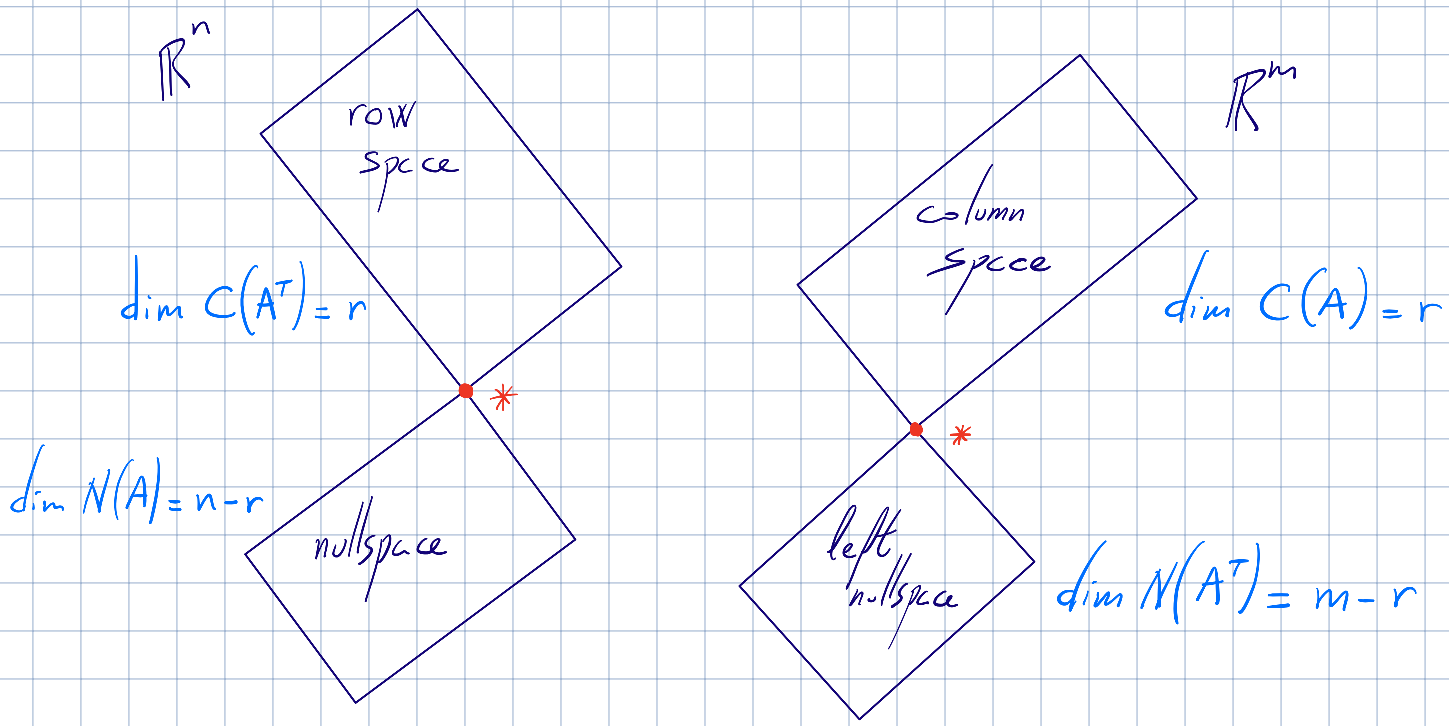
(18.06 Lecture 14)

Vectores ortogonales y subespacios

Nullspace $\perp$ row space

$N(A^TA) = N(A)$

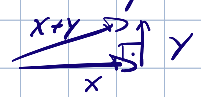


* Pintar esto así no fue casualidad. Veremos en este capítulo que estos espacios son ortogonales

---

Repaso. Vectores ortogonales

Ortogonal significa que en el espacio $\mathbb{R}^n$ forman $90°$

* Ortogonal significa que Pitágoras 

Ortogonal significa que $x^Ty = 0$

¿Conexión?

* $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

$$\cancel{x^T x} + \cancel{y^T y} = (x+y)^T(x+y) = \cancel{x^T x} + \cancel{y^T y} + x^T y + y^T x$$

$$x^T y = \text{Escalar} = (\text{Escalar})^T = (x^T y)^T = y^T x$$

Luego $2x^T y = 0 \to x^T y = 0$.

Si partimos de que ortogonal significa que se cumple Pitagoras, llegamos a que la condición de ortogonalidad es $x^T y = 0$.

¿Que pasa con el vector 0? Siguiendo las reglas, es ortogonal a cualquier vector.

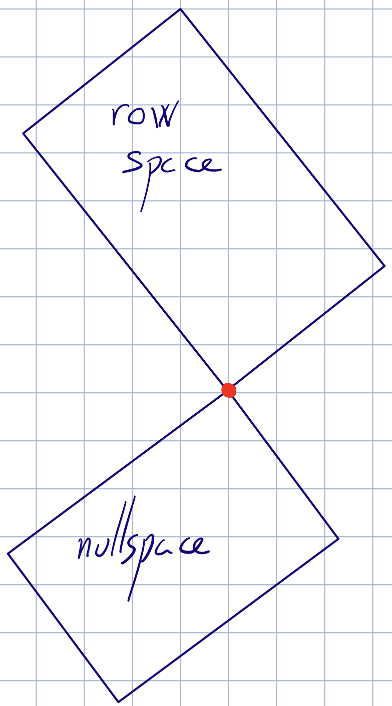
¿Que significa que un subespacio S sea ortogonal a otro subespacio T?

Ejemplo pizarra-suelo. Cada uno es un subespacio de dim 2 en $\mathbb{R}^3$.

Significa que cualquier vector en S es ortogonal a cualquier vector en T

¿Cumplen eso la pizarra y el suelo? NO.

De hecho, hasta podemos encontrar vectores que están en S y en T.



Volviendo a esta figura, una de las cosas que significa ser ortogonal es que no hay intersección (la intersección es el vector 0).

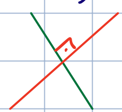
Ejemplos en $\mathbb{R}^2$

Hay 3 subespacios posibles en $\mathbb{R}^2$: el plano, una línea que pasa por el origen y el origen.

¿Cuándo son $\perp$ el plano y una línea? Nunca

¿ " " " una línea y el origen? Siempre

¿ " " " dos líneas?



row space es ortogonal al nullspace. Why?

Condición para x para pertenecer a nullspace $Ax = 0$

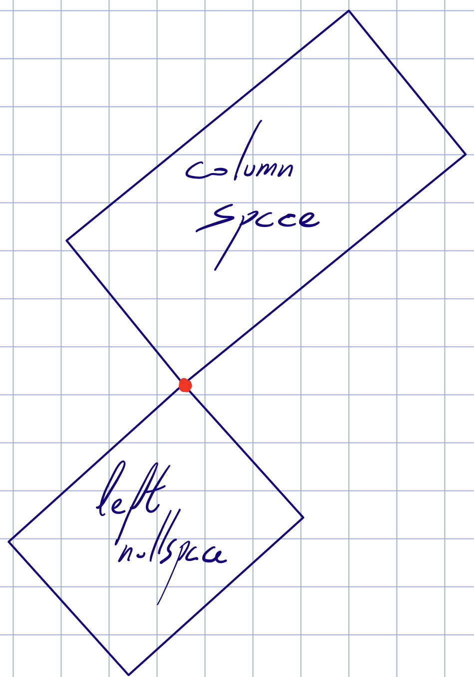
$$\begin{bmatrix} \text{fila } 1 \text{ de } A \\ \text{fila } 2 \text{ de } A \\ \vdots \\ \text{fila } m \text{ de } A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{fila } i \text{ de } A)^T x = 0$$

OK, $x \perp$ a todas las filas. ¿Es $\perp$ a todos los elementos del row space?

$$(\text{fila } 1)^T x = 0 \rightarrow c_1 (\text{fila } 1)^T x = 0$$
$$(\text{fila } 2)^T x = 0 \rightarrow c_2 (\text{fila } 2)^T x = 0$$

$$\left[c_1 (\text{fila } 1)^T + c_2 (\text{fila } 2)^T\right] x = 0$$

¡Si! $\perp$ a todos los elementos del row space.



$\rightarrow$ Podríamos probar esto, pero la prueba consistiría en repetir el proceso para A^T. La matriz era genérica, así que, en realidad ya lo hemos hecho.

Ejemplo $\mathbb{R}^3$

Dos líneas $\perp$ que se cortan en el origen si son dos subespacios ortogonales.

¿Podrían estos ser el row space y el nullspace de A?

No, pq no suman la dimensión completa del espacio.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\dim C(A^T) = 1$

$\dim N(A) = 2$

$n = 3 \quad r = 1$

$N(A)$ es el plano $\perp$ a $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Nullspace y row space son ortogonales y sus dimensiones completan el espacio. Son ortogonales complementarios.

Nullspace contiene todos los vectores $\perp$ al row space.

$\longrightarrow$ 35:00 $\rightarrow$ Find es intro a proyección ortogonal y least squares.