

Solución completa de  $Ax=b$

Rango  $r$

$r=m$ :  $\begin{cases} \text{existe} \\ \text{sol} \end{cases}$

$r=n$ :  $\begin{cases} \text{sol} \\ \text{única} \end{cases}$

$x = x_p + x_n$

Partimos de la misma matriz de la clase anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 = 1$$

$$\rightarrow 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = b_2 = 5$$

$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 = 6$$

$F_3 = F_2 + F_1 \rightarrow$  Una ligadura para los valores de  $b$   
y poder encontrar soluciones.

$b_3 = b_2 + b_1 \rightarrow$  Si esto no se cumple, no hay sol.

$\rightarrow$  eliminación nos va a permitir encontrar esta relación

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right] \rightarrow$$

Matriz aumentada  $[A|b]$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

$\rightarrow b_3 = b_2 + b_1$

## Condición para existencia de sols

$Ax=b$  resoluble si  $b$  pertenece a  $C(A)$

Otra manera de verlo es:

Si una comb. de las filas de  $A$  nos da la fila 0, entonces la misma comb sobre las comp. de  $b$  tiene que dar 0.

Encontrar la solución completa de  $Ax=b$

①  $x_{\text{particular}}$ : fijamos todas las variables libres a 0.  
Resolvemos  $Ax=b$  para las variables pivote.

En nuestro ejemplo  $x_2=0$ ,  $x_4=0$ .

$$\begin{array}{l|l} x_1 + 2x_3 = 1 & x_1 = -2 \\ 2x_3 = 3 & x_3 = 3/2 \end{array}$$

Así que  $x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

②  $x_{\text{nullspace}}$  (vimos en la clase anterior como calcularlos)  
 $Ax_{\text{nullspace}} = 0$

La solución del sistema será de la forma  $x = x_p + x_n$

DEM

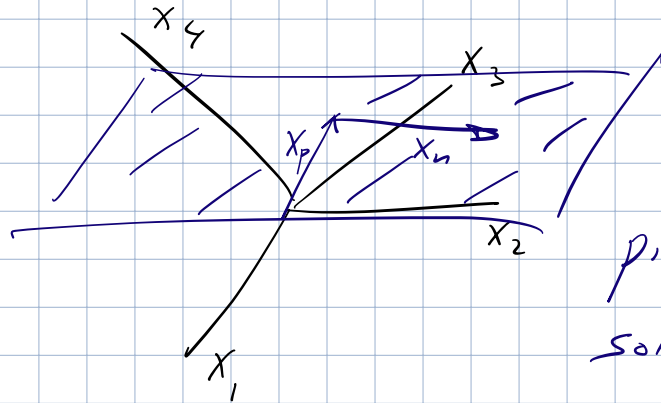
$$\begin{array}{l|l} Ax_p = b \\ Ax_n = 0 \\ \hline A(x_p + x_n) = b \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_p + x_n \end{array} \right.$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5$$

$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6$$

$$x_{\text{complete}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



this is the picture of the solution.

PREGUNTAS:

Matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$  y rango  $r = \#$  of pivots

Relación entre  $r$  y  $m$ ?  $r \leq m \rightarrow$  max  $m$  col pivote

Relación entre  $r$  y  $n$ ?  $r \leq n \rightarrow$  max 1 pivote por col.

Rango completo por columnas  $r = n$ :

Todas las columnas tienen pivote

$\rightarrow$  no hay variables libres.

$\rightarrow N(A) = \left\{ \begin{matrix} \text{zero} \\ \text{vector} \end{matrix} \right\}$

$\rightarrow$  Solución  $Ax = b \rightarrow x = x_p$  (Si hay solución)  
(Hay 0 o 1 solución)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Se puede hacer fácilmente de cabeza)

$$\left. \begin{array}{l} r=2 \\ n=2 \end{array} \right\} r=n=2$$

Este sistema tiene una solución (si  $b \in C(A)$ ) o ninguna si no se cumple esa condición.

Rango completo por filas  $r=m$

Todas las filas tienen pivote:

→ Puedo resolver  $Ax=b$  para cualquier  $b$ .

→ Habrá  $n-r$  variables libres  
 $n-m$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

Rango completo (por filas y columnas)  $r=m=n$

→ Solución para cada  $b$  (y solo una solución)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

→  $N(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{zero} \\ \text{vector} \end{array} \right\}$

→ Matriz invertible

## RESUMEN

$r = m = n$ $R = I$ 1 sol $Ax = b$	$r = n < m$ $R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ (0 o 1 sol) $Ax = b$	$r = m < n$ $R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$ $\infty$ solutions	$r < m, r < n$ $R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (0 o $\infty$ sols).
--	--	--	--

la F puede ser  
mezclada con la I

El rango nos da toda la info que necesitamos sobre el comportamiento de las soluciones al problema.