

Matrix multiplication (4 ways!)

Gauss-Jordan / find  $A^{-1}$

Multiplicación de matrices. Camino 1: estándar

$$\begin{array}{c} \text{fil 3} \end{array} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & \dots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{col 4} \\ \left[ \begin{array}{c|c} b_{14} & \\ b_{24} & \\ \vdots & \end{array} \right] \end{array} = \begin{bmatrix} C_{34} \end{bmatrix} \begin{array}{l} C_{34} = (\text{row 3}) \cdot (\text{col 4}) = \\ = a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + \dots = \\ = \sum_{k=1}^n a_{3k}b_{k4} \end{array}$$

$A_{m \times n} \quad B_{n \times p} \quad C = AB_{m \times p}$

Esta es la manera estándar, la que se aprende en el instituto

Multiplicación de matrices. Camino 2: por columnas

$$\begin{bmatrix} A_{m \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{n \times p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC_i \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n} \quad B_{n \times p} \quad C_{m \times p}$

Columns de C son combinaciones lineales de las columnas de A

## Multiplicación de matrices. Camino 3: por filas

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} \text{filas} \\ f_i \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \\
 A_{m \times n}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \\
 B_{n \times p}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \\
 \begin{matrix} \text{filas} \\ f_i \end{matrix} B \\
 C_{m \times p}
 \end{array}$$

filas de C son combinaciones lineales de las filas de B

## Multiplicación de matrices. Camino 4: columnas por filas

Columna A x Fila de B

$m \times 1$

$1 \times p$

$\rightarrow m \times p$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 6] = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

$3 \times 1 \quad 1 \times 2 \quad 3 \times 2$

Columns son múltiplos de  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Filas son múltiplos de  $[1 \ 6]$

Siguen las reglas que habíamos dicho antes!

Camino 4:  $AB = \text{suma de } ((\text{cols } A) \times (\text{filas } B))$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 6] + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} [0 \ 0] = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es un poco especial. Como veremos un poco más adelante, su espacio fila es el  $[1\ 6]$  y su espacio columna el  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

Multiplicación por bloques (Camino 5)

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$A \qquad B \qquad C$

$$A_1 B_1 + A_2 B_3$$

$$A_1 B_2 + A_2 B_4$$

Esto es una multiplicación matricial normal.

Matriz inversa (de matrices cuadradas)

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

(Asumiendo que esta matriz exista)

funciona por la izquierda y la derecha.

↪ Matrices invertibles o no singulares

Discutimos el caso singular, sin inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{¿Pg esta matriz no tiene inversa?}$$

\* Determinante = 0  $\rightarrow$  Singular

Intentemos obtener la inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\* ¿Qué comb. lineal de  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$  produce el  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ?

¡Ninguna!  $\rightarrow$  No hay inversa.

\* Otra manera de verlo es que puedo resolver este problema  $Ax = 0$   $(x \neq 0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tiene solución, luego no hay inversa}$$

De hecho, si  $A^{-1}$  existe podemos hacer

$$A^{-1}Ax = A^{-1}0 \rightarrow x = 0$$

Es decir, la existencia de  $A^{-1} \rightarrow$  que la única solución del problema es  $x = 0$ .

# Gauss-Jordan

Tomemos ahora una matriz que si tenga inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \qquad A^{-1} \qquad I$

Encontrar la inversa es resolver dos sistemas de ecuaciones

$$A \times \text{columna 1 de } A^{-1} = \text{columna 1 de } I$$

El método de Gauss-Jordan resuelve los dos eq.s a la vez

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

Hago aquí  
las operaciones  
de eliminación

Aquí aparece  
la inversa

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Comprobé que funciona  
en casa!

Recuperando el problema original

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \qquad A^{-1} \qquad I$

Recordemos de la clase previa que la eliminación se puede hacer premultiplicando por la matriz  $E$

$$E[A \mid I] = [I \mid E] = [I \mid A^{-1}]$$

$EA = I$  nos dice que  $E$  es la inversa de  $A$   
 $\rightarrow E = A^{-1}$