Aufgabe

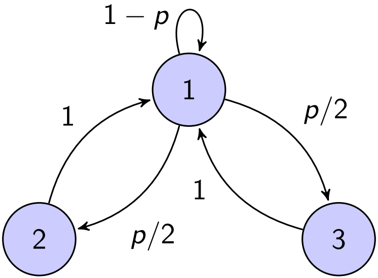
Betrachte die Markov-Kette mit $P = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p \in [0,1]$.

1. Bestimme alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.
2. Für welche p ist die Markov-Kette irreduzibel?
3. Für welche p ist sie aperiodisch?

Aufgabe

Betrachte die Markov-Kette mit $P = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p \in [0,1]$.

1. Bestimme alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.
2. Für welche p ist die Markov-Kette irreduzibel?
3. Für welche p ist sie aperiodisch?



Definition: Stationäre Verteilung

Die Verteilung π ist stationär bezüglich der Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, falls

$$\pi P = \pi.$$

Definition: Stationäre Verteilung

Die Verteilung π ist stationär bezüglich der Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, falls

$$\pi P = \pi.$$

$$\pi P = \pi$$

Definition: Stationäre Verteilung

Die Verteilung π ist stationär bezüglich der Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, falls

$$\pi P = \pi.$$

$$\begin{aligned} & \pi P = \pi \\ \iff & \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definition: Stationäre Verteilung

Die Verteilung π ist stationär bezüglich der Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, falls

$$\pi P = \pi.$$

$$\begin{aligned}
&\pi P = \pi \\
\iff & \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{array}{rl} (1-p)\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = \pi_1 \\ \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_2 \\ \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_3 \end{array}
\end{aligned}$$

Definition: Stationäre Verteilung

Die Verteilung π ist stationär bezüglich der Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, falls

$$\pi P = \pi.$$

$$\begin{aligned} & \pi P = \pi \\ \iff & \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \\ \iff & \begin{aligned} (1-p)\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= \pi_1 \\ \tfrac{p}{2}\pi_1 &= \pi_2 \\ \tfrac{p}{2}\pi_1 &= \pi_3 \end{aligned} \end{aligned}$$

Und als vierte Gleichung haben wir $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$.

Unser Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lcl}
(1) & (1-p)\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = \pi_1 \\
(2) & \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_2 \\
(3) & \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_3 \\
(4) & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1
\end{array}
$$

Unser Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lcl}
(1) & (1-p)\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = \pi_1 \\
(2) & \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_2 \\
(3) & \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_3 \\
(4) & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc}
(1) & \Longrightarrow & \pi_1 - p\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = & \pi_1 \\
 & \Longrightarrow & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = & \pi_1 + p\pi_1 \\
(4) & \Longrightarrow & 1 & = & (1+p)\pi_1 \\
 & \Longrightarrow & \pi_1 & = & \frac{1}{1+p} \\
(2) & \Longrightarrow & \pi_2 & = & \frac{p}{2+2p} \\
(3) & \Longrightarrow & \pi_3 & = & \frac{p}{2+2p}
\end{array}
$$

Unser Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll}
(1) & (1-p)\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = \pi_1 \\
(2) & \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_2 \\
(3) & \frac{p}{2}\pi_1 & = \pi_3 \\
(4) & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llccc}
(1) & \Longrightarrow & \pi_1 - p\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = & \pi_1 \\
 & \Longrightarrow & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = & \pi_1 + p\pi_1 \\
(4) & \Longrightarrow & 1 & = & (1+p)\pi_1 \\
 & \Longrightarrow & \pi_1 & = & \frac{1}{1+p} \\
(2) & \Longrightarrow & \pi_2 & = & \frac{p}{2+2p} \\
(3) & \Longrightarrow & \pi_3 & = & \frac{p}{2+2p}
\end{array}$$

Stationäre Verteilungen:

$\pi = \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{1+p} & \frac{p}{2+2p} & \frac{p}{2+2p}\end{bmatrix}$, $p \in [0,1]$.

Aufgabe

Betrachte die Markov-Kette mit $P = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p \in [0,1]$.

1. Bestimme alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.
2. Für welche p ist die Markov-Kette irreduzibel?
3. Für welche p ist sie aperiodisch?

Aufgabe

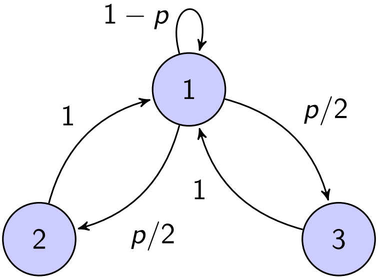
Betrachte die Markov-Kette mit $P = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p \in [0,1]$.

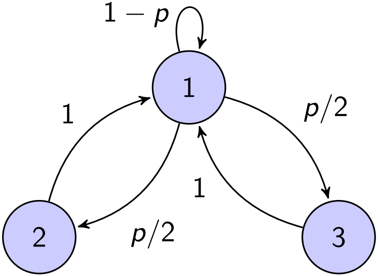
1. Bestimme alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.
2. Für welche p ist die Markov-Kette irreduzibel?
3. Für welche p ist sie aperiodisch?

Definition: Irreduzible und aperiodische Markov-Kette

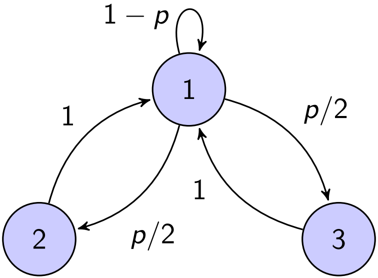
Eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P heißt irreduzibel, falls es für alle i, j ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $P^n_{i,j} > 0$.
Eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P heißt aperiodisch, falls $\text{ggT}\{n \in \mathbb{N} : P^n_{i,i} > 0\} = 1$ für alle i.

86 %





- Für $p \in (0, 1]$ ist die Markov-Kette irreduzible.



- Für $p \in (0,1]$ ist die Markov-Kette irreduzible.
- Für $p \in [0,1)$ ist die Markov-Kette aperiodisch.