EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

MATEMÁTICAS II

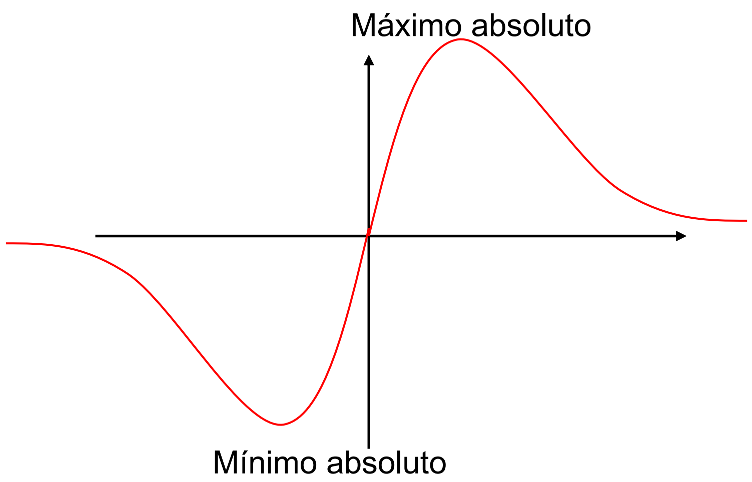
Clase: **Extremos de funciones de varias variables**

- **Extremos absolutos y relativos**
- Recordatorio MI
- Extremos locales y puntos críticos
  - Condición necesaria de extremo local
  - Clasificación de puntos críticos. Condición suficiente
- Extremos absolutos en regiones compactas
- Extremos condicionados. Método multiplicadores de Lagrange

Definiciones iniciales.

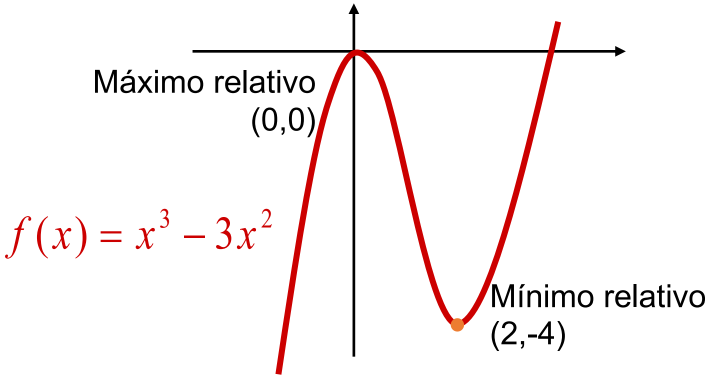
$$Def: \text{ Se dice que } f(\vec{x}): D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \quad \text{alcanza un extremo} \begin{cases}\text{máximo}\\ \text{mínimo}\end{cases}$$

$$\textbf{absoluto} \text{ en } \vec{x}_0 \text{ si } \begin{cases} f(\vec{x}_0)\geq f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_0)\leq f(\vec{x})\end{cases} \quad \forall\, \vec{x}\in D$$



$$Def: \text{ Se dice que } f(\vec{x}): D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \quad \text{alcanza un extremo} \begin{cases}\text{máximo}\\ \text{mínimo}\end{cases} \quad \textbf{relativo / local} \text{ en } \vec{x}_0 \text{ si}$$

$$\exists \text{ un entorno centrado en } \vec{x}_0, E(\vec{x}_0,\delta), \text{ tal que } \begin{cases} f(\vec{x}_0)\geq f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_0)\leq f(\vec{x})\end{cases} \quad \forall\, \vec{x}\in E(\vec{x}_0,\delta).$$



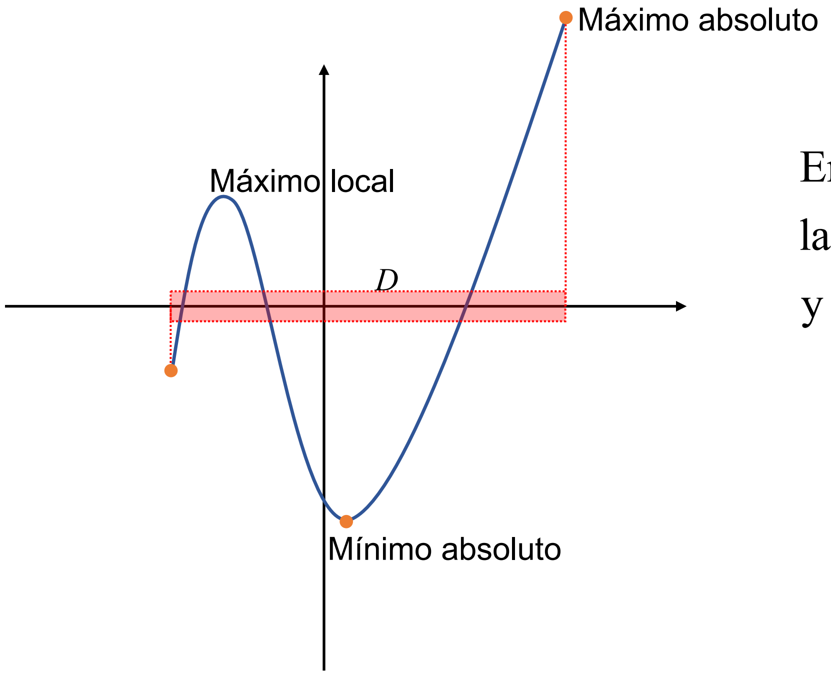

```
FindMinimum[x^3 - 3 x^2, x]
```

Wolfram Cloud command

Extremos de funciones.

Teorema del Valor Extremo: (Teorema de Weierstrass)

Sea $f(\vec{x}): D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función continua en D compacto (cerrado y acotado) entonces $f(\vec{x})$ alcanza máximo y mínimo **absoluto** en D



En D dominio de la función, cerrado y acotado la función alcanza mínimo absoluto (interior) y máximo absoluto en la frontera.

Clase: **Extremos de funciones de varias variables**

- Extremos absolutos y relativos
- **Recordatorio MI**
- Extremos locales y puntos críticos
  - Condición necesaria de extremo local
  - Clasificación de puntos críticos. Condición suficiente
  - Extremos absolutos en regiones compactas
- Extremos condicionados. Método multiplicadores de Lagrange

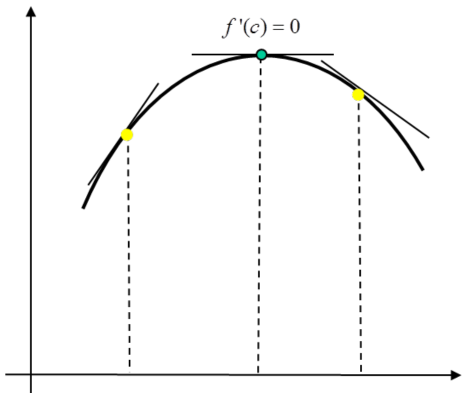
Extremos de funciones. Recordatorio (En $\mathbb{R}$)

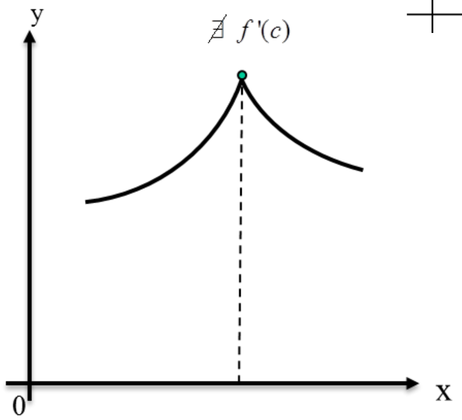
Candidatos a extremos $\quad (f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

1) Puntos Críticos o Estacionarios: $\boxed{x \in \mathbb{R} \;\; \text{t.q.} \;\; f'(x) = 0}$

2) Puntos Singulares: $\boxed{x \in \mathbb{R} \;\; \text{t.q.} \;\; \nexists \; f'(x)}$

3) Puntos Extremos: $\boxed{x \in \mathbb{R} \;\; \text{t.q.} \;\; x \in \text{Frontera}(D)}$





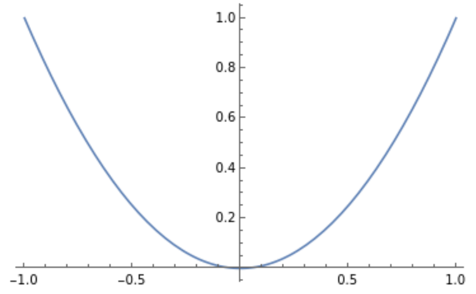
Extremos de funciones. Recordatorio (En $\mathbb{R}$)

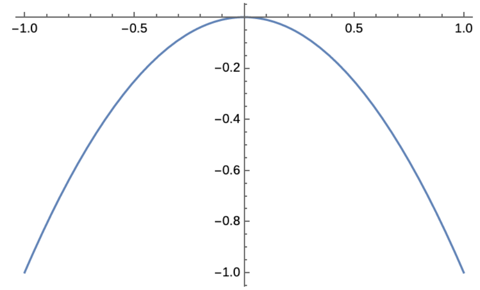
No habíamos hecho ninguna suposición de regularidad para la función.

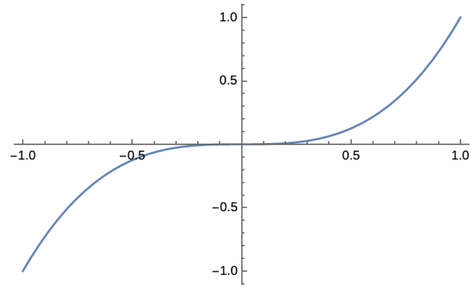
- Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en D abierto se pueden enunciar **condiciones necesarias y suficientes para la existencia de extremos relativos**.

- $f'(x_0)$ es **condición necesaria** para que la función tenga un extremo local en x_0 ($\in D$ abierto)
    - Sin embargo $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ verifica que $f'(0) = 0$ pero $x_0 = 0$ no es un extremo local

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)'}(x_0) = 0$ pero $f^{n'}(x_0) \neq 0$ **es condición suficiente** para
    - n par y $f^{n'}(x_0) > 0$ entonces la función $f(x)$ tiene un **mínimo local** en x_0
    - n par y $f^{n'}(x_0) < 0$ entonces la función $f(x)$ tiene un **máximo local** en x_0
    - n impar entonces la función $f(x)$ **no** tiene un **extremo local** en x_0







Extremos de funciones.

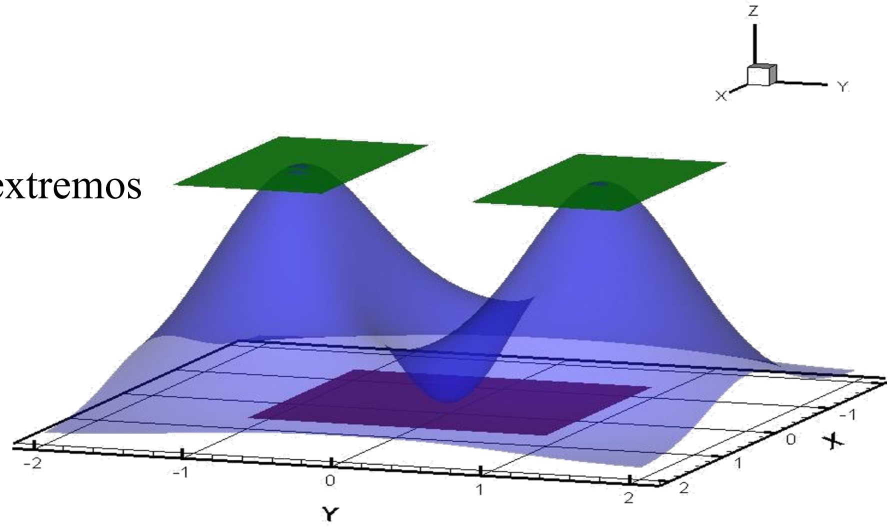
> A partir de ahora enunciaremos los teoremas y daremos condiciones en el caso general $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ pero las demostraciones y la explicación geométrica las reduciremos a $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}$

Buscamos candidatos a extremos en funciones de varias variables.

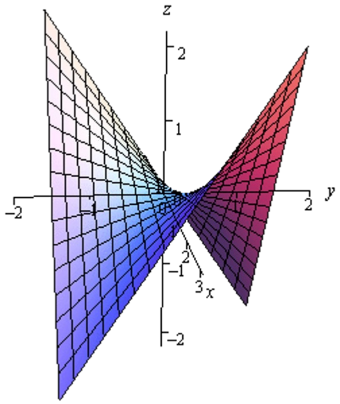
1. **Puntos críticos (o estacionarios):** Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathring{D}$ (interior de D)

   x_0 es punto crítico de f si $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0$

   En $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ esta condición es equivalente a que el plano tangente sea horizontal en x_0

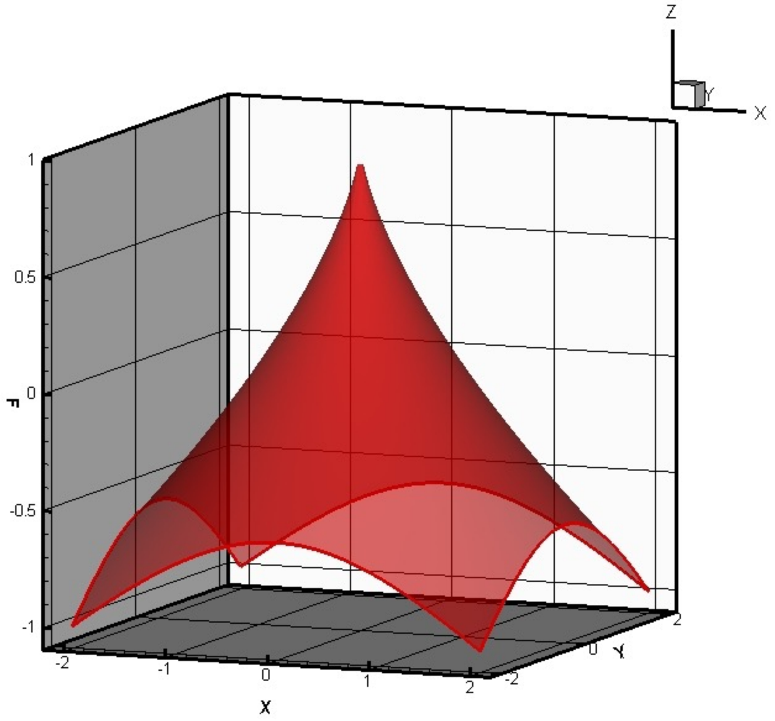


Sin embargo la existencia de puntos críticos no garantiza la existencia de extremos



Ejemplo: la función $f(x, y) = xy$ tienen un punto crítico en $(x, y) = (0,0)$ pero no es un extremo local

Extremos de funciones.



Buscamos candidatos a extremos en funciones de varias variables.

2. **Puntos singulares:** Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathring{D}$ (interior de D)

   x_0 es un punto singular de f si no es diferenciable en x_0

3. **Puntos frontera del dominio.**

   Si $\boldsymbol{D}$ es compacto puede ocurrir que existan extremos de la función en la frontera del dominio.

Clase: **Extremos de funciones de varias variables**

- Extremos absolutos y relativos**.**
- Recordatorio MI
- **Extremos locales y puntos críticos.**
    - **Condición necesaria de extremo local.**
    - Clasificación de puntos críticos. Condición suficiente.
- Extremos absolutos en regiones compactas.
- Extremos condicionados. Método multiplicadores de Lagrange.

Puntos críticos. Condición necesaria de extremo local.

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathring{D}$ (interior de D)

- x_0 es punto crítico de f si $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0$

No todos los puntos críticos son extremos pero, **si la función es diferenciable, todo extremo local es un punto crítico (condición necesaria)**

Todo extremo relativo de una función diferenciable es punto crítico $\boxed{\nabla f(x_0) = \mathbf{0}}$

Dem: Sea $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{u})$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ la restricción de f en la dirección de $\vec{u}$.

Por ser x_0 extremo (lo es en toda dirección) debe verificarse que:

$$\boxed{0 =} \varphi'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t} = df(x_0, \vec{u}) = \boxed{\nabla f(x_0) \cdot \vec{u}} \quad \forall \vec{u}$$

Por tanto si x_0 es un extremo de f si $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ se verifica $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$

Clase: **Extremos de funciones de varias variables**

- Contexto dentro del programa docente.
- Extremos absolutos y relativos**.**
- Recordatorio MI
- **Extremos locales y puntos críticos.**
    - Condición necesaria de extremo local.
    - **Clasificación de puntos críticos. Condición suficiente.**
- Extremos absolutos en regiones compactas.
- Extremos condicionados. Método multiplicadores de Lagrange.

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local.

Sea $f\colon \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathring{D}$ (interior de D) x_0 es punto crítico de f si $f\colon \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 en x_0 y $\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0$

Buscamos ahora **condiciones suficientes**.

Para saber si un punto crítico es extremo local nos fijamos en el desarrollo de Taylor de orden 2 centrado en el punto crítico:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \cancel{\nabla f(x_0) \cdot \Delta x} + \frac{1}{2!}(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

Por ser punto crítico

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local.

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathring{D}$ (interior de D) x_0 es punto crítico de f si $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 en x_0 y $\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0$

Buscamos ahora **condiciones suficientes**.

Para saber si un punto crítico es extremo local nos fijamos en el desarrollo de Taylor de orden 2 centrado en el punto crítico:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \underbrace{\frac{1}{2!}(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}}_{d^2 f(x_0, \Delta x)}$$

El signo de $\underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$ determina si el punto x_0 es un máximo local, un mínimo local o por el contrario no es un extremo.

$$\begin{cases} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0 \ \forall\, \Delta x \to f(x_0) < f(x_0 + \Delta x) & \to x_0 \text{ mínimo} \\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \ \forall\, \Delta x \to f(x_0) > f(x_0 + \Delta x) & \to x_0 \text{ máximo} \end{cases}$$

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local.

Sea $f\colon \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathring{D}$ (interior de D) x_0 es punto crítico de f si $f\colon \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 en x_0 y $\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0$

Buscamos ahora **condiciones suficientes**.

Para saber si un punto crítico es extremo local nos fijamos en el desarrollo de Taylor de orden 2 centrado en el punto crítico:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \frac{1}{2!}(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

El signo de $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ depende de los valores de **la forma cuadrática**:

$$d^2 f(x_0, \Delta x) = \tfrac{1}{2}(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}.$$

Recordatorio de formas cuadráticas (Álgebra)

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ es una aplicación del tipo $\omega: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,; \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En forma matricial:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ por ser simétrica. (En funciones de clase C^2 la simetría está garantizada por el teorema de Schwarz)

Entonces $\mathrm{A} = Q^T \mathrm{DQ}$ con Q matriz ortogonal de cambio de base y D matriz diagonal de autovalores.

Así en la nueva base se puede escribir:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} Q^T D Q \boldsymbol{x} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

¡Signo de la forma cuadrática depende del signo de los autovalores de la matriz!

Recordatorio de formas cuadráticas (Álgebra)

Se llama signatura de una forma cuadrática: $sig(\omega) = (\alpha, \beta)$ con α: número de autovalores positivos y β: número de autovalores negativos.

Así se dice que:

- $\omega(\boldsymbol{x})$ es definida positiva si $sig(\omega) = (n, 0)$
- $\omega(\boldsymbol{x})$ es definida negativa si $sig(\omega) = (0, n)$
- $\omega(\boldsymbol{x})$ es semidefinida positiva si $sig(\omega) = (k, 0)$ con $k < n$
- $\omega(\boldsymbol{x})$ es semidefinida negativa si $sig(\omega) = (0, k)$ con $k < n$

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local.

A través de lo visto con las formas cuadráticas podemos enunciar las **condiciones suficientes** de extremo local.

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en D abierto y sea $x_0 \in D$ punto crítico de f $(\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0)$

Sea: $$\begin{aligned} d^2 f(x_0) = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta x &\rightarrow d^2 f(x_0, \Delta x) = \frac{1}{2}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_n x_1} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

- Si $d^2 f(x_0, \Delta x)$ es definida positiva entonces $d^2 f(x_0, \Delta x) > 0 \ \forall \ \Delta x$ y x_0 es un mínimo local de f
- Si $d^2 f(x_0, \Delta x)$ es definida negativa entonces $d^2 f(x_0, \Delta x) < 0 \ \forall \ \Delta x$ y x_0 es un máximo local de f
- Si $d^2 f(x_0, \Delta x)$ es semidefinida (positiva o negativa) no se puede afirmar nada
- Si $d^2 f(x_0, \Delta x)$ es indefinida ($\exists \ \Delta x \neq \mathbf{0}$ con $d^2 f(x_0, \Delta x) > 0$ y $\exists \ \Delta x' \neq \mathbf{0}$ con $d^2 f(x_0, \Delta x') < 0$) entonces f no tiene extremo en x_0

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local. **Caso particular en $\mathbb{R}^2$**

Clasificación de Puntos Críticos: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^2$ (*necesario para el desarrollo de Taylor*)

Para clasificar los puntos críticos **interiores** voy a usar el desarrollo de Taylor de orden 2.

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)((x-x_o),(y-y_o)) + \frac{1}{2}(x-x_o, y-y_o)\underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\text{Matriz Hessiana}}\begin{pmatrix} x-x_o \\ y-y_o \end{pmatrix}$$

Por ser (x_0,y_0) punto crítico $\nabla f(x_0,y_0)=0$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)\begin{pmatrix} & \mathrm{H} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = C$$

La diferencia entre imagenes en puntos cercanos al punto crítico se comporta como esa expresión matricial. (¿A qué os recuerda? CONICAS)

Al igual que hacíamos con la expresión general de una cónica vamos a diagonalizar H.

$$\begin{pmatrix} & \mathrm{H} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B'}} & \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \mathrm{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B'}} & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = tr(H)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(H)$$

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local. **Caso particular en $\mathbb{R}^2$**

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)\begin{pmatrix} & \mathrm{H} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=C$$

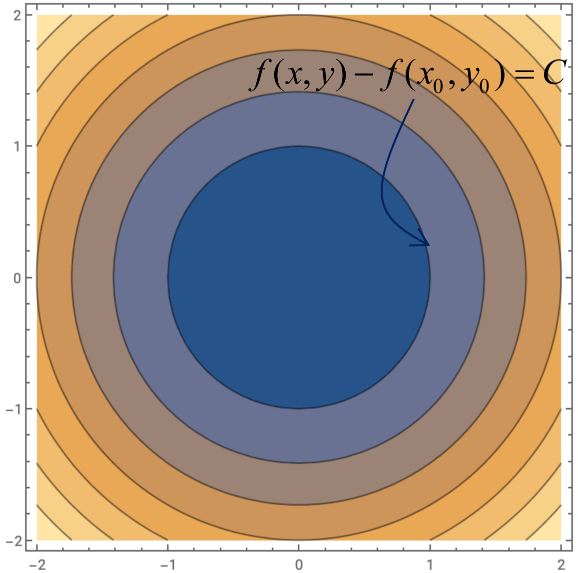
<u>Clasificación de Puntos Críticos</u> :

$$\text{Si } \det(H)=\begin{vmatrix} & H & \end{vmatrix}>0 \Leftrightarrow \lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ tienen el mismo signo}$$

In[3]:= `ContourPlot[x^2+y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

representación de contornos

Out[3]=



$$tr(H)=\lambda_1+\lambda_2>0$$

•Si $\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 > 0 \Rightarrow C>0 \Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y)>f(x_0,y_0) \Rightarrow (x_0,y_0)$ **mínimo**

$$tr(H)=\lambda_1+\lambda_2<0$$

•Si $\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 < 0 \Rightarrow C<0 \Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y)<f(x_0,y_0) \Rightarrow (x_0,y_0)$ **máximo**

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local. **Caso particular en $\mathbb{R}^2$**

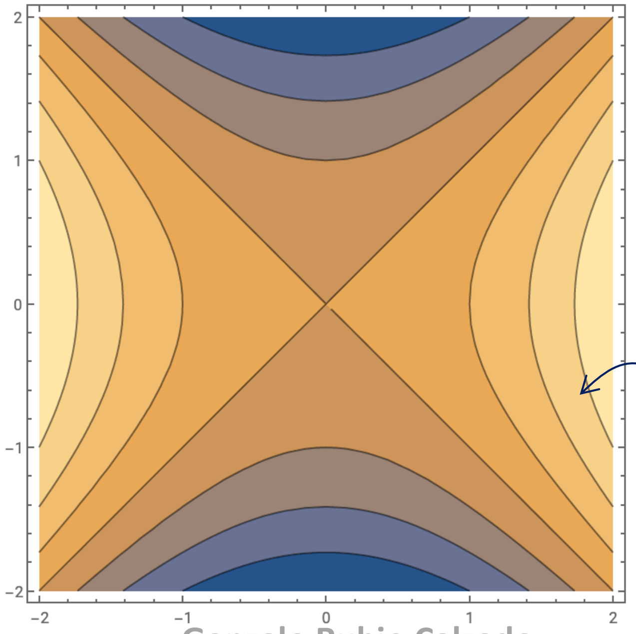
Clasificación de Puntos Críticos :

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)\begin{pmatrix} & \mathrm{H} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=C$$

$$\text{Si } \det(H)=\begin{vmatrix} & H & \end{vmatrix}<0 \Leftrightarrow \lambda_1 \ y\, \lambda_2 \ \text{ tienen distinto signo}$$

In[2]:=
```
ContourPlot[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```
representación de contornos

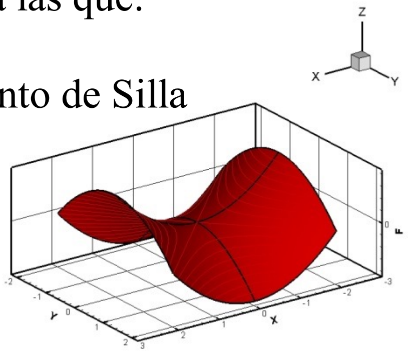
Out[2]=



$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=C$$

- Hay direcciones (combinaciones de Δx y Δy) para las que:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)>f(x_0,y_0)\Rightarrow (x_0,y_0)\,\textbf{mínimo}\\ f(x,y)<f(x_0,y_0)\Rightarrow (x_0,y_0)\,\textbf{máximo}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ Punto de Silla}$$



Ej. Dada la función $f(x,y)=(x^2+2y^2)e^{1-x^2-y^2}$. Halla los extremos relativos de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$ y clasificalos

Como la función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (pruébalo) para calcular los extremos relativos busco los puntos críticos de la forma:

$$\nabla f(x,y)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y)=(2x)e^{1-x^2-y^2}+(-2x)e^{1-x^2-y^2}(x^2+2y^2) \\ f_y(x,y)=(4y)e^{1-x^2-y^2}+(-2y)e^{1-x^2-y^2}(x^2+2y^2) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{1-x^2-y^2}(2x(1-(x^2+2y^2)))=0 \\ e^{1-x^2-y^2}(2y(2-(x^2+2y^2)))=0 \end{cases}$$

Operando en la primera ecuación:

a) $x=0 \xrightarrow[\text{2ª ecuación}]{} \begin{cases} y=0 \to \boxed{(0,0)} \\ 2-2y^2=0 \to y^2=1 \to \boxed{(0,\pm 1)} \end{cases}$

b) 1-$(x^2+2y^2)=0 \xrightarrow[\text{2ª ecuación}]{} y=0 \xrightarrow[\text{1ª ecuación}]{} 1-x^2=0 \to \boxed{(\pm 1,0)}$

Clasificación de Puntos Críticos : Utilizo el criterio del Hessiano

$$f_x(x,y)=e^{1-x^2-y^2}(2x(1-(x^2+2y^2)))$$
$$f_y(x,y)=e^{1-x^2-y^2}(2y(2-(x^2+2y^2)))$$
$$f_{xx}(x,y)=e^{1-x^2-y^2}(2-10x^2-4y^2+4x^4+8x^2y^2)$$
$$f_{yy}(x,y)=e^{1-x^2-y^2}(4-2x^2-20y^2+8y^4+4x^2y^2)$$
$$f_{xy}(x,y)=e^{1-x^2-y^2}(-4xy(3-(x^2+2y^2)))$$

Ejemplo 1.

Estudio cada punto crítico

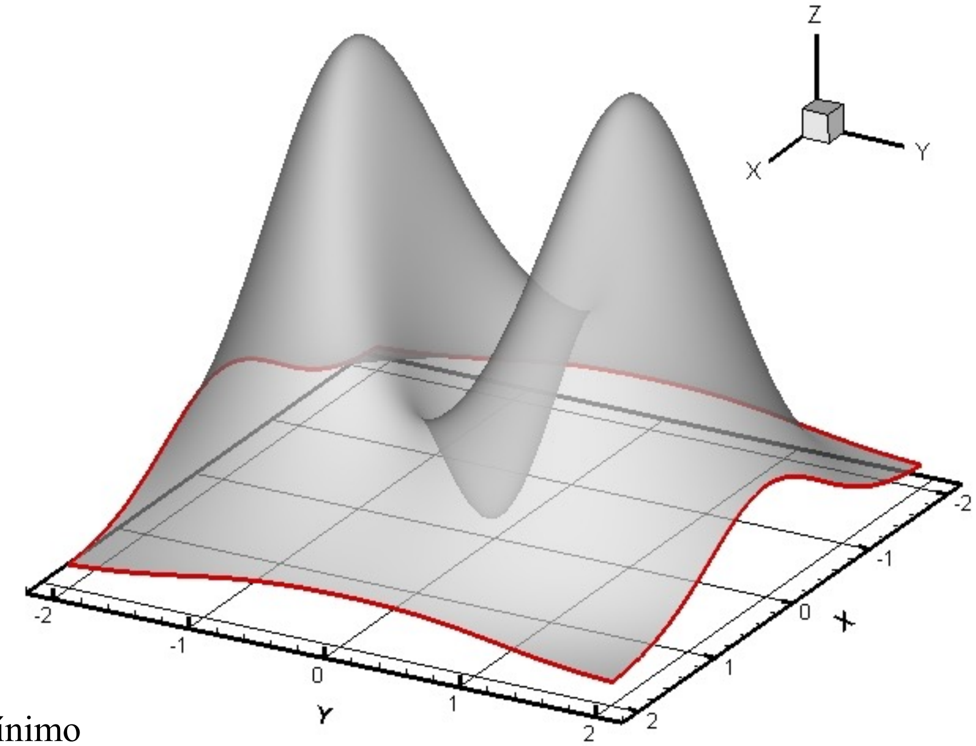
a) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 2e^{1} & 0 \\ 0 & 4e^{1} \end{vmatrix} = 8e^{2} > 0;\ f_{xx} = 2e^{1} > 0 \rightarrow \boxed{(0,0)\ \text{Mínimo}}$

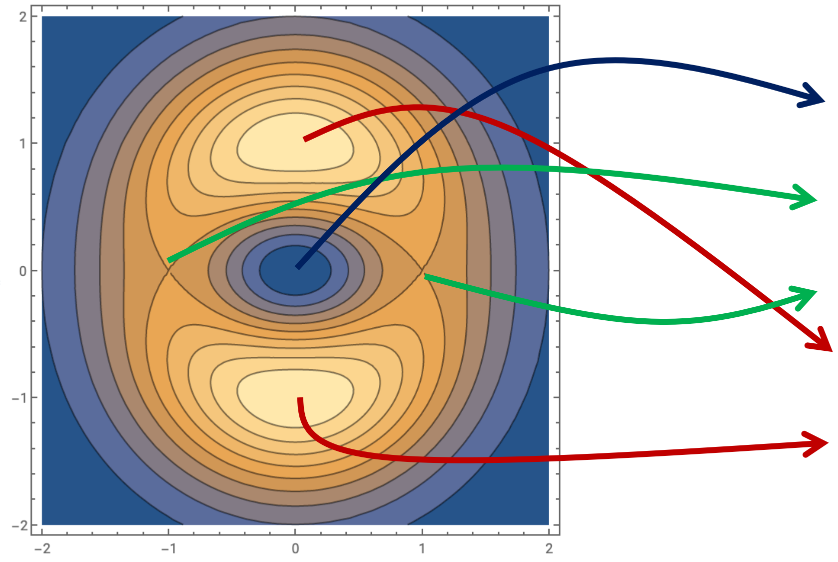
b) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(1,0)} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \rightarrow \boxed{(1,0)\ \text{Punto de silla}}$

c) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(-1,0)} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \rightarrow \boxed{(1,0)\ \text{Punto de silla}}$

d) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(0,1)} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 32 > 0;\ f_{xx} = -4 < 0 \rightarrow \boxed{(0,1)\ \text{Máximo}}$

c) $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(0,-1)} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 32 > 0;\ f_{xx} = -4 < 0 \rightarrow \boxed{(0,-1)\ \text{Máximo}}$





$(0,0)$ Mínimo

$(-1,0)$ Punto de silla

$(1,0)$ Punto de silla

$(0,1)$ Máximo

$(0,-1)$ Máximo

Ejercicio 1. Identificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2y + y + 2xy$ en su dominio de definición y clasificarlos

La función es de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$ por tanto buscamos los puntos críticos como únicos candidatos a extremos.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2xy + 2y = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -1$$

La recta $(-1, y)$ es una recta de puntos críticos. Uso el criterio del Hessiano para clasificarlos:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x=-1} \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |Hf(-1,y)| = 0$$

El criterio no concluye nada. Solo puedo aplicar la definición.

Estudio el signo de: $f(x,y) - f(-1,y_0) = y(x^2 + 2x + 1) - 0 = y(x+1)^2$ que depende únicamente del valor de y.

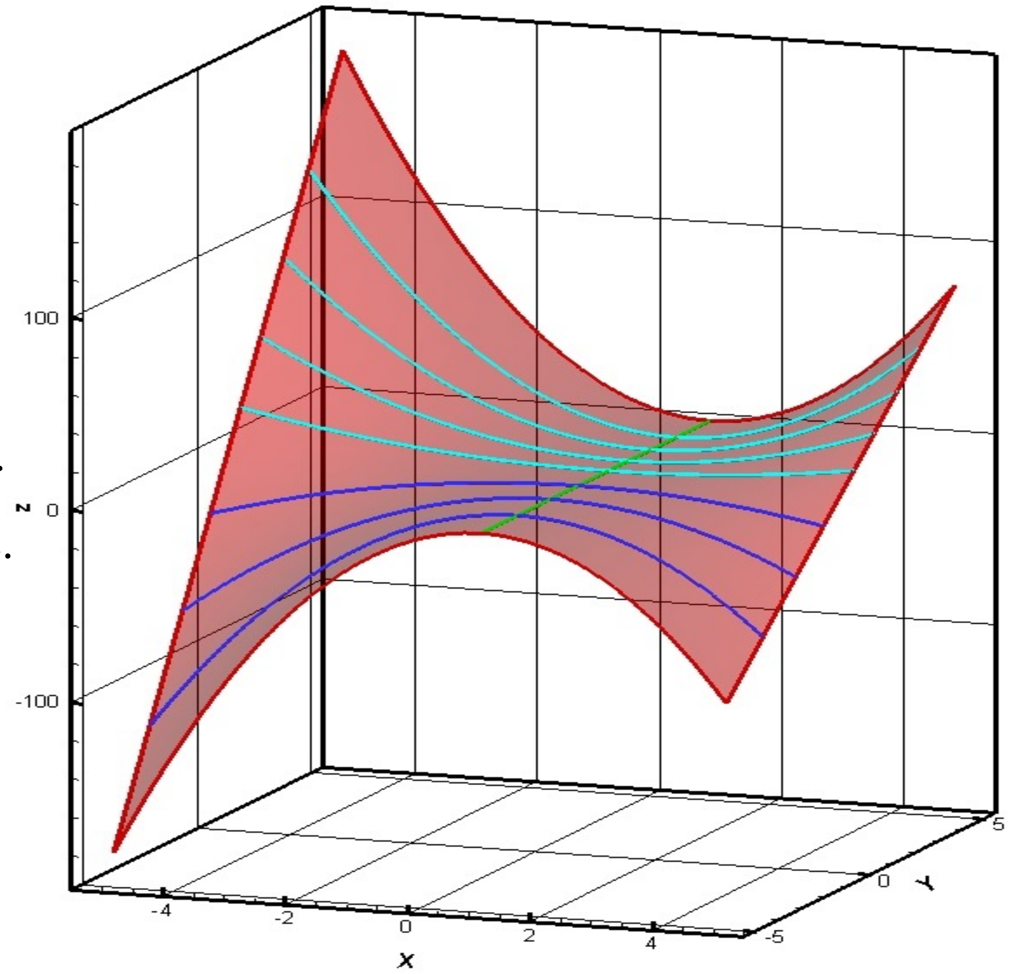
Ejercicio 1. Identificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2y + y + 2xy$

Estudio el signo de:

$$f(x,y) - f(-1,y_0) = y(x+1)^2 = \begin{cases} > 0 \ \text{ si } y > 0 \\ < 0 \ \text{ si } y < 0 \\ \ 0 \text{ en } y = 0 \end{cases}$$

Por tanto:

- La **semirecta** $(\mathbf{-1}, \boldsymbol{y})$ con $y > 0$ es una conjunto de mínimos locales.
- La **semirecta** $(\mathbf{-1}, \boldsymbol{y})$ con $y < 0$ es una conjunto de máximos locales.
- El punto (-1,0) es un punto de silla



Clase: **Extremos de funciones de varias variables**

- Extremos absolutos y relativos**.**
- Recordatorio MI
- Extremos locales y puntos críticos.
  - Condición necesaria de extremo local.
  - Clasificación de puntos críticos. Condición suficiente.
- **Extremos absolutos en regiones compactas.**
- Extremos condicionados. Método multiplicadores de Lagrange.

Extremos absolutos de funciones

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$.

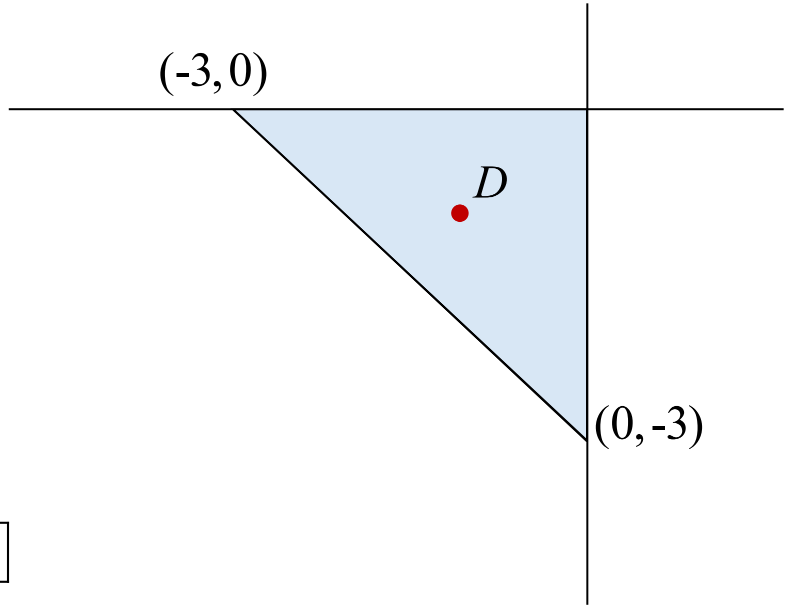
- x_0 es máximo absoluto de f en D si $f(x_0) \geq f(x) \;\; \forall x \in D$
- x_0 es mínimo absoluto de f en D si $f(x_0) \leq f(x) \;\; \forall x \in D$

Los extremos absolutos no tienen porqué existir en general, pero si D es compacto y la función continua en D, el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de extremos absolutos.

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en D compacto:

1. Determinar los puntos críticos en el interior de D
2. Determinar los puntos en los que la función no es diferenciable en D
3. Determinar los puntos críticos restringido a la frontera de D
    1. Despejar una incógnita a partir de la ecuación de la frontera.
    2. Aplicar multiplicadores de Lagrange
4. Evaluar la función en los candidatos a extremos. El valor mayor corresponde al máximo absoluto y el menor al mínimo absoluto

Extremos absolutos de funciones



Determinación de extremos absolutos :

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \le 0;\ y \le 0; x + y \ge -3\right\}$$

1. Hallar los puntos críticos de $f(x,y)$ en el interior de D

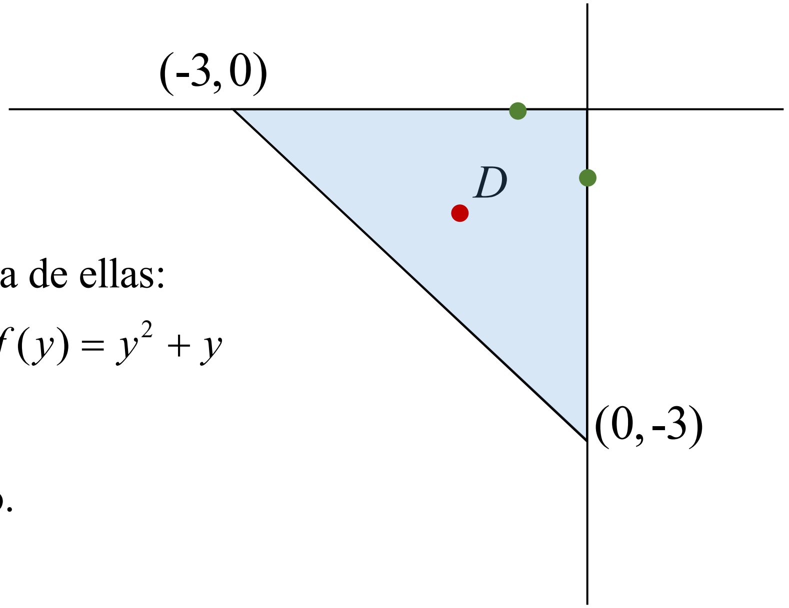
$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x - y + 1 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y - x + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y + 3 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = -1 \quad \boxed{(-1,-1) \in D}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = 2 \\ f_{yy}(x,y) = 2 \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad f_{xx}(-1,-1) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{(-1,-1)\text{Mínimo}}$$

2. Hallar los puntos en los que $f(x,y)$ no es diferenciable en el interior de D

Es diferenciable $\forall$(x,y)

Extremos absolutos de funciones



3. Hallar los puntos críticos de $f(x, y)$ en la frontera de D

La frontera está formada por tres rectas, vamos a estudiar la función en cada una de ellas:

- I-) $x = 0$ En esta recta la función se transforma en $f(x, y) = f(0, y) = f(y) = y^2 + y$

  La estudiamos como una función de una variable:

  $$f'(y) = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow (0, -\frac{1}{2}) \text{ Candidato a extremo absoluto.}$$

  $$f''(y) = 2 > 0 \Rightarrow (0, -\frac{1}{2}) \text{ Candidato a minimo absoluto.}$$

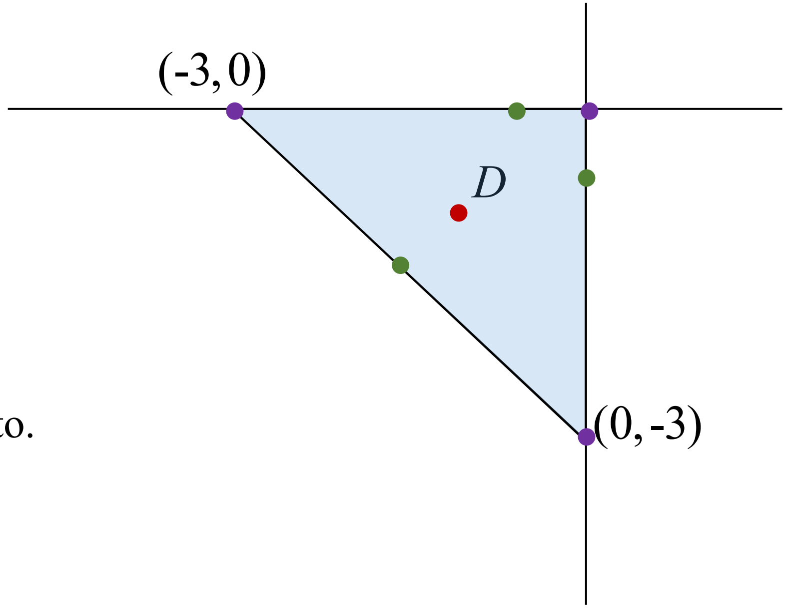
- II-) $y = 0$ En esta recta la función se transforma en $f(x, y) = f(x, 0) = f(x) = x^2 + x$

  La estudiamos como una función de una variable:

  $$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 0) \text{ Candidato a extremo absoluto.}$$

  $$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 0) \text{ Candidato a minimo absoluto.}$$

Extremos absolutos de funciones



- III-) $x+y=-3$ En la función sustituimos $y=-3-x$ y se transforma en

  $f(x,y)=x^2+(-3-x)^2-x(-3-x)+x+(-3-x)=3x^2+9x+6.$

  La estudiamos como una función de una variable:

  $f'(x)=6x+9=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2} \Rightarrow (-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$ Candidato a extremo absoluto.

  $f''(x)=6>0 \Rightarrow (-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$ Candidato a minimo absoluto.

A su vez cada una de estas rectas está definida dentro de un compacto

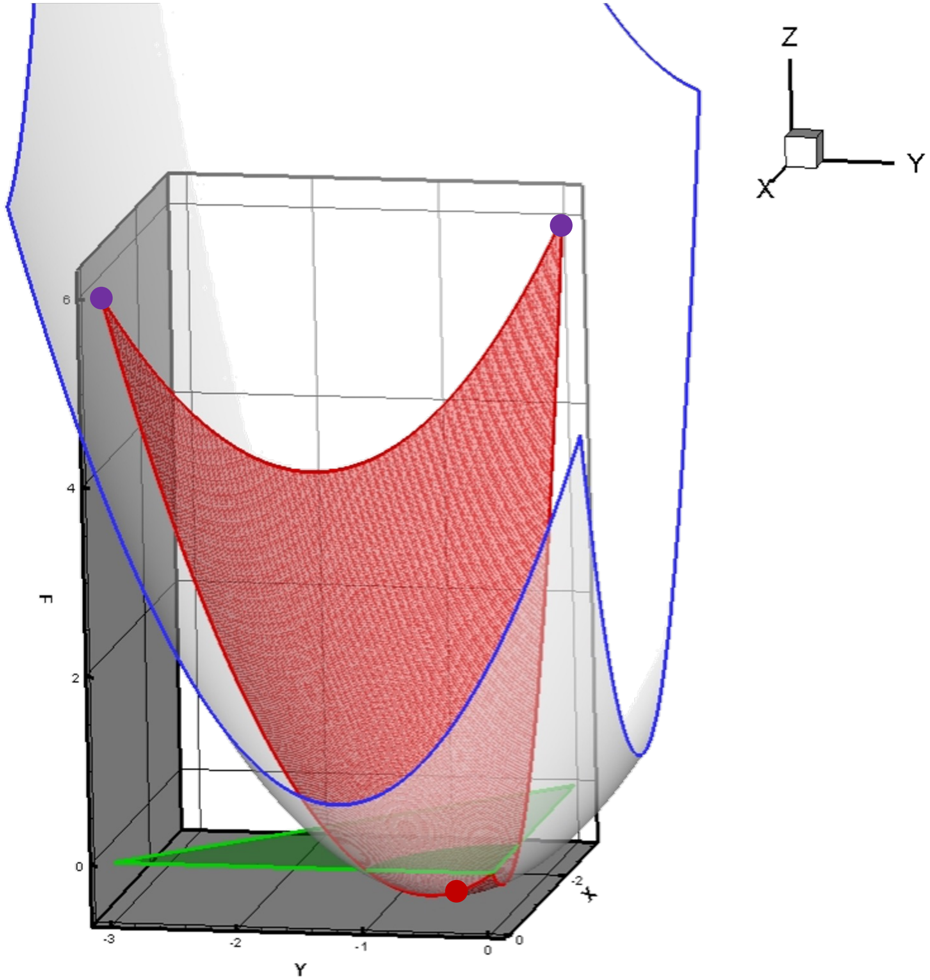
I- $x=0$ en [-3,0];

II- y $=0$ en [-3,0]....

Debo estudiar sus extremos, que se corresponden con los vértices del dominio *D*.

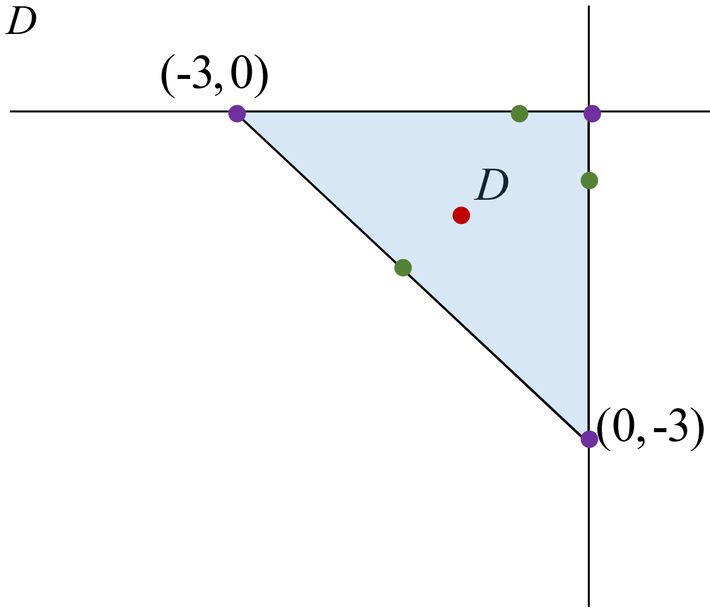
Esto añade 3 candidatos más: (0,0); (-3,0) y (0,-3).

Extremos absolutos de funciones



4. Evaluar f en cada punto crítico del interior de D

$$(-1,-1) \Rightarrow f(-1,-1) = -1$$



6. Evaluar f en los puntos críticos de la frontera

$$(0,-\frac{1}{2}) \Rightarrow f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$
$$(-\frac{1}{2},0) \Rightarrow f(-\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{4}$$
$$(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) \Rightarrow f(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$$

Vértices del dominio

$$(0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0$$
$$(-3,0) \Rightarrow f(-3,0) = 6$$
$$(0,-3) \Rightarrow f(0,-3) = 6$$

7. El más grande de esos valores es el máximo absoluto. El más pequeño es el mínimo.

$$\left.\begin{array}{l}(-3,0) \Rightarrow f(-3,0) = 6 \\ (0,-3) \Rightarrow f(0,-3) = 6\end{array}\right\} \textbf{Máximos globales}$$

$$(-1,-1) \Rightarrow f(-1,-1) = -1 \ \textbf{Mínimo global}$$

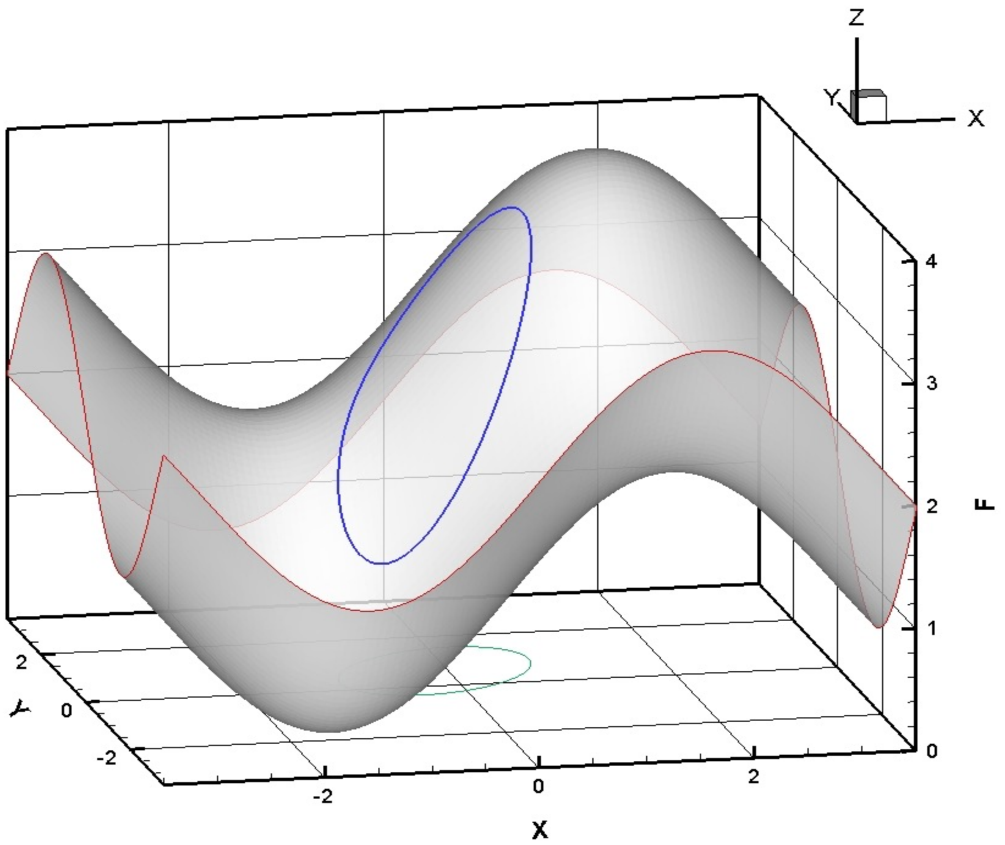
Clase: **Extremos de funciones de varias variables**

- Extremos absolutos y relativos**.**
- Recordatorio MI
- Extremos locales y puntos críticos.
  - Condición necesaria de extremo local.
  - Clasificación de puntos críticos. Condición suficiente.
- Extremos absolutos en regiones compactas.
- **Extremos condicionados. Método multiplicadores de Lagrange.**

Extremos relativos condicionados

Buscamos extremos de funciones de varias variables cuando estas no son independientes entre sí.

- Por ejemplo localizar los extremos en la frontera de regiones compactas. (problema anterior)
- Son problemas muy habituales en física e ingeniería donde se buscan óptimos (máximos o mínimos) sujetos a ciertas restricciones: disponibilidad de materiales, combustible…
- Ejemplo: Calcular el área máxima de un rectángulo de perímetro constante $P = 8$. (sin restricción el problema no tiene sentido.)



Los extremos de la función: $f(x,y) = 2 + sen(x) + sen(y)$ (gris) restringidos a la cónica: $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 4y = -1$ (azul) no cumplen las condiciones necesarias de extremo local para $f(x,y)$

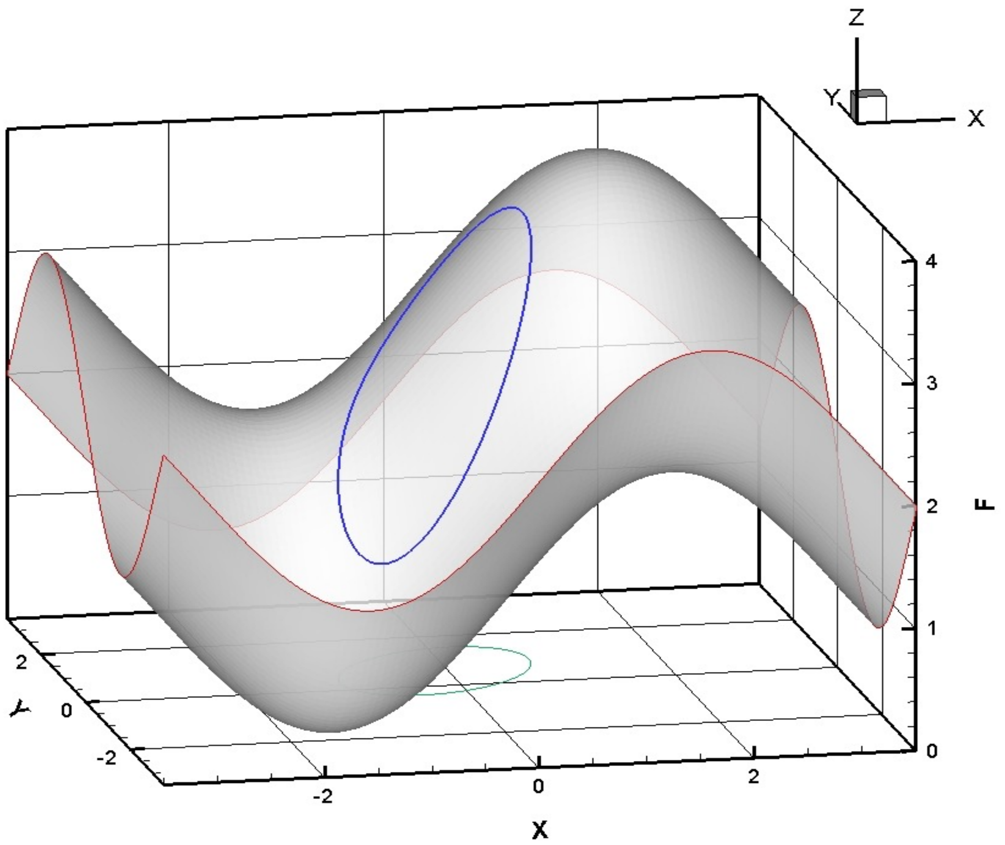
Función a maximizar: Área= $f(x,y) = xy$
Restricción: Perímetro = $2x + 2y = 8$

$$f(x,y) = xy \xrightarrow{y=4-x} f(x) = x(4-x)$$

Derivando: $f'(x) = 4 - 2\text{x} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$

Solución: El cuadrado de lado 2

Extremos relativos condicionados



Sea $f: D \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en D abierto de la que buscamos sus extremos en: $S \equiv \{\boldsymbol{x} \in D \text{ tal que } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ con $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{n}$

p restricciones o condiciones que limitan los valores de $\boldsymbol{x} \in D$ en los que buscamos los extremos.

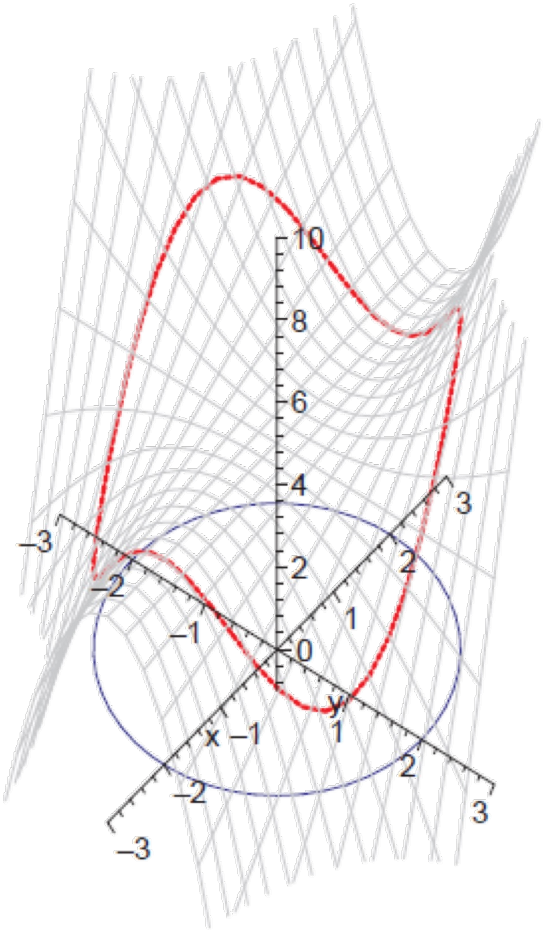
$$S \equiv \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Si $C = D \cap S$ y $\boldsymbol{a} \in C \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, se dice que :

- f tiene en $\boldsymbol{a}$ un mínimo relativo condicionado por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ si existe un entorno U de $\boldsymbol{a}$ tal que $f(x) \geq f(\boldsymbol{a})\ \forall x \in U \cap C$.
- f tiene en $\boldsymbol{a}$ un máximo relativo condicionado por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ si existe un entorno U de $\boldsymbol{a}$ tal que $f(x) \leq f(\boldsymbol{a})\ \forall x \in U \cap C$.

Los extremos relativos de f condicionados a *S* son extremos ordinarios de la restricción $f|_S$

Extremos relativos condicionados



Ejemplo. Hallar los extremos de Sea $f(x,y) = 5 + x^2 y$ sujetos a la condición: $S \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \text{ tal que } x^2 + y^2 = 4\}$

$C = \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \cap S =$ S circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

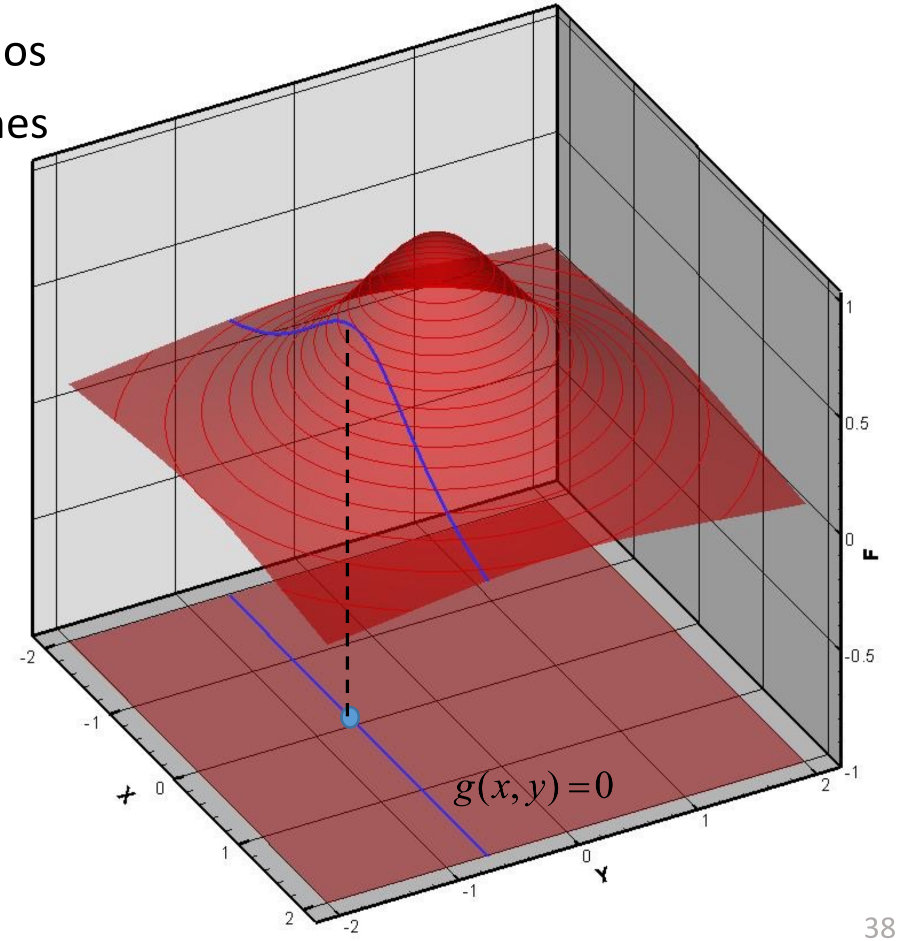
Métodos de resolución.

- En los casos más simples donde se puede despejar una (o varias) variables de la condición, basta llevar la expresión para las variables dependientes a la función y buscar los extremos ordinarios restringidos. (Ya lo hicimos en las fronteras simples de regiones compactas).
- Sin embargo puede resultar complicado despejar implícitamente las variables a partir de la condición. Incluso cuando el teorema de la función implícita garantiza que la ecuación de la condición $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ define de forma implícita unas variables en función del resto. En esto se fundamenta el método de los multiplicadores de Lagrange que veremos a continuación.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Vamos a empezar apoyándonos en el teorema de la función implícita para enunciar las condiciones necesarias de extremo condicionado en una función de dos variables $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ sujeta a una restricción $g(x,y) = 0$.

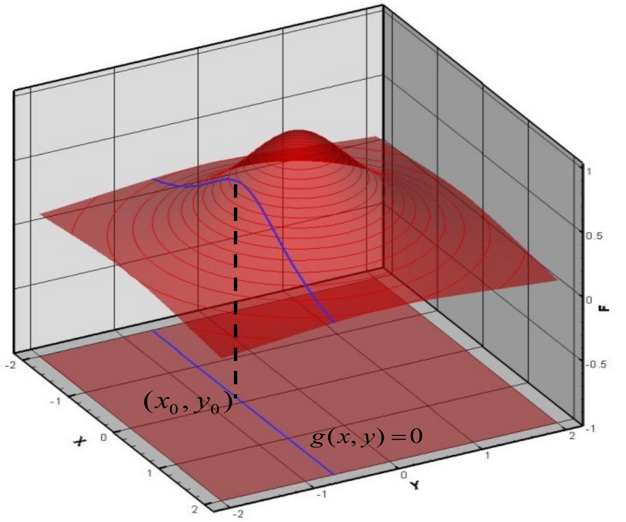
Sea $f(x,y): \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de la que quiero conocer sus extremos condicionados a que $g(x,y) = 0$ con $\mathrm{g}(x,y): \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} \rightarrow \mathbb{R}$. Ambas funciones son de clase $\boldsymbol{C^1}$.



Voy a intentar dar condiciones necesarias para que un punto (x_0, y_0)

sea extremo de la función $f(x,y)$ cumpliendo la restricción $g(x,y) = 0$.

Método de los multiplicadores de Lagrange



Supongo que $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$ (en particular supongo que $g_y(x_0, y_0) \neq 0$), y como $g(x_0, y_0) = 0$ el teorema de la función implícita permite afirmar que $g(x, y) = 0$ define a y como función de $x, y = \varphi(x)$ en un entorno de(x_0, y_0).

Además como g es de clase $\boldsymbol{C^1}$ se cumple que: $\boxed{y'(x_0) = \varphi_x(x_0) = \dfrac{-g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}}$

En un entorno de (x_0, y_0) se puede re-escribir: $f(x, y) = f\big(x, \varphi(x)\big) = h(x)$

Para que exista un extremo debe cumplirse $h'(x) = 0$, usando la regla de la cadena y el teorema de la función implícita:

$$h'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) y'(x_0) = 0 = \boxed{f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \frac{-g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = 0}$$

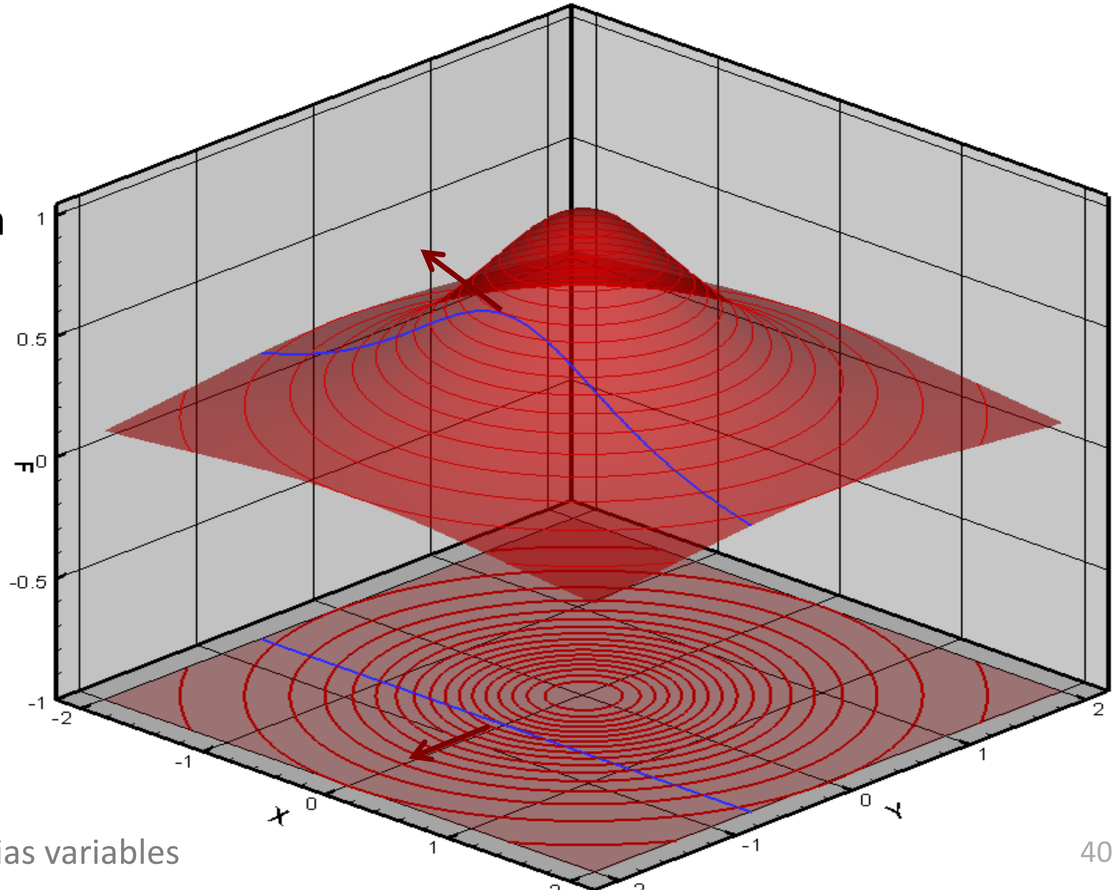
Esta última relación se puede escribir como $\boxed{\dfrac{f_x(x_0, y_0)}{g_x(x_0, y_0)} = \dfrac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = \lambda}$

Método de los multiplicadores de Lagrange

De otra forma:

- Para que (x_0, y_0) sea un extremo de $f(x, y)$ con la restricción $g(x, y) = 0$ es necesario que los gradientes sean proporcionales en el dicho punto $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
- A la constante de proporcionalidad λ se le conoce como multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

Geometricamente el gradiente de f en (x_0, y_0) $[\nabla f(x_0, y_0)]$ es un vector que indica la dirección de máximo crecimiento y por tanto perpendicular a las curvas de nivel.



Método de los multiplicadores de Lagrange

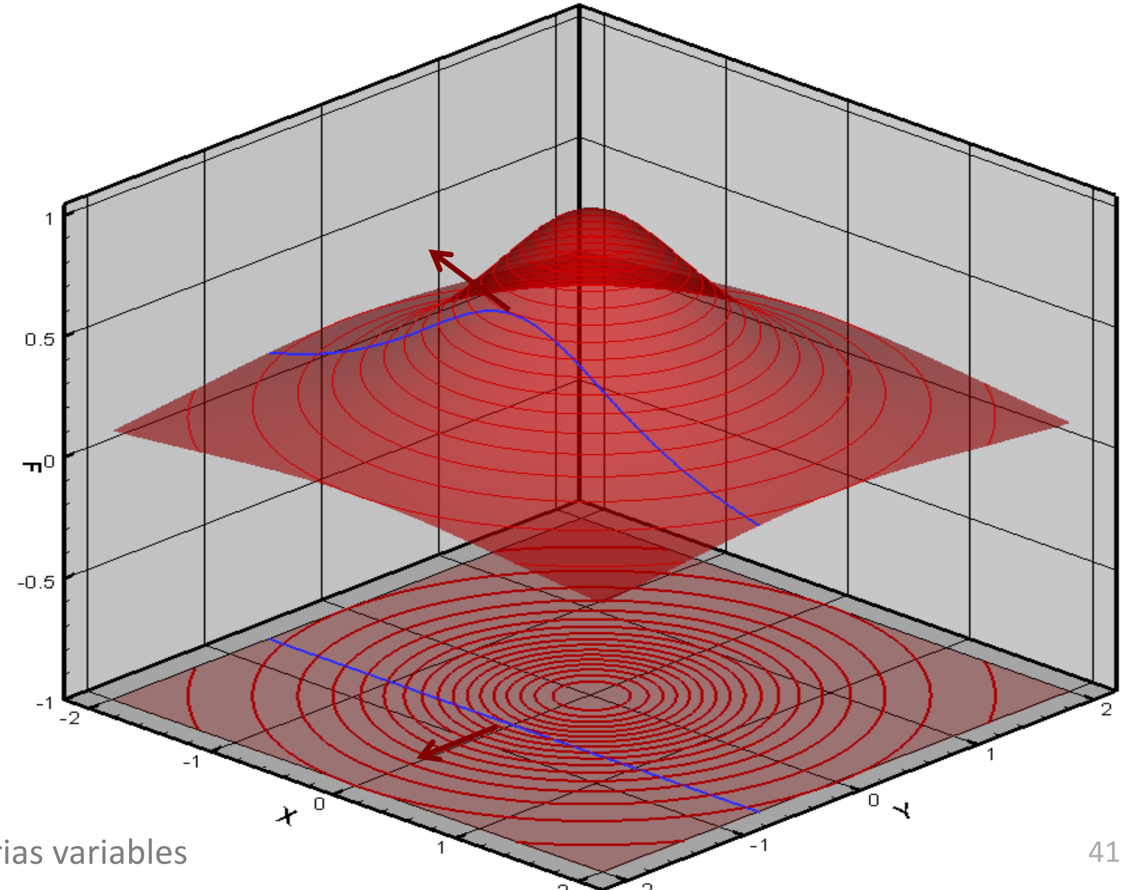
De otra forma:

- Para que (x_0, y_0) sea un extremo de $f(x, y)$ con la restricción $g(x, y) = 0$ es necesario que los gradientes sean proporcionales en el dicho punto $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
- A la constante de proporcionalidad λ se le conoce como multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

Por otra parte la restricción $g(x, y) = 0$ es una curva de nivel

Vector normal en (x_0, y_0):

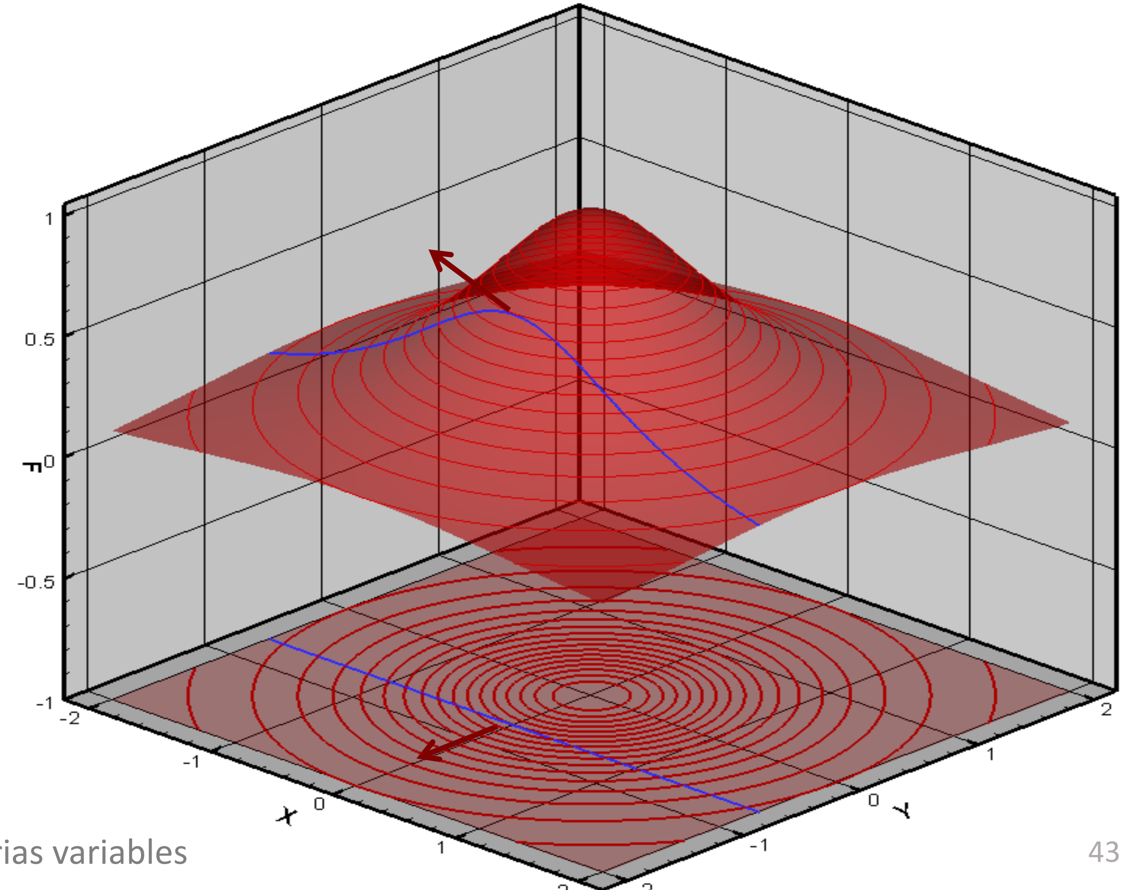
$$\boldsymbol{n}(x_0) = \left(g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0)\right) = \nabla g(x_0, y_0)$$



Método de los multiplicadores de Lagrange

De otra forma:

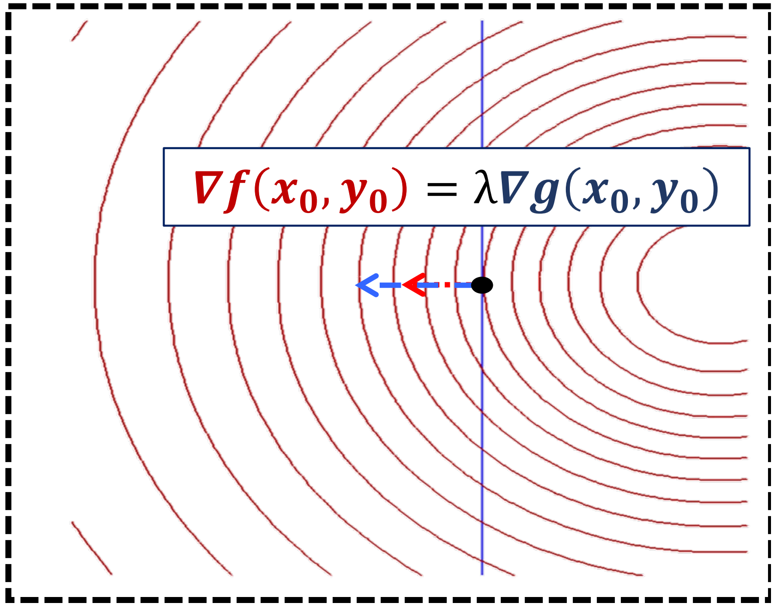
- Para que (x_0, y_0) sea un extremo de $f(x, y)$ con la restricción $g(x, y) = 0$ es necesario que los gradientes sean proporcionales en el dicho punto $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
- A la constante de proporcionalidad λ se le conoce como multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

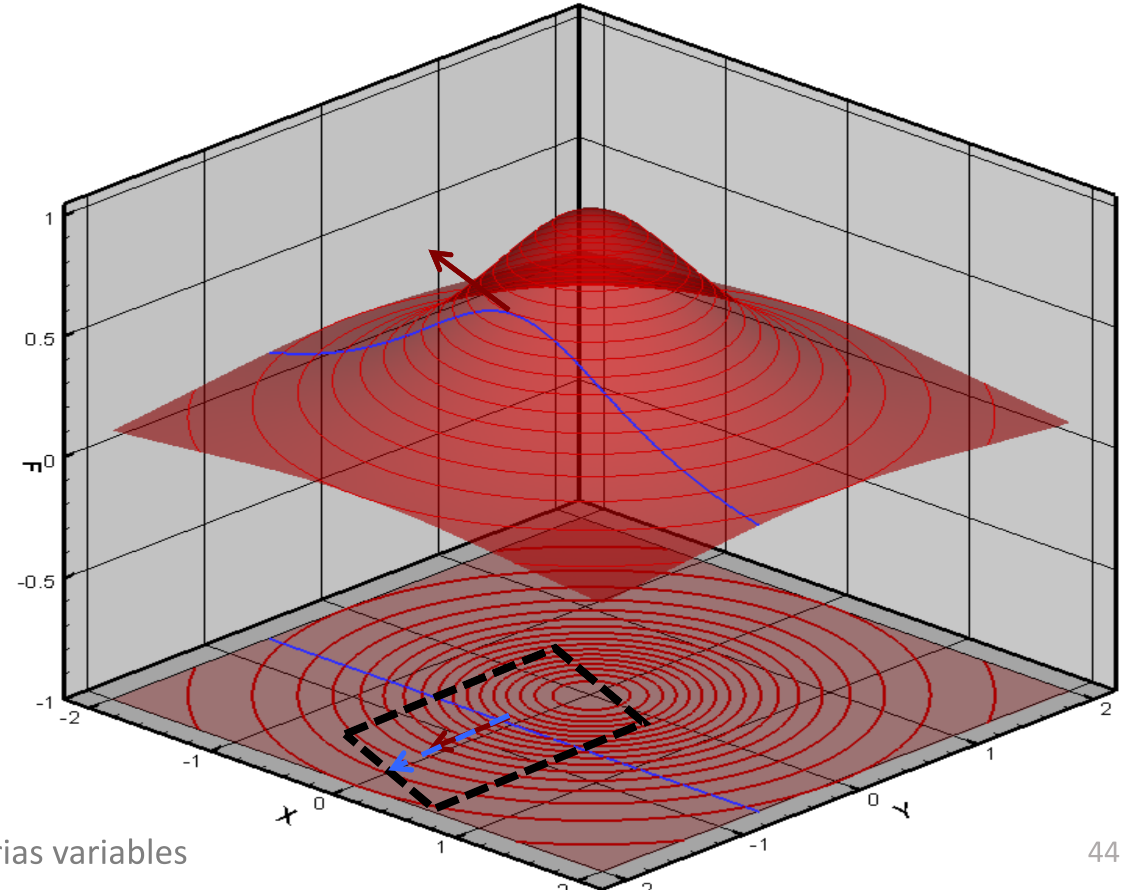


Método de los multiplicadores de Lagrange

De otra forma:

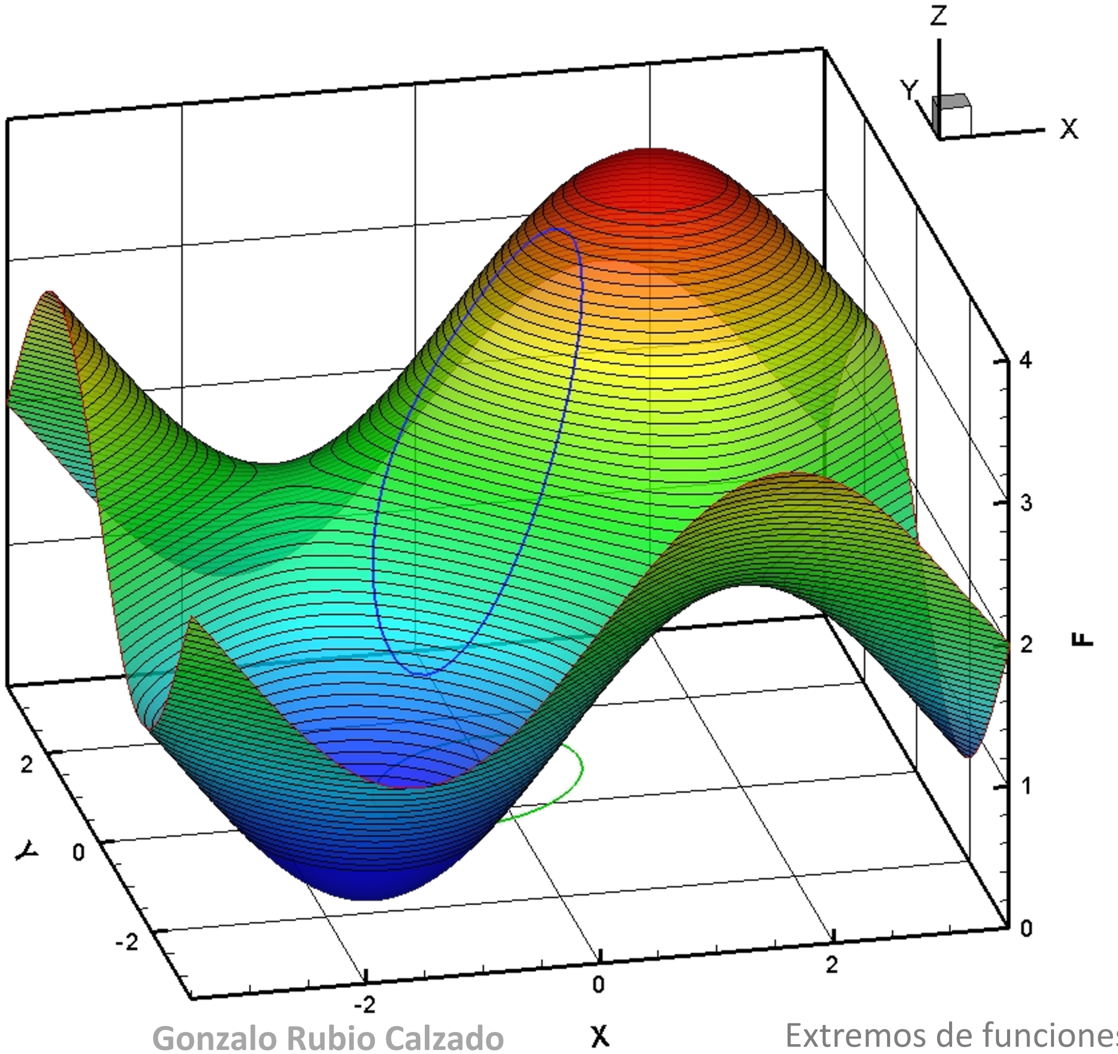
- Para que (x_0, y_0) sea un extremo de $f(x, y)$ con la restricción $g(x, y) = 0$ es necesario que los gradientes sean proporcionales en el dicho punto $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
- A la constante de proporcionalidad λ se le conoce como multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

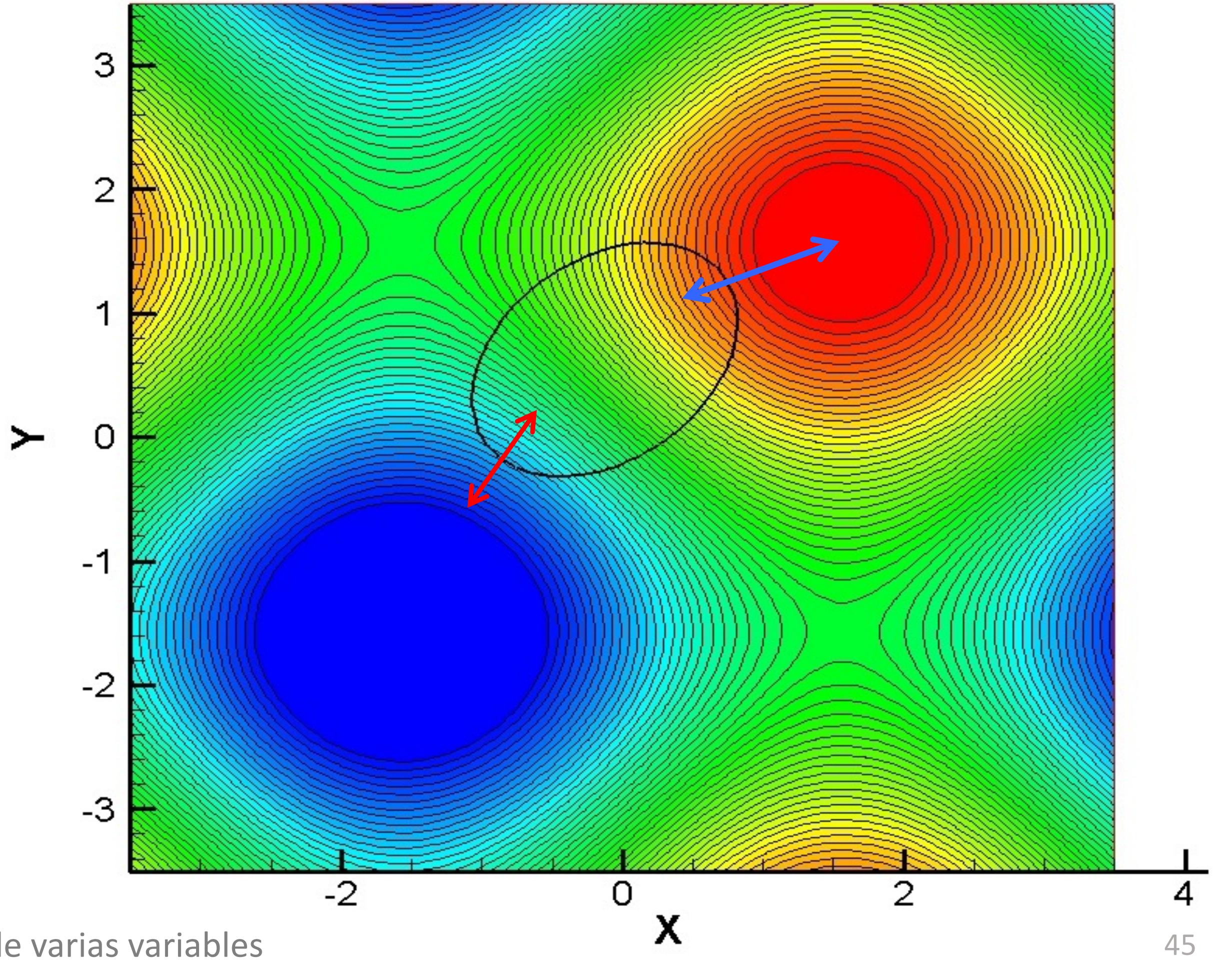




Método de los multiplicadores de Lagrange

En el ejemplo inicial localizamos los extremos de la función: $f(x, y) = 2 + sen(x) + sen(y)$ restringidos a: $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 4y + 1 = 0$





Método de los multiplicadores de Lagrange. Modo operativo

Para el cálculo de los extremos de una función $f: D \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ de clase $\boldsymbol{C^1}$ condicionados por las restricciones: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{n}$ también de clase $\boldsymbol{C^1}$, se construye la función de Lagrange:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}): \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}} \to \mathbb{R}$$

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = L\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\right) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_p g_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si $\boldsymbol{x_0}$ es un extremo de $f(\boldsymbol{x})$ restringido a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x_0}$ es un punto crítico de $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$

Condición necesaria

$$\nabla L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0} \to \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \to \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(\boldsymbol{x}) + \displaystyle\sum_j \lambda_j \dfrac{\partial}{\partial x_i} g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_j} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \to g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

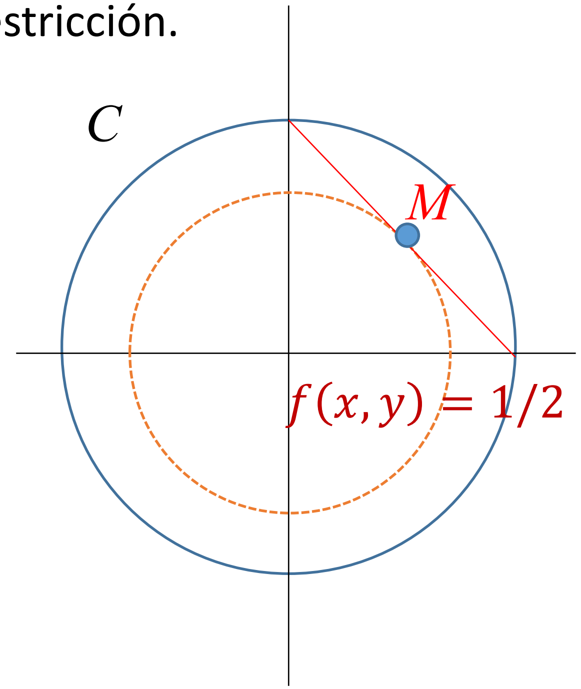
- Las primeras derivadas parciales sobre las variables originales garantizan la proporcionalidad de los gradientes.
- Las derivadas parciales respecto de los multiplicadores de Lagrange fuerzan a que el extremo verifique la restricción.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo: Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\}$

condicionado por $g(x,y) = x + y + 1 = 0.$

$\mathrm{C}{=}\mathrm{D} \cap \{g(x,y) = 0\}$ es un compacto por tanto buscamos los extremos absolutos de sujeto a la restricción.



Función de Lagrange: $L(x,y,\boldsymbol{\lambda}) = f(x,y) + \boldsymbol{\lambda} g(x,y) = x^2 + y^2 + \boldsymbol{\lambda}\,(x + y + 1)$

$$\nabla L(x,y,\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ 2y + \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ \boldsymbol{\lambda} = -1 \end{cases}$$

$f(1/2,1/2) = 1/2$ Mínimo de la función. No hace falta clasificarlo porque la función es la distancia al cuadrado de los puntos del segmento en rojo M al punto (0,0). Los máximos se encuentran en los extremos del segmento.

MATERIAL ADICIONAL

CRITERIO DE SYLVESTER

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local.

Existe un criterio equivalente que se apoya en la matriz Hessiana y el criterio de Sylvester

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en D abierto y sea $x_0 \in D$ punto crítico de f $\quad (\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0)$

Sea:

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_n x_1} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ la matriz Hessiana de f en x_0

- Los menores principales de $Hf(x_0)$ son los determinantes formados por las k- primeras filas y columnas, esto es:

$$|H_1| = |a_{11}|, \ |H_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ |H_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

Puntos críticos. Condición suficiente de extremo local.

Existe un criterio equivalente que se apoya en la matriz Hessiana y el criterio de Sylvester

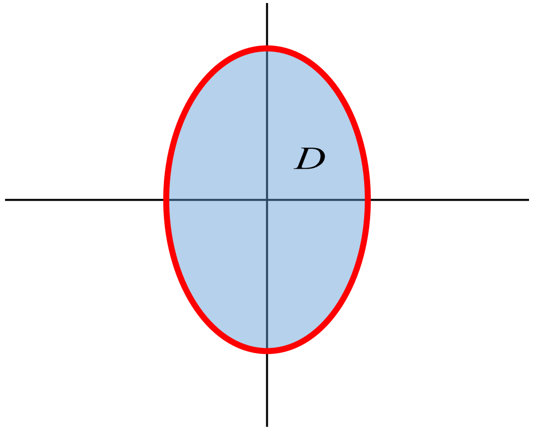
Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en D abierto y sea $x_0 \in D$ punto crítico de f $(\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0)$

Entonces:

1. Si $|Hf(x_0)| \neq 0$
    1. Si todos los menores principales son positivos x_0 es un mínimo local de f
    2. Si los menores principales cambian de signo empezando en $a_{11} < 0$ x_0 es un máximo local de f
    3. En cualquier otro caso x_0 es un punto de silla (ni máximo ni mínimo)
2. Si $|Hf(x_0)| = 0$. La diferencial segunda es semidefinida (caso dudoso) o indefinida (punto de silla)
    1. Si no se anula ningún menor anterior:
        1. Si todos los menores anteriores son positivos, caso dudoso posible mínimo local.
        2. Si los menores principales cambian de signo empezando en $a_{11} < 0$, caso dudoso posible máximo local.
        3. En cualquier otro caso x_0 es un punto de silla
    2. Si se anulan menores principales anteriores, caso dudoso.

EJEMPLO ADICIONAL EXTREMOS EN COMPACTOS

Extremos absolutos de funciones



Determinación de extremos absolutos :

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \right\}$$

1. Hallar los puntos críticos de $f(x,y)$ en el interior de D

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(0,0) \in D}$$

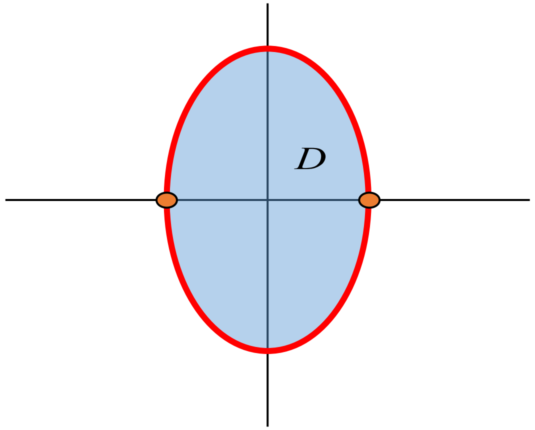
$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = 2 \\ f_{yy}(x,y) = 2 \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{(0,0)\text{Mínimo}}$$

2. Hallar los puntos en los que $f(x,y)$ no es diferenciable en el interior de D

Es diferenciable $\forall$(x,y)

Extremos absolutos de funciones

3. Hallar los puntos críticos de $f(x, y)$ en la frontera de D



La frontera es una elipse que debemos descomponer en dos funciones:

- I-) $y = +2\sqrt{1-x^2}$ Sobre esta curva la función original se transforma

  $$f(x,y) = f(x, 2\sqrt{1-x^2}) = f(x) = x^2 + (2\sqrt{1-x^2})^2 + 2 = -3x^2 + 6$$

  La estudiamos como una función de una variable:

  $f'(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = +2\sqrt{1-0^2} = 2 \Rightarrow (0,2)$ Candidato a extremo absoluto.

  $f''(x) = -6 > 0 \Rightarrow (0,2)$ Candidato a máximo absoluto.

- II-) $y = \text{-}2\sqrt{1-x^2}$ Sobre esta curva la función original se transforma

  $$f(x,y) = f(x, \text{-}2\sqrt{1-x^2}) = f(x) = x^2 + (\text{-}2\sqrt{1-x^2})^2 + 2 = -3x^2 + 6$$

  La estudiamos como una función de una variable:

  $f'(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \text{-}2\sqrt{1-0^2} = 2 \Rightarrow (0,-2)$ Candidato a extremo absoluto.

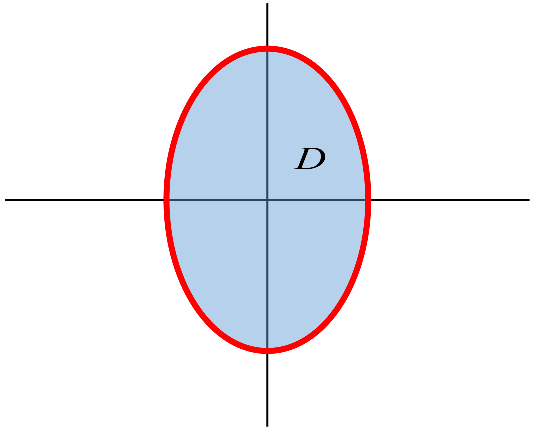
  $f''(x) = -6 > 0 \Rightarrow (0,-2)$ Candidato a máximo absoluto.

De nuevo hemos de estudiar los "vertices" de la frontera. En este caso los "vertices" son los puntos donde se unen dos curvas que limitan la frontera: $(1,0)$ y $(\text{-}1,0)$

55

Extremos absolutos de funciones

3. Hallar los puntos críticos de $f(x, y)$ en la frontera de D $(Opción\ II)$



La frontera es una elipse que podemos parametrizar:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \xrightarrow{\text{"polares"}} \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \cdot \text{sen} t \end{cases} \Rightarrow f(x, y) = f(t) = \cos^2 t + 4\text{sen}^2 t + 2$$

Hallamos los extremos de $f(t)$

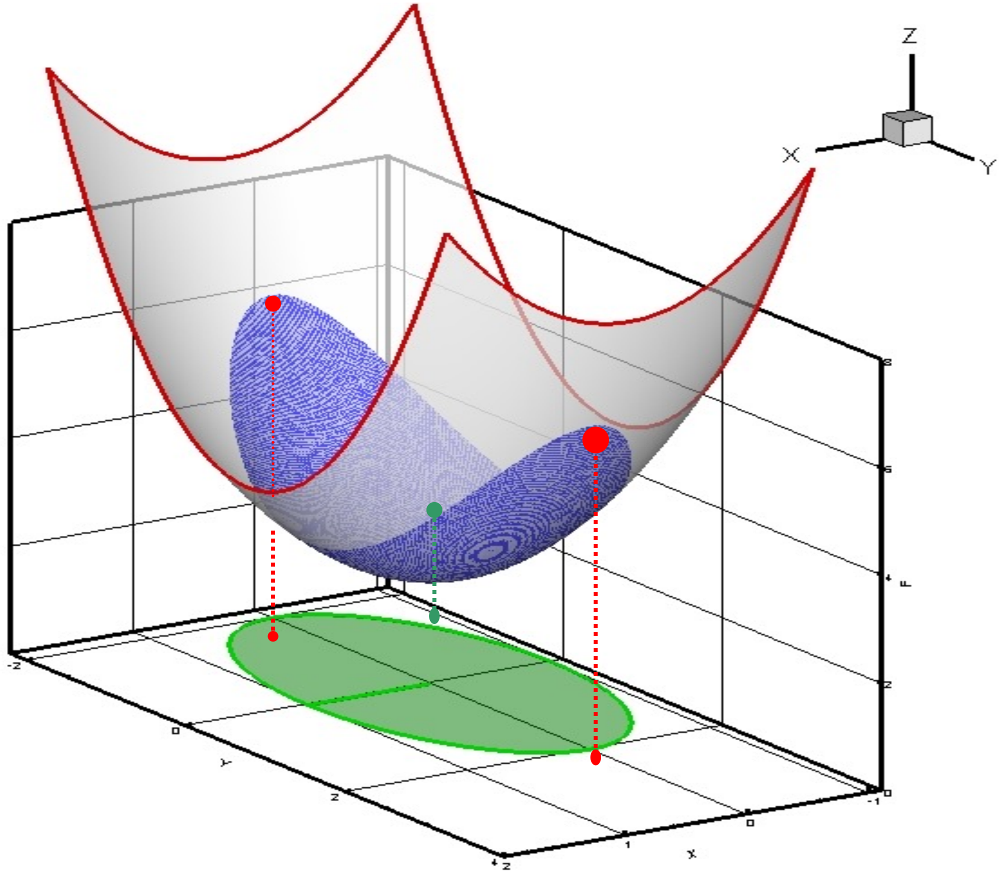
$$f(t) = \cos^2 t + 4\text{sen}^2 t + 2 = (1 - \text{sen}^2 t) + 4\text{sen}^2 t + 2 = 3 + 3\text{sen}^2 t$$

$$f'(t) = 6 \cdot \text{sen} t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, 0) \\ t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow (x, y) = (0, 2) \\ t = \pi \Rightarrow (x, y) = (-1, 0) \\ t = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow (x, y) = (0, -2) \end{cases}$$

La ventaja de parametrizar usando una sola función es que no necesitamos estudiar de modo particular los "vértices" de la región.

56

Extremos absolutos de funciones



4. Evaluar f en cada punto crítico del interior de D

$$(0,0) \Rightarrow f(0,0) = 2$$

6. Evaluar f en los puntos críticos de la frontera

$$(0,2) \Rightarrow f(0,2) = 4$$
$$(0,\text{-}2) \Rightarrow f(0,\text{-}2) = 4$$

Vértices del dominio

$$(1,0) \Rightarrow f(0,0) = 3$$
$$(\text{-}1,0) \Rightarrow f(\text{-}2,0) = 3$$

7. El más grande de esos valores es el máximo absoluto. El más pequeño es el mínimo.

$$\left.\begin{array}{l} (0,2) \Rightarrow f(0,2) = 4 \\ (0,\text{-}2) \Rightarrow f(0,\text{-}2) = 4 \end{array}\right\} \textbf{Máximos globales}$$

$$(0,0) \Rightarrow f(0,0) = 2 \ \textbf{Mínimo global}$$

57

LAGRANGE DEM 3D

Método de los multiplicadores de Lagrange

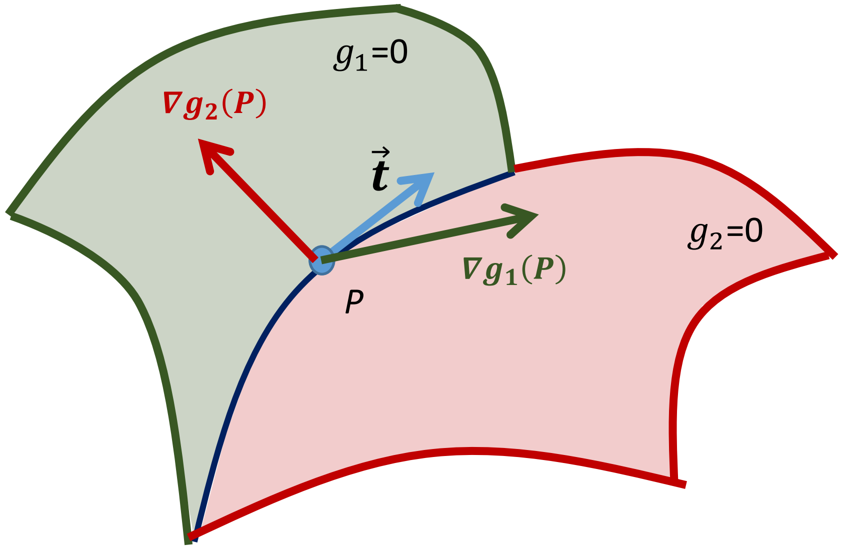
Esta proporcionalidad de los gradientes se puede visualizar en el caso de una función de tres variables sujeta a dos ligaduras:

$f(x, y, z)$: función con posibles extremos condicionados a:

$$S = \begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Si P=(x_0, y_0, z_0) es un extremo condicionado, la derivada de f en la dirección tangente a la curva restricción es nula

$$\rho(s) = f(x(s), y(s), z(s)) \text{ cumple } \rho'(s) = \nabla f|_P \cdot \vec{\boldsymbol{t}}|_P = 0 \Rightarrow \nabla f|_P \perp \vec{\boldsymbol{t}}|_P$$



Además $\nabla g_1(P)$ es un vector perpendicular a la superficie $g_1(x, y, z) = 0$ y $\nabla g_2(P)$ es un vector perpendicular a la superficie $g_2(x, y, z) = 0$ en P.

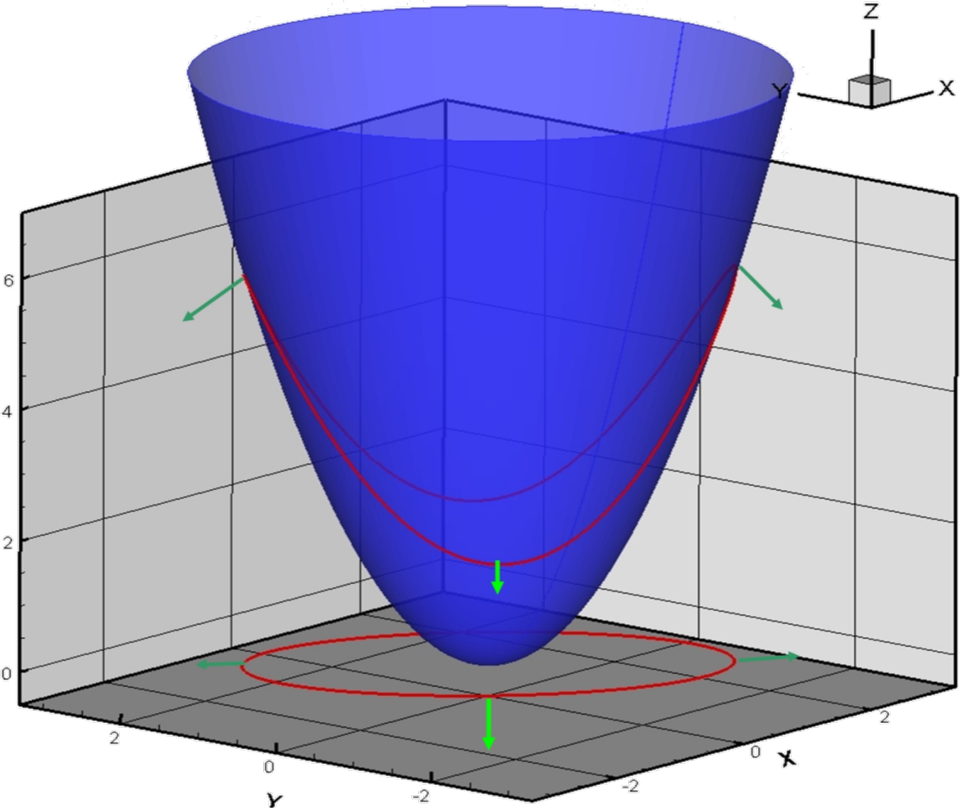
Por tanto $\vec{\boldsymbol{t}}$, tangente de la curva intersección, es perpendicular a ambos.

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \lambda_2 \nabla g_2(P)$$

Nuevamente la proporcionalidad entre los gradientes.

EJERCICIO LAGRANGE 2

Método de los multiplicadores de Lagrange



Hallar los puntos de la curva de nivel $f(x,y)=x^2+y^2+xy=3$ cuya distancia al origen es mínima/máxima.

Función a minimizar/maximizar $D(x,y)=x^2+y^2$ (distancia al cuadrado)

Restricción $f(x,y)=x^2+y^2+xy=3$

Función de Lagrange: $F(x,y,\lambda)=D(x,y)+\lambda f(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2+y^2+xy-3\right)$

$$\nabla F(x,y,\lambda)=\vec{0}\rightarrow\begin{cases}2x+\lambda(2x+y)=0\\2y+\lambda(2y+x)=0\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}\xrightarrow[\lambda=\frac{-2x}{2x+y}]{1^a\,Ecuación}\begin{cases}2y+\dfrac{-2x}{2x+y}(2y+x)=0\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{2y+x}=\dfrac{x}{2x+y}\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\cancel{2xy}+y^2=\cancel{2xy}+x^2\rightarrow\begin{cases}x=y & \mathrm{I}\\x=-y & \mathrm{II}\end{cases}\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}$$

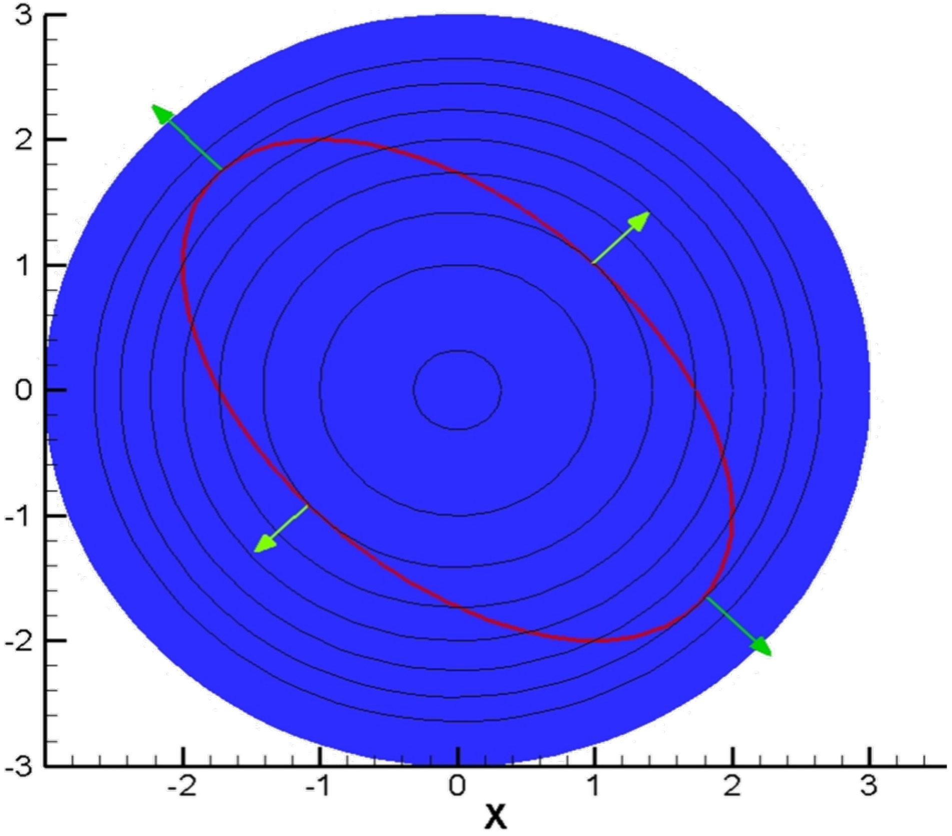
$$\mathrm{I})\ x^2+y^2+xy=3\xrightarrow{x=y}3x^2=3\rightarrow\begin{cases}x=1\xrightarrow{x=y}y=1\\x=-1\xrightarrow{x=y}y=-1\end{cases}$$

$$\mathrm{II})\ x^2+y^2+xy=3\xrightarrow{x=-y}x^2=3\rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\xrightarrow{x=-y}y=-\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\xrightarrow{x=-y}y=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}D(1,1)=2\\D(-1,-1)=2\end{array}\right\}\ \text{Mínima distancia}$$

$$\left.\begin{array}{l}D(\sqrt{3},-\sqrt{3})=6\\D(-\sqrt{3},\sqrt{3})=6\end{array}\right\}\ \text{Máxima distancia}$$

Método de los multiplicadores de Lagrange



Hallar los puntos de la curva de nivel $f(x,y)=x^2+y^2+xy=3$ cuya distancia al origen es mínima/máxima.

Función a minimizar/maximizar $D(x,y)=x^2+y^2$ (distancia al cuadrado)

Restricción $f(x,y)=x^2+y^2+xy=3$

Función de Lagrange: $F(x,y,\lambda)=D(x,y)+\lambda f(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2+y^2+xy-3\right)$

$$\nabla F(x,y,\lambda)=\vec{0}\rightarrow\begin{cases}2x+\lambda(2x+y)=0\\2y+\lambda(2y+x)=0\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}\xrightarrow[\lambda=\frac{-2x}{2x+y}]{1^{\text{a}}\,Ecuación}\begin{cases}2y+\dfrac{-2x}{2x+y}(2y+x)=0\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{2y+x}=\dfrac{x}{2x+y}\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\cancel{2xy}+y^2=\cancel{2xy}+x^2\rightarrow\begin{cases}x=y & \mathrm{I}\\x=-y & \mathrm{II}\end{cases}\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}$$

$$\mathrm{I})\ x^2+y^2+xy=3\xrightarrow{x=y}3x^2=3\rightarrow\begin{cases}x=1\xrightarrow{x=y}y=1\\x=-1\xrightarrow{x=y}y=-1\end{cases}$$

$$\mathrm{II})\ x^2+y^2+xy=3\xrightarrow{x=-y}x^2=3\rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\xrightarrow{x=-y}y=-\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\xrightarrow{x=-y}y=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}D(1,1)=2\\D(-1,-1)=2\end{array}\right\}\ \text{Mínima distancia}$$

$$\left.\begin{array}{l}D(\sqrt{3},-\sqrt{3})=6\\D(-\sqrt{3},\sqrt{3})=6\end{array}\right\}\ \text{Máxima distancia}$$