Aufgabe

Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erfolgsparameter der Geometrischen Verteilung.

Aufgabe

Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erfolgsparameter der Geometrischen Verteilung.

Definition: Geometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X ist gemäß der Geometrischen Verteilung zu dem Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$ verteilt, falls

$$f(x) = P(X = x) = (1 - p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Aufgabe

Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erfolgsparameter der Geometrischen Verteilung.

Definition: Geometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X ist gemäß der Geometrischen Verteilung zu dem Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$ verteilt, falls

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Stichprobe:

2 5 16 6 10 5 2 3 5 0 10 3 3 1 1 6 15 6 18 3

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

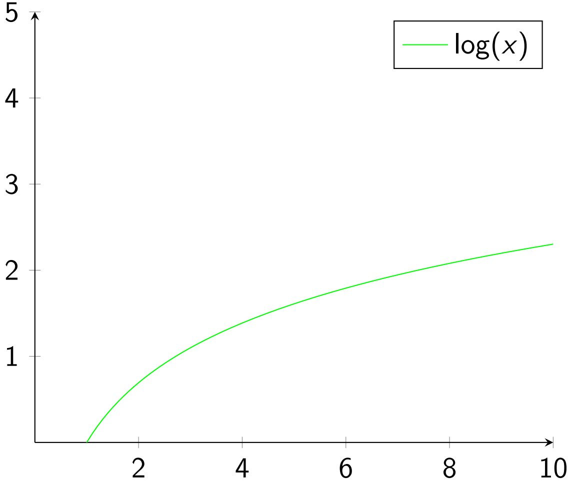
1. Aufstellen der ML-Funktion

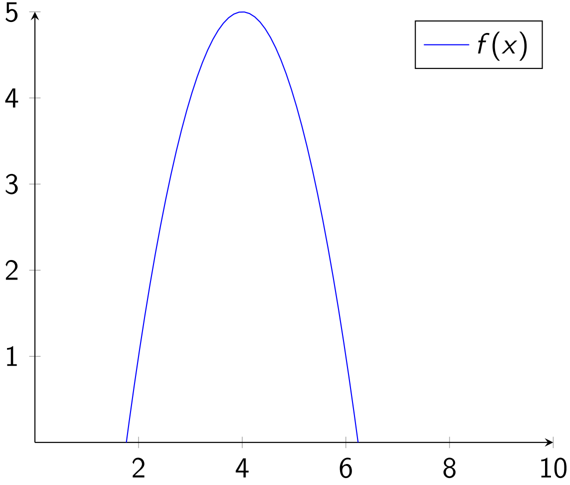
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\theta)$$

2. Logarithmierung

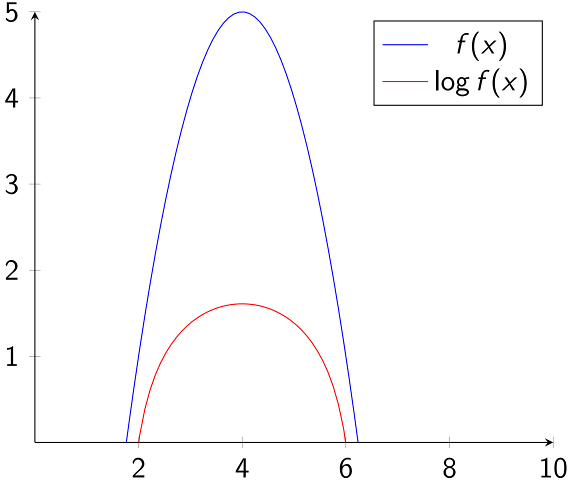
$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{X_i}(\theta)$$

3. Bestimmung der Ableitung $\frac{d}{d\theta} \log L(\theta)$
4. Ableitung gleich Null setzen und nach dem gesuchten Parameter auflösen


5
4
3
2
1
2
4
6
8
10
log(x)



5
4
3
2
1
2
4
6
8
10
$f(x)$


5
4
3
2
1
2
4
6
8
10
$f(x)$
$\log f(x)$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\theta)$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\theta)$$

Definition: Geometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X ist gemäß der Geometrischen Verteilung zu dem Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$ verteilt, falls

$$f(x) = P(X = x) = (1 - p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\theta)$$

Definition: Geometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X ist gemäß der Geometrischen Verteilung zu dem Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$ verteilt, falls

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i} p$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i} p$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion ✓
2. Logarithmierung: $\log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{X_i}(\theta)$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i} p$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion ✓
2. Logarithmierung: $\log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{X_i}(\theta)$

$$\begin{aligned}
\log L(p) &= \sum_{i=1}^{n} \log f_{X_i}(p) = \sum_{i=1}^{n} \log \left[(1-p)^{X_i} p \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\log(1-p)^{X_i} + \log p \right] = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \log(1-p) + \sum_{i=1}^{n} \log p \\
&= \log(1-p) \sum_{i=1}^{n} X_i + n \cdot \log p
\end{aligned}$$

$$\log L(p) = \log(1-p)\sum_{i=1}^{n} X_i + n \cdot \log p$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion ✓
2. Logarithmierung ✓
3. Bestimmung der Ableitung $\frac{d}{d\theta} \log L(\theta)$

$$\log L(p) = \log(1-p)\sum_{i=1}^{n} X_i + n \cdot \log p$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion ✓
2. Logarithmierung ✓
3. Bestimmung der Ableitung $\frac{d}{d\theta} \log L(\theta)$

$$\frac{d}{d\theta} \log L(p) = (-1) \cdot \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} X_i + n \cdot \frac{1}{p}$$

$$= -\frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{p}$$

$$\frac{d}{d\theta} \log L(p) = -\frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{p}$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion ✓
2. Logarithmierung ✓
3. Bestimmung der Ableitung ✓
4. Ableitung gleich Null setzen und nach dem gesuchten Parameter auflösen

$$\frac{d}{d\theta}\log L(p) = -\frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{p}$$

Wiederholung: Allgemeines Verfahren

1. Aufstellen der ML-Funktion ✓
2. Logarithmierung ✓
3. Bestimmung der Ableitung ✓
4. Ableitung gleich Null setzen und nach dem gesuchten Parameter auflösen

$$-\frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{p} \stackrel{!}{=} 0$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{p} \overset{!}{=} 0 \\
\iff & -\frac{n\bar{X}}{1-p} + \frac{n}{p} = 0 \\
\iff & n\left(-\frac{\bar{X}}{1-p} + \frac{1}{p}\right) = 0 \\
\iff & \frac{-\bar{X}p + (1-p)}{(1-p)p} = 0 \\
\iff & -\bar{X}p + (1-p) = 0 \\
\iff & 1 = \bar{X}p + p \\
\iff & 1 = p\left(\bar{X} + 1\right) \\
\iff & p = \frac{1}{\bar{X} + 1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe

Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erfolgsparameter der Geometrischen Verteilung.

$$\hat{p}_{ML} = \frac{1}{\bar{X} + 1}$$

Aufgabe

Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erfolgsparameter der Geometrischen Verteilung.

$$\hat{p}_{ML} = \frac{1}{\bar{X} + 1}$$

Stichprobe:

2 5 16 6 10 5 2 3 5 0 10 3 3 1 1 6 15 6 18 3

Maximum-Likelihood-Schätzer:

$$\hat{p}_{ML} = \frac{1}{\bar{X} + 1} = \frac{1}{6 + 1} = \frac{1}{7}$$