

Infinitésimos.

Si la función no es un cociente de polinomios, la convertimos en uno. Infinitésimos (Maclaurin 1^{er} orden).

Definición: sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. f es un infinitésimo cuando $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$, (\bar{a} pto de acumulación de D) si:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = 0$$

Notación de Landau: f, g infinitésimos en $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$

$$\text{1/ Si: } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = 0 \iff f(x) = o(g(x)) \rightarrow f(x) + g(x) = g(x) + o(g(x))$$

* f es infinitésimo de orden superior a g .
tiende a cero más deprisa.

$$\text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 = o(x) \rightarrow x^2 + x = x + o(x)$$

$$\text{2/ Si: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \iff f(x) = O(g(x))$$

* f y g son infinitésimos comparables
(tienden a cero a la misma velocidad)

$$\text{Utilidad? Si } l = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)}$$

no se calcular

si se calcular

Ejemplo:

$$R: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+o(x)} = 1$$

$$R^2: \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x+y+(x+y)^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x+y+o(x+y)} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^3}{(x+y)} = 0$$

6 Infinitésimos equivalentes.

Nos permiten transformar funciones trascendentes en polinomios.

Cuando $x \rightarrow 0$ se cumple que:

$e^x - 1 \sim x$	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
$\sin x \sim x$	$\tan x \sim x$
$a \sin x \sim x$	$a \tan x \sim x$
$\ln(1+x) \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$$\sin(x^2+y^2) \sim x^2+y^2$$

Ejemplo: (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2) \ln(2-x)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2) \ln 2}{x^2+y^2} = \ln 2$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} \frac{\sin(x^4) \sin\left(\frac{1}{y+2}\right)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} \frac{x^2}{x} \sin\left(\frac{1}{y+2}\right) = 0 \cdot \text{acotada} = 0$

(P7)

7 EJERCICIOS

① $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+x^4+x^2y^2+y^6)}{\sin(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+x^2y^2+y^6}{x^2+y^2}$

$\ln(1+x) \sim x$

- ① Den bueno
② $0(\text{num}) > 0(\text{den})$

Hipótesis: $\exists l \rightarrow$ acotar.

$$\left| \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} + \frac{y^6}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| x^2 \frac{x^2}{x^2+y^2} + x^2 \frac{y^2}{x^2+y^2} + y^4 \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq$$

$$\leq \left| x^2 + x^2 + y^4 \right| \rightarrow 0 \quad \checkmark \quad \text{Límite existe y vale cero.}$$

A4

② $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 - y^2)}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{(x^2 - y^2)^2}{2}}{(x - y)} =$

$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2 (x+y)^2}{2(x-y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)(x+y)^2}{2} = 0$$

Existe pese a tener denominador "malo" ya que podemos factorizar.

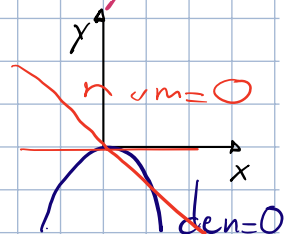
③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin(x+y)}{y + x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x+y)}{y + x^2}$

$\sin(x+y) \sim x+y$

① Den malo ($y = -x^2$)

Hipótesis: $\nexists l \rightarrow$ prueba tray. $y = -x^2 + x^k, k > 2$

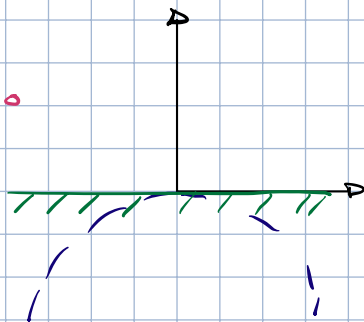
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x^2 + x^k) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x^2 + x^k)(x - x^2 + x^k)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^k} \begin{cases} k=3: l=-1 \\ k \geq 4: l=\infty \end{cases}$$



④ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin(x+y)}{y+x^2}$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$

Den. malo pero tray. fuera del dominio de definición de la función.

¿Es realmente "malo" el denominador?



TRUCO

Si dominio de función es de tipo $y \geq 0$, $x+y \geq 0$...
Puedo añadir valores absolutos sin cambiar función

$$y \geq 0 \longrightarrow y = |y|$$

De modo que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|(x+|y|)}{|y|+x^2}$$

① Den "bueno"! (Solo = 0 en (0,0))

② $0(\text{num}) \sim 0(\text{den})$ No está claro.

Hipótesis $\exists l \rightarrow$ intento acotar

$$\left| \frac{|y|(x+|y|)}{|y|+x^2} \right| \stackrel{\text{A4}}{\leq} |x+|y|| \longrightarrow 0$$

Casos generales: estos casos generales incluyen muchos de los vistos anteriormente. Su notación es más compleja, se proponen como ejercicios avanzados.

⑤ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^p y^q}{(x^2 + y^2)^t}, \quad p, q, t > 0.$

$$\left| \frac{x^p y^q}{(x^2 + y^2)^t} \right| = \frac{|x|^p |y|^q}{(x^2 + y^2)^t} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^p (\sqrt{x^2 + y^2})^q}{(x^2 + y^2)^t} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{\frac{p+q}{2} - t} \rightarrow 0$$

Si $p+q > 2t$

* Si $p+q > 2t \rightarrow \exists l = 0$

¿Y si no se cumple? \rightarrow No se nada, prueba tray.

* Si $p+q = 2t \rightarrow$ prueba $y = mx$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^p m^q x^q}{(1+m^2)^t x^{2t}} = \frac{m^q}{(1+m^2)^t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{p+q}}{x^{2t}} = \frac{m^q}{(1+m^2)^t} \rightarrow \nexists l$$

* Si $p+q < 2t \rightarrow$ La misma trayectoria

$$\frac{m^q}{(1+m^2)^t} \lim_{x \rightarrow 0} x^{p+q-2t} = \nexists l$$

Conclusión:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^p y^q}{(x^2 + y^2)^t} = \begin{cases} \exists l, l=0 & , \text{ si } p+q > 2t \\ \nexists l & , \text{ si } p+q \leq 2t \end{cases}$$

Ejemplo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \stackrel{?}{=} 0$

$p=1, q=1, t=\frac{1}{2} \rightarrow 1+1 \stackrel{?}{\geq} 2 \cdot \frac{1}{2}$
 $2 > 1 \rightarrow l=0$

⑥ $(x,y) \rightarrow (0,0) \frac{x^p y^q}{(|x|^r + |y|^s)^t}$

Ej. 3 de
h. clase
anterior.

$$\frac{x^5}{x^4 + y^2}$$

$p=5, q=0$
 $r=4, s=2$
 $t=1$

$$|x| = (|x|^r)^{1/r} \leq (|x|^r + |y|^s)^{1/r}$$

$$|y| = (|y|^s)^{1/s} \leq (|x|^r + |y|^s)^{1/s}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^p y^q}{(|x|^r + |y|^s)^t} \right| &= \frac{|x|^p |y|^q}{(|x|^r + |y|^s)^t} \leq \frac{(|x|^r + |y|^s)^{p/r} (|x|^r + |y|^s)^{q/s}}{(|x|^r + |y|^s)^t} = \\ &= \frac{(|x|^r + |y|^s)^{p/r + q/s}}{(|x|^r + |y|^s)^t} \rightarrow \boxed{\frac{p}{r} + \frac{q}{s} > t} \rightarrow \exists l, \underline{\underline{l=0}} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

$$\frac{5}{4} + \frac{0}{2} > 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{y^3}{x^4 + y^2} \rightarrow \frac{0}{4} + \frac{3}{2} > 1 \quad \checkmark$$