

Notes: Differential Manifolds

Guan Luo *

Tsinghua University

该文章是看 An Introduction to Manifolds [1] 的学习笔记。

1 Euclidean Spaces

欧氏空间是所有流形的原型。其特殊之处在于包含一套标准的全局坐标。使得在 \mathbb{R}^n 上的所有构造都可以用标准坐标来定义，但这也混淆了哪些概念是流形内在蕴含的。普遍的流形定义是没有标准坐标的，因此只有独立于坐标的概念在流形上才有意义。本章的目的在于把 \mathbb{R}^n 上的微积分泛化到坐标独立的定义。如，将切线向量定义为一个函数的微分，而非全局坐标下的方向或者一系列数字。本章核心的两个概念：楔积 (wedge product) 和外导数 (exterior derivative)。

1.1 Definitions

C^k : 一个函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 被认为在 p 点 k -阶连续可微，如果其微分 1 在 p 点存在且连续，其中 $j \leq k$ 。

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}} \quad (1)$$

C^∞ : 一个函数对于任意 k ，都是 C^k 的，通常认为 “smooth” 和 “ C^∞ ” 是等价的。

实解析 (real-analytic): 一个函数 f 在 p 点是实解析的，如果在其邻域内等于函数在 p 点的泰勒级数，即式 3。显然，一个实解析的函数必然是 C^∞ ，但反之未必，如 4。

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)(x^i - p^i)(x^j - p^j) \quad (2)$$

$$+ \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(p)(x^{i_1} - p^{i_1}) \dots (x^{i_k} - p^{i_k}) + \dots \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

1.2 Taylor's Theorem with Remainder

Star-shaped: 在 p 点的邻域，且该集合内任意点 x ， p 和 x 的连线段都在集合内。

Theorem: 设 f 在关于 p 点的 star-shaped 集合 U 内是 C^∞ 的，则存在函数 $g_1(x), \dots, g_n(x) \in C^\infty(U)$ ，使得 5 成立。

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (5)$$

*lg22@mails.tsinghua.edu.cn

其中, 函数 $g_i(x)$ 的定义如 6 所示。

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) dt \quad (6)$$

不妨令 $n = 1$ 和 $p = 0$, 则上式 5 简化如下, 且 g 函数同样满足 C^∞ , 则可以同样进行展开

$$f(x) = f(0) + xg_1(x), \quad g_i(x) = g_i(0) + xg_{i+1}(x) \quad (7)$$

从而有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x(g_1(0) + xg_2(x)) \\ &= f(0) + xg_1(0) + x^2(g_2(0) + xg_3(x)) \\ &= f(0) + g_1(0)x + g_2(0)x^2 + \cdots + g_i(0)x^i + g_{i+1}(x)x^{i+1} \end{aligned}$$

反复进行微分可得

$$g_k(0) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, \dots, i$$

1.3 Tangent Vectors as Derivatives

Directional Derivatives: 设一条线穿过 $p = (p^1, \dots, p^n)$, 方向为 $v = \langle v^1, \dots, v^n \rangle$, 则有线上的点参数化为 $c(t) = (p^1 + tv^1, \dots, p^n + tv^n)$, 对于 p 点邻域内的光滑函数 f , 其方向导数的定义如 8。

$$D_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(c(t)) \quad (8)$$

根据链式法则, 我们可知

$$D_v f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{dc^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (9)$$

因此, 方向 v 在 p 点上定义了一个对于函数 f 的操作。

$$D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (10)$$

这种将方向 v 映射方向导数 D_v 提供了一种将切线方向描述为函数算子的方式。

1.4 Germs of Functions

equivalence relation: 在 S 上的等价关系是 $S \times S$ 的子集, 满足自反性、对称性和传递性。

algebra: 算数是定义在域 K 上的向量空间 A , 且有乘法定义。

$$\mu : A \times A \rightarrow A \quad (11)$$

且满足结合律、分配律和同质律, 即对于 $a, b, c \in A, r \in K$, 有

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ r(a \cdot b) &= (ra) \cdot b = a \cdot (rb) \end{aligned}$$

linear map: 定义在域 K 上, 从向量空间 V 到 W 的映射 L 满足对于 $r \in K, u, v \in V$

$$L(u + v) = L(u) + L(v), \quad L(rv) = rL(v) \quad (12)$$

algebra homomorphism: 定义在域 K 的 algebra 上的线性映射 $L : A \rightarrow A'$, 且满足算数乘法 $L(ab) = L(a)L(b), a, b \in A$ 。

1.5 Derivations at a Point

对于 p 点任意切向量 v ，方向导数提供了一个将 C^∞ 函数到实数的映射 $D_v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ 。根据定义 10，方向导数是线性映射，且满足莱布尼茨规则 13。

$$D_v(fg) = (D_v f)g(p) + f(p)(D_v g) \quad (13)$$

通常来说，任何线性映射 $D_v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ 且满足莱布尼茨 13 被称为 p 点上的微分，将 p 点上所有微分组成的集合表示为 $D_p(\mathbb{R}^n)$ ，该集合实际上为实向量空间，由于任意两个微分的和、和常量的乘法仍为 p 点上的微分。至此我们知道方向导数是切线空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 到微分空间 $D_p(\mathbb{R}^n)$ 的线性映射。

$$\phi : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow D_p(\mathbb{R}^n), v \mapsto D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (14)$$

以下我们证明从切线空间到微分空间映射是双射，只需要证明任意微分都可以映射回方向即可。根据定义 5 和莱布尼茨规则 13 可得

$$Df(x) = D(f(p) + \sum (x^i - p^i)g_i(x)) = \sum (Dx^i)g_i(p) + \sum (p^i - p^i)Dg_i(x) = \sum (Dx^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (15)$$

从而可得 $D = D_v$ 对于 $v = \langle Dx^1, \dots, Dx^n \rangle$ 。上述定理说明在 p 点的切线向量和微分是一一对应的，在切线空间的标准基展开可以对应为微分上展开

$$v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (16)$$

参考文献

- [1] Loring W Tu. Manifolds. In *An Introduction to Manifolds*, pages 47–83. Springer, 2011.