

# 1 Vector gradiente

Sea  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\bar{x}_0$ . Se define el vector gradiente de  $f$  en  $\bar{x}_0$  como:

$$\nabla f(\bar{x}_0) = \left( f'_{x_1}(\bar{x}_0), f'_{x_2}(\bar{x}_0), \dots, f'_{x_p}(\bar{x}_0) \right)$$

Es un vector de  $\mathbb{R}^p$ , con las derivadas parciales.

( $\mathbb{R}^2$ )  $\nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$

( $\mathbb{R}^3$ )  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), f'_z(x_0, y_0, z_0))$

EJEMPLO Calcular el gradiente de  $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = ((1-2x^2)e^{-x^2-y^2}, -2yx e^{-x^2-y^2})$$

## 2 Significado del gradiente (PPT Diferenciación 3-gradients)

Propiedad preliminar: sea  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\bar{x}_0$ , entonces la derivada de  $f$  según cualquier vector  $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$  es:

$$f'_{\bar{u}}(\bar{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0)}{h} = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{u} = df(\bar{x}_0, \bar{u})$$

*f diferenciable*

(Lo vimos en la clase anterior como propiedad del diferencial)

Dem. Por ser  $f$  diferenciable

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - df(\bar{x}_0; \bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = \lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}_0) - df(\bar{x}_0; \Delta \bar{x})}{\|\Delta \bar{x}\|} = 0$$

El límite 3, luego se cumple según todas las tray. en particular, según  $\Delta \bar{x} = h \bar{u}$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h \bar{u}) - f(\bar{x}_0) - df(\bar{x}_0; h \bar{u})}{h \| \bar{u} \|} = 0 \quad \text{escalar } \neq 0, \text{ lo quitamos}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h \bar{u}) - f(\bar{x}_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla f(\bar{x}_0) \cdot h \bar{u}}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{u} \quad \blacksquare$$

a) Dirección de máximo crecimiento

→ La derivada según un vector  $\bar{u}$  es la pendiente del recta tangente a  $f(x, y)$  según  $\bar{u}$ . Tasa de crecimiento de  $f$  según  $\bar{u}$ .

→ El gradiente nos permite calcular cualquier derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{u} = \|\nabla f(\bar{x}_0)\| \cdot \underbrace{\|\bar{u}\| \cdot \cos \theta}_{\text{si son derivadas direccionales.}}$$

→  $\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right|_{\max}$  se alcanza para  $\theta=0$  ( $\cos \theta=1$ ).

Pos conclusiones:

1.-  $\bar{u} \parallel \nabla f(\bar{x}_0)$ .  $\nabla f(\bar{x}_0)$  apunta en la dirección de máximo crecimiento de  $f(\bar{x})$

2.-  $\max\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \|\nabla f(\bar{x}_0)\|$ . Su módulo es la derivada

direccional más grande de  $f(\bar{x})$ .

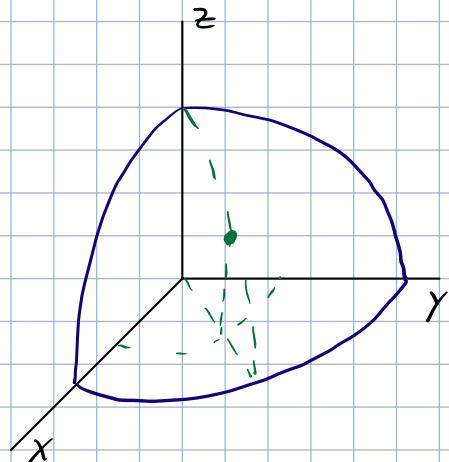
### EJEMPLO

Sea  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ . Calcular

$\nabla f$  en  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . ¿Hacia dónde apunta?

$$\nabla f = \left( -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$$\nabla f \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \left( -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}, -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \right) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



⑤ Normal a las curvas de nivel

Recordemos: curva de nivel  $\rightarrow C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = k\}$

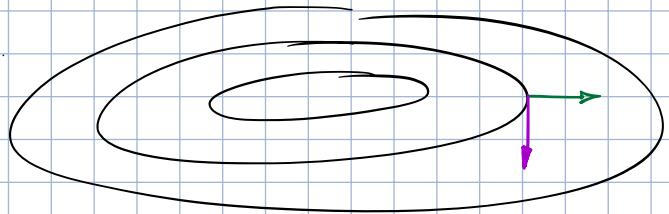
En el caso anterior, son circunferencias (cuartos de circ.)

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = k \rightarrow x^2 + y^2 = 1-k^2 = R^2$$

Dado  $(x_0, y_0) \in C_k$ , podemos dar un desplazamiento  $\Delta \bar{x}$ /

⑥ Tangente. Nos mantenemos en la curva.

⑦ Normal. Cambiamos de curva.



Asumamos que  $\Delta \bar{x}$  es un desplazamiento tangente. En ese caso:

$$\bar{x}_0: K = f(x_0, y_0) ; \bar{x}_0 + \Delta \bar{x} = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = K$$

Por otro lado, por la def de diferencial: (es más la cond. necesaria de existencia)

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=K} + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \Delta \bar{x} \rightarrow \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \Delta \bar{x} = 0$$

\*  $\Delta \bar{x}$  es tangente a la curva de nivel  $\rightarrow$  desplazamiento según  $\Delta \bar{x}$  me mantiene en la curva de nivel ( $\Delta \bar{x} \rightarrow 0$ ).

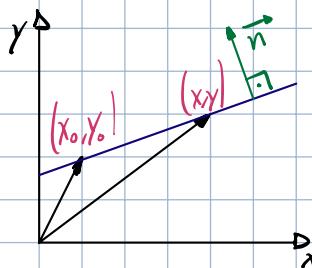
\*  $\nabla f(\bar{x}_0) \perp \Delta \bar{x} \rightarrow \nabla f(\bar{x}_0)$  es normal a curvas de nivel.

\* Esto se podría haber inferido de  $\textcircled{a}$  ya que:

$\rightarrow \nabla f(\bar{x}_0)$  apunta en la dirección de máximo cambio.

$\rightarrow$  La forma más rápida de cambiar  $f$  es saltar de curva de nivel de la forma más rápida posible  $\rightarrow$  ir normal a la curva.

INCISO. Forma implícite de recta en  $\mathbb{R}^2$  y plano en  $\mathbb{R}^3$ .



$$\vec{n} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0 \quad (\text{luego despeja } "y")$$

(Pensar en caso pq vale) Vectores perpendiculares.

$\mathbb{R}^2$

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$$

Recta

$\mathbb{R}^3$

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

Plano

Recta tangente a una curva de nivel  $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$$

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

NOTA: Forma explícita de recta tangente a una curva.

$$y = f(x) \rightarrow (y - y_0) = f'(x) \cdot (x - x_0)$$

$$F(x, y) = y - f(x) = 0 \rightarrow \nabla F = (f'_x, f'_y) = (-f'(x), 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla F \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = -f'_x(x - x_0) + y - y_0 = 0 \rightarrow y - y_0 = f'_x(x - x_0)$$

Plano tangente a una superficie de nivel  $\mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$\nabla F$  es  $\perp$  a las superficies de nivel  $F(x, y, z) = k$ .

El plano tangente a dicha superficie es:

$$\pi \equiv \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) =$$

$$= F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

NOTA: Forma explícita del plano tangente a una superficie.

$$z = f(x, y) \rightarrow z - z_0 = f'_x(\bar{x}_0)(x - x_0) + f'_y(\bar{x}_0)(y - y_0)$$

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0 \quad \nabla F(\bar{x}_0) = (f'_x(\bar{x}_0), f'_y(\bar{x}_0), f'_z(\bar{x}_0)) =$$

$$= (-f'_x(\bar{x}_0), -f'_y(\bar{x}_0), 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla F(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = -f'_x(\bar{x}_0)(x - x_0) - f'_y(\bar{x}_0)(y - y_0) + (z - z_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow z - z_0 = f'_x(\bar{x}_0)(x - x_0) + f'_y(\bar{x}_0)(y - y_0)$$

c) Proyección sobre xy del vector normal al plano tangente

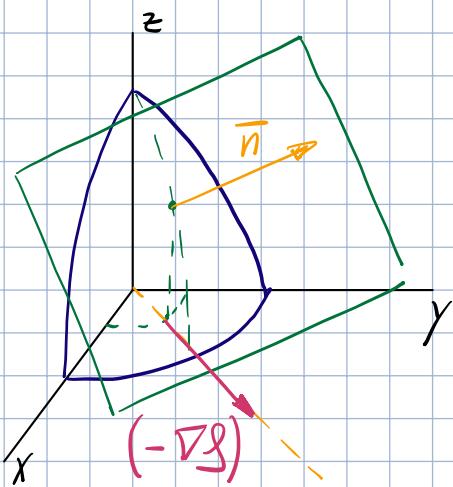
Supongamos que tenemos una superficie definida en  $\mathbb{R}^3$  como  $z = f(x, y)$ . En ese caso, el plano tangente en un punto es:

$$z = f(x, y) \rightarrow z - f(x, y) = 0 \rightarrow F(x, y, z) = 0$$

Plano tangente  $\nabla F(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -f'_x(\bar{x}_0)(x - x_0) - f'_y(\bar{x}_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\vec{n} = (-f'_x(\bar{x}_0), -f'_y(\bar{x}_0), 1) = (-\nabla f(\bar{x}_0), 1) \in \mathbb{R}^{2+1}$$



Para casa. Probar todo con el ejemplo  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Resumen:  $\nabla f$ , con  $f$  diferenciable

a) Dirección de máximo crecimiento

b) Perpendicular a las curvas/superficies de nivel

→ Curvas  $f(x,y) = k \rightarrow$  recta tangente

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

→ Superficies  $F(x, y, z) = k \rightarrow$  plano tangente

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

c) Proyección sobre el plano  $xy$  del vector normal a  $f(x,y)$ ,

$$\bar{n} = (-\nabla f, 1).$$

$f$  no diferenciable.  $\nabla f$  puede existir, pero no tiene implicaciones geométricas.

### EJEMPLOS

1) Calcular la recta tangente a  $x^2 + 2y^2 = 4$  en  $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$x^2 + 2y^2 = 4$  es la curva de nivel de  $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ , con  $k=4$ .

Como paso previo, comprobaremos si el punto pertenece a la curva. En caso contrario, el problema no tiene sentido.

$$f(1, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + 3 = 4 \checkmark$$

Vector normal a la curva:

$$\nabla f = (2x, 4y) \Big|_{(1, \frac{\sqrt{3}}{2})} = (2, 4 \frac{\sqrt{3}}{2})$$

por lo q-e la recta tangente es  $(\nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0)$

$$2(x-1) + 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

② Calcular el plano tangente a  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  en  $(1, \sqrt{\frac{3}{2}}, 4)$

$$\vec{n} = (-\nabla f, 1) = (-2x, -4x, 1) \Big|_{(1, \sqrt{\frac{3}{2}}, 4)} = (-2, -4\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$$

De modo que

$$\pi \equiv \vec{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(-2, -4\sqrt{\frac{3}{2}}, 1) \cdot (x-1, y - \sqrt{\frac{3}{2}}, z-4) = 0$$

③ Calcular el plano tangente a  $x^2 + y^2 + z^2 = 30$  en  $(1, -2, 5)$

Superficie definida de forma implícita:  $F(x, y, z) = k$

Es una superficie de nivel.

$$\pi \equiv \nabla F \Big|_{(1, -2, 5)} \cdot (x-1, y+2, z-5) = (2x, 2y, 2z) \Big|_{(1, -2, 5)} \cdot (x-1, y+2, z-5) =$$

$$= 2(x-1) - 4(y+2) + 10(z-5) = 0$$

(4)

Sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ . Calcular  $a, b, c$  tales que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \Big|_{\max}$  en  $(1, 2, -1)$  se alcanza según  $\bar{u} = (0, 0, 1)$  y valga 64.

$$\nabla f = (ay^2 + 3cz^2, 2axy + bz, by + 2cx^3) \Big|_{(1, 2, -1)} =$$

$$= (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$$

$$\nabla f \parallel \bar{u} \rightarrow \nabla f = \alpha (0, 0, 1) \quad \left| \begin{array}{l} \nabla f = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c) = \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \Big|_{\max} = 64 \rightarrow \|\nabla f\| = \alpha = 64 \end{array} \right. = (0, 0, 64)$$

Resolviendo el sistema lineal

$$a = 6, b = 24, c = -8$$

(3) Sea  $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \bar{x} = 0 \\ \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \bar{x} \neq 0 \end{cases}$ . Calcular  $f'_{\bar{u}}(0, 0)$

¿Puede ser diferenciable?

Primero comprobamos si es continua.  $\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} f(\bar{x}) = 0$ ?

$$\left| f(x, y) - 0 \right| = \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} + |y| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \rightarrow 0$$

Luego la función es continua. Paso a calcular las derivadas parciales en el origen, usando la definición:

$$g'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^{1/2}} - 0}{h} = 1$$

$$g'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h^3}{h^{1/2}} - 0}{h} = -1$$

Aplico ahora la definición de diferencial

$$\frac{\Delta^3 x - \Delta^3 y}{\Delta^2 x + \Delta^2 y} - 0 - (\Delta x - \Delta y)$$

$$\lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} \frac{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{1/2}}{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{1/2}} =$$

$$\frac{\Delta^3 x - \Delta^3 y - \Delta^3 x + \Delta^3 y + \Delta^2 x \Delta y - \Delta^2 y \Delta x}{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$$

$$\lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} \frac{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{1/2}}{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{1/2}} =$$

$$\lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} \frac{\Delta^2 x \Delta y - \Delta^2 y \Delta x}{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{3/2}} =$$

Para que la función sea diferenciable, este límite debe valer cero. Probamos trayectorias lineales (orden (num) = orden (den))

$$y = mx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3 - m^2 x^3}{(x^2 + m^2 x^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m - m^2}{(1+m^2)^{3/2}} \frac{x^3}{x^3} = \frac{m - m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$$

Luego la función no es diferenciable.

Podemos calcular la derivada según la usando la definición

$$f'_{\bar{u}}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0)}{h} =$$

Cualquier vector.

$$\frac{h^3 \cos^3 \alpha - h^3 \sin^3 \alpha}{h^2} - 0$$

unitario lo podemos escribir como

$$\bar{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

### 3 Función vectorial. Diferencial y matriz Jacobiana.

#### DIFERENCIAL

Hemos visto el concepto de diferencial de una función real de varias variables  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vamos a extenderlo a una función vectorial  $\bar{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

Sea  $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Es diferenciable en  $\bar{x}_0 \in D$  si sus componentes  $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_q)$  y es

$$d\bar{f} = (df_1, df_2, \dots, df_q)$$

$$\text{Siendo } df_i = \sum_{j=1}^q \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \nabla f_i \cdot d\bar{x}$$

#### MATRIZ JACOBIANA

Equivalente al gradiente pero para  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$

Caso  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\bar{f}(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: velocidad  $(u, v)$  en un plano  $(x, y)$

$\bar{f}$

$$d\bar{f} = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{dx} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{dy}{dx} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz Jacobiana}} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dx} \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix}$$

$$d\bar{f} = \nabla f \cdot d\bar{x}$$

$$\sim df = \nabla f \cdot dx$$

La matriz Jacobiana es el equivalente al gradiente de la función vectorial.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix}$$

Caso general  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^q$$

$$d\bar{f} = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \underline{dx_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \underline{dx_2} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \underline{dx_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \underline{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \underline{dx_2} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \underline{dx_p} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} \underline{dx_1} + \frac{\partial f_q}{\partial x_2} \underline{dx_2} + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \underline{dx_p} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \frac{\partial f_q}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_p \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana.  $\nabla f \in M_{q \times p}$

→ Las filas de la matriz Jacobiana son los gradientes de las funciones  $\mathcal{f}_i$

→ Las entradas de la matriz Jacobiana son:

$$\mathcal{J}f_{ij} = \frac{\partial \mathcal{f}_i}{\partial x_j}$$

Caso  $p=q$   $\mathcal{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$

→ La matriz Jacobiana es cuadrada

→ Se define el Jacobiano como  $J = \det(\mathcal{J}f)$

ESEMPIO Sea  $\bar{\mathcal{f}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{\mathcal{f}}(x, y, z) = (xz + y^2 + e^z, \sqrt[3]{xy + z})$

Calcular  $\mathcal{J}\bar{\mathcal{f}}(-1, 2, 1)$  y  $d\bar{\mathcal{f}}(-1, 2, 1)$

Primero calculamos los derivados:

$$\mathcal{f}_1 = xz + y^2 + e^z \quad \begin{cases} \mathcal{f}_{1x} = z \\ \mathcal{f}_{1y} = 2y \\ \mathcal{f}_{1z} = x + e^z \end{cases} \quad \begin{array}{c} (-1, 2, 1) \\ \longrightarrow \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ e^{-1} \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathcal{f}_2 = \sqrt[3]{xy + z} \quad \begin{cases} \mathcal{f}_{2x} = y(xy + z)^{-2/3} \\ \mathcal{f}_{2y} = x(xy + z)^{-2/3} \\ \mathcal{f}_{2z} = (xy + z)^{-2/3} \end{cases} \quad \begin{array}{c} (-1, 2, 1) \\ \longrightarrow \\ \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathcal{J}\bar{\mathcal{f}}(-1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & e^{-1} \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Colocamos los gradientes por filas

$$d\bar{f} = \mathfrak{I} f \cdot d\bar{x} = (dx + 4dy + (e-1)dz, 2dx - dy + dz)$$