1 Repaso de Matemáticas I

Desarrollo en serie de Taylor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n)}(x_0)(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots$$

- → orden 1: recta tangente
- → centrado en un punto (x_0)
- → no funciona si la función es discontinua.

Ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

Desarrollo de Taylor centrado en 0.

$$T_0 = 1$$
$$T_1 = 1 + x$$
$$T_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$
$$T_3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Series truncadas. Añadir términos mejora la aproximación.

2 Desarrollo limitado de Taylor $(\mathbb{R}^n)$

Sea $f: C \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de clase C^n en un entorno de $\bar{x}_0 \in C$, entonces cuando $\Delta \bar{x} \to 0$

$$f(\bar{x}) = \underbrace{f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0; \Delta\bar{x}) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x}_0; \Delta\bar{x}) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(\bar{x}_0; \Delta\bar{x})}_{\text{Polinomio de Taylor de orden } n\ (T_n)} + \underbrace{o(\|\Delta\bar{x}\|^n)}_{\text{Resto}}$$

donde $d^k f(\overline{x}_0; \Delta\overline{x}) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{p} \frac{\partial^k f(\overline{x}_0)}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\cdots\partial x_{j_k}} \Delta x_{j_1}\Delta x_{j_2}\cdots\Delta x_{j_k} =$

$$= \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right)^k f(\overline{x}_0)$$

(Ver clase anterior si esto no se entiende)

Comentarios:

* El polinomio de Taylor es el único polinomio de grado n que aproxima a f en un entorno de $\overline{x}_0$ hasta orden n:

$$\lim_{\Delta\overline{x}\to\overline{0}} \frac{\| f(\overline{x}_0+\Delta\overline{x}) - T_n(\overline{x}_0; \Delta\overline{x})\|}{\|\Delta\overline{x}\|^n} = 0$$

Similar al diferencial, para orden superior.

Veamos que, por ejemplo para orden 1 tenemos que:

$$\lim_{\Delta\overline{x}\to\overline{0}} \frac{\| f(\overline{x}_0+\Delta\overline{x}) - T_1(\overline{x}_0; \Delta\overline{x})\|}{\|\Delta\overline{x}\|} = \frac{\| f(\overline{x}_0+\Delta\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - df(\overline{x}_0; \Delta\overline{x})\|}{\|\Delta\overline{x}\|} = 0$$

3 Caso particular. $f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sea $f: C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^n en un entorno de $\overline{x}_0 \in C$. Se define el polinomio de Taylor de orden n de $f(x,y)$ en $\overline{x}_0 = (x_0, y_0)$

$$T_n(x,y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f((x_0,y_0); (\Delta x, \Delta y)) =$$

$$= f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)$$

Por ejemplo, particularizando para orden 1, T_1, plano tangente.

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + df((x_0,y_0);(\Delta x, \Delta y)) =$$

$$= f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) =$$

Matrix form

$$= f(x_0,y_0) + \underbrace{\left[f'_x(x_0,y_0) \quad f'_y(x_0,y_0) \right]}_{\text{Vector gradiente}} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} =$$

$$= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0)$$

Para orden 2, tenemos

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right]$$

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[f'_x(x_0,y_0) \quad f'_y(x_0,y_0) \right] \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[x-x_0, \quad y-y_0 \right] \underbrace{\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Hessiana}}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Dada $f(x,y) = e^x \cos y$, hallar la aproximación de Taylor de orden 2 en un entorno de $(0,0)$.

Tenemos que calcular $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ en $(0,0)$

$$f'_x\Big|_{(0,0)} = e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$f'_y\Big|_{(0,0)} = -e^x \sin y\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f'_{xx}\Big|_{(0,0)} = e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$f'_{xy}\Big|_{(0,0)} = -e^x \sin y\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f'_{yy}\Big|_{(0,0)} = -e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = -1$$

$$T_2(x,y) = 1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

4 Desarrollo de Maclaurin

Desarrollo de Taylor centrado en $\overline{x}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$

Ejemplo: calcular el desarrollo limitado de Maclaurin de segundo orden de $f(x,y) = e^{y^2} + 2\sin xy$ (10.3 Guiones)

$$f'_x\Big|_{(0,0)} = 2y\cos xy\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f'_y\Big|_{(0,0)} = 2ye^{y^2} + 2x\cos xy\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f'_{xx}\Big|_{(0,0)} = -2y^2 \sin xy\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f'_{xy}\Big|_{(0,0)} = 2\cos xy - 2xy\sin xy\Big|_{(0,0)} = 2$$

$$f'_{yy}\Big|_{(0,0)} = 2e^{y^2} + 4y^2 e^{y^2} - 2x^2 \sin xy\Big|_{(0,0)} = 2$$

$$T_2(x,y) = 1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$1 + 2xy + y^2$$

Ejercicios 10.4 - 10.6 son teóricos y sirven para justificar el $o(\|(x,y)\|^n)$ que utilizamos como resto de Taylor

10.4 Demostrar que si $\alpha,\beta>0$ y $(x,y)\to(0,0)$ entonces $|x|^\alpha|y|^\beta=o(\|(x,y)\|^n)$ para todo $0<n<\alpha+\beta$ $(n\in\mathbb{N})$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n}$$ (Hipótesis: $l=0$ e intentamos acotar)

$$\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n} \leq \frac{\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^\alpha\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+\beta-n} \to 0$$

Si $\alpha+\beta>n>0$

10.5 Demostrar que si $g(x,y)=o(|x|^\alpha|y|^\beta)$ con $\alpha,\beta>0$ y $(x,y)\to(0,0)$ entonces $g(x,y)=o(\|(x,y)\|^n)$ donde $0<n\leq\alpha+\beta$ $(n\in\mathbb{N})$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{|x|^\alpha|y|^\beta}=0 \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\|(x,y)\|^n}=0$$

$$\left|\frac{g(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n}\right| = \underbrace{\left|\frac{g(x,y)}{|x|^\alpha|y|^\beta}\right|}_{\text{tiende a cero}}\ \underbrace{\left|\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n}\right|}_{\text{acotado}*} \longrightarrow 0$$

* Si $\alpha+\beta>n$, por 10.4 el límite tiende a 0.

Si $\alpha+\beta=n$

$$\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+\beta}} = \frac{|x|^\alpha}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}\frac{|y|^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\beta} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^\alpha} + \frac{|y|^\beta}{|y|^\beta} = 2$$

Acotada

10.6 Demostrar que si $r(x,y)=o\left((x-y)^2\right)$ entonces $r(x,y)=o\left(x^2+y^2\right)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{(x-y)^2} = 0 \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

$$\left|\frac{r(x,y)}{x^2+y^2}\right| = \underbrace{\left|\frac{r(x,y)}{(x-y)^2}\right|}_{\to 0} \underbrace{\left|\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\right|}_{\text{Acotada}*} \longrightarrow 0$$

$$\left|\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\right| \leq \cancel{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} \to 1 + \frac{|2xy|}{x^2+y^2}$$

$$2\frac{|xy|}{x^2+y^2} = 2\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \leq 2\left(\frac{|x|}{|x|}\cdot\frac{|y|}{|y|}\right) = 2$$

5 Cálculo práctico de los desarrollos de Maclaurin

Al igual que hacíamos en mat I, podemos componer desarrollos

$f(x,y) = e^{y^2} + 2\sin(xy)$ Ejemplo 10.3 guiones

$e^{\alpha} = 1 + \frac{1}{1!}\alpha + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \dots + \frac{1}{n!}\alpha^n$; $\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!}$

$e^{y^2} = 1 + y^2 + o(y^2)$

$\sin(xy) = xy + o((xy))$

Grado 2 Grado 2

$$f(x,y) = 1 + y^2 + 2xy + o(y^2) + o((xy))$$

$$o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}\right) \qquad o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right)$$

Ver ejercicios 10.4, 10.5, 10.6

$$f(x,y) = 1 + y^2 + 2xy + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}\right)$$

→ me quedo solo con el término más grande. (El de menor grado)

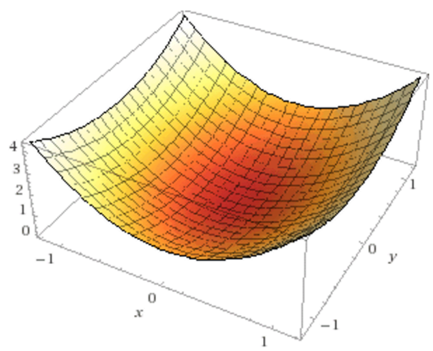
Ejercicio:

Ejercicio (*casa*): $F(x,y,z) = z - 2x^2 + y^2 = 0$

(1) Hallar el plano tangente en (0.5,0,0.5).

(Es lo mismo que calcular el polinomio de Taylor de orden 1)

(2) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en (0.5,0,0.5).



III.7 Dadas las funciones $f(x,y) = (1 - e^{x-y})(x+y) - 2y^2$ y $g(x,y) = e^{x+y}\,\mathrm{sen}(x^2+y)$. Se pide:

a) Desarrollar f y g en fórmula de Maclaurin hasta términos de segundo grado.

Resultados: a) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + o(x^2+y^2)$, $g(x,y) = y + x^2 + xy + y^2 + o(x^2+y^2)$.

$$f(x,y) = \left(1 - [1 + (x-y) + o(x-y)]\right)(x+y) - 2y^2 =$$

$$= -(x-y)(x+y) - 2y^2 + (x+y)\,o(x-y)^{*} =$$

$$= -x^2 + y^2 - 2y^2 + o(x^2+y^2)\,*$$

* $o(x-y)$ significa que toda la expresión que en realidad va aquí (desarrollo de Taylor completo) es pequeño en comparación con $(x-y)$. En otras palabras, llamando $g(x,y)$ al resto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{(x-y)} = 0$$

Lo que nosotros tenemos es $(x+y)\,o(x-y)$, veamos que es más pequeño que (x^2+y^2) en base a lo anterior:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)(x+y)}{x^2+y^2}\,\frac{(x-y)}{(x-y)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{g(x,y)}{(x-y)}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}_{\text{Acotado}} = 0$$

*Explicación alternativa. Desarrollo de Taylor es único. Si ya he calculado todos los términos de grado dos, el resto tiene esa forma.

$$g(x,y) = e^{x+y}\sin(x^2+y)$$

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + (x+y)^2 + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$\sin(x^2+y) = (x^2+y) \cancel{-\frac{1}{3}(x^2+y)^3} + o(\|(x,y)\|^2)$$

no continuo operando con estos ya que quedarían como orden superior al mult. por el seno.

$$g(x,y) = (1+x+y)(x^2+y) + o(\|(x,y)\|^2) = y+x^2+y^2+xy+o(\|(x,y)\|^2)$$

III.8 Desarrollar en fórmula de Maclaurin, hasta términos de tercer grado, las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ siguientes:

(a) $f(x,y)=\dfrac{x+2y+xy^2-y^3}{1-x+xy}$, (b) $g(x,y)=(1+x)^y$.

Resultados: $f(x,y)=x+2y+x^2+2xy+x^3-y^3+x^2y-xy^2+o\left(\|(x,y)\|^3\right)$, $g(x,y)=1+xy-\frac{1}{2}x^2y+o\left(\|(x,y)\|^3\right)$.

(a) Usamos el desarrollo conocido

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+o(z^3) \rightarrow +o(\|z\|^3)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)$$

$$\frac{1}{1+(-x+xy)}=1-(-x+xy)+(-x+xy)^2-(-x+xy)^3+o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)=$$

4º orden

$$=1+x-xy+x^2+\cancel{x^2y^2}-2x^2y-\left(-x^3+\cancel{o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)}\right)+o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)=$$

$$=1+x-xy+x^2-2x^2y+x^3+o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)$$

$$\frac{x+2y+xy^2-y^3}{1+(-x+xy)}=(x+2y+xy^2-y^3)\left(1+x-xy+x^2-2x^2y+x^3+o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)\right)$$

$$=x+2y+xy^2-y^3+x^2+2xy-x^2y-2xy^2+x^3+2yx^2+o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)=$$

$$=x+2y+x^2+2xy+x^3-y^3-xy^2+x^2y-y^3+o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\right)$$

(b)

$$g(x,y)=(1+x)^y$$

$$(1+x)^y=e^{\ln(1+x)^y}=e^{y\ln(1+x)}$$

Ahora usando el desarrollo conocido $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(\|(x,y)\|^3\right)$

$$y\ln(1+x)=xy-\frac{1}{2}x^2y+\cancel{\frac{1}{3}x^3y}+o\left(\|(x,y)\|^3\right)$$

Por último

$$e^{xy-\frac{1}{2}x^2y} = 1 + xy - \frac{1}{2}x^2y + \cancel{\frac{1}{2}\left(xy - \frac{1}{2}x^2y\right)^2} + o\left(\|(x,y)\|^3\right)$$