

## Autovectores y pol. características

→ Pol. característica  $P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I]$

→ Autovectores son las raíces de  $P_A(\lambda)$

→ Multiplicidad aritmética de  $\lambda$ : # de veces que aparece repetido en  $P_A(\lambda)$

### Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 1$  M.H. aritm. 1

$\lambda_2 = 2$  M.H. aritm. 2

→ Multiplicidad geométrica de  $\lambda$ : # de autovectores distintos que le corresponden. O visto de otra forma, dimensión del espacio nulo  $N(A - \lambda I)$ .

→ Multiplicidad geom. es siempre menor o igual que la multiplicidad aritmética.

### CASO BUENO

Para cada autovector, M.H. geom = M.H. alg. → diagonalizable

### CASO MALO

Para algunos autovectores, M.H. geom < M.H. alg. → no diag  
SORDAV

# Vectores propios generalizados

$v$  es autovector asociado a  $\lambda$  si  $Av = \lambda v$ , o lo que es lo mismo  $v \in N[(A - \lambda I)]$

$v$  es autovector generalizado asociado a  $\lambda$  si existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $(A - \lambda I)^r v = 0$ ,  $v \in N[(A - \lambda I)^r]$

Los espacios generalizados cumplen que

$$N[(A - \lambda I)^r] \subseteq N[(A - \lambda I)^{r+1}]$$

Tiene sentido, si:

$$(A - \lambda I)^r v = 0 \rightarrow (A - \lambda I) (A - \lambda I)^r v = 0$$

Se llama cadena de vectores propios generalizados de tamaño  $s$  a un conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  en la que cada vector  $v_k \in N[(A - \lambda I)^k]$  y cumple  $[A - \lambda I] v_k = v_{k-1}$   $\forall k = s, \dots, 2$

Notese que por construcción,  $v_1$  es vector propio asociado a  $\lambda \rightarrow [A - \lambda I] v_1 = 0$ .

Construcción cadena generalizada de tamaño  $K$

- ① Buscar un vector  $v_K \in N[(A - \lambda I)^K]$  pero  $v_K \notin N[(A - \lambda I)^{K-1}]$
- ② Obtenemos el resto multiplicando por  $[A - \lambda I]$

$$v_{k-1} = [A - \lambda I] v_k$$

$$v_{k-2} = [A - \lambda I] v_{k-1} = [A - \lambda I]^2 v_k$$

:

:

$$v_r = [A - \lambda I] v_{r+1} = [A - \lambda I]^{k-r} v_k$$

:

:

$$v_1 = [A - \lambda I] v_2 = [A - \lambda I]^{k-1} v_k$$

Con esta construcción  $v_r \in N[(A - \lambda I)^r]$   $\forall r = 1, \dots, k-1$

$$(A - \lambda I)^r v_r = (A - \lambda I)^r (A - \lambda I)^{k-r} v_k = (A - \lambda I)^k v_k = 0$$

y este era justo el objetivo.

### Propiedades

→ Todos los vectores de la cadena son independientes

→ Vectores de dos cadenas asociadas a autovalores distintos son independientes

→ Vectores de cadenas que comparten autovalor, pero no autovector  $v_i$ , son independientes.

\* Es posible encontrar una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por cadenas de autovectores de cualquier matriz  $A$   $n \times n$ \*

Ejemplo → Encuentra forma de Jordan ( $\mathcal{S}$ ) y  $M$ .  $J = M^{-1}AM$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

$$\lambda = 1$$

Multiplicidad  
algebraica  
es 3.

Calcularemos autovectores

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad r=1$$

$$\dim N[A - I] = 2$$

Puedo encontrar los vectores propios asociados a  $\lambda = 1$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = S^{-1}AS$$

Falta un autovector para construir  $S$ . Vamos a ver como construir  $M$ .

$M$  tendrá la siguiente forma

$$M = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & w \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

→ autovectores

→ autovectores generalizados

Son independientes → forman una base →

$M$  es invertible

Orden de las columnas  
puede que cambie.

El proceso para encontrar autovectores generalizados es el siguiente:

Busco vectores en  $N[(A - \lambda I)^m]$ , donde  $m$  es la multiplicidad algebraica del autovalor  $\neq$  que no estén en  $N[(A - \lambda I)^{m-1}]$ .

→ si encuentro varios, una cadena por cada uno

Si encuentro alguno (o varios) me los guardo.

Si no hago  $m-m-1$ , y continso.

En nuestro caso,  $(A - I)^2 = 0 \rightarrow (A - I)^3 = 0$ . De esta forma  $N[(A - I)^3] = N[(A - I)^2] = \mathbb{R}^3$ .

Como no encuentro ninguno, busco alguno que esté en  $N[(A - I)^2] = \mathbb{R}^3$  pero no en  $N[(A - I)]$

$N[(A - I)]$  ya lo hemos calculado

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  pero no  $\in (A - I)$ .

Al vector  $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  se le llama vector propio generalizado.

El siguiente paso es hacer  $v_i = (A - \lambda_i I)|_W$  → Con cada  $w$  que encontramos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Este paso, lo justificaremos al construir  $M^{-1} = A^{-1}M^*$

Fijaos que  $v_1$  es dependiente de  $x_1$  y  $x_2$ , es decir, es autovector.

$$(A - \lambda I) v_1 = (A - \lambda I)(A - \lambda I) w = (A - \lambda I)^2 w = 0$$

Además  $v_1$  es independiente de  $w$

$$c_1 v_1 + c_2 w = 0 \rightarrow c_1 (A - \lambda I) w + c_2 w = 0$$

$$c_1 \underbrace{(A - \lambda I)^2 w}_{=0} + c_2 \underbrace{(A - \lambda I) w}_{\neq 0 \text{ (por construcc.)}} = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

Ya tengo 2 de las 3 columnas de  $M$ . Para terminar busco un segundo autovector independiente de  $v_1$ .

Por ejemplo:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Repetando,  $v_1$  y  $v_2$  son autovectores ( $\lambda=1$ ), luego

$$Av_1 = \cancel{v_1} \quad y \quad Av_2 = \cancel{v_2}$$

\* Obtenemos la

El tercer vector cumple que: forma de Jordan

$$v = (A - \lambda I)v \rightarrow Aw = \cancel{w} + v_1$$

$$\begin{bmatrix} A \\ M \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y  $M$  es invertible ya que  $v_1$ ,  $v_2$  y  $w$  son linealmente independientes. (Comprobad vosotros que --)

Teorema de Jordan  $\leftarrow$  Recuerdatorio.

Cada matriz cuadrada  $A$  es semejante a una matriz de Jordan  $J$ .

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix} \quad \# \text{ bloques} = \# \text{ autovectores}$$

Luego siempre podré encontrar  $M$  con esta construcción.

- ¿Qué cadenas de vectores propios son posibles en un bloque de la matriz de Jordan?

Vamos aumentando la dimensión de la multiplicidad algebraica del autovalor  $\lambda_i$  para ver las posibles dimensiones de los subespacios propios.

1.  $m_i = 2$  Buscamos dos vectores

La única combinación posible es:  
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)) = 1$   
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^2) = 2 = m_i$

$$\begin{matrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{matrix}$$

2.  $m_i = 3$  Buscamos tres vectores

$\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)) = 1$   
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^2) = 2$   
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^3) = 3 = m_i$

$\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)) = 2$   
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^2) = 3 = m_i$

$$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & \\ \lambda_i & 1 & \\ \lambda_i & & \end{matrix}$$

Caso 1 (1 autovector)

Caso 2 (2 autovectores)

En esta combinación hay 2 autovectores (1<sup>a</sup> y 3<sup>a</sup> columnas)  $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)) = 2$  y en  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^2$  completamos el tercer vector propio generalizado de la cadena de  $v_1$

3.  $m_i = 4$  Buscamos cuatro vectores

$\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)) = 1$   
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^2) = 2$   
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^3) = 3$   
 $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_i I)^4) = 4 = m_i$

$$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ \lambda_i & 1 & & \\ \lambda_i & & 1 & \\ \lambda_i & & & 1 \end{matrix}$$

Una cadena de 1 autovector y 3 vectores propios generalizados

$$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ \lambda_i & 1 & & \\ \lambda_i & & 1 & \\ & & & \lambda_i \end{matrix}$$

Una cadena de 1 autovector y 2 vectores propios generalizados + 1 autovector

Dos cadenas, cada una con 1 autovector y 1 vector propio generalizado

$$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ \lambda_i & & 1 & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{matrix}$$

Una cadena de 1 autovector y 1 vector propio generalizado + 2 autovectores

CASO 1

CASO 2

CASO 3

CASO 4

Ejemplo. Cálculo de la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.- Calculamos autovalores

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) (2-\lambda)^3 = (2-\lambda)^4$$

$\lambda = 2$  con multiplicidad algebraica 4

2.- Calculamos autovectores  $N(A-\lambda I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r=2 \rightarrow \dim N(A-\lambda I) = 2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.- Busco autovectores generalizados

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^4 = 0 \dots$$

$$N(A - \lambda I)^4 = \mathbb{R}^4 ; \quad N(A - \lambda I)^3 = \mathbb{R}^4 ; \quad N(A - \lambda I)^2 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Busco  $w$  en  $N(A - \lambda I)^3$  pero no en  $N(A - \lambda I)^2$

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{autovector generalizado.}}$$

$$v_1 = (A - \lambda I) w =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a. to vector  
generacion. 6

$$v_2 = (A - \lambda I) v_1 = (A - \lambda I)^2 w =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

este es autovector  
 $(A - \lambda I) v_2 = (A - \lambda I)^3 w = 0$   
Def. de w

las columnas de M serán

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & | & | & | & | \\ \hline w & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline & | & | & | & | \\ \hline \end{array}$$

↳ autovector independiente de  $v_2$ . Eg  $v_3 =$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.- Revisamos ecuaciones y ponemos en forma matricial.

$$Av_2 = \lambda v_2$$

$$Aw = \lambda w + v_1$$

$$Av_3 = \lambda v_3$$

$$Av_1 = \lambda v_1 + v_2$$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & v_1 & w & v_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & v_1 & w & v_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} M & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego  $AM = M \mathbb{I} \rightarrow A = M \mathbb{I} M^{-1} \rightarrow A$  es similar a  $\mathbb{I}$ .

(1)

Ejercicios: Hallar la forma de Jordan  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$  CALCULAR FORMA DE JORDAN

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ con multiplicidad } 2, m = 2$$

$$\mathcal{N}(A - 2I) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(\mathcal{N}^1) = 1 < 2 \text{ Tenemos que ir al siguiente subespacio}$$

$$\mathcal{N}(A - 2I)^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \text{ Busco un vector en } \mathcal{N}^2 \text{ que no esté en } \mathcal{N}^1$$

$$\text{Por ejemplo: } \mathbf{v}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y por tanto } \mathbf{v}_1^1 = (A - 2I) \mathbf{v}_2^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Base de Jordan asociada a la matriz  $B_J = \{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  con  $\mathbf{v}_2^1 \in \mathcal{N}^2, \mathbf{v}_1^1 \in \mathcal{N}^1$

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

Ejercicios: Hallar la forma de Jordan  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$  CALCULAR LA FORMA DE JORDAN

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ multiplicidad } m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \text{ multiplicidad } m_2 = 2$$

- $\lambda_1 = 1$

$$\mathcal{N}(A - I) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(\mathcal{N}^1) = 1 = m_1 \text{ He terminado con este autovalor}$$

- $\lambda_2 = -1$

$$\mathcal{N}(A + I) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(\mathcal{N}^1) = 1 < m_2 = 2 \text{ Sigo al siguiente subespacio}$$

$$\mathcal{N}(A + I)^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}^2 \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \dim(\mathcal{N}^2) = 2 = m_2$$

Busco un vector en  $\mathcal{N}^2$  que no esté en  $\mathcal{N}^1$

$$\text{Por ejemplo: } \mathbf{w}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y por tanto } \mathbf{w}_1^1 = (A + I) \mathbf{w}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ya tengo base de Jordan  $B_J = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1^1, \mathbf{w}_2^1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

## Ejercicio

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -2 & -9 & 6 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

Pol. carac.  $(\lambda + 3)^2 (\lambda + 1)$

$\lambda_1 = -3$   
 $\lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = -3$  será problemático si su multiplicidad geométrica es menor que la algebraica

$$N(A + 3I) \rightarrow A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego  $N(A + 3I)$  sólo tiene un elemento  $x_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Necesitaré un autovector generalizado /  $w \in N(A + 3I)^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 & -16 \\ -8 & -20 & 16 \\ -8 & -20 & 16 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo  $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  pertenece a  $N(A + 3I)^2$  y

además parece comprobar q-e no pertenece a  $N(A + 3I)$

Solo faltó calcular  $v_2 \in N(A + I)$  (autovector del  $\lambda_2 = 1$ )

$$A + I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & -8 & 5 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Revisando, veo que tengo 3 ecuaciones

$$Av_1 = -3v_1$$

$$Aw = v_1 - 3w \rightarrow (A + 3I)w = v_1$$

$$Av_2 = -v_2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A & | & | & | \\ & v_1 & w & v_2 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$M \qquad M \qquad S$

$$\begin{bmatrix} A & | & -3 & 2 & -1 \\ & 2 & 0 & 1 & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$M \qquad M \qquad S$

Hagamos la comprobación  $A\boxed{H} = \boxed{H}J$ . Por un lado,

$$\boxed{H}J = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3-6 & 1 \\ -6 & 2+0 & -1 \\ -3 & 1-3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A\boxed{H} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -2 & -9 & 6 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+8-5 & -4+0-5 & 2+4-5 \\ 6-18+6 & -4+0+6 & 2-9+6 \\ 9-16+4 & -6+0+4 & 3-8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \end{aligned}$$