INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}^p$ IV

19. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN EN CONJUNTOS ACOTADOS $\underline{\underline{B}}$

1. Integración por cambio de variable. Recordatorio en $\mathbb{R}$.

Sea la función $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Definimos un cambio de variable invertible $\left|\begin{array}{l} C^1 \\ \varphi'(t)\neq 0 \text{ en } [c,d] \end{array}\right|_{TFI}$ de modo que

$$\begin{aligned} \varphi: [c,d] &\longrightarrow I=[a,b] \\ t &\longrightarrow x=\varphi(t) \end{aligned}$$

De esta forma, la integral se transforma del siguiente modo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow[t=\varphi^{-1}(x)]{} \int_{c=\varphi^{-1}(a)}^{d=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

① Cambio en la región de integración:

$$[x=a,\ x=b]\longrightarrow[t=\varphi^{-1}(x=a)=c,\ t=\varphi^{-1}(x=b)=d]$$

② Cambio en la función:

$$f(x)\longrightarrow f(\varphi(t))$$

③ Cambio en el diferencial de longitud:

$$x=\varphi(t)\longrightarrow dx=\varphi'(t)\,dt$$

EJEMPLO $t = x^2 \overset{(x\geq 0)}{,} x = \sqrt{t}$

$$\int_0^{\pi^2} 2x\cos x^2\,dx = \int_0^{\pi^4} \cos t\,dt =$$

$$= \sin t \Big|_0^{\pi^4} = \sin(\pi^4)$$

① $I = [0, \pi^2] \longrightarrow J = [0, \pi^4]$

② $2x\cos x^2 \longrightarrow 2x\cos t$

③ $dt = 2x\,dx$

2 Integración por cambio de variable. Caso $\mathbb{R}^p$

El objetivo es integrar una función $f: C \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. En este desarrollo asumiremos que dicha función es continua en C y que C es un conjunto simple.

Definimos la función cambio de variable $\varphi: C^* \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, que pedimos que sea:

* Inyectiva en C^*
* C^1 en C^*
* $|J\varphi| \neq 0$ en C^* (salvo, a lo sumo en un conjunto de contenido nulo)

Analizaremos el efecto de esta última condición con el cambio de variable en polares.

Si se cumple lo anterior, tenemos que:

$$\int_C f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_{C^*} f(\varphi(\bar{u}))\,|\det J\varphi(\bar{u})|\,d\bar{u}$$

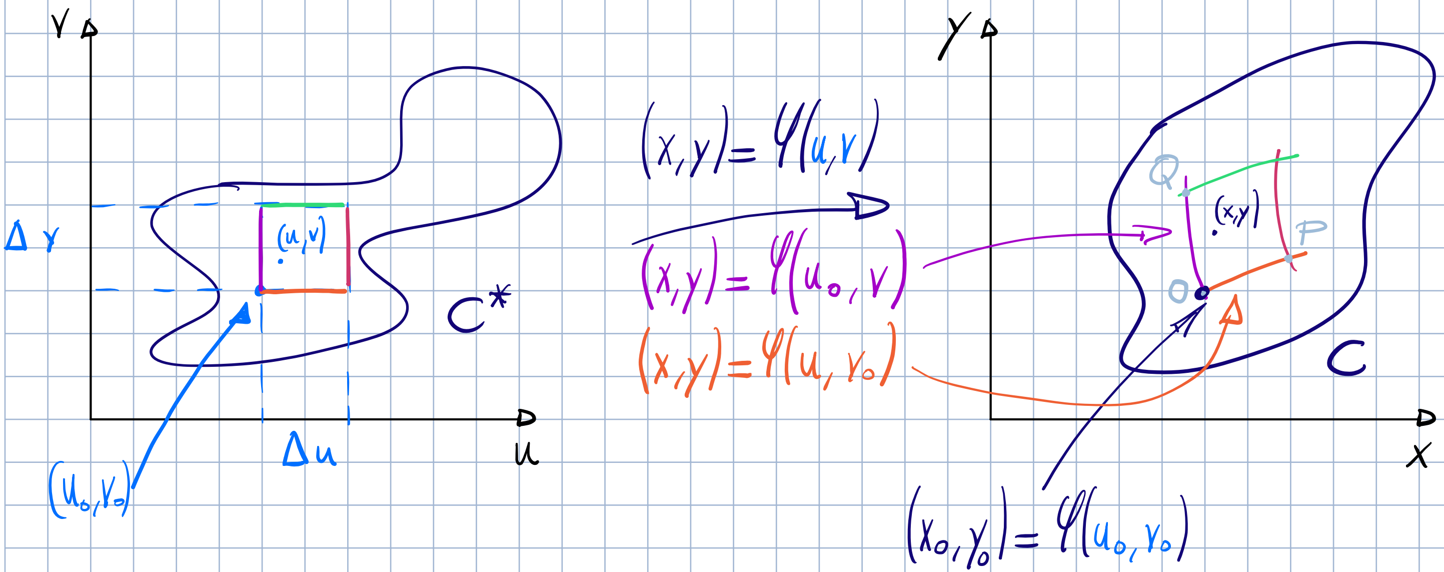
① Cambio en la región de integración: $C \to C^*$

② Cambio en la función: $f(\bar{x}) \longrightarrow f(\varphi(\bar{u}))$

③ Cambio en el diferencial: $d\bar{x} \longrightarrow |\det J\varphi(\bar{u})|\, d\bar{u}$

Explicación de origen de la fórmula en $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi: C^* \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longrightarrow (x,y)$$



$dA^* = \Delta u \Delta v$ $\qquad\qquad$ $dA \approx \|\overline{OP} \times \overline{OQ}\|$

$$\overline{OP} = (x_P, y_P) - (x_0, y_0) = \varphi(u_0+\Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0) =$$
$$= \frac{\varphi(u_0+\Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{\Delta u} \cdot \Delta u \approx \varphi'_u \Delta u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) \Delta u$$

$$\overline{OQ} = (x_Q, y_Q) - (x_0, y_0) = \varphi(u_0, v_0+\Delta v) - \varphi(u_0, v_0) =$$
$$= \frac{\varphi(u_0, v_0+\Delta v) - \varphi(u_0, v_0)}{\Delta v} \cdot \Delta v \approx \varphi'_v \Delta v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) \Delta v$$

$$dA \approx \|\overline{OP} \times \overline{OQ}\| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'_u \Delta u & y'_u \Delta u & 0 \\ x'_v \Delta v & y'_v \Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u \Delta u & y'_u \Delta u \\ x'_v \Delta v & y'_v \Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v$$

De modo que, $dA = dx\,dy \xrightarrow{\text{se transforma en}} |\det J\varphi|\,du\,dv = |\det J\varphi|\,dA^*$

En resumen:

① $C \longrightarrow C^* = \varphi^{-1}(C)$

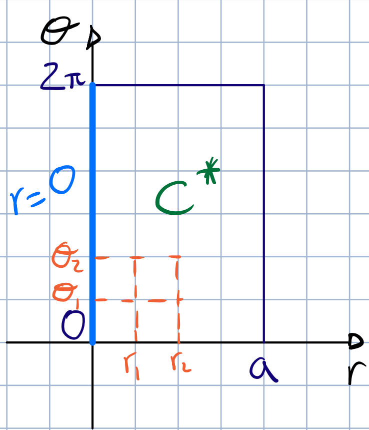
② $f(x,y) \longrightarrow f(x(u,v), y(u,v)) = f^*(u,v)$

③ $dA = dx\,dy \longrightarrow |\det J\varphi|\,du\,dv$

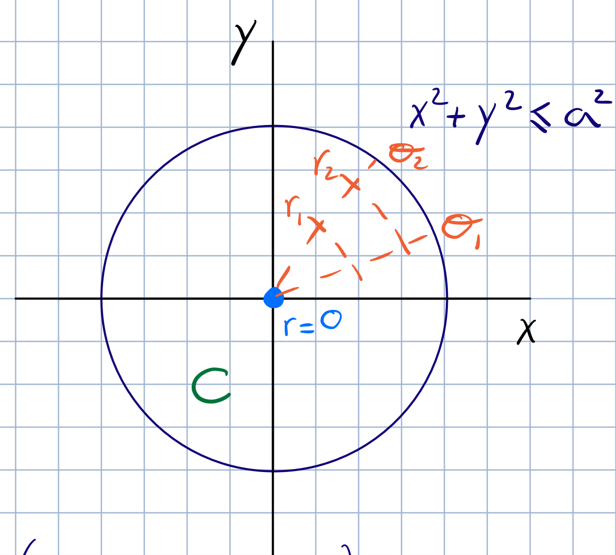
$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{C^*} f^*(u,v)\,|\det J\varphi|\,du\,dv$$

3 Cambios de variable usuales

① Cambio a polares:



$$\xrightarrow[\;y = r\sin\theta\;]{\;x = r\cos\theta\;}$$



$\varphi: C^* = \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \longrightarrow (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Veamos cómo se transforma en este caso un dA.

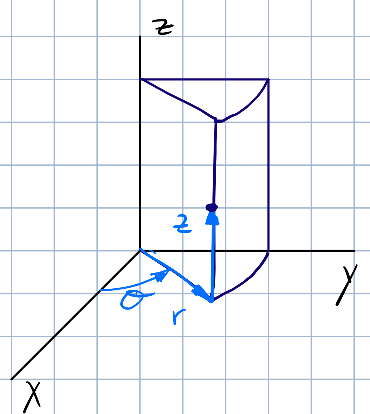
$$dA = dx\,dy = |\det J\varphi|\, dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta$$

$$|J\varphi| = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

NOTA: $r=0$, $|\det J\varphi| = 0$. Sin embargo, el segmento $r=0$ tiene contenido nulo, por lo que se puede aplicar la fórmula de cambio de variable sin problema.

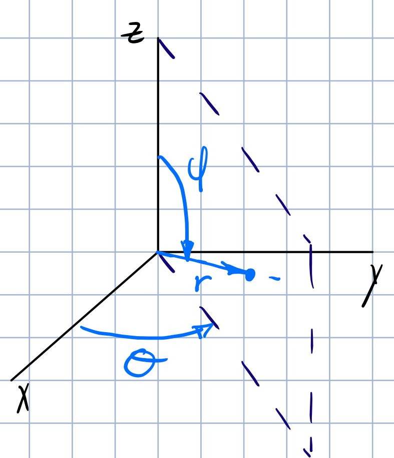
2 Cambio a cilíndricas:

Es exactamente igual que el de polares, incluyendo el eje z.



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\}\ dV = r\, dr\, d\theta\, dz$$

3 Cambio a coordenadas esféricas.



$$x = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

* NOTA: $\det(J\varphi) = \det(J\varphi^T)$

$$\det J\varphi \overset{*}{=} \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

Calculo el determinante por adjuntos

$$= \cos\varphi \begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} +$$

$$-r\sin\varphi \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi\left(-r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\right.$$

$$\left.-r^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\right) - r\sin\varphi\left(r\cos^2\theta\sin^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) =$$

$$-r^2\sin\varphi\cos^2\varphi\overbrace{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}^{1} - r^2\sin^3\varphi\overbrace{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}^{1} =$$

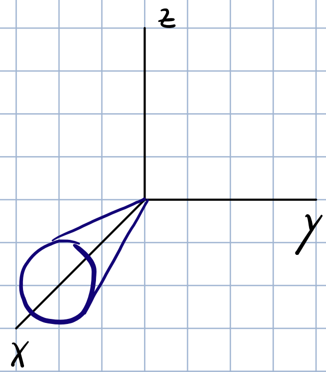
$$= -r^2\sin\varphi\overbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}^{1} = -r^2\sin\varphi$$

De modo que

$$dV = dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

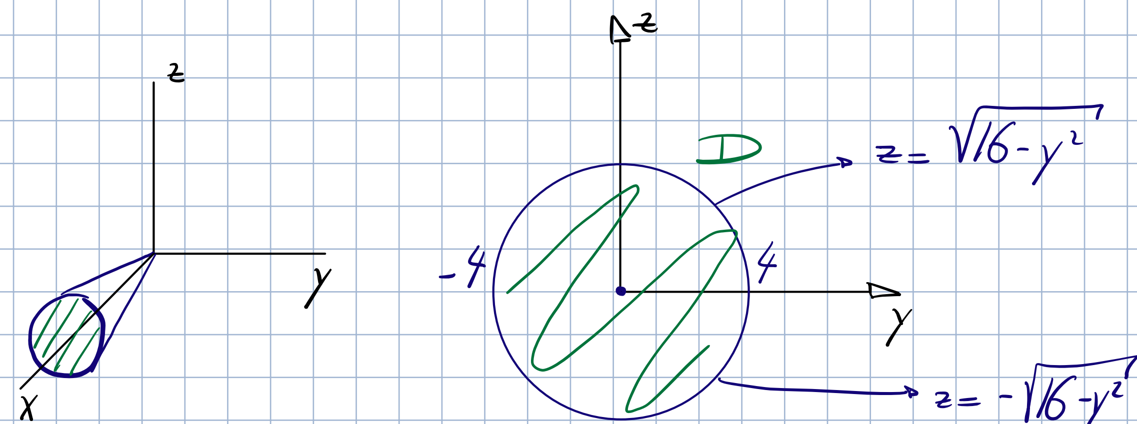
4 EJERCICIOS

① Calcular el volumen del sólido $E = \begin{cases} x \geq \sqrt{y^2+z^2} \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$



Este problema ya lo hemos planteado anteriormente. Haremos uso aquí del cambio de variable para calcular el resultado

Si planteamos este problema como uno de tipo ③, tenemos:

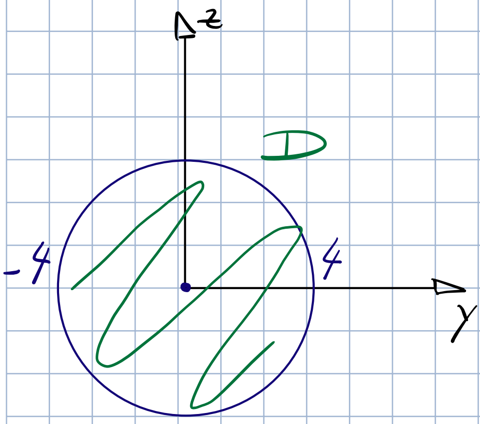


$$S = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} (y,z) \in D \\ \text{cono} \leq x \leq 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} -\sqrt{16-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-y^2} \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array}\right\} D \\ \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

De modo que

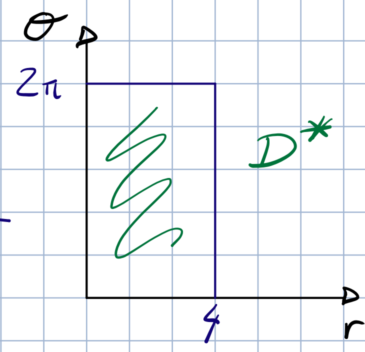
$$\iiint_E 1\, dV = \iint_D \left(\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{4} dx \right) dA = \iint_D \left(4 - \sqrt{y^2+z^2} \right) dA$$

Si usamos polares:



$z = r\sin\theta$

$y = r\cos\theta$



De modo que:

$$D^* = [0,4] \times [0, 2\pi]$$

$$f = 4 - \sqrt{y^2+z^2} = 4 - r$$

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

$$\iint_D \left(4 - \sqrt{y^2+z^2}\right) dA = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (4-r)\,r\,d\theta\,dr = 2\pi \int_0^4 (4r - r^2)\,dr =$$

$$2\pi\left(2r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^4 = 2\pi\left(32 - \frac{1}{3}64\right) = 64\pi\left(1 - \tfrac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi$$

Otra opción (con idéntico resultado) habría sido usar coordenadas cilíndricas.

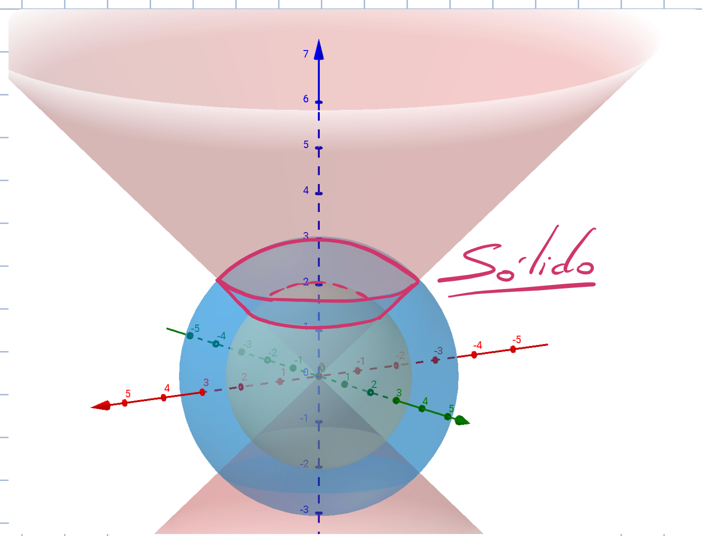
$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= r\cos\theta \\ z &= r\sin\theta \end{aligned} \xrightarrow{E} \begin{aligned} r &\le x \le 4 \\ 0 &\le r \le 4 \\ 0 &\le \theta \le 2\pi \end{aligned} \longrightarrow \iiint_E dV = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 1 \cdot r\,dx\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_0^4 \int_0^{2\pi} r(4-r)\,d\theta\,dr = \ldots$$

② Calcular el volumen del sólido encerrado por:

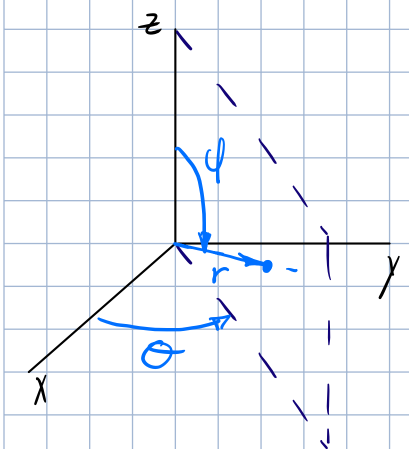
$$\left(\underbrace{x^2+y^2=z^2}_{\text{cono}} \ ; \ \underbrace{x^2+y^2+z^2=9}_{\text{esfera 1}} ; \ \underbrace{x^2+y^2+z^2=4}_{\text{esfera 2}} \right)$$

Este problema se puede expresar de forma sencilla usando coordenadas esféricas.



Sólido

Imagen generada con Geogebra



$$x = r\cos\theta \sin\varphi \qquad dV = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$y = r\sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r\cos\varphi$$

Sólido

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$(\text{esfera 1}) \quad 2 \leq r \leq 3 \quad (\text{esfera 2})$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/4 \quad (\text{cono})$$

$*$

$$x^2+y^2 = z^2$$

$$r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = r^2\sin^2\varphi = r^2\cos^2\varphi \rightarrow \sin^2\varphi = \cos^2\varphi \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi = \pi/4 \ *$$

De modo que la integral queda:

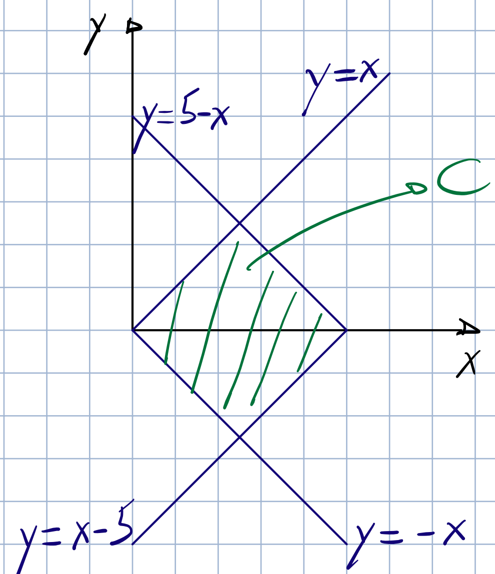
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_2^3 1\, r^2 \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta \overset{*}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 r^2\, dr \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \left.\frac{r^3}{3}\right|_2^3 \left.(-\cos\varphi)\right|_0^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3}(27-8)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{19}{3}\pi\left(2-\sqrt{2}\right).$$

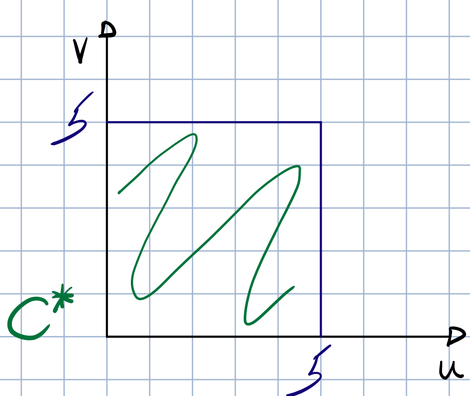
*

$$\int_c^d\int_a^b f(x)\cdot g(y)\, dx\, dy = \int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_c^d g(y)\, dy$$

3 Calcular $\displaystyle\iint_C \frac{x+y}{x-y+1}\, dx\, dy$, con C



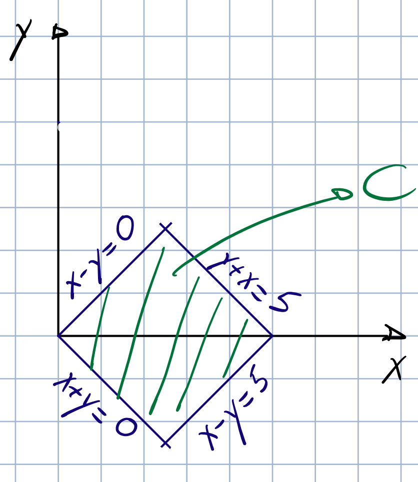
¿Puedo simplificar el problema con algún cambio de variable?



$$\overset{\varphi^{-1}}{\Longleftarrow}$$

$u = x+y$

$v = x-y$



$C^* = [0,5] \times [0,5]$

La función se transforma en:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y+1} = \frac{u}{v+1} = f^*(u,v)$$

Y el diferencial de área es $dA = |\det J\varphi|\, du\, dv = \frac{1}{2}\, du\, dv$

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Teorema de la función inversa

(Jacobiano es constante por ser problema lineal)

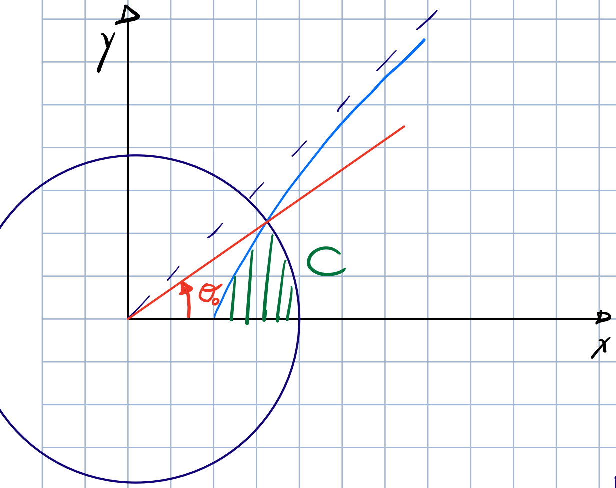
Luego la integral es:

$$\int_0^5 \int_0^5 \frac{u}{v+1} \frac{1}{2}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_0^5 u\, du \int_0^5 \frac{1}{v+1}\, dv = \frac{1}{4}\, 25 \ln 6$$

4 (V.8) Calcular $I = \iint_C f$ con $C \subset \mathbb{R}^2$ y $f: C \to \mathbb{R}^2$:

$C \Rightarrow \{ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 = 2,\ x^2 - y^2 = 1 \}$ Conjunto limitado por estas cuatro curvas

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$$



En este caso, un cambio de variable a polares podría ser de utilidad.

Expresamos C en polares:

$$0 \leq \theta \leq \theta_0$$
$$\text{hipérbola} \leq r \leq \sqrt{2}$$

Tenemos que calcular el valor de θ_0 y expresar la hipérbola en polares:

$$x^2 - y^2 = 1 \longrightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1 \longrightarrow \text{hipérbola}$$
$$r = \sqrt{2} \longrightarrow \text{circunferencia}$$

$\theta_0 \longrightarrow$ Corte entre hipérbola y circunferencia.

θ para el que $r = \sqrt{2}$ en ec. de hipérbola.

$$(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0) = 1/2 \longrightarrow \cos 2\theta_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{3} \longrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

Por otro lado, podemos expresar el valor r de la hipérbola

$$r_{hip} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta}}$$, de modo que C^* es

$$C^* = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta}} \leq r \leq \sqrt{2} \end{array} \right.$$

En lo que se refiere a la función, tenemos que:

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2r\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{r\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}}$$

Y el diferencial de área es:

$$dA=r\,dr\,d\theta$$

De modo que la integral queda:

$$I=\int_0^{\pi/6}\int_{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^{-1/2}}^{\sqrt{2}}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r}\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}}\cancel{r}\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/6}\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)d\theta=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/6}\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\,d\theta=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos 2\theta}\Big|_0^{\pi/6}+\frac{1}{4}\ln\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-1\right)$$

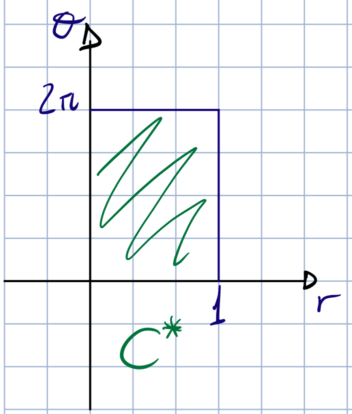
$$+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\ln 2$$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

5 (V9) Calcular la integral doble:

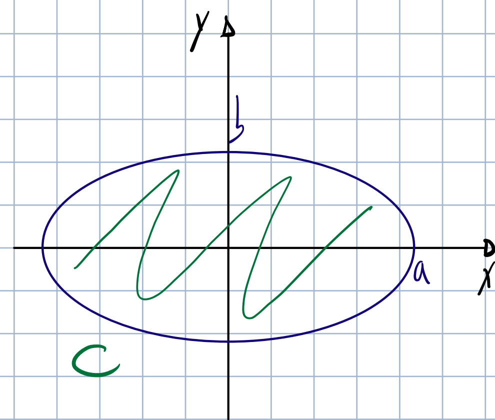
$$I=\iint_C\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy \quad \text{con } C=\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\leq 1\right\}$$

Para este problema, puedo crear un cambio de variable inspirado en polares.



φ $\quad \dfrac{x}{a} = r\cos\theta$

$\dfrac{y}{b} = r\sin\theta$



Vemos que $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 \leq 1$

De modo que la función $f(x,y) \longrightarrow f^*(r,\theta)$

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = \sqrt{1-r^2} = f^*(r,\theta)$$

Y el diferencial de área $dA = |\det J\varphi|\, dr\, d\theta = ab\, r\, dr\, d\theta$

$$|J\varphi| = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -ar\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

De modo que la integral queda:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot ab\, r\, dr\, d\theta = 2\pi ab \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{3}{2}(-2r)\sqrt{1-r^2}\, dr =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi ab \left[(1-r^2)^{3/2}\right]\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} ab$$

⑥ (V10) Sea D la región definida mediante

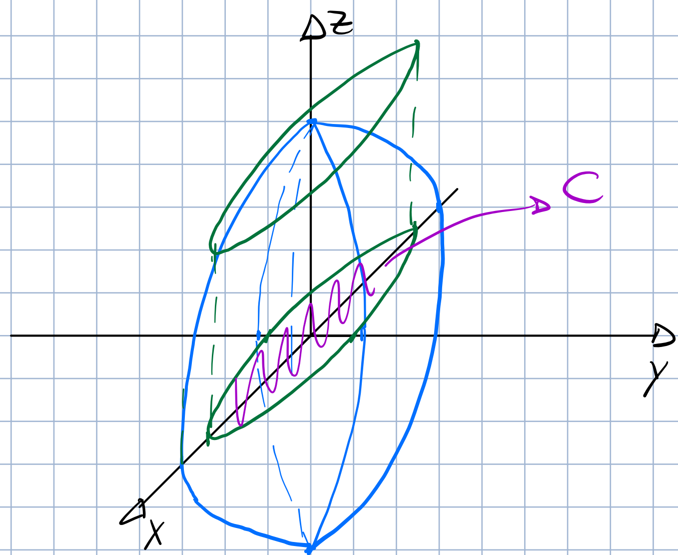
$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + 16y^2 + z^2 \leq 25}_{S_1} , \underbrace{x^2 + 16y^2 \leq 16}_{S_2}, z \geq 0 \}$$

Sea $f: D \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

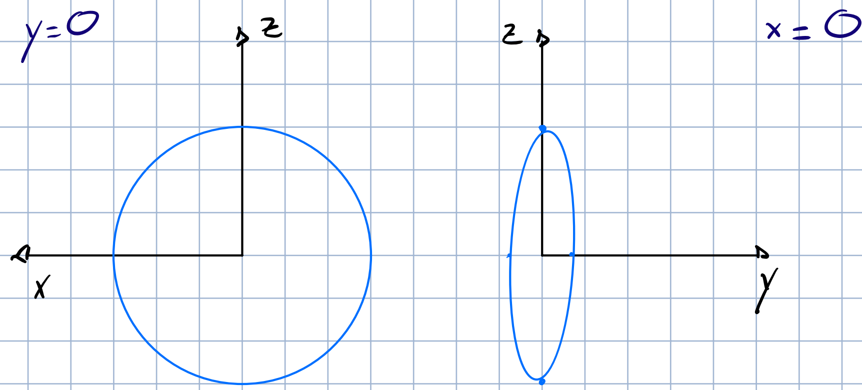
$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2 - 16y^2}}$$

Calcular $I = \int_D f$.

La región de integración son los pts de $\mathbb{R}^3$ que están dentro de ambas regiones a la vez.

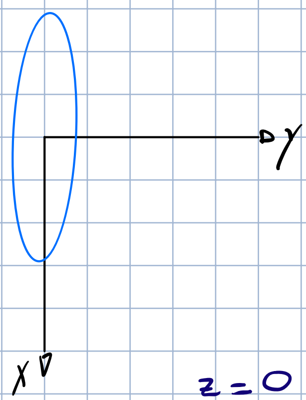


S_1



$16y^2 + z^2 \leq 25$

$x^2 + y^2 \leq 25$

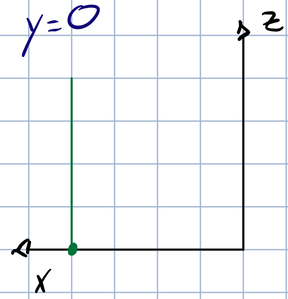


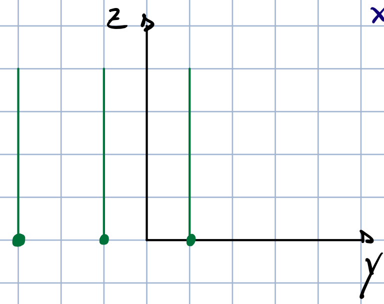
$16y^2 + x^2 \leq 25$

$z = 0$

S_2

$y = 0$

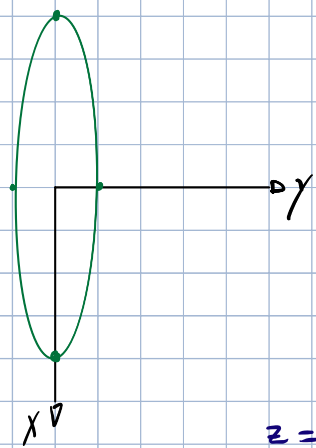




$x = 0$

$16y^2 \leq 16$

$x^2 \leq 16$



$x^2 + 16y^2 \leq 16$

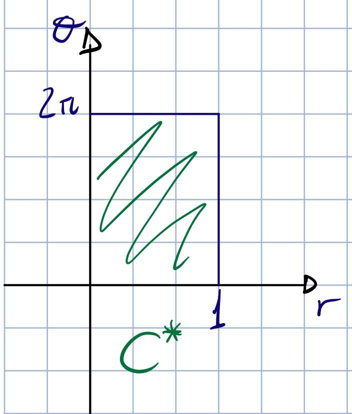
$z = 0$

$$\iint_C \left(\int_0^{\sqrt{25 - x^2 - 16y^2}} f(x,y,z)\, dz \right) dA =$$

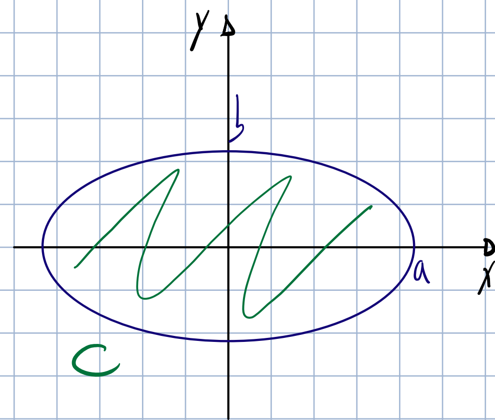
$$\iint_C \left(\int_0^{\sqrt{25 - x^2 - 16y^2}} \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2 - 16y^2}}\, dz \right) dA =$$

$$= \int_C \frac{x^2 \cancel{\sqrt{(25-x^2-16y^2)}}}{\cancel{\sqrt{25-x^2-16y^2}}}\, dA = \int_C x^2\, dA$$

Para este problema, puedo crear un cambio de variable inspirado en polares.



$$\frac{x}{a} = r\cos\theta \qquad \frac{y}{b} = r\sin\theta$$



Vemos que $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 \leq 1$

En este caso particular $x^2 + 16y^2 = 16 \longrightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + y^2 = 1$, luego:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{4} &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{con } r\in[0,1] \text{ y } \theta\in[0,2\pi]$$

$$\left.\begin{aligned} dA &= 4\, r\,dr\,d\theta \\ f(x,y) &= x^2 = 16r^2\cos^2\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow I = 16\cdot 4\int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \overset{*}{=} 16\pi$$

$$\ast \quad \int_a^b \cos\theta \cos\theta \, d\theta = \cos\theta \sin\theta \Big|_a^b + \int_a^b \sin^2\theta \, d\theta =$$

$u = \cos\theta \quad du = -\sin\theta \, d\theta$

$v = \sin\theta \quad dv = \cos\theta \, d\theta$

$$= \cos\theta \sin\theta \Big|_a^b + \int_a^b 1 - \cos^2\theta \, d\theta = \cos\theta \sin\theta \Big|_a^b + \theta \Big|_a^b - \int_a^b \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\int_a^b \cos^2\theta \, d\theta + \int_a^b \cos^2\theta \, d\theta = \cos\theta \sin\theta \Big|_a^b + \theta \Big|_a^b$$

$$\int_a^b \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\left(\cos\theta \sin\theta \Big|_a^b + \theta \Big|_a^b \right)$$

7 Ejemplo adicional Para casa

(Marsden-Tromba)

example 7 Let W be the ball of radius R and center $(0, 0, 0)$ in $\mathbb{R}^3$. Find the volume of W.

solution The volume of W is $\iiint_W dx\,dy\,dz$. This integral may be evaluated by reducing it to iterated integrals or by regarding W as a volume of revolution, but let us evaluate it here by using spherical coordinates. We get

$$\begin{aligned}\iiint_W dx\,dy\,dz &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \sin\phi \, d\phi = \frac{2\pi R^3}{3}\{-[\cos(\pi) - \cos(0)]\} = \frac{4\pi R^3}{3},\end{aligned}$$

which is the standard formula for the volume of a solid sphere. ▲