Für den Fall, dass eine solche Darstellung $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$

existiert, können für die Koordinaten der Segmente oder genauer für die Knoten v von G auf den Segmenten im Folgenden Gleichungen aufgestellt werden. Die Positionen $f(v)$ der Knoten v in der Einbettung $f(G)$ müssen diese Gleichungen erfüllen. Das resultierende Gleichungssystem beinhaltet harmonische Funktionen. Bevor wir die Gleichungen, die unser Problem charakterisieren, in Abschnitt 3.1.2 angeben, werden wir zu harmonischen Funktionen einen kurzen Überblick geben.

3.1.1 Harmonische Funktionen auf planaren Graphen

Die Theorie zu (diskreten) harmonischen Funktionen auf planaren Graphen und ihre Anwendung wird in [LV99] ausführlich behandelt. Es handelt sich um eine Diskretisierung von allgemeinen harmonischen Funktionen, also glatten Funktionen $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\Delta f = 0$, wobei Δ den Laplace Operator beschreibt. Für diese Funktionen gilt, dass der Funktionswert an einem Punkt x , dem Durchschnitt der Funktionswerte auf einem Ball um x entspricht.

Dies führt zu der folgenden Definition im diskreten Fall.

Definition 3.10 (Harmonische Funktionen). Sei $G = (V, E)$ ein planarer zusammenhängender Graph und $S \subseteq V$. Eine Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir am Knoten $v \in V$ *harmonisch*, falls gilt:

$$\text{H1} \quad \sum_{u \in N(v)} (g(u) - g(v)) = 0$$

Wir können H1 durch das hinzufügen einer nichtnegativen Gewichtsfunktion $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ verallgemeinern. Es gilt $\lambda(v, w) = \lambda_{vw}$.

$$\text{H2} \quad \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} (g(u) - g(v)) = 0$$

Ein Knoten für den g nicht harmonisch ist, nennen wir *Pol*.

Theorem 3.11. [LV99, Theorem 3.1.2] Für jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq V$ und jede Funktion $g_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau eine Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, die g_S auf V fortsetzt, sodass g in jedem Knoten $v \in V \setminus S$ harmonisch ist. Wir nennen sie die *harmonische Fortsetzung von g_S auf V* .

Ein bekanntes Resultat, dass sich in Form harmonischer Funktionen darstellen lässt, ist Tuttés *rubber-band-representation* aus [Tut63], die konvexe Zeichnungen für planare Graphen liefert. Man stelle sich einen planaren Graphen vor, bei dem jede Kante durch ein idealisiertes Gummiband² ersetzt wird. Fixiere für den Moment alle Knoten in einem beliebigen Punkt. Wähle nun ein äußeres Gebiet f_{aus} . Die Menge $S \subseteq V$ seien die zu f_{aus} adjazenten Knoten. Nun fixieren wir diese Knoten in zyklischer Reihenfolge und in gleichen Abständen auf einem Kreis in der Ebene. Dies definiert $f_x : S \rightarrow \mathbb{R}$

²Die Gummibänder müssen das Hook'sche Gesetz erfüllen, sodass eine Streckung auf Länge l genau Kraft l benötigt.

und $f_y : S \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn wir nun die restlichen Knoten loslassen, dann werden sie von den Gummibändern in eine neue Position gezogen. Das resultierende Gleichgewicht, das genau dann entsteht, wenn H1 für beide Komponenten von f erfüllt ist, entspricht der (komponentenweisen) harmonischen Fortsetzung von $f = (f_x, f_y)$ auf V , wobei $f(v)$ genau der Position von v in der resultierenden Einbettung entspricht und S die Menge der Pole von f ist. Wir können die Kanten zusätzlich noch mit nicht negativen Gewichten λ_{vw} , versehen um die Einbettung zu verändern. Das folgende Theorem ist das Hauptresultat aus [Tut63].

Theorem 3.12. *Sei G ein planarer Graph, dann ist eine Gummiband-Representation (rubber-band-representation) von G eine planare Einbettung in der Ebene.*

TODO Bild

3.1.2 Das resultierende Gleichungssystem

Die Theorie zu harmonischen Funktionen lässt sich auf SLTRs anwenden. Sei G ein planarer Graph und ϕ ein FAA. Nehme für den Moment an, es existiert eine geradlinige Darstellung der Pseudosegmente Σ_ϕ . Wir haben also eine geradlinige Einbettung $f(G)$ der von ϕ induzierten Segmente.

Es gilt für jeden Knoten v im Inneren eines Segmentes, also für jeden zugewiesenen Knoten, dass er auf einer Gerade zwischen seinen beiden benachbarten Knoten u, w auf dem Segment liegen muss. Diese Eigenschaft liefert die komponentenweisen Bedingungen

$$\begin{aligned} f_x(v) &= \lambda_v f_x(u) + (1 - \lambda_v) f_x(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1) \\ f_y(v) &= \lambda_v f_y(u) + (1 - \lambda_v) f_y(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für die nicht zugewiesenen Knoten aus G muss in einer SLTR gelten, dass sie sich in der konvexen Hülle ihrer Nachbarn befinden. Wir bilden einen (gewichteten) Schwerpunkt und erhalten komponentenweise

$$\begin{aligned} f_x(v) &= \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f_x(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} \geq 0. \\ f_y(v) &= \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f_y(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Somit erfüllt die so gegebene Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f = (f_x, f_y)$ und passend gewählten λ wegen (3.1) und (3.2) in beiden Komponenten H2. Es handelt sich somit bei f_x und f_y um harmonische Funktionen, mit den Polen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nach Theorem 3.11, existiert für jede, den Beschränkungen entsprechende Wahl von λ , somit genau eine Funktion $f = (f_x, f_y)$, welche die Gleichungen 3.1 und 3.2 erfüllt.

Dies führt uns zum Hauptresultat aus [AF13b]:

Theorem 3.13. *Sei G ein intern-3-zusammenhängender, ebener Graph und Σ eine Familie von Pseudosegmenten, induziert von einem FAA, sodass jede Teilfamilie*

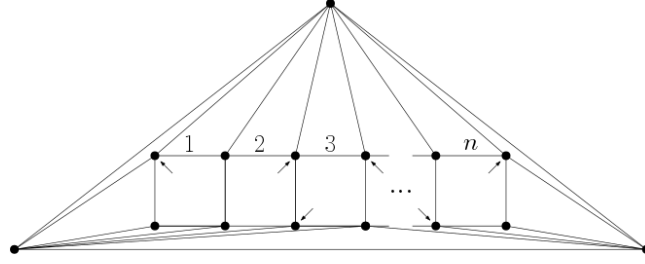


Abbildung 3.6 – Ein Graph mit exponentiell vielen FAAs.

$S \subset \Sigma$ entweder mindestens drei freie Punkte hat, oder maximal ein Element enthält. Dann induziert die eindeutige Lösung $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ des aus Σ resultierenden Gleichungssystems eine SLTR.

Bemerkung. Dies bedeutet, dass die notwendigen Bedingungen E4 und E5, die in Lemma 3.9 und in Proposition 3.5 festgehaltenen wurden, auch hinreichende Bedingungen sind. Falls wir schon ein Gutes-FAA gefunden haben, dann können wir mit Hilfe des obigen Ansatzes auch eine Einbettung in der Ebene erhalten. Es gilt jedoch für viele Graphen, dass sie, wie in Beispiel 3.14, exponentiell vielen FAAs besitzen. Selbst wenn wir die hinreichende Bedingung E4 in polynomineller Zeit überprüfen könnten, erreichen wir auf diesem Weg keinen schnellen Algorithmus.

Aerts und Felsner werfen am Ende von [AF13b] die Frage nach einer guten Wahl von λ auf und wie dies die resultierenden Einbettungen beeinflussen kann. Kapitel 5 wird einer möglichen Antwort dieser Frage nachgehen.

Beispiel 3.14. Betrachten wir eine zusammenhängende Kette von n Quadraten in der Ebene und verbinden wir ihre Eckpunkte mit drei Aufhängungen a_1, a_2, a_3 , welche ein Dreieck bilden. Der so erzeugte Graph G hat $2n + 5$ Knoten und ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Wir wollen nun ein FAA für diesen Graphen erstellen (welches nicht zwangsläufig eine SLTR zulässt). Wir müssen für ein FAA jedem der inneren Quadrate einen Winkel zuordnen. Wenn wir von links beginnen und nach rechts laufen, können wir in jedem der n inneren Quadrate mindestens aus drei Winkeln auswählen um ein FAA zu erstellen. Es wurde höchstens einer der beiden Knoten auf der linken Seite von Quadrat i im Schritt zuvor zugewiesen. Somit existieren mehr als 3^n FAAs für G .

3.2 Ecken kompatible Paare

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einer zweiten Charakterisierung von SLTRs auf planaren Graphen nach [AF15] beschäftigen, die eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und FAAs herstellt und so zu einer hinreichenden Bedingung für SLTRs führt. Zum Einstieg folgt die Definition dieses Zusammenhangs.

Definition 3.15 (Ecken Kompatibilität). Ein Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ nenne wir *Ecken kompatibel*, falls:

- K1 Das Schnyder Labeling σ und das FAA ϕ die selben Aufhängungen nutzen, und
- K2 Die drei Ecken aus ϕ in jedem inneren Gebiet drei unterschiedliche Label in σ haben.

Der Rest dieses Kapitels wird sich mit dem Beweis beschäftigen, dass zu jedem SLTR (mindestens ein) Ecken kompatibles Paar existiert und das anders herum jedes Ecken kompatible Paar eine SLTR induziert.

Theorem 3.16. *Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. G besitzt genau dann eine SLTR, wenn ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ existiert.*

TODO Beispiel oder Bild!!

Wir beweisen zuerst die (deutlich einfachere) Rückrichtung des Theorems. Hier können wir die durch das in Abschnitt 2.7 erklärte *face-counting* erhaltene Einbettung nutzen, um zu zeigen, dass jeder begrenzende Zykel γ mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken besitzt.

Lemma 3.17. *Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Falls ein Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ Ecken kompatibel ist, dann hat jeder begrenzende Zykel γ , der nicht von einem Pfad induziert wird, mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken im Bezug auf ϕ .*

Beweis: Sei γ ein begrenzender Zykel und F_{in} die Menge der inneren Gebiete von G . Seien $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0)$ und $\alpha_3 = (0, 0)$ die Bilder der Aufhängungen und D die durch *face counting* erhaltende Zeichnung von G mit den Ecken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ein Beispiel einer solchen Zeichnung findet sich in Abbildung 2.7. Betrachte nun den begrenzenden Zykel γ in D . Wir schieben nun, wie in Abbildung 3.7 illustriert, ausgehend von α_i die Geraden $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ über den Graphen. Sei M_i die Menge der zuerst von $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ getroffenen Knoten von γ für $i \in (1, 2, 3)$.

Beobachtung 1 *Alle Knoten um ein inneres Gebiet f mit Label i in f werden von der Gerade $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ zum gleichen Zeitpunkt getroffen. Dies folgt direkt aus Proposition 2.12 W5, weil alle Knoten mit dem selben Label in der Zeichnung auf $c_i(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ platziert werden.*

Beobachtung 2 *Sei $v \in M_i$. Alle Winkel an v im Inneren von γ haben das Label i . Die Geraden teilen allen, außer höchstens drei, Winkeln um einen Knoten eindeutig ein Label zu (siehe Abbildung 3.8). Die Winkel an v , die von a_i aus gesehen vollständig auf der anderen Seite von $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ liegen, haben Label i .*

Nach Beobachtung 2 sind die Mengen M_1, M_2 und M_3 disjunkt. Wir suchen nun nach drei kombinatorisch konvexen Ecken von γ . Das FAA und das Schnyder Labeling sind Ecken kompatibel und somit hat jedes Gebiet $f \in F_{in}$ einen Winkel mit Label

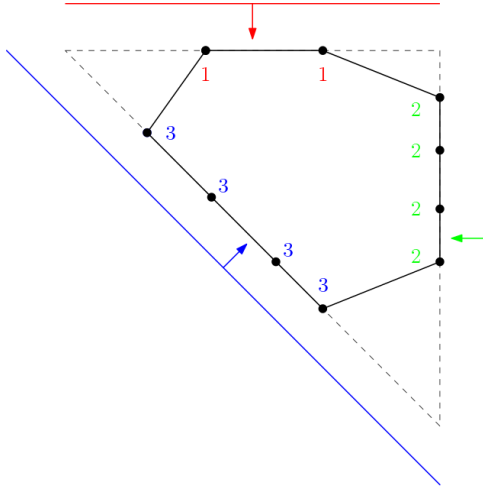


Abbildung 3.7 – Die drei Geraden die wir von den Aufhängungen aus über den Graphen schieben.

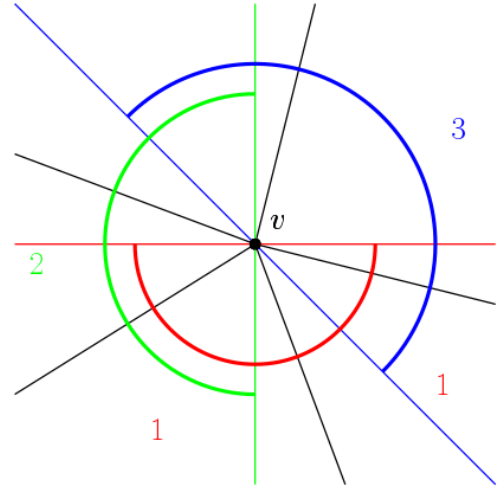


Abbildung 3.8 – Winkel die komplett gegenüber der Geraden i liegen haben Label i .

i . Also liegt in jeder Menge M_i ein Knoten v_i , der vom FAA nicht einem Gebiet innerhalb von γ zugewiesen wird. Nehmen wir an $a_i \notin M_i$, denn sonst hätten wir nach E1 eine Ecke gefunden. Da D eine konvexe Zeichnung ist muss v_i einen Nachbarn außerhalb von γ besitzen. Somit liegt v_i auf γ , ist nicht in γ zugewiesen und hat einen Nachbarn außerhalb von γ . v_i erfüllt also E2 und somit hat jeder begrenzende Zykel drei kombinatorisch konvexe Ecken (jeweils eine aus jedem M_i). \square

Zusammen mit Theorem 3.13 folgt, dass es sich bei dem FAA um ein Gutes-FAA handelt. Somit induziert das Ecken kompatible Paar ein SLTR von G .

Machen wir uns an den Beweis der Hinrichtung. Zu jedem SLTR können wir ein eindeutiges FAA erstellen indem wir die flachen Winkel der SLTR im FAA zuweisen. Wir müssen also zeigen, dass zu jeder SLTR ein Schnyder Labeling existiert, das zusammen mit dem induzierten FAA ein Ecken kompatibles Paar bildet. Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, der (mindestens) eine SLTR besitzt. Sei Δ eine SLTR von G und sei ϕ das von Δ induzierte FAA.

Vor dem nächsten Lemma müssen wir zwei geometrische Objekte einführen. Beispiele finden sich in Abbildung 3.9.

Definition 3.18 (Unterteilendes Dreieck). Ein *unterteilendes Dreieck* ist ein Dreieck in der Zeichnung einer SLTR von G , sodass gilt:

- Jeder Knoten auf dem Rand des Dreiecks (der keine Ecke des Dreiecks ist) ist entweder außerhalb oder innerhalb des Dreiecks zugewiesen

- Es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn außerhalb des Dreiecks hat und es existiert ein Knoten (der keine Ecke ist), der keine Nachbarn im Inneren des Dreiecks hat.

Dieses Dreieck kann Teile des Randes der Zeichnung beinhalten.

Definition 3.19 (teilendes Segment). Ein *teilendes Segment* eines SLTR von G ist eine Menge von Kanten $\{e_1, \dots, e_m\}$, die alle auf einer Gerade liegen, sodass gilt:

- Die Vereinigung der Kanten trennt die Zeichnung in zwei nichtleere Teile.
- Jeder innere Knoten v auf dem Segment ist einem Gebiet zugeordnet, dass zwei Kanten beinhaltet die auf dem Segment liegen. Diese beiden Kanten haben v als Endpunkt.

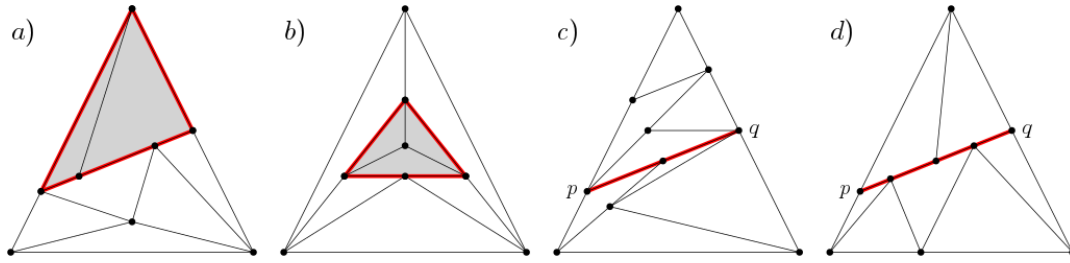


Abbildung 3.9 – Beispiele von unterteilenden Dreiecken in a) und b) und teilenden Segmenten in c) und d) jeweils in rot.

Um zu zeigen, dass wir zu jeder SLTR ein passendes Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) finden führen wir einen Widerspruchsbeweis. Sei G , ein kleinstmögliches Gegenbeispiel, zu dem kein Paar existiert. Damit seien hier zuerst die minimale Anzahl an Knoten und darauf folgend die kleinste Anzahl von Kanten gemeint. Sei Δ eine SLTR von G , ϕ das induzierte FAA und a_1, a_2 und a_3 die Aufhängungen von Δ .

Wir zeigen zuerst zwei Eigenschaften von Δ .

Lemma 3.20. *Ein minimales Gegenbeispiel Δ hat kein unterteilendes Dreieck.*

Beweis: Nehmen wir an, dass Δ ein unterteilendes Dreieck mit den Ecken (a, b, c) beinhaltet. Seien Δ_1 und Δ_2 die Teile von Δ die alles außerhalb (1) und innerhalb (2) des Dreiecks beinhalten. Der Rand des Dreiecks (a, b, c) liegt in beiden Teilen.

Wir ersetzen Knoten auf dem Rand des Dreiecks die Grad zwei in Δ_i haben mit einer Kante zwischen ihren Nachbarn. Somit sind Δ_1 und Δ_2 SLTRs mit weniger Knoten als Δ . Da sie weniger Knoten haben als Δ können sie keine Gegenbeispiele sein und es existieren zu den SLTRs Δ_i Ecken kompatible Paare (σ_i, ϕ_i) , wobei die ϕ_i die induzierten FAAs von Δ_i sind. Setzen wir die Paare zusammen kommen wir zu einen Widerspruch. Die Ecken a, b, c sind die Aufhängungen von Δ_2 . Wir wählen ihre Label so, dass sie mit den inneren Labeln des (jetzt) leeren Dreiecks in Δ_1 übereinstimmen³.

³Wir können die Label beliebig umbenennen, ohne das Schnyder Labeling zu verändern.

Die auf diese Weise kombinierten Schnyder Labelings σ_1 und σ_2 ergeben ein Schnyder Labeling auf G . Die FAAs ϕ_1 und ϕ_2 ergeben zusammen, wenn wir die Zuweisungen an den äußeren Knoten von Δ_2 und den am leeren Dreieck liegenden Knoten von Δ_1 anpassen, ein FAA ϕ für G . Somit folgt die Ecken Kompatibilität aus der Tatsache, dass (σ_1, ϕ_1) und (σ_2, ϕ_2) Ecken kompatibel sind. Die SLTR Δ induziert somit ein Ecken kompatibles Paar und kann kein Gegenbeispiel sein. Δ kann kein unterteilendes Dreieck haben. \square

Lemma 3.21. *Ein minimales Gegenbeispiel Δ hat kein teilendes Segment.*

Bemerkung. Als Vorgriff auf den Beweis bedeutet dies insbesondere, dass in Δ für jede Aufhängung $\deg(a_i) \geq 3$ gelten muss.

Beweis: Angenommen Δ hat ein teilendes Segment mit den Endpunkten p und q . Falls auf beiden Seiten des teilenden Segmentes eine Aufhängung mit Grad größer als zwei liegt, dann wird ein unterteilendes Dreieck in Δ induziert. In diesem Fall existieren sowohl Knoten (auf dem Inneren des Segmentes), die keine Nachbarn links des teilenden Segmentes besitzen, als auch Knoten die keine Nachbarn rechts des teilenden Segmentes besitzen. Man kann dies anhand von Abbildung 3.9 d) nachvollziehen. Angenommen es handelt sich bei p oder q um eine Aufhängung und auf der einen Seite des Segmentes liegt nur eine Aufhängung a_i . Dann existiert mit $\Delta' = \Delta \setminus \{a_1\}$ ein kleineres SLTR (welches dann kein Gegenbeispiel ist) und aus diesem lässt sich ein Ecken kompatibles Paar für Δ konstruieren. Es müssen also auf beiden Seiten des Segmentes mindestens zwei Knoten liegen und somit existiert wieder ein unterteilendes Dreieck. Wir können also annehmen, dass das teilende Segment zwischen p und q die Aufhängung a_1 von Grad zwei abtrennt. p, q und a_1 bilden somit ein Dreieck. Wir betrachten zwei Fälle. Entweder das teilende Segment besteht nur aus der Kante (p, q) (Fall 1) oder es existiert mindestens ein weiterer Knoten auf dem Segment (Fall 2).

1. Fall: Das teilende Segment besteht nur aus der Kante (p, q) . Angenommen q hat Grad drei und q' sei der dritte Nachbar von q . Dann existiert eine Gerade zwischen q' und p mit keinen Kanten in das Dreieck p, q, q' . Somit existiert ein unterteilendes Dreieck mit den Ecken p, q', a_1 (siehe Abbildung 3.10 a). Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 3.20 und es folgt $\deg(p), \deg(q) \geq 4$. Da $\deg(a_1) = 2$ gelten muss und G intern-3-zusammenhängend ist liegt a_1 alleine auf der einen Seite des Segments und alle anderen Nachbarn von p und q auf der anderen. Wir behaupten, dass mindestens eine der Kanten (a_1, p) und (a_1, q) kontrahierbar ist, sodass der resultierende Graph eine SLTR besitzt. Die Zuweisungen des FAA bleiben, bis auf bei p und q , gleich (siehe Abbildung 3.10 b). Dieser Schritt ist nicht trivial. Wir nutzen als Kriterium die begrenzenden Zykel aus Definition 3.15. Wir wollen zeigen, dass für eine der Kontraktion wieder gilt, dass jeder begrenzende Zykel drei kombinatorisch konvexe Ecken bezüglich des FAA hat. Damit dies für keine der beiden Kontraktionen gilt, müssten zwei begrenzende Zykel γ_v, γ_w mit genau drei kombinatorisch konvexen Ecken, p, q und v respektive

w , existieren (siehe Abbildung 3.10 c). Nur dann induziert die Kontraktion von (a_1, p) und (a_1, q) jeweils einen Zykel mit nur zwei kombinatorisch konvexen Ecken. Und somit hätte der resultierende Graph keine SLTR.

Dieser Fall kann aber nicht auftreten. Seien v, w die Ecken dieses Zykel. Dann existieren Pfade P_{pw} und P_{qv} von p nach w und von q nach v . Diese Pfade sind Teil von γ_v beziehungsweise γ_w und enthalten somit keine kombinatorisch konvexen Ecken mit Ausnahme der Endknoten. Die Winkel an diesen Pfaden im Inneren der Zykel sind somit $\geq \pi$. Sei z der Knoten an dem sich P_{pw} und P_{qv} kreuzen (siehe Abbildung 3.10 c). Da z keine Ecke sein kann, muss z auf beiden Zykeln γ_v, γ_w zugewiesen sein. Somit müsste der Winkel im inneren der Zykel der an z von P_{pw} und P_{qv} eingeschlossen wird mindesten π sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme das Δ eine SLTR ist (siehe Abbildung 3.10 c).

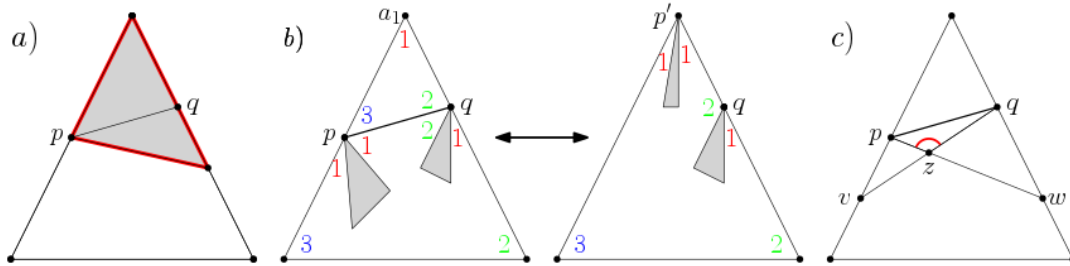


Abbildung 3.10 – a) Unterteilendes Dreieck bei Grad 3. b) Kantenkontraktion der Kante (a_1, p) . c) Die Pfade P_{pw} und P_{qv} , die bei der Kontraktion von (a_1, p) und (a_1, q) Degeneriertheit induzieren.

Es kann also mindestens eine der Kanten kontrahiert werden. Sei (a_1, p) diese Kante und G' der Graph der durch Kontraktion von (a_1, p) und das Löschen von (p, q) entsteht. Wir erhalten das FAA ϕ' durch löschen der Zuweisung von p aus ϕ . Der Knoten q ist weiterhin dem äußeren Gebiet zugewiesen. Da G' weniger Knoten als G hat ist er kein Gegenbeispiel und wir erhalten einen Schnyder Labeling σ' , das zusammen mit ϕ' ein Ecken kompatibles Paar bildet. Wir können ϕ' zu einem Labeling von G erweitern indem wir, beginnend bei a_1 , im Uhrzeigersinn die Label 1, 2 und 3 im Gebiet a_1, q, p einfügen. Wir erhalten ein Ecken kompatibles Paar.

2. Fall: Sei x der erste Nachbar von p auf dem teilenden Segment. Wir kontrahieren wieder die Kante (a_1, p) um G' zu erhalten und zeigen, dass G' eine SLTR besitzt. Bei der Kontraktion müssen keine weiteren Kanten gelöscht werden, wie in Abbildung 3.11 a) zu sehen ist. Wieder erhalten wir das FAA ϕ' auf G' indem wir die Zuweisung von p aus ϕ löschen. Zu jedem begrenzendem Pfad γ in G , existiert γ' in G' . Falls x eine kombinatorisch konvexe Ecke einer der Zykel γ ist, dann ist er dies auch für γ' , weil keine Kante an x gelöscht wurde.

Nun ist G' kein Gegenbeispiel und es existiert ein zu ϕ' kompatibles Schnyder

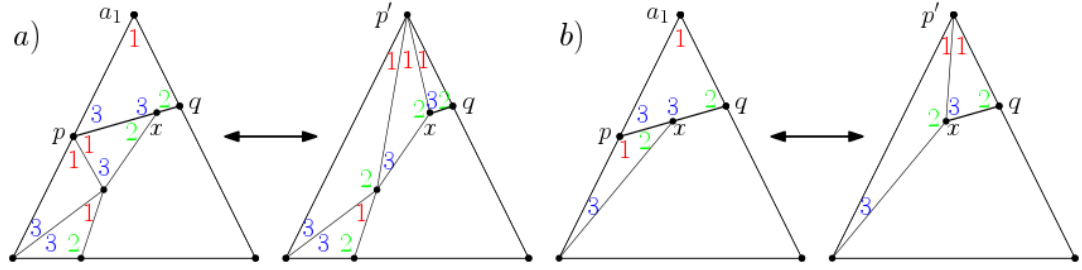


Abbildung 3.11 – Zwei Beispiele zur Kontraktion von (a_1, p) mit passendem Schnyder Labeling im zweiten Fall.

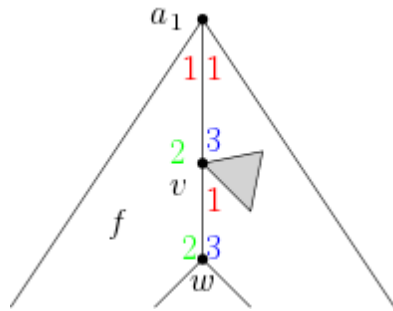
Labeling σ' . σ' ist erweiterbar zu einem Labeling σ für G . Füge Label 1 bei a_1 und 3 bei p ein. Δ kann also kein teilendes Segment haben.

□

Im nächsten Lemma wird eine Eigenschaft von Ecken kompatiblen Paaren festgehalten, die für den Beweis von Theorem 3.16 nützlich sein wird.

Lemma 3.22. *Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und einem Ecken kompatiblen Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling und einem FAA. Sei v ein Nachbar einer Aufhängung a_i . Falls v von ϕ einem Gebiet f zugewiesen ist, das a_i beinhaltet folgt, dass das Label von v in f nur einmal an v vorkommt. Alle anderen Winkel an v haben ein anderes Label.*

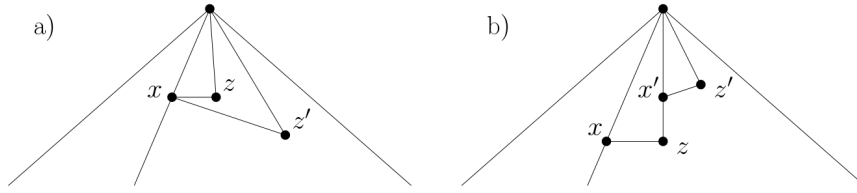
Beweis: Nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass v ein Nachbar von a_1 ist und v dem Gebiet f auf der linken Seite der Kante (a_1, v) zugeordnet ist (siehe Abbildung links). Sei w der andere Nachbar von v in f .



Die Kante (a_1, v) hat zwei mal Label 1, jeweils links und rechts von a_1 , und Label 2 am zugewiesenen Winkel von v . Nach Definition 2.7 muss an jeder Kante jedes Label einmal vorkommen. Somit ist das letzte Label an (a_1, v) von Typ 3. Da (σ, ϕ) ein kompatibles Paar ist, muss der Winkel von w in f ebenfalls Label 2 haben, da sonst keine Ecke mit Label 2 existiert (vergleiche Definition 2.6). Um die Kante (v, w) müssen ebenfalls alle Label vorkommen und somit müssen wir 1 und 3 (wie in der Abbildung links) einfügen.

Um v existieren nach L2 im Uhrzeigersinn drei nichtleere Intervalle mit Label 1, 2 und 3. Folglich können die verbliebenen unbekannten Label an v nur von Typ 1 oder 3 sein. □

Lemma 3.23. *In einem minimalen Gegenbeispiel Δ , kann kein Nachbar x_i einer der Aufhängungen a_i einem Gebiet zugeordnet sein, zu dessen Rand die Kante (a_i, x_i) gehört.*



Abbildungung 3.12 – a) Es können keine zwei Knoten mit geradlinigen Pfaden zu x und a_1 existieren. b) Falls a_1 kein Nachbar von z ist, dann müssen die Knoten x' und z' existieren.

Bemerkung. Lemma 3.23 impliziert insbesondere, dass die drei Aufhängungen a_1, a_2 und a_3 von Δ ein Dreieck bilden.

Beweis: Angenommen es existiert ein Nachbar x von a_1 , der dem Gebiet f zugewiesen ist und a_1 liegt auf dem Rand von f . Somit tut dies auch die Kante (a_1, x) . Wir werden einen kleineren Graphen G' erstellen und zeigen, dass G' eine SLTR zulässt. Das zu diesem SLTR korrespondierende Schnyder Labeling ϕ' kann man dann zu einem Labeling von G erweitern. Im besten Fall kontrahieren wir eine Kante in G um G' zu erhalten ... TODO

Sei z die dritte Ecke des Gebietes f mit den Ecken a_1 und x . Es kann nur ein solches z geben, da sonst (wie in Abbildung 3.12 a) illustriert) ein unterteilendes Dreieck in Δ existieren müsste. Wir haben aber in Lemma ?? gezeigt, dass dies nicht der Fall sein kann.

Wir können davon ausgehen, dass z und a_1 benachbart sind. Falls nicht muss ein Knoten x' zwischen z und a_1 liegen. Sei z' die Dritte Ecke im Gebiet mit Ecken a_1, x', z' . x' muss in diesem Gebiet eine Ecke sein, da es im zuerst betrachteten zugewiesen ist (siehe Abbildung 3.12, b)). Nun ist entweder z' ein Nachbar von a_1 , oder wir führen den Schritt noch einmal durch und finden x'' . Da a_1 endlich viele Nachbarn hat können wir den Schritt und endlich oft durchführen. Es existiert also ein Gebiet mit a_1, x und z als Ecken und x und z sind Nachbarn von a_1 . Es sei angemerkt, dass x am äusseren Gebiet von G liegen kann.

Wir werden je nach Fall unterschiedliche Ansätze wählen, um G' zu erzeugen. Es folgt eine Übersicht der Fälle, die in Abbildung 3.13 skizziert sind.

1. x und z sind Nachbarn.
 - a) Falls z dem Gebiet auf der anderen Seite von (x, z) zugewiesen ist, dann kontrahieren wir (x, z) .
 - b) Falls $\deg(z)=3$ gilt, löschen wir z und fügen eine passende Kante ein.
 - c) Falls (a_1, x) kontrahierbar ist wird sie kontrahiert.
 - d) Sonst wird die Kante (a_1, z) gelöscht.
2. x und z sind keine Nachbarn, dann kontrahieren wir die Kante (a_1, x) .

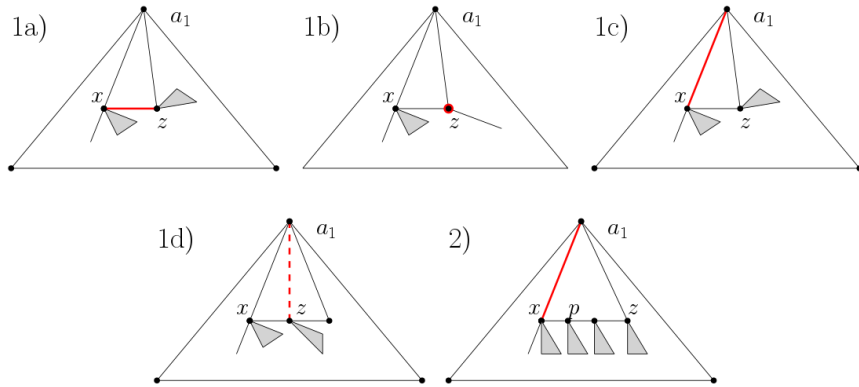


Abbildung 3.13 – Die möglichen Fälle bei der Erzeugung von G' . Die durchgezogenen roten Kanten werden kontrahiert. Der rote Knoten und die gestrichelte rote Kante gelöscht.

Für jeden dieser Fälle entsteht ein Graph G' der kleiner ist als G und eine SLTR zulässt. Da er kein Gegenbeispiel sein kann besitzt er ein Ecken kompatibles Paar. Das involvierte Schnyder Labeling lässt sich zu einem für G erweitern und dieses ist Ecken kompatibel mit dem von Δ induzierten FAA. Wir wenden uns jetzt den einzelnen Fällen im Genaueren zu.

Fall 1a: (x, z) ist eine Kante und somit s, z, a_1 ein echtes Dreieck. Um G' zu erzeugen, löschen wir (a_1, z) und kontrahieren (x, z) . Wir bezeichnen den neuen Knoten mit x' (siehe Abbildung ??). Wir erhalten das FAA ϕ' indem wir die Zuweisung von x aus ϕ löschen.

TODO ...

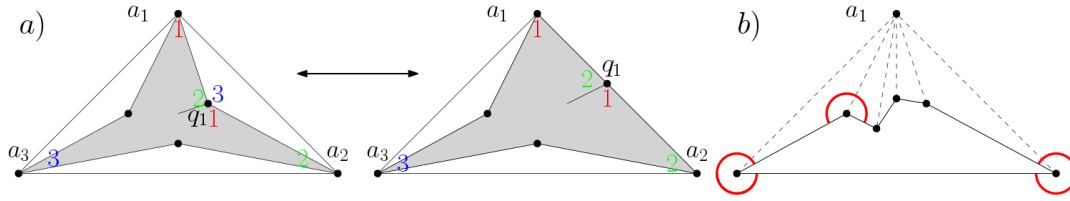
□

Lemma 3.24. *Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ der eine SLTR besitzt. Sei ϕ das von dieser SLTR induzierte FAA. Dann existiert ein Schnyder Labeling σ von G , sodass σ und ϕ ein Ecken kompatibles Paar bilden.*

Beweis: Angenommen das Lemma gilt nicht und sei G ein minimales Gegenbeispiel, wie zuvor mit der minimalen Anzahl an Knoten und unter diesen mit der minimalen Anzahl an Kanten. Sei Δ eine SLTR von G mit den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 und ϕ das induzierte FAA. Wir wollen wieder zu einem Widerspruch gelangen indem wir einen kleineren Graphen G' konstruieren, sodass die folgenden Punkte erfüllt sind.

- G' besitzt ein FAA ϕ' , welches von ϕ induziert wird.
- Das kompatible Paar (σ', ϕ') von G' induziert ein Schnyder Labeling von G .
- Das so erzeugte Schnyder Labeling σ ist Ecken kompatibel zu ϕ .

Diese Aussagen zusammen erzeugen einen Widerspruch zur Annahme, dass G ein Gegenbeispiel ist. Wir halten einige Beobachtungen aus den vorherigen Lemmata fest.



Abbildungung 3.14 – a) Die Erstellung eines Graphen G' mit weniger Kanten. b) Das Löschen einer Aufhängung resultiert in einem Graphen mit mindestens drei Außenwinkeln $\geq \pi$.

B1 Δ hat kein unterteilendes Dreieck.

B2 Δ hat kein teilendes Segment und somit keine Aufhängung von Grad 2.

B3 Kein Nachbar x_i einer Aufhängung a_i kann einem Gebiet zugeordnet sein, zu dessen Rand die Kante (a_i, x_i) gehört. Somit bilden die Aufhängungen von Δ ein Dreieck.

Aus B3 folgt, dass sowohl das äußere Gebiet als auch seine drei benachbarten Gebiete (echte) Dreiecke⁴ sind (siehe Abbildung 3.14 a). Wir werden sehen, dass der dritte Knoten in einem der inneren Dreiecke eine wichtige Rolle spielt. Wir bezeichnen den dritten Knoten im Dreieck, das a_i und a_{i+1} enthält, mit q_i (oder einfach nur q).

Der Beweis läuft in drei Schritten. Wir zeigen zuerst, dass in einem minimalen Gegenbeispiel Δ jedes q_i einem angrenzenden Gebiet zugeordnet sein muss (und in diesem einen flachen Winkel hat). Als nächstes zeigen wir, dass wir aus G einen Graphen G' erzeugen können, der einen zugewiesenen Knoten q' auf einer Kante (a_i, q') besitzt und erhalten einen Widerspruch zu B3. Zuletzt zeigen wir, dass wir aus einem Schnyder Labeling σ' von G' ein Labeling σ von G erzeugen können, sodass aus der Ecken Kompatibilität von σ' und ϕ' auch Kompatibilität von σ und ϕ folgt.

Sei f das von a_1, a_2 und q_1 gebildete Dreieck (siehe Abbildung 3.14 a). Angenommen q_1 wird von ϕ nicht zugeordnet. Entferne die Kante (a_1, a_2) und weise q_1 in dem äußeren Gebiet zu, um G' und σ' zu erhalten. Kein begrenzender Zykel enthält den neu zugewiesenen Winkel an q in seinem Inneren. Falls a_1 und a_2 auf einem begrenzenden Zykel γ' liegen, dann ist q keine kombinatorisch konvexe Ecke des korrespondierenden Zyklus γ in G , sondern muss in seinem Inneren liegen (sonst wäre γ' von einem Pfad induziert). Somit sind die kombinatorisch konvexen Ecken von γ auch kombinatorisch konvexen Ecken von γ' . Da Zykel, die q_1 nicht enthalten, keine Ecken verlieren, hat jeder begrenzende Zykel in G' mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken. Somit hat G' ein SLTR Δ' und die geraden Winkel werden von ϕ' induziert. Nun ist G' ein Graph mit weniger Kanten als G und somit kein Gegenbeispiel. Wir erhalten also ein Ecken kompatibles Paar (σ', ϕ') . Wir können dies wie in Abbildung 3.14 a) zu einem Paar für G erweitern, indem wir die Zuweisung für q_1 löschen und im Dreieck q_1, a_2, a_1 die passenden Label einfügen.

⁴Sie enthalten nur jeweils ihre drei Ecken als Knoten.

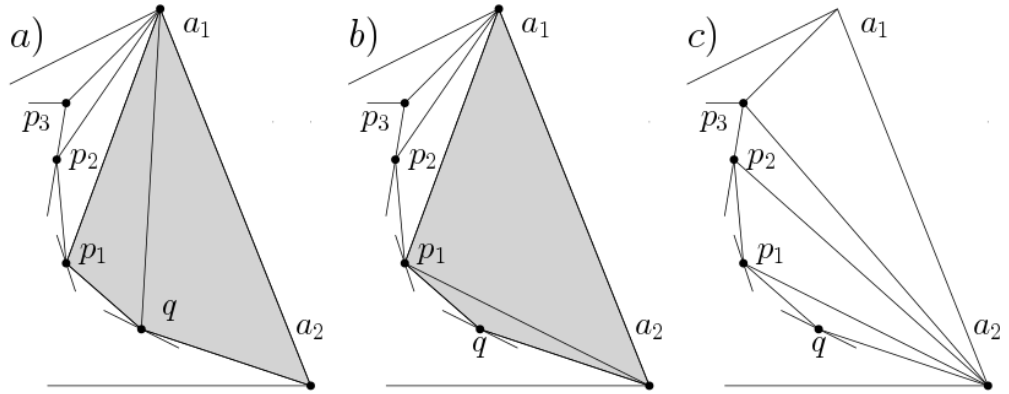


Abbildung 3.15 – Das schrittweise flippen von Kanten.

Nehmen wir also an, dass jedes der q_i in einem Gebiet einen flachen Winkel hat, also von ϕ einem Gebiet zugeordnet wird. Jede Aufhängung a_i muss mindestens einen Nachbarn x_i haben, der nicht zugeordnet ist. Nach Lemma 3.23 kann kein Nachbar einer Aufhängung einem Gebiet an dieser Aufhängung zugewiesen sein. Somit würde ein Widerspruch zur Tatsache entstehen, dass $G \setminus \{a_1\}$ drei konkave Außenwinkel hat (siehe Abbildung 3.14 b). Der Knoten mit Winkel $\geq \pi$, der keine Aufhängung ist, kann nicht zugeordnet sein. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit q der gemeinsame Nachbar von a_1 und a_2 . Der Knoten p_k sei der im Uhrzeigersinn von q ausgehend erste Nachbar von a_1 der nicht zugewiesen ist. In Abbildung 3.15 ist dies p_3 .

Wir werden einen Graphen G' (mit der gleichen Anzahl an Knoten und weniger Kanten) aus G erstellen. In diesem Graphen ist p_k einem Gebiet zugeordnet, auf dessen Rand die Kante (a_1, p_k) liegt. Nach Lemma 3.23 muss somit ein Schnyder Labeling σ' existieren, dass Ecken kompatibel mit dem induzierten FAA ϕ' von G' ist. Wir können aus σ' ein Schnyder Labeling σ für G bauen, dass kompatibel zu ϕ ist.

Sei $N_{a_1} = \{q, p_1, \dots, p_k, \dots, p_l, a_3, a_2\}$ die Menge der Nachbarn von a_1 , wobei wir mit q beginnen und im Uhrzeigersinn fortfahren. Durch löschen der Kante (a_1, q) und einfügen der Kante (a_2, p_1) erhalten wir einen neuen Graphen G_1 . Wir nennen den durchgeführten Kantenwechsel um G_1 zu erhalten (nach dem Englischen) einen *Flip*. Nun lässt G_1 die SLTR Δ_1 zu. Die vier Knoten a_1, a_2, q und p bilden in Δ ein konvexes Viereck⁵ mit nur einer Diagonalen im Inneren (vergleiche Abbildung 3.15 a, b). Die durch den Flip, also das wechseln der Diagonalen, erhaltene Zeichnung Δ_1 ist somit ebenfalls eine SLTR. Falls p_1 zugewiesen ist, wiederholen wir den Schritt (siehe Abbildung 3.15 c). Wir führen diesen Schritt nur so oft durch, bis wir bei p_k angekommen sind, dem ersten nicht zugewiesenen Nachbarn von a_1 . Wir führen einen letzten Flip im konvexen Viereck mit den Ecken a_1, a_2, p_{k-1}, p_k durch. Wir ersetzen also die Diagonale (a_1, p_{k-1}) durch (a_2, p_k) . Nach jedem Flip erhalten wir ein SLTR Δ_i und ein indiziertes Gutes-FAA ϕ_i von G_i . Somit ist ϕ_k ein Gutes-FAA.

Um nun den Graphen G' zu erhalten löschen wir die im letzten Flip hinzugefügte

⁵Auf der Geraden zwischen q und p_1 können sich zusätzliche Knoten befinden, doch dies spielt für unsere Argumentation keine Rolle.

Kante (a_2, p_k) (siehe Abbildung 3.16 b). G' hat somit eine Kante weniger als G . p_k ist in ϕ_k nicht zugewiesen. Sei ϕ' der Erweiterung von ϕ_k um die Zuweisung von p_k zum Gebiet a_1, a_2, p_{k-1}, p_k (siehe Abbildung 3.16 a). Dann ist ϕ' ein FAA von G' . Wir zeigen als Nächstes, dass es sich bei ϕ' um ein Gutes-FAA handelt.

Betrachten wir einen beliebigen begrenzenden Zykel γ' in G' und sei γ_k der korrespondierende Zykel in G_k . Wir müssen wieder zeigen, dass jeder Zykel mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken hat. Falls p_k nicht auf dem Rand von γ' liegt, folgt sofort, dass beide Zyklen die selben kombinatorisch konvexen Ecken haben (und somit beide mindestens drei). Betrachten wir also den Fall, dass p_k auf dem Rand von γ' liegt. Falls γ' nur einen Teil der Nachbarschaft von p_k beinhaltet und der zugewiesene Winkel an p_k nicht im Inneren von γ' liegt, dann ist p_k eine kombinatorisch konvexe Ecke von γ_k und somit auch von γ' . Sei also p_k keine kombinatorisch konvexe Ecke von γ' . Falls der zugewiesene Winkel an p_k im Inneren von γ' liegt, aber γ' nicht alle Nachbarn von p_k enthält, muss γ_k mindestens vier kombinatorisch konvexe Ecken besitzen. Die ersten drei sind a_1, a_2 und p_k und die vierte befindet sich auf dem Teil R von γ' zwischen p_k und a_2 ⁶. Somit hat γ' mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken. Betrachte den Fall, dass γ' alle Nachbarn von p_k beinhaltet, aber der zugewiesene Winkel nicht im Inneren von γ' liegt. In der SLTR Δ_k ist der Außenwinkel von γ_k am Knoten p_k somit nicht grösser als π und γ_k muss drei andere (kombinatorisch konvexe) Ecken haben. Diese sind auch kombinatorisch konvexe Ecken von γ' . Somit hat jeder begrenzende Zykel γ' in G' mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken und es folgt, dass ϕ' ein Gutes-FAA ist.

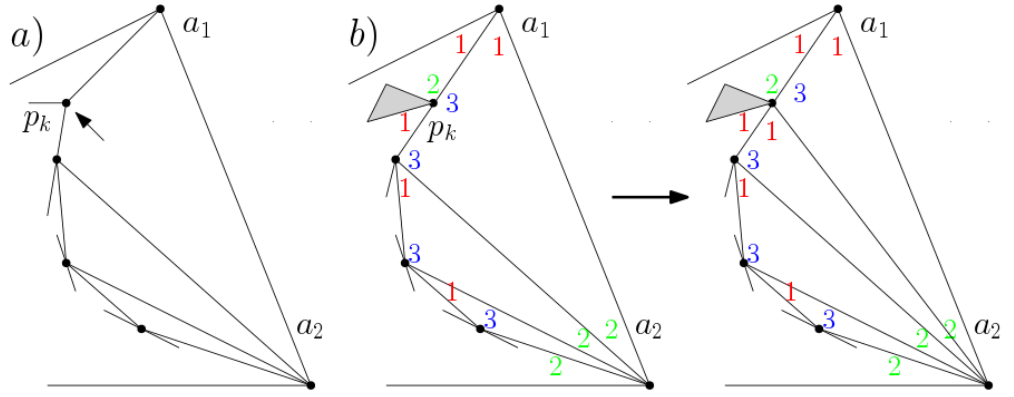
Da G' die gleiche Anzahl an Knoten und weniger Kanten als G kann er kein Gegenbeispiel sein. Es existiert also ein Schnyder Labeling σ' , das Ecken kompatibel zu ϕ' ist. Es bleibt zu zeigen, dass wir aus σ' ein Labeling für G erstellen können, welches dann Ecken kompatibel zu ϕ ist. Wir stützen uns hierfür auf die folgende Eigenschaft, die aus Definition 3.15 K2 folgt.

K3 In einem Ecken kompatiblen Paar (σ, ϕ) hat jeder zugewiesene Winkel in diesem Gebiet (mindestens) einen benachbarten Winkel mit dem selben Label.

Das Schnyder Labeling σ' ist eindeutig für Gebiete mit a_1 oder a_2 als Ecken und einer geflippten Kante auf dem Rand (siehe Abbildung 3.16 b). In einem ersten Schritt müssen wir (a_2, p_k) wieder einfügen und σ' zu σ_k erweitern (wie in Abbildung 3.16 b zu sehen ist).

Die Flips wurden entlang q, p_1, \dots, p_k durchgeführt und nach unserer Annahme haben die Knoten p_1, \dots, p_{k-1} von ϕ' zugewiesene Winkel in G' . Sei $p_0 = q$. Zwei Knoten p_{i-1} und p_i , mit $i \in \{1, \dots, k\}$ in dieser Folge sind nicht zwangsläufig benachbart, aber sie sind die Ecken des (dreieckigen) Gebietes a_2, p_{i-1}, p_i und alle Knoten auf dem Rand zwischen p_{i-1} und p_i sind diesem Gebiet zugewiesen (siehe Abbildung 3.17 a). Wir führen nun Schritt für Schritt, beginnend mit $i = k$, einen *rückwärts Flip* durch. Hierfür entfernen wir die Kante (p_i, a_2) und setzen die Kante (p_i, a_1) wieder

⁶Diese Ecke muss existieren, da der begrenzende Zykel $\tilde{\gamma}$, der sich aus R und der Kante (a_2, p_k) bildet, mindestens drei kombinatorisch konvexe Ecken in G_k hat.


 Abbildung 3.16 – Ein Schnyder Labeling von G_k erstellt aus einem Labeling von G' .

ein. Merke, dass p_i vor dem Schritt i einen zusätzlichen Nachbarn in G_i (im Verhältnis zu G) hat und somit gilt $\deg(p_i) \geq 4$, weil G intern-3-zusammenhängend ist. Wir benennen zwei der Winkel um den Knoten p_i . Sei α_i der gegen den Uhrzeigersinn auf die Kante (p_i, a_1) folgende Winkel und β_i der im Uhrzeigersinn auf die Kante zu (p_i, p_{i-1}) folgende Winkel an p_i . Dann handelt es sich bei diesen Winkeln, wegen $\deg(p_i) \geq 4$, nicht um den Selben. Bei jedem Schritt des rückwärts Flippens wird nun die folgende Invariante eingehalten.

Invariante Vor dem Schritt i hat der Knoten p_i die Label $2, 3, 1, 1$ im Uhrzeigersinn beginnend mit den Winkel α_i und Enden mit β_i (siehe Abbildung 3.17 a). Zusätzlich bilden das Schnyder Labeling σ'_i und das FAA ϕ'_i ein Ecken kompatibles Paar auf G'_i .

Beginnen wir mit G' . Hier sind die in Abbildung 3.16 b) gewählten Label der Winkel um p_k die einzig mögliche Wahl. Genauso verhält es sich nach dem Einfügen der Kante (a_2, p_k) . Wir erhalten den Graphen G'_k , das Schnyder Labeling σ'_k und das FAA ϕ'_k , wobei σ'_k und ϕ'_k ein Ecken kompatibles Paar bilden. Somit gilt die Invariante vor dem ersten Schritt.

Die Invariante gelte vor Schritt i . In Schritt i entfernen wir die Kante (a_2, p_i) und fügen die Kante (a_1, p_{i-1}) wieder in den Graphen ein. Vor dem rückwärts Flip, erfüllen die Label um p_i die Invariante und σ'_i und ϕ'_i sind ein Ecken kompatibles Paar. Die folgende Argumentation basiert auf Lemma 2.8 – die Kanten Regel besagt, dass alle drei Label im Uhrzeigersinn an jeder Kante vorkommen – und der Ecken Kompatibilität von (σ'_i, ϕ'_i) . Die Winkel an p_{i-1} links und rechts der Kante zu p_i haben die Label 2 und 3 (siehe Abbildung 3.17 b). Der Winkel zwischen p_i und a_2 kann nur Label 3 haben, da er an einer Kante zu a_2 liegt, an deren anderem Ende somit nur Label 2 vorkommt. Der andere Winkel muss Label 2 haben, da er entweder an einer Kante mit zwei 3ern auf der anderen Seite liegt (vergleiche Abbildung 3.17 a) oder er an der Kante (p_i, p_{i-1}) liegt, welche p_i nur Label 1 hat (vergleiche Abbildung 3.17 b).

Führen wir den rückwärts Flip durch. Wir löschen also die Kante (a_2, p_i) und fügen die Kante (a_1, p_{i-1}) ein, wie in Abbildung 3.17 b). Für fast alle Winkel folgt die Wahl des Labels eindeutig, da σ'_{i-1} ein Schnyder Labeling sein muss. Um die Invariante zu

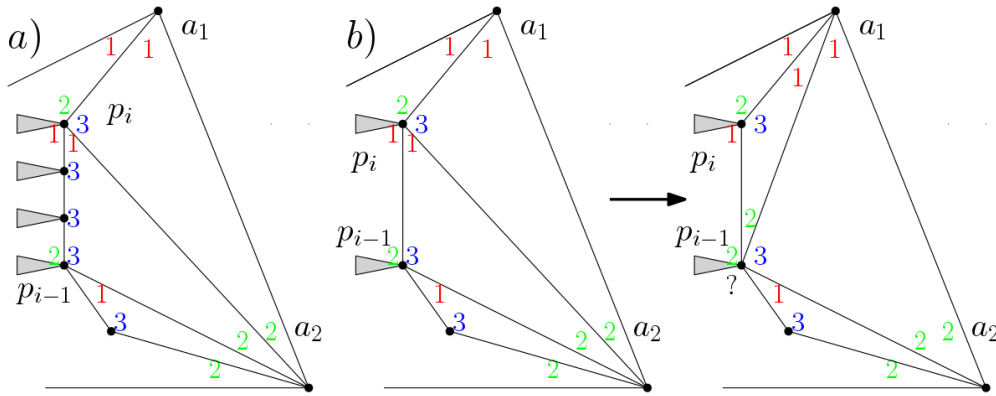


Abbildung 3.17 – a) Schnyder Labeling zwischen p_{i-1} und p_i . b) Änderung des Labelings beim rückwärts Flippen.

erfüllen müssen wir zeigen, dass wir dem mit einem Fragezeichen markierten Winkel in Abbildung 3.17 b) Label 1 geben können. Wenn er diese Label schon vor dem Schritt hatte ändert sich nichts und wir sind fertig. Angenommen er hatte nicht Label 1. Da es sich um ein Schnyder Labeling handelt ist die einzig andere Möglichkeit Label 2. Es muss sich bei diesem Winkel, um den an p_{i-1} zugewiesenen handeln. Dies folgt aus der Ecken Kompatibilität, da ein zugewiesener Winkel und seine beiden Nachbarn um einen Knoten nicht alle die gleichen Label haben können (siehe Abbildung 3.18 a). Sonst würde es zu einem Widerspruch kommen. Es existieren mindestens zwei weitere Winkel an p_{i-1} mit Label 2 (also insgesamt mindestens drei). Somit würde der Fall aus Abbildung 3.18 a) eintreten und ein angrenzendes Gebiet hätte keine Ecke mit Label 2. Die Winkel mit dem Fragezeichen muss somit zugewiesen sein.

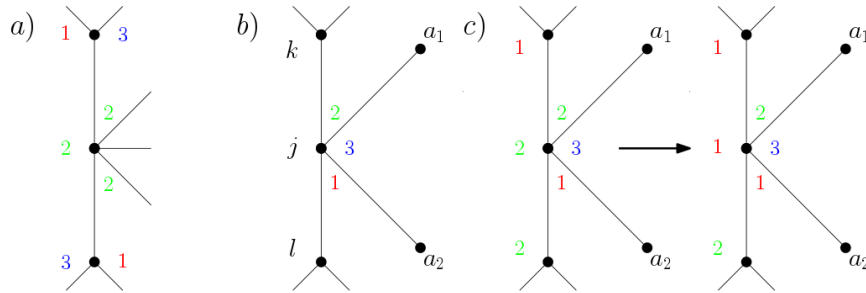


Abbildung 3.18 – a) Das Gebiet links kann keine Ecke mit Label 1 haben. b) Eine freie Wahl von Winkel in einem Schnyder Labeling. c) Nach der Änderung von Label 2 zu Label 1 am zugewiesenen Knoten liegt weiterhin ein Ecken kompatibles Paar vor.

Betrachte Abbildung 3.18 b). Wenn wir $j=2$ setzten, dann folgen sofort die Label in c). $k=1$ folgt aus der Kanten Regel, weil die Kante und p_{i-1} auf beiden Seiten Label 2 hat, und $l=2$, weil sonst das Gebiet auf der linken Seite keine Ecke mit Label 2 haben könnte. Wir können nun Label $j=1$ setzen ohne andere Label zu verändern. Wir erhalten ein Schnyder Labeling σ'_{i-1} (siehe Abbildung 3.18 c), das Ecken kompatibel

mit dem induzierten FAA ϕ'_{i-1} ist, da wir nur das Label eines zugewiesenen Winkels verändert haben.

Wir haben also Schritt i durchgeführt und die Invariante hat bestanden. Per Induktion erhalten wir ein Ecken kompatibles Paar aus einem Schnyder Labeling σ'_0 und einem FAA ϕ'_0 von G . Somit kann G kein Gegenbeispiel sein. Es folgt die Rückrichtung des Theorems. \square

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel erarbeitet um das folgende, weiter oben schon aufgeführte Theorem zu beweisen.

Theorem 3.16. *Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. G besitzt eine SLTR, genau dann wenn ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ existiert.*

Beweis von Theorem 3.16: Sei G ein ebener, intern-3-zusammenhängender Graph mit den Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$. Angenommen G besitzt ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ . Nach Lemma 3.17 existiert dann eine SLTR von G .

Angenommen G besitzt eine SLTR, dann existiert nach Lemma 3.24 ein Schnyder Labeling, das Ecken kompatibel mit dem von der SLTR induzierten FAA ist. \square

Theorem 3.16 liefert noch keinen direkten Weg um für einen Graphen die Frage zu beantworten ob er eine SLTR zulässt. Im nächsten Kapitel werden wir uns aber mit einem Algorithmus befassen, der den Zusammenhang aus Theorem 3.16 nutzt um für einen Graphen ein Gutes-FAA zu erkennen, falls er eine SLTR zulässt.

4 Algorithmen zur Erkennung von SLTRs

Im vorherigen Kapitel wurden Kriterien für die Existenz einer SLTR für G erarbeitet. Diese liefern allerdings nicht sofort einen Algorithmus, weder zur Frage nach der Existenz, noch für das Erlangen einer spezifischen SLTR. Dieses Kapitel wird sich diesem Thema zuwenden und einen von Aerts und Felsner in [AF15] erarbeiteten Algorithmus erläutern und analysieren.

4.1 SLTRs via Zwei-Fluss

Das Ziel ist es, für einen gegebenen ebenen intern-3-zusammenhängenden Graphen G mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 , sowohl einen Schnyder Wood als auch ein FAA jeweils als Lösung eines Fluss-Problems mit einer Quelle und Senke zu erhalten. Diese beiden werden dann in einem Zwei-Fluss-Problem kombiniert, sodass eine zulässige ganzzahlige Lösung ein Ecken-Kompatibles-Paar kodiert und somit eine SLTR resultiert. Wir beschäftigen uns also mit Multi-Fluss-Problemen auf gerichteten Graphen, die wir in Definition 2.17 eingeführt haben.

4.1.1 Schnyder-Wood-Fluss

Um einen Schnyder Wood als Fluss-Problem zu kodieren, kann man die in Abschnitt 2.3 eingeführten α_s -Orientierungen auf dem Abschluss von $G + G^*$ nutzen. Fusy zeigt in [Fus07] im Zuge der Untersuchung spezifischer α -Funktionen, dass sich α_s -Orientierungen von $G + G^*$ in linearer Zeit berechnen lassen, sodass wir auch einen Schnyder Wood auf G in linearer Zeit erhalten.

Sei ein ebener intern-3-zusammenhängender Graph G mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 gegeben. Machen wir uns an die Konstruktion eines Netzwerks \mathcal{N}_S , sodass ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_s auf \mathcal{N}_S einer α_s -Orientierung von $G + G^*$ entspricht¹. Nach Theorem 4.4 würde die aus φ_s erhaltene α_s -Orientierung somit auch einen Schnyder Wood auf G induzieren. Besonderes Augenmerk ist hier auf die Möglichkeit einer späteren Kombination mit einem weiteren Netzwerk gelegt, in welchem eine ganzzahlige Lösung einem FAA auf G entspricht, um ein kombiniertes Netzwerk zu erstellen.

Wie schon erwähnt ist $G + G^*$ bipartit, Kanten-Knoten haben Grad 4, Knoten-Knoten haben Grad $\deg(v)$ und Gebiets-Knoten haben Grad $|f|$. Für eine α_s -Orientierung muss nach Definition 4.4 A3 jeder Kanten-Knoten Ausgangsgrad 1, jeder Knoten-Knoten Eingangsgrad $\deg(v) - 3$ und jeder Gebiets-Knoten Eingangsgrad $|f| - 3$ haben. Die Kanten-Knoten am äußeren Gebiet sind in $G + G^*$ immer nach außen

¹Hier stehen die drei s jeweils für Schnyder um spätere Verwechslungen zu vermeiden.

orientiert. Somit reicht es, wenn wir nur die inneren Kanten-Kanten E_{in} betrachten und die Orientierung der äußeren Kanten voraussetzen.

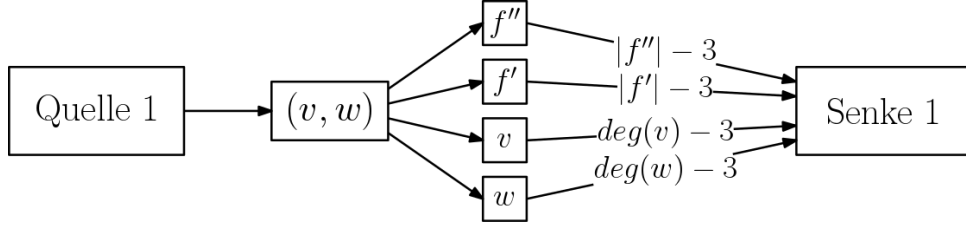


Abbildung 4.1 – Der Schnyder Wood Fluss durch eine innere Kante (v, w) . Die nicht beschrifteten Kanten haben Kapazität 1.

Das im Folgenden konstruierte Netzwerk ist in Abbildung 4.1 skizziert und unter dem Punkt Netzwerk 1 zusammengefasst. Das Netzwerk \mathcal{N}_S hat eine Quelle s und eine Senke t und einen Knoten für jeden Knoten aus $G + G^*$ (bis auf die äußeren Kanten). Es existieren Kanten von der Quelle zu jedem Kanten-Knoten $e \in E_{in}$ mit Kapazität 1. Von den Kanten-Knoten e zu inzidenten Knoten-Knoten v und Gebiets-Knoten $f \in F_{in}$ fügen wir ebenfalls Kanten mit Kapazität 1 ein. Merke, dass der Fluss auf diesen Kanten bei einer ganzzahligen Lösung eine α_s -Orientierung auf $G + G^*$ ergeben soll. Nun fügen wir noch Kanten von $f \in F_{in}$ zur Senke mit Kapazitäten $|f| - 3$, Kanten von den (inneren) Knoten-Knoten $v \in V_{in} = V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ zur Senke mit Kapazitäten $\deg(v) - 3$ und Kanten von den Aufhängungen a_i zur Senke mit Kapazitäten $\deg(a_i) - 2$. Die letzte Kapazität ergibt sich, da die Halbkante in $G + G^*$ von a_i aus immer nach außen orientiert. Wir müssen somit nur noch zwei andere Kanten von a_i weg orientieren. Der Bedarf des Netzwerkes entspricht der Anzahl der inneren Kanten von G . Fassen wir zusammen.

Netzwerk 1 (Schnyder Wood). Bei \mathcal{N}_S handelt es sich um ein gerichtetes Netzwerk, das auf Basis eines ebenen intern-3-zusammenhängenden Graphen G mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 erstellt wird, um einen Schnyder Wood auf G zu finden. Ein Ausschnitt ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

- \mathcal{N}_S hat eine Quelle s und eine Senke t
- Knoten in \mathcal{N}_S werden für jeden inneren Kante $e \in E_{in}$, jedes innere Gebiet $f \in F_{in}$ und jeden Knoten $v \in V$ aus G erzeugt.
- Es werden gerichtete Kanten der folgenden Typen in \mathcal{N}_S erzeugt:
 - (s, e) von der Quelle zu jeder inneren Kante mit $c(s, e) = 1$
 - $(e, v_1), (e, v_2)$ von jeder inneren Kante zu den Endknoten mit $c(e, v) = 1$
 - (e, f) von jeder inneren Kante zu adjazenten Gebieten mit $c(e, f) = 1$
 - (v, t) von den Knoten zur Senke mit $c(v, t) = 1$
 - (f, t) von den inneren Gebieten zur Senke mit $c(f, t) = |f| - 3$

- (a_i, t) von den Aufhängungen zur Senke mit $c(f, t) = \deg(a_i) - 2$
 - (v, t) von den restlichen Knoten zur Senke mit $c(f, t) = \deg(v) - 3$
 - \mathcal{N}_S hat Bedarf $d = |E_{in}|$
- \Rightarrow Ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_s existiert genau dann, wenn ein Schnyder Wood auf G existiert.

Proposition 4.1. *Sei G ein ebener intern-3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 und \mathcal{N}_S wie in Netzwerk 1 konstruiert. Ein ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_s auf \mathcal{N}_S existiert genau dann, wenn ein Schnyder Wood auf G zu den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 existiert. Insbesondere kodiert jeder Fluss einen Schnyder Wood.*

Beweis: Sei φ_s ein zulässiger ganzzahliger Fluss auf \mathcal{N}_S . Es gilt $|\varphi_s| = |E_{in}|$. Somit hat jede innere Kante-Knoten Ausgangsgrad 1. Weiter gilt

$$\sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 3 + \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) = |E_{in}|.$$

Somit sind die Kanten von den Kanten-Knoten und Knoten-Knoten ausgelastet. Der Fluss φ_s entlang einer Auskante von $e \in E_{in}$ in \mathcal{N}_S entspricht dann genau der Kante in $G + G^*$, die in der α_s -Orientierung von e weg orientiert wird. Durch die Knoten-Knoten v und Gebiets-Knoten f fließt Fluss auf $\deg(v) - 3$ bzw. $|f| - 3$ Kanten der von den Kanten-Knoten kommt. Somit lässt φ_s jeweils drei Kanten frei, denen wir noch keine Orientierung zugewiesen haben. Diese entsprechen somit den von v bzw. f weg orientierten Kanten einer α_s -Orientierung auf $G + G^*$. Somit hat jedes Gebiet und jeder Knoten den passenden Ausgangsgrad und φ_s kodiert eine α_s -Orientierung auf $G + G^*$. Auf analoge Weise lässt sich aus einer α_s -Orientierung ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_s erstellen. Es existiert also genau dann ein Schnyder Wood auf G , wenn eine ganzzahlige Lösung φ_s für \mathcal{N}_S existiert. \square

4.1.2 FAA-Fluss

Sei wieder ein ebener intern-3-zusammenhängender Graph G mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 gegeben. Ein FAA ordnet nun jedem Gebiet $|f| - 3$ flache Winkel zu und jeder Knoten darf maximal einem Gebiet zugeordnet werden. Die adjazenten Knoten um das äußere Gebiet, die keine Aufhängungen sind, müssen diesem zugewiesen werden. Wir konstruieren ein Netzwerk \mathcal{N}_F , für das ein ganzzahliger zulässiger Fluss einem FAA entspricht

Das im Folgenden konstruierte Netzwerk ist in Abbildung 4.2 skizziert und unter dem Punkt Netzwerk 2 zusammengefasst. Das Netzwerk \mathcal{N}_F hat jeweils eine Quelle und Senke. Wir erstellen in \mathcal{N}_F Knoten für jeden inneren Winkel (f, v) , mit $v \in V$ und $f \in F_{in}$, Knoten für alle inneren Gebiete $f \in F_{in}$ und für die inneren Knoten $v \in V_{in}$. Von der Quelle fügen wir Kanten mit Kapazität 1 zu jedem inneren Winkel (f, v) , und von jedem inneren Winkel (f, v) jeweils eine Kante zu f und zu v (falls $v \in V_{in}$) mit Kapazität 1 ein. Merke, dass so der Fluss von den Winkeln zu den inneren Knoten

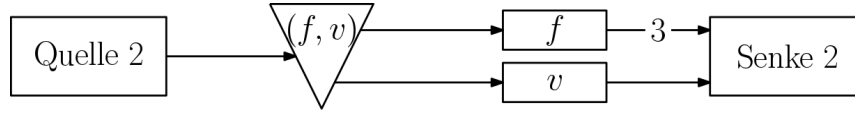


Abbildung 4.2 – Der FAA-Fluss durch einen Winkel (f, v) . Die nicht beschrifteten Kanten haben Kapazität 1.

einem FAA entspricht. Zuletzt erstellen wir Kanten von jedem inneren Gebiet f zur Senke mit Kapazität 3 und Kanten von jedem Knoten v zur Senke mit Kapazität 1 ein. Der Bedarf des Netzwerks ist $\sum_{f \in F_{in}} |f|$ und entspricht der Anzahl der inneren Winkel von G . Fassen wir zusammen.

Netzwerk 2 (FAA). Bei \mathcal{N}_F handelt es sich um ein gerichtetes Netzwerk, das auf Basis eines ebenen intern-3-zusammenhängenden Graphen G mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 erstellt wird, um ein FAA zu finden. Ein Ausschnitt ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

- \mathcal{N}_F hat eine Quelle s und eine Senke t
- Knoten in \mathcal{N}_F werden für jeden inneren Winkel $(f, v) \in W_{in}$, jedes innere Gebiet $f \in F_{in}$ und jeden Knoten $v \in V$ aus G erzeugt.
- Es werden gerichtete Kanten der folgenden Typen in \mathcal{N}_F erzeugt:
 - $(s, (f, v))$ von der Quelle zu jedem inneren Winkel mit $c(s, (f, v)) = 1$
 - $((f, v), v)$ von jedem inneren Winkel zum Knoten mit $c((f, v), v) = 1$
 - $((f, v), f)$ von jedem inneren Winkel zum Gebiet mit $c((f, v), f) = 1$
 - (f, t) von den inneren Gebieten zur Senke mit $c(f, t) = 3$
 - (v, t) von den Knoten zur Senke mit $c(v, t) = 1$
- \mathcal{N}_F hat Bedarf $d = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

\Rightarrow Ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_F existiert genau dann, wenn ein FAA existiert.

Proposition 4.2. *Sei G ein ebener intern-3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 und \mathcal{N}_F wie in Netzwerk 2 konstruiert. Ein ein zulässiger ganzzahliger Fluss φ_F auf \mathcal{N}_F existiert genau dann, wenn ein FAA auf G zu den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 existiert. Insbesondere kodiert jeder Fluss genau ein FAA.*

Beweis: Sei φ_F ein zulässiger ganzzahliger Fluss auf \mathcal{N}_F . Der Fluss auf einer Kante $((f, v), f)$ entspricht einer Ecke von f und Fluss auf $((f, v), t)$ der Zuweisung eines Knoten zu f . Zur Vereinfachung sprechen wir im Weiteren auch von Ecken- und Zuweisungs-Fluss. Somit wird jeder innere Winkel von φ_F entweder einem Gebiet zugewiesen oder als Ecke ausgezeichnet. Da die Kanten von den inneren Knoten zur Senke Kapazität eins haben kann jeder Knoten nur einmal zugewiesen werden. F2

ist somit erfüllt. Von jedem inneren Gebiet f fließt Fluss mit Stärke $|\varphi_s(f, t)| = 3$ zu Senke. Somit muss $|f| - 3$ Fluss durch zugewiesene Knoten gehen. F1 ist somit erfüllt. φ_F respektiert also die Bedingungen aus Definition 3.1 und es existieren nur dann FAAs auf G , wenn mindestens eine ganzzahlige Lösung für \mathcal{N}_F existiert. \square

Bemerkung. Das oben eingeführte Netzwerk 2 zur Bestimmung von FAAs lässt sich auch als Zwei-Fluss-Problem konstruieren. Wir trennen für Ecken- und Zuweisungs-Fluss die Quellen und Senken. Zu jedem Winkelknoten (f, v) fügen wir eine Kopie $(f, v)'$ ein und verbinden beide durch eine Kante mit Kapazität 1 (siehe Abbildung 4.3). In den ersten führt eine Kante von beiden Quellen mit Kapazität 1. Und vom zweiten aus führen Kanten zu f und v . Der Bedarf des Ecken-Flusses ist dann $3|F_{in}|$ und der Bedarf des Zuweisung-Flusses $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$.

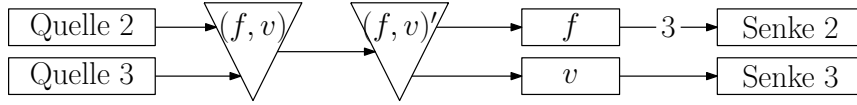


Abbildung 4.3 – Das Einfügen einer Kante und eines zweiten Winkel Knotens gewährt die Trennung von Winkel- und Zuweisungs-Fluss. Die nicht beschrifteten Kanten haben Kapazität 1.

Eine zulässige ganzzahlige Lösung $\varphi_F = (\varphi_e, \varphi_z)$ entspricht dann wieder einem FAA auf G . Aus der Ganzzahligkeit folgt, dass ein Winkel entweder von φ_e (Ecke) oder φ_z (Zuweisung) genutzt wird. Dies gewährleisten die Kanten zwischen den Winkelknoten, da sie immer nur von einem der beiden Flüsse genutzt werden können.

4.1.3 Ein Zwei-Fluss Netzwerk zur Erkennung von SLTRs

Im Verlauf des Kapitels haben wir nun sowohl für Schnyder Woods als auch für FAAs ein Netzwerk betrachtet, für das eine ganzzahlige Lösung einen Schnyder Wood bzw. ein FAA für einen ebenen Graphen G liefert. Wir wollen jetzt eine Kombination aus beiden erstellen die ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ kodiert.

Es folgt die Konstruktion eines Netzwerkes, wir bezeichnen es mit \mathcal{N}_G , welches diesen Wunsch erfüllt. Ein ganzzahliger Fluss φ kodiert dann ein Ecken kompatibles Paar und impliziert somit nach Theorem 3.16 eine SLTR für G . Es handelt sich hierbei um ein 2-Fluss-Netzwerk.

Wie oben in Abschnitt 4.1.2 erwähnt lässt sich ein FAA auch mit einem Zwei-Fluss kodieren und wir können Ecken- und Zuweisungs-Fluss mit den passenden Bedarfen getrennt betrachten. Wir müssen jetzt diese drei Flüsse, also Schnyder-, Ecken- und Zuweisungs-Fluss in einem Netzwerk kombinieren. In [AF15] ergeben Schnyder- und Ecken-Fluss zusammen Fluss von Typ 1 und der Zuweisungs-Fluss Typ 2. Wir wollen hier analog ein Netzwerk konstruieren in dem wir FAA- und Schnyder-Wood Fluss nicht trennen. Der Verständlichkeit wegen werden wir Pfade, die in einer Lösung von einem der drei Flussarten genutzt werden, *Schnyder-Pfad*, *Ecken-Pfad* und *Zuweisungs-Pfad* nennen.

Bei der Kombination der beiden oben konstruierten Netzwerke \mathcal{N}_S und \mathcal{N}_F zu \mathcal{N}_G müssen die Ecken Kompatibilität von Schnyder Labeling und FAA gewährleistet werden. K1 zu erfüllen, also die Nutzung der gleichen Aufhängungen von σ und ϕ , ist kein Problem. Allerdings müssen wir für die zweite Bedingung das Netzwerk etwas komplizierter machen. Betrachten wir als Basis $\mathcal{N}_S \cup \mathcal{N}_F$ und fürs erste nur das Teilnetzwerk um ein inneres Gebiet f , dann sehen wir, dass f in \mathcal{N}_S $|f| - 3$ Schnyder-Fluss aufnimmt, aber $|f|$ Einkanten in \mathcal{N}_S hat. Wir können die drei leeren Kanten für den Ecken-Fluss aus \mathcal{N}_F nutzen. Um K2 zu erfüllen, müssen gewährleisten, dass jede Ecke im Schnyder Labeling ein anderes Label hat. Betrachten wir also die von φ_S induzierte α_s -Orientierung auf dem Abschluss von $G + G^*$. Nach Theorem ?? erhalten wir in Bijektion stehende Schnyder Labelings auf G und G^* .

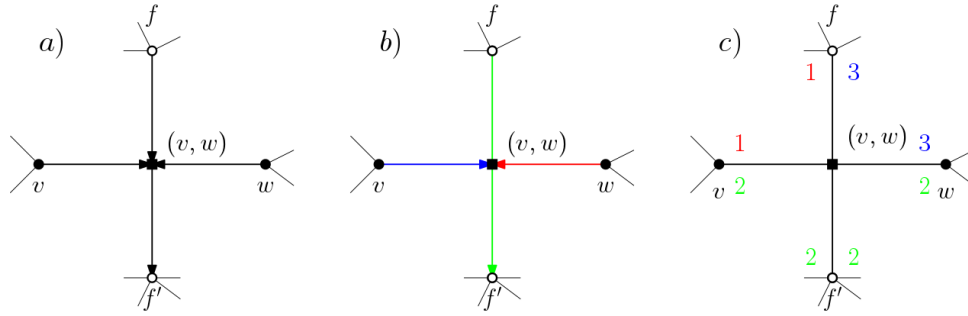


Abbildung 4.4 – a) Eine α_s -Orientierung um eine innere Kante von G . b) Teile der korrespondierenden Schnyder Woods auf G und G^* . c) Die induzierten Label, die für G und G^* gleich sind.

Für diese gilt, wie in Abbildung 4.4 skizziert, dass das Label der Ecke eines Gebietes in G und das ihr in $G + G^*$ gegenüberliegenden Label der Ecke eines Gebiets um einen Knoten in G^* gleich sind. Für eine zu v in G^* hin orientierte Kante folgt aus der Bijektion zwischen Schnyder Labelings und Schnyder Woods aus Abschnitt 2.2, dass die Label links und rechts am Ende dieser Kante gleich sind. Somit sind auch die Label in G gleich und wir können die folgende Eigenschaft festhalten.

- A1 Die Label, des von α_s induzierten Schnyder Wood auf G , sind zwischen zwei aufeinander folgenden zu f orientierten Kanten gleich.

Da es genau drei zu f orientierte Kanten gibt müssen wir also dafür sorgen, dass für jedes Paar dieser Kanten eine Ecke zwischen ihnen liegt, da so die drei Ecken unterschiedliche Label haben und wir K2 erfüllen. Um dies zu erlangen implementieren wir eine zyklische Struktur um jedes innere Gebiet, wie in Abbildung ?? skizziert.

Betrachten wir zuerst den Schnyder-Fluss. Dieser wird Fluss von Typ 1, also von Quelle 1 zu Senke 1 sein. Für einen Schnyder-Pfad der durch einen Knoten v führt hat sich nichts geändert. Der in der Skizze eingezeichnete Schnyder-Pfad der durch f führt passiert davor einen extra Knoten, wir nennen ihn *kleines Quadrat* der gewährleisten soll, dass von Seite des Gebietes aus entweder ein Schnyder-Pfad oder ein Ecken-Pfad

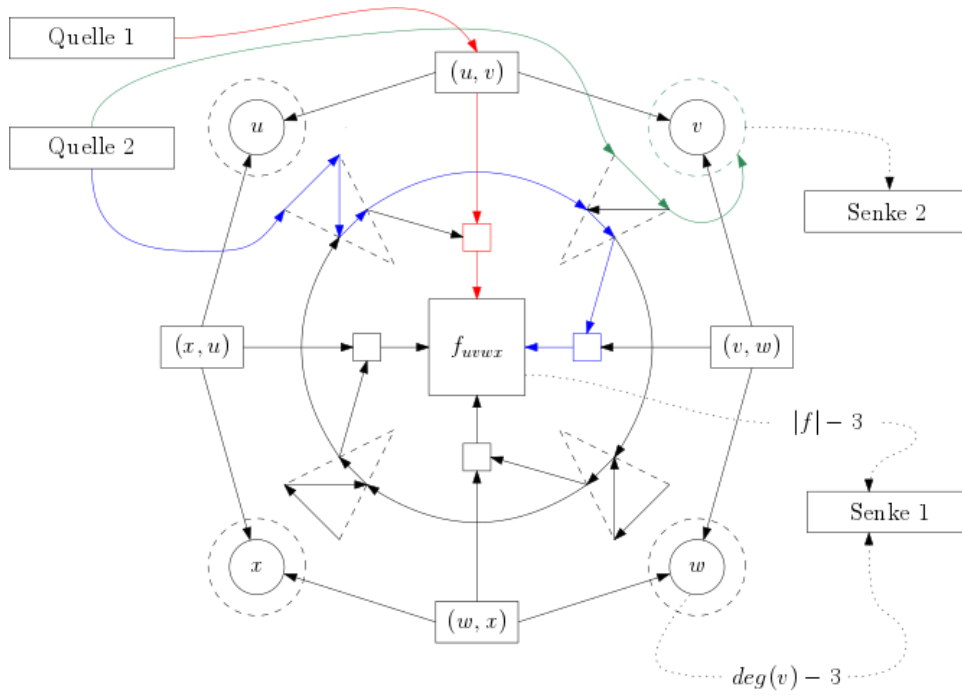


Abbildung 4.5 – Eine Skizze des kombinierten Netzwerkes auf einem inneren Gebiet mit $|f| = 4$. Beispielhaft sind Schnyder-Fluss (rot), Ecken-Fluss (blau) und Zuweisungs-Fluss (grün) eingezeichnet.

in f mündet. Zuletzt fügen wir wie oben von jedem inneren Gebiet eine Kante mit Kapazität $|f| - 3$ zu Senke 1 ein. Somit kodiert hier eine ganzzahlige Lösung weiterhin einen Schnyder Wood auf G .

Kommen wir nun zum FAA-Fluss, also Fluss von Typ 2. Von Quelle 2 geht genau wie in Abbildung 4.2 eine Kante zu jedem inneren Winkel (f, v) . Ein Zuweisungs-Pfad verlässt diesen Winkel über einen zusätzlich zu v eingefügten Dummy-Knoten v^* . Von jedem v^* geht eine Kante mit Kapazität 1 zu einer Dummy-Senke und von dieser eine Kante mit Kapazität $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ zu Senke 2, wie in Abbildung 4.6 illustriert.

Die Dummy-Knoten sorgen dafür, dass jeder Knoten im FAA nur einmal zugewiesen werden kann, ohne in Konflikt mit dem Schnyder-Fluss zu kommen. Die eingeschobene Dummy-Senke beschränkt die Anzahl der zugewiesenen Knoten, genau wie im zuvor konstruierten FAA-Fluss, auf $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$.

Es bleibt der Ecken-Fluss. Hier betritt der Pfad das Gebiet f wieder durch einen Winkel und muss es über ein ungenutztes kleines Quadrat verlassen. Die zweite und dritte Kante in jedem Winkeldreieck gewährleisten, dass nicht immer das nächste kleine Quadrat genutzt werden muss. Falls dies von Schnyder-Fluss besetzt ist und der nächste Winkel zugewiesen wird, kann ein Ecken-Pfad den nächsten Winkel passieren. Weiterhin sorgt die erste Kante, die von sowohl Schnyder-, als auch Winkel-Pfaden genutzt werden kann, für eine eindeutige Beschriftung (als Ecke oder nicht) im Falle einer ganzzahligen Lösung. Wie oben existieren auch hier Kanten von jedem inneren

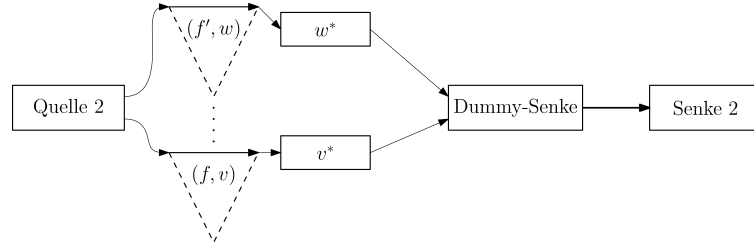


Abbildung 4.6 – Der Zuweisungsfluss durch die Winkel, Dummy-Knoten und die zusätzliche Kante vor Senke 2. Die Kante rechts hat Kapazität $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ und alle anderen Kapazität 1.

Gebiet zu Senke 2 mit Kapazität drei.

Betrachten wir die Bedarfe der beiden Flüsse von Typ 1 und Typ 2, φ_1 bzw. φ_2 . Beide entsprechen jeweils den Bedarfen der oben konstruierten \mathcal{N}_S und \mathcal{N}_F , da mit den gleichen Argumenten wie oben, ein Schnyder Wood und ein FAA kodiert werden können. Jedes Gebiet benötigt genau drei Ecken und $|f| - 3$ zugewiesene Knoten und je ein Schnyder-Pfad führt durch jede innere Kante, $|E_{in}|$. Hier seien wieder E_{in} die inneren Kanten und F_{in} die inneren Gebiete von G . Es gilt also:

- $d_1 = \text{Bedarf}(\varphi_1) = \text{Bedarf}(\varphi_S) = |E_{in}|$
- $d_2 = \text{Bedarf}(\varphi_2) = \text{Bedarf}(\varphi_F) = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

Bevor wir in Theorem 4.3 zeigen, dass eine ganzzahlige Lösung $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auch wirklich ein Ecken kompatibles Paar kodiert, wollen wir noch ein Paar weitere Beobachtungen festhalten. Nehmen wir also an, wir haben eine ganzzahlige Lösung φ gefunden, dann gilt für diese:

- A2 Jede äussere Kante in einem Winkel-Dreieck ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Ecken- oder Zuweisungspfad genutzt.
- A3 Jede Kante von einem kleinen Quadrat zu einem inneren Gebiet f ist ausgelastet, sie wird entweder von einem Schnyder- oder Ecken-Pfad genutzt.
- A4 Ein inneres Gebiet f mit $|f| = 3$ kann nicht von Zuweisungs- bzw. Schnyder-Pfaden genutzt werden.

Wir wollen diese Beobachtungen kurz begründen. Für jede mögliche ganzzahlige Lösung φ gilt

$$|\varphi| = |\varphi_1| + |\varphi_2| = |E_{in}| + \sum_{f \in F_{in}} |f|.$$

Da es genau $\sum_{f \in F_{in}} |f|$ innere Winkel gibt und der FAA-Fluss \mathcal{N}_G nur durch diese betreten kann ergibt sich A2. A3 wird aus Gleichung 4.1 weiter unten folgen. Durch ein inneres Gebiet f müssen drei Ecken-Pfade führen und im Fall $|f| = 3$ führt dies zu A4, da kein Platz in den Winkeln für Zuweisungs-Pfade und keine freien kleinen Quadrate für Schnyder-Pfade existieren.

Theorem 4.3. *Sei G ein intern-3-zusammenhängender Graph mit gegebenen Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$, dann existiert eine SLTR von G , genau dann wenn ein ganzzahliger zulässiger Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auf \mathcal{N}_G existiert.*

Fassen wir vor dem Beweis noch einmal das Netzwerk zusammen.

Netzwerk 3 (SLTR). Bei \mathcal{N}_G handelt es sich um ein gerichtetes Netzwerk, das auf Basis von G erstellt wird, um eine SLTR von G zu finden. Ein Ausschnitt um ein inneres Gebiet ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

- \mathcal{N}_G hat zwei Quellen s_1, s_2 und zwei Senken t_1, t_2
- Knoten in \mathcal{N}_S werden für jeden innere Kante $e \in E_{in}$, jedes innere Gebiet $f \in F_{in}$ und jeden Knoten $v \in V$ aus G erzeugt.
- Es werden Knoten der folgenden Typen in \mathcal{N}_S erzeugt:
 - Knoten e für jede innere Kante $e \in E_{in}$
 - Knoten v für jeden $v \in V$ und Dummy-Knoten v^* für jeden $v \in V_{in}$
 - Knoten für jedes innere Gebiet f .
 - $|f|$ kleine Quadrate q um jedes innere Gebiet f
 - Vier Knoten w_1, w_2, w_3, w_4 für jedes innere Winkeldreieck
 - Die Dummy-Senke t_d
- Es werden gerichtete Kanten der folgenden Typen in \mathcal{N}_G erzeugt:
 - (s_1, e) von Quelle 1 zu jeder inneren Kante mit $c(s, e) = 1$
 - $(e, v_1), (e, v_2)$ von jeder inneren Kante zu den Endknoten mit $c(e, v) = 1$
 - (e, q) von inneren Kanten zu adjazenten kleinen Quadraten mit $c(e, q) = 1$
 - (q, f) von jeder kleinen Quadraten zu den inneren Gebieten mit $c(q, f) = 1$
 - (f, t_1) von den inneren Gebieten zur Senke 1 mit $c(f, t_1) = |f| - 3$
 - (a_i, t_1) von den Aufhängungen zur Senke 1 mit $c(f, t) = \deg(a_i) - 2$
 - (v, t_1) von den restlichen Knoten zur Senke 1 mit $c(f, t) = \deg(v) - 3$
 - $(s_2, (f, v))$ von Quelle 2 zu jedem inneren Winkel mit $c(s_2, (f, v)) = 1$
 - $(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_4)$ in jedem inneren Winkel mit $c(w_i, w_{i+1}) = 1$
 - (t_4, q) von inneren Winkeln zum nächsten kleinen Quadrat mit $c(t_4, q) = 1$
 - (t_4, t'_3) von inneren Winkeln zum nächsten inneren Winkel mit $c(t_4, t'_3) = 1$
 - $((f, v), f)$ von inneren Winkeln zum Gebiet mit $c((f, v), f) = 1$
 - (t_2, v^*) von jedem inneren Winkel zum Dummy-Knoten mit $c(t_2, v^*) = 1$
 - (v^*, t_d) von den Dummy-Knoten zur Dummy-Senke mit $c(f, t) = 1$
 - (t_d, t_2) von der Dummy-Senke zu Senke 2 mit $c(t_d, t_2) = \sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$

- \mathcal{N}_S hat Bedarfe $d_1 = |E_{in}|$ und $d_2 = \sum_{f \in F_{in}} |f|$

\Rightarrow Ein zulässiger ganzzahliger Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ existiert. \Leftrightarrow Es existiert ein SLTR auf G .

Beweis von Theorem 4.3: Sei G ein intern-3-zusammenhängender Graph mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sei ein ganzzahliger machbarer Fluss auf \mathcal{N}_G . Im ersten Schritt extrahieren wir einen Schnyder-Wood σ und ein FAA ϕ , um dann zu zeigen, dass sie ein Ecken kompatibles Paar bilden. Für einen machbaren Fluss müssen die Bedarfe erfüllt werden. Es gilt somit $|\varphi_1| = |E_{in}|$ und $|\varphi_2| = \sum_{f \in F_{in}} |f|$.

$$\begin{aligned}
 |\varphi_1| + |\varphi_2| &= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}| + |E_{in}| \\
 &= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 2|E| - |V| - 1 + 2|F| - |f_{aus}| \\
 &= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 2|V| + 2|F| - 1 - |f_{aus}| \\
 &= \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 2|E| + 3 - |f_{aus}| \\
 &= \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)}_{\text{Dummy-Senke zu Senke 2}} + \underbrace{\sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) + 3}_{\text{Kapazität Senke 2 von den Knoten.}} + \underbrace{\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3) + 3|F_{in}|}_{\text{Kanten von den Quadraten zu den inneren Gebieten}}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die beiden Terme in der rechten unteren Klammer entsprechen den Kapazitäten von den inneren Gebieten zu Senke 1 und Senke 2. Somit sind alle Kanten zu den Senken ausgelastet. Die Kanten von den kleinen Quadraten zu den inneren Gebieten sind ebenfalls ausgelastet. Diese sind die einzigen Kanten in \mathcal{N}_G , die sowohl von φ_1 als auch φ_2 genutzt werden können. Kapazität eins und Ganzzahligkeit von φ impliziert somit A3.

Beginnen wir mit φ_1 um einen Schnyder Wood, oder genauer eine α_s -Orientierung, zu erhalten. $|\varphi_1| = |E_{in}|$, somit führt durch jede innere Kante ein Schnyder-Pfad und dieser gibt uns die nach aussen gerichtete Kante in α_s . Es bleibt zu zeigen, dass für jedes innere Gebiet und jeden Knoten die Bedingungen aus Theorem 4.4 für eine α_s eingehalten werden. Da alle Kanten von den Knoten zu Senke 1 ausgelastet sind folgt, dass durch jeden inneren Knoten v genau $\deg(v) - 3$ Schnyder-Pfade führen. Somit ergeben die leeren Einkanten von v in \mathcal{N}_G die drei Auskanten für α_s . Für eine Aufhängung a_i folgt analog, dass die beiden ungenutzten Einkanten, zusammen mit der Halbkante ins äußere Gebiet, die Bedingungen der α_s -Orientierung erfüllen. Es bleibt zu zeigen, dass durch jedes innere Gebiet $|f| - 3$ Schnyder-Pfade führen. Der restliche Schnyder-Fluss $|E_{in}| - \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3)$ muss durch die inneren Gebiete führen und aus der ersten und letzten Zeile von Gleichung 4.1 folgt

$$|E_{in}| - \sum_{v \in V} (\deg(v) - 3) = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3).$$

Somit führen $|f| - 3$ Schnyder-Pfade durch jedes innere Gebiet und wir können die α_s -Orientierung vervollständigen und erhalten einen Schnyder Wood auf G .

Betrachten wir nun φ_2 . Nach A4 sind alle äusseren Kanten in den Winkeln ausgelastet. Falls diese nun in jedem inneren Gebiet von drei Ecken-Pfaden und $|f| - 3$ Zuweisungs-Pfaden genutzt werden, können wir ein FAA extrahieren. Da alle Kanten zu Senke 2 ausgelastet sind, führen $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$ Pfade durch die Dummy-Senke. Somit werden auch $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$ Knoten inneren Gebieten zugewiesen. Indem wir die Pfade zurückverfolgen und sehen aus welchem Gebiet der Zuweisungs-Pfad einen Dummy-Knoten betritt, können wir diese Informationen auslesen. Es bleibt zu zeigen, dass jedem Gebiet genau $|f| - 3$ Knoten zugewiesen werden. Dies gilt, wenn durch jedes Gebiet drei Ecken-Pfade laufen und folgt somit, da die Kanten von den inneren Gebieten zu Senke 2 ausgelastet sind. Wir können also aus φ_2 ein FAA für G extrahieren.

Nun müssen wir zeigen, dass σ und ϕ ein Ecken kompatibles Paar ergeben. C1, dass beide die gleichen Aufhängungen nutzen folgt sofort aus der Konstruktion von \mathcal{N}_G . Es bleibt C2.

Betrachten wir ein Teilnetzwerk (wie in Abbildung 4.5) um ein inneres Gebiet f . Die drei Ecken-Pfade können keine der $|f| - 3$ kleinen Quadrate nutzen die schon von Schnyder-Fluss okkupiert werden. Die drei übrigen kleinen Quadrate nennen wir *verfügbar*. Ausgehend von f folgen wir den Ecken-Pfaden rückwärts zu den verfügbaren kleinen Quadraten. Wenn wir das Quadrat verlassen gelangen wir zur dritten Kante eines Winkeldreiecks (entgegen dem Uhrzeigersinn). Nun verlassen wir das Gebiet entweder über diesen Winkel oder bewegen uns weiter (entgegen dem Uhrzeigersinn) zum nächsten Winkeldreieck. Doch wir werden zeigen, dass dies nur dann geschieht wenn das kleine Quadrat zwischen diesen nicht *verfügbar* ist. Also betritt zwischen zwei *verfügbaren* kleinen Quadraten ein Ecken-Pfad das Gebiet und die Winkel haben nach A1 unterschiedliche Label.

Behauptung 1 *Seien Q_1, Q_2 und Q_3 , im Uhrzeigersinn, die drei verfügbaren kleinen Quadrate um ein inneres Gebiet f . Dann existiert ein Ecken-Pfad, welcher das Netzwerk über Q_i verlässt. Dieser betritt es in einem Winkel zwischen, im Uhrzeigersinn, Q_{i-1} und Q_i .*

Angenommen dies ist nicht der Fall und nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass der Ecken-Pfad P_e das Gebiet durch Q_3 verlässt. Der Winkel über den P_e das Teilnetzwerk um das innere Gebiet betritt liegt also nicht zwischen Q_2 und Q_3 . Angenommen er liegt zwischen Q_1 und Q_2 . Betrachte das letzte Winkeldreieck vor Q_2 . Nach unserer Annahme ist die innere Kante dieses Dreiecks von P_e ausgelastet. Somit kann kein Ecken-Fluss zu Q_2 gelangen und wir erhalten einen Widerspruch, da alle kleinen Quadrate entweder von Ecken- oder von Schnyder-Fluss genutzt werden müssen. Mit dem gleichen Argument kann P_e das Teilnetzwerk nicht zwischen Q_3 und Q_1 betreten. Somit ist Behauptung 1 wahr.

Behauptung 2 *Alle Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden verfügbaren kleinen Quadraten, haben die selben Label im Schnyder Labeling σ .*

Diese Behauptung folgt aus der in Abbildung 4.4 illustrierten Bijektion zwischen der α_s Orientierung und den Schnyder Labelings auf G und G^* . Die Winkel links und rechts von einem kleinen Quadrat, dass von einem Schnyder-Pfad genutzt wird, haben das gleiche Label in σ , da diese den Einkanten in α_s entsprechen. Die Auskanten entsprechen den verfügbaren kleinen Quadraten, und hier ändern sich die Label.

Diese beiden Behauptungen zusammen zeigen, dass jede Ecke aus ϕ ein anderes Label in σ hat. Somit handelt es sich um ein Ecken Kompatibles Paar (σ, ϕ) .

Wir haben die Rückrichtung gezeigt. Nehmen wir also an, dass eine SLTR für G existiert. Wir müssen nun einen zulässigen ganzzahligen Fluss $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ auf \mathcal{N}_G konstruieren, der die SLTR kodiert. Nach Theorem 3.16 existiert ein Ecken kompatibles Paar (σ, ϕ) aus einem Schnyder Labeling σ und einem FAA ϕ , das zu diesem SLTR passt. Betrachte die zu σ gehörige α_s -Orientierung.

Wir beginnen mit einem leeren, wie oben konstruierten Netzwerk \mathcal{N}_G und werden nun Schritt für Schritt einen zulässigen Fluss φ konstruieren.

Zuerst fügen wir für jeden zugewiesenen Winkel einen Pfad von Quelle 2, über die äussere Kante des Winkeldreiecks, den zugehörigen Dummy-Knoten und die Dummy-Senke hin zu Senke 2 ein. Es kommen somit $\sum_{f \in F_{in}} |f| - 3$ Einheiten Fluss hinzu und die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2 wird ausgelastet.

Als nächsten fügen wir den Fluss hinzu, der die α_s -Orientierung kodiert. Zuerst von Quelle 1 zu jedem inneren Kanten-Knoten e , dann von den inneren Kanten entweder über ein kleines Quadrat in ein angrenzendes Gebiet oder zu einem benachbarten Knoten je nachdem, wohin die Auskante von e in α_s zeigt. Zuletzt saturieren wir die Kanten von den inneren Knoten und inneren Gebieten zu Senke 1.

Zuletzt müssen wir den Ecken-Fluss einfügen. Ein Ecken-Pfad P_e entspringt in Quelle 1, nutzt das zugehörige Winkeldreieck (diese sind noch frei) und verlässt das Gebiet über das im Uhrzeigersinn nächste verfügbare kleine Quadrat, wieder.

Es sind alle Kanten hin zu den Senken ausgelastet. Ebenso kann man sehen, dass an keiner Kante die Kapazität überschritten wird. Somit haben wir einen zulässigen ganzzahligen Fluss konstruiert, der eine SLTR kodiert. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

4.2 Nicht ganzzahlige Lösungen

Wir werden uns zum Abschluss des Kapitels mit der von Aerts und Felsner offen gelassenen Frage beschäftigen, ob die Erkennung von Graphen mit einer SLTR in P liegt. Wie in Abschnitt 2.4 erwähnt, impliziert eine nicht ganzzahlige Lösung für ein Gerichtetes-Multi-Fluss-Problem auf einem Graphen mit $n \geq 2$ Paaren von Quellen und Senken, im Allgemeinen nicht die Existenz einer ganzzahligen Lösung

und nach Theorem 2.21 ist die Berechnung einer ganzzahligen Lösung NP-schwer. Die Ergebnisse aus Kapitel 5 lassen jedoch die Möglichkeit offen, dass man für das betrachtete Netzwerk \mathcal{N}_G die folgende Vermutung beweisen kann.

Vermutung 1 *Sei $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf \mathcal{N}_G , dann existiert auch ein ganzzahliger zulässiger Fluss φ und wir können in polynomieller Zeit ein Gutes-FAA aus $\tilde{\varphi}_2$ extrahieren, ohne eine ganzzahlige Lösung zu berechnen.*

Bemerkung. Wenn wir nicht darauf bestehen, dass unsere Lösung ganzzahlig ist, dann lässt sich eine Lösung wie in Abschnitt 2.4 durch lineare Programmierung in polynomieller Zeit finden und das Entscheidungsproblem, ob ein Graph eine SLTR hat, liegt so in P.

Um die Argumentation einfacher zu gestalten, werden wir unser 2-Fluss Problem manchmal als 3-Fluss Problem, mit einer Lösung $\varphi = (\varphi_s, \varphi_e, \varphi_z)$, betrachten. Wir erstellen \mathcal{N}_G^* wie zuvor \mathcal{N}_G , nur mit drei Quellen und Senken und weisen Schnyder-, Ecken-, und Zuweisungs-Fluss eigene Typen zu. Man kann leicht sehen, dass Theorem 4.3 in angepasster Form hier ebenfalls gilt und ein zulässiger Fluss $(\varphi_s, \varphi_z, \varphi_e)$ auf \mathcal{N}_G^* genau dann existiert, wenn auch ein zulässiger Fluss (φ_1, φ_2) auf \mathcal{N}_G möglich ist. Die Hinrichtung ist klar. Nehmen wir an (φ_1, φ_2) ist eine ganzzahlige Lösung. Nach Beobachtung A2 gilt, dass die äusseren Kanten eines Winkel-Dreiecks entweder von einem Ecken- oder einem Zuweisungs-Pfad genutzt werden. Diese Kanten sind zusammen mit den Kanten von Quelle 2 zu den Winkeldreiecken die einzigen in \mathcal{N}_G , die von beiden Flüssen genutzt werden. Wir können also φ_2 in $|\varphi_2|$ ganzzahlige Pfade aufteilen und jeden Pfad entweder φ_e oder φ_z zuweisen – je nachdem ob er über die Dummy-Senke führt, oder nicht. Insbesondere folgt mit der gleichen Argumentation:

- O1 Jede beliebige Kombination von φ_s, φ_e und φ_z zu zwei Flüssen und ein zu \mathcal{N}_G analoges Netzwerk hat eine zulässige ganzzahlige Lösung genau dann, wenn eine Lösung für das 3-Fluss-Netzwerk existiert.

Betrachten wir zunächst den zweiten Teil von Vermutung 1.

Lemma 4.4. *Sei $\tilde{\varphi}$ ein nicht ganzzahliger zulässiger Fluss auf \mathcal{N}_G und sei W die Menge der vom Zuweisungsfluss $\tilde{\varphi}_z$ genutzten inneren Winkel von G . Dann existiert eine Teilmenge $\phi \subseteq W$, sodass aus jedem Gebiet f genau $|f| - 3$ Winkel in ϕ enthalten sind und in der jeder Knoten v höchstens einmal vorkommt. ϕ kodiert also ein FAA von G .*

Beweis: Wir betrachten das gerichtete Netzwerk \mathcal{F}_z mit einer Quelle s und Senke t , einem Beutel B_f für jedes innere Gebiet f , einem Knoten (f, v) für jeden inneren Winkel und einem Knoten für jeden Dummy-Knoten. Zuerst fügen Kanten mit Kapazität $|f| - 3$ von der Quelle zu jedem Beutel ein. Dann folgen Kanten von den Beuteln B_f zu den Winkeln von f , von den Winkeln (f, v) zu den Dummy-Knoten v^* und zuletzt eine Kante von jedem Dummy-Knoten zu Senke mit Kapazität 1, jeweils mit Kapazität 1. Der maximal mögliche s - t -Fluss in \mathcal{F}_z ist $\sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$, da die

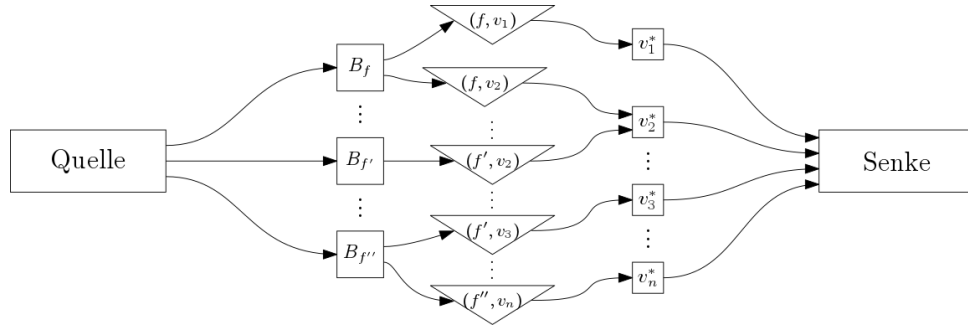


Abbildung 4.7 – Skizze des Netzwerkes \mathcal{F}_z . Die Kanten von der Quelle zu einem Beutel B_f hat Kapazität $|f| - 3$ und alle anderen haben Kapazität 1.

Kanten zu den Beuteln einen Schnitt bilden und wir aus $\tilde{\varphi}_z$ sofort eine zulässige nicht ganzzahlige Lösung $\tilde{\phi}$ für \mathcal{F}_z konstruieren können. Nach Theorem 2.20 existiert somit ein ganzzahliger Fluss ϕ auf \mathcal{F}_z , mit $|\phi| = |\tilde{\phi}| = |\tilde{\varphi}_z| = \sum_{f \in F_{in}} (|f| - 3)$.

ϕ weist nun jedem inneren Gebiet f genau $|f| - 3$ Winkel zu und jeder Knoten v kann nur einmal zugewiesen werden. Wenn wir noch die per Konstruktion von \mathcal{N}_G zugewiesenen Knoten am äusseren Gebiet hinzunehmen, dann kodiert ϕ ein FAA von G . \square

Wenn wir zeigen können, dass ein wie Lemma 4.4 konstruiertes ϕ ein Gutes-FAA ist, folgt Vermutung 1, da die Existenz eines Guten-FAAs ϕ nach Theorem 4.3 auch die Existenz eines ganzzahligen zulässigen Flusses φ für \mathcal{N}_G impliziert.

Beispiel 4.5. Es ist uns nicht möglich mit beliebigen Winkeln aus W zu beginnen und Schritt für Schritt für jedes Gebiet $|f| - 3$ Winkel wählen. Betrachte den planaren Graphen G aus Abbildung 4.8. Die beiden SLTRs auf der linken Seite haben die selben Aufhängungen, implizieren jedoch andere FAAs somit auch andere zulässige ganzzahlige Flüsse auf \mathcal{N}_G . Seien φ und φ' diese Flüsse und f_r, f_g und f_b die drei eingefärbten Gebiete. Betrachten wir die Zuweisungs-Flüsse φ_z und φ'_z . Dann gilt

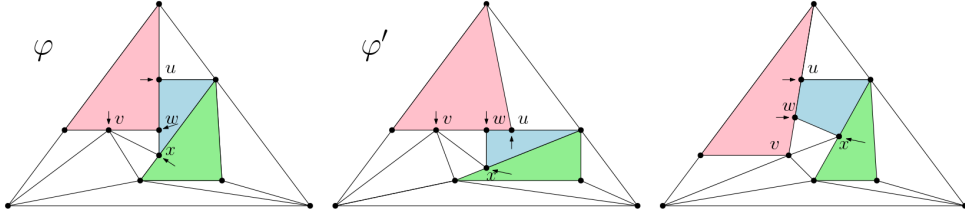
$$|\varphi_z(f_r, v)| = |\varphi_z(f_r, u)| = |\varphi_z(f_b, w)| = |\varphi_z(f_g, x)| = 1$$

$$|\varphi_z(f_r, v)| = |\varphi_z(f_r, w)| = |\varphi_z(f_b, u)| = |\varphi_z(f_g, x)| = 1.$$

Der Fluss $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$ ist ebenfalls zulässig und es folgt:

$$|\tilde{\varphi}_z(f_r, v)| = |\tilde{\varphi}_z(f_g, x)| = 1 \text{ und } |\tilde{\varphi}_z(f_r, w)| = |\tilde{\varphi}_z(f_r, u)| = |\tilde{\varphi}_z(f_b, w)| = |\tilde{\varphi}_z(f_b, u)| = \frac{1}{2}.$$

Somit liegen all diese Winkel in W . Wir können allerdings nicht einfach beginnen in einem Gebiet die benötigte Anzahl an Winkel auszuwählen. In Abbildung 4.8 führt dies auf der rechten Seite zu keinem FAA und somit auch zu keiner SLTR.

Abbildung 4.8 – Bei der Auswahl der Winkel aus W ist Vorsicht geboten.

4.2.1 Minimale Schnitte in \mathcal{N}_G

Angenommen, es existiert ein Graph G , für den nur eine nicht ganzzahlige Lösung existiert. Sei $\tilde{\varphi}$ dieser nicht ganzzahlige zulässige Fluss auf \mathcal{N}_G , und ϕ ein wie in Lemma 4.4 aus $\tilde{\varphi}$ konstruiertes FAA für G . Sei $\bar{\varphi}_z$ der eindeutige Zuweisungs-Fluss der dieses FAA auf \mathcal{N}_G kodiert. Sei $\bar{\mathcal{N}}_G$, ein Teilnetzwerk von \mathcal{N}_G , aus welchem alle Kanten, die von $\bar{\varphi}_z$ genutzt werden gelöscht wurden. Die Bedarfe sind weiterhin $|E_{in}|$ und $3|F_{in}|$ für den Schnyder- und Ecken-Fluss. Nach der in O1 festgehaltenen Beobachtung können wir, wie in [AF15], φ_s und φ_e zusammenfassen und mit φ_1 bezeichnen. Wir suchen also nach einem zulässigem ganzzahligem Fluss $\varphi_1 = \varphi_s + \varphi_e$ auf $\bar{\mathcal{N}}_G$ mit Bedarf $|E_{in}| + 3|F_{in}|$, da dann auch eine ganzzahlige Lösung (φ_s, φ_e) folgt.

Nach dem Max-Flow Min-Cut Theorem existiert ein zulässiger Fluss auf $\bar{\mathcal{N}}_G$ genau dann, wenn es keinen (Kanten-)Schnitt in $\bar{\mathcal{N}}_G$ mit Kapazität kleiner als $|E_{in}| + 3|F_{in}|$ gibt. Bevor wir fortfahren wollen wir einige Kantentypen aus \mathcal{N}_G benennen.

- E_Δ = Die äusseren Kanten in den Winkeldreiecken.
- E_∇ = Die inneren Kanten in den Winkeldreiecken.
- S_* = Die Kanten von den Dummy-Knoten zur Dummy-Senke.
- V_* = Die Kanten von den Winkeldreiecken zu den Dummy-Knoten.
- E_\rightarrow = Die Kanten von Quelle 1 zu den Kanten-Knoten.
- F_\square = Die Kanten von den kleinen Quadraten zu inneren Gebieten f .
- V_\rightarrow = Die Kanten von den Knoten-Knoten zu Senke 1.

Sei e_d die Kante von der Dummy-Senke zu Senke 2, dann sind sowohl $\mathcal{S}_1 = E_\Delta \cup E_\rightarrow$, als auch $\mathcal{S}_2 = F_\square \cup V_\rightarrow \cup \{e_d\}$ minimale Schnitte in \mathcal{N}_G , die alle Quellen und Senken trennen. Wenn wir nur von den Kanten aus E_Δ , die in $\bar{\mathcal{N}}_G$ übrig sind, sprechen, schreiben wir \bar{E}_Δ . Für die, zu diesen korrespondierenden Kanten im inneren ihrer Winkeldreiecke, schreiben wir \bar{E}_∇ . Für die Teilmengen von V_* und S_* in $\bar{\mathcal{N}}_G$ schreiben wir \bar{S}_* und \bar{V}_* . Die restlichen Mengen sind vollständig in $\bar{\mathcal{N}}_G$ enthalten.

Seien E_z die von $\bar{\varphi}_z$ genutzten Kanten, die wir aus \mathcal{N}_G entfernen. Dann folgt $|\mathcal{S}_1 \cap E_z| = |E_\Delta \cap E_z| = |\varphi_z|$. Somit ist $\bar{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1 \setminus E_z = \bar{E}_\Delta \cup E_\rightarrow$ ein Schnitt in $\bar{\mathcal{N}}_G$.

Analog ist $\bar{\mathcal{S}}_2 = F_{\square} \cup V_{\rightarrow}$ ein Schnitt. Für die Kapazität von $\bar{\mathcal{S}}_1$ können wir folgern

$$c(\bar{\mathcal{S}}_1) = c(\bar{E}_{\Delta}) + c(E_{\rightarrow}) = c(E_{\Delta}) - |\varphi_z| + c(E_{\rightarrow}) = 3|F_{in}| + |E_{in}|,$$

und analog folgt $c(\bar{\mathcal{S}}_2) = 3|F_{in}| + |E_{in}|$.

Falls es sich hierbei um minimale Schnitte handelt, dann würde dies bedeuten, dass eine ganzzahlige Lösung für $\bar{\mathcal{N}}_G$ existiert, mit deren Hilfe wir, zusammen mit φ_z , eine ganzzahlige zulässige Lösung für \mathcal{N}_G konstruieren könnten, was wiederum ein Widerspruch zu unserer Annahme wäre. Es muss also einen kleineren Schnitt \mathcal{S}_{min} , mit $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$, geben.

Behauptung 3 *Ein minimaler Schnitt \mathcal{S}_{min} in $\bar{\mathcal{N}}_G$ enthält ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur Kanten von einem der vier Typen \bar{E}_{∇} , F_{\square} , V_{\rightarrow} und E_{\rightarrow} .*

Kanten auf einem Pfad von der Quelle bis zu einer Kante in \bar{E}_{∇} , können durch diese ersetzt werden. Ebenso können Kanten zwischen zwei Winkeldreiecken, oder von einem Winkeldreieck zu einem kleinen Quadrat, durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, nächste Kante in \bar{E}_{∇} ersetzt werden. Kanten zwischen einem Kanten-Knoten und einem Knoten-Knoten, oder einem kleinen Quadrat, können durch eine Kante in E_{\rightarrow} ersetzt werden. Abschliessend können Kanten, von einem inneren Gebiet zu Senke, durch das hinzufügen von allen Kanten aus F_{\square} an diesem Gebiet, ersetzt werden.

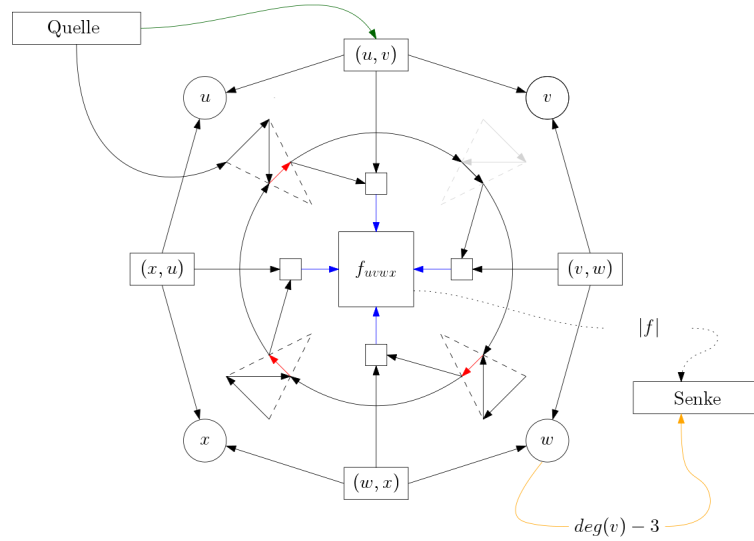


Abbildung 4.9 – Die vier Kantentypen \bar{E}_{∇} (rot), F_{\square} (blau), V_{\rightarrow} (orange) und E_{\rightarrow} (grün) aus denen sich, nach Behauptungen 3 und 4, ein minimaler Schnitt in $\bar{\mathcal{N}}_G$ zusammensetzt.

Behauptung 4 *Ein minimaler Schnitt \mathcal{S}_{min} in $\bar{\mathcal{N}}_G$ muss ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus jeder der Mengen \bar{E}_{∇} , F_{\square} , V_{\rightarrow} und E_{\rightarrow} mindestens eine, aber aus keiner der Mengen alle Kanten enthalten.*

Falls ein solcher ein Schnitt existiert, dann kann er nicht alle Kanten \overline{E}_∇ enthalten, da sonst $\mathcal{S}_{min} \cup (E_\Delta \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$ gilt. Falls er jedoch keine Kante aus \overline{E}_∇ enthält, dann muss er alle Kanten aus F_\square enthalten und falls er alle Kanten aus F_\square enthält, dann muss er o.B.d.A. auch alle Kanten aus V_\rightarrow enthalten. Es folgt $\mathcal{S}_{min} \cup \{e_d\} \supseteq \mathcal{S}_2$. Angenommen er enthält keine Kante aus F_\square , dann muss er alle Kanten aus \overline{E}_∇ und E_\rightarrow enthalten und es gilt $\mathcal{S}_{min} \cup (E_\Delta \cap E_z) \supseteq \mathcal{S}_1$. Mit analogen Argumenten folgt der Rest von Behauptung 4.

Nehmen wir also an, dass ein minimaler Schnitt \mathcal{S}_{min} , wie in Behauptungen 3 und 4, existiert mit $|\mathcal{S}_{min}| \leq 3|F_{in}| + |E_{in}| - 1$. Betrachten wir für den Moment das Teilnetzwerk um ein inneres Gebiet in $\overline{\mathcal{N}}_G$. Falls alle drei Kanten aus \overline{E}_∇ in \mathcal{S}_{min} enthalten sind, dann müssen auch o.B.d.A. alle Kanten in E_\rightarrow um dieses Gebiet enthalten sein und falls eine Kante aus \overline{E}_∇ nicht enthalten ist, dann müssen, im Uhrzeigersinn bis zur nächsten enthaltenen Kante aus \overline{E}_∇ , alle Kanten aus F_\square Teil von \mathcal{S}_{min} sein. Falls höchstens eine Kante aus \overline{E}_∇ im Schnitt läge, dann folgt o.B.d.A., dass keine Kante aus \overline{E}_∇ und alle aus F_\square , um das innere Gebiet, enthalten sind.

Angenommen es existieren nur Gebiete in denen entweder alle oder keine Kanten aus \overline{E}_∇ in \mathcal{S}_{min} enthalten sind. Dann existiert ein Kanten-Knoten der, wie in Abbildung 4.10 jeweils eines von beiden berührt. Wir können nun im rechten Gebiet eine Kante aus F_\square durch die, entgegen dem Uhrzeigersinn, folgende Kante aus \overline{E}_∇ ersetzen.

Sei f ein Gebiet,

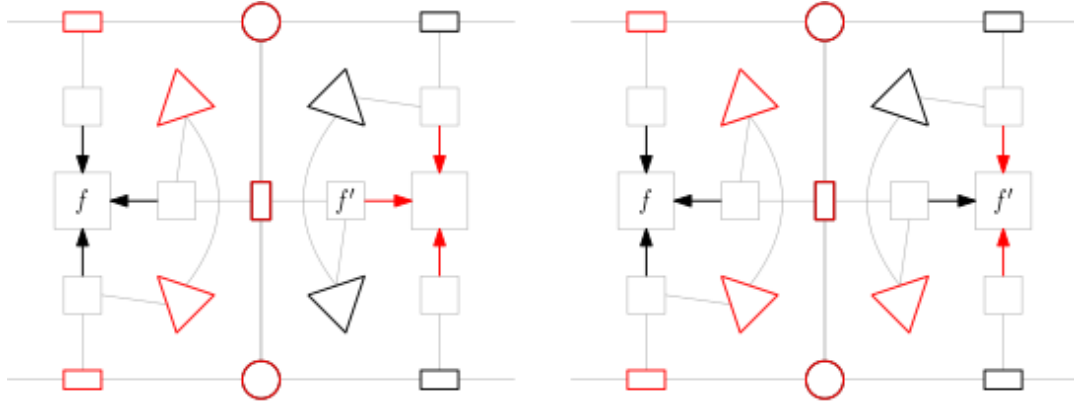


Abbildung 4.10

Proposition 4.6. Sei \mathcal{N} ein gerichtetes Netzwerk mit einer Quelle s und einer Senke t . Sei \mathcal{S}_{min} ein minimaler Kantenschnitt zwischen s und t und sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}_{min}$. Dann ist $\tilde{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \setminus \mathcal{T}$ ein minimaler Kantenschnitt zwischen s und t in $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$.

Beweis: Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass \mathcal{N} nur Kanten mit Kapazität 1 enthält. Nach dem *Max-Flow Min-Cut* Theorem existiert ein s - t -Fluss φ mit $|\varphi| = c(\mathcal{S}_{min})$. Nach Theorem 2.20 können wir annehmen, dass wir es sich um einen ganzzahligen Fluss handelt. Wir können diesen Fluss somit in Pfade (TODO) p

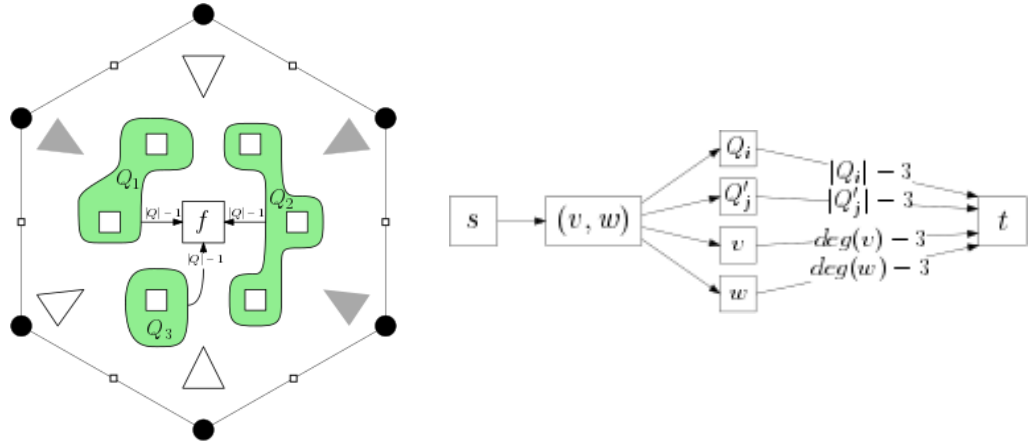


Abbildung 4.11 – Auf der linken Seite eine Illustration von $\bar{\varphi}_s$ mit den von $\bar{\varphi}_z$ zugeordneten Winkeln in grau. Auf der rechten Seite das resultierende Netzwerk.

mit Flussstärke 1 aufteilen. Betrachten wir nun $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$, dann trennt die Entnahme von \mathcal{T} genau $c(\mathcal{T})$ Pfade $p \in P$. Die restlichen Pfade, nennen wir sie $\tilde{p} \in \tilde{P}$, bleiben intakt. Somit existiert ein s - t -Fluss $\tilde{\varphi}$ mit $|\tilde{\varphi}| = c(\mathcal{S}_{min}) - c(\mathcal{T})$. $\tilde{\mathcal{S}}_{min} = \mathcal{S}_{min} \setminus \mathcal{T}$ muss somit ein minimaler Schnitt in $\tilde{\mathcal{N}}$ sein, da jedes $\tilde{p} \in \tilde{P}$ genau eine Kante aus $\tilde{\mathcal{S}}_{min}$ nutzt und die Entnahme dieser Kanten, nach Voraussetzung, s und t trennt. \square

5 Das Programm

Wir wollen nun auf eine Implementierung von Netzwerk 3 aus dem vorherigen Abschnitt eingehen. Das im Folgenden beschriebene Programm baut auf Vermutung 1 – dass sich aus jedem nicht ganzzahligen zulässigen Fluss auf Netzwerk 3 ein Gutes-FAA extrahieren lässt – auf. Der Code wurde in SageMath geschrieben und ist auf Anfrage erhältlich [S⁺18]. Algorithmus 1 gibt einen Überblick der durchgeführten Schritte bei der Suche nach einem Guten-FAA für einen gegebenen ebenen intern-3-zusammenhängenden Graphen mit Aufhängungen $\{a_1, a_2, a_3\}$

Algorithmus 1 Berechnung eines Guten-FAA

```

1: procedure GFAA( $G, f_{aus}, \{a_1, a_2, a_3\}$ )
2:   if FAA( $G, \{a_1, a_2, a_3\}$ )  $\neq$  None then
3:      $\{d_1, d_2\} \leftarrow$  demands for  $\mathcal{N}_G$ 
4:     initialize  $\mathcal{N}_G$  ▷ nach Netzwerk 3
5:      $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \leftarrow$  two-flow( $\mathcal{N}_G$ )
6:     if  $\varphi \neq$  None then
7:       if  $\varphi$  is integer then
8:          $\phi \leftarrow$  FAA( $\varphi_2$ )
9:         return  $\phi$ 
10:      else
11:         $\varphi_z \leftarrow$  FAA-flow( $\varphi_2$ ) ▷ Fluss nach Lemma 4.4
12:         $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N}_G \setminus \{\text{edges used by } \varphi_z\}$ 
13:         $\tilde{\varphi} \leftarrow$  int-one-flow( $\mathcal{N}$ ) ▷ Ecken- und Schnyder-Fluss zu  $\varphi_z$ 
14:        if  $|\tilde{\varphi}| = d_1 + d_2 - |\varphi_z|$  then
15:           $\phi \leftarrow$  FAA( $\varphi_z$ )
16:          return  $\phi$ 
17:        else ▷ Nur erreichbar, falls Vermutung 1 falsch
18:           $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \leftarrow$  int-two-flow( $\mathcal{N}_G$ )
19:          if  $\varphi \neq$  None then ▷ Sonst Gegenbeispiel zu Vermutung 1
20:             $\phi \leftarrow$  FAA( $\varphi_2$ )
21:            return  $\phi$ 
22:          end if
23:        end if
24:      end if
25:    end if
26:  end if
27: end procedure

```

Die Kontrolle, ob für G ein FAA existiert ist optional, lässt sich jedoch, zum Beispiel wie zuvor über ein 1-Fluss-Problem, in polynomineller Zeit auf einem deutlich kleineren Netzwerk bestimmen. Dies spart Zeit, falls zu Aufhängungen keine FAAs auf G existieren. Das Multi-Fluss-Problem auf \mathcal{N}_G zu gegebenen Bedarfen (d_1, d_2) wird mithilfe des in SageMath enthaltenen Solvers *Glpk* für Lineare Programmierung gelöst, welcher ein Paar von Flussgraphen (φ_1, φ_2) ausgibt, falls eine zulässige Lösung existiert und sonst nichts [M⁺12, S⁺18]. In den Zeilen 13 und 19, wird im Gegensatz zu Zeile 5, nur nach ganzzahligen Lösungen gesucht. Aus einer ganzzahligen Lösung kann man ein FAA ϕ aus φ_2 extrahieren indem man die Zuweisungs-Pfade durch die Dummy-Senke zurück verfolgt. Wir betreten jeden passierten Dummy-Knoten v^* aus einem Winkel (f, v) . Diese Winkel ergeben die Zuweisungen ϕ .

Die Überprüfung ab Zeile 12 ist unter der Annahme, dass Vermutung 1 stimmt nicht notwendig. Es könnte hier ein FAA aus φ_2 extrahiert und ausgegeben werden. Wir gewährleisten jedoch so die Korrektheit des Algorithmus, weil wir den Beweis von Vermutung 1 noch nicht gefunden haben. Bei Tests ergaben sich mit diesem Ansatz kürzere Berechnungszeiten, als bei der Suche nach ausschließlich ganzzahligen Lösungen. Zeile 17 sollte nach Vermutung 1 nicht erreicht werden. Sie stellt jedoch sicher gestellt, dass Algorithmus 1 immer dann ein Gutes-FAA ausgibt, wenn ein ganzzahliger Fluss auf Netzwerk 3 existiert.

5.1 Visualisierung

Nehmen wir an, wir haben für einen Graphen G ein Gutes-FAA ϕ gefunden. Für eine SLTR, müssen wir eine zu ϕ passende Einbettung von G finden. Wir werden den in Abschnitt 3.1 erörterten Ansatz über harmonische Funktionen nutzen, um eine SLTR von G zu erhalten.

Wir wollen nun eine Einbettung $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ von G ähnlich der Gummibad-Repräsentation berechnen, die ϕ respektiert. Sei $S \subseteq V$ die Menge der Knoten von f_{aus} . Nach Abschnitt 3.1 gelten die folgenden harmonischen Gleichungen für zugewiesene (oben) und nicht zugewiesene Knoten (unten).

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1)$$

$$f(v) = \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} f(u), \text{ mit } \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} = 1 \text{ und } \lambda_{uv} > 0$$

Um zu einer gegebenen Gewichtsfunktion λ eine Lösung zu finden, können wir diese Gleichungen, um die Aufhängungen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ erweitern und als Matrix schreiben.

$$M_\lambda(\vec{v}_x, \vec{v}_y) = \begin{pmatrix} f^{(A)}_x & f^{(A)}_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } (M_\lambda)_{vw} = \begin{cases} -\lambda_{vw} & \text{falls } (v, w) \in E, \\ \sum_{u \in N(v)} \lambda_{uv} & \text{falls } v = w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir nun die Pseudo-Inverse berechnen, erhalten wir eine Einbettung.

$$f(V) = M_{\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} f^{(A)}_x & f^{(A)}_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun, inspiriert von den *iterativen Tutte Einbettungen* nach Felsner und Scheucher, diese Rechnung mehrmals durchführen und Schritt für Schritt die Gewichtung λ anpassen [FS17]. Wünschenswert wäre es, wenn sich die Zeichnung nach einer gewissen Anzahl an Schritten nur noch so wenig verändert, dass wir den Algorithmus abbrechen können, und die letzte Zeichnung ausgeben.

5.1.1 Probleme bei der Wahl von λ

Setzen wir im ersten Durchlauf $\lambda = 1$ erhalten wir eine klassische Gummiband-Repräsentation die ϕ respektiert. Wir wollen nun anhand dieser Einbettung λ verändern um, Iteration für Iteration, eine „schönere“ Einbettung zu erhalten. Halten wir zwei Punkte fest, die wir als Bewertungsmaßstab für eine schöne Einbettung berücksichtigen können.

- Es gibt keine zu großen oder zu kleinen Gebiete.
- Es existieren keine zu kurzen Kanten.

Sehr lange Kanten lassen sich, wie in Beispiel 5.2, nicht immer vermeiden. Es gibt SLTRs, wie in Beispiel 5.1, bei denen alle inneren Knoten zugewiesen sind. Dies macht eine gute Wahl der λ kompliziert. Der Ansatz nach Scheucher [FS17], bei dem λ als monoton steigende Funktion, proportional zu Größe der an eine Kante angrenzenden Gebiete und ihrer Länge, gewählt wird liefert im Allgemeinen keine schönen Zeichnungen wie im nächsten Beispiel gezeigt wird. Allgemein wurden besonders SLTRs mit wenigen Kanten betrachtet, da für dieses die oben erwähnten Einschränkungen stärker auftreten.

Beispiel 5.1. Bei der in Abbildung 5.2 a) zu sehenden SLTR sind alle Knoten bis auf die Aufhängungen einem Gebiet zugeordnet. Somit liegt jeder Knoten auf einer Gerade und es existieren nur Gleichungen von Typ

$$f(v) = \lambda_v f(u) + (1 - \lambda_v) f(w), \text{ mit } \lambda_v \in (0, 1).$$

Um von der linken zur rechten Zeichnung zu gelangen, wollen wir das Gebiet unten in der Mitte verkleinern, doch die drei angrenzenden Kanten kommen in keiner der Gleichungen zu Bestimmung unserer Einbettung $f(V)$ vor. Die Kanten die uns helfen können das Segment in rot nach unten zu bewegen und somit das untere Dreieck zu verkleinern sind in blau eingefärbt. Um zur Zeichnung auf der rechten Seite zu gelangen erfolgt die Wahl der λ in jedem Schritt nach folgenden Schema. Wir berechnen zu jedem Segment die Mengen der Kanten S_1, S_2 , die an Gebieten liegen die vollständig auf einer der beiden Seiten des Segments liegen. Parallel dazu berechnen wir die Summe der Flächen dieser Gebiete A_1, A_2 . Falls beide Mengen nicht leer sind erhöhen

wir für jede Kante $e \in A_i$ $\lambda(e)$ um a_i mit:

$$a_i = A_i^{1.25} * |A_j|^{-2}, \text{ mit } j \neq i.$$

Die Exponenten sind heuristisch gewählt. Wir brechen entweder ab, wenn die Einbettung konvergiert oder wir eine feste Anzahl an Schritten durchgeführt haben. Eine so errechnete Einbettungen ist in Abbildung 5.2 c) zu sehen.

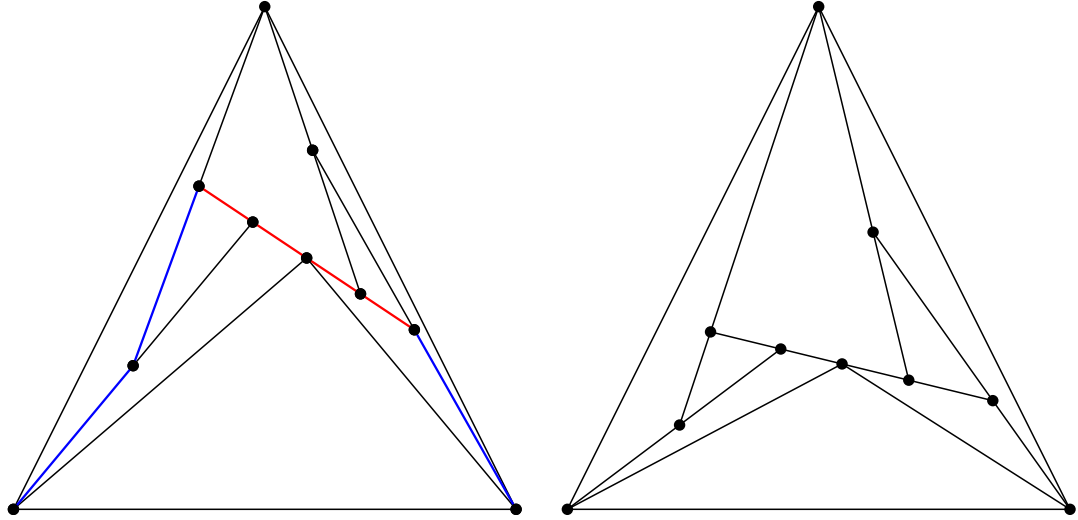


Abbildung 5.1 – a) Eine Einbettung mit $\lambda=1$. b) Eine Einbettung nach bei der wir nur zu e adjazente Gebiete für $\lambda(e)$ berücksichtigen. c) Eine Einbettung nach dem Schema aus Beispiel 5.2.

Dieser Ansatz führt aber, gerade bei Graphen mit vielen Knoten, zu keiner Zeichnung die die oben genannten Punkte erfüllt (vergleiche Abbildung ??, b)). Wir betrachten ein weiteres Beispiel um ein zweites Schema zu erläutern.

Beispiel 5.2. Gerade für Graphen mit vielen Knoten führt der Ansatz aus Beispiel 5.1 nicht immer zu einer schönen Zeichnung der SLTR. In Abbildung ?? a) ist so ein Graph mit der ersten für $\lambda = 1$ erhaltenen Zeichnung und dem Resultat nach 40 Schritten nach dem Schema aus Beispiel 5.1 zu sehen (Abbildung ?? b). Ein anderer iterativer Ansatz führt hier jedoch zu schöneren Ergebnissen. Wir setzen bei der Initialisierung $\lambda_0(e) = 2$ für jede Kante von G . Nun multiplizieren wir die Kanten an den Gebieten f mit $A(f) > A(f_{max}) * (1 + \epsilon)$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{N}$. Für diese Kanten gilt somit $\lambda_{i+1}(e) = \lambda_i(e) * c$. Wir wählen $\epsilon = 0,1$ und $c = 2$. In Abbildung ?? c) ist die Einbettung nach 50 Schritten zu sehen.

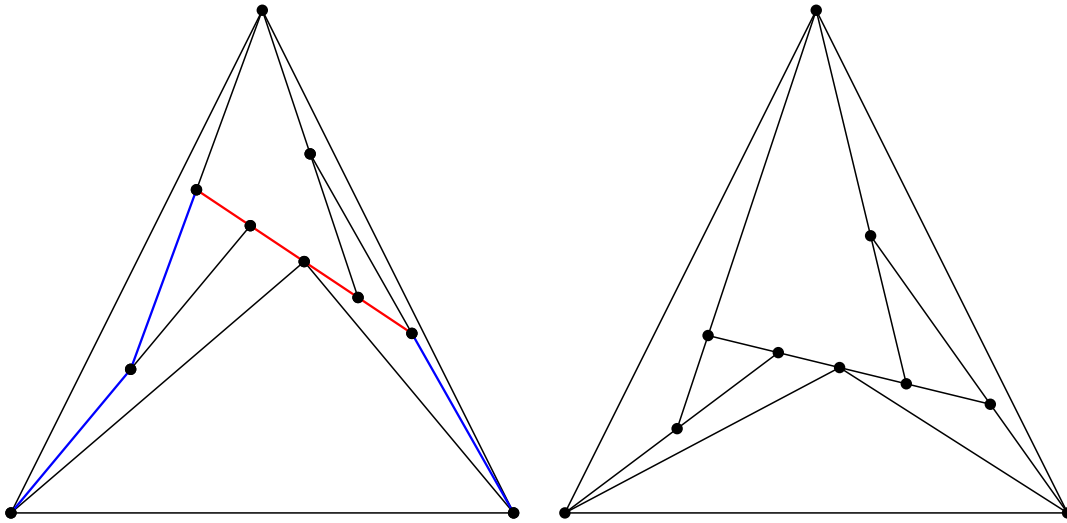


Abbildung 5.2 – Drei Zeichnungen der gleichen SLTR für unterschiedliche λ . a) Für $\lambda = 1$. b) Nach dem Ansatz aus Beispiel 5.1. c) Nach dem Ansatz aus Beispiel 5.1.

5.1.2 Eine heuristisch gute Wahl von λ

Der Ansatz aus Beispiel 5.2 führt jedoch auch bei einigen Graphen schlechten Zeichnungen. Doch ein Kompromiss aus beiden hat heuristisch vielversprechende Zeichnungen erzeugt. Wir führen die beiden Algorithmen hintereinander aus. Falls Algorithmus ?? konvergiert, brechen wir ab und geben sie aus. Falls nicht merken wir uns die berechneten Werte λ' und führen ?? durch. Bei jedem Schritt berechnen wir nun eine neue Zeichnung mit $\lambda(e) = \lambda_{i+1}(e) + \lambda'(e)$. Wieder führen wir 50 Schritte durch. TODO

Beispiele von so errechneten Zeichnungen verschiedener SLTRs sind in Abbildung ?? zu sehen.

5.2 Experimentelle Rechnungen

Es folgt eine kurze statistische Betrachtung der Verteilung von Graphen mit SLTRs. Hier würde eine gleichmäßige Wahl von (intern-)3-zusammenhängenden Graphen die aufschlussreichsten Resultate liefern. Ein guter Algorithmus zur zufälligen Erstellung 3-zusammenhängender planarer Graphen lässt sich zum Beispiel nach einem Ansatz von Fusy aus [Fus09] implementieren. Als Teilschritt der Erstellung eines uniformen Samplers für planare Graphen werden hier 3-zusammenhängende planare Graphen mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit erzeugt. Die Implementierung ist jedoch aufgrund der Auswertung von Erzeugendenfunktionen nicht trivial. Diese Analyse beschränkt sich daher auf pseudo-zufällig erzeugte Graphen.

Es folgt eine kurze Beschreibung des Samplers. Wir beginnen mit $G_0 = K_4$. Nun wird in Schritt i mit spezifizierbaren Wahrscheinlichkeiten eine der folgenden vier

Operationen durchgeführt.

PG1 Ein Knoten v mit $\deg(v) \geq 4$ wird in v_1, v_2 geteilt und eine Kante (v_1, v_2) eingefügt. Nun werden die zyklisch sortierten Nachbarn in zwei Teile N_1, N_2 getrennt und mit v_1 beziehungsweise v_2 verbunden.

PG2 Eine Knoten wird auf einer Kante eingefügt und mit einem in einem angrenzenden Gebiet liegenden Knoten verbunden.

PG3 Ein Knoten wird in ein Gebiet eingefügt und mit mindestens drei der am Gebiet liegenden Knoten verbunden.

PG4 Es wird eine zufällige Kante in ein Gebiet mit mehr als drei Knoten eingefügt.

Nach jeder dieser Operationen ist G_i weiterhin planar und die Erzeugung kann bei der gewünschten Knotenzahl angehalten werden. Abschließend wird zufällig ein äußeres Gebiet und aus diesem die Aufhängungen gewählt.

In Abbildung 5.3 sind die Ergebnisse für so erzeugte Graphen zwischen 100 und 800 Knoten, mit jeweils fünf Graphen für jede Knotenzahl, dargestellt. Ein Punkt in der Abbildung entspricht einem Graphen. Die Farben stehen für eine SLTR (blau), nur ein FAA (rot) oder einen Graphen mit keinem von beiden (grün).

Wie nicht anders zu erwarten bilden die Farben drei Strahlen die sich mit wachsender Knotenzahl zunehmend vermischen. Die Parameter des Samplers sind dahingehend ausgerichtet um gerade an diesem Übergang viele Graphen zu erzeugen. Für Graphen mit im Verhältnis großen Kantenzahlen finden sich fast immer SLTRs.

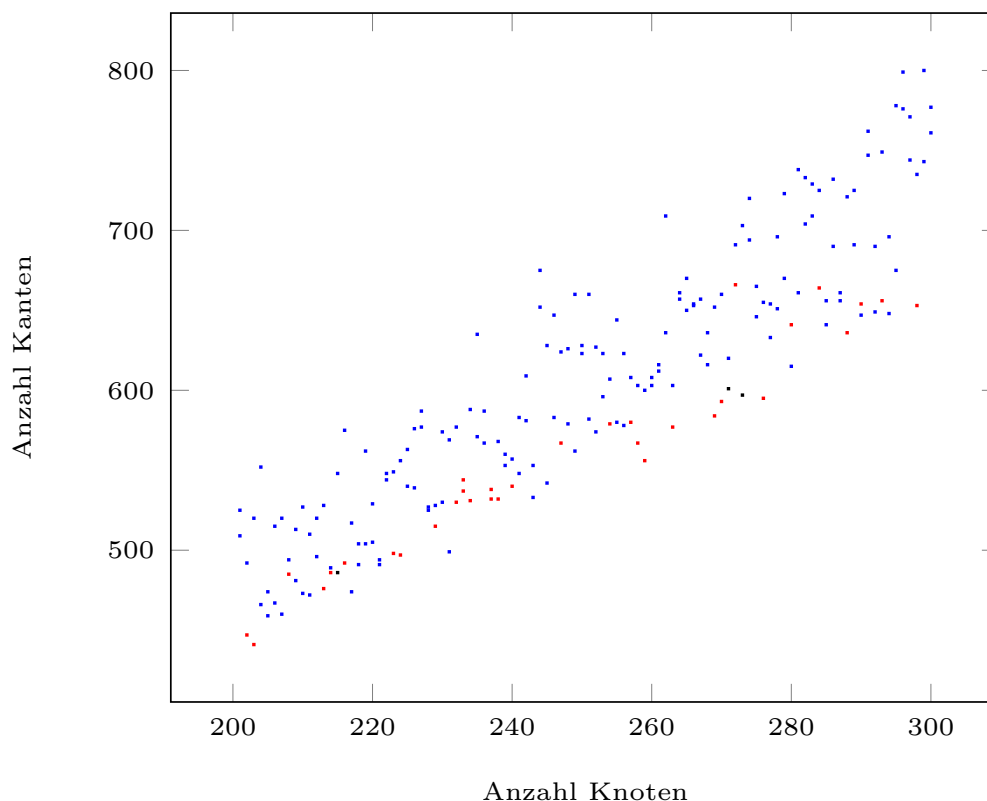


Abbildung 5.3 – Anwendung des Programms auf pseudo-zufällige, planare, 3-zusammenhängende Graphen, mit gegebenen Aufhängungen. Jeder Punkt entspricht einem Graphen mit SLTR (blau), nur schlechten FAA (rot) und ohne FAA (grün).

5.3 Dokumentation

Zum Abschluss des Kapitels folgt eine Dokumentation des Programs. Die Datei `program.sage` muss in SageMath geladen werden [S⁺18]. Die beiden in `program.sage` implementierten Funktionen sind:

sltr(graph, suspensions, face, non_int, check_int, plotting) Gibt, falls möglich, ein Gutes-FAA zurück und erstellt optional eine Zeichnung.

return = GFAA : Eine Gutes-FAA als Liste von Gebieten mit Zuweisungen, `[[[1,4,6,8],[4]], ...]`, oder `None`.

graph : Ein planarer intern-3-zusammenhängender Graph

suspensions : Die Aufhängungen als Liste `[a1, a2, a3]`, mit `None` werden alle möglichen Aufhängungen überprüft.

face : Das äußere Gebiet als Kantenfolge `[[v1, v2], ... , [vk, v1]]`, mit `None` werden alle möglichen äußeren Gebiete überprüft.

non_int : default `True`, sonst wird nur nach ganzzahligen Lösungen gesucht.

check_int : default `True`, sonst wird die Überprüfung ab Zeile 12 ausgelassen.

plotting : default `False`, sonst wird eine Zeichnung ausgegeben.

random_sltr(vertices, non_int, check_int, plotting, ipe, cut) Erzeugt einen pseudo-zufälligen Graphen und erstellt, falls möglich, ein Gutes-FAA und eine passende Zeichnung.

return = [graph,GFAA] Ein Paar aus Graph und GFAA oder `[graph, None]`.

vertices : Die Anzahl der Knoten des zu erzeugenden Graphen

non_int : default `True`, sonst wird nur nach ganzzahligen Lösungen gesucht.

check_int : default `True`, sonst wird die Überprüfung ab Zeile 12 ausgelassen.

plotting : default `True`, sonst wird keine Zeichnung ausgegeben.

ipe : default `None`, bei Übergabe eines Strings `string` wird eine ipe-Datei `string.ipe` erstellt.

cut : default `None`, optional lassen sich die Parameter der pseudo-zufälligen Erzeugung durch drei aufsteigende natürliche Zahlen ≤ 1000 anpassen `[a, b, c]`. Es wird der in Abschnitt 5.2 beschriebene Sampler genutzt. Die normale Einstellung ist `[300, 600, 990]`. In jedem Schritt wird eine der vier Möglichkeiten PG1, PG2, PG3 und PG4 mit Verteilung $a/1000$, $(a+b)/1000$, $(a+b+c)/1000$ und $(1000-a-b-c)/1000$ ausgewählt.

Literaturverzeichnis

- [AF13a] AERTS, Nieke ; FELSNER, Stefan: Henneberg steps for triangle representations. In: *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications* Springer, 2013, S. 503–509
- [AF13b] AERTS, Nieke ; FELSNER, Stefan: Straight line triangle representations. In: *International Symposium on Graph Drawing* Springer, 2013, S. 119–130
- [AF15] AERTS, Nieke ; FELSNER, Stefan: Straight Line Triangle Representations via Schnyder Labelings. In: *J. Graph Algorithms Appl.* 19 (2015), Nr. 1, S. 467–505
- [EIS75] EVEN, Shimon ; ITAI, Alon ; SHAMIR, Adi: On the complexity of time table and multi-commodity flow problems. In: *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1975)* IEEE, 1975, S. 184–193
- [Fár48] FÁRY, István: On straight-line representation of planar graphs. In: *Acta Sci. Math.* 11 (1948), S. 229–233
- [Fel01] FELSNER, Stefan: Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes. In: *Order* 18 (2001), Nr. 1, S. pp. 19–37
- [Fel04] FELSNER, Stefan: Lattice structures from planar graphs. In: *The electronic journal of combinatorics* 11 (2004), Nr. 1, S. 15
- [FF56] FORD, Lester R. ; FULKERSON, Delbert R.: Maximal flow through a network. In: *Canadian Journal of Mathematics* 8 (1956), S. 399–404
- [FS17] FELSNER, Stefan ; SCHEUCHER, Manfred: Arrangements of pseudocircles: triangles and drawings. In: *International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization* Springer, 2017, S. 127–139
- [Fus07] FUSY, Éric: *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*, LIX Ecole Polytechnique, Diss., 2007
- [Fus09] FUSY, Éric: Uniform random sampling of planar graphs in linear time. In: *Random Structures & Algorithms* 35 (2009), Nr. 4, S. 464–522
- [Hu63] HU, T C.: Multi-commodity network flows. In: *Operations research* 11 (1963), Nr. 3, S. 344–360
- [KV18] KORTE, Bernhard ; VYGEN, Jens: *Combinatorial optimization*. 6. Springer, 2018

- [LR99] LEIGHTON, Tom ; RAO, Satish: Multicommodity max-flow min-cut theorems and their use in designing approximation algorithms. In: *Journal of the ACM (JACM)* 46 (1999), Nr. 6, S. 787–832
- [LV99] LOVÁSZ, László ; VESZTERGOMBI, Katalin: Geometric representations of graphs. In: *Paul Erdos and his Mathematics* (1999)
- [M⁺12] MAKHORIN, Andrew u. a.: *GNU Linear Programming Kit (Version 8.3)*, 2012. – <http://www.gnu.org/software/glpk/>
- [Mil02] MILLER, Ezra: Planar graphs as minimal resolutions of trivariate monomial ideals. In: *Documenta Mathematica* 7 (2002), S. 43–90
- [S⁺18] STEIN, W. A. u. a. ; THE SAGE DEVELOPMENT TEAM (Hrsg.): *Sage Mathematics Software (Version 8.3)*. The Sage Development Team, 2018. – <http://www.sagemath.org>
- [Sch89] SCHNYDER, Walter: Planar graphs and poset dimension. In: *Order* 5 (1989), Nr. 4, S. pp. 323–343
- [Sch90] SCHNYDER, Walter: Embedding planar graphs on the grid. In: *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (1990), S. 138–148
- [Tut63] TUTTE, William T.: How to draw a graph. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3 (1963), Nr. 1, S. 743–767
- [Whi33] WHITNEY, Hassler: 2-isomorphic graphs. In: *American Journal of Mathematics* 55 (1933), Nr. 1, S. 245–254