Stichprobe aus einer Normalverteilung:

```
> x
-0.3109498  1.3417310 -0.9245257 -0.1026436  1.0769149
-1.1520844 -0.9227701 -1.7029334 -0.3855018  0.6828499
```

Stichprobe aus einer Normalverteilung:

```
> x
-0.3109498  1.3417310 -0.9245257 -0.1026436  1.0769149
-1.1520844 -0.9227701 -1.7029334 -0.3855018  0.6828499
```

Maximum-Likelihood-Schätzwert für μ:

$$\hat{\mu}_{\mathsf{ML}} = \bar{X} = -0.2399913$$

Stichprobe aus einer Normalverteilung:

```
> x
-0.3109498  1.3417310 -0.9245257 -0.1026436  1.0769149
-1.1520844 -0.9227701 -1.7029334 -0.3855018  0.6828499
```

Maximum-Likelihood-Schätzwert für μ:

$$\hat{\mu}_{\mathsf{ML}} = \bar{X} = -0.2399913$$

95%-Konfidenzintervall für μ:

$$[-0.9569236; 0.476941]$$

$(1-\alpha)$ - Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Normalverteilung

σ bekannt:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

σ unbekannt:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}};\ \bar{X} + t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$(1-\alpha)$ - Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Normalverteilung

σ bekannt:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

σ unbekannt:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}};\; \bar{X} + t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Wie verändert sich das Konfidenzintervall, wenn

- n steigt?
- α sinkt?
- σ steigt?
- σ durch die Stichprobenstandardabweichung S geschätzt wird?

$(1-\alpha)$ - Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Normalverteilung

σ bekannt:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Breite b des KI:

$$b = \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$(1-\alpha)$ - Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Normalverteilung

σ bekannt:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Breite b des KI:

$$b = \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Und damit gilt:

- Wenn n steigt, dann wird das KI schmaler.
- Wenn α sinkt wird $z_{1-\alpha/2}$ größer und damit das KI breiter.
- Wenn σ steigt wird das KI breiter.

Folgende konkrete Maßnahmen können wir ableiten, um das KI schmaler zu machen:

- Erhöhe den Stichprobenumfang. Das führt evtl. zu höheren Kosten.
- Wähle ein größeres α. Damit riskieren wir aber, den wahren Parameter nicht einzufangen.

Will man zu fester Irrtumswahrscheinlichkeit α ein Konfidenzintervall mit bestimmter Maximalbreite haben, kann man den notwendigen Stichprobenumfang berechnen:

$$\begin{aligned} b &= 2z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \quad n &= \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}\sigma}{b}\right)^2 \end{aligned}$$

Was ist mit dem letzten Fall: σ wird durch die Stichprobenstandardabweichung S geschätzt?

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})}$$

Was ist mit dem letzten Fall: σ wird durch die Stichprobenstandardabweichung S geschätzt?

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})}$$

α	$z_{1-\alpha/2}$	$t_{1-\alpha/2;10}$	$t_{1-\alpha/2;30}$
0,01	2,58	3,17	2,75
0,05	1,96	2,23	2,04
0,10	1,64	1,81	1,70

Was ist mit dem letzten Fall: σ wird durch die Stichprobenstandardabweichung S geschätzt?

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})}$$

α	$z_{1-\alpha/2}$	$t_{1-\alpha/2;10}$	$t_{1-\alpha/2;30}$
0,01	2,58	3,17	2,75
0,05	1,96	2,23	2,04
0,10	1,64	1,81	1,70

Und damit gilt:

- Wenn σ durch S geschätzt wird, wird das KI breiter.
- Wenn $n > 30$, ist $z_{1-\alpha/2} \approx t_{1-\alpha/2;n-1}$ und der Effekt ist vernachlässigbar.