Задача 1: Найти базис линейной оболочки системы векторов

Найти какой-нибудь базис пространства X, заданного в виде линейной оболочки векторов $\{x_i\}_{i=1}^m$.
Данные:

$$x_1 = \begin{pmatrix}-1 & 4 & -3 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad x_2 = \begin{pmatrix}3 & -7 & 5 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$x_3 = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad x_4 = \begin{pmatrix}-4 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Решение:

1. Для нахождения базиса пространства X, заданного в виде линейной оболочки системы векторов, нужно выделить в этой систему максимальную линейно независимую подсистему.

2. Составим матрицу из исходных векторов, разместив их по строкам:
$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3 & -2\\ 3 & -7 & 5 & 3\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Теперь пространство X является линейной оболочкой строк этой матрицы. Нам нужно найти базис пространства строк этой матрицы.

3. Для нахождения базиса пространства строк этой матрицы приведём её к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования строк. Мы знаем, что любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

4. Умножим первую строку на 3 и вычтем её из второй и третьей строк, и умножим первую строку на 4 и вычтем её из четвёртой строки. Получим матрицу
$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3 & -2\\ 0 & 5 & -4 & -3\\ 0 & 10 & -8 & 6\\ 0 & 17 & -12 & 9\end{pmatrix}.$$

5. Умножим вторую строку на 2 и вычтем её из третьей строки, и умножим вторую строку на $\frac{17}{5}$ и вычтем её их четвёртой строки. Получим матрицу
$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3 & -2\\ 0 & 5 & -4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5}\end{pmatrix}.$$

6. Видим, что одна из строк оказалась нулевой. Это означает, что она была линейной комбинацией предыдущих строк. Нулевую строку можно не писать — уберём её. Получим матрицу
$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3 & -2\\ 0 & 5 & -4 & -3\\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5}\end{pmatrix}.$$

Она имеет ступенчатый вид. Её ненулевые строки являются базисом пространства строк исходной матрицы.

7. Таким образом, в качестве базиса пространства X можно взять векторы

$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix}0 & 5 & -4 & -3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

8. Из соображений удобства можно сделать все векторы целочисленными. Для этого нужно умножить последний вектор на 5. Получим вектор $\begin{pmatrix}0 & 0 & -4 & 9\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

<u>Ответ:</u>

$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix}0 & 5 & -4 & -3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & -4 & 9\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$