Extremos I. Extremos de funciones

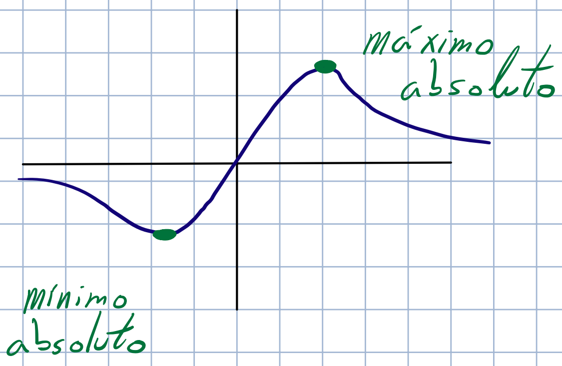
1 Introducción

Definiciones de extremo absoluto y extremo relativo

(a) Extremo absoluto se dice que $f(x): D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza un extremo (máximo o mínimo) absoluto en x_0 si:

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \forall x \in D \quad (\text{máximo})$$

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad \forall x \in D \quad (\text{mínimo})$$



Comentarios:

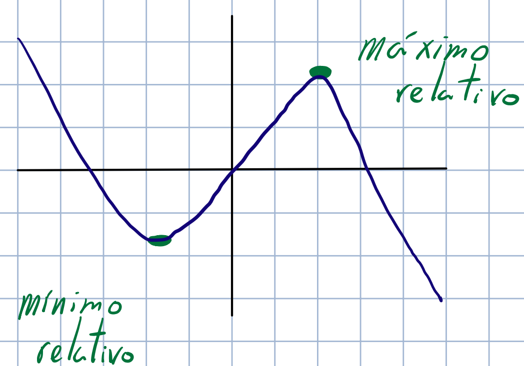
① Si se acerca infinitamente sin llegar a alcanzar nunca el valor, es una cota.

② No hemos hablado de D compacto. Lo haremos en la parte de teoremas.

(b) Extremo relativo: se dice que $f(x): D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza un extremo (máximo o mínimo) relativo o local en x_0 si existe un entorno centrado en x_0, $E(x_0, \delta)$ tal que

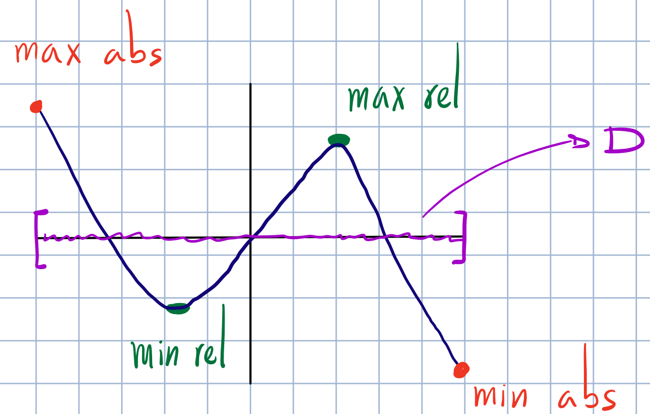
$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \forall x \in E(x_0, \delta) \quad (\text{máximo})$$

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad \forall x \in E(x_0, \delta) \quad (\text{mínimo})$$



Teorema del valor extremo

Sea $f(x): D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función continua en D compacto (cerrado y acotado), entonces $f(x)$ alcanza máximo y mínimo absolutos en D.



Este teorema nos permite encontrar máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo compacto. Puesto que tienen que alcanzarse en algún lugar, solo hay dos opciones:

(a) Se alcanzan en el interior (tb son extremos relativos)

(b) Se alcanzan en la frontera

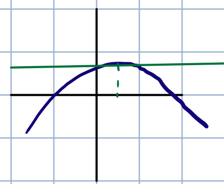
De modo que el procedimiento es:

1. Calcular extremos relativos
2. Evaluar la función en la frontera
3. Escoger el valor máximo entre ellos (máximo absoluto) y mínimo entre ellos (mínimo absoluto).

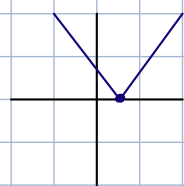
2 Cálculo de extremos relativos. Repaso en $\mathbb{R}$

- Candidatos a extremo relativo:

① Puntos críticos o estacionarios. $x \in \mathbb{R} \,/\, f'(x) = 0$
(pts con tangente horizontal)



② Puntos singulares. $x \in \mathbb{R} \,/\, \nexists f'(x)$ (pico anguloso)



eg. $f(x) = |x|$

③ Puntos de la frontera $x \in \partial D$. Eg. $D = [a, b]$; $f(a)$, $f(b)$

- Extremos absolutos

De entre todos los candidatos, escogemos los valores máximo y mínimo.

Ejemplo Hallar los extremos de $f(x) = 9x - 3x^3$ en $[-1, 3]$

① $f'(x) = 9 - 9x^2 = 0 \longrightarrow x = \pm 1$

② $f(x) \in C^\infty$ luego no hay pts singulares

③ $f(-1) = -6$; $f(3) = -54$

	x	$f(x)$	
pto crit	-1	-6	
	1	6	max abs
∂D	-1	-6	
	3	-54	min abs

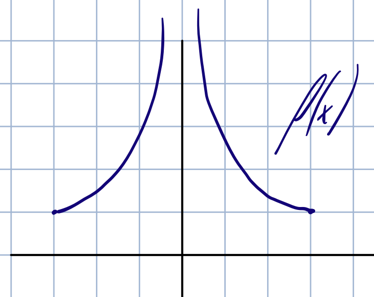
Ejemplo Hallar los extremos de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $[-1, 1]$

Cuidado que esta función no está definida en $x=0$.

① $f'(x) = -\frac{2}{x^3} \longrightarrow f'(x) \neq 0 \quad \forall x$

② $x \,/\, \nexists\, f'(x) \longrightarrow x = 0$ (ahí tampoco está definida la función, luego hay que analizar ese pto con cuidado).

$\lim_{x \to 0} 1/x^2 = +\infty \longrightarrow f(x)$ no está acotada superiormente $\longrightarrow$ no máximo absoluto

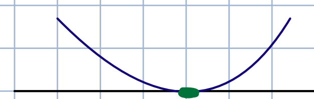


③ Pts frontera. $f(-1) = f(1) = 1 \longrightarrow x = \pm 1 \longrightarrow$ mínimo absoluto

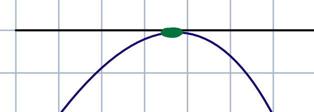
• Clasificación de pts críticos. Condiciones suficientes

Sea x_0 un pto crítico de $f(x)$, $f'(x_0) = 0$, entonces:

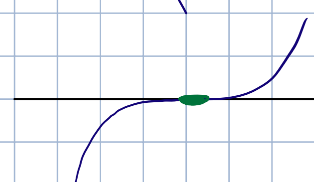
$*$ Si $f''(x_0) > 0 \longrightarrow$ mínimo relativo



$*$ Si $f''(x_0) < 0 \longrightarrow$ máximo relativo



$*$ Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \longrightarrow$ pto de inflexión

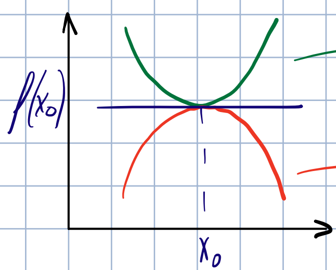


Esta información la obtenemos del polinomio de Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

cerca del pto x_0, la función se comporta como el término de menor orden no nulo $[(x - x_0) \to 0]$.

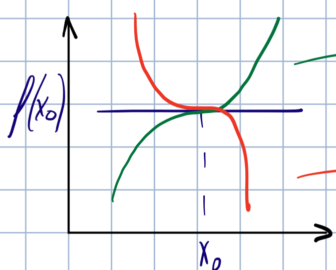
- $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \neq 0 \to f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$



$\to f''(x_0) > 0$ mínimo

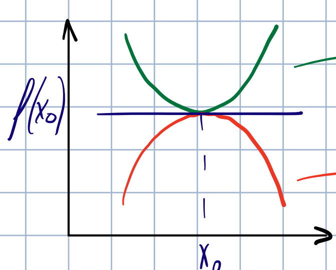
$\to f''(x_0) < 0$ máximo

- $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \to f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$



$\left.\begin{array}{l} \to f'''(x_0) > 0 \\ \to f'''(x_0) < 0 \end{array}\right\}$ Pto de inflexión

- $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, $f^{IV}(x_0) \neq 0 \to f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{24} f^{IV}(x_0)(x - x_0)^4$



$\to f^{IV}(x_0) > 0$ mínimo

$\to f^{IV}(x_0) < 0$ máximo

En la extensión a varias variables, limitaremos el estudio a casos con $f''(x_0) \neq 0$

3 Cálculo de extremos relativos en $\mathbb{R}^2$

Candidatos a extremo relativo

① Puntos críticos

→ En $\mathbb{R}$: recta tangente horizontal → $f'(x_0) = 0$

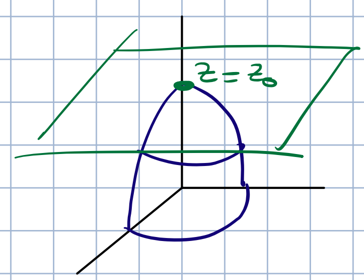
→ En $\mathbb{R}^2$: plano tangente horizontal $\nabla f(\bar{x}_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right) = (0,0)$

Podemos comprobar que esto es así aplicando conceptos previos.
La expresión del plano tangente a una superficie era:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

El que el plano sea horizontal, significa que $z = z_0 \ \forall (x, y)$,

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = (0, 0)$$



Otra manera de ver esto mismo es que tenemos como objetivo que la normal apunte a $\bar{n} = (0, 0, 1)$. Como sabemos, la normal se calcula como $\bar{n} = (-\nabla f, 1) \rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

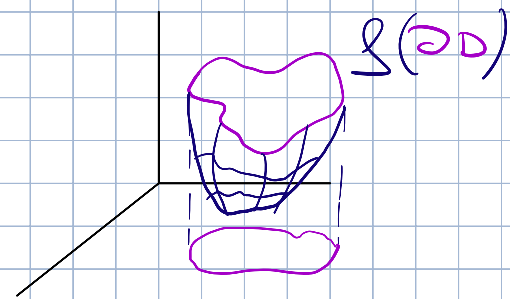
② Puntos singulares. pts donde $f(x,y)$ no es diferenciable. En otras palabras, donde no existe el plano tangente.

③ Pts en la frontera

→ En $\mathbb{R}$: $f(a)$, $f(b)$ y comparar con el resto

→ En $\mathbb{R}^2$: la frontera es una curva. Evaluar $f(x,y)$ en ∂D y buscar extremos de una variable en ella.

Lo veremos con ejemplos

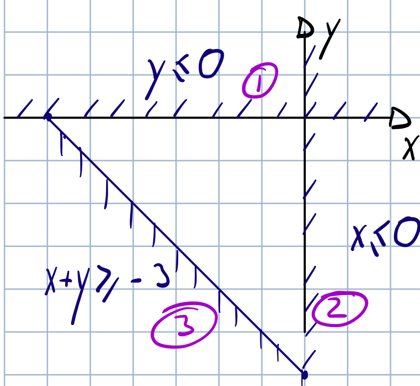


4 Extremos absolutos en $\mathbb{R}^2$

Evaluar $f(x)$ en todos los candidatos y coger los valores máximo y mínimo (proceso equivalente al de $\mathbb{R}$).

Ejemplo Obtener máximo y mínimo absoluto de

$$f(x,y) = x^2+y^2-xy+y+x \quad \text{en} \quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \; x\leq 0,\; y\leq 0,\; x+y\geq -3\}$$



	x	y	f(x,y)	
$\nabla f = 0$	-1	-1	-1	min abs
∂D	$-1/2$	0	$1/4$	
	0	$-1/2$	$-1/4$	
	-3	0	6	max abs
	0	0	0	
	0	-3	6	max abs
	$-3/2$	$-3/2$	$-3/4$	

Esta tabla se va rellenando con los resultados que vienen a continuación

① Pts críticos

$$\nabla f(x,y) = (2x - y + 1,\ 2y - x + 1) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (x,y) = (-1,-1) \in D \qquad f(-1,-1) = -1$$

Faltaría estudiar el tipo de extremo (máximo o mínimo relativo) de momento, nos conformamos con ver que es un pto crítico.

② Pts singulares

No hay, $f(x,y) \in C^\infty$

③ Pts frontera

La frontera está compuesta por tres rectas. Buscar candidatos de una dimensión dentro de ellos.

①

$$y=0,\quad x \in [-3,0]:\ f(x,y)\Big|_{\partial D_1} = f(x,0) = f_1(x) = x^2 + x$$

Tenemos que analizar $f_1(x) = x^2 + x$ definida en $x \in [-3,0]$ así que buscamos aquí pts críticos, singulares y frontera.

$$f_1'(x) = 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\tfrac{1}{2} \qquad f_1''(-\tfrac{1}{2}) = 2 > 0$$

$(x,y) = (-\tfrac{1}{2}, 0)$ (mínimo relativo)

Vuelve a no haber pts singulares por ser $f \in C^\infty$ y en cuanto a la frontera

$$f(-3,0) = 6 \quad y \quad f(0,0) = 0$$

2

$x = 0, \quad y \in [-3, 0]: \; f(x,y)\Big|_{\partial D_2} = f(0,y) = f_2(y) = y^2 + y$

$f_2'(y) = 2y + 1 = 0 \longrightarrow y = -1/2 \longrightarrow (x,y) = (0, -1/2)$

$f_2''(-1/2) = 2 > 0$ (mínimo relativo)

Y tb la frontera

$(x,y) = (0,-3)$

$(x,y) = (0,0)$

3

$x + y = -3 \longrightarrow y(x) = -3 - x, \quad x \in [-3, 0]:$

$f(x,y)\Big|_{\partial D_3} = f(x, y(x)) = f(x, -3-x) \Rightarrow$

$f_3(x) = x^2 + (-x-3)^2 + x(x+3) + x - x - 3 =$

$= x^2 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 3x - 3 = 3x^2 + 9x + 6$

$f_3'(x) = 6x + 9 = 0 \longrightarrow x = -3/2$

$y = -3 - x = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

$(x,y) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad f_3''\left(-\frac{3}{2}\right) = 6 > 0$ (mínimo rel)

y la frontera $(x,y) = (-3,0)$; $(x,y) = (0,-3)$.

EJEMPLO

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \}$

	x	y	$f(x,y)$	
$\nabla f = 0$	0	0	2	min abs
∂D	0	-2	4	max abs
	0	2	4	max abs
	1	0	3	
	-1	0	3	

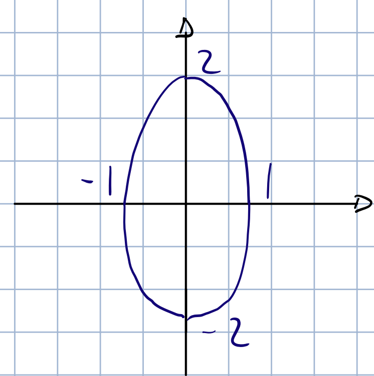
① Puntos críticos

$\nabla f = (2x, 2y) = (0,0) \longrightarrow (x,y) = (0,0)$

② Puntos singulares

$f \in C^\infty \longrightarrow$ no hay puntos singulares

③ Puntos frontera



$x^2 + \frac{1}{4} y^2 = 1$

$y^2 = 4 - 4x^2 \longrightarrow y = \pm 2 \sqrt{1 - x^2}$

$f(x,y)\Big|_{\partial D} = f(x, \pm 2\sqrt{1-x^2}) = f_{\partial D}(x) = x^2 + (\pm\sqrt{1-x^2})^2 + 2$

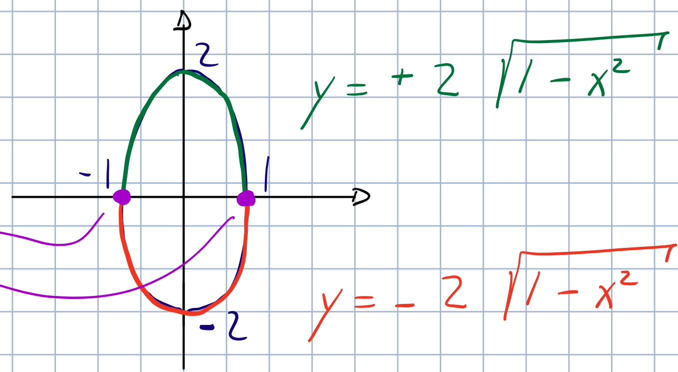
$f_{\partial D}(x) = x^2 + 4 - 4x^2 + 2 = -3x^2 + 6 \quad , \quad x \in [-1, 1]$

$$f'_{\partial D}(x) = -6x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$y = \pm 2\sqrt{1-x^2} = \pm 2 \left| \begin{array}{ll} (x,y) = (0,2) & f''(x) = -2 < 0 \\ (x,y) = (0,-2) & (\text{max rel}) \end{array} \right.$$

¡Recordemos que tenemos que analizar los extremos del intervalo!
En este caso, los hemos generado de forma artificial al representar la frontera como:

$$y = \pm 2\sqrt{1-x^2}$$



Los extremos artificiales son $(x,y) = (-1,0)$
$(x,y) = (1,0)$

Este último pto, podríamos haberlo resuelto de forma alternativa parametrizando la curva usando coordenadas polares. Todas las parejas de puntos (x,y) que cumplen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Los puedo escribir como

$$\left. \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{array} \right| \quad \text{con} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Podemos ver que esto es verdad sustituyendo la segunda expresión en la primera y obteniendo: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

En el caso de interés aquí, $a=1$, $b=2$

$$x^2+\frac{1}{4}y^2=1 \longrightarrow \begin{array}{l} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{array} \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

Esta parametrización es útil ya que es única para toda la curva y no genera extremos artificiales.

$$f(x,y)\Big|_{\partial D}=f(\cos\theta, 2\sin\theta)=f_{\partial D}(\theta)=\cos^2\theta+4\sin^2\theta+2=$$
$$=3\sin^2\theta+3$$

$$f'_{\partial D}(\theta)=6\cos\theta\sin\theta=0$$

$$\cos\theta=0 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \longrightarrow (0,\pm 2)$$

$$\sin\theta=0 \rightarrow \theta=0,\ \pi \longrightarrow (\pm 1, 0)$$

$$f''_{\partial D}(\theta)=6(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\theta=0,\ \pi \rightarrow f''_{\partial D}(\theta)=6>0 \quad (\text{mínimos})$$

$$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \longrightarrow f''_{\partial D}(\theta)=-6<0 \quad (\text{máximos})$$

No vuelvo a mirar los extremos $\theta=0\equiv\theta=2\pi$ ya que han resultado ser pts críticos.

EXTREMOS II

1 Cálculo de extremos relativos en $\mathbb{R}^p$

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces sus puntos críticos cumplen:

$$\nabla f(x_0) = \left(f'_{x_1}(x_0), f'_{x_2}(x_0), f'_{x_3}(x_0), \ldots, f'_{x_p}(x_0)\right) = (0, \ldots, 0)$$

$\mathbb{R} \longrightarrow$ tangente horizontal

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ plano horizontal

$\mathbb{R}^p \longrightarrow$ hiperplano horizontal

2 Clasificación de extremos relativos en $\mathbb{R}^p$

Si tomamos el desarrollo de Taylor de una función en un punto crítico tenemos

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\cancel{df(x_0; (x-x_0))}}_{0} + \frac{1}{2} d^2 f(x_0; (x-x_0)) + \ldots$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0; (x-x_0))$$

$\rightsquigarrow$ Igual que en $\mathbb{R}$, si este término es distinto de 0, nos da información sobre el tipo de extremo

Veamos cómo queda en el caso particular de $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \cancelto{0}{\nabla f(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}[x-x_0, y-y_0] \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

Luego $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) =$

$$= \frac{1}{2}[x-x_0, y-y_0] \underbrace{\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}}_{Hf(x_0,y_0) \to \text{Matriz Hessiana.}} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

Esto es una forma cuadrática cuya matriz es la matriz Hessiana. Analizando la forma cuadrática, podemos saber ante que tipo de extremo nos encontramos.

3 Repaso de Formas cuadráticas (Álgebra lineal) y aplicación al cálculo de extremos.

→ Recomendar clase de Gilbert Strang Lecture 27 Positive Definite Matrices and Minima. www.ocw.mit.edu → 18.06sc

Vamos a cambiar un poco la notación

al vector $\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$ le llamaremos x y a la matriz $\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)}$ le llamaremos S (es simétrica). Con esta nueva notación:

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = x^T S x$$

El objetivo es ver si $\Delta f > 0$ (mínimo) o $\Delta f < 0$ (máximo) para cualquier valor de $x \neq 0$. De álgebra sabemos que:

$x^T S x > 0 \longleftrightarrow S$ es definida positiva y esto se cumple si se dan 4 condiciones (son equivalentes)

Autovalores de S $\lambda > 0 \longleftrightarrow S$ es definida positiva

Pivotes de S $> 0 \longleftrightarrow S$ es definida positiva

Para matrices simétricas, los signos de los pivotes y los autovalores coinciden

Menores ppales $> 0 \longleftrightarrow S$ es definida positiva $\rightarrow$ Criterio de Sylvester

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{|a_{11}|}_{A_1}, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{A_2}, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{A_3}$$

Estos son los menores principales

Con mirar si se cumple cualquiera de las condiciones es suficiente. Si S es definida positiva $\longrightarrow$ mínimo local.

De forma equivalente, podemos mirar si S es definida negativa $\longrightarrow$ máximo local

$x^T S x < 0 \longleftrightarrow S$ es definida negativa y esto se cumple si se dan 4 condiciones (son equivalentes)

Autovalores de S $\lambda < 0 \longleftrightarrow S$ es definida negativa

Pivotes de $S < 0 \longleftrightarrow S$ es definida negativa

Para matrices simétricas, los signos de los pivotes y los autovalores coinciden

$(-1)^K$ Menores ppales $> 0 \longleftrightarrow S$ es definida negativa $\rightarrow$ Criterio de Sylvester

Este criterio queda:

$$\underbrace{-|a_{11}|}_{-A_1} > 0, \quad \underbrace{+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{A_2} > 0, \quad \underbrace{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{-A_3} > 0 \ \ldots$$

Con mirar si se cumple cualquiera de las condiciones es suficiente. Si S es definida negativa $\longrightarrow$ máximo local.

Condición autovalores en detalle

Partimos de una matriz simétrica S. Sabemos que en este caso podemos escribir $S = Q \Lambda Q^T$ donde:

* Q es una matriz ortogonal $(Q^T = Q^{-1})$ formada por los autovectores de S
* Λ es una matriz diagonal formada por los autovalores de S, que además sabemos que son reales.

De modo que $x^T S x = x^T Q \Lambda Q^T x = y^T \Lambda y =$

$y = Q^T x \rightarrow y^T = x^T Q$

$$= [y_1, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Como los términos y_i aparecen elevados al cuadrado (son siempre positivos) el signo depende solo de los autovalores.

* definida positiva : $\lambda_i > 0 \ \forall i$
* definida negativa : $\lambda_i < 0 \ \forall i$

Incluimos tres nuevas opciones

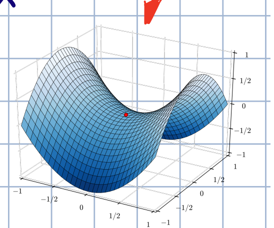
* semidefinida positiva $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$
* semidefinida negativa $\lambda_i \leq 0 \ \forall i$
* indefinida : algunos $\lambda_i \geq 0$ y otros $\lambda_i \leq 0$

Relación con la forma de la función

$Hf(x_0, y_0)$	$\omega(x) = x^T Hf\, x$	Forma función	Ejemplo
Definida positiva	$\omega(x) > 0$	Mínimo relativo	$x^2 + y^2$
Definida negativa	$\omega(x) < 0$	Máximo relativo	$-(x^2 + y^2)$
Indefinida	$\omega(x) \geq 0$ $\omega(x) \leq 0$	Punto de silla	$x^2 - y^2$
Semidef. positiva	$\omega(x) \geq 0$	Ni idea	x^2
Semidef negativa	$\omega(x) \leq 0$	Ni idea	$-x^2$

Estos casos hay que estudiarlos con la def de la función

Punto de silla (Saddle point)



Pintar usando geogebra o similar

4 Clasificación de extremos en $\mathbb{R}^2$, ejemplos prácticos

Volviendo al punto de partida

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}[x-x_0, y-y_0]\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que analizar la matriz Hessiana (2x2).

Calcular autovalores de una matriz 2x2 es sencillo si tenemos en cuenta lo siguiente:

$\operatorname{Det} A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ (Det A es igual al producto de sus autovalores)

$\operatorname{Tr}(A) =$ Suma entradas de la diagonal $= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$

Aplicado a una matriz 2x2 nos da una manera sencilla de calcular autovalores. También sirve para comprobar si hemos calculado bien los λs.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A| = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\operatorname{Tr}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad |A| = 4 - 4 = 0 = \lambda_1 \lambda_2 \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 5$$

$$\operatorname{Tr} A = 5 = \lambda_1 + \lambda_2$$

EJEMPLO Hallar los extremos de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$ y clasificar

Puntos críticos: $\nabla f = [0, \dots, 0]$

$$\left[e^{1-x^2-y^2}\left(2x + (-2x)(x^2+2y^2)\right),\ e^{1-x^2-y^2}\left(4y + (-2y)(x^2+2y^2)\right)\right] =$$

$$= e^{1-x^2-y^2}\left(2x(1-x^2-2y^2),\ 2y(2-x^2-2y^2)\right) = [0, 0]$$

Teniendo en cuenta que $e^{1-x^2-y^2} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2x(1-x^2-2y^2) = 0 \\ 2y(2-x^2-2y^2) = 0 \end{array}\right|$$

Sistema de dos ecuaciones (no lineales) con dos incógnitas.

Puede tener 0 soluciones, n soluciones o incluso ∞ soluciones. No hay un "método de Gauss" para resolver de forma sencilla. En informática se ve el método de Newton para encontrar raíces de forma numérica. Aquí resolveremos de forma "artesanal".

Si hacemos $x = 0$, la primera ec. se cumple automáticamente y la segunda queda:

$$x = 0 \to 2y(2-2y^2) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \to (0,0);\ (0,1);\ (0,-1)$$

De forma equivalente

$$y = 0 \to 2x(1-x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \to (0,0);\ (1,0);\ (-1,0)$$

Así que tenemos 5 puntos críticos:

$$(0,0);\ (0,1);\ (0,-1);\ (1,0);\ (-1,0)$$

Clasificación de extremos

$$Hf = e^{1-x^2-y^2}\begin{bmatrix} 2(1-x^2-2y^2)-4x^2-4x^2(1-x^2-2y^2) & -4xy(1-x^2-2y^2)-8xy \\ -4xy(1-x^2-2y^2+2) & -4y^2(2-x^2-2y^2)+2(2-x^2-2y^2)-8y^2 \end{bmatrix}$$

Tengo que evaluar Hf en los pts críticos.

$$Hf(0,0) = e\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{definida positiva} \longrightarrow \text{mínimo}$$

$$Hf(1,0) = e\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{indefinida} \longrightarrow \text{pto de silla}$$

$$Hf(-1,0) = e\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{indefinida} \longrightarrow \text{pto de silla}$$

$$Hf(0,1) = e\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{definida negativa} \longrightarrow \text{máximo}$$

$$Hf(0,-1) = e\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{definida negativa} \longrightarrow \text{máximo}$$

5 Curvas de nivel cerca de los extremos

Las formas cuadráticas definen cónicas cerca de un punto crítico.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} x^T Hf\, x$$

Si diagonalizamos $Hf = S \Lambda S^T \longrightarrow \frac{1}{2} x^T S \Lambda S^T x = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \Lambda \tilde{x}$

Simétrica

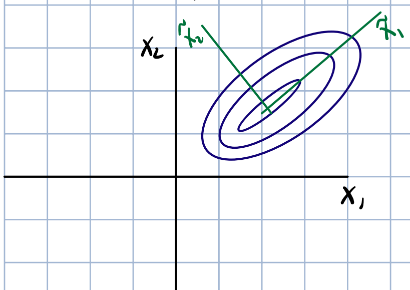
con $\tilde{x} = S^T x$

En el caso particular de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Delta f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \tilde{x}_2^2$$

¿Cómo son las curvas de nivel de $f(x, y)$ cerca de (x_0, y_0)?

* Definida positiva : $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (mínimo)

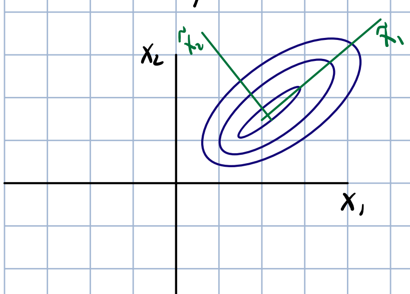


$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 = C - f(x_0, y_0) = C' \quad \text{elipses}$$

Valor, altura de curva de nivel $f(x, y) = C$

* Definida negativa : $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (máximo)

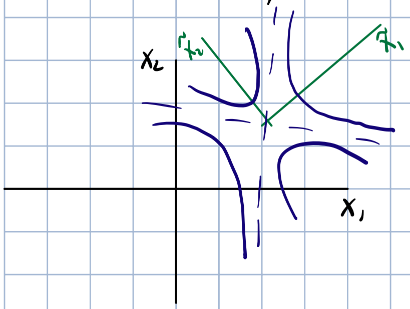
C' es < 0 por ser un máximo



$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 = C - f(x_0, y_0) = C' \quad \text{elipses}$$

Valor, altura de curva de nivel $f(x, y) = C$

* Indefinida : $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0$



$$\underbrace{\lambda_1}_{\oplus} \tilde{x}_1^2 + \underbrace{\lambda_2}_{\ominus} \tilde{x}_2^2 = C - f(x_0, y_0) = C'$$ hipérbolas.

C' será a veces $\oplus$ y a veces $\ominus$