

Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = U \Sigma V^T$$

Σ diagonal / U, V orthogonal

Ultima y mejor forma de descomponer una matriz.

Funciona para cualquier matriz A .

Ejemplo: si la matriz es simétrica, tengo que sus auto-vectores son ortogonales luego

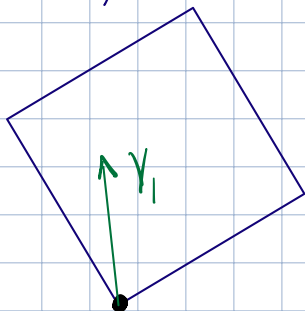
$$A = Q \Lambda Q^T$$

$$A = U \Sigma V^T$$

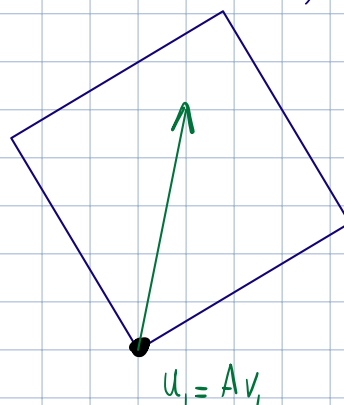


Volvemos a la figura que nos permite representar cualquier transformación lineal (efecto que produce A sobre un vector)

\mathbb{R}^n row space



\mathbb{R}^m column space

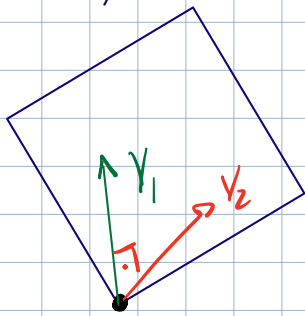


¿Qué busco en SVD? $A = U \Sigma V^T \rightarrow AV = U \Sigma$

Y quiero que V y Σ tengan columnas ortonormales y Σ sea diagonal.

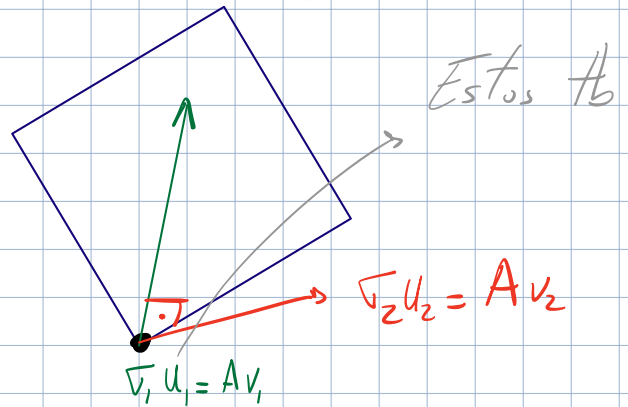
Lo que busco entonces es una base ortogonal en el espacio de las filas que (al aplicarle A) se transforme en una base ortogonal del espacio de las columnas.

\mathbb{R}^n row space



Estos son ortonormales

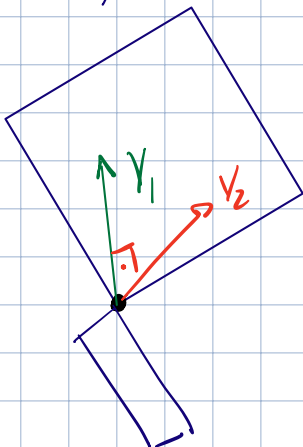
\mathbb{R}^m column space



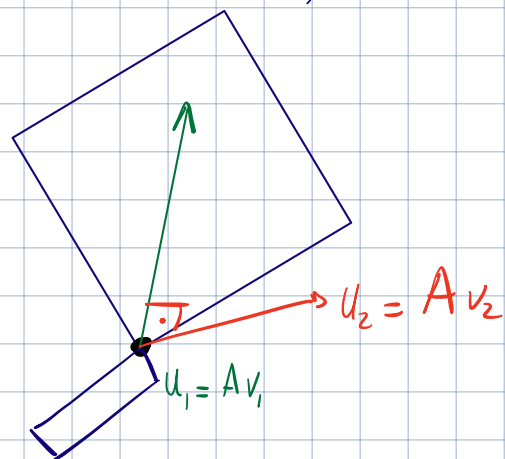
¿Cómo puedo encontrar una base ortogonal para el espacio de las filas? \rightarrow Gram Schmidt

Pero claro, si solo hago eso, no hay motivo para que la base transformada sea ortogonal.

\mathbb{R}^n row space



\mathbb{R}^m column space



Podemos añadir los espacios nulos, que aparecerán como ceros en la diagonal de Σ

$$(AV = 0)$$

En forma matricial

$$A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_r \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_r \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_r \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

rank of A

$$AV = U\Sigma$$

Si hay espacio nulo

$$A \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_r & v_{r+1} & \dots & v_n \\ | & | & & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_r & u_{r+1} & \dots & u_m \\ | & | & & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ejempl

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ es invertible, luego rango es 2}$$

Busco v_1, v_2 en row space \mathbb{R}^2

u_1, u_2 en column space \mathbb{R}^2

$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ (scaling factors)

$$A v_1 = \sigma_1 u_1$$

$$A v_2 = \sigma_2 u_2$$

Matricialmente

$$AV = U\Sigma \rightarrow A = U\Sigma V^{-1} \rightarrow A = U\Sigma V^T$$

Voy a hacer desaparecer la U para que V sea más fácil de calcular. *esta matriz es simétrica (y como mínimo semidefinida positiva)*

$$\overbrace{A^T A} = A^T U \Sigma V^T = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T$$

(A = U\Sigma V^T \rightarrow A^T = V \Sigma^T U^T = V \Sigma U^T)

De modo que

$$A^T A = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} V^T$$

! Autovalores y autovectores !

Y autovalores serán positivos (o 0)

pg $A^T A$ es semidefinida positiva

¿Y ahora como consigo la U ?

Camino 1 (difícil)

$$AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U\Sigma^2 U^T \rightarrow \text{repeto.}$$

Camino 2 (fácil)

$$AV \Sigma^{-1} = U$$

En nuestro ejemplo

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}$$

Ahora necesito autovalores y autovectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 32 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 32 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 18 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normalizo

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 18 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & \\ & \end{bmatrix}$$

Repetimos para U (Camino 1)

$$A A^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Esto es un
accidente, no es
normal y se sale
diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 32 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 18 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} u & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^2 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^T & \\ & \end{bmatrix}$$

↳ otra vez 32 y 18 → No surprise.

Por tanto

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \overset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$$

¿Funciona?

$$\overset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¡Sigo está mal!
¿Qué pasó?

Hay varias maneras de arreglarlo (por ejemplo, cambiando de signo el autovector de V).

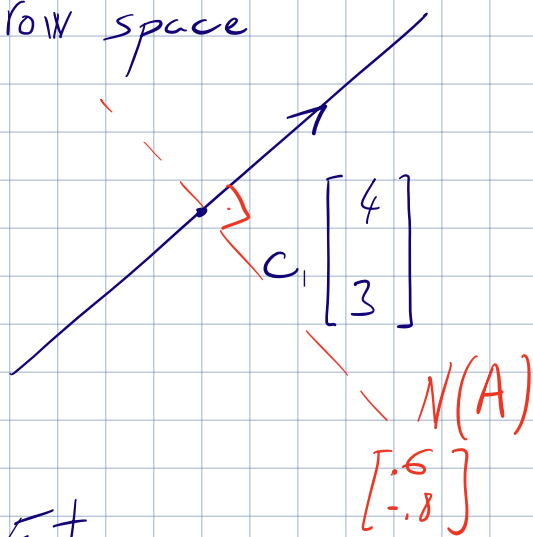
Al final de la clase retomemos este tema.

Ejemplo 2 (matriz singular)

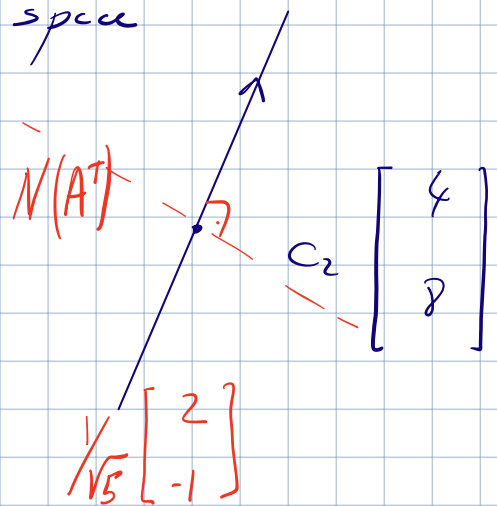
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{no invertible, luego rango es } 1$$

Busco v_1 en rowspace \mathbb{R}^2
 u_1 en columnspace \mathbb{R}^2
 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$ (scaling factors)

row space



column space



Entonces

$$v_1 = \begin{bmatrix} .8 \\ .6 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Y por tanto

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{125} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .8 & .6 \\ .6 & -.8 \end{bmatrix}$$

A U Σ

Esto es el espacio N.L.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 60 & 45 \end{bmatrix}$$

Matriz de rango 1 (todas columnas comb. lineal de $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$)

Autovalores de la matriz de rango 1? $\rightarrow 80 + 45 = \lambda_1 + \cancel{\lambda_2}^0 \rightarrow \lambda_1 = 125 *$

Lo que estamos haciendo es elegir las bases adecuadas para los 4 subespacios del álgebra lineal

V_1, \dots, V_r	base ortonormal para	row space	$\dim r$
U_1, \dots, U_r	"	"	$\dim r$
V_{r+1}, \dots, V_n	"	"	$\dim n-r$
U_{r+1}, \dots, U_m	"	"	$\dim m-r$

¡Y además! $\rightarrow AV_i = \sigma_i U_i$

→ Fijamos que tengo el número de elementos adecuados para que las dimensiones cuadren.

Repaso

→ funciona para cualquier matriz (incluso rectangular)

$$A = (\text{ortogonal}) (\text{diagonal}) (\text{ortogonal}) = U \Sigma V^T$$

$$A^T A = (V \Sigma^T U^T) (U \Sigma V^T) = V \Sigma^2 V^T$$

Factorización de una matriz simétrica

V eigenvector matrix for $A^T A$

$\sigma_i^2 = \lambda_i(A^T A)$

$$A A^T = (U \Sigma V^T) (V \Sigma^T U^T) = U \Sigma^2 U^T$$

Factorización de una matriz simétrica

U eigenvector matrix for $A A^T$

$\sigma_i^2 = \lambda_i(A A^T)$

Como vimos en el ejemplo, esto puede dar lugar a problemas. Grado de libertad al escoger signo de autovectores.

¿Cómo lo solucionamos? \rightarrow Camino 2

$$A v_i = \sigma_i u_i$$

Elige los signos que quieras para v_i y con esta fórmula los u_i quedarán consistentes

Ejercicio:

Tengo esta descomposición SVD: $A = U \Sigma V^T$

$$a) \begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T$$

A es singular V/\textcircled{F}

$$A v_i = \sigma_i u_i \rightarrow A v_i \neq 0 \quad \forall v_i \rightarrow \text{No singular}$$

$$b) \begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T$$

Es una SVD $V/\textcircled{F} \rightarrow \sigma_i$ son siempre positivos

$$c) \begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T$$

A es singular V/\textcircled{F} $A v_2 = 0$

Su rango es 1 \textcircled{V}/F

La dimensión de $N(A)$ es 1 \textcircled{V}/F

El vector v_2 pertenece a $N(A)$ \textcircled{V}/F