1 Continuidad de funciones

D es abierto para continuidad y derivadas

a) Continuidad en un punto.

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, y sea $\bar{x}_0 \in D$. Se dice que f es continua en $\bar{x}_0$ si:

1. f está definida en $\bar{x}_0$
2. $\exists \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x})$
3. $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$

b) Continuidad en un conjunto

f es continua en D si lo es para todo $\bar{x}_0 \in D$

c) Discontinuidades

f es discontinua en $\bar{x}_0$ si no es continua en $\bar{x}_0$.

Tres opciones (def continuidad):

1. $\nexists f(\bar{x}_0)$
2. $\nexists \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x})$
3. $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) \neq f(\bar{x}_0)$

* Si $\exists \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) \to$ disc. evitable
* Si $\nexists \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) \to$ disc. esencial

EJEMPLO

Estudiar continuidad de:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2 & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 5 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

* Si $\overline{x_0} \neq (1,1)$, $\lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f(x,y) = f(x,y)$ por ser un polinomio.
* Si $\overline{x_0} = (1,1)$, $\lim_{(x,y)\to(1,1)} 2x^2+y^2 = 3 \neq f(1,1) = 5$ X

Función discontinua en $(1,1)$. Discont. evitable.

2 Propiedades de las funciones continuas

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ continua en $\overline{x_0}$.

a) Las componentes de $\overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ son cont. en $\overline{x_0}$

Por las props de los límites, el límite puede calcularse comp. a componente, y tb evaluarse la función.

b) $f(\overline{x})$ está acotada en un entorno de $\overline{x} = \overline{x_0}$

Continua $\longrightarrow \lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f(\overline{x}) = f(\overline{x_0})$

Props. de los límites, $\exists l \longrightarrow$ acotada. (Observación de lim).

c) Si $f(\overline{x_0}) \neq 0$, entonces $f(\overline{x})$ tiene el mismo signo de $f(\overline{x_0})$ en un entorno de $\overline{x_0}$.

Infinitos reales entre dos números. Func vectorial, component-wise.

3 Operaciones con funciones continuas.

Sean $f(\bar{x})$ y $g(\bar{x})$ funciones continuas en $\bar{x}_0$ y $k \in \mathbb{R}$

1. $kf(\bar{x})$ es continua
2. $f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})$ es continua
3. $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})$ es continua
4. $f(\bar{x}) / g(\bar{x})$ es continua $\quad (g(\bar{x}_0) \neq 0)$
5. Composición, condiciones suficientes (Puede ser continua sin cumplir estas)

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \text{ continua en } \bar{x}_0 \\ g(\bar{y}) \text{ continua en } \bar{y}_0 = f(\bar{x}_0) \end{array}\right| \longrightarrow (g \circ f)(\bar{x}) = g(f(\bar{x})) \text{ continua en } \bar{x}_0$$

EJEMPLO ¿Es continua $\ln(1+x^2+y^2)$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x,y) = 1+x^2+y^2, \quad Im(f) = [1, \infty)$$
$$(x,y) \longrightarrow z$$

$$g: (0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u = g(z) = \ln(z)$$
$$z \longrightarrow u$$

Si f y g son continuas en sus dominios, la condición adicional para continuidad es que tengan dominios compatibles.

En este caso,

$$Im(f) \subset Dom(g) \qquad [1,\infty) \subset (0,\infty)$$

Luego la composición es continua (en $\mathbb{R}^2$!!)

ESERCICIOS

① Estudiar la continuidad de: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } \overline{x} \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \overline{x} = (0,0) \end{cases}$

* $Dom(f) = \mathbb{R}^2$
* Si $\overline{x} \neq 0$, cociente de func. cont. con $g(\overline{x}) \neq 0 \to$ continua
* Si $\overline{x} = \overline{0}$, $f(0,0) = 0$ y

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{0}} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 \text{ ?}$$

Intento acotar $|f(\overline{x}) - \ell| \to \left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 3|y| \to 0$

② Estudiar la continuidad de: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^{2n}} & \text{si } \overline{x} \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \overline{x} = (0,0) \end{cases}$ (n es natural > 0).

* $Dom(f) = \mathbb{R}^2$
* Si $\overline{x} \neq 0$, cociente de func. cont. con $g(\overline{x}) \neq 0 \to$ continua
* Si $\overline{x} = \overline{0}$, $f(0,0) = 0$ y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^{2n}} = 0 \text{ ?}$$

Acotar $|f(x) - \ell| \to 0$

$$\left|\frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^{2n}}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^{2n}} + \frac{|x|y^2}{x^2+y^{2n}} \underset{\uparrow}{\leq} |y| + |x|$$

(para $n = 1$)

Veamos qué ocurre con $n \geq 2$ (tray. igualan ord. denominador)

$x = y^n$ $\quad n > 1 \to 2n+1 > n+2$

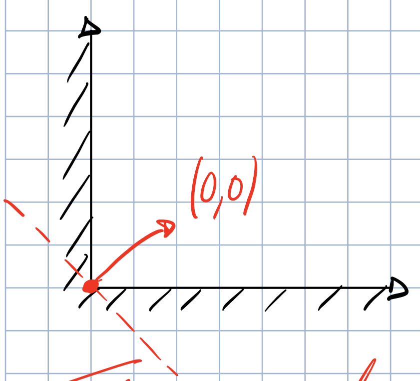
$$\lim_{y\to 0} \frac{y^{2n+1} + y^{n+2}}{y^{2n} + y^{2n}} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{n+2}}{2y^{2n}} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} y^{2-n} \begin{cases} n=2 \to \ell = \frac{1}{2} \\ n>2 \to \nexists\, \ell \end{cases}$$

Nos queda la duda de si con $n=2$ el límite vale $1/2$ o no existe. Si estudiamos la tray. $y=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot 0 + x\,0^2}{x^2+0^{2n}} = 0,$$ por lo que para $n=2$ tmp. existe l.

③ Estudiar la cont. de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{x+y} & \text{si } \begin{matrix} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{matrix} - \{0,0\} \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Dom f: $x\geq 0$, $y\geq 0$



tray. que anula el denominador

f es continua salvo $x+y=0$ Fuera del dom!
(comb. de func. cont...) Den. bueno.

① $\exists f(0,0)=0$

② ¿$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$? $\longrightarrow |f(x)-l| \to 0$

$$0 \leq \left| \frac{x^2+2y^2}{x+y} \right| = \left| \frac{x^2+2y^2}{|x|+|y|} \right| = \frac{|x^2+2y^2|}{|x|+|y|} \leq \frac{x^2}{|x|+|y|} + \frac{2y^2}{|x|+|y|} \leq$$

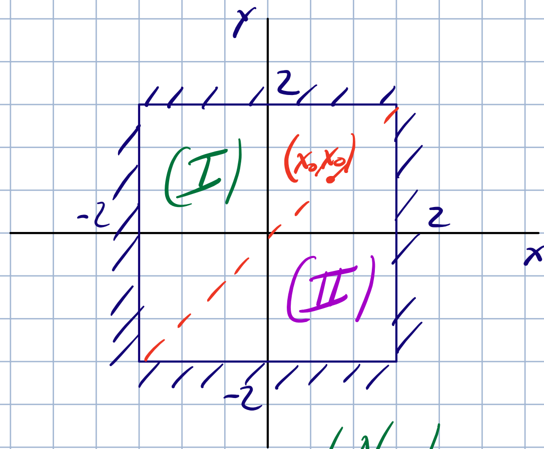
$x\geq 0,\ y\geq 0$

$$\leq |x| + 2|y| \to 0$$ ✓ continua

④ Estudiar la continuidad de $f: [-2,2]^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y & x<y \quad (\mathrm{I}) \\ 2xy+3x & x\geq y \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

(I) y (II) son continuas por ser polinómicas. Problemas en $x=y$.



$\forall (x,y) \,/\, x=y,\ \lim_{x\to} f(x,x) = f(x,x)$

$x^2+y-(2xy+3x)=0$ si $x=y \longrightarrow$ (No hay que calc. límites por ser cont.)

$\longrightarrow x^2+x-(2x^2+3x) = -x^2-2x=0.$

Esto solo se cumple en $x=y=0$ y en $x=y=-2$.

La función es continua en esos ptos y $\forall (x,y) \,/\, x\neq y$).

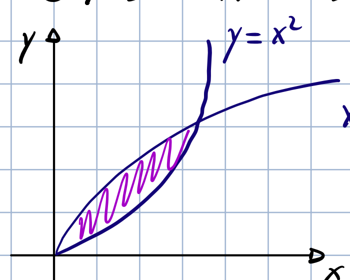
5 Estudiar la cont. de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8} & \overline{x}\neq\overline{0} \\ 1 & \overline{x}=\overline{0} \end{cases}$

a En $\mathbb{R}^2$

Pruebo tray. lineales para calc. el lím. $y=mx$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{m^2x^4+x^8+m^8x^8} = \begin{cases} m\neq 0 \longrightarrow \ell=1 \\ m=0 \longrightarrow \ell=0 \end{cases} \quad \nexists \quad (\text{y } x=0)$$

b ¿Y si limitamos el dom. a $C=\{y\geq x^2,\ x\geq y^2\}$?



Las tray. que antes daban prob. ($x=0$, $y=0$) están ahora fuera.

Intentamos acotar $|f(x)-\ell|$

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8}-1\right|=\left|\frac{x^8+y^8}{x^2y^2+x^8+y^8}\right|\leq\frac{x^8}{x^2y^2+x^8+y^8}+\frac{y^8}{x^2y^2+x^8+y^8}$$

Además, considerando que

$$y\geq x^2\longrightarrow x^2y^2+x^8+y^8\geq x^2x^4+x^8+x^{16}$$

$$\frac{1}{x^2y^2+x^8+y^8}\leq\frac{1}{x^2x^4+x^8+x^{16}}$$

$$x\geq y^2\longrightarrow x^2y^2+x^8+y^8\geq y^4y^2+y^{16}+y^8$$

$$\frac{1}{x^2y^2+x^8+y^8}\leq\frac{1}{y^4y^2+y^{16}+y^8}$$

$$|f-\ell|\leq\frac{x^8}{x^6+x^8+x^{16}}+\frac{y^8}{y^6+y^8+y^{16}}\leq x^2+y^2\longrightarrow 0$$

4 Propiedades globales de la continuidad: continuidad en compactos.

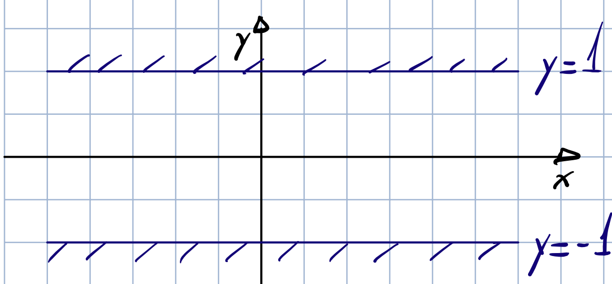
① Sea $f(\bar{x}): D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$, continua en D, y D compacto (cerrado y acotado), entonces $f(\bar{x})$ está acotada:

Es continua $\forall \bar{x} \in D \longrightarrow$ está acotada $\forall \bar{x} \in D$. Basta coger la cota más grande de todas.

Pero, ¿pq requerimos que D sea compacto?

ⓐ Contraejemplo: D cerrado pero no acotado.

Sea $f(x,y) = x$ definida en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1\}$



f es continua y no está acotada.

$x \to \infty \longrightarrow f \to \infty$.

ⓑ Contraejemplo: D no cerrado y acotado.

Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{1-(x+y)}$ definida en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x|+|y| < 1\}$

¿Dominio?

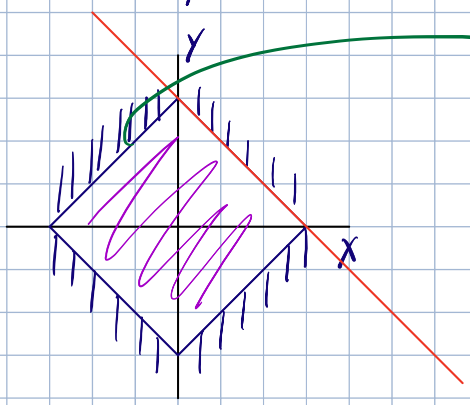
$|x|+|y|<1 \xrightarrow{y>0} |x|+y<1$

- $\xrightarrow{x>0} x+y<1$ 1er cuadrante
- $\xrightarrow{x<0} -x+y<1$ 2º cuadrante

$|x|+|y|<1 \xrightarrow{y<0} |x|-y<1$

- $\xrightarrow{x>0} x-y<1$ 4º cuadrante
- $\xrightarrow{x<0} -x-y<1$ 3º cuadrante

"Circunferencia cuadrada" Suma de valores abs. menor que 1



frontera no incluida.
dominio abierto.

$(x+y)=1 \longrightarrow$ anula denominador, está en la frontera

$f(x,y)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 - \{(x+y)=1\} \notin D$. Sin embargo, puedo acercarme cuanto quiera a $x+y=1$ haciendo que $f(x,y) \to \infty$.

② Sea $f(\bar{x}): D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$, continua en D, y D compacto (cerrado y acotado), entonces $f(D)$ es compacto

③ Teorema de Weierstrass

Una función $f: D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en D y <u>D compacto</u>, alcanza sus valores máximo y mínimo (extremos absolutos).

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, \bar{x}_1 \in D \ / \ f(\bar{x}_1) = m \\ \exists\, \bar{x}_2 \in D \ / \ f(\bar{x}_2) = M \end{array}\right\} m \leq f(\bar{x}) \leq M \quad \forall \bar{x} \in D$$

Son ptos de la función.

Ptos que pertenecen a D y la función se puede evaluar en ellos.

$m = \inf\{f(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in D\}$

$M = \sup\{f(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in D\}$

EJEMPLO I

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$

¿Está f acotada? ¿Alcanza sus valores máximo y mínimo?

* Teorema W. (continua en D compacto) → alcanza max. y min.
* P. acotada (continua en D compacto) → acotada.

* Función es cociente de pol. con den. $\neq 0$ → continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$.
* Pero $\mathbb{R}^2$ ¡no es compacto! (no es acotado) → No puedo aplicar lo estudiado. Esto no significa que no es acotada o que no alcance max o min.

Intento hacer el estudio sin esas herramientas: (tanteo)

→ num ≥ 0 y den > 0 → $f(x,y) \geq 0$

→ $f(0,0) = 0$

→ $x, y \to \infty$, $f \to 1$

→ ¿Más ptos de interés? → No

→ Además:

$$0 \leq \text{numerador} < \text{denominador} \neq 0$$

$$0 \leq \frac{\text{num}}{\text{den}} < 1 \longrightarrow 0 \leq f(x,y) < 1 \to \mathrm{Im}(f) = [0,1)$$

Conclusiones:

→ Función acotada entre 0 y 1

→ Función alcanza su mínimo ($f(0,0) = 0$)

→ $\nexists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 1$ → no alcanza su valor máximo.

Ejemplo II

Sea $f: [-2,2]\times[-2,2] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

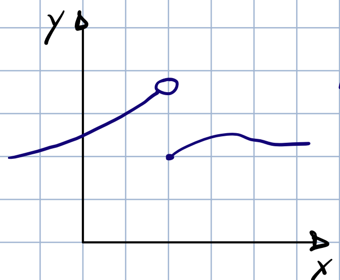
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y & \text{si } x<y \\ 2xy+3x & \text{si } x\geq y \end{cases}$$

¿Está f acotada en D? ¿Alcanza sus valores máximo y mínimo?

* El dominio es compacto.
* La función no es continua (e.g. $f(2^-,2) = 4+2 = 6$, $f(2,2) = 8+6 = 14$)
* No podemos aplicar lo estudiado.

→ Sin embargo, podemos concluir que:

* f está acotada en D (polinomios en dominios acotados). Solo hay salto finito en el interior del dominio.
* No podemos asegurar que alcanze sus valores máximo y mínimo en D



$\mathbb{R}$ → esta función no alcanza su valor máximo.

5 Continuidad en conjuntos conexos.

Definición: un conjunto $D \subset \mathbb{R}^p$ es conexo si no puede ser descompuesto en dos subconjuntos tales que ninguno contenga pts de adherencia del otro.

La definición de conexo es negativa, i.e. es conexo si no se puede separar.

Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^p$ es no conexo si $\exists M, L \subset \mathbb{R}^p$ tales que se cumplen cuatro condiciones:

1. $X = M \cup L$
2. $M \cap L = \emptyset$
3. $\overline{M} \cap L = \emptyset$
4. $M \cap \overline{L} = \emptyset$

$\cup \longrightarrow$ Unión

$\cap \longrightarrow$ Intersección

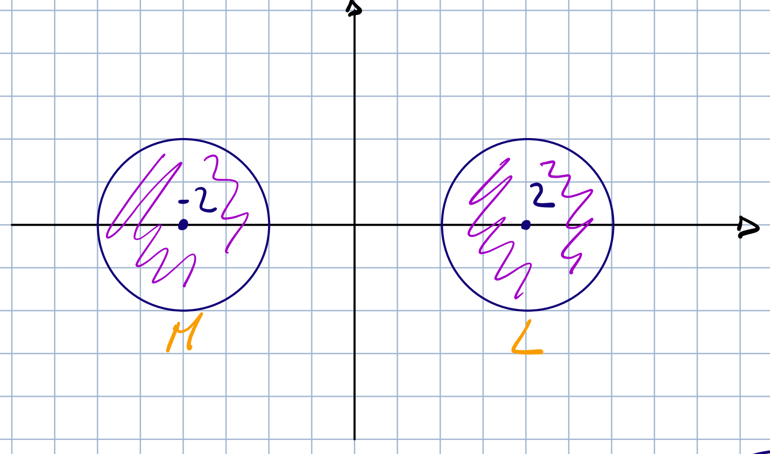
$\emptyset \longrightarrow$ Conjunto vacío

$\overline{D} = D \cup \partial D$

Adherencia Conjunto Frontera.

Ejemplos:

ⓐ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-2)^2 + y^2 \leq 1, \text{ o, } (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$



$D = M \cup L$ ✓

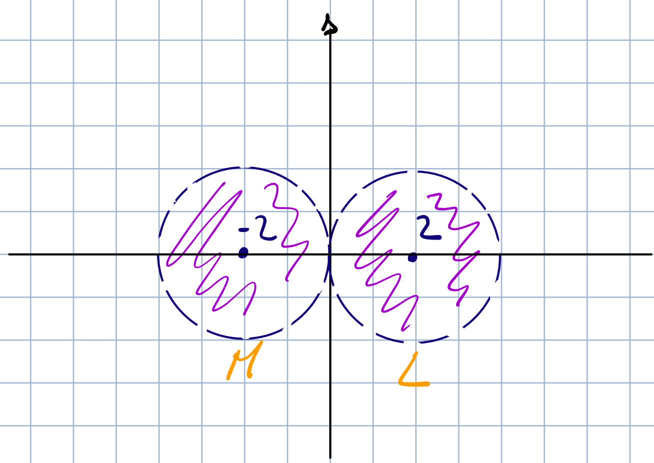
$M \cap L = \emptyset$ ✓

$\overline{M} \cap L = \emptyset$ ✓

$M \cap \overline{L} = \emptyset$ ✓

D es no conexo.

(b) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2<1, \text{ o, } (x+1)^2+y^2<1\}$



$D=M\cup L$ ✓

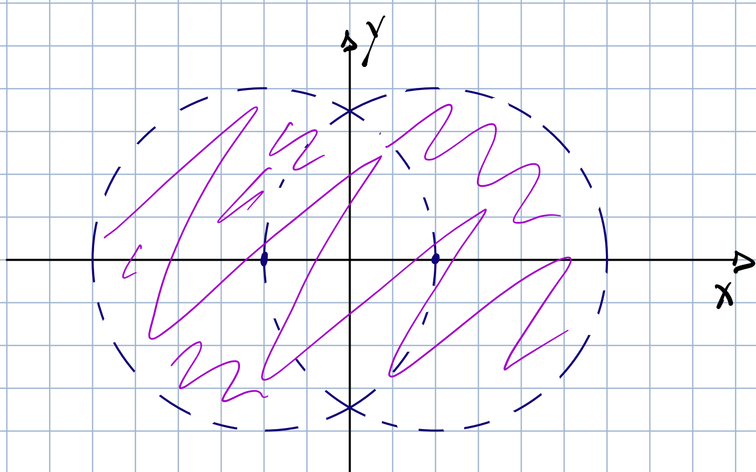
$M\cap L=\emptyset$ ✓

$\overline{M}\cap L=\emptyset$ ✓

$M\cap \overline{L}=\emptyset$ ✓

D es no conexo.

(c) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2<2, \text{ o, } (x+1)^2+y^2<2\}$



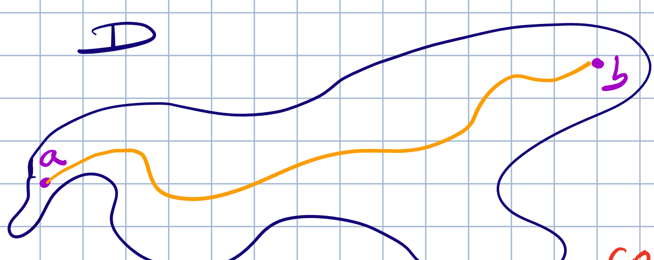
No puedo encontrar L y M que cumplan las condiciones citadas

$\Downarrow$

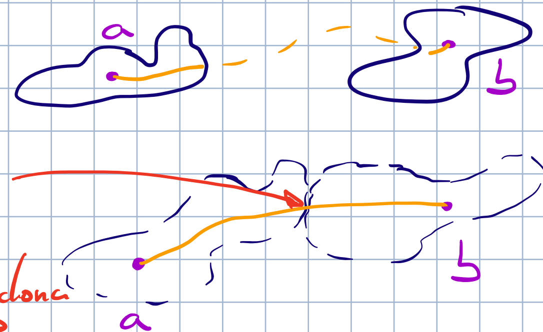
Conjunto D es conexo

Definición: un conjunto $D\subset\mathbb{R}^p$ es conexo por arcos si dados dos pts cualesquiera $a,b\in D$, es posible encontrar una curva continua que lleve de un pto a otro sin abandonar D.

Conexo por arcos



No conexo por arcos



Ninguno contiene a su frontera → abandona D

Propiedades:

* Si D es conexo por arcos $\longrightarrow$ D conexo
* Si D es conexo y abierto $\longrightarrow$ D es conexo por arcos.

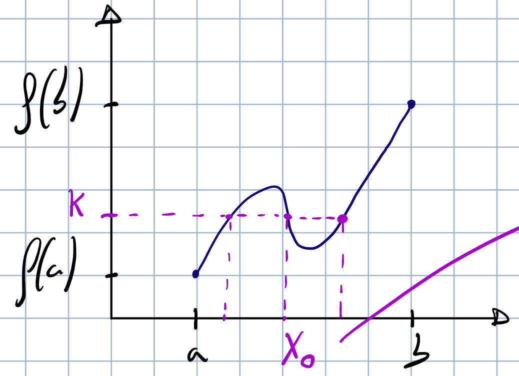
Si os interesa el tema, buscad peine del topólogo (conjunto conexo pero no conexo por arcos).

* Si D es conexo y $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es continua, entonces $f(D)$ tb es conexo
* Si D es conexo por arcos y $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es continua, entonces $f(D)$ tb es conexo por arcos.
* En $\mathbb{R}$ (Mat. I) a los conjuntos conexos se les llama intervalos.

TEOREMA DE DARBOUX

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un conjunto conexo D. Si para dos pts $\bar{a}, \bar{b} \in D$ la función toma valores distintos $f(\bar{a}) \neq f(\bar{b})$, entonces para cualquier valor intermedio, k, $(f(\bar{a}) < k < f(\bar{b}))$, $\exists\, \bar{x}_0$ tal que $f(\bar{x}_0) = k$.

Además, la imagen de D, $f(D)$, es un intervalo de $\mathbb{R}$ (conexo).



Ejemplo en $\mathbb{R}$.

$\rightarrow \exists$ un x_0, lo que no significa que no pued haber varios.

6 Resumen

$f(\bar{x})$ continua en D y $\begin{cases} D \text{ es compacto} \rightarrow f(D) \text{ es compacto } \begin{cases} f \text{ acotada} \\ f \text{ alcanza max y min.} \end{cases} \\ D \text{ es conexo} \rightarrow f(D) \text{ es conexo} \end{cases}$

Recordatorio: A y $B \rightarrow C$ // $\neg C \rightarrow \neg A$ o $\neg B$

Ejercicios:

① [II.15 guiones]. Sea $f: \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

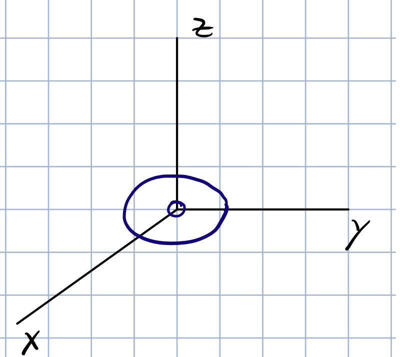
$$f(x,y) = \frac{(x+y)\,y^4}{x^2+y^4} + \sin(x+y),$$

y sea $C = \overline{B}((0,0),1) - \{0,0\}$. Sobre $f(C)$ podemos decir que:

ⓐ Es compacto pero no conexo.

ⓑ Es compacto y conexo.

ⓒ Es cerrado y conexo, pero no compacto.



Primero, sobre C.

* Es acotado (no se va a $\pm\infty$)
* No es cerrado (el $(0,0)$ es frontera, pero no le pertenece).

→ No es compacto

* Es conexo por arcos → es conexo.

Ahora, sobre f en C. ¿Es continua? Es "combinación" de func. continuas. El único pto problemático es el $\{0,0\}$, no incluido en el dominio → es continua.

f continua en C y C conexo → $f(C)$ conexo

f continua en C y C ~~compacto~~ → $f(C)$ compacto ?

No podemos aplicar la teoría, pero $f(C)$ puede seguir siendo compacto. Hay que analizar si es cerrado y acotado.

*¿Acotado? El único pto complicado es el $(0,0)$ donde la función se podría ir a $\pm\infty$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\,y^4}{x^2+y^4} + \sin(x+y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x+y)}_{\to 0}\underbrace{\frac{y^4}{x^2+y^4}}_{\text{Acotada}} + \underbrace{\sin(x,y)}_{\to 0} = 0$$

Luego $f(C)$ es acotado.

*¿Cerrado? Si la función fuera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\,y^4}{x^2+y^4} + \sin(x+y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Y el dominio $\overline{B}((0,0),1)$, tendría función continua en dominio compacto $\longrightarrow f(C)$ compacto.

La única diferencia entre esta hipotética función y la que realmente tengo es $f(0,0) = 0$.

Si tengo alguna alternativa para generar ese pto, $f(C)$ será compacto. Vemos que $f(x,-x) = 0$, por lo que $f(C)$ es compacto.

Respuesta correcta: 5

2

DIFÍCIL

[Ordinario 2014/2015]

Examen ordinario 2014-2015

A. Sean $f : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 - y^2}\right)$,

y $D \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto de puntos que no pertenecen a su dominio de definición.

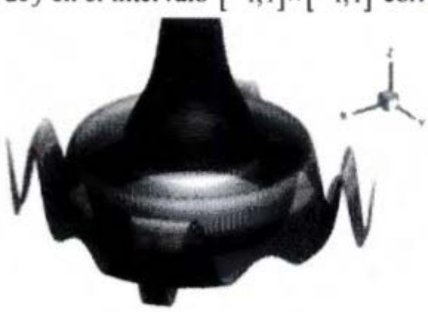
Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa:

1)C 2)F El conjunto D es compacto.

3)C 4)F La curva de nivel $C_{\frac{1}{2}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \frac{1}{2}\right\}$ es un conjunto conexo.

5)C 6)F Sea $g(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $|g(x,y)|$ es una función continua en $\mathbb{R}^2$. El conjunto $g\left(D \cap \overline{B}((0,0),1)\right)$ es necesariamente compacto en $\mathbb{R}$.

7)C 8)F La gráfica de f en el intervalo $[-1,1]\times[-1,1]$ corresponde a



Ejemplo de pregunta en la que hay que decir si cada una de las afirmaciones es V o F.

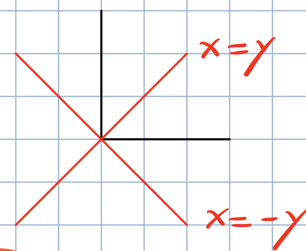
I)

$f: C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right)$

$C \to$ dominio de $f(x,y)$ $\quad D \subset \mathbb{R}^2 \to$ todos los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que no $\in$ a C.

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2-y^2 \neq 0\} \longrightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2-y^2 = 0\}$

$x^2 - y^2 = 0 \to y = \pm\sqrt{x^2} = \pm x$

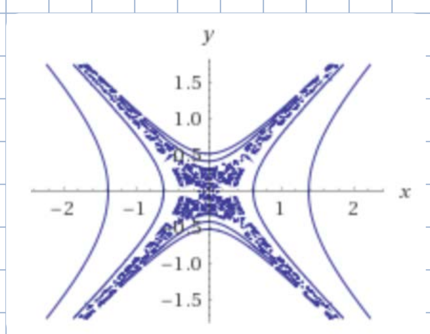


Sobre D. $\left|\begin{array}{l} \text{cerrado } ✓ \\ \text{acotado } ✗ \end{array}\right\}$ no compacto. F

II)

$C_{1/2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 1/2\}$ ¿conexo?

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right) = 1/2 \longrightarrow \frac{1}{x^2-y^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



$\frac{1}{x^2-y^2} = C \to x^2 - y^2 = \frac{1}{C}$

$\to$ Hipérbolas (eje x e y)

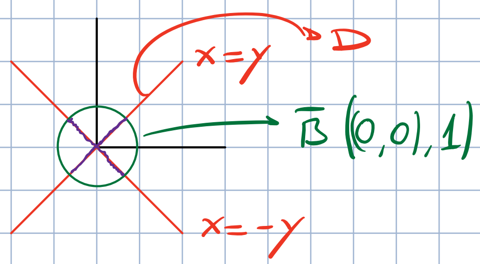
$\to C \to \infty \quad y = \pm x$

No es conexo. Las hipérbolas quedan separadas. F

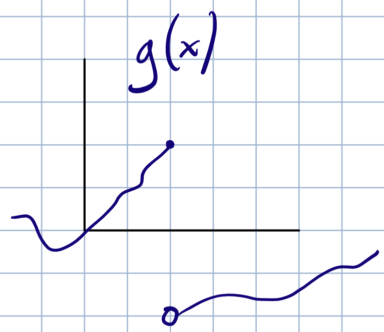
III)

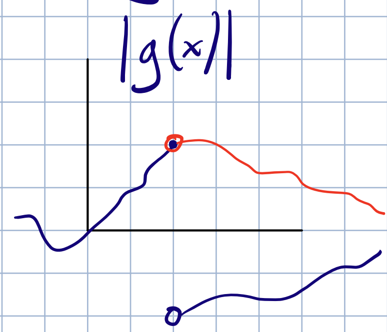
$D \cap \overline{B}((0,0),1) \to$ acotado + cerrado $\to$ compacto.

Si g continua $\to g(D \cap \overline{B}((0,0),1)) \to$ compacto



Pero la continua es $|g(x,y)|$.





De forma que $|g(x,y)|$ puede ser continua con $g(x,y)$ discontinua.

F (puede serlo, pero no es necesariamente)

IV)

Esa gráfica no está acotada entre -1 y 1. F

③ [ordinario 2015/2016]. FUERA DE NIVEL

C. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizar si f es continua en $\mathbb{R}^2$.

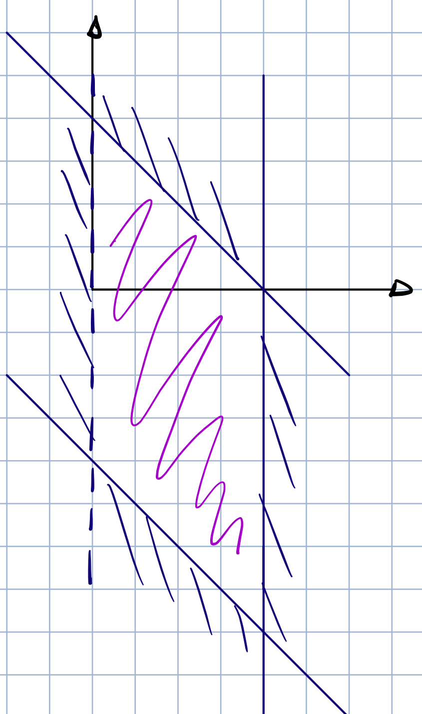
Sea C un conjunto de $\mathbb{R}^2$, se verifica que:

13) Si $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x\leq 1,\ -1\leq x+y\leq 1\}$ entonces $f(C)$ no es compacto.
14) Si $C=\overline{B}((2,2),1)\cup B((2,-2),1)$ entonces $f(C)$ es un intervalo.
15) Si $C=\overline{B}((2,2),1)\cup B((-2,2),1)$ entonces $f(C)$ es un intervalo.
16) Si $C=\overline{B}((0,0),1)-\{(0,y)\in\mathbb{R}^2: |y|\leq 1\}-\{(x,0)\in\mathbb{R}: |x|\leq 1\}$ entonces $f(C)$ es un intervalo.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0? \longrightarrow 0\leq\left|\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq|x^2|\to 0$$

$f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$

I) Si $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x\leq 1,\ -1\leq x+y\leq 1\}$, $f(C)$ no es compacto



$y\leq 1-x$

$y\geq -1-x$

C no es compacto.

f cont + C comp $\to f(C)$ comp.

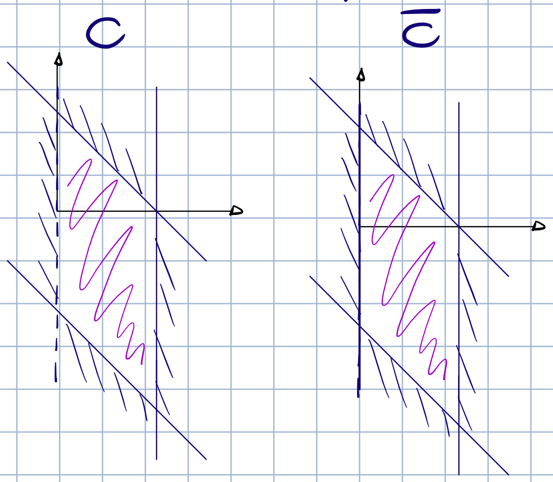
f cont + C no comp $\to f(C)$ puede ser o no comp.

$f(\overline{C})$ es compacto

$f(C)$ es compacto?

Si soy capaz de probar que $f(C) = f(\overline{C})$, entonces, $f(C)$ es compacto.

La única dif. entre ambos intervalos es $f(0,y)$

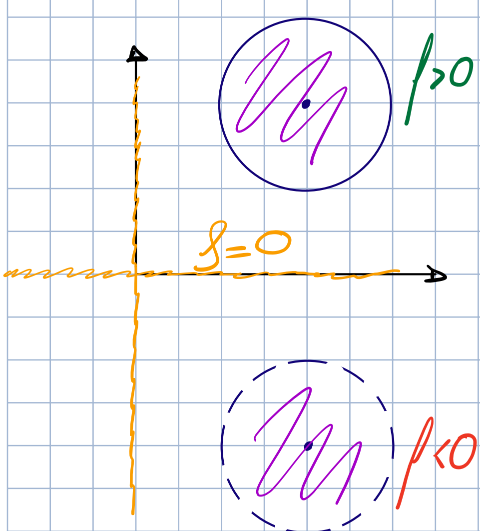


$$f(0,y) = \frac{0^2 y}{\sqrt{0^2+y^2}} = 0$$

Si alcanzo el 0 en otro pto $\in C$, $f(C)$ será compacto.

Podemos ver que $f(0,x) = 0$ F

II) Si $C = \overline{B}((2,2),1) \cup B((2,-2),1)$, $f(C)$ es intervalo.

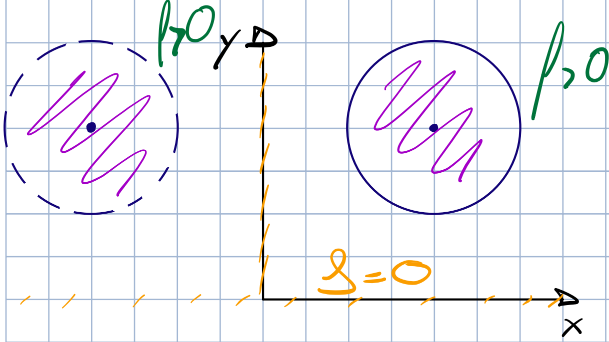


f cont + C conexo $\rightarrow f(C)$ conexo [intervalo en $\mathbb{R}$]

Tenemos que mirar la def de la función.

Vemos que $f(C) = (-b,-a) \cup [a,b]$ y eso no es un intervalo. F

III) Si $C = \overline{B}((2,2),1) \cup B((-2,2),1)$, $f(C)$ es intervalo.



f cont + C conexo ⟶ $f(C)$ conexo [intervalo en $\mathbb{R}$]

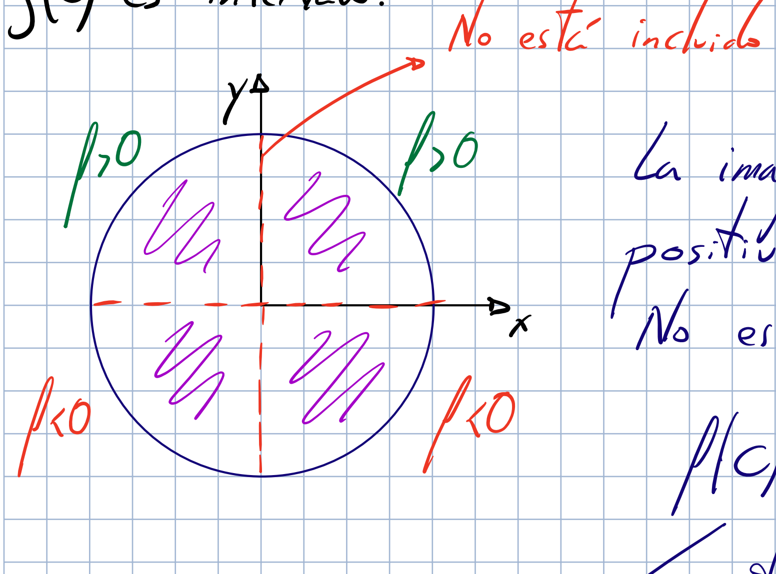
Tenemos que mirar la def de la función.

Por simetría, ambos subintervalos ($\overline{B}$ y B) tienen las mismas imágenes (salvo frontera).

$$f(-x,y)=\frac{(-x)^2y}{\sqrt{(-x)^2+y^2}}=\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(x,y)$$

De modo que $\underbrace{f(\overline{B})}_{\text{conexo}} = f(B\cup\overline{B}) \longrightarrow$ conexo $\longrightarrow$ intervalo V

IV) Si $C=\overline{B}((0,0),1)-\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 / |y|\leq 1\}-\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 / |x|\leq 1\}$, $f(C)$ es intervalo.



La imagen de la función toma valores positivos y negativos pero no el cero. No es intervalo.

$$f(C)=[-a,0)\cup(0,a]$$

⟵ esto es un entorno reducido, pero no un intervalo.

④ [Ordinario 2016/2017] Difícil

A. Sean $f : [-1,1] \times [-1,1] - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ y $g : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

y

$$g(x,y) = f(x,y) \quad \text{si } x \neq y, \;\; g(x,x) = \frac{x|x|}{2}.$$

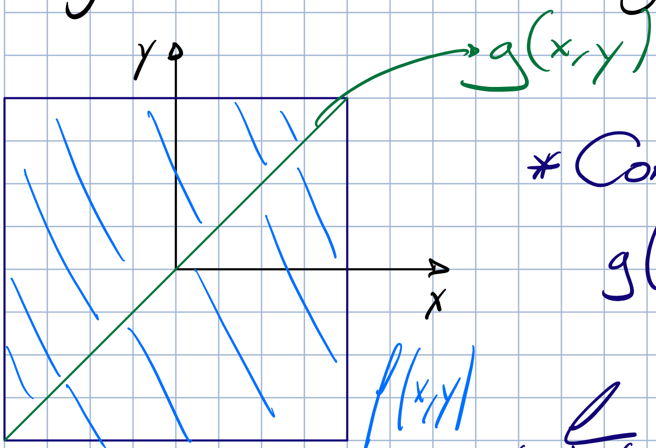
Sobre la función g se puede afirmar.

(1) La función g es continua en el origen y $g([-1,1]\times[-1,1])$ **no** es compacto.
(2) La función g es continua en $[-1,1]\times[-1,1]$ y $g([-1,1]\times[-1,1])$ es conexo.
(3) La función g **no** es continua en $[-1,1]\times[-1,1]$ y $g([-1,1]\times[-1,1])$ es compacto.
(4) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Sean $f : [-1,1] \times [-1,1] - \{0,0\} \to \mathbb{R}$, y $g : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } x \neq y \\ \frac{x|x|}{2} & \text{si } x = y \end{cases}$$

I) g es continua en el origen y $g([-1,1]\times[-1,1])$ no es compacto.



* Continuidad de $g(x,y)$ en $(x,y) = (x_0,x_0) \neq (0,0)$

$$g(x_0,x_0) = \frac{x_0|x_0|}{2} \quad \neq \longrightarrow \text{discontinua}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x\neq y)}} g(x,y) = f(x_0,x_0) = \frac{x_0^3}{x_0^2+x_0^2} = \frac{x_0}{2}$$

* Continuidad de g en $(0,0)$

$g(0,0) = \frac{0 \cdot |0|}{2} = 0$ $\Rightarrow$ continua en $(0,0)$.

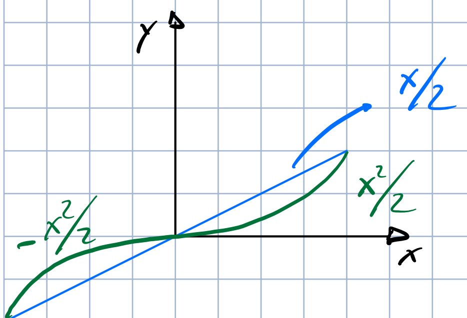
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$ ¡Os lo dejo a vosotros!

* ¿Compacto? g ~~cont~~ + C comp ✓ $\longrightarrow$ $g(C)$ compacto ?

Para estudiar si $g(C)$ es compacto, quito la discontinuidad y miro si añadirla cambia algo.

Por ejemplo, $f(C)$ es compacto. En $y=x$, $f(x,x) = \frac{x}{2}$, de forma que su imagen a lo largo de la diagonal es: $[-1/2, 1/2]$.

A lo largo de la discontinuidad, $g(x,x) = \frac{x|x|}{2} \to [-1/2, 1/2]$



Las imágenes de ambas funciones son iguales, luego:

$$\underset{\text{compacto}}{f(C)} = \underset{\text{compacto}}{g(C)}$$

compacto $\rightarrow$ compacto

II/ g cont en C y $g(C)$ es conexo F (No continua en C)

III/ g cont en $(0,0)$ y $g(C)$ es compacto V

ESERCICIOS PARA CASA

II.5 Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y)=\dfrac{x^n(x+y^2)}{x^2+y^4}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$, donde $n\in\mathbb{N}$ es un número natural dado. Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$ según los valores de n. Se verifica que:

- **a)** Es continua en $(0,0)$ si y solo si $n\geq 2$.
- **b)** Es continua en $(0,0)$ si y solo si $n\geq 3$.
- **c)** Es continua en $(0,0)$ si y solo si $n\geq 4$.
- **d)** No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

$$f(x,y)=\frac{x^n(x+y^2)}{x^2+y^4}$$

¿Se anula el denominador en alguna trayectoria que pase por $(x_0,y_0)=(0,0)$? NO, solo en el punto. Buena señal

Mirar órdenes ¿orden numerador > orden denominador?

No está claro. Y depende de n.

$$\frac{O(n+1)+O(n+2)}{O(2)+O(4)}$$

Utilizo como hipótesis que el lim no existe y voy a intentar demostrarlo:

ⓐ Usando tray. lineales ⓑ Usando tray. que igualen órdenes del denominador.

$$f(x,y)=\frac{x^n(x+y^2)}{x^2+y^4}$$

$x=y^2$ *

$$^{*}f(x,y)=\frac{y^{2n}(y^2+y^2)}{y^4+y^4}=\frac{2y^{2(n+1)}}{2y^4}=y^{2(n+1)-4}=y^{2(n-1)}$$

Si $n>1$, ($n\geq 2$ según enunciado) el límite existe según esta trayectoria (y vale cero).

Para $n\leq 1$, el límite no existe.

Pruebo tray. lineales

$y=mx$

$$f(x,y)=\frac{x^n(x+m^2x^2)}{x^2+m^4x^4}=\frac{x^{n+1}+\cancel{m^2x^{n+2}}}{x^2+\cancel{m^4x^4}}\longrightarrow 0 \text{ Si } n\geq 2$$

Intento acotar (con $n=2$)

Por trayectorias

$$|f(x)-\ell|=\left|\frac{x^2(x+y^2)}{x^2+y^4}-0\right|\leq |x|+y^2\longrightarrow 0$$

$$\underbrace{\frac{x^3}{x^2+y^4}}_{a}+\underbrace{\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}}_{b}$$

a $\leq |x|\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\leq |x|\dfrac{x^2}{x^2}=|x|\longrightarrow 0$

b $=y^2\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\leq y^2\longrightarrow 0$

Si $n=2$, el límite existe y vale $\ell=0$, luego la función es continua ($f(0,0)=\ell=0$)

¿Qué pasa con $n>2$? Se acota igual. El numerador es aún más pequeño, luego no hay problema.

II.6 Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$ si $x \neq -y$ y $f(x,-x)=0$. La función f es tal que:

a) Existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $B^*((0,0),\delta)$.

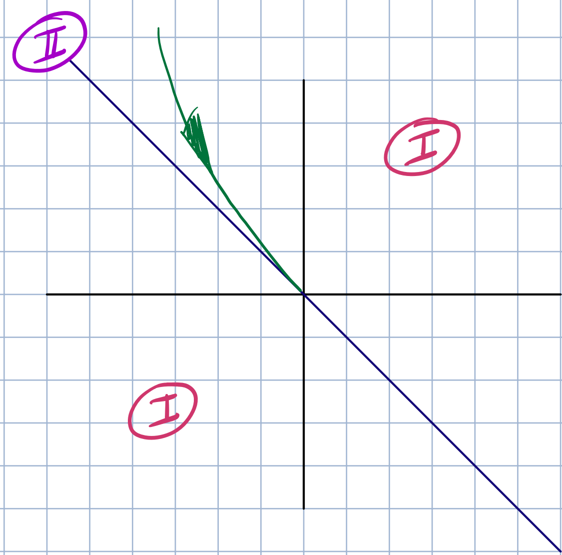
b) Es continua en el origen.

c) No es continua en el origen.

d) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

Determinar cuál de las opciones anteriores es cierta, razonando la respuesta.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x+y} & \text{si } x \neq -y \quad \text{I} \\ 0 & \text{si } x = -y \quad \text{II} \end{cases}$$



① O(Den) > O(Num) ✓

② Tray que anule den → malo

Pruebo tray. que se acerque $y=-x+x^K$ Trayectoria cercana

$$f(x,-x+x^K) = \frac{x^2(-x+x^K)^2}{x-x+x^K} = \frac{x^2(x^2+x^{2K}-2x^{K+1})}{x^K}$$

$$K>4 \to = \frac{x^4}{x^K} \to \infty$$