(18.06 Lecture 10)

Los cuatro subespacios asociados a una matriz

4 Subespacios

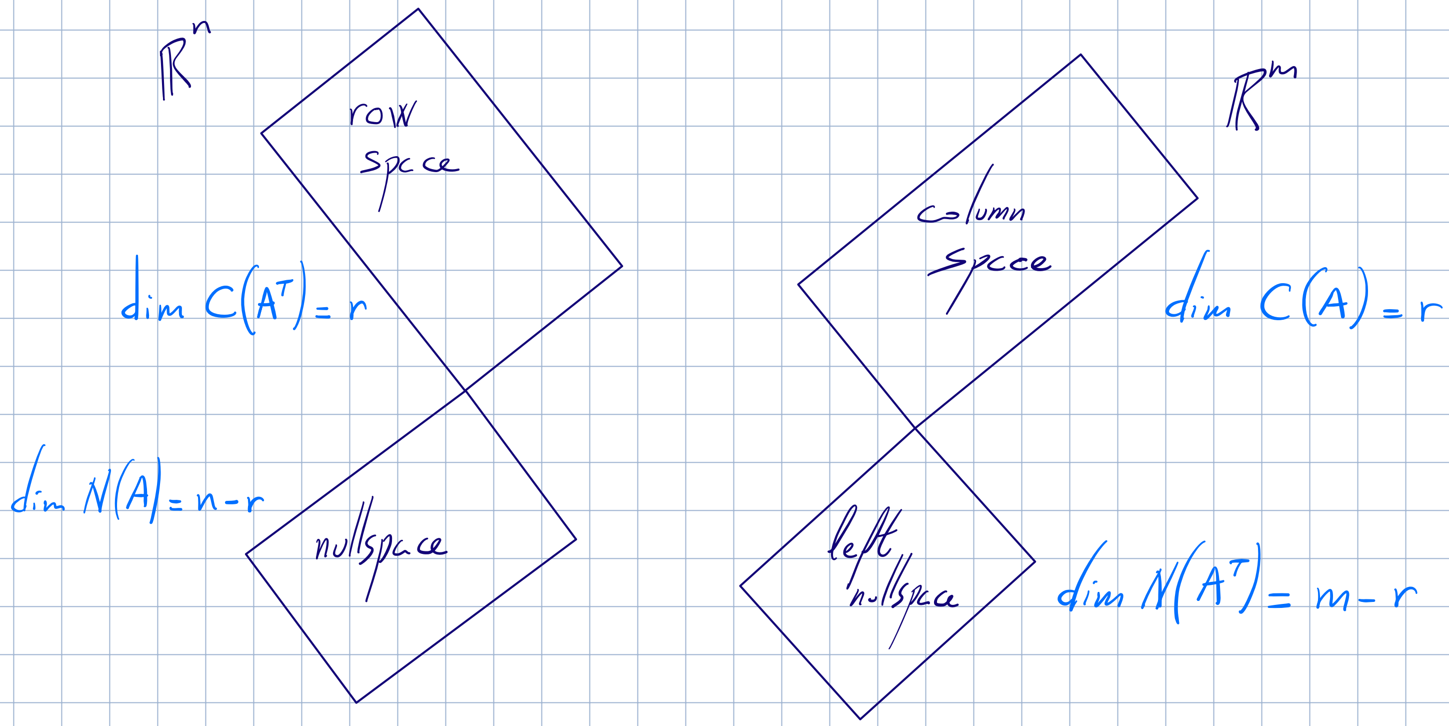
- Espacio de las columnas (columnspace) $C(A)$
- Espacio nulo (nullspace) $N(A)$
- Espacio de las filas (rowspace) $C(A^T)$
  - → Todas las combinaciones de las filas de A
  - → " " " " " columnas de A^T
- Espacio nulo de A^T $N(A^T)$
  - → Espacio nulo por la izquierda (left nullspace of A)

Si A es $m \times n$ ¿En que dimensión está cada subespacio?

- Columspace $C(A)$ en $\mathbb{R}^m$
- Nullspace $N(A)$ en $\mathbb{R}^n$
- Rowspace $C(A^T)$ en $\mathbb{R}^n$
- Left nullspace $N(A^T)$ en $\mathbb{R}^m$

$$\begin{array}{ccc} & n & n\times 1 \\ m & \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} \end{array}$$

Dibujemos los 4 espacios.



Para cada uno de estos subespacios quiero contestar:

→ ¿Cómo puedo construir una base?

→ ¿Cuál es su dimensión?

	$C(A)$ *	$N(A)$ *	$C(A^T)$ *	$N(A^T)$ *
base?	Pivot col	Special sols	Filas ≠ 0 de R	Almacenado en E
dimensión?	r	n − r	r	m − r

* Las columnas pivote son linealmente independientes. Si no lo fueran podría hacer $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots = 0 \to Ac = 0$ y serían columnas libres. # col pivote = r

* Special sols son las que hacen $Ax = 0$. Recordemos que había una por cada variable libre → $n - r$

* Una opción es trasponer la matriz, buscar el pivote y lo tengo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \underline{+1} & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{I} & \multicolumn{2}{c}{F} \\ \underline{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = R$$

r

Al pasar de $A \rightarrow R$ cambio $C(A)$

$$C(A) \neq C(R)$$

Sin embargo, tienen el mismo espacio fila (row space). Para pasar de $A \rightarrow R$ solo he combinado linealmente las filas. En este ejemplo vemos como las dos primeras filas de R pueden perfectamente actuar como base del row space de A $(C(A^T))$

La dimensión de $C(A^T)$ será el nº de elementos de la base r

*

"y" pertene a $N(A^T)$ Por eso ~~left~~ nullspace

$$A^T y = 0 \longrightarrow y^T A = 0^T$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A^T & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ y \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & y^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & \end{bmatrix}$$

¿Cómo encuentro una base de $N(A^T)$?

$$\text{rref}\begin{bmatrix} A_{m\times n} & I_{m\times m} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} R_{m\times n} & E_{m\times m} \end{bmatrix}$$

↳ $E_{m\times m}$ es una grabación de todo lo que le hemos hecho a A para llegar a R

Dicho de otra forma

$$EA = R$$

↳ Similar a cuando construíamos LU

En Gauss Jordan, $E = A^{-1}$ y $R = I$. (Ver clase 3)

Vamos a verlo en un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \longrightarrow R$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Repito igual para I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Comprobemos que $EA = R$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{bmatrix}}_{R} \checkmark$$

r m

dim = # el de la base = $m - r$

$$y^T A = [\ 0\ ]$$

¡Este es el vector que buscaba!

Como ya sabeis de Álgebra, los vectores no tienen pq ser vectores sino que pueden ser "otras cosas".

Por ejemplo, un espacio vectorial pueden ser todas las matrices 3x3. M

Veamos que cumplen las normas que tenían que cumplir mis elementos:

→ Los puedo sumar

→ Los puedo multiplicar por escalar

→ ... (las 8 reglas del espacio vectorial.

¿Que podría ser un subespacio?

→ Matrices triangulares superiores

→ Matrices simétricas

*

* Según vimos, intersección tb debería ser un subespacio.

Sim ∩ Upper triangular → Diagonal

Matrices diagonal D

$\dim(D) = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Estas tres forman una base (Son independientes y puedo generar de ellas cualquier matriz diagonal)