Задача 1: Базис линейной оболочки заданной СЛАУ

Найти базис линейной оболочки L, заданной системой линейных алгебраических уравнений.
Данные:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 & = & 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 & = & 0; \end{cases}$$

Решение:

1. Однородная система линейных алгебраических уравнений задаёт подпространство, базисом которой является базис пространства решений этой однородной системы. Таким образом, нам нужно найти фундаментальную систему решений этой однородной системы уравнений.

2. Запишем матрицу коэффициентов данной системы уравнений. При этом столбец свободных коэффициентов можно не писать, так как эти нулевые коэффициенты не будет меняться при элементарных преобразованиях строк.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Будем решать систему уравнений методом Гаусса. Начнём прямой ход Гаусса: вычтем первую строку из второй и вычтем две первые строки из третьей и четвёртой, получим матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Теперь вычтем три вторых строки и третьей строки и прибавим вторую строку к четвёртой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Выберем базисные (зависимые) переменные. Можно взять x_1 и x_3, так как коэффициенты при них образуют не равный нулю минор. Тогда x_2 и x_4 — свободные (независимые).

6. Добьёмся того, чтобы в каждой строке осталась одна базисная переменная. Для этого вычтем из первой строки вторую. Нулевые строки при этом можно не писать.
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Выразим теперь базисные переменные через свободные: $x_1 = 3x_2 + 5x_4$, $x_3 = -2x_2 - 4x_4$. Тогда
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Фундаментальной системой решений является набор векторов $(3, 1, -2, 0)^{\mathrm{T}}$, $(5, 0, -4, 1)^{\mathrm{T}}$. Он и является базисом линейной оболочки, заданной системой уравнений.

<u>Ответ:</u> $(3, 1, -2, 0)^{\mathrm{T}}$, $(5, 0, -4, 1)^{\mathrm{T}}$