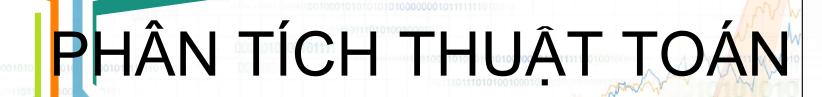
Phân tích & Thiết kế thuật toán (Algorithms Design & Analysis)

L/O/G/O

GV: HUYNH THỊ THANH THƯƠNG

Email: thuonghtt@uit.edu.vn



CHƯƠNG 2



L/O/G/O

www.themegallery.com

Cấp số cộng



- Cấp số cộng: dãy số thoả mãn điều kiện: 2 phần tử liên tiếp nhau sai khác nhau một hằng số (công sai)
 - Số hạng thứ n:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Tổng của n số hạng đầu:

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=rac{n(a_1+a_n)}{2}$$

(a₁: phần tử đầu, d: công sai)

$$=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

Cấp số nhân



- Cấp số nhân: dãy số thoả mãn điều kiện: tỷ số của hai phần tử liên tiếp là hằng số (công bội)
 - Số hạng thứ n:

$$a_n = a \, r^{n-1}$$

Tổng các phần tử của cấp số nhân:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^n a r^k = rac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

(a: phần tử đầu, r: công bội)

$$\sum_{k=m}^n ar^k = rac{a(r^m-r^{n+1})}{1-r}$$

Tổng hữu hạn



Tính chất:

Sum Manipulation Rules

$$1. \quad \sum_{i=l}^{u} ca_i = c \sum_{i=l}^{u} a_i$$

2.
$$\sum_{i=l}^{u} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=l}^{u} a_i \pm \sum_{i=l}^{u} b_i$$

3.
$$\sum_{i=l}^{u} a_i = \sum_{i=l}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{u} a_i$$
, where $l \le m < u$

4.
$$\sum_{i=l}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_u - a_{l-1}$$

Tổng hữu hạn



Một số công thức cần nhớ:

Important Summation Formulas

1.
$$\sum_{i=l}^{u} 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{u-l+1 \text{ times}} = u - l + 1 \ (l, u \text{ are integer limits}, l \le u); \quad \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

2.
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.
$$\sum_{k=1}^{n} i^{k} = 1^{k} + 2^{k} + \dots + n^{k} \approx \frac{1}{k+1} n^{k+1}$$

Tổng hữu hạn



Một số công thức cần nhớ:

5.
$$\sum_{i=0}^{n} a^{i} = 1 + a + \dots + a^{n} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \ (a \neq 1); \quad \sum_{i=0}^{n} 2^{i} = 2^{n+1} - 1$$

6.
$$\sum_{i=1}^{n} i2^{i} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^{2} + \dots + n2^{n} = (n-1)2^{n+1} + 2$$

7.
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma$$
, where $\gamma \approx 0.5772 \dots$ (Euler's constant)

$$8. \quad \sum_{i=1}^{n} \lg i \approx n \lg n$$

[1]Anany Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2014 (trang 476)





Floor and Ceiling Formulas

floor of a real number x, denoted $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.8 \rfloor = -4$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ ceiling of a real number x, denoted $\lceil x \rceil$, $\lceil 3.8 \rceil = 4$, $\lceil -3.8 \rceil = -3$, $\lceil 3 \rceil = 3$

- **1.** $x 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1$
- 2. $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$ and $\lceil x+n\rceil = \lceil x\rceil + n$ for real x and integer n
- 3. $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$
- **4.** $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$

Logarithms



Properties of Logarithms

All logarithm bases are assumed to be greater than 1 in the formulas below; $\lg x$ denotes the logarithm base 2, $\ln x$ denotes the logarithm base e = 2.71828...; x, y are arbitrary positive numbers.

1.
$$\log_a 1 = 0$$

2.
$$\log_a a = 1$$

$$3. \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$4. \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\mathbf{5.} \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$6. \quad a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$$

7.
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \log_b x$$

Bonus #01: Tính tổng hữu hạn (2 điểm)

Yêu cầu: Tính chính xác, không cho phép sai số hay xấp xỉ

a.
$$1+3+5+7+\cdots+999$$

b.
$$2+4+8+16+\cdots+1024$$

c.
$$\sum_{i=3}^{n+1} 1$$

f.
$$\sum_{i=1}^{n} 3^{j+1}$$

d.
$$\sum_{i=3}^{n+1} i$$

c.
$$\sum_{i=3}^{n+1} 1$$
 d. $\sum_{i=3}^{n+1} i$ **f.** $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$ **g.** $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

e.
$$\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$$

$$h.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$$

i.
$$\sum_{j \in \{2,3,5\}} (j^2 + j)$$

$$j. \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{100} (i+j)$$

Exercises 2.3, trang 67

[1]Anany Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2014

Bài 1

```
sum = 0;
i = 1;
while (i \le n)
      j = 1;
       while (j \le n)
         sum = sum + i*j;
              j = j + 1;
       i = i + 1;
```

Số phép gán ? Số phép so sánh ?



Bài 1

```
\{1 g\}
sum = 0;
i = 1;
                                 \{1 g\}
while (i \le n)
                               {n+1 ₩ ng lặp while ngoài lặp bao nhiêu lần?
      j = 1;
                                 {n g} Số lần lặp = số con i,
                                     với i chạy từ 1 đến n, bước tăng là 1
        while (j \le n)
                sum = sum + i*j;
                j = j + 1;
                                                 While ngoài lặp n lần
        i = i + 1;
                                 {n g}
```

12

```
\{1 g\}
sum = 0;
i = 1;
                                \{1 g\}
while (i \le n)
                               {n+1 ss}
{
        j = 1;
                                {n g}
        while (j \le n)
                sum = sum + i thối while rong sẽ được thực hiện n lần
                                        1 lần tốn bao nhiêu phép toán?
                j = j + 1;
        i = i + 1;
                                {n g}
```

Bài 1

```
sum = 0; \\ i = 1; \\ while (i \le n) \\ \{ \qquad \qquad j = 1; \\ \qquad \qquad while (j \le n) \\ \{ \qquad \qquad sum = sum + i*j; \\ \qquad \qquad j = j + 1; \\ \} \\ \qquad \qquad i = i + 1; \\ \}
```

```
while (j \le n) {n+1 ss}

{ sum = sum + i*j; {n g}

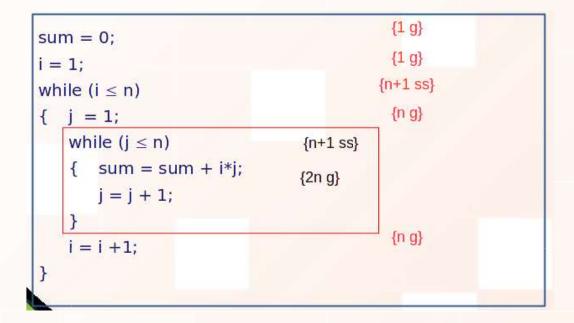
 j = j + 1; {n g}

}
```

Vòng lặp while trong lặp bao nhiêu lần?

Số lần lặp while trong = số con j, với j chạy từ 1 đến n, bước tăng là 1

Cứ 1 lần thực hiện while trong sẽ tốn chi phí là 2n phép gán và n+1 phép so sánh



$$T(n) = Gán(n) + SS(n)$$

$$T(n) = 3n^2 + 4n + 3$$

$$G\acute{a}n(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} (2n) = 2 + 2n + 2n^{2}$$

$$Sosánh(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (n+1) = n + 1 + n(n+1) = n^2 + 2n + 1$$

```
\{1 g\}
sum = 0;
                                                    \{1 g\}
i = 1;
                                                  {n+1 ss}
while (i \le n)
                                                    {n g}
        j = 1;
         while (j \leq i)
                                       {i+1 ss}
              sum = sum + i*j:_{\{2i g\}}
                 j = j + 1;
                                                    {n g}
         i = i + 1;
```

$$Sosánh(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (i+1)$$

$$G\acute{a}n(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} (2i) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} (i)$$

$$Gán(n) = 2 + 2n + 2\frac{(1+n)n}{2}$$



00

Bài 3

Đã giải hoàn chỉnh tại lớp
- Có thể while trong sẽ
không lặp 1 lần nào cả khi
điều kiện lặp ban đầu đã
sai

```
sum := 0;
i := 1;
while (i \le n) do
      j := n-i;
       while (j \le i) do
              sum := sum + j;
             j := j + 1;
       endw;
      i = i + 1;
endw;
```