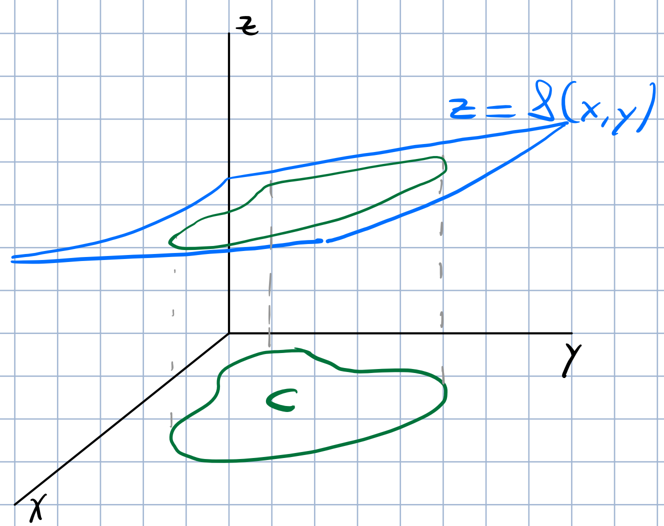
INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}^p$ III

18. INTEGRACIÓN EN CONJUNTOS ACOTADOS
19. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN EN CONJUNTOS ACOTADOS $\underline{\underline{A}}$

1 Integración múltiple en conjuntos acotados

El objetivo es integrar en un conjunto acotado genérico en lugar de en un intervalo. Para ello, trasladaremos la complejidad del dominio de integración a la función a integrar.

$$f : C \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$



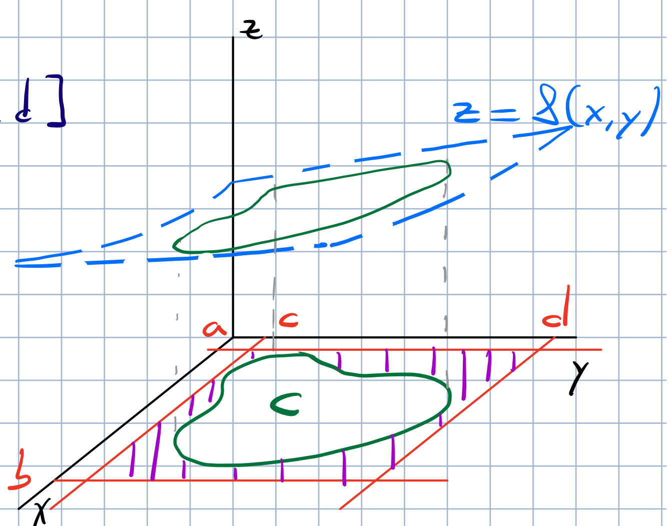
$$\int_C f \ \exists \ \text{si} \ \begin{cases} f \text{ acotada en } C \\ + \\ f \text{ continua en } C - D \end{cases}$$

(D es un conjunto de contenido nulo)

DEM

Definimos el intervalo $[a,b] \times [c,d]$ tal que $C \subset I$ (ver dibujo).

Construimos la función f^*



$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } \bar{x} \in C \\ 0 & \text{si } \bar{x} \notin C \end{cases}$$

De modo que $\int_C f = \int_I f^*$ (f^* se integra en un dominio mayor, pero todo lo que queda fuera de C, vale 0)

¿Funciona esto para cualquier C?

Ponemos el requisito de que exista $\int_I f^*$, es decir, que f^* sea integrable en I.

Recordatorio

Sea $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$ y $f: I \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ acotada. Si f es continua en $I - C$ y C es un conjunto de contenido nulo, entonces f es integrable en I

* C es un conjunto de contenido nulo en $\mathbb{R}^p$ si: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un recubrimiento finito de C

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \ / \ C \subset R \quad \text{con } \mu(R) \leq \varepsilon$$

De forma que necesito que ∂C (la frontera de C) sea un conjunto de contenido nulo.

Esto se cumple, entre otros casos, si ∂C puede escribirse como una unión finita de gráficas de funciones integrables.

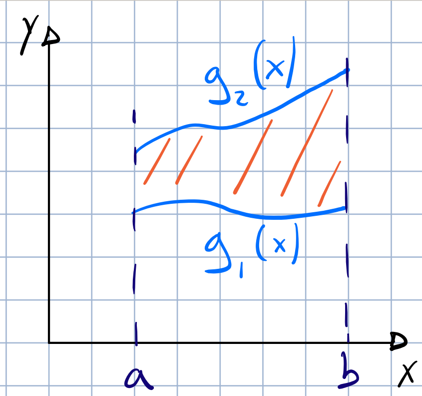
2 Integración en conjuntos simples

Decimos que $S \subset \mathbb{R}^p$ es simple si es acotado y limitado por gráficas de funciones integrables.

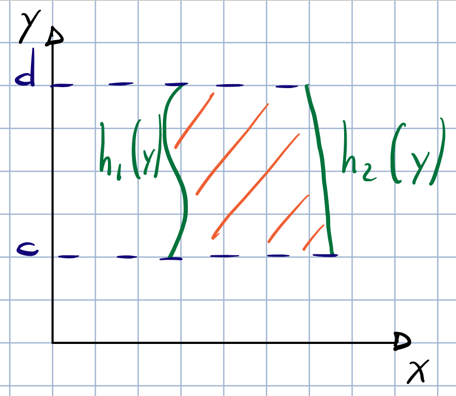
NOTA: en particular, si está limitado por gráficas de funciones continuas ~~lo~~ será simple.

$\mathbb{R}^2$ Distinguimos conjuntos x-simple e y-simple

y-simple



x-simple



$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases} \right\} \qquad S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases} \right\}$$

De modo que las integrales resultantes podrían calcularse como:

$$\iint_S f(x,y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \qquad \iint_S f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

$\mathbb{R}^3$ Si las integrales dobles son en un área (conjunto de $\mathbb{R}^2$) las triples son en un volumen (conjunto de $\mathbb{R}^3$)

En $\mathbb{R}^3$, Tendríamos Tres casos:

① $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \in D \,,\, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \}$

Con D un conjunto x-simple o y-simple

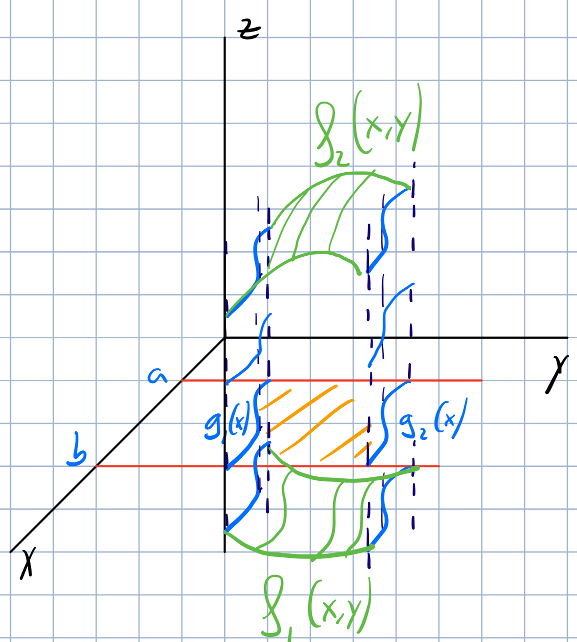
② $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,z) \in D \,,\, g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z) \}$

Con D un conjunto x-simple o z-simple

③ $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (y,z) \in D \,,\, h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z) \}$

Con D un conjunto y-simple o z-simple

Nos centramos en el caso ①



El dominio S, sería el encerrado por las líneas rojas ($x=a$, $x=b$), las curvas azules ($g_1(x)$, $g_2(x)$) y las superficies verdes ($f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$)

En este caso, se podría calcular la integral como:

$$\iiint_S F(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Nota: el resto de casos se calculan de forma análoga

3 Propiedades de las integrales en conjuntos simples

Sean $f, g : S \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en S (conjunto simple)

1. Linealidad. $\int_S k(f \pm g) = k\int_S f \pm k\int_S g$

2. Producto y cociente. $f \cdot g$ es integrable en S

   $g(x) \geq c > 0 \longrightarrow f/g$ es integrable en S

3. Monotonía : $f \leq g$ en $S \longrightarrow \int_S f \leq \int_S g$

4. Valor absoluto: $|f|$ es integrable en S y $\left|\int_S f\right| \leq \int_S |f|$

5. Aditividad: $S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ con $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j \longrightarrow \int_S f = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} f$

Nota: son las propiedades de integrales en intervalos adaptadas al caso de conjuntos simples

4 Teorema del valor medio integral en conjuntos simples

Sean $f : S \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en un conjunto simple S

$\rightarrow$ Si f es integrable en $S \longrightarrow \exists c \in [\underset{\text{mínimo}}{m}, \underset{\text{máximo}}{M}] \,/\, \int_S f = c\,\mu(S)$

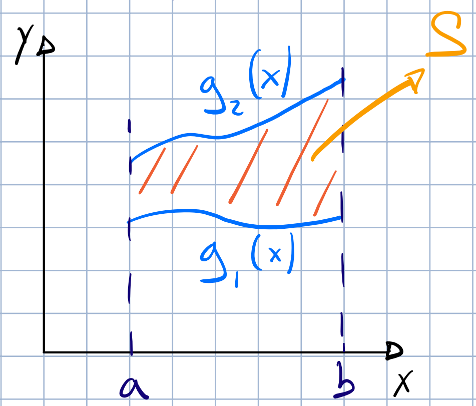
$\rightarrow$ Si f es continua en $S \longrightarrow \exists \bar{x}_0 \in S \,/\, \int_S f = f(\bar{x}_0) \cdot \mu(S)$

NOTA: $\mu(S)$ es la medida de S y se define como

$$\mu(S) = \int_S 1 \quad . \quad \begin{array}{l} \text{Si } S \in \mathbb{R}^2, \ \mu(S) \text{ es el área de } S \\ \text{Si } S \in \mathbb{R}^3, \ \mu(S) \text{ es el volumen de } S. \end{array}$$

DEM

Suponganmos que $S \in \mathbb{R}^2$ y-simple



$$\mu(S) = \iint_S 1 \, dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 \, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b \left(g_2(x) - g_1(x) \right) dx$$

Área naranja

§ Conjuntos medibles y una condición suficiente de integrabilidad

DEF. → Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^p$ es medible si está acotado y $\exists \, \mu(C)$.

→ Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^p$ es medible si y solo si:
- → C está acotado
- → Su frontera (∂C) tiene contenido nulo.

Una condición suficiente de integrabilidad

Sea una función $f: C \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Si C es medible, f está acotada en C y si f es continua salvo en un subconjunto de C de contenido nulo, entonces f es integrable en C.

6 (Material suplementario). Condición necesaria y suficiente de integrabilidad y conjunto de Cantor

Condición necesaria y suficiente para la integrabilidad de Riemann [editar]

En este apartado nos referiremos a funciones acotadas en un intervalo cerrado $[a, b]$ (igual que en los apartados anteriores).

Una función no ha de ser continua para ser integrable de Riemann (no obstante esta es una condición suficiente); de hecho una función continua en todo el intervalo salvo en un punto es integrable de Riemann, incluso una función con un número numerable de discontinuidades es integrable y en el caso extremo ciertas funciones con un número no numerable de discontinuidades pueden ser integrables. El siguiente teorema establece que una función es integrable si y solo si su conjunto de discontinuidades se puede recubrir por conjuntos abiertos tales que la suma de sus anchuras puede hacerse arbitrariamente pequeña.

> **Criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemann**
>
> Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$ y sea D el conjunto de las discontinuidades de f en $[a, b]$. Entonces $f \in R$ (con R el conjunto de las funciones Riemann integrables) en $[a, b]$ si, y solo si, D tiene medida cero.

De este modo, **cualquier función continua o con un conjunto numerable de discontinuidades es integrable**. Como ejemplo de función con un conjunto no numerable de discontinuidades e integrable tenemos por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in C \\ 0, & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

siendo C el conjunto de Cantor.

El **conjunto de Cantor**, llamado así por ser aporte de Georg Cantor[1] en 1883, es un destacado subconjunto fractal del intervalo real [0, 1], que admite dos definiciones equivalentes:

- la definición numérica: es el conjunto de todos los puntos del intervalo real [0,1] que admiten una expresión en base 3 que no utilice el dígito 1.
- la definición geométrica, de carácter recursivo, que elimina en cada paso el segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo.

Además de una curiosidad matemática, contradice una intuición relativa al tamaño de objetos geométricos: es un conjunto de medida nula, pero no es vacío ni numerable.[2]

Conjunto de medida nula cuyos pts de discontinuidad tienen contenido

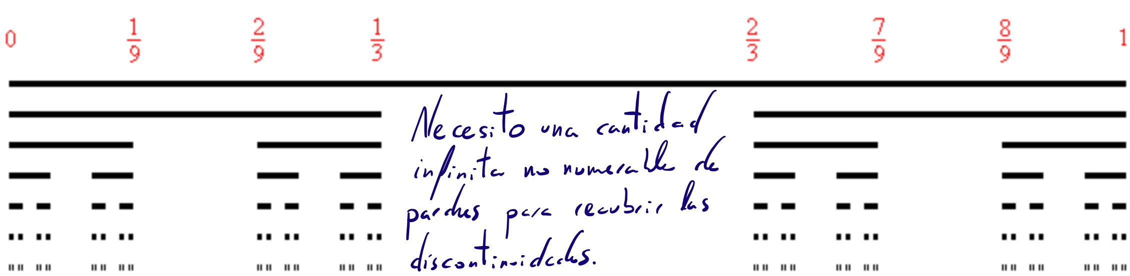
Contenido nulo
↓
Medida nula

Construcción geométrica [editar]

Se construye de modo recursivo dando los siguientes pasos:

- El primer paso es tomar el intervalo [0, 1].
- El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir el intervalo abierto (1/3; 2/3).
- El tercero es quitar a los dos segmentos restantes sus respectivos tercios interiores, es decir los intervalos abiertos (1/9; 2/9) y (7/9; 8/9).
- Los pasos siguientes son idénticos: quitar el tercio de todos los intervalos que quedan. El proceso no tiene fin.

La figura muestra las siete primeras etapas:



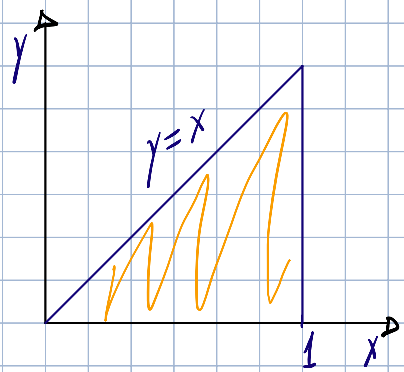
Necesito una cantidad infinita no numerable de pardas para recubrir las discontinuidades.

El conjunto de Cantor es el conjunto de los puntos restantes: entre ellos, es claro que los extremos de cada subintervalo pertenecen 0 y 1, 1/3 y 2/3, 1/9, 2/9, 7/9 y 8/9, 1/27..., hay una infinidad de puntos: los $1/3^n$ están todos incluidos, con n describiendo los naturales. Pero hay mucho más, por ejemplo 1/4 es un elemento del conjunto de Cantor.

FUENTE: WIKIPEDIA

7 Ejemplos

① $$\iint_A (x+2y)\,dA \qquad \text{con} \qquad A = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big/ \begin{matrix} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq x \end{matrix} \right\}$$



Este dominio es de tipo y-simple de modo que:

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^x (x+2y)\,dy \right) dx = \int_0^1 xy + y^2 \Big|_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x\cdot x + x^2 - x\cdot 0 + 0^2 \right) dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

En realidad, tb habría podido considerar el dominio como x-simple

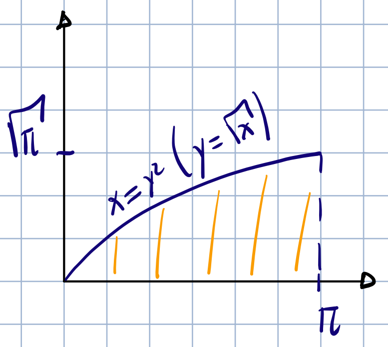
$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \qquad A = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big/ \begin{matrix} y\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1 \end{matrix} \right\}$$

He cambiado la forma de expresar el dominio, pero este sigue siendo el mismo

$$= \int_0^1 \left(\int_y^1 (x+2y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + 2yx \Big|_y^1 dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2y - \frac{y^2}{2} - 2y^2 \right) dy = \frac{1}{2}y + y^2 - \frac{5}{6}y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

② $\iint_A y\sin(x^2)\,dA$ con $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} y^2 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sqrt{\pi} \end{array}\right\}$



El problema está planteado como x-simple

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\left(\int_{y^2}^{\pi} y\sin(x^2)\,dx\right)dy$$

Resolverlo de esta forma implica calcular

$$\int y\sin(x^2)\,dx$$

Intento plantear el problema como y-simple para ver si queda más fácil

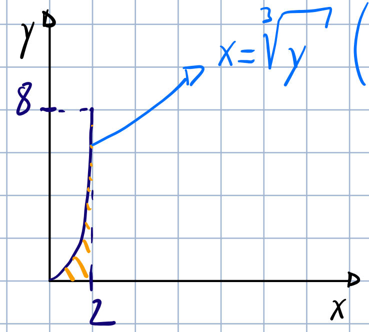
$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{array}\right\}$

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sqrt{x}} y\sin(x^2)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi} \frac{y^2}{2}\sin(x^2)\Big|_0^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin(x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos(x^2)\Big|_0^{\pi} = \frac{1-\cos\pi^2}{4}$$

Moraleja: si obtengo una integral complicada usando un dominio de tipo x-simple, puedo intentar reescribirlo como un dominio de tipo y-simple e intentar integrar por si se simplifica.

③ $\int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\, dx \right) dy$ ¿$\int \sqrt{x^4+1}\, dx$? Intentamos invertir el orden.



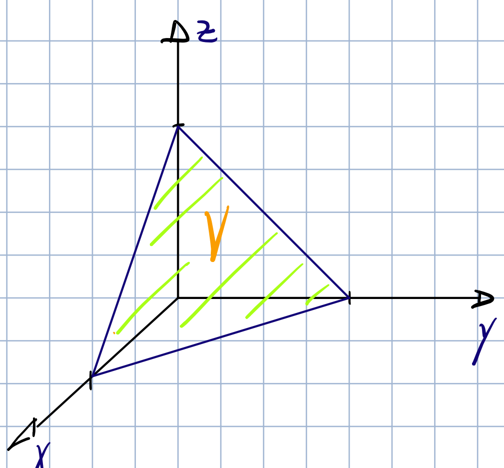
x-simple: $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \sqrt[3]{y}\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 8\}$

y-simple $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq x^3\}$

$$\int_0^2 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\, dy \right) dx = \int_0^2 y\sqrt{x^4+1}\Big|_0^{x^3} dx = \int_0^2 x^3\sqrt{x^4+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 4x^3\sqrt{x^4+1}\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\left(x^4+1\right)^{3/2} \right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(17^{3/2}-1\right)$$

④ 19.2 Sea C el tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Calcular $\iiint_V (x+y+2z)\, dV$



Los planos que delimitan el tetraedro son: $x=0$; $y=0$; $z=0$; $ax+by+cz=1$

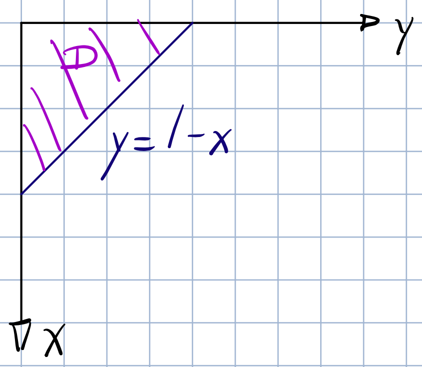
$ax+by+cz=1$ pasa por los vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ de modo que:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0=1 \rightarrow a=1 \\ a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 0=1 \rightarrow b=1 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1=1 \rightarrow c=1 \end{array}\right\} \underline{x+y+z=1}$$

Planteo el problema como un "tipo 1" de $\mathbb{R}^3$.

① $$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x,y)\in D \,,\, f_1(x,y)\leq z\leq f_2(x,y)\}$$

En este caso, el dominio simple D, sería:



$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, 0\leq x\leq 1 \,,\, 0\leq y\leq 1-x\}$$

Mientras que $f_1(x,y)$ sería $z=0$ y $f_2(x,y)$ sería $z=1-x-y$

De modo que

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R} \,/\, 0\leq x\leq 1 \,,\, 0\leq y\leq 1-x \,,\, 0\leq z\leq 1-x-y\}$$

En este caso, se podría calcular la integral como:

$$\iiint_S F(x,y,z)\,dV = \int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(x+y+2z)\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\int_0^{1-x} xz+yz+z^2\Big|_0^{1-x-y}\,dy\,dx =$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x(1-x-y)+y(1-x-y)+(1-x-y)^2\right)dy\,dx =$$

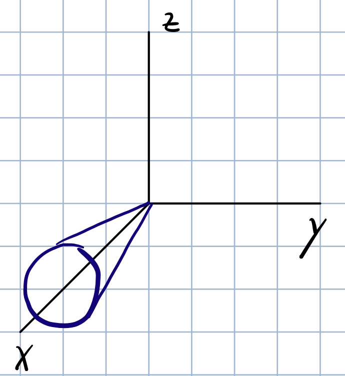
$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x-\cancel{x^2}-\cancel{xy}+y-\cancel{xy}-\cancel{y^2}+1-2x-2y+\cancel{2xy}+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}\right)dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx=\int_0^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(1-x-x+x^2-\frac{1+x^2-2x}{2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1/6$$

5 Plantear $\iiint_E dV$, con $E=\begin{cases} x\geq\sqrt{y^2+z^2} \\ 0\leq x\leq 4\end{cases}$



Las integrales triples podemos plantearlas como:

1 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x,y)\in D\ ,\ f_1(x,y)\leq z\leq f_2(x,y)\}$

Con D un conjunto x-simple o y-simple

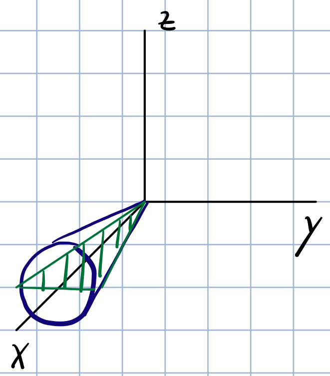
2 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x,z)\in D\ ,\ g_1(x,z)\leq y\leq g_2(x,z)\}$

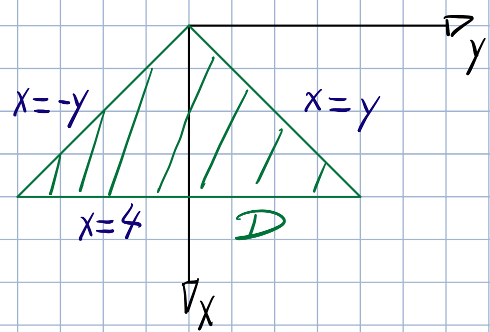
Con D un conjunto x-simple o z-simple

3 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (y,z)\in D\ ,\ h_1(y,z)\leq x\leq h_2(y,z)\}$

Con D un conjunto y-simple o z-simple

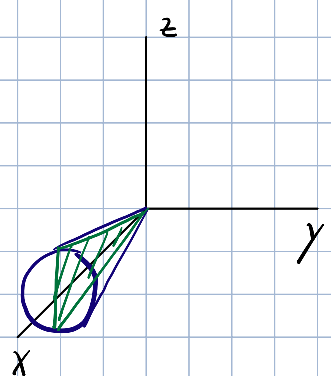
Si planteamos este problema como uno de tipo ①, tenemos:

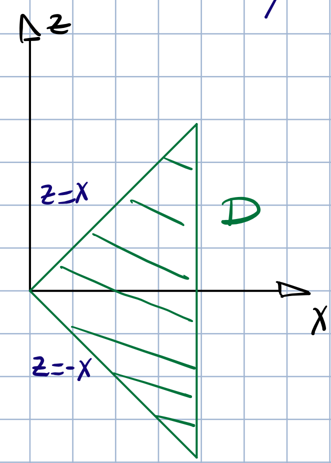




$$S = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \left| \begin{array}{l} (x,y) \in D \\ -\text{cono} \leq z \leq \text{cono} \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 4 \\ -x \leq y \leq x \end{array}\right\} D \\ -\sqrt{x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2-y^2} \end{array} \right.$$

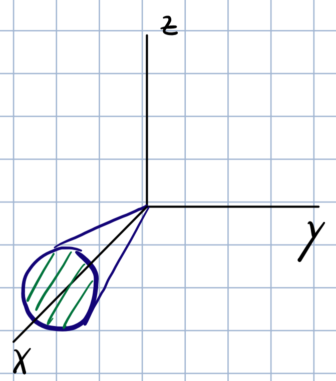
Si planteamos este problema como uno de tipo ②, tenemos:

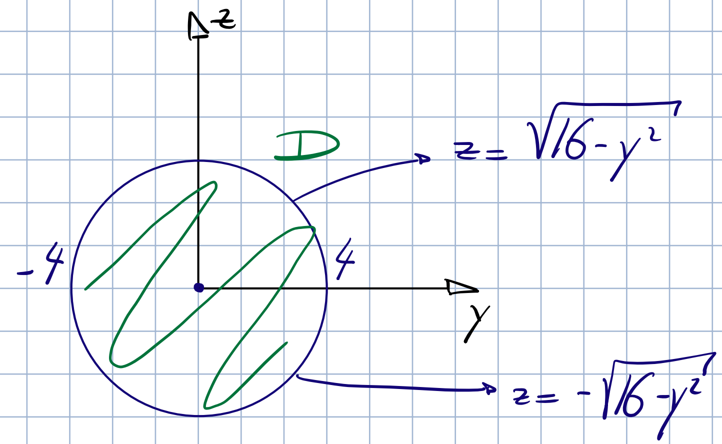




$$S = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \left| \begin{array}{l} (x,z) \in D \\ -\text{cono} \leq y \leq \text{cono} \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 4 \\ -x \leq z \leq x \end{array}\right\} D \\ -\sqrt{x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{x^2-z^2} \end{array} \right.$$

Si planteamos este problema como uno de tipo ③, tenemos:





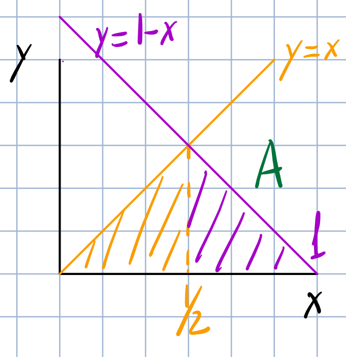
$$S = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left| \begin{array}{l} (y,z) \in D \\ \text{cono} \leq x \leq 4 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{c} -\sqrt{16-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-y^2} \\ -4 \leq y \leq 4 \\ \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq 4 \end{array} \right\} D$$

EJERCICIOS (Problemas al capítulo V)

V.3 Se considera el conjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1/2,\ 0 \leq y \leq x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1/2 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$$

Calcular $\iint_A y\,dx\,dy$



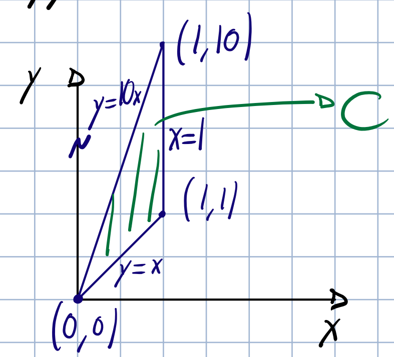
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1/2,\ y \leq x \leq 1-y\}$$

$$\int_0^{1/2}\int_y^{1-y} y\,dx\,dy = \int_0^{1/2} y\,x\Big|_y^{1-y} dy = \int_0^{1/2} y(1-y-y)\,dy = \int_0^{1/2}(y-2y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{2}{38} = \frac{1}{24}$$

V4

ⓐ $\iint_C \sqrt{xy - x^2}\, dx\,dy$, $C \equiv$ triángulo de vértices $((0,0),(1,1),(1,10))$



Lo primero es pensar si me interesa un dominio tipo y-simple o x-simple.

y simple $\longrightarrow \int_a^b \int_{f_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{xy - x^2}\, dy\, dx$

x simple $\longrightarrow \int_c^d \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{xy - x^2}\, dx\, dy$

En este caso, eligiremos un dominio y-simple puesto que la integral queda más sencilla.

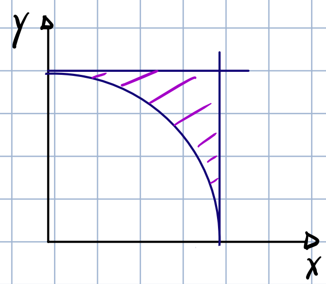
$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 10x \end{array} \right\}$$

$$\int_0^1 \int_x^{10x} \sqrt{xy - x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{2}{3} \left(xy - x^2\right)^{3/2} \Big|_x^{10x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{2}{3} \left(9x^2\right)^{3/2} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3} \frac{1}{x}\, 27 x^3\, dx = \int_0^1 18x^2\, dx = \frac{18}{3} x^3 \Big|_0^1 = 6$$

ⓑ $\displaystyle\iint_C \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, $C = \{ 1^{er}$ cuadrante, $x=1$, $y=1$, $x^2+y^2=1 \}$

Por la simetría particular del problema, el orden de integración no afecta a la dificultad de la integral.



$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 1 , \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 \}$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x \ln(1+x^2+y^2) \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x \left[\ln(2+x^2) - \ln(2) \right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x \ln\left(\frac{2+x^2}{2}\right) dx \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2+x^2}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{2+x^2}{2}\right) - 1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - 1\right) - 1\left(\ln 1 - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{3/2 \ln(3/2) - 1/2}{2} = \frac{3\ln(3/2) - 1}{4}$$

$$* \ \frac{1}{2}\int x \ln\left(\frac{2+x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2} u(\ln(u) - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2+x^2}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{2+x^2}{2}\right) - 1\right)$$

$u = \dfrac{2+x^2}{2}$, $du = x\,dx$

Por partes

V.11

$$\iint_C \frac{dx\,dy}{3+2y^5} \quad \text{en} \quad C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq y^4\}$$

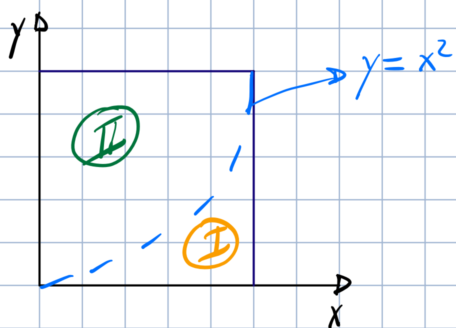
Este problema queda más sencillo si integramos primero en x y después en y.

$$\int_0^1\int_0^{y^4} \frac{dx\,dy}{3+2y^5} = \int_0^1 \frac{x}{3+2y^5}\Big|_0^{y^4} dy = \int_0^1 \frac{y^4}{3+2y^5}\,dy = \frac{1}{10}\int_0^1 \frac{10y^4}{3+2y^5}\,dy =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left(3+2y^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}\ln\left(5/3\right)$$

V.15 Sean $f(x,y)=x^2$ y $g(x,y)=y$. Calcular $\iint_{[0,1]\times[0,1]} |f-g|\,dx\,dy$.

$$|f-g| = |x^2-y| = \begin{cases} x^2-y & \text{si } x^2\geq y \quad \mathrm{I} \\ y-x^2 & \text{si } x^2<y \quad \mathrm{II} \end{cases}$$



Integro las funciones I y II por separado, cada una en su dominio de definición dentro del intervalo $[0,1]\times[0,1]$.

I
$$\int_0^1\int_0^{x^2} (x^2-y)\,dy\,dx = \int_0^1 x^2y-\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{x^5}{10}\Big|_0^1 =$$

$$= 1/10$$

(II)

$$\int_0^1\int_{x^2}^1 (y-x^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} - x^2 y\Big|_{x^2}^1 dx = \int_0^1\left(+\frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4\right)dx =$$

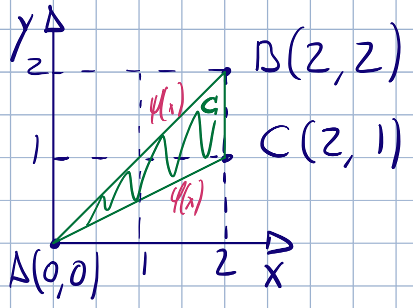
$$= +\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30}$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} |f-g|\,dx\,dy = \overset{\text{I}}{\int_0^1\int_0^{x^2}(x^2-y)\,dy\,dx} + \overset{\text{II}}{\int_0^1\int_{x^2}^1 (y-x^2)\,dy\,dx} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{8}{30} = \frac{11}{30}$$

19.1 Calcular $\int_C f$ por integración iterada, donde C es el triángulo $A(0,0)$, $B(2,2)$ y $C(2,1)$ y $f(x,y)=x^4e^{x^2y}$.

19.1 (Guiones)



$\int_C f \qquad f = x^4 e^{x^2 y}$

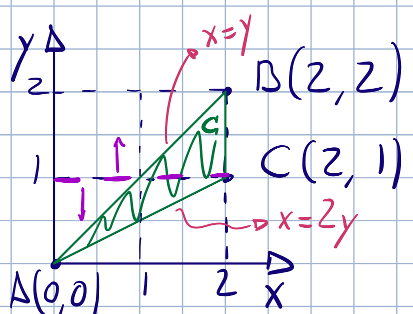
$I = [0,2]\times[0,2] \to$ Incluye al conjunto

$$\int_0^2 dx \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} x^4 e^{x^2y}\, dy\right) = \qquad \varphi(x)=\frac{x}{2} \ ; \ \psi(x) = x$$

$$= \int_0^2 dx \left(\int_{x/2}^{x} x^4 e^{x^2 y}\, dy\right) = \int_0^2 dx \left(x^2 e^{x^2 y}\Big|_{x/2}^{x}\right) = \int_0^2 x^2\left(e^{x^3} - e^{x^3/2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{e^{x^3}}{3} - \frac{2}{3}e^{x^3/2}\right]_0^2 = \frac{e^8-1}{3} - \frac{2}{3}(e^4-1) = [\dots] = \frac{(e^4-1)^2}{3}$$

Podríamos haber intentado el problema anterior al revés



$$\int_0^2 dy \left(\int_0^2 f_C\right) = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^4 e^{x^2y}\, dx \ +$$

$$+ \int_1^2 dy \left(\int_y^{2y} x^4 e^{x^2y}\, dx\right)$$

Esta primitiva no es sencilla, así que este orden no es aconsejado.

Nota sobre el cálculo práctico de integrales:

* Por Fubini

$$\int_c^d \int_a^b f(x) \cdot g(y) \, dx \, dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) \, dy$$

Prueba

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x) \cdot g(y) \, dx \right) dy = \int_c^d g(y) \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) dy = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \int_c^d g(y) \, dy$$

Ejemplo:

$$\int_0^1 dy \int_1^2 xy \, dx = \int_0^1 y \, dy \cdot \int_1^2 x \, dx = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$