Phân tích & Thiết kế thuật toán (Algorithms Design & Analysis)

L/O/G/O

GV: HUỲNH THỊ THANH THƯƠNG

Email: thuonghtt@uit.edu.vn

PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

CHƯƠNG 2

L/O/G/O

www.themegallery.com

Cấp số cộng

- Cấp số cộng: dãy số thoả mãn điều kiện: 2 phần tử liên tiếp nhau sai khác nhau một hằng số (công sai)
  - Số hạng thứ n:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

  - Tổng của n số hạng đầu:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

(a_1: phần tử đầu, d: công sai)

$$= \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

Cấp số nhân

- Cấp số nhân: dãy số thoả mãn điều kiện: tỷ số của hai phần tử liên tiếp là hằng số (công bội)
  - Số hạng thứ n:

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

  - Tổng các phần tử của cấp số nhân:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

(a: phần tử đầu, r: công bội)

$$\sum_{k=m}^{n} ar^k = \frac{a(r^m - r^{n+1})}{1-r}$$

Tổng hữu hạn

❖ Tính chất:

Sum Manipulation Rules

1. $$\sum_{i=l}^{u} ca_i = c\sum_{i=l}^{u} a_i$$

2. $$\sum_{i=l}^{u}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=l}^{u} a_i \pm \sum_{i=l}^{u} b_i$$

3. $$\sum_{i=l}^{u} a_i = \sum_{i=l}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{u} a_i, \text{ where } l \le m < u$$

4. $$\sum_{i=l}^{u}(a_i - a_{i-1}) = a_u - a_{l-1}$$

Tổng hữu hạn

❖ Một số công thức cần nhớ:

Important Summation Formulas

1. $$\sum_{i=l}^{u} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{u-l+1 \text{ times}} = u - l + 1 \ (l, u \text{ are integer limits, } l \le u); \quad \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \approx \frac{1}{k+1} n^{k+1}$$

Tổng hữu hạn

❖ Một số công thức cần nhớ:

5. $\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\ (a \neq 1);\quad \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

6. $\sum_{i=1}^{n} i2^i = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$

7. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma$, where $\gamma \approx 0.5772\ldots$ (Euler's constant)

8. $\sum_{i=1}^{n} \lg i \approx n \lg n$

[1]Anany Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2014 (trang 476)

Cận trên, cận dưới

Floor and Ceiling Formulas

floor of a real number x, denoted $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.8 \rfloor = -4$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$

ceiling of a real number x, denoted $\lceil x \rceil$, $\lceil 3.8 \rceil = 4$, $\lceil -3.8 \rceil = -3$, $\lceil 3 \rceil = 3$

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
2. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ and $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ for real x and integer n
3. $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$
4. $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$

Logarithms

Properties of Logarithms

All logarithm bases are assumed to be greater than 1 in the formulas below; $\lg x$ denotes the logarithm base 2, $\ln x$ denotes the logarithm base $e = 2.71828\ldots$; x, y are arbitrary positive numbers.

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a x^y = y \log_a x$

4. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

5. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

6. $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$

7. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \log_b x$

Bonus #01: Tính tổng hữu hạn (2 điểm)

Yêu cầu: Tính chính xác, không cho phép sai số hay xấp xỉ

a. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 999$

b. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

c. $\sum_{i=3}^{n+1} 1$

d. $\sum_{i=3}^{n+1} i$

e. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

f. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

g. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

i. $\sum_{j \in \{2,3,5\}} (j^2 + j)$

j. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{100} (i + j)$

Exercises 2.3, trang 67

[1]Anany Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2014

Khởi động

Bài 1

```
sum = 0;
i = 1;
while (i ≤ n)
{         j  = 1;
          while (j ≤ n)
          {         sum = sum + i*j;
                    j = j + 1;
          }
          i = i +1;
}
```

Số phép gán ?
Số phép so sánh ?

Khởi động Bài 1

```
sum = 0;                    {1 g}
i = 1;                      {1 g}
while (i ≤ n)               {n+1 ss}
{       j  = 1;             {n g}
        while (j ≤ n)
        {       sum = sum + i*j;
                j = j + 1;
        }
        i = i +1;           {n g}
}
```

Vòng lặp while ngoài lặp bao nhiêu lần?

Số lần lặp = số con i,
với i chạy từ 1 đến n, bước tăng là 1

While ngoài lặp n lần

Khởi động Bài 1

```
sum = 0;                     {1 g}
i = 1;                       {1 g}
while (i ≤ n)                {n+1 ss}
{       j  = 1;              {n g}
        while (j ≤ n)
        {       sum = sum + i*j;
                j = j + 1;
        }
        i = i +1;            {n g}
}
```

Khối while trong sẽ được thực hiện n lần
1 lần tốn bao nhiêu phép toán?

Khởi động Bài 1

```
sum = 0;
i = 1;
while (i ≤ n)
{           j  = 1;
            while (j ≤ n)
            {           sum = sum + i*j;
                        j = j + 1;
            }
            i = i +1;
}
```

```
while (j ≤ n)          {n+1 ss}
{   sum = sum + i*j;   {n g}
    j = j + 1;         {n g}
}
```

Vòng lặp while trong lặp bao nhiêu lần?

Số lần lặp while trong = số con j,
với j chạy từ 1 đến n, bước tăng là 1

Cứ 1 lần thực hiện while trong sẽ tốn chi phí là 2n phép gán và n+1 phép so sánh

Khởi động Bài 1

```
sum = 0;                          {1 g}
i = 1;                            {1 g}
while (i ≤ n)                     {n+1 ss}
{   j = 1;                        {n g}
    while (j ≤ n)                 {n+1 ss}
    {   sum = sum + i*j;          {2n g}
        j = j + 1;
    }
    i = i +1;                     {n g}
}
```

T(n) = Gán (n)+SS(n)

T(n) =3n^2 + 4n + 3

$$Gán(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n}(2n) = 2 + 2n + 2n^2$$

$$Sosánh(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(n+1) = n + 1 + n(n+1) = n^2 + 2n + 1$$

Khởi động

Bài 2

```
sum = 0;                                   {1 g}
i = 1;                                     {1 g}
while (i ≤ n)                              {n+1 ss}
{       j  = 1;                            {n g}
        while (j ≤ i)          {i+1 ss}
        {       sum = sum + i*j;  {2i g}
                j = j + 1;
        }
        i = i +1;                          {n g}
}
```

Khởi động Bài 2

```
sum = 0;                      {1 g}
i = 1;                        {1 g}
while (i ≤ n)                 {n+1 ss}
{   j = 1;                    {n g}
    while (j ≤ i)             {i+1 ss}
    {   sum = sum + i*j;      {2i g}
        j = j + 1;
    }
    i = i +1;                 {n g}
}
```

$$Sosánh(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(i+1)$$

$$Gán(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n}(2i) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}(i)$$

$$Gán(n) = 2 + 2n + 2\frac{(1+n)n}{2}$$

Khởi động

Bài 3

Đã giải hoàn chỉnh tại lớp
- Có thể while trong sẽ không lặp 1 lần nào cả khi điều kiện lặp ban đầu đã sai

```
sum := 0;
i := 1;
while  (i ≤ n) do
        j := n-i ;
        while (j  ≤ i)  do
                sum := sum + j;
                j := j  + 1;
        endw;
        i = i + 1;
endw;
```