

Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

22. Oktober 2018

0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- K -Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie \Rightarrow universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei K ein Körper, und $P(X) \in K[X]$. P definiert eine Abbildung $\tilde{P} : K \rightarrow K$.

P hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

Wenn \tilde{P} injektiv ist, dann ist \tilde{P} surjektiv.

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

Formalisierung der Hopf-Eigenschaft

$$\forall y \forall z (P(y = P(z) \rightarrow y = z)$$

$$\forall w \exists v P(v) = w$$

Für jedes n

$$\forall x_0, \dots, x_n \left(\forall y \forall z \left(\sum_{i=0}^n x_i y^i = \sum_{i=0}^n x_i z^i \rightarrow y = z \right) \rightarrow \forall w \exists v \sum_{i=0}^n x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\underset{\text{log. äquivalent}}{\sim} \forall x_0, \dots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left(\sum_{i=0}^n x_i y^i = \sum_{i=0}^n x_i z^i \right) \rightarrow \sum_{i=0}^n x_i v^i = w$$

Beispiel 0.1.

$$\mathbb{F}_{p^n} \underset{\text{erfüllt}}{\models} HE(n) \underset{\forall \exists\text{-Präservation}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{der algebraische Abschluss von } \mathbf{F}_p} \models HE(n)$$

Beispiel 0.2. Aus dem Kompaktheitssatz folgt: $\mathbb{C} = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

1 Grundbegriffe

1.1 \mathcal{L} -Strukturen

Beispiel 1.1. Der angeordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

Definition 1.2 (\mathcal{L} -Struktur). Sei \mathcal{L} eine Menge von

- Funktionszeichen f_i ($i \in I$)
- Relationszeichen R_j ($j \in J$)

Jedes Zeichen hat ein festes $n \in \mathbb{N}$ als Stelligkeit (arity).

\mathcal{L} heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A (Universum, Träger, Grundmenge)
- einer n -stellige Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$ für jedes n -stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$
- einer n -stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ für jedes n -stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$

$n = 0$

$$A^0 = \{\emptyset\}$$

0-stellige Funktion in \mathfrak{A} : $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \rightarrow A$ ist eindeutig bestimmt durch $f(\emptyset) \in A$. Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in \mathfrak{A} :

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \hat{=} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \hat{=} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

Beispiel 1.3. a) Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ und jeder Sprache \mathcal{L} kann ich eine \mathcal{L} -Struktur mit Träger A finden!

b) $\mathcal{L} = \{R\}$, R 2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_1} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_2} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene \mathcal{L} -Strukturen auf \mathbb{Q} .

c) $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$ und $\mathcal{L}_{Gr} = \{\circ, {}^{-1}, e\}$

Gruppen sind \mathcal{L}_{Gr} -Strukturen \mathfrak{G} mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$ für alle $g \in G$
- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen \mathcal{L}_{HGr} -Strukturen \mathfrak{G} mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

Definition 1.4. Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} \mathcal{L} -Strukturen. $h : A \rightarrow B$ heißt

a) \mathcal{L} -Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n -stellige $f \in \mathcal{L}$ und

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n -stellige $R \in \mathcal{L}$.

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich \Leftrightarrow im zweiten Teil gilt.

c) \mathcal{L} -Einbettung falls h injektiver starker \mathcal{L} -Homomorphismus ist.

d) \mathcal{L} -Isomorphismus falls h bijektiver starker \mathcal{L} -Homomorphismus ist und h^{-1} ebenfalls.

e) \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißen \mathcal{L} -Isomorph falls es ein \mathcal{L} -Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ gibt.

f) Ein \mathcal{L} -Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ heißt \mathcal{L} -Automorphismus.

g) Falls $A \subseteq B$, dann heißt \mathfrak{A} \mathcal{L} -Unterstruktur von \mathfrak{B} beziehungsweise \mathfrak{B} \mathcal{L} -Oberstruktur von \mathfrak{A} , falls die Identität $id_A : A \rightarrow B$ eine \mathcal{L} -Einbettung ist.

Bemerkung. Falls $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, dann wird jede \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} durch vergessen zu einer \mathcal{L}' -Struktur $\mathfrak{A}|_{\mathcal{L}'}$ (Redukt von \mathfrak{A}).

Bemerkung. Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ \mathcal{L}_{Gr} -Strukturen sind und $h : G_1 \rightarrow G_2$ L_{HGr} Homomorphismus (genau genommen $G_1|_{\mathcal{L}_{HGr}}$ und $G_2|_{\mathcal{L}_{HGr}}$) dann ist h automatisch ein \mathcal{L}_{Gr} -Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

Bemerkung.

1) Wenn $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache \mathcal{L} , die im Hintergrund fest ist, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind \mathcal{L} -Strukturen, h ist \mathcal{L} -Homomorphismus) dann existiert auf $h(A)$ eine \mathcal{L} -Struktur $h(\mathfrak{A})$, so dass $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$, aber $h(\mathfrak{A})$ ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von \mathfrak{B} .

2) Der Schnitt von \mathcal{L} -Unterstrukturen ist wieder eine \mathcal{L} -Unterstruktur.

Folgerung 1.5. Wenn \mathfrak{A} eine \mathcal{L} -Struktur und $C \subset A$ ist, dann existiert die von C erzeugte \mathcal{L} -Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$ das heißt die kleinste Unterstruktur von \mathfrak{A} , deren Trägermenge C enthält.

Die Trägermenge von $\langle C \rangle$ erhält man dadurch, dass man C unter den Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abschließt.

$R^{(C)}$ ist dann $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \dots \times \langle C \rangle$

1.2 \mathcal{L} -Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus \mathcal{L} :

$$f_i, R_j, \dots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen: \doteq (Zieglersche Konvention)

- Klammern: $()$

- Quantoren: $\forall \quad \exists$

- aussagenlogische Junktoren: \neg (Negation), \wedge (und), \vee (oder), \rightarrow (Implikation), \leftrightarrow (Äquivalent), \perp (Falsum), \top (Verum)

- Individuenvariablen: v_0, v_1, \dots

Definition 1.6 (\mathcal{L} -Terme). \mathcal{L} -Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn f ein n -stelliges Funktionszeichen in \mathcal{L} ist und τ_1, \dots, τ_n sind \mathcal{L} -Terme dann ist $f\tau_1 \dots \tau_n$ ein \mathcal{L} -Term.

Bemerkung.

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie $+$, \cdot schreibt man traditionell $v_1 + v_2$ statt $+v_1v_2$ muss aber bei Verschachtelungen klammern.

Definition 1.7 (Auswertung von Termen in Strukturen). Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow A$.

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung $\tau^\mathfrak{A}[\beta]$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} v_i^\mathfrak{A}[\beta] &:= \beta(v_i) \\ f\tau_1 \dots \tau_n^\mathfrak{A}[\beta] &:= f^\mathfrak{A}(\tau_1^\mathfrak{A}[\beta], \dots, \tau_n^\mathfrak{A}[\beta]) \end{aligned}$$

Definition 1.8 (\mathcal{L} -Formeln). \mathcal{L} -Formeln sind

- $\perp \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$ für \mathcal{L} -Terme τ_1, τ_2
- $R\tau_1 \dots \tau_n$ für \mathcal{L} -Terme τ_1, \dots, τ_n und n -stelliges $R \in \mathcal{L}$

Definition 1.9 (Auswertung von \mathcal{L} -Formeln in Strukturen). \mathfrak{A} ist Modell von φ unter β oder formal $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt $\mathfrak{A} \models \perp[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^\mathfrak{A}[\beta] = \tau_2^\mathfrak{A}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^\mathfrak{A}[\beta], \dots, \tau_n^\mathfrak{A}[\beta]) \in R^\mathfrak{A}$
- Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ \mathcal{L} -Formeln sind, dann auch

$\neg\varphi$	$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ oder } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \text{Wenn } \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ dann } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$
$\exists v_i \varphi$	Es gibt ein $a \in A$ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[\beta \frac{a}{v_i} \right]$
$\forall v_i \varphi$	Für alle $a \in A$ gilt dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[\beta \frac{a}{v_i} \right]$

Beispiel 1.10. $\forall v_0 ((\forall v_1 \underbrace{Rv_0 v_1}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_1}) \vee Rv_1 v_0)$

 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_0}$

Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors heißen gebundene Variablen, alle anderen heißen freie Variablen.

Bemerkung. $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ beziehungsweise $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ hängt nur insofern von β ab, als man wissen muss, was β mit den freien Variablen macht.

Definition 1.11 (\mathcal{L} -Aussage). Eine \mathcal{L} -Aussage (\mathcal{L} -Satz, geschlossene Formel) ist eine \mathcal{L} -Formel ohne freie Variablen.

Satz 1.12. Für \mathcal{L} -Aussagen φ ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ unabhängig von β .

Man schreibt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &\models \varphi \\ \mathfrak{A} &\not\models \varphi\end{aligned}$$

Definition 1.13.

- 1) Eine \mathcal{L} -Formel φ ist allgemeingültig ($\models \varphi, \vdash \varphi$), falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ für alle \mathfrak{A} und β .
- 2) \mathcal{L} -Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent ($\varphi \sim \psi$), falls

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

für alle \mathfrak{A} und β .

- 3) ψ folgt aus $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$, falls:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta] \text{ für alle } i \in I \implies \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ und } \beta$$

Bemerkung. $\varphi \sim \psi \iff \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$

Bemerkung. Für $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und eine \mathcal{L} -Formel φ gilt: $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

Satz 1.14. Jede \mathcal{L} -Formel φ ist äquivalent zu einer \mathcal{L} -Formel in der folgenden Form:

$$\underbrace{Q_1 v_{i_1} \dots Q_n v_{i_n}}_{\text{pränexe Normalform}} \underbrace{\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} (\neg) \varphi_1 i, j}_{\text{disjunktive Normalform}}$$

mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.

1.3 Theorien

Definition 1.15. 1) Eine \mathcal{L} -Theorie T ist eine Menge von \mathcal{L} -Aussagen.

- 2) Eine Struktur \mathfrak{A} ist Modell einer Theorie T , $\mathfrak{A} \models T$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$.
- 3) $\text{Mod}(T) = \{\mathfrak{A} \text{ } \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ heißt Modellklasse von T .
Achtung: $\text{Mod}(T)$ ist im Allgemeinen keine Menge!
- 4) T ist konsistent (bzw. Widerspruchsfrei) falls T mindestens ein Modell hat (d.h. $\text{Mod}(T) \neq \emptyset$).
- 5) Eine Klasse \mathcal{K} von \mathcal{L} -Strukturen heißt elementar, falls es eine Theorie T gibt mit $\text{Mod}(T) = \mathcal{K}$.
- 6) Sei \mathfrak{A} \mathcal{L} -Struktur. Dann ist

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

die vollständige Theorie von \mathfrak{A} .

- 7) Zwei \mathcal{L} -Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, falls $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$.

Beispiel 1.16.

- 1) Wenn \mathfrak{A} endlich ist und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, dann ist \mathfrak{B} bereits isomorph zu \mathfrak{A} .
- 2) $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$, da

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) &\not\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1) \\ (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) &\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1) \end{aligned}$$

- 3) $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ mit $\overline{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{es gibt ein } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ so dass } P(c) = 0\}$ (algebraischer Abschluss von \mathbb{Q}) (Beweis dazu ist nicht trivial)

Definition 1.17. Seien T, T' \mathcal{L} -Theorien, φ \mathcal{L} -Aussage

- 1) $T \vdash \varphi$, falls gilt

$$\mathfrak{A} \models T \implies \mathfrak{A} \models \varphi$$

für alle \mathfrak{A} .

- 2) $T^+ := \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Aussagen} \mid T \vdash \varphi\}$ heißt der deduktive Abschluss von T .
- 3) T ist deduktiv abgeschlossen $:\Leftrightarrow T = T^+$.
- 4) T und T' heißen äquivalent $T \equiv T'$ falls $T^+ = T'^+$.

Bemerkung.

- $T \subseteq T^\perp = T^{\perp\perp}$
- $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T^\perp$ beziehungsweise $\text{Mod}(T) = \text{Mod}(T^\perp)$
- T^\perp ist die maximale Theorie $T' \supseteq T$ mit der Eigenschaft $\text{Mod}(T) = \text{Mod}(T')$

Bemerkung. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\varphi' \sim \varphi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi'$.

Daher unterscheidet man ab sofort logisch äquivalente Formeln nicht mehr.

Formal: definiere $\mathfrak{A} \models \varphi / \sim$ für Äquivalenzklassen $[\varphi] = \varphi / \sim = \{\varphi' \mid \varphi \sim \varphi'\}$

Satz 1.18. Die \mathcal{L} -Formeln bis auf logische Äquivalenz bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})$. Die Formeln deren freie Variablen in $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ enthalten sind bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ das bedeutet:

$\mathcal{F}_i(\mathcal{L})$ ist eine partielle Ordnung $[\varphi] \leq [\psi]$ falls $\vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ mit

- einem maximalen Element $[\top]$
- einem minimalen Element $[\perp]$
- je zwei Elemente $[\varphi], [\psi]$ haben
 - ein Supremum $[(\varphi \vee \psi)]$
 - ein Infimum $[(\varphi \wedge \psi)]$
- jedes Element $[\varphi]$ hat ein Komplement $\neg\varphi$ das heißt
 - $[(\varphi \wedge \neg\varphi)] = [\perp]$ und
 - $[(\varphi \vee \neg\varphi)] = [\top]$

Die Boolesche Algebra ist dann die Struktur $(\mathcal{F}_i(\mathcal{L}), \wedge, \vee, \neg, \top, \perp)$ wobei $[\varphi] \wedge [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$ etc.