Задача 1: разложение вектора по базису линейного пространства

Найти коэффициенты линейной формы $f \in X^*$ в заданном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X.
Данные:

$$f(x) = 4\xi^1 + 2\xi^2 + \xi^3,$$
$$e_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Решение:

1. Можно, исходя из условия $(e^i, e_j) = \delta^i_j$, найти сопряжённый к $\{e^i\}_{i=1}^n$ базис пространства X^* и напрямую разложить линейную форму f по нему. Однако мы поступим иначе.

2. Вспомним, что в силу естественного изоморфизма X и X^{**}, линейные формы на линейных формах можно отождествить с векторами пространства X.

3. Коэффициенты f_i линейной формы f — это её значения на базисных векторах e_i.

4. Таким образом,

   $f_1 = f(e_1) = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 24;$

   $f_2 = f(e_2) = 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 18;$

   $f_3 = f(e_3) = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 0;$

5. То есть, $f = 24e^1 + 18e^2 + 0e^3$.

Ответ: $(24, 18, 0)$.