Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

17. Oktober 2018

0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- K-Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie $\Rightarrow$ universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei K ein Körper, und $P(X) \in K[X]$. P definiert eine Abbildung $\tilde{P} : K \to K$.

P hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

Wenn $\tilde{P}$ injektiv ist, dann ist $\tilde{P}$ surjektiv.

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

Formalisierung der Hopf-Eigenschaft

$$\forall y \forall z (P(y = P(z) \to y = z)$$
$$\forall w \exists v P(v) = w$$

Für jedes n

$$\forall x_0, \dots, x_n \left(\forall y \forall z \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \to y = z \right) \to \forall w \exists v \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\underset{\text{log. äquivalent}}{\sim} \forall x_0, \dots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \right) \to \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w$$

Beispiel 0.1.

$$\mathbb{F}_{p^n} \underset{\text{erfüllt}}{\models} HE(n) \underset{\forall\exists-\text{Präservation}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{ der algebraische Abschluss von } \mathbf{F_p}} \models HE(n)$$

Beispiel 0.2. Aus dem Kompaktheitssatz folgt: $\mathbb{C} = \lim_{p \to \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

1 Grundbegriffe

1.1 $\mathcal{L}$-Strukturen

Beispiel 1.1. Der angeordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

Definition 1.2 ($\mathcal{L}$-Struktur)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Menge von

- Funktionszeichen $f_i \quad (i \in I)$
- Relationszeichen $R_j \quad (j \in J)$

Jedes Zeichen hat ein festes $n \in \mathbb{N}$ als Stelligkeit (arity).

$\mathcal{L}$ heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A (Universum, Träger, Grundmenge)

- einer n-stellige Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ für jedes n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$

- einer n-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ für jedes n-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$

$\underline{n = 0}$

$A^0 = \{\emptyset\}$

0-stellige Funktion in $\mathfrak{A}$: $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \to A$ ist eindeutig bestimmt durch $f(\emptyset) \in A$. Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in $\mathfrak{A}$:

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \mathrel{\hat{=}} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \mathrel{\hat{=}} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

Beispiel 1.3. a) Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ und jeder Sprache $\mathcal{L}$ kann ich eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Träger A finden!

b) $\mathcal{L} = \{R\}$, R 2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), \qquad \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_1} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, <), \qquad \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_2} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene $\mathcal{L}$-Strukturen auf $\mathbb{Q}$.

c) $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$ und $\mathcal{L}_G r = \{\circ, {}^{-1}, e\}$

Gruppen sind $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ

- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$ für alle $g \in G$

- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen $\mathcal{L}_{HGr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ

- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

Definition 1.4. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h : A \to B$ heißt

a) $\mathcal{L}$-Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

für alle n und $a_1, \ldots, a_n \in A$, und n-stellige $f \in \mathcal{L}$ und

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle n und $a_1, \ldots, a_n \in A$, und n-stellige $R \in \mathcal{L}$.

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich $\Leftrightarrow$ im zweiten Teil gilt.

c) $\mathcal{L}$-Einbettung falls h injektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist.

d) $\mathcal{L}$-Isomorphismus falls h bijektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist und h^{-1} ebenfalls.

e) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen $\mathcal{L}$-Isomorph falls es ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt.

f) Ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt $\mathcal{L}$-Automorphismus.

g) Falls $A \subseteq B$, dann heißt $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\mathfrak{A}$, falls die Identität $id_A : A \to B$ eine $\mathcal{L}$-Einbettung ist.

Bemerkung. Falls $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, dann wird jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ durch vergessen zu einer $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathfrak{A}_{\restriction \mathcal{L}'}$ (Redukt von $\mathfrak{A}$).

Bemerkung. Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen sind und $h : G_1 \to G_2$ L_{HGr} Homomorphismus (genau genommen $G_{1 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$ und $G_{2 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$) dann ist h automatisch ein $\mathcal{L}_{Gr}$-Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

Bemerkung.

1) Wenn $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache $\mathcal{L}$, die im Hintergrund fest ist, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind $\mathcal{L}$-Strukturen, h ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus) dann existiert auf $h(A)$ eine $\mathcal{L}$-Struktur $h(\mathfrak{A})$, so dass $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$, aber $h(\mathfrak{A})$ ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

2) Der Schnitt von $\mathcal{L}$-Unterstrukturen ist wieder eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur.

Folgerung 1.5. Wenn $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $C \subset A$ ist, dann existiert die von C erzeugte $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$ das heißt die kleinste Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, deren Trägermenge C enthält.

Die Trägermenge von $\langle C \rangle$ erhält man dadurch, dass man C unter den Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abschließt.

$R^{\langle C \rangle}$ ist dann $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \cdots \times \langle C \rangle$

1.2 $\mathcal{L}$-Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus $\mathcal{L}$:

$$f_i, R_j, \ldots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen: $\doteq$ (Zieglersche Konvention)
- Klammern: ()
- Quantoren: $\forall \quad \exists$
- aussagenlogische Junktoren: $\underset{\text{Negation}}{\neg}, \underset{\text{und}}{\wedge}, \underset{\text{oder}}{\vee}, \underset{\text{Implikation}}{\rightarrow}, \underset{\text{Äquivalent}}{\leftrightarrow}, \underset{\text{Falsum}}{\perp}, \underset{\text{Verum}}{\top}$
- Individuenvariablen: $v_0, v_1, \ldots$

Definition 1.6 ($\mathcal{L}$-Terme)**.** $\mathcal{L}$-Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen in $\mathcal{L}$ ist und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind $\mathcal{L}$-Terme dann ist $f\tau_1 \ldots \tau_n$ ein $\mathcal{L}$-Term.

Bemerkung.

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie $+, \cdot$ schreibt man traditionell $v_1 + v_2$ statt $+v_1v_2$ muss aber bei Verschachtelungen klammern.

Definition 1.7 (Auswertung von Termen in Strukturen)**.** Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$.

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ist induktiv definiert durch:

$$v_i^{\mathfrak{A}}[\beta] := \beta(v_i)$$
$$f\tau_1 \dots \tau_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta] := f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

Definition 1.8 ($\mathcal{L}$-Formeln)**.** $\mathcal{L}$-Formeln sind

- $\bot \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$ für $\mathcal{L}$-Terme τ_1, τ_2
- $R\tau_1 \dots \tau_n$ für $\mathcal{L}$-Terme $\tau_1, \dots, \tau_n$ und n-stelliges $R \in \mathcal{L}$

Definition 1.9 (Auswertung von $\mathcal{L}$-Formeln in Strukturen)**.**
$\mathfrak{A}$ ist Modell von φ unter β oder formal $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt $\mathfrak{A} \models \bot[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \in R^{\mathfrak{A}}$
- Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ $\mathcal{L}$-Formeln sind, dann auch

$\neg\varphi$	$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ oder $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \to \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow$ Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ dann $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$
$\exists v_i \varphi$	Es gibt ein $a \in A$ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{a}{v_i}\right]$
$\forall v_i \varphi$	Für alle $a \in A$ gilt dass $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{a}{v_i}\right]$