Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

29. Oktober 2018

0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- K-Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie $\Rightarrow$ universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei K ein Körper, und $P(X) \in K[X]$. P definiert eine Abbildung $\tilde{P} : K \to K$.

P hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

Wenn $\tilde{P}$ injektiv ist, dann ist $\tilde{P}$ surjektiv.

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

<u>Formalisierung der Hopf-Eigenschaft</u>

$$\forall y \forall z (P(y = P(z) \to y = z)$$
$$\forall w \exists v P(v) = w$$

Für jedes n

$$\forall x_0, \ldots, x_n \left(\forall y \forall z \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \to y = z \right) \to \forall w \exists v \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\underset{\text{log. äquivalent}}{\sim} \forall x_0, \ldots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \right) \to \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w$$

Beispiel 0.1.

$$\mathbb{F}_{p^n} \underset{\text{erfüllt}}{\models} HE(n) \underset{\forall\exists-\text{Präservation}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{ der algebraische Abschluss von } \mathbf{F_p}} \models HE(n)$$

Beispiel 0.2. Aus dem Kompaktheitssatz folgt: $\mathbb{C} = \lim_{p \to \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

1 Grundbegriffe

1.1 $\mathcal{L}$-Strukturen

Beispiel 1.1. Der angeordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

Definition 1.2 ($\mathcal{L}$-Struktur)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Menge von

- Funktionszeichen $f_i \quad (i \in I)$
- Relationszeichen $R_j \quad (j \in J)$

Jedes Zeichen hat ein festes $n \in \mathbb{N}$ als Stelligkeit (arity).

$\mathcal{L}$ heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A (Universum, Träger, Grundmenge)
- einer n-stellige Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ für jedes n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$
- einer n-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ für jedes n-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$

$\underline{n = 0}$

$A^0 = \{\emptyset\}$

0-stellige Funktion in $\mathfrak{A}$: $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \to A$ ist eindeutig bestimmt durch $f(\emptyset) \in A$. Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in $\mathfrak{A}$:

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \mathrel{\widehat{=}} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \mathrel{\widehat{=}} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

Beispiel 1.3. a) Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ und jeder Sprache $\mathcal{L}$ kann ich eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Träger A finden!

b) $\mathcal{L} = \{R\}$, R 2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), \quad \text{d.h. } R^{\mathfrak{Q}_1} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, <), \quad \text{d.h. } R^{\mathfrak{Q}_2} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene $\mathcal{L}$-Strukturen auf $\mathbb{Q}$.

c) $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$ und $\mathcal{L}_G r = \{\circ, {}^{-1}, e\}$

Gruppen sind $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$ für alle $g \in G$
- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen $\mathcal{L}_{HGr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

Definition 1.4. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h : A \to B$ heißt

a) $\mathcal{L}$-Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n-stellige $f \in \mathcal{L}$ und

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n-stellige $R \in \mathcal{L}$.

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich $\Leftrightarrow$ im zweiten Teil gilt.

c) $\mathcal{L}$-Einbettung falls h injektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist.

d) $\mathcal{L}$-Isomorphismus falls h bijektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist und h^{-1} ebenfalls.

e) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen $\mathcal{L}$-Isomorph falls es ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt.

f) Ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt $\mathcal{L}$-Automorphismus.

g) Falls $A \subseteq B$, dann heißt $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\mathfrak{A}$, falls die Identität $id_A : A \to B$ eine $\mathcal{L}$-Einbettung ist.

Bemerkung 1.5. Falls $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, dann wird jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ durch vergessen zu einer $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathfrak{A}_{\restriction \mathcal{L}'}$ (Redukt von $\mathfrak{A}$).

Bemerkung 1.6. Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen sind und $h : G_1 \to G_2$ L_{HGr} Homomorphismus (genau genommen $G_{1 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$ und $G_{2 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$) dann ist h automatisch ein $\mathcal{L}_{Gr}$-Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

Bemerkung 1.7.

1) Wenn $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache $\mathcal{L}$, die im Hintergrund fest ist, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind $\mathcal{L}$-Strukturen, h ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus) dann existiert auf $h(A)$ eine $\mathcal{L}$-Struktur $h(\mathfrak{A})$, so dass $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$, aber $h(\mathfrak{A})$ ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

2) Der Schnitt von $\mathcal{L}$-Unterstrukturen ist wieder eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur.

Folgerung 1.8. Wenn $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $C \subset A$ ist, dann existiert die von C erzeugte $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$ das heißt die kleinste Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, deren Trägermenge C enthält.

Die Trägermenge von $\langle C \rangle$ erhält man dadurch, dass man C unter den Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abschließt.

$R^{\langle C \rangle}$ ist dann $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \cdots \times \langle C \rangle$

1.2 $\mathcal{L}$-Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus $\mathcal{L}$:

$$f_i, R_j, \ldots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen: $\doteq$ (Zieglersche Konvention)
- Klammern: ()
- Quantoren: $\forall \quad \exists$
- aussagenlogische Junktoren: $\underset{\text{Negation}}{\neg}, \underset{\text{und}}{\wedge}, \underset{\text{oder}}{\vee}, \underset{\text{Implikation}}{\rightarrow}, \underset{\text{Äquivalent}}{\leftrightarrow}, \underset{\text{Falsum}}{\bot}, \underset{\text{Verum}}{\top}$
- Individuenvariablen: $v_0, v_1, \ldots$

Definition 1.9 ($\mathcal{L}$-Terme)**.** $\mathcal{L}$-Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen in $\mathcal{L}$ ist und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind $\mathcal{L}$-Terme dann ist $f\tau_1 \ldots \tau_n$ ein $\mathcal{L}$-Term.

Bemerkung 1.10.

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie $+, \cdot$ schreibt man traditionell $v_1 + v_2$ statt $+v_1v_2$ muss aber bei Verschachtelungen klammern.

Definition 1.11 (Auswertung von Termen in Strukturen)**.** Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$.

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ist induktiv definiert durch:

$$v_i^{\mathfrak{A}}[\beta] := \beta(v_i)$$
$$f\tau_1 \dots \tau_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta] := f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

Definition 1.12 ($\mathcal{L}$-Formeln)**.** $\mathcal{L}$-Formeln sind

- $\bot \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$ für $\mathcal{L}$-Terme τ_1, τ_2
- $R\tau_1 \dots \tau_n$ für $\mathcal{L}$-Terme $\tau_1, \dots, \tau_n$ und n-stelliges $R \in \mathcal{L}$

Definition 1.13 (Auswertung von $\mathcal{L}$-Formeln in Strukturen)**.**
$\mathfrak{A}$ ist Modell von φ unter β oder formal $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt $\mathfrak{A} \models \bot[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \in R^{\mathfrak{A}}$
- Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ $\mathcal{L}$-Formeln sind, dann auch

$\neg\varphi$	$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ oder $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \to \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow$ Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ dann $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$
$\exists v_i \varphi$	Es gibt ein $a \in A$ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta \frac{a}{v_i}\right]$
$\forall v_i \varphi$	Für alle $a \in A$ gilt dass $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta \frac{a}{v_i}\right]$

Beispiel 1.14. $\underbrace{\forall v_0 \, ((\forall v_1 \quad \underbrace{Rv_0 v_1}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_1} \quad) \vee Rv_1 v_0)}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_0}$

Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors heißen gebundene Variablen, alle anderen heißen freie Variablen.

Bemerkung 1.15. $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ beziehungsweise $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ hängt nur insofern von β ab, als man wissen muss, was β mit den freien Variablen macht.

Definition 1.16 ($\mathcal{L}$-Aussage)**.** Eine $\mathcal{L}$-Aussage ($\mathcal{L}$-Satz, geschlossene Formel) ist eine $\mathcal{L}$-Formel ohne freie Variablen.

Satz 1.17. Für $\mathcal{L}$-Aussagen φ ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ unabhängig von β.

Man schreibt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$
$$\mathfrak{A} \not\models \varphi$$

Definition 1.18.

1) Eine $\mathcal{L}$-Formel φ ist allgemeingültig ($\models \varphi, \vdash \varphi$), falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ für alle $\mathfrak{A}$ und β.

2) $\mathcal{L}$-Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent ($\varphi \sim \psi$), falls

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

für alle $\mathfrak{A}$ und β.

3) ψ folgt aus $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$, falls:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta] \text{ für alle } i \in I \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ und } \beta$$

Bemerkung 1.19. $\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$

Bemerkung 1.20. Für $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und eine $\mathcal{L}$-Formel φ gilt: $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

Satz 1.21. Jede $\mathcal{L}$-Formel φ ist äquivalent zu einer $\mathcal{L}$-Formel in der folgenden Form:

$$\underbrace{Q_1 v_{i_1} \dots Q_n v_{i_n}}_{\text{pränexe Normalform}} \underbrace{\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} (\neg) \varphi_1 i, j}_{\text{disjunktive Normalform}}$$

mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.

1.3 Theorien

Definition 1.22. 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie T ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen.

2) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist Modell einer Theorie T, $\mathfrak{A} \models T$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$..

3) $\mathrm{Mod}(T) = \{\mathfrak{A}\ \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ heißt Modellklasse von T.
<u>Achtung:</u> $\mathrm{Mod}(T)$ ist im Allgemeinen keine Menge!

4) T ist konsistent (bzw. Widerspruchsfrei) falls T mindestens ein Modell hat (d.h. $\mathrm{Mod}(T) \neq \emptyset$).

5) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt elementar, falls es eine Theorie T gibt mit $\mathrm{Mod}(T) = \mathcal{K}$.

6) Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur. Dann ist

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

die vollständige Theorie von $\mathfrak{A}$.

7) Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, falls $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Beispiel 1.23.

1) Wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{B}$ bereits isomorph zu $\mathfrak{A}$.

2) $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$, da

$$\begin{aligned}(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) &\not\models \exists v_0(v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)\\ (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) &\models \exists v_0(v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)\end{aligned}$$

3) $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ mit $\overline{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{ es gibt ein } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ so dass } P(c) = 0\}$ (algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$) (Beweis dazu ist nicht trivial)

Definition 1.24. Seien T, T' $\mathcal{L}$-Theorien, φ $\mathcal{L}$-Aussage

1) $T \vdash \varphi$, falls gilt

$$\mathfrak{A} \models T \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

für alle $\mathfrak{A}$.

2) $T^{\vdash} := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage}n \mid T \vdash \varphi\}$ heißt der deduktive Abschluss von T.

3) T ist deduktiv abgeschlossen $:\Leftrightarrow T = T^{\vdash}$.

4) T und T' heißen äquivalent $T \equiv T'$ falls $T^{\vdash} = T'^{\vdash}$.

Bemerkung 1.25.

- $T \subseteq T^{\vdash} = T^{\vdash^{\vdash}}$
- $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T^{\vdash}$ beziehungsweise $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T^{\vdash})$
- $T^{\vdash}$ ist die maximale Theorie $T' \supseteq T$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T^{\vdash})$

Bemerkung 1.26. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\varphi' \sim \varphi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi'$.

Daher unterscheidet man ab sofort logisch äquivalente Formeln nicht mehr.

Formal: definiere $\mathfrak{A} \models \varphi/\sim$ für Äquivalenzklassen $[\varphi] = \varphi/\sim = \{\varphi' \mid \varphi \sim \varphi'\}$

Satz 1.27 (Tarski-Lindenbaum-Algebren)**.** Die $\mathcal{L}$-Formeln bis auf logische Äquivalenz bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})$. Die Formeln deren freie Variablen in $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ enthalten sind bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ das bedeutet:

$\mathcal{F}_i(\mathcal{L})$ ist eine partielle Ordnung $[\varphi] \leq [\psi]$ falls $\vdash (\varphi \to \psi)$ mit

- einem maximalen Element $[\top]$
- einem minimalen Element $[\bot]$
- je zwei Elemente $[\varphi], [\psi]$ haben
  - ein Supremum $[(\varphi \vee \psi)]$
  - ein Infimum $[(\varphi \wedge \psi)]$
- jedes Element $[\varphi]$ hat ein Komplement $\neg\varphi$ das heißt
  - $[(\varphi \wedge \neg\varphi)] = [\bot]$ und
  - $[(\varphi \vee \neg\varphi)] = [\top]$

Die Boolesche Algebra ist dann die Struktur $(\mathcal{F}_i(\mathcal{L}), \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ wobei $[\varphi] \wedge [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$ etc.

Definition 1.28. Wenn $\mathfrak{B} = (B, \cap, \cup^C, 0, 1)$ beziehungsweise $(B, \subseteq)$ eine Boolesche Algebra ist, dann ist

$$\mathfrak{B}^* = (B, \cup, \cap, {}^C, 1, 0) \text{ beziehungsweise } (B, \supseteq)$$

ebenfalls eine Boolesche Algebra, die duale Algebra und

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}^*, b \mapsto b^C$$

ist Isomorphismus Boolescher Algebren. Insbesondere gilt

$$(a \cup b)^C = a^C \cap b^C$$
$$(a \cap b)^C = a^C \cup b^C$$

Satz 1.29 (Stonescher Repräsentationssatz)**.** Jede Boolesche Algebra ist Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra.

Bemerkung 1.30. $\varphi \vdash \psi$ ist partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen $[\varphi]$.

- reflexiv: $\varphi \vdash \varphi$
- transitiv: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \vdash \chi$
- antisymmetrisch: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

Definition 1.31 (Filter)**.** Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ ist eine Teilmenge $F \subseteq B$ mit

- $1 \in F, 0 \notin F$
- Wenn $b \in F, b \subseteq b'$ dann $b' \in F$
- Wenn $b_1, b_2 \in F$, dann auch $b_1 \cap b_2 \in F$

Bemerkung 1.32. Das duale Konzept heißt Ideal.

Beispiel 1.33.

- Wenn $0 \neq b \in B$, dann ist
$$\langle b \rangle := \{b^i \in B \mid b \subseteq b'\}$$
ein Filter, der von b erzeugt Hauptfilter.
- $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ der Frechet-Filter ist
$$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ endlich}\}$$
- Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie, dann ist $T^{\vdash}$ ein Filter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ der von T erzeugte Filter.

Bemerkung 1.34.

$$\begin{aligned} T \text{ ist inkonsistent} &\iff \bot \in T^{\vdash} \\ &\iff \text{alle } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ liegen in } T^{\vdash} \\ &\iff \text{es gibt ein } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ mit } T \vdash \varphi \text{ und } T \vdash \neg\varphi \end{aligned}$$

Definition 1.35. 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie T heißt vollständig, falls für jede $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ entweder $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$ (insbesondere sind vollständige Theorien konsistent)

2) Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ heißt Ultrafilter, falls F Filter ist und für alle $b \in B$ gilt entweder $b \in F$ oder $b^C \in F$.

Bemerkung 1.36. 1) T ist vollständig $\Leftrightarrow$ $T^{\vdash}$ ist Ultrafilter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$

2) $\mathfrak{A}$ ist $\mathcal{L}$-Struktur, dann ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ vollständig. Man schreibt auch $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})^{\vdash}$.

Definition 1.37. $\mathfrak{A}$ sei eine $\mathcal{L}$-Struktur.

1) Definiere

$$\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \mathbin{\dot\cup} \{c_a \mid a \in A\}$$

$\mathfrak{A}$ wird kanonisch zu einer $\mathcal{L}_A$-Struktur $\mathfrak{A}_A$ expandiert durch

$$c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$$

2) Das atomare Diagramm von $\mathfrak{A}, \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ besteht aus allen atomaren und negiert-atomaren $\mathcal{L}_A$-Aussagen, die in $\mathfrak{A}$ gelten

$$\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomar oder } \varphi = \neg\psi, \psi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Das positive atomare Diagramm ist

$$\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Satz 1.38. $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Einbettung $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ wobei $\mathfrak{B}_h = (\mathfrak{B}, (h(a))_{a \in A})$.

Beweis. h injektiv

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $h(a) \neq h(a')$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $\mathfrak{B}_h \models \underbrace{\neg c_a = c_a'}_{\in \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})}$

h starker Homomorphismus

$\Leftrightarrow$ für alle n und $a_1, \ldots, a_n$

$$\begin{cases} \text{falls } f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \overset{(\neq)}{=} a, \text{ dann } f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \overset{(\neq)}{=} h(a) \\ \text{falls (nicht) } R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \text{ dann (nicht) } R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{B}_h \models (\neg) f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a \\ \mathfrak{B}_h \models (\neg) R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \end{cases}$$

□

Satz 1.39. $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$

Beweis. Wie eben. □

2 Elementar Unterstrukturen und Kompaktheit

2.1 Elementare Unterstrukturen

Definition 2.1. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen.

1) $h : A \to B$ heißt elementare Abbildung, wenn für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi = \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ gilt:

   Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$. Durch Betrachten von $\neg\varphi$ folgt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$$

2) $\mathfrak{A}$ heißt elementare Unterstruktur von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und $id_A : A \to B$ elementare Abbildung.

Bemerkung 2.2. $h : A \to B$ elementar $\Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \supseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$

Also: Wenn $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ dann $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Aber

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$$

Beispiel 2.3. $(\mathbb{N}, <) \supseteq (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$

$(\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$ also $(\mathbb{N}, <) \equiv (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$

Variante 1: Sauber beweisen per Induktion über den Aufbau der Formeln

Variante 2: Ist klar

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \not\preceq (\mathbb{N}, <)$ da $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \models \neg\exists x\ x < 1$ aber $(\mathbb{N}, <) \not\models \exists x\ x < 1$.

Beispiel 2.4. $\mathcal{L} = \{E\}$ E zweistelliges Relationssymbol, $T = E$ ist Äquivalenzrelation

Falls $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ beliebige Oberstruktur. Dann bleibt Äquivalenz aus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ erhalten und umgekehrt, aber es können Äquivalenzklassen in der Oberstruktur dazu kommen und größer werden.

1) Wenn eine endliche Zahl von Äquivalenzklassen existieren, dann bleibt die Anzahl in der elementaren Oberstruktur erhalten.

2) Wenn eine endliche Äquivalenzklasse existiert, dann bleibt deren Größe in der elementaren Oberstruktur erhalten.

3) Wenn jede Äquivalenzklasse n Elemente hat, dann hat auch in jeder Oberstruktur jede Äquivalenzklasse n Elemente.

4) Für jedes $n \in N\setminus\{0\}$ gibt es genau eine Äquivalenzklasse mit n Elementen und keine unendliche Klasse. In einer Elementaren Oberstruktur kommen nur unendliche große Äquivalenzklassen dazu.

Satz 2.5 (Tarskis Test)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, und $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, und $A \subseteq B$. Dann ist A genau dann Träger einer elementaren Unterstruktur von $\mathfrak{B}$, wenn für alle $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(v_0) \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A)$, die in $\mathfrak{B}$ erfüllt sind, gilt dass sie mit einem $a \in A$ erfüllt sind.

Das heißt wenn $\mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$, dann existiert $x \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$.

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$ Angenommen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$ (wegen $\preceq$).

Also existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$, somit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$ (wegen $\preceq$)

$\underline{\Leftarrow}$

1) $\mathfrak{B} \models \exists v_0 v_0 \doteq v_0$

   Also gibt es $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models a \doteq a$ insbesondere $A \neq \emptyset$.

2) Seien $f \in \mathcal{L}$ n-stellig, $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\mathfrak{B} \models \exists v_0 f a_1 \ldots a_n \doteq v_0$$

   Bedingung: es existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models f a_1 \ldots a_n \doteq a$.

   Also $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$, das heißt A ist Träger einer Unterstruktur.

3) Zeige per Induktion übe den Aufbau der $\mathcal{L}_A$-Formeln

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$$

- Induktionsanfang: φ Atomar

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} &\Leftrightarrow id_A : A \to B \mathcal{L}_A\text{-Einbettung} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{L}_h \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}_A) = \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) \\
&\Leftrightarrow \text{für alle atomaren Formeln } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A) \text{ gilt: } (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)
\end{aligned}$$

- Induktionsschritte

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \underset{\mathrm{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi$$

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{A} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{A} \models \varphi_2 \end{cases} \underset{\mathrm{IV}}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{matrix} \mathfrak{B} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{B} \models \varphi_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \exists v_0 \varphi(v_0) &\Leftrightarrow \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi(a) \\
&\underset{\mathrm{IV}}{\Leftrightarrow} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \\
&\Rightarrow \text{ex. } a \in B \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)
\end{aligned}$$

Da $\{\neg, \wedge, \exists\}$ ein vollständiges Junktoren-Quantoren-System bilden ist die Aussage damit gezeigt.

$\square$

Folgerung 2.6. Sei $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $S \subseteq B$. Dann existiert eine elementare Unterstruktur $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ mit $S \subseteq A$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.