REPASO DE ALGEBRA (18.06 Lecture 09)

Independencia lineal

Generación de un espacio

Base y dimensión

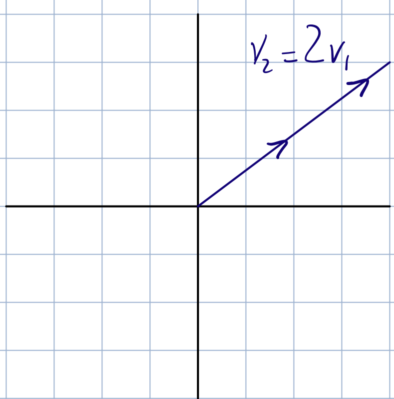
Comenzamos recordando que si tenemos más incógnitas que ecuaciones en $Ax=b \rightarrow$ siempre habrá variables libres

$(A \; m \times n \;$ con $\; m<n) \longrightarrow$ hay soluciones a $Ax=0$

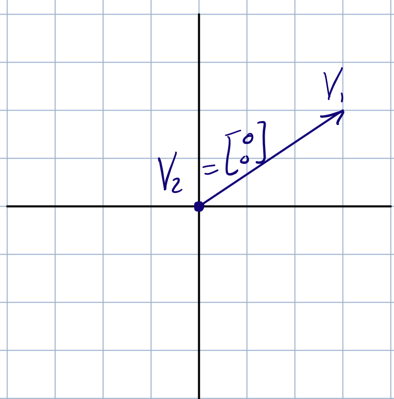
Independencia lineal

Vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son independientes si ninguna comb. da como resultado el vector 0 (salvo la comb. $0 \longrightarrow$ todos $c_i=0$).

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \neq 0$$

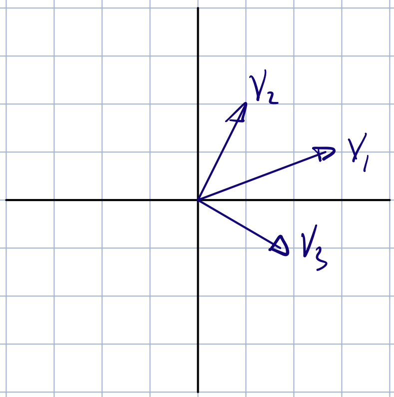


dependientes



dependientes

$0v_1 + 1v_2 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ✓



dependientes

Recordemos que:

$(A_{m\times n}$ con $m < n)$

$\Downarrow$

hay soluciones a $Ax = 0$

$$A = \left[V_1 \,\middle|\, V_2 \,\middle|\, V_3 \right]$$

A es $3\times 2 \rightarrow$ Luego $Ax = 0$ tiene sol.

Luego $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ tiene sol $\neq 0$

Vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$ son independientes si:

1. Construyo matriz $A = \left[x_1 \,\middle|\, x_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, x_n \right]$

2. Independientes si $N(A) = \{\text{zero vector}\}$ $\quad r = n$ (rango)

   Dependientes si $Ac = 0$ para algún c no zero $\quad r < n$

   $N(A) \neq \{\text{zero vector}\}$. Variables libres.

Generación de un espacio

Esto ya lo hicimos al hablar de $C(A)$

(span a space)

Los vectores $v_1, \dots, v_\ell$ generan un espacio significa que el espacio consiste en todas las combinaciones de esos vectores

Las columnas de una matriz generan el espacio de las columnas.

Estos vectores no tienen pq ser independientes.

Base de un espacio vectorial conjunto de vectores $v_1, v_2, \dots, v_d$ con dos props.

1. Son independientes
2. Generan el espacio

Esta es la manera adecuada de expresar un vector

Ejemplos:

Espacio $\mathbb{R}^3$

Una base es $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 1. Son independientes 2. Generan $\mathbb{R}^3$

Otra base es $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$ 1. Son independientes 2. ~~Generan $\mathbb{R}^3$~~

Otra base es $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\7\end{bmatrix}$ 1. ~~Son independientes~~ 2. ~~Generan $\mathbb{R}^3$~~

Otra base es $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\7\end{bmatrix}$ ① Son independientes *
② Generan $\mathbb{R}^3$

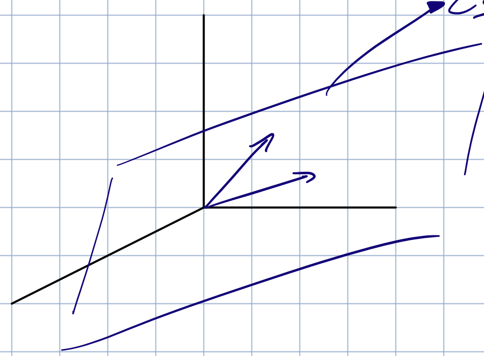
$*\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&4\\2&5&7\end{bmatrix}$ $r=3$
Matriz invertible $\Big\} \to$ Son independientes

$\mathbb{R}^n$ n vectores dan una base si la matriz $n \times n$ formada por vectores como columnas es invertible

¿Son estos vectores $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$ la base de algún espacio?

① Son independientes

② Generan $c\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$



Hemos visto que podemos encontrar diversas bases para un espacio. Todas las bases de un espacio tienen el mismo # de vectores.

$\mathbb{R}^3$ tiene bases de 3 vectores, $\mathbb{R}^n$ tiene bases de n vectores...

A este # le llamamos dimensión del espacio

Conceptos importantes $\left\{ \begin{array}{l} \text{independencia} \\ \text{generación} \\ \text{base} \\ \text{dimensión} \end{array} \right.$ $\Big\{$ ¡Tener claro el significado!

Ejemplos

Espacio es $C(A)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

¿Generan el espacio de las columnas de la matriz A?
$\rightarrow$ Sí, por def.
¿Son una base de $C(A)$?
$\rightarrow$ ¿Generan $C(A)$? ✓
$\rightarrow$ ¿Son independientes? No!

$N(A)$ contiene $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Las columnas pivote generan una base para $C(A)$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $2 = \text{rango}(A) = \#\text{col. pivote} = \text{dimensión de } C(A)$
$\uparrow \quad \uparrow$

No son la única opción, cualquier par de vectores que formen parte del plano y sean independientes funcionarían como base.

Como sé que $\dim C(A) = 2$, necesito dos vectores. Puedo coger cualquier par de columnas de A o incluso combinaciones de col. y siempre que sean independientes, generará una base de $C(A)$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

¿Cual es la dimensión del espacio nulo, $N(A)$?

$N(A)$ contiene $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\longrightarrow$ Sols de $Ax=0$

Parece que no hay más, así que eso debe ser una base.

Sobre la dimensión

$$\dim C(A) = r$$
$$\dim N(A) = \#\text{ variables libres} = n-r$$