1 Diferencial Segunda (en este capítulo, todo es $C^{\text{necesaria}}$ para lo que hacemos)

Si $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, D abierto, es de clase C^2, se define la diferencial segunda como:

$$d^2 f(\vec{x}; \Delta \bar{x}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} f''_{ij}(\bar{x}) \Delta x_i \Delta x_j$$

$\mathbb{R}^2$

$$d^2 f((x,y);(\Delta x, \Delta y)) = f''_{xx}(x,y)\Delta x^2 + f''_{yy}(x,y)\Delta y^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x \Delta y$$

El "2" en las mixtas es consecuencia de Tma SC y C^2.

DEM

Sea $f \in C^2$, de modo que, $df = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$, esto es:

$$df((x,y);(\Delta x, \Delta y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y \overset{*}{=} g(x,y)$$

Ahora, si $g(x,y)$ es C^1 (lo cual es verdad si $f \in C^2$), tenemos que

$$dg((x,y);(\Delta x, \Delta y)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Delta y \overset{*}{=}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y\right]\Delta x +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y\right]\Delta y =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Delta y \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Delta y \Delta x + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 \quad \blacksquare$$

$f \in C^2$

EJEMPLO

Calcular la diferencial segunda de $f(x,y) = \cos(2x) - x^2 e^{5y} + 3y^2$

Camino 1. Diferenciando dos veces. $\left(d^2 f = d(df)\right)$

$$df\big((x,y);(dx,dy)\big) = \left(-2\sin(2x) - 2x e^{5y}\right)dx + \left(-5x^2 e^{5y} + 6y\right)dy$$

df se puede ver como otra función $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow df$. dx y dy son parámetros

$$\frac{\partial}{\partial x} df = \left(-4\cos(2x) - 2e^{5y}\right)dx + \left(-10x e^{5y}\right)dy$$

$$\frac{\partial}{\partial y} df = -10x e^{5y}\,dx - \left(25x^2 e^{5y} - 6\right)dy$$

Ahora $d^2 f = \frac{\partial}{\partial x} df\, dx + \frac{\partial}{\partial y} df\, dy$

$$d^2 f\big((x,y);(dx,dy)\big) = d(df) =$$

$$\left[\left(-4\cos(2x) - 2e^{5y}\right)dx + \left(-10x e^{5y}\right)dy\right]dx +$$

$$\left[-10x e^{5y}\,dx - \left(25x^2 e^{5y} - 6\right)dy\right]dy =$$

$$(-4\cos(2x) - 2e^{5y})dx^2 + (-25x^2e^{5y} + 6)dy^2 + 2(-10xe^{5y})dx\,dy$$

Camino 2. Aplicando la fórmula

$$d^2f((x,y);(\Delta x,\Delta y)) = f''_{xx}(x,y)\Delta x^2 + f''_{yy}(x,y)\Delta y^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y$$

Para casa. Probar que con la fórmula sale lo mismo.

2 Matriz Hessiana

Vemos que es posible ordenar los términos de la fórmula anterior en forma matricial.

$$d^2f((x,y);(dx,dy)) = (dx, dy)\underbrace{\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Hessiana } Hf(x,y)}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = d\bar{x}^T \cdot Hf(x,y)\cdot d\bar{x}$$

Nota. Si f es de clase $C^2 \longrightarrow$ Matriz Hessiana es simétrica

$\left(f''_{x_ix_j} = f''_{x_jx_i}\right)$ Tma SC.

Caso $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, podemos escribir diferencial segunda en forma matricial como

$$d^2f(\bar{x};\Delta\bar{x}) = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_p)\overbrace{\begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_px_1} & \cdots & f''_{x_px_p} \end{bmatrix}}^{\text{Matriz Hessiana } Hf(\bar{x})}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_p \end{pmatrix}$$

3 Diferenciales de orden superior

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^r \xrightarrow{\text{dif}} df(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(\bar{x})\, dx_i$$

$$\Big\downarrow d$$

Diferencial segunda $\quad d^2 f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} df'_j(\bar{x})\, dx_j =$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} f''_{ij}(\bar{x})\, dx_i \right) dx_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

$$\Big\downarrow d$$

Diferencial tercera $\quad d^3 f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} d^2 f'_k(\bar{x})\, dx_k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f'''_{ijk}\, dx_i\, dx_j \right) dx_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f'''_{ijk}\, dx_i\, dx_j\, dx_k$$

$$\Big\downarrow d \;\vdots\; \Big\downarrow d$$

Diferencial r-ésima $\quad d^r f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_r = 1}^{n} f^{r)}_{i_1, i_2, \dots, i_r}\, dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}$

4 Regla simbólica

Tres formas de calcular $d^r f$

① Usando la fórmula

$$d^r f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_r = 1}^{n} f^{r)}_{i_1, i_2, \dots, i_r}\, dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}$$

② Diferenciar r veces: $d^r f = \underbrace{d(d(\dots(df)))}_{r \text{ veces}}$

Ejemplo / comentario $d^2 x_i = 0$

③ Regla simbólica: $df = Df$, $D = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$

"Multiplicando D por f" ... $Df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

Entonces: $d^r f = D^r f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^r f$

Ejemplo:

$\mathbb{R}^2$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial}{\partial x \partial y} dx dy\right) f =$$

$$= f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + 2 f''_{xy} dx dy$$

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 f = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \right.$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$$\left. + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3 \right) f$$

5 Derivadas sucesivas respecto de vectores.

Recordar que ya vimos una forma de hacer esto en la clase anterior.

$$f \in C^1: \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\bar{x}) u_i = \nabla f \cdot \bar{u}_i = df(\bar{x}; \bar{u})$$

$f \in C^2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j} u_i v_j \longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j} u_i u_j =$

$$= d^2 f(\bar{x}; \bar{u})$$

$f \in C^3 \ldots$ $\qquad \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial \bar{u}^3} = d^3 f(\bar{x}; \bar{u})$

→ Fijaos que esta expresión se puede escribir de forma matricial, similar a la diferencial segunda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = [u_1 \;\; u_2] \underbrace{\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}}_{Hf} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \longrightarrow \text{Fácil de recordar.}$$

$$= u^T Hf\, v$$

6 Funciones vectoriales

Como en anteriores occasiones, se aplica la definición componente a componente:

$\bar{f}: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

$$\bar{f}(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} y_1(\bar{x}_0) \\ \vdots \\ y_q(\bar{x}_0) \end{bmatrix} \qquad d^2 \bar{f}(\bar{x}_0; \Delta\bar{x}) = \begin{bmatrix} \Delta\bar{x}^T H_{y_1} \Delta\bar{x} \\ \Delta\bar{x}^T H_{y_2} \Delta\bar{x} \\ \vdots \\ \Delta\bar{x}^T H_{y_q} \Delta\bar{x} \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS

1 Sea $f(x,y) = e^{y-x} + \frac{x^2+1}{y+1}$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2}(1,1)$ según $\bar{u} = (3,2)$

Para casa, repetir usando nueva fórmula

2 Sea $f(x,y) = 2y\ln x + x^2y^2 + xe^y$, calcular $d^2f((1,0);(dx,dy))$ y $d^3f((1,0);(dx,dy))$. $f \in C^\infty$

$$d^2f((1,0);(dx,dy)) = f''_{xx}(1,0)\,dx^2 + f''_{yy}(1,0)\,dy^2 + f''_{xy}(1,0)\,dx\,dy$$

$$d^3f((1,0);(dx,dy)) = f'''_{xxx}(1,0)\,dx^3 + 3f'''_{xxy}(1,0)\,dx^2dy + 3f'''_{xyy}(1,0)\,dx\,dy^2 + f'''_{yyy}(1,0)\,dy^3$$

Para casa: calcular derivadas y evaluar en $(1,0)$

$$d^2f((1,0);(dx,dy)) = 6\,dx\,dy + 3\,dy^2$$

$$d^3f((1,0);(dx,dy)) = -6\,dx^2dy + 15\,dx\,dy^2 + dy^3$$

III.5
Guiones
2

III.5 Sea $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la función definida mediante:

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\left(x^2+y+xz,\ e^{y-z},\ \operatorname{sen}(x-y)\right)$$

a) Calcular la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ en $(0,0,0)$.

b) Determinar los puntos en los que el jacobiano de $\boldsymbol{f}$ es nulo.

c) Analizar si existe algún vector $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{v}}(0,0,0)=\boldsymbol{0}$. Determinar los vectores $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3$ tales que $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}(0,0,0)=\boldsymbol{u}$.

d) Calcular $\mathrm{d}^2\boldsymbol{f}(0,0,0)$.

e) Sean $\boldsymbol{u}=(1,1,1)$ y $\boldsymbol{v}=(-1,0,1)$; calcular $\boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{uv}}(0,0,0)$ y $\boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{vu}}(0,0,0)$

a) Matriz jacobiana de $\bar{f}$ en $(0,0,0)$

$$\bar{f}=\begin{bmatrix} f_1(x,y,z)\\ f_2(x,y,z)\\ f_3(x,y,z)\end{bmatrix}$$

$$J\bar{f}\Big|_0=\begin{bmatrix}\nabla f_1|_0\\ \nabla f_2|_0\\ \nabla f_3|_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z}\\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z}\\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z}\end{bmatrix}=$$

$$=\left.\begin{bmatrix} 2x+z & 1 & x\\ 0 & e^{y-z} & -e^{y-z}\\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) & 0\end{bmatrix}\right|_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

b) Jacobiano $\equiv \det(J\bar{f})$

$\det(J\bar{f})$ es cero si hay alguna fila/columna que es cero

$\cos(x-y)$ es 0 si: $x-y=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\det(J\bar{f})$ es cero si: una fila/columna es comb. lineal de las demás. Sumo las tres columnas (única forma de anular filas 2 y 3)

$$\begin{bmatrix} 3x+z+1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{Si } 3x+z+1=0 \longrightarrow \det(J\bar{f})=0$$

Otra opción es calcular el det. y resolver ecuación no lineal.

ⓒ $\text{¿} \bar{f}'_{v}(0,0,0) = 0?$

$$\bar{f}'_{v}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No se puede porque la matriz no es singular en dicho pto.

$\text{¿} \bar{f}'_{\bar{u}}(0,0,0) = \bar{u}?$

$$\bar{f}'_{\bar{u}}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Autovector para autovalor $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

ⓓ Calcular $d^2\bar{f}(0,0,0)$

$$d^2\bar{f}(\bar{0}; \Delta\bar{x}, \Delta\bar{x}) = \begin{bmatrix} d^2 f_1(\bar{0}; \Delta\bar{x}, \Delta\bar{x}) \\ d^2 f_2(\bar{0}; \Delta\bar{x}, \Delta\bar{x}) \\ d^2 f_3(\bar{0}; \Delta\bar{x}, \Delta\bar{x}) \end{bmatrix} \qquad d^2 f_i(\bar{0}; \Delta\bar{x}, \Delta\bar{x}) = \begin{bmatrix} - \Delta\bar{x} - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & Hf_i & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \Delta\bar{x} \\ | \end{bmatrix}$$

$Jf: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^9$

$J\bar{f}(x,y,z)$

La matriz Hessianna tiene todas las derivadas (respecto de x,y,z) de todas las componentes (9). Así que tiene $9 \times 3 = 27$ entradas

$$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} \boxed{2x+z \quad 1 \quad x} \\ \boxed{0 \quad e^{y-z} \quad -e^{y-z}} \\ \boxed{\cos(x-y) \quad -\cos(x-y) \quad 0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \end{matrix}$$

$$Hf_1 = \begin{bmatrix} f''_{1xx} & f''_{1xy} & f''_{1xz} \\ f''_{1yx} & f''_{1yy} & f''_{1yz} \\ f''_{1zx} & f''_{1zy} & f''_{1zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Hf_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{y-z} & -e^{y-z} \\ 0 & -e^{y-z} & e^{y-z} \end{bmatrix} \Bigg|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Hf_3 = \begin{bmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) & 0 \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d^2 f_1 = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = 2\Delta^2 x + 2\Delta x \Delta z$$

$$d^2 f_2 = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \Delta^2 y + \Delta^2 z - 2\Delta y \Delta z$$

$$d^2 f_3 = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = 0$$

$$d^2 \bar{f} = \begin{bmatrix} 2\Delta^2 x + 2\Delta x \Delta z \\ \Delta^2 y + \Delta^2 z - 2\Delta y \Delta z \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e) Sean $\bar{u} = (1, 1, 1)$, $\bar{v} = (-1, 0, 1)$. Calcular

$$\bar{f}''_{\bar{u}\bar{v}}(0,0,0) = d^2 \bar{f}((0,0,0); \bar{u}, \bar{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mirar siguiente página.

$$d^2 f_1((0,0,0),\bar{u},\bar{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$d^2 f_2((0,0,0),\bar{u},\bar{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$d^2 f_3((0,0,0),\bar{u},\bar{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$