(18.06 Lecture 23)

Ecuaciones diferenciales $\frac{du}{dt} = Au$

Exponencial de una matriz (e^{At})

Ejemplo

$\frac{du}{dt} = u$ ¿Qué función resuelve este problema?

$e^t \rightarrow \frac{du}{dt} = e^t = u = e^t$ ✓

Exponenciales resuelven este tipo de problemas. Si: $u(0) = 7$

$u = 7e^t \rightarrow \frac{du}{dt} = u$ $\quad 7e^t = 7e^t$ y $u(0) = 7e^0 = 7$ ✓

¿Y si hay varias ecuaciones?

$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad \frac{du_1}{dt} = -u_1 + 2u_2$, $\quad \frac{du_2}{dt} = u_1 - 2u_2$,

¿Cómo analizo el comportamiento de este sistema cuando evoluciona el tiempo?

Encontrar matriz del sistema, A, y analizar sus autovalores

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 0$ Singular, $\quad x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad Ax_1 = 0x_1$

$\lambda_2 = -3$ Traza, $\quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad Ax_2 = -3x_2$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

Comprobamos:

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad u = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 \longrightarrow \lambda_1 \cancel{e^{\lambda_1 t}} x_1 = A \cancel{e^{\lambda_1 t}} x_1 \quad \checkmark$$

La segunda, funciona igual, y la suma también, pq el problema es lineal.

$$u(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con la condición inicial $u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ obtengo el valor de las constantes.

$$S \longrightarrow AS = \lambda S$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}^{S} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{1}{3} \; ; \quad c_2 = \frac{1}{3}$$

Solución: $u(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Steady state (estado estacionario) $t \to \infty$

$$u(\infty) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No siempre tendremos este estado estacionario.

Criterios de estabilidad

1. Estabilidad $u(t) \to 0$ / Requisito $e^{\lambda t} \to 0$ / $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$

Recordar que λ puede tener parte real y parte imaginaria

Ejemplo: $e^{(-3+6i)t}$

Escrito en forma polar $\longrightarrow \underbrace{e^{-3t}}_{\text{módulo}} \underbrace{e^{6it}}_{\text{argumento}}$

La solución crece o decrece con el tiempo dependiendo del signo de la parte real.

2. Steady state $\lambda_1 = 0$ y los otros $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$

3. Explota si cualquier $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$

Caso particular 2×2 $(\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0 \,;\ \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0)$

Si matriz real y λ complejos $\longrightarrow$ complejos conjugados

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; \quad \begin{array}{l} \text{traza } A = a + d = \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \\ \det > 0 \quad (\lambda_1 \lambda_2) \end{array}$$

Esto es igual que en la parte de extremos.

Repensemos todo el problema en forma matricial

$$\frac{du}{dt} = Au$$

Cambio de variable (de base) que desacopla (diagonaliza) el problema $u = Sv$

$$S\frac{dv}{dt} = ASv \longrightarrow \frac{dv}{dt} = S^{-1}ASv = \Lambda v$$

En esta base, cada variable solo depende de sí misma

$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 v_1 \; ; \quad \frac{dv_2}{dt} = \lambda_2 v_2 \; ; \quad \dots$$

Cada una de ellas es fácil de resolver.

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1(0) \longrightarrow v(t) = e^{\Lambda t} v(0)$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Deshaciendo el cambio

$$S^{-1}u(t) = e^{\Lambda t} S^{-1} u(0) \longrightarrow u(t) = \underbrace{S e^{\Lambda t} S^{-1}}_{e^{At}} u(0)$$

¿Qué está pasando aquí? ¿Qué es eso de la exponencial de una matriz?

Exponencial de una matriz e^{At}

Recordatorio:

Def. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $e^{ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{6} + \frac{(ax)^4}{24} + \dots$

Aplicamos definición a caso matricial e^{At}

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{6}(At)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(At)^n + \dots$$

Esto se puede hacer con todas las series de Taylor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad * |x| < 1$$

$$(I - At)^{-1} = I + At + (At)^2 + (At)^3 + \dots$$

Si $t \ll 1 \rightarrow (I-At)^{-1} \approx I + At$ aproximación de la inversa

$$* |\lambda(At)| < 1$$

(la $\exp(Ax)$ converge siempre)

Comprobemos ahora que $u(t) = \underbrace{S e^{\Lambda t} S^{-1}}_{e^{At}} u(0)$

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{6}(At)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(At)^n + \dots =$$

$$= \underbrace{I}_{SIS^{-1}} + S\Lambda S^{-1} t + \frac{1}{2} \underbrace{S\Lambda S^{-1} S \Lambda S^{-1}}_{S\Lambda^2 S^{-1}} t^2 + \frac{1}{6} S \Lambda^3 S^{-1} t^3 + \dots =$$

$$= S\left(I + \Lambda t + \frac{1}{2}\Lambda^2 t^2 + \dots\right) S^{-1} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$$

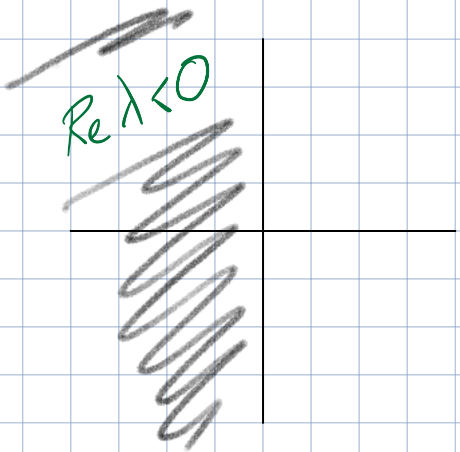
¿Funciona siempre esta fórmula? Sí, si A es diagonalizable.

Nos queda por definir $e^{\Lambda t}$

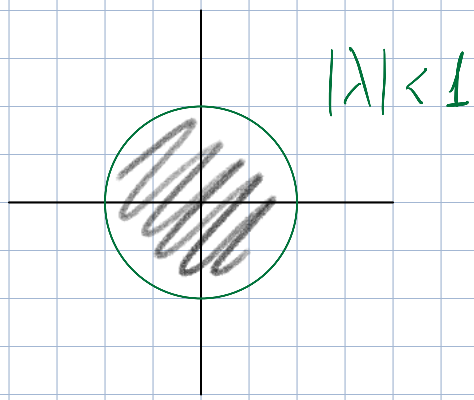
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Podemos repasar aquí el criterio de criterio de estabilidad

Estabilidad $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$



Estabilidad $A^K = S \Lambda^K S^{-1}$



Ejemplo

$$y'' + by' + ky = 0$$

1 ec de 2° orden

$\rightarrow$ 2x2 ecs. de 1er orden

Igual que en Fibonacci

$$u = \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix} \qquad u' = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$$

Todo esto lo veréis en otras asignaturas, ¡es Álgebra lineal!