Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

Definition: Poisson Verteilung

Eine Zufallsvariable X ist Poisson verteilt zu dem Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

Definition: Poisson Verteilung

Eine Zufallsvariable X ist Poisson verteilt zu dem Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

Definition: Erwartungswert im diskreten Fall

Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\end{aligned}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x!}
\end{aligned}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}
\end{aligned}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}}{x!}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{E}(X)$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1)!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}}{x!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{V}(X)$?

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{V}(X)$?

Verschiebungssatz

Für eine Zufallsvariable X gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \,.$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{V}(X)$?

Verschiebungssatz

Für eine Zufallsvariable X gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \, .$$

Nach dem Verschiebungssatz ist dann also $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \lambda^2$.

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}
\end{aligned}$$

69 %

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!}
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1) \cdot \lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1) \cdot \lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right) \\
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right)
\end{aligned}
$$

85 %

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1) \cdot \lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

88 %

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1) \cdot \lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right) \\
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}
\end{aligned}
$$

92 %

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1)\cdot\lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right) \\
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x)$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1)\cdot\lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right)$$
$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right)$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$
$$= \lambda^2 + \lambda$$

Aufgabe

Sei $X \sim Poi(\lambda)$. Was ist $\mathbb{V}(X)$?

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda\end{aligned}$$