0 %

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?
- Entscheidungsfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?
- Entscheidungsfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_0

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?
- Entscheidungsfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_0
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_1

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?
- Entscheidungsfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_0
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_1
- Fehler 1. Art und Fehler 2. Art

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?
- Entscheidungsfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_0
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_1
- Fehler 1. Art und Fehler 2. Art
  - $\mathbf{P}(d = 1 \mid f_0 \text{ stimmt}) = \alpha$

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?
- Entscheidungsfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_0
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_1
- Fehler 1. Art und Fehler 2. Art
  - $\mathbf{P}(d = 1 \mid f_0 \text{ stimmt}) = \alpha$
  - $\mathbf{P}(d = 0 \mid f_1 \text{ stimmt}) = \beta$

Neyman-Pearson Test: Ausgangssituation

- Wir haben eine *iid* Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Sie stammt entweder aus der Dichte f_0 oder f_1. Welche stimmt?
- Entscheidungsfunktion $d : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_0
  - $d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1 \Rightarrow$ wir entscheiden uns für f_1
- Fehler 1. Art und Fehler 2. Art
  - $\mathbf{P}(d = 1 \mid f_0 \text{ stimmt}) = \alpha$
  - $\mathbf{P}(d = 0 \mid f_1 \text{ stimmt}) = \beta$

Unser Ziel

Finde einen Test, der

- maximal mit Wahrscheinlichkeit α einen Fehler 1. Art macht,
- die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art minimiert.

Die Idee von Neyman und Pearson

- Falls $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ deutlich größer ist als $f_0(X_1, X_2, \dots, X_n)$, so scheint f_1 die korrekte Dichte zu sein (Maximum-Likelihood Prinzip).

Die Idee von Neyman und Pearson

- Falls $f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ deutlich größer ist als $f_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, so scheint f_1 die korrekte Dichte zu sein (Maximum-Likelihood Prinzip).
- Betrachte den Likelihood-Quotienten

$$\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)}.$$

Die Idee von Neyman und Pearson

- Falls $f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ deutlich größer ist als $f_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, so scheint f_1 die korrekte Dichte zu sein (Maximum-Likelihood Prinzip).
- Betrachte den Likelihood-Quotienten

$$\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)}.$$

- Falls dieser größer als ein Schwellwert K ist, so entscheide dich für f_1, ansonsten entscheide dich für f_0.

Die Idee von Neyman und Pearson

- Falls $f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ deutlich größer ist als $f_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, so scheint f_1 die korrekte Dichte zu sein (Maximum-Likelihood Prinzip).
- Betrachte den Likelihood-Quotienten

$$\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)}.$$

- Falls dieser größer als ein Schwellwert K ist, so entscheide dich für f_1, ansonsten entscheide dich für f_0.
- Wähle K so, dass

$$\mathbf{P}\left(\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)} > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = \alpha.$$

Das Neyman-Pearson Lemma

Gegeben

- H_0 : Wahre Dichte ist f_0, H_1 : Wahre Dichte ist f_1
- Signifikanzniveau α
- Schwellwert K, sodass
  $$\mathbf{P}\left(\frac{f_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{f_0(X_1,X_2,\ldots,X_n)} > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = \alpha$$
- Entscheidungsregel d, sodass
  - $\frac{f_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{f_0(X_1,X_2,\ldots,X_n)} < K \Rightarrow d = 0$
  - $\frac{f_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{f_0(X_1,X_2,\ldots,X_n)} > K \Rightarrow d = 1$

Dann

- ist d ein Test, der unter allen Tests zum Signifikanzniveau α den Fehler 2. Art minimiert. (Neyman-Pearson Test)

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$
- Es wird behauptet, dass Studenten im Schnitt einen um 10% höheren IQ besitzen als der durchschnittliche Erwachsene

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$
- Es wird behauptet, dass Studenten im Schnitt einen um 10% höheren IQ besitzen als der durchschnittliche Erwachsene
- Teste also

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$
- Es wird behauptet, dass Studenten im Schnitt einen um 10% höheren IQ besitzen als der durchschnittliche Erwachsene
- Teste also
    - $H_0 : \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = 15)$ gegen

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$
- Es wird behauptet, dass Studenten im Schnitt einen um 10% höheren IQ besitzen als der durchschnittliche Erwachsene
- Teste also
  - $H_0 : \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = 15)$ gegen
  - $H_1 : \mathcal{N}(\mu_1 = 110, \sigma^2 = 15)$

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$
- Es wird behauptet, dass Studenten im Schnitt einen um 10% höheren IQ besitzen als der durchschnittliche Erwachsene
- Teste also
  - $H_0 : \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = 15)$ gegen
  - $H_1 : \mathcal{N}(\mu_1 = 110, \sigma^2 = 15)$
- wähle Signifikanzniveau, z.B. $\alpha = 5\%$

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$
- Es wird behauptet, dass Studenten im Schnitt einen um 10% höheren IQ besitzen als der durchschnittliche Erwachsene
- Teste also
  - $H_0 : \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = 15)$ gegen
  - $H_1 : \mathcal{N}(\mu_1 = 110, \sigma^2 = 15)$
- wähle Signifikanzniveau, z.B. $\alpha = 5\%$
- Gegeben seien die IQ-Werte $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$.

Beispiel: IQ-Werte

- IQ-Werte von Erwachsenen seien normalverteilt mit $\mu_0 = 100$ und $\sigma^2 = 15$
- Es wird behauptet, dass Studenten im Schnitt einen um 10% höheren IQ besitzen als der durchschnittliche Erwachsene
- Teste also
  - $H_0 : \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = 15)$ gegen
  - $H_1 : \mathcal{N}(\mu_1 = 110, \sigma^2 = 15)$
- wähle Signifikanzniveau, z.B. $\alpha = 5\%$
- Gegeben seien die IQ-Werte $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$.
- Deren gemeinsame Dichte ist (mit $\sigma^2 = 15$ und $j = 0, 1$)

$$f_j(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(X_i - \mu_j)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Mittels einiger Umformungen:

$$
\begin{aligned}
&f_j(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) \\
&= \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(X_i - \mu_j)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \ldots \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{10} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - 20\mu_j\bar{X} + 10\mu_j^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Mittels einiger Umformungen:

$$
\begin{aligned}
&f_j(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) \\
&= \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(X_i-\mu_j)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \ldots \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{10} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - 20\mu_j\bar{X} + 10\mu_j^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir den Likelihood-Quotienten:

$$
\begin{aligned}
\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10})}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_{10})} &= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-20(\mu_1-\mu_0)\bar{X} + 10(\mu_1^2-\mu_0^2)\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{20}{3}\bar{X} - 7000\right]
\end{aligned}
$$

(Beachte: $\sigma^2 = 15, \mu_0 = 100, \mu_1 = 110$)

Wir müssen jetzt den Schwellwert K finden, sodass unter H_0

$$\mathbf{P}\left(\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10})}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_{10})} > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = \alpha,$$

also

$$\mathbf{P}\left(\exp\left[\frac{20}{3}\bar{X} - 7000\right] > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = 5\%.$$

Wir müssen jetzt den Schwellwert K finden, sodass unter H_0

$$\mathbf{P}\left(\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10})}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_{10})} > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = \alpha,$$

also

$$\mathbf{P}\left(\exp\left[\frac{20}{3}\bar{X} - 7000\right] > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = 5\%.$$

Es gilt

$$\exp\left[\frac{20}{3}\bar{X} - 7000\right] > K \Leftrightarrow \bar{X} > \frac{3}{20}(7000 + \ln(K)).$$

Wir müssen jetzt den Schwellwert K finden, sodass unter H_0

$$\mathbf{P}\left(\frac{f_1(X_1, X_2, \ldots, X_{10})}{f_0(X_1, X_2, \ldots, X_{10})} > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = \alpha,$$

also

$$\mathbf{P}\left(\exp\left[\frac{20}{3}\bar{X} - 7000\right] > K \;\middle|\; f_0 \text{ stimmt}\right) = 5\%.$$

Es gilt

$$\exp\left[\frac{20}{3}\bar{X} - 7000\right] > K \Leftrightarrow \bar{X} > \frac{3}{20}(7000 + \ln(K)).$$

Unter H_0 gilt

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_0 = 100, \sigma^2 = \frac{15}{10}\right)$$

Wir müssen also K so wählen, dass

$$\mathbf{P}\left(\bar{X} > \frac{3}{20}(7000 + \ln(K))\right) = 5\%,$$

unter der Bedingung, dass $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = \frac{15}{10})$.

Wir müssen also K so wählen, dass

$$\mathbf{P}\left(\bar{X} > \frac{3}{20}(7000 + \ln(K))\right) = 5\%,$$

unter der Bedingung, dass $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = \frac{15}{10})$.

Mit anderen Worten, wir suchen das 95%-Quantil der $\mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = \frac{15}{10})$-Verteilung. Dies ist

`qnorm(0.95,mean=100,sd=sqrt(1.5))` $= 102$

Wir müssen also K so wählen, dass

$$\mathbf{P}\left(\bar{X} > \frac{3}{20}(7000 + \ln(K))\right) = 5\%,$$

unter der Bedingung, dass $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = \frac{15}{10})$.

Mit anderen Worten, wir suchen das 95%-Quantil der $\mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = \frac{15}{10})$-Verteilung. Dies ist

`qnorm(0.95,mean=100,sd=sqrt(1.5))`$= 102$

Damit haben wir den Neyman-Pearson Test gefunden:

Verwerfe $H_0 : \mathcal{N}(\mu_0 = 100, \sigma^2 = 15)$ (bzw. $d = 1$), falls $\bar{X} > 102$.