# [Maîtrisez les bases des probabilités](https://openclassrooms.com/fr/courses/4525296-maitrisez-les-bases-des-probabilites)

Table des matières

[Maîtrisez les bases des probabilités 1](#_Toc57799502)

[**Découvrez les notions de base des probabilités** 5](#_Toc57799503)

[**Expérience aléatoire et univers** 5](#_Toc57799504)

[**Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble** 5](#_Toc57799505)

[**Événements et espace probabilisable** 6](#_Toc57799506)

[**Opérations sur les événements** 8](#_Toc57799507)

[Apprenez à calculer une probabilité 10](#_Toc57799508)

[Introduction 10](#_Toc57799509)

[Le cas particulier de l'équiprobabilité 10](#_Toc57799510)

[**Appréhendez les probabilités conditionnelles** 13](#_Toc57799511)

[**Rappels** 13](#_Toc57799512)

[**Formule des probabilités totales** 14](#_Toc57799513)

[**Indépendance** 15](#_Toc57799514)

[Partie 1 16](#_Toc57799515)

[Compétences évaluées 16](#_Toc57799516)

[ Question 1 16](#_Toc57799517)

[ Question 2 16](#_Toc57799518)

[ Question 3 16](#_Toc57799519)

[ Question 4 17](#_Toc57799520)

[ Question 5 17](#_Toc57799521)

[ Question 6 17](#_Toc57799522)

[ Question 7 18](#_Toc57799523)

[ Question 8 18](#_Toc57799524)

[ Question 9 18](#_Toc57799525)

[ Question 10 19](#_Toc57799526)

[**Découvrez les variables aléatoires** 20](#_Toc57799527)

[**Premières définitions** 20](#_Toc57799528)

[**Événements liés à une variable aléatoire** 21](#_Toc57799529)

[**Déterminez la loi de probabilité d'une Variable Aléatoire Discrète (VAD)** 23](#_Toc57799530)

[**Loi de probabilité d'une Variable Aléatoire Discrète (VAD)** 23](#_Toc57799531)

[Fonction de répartition d'une VAD 24](#_Toc57799532)

[**Espérance d'une VAD** 25](#_Toc57799533)

[**Variance d'une VAD** 26](#_Toc57799534)

[**Appréhendez les Variables Aléatoires Continues (VAC)** 27](#_Toc57799535)

[**Différencier une VAC d'une VAD** 27](#_Toc57799536)

[**Fonction de répartition** 27](#_Toc57799537)

[**Densité de probabilité** 28](#_Toc57799538)

[**Espérance d'une VAC** 28](#_Toc57799539)

[**Variance d'une VAC** 29](#_Toc57799540)

[**Apprenez à utiliser quelques lois usuelles discrètes** 30](#_Toc57799541)

[**Quelques lois discrètes finies** 30](#_Toc57799542)

[**Quelques lois discrètes infinies** 33](#_Toc57799543)

[**Familiarisez-vous avec quelques lois usuelles continues** 36](#_Toc57799544)

[**Les lois uniformes** 36](#_Toc57799545)

[**Les lois exponentielles** 36](#_Toc57799546)

[**Les lois normales de paramètres**m**et**σ2**, avec**σ0 37](#_Toc57799547)

[**Découvrez les notions de couple et d'indépendance** 39](#_Toc57799548)

[**Généralités** 39](#_Toc57799549)

[**Indépendance** 39](#_Toc57799550)

[**Espérance** 39](#_Toc57799551)

[**Couple de variables aléatoires discrètes** 40](#_Toc57799552)

[**Découvrez les notions de covariance et de corrélation linéaire** 42](#_Toc57799553)

[**Covariance de deux variables aléatoires discrètes** 42](#_Toc57799554)

[**Corrélation** 43](#_Toc57799555)

[**Cas de l'indépendance de deux variables aléatoires** 44](#_Toc57799556)

[Partie 3 45](#_Toc57799557)

[Compétences évaluées 45](#_Toc57799558)

[Description 45](#_Toc57799559)

[ Question 1 45](#_Toc57799560)

[ Question 2 45](#_Toc57799561)

[ Question 3 46](#_Toc57799562)

[ Question 4 46](#_Toc57799563)

[ Question 5 47](#_Toc57799564)

[ Question 6 47](#_Toc57799565)

[ Question 7 47](#_Toc57799566)

[ Question 8 47](#_Toc57799567)

[ Question 9 48](#_Toc57799568)

[ Question 10 48](#_Toc57799569)

[**Découvrez la loi faible des grands nombres** 50](#_Toc57799570)

[**Convergence en probabilité** 50](#_Toc57799571)

[**Loi faible des grands nombres** 51](#_Toc57799572)

[**Utilisez le Théorème Central Limite** 53](#_Toc57799573)

[**Convergence en loi** 53](#_Toc57799574)

[**Théorème central limite** 54](#_Toc57799575)

[Partie 4 56](#_Toc57799576)

[Compétences évaluées 56](#_Toc57799577)

[Description 56](#_Toc57799578)

[ Question 1 56](#_Toc57799579)

[ Question 2 56](#_Toc57799580)

[ Question 3 56](#_Toc57799581)

[ Question 4 57](#_Toc57799582)

[ Question 5 57](#_Toc57799583)

[ Question 6 57](#_Toc57799584)

[ Question 7 58](#_Toc57799585)

[ Question 8 58](#_Toc57799586)

[ Question 9 59](#_Toc57799587)

Nous sommes, depuis toujours, fascinés par les phénomènes liés au hasard. En mathématiques, **la théorie des probabilités** tente d'expliquer ces phénomènes.

Dans ce cours, je vous propose une **première approche des notions essentielles des probabilités**.  
Vous apprendrez ce qu’est **un événement,une variable aléatoire,une loi de probabilité**. Vous saurez comment travailler sur un couple de variables aléatoires ou encore comment interpréter la fameuse**loi des grands nombres**.

Vous allez découvrir les probabilités à l’aide d’exemples simples... car **les domaines d'application sont très vastes !**

Que ce soit pour la finance ou la biologie, ou même les jeux de hasard… *Les probabilités vous donneront les clés pour mieux comprendre le monde qui vous entoure.*

**Objectifs pédagogiques :**

* Comprendre les notions d'univers, événement, probabilité et probabilité conditionnelle (partie 1)
* Découvrir les variables aléatoires, loi de probabilité, espérance et variance (partie 2)
* Découvrir les notions de couple de variables aléatoires, covariance et corrélation linéaire (partie 3)
* Appréhender la loi faible des grands nombres et le théorème central limite (partie 4)

**Prérequis :**

* Fondamentaux des mathématiques (niveau Terminale S), notamment les calculs d'intégrales

**Découvrez les notions de base des probabilités**

**Expérience aléatoire et univers**

**Définition**

Une expérience aléatoire est une expérience dont toutes les issues possibles, tous les résultats possibles sont connus à l'avance, sans que l'on puisse prédire quel en sera finalement le résultat.

**Exemple**

Quand on lance un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, on connaît à l'avance les 6 issues possibles de l'expérience, mais il nous est impossible de savoir, à l'avance, quel sera le résultat du lancer. Idem quand on joue à pile ou face avec une pièce.

**Définition**

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est ce que l'on appelle l'univers de l'expérience ou encore l'ensemble fondamental. Il sera en général symbolisé par la lettre grecque majuscule **Ω**.

**Exemple**

Quel ensemble constitue l'univers dans notre exemple de lancer de dé ?

Dans notre exemple de lancer de dé, nous aurons :

**Ω={1,2,3,4,5,6}.**

Cet ensemble est l'univers associé à notre expérience aléatoire.

**Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble**

Voyons maintenant une notion mathématique relative aux ensembles qui est peut-être nouvelle pour vous.

En mathématiques, étant donné un ensemble fini, qu'appelle-t-on l'ensemble des parties de cet ensemble ?

Et bien, il s'agit tout simplement de l'ensemble des sous-ensembles de cet ensemble.

Considérons par exemple l'ensemble suivant :

**E={a,b,c}**

Quel est l'ensemble des parties de cet ensemble E ?

Nous avons par exemple tous les sous-ensembles qui contiennent un seul élément, que l'on appelle des singletons :

**{a},{b},{c}**

Il y a les sous-ensembles contenant une paire d'éléments, c'est-à-dire deux éléments :

**{a,b},{a,c},{b,c}**

Sans oublier les sous-ensembles ne contenant respectivement aucun élément, c'est l'ensemble vide, et tous les éléments, c'est l'ensemble **E** :

 ∅**,{a,b,c}**

Ainsi, l'ensemble des parties de notre ensemble **E**, que l'on notera **** dans l'usage, est l'ensemble qui contient tous ces sous-ensembles :



**Événements et espace probabilisable**

**Étude d'un exemple**

Maintenant que nous savons ce qu'est l'ensemble des parties d'un ensemble, revenons à l'ensemble des résultats possibles de notre expérience aléatoire du lancer de dé. Nous avons défini l'univers de cette expérience dans la section 1 :

**Ω={1,2,3,4,5,6}**

Quel est l'ensemble des parties de **Ω** que l'on noterait  ?

Pour déterminer , il faut considérer, outre les sous-ensembles que sont l'ensemble vide et ΩΩ lui-même, tous les singletons comme **{1},{2}**, etc., puis les sous-ensembles à deux, trois, quatre et cinq éléments de **Ω**.

Ainsi, l'ensemble des parties de l'ensemble **Ω**, univers de notre expérience aléatoire, est ce que l'on appellera l'ensemble des événements de cette expérience aléatoire. C'est plus exactement une tribu d'événements associée à notre expérience aléatoire.

Et chaque élément de l'ensemble , par définition un sous-ensemble de **Ω**, est ce que l'on appellera un événement.

Dans notre exemple, l'un des sous-ensembles de **Ω** est l'ensemble **A={1,3,5}**. En tant que sous-ensemble de **Ω**, **A** est un élément de . C'est un événement de notre expérience aléatoire. C'est l'événement "Obtenir un nombre impair".

Un autre exemple serait l'événement **B={3,6}**. Également sous-ensemble de **Ω** et appartenant à , **B** serait l'événement "obtenir un multiple de 3".

**Généralisation**

Généralisons à partir de cet exemple :

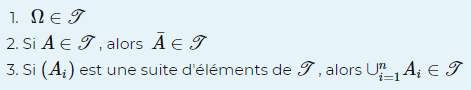
Étant donné une expérience aléatoire, nous lui associons un univers, qui est l'ensemble des résultats possibles de cette expérience, noté **Ω**. Considérons que, comme dans notre exemple de lancer de dé, **Ω** est un ensemble **dénombrable**. Alors , l'ensemble des parties de **Ω** , est une**tribu d'événements** que l'on peut associer à **Ω** pour constituer le couple(Ω, ). Ce couple ainsi formé est ce que l'on appelle un **espace probabilisable**.

**Pour aller plus loin**

Quand **Ω** est un ensemble dénombrable,  peut toujours être considéré comme une tribu d'événements qu'on peut lui associer pour former l'espace probabilisable (Ω, ).

Par contre, lorsque **Ω** n'est pas dénombrable,  n'a pas toujours les propriétés mathématiques nécessaires pour être considéré comme une tribu d'événements et former un espace probabilisable avec **Ω**.

En réalité, un sous-ensemble  de P ne peut être considéré comme une tribu d'événements que s'il vérifie les trois points suivants :



Le premier point est une condition nécessaire. Un sous-ensemble de  ne peut être une tribu d'événements que s'il contient **Ω**.

Le deuxième point, autre condition nécessaire, est ce que l'on appelle la stabilité de par passage au complémentaire. Cela signifie que, pour un élément **A** de qui, remarquons-le au passage, est un ensemble, l'ensemble complémentaire noté  doit également et impérativement appartenir à .

Enfin, le troisième point, que l'on appelle la stabilité par union, signifie que l'union de toute suite d'éléments de   doit appartenir à  .

**Exemple**

Si on reprend l'exemple du lancer de dé avec :

**Ω={1,2,3,4,5,6}**

Comme **Ω** est un ensemble fini, donc dénombrable,  , l'ensemble des parties de **Ω** est bien une tribu d'événements que l'on peut lui associer pour former un espace probabilisable.

**Opérations sur les événements**

Avec l'idée qu'un événement n'est autre chose qu'un sous-ensemble de **Ω**, il paraît naturel de considérer des unions et des intersections d'événements.

**Définition des opérations à partir d'un exemple**

Reprenons les deux exemples d'événements dans l'expérience du lancer de dé.

L'événement **A**, "Obtenir un nombre impair", est réalisé chaque fois que l'une des issues du sous-ensemble **A={1,3,5}** est obtenue.

Idem pour l'événement B, "Obtenir un multiple de 3", avec **B={3,6}**.

Mais est-ce que vous voyez quel serait l'événement **A∩B** ?

**A∩B**, qui se lit "A **intersection** B" ou encore "A inter B", est le sous-ensemble de **Ω** qui contient les éléments qui sont à la fois dans **A** et dans **B** . Nous avons :

**A∩B={3}**

**A∪B**, quant à lui, qui se lit "A **union** B", est le sous-ensemble de **Ω** qui contient les éléments qui sont soit dans **A**, soit dans **B**. Nous avons, dans le cas de nos exemples d’événements **A** et **B** :  
   
**A∪B={1,3,5,6}**

N'oublions pas de définir ce que l'on appelle un **événement contraire**. Pour un événement **A** donné, sous-ensemble de **Ω**, l'événement contraire de **A**, noté ,  est un autre sous-ensemble qui contient tous les éléments de **Ω** qui ne sont pas dans **A**. C'est ce que l'on appelle l'ensemble complémentaire de **A** dans **Ω**.

Dans notre exemple de lancer de dé, l'événement **A** "obtenir un nombre impair" qui s'écrit sous forme d'ensemble **A={1,3,5}** a pour événement contraire "obtenir un nombre pair'' . Ce sous-ensemble s'écrit :  ={2,4,6}

## Apprenez à calculer une probabilité

Faites vous accompagner pour apprendre le métier de data architect avec la formation [architecture big data](https://openclassrooms.com/fr/paths/64-data-architect).

### 

### Introduction

Au chapitre précédent, nous avons présenté une expérience aléatoire comme une expérience dont toutes les issues sont connues à l'avance, sans que l'on sache laquelle d'entre elles sera effectivement réalisée.

Dans ce contexte, il est naturel de vouloir évaluer, quantifier, pour chacune de ces issues, la chance de se produire.

L'outil qui permet cette évaluation est l'application Probabilité.

#### Rappels

Reprenons le couple (Ω, ) introduit au chapitre précédent et que l'on appelle espace probabilisable d'une expérience aléatoire, où **Ω** est l'ensemble des résultats possibles, et  une tribu d'événements associés à cette expérience. Nous avons vu que, lorsque **Ω** est fini, l'ensemble des parties de Ω, peut toujours être considéré comme une tribu d'événements.

#### Définition

On appelle probabilité toute application  de  dans l'intervalle **[0;1]**, où   est une tribu d'événements vérifiant  , et telle que, pour tout couple **(A,B)** d'événements disjoints :



Elle permet d'associer, à chaque événement de notre expérience aléatoire, un réel compris entre **0** et **1**, ce réel quantifiant la chance pour cet événement de se produire.

Ainsi, en munissant notre espace probabilisable, le couple (Ω, ), de l'application , nous obtenons le triplet , appelé **espace probabilisé**.

### Le cas particulier de l'équiprobabilité

#### Exemple

Reprenons l'exemple du lancer de dé. Sans aucune connaissance spécifique en mathématiques, chacun peut aisément et intuitivement comprendre que, dans le cadre de cette expérience dont les issues sont les nombres entiers de 1 à 6, la probabilité de l'événement obtenir **4** vaut 1**/6**. Pourquoi ?

#### Définition du cardinal d'un ensemble fini

Introduisons à nouveau une notion mathématique liée aux ensembles. Tout d'abord, rappelons qu'un ensemble est dit fini quand il contient un nombre fini d'éléments, comme l'ensemble **Ω** de notre expérience aléatoire de lancer de dé.

On appelle **cardinal** d'un ensemble fini le nombre d'éléments qu'il contient. Ce nombre est un nombre entier que l'on notera en général n.

Ainsi, pour notre exemple, le cardinal de **Ω** est **6**. C'est le nombre d'éléments qu'il contient.

#### Équiprobabilité

Dans le contexte d'une expérience aléatoire, dont l'univers **Ω** contient un nombre fini d'éléments, les issues de cette expérience sont équiprobables si l'on considère qu'elles ont toutes la même probabilité, la même chance de se réaliser.

C'est le cas pour le lancer d'un dé à 6 faces. Si ce dé n'est pas truqué, chaque face aura a priori la même chance d'apparaître.

Ainsi, dans le contexte d'une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables et dont l'univers **Ω** a pour cardinal **n** , la probabilité d'un événement **A** est définie comme suit :



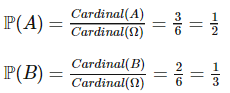
On pourra utiliser pour notation .

#### Exemple

Si on reprend les événements **A** "Obtenir un nombre impair", et **B** "Obtenir un multiple de 3" de notre exemple de lancer de dé, sous forme de sous-ensembles, ces événements s'écrivent :

**A={1,3,5} et B={3,6}**

Ainsi, par application de la définition de la probabilité pour une expérience dont l'univers est fini, et en cas d'équiprobabilité, nous aurons :



**Quelques propriétés de la probabilité**

Comme indiqué dans la définition même de la probabilité, pour deux événements **A** et **B** incompatibles, c'est-à-dire qui ne peuvent se réaliser tous les deux à la fois, nous avons :



Par ailleurs, pour l'événement , événement contraire de **A**, nous aurons :



Enfin, notons que l'événement certain a pour probabilité 1, tandis que son événement contraire, qui n'est autre que l'événement impossible, est de probabilité nulle.

**Appréhendez les probabilités conditionnelles**

**Rappels**

Au chapitre précédent, nous avons défini la probabilité  comme une application de l'ensemble des événements de l'expérience aléatoire dans l'intervalle **[0;1]**. Nous avons expliqué que l'espace probabilisable, à savoir le couple , une fois muni de l'application , nous donnait le triplet appelé espace probabilisé.

**Définition de la probabilité conditionnelle**

Considérons à nouveau l'espace probabilisable, le couple . Nous allons encore une fois munir cet espace d'une application. Après l'application *probabilité*, nous allons cette fois lui associer l'application *probabilité sachant***A**, définie pour tout événement **B** associé à l'expérience aléatoire par :



Lire *probabilité de* ***B*** *sachant* ***A*** *égale, etc.*

L'application ainsi définie sur l'ensemble des événements de l'expérience aléatoire et à valeur dans **[0;1]** est la probabilité conditionnellement à l'événement **A**.

**Exemple**

Dans notre exemple de lancer de dé non truqué, la probabilité d'obtenir 4 vaut 1/6.

Mais quelle est la probabilité d'obtenir 4, sachant que le dé affiche un nombre pair ?

Intuitivement, on est tenté de répondre 1/3. La probabilité d'obtenir 4, sachant que l'on a obtenu un nombre pair et étant donné qu'il y a au total 3 faces avec un nombre pair, est 1/3.

Vérifions ce raisonnement intuitif par la formule que nous venons de voir, avec :

 A = "obtenir un nombre pair"

 B = "obtenir 4"

En remarquant en amont que l'événement **A∩B** serait l'événement **B**, en l'occurrence, puisque, dans cet exemple, **B** est inclus dans **A**. Ainsi, nous avons :



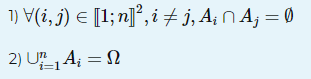
**Formule des probabilités totales**

**Système complet d'événements**

À quelles conditions dira-t-on d'une suite d'événements non vides liés à notre expérience aléatoire qu'ils forment un système complet d'événements ?

Prenons une suite d'événements non vides d'une expérience aléatoire, que l'on pourrait noter **Ai**, **i** allant de **1** à un entier naturel **n**.

Ces événements forment un système complet d'événements s'ils vérifient les deux conditions suivantes :



L'exemple le plus courant de système complet d'événements est celui d'un événement non vide quelconque et de son événement contraire.

En effet, l'union d'un événement et de son événement contraire est par définition **Ω**. Et toujours par définition de ce que l'on appelle des événements contraires, leur intersection est vide.

**La formule des probabilités totales, SCE de deux événements**

Prenons l'exemple de deux événements **A** et **B** formant un système complet d'événements. Alors, pour un événement **C** quelconque de la même expérience aléatoire, nous aurons :



C'est ce que l'on appelle la formule des probabilités totales.

**La formule des probabilités totales, cas général**

Généralisons ! Soit une suite d'événements **Ai** formant un SCE selon la définition que l'on vient de voir. Alors la probabilité de tout autre événement de cet espace probabilisé s'écrirait sous la forme de la somme suivante :

****

**Indépendance**

**Définition**

Le mot indépendant a un sens que tout le monde connaît bien. Mais, étant donné deux événements **A** et **B** d'un même espace probabilisé, on les considère comme indépendants, si et seulement si :



**Une autre interprétation**

Analysons cette définition à travers celle de la probabilité conditionnelle. Dans le cas général, nous avons l'égalité suivante :



Si on compare cette égalité avec celle de la définition de deux événements indépendants, on peut considérer que deux événements **A** et **B** sont indépendants si et seulement si nous avons :



Cette égalité est très intuitive : la probabilité de l'événement **B** sachant que l'événement **A** est réalisé, donc une probabilité conditionnelle, est égale à la probabilité de l'événement **B**. Le fait de savoir que l'événement AA est réalisé, ne modifie absolument pas la probabilité de l'événement **B**.

**Exemple**

On lance une pièce mille fois. On définit les événements **A** comme "obtenir 999 fois pile lors des 999 premiers lancers", et **B** comme "obtenir pile au 1000e lancer". Alors il est évident que la réalisation de l'événement **A** n'a aucune influence sur celle de l'événement **B**, ce qui peut se traduire par l'égalité suivante :



# Partie 1

Bravo ! Vous avez réussi cet exercice !

### Compétences évaluées

* Comprendre les notions d'univers, événement, probabilité et probabilité conditionnelle

### Question 1

**L'ensemble**E={a,b,c}**admet 8 sous ensembles. Autrement dit, l'ensemble des parties de**E**ou l'ensemble des sous-ensembles de**E**, noté**P(E)**, contient 8 éléments.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Dans ce cas de figure, exposé dans le cours, on peut simplement compter tous les sous-ensembles. Mais on peut aussi démontrer, par exemple par récurrence, que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble fini de cardinal*n*est*2n*. Donc en l'occurrence, le cardinal de E est bien*23=8*.*

### Question 2

**Soient**A**et**B**deux événements quelconques d'un même espace probabilisable**(Ω,P(Ω))**. Si**A⊂B**alors**A∩B=B

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Si*A*est inclus dans*B*, tout élément de*A *est dans*B*. Par conséquent*A∩B=A*.*

*Par contre dans ce cas de figure nous aurions*A∪B=B*.*

*Ne pas hésiter à faire des schémas.*

### Question 3

**Pour**A**et**B**deux événements quelconques d'un même espace probabilisable**(Ω,P(Ω))**, nous aurons toujours :**

****

* 

VRAI

* 

FAUX

*Les deux égalités sont fausses dans le cas général. Nous aurons plutôt les égalité suivantes qu'on appelle les lois de De Morgan :*



### Question 4

**Les événements**A**et**B**étant quelconques, on a toujours :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Cette égalité n'est vraie que si A et B sont indépendants. D'ailleurs, c'est la définition même de deux événements indépendants dans un espace probabilisé.*

*Dans le cas général nous avons :*



### Question 5

**Les événements**A**et**B**sont incompatibles si et seulement si :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*On peut considérer cette égalité comme la définition de deux événements incompatibles. A ne pas confondre avec des événements*indépendants*.*

### Question 6

**Étant donné un événement**A**non vide quelconque,**A**et****forment un système complet d'événements.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Comme dit dans le cours, c'est le cas le plus élémentaire et le plus courant de SCE.*

### Question 7

**Pour**A**et**B**deux événements quelconques d'un même espace probabilisable**(Ω,P(Ω))**, nous aurons toujours :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Le fait que la probabilité de réaliser à la fois A et B soit inférieure à cette de réaliser A est assez attendu. Mais on peut aussi l'illustrer par un calcul simple :*

*.*

*Or chaque probabilité étant un réel entre 0 et 1, nous aurons bien :*



### Question 8

A**et**B**sont deux événements d'un même espace probabilisé. L'égalité suivante est alors vraie :**



* + 

VRAI

* + 

FAUX

*C'est la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements formé par les événements*A*et**.*

### Question 9

**L'égalité suivante est toujours vraie, à condition que l'événement**A**ne soit pas vide :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*La bonne version de la formule des probabilités totales est celle de la question précédente. Et non celle-ci. Ne pas confondre les probabilités conditionnelles et  les probabilités des intersections.*

### Question 10

**Quel que soit l'événement**A**nous aurons toujours :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Nous l'avons énoncé dans le cours. C'est une formule à connaitre qui peut s'avérer très pratique.*

**Découvrez les variables aléatoires**

**Premières définitions**

**Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?**

Considérons une première définition toute simple : une variable aléatoire est une application, une fonction qui, à chaque résultat d'une expérience aléatoire, autrement dit à chaque élément de **Ω**, associe un nombre réel comme image.

**Exemple**

On lance deux dés et on considère la variable aléatoire qui, à chaque issue de l'expérience, associe comme image la somme des deux faces obtenues.

Ainsi, **X** est une application qui, à chaque issue de l'expérience, autrement dit à chaque lancer, associe comme image un entier entre 2 et 12.

**Qu'est-ce que le support d'une variable aléatoire ?**

On appelle support d'une variable aléatoire l'ensemble des valeurs que cette variable aléatoire peut prendre. Pour une variable aléatoire **X**, on note cet ensemble **X(Ω)**.

Dans notre exemple, où on lance deux dés, nous aurons :

**X(Ω)={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}**

Si ce support est fini ou dénombrable, par exemple si l'ensemble image est inclus dans , on qualifiera la variable aléatoire de **discrète**. On parlera d'une **VAD (variable aléatoire discrète).**

Si ce support n'est pas dénombrable, par exemple si l'ensemble image est un intervalle de RR, on qualifiera la variable aléatoire de **continue,**ou bien on dira qu'elle est à densité. On pourra alors la qualifier de **VAC (variable aléatoire continue).**

**Exemple**

Reprenons l'exemple du dé. Disons que notre expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré exactement trois fois. Ainsi, notre ensemble fondamental **Ω** serait constitué de triplets de nombres entiers entre 1 et 6 :

**Ω={(4,2,3),(1,2,6),(3,2,3),(4,5,1),...}**

On peut définir une fonction qui, à chacun de ces résultats, associe un nombre réel comme image. Notons-la **X** et disons que **X** associe à chaque issue de notre expérience, autrement dit à chaque triplet de **Ω**, le nombre de faces paires obtenues.

Quel est le support de X dans cet exemple ?

Ainsi, pour **ω0=(1,2,3)** , on aurait :

**X(ω0)=1**

De même, si on posait **ω1=(1,3,3)**, on aurait :

**X(ω1)=0**

Alors que **ω2=(2,6,4)** aurait pour image :

**X(ω2)=3**

Etc.

En réalité, à partir de la définition de **X**, on peut aisément construire son support, ou l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. En l’occurrence, **X** peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à 3. En effet, on peut tout à fait obtenir un triplet composé exclusivement de nombres impairs. Par ailleurs, il ne peut y avoir au maximum que 3 nombres pairs parmi les 3 faces apparaissant lors des lancers.  Ainsi, dans cet exemple, le support de **X** noté **X(Ω)** serait :

**X(Ω)={0,1,2,3}=[[0;3]]**

**Remarque**

Étant donné deux entiers **m** et **n**, avec **n>m**, l'ensemble des entiers de **m** à **n** s'écrit **[[m;n]]**.

**Pour aller plus loin...**

Voici une deuxième définition, un peu plus précise, de ce que l'on appelle une variable aléatoire.

Reprenons notre espace probabilisable **(Ω,T)** vu au chapitre précédent.

Pour qu'une application **X** de **Ω** dans  puisse être considérée comme une variable aléatoire, il faut que, pour tout **x** réel, l'ensemble **{ω∈Ω,X(ω)≤x}** appartienne à . Autrement dit, il faut que cet ensemble soit bien un événement.

**Événements liés à une variable aléatoire**

**Notation**

L'événement **{ω∈Ω,X(ω)=x}** sera bien plus simplement noté : **(X=x)** ou encore **[X=x]**.

**Exemple**

Si on reprend l'exemple de la section 1, l'événement *"Obtenir aucune face paire"* serait par exemple noté : **[X=0]**.

Tandis que l'événement *"Obtenir deux faces paires"* s'écrirait à l'aide de la variable aléatoire XX comme ceci : **[X=2]**.

Par ailleurs, on peut naturellement utiliser aussi des inégalités pour écrire des événements à l'aide d'une variable aléatoire. Dans notre exemple, l'événement *"Obtenir au moins une face paire"*s'écrirait : **[X≥1]**.

**Déterminez la loi de probabilité d'une Variable Aléatoire Discrète (VAD)**

**Loi de probabilité d'une Variable Aléatoire Discrète (VAD)**

**Rappel**

Au chapitre précédent, nous avons défini le support d'une variable aléatoire comme l'ensemble des valeurs que cette variable aléatoire peut prendre.

Nous avons également vu la notation **[X=xk]** pour un événement où **xk** est une valeur de **X(Ω)**.

**Définition**

Soit **X** une variable aléatoire discrète. Admettons que le support de **X** s'écrive :

**X(Ω)={xk,k∈N}**

Alors, définir la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète **X**, c'est déterminer la probabilité des événements **[X=xk]** pour chacune des valeurs **xk** de **X(Ω)**.

**Exemple**

Reprenons notre exemple où on lance un dé équilibré trois fois de suite avec **X** la variable aléatoire qui indique le nombre de faces paires obtenues. Nous avions construit le support suivant pour **X** :

**X(Ω)=[[0;3]]**

 Quelle est la loi de probabilité de **X** dans cet exemple ?

Ici, déterminer la loi de probabilité de **X**, c'est déterminer la probabilité des événements **[X=i]**, pour **i** variant de 0 à 3.

On peut, dans les cas appropriés comme celui-ci, exposer la loi de probabilité dans un tableau :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X=i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P(X=i) |  |  |  |  |

### Fonction de répartition d'une VAD

#### Définition

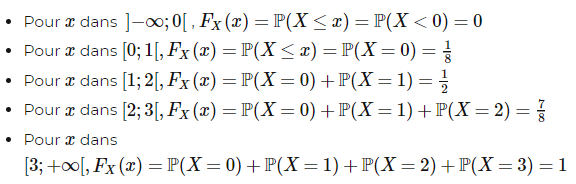
Soit **X** une VAD. On associe à **X** une fonction notée **FX** et qui, à tout **x** réel, associe comme image **P(X≤x)**. Cette fonction est définie sur  et est à valeur dans **[0;1]**.

#### Exemple

Reprenons l'exemple de la VAD **X** qui indique le nombre de faces paires obtenues lors de trois lancers consécutifs d'un dé équilibré.

Quelle est la fonction de répartition de **X**, notée **FX**, dans cet exemple ?

Ici, l'expression de **FX** peut varier selon la valeur de **x** :



#### Connaître les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition d'une VAD

La définition que nous venons de voir implique des propriétés caractéristiques pour toute fonction de répartition **FX** d'une VAD **X**.

La fonction de répartition **FX** d'une VAD **X** est caractérisée par les points suivants :

1. FX est croissante.
2. FX est continue à droite en tout x0 réel.
3. FX a pour limite 0 en −∞ et 1 en +∞.

Toute fonction dotée de ces propriétés, qui naturellement en impliquent d'autres, peut-être la fonction de répartition d'une VAD.

**Espérance d'une VAD**

**Définition**

Étant donné une VAD **X** de **support fini X(Ω)**, ce que l'on appelle l'espérance de **X**, c'est la moyenne des valeurs que **X** peut prendre avec, comme pondération pour chacune d'entre elles, la probabilité qu'elle prenne cette valeur.

Autrement dit, dans le cas où le support d'une VAD est fini, on calcule son espérance comme on calculerait la moyenne pondérée d'une série de valeurs quelconques. Dans le cas où le support de la VAD serait **X(Ω)={xk,k**∈**[[1;n]]}**, nous aurions :



**Pour aller plus loin : le cas où le support est infini**

**Convergence absolue d'une série**

On appelle série de terme général **(un)** la suite .

Cette série est dite absolument convergente, si la limite suivante est finie :



On dira alors que la série de terme général (un)(un) a pour somme cette limite finie.

**Existence**

Si **X** est une VAD de support infini, par exemple si  **X(Ω)={xk,k**∈**N}**, alors **X** admet une espérance si la série de terme général **xk×P(X=xk)** est absolument convergente. Dans ce cas, l'espérance de **X** est le réel défini par :

****

**Variance d'une VAD**

**Définition**

Reprenons la VAD **X** de support fini **X(Ω)={xk,k**∈**N}**. La variance de **X** est la moyenne des carrés des écarts des valeurs **xi** à l'espérance de **X**, avec à nouveau comme pondération la probabilité de l’événement **[X=xi]** :



**En pratique**

En réalité, dans les exercices, on utilisera souvent le théorème suivant pour calculer la variance :



On se réfère souvent à cette égalité, comme la formule de Koenig-Huygens.

**Pour aller plus loin : le cas où le support est infini**

Dans le cas où le support est infini, l'existence de la variance est liée à la convergence absolue de la série de terme général ****.

Sous condition d'existence de la variance, on pourra alors utiliser la formule de Koenig-Huygens.

**Appréhendez les Variables Aléatoires Continues (VAC)**

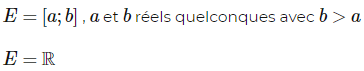
**Différencier une VAC d'une VAD**

**Rappel**

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, une variable aléatoire est dite **continue**ou **à densité** si elle prend ses valeurs dans un ensemble non dénombrable.

**Exemple**

Si une variable aléatoire est à valeur dans un ensemble **E**, par exemple, dans le cas des ensembles **E** suivants, elle est dite *continue :*



Dans ces deux cas de figure, il s'agit d'ensembles infinis et non dénombrables.

Tandis que, si notre variable aléatoire est à valeur, par exemple, dans l'un des ensembles **E** suivants, elle est qualifiée de discrète :



Dans ce cas, il s'agit d'un ensemble fini, peu importe que les valeurs ne soient pas entières.



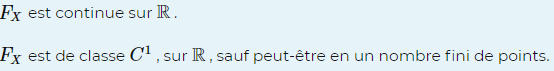
L'ensemble des entiers naturels est le parfait exemple d'un ensemble dénombrable infini.

**Fonction de répartition**

Nous avons vu, au chapitre précédent, la définition d'une fonction de répartition et ses propriétés caractéristiques.

Qu'y a-t-il de spécifique dans la fonction de répartition d'une VAC (par rapport à une VAD) ?

Soit **FX** la fonction de répartition d'une variable aléatoire **X**. On peut considérer **FX** comme la fonction de répartition d'une VAC si elle présente les deux propriétés suivantes :



Rappelons qu'une fonction est dite , sur  si elle est dérivable sur  et que sa fonction dérivée est continue sur .

**Densité de probabilité**

Si **FX** est la fonction de répartition d'une VAC **X**, alors les propriétés de **FX** nous permettent de définir une fonction  telle que, pour tout **x** réel, .

La fonction  ainsi définie est la **densité de probabilité** de la variable aléatoire **X**.

Et nous avons, pour tout **x** réel :



Par ailleurs, pour tout couple de réels **a** et **b** tels que **b>a**, nous aurons :



Enfin, remarquons au passage que, pour tout réel **a** :



Cette dernière égalité signifie que la probabilité qu'une VAC **X** prenne une valeur ponctuelle en particulier sera toujours nulle. Pour une VAC, il faut raisonner par*tranche de valeurs*.

**Espérance d'une VAC**

**Définition de l'espérance**

Par analogie avec les VAD, on définit l'espérance d'une VAC **X** de densité , lorsqu'elle existe, par l'intégrale suivante :



On précise *lorsqu'elle existe,* car une VAC n'admet une espérance que lorsque cette intégrale généralisée converge.

**Convergence d'une intégrale généralisée**

Soit une fonction définie et continue sur un intervalle **[a,+∞[**. Alors on dira que l'intégrale suivante est généralisée ou impropre en +∞ :



Par ailleurs, on dira que cette intégrale converge si la limite suivante est finie :



Avec **A**, un réel dans **[a,+∞[**.

**Variance d'une VAC**

Toujours par analogie avec les VAD, on définit la variance d'une VAC **X** de densité , lorsqu'elle existe, par l'intégrale suivante :



On précise *lorsqu'elle existe,* car une VAC n'admet une variance que lorsque l'intégrale généralisée suivante converge :



Tout comme pour les VAD, en pratique, il sera souvent préférable d'utiliser la formule de Koenig-Huygens, sous réserve d'existence de  :



Dans les exercices, on utilisera souvent cette relation pour le calcul, une fois que la question de l'existence de la variance sera élucidée.

**Apprenez à utiliser quelques lois usuelles discrètes**

**Rappel**

Nous avons vu dans les chapitres précédents ce que l'on appelle la *loi de probabilité* d'une variable aléatoire.

Nous avons par exemple expliqué que définir la loi de probabilité d'une VAD **X**, c'est déterminer la probabilité des événements **(X=xk)** pour toutes les valeurs **xk** du support de **X**.

**Les lois usuelles**

En pratique, dans les exercices, les lois de probabilités de certaines variables aléatoires seront connues à l'avance. Ou, dans certains cas, nous saurons reconnaître des situations caractéristiques de variables aléatoires suivant une certaine loi de probabilité.

Dans un cas comme dans l'autre, cela nous donnera le support de la variable aléatoire ainsi que l'expression de sa loi de probabilité, s'il s'agit d'une VAD, ou bien l'expression de sa fonction de répartition ou de sa densité de probabilité, s'il s'agit d'une VAC.

**Quelques lois discrètes finies**

**Loi uniforme**

**Situation caractéristique**

La probabilité que la variable aléatoire **X** prenne chacune des valeurs de son support est identique, autrement dit, il y a équiprobabilité.

**Support**

Le support d'une VAD suivant une loi uniforme est de type **[[m;n]]**, avec **m** et **n** des entiers quelconques vérifiant **m<n**.

**L'expression de la loi**

Alors 

Rappelons que le **|Ω|**,  lire *cardinal de Omega*, c'est le nombre d'éléments que l'ensemble **Ω** comporte.

Par exemple, dans le cas usuel d'une VAD suivant une loi uniforme sur le support **[[1;n]]**, nous aurions, pour tout **k** dans **[[1;n]]** :



**Notation**

On dira que **X** suit la loi uniforme sur**[[1;n]]**. On notera : 

**Espérance et variance**

L'espérance **E** d'une VAD **X** suivant une loi uniforme sur **[[1;n]]** est et la variance **V** d'une telle VAD serait .

**Loi de Bernoulli de paramètre p**

**Situation caractéristique**

On considère une épreuve aléatoire à deux issues. L'une est considérée comme *le succès*, l'autre comme *l'échec*. C'est ce que l'on appelle une épreuve de Bernoulli.

Par exemple, on lance un dé. On obtient 6, c'est le succès. On n'obtient pas 6, c'est l'échec.

**Support**

Le support d'une VAD suivant la loi de Bernoulli est **X(Ω)={0,1}**.

La variable aléatoire **X** associe 0 comme image à l'issue *échec* et 1 comme image à l'issue *succès*.

**L'expression de la loi**

Si la probabilité du succès est **p**, alors nous aurons pour l'expression de la loi de probabilité :



**Notation**

On dira que **X** suit la loi de Bernoulli de paramètre **p**. On notera : 

**Espérance et variance**

Si , nous aurons .

**Loi binomiale de paramètres**nn**et**pp

**Situation caractéristique**

On considère à nouveau une épreuve de Bernoulli : épreuve aléatoire à deux issues. L'une est considérée comme *le succès*, l'autre comme *l'échec*. Cette fois, on répète cette épreuve de manière *identique* et *indépendante*pour obtenir ce que l'on appelle un schéma de Bernoulli.

**Exemple**

On reprend l'exemple du dé. On lance ce dé un certain nombre de fois. Disons **n** fois, **n** étant un entier naturel non nul. On désigne par **X** la VAD qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où on a obtenu un 6.

**Support**

Le support d'une VAD **X** suivant la loi binomiale de paramètres **n** et **p**  est **X(Ω)=[[0;n]]**.

En effet, si on interprète **X** comme le nombre de succès dans une suite de n épreuves à deux issues, succès et échec, ce nombre peut varier entre **0** et **n** en prenant toutes les valeurs entières.

**L'expression de la loi**



 où , lire " **k** parmi **n** " est un coefficient important. C'est un nombre entier. Ce sont les combinaisons de **k** parmi **n** éléments.

**Notation**

On dira que **X** suit la loi binomiale de paramètres **n** et **p**. On notera : 

**Espérance et variance**

Si , nous aurons .

**Quelques lois discrètes infinies**

**Loi géométrique de paramètre**p

**Situation caractéristique**

On considère à nouveau une épreuve de Bernoulli. Cette fois, on répète cette épreuve de manière identique et indépendante non pas un certain nombre n de fois, mais à l'infini ! Cela est bien sûr une considération théorique.

Dans ce contexte, on considère la variable aléatoire **X** qui, à chaque série de lancers, associe comme image **le rang du premier succès**.

**Exemple**

On reprend l'exemple du dé. Cette fois, on lance ce dé à l'infini. On désigne par **X** la VAD qui indique le rang du premier succès, c'est-à-dire l'indice du lancer auquel on obtient pour la première fois 6.

Si cette série de lancers nous donne comme résultat : 1, 3, 2, 1, 4, 4, 3, 5, 6, 2... alors le rang du premier succès est 9.

**Support**

Le support d'une VAD **X** suivant la loi géométrique de paramètre **p** est . En effet, si on interprète **X** comme le rang du premier succès, ce nombre peut varier entre 1 et l'infini, en prenant toutes les valeurs entières.

**L'expression de la loi**



**Notation**

On dira que **X** suit la loi géométrique de paramètre **p**. On notera : 

**Espérance et variance**

Si , alors **X** possède une espérance et une variance, et nous aurons



**Loi de Poisson de paramètre**λ

**Situation caractéristique**

Il n'existe pas de situation caractéristique exacte au sens de celles décrites pour les lois que nous venons de voir.

Toutefois, la loi de Poisson est utilisée pour approcher la loi binomiale à certaines conditions.

Également à noter que c'est une loi qui est en général utilisée pour modéliser des événements rares tels que des pannes.

**Support**

Le support d'une VAD X suivant la loi de Poisson de paramètre **λ** est .

**L'expression de la loi**

****

**Notation**

On dira que **X** suit la loi de Poisson de paramètre **λ**. On notera : 

**Espérance et variance**

Si , alors **X** possède une espérance et une variance, et nous aurons



**Familiarisez-vous avec quelques lois usuelles continues**

**Les lois uniformes**

**Définition de la loi uniforme sur**[a;b]**, avec**b>a

Une variable aléatoire **X** suit la loi uniforme sur **[a;b]**,  si **X** a pour densité la fonction **f** définie par :

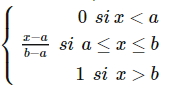
,

sinon il s'agit d'une fonction constante sur [a;b].

**Support**

On peut considérer que le support d'une telle variable aléatoire est l'intervalle **[a;b]**.

**Fonction de répartition**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi  est la fonction **FX** définie, pour tout **x**, par : 

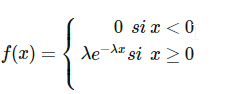
**Notation**

On dira que X suit la loi uniforme sur **[[1;n]]**. On notera 

**Les lois exponentielles**

**Définition de la loi exponentielle de paramètre**λ**, avec**λ>0

Une variable aléatoire **X** suit la loi exponentielle de paramètre **λ** notée **E(λ)**, si une densité de **X** est la fonction définie par :

****

**Support**

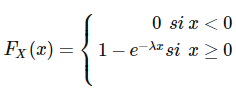
On peut considérer que le support d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est .

**Notation**

On dira que **X** suit la loi exponentielle de paramètre **λ**. On notera : 

**Fonction de répartition**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi  est la fonction  définie, pour tout réel x, par :



**Les lois normales de paramètres**m**et**σ2**, avec**σ0

**Définition**

Une variable aléatoire X suit la loi  si elle admet comme densité la fonction , définie, pour tout **x** réel, par :

****

**Support**

Le support de **X** est .

**Notation**

Pour signifier qu'une variable aléatoire **X** suit la loi normale de paramètres **m** et , on écrira :



**Fonction de répartition**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi  est la fonction notée , définie, pour tout x réel, par :

****

**Loi normale centrée réduite**

À noter le cas particulier très important où **m=0** et **σ=1**. Avec ces paramètres, la loi normale sera dite centrée réduite.

**Découvrez les notions de couple et d'indépendance**

**Généralités**

**Loi d'un couple**

**Qu'est-ce qu'un couple de variables aléatoires ?**

Prenons **X** et **Y**, deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisable. Alors **(X,Y)** est appelé couple de variables aléatoires.

**Exemple**

Considérons une expérience aléatoire : une urne contient 10 jetons, dont 5 jetons blancs et 5 jetons noirs. On tire successivement et sans remise deux jetons. On définit le couple de VAD **(X,Y)** suivant : **X** prend la valeur 0 si le premier jeton est blanc et 1 s'il est noir. De même, **Y** vaut 0 si le deuxième jeton est blanc et 1 s'il est noir.

**Qu'est-ce que la loi d'un couple de variables aléatoires ?**

La loi d'un couple **(X,Y)** de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  est donnée par la fonction  définie sur  par :



**Indépendance**

**Définition**

Deux variables aléatoires **X** et **Y** définies sur un espace probabilisé  sont indépendantes lorsque, pour tous réels **x** et **y** , on a :



**Espérance**

**Linéarité de l'espérance**

Si deux variables aléatoires **X** et **Y** admettent chacune une espérance, alors quels que soient les réels **a** et **b**, la variable aléatoire **aX+bY** admet une espérance, et on a :

****

**Espérance d'un produit**

Si deux variables aléatoires **X** et **Y** admettent chacune une espérance, et que, par ailleurs, elles sont indépendantes, alors la variable aléatoire XYXY admet une espérance et on a l'égalité :



La réciproque de cette proposition est également vraie !

**Couple de variables aléatoires discrètes**

**Comment écrire la loi du couple (X,Y) dans le cas discret**

Déterminer la loi du couple **(X,Y)**, que l'on appelle par ailleurs également la loi conjointe de **X** et **Y**, c'est donner, pour les variables aléatoires discrètes **X** et **Y** définies sur un espace probabilisé , la valeur de la probabilité  pour tout couple .

**Pour démontrer que deux VAD sont indépendantes**

Pour démontrer l'indépendance de deux VAD définies sur un même espace probabilisé, il suffit de montrer l'égalité suivante :



**Lois marginales**

Soit **(X,Y)** un couple de VAD. Alors les lois marginales de X et Y sont données sous forme de sommes.

Pour la VAD **X**, nous aurions :



Et pour Y :



**Exemple simple de couple de VAD**

On reprend l'exemple de l'urne avec 10 jetons : 5 noirs et 5 blancs.

Alors nous obtiendrions le tableau suivant pour la loi du couple **(X,Y)** :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X \ Y | Y=0 | Y=1 | P(X=k) |
| X=0 | 12×49=29 | 12×59=518 | 29+518=12 |
| X=1 | 12×59=518 | 12×49=29 | 518+29=12 |
| P(Y=k)) | 29+518=12 | 518+29=12 | 1 |

L'illustration de ce cas simple par ce tableau peut nous aider à mieux comprendre certaines notions essentielles.

À l'intersection des lignes **X=i** et des colonnes **Y=j** nous avons la probabilité de l'événement **(X=i∩Y=j)**.  Ce sont les probabilités qui définissent la loi du couple.

Tandis qu'en marge du tableau, nous avons respectivement la loi de **Y** (dernière ligne) et celle de **X** (dernière colonne).

Cet exemple peut nous aider à comprendre les liens entre la loi du couple et les lois marginales.

**Découvrez les notions de covariance et de corrélation linéaire**

Faites vous accompagner pour apprendre le métier de data architect avec la formation [architecture big data](https://openclassrooms.com/fr/paths/64-data-architect).

**Covariance de deux variables aléatoires discrètes**

**Espérance du produit de deux VAD**

Soit **(X,Y)** un couple de variables aléatoires discrètes. Si la variable aléatoire XY possède une espérance, alors cette dernière est définie par :



**Exemple**

On reprend l'exemple du lancer de dé à 6 faces des chapitres précédents. Soit X la VAD qui vaut 1 si on obtient 6, et 0 sinon, et Y la VAD qui vaut 1 si on obtient 5, et 0 sinon.

Ces deux VAD sont de même loi. Elles suivent la loi de Bernoulli de paramètre 1/6 .

Ici, comme la probabilité que les deux variables prennent la valeur 1 en même temps, autrement dit , est nulle, en appliquant la définition ci-dessus pour le calcul de l'espérance de **XY**, on aurait ici :

****

**Covariance**

Soit **(X,Y)** un couple de variables aléatoires discrètes. On appelle covariance de **X** et **Y** le réel noté et défini, s'il existe, par :

****

**Formule de Huygens**

Si X et Y admettent une covariance, alors on a :



En pratique, c'est cette formule que l'on utilisera dans les exercices.

**Propriétés de la covariance**

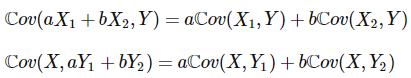
**Symétrie**

La covariance est symétrique : 

**Covariance et variance**



**Bilinéarité**



**Variance de la somme de deux VAD**

Si X et Y sont deux VAD définies sur le même espace probabilisé et admettant des variances, alors d'une part, la covariance de X et Y existe et d'autre part, X + Y admet une variance, et on a :



**Corrélation**

Dans cette section, nous considérons X et Y comme deux variables aléatoires discrètes admettant des variances non nulles.

On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y, le réel noté  et défini par :



 Pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires, on a .

**Cas de l'indépendance de deux variables aléatoires**

**Conséquence sur l'espérance**

Si X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** admettant chacune une espérance, alors la variable aléatoire XY admet également une espérance et on a :

****

**Conséquence sur la covariance**

Si X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, et admettant chacune une variance, alors .

Ce qui peut être interprété de la manière suivante : deux VAD indépendantes ne sont pas corrélées.

Attention : la réciproque n'est pas vraie. Deux VAD non corrélées, de covariance nulle, ne sont pas nécessairement indépendantes.

La non-corrélation est une condition nécessaire, mais pas suffisante à l'indépendance.

**Conséquence sur la variance**

Si X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, et admettant chacune une variance, alors .

# Partie 3

Bravo ! Vous avez réussi cet exercice !

### Compétences évaluées

* Découvrir les couples de variables aléatoires, covariance et corrélation linéaire

### Description

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

### Question 1

**Quelles que soient les variables aléatoires**X**et**Y**, **

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non. Cette égalité n'est pas vraie dans le cas général. Par contre, si X et Y sont deux VAD indépendantes admettant chacune une espérance, nous aurons bien :*

**

*et par suite :*



### Question 2

**On lance indéfiniment le même dé. Soit**X**le numéro du premier lancer où l'on obtient un trois et**Y**celui du premier lancer où l'on obtient un quatre . Ces deux variables aléatoires sont indépendantes.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Lorsqu'une expérience consiste à répéter à l'infini de manière identique et indépendante une épreuve aléatoire à deux issues considérées comme succès et échec (appelée épreuve de Bernoulli), la variable aléatoire discrète indiquant le rang du premier succès suit une loi géométrique dont le paramètre est la probabilité du succès.*

*Ainsi*X *et*Y*suivent la même loi géométrique de paramètre*16*.*

X *et*Y*seraient indépendants si la condition suivante était vérifiée :*

**

*Or ici il suffit de considérer le contre-exemple des événements*(X=1)*et*(Y=1)*. En effet nous avons :*

*.*

*Tandis que :*

**

*Puisque nous ne pouvons pas obtenir à la fois un 3 et un 4 dès le premier lancer.  
  
Ainsi :*

**

*Les variables*X*et*Y*ne sont pas indépendantes.*

### Question 3

X**et**Y**sont deux variables aléatoires indépendantes s'il existe un**x0**dans**X(Ω)**et un**y0**dans**Y(Ω)**tels que :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non.*

*Comment rendre toute une proposition complètement fausse en changeant un quantificateur. Ici si on remplaçait "il existe" par "pour tout" la proposition serait vraie, ce serait la définition même de l'indépendance de deux VAD.*

*En revanche avec "il existe" ça ne marche pas. Ce n'est pas parce que cette égalité est valable pour un certain*x0*et un certain*y0*que les variables seront pour autant indépendantes.*

### Question 4

**Deux variables aléatoires suivant la même loi sont égales.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non. "De même loi" et "égales" ne signifient pas la même chose. Il suffit de considérer le contre-exemple du couple*(X,Y)*de la question 2.*X*et*Y*sont de même loi mais elles ne sont pas égales.*

### Question 5

**Si X et Y ont la même loi alors :**X(Ω)=Y(Ω)

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Oui. D'ailleurs l'égalité des supports est une condition nécessaire à l'égalité des deux variables aléatoires.*

### Question 6

**Deux variables aléatoires suivant la même loi sont indépendantes.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non. voir le contre-exemple du couple (X,Y) de la question 2. Deux variables suivant la même loi, et qui ne sont pas indépendantes.*

### Question 7

**Si nous avons**Cov(X,Y)=0**, alors les variables**X**et**Y**sont indépendantes.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non. Comme précisé dans le cours, le fait que la covariance soit nulle est une condition nécessaire mais pas suffisante à l'indépendance.*

*Donc la covariance de deux variables indépendantes est forcément nulle, mais deux variables de covariance nulle ne sont pas forcément indépendantes.*

### Question 8

**On suppose que**V(X)**et**V(Y)**ne sont pas nulles. S'il existe deux nombres réels**a**et**b**tels que**Y=aX+b**, alors on a :**

ρX,Y=1

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non. Pour montrer que ceci n'est pas vrai, il suffit de prendre des valeurs de*aa*et*bb*pour lesquelles cela ne marche pas.*

*Si on pose*a=−1*et*b=0*, nous aurions*Y=−X*. Et le calcul du coefficient*ρ*s'écrirait :*

**

*Ensuite, en utilisant les propriétés de bilinéarité de la covariance :*



*Comme par ailleurs  , nous aurons finalement :*

*.*

### Question 9

****

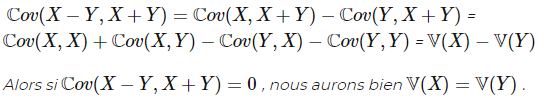
* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Oui. Il suffit d'appliquer la propriété de bilinéarité de la covariance mentionnée dans ce cours. Ce qui donnerait, si on détaille cela en plusieurs étapes :*

**

### Question 10

**SI X et Y sont deux variables aléatoires ayant la même loi, alors on a :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Si*Y=X*, c'est évidemment vrai. Mais ce n'est pas nécessairement le cas si les variables suivent la même loi.*

*Contre-exemple : on lance un dé non truqué et on définit deux VAD*X*et*Y*, qui valent 1 et 0 pour*X*et 0 et 1 pour*Y*lorsqu'on obtient respectivement  un 6 ou autre chose.*X*et*Y*sont deux variables suivant une loi de Bernoulli de paramètre* 1/6*pour*X*et*5/6*pour*Y*.*

*Alors le produit*XY*est nulle et a  pour espérance 0, tandis que les espérances de*X*et*Y*valent*1/6*et*5/6*.*

**Découvrez la loi faible des grands nombres**

**Convergence en probabilité**

**Première approche**

Vous connaissez déjà le sens du mot *convergence* qui décrit le comportement d'une suite numérique à l'infini, et qui signifie que les termes de cette suite de réels sont de plus en plus proches d'un réel donné, appelé la limite de la suite.

On retrouve l'idée de se rapprocher de plus en plus d'une valeur dans la *convergence en probabilité.*

Cette fois, on considère non pas une suite de réels, mais une suite de variables aléatoires (Xn) et une variable aléatoire X, définies sur le même espace probabilisé. On dit que (Xn) converge en probabilité vers X si la probabilité que l'écart entre les variables aléatoires de la suite (Xn) et X dépasse un réel ϵ arbitrairement choisi, sous-entendu aussi petit soit-il, tend vers zéro.

On dit *convergence en probabilité* parce que c'est la probabilité que cet écart dépasse ϵϵ qui tend vers zéro.

**Énoncé**

Soit X une variable aléatoire et (Xn) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On dit que la suite (Xn) converge en probabilité vers la variable aléatoire X si :



**Notation**



**Exemple**

On considère une suite de variables aléatoires (Xn) suivant la loi de Poisson de paramètre λ et on s'intéresse à une autre suite de variables aléatoires notée  et définie par :



Admettons que l'on démontre la limite suivante :



Alors on aura démontré que la suite de variables aléatoires converge en probabilité vers la variable aléatoire Y définie par :



 Y est-ce que l'on appelle la variable certaine égale à λ.

**Loi faible des grands nombres**

**Définition de la moyenne empirique**

Pour bien comprendre le sens de la loi faible des grands nombres, nous avons besoin de définir une suite de variables aléatoires particulière que l'on appelle la moyenne empirique.

Étant donné une suite de variables aléatoires (Xn), on appelle moyenne empirique de cette suite la suite de variables aléatoires  définie par :



Il s'agit de la moyenne arithmétique des termes de la suite (Xn).

**Énoncé de la loi faible des grands nombres**

Soit (Xn) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et ayant chacune une même espérance mm et une même variance . Alors nous avons :

****

**Interprétation**

Étant donné une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance et variance, la moyenne empirique de cette suite converge en probabilité vers la variable certaine égale à l'espérance, commune à toutes les variables aléatoires de la suite.

**Exemple**

Prenons l'exemple d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre 1/6 . On peut par exemple imaginer que l'on réalise une série de lancers avec un dé non truqué et que (Xn) est une suite de variables aléatoires qui prennent la valeur 1 lorsque l'on obtient un 6 et la valeur 0 lorsque l'on obtient un autre nombre.

Ces variables aléatoires ont toutes pour espérance 1/6 et pour variance 0, puisqu'elles suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre 1/6 .

Selon la loi des grands nombres, si on fait un grand nombre de lancers, et que l'on calcule la moyenne des valeurs des variables aléatoires qui tour à tour prendront la valeur 0 ou 1, alors la probabilité que la moyenne de ces valeurs, c'est-à-dire la moyenne de ces 0 et 1, s'éloigne de 1/6 tend vers 0, lorsque le nombre de lancers tend vers l'infini.

Ce qui est très intuitif et flatte notre bon sens.

**Utilisez le Théorème Central Limite**

**Convergence en loi**

**Rappel**

Il existe différents types de convergences pour une suite de variables aléatoires. Au chapitre précédent, nous avons vu la convergence en probabilité. Voyons maintenant ce que l'on appelle la convergence en loi.

**Définition (le cas général)**

Soit (Xn) une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé . Pour tout entier naturel n, on note Fn la fonction de répartition de Xn . Soit X une variable aléatoire définie également sur  et de fonction de répartition F.

On dit que la suite (Xn) converge en loi vers X si, en tout point x où F est continue, on a :



**Notation**

(Xn) converge en loi vers X se note : 

**Cas particulier des variables aléatoires discrètes**

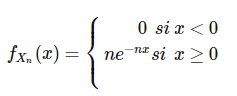
Soit (Xn) une suite de variables aléatoires discrètes et X une variable aléatoire discrète. On suppose que les Xn et X sont à valeur dans Z. La suite (Xn) converge en loi vers X si :



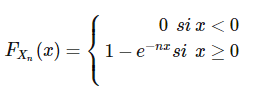
**Exemple**

Soit (Xn) une suite de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre n. Cette suite converge en loi vers une variable X que nous allons déterminer.

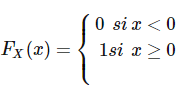
Commençons par rappeler ce que nous avons vu au chapitre 4 de la deuxième partie : si , alors la fonction **fx**, densité de probabilité de  Xn, est définie comme suit :



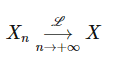
Et surtout, la fonction FXn, fonction de répartition de Xn, est définie par :



Soit X la variable aléatoire certaine égale à 0. Alors cette variable aléatoire a pour support X(Ω)={0} et la fonction FX, fonction de répartition de X, serait définie par :



Et ainsi, on peut aisément constater que , pour tout x réel. Et en conclusion, on a :



**Théorème central limite**

**Première approche**

Voici une première façon d'interpréter le théorème de la limite centrale. Chaque fois que l'on a une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance **m** et de même variance **σ2**, la moyenne de ces variables aléatoires est une variable aléatoire qui converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale.

Qu'il s'agisse de la suite de variables aléatoires indiquant le poids des individus dans une population, de celle des variables aléatoires mesurant la taille des carottes lors d'une récolte, ou encore la durée de vie de téléphones portables à la sortie d'une usine, sans même considérer les lois de probabilités de ces suites de variables aléatoires, dès lors qu'elles sont indépendantes et qu'elles ont une même espérance et une même variance, leur moyenne converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale.

**Énoncé**

Soit (Xn) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de même espérance m et même variance σ2.

Considérons la suite des variables aléatoires , moyenne empirique des (Xn), et sa variable aléatoire centrée réduite (Zn) avec



Alors (Zn) converge en loi vers une variable aléatoire normale centrée réduite. On a donc :



Vous souhaitez expérimenter le théorème central limite dans un cas pratique ? C'est [**par ici**](https://openclassrooms.com/courses/4452741-decouvrez-les-librairies-python-pour-la-data-science/4740938-utilisez-numpy-pour-illustrer-le-theoreme-central-limite).  ;)

# Partie 4

Bravo ! Vous avez réussi cet exercice !

### Compétences évaluées

* Appréhender la loi faible des grands nombres et le théorème central limite

### Description

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

### Question 1

**Quand on dit d'une suite de variables aléatoires qu'elle converge en probabilité, cela signifie implicitement la convergence vers une variable aléatoire.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Oui. Il suffit de relire la définition de la convergence en probabilité.*

### Question 2

**Dans la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires, par "quel que soit**ϵ**", (noté**∀ϵ**) on entend "aussi grand soit il".**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Évidemment non. Ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est que l'inégalité marche pour tout epsilon, aussi petit soit-il.*

### Question 3

**Dire d'une variable aléatoire qu'elle converge en probabilité ou en loi, cela signifie exactement la même chose.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non. Ce sont deux types de convergences différents. Il suffit de comparer leurs définitions pour s'en convaincre.*

### Question 4

**La loi faible des grands nombres s'applique à une suite de variables aléatoires indépendantes ayant une même espérance et une même variance.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Oui. C'est la condition nécessaire à l'application de cette loi.*

*Bien sur pour une suite de variables indépendantes suivant la même loi on sera bien dans ce cas de figure.  On dira que ce sont  des variables iid : indépendantes et identiquement distribuées.*

### Question 5

**On lance un dé à 6 faces non truqué n fois. La loi faible des grands nombres peut s'appliquer à cette situation pour expliquer le fait que plus ce nombre de lancers sera grand et plus la probabilité qu'il y ait un certain écart, aussi faible soit-il, entre la fréquence en moyenne des 1 obtenus et**1/6**sera proche de 0.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Oui. C'est l'exemple du cours.*

### Question 6

**Soit**(Xn)**une suite de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre**n**pour tout**n**entier naturel, cette suite converge en loi vers une certaine variable**X**que l'on peut déterminer.**

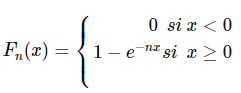
* + 

VRAI

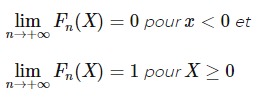
* + 

FAUX

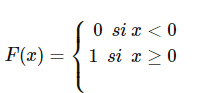
*Oui. Regardons la limite de la fonction de répartition*Fn*de*Xn*. Rappelons tout d'abord l'expression de cette fonction :*



*Alors :*

**

*Par conséquent nous pouvons considérer que la fonction de répartition*Fn*a pour limite la fonction*F*définie par :*

**

*On reconnait en*F*la fonction de répartition d'une variable*X*qui est une aléatoire certaine égale à 0.*

### Question 7

**Soit**(Xn)**une suite de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre**1n**pour tout**n**entier naturel, cette suite converge en loi vers une certaine variable**X**que l'on peut déterminer.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Non. Contrairement à la question précédente, en regardant la limite de la fonction de répartition*FnFn*ici, on obtient :*

*pour tout*x*réel.*

*Ainsi*Fn*converge vers la fonction nulle. Mais la fonction nulle ne peut en aucun cas être considéré comme une fonction de répartition, et en conclusion la suite*(Xn)*ne converge pas en loi.*

### Question 8

**Une suite de variables aléatoires discrètes  peut converger en loi vers une variable X à densité.**

* + 

VRAI

* + 

FAUX

*Oui. Nous avons vu que d'après le théorème central limite, une suite de variables aléatoires iid converge en loi vers une loi normale, qui est une loi à densité. La suite de variables iid peut bien sur être une suite de variables aléatoires discrètes.*

### Question 9

**Si la suite**(Xn)**est une suite de variables aléatoires de même loi, indépendantes, possédant une espérance et une variance, alors en posant****, le théorème limite central montre que :**

****

* + 

VRAI

* + 

FAUX