

Base ortogonal  $q_1, \dots, q_n$

Matriz ortogonal  $Q$

Gram - Schmidt  $A \rightarrow Q$

Los vectores son ortonormales si:

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Construimos una matriz usando esos vectores como columnas:

$$Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Ahora escribimos  $q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$  en versión matricial

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ & \vdots & \\ - & q_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix}$$

! No es necesario que la matriz original sea cuadrada!  
 Por convención, se reserva el nombre de matriz ortogonal  
 al caso en que la matriz sea cuadrada

Si  $Q$  es cuadrada, entonces  $Q^T Q = I$  nos dice que  $Q^T = Q^{-1}$ .

Ejemplos:

Matrices de permutación

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Matrices de rotación

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad Q^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que  $q_i^T q_i = 1$

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Hadamard

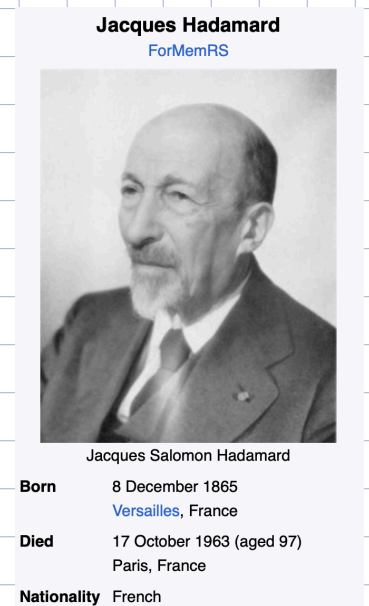
El tamaño de estas matrices es 1, 2 o múltiplo de 4. Es condición necesaria, pero no asegura su existencia

$H_{n=428}$  se encontró en 2005

$H_{n=668}$  no se conoce

Se pueden construir de forma recursiva

Función matlab  $\rightarrow$  hadamard



$$\begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix}$$

Ejemplo rectangular  $Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$   $Q^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$QQ^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

¿Pg son interesantes las matrices ortogonales?

Recordemos la fórmula para proyectar en el espacio de las columnas (recordatorio Lecture 15-16) aplicada a una matriz ortogonal  $Q$

$$P = Q(Q^T Q)^{-1} Q^T = QQ^T$$

Si  $Q$  es cuadrada,  $Q^T = Q^{-1} \rightarrow P = I$ . Veamos si tiene sentido:

$Q$   $n \times n$

Además, columnas independientes, ya que son ortogonales

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_3 v_3 \rightarrow v_3^T c_1 v_1 + v_3^T c_2 v_2 = v_3^T c_3 v_3$$

$$0 + 0 = c_3 \rightarrow c_3 = 0$$

Así que  $\text{rank } Q = n \rightarrow \dim C(Q) = n$  y no hay que hacer ninguna proyección

Veamos si cumple las propiedades de una matriz de proyección (caso general)  $P = QQ^T$

① Es simétrica:  $P = P^T = (QQ^T)^T = QQ^T = P \checkmark$

② Si proyectas dos veces, la segunda vez no hace nada

$$(QQ^T)(QQ^T) = QQ^T$$
$$QQ^T = QQ^T \checkmark$$

Si aplicamos esto a la resolución de sistemas lineales (mínimos cuadrados) (Sistemas mínimos cuadrados)

$$A^T A \hat{x} = A^T b \rightarrow Q^T Q \hat{x} = Q^T b \rightarrow \hat{x} = Q^T b$$

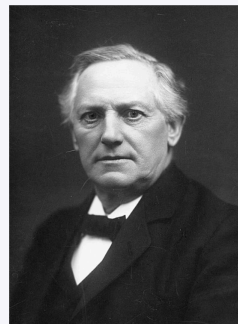
Esto es, cada componente de  $\hat{x}_i = q_i^T b \rightarrow$  si tenemos una base ortogonal, la proyección sobre la componente  $i$  es  $q_i^T b$ , el producto escalar. Este resultado es muy importante y aparece en muchas ramas de las matemáticas.

## Gram-Schmidt and QR

Recordatorio + extensión  $\rightarrow$  QR

Dado un conjunto de vectores me da una base ortogonal.

Jørgen Pedersen Gram



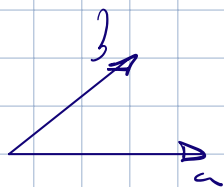
**Born** 27 June 1850  
Nustrup, Duchy of Schleswig, Denmark  
**Died** 29 April 1916 (aged 65)  
Copenhagen, Denmark

Erhard Schmidt



Erhard Schmidt (courtesy MFO)  
**Born** 13 January 1876  
Tartu, Governorate of Livonia (now Estonia)  
**Died** 6 December 1959 (aged 83)  
Berlin

Vectores  $a, b$  (independientes)  $\rightarrow$  Los quiero convertir en ortogonales  $A, B$

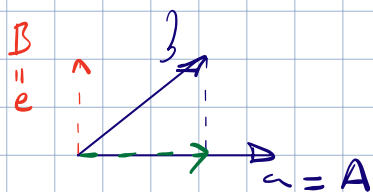


$\downarrow$

Al final los normalizo

$$f_1 = \frac{A}{\|A\|}, \quad f_2 = \frac{B}{\|B\|}$$

Todo el proceso se basa en una sencilla idea



$$B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A$$

$\rightarrow$  repaso, fórmula proyección.

Comprobemos que  $A \perp B$ :

$$A^T B = A^T \left( b - \frac{A^T b}{A^T A} A \right) = 0$$

Parece que el proceso funciona con dos vectores, probemos ahora con 3.

Vectores independientes  $a, b, c$   $\rightarrow$  Vectores ortogonales  $A, B, C$   $\rightarrow$  Vectores ortonorm.  $f_1 = \frac{A}{\|A\|}, f_2 = \frac{B}{\|B\|}, f_3 = \frac{C}{\|C\|}$

A y B los hacemos igual que antes

Ahora necesito C que sea  $\perp$  a A y a B

$$C = c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B$$

$C \perp A$  y  $C \perp B$  (comprobadlo vosotros)

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{A^T b}{A^T A} A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$B \perp A$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

No  
as b  
will be.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$C(A) = C(Q)$   
 ¡Generan el mismo espacio!  
 B es comb. lineal de a y b

Igual que el proceso de eliminación resulta en LU,  
 el proceso de Gram-Schmidt resulta en QR

$A = LU$ ,  $A = QR$  Gram-Schmidt en  
 forma matricial.

$$\begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^T q_1 & a_2^T q_1 \\ a_1^T q_2 & a_2^T q_2 \end{bmatrix}$$

R es triangular superior

Más detalles en la próxima clase