22. Superficies. Integrales de superficie II

B. Ejemplos de superficies

El objetivo de este punto es aprender a reconocer la representación implícita de algunos ejemplos de superficie así como sus representaciones paramétricas más comunes.

1 Cuádricas

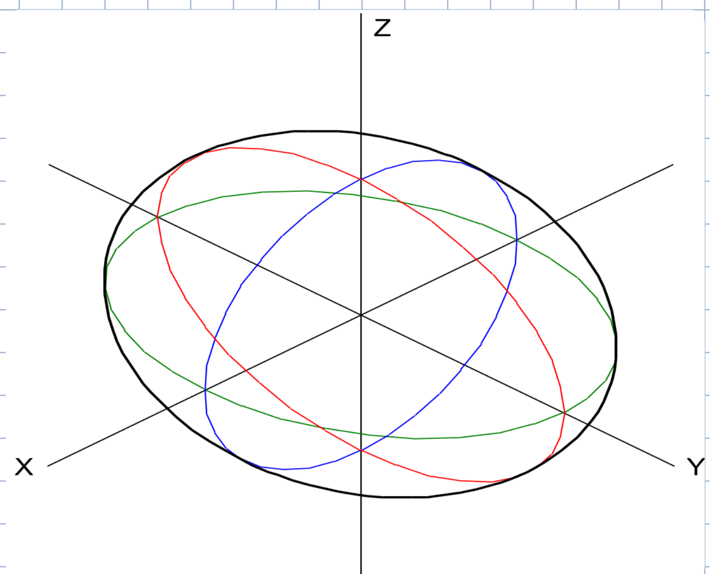
a Cuádricas ordinarias

a.1 Con centro

→ Elipsoide

Representación implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultado elipses:

Corte con $x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Corte con $y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

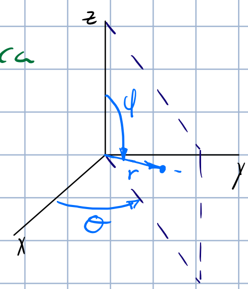
Corte con $z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes del elipsoide

Ejemplo de representación paramétrica:

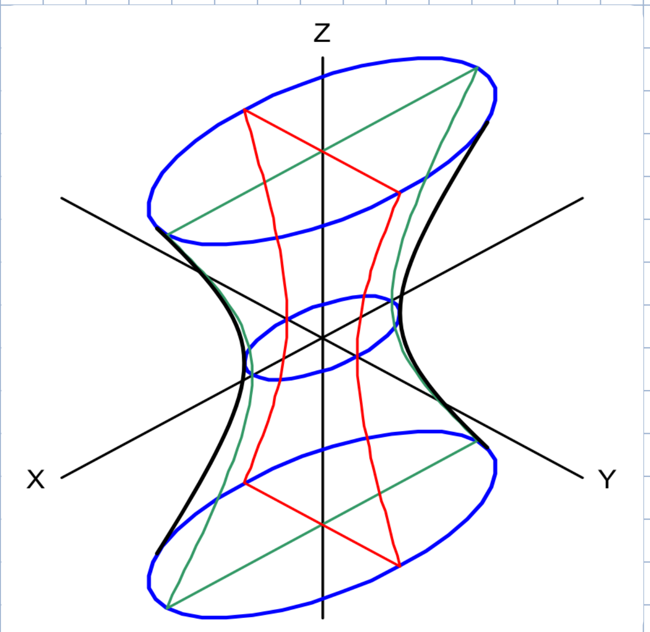
$$\bar{x} = (a\cos u \sin v,\ b \sin u \sin v,\ c\cos v),\quad u\in[0,2\pi],\ v\in[0,\pi]$$

Nota: esta representación paramétrica tiene un paralelismo claro con las coordenadas esféricas.



$x = r\cos\theta \sin\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\varphi$

→ Hiperboloide de una hoja



Representación implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultado:

Corte con $x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Hipérbolas

Corte con $y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Hipérbolas

Corte con $z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Elipses

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

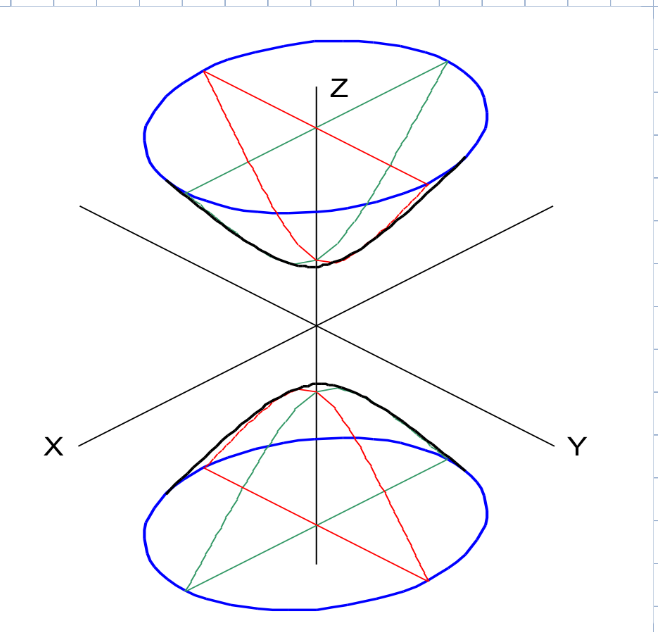
$$\overline{x} = (a\cos u \cosh v,\ b\sin u \cosh v,\ c\sinh v),\quad u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbb{R}$$

El signo $\ominus$ delante de la "z" hace que las funciones hiperbólicas sean útiles por la relación

$$\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$$

Comprobar que la representación paramétrica cumple la ecuación implícita.

→ Hiperboloide de dos hojas



Representación implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultado:

Corte con $x = 0 \rightarrow \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ Hipérbolas

Corte con $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ Hipérbolas

Corte con $z = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ Sin solución

Corte con $z = c_1 \rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 + \dfrac{c_1^2}{c^2}$ Elipses $\left(\text{Si } \dfrac{c_1^2}{c^2} > 1\right)$

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

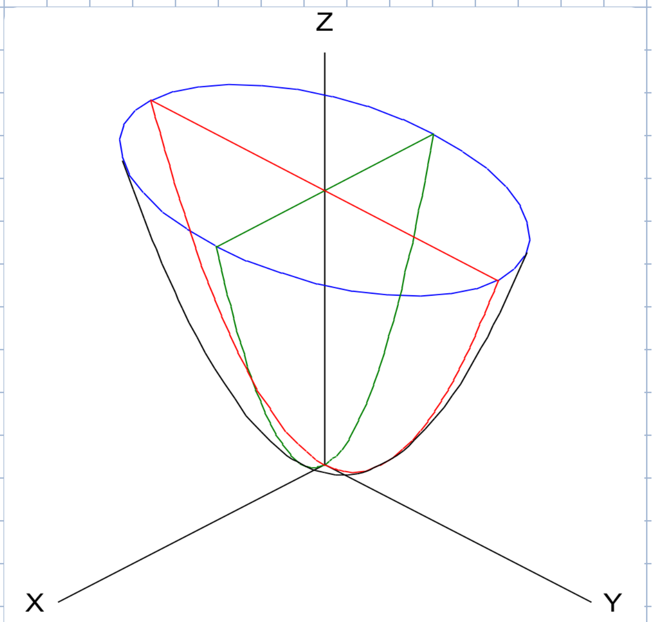
$$\overline{x} = (a \cos u \sinh v, b \sin u \sinh v, \pm c \cosh v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

↳ necesitamos el ± para representar la hoja superior y la inferior del hiperboloide

Comprobar que la representación paramétrica cumple la ecuación implícita.

a.2 Paraboloides

→ Elíptico:



Representación implícita:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultado:

Corte con $x=0 \rightarrow z = \frac{y^2}{b^2} \longrightarrow$ Parábolas

Corte con $y=0 \rightarrow z = \frac{x^2}{a^2} \longrightarrow$ Parábolas

Corte con $z=0 \rightarrow 0=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \rightarrow x=0,\ y=0 \rightarrow (0,0)$

Corte con $z=C \rightarrow C=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Elipses
$(C>0)$

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x}=\left(u, v, \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad \text{(parametrización explícita)}$$

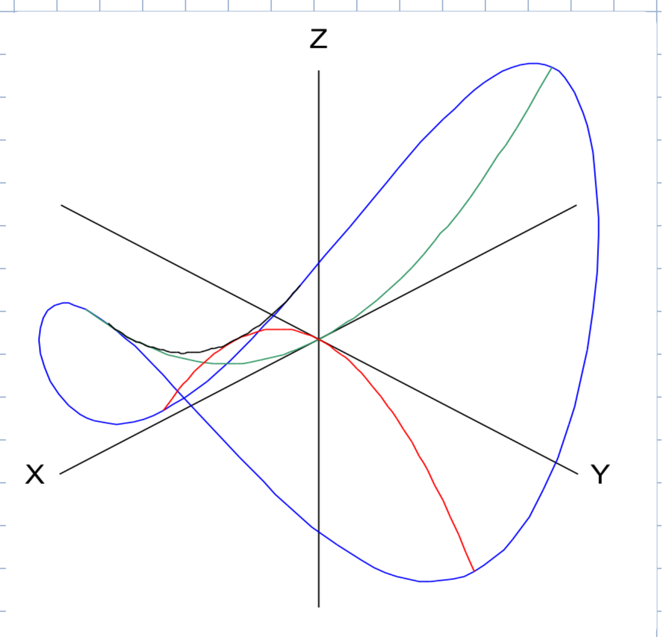
Otra posible parametrización es:

$$\bar{x}=\left(a u \cos v, b u \sin v, u^2\right) \quad v \in [0, 2\pi], \ u>0$$

$\rightarrow$ Hiperbólico:

Representación implícita:

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$



Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultado:

Corte con $x=0 \rightarrow z=\dfrac{-y^2}{b^2} \longrightarrow$ Parábolas $\cap$

Corte con $y=0 \rightarrow z=\dfrac{x^2}{a^2} \longrightarrow$ Parábolas $\cup$

Corte con $z=0 \to 0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \to \frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b} \to$ rectas

Corte con $z=C \to C = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \to$ Hipérbolas

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x} = \left(\frac{a}{2}(u+v), \frac{b}{2}(u-v), uv \right) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Otra posible parametrización es:

$$\bar{x} = (a u \cosh v, b u \sinh v, u^2) \quad v \in \mathbb{R} \quad , \quad u > 0$$

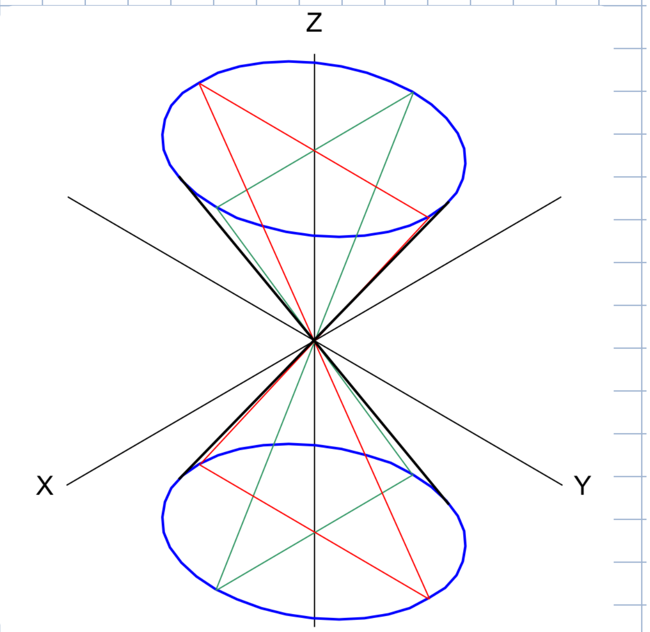
b Cuádricas degeneradas

$\to$ Conos

Representación implícita:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultado:



Corte con $x=0 \to z = \pm \frac{y}{b} \to$ Rectas

Corte con $y=0 \rightarrow z=\pm\frac{x}{a} \longrightarrow$ Rectas

Corte con $z=0 \rightarrow 0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Pto $(0,0)$

Corte con $z=C \rightarrow C^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Elipses

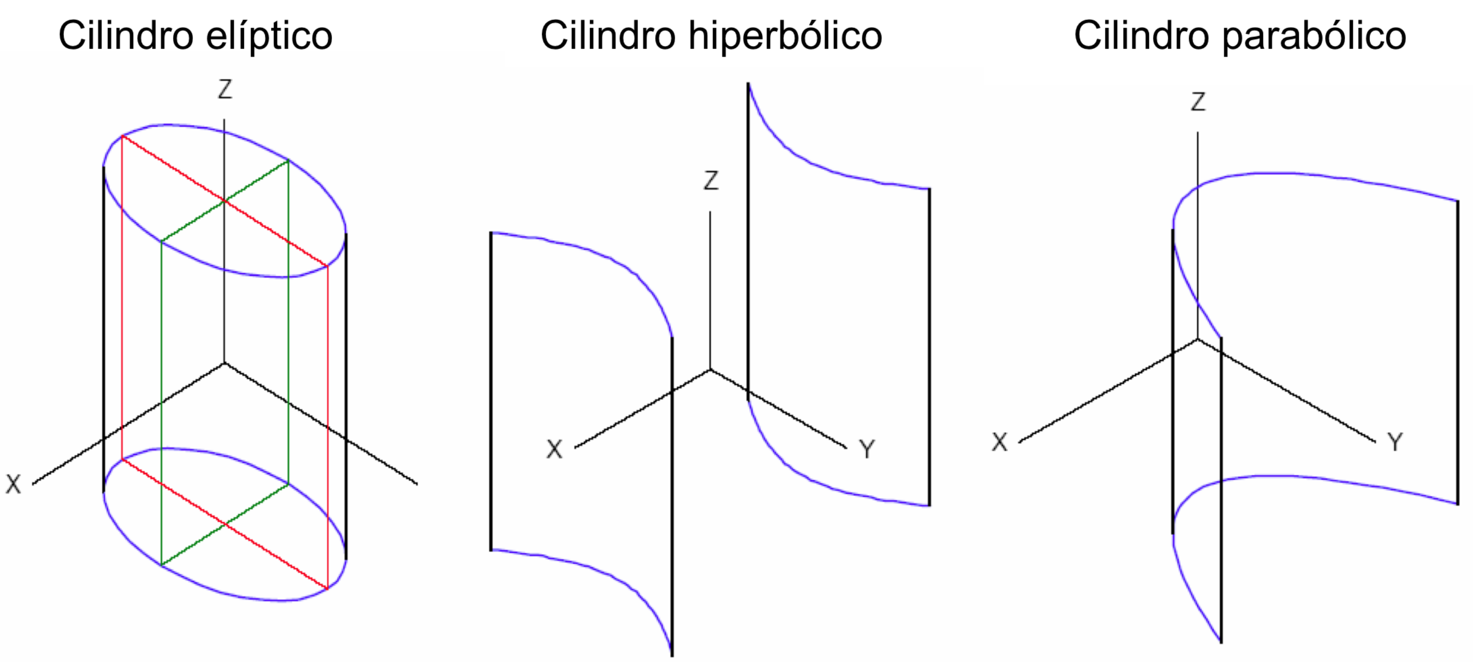
Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

$\bar{x}=(avcosu,\ bvsinu,\ \pm v),\quad u\in[0,2\pi],\ v\in\mathbb{R}$

$\longrightarrow$ Cilindros

Tomamos una recta paralela al eje z y la desplazamos siguiendo una cónica.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x^2=2py$$

Cilindro elíptico:

$$\bar{x} = (a\cos u, b\sin u, v) \qquad u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbb{R}$$

Cilindro hiperbólico:

$$\bar{x} = (\pm a\cosh u, b\sinh u, v) \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

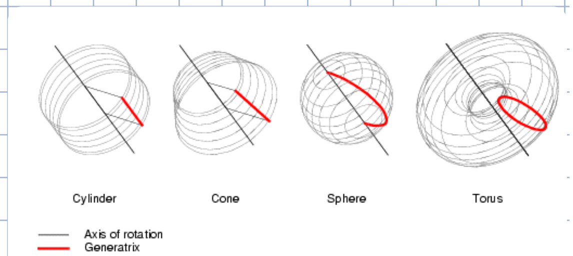
Cilindro parabólico:

$$\bar{x} = \left(u, \frac{u^2}{2p}, v\right) \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

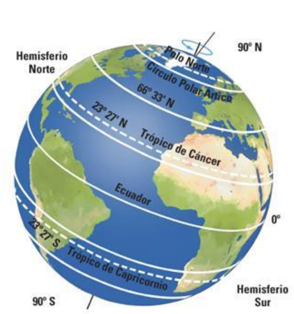
2 Superficies de revolución

Generadas por una curva C (generatriz) al girar alrededor de una recta R (eje de revolución).

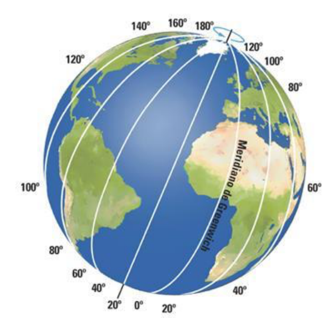
Se llaman paralelos a los cortes de la superficie con planos perpendiculares al eje de revolución.



Se llaman meridianos a los cortes de la superficie con planos que contienen al eje de revolución.



Paralelos



Meridianos

Veamos el caso particular de una superficie generada al girar una curva contenida en el plano $y=0$ alrededor del eje z.

Con estas restricciones, la curva se podrá representar como:

$$\bar{r}(t) = (x(t), 0, z(t))$$

y la superficie será:

$$S(t,\theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t))$$

Construimos la superficie a base de circunferencias colocadas a altura $z=z(t)$ y de radio $r=x(t)$.

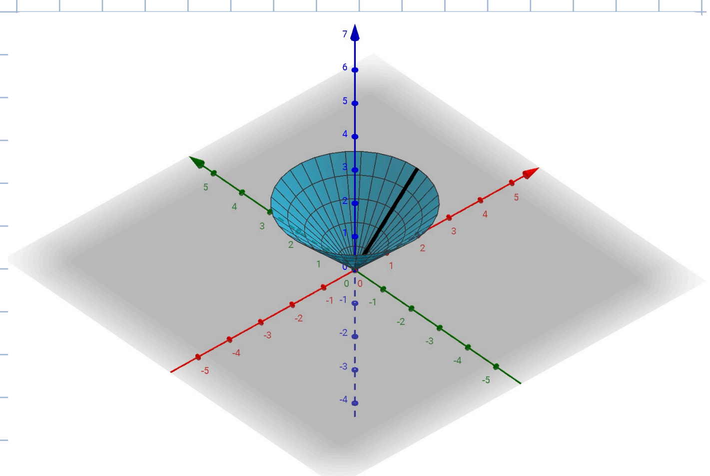
Ejemplos:

Cono

$$\bar{r}(t) = (t, 0, t)$$

(recta $z=x$)

$$S(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, t)$$

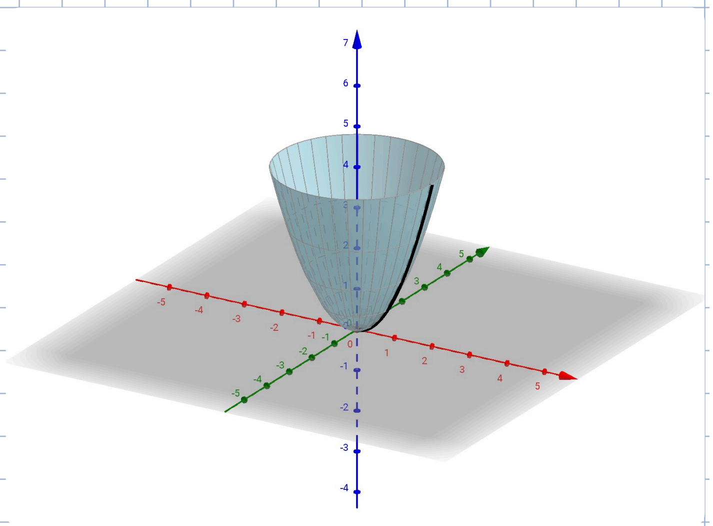


Paraboloide

$$\bar{r}(t) = (t,\ 0,\ t^2)$$

(recta $z = x$)

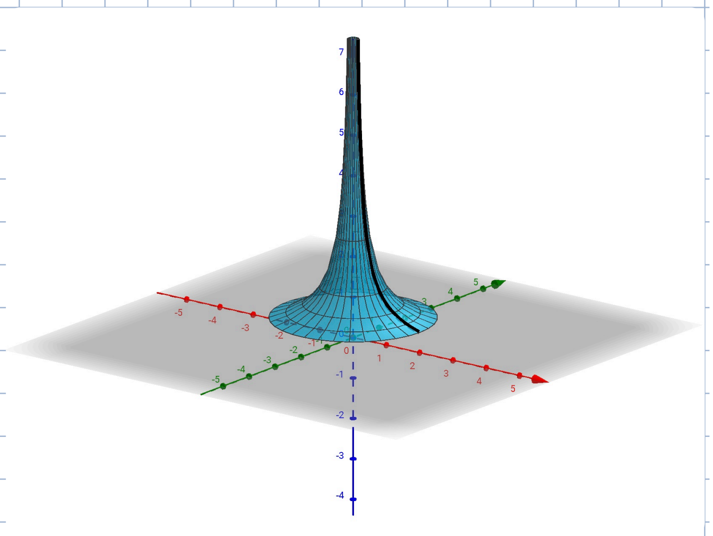
$$S(t,\theta) = (t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ t^2)$$



Cuerno de Gabriel

$$\bar{r}(t) = (t,\ 0,\ 1/t)$$

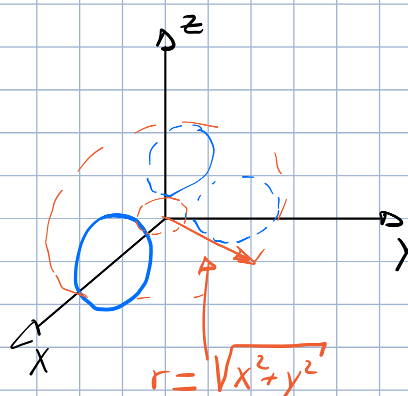
$$S(t,\theta) = (t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1/t)$$



Si conocemos la curva en forma implícita, esto es $C:\ F(x,z) = 0,\ y = 0$, la superficie queda:

$$S:\ F\left(\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0.$$

A $z = cte$ obtengo circunferencias de diversos radios. Para $y = 0$ recupero la curva generatriz.

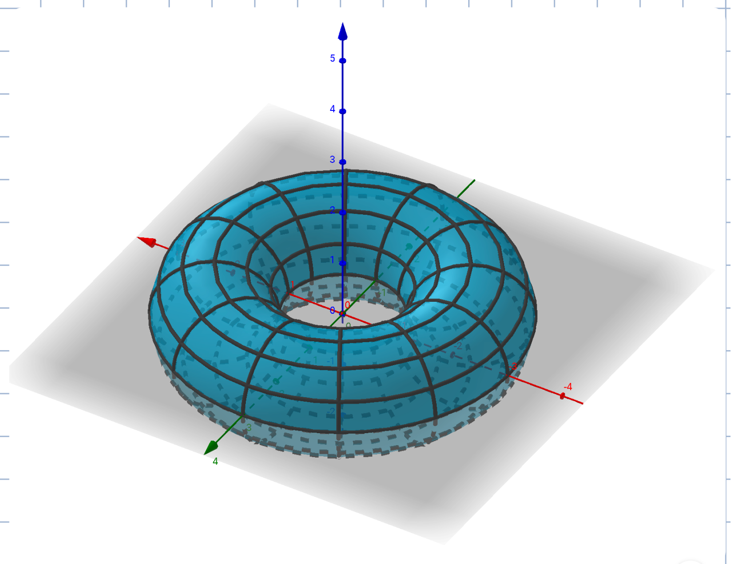


EJEMPLO

$$F(x,z)=0 \longrightarrow (x-2)^2+z^2=1$$

$x \to \sqrt{x^2+y^2}$

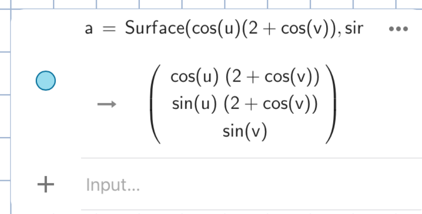
$$S = \left(\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2\right)=1 \qquad \text{TORO}$$



Este mismo toro, puedo generarlo como antes, considerando:

$$\bar{r}(t)=(2+\cos t,\ 0,\ \sin t)$$

$$S(t,\theta)=\left([2+\cos t]\cos\theta,\ [2+\cos t]\sin\theta,\ \sin t\right)$$



3 Superficies de traslación

Generadas cuando una curva C_1 se traslada de modo que uno de sus puntos, P_0, recorre otra curva C_2. Si:

$$C_1:\ \bar{x}=(x_1(u),\ x_2(u),\ x_3(u))$$

$$C_2:\ \bar{y}=(y_1(u),\ y_2(u),\ y_3(u))$$

$$P_0=\bar{x}_0$$

Nota: P_0 pertenece a ambas curvas C_1 y C_2

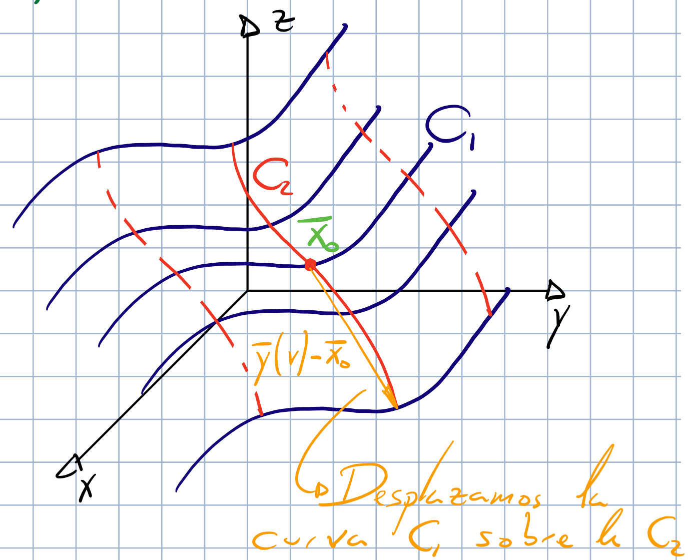
Entonces

$$S: \; S(u,v) = \bar{x}(u) + \left(\bar{y}(v) - \bar{x}_0\right)$$

Si $v_0 \,/\, \bar{y}(v_0) - \bar{x}_0 = 0 \longrightarrow S(u,v_0) = \bar{x}(u)$

recupero la curva

Para otros valores distintos de v lo que implica es un desplazamiento en el espacio de $\bar{x}(u)$.



Nótese que los papeles de C_1 y C_2 son intercambiables.

Por construcción, las superficies de traslación cumplen que:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = 0$$

__Dem__:

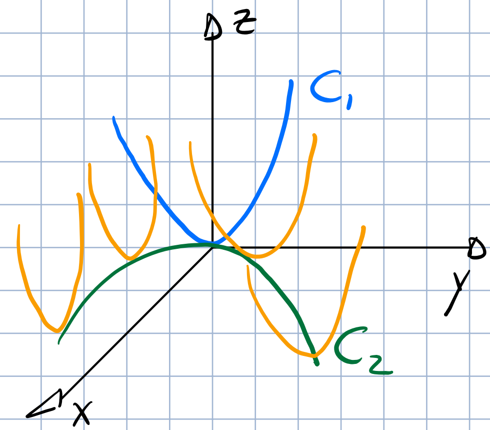
$$S(u,v) = \bar{x}(u) + \left(\bar{y}(v) - \bar{x}_0\right)$$

$$\frac{\partial S(u,v)}{\partial u} = \bar{x}'(u) \longrightarrow \frac{\partial^2 S(u,v)}{\partial u \partial v} = 0$$

EJEMPLO. Paraboloide hiperbólico

El paraboloide hiperbólico se construye trasladando una parábola sobre otra colocada perpendicularmente.

Por ejemplo:

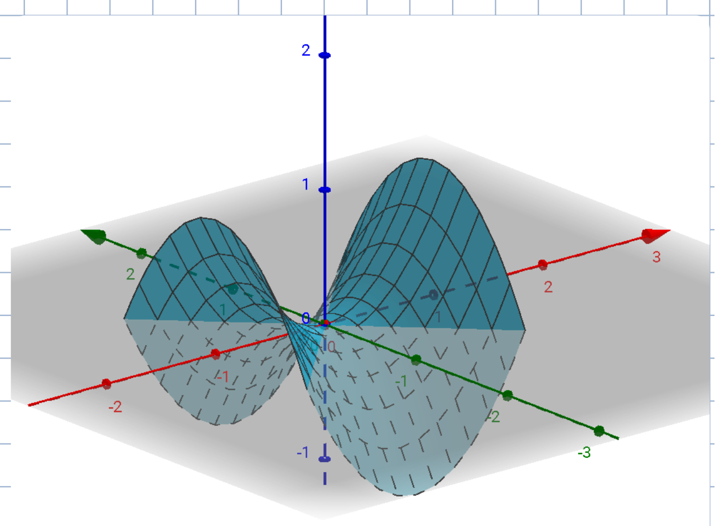


$\rightarrow C_1: \ \bar{x}(t) = (t, 0, t^2)$

$\rightarrow C_2: \ \bar{y}(t) = (0, t, -t^2)$

Puedo trasladar C_1 sobre C_2 para obtener la superficie. En este caso, $P_0 = (0,0,0)$.

$$S(u,v) = \bar{x}(u) + \bar{y}(v) - P_0 =$$
$$= (u, 0, u^2) + (0, v, -v^2) =$$
$$= (u, v, u^2 - v^2)$$



4 Superficies regladas

Son las formadas por rectas.

S es una superficie reglada si admite una parametrización del tipo $S(u,v) = \bar{y}(u) + v\,\bar{\imath}(u)$ donde $\bar{y}(u)$ es una curva C_1 (se llama curva directriz) e $\bar{\imath}(u)$ es un vector (llamado vector director).

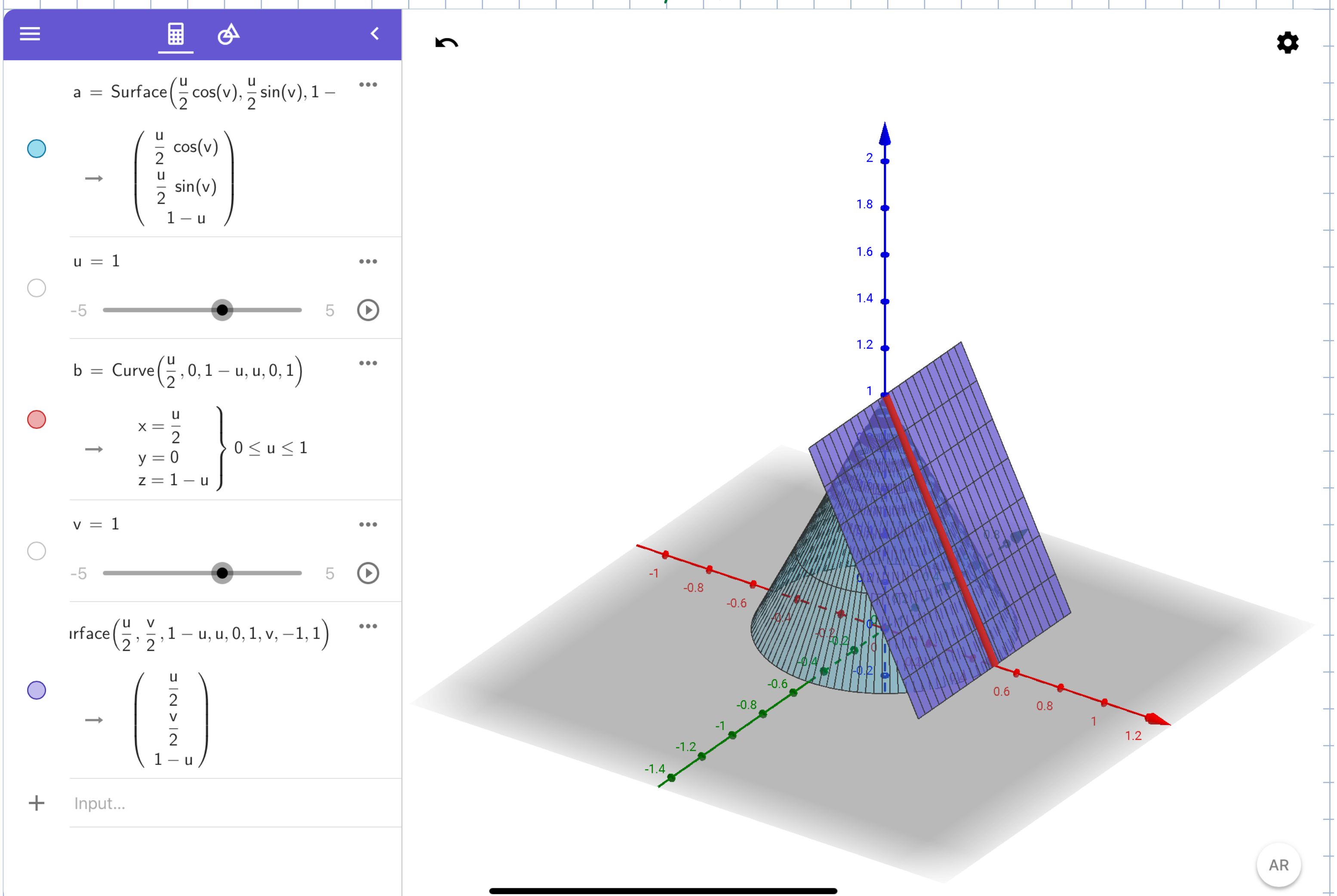
Las rectas que forman S se apoyan sobre C, y tienen la dirección del vector director.

Clasificación de superficies regladas.

→ Desarrollables: el plano tangente no cambia al moverme sobre una de las rectas que forma la superficie.

Ejemplos: cilindros y conos.

"Puede construirse enrollando un papel"

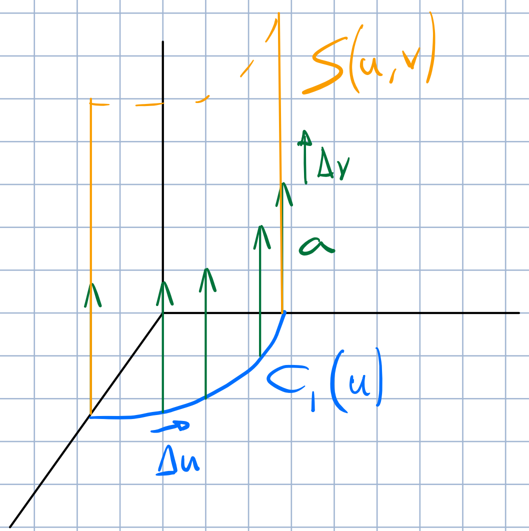


El plano tangente, es tangente a la superficie en todos los puntos de la recta.

Ejemplos:

* **Cilindros**: dado un vector $\bar{a} \neq \bar{0}$ y una curva $C_1: \bar{y} = \bar{y}(u)$ se llama cilindro de directriz C_1 y sus generatrices son rectas en la dirección de $\bar{a}$ a las superficies que engendran las rectas que tienen la dirección de $\bar{a}$ y cortan a C_1

$$S(u,v) = \bar{y}(u) + v\bar{a}$$



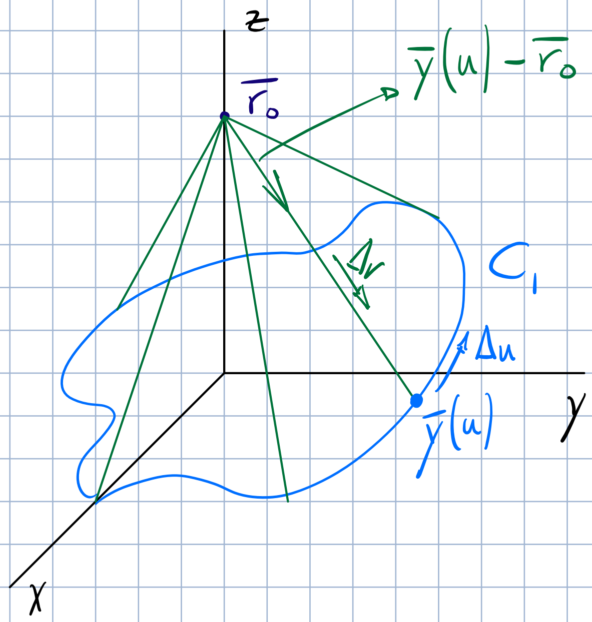
Veamos que la normal a la superficie $\bar{n} \propto S'_u \times S'_v$ no depende de v (y por tanto no depende de la posición en la que estemos sobre una recta) → Plano tang. no cambia

$$\left.\begin{array}{l} S'_u = \bar{y}'(u) \\ S'_v = \bar{a} \end{array}\right\} \bar{n} \propto \bar{y}'(u) \times \bar{a}$$

$\propto \equiv$ proporcional a

* **Conos**: dado un punto $\bar{r}_0$ y una curva $C_1: \bar{y} = \bar{y}(u)$, se llama cono de vértice $\bar{r}_0$ y directriz C_1 a la superficie que engendran las rectas que pasan por $\bar{r}_0$ y cortan a C_1

$$S(u,v) = \bar{r}_0 + v\left(\bar{y}(u) - \bar{r}_0\right)$$



Veamos que la normal a la superficie $\bar{n} \propto S'_u \times S'_v$ no depende de v (y por tanto no depende de la posición en la que estemos sobre una recta) → Plano tang. no cambia

*

* $S'_u = v\,\bar{y}'(u)$, $S'_v = \bar{y}(u) - \bar{r}_0$

De modo que:

$$S'_u \times S'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v\,y'_1(u) & v\,y'_2(u) & v\,y'_3(u) \\ y_1(u) - r_{01} & y_2(u) - r_{02} & y_3(u) - r_{03} \end{vmatrix} = v \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ y'_1(u) & y'_2(u) & y'_3(u) \\ y_1(u) - r_{01} & y_2(u) - r_{02} & y_3(u) - r_{03} \end{vmatrix}$$

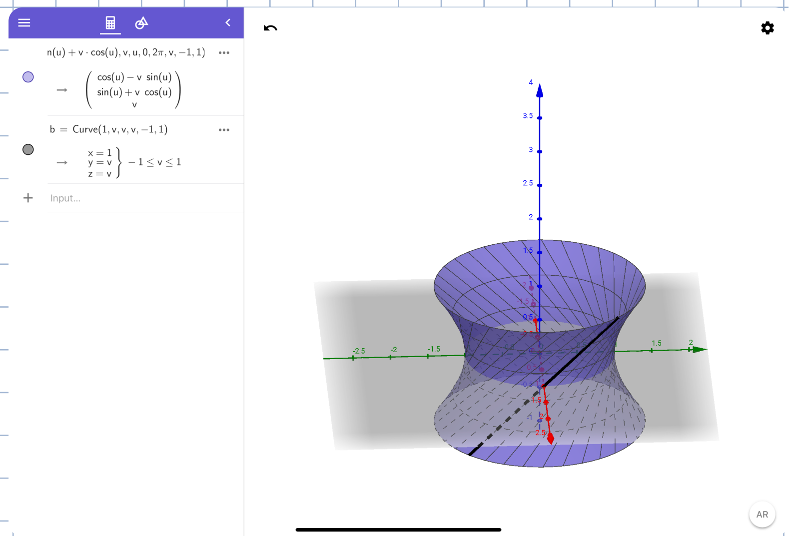
v no tiene efecto sobre la dirección del vector normal. En $v=0$ la normal no está bien definida, como era de esperar (vértice del cono).

→ Alabeadas: si no son desarrollables. Es decir, en estos casos, el plano tangente cambia al moverme sobre la recta

Ejemplos:

*Hiperboloide hiperbólico:

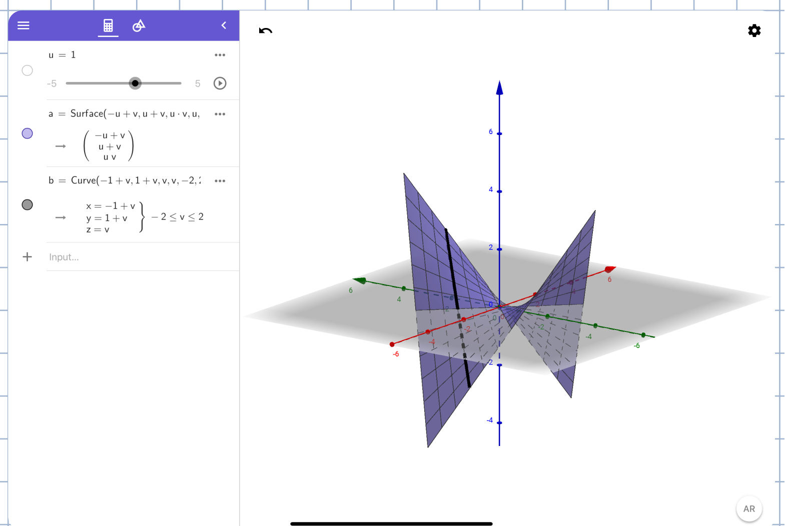
$$x^2+y^2-z^2=1$$



$$S(u,v)=\begin{bmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 1\end{bmatrix}$$

*Paraboloide hiperbólico:

$$x^2-y^2+z=0$$



$$S(u,v)=\begin{bmatrix}-u\\ u\\ 0\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\ 1\\ u\end{bmatrix}$$