

# Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

12. November 2018

## 0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- $K$ -Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie  $\Rightarrow$  universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei  $K$  ein Körper, und  $P(X) \in K[X]$ .  $P$  definiert eine Abbildung  $\tilde{P} : K \rightarrow K$ .

$P$  hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

Wenn  $\tilde{P}$  injektiv ist, dann ist  $\tilde{P}$  surjektiv.

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

Formalisierung der Hopf-Eigenschaft

$$\forall y \forall z (P(y = P(z) \rightarrow y = z)$$

$$\forall w \exists v P(v) = w$$

Für jedes  $n$

$$\forall x_0, \dots, x_n \left( \forall y \forall z \left( \sum_{i=0}^n x_i y^i = \sum_{i=0}^n x_i z^i \rightarrow y = z \right) \rightarrow \forall w \exists v \sum_{i=0}^n x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\underset{\text{log. äquivalent}}{\sim} \forall x_0, \dots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left( \sum_{i=0}^n x_i y^i = \sum_{i=0}^n x_i z^i \right) \rightarrow \sum_{i=0}^n x_i v^i = w$$

**Beispiel 0.1.**

$$\mathbb{F}_{p^n} \underset{\text{erfüllt}}{\models} HE(n) \underset{\forall \exists\text{-Präservation}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{der algebraische Abschluss von } \mathbf{F}_p} \models HE(n)$$

**Beispiel 0.2.** Aus dem Kompaktheitssatz folgt:  $\mathbb{C} = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

## 1 Grundbegriffe

### 1.1 $\mathcal{L}$ -Strukturen

**Beispiel 1.1.** Der angeordnete Körper der reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

**Definition 1.2** ( $\mathcal{L}$ -Struktur). Sei  $\mathcal{L}$  eine Menge von

- Funktionszeichen  $f_i$  ( $i \in I$ )
- Relationszeichen  $R_j$  ( $j \in J$ )

Jedes Zeichen hat ein festes  $n \in \mathbb{N}$  als Stelligkeit (arity).

$\mathcal{L}$  heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  besteht aus

- einer nicht-leeren Menge  $A$  (Universum, Träger, Grundmenge)
- einer  $n$ -stellige Funktion  $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$  für jedes  $n$ -stellige Funktionszeichen  $f \in \mathcal{L}$
- einer  $n$ -stellige Relation  $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$  für jedes  $n$ -stellige Relationszeichen  $R \in \mathcal{L}$

$n = 0$

$$A^0 = \{\emptyset\}$$

0-stellige Funktion in  $\mathfrak{A}$ :  $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \rightarrow A$  ist eindeutig bestimmt durch  $f(\emptyset) \in A$ . Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in  $\mathfrak{A}$ :

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \hat{=} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \hat{=} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

**Beispiel 1.3.** a) Zu jeder Menge  $A \neq \emptyset$  und jeder Sprache  $\mathcal{L}$  kann ich eine  $\mathcal{L}$ -Struktur mit Träger  $A$  finden!

b)  $\mathcal{L} = \{R\}$ ,  $R$  2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_1} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_2} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene  $\mathcal{L}$ -Strukturen auf  $\mathbb{Q}$ .

c)  $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$  und  $\mathcal{L}_{Gr} = \{\circ, ^{-1}, e\}$

Gruppen sind  $\mathcal{L}_{Gr}$ -Strukturen  $\mathfrak{G}$  mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$  ist assoziativ
- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$  für alle  $g \in G$
- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen  $\mathcal{L}_{HGr}$ -Strukturen  $\mathfrak{G}$  mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$  ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

**Definition 1.4.** Seien  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -Strukturen.  $h : A \rightarrow B$  heißt

a)  $\mathcal{L}$ -Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

für alle  $n$  und  $a_1, \dots, a_n \in A$ , und  $n$ -stellige  $f \in \mathcal{L}$  und

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle  $n$  und  $a_1, \dots, a_n \in A$ , und  $n$ -stellige  $R \in \mathcal{L}$ .

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich  $\Leftrightarrow$  im zweiten Teil gilt.

c)  $\mathcal{L}$ -Einbettung falls  $h$  injektiver starker  $\mathcal{L}$ -Homomorphismus ist.

d)  $\mathcal{L}$ -Isomorphismus falls  $h$  bijektiver starker  $\mathcal{L}$ -Homomorphismus ist und  $h^{-1}$  ebenfalls.

e)  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  heißen  $\mathcal{L}$ -Isomorph falls es ein  $\mathcal{L}$ -Isomorphismus  $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  gibt.

f) Ein  $\mathcal{L}$ -Isomorphismus  $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  heißt  $\mathcal{L}$ -Automorphismus.

g) Falls  $A \subseteq B$ , dann heißt  $\mathfrak{A}$   $\mathcal{L}$ -Unterstruktur von  $\mathfrak{B}$  beziehungsweise  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -Oberstruktur von  $\mathfrak{A}$ , falls die Identität  $id_A : A \rightarrow B$  eine  $\mathcal{L}$ -Einbettung ist.

**Bemerkung 1.5.** Falls  $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ , dann wird jede  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  durch vergessen zu einer  $\mathcal{L}'$ -Struktur  $\mathfrak{A}|_{\mathcal{L}'}$  (Redukt von  $\mathfrak{A}$ ).

**Bemerkung 1.6.** Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$   $\mathcal{L}_{Gr}$ -Strukturen sind und  $h : G_1 \rightarrow G_2$   $\mathcal{L}_{Gr}$ -Homomorphismus (genau genommen  $G_1|_{\mathcal{L}_{Gr}}$  und  $G_2|_{\mathcal{L}_{Gr}}$ ) dann ist  $h$  automatisch ein  $\mathcal{L}_{Gr}$ -Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

**Bemerkung 1.7.**

1) Wenn  $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache  $\mathcal{L}$ , die im Hintergrund fest ist,  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  sind  $\mathcal{L}$ -Strukturen,  $h$  ist  $\mathcal{L}$ -Homomorphismus) dann existiert auf  $h(A)$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $h(\mathfrak{A})$ , so dass  $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$ , aber  $h(\mathfrak{A})$  ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von  $\mathfrak{B}$ .

2) Der Schnitt von  $\mathcal{L}$ -Unterstrukturen ist wieder eine  $\mathcal{L}$ -Unterstruktur.

**Folgerung 1.8.** Wenn  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $C \subset A$  ist, dann existiert die von  $C$  erzeugte  $\mathcal{L}$ -Unterstruktur  $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$  das heißt die kleinste Unterstruktur von  $\mathfrak{A}$ , deren Trägermenge  $C$  enthält.

Die Trägermenge von  $\langle C \rangle$  erhält man dadurch, dass man  $C$  unter den Funktionen  $f^{\mathfrak{A}}$  abschließt.

$R^{(C)}$  ist dann  $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \dots \times \langle C \rangle$

## 1.2 $\mathcal{L}$ -Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus  $\mathcal{L}$ :

$$f_i, R_j, \dots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen:  $\doteq$  (Zieglersche Konvention)

- Klammern:  $()$

- Quantoren:  $\forall \quad \exists$

- aussagenlogische Junktoren:  $\neg$  (Negation),  $\wedge$  (und),  $\vee$  (oder),  $\rightarrow$  (Implikation),  $\leftrightarrow$  (Äquivalent),  $\perp$  (Falsum),  $\top$  (Verum)

- Individuenvariablen:  $v_0, v_1, \dots$

**Definition 1.9** ( $\mathcal{L}$ -Terme).  $\mathcal{L}$ -Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionszeichen in  $\mathcal{L}$  ist und  $\tau_1, \dots, \tau_n$  sind  $\mathcal{L}$ -Terme dann ist  $f\tau_1 \dots \tau_n$  ein  $\mathcal{L}$ -Term.

**Bemerkung 1.10.**

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie  $+$ ,  $\cdot$  schreibt man traditionell  $v_1 + v_2$  statt  $+v_1v_2$  muss aber bei Verschachtelungen klammern.

**Definition 1.11** (Auswertung von Termen in Strukturen). Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  ist eine Abbildung  $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow A$ .

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung  $\tau^\mathfrak{A}[\beta]$  ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} v_i^\mathfrak{A}[\beta] &:= \beta(v_i) \\ f\tau_1 \dots \tau_n^\mathfrak{A}[\beta] &:= f^\mathfrak{A}(\tau_1^\mathfrak{A}[\beta], \dots, \tau_n^\mathfrak{A}[\beta]) \end{aligned}$$

**Definition 1.12** ( $\mathcal{L}$ -Formeln).  $\mathcal{L}$ -Formeln sind

- $\perp \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$  für  $\mathcal{L}$ -Terme  $\tau_1, \tau_2$
- $R\tau_1 \dots \tau_n$  für  $\mathcal{L}$ -Terme  $\tau_1, \dots, \tau_n$  und  $n$ -stelliges  $R \in \mathcal{L}$

**Definition 1.13** (Auswertung von  $\mathcal{L}$ -Formeln in Strukturen).  $\mathfrak{A}$  ist Modell von  $\varphi$  unter  $\beta$  oder formal  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt  $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt  $\mathfrak{A} \models \perp[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^\mathfrak{A}[\beta] = \tau_2^\mathfrak{A}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^\mathfrak{A}[\beta], \dots, \tau_n^\mathfrak{A}[\beta]) \in R^\mathfrak{A}$
- Wenn  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$   $\mathcal{L}$ -Formeln sind, dann auch

$\neg\varphi$	$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ oder } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \text{Wenn } \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ dann } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$
$\exists v_i \varphi$	Es gibt ein $a \in A$ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[ \beta \frac{a}{v_i} \right]$
$\forall v_i \varphi$	Für alle $a \in A$ gilt dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[ \beta \frac{a}{v_i} \right]$

**Beispiel 1.14.**  $\forall v_0 ((\forall v_1 \underbrace{Rv_0v_1}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_1}) \vee Rv_1v_0)$   

 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_0}$

Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors heißen gebundene Variablen, alle anderen heißen freie Variablen.

**Bemerkung 1.15.**  $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$  beziehungsweise  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$  hängt nur insofern von  $\beta$  ab, als man wissen muss, was  $\beta$  mit den freien Variablen macht.

**Definition 1.16** ( $\mathcal{L}$ -Aussage). Eine  $\mathcal{L}$ -Aussage ( $\mathcal{L}$ -Satz, geschlossene Formel) ist eine  $\mathcal{L}$ -Formel ohne freie Variablen.

**Satz 1.17.** Für  $\mathcal{L}$ -Aussagen  $\varphi$  ist  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$  unabhängig von  $\beta$ .

Man schreibt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &\models \varphi \\ \mathfrak{A} &\not\models \varphi\end{aligned}$$

**Definition 1.18.**

- 1) Eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi$  ist allgemeingültig ( $\models \varphi, \vdash \varphi$ ), falls  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$  für alle  $\mathfrak{A}$  und  $\beta$ .
- 2)  $\mathcal{L}$ -Formeln  $\varphi$  und  $\psi$  sind logisch äquivalent ( $\varphi \sim \psi$ ), falls

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

für alle  $\mathfrak{A}$  und  $\beta$ .

- 3)  $\psi$  folgt aus  $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ , falls:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta] \text{ für alle } i \in I \implies \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ und } \beta$$

**Bemerkung 1.19.**  $\varphi \sim \psi \iff \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$

**Bemerkung 1.20.** Für  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$  und eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi$  gilt:  $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

**Satz 1.21.** Jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi$  ist äquivalent zu einer  $\mathcal{L}$ -Formel in der folgenden Form:

$$\underbrace{Q_1 v_{i_1} \dots Q_n v_{i_n}}_{\text{pränexe Normalform}} \bigvee_{j \in J} \underbrace{\bigwedge_{k \in K_j} (\neg) \varphi_1 i, j}_{\text{disjunktive Normalform}}$$

mit  $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ .

## 1.3 Theorien

**Definition 1.22.** 1) Eine  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$  ist eine Menge von  $\mathcal{L}$ -Aussagen.

- 2) Eine Struktur  $\mathfrak{A}$  ist Modell einer Theorie  $T$ ,  $\mathfrak{A} \models T$ , falls  $\mathfrak{A} \models \varphi$  für jedes  $\varphi \in T$ .
- 3)  $\text{Mod}(T) = \{\mathfrak{A} \text{ } \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \mathfrak{A} \models T\}$  heißt Modellklasse von  $T$ .  
Achtung:  $\text{Mod}(T)$  ist im Allgemeinen keine Menge!
- 4)  $T$  ist konsistent (bzw. Widerspruchsfrei) falls  $T$  mindestens ein Modell hat (d.h.  $\text{Mod}(T) \neq \emptyset$ ).
- 5) Eine Klasse  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{L}$ -Strukturen heißt elementar, falls es eine Theorie  $T$  gibt mit  $\text{Mod}(T) = \mathcal{K}$ .
- 6) Sei  $\mathfrak{A}$   $\mathcal{L}$ -Struktur. Dann ist

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

die vollständige Theorie von  $\mathfrak{A}$ .

- 7) Zwei  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  heißen elementar äquivalent,  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ , falls  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$ .

**Beispiel 1.23.**

- 1) Wenn  $\mathfrak{A}$  endlich ist und  $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ , dann ist  $\mathfrak{B}$  bereits isomorph zu  $\mathfrak{A}$ .
- 2)  $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ , da

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) &\not\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1) \\ (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) &\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1) \end{aligned}$$

- 3)  $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$  mit  $\overline{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{es gibt ein } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ so dass } P(c) = 0\}$  (algebraischer Abschluss von  $\mathbb{Q}$ ) (Beweis dazu ist nicht trivial)

**Definition 1.24.** Seien  $T, T'$   $\mathcal{L}$ -Theorien,  $\varphi$   $\mathcal{L}$ -Aussage

- 1)  $T \vdash \varphi$ , falls gilt

$$\mathfrak{A} \models T \implies \mathfrak{A} \models \varphi$$

für alle  $\mathfrak{A}$ .

- 2)  $T^+ := \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Aussagen} \mid T \vdash \varphi\}$  heißt der deduktive Abschluss von  $T$ .
- 3)  $T$  ist deduktiv abgeschlossen  $:\Leftrightarrow T = T^+$ .
- 4)  $T$  und  $T'$  heißen äquivalent  $T \equiv T'$  falls  $T^+ = T'^+$ .



**Bemerkung 1.25.**

- $T \subseteq T^\perp = T^{\perp\perp}$
- $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T^\perp$  beziehungsweise  $\text{Mod}(T) = \text{Mod}(T^\perp)$
- $T^\perp$  ist die maximale Theorie  $T' \supseteq T$  mit der Eigenschaft  $\text{Mod}(T) = \text{Mod}(T^\perp)$

**Bemerkung 1.26.** Wenn  $\mathfrak{A} \models \varphi$  und  $\varphi' \sim \varphi$ , dann gilt  $\mathfrak{A} \models \varphi'$ .

Daher unterscheidet man ab sofort logisch äquivalente Formeln nicht mehr.

Formal: definiere  $\mathfrak{A} \models \varphi / \sim$  für Äquivalenzklassen  $[\varphi] = \varphi / \sim = \{\varphi' \mid \varphi \sim \varphi'\}$

**Satz 1.27** (Tarski-Lindenbaum-Algebren). Die  $\mathcal{L}$ -Formeln bis auf logische Äquivalenz bilden eine boolesche Algebra  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})$ . Die Formeln deren freie Variablen in  $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  enthalten sind bilden eine boolesche Algebra  $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$  das bedeutet:

$\mathcal{F}_i(\mathcal{L})$  ist eine partielle Ordnung  $[\varphi] \leq [\psi]$  falls  $\vdash (\varphi \rightarrow \psi)$  mit

- einem maximalen Element  $[\top]$
- einem minimalen Element  $[\perp]$
- je zwei Elemente  $[\varphi], [\psi]$  haben
  - ein Supremum  $[(\varphi \vee \psi)]$
  - ein Infimum  $[(\varphi \wedge \psi)]$
- jedes Element  $[\varphi]$  hat ein Komplement  $\neg\varphi$  das heißt
  - $[(\varphi \wedge \neg\varphi)] = [\perp]$  und
  - $[(\varphi \vee \neg\varphi)] = [\top]$

Die Boolesche Algebra ist dann die Struktur  $(\mathcal{F}_i(\mathcal{L}), \wedge, \vee, \neg, \top, \perp)$  wobei  $[\varphi] \wedge [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$  etc.

**Definition 1.28.** Wenn  $\mathfrak{B} = (B, \cap, \cup^C, 0, 1)$  beziehungsweise  $(B, \subseteq)$  eine Boolesche Algebra ist, dann ist

$$\mathfrak{B}^* = (B, \cup, \cap^C, 1, 0) \text{ beziehungsweise } (B, \supseteq)$$

ebenfalls eine Boolesche Algebra, die duale Algebra und

$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}^*, b \mapsto b^C$$

ist Isomorphismus Boolescher Algebren. Insbesondere gilt

$$(a \cup b)^C = a^C \cap b^C$$

$$(a \cap b)^C = a^C \cup b^C$$

**Satz 1.29** (Stonescher Repräsentationssatz). Jede Boolesche Algebra ist Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra.

**Bemerkung 1.30.**  $\varphi \vdash \psi$  ist partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen  $[\varphi]$ .

- reflexiv:  $\varphi \vdash \varphi$
- transitiv:  $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \vdash \chi$
- antisymmetrisch:  $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

**Definition 1.31** (Filter). Ein Filter in einer Booleschen Algebra  $\mathfrak{B}$  ist eine Teilmenge  $F \subseteq B$  mit

- $1 \in F, 0 \notin F$
- Wenn  $b \in F, b \subseteq b'$  dann  $b' \in F$
- Wenn  $b_1, b_2 \in F$ , dann auch  $b_1 \cap b_2 \in F$

**Bemerkung 1.32.** Das duale Konzept heißt Ideal.

**Beispiel 1.33.**

- Wenn  $0 \neq b \in B$ , dann ist

$$\langle b \rangle := \{b^i \in B \mid b \subseteq b^i\}$$

ein Filter, der von  $b$  erzeugt Hauptfilter.

- $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \text{Pot}(\mathbb{N})$  der Frechet-Filter ist

$$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ endlich}\}$$

- Sei  $T$  eine konsistente  $\mathcal{L}$ -Theorie, dann ist  $T^+$  ein Filter in  $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$  der von  $T$  erzeugte Filter.

**Bemerkung 1.34.**

$$T \text{ ist inkonsistent} \iff \perp \in T^+$$

$$\iff \text{alle } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ liegen in } T^+$$

$$\iff \text{es gibt ein } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ mit } T \vdash \varphi \text{ und } T \vdash \neg\varphi$$

**Definition 1.35.** 1) Eine  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$  heißt vollständig, falls für jede  $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L})$  entweder  $T \vdash \varphi$  oder  $T \vdash \neg\varphi$  (insbesondere sind vollständige Theorien konsistent)

2) Ein Filter in einer Booleschen Algebra  $\mathfrak{B}$  heißt Ultrafilter, falls  $F$  Filter ist und für alle  $b \in B$  gilt entweder  $b \in F$  oder  $b^C \in F$ .

**Bemerkung 1.36.** 1)  $T$  ist vollständig  $\Leftrightarrow T^+$  ist Ultrafilter in  $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$

2)  $\mathfrak{A}$  ist  $\mathcal{L}$ -Struktur, dann ist  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$  vollständig. Man schreibt auch  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{A})^+$ .

**Definition 1.37.**  $\mathfrak{A}$  sei eine  $\mathcal{L}$ -Struktur.

1) Definiere

$$\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \dot{\cup} \{c_a \mid a \in A\}$$

$\mathfrak{A}$  wird kanonisch zu einer  $\mathcal{L}_A$ -Struktur  $\mathfrak{A}_A$  expandiert durch

$$c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$$

2) Das atomare Diagramm von  $\mathfrak{A}$ ,  $\text{Diag}(\mathfrak{A})$  besteht aus allen atomaren und negiert-atomaren  $\mathcal{L}_A$ -Aussagen, die in  $\mathfrak{A}$  gelten

$$\text{Diag}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomar oder } \varphi = \neg\psi, \psi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Das positive atomare Diagramm ist

$$\text{Diag}^+(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

3) Das elementare Diagramm von  $\mathfrak{A}$  ist

$$\text{Diag}_{\mathfrak{A}}(a) = \text{Th}(\mathfrak{A}_A) = \{\varphi \text{ } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

**Satz 1.38.**  $h : A \rightarrow B$  ist  $\mathcal{L}$ -Einbettung  $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$  genau dann, wenn  $\mathfrak{B}_h \models \text{Diag}(\mathfrak{A})$  wobei  $\mathfrak{B}_h = (\mathfrak{B}, (h(a))_{a \in A})$ .

*Beweis.*  $h$  injektiv

$$\Leftrightarrow \text{für alle } a \neq a' \text{ gilt } h(a) \neq h(a')$$

$$\Leftrightarrow \text{für alle } a \neq a' \text{ gilt } \mathfrak{B}_h \models \underbrace{\neg c_a = c_{a'}}_{\in \text{Diag}(\mathfrak{A})}$$

$h$  starker Homomorphismus

$\Leftrightarrow$  für alle  $n$  und  $a_1, \dots, a_n$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \text{falls } f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \stackrel{(\neq)}{=} a, \text{ dann } f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \stackrel{(\neq)}{=} h(a) \\ \text{falls (nicht) } R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \text{ dann (nicht) } R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathfrak{B}_h \models (\neg)f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a \\ \mathfrak{B}_h \models (\neg)R(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Satz 1.39.**  $h : A \rightarrow B$  ist  $\mathcal{L}$ -Homomorphismus  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \text{Diag}^+(\mathfrak{A})$

*Beweis.* Wie eben.

□

## 2 Elementar Unterstrukturen und Kompaktheit

### 2.1 Elementare Unterstrukturen

**Definition 2.1.** Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -Strukturen.

- 1)  $h : A \rightarrow B$  heißt elementare Abbildung, wenn für alle  $\mathcal{L}$ -Formeln  $\varphi = \varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$  und  $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$  gilt:

Wenn  $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ , dann  $\mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$ . Durch Betrachten von  $\neg\varphi$  folgt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$$

- 2)  $\mathfrak{A}$  heißt elementare Unterstruktur von  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ , falls  $A \subseteq B$  und  $id_A : A \rightarrow B$  elementare Abbildung.

**Bemerkung 2.2.**  $h : A \rightarrow B$  elementar  $\Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \text{Th}(\mathfrak{A}_A) \supseteq \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \text{Diag}(\mathfrak{A})$

Also: Wenn  $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$  dann  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ .

Die Umkehrung gilt nicht!

Aber

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$$

**Beispiel 2.3.**  $(\mathbb{N}, <) \supseteq (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$

$(\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$  also  $(\mathbb{N}, <) \equiv (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$

Variante 1: Sauber beweisen per Induktion über den Aufbau der Formeln

Variante 2: Ist klar

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \not\equiv (\mathbb{N}, <)$  da  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \models \neg \exists x x < 1$  aber  $(\mathbb{N}, <) \not\models \exists x x < 1$ .

**Beispiel 2.4.**  $\mathcal{L} = \{E\}$   $E$  zweistelliges Relationssymbol,  $T = E$  ist Äquivalenzrelation

Falls  $\mathfrak{A} \models T$  und  $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$  beliebige Oberstruktur. Dann bleibt Äquivalenz aus  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$  erhalten und umgekehrt, aber es können Äquivalenzklassen in der Oberstruktur dazu kommen und größer werden.

- 1) Wenn eine endliche Zahl von Äquivalenzklassen existieren, dann bleibt die Anzahl in der elementaren Oberstruktur erhalten.
- 2) Wenn eine endliche Äquivalenzklasse existiert, dann bleibt deren Größe in der elementaren Oberstruktur erhalten.
- 3) Wenn jede Äquivalenzklasse  $n$  Elemente hat, dann hat auch in jeder Oberstruktur jede Äquivalenzklasse  $n$  Elemente.
- 4) Für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gibt es genau eine Äquivalenzklasse mit  $n$  Elementen und keine unendliche Klasse. In einer Elementaren Oberstruktur kommen nur unendliche große Äquivalenzklassen dazu.

**Satz 2.5** (Tarskis Test). Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache, und  $\mathfrak{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur, und  $A \subseteq B$ . Dann ist  $A$  genau dann Träger einer elementaren Unterstruktur von  $\mathfrak{B}$ , wenn für alle  $\mathcal{L}_A$ -Formeln  $\varphi(v_0) \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A)$ , die in  $\mathfrak{B}$  erfüllt sind, gilt dass sie mit einem  $a \in A$  erfüllt sind.

Das heißt wenn  $\mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$ , dann existiert  $x \in A$  mit  $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$ .

*Beweis.*  $\Rightarrow$  Angenommen  $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$  (wegen  $\preceq$ ).

Also existiert  $a \in A$  mit  $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ , somit  $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$  (wegen  $\preceq$ )

$\Leftarrow$

- 1)  $\mathfrak{B} \models \exists v_0 v_0 \doteq v_0$

Also gibt es  $a \in A$  mit  $\mathfrak{B} \models a \doteq a$  insbesondere  $A \neq \emptyset$ .

2) Seien  $f \in \mathcal{L}$   $n$ -stellig,  $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\mathfrak{B} \models \exists v_0 f a_1 \dots a_n \doteq v_0$$

*Bedingung:* es existiert  $a \in A$  mit  $\mathfrak{B} \models f a_1 \dots a_n \doteq a$ .

Also  $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$ , das heißt  $A$  ist Träger einer Unterstruktur.

3) Zeige per Induktion übe den Aufbau der  $\mathcal{L}_A$ -Formeln

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$$

- Induktionsanfang:  $\varphi$  Atomar

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Leftrightarrow id_A : A \rightarrow B \mathcal{L}_A\text{-Einbettung}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}_h \models \text{Diag}(\mathfrak{A}_A) = \text{Diag}(\mathfrak{A})$$

$$\Leftrightarrow \text{für alle atomaren Formeln } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A) \text{ gilt: } (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)$$

- Induktionsschritte

$$\mathfrak{A} \models \neg \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \stackrel{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg \varphi$$

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{A} \models \varphi_2 \end{array} \right\} \stackrel{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{B} \models \varphi_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$\mathfrak{A} \models \exists v_0 \varphi(v_0) \Leftrightarrow \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi(a)$$

$$\stackrel{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a)$$

$$\Rightarrow \text{ex. } a \in B \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$$

Da  $\{\neg, \wedge, \exists\}$  ein vollständiges Junktoren-Quantoren-System bilden ist die Aussage damit gezeigt. □

**Folgerung 2.6.** Sei  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -Struktur,  $S \subseteq B$ . Dann existiert eine elementare Unterstruktur  $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$  mit  $S \subseteq A$  und  $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$ .

*Beweis.* Definiere induktiv  $S_i$  für  $i \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} S_0 &:= S \\ S_{i+1} &:= S_i \cup \{a_\varphi \mid \varphi(x) \text{ } \mathcal{L}_{S_i}\text{-Formel} \mathfrak{B} \models \exists \varphi(x) \text{ und } a_\varphi \text{ ist ein Element mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)\} \\ S_\omega &:= \bigcup_{i \in \omega} S_i \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist  $S_\omega$  Träger einer elementaren Unterstruktur  $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ .

Denn: Wenn  $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x), \varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_\omega})$ .

Also existiert  $n$  mit  $\varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_n})$ , dann existiert  $a_\varphi \in S_{n+1} \subseteq S_\omega$  mit  $\mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)$ . Das heißt Tarskis Test gilt.

*Behauptung:*  $|S_\omega| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

Per Induktion  $|S_i| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

$i = 0$

$$|S_0| = |S| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$$

$i \rightarrow i + 1$

$$\begin{aligned} |S_{i+1}| &\leq |S_i| + \underbrace{|\mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_i})|}_{\text{endliche Folgen mit Zeichen aus } Z(S_i)} \\ &\leq |S_i| + |Z(S_i)^{<\omega}| \\ &= |S_i| + |Z(S_i)| \\ &= |S_i| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 + |S_i| \\ &= |\mathcal{L}| + |S_i| + \aleph_0 \\ &\stackrel{\text{IV}}{\leq} |\mathcal{L}| + \max\{|\mathcal{L}|, |S|, \aleph_0\} + \aleph_0 \\ &= \max\{|L|, |S|, \aleph_0\} \end{aligned}$$

wobei

$$Z(S_i) = \mathcal{L} \cup \{v_0, v_1, \dots\} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall\} \cup S_i$$

□

**Bemerkung 2.7.** Für  $|\mathcal{L}| = |S| = \aleph_0$  heißt die Folgerung auch Satz von Löwenheim.

Sei  $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots$  eine gerichtete Vereinigung.

Es gibt eine eindeutig bestimmte  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathfrak{A}_\omega$  auf  $\bigcup_{i \in \omega} A_i$ , so dass  $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$  für alle  $i$ .

**Satz 2.8.** Falls  $\mathfrak{A}_0 \preccurlyeq \mathfrak{A}_1 \preccurlyeq \mathfrak{A}_2 \preccurlyeq \dots$  dann gilt  $\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_\omega$  für alle  $i$ .

*Beweis.* Induktion über den Aufbau der Formeln:  $\mathfrak{A}_i \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\omega \models \varphi$  für  $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_{A_i})$

Atomar: da  $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$

Negation und Konjunktion: wie letztes Mal

Existenzquantor:  $\mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x)$  dann  $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a)$  für ein  $a \in A_i$ .

$\stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow} \mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$  also  $\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$ .

$\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$ , dann  $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$  für ein  $a \in A_\omega$ . Das heißt es existiert  $n \geq i$  mit  $a \in A_n$ .

Also gilt  $\mathfrak{A}_n \models \varphi(a)$  und somit

$$\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_n \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x)$$

□

## 2.2 Kompaktheitssatz und Ultraprodukte

**Satz 2.9** (Kompaktheitssatz). Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache und  $T$  eine  $\mathcal{L}$ -Theorie.

$T$  hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teiltheorie  $T_0 \subseteq T$  ein Modell hat.

**Folgerung 2.10** (Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski aufwärts). Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache und  $\mathfrak{A}$  eine unendliche  $\mathcal{L}$ -Struktur. Dann existiert zu jeder Kardinalzahl  $\kappa \geq \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$  ein  $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$  mit  $|B| = \kappa$ .

*Beweis.* Betrachte  $\mathcal{L}^c := \mathcal{L}_A \dot{\cup} \{c_i \mid i < \kappa\}$

und die  $\mathcal{L}^c$ -Theorie  $T^c := \text{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \{\neg c_i \doteq c_j \mid i \neq j\}$

Zeige mit dem Kompaktheitssatz:  $T^c$  ist konsistent.

Sei  $T_0 \subseteq_{\text{endl}} T^c$ .

Dann  $T_0 \subseteq \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c_i \doteq c_j \mid i, j \in \text{endlicher Menge}\}$ .

$\mathfrak{A}$  wird Modell von  $T_0$ , indem man die endlich vielen Konstanten in  $T_0$  durch beliebige, paarweise verschiedene Elemente von  $A$  interpretiert.



Sei  $\mathcal{L}' \models T^c$ .

Dann ist  $\underbrace{\mathcal{L}' \restriction_{\mathcal{L}}}_{\text{Redukt auf } \mathcal{L}} \succcurlyeq \mathfrak{A}$  und  $|B'| \geq \kappa$ .

Wähle Teilmenge  $S \subseteq B$ , die  $A$  enthält und so, dass  $|S| = \kappa$ . Wende Folgerung 2.6 auf  $\mathfrak{B}'_A$  an.

Dann erhält man  $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}'_A$  in  $\mathcal{L}_A$  mit  $|B| \geq |S| = \kappa$  und  $|B| \leq \max\{|\mathcal{L}_A|, |S|, \aleph_0\} = \kappa$

Und

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ \mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ A \subseteq B' \end{array} \right\} \Rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

□

## Ultraprodukte

Seien  $\mathfrak{A}_i$   $\mathcal{L}$ -Strukturen ( $i \in I$ ) und sei

$$\prod_{i \in I} A_i = \{p : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid p(i) \in A_i\}$$

Mit dem Auswahlaxiom gilt:

$$A_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

Definiere  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$  auf  $\prod_{i \in I} A_i$ .

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}}(p_1, \dots, p_n) = p &\Leftrightarrow \text{für alle } i \in I \ p(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \dots, p_n(i)) \\ (p_1, \dots, p_n) \in R^{\mathfrak{A}} &\Leftrightarrow \text{für alle } i \in I \ (p_1(i), \dots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \end{aligned}$$

Betrachte Ultrafilter  $\mathcal{U}$  in  $\text{Pot}(I)$  also

- $\mathcal{U} \subsetneq \text{Pot}(I), \emptyset \notin \mathcal{U}$
- Wenn  $X \in \mathcal{U}, X \subseteq Y$ , dann  $Y \in \mathcal{U}$
- Wenn  $X, Y \in \mathcal{U}$ , dann  $X \cap Y \in \mathcal{U}$

- Wenn  $X \subseteq I$ , dann entweder  $X \in \mathcal{U}$  oder  $I \setminus X \in \mathcal{U}$ .

Ultrafilter  $\mathcal{U}$  definiert eine Art Maß auf  $\text{Pot}(I)$

$$\mu_{\mathcal{U}} = \chi_{\mathcal{U}} : X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } X \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{wenn } X \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

$X$  mit  $X \in \mathcal{U}$  heißt auch  $\mathcal{U}$ -groß.

**Lemma 2.11.** Ein Ultrafilter  $\mathcal{U}$  definiert eine Äquivalenzrelation  $\sim_{\mathcal{U}}$  auf  $\prod_{i \in I} A_i$  durch

$$p \sim_{\mathcal{U}} p' :\Leftrightarrow \{i \in I \mid p(i) = p'(i)\} \in \mathcal{U}$$

*Beweis.* • Reflexiv: klar, da  $I \in \mathcal{U}$

- Symmetrie: klar per Definition

- Transitivität:  $p \sim_{\mathcal{U}} p' \sim_{\mathcal{U}} p''$

$$\{i \mid p(i) = p''(i)\} \supseteq \{i \mid p(i) = p'(i)\} \cap \{i \mid p'(i) = p''(i)\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

□

**Definition 2.12.** Seien  $\mathfrak{A}_i (i \in I)$   $\mathcal{L}$ -Strukturen,  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ .

Das Ultraprodukt der  $\mathfrak{A}_i$  bezüglich  $\mathcal{U}$  ist die  $\mathcal{L}$ -Struktur

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}$$

mit Träger  $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$  und

$$\begin{aligned} (p_1 / \sim_{\mathcal{U}}, \dots, p_m / \sim_{\mathcal{U}}) \in R^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}} & :\Leftrightarrow \{i \mid (p_1(i), \dots, p_m(i)) \in R_i^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U} \\ f^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}}(p_1 / \sim_{\mathcal{U}}, \dots, p_m / \sim_{\mathcal{U}}) = p / \sim_{\mathcal{U}} & :\Leftrightarrow \{i \mid f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \dots, p_m(i)) = p(i)\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

*Beweis.* Wohldefiniertheit

Seien  $p_1 \sim_{\mathcal{U}} p'_1, \dots, p_n \sim_{\mathcal{U}} p'_n$  zu zeigen ist

$$X := \{i \mid (p_1(i), \dots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i \mid (p'_1(i), \dots, p'_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Sei  $X_j = \{i \mid p_j(i) = p'_j(i)\} \in \mathcal{U}$ .

Falls  $X \in \mathcal{U}$  auf  $X \cap X_1 \cap \dots \cap X_n \in \mathcal{U}$  gilt

$$\left. \begin{array}{l} (p_1(i), \dots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \\ p_1(i) = p'_1(i) \\ \vdots \\ p_n(i) = p'_n(i) \end{array} \right\} \Rightarrow (p'_1(i), \dots, p'_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}$$

Analog für Funktionszeichen.

Warum existiert überhaupt solch ein  $p_{\mathcal{U}}$ ?

Man sieht, dass  $f^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i}(p_1, \dots, p_n)/\mathcal{U}$  es tut.

Falls  $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$  für alle  $i \in I$  dann heißt  $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}/\mathcal{U} = \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$  auch Ultrapotenz von  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

**Satz 2.13** (Satz von Łos). Sei  $\varphi$  eine  $\mathcal{L}$ -Aussage dann gilt

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi \Leftrightarrow \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$$

Insbesondere

- falls  $\mathfrak{A}_i \models T$  für alle  $i$ , dann  $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models T$
- falls  $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_j$  für alle  $i \in I$ , dann  $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{A}_i$

**Folgerung 2.14.**

$$\delta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}, \quad a \mapsto (a, a, \dots, a, a)/\mathcal{U}$$

ist elementare Einbettung, das heißt

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$$

*Beweis.* zum Satz von Łos (Skizze)

Induktion über den Aufbau der Formeln

- $\varphi$  atomar: Entweder Induktion über den Aufbau der Terme oder betrachte term-reduzierte Formeln. Dazu sei  $f$  einstellig und  $c$  Konstante eine atomare Formel ist auch  $ffc \doteq c$ , diese ist aber äquivalent zu  $\exists x(fc \doteq x \wedge fx \doteq c)$ . Das heißt ohne Einschränkung kann man nur atomare Formeln der Formen  $R\tau_1 \dots \tau_n$  oder  $\tau_1 \doteq \tau_2$  oder  $f\tau_1 \dots \tau_n \doteq \tau$  betrachten, wobei  $\tau_i, \tau$  Konstanten oder Individuenvariablen sind.

- Satz von Łos für termreduzierte atomare Formeln ist im Wesentlichen die Definition der  $\mathcal{L}$ -Struktur auf  $\prod A_i / \sim_{\mathcal{U}}$ .
- Induktion:

Für und

$$\begin{aligned}
& \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models (\varphi \wedge \psi) \\
& \Leftrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \varphi \text{ und } \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \psi \\
& \Leftrightarrow I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U} \text{ und } I_\psi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \psi\} \in \mathcal{U} \\
& \Leftrightarrow \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi \wedge \psi\} = I_\varphi \cap I_\psi \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

Für nicht

$$\begin{aligned}
& \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \neg \varphi \\
& \Leftrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \not\models \varphi \\
& \Leftrightarrow I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \notin \mathcal{U} \\
& \stackrel{\text{Ultra}}{\Leftrightarrow} I \setminus I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \neg \varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

Für Existenz

$$\begin{aligned}
& \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \exists x \varphi \\
& \Leftrightarrow \text{ex existiert } p \text{ mit } \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \varphi(p / \mathcal{U}) \\
& \stackrel{\text{Ind.}}{\Leftrightarrow} \text{es existiert } p \text{ mit } \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U} \\
& \Leftrightarrow \{i \mid \text{ex } p(i) \in A_i \text{ mit } \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U} \\
& \Leftrightarrow \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.15.** •  $\langle i \rangle = \{X \subseteq I \mid i \in X\}$  Ultrafilter, der von  $i$  erzeugte Haupt-Ultrafilter

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \langle i \rangle \cong \mathfrak{A}_i$$

- Mit Lemma von Zorn (bzw. AC): Jeder eigentliche Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.

**Definition 2.16.** Sei  $I$  eine unendliche Menge, betrachte Filter der  $\omega$ -endlichen Mengen

$$\mathcal{F} = \{X \mid I \setminus X \text{ endlich}\}$$

$\mathcal{F}$  kann zu Ultrafilter  $\mathcal{U}$  erweitert werden. Solche Ultrafilter heißen freie Ultrafilter. Dies sind die nicht-Haupt-Ultrafilter.

**Bemerkung 2.17.** Wenn  $\mathfrak{A}$  endlich ist, dann ist  $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{A}$ .

Wenn  $\mathfrak{A}$  unendlich ist und  $\mathcal{U}$  frei ist, dann ist häufig  $\mathfrak{A} \prec \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ .

Wenn  $|A_i| < |A_{i+1}|$  endlich ist und  $\mathcal{U}$  frei, dann ist

$$\left| \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \right| = 2^{\aleph_0}$$

Wenn  $|A_i| = \aleph_0$  für alle  $i$  und  $\mathcal{U}$  frei,

$$\left| \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \right| = 2^{\aleph_0}$$

**Satz 2.18.** Seien  $\mathfrak{A}_i (i \in \mathbb{N})$  endliche  $\mathcal{L}$ -Strukturen. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei nur endlich oft  $|A_i| \leq n$ . Sei  $\mathcal{U}$  freier Ultrafilter auf  $\mathbb{N}$ . Dann ist

$$\left| \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \right| = 2^{\aleph_0}$$

*Beweis.*

$$\left| \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \right| \leq \sup\{|A_i| \mid i \in \mathbb{N}\}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Damit

$$\left| \prod A_i/\mathcal{U} \right| \leq 2^{\aleph_0}$$

Für  $\geq$ : Ohne Einschränkung sei  $|A_i| \leq |A_{i+1}|$  und  $|A_i| = \{0, \dots, n_i\}$  mit  $n_i = |A_i| - 1$ .

Für  $r, s \in \mathbb{R} \cap [0, 1)$  konstruiere  $p_r \in \prod_{i \in I} A_i$  mit  $r \neq s$ , dann stimmen  $p_r$  und  $p_s$  nur auf endlich vielen Indizes überein.

$$p_r(i) := j \Leftrightarrow r \in \left[ \frac{j}{|A_i|}, \frac{j+1}{|A_i|} \right)$$

$$\Rightarrow p_r \approx_{\mathcal{U}} p_s$$

□

*Beweis.* zum Kompaktheitssatz

Sei  $T$  eine endlich erfüllbare  $\mathcal{L}$ -Theorie. Zu zeigen ist  $T$  ist konsistent.

Sei  $I = \text{Pot}_{<\aleph_0}(T) = \{T_0 \mid T_0 \subseteq_{\text{endl}} T\}$ .

Für  $T_0 \subseteq_{\text{endl}} T$  d.h.  $T_0 \in I$  sei  $\langle T_0 \rangle = \{T_1 \in I \mid T_0 \subseteq T_1\}$ .

Sei weiter  $\mathcal{F} = \{\mathcal{X} \subseteq I \mid \text{ex. } T_0 \in I \text{ mit } \langle T_0 \rangle \subseteq \mathcal{X}\}$ .

$\mathcal{F}$  ist Filter auf  $I$ :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Monotonie: per Definition
- $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{F}$ , dann existiert  $T_i \subseteq_{\text{endl}} T$  mit  $\langle T_i \rangle \subseteq \mathcal{X}_i$ . Dann gilt

$$\langle T_1 \cup T_2 \rangle = \langle T_1 \rangle \cap \langle T_2 \rangle \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$$

Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter, der  $\mathcal{F}$  erweitert. Wähle für jedes  $T_0 \in I$  ein Modell  $\mathfrak{M}_{T_0} \models T_0$  und setze  $\mathfrak{M} := \prod_{T_0 \in I} \mathfrak{M}_{T_0} / \mathcal{U}$ .

Mit Satz von Łos: prüfe, dass  $\varphi \in T \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi$ .

$$\{T_1 \in I \mid \mathfrak{M}_{T_1} \models \varphi\} \supseteq \{T_1 \in I \mid \varphi \in T_1\} = \langle \{\varphi\} \rangle \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$$

□

**Definition 2.19.**  $(X, \mathcal{O})$  heißt topologischer Raum und  $\mathcal{O}$  heißt Topologie auf  $X$ ), falls

- $\mathcal{O} \subseteq \text{Pot}(X)$
- $\mathcal{O}$  ist abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte und beliebiger Vereinigungen
- Insbesondere  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

$U \in \mathcal{O}$  heißt offen bzw. offene Menge,  $A \subseteq X$  mit  $X \setminus A \in \mathcal{O}$  heißt abgeschlossen bzw. abgeschlossene Menge.

**Definition 2.20.**  $Q \subseteq \text{Pot}(X)$  heißt Basis einer Topologie  $\mathcal{O}$ , falls  $Q$  abgeschlossen ist bezüglich endlicher Schnitte.

Dann ist  $\mathcal{O} = \{\bigcup Q_i \mid Q_i \in Q\} \cup \{\emptyset, X\}$  eine Topologie, und zwar die kleinste, in der alle Mengen aus  $Q$  offen sind.

**Definition 2.21.** Eine Abbildung heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind.

Sei  $\mathfrak{B}$  eine Boolesche Algebra und  $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$  die Menge der Ultrafilter in  $\mathfrak{B}$ . Damit ist  $\mathcal{U} \in \text{Pot}(B)$  also  $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \in \text{Pot}(\text{Pot}(B))$ .

Für  $a \in B$ , definiere

$$[[a]] := \{U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \mid a \in U\} \subseteq \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$$

**Satz 2.22.**

- 1)  $[[\cdot]] : \mathfrak{B} \hookrightarrow \text{Pot}(\mathcal{U}_{\mathfrak{B}})$  ist Einbettung Boolescher Algebren (Teil des Stoneschen Repräsentationssatzes)
- 2)  $\{[[a]] \mid a \in B\}$  ist Basis einer Topologie auf  $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ .

**Definition 2.23.**  $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$  heißt auch Stone-Raum  $S(\mathfrak{B})$  von  $\mathfrak{B}$ .

*Beweis.*

- 1)
  - $[[0]] = \emptyset$ , da  $0 \notin U$  per Definition
  - $[[1]] = \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ , da  $1 \in U$  für jedes  $U$
  - $[[a \cap b]] = [[a]] \cap [[b]]$  folgt aus den Filtereigenschaften
  - $[[a \cup b]] = [[a]] \cup [[b]]$  folgt aus de Morgan und dem nächsten Schritt
  - $[[a^c]] = \{U \mid a^c \in U\} \stackrel{\text{ultra}}{=} \{U \mid a \notin U\} = [[a]]^c$

Das heißt  $[[\cdot]]$  ist Homomorphismus der Booleschen Algebra.

Fehlt noch Injektivität: Seien  $a \neq b$ : Zu zeigen ist, es existiert ein Ultrafilter  $U$  der  $a$  und  $b$  trennt, das heißt  $a \in U \Leftrightarrow b \notin U$ .

Es gilt  $a \not\leq b$  oder  $b \not\leq a$  das heißt  $a \cap b^c \neq \emptyset$  oder  $a^c \cap b \neq \emptyset$ .

Es existiert also Ultrafilter  $U$  mit  $a \cap b^c \in U$  oder  $a^c \cap b \in U$ .

Falls z.B.  $a \cap b^c \in U$ , dann ist  $a \in U, b^c \in U \Rightarrow b \notin U$ .

- 2) Wegen  $[[a]] \cap [[b]] = [[a \cap b]]$

□

**Bemerkung 2.24.** Die Basis-offenen Mengen  $[[a]]$  sind auch abgeschlossen, da  $[[a]]^c = [[a^c]]$ .

Mengen die offen und abgeschlossen sind heißen clopen.

Topologische Räume mit einer Basis aus clopen Mengen sind total unzusammenhängend.

**Definition 2.25.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  heißt kompakt, falls die endliche Überdeckungseigenschaft gilt:

Falls  $X = \bigcup_{i \in I} \{U_i \mid U_i \text{ offen}\}$  dann existiert  $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$  mit  $X = \bigcup \{U_i \mid i \in I_0\}$

Oder in äquivalenter Formulierung:  $\bigcap \{A_i \mid A_i \text{ abgeschlossen}, i \in I\} = \emptyset$  dann existiert  $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$  mit  $\bigcap \{A_i \mid i \in I_0\} = \emptyset$ .

**Satz 2.26.** Der Stone-Raum ist kompakt.

**Bemerkung 2.27.** Der Kompaktheitssatz ist äquivalent zur Kompaktheit von  $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$ .

Ohne Einschränkung sei  $\perp \notin T$

$$T \text{ inkonsistent} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{\varphi \in T} [[\varphi]] = \emptyset$$

und nach Kompaktheitssatz sagt es gibt endliches  $T_0 \subseteq T$  so dass  $T_0$  inkonsistent ist.

Und mit der Kompaktheit von  $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$  existieren  $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in T$  mit  $[[\varphi_0]] \cap \dots \cap [[\varphi_n]] = \emptyset$ .

Wir können im ersten Fall  $T_0 = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  mit  $\varphi_i$  aus dem zweiten Teil wählen.

### 2.2.1 Beispiele und Anwendungen

**Satz 2.28** (Test von Vaught).  $T$  sei eine konsistente  $\mathcal{L}$ -Theorie ohne endliche Modelle und es gebe  $\kappa > \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$ , so dass  $T$  bis auf Isomorphie höchstens genau ein Modell der Kardinalität  $\kappa$  hat. ( $T$  ist  $\kappa$ -Kategorisch)

Dann ist  $T$  vollständig.

*Beweis.* Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$  zu zeigen ist  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ .  $A$  und  $B$  sind nach Voraussetzung unendlich.



Sei  $\kappa' > \max\{\kappa, |A|, |B|\}$ . Nach Löwenheim-Skolem-Tarski gibt es  $\mathfrak{A}' \succ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}' \succ \mathfrak{B}$  mit  $|A'| = |B'| = \kappa'$  und wiederum nach Löwenheim-Skolem-Tarski existieren  $\mathfrak{A}'' \preccurlyeq \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'' \preccurlyeq \mathfrak{B}'$  mit  $|A''| = |B''| = \kappa$ . Damit gilt  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}'' \cong \mathfrak{B}'' \equiv \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$  und  $\cong \Rightarrow \equiv$ .  $\square$

**Beispiel 2.29.** 1)  $K$ -Vektorräume, bis auf Isomorphie ist ein  $K$ -Vektorraum durch seine Dimension bestimmt.  $\dim_K(V) \geq |K| + \aleph_0 \Rightarrow |V| = \dim_K(V)$ .

Übliche Axiomatisierung:  $\mathcal{L}_{K\text{-VR}} = \{+, -, 0, (\lambda_k)_{k \in K}\}$  und

$$\begin{aligned} T_{K\text{-VR}} = & \text{ abelsche Gruppe} \\ & \cup \{\forall v \lambda_k v + \lambda_{k'} v = \lambda_{k+k'} v \mid k, k' \in K\} \\ & \cup \{\forall v \lambda_1 v = v\} \\ & \cup \dots \\ & \cup \{\text{es gibt unendlich viele Elemente}\} \end{aligned}$$

Aus LA:  $T_{K\text{-VR}}$  ist  $\kappa$ -kategorisch für alle  $\kappa \geq |K| + \aleph_0$ .

Axiomatisierung von Vektorräumen über variablen Körpern

$$\mathcal{L} = \{+_V, -_V, 0_V, +_K, \cdot_K, -_K, 0_K, 1_K, V, K\}$$

mit  $V, K$  einstellige Relationszeichen und man drückt aus  $V, K$  ist Partition des Universums.

$$\begin{aligned} & \forall x (Vx \vee Kx) \\ & \neg \exists x (Vx \wedge Kx) \end{aligned}$$

und zusätzlich  $+_V, -_V, 0_V$  ist abelsche Gruppe auf  $V$  und z.B.  $\forall x \forall y (Kx \rightarrow (x +_V y = 0_K))$ .

$+_K, \cdot_K, \dots$  ist Körper auf  $K$  und zusätzlich noch die Vektorraumaxiome.

2) Offene dichte lineare Ordnungen  $\mathcal{L} = \{<\}$ . Die Theorie dazu nennen wir  $T_{DLO}$ .

- offen: kein Maximum und kein Minimum
- dicht:  $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

Beispiele sind  $(\mathbb{Q}, <)$  und  $(\mathbb{R}, <)$

*Satz von Cantor:*  $T_{DLO}$  ist  $\aleph_0$ -kategorisch

*Beweis.* Seien  $(A, <), (B, <)$  abzählbare, offene, dichte lineare Ordnungen.

Seien  $\{a_i \mid i \in \omega\} = A, \{b_i \mid i \in \omega\} = B$  Aufzählungen der Universen.

Konstruiere induktiv ordnungserhaltende Bijektion  $\beta : A \rightarrow B$  und setze  $\beta(a_0) = b_0$ .

Ungerade Induktionsschritte: Sei  $\beta$  bereits auf  $A_n = \{a_{i_0}, \dots, a_{i_n}\}$  definiert,  $|A_n|$  ist ungerade. Idee: stelle sicher, dass  $\beta$  surjektiv wird.

Wähle  $j$  minimal mit  $b_j \notin \beta(A_n)$ . Wähle  $a_{i_{n+1}}$  so, dass  $\beta(a_j) := b_j$  eine ordnungserhaltende Fortsetzung des bisher konstruierten  $\beta$  ist.  $a_{i_{n+1}}$  existiert, da offen und dicht, setze  $b_{i_{n+1}} = b_j$ .

Gerade Induktionsschritte: Idee: Stelle sicher, dass  $\beta$  totale Funktion ist.

Sei  $j$  der kleinste Index, so dass  $\beta(a_j)$  noch nicht definiert ist. Wähle  $b_{i_{n+1}}$  so, dass  $a_{i_{n+1}} := a_{i_{n+1}} := a_j \mapsto b_{i_{n+1}}$  ordnungserhaltende Fortsetzung ist.  $\square$

Folgerung:  $T_{DLO}$  ist vollständig.

Aber: Für  $k > \aleph_0$ , gibt es  $2^\kappa$  viele Modelle der Mächtigkeit  $\kappa$ , die paarweise  $\not\cong$ .

## Anwendungen

- Vollständigkeit von Theorien
- Nichtstandardmodelle

Nichtstandard-Modelle der Peano-Arithmetik

$$(\mathbb{N}, +, \cdot) \not\cong \mathbb{N}^*$$

Nichtstandard-Analysis

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, <) \not\cong \mathbb{R}^*$$

Unendliches Modell der Theorie der endlichen Körper der Charakteristik  $p$ , pseudo-endlicher Körper

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n} / \mathcal{U}$$

Besonderer Automorphismus

$$\prod_{p \text{ prim}} (\tilde{\mathbb{F}}_p, \text{Frob}: x \mapsto x^p) / \mathcal{U} = (\mathbb{C}, \alpha)$$

- Transfer-Prinzipien

$$\mathcal{L}_{K_p} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$$

Eine  $\mathcal{L}_{K_p}$ -Aussage  $\varphi$  gilt in allen Körpern der Charakteristik 0  $\Leftrightarrow$  es existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $\varphi$  in allen Körpern der Charakteristik  $p$  mit  $p \geq n_0$  gilt.

- Nicht-Axiomatisierbarkeit