Aufgabe

Die Dichte einer stetigen Zufallsvariable X ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2ax & 0 < x < 1 \\ 3a - ax & 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ wobei } a > 0.$$

1. Wie groß ist a?
2. Wie sieht $f(x)$ aus?
3. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten
   - $P(X = 1)$,
   - $P(0,5 < X < 2)$,
   - $P(X < 2)$?

Definition: Dichte

Die Funktion f ist eine Dichte, falls

1. $f(x) \geq 0$ für alle x
2. und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Definition: Dichte

Die Funktion f ist eine Dichte, falls

1. $f(x) \geq 0$ für alle x
2. und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$
\begin{aligned}
1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^1 2ax\ dx + \int_1^3 3a - ax\ dx \\
&= 2a\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[3ax - a\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 \\
&= a + 2a = 3a \\
\Rightarrow a = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3}x & 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3}x & 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$P(X = 1) = \int_1^1 f(x)dx = 0$$

$$P(0,5 < X < 2) = \int_{0,5}^2 f(x)dx = \int_{0,5}^1 \frac{2}{3}x \ dx + \int_1^2 1 - \frac{1}{3}x \ dx = \frac{3}{4}$$

$$P(X < 2) = 1 - P(X \geq 2) = 1 - \int_2^{+\infty} f(x)dx$$

$$= 1 - \int_2^3 1 - \frac{1}{3}x \ dx = \frac{5}{6}$$