Beispiel 1 (Gleichverteilung)

Wir haben die folgenden 10 unabhängigen Realisationen einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \theta]$ gegeben:

$$0.6 \quad 5.5 \quad 0.9 \quad 4.5 \quad 6.6 \quad 2.0 \quad 3.3 \quad 5.0 \quad 3.5 \quad 3.1$$

Schätze mit Hilfe der Momentenmethode den Wert von θ.

Fahrplan für die Momentenmethode

1. Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen.

Fahrplan für die Momentenmethode

1. Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen.
2. Wir kennen die Verteilung, aber ein oder mehrere Parameter sind unbekannt. Diese wollen wir schätzen.

Fahrplan für die Momentenmethode

1. Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen.
2. Wir kennen die Verteilung, aber ein oder mehrere Parameter sind unbekannt. Diese wollen wir schätzen.
3. Wir bestimmen die ersten k theoretischen Momente $\mathbb{E}(X^k)$ der Verteilung und ermitteln einen Zusammenhang zu den gesuchten Parametern.

Fahrplan für die Momentenmethode

1. Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen.
2. Wir kennen die Verteilung, aber ein oder mehrere Parameter sind unbekannt. Diese wollen wir schätzen.
3. Wir bestimmen die ersten k theoretischen Momente $\mathbb{E}(X^k)$ der Verteilung und ermitteln einen Zusammenhang zu den gesuchten Parametern.
4. Wir ersetzen die theoretischen Momente $\mathbb{E}(X^k)$ durch die empirischen Momente $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ und lösen nach den gesuchten Parametern auf.

Fahrplan für die Momentenmethode

1. Gegeben seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen.
2. Wir kennen die Verteilung, aber ein oder mehrere Parameter sind unbekannt. Diese wollen wir schätzen.
3. Wir bestimmen die ersten k theoretischen Momente $\mathbb{E}(X^k)$ der Verteilung und ermitteln einen Zusammenhang zu den gesuchten Parametern.
4. Wir ersetzen die theoretischen Momente $\mathbb{E}(X^k)$ durch die empirischen Momente $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ und lösen nach den gesuchten Parametern auf.
5. Wir erhalten einen Ausdruck, der die gesuchten Parameter durch die empirischen Momente erklärt. Diesen nennen wir Momentenschätzer.

1. $X_1, \ldots, X_n$ *iid* gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$

1. $X_1, \ldots, X_n$ *iid* gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$
2. wir wollen θ schätzen

1. $X_1, \ldots, X_n$ *iid* gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$
2. wir wollen θ schätzen
3. erstes theoretisches Moment $(k = 1)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}$$
$$\iff \quad \theta = 2 \cdot \mathbb{E}(X)$$

1. $X_1, \ldots, X_n$ *iid* gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$
2. wir wollen θ schätzen
3. erstes theoretisches Moment $(k = 1)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}$$
$$\iff \quad \theta = 2 \cdot \mathbb{E}(X)$$

4. erstes empirisches Moment $(k = 1)$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. $X_1, \ldots, X_n$ *iid* gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$
2. wir wollen θ schätzen
3. erstes theoretisches Moment $(k = 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{\theta}{2} \\ \iff \quad \theta &= 2 \cdot \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

4. erstes empirisches Moment $(k = 1)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

5. theoretisches durch empirisches Moment ersetzen:

$$\hat{\theta}_{MM} = 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \cdot \bar{X}$$

Beispiel 1 (Gleichverteilung)

Wir haben die folgenden 10 unabhängigen Realisationen einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \theta]$ gegeben:

$$0.6 \quad 5.5 \quad 0.9 \quad 4.5 \quad 6.6 \quad 2.0 \quad 3.3 \quad 5.0 \quad 3.5 \quad 3.1$$

Schätze mit Hilfe der Momentenmethode den Wert von θ.

Beispiel 1 (Gleichverteilung)

Wir haben die folgenden 10 unabhängigen Realisationen einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \theta]$ gegeben:

$$0.6 \quad 5.5 \quad 0.9 \quad 4.5 \quad 6.6 \quad 2.0 \quad 3.3 \quad 5.0 \quad 3.5 \quad 3.1$$

Schätze mit Hilfe der Momentenmethode den Wert von θ.

$$\hat{\theta}_{MM} = 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \cdot 3.5 = 7$$

Beispiel 2 (Poisson Verteilung)

Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$. Bestimme den Momentenschätzer $\hat{\lambda}_{MM}$ für den Parameter λ.

Beispiel 2 (Poisson Verteilung)

Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$. Bestimme den Momentenschätzer $\hat{\lambda}_{MM}$ für den Parameter λ.

Wir wissen bereits:

$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

Beispiel 2 (Poisson Verteilung)

Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$. Bestimme den Momentenschätzer $\hat{\lambda}_{MM}$ für den Parameter λ.

Wir wissen bereits:

$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

Aber was ist mit $\hat{\lambda}_{MM}$?

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$
2. wir wollen λ schätzen

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$
2. wir wollen λ schätzen
3. erstes theoretisches Moment ($k = 1$):

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$
2. wir wollen λ schätzen
3. erstes theoretisches Moment ($k = 1$):
    - $\mathbb{E}(X) = \lambda$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$
2. wir wollen λ schätzen
3. erstes theoretisches Moment ($k = 1$):
   - $\mathbb{E}(X) = \lambda$
4. erstes empirisches Moment ($k = 1$):

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$
2. wir wollen λ schätzen
3. erstes theoretisches Moment ($k = 1$):
   - $\mathbb{E}(X) = \lambda$
4. erstes empirisches Moment ($k = 1$):
   - $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$
2. wir wollen λ schätzen
3. erstes theoretisches Moment ($k = 1$):
   - $\mathbb{E}(X) = \lambda$
4. erstes empirisches Moment ($k = 1$):
   - $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
5. theoretisches durch empirisches Moment ersetzen:

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Beispiel 2 (Poisson Verteilung)

Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$. Bestimme den Momentenschätzer $\hat{\lambda}_{MM}$ für den Parameter λ.

$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

Beispiel 3 (Normalverteilung)

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Bestimme die Momentenschätzer $\hat{\mu}_{MM}$ und $\hat{\sigma^2}_{MM}$.

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen
3. erstes und zweites theoretisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen
3. erstes und zweites theoretisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $\mathbb{E}(X) = \mu$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen
3. erstes und zweites theoretisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $\mathbb{E}(X) = \mu$
   - $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen
3. erstes und zweites theoretisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $\mathbb{E}(X) = \mu$
   - $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
     $\iff \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen
3. erstes und zweites theoretisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $\mathbb{E}(X) = \mu$
   - $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
     $\iff \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$
4. erstes und zweites empirisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen
3. erstes und zweites theoretisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $\mathbb{E}(X) = \mu$
   - $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
     $\iff \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$
4. erstes und zweites empirisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $k = 1$: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $k = 2$: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. wir wollen μ und σ^2 schätzen
3. erstes und zweites theoretisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $\mathbb{E}(X) = \mu$
   - $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
     $\iff \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$
4. erstes und zweites empirisches Moment ($k = 1$ und $k = 2$):
   - $k = 1$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $k = 2$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$
5. theoretisches durch empirisches Moment ersetzen:

$$\hat{\mu}_{MM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\sigma^2}_{MM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2$$

Beispiel 3 (Normalverteilung)

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Bestimme die Momentenschätzer $\hat{\mu}_{MM}$ und $\hat{\sigma^2}_{MM}$.

$$\hat{\mu}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\sigma^2}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2$$