Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

24. Oktober 2018

0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- K-Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie $\Rightarrow$ universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei K ein Körper, und $P(X) \in K[X]$. P definiert eine Abbildung $\tilde{P} : K \to K$.

P hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

Wenn $\tilde{P}$ injektiv ist, dann ist $\tilde{P}$ surjektiv.

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

Formalisierung der Hopf-Eigenschaft

$$\forall y \forall z (P(y = P(z) \to y = z)$$
$$\forall w \exists v P(v) = w$$

Für jedes n

$$\forall x_0, \ldots, x_n \left(\forall y \forall z \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \to y = z \right) \to \forall w \exists v \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\underset{\text{log. äquivalent}}{\sim} \forall x_0, \ldots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \right) \to \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w$$

Beispiel 0.1.

$$\mathbb{F}_{p^n} \underset{\text{erfüllt}}{\models} HE(n) \underset{\forall\exists-\text{Präservation}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{ der algebraische Abschluss von } \mathbf{F_p}} \models HE(n)$$

Beispiel 0.2. Aus dem Kompaktheitssatz folgt: $\mathbb{C} = \lim_{p \to \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

1 Grundbegriffe

1.1 $\mathcal{L}$-Strukturen

Beispiel 1.1. Der angeordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

Definition 1.2 ($\mathcal{L}$-Struktur)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Menge von

- Funktionszeichen $f_i \quad (i \in I)$
- Relationszeichen $R_j \quad (j \in J)$

Jedes Zeichen hat ein festes $n \in \mathbb{N}$ als Stelligkeit (arity).

$\mathcal{L}$ heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A (Universum, Träger, Grundmenge)
- einer n-stellige Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ für jedes n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$
- einer n-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ für jedes n-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$

$\underline{n = 0}$

$A^0 = \{\emptyset\}$

0-stellige Funktion in $\mathfrak{A}$: $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \to A$ ist eindeutig bestimmt durch $f(\emptyset) \in A$. Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in $\mathfrak{A}$:

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \mathrel{\hat{=}} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \mathrel{\hat{=}} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

Beispiel 1.3. a) Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ und jeder Sprache $\mathcal{L}$ kann ich eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Träger A finden!

b) $\mathcal{L} = \{R\}$, R 2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h. } R^{\mathfrak{Q}_1} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h. } R^{\mathfrak{Q}_2} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene $\mathcal{L}$-Strukturen auf $\mathbb{Q}$.

c) $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$ und $\mathcal{L}_G r = \{\circ, ^{-1}, e\}$

Gruppen sind $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$ für alle $g \in G$
- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen $\mathcal{L}_{HGr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

Definition 1.4. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h : A \to B$ heißt

a) $\mathcal{L}$-Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

für alle n und $a_1, \ldots, a_n \in A$, und n-stellige $f \in \mathcal{L}$ und

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle n und $a_1, \ldots, a_n \in A$, und n-stellige $R \in \mathcal{L}$.

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich $\Leftrightarrow$ im zweiten Teil gilt.

c) $\mathcal{L}$-Einbettung falls h injektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist.

d) $\mathcal{L}$-Isomorphismus falls h bijektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist und h^{-1} ebenfalls.

e) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen $\mathcal{L}$-Isomorph falls es ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt.

f) Ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt $\mathcal{L}$-Automorphismus.

g) Falls $A \subseteq B$, dann heißt $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\mathfrak{A}$, falls die Identität $id_A : A \to B$ eine $\mathcal{L}$-Einbettung ist.

Bemerkung. Falls $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, dann wird jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ durch vergessen zu einer $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathfrak{A}_{\restriction \mathcal{L}'}$ (Redukt von $\mathfrak{A}$).

Bemerkung. Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen sind und $h : G_1 \to G_2$ L_{HGr} Homomorphismus (genau genommen $G_{1\restriction \mathcal{L}_{HGr}}$ und $G_{2\restriction \mathcal{L}_{HGr}}$) dann ist h automatisch ein $\mathcal{L}_{Gr}$-Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

Bemerkung.

1) Wenn $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache $\mathcal{L}$, die im Hintergrund fest ist, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind $\mathcal{L}$-Strukturen, h ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus) dann existiert auf $h(A)$ eine $\mathcal{L}$-Struktur $h(\mathfrak{A})$, so dass $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$, aber $h(\mathfrak{A})$ ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

2) Der Schnitt von $\mathcal{L}$-Unterstrukturen ist wieder eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur.

Folgerung 1.5. Wenn $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $C \subset A$ ist, dann existiert die von C erzeugte $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$ das heißt die kleinste Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, deren Trägermenge C enthält.

Die Trägermenge von $\langle C \rangle$ erhält man dadurch, dass man C unter den Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abschließt.

$R^{\langle C \rangle}$ ist dann $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \cdots \times \langle C \rangle$

1.2 $\mathcal{L}$-Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus $\mathcal{L}$:

$$f_i, R_j, \ldots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen: $\doteq$ (Zieglersche Konvention)
- Klammern: ()
- Quantoren: $\forall \quad \exists$
- aussagenlogische Junktoren: $\underset{\text{Negation}}{\neg}, \underset{\text{und}}{\wedge}, \underset{\text{oder}}{\vee}, \underset{\text{Implikation}}{\rightarrow}, \underset{\text{Äquivalent}}{\leftrightarrow}, \underset{\text{Falsum}}{\bot}, \underset{\text{Verum}}{\top}$
- Individuenvariablen: $v_0, v_1, \ldots$

Definition 1.6 ($\mathcal{L}$-Terme)**.** $\mathcal{L}$-Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen in $\mathcal{L}$ ist und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind $\mathcal{L}$-Terme dann ist $f\tau_1 \ldots \tau_n$ ein $\mathcal{L}$-Term.

Bemerkung.

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie $+, \cdot$ schreibt man traditionell $v_1 + v_2$ statt $+v_1v_2$ muss aber bei Verschachtelungen klammern.

Definition 1.7 (Auswertung von Termen in Strukturen)**.** Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$.

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} v_i^{\mathfrak{A}}[\beta] &:= \beta(v_i) \\ f\tau_1 \dots \tau_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta] &:= f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \end{aligned}$$

Definition 1.8 ($\mathcal{L}$-Formeln)**.** $\mathcal{L}$-Formeln sind

- $\bot \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$ für $\mathcal{L}$-Terme τ_1, τ_2
- $R\tau_1 \dots \tau_n$ für $\mathcal{L}$-Terme $\tau_1, \dots, \tau_n$ und n-stelliges $R \in \mathcal{L}$

Definition 1.9 (Auswertung von $\mathcal{L}$-Formeln in Strukturen)**.**
$\mathfrak{A}$ ist Modell von φ unter β oder formal $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt $\mathfrak{A} \models \bot[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \in R^{\mathfrak{A}}$
- Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ $\mathcal{L}$-Formeln sind, dann auch

$$\begin{array}{ll} \neg\varphi & \mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta] \\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2) & \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta] \\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) & \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ oder } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta] \\ (\varphi_1 \to \varphi_2) & \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \text{Wenn } \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ dann } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta] \\ (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) & \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]) \\ \exists v_i \varphi & \text{Es gibt ein } a \in A \text{ so dass } \mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta \dfrac{a}{v_i}\right] \\ \forall v_i \varphi & \text{Für alle } a \in A \text{ gilt dass } \mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta \dfrac{a}{v_i}\right] \end{array}$$

Beispiel 1.10. $\underbrace{\forall v_0 \, ((\forall v_1 \quad \underbrace{Rv_0 v_1}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_1} \quad) \vee Rv_1 v_0)}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_0}$

Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors heißen gebundene Variablen, alle anderen heißen freie Variablen.

Bemerkung. $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ beziehungsweise $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ hängt nur insofern von β ab, als man wissen muss, was β mit den freien Variablen macht.

Definition 1.11 ($\mathcal{L}$-Aussage)**.** Eine $\mathcal{L}$-Aussage ($\mathcal{L}$-Satz, geschlossene Formel) ist eine $\mathcal{L}$-Formel ohne freie Variablen.

Satz 1.12. Für $\mathcal{L}$-Aussagen φ ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ unabhängig von β.

Man schreibt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$
$$\mathfrak{A} \not\models \varphi$$

Definition 1.13.

1) Eine $\mathcal{L}$-Formel φ ist allgemeingültig ($\models \varphi, \vdash \varphi$), falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ für alle $\mathfrak{A}$ und β.

2) $\mathcal{L}$-Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent ($\varphi \sim \psi$), falls

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

für alle $\mathfrak{A}$ und β.

3) ψ folgt aus $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$, falls:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta] \text{ für alle } i \in I \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ und } \beta$$

Bemerkung. $\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$
Bemerkung. Für $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und eine $\mathcal{L}$-Formel φ gilt: $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

Satz 1.14. Jede $\mathcal{L}$-Formel φ ist äquivalent zu einer $\mathcal{L}$-Formel in der folgenden Form:

$$\underbrace{Q_1 v_{i_1} \dots Q_n v_{i_n}}_{\text{pränexe Normalform}} \underbrace{\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} (\neg)\varphi_1 i, j}_{\text{disjunktive Normalform}}$$

mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.

1.3 Theorien

Definition 1.15. 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie T ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen.

2) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist Modell einer Theorie T, $\mathfrak{A} \models T$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$..

3) $\mathrm{Mod}(T) = \{\mathfrak{A}\ \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ heißt Modellklasse von T.
Achtung: $\mathrm{Mod}(T)$ ist im Allgemeinen keine Menge!

4) T ist konsistent (bzw. Widerspruchsfrei) falls T mindestens ein Modell hat (d.h. $\mathrm{Mod}(T) \neq \emptyset$).

5) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt elementar, falls es eine Theorie T gibt mit $\mathrm{Mod}(T) = \mathcal{K}$.

6) Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur. Dann ist

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

die vollständige Theorie von $\mathfrak{A}$.

7) Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, falls $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Beispiel 1.16.

1) Wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{B}$ bereits isomorph zu $\mathfrak{A}$.

2) $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$, da

$$(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)$$
$$(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)$$

3) $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ mit $\overline{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{ es gibt ein } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ so dass } P(c) = 0\}$ (algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$) (Beweis dazu ist nicht trivial)

Definition 1.17. Seien T, T' $\mathcal{L}$-Theorien, φ $\mathcal{L}$-Aussage

1) $T \vdash \varphi$, falls gilt

$$\mathfrak{A} \models T \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

für alle $\mathfrak{A}$.

2) $T^{\vdash} := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage}n \mid T \vdash \varphi\}$ heißt der deduktive Abschluss von T.

3) T ist deduktiv abgeschlossen $:\Leftrightarrow T = T^{\vdash}$.

4) T und T' heißen äquivalent $T \equiv T'$ falls $T^{\vdash} = T'^{\vdash}$.

Bemerkung.

- $T \subseteq T^{\vdash} = T^{\vdash^{\vdash}}$
- $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T^{\vdash}$ beziehungsweise $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T^{\vdash})$
- $T^{\vdash}$ ist die maximale Theorie $T' \supseteq T$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T^{\vdash})$

Bemerkung. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\varphi' \sim \varphi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi'$.

Daher unterscheidet man ab sofort logisch äquivalente Formeln nicht mehr.

Formal: definiere $\mathfrak{A} \models \varphi/\sim$ für Äquivalenzklassen $[\varphi] = \varphi/\sim = \{\varphi' \mid \varphi \sim \varphi'\}$

Satz 1.18 (Tarski-Lindenbaum-Algebren)**.** Die $\mathcal{L}$-Formeln bis auf logische Äquivalenz bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})$. Die Formeln deren freie Variablen in $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ enthalten sind bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ das bedeutet:

$\mathcal{F}_i(\mathcal{L})$ ist eine partielle Ordnung $[\varphi] \leq [\psi]$ falls $\vdash (\varphi \to \psi)$ mit

- einem maximalen Element $[\top]$
- einem minimalen Element $[\bot]$
- je zwei Elemente $[\varphi], [\psi]$ haben
  - ein Supremum $[(\varphi \vee \psi)]$
  - ein Infimum $[(\varphi \wedge \psi)]$
- jedes Element $[\varphi]$ hat ein Komplement $\neg\varphi$ das heißt
  - $[(\varphi \wedge \neg\varphi)] = [\bot]$ und
  - $[(\varphi \vee \neg\varphi)] = [\top]$

Die Boolesche Algebra ist dann die Struktur $(\mathcal{F}_i(\mathcal{L}), \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ wobei $[\varphi] \wedge [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$ etc.

Definition 1.19. Wenn $\mathfrak{B} = (B, \cap, \cup^C, 0, 1)$ beziehungsweise $(B, \subseteq)$ eine Boolesche Algebra ist, dann ist

$$\mathfrak{B}^* = (B, \cup, \cap, {}^C, 1, 0) \text{ beziehungsweise } (B, \supseteq)$$

ebenfalls eine Boolesche Algebra, die duale Algebra und

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}^*, b \mapsto b^C$$

ist Isomorphismus Boolescher Algebren. Insbesondere gilt

$$(a \cup b)^C = a^C \cap b^C$$
$$(a \cap b)^C = a^C \cup b^C$$

Satz 1.20 (Stonescher Repräsentationssatz)**.** Jede Boolesche Algebra ist Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra.

Bemerkung. $\varphi \vdash \psi$ ist partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen $[\varphi]$.

- reflexiv: $\varphi \vdash \varphi$
- transitiv: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \vdash \chi$
- antisymmetrisch: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

Definition 1.21 (Filter)**.** Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ ist eine Teilmenge $F \subseteq B$ mit

- $1 \in F, 0 \notin F$
- Wenn $b \in F, b \subseteq b'$ dann $b' \in F$
- Wenn $b_1, b_2 \in F$, dann auch $b_1 \cap b_2 \in F$

Bemerkung. Das duale Konzept heißt Ideal.

Beispiel 1.22.

- Wenn $0 \neq b \in B$, dann ist

  $$\langle b \rangle := \{b^i \in B \mid b \subseteq b'\}$$

  ein Filter, der von b erzeugt Hauptfilter.

- $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ der Frechet-Filter ist

  $$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ endlich}\}$$

- Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie, dann ist $T^{\vdash}$ ein Filter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ der von T erzeugte Filter.

Bemerkung.

$$\begin{aligned} T \text{ ist inkonsistent} &\iff \bot \in T^{\vdash} \\ &\iff \text{alle } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ liegen in } T^{\vdash} \\ &\iff \text{es gibt ein } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ mit } T \vdash \varphi \text{ und } T \vdash \neg\varphi \end{aligned}$$

Definition 1.23. 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie T heißt vollständig, falls für jede $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ entweder $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$ (insbesondere sind vollständige Theorien konsistent)

2) Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ heißt Ultrafilter, falls F Filter ist und für alle $b \in B$ gilt entweder $b \in F$ oder $b^C \in F$.

Bemerkung. 1) T ist vollständig $\Leftrightarrow T^\vdash$ ist Ultrafilter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$

2) $\mathfrak{A}$ ist $\mathcal{L}$-Struktur, dann ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ vollständig. Man schreibt auch $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})^\vdash$.

Definition 1.24. $\mathfrak{A}$ sei eine $\mathcal{L}$-Struktur.

1) Definiere

$$\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \mathbin{\dot\cup} \{c_a \mid a \in A\}$$

$\mathfrak{A}$ wird kanonisch zu einer $\mathcal{L}_A$-Struktur $\mathfrak{A}_A$ expandiert durch

$$c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$$

2) Das atomare Diagramm von $\mathfrak{A}, \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ besteht aus allen atomaren und negiert-atomaren $\mathcal{L}_A$-Aussagen, die in $\mathfrak{A}$ gelten

$$\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomar oder } \varphi = \neg\psi, \psi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Das positive atomare Diagramm ist

$$\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Satz 1.25. $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Einbettung $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ wobei $\mathfrak{B}_h = (\mathfrak{B}, (h(a))_{a \in A})$.

Beweis. h injektiv

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $h(a) \neq h(a')$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $\mathfrak{B}_h \models \underbrace{\neg c_a = c'_a}_{\in \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})}$

h starker Homomorphismus

$\Leftrightarrow$ für alle n und $a_1, \ldots, a_n$

$$\begin{cases} \text{falls } f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \overset{(\neq)}{=} a, \text{ dann } f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \overset{(\neq)}{=} h(a) \\ \text{falls (nicht) } R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \text{ dann (nicht) } R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{B}_h \models (\neg) f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a \\ \mathfrak{B}_h \models (\neg) R(c_{a_0}, \ldots, c_{a_n}) \end{cases}$$

$\square$

Satz 1.26. $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$

Beweis. Wie eben. $\square$

2 Elementar Unterstrukturen und Kompaktheit

2.1 Elementare Unterstrukturen

Definition 2.1. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen.

1) $h : A \to B$ heißt elementare Abbildung, wenn für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi = \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

   Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})$ durch betrachten von $\neg\varphi$ folgt
   $$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$$

2) $\mathfrak{A}$ heißt elementare Unterstruktur von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und $id_A : A \to B$ elementare Abbildung.