Le lemme de Borel-Cantelli

À Montpellier, France
Le 28 mars 2020

Lemme de Borel-Cantelli

Soit $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ une famille dénombrable de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$$

et soit $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ pour une infinité de } k\}$. Alors E est mesurable et de plus $m(E) = 0$.

Preuve : Tout d'abord, nous remarquons que

$$E = \limsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

un fait bien connu. Cette réécriture de E nous révèle que E est un ensemble mesurable. Ensuite, nous posons $B_n = \bigcup_{k\geq n} E_k$; alors $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'ensembles mesurables. Nous notons que pour chaque n, la mesure $m(B_n)$ est majorée par $\sum_{k=n}^{\infty} m(E_k)$, un reste de série convergente, et donc que $m(B_n)$ tend vers zéro lorsque n devient grand. En particulier, $m(B_1) < \infty$ et puisque $B_n \searrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, la continuité à droite de m implique que

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0.$$

Nous concluons la preuve en constatant que $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = E$. ■