Approximations diophantiennes, théorème de Dirichlet et nombres transcendants

À Montpellier, France
Le 28 mars 2020

(Dirichlet) Soit α un nombre irrationnel quelconque. Alors il existe une infinité de fractions essentiellement différentes p/q tel que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Preuve :

Fixons un entier positif n et considérons les $n+1$ nombres $x_i = i\alpha$ pour $0 \leq i \leq n$. Chaque x_i peut s'écrire comme une partie entière et une partie fractionnaire : $x_i = e_i + \phi_i$ avec $0 < \phi_i < 1$. Nous découpons maintenant l'intervalle $[0, 1)$ en n sous-intervalles de longueur $1/n$. Comme il y a $n+1$ nombres ϕ_i mais seulement n sous-intervalles de longueur $1/n$, alors par le principe des tiroirs il existe i, j distincts tel que

$$|\phi_i - \phi_j| \leq \frac{1}{n}$$

. Notons que $|\phi_i - \phi_j|$ est la même chose que $|\alpha(i-j) - (e_i - e_j)|$, donc en posant $p := e_i - e_j$ et $q := i - j$, nous obtenons que

$$|\alpha q - p| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q}$$

et en divisant des deux côtés par q, l'énoncé est prouvé.

Pour voir qu'il existe une infinité de solutions p/q essentiellement différentes (c'est-à-dire avec p et q relativement premiers), nous procédons par contradiction. Supposons qu'il n'y aie qu'un nombre fini de solutions p_1/q_1, ..., p_k/q_k. Nous choisissons un j tel que la quantité $m := |\alpha q_j - p_j|$ soit minimale. Nous remarquons que parce que α est irrationnel, m est strictement positif. Il est alors possible de choisir un n tel que $1/n < m$. En procédant comme précédemment, nous trouvons alors une nouvelle solution p/q telle que $|\alpha q - p| \leq 1/n < m$, ce qui contredit la minimalité de m.