Notes: Differential Manifolds

Guan Luo *

Tsinghua University

该文章是看 An Introduction to Manifolds [1] 的学习笔记。

1 Euclidean Spaces

欧氏空间是所有流形的原型。其特殊之处在于包含一套标准的全局坐标。使得在 $\mathbb{R}^n$ 上的所有构造都可以用标准坐标来定义，但这也混淆了哪些概念是流形内在蕴含的。普遍的流形定义是没有标准坐标的，因此只有独立于坐标的概念在流形上才有意义。本章的目的在于把 $\mathbb{R}^n$ 上的微积分转泛化到坐标独立的定义。如，将切线向量定义为一个函数的微分，而非全局坐标下的方向或者一列数字。本章核心的两个概念：楔积 (wedge product) 和外导数 (exterior derivative).

1.1 Definitions

$\mathcal{C}^k$: 一个函数 $f : U \to \mathbb{R}$ 被认为在 p 点 k-阶连续可微，如果其微分 1在 p 点存在且连续，其中 $j \leq k$。

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_j}} \tag{1}$$

$\mathcal{C}^\infty$: 一个函数对于任意 k，都是 $\mathcal{C}^k$ 的，通常认为 “smooth” 和 “$\mathcal{C}^\infty$” 是等价的。
实解析 (real-analytic): 一个函数 f 在 p 点是实解析的，如果在其邻域内等于函数在 p 点的泰勒级数，即式 3。显然，一个实解析的函数必然是 $\mathcal{C}^\infty$，但反之未必，如 4。

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)(x^i - p^i)(x^j - p^j) \tag{2}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(p)(x^{i_1} - p^{i_1}) \cdots (x^{i_k} - p^{i_k}) + \cdots \tag{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

1.2 Taylor’s Theorem with Remainder

Star-shaped: 在 p 点的邻域，且该集合内任意点 x，p 和 x 的连线段都在集合内。
Theorem: 设 f 在关于 p 点的 star-shaped 集合 U 内是 $\mathcal{C}^\infty$ 的，则存在函数 $g_1(x), ..., g_n(x) \in \mathcal{C}^\infty(U)$，使得 5成立。

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{5}$$

*lg22@mails.tsinghua.edu.cn

其中，函数 $g_i(x)$ 的定义如 6所示。

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p))dt \tag{6}$$

不妨令 $n = 1$ 和 $p = 0$，则上式 5简化如下，且 g 函数同样满足 $\mathcal{C}^\infty$，则可以同样进行展开

$$f(x) = f(0) + xg_1(x),\ \ g_i(x) = g_i(0) + xg_{i+1}(x) \tag{7}$$

从而有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x(g_1(0) + xg_2(x)) \\ &= f(0) + xg_1(0) + x^2(g_2(0) + xg_3(x)) \\ &= f(0) + g_1(0)x + g_2(0)x^2 + \cdots + g_i(0)x^i + g_{i+1}(x)x^{i+1} \end{aligned}$$

反复进行微分可得

$$g_k(0) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0),\ \ k = 1, 2, ..., i$$

1.3 Tangent Vectors as Derivatives

Directional Derivatives: 设一条线穿过 $p = (p^1, ..., p^n)$，方向为 $v =< v^1, ..., v^n >$，则有线上的点参数化为 $c(t) = (p^1 + tv^1, ..., p^n + tv^n)$，对于 p 点邻域内的光滑函数 f，其方向导数的定义如 8。

$$D_v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(c(t)) \tag{8}$$

根据链式法则，我们可知

$$D_v f = \sum_{[} i = 1]^n \frac{dc^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{9}$$

因此，方向 v 在 p 点上定义了一个对于函数 f 的操作。

$$D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{10}$$

这种将方向 v 映射方向导数 D_v 提供了一种将切线方向描述为函数算子的方式。

1.4 Germs of Functions

equivalence relation: 在 S 上的等价关系是 $S \times S$ 的子集，满足自反性、对称性和传递性。
algebra: 算数是定义在域 K 上的向量空间 A，且有乘法定义。

$$\mu : A \times A \to A \tag{11}$$

且满足结合律、分配律和同质律，即对于 $a, b, c \in A, r \in K$，有

$$\begin{aligned} &(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ &(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ &r(a \cdot b) = (ra) \cdot b = a \cdot (rb) \end{aligned}$$

linear map: 定义在域 K 上，从向量空间 V 到 W 的映射 L 满足对于 $r \in K, u, v \in V$

$$L(u + v) = L(u) + L(v), L(rv) = rL(v) \tag{12}$$

algebra homomorphism: 定义在域 K 的 algebra 上的线性映射 $L : A \to A'$，且满足算数乘法 $L(ab) = L(a)L(b), a, b \in A$。

1.5 Derivations at a Point

对于 p 点任意切向量 v，方向导数提供了一个将 $\mathcal{C}^\infty$ 函数到实数的映射 $D_v : \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$。根据定义 10，方向导数是线性映射，且满足莱布尼茨规则 13。

$$D_v(fg) = (D_v f)g(p) + f(p)(D_v g) \tag{13}$$

通常来说，任何线性映射 $D_v : \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$ 且满足莱布尼茨 13被称为 p 点上的微分，将 p 点上所有微分组成的集合表示为 $D_p(\mathbb{R}^n)$，该集合实际上为实向量空间，由于任意两个微分的和、和常量的乘法仍为 p 点上的微分。至此我们知道方向导数是切线空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 到微分空间 $D_p(\mathbb{R}^n)$ 的线性映射。

$$\phi : T_p(\mathbb{R}^n) \to D_p(\mathbb{R}^n), v \mapsto D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{14}$$

以下我们证明从切线空间到微分空间映射是双射，只需要证明任意微分都可以映射回方向即可。根据定义 5和莱布尼茨规则 13可得

$$Df(x) = D(f(p) + \sum(x^i - p^i)g_i(x)) = \sum(Dx^i)g_i(p) + \sum(p^i - p^i)Dg_i(x) = \sum(Dx^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{15}$$

从而可得 $D = D_v$ 对于 $v =< Dx^1, ..., Dx^n >$。上述定理说明在 p 点的切线向量和微分是一一对应的，在切线空间的标准基展开可以对应为微分上展开

$$v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{16}$$

1.6 Vector Fields

由于切向量空间 $T_p(R^n)$ 有基 $\{\partial/\partial x^i|_p\}$，任何切向量都可以表示成线性组合。

$$X_p = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{17}$$

我们认为如果系数 a^i 在子集 U 上是 $\mathcal{C}^\infty$ 的，则向量域在 U 上是 $\mathcal{C}^\infty$ 的。
Multiplication: 函数和向量域的乘法定义为逐点的乘法。$(fX)_p = f(p)X_p$，如果向量域是 $\mathcal{C}^\infty$，函数 f 是 $\mathcal{C}^\infty$ 的，则 $fX = \sum(fa^i)\partial/\partial x^i$ 是 $\mathcal{C}^\infty$。
$\mathfrak{F}(U)$: 开集上所有 $\mathcal{C}^\infty$ 函数的环组成的集合。
$\mathfrak{X}(U)$: 开集上所有 $\mathcal{C}^\infty$ 向量域组成的集合。
R-module: R 是一个可交换环，则左 R-module 是一个带常量乘法映射的阿贝尔群，满足结合律、有单位元、分配律，即对于 $r, s \in R, a, b \in A$。

$$(rs)a = r(sa), 1a = a, (r + s)a = ra + sa, r(a + b) = ra + rb \tag{18}$$

R-module homomorphism: 设 A 和 A' 是 R-modules，则同态是从 A 到 A' 的映射 $f : A \to A'$，同时保留了加法和常量乘法，即对于 $a, b \in A, r \in R$。

$$f(a + b) = f(a) + f(b), f(ra) = rf(a) \tag{19}$$

1.7 Vector Fields as Derivations

我们定义向量域的导数为 Xf，对于 $\mathcal{C}^\infty$ 的向量域 X 和函数 f,$(Xf)(p) = X_p f$，由 $X = \sum a^i\partial/\partial x^i$，我们得到

$$(Xf)(p) = \sum a^i(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{20}$$

上式 20说明了 Xf 同样是 $\mathcal{C}^\infty$ 的函数，且存在 $R - linear$ 映射 $f \mapsto Xf$，显然该操作的莱布尼茨规则如下。

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \tag{21}$$

如果 A 是域 K 上的算数，则在 A 上的导数是 K-linear 映射 D，使得

$$D(ab) = (Da)b + aDb \text{ for all } a, b \in A \tag{22}$$

由于 A 上的导数在加法和常量乘法下封闭，因此组成集合表示为 $\mathrm{Der}(A)$，因此一个 $\mathcal{C}^\infty$ 上的向量域生成了一个算数 $\mathcal{C}^\infty(U)$ 上的导数，即

$$\varphi : \mathfrak{X}(U) \to \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(U)), X \mapsto (f \mapsto Xf) \tag{23}$$

正如所有切线向量可以表示为逐点的导数 (一个从 $\mathcal{C}^\infty$ 到 $\mathcal{R}$ 的映射)，向量域可以表示为算数 $\mathcal{C}^\infty$ 的导数 (一个从 $\mathcal{C}^\infty$ 到 $\mathcal{C}^\infty$ 的映射)。

参考文献

[1] Loring W Tu. Manifolds. In *An Introduction to Manifolds*, pages 47–83. Springer, 2011.