

## 22. SUPERFICIES. INTEGRALES DE SUPERFICIE II

### C. Integrales de superficie

Nos limitamos a superficies que admiten parametrizaciones simples y regulares. También nos limitamos a funciones acotadas y continuas en los dominios de integración.

#### 1 Integral de superficie. Área de una superficie

Sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $S: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \rightarrow S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Se define la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$

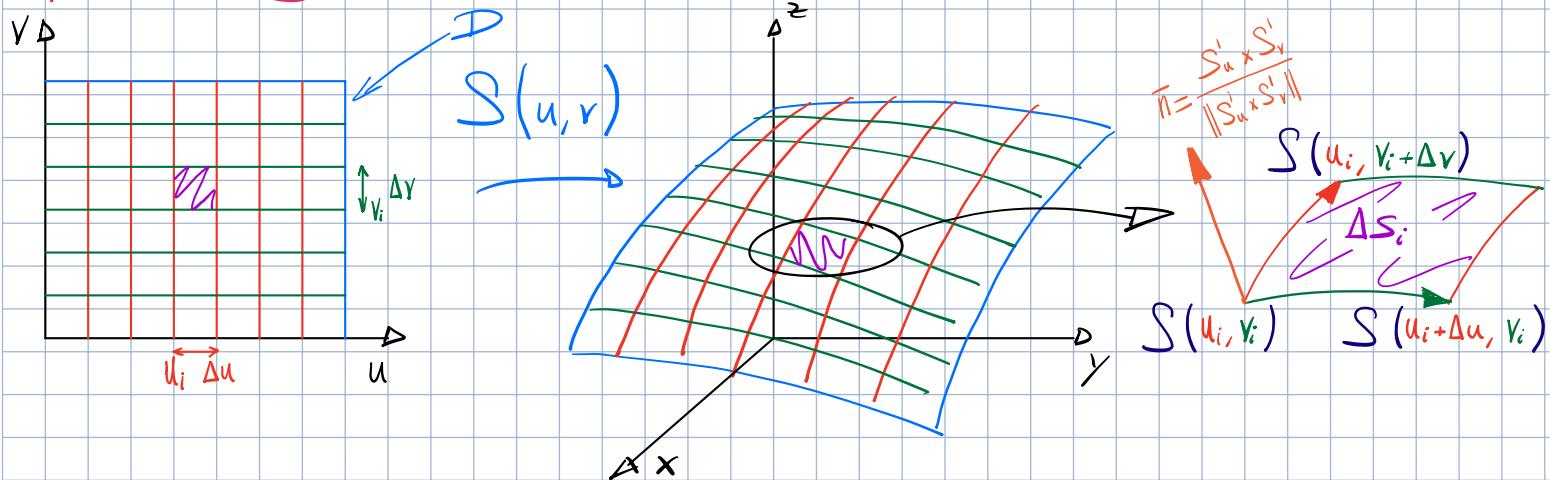
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(S(u, v)) \|S'_u \times S'_v\| du dv$$

Note:

$$S'_u = \frac{\partial S}{\partial u}$$

$$S'_v = \frac{\partial S}{\partial v}$$

Explicación geométrica



$$\Delta S_i = \|(S(u_i + \Delta u, v_i) - S(u_i, v_i)) \times (S(u_i, v_i + \Delta v) - S(u_i, v_i))\| =$$

$$\left\| \frac{(S(u_i + \Delta u, v_i) - S(u_i, v_i)) \times (S(u_i, v_i + \Delta v) - S(u_i, v_i))}{\Delta u \Delta v} \right\| \Delta u \Delta v \simeq \|S'_u \times S'_v\| \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta v} \rightarrow 0$$

De modo que la integral queda:

$$I \approx \sum_{i=1}^N f(\bar{r}_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^N f(\bar{r}_i) \|S_u^i \times S_v^i\| \Delta u \Delta v \quad y \text{ con } N \rightarrow \infty$$

$$\iint_D f(S) \|S_u^i \times S_v^i\| du dv$$

$dS$

En resumen

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(S(u, v)) \|S_u^i \times S_v^i\| du dv$$

S  $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$  D

## 2 Propiedades

a El área de la superficie viene dada por

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \|S_u^i \times S_v^i\| du dv$$

(Sustituyendo  $f(x, y, z) = 1$  en la expresión anterior)

b Si  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$  entonces

$$\iint_S f dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f dS$$

c Los resultados anteriores no dependen de la parametrización escogida para representar la superficie. (Más detalles en pts VII.C.15 y VII.C.16 de los guiones).

ESEMPIO. Calcular el área de una esfera de radio  $R$ .

$$S = \begin{cases} x(\theta, \varphi) = R \cos \theta \sin \varphi \\ y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi \\ z(\theta, \varphi) = R \cos \varphi \end{cases} \quad D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$S_\theta' = \begin{bmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_\varphi' = \begin{bmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$S_\theta' \times S_\varphi' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \varphi \end{vmatrix} = \frac{-R^2 c \theta s^2 \varphi}{-R^2 s \varphi c \varphi}$$

$$\|S_\theta' \times S_\varphi'\| = \sqrt{R^4 c^2 \theta^2 s^4 \varphi^2 + R^4 s^2 \theta^2 s^4 \varphi^2 + R^4 s^2 \varphi^2 c^2 \varphi^2} = \\ = R^2 \sqrt{s^4 \varphi^2 + s^2 \varphi^2 c^2 \varphi^2} = R^2 s \varphi$$

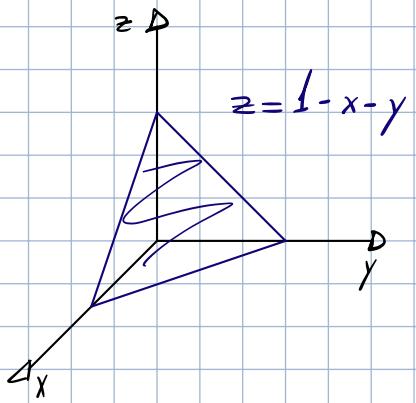
De modo que

$$A(S) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 s \varphi d\theta d\varphi = R^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi s \varphi d\varphi = 2\pi R^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi = \\ = 4\pi R^2$$

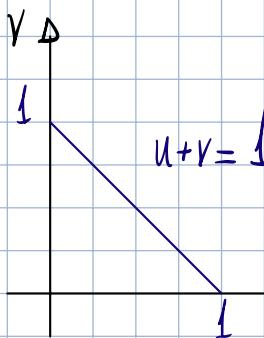
## ESERCICIOS

1)

$$\iint_S 6xy \, dS, \quad S = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 1^{\text{er}} \text{ octante} \end{cases}$$



Este superficie se puede representar con la siguiente parametrización explícita



$$\begin{aligned} x(u, v) &= u \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= 1 - u - v \end{aligned}$$

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(S(u, v)) \|S_u^T \times S_v^T\| \, du \, dv$$

S → D

1)  $D: 0 \leq u \leq 1$   
 $0 \leq v \leq 1-u$

\*  $S_u^T = (1, 0, -1)$   
 $S_v^T = (0, 1, -1)$

2)  $f(S) = 6xy = 6uv$

$$\|S_u^T \times S_v^T\| = \|(-1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$$

3)  $dS = \|S_u^T \times S_v^T\| \, du \, dv = \sqrt{3} \, du \, dv$

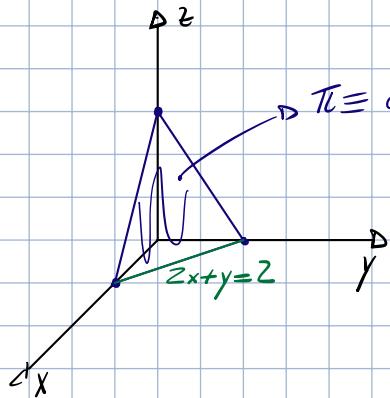
$$\int_0^1 \int_0^{1-u} 6uv \sqrt{3} \, dv \, du = \int_0^1 6\sqrt{3} u \left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_0^{1-u} \, du = 3\sqrt{3} \int_0^1 u(1-u)^2 \, du =$$

$$3\sqrt{3} \int_0^1 (u + u^3 - 2u^2) \, du = 3\sqrt{3} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} - \frac{2u^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 3\sqrt{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Para casa

(2)

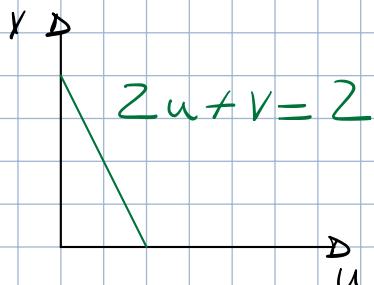
$$\iint_S x \, dS \text{ con } S \text{ el triángulo de vértices } \begin{cases} (1,0,0) \\ (0,2,0) \\ (0,0,3) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \pi &= ax + by + cz = 1 \\ (1,0,0) &\rightarrow a = 1 \\ (0,2,0) &\rightarrow b = \frac{1}{2} \\ (0,0,3) &\rightarrow c = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1 \\ 6x + 3y + 2z = 6 \end{array} \right.$$

De modo que podemos parametrizar  $S$  con

$$S = \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \frac{1}{2}(6 - 6u - 3v) \end{cases}$$



$$\iint_S f(x,y,z) \, dS = \iint_D f(S(u,v)) \|S_u^T \times S_v^T\| \, du \, dv$$

$$\begin{aligned} 1 \quad D: \quad 0 &\leq u \leq 1 \\ &0 \leq v \leq 2 - 2u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad S_u^T &= (1, 0, -3) \\ S_v^T &= (0, 1, -\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$2 \quad f(S) = x = u$$

$$\|S_u^T \times S_v^T\| = \|(1, 0, -3) \times (0, 1, -\frac{3}{2})\| = \frac{1}{2}\sqrt{46}$$

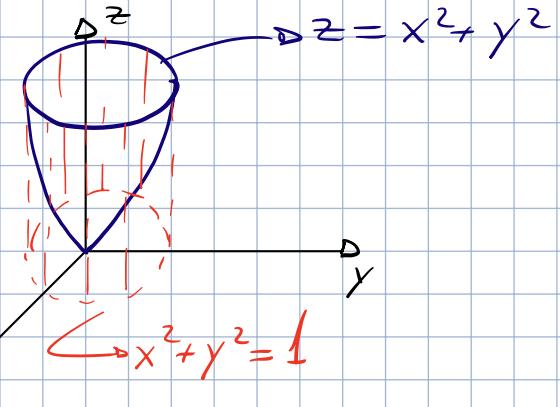
$$3 \quad dS = \|S_u^T \times S_v^T\| \, du \, dv = \frac{1}{2}\sqrt{46} \, du \, dv$$

$$\int_0^1 \int_0^{2-2u} u \frac{1}{2}\sqrt{46} \, du \, dv = \frac{1}{2}\sqrt{46} \int_0^1 u(2-2u) \, du = \left. \frac{\sqrt{46}}{2} \left( -(1-u)^2 \right) \right|_0^1 = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

③

$$\iint_S z \, dS \quad \text{con}$$

$$S \rightarrow z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$



$$x = r \cos \theta$$

dP que utilizamos esta  
parametrización en vez

$$y = r \sin \theta$$

$$z = x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{de la explícita?}$$

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(S(u, v)) \|S'_u \times S'_v\| \, du \, dv$$

$$1 \quad D: \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$2 \quad f(S) = z = r^2$$

$$3 \quad dS = \|S'_r \times S'_\theta\| dr \, d\theta = \sqrt{5} r \, dr \, d\theta$$

$$* \quad S'_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad | \quad S'_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 2r)$$

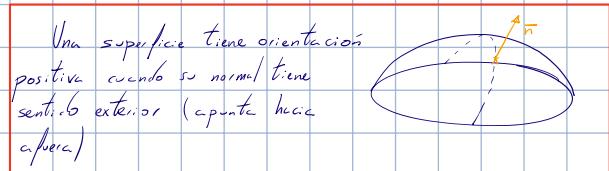
$$S'_r \times S'_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 2r \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2r \sin \theta \\ -2r \cos \theta \\ r \end{bmatrix}$$

$$\|S'_r \times S'_\theta\| = \sqrt{5} r$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (\sqrt{5} r) \, dr \, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{4} 2\pi = \frac{\sqrt{5}}{2} \pi$$

### 3 Integrales de superficie de campos vectoriales

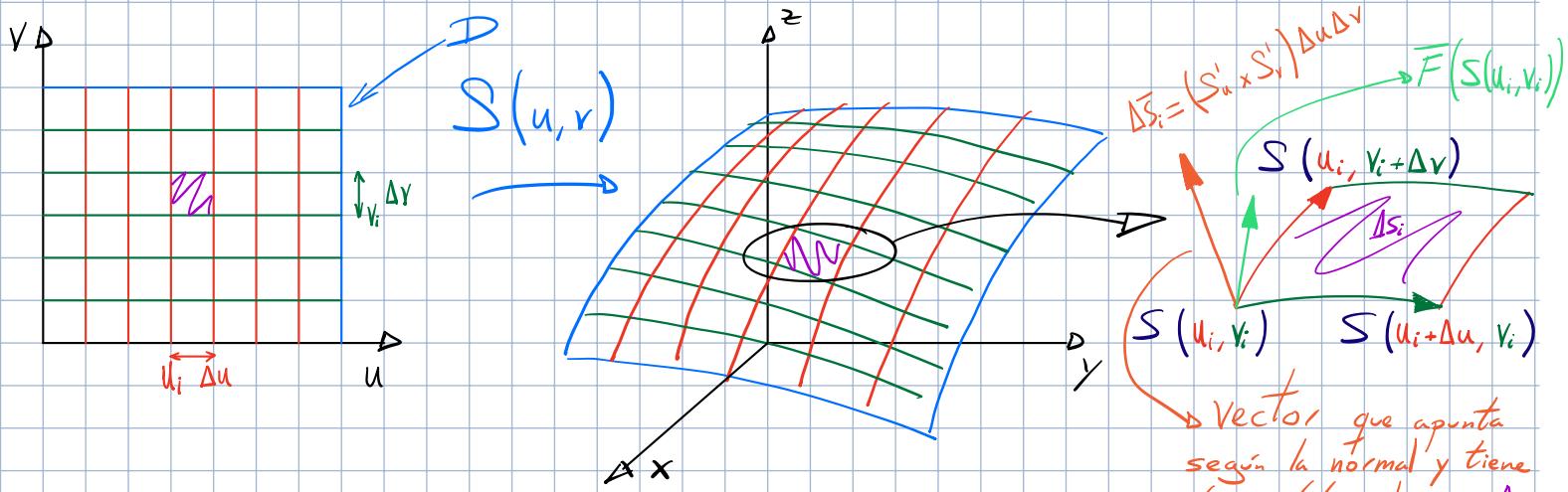
Sea  $S: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientada positivamente y sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función vectorial continua, se llama integral de superficie, o flujo de  $\bar{F}$  sobre  $S$  a:



$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iint_D \bar{F}(S(u, v)) \cdot (S_u^T \times S_v^T) du dv$$

$$d\bar{S} = \bar{n} dS \quad \bar{n} dS = \frac{S_u^T \times S_v^T}{\|S_u^T \times S_v^T\|} \|S_u^T \times S_v^T\| du dv$$

Significado físico.  $\rightarrow$  cantidad de líneas de campo que atraviesa la superficie  $S$ .



$$\Delta \bar{S}_i = (S(u_i + \Delta u, v_i) - S(u_i, v_i)) \times (S(u_i, v_i + \Delta v) - S(u_i, v_i)) =$$

$$\frac{(S(u_i + \Delta u, v_i) - S(u_i, v_i))}{\Delta u} \times \frac{(S(u_i, v_i + \Delta v) - S(u_i, v_i))}{\Delta v} \quad \Delta u \Delta v \approx (S_u^T \times S_v^T) \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta v} \rightarrow 0$$

De modo que el flujo quedaría:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}(S(u_i, v_i)) \cdot \Delta \bar{S}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}(S(u_i, v_i)) \cdot (S_u^i \times S_v^i) \Delta u \Delta v$$

y si:  $n \rightarrow \infty$

$$\iint_D \bar{F}(S(u, v)) \cdot (S_u^i \times S_v^i) du dv$$

#### 4 Propiedades

a Si  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$  entonces

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

b Los resultados anteriores no dependen (salvo el signo) de la parametrización escogida para representar la superficie. (Más detalles en pts VII.C.17 y VIII.C.18 de los guiones).

Si " $-S$ " es la superficie orientada negativamente:

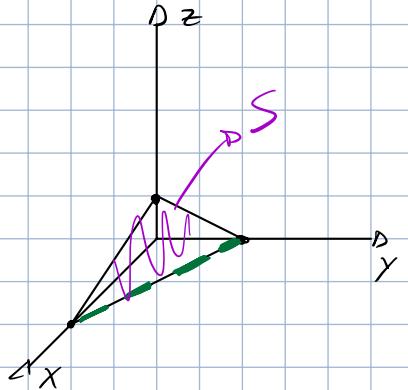
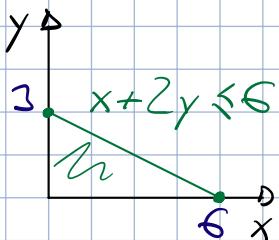
$$\iint_{-S} \bar{F} \cdot d\bar{S} = - \iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

NOTA: definir la normal es equivalente a situarse en una "cara" de la superficie. Ver 22.A.8 para más detalles

# EJERCICIOS

1  $\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S}$ ,  $\bar{F} = (x, -2y, z)$ ,  $S: x+2y+3z=6$   
 (1<sup>er</sup> octante)

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{3}(6-2y-x) \end{bmatrix}$$



$$S'_x = (1, 0, -\frac{1}{3})$$

$$0 \leq y \leq 3$$

$$S'_y = (0, 1, -\frac{2}{3})$$

$$S'_x \times S'_y = \frac{(1, 2, 3)}{3}$$

En estos problemas, la magnitud del vector es importante (no solo la dirección)

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iint_D \bar{F}(S(u, v)) \cdot (S'_u \times S'_v) du dv$$

①

$$D: 0 \leq y \leq 3$$

$$0 \leq x \leq 2(3-y)$$

②

$$\bar{F}(S(u, v)) = (x, -2y, \frac{1}{3}(6-2y-x))$$

③

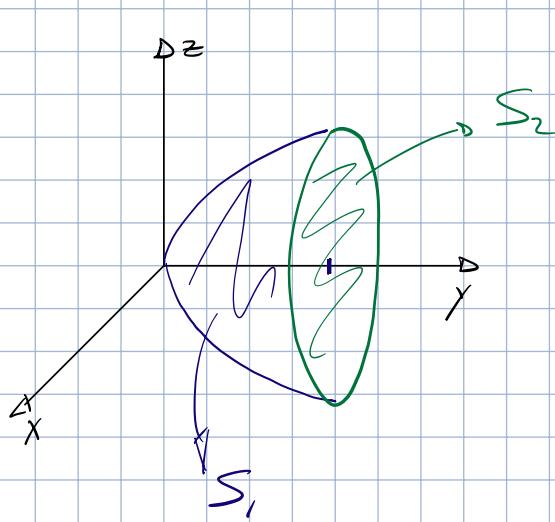
$$d\bar{S} = (S'_x \times S'_y) dx dy = \frac{1}{3} (1, 2, 3) dx dy$$

$$\frac{1}{3} \int_0^3 dy \int_0^{2(3-y)} (x, -2y, \frac{1}{3}(6-2y-x)) \cdot (1, 2, 3) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^3 dy \int_0^{2(3-y)} (x - 4y + 6 - 2y - x) dx = \frac{6}{3} \int_0^3 dy \int_0^{2(3-y)} (1-y) dx = \dots = \frac{16}{3}$$

2 Hallar el flujo de  $\bar{F} = (0, y, -z)$  que atraviesa

$$S = \begin{cases} S_1 \equiv y = x^2 + z^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ S_2 \equiv x^2 + z^2 \leq 1 \wedge y = 1 \end{cases}$$



$$S_1 = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r^2 \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$S_2 = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = 1 \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \iint_{S_2} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \dots = -\pi + \pi = 0$$

$$\iint_{S_1} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

①  $D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$

②  $\bar{F}(S_1) = (0, r^2, -r \sin \theta)$

$$\textcircled{3} \quad d\bar{S} = \bar{S}_r \times \bar{S}_\theta dr d\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & 2r & \sin \theta \\ -r \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} dr d\theta =$$

$$= \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \theta \\ -r \\ 2r^2 \sin \theta \end{pmatrix} dr d\theta$$

Podemos ver que la normal apunta "hacia afuera", orientación  $\oplus$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, r^2, -rsin\theta) \cdot (2r^2cos\theta, -r, 2r^2sin\theta) dr d\theta = \\
 &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (1 + 2sin^2\theta) dr d\theta = - \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (1 + 2sin^2\theta) d\theta = \\
 &= -\frac{1}{4} \left( 2\pi + \int_0^{2\pi} (1 - cos2\theta) d\theta \right) = -\frac{1}{4} (2\pi + 2\pi) = -\pi
 \end{aligned}$$

$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S}$

①  $D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$

②  $\bar{F}(S_1) = (0, y, -z) = (0, 1, -rsin\theta)$

③  $d\bar{S} = r dr d\theta \hat{j}$  → este es el sentido de la normal

que apunta "hacia afuera". No cambiaremos de cara a mitad del problema.



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ rsin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = -r (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \hat{j} = -r \hat{j}$$

Cambiar el signo para que normal apunte hacia afuera.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 1, -rsin\theta) \cdot (0, r, 0) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr = \pi$$

## 5 Flujo de un campo bidimensional

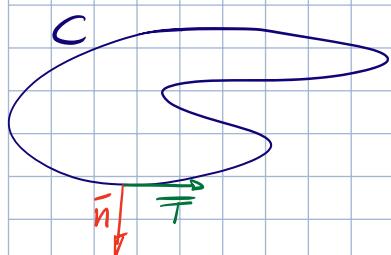
De manera análoga al flujo de un campo tridimensional a través de una superficie, se puede calcular el flujo de un campo bidimensional a través de una curva.

Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función vectorial continua y sea

$$(x, y) \rightarrow \bar{F} = (F_1, F_2)$$

$$C = \bar{r}: t \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

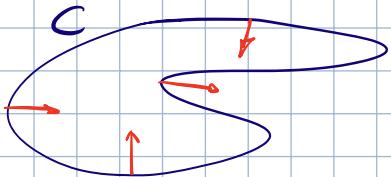
$$(x(t), y(t))$$



$$\int_C \bar{F} \cdot \bar{n} ds = \int_a^b (F_1(\bar{r}(t)), F_2(\bar{r}(t))) \cdot (\pm y'(t), \mp x'(t)) dt$$

Vector normal exterior a la curva

¿Pq no usamos la normal de Frent? La según curvatura, no el exterior



Explicación de la fórmula. Ciclo de la normal.

$\bar{F} \cdot \bar{n} = 0$  de modo que si:  $\bar{F} = (a, b)$ , entonces  $\bar{n} = \pm(b, -a)$  de modo que  $\bar{F} \cdot \bar{n} = \pm(a, b) \cdot (b, -a) = 0$ .

En el capítulo de integrales de linea, vimos que:

$$d\bar{s} = \bar{F} ds = \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} \|\bar{r}'(t)\| dt = \bar{r}'(t) dt = (x'(t), y'(t)) dt$$

De modo que:  $\bar{n}ds = \pm (y'(t), -x'(t)) dt$

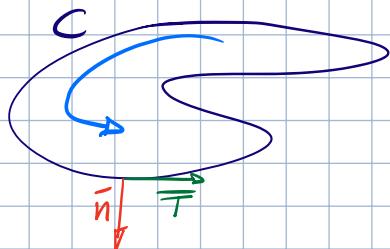
En resumen:

$$\bar{T} = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|} (x'(t), y'(t)) ; \quad \bar{n} = \frac{\pm 1}{\|\bar{r}'(t)\|} (y'(t), -x'(t))$$

Analizamos  $\oplus$  y  $\ominus$   $\bar{n}$  por separado. ¿Apunta  $\bar{n}$  hacia afuera?

$$+\bar{n} \quad \bar{T} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & 0 \\ y' & -x' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\|\bar{r}'\|^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x'^2 - y'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -k$$

$\bar{T}, \bar{n}, -k$  forman un triedro a derechas y  $\bar{T}$  apunta en la dirección de crecimiento de la curva según el parámetro  $t$

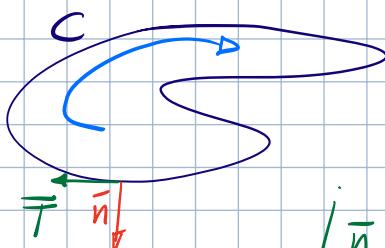


Sentido antihorario

$$\bar{n} = -k \times \bar{T}$$

$$-\bar{n} \quad \bar{T} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & 0 \\ -y' & x' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\|\bar{r}'\|^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x'^2 + y'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k$$

$\bar{T}, \bar{n}, k$  forman un triedro a derechas y  $\bar{T}$  apunta en la dirección de crecimiento de la curva según el parámetro  $t$



Sentido horario

$$\bar{n} = k \times \bar{T}$$

¡ $\bar{n}$  siempre apunta hacia afuera!

## EJERCICIOS

(3)

VII. 11 Sea  $S$  la superficie descrita por la parametrización  
 $\bar{x}(u, v) = (2 + \cos u, \sin u, u + v + \cos v)$  en  $W = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \times [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

Determinar si es regular y calcular su área.

Superficie regular: admite parametrización regular

- ① Parametrización de clase  $C^1$  No se dice nada de
- ② Existe vector normal  $\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v \neq 0$  autointersecciones

① Par.  $C^1$  ✓

②  $\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v \neq 0$  ✓

$$\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin u & \cos u & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \sin v \end{vmatrix} = ((1 - \sin v) \cos u, (1 - \sin v) \sin u, 0)$$

$$\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v = 0 : \left. \begin{array}{l} \cos u (1 - \sin v) = 0 \\ \sin u (1 - \sin v) = 0 \end{array} \right\} v = \frac{\pi}{2}, \quad \forall u$$

En estos pts, la parametrización no sería regular, sin embargo, no pertenecen a  $W$ .  $\rightarrow$  Superficie regular en  $W$

Calculo de área:  $A = \iint_S 1 dA =$

$$= \iint_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \iint_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 1 \|\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v\| du dv$$

$$\|\bar{x}_u^1 \wedge \bar{x}_v^1\| = \sqrt{\cos^2 u (1 - \sin v)^2 + \sin^2 u (1 - \sin v)^2} = \sqrt{1 - \sin v} = 1 - \sin v$$

$\geq 0$  en  $W$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin v) du dv = \frac{\pi}{3} \left[ v + \cos v \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{9}$$

4

Sea  $S$  la porción del cono  $x^2 + y^2 = z^2$  contenida entre  $z \geq 0$  y  $x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1$ . Calcular su área.

Empezaremos buscando la intersección entre la esfera y el cono.

$$x^2 + (y-1)^2 + (x^2 + y^2) = 1$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2y = 0$$

Voy a intentar reescribirlo como

circunferencia  $x^2 + y^2 - y = 0$

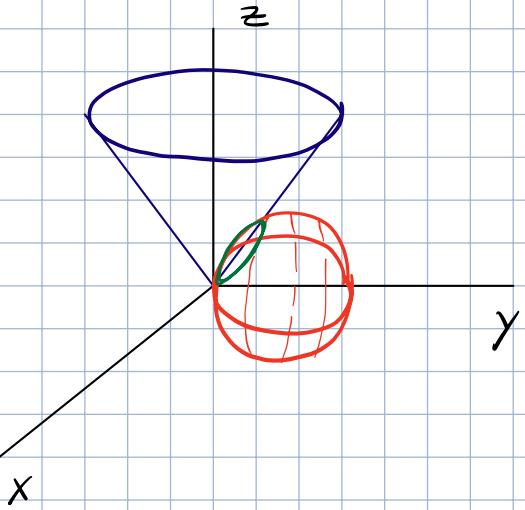
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + b^2 - 2by = R^2 \rightarrow$$

$$a=0$$

$$b=\frac{1}{2} \quad b=R$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \text{Ptos intersección en plano } (x,y). \\ \text{Interior es D}$$



$$A = \iint_D \|\bar{s}_x^1 \times \bar{s}_y^1\| dx dy \rightarrow \text{Necesito parametrización del cono}$$

Utilizo parametrización explícita:

$$\Sigma(x, y) = (x, y, \text{cono}) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\bar{S}_x \wedge \bar{S}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$$

$$\|\bar{S}_x \wedge \bar{S}_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$A = \iint_D \|\bar{S}_x \wedge \bar{S}_y\| dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Puedo hacer este integral o directamente poner el resultado

$$D(x, y) / \{x^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1/4\}$$

$$\iint_D dx dy = A(D) = \pi R^2 = \frac{\pi}{4}$$

Para casas

⑤ Calcular  $I = \iint_S z dA$ , donde  $S$  es la superficie cuyas caras son:  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\{x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } z=0\}$ , plano  $z = 1+x$  interior al cilindro.

$$S_1: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1; 0 \leq z \leq 1+x$$

$$S_3: x^2 + y^2 \leq 1; z = 1+x$$

Tengo que calcular tres integrales de superficie

$$\iint_S f dA = \iint_{S_1} f dA + \iint_{S_2} f dA + \iint_{S_3} f dA$$

Para cada una de las integrales:

① Obtener parametrización de  $S_i$ :  $\bar{S}_i(u, v) = (\dots, \dots)$   $u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$

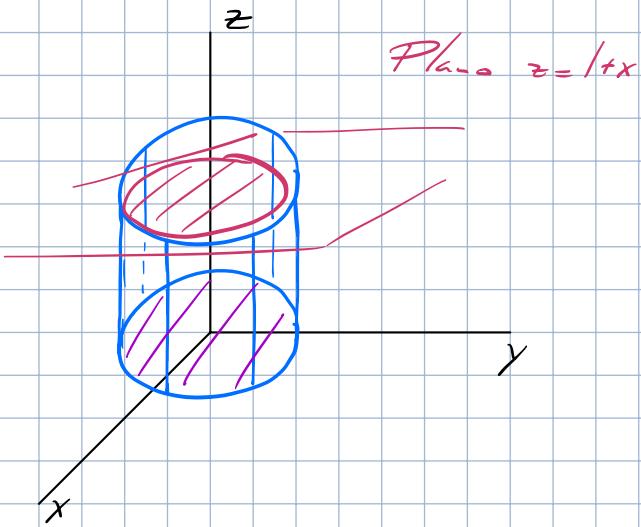
② Calcular  $dA = \|\bar{S}'_u \times \bar{S}'_v\| du dv$

③ Particularizar  $f(\bar{S}(u, v))$

$$S_1: z = 0 \rightarrow ③ f(\bar{S}_1(u, v)) = 0 \rightarrow \iint_{S_1} f dA = 0$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1 \rightarrow S_2 = (\cos \theta, \sin \theta, z) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$z \in [0, 1+\cos \theta] \quad z \in [0, 1+\cos \theta]$$



De modo que:

$$\bar{S}_{z,\theta}^1 \wedge \bar{S}_{z,z}^1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\|\bar{S}_{z,\theta}^1 \wedge \bar{S}_{z,z}^1\| = 1$$

$$\iint_{S_2} f dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{z=1+\cos\theta} z \cdot 1 dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta = [\dots] = \frac{3\pi}{2}$$

$S_3$   $x^2 + y^2 \leq 1 \rightarrow (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$   $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$z = 1 + x \rightarrow \bar{S}_3 = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 + r\cos\theta)$$

$$\bar{S}_{3,r}^1 \wedge \bar{S}_{3,\theta}^1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = [\dots] = (-r, 0, r) \rightarrow \|\bar{S}_{3,r}^1 \wedge \bar{S}_{3,\theta}^1\| = \sqrt{2}r$$

$$g(\bar{S}_3(r, \theta)) = 1 + r\cos\theta$$

$$\iint_{S_3} g dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^1 (1 + r\cos\theta) \sqrt{2}r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos\theta \right) d\theta = \sqrt{2}\pi$$

$$I = 0 + \frac{3\pi}{2} + \sqrt{2}\pi$$

⑥ Sea  $S$  la superficie del elipsoide Ordinario 20/21

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{y}{c}\right)^2 + z^2 = 1$$

contenida entre los planos  $z=0$  y  $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

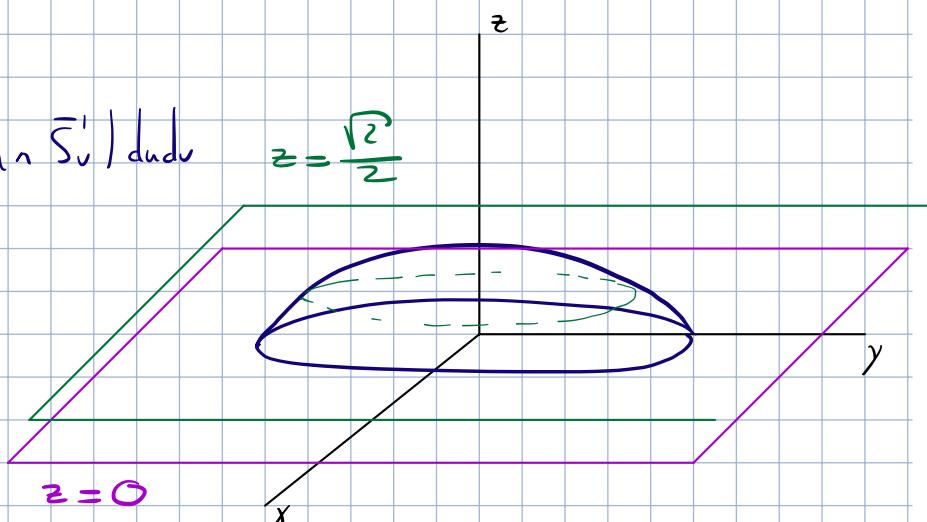
La superficie  $S$  está orientada tal que su normal coincide con la normal exterior al elipsoide.

Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función definida como:

$$\bar{F}(x, y, z) = (\underline{b}_x, \underline{b}_y, \underline{b}_z)$$

La integral  $\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S}$  vale:

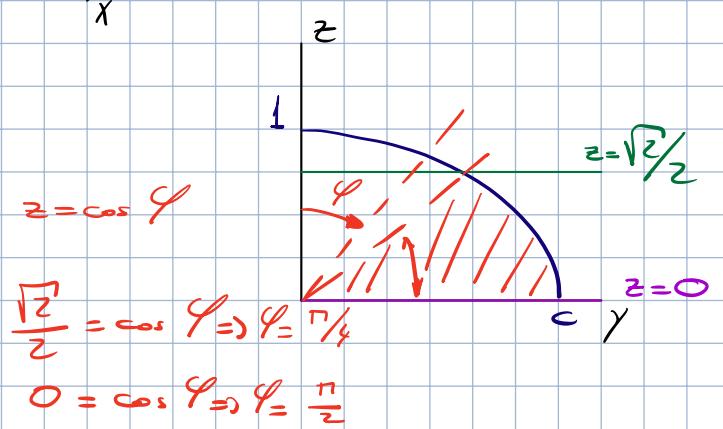
$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_D \bar{F}(\bar{S}(u, v)) \cdot (\bar{S}'_u \wedge \bar{S}'_v) du dv$$



① Obtengo parametrización:

② Obtengo  $d\bar{S} = (\bar{S}'_u \wedge \bar{S}'_v) du dv$

③ Particularizo  $\bar{F}(\bar{S}(u, v))$



La superficie  $S$  se puede parametrizar como:

Parametrizaciones típicas en quiones.

$$S(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} c s \varphi c \theta \\ c s \varphi s \theta \\ c \varphi \end{bmatrix} \text{ con } D \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [\pi/4, \pi/2] \end{array} \right.$$

$s = \sin$   
 $c = \cos$

De modo que:

$$S_\varphi'(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} c c \varphi c \theta \\ c c \varphi s \theta \\ -s \varphi \end{bmatrix} \quad S_\theta'(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} -c s \varphi s \theta \\ c s \varphi c \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y \quad \bar{i} \quad \bar{j} \quad \bar{k}$$

$$S_\varphi' \times S_\theta' = \begin{vmatrix} c c \varphi c \theta & c c \varphi s \theta & -s \varphi \\ -c s \varphi s \theta & c s \varphi c \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} c s^2 \varphi c \theta \\ c s^2 \varphi s \theta \\ c^2 (s \varphi c^2 \theta + s \varphi c s^2 \theta) \end{bmatrix}$$

De modo que

①  $D: \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

②  $d\bar{S} = (c s^2 \varphi c \theta, c s^2 \varphi s \theta, c^2 s \varphi c \varphi)$

$$\textcircled{3} \quad \bar{F}(S(\varphi, \theta)) = b \left( c s \varphi c \theta, c s \varphi s \theta, c \varphi \right)$$

Así que:

$$\int_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = b c^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (s^3 \varphi c^2 \theta + s^3 \varphi s^2 \theta + s \varphi c^2 \varphi) d\varphi d\theta =$$

$$= b c^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (s^3 \varphi + s \varphi c^2 \varphi) d\varphi d\theta = b c^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} s \varphi d\varphi d\theta =$$

$$= 2\pi b c^2 \left( -\cos \varphi \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 12\pi b c^2$$

VII.13

$$S_1 \equiv \bar{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

$$S_2 \equiv z = 2 - y$$

$$C = S_1 \cap S_2$$

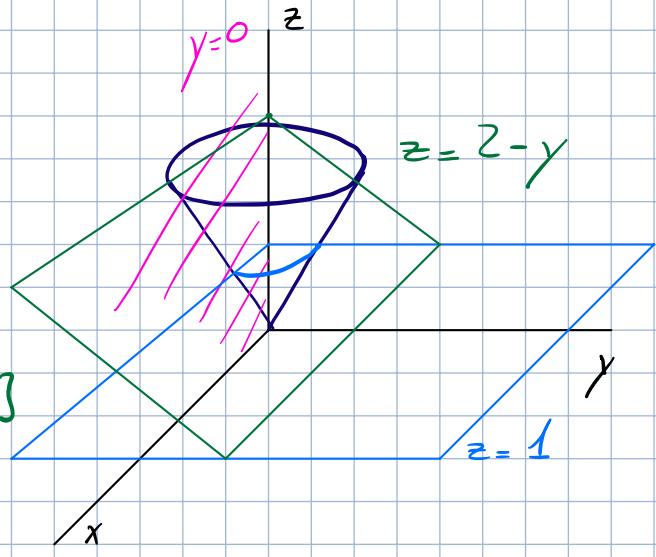
Área como, octante  $\oplus$  y limitada por planos  $y=0$ ,  $z=1$  y  $C$ .

$$\iint_{*}^{*} \iint_{*}^{*} \|\bar{S}_u^1 \times \bar{S}_v^1\| du dv$$

Problema es encontrar \*

Por ser primer octante  $v \in [0, \pi/2]$

Vamos a ver que es  $C$



$$\bar{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

$$z = 2 - y \quad \Rightarrow \quad u = 2 - u \sin v \quad u + u \sin v = 2$$

$$u = \frac{2}{1 + \sin v}$$

$$\int_0^{\pi/2} dv \int_1^{\frac{2}{1+\sin v}} \|\bar{S}_u^1 \times \bar{S}_v^1\| du$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
& \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} & \\
\bar{S}_u' \times \bar{S}_v' & \cos v & \sin v & 1 & = \begin{bmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u \end{bmatrix} \\
& -u \sin v & u \cos v & 0 &
\end{array}$$

$$\|\bar{S}_u' \times \bar{S}_v'\| = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + u^2} = \sqrt{2} |u|$$

$$\int_0^{\pi/2} dv \int_1^{\frac{2}{1+\sin v}} \|\bar{S}_u' \times \bar{S}_v'\| du = \int_0^{\pi/2} dv \int_1^{\frac{2}{1+\sin v}} \sqrt{2} u du =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi/2} \left[ \left( \frac{2}{1+\sin v} \right)^2 - 1^2 \right] dv = [\dots] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

↑  
Usar cambio  
 $u = \tan\left(\frac{v}{2}\right)$