

Technische Universität Berlin

Master Arbeit

Grapheneinbettungen und Optimierung

Autor:
Jonas Neukamm

Betreuer und Erstgutachter:
Prof. Dr. Stefan Felsner

Matrikelnummer:
324283

Zweitgutachter:
Dr. Frank Lutz

*Masterarbeit zur Prüfung zum Master of Science
an der*

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

7.6.2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

.....

Jonas Neukamm

Zusammenfassung

To Do

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)	2
1.2 Schnyder Woods	3
2 Hauptteil	7
3 Ein algorithmischer Ansatz	9
Literaturverzeichnis	11

1 Grundlagen

Wir werden uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit einfachen planaren Graphen beschäftigen, also solchen die keine Mehrfachkanten und Schleifen besitzen und für die kreuzungsfreie Zeichnungen, beziehungsweise Einbettungen, in der Ebene existieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus der Menge der Knoten V und Kanten $E \subseteq (V \times V)$. Eine Kante uv verbindet die beiden Knoten u und v . Einen planaren Graphen zusammen mit einer möglichen kreuzungsfreien Einbettung in der Ebene bezeichnen wir als *planen Graphen*. Sei Für einen planaren Graphen können wir, zusätzlich zu den Knoten und Kanten, auch die Menge der Gebiete (engl. faces) F betrachten. Bei einem planen Graph wird das unbeschränkte als das *äussere* Gebiet definiert. Für die weiteren Betrachtungen macht es oft Sinn drei Knoten a_1, a_2, a_3 im äusseren Gebiet gesondert zu betrachten und diese die *Aufhängungen* von G zu nennen.

Planare Graphen haben, durch die Existenz kreuzungsfreier Einbettungen, in gewissem Sinne besonders schöne Zeichnungen und so ist einer der Fragen mit der sich schon viele Mathematiker auseinander gesetzt haben: "*How to draw a Graph?*"[Tut63]

Bei topologische Zeichnung eines planaren Graphen werden die Kanten als Kurven dargestellt die sich nur in den Knoten treffen. In den Fünfzigern wurde unter anderem von István Fáry gezeigt, dass für jeden planaren Graphen mit einem beliebigen äusseren Gebiet eine geradlinige Zeichnung existiert. [Fár48]

Definition 1.1 (intern zusammenhängend). Ein Graph G ist zusammenhängend falls für alle Knoten u, v ein Pfad von u nach v existiert. G ist k -zusammenhängend, falls er nach der Entfernung von $k - 1$ beliebigen Knoten weiterhin zusammenhängend ist. Sei G plan mit den Aufhängungen a_1, a_2, a_3 , weiter sei a_∞ ein zusätzlicher Knoten im äusseren Gebiet. Dann ist G *intern k -zusammenhängend*, falls $G \cup \{a_1 a_\infty, a_2 a_\infty, a_3 a_\infty\}$ k -zusammenhängend ist.

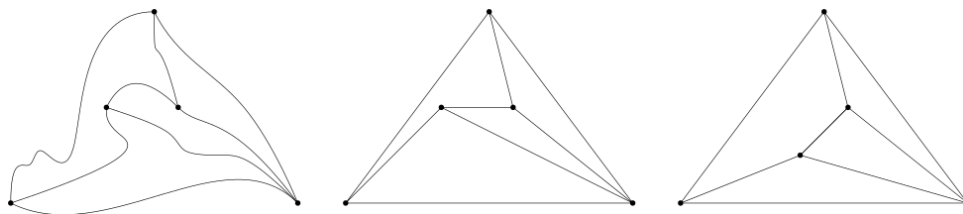


Abbildung 1.1: Planarer Graph mit einer topologischen, einer geradlinigen und einer konvexen Zeichnung.

In den Siebzigern betrachtete William Thomas Tutte die Unterklasse der drei-zusammenhängenden planaren Graphen und zeigte, dass für diese nicht nur geradlinige, sondern sogar *konvexe* Zeichnungen existieren, bei denen alle Gebiete die konvexe Polygone umranden. [Tut63]

1.1 Geradlinige Dreiecks Darstellungen (SLTRs)

Ausgehend von der konvexen Darstellung nach Tutte, kann man sich die Frage stellen unter welchen Voraussetzungen wir einen planaren Graphen so zeichnen können, dass alle Gebiete, inklusive dem Äusseren Dreiecken umranden. Bei der Formalisierung dieser Darstellung und ersten Feststellungen halten wir uns an Niek Aerts und Stefan Felsner [AF13b].

Definition 1.2 (SLTR). Eine Zeichnung eines planen Graphen G wird Gradlinige Dreiecks Darstellung, im weiteren kurz *SLTR* (für die englische Bezeichnung Straight Line Triangle Representation), genannt falls gilt:

- S1 Alle Kanten Segmente von Geraden
- S2 Alle Gebiete, inklusive dem äusseren, sind nicht degenerierte Dreiecke.

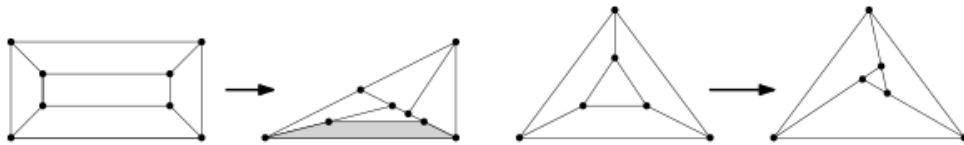


Abbildung 1.2: Links einer der beiden drei-zusammenhängenden Graphen auf acht Knoten ohne SLTR und rechts ein Graph mit einer möglichen SLTR.

Um die Problemstellung greifbarer zu machen werden wir planare Graphen zusammen mit den drei Aufhängungen a_1, a_2 und a_3 als designierten Ecken einer möglichen SLTR betrachten. Einen Graphen zusammen mit einem äusseren Gebiet bzw. Aufhängungen zu betrachten, macht auch in sofern Sinn, dass kombinatorische Graphen existieren, von denen manche Einbettungen SLTRs zulassen, andere jedoch nicht, so wie in Abbildung ?? zu sehen.

Proposition 1.3. Sei G ein Graph mit Aufhängungen a_1, a_2, a_3 als äusseren Ecken einer SLTR. Weiter gebe es keinen Knoten von Grad zwei der in beiden angrenzenden Gebieten den Winkel π hat¹. Dann ist G intern-drei-zusammenhängend^{1.1}.

Wir werden also von nun an, der Einfachheit halber intern-drei-zusammenhängende Graphen mit Aufhängungen betrachten, da alle anderen Graphen mit SLTR auf diese

¹Ein solcher Knoten ist keine Aufhängung, da der Aussenwinkel grösser als π ist. Alle anderen Knoten haben $\leq \pi$ Winkel. Somit können wir ihn durch eine gerade Kante zwischen seinen Nachbarn ersetzen und den resultierenden Graphen betrachten.

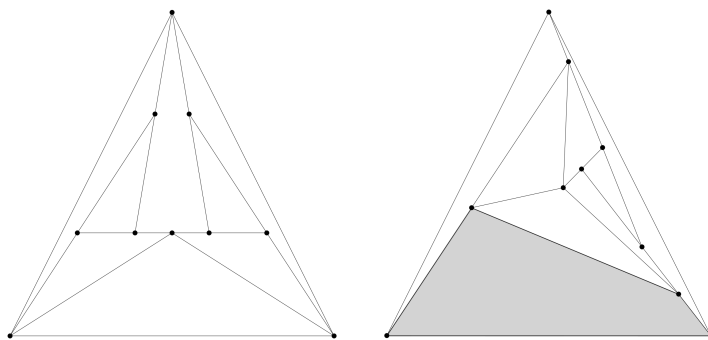


Abbildung 1.3: Der kleinste drei-zusammenhängende kombinatorische Graph mit einer Wahl der Aufhängungen die eine SLTR zulässt und einer Auswahl ohne SLTR.

reduziert werden können.

Zu den Fragen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen es für die Existenz von SLTRs gibt und welche algorithmischen Ansätze es bei der Suche nach einer spezifischen Darstellung gibt haben Aerts und Felsner in [AF13b], [AF13a] und [AF15] schon einige Antworten geliefert, mit denen wir uns in den nächsten beiden Kapiteln beschäftigen werden. Zuerst müssen aber in diesem Kapitel noch ein paar notwendige Konzepte eingeführt werden.

1.2 Schnyder Woods

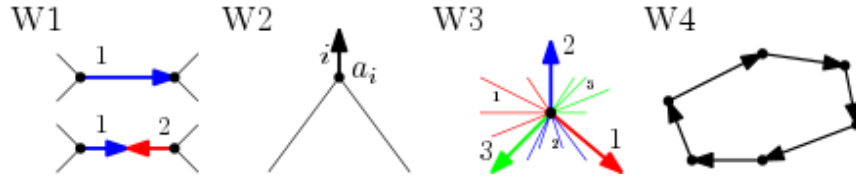
Schnyder Wälder, im weiteren *Schnyder Woods*, wurden zuerst von Walter Schnyder zur Betrachtung der Ordnungs-Dimension planarer Graphen, als eine Färbung und Orientierung auf den inneren Kanten einer Triangulierung, betrachtet [Sch89]. In einem weiteren Resultat dienten sie zur Erlangung einer planaren Einbettung auf einem $n - 2 \times n - 2$ Netz [Sch90]. Im Folgenden werden wir die Verallgemeinerung auf 3-zusammenhängende plane Graphen durch Felsner [Fel01] und die zu ihnen in Bijektion stehenden Schnyder Labelings einführen und uns dabei an [Fel12] orientieren.

Für den Rest dieses Kapitels meinen wir mit G , wenn nicht weiter spezifiziert, einen 3-zusammenhängenden planen Graphen mit Aufhängungen a_1, s_2, a_3 .

Definition 1.4 (Schnyder Woods). Ein Schnyder Wood ist eine Orientierung und Beschriftung der Kanten von G mit den Labeln 1, 2 und 3, unter Berücksichtigung der folgenden Regeln²:

²Alternativ wird hier auch anschaulicher von rot, grün und blau als Platzhalter für 1, 2 und 3 gesprochen. Es wird davon ausgegangen, dass die Label zyklisch sortiert sind, sodass $i + 1$ und $i - 1$ immer definiert sind.

- W1 Jede Kante ist entweder un- oder bigerichtet. Falls sie bigerichtet ist haben beide Richtungen unterschiedliche Label.
- W2 An jeder Aufhängung a_i existiert eine nach aussen gerichtete Kante ohne Endpunkt mit Label i .
- W3 Jeder Knoten v hat Ausgangsgrad eins zu jedem Label. Um v existieren im Uhrzeigersinn eine Auskante mit Label 1, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 3, eine Auskante mit Label 2, null oder mehr eingehende Kanten mit Label 1, eine Auskante mit Label 2 und null oder mehr eingehende Kanten mit Label 2.
- W4 Es existiert inneres Gebiet mit gerichteten Zykel in einer Farbe als Rand.



Die Existenz von Schnyder Wood für jeden 3-zusammenhängenden planen Graphen werden wir weiter unten zeigen. Zunächst wollten wir uns mit Resultaten im Bezug auf Einbettungen befassen. Wir wollen hier kurz, das *face-counting*[Fel01] erläutern. Betrachten wir also G zusammen mit einem Schnyder Wald T_1, T_2, T_3 . Nach [Fel12, Korollar 2.5] handelt es sich bei den T_i um gerichtete Bäume mit Wurzeln in a_i . Zu jedem Knoten v existierten also eindeutige Pfade $P_i(v)$ zu den Aufhängungen a_i . Die Pfade von v zu den Aufhängungen treffen sich nach [Fel12, Lemma 2.4] nur in v . Somit können wir zu jedem Knoten v die von den Pfaden $P_{i-1}(v)$ und P_{i+1} und dem äusseren Gebiet begrenzte Region R_i betrachten. Durch das Zählen der Gebiete in den diesen Regionen lässt sich nun eine konvexe Zeichnung von G erzeugen.

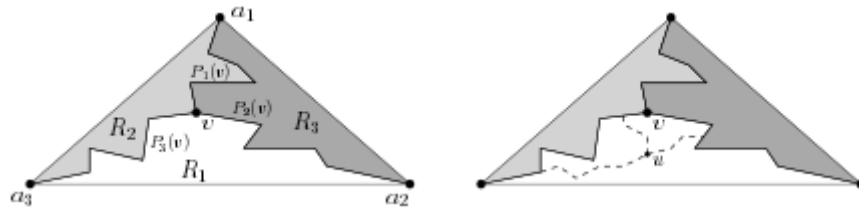


Abbildung 1.4: Regionen zu v und die Inklusion von $R_i(u)$ in $R_i(v)$ falls $u \in R_i(v)$.

Hierzu ordnet man jedem Knoten v seinen Gebiets Vektor (v_1, v_2, v_3) zu, wobei v_i die Anzahl der inneren Gebiete in R_i beschreibt. Nun gilt für jeden Knoten $v_1 + v_2 + v_3 = |F| - 1$. Seien $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0)$ und $\alpha_3 = (0, 0)$, dann erhalten wir die Zeichnung durch die Funktion

$$\mu : v \rightarrow v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3.$$

Nach [Fel12, Theorem 2.7] ist die mit diesen Koordinaten erzeugte Zeichnung planar und konvex. Sie hat sogar noch die schöne Eigenschaft, dass sich die Knoten an jedem innern Gebiet auf dem Rand eines Dreiecks befinden, wie in Abbildung ?? illustriert.

// TODO Schnyder Triangle Bild ?!

Eine weitere Methode um aus Schnyder Woods, über geodätische Einbettung, zu einer konvexen Zeichnung zu gelangen, wird ebenfalls in [Fel12] beschrieben.

Definition 1.5 (Schnyder Labeling). Ein Schnyder Labeling ist eine Beschriftung Winkel von G mit den Labeln 1, 2 und 3 unter Berücksichtigung der folgenden Regeln:

- L1 Um jedes innere Gebiet bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1_{en} , 2_{en} und 3_{en} . Am äusseren Gebiet gilt dies gegen den Uhrzeigersinn.
- L2 Um jeden inneren Knoten bilden die Label im Uhrzeigersinn nichtleere Intervalle von 1_{en} , 2_{en} und 3_{en} .
- L3 An Aufhängung a_i haben äusseren Winkel die Label $i-1$ und $i+1$ im Uhrzeigersinn mit der halben Auskante dazwischen und die inneren Winkel das Label i .

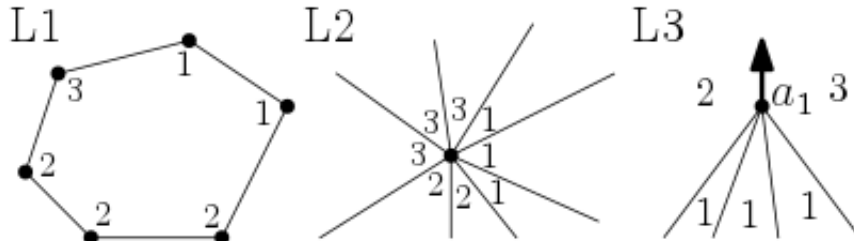


Abbildung 1.5: Aus L1 und L2 folgt, dass es in einem Schnyder Labeling nur Kanten von Typ A oder B, siehe Abbildung ??, gibt.

Durch Abbildung ?? wird eine Verbindung zwischen Schnyder Woods und Schnyder Labelings geschaffen. Wenn wir uns auf drei-zusammenhängende planare Graphen beschränken, dann ist die dargestellte Abbildung nach [Fel12, Theorem 2.3] eine Bijektion.

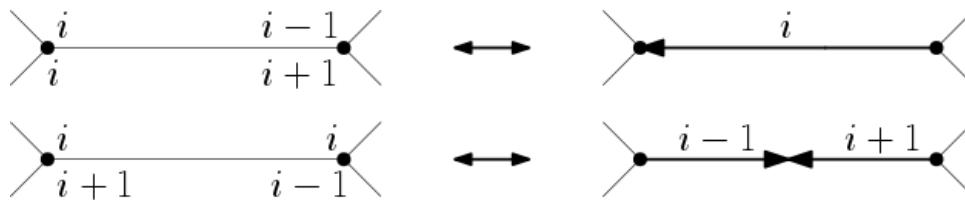


Abbildung 1.6

Mithilfe der Schnyder Labelings können wir kurz auf die Existenz einer Schnyder Woods, bzw. Schnyder Labelings, für einen beliebigen 3-zusammenhängenden planar Graphen eingehen. Der

// TODO

2 Hauptteil

Wir haben in Kapitel 1 die Geradlinige Dreiecks Darstellung von planeren Graphen kennen gelernt. In diesem Kapitel wollen wir uns jetzt mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Existenz auseinandersetzen. Wenn wir zu einem Graphen G eine SLTR gefunden haben ordnen wir jedem Gebiet drei Kanten zu

Damit ein Graph eine SLTR besitzt muss als notwendige Bedingung

3 Ein algorithmischer Ansatz

Theorem 3.1 (Ganzzahliger Fluss). *Falls alle Kapazitäten in \mathcal{F} ganzzahlig sind, dann existiert auch ein maximaler Fluss, sodass der Fluss auf allen Kanten ganzzahlig ist.*

Theorem 3.2 (Max-Flow-Min-Cut). *TODO*

Theorem 3.3. *Falls das oben konstruierte Zwei-Fluss-Problem auf dem Graphen \mathcal{N}_G eine nicht ganzzahlige Lösung zulässt, dann existiert auch mindestens eine ganzzahlige Lösung.*

Beweis: Angenommen, es existiert ein Graph G wie oben, für den das zugehörige Zwei-Fluss-Problem auf \mathcal{N}_G nur eine nicht ganzzahlige Lösung $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ mit $|\phi_1| = |E_{int}| + 3|F_{int}|$ und $|\phi_2| = \sum_{f \in F_{int}} (|f| - 3)$ zulässt. Sei E^* die Menge der äusseren Kanten in den Winkel-Dreiecken, die zumindest teilweise Fluss 2 enthalten und V^* die Menge aller Dummy-Knoten deren Kanten zu Senke 2 von ϕ_2 mindestens teilweise saturiert sind. Jede Kante aus E^* entlädt sich durch genau einen Knoten aus V^* . Es gilt somit

$$|E^*| \geq |V^*| \geq \sum_{f \in F_{int}} (|f| - 3) = |\phi_2|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle Kanten komplett saturiert sind. Wähle nun eine Teilmenge $\hat{E} \subseteq E^*$ wie folgt aus. Zuerst sei \hat{E} die Menge aller Kanten aus E^* , die durch ϕ_2 komplett saturiert sind. Betrachte nun die verbliebenen Kanten. Wir fügen solange jeweils maximal eine Kante hinzu, die zu einem der Knoten gehört, die noch keine passende Kante in \hat{E} haben, bis $|\hat{E}| = |\phi_2|$ gilt.

Betrachte nun $\mathcal{N}_G \setminus \hat{E}$ als Fluss-Graphen nur mit Quelle 1 und Senke 1. Es kann keine ganzzahlige Lösung $\hat{\phi}_1$ mit $|\hat{\phi}_1| = |E_{int}| + 3|F_{int}|$ existieren, da wir sonst auch eine ganzzahlige Lösung für unser Problem gefunden hätten. Wir könnten $\hat{\phi}_2$ durch die Kanten aus \hat{E} schicken und erhalten mit $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$ einen ganzzahligen Fluss der unsere Bedingungen erfüllt. Da $\mathcal{N}_G \setminus \hat{E}$ aber ganzzahlige Kapazitäten hat muss es nach Theorem 3.1 auch eine maximale ganzzahlige Lösung $\tilde{\phi}_1$, mit $|\tilde{\phi}_1| < |E_{int}| + 3|F_{int}|$, geben. Es existiert also nach Theorem 3.2 ein minimaler Kanten-Schnitt \mathcal{S} in $\mathcal{N}_G \setminus \hat{E}$ mit

$$|\mathcal{S}| = |\tilde{\phi}_1| = |E_{int}| + 3|F_{int}| = |\phi_1|.$$

Sei \mathcal{S} so gewählt, dass sich alle äusseren Winkel-Kanten entweder in \hat{E} oder in \mathcal{S} befinden. Wie in Bemerkung ?? festgestellt müssen die Kanten von jeder Lösung

$\phi = (\phi_1, \phi_2)$ saturiert sein. Somit müssen die verbliebenen Kanten dies in unserem Fall ebenfalls sein.

Sei nun \mathcal{F} eine Kopie von \mathcal{N}_G . Wir fügen eine übergeordnete Quelle und Senke und Kanten von der Quelle zu Quelle 1 und 2 und von Senke 1 und 2 hin zur neuen Senke mit Kapazitäten $|\phi_1|$ respektive $|\phi_2|$ hinzu. Eine maximaler Fluss φ auf \mathcal{F} kann nicht $|\phi_1| + |\phi_2|$ überschreiten. Insbesondere ist $\hat{\varphi} = \phi_1 + \phi_2$ dann ein maximaler, wenn auch nicht ganzzahliger, Fluss auf \mathcal{F} .

Sei $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cup \hat{E}$, dann ist \mathcal{C} ein Schnitt in \mathcal{F} zwischen der neuen Quelle und Senke mit

$$|\mathcal{C}| = |\mathcal{S} \cup \hat{E}| < \sum_{f \in F_{int}} (|f| - 3) + |E_{int}| + 3|F_{int}| = |\phi_1| + |\phi_2|.$$

Nach Theorem 3.2 kann also kein Fluss auf \mathcal{F} grösser als $|\phi_1| + |\phi_2| - 1$ sein. Somit kann auch $\phi_1 + \phi_2$ kein machbarer Fluss auf \mathcal{F} sein. Dies gilt dann aber auch für $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ auf \mathcal{N}_G . Somit muss es zu jedem Graphen mit nicht ganzzahliger Lösung auch einen ganzzahligen Fluss geben. □

Corollary 3.4. *In P!!!!*

Literaturverzeichnis

- [AF13a] Nieké Aerts and Stefan Felsner, *Henneberg steps for triangle representations*, The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, Springer, 2013, pp. 503–509.
- [AF13b] ———, *Straight line triangle representations*, International Symposium on Graph Drawing, Springer, 2013, pp. 119–130.
- [AF15] ———, *Straight line triangle representations via schnyder labelings*, J. Graph Algorithms Appl. **19** (2015), no. 1, 467–505.
- [Fár48] István Fáry, *On straight-line representation of planar graphs*, Acta Sci. Math. **11** (1948), 229–233.
- [Fel01] Stefan Felsner, *Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes*, Order **18** (2001), no. 1, pp. 19–37.
- [Fel12] ———, *Geometric graphs and arrangements: some chapters from combinatorial geometry*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [Sch89] Walter Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989), no. 4, pp. 323–343.
- [Sch90] ———, *Embedding planar graphs on the grid*, in Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Disc. Algo., Philadelphia, PA, USA (1990), pp. 138–148.
- [Tut63] William Thomas Tutte, *How to draw a graph*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1963), no. 1, 743–767.