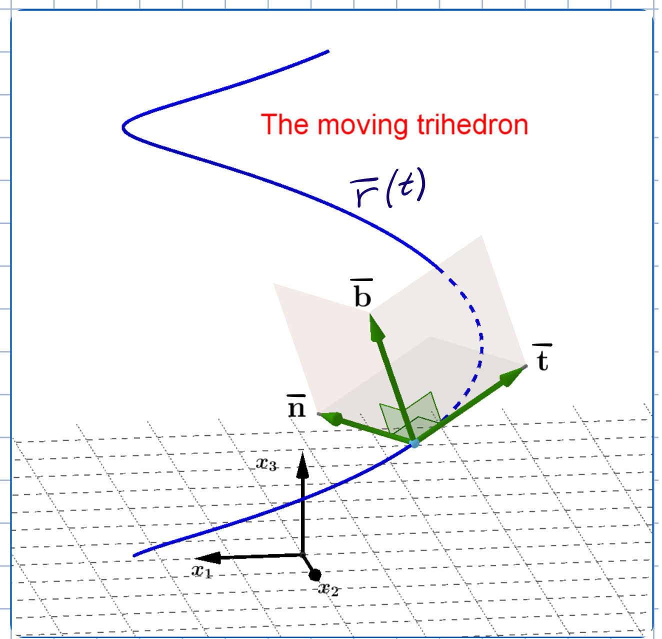
21. CURVAS PLANAS Y ALABEADAS II

C.- Geometría básica de curvas

1 Triedro intrínseco. Triedro de Frenet.



Pensemos que $\bar{r}(t)$ describe la posición (x, y, z) de una partícula con el tiempo t. En ese caso, la velocidad es

$$\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = \|\bar{r}'(t)\| \; \vec{t} = v\,\vec{t}$$

Módulo de la velocidad por dirección de velocidad

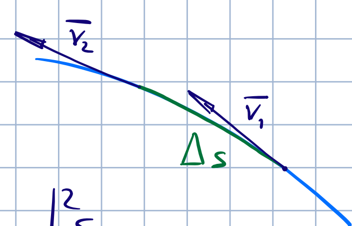
Por otro lado, la aceleración es

$$\bar{a}(t) = \bar{v}'(t) = \bar{r}''(t) = v'\,\vec{t} + v\,\vec{t}\,' = a_t\,\vec{t} + \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n} = a_t\,\vec{t} + a_n\vec{n}$$

Aceleración por cambio del módulo de la velocidad (con dir. constante)

Aceleración por cambio de dirección de la velocidad (con módulo constante)

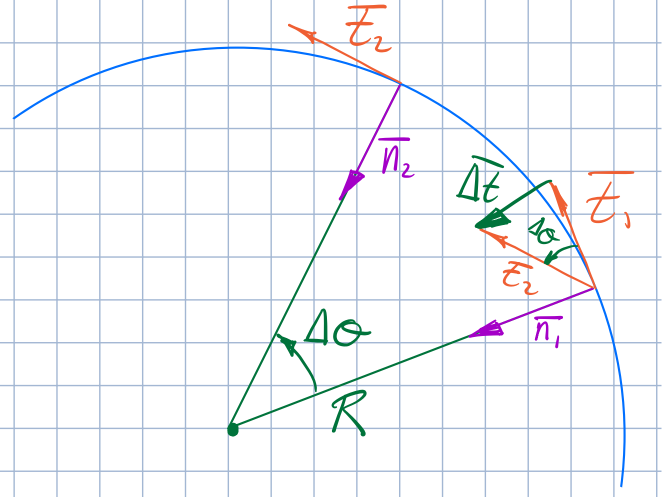
Aceleración tangencial, a_t (v')



$$\bar{r}'(t) = \|\bar{r}'(t)\|\,\vec{t}$$

$$s(t) = \int_0^t \|\bar{r}'(u)\|\,du, \quad \frac{ds}{dt} = \|\bar{r}'(u)\| = v, \quad \frac{dv}{dt} = v' = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Aceleración normal, $a_n \left(\frac{v^2}{R}\right)$



Asumimos $\Delta\theta \ll 1$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \qquad \left(\sin\Delta\theta \approx \frac{\Delta s}{R} \right)$$

$$\Delta \bar t = \bar t_2 - \bar t_1 \approx \bar n_1 \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \bar n_1$$

$$\bar t_2 = \bar t_1 + \bar n_1 \Delta\theta$$

$$\bar t' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{1}{R} \bar n = \frac{v}{R} \vec n \longrightarrow v \bar t' = \frac{v^2}{R} \bar n = a_n \bar n$$

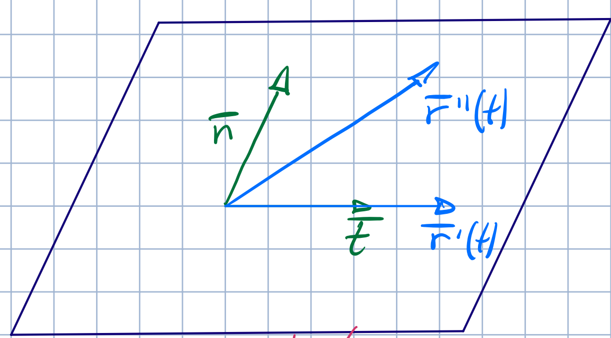
$(\Delta t \to 0 \to \bar n_2 \to \bar n_1$, así que usamos $\bar n)$

t sin vector es el parámetro
$\bar t$ es el vector tangente

Moraleja

$\bar r'(t)$ es paralelo a $\vec t$
$\bar r''(t)$ es paralelo a $\lambda \bar t + \mu \vec n$
$\bar t$ es perpendicular a $\bar n$
$\frac{d\bar t}{dt}$ es paralelo a $\bar n$

$\bar r'(t)$ y $\bar r''(t)$ son coplanarios con $\vec t$ y $\vec n$



Plano osculador

Triedro intrínseco. Es un sistema de referencia local a la curva definido por los vectores tangente ($\bar{t}$), normal ($\bar{n}$) y binormal ($\bar{b}$).

Vector binormal ($\bar{b}$): $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$

(Perpendicular al plano osculador y definiendo un triedro a derechas)

A partir de ahora $T \equiv \bar{t}$, $N \equiv \bar{n}$, $B \equiv \bar{b}$

→ Sistema ortonormal: $\|T\| = \|N\| = \|B\| = 1$

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dr, bend left] & \\
B \arrow[ur, bend left] & & N \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

$$T \times N = B$$

$$N \times B = T$$

$$B \times T = N$$

2 Triedro intrínseco con parametrización cualquiera

Sea $\bar{r}: I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular con una parametrización cualquiera. Vamos a obtener el triedro intrínseco.

→ Forma dificil

① Vector tangente, T

$$T = \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}$$

② Vector normal, N

$$N = \frac{dT/dt}{\left\| dT/dt \right\|}$$

NOTA 1: Comprobemos que con esta def. $N \perp T$

$$N \parallel \frac{dT}{dt} \perp T \quad ; \quad T \cdot T = \|T\| = 1$$

$$\frac{d}{dt} \Big\downarrow \quad 2T \cdot \frac{dT}{dt} = 0 \longrightarrow T \perp \frac{dT}{dt}$$

NOTA 2: cálculo de la derivada del módulo de un vector

$$\frac{d}{dt}\|\bar{v}\| = \frac{d}{dt}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} = \frac{v_1 v_1' + v_2 v_2' + v_3 v_3'}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{v}'}{\|\bar{v}\|}$$

De modo que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} = \frac{\bar{r}''(t)\|\bar{r}'(t)\| - \bar{r}'(t)\|\bar{r}'(t)\|'}{\|\bar{r}'(t)\|^2} =$$

$$= \frac{\bar{r}''(t)\|\bar{r}'(t)\| - \bar{r}'(t)\left(\dfrac{\bar{r}'(t)\cdot\bar{r}''(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}\right)}{\|\bar{r}'(t)\|^2} =$$

$$= \frac{\bar{r}''(t)\|\bar{r}'(t)\|^2 - \bar{r}'(t)\left(\bar{r}'(t)\cdot\bar{r}''(t)\right)}{\|\bar{r}'(t)\|^3}$$

3 Vector binormal, B $\quad (B = T \times N)$

A partir de aquí y para facilitar la lectura simplificaremos la notación

$$\bar{r}(t) \rightarrow r, \quad \bar{r}'(t) \rightarrow r', \quad \bar{r}''(t) \rightarrow r''$$

$$T \times N \parallel r' \times \frac{dT}{dt} = r' \times \frac{r''\|r'\|^2 - r'(r' \cdot r'')}{\|r'\|^3} = \frac{r' \times r''}{\|r'\|}$$

Así que $B = T \times N = \dfrac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$

→ Forma fácil (basada en el desarrollo anterior)

① Tangente $T = \dfrac{r'}{\|r'\|}$

② Binormal $B = \dfrac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$

③ Normal $N = \underline{B \times T}$

¡el orden es importante!

Nota: los pts en los que $r'(t_0) \neq 0$ y $r''(t_0) = 0$ se llaman pts de inflexión y en ellos el triedro no está definido.

ELEMENTOS GEOMÉTRICOS ASOCIADOS.

→ Rectas:

① Tangente: $\bar{x}(t) = r(t_0) + T(t_0) \cdot t$

② Normal: $\bar{x}(t) = r(t_0) + N(t_0) \cdot t$

③ Binormal: $\bar{x}(t) = r(t_0) + B(t_0) \cdot t$

→ Planos:

① Normal: contiene a N, B. Es $\perp$ a T

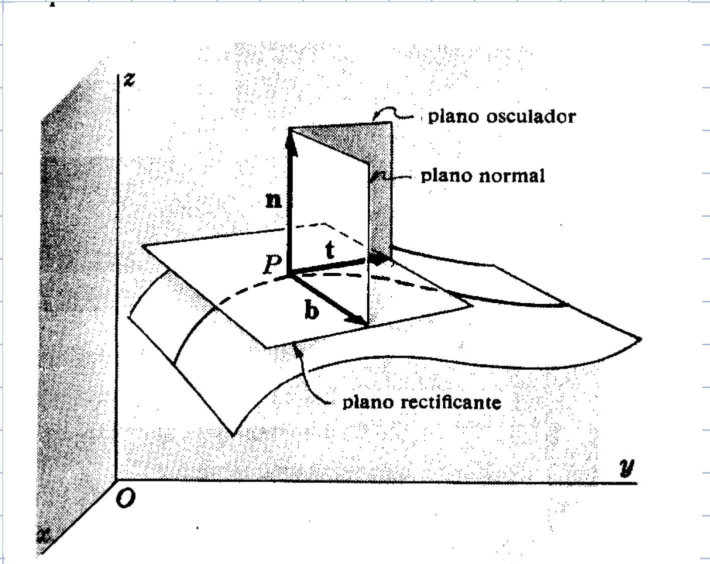
$\pi(\alpha, \beta) = r(t_0) + \alpha N(t_0) + \beta B(t_0)$ $\quad \pi \equiv T(t_0) \cdot (\bar{x} - r(t_0)) = 0$

② Osculador: contiene a T, N. Es $\perp$ a B

$$\pi(\alpha,\beta) = r(t_0) + \alpha T(t_0) + \beta N(t_0) \qquad \pi \equiv B(t_0)\cdot(\bar{x} - r(t_0)) = 0$$

③ Rectificante: contiene a T, B. Es $\perp$ a N

$$\pi(\alpha,\beta) = r(t_0) + \alpha T(t_0) + \beta B(t_0) \qquad \pi \equiv N(t_0)\cdot(\bar{x} - r(t_0)) = 0$$



3 Triedro intrínseco con parametrización longitud de arco

Sea $\bar{r}: I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular con una parametrización long. de arco. Vamos a obtener el triedro intrínseco.

Usaremos la siguiente notación: $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$; $r' = \frac{dr}{dt}$

Seguimos prescindiendo de la $-$ de vector, es decir $\bar{r} \to r$, $\bar{r}' \to r'$; $\dot{\bar{r}} \to \dot{r}$, $\ddot{\bar{r}} \to \ddot{r}$

① Vector tangente: $T = \dfrac{\dot{r}(s)}{\|\dot{r}(s)\|} = \dot{r}(s)$ $\qquad \|\dot{r}(s)\| = 1$

Nota: $\dfrac{dr(s)}{ds} = \dot{r}(s) = \dfrac{dr}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$

② Vector normal: N (recordatorio: es un vector unitario derivada del tangente)

$$N = \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|}$$ (por otro lado, esto implica que $\dot{r}(s) \cdot \ddot{r}(s) = 0$)

③ Vector binormal: B

$$B = T \times N = \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{\|\ddot{r}\|}$$

EJEMPLO Calcular los elementos de Frenet para la curva $\bar{r}(t) = (t, \sin t, \cos t)$ en $(0, 0, 1)$

Primero, vemos que $\bar{r}(t) = (0, 0, 1) \longrightarrow t = 0$.

$$\bar{r}'(t) = (1, \cos t, -\sin t) \longrightarrow \bar{r}'(0) = (1, 1, 0)$$

$$\bar{r}''(t) = (0, -\sin t, -\cos t) \longrightarrow \bar{r}''(0) = (0, 0, -1)$$

De modo que:

$$T = \frac{r'(0)}{\|r'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$B = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|} = \frac{1}{\|r' \times r''\|} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

$$N = B \times T = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0, 0, -2) = (0, 0, -1)$$

También podemos calcular los elementos geométricos asociados.

Recta tangente $\bar{x}(t) = (0,0,1) + t(1,1,0) = (t,t,1)$

normal $\bar{x}(t) = (0,0,1) + t(0,0,-1) = (0,0,1-t)$

binormal $\bar{x}(t) = (0,0,1) + t(-1,1,0) = (-t,t,1)$

Plano normal $(1,1,0)\cdot(x,y,z-1) = 0 \longrightarrow x+y=0$

osculador $(-1,1,0)\cdot(x,y,z-1) = 0 \longrightarrow -x+y=0$

rectificante $(0,0,-1)\cdot(x,y,z-1) = 0 \longrightarrow 1-z=0$

También podemos reparametrizar la curva usando el parámetro longitud de arco

$$s = \int_0^t \| r'(u) \| \, du = \int_0^t \sqrt{1+\cos^2 u + \sin^2 u} \, du = \sqrt{2}\, t$$

(el pto $t=0$ se transforma en $s=0$)

$$r(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

Por último, recalculamos T, N y B usando las fórmulas especif.

$$T(s) = \frac{\dot{r}(s)}{\|\dot{r}(s)\|} = \dot{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow$$

$$T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$N(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|} = \frac{1}{\|\ddot{r}(s)\|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\Rightarrow N(0) = \frac{\frac{1}{2}(0,0,-1)}{\|\ddot{r}(0)\|} = (0,0,-1)$$

Es más sencillo normalizar el vector final que el general

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

4 Fórmulas de Frenet

Sea $\vec{r}(s): I = [0, L] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con la longitud de arco. Para pts ordinarios y no de inflexión se verifica que

$r'(t_0) \neq 0$ y $r''(t_0) = 0$
en ellos el triedro no está def.

$$\frac{dT}{ds} = K(s) N$$

$$\frac{dN}{ds} = -K(s) T + \tau(s) B$$

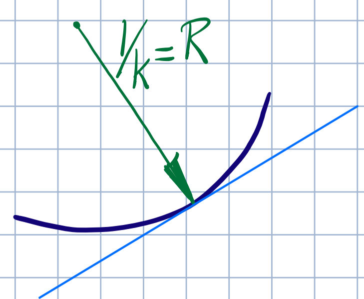
$$\frac{dB}{ds} = -\tau(s) N$$

curvatura: $K(s)$

torsión: $\tau(s)$

Definen la curva salvo traslación y giro.

Curvatura medida de cuánto se separa la curva de la recta tangente



Parámetro longitud de arco

$$\frac{dT}{ds} = K(s) N$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d}{ds}(\dot{r}(s)) = \ddot{r}(s) = K(s) N = K(s) \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|} \longrightarrow K(s) = \|\ddot{r}(s)\|$$

$$N = \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|}$$

Parámetro cualquiera

$$K(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

DEM

De la sección anterior, sabemos que:

$$\frac{dT}{ds} = K(s) N \qquad (1)$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r'}{\|r'\|}\right)\frac{1}{\|r'\|} = \frac{r''\|r'\| - r'\frac{r'\cdot r''}{\|r'\|}}{\|r'\|^2}\frac{1}{\|r'\|} \qquad (2)$$

También

$$N = \frac{dT/dt}{\|dT/dt\|} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{r'}{\|r'\|}\right)}{\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{r'}{\|r'\|}\right)\right\|} \qquad (3)$$

Al igual que en el caso anterior, sustituimos (2) y (3) en (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r'}{\|r'\|}\right)\frac{1}{\|r'\|} = K(s)\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{r'}{\|r'\|}\right)}{\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{r'}{\|r'\|}\right)\right\|}$$

Podemos despejar $K(s)$, obteniendo

Usando (2) — Tras "ciertas manipulaciones"

$$K(s) = \frac{\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{r'}{\|r'\|}\right)\right\|}{\|r'\|} = \frac{1}{\|r'\|^4}\left\| r''\cdot\|r'\|^2 - r'(r'\cdot r'')\right\| = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$$

"Ciertas manipulaciones"

$$\|\bar{a}-\bar{b}\|^2=(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=\|\bar{a}\|^2+\|\bar{b}\|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}$$

$$\|r''\cdot\|r'\|^2-r'(r'\cdot r'')\|^2=\|r''\|^2\|r'\|^4+(r'\cdot r'')^2\|r'\|^2-2(r'\cdot r'')^2\|r'\|^2=$$

$$=\|r''\|^2\cdot\|r'\|^4-(r'\cdot r'')^2\|r'\|^2=\|r'\|^2\cdot(\|r''\|^2\|r'\|^2-(r'\cdot r'')^2)=$$

$$=\|r'\|^2\cdot(\|r''\|^2\cdot\|r'\|^2-\|r'\|^2\|r''\|^2\cos^2\theta)=\|r'\|^2(\underbrace{\|r'\|^2\|r''\|^2\sin\theta}_{})=\|r'\|^2\|r'\times r''\|^2$$

Def. de producto vectorial

Torsión variación del vector binormal (ajuste de la curva a un plano, cómo de plano es la curva)

Parámetro long. de arco

$$\frac{dB}{ds}=-\tau(s)\,N\longrightarrow\tau(s)=-\frac{dB}{ds}\cdot N$$

Parámetro cualquiera

$$\tau(t)=\frac{[r'(t),r''(t),r'''(t)]}{\|r'(t)\times r''(t)\|^2}=\frac{r'(t)\cdot(r''(t)\times r'''(t))}{\|r'(t)\times r''(t)\|^2}$$

Esta fórmula no la demostraremos aquí

Definiciones adicionales

Radio de curvatura $R(t)=\left|\frac{1}{\kappa(t)}\right|$ Radio de torsión $T(t)=\left|\frac{1}{\tau(t)}\right|$

Curva plana $\longrightarrow$ torsión nula

Circunferencia $\longrightarrow$ torsión nula + curvatura constante

El signo de la torsión es independiente de la parametrización.

$\tau>0$: dextrógiras $\tau<0$: levógiras

EJERCICIOS

1 Calcular los vectores del triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de la curva $\bar{r}(t) = (1+2\sin t,\ 2\cos t,\ 4\cos t + 8\cos t \cdot \sin t)$ con $t=[0,2\pi]$ en $(3,0,0)$ (Basado en VII.3)

$$r(t) = (1+2\sin t,\ 2\cos t,\ 4\cos t + 4\sin 2t) = (3,0,0)$$

$$1+2\sin t = 3 \longrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$2\cos t = 0 \quad ✓$$

$$4\cos t + 4\sin 2t = 0 \quad ✓$$

Evaluar en $t=\frac{\pi}{2}$

$$r'(t) = (2\cos t,\ -2\sin t,\ -4\sin t + 8\cos 2t) \rightarrow r'(\pi/2) = (0,-2,-12)$$

$$r''(t) = (-2\sin t,\ -2\cos t,\ -4\cos t - 16\sin 2t) \rightarrow r''(\pi/2) = (-2,0,0)$$

$$r'''(t) = (-2\cos t,\ 2\sin t,\ 4\sin t - 32\cos 2t) \rightarrow r'''(\pi/2) = (0,2,36)$$

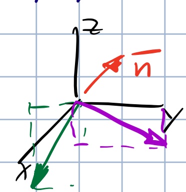
De modo que

① Tangente $\quad T = \dfrac{r'}{\|r'\|} = \dfrac{(0,-2,-12)}{\|(0,-2,-12)\|} = \dfrac{\sqrt{37}}{37}(0,-1,-6)$

② Binormal $\quad B = \dfrac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|} = \dfrac{(0,-2,-12)\times(-2,0,0)}{\|(0,-2,-12)\times(-2,0,0)\|} = \dfrac{(0,24,-4)}{\|(0,24,-4)\|} = \dfrac{\sqrt{37}}{37}(0,6,-1)$

No hay que hacer cálculos. Pensar que debe ser ⊥ a T y a B.

③ Normal $\quad N = B \times T = \dots = (-1,0,0)$



En lo que se refiere a la curvatura y la torsión, podemos aplicar las fórmulas:

$$K(t) = \frac{\| r'(\frac{\pi}{2}) \times r''(\frac{\pi}{2}) \|}{\| r'(\frac{\pi}{2}) \|^3} =$$

$$= \sqrt{24^2 + 4^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^2+12^2}^{\,3}} = \frac{1}{74}$$

$$\tau(t) = \frac{[r'(\frac{\pi}{2}), r''(\frac{\pi}{2}), r'''(\frac{\pi}{2})]}{\| r'(\frac{\pi}{2}) \times r''(\frac{\pi}{2}) \|^2} = \frac{1}{24^2+4^2} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -12 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 36 \end{vmatrix} = -\frac{6}{37}$$

2 Sea la curva $C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} 2x^2+y^2-z^2+2z = 4 \\ x^2+y^2+2z^2-2z = 2 \end{array} \right\}$ y sea el punto $\bar{x}_0 = (1,1,1)$.

a Comprobar que admite representación explícita $(x(z), y(z), z)$ cerca de $\bar{x}_0$. (Usaremos el TFI)

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (\underbrace{2x^2+y^2-z^2+2z-4}_{F_1}, \underbrace{x^2+y^2+2z^2-2z-2}_{F_2})$$

* $F \in C^\infty$ ✓

* $F(1,1,1) = (2+1-1+2-4, 1+1+2-2-2) = (0,0)$ ✓

* $\left| \frac{\partial F}{\partial (x,y)} \right|_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} 4x & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8-4 = 4 \neq 0$ ✓

b) Hallar la recta tangente y el plano normal en $\overline{x_0}$

Ya hemos comprobado que existe representación explícita $(x(z), y(z), z)$ cerca de $\overline{x_0}$. Esto es:

$$r(z) = (x(z), y(z), z) \longrightarrow r(1) = (1, 1, 1)$$

Por lo tanto

$$r'(z) = (x'(z), y'(z), 1) \longrightarrow r'(1) = (x'(1), y'(1), 1)$$
$$r''(z) = (x''(z), y''(z), 0) \longrightarrow r''(1) = (x''(1), y''(1), 0)$$

→ Rectas:

1. Tangente: $\boxed{\overline{x}(t) = r(t_0) + T(t_0) \cdot t}$

→ Planos:

1. Normal: contiene a N, B.

$$\pi(\alpha, \beta) = r(t_0) + \alpha N(t_0) + \beta B(t_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Es } \perp \text{ a } T \\ \pi \equiv T(t_0) \cdot (\overline{x} - r(t_0))\end{array}}$$

El objetivo es calcular $T(1)$ $\left(T = \frac{r'}{\|r'\|}\right)$, de modo que basta con calcular $r'(1)$. Calcularemos tb $r''(1)$ pero solo para repasar la derivación implícita, no pq sea necesaria.

$$\frac{d}{dz} F_1(x(z), y(z), z) = 4xx' + 2yy' - 2z + 2 = 0$$
$$\frac{d}{dz} F_2(x(z), y(z), z) = 2xx' + 2yy' + 4z - 2 = 0$$

$$\Big|_{(1,1,1)} \longrightarrow \begin{array}{l} 4x' + 2y' = 0 \\ 2x' + 2y' = -2 \end{array}$$

$x'(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = -2.$

$r'(1) = (1, -2, 1)$. Además, solo necesitamos la dirección de T (no hace falta normalizar).

Recta tangente

$$\bar{x}(t) = r(1) + T(1)\cdot t = (1,1,1) + (1,-2,1)\cdot t$$

Plano normal

$$\pi \equiv T(t_0)\cdot(\bar{x} - r(t_0)) \longrightarrow (1,-2,1)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0$$

Con respecto a la derivada segunda (que recordemos, era innecesaria)

$$\frac{d^2}{dz^2} F_1(x(z), y(z), z) = \frac{d}{dz}\left(4xx' + 2yy' - 2z + 2 = 0\right) \Rightarrow$$

$$= 4x'x' + 4xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 2 = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} F_2(x(z), y(z), z) = \frac{d}{dz}\left(2xx' + 2yy' - 4z - 2 = 0\right) \Rightarrow$$

$$= 2x'x' + 2xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x'x' + 4xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 2 = 0 \\ 2x'x' + 2xx'' + 2y'y' + 2yy'' - 4 = 0 \end{array}\right|_{\substack{\bar{x} = (1,1,1) \\ \bar{x}' = (1,-2,1)}} \longrightarrow \begin{array}{l} 4\cdot 1^2 + 4x'' + 2\cdot 2^2 + 2y'' - 2 = 0 \\ 2\cdot 1^2 + 2x'' + 2\cdot 2^2 + 2y'' - 4 = 0 \end{array}$$

De aquí puedo despejar $x''(1), y''(1)$

NOTA. Este problema tb puede resolverse teniendo en cuenta que

$T = \alpha \nabla F \times \nabla G$, $\nabla F = (4x, 2y, -2z+2)$; $\nabla G = (2x, 2y, 4z-2)$

$$T = \alpha \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \alpha(4, -8, 4) \rightarrow T = \frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}$$

3 Hallar la curvatura y la torsión de

$$\bar{r}(t) = \left(a\cos\frac{t}{c}, b\sin\frac{t}{c}, b\frac{t}{c}\right), \text{ donde } c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$r' = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{t}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{t}{c}, \frac{b}{c}\right), \quad \|r'\|^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

De modo que el parámetro t es longitud de arco. A partir de ahora haremos $t \to s$ y $r' \to \dot{r}$ por claridad

$$\ddot{r} = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\dddot{r} = \left(\frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c}, 0\right)$$

Usando fórmulas de curvatura y torsión

$$K(s) = \|\ddot{r}(s)\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

La fórmula de "parámetro cualquiera" tb sirve para long. de arco.

$$\tau(s) = \frac{[r'(s), r''(s), r'''(s)]}{\|r'(s)\times r''(s)\|^2} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}\begin{vmatrix} -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c} & -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c} & 0 \\ \frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c} & -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}\frac{b}{c}\frac{a^2}{c^3} =$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

En resumen,

$$K(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \; ; \; \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2} \; ; \; \frac{K(s)}{\tau(s)} = \frac{a}{b}$$

A este parámetro se le llama paso de la hélice

En el caso $b=0$, obtengo una circunferencia de radio $R = \frac{1}{K} = a$

4 Calcular los vectores tangente $\bar{t}$ y binormal $\bar{b}$ de la curva dada por la intersección de

$$x^2+y^2 = 4 \; ; \; z = axy$$

en el pto $(-2,0,0)$ orientada de forma que $\bar{t}$ apunta a $z>0$.

El vector tangente (si existe) viene dado por

$$\nabla F \times \nabla G = c\,\bar{t}$$

siendo $F(x,y,z) = x^2+y^2-4=0$; $G(x,y,z) = z-axy=0$ y c una constante cualquiera.

$$\nabla F = (2x, 2y, 0) \xrightarrow{(-2,0,0)} (-4,0,0)$$
$$\nabla G = (-ay, -ax, 1) \xrightarrow{(-2,0,0)} (0, 2a, 1)$$

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \end{vmatrix} = 0\,\bar{\imath} + 4\,\bar{\jmath} - 8a\,\bar{k} \Rightarrow \cancel{4}(\bar{\jmath} - 2a\bar{k})$$

$$\|\bar{\jmath} - 2a\bar{k}\| = \sqrt{1+4a^2}$$

Normalizando dicho vector, $\bar{t} = \dfrac{\bar{J} - 2a\bar{K}}{\sqrt{1+4a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(0, 1, -2a)$

y para que apunte según $z>0 \longrightarrow \bar{t} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(0, -1, 2a)$

Para calcular el vector binormal, busco una parametrización de la curva. Busco ptos del espacio $\mathbb{R}^3$ que cumplan a la vez estas dos ecuaciones: $x^2+y^2=4$; $z = axy$

$$r(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2a\sin 2t)$$

$\left.\begin{array}{l} x = -2\cos t \\ y = -2\sin t \end{array}\right\}$ $x^2+y^2 = 4(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4$ ✓

$(x, y, z) = (-2, 0, 0)$
$\rightarrow t = 0$

$z = axy = a\,4\cos t \sin t = 2a\sin 2t$

De modo que

① Tangente $T = \dfrac{r'}{\|r'\|}$

② Binormal $B = \dfrac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$

$$r'(t) = (+2\sin t, -2\cos t, 4a\cos 2t) \xrightarrow{t=0} (0, -2, 4a)$$

y normalizando $\longrightarrow \bar{t} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(0, -1, 2a)$

Para el binormal, calculo $r''(t)$, obteniendo:

$$r''(t) = (2\cos t, 2\sin t, -8a\sin 2t)$$

Si evaluamos en el punto $(t=0)$ tenemos que:

$$r''(0) = (2,0,0) \longrightarrow \frac{r''(0)}{\|r''(0)\|} = (1,0,0)$$

$$\bar{b} \Rightarrow r'(0) \times r''(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -1 & 2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(0, 2a, 1)$$

Esta última parte viene de que era un problema (de examen) en que se pedía $\bar{v}$

De modo que $\bar{v} = \bar{t} + \bar{b} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(0, 2a-1, 2a+1)$

$$v_1 + v_2 + v_3 = \frac{4a}{\sqrt{1+4a^2}}$$

5. EXAMEN EXTRAORDINARIO 18/19

7. Sea la función $\boldsymbol{x}: I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^3 en $I=[a,b]$ y sean las curvas $C=\boldsymbol{x}(I)$ y $C_\alpha = \alpha\boldsymbol{x}(I)$, con $\alpha>0$. Sean L la longitud, $\kappa = \|\boldsymbol{x}' \wedge \boldsymbol{x}''\|/\|\boldsymbol{x}'\|^3$ la curvatura, y $\tau = [\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}''']/\|\boldsymbol{x}' \wedge \boldsymbol{x}''\|^2$ la torsión de la curva C. Sobre las correspondientes magnitudes, L_α, κ_α y τ_α de la curva C_α, puede decirse que:
a) $L_\alpha = \alpha^3 L$, **b)** $\tau_\alpha = \tau$, **c)** $\kappa_\alpha = \frac{1}{\alpha}\kappa$, **d)** $\kappa_\alpha = \alpha\kappa$

a Sobre la longitud:

En este problema a $\bar{r}$ se le llama $\bar{x}$

$$L = \int_a^b \|\bar{x}'(t)\|\,dt$$

$$L_\alpha = \int_a^b \|\alpha x'(t)\|\,dt$$

$$\boxed{L_\alpha = \alpha L}$$

$$C = \bar{x}(I) \longrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$C_\alpha = \alpha\bar{x}(I) \rightarrow \|\alpha\bar{x}(t)\| = \alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

b Sobre la Torsión

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\left\| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \right\|^2} \qquad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \rightsquigarrow x'y''z''' - x'y'''z'' + \dots$$

$$\left\| (y'z'' - y''z')\,\bar{i} + (x''z' - x'z'')\,\bar{j} + (x'y'' - x''y')\,\bar{z} \right\|^2$$

$$\|\!\sim\!\|^2 \longrightarrow (y'z'' - y''z')^2 + (x''z' - x'z'')^2 + (x'y'' - x''y')^2$$

$$\tau_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \alpha x' & \alpha y' & \alpha z' \\ \alpha x'' & \alpha y'' & \alpha z'' \\ \alpha x''' & \alpha y''' & \alpha z''' \end{vmatrix}}{\left\| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha x' & \alpha y' & \alpha z' \\ \alpha x'' & \alpha y'' & \alpha z'' \end{vmatrix} \right\|^2} \qquad \begin{vmatrix} \alpha x' & \alpha y' & \alpha z' \\ \alpha x'' & \alpha y'' & \alpha z'' \\ \alpha x''' & \alpha y''' & \alpha z''' \end{vmatrix} \rightsquigarrow \alpha^3 x'y''z''' - \alpha^3 x'y'''z'' + \dots$$

$$\left\| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha x' & \alpha y' & \alpha z' \\ \alpha x'' & \alpha y'' & \alpha z'' \end{vmatrix} \right\|^2 \rightsquigarrow \alpha^4 (y'z'' - y''z')^2 + \alpha^4 (x''z' - x'z'')^2 + \alpha^4 (x'y'' - x''y')^2$$

$$\tau_\alpha = \frac{\alpha^3}{\alpha^4}\,\tau = \boxed{\frac{1}{\alpha}\,\tau}$$

c Sobre la curvatura

$$K = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \right\|}{\|\bar{x}'\|^3} = \frac{\sqrt{(y'z''-y''z')^2 + (x''z'-x'z'')^2 + (x'y''-x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$K_\alpha = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha x' & \alpha y' & \alpha z' \\ \alpha x'' & \alpha y'' & \alpha z'' \end{vmatrix} \right\|}{\|\alpha\bar{x}'\|^3} = \frac{\alpha^2\sqrt{(y'z''-y''z')^2 + (x''z'-x'z'')^2 + (x'y''-x''y')^2}}{\alpha^3(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{K_\alpha = \frac{1}{\alpha} K}$$

EXTRA: Derivación fórmulas de Frenet

Los vectores T, N y B son unitarios y ortogonales (forman base vectorial).

Consideramos $\frac{dT}{ds}$, $\frac{dN}{ds}$, $\frac{dB}{ds}$, derivadas respecto long de arco.

Por ser vectores unitarios

$$\frac{dT}{ds} \cdot T = 0 \quad , \quad \frac{dN}{ds} \cdot N = 0 \quad , \quad \frac{dB}{ds} \cdot B = 0 \qquad (1)$$

$\frac{dT}{ds}$, $\frac{dN}{ds}$, $\frac{dB}{ds}$ tendrían que poder escribirse en la base formada por T, N y B. Esto es:

$$\frac{dT}{ds} = a_{11}\, T + a_{12}\, N + a_{13}\, B$$

$$\frac{dN}{ds} = a_{21}\, T + a_{22}\, N + a_{23}\, B$$

$$\frac{dB}{ds} = a_{31}\, T + a_{32}\, N + a_{33}\, B$$

Por (1) a_{11}, a_{22} y a_{33} son 0.

Recordando def. de $N = \frac{dT}{ds} / \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \longrightarrow \frac{dT}{ds} = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| N$. Luego $a_{13} = 0$ y $a_{12} = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$.

$$\frac{dT}{ds} = a_{12} N \qquad \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \overset{def}{\equiv} K$$

$$\frac{dN}{ds} = a_{21} T + \qquad + a_{23} B$$

$$\frac{dB}{ds} = a_{31} T + a_{32} N$$

Seguimos derivando la expresión $B = T \times N$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds} = K N \times N + T \times \frac{dN}{ds} =$$

$$= T \times \frac{dN}{ds} = T \times \left(a_{21} T + a_{23} B \right) = a_{23} T \times B =$$

$$= - a_{23} B \times T = - a_{23} N \qquad a_{23} \overset{def}{\equiv} \tau$$

De modo que $a_{31} = 0$ y $a_{32} = - a_{23}$.

$$\frac{dT}{ds} = K N$$

$$\frac{dN}{ds} = a_{21} T + \qquad + \tau B$$

$$\frac{dB}{ds} = - \tau N$$

Por último derivamos $T = N \times B$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dN}{ds} \times B + N \times \frac{dB}{ds} =$$

$$= \left(a_{21} T + \tau B\right) \times B + N \times \left(-\tau N\right) =$$

$$= a_{21} T \times B = -a_{21} N = K N$$

$\longrightarrow a_{21} = -K$

$$\frac{dT}{ds} = K N$$

$$\frac{dN}{ds} = -K T + \tau B$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

O en forma matricial

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Matriz antisimétrica