1 Campos vectoriales

Un campo vectorial es una función

$\overline{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (F_1(x,y), F_2(x,y))$

Dos dimensiones

$\overline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

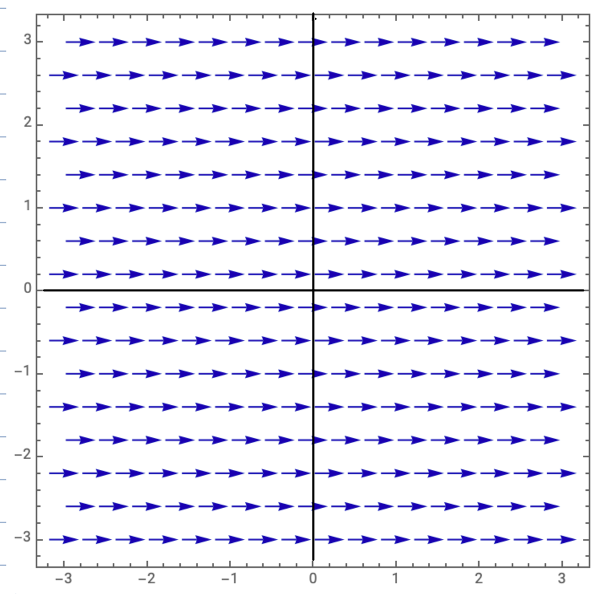
Tres dimensiones

Es decir, a cada punto de $\mathbb{R}^{2,3}$ se le asigna un vector de $\mathbb{R}^{2,3}$

Ejemplos

$\overline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (1, 0)$

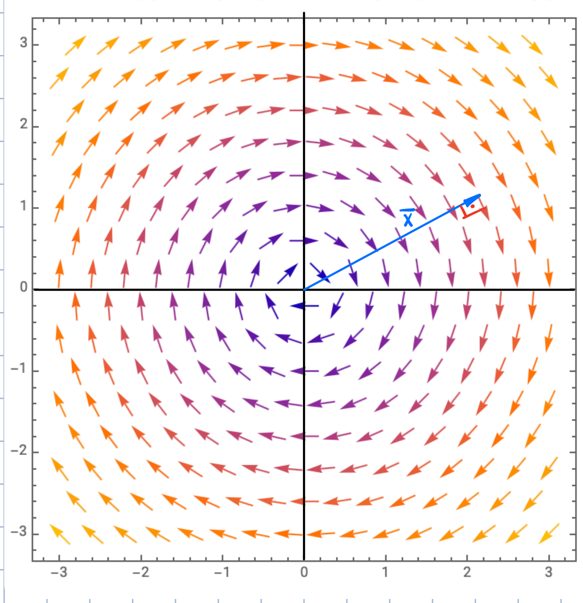
```
VectorPlot[{1, 0}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```



(Wolfram Cloud)

$\overline{F}(x,y) = (y, -x)$

```
VectorPlot[{y, -x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```



$\overline{x} \cdot \overline{F} = (x,y) \cdot (y, -x) = 0 \to \overline{x} \perp \overline{F}$

$\|\overline{F}\| = \sqrt{y^2 + x^2}$

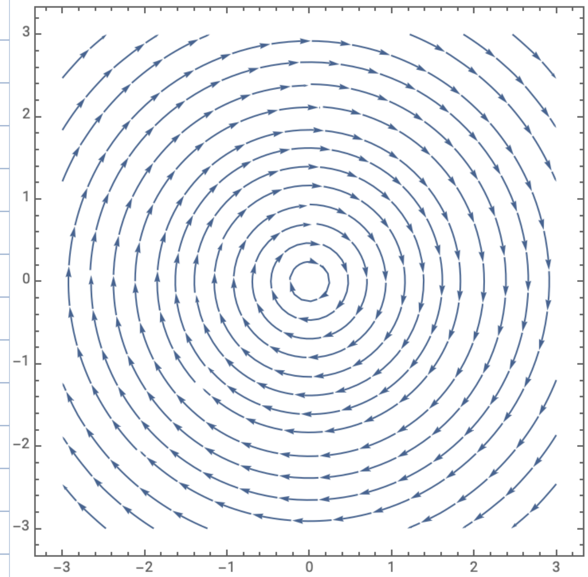
2 Líneas de corriente

Son curvas con tangente paralela al campo en cada punto y en cada instante

Visualización de líneas de corriente del campo de velocidad en un túnel de viento. Si el campo vectorial representa la velocidad de un fluido, las líneas de corriente representan las trayectorias recorridas por pequeñas partículas suspendidas en el fluido.

Ejemplo: $\bar{F}(x,y) = (y,-x)$

```
StreamPlot[{y, -x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```



* Son tangentes al campo.
* No se cortan entre sí.

(Salvo puntos de $\bar{v}=0$, fuentes y sumideros)

Esta parte se verá con más detalle en cursos posteriores

¿Cómo se calculan? Quiero calcular una curva $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ paralela al campo en todo punto, esto es:

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) = \bar{F}(\bar{r}(t)) = \Big(F_1(x(t),y(t)),\ F_2(x(t),y(t))\Big)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(x(t),y(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x(t),y(t)) \end{aligned}\right|$$

Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se aprenderá a resolver en cursos superiores.

En ocasiones no tendrá solución analítica y requerirá ayuda de ordenadores.

Si combinamos ambas ecuaciones:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{F_2(x(t), y(t))}{F_1(x(t), y(t))}$$

Y, por el teorema de la función inversa (asumiendo que se verifican las condiciones para su aplicación), $\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}$

$$\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{F_2(x(t), y(t))}{F_1(x(t), y(t))}$$

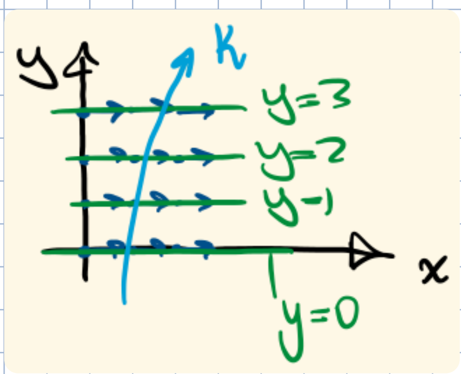
Por la regla de la cadena, $\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$, así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x(t), y(t))}{F_1(x(t), y(t))}$$

EJEMPLOS

$F(x,y) = (1,0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 \longrightarrow x(t) = t \\ \frac{dy}{dt} &= 0 \longrightarrow y(t) = K \end{aligned}\right|$$

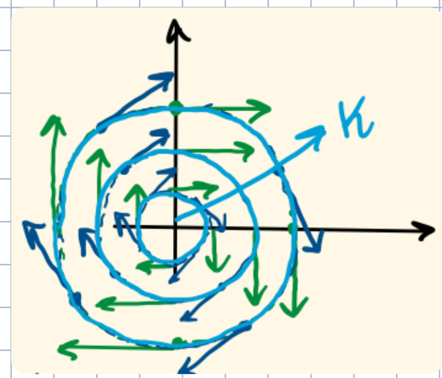


$y = K$

(representación implícita)

$$\bar{F}(x,y) = (y, -x)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}\right| \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \longrightarrow x\,dx + y\,dy = 0$$



$$\int x\,dx + \int y\,dy = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C = \frac{1}{2}K^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = K^2}$$

Esta parte se verá con más detalle en cursos posteriores

3 Operadores diferenciales

Operador	Símbolo	Aplica sobre	Resultado
Gradiente	grad // ∇	campo escalar (f)	campo vectorial
Rotacional	rot // $\nabla \times$	campo vectorial $(\bar{F})$	campo vectorial
Divergencia	div // $\nabla \cdot$	campo vectorial $(\bar{F})$	campo escalar

* Operador nabla

El operador nabla se define como

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$\mathbb{R}^2$: $\nabla = \bar{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$

$\mathbb{R}^3$: $\nabla = \bar{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

Este operador nos ayudará con las definiciones de los operadores diferenciales

3.1 Gradiente

Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, se define el gradiente como:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Puede verse como aplicar el operador nabla a f

$$\nabla f = \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \bar{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

El vector gradiente es un campo vectorial

$$\nabla f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

Significado físico: dirección de máximo crecimiento de f.

3.2 Rotacional

Sea un campo vectorial $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se define su rotacional:

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F'_{3y} - F'_{2z} \\ F'_{1z} - F'_{3x} \\ F'_{2x} - F'_{1y} \end{bmatrix}$$

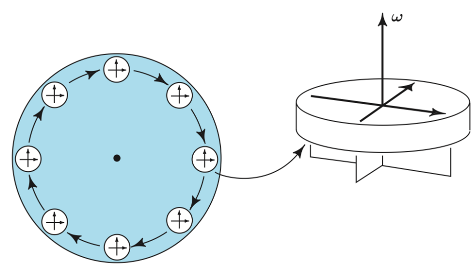
Siempre se aplica en $\mathbb{R}^3$. Si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se usa $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\bar{F} = (\bar{F}_1, \bar{F}_2, 0)$

El rotacional es un campo vectorial

$$\nabla \times \overline{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow \nabla \times \overline{F}$$

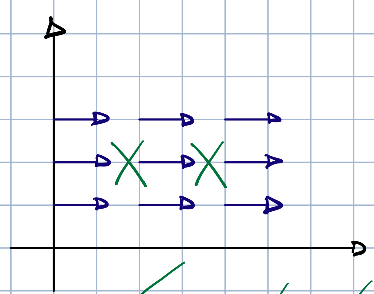
Significado físico: el rotacional está relacionado con las rotaciones. Por ejemplo, si $\overline{F}$ representa un campo de velocidades fluido, $\nabla \times \overline{F}$ en cada punto es dos veces el momento angular de un sólido rígido que rota igual que el fluido en ese punto. En particular, $\nabla \times \overline{F} = \overline{0}$ en un punto significa que el fluido no rota sobre sí mismo en ese pto.

figure **4.4.8** Looking at a paddle wheel from above a moving fluid. The velocity field $\mathbf{V}(x, y, z) = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ is irrotational; the paddle wheel does not rotate around its axis ω.



Vector Calculus, Marsden & Tromba

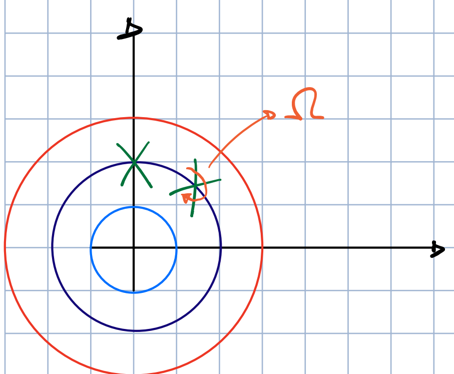
EJEMPLOS



$$\overline{F}(x,y) = (1,0)$$

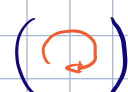
$$\nabla \times \overline{F} = (0,0)$$

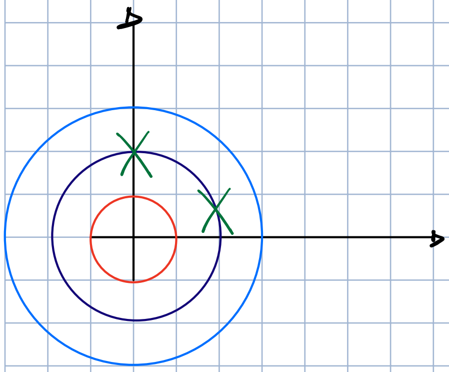
↳ se traslada, pero no rota sobre sí mismo



$$\overline{F}(x,y) = (y, -x)$$

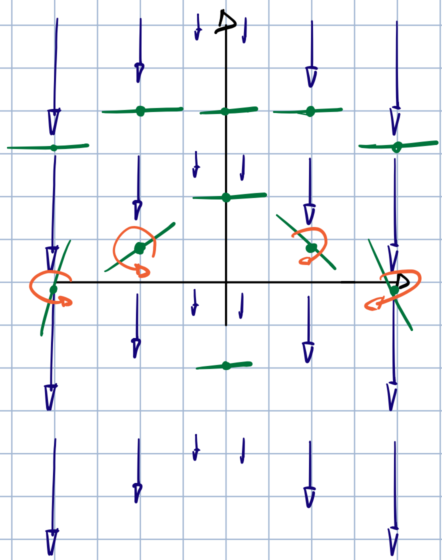
$$\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\overline{k}$$





$$\overline{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

$$\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ No hay rotación sobre el propio eje de X



$\Omega > 0$ $\qquad$ $\Omega < 0$

$$\overline{F}(x,y) = (0, -x^2)$$

$$\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & -x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x \end{bmatrix} = \begin{cases} >0 & \text{si } x<0 \\ =0 & \text{si } x=0 \\ <0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Teorema para cualquier función $f \in C^2$, se cumple que:

$$\nabla \times (\nabla f) = \overline{0}$$

Los campos vectoriales gradiente son irrotacionales

DEM

$$\nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} f''_{zy} - f''_{yz} \\ f''_{xz} - f''_{zx} \\ f''_{yx} - f''_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3 Divergencia

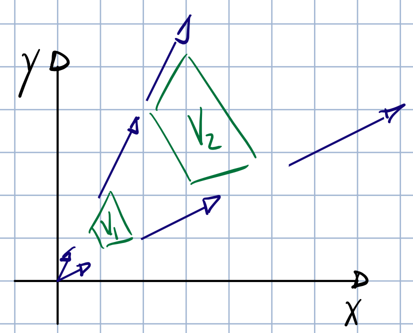
Sea un campo vectorial $\overline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, se define su divergencia:

$$\nabla \cdot \overline{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3$$

La divergencia es un campo escalar $\nabla \cdot \overline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

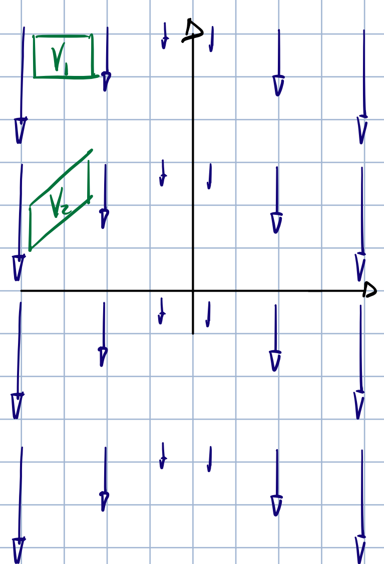
Significado físico: si $\overline{F}$ representa el campo de velocidades de un fluido, $\nabla \cdot \overline{F}$ representa el ratio de expansión o compresión ($\nabla \cdot \overline{F} > 0$ o $\nabla \cdot \overline{F} < 0$) del fluido por unidad de volumen

EJEMPLO $\overline{F}(x,y) = (x, y)$



$$\nabla \cdot \overline{F} = 1 + 1 = 2 > 0 \to V_2 > V_1$$

EJEMPLO



$$\overline{F}(x,y) = (0, -x^2)$$

$$\nabla \cdot \overline{F} = 0 + \frac{\partial -x^2}{\partial y} = 0 \longrightarrow V_2 = V_1$$

$\Delta V = 0$

Teorema para cualquier campo vectorial $F \in C^2$, se cumple que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) = 0$$

La divergencia del rotacional es cero.

DEM

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = F'_{3yx} - F'_{2zx} + F'_{1zy} - F'_{3xy} + F'_{2xz} - F'_{1yz} = 0$$

3.4 Laplaciano

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define el Laplaciano como:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

4 Identidades básicas del análisis vectorial

Basic Identities of Vector Analysis

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, for a constant c
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, at points $\mathbf{x}$ where $g(\mathbf{x}) \neq 0$
5. $\text{div}\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \text{div}\,\mathbf{F} + \text{div}\,\mathbf{G}$
6. $\text{curl}\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \text{curl}\,\mathbf{F} + \text{curl}\,\mathbf{G}$
7. $\text{div}\,(f\mathbf{F}) = f\,\text{div}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$
8. $\text{div}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\text{curl}\,\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\text{curl}\,\mathbf{G}$
9. $\text{div}\,\text{curl}\,\mathbf{F} = 0$
10. $\text{curl}\,(f\mathbf{F}) = f\,\text{curl}\,\mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$
11. $\text{curl}\,\nabla f = \mathbf{0}$
12. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
13. $\text{div}\,(\nabla f \times \nabla g) = 0$
14. $\text{div}\,(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

* curl $\equiv$ rot $\equiv$ $\nabla\times$

5 Ejemplos

Incluimos aquí algunos ejemplos de ecuaciones utilizadas en modelos matemáticos que describen diversos fenómenos físicos.

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes (incompresibles)

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} + \rho \bar{g}$$

Conducción de calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla \cdot (\nabla T) = K \nabla^2 T$$