Ein Beispiel

- Ein Tinder-Match alle 40 Stunden

Ein Beispiel

- Ein Tinder-Match alle 40 Stunden
- Zeit bis zum nächsten Match ist $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1/40)$

Ein Beispiel

- Ein Tinder-Match alle 40 Stunden
- Zeit bis zum nächsten Match ist $X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/40)$
- Gerade hatte ich ein Match, die Wahrscheinlichkeit mehr als t Stunden auf das nächste Match zu warten ist $P(X \geq t)$

Ein Beispiel

- Ein Tinder-Match alle 40 Stunden
- Zeit bis zum nächsten Match ist $X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/40)$
- Gerade hatte ich ein Match, die Wahrscheinlichkeit mehr als t Stunden auf das nächste Match zu warten ist $P(X \geq t)$
- An einem Morgen sehe ich, dass ich am Abend zuvor (vor 10 Stunden) ein Match hatte. Die Verteilung der Wartezeit bis zum nächsten Match ist $P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$

Ein Beispiel

- Ein Tinder-Match alle 40 Stunden
- Zeit bis zum nächsten Match ist $X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/40)$
- Gerade hatte ich ein Match, die Wahrscheinlichkeit mehr als t Stunden auf das nächste Match zu warten ist $P(X \geq t)$
- An einem Morgen sehe ich, dass ich am Abend zuvor (vor 10 Stunden) ein Match hatte. Die Verteilung der Wartezeit bis zum nächsten Match ist $P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$
- Entscheidend ist jetzt: $P(X \geq t) = P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$, das heißt die Verteilungen sind gleich!

Ein Beispiel

- Ein Tinder-Match alle 40 Stunden
- Zeit bis zum nächsten Match ist $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1/40)$
- Gerade hatte ich ein Match, die Wahrscheinlichkeit mehr als t Stunden auf das nächste Match zu warten ist $P(X \geq t)$
- An einem Morgen sehe ich, dass ich am Abend zuvor (vor 10 Stunden) ein Match hatte. Die Verteilung der Wartezeit bis zum nächsten Match ist $P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$
- Entscheidend ist jetzt: $P(X \geq t) = P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$, das heißt die Verteilungen sind gleich!
- Aber warum?

Die Exponentialverteilung

- Träger: nichtnegative, reelle Zahlen
- Parameter: $\lambda > 0$
- Erwartungswert: $1/\lambda$
- Varianz: $1/\lambda^2$
- Einsatz: Modellierung von Lebensdauern oder Wartezeiten

Die Exponentialverteilung

- Träger: nichtnegative, reelle Zahlen
- Parameter: $\lambda > 0$
- Erwartungswert: $1/\lambda$
- Varianz: $1/\lambda^2$
- Einsatz: Modellierung von Lebensdauern oder Wartezeiten
- Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung

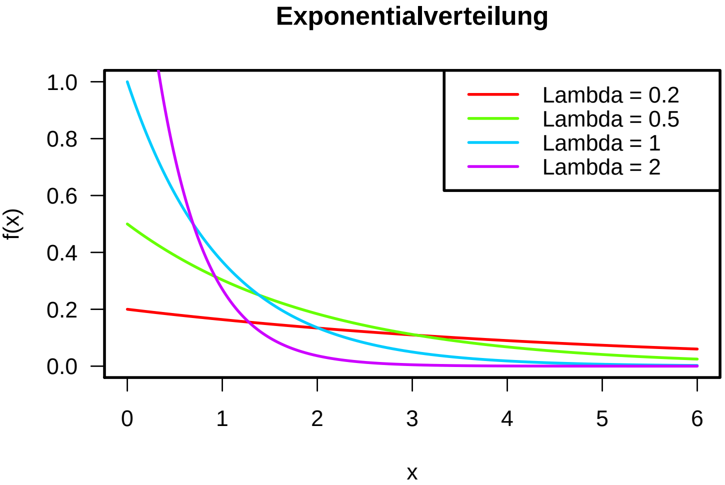
- Träger: nichtnegative, reelle Zahlen
- Parameter: $\lambda > 0$
- Erwartungswert: $1/\lambda$
- Varianz: $1/\lambda^2$
- Einsatz: Modellierung von Lebensdauern oder Wartezeiten
- Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

- Verteilungsfunktion:

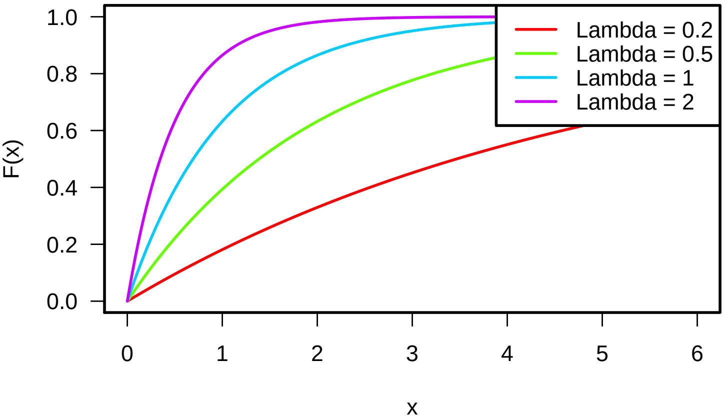
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

60 %


Exponentialverteilung
Lambda = 0.2
Lambda = 0.5
Lambda = 1
Lambda = 2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
f(x)
0
1
2
3
4
5
6
x

67 %

Exponentialverteilung



Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Wenn $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, dann ist

$$P(X \geq s + t \mid X \geq s) = P(X \geq t) \quad \forall s, t > 0$$

Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Wenn $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dann ist

$$P(X \geq s + t \mid X \geq s) = P(X \geq t) \quad \forall s, t > 0$$

Die Exponentialverteilung ist die **einzige stetige** Verteilung, die diese Eigenschaft erfüllt. Im diskreten Fall erfüllt die geometrische Verteilung diese Eigenschaft.

Ein Beispiel

- Ein Tinder-Match alle 40 Stunden
- Zeit bis zum nächsten Match ist $X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/40)$
- Gerade hatte ich ein Match, die Wahrscheinlichkeit mehr als t Stunden auf das nächste Match zu warten ist $P(X \geq t)$
- An einem Morgen sehe ich, dass ich am Abend zuvor (vor 10 Stunden) ein Match hatte. Die Verteilung der Wartezeit bis zum nächsten Match ist $P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$
- Entscheidend ist jetzt: $P(X \geq t) = P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$, das heißt die Verteilungen sind gleich!
- Aber warum?

Der Beweis

Warum ist $P(X \geq t) = P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$?

Der Beweis

Warum ist $P(X \geq t) = P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10)$?

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 10 + t \mid X \geq 10) &= \frac{P(X \geq 10 + t, X \geq 10)}{P(X \geq 10)} \\
&= \frac{P(X \geq 10 + t)}{P(X \geq 10)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq 10 + t)}{1 - P(X \leq 10)} \\
&= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(10+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda 10})} \\
&= \frac{e^{-\lambda(10+t)}}{e^{-\lambda 10}} \\
&= e^{-\lambda(10+t)-(-\lambda 10)} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)
\end{aligned}
$$