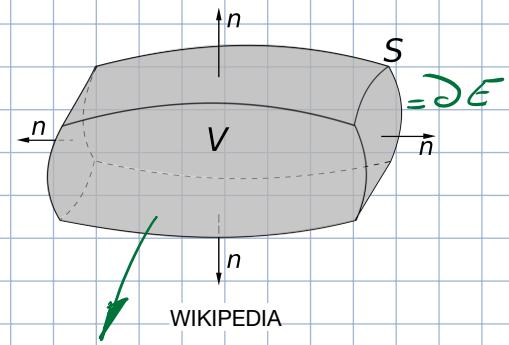


## 23. TEOREMAS DE INTEGRACIÓN DEL CÁLCULO VECTORIAL II

### 2 Teorema de Gauss (Teorema de la divergencia en 3D)

$\mathbb{R}^3$  (Tma de Gauss). El teorema de Gauss permite calcular el flujo a través de una superficie cerrada ( $S = \partial E$ ) como la integral de la divergencia del campo vectorial en el volumen encerrado por la superficie ( $V = E$ ).



Sea  $E$  una región de  $\mathbb{R}^3$  y  $\partial E = S$ , frontera de  $E$ , una superficie cerrada regular a trozos orientada positivamente (su normal apunta hacia afuera) y sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función vectorial  $C^1$  definida en  $E$ , entonces:

$$\iiint_E (\nabla \cdot \bar{F}) dV = \iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_S (\bar{F} \cdot \bar{n}) dS$$

EJEMPLO:

Calcular  $\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S}$  con:

$$\bar{F} = \left( xy, -\frac{y^2}{z}, z \right) \text{ y } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S_1 \equiv z = 4 - 3x^2 - 3y^2, z \geq 1$$

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$$

$$S_3 \equiv x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$$

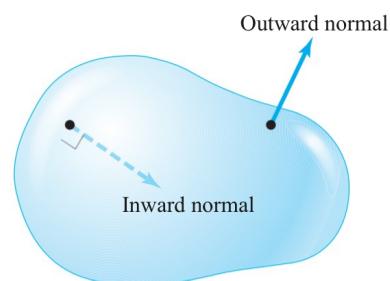
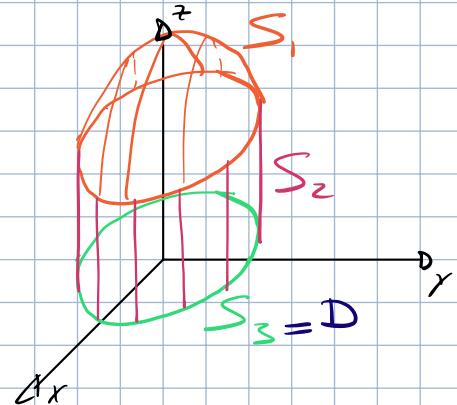


figure 8.4.2 Two possible orientations for a closed surface.

Vector Calculus, Marsden & Tromba



$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \int_{S_3} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

Por ejemplo, para  $\int_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_D \bar{F}(S_1) \cdot (S_u^1 \wedge S_v^1) du dv$

$$S_1 = (r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - 3r^2) \quad \overbrace{r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]}^D$$

$$S_u^1 \wedge S_v^1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -6r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 6r^2 \cos \theta \\ 6r^2 \sin \theta \\ r \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sentido correcto (hacia el viento)}$$

$$\bar{F}(S_1) = (r^2 \sin \theta \cos \theta, -\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta, 4 - 3r^2)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( r^2 \sin \theta \cos \theta, -\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta, 4 - 3r^2 \right) \cdot (6r^2 \cos \theta, 6r^2 \sin \theta, r) dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( 6r^3 \sin \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{2} r^4 \sin^3 \theta + 4r - 3r^3 \right) dr d\theta = [\dots]$$

Habrá que completar esto y hacer lo mismo para  $S_2$  y  $S_3$ .  
 ¿Existe alguna alternativa?

$$\text{Aplicamos el teorema de Gauss} \rightarrow \iiint_E (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde en este caso,  $E$  es:

$$E: (x, y) \in D \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$$

$$0 \leq z \leq 4 - 3x^2 - 3y^2$$

$$\text{Y la divergencia de } \vec{F} \text{ es: } \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x^2}{z}) + \frac{\partial}{\partial z}(z) =$$

$$= y - y + 1 = 1$$

De modo que:

$$\iiint_E 1 dV = \iint_D \int_0^{4-3x^2-3y^2} dz = \iint_D (4 - 3x^2 - 3y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - 3r^2) r dr d\theta =$$

↑  
Polares

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{6} \left[ -\frac{1}{2} (4 - 3r^2)^2 \right]_0^1 = \frac{2\pi}{12} (16 - 1) = \frac{15\pi}{6}$$

DEM Consideramos la demostración en el caso particular de conjuntos simples (que quedan encerrados entre la gráfica de dos funciones). Además, vamos a exigir que el dominio pueda ser descompuesto (a la vez) de cualquiera de las formas siguientes:

$$\textcircled{1} \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

Con  $D$  un conjunto  $x$ -simple o  $y$ -simple

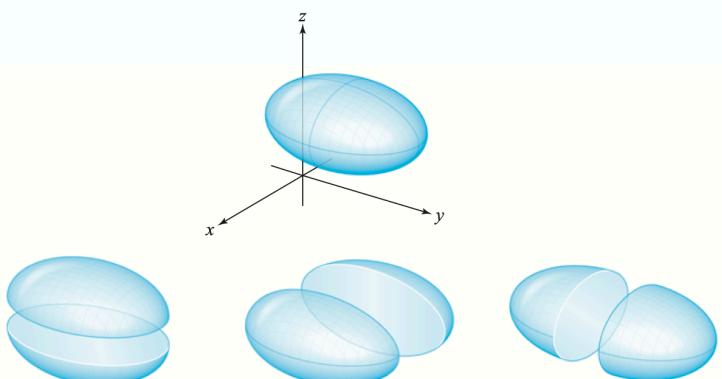
$$\textcircled{2} \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, z) \in D, g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

Con  $D$  un conjunto  $x$ -simple o  $z$ -simple

$$\textcircled{3} \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D, h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}$$

Con  $D$  un conjunto  $y$ -simple o  $z$ -simple

Por ejemplo, un elipsoide  
sería un conjunto válido.



Vector Calculus, Marsden & Tromba

Si  $\bar{F} = (P, Q, R)$ , entonces  $\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ,  
de modo que:

$$\iiint_E (\nabla \cdot \bar{F}) dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Por otro lado, la integral de superficie queda:

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iint_S P_i \cdot \bar{n} dS + \iint_S Q_j \cdot \bar{n} dS + \iint_S R_k \cdot \bar{n} dS$$

Podemos ver que el teorema de Gauss se cumpliría si se cumplen a la vez:

$$\iiint_E (\nabla \cdot \bar{F}) dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

||



||

||

||

$$\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iint_S P_i \cdot \bar{n} dS + \iint_S Q_j \cdot \bar{n} dS + \iint_S R_k \cdot \bar{n} dS$$

$$\boxed{\iint_S \frac{\partial R}{\partial z} dS}$$

Vamos a probar la relación mientras que las otras dos se probarían de forma análoga.

Ya hemos establecido previamente que  $E$  era una región tal que existen un par de funciones:

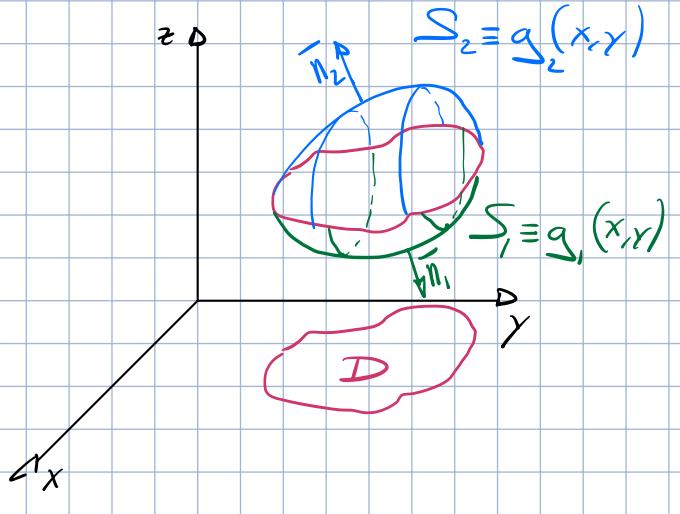
$$z = g_1(x, y), \quad z = g_2(x, y)$$

con un dominio común  $D$  en el plano  $xy$  tal que  $E$  es el conjunto de puntos:

$$E: \begin{cases} (x, y) \in D \\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \end{cases}$$

De esta forma, la integral de volumen queda:

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D \left( \int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dA$$



Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que:

$$\iint_D [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))] dA \quad (1)$$

Por otro lado, la integral de superficie queda:

$$\iint_S R \bar{K} \cdot \bar{n} dS = \iint_{S_1} R \bar{K} \cdot \bar{n}_1 dS + \iint_{S_2} R \bar{K} \cdot \bar{n}_2 dS = \\ = \iint_{S_1} R \bar{K} \cdot d\bar{S}_1 + \iint_{S_2} R \bar{K} \cdot d\bar{S}_2$$

La superficie  $S_1$  queda definida por  $z = g_1(x, y)$

$$S_1 = (x, y, g_1(x, y)) \quad y \quad d\bar{S}_1 = \|S'_x \times S'_y\| dx dy$$

$$d\bar{S}_1 = \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ 1 & 0 & g'_{1x} \\ 0 & 1 & g'_{1y} \end{vmatrix} = -\left( \frac{\partial g_1}{\partial x} \bar{I} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \bar{J} + \bar{K} \right) dx dy$$

↑ Cambiamos el signo pues la normal debe apuntar hacia afuera

Así que:

$$\iint_{S_1} R \bar{k} \cdot d\bar{S}_1 = \iint_D R \bar{k} \cdot \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \bar{j} - \bar{k} \right) dx dy =$$
$$= - \iint_D R(x, y, g_1(x, y)) dx dy \quad (2)$$

De manera similar,

$$\iint_{S_2} R \bar{k} \cdot d\bar{S}_2 = \iint_D R(x, y, g_2(x, y)) dx dy \quad (3)$$

Comparando (1), (2) y (3), concluimos que:

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_S R \bar{k} \cdot \bar{n} dS$$

Podríamos probar las otras dos relaciones, concluyendo la prueba del teorema de Gauss. ■

**NOTA:** Igual que pasaba con el teorema de Green, se puede aplicar Gauss a volúmenes más complicados. Por ejemplo, el teorema de Gauss

aplica a la región contenida entre dos superficies cerradas, tal que una queda dentro de la otra.

Notese el sentido en que apuntan las normales de  $S_1$  y  $S_2$ .

En general, el teorema de Gauss es aplicable a cualquier volumen que pueda romperse en volúmenes como los usados en la demostración.

→ Significado físico:

Flujo neto implica | compresión  
expansión

Incompresibilidad → flujo neto cero.

[mathinsight.org/divergence\\_theorem\\_idea](http://mathinsight.org/divergence_theorem_idea)

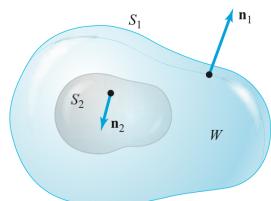


figure 8.4.5 A more general region to which Gauss' theorem applies.

Problema de examen . Prueba 6 (2011-12)

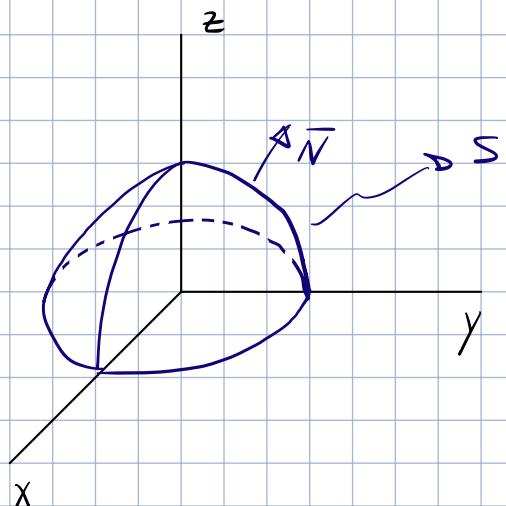
El flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + yz, y^3 + xz, z^3 + yx)$  a través del cono esférico  $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0$  orientado según su normal exterior vale:

- Ⓐ  $2\pi$  Ⓑ  $4\pi$  Ⓒ  $\frac{6\pi}{5}$  Ⓓ  $\frac{4\pi}{5}$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_W \mathbf{F}(\bar{s}) (\bar{S}_\varphi \times \bar{S}_\theta) d\varphi d\theta = *$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$W = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$$



$$\bar{S}_\varphi \times \bar{S}_\theta = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \sin\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin^2\varphi \\ \sin\theta \sin^2\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$* = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} \left( c^3 \theta s^3 \varphi + s \theta s \varphi c \varphi, s^3 \theta s^3 \varphi + c \theta s \varphi c \varphi, c^2 \varphi + c \theta s \theta s^2 \varphi \right) \begin{bmatrix} c \theta s^2 \varphi \\ s \theta s^2 \varphi \\ c \varphi s \varphi \end{bmatrix} d\theta$$

La integral ya está planteada, pero parece complicada. ¿Hay alguna manera más sencilla de plantear el problema?

Defino una nueva superficie  $S_1$  que cierra la superficie  $S$ . De este modo, por el teorema de Gauss:

$$\iint_{S_c} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} + \iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_E \bar{P}\bar{F} dV$$

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_E \bar{P}\bar{F} dV - \iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$\iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \bar{F}(S) (\bar{S}_r' \times \bar{S}_\theta') d\theta dr = *$$

$$\bar{S}_r' \times \bar{S}_\theta' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

(cambio signo)

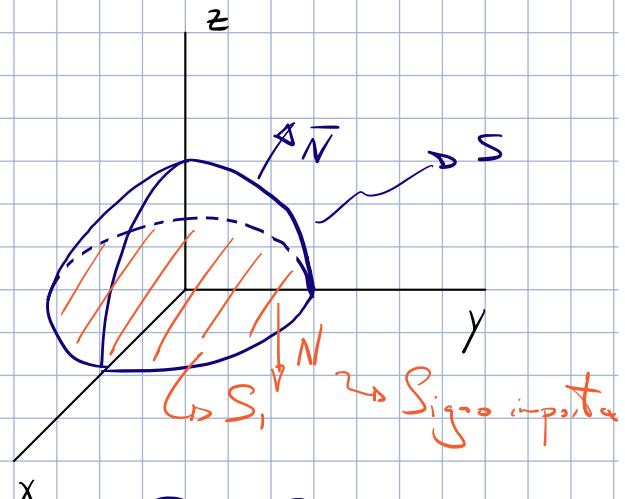
$$* \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\bar{X}, \bar{X}, \bar{O}^3 + r^2 \cos \theta \sin \theta) \cdot (0, 0, -r) d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dr =$$

Van a dar 0 en cálculo

caso. No los calculo.

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^3 \frac{\sin 2\theta}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_E \bar{P}\bar{F} dV - \iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$



$$S_c = S \cup S_1$$

$$\iiint_E \nabla \cdot \bar{F} dV$$

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D; 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\nabla \cdot \bar{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\iint_D \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 3(x^2 + y^2 + z^2) dz = 3 \iint_D (x^2 + y^2)_z + \frac{z^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA =$$

$$= 3 \iint_D \left[ (x^2 + y^2) \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{1}{3} (1-x^2-y^2)^{3/2} \right] dA$$

Cambio a polares

$$\textcircled{1} D \rightarrow [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

No simplifica demasiado.

$$\textcircled{2} f(r, \theta) = r^2 \sqrt{1-r^2} + \frac{1}{3} (1-r^2) \sqrt{1-r^2}$$

$$\textcircled{3} dA \Rightarrow r dr d\theta$$

Probamos a hacer el cambio del recinto original usando esféricas

$$E = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$$

$$\iiint_E 3(x^2 + y^2 + z^2) dV = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} 3r^4 \sin \varphi d\varphi = 2\pi \left( 3 \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 \left. - \cos \varphi \right|_0^{\pi/2} = + \frac{6}{5} \pi$$

Cambio a esféricas

$$\textcircled{1} E \rightarrow E^*$$

$$\textcircled{2} f^*(r, \theta, \varphi) = 3r^2$$

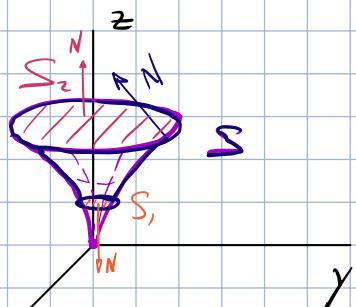
$$\textcircled{3} dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

Extracurricular. Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido mediante  $\bar{F}(x, y, z) = (x+y, y-x, -2z)$

(2011-2012) El flujo de  $\bar{F}$  a través de la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^4, 1 \leq z \leq 2\}$  orientada de modo que la tercera componente del vector normal sea positiva vale:

- (a) -30π    (b) -45π    (c) -62π    (d) -93π

$$\iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \iint_{S_2} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \iint_{(-S)} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_E \nabla \cdot \bar{F} dV$$



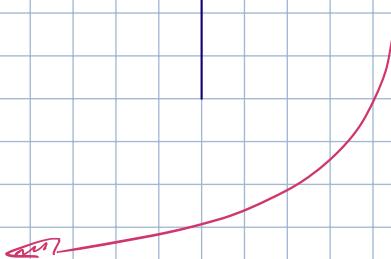
$$\nabla \cdot \bar{F} = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \iint_{S_2} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \iint_{-S} \bar{F} \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\iint_{-S} \bar{F} \cdot d\bar{S} = - \iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} - \iint_{S_2} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

Camino 1

$$\bar{S}(r, \theta) = \begin{bmatrix} r^2 \cos \theta \\ r^2 \sin \theta \\ r \end{bmatrix}$$



$$D = [1, 2] \times [0, 2\pi]$$

$$d\bar{S} = \bar{S}'_r \times \bar{S}'_\theta dr d\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2r\cos\theta & 2r\sin\theta & 1 \\ -r^2\sin\theta & r^2\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -r^2\cos\theta \\ -r^2\sin\theta \\ 2r^3 \end{bmatrix} dr d\theta$$

(normal ✓)

Sup. de revolución. Girar  
 $\bar{r}(t) = (t^2, 0, t)$

alrededor de OZ

$$\bar{S}(r, \theta) = (r^2 \cos \theta, r^2 \sin \theta, r)$$

$$\bar{F}(\bar{s}) = (r^2(\cos\theta + \sin\theta), r^2(\sin\theta - \cos\theta), -2r)$$

$$\bar{F} \cdot d\bar{s} = -r^4 \cos\theta (\cos\theta + \sin\theta) - r^4 \sin\theta (\sin\theta - \cos\theta) - 4r^4$$

$$= -r^4 (\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos\theta \sin\theta - \sin\theta \cos\theta + 4) = -5r^4$$

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{s} = -5 \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^4 dr = -10\pi \left( \frac{r^5}{5} \right)_1^2 = -62\pi$$

Camino 2

$$\bar{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

$$\bar{S}_1(, \theta) = \begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r dr = 2\pi$$

$$d\bar{s}_1 = (0, 0, -r) d\theta d\phi$$

$$\bar{F}(\bar{s}_1) = (X, X, -2)$$

$$\bar{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 2^4, z = 2\}$$

$$\bar{S}_2(, \theta) = \begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{S_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 -4r dr = -2\pi [2r^2]_0^4 = -64\pi$$

$$d\bar{s}_2 = (0, 0, -r) d\theta d\phi$$

$$\bar{F}(\bar{s}_2) = (X, X, -4)$$

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{s} = + \iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \iint_{S_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} = 2\pi - 64\pi = -62\pi$$