

Algoritmo QR para cálculo de autovalores

Partimos de una matriz A de tamaño $n \times n$.

① Factorizamos $A_0 = Q_0 R_0$

② Calculo la nueva matriz $A_1 = R_0 Q_0$

③ Factorizamos $A_1 = Q_1 R_1$

④ Calculo nueva matriz $A_2 = R_1 Q_1$

⋮

Veamos en que resulta:

$$A_0 = Q_0 R_0 \rightarrow Q_0^T A_0 = R_0$$

QR algorithm

$$A_1 = R_0 Q_0 = \underline{Q_0^T A_0} \underline{Q_0}$$

$$A_1 = Q_1 R_1 \rightarrow Q_1^T A_1 = R_1$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^T A_1 Q_1 = Q_1^T Q_0^T A_0 Q_0 Q_1$$

⋮

$$A_K = R_{K-1} Q_{K-1} = \dots = Q_{K-1}^T Q_{K-2}^T \dots Q_0^T A_0 Q_0 \dots Q_{K-2} Q_{K-1}$$

Nos fijemos ahora en un par de detalles

① Como el producto de mat. ortogonales resulta en una matriz ortogonal, podemos escribir:

$$A_K = Q^T A_0 Q \quad (Q = Q_0 \dots Q_{K-2} Q_{K-1})$$

② A_K y A_0 son semejantes → tendrán los mismos autovalores

A_1 y A_0 son semejantes (similar matrices) → mismos autovalores

Explicación:

$$A_1 v = \lambda v$$

$$Q_0^T A_0 Q_0 v = \lambda v \rightarrow A_0 Q_0 v = \lambda Q_0 v \rightarrow A_0 u = \lambda u$$

Same eigenvalue, different eigenvector.

Cuando $K \rightarrow \infty$ (y se cumplen las condiciones de convergencia que no cubriremos aquí), obtengo una matriz A_K que será triangular superior. Los autovalores de una matriz triangular superior están sobre la diagonal.

De modo que solamente tengo que leer los autovalores en la diagonal.

Esto tb puede verse como que QR me da la factorización Schur de una matriz

$$A = U T U^T$$

Donde $U \rightarrow$ ortogonal

$T \rightarrow$ triangular superior.

$A_K \rightarrow T$ cuando $K \rightarrow \infty$

La matriz U la podemos recuperar si en cada iteración utilizo el siguiente pseudo-código:

$$A_0 = A$$

$$U_0 = I$$

for $i = 1, \dots, \text{max_iterations}$

$$Q_{i-1}, R_{i-1} = \text{factorización QR}(A_{i-1})$$

$$A_i = R_{i-1} Q_{i-1}$$

$$U_i = U_{i-1} Q_{i-1} \# Q_0 \dots Q_{K-2} Q_{K-1}$$

Si $i \rightarrow \infty$ se cumple que $U_i A_i U_i^T = A_0$

Convergencia

Asumiendo que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ (autovalores de diferente magnitud) los elementos de Ax bajo la diagonal tienden a cero como:

$$|a_{ij}^{(K)}| = O\left(\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|^K\right), \quad i > j$$

Ejemplo

$$A_{20} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{20} a_{22} & & & \\ \left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|^{20} & \left|\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right|^{20} a_{33} & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Conclusiones

- ① Si los autovalores son parecidos en magnitud, el algoritmo converge despacio.
- ② El algoritmo es caro ya que hay que hacer QR en cada paso (coste n^3)