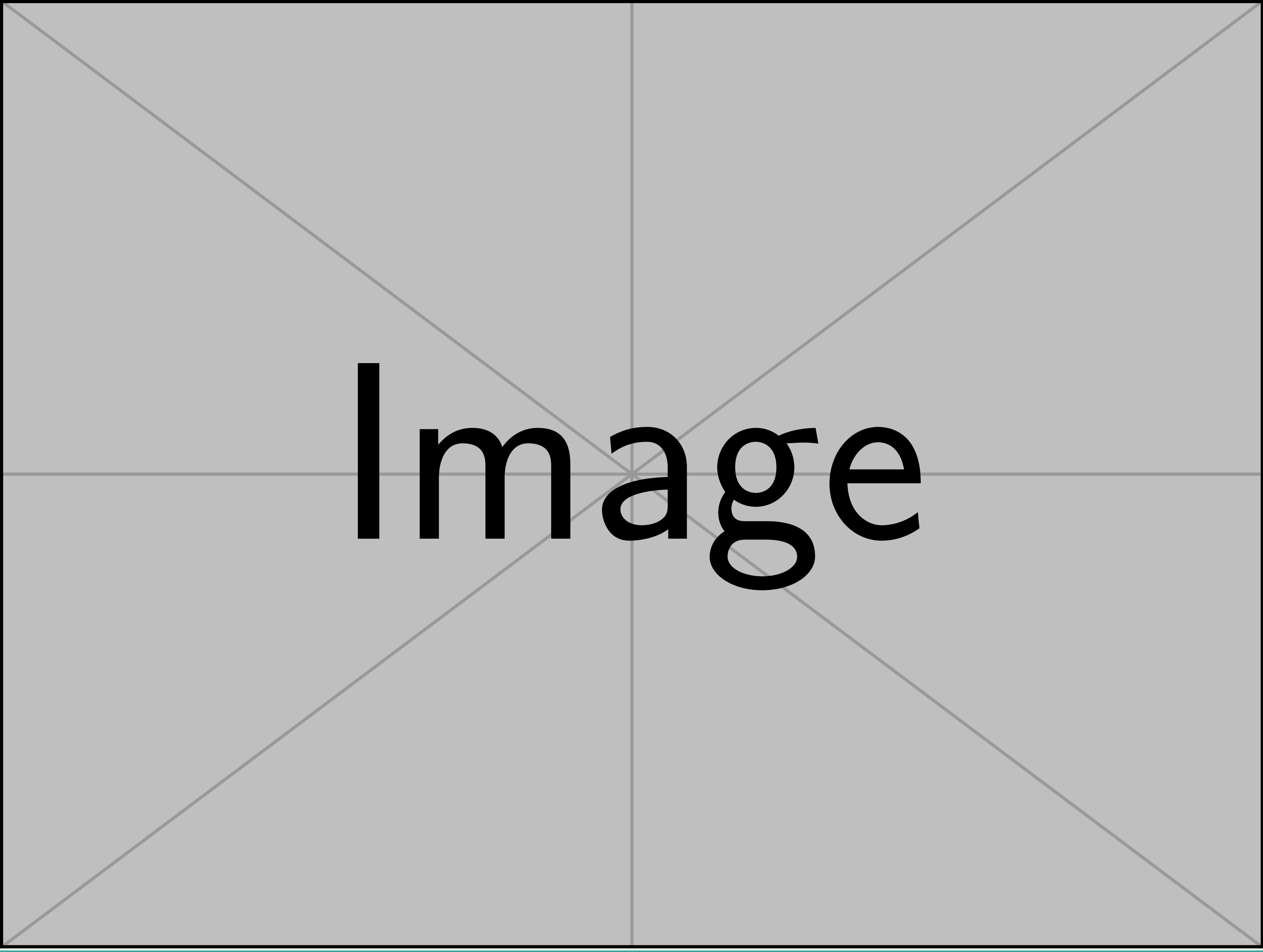


# BookName

## Subtitle

**Author:** CatMono

**Date:** July, 2025

**Version:** 0.1

# Contents

# Preface

This is the preface of the book…

# Chapter 1 Chapter Title

## 1.1 Null

求极限：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+2n}+\cdots+\frac{1}{n^2+nn}\right)$$

*Solution* 设

$$S_n = n\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+2n}+\cdots+\frac{1}{n^2+nn}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$S_n$ 可看作在区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln(1+x)|_0^1=\ln 2.$$

故所求极限为 $\ln 2$。 □

## 1.2 Null

求函数极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$$

*Solution* 由 Taylor 公式可得：

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

因此，

$$\tan x-\sin x=\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

又因为

$$\sin^3 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3=x^3+o(x^3),$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\frac{1}{2}.$$

□

## 1.3 Null

求函数极限：

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{3}{x-1}}$$

*Solution* 设 $y = x^{\frac{3}{x-1}}$，则

$$\ln y = \frac{3}{x-1} \ln x.$$

当 $x \to 1$ 时，$\ln x \to 0$，因此可使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{3\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3 \cdot \frac{1}{x}}{1} = 3.$$

故

$$\lim_{x\to 1} y = e^3.$$

(连续性保证了指数函数的极限) □

## 1.4 Null

设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1, \\ ax+b, & x > 1, \end{cases}$$

为了使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求 $a$ 和 $b$ 的值。

*Solution* 由导数极限定理，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充分条件是：

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

且

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x).$$

($f(x)$ 在 $\mathring{U}(1)$ 的连续性与可导性已经由初等函数保证)

计算得：

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = a+b,$$

故有

$$a+b=1. \quad (1)$$

又

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ a, & x > 1, \end{cases}$$

因此

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = a,$$

故有

$$a = 2. \quad (2)$$

联立方程 (1) 和 (2)，解得：

$$a=2, \quad b=-1.$$

□

## 1.5 Null

求函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x(x-1)}, & x\neq 0,1,\\ -1, & x=0,1,\end{cases}$$

的间断点，并判断其类型。

*Solution* 由题意可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处可能存在间断点。
计算得：

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1,$$

故函数在 $x=0$ 处连续。
计算得：

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin x}{x(x-1)}=+\infty.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有第二类间断点。 □

## 1.6 Null

求导：

$$y=(\sin x)^{\tan x}$$

*Solution* 设 $y=(\sin x)^{\tan x}$，则

$$\ln y=\tan x\cdot\ln(\sin x).$$

对两边求导，得

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sec^2 x\cdot\ln(\sin x)+\tan x\cdot\cot x.$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\sin x)^{\tan x}\left(\sec^2 x\cdot\ln(\sin x)+\tan x\cdot\cot x\right).$$

□

## 1.7 Null

求由方程

$$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$$

所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

*Solution* 对方程两边关于 $x$ 求导，得

$$y\cos(xy)+x\cos(xy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{y-x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right)=1.$$

当 $x=0$ 时，代入方程得 $y(0)=1$。
将 $x=0$ 和 $y=1$ 代入导数方程，得

$$1\cdot\cos(0)+0+\frac{1}{1-0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right)=1,$$

即

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right)=1.$$

解得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1.$$

□

## 1.8 Null

求 $n$ 阶导数：

$$y=\frac{1-x}{1+x}.$$

*Solution* 设 $y=\frac{1-x}{1+x}=1-\frac{2x}{1+x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2\cdot\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}=-\frac{2}{(1+x)^2}.$$

继续求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=4\cdot\frac{1}{(1+x)^3},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=-12\cdot\frac{1}{(1+x)^4},$$

由此可见，导数的符号交替出现，且分母的指数随着阶数增加而增加。归纳可得：

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=(-1)^n\cdot 2n!\cdot\frac{1}{(1+x)^{n+1}}.$$

□

## 1.9 Null

设

$$\begin{cases} x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan(t), \end{cases}$$

求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

*Solution* 由链式法则可得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^2}{2t}=\frac{t}{2}.$$

继续求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

□

## 1.10 Null

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2a]$ 上连续，且满足 $f(0)=f(2a)$，证明存在 $\xi\in[0,a]$，使得

$$f(\xi)=f(\xi+a).$$

*Proof* 设函数 $g(x)=f(x)-f(x+a)$，则 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续，且

$$g(0)=f(0)-f(a),\quad g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0).$$

因此，

$$g(0)+g(a)=0.$$

若 $g(0)=0$，则 $f(0)=f(a)$，取 $\xi=0$ 即可。
若 $g(a)=0$，则 $f(a)=f(2a)$，取 $\xi=a$ 即可。
若 $g(0)\neq 0$ 且 $g(a)\neq 0$，则 $g(0)$ 和 $g(a)$ 异号。由闭区间上连续函数的介值定理，存在 $\xi\in(0,a)$，使得

$$g(\xi)=0,$$

即

$$f(\xi)=f(\xi+a).$$

■

# Bibliography

[1] 作者, Title1, Journal1, Year1. *This is an example of a reference.*

[2] Author2, Title2, Journal2, Year2. *This is another example of a reference.*