# FACTORIZACIÓN MATRICIAL. LU III (18.06 Lecture 03)

Matrix multiplication (4 ways!)

Gauss - Jordan / find $A^{-1}$

## Multiplicación de matrices. Camino 1: estándar

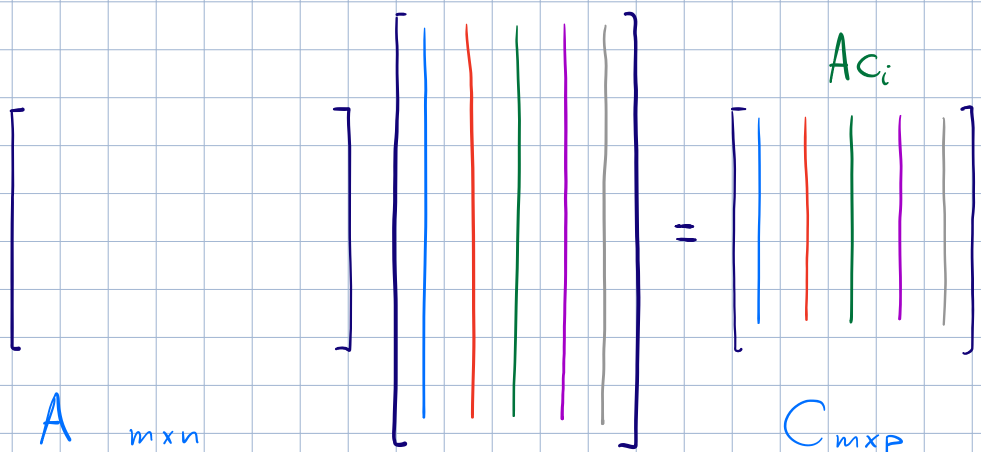
$$\begin{array}{c} \\ \text{fila } 3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} & & \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \\ & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{col } 4 \\ \begin{bmatrix} & b_{14} & \\ & b_{24} & \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} & & \\ & c_{34} & \\ & & \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$ $\quad B_{n \times p}$ $\quad C = AB_{m \times p}$

$$c_{34} = (\text{row } 3) \cdot (\text{col } 4) = a_{31} b_{14} + a_{32} b_{24} + \ldots = \sum_{k=1}^{n} a_{3k} b_{k4}$$

Esta es la manera estándar, la que se aprende en el instituto

## Multiplicación de matrices. Camino 2: por columnas

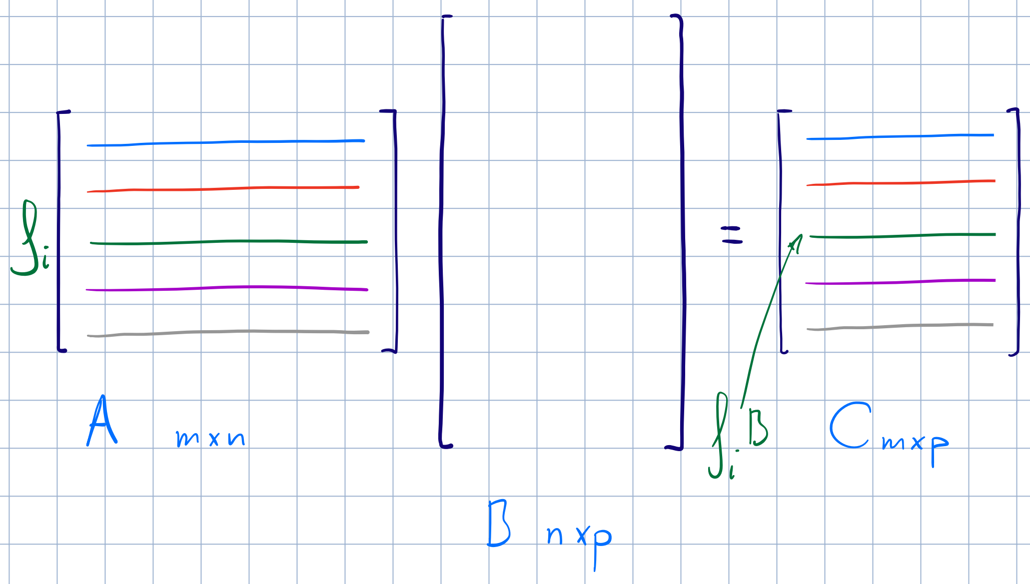


$c_i$ $\quad Ac_i$

$A_{m \times n}$ $\quad B_{n \times p}$ $\quad C_{m \times p}$

Columnas de C son combinaciones lineales de las columnas de A

# Multiplicación de matrices. Camino 3: por filas




filas de C son combinaciones lineales de las filas de B

# Multiplicación de matrices. Camino 4: columnas por filas

Columna A x Fila de B

$m\times 1 \qquad 1\times p \longrightarrow m\times p$

$$\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}} \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}}$$

Columnas son múltiplos de $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Filas son múltiplos de $[1\ 6]$

Siguen las reglas que habíamos dicho antes!

Camino 4: AB = suma de((cols A) x (filas B))

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es un poco especial. Como veremos un poco más adelante, su espacio fila es el $[1\ 6]$ y su espacio columna el $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$.

## Multiplicación por bloques (Camino 5)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]}_{A} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]}_{B} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \phantom{X} & \phantom{X} \\ \hline \phantom{X} & \phantom{X} \end{array}\right]}_{C}$$

$\to A_1B_1 + A_2B_3$

$\to A_1B_2 + A_2B_4$

Esto es una multiplicación matricial normal.

## Matriz inversa (de matrices cuadradas)

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

(Asumiendo que esta matriz exista)

$\to$ funciona por la izquierda y la derecha.

$\to$ Matrices invertibles o no singulares

Discutimos el caso singular, sin inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Pq esta matriz no tiene inversa?

* Determinante $= 0 \longrightarrow$ Singular

Intentamos obtener la inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\phantom{x}} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

* ¿Qué comb. lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ produce el $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

¡Ninguna! $\longrightarrow$ No hay inversa.

* Otra manera de verlo es que puedo resolver este problema $Ax = 0$ $(x \neq 0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Tiene solución, luego no hay inversa

De hecho, si $A^{-1}$ existe podemos hacer

$$A^{-1} A x = A^{-1} 0 \longrightarrow x = 0$$

Es decir, la existencia de $A^{-1} \longrightarrow$ que la única solución del problema es $x = 0$.

# Gauss - Jordan

Tomemos ahora una matriz que sí tenga inversa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Encontrar la inversa es resolver dos sistemas de ecuaciones

$A \times$ columna 1 de $A^{-1}$ = columna 1 de $I$

El método de Gauss-Jordan resuelve las dos eq.s a la vez

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Hago aquí las operaciones de eliminación

Aquí aparece la inversa

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Comprobad que funciona en casa!

Recuperando el problema original

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Recordemos de la clase previa que la eliminación se podía hacer premultiplicando por la matriz $E$

$$E\,[A \mid I] = [I \mid E] = [I \mid A^{-1}]$$

$EA = I$ nos dice que $E$ es la inversa de $A$

$\longrightarrow E = A^{-1}$