

Calculando el espacio nulo ( $Ax=0$ )

Variables pivote y variables libres

Soluciones especiales -  $\text{rref}(A) = R$

Algoritmo para resolver  $Ax=0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

no cambia sols de  $Ax=0$

La idea es hacer eliminación y seguir aunque me encuentre algún 0 en un pivote.

Eliminación no cambia  $N(A)$  (espacio nulo de  $A$ )

Si se cambia  $C(A)$  (espacio de columnas de  $A$ )

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} & 4 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Primer pivote

Segundo pivote

$$\begin{matrix} F_3 - F_2 \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Todo 0's  $\rightarrow$  Esta columna es

una combinación lineal de las anteriores

Matriz en forma de escalera (echelon)

$$\text{Rank}(A) = \# \text{ of pivots} = 2$$

¿Cómo puedo describir las soluciones?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esta fila es 0 pq era comb. lineal de las anteriores (1 y 2)

Columnas pivote

Columnas libres

al buscar soluciones, les asigno el valor que quiera

resuelvo en función de  $x_2, x_4$

La matriz representa el sistema

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_3 + 4x_4 = 0$$

Asigno valores a  $x_2, x_4$  Resuelvo para  $x_1, x_3$

$$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ además de este, cualquier múltiplo de este, estará en  $N(A)$ . Es una línea en el espacio nulo de  $A$ .

↓  
Mico  $A$  a ver si esto tiene sentido

Para seleccionar las variables libres siempre seguimos el mismo proceso: fijamos una variable = 1 y el resto 0 y seguimos así hasta completar.

$$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

↳ Comprobar con A que esto es correcto.

Con esto, tenemos completo el espacio nulo de A  $N(A)$ .

$$x = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \# \text{ de vectores} = \\ &= \# \text{ de variables libres} \end{aligned}$$

Resumen:

$$\# \text{ pivots} = r = 2$$

$$\# \text{ free variables} = n - r = 4 - 2 = 2$$

Podemos ir un paso más allá y llegar a la forma escalón reducida (reduced row echelon form rref)

R. Para ello, sigo haciendo eliminación hacia arriba (similar a Gauss Jordan) y luego pivotes = 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/2}$$

Esto tb lo

puedo hacer p<sub>2</sub>  
no cambia las

soluciones de  $Ax=0$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

(Matlab command `rref(A)`) (tb en python con `sympy`)

Si solo me fijo en las columnas pivote y filas pivote tengo una pequeña matriz identidad  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Del sistema  $R$ , es más fácil aún obtener las soluciones  $Rx=0$

Inciso: en esta clase he trabajado con  $Ax=0$ ,  $Ux=0$  y  $Rx=0$ . Todas las soluciones son iguales p<sub>2</sub> pasando de  $A \rightarrow U \rightarrow R$  no la he hecho. Solo operaciones permitidas para resolver sistemas.

$$x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 = 0$$

$$\begin{array}{c} I \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F} \end{array}$$

columnas pivote      columnas libres

Relación con solución!

## Forma ref de una matriz

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow r \text{ filas pivote}$$

$r$  columnas pivote  $n-r$  columnas libres

Esto es una matriz por bloques, así que obtenemos todas las soluciones de una vez ( $Rx=0$ ).

Vamos a crear una matriz  $N$  cuyas columnas sean las soluciones especiales (soluciones de  $Rx=0$ ).

$$RN=0 \rightarrow N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} \rightarrow M.\text{nullspace}() \text{ sympy}$$

nos da esta matriz

$$\begin{bmatrix} I & F \\ r \times r & r \times n-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ I \\ r \times n-r & n-r \times n-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F+F \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Ejemplo: probamos ahora a aplicar el algoritmo a la trasp. de la matriz original  $A \rightarrow A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

¿Podemos saber a priori el # de pivotes?  
 $\rightarrow$  Vemos rápidamente que la 3ª col. es comb. lineal de 1 y 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2$  de nuevo!

$\hookrightarrow r(A) = r(A^T) \rightarrow$  Esto siempre ocurre

↑ U ↑  
columnas pivote // columnas libres  
r 3-2  
total ↑  
column. ↓

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Podemos comprobar en } A \text{ que esto cumple } Ax=0$$

$$N(A) = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{esto es importante, nos vale toda la línea, no solo el vector}$$

Sigamos hasta obtener R (rref)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

Nota sobre pq no cambia el espacio nulo al pasar de  $A \rightarrow U \rightarrow R$ .

En clases anteriores vimos que el proceso de eliminación equivale a premultiplicar por una matriz  $E$ . Por otro lado, intercambiar filas es multiplicar por una matriz  $P$ . Así  $f-e$

$$\dots E_3 P_2 E_2 P_1 E_1 A = U \rightarrow \text{si } A x = 0$$

$$\downarrow$$
$$\dots E_3 P_2 E_2 P_1 E_1 A x = 0 \rightarrow U x = 0$$

Y la misma idea para  $R x = 0$ .