

21. CURVAS PLANAS Y ALABEADAS III

D. Integrales de linea

1 Integral de linea de un campo escalar

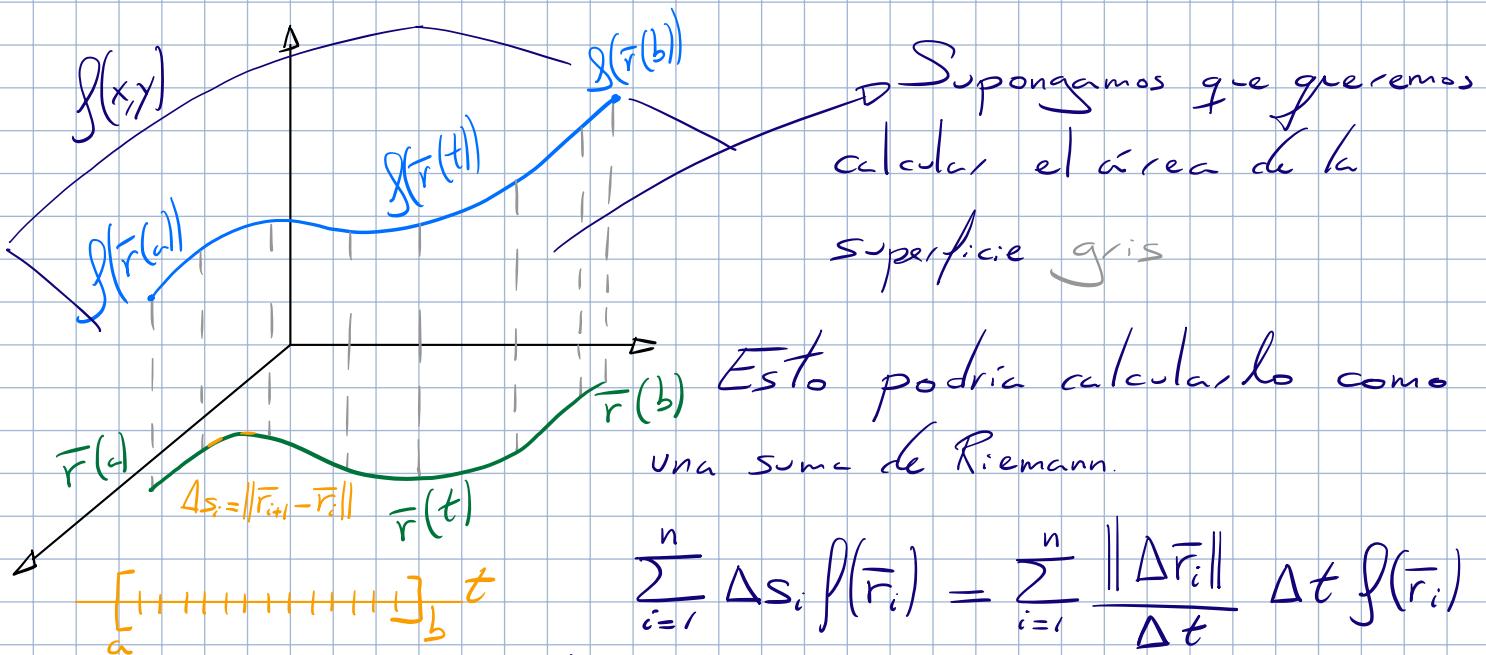
Sea $f: \mathbb{R}^{2,3} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea C una curva regular parametrizada por $\bar{r}(t)$, $\bar{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,3}$

Se llama integral de linea de f a lo largo de C a:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| dt$$

ds

Intuición geométrica: área debajo de la curva



Si hago $\Delta t \rightarrow 0$: $\int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| dt = \int_C f ds$

La integral no depende de la parametrización escogida →

LEMMA 17. Independencia de la parametrización. Las integrales de línea no se alteran al sustituir la trayectoria de integración por otra equivalente en el sentido que se explica a continuación. Sea $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria regular a trozos y sea $y: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una **reparametrización** de x (es decir, $y = x \circ \phi$, donde $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función biyectiva de clase C^1 y tal que $\phi'(t) \neq 0$, y por tanto estrictamente monótona, entonces

$$\int_a^b f(x(t)) \|x'(t)\| dt = \int_c^d f(y(\tau)) \|y'(\tau)\| d\tau.$$

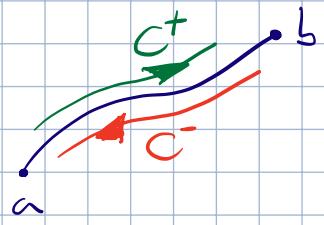
Este resultado nos permite definir (bajo ciertas condiciones) una integral de línea de campos escalares que no depende de la parametrización concreta que utilicemos para calcularla.

2 Propiedades de la integral de linea de un campo escalar

a) No depende del sentido de recorrido: $\int_C^+ f ds = \int_C^- f ds$

DEM

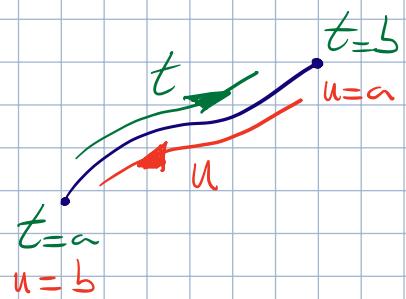
$$\int_a^b f(\bar{r}(t)) \|\bar{r}'(t)\| dt$$



Para cambiar el sentido de recorrido de la curva tenemos que hacer: $u = a + b - t$ de modo que:

$$\bar{r}^*: u \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\bar{r}^*(u) = \bar{r}(a+b-u)$$



$$\int_a^b f(\bar{r}(t)) \|\bar{r}'(t)\| dt = - \int_b^a f(\bar{r}^*(u)) \|\bar{r}'^*(u)\| du = \int_a^b f(\bar{r}^*(u)) \|\bar{r}'^*(u)\| du$$

Cambio de variable

$$t = a + b - u$$

$$f(\bar{r}(t)) \rightarrow f(\bar{r}(a+b-u)) = f(\bar{r}^*(u))$$

$$\begin{aligned} \|\bar{r}'(t)\| &\xrightarrow{*} \|\bar{r}'^*(u)\| & * \bar{r}'(t) &= \frac{d}{dt} \bar{r}(t) = \frac{d}{dt} \bar{r}(a+b-u) = \\ dt &\longrightarrow -du & &= \frac{d}{du} \bar{r}(a+b-u) \frac{du}{dt} = \bar{r}'^*(u) \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\int_{t=a}^{t=b} \longrightarrow \int_{u=b}^{u=a}$$

$$\bar{r}'(t) = -\bar{r}'^*(t)$$

NOTA: La evaluación de las integrales siempre se hace en sentido de parámetro creciente, es decir, si $a < b$, entonces

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| dt$$

Si cambiamos el orden de los límites de integración, por las propiedades de las integrales lo que obtendremos es:

$$\int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| dt = - \int_b^a f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| dt$$

b Si descomponemos la curva C en una unión finita de curvas, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \dots \cup C_n$, entonces

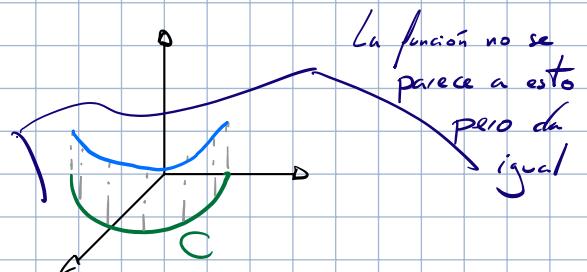
$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds$$

EJERCICIO

Calcular la integral de $\int_C 4xy^4 ds$ en $C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| dt$$

Lo primero que hago es parametrizar la curva (encontrar $\bar{r}(t)$).



$$x(t) = 4 \cos t \quad x > 0 \rightarrow t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$y(t) = 4 \sin t$$

$$\bar{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t)$$

$$\bar{r}'(t) = (-4 \sin t, 4 \cos t) \rightarrow \|\bar{r}'(t)\| = 4$$

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| dt$$

$$\int_C 4xy^4 ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4(4 \cos t)(4 \sin t)^4 \cdot 4 dt = \left. \frac{4^7}{5} \sin^5 t \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4^7 \cdot 2}{5}$$

Veamos que pasa si utilizamos otra parametrización para la curva (que la recorre en sentido contrario).

$$t = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - u = -u$$

$$x^*(u) = 4 \cos(-u) = 4 \cos u \quad u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$y^*(u) = 4 \sin(-u) = -4 \sin u$$

$$\bar{r}^{*1}(u) = (-4 \sin u, -4 \cos u) \rightarrow \|\bar{r}^{*1}(u)\| = 4$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cdot 4 \cos u (-4 \sin u)^4 \cdot 4 du = \left. \frac{4^7}{5} \sin^5 u \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4^7 \cdot 2}{5}$$

3 Integral de líneas de un campo vectorial

Sea $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y sea C una curva regular parametrizada por $\bar{r}(t)$, $\bar{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se llama integral de línea de \bar{F} sobre C (o circulación de \bar{F}) a:

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt$$

Notación ↗
Ver pag 360 Marsden y Tromba

$$d\bar{s} = \bar{T} ds = \\ \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} \|\bar{r}'(t)\| dt = \\ \bar{r}'(t) dt$$

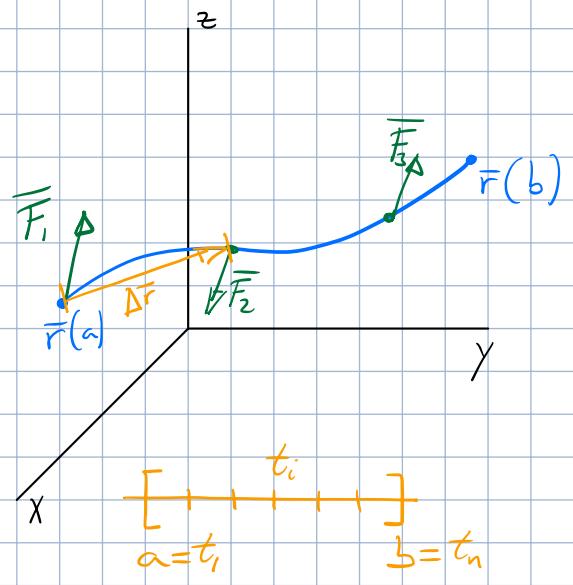
$d\bar{s}$ es un vector de módulo ds y dirección tangente a la curva (\bar{T}), es decir, $d\bar{s} = \bar{T} ds$

Significado físico: trabajo realizado por el campo para llevar una partícula de $\bar{r}(a)$ a $\bar{r}(b)$

$$W \approx \sum_{i=1}^n \bar{F}(\bar{r}_i) \cdot \Delta \bar{r}_i = \\ = \sum_{i=1}^n \bar{F}(\bar{r}_i) \cdot \frac{\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cdot \Delta t_i$$

$$n \rightarrow \infty \quad \left\{ W = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt \right.$$

$$t_{i+1} \rightarrow t_i$$



19. Independencia de la parametrización para integrales de línea de campos vectoriales.
Sea $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular y sea $y: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización de x , entonces para todo campo vectorial continuo $F: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($C: x = x([a, b])$) se verifica que

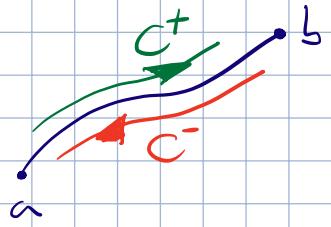
$$\int_x F \cdot ds = \sigma \int_y F \cdot ds,$$

donde $\sigma = 1$ si x e y determinan la misma orientación, mientras que si $\sigma = -1$ determinan orientaciones opuestas. Nótese que este resultado es consecuencia del hecho de que la integral de línea de campos vectoriales involucra $x'(t)$ y no sólo su norma como ocucaotadar con los campos escalares. La razón por la que aparece la constante σ es que la integral de línea para campos vectoriales depende del sentido del vector $x'(t)$. Así pues, este resultado nos permite definir la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva regular C , independientemente de la parametrización regular que se considere, salvo la orientación que ésta determine.

La integral no depende de la parametrización escogida →
[Salvo el signo que depende del sentido de recorrido]

4 Propiedades de la integral de líneas de un campo vectorial

a $\int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s} = - \int_{C^-} \bar{F} \cdot d\bar{s}$



b Si $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_n \rightarrow \int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \bar{F} \cdot d\bar{s}$

Comentario: a veces se llama $d\bar{r}$

$$d\bar{r} = \bar{r}'(t) dt = (x'(t) dt, y'(t) dt, z'(t) dt)$$

a $d\bar{s}$ porque es la diferencial de $\bar{r}(t)$

c En el caso de campos vectoriales gradientes

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar tal que $\text{grad } f \neq 0$

Sea $\bar{x}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria regular a trozos.

Entonces

$$\int_{\bar{x}} \nabla f \cdot d\bar{s} = f(\bar{x}(b)) - f(\bar{x}(a))$$

De modo que si la curva es cerrada $[\bar{x}(b) = \bar{x}(a)]$
entonces

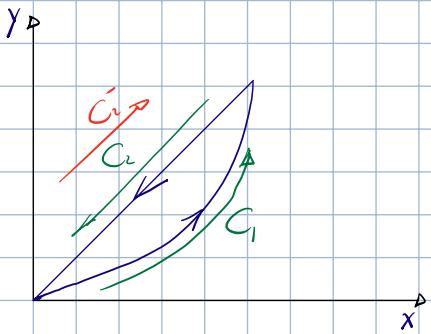
$$\int_{\bar{x}} \nabla f \cdot d\bar{s} = 0$$

ESEMPIO

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$$\bar{F} = (2x, -2y)$$

$$C: \begin{array}{c} x \\ \nearrow \\ x^2 \end{array}$$



$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0 + 0$$

* *

$$C_1: \bar{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1]$$

$$\textcircled{1} \quad [a, b] = [0, 1]$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{F}(\bar{r}(t)) = (2x(t), -2y(t)) = (2t, -2t^2)$$

$$\textcircled{3} \quad d\bar{s} = \bar{r}'(t) dt = (1, 2t) dt$$

$$* \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^1 (2t, -2t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (2t - 4t^3) dt = (t^2 - t^4) \Big|_0^1 = 0$$

$$C_2: \bar{r}(t) = (t, t), \quad t \in [0, 1]$$

$$C_2: \bar{F}(t) = (1-u, 1-u), \quad u \in [0, 1]$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ t = 1 - u \end{matrix}$$

$$\text{Dos opciones} \quad \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} = - \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

Elegir usar C_2 . $C_2: \bar{r}(t) = (t, t), \quad t \in [0, 1]$

$$\textcircled{1} \quad [a, b] = [0, 1]$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{F}(\bar{r}(t)) = (2x(t), -2y(t)) = (2t, -2t)$$

$$\textcircled{3} \quad d\bar{s} = \bar{r}'(t) dt = (1, 1) dt$$

$$*\int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^1 (2t, -2t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 0 dt = 0 \rightarrow \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -0$$

ESERCICIOS

①

21.2 Probar que la integral de línea de $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r=r(\theta)$,

$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta) \sqrt{r^2 + r'(\theta)^2} d\theta$. Calcular la longitud de arco de $r=1+\cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

ⓐ Cómo queda una trayectoria en coordenadas polares
 $r = r(\theta)$?

$$\bar{r}(\theta) = \underbrace{(r(\theta) \cos \theta,}_{x(\theta)} \underbrace{r(\theta) \sin \theta}_{y(\theta)})$$

$$\bar{r}'(\theta) = (r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin(\theta), r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta)$$

De modo que

$$\|\bar{r}'(\theta)\| = \left[r'(\theta)^2 \cos^2 \theta + r(\theta)^2 \sin^2 \theta - 2r(\theta)r'(\theta) \sin \theta \cos \theta + \right.$$

$$r'(\theta)^2 \sin^2 \theta + r(\theta)^2 \cos^2 \theta + 2 r(\theta) r'(\theta) \sin \theta \cos \theta \Big]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$$

Luego,

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \underbrace{\|\bar{r}'(t)\| dt}_{ds} \longrightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta) \sqrt{r^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

Calcular la longitud de arco de

$$\bar{r}(\theta) = ([1+\cos \theta] \cos \theta, [1+\cos \theta] \sin \theta) =$$

$$= (1+\cos \theta) [\cos \theta, \sin \theta]$$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\bar{x}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'(\theta)^2} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+2\cos^2 \theta + 2\cos \theta + \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos \theta} d\theta = \dots = 2 \sqrt{2+2\cos \theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 8$$

② 21.3 Calcular las siguientes integrales de línea $\int_{\bar{x}} f(x, y, z) ds$, donde

a) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\bar{x}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\bar{x}(t) = (t, t^2, 0)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\text{a} \quad \int_{\bar{x}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\bar{x}(t)) \cdot \underbrace{\|\bar{x}'(t)\| dt}_{ds}$$

$$f(x, y, z) = x + y + z, \quad \bar{x}(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad a=0, b=2\pi$$

$$\bar{x}'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$$

$$f(x(t), y(t), z(t)) = \sin t + \cos t + t$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t) \sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} (t + \sin t + \cos t) \sqrt{2} dt =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{t^2}{2} - \cos t + \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2} \frac{4\pi^2}{2} = 2\sqrt{2}\pi^2$$

$$\text{b} \quad \int_{\bar{x}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\bar{x}(t)) \cdot \underbrace{\|\bar{x}'(t)\| dt}_{ds}$$

$$f(x, y, z) = x \cos z$$

$$\bar{x}(t) = (t, t^2, 0) \quad a=0, b=1$$

$$f(x(t), y(t), z(t)) = t \cos(0) = t$$

$$\|\bar{x}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{3} \frac{1}{8} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1)$$

③

21.6 Evaluar cada una de las siguientes integrales:

a) $\int_{\bar{x}} x dy - y dx, \quad \bar{x}(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$

b) $\int_{\bar{x}} x^2 dx - xy dy + dz, \text{ donde } \bar{x} \text{ es la par\'abola } z = x^2, y = 0 \text{ de } (-1, 0, 1) \text{ a } (1, 0, 1).$

$$\text{a) } \int_{\bar{x}} x dy - y dx \rightarrow \int_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = \underbrace{\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt}_{\text{5}}$$

$$\bar{F} = (-y, x) \quad \bar{x}(t) = (\cos t, \sin t) \quad a=0, b=2\pi$$

$$\bar{F}(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \bar{x}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\text{b) } \int_{\bar{x}} x^2 dx - xy dy + dz \rightarrow \int_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = \underbrace{\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt}_{\text{5}}$$

$$\bar{F} = (x^2, -xy, 1) \quad ; \quad \bar{x} = (t, 0, t^2) \quad a = -1, b = 1$$

$$\bar{F}(t) = (t^2, 0, 1) \quad ; \quad \bar{x}'(t) = (1, 0, 2t)$$

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt = \int_{-1}^1 (t^2, 0, 1) \cdot (1, 0, 2t) dt =$$

$$= \int_{-1}^1 (t^2 + 2t) dt = \left. \frac{t^3}{3} + t^2 \right|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = 2$$

* (es invertible, no está en gráficas)

c) $\int_{\bar{x}} x dx - y dy$, con $\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_{\bar{x}} x dx - y dy \rightarrow \int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt$$

$$\bar{F} = (x, -y)$$

$$\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t) \quad a=0, b=2\pi$$

$$\bar{F}(t) = (\cos t, -\sin t)$$

$$\bar{x}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, -\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2 \sin t \cos t dt = \left. \cos^2 t \right|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0$$

¿Hacia dónde han los cálculos? $F = (x, -y)$ que es un campo gradiente con $\mathcal{F} = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right)$. ($F(x, y) = \nabla \mathcal{F}(x, y)$) y la curva es cerrada $\bar{x}(a) = \bar{x}(b)$. El resultado es cero, sin necesidad de hacer operaciones.