Задача 1: разложение вектора по базису линейного пространства

Разложить данный вектор $x \in X$ по базису $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства X.

Данные:

$$x = \begin{pmatrix}6 & 2 & 9\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad e_1 = \begin{pmatrix}5 & 0 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}5 & -1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Решение:

1. Чтобы разложить вектор $x \in X$ по по данному базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ линейного пространства X нам нужно найти такие скаляры x^1, x^2, x^3, что линейная комбинация векторов базиса получится равной этому вектору

$$e_1 x^1 + e_2 x^2 + e_3 x^3 = x.$$

2. Подставим в полученное разложение векторов через их координаты:

$$\begin{bmatrix}5\\0\\4\end{bmatrix} \cdot x^1 + \begin{bmatrix}5\\-1\\0\end{bmatrix} \cdot x^2 + \begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix} \cdot x^3 = \begin{bmatrix}6\\2\\9\end{bmatrix}.$$

3. Используем определение умножения столбца на скаляр:

$$\begin{bmatrix}5 \cdot x^1\\0 \cdot x^1\\4 \cdot x^1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 \cdot x^2\\-1 \cdot x^2\\0 \cdot x^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 \cdot x^3\\0 \cdot x^3\\4 \cdot x^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\2\\9\end{bmatrix}.$$

4. Сложим столбцы:

$$\begin{bmatrix}5x^1 + 5x^2 - x^3\\0 \cdot x^1 - x^2 + 0 \cdot x^3\\4x^1 + 0 \cdot x^2 + 4x^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\2\\9\end{bmatrix}.$$

5. Из равенства столбцов следует равенство их соответствующих координат. Из покоординатного равенства получаем систему линейных алгебраический уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - x_3 &= 6, \\ -x_2 &= 2, \\ 4x_1 + 4x_3 &= 9, \end{cases}$$

6. Решим полученную систему методом Гаусса или Крамера. Получим:

$$x^1 = 73/24, \quad x^2 = -2, \quad x^3 = -19/24.$$

7. В результате, получаем искомое разложение:

$$73/24 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 - 19/24 \cdot e_3 = x.$$

Ответ: Вектор x в данном базисе имеет следующие коордианты:

$$[73/24, -2, -19/24]$$