FACTORIZACIÓN MATRICIAL. LU II (18.06 Lecture 02)

- * Elimination → Success / Failure
- * Back-sustitution
- * Elimination matrices
- * Matrix multiplication

Vamos a revisitar el método de Gauss que conocéis

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x + 8y + z &= 12 \\ 4y + z &= 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Todo lo que importa está en esta matriz, así que me centraré en ella.

El primer paso es eliminar la componente "x" de la segunda ecuación. Nos olvidamos del RHS, lo podríamos hacer todo al final

Pivote

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[F_2 - \frac{3}{1} F_2]{(2,1)} \begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[F_3 - \frac{4}{2} F_2]{(3,2)} \underset{U}{\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{matrix}}$$

Pivote

Con esto hago un 0 en la posición 2,1

El siguiente paso me lo ahorro, ya que tengo un 0 en la posición 2,2

La matriz U (Upper Triangular)

Los pivotes no pueden ser 0, no se aceptan.

Inciso: puedo obtener el determinante de A simplemente multiplicando los pivotes.

¿Cuando falla este algoritmo? (No consigo 3 pivotes)

Ejemplo 1

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}$$

→ Si tengo un cero en la posición del pivote, puedo intercambiar filas

Ejemplo 2

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Podría solucionarlo tb intercambiando filas

⇔ Siempre que tenga un no-0 debajo, puedo solucionar el problema.

Ejemplo 3

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{matrix}$$

Este problema no tiene solución. Matriz singular

$$\rightarrow \begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{matrix}$$

Volvemos a centrarnos en el caso que si funciona.

Tratemos ahora de vuelta el RHS.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ \text{Pivote} & & & b \end{array} \xrightarrow[F_2 - \frac{3}{1} F_2]{(2,1)} \begin{array}{cccc} & & \text{Pivote} & \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow[F_3 - \frac{4}{2} F_2]{(3,2)} \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -8 \\ & & U & c \end{array}$$

Matriz ampliada

Repito los mismos pasos en b

Las ecuaciones finales son:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - 2z &= 6 \\ 5z &= -10 \end{aligned} \qquad Ux = c$$

¿Cómo las resuelvo? Back sustitution

1 - Resuelvo la última ecuación → $z = -2$

2 - Resuelvo la penúltima ecuación $(z = -2) \rightarrow y = 1$

3 - " " antepenúltima " $(z = -2, y = 1) \rightarrow x = 2$

Ya tenemos controlada eliminación y sustitución hacia atrás.

FORMA MATRICIAL ELIMINACIÓN

Para explicar la forma matricial necesitamos hacer un pequeño inciso sobre multiplicación matricial.

Recordatorio clase anterior

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}}_{3\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{3 \times col\,1 + 4\,col\,2 + 5\,col\,3}_{3\times 1}$$

Matrix × Column = Column

Inciso → operaciones por filas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}}_{1\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}}_{3\times 3} = \underbrace{1 \times row\,1 + 2\,row\,2 + 7\,row\,3}_{1\times 3}$$

Row × Matrix = Row

Paso 1 Restar 3 × Fila 1 a Fila 2 en forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}A}$$

Matriz de eliminación que hace un 0 en la posición 21

PASO 2 Restar 2× Fila 2 a Fila 3 en forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

↳ Matriz de eliminación que hace un 0 en la pos. 32

Ya tenemos las matrices encargadas de realizar el proceso de eliminación. El paso siguiente es juntar todas estas matrices en una matriz que haga todos los pasos

Todo lo que hemos hecho, se puede resumir en:

$$\underbrace{E_{32}\underbrace{(E_{21}A)}_{\text{Paso 1}}}_{\text{Paso 2}} = U$$

Podemos cambiar los paréntesis (prop. asociativa) para obtener:

$$(E_{32}E_{21})\,A = U$$

Inciso. Hay una matriz que podríamos haber necesitado pero que no ha hecho falta en este caso y es la matriz de permutación. Esta matriz intercambia filas /columnas de otra matriz.

Por ejemplo, supongamos que queremos intercambiar las filas 1 y 2 de una matriz 2×2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

El truco para encontrar P es intercambiar las filas de la matriz identidad y esa es la matriz que realizará el intercambio de filas.

¿Y si quisiera intercambiar columnas?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

↳ Para realizar operaciones por columnas, tengo que multiplicar por la derecha!

→ Multiplicar por la izq. es operar por filas

→ Multiplicar por la dch. es operar por columnas

Fin del inciso

$$(E_{32}E_{21})A = U$$

$$\underset{E_{32}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

La multiplicación de estas dos matrices me da una matriz que al aplicarla a A me da U.

Sin embargo, este no es el proceso más eficiente, sino que estoy más interesado en el proceso inverso (encontrar la matriz que, al aplicarla a U me devuelve A).

MATRIZ INVERSA (lo veremos en más detalle en la prox. clase)

ESEMPLO

Pensemos en las matrices no como una caja llena de números sino como una manera de realizar operaciones.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo la matriz de la dch. aplicada a A substrae 3 veces la fila 1 a la fila 2.

¿Qué tenemos que hacer para deshacer esto?

Sumarle 3 veces la fila 1 a la 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y si hago ambos pasos de forma sucesiva no debería ocurrir nada

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(E_{21})^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Problem 2.2: (2.3 #29. *Introduction to Linear Algebra:* Strang) Find the triangular matrix E that reduces "*Pascal's matrix*" to a smaller Pascal:

$$E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Which matrix M (multiplying several E's) reduces Pascal all the way to I?

Solution:

$$\text{The matrix is } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

One can eliminate the second column with the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

and the third column with the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplying these together, we get

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Since M reduces the Pascal matrix to I, M must be the inverse matrix!