

SIMILAR MATRICES (Matrices semejantes)

$$A, B \quad / \quad B = M^{-1} A M$$

FORMA DE JORDAN

→ Skip $A^T A$ is positive definite!

Matrices semejantes ($n \times n$)

A y B son semejantes significa que para alguna M se puede escribir $B = M^{-1} A M$

Ejemplo

$$S^{-1} A S = \Lambda \rightarrow A \text{ y } \Lambda \text{ son semejantes}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

 M^{-1} A M B

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(triangular,

(invertida)

inversa es trivial)

A y B son semejantes y por tanto, tienen los mismos autovalores

$\lambda = 3, 1$ (check tr y det para cada matriz: A, B, A)

Matrices semejantes tienen los mismos autovalores

$$Ax = \lambda x$$

$$AMM^{-1}x = \lambda x$$

$$M^{-1}AMM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$$

$$BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$$

$\hookrightarrow \lambda$ es autovalor de B

Tengo esta familia de matrices que tienen los autovalores $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. Estos dos autovalores son distintos, con lo que es diagonalizable.

Caso no-diagonalizable. (CASO MALO $\lambda_1 = \lambda_2$)

Ejemplo $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Una ^{small} familia tiene

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Otra ^{big} familia tiene

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

↗ No son de la misma familia!
↘ (No son semejantes)

↘ No es semejante a
ninguna otra $M^{-1}4IM = 4I \forall M$

Forma de Jordan

Lo más diagonal que puede llegar a ser
una matriz 2×2 con $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Jordan describe la mejor
matriz dentro de cada familia

Más miembros de la familia de $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
(autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$).

Es fácil si nos fijamos en $\text{tr} = 8$, $\det = 16$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}$$

BTW, ninguno de estos es diagonalizable. Si lo fuera, $\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
pero ya he visto que eso es imposible $M^{-1}4IM = 4I \forall M$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 8-a \end{bmatrix} / a(8-a) - bc = 16$$

Matrices semejantes tienen los mismos autovalores y
mismo número de autovectores

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Autovectores? $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$
(están en la diagonal)

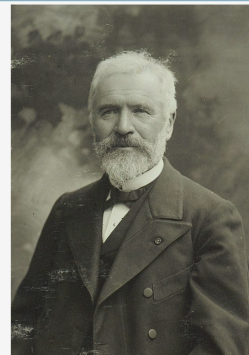
Autovectores $N(A - \lambda I) = N(A) \rightarrow \dim N(A) = 2 \quad (4-r)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Autovectores? $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$
(están en la diagonal)

Autovectores $N(A - \lambda I) = N(A) \rightarrow \dim N(A) = 2 \quad (4-r)$

Marie Ennemond Camille Jordan



Camille Jordan.

Información personal

Nombre en francés: Camille Jordan
Nacimiento: 5 de enero de 1838
Lyon, Francia
Fallecimiento: 22 de enero de 1922 (84 años)
Paris, Francia
Nacionalidad: Francesa

2 autovectores y 2 faltan. Esas dos matrices son semejantes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Autovectores? $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

(están en la diagonal)

Autovectores $N(A - \lambda I) = N(A) \rightarrow \dim N(A) = 2 \quad (4-r)$

Pero esta no es semejante a las anteriores

Bloque de Jordan (cada bloque de Jordan tiene un autovector)

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & 1 & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No son similares
pq bloques no
son del mismo
tamaño.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema de Jordan

Cada matriz cuadrada A es semejante a una matriz de Jordan J .

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \boxed{J_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

bloques = # autovectores

Empezamos con una matriz A .

* Si todos los autovalores son distintos

$$\rightarrow S^{-1}AS = \Lambda \rightarrow S = \Lambda$$

No es sencillo calcular la forma de Jordan, lo veremos en la próxima clase.