

21. CURVAS PLANAS Y ALABEADAS II

C.-Geometría básica de curvas

1) Triedro intrínseco . Triedro de Frenet.

Pensemos que $\bar{r}(t)$ describe la posición (x, y, z) de una partícula con el tiempo t . En ese caso, la velocidad es

$$\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = \|\bar{r}'(t)\| \bar{t} = v \bar{t}$$

Módulo de la velocidad por dirección de velocidad

Por otro lado, la aceleración es

$$\bar{a}(t) = \bar{v}'(t) = \bar{r}''(t) = v' \bar{t} + v \bar{t}' = a_t \bar{t} + \frac{v^2}{R} \cdot \bar{n} = a_t \bar{t} + a_n \bar{n}$$

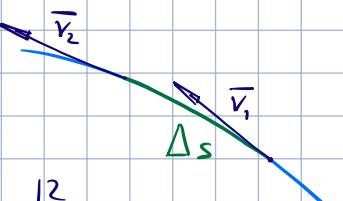
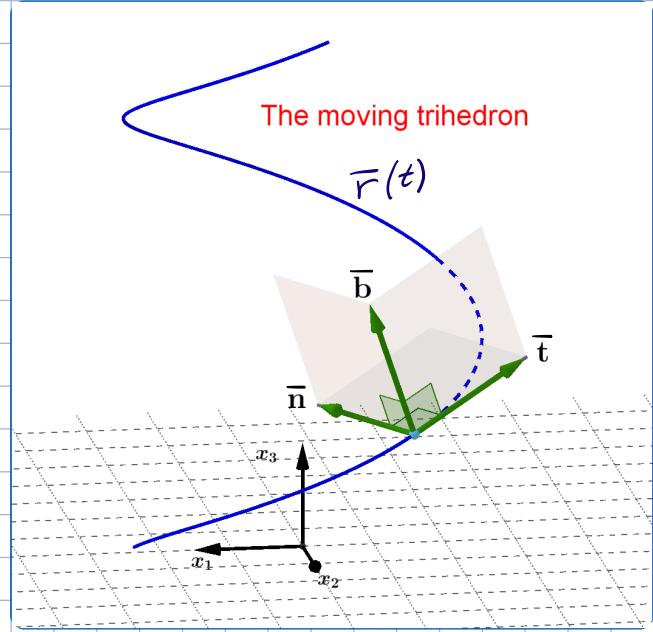
Aceleración por cambio del módulo de la velocidad (con dir. constante)

Aceleración por cambio de dirección de la velocidad (con módulo constante)

Aceleración tangencial, $a_t (v')$

$$\bar{r}'(t) = \|\bar{r}'(t)\| \bar{t}$$

$$s(t) = \int_0^t \|\bar{r}'(u)\| du, \quad \frac{ds}{dt} = \|\bar{r}'(u)\| = v, \quad \frac{dv}{dt} = v' = \frac{d^2 s}{dt^2}$$



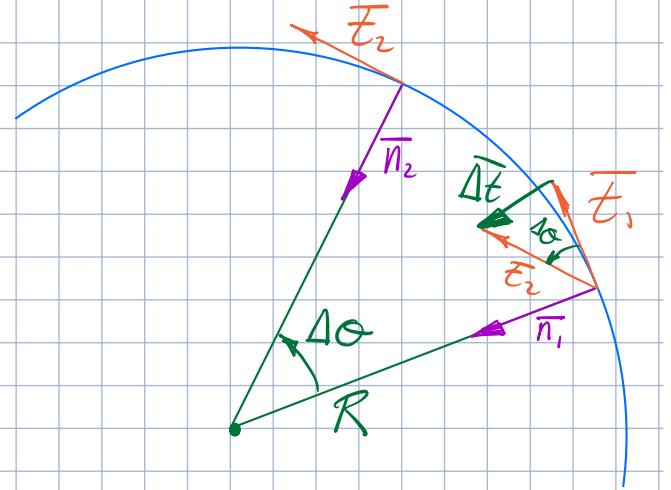
Aceleración normal, $a_n \left(\frac{v^2}{R} \right)$

Asumimos $\Delta\theta \ll 1$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \quad \left(\sin \Delta\theta \approx \frac{\Delta s}{R} \right)$$

$$\overline{\Delta t} = \overline{t}_2 - \overline{t}_1 \approx \overline{n}, \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \overline{n}$$

$$\overline{t}_2 = \overline{t}_1 + \overline{n}, \Delta\theta$$



$$\overline{t}' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{1}{R} \overline{n} = \frac{v}{R} \overline{n} \rightarrow v \overline{t}' = \frac{v^2}{R} \overline{n} = a_n \overline{n}$$

$(\Delta t \rightarrow 0 \rightarrow \overline{n}_2 \rightarrow \overline{n}_1, \text{ así que usamos } \overline{n})$

t sin vector es el parámetro
 \overline{t} es el vector tangente

Moralmente

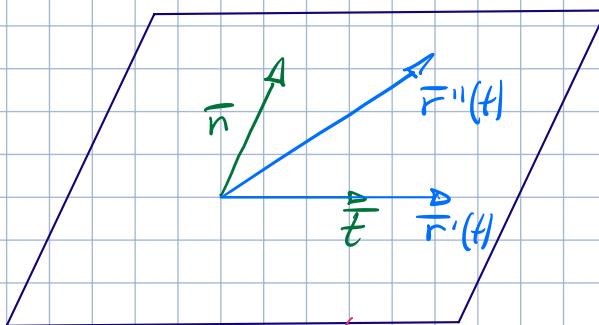
$\overline{r}'(t)$ es paralelo a \overline{t}

$\overline{r}''(t)$ es paralelo a $\lambda \overline{t} + \mu \overline{n}$

$\overline{r}'(t)$ y $\overline{r}''(t)$ son coplanares
con \overline{t} y \overline{n}

\overline{t} es perpendicular a \overline{n}

$\frac{d\overline{t}}{dt}$ es paralelo a \overline{n}



Plano osculador

Triedro intrínseco. Es un sistema de referencia local a la curva definido por los vectores tangente (\bar{t}), normal (\bar{n}) y binormal (\bar{b}).

Vector binormal (\bar{b}): $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$

(Perpendicular al plano osculador y definiendo un triángulo a derechas)

A partir de ahora $T = \bar{t}$, $N = \bar{n}$, $B = \bar{b}$

→ Sistema ortonormal: $\|T\| = \|N\| = \|B\| = 1$

$$\begin{array}{l} T \\ N \\ B \end{array} \quad \begin{array}{l} T \times N = B \\ N \times B = T \\ B \times T = N \end{array}$$

2) Triedro intrínseco con parametrización cualquiera

Sea $F: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular con una parametrización cualquiera. Vamos a obtener el triedro intrínseco.

→ Forma difícil

① Vector tangente, T

$$T = \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}$$

② Vector normal, N

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left\| \frac{dT}{dt} \right\|}$$

NOTA 1: comprobemos q-e con esta def. $N \perp T$

$$N \parallel \frac{dT}{dt} \perp T ; \quad T \cdot T = \|T\| = 1$$

$$\frac{d}{dt} T \cdot \frac{dT}{dt} = 0 \rightarrow T \perp \frac{dT}{dt}$$

NOTA 2: cálculo de la derivada del módulo de un vector

$$\frac{d}{dt} \|\vec{v}\| = \frac{d}{dt} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \frac{v_1 v_1' + v_2 v_2' + v_3 v_3'}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{\|\vec{v}\|}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{r}''(t) \|\vec{r}'(t)\| - \vec{r}'(t) \|\vec{r}'(t)\|^2}{\|\vec{r}'(t)\|^2} = \\ &= \frac{\vec{r}''(t) \|\vec{r}'(t)\| - \vec{r}'(t) \left(\frac{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right)}{\|\vec{r}'(t)\|^2} = \\ &= \frac{\vec{r}''(t) \|\vec{r}'(t)\|^2 - \vec{r}'(t) (\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t))}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \end{aligned}$$

③ Vector binormal, B ($B = T \times N$)

A partir de aquí y para facilitar la lectura simplificaremos la notación

$$\vec{r}(t) \rightarrow r, \quad \vec{r}'(t) \rightarrow r', \quad \vec{r}''(t) \rightarrow r''$$

$$T \times N \parallel r' \times \frac{dT}{dt} = r' \times \frac{r'' \|r'\|^2 - r'(r' \cdot r'')}{\|r'\|^3} = \frac{r' \times r''}{\|r'\|}$$

Así que $B = T \times N = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$

→ Forma fácil (basada en el desarrollo anterior)

① Tangente $T = \frac{r'}{\|r'\|}$

Nota: los pts en los qe $r'(t_0) \neq 0$ y $r''(t_0) = 0$ se llaman pts de inflexión y en ellos el triángulo no está definido.

② Binormal $B = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$

③ Normal $N = \underbrace{B \times T}_{\text{el orden es importante!}}$

ELEMENTOS GEOMÉTRICOS ASOCIADOS.

→ Rectas:

① Tangente: $\bar{x}(t) = r(t_0) + T(t_0) \cdot t$

② Normal: $\bar{x}(t) = r(t_0) + N(t_0) \cdot t$

③ Binormal: $\bar{x}(t) = r(t_0) + B(t_0) \cdot t$

→ Planos:

① Normal: contiene a N, B .

Es \perp a T

$$\pi(x, \rho) = r(t_0) + \alpha N(t_0) + \beta B(t_0) \quad \pi \equiv T(t_0) \cdot (\bar{x} - r(t_0)) = 0$$

② Osculador: contiene a T, N .

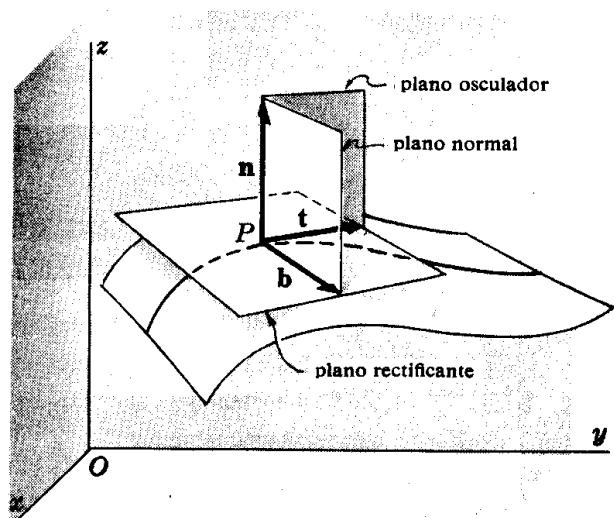
Es \perp a B

$$\pi(\alpha, \beta) = r(t_0) + \alpha T(t_0) + \beta N(t_0) \quad \pi \equiv B(t_0) \cdot (\bar{x} - r(t_0)) = 0$$

③ Rectificante: contiene a T, B .

Es \perp a N

$$\pi(\alpha, \beta) = r(t_0) + \alpha T(t_0) + \beta B(t_0) \quad \pi \equiv N(t_0) \cdot (\bar{x} - r(t_0)) = 0$$



3 Triedro intrínseco con parametrización longitud del arco

Sea $\bar{r}: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular con una parametrización long. de arco. Vamos a obtener el triedro intrínseco.

Usaremos la siguiente notación: $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$; $r' = \frac{dr}{dt}$

Seguimos prescindiendo de la - de vector, es decir $\bar{r} \rightarrow r$, $\bar{r}' \rightarrow r'$
 $\ddot{r} \rightarrow \dot{r}$, $\ddot{\bar{r}} \rightarrow \ddot{r}$

① Vector tangente: $T = \frac{\dot{r}(s)}{\|\dot{r}(s)\|} = \dot{r}(s) \quad \|\dot{r}(s)\| = 1$

Nota: $\frac{dr(s)}{ds} = \dot{r}(s) = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$

(2) Vector normal: N (recordatorio: es un vector unitario derivada del tangente)

$$N = \frac{\dot{r}(s)}{\|\dot{r}(s)\|} \quad (\text{por otro lado, esto implica que } \dot{r}(s) \cdot \ddot{r}(s) = 0)$$

(3) Vector binormal: B

$$B = T \times N = \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{\|\dot{r}\|}$$

ESEMPIO Calcular los elementos de Frenet para la curva $\bar{r}(t) = (t, \sin t, \cos t)$ en $(0, 0, 1)$

Primeros, vemos que $\bar{r}(t) = (0, 0, t) \rightarrow t=0$.

$$\bar{r}'(t) = (1, \cos t, -\sin t) \rightarrow \bar{r}'(0) = (1, 1, 0)$$

$$\bar{r}''(t) = (0, -\sin t, -\cos t) \rightarrow \bar{r}''(0) = (0, 0, -1)$$

De modo que:

$$T = \frac{\bar{r}'(0)}{\|\bar{r}'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$$

$$B = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|} = \frac{1}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

$$N = B \times T = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (0, 0, -2) = (0, 0, -1)$$

También podemos calcular los elementos geométricos asociados.

Recta tangente $\bar{x}(t) = (0, 0, 1) + t(1, 1, 0) = (t, t, 1)$

normal $\bar{x}(t) = (0, 0, 1) + t(0, 0, -1) = (0, 0, 1-t)$

binormal $\bar{x}(t) = (0, 0, 1) + t(-1, 1, 0) = (-t, t, 1)$

Plano normal $(1, 1, 0) \cdot (x, y, z-1) = 0 \rightarrow x+y=0$

osculador $(-1, 1, 0) \cdot (x, y, z-1) = 0 \rightarrow -x+y=0$

rectificante $(0, 0, -1) \cdot (x, y, z-1) = 0 \rightarrow 1-z=0$

También podemos reparametrizar la curva usando el parámetro longitud de arco

$$s = \int_0^t \|r'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{1 + \cos^2 u + \sin^2 u} du = \sqrt{2} t \quad (\text{el pto } t=0 \text{ se transfiere})$$

$$r(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

Por último, recalculamos T , N y B usando las fórmulas especiales

$$T(s) = \frac{\dot{r}(s)}{\|\dot{r}(s)\|} = \dot{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow$$

$$T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$$

$$N(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|} = \frac{1}{\|\ddot{r}(s)\|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$\Rightarrow N(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0, 0, -1 \end{pmatrix} = (0, 0, -1)$$

Es más sencillo normalizar el vector final que el general

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

4 Fórmulas de Frenet

Sea $\gamma(s): I = [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con la longitud de arco. Para pts ordinarios y no de inflexión se verifica que

$r'(t_0) \neq 0$ y $r''(t_0) \neq 0$
en ellos el triángulo no está deg

$$\frac{dT}{ds} = K(s) N$$

$$\frac{dN}{ds} = -K(s) T + \tau(s) B$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau(s) N$$

curvatura: $K(s)$

torsión: $\tau(s)$

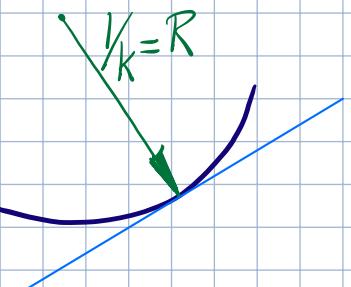
Definir la

curva salvo

traslación y giro.

Curvatura medida de cuánto se separa la curva de la recta tangente

Parámetro longitud de arco



$$\frac{dT}{ds} = K(s) N$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d}{ds} (\dot{r}(s)) = \ddot{r}(s) \stackrel{!}{=} K(s) N = K(s) \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|} \rightarrow K(s) = \|\ddot{r}(s)\|$$

$$N = \frac{\dot{r}(s)}{\|\dot{r}(s)\|}$$

Parámetro cualquiera

$$K(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

DEM

De la sección anterior, sabemos que:

$$\frac{dT}{ds} = K(s)N \quad (1)$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r'}{\|r'\|} \right) \frac{1}{\|r'\|} = \frac{r'' \|r'\| - r' \frac{r' \cdot r''}{\|r'\|}}{\|r'\|^2} \frac{1}{\|r'\|} \quad (2)$$

También

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\| \frac{dT}{dt} \|} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{r'}{\|r'\|} \right)}{\left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{r'}{\|r'\|} \right) \right\|} \quad (3)$$

Al igual que en el caso anterior, sustituimos (2) y (3) en (1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r'}{\|r'\|} \right) \frac{1}{\|r'\|} = K(s) \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{r'}{\|r'\|} \right)}{\left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{r'}{\|r'\|} \right) \right\|}$$

Podemos despejar $K(s)$, obteniendo

$$K(s) = \frac{\left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{r'}{\|r'\|} \right) \right\|}{\|r'\|} \stackrel{\text{Usando (2)}}{=} \frac{1}{\|r'\|^4} \|r'' \|r'\|^2 - r' (r' \cdot r'')\| \stackrel{\text{Tras "ciertas manipulaciones"}}{=} \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$$

"Ciertas manipulaciones"

$$\|\bar{a} - \bar{b}\|^2 = (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\begin{aligned} & \left\| r'' \cdot \|r'\|^2 - r' (r' \cdot r'') \right\|^2 = \|r''\|^2 \|r'\|^4 + (r' \cdot r'')^2 \|r'\|^2 - 2(r' \cdot r'')^2 \|r'\|^2 = \\ & = \|r''\|^2 \cdot \|r'\|^4 - (r' \cdot r'')^2 \|r'\|^2 = \|r'\|^2 \cdot (\|r''\|^2 \|r'\|^2 - (r' \cdot r'')^2) = \\ & = \|r'\|^2 \cdot (\|r''\|^2 \|r'\|^2 - \|r'\|^2 \|r''\|^2 \cos^2 \theta) = \|r'\|^2 (\|r'\|^2 \|r''\|^2 \sin^2 \theta) = \underline{\underline{\|r'\|^2 \|r' \times r''\|^2}} \end{aligned}$$

Def. de producto vectorial

Torsión Variación del vector binormal (ajuste de la curva a un plano, cómo de plana es la curva)

Parámetro long. de arco

$$\frac{d\beta}{ds} = -\tau(s) N \longrightarrow \tau(s) = -\frac{d\beta}{ds} \cdot N$$

Parámetro cualquiera

$$\tau(t) = \frac{[r'(t), r''(t), r'''(t)]}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2} = \frac{r'(t) \cdot (r''(t) \times r'''(t))}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2}$$

Esta fórmula
no la demostraremos
agá.

Definiciones adicionales

$$\text{Radio de curvatura } R(t) = \left| \frac{1}{k(t)} \right|$$

$$\text{Radio de torsión } T(t) = \left| \frac{1}{\tau(t)} \right|$$

Curva plana \rightarrow torsión nula

Circunferencia \rightarrow torsión nula + curvatura constante

El signo de la torsión es independiente de la parametrización.

$\tau > 0$: dextrogiros

$\tau < 0$: levogiros

ESERCICIOS

1 Calcular los vectores del triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de la curva $\bar{r}(t) = (1+2\sin t, 2\cos t, 4\cos t + 8\cos \cdot \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ en $(3, 0, 0)$ (Basado en VII.3)

$$\bar{r}(t) = (1+2\sin t, 2\cos t, 4\cos t + 4\sin 2t) = (3, 0, 0)$$

$$1+2\sin t = 3 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$2\cos t = 0 \quad \checkmark$$

$$4\cos t + 4\sin 2t = 0 \quad \checkmark$$

Evaluar en $t = \frac{\pi}{2}$

$$\bar{r}'(t) = (2\cos t, -2\sin t, -4\sin t + 8\cos 2t) \rightarrow \bar{r}'(\frac{\pi}{2}) = (0, -2, -12)$$

$$\bar{r}''(t) = (-2\sin t, -2\cos t, -4\cos t - 16\sin 2t) \rightarrow \bar{r}''(\frac{\pi}{2}) = (-2, 0, 0)$$

$$\bar{r}'''(t) = (-2\cos t, 2\sin t, 4\sin t - 32\cos 2t) \rightarrow \bar{r}'''(\frac{\pi}{2}) = (0, 2, 36)$$

De modo que

$$\textcircled{1} \text{ Tangente } \mathbf{T} = \frac{\bar{r}'}{\|\bar{r}'\|} = \frac{(0, -2, -12)}{\|(0, -2, -12)\|} = \frac{\sqrt{37}}{37} (0, -1, -6)$$

$$\textcircled{2} \text{ Binormal } \mathbf{B} = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|} = \frac{(0, -2, -12) \times (-2, 0, 0)}{\|(-2, 0, 0)\|} = \frac{(0, 24, -4)}{\|(0, 24, -4)\|} =$$

No hay que hacer cálculos. Pensar que debe ser \perp a T y a B . $= \frac{\sqrt{37}}{37} (0, 6, -1)$

$$\textcircled{3} \text{ Normal } \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \dots = (-1, 0, 0)$$



En lo que se refiere a la curvatura y la torsión, podemos aplicar las fórmulas:

$$K(t) = \frac{\|r'(\frac{\pi}{2}) \times r''(\frac{\pi}{2})\|}{\|r'(\frac{\pi}{2})\|^3} = \\ = \sqrt{24^2 + 4^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^2 + 12^2}} = \frac{1}{74}$$

$$\tau(t) = \frac{\left[r'(\frac{\pi}{2}), r''(\frac{\pi}{2}), r'''(\frac{\pi}{2}) \right]}{\|r'(\frac{\pi}{2}) \times r''(\frac{\pi}{2})\|^2} = \frac{1}{24^2 + 4^2} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -12 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 36 \end{vmatrix} = -\frac{6}{37}$$

2 Sea la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 4 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 2z = 2 \end{cases}\}$

Sea el punto $\bar{x}_0 = (1, 1, 1)$.

a Comprobar que admite representación explícita $(x(z), y(z), z)$ cerca de \bar{x}_0 . (Usaremos el TFI)

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow \underbrace{(2x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 4, x^2 + y^2 + 2z^2 - 2z - 2)}_{F_1, F_2}$$

$$* F \in C^\infty \quad \checkmark$$

$$* F(1, 1, 1) = (2 + 1 - 1 + 2 - 4, 1 + 1 + 2 - 2 - 2) = (0, 0) \quad \checkmark$$

$$* \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial(x, y)} \end{vmatrix}_{(1, 1, 1)} = \begin{vmatrix} 4x & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix}_{(1, 1, 1)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \neq 0 \quad \checkmark$$

b) Hallar la recta tangente y el plano normal en \bar{x}_0

Ya hemos comprobado que existe representación explícita $(x(z), y(z), z)$ cerca de \bar{x}_0 . Esto es:

$$r(z) = (x(z), y(z), z) \longrightarrow r(1) = (1, 1, 1)$$

Por lo tanto

$$r'(z) = (x'(z), y'(z), 1) \longrightarrow r'(1) = (x'(1), y'(1), 1)$$

$$r''(z) = (x''(z), y''(z), 0) \longrightarrow r''(1) = (x''(1), y''(1), 0)$$

→ Rectas:

① Tangente: $\bar{x}(t) = r(t_0) + T(t_0) \cdot t$

→ Planos:

② Normal: contiene a N, B .

$$\pi(\alpha, \beta) = r(t_0) + \alpha N(t_0) + \beta B(t_0) \quad \pi \equiv T(t_0) \cdot (\bar{x} - r(t_0))$$

Es \perp a T

El objetivo es calcular $T(1)$ ($T = \frac{r'}{\|r'\|}$), de modo que

basta con calcular $r'(1)$. Calcularemos tb $r''(1)$ pero solo para repasar la derivación implícita, no pg sea necesaria.

$$\frac{d}{dz} F_1(x(z), y(z), z) = 4x x' + 2y y' - 2z + 2 = 0 \quad \begin{matrix} 4x' + 2y' = 0 \\ (1, 1, 1) \end{matrix}$$

$$\frac{d}{dz} F_2(x(z), y(z), z) = 2x x' + 2y y' + 4z - 2 = 0 \quad \begin{matrix} 2x' + 2y' = -2 \\ (1, 1, 1) \end{matrix}$$

$$x'(1) = 1, \quad y'(1) = -2.$$

$r'(1) = (1, -2, 1)$. Además, solo necesitamos la dirección de T (no hace falta normalizar).

Recta tangente

$$\bar{x}(t) = r(1) + T(1) \cdot t = (1, 1, 1) + (1, -2, 1) \cdot t$$

Plano normal

$$\pi \equiv T(t_0) \cdot (\bar{x} - r(t_0)) \rightarrow (1, -2, 1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$$

Con respecto a la derivada segunda (que recordemos, era innecesaria)

$$\frac{d^2}{dz^2} F_1(x(z), y(z), z) = \frac{d}{dz} (4xx' + 2yy' - 2z + 2 = 0) \Rightarrow \\ = 4x'x' + 4xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 2 = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} F_2(x(z), y(z), z) = \frac{d}{dz} (2xx' + 2yy' - 4z - 2 = 0) \Rightarrow \\ = 2x'x' + 2xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 4 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x'x' + 4xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 2 = 0 \\ 2x'x' + 2xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1^2 + 4x'' + 2 \cdot 2^2 + 2y'' - 2 = 0 \\ 2 \cdot 1^2 + 2x'' + 2 \cdot 2^2 + 2y'' - 4 = 0 \end{array}$$

$\bar{x} = (1, 1, 1)$

$\bar{x}' = (1, -2, 1)$

De aquí procede
despejar $x''(1), y''(1)$

NOTA. Este problema tb puede resolverse teniendo en cuenta que

$$T = \alpha \nabla F \times \nabla G, \quad \nabla F = (4x, 2y, -2z + 2); \quad \nabla G = (2x, 2y, 4z - 2)$$

$$T = \alpha \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \alpha (4, -8, 4) \rightarrow T = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}}$$

3 Hallar la curvatura y la torsión de

$$\bar{r}(t) = \left(a \cos \frac{t}{c}, b \sin \frac{t}{c}, \frac{b}{c} t \right), \text{ donde } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r' = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{t}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{t}{c}, \frac{b}{c} \right), \|r'\|^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

De modo que el parámetro t es longitud de arco. A partir de ahora haremos $t \rightarrow s$ y $r' \rightarrow r$ por claridad

$$\ddot{r} = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right)$$

$$\dddot{r} = \left(\frac{a}{c^3} \sin \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^3} \cos \frac{s}{c}, 0 \right)$$

Usando fórmulas de curvatura y torsión

$$K(s) = \|\ddot{r}(s)\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\tau(s) = \frac{[r'(s), r''(s), r'''(s)]}{\|r'(s) \times r''(s)\|^2} =$$

La fórmula de
"parámetro cualquiera"
se sirve para long. de
arco.

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2} \begin{vmatrix} -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c} & \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c} & -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c} & 0 \\ \frac{a}{c^3} \sin \frac{s}{c} & -\frac{a}{c^3} \cos \frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2} \frac{b}{c} \frac{a^2}{c^2} = \\ = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

En resumen,

$$K(s) = \frac{a}{a^2+b^2} ; \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2} ; \quad \frac{K(s)}{\tau(s)} = \frac{a}{b}$$

A este parámetro
se le llama paso de
la hélice

En el caso $b=0$, obtengo una circunferencia
de radio $R = \frac{1}{K} = a$

4 Calcular los vectores tangente \vec{t} y binormal \vec{b} de
la curva dada por la intersección de

$$x^2+y^2=4 ; \quad z=axy$$

en el pto $(-2, 0, 0)$ orientada de forma que \vec{t}
apunta a $z>0$.

El vector tangente (si existe) viene dado por

$$\nabla F \times \nabla G = c \vec{t}$$

siendo $F(x,y,z)=x^2+y^2-4=0$; $G(x,y,z)=z-axy=0$ y c
una constante cualquiera.

$$\begin{aligned}\nabla F &= (2x, 2y, 0) \xrightarrow{(-2,0,0)} (-4, 0, 0) \\ \nabla G &= (-ay, -ax, 1) \xrightarrow{(-2,0,0)} (0, 2a, 1)\end{aligned}$$

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{t} + 4\vec{j} - 8a\vec{k} \Rightarrow 4(\vec{j} - 2a\vec{k})$$
$$\|\vec{j} - 2a\vec{k}\| = \sqrt{1+4a^2}$$

Normalizando dicho vector, $\bar{E} = \frac{\vec{J} - 2a\vec{k}}{\sqrt{1+4a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} (0, 1, -2a)$

y para que apunte segun $z > 0 \rightarrow \bar{E} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} (0, -1, 2a)$

Para calcular el vector binormal, busco una parametrización de la curva. Busco ptos del espacio \mathbb{R}^3 que cumplen con las vtas estas dos ecuaciones: $x^2 + y^2 = 4$; $z = axy$

$$r(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2a\sin 2t)$$

$$\begin{aligned} x &= -2\cos t \\ y &= -2\sin t \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4 \\ z &= a(xy) = a(4\cos t \sin t) = 2a \sin 2t \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} (x, y, z) &= (-2, 0, 0) \\ \rightarrow t &= 0 \end{aligned}$$

De modo que

$$\textcircled{1} \text{ Tangente } T = \frac{r'}{\|r'\|}$$

$$\textcircled{2} \text{ Binormal } B = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$$

$$r'(t) = (+2\sin t, -2\cos t, 4a\cos 2t) \xrightarrow{t=0} (0, -2, 4a)$$

y normalizando $\rightarrow \bar{E} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} (0, -1, 2a)$

Para el binormal, calculo $r''(t)$, obteniendo:

$$r''(t) = (2\cos t, 2\sin t, -8a\sin 2t)$$

Si evaluamos en el punto ($t=0$) tenemos que:

$$r''(0) = (2, 0, 0) \rightarrow \frac{r''(0)}{\|r''(0)\|} = (1, 0, 0)$$

$$\overline{b} \Rightarrow r'(0) \times r''(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} (0, 2a, 1)$$

Esta última parte viene de que era un problema (de examen) en que se pedía \overline{v}

$$\text{De modo que } \overline{v} = \overline{t} + \overline{b} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} (0, 2a-1, 2a+1)$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{4a}{\sqrt{1+4a^2}}$$

5. EXAMEN EXTRAORDINARIO 18/19

7. Sea la función $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^3 en $I = [a, b]$ y sean las curvas $C = \mathbf{x}(I)$ y $C_\alpha = \alpha \mathbf{x}(I)$, con $\alpha > 0$. Sean L la longitud, $\kappa = \|\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''\| / \|\mathbf{x}'\|^3$ la curvatura, y $\tau = [\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''] / \|\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''\|^2$ la torsión de la curva C . Sobre las correspondientes magnitudes, L_α , κ_α y τ_α de la curva C_α , puede decirse que:

- a) $L_\alpha = \alpha^3 L$, b) $\tau_\alpha = \tau$, c) $\kappa_\alpha = \frac{1}{\alpha} \kappa$, d) $\kappa_\alpha = \alpha \kappa$

a) Sobre la longitud:

$$L = \int_a^b \|\overline{\mathbf{x}}'(t)\| dt \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \boxed{L_\alpha = \alpha L} \end{array} \right.$$

$$L_\alpha = \int_a^b \|\alpha \mathbf{x}'(t)\| dt$$

En este problema a = se le llama \overline{x}

$$C = \overline{\mathbf{x}}(I) \rightarrow \|\overline{\mathbf{x}}(t)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$C_\alpha = \alpha \overline{\mathbf{x}}(I) \rightarrow \|\alpha \overline{\mathbf{x}}(t)\| = \alpha \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sobre la Torsión

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2}$$

$$\|\tau\|^2 \rightarrow \left(y'z'' - y''z' \right)^2 + \left(x''z' - x'z'' \right)^2 + \left(x'y'' - x''y' \right)^2$$

$$\tau_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} dx' & dy' & dz' \\ dx'' & dy'' & dz'' \\ dx''' & dy''' & dz''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ dx' & dy' & dz' \\ dx'' & dy'' & dz'' \end{vmatrix}^2}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\alpha^3}{\alpha^4} \quad \boxed{\tau = \frac{1}{\alpha} \tau}$$

c Solve for curvature

$$K = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \right\|}{\| \bar{x}' \|^3} = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (x''z' - x'z'')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 \right)^{3/2}}$$

$$K_\alpha = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha x' & \alpha y' & \alpha z' \\ \alpha x'' & \alpha y'' & \alpha z'' \end{vmatrix} \right\|}{\| \bar{\alpha}x' \|^3} = \frac{\alpha^2 \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (x''z' - x'z'')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{\alpha^3 \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 \right)^{3/2}}$$

$$\boxed{K_\alpha = \frac{1}{\alpha} K}$$