```
str(hauspreise) # Quelle: wooldridge::hprice1 (transformiert)

'data.frame': 88 obs. of 4 variables:
$ preis : num 300000 370000 191000 195000 373000 ...
$ wohnflaeche : num 226 193 128 135 234 ...
$ schlafzimmer: int 4 3 3 3 4 5 3 3 3 3 ...
$ grundflaeche: num 569 920 483 427 566 ...
```

Falls es dich interessiert, genau so habe ich den Datensatz hauspreise gebildet:

```
library(dplyr)
umrechnungsfaktor <- 0.09290304
hauspreise <- wooldridge::hprice1 %>%
  summarize(
    preis = price * 1000,
    wohnflaeche = sqrft * umrechnungsfaktor,
    schlafzimmer = bdrms.
    grundflaeche = lotsize * umrechnungsfaktor
```

```
str(hauspreise) # Quelle: wooldridge::hprice1 (transformiert)

'data.frame': 88 obs. of 4 variables:
$ preis : num 300000 370000 191000 195000 373000 ...
$ wohnflaeche : num 226 193 128 135 234 ...
$ schlafzimmer: int 4 3 3 3 4 5 3 3 3 3 ...
$ grundflaeche: num 569 920 483 427 566 ...
```

```
str(hauspreise) # Quelle: wooldridge::hprice1 (transformiert)
'data.frame': 88 obs. of 4 variables:
 $ preis : num 300000 370000 191000 195000 373000 ...
 $ wohnflaeche: num 226 193 128 135 234 ...
 $ schlafzimmer: int 4 3 3 3 4 5 3 3 3 3 ...
 $ grundflaeche: num 569 920 483 427 566 ...
model <- lm(
  formula = preis ~ wohnflaeche + I(schlafzimmer > 4) + grundflaeche,
 data = hauspreise
```

```
str(hauspreise) # Quelle: wooldridge::hprice1 (transformiert)
'data.frame': 88 obs. of 4 variables:
 $ preis : num 300000 370000 191000 195000 373000 ...
 $ wohnflaeche: num 226 193 128 135 234 ...
 $ schlafzimmer: int 4 3 3 3 4 5 3 3 3 3 ...
 $ grundflaeche: num 569 920 483 427 566 ...
model <- lm(
  formula = preis ~ wohnflaeche + I(schlafzimmer > 4) + grundflaeche,
  data = hauspreise
summary(model)
```

```
Call:
lm(formula = preis ~ wohnflaeche + I(schlafzimmer > 4) + grundflaeche,
    data = hauspreise)

Residuals:
    Min    1Q Median    3Q    Max
-149356 -27653 -3891    24175    202625

Coefficients:
```

```
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **

---

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Residual standard error: 53990 on 84 degrees of freedom Multiple R-squared: 0.7333, Adjusted R-squared: 0.7237 F-statistic: 76.97 on 3 and 84 DF, p-value: < 2.2e-16

```
Call:
lm(formula = preis ~ wohnflaeche + I(schlafzimmer > 4) + grundflaeche,
    data = hauspreise)
```

Ganz oben steht der Funktionsaufruf ("Call") der lm() Funktion:

1 formula ist unsere Modellformel

2 data ist der Name unseres Datensatzes

Call:

lm(formula = preis ~ wohnflaeche + I(schlafzimmer > 4) + grundflaeche,
 data = hauspreise)

Ganz oben steht der Funktionsaufruf ("Call") der lm() Funktion:

- 1 formula ist unsere Modellformel
- 2 data ist der Name unseres Datensatzes

Die Modellformel übersetzen wir so:

- Allgemeine Formel: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,2} + \beta_3 x_{i,3} + u_i$, i = 1, ..., n
- R Formel: preis ~ wohnflaeche + I(schlafzimmer > 4) + grundflaeche
- Übersetzt:

preis_i =
$$\beta_0 + \beta_1$$
wohnflaeche_i + β_2 $\underbrace{1\{\text{schlafzimmer} > 4\}}_{\text{Indikator-Variable}} + \beta_3$ grundflaeche + u_i

Als nächstes kommt eine Zusammenfassung der Residuen.

Was sind nochmal Residuen?

Residuals:

Für alle Beobachtungen $i=1,\ldots,n$ ist das Residuum \hat{u}_i die Differenz aus dem beobachteten Preis preis $_i$ und dem durch das Modell erklärten Preis preis $_i$, also:

$$\hat{u}_i = \operatorname{preis}_i - \widehat{\operatorname{preis}}_i$$

$$= \operatorname{preis}_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \operatorname{wohnflaeche}_i + \hat{\beta}_2 1 \{\operatorname{schlafzimmer} > 4\} + \hat{\beta}_3 \operatorname{grundflaeche}).$$

```
Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-149356 -27653 -3891 24175 202625
```

Die konkreten Residuenwerte für unser geschätztes Modell bekommen wir so:

```
Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-149356 -27653 -3891 24175 202625
```

Die konkreten Residuenwerte für unser geschätztes Modell bekommen wir so:

summary(residuals)

Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max. -149356 -27653 -3891 0 24175 202625

Min 1Q Median 3Q Max -149356 -27653 -3891 24175 202625

Residuals:

Was für Werte wünschen wir uns hier eigentlich?

Min 1Q Median 3Q Max -149356 -27653 -3891 24175 202625

Was für Werte wünschen wir uns hier eigentlich?

Wir möchten, dass die Residuen symmetrisch um die geschätzte Regressionslinie streuen, also sollte:

- lacksquare |Min| pprox Max
- $|1Q| \approx 3Q$

Residuals:

lacksquare Median pprox 0

```
Coefficients:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **

---

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

In dieser Tabelle stehen Informationen über die Kleinste-Quadrate-Schätzwerte.

Die Zeilennamen sind:

 \blacksquare (Intercept), also β_0

- lacktriangle wohnflaeche, also der zur Variable wohnflaeche gehörige Koeffizient eta_1
- I(schlafzimmer > 4)TRUE, also β_2
- \blacksquare grundflaeche. also β_3

```
(Intercept)
                      5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *
            1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***
wohnflaeche
I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***
grundflaeche
                      2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

In Spalte Estimate stehen die Schätzwerte, also:

■
$$\hat{\beta}_0 = 5.384 \text{e} + 04 = 5.384 \cdot 10^4 = 53840$$

■ $\hat{\beta}_1 = 1.134 \text{e} + 03 = 1134$

$$\hat{\beta}_2 = 1.049e + 05 = 10490$$

$$\hat{\beta}_2 = 2.019e + 01 = 20.19$$

Coefficients:

$$\beta_2 = 1.049e + 05 = 10490$$

$$\hat{\beta}_3 = 2.019e + 01 = 20.19$$

```
Coefficients:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **
```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

In Spalte Estimate stehen die Schätzwerte, also:

$$\hat{\beta}_0 = 5.384e + 04 = 5.384 \cdot 10^4 = 53840$$

$$\hat{\beta}_1 = 1.134e + 03 = 1134$$

$$\hat{\beta}_2 = 1.049e + 05 = 10490$$

$$\hat{\beta}_3 = 2.019$$
e+01 = 20.19

Damit können wir jetzt interpretieren, dass ein zusätzlicher Quadratmeter Wohnfläche ceteris paribus (alles andere bleibt gleich) den Verkaufspreis um 1134 Dollar erhöht.

```
Coefficients:
```

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *
wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***
I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***
grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **
--Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

In Spalte Std. Error stehen die Standardfehler der geschätzten Koeffizienten (für deren Berechnung wir übrigens die Homoskedastie der Fehler u_i annehmen), also:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

■
$$se(\hat{\beta}_0) = 2.339e+04 = 23390$$

■ $se(\hat{\beta}_1) = 1.272e+02 = 127.2$
■ $se(\hat{\beta}_2) = 2.233e+04 = 22330$
■ $se(\hat{\beta}_3) = 6.253e+00 = 6.253$

Hier gilt, dass ein kleinerer Standardfehler für einen präziseren Schätzwert steht.

```
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *
wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***
I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***
grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

In Spalte t value stehen die Teststatistiken mit denen wir testen, ob ein Regressor einen signifikanten Einfluss auf die zu erklärende Variable (den Preis) hat:

 H_0 : $\beta_k = 0$ H_1 : $\beta_k \neq 0$

Coefficients:

```
Coefficients:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **

---

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

In Spalte t value stehen die Teststatistiken mit denen wir testen, ob ein Regressor einen signifikanten Einfluss auf die zu erklärende Variable (den Preis) hat:

$$H_0: \ \beta_k = 0$$
$$H_1: \ \beta_k \neq 0$$

Für jeden Koeffizienten $k = 0, \dots, 3$ wird dafür folgendes berechnet:

t value
$$=t_k=rac{\hat{eta}_k}{se(\hat{eta}_k)}=rac{ exttt{Estimate}}{ exttt{Std. Error}}$$

Coefficients:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

T(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 *** grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Unter der Annahme, dass die Fehler normalverteilt sind, gilt:

$$t_k = \frac{\hat{\beta}_k}{\operatorname{se}(\hat{\beta}_k)} \sim t(n - K - 1)$$

- t(n-K-1) ist die t-Verteilung mit n-K-1 Freiheitsgraden
- \blacksquare n = 88 ist der Stichprobenumfang
- lacktriangledown K=3 ist die Anzahl an Regressoren (ohne Intercept!)

```
      (Intercept)
      5.384e+04
      2.339e+04
      2.302
      0.02380 *

      wohnflaeche
      1.134e+03
      1.272e+02
      8.909
      9.03e-14 ***

      I(schlafzimmer > 4)TRUE
      1.049e+05
      2.233e+04
      4.699
      1.01e-05 ***

      grundflaeche
      2.019e+01
      6.253e+00
      3.229
      0.00177 **
```

Coefficients:

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **
--Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

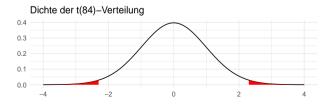
In der Spalte $\Pr(>|t|)$ stehen die "p-values". Das sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen wir unter der t(n-K-1)-Verteilung einen betragsmäßig größeren Wert als t_k beobachten.

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

Coefficients:

```
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
                                                    0.02380 *
(Intercept)
                       5.384e+04
                                  2.339e+04
                                             2.302
wohnflaeche
                       1.134e+03
                                  1.272e+02
                                             8.909 9.03e-14 ***
I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04
                                             4.699 1.01e-05 ***
grundflaeche
                       2.019e+01
                                  6.253e+00
                                              3.229 0.00177 **
               0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Signif. codes:
```

In der Spalte $\Pr(>|t|)$ stehen die "p-values". Das sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen wir unter der t(n-K-1)-Verteilung einen betragsmäßig größeren Wert als t_k beobachten. Also zum Beispiel für den Intercept:



```
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **

---

Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
```

Wenn p-value $< \alpha$, verwerfe $H_0: \beta_k = 0$.

Wie trifft man nochmal die Testentscheidung?

Coefficients:

```
Coefficients:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **

---

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Wie trifft man nochmal die Testentscheidung?

Wenn p-value $< \alpha$, verwerfe $H_0: \beta_k = 0$.

Also ist der Intercept signifikant zu $\alpha=5\%$, denn 0.02380<0.05.

```
Coefficients:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

(Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2.302 0.02380 *

wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 ***

I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 2.233e+04 4.699 1.01e-05 ***

grundflaeche 2.019e+01 6.253e+00 3.229 0.00177 **

---
```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Wie trifft man nochmal die Testentscheidung?

Wenn p-value $< \alpha$, verwerfe $H_0: \beta_k = 0$.

Also ist der Intercept signifikant zu $\alpha = 5\%$, denn 0.02380 < 0.05.

Die Sterne in der rechten Spalte bieten einen schnellen Überblick:

- lacktriangle Koeffizienten mit p-value < 10% bekommen einen .
- \blacksquare p-value < 5% gibt *, p-value < 1% gibt **, p-value < 0.1% gibt ***

Residual standard error: 53990 on 84 degrees of freedom Multiple R-squared: 0.7333, Adjusted R-squared: 0.7237 F-statistic: 76.97 on 3 and 84 DF, p-value: < 2.2e-16

Am Ende stehen noch drei Zeilen mit viel Information:

- f 1 ein Schätzwert für die Standardabweichung σ der Fehler u_i
- 2 die Gütekriterien R^2 und adjustiertes R^2
- 3 das Ergebnis des "Overall-F-Test"

Der Schätzwert für die Standardabweichung σ der Fehler ist

$$\hat{\sigma} = \sqrt{SSR/(n-K-1)}$$

Der Schätzwert für die Standardabweichung σ der Fehler ist

$$\hat{\sigma} = \sqrt{SSR/(n-K-1)}$$

wobei SSR (für "Sum of squared residuals") die Summe der quadrierten Residuen ist:

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{i}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (y_{i} - \hat{y}_{i}^{2})$$

Der Schätzwert für die Standardabweichung σ der Fehler ist

$$\hat{\sigma} = \sqrt{SSR/(n-K-1)}$$

wobei SSR (für "Sum of squared residuals") die Summe der quadrierten Residuen ist:

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{i}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (y_{i} - \hat{y}_{i}^{2})$$

sqrt(sum(model\$residuals^2)/84)

[1] 53986.52

(im summary() Output wurde gerundet, daher der kleine Unterschied)

Zur Erinnerung: Neben SSR gibt es auch noch

■
$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$
 (für "Sum of squares total") und

■
$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$
 (für "Sum of squares explained").

Zur Erinnerung: Neben SSR gibt es auch noch

- $SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i \bar{y})^2$ (für "Sum of squares total") und ■ $SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ (für "Sum of squares explained").
- Es gilt SST = SSE + SSR, das heißt, die Gesamtvariabilität des Datensatzes (SST) ist gleich der durch die Regression erklärten Variabilität (SSE) plus der unerklärten Variabilität (SSR).

Multiple R-squared: 0.7333, Adjusted R-squared: 0.7237

Multiple R-squared ist das R^2 mit

$$R^2 = SSE/SST = 1 - SSR/SST$$
,

das heißt die Größe R^2 gibt den Anteil der durch das Modell erklärten Variabilität an der Gesamtvariabilität im Datensatz an (hier 73, 33% - ganz gut!).

Multiple R-squared: 0.7333, Adjusted R-squared: 0.7237

Multiple R-squared ist das R^2 mit

$$R^2 = SSE/SST = 1 - SSR/SST$$
,

das heißt die Größe R^2 gibt den Anteil der durch das Modell erklärten Variabilität an der Gesamtvariabilität im Datensatz an (hier 73,33% - ganz gut!).

Daneben steht das adjustierte R^2 :

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSR/(n-K-1)}{SST/(n-1)}.$$

Was ist eigentlich der Unterschied?

Während R^2 zwingend mit jedem hinzugefügten Regressor steigt, tut das \bar{R}^2 nicht notwendigerweise. Also ist R^2 nicht zur Modellselektion geeignet, \bar{R}^2 aber schon.

Die letzte Zeile ist das Ergebnis des "Overall-F-Test" (Globaler F-Test). Er testet

$$H_0$$
: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

F-statistic: 76.97 on 3 and 84 DF, p-value: < 2.2e-16

$$H_1$$
: $\beta_1 \neq 0$ oder $\beta_2 \neq 0$ oder $\beta_3 \neq 0$

F-statistic: 76.97 on 3 and 84 DF, p-value: < 2.2e-16

Die letzte Zeile ist das Ergebnis des "Overall-F-Test" (Globaler F-Test). Er testet

$$H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

 $H_1: \ \beta_1 \neq 0 \ \text{oder} \ \beta_2 \neq 0 \ \text{oder} \ \beta_3 \neq 0$

Der Wert der Teststatistik wurde berechnet mit der Formel

$$F\text{-statistic} = F = \frac{R^2/K}{(1-R^2)/(n-K-1)}$$

[1] 76.97402

* *

Die letzte Zeile ist das Ergebnis des "Overall-F-Test" (Globaler F-Test). Er testet

$$H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

 $H_1: \ \beta_1 \neq 0 \ \text{oder} \ \beta_2 \neq 0 \ \text{oder} \ \beta_3 \neq 0$

Der Wert der Teststatistik wurde berechnet mit der Formel

F-statistic: 76.97 on 3 and 84 DF, p-value: < 2.2e-16

$$extsf{F-statistic} = F = rac{R^2/K}{(1-R^2)/(n-K-1)}$$

Die Teststatistik ist F-verteilt zu K und n-K-1 Freiheitsgraden (DF). Außerdem ist der p-value angegeben. Natürlich gilt auch hier: H_0 verwerfen, wenn p-value $< \alpha$.

```
Call:
```

lm(formula = preis ~ wohnflaeche + I(schlafzimmer > 4) + grundflaeche,
data = hauspreise)

Residuals:

Min 1Q Median 3Q Max -149356 -27653 -3891 24175 202625

Coefficients:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) (Intercept) 5.384e+04 2.339e+04 2 302 0 02380 * wohnflaeche 1.134e+03 1.272e+02 8.909 9.03e-14 *** I(schlafzimmer > 4)TRUE 1.049e+05 4.699 1.01e-05 *** 6.253e+00 3.229 0.00177 grundflaeche 2.019e+01 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1 Signif. codes:

Residual standard error: 53990 on 84 degrees of freedom Multiple R-squared: 0.7333, Adjusted R-squared: 0.7237 F-statistic: 76.97 on and DF, p-value: < 2.2e-16

Dein Selbsttest:

- 1 Was ist $se(\hat{\beta}_2)$?
- 2 Wie viele Signifikanzsterne hat $\hat{\beta}_3$?
- 3 Wie groß ist n?
- 4 Wie groß ist *SSE*?
- 5 Welche Freiheitsgrade hat die *F*-Statistik?