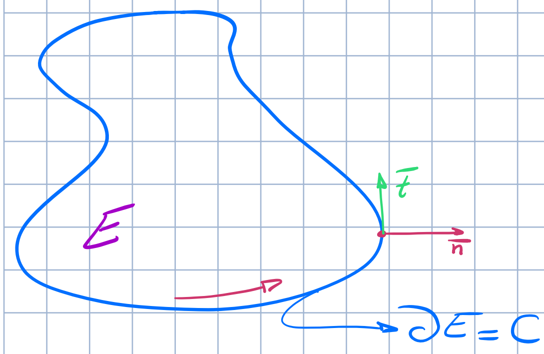
23. TEOREMAS DE INTEGRACIÓN DEL CÁLCULO VECTORIAL I

1 Teoremas en dos dimensiones

$\mathbb{R}^2$: Sea $C = \partial E$ una curva regular a trozos orientada positivamente (normal exterior) y cerrada y simple y sea E la región del plano delimitada por la misma



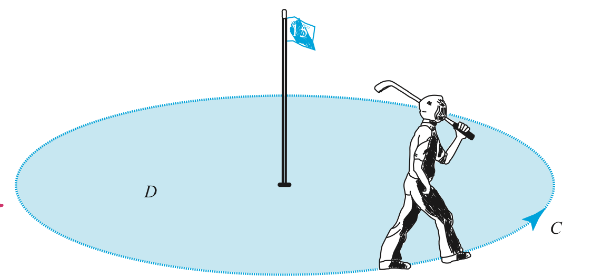


figure 8.1.4 The correct orientation for the boundary of a region D.

Orientación positiva

Vector Calculus, Marsden & Tromba

Sea $\bar{F}: E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función vectorial C^1 en E, entonces

$$(x,y) \longrightarrow (P(x,y), Q(x,y))$$

Teorema de la divergencia en el plano

$$\iint_E (\nabla \cdot \bar{F})\, dA = \iint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot \bar{n}\, ds$$

vector normal exterior a la curva. Ver capítulo anterior.

Flujo a través de C

Teorema de Green

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \begin{bmatrix} \cancel{\frac{\partial Q}{\partial z}}^{\,0} \\ \cancel{\frac{\partial P}{\partial z}}^{\,0} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \bar{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\iint_E (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{k}\, dA = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E\ (+)} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

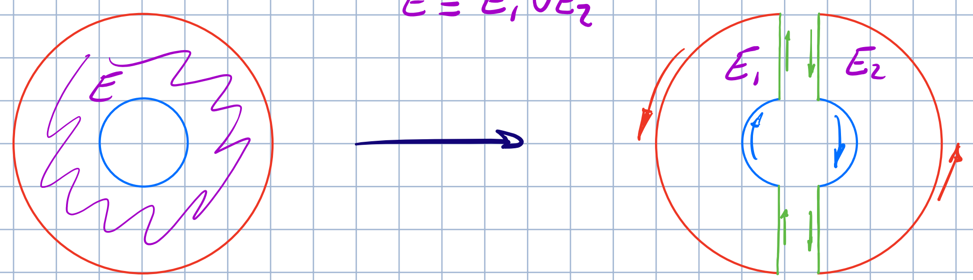
$\oint$ indica que la integral es sobre una curva o sup. cerrada

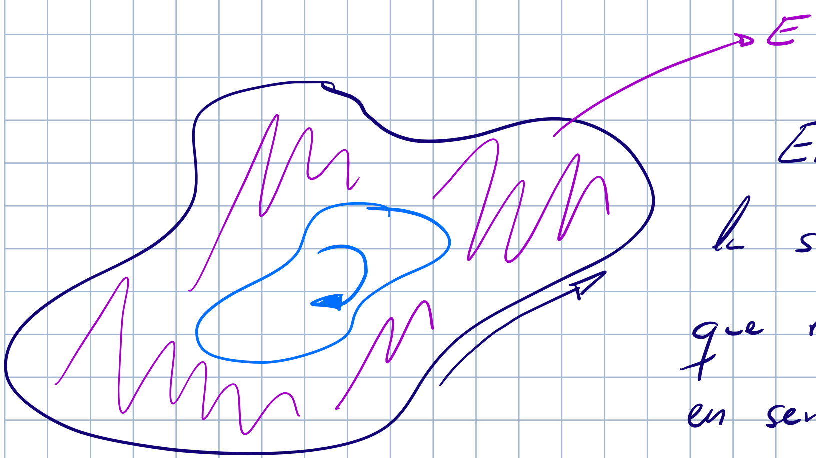
Circulación en C

NOTA: para estas relaciones es muy importante la correcta orientación de la curva C. La orientanción será positiva si al recorrerla dejamos la superficie a la izquierda.

NOTA: estos teoremas se pueden aplicar a regiones más complejas siempre que se puedan descomponer en regiones rodeadas por curvas:

$E = E_1 \cup E_2$

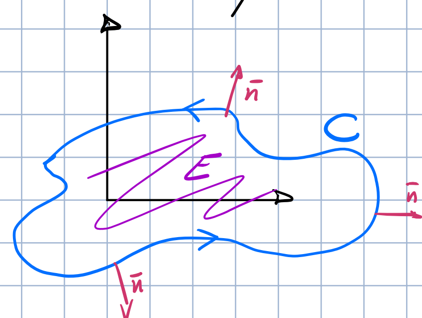




En este ejemplo, para "dejar la superficie a la izquierda" tenemos que recorrer la frontera exterior en sentido antihorario, mientras que la interior se recorre en sentido horario

EJEMPLOS:

1 Calcular $\int_C \overline{F}\cdot\overline{n}\, ds$ en C (regular a trozos, cerrada y con normal ext.) con $\overline{F} = (y, -x)$



Usamos el tma de div. en el plano:

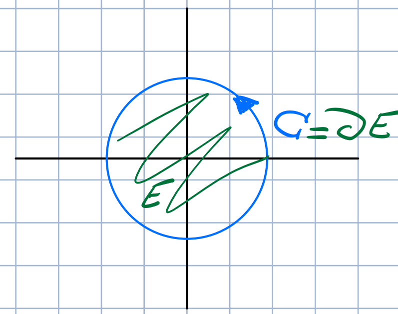
$$\iint_E (\nabla\cdot \overline{F})\, dA = \iint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA = \oint_{C=\partial E} \overline{F}\cdot\overline{n}\, ds$$

De modo que

$$\oint_{C=\partial E} \overline{F}\cdot\overline{n}\, ds = \iint_E (\nabla\cdot\overline{F})\, dA = \iint_E \left(\cancelto{0}{\frac{\partial y}{\partial x}} + \cancelto{0}{\frac{\partial x}{\partial y}}\right) dA = 0$$

2 $\oint_C y^3dx - x^3dy$ con $C: \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t = [0, 2\pi]$

$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{S} = \oint_C F_1\,dx + F_2\,dy \longrightarrow \bar{F} = (y^3, -x^3)$$



Primero hacemos los cálculos sobre la curva:

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_C F_1dx+F_2dy+F_3dz = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}'(t)\,dt$$

1 $t\in[0, 2\pi]$

2 $\bar{F}(\bar{r}(t)) = (\sin^3 t, -\cos^3 t)$

3 $d\bar{S} = \bar{r}'(t)\,dt = (-\sin t, \cos t)\,dt$

$$\int_0^{2\pi}(\sin^3 t, -\cos^3 t)(-\sin t, \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-\sin^4 t - \cos^4 t)\,dt \overset{*}{=} -\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(3+\cos(4t))\,dt = -\frac{3}{4}t - \frac{1}{16}\sin(4t)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{3}{4}2\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

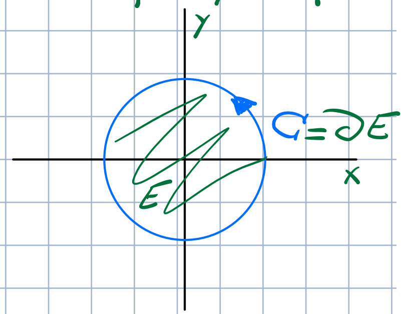
$$* \ \frac{1}{4}(3+\cos(4t)) = \frac{1}{4}\left(3(\sin^2 t+\cos^2 t)^2 + \cos 4t\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(3(\sin^4 t+\cos^4 t + 2\sin^2 t\cos^2 t) + \cos^4 t + \sin^4 t\right.$$

$$\left.- 6\cos^2 t\sin^2 t\right) = \frac{1}{4}\left(4\sin^4 t + 4\cos^4 t\right) = \sin^4 t + \cos^4 t$$

Aplicaremos ahora el teorema de Green para resolver el mismo problema:

$E = \{x^2+y^2 \leq 1\}$



$$\iint_E (\nabla \times F)\cdot \overline{k}\, dA = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{C=\partial E} \overline{F}\cdot d\overline{s}$$

$$\overline{F} = (y^3, -x^3) \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 \;;\; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$$

$$\oint_{C=\partial E} \overline{F}\cdot d\overline{s} = -3\iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy = -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta = -\frac{3}{4}2\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

Cambio de variable a polares

1. $E \equiv 0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
2. $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \to f^*(r,\theta) = r^2$
3. $|\det J\varphi| = r$

Podemos comprobar que, como dice el tma de Green, el resultado es idéntico por ambos caminos.

Problema de examen

① V/F. Sea $\overline{F}: D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1 en D, con componentes $\overline{F} = (P, Q)$ tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \;\; \forall (x,y) \in D$. Sea C una curva cerrada, regular y simple contenida en D. Necesariamente

$$\oint_C \overline{F}\cdot d\overline{s} = 0.$$

¿Qué pasaría si F con tres componentes? Volveremos más adelante.

Falso. No se puede aplicar Green ya que la región E delimitada por la curva C podría incluir el $(0,0)$, donde $\bar{F}$ no está definida.

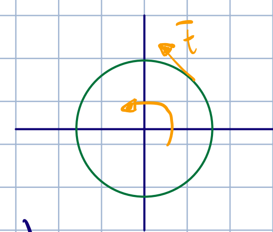
Contraejemplo: $\bar{F} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2} , \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)} + \frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)} = 0$$

Rotacional es 0 salvo en el origen donde no está definido.

Calculamos $\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s}$ en una curva que incluya al origen $x^2+y^2=1$ orientada positivamente

$C \equiv \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

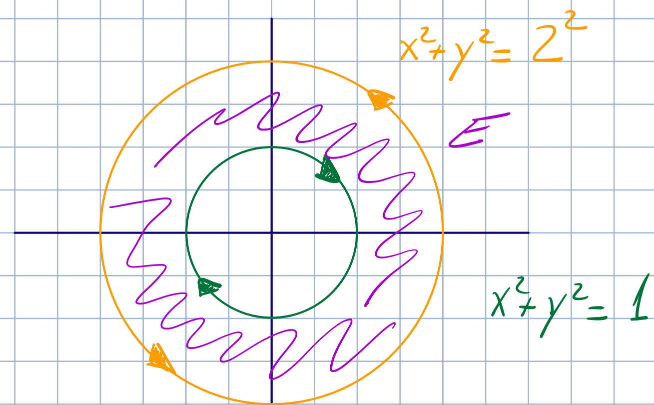


$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin\theta}{1} , \frac{\cos\theta}{1} \right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = 2\pi$$

$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} \neq 0 \longrightarrow$ Tma de Green no funciona aquí.

Sin embargo, si no incluimos al origen, todo funciona bien.

Ejemplo:



$$\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{s} =$$

$$= \int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

C^+ $F(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-2\sin\theta}{4}, \frac{2\cos\theta}{4} \right) \cdot \left(-2\sin\theta, 2\cos\theta \right) d\theta = 2\pi$$

C^+ $r(t) = (\cos t, -\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

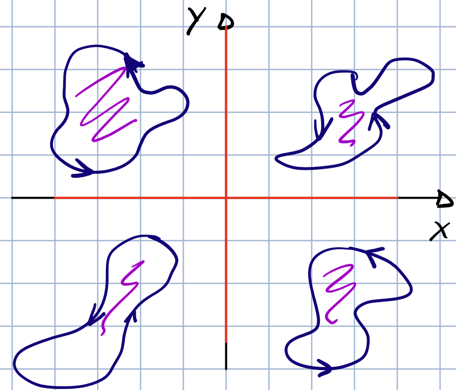
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{+\sin\theta}{1}, \frac{\cos\theta}{1} \right) \cdot \left(-\sin\theta, -\cos\theta \right) d\theta = -2\pi$$

$$\int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -2\pi + 2\pi = 0$$

Como decía el Tma Green

② V/F Sea $\overline{H}: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial $\overline{H}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}(y, x)$ con $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0, y \neq 0\}$. El T^{ma} de Green es aplicable a cualquier curva $C^+ \subset R$ regular, cerrada y simple orientada positivamente y de su aplicación resulta:

$$\int_{C^+} \left(y \frac{1}{x^2y^2} dx + x \frac{1}{x^2y^2} dy \right) = 0$$



Verdadero.

El teorema de Green es aplicable en las condiciones descritas en el enunciado.

$$\oint_{C^+ = \partial E} \overline{H} \cdot d\overline{S} = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0$$

$$Q'_x = \frac{1}{x^2y^2} + x\left(\frac{-2}{x^3y^2}\right) = -\frac{1}{x^2y^2} \qquad P'_y = -\frac{1}{x^2y^2}$$

③ Sea $\overline{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\overline{F}(x,y) = (y^2, 2xy+1)$. Sea C la curva abierta de $\mathbb{R}^2$ $C = C_1 \cup C_2$ con

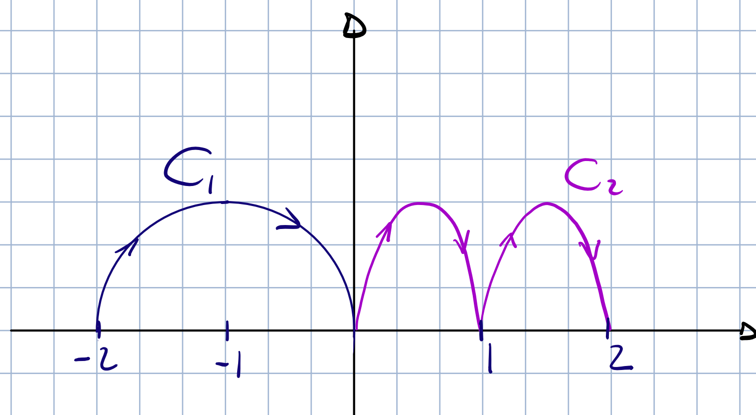
$$C_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+1)^2 + y^2 = 1 , y \geq 0 \}$$

$$C_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sin^2(\pi x), 0 \leq x \leq 2 \}$$

ambas recorridas en sentido creciente de x.

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{S} =$$ ⓐ 4 ⓑ 2 ⓒ 0 ⓓ -4

Las curvas especificadas en el enunciado son:



Para resolver este problema, sería útil aplicar el teorema de Green, ya que

$$\iint_E (\nabla \times F) \cdot \overline{K}\, dA = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C = \partial E} \overline{F} \cdot d\overline{S}$$

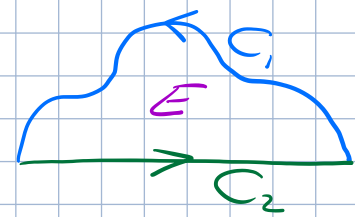
y en este caso,

$$\overline{F}(x,y) = (y^2, 2xy+1)$$

$$\to \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \ ; \ \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \to \iint_{C=\partial E} \overline{F} \cdot d\overline{S} = 0$$

Pero recordemos que el teorema de Green requiere de una región encerrada por una curva cerrada. ¿Hay algún truco que me permita aplicarlo?

Consideremos el conjunto E encerrado por C_1 y C_2. En este caso,

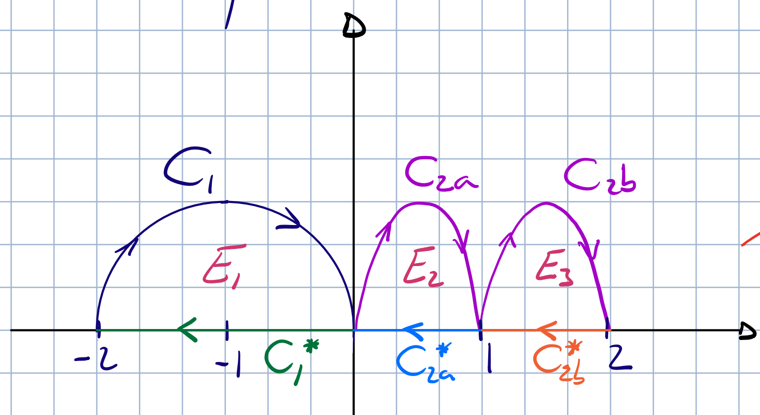


$$\iint_{C=\partial E} \overline{F}\cdot d\overline{S} = \int_{C_1} \overline{F}\cdot d\overline{S} + \int_{C_2} \overline{F}\cdot d\overline{S} = \iint_E (\nabla \times F)\cdot \overline{K}\, dA$$

De modo que:

$$\int_{C_1} \overline{F}\cdot d\overline{S} = \iint_E (\nabla \times F)\cdot \overline{K}\, dA - \int_{C_2} \overline{F}\cdot d\overline{S}$$

Puedo aplicar esto a mi caso, con lo que tendría:



Cuidado con los sentidos de recorrido, que están al revés para hacer Green.

$$\iint_{E_1} (\nabla \times F)\cdot \overline{K}\, dA = -\left(\int_{C_1} \overline{F}\cdot d\overline{S} + \int_{C_1^*} \overline{F}\cdot d\overline{S}\right) = 0$$

Luego $\displaystyle\int_{C_1} \overline{F}\cdot d\overline{S} = -\int_{C_1^*} \overline{F}\cdot d\overline{S}$ y lo mismo para C_{2a} y C_{2b}.

$C_1^{*-} = \{(t,0),\ -2 \leq t \leq 0\}$ orientación contraria al dibujo

$$\int_{C_1^{*-}} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_{-2}^{0} (0,1)\cdot(1,0)\,dt = 0$$ y lo mismo en C_{2a}^{*} y C_{2b}^{*}.

De modo que

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{S} + \int_{C_{2a}} \bar{F}\cdot d\bar{S} + \int_{C_{2b}} \bar{F}\cdot d\bar{S} = 0+0+0 = 0.$$