

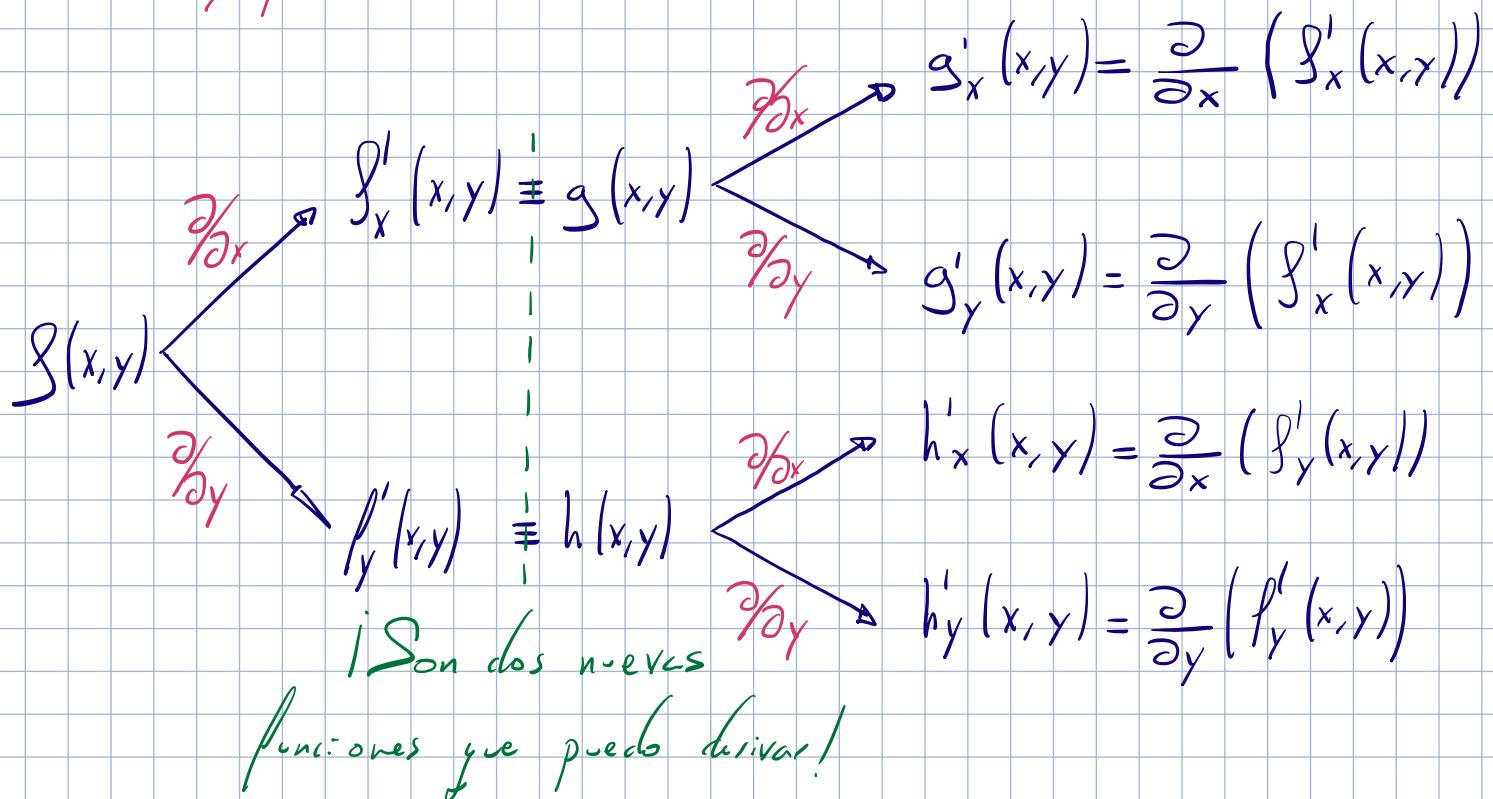
DERIVADA N-ÉSIMA

1 Derivadas sucesivas

$\textcircled{R^2}$ Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos calcular sus funciones derivadas parciales como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad // \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Estas f'_x, f'_y son las nuevas funciones que, si son derivables, puedo volver a derivar.



$\textcircled{R^P}$ Sea $f: D \subset \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$, se definen las funciones derivadas parciales como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}: D \subset \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \rightarrow f'_{x_i}(\bar{x})$$

¡Calculamos las derivadas parciales de las funciones derivadas parciales!

2 Notación

El orden importa. En general, no es lo mismo derivar primero respecto de x y luego respecto de y que al contrario.

$$D_{ij} f = D_j (D_i f) = f''_{i,j} = \left(f'_{x_i} \right)'_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Ejemplo \mathbb{R}^2

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f(x,y) & \begin{array}{|c|} \hline \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \hline \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Este se usará

en exámenes para evitar
dudas.

3 Derivadas sucesivas según vectores

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ podemos definir la

función derivada según \bar{u} : $D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$: $\bar{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(\bar{x})$. Una vez definida esta función, puedo volver a derivarla según otro vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^p$.

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f''_{uv}$$

Veremos algún ejemplo más adelante

EJEMPLO

$f(x,y) = \cos(2x) - x^2 e^{5y} + 3y^2$. Calcular $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}$

$$f'_x = -2 \sin(2x) - 2x e^{5y}$$

$$f'_y = -5x^2 e^{5y} + 6y$$

$$f''_{xx} = -4 \cos(2x) - 2e^{5y}$$

$$f''_{xy} = -10x e^{5y} \quad | \quad \text{Qué curioso... son iguales}$$

$$f''_{yx} = -10x e^{5y}$$

$$f''_{yy} = -25x^2 e^{5y} + 6$$

4 Funciones de clase C^r

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, f es de clase C^r en D (abierto) si existen sus derivadas parciales hasta orden r (incluyendo las cruzadas) y son continuas.

Por extensión, C^∞ significa ∞ derivadas parciales continuas.

Polinómicas (incluyendo constante, o 0), exponenciales, trigonométricas... son funciones C^∞ . Es lo habitual en ingeniería.

NOTA * $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset C^3 \supset \dots \supset C^\infty$

* $C^1, C^2, \dots, C^\infty \rightarrow$ todas son continuas.

* Recomendar

$C^\infty \rightarrow C^2 \rightarrow C^1 \rightarrow$ diferenciable \rightarrow continua

5 Teorema de Schwarz-Christoffel

Si $f: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 (derivadas parciales continuas hasta orden 2), las derivadas mixtas (cruzadas) coinciden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Esto tb funciona en orden superior. Por ejemplo, si $f \in C^3$, entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (\text{cualquier orden})$$

EJEMPLO Caso donde no se cumple el Thm de Schwarz-Christoffel

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Continuidad. Continua en \mathbb{R}^2

Único pto problemático es $(0,0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$0 \leq \left| f(x,y) - l \right| = \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| \leq |xy| \frac{x^2}{x^2+y^2} + |xy| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 2|xy| \rightarrow 0$$

(b) Derivadas parciales. (1^{er} orden)

Derivo de forma usual $\forall \bar{x} \neq (0,0)$ y usando def en $\bar{x} = (0,0)$.

$$f'_x(\bar{x}, y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^3y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si } \bar{x} \neq \bar{0}$$

$$f'_x(\bar{x}, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \quad \text{si } \bar{x} = \bar{0}$$

Aquí hay dos caminos. El primero es derivar f_y .

El segundo es usar simetrías. Seguimos el segundo.

Simetría $\rightarrow f(y, x) = -f(x, y) \rightarrow f(x, y) = -f(y, x)$

Puedo derivar ambas expresiones respecto la segunda componente

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (-f(y, x)) \rightarrow f'_y(x, y) = -f'_y(y, x)$$

¿Y como calculo $-f'_y(x,y)$? Es $f'_x(x,y)$ donde pongo "x" donde aparece "y" y viceversa, cambiando de signo.

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{s.i. } \bar{x} \neq 0 \\ 0 & \text{s.i. } \bar{x} = 0 \end{cases}$$

Continuidad de derivadas parciales.

$$\left. \begin{array}{l} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \\ \text{orden 5 / orden 4} \\ \text{den=0 en } \bar{x}=0 \end{array} \right\} \checkmark$$

$$0 \leq |f(x,y) - l| = \left| \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| \leq \frac{|x^4||y|}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4|x^2y^2||y|}{(x^2+y^2)^2} + \frac{|y^4||y|}{(x^2+y^2)^2} \leq$$

$$\leq |y| + 4|y| + |y| \rightarrow 0$$

* Dos caminos

$$\textcircled{1} \quad \frac{4x^2y^2|y|}{x^4+y^4+2x^2y^2} \leq 2|y|$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{4(x^2y^2)|y|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{4(x^2+y^2)^2|y|}{(x^2+y^2)^2} = 4|y|$$

De modo que f'_x (y por simetria f'_y) son continuas y \sec^{-1}

③ Derivadas parciales de segundo orden

Derivo de forma usual $\nabla \bar{x} \neq (0,0)$ y usando $\bar{x} = (0,0)$.

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'_x(h,0) - g'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'_y(h,0) - g'_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1$$

$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$ $\xrightarrow{\text{Tan SC}}$ Algunas de las derivadas de 2º orden
no es continua

Lo comprobamos calculando f''_{xx} y analizando su continuidad.

$$f''_{xx}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)2x \cdot 2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} & \bar{x} \neq \bar{0} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'_x(h,0) - g'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 & \end{cases}$$

¿Es continua? Simplificando $f''_{xx}(x,y)$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, tenemos

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{x^6 - 4x^5y + 13x^4y^2 - 16x^3y^3 + 7x^2y^4 + 4xy^5 - 5y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

De modo que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} g'_x(x,y)$

grado 6 / grado 6
den = 0 solo con $\bar{x} = 0$ / $\frac{1}{4}$ punto.

Problema tray. lineales $y = mx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 4m + 13m^2 - 16m^3 + 7m^4 + 4m^5 - 5m^6)x^6}{(1+m^2)^3 x^6} = \cancel{}$$

6 Calculo práctico de derivadas según vectores.

Sea $f \in C^2$: $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla f \cdot \bar{u} = \sum_{i=1}^P \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i$

De modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right) = \sum_{j=1}^P \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right) v_j = \sum_{j=1}^P \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^P \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right) v_j \\ &= \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^P \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j \end{aligned}$$

De modo similar, si $f \in C^3$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{u} \partial \bar{v} \partial \bar{w}} = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i v_j w_k$$

7 EJERCICIOS

① Sea $f(x,y) = e^{y-x} + \frac{x^2+1}{y+1}$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2}(1,1)$ según $\bar{u} = (3, 2)$

La función es C^∞ en $(1,1)$, de forma que podemos calcular la derivada según el vector, como:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla f \cdot \bar{u} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2} = f''_{xx} u_1 u_1 + f''_{yy} u_2 u_2 + 2 f''_{xy} u_1 u_2$$

$$f'_x = -e^{y-x} + \frac{2x}{y+1}$$

$$f''_{xx} = e^{y-x} + \frac{2}{y+1}$$

$$(1,1) \rightarrow 2$$

$$f'_y = e^{y-x} - \frac{x^2+1}{(y+1)^2}$$

$$f''_{xy} = -e^{y-x} - \frac{2x}{(y+1)^2}$$

$$\rightarrow -\frac{3}{2}$$

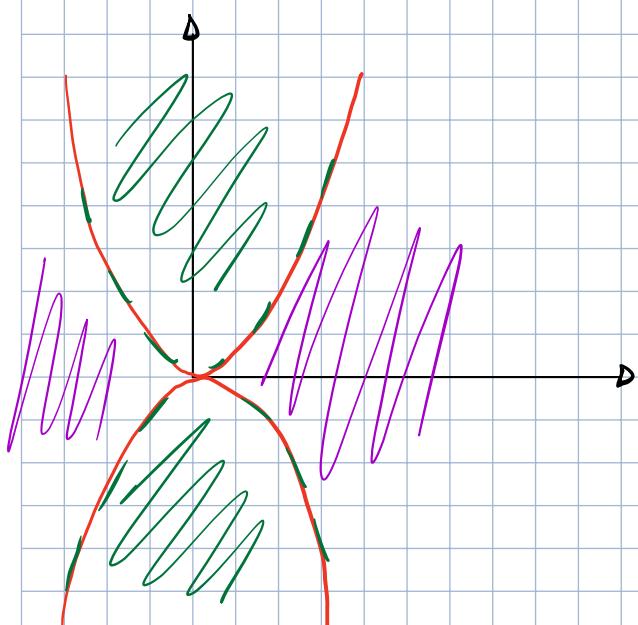
$$f''_{yy} = e^{y-x} + 2 \frac{(x^2+1)}{(y+1)^3} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Y aplicando la fórmula,

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial u} \right|_{(1,1)} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

III.6

(2) Sea $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & |y| < x^2 \\ xy & |y| \geq x^2 \end{cases}$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$



La descripción del dominio es fundamental para el cálculo de las derivadas!

Salvo en las zonas rojas, en todos los demás pts puedo "derivar normal".

Esto es:

$$\text{Si } |y| > x^2 \rightarrow f(x,y) = xy \rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = y \\ f'_y(x,y) = x \end{cases}$$

$$\text{Si } |y| < x^2 \rightarrow f(x,y) = x^2 + y^2 \rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = 2x \\ f'_y(x,y) = 2y \end{cases}$$

Estas definiciones no son válidas en los pts de cambio de def
 Allí hay que aplicar la definición.

$$* f'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 0^2 - 0}{h} = 0$$

$$* f'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Es fácil comprobar que las parciales son continuas y por tanto la función es C^1 .

Vamos ahora a calcular las cruzadas en el origen.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Derivadas mixtas no coinciden, luego la función no pertenece a C^2