21. CURVAS PLANAS Y ALABEADAS I

A.- Curvas planas y alabeadas

B.- Longitud de arco

1 INTRODUCCIÓN

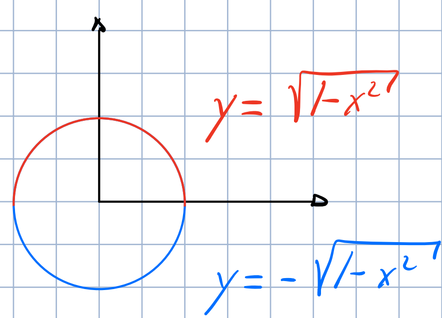
Formas de expresar una función

- $*$ explícita: $y = f(x)$
- $*$ implícita: $F(x,y) = 0$
- $*$ paramétrica: $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ Geometría diferencial.

Ejemplo:

Forma explícita

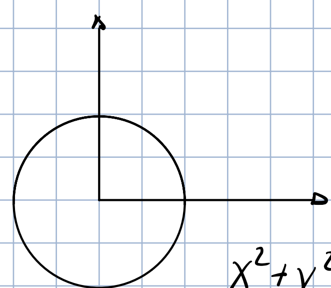
$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{x} \longrightarrow f(\bar{x})$$



Forma implícita

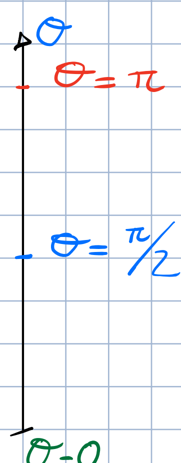
$$F(\bar{x}; y): \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{x}, y) \longrightarrow F(\bar{x}; y)$$

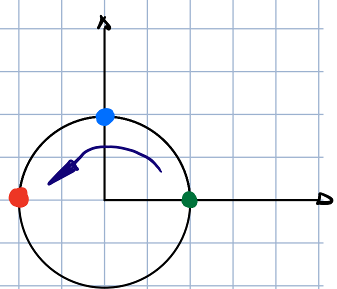
$F(\bar{x}; y) = 0$



Forma paramétrica

$$\bar{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow \bar{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$





$$\bar{r}(\theta) = (\underset{x}{\cos\theta}, \underset{y}{\sin\theta})$$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$\bar{r}(t)$ es una función vectorial en el plano o en el espacio.

$$\bar{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \bar{r}(t) = (x(t), y(t))$$

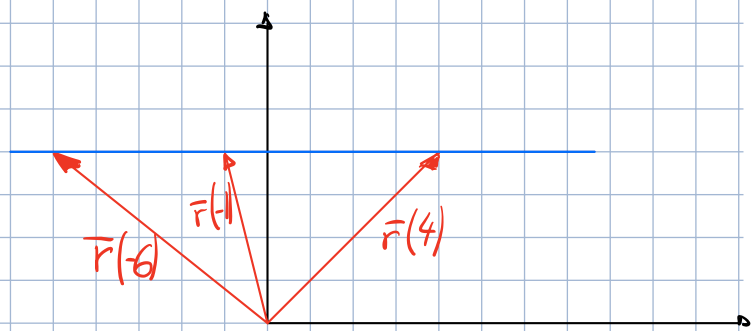
Plano

$$\bar{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Espacio

Ejemplos:

$$\bar{r}(t) = (t, 4) = (0,4) + t(1,0)$$



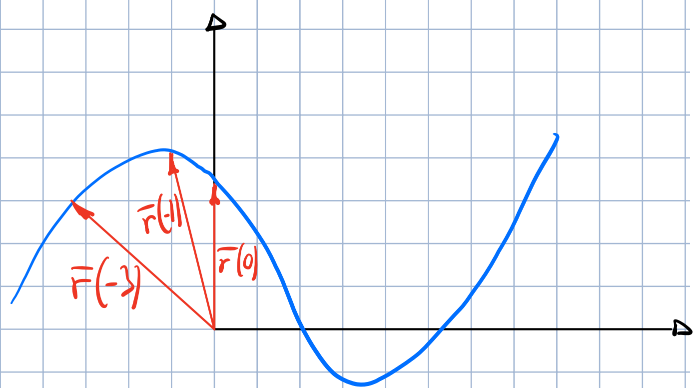
$$\bar{r}(t) = (t, t^3 - 10t + 7)$$

$t = -3 \longrightarrow \bar{r}(-3) = (-3, 10)$

$t = -1 \longrightarrow \bar{r}(-1) = (-1, 16)$

$t = 0 \longrightarrow \bar{r}(0) = (0, 7)$

$t = 1 \longrightarrow \bar{r}(1) = (1, -2)$



(Representación aproximada)

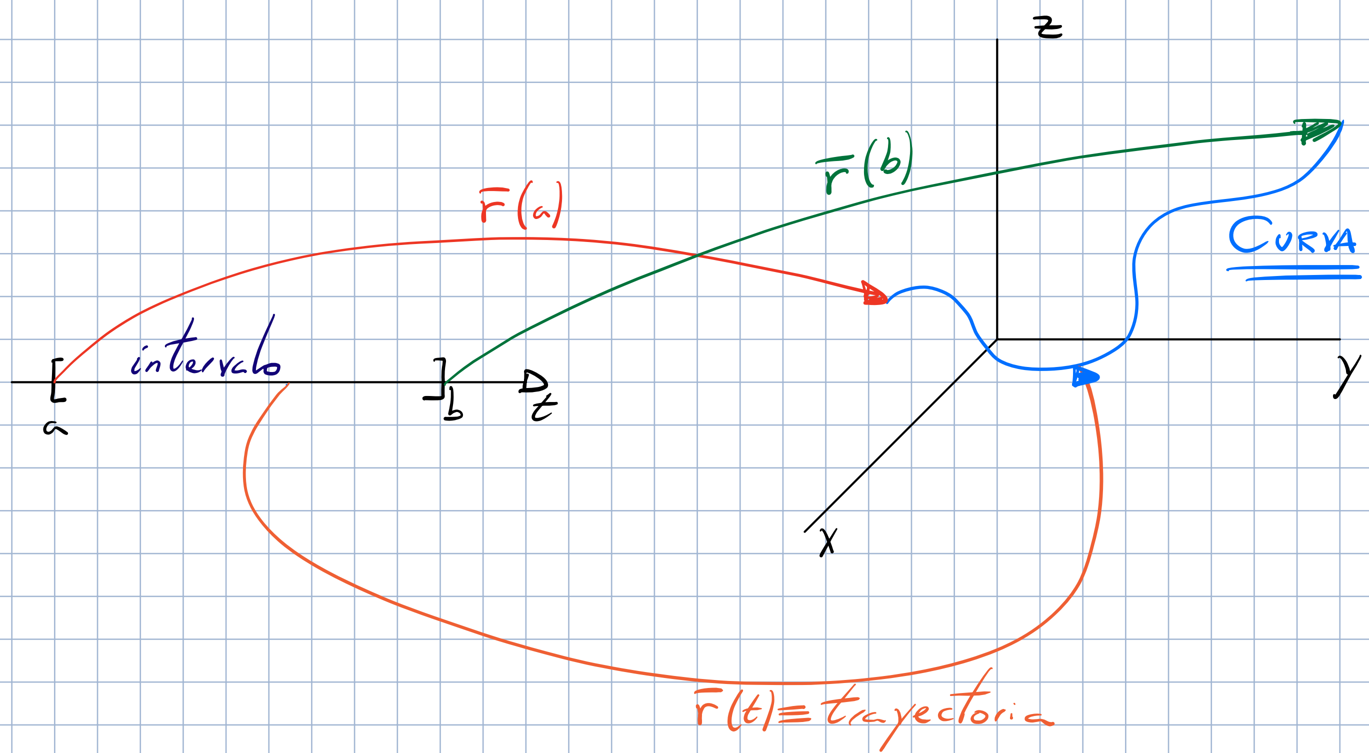
2 Definición

Una curva continua $C \subset \mathbb{R}^n$ es la imagen de una aplicación vectorial continua $\bar{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{2,3}$.

→ A la función $\bar{r}(t)$ se le llama trayectoria o parametrización de C con parámetro $t \in [a,b]$

→ A C se le llama curva parametrizada por $\bar{r}(t)$

La curva es el conjunto de puntos.
La trayectoria es la función continua $\bar{r}(t)$ + intervalo $[a,b]$



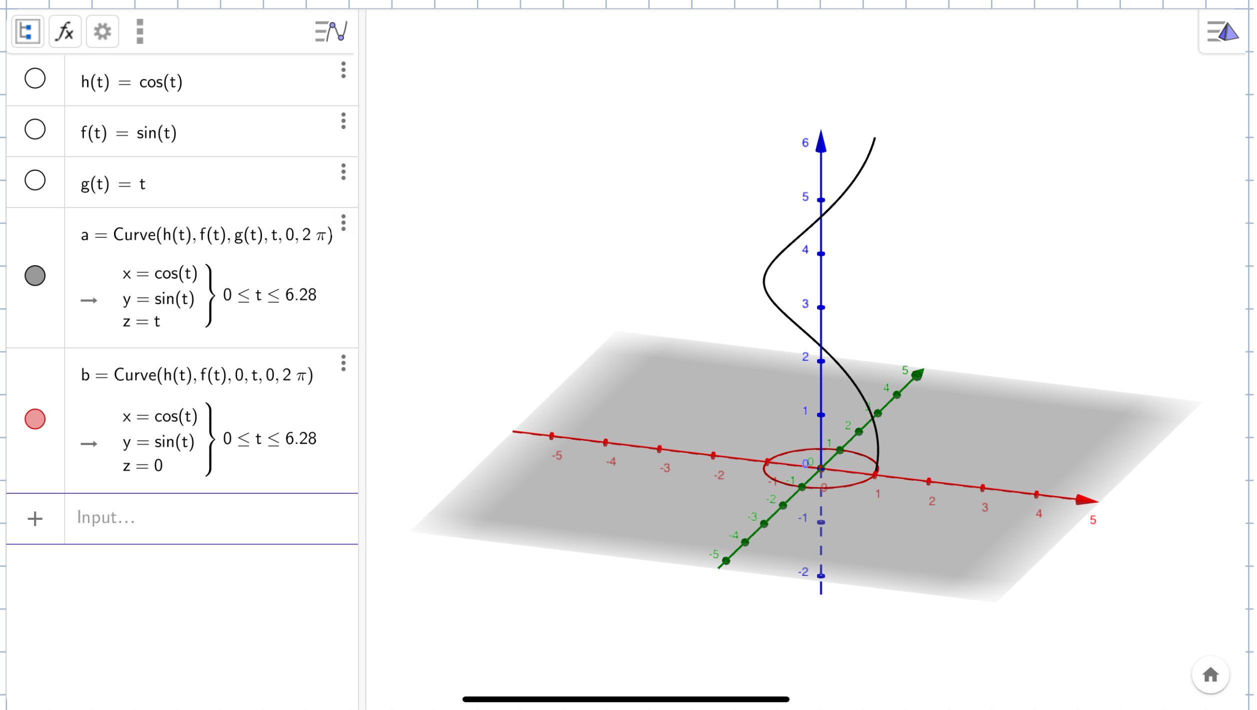
3 Tipos

Curvas planas: contenidas en un plano (en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$)
Curvas alabeadas: curvas de $\mathbb{R}^3$ no contenidas en un plano

Ejemplo:

Alabeada

Plana



4 PARAMETRIZACIONES

Una curva admite infinitas parametrizaciones

Ejemplo: $y = x^2$ en $x \in [-1, 1]$

$\bar{r}_1 : I = [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longrightarrow \bar{r}_1(t) = (t, t^2)$

$\bar{r}_2 : I = [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longrightarrow \bar{r}_2(t) = \left(\frac{t}{2}, \left(\frac{t}{2}\right)^2\right)$

$\bar{r}_3 : I = [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longrightarrow \bar{r}_3(t) = (t^3, t^6)$

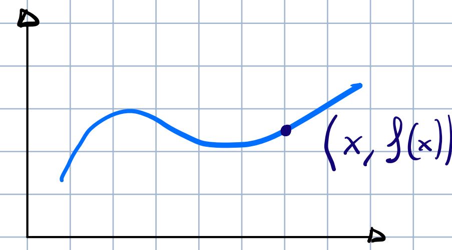
$\bar{r}_4 : I = [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longrightarrow \bar{r}_4(t) = (\cos(t), \cos^2(t))$

Son 4 parametrizaciones de la misma curva. ¿Hay alguna superior/mejor que las demás? Destacamos dos:

$\rightarrow$ Explícita: $x(t) = t$
(gráficas de funciones) $y(t) = f(x(t)) = f(t)$

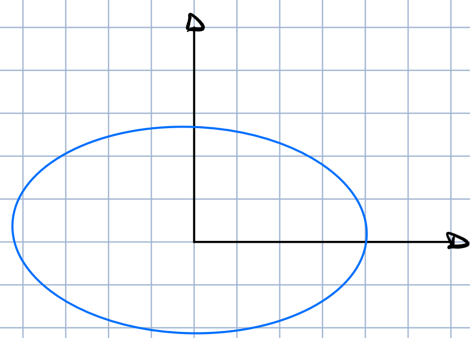
$\bar{r}(t) = (t, f(t))$

La curva es la gráfica de $y=f(x)$



→ Implícita. (curvas de nivel)

• Curva plana $F(x,y)=0$



Parametrización local $(x,\ y(x))$

$(x(y),\ y)$

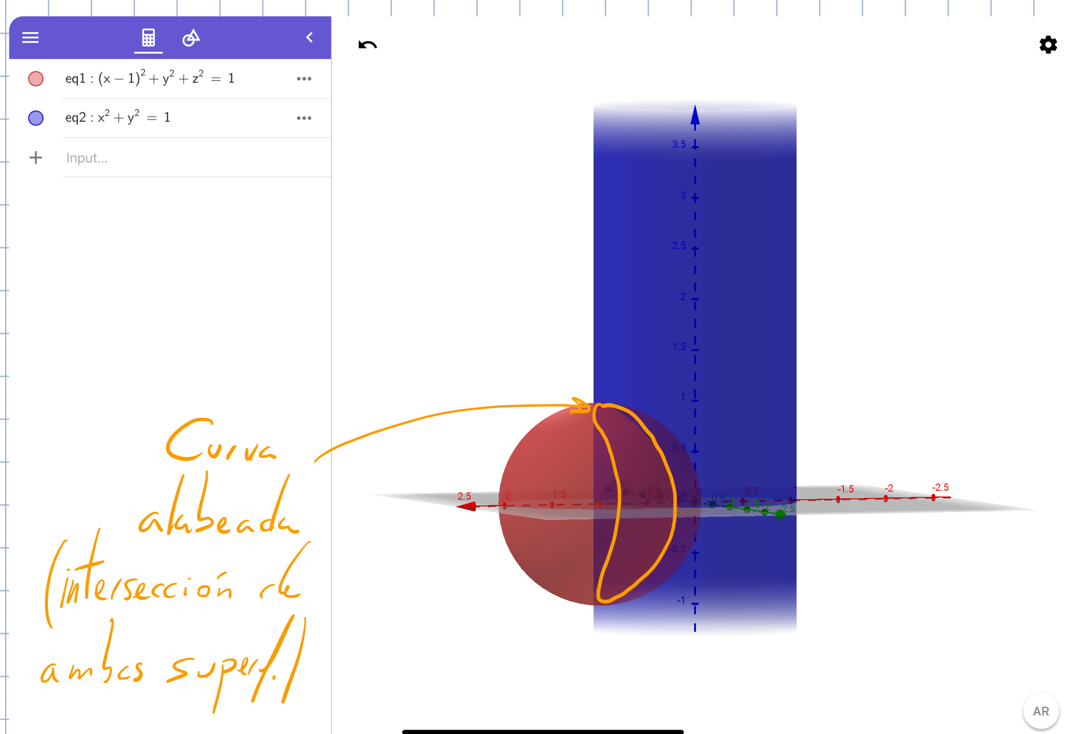
• Curva alabeada $F(x,y,z)=0$ eq1

$G(x,y,z)=0$ eq2

Parametrización local $(x,\ y(x),\ z(x))$

$(x(y),\ y,\ z(y))$

$(x(z),\ y(z),\ z)$

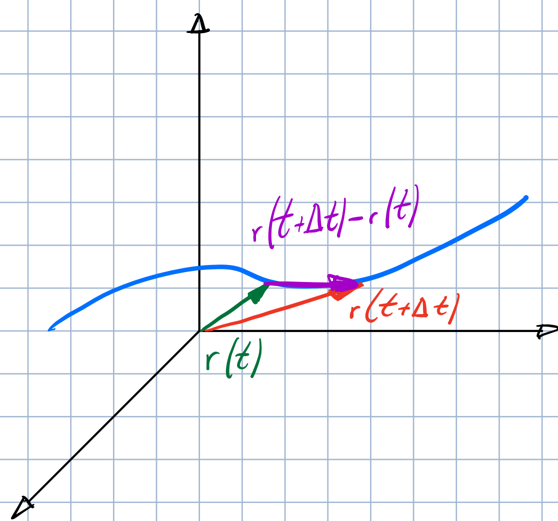


Curva alabeada (intersección de ambas superf.)

5 Vector y recta tangente

Dada una curva parametrizada $C \equiv \overline{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, el vector tangente es

$$\overrightarrow{v} = \overline{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t}$$



- $\overline{v}(t_0) = \overline{r}'(t_0)$ es el vector tangente a la curva en $\overline{r}(t_0)$
- $T(t_0) = \dfrac{\overline{r}'(t_0)}{\|\overline{r}'(t_0)\|}$ es el vector tangente unitario en $\overline{r}(t_0)$
- $\overline{r_t}(t) = \overline{r}'(t_0)(t - t_0) + \overline{r}(t_0)$ es la ecuación de la recta tangente en $\overline{r}(t_0)$

Ejemplo: Hallar la recta tangente a la curva C

$$C : \overline{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \text{ en } t = \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$
$$\overline{r}(\pi/2) = (0, 1, \pi/2)$$
$$\overline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$
$$\overline{r}'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$$

De modo que $\overline{r_t}(t) = \overline{r}'(t_0)(t - t_0) + \overline{r}(t_0)$

$$\overline{r_t}(t) = (-1, 0, 1)(t - \pi/2) + (0, 1, \pi/2) = (\pi/2 - t, 1, t)$$

6 Definiciones asociadas a curvas $\quad C \equiv \bar{r}(t): [a,b] \to \mathbb{R}^n$

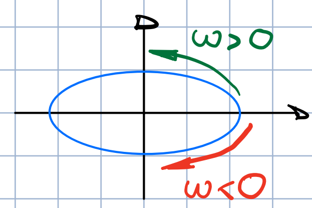
a Curva cerrada. $\quad \bar{r}(a) = \bar{r}(b)$

Ejemplo: $\bar{r}(t) = (\underbrace{x_0 + a\cos\omega t}_{x}, \underbrace{y_0 + b\sin\omega t}_{y}) \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}(0) = (x_0 + a, y_0) \\ \bar{r}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = (x_0 + a, y_0) \end{array}\right| \text{Curva cerrada.}$$

¿Qué curva es? Pasamos de rep. paramétrica a rep. implícita.

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$



Sentido de recorrido de la curva depende del parámetro ω.

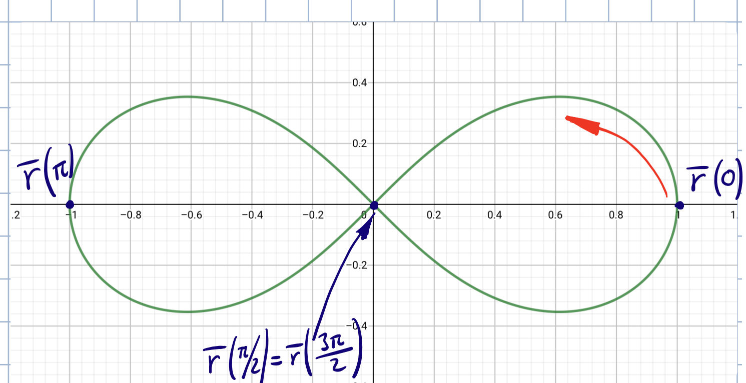
b Curva simple. Si $\forall t_1, t_2 \in (a,b)$ con $t_1 \neq t_2$ se cumple que $\bar{r}(t_1) \neq \bar{r}(t_2)$. No autointersecciones.

Ejemplo de curva **no** simple. Lemniscata de Bernouilli

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

$a = 1$

$$\bar{r}(t) = \left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1+\sin^2 t}\right)$$



C Curva regular. si admite parametrización regular.

Parametrización regular $\bar{r}: I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Una parametrización es regular si cumple:

1.- $\bar{r}(t) \in C^1 \ \forall t \in I$

2.- $\bar{r}'(t) \neq \bar{0} \ \forall t \in I$

Ejemplo:

$C \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2 ; x \in [-1,1]\}$ ¿es regular?

Este ejemplo ya lo vimos antes

$$\bar{r}_3 : I = [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \bar{r}_3(t) = (t^3, t^6)$$

$\bar{r}_3 \in C^1$ ✓

$\bar{r}_3' = (3t^2, 6t^5) \Rightarrow \bar{r}_3'(0) = (0,0)$ ✗

La parametrización $\bar{r}_3$ de la curva no es regular. Esto no implica que la curva no sea regular. De hecho:

$$\bar{r}_1 : I = [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \bar{r}_1(t) = (t, t^2)$$

$\bar{r}_1 \in C^1$

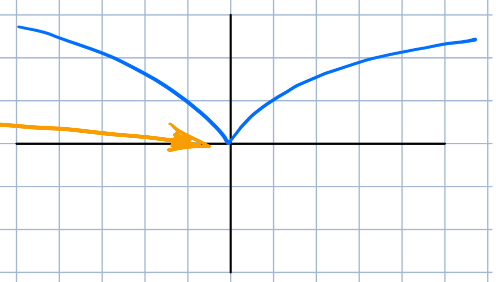
$\bar{r}_1' = (1, 2t) \neq (0,0) \ \forall t \in I$

Como admite una param. regular, la curva es regular.

Ejemplo de curva <u>no</u> regular

$\bar{r}(t) = (t^3, t^2)$

$\bar{r}'(t) = (3t^2, 2t) \Rightarrow \bar{r}'(0) = (0,0)$ X



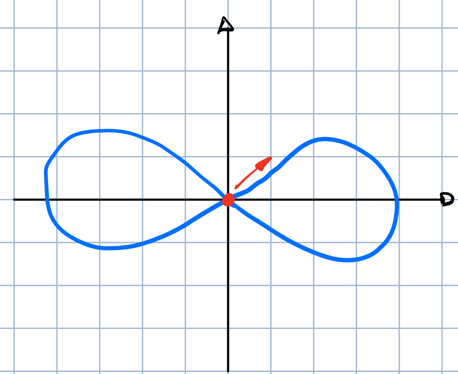
$\left.\begin{array}{l} x = t^3 \\ y = t^2 \end{array}\right\} \quad y = x^{2/3}$

Que la curva sea regular está relacionado con que $\exists$ la recta tangente.

Ejemplo de curva regular:

$\bar{r}(t) = (\sin t, \sin 2t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\bar{r}'(t) = (\cos t, 2\cos 2t)$



$x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$

$y = 0 \rightarrow 2t = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \ldots$

No se anulan ambas a la vez, luego la curva es regular. El hecho de que no sea simple $(\bar{r}(0) = \bar{r}(\pi))$ no es un problema para la regularidad.

7 Orientación de una curva

Se llama orientación de la curva simple y regular a la función continua

$$T: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow T(t) \longrightarrow \text{vector tangente unitario } \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}$$

Dada una parametrización $\bar{r}(t)$, la parametrización $\bar{r}^* = \bar{r}(a+b-t)$ recorre $\bar{r}(t)$ en sentido opuesto.

8 Cambios de parámetro

Una curva admite infinitas parametrizaciones. A partir de una parametrización de $C \equiv \bar{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se puede construir otra haciendo un cambio de parámetro.

Un cambio de parámetro admisible o regular cumple:

$$\varphi: \quad J = [c,d] \longrightarrow I = [a,b]$$
$$u \longrightarrow t = \varphi(u)$$

a $\varphi(u) = t$ función biyectiva de clase C^1

b $\varphi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in J$

De modo que

$$\bar{s}(u): \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi(u)} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$u \longrightarrow t \longrightarrow \bar{r}(t) = \bar{r}(\varphi(u)) = \bar{s}(u)$$

Propiedades

1. Si $\varphi'(u)>0$, $\forall u\in[c,d]$, $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b \rightarrow$ Preserva orientación

$\uparrow t \rightarrow \uparrow u$

2. Si $\varphi'(u)<0$, $\forall u\in[c,d]$, $\varphi(c)=b$, $\varphi(d)=a \rightarrow$ Invierte orientación

$\uparrow t \rightarrow \downarrow u$

3. Usando la regla de la cadena, si $\bar{r}(t)$ es regular

$$\bar{s}(u)\in C^1 : \bar{s}(u)=(\bar{r}\circ\varphi)=\bar{r}(\varphi(u))$$

$$\bar{s}'(u)=\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}=\underbrace{\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}}_{\substack{\neq\\0\\(\bar{r}(t)\text{ es regular})}}\cdot\underbrace{\varphi'(u)}_{\substack{\neq\\0\\(\text{cambio regular})}}\neq 0 \longrightarrow \bar{s}(u) \text{ es regular}$$

9 Caracterización de curvas regulares

Veamos en qué se traducen los criterios generales en los casos de parametrización explícita e implícita.

- Explícita

$\mathbb{R}^2$: $\bar{r}(t)=(t,f(t)) \longrightarrow \bar{r}'(t)=(1,f'(t))\neq(0,0)$

regular si $f(x)\in C^1$

$\mathbb{R}^3$: $\bar{r}(t)=(t,g(t),h(t)) \longrightarrow \bar{r}'(t)=(1,g'(t),h'(t))\neq(0,0,0)$

regular si $g,h\in C^1$

· Implícita

$\mathbb{R}^2$: $C \equiv F(x,y) = 0$ regular si $F(x,y) \in C^1$
$\nabla F(x,y) \neq (0,0)$

Estas dos condiciones nos aseguran que la curva admite parametrizaciones explícitas locales, C^1, (TFImplícita) ya sea $(x, y(x))$ o $(x(y), y)$.

Recordemos que la recta tangente a una curva de nivel era:

$$\nabla F \cdot (\overline{x} - \overline{x_0}) = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$\mathbb{R}^3$: $C \equiv \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ regular si $F, G \in C^1$
$\nabla F(\overline{x}) \times \nabla G(\overline{x}) \neq \overline{0}$

con $F(\overline{x})$ y $G(\overline{x}) = 0$, entonces por el TFImplícita la curva admite parametrización local explícita de clase C^1.

En este caso, el vector tangente es: $\nabla F(\overline{x}) \times \nabla G(\overline{x})$

DEM

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \vec{k} \neq$$

$$\neq (0,0,0)$$

Al menos uno de ellos es $\neq 0$ por lo que puedo despejar localmente dos variables en función de una que actuará como v. indep.

Sin pérdida de generalidad, asumimos que x puede actuar como variable independiente

Expresión del vector tangente: (admite rep. explícita local)

$$\bar{r}(x, f(x), g(x)) \longrightarrow \bar{r}'(x) = (1, f'(x), g'(x))$$

Voy a intentar calcular $f'(x)$ y $g'(x)$.

$$F(x, f(x), g(x)) = 0 \xrightarrow{\partial/\partial x} F'_x + F'_y \cdot f' + F'_z \cdot g' = 0$$

$$G(x, f(x), g(x)) = 0 \xrightarrow{\partial/\partial x} G'_x + G'_y f' + G'_z \cdot g' = 0$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix} \begin{vmatrix} f' \\ g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F'_x \\ -G'_x \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} f' \\ g' \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} -F'_x \\ -G'_x \end{vmatrix} =$$

$$\overset{*}{=} \frac{\begin{bmatrix} G'_z & -F'_z \\ -G'_y & F'_y \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} -F'_x \\ -G'_x \end{vmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} F'_z G'_x - F'_x G'_z \\ F'_x G'_y - F'_y G'_x \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} \longrightarrow$$

$$* \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow f' = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}, \quad g' = -\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}$$

$$\text{y } r'(t) = \left(1, -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} \right)$$

Multiplicamos $\bar{r}'(t)$ por $\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$, lo cual no cambia su orientación.

$$\bar{r}'(t) = \left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \right) = \nabla F \times \nabla G$$

Cambio de columnas cambia el signo del determinante

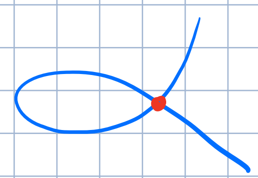
10 Puntos ordinarios y singulares

→ Un pto $\bar{p} \in C$ es ordinario si la curva admite parametrización local explícita (con funciones C^1) en un entorno suyo. Esto es equivalente a cumplir:

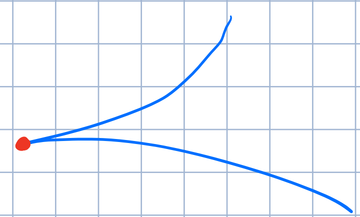
- $\exists\, t_0$ tal que $\bar{p} = \bar{r}(t_0)$ con $\bar{r}(t) \in C^1$ en un entorno de t_0
- $\bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}$
- $\bar{r}(t)$ es inyectiva en un entorno de t_0, es decir, si

$t_1 \neq t_0$, entonces $\bar{r}(t_1) \neq \bar{r}(t_0) = \bar{p}$

→ Los pts singulares son aquellos que no son ordinarios.



Este pto sería singular pq la parametrización no es inyectiva en ese pto



Este pto sería singular pq la parametrización no es C^1 en ese pto

EJEMPLO Determinar los pts singulares de $(x^2+y^2+4)^2 - 16x^2 = 16$

Los pts en los que se cumpla el TF Implícita son ordinarios (ver def. de pto ordinario). En los que no, hay que mirar con más detalle.

$$\nabla F = \left(4x(x^2+y^2+4) - 32x,\ 4y(x^2+y^2+4)\right) = (0,0) \longrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$4x\left(x^2+y^2+4\right)-32x=0$$
$$4y\left(x^2+y^2+4\right)=0$$

Sols. $(0,0)$, $(2,0)$, $(-2,0)$

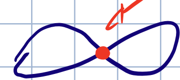
No pertenecen a la curva: no cumplen eq. $(x^2+y^2+4)^2-16x^2=16$

De modo que $(0,0)$ es un candidato a singular. *

*Recordemos que TFI nos da condiciones suficientes (no necesarias) para la existencia de la representación local explícita)

Pintamos la curva para comprobar el pto $(0,0)$.

$$(x^2+y^2+4)^2-16x^2=16$$
$$(x^2+y^2)^2+\cancel{16}+8(x^2+y^2)\cancel{-16}-16x^2=0$$
$$(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2) \longrightarrow \text{Lemniscata}$$



Pto singular

ESEMPLO 2 Pts singulares de $F(x,y)=(x-y)^2=0$

Si pensamos, vemos que esta curva es $y=x$, que es regular. Sin embargo, veamos que ocurre si aplicamos el TF Implícita.

$$\nabla F=\left(2(x-y),\,-2(x-y)\right)=(0,0)\longrightarrow x=y$$

Las condiciones del TFI no se verifican si $x=y$, pero lo importante es que la curva admite esta parametrización

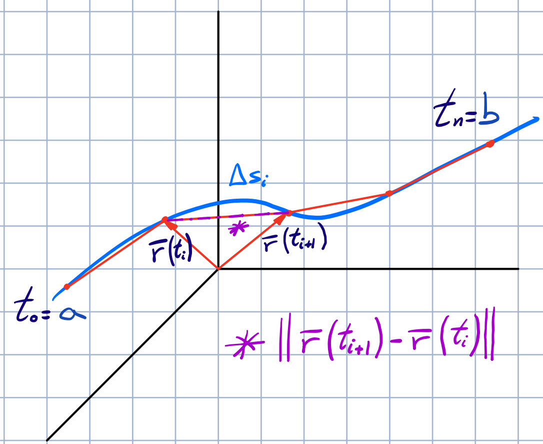
$\bar{r}(t)=(t,t) \longrightarrow$ Parametrización local explícita con funciones C^1 $\longrightarrow$ todos los pts son ordinarios

11 Parametrización por longitud de arco

Vamos a obtener una parametrización en la que el valor del parámetro coincide con la longitud de la curva.

Sea $C \equiv \bar{r}(t) : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada

Hacemos una partición de I,



$P_n = \{t_0=a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n=b\}$

$\Delta s_i \approx \|\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)\| =$

$$= \left\| \frac{\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i)$$

De modo que podemos aproximar la longitud de la curva "L" como

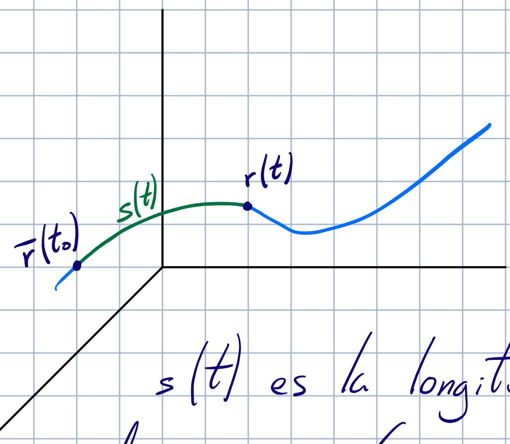
$$L \approx \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i)$$

Ahora, si hacemos $n \longrightarrow \infty$, es decir $t_{i+1} \to t_i$ y

$$L = \int_a^b \|\bar{r}'(t)\| \, dt$$

Longitud de arco: sea $C \equiv \bar{r}(t)$ y sea t_0. La longitud de arco es la longitud recorrida desde t_0 hasta t

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\bar{r}'(u)\| \, du$$



$s(t)$ es la longitud de la curva verde.

Longitud de arco como parámetro

$$s : [a, b] \longrightarrow [0, L]$$

$$t \longrightarrow \int_{t_0}^{t} \|\bar{r}'(u)\| \, du$$

Veamos tb si cumple las condiciones de parametrización admisible o regular

- $s(t) = \int_a^t \|\bar{r}'(u)\| \, du$ es C^1 si $\|\bar{r}'(t)\| \in C^0$

  $s'(t) = \|\bar{r}'(t)\|$ por teorema fundamental del cálculo.

- $s'(t) = \|\bar{r}'(t)\| > 0$ $\forall t$ si $\bar{r}(t)$ es regular

De forma que si $\bar{r}(t)$ es regular, tb lo será $\bar{r}(s(t))$

Por último, tenemos que, usando la regla de la cadena,

$$\bar{r}'(s) = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \bar{r}'(t) \cdot \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|} \longrightarrow \|\bar{r}'(s)\| = 1$$

Teorema función inversa $\left(s(t) \in C^1 \text{ y } s'(t) \neq 0\right)$

EJERCICIO

$\bar{r}(t) = (t, \sin t, \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Calcular la longitud de la curva y reparametrizar con la longitud de arco.

$$\bar{r}'(t) = (1, \cos t, -\sin t) \longrightarrow \|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2}$$

entonces

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\, t \longrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} s$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, du = s(L) = 2\sqrt{2}\,\pi \quad // \quad \bar{r}(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s, \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} s\right), \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} s\right)\right)$$