Approximations diophantiennes, théorème de Dirichlet et nombres transcendants

À Montpellier, France
Le 29 mars 2020

(Dirichlet) Soit α un nombre irrationnel quelconque. Alors il existe une infinité de fractions essentiellement différentes p/q tel que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Preuve :

Fixons un entier positif n et considérons les $n+1$ nombres $x_i = i\alpha$ pour $0 \leq i \leq n$. Chaque x_i peut s'écrire comme une partie entière et une partie fractionnaire : $x_i = e_i + \phi_i$ avec $0 < \phi_i < 1$. Nous découpons maintenant l'intervalle $[0, 1)$ en n sous-intervalles de longueur $1/n$. Comme il y a $n+1$ nombres ϕ_i mais seulement n sous-intervalles de longueur $1/n$, alors par le principe des tiroirs il existe i, j distincts tel que

$$|\phi_i - \phi_j| \leq \frac{1}{n}$$

. Notons que $|\phi_i - \phi_j|$ est la même chose que $|\alpha(i-j) - (e_i - e_j)|$, donc en posant $p := e_i - e_j$ et $q := i - j$, nous obtenons que

$$|\alpha q - p| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q}$$

et en divisant des deux côtés par q, l'énoncé est prouvé.

Pour voir qu'il existe une infinité de solutions p/q essentiellement différentes (c'est-à-dire avec p et q relativement premiers), nous procédons par contradiction. Supposons qu'il n'y aie qu'un nombre fini de solutions p_1/q_1, ..., p_k/q_k. Nous choisissons un j tel que la quantité $m := |\alpha q_j - p_j|$ soit minimale. Nous remarquons que parce que α est irrationnel, m est strictement positif. Il est alors possible de choisir un n tel que $1/n < m$. En procédant comme précédemment, nous trouvons alors une nouvelle solution p/q telle que $|\alpha q - p| \leq 1/n < m$, ce qui contredit la minimalité de m.

0.1 Il n'y a pas beaucoup de réels qui s'approximent mieux que q^{-2}

Étant donné un réel x, je peux toujours l'approximer très bien avec des rationnels. En effet, si x est déjà rationnel, alors il existe une excellente approximation de x, c'est-à-dire x lui-même. Si toutefois x est irrationnel, par ce que j'ai démontré précédemment je peux l'approximer d'aussi près que je le veux (erreur ε) par une fraction p/q qui, bien que je ne puisse pas la choisir, je me suis garanti qu'elle existe, et que la taille de son dénominateur q n'est pas plus gros que la racine carrée de l'inverse de l'erreur d'approximation commise, c'est-à-dire que si $e = |x - p/q|$, alors je suis certain que : (i) $e \leq \varepsilon$; et que : (ii) $q \leq \sqrt{1/e}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Étant donné un entier $t \in \mathbb{Z}$ et un nombre rationnel p/q avec $q > 0$, nous définissons l'ensemble

$$E^t_{p/q} = \left\{ x \in [t, t+1) : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \right\}$$

qui contient les réels qui sont approximables de façon $(2+\varepsilon)$-économique par un rationnel donné, c'est-à-dire que le dénominateur du nombre rationnel n'est pas trop grand par-rapport à la précision de l'approximation qu'il procure. Il est clair que $E^t_{p/q}$ est mesurable puisque ce n'est qu'une boule fermée dans $[t, t+1)$ de rayon $q^{-2-\varepsilon}$. Sa mesure est donc égale à $2q^{-2-\varepsilon}$. De plus, nous posons

$$E^t_\infty = \{x \in [t, t+1) : x \in E^t_r \text{ pour une infinité de rationnels } r\}$$

et nous réalisons que $x \in E^t_\infty$ si et seulement si il existe une infinité de nombres rationnels p/q tel que $|x - p/q| \leq q^{-2-\varepsilon}$.

Concentrons-nous maintenant sur le cas particulier où $t = 0$. Dans ce cas, nous remarquons que $E^0_{p/q}$ est vide si et seulement si $|p| > q$. Donc,

$$\sum_{r\in\mathbb{Q}} m(E^0_r) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{q} m(E^0_{p/q})$$

et puisque

$$\sum_{p=0}^{q} m(E^0_{p/q}) = \frac{2(q+1)}{q^{2+\varepsilon}} \leq \frac{3q}{q^{2+\varepsilon}}$$

nous concluons que

$$\sum_{r\in\mathbb{Q}} m(E^0_r) \leq 3\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\varepsilon}} = 3\,\zeta(1+\varepsilon) < \infty$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann, qui est convergente sur $(1, +\infty)$. Cela nous permet d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli pour conclure que $m(E^0_\infty) = 0$.

Maintenant, je montre que $E^0_\infty + t = E^t_\infty$ par double inclusion. Supposons que $x \in E^0_\infty + t$. Alors il existe une infinité de p/q tel que

$$\left|x - t - \frac{p}{q}\right| = \left|x - \frac{p+qt}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

et donc clairement $x \in E^t_\infty$. D'un autre côté, supposons que $x \in E^t_\infty$. Donc $x \in [t, t+1)$ peut s'écrire comme $y + t$ avec $y \in [0, 1)$ et il existe une infinité de p/q tel que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = \left|y - \frac{p+qt}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

d'où nous concluons que $y \in E^0_\infty$ et donc que $x = y + t \in E^0_\infty + t$. Par invariance de la mesure par translation, cela nous permet de dire que pour tout entier t, nous avons que $m(E^t_\infty) = m(E^0_\infty) = 0$.

Si nous dénotons par E l'ensemblde des $x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une infinité de rationnels p/q avec $|x - p/q| \leq 1/q^{2+\varepsilon}$, alors il est clair que

$$E = \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} E^t_\infty$$

et donc que $m(E) = \sum_{t\in\mathbb{Z}} m(E^t_\infty) = 0$. ∎