

EXTREMOS III . Extremos condicionados

1 Introducción

Sabemos obtener extremos libres, e.g. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

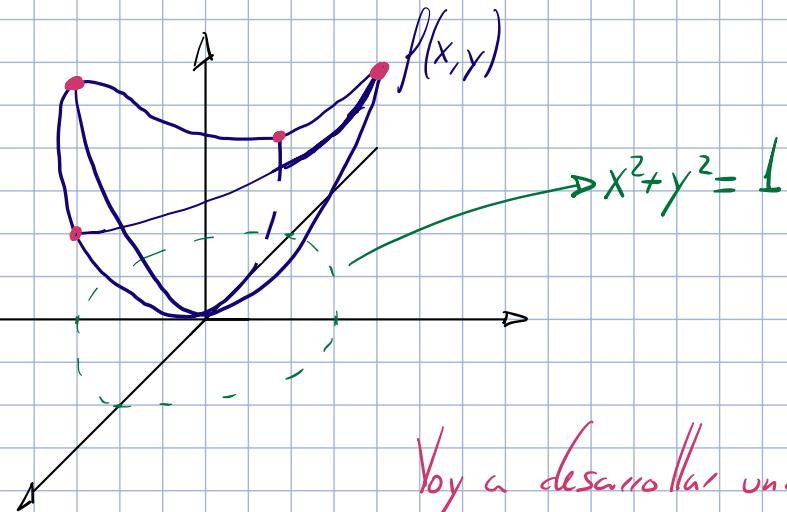
$$\nabla f = (2x, 4y) = (0, 0) \rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta f > 0 \text{ (mínimo)}$$

Vamos a estudiar ahora cómo resolver extremos sujetos a ligaduras. Condición a satisfacer por las variables.

ESEMPIO

Extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en puntos que cumplen $x^2 + y^2 = 1$



$$(1, 0) \rightarrow f = 1$$

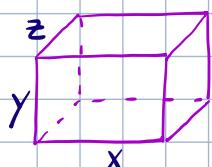
$$(0, 1) \rightarrow f = 2$$

$$(-1, 0) \rightarrow f = 1$$

$$(0, -1) \rightarrow f = 2$$

Voy a desarrollar una técnica que me permita encontrar extremos sujetos a una restricción.

Ejemplo: ¿Qué dimensiones tiene una caja de volumen 1 con área mínima?



$$\text{Área} = f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz \quad | \quad f(x, y, z) \quad | \quad V = xyz = 1$$

* Tenemos que obtener los extremos de $f(x)$ \neq extremos de $f(x)$ libres

* Se parece a lo que haciamos con la frontera. Añadir una ligadura disminuye en 1 la dimensión del problema.

Opción 1

Podemos despejar / parametrizar la curva (no siempre es posible).
Lo convertimos en un problema de extremos libres con una dim. menos.

Para el caso anterior:

Extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en puntos que cumplan $x^2 + y^2 = 1$

Puede ir bien un cambio de variable a polares.

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos \theta \\ y(\theta) &= \sin \theta \end{aligned} \quad \left| \quad x^2(\theta) + y^2(\theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \right.$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Se cumple de forma automática la ligadura.

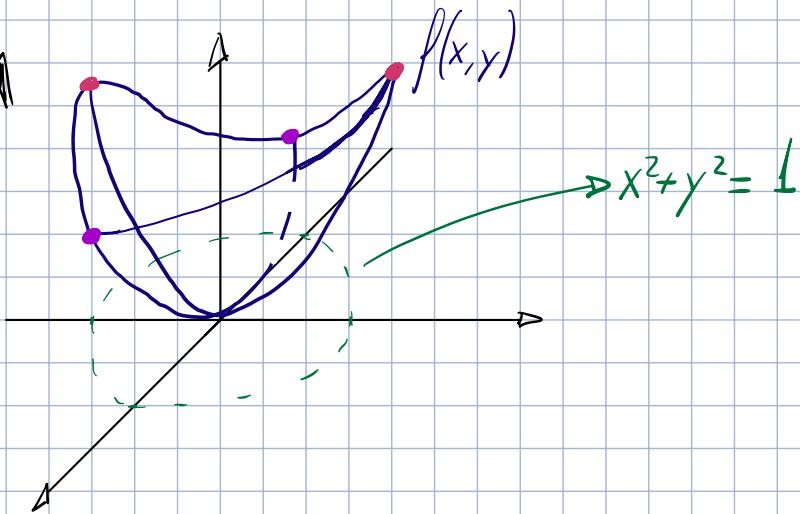
$$f(x,y) \Big|_C = f(x(\theta), y(\theta)) = \cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta = 1 + \sin^2 \theta = f_c(\theta)$$

Ahora es un problema de cálculo de extremos estándar. Busca los puntos críticos.

$$f'_c(\theta) = 2\cos \theta \sin \theta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{(x,y)} (0,1), (0,-1) \\ \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0, \pi \rightarrow (1,0), (-1,0) \end{array} \right.$$

$$f_c''(\theta) = -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta$$

- $\theta = 0, \pi \rightarrow f_c''(\theta) = 2 > 0$ (mínimos)
- $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rightarrow f_c''(\theta) = -2 < 0$ (máximos)



Opción 2

Esta opción es válida incluso si no podemos introducir la ligadura en la función a optimizar.

Ejemplo $f(x, y) = x + y$
 $C = xe^y + ye^x = 0$

Para estos casos tengo que usar el método de los multiplicadores de Lagrange

2 Extremos condicionados . Condiciones necesarias

Sea $f(x, y): D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $g(x, y) = 0$ con $g(x, y): D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ambas de clase C^1 .

Obtener extremos (x_0, y_0) de $f(x, y)$ condicionada a $g(x, y) = 0$, $\begin{cases} f(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$.

→ El extremo es un punto que cumple $g(x_0, y_0) = 0$

→ $g(x, y) = 0$ es una ecuación que relaciona ambas variables.
¿Puedo despejar localmente una en función de la otra?

Teorema de la función implícita

$$g \in C^1$$

$$g(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \rightarrow y = y(x), \quad y'(x_0) = - \left. \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \right\} \text{ Si } \nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \rightarrow x = x(y), \quad x'(y_0) = - \left. \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)} \right\} \text{ entonces pude despejar alguna en función de la otra}$$

Extremos condicionados. Supongamos $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, entonces

localmente $y = y(x)$. $f(x, y) \underset{c}{=} f(x, y(x)) = f_c(x) \rightarrow$ Lo he convertido en un problema de extremos libres.

Puedo obtener pts críticas: $f'_c(x) = 0 = \frac{d}{dx}(f(x, y(x))) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = 0, \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left[-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \right] = 0 \rightarrow \boxed{\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} \equiv \lambda} \quad \begin{matrix} \text{Defino un} \\ \text{factor de} \\ \text{proporcionalidad} \end{matrix} \lambda$$

Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \end{array} \right\} \boxed{\nabla f = \lambda \nabla g}$$

- * Son paralelos
- * Ojo $\nabla g \neq [0 \ 0]$

Resumen: obtener pts críticas.

① Extremos libres $f(x, y)$: $\nabla f = (f'_x, f'_y) = (0, 0)$

\rightarrow 2 ecuaciones $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$

\rightarrow 2 incógnitas: x_0, y_0

(2) Extremos $f(x, y)$ condicionados a $g(x, y) = 0$ (con $\nabla g \neq 0$).

Introducimos una nueva incógnita, λ , tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$

$$\rightarrow 3 \text{ ecuaciones: } f'_x(x_0, y_0) = \lambda g'_x(x_0, y_0)$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lambda g'_y(x_0, y_0)$$

$$g(x_0, y_0) = 0$$

$\rightarrow 3$ incógnitas (x_0, y_0, λ)

Significado geométrico

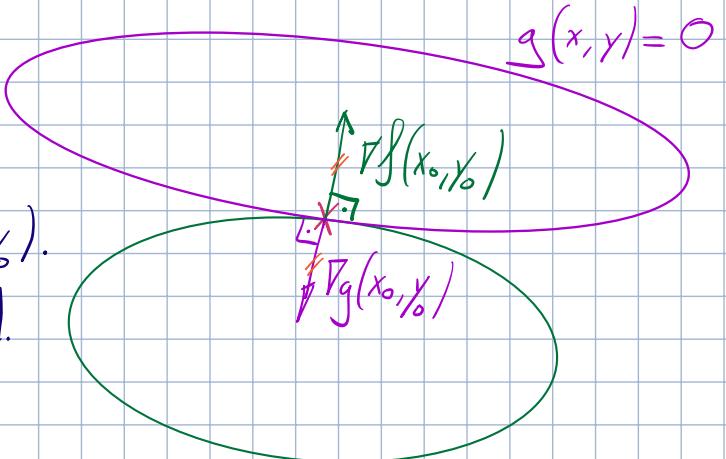
La curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por el extremo condicionado es $f(x, y) = K = f(x_0, y_0)$.

El gradiente $\nabla f(x, y)$ es perpend.

a las curvas de nivel.

La restricción $g(x, y) = 0$ es una curva de nivel de $g(x, y)$. El gradiente $\nabla g(x_0, y_0)$ es perpendicular a la restricción.

En (x_0, y_0) las normales a la curva de nivel y a la restricción son paralelas. Esto significa que la curva de nivel de $f(x, y)$ tiene un gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ que es \perp a la restricción.



Ejemplo:

Extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en puntos que cumplen $x^2 + y^2 = 1$

Función a optimizar: $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

Restricción: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\rightarrow 3 \text{ ecuaciones: } f'_x(x_0, y_0) = \lambda g'_x(x_0, y_0)$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lambda g'_y(x_0, y_0)$$

$$g(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{array}{l} 2x = \lambda 2x \\ 4y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(2-\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

3 ecs con 3 incógnitas. Resolvemos:

$$x = 0 \rightarrow 2x(1-\lambda) = 0$$

$$2y(2-\lambda) = 0 \longrightarrow \pm 2(2-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

$$y = 0 \rightarrow 2x(1-\lambda) = 0 \longrightarrow \pm 2(1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$2y(2-\lambda) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Soluciones: $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$ (λ no es importante)

¡Sigue lo mismo que sustituyendo!

Candidatos a extremo.

3 Método de los multiplicadores de Lagrange

Del ejemplo anterior concluimos que los extremos de $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ condicionados a $g(x, y) = 0$ son los puntos críticos de $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $(x, y; \lambda) \mapsto L(x, y; \lambda)$

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Proof. Los puntos críticos de esta función son $\nabla L = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = f'_x + \lambda g'_x = 0$$

(Recordemos que esto funciona siempre que $\nabla g \neq 0$)

$$\frac{\partial L}{\partial y} = f'_y + \lambda g'_y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

Esto es extensible a un caso más general $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$L : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x; \lambda) \mapsto L(x; \lambda)$$

$$x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_p]$$

$$L(x; \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

Multiplicador de Lagrange

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = f'_{x_1} + \lambda g'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p} = f'_{x_p} + \lambda g'_{x_p} = 0 \end{array} \right. + 1 \text{ ecuación: } \left| \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) = 0 \end{array} \right.$$

p+1 ecuaciones para

p+1 incógnitas $[x_1, x_2, \dots, x_p] + \lambda$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = f'_{x_1} + \lambda g'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p} = f'_{x_p} + \lambda g'_{x_p} = 0 \end{array} \right.$$

Si en vez de una tengo varias restricciones, procedo seguir usando la misma metodología añadiendo multiplicadores.

Puntos críticos de $f(x)$ restringido a $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$.

A través del teorema de la función implícita llegamos a:

$$\mathcal{L}(x; \lambda, \mu) = f(x) + \lambda g(x) + \mu h(x) \rightarrow \nabla \mathcal{L} = -\lambda \nabla g - \mu \nabla h$$

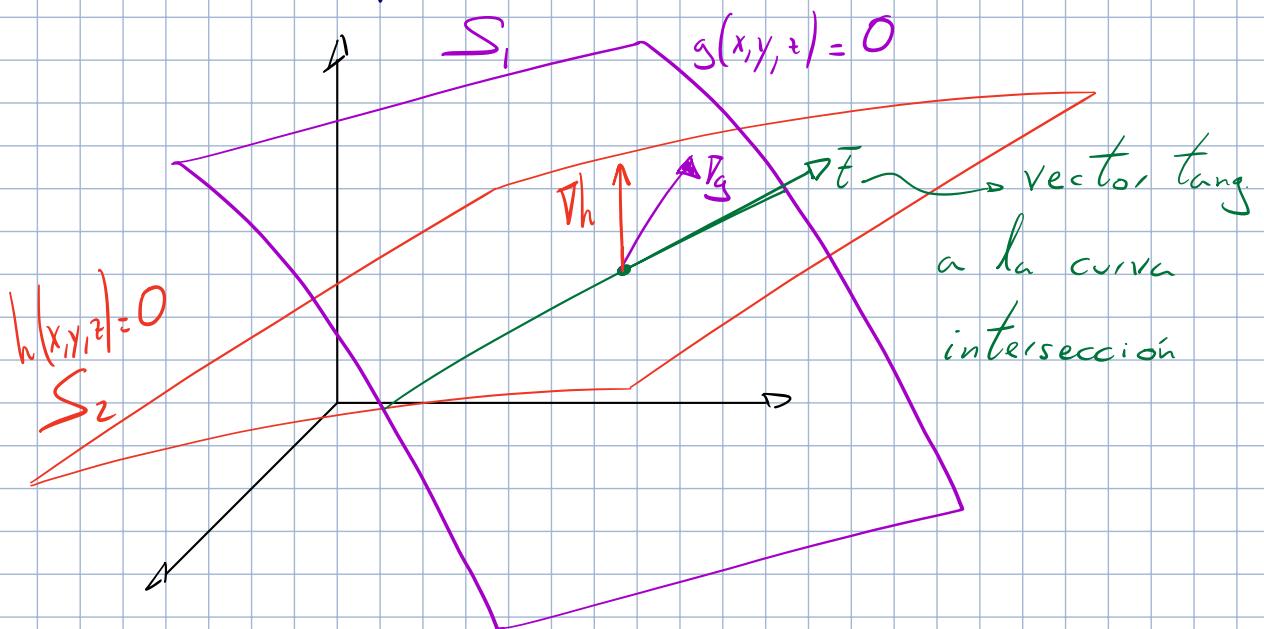
$\hookrightarrow x = [x_1, x_2, \dots, x_p]$

Significado geométrico, caso $g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g(x, y, z) = 0 \rightarrow \text{Superficie de nivel } S_1$$

$$h(x, y, z) = 0 \rightarrow \text{Superficie de nivel } S_2$$

Intersección de las s-superficies \rightarrow curva



$\nabla \mathcal{L} = -\lambda \nabla g - \mu \nabla h \rightarrow$ Significa que el $\nabla \mathcal{L}$ apunta en dirección perpendicular a la curva intersección de las superficies de nivel que representan las restricciones.

Ejemplos.

Distancia mínima de $P(1, 0)$ a $y^2 = 4x$.

$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 \rightarrow$ distancia de todos los puntos del plano (x, y) al $P(1, 0)$

$g(x, y) = y^2 - 4x \rightarrow$ restricción

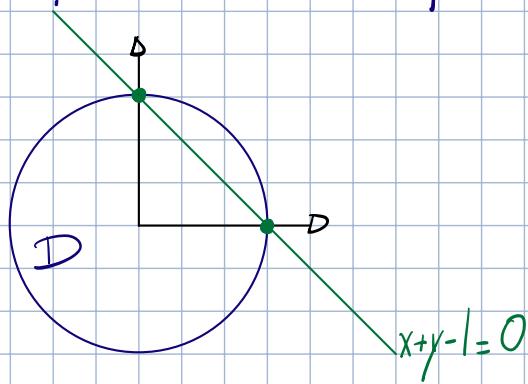
$L(x, y; \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(y^2 - 4x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 2(x-1) - 4\lambda = 0 \rightarrow 2x - 4\lambda = 2 \quad |_{y=0} : x=0, \lambda = -2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 2y + 2y\lambda = 0 \rightarrow 2y(1+\lambda) = 0 \quad |_{\lambda=-1} : x=-1, y=\cancel{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} : y^2 = 4x$$

Ejemplo Calcular extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ condicionado a $x + y - 1 = 0$



$$L = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

$$\nabla L = 0 : \begin{cases} 2x + \lambda = 0 & |_{x=y=\frac{1}{2}} \\ 2y + \lambda = 0 & |_{\lambda=-1} \\ x + y = 1 & \end{cases}$$

La función está definida en D compacto. Tengo que estudiar los puntos frontera que además cumplen la restricción: $(1, 0)$ y $(0, 1)$

x	y	f	Tipo
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	mínimo
1	0	1	máximo
0	1	1	máximo

Obtengo el tipo comparando los distintos valores.

ESEMPIO

Hallar los pts de $x^2 + y^2 + xy = 3$ cuya distancia al origen es mínima / máxima

Distancia al origen

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Restricción

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} L = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3) \end{array} \right.$$

$$\nabla L = 0: \begin{cases} 2x + \lambda(2x + y) = 0 \\ 2y + \lambda(2y + x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{2x}{2x+y} = -\frac{2x}{2y+x} \\ 2(2y+x) = 2(2x+y) \end{cases}$$

$$2xy + x^2 = 2xy + y^2$$

$$x^2 = y^2 \rightarrow x = y \quad (\text{I})$$

$$x = -y \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) \quad x = y \rightarrow x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (1, 1), (-1, -1), f(\pm 1, \pm 1) = 2$$

$$(\text{II}) \quad x = -y \rightarrow x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$$

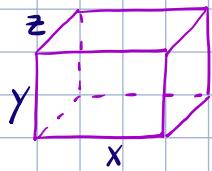
Minimo

$$\rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), f(\pm \sqrt{3}, \mp \sqrt{3}) = 6$$

Máximo

Con lo q tengo puedo encontrar puntos críticos pero no clasificarlos. Hasta ahora los hemos estado clasificando comparando entre s.:

Ejemplo: ¿Qué dimensiones tiene una caja de volumen 1 con área mínima?



$$\text{Área} = f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz \quad | \quad f(x, y, z) \\ \text{Volumen} = xyz = 1 \quad | \quad V = xyz = 1$$

$$L(x, y, z; \lambda) = 2xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 1)$$

$$\nabla L = 0: 2y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$2x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$xyz = 1$$

Intento que xyz aparezca en las tres primeras ecuaciones (se que $xyz = 1$).

$$x(2y + 2z + \lambda yz = 0) \rightarrow 2xy + 2xz = -\lambda$$

$$y(2x + 2z + \lambda xz = 0) \rightarrow 2xy + 2yz = -\lambda$$

$$z(2x + 2y + \lambda xy = 0) \rightarrow 2xz + 2yz = -\lambda$$

$$2xy = 2xz \quad (\text{si } x \neq 0, \text{ que debe serlo para } xyz = 1)$$

$$y = z$$

$$2xz = 2yz$$

$$x = y$$

De modo que $x = y = z = 1 \rightarrow$ No sabemos si esto es área máxima o mínima!

En este problema, podríamos hacer sustituciones, llegando a:

$$f(x, y) = 2xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$$

Se deja como problema para casa comprobar si lo que encontramos es un máximo o un mínimo. (Criterio del Hessiano).

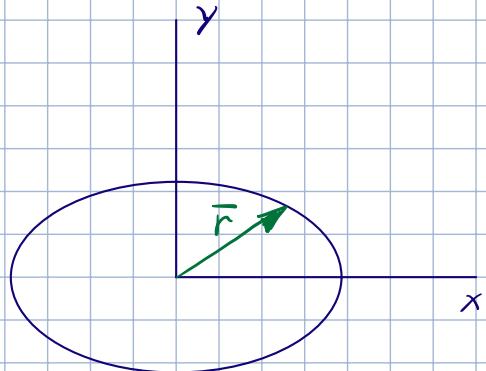
Ejemplo:

Calcúlese la distancia máxima y mínima al origen de coordenadas de los puntos de la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Se verifica que:

Seleccione una opción:

- 1. La distancia mínima es $d_{min} = 1$ y se alcanza en los puntos $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
- 2. La distancia máxima es $d_{max} = 4$ y se alcanza en los puntos $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- 3. La distancia mínima es $d_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y se alcanza en los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
- 4. La distancia máxima es $d_{max} = 2$ y se alcanza en los puntos $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



Puntos de la elipse: $\bar{x} / 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

Distancia de un pto al origen: $d = \|\bar{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$d_{max/min}^2 \rightarrow \frac{\partial d^2}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial d^2}{\partial y} = 2y \rightarrow$ cuanto más lejos, más grande.

Extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ condicionados a $g(x, y) \rightarrow 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$.

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8)$$

$$\nabla L = 0; \quad 2x + \lambda(10x + 6y) = 0$$

$$2y + \lambda(6x + 10y) = 0$$

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2x}{10x + 6y}$$

$$\lambda = \frac{-2y}{6x + 10y}$$

Esto es válido
siempre que los
denominadores sea $\neq 0$

$$2y + \frac{-2x}{10x + 6y} (6x + 10y) = 0$$

$$2y(10x + 6y) - 2x(6x + 10y) = 0$$

$$\cancel{20xy} + 12y^2 - 12x^2 - \cancel{20xy} = 0$$

$$\underline{\underline{|y^2 = x^2|}}$$

$$\underline{\underline{|y = \pm x|}}$$

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

$$y=x \rightarrow 5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0 \rightarrow 16x^2 = 8$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$d_{\min} = 1$

$$y=-x \rightarrow 5x^2 - 6x^2 + 5y^2 - 8 = 0$$

$$4x^2 - 8 = 0$$

$$x_{\max} = \pm \sqrt{2} \rightarrow y_{\max} = \pm \sqrt{2} \rightarrow d_{\max} = 2$$

example 5

Find the extreme points of $f(x, y, z) = x + y + z$ subject to the two conditions $x^2 + y^2 = 2$ and $x + z = 1$.

solution

Here there are two constraints:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{and} \quad g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

Thus, we must find x, y, z, λ_1 , and λ_2 such that

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z), \\ g_1(x, y, z) &= 0, \quad \text{and} \quad g_2(x, y, z) = 0.\end{aligned}$$

Computing the gradients and equating components, we get

$$\begin{aligned}1 &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1, \\ x^2 + y^2 &= 2, \quad \text{and} \quad x + z = 1.\end{aligned}$$

These are five equations for x, y, z, λ_1 , and λ_2 . From the third equation, $\lambda_2 = 1$, and so $2x\lambda_1 = 0, 2y\lambda_1 = 1$. Because the second implies $\lambda_1 \neq 0$, we have $x = 0$. Thus, $y = \pm\sqrt{2}$ and $z = 1$. Hence, the possible extrema are $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. By inspection, $(0, \sqrt{2}, 1)$ gives a relative maximum, and $(0, -\sqrt{2}, 1)$ a relative minimum.

The condition $x^2 + y^2 = 2$ implies that x and y must be bounded. The condition $x + z = 1$ implies that z is also bounded. It follows that the constraint set S is closed and bounded. By Theorem 7 it follows that f has a maximum and minimum on S that must therefore occur at $(0, \sqrt{2}, 1)$ and $(0, -\sqrt{2}, 1)$, respectively. \blacktriangleleft

example 6

Find the absolute maximum of $f(x, y) = xy$ on the unit disc D , where D is the set of points (x, y) with $x^2 + y^2 \leq 1$.

solution

By Theorem 7 in Section 3.3, we know the absolute maximum exists. First, we find all the critical points of f in U , the set of points (x, y) with $x^2 + y^2 < 1$. Because

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

$(0, 0)$ is the only critical point of f in U . Now consider f on the unit circle, the level curve $g(x, y) = 1$, where $g(x, y) = x^2 + y^2$. To locate the maximum and minimum of f on C , we write down the Lagrange multiplier equations: $\nabla f(x, y) = (\lambda g(x, y), \lambda \nabla g(x, y)) = (\lambda(2x, 2y))$ and $x^2 + y^2 = 1$. Rewriting these in component form, we get

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Thus,

$$y = 4\lambda^2 y,$$

or $\lambda = \pm 1/2$ and $y = \pm x$, which means that $x^2 + y^2 = 2x^2 = 1$ or $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. On C we compute four candidates for the absolute maximum and minimum, namely,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

The value of f at both $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ and $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ is $1/2$. The value of f at $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ and $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ is $-1/2$, and the value of f at $(0, 0)$ is 0 . Therefore, the absolute maximum of f is $1/2$ and the absolute minimum is $-1/2$, both occurring on C . At $(0, 0)$, $\partial^2 f / \partial x^2 = 0$, $\partial^2 f / \partial y^2 = 0$ and $\partial^2 f / \partial x \partial y = 1$, so the discriminant is -1 and thus $(0, 0)$ is a saddle point. \blacktriangle

4 Clasificación de extremos condicionados. ¡Avanzado! No entra

en examen!

Sea un problema de extremos condicionados en un entorno U de \bar{x}_0 .

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Con $g(\bar{x}_0) = \bar{0}$ y $\text{rango}(Jg(\bar{x}_0)) = p$

Para cumplir TFI
garantizac que algún

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \right| \neq 0$$

Un punto crítico de la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(\bar{x}; \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(\bar{x})$$

Llamando $\Delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_0$ tenemos que:

$$d^2 \mathcal{L}(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) \Big|_{dg(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = Jg(\bar{x}_0) \cdot \Delta \bar{x} = 0}$$

Forma función $f(\bar{x})$ condicionada a $g(\bar{x}) = \bar{0}$

Definida positiva

Mínimo relativo

Definida negativa

Máximo relativo

Indefinida

No es extremo

Semiconf. positiva

Ni idea

Semiconf. negativa

Ni idea

Ejemplo

Extremos de $f(x, y, z) = z^2 - 2xy$ condicionados a

$$g(x, y, z) = 2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$$

$$\mathcal{L}(\bar{x}; \lambda) = z^2 - 2xy + \lambda(2x^3 + 2y^3 + z^3 - 4)$$

$$\nabla \mathcal{L} = 0: \begin{cases} -2y + 6x^2\lambda = 0 \\ -2x + 6y^2\lambda = 0 \\ 2z + 3z^2\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2y}{6x^2} = \frac{2x}{6y^2} \rightarrow 12x^3 = 12y^3 \rightarrow x = y; \lambda = \frac{1}{3x} \\ z(2 + 3z\lambda) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} z = 0 \quad (\text{I}) \\ 2 + 3z\lambda = 0 \rightarrow 2 + \frac{z}{x} = 0 \end{cases}$

$z = -2x \quad (\text{II})$

$x = y$

$2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$

$4x^3 + z^3 = 4$

(I) $z = 0 \rightarrow x = 1, y = 1, \lambda = \frac{1}{3} \quad (1, 1, 0; \frac{1}{3})$

(II) $z = -2x \rightarrow 4x^3 - 8x^3 = 4 \rightarrow x = -1, y = -1, \lambda = -\frac{1}{3} \quad (-1, -1, 2; -\frac{1}{3})$

$$z = 2$$

Procedo a clasificar estos los puntos.

Punto $(1, 1, 0; \frac{1}{3})$

① Calculo el subespacio $\mathcal{D}_g(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = 0$.

$$\mathcal{D}_g(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = 6x_0^2 \Delta x + 6y_0^2 \Delta y + 3z_0^2 \Delta z$$

$$\mathcal{D}_g(1, 1, 0; \Delta \bar{x}) = 6\Delta x + 6\Delta y = 0 \rightarrow \Delta x = -\Delta y$$

② Calcula la forma cuadrática

$$d^2L(\bar{x}_0; \Delta x) = \frac{1}{2} [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$$

$$\begin{bmatrix} 12x_0\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 12y_0\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+6z_0\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

③ Evaluación en el pto $(\bar{x}_0; \lambda) = (1, 1, 0; \frac{1}{3})$

$$\frac{1}{2} [\Delta x, \Delta y, \Delta z] \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

④ Restringo al subespacio $\Delta x = -\Delta y$ ($d_g = 0$)

$$\frac{1}{2} [\Delta x, \Delta y, \Delta z] \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} (4\Delta x^2 + 4\Delta y^2 + 2\Delta z^2 - 4\Delta x\Delta y) = \Delta y = -\Delta x$$

$$= 2\Delta x^2 + 2\Delta x^2 + 2\Delta x^2 + \Delta z^2 = 6\Delta x^2 + \Delta z^2$$

Forma cuadrática definida positiva \rightarrow mínimo relativo.

Punto $(-1, -1, 2; -\frac{1}{3})$

① Calculo el subespacio $\text{dg}(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = 0$.

$$\text{dg}(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = 6x_0^2 \Delta x + 6y_0^2 \Delta y + 3z_0^2 \Delta z$$

$$\text{dg}(-1, -1, 2; \Delta \bar{x}) = 6\Delta x + 6\Delta y + 12\Delta z = 0 \rightarrow \Delta x + \Delta y + 2\Delta z = 0$$

② Calculo la forma cuadrática.

$$d^2L(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = \frac{1}{2} [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$$

$$\begin{bmatrix} 12x_0\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 12y_0\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+6z_0\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

③ Evaluación en el pto $(\bar{x}_0; \lambda) = (-1, -1, 2; -\frac{1}{3})$

$$[\Delta x, \Delta y, \Delta z] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

④ Restringo al subespacio $\Delta x + \Delta y + 2\Delta z = 0$ ($\text{dg} = 0$)

$$\begin{aligned} & 2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - \Delta z^2 - 2\Delta x \Delta y = \\ & = 2(-\Delta y - 2\Delta z)^2 + 2\Delta y^2 - \Delta z^2 - 2(-\Delta y - 2\Delta z)\Delta y = \\ & = 2(\Delta y^2 + 4\Delta z^2 + 4\Delta y \Delta z) + 2\Delta y^2 - \Delta z^2 + 2\Delta y^2 + 4\Delta y \Delta z = \\ & = 6\Delta y^2 + 7\Delta z^2 + 12\Delta y \Delta z = \end{aligned}$$

$$= [\Delta y \ \Delta z] \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad \begin{cases} A_1 = 6 > 0 \\ A_2 = 42 - 36 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{definita positiva} \\ \text{mínimo} \end{cases}$$

Also pivots f. d.f. \oplus

Avanzado: existe una forma más elegante de pasar de la forma cuadrática sin restringir a la restringida.

$$\frac{1}{2} \Delta L(\bar{x}_0; \Delta x) \Big|_{\text{dg}(\bar{x}_0; \Delta x) = 0} = \frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x \Big|_{\text{dg}(\bar{x}_0; \Delta x) = 0} =$$

$$= \frac{1}{2} \Delta x'^T P^T H P \Delta x' = \\ = \frac{1}{2} \Delta x'^T H' \Delta x'$$

$\Delta x'$ es el subespacio que cumple la restricción $\text{dg}(\bar{x}_0; \Delta x) = 0$

$$\Delta \bar{x} = P \Delta x'$$

Ejemplo

$$\frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

Restringido a $\Delta x + \Delta y + 2\Delta z = 0$ ($\text{dg} = 0$)

\hookrightarrow No valen todos los puntos del espacio, solo los del ese plano. Pasa por el origen, es un r-espacio vectorial.

Dicho plano puede representarse usando dos vectores contenidos en él multiplicados por dos parámetros.

$$v = (-\Delta y - 2\Delta z, \Delta y, \Delta z) = \Delta y \underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + \Delta z \underbrace{(-2, 0, 1)}_{v_2}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{x} \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

Estos pts quedan sujetos a la restricción

De modo que:

$$\frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x \Big|_{\text{dg}(\bar{x}_0, \Delta \bar{x})} = [\Delta_y \ \Delta_z] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} =$$
$$= [\Delta_y \ \Delta_z] \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix}$$

EJERCICIO

$$\left. \begin{array}{l} z = f(x, y, u, v) \\ \Psi(x, y, u, v) = 0 \\ \Psi(x, y, u, v) = 0 \end{array} \right\} \text{Sea } A(x_0, y_0, u_0, v_0) \text{ un pto critico de } L$$
$$L = f + \lambda \Psi + \mu \Psi$$

$$\text{Si } d\Psi(A) = dx + dy - du - dv \quad y \quad d^2L(A) = dx^2 + du^2 - 3dydv$$
$$d\Psi(A) = dx - dy + du - dv$$

Estudiar el extremo (¿Es un máximo, un mínimo...?)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tengo que estudiar } d^2L(A) \\ d\Psi(A) = 0 \\ d\Psi(A) = 0 \end{array} \right\}$$

$$d\Psi(A) = dx + dy - du - dv = 0 \implies dx + dy = du + dv$$

$$d\Psi(A) = dx - dy + du - dv = 0 \implies dx - dy = du - dv$$

Lo más sencillo en este caso parece eliminar dos de las cuatro variables (dx, dy, du, dv) de $d^2L(A) = dx^2 + du^2 - 3dydv$ usando $dx + dy = du + dv$ y $dx - dy = du - dv$

$$\begin{array}{l}
 + dx + dy = du + dv \\
 - dx - dy = -du + dv
 \end{array}$$

$$2dx = 2dv$$

$$dx = dv$$

$$2dy = 2du$$

$$dy = du$$

Con lo que $d^2\mathcal{L}(A) = dx^2 + du^2 - 3dydv$ se transforma en

$$\begin{aligned}
 d^2\mathcal{L}(A) &= dx^2 + dy^2 - 3dxdy = \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 - 9/4 \end{bmatrix} \\
 &= [dx \ dy] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Pivotes } > 0 \text{ y } < 0 \\ \rightarrow \lambda > 0, \lambda < 0 \\ \text{Pto de silla.} \end{array}
 \end{aligned}$$