

INTEGRACIÓN EN \mathbb{R}^P II

17. Propiedades de las integrales en intervalos de \mathbb{R}^P

1 Propiedades de las funciones integrables

Sean $f, g : I \subset \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en I (compacto)

① Linealidad. $\int_I k(f \pm g) = k \int_I f \pm k \int_I g$

② Producto y cociente. $f \cdot g$ es integrable en I

$g(x) > c > 0 \rightarrow g$ es integrable en I

③ Monotonía: $f \leq g$ en $I \rightarrow \int_I f \leq \int_I g$

④ Valor absoluto: $|g|$ es integrable en I y $\left| \int_I g \right| \leq \int_I |g|$

⑤ Aditividad: $I = \bigcup_{k=1}^n I_k$ con $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $i \neq j \rightarrow \int_I f = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f$

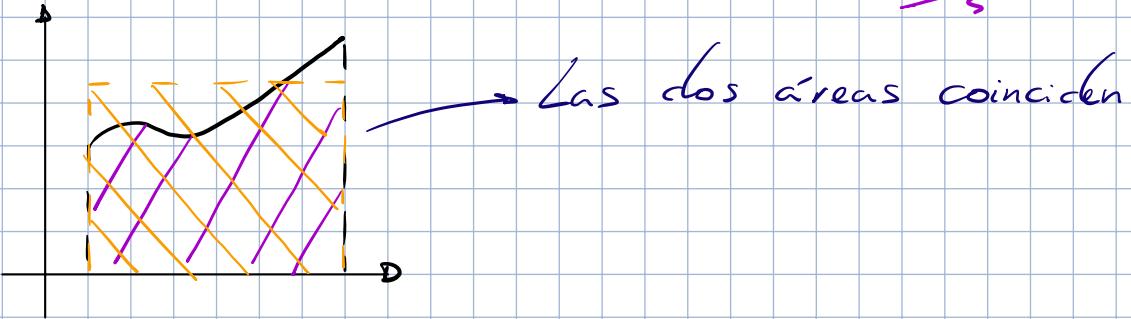
2 Cálculo efectivo de integrales

a) Teorema del valor medio integral

Sean $f: I \subset \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en un compacto I

→ Si f es integrable en $I \rightarrow \exists c \in [m, M] / \int_I f = c \mu(I)$

→ Si f es continua en $I \rightarrow \exists \bar{x}_0 \in I / \int f = f(\bar{x}_0) \cdot \mu(I)$



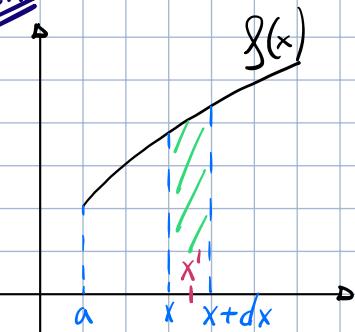
Rapso R

⑤ Teorema fundamental del cálculo

* Si f es integrable en $I = [a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es continua en I

* Si f es continua en $I = [a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es derivable en I y $F'(x) = f(x)$

DEM



$$* A(x+dx) - A(x) = f(x') dx \quad (x' \in [x, x+dx])$$

$$\text{Luego } f(x') = \frac{A(x+dx) - A(x)}{dx}$$

Si $dx \rightarrow 0$, $x' \rightarrow x$ y $f(x) = A'(x)$

Teorema valor medio integral

* $A(x)$ es una función que devuelve el área bajo la curva entre los pts "a" y "x".

② Regla de Barrow

* Si f es continua en $I = [a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de f en $I = [a, b]$, es decir,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \text{ entonces } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

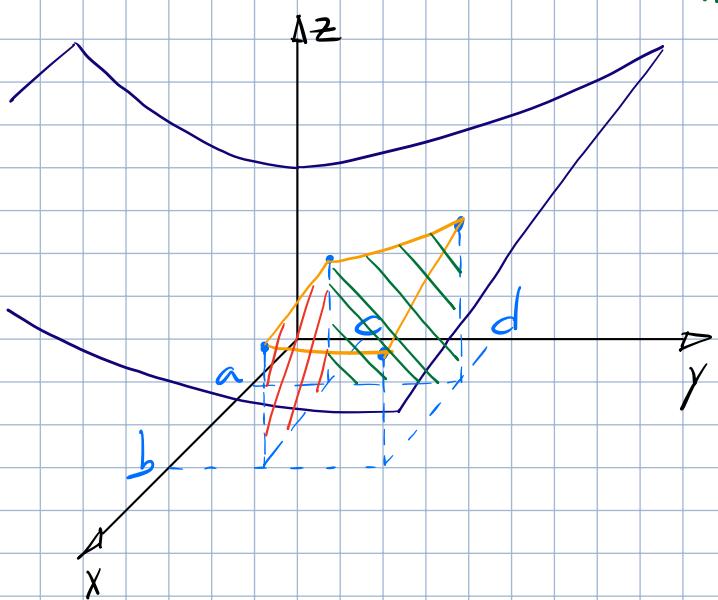
DEM

$$\left. \begin{array}{l} F(b) = \int_a^b f(x) dx + C \\ F(a) = \int_a^a f(x) dx + C \end{array} \right\} \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

3 Teorema de Fubini ($f: I \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en I)

El teorema de Fubini permite el cálculo práctico de integrales en \mathbb{R}^2 .

$$\mathbb{R}^2 : \iint_I f(x, y) dA = \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^d f(x, y) dy}_{\text{Area}(x)} \right) dx = \int_c^d \left(\underbrace{\int_a^b f(x, y) dx}_{\text{Area}(y)} \right) dy$$



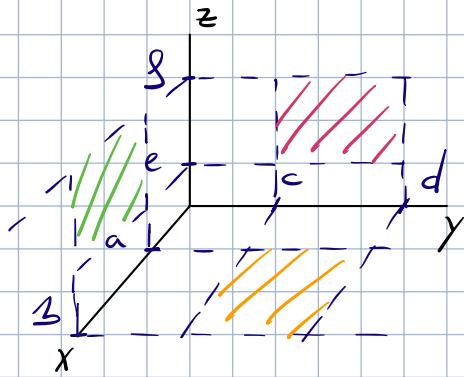
* Sumar todas las áreas verdes moviéndolas entre a y b

* Sumar todas las áreas rojas moviéndolas entre c y d

$$\mathbb{R}^3 : I_{xy} = [a, b] \times [c, d] \quad \textcolor{orange}{\sim}$$

$$I_{xz} = [a, b] \times [e, f] \quad \textcolor{green}{\checkmark}$$

$$I_{yz} = [c, d] \times [e, g] \quad \textcolor{red}{\sim}$$



$$\iiint_I f(x, y, z) dV = \int_a^b \left(\int_{I_{yz}} f(x, y, z) dA \right) = \int_c^d \left(\int_{I_{xz}} f(x, y, z) dA \right) = \int_e^g \left(\int_{I_{xy}} f(x, y, z) dA \right)$$

\sim Cada una de estas es un caso de \mathbb{R}^2 que puedo resolver como en el caso anterior.

Recordar, ($f: I \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en I)

El teorema de Fubini es de aplicación siempre que se cumpla alguna de las condiciones siguientes:

- (a) f continua en I
- (b) f discontinua en un conjunto de contenido nulo y existe la integral entre paréntesis.

ESEMPIO 1

$$\iint_R (x^2 + y) dA, \text{ con } R = [0, 1] \times [0, 1]$$

La función a integrar es continua \rightarrow podemos aplicar Fubini.

Camino 1

$$\iint_R (x^2 + y) dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y) dx \right] dy$$

$$\int_0^1 (x^2 + y) dx = \left[\frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y \right] dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{6}$$

Camino 2

$$\iint_R (x^2 + y) dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) dy dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y) dy \right] dx$$

$$\int_0^1 (x^2 + y) dy = x^2 y + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} = x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

ESEMPIO 2

$$\iint_R y(x^3 - 12x) dA, \quad \text{con } R = [-2, 1] \times [0, 1]$$

Camino 1

$\hookrightarrow f$ continua in $R \rightarrow F$ bin:

$$\begin{aligned} \iint_R y(x^3 - 12x) dA &= \int_0^1 \left[\int_{-2}^1 y(x^3 - 12x) dx \right] dy = \\ &= \int_0^1 y \left[\frac{x^4}{4} - 12 \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 dy = \frac{57}{4} \int_0^1 y dy = \frac{57}{4} \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{57}{8} \end{aligned}$$

Camino 2

$$\begin{aligned} \iint_R y(x^3 - 12x) dA &= \int_{-2}^1 \left[\int_0^1 y(x^3 - 12x) dy \right] dx = \int_{-2}^1 \left(x^3 - 12x \right) \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \int_{-2}^1 \frac{1}{2} (x^3 - 12x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 \right]_{-2}^1 = \frac{57}{8} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

$$\int_0^1 \int_0^2 x e^{xy} dy dx = \int_0^1 e^{xy} \Big|_0^2 dx = \int_0^1 (e^{2x} - e^{0x}) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2}$$

¿Y si lo hago al revés?

$$\int_0^2 \int_0^1 x e^{xy} dx dy$$

$$\int_0^1 x e^{xy} dx = \frac{x}{y} e^{xy} \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{1}{y} e^{xy} dx = \frac{e^y}{y} - \frac{1}{y^2} e^{xy} \Big|_{x=0}^1 =$$

$$= \frac{e^y}{y} - \frac{1}{y^2} e^y + \frac{1}{y^2}$$

$u = x \quad du = dx$
 $v = \frac{1}{y} e^{xy} \quad dv = e^{xy} dx$

$$\int_0^2 \left[\frac{e^y}{y} - \frac{e^y}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right] dy = ?$$

Además dividir por cero la función,
mala pinta

Moral: no siempre los dos caminos funcionan. Incluso si ambos funcionan, uno puede ser mucho más sencillo que el otro.

EJEMPLO 4 (Guiones V.1 @)

$$\int_I y \sin(xy) dx dy \quad \text{con } I = [1, 2] \times [0, \pi]$$

El teorema de Fubini me permite calcular la integral por dos caminos

$$(1) \rightarrow \int_1^2 \left(\int_0^\pi y \sin(xy) dy \right) dx = \int_0^\pi \left(\int_1^2 y \sin(xy) dx \right) dy \quad (2)$$

Camino 1

$$\begin{aligned} u &= y \\ v &= -\frac{1}{x} \cos(xy) \end{aligned}$$

$$du = dy$$

$$dv = \sin(xy) dy$$

$$\int_0^\pi y \sin(xy) dy = -\frac{y}{x} \cos(xy) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{x} \cos(xy) dy =$$

$$= -\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}$$

El teorema de Fubini

me permite dos caminos.

Si una integral queda difícil es útil probar el otro camino.

Camino 2

$$\int_1^2 y \sin(xy) dx = -\cos(xy) \Big|_1^2 = \cos(y) - \cos(2y)$$

$$\int_0^\pi (\cos(y) - \cos(2y)) dy = \sin(y) - \frac{1}{2} \sin(2y) \Big|_0^\pi = 0$$

17.1 (Guiones) \rightarrow Ellos

$$\int_I f \quad \text{con} \quad I = [1, 2] \times [0, 1] \quad y \quad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+y^2)}}$$

$$\iint_I \left[\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+y^2)}} dy \right] dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{(x^2+1)(x^2+y^2)}}{(x^2+1)} \Big|_{y=0}^1 dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}} \Big|_{y=0}^1 dx$$

$$= \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{(x^2+1)}{(x^2+1)}} - \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right) dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \\ = 2 - 1 - \left[\sqrt{x^2+1} \right]_{x=1}^2 = 2 - 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{5}$$

17.2 (Guiones) \rightarrow Ellos

$$\int_I f \quad \text{con} \quad I = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi], \quad f(x, y) = x^3 \sin(yx^2)$$

$$\int_0^{1/2} \left[\int_0^\pi x^3 \sin(yx^2) dy \right] dx = \int_0^{1/2} -x \cos(yx^2) \Big|_{y=0}^\pi dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[x \cos(0) - x \cos(\pi x^2) \right] dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi} \Big|_{x=0}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{2\pi} = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$$

Guiones V.1

V.1 Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(\int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) dy \right) dx$

b) $\iiint_I \frac{dx dy dz}{x+y+z}$, donde $I = [1, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$

Resultados: a) 0; b) $22 \ln 2 - \left(\frac{27}{2}\right) \ln 3$

(b)

$$\iiint_I \frac{1}{x+y+z} dx dy dz$$

$$I = [1, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\int_1^2 \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{x+y+z} dy \right] dx = \int_1^2 \int_0^1 \left[\ln(x+y+z) \right]_0^1 dy dx =$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \left[\ln(1+x+y) - \ln(x+y) \right] dy dx =$$

$$= \int_1^2 \left[(1+x+y) \ln(1+x+y) - (1+x+y) - [(x+y) \ln(x+y) - (x+y)] \right] \Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_1^2 \left[(2+x) \ln(2+x) - (2+x) - (1+x) \ln(1+x) + (1+x) - (1+x) \ln(1+x) \right. \\ \left. + (1+x) + x \ln(x) - x \right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[(2+x) \ln(2+x) - 2(1+x) \ln(1+x) + x \ln x \right] dx =$$

$$= \left. \frac{(2+x)^2}{2} \ln(2+x) - \frac{(2+x)^2}{4} - 2 \frac{(1+x)^2}{2} \ln(1+x) + \frac{2(1+x)^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right|_{x=1}^2 =$$

$$= 8 \ln 4 - 4 - 9 \ln 3 + \frac{9}{2} + 2 \ln 2 - 1$$

$$- \frac{9}{2} \ln 3 + \frac{9}{4} + 4 \ln 2 - 2 - \frac{1}{2} \cancel{\ln 1^0} + \frac{1}{4} = 0 + 22 \ln 2 - \frac{27}{2} \ln 3$$

* Para las integrales de tipo $(a+x) \ln(a+x)$ se ha usado la siguiente relación:

$$\int (a+x) \ln(a+x) dx = \frac{(a+x)^2}{2} \ln(a+x) - \int \frac{1}{2} \frac{(a+x)^2}{(a+x)} dx =$$

$$u = \ln(a+x) \quad du = \frac{1}{a+x} dx \quad = \frac{(a+x)^2}{2} \ln(a+x) - \frac{1}{4} (a+x)^2$$

$$v = \frac{(a+x)^2}{2} \quad dv = (a+x) dx$$

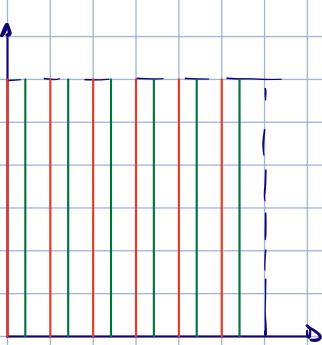
17.3 (Guiones)

17.3 Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida en $I = [0, 1] \times [0, 1]$ mediante $f(x, y) = \begin{cases} y, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-y, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

- Para cada $x \in [0, 1]$, estúdiese si existe $\int_0^1 f(x, y) dy$.
- Para cada $y \in [0, 1]$, estúdiese si existe $\int_0^1 f(x, y) dx$.
- Analizar si existe $\iint_I f$.
- Analizar si existe $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$; ¿hay contradicción entre los resultados c) y d)?

(a)

En "y" función
continua, en "x"
infinitas discontinuidades



Fijo valor de $x \rightarrow x_0$

$$\int_0^1 f(x_0, y) dy \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x_0 \in \mathbb{Q} \rightarrow \int_0^1 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\ \text{Si } x_0 \notin \mathbb{Q} \rightarrow \int_0^1 (1-y) dy = y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } x_0 \in \mathbb{Q} \rightarrow \int_0^1 (1-y) dy = y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\ \text{Si } x_0 \notin \mathbb{Q} \rightarrow \int_0^1 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b)

Fijo valor de $y \rightarrow y_0$

$$\int_0^1 f(x, y_0) dx \rightarrow \text{Infinitas discont.} \rightarrow \text{No integrable.}$$

(c)

$\iint_I f$ cada intervalo de la partición siempre incluye a

las dos claves de la función luego la suma superior y la inferior, no pueden coincidir.

①

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} .$$

El teorema de Fubini es de aplicación siempre que se cumpla alguna de las condiciones siguientes:

a) f continua en I

b) f discontinua en un conjunto de contenido nulo y existe la integral entre paréntesis.

En este caso, el conjunto de pts de discontinuidad tiene contenido, luego aunque se puede calcular la integral,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx \text{ no tiene que coincidir con } \iint_I f$$