Repaso de teoría

1 Extremos de funciones. Extremos relativos en sentido estricto → desigualdades estrictas

$f: D \longrightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^p \quad \overline{x}_0 \in D$

→ $f(\overline{x}_0)$ es un máximo relativo de f en $\overline{x}_0$ si $f(\overline{x}) < f(\overline{x}_0)$ cerca de $\overline{x}_0$.

→ $f(\overline{x}_0)$ es un mínimo relativo de f en $\overline{x}_0$ si $f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0)$ cerca de $\overline{x}_0$

Vamos a ver criterios para buscar extremos relativos de funciones diferenciables. ¡Cuidado con las no diferenciables! Ejemplo $f(x)=|x|$

2 Punto estacionario o crítico de f

$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^p \quad$ (f es derivable)

$\overline{x}_0 \in D$, pto estacionario o crítico de f

$f'_{x_i}(\overline{x}_0) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, p$

(Si f diferenciable esto es lo mismo que $df(\overline{x}_0) = 0$) ~ Aquí es donde es interesante

3 Condiciones necesarias de extremo → funciona para f diferenciable

$f: D \longrightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^p$ diferenciable en $B(\overline{x}_0; r) \subset D$

Si f tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en $\overline{x}_0$ entonces $\overline{x}_0$ es un pto crítico de f ($df(\overline{x}_0) = 0$).

¡No funciona en sentido contrario! (Ejemplo: pto de silla).

4 Condiciones suficientes de extremo → funciona para $f \in C^2$

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C^2(D)$

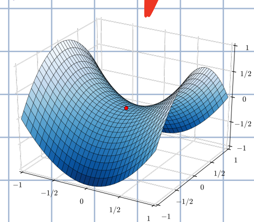
Dado $\bar{x}_0 \in D \,/\, df(\bar{x}_0) = 0$

Dependiendo de la matriz Hessiana de la función en el punto, tenemos que (ejemplo para $D \in \mathbb{R}^2$)

$Hf(x_0, y_0)$	$\omega(x) = x^T Hf\, x$	Forma función	Ejemplo
Definida positiva	$\omega(x) > 0$	Mínimo relativo	$x^2 + y^2$
Definida negativa	$\omega(x) < 0$	Máximo relativo	$-(x^2 + y^2)$
Indefinida	$\omega(x) \geq 0$ $\omega(x) \leq 0$	Punto de silla	$x^2 - y^2$
Semidef. positiva	$\omega(x) \geq 0$	Ni idea	x^2
Semidef negativa	$\omega(x) \leq 0$	Ni idea	$-x^2$

Estos casos hay que estudiarlos con la def de la función

Punto de silla (Saddle point)



5 Clasificando formas cuadráticas (simétricas)

	Definida $\oplus$ Mínimo relativo	Definida $\ominus$ Máximo relativo	Indefinida	Semidef $\oplus$	Semidef $\ominus$
$x^T S x$	>0	<0	≥ 0 y ≤ 0	≥ 0	≤ 0
Autovalores (λ)	>0	<0	≥ 0 y ≤ 0	≥ 0	≤ 0
Menores (Sylvester) $\lvert a_{11}\rvert, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots$	>0	$\times(-1)^K \}\ >0$	No def $\oplus$ No def $\ominus$ Si se anula algún menor es el de la matriz completa	>0 Resto de menores sigue crit. def $\oplus$	$\times(-1)^K \}\ >0$ Resto de menores sigue crit. def $\ominus$

$\underbrace{\text{Definida } \oplus \quad \text{Definida } \ominus}_{|Hf(x_0,y_0)| \neq 0}$

$\underbrace{\text{Semidef } \oplus \quad \text{Semidef } \ominus}_{|Hf(x_0,y_0)| = 0}$

Criterio de Sylvester en detalle

Existe un criterio equivalente que se apoya en la matriz Hessiana y el criterio de Sylvester

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en D abierto y sea $x_0 \in D$ punto crítico de f $\quad (\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0)$

Entonces:

1. Si $|Hf(x_0)| \neq 0$
   1. Si todos los menores principales son positivos x_0 es un mínimo local de f
   2. Si los menores principales cambian de signo empezando en $a_{11} < 0$ x_0 es un máximo local de f
   3. En cualquier otro caso x_0 es un punto de silla (ni máximo ni mínimo)
2. Si $|Hf(x_0)| = 0$. La diferencial segunda es semidefinida (caso dudoso) o indefinida (punto de silla)
   1. Si no se anula ningún menor anterior:
      1. Si todos los menores anteriores son positivos, caso dudoso posible mínimo local.
      2. Si los menores principales cambian de signo empezando en $a_{11} < 0$, caso dudoso posible máximo local.
      3. En cualquier otro caso x_0 es un punto de silla
   2. Si se anulan menores principales anteriores, caso dudoso.

Comentario sobre el cálculo de autovalores. Aplicación a matrices 2x2.

$\operatorname{Det} A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n$ (Det A es igual al producto de sus autovalores)

$\operatorname{Tr}(A) =$ Suma entradas de la diagonal $= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n$

Aplicado a una matriz 2x2 nos da una manera sencilla de calcular autovalores. También sirve para comprobar si hemos calculado bien los λs.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A| = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\operatorname{Tr}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad |A| = 4 - 4 = 0 = \lambda_1 \lambda_2 \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 5$$

$$\operatorname{Tr} A = 5 = \lambda_1 + \lambda_2$$

6 Ejercicios / Ejemplos

① Ejemplo 13.4

$f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3$ ¿Tiene extremo relativo en $(1,0,0)$?

Condición necesaria → Pto estacionario o crítico

$$\nabla f = \left[yz + 2x - 2,\ xz + 2y,\ xy + 2z \right] \Big|_{(1,0,0)} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

Condición suficiente → Analizar Hf

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{bmatrix} \Bigg|_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Triangularizo con operaciones elementales (sin intercambio de filas)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Todos λ's > 0 → Definida positiva → mínimo relativo

*Pivotes tienen mismo signo que autovalores.
Tb sale fácil por sylvester

② Ejemplo 13.5

Hallar extremos relativos y absolutos (si los hubiere) de $z = 3x^2 - x^3 + y^2$.

Si $x \to \infty$, $z \to -\infty$. Si $y \to \infty$, $z \to \infty$. Luego no extremos absolutos

Busco ptos críticos Condición necesaria $\nabla z = 0$

$$\nabla z = [6x - 3x^2,\ 2y]$$

$x(6-3x) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 2$

$2y = 0 \rightarrow y = 0$

$(0,0)$, $(2,0)$ Candidatos

Condición suficiente Hf

$$Hz = \begin{bmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad Hf(2,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Def ⊕, mínimo — Indefinida, Pto de silla

③ EJEMPLO Hallar los extremos de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$$ y clasificar

Saltar partes, muchas operaciones. Repetido de Extremos II.

Puntos críticos: $\nabla f = [0, \dots, 0]$ Condición necesaria

$$\left[e^{1-x^2-y^2}\left(2x + (-2x)(x^2+2y^2)\right),\ e^{1-x^2-y^2}\left(4y + (-2y)(x^2+2y^2)\right)\right] =$$

$$= e^{1-x^2-y^2}\left[2x(1-x^2-2y^2),\ 2y(2-x^2-2y^2)\right] = [0, 0]$$

Teniendo en cuenta que $e^{1-x^2-y^2} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2x(1-x^2-2y^2) = 0 \\ 2y(2-x^2-2y^2) = 0 \end{array}\right\}$$ Sistema de dos ecuaciones (no lineales) con dos incógnitas.

Puede tener 0 soluciones, n soluciones o incluso ∞ soluciones. No hay un "método de Gauss" para resolver de forma sencilla. En informática se ve el método de Newton para encontrar raíces de forma numérica. Aquí resolveremos de forma "artesanal".

Si hacemos $x=0$, la primera ec. se cumple automáticamente y la segunda queda:

$$x = 0 \to 2y(2-2y^2) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \to (0,0);\ (0,1);\ (0,-1)$$

De forma equivalente

$$y = 0 \to 2x(1-x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \to (0,0);\ (1,0);\ (-1,0)$$

La última opción pasaría por $1-x^2-2y^2=0$, $2-x^2-2y^2=0$. Sin embargo, no pueden cumplirse a la vez, lo cual podemos ver restando ambas $\longrightarrow$ $-1=0$.

Así que tenemos 5 puntos críticos:

$$(0,0);\ (0,1);\ (0,-1);\ (1,0);\ (-1,0)$$

Clasificación de extremos Condición suficiente

$$Hf = e^{1-x^2-y^2}\begin{bmatrix} 2(1-x^2-2y^2)-4x^2-4x^2(1-x^2-2y^2) & -4xy\,(1-x^2-2y^2)-8xy \\ -4xy(1-x^2-2y^2+2) & -4y^2(2-x^2-2y^2)+2(2-x^2-2y^2)-8y^2 \end{bmatrix}$$

Tengo que evaluar Hf en los pts críticos.

$Hf(0,0) = e\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ definida positiva $\longrightarrow$ mínimo

$Hf(1,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ indefinida $\longrightarrow$ pto de silla

$Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ indefinida $\longrightarrow$ pto de silla

$Hf(0,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ definida negativa $\longrightarrow$ máximo

$Hf(0,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ definida negativa $\longrightarrow$ máximo

EJEMPLO Hallar los extremos de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2y + y + 2xy$$

$$\nabla f = [2xy + 2y \ , \ x^2 + 1 + 2x] = [0,0]$$

$$x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2 \longrightarrow x = -1 \quad (\forall y)$$

$$2xy + 2y = -2y + 2y = 0 \quad (\forall y)$$

$(-1, y)$ es un pto crítico

$$Hf = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Hf(-1,y) = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es semidefinida, lo cual no nos da información.

Como esto no nos da información, recurrimos a la definición de máximo, mínimo y pto de silla y a la def. de la función.

Máximo relativo en x_0 $\quad f(x_0) > f(x)$ en un entorno de x_0

Mínimo relativo en x_0 $\quad f(x_0) < f(x)$ en un entorno de x_0

$$f(x,y) - f(-1,y_0) = x^2y + y + 2xy - (\cancel{y_0 + y_0 - 2y_0}) = y(x+1)^2 =$$

0

Nos movemos en un entorno del pto crítico $\longrightarrow x = -1 + \Delta x \ ; \ y = y_0 + \Delta y$ *

* $\Delta x, \Delta y \to 0$

$$= (y_0 + \Delta y)(\cancel{-1} + \Delta x + \cancel{1})^2 = (y_0 + \Delta y)\Delta x^2$$

De modo que si:

$y_0 > 0 \quad f(x,y) - f(-1,y_0) > 0 \longrightarrow$ mínimos

$y_0 < 0 \quad f(x,y) - f(-1,y_0) < 0 \longrightarrow$ máximos

$y_0 = 0 \quad f(x,y) - f(-1,0) \gtrless 0 \longrightarrow$ ni máximo estricto, ni mínimo estricto

IV.16 Investigar los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ en el conjunto $\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x>0,\ y>0,\ z>0\}$.

b) $f(x,y) = x^2y^2(1-x^2-y^2)$ en el conjunto $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2<1\}$.

Resultados: a) mínimo relativo en $(1/2,1,1)$; b) máximos relativos en los cuatro puntos $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y mínimo relativo (amplio) en ejes $x=0$ e $y=0$.

IV.16 a) Estudiar los extremos relativos de:

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad \text{en } A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x>0, y>0, z>0\}$$

* Notar que en este ejercicio se piden extremos relativos, no absolutos

* No podemos usar el teorema del valor extremo, puesto que el dominio no es compacto (no es cerrado y acotado).

* No estudiamos la frontera, puesto que la función no toma valores sobre ella.

$$\nabla f = \left[1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{z^2}{y^2},\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right] = [0,0,0]$$

Lo más complicado de este problema es encontrar las soluciones de los sistemas resultantes.

(1) $y^2 = 4x^2 \to y = 2x \to x = 1/2$

$ \to y = -2x \to x = -1/2 \to$ No, fuera de A

$x = \pm\frac{1}{2}y$

(2) $y^3 = 2xz^2 \to y^3 = yz^2 \to y^2 = z^2 \to y = z \to y = 1$

$ \to y = -z \to$ no se puede cumplir $y>0,\ z>0$

$ \to y^3 = -yz^2 \to y^2 = -z^2 \to$ no se puede cumplir

(3) $z^3 = y \xrightarrow{y=z} z^2 = 1 \to z = +1, \underline{-1} \to$ No, está fuera de A.

Luego el pto crítico es $[1/2, 1, 1]$

La matriz Hessiana en este caso es:

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^3} & -\frac{1}{2}\frac{y}{x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{bmatrix}$$

$$Hf(1/2, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Busco los pivotes, método de Gauss → sin intercambio de filas

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \underline{4} & -2 & 0 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 0 & 0 & \underline{4} \end{bmatrix}$$

Pivotes $>0 \to \lambda s > 0 \to$ Definida positiva → mínimo local

También podríamos haberlo mirado por el criterio de Sylvester

$A_1 = 4 > 0$, $A_2 = 8 > 0$, $A_3 = 32 > 0$

Elegid el método que prefiráis.

IV.16 b

Extremos relativos de $f(x,y) = x^2y^2(1-x^2-y^2)$ en $x^2+y^2<1$.

Lo más complicado de este problema también es resolver el sistema.

$$\nabla f = \left[2xy^2(1-x^2-y^2)-2x^3y^2,\ 2x^2y(1-x^2-y^2)-2x^2y^3\right] = [0,0]$$

$$2xy^2(1-x^2-y^2)-2x^3y^2 = 0$$

$$2x^2y(1-x^2-y^2)-2x^2y^3 = 0$$

→ Los ejes $(0,y)$; $(x,0)$ son solución

→ El problema es simétrico. La segunda ecuación es la primera intercambiando los papeles de x e y. Si hago $x=y$ ambas ecuaciones son:

$$\left.\begin{aligned} 2x^3(1-2x^2)-2x^5 &= 0 \\ 2x^3(1-2x^2)-2x^5 &= 0 \end{aligned}\right\} 2x^3-6x^5=0 \rightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$$

Por otro lado, si hago $x=-y$ obtengo:

$$\left.\begin{aligned} 2x^3(1-2x^2)-2x^5 &= 0 \\ -2x^3(1-2x^2)+2x^5 &= 0 \end{aligned}\right\} 2x^3-6x^5=0 \rightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{\mp 1}{\sqrt{3}}$$

En resumen, tengo los siguientes pts críticos:

$$(0,y)\ ;\ (x,0)\ ;\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La simetría de las soluciones tb podría haberla comprobado operando con las ecuaciones. Asumiendo $x\neq 0$, $y\neq 0$:

$$(1-x^2-y^2)=\frac{2x^3y^2}{2xy^2}=\frac{2x^2y^3}{2x^2y}$$

$$2x^5y^3=2x^3y^5$$

$$x^2=y^2\longrightarrow x=\pm y$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} 2y^2(1-x^2-y^2)-4x^2y^2-6x^2y^2 & 4xy(1-x^2-y^2)-4xy^3-4x^3y \\ 4xy(1-x^2-y^2)-4xy^3-4x^3y & 2x^2(1-x^2-y^2)-10x^2y^2 \end{bmatrix}$$

pasamos a evaluarla en los pts críticos:

Eje x: $(0,y)\longrightarrow Hf(0,y)=\begin{bmatrix} 4y^2(1-y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$|y|>1$ semidef negativa
$|y|<1$ semidef positiva
$|y|=1$ nada.

de aquí no obtengo mucha info. Paso a usar la def.

$$f(x,y)-f(0,y_0)=x^2y^2(1-x^2-y^2)=\Delta f$$

Si (x,y) cercano al pto crítico $\rightarrow (x,y)=(0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$

$$\Delta f = \Delta x^2 (y_0 + \Delta y)^2 \left(1 - \Delta x^2 - (y_0 + \Delta y)^2\right) =$$

$$= \underbrace{\Delta x^2 (y_0 + \Delta y)^2}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - y_0^2 - 2y_0 \Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2\right)}_{\text{Depende de } |y_0|}$$

$$\text{eje x} \quad (0, y_0) \longrightarrow \begin{cases} |y_0| > 1 & \text{máximos} \\ |y_0| < 1 & \text{mínimos} \\ |y_0| = 1 & \text{ni máximo, ni mínimo} \end{cases}$$

Estos máximos/mínimos no son estrictos, ya que $f(0, y_0) = 0 \ \forall y_0$

→ Por simetría, el análisis del "eje y" es idéntico (se deja como ejercicio).

Los puntos $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, hago uno, el resto se hacen de forma análoga.

$$Hf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{10}{9} & \frac{4}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 - \frac{1}{2}F_1]{\text{Pivotes}} \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{6}{9} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda < 0 \rightarrow \underset{\text{máximo}}{\text{Def. neg}}$$

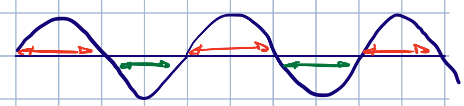
$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{8}{9} < 0 \\ A_2 &= \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 > 0 \end{aligned}\right| \ \underset{\text{máximo}}{\text{Def. negativa}}$$

⤳ Criterio de Sylvester

Ejemplo 13.6

$$z = \sqrt{|\sin(x^2+y^2)|}$$ Hallar extremos relativos

$$z = \begin{cases} \sqrt{\sin(x^2+y^2)} & \text{si } \sin(x^2+y^2) \geq 0 \\ \sqrt{-\sin(x^2+y^2)} & \text{si } \sin(x^2+y^2) < 0 \end{cases}$$

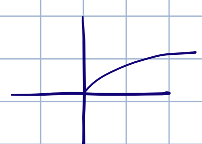
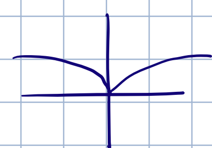
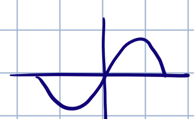


Función definida a trozos. Puedo aplicar reglas de derivación salvo en los cambios de definición.

$$\nabla z = \begin{cases} \left[\dfrac{2x\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} \quad \dfrac{2y\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} \right] & \text{si } \sin(x^2+y^2) > 0 \\ \left[\dfrac{-2x\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{-\sin(x^2+y^2)}} \quad \dfrac{-2y\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{-\sin(x^2+y^2)}} \right] & \text{si } \sin(x^2+y^2) < 0 \end{cases}$$

Este camino parece muy difícil, vamos a pensar:

Conocemos las funciones:

* $\sqrt{x} \longrightarrow$ 
* $\sqrt{|x|}$ 
* $\sin(x) \longrightarrow$ 

En realidad, es un problema de Matemáticas I

$f(d) = \sqrt{|\sin(d)|} \longrightarrow$ Calculamos los extremos en función de d y después hacemos $d = x^2+y^2$ para encontrar los extremos relativos.

IV.22 Calcular los extremos absolutos en $D \subset \mathbb{R}^2$ de la función $f: D \to \mathbb{R}$, definida mediante $f(x,y) = x^2 - y^2$, siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 - y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$. Acerca de los extremos absolutos de f en D se puede asegurar que:

a) En la recta $x+y=1$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

b) En la recta $x+y=0$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

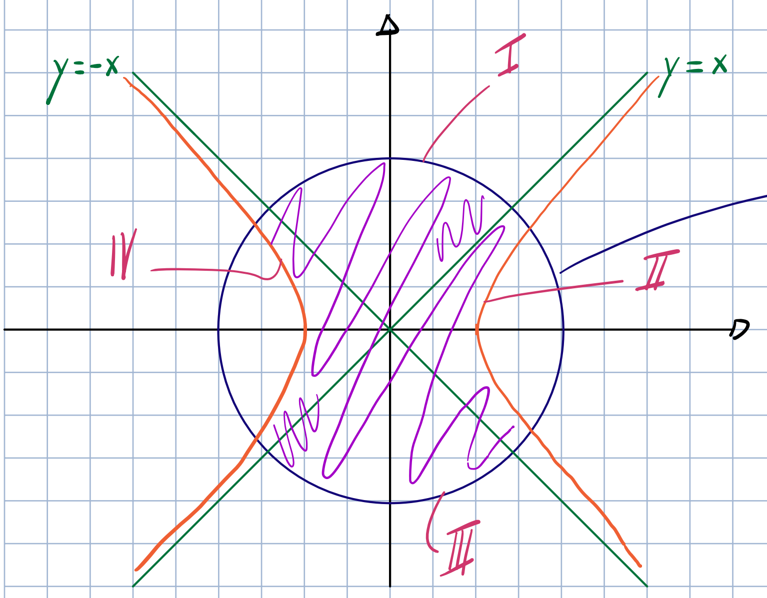
c) En la recta $x=0$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

d) En la recta $x-y=0$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

Determinar cuál es la opción correcta, razonando la respuesta.

IV.22 Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1 \ , \ x^2-y^2 \leq 1/4 \}$



Divido la frontera en cuatro tramos I, II, III, IV para su posterior estudio.

x	y	$f(x,y)$	tipo
0	1	-1	min (∂D)
0	-1	-1	min (∂D)
toda la	hipérbola	1/4	∂D

min abs

max abs

→ Esta tabla la vamos rellenando según vamos resolviendo el ejercicio.

① Puntos críticos $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f = (2x, -2y) = (0,0) \longrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{indefinida} \longrightarrow \text{pto de silla, no hay extremo}$$

② Puntos singulares : no hay

③ Frontera.

Son puntos de interés los cuatro pts de corte

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=1/4 \end{array}\right\} \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$$

Fronteras I y III

$$x^2+y^2=1 \longrightarrow y^2 = 1-x^2$$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_{I,III}} = f\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right) = x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1$$

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{5}{8}}, +\sqrt{\frac{5}{8}}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_{I,III}(x) = 4x = 0 \longrightarrow y = \pm 1 \\ f''_{I,III}(x) = 4 > 0 \longrightarrow \text{mínimo} \end{array}\right| \begin{array}{l} (0,-1),\ (0,1) \\ \text{mínimos relativos en frontera} \end{array}$$

Fronteras II y IV

$$x^2 - y^2 = 1/4$$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_{II,IV}} = x^2 - y^2\Big|_{\partial D_{II,IV}} = 1/4$$ constante. Todos los pts son candidatos a máximo y/o mínimo absoluto

Aquí están incluidos los 4 pts de corte que comentamos anteriormente

IV.25 Sea la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto f(x,y)=x(3-y)$ y el conjunto $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -3\le x\le 3,\ y\ge\frac{1}{3}x^2,\ y\le 6+x\right\}$. Calcular los extremos absolutos de f en C. Se verifica que:

a) f alcanza su máximo y mínimo absolutos en puntos del interior de C.

b) f alcanza su máximo y mínimo absolutos sobre $y=\frac{1}{3}x^2$.

c) El valor máximo absoluto de f es mayor que 3 y el valor mínimo absoluto es menor que -5.

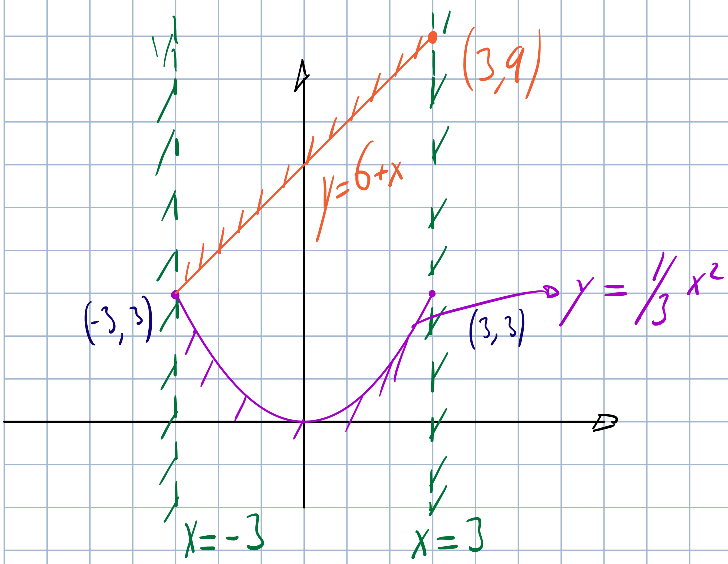
d) El valor máximo absoluto de f es mayor que 6 y el valor mínimo absoluto es menor que -10.

Determinar cuál es la opción correcta, razonando la respuesta.

IV.25

$$f(x,y)=x(3-y),\quad C=\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ y\geqslant \frac{1}{3}x^2\\ y\leqslant 6+x\end{cases}$$

Extremos absolutos de f en C.



	x	y	tipo	$f(x,y)$	
∂D_1	$\sqrt{3}$	1	máximo	$2\sqrt{3}$	max abs
	$-\sqrt{3}$	1	mínimo	$-2\sqrt{3}$	
	-3	3	intersección	0	
	3	3	intersección	0	
∂D_2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	máximo	$9/4$	
	3	9	intersección	-18	min abs

① Puntos críticos

$$\nabla f=(3-y,-x)=(0,0)\longrightarrow(0,3)$$

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1\lambda_2=1\end{matrix}\qquad \text{indefinida, pto de silla.}$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$$

La matriz es ortogonal $Q=Q^T$ $|\lambda_i|=1$

② Puntos singulares. No aplica $f\in C^\infty$

③ Fronteras

$\#1 \longrightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^2 \quad , \quad x \in [-3, 3]$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_1} = f\left(x, \frac{1}{3}x^2\right) = x\left(3 - \frac{1}{3}x^2\right) = f_1(x)$$

$$f_1'(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 = 3 - x^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{3} \ , \ y = 1$$

$$f_1''(x) = -\frac{1}{3}x \begin{cases} x = \sqrt{3} \longrightarrow f'' < 0 & \text{(máximo relativo en frontera)} \\ x = -\sqrt{3} \longrightarrow f'' > 0 & \text{(mínimo relativo en frontera)} \end{cases}$$

+Los pts intersección $(-3, 3)$ y $(3, 3)$

$\#_2: \quad y = 6 + x \quad , \quad x \in [-3, 3]$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_2} = f(x, 6+x) = x(-x-3) = -x(x+3) = f_2(x)$$

$$f_2'(x) = -3 - 2x = 0 \longrightarrow x = -\frac{3}{2} \ , \ y = \frac{9}{2}$$

$$f_2''(x) = -2 < 0 \longrightarrow \text{máximo relativo en frontera}$$

+Los pts intersección $(-3, 3)$ y $(3, 9)$

$\#_3: \quad x = 3 \ ; \ y \in [3, 9]$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_3} = f(3, y) = 3(3 - y) = f_3(y)$$

$f_3'(y) = -3 \neq 0 \longrightarrow$ no hay

+ Los pts intersección ya han sido analizados

$\#_4$ es análogo al $\#_3$.