Lennart Oelschläger ✉

Aufgabenblatt 6 – Lösungen

Aufgabe 1 (Klausur 2016, Aufgabe 3)

Angenommen, die Daten werden erzeugt mittels der Gleichung:

$$y_t = \mu + u_t + \theta_2 u_{t-2}, \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

mit unabhängig identisch verteiltem Rauschen $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2.

a) Welche Eigenschaften muss ein Prozess haben, um stationär zu sein?

Siehe Aufgabenblatt 5, Aufgabe 2a.

b) Bitte berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von y_t sowie die Kovarianzfunktion zum Lag 1, 2 und 3.

- $\mathrm{E}(y_t) = \mu$
- $\mathrm{Var}(y_t) = \sigma^2 + \theta_2^2\sigma^2$
- $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+1}) = \mathrm{E}((y_t - \mathrm{E}(y_t))(y_{t+1} - \mathrm{E}(y_{t+1})))$
  $= \mathrm{E}((\mu + u_t + \theta_2 u_{t-2} - \mu)(\mu + u_{t+1} + \theta_2 u_{t-1} - \mu))$
  $= \mathrm{E}((u_t + \theta_2 u_{t-2})(u_{t+1} + \theta_2 u_{t-1}))$
  $= \mathrm{E}(u_t u_{t+1} + \theta_2 u_t u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} u_{t+1} + \theta_2^2 u_{t-2} u_{t-1})$
  $= \mathrm{E}(u_t u_{t+1}) + \mathrm{E}(\theta_2 u_t u_{t-1}) + \mathrm{E}(\theta_2 u_{t-2} u_{t+1}) + \mathrm{E}(\theta_2^2 u_{t-2} u_{t-1})$
  $= \mathrm{E}(u_t)\mathrm{E}(u_{t+1}) + \theta_2 \mathrm{E}(u_t)\mathrm{E}(u_{t-1}) + \theta_2 \mathrm{E}(u_{t-2})\mathrm{E}(u_{t+1}) + \theta_2^2 \mathrm{E}(u_{t-2})(u_{t-1})$
  $= 0 \cdot 0 + \theta_2 \cdot 0 \cdot 0 + \theta_2 \cdot 0 \cdot 0 + \theta_2^2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+2}) = \theta_2 \sigma^2$
- $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+3}) = 0$

c) Welche Bedingungen müssen für die Parameter gelten, damit $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ stationär ist?

Keine Bedingungen sind erforderlich, ein MA(2) Prozess ist immer stationär.

Aufgabe 2 (Klausur 2014, Aufgabe 3)

Gegeben sei die AR(1) Gleichung

$$y_t = 1 + 0.5 y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \geq 1$$

für weißes Rauschen $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{1}{10}$.

a) Bitte bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differenzengleichung.

Die Lösungen lauten $y_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} 0.5^\tau + 0.5^t y_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} 0.5^\tau \epsilon_{t-\tau}$ für verschiedene Startwerte y_0 (darauf bezieht sich das *"alle"* in der Aufgabenstellung).

b) Berechnen Sie die Verteilung des Startwertes y_0, der zu einer stationären Lösung führt.

Damit $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ stationär ist, muss $\mathrm{E}(y_t)$ unabhängig von t sein:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(y_{t-1}) &\Rightarrow 1 + 0.5\mathrm{E}(y_{t-1}) + 0 = \mathrm{E}(y_{t-1}) \\ &\Rightarrow \mathrm{E}(y_{t-1}) = 2 \text{ für alle } t. \end{aligned}$$

Für die Stationarität muss außerdem $\mathrm{Var}(y_t)$ unabhängig von t sein:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}(y_{t-1}) &\Rightarrow \mathrm{Var}(1 + 0.5y_{t-1} + \epsilon_t) = \mathrm{Var}(y_{t-1}) \\ &\Rightarrow \mathrm{Var}(y_{t-1}) = \frac{1}{10(1-0.5^2)} = \frac{1}{7.5} \text{ für alle } t. \end{aligned}$$

Also muss $\mathrm{E}(y_0) = 2$ und $\mathrm{Var}(y_0) = 1/7.5$ gelten. Wir müssen außerdem annehmen, dass y_0 unabhängig von $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ist.

c) Berechnen Sie die zugehörige Autokorrelationsfunktion für die Lags $k = 1, \ldots, 5$.

Es gilt $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k}) = 0.5^k \mathrm{Var}(y_t)$ (siehe Vorlesung). Die Autokorrelationsfunktion $\rho_k : k \to \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k})/\mathrm{Var}(y_t) = 0.5^k$ hat für $k = 1, \ldots, 5$ die folgenden Werte:

- $\rho_1 = 0.5$
- $\rho_2 = 0.25$
- $\rho_3 = 0.125$
- $\rho_4 = 0.0625$
- $\rho_5 = 0.03125$

Aufgabe 3 (Schätzung von AR(p) Prozessen)

a) Was ist die "companion" Form eines AR(p) Prozesses und wofür ist sie nützlich?

Sie ist die Vektorgleichung $X_t = AX_{t-1} + U_t$ (siehe Vorlesung) und hilfreich, um den AR(p) Fall auf den AR(1) Fall zurückzuführen.

b) Welchen Annahmen des klassischen linearen Regressionsmodells können für die Kleinste-Quadrate Schätzung eines AR(p) Prozesses erfüllt sein, welche nicht?

Falls wir $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \epsilon_t$ mit linearer Regression schätzen,

- können MLR.1 (lineares Modell), MLR.3 (Information in den Regressoren, keine Multikollinearität), MLR.4 (bedingte Erwartung verschwindet), MLR.5 (Homoskedastie der Fehler) und MLR.6 (unabhängige Normalverteilung der Fehler) erfüllt sein,
- aber MLR.2 (Zufallsstichprobe) ist auf jeden Fall verletzt.

Deshalb ist der KQ-Schätzer für endliche Stichproben in der Regel verzerrt, aber konsistent und asymptotisch normalverteilt (siehe Vorlesung).

c) Bitte simulieren Sie einen AR(4) Prozess in `R` und schätzen Sie die Parameter.

Siehe `R` Code.