FACTORIZACIÓN MATRICIAL. LU I (18.06 - Lecture 01)

Repaso de álgebra

* n ecuaciones lineales con n incógnitas
* análisis por filas
* análisis por columnas
* forma matricial

EJEMPLO

Dos ecuaciones con dos incógnitas

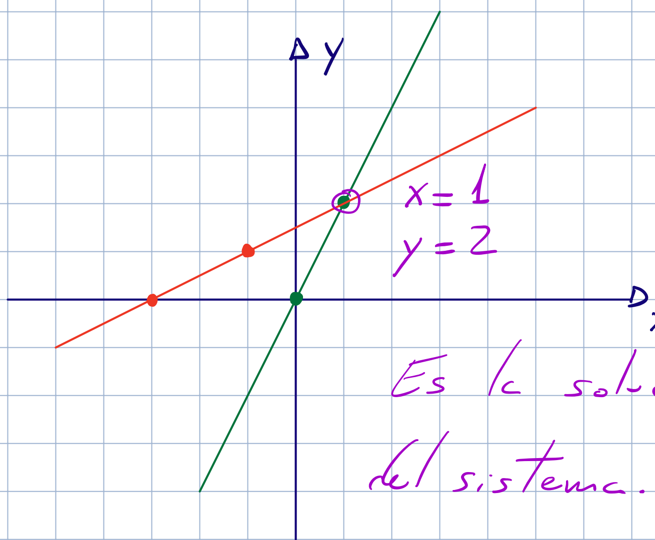
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Forma matricial

$$A \quad x = b$$

Veamos primero el análisis por filas (Row picture).

Buscamos todos los puntos que cumplen la primera ecuación. Todos caen sobre la línea verde. La segunda línea no pasa por (0,0). Dando valores, construimos la segunda línea.



Es la solución del sistema.

Esto es un repaso básico conocido por todos.

Pasamos ahora al análisis por columnas:

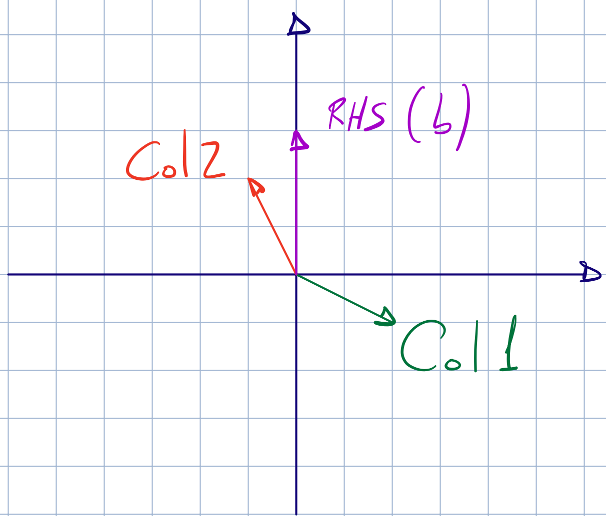
Column picture

$$\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \longrightarrow x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

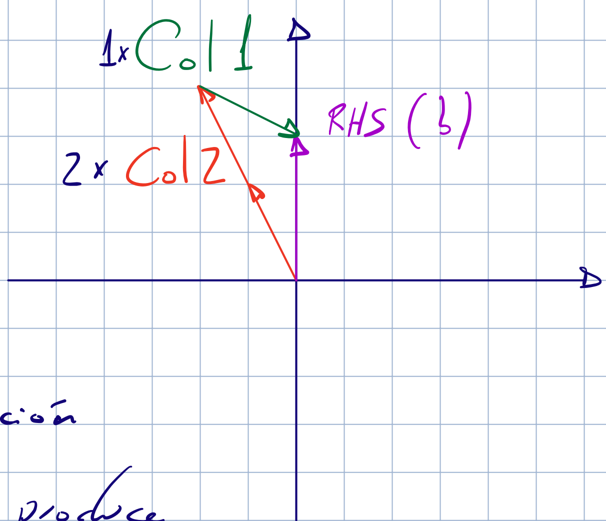
Si lo miro así, mi problema pasa a ser encontrar la combinación lineal de las columnas que producen el vector $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$

¿Que es esto de forma gráfica?

¿Cual es la combinación correcta? ($x = 1$, $y = 2$, lo conocemos del apartado anterior)



$$1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$



Efectivamente la combinación lineal de col 1 y col 2 produce RHS (b)

RHS ≡ Right Hand Side

Una pregunta más. ¿Que ocurre si tomo todas las posibles combinaciones de x e y? → Podría obtener cualquier RHS. Visto de otra forma, llenaría todo el plano.

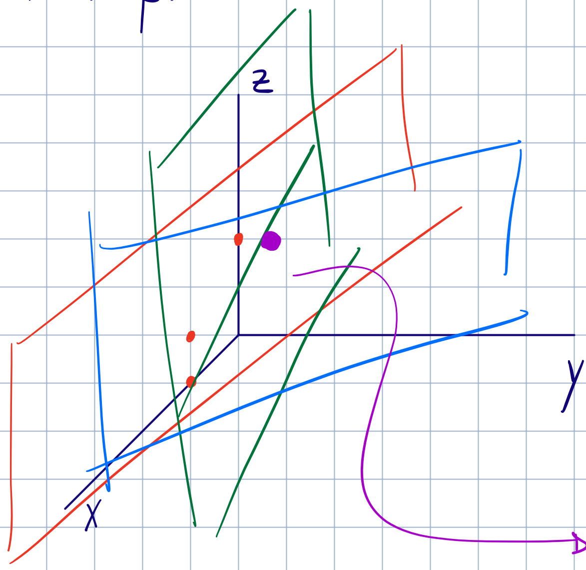
EJEMPLO 2

Pasamos a un problema 3x3

$$\begin{aligned} 2x \quad - y \qquad &= 0 \\ -x \quad +2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Row picture



$$\begin{aligned} 2x \quad - y \qquad &= 0 \\ -x \quad +2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

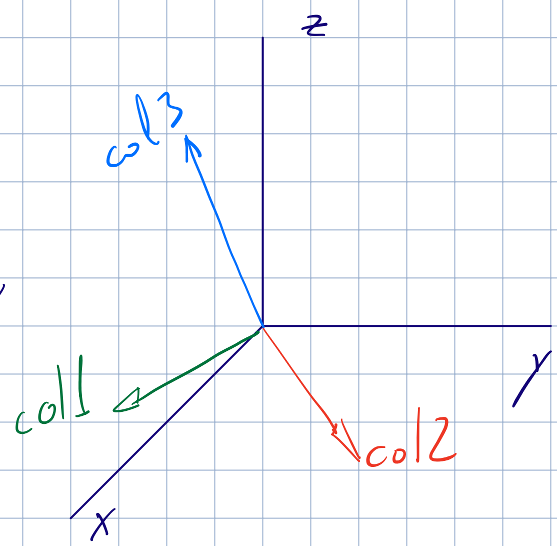
La solución del sistema representa el punto de intersección de los tres planos.

Como vemos, al aumentar el número de dimensiones se complica la Row picture. Nos olvidamos de esta forma de visualización.

Column picture

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$$

Como antes, intento encontrar la combinación de vectores que produce el RHS



La ecuación me dice que combine col 1, col 2, y col 3 para producir b. En este caso, la solución del problema visto de este modo es evidente

$$x=0\,,\quad y=0\,,\quad z=1$$

Cambiemos ahora el RHS

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$$

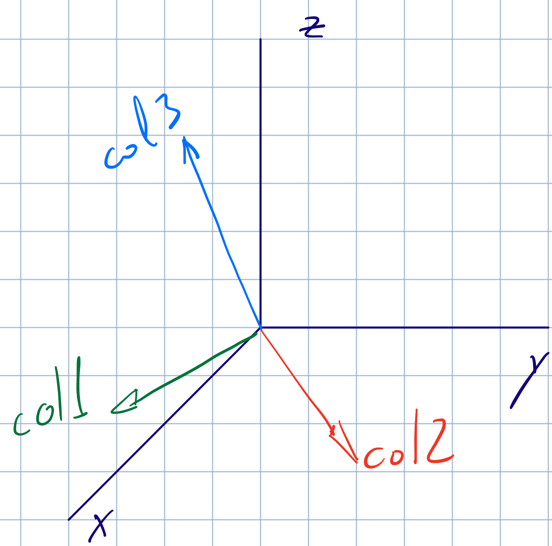
Nueva sol es $x=1$, $y=1$, $z=0$

¿Podría resolver $Ax = b$ para cualquier RHS? Row picture
¿Puedo generar el espacio 3D con comb. lineales de las columnas? Column picture.

$Ax = b$ → son combinaciones lineales de las columnas

En nuestro ejemplo particular, la matriz no es singular, de forma que la respuesta es SI.

¿Cuando iría mal?



Si las tres columnas de mi matriz son coplanarias
⇓
¡Problemas!

En este caso, no podría generar todo $\mathbb{R}^3$. Solo podría generar vectores que perteneciera a ese plano y por tanto, solo podría resolver ecuaciones si b pertenece a ese plano.
La matriz no será invertible en ese caso.

Supongamos ahora que tenemos 9 dimensiones.
Todo sigue siendo igual, tendríamos 9 vectores y la idea sería buscar combinaciones lineales de los 9 para buscar RHS.
Si uno de los vectores es comb. lineal de los anteriores, generaré una especie de plano de 8 dimensiones que vive en el espacio de 9 dimensiones.

¿Cómo multiplicamos una matriz por un vector?

$$Ax = b$$

Por columnas (la forma buena de hacerlo) Ax es una combinación de las columnas de A

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Por filas

dot product

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$