## Aufgabe

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimme den Maximum Likelihood-Schätzer für $\mu$ und $\sigma$.

## Aufgabe

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimme den Maximum Likelihood-Schätzer für $\mu$ und $\sigma$.

1. Aufstellen der ML-Funktion: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\theta)$
2. Logarithmierung: $\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_{X_i}(\theta))$
3. Bestimmung der Ableitung: $\frac{d}{d\theta} \ln(L(\theta))$
4. Ableitung gleich Null setzen und nach dem gesuchten Parameter auflösen

## Aufgabe

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimme den Maximum Likelihood-Schätzer für $\mu$ und $\sigma$.

1. Aufstellen der ML-Funktion: $L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu, \sigma)$

## Aufgabe

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimme den Maximum Likelihood-Schätzer für $\mu$ und $\sigma$.

1. Aufstellen der ML-Funktion: $L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu, \sigma)$

$$L(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

## Aufgabe

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimme den Maximum Likelihood-Schätzer für $\mu$ und $\sigma$.

1. Aufstellen der ML-Funktion: $L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu, \sigma)$

$$
\begin{aligned}
L(\mu, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

1. $L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. Logarithmierung: $\ln(L(\mu, \sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_{X_i}(\mu, \sigma))$

1. $L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. Logarithmierung: $\ln(L(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_{X_i}(\mu,\sigma))$

$$\ln(L(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

1. $L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. Logarithmierung: $\ln(L(\mu, \sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_{X_i}(\mu, \sigma))$

$$\begin{aligned} \ln(L(\mu, \sigma)) &= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

1. $L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. Logarithmierung: $\ln(L(\mu, \sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_{X_i}(\mu, \sigma))$

$$\begin{aligned}
\ln(L(\mu, \sigma)) &= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln 1 - \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]
\end{aligned}$$

1. $L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. Logarithmierung: $\ln(L(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_{X_i}(\mu,\sigma))$

$$
\begin{aligned}
\ln(L(\mu,\sigma)) &= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln 1 - \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[-\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]
\end{aligned}
$$

1. $L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\ln(L(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
3. Bestimmung der Ableitung

1. $L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\ln(L(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^n \left[-\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
3. Bestimmung der Ableitung

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial\mu} = \sum_{i=1}^n -(-1)\frac{2(X_i-\mu)}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2}$$

1. $L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\ln(L(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$
3. Bestimmung der Ableitung

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} -(-1)\frac{2(X_i-\mu)}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\frac{1}{\sigma} - (-2)\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^3} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^3} \right]$$

1. $L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\ln(L(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$
3. Bestimmung der Ableitung
4. Ableitung gleich Null setzen und nach dem gesuchten Parameter auflösen

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^3} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{\sigma} + \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^3}\right] = 0$$

$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right] = 0$$

$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \frac{n}{\sigma}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right] = 0$$

$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \frac{n}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2} \overset{\mu=\bar{X}}{=} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

## Maximum Likelihood-Schätzer für $\mu$ und $\sigma^2$

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

## Maximum Likelihood-Schätzer für $\mu$ und $\sigma^2$

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

### Aufgabe

Es liegen nun die folgenden Realisationen der Zufallsvariablen vor:

$$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 7, x_6 = 11, x_7 = 2, x_8 = 8$$

Bestimme die Maximum Likelihood Schätzwerte $\hat{\mu}_{ML}$ und $\hat{\sigma}_{ML}$ für $\mu$ und $\sigma$.

## Aufgabe

Es liegen nun die folgenden Realisationen der Zufallsvariablen vor:

$$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 7, x_6 = 11, x_7 = 2, x_8 = 8$$

Bestimme die Maximum Likelihood Schätzwerte $\hat{\mu}_{ML}$ und $\hat{\sigma}_{ML}$ für $\mu$ und $\sigma$.

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = 5$$

$$\hat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i - 5)^2} = 3.24037$$