

los cuatro subespacios asociados a una matriz

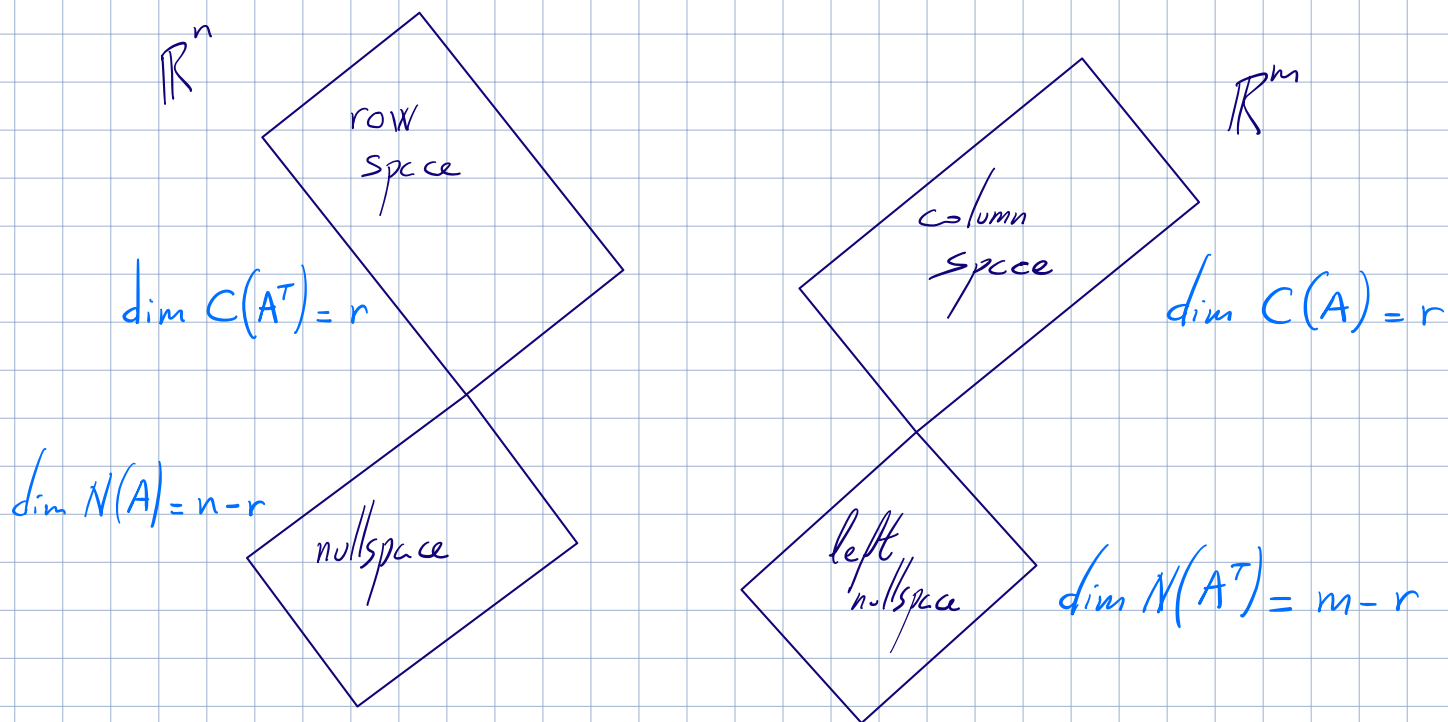
4 Subespacios

- Espacio de las columnas (columnspace) $C(A)$
- Espacio nulo (nullspace) $N(A)$
- Espacio de las filas (rowspace) $C(A^T)$
 - Todas las combinaciones de las filas de A
 - " " " " " " columnas de A^T
- Espacio nulo de A^T $N(A^T)$
 - Espacio nulo por la izquierda (left nullspace of A)

Si A es $m \times n$ ¿En qué dimensión está cada subespacio?

- | | | | |
|------------------|----------|-------------------|--|
| - Columnspace | $C(A)$ | en \mathbb{R}^m | m $\left[\begin{array}{c} n \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} n \times 1 \\ \\ \\ \end{array} \right]$ |
| - Nullspace | $N(A)$ | en \mathbb{R}^n | |
| - Rowspace | $C(A^T)$ | en \mathbb{R}^n | |
| - Left nullspace | $N(A^T)$ | en \mathbb{R}^m | |

Dibujemos los 4 espacios.



Para cada uno de estos subespacios quiero contestar:

- ¿Cómo puedo construir una base?
- ¿Cuál es su dimensión?

$C(A)_*$ $N(A)_*$ $C(A^T)_*$ $N(A^T)_*$

base ?	Pivot col	Special sols	Files $\neq 0$ de R	Almacenado en E
dimensión ?	r	$n - r$	r	$m - r$

* Las columnas pivotas son linealmente independientes. Si no lo fueran podría hacer $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots = 0 \rightarrow A c = 0$ y serían columnas libres. # col pivotas = r

* Special sols son las que hacen $A x = 0$. Recordemos que había una par. cada variable libre $\rightarrow n - r$

* Una opción es transponer la matriz, buscar el pivote y luego tenerlo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{I} \quad \text{F} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = R \end{array}$$

Al pasar de $A \rightarrow R$ cambio $C(A)$

$$C(A) \neq C(R)$$

Sin embargo, tienen el mismo espacio fila (row space). Para

pasar de $A \rightarrow R$ solo he combinado linealmente las filas

En este ejemplo vemos como las dos primeras filas de R pueden perfectamente actuar como base del row space de A ($C(A^T)$)

La dimensión de $C(A^T)$ será el n° de elementos de la base r

*

"y" pertenece a $N(A^T)$

$$A^T y = 0$$



Por eso left nullspace

$$y^T A = 0^T$$

$$\begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

¿Cómo encuentro una base de $N(A^T)$?

$$\text{rref} \begin{bmatrix} A_{m \times n} & I_{m \times m} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R_{m \times n} & E_{m \times m} \end{bmatrix}$$

Dicho de otra forma

$$EA = R$$

↪ Similar a como construimos LU

↪ $E_{m \times m}$ es una grabación de todo lo que le hemos hecho a A para llegar a R

En Gauss Jordan, $E = A^{-1}$ y $R = I$. (Ver clase 3)

Vamos a verlo en un ejemplo

$$\begin{array}{c} R \\ \uparrow \\ A \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Repeto igual para I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Comprobamos que $EA = R$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1 & 0 & 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0 & 0 & 0 & 0} \end{bmatrix}$$

E

A

R

$\dim = \# \text{ el de}$
 $k \text{ b.c.u.} = m - r$

$$y^T A = [0]$$

¡Este es el vector que buscaba!

Como ya sabéis de Álgebra, los vectores no tienen pq ser vectores sino que pueden ser "ótras cosas".

Por ejemplo, un espacio vectorial pueden ser todas las matrices 3×3 . M

Veamos que cumplen las normas que tenían que cumplir mis elementos:

→ Los puedo sumar

→ Los puedo multiplicar por escalar

→ ... (las 8 reglas del espacio vectorial)

¿Que podría ser un subespacio?

→ Matrices triangulares superiores

→ Matrices simétricas

*

* Según vimos, intersección debe ser un subespacio.

Sim \cap Upper triangular \rightarrow Diagonal

Matrices diagonal D

$$\dim(D) = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas tres forman una base
(Son independientes y
puedo generar de ellas
cualquier matriz diagonal)