

Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

7. November 2018

0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- K -Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie \Rightarrow universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei K ein Körper, und $P(X) \in K[X]$. P definiert eine Abbildung $\tilde{P} : K \rightarrow K$.

P hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

Wenn \tilde{P} injektiv ist, dann ist \tilde{P} surjektiv.

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

Formalisierung der Hopf-Eigenschaft

$$\begin{aligned} \forall y \forall z (P(y = P(z) \rightarrow y = z) \\ \forall w \exists v P(v) = w \end{aligned}$$

Für jedes n

$$\forall x_0, \dots, x_n \left(\forall y \forall z \left(\sum_{i=0}^n x_i y^i = \sum_{i=0}^n x_i z^i \rightarrow y = z \right) \rightarrow \forall w \exists v \sum_{i=0}^n x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\sim_{\text{log. äquivalent}} \forall x_0, \dots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left(\sum_{i=0}^n x_i y^i = \sum_{i=0}^n x_i z^i \right) \rightarrow \sum_{i=0}^n x_i v^i = w$$

Beispiel 0.1.

$$\mathbb{F}_{p^n} \models_{\text{erfüllt}} HE(n) \xrightarrow{\forall\exists\text{-Präservation}} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{der algebraische Abschluss von } \mathbf{F}_p} \models HE(n)$$

Beispiel 0.2. Aus dem Kompaktheitssatz folgt: $\mathbb{C} = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

1 Grundbegriffe

1.1 \mathcal{L} -Strukturen

Beispiel 1.1. Der angeordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

Definition 1.2 (\mathcal{L} -Struktur). Sei \mathcal{L} eine Menge von

- Funktionszeichen f_i ($i \in I$)
- Relationszeichen R_j ($j \in J$)

Jedes Zeichen hat ein festes $n \in \mathbb{N}$ als Stelligkeit (arity).

\mathcal{L} heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A (Universum, Träger, Grundmenge)
- einer n -stellige Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$ für jedes n -stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$
- einer n -stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ für jedes n -stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$

$n = 0$

$$A^0 = \{\emptyset\}$$

0-stellige Funktion in \mathfrak{A} : $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \rightarrow A$ ist eindeutig bestimmt durch $f(\emptyset) \in A$. Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in \mathfrak{A} :

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \hat{=} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \hat{=} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

Beispiel 1.3. a) Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ und jeder Sprache \mathcal{L} kann ich eine \mathcal{L} -Struktur mit Träger A finden!

b) $\mathcal{L} = \{R\}$, R 2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_1} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, <), & \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_2} &= \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene \mathcal{L} -Strukturen auf \mathbb{Q} .

c) $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$ und $\mathcal{L}_{Gr} = \{\circ, ^{-1}, e\}$

Gruppen sind \mathcal{L}_{Gr} -Strukturen \mathfrak{G} mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$ für alle $g \in G$
- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen \mathcal{L}_{HGr} -Strukturen \mathfrak{G} mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

Definition 1.4. Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} \mathcal{L} -Strukturen. $h : A \rightarrow B$ heißt

a) \mathcal{L} -Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n -stellige $f \in \mathcal{L}$ und

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle n und $a_1, \dots, a_n \in A$, und n -stellige $R \in \mathcal{L}$.

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich \Leftrightarrow im zweiten Teil gilt.

c) \mathcal{L} -Einbettung falls h injektiver starker \mathcal{L} -Homomorphismus ist.

d) \mathcal{L} -Isomorphismus falls h bijektiver starker \mathcal{L} -Homomorphismus ist und h^{-1} ebenfalls.

e) \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißen \mathcal{L} -Isomorph falls es ein \mathcal{L} -Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ gibt.

f) Ein \mathcal{L} -Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ heißt \mathcal{L} -Automorphismus.

g) Falls $A \subseteq B$, dann heißt \mathfrak{A} \mathcal{L} -Unterstruktur von \mathfrak{B} beziehungsweise \mathfrak{B} \mathcal{L} -Oberstruktur von \mathfrak{A} , falls die Identität $id_A : A \rightarrow B$ eine \mathcal{L} -Einbettung ist.

Bemerkung 1.5. Falls $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, dann wird jede \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} durch vergessen zu einer \mathcal{L}' -Struktur $\mathfrak{A}|_{\mathcal{L}'}$ (Redukt von \mathfrak{A}).

Bemerkung 1.6. Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ \mathcal{L}_{Gr} -Strukturen sind und $h : G_1 \rightarrow G_2$ L_{HGr} Homomorphismus (genau genommen $G_1|_{\mathcal{L}_{HGr}}$ und $G_2|_{\mathcal{L}_{HGr}}$) dann ist h automatisch ein \mathcal{L}_{Gr} -Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

Bemerkung 1.7.

1) Wenn $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache \mathcal{L} , die im Hintergrund fest ist, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind \mathcal{L} -Strukturen, h ist \mathcal{L} -Homomorphismus) dann existiert auf $h(A)$ eine \mathcal{L} -Struktur $h(\mathfrak{A})$, so dass $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$, aber $h(\mathfrak{A})$ ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von \mathfrak{B} .

2) Der Schnitt von \mathcal{L} -Unterstrukturen ist wieder eine \mathcal{L} -Unterstruktur.

Folgerung 1.8. Wenn \mathfrak{A} eine \mathcal{L} -Struktur und $C \subset A$ ist, dann existiert die von C erzeugte \mathcal{L} -Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$ das heißt die kleinste Unterstruktur von \mathfrak{A} , deren Trägermenge C enthält.

Die Trägermenge von $\langle C \rangle$ erhält man dadurch, dass man C unter den Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abschließt.

$R^{(C)}$ ist dann $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \dots \times \langle C \rangle$

1.2 \mathcal{L} -Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus \mathcal{L} :

$$f_i, R_j, \dots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen: \doteq (Zieglersche Konvention)

- Klammern: $()$

- Quantoren: $\forall \quad \exists$

- aussagenlogische Junktoren: \neg (Negation), \wedge (und), \vee (oder), \rightarrow (Implikation), \leftrightarrow (Äquivalent), \perp (Falsum), \top (Verum)

- Individuenvariablen: v_0, v_1, \dots

Definition 1.9 (\mathcal{L} -Terme). \mathcal{L} -Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn f ein n -stelliges Funktionszeichen in \mathcal{L} ist und τ_1, \dots, τ_n sind \mathcal{L} -Terme dann ist $f\tau_1 \dots \tau_n$ ein \mathcal{L} -Term.

Bemerkung 1.10.

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie $+$, \cdot schreibt man traditionell $v_1 + v_2$ statt $+v_1v_2$ muss aber bei Verschachtelungen klammern.

Definition 1.11 (Auswertung von Termen in Strukturen). Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow A$.

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung $\tau^\mathfrak{A}[\beta]$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} v_i^\mathfrak{A}[\beta] &:= \beta(v_i) \\ f\tau_1 \dots \tau_n^\mathfrak{A}[\beta] &:= f^\mathfrak{A}(\tau_1^\mathfrak{A}[\beta], \dots, \tau_n^\mathfrak{A}[\beta]) \end{aligned}$$

Definition 1.12 (\mathcal{L} -Formeln). \mathcal{L} -Formeln sind

- $\perp \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$ für \mathcal{L} -Terme τ_1, τ_2
- $R\tau_1 \dots \tau_n$ für \mathcal{L} -Terme τ_1, \dots, τ_n und n -stelliges $R \in \mathcal{L}$

Definition 1.13 (Auswertung von \mathcal{L} -Formeln in Strukturen). \mathfrak{A} ist Modell von φ unter β oder formal $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt $\mathfrak{A} \models \perp[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^\mathfrak{A}[\beta] = \tau_2^\mathfrak{A}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^\mathfrak{A}[\beta], \dots, \tau_n^\mathfrak{A}[\beta]) \in R^\mathfrak{A}$
- Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ \mathcal{L} -Formeln sind, dann auch

$\neg\varphi$	$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ oder } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \text{Wenn } \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \text{ dann } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$
$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$
$\exists v_i \varphi$	Es gibt ein $a \in A$ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[\beta \frac{a}{v_i} \right]$
$\forall v_i \varphi$	Für alle $a \in A$ gilt dass $\mathfrak{A} \models \varphi \left[\beta \frac{a}{v_i} \right]$

Beispiel 1.14. $\forall v_0 ((\forall v_1 \underbrace{Rv_0v_1}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_1}) \vee Rv_1v_0)$

 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_0}$

Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors heißen gebundene Variablen, alle anderen heißen freie Variablen.

Bemerkung 1.15. $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ beziehungsweise $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ hängt nur insofern von β ab, als man wissen muss, was β mit den freien Variablen macht.

Definition 1.16 (\mathcal{L} -Aussage). Eine \mathcal{L} -Aussage (\mathcal{L} -Satz, geschlossene Formel) ist eine \mathcal{L} -Formel ohne freie Variablen.

Satz 1.17. Für \mathcal{L} -Aussagen φ ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ unabhängig von β .

Man schreibt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &\models \varphi \\ \mathfrak{A} &\not\models \varphi\end{aligned}$$

Definition 1.18.

- 1) Eine \mathcal{L} -Formel φ ist allgemeingültig ($\models \varphi, \vdash \varphi$), falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ für alle \mathfrak{A} und β .
- 2) \mathcal{L} -Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent ($\varphi \sim \psi$), falls

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

für alle \mathfrak{A} und β .

- 3) ψ folgt aus $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$, falls:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta] \text{ für alle } i \in I \implies \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ und } \beta$$

Bemerkung 1.19. $\varphi \sim \psi \iff \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$

Bemerkung 1.20. Für $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und eine \mathcal{L} -Formel φ gilt: $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

Satz 1.21. Jede \mathcal{L} -Formel φ ist äquivalent zu einer \mathcal{L} -Formel in der folgenden Form:

$$\underbrace{Q_1 v_{i_1} \dots Q_n v_{i_n}}_{\text{pränexe Normalform}} \bigvee_{j \in J} \underbrace{\bigwedge_{k \in K_j} (\neg) \varphi_1 i, j}_{\text{disjunktive Normalform}}$$

mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.

1.3 Theorien

Definition 1.22. 1) Eine \mathcal{L} -Theorie T ist eine Menge von \mathcal{L} -Aussagen.

- 2) Eine Struktur \mathfrak{A} ist Modell einer Theorie T , $\mathfrak{A} \models T$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$.
- 3) $\text{Mod}(T) = \{\mathfrak{A} \text{ } \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ heißt Modellklasse von T .
Achtung: $\text{Mod}(T)$ ist im Allgemeinen keine Menge!
- 4) T ist konsistent (bzw. Widerspruchsfrei) falls T mindestens ein Modell hat (d.h. $\text{Mod}(T) \neq \emptyset$).
- 5) Eine Klasse \mathcal{K} von \mathcal{L} -Strukturen heißt elementar, falls es eine Theorie T gibt mit $\text{Mod}(T) = \mathcal{K}$.
- 6) Sei \mathfrak{A} \mathcal{L} -Struktur. Dann ist

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

die vollständige Theorie von \mathfrak{A} .

- 7) Zwei \mathcal{L} -Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, falls $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$.

Beispiel 1.23.

- 1) Wenn \mathfrak{A} endlich ist und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, dann ist \mathfrak{B} bereits isomorph zu \mathfrak{A} .
- 2) $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$, da

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) &\not\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1) \\ (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) &\models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = 1 + 1) \end{aligned}$$

- 3) $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ mit $\overline{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{es gibt ein } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ so dass } P(c) = 0\}$ (algebraischer Abschluss von \mathbb{Q}) (Beweis dazu ist nicht trivial)

Definition 1.24. Seien T, T' \mathcal{L} -Theorien, φ \mathcal{L} -Aussage

- 1) $T \vdash \varphi$, falls gilt

$$\mathfrak{A} \models T \implies \mathfrak{A} \models \varphi$$

für alle \mathfrak{A} .

- 2) $T^+ := \{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Aussagen} \mid T \vdash \varphi\}$ heißt der deduktive Abschluss von T .
- 3) T ist deduktiv abgeschlossen $:\Leftrightarrow T = T^+$.
- 4) T und T' heißen äquivalent $T \equiv T'$ falls $T^+ = T'^+$.

Bemerkung 1.25.

- $T \subseteq T^\perp = T^{\perp\perp}$
- $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T^\perp$ beziehungsweise $\text{Mod}(T) = \text{Mod}(T^\perp)$
- T^\perp ist die maximale Theorie $T' \supseteq T$ mit der Eigenschaft $\text{Mod}(T) = \text{Mod}(T^\perp)$

Bemerkung 1.26. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\varphi' \sim \varphi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi'$.

Daher unterscheidet man ab sofort logisch äquivalente Formeln nicht mehr.

Formal: definiere $\mathfrak{A} \models \varphi / \sim$ für Äquivalenzklassen $[\varphi] = \varphi / \sim = \{\varphi' \mid \varphi \sim \varphi'\}$

Satz 1.27 (Tarski-Lindenbaum-Algebren). Die \mathcal{L} -Formeln bis auf logische Äquivalenz bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})$. Die Formeln deren freie Variablen in $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ enthalten sind bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ das bedeutet:

$\mathcal{F}_i(\mathcal{L})$ ist eine partielle Ordnung $[\varphi] \leq [\psi]$ falls $\vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ mit

- einem maximalen Element $[\top]$
- einem minimalen Element $[\perp]$
- je zwei Elemente $[\varphi], [\psi]$ haben
 - ein Supremum $[(\varphi \vee \psi)]$
 - ein Infimum $[(\varphi \wedge \psi)]$
- jedes Element $[\varphi]$ hat ein Komplement $\neg\varphi$ das heißt
 - $[(\varphi \wedge \neg\varphi)] = [\perp]$ und
 - $[(\varphi \vee \neg\varphi)] = [\top]$

Die Boolesche Algebra ist dann die Struktur $(\mathcal{F}_i(\mathcal{L}), \wedge, \vee, \neg, \top, \perp)$ wobei $[\varphi] \wedge [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$ etc.

Definition 1.28. Wenn $\mathfrak{B} = (B, \cap, \cup^C, 0, 1)$ beziehungsweise (B, \subseteq) eine Boolesche Algebra ist, dann ist

$$\mathfrak{B}^* = (B, \cup, \cap^C, 1, 0) \text{ beziehungsweise } (B, \supseteq)$$

ebenfalls eine Boolesche Algebra, die duale Algebra und

$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}^*, b \mapsto b^C$$

ist Isomorphismus Boolescher Algebren. Insbesondere gilt

$$(a \cup b)^C = a^C \cap b^C$$

$$(a \cap b)^C = a^C \cup b^C$$

Satz 1.29 (Stonescher Repräsentationssatz). Jede Boolesche Algebra ist Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra.

Bemerkung 1.30. $\varphi \vdash \psi$ ist partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen $[\varphi]$.

- reflexiv: $\varphi \vdash \varphi$
- transitiv: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \vdash \chi$
- antisymmetrisch: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

Definition 1.31 (Filter). Ein Filter in einer Booleschen Algebra \mathfrak{B} ist eine Teilmenge $F \subseteq B$ mit

- $1 \in F, 0 \notin F$
- Wenn $b \in F, b \subseteq b'$ dann $b' \in F$
- Wenn $b_1, b_2 \in F$, dann auch $b_1 \cap b_2 \in F$

Bemerkung 1.32. Das duale Konzept heißt Ideal.

Beispiel 1.33.

- Wenn $0 \neq b \in B$, dann ist

$$\langle b \rangle := \{b^i \in B \mid b \subseteq b^i\}$$

ein Filter, der von b erzeugt Hauptfilter.

- $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \text{Pot}(\mathbb{N})$ der Frechet-Filter ist

$$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ endlich}\}$$

- Sei T eine konsistente \mathcal{L} -Theorie, dann ist T^+ ein Filter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ der von T erzeugte Filter.

Bemerkung 1.34.

$$T \text{ ist inkonsistent} \iff \perp \in T^+$$

$$\iff \text{alle } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ liegen in } T^+$$

$$\iff \text{es gibt ein } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ mit } T \vdash \varphi \text{ und } T \vdash \neg\varphi$$

Definition 1.35. 1) Eine \mathcal{L} -Theorie T heißt vollständig, falls für jede $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ entweder $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$ (insbesondere sind vollständige Theorien konsistent)

2) Ein Filter in einer Booleschen Algebra \mathfrak{B} heißt Ultrafilter, falls F Filter ist und für alle $b \in B$ gilt entweder $b \in F$ oder $b^C \in F$.

Bemerkung 1.36. 1) T ist vollständig $\Leftrightarrow T^+$ ist Ultrafilter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$

2) \mathfrak{A} ist \mathcal{L} -Struktur, dann ist $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ vollständig. Man schreibt auch $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{A})^+$.

Definition 1.37. \mathfrak{A} sei eine \mathcal{L} -Struktur.

1) Definiere

$$\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \dot{\cup} \{c_a \mid a \in A\}$$

\mathfrak{A} wird kanonisch zu einer \mathcal{L}_A -Struktur \mathfrak{A}_A expandiert durch

$$c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$$

2) Das atomare Diagramm von \mathfrak{A} , $\text{Diag}(\mathfrak{A})$ besteht aus allen atomaren und negiert-atomaren \mathcal{L}_A -Aussagen, die in \mathfrak{A} gelten

$$\text{Diag}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomar oder } \varphi = \neg\psi, \psi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Das positive atomare Diagramm ist

$$\text{Diag}^+(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Satz 1.38. $h : A \rightarrow B$ ist \mathcal{L} -Einbettung $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_h \models \text{Diag}(\mathfrak{A})$ wobei $\mathfrak{B}_h = (\mathfrak{B}, (h(a))_{a \in A})$.

Beweis. h injektiv

\Leftrightarrow für alle $a \neq a'$ gilt $h(a) \neq h(a')$

\Leftrightarrow für alle $a \neq a'$ gilt $\mathfrak{B}_h \models \underbrace{\neg c_a = c_{a'}}_{\in \text{Diag}(\mathfrak{A})}$

h starker Homomorphismus

\Leftrightarrow für alle n und a_1, \dots, a_n

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \text{falls } f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \stackrel{(\neq)}{=} a, \text{ dann } f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \stackrel{(\neq)}{=} h(a) \\ \text{falls (nicht) } R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \text{ dann (nicht) } R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathfrak{B}_h \models (\neg)f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a \\ \mathfrak{B}_h \models (\neg)R(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \end{cases} \end{aligned}$$

□

Satz 1.39. $h : A \rightarrow B$ ist \mathcal{L} -Homomorphismus $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \text{Diag}^+(\mathfrak{A})$

Beweis. Wie eben. □

2 Elementar Unterstrukturen und Kompaktheit

2.1 Elementare Unterstrukturen

Definition 2.1. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ \mathcal{L} -Strukturen.

- 1) $h : A \rightarrow B$ heißt elementare Abbildung, wenn für alle \mathcal{L} -Formeln $\varphi = \varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ gilt:

Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$. Durch Betrachten von $\neg\varphi$ folgt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$$

- 2) \mathfrak{A} heißt elementare Unterstruktur von \mathfrak{B} , $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und $id_A : A \rightarrow B$ elementare Abbildung.

Bemerkung 2.2. $h : A \rightarrow B$ elementar $\Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \text{Th}(\mathfrak{A}_A) \supseteq \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \text{Diag}(\mathfrak{A})$

Also: Wenn $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ dann $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Aber

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$$

Beispiel 2.3. $(\mathbb{N}, <) \supseteq (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$

$$(\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \text{ also } (\mathbb{N}, <) \equiv (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$$

Variante 1: Sauber beweisen per Induktion über den Aufbau der Formeln

Variante 2: Ist klar

$$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \not\equiv (\mathbb{N}, <) \text{ da } (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \models \neg \exists x \, x < 1 \text{ aber } (\mathbb{N}, <) \not\models \neg \exists x \, x < 1.$$

Beispiel 2.4. $\mathcal{L} = \{E\}$ E zweistelliges Relationssymbol, $T = E$ ist Äquivalenzrelation

Falls $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ beliebige Oberstruktur. Dann bleibt Äquivalenz aus \mathfrak{A} in \mathfrak{B} erhalten und umgekehrt, aber es können Äquivalenzklassen in der Oberstruktur dazu kommen und größer werden.

- 1) Wenn eine endliche Zahl von Äquivalenzklassen existieren, dann bleibt die Anzahl in der elementaren Oberstruktur erhalten.
- 2) Wenn eine endliche Äquivalenzklasse existiert, dann bleibt deren Größe in der elementaren Oberstruktur erhalten.
- 3) Wenn jede Äquivalenzklasse n Elemente hat, dann hat auch in jeder Oberstruktur jede Äquivalenzklasse n Elemente.
- 4) Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es genau eine Äquivalenzklasse mit n Elementen und keine unendliche Klasse. In einer Elementaren Oberstruktur kommen nur unendliche große Äquivalenzklassen dazu.

Satz 2.5 (Tarskis Test). Sei \mathcal{L} eine Sprache, und \mathfrak{B} eine \mathcal{L} -Struktur, und $A \subseteq B$. Dann ist A genau dann Träger einer elementaren Unterstruktur von \mathfrak{B} , wenn für alle \mathcal{L}_A -Formeln $\varphi(v_0) \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A)$, die in \mathfrak{B} erfüllt sind, gilt dass sie mit einem $a \in A$ erfüllt sind.

Das heißt wenn $\mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$, dann existiert $x \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$.

Beweis. \Rightarrow Angenommen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$ (wegen \preceq).

Also existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$, somit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$ (wegen \preceq)

\Leftarrow

- 1) $\mathfrak{B} \models \exists v_0 v_0 \doteq v_0$

Also gibt es $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models a \doteq a$ insbesondere $A \neq \emptyset$.

- 2) Seien $f \in \mathcal{L}$ n -stellig, $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\mathfrak{B} \models \exists v_0 f a_1 \dots a_n \doteq v_0$$

Bedingung: es existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models f a_1 \dots a_n \doteq a$.

Also $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$, das heißt A ist Träger einer Unterstruktur.

3) Zeige per Induktion übe den Aufbau der \mathcal{L}_A -Formeln

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$$

- Induktionsanfang: φ Atomar

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} &\Leftrightarrow id_A : A \rightarrow B \mathcal{L}_A\text{-Einbettung} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_h \models \text{Diag}(\mathfrak{A}_A) = \text{Diag}(\mathfrak{A}) \\ &\Leftrightarrow \text{für alle atomaren Formeln } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A) \text{ gilt: } (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi) \end{aligned}$$

- Induktionsschritte

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \stackrel{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi$$

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{A} \models \varphi_2 \end{array} \right\} \stackrel{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{B} \models \varphi_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \exists v_0 \varphi(v_0) &\Leftrightarrow \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi(a) \\ &\stackrel{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \\ &\Rightarrow \text{ex. } a \in B \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0) \end{aligned}$$

Da $\{\neg, \wedge, \exists\}$ ein vollständiges Junktoren-Quantoren-System bilden ist die Aussage damit gezeigt. □

Folgerung 2.6. Sei \mathfrak{B} \mathcal{L} -Struktur, $S \subseteq B$. Dann existiert eine elementare Unterstruktur $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ mit $S \subseteq A$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

Beweis. Definiere induktiv S_i für $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_0 &:= S \\ S_{i+1} &:= S_i \cup \{a_\varphi \mid \varphi(x) \text{ } \mathcal{L}_{S_i}\text{-Formel } \mathfrak{B} \models \exists \varphi(x) \text{ und } a_\varphi \text{ ist ein Element mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)\} \\ S_\omega &:= \bigcup_{i \in \omega} S_i \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist S_ω Träger einer elementaren Unterstruktur $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Denn: Wenn $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_\omega})$.

Also existiert n mit $\varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_n})$, dann existiert $a_\varphi \in S_{n+1} \subseteq S_\omega$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)$. Das heißt Tarskis Test gilt.

Behauptung: $|S_\omega| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

Per Induktion $|S_i| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

$i = 0$

$$|S_0| = |S| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$$

$i \rightarrow i + 1$

$$\begin{aligned} |S_{i+1}| &\leq |S_i| + \underbrace{|\mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_i})|}_{\text{endliche Folgen mit Zeichen aus } Z(S_i)} \\ &\leq |S_i| + |Z(S_i)^{<\omega}| \\ &= |S_i| + |Z(S_i)| \\ &= |S_i| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 + |S_i| \\ &= |\mathcal{L}| + |S_i| + \aleph_0 \\ &\stackrel{\text{IV}}{\leq} |\mathcal{L}| + \max\{|\mathcal{L}|, |S|, \aleph_0\} + \aleph_0 \\ &= \max\{|L|, |S|, \aleph_0\} \end{aligned}$$

wobei

$$Z(S_i) = \mathcal{L} \cup \{v_0, v_1, \dots\} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall\} \cup S_i$$

□

Bemerkung 2.7. Für $|\mathcal{L}| = |S| = \aleph_0$ heißt die Folgerung auch Satz von Löwenheim.

Sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots$ eine gerichtete Vereinigung.

Es gibt eine eindeutig bestimmte \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A}_ω auf $\bigcup_{i \in \omega} A_i$, so dass $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle i .

Satz 2.8. Falls $\mathfrak{A}_0 \preceq \mathfrak{A}_1 \preceq \mathfrak{A}_2 \preceq \dots$ dann gilt $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_\omega$ für alle i .

Beweis. Induktion über den Aufbau der Formeln: $\mathfrak{A}_i \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\omega \models \varphi$ für $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_{A_i})$

Atomar: da $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$

Negation und Konjunktion: wie letztes Mal

Existenzquantor: $\mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x)$ dann $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a)$ für ein $a \in A_i$.

$\stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow} \mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$ also $\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$.

$\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$, dann $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$ für ein $a \in A_\omega$. Das heißt es existiert $n \geq i$ mit $a \in A_n$.

Also gilt $\mathfrak{A}_n \models \varphi(a)$ und somit

$$\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_n \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x)$$

□

2.2 Kompaktheitssatz und Ultraprodukte

Satz 2.9 (Kompaktheitssatz). Sei \mathcal{L} eine Sprache und T eine \mathcal{L} -Theorie.

T hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teiltheorie $T_0 \subseteq T$ ein Modell hat.

Folgerung 2.10 (Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski aufwärts). Sei \mathcal{L} eine Sprache und \mathfrak{A} eine unendliche \mathcal{L} -Struktur. Dann existiert zu jeder Kardinalzahl $\kappa \geq \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$ ein $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ mit $|B| = \kappa$.

Beweis. Betrachte $\mathcal{L}^c := \mathcal{L}_A \dot{\cup} \{c_i \mid i < \kappa\}$

und die \mathcal{L}^c -Theorie $T^c := \text{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j\}$

Zeige mit dem Kompaktheitssatz: T^c ist konsistent.

Sei $T_0 \subseteq_{\text{endl}} T^c$.

Dann $T_0 \subseteq \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c_i = c_j \mid i, j \in \text{endlicher Menge}\}$.

\mathfrak{A} wird Modell von T_0 , indem man die endlich vielen Konstanten in T_0 durch beliebige, paarweise verschiedene Elemente von A interpretiert.

Sei $\mathcal{L}' \models T^c$.

Dann ist $\underbrace{\mathcal{L}' \upharpoonright_{\mathcal{L}}}_{\text{Redukt auf } \mathcal{L}} \succ \mathfrak{A}$ und $|B'| \geq \kappa$.

Wähle Teilmenge $S \subseteq B$, die A enthält und so, dass $|S| = \kappa$. Wende Folgerung 2.6 auf \mathfrak{B}'_A an.

Dann erhält man $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{B}'_A$ in \mathcal{L}_A mit $|B| \geq |S| = \kappa$ und $|B| \leq \max\{|\mathcal{L}_A|, |S|, \aleph_0\} = \kappa$

Und

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ \mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ A \subseteq B' \end{array} \right\} \Rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

□

Ultraprodukte

Seien \mathfrak{A}_i \mathcal{L} -Strukturen ($i \in I$) und sei

$$\prod_{i \in I} A_i = \{p : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid p(i) \in A_i\}$$

Mit dem Auswahlaxiom gilt:

$$A_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

Definiere \mathcal{L} -Struktur $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ auf $\prod_{i \in I} A_i$.

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}}(p_1, \dots, p_n) = p & \Leftrightarrow \text{für alle } i \in I \ p(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \dots, p_n(i)) \\ (p_1, \dots, p_n) \in R^{\mathfrak{A}} & \Leftrightarrow \text{für alle } i \in I \ (p_1(i), \dots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \end{aligned}$$

Betrachte Ultrafilter \mathcal{U} in $\text{Pot}(I)$ also

- $\mathcal{U} \subsetneq \text{Pot}(I), \emptyset \notin \mathcal{U}$
- Wenn $X \in \mathcal{U}, X \subseteq Y$, dann $Y \in \mathcal{U}$
- Wenn $X, Y \in \mathcal{U}$, dann $X \cap Y \in \mathcal{U}$
- Wenn $X \subseteq I$, dann entweder $X \in \mathcal{U}$ oder $I \setminus X \in \mathcal{U}$.

Ultrafilter \mathcal{U} definiert eine Art Maß auf $\text{Pot}(I)$

$$\mu_{\mathcal{U}} = \chi_{\mathcal{U}} : X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } X \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{wenn } X \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

X mit $X \in \mathcal{U}$ heißt auch \mathcal{U} -groß.

Lemma 2.11. Ein Ultrafilter \mathcal{U} definiert eine Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{U}}$ auf $\prod_{i \in I} A_i$ durch

$$p \sim_{\mathcal{U}} p' :\Leftrightarrow \{i \in I \mid p(i) = p'(i)\} \in \mathcal{U}$$

Beweis. • Reflexiv: klar, da $I \in \mathcal{U}$

• Symmetrie: klar per Definition

• Transitivität: $p \sim_{\mathcal{U}} p' \sim_{\mathcal{U}} p''$

$$\{i \mid p(i) = p''(i)\} \supseteq \{i \mid p(i) = p'(i)\} \cap \{i \mid p'(i) = p''(i)\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

□

Definition 2.12. Seien $\mathfrak{A}_i (i \in I)$ \mathcal{L} -Strukturen, \mathcal{U} ein Ultrafilter auf I .

Das Ultraprodukt der \mathfrak{A}_i bezüglich \mathcal{U} ist die \mathcal{L} -Struktur

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}$$

mit Träger $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$ und

$$\begin{aligned} (p_1 / \sim_{\mathcal{U}}, \dots, p_m / \sim_{\mathcal{U}}) \in R^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}} & :\Leftrightarrow \{i \mid (p_1(i), \dots, p_m(i)) \in R_i^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U} \\ f^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}}(p_1 / \sim_{\mathcal{U}}, \dots, p_m / \sim_{\mathcal{U}}) = p / \sim_{\mathcal{U}} & :\Leftrightarrow \{i \mid f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \dots, p_m(i)) = p(i)\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Beweis. Wohldefiniertheit

Seien $p_1 \sim_{\mathcal{U}} p'_1, \dots, p_n \sim_{\mathcal{U}} p'_n$ zu zeigen ist

$$X := \{i \mid (p_1(i), \dots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i \mid (p'_1(i), \dots, p'_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Sei $X_j = \{i \mid p_j(i) = p'_j(i)\} \in \mathcal{U}$.

Falls $X \in \mathcal{U}$ auf $X \cap X_1 \cap \dots \cap X_n \in \mathcal{U}$ gilt

$$\left. \begin{array}{l} (p_1(i), \dots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \\ p_1(i) = p'_1(i) \\ \vdots \\ p_n(i) = p'_n(i) \end{array} \right\} \Rightarrow (p'_1(i), \dots, p'_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}$$

Analog für Funktionszeichen.

Warum existiert überhaupt solch ein $p_{\mathcal{U}}$?

Man sieht, dass $f \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i(p_1, \dots, p_n)/\mathcal{U}$ es tut.

Falls $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ für alle $i \in I$ dann heißt $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}/\mathcal{U} = \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ auch Ultrapotenz von \mathfrak{A} . \square

Satz 2.13 (Satz von Łos). Sei φ eine \mathcal{L} -Aussage dann gilt

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$$

Insbesondere

- falls $\mathfrak{A}_i \models T$ für alle i , dann $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models T$
- falls $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_j$ für alle $i \in I$, dann $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{A}_i$

Folgerung 2.14.

$$\delta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}, \quad a \mapsto (a, a, \dots, a, a)/\mathcal{U}$$

ist elementare Einbettung, das heißt

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$$

Beweis. zum Satz von Łos (Skizze)

Induktion über den Aufbau der Formeln

- φ atomar: Entweder Induktion über den Aufbau der Terme oder betrachte term-reduzierte Formeln. Dazu sei f einstellig und c Konstante eine atomare Formel ist auch $f f c \doteq c$, diese ist aber äquivalent zu $\exists x(f c \doteq x \wedge f x \doteq c)$. Das heißt ohne Einschränkung kann man nur atomare Formeln der Formen $R\tau_1 \dots \tau_n$ oder $\tau_1 \doteq \tau_2$ oder $f\tau_1 \dots \tau_n \doteq \tau$ betrachten, wobei τ_i, τ Konstanten oder Individuenvariablen sind.
- Satz von Łos für termreduzierte atomare Formeln ist im Wesentlichen die Definition der \mathcal{L} -Struktur auf $\prod A_i/\sim_{\mathcal{U}}$.
- Induktion:

Für und

$$\begin{aligned} & \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models (\varphi \wedge \psi) \\ \Leftrightarrow & \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi \text{ und } \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \psi \\ \Leftrightarrow & I_{\varphi} = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U} \text{ und } I_{\psi} = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \psi\} \in \mathcal{U} \\ \Leftrightarrow & \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi \wedge \psi\} = I_{\varphi} \cap I_{\psi} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Für nicht

$$\begin{aligned}
& \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \neg \varphi \\
& \Leftrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \not\models \varphi \\
& \Leftrightarrow I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \notin \mathcal{U} \\
& \stackrel{\text{Ultra}}{\Leftrightarrow} I \setminus I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \neg \varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

Für Existenz

$$\begin{aligned}
& \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \exists x \varphi \\
& \Leftrightarrow \text{ex existiert } p \text{ mit } \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \varphi(p / \mathcal{U}) \\
& \stackrel{\text{Ind.}}{\Leftrightarrow} \text{es existiert } p \text{ mit } \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U} \\
& \Leftrightarrow \{i \mid \text{ex } p(i) \in A_i \text{ mit } \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U} \\
& \Leftrightarrow \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.15. • $\langle i \rangle = \{X \subseteq I \mid i \in X\}$ Ultrafilter, der von i erzeugte Haupt-Ultrafilter

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \langle i \rangle \cong \mathfrak{A}_i$$

- Mit Lemma von Zorn (bzw. AC): Jeder eigentliche Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.

Definition 2.16. Sei I eine unendliche Menge, betrachte Filter der ω -endlichen Mengen

$$\mathcal{F} = \{X \mid I \setminus X \text{ endlich}\}$$

\mathcal{F} kann zu Ultrafilter \mathcal{U} erweitert werden. Solche Ultrafilter heißen freie Ultrafilter. Dies sind die nicht-Haupt-Ultrafilter.

Bemerkung 2.17. Wenn \mathfrak{A} endlich ist, dann ist $\mathfrak{A}^I / \mathcal{U} \cong \mathfrak{A}$.

Wenn \mathfrak{A} unendlich ist und \mathcal{U} frei ist, dann ist häufig $\mathfrak{A} \prec \prod \mathfrak{A}_i / \mathcal{U}$.

Wenn $|A_i| < |A_{i+1}|$ endlich ist und \mathcal{U} frei, dann ist

$$\left| \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \right| = 2^{\aleph_0}$$

Wenn $|A_i| = \aleph_0$ für alle i und \mathcal{U} frei,

$$\left| \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \right| = 2^{\aleph_0}$$

Satz 2.18. Seien $\mathfrak{A}_i (i \in \mathbb{N})$ endliche \mathcal{L} -Strukturen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei nur endlich oft $|A_i| \leq n$. Sei \mathcal{U} freier Ultrafilter auf \mathbb{N} . Dann ist

$$\left| \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \right| = 2^{\aleph_0}$$

Beweis.

$$\left| \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \right| \leq \sup\{|A_i| \mid i \in \mathbb{N}\}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Damit

$$\left| \prod A_i / \mathcal{U} \right| \leq 2^{\aleph_0}$$

Für \geq : Ohne Einschränkung sei $|A_i| \leq |A_{i+1}|$ und $|A_i| = \{0, \dots, n_i\}$ mit $n_i = |A_i| - 1$.

Für $r, s \in \mathbb{R} \cap [0, 1)$ konstruiere $p_r \in \prod_{i \in I} A_i$ mit $r \neq s$, dann stimmen p_r und p_s nur auf endlich vielen Indizes überein.

$$p_r(i) := j \Leftrightarrow r \in \left[\frac{j}{A_i}, \frac{j+1}{A_i} \right)$$

$$\Rightarrow p_r \not\sim_{\mathcal{U}} p_s$$

□

Beweis. zum Kompaktheitssatz

Sei T eine endlich erfüllbare \mathcal{L} -Theorie. Zu zeigen ist T ist konsistent.

Sei $I = \text{Pot}_{<\aleph_0}(T) = \{T_0 \mid T_0 \subseteq_{\text{endl}} T\}$.

Für $T_0 \subseteq_{\text{endl}} T$ d.h. $T_0 \in I$ sei $\langle T_0 \rangle = \{T_1 \in I \mid T_0 \subseteq T_1\}$.

Sei weiter $\mathcal{F} = \{\mathcal{X} \subseteq I \mid \text{ex. } T_0 \in I \text{ mit } \langle T_0 \rangle \subseteq \mathcal{X}\}$.

\mathcal{F} ist Filter auf I :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Monotonie: per Definition
- $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{F}$, dann existiert $T_i \subseteq_{\text{endl}} T$ mit $\langle T_i \rangle \subseteq \mathcal{X}_i$. Dann gilt

$$\langle T_1 \cup T_2 \rangle = \langle T_1 \rangle \cap \langle T_2 \rangle \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$$

Sei \mathcal{U} ein Ultrafilter, der \mathcal{F} erweitert. Wähle für jedes $T_0 \in I$ ein Modell $\mathfrak{M}_{T_0} \models T_0$ und setze $\mathfrak{M} := \prod_{T_0 \in I} \mathfrak{M}_{T_0} / \mathcal{U}$.

Mit Satz von Łos: prüfe, dass $\varphi \in T \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi$.

$$\{T_1 \in I \mid \mathfrak{M}_{T_1} \models \varphi\} \supseteq \{T_1 \in I \mid \varphi \in T_1\} = \langle \{\varphi\} \rangle \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$$

□

Definition 2.19. (X, \mathcal{O}) heißt topologischer Raum und \mathcal{O} heißt Topologie auf X , falls

- $\mathcal{O} \subseteq \text{Pot}(X)$
- \mathcal{O} ist abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte und beliebiger Vereinigungen
- Insbesondere $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

$U \in \mathcal{O}$ heißt offen beziehungsweise offene Menge $A \subseteq X$ mit $X \setminus A \in \mathcal{O}$ heißt offen bzw. offene Menge. $A \subseteq X$ mit $X \setminus A \in \mathcal{O}$ heißt abgeschlossen bzw. abgeschlossene Menge.

Definition 2.20. $Q \subseteq \text{Pot}(X)$ heißt Basis einer Topologie \mathcal{O} , falls Q abgeschlossen ist bezüglich endlicher Schnitte.

Dann ist $\mathcal{O} = \{\bigcup Q_i \mid Q_i \in Q\} \cup \{\emptyset, X\}$ eine Topologie, und zwar die kleinste, in der alle Mengen aus Q offen sind.

Definition 2.21. Eine Abbildung heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind.

Sei \mathfrak{B} eine Boolesche Algebra und $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ die Menge der Ultrafilter in \mathfrak{B} . Damit ist $\mathcal{U} \subseteq \text{Pot}(B)$ also $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \subseteq \text{Pot}(\text{Pot}(B))$.

Für $a \in B$, definiere

$$[[a]] := \{U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \mid a \in U\} \subseteq \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$$

Satz 2.22.

- 1) $[[\cdot]] : \mathfrak{B} \hookrightarrow \text{Pot}(\mathcal{U}_{\mathfrak{B}})$ ist Einbettung Boolescher Algebren (Teil des Stoneschen Repräsentationssatzes)
- 2) $\{[[a]] \mid a \in B\}$ ist Basis einer Topologie auf $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$.

Definition 2.23. $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ heißt auch Stone-Raum $S(\mathfrak{B})$ von \mathfrak{B} .

Beweis.

- 1)
 - $[[0]] = \emptyset$, da $0 \notin U$ per Definition
 - $[[1]] = \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$, da $1 \in U$ für jedes U
 - $[[a \cap b]] = [[a]] \cap [[b]]$ folgt aus den Filtereigenschaften
 - $[[a \cup b]] = [[a]] \cup [[b]]$ folgt aus de Morgan und dem nächsten Schritt
 - $[[a^c]] = \{U \mid a^c \in U\} \stackrel{\text{ultra}}{=} \{U \mid a \notin U\} = [[a]]^c$

Das heißt $[[\cdot]]$ ist Homomorphismus der Booleschen Algebra.

Fehlt noch Injektivität: Seien $a \neq b$: Zu zeigen ist, es existiert ein Ultrafilter U der a und b trennt, das heißt $a \in U \Leftrightarrow b \notin U$.

Es gilt $a \not\leq b$ oder $b \not\leq a$ das heißt $a \cap b^c \neq \emptyset$ oder $a^c \cap b \neq \emptyset$.

Es existiert also Ultrafilter U mit $a \cap b^c \in U$ oder $a^c \cap b \in U$.

Falls z.B. $a \cap b^c \in U$, dann ist $a \in U, b^c \in U \Rightarrow b \notin U$.

- 2) Wegen $[[a]] \cap [[b]] = [[a \cap b]]$

□

Bemerkung 2.24. Die Basis-offenen Mengen $[[a]]$ sind auch abgeschlossen, da $[[a]]^c = [[a^c]]$.

Mengen die offen und abgeschlossen sind heißen clopen.

Topologische Räume mit einer Basis aus clopen Mengen sind total unzusammenhängend.

Definition 2.25. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt kompakt, falls die endliche Überdeckungseigenschaft gilt:

Falls $X = \bigcup_{i \in I} \{U_i \mid U_i \text{ offen}\}$ dann existiert $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$ mit $X = \bigcup \{U_i \mid i \in I_0\}$

Oder in äquivalenter Formulierung: $\bigcap \{A_i \mid A_i \text{ abgeschlossen}, i \in I\} = \emptyset$ dann existiert $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$ mit $\bigcap \{A_i \mid i \in I_0\} = \emptyset$.

Satz 2.26. Der Stone-Raum ist kompakt.

Bemerkung 2.27. Der Kompaktheitssatz ist äquivalent zur Kompaktheit von $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$.

Ohne Einschränkung sei $\perp \notin T$

$$T \text{ inkonsistent} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{\varphi \in T} [[\varphi]] = \emptyset$$

und nach Kompaktheitssatz sagt es gibt endliches $T_0 \subseteq T$ so dass T_0 inkonsistent ist.

Und mit der Kompaktheit von $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$ existieren $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in T$ mit $[[\varphi_0]] \cap \dots \cap [[\varphi_n]] = \emptyset$.

Wir können im ersten Fall $T_0 = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ mit φ_i aus dem zweiten Teil wählen.