REPASO DE ALGEBRA (18.06 Lecture 07)

Calculando el espacio nulo $(Ax=0)$
Variables pivote y variables libres
Soluciones especiales - $\mathrm{rref}(A) = R$

Algoritmo para resolver $Ax=0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

no cambia sols de $Ax=0$

La idea es hacer eliminación y seguir aunque me encuentre algún 0 en un pivote.

Eliminación no cambia $N(A)$ (espacio nulo de A)

Si que cambia $C(A)$ (espacio de columnas de A)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Primer pivote

Segundo pivote

Todo 0's → Esta columna era combinación lineal de las anteriores

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Matriz en forma de escalera (echelon)

$\mathrm{Rank}(A) = \#$ of pivots $= 2$

¿Como puedo describir las soluciones?

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ esta fila es 0 pq era comb. lineal de las anteriores (1 y 2)

Columnas pivote → resuelvo en función de x_2, x_4

Columnas libres → al buscar soluciones, les asigno el valor que quiera

Mi matriz representa el sistema

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$
$$2x_3 + 4x_4 = 0$$

Asigno valores a x_2, x_4 Resuelvo para x_1, x_3

$$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ además de este, cualquier múltiplo de este, estará en $N(A)$. Es una línea en el espacio nulo de A.

Mirar A a ver si esto tiene sentido

Para seleccionar las variables libres siempre seguimos el mismo proceso: fijamos una variable = 1 y el resto 0 y seguimos así hasta completar.

$$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Comprobar con A que esto es correcto.

Con esto, tenemos completo el espacio nulo de A $N(A)$.

$$x = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de vectores = = # de variables libres

Resumen:

$$\boxed{\begin{aligned} \#\text{ pivots} &= r = 2 \\ \#\text{ free variables} &= n - r = 4 - 2 = 2 \end{aligned}}$$

Podemos ir un paso más allá y llegar a la forma escalón reducida (reduced row echelon form rref) R. Para ello, sigo haciendo eliminación hacia arriba (similar a Gauss Jordan) y luego pivotes = 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/2}$$

Esto tb lo puedo hacer pq no cambia las soluciones de $Ax=0$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

(Matlab command rref(A)) (Tb en python con sympy)

Si solo me fijo en las columnas pivote y filas pivote tengo una pequeña matriz identidad $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Del sistema R, es más fácil aún obtener las soluciones $Rx=0$

Inciso: en esta clase he trabajado con $Ax=0$, $Ux=0$ y $Rx=0$. Todas las soluciones son iguales pq pasando de $A \to U \to R$ no lo he liado. Solo operaciones permitidas para resolver sistemas.

$$x_1 + 2x_2 + \quad -2x_4 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 = 0$$

$$\begin{array}{cc} I & F \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{columnas pivote} & \text{columnas libres} \end{array}$$

Relación con solución!

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Forma rref de una matriz

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow r \text{ filas pivote}$$

r columnas pivote $\qquad$ $n-r$ columnas libres

Esto es una matriz por bloques, así que obtenemos todas las soluciones de una vez $(Rx=0)$.

Vamos a crear una matriz N cuyas columnas sean las soluciones especiales (soluciones de $Rx=0$).

$$RN = 0 \longrightarrow N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ M.nullspace() sympy nos da esta matriz

$$\begin{bmatrix} \underset{r\times r}{I} & \underset{r\times n-r}{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{r\times n-r}{-F} \\ \underset{n-r\times n-r}{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F+F \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Ejemplo: probamos ahora a aplicar el algoritmo a la trasp. de la matriz original $A \rightarrow A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

¿Podemos saber a priori el # de pivotes?

$\rightarrow$ Vemos rápidamente que la 3ª col. es comb. lineal de 1 y 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U

columnas pivote $= r$

columna libre $= 3 - 2$ (total colum. $-$ r)

¡$r = 2$ de nuevo!

$\hookrightarrow r(A) = r(A^T) \to$ Esto siempre ocurre

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_2 + 2x_3 = 0$$

$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \to$ Podemos comprobar en A que esto cumple $Ax = 0$

$N(A) = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\to$ esto es importante, nos vale toda la linea, no solo el vector

Sigamos hasta obtener R (rref)

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$

I

Nota sobre pq no cambia el espacio nulo al pasar de $A \to U \to R$.

En clases anteriores vimos que el proceso de eliminación equivale a premultiplicar por una matriz E. Por otro lado, intercambiar filas es multiplicar por una matriz P. Así que

$$\dots E_3 P_2 E_2 P_1 E_1 A = U \longrightarrow \text{si } Ax = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dots E_3 P_2 E_2 P_1 E_1 A x = 0 \longrightarrow Ux = 0$$

Y la misma idea para $Rx = 0$.