Задача 1: разложение вектора по базису линейного пространства

Найти базис пересечения подпространств L_1 и L_2 линейного пространства X, натянутых на соответствующие системы векторов $\{x_i\}_{i=1}^p$ и $\{y_j\}_{j=1}^q$ соответственно.

Данные:

$$L_1 = \left\langle (1,2,3,1,1)^{\mathrm{T}}, (1,0,1,-2,-2)^{\mathrm{T}}, (2,0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,1,0,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle,$$
$$L_2 = \left\langle (1,2,0,0,2)^{\mathrm{T}}, (0,1,-2,3,-3)^{\mathrm{T}}, (-1,2,1,2,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,-2,0,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle.$$

Решение:

1. Пересечение $L_1 \cap L_2$ подпространств состоит из всех векторов, лежащих как в L_1, так и в L_2. Каждое из подпространств можно задать с помощью системы линейных алгебраических уравнений. Тогда векторы из пересечения $L_1 \cap L_2$ удовлетворяют как первой системе уравнений, так и второй. То есть векторы из пересечения удовлетворяют объединённой системе уравнений. Тогда базисом пространства $L_1 \cap L_2$ является фундаментальная система решений этой объединённой системы уравнений.

2. Зададим первое подпространство L_1 системой уравнений. Все векторы из L_1 имеют вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. Мы хотим перейти к иной форме представления подпространства: не в виде линейной комбинации базисных векторов, а в виде однородной системы линейных уравнений. Для этого нам надо связать координаты x_i между собой линейными соотношениями. То есть нужно так связать переменные x_i, чтобы в связывающих их выражениях не было λ_i. Для этого нам нужно последовательно исключать λ_i, что делается прямым ходом Гаусса.

4. Запишем в столбцы основной матрицы данные в условии векторы, а в качестве столбца свободных коэффициентов расширенной матрицы возьмём столбец из неизвестных x_i:
$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & x_4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & x_5 \end{array}\right).$$

5. Приведём эту матрицу к ступенчатому виду:
$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & x_3 - x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2x_4 + 6x_3 - 8x_1 - 3x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_5 + 8x_4 - 16x_1 - 5x_2 \end{array}\right).$$

По теореме Кронекера-Капелли, $2x_5 + 8x_4 - 16x_1 - 5x_2 = 0$. То есть L_1 задаётся системой, состоящей из одного этого уравнения.

6. Аналогично, зададим второе подпространство L_2 системой уравнений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & x_2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & x_3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & x_4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & x_3 + 2x_2 - 4x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9x_4 - 26x_1 - 7x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9x_5 + 38x_1 - x_2 \end{array}\right).$$

То есть L_1 задаётся системой, состоящей из уравнения $9x_5 + 38x_1 - x_2 = 0$

7. Составим и решим объединённую систему методом Гаусса.

$$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} 2x_5 + 8x_4 - 16x_1 - 5x_2 = 0 \\ 9x_5 + 38x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 0 \\ 43 \\ 8 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 55 \\ -76 \end{pmatrix}$$

8. Фундаментальная система решений состоит из векторов $(0, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 72, 0, 43, 0)^{\mathrm{T}}$, $(18, -0, 0, 55, -76)^{\mathrm{T}}$.

9. Этот набор векторов и является одним из базисов пространства $L_1 \cap L_2$

<u>Ответ:</u> $(0, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 72, 0, 43, 0)^{\mathrm{T}}$, $(18, -0, 0, 55, -76)^{\mathrm{T}}$.