(18.06 Lecture 24)

Matrices de Markov
Estado estacionario (Steady state)
Serie de Fourier y proyecciones

Aplicaciones de la teoría

Matriz de Markov

$$A = \begin{bmatrix} .1 & .01 & .3 \\ .2 & .99 & .3 \\ .7 & 0 & .4 \end{bmatrix}$$

① Todas las entradas ≥ 0
② Todas las columnas suman 1

Si A es de Markov, también lo es $A^2, A^3 \ldots$

1.- $\lambda = 1$ será autovalor de A / $x_1 \geq 0$
2.- Todos los demás $|\lambda_i| < 1$ (caso límite $|\lambda_i| \leq 1$)

$$u_K = A^K u_0 = c_1 \lambda_1^K x_1 + c_2 \lambda_2^K x_2 + \ldots$$

(asumiendo que A es diagonalizable)

$$u_K = A^K u_0 = c_1 \underbrace{\lambda_1^K}_{=1} x_1 + c_2 \underbrace{\lambda_2^K}_{|\lambda_2|<1} x_2 + \ldots \xrightarrow{K \to \infty} c_1 x_1$$

Estado estacionario

Parte de u_0 en la dirección de x_1

¿Como puedo establecer esta relación?

② Todas las columnas suman 1 $\longrightarrow$ 1.- $\lambda = 1$ autovalor de A

$$A - 1I = \begin{bmatrix} -.9 & .01 & .3 \\ .2 & -.01 & .3 \\ .7 & 0 & -.6 \end{bmatrix}$$

Si $\lambda = 1$ autovalor $\rightarrow$ $A - I$ singular

② Todas las columnas de $A - I$ suman 0 $\xrightarrow[\text{Why?}]{}$ $A - I$ es singular

Fila 1 + Fila 2 + Fila 3 = 0 $\rightarrow$ las filas son dependientes $\rightarrow$ $[1\ 1\ 1]$ pertenece a $N((A-I)^T)$

¿Quien pertenece a $N(A-I)$? $\rightarrow$ x_1 ! es la manera en que calculamos autovectores

---

¿Hay alguna relación entre los autovalores de A y A^T?

¡Son los mismos!

$$\det A = \det A^T$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \det(A^T - \lambda I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -.9 & .01 & .3 \\ .2 & -.01 & .3 \\ .7 & 0 & -.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6 \\ 33 \\ .7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicaciones de matrices de Markov (ejemplo)

$u_{K+1} = A\, u_K \qquad A$ es Markov

Dos comunidades: Cataluña y Madrid.

u_K es las personas en cada comunidad al final del año K

A me dice las fracciones de población que se mueve o se queda

80% de población Madrid se queda y un 20% se va a Cataluña

$$\begin{bmatrix} u_{cat} \\ u_{mad} \end{bmatrix}_{t=K+1} = \begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .1 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{cat} \\ u_{mad} \end{bmatrix}_{t=K}$$

90% de población Cataluña se queda y un 10% se va a Madrid

En este caso, está claro que las entradas tienen que ser >0 y sumar 1 (solo estoy explicando como la gente se reparte)

Supongamos que:

$$\begin{bmatrix} u_{cat} \\ u_{mad} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} u_{cat} \\ u_{mad} \end{bmatrix}_{t=1} = \begin{bmatrix} 200 \\ 800 \end{bmatrix}$$

Total no cambia, sigue siendo 1000.

Si quiero ver como continúa la evolución, tengo que recurrir a los autovalores y autovectores

$$\begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .1 & .8 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1$$

Markov

$$\lambda_2 = .7 \leftarrow Tr(A) = .9 + .8 = \lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow \lambda_2 = .9 + .8 - 1$$

Steady state

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} -.1 & .2 \\ .1 & -.2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{cat} \\ u_{mad} \end{bmatrix}_{t=\infty} = 1000 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$(x_1 \geq 0)$

$$\lambda_2 = .7 \quad \begin{bmatrix} .2 & .2 \\ .1 & .1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_K = c_1 \, 1^K \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \, (.7)^K \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1000}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2000}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ Ejemplo 2 → Google Pagerank

Fourier

Proyecciones con base ortonormal $(q_1, \dots, q_n)$

Para cualquier v, podemos expandir el vector como

$$v = x_1 q_1 + x_2 q_2 + \dots + x_n q_n$$

¿Cómo calculo x_1?

① Aplicamos fórmulas de proyección

② Tomo el prod. escalar de v con q_1

$$q_1^T v = (x_1 q_1 + x_2 q_2 + \dots + x_n q_n) q_1^T = x_1 \cancel{q_1^T q_1}$$

En forma matricial

¡Estas expresiones son iguales!

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & - & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = v$$

$$Q \quad x = v \longrightarrow x = Q^{-1} v \longrightarrow x = Q^T v$$

Esta ortonormalidad es clave en las series de Fourier.

Intro a series de Fourier

$f(x)$ periodica con periodo 2π $\left(f(x) = f(x+2\pi)\right)$

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

$v \to f(x)$

$q_i \to$ funciones ortogonales $(a_0, \cos x, \sin x \dots)$ *

Espacio tiene tamaño ∞, luego necesito ∞ elementos de la base

Jean-Baptiste Joseph Fourier

Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly

Información personal

Nacimiento	21 de marzo de 1768 Auxerre, Francia
Fallecimiento	16 de mayo de 1830 (62 años) París, Francia

* ¿Qué significa que dos funciones son ortogonales?

vectores

$$v^T w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

funciones

¡Es equivalente!

$$f^T g = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

¿Funciones base Fourier ortogonales?

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\rightsquigarrow$ Igual para el resto

¿Cómo calculo los coeficientes?

$$a_1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx = \int_0^{2\pi} a_1 \cos^2 x\, dx \to a_1 = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx}{\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx$$

↳ Y así se calcula los coefs. en una serie de Fourier