(18.06 Lecture 06)

Espacios vectoriales y subespacios
Espacio columna $C(A)$
Espacio nulo $N(A)$
Conexión con $Ax=b$

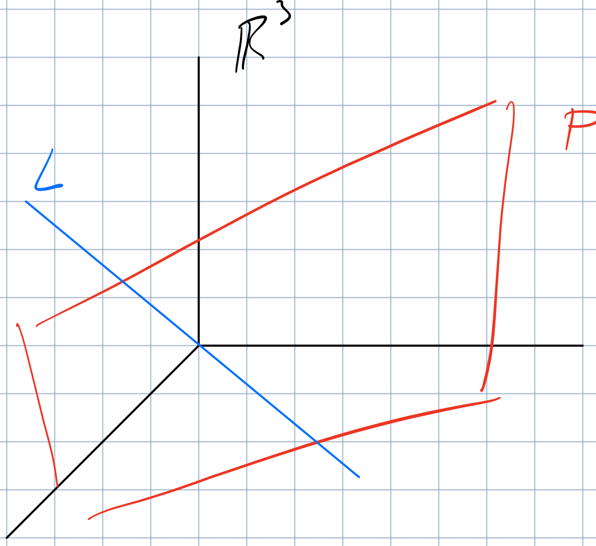
Requisitos espacio vectorial

$v+w$ y cw están en el mismo espacio. Estos dos requisitos se pueden escribir como uno solo:

Todas las combinaciones $cv+dw$ están en el mismo espacio.

Combinaciones lineales de elementos del espacio

Revisar ejemplos clase anterior.



Un plano P o una línea L que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$

Partimos de estos dos subespacios P y L.

* $P \cup L$ (vectores en P, L o ambos) ¿Es un subespacio?

¡No! Si sumo vectores del plano y de la línea, termino con vectores que no son ni del plano ni de la línea

* $P \cap L$ (vectores que pertenecen a P y a L) ¿Es subespacio?

(En el ejemplo sería solo el $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) → ¡Sí!

¿Y en general? ¡Tb funciona!

Subespacios S y T. La intersección $S \cap T$ es un subesp.

¿Pq? Tomo dos vectores $v, w \in S \cap T$. Ahora hago $cv + dw$

$$\left.\begin{array}{l} cv+dw \in S \ \text{(pq } S \text{ era subespacio)} \\ cv+dw \in T \ \text{(pq } T \text{ era subespacio)} \end{array}\right\} cv+dw \in S \cap T \Downarrow$$

$S \cap T$ es subespacio

$C(A) \rightarrow$ Espacio columna de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

En este caso $C(A)$ será un subespacio de $\mathbb{R}^4$ que contendrá las 3 columnas de A

$C(A)$ son todas las comb. lineales de las columnas de A.

¿Cómo de grande es este subespacio?

¿Ocupa todo $\mathbb{R}^4$? ¡No!

Antes de seguir, conectemos esto con la resolución de sistemas lineales. Si planteamos el problema $Ax = b$, ¿tiene solución para cualquier b? ¡No!

Tenemos 4 ecuaciones y 3 incógnitas. Sistema sobredeterminado.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

¿Que RHS (b) es ok?

¿Con cuales podré resolver el sistema?

Ejemplo de b que sí funciona:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ Seguro que funciona

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Seguro que funciona

Proponer que resuelvan el problema.

(Sol es comb. lineal de columnas...)

En realidad, una buena manera de encontrar b's válidos es partir de x y calcular.

Generalizando, la condición de RHS válido es que pertenezca a $C(A)$. Es la propia definición de subespacio

En este ejemplo, ¿me podría deshacer de alguna columna de la matriz para obtener una matriz más pequeña con el mismo espacio columna?

¡Sí!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cancel{2} \\ 2 & 1 & \cancel{3} \\ 3 & 1 & \cancel{4} \\ 4 & 1 & \cancel{5} \end{bmatrix}$$

↳ esta es la suma de las dos anteriores, no aporta nada nuevo. En realidad, en este ejemplo podría deshacerme de cualquiera.

$C(A)$ es un espacio bidemensional de $\mathbb{R}^4$

$N(A)$ → espacio nulo de A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

El espacio nulo no contiene RHS, sino vectores x

$N(A)$ contiene todas las soluciones $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ del problema $Ax = 0$

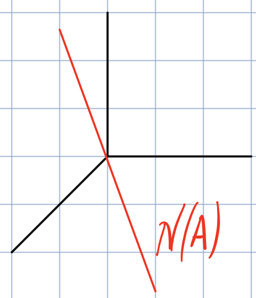
$N(A)$ en este ejemplo está en $\mathbb{R}^3$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una solución es $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Esta siempre es solución, luego es $N(A)$

Otra solución es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, y otra $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ en general $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Así que $N(A)$ es $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (incluye el $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). El espacio nulo es una línea en $\mathbb{R}^3$



¿Y cómo puedo estar seguro de que $N(A)$ es realmente un subespacio vectorial?

Comprobar que sols. de $Ax=0$ siempre dan un subespacio.

Para ello, comprobamos que:

$v+w$ y cw están en el mismo espacio

Si $Av=0$ y $Aw=0$ entonces $A(v+w)=0$

Si $Av=0$ entonces $Acv=0$

DEM

$$\begin{aligned} Av &= 0 \\ Aw &= 0 \\ \hline Av + Aw = 0 &\rightarrow A(v+w) = 0 \end{aligned}$$

$Av=0 \rightarrow cAv=0$

$\rightarrow Acv=0$

Dejamos aparcado $N(A)$.

Nos centramos en este ejemplo:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tiene varias soluciones $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

¿Forman las soluciones del problema un espacio vectorial?

¡No! (No incluyen el $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Son como un plano que no pasa por el origen.

En esta clase hemos visto las dos maneras naturales de definir subespacios:

1. Me dan los vectores, como en $C(A)$
2. Me dan las restricciones, como en $N(A)$