Aufgabe

Die Dichte einer stetigen Zufallsvariable X ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + c \cdot x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ wobei } c > 0.$$

1. Zeige, dass $c = \frac{3}{2}$.
2. Bestimme die Verteilungsfunktion $F(x)$.
3. Wie sehen $f(x)$ und $F(x)$ aus?
4. Wie groß ist $F(0,5)$?
5. Was ist der Median, was der Erwartungswert von X?

Definition: Dichte

Die Funktion f ist eine Dichte, falls

1. $f(x) \geq 0$ für alle x
2. und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Definition: Dichte

Die Funktion f ist eine Dichte, falls

1. $f(x) \geq 0$ für alle x
2. und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

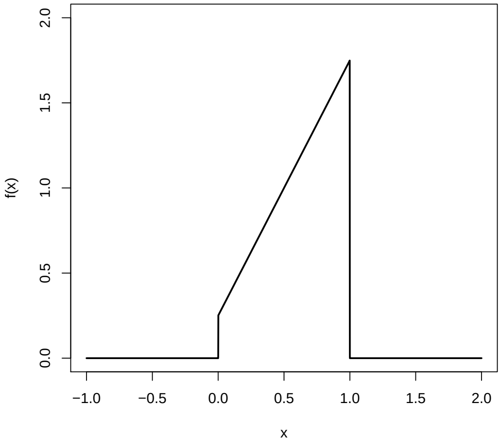
$$
\begin{aligned}
1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{4} + c \cdot x \; dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}cx^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}c \\
\Rightarrow c = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Definition: Verteilungsfunktion

Gegeben eine Dichte f, dann ist die zugehörige Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

1. F ist monoton steigend,
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
3. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ? & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

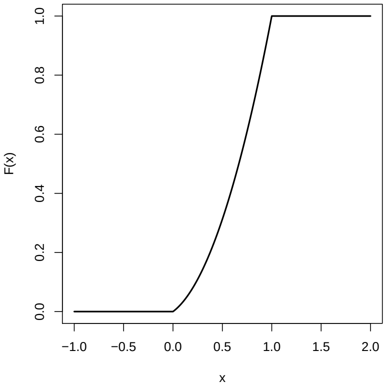
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ? & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Für $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} ? &= \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t\ dt \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 \end{aligned}$$

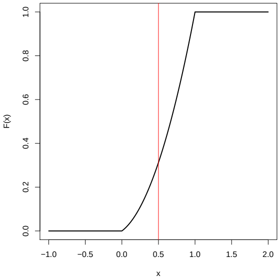
Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

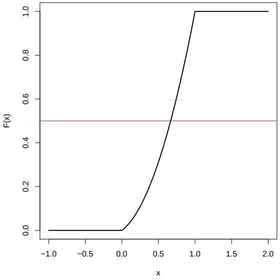


$$F(0,5) = \frac{1}{4} \cdot 0,5 + \frac{3}{4} \cdot 0,5^2 = 0,3125$$

Definition: Median

Gegeben eine stetige Verteilungsfunktion F, dann ist der Median der Punkt x, so dass

$$F(x) = 0,5.$$



$$F(x) = 0,5 \Rightarrow \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 = 0,5 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

100 %

Definition: Erwartungswert

Gegeben eine Dichte f, dann ist der Erwartungswert

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx.$$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x^2\ dx = \left[\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{5}{8}$$