Aufgabe:

Gegeben ist eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit. Prüfe, ob die folgenden Schätzer für den Parameter μ erwartungstreu und konsistent sind:

- $T_1 = \bar{X}$
- $T_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$

Aufgabe:

Gegeben ist eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit. Prüfe, ob die folgenden Schätzer für den Parameter μ erwartungstreu und konsistent sind:

- $T_1 = \bar{X}$
- $T_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$

Wiederholung: Normalverteilung

Falls $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist

$$E(X) = \mu, \;\; Var(X) = \sigma^2.$$

Definition: Erwartungstreuer Schätzer

Ein Schätzfunktion T für den Parameter θ ist erwartungstreu, falls

$$E(T) = \theta.$$

Definition: Erwartungstreuer Schätzer

Ein Schätzfunktion T für den Parameter θ ist erwartungstreu, falls

$$E(T) = \theta.$$

Definition: Konsistenter Schätzer

Ein Schätzfunktion T ist konsistent, falls sie erwartungstreu ist und zusätzlich

$$Var(T) \to 0,$$

wenn der Stichprobenumfang $n \to \infty$.

Wir schauen uns zunächst $T_1 = \bar{X}$ an, $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$E(T_1) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

Wir schauen uns zunächst $T_1 = \bar{X}$ an, $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$E(T_1) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$Var(T_1) = Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

Also ist T_1 erwartungstreu und konsistent.

Nun schauen wir uns $T_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ an, $X_1, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$
\begin{aligned}
E(T_2) = E\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_n)\right) &= \frac{1}{2}(E(X_1) + E(X_n)) \\
&= \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu
\end{aligned}
$$

Nun schauen wir uns $T_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ an, $X_1, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$
\begin{aligned}
E(T_2) = E\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_n)\right) &= \frac{1}{2}(E(X_1) + E(X_n)) \\
&= \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(T_2) = Var\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_n)\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (Var(X_1) + Var(X_n)) \\
&= \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}
$$

Also ist T_2 erwartungstreu aber nicht konsistent.

Definition: Verzerrung, Bias, systematischer Fehler

Gegeben eine Schätzfunktion T und ein zu schätzender Parameter θ. Dann heißt der Wert

$$E(T) - \theta$$

die Verzerrung, der Bias oder der systematische Fehler von T bei θ.