22. SUPERFICIES. INTEGRALES DE SUPERFICIE I

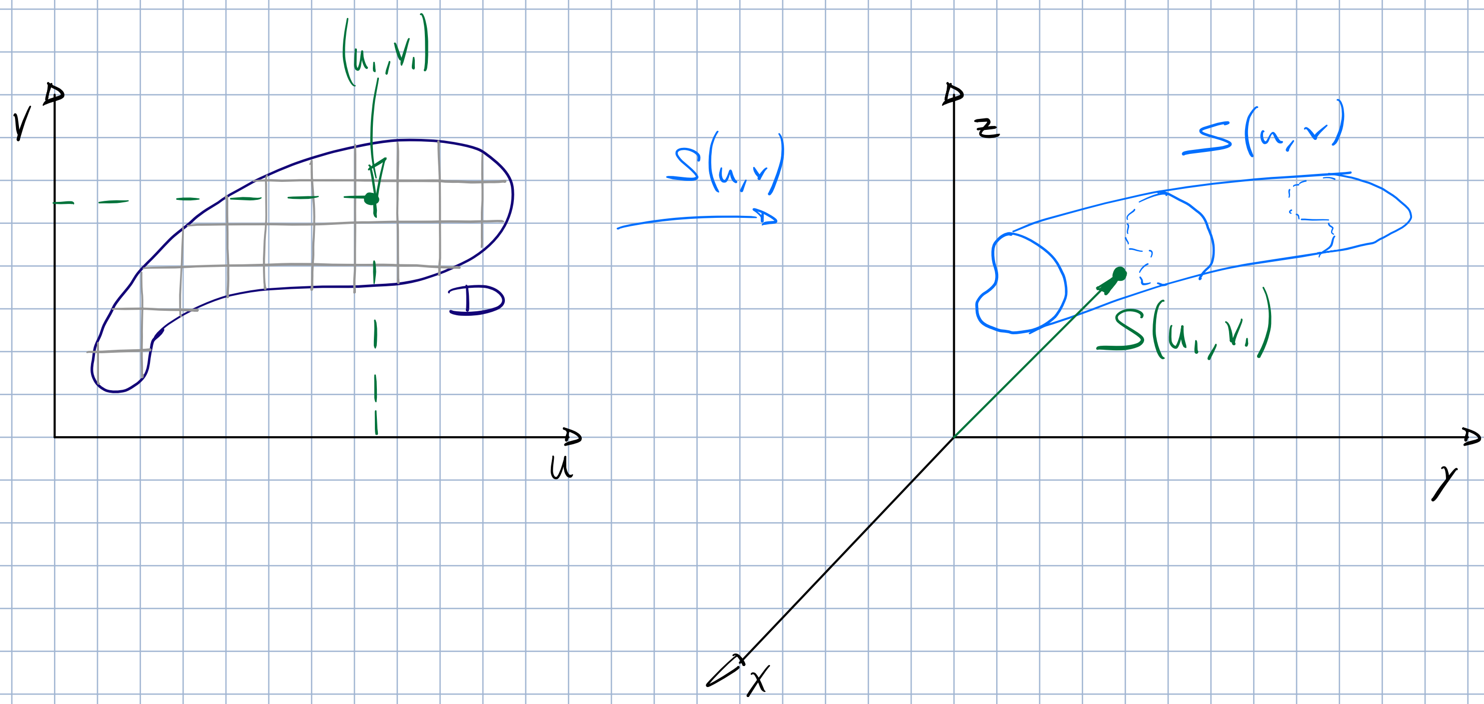
A. Superficies

Son conjuntos de $\mathbb{R}^3$ que genera un punto al moverse con dos grados de libertad (típicamente llamadas u, v)

1 Expresión paramétrica

Se define $S \subset \mathbb{R}^3$ como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ definidos a partir de la función continua

$$S: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longrightarrow S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$



2 Expresión explícita

Cuando la superficie S puede expresarse como $\begin{cases} z = g(x,y) \\ y = g(x,z) \\ x = g(y,z) \end{cases}$

Puede verse como un caso particular de expresión paramétrica donde dos de las variables actúan como parámetros.

Ejemplo: $S(u,v) = (u, v, g(u,v))$

3 Expresión implícita

Cuando expresamos la superficie como

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, F(x,y,z) = 0 \}$$

Ejemplo: esfera $\longrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

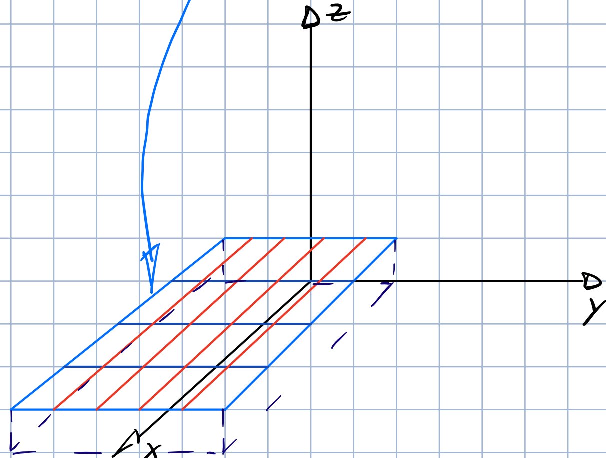
EJEMPLOS (se recomienda hacer representación gráfica usando herramientas como Geogebra)

① $S : D = [0,5] \times [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \longrightarrow S(u,v) = (u, v, 1)$$

Esto es:

$x \in [0,5]$ | Plano de tamaño
$y \in [-2,2]$ | finito paralelo
$z = 1$ | a xy



(2) $S: D = [0,1] \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \longrightarrow S(u,v) = (1+u,\ u-v,\ 2-u+3v)$$

Como todas las relaciones son lineales, esto define un plano.

Podemos reescribir esta relación de la siguiente forma:

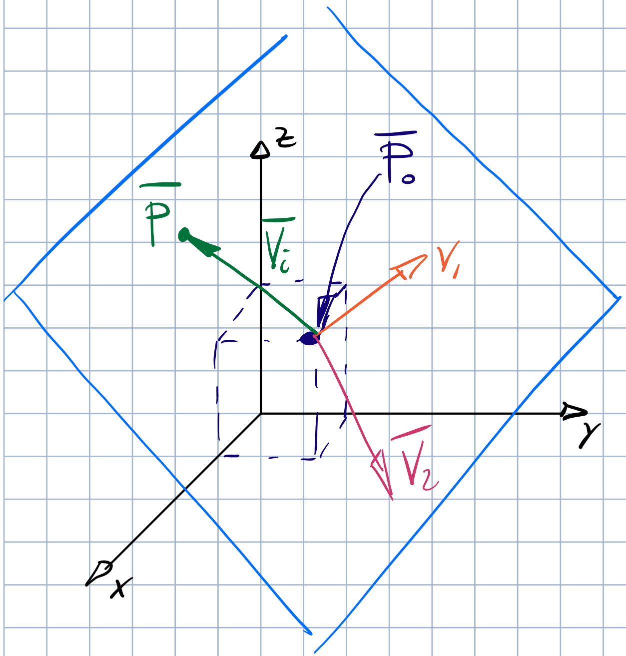
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{Punto, } \overline{p_0}} + u \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{Vector 1, } \overline{v_1}} + v \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{Vector 2, } \overline{v_2}} = \overline{p_0} + u\overline{v_1} + v\overline{v_2}$$

Una opción para obtener una representación implícita a partir de esta es igualar a 0 el siguiente determinante:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \overline{v_i} \quad \overline{v_1} \quad \overline{v_2} \end{array} = 0 \longrightarrow \text{Esto es } F(x,y,z) = 0$$

$\rightarrow$ El exigir que este determinante sea cero es equivalente a pedir que $\overline{v_i}$ sea coplanario con $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$.

Es decir, los pts $\overline{p} = (x,y,z)$ que forman la superficie son aquellos tales que el vector $\overline{v_i} = (\overline{p} - \overline{p_0})$ es coplanario con $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$



$\bar{V}_i = (\bar{P} - \bar{P}_0)$

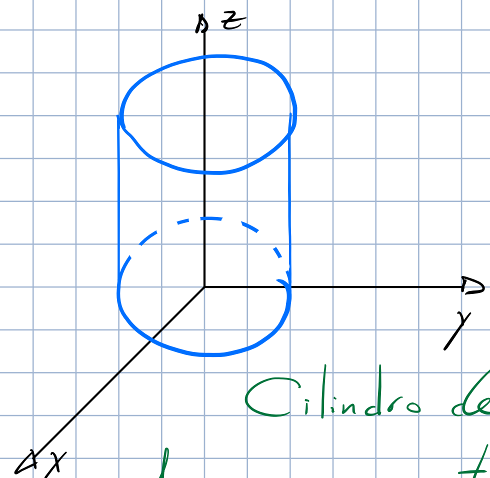
(3) $S : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longrightarrow S(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

Esto es lo mismo que decir

$x^2 + y^2 = 1$

$z \geq 0$



Cilindro de radio 1 y eje z centrado en el eje z

(4) $S : [0, 2\pi] \times [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\theta, z) \longrightarrow S(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$

Radio variable con altura

$x^2 + y^2 = z^2 \longrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow$ cono

⑤ $S: [0, 2\pi] \times [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\theta, z) \longrightarrow S(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z^2)$$

Radio variable con altura

$x^2 + y^2 = z \longrightarrow$ paraboloide elíptico

El paraboloide genera circunferencias cuyos radios varían cuadráticamente con la altura, mientras que el cono genera circunferencias que varían linealmente con la altura.

⑥ Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

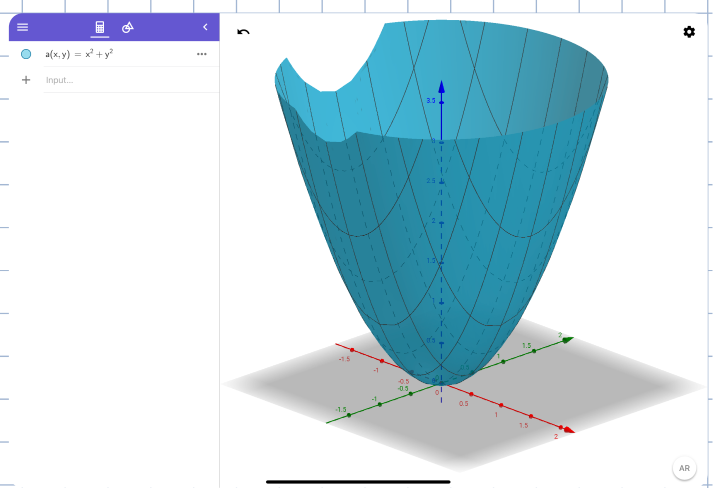
$$(x, y) \longrightarrow z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Definimos S como gráfica de $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in [-1, 1]^2$

¿Cómo podemos encontrar la expresión paramétrica?

Vimos antes que una expresión paramétrica era

$S(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$, sin embargo, es complicado representar aquí $D = (x, y) \in [-1, 1]^2$



En este caso, queda mucho más sencillo hacer una parametrización de la forma explícita, esto es:

$$S : [-1, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longrightarrow S(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Comentario:

Si S es la gráfica de una función ($S \equiv$ gráfica de $f(x,y)$, $S \equiv$ gráfica de $f(x,z)$ o $S \equiv$ gráfica de $f(y,z)$), la parametrización explícita es muy cómoda.

Sin embargo, no todas las superficies se pueden parametrizar de forma explícita. Por ejemplo, la esfera la tengo que describir por mitades

$$S \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{array} \right.$$

Moraleja: no todas las curvas / superficies son funciones.

4 Parametrización regular // Pto ordinario, singular. Sup. simple

Se dice que una superficie es regular si admite parametrización regular

Una parametrización es regular si cumple:

1 $S \in C^1$, es decir, $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in C^1$

2 $S'_u \times S'_v \neq 0$ (existe el plano tangente)

$\hookleftarrow$ Equivalente a $\nabla F \neq 0$ con parametrización implícita

Veremos más adelante que $\bar{S}'_u$ y $\bar{S}'_v$ son vectores tangentes a la superficie, y su producto vectorial devuelve la normal al plano tangente.

Punto ordinario: un punto $\bar{p}=(x,y,z)$ se dice ordinario si la superficie se puede representar localmente en $\bar{p}$ de forma explícita de clase C^1

Entorno de $\bar{p}$ $\left\{ \begin{array}{l} \to \text{Superficie admite param. regular} \\ \qquad + \\ \to \text{No autointersecciones} \end{array} \right\} \to$ Pto ordinario

Punto singular: no ordinario (autointersecciones o plano tang. no def.)

Superficie simple: todos sus pts son ordinarios.

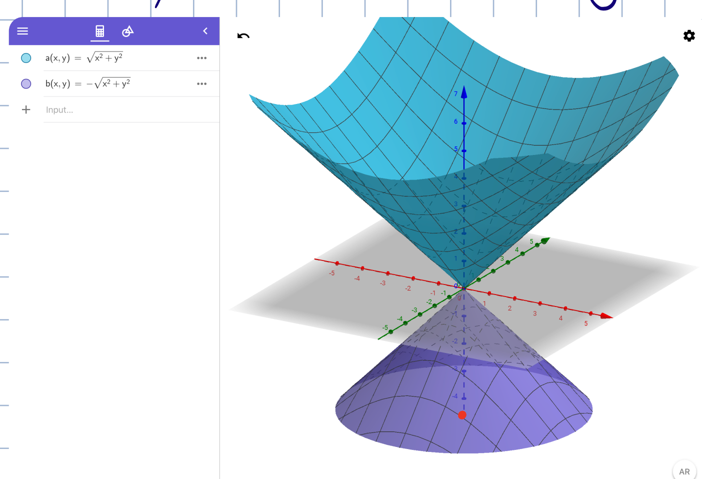
EJEMPLO

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, x^2+y^2 = z^2 \} \quad ¿\text{Es regular?}$$

$$F \in C^\infty \checkmark \quad y \quad \nabla F = (2x, 2y, -2z) \longrightarrow \nabla F(0,0,0) = 0 \; ✗$$

En $(0,0,0)$ no está definido el plano tangente de modo que no voy a poder encontrar una parametrización regular.

Voy a probar con un par de parametrizaciones introducidas previamente.



Parametrización $S=(u,v,\sqrt{u^2+v^2})$

① $S \in C^0$ en $(u=0, v=0)$ ✗

② $S'_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$ $\quad S'_u \times S'_v = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$

$S'_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$

✗ No definido en $(0,0)$

Parametrización $S=(u\cos v, u\sin v, u)$

① $S \in C^\infty$ en $(0,0)$ ✓

② $S'_u = (\cos v, \sin v, 1)$ $\quad S'_u \times S'_v = (-u\cos v, -u\sin v, u)$

$S'_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$(u=0, v=0) \rightarrow S'_u \times S'_v = (0,0,0)$ ✗

Nota: esfera es una superficie simple y regular, pero la parametrizació nos puede engañar. Hay pts que parecen conflictivos y no lo son.

5 Cambios de parámetro

Sea $S=S_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y sea $\phi : D_2 \longrightarrow D_1$

$(u,v) \longrightarrow S_1(u,v)$ $\quad (\tilde{u},\tilde{v}) \longrightarrow (u,v) = \phi(u,v)$

una función continua, biyectiva y con inversa continua, si

$S_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $S_2 = (S_1 \circ \phi) = S_1(\phi(\tilde{u},\tilde{v})) =$

$(\tilde{u},\tilde{v}) \longrightarrow S_2(\tilde{u},\tilde{v})$

$= S_1(u,v)$

entonces S_2 es una parametrización de S.

EJEMPLO

$$S_1 = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right)$$
$$S_2 = \left(\tilde{u}\cos\tilde{v}, \tilde{u}\sin\tilde{v}, \tilde{u}\right) \quad \tilde{u} \geq 0$$

Ambas representan la misma superficie

Vamos a buscar $\phi: D_2 \longrightarrow D_1$ que relaciona ambas
$$(\tilde{u},\tilde{v}) \longrightarrow (u,v) = \phi(u,v)$$

$$\phi: D_2 \longrightarrow D_1$$
$$(\tilde{u},\tilde{v}) \longrightarrow (u,v) = \left(\tilde{u}\cos\tilde{v}, \tilde{u}\sin\tilde{v}\right)$$

La transformada inversa $\phi^{-1}: D_1 \longrightarrow D_2$ quedaría:
$$(u,v) \longrightarrow (\tilde{u},\tilde{v})$$

* $\tilde{u} = \sqrt{u^2+v^2}$

$$\left.\begin{aligned} u &= \tilde{u}\cos\tilde{v} \\ v &= \tilde{u}\sin\tilde{v} \end{aligned}\right\} \longrightarrow u^2 + v^2 = \tilde{u}^2$$

* $\tilde{v} = \arccos \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$

El cambio de parámetro es admisible o regular si:

$$\phi: D_2 \longrightarrow D_1$$
$$(\tilde{u},\tilde{v}) \longrightarrow (u,v) = \phi(u,v)$$

1. $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C^1(D_2)$

2. Su matriz jacobiana es no singular en el interior de D_2 $(\mathring{D}_2)$

$$\left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| \neq 0 \quad \forall u, v \in \mathring{D}_2$$

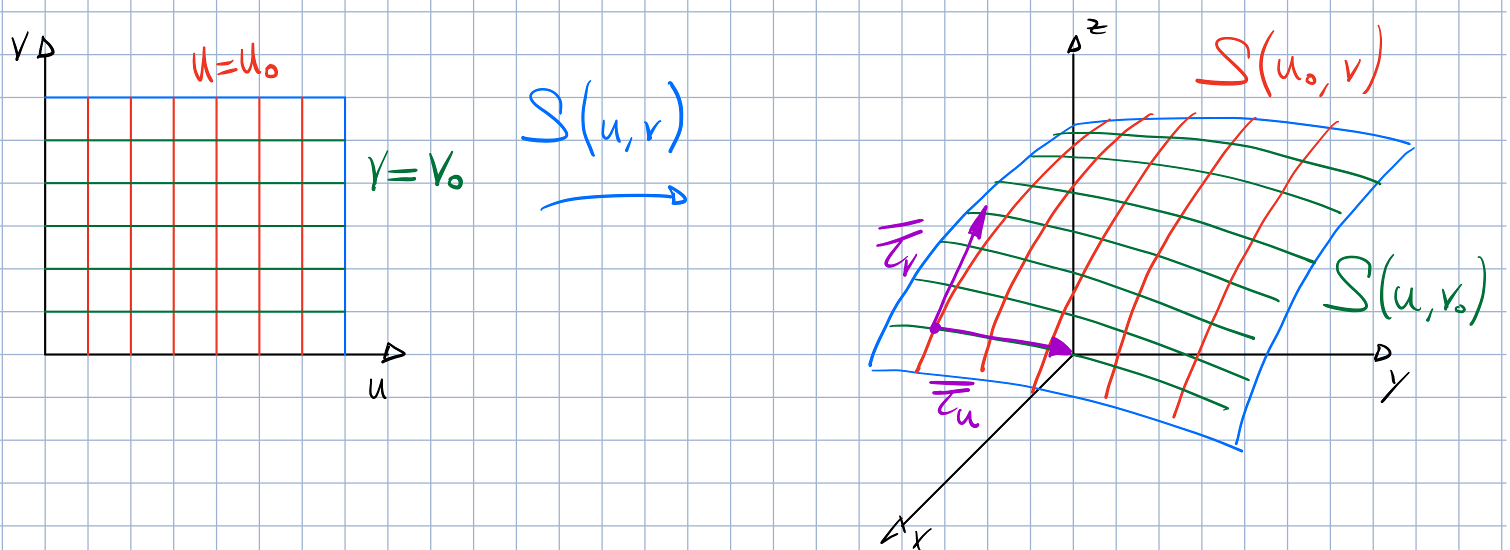
6 Curvas coordenadas

Sea la superficie $S: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(u,v) \longrightarrow S(u,v) = (x,y,z)$

A las curvas de S que se obtienen como resultado de congelar un parámetro y dejar el otro libre, es decir

$$\Gamma_1 = S(u_0, v)$$
$$\Gamma_2 = S(u, v_0)$$

Se las denomina curvas coordenadas.



Cada una de estas curvas funciona como las curvas del capítulo anterior. Podemos definir un vector tangente

$$\overline{\tau}_u = \frac{dS(u,v_0)}{du} = S'_u(u,v_0) \quad ; \quad \overline{\tau}_v = \frac{dS(u_0,v)}{dv} = S'_v(u_0,v)$$

A través de ellos, podemos obtener un vector normal a la superficie $\vec{n} = S'_u \times S'_v$ y la ecuación del plano tangente:

$$\pi \equiv \bar{x} = S(u_0, v_0) + u\,S'_u(u_0, v_0) + v\,S'_v(u_0, v_0)$$

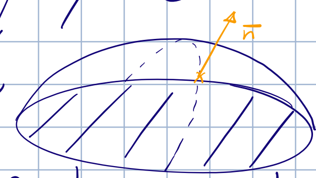
$$\pi \equiv \vec{n} \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

$$S'_u(u_0, v_0) \times S'_v(u_0, v_0) \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

7 Orientación de una superficie

Se llama orientación de una superficie a la función continua que en cada punto de la superficie devuelve el vector normal a la misma. Si dicha función existe, decimos que la superficie es orientable.

Una superficie cerrada tiene orientación positiva cuando su normal tiene sentido exterior (apunta hacia afuera). Una superficie orientable admite dos orientaciones $\oplus$ y $\ominus$. Intuitivamente, son las "caras" de la superficie.



Orientación positiva

*Superficies no orientables. "Banda de Möebius"

8 Plano tangente

Veamos la expresión del plano tangente para superficies en forma paramétrica, explícita e implícita.

① Forma paramétrica $(S'_u \times S'_v \neq 0) \longrightarrow$ existe plano tg

$$\pi \equiv \bar{x} = S(u_0, v_0) + u\,S'_u(u_0, v_0) + v\,S'_v(u_0, v_0)$$

$$\pi \equiv \vec{n} \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

$$S'_u(u_0, v_0) \times S'_v(u_0, v_0) \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

② Forma explícita siempre tiene plano tangente si es C^1 (es decir, si admite polinomio de Taylor)

$z = f(x,y) \longrightarrow$ [$S(x,y_0)$, $S(x_0,y)$ son las curvas coordenadas]

$$\pi \equiv z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Se deja como tarea encontrar las expresiones para $x = f(y,z)$ o $y = f(x,z)$

③ Forma implícita tiene plano tangente si $F \in C^1$ y $\nabla F \neq \bar{0}$. Esto es equivalente a decir que admite representación local explícita (TFI) $F(x,y,z) = 0 \xrightarrow{TFI} z = f(x,y)$

Supongamos que $F'_z \neq 0$, el resto se hace igual.
Como $\nabla F \neq \bar{0}$, al menos uno de F'_x, F'_y, F'_z será $\neq 0$.

$$F'_z \neq 0 \longrightarrow S(x,y,f(x,y)), \quad S'_x = \left(1, 0, -\frac{F_x}{F_z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad S'_y = \left(0, 1, -\frac{F_y}{F_z}\right)$$

De modo que

$$S'_x \times S'_y = \frac{1}{F'_z}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$$

Así que

$$\pi \equiv \nabla F \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$$

EJEMPLO

Calcular plano tangente en cada punto de la superficie $x^2+y^2+z^2=1$

$$F(x,y,z)=0 \longrightarrow \bar{n}=\nabla F=(2x,2y,2z)\propto(x,y,z)$$

PT en (x_0,y_0,z_0) $\quad \pi\equiv\left((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\right)\cdot\bar{n}=0$

$$\left((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\right)\cdot(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$x_0x+y_0y+z_0z=1$$

Usando coord. esféricas

$$S(u,v)=\begin{bmatrix}\cos u\sin v\\ \sin u\sin v\\ \cos v\end{bmatrix}$$

De modo que

$$\bar{n}=S'_u\times S'_v=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ -\sin u\sin v & \cos u\sin v & 0\\ \cos u\cos v & \sin u\cos v & -\sin v\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos u\sin^2 v\\ -\sin u\sin^2 v\\ -\sin v\cos v\end{bmatrix}=$$

$$=-\sin v\begin{bmatrix}\cos u\sin v\\ \sin u\sin v\\ \cos v\end{bmatrix}=-\sin v\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\propto\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Mismo resultado salvo $v=0$, donde no está definido. Problema de parametrización, no superficie

ESERCICIOS

1 Sea la superficie definida por $\bar{S}(u,v) = (u+v^3, u^3+v, u^2+v^2)$

a Determinar sus puntos singulares, si los tiene.
b Comprobar que $(2,2,2)$ es un pto ordinario. Calcular el plano tangente y el vector normal en ese punto.

Pto ordinario: admite representación explícita local de clase C^1. No singular. // Admite param regular $\left\{ \begin{matrix} C^1 \\ N \neq 0 \end{matrix} \right\}$ + no autointersección.

Pto singular: No ordinario. Problemas posibles:
1. $\nexists$ Plano tangente / vector normal
2. Representación explícita local no es C^1
3. Pto de autointersección de la superficie.

1 Buscamos pts donde el vector normal no esté definido.

$$\bar{N} = \bar{S}'_u \wedge \bar{S}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3u^2 & 2u \\ 3v^2 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (6u^2v - 2u,\ 6uv^2 - 2v,\ 1 - 9u^2v^2) =$$

$$= (2u(3uv-1),\ 2v(3uv-1),\ 1-(3uv)^2)$$

La normal no está definida para $\bar{N} = \bar{0}$

(1) $2u(3uv-1) = 0$
(2) $2v(3uv-1) = 0$
(3) $1-(3uv)^2 = 0$

$$\xrightarrow{(1)} \left| \begin{matrix} u = 0 & \text{Sol I} \\ 3uv = 1 & \text{Sol II} \end{matrix} \right.$$

Sustituyendo I en (2) obtengo:

$2v(-1) = 0 \rightarrow v = 0$ (3) $1 - 0 = 0 \rightarrow$ No es sol.

Sustituyendo II en (2) obtengo:

$2v(0) = 0 \rightarrow$ Se cumple $\forall v$ (3) $1 - 1 \cdot 0 \rightarrow$ Se cumple siempre

De modo que si $uv = 1/3$ no hay vector normal/plano tan.

(2) La representación paramétrica es C^∞ en todos los puntos

(3) Superficie tiene autointersecciones.

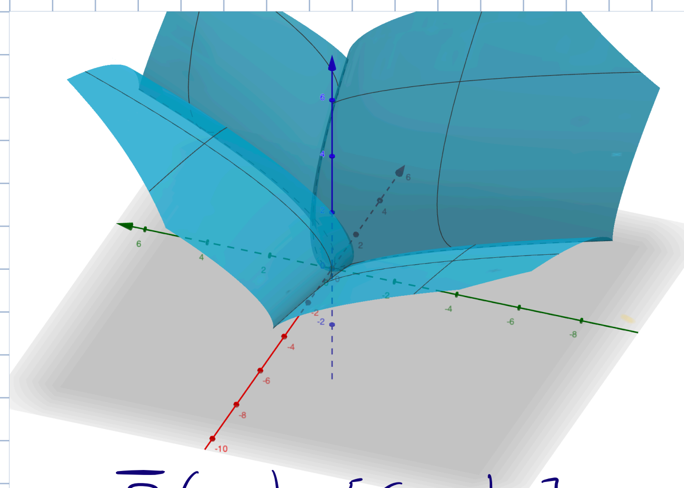
Por ej:

$x = u + v^3$ $(1,0) = (1,1,1)$

$y = u^3 + v$ $(0,1) = (1,1,1)$

$z = u^2 + v^2$

↳ Distintos valores de (u,v) nos llevan al mismo (x,y,z).



$\overline{S}(u,v)$ [Geogebra]

Esta condición es difícil de comprobar, no la analizaremos.

b Comprobar que $(2,2,2)$ es un pto ordinario. Calcular el plano tangente y el vector normal en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} 2 = u + v^3 \\ 2 = u^3 + v \\ 2 = u^2 + v^2 \end{array}\right|$$

Única solución de este sistema es $u = 1$, $v = 1$

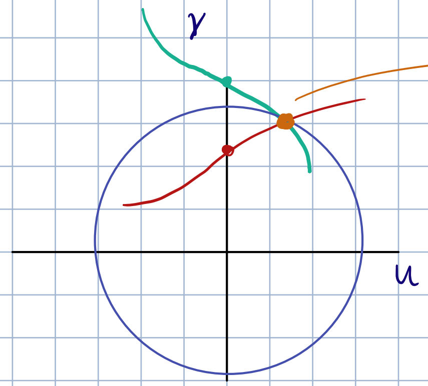
$(u_0, v_0) = (1,1) \rightarrow$ No es pto de autointersección.

Justificación solución única

$v = \sqrt[3]{2-u}$

$v = 2 - u^3$

$2 = u^2 + v^2$



Único pto que pertenece a las tres curvas a la vez.

Además, del apartado ⓐ sabemos que el vector normal está definido.

$$\bar{N} = \left(2u(3uv-1),\ 2v(3uv-1),\ 1-(3uv)^2\right)\Big|_{(1,1)} =$$

$$= \left(2(2),\ 2(2),\ 1-3^2\right) = (4,4,-8) \parallel (1,1,-2)$$

Plano normal: $\bar{N} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$

$$(1,1,-2)\cdot\left((x,y,z)-(2,2,2)\right) = 0$$

$$x-2+y-2-2(z-2) = 0 \rightarrow x+y-2z = 0$$

② 22.3 b Analizar si es regular y/o simple la superficie $\bar{x} = (u^2-1,\ u^3-u,\ v)$

Superficie regular: admite parametrización regular

① Parametrización de clase C^1

② Existe vector normal $\bar{x}'_u \wedge \bar{x}'_v \neq 0$

No se dice nada de autointersecciones

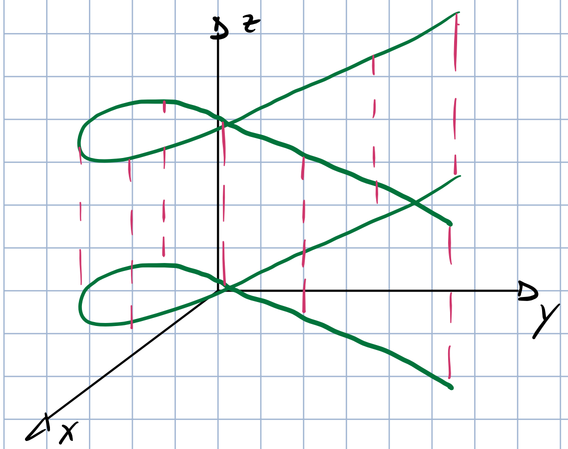
Superficie simple: admite representación explícita local en todos sus pts ~ Satisface condiciones de TFImplícita

No puede tener autointersecciones. (Regular + no autointersección)

S. Regular

$$\bar{x}(u,v) = (\underbrace{u^2-1,\ u(u^2-1)}_{\text{Curva plana en plano } xy},\ \underbrace{v}_{\text{Traslación en } z})$$

Superficie de traslación



Veremos que en los pts $(0,0,z)$ tendremos problemas.

① Parametrización C^1 ✓

② Vector normal definido en todo pto.

$$\bar{N} \parallel \bar{x}'_u \wedge \bar{x}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2u & 3u^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3u^2-1, -2u, 0)$$

Curva plana trasladada

Vemos que $\bar{N} \neq \bar{0}\ \forall u \longrightarrow$ Superficie regular

S. Simple

Buscamos autointersecciones. Para ello:

① Buscamos representación implícita

② Aplicamos TFI. Buscamos candidatos a pts problemáticos

③ Comprobamos si se produce autointersección.

① $x = u^2-1$
$y = u(u^2-1)$ $\Big\}$ $y = ux \rightarrow y^2 = u^2x^2 \rightarrow y^2 = (x+1)x^2 \rightarrow x^3 + x^2 = y^2$

Podemos comprobar que la expresión funciona

$$x^3 = (u^2-1)^3 \qquad x^3 + x^2 = (u^2-1)\left[(u^2-1)^2 + (u^2-1)\right] =$$
$$x^2 = (u^2-1)^2 \qquad = (u^2-1)\left[u^4 + \cancel{1} - 2u^2 + u^2 - \cancel{1}\right] =$$
$$y^2 = u^2(u^2-1)^2 \qquad = (u^2-1)\left[u^4 - u^2\right] = u^2(u^2-1)^2 = y^2$$

Representación implícita: $F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2 = 0$

TFImplícita asegura que existe rep. explícita en (x_0, y_0) si:

* $F \in C^k \quad k \geq 1$
* $F(x_0, y_0) = 0$
* $\nabla F(x_0, y_0) \neq \overline{0} \longrightarrow \nabla F = (3x^2 + 2x, -2y)$

$$\nabla F = \overline{0} \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 2x = 0 \longrightarrow x = 0 \quad ; \quad x = -2/3 \\ -2y = 0 \longrightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

(I) $(x,y) = (0,0)$. Candidato 1. Pruebo si es de autointer.

$F(0,0) = 0$ ✓ $\qquad (0,0) = (u^2-1, u^3-u^2) \rightarrow u = \pm 1$

Este pto se alcanza dos veces al recorrer la curva. La superficie no es simple.

(II) $(x,y) = (-2/3, 0)$. Candidato 2.

$F(-2/3, 0) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 0^2 \neq 0 \rightarrow$ No es pto de la curva