

## Repaso de teoría

1 Extremos de funciones. Extremos relativos en sentido estricto  
→ desigualdades estrictas

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^p \quad \bar{x}_0 \in D$$

→  $f(\bar{x}_0)$  es un máximo relativo de  $f$  en  $\bar{x}_0$  si  $f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0)$  cerca de  $\bar{x}_0$ .

→  $f(\bar{x}_0)$  es un mínimo relativo de  $f$  en  $\bar{x}_0$  si  $f(\bar{x}) > f(\bar{x}_0)$  cerca de  $\bar{x}_0$ .

Vamos a ver criterios para buscar extremos relativos de funciones diferenciables. ¡Cuidado con las no diferenciables! Ejemplo  $f(x) = |x|$

2 Punto estacionario o crítico de  $f$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^p \quad (f \text{ es derivable})$$

$\bar{x}_0 \in D$ , pto estacionario o crítico de  $f$

$$f'_{x_i}(\bar{x}_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

Agr. el

(Si  $f$  diferenciable esto es lo mismo que  $d\bar{f}(\bar{x}_0) = 0$ ) → donde es interesante

3 Condiciones necesarias de extremo → funciones para  $f$  diferenciable

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^p \quad \text{diferenciable en } B(\bar{x}_0; r) \subset D$$

Si  $f$  tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en  $\bar{x}_0$  entonces  $\bar{x}_0$  es un pto crítico de  $f$  ( $d\bar{f}(\bar{x}_0) = 0$ ).  
→

¡No funciona en sentido contrario! (Ejemplo: pto de silla).

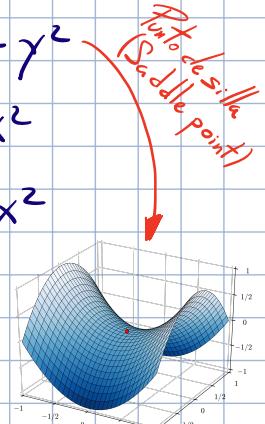
4 Condiciones suficientes de extremo  $\rightarrow$  función para  $f \in C^2$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$   $f \in C^2(D)$

Podemos  $\bar{x}_0 \in D / df(\bar{x}_0) = 0$

Dependiendo de la matriz Hessiana de la función en el punto, tenemos que (ejemplos para  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ )

$Hf(x_0, y_0)$	$\omega(x) = x^T Hf(x)$	Forma función	Ejemplo
Definida positiva	$\omega(x) > 0$	Mínimo relativo	$x^2 + y^2$
Definida negativa	$\omega(x) < 0$	Máximo relativo	$-(x^2 + y^2)$
Indefinida	$\omega(x) \geq 0 \quad \omega(x) \leq 0$	Punto de silla	$x^2 - y^2$
Semidef. positiva	$\omega(x) \geq 0$	Ni idea   Estos casos estudiarlos con la def de la función	$x^2$
Semidef negativa	$\omega(x) \leq 0$	Ni idea	$-x^2$



### 5 Clasificando formas cuadráticas (simétricas)

Definida $\oplus$ Mínimo relativo	Definida $\ominus$ Máximo relativo	Indefinida	Semidef $\oplus$	Semidef $\ominus$
$x^T S x > 0$	$x^T S x < 0$	$\geq 0 \text{ y } \leq 0$	$\geq 0$	$\leq 0$
Autovalores ( $\lambda$ )	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$	$\geq 0$	$\leq 0$
Menores (Sylvestre)	$\lambda > 0$	$x(-1)^K > 0$	No def $\oplus$ No def $\ominus$ Si se anula algun menor es el de la matriz completa	$x(-1)^K > 0$ Resto de menores sigue crit. clp $\oplus$ Resto de menores sigue crit. clp $\ominus$

# Criterio de Sylvester en detalle

Existe un criterio equivalente que se apoya en la matriz Hessiana y el criterio de Sylvester

Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en  $D$  abierto y sea  $x_0 \in D$  punto crítico de  $f$  ( $\nabla f(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow df(x_0) = 0$ )

Entonces:

1. Si  $|Hf(x_0)| \neq 0$ 
  1. Si todos los menores principales son positivos  $x_0$  es un mínimo local de  $f$
  2. Si los menores principales cambian de signo empezando en  $a_{11} < 0$   $x_0$  es un máximo local de  $f$
  3. En cualquier otro caso  $x_0$  es un punto de silla (ni máximo ni mínimo)
2. Si  $|Hf(x_0)| = 0$ . La diferencial segunda es semidefinida (caso dudoso) o indefinida (punto de silla)
  1. Si no se anula ningún menor anterior:
    1. Si todos los menores anteriores son positivos, caso dudoso posible mínimo local.
    2. Si los menores principales cambian de signo empezando en  $a_{11} < 0$ , caso dudoso posible máximo local.
    3. En cualquier otro caso  $x_0$  es un punto de silla
  2. Si se anulan menores principales anteriores, caso dudoso.

Comentario sobre el cálculo de autovalores. Aplicación a matrices  $2 \times 2$ .

$\text{Dta} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$  (Dta es igual al producto de sus autovalores)

$\text{Tr}(A) = \text{Suma entradas de la diagonal} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$

Aplicado a una matriz  $2 \times 2$  nos da una manera sencilla de calcular autovalores. También sirve para comprobar si hemos calculado bien los ds.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$$

Ejemplo  $\text{Tr}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad |A| = 4 - 4 = 0 = \lambda_1 \lambda_2 \quad | \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 5$$
$$\text{Tr} A = 5 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad |$$

## 6 EJERCICIOS / EJEMPLOS

### ① Ejemplo 13.4

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3 \quad \text{¿Tiene extremo relativo en } (1, 0, 0)?$$

Condición necesaria  $\rightarrow$  Pto estacionario o crítico

$$\nabla f = [yz+2x-2, xz+2y, xy+2z] \Big|_{(1,0,0)} = [0 \ 0 \ 0]$$

Condición suficiente  $\rightarrow$  Analizar  $H_f$

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{bmatrix} \Big|_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Triangularización con operaciones elementales (sin intercambio de filas)*}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Todos } \lambda's > 0 \rightarrow \text{Definida positiva} \rightarrow \text{mínimo relativo}$$

\*Puntos tienen mismo signo que autovalores.  
Ts se hace fácil por sylvester

### ② Ejemplo 13.5

Hallar extremos relativos y absolutos (si los hubiere) de  $z = 3x^2 - x^3 + y^2$ .

Si  $x \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow -\infty$ . Si  $y \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow \infty$  luego no extremos abs.

Busco ptos críticos Condición necesaria  $\nabla z = 0$

$$\nabla z = [6x - 3x^2, 2y]$$

$$x(6 - 3x) = 0 \rightarrow x = 0 \quad x = 2$$

$$2y = 0 \rightarrow y = 0$$

$(0, 0)$	Candidato
$(2, 0)$	

Condición suficiente  $H_z$

$$H_z = \begin{bmatrix} 6 - 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_z(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definita, mínimo

$$H_z(2,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Indefinida, Pto de silk

EJEMPLO Hallar los extremos de  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2y + y + 2xy$$

$$\nabla f = [2xy + 2y, x^2 + 1 + 2x] = [0, 0]$$

$$\begin{aligned} x^2 + 1 + 2x &= (x+1)^2 \implies x = -1 \quad (\forall y) \\ 2xy + 2y &= -2y + 2y = 0 \quad (\forall y) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (-1, y) \text{ es un} \\ \text{pto critico} \end{array} \right.$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow Hf(-1, y) = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Es semidefinida,} \\ \text{lo cual no nos da} \\ \text{información.} \end{array}$$

Como esto no nos da información, recurrimos a la definición de máximo, mínimo y pto de silla y a la def. de la función.

Máximo relativo en  $x_0$   $f(x_0) > f(x)$  en un entorno de  $x_0$

Mínimo relativo en  $x_0$   $f(x_0) < f(x)$  en un entorno de  $x_0$

$$f(x, y) - f(-1, y) = x^2y + y + 2xy - \cancel{(y_0 + y - 2y)} = y(x+1)^2$$

Nos movemos en un entorno del pto critico  $\rightarrow x = -1 + \Delta x ; y = y_0 + \Delta y$  \*

$$= (y_0 + \Delta y)(-1 + \Delta x + 1)^2 = (y_0 + \Delta y) \Delta x^2 \quad * \Delta x, \Delta y \rightarrow 0$$

De modo que si:

$$y > 0 \quad f(x, y) - f(-1, y) > 0 \rightarrow \text{mínimos}$$

$$y < 0 \quad f(x, y) - f(-1, y) < 0 \rightarrow \text{máximos}$$

$$y = 0 \quad f(x, y) - f(-1, 0) \geq 0 \rightarrow \text{ni máximo estricto, ni mínimo estricto}$$

IV.16 Investigar los extremos relativos de las funciones:

a)  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$  en el conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

b)  $f(x, y) = x^2 y^2 (1 - x^2 - y^2)$  en el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ .

Resultados: a) mínimo relativo en  $(1/2, 1, 1)$ ; b) máximos relativos en los cuatro puntos  $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$  y mínimo relativo (amplio) en ejes  $x=0$  e  $y=0$ .

III.16 @ Estudiar los extremos relativos de:

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad \text{en } A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0, y > 0, z > 0\}$$

\* Notar que en este ejercicio se piden extremos relativos, no absolutos

\* No podemos usar el teorema del valor extremo, puesto que el dominio no es compacto (no es cerrado y acotado).

\* No estudiamos la frontera, puesto que la función no toma valores sobre ella.

$$\nabla f = \left[ 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \frac{1}{2} \frac{y}{x} - \frac{z^2}{y^2}, \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} \right] = [0, 0, 0]$$

Lo más complicado de este problema es encontrar las soluciones de los sistemas resultantes.

$$(1) \quad y^2 = 4x^2 \rightarrow y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2}$$

$$y = -2x \rightarrow x = -\frac{y}{2} \rightarrow \text{No, fuera de A}$$

$$(2) \quad x = \pm \frac{1}{2}y$$

$$y^3 = 2xz^2 \rightarrow y^3 = yz^2 \rightarrow y^2 = z^2 \rightarrow y = z \quad y = -z$$

no se puede cumplir  
 $y > 0, z > 0$

$$y^3 = -yz^2 \rightarrow y^2 = -z^2 \rightarrow \text{no se puede cumplir}$$

$$(3) \quad z^2 = y \rightarrow z^2 = 1 \rightarrow z = +1, -1 \rightarrow \text{No, está fuera de A.}$$

Luego el pto critico es  $\left[\frac{1}{2}, 1, 1\right]$

La matriz Hessiana en este caso es:

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^3} & -\frac{1}{2} \frac{y}{x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{bmatrix}$$

$$Hf\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

sin intercambio de filas

Busco los pivotes, metodo de Gauss  $\rightarrow$  Pivotes  $> 0 \rightarrow \lambda_s > 0 \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Definida positiva

minimo local

También podríamos haberlo mirado por el criterio de Sylvester

$$A_1 = 4 > 0, \quad A_2 = 8 > 0, \quad A_3 = 32 > 0$$

Elegid el método que prefirais.

III.16 ⑤

Extremos relativos de  $f(x,y) = x^2y^2(1-x^2-y^2)$  en  $x^2+y^2 < 1$ .

Lo más complicado de este problema también es resolver el sistema.

$$\nabla f = \left[ 2xy^2(1-x^2-y^2) - 2x^3y^2, 2x^2y(1-x^2-y^2) - 2x^2y^3 \right] = [0,0]$$

$$2xy^2(1-x^2-y^2) - 2x^3y^2 = 0$$

$$2x^2y(1-x^2-y^2) - 2x^2y^3 = 0$$

→ Los ejes  $(0,y)$ ;  $(x,0)$  son solución

→ El problema es simétrico. La segunda ecuación es la primera intercambiando los papeles de  $x$  y  $y$ . Si hago  $x=y$  ambas ecuaciones son:

$$\begin{cases} 2x^3(1-2x^2) - 2x^5 = 0 \\ 2x^3(1-2x^2) - 2x^5 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^3 - 6x^5 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

Por otro lado, si hago  $x=-y$  obtengo:

$$\begin{cases} 2x^3(1-2x^2) - 2x^5 = 0 \\ -2x^3(1-2x^2) + 2x^5 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^3 - 6x^5 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

En resumen, tengo los siguientes pts críticos:

$$(0,0); (x,0); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La simetría de las soluciones tb podría haberla comprobado operando con las ecuaciones. Asumiendo  $x \neq 0, y \neq 0$ :

$$(1-x^2-y^2) = \frac{2x^3y^2}{2xy^2} = \frac{2x^2y^3}{2x^2y}$$

$$2x^5y^3 = 2x^3y^5$$

$$x^2 = y^2 \rightarrow x = \pm y$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2(1-x^2-y^2) - 4x^2y^2 - 6x^2y^2 & 4xy(1-x^2-y^2) - 4xy^3 - 4x^3y \\ 4xy(1-x^2-y^2) - 4xy^3 - 4x^3y & 2x^2(1-x^2-y^2) - 10x^2y^2 \end{bmatrix}$$

Pasamos a evaluarla en los pts críticos:

$$\text{Eje } x: (0,y) \rightarrow Hf(0,y) = \begin{bmatrix} 4y^2(1-y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} |y| > 1 \text{ semidef negativa} \\ |y| < 1 \text{ semidef positiva} \\ |y| = 1 \text{ nula.} \end{array}$$

de aquí no obtengo mucha info. Paso a usar la df.

$$f(x,y) - f(0,0) = x^2y^2(1-x^2-y^2) = \Delta f$$

Si  $(x,y)$  cercano al pto critico  $\rightarrow (x,y) = (0+\Delta x, 0+\Delta y)$

$$\Delta f = \Delta x^2 (y_0 + \Delta y)^2 \left( 1 - \Delta x^2 - (y_0 + \Delta y)^2 \right) =$$

$$= \Delta x^2 (y_0 + \Delta y)^2 (1 - y_0^2 - 2y_0 \Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2)$$

$\geq 0$       Dependiente de  $|y_0|$

eje x  $(0, y_0) \rightarrow$

$ y_0  > 1$	máximos
$ y_0  < 1$	mínimos
$ y_0  = 1$	ni máximo, ni mínimo

*Estos máximos / mínimos no son estrictos, ya que  $f(0, y_0) = 0 \forall y_0$*

→ Por simetría, el análisis del "eje y" es idéntico (se deja como ejercicio).

Los puntos  $\left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ , hago uno, el resto se hacen de forma análoga.

$$Hf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{10}{9} & \frac{4}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Pivotes} \\ F_2 - \frac{1}{2}F_1}]{} \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{6}{9} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda < 0 \rightarrow \text{Def. negativo}$$

máximo

$$A_1 = -\frac{8}{9} < 0$$

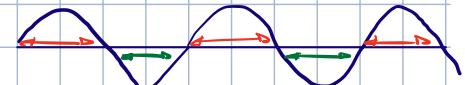
$$A_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 > 0$$

Def. negativa      *no Criterio de Sylvester*  
 máximo

### Ejemplo 13.6

$z = \sqrt{|\sin(x^2+y^2)|}$ . Hallar extremos relativos

$$z = \begin{cases} \sqrt{\sin(x^2+y^2)} & \text{si } \sin(x^2+y^2) \geq 0 \\ \sqrt{-\sin(x^2+y^2)} & \text{si } \sin(x^2+y^2) < 0 \end{cases}$$



Función definida a trozos. Puedo aplicar reglas de derivación salvo en los cambios de definición.

$$\nabla z = \begin{cases} \frac{2x \cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} & \frac{2y \cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} \quad \text{si } \sin(x^2+y^2) > 0 \\ \frac{-2x \cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{-\sin(x^2+y^2)}} & \frac{-2y \cos(x^2+y^2)}{2\sqrt{-\sin(x^2+y^2)}} \quad \text{si } \sin(x^2+y^2) < 0 \end{cases}$$

Este camino parece muy difícil, vamos a pensar:

Conocemos las funciones:

$$*\sqrt{|x|} \rightarrow$$

$$*\sqrt{|x|^2} \rightarrow$$

$$*\sin(x) \rightarrow$$

En realidad, es un problema de Matemáticas I

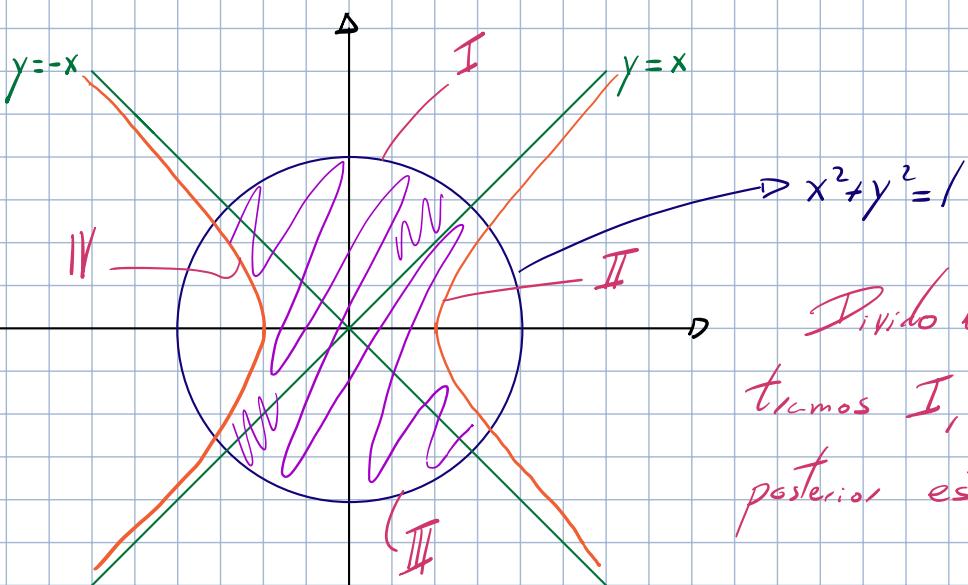
$f(d) = \sqrt{|\sin(d)|} \rightarrow$  Calculamos los extremos en función de  $d$  y después hacemos  $d = x^2 + y^2$  para encontrar los extremos relativos.

- IV.22** Calcular los extremos absolutos en  $D \subset \mathbb{R}^2$  de la función  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , siendo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x^2 - y^2 \leq \frac{1}{4}\}$ . Acerca de los extremos absolutos de  $f$  en  $D$  se puede asegurar que:
- En la recta  $x + y = 1$  hay puntos donde  $f$  alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.
  - En la recta  $x + y = 0$  hay puntos donde  $f$  alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.
  - En la recta  $x = 0$  hay puntos donde  $f$  alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.
  - En la recta  $x - y = 0$  hay puntos donde  $f$  alcanza los valores máximo y mínimo absolutos.

Determinar cuál es la opción correcta, razonando la respuesta.

**IV.22** Hallar los extremos de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  en

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x^2 - y^2 \leq \frac{1}{4}\}$$



Divido la frontera en cuatro tramos I, II, III, IV para su posterior estudio.

x	y	$f(x, y)$	tipo
0	1	-1	min (D)
0	-1	-1	min (D)
tocada hiperbola	1/4	1/4	D

→ Esta tabla la vamos

rellenando según vamos resolviendo el ejercicio.

①

Puntos críticos  $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f = (2x, -2y) = (0, 0) \rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{indefinida} \rightarrow \text{pto de silla, no hay extremo}$$

②

Puntos singulares: no hay

③

Frontera.

Son puntos de interés los cuatro pts de corte

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x = \pm \sqrt{\frac{5}{8}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{3}{8}} \end{array} \right.$$

Fronteras I y III

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - x^2$$

$$f(x, y) = f\left(x, \pm \sqrt{1-x^2}\right) = x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1$$

$$\text{DD}_{I, III} \quad x \in \left[-\sqrt{\frac{5}{8}}, \sqrt{\frac{5}{8}}\right]$$

$$f'_{I, III}(x) = 4x = 0 \rightarrow y = \pm 1 \quad \left| \begin{array}{l} (0, -1), (0, 1) \end{array} \right.$$

$$f''_{I, III}(x) = 4 > 0 \rightarrow \text{mínimo} \quad \left| \begin{array}{l} \text{máimos relativos en frontera} \end{array} \right.$$

## Fronteras II y IV

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left. f(x,y) \right|_{\partial D_{II,IV}} = x^2 - y^2 \Big|_{\partial D_{II,IV}} = \frac{1}{4} \text{ constante. Todos los pts son candidatos a maximo y/o minimo absoluto}$$

Aquí están incluidos los 4 pts de cte qe comentamos anteriormente

**IV.25** Sea la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y) = x(3-y)$  y el conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -3 \leq x \leq 3, y \geq \frac{1}{3}x^2, y \leq 6+x\}$ .

Calcular los extremos absolutos de  $f$  en  $C$ . Se verifica que:

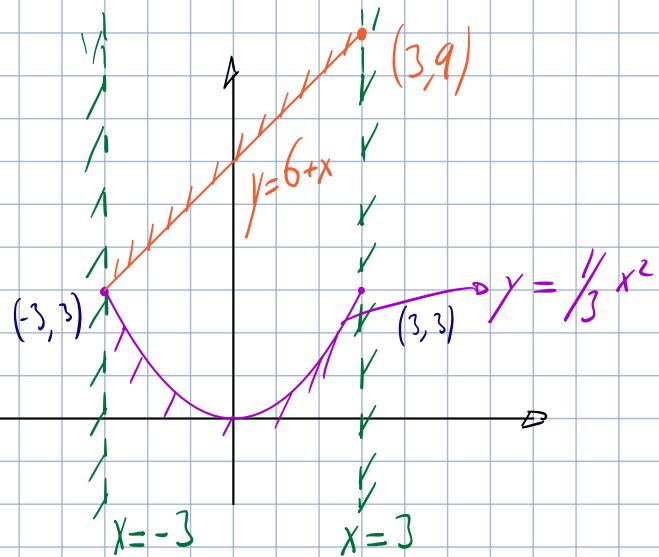
- $f$  alcanza su máximo y mínimo absolutos en puntos del interior de  $C$ .
- $f$  alcanza su máximo y mínimo absolutos sobre  $y = \frac{1}{3}x^2$ .
- El valor máximo absoluto de  $f$  es mayor que 3 y el valor mínimo absoluto es menor que -5.
- El valor máximo absoluto de  $f$  es mayor que 6 y el valor mínimo absoluto es menor que -10.

Determinar cuál es la opción correcta, razonando la respuesta.

**IV.25**

$$f(x, y) = x(3-y), \quad C = \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ y \geq \frac{1}{3}x^2 \\ y \leq 6+x \end{cases}$$

Extremos absolutos de  $f$  en  $C$ .



x	y	tipo	$f(x, y)$
$\sqrt{3}$	1	máximo	$2\sqrt{3}$ <small>max abs</small>
$-\sqrt{3}$	1	mínimo	$-2\sqrt{3}$
-3	3	intersección	0
3	3	intersección	0
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	máximo	$\frac{9}{4}$
3	9	intersección	-18 <small>min abs</small>

**1** Puntos críticos

$$\nabla f = (3-y, -x) = (0, 0) \rightarrow (0, 3)$$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{indefinida, pto de silla.}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

La matriz es ortogonal  $Q = Q^T$   $|\lambda_i| = 1$

**2** Puntos singulares. No aplica  $f \in C^{\infty}$

③ Fronteras

$$\#1 \rightarrow y = \frac{1}{3}x^2, \quad x \in [-3, 3]$$

$$f(x, y) \Big|_{\partial D_1} = f\left(x, \frac{1}{3}x^2\right) = x \left(3 - \frac{1}{3}x^2\right) = f_1(x)$$

$$f'_1(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 = 3 - x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}, \quad y = 1$$

$$f''_1(x) = -\frac{1}{3}x \begin{cases} x = \sqrt{3} \rightarrow f'' < 0 & (\text{máximo relativo en } f_1\text{-terc}) \\ x = -\sqrt{3} \rightarrow f'' > 0 & (\text{mínimo relativo en } f_1\text{-terc}) \end{cases}$$

+ Los pts intersección  $(-3, 3)$  y  $(3, 3)$

$$\#2: \quad y = 6+x, \quad x \in [-3, 3]$$

$$f(x, y) \Big|_{\partial D_2} = f(x, 6+x) = x(-x-3) = -x(x+3) = f_2(x)$$

$$f'_2(x) = -3 - 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{9}{2}$$

$$f''_2(x) = -2 < 0 \rightarrow \text{máximo relativo en } f_2\text{-terc}$$

+ Los pts intersección  $(-3, 3)$  y  $(3, 9)$

$$\#3: \quad x = 3; \quad y \in [3, 9]$$

$$f(x, y) \Big|_{\partial D_3} = f(3, y) = 3(3-y) = f_3(y)$$

$$g_3'(y) = -3 \neq 0 \rightarrow \text{no hay}$$

+ Los pts intersección ya han sido analizados

#<sub>4</sub> es análogo a #<sub>3</sub>.