Задача 1: Преобразование координат вектора при замене базиса

Найти координаты вектора x линейного пространства X в базисе $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ если известны его кооординаты в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.
Данные:

$$x = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{e}_1 = 5e_1 + 4e_3, \quad \tilde{e}_2 = 5e_1 - e_2, \quad \tilde{e}_3 = -e_1 + 4e_3.$$

Решение:

1. Обозначим столбец координат вектора x в базисе $\tilde{e}$ как $\tilde{x}$. Известно, что столбец $\tilde{x}$ координат в новом базисе $\tilde{e}$ связан со столбцом x координат в старом базисе e соотношением $\tilde{x} = (\tilde{e} \rightsquigarrow e)x$, где $(\tilde{e} \rightsquigarrow e)$ — матрица перехода от базиса $\tilde{e}$ к базису e.

2. Найдём матрицу $(e \rightsquigarrow \tilde{e})$ перехода от базиса e к базису $\tilde{e}$. Её столбцы суть коэффициенты разложения новых базисных векторов $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ по старому базису e_1, e_2, e_3. Таким образом,

$$(e \rightsquigarrow \tilde{e}) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Матрицы $(e \rightsquigarrow \tilde{e})$ и $(\tilde{e} \rightsquigarrow e)$ обратны. Обратную матрицу можно найти любым привычным способом (методом Гаусса или по явной формуле). Получаем, что

$$(\tilde{e} \rightsquigarrow e) = (e \rightsquigarrow \tilde{e})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

4. Теперь можем найти столбец координат $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{24} \\ -2 \\ -\frac{19}{24} \end{pmatrix}$$

Ответ: $(\frac{73}{24}, -2, -\frac{19}{24})^{\mathrm{T}}$