Regla Leibniz
«Derivación bajo signo integral»

28 de diciembre de 2020

Índice

1. Derivación bajo signo integral

1.1. Regla de Leibniz

La diferenciación bajo el signo integral es una operación del cálculo, utilizada para evaluar ciertas integrales. En *su forma más simple*, llamada la regla integral de Leibniz, se aplica según la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt=\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$$

Muchas integrales que de otro modo, serían imposibles o requerirían métodos muy complejos, pueden resolverse con menos dificultad, mediante este enfoque.

1.2. Forma General

La forma más general de diferenciación bajo el signo integral establece que: si $f(x,t)$ *es una función continua y diferenciable* (es decir, las derivadas parciales existen y son continuas) y los límites de integración $a(x)$ y $b(x)$ son también funciones continuas y diferenciables de x, entonces se cumple:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt + f(x,b(x))\frac{d\,b(x)}{dx} - f(x,a(x))\frac{d\,a(x)}{dx}}$$

2. DESARROLLO

Se parte de la definición de función $F(x)$ que es la primitiva de $f(x)$.

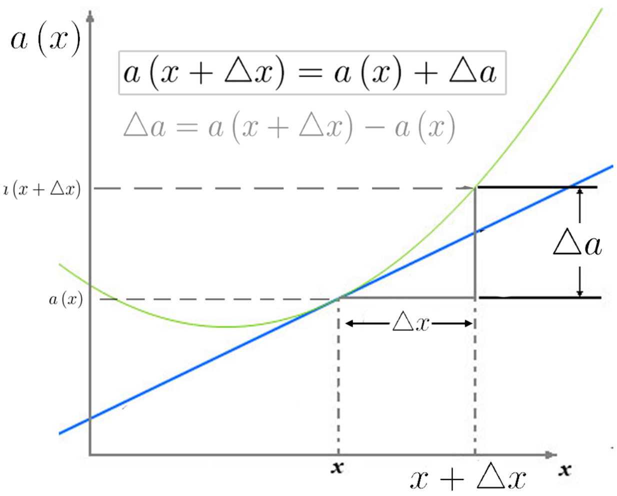
$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$

Aplicando la definición de derivada, a la función $F(x)$ se obtiene:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{F(x+\triangle x)-F(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\triangle x}\left\{\int_{a(x+\triangle x)}^{b(x+\triangle x)} f(x+\triangle x,t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right\}$$

Utilizando la propiedad de linealidad de las integrales, la expresión anterior se puede manipular como sigue.

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{1}{\triangle x}\left\{\int_{a(x+\triangle x)}^{a(x)} f(x+\triangle x,t)\,dt + \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+\triangle x,t)\,dt + \int_{b(x)}^{b(x+\triangle x)} f(x+\triangle x,t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right\}$$



$$a(x+\triangle x) = a(x) + \triangle a$$

$$b(x+\triangle x) = b(x) + \triangle b$$

Se utilizan las siguiente relaciones, con el fin de simplificar los limites de integración y que resulten mas adecuados en los próximos pasos. (En la figura se justifica gráficamente las relaciones)

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x}\left\{\int_{a(x)}^{b(x)} f(x+\triangle x, t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt + \int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f(x+\triangle x, t)\,dt + \int_{a(x)+\triangle a}^{a(x)} f(x+\triangle x, t)\,dt\right\}$$

Intercambiando los limites de integración de la *última integral*, se obtiene:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x+\triangle x, t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) + \lim_{\triangle x \to 0}\left(\frac{1}{\triangle x}\int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f(x+\triangle x, t)\,dt\right) - \lim_{\triangle x \to 0}\left(\frac{1}{\triangle x}\int_{a(x)}^{a(x)+\triangle a} f(x+\triangle x, t)\,dt\right) \tag{2.1}$$

En el termino $\lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\triangle x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f\left(x+\triangle x,t\right)dt-\int_{a(x)}^{b(x)} f\left(x,t\right)dt\right)$ se puede intercambiar el orden de la integración con el limite, es decir introducir el límite dentro de la integral.

(En general no se pude intercambiar, en esta situación donde la convergencia de la «integral definida», se estable como punto de partida, si es posible. De forma intuitiva la integral definida, es el límite de una suma asociada a una partición del área que cubre la función, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)\triangle x_k=\int_a^b f\left(x\right)dt$)

$$\int_{a(x)}^{b(x)}\left(\lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\triangle x}\left(f\left(x+\triangle x,t\right)-f\left(x,t\right)\right)\right)dt=\int_{a(x)}^{b(x)}\left(\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f\left(x+\triangle x,t\right)-f\left(x,t\right)}{\triangle x}\right)dt$$

Se observa que el límite se corresponden con la derivada parcial de la función $f\left(x,t\right)$.

$$\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f\left(x+\triangle x,t\right)-f\left(x,t\right)}{\triangle x}\tag{2.2}$$

Para dar sentido a los otros términos de (2.1), se hace uso del Teorema del valor medio.

Teorema. *«Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ existe un punto intermedio, de forma que se cumple:*

$$\int_a^b f\left(t\right)dt=f(c)\left(b-a\right)$$

Utilizando el teorema para el termino $\int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f\left(x+\triangle x,t\right)dt$, se obtiene:

$$\int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f\left(x+\triangle x,t\right)dt=f\left(x+\triangle x,c\right)\left(\cancel{b\left(x\right)}+\triangle b-\cancel{b\left(x\right)}\right)=f\left(x+\triangle x,c\right)\triangle b$$

El valor de "c" pertenece al intervalo $c\,\epsilon\left[b\left(x\right),b\left(x\right)+\triangle b\right]$ y dicho intervalo se puede expresar como $\left[b\left(x\right),b\left(x+\triangle x\right)\right]$ (se hace uso de la igualdad $b\left(x+\triangle x\right)=b\left(x\right)+\triangle b$, lo cual resulta mas conveniente para ver hacia donde tiende "c", cuando $\triangle x\to 0$

$$\triangle x\to 0\Longrightarrow\left[b\left(x\right),b\left(x+\triangle x\right)\right]\longrightarrow\left[b\left(x\right),b\left(x\right)\right]=b\left(x\right)$$

Cuando $\triangle x \to 0$ el intervalo tiende $b(x)$ y como el valor de c esta dentro del intervalo, se cumple que $c \to b(x)$. Por tanto se obtiene:

$$\int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f(x+\triangle x, t)\, dt = f(x+\triangle x, b(x))\, \triangle b$$

El termino $\lim_{\triangle x \to 0}\left(\frac{1}{\triangle x}\int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f(x+\triangle x, t)\, dt\right)$ queda como sigue:

$$\lim_{\triangle x \to 0}\left(\frac{1}{\triangle x}\int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f(x+\triangle x, t)\, dt\right) = \lim_{\triangle x \to 0}\frac{f(x+\triangle x, b(x))(\triangle b)}{\triangle x} =$$
$$\lim_{\triangle x \to 0} f(x+\triangle x, b(x)) \cdot \lim_{\triangle x \to 0}\frac{\triangle b}{\triangle x} = \longrightarrow$$

Usando $b(x+\triangle x) = b(x) + \triangle b \longrightarrow b(x+\triangle x) - b(x) = \triangle b$ en el segundo límite se tiene.

$$\longrightarrow = f(x, b(x)) \lim_{\triangle x \to 0}\frac{b(x+\triangle x) - b(x)}{\triangle x} = f(x, b(x))\frac{d(b(x))}{dx}$$

$$\lim_{\triangle x \to 0}\left(\frac{1}{\triangle x}\int_{b(x)}^{b(x)+\triangle b} f(x+\triangle x, t)\, dt\right) = f(x, b(x))\frac{d(b(x))}{dx} \tag{2.3}$$

De forma análoga se llega a la otra expresión.

$$\lim_{\triangle x \to 0}\left(\frac{1}{\triangle x}\int_{a(x)}^{a(x)+\triangle a} f(x+\triangle x, t)\, dt\right) = f(x, a(x))\frac{d(a(x))}{dx} \tag{2.4}$$

Usando los resultados (2.2), (2.3) y (2.4) en la expresión (2.1), se obtiene el resultado final.

$$\boxed{\frac{dF(x)}{dx} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x, b(x))\frac{d(b(x))}{dx} - f(x, a(x))\frac{d(a(x))}{dx}}$$

3. Ejemplos

3.1. Aplicar regla $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \frac{\sin(xt)}{t}dt$

$$F(x) = \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \frac{\sin(xt)}{t}dt$$

$$\begin{gathered}\frac{dF(x)}{dx} = \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(xt)}{t}\right)dt + \frac{\sin\left(x\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} - \frac{\sin(xx^2)}{x^2}\frac{d(x^2)}{dx} = \\ \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \cos(xt)\,dt + x\sin 1\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{\sin x^3}{x^2}\cdot(2x)\end{gathered}$$

Se evaluá la integral $\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \cos(xt)\,dt$

$$\begin{gathered}\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \cos(xt)\,dt = \left\{\begin{array}{c} u = xt \\ du = xdt \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\text{Nuevos limites} \\ \underbrace{\left(\frac{1}{x}, x^2\right)}_{t} \longrightarrow \underbrace{\left(1, \frac{1}{x^3}\right)}_{u}\end{array}\right\} = \frac{1}{x}\int_{x^3}^{1} \cos(u)\,du = \\ = \frac{1}{x}\left[\sin u\right]_{x^3}^{1} = \frac{1}{x}\left(\sin 1 - \sin x^3\right)\end{gathered}$$

Uniendo los resultados, se obtiene.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \frac{\sin(xt)}{t}dt = \frac{1}{x}\left(\sin 1 - \sin x^3\right)x - \sin 1\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{\sin x^3}{x^2}\cdot(2x)}$$

3.2. Aplicar regla $\frac{d}{dx}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\,dt$

Se parte de $f(x,t) = e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}$ y se define la siguiente función

$$F(x) = \lim_{L\to\infty} \int_0^L e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}dt$$

Se deriva respecto de x en ambos lados de la ecuación, para obtener.

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{L\to\infty} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\right) dt = -\lim_{L\to\infty} \int_0^L xe^{-t}\cos(xt)\, dt$$

La integral tiene como resultado (ver detalles)

$$\int_0^L xe^{-t}\cos(xt)\, dt = \frac{x\left(e^{-L}x\sin(Lx) - e^{-L}\cos(Lx)\right) + x}{x^2+1}$$

Haciendo el límite y teniendo en cuenta que los limites se anulan, $\lim_{L\to\infty}\left(e^{-L}\sin(L)\right) = 0$ y $\lim_{L\to\infty}\left(e^{-L}\cos(L)\right) = 0$, el resultado final es:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}dt\right) = \frac{x}{x^2+1}}$$

3.3. Evaluar $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$

Se parte del siguiente resultado:

$$\int_0^1 \frac{dt}{x+t^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) \tag{3.1}$$

donde la x funciona como un parámetro para la integración. Con el fin de obtener la integral a calcular, **se derivada respecto a la variable** x, en ambos lados de la expresión anterior.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 \frac{dt}{x+t^2}\right) = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+t^2}\right) dt = -\int_0^1 \frac{dt}{(x+t^2)^2}$$

Derivando el resultado de la integral (3.1)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\right) = -\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,(x+1)}$$

Ambos derivaciones deben de ser iguales:

$$-\int_0^1 \frac{dt}{(x+t^2)^2} = -\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,(x+1)}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(x+t^2)^2} = \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,(x+1)}$$

La integral a resolver es un caso particular de la anterior, se toma el valor $x = 1$.

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\arctan(1)}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

3.4. Evaluar $\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$

Para resolver esta integral se introduce un parámetro en la misma y se resuelve utilizando la derivada sobre ese mismo parámetro. La nueva integral queda como sigue

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t^2)^2}$$

Para resolver esta integral, se hace uso del siguiente resultado, que se conoce de las tablas inmediatas $\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{\pi}{2a}$. Derivando en ambos lados se obtiene.

$$\frac{d}{da}\left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2+t^2}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2a}\right)$$

La derivada respecto al parámetro entra dentro de la integral.

$$\left(\int_0^\infty \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)\right)dt = \frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2a}\right)$$

Haciendo las derivadas

$$\int_0^\infty \left(-\frac{2a}{\left(a^2+t^2\right)^2}\right)dt = -\frac{\pi}{2a^2}$$

Secando el termino $2a$ fuera de la integral, se llega a la integral de partida que se quería evaluar, para el caso particular de $a=1$.

$$-2a\int_0^\infty \frac{1}{\left(a^2+t^2\right)^2}dt = -\frac{\pi}{2a^2} \longrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\left(a^2+t^2\right)^2}dt = \frac{\pi}{4a^3}$$

Haciendo $a=1$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \frac{\pi}{4}$$

3.5. Evaluar $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx$

Para hacer este integral se utiliza el resultado de la integral siguiente integral:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx = \frac{a}{(a^2+\lambda^2)}$$

La integral anterior se puede considera como una función del parámetro a,como $H(a)$.

$$H(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\cos\lambda x dx$$

Esto permite la integral que se quiere evaluar, derivando $H(a)$.

$$\frac{dH(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{d}{da}\left\{e^{-ax}\right\}\cos\lambda x dx = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x}\cos\lambda x dx = -I(a)$$

Por otra parte derivando el lado derecho de $H(a)$ se obtiene:

$$\frac{d}{da}\left\{\frac{a}{(a^2+\lambda^2}\right\} = \frac{\lambda^2 - a^2}{(a^2+\lambda^2)^2} \longmapsto \boxed{I(a) = \frac{a^2-\lambda^2}{(a^2+\lambda^2)^2}}$$

3.6. Evaluar $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

Para calcular esta integral se define otra integral $H(\alpha)$ un poco mas complicada en apariencia, pero mas fácil de resolver, mediante una derivación paramétrica.

$$H(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x} dx \tag{3.2}$$

La integral a resolver se corresponde con un caso particular de la anterior $H(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

La derivada paramétrica respecto de ”a” permite eliminar el denominador con la variable ”x” y tener una integral mas sencilla de resolver. Se deriva respecto del parámetro a en ambos lados de (3.2)

$$\frac{dH(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}\left\{e^{-ax}\right\}\frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty (-x)\, e^{-ax}\frac{\sin x}{x} dx = -\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx \tag{3.3}$$

Esta última integral se corresponden con otra integral conocida y su resultado es el siguiente.

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(\lambda x)\, dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2}$$

Llevando este resultado (3.3) se obtiene.

$$\frac{dH(a)}{da} = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2} = C - \arctan \alpha$$

Integrando en el parámetro a.

$$H(a) = -\int \frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2} da = -\arctan\left(\frac{a}{\lambda}\right) + C$$

Para determina la constante C se utiliza que por la propia definición de $H(a)$, se tiene que cumplir que $H(\infty) = 0 \longmapsto C = \frac{\pi}{2}$, dado que la «$\arctan\left(\frac{a}{\lambda}\right)$» tiende a $\frac{\pi}{2}$ cuando a tiende a infinito.

$$H(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$H(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{\lambda} \longmapsto I = H(0) = \frac{\pi}{2}$$

3.7. Evaluar $\int_0^1 \frac{t^2-1}{\ln t}$

Esta integral resulta complicada por la presencia del «$\ln t$» en el denominador, una forma de eliminarlo sería utilizar la siguiente propiedad de la derivación exponencial. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} t^x = t^x \ln t \longleftarrow \frac{d}{dx} b^{g(x)} = a^{g(x)} \ln b \cdot g'(x)$$

Para ello se define una nueva función que dependa de un parámetro x que generaliza el integrando como:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt \tag{3.4}$$

La integral que se desea evaluar se corresponde con el caso particular de $F(2)$. Para simplificar el integrando, se realiza la derivada de esta nueva función respecto del parámetro x :

$$\frac{dF(x)}{dx} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right) dx \tag{3.5}$$

Para la derivación se aplica la formula $\frac{d}{dx} b^{g(x)} = a^{g(x)} \ln b \, g'(x)$, en el caso anterior la base b de la exponencial se corresponde con "t" y la función $g(x)$ es el parámetro "x", por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^x-1}{\ln t}\right) = \frac{1}{\ln t}\left(t^x \ln x\right) = t^x$$

Llevando a la integral (3.5)

$$\frac{dF(x)}{dx} = \int_0^1 t^x dx = \left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1^{x+1}}{x+1} - \frac{0^{x+1}}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{0}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

Ahora se procede a integrar respecto del parámetro x:

$$F(x) = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) + C$$

Para determinar la constante se utiliza la condición de $F(0) = 0$ que se deduce de la propia definición de la función en (3.4), dado que los límites de integración son iguales.

$$F(0) = 0 \Longrightarrow 0 = \cancelto{0}{\ln 1} + C \Longrightarrow C = 0$$

La integral buscada se corresponde con $F'(2)$ por tanto el resultado es:

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x} = F(2) = \ln(2+1) = \ln 3$$

3.8. Evaluar $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

La dificultad se centra en la presencia del logarítmico, con el fin de eliminarlo de la integral se introduce el parámetro variable ”a” dentro del neperiano como sigue:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx$$

La derivada en el parámetro a permite transformar la integral en otra mas sencilla, sin el logarítmico.

$$\frac{dF(a)}{da} = \frac{d}{da}\left(\int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx\right) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ax)}dx$$

Esta integral es mas sencillo fácil de evaluar dividiendo la integral en fracciones parciales. Su resultado final esta dado por:

$$\frac{dF(a)}{da} = -\frac{\ln(1+a)}{1+a^2} + \frac{1}{1+a^2}\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{a}{1+a^2}\frac{\pi}{4}$$

Integrando en el intervalo $(0,a)$ y cambiando la *«variable muda» por t,* dentro del las integrales, se obtiene.

$$\int_0^{\mathrm{a}} dF(t) = -\int_o^a \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\ln 2\int_o^a \frac{dt}{1+t^2} + \frac{\pi}{4}\int_o^a \frac{t}{1+t^2}dt$$
$$F(t)\rfloor_0^a = -\int_o^a \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\ln 2\arctan t\rfloor_o^a + \frac{\pi}{8}\ln\left(1+t^2\right)\rfloor_0^a$$

$$F(a) - F(0) = -\int_o^a \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\ln 2\arctan a + \frac{\pi}{8}\ln\left(1+a^2\right)$$

Para determinar el valor de $F(0)$ se usa la propia definición de $F(a)$.

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\ln(1+0\cdot x)}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\cancelto{0}{\ln 1}}{1+x^2}dx = 0$$

Haciendo $a = 1$ se tiene.

$$F(1) = -\int_o^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\ln 2\cancelto{\frac{\pi}{4}}{\arctan 1} + \frac{\pi}{8}\ln\left(1+1^2\right)$$

$$F(1) = -\overbrace{\int_o^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}}^{F(1))}dt + \frac{1}{2}\ln 2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$2F(1) = 2\frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$\boxed{F(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2}$$

TRUCO: haciendo integración partes

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln(1+x) & dv = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ du = \frac{1}{1+x}dx & v = \arctan x \end{array} \right\} = \left[\; uv - \int vdu \; \right] =$$

$$\ln(1+x)\arctan x\rfloor_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx$$

se puede *resolver esta otra integral*:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx = \ln(1+x)\arctan x\rfloor_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx = \ln 2\cancelto{\frac{\pi}{4}}{\arctan 1} - \cancelto{0}{\ln 1\cdot\arctan 0} - \frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx = 2\frac{\pi}{8}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2}$$

3.9. Evaluar $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$

Se define una nueva función con un parámetro «x» del siguiente modo

$$F(x)=\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

En este caso la gran dificultad se encuentra en saber, que las derivadas parciales del integrando en las respectivas variables x y θ; están relacionadas del siguiente modo:

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)=e^{x\cos\theta}\left[\cos\theta\left(\cos x\sin\theta\right)-\sin\theta\sin(x\sin\theta)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)=xe^{x\cos(\theta)}\left[\cos\theta\cos(x\sin\theta)-\sin\theta\sin(x\sin\theta)\right]$$

Se observa que cumple la siguiente relación.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)=x\frac{\partial}{\partial x}e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$$

Esto permite hacer el siguiente planteamiento.

$$x\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]=x\frac{d}{dx}\left[\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\,d\theta\right]=x\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\right]d\theta=\longrightarrow$$

El parámetro x pude entrar dentro de la integral que se realiza en la variable θ.

$$\longrightarrow=\int_0^{2\pi} x\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=$$
$$\left[e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\right]_0^{2\pi}=$$
$$e^{x\cos 2\pi}\cos(x\sin 2\pi)-e^{x\cos 0}\cos(x\sin 0)$$
$$e^{x}\cos(0)-e^{x}\cos(0)=0$$

Se cumple.

$$x\frac{d}{dx}\left[F\left(x\right)\right]=0$$

Por tanto la derivada de $F\left(x\right)$ para un cualquier valor de $x\neq 0$ debe ser cero, lo cual indica que es una constante.

$$x\frac{d}{dx}\left[F\left(x\right)\right]=0\longrightarrow F\left(x\right)=C$$

Si se toma el valor de $x=0$ para la función $F\left(x\right)$, toma el siguiente valor.

$$F\left(0\right)=\int_0^{2\pi} e^{0\cdot\cos\theta}\cos\left(0\cdot\sin\theta\right)d\theta=\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi$$

Como la función tiene que ser constante, cualquier otro valor, como $F\left(1\right)=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos\left(\sin\theta\right)$ vale lo mismo.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos\left(\sin\theta\right)=2\pi$$

3.10. Evaluar $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(5-\cos x)^2}$

Para resolver la integral se hace uso del siguiente resultado $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\leftarrow a>1$ (ver detalles) y se considera la integral con el parámetro a, como derivable.

$$F\left(a\right)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Derivando el lado de la integral, se obtiene.

$$\frac{d}{da}F\left(a\right)=\frac{d}{da}\left(\int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\cos x}\right)=\int_0^{\pi}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a-\cos x}\right)dx=\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{\left(a-\cos x\right)^2}\right)dx$$

Derivando el resultado de la integral.

$$\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{2a\pi}{\sqrt{\left(a^2-1\right)^3}} = \frac{a\pi}{\sqrt{\left(a^2-1\right)^3}}$$

Igualando.

$$\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{\left(a-\cos x\right)^2}\right)dx = -\frac{\pi a}{\sqrt{\left(a^2-1\right)^3}}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(a-\cos x\right)^2}dx = \frac{\pi a}{\sqrt{\left(a^2-1\right)^3}}$$

La integral a resolver, es $F\left(5\right) = \int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(5-\cos x\right)^2}$, por tanto se obtiene.

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(5-\cos x\right)^2}dx = \frac{\pi a}{\sqrt{\left(5^2-1\right)^3}} = \frac{5\sqrt{6}\pi}{288}$$

3.11. Evaluar $\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$

El resultado de esta integral se corresponde con la siguiente expresión y condiciones.

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \Big(f(\infty)-f(0)\Big)\ln\frac{a}{b} \longleftarrow a>0\ y\ b>0$$

Se deben de cumplir las siguientes condiciones.

- $f'\left(x\right)$ es continua para $x>0$.
- Existen los límites $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)$ y $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)$.
- La integral es converge.

Para encontrar este resultado se considera "a" *como un parámetro derivable* y "b" como una constante. Para ello se define la siguiente integral y se le aplica la derivación sobre el parámetro a.

$$I\left(a\right) = \int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

$$\frac{d}{da}\left(I\left(a\right)\right) = \frac{d}{da}\left(\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx\right) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\right)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial a}\left(f(ax)\right)\,dx$$

Se hace el cambio de variable $ax = v$ y se aplica la regla de la cadena $\frac{df(v)}{da} = \frac{df(v)}{dv}\frac{dv}{da}$. También hay que considera que este cambio de variable supone un cambio en los limites de integración, que en esta caso los deja iguales.

$$límites \rightarrow \begin{cases} x=0 & \longrightarrow v=0 \\ x=\infty & \longrightarrow v=\infty \end{cases}$$

En la siguiente expresión también se usa que $ax = v$, toma diferencial se obtiene $dx = \frac{1}{a}dv$

$$\frac{d}{da}\left(I\left(a\right)\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial a}\left(f(v)\right)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{df\left(v\right)}{dv}\frac{dv}{da}\right)\frac{1}{a}dv = \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{df\left(v\right)}{dv}\frac{d\left(ax\right)}{da}\right)\frac{1}{a}dv$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{df\left(v\right)}{dv}x\right)\frac{1}{a}dv = \int_0^{\infty} \frac{df\left(v\right)}{dv}\frac{1}{a}dv = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{df\left(v\right)}{dv}dv = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} df\left(v\right) =$$
$$\frac{1}{a}\left[f\left(v\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}\left[\lim_{x\to\infty} f\left(v\right) - \lim_{x\to 0} f\left(v\right)\right]$$

Para aligerar la nomenclatura se define los limites de forma simbólica por $f\left(\infty\right)$ y $f\left(0\right)$.

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f\left(v\right) \equiv f\left(\infty\right) \\ \lim_{x\to 0} f\left(v\right) \equiv f\left(0\right) \end{cases}$$

Queda del siguiente modo.

$$\frac{d}{da}\left(I\left(a\right)\right) = \frac{1}{a}\left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right]$$

Se realiza la integración en el parámetro variable a.

$$I\left(a\right) = \int \frac{1}{a}\left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] da = \left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \int \frac{1}{a} da = \left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \ln a + C \tag{3.6}$$

Para determinar el valor de la constante se considera, que por definición la $I\left(b\right) = 0$ dado que se cumple que:

$$I\left(b\right) = \int_0^{\infty} \frac{\cancelto{0}{f\left(bx\right) - f\left(bx\right)}}{x} dx \longrightarrow I\left(b\right) = 0$$

Haciendo $a = b$ en (3.6), se tiene.

$$0 = I\left(b\right) = \left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \ln b + C$$
$$0 = \left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \ln b + C \longrightarrow C = -\left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \ln b$$

El resultado final.

$$I\left(a\right) = \left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \ln a - \left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \ln b =$$
$$\left[f\left(\infty\right) - f\left(0\right)\right] \ln \frac{a}{b}$$

3.12. Evaluar $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx$

Se plantea la siguiente modificación en la integral y se hace la derivación en el parámetro a.

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$$

$$\frac{d}{da} F(a) = \frac{d}{da} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} \frac{\partial}{\partial a} (\arctan(a \tan x)) \, dx =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} \frac{\tan x}{1 + (a \tan x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (a \tan x)^2} dx$$

La última integral se puede realizar por procedimientos habituales, como la multiplicación y división del factor " $\sec^2 x$".

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + a^2 \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} \frac{1}{(1 + a^2 \tan^2 x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan^2 x)} \frac{1}{(1 + a^2 \tan^2 x)} dx \longrightarrow$$

Se hace el cambio de variable $u = \tan x$, con $du = \sec^2 x dx$.

$$\longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(1 + u^2)(1 + a^2 u^2)}$$

Haciendo una descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{du}{(1 + u^2)(1 + a^2 u^2)} = \int \left(\frac{a^2}{(a^2 - 1)(1 + a^2 u^2)} - \frac{1}{(a^2 - 1)(1 + u^2)} \right) du =$$
$$\frac{a^2}{(a^2 - 1)} \int \frac{du}{1 + a^2 u^2} - \frac{1}{(a^2 - 1)} \int \frac{du}{1 + u^2} =$$
$$\frac{a^2}{(a^2 - 1)} \frac{\arctan(au)}{a} - \frac{1}{(a^2 - 1)} \arctan u =$$
$$\frac{a}{(a^2 - 1)} \arctan(au) - \frac{1}{(a^2 - 1)} \arctan u$$

Deshaciendo el cambio de variable.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\tan^2 x}dx = \left[\frac{a}{(a^2-1)}\arctan\left(a\tan x\right) - \frac{1}{(a^2-1)}\arctan\left(\tan x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$\frac{a}{(a^2-1)}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{(a^2-1)}\frac{\pi}{2} = \frac{(a-1)\,\pi}{2\,(a^2-1)} = \frac{(a-1)\,\pi}{2\,(a-1)\,(a+1)} =$$
$$\frac{\pi}{2\,(a+1)}$$

Se ha utilizado $\lim_{x\to\infty}\left(\arctan\left(x\right)\right) = \frac{\pi}{2}$ y $\arctan\left(0\right) = 0$

Reuniendo estos resultados se tiene.

$$\frac{d}{da}F\left(a\right) = \frac{\pi}{2\,(a+1)}$$

Integrando

$$F\left(a\right) = \int \frac{\pi}{2\,(a+1)} = \frac{\pi}{2}\ln\left(a+1\right) + C$$

Evaluando $F\left(0\right)$, se tiene

$$F\left(0\right) = \frac{\pi}{2}\cancelto{0}{\ln\left(0+1\right)} \longrightarrow C = 0$$

Utilizando el valor de $a = 1$, se obtiene la integral original.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(2\right)}$$

3.13. Encontrar $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$

Se parte de la siguiente integral impropia de primera especie, que tiene un resultado conocido.

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$$

Derivando en ambos lados.

$$-\int_0^\infty te^{-tx}dt = -\frac{1}{x^2}$$

Tomando derivadas sucesivas, se obtiene:

$$\int_0^\infty t^n e^{-tx}dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Para el caso de $x = 1$, se deriva la siguiente expresión.

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$$

Se define la función gamma a través de $\mathit{\Gamma}\left(n+1\right) = n!$

Nota: La función gamma denotada como $\Gamma(z)$, es una aplicación que extiende el concepto de factorial a los números reales y complejos. Si la parte real del número complejo z es positiva, entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

converge absolutamente; esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo, excepto a los enteros negativos y al cero. Si n es un entero positivo, entonces:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

4. Notas

4.1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos\left(\lambda x\right)dx$

Esta «integral definida» se puede evaluar haciendo la integral indefinida y aplicando la regla de las integrales impropias, relativas a sus límites. La integral indefinida se resuelve aplicando dos veces el método de por partes

(Ver detalle resolución), se obtiene el siguiente resultado.

$$\int e^{-ax}\cos\lambda x dx=\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-ax}\sin\lambda x-ae^{-ax}\cos\lambda x\right)+C$$

Se hace el límite:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos\left(\lambda x\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\cos\lambda x dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-ax}\sin\lambda x-ae^{-ax}\cos\lambda x\right)\right]_0^b$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-a\cdot b}\sin\lambda\cdot b-ae^{-a\cdot b}\cos\lambda\cdot b\right)-\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda\cancelto{1}{e^{-a\cdot 0}}\cancelto{0}{\sin\lambda\cdot 0}-a\cancelto{1}{e^{-a\cdot 0}}\cancelto{1}{\cos\lambda\cdot 0}\right)\right]$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-a\cdot b}\sin\lambda\cdot b-ae^{-a\cdot b}\cos\lambda\cdot b\right)\right]-\left(-\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(a\right)\right)$$

El límite se hace cero, dado que el seno y coseno están acotados y la exponenciales se hacen cero, cuando $b\to\infty$. El resultado final es:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos\left(\lambda x\right)dx=\frac{a}{\lambda^2+a^2} \tag{4.1}$$

4.2. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin\left(\lambda x\right)dx$

Esta «integral definida» se puede evaluar haciendo la integral indefinida y aplicando la regla de las integrales impropias, relativas a sus límites. La integral indefinida se resuelve aplicando dos veces el método de por partes

(Ver detalle resolución), se obtiene el siguiente resultado.

$$\int e^{-ax}\sin\lambda x dx=-\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-ax}\cos\lambda x+ae^{-ax}\sin\lambda x\right)$$

Se hace el límite:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(\lambda x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\sin\lambda x dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-ax}\cos\lambda x + ae^{-ax}\sin\lambda x\right)\right]_0^b$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-a\cdot b}\cos\lambda\cdot b + ae^{-a\cdot b}\sin\lambda\cdot b\right) - \left(-\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda \cancelto{1}{e^{-a\cdot 0}} \cancelto{1}{\cos\lambda\cdot 0} + a\cancelto{1}{e^{-a\cdot 0}} \cancelto{0}{\sin\lambda\cdot 0}\right)\right)\right]$$

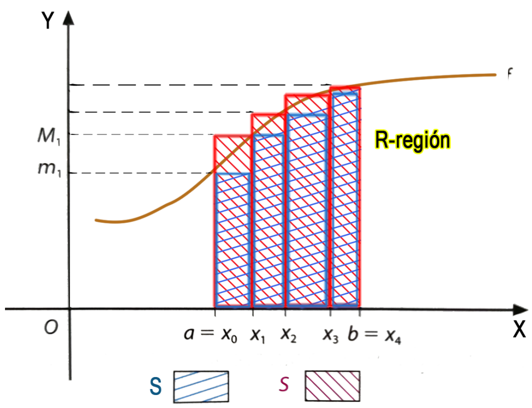
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\lambda^2+a^2}\left(\lambda e^{-a\cdot b}\cos\lambda\cdot b - ae^{-a\cdot b}\sin\lambda\cdot b\right)\right] - \left(-\frac{\lambda}{\lambda^2+a^2}(a)\right)$$

El límite se hace cero, dado que el seno y coseno están acotados y la exponenciales se hacen cero, cuando $b\to\infty$. El resultado final es:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(\lambda x)\,dx = \frac{\lambda}{\lambda^2+a^2} \tag{4.2}$$

4.3. Definición Integral Definida

Dada una función f continua en el intervalo $[a,b]$ **se define la integral definida** de la función en dicho intervalo, *como el área de la región* del plano (R) que esta limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Se denota por la siguiente expresión:



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Los números a y b se denominan límites de integración y la función $f$se llama integrando.

La suma de las áreas de los **rectángulos contenidos en** R,que se denomina suma inferior s_n de f, asociada a una partición , esta dada por:

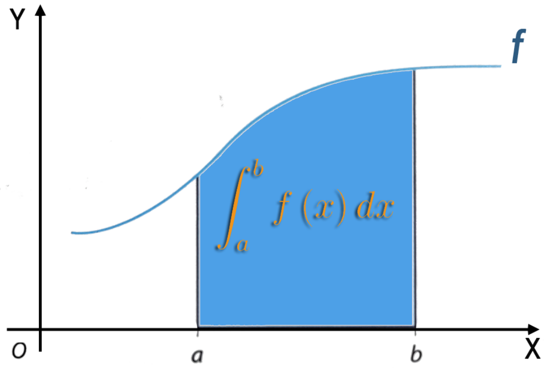
$$s = m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \cdots + m_n(x_n-x_{n-1})$$

y a suma de las áreas de los **rectángulos que contienen a** R , que se denomina suma Superior S_n de f, asociada a una partición , esta dada por:

$$S = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1) + \cdots + M_n (x_n - x_{n-1})$$

Si se llama A al área de la región R, entonces se tiene que $s \leq A \leq S$.

Considerando particiones cada vez mas precisas del intervalo, se obtiene una sucesión de sumas inferiores que es creciente y acotada superiormente, y una sucesión de sumas superiores que es decreciente y acotada inferiormente.



$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq A \leq S_n \leq \cdots \leq S_2 \leq S_1$$

Este proceso tiene un límite y su valor, es el área de la región que hay bajo la curva.

$$A = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

*