

# FACTORIZACIÓN MATRICIAL. LU II

(18.06 Lecture 02)

\* Elimination  $\begin{cases} \rightarrow \text{Success} \\ \rightarrow \text{Failure} \end{cases}$

\* Back-substitution

\* Elimination matrices

\* Matrix multiplication

Vamos a revisar el método de Gauss que conocéis

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x + 8y + z &= 12 \\ 4y + z &= 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Todo lo que importa está en esta matriz, así que me centraré en ella.

$$Ax = b$$

El primer paso es eliminar la componente "x" de la segunda ecuación. Nos olvidamos del RHS, lo podríamos hacer todo al final.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1) \quad F_2 - 3F_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2) \quad F_3 - \frac{4}{2}F_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

Pivote

Con esto hago un 0 en la posición 2,1

El siguiente paso me lo ahorro, ya que tengo un 0 en la posición 2,2

La matriz  $U$  (Upper Triangular)

Los pivotes no pueden ser 0, no se aceptan.

Inciso: puedo obtener el determinante de  $A$  simplemente multiplicando los pivotes.

¿Cuándo falla este algoritmo? (No consigo 3 pivotes)

Ejemplo 1

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 |
| 3 | 8 | 1 |
| 0 | 4 | 1 |

Si tengo un cero en la posición del pivote, puedo intercambiar filas

Ejemplo 2

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 3 | 6 | 1 |
| 0 | 4 | 1 |

→

|   |   |    |
|---|---|----|
| 0 | 0 | -2 |
| 0 | 4 | 1  |

Podría solucionarlo tb  
intercambiando filas

← Siempre que tengan un no-0  
debajo, puedo solucionar el  
problema.

Ejemplo 3

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 2 | 1  |
| 3 | 8 | 1  |
| 0 | 4 | -4 |

Este problema

no tiene solución.

Matriz singular

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 2 | 1  |
| 0 | 2 | -2 |
| 0 | 4 | -4 |

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 2 | 1  |
| 0 | 2 | -2 |
| 0 | 0 | 0  |

Volvemos a centrarnos en el caso que sí funciona.  
 Tricemos ahora de vuelta el RHS.

|             |   |   |    |                        |  |             |             |    |   |                        |  |             |             |             |    |
|-------------|---|---|----|------------------------|--|-------------|-------------|----|---|------------------------|--|-------------|-------------|-------------|----|
| $\boxed{1}$ | 2 | 1 | 2  |                        |  | $\boxed{1}$ | 2           | 1  | 2 |                        |  | $\boxed{1}$ | 2           | 1           | 2  |
| 3           | 8 | 1 | 12 | $\xrightarrow{(2,1)}$  |  | 0           | $\boxed{2}$ | -2 | 6 | $\xrightarrow{(3,2)}$  |  | 0           | $\boxed{2}$ | -2          | 6  |
| 0           | 4 | 1 | 2  | $F_2 - \frac{3}{1}F_1$ |  | 0           | 4           | 1  | 2 | $F_3 - \frac{4}{2}F_2$ |  | 0           | 0           | $\boxed{5}$ | -8 |

Pivote  $\downarrow$       Pivote  $\nwarrow$        $u$   $\nearrow c$

Matriz ampliada

Repite los mismos pasos en 3

Las ecuaciones finales son:

$$x + 2y + z = 2$$

$$2y - 2z = 6$$

$$5z = -10$$

$$u_x = c$$

¿Cómo las resolvemos? Back substitution

1 - Resolvemos la última ecuación  $\rightarrow z = -2$

2 - Resolvemos la penúltima ecuación ( $z = -2$ )  $\rightarrow y = 1$

3 - " " antepenúltima " ( $z = -2, y = 1$ )  $\rightarrow x = 2$

Y tenemos controlado eliminaciones y sustituciones hacia atrás.

## FORMA MATRICIAL ELIMINACIÓN

Para explicar la forma matricial necesitamos hacer un pequeño inciso sobre multiplicación matricial.

Recordatorio clase anterior

$$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 3 \times \text{col } 1 + 4 \times \text{col } 2 + 5 \times \text{col } 3_{3 \times 1}$$

$$\text{Matrix} \times \text{Column} = \text{Column}$$

Inciso  $\rightarrow$  operaciones por filas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}_{3 \times 3} = 1 \times \text{row } 1 + 2 \times \text{row } 2 + 7 \times \text{row } 3_{1 \times 3}$$

$$\text{Row} \times \text{Matrix} = \text{Row}$$

Paso 1 Restar 3 x Fila 1 a Fila 2 en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{E_{21}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{3} & \boxed{8} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{4} & \boxed{1} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-2} \\ \boxed{0} & \boxed{4} & \boxed{1} \end{bmatrix}_{E_{21}A}$$

Matriz de eliminación que hace un 0 en la posición 21

Paso 2 Restar  $2 \times$  Fila 2 a Fila 3 en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$E_{32}$                        $E_{21} A$                        $U$

↳ Matriz de eliminación que hace un 0 en la pos. 32

Ya tenemos las matrices encargadas de realizar el proceso de eliminación. El paso siguiente es juntar todas estas matrices en una matriz que haga todos los pasos

Todo lo que hemos hecho, se puede resumir en:

$$E_{32} (E_{21} A) = U$$

$\xrightarrow[\text{Paso 2}]{\text{Paso 1}}$

Podemos cambiar los paréntesis (prop. asociativa) para obtener:

$$(E_{32} E_{21}) A = U$$

**Inciso.** Hay una matriz que podríamos haber necesitado pero que no he hecho falta en este caso y es la matriz de permutación. Esta matriz intercambia filas / columnas de otra matriz.

Por ejemplo, supongamos que queremos intercambiar las filas 1 y 2 de una matriz  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$P$

El truco para encontrar  $P$  es intercambiar las filas de la matriz identidad y eso es la matriz que realizara el intercambio de filas.

¿Y si quisiera intercambiar columnas?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

↳ Para realizar operaciones por columnas, tengo que multiplicar por la derecha!

→ Multiplicar por la izq. es operar por filas

→ Multiplicar por la dch. es operar por columnas

Fin del inciso

$$(E_{32}E_{21})A = U$$

La multiplicación de estas dos matrices me da una matriz y-e al aplicarla a A me da U.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{32}$

$E_{21}$

Sin embargo, este no es el proceso más eficiente, sino que estoy más interesado en el proceso inverso (encontrar la matriz que, al aplicarla a U me devuelva A).

MATRIZ INVERSA (lo veremos un más detalle en la prox. clase)

### EJEMPLO

Pensemos en las matrices no como una caja llena de números sino como una manera de realizar operaciones.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo la matriz de la dcha. aplicada a A subtrae 3 veces la fila 1 a la fila 2.

¿Qué tenemos que hacer para deshacer esto?

Sumarle 3 veces la fila 1 a la 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y si hago ambos pasos de forma sucesiva no debería ocurrir nada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(E_{21})^{-1}$ 
 $E_{21}$ 
 $I$