(18.06 Lecture 27)

Positive Definite Matrix (Tests)

Tests for Minimum $(x^TAx > 0)$

Ellipsoids in $\mathbb{R}^n$

Recordemos que en este capítulo solo trabajamos con matrices simétricas $A = A^T$.

Definida positiva significa que todos sus autovalores son positivos

¿Cómo saber si una matriz 2x2 es definida positiva?

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

1. Test autovalores $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 > 0$
2. Test determinantes $a > 0$; $ac - b^2 > 0$
3. Pivotes (no row excl.) $a > 0$; $\frac{ac - b^2}{a} > 0$
4. *Definición* $x^TAx > 0$ $(x \neq 0)$

Comprobar uno de los test es suficiente. Si se cumple uno, se cumplen todos.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & x \end{bmatrix}$$ ¿Para que x la matriz es definida positiva?

② Usar test del determinante $2x - 36 > 0 \rightarrow x > 18$

Si $x = 18 \longrightarrow$ semidefinida positiva

① Autovalores $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 20$ (traza + singular)

③ Pivotes 2, ya está. Sólo tengo un pivote, matriz de rango 1

④

forma cuadrática

$$\underset{x^T}{[x_1\ x_2]} \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = [x_1\ \ x_2] \begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + 18x_2 \end{bmatrix} = \underset{a}{2}x_1^2 + \underset{2b}{12}x_1x_2 + \underset{c}{18}x_2^2$$

$ax^2 + 2bxy + cy^2$

La pregunta ¿para cualquier x_1, x_2 es esa cantidad positiva?

$$2x_1^2 + 12x_1x_2 + 18x_2^2 \overset{?}{>} 0$$

INCISO

Cambiemos por un momento el problema $x = 7$

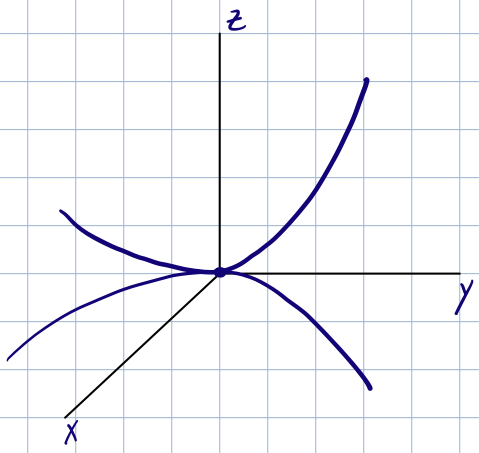
② $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 36 < 0 \rightarrow$ Luego no es definida positiva.

Por tanto, tampoco se puede cumplir ④

$$[x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2 \longrightarrow$$ para algunos valores de x_1, x_2 esto es negativo

Por ejemplo $x_1 = 1$, $x_2 = -1 \longrightarrow$ todo negativo.

Gráfica de $f(x,y) = x^T A x$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$



$$2x^2 + 12xy + 7y^2$$

This is a saddle point

La dirección perfecta para mirar esto es la de los autovectores

Esto NO es una matriz definida pos.

FIN INCISO

forma cuadrática

$$\underbrace{[x_1\ \ x_2]}_{x^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = [x_1\ \ x_2] \begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + 18x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 20x_2^2$$

$$\underset{\uparrow a}{\ } \quad \underset{\uparrow 2b}{\ } \quad \underset{\uparrow c}{\ }$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

¿Cómo puedo saber que los autovalores son > 0?

$\det > 0 \qquad (\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)) \qquad \det(A) = 4$

$Tr(A) > 0 \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A)) \qquad Tr(A) = 22$

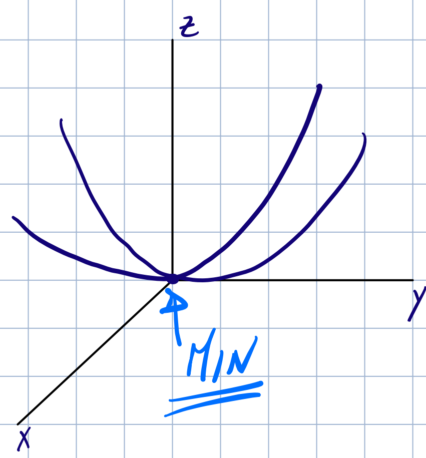
$\Downarrow$

$2x_1^2 + 12x_1x_2 + 20x_2^2 > 0$ (Solo en $x_1 = x_2 = 0$)

Gráfica de $f(x,y) = x^T A x$

$$2x^2 + 12xy + 20y^2$$

Los positivos mucho más grandes que los negativos



Es puramente cuadrática → en $(0,0)$ está en el origen
→ tangente horizontal (1^{st} deriv. son todas 0)
→ derivada segunda controla si es mínimo o no.

Cálculo I

$$f' = 0 + f'' > 0 \longrightarrow \min.$$

Cálculo II

$$f'_i = 0 + \text{Hesiana definida positiva. Ex. } \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

¿Cómo ver claramente que $2x^2 + 12xy + 20y^2 > 0$?

Completando cuadrados

$$2x^2 + 12xy + 20y^2 = 2(x + 3y)^2 + 2y^2$$

→ claramente ahora es todo positivo

Step 1 Step 2

¿Qué pasa con $2x^2 + 12xy + 7y^2$?

Completando cuadrados

$$2x^2 + 12xy + 7y^2 = 2(x + 3y)^2 - 11y^2$$

Step 1 Step 2

Ahora es muy claro que si $x + 3y = 0$, obtengo valores negativos.

Las curvas de nivel de formas cuadráticas definidas positivas son elipses

Las curvas de nivel de formas cuadráticas indefinidas $(2x^2 + 12xy + 7y^2)$ son hipérbolas.

Completar cuadrados es lo mismo que eliminación (método de Gauss)

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}} \rightarrow \overset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2(x + 3y)^2 + 2y^2$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(x + 3y) \\ 2y \end{bmatrix} = 2(x+3y)^2 + 2y^2$$

Esto me permite generalizar el proceso de completar cuadrados a matrices $n \times n$. Solo tengo que mirar el signo de los pivotes para ver si es definida positiva (sin intercambio de filas)

Ejemplo 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

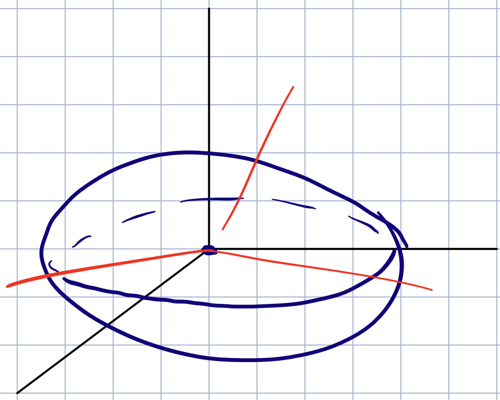
dets $2, 3, 4$

pivots $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ (product of pivots give determinants)

eigenvalues $2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}$ (check that trace and det works)

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 > 0$$

Superficies de nivel de f $(f(x_1, x_2, x_3) = c > 0)$ me de elipsoides



Los ejes principales vienen dados por los autovectores y los autovalores nos dan la magnitud del elipsoide en esa dirección

$$A = Q \Lambda Q^T$$