Repaso de teoría

1 Extremos de funciones. Extremos relativos en sentido estricto
→ desigualdades estrictas

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad D \subset \mathbb{R}^p$ $\quad \bar{x}_0 \in D$

→ $f(\bar{x}_0)$ es un máximo relativo de f en $\bar{x}_0$ si $f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0)$ cerca de $\bar{x}_0$.

→ $f(\bar{x}_0)$ es un mínimo relativo de f en $\bar{x}_0$ si $f(\bar{x}) > f(\bar{x}_0)$ cerca de $\bar{x}_0$

Vamos a ver criterios para buscar extremos relativos de funciones diferenciables. ¡Cuidado con las no diferenciables! Ejemplo $f(x) = |x|$

2 Punto estacionario o crítico de f

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subset \mathbb{R}^p$ (f es derivable)

$\bar{x}_0 \in D$, pto estacionario o crítico de f

$$f'_{x_i}(\bar{x}_0) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, p$$

(Si f diferenciable esto es lo mismo que $df(\bar{x}_0) = 0$) ~ Aquí es donde es interesante

3 Condiciones necesarias de extremo → funciona para f diferenciable

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad D \subset \mathbb{R}^p$ diferenciable en $B(\bar{x}_0; r) \subset D$

Si f tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en $\bar{x}_0$ entonces $\bar{x}_0$ es un pto crítico de f ($df(\bar{x}_0) = 0$).

¡No funciona en sentido contrario! (Ejemplo: pto de silla).

4 Condiciones suficientes de extremo → funciona para $f \in C^2$

$f: D \to \mathbb{R} \quad f \in C^2(D)$

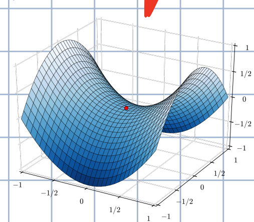
Dado $\overline{x}_0 \in D \,/\, df(\overline{x}_0) = 0$

Dependiendo de la matriz Hessiana de la función en el punto, tenemos que (ejemplo para $D \in \mathbb{R}^2$)

$Hf(x_0, y_0)$	$\omega(x) = x^T Hf\, x$	Forma función	Ejemplo
Definida positiva	$\omega(x) > 0$	Mínimo relativo	$x^2 + y^2$
Definida negativa	$\omega(x) < 0$	Máximo relativo	$-(x^2+y^2)$
Indefinida	$\omega(x) \geq 0 \quad \omega(x) \leq 0$	Punto de silla	$x^2 - y^2$
Semidef. positiva	$\omega(x) \geq 0$	Ni idea	x^2
Semidef negativa	$\omega(x) \leq 0$	Ni idea	$-x^2$

Estos casos hay que estudiarlos con la def de la función

Punto de silla (Saddle point)



5 Clasificando formas cuadráticas (simétricas)

	Definida ⊕ Mínimo relativo	Definida ⊖ Máximo relativo	Indefinida	Semidef ⊕	Semidef ⊖
$x^T S x$	>0	<0	≥ 0 y ≤ 0	≥ 0	≤ 0
Autovalores (λ)	>0	<0	≥ 0 y ≤ 0	≥ 0	≤ 0
Menores (Sylvester) $\lvert a_{11} \rvert, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots$	>0	$\times(-1)^K \{ \; > 0$	No def ⊕ No def ⊖ Si se anula algún menor es el de la matriz completa	>0 Resto de menores sigue crit. def ⊕	$\times(-1)^K \{ \; > 0$ Resto de menores sigue crit. def ⊖

$\underbrace{\text{Definida ⊕, Definida ⊖}}_{|Hf(x_0,y_0)| \neq 0}$ $\qquad$ $\underbrace{\text{Semidef ⊕, Semidef ⊖}}_{|Hf(x_0,y_0)| = 0}$

Criterio de Sylvester en detalle

Existe un criterio equivalente que se apoya en la matriz Hessiana y el criterio de Sylvester

Sea $f: \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en D abierto y sea $x_0 \in D$ punto crítico de f $\quad (\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0)$

Entonces:

1. Si $|Hf(x_0)| \neq 0$
    1. Si todos los menores principales son positivos x_0 es un mínimo local de f
    2. Si los menores principales cambian de signo empezando en $a_{11} < 0$ x_0 es un máximo local de f
    3. En cualquier otro caso x_0 es un punto de silla (ni máximo ni mínimo)
2. Si $|Hf(x_0)| = 0$. La diferencial segunda es semidefinida (caso dudoso) o indefinida (punto de silla)
    1. Si no se anula ningún menor anterior:
        1. Si todos los menores anteriores son positivos, caso dudoso posible mínimo local.
        2. Si los menores principales cambian de signo empezando en $a_{11} < 0$, caso dudoso posible máximo local.
        3. En cualquier otro caso x_0 es un punto de silla
    2. Si se anulan menores principales anteriores, caso dudoso.

Comentario sobre el cálculo de autovalores. Aplicación a matrices 2x2.

$\operatorname{Det} A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ (Det A es igual al producto de sus autovalores)

$\operatorname{Tr}(A) =$ Suma entradas de la diagonal $= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$

Aplicado a una matriz 2x2 nos da una manera sencilla de calcular autovalores. También sirve para comprobar si hemos calculado bien los λs.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A| = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\operatorname{Tr}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} |A| = 4 - 4 = 0 = \lambda_1 \lambda_2 \\ \operatorname{Tr} A = 5 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 5$$

6 EJERCICIOS / EJEMPLOS

① Ejemplo 13.4

$f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3$ ¿Tiene extremo relativo en $(1,0,0)$?

Condición necesaria → Pto estacionario o crítico

$$\nabla f = \left[yz + 2x - 2,\ xz + 2y,\ xy + 2z \right] \Big|_{(1,0,0)} = [0\ \ 0\ \ 0]$$

Condición suficiente → Analizar Hf

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{bmatrix} \Bigg|_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Triangularizo con operaciones elementales (sin intercambio de filas)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Todos λ's > 0 → Definida positiva → mínimo relativo

*Pivotes tienen mismo signo que autovalores.
Tb sale fácil por sylvester

② Ejemplo 13.5

Hallar extremos relativos y absolutos (si los hubiera) de $z = 3x^2 - x^3 + y^2$.

Si $x \to \infty$, $z \to -\infty$. Si $y \to \infty$, $z \to \infty$. Luego no extremos absolutos

Busco ptos críticos Condición necesaria $\nabla z = 0$

$$\nabla z = [6x - 3x^2,\ 2y]$$

$x(6-3x) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 2$

$2y = 0 \rightarrow y = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} (0,0) \\ (2,0) \end{array} \right\}$ Candidatos

Condición suficiente Hf

$$Hz = \begin{bmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad Hf(2,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Def ⊕, mínimo — Indefinida, Pto de silla

EJEMPLO Hallar los extremos de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2y + y + 2xy$$

$$\nabla f = [2xy + 2y \,,\, x^2 + 1 + 2x] = [0,0]$$

$$x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2 \longrightarrow x = -1 \quad (\forall y)$$

$$2xy + 2y = -2y + 2y = 0 \quad (\forall y)$$

$(-1, y)$ es un pto crítico

$$Hf = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Hf(-1,y) = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es semidefinida, lo cual no nos da información.

Como esto no nos da información, recurrimos a la definición de máximo, mínimo y pto de silla y a la def. de la función.

Máximo relativo en x_0 $\quad f(x_0) > f(x)$ en un entorno de x_0

Mínimo relativo en x_0 $\quad f(x_0) < f(x)$ en un entorno de x_0

$$f(x,y) - f(-1,y_0) = x^2y + y + 2xy - (\cancel{y_0 + y_0}^{\,0} - 2y_0) = y(x+1)^2 =$$

Nos movemos en un entorno del pto crítico $\longrightarrow x = -1 + \Delta x \;;\; y = y_0 + \Delta y$ *

$* \; \Delta x, \Delta y \to 0$

$$= (y_0 + \Delta y)(\cancel{-1} + \Delta x + \cancel{1})^2 = (y_0 + \Delta y)\Delta x^2$$

De modo que si:

$y_0 > 0 \quad f(x,y) - f(-1,y_0) > 0 \longrightarrow$ mínimos

$y_0 < 0 \quad f(x,y) - f(-1,y_0) < 0 \longrightarrow$ máximos

$y_0 = 0 \quad f(x,y) - f(-1,0) \gtrless 0 \longrightarrow$ ni máximo estricto, ni mínimo estricto

---

IV.16 Investigar los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ en el conjunto $\mathcal{A}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x>0,\ y>0,\ z>0\}$.

b) $f(x,y)=x^2y^2(1-x^2-y^2)$ en el conjunto $\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2<1\}$.

Resultados: a) mínimo relativo en $(1/2,1,1)$; b) máximos relativos en los cuatro puntos $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y mínimo relativo (amplio) en ejes $x=0$ e $y=0$.

IV.16 a) Estudiar los extremos relativos de:

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad \text{en } A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x>0, y>0, z>0\}$$

* Notar que en este ejercicio se piden extremos relativos, no absolutos

* No podemos usar el teorema del valor extremo, puesto que el dominio no es compacto (no es cerrado y acotado).

* No estudiamos la frontera, puesto que la función no toma valores sobre ella.

$$\nabla f = \left[1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{z^2}{y^2},\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right] = [0,0,0]$$

Lo más complicado de este problema es encontrar las soluciones de los sistemas resultantes.

(1) $y^2 = 4x^2 \begin{cases} \to y = 2x \longrightarrow x = 1/2 \\ \to y = -2x \longrightarrow x = -1/2 \longrightarrow \text{No, fuera de } A \end{cases}$

$x = \pm \frac{1}{2} y$

(2) $y^3 = 2xz^2 \begin{cases} \to y^3 = yz^2 \longrightarrow y^2 = z^2 \begin{cases} \to y = z \longrightarrow y = 1 \\ \to y = -z \longrightarrow \text{no se puede cumplir } y>0,\ z>0 \end{cases} \\ \to y^3 = -yz^2 \longrightarrow y^2 = -z^2 \longrightarrow \text{no se puede cumplir} \end{cases}$

$y = z$

(3) $z^3 = y \longrightarrow z^2 = 1 \longrightarrow z = +1, \underline{-1} \longrightarrow$ No, está fuera de A.

Luego el pto crítico es $[1/2, 1, 1]$

La matriz Hessiana en este caso es:

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^3} & -\frac{1}{2}\frac{y}{x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{bmatrix}$$

$$Hf(1/2, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Busco los pivotes, método de Gauss $\longrightarrow$ sin intercambio de filas

Pivotes $>0 \longrightarrow \lambda s > 0 \longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \underline{4} & -2 & 0 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 0 & 0 & \underline{4} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ Definida positiva

$\longrightarrow$ mínimo local

También podríamos haberlo mirado por el criterio de Sylvester

$A_1 = 4 > 0$, $A_2 = 8 > 0$, $A_3 = 32 > 0$

Elegid el método que prefiráis.

IV.16 b

Extremos relativos de $f(x,y) = x^2y^2(1-x^2-y^2)$ en $x^2+y^2<1$.

Lo más complicado de este problema también es resolver el sistema.

$$\nabla f = \left[2xy^2(1-x^2-y^2)-2x^3y^2,\ 2x^2y(1-x^2-y^2)-2x^2y^3\right] = [0,0]$$

$$2xy^2(1-x^2-y^2)-2x^3y^2 = 0$$

$$2x^2y(1-x^2-y^2)-2x^2y^3 = 0$$

→ Los ejes $(0,y)$; $(x,0)$ son solución

→ El problema es simétrico. La segunda ecuación es la primera intercambiando los papeles de x e y. Si hago $x=y$ ambas ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^3(1-2x^2)-2x^5=0 \\ 2x^3(1-2x^2)-2x^5=0 \end{array}\right\} 2x^3-6x^5=0 \rightarrow x=\frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \quad y=\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$$

Por otro lado, si hago $x=-y$ obtengo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^3(1-2x^2)-2x^5=0 \\ -2x^3(1-2x^2)+2x^5=0 \end{array}\right\} 2x^3-6x^5=0 \rightarrow x=\frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \quad y=\frac{\mp 1}{\sqrt{3}}$$

En resumen, tengo los siguientes pts críticos:

$$(0,y)\ ;\ (x,0)\ ;\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La simetría de las soluciones tb podría haberla comprobado operando con las ecuaciones. Asumiendo $x\neq 0$, $y\neq 0$:

$$(1-x^2-y^2)=\frac{2x^3y^2}{2xy^2}=\frac{2x^2y^3}{2x^2y}$$

$$2x^5y^3=2x^3y^5$$

$$x^2=y^2\longrightarrow x=\pm y$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} 2y^2(1-x^2-y^2)-4x^2y^2-6x^2y^2 & 4xy(1-x^2-y^2)-4xy^3-4x^3y \\ 4xy(1-x^2-y^2)-4xy^3-4x^3y & 2x^2(1-x^2-y^2)-10x^2y^2 \end{bmatrix}$$

pasamos a evaluarla en los pts críticos:

Eje x: $(0,y)\longrightarrow Hf(0,y)=\begin{bmatrix} 4y^2(1-y^2) & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad |y|>1$ semidef negativa; $|y|<1$ semidef positiva; $|y|=1$ nada.

de aquí no obtengo mucha info. Paso a usar la def.

$$f(x,y)-f(0,y_0)=x^2y^2(1-x^2-y^2)=\Delta f$$

Si (x,y) cercano al pto crítico $\rightarrow (x,y)=(0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$

$$\Delta f = \Delta x^2 (y_0 + \Delta y)^2 \left(1 - \Delta x^2 - (y_0 + \Delta y)^2\right) =$$

$$= \underbrace{\Delta x^2 (y_0 + \Delta y)^2}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - y_0^2 - 2y_0\Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2\right)}_{\text{Depende de } |y_0|}$$

eje x $(0, y_0) \longrightarrow \begin{cases} |y_0| > 1 & \text{máximos} \\ |y_0| < 1 & \text{mínimos} \\ |y_0| = 1 & \text{ni máximo, ni mínimo} \end{cases}$

Estos máximos / mínimos no son estrictos, ya que $f(0, y_0) = 0 \ \forall y_0$

→ Por simetría, el análisis del "eje y" es idéntico (se deja como ejercicio).

Los puntos $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, hago uno, el resto se hacen de forma análoga.

$$Hf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{10}{9} & \frac{4}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 - \frac{1}{2}F_1]{\text{Pivotes}} \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{6}{9} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda < 0 \rightarrow \underset{\text{máximo}}{\text{Def. neg}}$$

$A_1 = -\frac{8}{9} < 0$

$A_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 > 0$

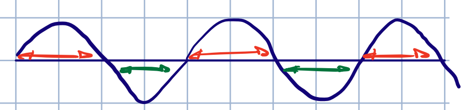
Def. negativa
máximo

⇝ Criterio de Sylvester

Ejemplo 13.6

$z = \sqrt{|\sin(x^2+y^2)|}$ Hallar extremos relativos

$$z = \begin{cases} \sqrt{\sin(x^2+y^2)} & \text{si } \sin(x^2+y^2) \geq 0 \\ \sqrt{-\sin(x^2+y^2)} & \text{si } \sin(x^2+y^2) < 0 \end{cases}$$

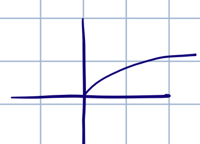
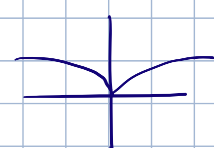


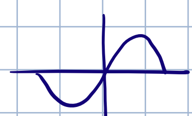
Función definida a trozos. Puedo aplicar reglas de derivación salvo en los cambios de definición.

$$\nabla z = \begin{cases} \left[\dfrac{2x\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} \quad \dfrac{2y\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} \right] & \text{si } \sin(x^2+y^2) > 0 \\ \left[\dfrac{-2x\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{-\sin(x^2+y^2)}} \quad \dfrac{-2y\cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{-\sin(x^2+y^2)}} \right] & \text{si } \sin(x^2+y^2) < 0 \end{cases}$$

Este camino parece muy difícil, vamos a pensar:

Conocemos las funciones:

* $\sqrt{x} \longrightarrow$    * $\sqrt{|x|}$ 

* $\sin(x) \longrightarrow$ 

En realidad, es un problema de Matemáticas I

$f(d) = \sqrt{|\sin(d)|} \longrightarrow$ Calculamos los extremos en función de d y después hacemos $d = x^2+y^2$ para encontrar los extremos relativos.

IV.22 Calcular los extremos absolutos en $D \subset \mathbb{R}^2$ de la función $f\colon D \to \mathbb{R}$, definida mediante $f(x,y) = x^2 - y^2$, siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 - y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$. Acerca de los extremos absolutos de f en D se puede asegurar que:

a) En la recta $x+y=1$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

b) En la recta $x+y=0$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

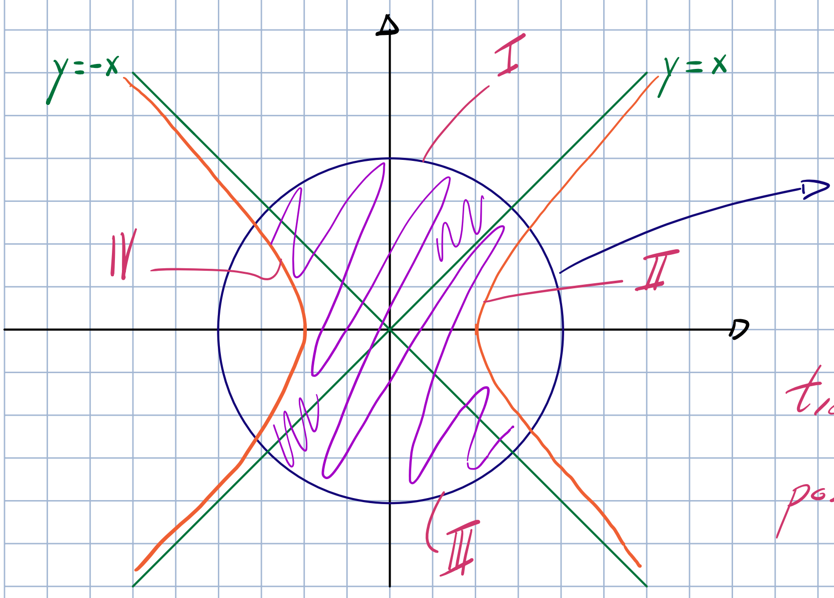
c) En la recta $x=0$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

d) En la recta $x-y=0$ hay puntos donde f alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

Determinar cuál es la opción correcta, razonando la respuesta.

IV.22 Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \leq 1 ,\; x^2-y^2 \leq 1/4 \right\}$$



Divido la frontera en cuatro tramos I, II, III, IV para su posterior estudio.

x	y	f(x,y)	tipo
0	1	-1	min (∂D)
0	-1	-1	min (∂D)
toda la	hipérbola	1/4	∂D

min abs

max abs

Esta tabla la vamos rellenando según vamos resolviendo el ejercicio.

① Puntos críticos $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f = (2x, -2y) = (0,0) \longrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{indefinida} \longrightarrow \text{pto de silla, no hay extremo}$$

② Puntos singulares: no hay

③ Frontera.

Son puntos de interés los cuatro pts de corte

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=1/4 \end{array}\right| \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$$

Fronteras I y III

$$x^2+y^2=1 \longrightarrow y^2 = 1-x^2$$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_{I,III}} = f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x^2 - (1-x^2) = 2x^2-1$$

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{5}{8}}, +\sqrt{\frac{5}{8}}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_{I,III}(x) = 4x = 0 \longrightarrow y = \pm 1 \\ f''_{I,III}(x) = 4 > 0 \longrightarrow \text{mínimo} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l}(0,-1),\ (0,1) \\ \text{mínimos relativos en frontera}\end{array}$$

Fronteras II y IV

$$x^2 - y^2 = 1/4$$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_{II,IV}} = x^2 - y^2\Big|_{\partial D_{II,IV}} = 1/4$$ constante. Todos los pts son candidatos a máximo y/o mínimo absoluto

Aquí están incluidos los 4 pts de corte que comentamos anteriormente

IV.25 Sea la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto f(x,y)=x(3-y)$ y el conjunto $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -3\le x\le 3,\ y\ge \frac{1}{3}x^2,\ y\le 6+x\right\}$. Calcular los extremos absolutos de f en C. Se verifica que:

a) f alcanza su máximo y mínimo absolutos en puntos del interior de C.

b) f alcanza su máximo y mínimo absolutos sobre $y=\frac{1}{3}x^2$.

c) El valor máximo absoluto de f es mayor que 3 y el valor mínimo absoluto es menor que -5.

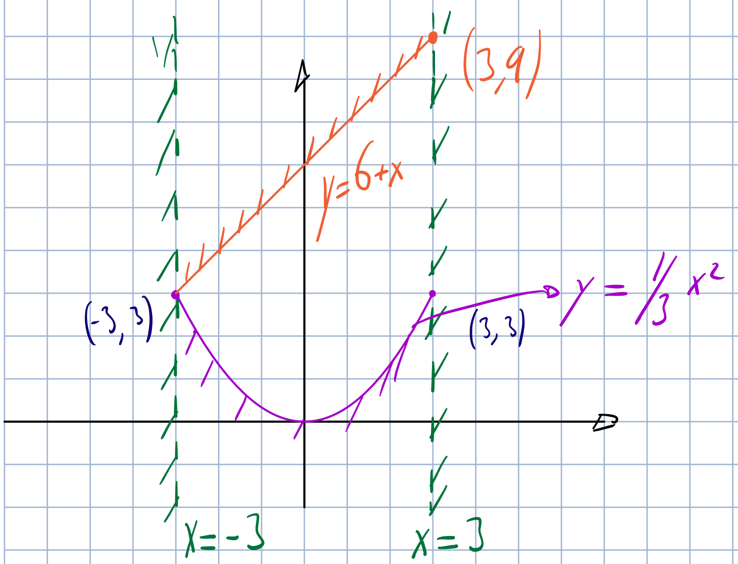
d) El valor máximo absoluto de f es mayor que 6 y el valor mínimo absoluto es menor que -10.

Determinar cuál es la opción correcta, razonando la respuesta.

IV.25

$$f(x,y)=x(3-y),\quad C=\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 3\\ y\geqslant \frac{1}{3}x^2\\ y\leqslant 6+x\end{cases}$$

Extremos absolutos de f en C.



	x	y	tipo	f(x,y)	
∂D_1	$\sqrt{3}$	1	máximo	$2\sqrt{3}$	max abs
	$-\sqrt{3}$	1	mínimo	$-2\sqrt{3}$	
	-3	3	intersección	0	
	3	3	intersección	0	
∂D_2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	máximo	$9/4$	
	3	9	intersección	-18	min abs

① Puntos críticos

$$\nabla f=(3-y,\,-x)=(0,0)\longrightarrow(0,3)$$

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\qquad \begin{matrix}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1\lambda_2=1\end{matrix}\qquad \text{indefinida, pto de silla.}$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$$

La matriz es ortogonal $Q=Q^T$ $|\lambda_i|=1$

② Puntos singulares. No aplica $f\in C^\infty$

③ Fronteras

$\#1 \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^2 \,, \qquad x \in [-3, 3]$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_1} = f\left(x, \frac{1}{3}x^2\right) = x\left(3 - \frac{1}{3}x^2\right) = f_1(x)$$

$$f_1'(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 = 3 - x^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{3} \,, \quad y = 1$$

$$f_1''(x) = -\frac{1}{3}x \begin{cases} x = \sqrt{3} \longrightarrow f'' < 0 & (\text{máximo relativo en frontera}) \\ x = -\sqrt{3} \longrightarrow f'' > 0 & (\text{mínimo relativo en frontera}) \end{cases}$$

+Los pts intersección $(-3, 3)$ y $(3, 3)$

$\#_2: \quad y = 6 + x \,, \qquad x \in [-3, 3]$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_2} = f(x, 6+x) = x(-x-3) = -x(x+3) = f_2(x)$$

$$f_2'(x) = -3 - 2x = 0 \longrightarrow x = -\frac{3}{2} \,, \quad y = \frac{9}{2}$$

$$f_2''(x) = -2 < 0 \longrightarrow \text{máximo relativo en frontera}$$

+Los pts intersección $(-3, 3)$ y $(3, 9)$

$\#_3: \quad x = 3 \,; \quad y \in [3, 9]$

$$f(x,y)\Big|_{\partial D_3} = f(3, y) = 3(3 - y) = f_3(y)$$

$f_3'(y) = -3 \neq 0 \rightarrow$ no hay

+ Los pts intersección ya han sido analizados

$\#_4$ es análogo al $\#_3$.