Approximations diophantiennes, théorème de Dirichlet et nombres transcendants

À Montpellier, France
Le 30 mars 2020

1 Résultats indispensables

Théorème 1.1 : Lemme de Borel-Cantelli

Soit $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ une famille dénombrable de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$$

et soit $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ pour une infinité de } k\}$. Alors E est mesurable et de plus $m(E) = 0$.

Preuve : Tout d'abord, nous remarquons que

$$E = \limsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

un fait bien connu. Cette réécriture de E nous révèle que E est un ensemble mesurable. Ensuite, nous posons $B_n = \bigcup_{k\geq n} E_k$; alors $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'ensembles mesurables. Nous notons que pour chaque n, la mesure $m(B_n)$ est majorée par $\sum_{k=n}^{\infty} m(E_k)$, un reste de série convergente, et donc que $m(B_n)$ tend vers zéro lorsque n devient grand. En particulier, $m(B_1) < \infty$ et puisque $B_n \searrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, la continuité à droite de m implique que

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0.$$

Nous concluons la preuve en constatant que $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = E$. ■

2 Approximations par des nombres rationnels

Très tôt dans mon éducation mathématique, j'ai été introduit au concept de nombre irrationnel. Ce sont les nombres qui ne peuvent pas s'exprimer comme le ratio (d'où le nom d'« irrationnel ») de deux entiers. Un exemple célèbre est $\sqrt{2}$, qui se réalise géométriquement comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Il est donc raisonable de croire en l'« existence » de ce type de nombre, dont on peut produire une infinité d'exemples (prendre $\sqrt{n}$ pour n un entier qui n'est pas le carré d'un autre entier). Toutefois, lorsque j'y pense plus profondément, je réalise que puisque la définition d'un nombre irrationnel est une définition négative, je n'ai en fait aucune idée de ce à quoi un nombre irrationnel ressemble en général. En soit, je ne peux que montrer qu'un nombre n'est pas rationnel par contradiction. Tout ça donne une qualité mystérieuse et personnelle à ces nombres. Ils sont innaccessibles directement.

Lorsque je pense à $\sqrt{3}$, je dois m'y prendre rationnellement, c'est-à-dire que je ne peux pas faire autrement que d'y penser comme quelque chose d'infini que j'approxime. En utilisant l'expansion décimale,

$$\sqrt{3} \approx 1.732050807568877\ldots$$

et je vois alors que la suite 1, $17/10$, $173/100$, $1732/1000$, etc. approxime de mieux en mieux le nombre.

Étant donné un nombre réel x, je me demande à quel point il est possible de l'approximer efficacement. Par exemple, si x est déjà rationnel, alors c'est clair que x possède une approximation excellente, c'est-à-dire x lui-même. D'un autre côté, si x est irrationnel, alors par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ je sais qu'il existe une suite $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ qui converge vers x, mais ce n'est pas clair à quel point les termes approximent efficacement x et même ce que « approximer efficacement » signifie.

La complexité d'une fraction est déterminée par la taille de son dénominateur. Par exemple, $355/113$ et $3141592/1000000$ sont deux approximations de π qui donnent chacune six décimales correctes, mais la première fraction est une approximation bien moins compliquée que la seconde. Ce sera toujours vrai que plus l'approximation rationnelle est bonne, plus la fraction est compliquée. Ainsi, si je veux approximer « efficacement » un nombre irrationnel x par une fraction, il faut que l'erreur d'approximation soit contrôlée d'une certaine manière par la taille du dénominateur de l'approximant p/q. De plus, je veux pouvoir approximer d'aussi près que je veux le nombre x. Dit autrement, je veux une suite de réels $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ telle qu'il existe une infinité de fractions p/q avec p et q relativement premiers vérifiant la relation : $|x - p/q| \leq b_q$. Évidemment pour que la relation soit intéressante j'exige que b_q soit décroissante vers zéro. Dès qu'une telle suite existe, j'ai que, pour toute erreur maximale $\varepsilon > 0$, il existe une fraction p/q telle que $|x - p/q| \leq \varepsilon$ et de plus cette fraction est « $(b_n)_n$-économique ». En effet, supposons qu'il existe une infinité de fractions p/q telles que $|x - p/q| > \varepsilon$ mais qui toujours vérifient $b_q \geq |x - p/q|$; dans ce cas j'ai que $b_q > \varepsilon$ pour une infinité de q, ce qui contredit l'hypothèse que $(b_n)_n$ décroît vers zéro.

Il est facile de voir que prendre $b_n = 1/n$ fonctionne. Autrement dit, si x est un nombre irrationnel, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe un p tel que $|x - p/q| \leq 1/q$; il suffit de prendre p l'entier le plus près de qx et alors il est clair que $|qx - p| \leq 1$ et donc $|x - p/q| \leq 1/q$.

Mais Dirichlet montre qu'on peut faire beaucoup mieux :

Théorème 2.1 : Théorème d'approximation 1 (Dirichlet)

Soit α un nombre irrationnel quelconque. Alors il existe une infinité de fractions p/q avec p et q relativements premiers tel que $|\alpha - p/q| \leq 1/q^2$.

Preuve : Fixons un entier positif n et considérons les $n+1$ nombres $x_i = i\alpha$ pour $0 \leq i \leq n$. Chaque x_i peut s'écrire comme une partie entière et une partie fractionnaire : $x_i = e_i + \phi_i$ avec $0 < \phi_i < 1$. Nous découpons maintenant l'intervalle $[0, 1)$ en n sous-intervalles de longueur $1/n$. Comme il y a $n+1$ nombres ϕ_i mais seulement n sous-intervalles de longueur $1/n$, alors par le principe des tiroirs il existe i, j distincts tel que

$$|\phi_i - \phi_j| \leq \frac{1}{n}$$

. Notons que $|\phi_i - \phi_j|$ est la même chose que $|\alpha(i-j) - (e_i - e_j)|$, donc en posant $p := e_i - e_j$ et $q := i - j$, nous obtenons que

$$|\alpha q - p| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q}$$

et en divisant des deux côtés par q, l'énoncé est prouvé.

Pour voir qu'il existe une infinité de solutions p/q essentiellement différentes (c'est-à-dire avec p et q relativement premiers), nous procédons par contradiction. Supposons qu'il n'y aie qu'un nombre fini de solutions p_1/q_1, ..., p_k/q_k. Nous choisissons un j tel que la quantité $m := |\alpha q_j - p_j|$ soit minimale. Nous remarquons que parce que α est irrationnel, m est strictement positif. Il est alors possible de choisir un n tel que $1/n < m$. En procédant comme précédemment, nous trouvons alors une nouvelle solution p/q telle que $|\alpha q - p| \leq 1/n < m$, ce qui contredit la minimalité de m. ∎

2.0.1 Il n'y a pas beaucoup de réels qui s'approximent mieux que q^{-2}

Théorème 2.2

La mesure de l'ensemble des réels x tels qu'il existe une infinité de fractions p/q avec p et q relativement premiers vérifiant $|x - p/q| \leq 1/q^{2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, est nulle.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Étant donné un entier $t \in \mathbb{Z}$ et un nombre rationnel p/q avec $q > 0$, nous définissons l'ensemble

$$E^t_{p/q} = \left\{ x \in [t, t+1) : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \right\}$$

qui contient les réels qui sont approximables de façon $(2+\varepsilon)$-économique par un rationnel donné, c'est-à-dire que le dénominateur du nombre rationnel n'est pas trop grand par-rapport à la précision de l'approximation qu'il procure. Il est clair que $E^t_{p/q}$ est mesurable puisque ce n'est qu'une boule fermée dans $[t, t+1)$ de rayon $q^{-2-\varepsilon}$. Sa mesure est donc égale à $2q^{-2-\varepsilon}$. De plus, nous posons

$$E^t_\infty = \{x \in [t, t+1) : x \in E^t_r \text{ pour une infinité de rationnels } r\}$$

et nous réalisons que $x \in E^t_\infty$ si et seulement si il existe une infinité de nombres rationnels p/q tel que $|x - p/q| \leq q^{-2-\varepsilon}$.

Concentrons-nous maintenant sur le cas particulier où $t = 0$. Dans ce cas, nous remarquons que $E^0_{p/q}$ est vide si et seulement si $|p| > q$. Donc,

$$\sum_{r \in \mathbb{Q}} m(E^0_r) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q} m(E^0_{p/q})$$

et puisque

$$\sum_{p=0}^{q} m(E^0_{p/q}) = \frac{2(q+1)}{q^{2+\varepsilon}} \leq \frac{3q}{q^{2+\varepsilon}}$$

nous concluons que

$$\sum_{r \in \mathbb{Q}} m(E^0_r) \leq 3 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varepsilon}} = 3\,\zeta(1+\varepsilon) < \infty$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann, qui est convergente sur $(1, +\infty)$. Cela nous permet d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli pour conclure que $m(E^0_\infty) = 0$.

Maintenant, je montre que $E^0_\infty + t = E^t_\infty$ par double inclusion. Supposons que $x \in E^0_\infty + t$. Alors il existe une infinité de p/q tel que

$$\left| x - t - \frac{p}{q} \right| = \left| x - \frac{p + qt}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

et donc clairement $x \in E^t_\infty$. D'un autre côté, supposons que $x \in E^t_\infty$. Donc $x \in [t, t+1)$ peut s'écrire comme $y + t$ avec $y \in [0,1)$ et il existe une infinité de p/q tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| y - \frac{p + qt}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

d'où nous concluons que $y \in E^0_\infty$ et donc que $x = y + t \in E^0_\infty + t$. Par invariance de la mesure par translation, cela nous permet de dire que pour tout entier t, nous avons que $m(E^t_\infty) = m(E^0_\infty) = 0$.

Si nous dénotons par E l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une infinité de rationnels p/q avec $|x - p/q| \leq 1/q^{2+\varepsilon}$, alors il est clair que

$$E = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} E^t_\infty$$

et donc que $m(E) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} m(E^t_\infty) = 0$. ■

2.1 Nombres transcendants