

Diagonalizando $S^{-1}AS = \Lambda$

Potencias de A / ecuación $U_{k+1} = AU_k$

Supongamos que tenemos n autovectores linealmente independientes para A .

Con ellos, formamos la matriz S

$$AS = A \begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = S\Lambda$$

Matriz diagonal de los autovalores

Repro: multiplicación matricial
(comb. lined columns)

$$AS = S\Lambda$$

↳ Hasta aquí no hay problemas si tengo autovectores repetidos.

Si tengo n autovectores independientes:

$$S^{-1}AS = \Lambda \quad \text{o visto de otra forma} \quad A = S\Lambda S^{-1}$$

Nueva factorización (ya tenemos $A=LU$, $A=QR$, $A=SN S^{-1}$)
Vamos a darle uso a la nueva factorización:

$$\text{Si } Ax = \lambda x$$

$$\text{Entonces } \underline{A^2} x = \lambda A x = \underline{\lambda^2} x$$

Veamos esto mismo pero usando la nueva factorización

$$\underline{A^2} = S \Lambda S^{-1} S \Lambda S^{-1} = S \Lambda \Lambda S^{-1} = S \underline{\Lambda^2} S^{-1}$$

Podemos estirar esto $A^K = S \Lambda^K S^{-1}$. Como vemos, los autovectores no cambian, solo autovalores.

Descomposición $A = S \Lambda S^{-1}$ es la manera buena de estudiar las potencias de una matriz.

Teorema: $A^K \rightarrow 0$ cuando $K \rightarrow \infty$ si todos sus autovalores "son menores q-e 1" (* $|\lambda_i| < 1$)

* Tiene en cuenta autovalores negativos e imaginarios.

(Siempre que la matriz sea diagonalizable, n independent autovectores).

A tiene n autovectores independientes (y, por tanto, es diagonalizable) si todos los autovalores son diferentes (no repeated λ 's).

Si autovalores repetidos, hay que mirar en más detalle. Puede que sí (o puede que no) haya autovectores repetidos.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \text{ Pero cualquier } x \text{ es autovector!}$$

Ejemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 = 0 \quad \rightarrow \text{Multiplicidad algebraica} = 2 \text{ (grado pol.)}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{Multiplicidad geométrica} = 1$$

Multiplicidad algebraica del autovalor \rightarrow grado pol raíz
" geom " " \rightarrow dim del s-espacio
(nº de autovectores).

Asumamos que estamos en el caso bueno (A diagonalizable)

Aplicación: Ecuación $u_{k+1} = A u_k$

Empezamos con un vector cualquiera u_0

$$u_1 = A u_0, \quad u_2 = A^2 u_0, \quad u_k = A^k u_0$$

Esto es un sistema de ecuaciones en diferencias.

¿Cómo resolver?

Escribimos

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

→ autovectores,
forman una base.

$$u' = A u_0 = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \dots + c_n \lambda_n x_n$$

Si quiero obtener k iteraciones $k=100$

$$u^{100} = A^{100} u_0 = c_1 \lambda_1^{100} x_1 + c_2 \lambda_2^{100} x_2 + \dots + c_n \lambda_n^{100} x_n =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{100} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = S \Lambda^{100} c$$

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = S c$$

$$S^{-1} u_0 = c$$

$$\rightarrow u^{100} = S \Lambda^{100} S^{-1} u_0 = A^{100} u_0$$

Ejemplo Fibonacci



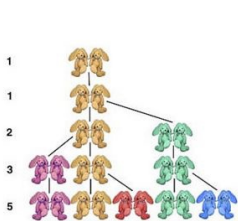
Fibonacci, el matemático que se puso a contar conejos y descubrió la secuencia divina

Redacción
BBC News Mundo
23 febrero 2019
Actualizado 23 noviembre 2021



Leonardo de Pisa
(Fibonacci)

<https://www.bbc.com/mundo/noticias-46926506>



En **matemáticas**, la **sucesión de Fibonacci** es la siguiente **sucesión** infinita de **números naturales**:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597...

La sucesión comienza con los números 0 y 1;² a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», es la **relación de recurrencia** que la define.

A los elementos de esta sucesión se les llama **hijos de Fibonacci**. Esta sucesión fue descrita en Europa por **Leonardo de Pisa**, matemático italiano del siglo XIII también conocido como **Fibonacci**. Tiene numerosas aplicaciones en **ciencias de la computación**, **matemática** y **teoría de juegos**. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la **disposición de las hojas en el tallo**, en las flores de **alcachofas** y **girasoles**, en las inflorescencias del brécol **romanesco**, en la configuración de las **piñas de las coníferas**, en la reproducción de los conejos y en cómo el ADN codifica el crecimiento de formas orgánicas complejas. De igual manera, se encuentra en la estructura espiral del caparazón de algunos moluscos, como el **nautilus**.

La sucesión fue descrita y dada a conocer en occidente por **Fibonacci** como la solución a un problema de la cría de conejos.⁷

Número de meses	Explicación de la genealogía	Parejas de conejos
Comienzo del mes 1	Nace una pareja de conejos (pareja A).	1 pareja en total.
Fin del mes 1	La pareja A tiene un mes de edad. Se cruza la pareja A.	1+0=1 pareja en total.
Fin del mes 2	La pareja A da a luz a la pareja B. Se vuelve a cruzar la pareja A.	1+1=2 parejas en total.
Fin del mes 3	La pareja A da a luz a la pareja C. La pareja B cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A y B.	2+1=3 parejas en total.
Fin del mes 4	Las parejas A y B dan a luz a D y E. La pareja C cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A, B y C.	3+2=5 parejas en total.
Fin del mes 5	A, B y C dan a luz a F, G y H. D y E cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D y E.	5+3=8 parejas en total.
Fin del mes 6	A, B, C, D y E dan a luz a I, J, K, L y M. F, G y H cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D, E, F, G y H.	8+5=13 parejas en total.
...
...

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13..., $\boxed{F_{100} = ?}$

¿Cómo de rápido están creciendo?

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

TRUCO

(Ecuación de segundo orden. Aumento el número de variables para reducir orden. Esto se usa tb en ecuaciones diferenciales)

Añadir ecuación

$$F_{k+1} = F_{k+1}$$

$$\begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} \quad \text{Y definiendo } u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} \quad u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

A

Simétrica $\rightarrow \lambda$ real, x orthogonal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = D$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como vimos en el caso anterior, es más sencillo proyectar la condición inicial en la base de autovectores y analizar ahí la evolución

$$u_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_1 x_1 + C_2 x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow Sc = u_0 \rightarrow c = S^{-1} u_0$$

$$u^{100} = A^{100} u_0 = C_1 \lambda_1^{100} x_1 + C_2 \lambda_2^{100} x_2 =$$

$$= C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{100} x_1 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{100} x_2 \approx$$

$$\approx C_1 (1.618)^{100} x_1 + C_2 (-0.618)^{100} x_2 \approx$$

$$\approx C_1 \underline{(1.618)^{100}} x_1$$

Tasa de crecimiento de números de Fibonacci

Dependen de
condición
inicial