Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

4. Februar 2019

0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- K-Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie $\Rightarrow$ universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei K ein Körper, und $P(X) \in K[X]$. P definiert eine Abbildung $\tilde{P} : K \to K$.

P hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

$$\text{Wenn } \tilde{P} \text{ injektiv ist, dann ist } \tilde{P} \text{ surjektiv.}$$

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

Formalisierung der Hopf-Eigenschaft

$$\forall y \forall z (P(y) = P(z) \to y = z)$$
$$\forall w \exists v P(v) = w$$

Für jedes n

$$\forall x_0, \dots, x_n \left(\forall y \forall z \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \to y = z \right) \to \forall w \exists v \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\underset{\text{log. äquivalent}}{\sim} \forall x_0, \dots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left(\left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \to y = z \right) \to \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w \right)$$

Beispiel 0.1.

$$\mathbb{F}_{p^n} \underset{\text{erfüllt}}{\models} HE(n) \underset{\forall\exists-\text{Präservation}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{ der algebraische Abschluss von } \mathbf{F_p}} \models HE(n)$$

Beispiel 0.2. Aus dem Kompaktheitssatz folgt: $\mathbb{C} = \lim_{p \to \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

1 Grundbegriffe

1.1 $\mathcal{L}$-Strukturen

Beispiel 1.1. Der angeordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

Definition 1.2 ($\mathcal{L}$-Struktur)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Menge von

- Funktionszeichen $f_i \quad (i \in I)$
- Relationszeichen $R_j \quad (j \in J)$

Jedes Zeichen hat ein festes $n \in \mathbb{N}$ als Stelligkeit (arity).

$\mathcal{L}$ heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A (Universum, Träger, Grundmenge)
- einer n-stellige Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ für jedes n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$
- einer n-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ für jedes n-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$

$\underline{n = 0}$

$A^0 = \{\emptyset\}$

0-stellige Funktion in $\mathfrak{A}$: $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \to A$ ist eindeutig bestimmt durch $f(\emptyset) \in A$. Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in $\mathfrak{A}$:

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \mathrel{\hat{=}} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \mathrel{\hat{=}} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

Beispiel 1.3. a) Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ und jeder Sprache $\mathcal{L}$ kann ich eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Träger A finden!

b) $\mathcal{L} = \{R\}$, R 2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), \qquad \text{d.h. } R^{\mathfrak{Q}_1} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, \leq), \qquad \text{d.h. } R^{\mathfrak{Q}_2} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 \leq q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene $\mathcal{L}$-Strukturen auf $\mathbb{Q}$.

c) $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$ und $\mathcal{L}_G r = \{\circ, ^{-1}, e\}$

Gruppen sind $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$ für alle $g \in G$
- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen $\mathcal{L}_{HGr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

Definition 1.4. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h : A \to B$ heißt

a) $\mathcal{L}$-Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n-stellige $f \in \mathcal{L}$ und

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n-stellige $R \in \mathcal{L}$.

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich $\Leftrightarrow$ im zweiten Teil gilt.

c) $\mathcal{L}$-Einbettung falls h injektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist.

d) $\mathcal{L}$-Isomorphismus falls h bijektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist und h^{-1} ebenfalls.

e) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen $\mathcal{L}$-Isomorph falls es ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt.

f) Ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt $\mathcal{L}$-Automorphismus.

g) Falls $A \subseteq B$, dann heißt $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\mathfrak{A}$, falls die Identität $id_A : A \to B$ eine $\mathcal{L}$-Einbettung ist.

Bemerkung 1.5. Falls $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, dann wird jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ durch vergessen zu einer $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathfrak{A}_{\restriction \mathcal{L}'}$ (Redukt von $\mathfrak{A}$).

Bemerkung 1.6. Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen sind und $h : G_1 \to G_2$ L_{HGr} Homomorphismus (genau genommen $G_{1 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$ und $G_{2 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$) dann ist h automatisch ein $\mathcal{L}_{Gr}$-Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

Bemerkung 1.7.

1) Wenn $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache $\mathcal{L}$, die im Hintergrund fest ist, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind $\mathcal{L}$-Strukturen, h ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus) dann existiert auf $h(A)$ eine $\mathcal{L}$-Struktur $h(\mathfrak{A})$, so dass $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$, aber $h(\mathfrak{A})$ ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

2) Der Schnitt von $\mathcal{L}$-Unterstrukturen ist wieder eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur.

Folgerung 1.8. Wenn $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $C \subset A$ ist, dann existiert die von C erzeugte $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$ das heißt die kleinste Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, deren Trägermenge C enthält.

Die Trägermenge von $\langle C \rangle$ erhält man dadurch, dass man C unter den Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abschließt.

$R^{\langle C \rangle}$ ist dann $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \cdots \times \langle C \rangle$

1.2 $\mathcal{L}$-Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus $\mathcal{L}$:

$$f_i, R_j, \ldots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen: $\doteq$ (Zieglersche Konvention)
- Klammern: ()
- Quantoren: $\forall \quad \exists$
- aussagenlogische Junktoren: $\underset{\text{Negation}}{\neg}, \underset{\text{und}}{\wedge}, \underset{\text{oder}}{\vee}, \underset{\text{Implikation}}{\rightarrow}, \underset{\text{Äquivalent}}{\leftrightarrow}, \underset{\text{Falsum}}{\bot}, \underset{\text{Verum}}{\top}$
- Individuenvariablen: $v_0, v_1, \ldots$

Definition 1.9 ($\mathcal{L}$-Terme)**.** $\mathcal{L}$-Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen in $\mathcal{L}$ ist und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind $\mathcal{L}$-Terme dann ist $f\tau_1 \ldots \tau_n$ ein $\mathcal{L}$-Term.

Bemerkung 1.10.

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie $+, \cdot$ schreibt man traditionell $v_1 + v_2$ statt $+v_1v_2$ muss aber bei Verschachtelungen klammern.

Definition 1.11 (Auswertung von Termen in Strukturen)**.** Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$.

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} v_i^{\mathfrak{A}}[\beta] &:= \beta(v_i) \\ f\tau_1 \dots \tau_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta] &:= f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \end{aligned}$$

Definition 1.12 ($\mathcal{L}$-Formeln)**.** $\mathcal{L}$-Formeln sind

- $\bot \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$ für $\mathcal{L}$-Terme τ_1, τ_2
- $R\tau_1 \dots \tau_n$ für $\mathcal{L}$-Terme $\tau_1, \dots, \tau_n$ und n-stelliges $R \in \mathcal{L}$
- Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ $\mathcal{L}$-Formeln sind, dann auch

$$\neg\varphi, (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \to \varphi_2), (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2), \exists v_i \varphi, \forall v_i \varphi$$

Definition 1.13 (Auswertung von $\mathcal{L}$-Formeln in Strukturen)**.**
$\mathfrak{A}$ ist Modell von φ unter β oder formal $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt $\mathfrak{A} \models \bot[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \in R^{\mathfrak{A}}$
- Für die zusammengesetzten Formeln gilt:

$\neg\varphi$	$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ oder $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \to \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow$ Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ dann $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$
$\exists v_i \varphi$	Es gibt ein $a \in A$ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[\beta \frac{a}{v_i}\right]$
$\forall v_i \varphi$	Für alle $a \in A$ gilt dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[\beta \frac{a}{v_i}\right]$

Beispiel 1.14. $\underbrace{\forall v_0\,((\forall v_1 \underbrace{Rv_0v_1}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_1}) \vee Rv_1v_0)}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_0}$

Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors heißen gebundene Variablen, alle anderen heißen freie Variablen.

Bemerkung 1.15. $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ beziehungsweise $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ hängt nur insofern von β ab, als man wissen muss, was β mit den freien Variablen macht.

Definition 1.16 ($\mathcal{L}$-Aussage)**.** Eine $\mathcal{L}$-Aussage ($\mathcal{L}$-Satz, geschlossene Formel) ist eine $\mathcal{L}$-Formel ohne freie Variablen.

Satz 1.17. Für $\mathcal{L}$-Aussagen φ ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ unabhängig von β.

Man schreibt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$
$$\mathfrak{A} \not\models \varphi$$

Definition 1.18.

1) Eine $\mathcal{L}$-Formel φ ist allgemeingültig ($\models \varphi, \vdash \varphi$), falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ für alle $\mathfrak{A}$ und β.

2) $\mathcal{L}$-Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent ($\varphi \sim \psi$), falls

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

für alle $\mathfrak{A}$ und β.

3) ψ folgt aus $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$, falls:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta] \text{ für alle } i \in I \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ und } \beta$$

Bemerkung 1.19. $\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$

Bemerkung 1.20. Für $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und eine $\mathcal{L}$-Formel φ gilt: $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

Satz 1.21. Jede $\mathcal{L}$-Formel φ ist äquivalent zu einer $\mathcal{L}$-Formel in der folgenden Form:

$$\underbrace{Q_1 v_{i_1} \dots Q_n v_{i_n}}_{\text{pränexe Normalform}} \underbrace{\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} (\neg)\varphi_1 i, j}_{\text{disjunktive Normalform}}$$

mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.

1.3 Theorien

Definition 1.22. 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie T ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen.

2) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist Modell einer Theorie T, $\mathfrak{A} \models T$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$..

3) $\mathrm{Mod}(T) = \{\mathfrak{A}\ \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ heißt Modellklasse von T.
   Achtung: $\mathrm{Mod}(T)$ ist im Allgemeinen keine Menge!

4) T ist konsistent (bzw. Widerspruchsfrei) falls T mindestens ein Modell hat (d.h. $\mathrm{Mod}(T) \neq \emptyset$).

5) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt elementar, falls es eine Theorie T gibt mit $\mathrm{Mod}(T) = \mathcal{K}$.

6) Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur. Dann ist

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

   die vollständige Theorie von $\mathfrak{A}$.

7) Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, falls $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Beispiel 1.23.

1) Wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{B}$ bereits isomorph zu $\mathfrak{A}$.

2) $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$, da

$$(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)$$
$$(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)$$

3) $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ mit $\overline{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{ es gibt ein } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ so dass } P(c) = 0\}$ (algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$) (Beweis dazu ist nicht trivial)

Definition 1.24. Seien T, T' $\mathcal{L}$-Theorien, φ $\mathcal{L}$-Aussage

1) $T \vdash \varphi$, falls gilt

$$\mathfrak{A} \models T \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

   für alle $\mathfrak{A}$.

2) $T^{\vdash} := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage}n \mid T \vdash \varphi\}$ heißt der deduktive Abschluss von T.

3) T ist deduktiv abgeschlossen $:\Leftrightarrow T = T^{\vdash}$.

4) T und T' heißen äquivalent $T \equiv T'$ falls $T^{\vdash} = T'^{\vdash}$.

Bemerkung 1.25.

- $T \subseteq T^{\vdash} = T^{\vdash^{\vdash}}$
- $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T^{\vdash}$ beziehungsweise $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T^{\vdash})$
- $T^{\vdash}$ ist die maximale Theorie $T' \supseteq T$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T')$

Bemerkung 1.26. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\varphi' \sim \varphi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi'$.

Daher unterscheidet man ab sofort logisch äquivalente Formeln nicht mehr.

Formal: definiere $\mathfrak{A} \models \varphi/\sim$ für Äquivalenzklassen $[\varphi] = \varphi/\sim = \{\varphi' \mid \varphi \sim \varphi'\}$

Satz 1.27 (Tarski-Lindenbaum-Algebren)**.** Die $\mathcal{L}$-Formeln bis auf logische Äquivalenz bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})$. Die Formeln deren freie Variablen in $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ enthalten sind bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ das bedeutet:

$\mathcal{F}_i(\mathcal{L})$ ist eine partielle Ordnung $[\varphi] \leq [\psi]$ falls $\vdash (\varphi \to \psi)$ mit

- einem maximalen Element $[\top]$
- einem minimalen Element $[\bot]$
- je zwei Elemente $[\varphi], [\psi]$ haben
  - ein Supremum $[(\varphi \vee \psi)]$
  - ein Infimum $[(\varphi \wedge \psi)]$
- jedes Element $[\varphi]$ hat ein Komplement $\neg\varphi$ das heißt
  - $[(\varphi \wedge \neg\varphi)] = [\bot]$ und
  - $[(\varphi \vee \neg\varphi)] = [\top]$

Die Boolesche Algebra ist dann die Struktur $(\mathcal{F}_i(\mathcal{L}), \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ wobei $[\varphi] \wedge [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$ etc.

Definition 1.28. Wenn $\mathfrak{B} = (B, \cap, \cup^C, 0, 1)$ beziehungsweise $(B, \subseteq)$ eine Boolesche Algebra ist, dann ist

$$\mathfrak{B}^* = (B, \cup, \cap, {}^C, 1, 0) \text{ beziehungsweise } (B, \supseteq)$$

ebenfalls eine Boolesche Algebra, die duale Algebra und

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}^*, b \mapsto b^C$$

ist Isomorphismus Boolescher Algebren. Insbesondere gilt

$$(a \cup b)^C = a^C \cap b^C$$
$$(a \cap b)^C = a^C \cup b^C$$

Satz 1.29 (Stonescher Repräsentationssatz)**.** Jede Boolesche Algebra ist Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra.

Bemerkung 1.30. $\varphi \vdash \psi$ ist partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen $[\varphi]$.

- reflexiv: $\varphi \vdash \varphi$
- transitiv: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \vdash \chi$
- antisymmetrisch: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

Definition 1.31 (Filter)**.** Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ ist eine Teilmenge $F \subseteq B$ mit

- $1 \in F, 0 \notin F$
- Wenn $b \in F, b \subseteq b'$ dann $b' \in F$
- Wenn $b_1, b_2 \in F$, dann auch $b_1 \cap b_2 \in F$

Bemerkung 1.32. Das duale Konzept heißt Ideal.

Beispiel 1.33.

- Wenn $0 \neq b \in B$, dann ist

  $$\langle b \rangle := \{b' \in B \mid b \subseteq b'\}$$

  ein Filter, der von b erzeugt Hauptfilter.

- $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \text{Pot}(\mathbb{N})$ der Frechet-Filter ist

  $$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ endlich}\}$$

- Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie, dann ist $T^{\vdash}$ ein Filter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ der von T erzeugte Filter.

Bemerkung 1.34.

$$\begin{aligned} T \text{ ist inkonsistent} &\iff \bot \in T^{\vdash} \\ &\iff \text{alle } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ liegen in } T^{\vdash} \\ &\iff \text{es gibt ein } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ mit } T \vdash \varphi \text{ und } T \vdash \neg\varphi \end{aligned}$$

Definition 1.35. 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie T heißt vollständig, falls für jede $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ entweder $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$ (insbesondere sind vollständige Theorien konsistent)

2) Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ heißt Ultrafilter, falls F Filter ist und für alle $b \in B$ gilt entweder $b \in F$ oder $b^C \in F$.

Bemerkung 1.36. 1) T ist vollständig $\Leftrightarrow$ $T^{\vdash}$ ist Ultrafilter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$

2) $\mathfrak{A}$ ist $\mathcal{L}$-Struktur, dann ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ vollständig. Man schreibt auch $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})^{\vdash}$.

Definition 1.37. $\mathfrak{A}$ sei eine $\mathcal{L}$-Struktur.

1) Definiere

$$\mathcal{L}_A \coloneqq \mathcal{L} \,\dot{\cup}\, \{c_a \mid a \in A\}$$

$\mathfrak{A}$ wird kanonisch zu einer $\mathcal{L}_A$-Struktur $\mathfrak{A}_A$ expandiert durch

$$c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$$

2) Das atomare Diagramm von $\mathfrak{A}, \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ besteht aus allen atomaren und negiert-atomaren $\mathcal{L}_A$-Aussagen, die in $\mathfrak{A}$ gelten

$$\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomar oder } \varphi = \neg\psi, \psi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Das positive atomare Diagramm ist

$$\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

3) Das elementare Diagramm von $\mathfrak{A}$ ist

$$\mathrm{Diag}_{\mathfrak{A}}(a) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) = \{\varphi\ \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Satz 1.38. $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Einbettung $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ wobei $\mathfrak{B}_h = (\mathfrak{B}, (h(a))_{a \in A})$.

Beweis. h injektiv

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $h(a) \neq h(a')$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $\mathfrak{B}_h \models \underbrace{\neg c_a = c'_a}_{\in \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})}$

h starker Homomorphismus

$\Leftrightarrow$ für alle n und $a_1, \dots, a_n$

$$\begin{cases} \text{falls } f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \overset{(\neq)}{=} a, \text{ dann } f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \overset{(\neq)}{=} h(a) \\ \text{falls (nicht) } R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \text{ dann (nicht) } R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{B}_h \models (\neg) f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a \\ \mathfrak{B}_h \models (\neg) R(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \end{cases}$$

□

Satz 1.39. $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$

Beweis. Wie eben. □

2 Elementar Unterstrukturen und Kompaktheit

2.1 Elementare Unterstrukturen

Definition 2.1. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen.

1) $h : A \to B$ heißt elementare Abbildung, wenn für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi = \varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ gilt:

   Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \dots, h(a_{n-1})$. Durch Betrachten von $\neg\varphi$ folgt

   $$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$$

2) $\mathfrak{A}$ heißt elementare Unterstruktur von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und $id_A : A \to B$ elementare Abbildung.

Bemerkung 2.2. $h : A \to B$ elementar $\Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \supseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$

Also: Wenn $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ dann $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Aber

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \text{ in } \mathcal{L}_A)$$

Beispiel 2.3. $(\mathbb{N}, <) \supseteq (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$

$(\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$ also $(\mathbb{N}, <) \equiv (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$

Variante 1: Sauber beweisen per Induktion über den Aufbau der Formeln

Variante 2: Ist klar

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \not\preccurlyeq (\mathbb{N}, <)$ da $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \models \neg\exists x\, x < 1$ aber $(\mathbb{N}, <) \not\models \exists x\, x < 1$.

Beispiel 2.4. $\mathcal{L} = \{E\}$ E zweistelliges Relationssymbol, $T = E$ ist Äquivalenzrelation

Falls $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ beliebige Oberstruktur. Dann bleibt Äquivalenz aus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ erhalten und umgekehrt, aber es können Äquivalenzklassen in der Oberstruktur dazu kommen und größer werden.

1) Wenn eine endliche Zahl von Äquivalenzklassen existieren, dann bleibt die Anzahl in der elementaren Oberstruktur erhalten.

2) Wenn eine endliche Äquivalenzklasse existiert, dann bleibt deren Größe in der elementaren Oberstruktur erhalten.

3) Wenn jede Äquivalenzklasse n Elemente hat, dann hat auch in jeder Oberstruktur jede Äquivalenzklasse n Elemente.

4) Für jedes $n \in N \setminus \{0\}$ gibt es genau eine Äquivalenzklasse mit n Elementen und keine unendliche Klasse. In einer Elementaren Oberstruktur kommen nur unendliche große Äquivalenzklassen dazu.

Satz 2.5 (Tarskis Test)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, und $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, und $A \subseteq B$. Dann ist A genau dann Träger einer elementaren Unterstruktur von $\mathfrak{B}$, wenn für alle $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(v_0) \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_A)$, die in $\mathfrak{B}$ erfüllt sind, gilt dass sie mit einem $a \in A$ erfüllt sind.

Das heißt wenn $\mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$, dann existiert $x \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$.

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$ Angenommen $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$ (wegen $\preccurlyeq$).

Also existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$, somit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$ (wegen $\preccurlyeq$)

$\underline{\Leftarrow}$

1) $\mathfrak{B} \models \exists v_0 v_0 \doteq v_0$

Also gibt es $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models a \doteq a$ insbesondere $A \neq \emptyset$.

2) Seien $f \in \mathcal{L}$ n-stellig, $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\mathfrak{B} \models \exists v_0 f a_1 \dots a_n \doteq v_0$$

Bedingung: es existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models f a_1 \dots a_n \doteq a$.

Also $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$, das heißt A ist Träger einer Unterstruktur.

3) Zeige per Induktion über den Aufbau der $\mathcal{L}_A$-Formeln

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$$

- Induktionsanfang: φ Atomar

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} &\Leftrightarrow id_A : A \to B \mathcal{L}_A\text{-Einbettung}\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}_A) = \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})\\ &\Leftrightarrow \text{für alle atomaren Formeln } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A) \text{ gilt: } (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)\end{aligned}$$

- Induktionsschritte

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \underset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi$$

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathfrak{A} \models \varphi_1 & & \mathfrak{B} \models \varphi_1 \\ \text{und} & \underset{\text{IV}}{\Longleftrightarrow} & \text{und} \\ \mathfrak{A} \models \varphi_2 & & \mathfrak{B} \models \varphi_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \exists v_0 \varphi(v_0) &\Leftrightarrow \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi(a)\\ &\underset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a)\\ &\Rightarrow \text{ex. } a \in B \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)\end{aligned}$$

Da $\{\neg, \wedge, \exists\}$ ein vollständiges Junktoren-Quantoren-System bilden ist die Aussage damit gezeigt.

$\square$

Folgerung 2.6. Sei $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $S \subseteq B$. Dann existiert eine elementare Unterstruktur $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ mit $S \subseteq A$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

Beweis. Definiere induktiv S_i für $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_0 &\coloneqq S \\ S_{i+1} &\coloneqq S_i \cup \{a_\varphi \mid \varphi(x)\ \mathcal{L}_{S_i}\text{-Formel}\mathfrak{B} \models \exists\varphi(x) \text{ und } a_\varphi \text{ ist ein Element mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)\} \\ S_\omega &\coloneqq \bigcup_{i\in\omega} S_i \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist S_ω Träger einer elementaren Unterstruktur $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Denn: Wenn $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi(x), \varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_\omega})$.

Also existiert n mit $\varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_n})$, dann existiert $a_\varphi \in S_{n+1} \subseteq S_\omega$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)$. Das heißt Tarskis Test gilt.

Behauptung: $|S_\omega| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

Per Induktion $|S_i| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

$\underline{i = 0}$

$$|S_0| = |S| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$$

$\underline{i \to i+1}$

$$\begin{aligned} |S_{i+1}| &\leq |S_i| + \underbrace{|\mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_i})|}_{\text{endliche Folgen mit Zeichen aus } Z(S_i)} \\ &\leq |S_i| + |Z(S_i)^{<\omega}| \\ &= |S_i| + |Z(S_i)| \\ &= |S_i| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 + |S_i| \\ &= |\mathcal{L}| + |S_i| + \aleph_0 \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} |\mathcal{L}| + \max\{|\mathcal{L}|, |S|, \aleph_0\} + \aleph_0 \\ &= \max\{|L|, |S|, \aleph_0\} \end{aligned}$$

wobei

$$Z(S_i) = \mathcal{L} \cup \{v_0, v_1, \dots\} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall\} \cup S_i$$

□

Bemerkung 2.7. Für $|\mathcal{L}| = |S| = \aleph_0$ heißt die Folgerung auch Satz von Löwenheim.

Sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots$ eine gerichtete Vereinigung.

Es gibt eine eindeutig bestimmte $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}_\omega$ auf $\bigcup_{i\in\omega} A_i$, so dass $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle i.

Satz 2.8. Falls $\mathfrak{A}_0 \preccurlyeq \mathfrak{A}_1 \preccurlyeq \mathfrak{A}_2 \preccurlyeq \dots$ dann gilt $\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_\omega$ für alle i.

Beweis. Induktion über den Aufbau der Formeln: $\mathfrak{A}_i \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\omega \models \varphi$ für $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_{A_i})$

Atomar: da $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$

Negation und Konjunktion: wie letztes Mal

Existenzquantor: $\mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x)$ dann $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a)$ für ein $a \in A_i$.

$\overset{\text{IV}}{\Rightarrow} \mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$ also $\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$.

$\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$, dann $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$ für ein $a \in A_\omega$. Das heißt ex existiert $n \geq i$ mit $a \in A_n$.

Also gilt $\mathfrak{A}_n \models \varphi(a)$ und somit

$$\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_n \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x)$$

□

2.2 Kompaktheitssatz und Ultraprodukte

Satz 2.9 (Kompaktheitssatz)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und T eine $\mathcal{L}$-Theorie.

T hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teiltheorie $T_0 \subseteq T$ ein Modell hat.

Folgerung 2.10 (Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski aufwärts)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathfrak{A}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur. Dann existiert zu jeder Kardinalzahl $\kappa \geq \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$ ein $\mathfrak{B} \succcurlyeq \mathfrak{A}$ mit $|B| = \kappa$.

Beweis. Betrachte $\mathcal{L}^c \coloneqq \mathcal{L}_A \dot\cup \{c_i \mid i < \kappa\}$

und die $\mathcal{L}^C$-Theorie $T^c \coloneqq \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \ \cup \ \{\neg c_i \doteq c_j \mid i \neq j\}$

Zeige mit dem Kompaktheitssatz: T^c ist konsistent.

Sei $T_0 \subseteq_{\text{endl}} T^c$.

Dann $T_0 \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c_i \doteq c_j \mid i, j \in \text{ endlicher Menge}\}$.

$\mathfrak{A}$ wird Modell von T_0, indem man die endlich vielen Konstanten in T_0 durch beliebige, paarweise verschiedene Elemente von A interpretiert.

Sei $\mathfrak{B}' \models T^c$.

Dann ist $\underbrace{\mathfrak{B}' \restriction_{\mathcal{L}}}_{\text{Redukt auf } \mathcal{L}} \succcurlyeq \mathfrak{A}$ und $|B'| \geq \kappa$.

Wähle Teilmenge $S \subseteq B$, die A enthält und so, dass $|S| = \kappa$. Wende Folgerung 2.6 auf $\mathfrak{B}'_A$ an.

Dann erhält man $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}'_A$ in $\mathcal{L}_A$ mit $|B| \geq |S| = \kappa$ und $|B| \leq \max\{|\mathcal{L}_A|, |S|, \aleph_0\} = \kappa$

Und

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ \mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ A \subseteq B' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

$\square$

Ultraprodukte

Seien $\mathfrak{A}_i$ $\mathcal{L}$-Strukturen $(i \in I)$ und sei

$$\prod_{i \in I} A_i = \{p : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid p(i) \in A_i\}$$

Mit dem Auswahlaxiom gilt:

$$A_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

Definiere $\mathcal{L}$-Struktur $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ auf $\prod_{i \in I} A_i$.

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}}(p_1, \ldots, p_n) = p \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } i \in I \ p(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \ldots, p_n(i)) \\ (p_1, \ldots, p_n) \in R^{\mathfrak{A}} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } i \in I \ (p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \end{aligned}$$

Betrachte Ultrafilter $\mathcal{U}$ in $\mathrm{Pot}(I)$ also

- $\mathcal{U} \subsetneq \mathrm{Pot}(I), \emptyset \notin \mathcal{U}$
- Wenn $X \in \mathcal{U}, X \subseteq Y$, dann $Y \in \mathcal{U}$
- Wenn $X, Y \in \mathcal{U}$, dann $X \cap Y \in \mathcal{U}$

- Wenn $X \subseteq I$, dann entweder $X \in \mathcal{U}$ oder $I \setminus X \in \mathcal{U}$.

Ultrafilter $\mathcal{U}$ definiert eine Art Maß auf $\mathrm{Pot}(I)$

$$\mu_{\mathcal{U}} = \chi_{\mathcal{U}} : X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } X \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{wenn } X \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

X mit $X \in \mathcal{U}$ heißt auch $\mathcal{U}$-groß.

Lemma 2.11. Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ definiert eine Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{U}}$ auf $\prod_{i \in I} A_i$ durch

$$p \sim_{\mathcal{U}} p' :\Leftrightarrow \{i \in I \mid p(i) = p'(i)\} \in \mathcal{U}$$

Beweis.
- Reflexiv: klar, da $I \in \mathcal{U}$
- Symmetrie: klar per Definition
- Transitivität: $p \sim_{\mathcal{U}} p' \sim_{\mathcal{U}} p''$

$$\{i \mid p(i) = p''(i)\} \supseteq \{i \mid p(i) = p'(i)\} \cap \{i \mid p'(i) = p''(i)\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

□

Definition 2.12. Seien $\mathfrak{A}_i (i \in I)$ $\mathcal{L}$-Strukturen, $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I.

Das Ultraprodukt der $\mathfrak{A}_i$ bezüglich $\mathcal{U}$ ist die $\mathcal{L}$-Struktur

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}$$

mit Träger $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$ und

$$\begin{aligned} (p_1/\sim_{\mathcal{U}}, \ldots, p_m/\sim_{\mathcal{U}}) \in R^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\sim_{\mathcal{U}}} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{i \mid (p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R_i^{\mathfrak{A}}\} \in \mathcal{U} \\ f^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\sim_{\mathcal{U}}}(p_1/\sim_{\mathcal{U}}, \ldots, p_m/\sim_{\mathcal{U}}) = p/\sim_{\mathcal{U}} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{i \mid f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \ldots, p_n(i) = p(i)\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Beweis. <u>Wohldefiniertheit</u>

Seien $p_1 \sim_{\mathcal{U}} p'_1, \ldots, p_n \sim_{\mathcal{U}} p'_n$ zu zeigen ist

$$X := \{i \mid (p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i \mid (p'_1(i), \ldots, p'_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Sei $X_j = \{i \mid p_j(i) = p'_j(i)\} \in \mathcal{U}$.

Falls $X \in \mathcal{U}$ auf $X \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{U}$ gilt

$$\left.\begin{array}{l}(p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \\ p_1(i) = p'_1(i) \\ \vdots \\ p_n(i) = p'_n(i)\end{array}\right\} \Rightarrow (p'_1(i), \ldots, p'_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}$$

Analog für Funktionszeichen.

Warum existiert überhaupt solch ein $p_{\mathcal{U}}$?

Man sieht, dass $f^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i}(p_1, \ldots, p_n)/\mathcal{U}$ es tut.

Falls $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ für alle $i \in I$ dann heißt $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}/\mathcal{U} = \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ auch Ultrapotenz von $\mathfrak{A}$. $\square$

Satz 2.13 (Satz von Łos)**.** Sei φ eine $\mathcal{L}$-Aussage dann gilt

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$$

Insbesondere

- falls $\mathfrak{A}_i \models T$ für alle i, dann $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models T$
- falls $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_j$ für alle $i \in I$, dann $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{A}_j$

Folgerung 2.14.

$$\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}, \quad a \mapsto (a, a, \ldots, a, a)/\mathcal{U}$$

ist elementare Einbettung, das heißt

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$$

Beweis. zum Satz von Łos (Skizze)

Induktion über den Aufbau der Formeln

- φ atomar: Entweder Induktion über den Aufbau der Terme oder betrachte termreduzierte Formeln. Dazu sei f einstellig und c Konstante eine atomare Formel ist auch $ffc \doteq c$, diese ist aber äquivalent zu $\exists x(fc \doteq x \wedge fx \doteq c)$. Das heißt ohne Einschränkung kann man nur atomare Formeln der Formen $R\tau_1 \ldots \tau_n$ oder $\tau_1 \doteq \tau_2$ oder $f\tau_1 \ldots \tau_n \doteq \tau$ betrachten, wobei τ_i, τ Konstanten oder Individuenvariablen sind.

- Satz von Łos für termreduzierte atomare Formeln ist im Wesentlichen die Definition der $\mathcal{L}$-Struktur auf $\prod A_i/\sim_{\mathcal{U}}$.

- Induktion:

  Für und

$$\begin{aligned}
&\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models (\varphi \wedge \psi)\\
\Leftrightarrow &\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \phi \text{ und } \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \psi\\
\Leftrightarrow &I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U} \text{ und } I_\psi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \psi\} \in \mathcal{U}\\
\Leftrightarrow &\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi \wedge \psi\} = I_\varphi \cap I_\psi \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

  Für nicht

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \neg\varphi\\
\Leftrightarrow &\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \not\models \varphi\\
\Leftrightarrow &I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \notin \mathcal{U}\\
\overset{\text{Ultra}}{\Leftrightarrow} &I \setminus I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \neg\varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

  Für Existenz

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \exists x\varphi\\
\Leftrightarrow &\text{ex existiert } p \text{ mit } \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi(p/\mathcal{U})\\
\overset{\text{Ind.}}{\Leftrightarrow} &\text{es existiert } p \text{ mit } \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U}\\
\Leftrightarrow &\{i \mid \text{ex } p(i) \in A_i \text{ mit } \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U}\\
\Leftrightarrow &\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.15.

- $\langle i\rangle = \{X \subseteq I \mid i \in X\}$ Ultrafilter, der von i erzeugte Haupt-Ultrafilter

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\langle i\rangle \cong \mathfrak{A}_i$$

- Mit Lemma von Zorn (bzw. AC): Jeder eigentliche Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.

Definition 2.16. Sei I eine unendliche Menge, betrachte Filter der ω-endlichen Mengen

$$\mathcal{F} = \{X \mid I \setminus X \text{ endlich}\}$$

$\mathcal{F}$ kann zu Ultrafilter $\mathcal{U}$ erweitert werden. Solche Ultrafilter heißen freie Ultrafilter. Dies sind die nicht-Haupt-Ultrafilter.

Bemerkung 2.17. Wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist, dann ist $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{A}$.

Wenn $\mathfrak{A}$ unendlich ist und $\mathcal{U}$ frei ist, dann ist häufig $\mathfrak{A} \precsim\!\!\!\!\not\;\; \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$.

Wenn $|A_i| < |A_{i+1}|$ endlich ist und $\mathcal{U}$ frei, dann ist

$$\left|\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}\right| = 2^{\aleph_0}$$

Wenn $|A_i| = \aleph_0$ für alle i und $\mathcal{U}$ frei,

$$\left|\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}\right| = 2^{\aleph_0}$$

Satz 2.18. Seien $\mathfrak{A}_i (i \in \mathbb{N})$ endliche $\mathcal{L}$-Strukturen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei nur endlich oft $|A_i| \leq n$. Sei $\mathcal{U}$ freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Dann ist

$$\left|\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}\right| = 2^{\aleph_0}$$

Beweis.

$$\left|\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i\right| \leq \sup\{|A_i| \mid i \in \mathbb{N}\}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Damit

$$\left|\prod A_i/\mathcal{U}\right| \leq 2^{\aleph_0}$$

<u>Für $\geq$:</u> Ohne Einschränkung sei $|A_i| \leq |A_{i+1}|$ und $|A_i| = \{0, \ldots, n_i\}$ mit $n_i = |A_i| - 1$.

Für $r, s \in \mathbb{R} \cap [0, 1)$ konstruiere $p_r \in \prod_{i\in I} A_i$ mit $r \neq s$, dann stimmen p_r und p_s nur auf endlich vielen Indizes überein.

$$p_r(i) :=j \Leftrightarrow r \in \left[\frac{j}{|A_i|}, \frac{j+1}{|A_i|}\right)$$

$$\Rightarrow p_r \not\sim_{\mathcal{U}} p_s$$

$\square$

Beweis. zum Kompaktheitssatz

Sei T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie. Zu zeigen ist T ist konsistent.

Sei $I = \mathrm{Pot}_{<\aleph_0}(T) = \{T_0 \mid T_0 \subseteq_{\text{endl}} T\}$.

Für $T_0 \subseteq_{\text{endl}} T$ d.h. $T_0 \in I$ sei $\langle T_0 \rangle = \{T_1 \in I \mid T_0 \subseteq T_1\}$.

Sei weiter $\mathcal{F} = \{\mathcal{X} \subseteq I \mid \text{ ex. } T_0 \in I \text{ mit } \langle T_0 \rangle \subseteq \mathcal{X}\}$.

$\mathcal{F}$ ist Filter auf I:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- Monotonie: per Definition
- $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{F}$, dann existiert $T_i \subseteq_{\text{endl}} T$ mit $\langle T_i \rangle \subseteq \mathcal{X}_i$. Dann gilt
$$\langle T_1 \cup T_2 \rangle = \langle T_1 \rangle \cap \langle T_2 \rangle \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$$

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ erweitert. Wähle für jedes $T_0 \in I$ ein Modell $\mathfrak{M}_{T_0} \models T_0$ und setze $\mathfrak{M} := \prod_{T_0 \in I} \mathfrak{M}_{T_0} / \mathcal{U}$.

Mit Satz von Łos: prüfe, dass $\varphi \in T \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi$.

$$\{T_1 \in I \mid \mathfrak{M}_{T_1} \models \varphi\} \supseteq \{T_1 \in I \mid \varphi \in T_1\} = \langle \{\varphi\} \rangle \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$$

□

Definition 2.19. $(X, \mathcal{O})$ heißt topologischer Raum und $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf X), falls

- $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{Pot(X)}$
- $\mathcal{O}$ ist abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte und beliebiger Vereinigungen
- Insbesondere $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

$U \in \mathcal{O}$ heißt offen bzw. offene Menge, $A \subseteq X$ mit $X \setminus A \in \mathcal{O}$ heißt abgeschlossen bzw. abgeschlossene Menge.

Definition 2.20. $Q \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ heißt Basis einer Topologie $\mathcal{O}$, falls Q abgeschlossen ist bezüglich endlicher Schnitte.

Dann ist $\mathcal{O} = \{\bigcup Q_i \mid Q_i \in Q\} \cup \{\emptyset, X\}$ eine Topologie, und zwar die kleinste, in der alle Mengen aus Q offen sind.

Definition 2.21. Eine Abbildung heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Boolesche Algebra und $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ die Menge der Ultrafilter in $\mathfrak{B}$. Damit ist $\mathcal{U} \in \text{Pot}(B)$ also $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \in \text{Pot}(\text{Pot}(B))$.

Für $a \in B$, definiere

$$[[a]] \coloneqq \{U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \mid a \in U\} \subseteq \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$$

Satz 2.22.

1) $[[\cdot]] : \mathfrak{B} \hookrightarrow \text{Pot}(\mathcal{U}_{\mathfrak{B}})$ ist Einbettung Boolescher Algebren (Teil des Stoneschen Repräsentationssatzes)

2) $\{[[a]] \mid a \in B\}$ ist Basis einer Topologie auf $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$.

Definition 2.23. $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ heißt auch Stone-Raum $S(\mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$.

Beweis.

1)
   - $[[0]] = \emptyset$, da $0 \notin U$ per Definition
   - $[[1]] = U_{\mathfrak{B}}$, da $1 \in U$ für jedes U
   - $[[a \cap b]] = [[a]] \cap [[b]]$ folgt aus den Filtereigenschaften
   - $[[a \cup b]] = [[a]] \cup [[b]]$ folgt aus de Morgan und dem nächsten Schritt
   - $[[a^c]] = \{U \mid a^c \in U\} \overset{\text{ultra}}{=} \{U \mid a \notin U\} = [[a]]^c$

   Das heißt $[[\cdot]]$ ist Homomorphismus der Booleschen Algebra.

   Fehlt noch injektivität: Seien $a \neq b$: Zu zeigen ist, es existiert ein Ultrafilter U der a und b trennt, das heißt $a \in U \Leftrightarrow b \notin U$.

   Es gilt $a \nsubseteq b$ oder $b \nsubseteq a$ das heißt $a \cap b^c \neq \emptyset$ oder $a^c \cap b \neq \emptyset$.

   Es existiert also ultrafilter U mit $a \cap b^c \in U$ oder $a^c \cap b \in U$.

   Falls z.B. $a \cap b^c \in U$, dann ist $a \in U, b^c \in U \Rightarrow b \notin U$.

2) Wegen $[[a]] \cap [[b]] = [[a \cap b]]$

$\square$

Bemerkung 2.24. Die Basis-offenen Mengen $[[a]]$ sind auch abgeschlossen, da $[[a]]^c = [[a^c]]$.

Mengen die offen und abgeschlossen sind heißen clopen.

Topologische Räume mit einer Basis aus clopen Mengen sind total unzusammenhängend.

Definition 2.25. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt kompakt, falls die endliche Überdeckungseigenschaft gilt:

Falls $X = \bigcup_{i \in I}\{U_i \mid U_i \text{ offen}\}$ dann existiert $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$ mit $X = \bigcup\{U_i \mid i \in I_0\}$

Oder in äquivalenter Formulierung: $\bigcap\{A_i \mid A_i \text{ abgeschlossen}, i \in I\} = \emptyset$ dann existiert $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$ mit $\bigcap\{A_i \mid i \in I_0\} = \emptyset$.

Satz 2.26. Der Stone-Raum ist kompakt.

Bemerkung 2.27. Der Kompaktheitssatz ist äquivalent zur Kompaktheit von $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$.

Ohne Einschränkung sei $\perp \notin T$

$$T \text{ inkonsistent} \qquad \Leftrightarrow \qquad \bigcap_{\varphi \in T} [[\varphi]] = \emptyset$$

und nach Kompaktheitssatz sagt es gibt endliches $T_0 \subseteq T$ so dass T_0 inkonsistent ist.

Und mit der Kompaktheit von $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$ existieren $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in T$ mit $[[\varphi_0]] \cap \cdots \cap [[\varphi_n]] = \emptyset$.

Wir können im ersten Fall $T_0 = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ mit φ_i aus dem zweiten Teil wählen.

2.2.1 Beispiele und Anwendungen

Satz 2.28 (Test von Vaught)**.** T sei eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie ohne endliche Modelle und es gebe $\kappa > \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$, so dass T bis auf Isomorphie höchstens genau ein Modell der Kardinalität κ hat. (T ist κ-Kategorisch)

Dann ist T vollständig.

Beweis. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ zu zeigen ist $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. A und B sind nach Voraussetzung unendlich.

Sei $\kappa' > \max\{\kappa, |A|, |B|\}$. Nach Löwenheim-Skolem-Tarski gibt es $\mathfrak{A}' \succcurlyeq \mathfrak{A}, \mathfrak{B}' \succcurlyeq \mathfrak{B}$ mit $|A'| = |B'| = \kappa'$ und wiederum nach Löwenheim-Skolem-Tarski existieren $\mathfrak{A}'' \preccurlyeq \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'' \preccurlyeq \mathfrak{B}'$ mit $|A''| = |B''| = \kappa$. Damit gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}'' \cong \mathfrak{B}'' \equiv \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ und $\cong \Rightarrow \equiv$. $\square$

Beispiel 2.29. 1) K-Vektorräume, bis auf Isomorphie ist ein K-Vektorraum durch seine Dimension bestimmt. $\dim_K(V) \geq |K| + \aleph_0 \Rightarrow |V| = \dim_K(V)$.

Übliche Axiomatisierung: $\mathcal{L}_{K\text{-VR}} = \{+, -, 0, (\lambda_k)_{k \in K}\}$ und

$$\begin{aligned} T_{K\text{-VR}} = {} & \text{abelsche Gruppe} \\ & \cup \{\forall v \lambda_k v + \lambda_{k'} v = \lambda_{k+k'} v \mid k, k' \in K\} \\ & \cup \{\forall v \lambda_1 v = v\} \\ & \cup \dots \\ & \cup \{\text{es gibt unendlich viele Elemente}\} \end{aligned}$$

Aus LA: $T_{K\text{-VR}}$ ist κ-kategorisch für alle $\kappa \geq |K| + \aleph_0$.

Axiomatisierung von Vektorräumen über variablen Körpern

$$\mathcal{L} = \{+_V, -_V, 0_V, +_K, \cdot_K, -_K, 0_k, 1_k, V, K\}$$

mit V, K einstellige Relationszeichen und man drückt aus V, K ist Partition des Universums.

$$\begin{aligned} \forall x (Vx \vee Kx) \\ \neg \exists x (Vx \wedge Kx) \end{aligned}$$

und zusätzlich $+_V, -_V, 0_V$ ist abelsche Gruppe auf V und z.B. $\forall x \forall y (Kx \rightarrow (x +_V y = 0_K))$.

$+_K, \cdot_k, \dots$ ist Körper auf K und zusätzlich noch die Vektorraumaxiome.

2) Offene dichte lineare Ordnungen $\mathcal{L} = \{<\}$. Die Theorie dazu nennen wir T_{DLO}.

- offen: kein Maximum und kein Minimum
- dicht: $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

Beispiele sind $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$

Satz von Cantor: T_{DLO} ist $\aleph_0$-kategorisch

Beweis. Seien $(A,<),(B,<)$ abzählbare, offene, dichte lineare Ordnungen.

Seien $\{a_i \mid i \in \omega\} = A, \{b_i \mid b \in \omega\} = B$ Aufzählungen der Universen.

Konstruiere induktiv ordnungserhaltende Bijektion $\beta : A \to B$ und setze $\beta(a_0) = b_0$.

Ungerade Induktionsschritte: Sei β bereits auf $A_n = \{a_{i_0}, \dots, a_{i_n}\}$ definiert, $|A_n|$ ist ungerade. Idee: stelle sicher, dass β surjektiv wird.

Wähle j minimal mit $b_j \notin \beta(A_n)$. Wähle $a_{i_{n+1}}$ so, dass $\beta(a_j) := b_j$ eine ordnungserhaltende Fortsetzung des bisher konstruierten β ist. $a_{i_{n+1}}$ existiert, da offen und dicht, setze $b_{i_{n+1}} = b_j$.

Gerade Induktionsschritte: Idee: Stelle sicher, dass β totale Funktion ist.

Sei j der kleinste Index, so dass $\beta(a_j)$ noch nicht definiert ist. Wähle $b_{i_{n+1}}$ so, dass $a_{i_{n+1}} := a_j \mapsto b_{i_{n+1}}$ ordnungserhaltende Fortsetzung ist. □

Folgerung: T_{DLO} ist vollständig.

Aber: Für $k > \aleph_0$, gibt es 2^κ viele Modelle der Mächtigkeit κ, die paarweise $\ncong$.

Anwendungen

- Vollständigkeit von Theorien
- Nichtstandardmodelle

  Nichtstandard-Modelle der Peano-Arithmetik

  $$(\mathbb{N}, +, \cdot) \precneqq \mathbb{N}^*$$

  Nichtstandard-Analysis

  $$(\mathbb{R}, +, \cdot, <) \precneqq \mathbb{R}^*$$

  Unendliches Modell der Theorie der endlichen Körper der Charakteristik p, pseudoendlicher Körper

  $$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n} / \mathcal{U}$$

  Besonderer Automorphismus

  $$\prod_{p \text{ prim}} (\tilde{\mathbb{F}}_p, \mathrm{Frob}\colon x \mapsto x^p)/\mathcal{U} = (\mathbb{C}, \alpha)$$

- Transfer-Prinzipien

  $\mathcal{L}_{K_p} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$

  Eine $\mathcal{L}_{K_p}$-Aussage φ gilt in allen Körpern der Charakteristik 0 $\Leftrightarrow$ ex existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass φ in allen Körpern der Charakteristik p mit $p \geq n_0$ gilt.

- Nicht-Axiomatisierbarkeit

3 Quantorenelimination

Beispiel 3.1. $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$ hat keine Quantorenelimination: $\exists y\ y \cdot y = x$ ist in $\mathfrak{R}$ nicht äquivalent zu einer Formel ohne Quantoren.

$\mathfrak{R}' = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, \leq)$ hat Quantorenelimination hier gilt dann:

$$\exists y\ y \cdot y = x \qquad \sim \qquad 0 \leq x$$

3.1 Erhaltungssätze (Präservationssätze)

Definition 3.2. φ $\mathcal{L}$-Formel heißt

- quantorenfrei, wenn kein Quantor $\forall, \exists$ in φ vorkommt

- universell, wenn φ von der Form ist:

$$\forall v_{i_1} \dots \forall v_{i_n} \psi \qquad n \in \mathbb{N}, \psi \text{ quantorenfrei}$$

- existenziell, wenn φ von der Form ist:

$$\exists v_{i_1} \dots \exists v_{i_n} \psi \qquad n \in \mathbb{N}, \psi \text{ quantorenfrei}$$

- $\forall\exists$-Formel

$$\forall v_{i_1} \dots \forall v_{i_n} \exists v_{i_{n+1}} \dots v_{i_m} \psi \qquad n \leq m \in \mathbb{N}, \psi \text{ quantorenfrei}$$

Bemerkung 3.3. $(\forall x \varphi \wedge \forall y \psi)$ ist nicht universell aber äquivalent zu einer universellen Formel.

Bemerkung 3.4. Quantorenfreie, universelle, existentielle und $\forall\exists$-Formeln sind bis auf logische Äquivalenz abgeschlossen unter $\wedge, \vee$.

Quantorenfreie Formeln sind abgeschlossen unter $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

$\neg$ universell $\sim$ existentiell

$\neg$ existentiell $\sim$ universell

Lemma 3.5. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und φ eine $\mathcal{L}_A$-Formel

1) Wenn φ universell ist: $\mathfrak{B} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$

2) Wenn φ existentiell ist: $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$

Beweis. 1) $\varphi = \varphi(\overline{a}) = \forall v_{i_1}, \ldots \forall v_{i_n} \psi(\overline{v}, \overline{a})$ mit ψ quantorenfrei

$\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$

d.h. für jedes $\overline{b} \in B$ gilt $\mathfrak{B} \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$

Insbesondere für jedes $\overline{b} \in A$ gilt $\mathfrak{B} \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$ quantorenfrei

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$: für jedes $\overline{b} \in A$ gilt $\mathfrak{A} \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$

das heißt $\mathfrak{A} \models \underbrace{\forall \overline{v}\ \psi(\overline{v}, \overline{a})}_{\varphi(\overline{a})}$

2) analog

$\square$

Lemma 3.6 (Zieglers Trennungslemma)**.** Seien T, T' Theorien und $\mathcal{H}$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen mit:

- $\perp, \top \in \mathcal{H}$
- $\mathcal{H}$ abgeschlossen unter $\wedge, \vee$

Dann sind äquivalent:

1) Für $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T'$ gibt es $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi, \mathfrak{B} \models \neg\varphi$ (φ trennt $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$)

2) Es gibt $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $T \vdash \varphi, T' \vdash \neg\varphi$ (φ trennt T von T')

Beweis. <u>2) $\Rightarrow$ 1)</u>: klar

<u>1) $\Rightarrow$ 2)</u>: Sei $\mathfrak{A} \models T$ und sei $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}} := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$

$\mathcal{H}_{\mathfrak{A}} \cup T'$ ist inkonsistent.

$\mathfrak{B} \models \mathcal{H}_{\mathfrak{A}} \cup T'$ nach Voraussetzung existiert $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ (d.h. $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{A}}$) und damit $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ ↯

Kompaktheit: Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}_{\mathfrak{A}}$ mit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup T'$ ist inkonsistent. Und damit $T' \cup \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ ist inkonsistent.

$\Leftrightarrow T' \vdash \neg(\underbrace{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n}_{\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{H}_{\mathfrak{A}}})$

$T \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ ist inkonsistent.

Kompaktheit: Es gibt $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m \models T$ mit

$$\begin{aligned} & T \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{A}_1}, \dots, \neg\varphi_{\mathfrak{A}_n}\} \text{ inkonsistent} \\ \Leftrightarrow & T \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{A}_1} \wedge \dots \wedge \neg\varphi_{\mathfrak{A}_n}\} \text{ inkonsistent} \\ \Leftrightarrow & T \cup \{\neg(\varphi_{\mathfrak{A}_1} \vee \dots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n})\} \text{ inkonsistent} \\ \Leftrightarrow & T \vdash \underbrace{\varphi_{\mathfrak{A}_1} \vee \dots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n}}_{\in \mathcal{H}} \end{aligned}$$

Andererseits:

$$T' \vdash \neg\varphi_{\mathfrak{A}_1} \wedge \dots \wedge \neg\varphi_{\mathfrak{A}_n} \qquad \sim \qquad \neg(\varphi_{\mathfrak{A}_1} \vee \dots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n})$$

□

<u>Notationen:</u> Sei Δ Menge von $\mathcal{L}$-Formeln, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen, $h : A \to B$

$$h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} :\Leftrightarrow h \text{ erhält die Gültigkeit von } \Delta\text{-Formeln mit Parametern aus } A$$

Das heißt

$$\begin{gathered} \mathfrak{A} \models \delta(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \delta(h(\overline{a})) \\ \Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}_A) = \{\delta(\overline{a}) \mid \mathfrak{A} \models \delta(\overline{a}), \overline{a} \in A, \delta \in \Delta\} \end{gathered}$$

- Δ atomar: $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ Homomorphismus
- Δ atomar, negiert atomar $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ Einbettung

- Δ quantorenfrei $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ Einbettung

- Δ alles $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ elementar

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Rightarrow_\Delta \mathfrak{B} :&\Leftrightarrow \text{jede } \Delta\text{-Aussage, die in } \mathfrak{A} \text{ gilt, gilt auch in } \mathfrak{B} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}) = \{\delta \mid \mathfrak{A} \models \delta, \delta \in \Delta\} \subseteq \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{B}) \end{aligned}$$

Lemma 3.7. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Δ abgeschlossen bezüglich $\exists, \wedge$ und Umbenennung von Variablen.

$(v_0 \doteq c) \nsim v_1 \doteq c$

Dann sind äquivalent

1) Jedes $\varphi \in \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A})$ ist konsistent mit T (d.h. es existiert $\mathfrak{M}_\varphi \models T \cup \{\varphi\}$)

2) Es gibt $\mathfrak{B} \models T$ und $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}$ (d.h. es existiert $\mathfrak{B} \models T \cup \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}_A)$)

Beweis. $\underline{2) \Rightarrow 1)}$: klar

$\underline{1) \Rightarrow 2)}$: Zeige mit Kompaktheit: $T \cup \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}_A)$ ist konsistent.

Angenommen nicht. Dann gibt es $\delta_i(a_i)$ mit $T \cup \{\delta_1(\overline{a_1}, \ldots, \delta_n(\overline{a_n}))\}$ inkonsistent

Ohne Einschränkung mit $\overline{a} = \overline{a_1} \cap \cdots \cap \overline{a_n}$

$$T \cup \{ \underbrace{\delta_1(\overline{a}), \ldots, \delta_n(\overline{a})}_{\text{ersetze durch } \delta(\overline{a}) = \delta_1(\overline{a}) \wedge \cdots \wedge \delta_n(\overline{a})} \}$$

$\delta(\overline{a}) \in \Delta$

$T \cup \{\delta(\overline{a})\}$ inkonsistent, das heißt $T \vdash \neg\delta(\overline{a})$

T $\mathcal{L}$-Theorie, $\overline{a}$ Konstanten $\notin \mathcal{L}$

Mit Logik folgt: $T \vdash \forall\overline{x}\neg\delta(\overline{x}) \sim \neg \underbrace{\exists\overline{x}\delta(\overline{x})}_{\in\Delta}$

$\mathfrak{A} \models \delta(\overline{a}a)$ d.h. $\mathfrak{A} \models \exists\overline{x}\delta(\overline{x})$ aber $T \vdash \neg\exists\overline{x}\delta(\overline{x})$ $\lightning$ zu 1) $\square$

Folgerung 3.8. Betrachte $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ und $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Jedes } \varphi \in \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}) \text{ ist konsistent mit } T & \Leftrightarrow & \text{es gibt } \mathfrak{B}' \models T \text{ und } h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}' \\
\Updownarrow & & \\
\mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{B}) & & \Updownarrow \\
\Updownarrow & & \\
\mathfrak{A} \Rightarrow_\Delta \mathfrak{B} & & \text{es gibt } \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B} \text{ und } h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}'
\end{array}
$$

Satz 3.9. Seien T, T' $\mathcal{L}$-Theorien. Es sind äquivalent:

1) Es gibt universelle $\mathcal{L}$-Aussage φ, die T von T' trennt (d.h. $T \vdash \varphi, T' \vdash \neg\varphi$)

2) Wenn $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T'$, dann ist $\mathfrak{B}$ keine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$

Beweis. $\underline{1) \Rightarrow 2):}$ $\mathfrak{A} \models T$, also $\mathfrak{A} \models \varphi$, φ universell.

Wenn $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi$ (Lemma) also $\mathfrak{B} \not\models T'$.

$\underline{\neg 1) \Rightarrow \neg 2):}$ Trennungslemma: es gibt $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T'$ und keine universelle Aussage trennt $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{A} \Rightarrow_\forall \mathfrak{B}$

äquivalent: $\mathfrak{B} \Rightarrow_\exists \mathfrak{A}$

Folgerung: Es gibt ein $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ mit $h : \mathfrak{B} \to_\exists \mathfrak{A}'$

Da qf $\subseteq \exists$ insbesondere $\mathfrak{B} \models T' \subseteq \mathfrak{A}' \models T$ □

Folgerung 3.10. Sei T $\mathcal{L}$-Theorie und φ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann sind äquivalent:

1) Es gibt universelles ψ mit $T \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})$

2) Falls $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$

   Für alle $\overline{a} \in A$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$

Beweis. $\underline{1) \Rightarrow 2):}$

$$\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$$

2) $\Rightarrow$ 1): Seien $\bar{c}$ neue Konstanten (für $\bar{a}$) und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c &= \mathcal{L} \cup \{\bar{c}\} \\ T^+ &= T \cup \{\varphi(\bar{c})\} \\ T^- &= T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_c$-Theorien

2) sagt Unterstrukturen von Modellen von T^+ die Modelle von T sind, sind Modelle von T^+ also nicht Modelle von T^--

Mit dem Satz folgt: Es gibt eine universelle $\mathcal{L}_c$ Aussage $\psi^{(c)}$ die T^+ von T^- trennt, das heißt

$$T^+ \vdash \psi(\bar{c}), T^- \vdash \neg\psi(\bar{c})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T \cup \{\varphi(\bar{c})\} &\vdash \psi(\bar{c}) & \qquad T &\vdash \varphi(\bar{c}) \to \psi(\bar{c}) \\ T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\} &\vdash \neg\psi(\bar{c}) & \qquad T &\vdash \neg\varphi(\bar{c}) \to \neg\psi(\bar{c}) \end{aligned}$$

$\bar{c}$ kommt nicht in T vor, also:

$$\begin{aligned} T &\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \\ T &\vdash \forall x(\neg\varphi(x) \to \neg\psi(x)) \end{aligned}$$

$$T \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$$

$\square$

Definition 3.11. $T_\forall := \{\varphi \text{universelle } \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid T \vdash \varphi\}$

(Falls $T = T^\vdash$ dann $T_\forall = T \cap \forall$)

Analog: $T_\exists, T_{\exists\forall}, \ldots$

Folgerung 3.12. *T ist universell, d.h. $T_\forall^\vdash = T^\vdash$. (äquivalent T ist $\forall$-Axiomatisierbar, d.h. es gibt φ_i universell mit $\{\varphi_i \mid i \in I\}^\vdash = T^\vdash$)*

$\Leftrightarrow$ wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models T$, dann $\mathfrak{A} \models T$

Beweis. $\Rightarrow$ Wenn $\mathfrak{B} \models T$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ dann $\mathfrak{A} \models T_\forall$ also $\mathfrak{A} \models T_\forall^\vdash \supseteq T$

$\Leftarrow$ Stets $T_\forall \subset T^\vdash$, also $T_\forall^\vdash \subseteq T^\vdash$.

Zeige: $T^\vdash \subseteq T_\forall^\vdash$, d.h. $T_\forall \vdash T$

Sei $\varphi \in T, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \models T$

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A} \models \varphi$, d.h. $\mathfrak{A} \not\models \{\neg\varphi\} =: T'$.

Satz $\Rightarrow$ ex. universelle ψ mit $T \vdash \psi$ d.h. $\psi \in T_\forall$.

$\{\neg\varphi\} = T' \vdash \neg\psi (\Leftrightarrow \psi \vdash \varphi)$ insbesondere $T_\forall \vdash \varphi$. $\square$

Dualisierung:

φ existentiell modulo $T \Leftrightarrow \forall \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a)$

T ist existentiell, d.h. $T^\vdash = T_\exists^\vdash \Leftrightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{B} \models T$

Beispiel 3.13. Die $\mathcal{L}_{HGr}$-Theorie der Gruppen ist nicht universell

$$\underbrace{(\mathbb{N}, +)}_{\text{keine Gruppe}} \subseteq \underbrace{(\mathbb{Z}, +)}_{\text{Gruppe}}$$

Axiom z.B. $\exists x \forall y (y \circ x = y \wedge x \circ y = y)$

Aber die $\{\circ, ^{-1}, e\} =: \mathcal{L}_{Gr}$-Theorie der Gruppen ist universell

Axiom z.B. $\forall y (y \circ e = y \wedge e \circ y = y)$

Einschub für die Allgemeinbildung

HSP-Theoriem von Birkhoff (aus der universellen Algebra)

Eine Klasse $\mathcal{K}$ von Algebren ($\mathcal{L}$-Strukturen ohne Relationen) ist eine Varietät, d.h. axiomatisiert durch Aussagen der Form $\forall \overline{x}\ \tau_1(\overline{x}) \doteq \tau_2(\overline{x})$

$\Leftrightarrow \mathcal{K}$ ist abgeschlossen unter:

- Homomorphen Bildern
- Unterstrukturen
- direkten Produkten

Elementare Strukturen

Eine Klasse von $\mathcal{L}$-Stukturen $\mathcal{K}$ ist elementar (d.h. axiomatisierbar: es gibt $\mathcal{L}$-Theorie T mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$)

$\Leftrightarrow$ abgeschlossen unter $\equiv$ und Ultraprodukten

$\Leftrightarrow$ abgeschlossen unter $\cong$, Ultraprodukten und elementaren Unterstrukturen

$\Leftrightarrow$ abgeschlossen unter $\cong$, Ultraprodukten und Ultrawurzeln ($\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathfrak{A} \in \mathcal{K}$)

Satz ohne Beweis

Keisler mit GCH (generalized continuum hypothesis), Shela ohne

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow$ ex. Ultrafilter $\mathcal{U},\mathcal{U}'$ mit $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}'$

Lemma 3.14. $\forall\exists$-Aussagen werden unter Vereinigungen von Ketten präserviert, d.h.

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_\omega$$

und $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ für alle $i \in \omega$, φ $\forall\exists$-Aussage, dann $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$.

Beweis. $\varphi = \forall\overline{x}\ \exists\overline{y}\ \psi(\overline{x},\overline{y})$.

Zu zeigen: für jedes $\overline{a} \in A_\omega$ gilt $\mathfrak{A}_\omega \models \exists\overline{y}\ \psi(\overline{a},\overline{y})$

Es gibt $n \in \omega$ mit $\overline{a} \in A_n$

Nach Voraussetzung $\mathfrak{A}_n \models \varphi$, d.h. $\mathfrak{A}_n \models \exists\overline{y}\psi(\overline{a},\overline{y})$ existentiell $\Rightarrow \mathfrak{A}_\omega \models \exists\overline{y}\ \psi(\overline{a},\overline{y})$ □

Satz 3.15. T, T' $\mathcal{L}$-Theorien Äquivalent sind:

1) Es gibt φ $\forall\exists$-Aussage mit $T \vdash \varphi, T' \vdash \neg\varphi$

2) Falls $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \dots$ Kette von Modellen von T, dann ist $\mathfrak{A}_\omega \not\models T'$

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): Da $\mathfrak{A}_i \models T$ gilt insbesondere $\mathfrak{A} \models \varphi$. Da φ $\forall\exists$, gilt nach Lemma $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$, somit $\mathfrak{A}_\omega \not\models T'$.

$\neg$1) $\Rightarrow$ $\neg$2):

Trennungslemma: Es gibt $\mathfrak{A}_0 \models T, \mathfrak{B}_0 \models T'$, nicht $\forall\exists$-trennbar d.h. $\mathfrak{A}_0 \Rightarrow_{\forall\exists} \mathfrak{B}_0$. Somit $\mathfrak{B}_0 \Rightarrow_{\exists\forall} \mathfrak{A}_0$.

Einbettungslemma: Es gibt $h : \mathfrak{B}_0 \to_{\exists\forall} \mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_0$

Ohne Einschränkung: $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1$, h präserviert $\exists\forall$-Formeln aus $\mathcal{L}_{B_0}$

$\Rightarrow \mathfrak{A}_1 \Rightarrow_{\forall\exists} \mathfrak{B}_0$ in $\mathcal{L}_{B_0}$

Abschwächung: $\mathfrak{A}_1 \Rightarrow_{\exists} \mathfrak{B}_0$ in $\mathcal{L}_{B_0}$.

Lemma: $h' : \mathfrak{A}_1 \to_{\exists} \mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_0$ in $\mathcal{L}_{B_0}$

Ohne Einschränkung: $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1$

Und damit: $\mathfrak{B}_0 \preccurlyeq \mathfrak{B}_1$

$$\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{B}_2 \subseteq \dots$$

Ersetze $\mathfrak{B}_0$ durch $\mathfrak{B}_1$ und konstruiere analog $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_3$

$$\mathfrak{A}_\omega = \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_\omega \models T'$$

□

Folgerung 3.16. Äquivalent sind

1) φ ist modulo T äquivalent zu $\forall\exists$-Aussage ψ

2) φ wird unter Vereinigungen von Ketten präserviert

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2)

Wenn $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \dots$ und $\mathfrak{A}_i \models \varphi$

dann $\mathfrak{A}_i \models \psi$ (da $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$)

dann $\mathfrak{A}_\omega \models \psi$ (da ψ $\forall\exists$)

somit $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$

2) $\Rightarrow$ 1)

$$T^+ = T \cup \{\varphi\}$$
$$T^- = T \cup \{\neg\varphi\}$$

2) sagt: Vereinigungen von Ketten von Modellen von $T^{\vdash}$ sind nicht Modelle von T^{-}.

Satz: Es gibt $\forall\exists$-Aussage ψ mit $T^{+} \vdash \psi, T^{-} \vdash \neg\psi$. Wie im universellen Fall $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ $\square$

Folgerung 3.17. T ist induktiv d.h. unter Vereinigungen von Ketten abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ T ist $\forall\exists$-axiomatisierbar, d.h. $T^{\vdash} = T^{\vdash}_{\forall\exists}$

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$

Wenn $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots$ mit $\mathfrak{A}_i \models T$, dann $\mathfrak{A}_\omega \models T_{\forall\exists}$, also $\mathfrak{A}_\omega \models T$, da $T \subseteq T^{\vdash}_{\forall\exists}$

$\underline{\Rightarrow}$

Zeige $T_{\forall\exists} \vdash T$

Sei $\varphi \in T$ und $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots$ Kette von Modellen von T

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$, also $\mathfrak{A}_\omega \not\models \neg\varphi$.

Satz: Es gibt $\forall\exists$-Aussage ψ, die T von $\{\neg\varphi\}$ trennt. $T \vdash \psi$, d.h. $\psi \in T_{\forall\exists}$

$\neg\varphi \vdash \neg\psi$ d.h. $\psi \vdash \varphi$ insbesondere $T_{\forall\exists} \vdash \varphi$ $\square$

Definition 3.18. Eine $\mathcal{L}$-Theorie T heißt modellvollständig, wenn jede $\mathcal{L}$-Formel modulo T universell ist. (äquivalent: jede $\mathcal{L}$-Formel ist modulo T existentiell)

Satz 3.19 (Test von Robinson)**.** Äquivalent sind

1) T ist modellvollständig
2) Wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T, \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ dann $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$
3) Wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T, \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ und φ $\mathcal{L}_M$-Existenzaussage (d.h. $\varphi = \exists \overline{x}\ \psi(\overline{x}, \overline{m})$, ψ q.f.) dann $\mathfrak{N} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi$

Definition 3.20. Eigenschaft 3) heißt auch: $\mathfrak{M}$ ist existenziell abgeschlossen in $\mathfrak{N}$.

$$\mathfrak{M} \preccurlyeq_1 \mathfrak{N}$$

Beweis. $\underline{2) \Rightarrow 3)}$: trivial

$\underline{1) \Rightarrow 2)}$: angenommen $\mathfrak{N} \models \varphi(\overline{m})$ $\mathcal{L}_M$-Aussage.

Es gibt universelles ψ mit $T \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$

Dann $\mathfrak{N} \models \psi(\overline{m})$

Da ψ universell $\Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi(\overline{m})$ d.h. $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m})$

3) $\Rightarrow$ 1): Sei $\varphi(\overline{x})$ eine existentielle $\mathcal{L}$-Formel. Satz über universelle Präservation: Es gibt $\psi(\overline{x})$ universell mit $T \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$.

Sei $\chi(\overline{x})$ beliebige Formel, zeige $\chi \sim$ univ.

$$\chi(\overline{x}) \sim \forall \dots \forall \exists \dots \exists \forall \dots \forall \underbrace{\exists \dots \exists \rho'(\overline{x})}_{\sim \text{univ.}}$$

Zeige induktiv von hinten nach vorne durch die Formel das am Ende eine universelle Formel übrig bleibt. Dabei immer letzten Teil mit Existenzquantoren durch äquivalente universelle Formel ersetzen. Danach negieren um Allquantoren wieder zu Existenzquantoren zu machen und dann wie eben. □

Lemma 3.21. Modellvollständige Theorien sind induktiv (d.h. $\forall\exists$-axiomatisierbar)

Beweis. Sei $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{M}_\omega$ mit $\mathfrak{M}_i \models T$

Aus $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \dots$ folgt $\mathfrak{M}_\omega \models T$ □

Lemma 3.22. T ist modellvollständig $\Leftrightarrow$ für jedes $\mathfrak{M}$ ist $T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ eine vollständige $\mathcal{L}_M$-Theorie.

Beweis. $\Rightarrow$: Seien $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \models T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$. Zu zeigen ist $\mathfrak{N}_1 \equiv \mathfrak{N}_2$ in $\mathcal{L}_M$.

$\mathfrak{N}_i \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{M}) \Leftrightarrow$ es gibt eine Einbettung $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{N}_i$ d.h. ohne Einschränkung $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_i$.

$$\mathfrak{N}_1 \models T \overset{\supseteq}{\succcurlyeq} \mathfrak{M} \models T \overset{\subseteq}{\preccurlyeq} \mathfrak{N}_2 \models T$$

T modellvollständig $\Rightarrow \subseteq = \preccurlyeq$

Sei φ $\mathcal{L}_M$-Aussage

Dann $\mathfrak{N}_1 \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{N}_2 \models \varphi$.

$\Leftarrow$: Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Dann $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \underbrace{T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})}_{\text{vollständig}}$

Sei φ $\mathcal{L}_M$-Aussage:

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M}) \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi$$

$\square$

Beispiel 3.23.

- $\mathcal{L} = \emptyset$

  $T_\infty = \{\exists^{\geq n} x\ x \doteq x \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist Modellvollständig

  $T = \emptyset$ ist nicht modellvollständig

- $\mathcal{L} = \{<\}$ dichte offene lineare Ordnungen sind modellvollständig und haben Quantorenelimination

- $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$

  ACF = Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper

  ACF_p = Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p

  Beide Theorien sind modellvollständig und haben Quantorenelimination

- Formal reell abgeschlossene Körper $FRCF = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$ ist modellvollständig (ohne Quantorenelimination)

  z.B. $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $\exists x(ax^2 + bx + c \doteq 0)$ $\mathcal{L}_R$-Formel.

$$\left(\mathbb{R} \models \exists x(ax^2 + bx + c \doteq 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq 0\right)$$

$$\exists x(ax^2 + bx + c \doteq 0) \sim_{FRCF} \forall y(b^2 - 4ac = 0 \vee y^2 \neq -(b^2 - 4ac))$$

  Reell abgeschlossene Körper $RCF = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, \leq)$ hat Quantorenelimination

$$x \leq y \sim \exists z\ z^2 = y - x \sim \forall z\ (y - x \doteq 0 \vee z^2 \neq x - y)$$

Anwendung: Hilberts Nullstellensatz

Sei $K \models ACF$ und seien $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$

$\langle f_1, \ldots, f_m \rangle = \{f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m \mid g_i \in K[\overline{X}]\}$ das von den f_i erzeugte Ideal.

Wenn $\overline{a} \in K$ so dass $f_1(\overline{a}) = \cdots = f_m(\overline{a}) = 0$ dann auch $h(\overline{a}) = 0$ für jedes $h \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$

Wenn $1 \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, dann existiert keine gemeinsame Nullstelle der f_i.

Nullstellensatz: Falls $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ echtes Ideal, existiert $\overline{a} \in K$ mit $f_1(\overline{a}) = \cdots = f_m(\overline{a}) = 0$

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ ein maximales Ideal, das $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ enthält.

$K \hookrightarrow \underbrace{K[\overline{X}]/\mathfrak{M}}_{\text{Körper}} \subseteq \underbrace{\widetilde{K[\overline{X}]/\mathfrak{M}}}_{\text{alg. Abschluss}} = K_1$

$\Rightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ ist gemeinsame Nullstelle von allen Polynomen in $\mathfrak{M}$.

$K_1 \models \exists x_1 \ldots \exists x_n (f(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0 \wedge \cdots \wedge f_m(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0)$

Da ACF Modellvollständig also $K \models \exists x_1 \ldots \exists x_n (f(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0 \wedge \cdots \wedge f_m(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0)$ da $K \preccurlyeq K_1$. □

3.2 Quantorenelimination

Definition 3.24. T hat Quantorenelimination (QE), falls jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ zu einer quantorenfreien Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ äquivalent modulo T ist.

Wichtig: ψ darf nicht mehr freie Variablen als φ haben.

Insbesondere: Jede $\mathcal{L}$-Aussage ist zu einer quantorenfreien $\mathcal{L}$-Aussage äquivalent

Bemerkung 3.25. Falls T QE hat und keine Konstanten in der Sprache sind, dann ist entweder T inkonsistent oder T ist vollständig. (Denn $\top, \bot$ sind die einzigen quantorenfreien Aussagen, T konsistent, φ $\mathcal{L}$-Aussage: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash (\varphi \leftrightarrow \top)$ und $T \nvdash \varphi \Leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \bot)$)

Bemerkung 3.26. Wenn T Quantorenelimination hat ist T modellvollständig, denn jede quantorenfreie-Formel ist universell.

Beispiel 3.27. $\mathcal{L} = \{p\}$ mit p einstellige Relation

$T = T_\infty \cup \{\forall x px \vee \forall x \neg px\}$

T hat keine QE
$$T \vdash (\forall x px \leftrightarrow ?)$$

T hat 2 Vervollständigungen:

$$T^+ \vdash T \cup \{\forall x px\}$$
$$T^- \vdash T \cup \{\forall x \neg px\}$$

beide haben QE.

Bemerkung 3.28 (Morleyisierung)**.** T kann durch eine definitorische Erweiterung zu einer Theorie T^* die Quantorenelimination hat gemacht werden.

Sei T $\mathcal{L}$-Theorie. Für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ wähle neues n-stelliges Relationszeichen R_φ und setze
$$\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \cup \{R_\varphi \mid \varphi \ \mathcal{L}\text{-Formel}\}$$
T^* ist dann eine $\mathcal{L}^*$-Theorie

$$T \cup \{\forall x_1, \dots, \forall x_n (R_\varphi x_1 \dots x_n \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n))\}$$

T^* hat Quantorenelimination. Jedes Modell $\mathfrak{M}$ von T wird auf eindeutige Weise zu Modell von T^*.

Beweis. Zweiter Teil: Damit $\mathfrak{M}$ zu Modell $\mathfrak{M}^*$ von T^* wird, muss gelten $(m_1, \dots, m_n) \in R_\varphi^{\mathfrak{M}^*} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$.

Erster Teil: Jede $\mathcal{L}$-Formel φ ist modulo T^* quantorenfrei, nämlich zu R_φ.

Sei ψ eine $\mathcal{L}^*$-Formel. Dann ist ψ modulo T^* äquivalent zu einer $\mathcal{L}$-Formel ψ_*, die aus ψ entsteht, indem jedes R_φ durch φ ersetzt wird. Dann

$$\psi \sim_{T^*} \psi_* \sim_{T^*} \underbrace{R_{\psi_*}}_{\text{q.f. } \mathcal{L}^*\text{-Formel}}$$

$\square$

Manche Eigenschaften bleiben beim Übergang $T \rightsquigarrow T^*$ erhalten manche nicht:

- Erhalten werden

- vollständig
- κ-Kategorisch

- Nicht erhalten werden
  - Arten der Axiomatisierung
  - nicht modellvollständig
  - Substrukturen und Homomorphismen

Beispiel 3.29. $\mathcal{L} = \emptyset, T_\infty = \{\exists^{\geq n} x\, x \doteq x \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\mathfrak{M} \models T_\infty$: $\mathfrak{M}$ ist unendliche Menge ohne Struktur

T_∞ hat Quantorenelimination.

$X \subseteq M^n$ heißt definierbar, falls es eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gibt mit

$$X = \{(m_1, \ldots, m_n) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n)\}$$

Zwei Formeln φ, ψ sind modulo T äquivalent $\Leftrightarrow$ in allen Modellen definieren sie die gleiche Menge.

Atomare Formeln:

- $x \doteq x$ definiert M
- $x \doteq y$ definiert die Diagonale in $M \times M$ $\Delta_M = \{(m, m) \mid m \in M\}$

Negation: $\neg\varphi$ definiert das Komplement der von φ definierten Menge

Konjunktion: definiert Schnitt, falls gleiche Variablen bzw. das Produkt falls disjunkte Variablen

z.B. $x_1 \doteq x_2 \wedge x_3 \doteq x_4$ definiert $\underbrace{\Delta_M \times \Delta_M}_{\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}} \subseteq M^4$

$x_1 \doteq x_2 \wedge x_3 \doteq x_3 \wedge x_4 \doteq x_4$ definiert $\Delta_M \times M^2$

$\exists$: Projektion: Wenn $\varphi(x, y)$ eine Fläche definiert definiert $\exists y \varphi(x, y)$ die Projektion der Fläche auf die x-Achse.

Hier kann man sehen:

$$\left\{\left\{(m_1,\ldots,m_n)\Big|^{m_i=m_j\ (i,j)\in P}_{m_k\neq m_l\ (k,l)\in N}\right\}\Big| P,N\subseteq\{1,\ldots,n\}^2\right\}$$

ist die Familie der in $\mathfrak{M}$ definierbaren Mengen. Beobachtung: Sind alle q.f.-definierbar.

Beispiel 3.30. K algebraisch abgeschlossener Körper

$X \subseteq K^n$ ist definierbar $\Leftrightarrow$ X ist Boolesche Kombination von Nullstellenmengen von Polynomen in $K[x_1,\ldots,X_n]$.

Beispiel 3.31. Ordnungen

- offene dichte lineare Ordnungen haben QE in $\mathcal{L}=\{<\}$
- dichte lineare Ordnungen mit Endpunkten hat keine QE in $\mathcal{L}=\{<\}$

  $\forall y(x \doteq y \vee x<y)$ definiert das Minimum, und ist quantorenfrei nicht definierbar. Aber hat QE in $\mathcal{L}^+=\{<,c_{\min},c_{\max}\}$
- $\mathrm{Th}(\mathbb{Z},<)$

  Die definierbaren Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind $\emptyset,\mathbb{Z}$. Aber in $\mathbb{Z}^2$ gibt es nicht q.f. definierbare Teilmengen z.B. $\{(x_1,x_2)\mid x_2 \text{ ist direkter Nachfolger von } x_1\}$ und wird definiert durch $x_1<x_2\wedge\neg\exists y(x_1<x\wedge x<x_2)$
- $(\mathbb{Q},<)$ hat QE d.h. insbesondere die definierbaren Teilmengen von $\mathbb{Q}^2$ sind

  $$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{Q}} &= \{(q,q)\mid q\in\mathbb{Q}\}\\ <_{\mathbb{Q}} &= \{(q,r)\mid q<r\}\\ >_{\mathbb{Q}} &= \{(q,r)\mid q>r\}\\ &\emptyset\\ \Delta_{\mathbb{Q}}\cup <_{\mathbb{Q}}&\\ \Delta_{\mathbb{Q}}\cup >_{\mathbb{Q}}&\\ <_{\mathbb{Q}}\cup >_{\mathbb{Q}} &= \mathbb{Q}^2\setminus\Delta_{\mathbb{Q}}\\ &\mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$
- In $\mathcal{L}=\{+,\cdot,-,0,1\}$ haben QE: ACF, ACF_0, ACF_p

  $FRCF=\mathrm{Th}(\mathbb{R},+,\cdot,-,0,1)$ nicht

Definition 3.32. Eine primitive Existenzformel ist eine Formel von der Form

$$\exists y\ \varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$$

Mit φ ist Konjunktion von atomaren und negiert atomaren Formeln.

Lemma 3.33. T hat QE $\Leftrightarrow$ jede primitive Existenzformel ist modulo T quantorenfrei.

Beweis. $\underline{\Rightarrow:}$ klar

$\underline{\Leftarrow:}$ Einfache Existenzformel

$$\exists y \psi(\overline{x}, y) \sim \exists y \bigvee_j \bigwedge_i (\neg)\psi_{ij}(\overline{x}, y) \sim \bigvee \underbrace{\exists y \bigwedge_i (\neg)\psi_{ij}(\overline{x}, y)}_{\text{primitiv}} \tag{1}$$

nach Voraussetzung $\sim_T \bigvee_j q.f.$

Einfache Allformel: $\varphi = \forall y \psi(\overline{x}, y)$ dann ist $\neg\varphi \sim \exists y \neg\psi(\overline{x}, y)$ einfache Existenzformel.

$\sim_T \chi$ q.f.

$\Rightarrow \varphi \sim_T \neg\chi$ quantorenfrei

Beliebige Formel: Quantor für Quantor regeln Anwenden $\square$

Satz 3.34. Sei T $\mathcal{L}$-Theorie. Äquivalent sind:

1) T hat QE

2) Für alle Modelle $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ mit gemeinsamer Unterstruktur $\mathfrak{A}$ gilt $\mathfrak{M}_A \equiv \mathfrak{N}_A$, das heißt
$$\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\overline{a})$$
für $\mathcal{L}$-Formeln φ und $\overline{a} \in A$

   Mit anderen Worten $T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ ist vollständig für Unterstrukturen $\mathfrak{A}$ von Modellen von T (T ist substrukturvollständig)

3) Für alle $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ und endlich erzeugte Unterstrukturen $\mathfrak{A} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und jede primitive Existenzformel $\varphi(\overline{x}) = \exists y \psi(\overline{x}, y)$ und $\overline{a} \in A$ gilt:
$$\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\overline{a})$$

   Falls $\mathcal{L}$ keine Konstanten enthält, ist in 2) und 3) auch die leere Struktur $\emptyset$ als Unterstruktur zugelassen.

Beweis. $\underline{2) \Rightarrow 3):}$ klar

$\underline{1) \Rightarrow 2):}$ Wegen QE gilt: $T \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \chi(\overline{x})$ mit q.f. χ.

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \chi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \chi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\overline{a})$$

<u>3) $\Rightarrow$ 1)</u>: Es reicht zu zeigen, dass primitive Existenzformeln modulo T q.f. sind. Sei $\varphi(\overline{x})$ primitive Existenzformel und seien

$$T^+ := T \cup \{\varphi(\overline{c})\} \qquad T^- := T \cup \{\neg\varphi(\overline{c})\}$$

$\mathcal{L}_C$-Theorien wobei $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cup \{\overline{c}\}$.

Wie bei der universellen Präservation reicht es zu zeigen, dass T^+ quantorenfrei von T^- getrennt werden kann.

Trennungslemma: Es reicht zu zeigen: Wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T, \mathfrak{M} \models T^+$ und $\mathfrak{N}$ nicht quantorenfrei trennbar von $\mathfrak{M}$, dann $\mathfrak{N} \models T^+$.

$\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} = \langle c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{M}} \rangle \subseteq \mathfrak{M}$

$\mathfrak{A}^{\mathfrak{N}} = \langle c_1^{\mathfrak{N}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{N}} \rangle \subseteq \mathfrak{N}$

Zeige $\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} \cong \mathfrak{A}^{\mathfrak{N}}$ (Dann fertig, weil ohne Einschränkung dann $\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}$ gemeinsame Unterstruktur $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a})$ also $\mathfrak{N} \models \varphi(\overline{a})$)

$\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} = \{\tau^{\mathfrak{M}} \mid \tau$ geschlossene $\mathcal{L}_{\overline{C}}$-Terme$\} = \{\tau^{\mathfrak{M}}(\overline{a}) \mid \tau$ $\mathcal{L}$-Terme mit $\leq n$ freien Variablen$\}$

$\mathfrak{A}^{\mathfrak{N}} = \{\tau^{\mathfrak{N}} \mid \tau$ geschlossene $\mathcal{L}_{\overline{C}}$-Terme$\} = \{\tau^{\mathfrak{N}}(\overline{b}) \mid \tau$ $\mathcal{L}$-Terme mit $\leq n$ freien Variablen$\}$

Idee: Definiere

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} &\to \mathfrak{A}^{\mathfrak{N}} \\ \tau^{\mathfrak{M}}(\overline{a}) &\mapsto \tau^{\mathfrak{N}}(\overline{b}) \end{aligned}$$

Zeige: Wohldefiniert, injektiv, surjektiv, starker Homomorphismus

- Wohldefiniert?

$$\tau_1^{\mathfrak{M}}(\overline{a}) = \tau_2^{\mathfrak{M}}(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\tau_1(\overline{x}) = \tau_2(\overline{x}))\frac{\overline{a}}{\overline{x}} \Rightarrow \mathfrak{N} \models (\tau_1(\overline{x}) = \tau_2(\overline{x}))\frac{\overline{b}}{\overline{x}} \Leftrightarrow \tau_1^{\mathfrak{N}}(\overline{b}) = \tau_2^{\mathfrak{N}}(\overline{b})$$

$\square$

Folgerung 3.35. Angenommen es gilt: Für alle $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ mit $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ und $b \in M_1$ existiert ein $b' \in \mathfrak{M}_2^* \succcurlyeq \mathfrak{M}_2$ mit

$$\mathfrak{M}_1 \supseteq \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \cong \langle a_1, \dots, a_n, b' \rangle \subseteq \mathfrak{M}_2^*$$

Dann hat T Quantorenelimination.

Beweis. Sei $\exists x \varphi(x, \overline{y})$ primitive Existenzformel und $\mathfrak{M} \models \varphi(b, \overline{a})$. Also $\mathfrak{M}_1 \supseteq \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \models \varphi(b, \overline{a})$.

$\Rightarrow \mathfrak{M}_2^* \supseteq \langle a_1, \dots, a_n, b' \rangle \models \varphi(b', \overline{a})$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_2^* \models \varphi(b', \overline{a})$ d.h. $\mathfrak{M}_2^* \models \exists x \varphi(x, \overline{a})$.

Und da $\mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2^*$ gilt $\mathfrak{M}_2 \models \exists x \varphi(x, \overline{a})$. $\square$

Beispiel 3.36.
- *DLO* hat QE
- $RCF = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, <)$ hat QE (braucht etwas Algebra, siehe Buch von Prestel)
- ACF, ACF_0, ACF_p hat QE:

  Seien $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \models ACF$ und $\mathfrak{A} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$.

  $\mathfrak{A}$ ist Unterstruktur, d.h. Unterring.

  Aus gemeinsamer Unterstruktur folgt das $\mathrm{char}(\mathfrak{K}_1) = \mathrm{char}(\mathfrak{K}_2)$.

  Sei $b \in \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{Q}_1 = \mathrm{Quot}(\mathfrak{A})$ sowie $\mathfrak{Q}_2 = \mathrm{Quot}(\mathfrak{A})$ und $\tilde{\mathfrak{Q}_1}, \tilde{\mathfrak{Q}_2}$ der jeweilige Algebraische Abschluss von $\mathfrak{Q}_i$ in $\mathfrak{K}_i$.

  Da $\mathfrak{K}_1$ algebraisch abgeschlossen, ist auch $\tilde{\mathfrak{Q}_1}$ algebraisch abgeschlossen.

  Algebra: Der Algebraische Abschluss ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt also $\alpha : \tilde{\mathfrak{Q}_1} \cong \tilde{\mathfrak{Q}_2}$.

  <u>1. Fall:</u> b ist algebraisch über $\mathfrak{A}$. Dann finde $b' \in \mathfrak{K}_2$, nämlich $\alpha(b)$.

  <u>2. Fall:</u> b ist transzendent über $\mathfrak{A}$.

  Algebra: Mit $\tilde{Q_1}(b)$ kleinster Unterkörper von $\mathfrak{K}_1$ der $\tilde{Q_1}$ und b enthält und $\tilde{Q}(X)$ dem rationalen Funktionenkörper gilt $\tilde{Q_1}(b) \cong \tilde{Q_1}(X)$.

Finde $b' \in \mathfrak{K}_2^* \succcurlyeq \mathfrak{K}_2$ transzendent über $\tilde{Q}_2$ (bzw. $\mathfrak{A}$). Dann fertig da

$$\tilde{Q}_2(b') \cong \tilde{Q}_2(X) \cong \tilde{Q}_1(X) \cong \tilde{Q}_1(b)$$

b' existiert mit Kompaktheit:

$$T_c \coloneqq \mathrm{Th}(\mathfrak{K}_{2\mathfrak{K}_2}) \cup \{\neg P(c) \doteq 0 \mid P \in \tilde{Q}_2[X], P \neq 0\}$$

ist eine $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}_2 \cup \{c\}}$-Theorie mit c neuer Konstante.

Zeige T_c ist endlich erfüllbar und zwar in $\mathfrak{K}_2$: Für jedes Polynom P ist $\{x \mid P(x) = 0\}$ endlich aber $\mathfrak{K}_2$ ist unendlich.

Definition 3.37. Sei T $\mathcal{L}$-Theorie

1) Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt Primstruktur von T wenn sie sich in jedes Modell von T einbetten lässt.

2) Ein Modell von T $\mathfrak{A}$ heißt algebraisches Primmodell von T, wenn sich $\mathfrak{A}$ in jedes Modell von T einbetten lässt.

3) Ein Modell von T $\mathfrak{A}$ heißt elementares Primmodell von T, wenn sich $\mathfrak{A}$ in jedes Modell von T elementar einbetten lässt.

Satz 3.38.

1) Falls T eine Primstruktur hat und QE hat, dann ist T vollständig

2) Falls T ein algebraisches Primmodell hat und modellvollständig ist, dann ist T vollständig.

3) Falls T ein elementares Primmodell hat, dann ist T vollständig.

Beweis. $\underline{3)}$: $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$.

$\Rightarrow \mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}_2$

$\underline{2)}$: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$.

Da T modellvollständig folgt $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ und damit wie bei 3) $\square$

Beispiel 3.39.

	existiert nicht	eindeutig	nicht eindeutig
Primstrukturen	Theorie der Körper $\aleph_0$ unabh. Prädikate	Theorie der Körper der Charakteristik $p \neq 0$ Theorie der Ord. $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$	Theorie der Körper der Charakteristik 0 DLO
alg. Primmodelle	Theorie der Körper $\aleph_0$ unabh. Prädikate	DLO	Äquivalenzrelationen mit unendlich vielen unendlichen Klassen
elem. Primmodelle	Theorie der Körper $\aleph_0$ unabh. Prädikate	DLO	?

$\aleph_0$ unabhängige Prädikate

$\mathcal{L} = \{P_i \mid i \in \omega\}$ P_i einstellige Relationszeichen

$$T := \left\{ \exists x \left(\bigwedge_{j=0}^{n} P_{i_j} x \wedge \bigwedge_{l=0}^{m} \neg P_{k_l} x \right) \middle| n, m \in \mathbb{N}, \{i_0, \dots, i_n\} \cap \{k_0, \dots, k_m\} = \emptyset, i_j, k_l \in \mathbb{N} \right\}$$

$m \in M$ definiert Funktion $\chi_m : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ durch $\chi_m(i) = 1 \Leftrightarrow m \in P_i^M$. Löwenheim Skolem: es gibt abzählbare Modelle $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$ mit $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \models T$, dann muss für jedes $m \in M$ die Funktion χ_m in $\mathfrak{M}'$ realisiert sein.

Wenn $m \in$ Primstruktur, müsste also χ_m in jedem Modell von T realisiert sein.

Definition 3.40. Sei T $\mathcal{L}$-Theorie. Eine $\mathcal{L}$-Theorie T^* heißt Modellbegleiter von T falls

1) $T_\forall = T^*_\forall$, d.h. jedes Modell von T lässt sich in ein Modell von T^* einbetten und umgekehrt.

2) T^* ist modellvollständig

Satz 3.41 (Robinson)**.** Bis auf Äquivalenz von Theorien ist der Modellbegleiter eindeutig bestimmt, sofern er existiert.

Beweis. Seien T^*, T^+ Modellbegleiter von T. Sei $\mathcal{A}_0 \models T^*$.

$\mathfrak{A}_0 \models T^* \subseteq \mathfrak{M}_0 \models T \subseteq \mathfrak{B}_0 \models T^+ \subseteq \mathfrak{N}_0 \models T \subseteq \mathfrak{A}_1 \models T^* \subseteq \mathfrak{M}_1 \models T \subseteq \mathfrak{B}_1 \models T^+ \subseteq \dots$

$\Rightarrow \mathfrak{A}_0 \preccurlyeq \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_0 \preccurlyeq \mathfrak{B}_1$, da T^*, T^+ modellvollständig sind.

$\mathfrak{A}_0 \preccurlyeq \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{B}_i \models T^+$, somit $\mathfrak{A}_0 \models T^+$ und Somit $\mathrm{Mod}(T^*) = \mathrm{Mod(T^+)}$. $\square$

Beispiel 3.42.

- ACF ist Modellbegleiter der Theorie der Körper

- $FRCF = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$ ist Modellbegleiter der formal reellen Körper (= anordenbare Körper)

- $RCF = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, <)$ ist Modellbegleiter der Theorie der angeordneten Körper

- DLO ist Modellbegleiter der Theorie der Ordnungen

- Theorie des Zufallsgraphen ist Modellbegleiter der Theorie der Graphen

- Theorie der Gruppen in $\mathcal{L} = \{\circ, ^{-1}, e\}$ hat keinen Modellbegleiter

- DCF_0 differentiell abgeschlossene Körper ist der Modellbegleiter der Theorie der differentiellen Körper

Bemerkung 3.43. Falls T modellvollständig, dann ist T Modellbegleiter von $T_\forall$ (bzw. von jeder Theorie T' mit $T_\forall \subseteq T' \subseteq T$).

z.B. ACF ist Modellbegleiter der Theorie der Integritätsbereiche (=Unterstrukturen der Körper in der Ringsprache)

Definition 3.44. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt T-existenziell abgeschlossen, falls

- $\mathfrak{A} \models T_\forall$ (d.h. es gibt $\mathfrak{M} \models T$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$)

- $\mathfrak{A}$ ist existentiell abgeschlossen in jedem Modell von T, d.h. falls $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M} \models T$, dann $\mathfrak{A} \preccurlyeq_1 \mathfrak{M}$: Also falls $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a})$, $\varphi(\overline{a})$ existentielle $\mathcal{L}_A$-Formel, dann $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$

Satz 3.45. Sei $T^*_\forall = T_\forall$. Dann T^* ist Modellbegleiter von $T \Leftrightarrow$ alle Modelle von T^* sind T-existentiell abgeschlossen.

Beweis. $\underline{\Rightarrow:}$ Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M} \models T$. Dann $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{B} \models T^*$.

$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ da T^* modellvollständig.

Sei nun $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a})$. Dann $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$ also auch $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$.

$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $\mathfrak{A} \models T^*, \mathfrak{B} \models T^*, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeige $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Dann $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{M} \models T$ mit $T^* \supseteq T_\forall$ und $\mathfrak{A} \preccurlyeq_1 \mathfrak{M}$ nach Voraussetzung.

Sei $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$, φ existentiell. Also $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a})$ und somit auch $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$, da $\mathfrak{A} \preccurlyeq_1 \mathfrak{M}$. Robinsons Test! $\square$

Satz 3.46. Falls es eine $\mathcal{L}$-Theorie T^* gibt, so dass $\mathrm{Mod}(T^*) = \{\mathfrak{M} \models T_\forall \mid \mathfrak{M}\ T\text{-ex. abgeschlossen}\}$. Dann ist T^* Modellbegleiter von T.

Beweisidee.
- $T_\forall \subseteq T^*$ nach Voraussetzung
- Umkehrung: zeige, dass sich jedes Modell von $T_\forall$ zu einer T-existentiell abgeschlossenen Struktur erweitern lässt. (dann $T_\forall = T^*_\forall$)
- Modellvollständigkeit folgt mit dem vorherigen Satz

□

Definition 3.47. Theorie T hat Amalgamierungseigenschaft (AP), falls jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_1 \models T & & \mathfrak{M}_2 \models T \\
& \mathfrak{M}_0 \models T \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

sich zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{M}_3 \models T & \\
\mathfrak{M}_1 \models T \arrow[ur, hook, "g_1"] & & \mathfrak{M}_2 \models T \arrow[ul, hook, "g_2"'] \\
& \mathfrak{M}_0 \models T \arrow[ul, hook, "f_1"] \arrow[ur, hook, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

vervollständigen lässt. Kommutativ heißt $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

Satz 3.48. Falls T universell ist und AP hat, und falls T^* Modellbegleiter von T dann hat T^* QE. (In diesem Fall heißt T^* auch Modellvervollständigung von T).

Beweis.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathfrak{M} \models T^* & \\
& \mathfrak{M}' \models T \arrow[u, hook] & \\
\mathfrak{M}_1{}' \models T \arrow[ur, hook] & & \mathfrak{M}_2{}' \models T \arrow[ul, hook] \\
\mathfrak{M}_1 \models T^* \arrow[u, hook] \arrow[uuur, bend left=60, dash, "\preccurlyeq"] & & \mathfrak{M}_2 \models T^* \arrow[u, hook] \arrow[uuul, bend right=60, dash, "\succcurlyeq"'] \\
& \mathfrak{A} \models T^*_\forall = T_\forall = T \arrow[ul, hook, "\supseteq"'] \arrow[ur, hook, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathfrak{M}'$ existiert wegen Amalgamierungseigenschaft. Die Einbettungen von Modellen von T^* in Modelle von T funktioniert wegen der Modellbegleitereigenschaft.

Also $\mathfrak{M}_i \equiv \mathfrak{M}$ in $\mathcal{L}_{M_i}$ insbesondere $\mathfrak{M}_i \equiv \mathfrak{M}$ in $\mathcal{L}_A$. Kriterium für QE! $\square$

Bemerkung 3.49.

$$T^* \text{ hat QE} \Leftrightarrow T^* \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) \text{ ist vollständig für alle } \mathfrak{A} \models T^*_\forall$$

$$\begin{aligned} & T^* \text{ ist Modellvervollständigung von } T \\ \Leftrightarrow & T^* \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) \text{ ist vollständig für alle } \mathfrak{A} \models T, \mathfrak{A} \models T^* \text{ und } T^*_\forall = T_\forall \end{aligned}$$

T^* ist Modellbegleiter von $T \Leftrightarrow T^* \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ ist vollständig für alle $\mathfrak{A} \models T^*$ und $T^*_\forall = T_\forall$

Bemerkung 3.50. Wenn T modellvollständig ist hat T die Amalgamierungseigenschaft.

Beweis.

$$\mathfrak{M}_1 \models T \supseteq \mathfrak{M}_0 \models T \subseteq \mathfrak{M}_2 \models T$$

Zu zeigen $T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M}_1) \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M}_2)$ ist konsistent. Angenommen nicht dann ist $T \cup \{\varphi(\overline{m}_1), \psi(\overline{m}_2)\}$ ist inkonsistent. d.h. $T \vdash (\varphi(\overline{m}_1) \to \neg\psi(\overline{m}_2))$.

Interpolationssatz: $T \vdash (\varphi(\overline{m}_1) \to \chi(\overline{m}_0)) \wedge (\chi(\overline{m}_0) \to \neg\psi(\overline{m}_2))$ mit $\chi(\overline{m}_0)$ $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}_0}$-Formel.

Das heißt

$$\mathfrak{M}_1 \models \chi(\overline{m}_0)$$
$$\mathfrak{M}_2 \models \neg\chi(\overline{m}_0)$$

$\lightning$ zu $T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M}_0)$ ist vollständig. □

4 Abzählbare Modelle

4.1 Typen

Definition 4.1. $\mathfrak{M}$ sei $\mathcal{L}$-Struktur, $A \subseteq M$.

- Eine Menge $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ von $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ heißt endlich erfüllbar in $\mathfrak{M}$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Sigma$

  $$\mathfrak{M} \models \exists x_1 \dots \exists x_n (\varphi_1(\overline{x}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\overline{x})$$

  äquivalent: es gibt $m_1, \dots, m_n \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi_1(\overline{m}) \wedge \dots \wedge \varphi_k(\overline{m})$

- $\mathfrak{M}$ realisert Σ (oder $\mathfrak{M}$ erfüllt Σ), falls es $m_1, \dots, m_n \in M$ gibt mit $\mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$ für alle $\varphi \in \Sigma$.

- Sonst $\mathfrak{M}$ übergeht Σ ($\mathfrak{M}$ lässt Σ aus)

Lemma 4.2. Σ endlich erfüllbar in $\mathfrak{A} \Leftrightarrow$ es gibt $\mathfrak{B} \succcurlyeq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ realisiert Σ

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$ klar

$\underline{\Rightarrow}$ zeige: $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \Sigma(\overline{c})$ ist endlich erfüllbar. □

Definition 4.3.
- Eine Menge $p = p(x_1, \dots, x_n)$ von $\mathcal{L}_A$-Formeln heißt (vollständiger) n-Typ über A in $\mathfrak{M}$, falls p maximale in $\mathfrak{M}$ endlich erfüllbare Menge von $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ist.

  Äquivalent: Für jede $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ist $\varphi \in p$ oder $\neg\varphi \in p$.

- Wenn $m_1, \dots, m_n \in M$, dann ist

  $$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_1, \dots, m_n/A) = \{\varphi(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi\ \mathcal{L}_A\text{-Formel}\ \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)\}$$

  der (vollständige) Typ von $(m_1, \dots, m_n)$ über A in $\mathfrak{M}$.

- Die Menge der n-Typen über A in $\mathfrak{M}$ wird mit $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ bezeichnet.

  Wenn $\mathfrak{M}$ aus dem Kontext ersichtlich ist, schreibt man $\mathrm{tp}(\overline{m}/A), S_n(A), \ldots$

  Häufig schreibt man $S^{\mathfrak{M}}(A)$ für $S_1^{\mathfrak{M}}(A)$

Bemerkung 4.4.
- $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\overline{m}/A)$ ist ein vollständiger Typ
- Jeder n-Typ über A in $\mathfrak{M}$ ist in einer elementaren Erweiterung von $\mathfrak{M}$ realisiert.

Bemerkung 4.5. Wir betrachten $\mathcal{L}_A$-Formeln modulo Äquivalenz in $\mathfrak{M}$,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \sim_{\mathfrak{M}} \psi(x_1, \ldots, x_n) :\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$$

Allgemein hängt es von $\mathfrak{M}$ ab, d.h. wenn $A \subseteq M, A \subseteq N$, dann kann sich $\sim_{\mathfrak{M}}$ von $\sim_{\mathfrak{N}}$ unterscheiden!

Aber: Falls $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ und T hat QE, und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}, \mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}$, dann stimmt Äquivalenz für $\mathcal{L}_A$-Formeln in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ überein!

Boolesche Algebra $\mathcal{F}_n(\mathcal{L}_A)$: Formeln mit feien Variablen unter $v_0, \ldots, v_{n-1}$ und Parametern (=neue Konstanten) für Elemente aus A.

$\sim_{\mathfrak{M}}$ ist Kongruenzrelation auf $\mathcal{F}_n(\mathcal{L}_A)$, das heißt $\mathcal{F}_n(\mathcal{L}_A)/\sim_{\mathfrak{M}}$ ist Boolesche Algebra.

$\mathcal{F}_n(\mathcal{L}_A) \to \mathcal{F}_n(\mathcal{L}_A)/\sim_{\mathfrak{M}}, \varphi \mapsto$ Äquivalenzklasse von φ bezüglich $\sim_{\mathfrak{M}}$ ist Homomorphismus boolescher Algebren.

Unterbemerkung: $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ sei surjektiver Homomorphismus Boolescher Algebren.

$b \sim_h c :\Leftrightarrow h(b) = h(c)$, dann ist $\sim_h$ Kongruenzrelation und $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}/\sim_h$.

h bzw. $\sim_h$ ist bestimmt durch

$$\{b \in B \mid h(b) = 0\} = \ker(h)$$

bzw. durch

$$\{b \in B \mid h(b) = 1 = \ker^*(h)\}$$

$S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ ist der Stone-Raum von $\mathcal{F}_n(\mathcal{L}_A)/\sim_{\mathfrak{M}}$ (vollständiger n-Typ = Ultrafilter dieser Algebra).

Insbesondere ist $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ ein kompakter (total unzusammenhängender) topologischer Raum.

Bemerkung 4.6. Wenn $p, q \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$, $p \neq q$ dann gibt es $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\varphi \in p, \varphi \notin q$ und damit $\neg\varphi \in q$.

Also $p \in \langle\varphi\rangle = \{r \in S_n^{\mathfrak{M}}(A) \mid \varphi \in r\}$

$q \in \langle\neg\varphi\rangle$

$\langle\varphi\rangle, \langle\neg\varphi\rangle$ disjunkte clopen Mengen, die p und q trennen (insb. Hausdorffsch).

Beispiel 4.7.

- $n = 0$, $S_0^{\mathfrak{M}}(\emptyset) = \{\mathrm{Th}(\mathfrak{M})\}$ einelementig
- $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, <), n = 1$

  $A = \emptyset : \{\{x \doteq x\}^{\vdash}\}$

  $A = \mathbb{Z} :$

  - $\{x < n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ unendlich klein
  - $\{n < x \mid n \in \mathbb{Z}\}$ unendlich groß
  - $\{x \doteq n\}, \{n < x, x < n + 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$

  2-Punkt-Kompaktifizierung von $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

  $A = \mathbb{Q}$, $S_1^{\mathfrak{Q}}(\mathbb{Q})$

  - realisierte Typen $p_q = \{x \doteq q\}^{\vdash}$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$
  - $p_{-\infty} = \{x < q \mid q \in \mathbb{Q}\}^{\vdash}$
  - $p_{+\infty} = \{q < x \mid q \in \mathbb{Q}\}^{\vdash}$
  - $p_r = \{q < x, x < q' \mid q < r, r < q'\}$ für $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
  - $p_q^+ = \{q < x, x < q' \mid q < q'\}$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$
  - $p_q^- = \{q' < x, x < q \mid q' < q\}$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$

Beispiel 4.8.

- $\mathbb{C} \models ACF$, sei $n = 1$ und A ein Unterkörper

  Wie sieht $S_1^{\mathbb{C}}(A)$ aus?

  Realisierte Typen: $p_a = \{x \doteq a\}^{\vdash}$ für $a \in A$.

Nicht realisierte algebraische Typen: $p_P = \{P(x) \doteq 0\}$ mit $P \in A[X]$ und $\deg P > 1$ und P normiert und irreduzibel

Bem: Falls $\alpha \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{M}) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}) \mid a_{|A} = id\}$ dann ist

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_n/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_n)/A)$$

Transzendenter Typ: $p_\infty = \{P(x) \neq 0 \mid P \in A[X], P \text{ nicht konstant}\}$ (in $\mathbb{C}$ realisiert $\Leftrightarrow \tilde{A} \neq \mathbb{C}$)

- Sei E eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen unendlichen Klassen und ohne endlich Klassen. Setze $n = 2, A = \emptyset$

  $p_= = \{x \doteq y\}^\vdash$

  $p_E = \{x \neq y, Exy\}^\vdash$

  $p_{\neg E} = \{\neg Exy\}^\vdash$

Satz 4.9. Gegeben $\mathfrak{M}$, $A \subseteq \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\mathfrak{M}' \succcurlyeq \mathfrak{M}$, welches alle Typen aus $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ realisiert.

Beweis. Sei $\{p_i \mid i \in \kappa\}$ Aufzählung von $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$. Nehme neue Konstanten $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}$ für alle $i < \kappa$ betrachte $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_M) \cup \{p_i(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \mid i < \kappa\}$.

Zeige: ist endlich erfüllbar. Es reicht zu zeigen:

$$\varphi_{j_1}(c_{j_{1_1}}, \ldots, c_{j_{1_n}}) \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_k}(c_{j_{k_1}}, \ldots, c_{j_{k_n}})$$

ist durch geeignete Interpretation der c_j in $\mathfrak{M}$ erfüllbar.

Das ist der Fall, da die Typen in $\mathfrak{M}$ endlich erfüllbar. $\square$

Definition 4.10. Ein n-Typ $p \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ heißt

- realisiert, falls eine Formel

  $$x_1 \doteq a_1 \wedge \cdots \wedge x_n \doteq a_n \in p$$

- isoliert, falls es eine Formel φ gibt, so dass p der einzige Typ aus $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ ist, der φ enthält.

  $$\left(\langle\varphi\rangle = \{q \in S_n^{\mathfrak{M}}(A) \mid \varphi \in q\} \overset{!}{=} \{p\}\right)$$

  Äquivalent: p ist isolierter Punkt im Stone-Raum, d.h. $\{p\}$ ist offen.

Bemerkung 4.11.
- Die realisierten Typen sind durch die Formel $x_1 = a_1 \wedge \cdots \wedge x_n \doteq a_n$ isoliert.
- Ein isolierter Typ ist in $\mathfrak{M}$ realisiert, denn $\mathfrak{M} \models \exists \overline{x} \varphi(\overline{x})$ das heißt es gibt $\overline{m} \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m})$. Also $\varphi \in \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\overline{m}/A)$ somit $p = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\overline{m}/A)$

Bemerkung 4.12. Ein unendlicher kompakter Raum besitzt nicht isolierte Punkte.

Angenommen $T = \{p_i \mid i \in \kappa\}$ und alle p_i sind isoliert.

$$T = \bigcup_{i \in \kappa} \{p_i\}$$

also eine offene Überdeckung. Da der Raum kompakt ist existiert eine endliche Teilüberdeckung. $\Rightarrow \kappa$ endlich

4.2 Der Omitting-Types-Satz

Beispiel 4.13. $\mathcal{L} = \{c_i \mid i \in \omega\}$

$T = \{\neg c_i \doteq c_j \mid i \neq j\}$

vollständige Theorie (mit QE)

$\mathfrak{M} \models T$

$$M = \underbrace{\{c_i^{\mathfrak{M}} \mid i \in \omega\}}_{\text{abzählbar unendl.}} \cup \text{evtl. weitere Elemente}$$

$S_1^{\mathfrak{M}}(\emptyset)$

$$p_i = \{x \doteq c_i\}^{\vdash}$$
$$p_\infty = \{x \neq c_i \mid i \in \omega\}^{\vdash}$$

Die p_i sind in allen Modellen realisiert. Der Typ p_∞ dagegen kann übergangen werden nämlich im Primmodell $\mathfrak{M}_\circ = \{c_i^{\mathfrak{M}_\circ} \mid i \in \omega\}$.

Definition 4.14. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie.

Sei S_n^T die Menge der n-Typen in T, also maximale mit T konsistente Menge von $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$.

Sei S_ω^T die Menge der ω-Typen in T, also maximale mit T konsistente Mengen von $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ mit n variabel.

p n-Typ in T

$\Leftrightarrow$ $T \cup p$ ist konsistent und für alle $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ist $\varphi \in p$ oder $\neg\varphi \in p$

$\Leftrightarrow$ Es gibt Modell $\mathfrak{M} \models T$ und $m_0, \ldots, m_{n-1} \in M$ mit $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_0, \ldots, m_{n-1}/\emptyset) = p$

$\Leftrightarrow$ p entspricht Ultrafilter in $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})/\sim_T$

p ω-Typ in T

$\Leftrightarrow$ $T \cup p$ ist konsistent und für alle n und für alle $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ist $\varphi \in p$ oder $\neg\varphi \in p$

$\Leftrightarrow$ Es gibt Modell $\mathfrak{M} \models T$ und $m_i \in M, i \in \omega$ mit $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_0, \ldots/\emptyset) = p$

$\Leftrightarrow$ p entspricht Ultrafilter in $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})/\sim_T$

Bemerkung 4.15.

$$S_n^T = \bigcup\{S_n^{T'} \mid T' \text{ ist Vervollständigung von } T\}$$

Definition 4.16. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\Sigma(\overline{x})$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi(\overline{x})$.

- $\varphi(\overline{x})$ realisiert lokal $\Sigma(\overline{x})$, falls
  - $T \cup \{\varphi(\overline{x})\}$ ist konsistent
  - $T \vdash \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \rightarrow \sigma(\overline{x}))$ für jedes $\sigma \in \Sigma$.
- T lässt $\Sigma(\overline{x})$ aus, falls es ein $\mathfrak{M} \models T$ gibt so dass für alle $\overline{m} \in M$

$$\Sigma \nsubseteq \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\overline{m}/\emptyset)$$

Bemerkung 4.17. Falls φ Σ lokal realisiert und

1) $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{x})$, dann realisiert $\mathfrak{M}$ Σ.
2) $T \vdash \exists\overline{x}\varphi(\overline{x})$, dann lässt T Σ nicht aus.

Satz 4.18 (Omitting Types)**.** Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, und $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$.

Falls $\Sigma(\overline{x})$ nicht lokal realisiert ist, gibt es $\mathfrak{M} \models T$ welches Σ auslässt.

<u>Einschub: Etwas Topologie</u>

Definition 4.19. Sei X ein Topologischer Raum.

$N \subseteq X$ heißt nirgends dicht, falls es keine offene Menge $\mathcal{O} \neq \emptyset$ mit $\mathcal{O} \subseteq \overline{N}$ gibt. (jedes offene $\mathcal{O} \neq \emptyset$ schneidet $X \setminus N$)

$M \subseteq X$ heißt mager, falls $M \subseteq \bigcup_{i \in \omega} N_i$ mit N_i nirgends dicht.

Bemerkung 4.20. Die mageren Mengen bilden ein σ-Ideal, das heißt

- $A \subseteq M$ mager $\Rightarrow A$ mager
- M_i mager $\Rightarrow \bigcup_{i \in \omega} M_i$ mager

Satz 4.21 (Satz von Baire)**.** Jeder lokal-kompakte Hausdorff-Raum ist nicht mager.

Hausdorff: Für alle $x \neq y$ existieren disjunkte offene Mengen $x \in \mathcal{O}_x, y \in \mathcal{O}_y$

Lokal-Kompakt: Für alle x gibt es offene Menge $x \in \mathcal{O}_x$ so dass $\overline{\mathcal{O}_x}$ kompakt ist.

Beweis. $S(\mathcal{F}_{n/\infty}(\mathcal{L})/\sim_T)$: Abgeschlossene Mengen in solch einem Stone-Raum?

$$\begin{aligned} N \text{ abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad N &= \bigcap_{i \in I} \langle \varphi_i \rangle \\ &= \{p \mid \varphi_i \in p, i \in I\} \\ &= \{p \mid \Sigma \subseteq p\} \end{aligned}$$

mit $\Sigma = \{\varphi_i \mid i \in I\}$.

Abgeschlossene Mengen entsprechen Theorien/Formelmengen in $\mathcal{F}_{n/\infty}(\mathcal{L})/\sim_T$.

Wann ist N nirgends dicht?

N nicht nirgends dicht

$\Leftrightarrow$ Es gibt φ mit $\langle \varphi \rangle \subseteq N$ $\varphi \nsim_T \perp$ d.h. φ konsistent mit T

$\Leftrightarrow$ (falls N durch Σ gegeben) jedes p mit $\varphi \in p$ erfüllt $\Sigma \subseteq p$, das heißt φ realisiert lokal Σ.

Kontraposition: nirgends dicht entspricht nicht lokal realisiert

Zeige also: Nirgends dichte Formelmengen können übergangen werden.

1. Schritt: Wähle $\mathfrak{N} \models T$, das für alle n alle n-Typen in T realisiert. (Existenz ähnlich wie bei dem Satz über die elemenatare Erweiterung, die alle $p \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ realisiert).

Sei $A \subseteq N$ abzählbar $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$. Was muss $\mathrm{tp}((a_i)_{i\in\omega})$ erfüllen, damit A Träger eine elementaren Unterstruktur ist?

Gilt Tarskis Test? Betrachte Formel $\varphi(\overline{x}, y)$ (Erinnerung: Falls $\mathfrak{N} \models \exists y\varphi(\overline{a}, y)$ dann gibt es solch ein y in A)

Setze

$$\mathcal{O}_\varphi := \bigcup_{i\in\omega} \langle(\exists y\varphi(\overline{x}, y) \to \varphi(\overline{x}, x_i))\rangle$$

ω-Typ $p(x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{O}_\varphi \Leftrightarrow$ Realisierung von p erfüllt Tarskis Test für φ

$p(x_0, x_1, \dots) \in \bigcap_\varphi \mathcal{O}_\varphi \Leftrightarrow$ Realisierung ist Träger einer elementaren Unterstruktur

2. Schritt: Behauptung: $S_\omega^T \setminus \mathcal{O}_\varphi$ ist nirgends dicht. Also falls $\mathcal{O} \neq \emptyset$ offen, ist $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_\varphi \neq \emptyset$. Ohne Einschränkung $\mathcal{O} = \langle\psi(\overline{x})\rangle$.

Wähle i so, dass x_i weder in $\varphi(\overline{x}, y)$ noch in $\psi(\overline{x})$ vorkommt. Dann ist $T \cup \{\exists y\varphi(\overline{x}, y) \to \varphi(\overline{x}, x_i), \psi(\overline{x})\}$ konsistent.

Folglich ist $S_\omega^T \setminus \bigcap_\varphi \mathcal{O}_\varphi = \bigcup_\varphi S_\omega^T \setminus \mathcal{O}_\varphi$ mager. Da $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$, gibt es hächstens abzählbar viele Formeln der Form $\exists y\varphi(\overline{x}, y)$.

Mit Baire $S_\omega^T \setminus \bigcap_\varphi \mathcal{O}_\varphi \neq \emptyset$.

3. Schritt: Entferne zusätzlich alles, was Σ realisiert. Problem ist Σ lebt in S_n^T nicht in S_ω^T.

1) Ein Tupel in A, welches Σ realisiert, könnte beliebige Koordinaten haben.

2) Verschiedene Komponenten könnten gleich sein.

Betrachte also $\alpha : n \to \omega$.

Idee: $\Sigma(v_0, \dots, v_{n-1}) \rightsquigarrow \Sigma(v_{\alpha(0)}, \dots, v_{\alpha(n-1)})$. α induziert Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(\mathcal{L})/\sim_T &\longrightarrow \mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})/\sim_T \\ \varphi(v_0, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto \varphi(v_{\alpha(0)}, \dots, v_{\alpha(n-1)}) \end{aligned}$$

welche wiederum eine Abbildung:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}: \qquad\qquad\qquad S_\omega^T &\longrightarrow S_n^T \\ p(x_0, x_1, \dots) &\longmapsto \text{Einschränkung auf die Variablen } x_{\alpha(0)}, \dots, x_{\alpha(n-1)}\end{aligned}$$

induziert.

Allgemein: $B \to B'$ Homomorphismus Boolescher Algebren induziert stetige Abbildung $S(B') \to S(B)$.

Stetigkeit von $\tilde{\alpha}$: $\tilde{\alpha}^{-1}(\langle\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})\rangle) = \langle\varphi(v_{\alpha(0)}, \dots, v_{\alpha(n-1)})\rangle$.

Hier: $\tilde{\alpha}$ ist sogar offen!

Lemma aus der Topologie: $\alpha : X \to Y$ offene Abbildung dann gilt: $N \subseteq Y$ nirgends dicht $\Rightarrow \alpha^{-1}(M)$ nirgends dicht.

$$\left(S_\omega^T \setminus \bigcap_\varphi \mathcal{O}_\varphi\right) \cup \bigcup_{\alpha:n\to\omega} \alpha^{-1}[\Sigma(\overline{x})]$$

ist mager, also $\neq S_\omega^T$.

Sei $p \notin \left(S_\omega^T \setminus \bigcap_\varphi \mathcal{O}_\varphi\right) \cup \bigcup_{\alpha:n\to\omega} \alpha^{-1}[\Sigma(\overline{x})]$ und $(a_i)_{i\in\omega} \models p$.

Dann ist $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$ Träger einer elementaren Unterstruktur von N die Σ auslässt.

Zeige noch $\tilde{\alpha}$ ist offene Abbildung, das heißt für offenes $\mathcal{O}$ ist $\tilde{\alpha}(\mathcal{O})$ offen.

$\mathcal{O} = \bigcup_{i\in I}\langle\varphi_i\rangle$ Basis offen, dann ist

$$\tilde{\alpha}(\bigcup \dots) = \bigcup \tilde{\alpha}(\dots)$$

Ohne Einschränkung $\mathcal{O} = \langle\varphi\rangle$. Und ohne Einschränkung

$$\varphi = \varphi(\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{\in \mathrm{Bild}(\alpha)}, \underbrace{y_1, \dots, y_l}_{\notin \mathrm{Bild}(\alpha)}) \qquad\qquad x_i, y_j \in \{v_0, \dots\}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\langle\varphi(\overline{x}, \overline{y}\rangle) &= \tilde{\alpha}(\{p \in S_\omega^T \mid \varphi \in p\}) \\ &= \tilde{\alpha}(\{\mathrm{tp}((c_i)_{i\in\omega/\emptyset}) \mid c_i \in N, \mathfrak{N} \models \varphi(\overline{c})\})\end{aligned}$$

$\mathfrak{N}$ soll auch alle ω-Typen $/\emptyset$ realisieren

$$= \{\mathrm{tp}(c_{\alpha(0)}, \dots, c_{\alpha(n)}) \mid c_i \in N, \mathfrak{N} \models \varphi(\overline{c})\}$$

in Variablen $v_0, \dots, v_{n-1}$

$$\begin{aligned}
&= \left\{q \in S_n^T \mid \exists \overline{y} \varphi \left(\frac{v_0, \dots, v_{n-1}}{\overline{x}}, \overline{y}\right) \in q, v_i = v_j \in q \text{für alle } 0 \leq i < j < n \text{ mit } \alpha(i) = \alpha(j)\right\} \\
&= \langle \exists \overline{y} \varphi(\frac{\overline{v}}{\overline{x}}, \overline{y}) \rangle \cap \bigcap_{\alpha(i)=\alpha(j)} \langle v_i \doteq v_j \rangle \\
&= \langle \exists \overline{y} \varphi(\frac{\overline{v}}{\overline{x}}, \overline{y}) \wedge \bigwedge_{\alpha(i)=\alpha(j)} v_i \doteq v_j \rangle
\end{aligned}$$

ist offen.

$\square$

Folgerung 4.22. Sei $X_n \subseteq S_n^T$ mager. Dann gibt es ein Modell $\mathfrak{M} \models T$, das alle X_n übergeht.

Folgerung 4.23.

- Insbesondere: Wenn T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie ist und $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$ und $p \in S_n^T$: p kann übergangen werden $\Leftrightarrow$ p ist nicht isoliert

- Sei $\mathcal{L} \leq \aleph_0$ und X_n magere Mengen von n-Typen. Dann können alle X_n simultan übergangen werden.

  Insbesondere alle abzähbare Mengen von nicht isolierten Typen sind mager!

Bemerkung 4.24. Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ dann gilt

$$\{x_0\} \text{ mager} \Leftrightarrow \{x_0\} \text{ nirgends dicht} \Leftrightarrow x_0 \text{ nicht isoliert}$$

Beispiel 4.25. $\mathcal{L} = \{c\} \cup \{c_i \mid i \in \aleph_1\}$

$T = \{c_i \neq c_j \mid i < j < \aleph_1\}$

$\Sigma(x) = \{x \neq c\} \cup \{x \neq c_i \mid i \in \aleph_0\}$

Σ ist stets realisiert, da jedes $\mathfrak{M} \models T$ überabzählbar ist.

Σ ist nicht lokal realisiert (T hat QE, also wäre eine lokal realisierende Formel von der Form $x = x_\alpha$ für ein $\alpha < \aleph_1$ oder $x = c$ oder die Verneinungen davon)

Definition 4.26. Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ $\mathcal{L}$-Strukturen $A \subseteq M, B \subseteq N$.wenn

$h : A \to B$ heißt elementare Abbildung falls h die Gültigkeit von $\mathcal{L}_A$-Formeln erhält, d.h. $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(h(\overline{a}))$.

$h : A \to B$ heißt partieller Isomorphismus, falls h elementar und bijektiv ist.

Bemerkung 4.27.
- Elementare Abbildungen sind stets injektiv!
- h elementar $\Leftrightarrow \forall \overline{a} : \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\overline{a}/\emptyset) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(h(\overline{a})/\emptyset)$
- Spezialfall: $A = B = \emptyset$ (es existiert genau eine Abbildung $\emptyset \to \emptyset$ die leere Abbildung)

  $h : \emptyset \to \emptyset$ ist elementar $\Leftrightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$
- Falls $h : A \to B$ partieller Isomorphismus.

  Induziert $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L}_A)/\sim_{\mathfrak{M}} \to \mathcal{F}_\infty(\mathcal{L}_B)/\sim_{\mathfrak{N}}$

  Induziert $\tilde{h} : S_n^{\mathfrak{N}}(B) \to S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ einen Homöomorphismus

$$\{\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \mid \varphi \in p\} = p \in S_n(A) \xrightarrow{\tilde{h}^{-1}} \{\varphi(\overline{x}, h(\overline{a})) \mid \varphi \in p\} = q \in S_n(B)$$

Bemerkung 4.28. (ohne Beweis)

Sei $h : A \to B$ partieller Isomorphismus. Dann gibt es $\mathfrak{M}' \succcurlyeq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}' \succcurlyeq \mathfrak{N}$ und $h' : \mathfrak{M}' \overset{\cong}{\to} \mathfrak{N}'$ mit $h'_{|A} = h$.

Bemerkung 4.29. $\mathrm{tp}(a_1, a_2/B) = \{\varphi(x_1, x_2, \overline{b}) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a_1, a_2, \overline{b})\}$ ist bestimmt durch $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_2/B) = \{\varphi(x, \overline{b}) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a_2, \overline{b})\}$ und $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1/B, a_2) = \{\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, a_2, \overline{b})\}$

Sei nun T eine vollständige abzählbare (d.h. $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$) Theorie.

Definition 4.30. $\mathfrak{M} \models T$ heißt atomar, falls für alle n und alle $m_1, \dots, m_n \in M$ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_1, \dots, m_n/\emptyset)$ isoliert ist.

Bemerkung 4.31. Wenn $p \in S_n^{\mathfrak{M}}(\emptyset)$ isoliert ist und zwar durch $\varphi(\overline{x})$ das heißt $\emptyset \neq \langle \varphi(\overline{x}) \rangle = \{p\}$, dann gilt für jede Formel $\psi(\overline{x})$ mit $\mathfrak{M} \models \exists \overline{x} \psi(\overline{x})$

$$\begin{aligned} \text{entweder: } & \mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \to \psi(\overline{x})) \\ \text{oder: } & \mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \to \neg\psi(\overline{x})) \end{aligned}$$

Das heißt $\Phi := \{\overline{m} \in M \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m})\}$ kann nicht definierbar aufgeteilt werden, also definierbare Teilmengen von M^n enthält entweder Φ oder ist disjunkt zu Φ.

In $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})/\sim_{\mathfrak{M}}$ ist φ ein Atom, das heißt ein minimales Elemente oberhalb von $\perp$.

Wenn $\mathfrak{M}$ atomar ist, sind alle $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})/\sim_{\mathfrak{M}}$ atomare Boolesche Algebren.

Satz 4.32. $\mathfrak{M}$ ist genau dann elementares Primmodell von T, wenn $\mathfrak{M}$ atomar und höchstens abzählbar ist.

Beweis. $\underline{\Rightarrow:}$ Angenommen $p = \mathrm{tp}(m_1, \ldots, m_n/\emptyset)$ ist nicht isoliert.

Ommiting Types: Es existiert $\mathfrak{N} \models T$, welches p übergeht. $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ da $\mathfrak{M}$ elementares Primmodell. Dann realisiert $\mathfrak{M}$ höchstens so viele Typen wie $\mathfrak{N}$. $\lightning$

Da $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$ gibt es überhaupt abzählbare Modelle, dann muss ein Primmodell auch abzählbar sein.

$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $M = \{m_i \mid i \in \omega\}$, $\mathfrak{M}$ atomar. Sei $\mathfrak{N} \models T$, konstruiere indukti Einbettung $h : \mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ das heißt wir konstruieren elementare Abbildungen $h_n : \{m_0, \ldots, m_{n-1}\} \to N$ mit $h_n \subseteq h_{n+1}$

$h_0 : \emptyset \to \emptyset$ ist elementar, da $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

$n \to n + 1 :$

$h_n : \{m_0, \ldots, m_{n-1}\} \to N$ sei konstruiert

Behauptung: $\mathrm{tp}(m_n/m_0, \ldots, m_{n-1})$ ist isoliert

$\mathrm{tp}(m_0, \ldots, m_{n-1}, m_n/\emptyset)$ ist isoliert durch $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$, also ist $\mathrm{tp}(m_n/m_0, \ldots, m_{n-1})$ isoliert (in $S_1^{\mathfrak{M}}(m_0, \ldots, m_{n-1})$) durch $\varphi(m_0, \ldots, m_{n-1}, x)$

$h_n : \{m_0, \ldots, m_{n-1}\} \to \{h(m_0), \ldots, h(m_{n-1})\}$ ist partieller Isomorphismus, also ist

$$\tilde{h}_n^{-1}(\mathrm{tp}(m_n/m_0, \ldots, m_{n-1})) \in S_1^{\mathfrak{N}}(h_n(m_0), \ldots, h_n(m_{n-1}))$$

isoliert.

Da $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(m_0, \ldots, m_{n-1}, x)$ gilt $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(h(m_0), \ldots, h(m_{n-1}), x)$

Wähle $h_{n+1}(m_n)$ so dass es in $\mathfrak{N}$ $\varphi(h(m_0), \ldots, h(m_{n-1}, x)$ erfüllt.

$h = \bigcup_{n \in \omega} h_n : M \to N$ ist elementar d.h. $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ ist elementare Einbettung. $\square$

Folgerung 4.33. Wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ elementare Primstrukturen sind, dann $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$. ($|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$ ist wichtig hier!)

Beispiel 4.34.
- ACF_0 hat $\tilde{\mathbb{Q}}$ als elementares Primmodell. Das realisiert nur algebraische Typen, transzendenter Typ wird übergangen.
- $(\mathbb{Q}, <)$ ist $\aleph_0$-Kategorisch also ist $(\mathbb{Q}, <)$ elementares Primodell
- ω unabhängige Prädikate. Es gibt keine isolierten Typen! (S_1^T) ist perfekte Menge

Satz 4.35. T (abzählbar und vollständig) besitzt genau dann ein elementares Primmodell, wenn für alle n die isolierten Typen dicht in S_n^T liegen.

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$ $\mathfrak{M}$ sei elementares Primmodell $\emptyset \neq \langle \varphi(\overline{x}) \rangle$ nicht leere offene Menge in S_n^T.

Da nicht leer ist $\varphi(\overline{x})$ konsistent mit T, das heißt $\mathfrak{M} \models \exists \overline{x} \varphi(\overline{x})$.

Falls $\overline{m} \in M$ so, dass $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m})$ dann ist $\mathrm{tp}^m(\overline{m}/\emptyset) \in \langle \varphi(\overline{x}) \rangle$ isoliert, da $\mathfrak{M}$ atomar.

$\underline{\Leftarrow}$: $I_n = \{p \in S_n^T \mid p \text{ isoliert}\}$

I_n ist offen. $p \in I_n$ wir isoliert durch φ_p also $I_n = \bigcup_{p \in I_n} \langle \varphi_p \rangle$

$S_n^T \setminus I_n$ ist abgeschlossen. Für nirgends dicht zeige falls $\mathcal{O}$ offen und $\mathcal{O} \subseteq S_n^T \setminus I_n$, dann $\mathcal{O} = \emptyset$.

I_n dicht $\Rightarrow I_n \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ für jedes offene $\mathcal{O} \neq \emptyset$.

Omitting Types: Es gibt Modell, das alle $S_n^T \setminus I_n$ simultan übergeht, also nur isolierte Typen realisiert (also atomar). Ohne Einschränkung ist das Modell abzählbar also elementares Primmodell. □

4.3 $\aleph_0$-kategorische Theorien

Löwenheim-Skolem-Tarski: Für jede unendliche Kardinalzahl κ existiert ein Modell der Mächtigkeit κ.

Definition 4.36.
1) $\mathfrak{M} \models T$ heißt κ-universell, falls jedes $\mathfrak{N} \models T$ mit $|N| \leq \kappa$ sich elementar in $\mathfrak{M}$ einbetten lässt.
2) $\mathfrak{M} \models T$ heißt κ-saturiert, falls für alle $A \subseteq M$ mit $|A| < \kappa$ alle $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ in $\mathfrak{M}$ realisiert sind. $\mathfrak{M}$ heißt saturiert, falls $\mathfrak{M}$ $|M|$-saturiert ist.

Bemerkung 4.37. 1) $\mathfrak{M}$ kann nie $|M|^+$-saturiert sein. $M = \{m_i \mid i < \kappa\}$.

Existiert $p \in S_1(M)$ mit $\{x \neq m_i \mid i \in \kappa\} \subseteq p$ kann in $\mathfrak{M}$ nicht realisiert sein!

2) Falls $\mathfrak{M}$ κ-saturiert ist, dann realisiert $\mathfrak{M}$ auch alle $p \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ mit $|A| < \kappa$.

$p = p(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(A)$

$p \restriction x_1 = \{\varphi(x_1) \mid \varphi \in p(x_1, \ldots, x_n)\} \in S_1(A)$.

Realisiere $p \restriction x_1$ in $\mathfrak{M}$ durch m_1.

$p(m_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_{n-1}(A \cup \{m_1\})$

$p(m_1, \overline{x}) \restriction x_2 \in S_1(A \cup \{m_1\})$, realisiert in $\mathfrak{M}$ durch m_2.

Etc. $(m_1, \ldots, m_n)$ realisiert p.

Satz 4.38. Sei T vollständig und abzählbar sowie $\mathfrak{M} \models T$ abzählbar und saturiert

1) $\mathfrak{M}$ ist $\aleph_0$-universell

2) Falls $\mathfrak{N} \models T$ abzählbar und saturiert ist, dann $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$.

Beweis. $\underline{1)}$ Sei $\mathfrak{N} \models T$ abzählbar, $N = \{n_i \mid i \in \omega\}$

Konstruiere induktiv elementare Abbildungen $h_i : \{n_0, \ldots, n_{i-1}\} \to M$

$h_0 = \emptyset : \emptyset \to M$ elementar, da T vollständig.

$i \to i+1$ Idee: realisiere $\operatorname{tp}(n_i/n_0, \ldots, n_{i-1})$ im Bild das heißt $\tilde{h}_i^{-1}(\operatorname{tp}^{\mathfrak{N}}(n_i/n_0, \ldots, n_{i-1})) \in S_1^{\mathfrak{M}}(h_i(n_0), \ldots, h_i(n_{i-1}))$.

Da $\mathfrak{M}$ $\aleph_0$-saturiert, gibt es $m_i \coloneqq h_{i+1}(n_i)$ mit

$$\operatorname{tp}(m_i/m_0, \ldots, m_i - 1) = \tilde{h}_i^{-1}(\operatorname{tp}^{\mathfrak{N}}(n_i/n_0, \ldots, n_i - 1))$$

und $h = \bigcup_{i \in \omega} h_i : N \to M$ ist elementar

$\underline{2)}$ Back and Forth □

Beispiel 4.39.

1) $\mathcal{L} = \emptyset$, T unendliche Menge

   T ist $\aleph_0$-kategorisch, jede abzählbare Menge ist elementares Primmodell, $\aleph_0$-saturiert und damit $\aleph_0$-universell. Aber es gibt viele Einbettungen (= Injektionen) zwischen zwei abzählbaren Modellen, die nicht bijektiv sind.

2) $T = ACF_0$ elementares Primmodell: $\tilde{\mathbb{Q}}$ jede Einbettung $\tilde{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{Q}}$ ist bijektiv.

   abzählbar, $\aleph_0$-saturiert: $\overline{\mathbb{Q}(X_0, X_1, \dots)}$ hat viele nicht surjektive Selbsteinbettungen.

3) $\mathcal{L} = \{P_i \mid i \in \omega\}$

   T die P_i sind unabhängige Prädikate

   $\left|S_1^T\right| = 2^{\aleph_0}$

   Kein abzählbares Modell kann alle Typen aus S_1^T realisieren, also auch $\aleph_0$-saturiert sein.

Satz 4.40. Sei T vollständig und abzählbar:

T besitzt ein abzählbares saturiertes Modell $\Leftrightarrow$ für alle n ist $\left|S_n^T\right| \leq \aleph_0$.

Satz 4.41 (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius)**.** Sei T vollständig und abzählbar. Dann sind äquivalent:

1) T ist $\aleph_0$-Kategorisch

2) alle abzählbaren Modelle von T sind atomar

3) alle abzählbaren Modelle von T sind elementare Primmodelle

4) alle Modelle von T sind $\aleph_0$-saturiert

5) für alle n ist $\mathcal{F}_n(\mathcal{L}/\sim_T)$ endlich d.h. es gibt nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ bis auf $\sim_T$.

6) für alle n ist S_n^T endlich

7) für alle n sind alle Typen in S_n^T isoliert

8) für alle Modelle $\mathfrak{M} \models T$ und endliche $A \subseteq M$ sind alle Typen in $S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ isoliert.

Beweis. *Fall 1:* T hat eindeutig bestimmtes endliches Modell. Dann gibt es nur endlich viele Typen, da jeder Typ irgendwo realisiert sein muss. Vieles ist trivialerweise klar, anderes folgt wie im 2. Fall.

Fall 2: Es gibt abzählbare Modelle (Löwenheim!)

$\underline{1) \Rightarrow 2), 3)}$ Löwenheim: Jedes Modell von T hat abzählbare elementare Unterstruktur, die das bis auf Isomorphie, eindeutige abzählbare Modell ist. Dieses ist elementare Primstruktur, somit atomar.

$\underline{2) \Leftrightarrow 3)}$ Satz von letzter Woche: Charakterisierung elementarer Primmodelle

$\underline{3) \Rightarrow 1)}$ Elementare Primmodelle sind eindeutig bis auf $\cong$.

$\underline{4) \Rightarrow 1)}$ Satz von eben: abzählbare $\aleph_0$-saturierte Modelle sind eindeutig bis auf $\cong$.

$\underline{5) \Rightarrow 6)}$ S_n^T ist Menge der Ultrafilter von $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})/\sim_T$, und da $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})/\sim_T$ endlich ist auch S_n^T endlich.

$\underline{6) \Rightarrow 5)}$ Falls $\varphi(x_1, \dots, x_n) \nsim_T \psi(x_1, \dots, x_n)$, dann gibt es $p \in S_n^T$ mit $\varphi \in p, \psi \notin p$ oder umgekehrt: Eine von $\varphi \wedge \neg\psi, \neg\varphi \wedge \psi$ ist konsistent. Vervollständige $\{\varphi, \neg\psi\}$ bzw. $\{\neg\varphi, \psi\}$ zu einem Typ.

$\underline{6) \Rightarrow 7)}$ $S_n^T = \{p_1, \dots, p_k\}$. Dann existieren Formeln φ_{ij} für $i \neq j$ mit $\varphi_{ij} \in p_i \setminus p_j$.

p_i wird isoliert durch $\bigwedge_{j \neq i} \varphi_{ij}$.

$\underline{7) \Rightarrow 6)}$ Alle Typen $p \in S_n^T$ sind isoliert durch φ_p-

$$S_n^T = \bigcup_{p \in S} \langle \varphi_p \rangle$$

ist eine offene Überdeckung mit Singletons. Wegen Kompaktheit existiert eine endliche Teilüberdeckung. D.h. S_n^T ist endlich.

$\underline{8) \Rightarrow 4)}$ Isolierte Typen sind stets realisiert.

$\underline{\neg 7) \Rightarrow \neg 1)}$ Angenommen $p \in S_n^T$ ist nicht isoliert. Ommiting Types: es gibt ein abzählbares Modell, das p übergeht.

Es gibt aber auch $\mathfrak{M} \models T$ das p realisiert durch $\overline{m}$. Löwenheim: Es gibt abzählbare elementare Unterstruktur, die $\overline{m}$ enthält, also auch p realisiert.

7) $\Rightarrow$ 8) Sei $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_k)$. p wird in $\mathfrak{M}^* \succcurlyeq \mathfrak{M}$ realisiert durch $b \in M^*$. $\mathrm{tp}(b/a_1, \dots, a_k) = p$

$$\mathrm{tp}(b, a_1, \dots, a_k) \in S_{n+1}^{\mathfrak{M}}(\emptyset) = S_{n+1}^T$$

ist also isoliert durch $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_k)$.

Behauptung: $\varphi(x_0, a_1, \dots, a_k)$ isoliert $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_k)$.

Sei $\mathfrak{M}^{**} \succcurlyeq \mathfrak{M}, b' \in M^{**}$ mit $\mathfrak{M}^{**} \models \varphi(b', a_1, \dots, a_k)$. Ohne Einschränkung $\mathfrak{M}^{**} \succcurlyeq \mathfrak{M}^*$ (denn T hat AP)

Da φ $\mathrm{tp}(b, a_1, \dots, a_k)$ isoliert, gilt

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}^{**}}(b, a_1, \dots, a_k) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}^{**}}(b', a_1, \dots, a_k)$$

Daraus folgt

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}^{**}}(b/a_1, \dots, a_k) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}^{**}}(b'/a_1, \dots, a_k) = p$$

$\square$

Beispiel 4.42. $\aleph_0$-saturierte Modelle

$\mathcal{L} = \{E\}$

$T = E$ ist Äquivalenzrelation, für jedes $n \geq 1$ gibt es genau eine Klasse mit n Elementen.

Falls nur endlich viele Klassen mit unendlich vielen Elementen entstehen und A eine endliche Menge ist die aus jeder unendlichen Klasse mindestens ein Element enthält.

$p = (\{\neg Exa \mid a \in A\} \cup \{\exists^{\geq n} y Exy \mid n \in \mathbb{N}\})^{\vdash}$

ist dann nicht realisiert. Für unendliche viele unendliche Äquivalenzklassen allerdings schon.

Folgerung 4.43. Sei $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $a_1, \dots, a_k \in A$

1) $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ $\aleph_0$-kategorisch $\Rightarrow$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}')$ $\aleph_0$-kategorisch

2) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ $\aleph_0$-kategorisch $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ $\aleph_0$-kategorisch

Beweis. 1) Seien $\varphi(x_1, \dots, x_n), \psi(x_1, \dots, x_n)$ $\mathcal{L}'$-Formeln und

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$$

das heißt $\varphi \sim_{\mathrm{Th}(\mathfrak{A})} \psi$ mit dem Interpolationssatz folgt

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \upharpoonright \mathcal{L}' = \mathrm{Th}(\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}') \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$$

Ryll-Nardzewski

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ $\aleph_0$-kategorisch $\Leftrightarrow$ $\forall n$ nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ modulo $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$

$\Rightarrow$ $\forall n$ nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ modulo $\mathrm{Th}(\mathfrak{A} \restriction \mathcal{L}')$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{A} \restriction \mathcal{L}')$ $\aleph_0$-kategorisch

$\underline{2)}$

$\underline{\Leftarrow}$ Spezialfall von 1)

$\underline{\Rightarrow}$

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ $\aleph_0$-Kategorisch $\Leftrightarrow$ jedes Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ ist $\aleph_0$-saturiert

$\Rightarrow$ Jedes Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$ ist $\aleph_0$-saturiert

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_k)$ $\aleph_0$-kategorisch $\square$

Bemerkung 4.44. Wenn $\mathfrak{M}^+ \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_k)$ als $\mathcal{L}_{\{c_1,\ldots,c_k\}}$-Theorie, dann ist $\mathfrak{M}^+ \restriction \mathcal{L} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$

Aber nicht jedes Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ lässt sich notwendigerweise zu einem Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_k)$ expandieren.

Definition 4.45. Eine $\mathcal{L}$-Theorie T heißt schmal, falls T vollständig und abzählbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\left|S_n^T\right| \leq \aleph_0$.

Satz 4.46. Sei T vollständig und abzählbar. Dann sind äquivalent:

1) T hat ein abzählbares $\aleph_0$-saturiertes Modell

2) T ist schmal

3) Für alle $\mathfrak{M} \models T$, alle n und alle $a_1, \ldots, a_n \in M$ ist $\left|S_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)\right| \leq \aleph_0$

Beweis. $\underline{1) \Rightarrow 2)}$ Sei $\mathfrak{M}_\omega$ abzählbares saturiertes Modell von T. Dann realisiert $\mathfrak{M}_\omega$ alle n-Typen über endlichen Parametermengen, also insbesondere über $\emptyset$. ($S_n^{\mathfrak{M}}(\emptyset) = S_n^T$, da T vollständig)

$$\left|S_n^T\right| = \left|S_n^{\mathfrak{M}}(\emptyset)\right| \leq |M^n| = \aleph_0$$

2) $\Rightarrow$ 3)

$$S_n^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n) \to S_{n+1}^{\mathfrak{M}}(\emptyset)$$
$$p = \{\varphi(x,\overline{a}) \mid \varphi \in p\} \mapsto \tilde{p} = \{\varphi(x,\overline{y}) \mid \varphi \in p\}$$

die Abbildung ist injektiv. Wenn $p \neq p'$, dann gibt es $\varphi(x,\overline{a}) \in p \setminus p'$ also $\varphi(x,\overline{y}) \in \tilde{p} \setminus \tilde{p}'$

3) $\Rightarrow$ 1) Kettenkonstruktion

Starte mit $\mathfrak{M}_0 \models T$ abzählbar. Es gibt abzählbar viele endliche Teilmengen von M_0.

Nach Vorraussetzung: über jedem endlichen $A \subseteq M_0$ gibt es nur abzählbar viele 1-Typen.

Also gibt es insgesamt nur abzählbar viele 1-Typen über endlichen Teilmengen von $\mathfrak{M}_0$.

Realisiere alle diese Typen in $\mathfrak{M}_1^* \succcurlyeq \mathfrak{M}_0$. Sei $C_1 \subseteq M_1^*$ abzählbar und so, dass für jeden Typ $p \in S_1^{\mathfrak{M}_0}(A)$ eine Realisierung in C_1 liegt.

Löwenheim-Skolem-Tarski: Es gibt $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1^*$ mit $C \cup M_0 \subseteq M_1$ und M_1 abzählbar. $\mathfrak{M}_1$ ist abzählbar und realisiert alle 1-Typen über endlichen Parametermengen von M_0. Wir erhalten weiter

$$\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \dots$$

Setze $\mathfrak{M}_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{M}_n$ diese ist abzählbar und $\aleph_0$-saturiert. □

Satz 4.47 (Vaught)**.** Es gibt keine abzählbare vollständige Theorie, die genau 2 abzählbare Modelle bis auf Isomorphie hat.

Beweis. 1. Fall: T nicht schmal, das heißt es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|S_{n_0}^T\right| > \aleph_0$. Jeder n_0-Typ ist aber in einem abzählbaren Modell realisiert, das heißt es gibt überabzählbar viele abzählbare Modelle.

2. Fall: T schmal, nicht $\aleph_0$-kategorisch: Das heißt es gibt n und einen nicht-isolierten Typ $p \in S_n^T$.

Omitting Types: Es gibt abzählbares Modell, das p übergeht. Außerdem gibt es abzählbares Modell, das p realisiert.

Sei $\overline{c} \in M_1$ ein Tupel, das p realisiert. $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_1,\overline{c})$ ist nicht $\aleph_0$-kategorisch, hat also 2 nicht isomorphe abzählbare Modelle $(\mathfrak{M}_1,\overline{c}),(\mathfrak{M}_2,\overline{c})$. Also ist $\mathfrak{M}_2 \models T$, das p realisiert, und $\mathfrak{M}_2 \not\cong \mathfrak{M}_1$. □

Beispiel 4.48. $\mathcal{L} = \{<, P_1,\dots,P_n, c_0, c_1,\dots\}$

Wobei $<$ eine dichte lineare Ordnung beschreibt. P_i bilden dichte Partition

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 < x_2 \to \exists y_1, \ldots, y_n \bigwedge_{i=1}^{n} (x_y < x_i < x_2) \wedge P_i y_i)$$

Dies hat dann $n+2$ abzählbare Modelle.

Beispiel 4.49. Sei T eine vollständige abzählbare Theorie

$$I(T, \aleph_0) = \text{Anzahl der abzählbaren Modelle bis auf } \cong$$

Welche Werte sind möglich? $1, 3, 4, 5, \ldots, \aleph_0, 2^{\aleph_0}$

Nicht möglich: 2

4.3.1 Der Satz von Fraïsé

Sowohl $(\mathbb{Q}, <)$ als auch der Zufallsgraph haben Quantorenelimination und sind $\aleph_0$-kategorisch.

Endliche Substrukturen von $(\mathbb{Q}, <)$ sind alle endlichen Ordnungen, vom Zufallsgraph sind es alle endlichen Graphen.

Definition 4.50. Eine $\mathcal{L}$-Struktur heißt schwach homogen, falls gilt: Wenn A, B, A' endlich erzeugte Unterstrukturen von $\mathfrak{M}$ sind, $A \subseteq A'$ und $\beta : A \to B$ ein Isomorphismus, dann existiert $B' \supseteq B$ und ein Isomorphismus $\beta' : A' \to B'$ der β fortsetzt.

$\mathfrak{M}$ heißt stark homogen, falls gilt: Wenn A, B endliche erzeugte Unterstrukturen und $\beta : A \to B$ ein Isomorphismus, dann setzt sich β zu einem Automorphismus von $\mathfrak{M}$ fort.

Satz 4.51 (Fraïsé)**.** Sei $\mathcal{L}$ endliche, relationale Sprache. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse endlicher $\mathcal{L}$-Strukturen mit

- $\emptyset \in \mathcal{K}$ (ausnahmsweise wird $\emptyset$ als $\mathcal{L}$-Struktur betrachtet!)
- $\mathcal{K}$ ist abgeschlossen bezüglich Isomorphie und Substruktur
- $\mathcal{K}$ hat die Amalgamierungseigenschaft

Dann existiert eine (bis auf $\cong$) eindeutige abzählbare $\mathcal{L}$-Stuktur $\mathfrak{M}$ mit:

- $\mathfrak{M}$ ist schwach homogen

- $\mathcal{K} = \text{Skelett}(\mathfrak{M}) := \{\mathfrak{A} \text{ endl. } \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \text{ es gibt } \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{M} : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'\}$

Außerdem gilt

- $\mathfrak{M}$ ist stark homogen
- $\mathfrak{M}$ ist $\aleph_0$-kategorisch
- $\mathfrak{M}$ hat Quantorenelimination

Beweis. 1) Konstruktion

Sei $\{h_i : A_i \to B_i \mid i \in \omega\}$ eine Aufzählung aller Isomorphietypen von Einbettungen zwischen $\mathcal{K}$-Stukturen, wobei jeder Isomorphietyp unendlich oft vorkomme.

$$\begin{array}{ccc} h : A & \longrightarrow & B \\ \alpha \big\downarrow & & \big\downarrow \beta \\ h' : A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

h, h' sind isomorph, falls es Isomorphismen $\alpha : A \to A', \beta : B \to B'$ gibt mit $\beta \circ h = h' \circ \alpha$.

Für jede endliche Menge A gibt es nur endlich viele mögliche $\mathcal{L}$-Stukturen auf A da $\mathcal{L}$ endlich. Insgesamt gibt es abzählbar viele Isomorphietypen.

Konstruiere induktiv $\mathfrak{M}_n \in \mathcal{K}$:

$\underline{n = 0}$ $\mathfrak{M}_0 = \emptyset$

$\underline{n \to n+1}$ Wähle minimales $i \geq n$ mit $A_i \hookrightarrow \mathfrak{M}_n$. Seien $A_i^0, \ldots, A_i^{k_i}$ die Bilder der möglichen Einbettungen von A_i in $\mathfrak{M}_n$. Amalgamire

$\mathfrak{M}_n$ mit B_i über A_i^0 zu $\mathfrak{M}_n^1 \in \mathcal{K}$

$\mathfrak{M}_n^1$ mit B_i über A_i^1 zu $\mathfrak{M}_n^2 \in \mathcal{K}$

$\vdots$

$\mathfrak{M}_n^k$ mit B_i über A_i^k zu $\mathfrak{M}_{n+1} \in \mathcal{K}$

Setze $\mathfrak{M} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{M}_n$.

2) Zeige $\mathcal{K}$ ist Skelett von $\mathfrak{M}$.

<u>Skelett($\mathfrak{M}$) $\subseteq \mathcal{K}$</u>: Sei $A \subseteq \mathfrak{M}$ endlich. Dann gibt es n mit $A \subseteq \mathfrak{M}_n \in \mathcal{K}$.

Also $A \in \mathcal{K}$, da $\mathcal{K}$ abgeschlossen bezüglich $\subseteq$.

$A' \in$ Skelett($\mathfrak{M}$) $\Rightarrow A' \cong A \subseteq \mathfrak{M}$

$\Rightarrow A' \in \mathcal{K}$

<u>$K \subseteq$ Skelett($\mathfrak{M}$)</u>: Sei $B \in \mathcal{K}$. Dann gibt es $B' \cong B$ so dass $\emptyset \hookrightarrow B'$ in der Aufzählung der Isomorphietypen vorkommt.

Sei i_0 der erste Index des Vorkommens. Da $\emptyset \hookrightarrow \mathfrak{M}_{i_0}$ wird im Konstruktionsschritt $i_0 \to i_0+1$ die Einbettung $\emptyset \hookrightarrow B'$ zu $\mathfrak{M}_{i_0}$ amalgamiert. Also B' bis auf Isomorphie $\subseteq \mathfrak{M}_{i_0+1} \subseteq \mathfrak{M}$ das heißt $B \in$ Skelett($\mathfrak{M}$).

3) $\mathfrak{M}$ ist schwach homogen

Es gibt n mit $B \subseteq \mathfrak{M}_n$.

Der Isomorphietyp der Erweiterung $A \subseteq A'$ taucht in der Liste unendlich oft auf. Sei i_0 der kleinste Index $\geq n$ eines Vorkommens dieses Isomorphietyps. Im Konstruktionsschritt $i_0 \to i_0 + 1$ wird ein zu A' isomorphes B' über B hinzuamalgamiert.

4) Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ schwach homogen mit Skelett $\mathcal{K}$, A gemeinsame Unterstruktur. Zeige mit back-and-forth $\mathfrak{M} \cong_A \mathfrak{N}$. Daraus folgt: mit $A = \emptyset$ die Eindeutigkeit und die $\aleph_0$-Kategorizität.

5) Wenn A endliche $\mathcal{L}$-Struktur ist, $|A| = n$, dann gibt es eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, die den Isomorphietyp beschreibt, d.h. wenn $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ dann ist $\{a_1, \ldots, a_n\} \cong A$.

Wenn $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ mit R_i n_i-stellig.

$$\varphi_A(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{R_i} \bigwedge_{\{y_1,\ldots,y_{n_i}\}\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}} (\neg)R_i y_1 \ldots, y_{n_i}$$

In Th($\mathfrak{M}$) ist beschrieben:

- Skellet($\mathfrak{M}$) $= \mathcal{K}$

- $\mathfrak{M}$ ist schwach homogen

Falls $A_1, \ldots, A_{k_n}$ sämtliche Isomorphietypen von n-elementigen $\mathcal{L}$-Strukturen in $\mathcal{K}$ abdeckt, dann:

$$\mathfrak{M} \models \exists \overline{x} \varphi_{A_1}(\overline{x}) \wedge \cdots \wedge \exists \overline{x} \varphi_{A_{k_n}}(\overline{x}) \wedge \forall \overline{x} (\bigwedge_{i<j}^{n} x_i \neq x_j \rightarrow (\bigvee_{i=1}^{k_n} \varphi_{A_i}(\overline{x})))$$

Schwache Homogenität:

$$\mathfrak{M} \models \forall \overline{x} \forall \overline{x}' \left((\varphi_A(\overline{x}) \wedge \varphi_A(\overline{x}') \wedge \exists \overline{y} \varphi_{A'}(\overline{x}, \overline{y}) \rightarrow \exists \overline{y}' \varphi_{A'}(\overline{x}', \overline{y}')\right)$$

für alle n und alle Isomorphietypen A und A'. Aus diesem und 4) folgt die $\aleph_0$-Kategorizität von $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Denn wenn $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ und abzählbar, dann ist $\mathfrak{N}$ ebenfalls schwach homogen und hat Skellet($\mathcal{K}$), also $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ und es folgt die Quantorenelimination.

□

Bemerkung 4.52. Es folgt, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ durch die Aussagen in 5) axiomatisiert wird.

Beispiel 4.53.

1) endliche Ordnungen $\rightsquigarrow \mathfrak{M} = (\mathbb{Q}, <)$

2) endliche Graphen $\rightsquigarrow \mathfrak{M} =$ Zufallsgraph

3) endliche Turniere = gerichteter Graph, zwischen je 2 Punkten gibt es genau eine gerichtete Kante

4) endliche partielle Ordnungen

5) endliche geordnete Graphen $\rightsquigarrow \mathfrak{M} = (\mathbb{Q}, <, E)$ ein wie $\mathbb{Q}$ geordneter Zufallsgraph

5 $\aleph_1$-kategorische Theorien und der Satz von Morley

Sei T eine vollständige abzählbare Theorie.

Satz 5.1 (Michael Morley)**.** Falls T κ-kategorisch für ein $\kappa > \aleph_0$. Dann ist T κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$.

(Falls $|\mathcal{L}| > \aleph_0$ gilt der Satz für $> |\mathcal{L}|$)

Für das Kategorizitätsspektrum einer Theorie $\{\kappa \mid T\ \kappa\text{-kategorisch}, \kappa \geq \aleph_0\}$ gibt es 4 Möglichkeiten.

- $\emptyset$ z.B. $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$, ZFC
- $\aleph_0$ z.B. $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$
- $\{\kappa \mid \kappa > \aleph_0\}$ z.B. $\mathrm{ACF}_0, \mathrm{ACF}_p$
- $\{\kappa \mid k \geq \aleph_0\}$ z.B. unendliche Menge

5.1 $\aleph_0$-stabile Theorien

T vollständig und abzählbar ohne endliche Modelle.

Grundidee: wenige Typen $\hat{=}$ wenige Modelle

Definition 5.2. Sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine unendliche Kardinalzahl. T heißt κ-stabil, falls für alle $\mathfrak{M} \models T$, alle $A \subseteq M$ mit $|A| \leq \kappa$ gilt $\left|S_1^{\mathfrak{M}}(A)\right| \leq \kappa$.

Bemerkung 5.3. Falls T κ-stabil, dann gilt für $|A| \leq \kappa$ auch $\left|S_n^{\mathfrak{M}}(A)\right| \leq \kappa$.

Beispiel 5.4.

- ACF_p, ACF_0 sind κ-stabil für jedes κ.

  $K \models ACF, A \subseteq K, |A| \leq \kappa$ ohne Einschränkung ist A ein Unterkörper (der von A erzeugte Unterkörper hat Mächtigkeit $\max\{|A|, \aleph_0\}$)

  $S_1(A)$:

  - algebraische Typen: $\{P(X) \doteq 0\}^{\vdash}$ für $P \in A[X]$ irreduzibel
  - transzendenter Typ: $\{P(X) \neq 0 \mid P \in A[X], P \neq 0\}$

  $|S_1(A)| \leq |A[X]| + 1 \leq \kappa$

- $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$ ist nicht $\aleph_0$ stabil und für kein κ κ-stabil.

  $\left|S_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})\right| = 2^{\aleph_0} \geq |\mathbb{R}| + 2$

  für jedes $r \in \mathbb{R}$ gibt es den Typ $\mathrm{tp}(r/\mathbb{Q})$.

Definition 5.5.

1) Ein binärer Baum von Formeln in T ist:

- ein Modell $\mathfrak{M} \models T$

- für jede endliche $\{0,1\}$-Folge s eine mit $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ konsistente $\mathcal{L}_M$-Formel φ_s $(s\{0,\ldots,n-1\} \to \{0,1\}$ für ein $n \in \mathbb{N})$

- $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \vdash \forall x(\varphi_{s\circ i}(x) \to \varphi_s(x))$ für alle s und $i \in \{0,1\}$.

- $\varphi_{s\circ 0}$ und $\varphi_{s\circ 1}$ sind miteinander inkonsistent

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \vdash \neg\exists x(\varphi_{s\circ 0}(x) \wedge \varphi_{s\circ 1}(x))$$

2) T heißt total transzendent, falls für kein $\mathfrak{M} \models T$ eine perfekte Menge in $S_1^{\mathfrak{M}}(M)$ gibt.

   Sei X ein topologischer Raum: $P \subseteq X$ heißt perfekt in X, falls $P \neq \emptyset$, P abgeschlossen und P enthält keine isolierten Punkte in der induzierten Topologie, das heißt falls $\mathcal{O}$ eine offene Menge von X und $P \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, dann $|P \cap \mathcal{O}| \geq 2$. X heißt perfekt, falls X nicht perfekt in X ist.

Bemerkung 5.6. $\emptyset \neq P \subseteq X$ ohne isolierte Punkte in der induzierten Topologie $\Rightarrow \overline{P}$ perfekt.

Satz 5.7. Äquivalent sind für T

1) Es gibt Modell $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$ und perfekte Teilmenge in $S_1(A)$

2) Es gibt $\mathfrak{M} \models T$, abzählbares $A \subseteq M$ mit $\left|S_1^{\mathfrak{M}}(A)\right| > \aleph_0$

3) Es gibt ein Modell $\mathfrak{M}$ von T, abzählbares $A \subseteq M$ mit $|S_1(A)| \geq 2^{\aleph_0}$

4) Es gibt binären Baum von Formeln in T

Beweis. $\underline{2) \Rightarrow 1)}$ Cantor-Bendixson-Analyse. Sei A abzählbar, $|S_1(A)| \geq 2^{\aleph_0}$

Definiere induktiv

$$\begin{aligned} X_0 &:= S_1(A) \\ X_{\alpha+1} &:= X_\alpha \setminus \text{isolierte Punkte von } X_\alpha \text{ in der auf } X_\alpha \text{ induzierten Topologie} \\ X_\lambda &:= \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \quad \lambda\text{-Limes-Ordinalzahl} \end{aligned}$$

Jeder Punkt in $X_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ wird durch eine verschiedene $\mathcal{L}_A$-Formel isoliert.

$$X_\infty = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Ord}} X_\alpha = \begin{cases} \emptyset \\ \text{perfekte Menge} \end{cases}$$

$|X_0 \setminus x_\infty| \leq |\mathcal{L}_A| = \aleph_0$ da $|A| = \aleph_0$

Da $|X_0| \geq 2^{\aleph_0}$, folgt $|X_\infty| \geq 2^{\aleph}_0$

<u>3) ⇒ 2)</u> Klar

<u>4) ⇒ 3)</u>

Mengentheoretische Notation: $2^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} = \{f : n \to 2 \mid n < \omega\}$

Sei $(\varphi_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ binärer Baum konsistenter $\mathcal{L}_M$-Formeln. Sei A die Menge aller in den φ_s vorkommenden Parameter. Dann $|A| \leq \aleph_0$. Jeder der $2^{\aleph_0}$ vielen Zweige $\{\varphi_{f \upharpoonright n} \mid n \in \omega\}$ für $f : \omega \to 2$ ist konsistent und setzt sich daher zu einem vollständigen Typen in $S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ fort. Diese sind paarweise verschieden. Denn: wenn $f \neq g$, dann gibt es kleinstes n_0 mit $f(n_0) \neq g(n_0)$. und es gilt $\varphi_{f \upharpoonright n_0} = \varphi_{g \upharpoonright n_0}$ und beide sind inkonsistent.

<u>1) ⇒ 4)</u> Sei $P \subseteq S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ perfekt. Nenne in diesem Beweis eine $\mathcal{L}_A$-Formel φ groß, falls $\langle \varphi \rangle \cap P = \{p \in S_1^{\mathfrak{M}}(A) \mid \varphi \in p\} \cap P \neq \emptyset$.

Zeige: Jede große Formel lässt sich in 2 große Formeln $\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \neg\psi$ aufspalten. Erhalte induktiv einen binären Baum.

Sei φ groß d.h. $\langle \varphi \rangle \cap P \neq \emptyset$. Da P perfekt ist, kann $\langle \varphi \rangle \cap P$ kein isolierter Punkt sein, das heißt $|\langle \varphi \rangle \cap P| \geq 2$.

Seien $p_1 \neq p_2 \in \langle \varphi \rangle \cap P$ und $\psi \in p_1 \setminus p_2$.

Dann $p_1 \in \langle \varphi \wedge \psi \rangle \cap P$ d.h. $\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \neg\psi$ ist groß. □

Folgerung 5.8. Sei $\mathcal{L}$ abzählbar, dann gilt:

$$T \ \aleph_0\text{-stabil} \Leftrightarrow T \text{ total transzendent}$$

Satz 5.9. Falls es in T keinen binären Baum gibt, dann liegen für alle $\mathfrak{M} \models T$ und $A \subseteq M$ die isolierten Typen in $S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ dicht. (d.h. für jede $\mathcal{L}_A$-Formel φ gibt es einen isolierten Typen p mit $\varphi \in p$)

Beweis. Sei $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$ die isolierten Typen liegen nicht dicht in $S_1^{\mathfrak{M}}(A)$. Nenne $\mathcal{L}_A$-Formel φ groß, falls $\langle \varphi \rangle \neq \emptyset$ und $\langle \varphi \rangle$ enthält keine isolierten Punkte.

Nach Voraussetzung gibt es große Formeln, nämlich φ mit $\langle\varphi\rangle \cap \overline{\text{isol. Typen}} = \emptyset$.

Zeige wieder: jede große Formel spaltet sich in zwei große Formeln auf.

Sei $\varphi_\emptyset$ groß. Dann $|\langle\varphi_\emptyset\rangle| \geq 2$ sonst wäre das eindeutige Element isoliert.

Seien $p_1, p_2 \in \langle\varphi_\emptyset\rangle$ und $\psi \in p_1 \setminus p_2$.

Dann sind $\varphi_0 \coloneqq \varphi_\emptyset \wedge \psi$ und $\varphi_1 = \varphi_\emptyset \wedge \neg\psi$ beide groß:

Also $p_1 \in \langle\varphi_0\rangle \neq \emptyset$ und $p_2 \in \langle\varphi_1\rangle \neq \emptyset$

und damit $\langle\varphi_0\rangle \subseteq \langle\varphi_\emptyset\rangle$ und $\langle\varphi_1\rangle \subseteq \langle\varphi_\emptyset\rangle$

Also keine isolierten Punkte. □

Satz 5.10.

$$T\ \aleph_0\text{-stabil} \Rightarrow T\ \kappa\text{-stabil für alle } \kappa \geq \aleph_0$$

Beweis. T ist total transzendent nach Folgerung. Angenommen T sei nicht κ-stabil für ein $\kappa > \aleph_0$. Dann gibt es $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$ mit $|A| \leq \kappa$ und $\left|S_1^{\mathfrak{M}}(A)\right| > \kappa$. Es gibt große Formeln z.B. $x \doteq x$. Sei φ groß, zerlege φ in zwei große Formeln (dann gibt es binären Baum).

Angenommen das geht nicht, dann ist für jede $\mathcal{L}_A$-Formel ψ entweder $|\langle\varphi \wedge \psi\rangle| \leq \kappa$ oder $|\langle\varphi \wedge \neg\psi\rangle| \leq \kappa$.

Dann ist $\{\psi \mid |\langle\varphi \wedge \psi\rangle| > \kappa\}$ vollständiger Typ über A! (da endlich konsistent und für jede Formel ψ ist ψ oder $\neg\psi$ in der Menge)

Dann gilt aber: $|\langle\varphi\rangle| = \kappa \cdot \kappa + 1$ □

Bemerkung 5.11. Vollständige, abzählbare Theorie T

Das Stabilitätsspektrum ist $\{\kappa \geq \aleph_0 \mid \text{T } \kappa\text{-stabil}\}$

Es gibt 4 Möglichkeiten:

- $\emptyset$ heißt T instabil z.B. $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <), ZFC, \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$
- $\{\kappa \mid \kappa^{\aleph_0} = \kappa\}$ heißt T stabil
- $\{\kappa \mid 2^{\aleph_0} \leq \kappa\}$ heißt T superstabil

- $\{\kappa \mid \kappa \geq \aleph_0\}$ heißt T $\aleph_0$-stabil

Satz 5.12. Falls $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T, |M| = |N| = \kappa \geq \kappa_0$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sind saturiert, dann ist $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

Beweis. Transfinites back-and-forth

Sei $M = \{m_i \mid i < \kappa\}$ und $N = \{n_i \mid i < \kappa\}$.

Definiere induktiv partielle Isomorphismen $\alpha_i : A_i \to B_i$ mit $A_i \subseteq M, B_i \subseteq N$ und $\bigcup_{i<\kappa} A_i = M, \bigcup_{i<\kappa} B_i = N$.

Dann ist $\alpha = \bigcup_{i<\kappa} \alpha_i : \mathfrak{M} \overset{\cong}{\to} \mathfrak{N}$.

Start: $\alpha_\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ ist partieller Isomorphismus da $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Induktion: Limesschritte mit λ Limesordinalzahl $A_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} A_i, B_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} B_i$ und $\alpha_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} \alpha_i$.

Gerade Schritte: $\alpha_i : A_i \to B_i$ konstruiert, betrachte minimales j mit $m_j \notin A_i$. Realisiere $\tilde{\alpha}_i^{-1}(\text{tp}(m_j/A : i)) = \{\varphi(x, \alpha_i(\overline{a})) \mid \varphi(x, \overline{a}) \in \text{tp}(m_j/A_i))\}$ in $\mathfrak{N}$ durch n'.

Setze $A_{i+1} = A_i \cup \{m_j\}$ und $B_{i+1} = B_i \cup \{n'\}$ und $\alpha_{i+1} = \alpha_i \cup \{(m_j, n')\}$

Ungerade Schritte: entsprechend ☐

Satz 5.13. Falls T κ-stabil, dann gibt es ein saturiertes Modell $\mathfrak{M} \models T$ mit $|M| = \kappa$.

Definition 5.14. Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt regulär, falls gilt: Wenn $|M_i| < \kappa$ für $i \in I$ und $|I| < \kappa$, dann $|\bigcup_{i \in I} M_i| < \kappa$.

Andernfalls heißt κ singulär.

Beispiel 5.15.

- $\aleph_0$ ist regulär
- Jede Nachfolgerkardinalzahl κ^+ ist regulär
- $\aleph_\omega$ ist singulär: $\aleph_\omega = \bigcup_{n<\omega} \aleph_n$

Lemma 5.16. Sei T κ-stabil, und $\lambda \leq \kappa$ regulär. Dann gibt es ein $\mathfrak{M} \models T, |M| = \kappa$ mit $\mathfrak{M}$ λ-saturiert.

Beweis. Wähle $\mathfrak{M}_0 \models T, |M_0| = \kappa$. Da T κ-stabil ist $\left|S_1^{\mathfrak{M}_0}(M_0)\right| \leq \kappa$.

Realisiere alle diese Typen in $\mathfrak{M}_1 \succcurlyeq \mathfrak{M}_0$.

Konstruiere induktiv Kette

$$\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_\circ =: \mathfrak{M}_\omega \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\omega+1} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathfrak{M}_\lambda := \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{M}_i$$

Behauptung: $\mathfrak{M}_\lambda$ ist λ-saturiert: Sei $A \subseteq M_\lambda, |A| < \lambda$ dann ist

$$A = \bigcup_{i<\lambda} |A \cap M_{i+1} \setminus M_i|$$

$\{i \mid A \cap M_{i+1} \setminus M_i \neq \emptyset\} \subseteq \mathrm{Ord} \cap \lambda$

λ regulär $\Leftrightarrow$ Wenn $X \subseteq \lambda, |X| < \lambda \Rightarrow \sup X < \lambda$.

Da λ regulär, gibt es $\alpha < \lambda$ mit $A \subseteq M_\alpha$.

$p \in S_1^{\mathfrak{M}_\lambda}(A) = S_1^{\mathfrak{M}_\alpha}(A)$ ist realisiert in $\mathfrak{M}_\lambda$, da sogar alle Typen aus $S_1^{\mathfrak{M}_\alpha}(M_\alpha)$ in $\mathfrak{M}_\lambda$ realisiert sind. □

Folgerung 5.17. Sei T κ-stabil, und κ regulär. Dann gibt es ein saturiertes Modell $\mathfrak{M} \models T$ mit $|M| = \kappa$.

Satz 5.18. Wenn T κ-kategorisch ($\kappa > \aleph_0$) ist, dann ist T $\aleph_0$-stabil und damit auch κ-stabil.

Beweisskizze. Falls nicht, finde Modell der Kardinalität κ, das über abzählbar vielen Parametern nur abzählbar viele Typen realisiert.

Modell der Kardinalität κ welches über einem abzählbaren A mehr als $\aleph_0$-viele Typen realisiert. □

Folgerung 5.19. Wenn T κ-kategorisch ($\kappa > \aleph_0$). Dann ist das Modell der Kardinalität κ saturiert.

Beweis. Falls κ regulär, dann gibt es ein saturiertes Modell der Mächtigkeit κ.

Falls κ singulär. Sei $\mathfrak{M} \models T, |M| = \kappa$. Sei $A \subseteq M, |A| < \kappa$. Dann $|A| = \mu < \kappa$. Da κ singulär, ist $\kappa \neq \mu^+$, d.h. $\mu^+ < \kappa$.

Nach Lemma ist $\mathfrak{M}$ λ-saturiert, für alle regulären $\lambda < \kappa$, insbesondere also für $\lambda = \mu^+$.

Somit sind alle Typen über A in $\mathfrak{M}$ realisiert. □

Folgerung 5.20. T κ-kategorisch $\Leftrightarrow$ alle Modelle der Kardinalität κ sind saturiert $(\kappa \geq \aleph_0)$

Definition 5.21. Sei $\mathfrak{M} \models T$ und $A \subseteq M$.

1) $\mathfrak{M}$ heißt elementare Primerweiterung von A, falls jede elementare Abbildung $A \hookrightarrow \mathfrak{N} \models T$ sich zu einer elementaren Einbettung $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ fortsetzen lässt.

2) Falls $A \subseteq B \subseteq M$, heißt B konstruktibel über A falls es eine Aufzählung $\{b_i \mid i < \lambda\}$ von B gibt, so dass $\mathrm{tp}(b_j/A \cup B_j)$ mit $B_j = \{b_i \mid i < j\}$ isoliert ist.

3) $\mathfrak{M}$ heißt minimale Erweiterung von A, falls für jedes Modell $\mathfrak{N} \models T$ mit $A \subseteq N \preccurlyeq M$ gilt $M = N$.

Bemerkung 5.22. $\mathfrak{M}$ ist Primerweiterung von $A \Leftrightarrow \mathfrak{M}_A$ Primmodell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_A)$

<u>Ziel:</u> In $\aleph_0$-stabilen Theorien existieren stets Primerweiterungen, d.h. gegeben $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$ dann gibt es $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}$ mit $A \subseteq M_0$ so, dass $\mathfrak{M}_0$ Primerweiterung von A.

Schritt 1: Konstruktible Erweiterungen sind prim.

Schritt 2: Konstruktible Erweiterungen existieren

Lemma 5.23. Sei $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$. Wenn M konstruktibel über A ist, dann ist $\mathfrak{M}$ prim über A.

Beweis. Sei $\{M_i \mid i < \lambda\}$ Konstruktion von M über A. Sei $\alpha_\emptyset : A \hookrightarrow \mathfrak{N}$ elementare Abbildung.

Setze α_0 induktiv zu elementaren Abbildungen

$$\alpha_i : A \cup B_{i+1} \to \mathfrak{N}$$

fort.

Angenommen α_j für $j < i$ ist konstruiert. Wenn i Limeszahl ist, setze $\alpha_i = \bigcup_{j<i} \alpha_j$

$$\alpha_j : A \cup B_{j+1} = A \cup \{b_k \mid k < j+1\} = A \cup \{b_k \mid k \leq j\} \to N$$

und

$$\alpha_i : \bigcup_{j<i} A \cup B_{j+1} = A \cup \{b_k \mid k < i\} \to N$$

Wenn $i = j+1$, dann ist α_j definiert bis b_j und $\mathrm{tp}(b_{j+1}/A \cup B_{j+1})$ ist isoliert, also $\tilde{\alpha}_j^{-1}(\mathrm{tp}(b_{j+1}/A \cup B_{j+1}))$ in $\mathfrak{N}$ realisiert durch n_{j+1}.

D.h. $\alpha_j \cup \{(b_{j+1}, n_{j+1})\} ==: \alpha_{j+1}$ ist elementare Fortsetzung.

Am Ende erhält man $\alpha_\lambda : M \to N$ als elementare Einbettung. $\square$

Lemma 5.24. Sei $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$. Dann existiert $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}, A \subseteq M$ und damit M_0 konstruktibel über A.

Beweis. Betrachte Konstruktionen $B = \{b_i \mid i < \lambda\}$ ohne Wiederholungen wobei $B \subseteq C$ genau dann wenn C Verlängerung von B ist, das heißt $B = \{b_i \mid i < \lambda\}, C = \{c_i \mid i < \lambda'\}$ mit $\lambda \leq \lambda', b_i = c_i$ für alle $i < \lambda$.

Die Vereinigung einer aufsteigenden Kette von Konstruktionen ist wieder eine. $\emptyset$ ist eine Konstruktion.

Mit Lemma von Zorn folgt: Es gibt maximale Konstruktion $B = \{b_i \mid i < \lambda\}$

Behauptung: $A \cup B$ ist Universum einer elementaren Unterstruktur. Tarskis Test:

$$\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \overline{a}, \overline{b})$$

zeige: in $A \cup B$ erfüllbar.

Da T $\aleph_0$-stabil, liegen die isolierten Typen dicht (über jeder Parametermenge). Also gibt es isolierten Typen $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(\overline{a}, \overline{b})$. Mit $p \in \langle \varphi(x, \overline{a}, \overline{b}) \rangle$.

Sei c so dass $\mathfrak{M} \models \varphi(c, \overline{a}, \overline{b})$.

$p = \mathrm{tp}(c/\overline{a}, \overline{b})$ ist isoliert, also auch $\mathrm{tp}(a/A \cup B)$.

Also wäre $B \circ c$ eine Konstruktion. Wegen der Maximalität muss bereits $c \in B$ gelten. $\square$

Satz 5.25. Konstruktible Erweiterungen sind atomar, das heißt wenn $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$, M konstruktibel über A, $\overline{m}$ als Tupel aus M: Dann ist $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\overline{m}/A)$ isoliert.

Lemma 5.26.

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a, b/A) \text{ ist isoliert} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/b, A) \text{ isoliert} \\ \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(b/A) \text{ isoliert} \end{cases}$$

Beweis. Ohne Einschränkung $A = \emptyset$ (betrachte $\mathfrak{M}_A$). Schreibe tp statt $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}$

$\underline{\Rightarrow}$ Sei $\varphi(x, y)$ isolierende Formel von $\mathrm{tp}(a, b)$ das heißt, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi(a', b')$, dann $\mathrm{tp}(a', b') = \mathrm{tp}(a, b)$

Behauptung: $\varphi(x, b)$ isoliert tp(a(b))

Beweis dazu: Wenn $\mathfrak{M} \models \varphi(a', b)$, dann $\text{tp}(a', b) = \text{tp}(a, b)$ also $\text{tp}(a'/b) = \text{tp}(a/b)$

Behauptung: $\exists\varphi(x, y)$ isoliert $\text{tp}(b)$

Beweis dazu: Sei $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi(x, b')$, dann existiert $a' \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi(a', b')$. Also $\text{tp}(a', b') = \text{tp}(a, b)$ und somit $\text{tp}(b') = \text{tp}(b)$.

$\Leftarrow$ Angenommen $\chi(x, b)$ isoliere $\text{tp}(a/b)$ und $\psi(y)$ isoliere $\text{tp}(b)$

Behauptung: $\chi(x, y) \wedge \psi(y)$ isoliert $\text{tp}(a, b)$

Beweis: Sei $\mathfrak{M} \models \chi(a', b') \wedge \psi(b')$

Also insbesondere $\text{tp}(b') = \text{tp}(b)$, das heißt $\alpha : b \mapsto b'$ ist elementar und $\tilde{\alpha} : S_1(b') \to S_1(b)$ ein Homöomorphismus.

Insbesondere isoliert $\chi(x, b')$ einen Typen in $S_1(b')$, nämlich $\tilde{\alpha}^{-1}(\text{tp}(a/b))$.

Da $\mathfrak{M} \models \chi(a', b')$ gilt $\text{tp}(a'/b') = \tilde{\alpha}^{-1}(\text{tp}(a/b))$

Das heißt $a \mapsto a'$ ist Fortsetzung der elementaren Abbildung $b \mapsto b'$.

Oder: $(a, b) \mapsto (a', b')$ ist elementar und damit $\text{tp}(a, b) = \text{tp}(a', b')$. □

Beweis des Satzes. Sei $\mathfrak{M}$ konstruktibel über A und $m_1, \ldots, m_n \in M$.

Zu zeigen: $\text{tp}(m_1, \ldots, m_n/A)$ ist isoliert.

Es gibt eine Konstruktion $M = \{m'_i \mid i < \lambda\}$ über A. Induktion üben den maximalen Index der Konstruktion, der in $(m_1, \ldots, m_n)$ vorkommt.

Induktionsanfang: $(m'_0, \ldots, m'_0)$ $\text{tp}(m'_0/A)$ isoliert (aus Definition der Konstruktion)

$\text{tp}(m'_0/A, m'_0)$ isoliert (durch $x = m'_0$)

Induktiv mit Lemma: $\text{tp}(m'_0, \ldots, m'_0/A)$ ist isoliert.

Induktionsschritt: Für alle $i < i_0$ sei bewiesen.

Betrachte $\text{tp}(m'_{i_1}, \ldots m'_{i_n}/A)$ mit $m'_{i_0} = m'_{i_j}$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $i'_j \leq i_0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.

$\mathrm{tp}(m_1, \ldots, m_n/A)$ isoliert $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tp}(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(n)}/A)$ ist isoliert für ein $\sigma \in S_n$.

Also ohne Einschränkung $i_0 = i'_1 \geq i'_2 \geq \cdots \geq i'_n$

$$\mathrm{tp}(m'_{i_0}, m'_{i_0}, \overline{m}') \text{ isoliert} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tp}(m'_{i_0}, \overline{m}) \text{ \textit{isoliert}} \\ \underbrace{\mathrm{tp}(m'_{i_0}/m'_{i_0}, \overline{m}) \text{ isoliert}}_{\text{stets durch } x \doteq m'_{i_0}} \end{cases}$$

Also ohne Einschränkung $m'_{i_0} > m'_{i_2}$

Also betrachte $\mathrm{tp}(m'_{i_0}, \overline{m}')$.

Per Induktion $\mathrm{tp}(\overline{m}'/A)$ isoliert.

Wir wissen $\mathrm{tp}(m_{i_0}/M'_{i_0})$ ist isoliert das heißt es gibt isolierende Formel $\varphi(x, \overline{b})$ mit $\overline{b} \in M'_{i_0}$. Also $\mathrm{tp}(m'_{i_0}/\overline{b}, A)$ isoliert.

Dann ist auch $\mathrm{tp}(m_{i_0}/\overline{b}, \overline{m}', A)$ isoliert.

Induktion sagt sogar $\mathrm{tp}(\overline{b}, \overline{m}'/A)$ isoliert.

Iteriertes Lemma: $\mathrm{tp}(m'_{i_0}, \overline{b}, \overline{m}'/A)$ isoliert.

Erneutes Lemma: $\mathrm{tp}(m'_{i_0}, \overline{m'}/A)$ isoliert.

Smarte Induktion: Zeige: Wenn für alle $i < i_0$ $A(i)$ gilt, dann auch $A(i_0)$ für $i_0 = 0$ ist das der übliche Induktionsanfang. □

Folgerung 5.27. Sei T $\aleph_0$-stabil, dann sind Primerweiterungen Atomar.

Beweis. Sei $A \subseteq M, \mathfrak{M} \models T$.

- Es gibt konstruktible Erweiterung $\mathfrak{M}_0$ von A
- Falls $\mathfrak{N}$ Primerweiterung von A, dann gibt es elementare Einbettung $\mathfrak{N} \hookrightarrow \mathfrak{M}_0$ über A. Das heißt bis auf Isomorphie ist $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_0$. Somit ist $\mathfrak{N}$ atomar.

□

Bemerkung 5.28. In Wirklichkeit ist $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}_0$, in $\aleph_0$-stabilen Theorien sind Primerweiterungen eindeutig.

Satz 5.29. Wenn A minimale Erweiterung $\mathfrak{M}_0$ und Primerweiterung $\mathfrak{M}_1$ hat, dann $\mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{M}_1$.

Beweis. $\alpha : \mathfrak{M}_1 \hookrightarrow \mathfrak{M}_0$, da $\mathfrak{M}_1$ Prim. Bild$(\alpha) \preccurlyeq \mathfrak{M}_0$, also wegen Minimalität von $\mathfrak{M}_0$ gilt schon Gleichheit. □

5.2 Vaught'sche Paare

(T vollständig, abzählbar, ohne endliche Modelle)

Definition 5.30. Ein Vaught'sches Paar ist ein Tripel $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \varphi)$, wobei

- $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N} \models T$
- $\varphi(x)$ ist $\mathcal{L}_M$-Formel mit $\varphi(M)$ unendlich
- $\varphi(M) = \varphi(N)$ (d.h. wenn $\mathfrak{N} \models \varphi(a)$, dann $a \in M$)

Satz 5.31 (ohne Beweis)**.** T κ-kategorisch $\Rightarrow$ T hat keine Vaught'schen Paare

Definition 5.32. Man sagt T eliminiert den Quantor $\exists^\infty x$, falls es für jede Formel $\varphi(x, \overline{y})$ eine Schranke n_φ gibt, so dass gilt:

Falls $\mathfrak{M} \models T, \overline{a} \in M$, dann gilt entweder $|\varphi(M, \overline{a})| \leq n_\varphi$ oder $|\varphi(M, \overline{a})| \geq \aleph_0$.

Bemerkung 5.33. Wenn T den Quantor $\exists^\infty x$ wie in der Definition eliminiert, gilt

$$\mathfrak{M} \models \exists^\infty x \varphi(x) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \exists^{>n_\varphi} x \varphi(x)$$

Umgekehrt: Wenn es für jedes $\varphi(x, \overline{y})$ eine Formel $\psi_\varphi(\overline{y})$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{M}$ und $\overline{a}$ gilt

$$\mathfrak{M} \models \exists^\infty x \varphi(x, \overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi_{ij} \varphi(\overline{a})$$

dann eliminiert T den Quantor $\exists^\infty x$.

Satz 5.34. Wenn T keine Vaught'schen Paare hat, dann eliminiert T den Quantor $\exists^\infty x$.

Beweis. Angenommen T eliminiert nicht $\exists^\infty x$: Dann gibt es $\varphi(x, \overline{y})$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert dann $\mathfrak{M}_k \models T$, $\overline{a}_k \in M$ mit $\aleph_0 > |\varphi(M_k, \overline{a}_k)| \geq k$.

Sei $\mathfrak{N}_k \succneqq \mathfrak{M}_k$.

Dann gilt $\varphi(N_k, \overline{a}_k) = \varphi(M_k, \overline{a}_k)$ denn $\mathrm{Th}(M_k) \models \exists^{=k} x \varphi(x, \overline{a}_k)$.

Sei $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{P, \overline{c}\}$.

$\mathfrak{N}_k^+$ ist die $\mathcal{L}^+$-Struktur mit $P^{\mathfrak{N}_k^+} = M_k, \overline{c}^{\mathfrak{N}_k^+} = \overline{a}_k$.

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_k^+)$ sagt:

- $\mathfrak{N}_k^+$ ist Modell von T
- P ist Universum einer echten elementaren Unterstruktur.
- $\varphi(N_k^+, \overline{c}) = \varphi(P, \overline{c})$ also $\forall x(\varphi(x, \overline{c}) \to Px)$
- $\left|\varphi(N_k^+, \overline{c})\right| > k, \exists^{\geq k} x\varphi(x, \overline{c})$

Mit Kompaktheitssatz ist konsistent, die $\mathcal{L}^+$-Theorie

$T \cup \{P$ ist echte elementare Unterstruktur, $\forall x(\varphi(x, \overline{c}) \to Px)\} \cap \{\exists^{\geq k} x\varphi(x, \overline{c}) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Modell $\mathfrak{N}$ davon ergibt $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$ mit $\varphi(M, \overline{c}) = \varphi(N, \overline{c})$ unendlich d.h. Vaught'sches Paar. □

Definition 5.35. Sei $\mathfrak{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $\varphi(x)$ eine $\mathcal{L}_M$-Formel.

1) $\varphi(x)$ heißt minimal in $\mathfrak{M}$, falls für alle $\mathcal{L}_M$-Formeln $\psi(x)$ entweder $\varphi(M) \cap \psi(M)$ oder $\varphi(M) \cap \neg\psi(M)$ endlich ist. Insbesondere soll $\varphi(M)$ unendlich sein.

2) $\varphi(x)$ heißt streng minimal bezüglich $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, falls $\varphi(x)$ in jeder elementaren Erweiterung von $\mathfrak{M}$ minimal ist.

   Bemerkung: $\varphi(x) = \varphi(x, \overline{a})$ mit $\overline{a} \in M$.

   Dann $\varphi(x)$ ist streng minimal $\Leftrightarrow$ $\varphi(x)$ ist minimal in jedem Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_{\overline{a}})$

3) Falls $x \doteq x$ (streng) minimal in $\mathfrak{M}$ ist, heißt $\mathfrak{M}$ (streng) minimal.

   T heißt streng minimal falls $x \doteq x$ streng minimal in einem Modell von t ist.

Bemerkung 5.36. $\mathfrak{M}$ minimal im Sinne dieser Definition und $\mathfrak{M}$ minimal als minimale Erweiterung von $\emptyset$ haben nichts miteinander zu tun!

Beispiel 5.37. 1) $(\mathbb{Q}, <)$ ist nicht streng minimal, denn $x > q$ spalten $\mathbb{Q}$ in 2 unendliche Mengen.

2) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist nicht minimal, z.B. ist die Menge der Primzahlen definierbar.

3) Unendliche Mengen ohne Struktur oder ähnliches, z.B. Äquivalenzrelation, unendlich, alle Klassen 2-elementig sind streng minimal.

4) Vektorräume sind streng minimal.

5) ACF_p, ACF_0 mit QE d.h. definierbare Teilmengen von $K \models ACF$ sind Boolesche Kombinationen von Nullstellenmengen von Polynomen und damit streng minimal.

6) ÄR E mit je einer Klasse der Mächtigkeit $n \geq 0$. $x \doteq x$ ist minimal im Primmodell $\mathfrak{M}_0$. Sobald es eine unendliche Klasse a/E gibt, definiert Exa eine unendliche-kounendliche Menge.

Satz 5.38. T sei $\aleph_0$-stabil.

1) Für $\mathfrak{M} \models T$ gibt es minimale Formeln in $\mathfrak{M}$.

2) Falls T keine Vaught'schen Paare hat, sind minimale Formeln streng minimal.

Beweis. 1) Sei $\mathfrak{M} \models T$, insbesondere ist M unendlich. Angenommen es gäbe keine minimale Formel $\varphi(x)$ in $\mathfrak{M}$. Nenne $\varphi(x)$ groß falls $|\varphi(M)| \geq \aleph_0$. Dann ist $x \doteq x$ groß und keine große Formel ist minimal. D.h. jede große Formel lässt sich in zwei große Formeln aufspalten. Daraus ergibt sich ein binärer Baum, Widerspruch zu $\aleph_0$-stabil.

2) Sei $\varphi(x, \overline{a})$ minimal in $\mathfrak{M}$. Zeige: $\varphi(x, \overline{a})$ ist streng minimal. Da T keine Vaught'schen Paare hat, wird $\exists^{=\infty} x$ eliminiert. Für $\mathcal{L}_M$-Formel $\psi(x, \overline{y})$ gibt es n_ψ mit $\left|\varphi(M, \overline{a}) \cap \psi(M, \overline{b})\right| < \aleph_0$, dann $\leq n_\psi$ für alle $\overline{b}$.

$$\mathfrak{M} \models \forall \overline{y}(\exists^{\leq n_\varphi} x(\varphi(x, \overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{y})) \vee \exists^{\leq n_{\neg\psi}} x(\varphi(x, \overline{a}) \wedge \neg\psi(x, \overline{y})))$$

Falls $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$, gilt dies auch in $\mathfrak{N}$. Da ψ beliebig, ist $\varphi(x, \overline{a})$ auch minimal in $\mathfrak{N}$.

□

5.3 Matroide

Definition 5.39. Sei $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$.

1) $\varphi(x, \overline{a})$ $\mathcal{L}_A$-Formel heißt algebraische Formel, falls $\varphi(M, \overline{a})$ endlich ist.

2) $a \in M$ heißt algebraisch über A, falls es eine algebraische $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi(x)$ gibt mit $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$.

3) Ein Typ $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ heißt algebraisch, falls er eine algebraische Formel enthält.

4) $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}^{\mathfrak{M}}(A) = \{a \in M \mid a \text{ ist algebraisch über } A\}$

Bemerkung 5.40. Äquivalent sind:

- $a \in \mathrm{acl}(A)$
- $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/A)$ ist algebraisch
- $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/A)$ hat in jedem $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ nur endlich viele Realisierungen

Lemma 5.41. Seien $A, B \subseteq M$ und $\mathfrak{M} \models T$

1) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$

2) $A \subseteq \mathrm{acl}(A)$

3) $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$

4) $\mathrm{acl}(A) = \bigcup_{A_0 \subseteq_{\mathrm{endl}} A} \mathrm{acl}(A_0)$

Beweis. 1) klar

2) $a \in A : x \doteq a$ ist algebraische Formel, also $a \in \mathrm{acl}(\{a\}) \subseteq \mathrm{acl}(A)$

3) Sei $a \in \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$ etwa, $a \in \mathrm{acl}(b_1, \ldots, b_k)$ mit $b_i \in \mathrm{acl}(A)$

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_k) \wedge \exists^{\geq m} x \varphi(x, b_1, \ldots, b_k) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (\psi_i(b_i) \wedge \exists^{\geq m_i} y \psi_i(y)$$

Behauptung:

$$\exists y_1, \ldots \exists y_k (\varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \psi_i(y_i) \wedge \exists^{\geq m} x \varphi(x, y_1, \ldots, y_n))$$

ist algebraische $\mathcal{L}_A$-Formel, die von a erfüllt wird.

Alles offensichtlich bis auf algebraisch: Jedes ψ_i hat höchstens m_i Realisierungen für jede Wahl von Realisierungen $y_1, \ldots, y_n$ der ψ_i hat $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ höchstens m Realisierungen. Insgesamt: höchstens $m \cdot m_1 \cdot m_2 \ldots m_k$ Realisierungen für x.

4) $\supseteq$ ist klar wegen 1)

$\subseteq$ klar, da jede Formel nur endlich viele Parameter hat

$\square$

Lemma 5.42. Algebraische Typen sind isoliert.

Beweis. Sei $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M, p \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ algebraischer Typ, d.h. p enthält eine algebraische $\mathcal{L}_A$-Formel.

Wähle $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi(x) \in p$ mit $|\varphi(M)|$ minimal.

Behauptung: φ isoliert p das heißt $\mathfrak{M} \models \varphi(b) \Rightarrow \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(b/A) = p$.

Es gibt Realisierung $b' \in M$ von p z.B. da die endlich vielen Realisierungen von φ alle schon in $\mathfrak{M}$ liegen müssen, p durch ein $b' \in \mathfrak{M}^* \succcurlyeq \mathfrak{M}$ realisiert wird und dann $\mathfrak{M}^* \models \varphi(b')$ gilt.

Angenommen $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(b/A) \neq \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(b'/A) = p$. Dann existiert $\mathcal{L}_A$-Formel $\psi \in p \setminus \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(b/A)$. Das heißt $\varphi \wedge \psi \in p$.

$$|(\varphi \wedge \psi)(M)| < |\varphi(M)| \qquad ↯$$

$\square$

Lemma 5.43. Sei $A \subseteq \mathfrak{M} \models T$ und $B \subseteq \mathfrak{N} \models T$ mit $f : A \to B$ elementar.

Dann setzt sich f zu elementarer Abbildung $\mathrm{acl}(A) \to \mathrm{acl}(B)$ fort.

Beweis. Sei $a \in \mathrm{acl}(A) \setminus A$. $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/A)$ ist isoliert durch eine algebraische Formel. Also ist auch $\tilde{f}^{-1}(\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/A)) \in S_1^{\mathfrak{N}}(B)$ durch eine algebraische Formel isoliert und daher in $\mathfrak{N}$ durch ein über B algebraisches Element b realisiert. Setze f durch $a \mapsto b$ fort. $\square$

Bemerkung 5.44. $\mathcal{L}$ abzählbar, dann $|\mathcal{L}_A| \leq \max\{\aleph_0, |A|\}$. Also $|\mathrm{acl}(A)| \leq \max\{\aleph_0, |A|\}$.

Definition 5.45. Sei M eine Menge und $cl : \mathrm{Pot}(M) \to \mathrm{Pot}(M)$. (M, cl) heißt Matroid (oder Prägeometrie) falls gilt:

1) $A \subseteq cl(A)$

2) $cl(cl(A)) = cl(A)$

3) $cl(A) = \bigcup_{A_0 \subseteq_{\mathrm{endl}} A} cl(A_0)$

4) $a \in cl(A \cup \{b\}) \setminus cl(A) \Rightarrow b \in cl(A \cup \{a\})$

Beispiel 5.46. 1) M Menge, $cl(A) = A$

2) M Vektorraum, $cl(A) =$ linearer Abschluss von A, d.h. der von A erzeuge Untervektorraum $\langle A \rangle$.

3) M algebraisch abgeschlossener Körper, $cl(A) =$ algebraischer Abschluss (im Sinne der Algebra) der erzeugten Unterkörper

Satz 5.47. 1) Sei T streng minimal, $\mathfrak{M} \models T$, dann ist (M, acl) ein Matroid.

2) Sei T beliebig, $\mathfrak{M} \models T$, $\varphi(x, \overline{c})$ streng minimal. Dann ist $(\varphi(M), \mathrm{acl}_{\overline{c}})$ ein Matroid wobei $\mathrm{acl}_{\overline{c}}(A) = \mathrm{acl}(\mathrm{A} \cup \{\mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_\mathrm{k}\})$

Beweis. Es fehlt nur noch die Austauscheigenschaft: Sei $a \in \varphi(M), a \notin \mathrm{acl}_{\overline{c}}(A), a \in \mathrm{acl}_{\overline{c}(A,b)}$.

Sei $\mathfrak{M} \models \psi(a, b) \wedge \forall y \exists^{\leq k} \psi(x, y)$ mit ψ einer $\mathcal{L}_{A,\overline{c}}$-Formel.

Beh: $\psi(a, y) \wedge \varphi(y)$ algebraisiert b über $a, A, \overline{c}$.

Angenommen nicht: Dann ist $\psi(a, M) \cap \varphi(M)$ unendlich also co-endlich. Seien $a = a_0, \ldots, a_k$ paarweise verschiedene Realisierungen von $\mathrm{tp}(a/A, \overline{c})$ (nicht algebraisch!) in $\mathfrak{M}^* \succcurlyeq \mathfrak{M}$.

In $\mathfrak{M}^*$ ist $\psi(a, M^*) \cap \varphi(M^*)$ immer noch co-endlich.

Da $\mathrm{tp}(a/\ldots) = \mathrm{tp}(a_i/\ldots)$, ist auch $\psi(a_i, M^*) \cap \varphi(M^*)$ co-endlich.

Es folgt
$$\psi(a_0, M^*) \cap \psi(a_1, M^*) \cap \cdots \cap \psi(a_k, M^*) \cap \varphi(M^*).$$
ist co-endlich in $\varphi(M^*)$.

Das heißt es gibt $b' \in M^*$ mit $\mathfrak{M}^* \models \varphi(b') \wedge \psi(a_0, b') \wedge \cdots \wedge \psi(a_k, b')$ aber $\mathfrak{M}^* \models \forall y \exists^{\leq k} x \psi(x, y)$. $\lightning$ $\square$

Lemma 5.48. Sei $\mathfrak{M} \models T, \varphi(k) = \varphi(x, \overline{c})$ streng minimale Formel $\overline{c} \subseteq A \subseteq M$. Dann existiert genau ein nicht-algebraischer Typ in $S_1^{\mathfrak{M}}(A)$, der $\varphi(x)$ enthält.

Beweis. $p = \{\psi(x) \mid \psi \mathcal{L}_A\text{-Formel}, \varphi(M) \wedge \psi(M) \text{ unendlich}\}$

- p ist konsistent: $\psi \in p$, dann ist $\varphi(M) \cap \psi(M)$ sogar co-endlich in $\varphi(M)$ also folgt: $\psi_1, \ldots, \psi_n \in p$: $\varphi(M) \cap \psi_1(M) \cap \cdots \cap \psi_n(M)$ co-endlich, also $\neq \emptyset$.

- p ist maximal: Da φ streng minimal, ist entweder $\varphi(M) \cap \psi(M)$ oder $\varphi(M) \cap \neg\psi(M)$ unendlich.

$\square$

Folgerung 5.49. Streng minimale Theorien sind $\aleph_0$-stabil.

Beweis. Sei $\mathfrak{M} \models T, A \subseteq M$

$$\left|S_1^{\mathfrak{M}}(A)\right| \leq \max\{\aleph_0, |A|\} + 1$$

also κ-stabil für alle κ. $\square$

Folgerung 5.50. Wenn $\varphi(x, \overline{c})$ streng minimal, $\overline{c} \subseteq A$ und $a_1, \ldots, a_n$ so, dass $a_{i+1} \notin \operatorname{acl}(a_1, \ldots, a_i)$ für alle i $a_i \in \varphi(M, \overline{c})$.

Dann ist $\operatorname{tp}(a_1, \ldots, a_n/A)$ eindeutig bestimmt. Denn $\operatorname{tp}(a_1/A), \operatorname{tp}(a_2/A, a_1), \ldots$ ist jeweils der eindeutige nicht algebraische Typ!

Definition 5.51. Sei (M, cl) ein Matroid.

1) $X \subseteq M$ ist Erzeugendensystem, falls $\operatorname{cl}(X) = M$.

2) $X \subseteq M$ heißt unabhängig, falls $x_0 \notin \operatorname{cl}(X \setminus \{x_0\})$ für alle $x_0 \in X$

3) $X \subseteq M$ heißt Basis, falls X unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Lemma 5.52. Sei $(a_i)_{i<\alpha}$ so, dass $a_j \notin \operatorname{cl}(\{a_i \mid i < j\})$. Dann ist $\{a_i \mid i < \alpha\}$ unabhängig.

Beweis. Angenommen $a_j \in \operatorname{cl}(\{a_i \mid i \neq j\})$. Seien $i_1 < \cdots < i_k$ so, dass $a_j \in \operatorname{cl}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ mit $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ und k minimal.

Falls $j < i_k$: $a_j \notin \operatorname{cl}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}})$ wegen Minimalität von k.

Austausch: $a_{i_k} \in \operatorname{cl}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}, a_j)$

Also o.B.d.A. $j \geq i_k$: $a_j \in \operatorname{cl}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \subseteq \operatorname{cl}(\{a_i \mid i < j\})$ ↯ $\square$

Folgerung 5.53. Der eindeutige Typ aus der vorangehenden Folgerung ist der eindeutige Typ eines über A unabhängigen n-Tupels, also von der Reihenfolge der Koordinaten unabhängig!

Lemma 5.54. Sei A unabhängig im Matroid (M, cl) und für $x \in M$ gelte $x \notin \operatorname{cl}(A)$. Dann ist $A \cup \{x\}$ unabhängig.

Lemma 5.55. Jede unabhängige Teilmenge lässt sich zu einer Basis erweitern.

Satz 5.56. Sei (M, cl) ein Matroid. Alle Basen haben die gleiche Mächtigkeit, die Dimension von M genannt wird.

Beweis. Sei A unabhängig, B ein Erzeugendensystem. Wir zeigen: $|A| \leq |B|$ (der Satz folgt!)

1) Fall: Sei A endlich. Zeige: Für jedes $a \in A$ gibt es $b \in B$ mit $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ ist unabhängig (als Multimenge, das heißt das gleiche b darf nicht doppelt gewählt werden!).

Dann folgt die Aussage mit Induktion.

Also Beweis: Wähle ein $b \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a\}) \cap B$ das existiert, denn $B \subseteq \mathrm{cl}(A \setminus \{A\}) \Rightarrow a \in \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$ ↯.

Nach Lemma ist $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ ist unabhängig.

2) Fall: Sei A unendlich. Erweitere A zu Basis A'. Dann $|A| \leq |A'|$. Es reicht die Behauptung für A' zu zeigen.

Für jedes $b \in B$ gibt es ein endliches $A_b \subseteq A'$ mit $b \in \mathrm{cl}(A_b)$. Dann ist $B \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup_{b \in B} A_b)$.

Also ist $\bigcup_{b \in B} A_b$ Erzeugendensystem, somit $= A'$. Da A' unabhängig ist, ist $a \in \mathrm{cl}(A' \setminus \{a\})$ für jedes $a \in A'$, das heißt $A' \setminus \{a\}$ kein Erzeugendensystem) also:

$$|A'| = \left| \bigcup_{b \in B} A_b \right| \leq |B| \cdot \aleph_0 = |B|$$

□

Satz 5.57. Sei $\varphi(x)$ streng minimal in T mit $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$. Seien $(a_i)_{i<\alpha}, (b_i)_{i<\alpha}$ unabhängig in $\varphi(M_1)$ bzw. $\varphi(M_2)$.

Dann

1) $(a_i \mapsto b_i)_{i<\alpha}$ ist elementare Abbildung

2) Falls $\{a_i \mid i < \alpha\}, \{b_i \mid i < \alpha\}$ Basen, dann setzt sich $a_i \mapsto b_i$ zu partiellem Isomorphismus $\varphi(M_1) \to \varphi(M_2)$ fort.

Beweis. 1) $a_i \mapsto b_i$ setzt sich fort zu elementarer Abbildung:

$$\mathrm{acl}(\{a_i \mid i < \alpha\}) \to \mathrm{acl}(\{b_i \mid i < \alpha\})$$

Diese schränkt sich ein zu

$$f : \mathrm{acl}(\{a_i \mid i < \alpha\}) \cap \varphi(M_1) \to \mathrm{acl}(\{b_i \mid i < \alpha\}) \cap \varphi(M_2)$$

Zu zeigen noch: f ist surjektiv!

Angenommen $b \in \varphi(M_2) \setminus \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}_2}(b/\{b_i \mid i < \alpha\})$ algebraisch also $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}_2}(b/\,\mathrm{Bild}(f))$.

Also ist auch $\tilde{f}(\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}_2}(b/\,\mathrm{Bild}(f)))$ algebraisch, somit durch ein $a \in \varphi(M_1)$ realisiert. Dann muss $f(a)$ den $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}_2}(b/\,\mathrm{Bild}(f))$ realisieren. $\lightning$

$\square$

Lemma 5.58. T habe ein elementares Primmodell $\mathfrak{M}_0$. Dann ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0)$ κ-kategorisch für $\kappa > \aleph_0$, dann ist T κ-kategorisch.

Beweis. Seien $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T, |M_1| = |M_2| = \kappa$. Dann gibt es elementare Einbettungen $\alpha_i : \mathfrak{M}_i \hookrightarrow \mathfrak{M}_j$ also $(\mathfrak{M}_i)_{\alpha_i(\mathfrak{M}_0)} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0))$.

Nach Voraussetzugn ist $(\mathfrak{M}_1)_{\alpha_1(M_0)} \cong (\mathfrak{M}_2)_{\alpha_2(M_0)}$ also auch $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$. $\square$

Satz 5.59 (Baldwin, Lachlan, eine Hälfte)**.** T abzählbar, vollständig und ohne endliche Modelle, $\aleph_0$-stabil und ohne Vaught'sche Paare. Dann ist T κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$.