INTEGRALES PARAMÉTRICAS I

No todas las funciones se pueden escribir de forma elemental (e.g. $f(x,y) = e^x + \sin(y^2)$). En este capítulo tratamos un modo especial de definir las funciones: a través de una integral

$$F: \lambda \in \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx$$

En este capítulo aprenderemos a trabajar con $F(\lambda)$.

1 Integrales dependientes de parámetros

Tipo 1. Límites de integración fijos.

Sean un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, un intervalo $I = [a,b]$ y una función

$$f: \Lambda \times I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{\lambda}, x) \longrightarrow f(\bar{\lambda}, x)$$

Si, para cada $\bar{\lambda} \in \Lambda$, la función $x \longrightarrow f(\bar{\lambda}, x)$ es integrable en I, entonces

$$F: \bar{\lambda} \in \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(\bar{\lambda}) = \int_a^b f(\bar{\lambda}, x)\, dx$$

es una función definida por una integral (paramétrica).

Ejemplo:

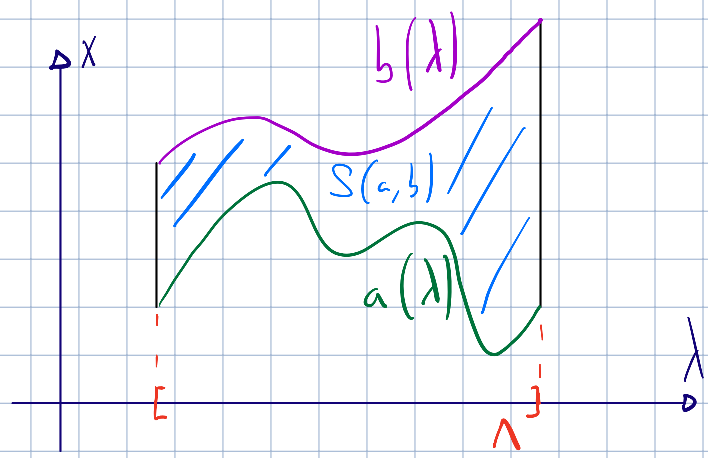
$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^\lambda - 1}{\ln x}\, dx \quad \left| \quad \begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 \frac{x - 1}{\ln x}\, dx \\ F(2) &= \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x}\, dx \\ F(\pi) &= \int_0^1 \frac{x^\pi - 1}{\ln x}\, dx \end{aligned} \right.$$

(...)

Para cada valor de λ obtengo un valor de F, que sale de resolver la integral

Tipo 2. Límites de integración variables

Sean un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, y sea $S(a, b)$ el conjunto simple definido por las funciones $a: \Lambda \to \mathbb{R}$ y $b: \Lambda \to \mathbb{R}$ como el de la figura



Se considera una función $f: S(a,b) \to \mathbb{R}$

$$(\bar{\lambda}, x) \to f(\bar{\lambda}, x)$$

Si, para cada $\bar{\lambda} \in \Lambda$, la función $x \to f(\bar{\lambda}, x)$ es integrable en $[a(\lambda), b(\lambda)]$, entonces

$$F: \bar{\lambda} \in \Lambda \to \mathbb{R} \qquad F(\bar{\lambda}) = \int_{a(\bar{\lambda})}^{b(\bar{\lambda})} f(\bar{\lambda}, x)\, dx$$

es una función definida por una integral (paramétrica).

Ejemplo:

El parámetro λ tb puede aparecer como parte de los límites de integración

$$F(\lambda) = \int_0^{\lambda^2} \frac{x^\lambda - 1}{\ln x}\, dx \qquad F(1) = \int_0^{1^2} \frac{x - 1}{\ln x}\, dx \qquad F(2) = \int_0^{2^2} \frac{x^2 - 1}{\ln x}\, dx$$

$\lambda \in [1, 2]$

2 Continuidad de integrales paramétricas

En este apartado se establece que si $f(\lambda, x)$ es una función continua, entonces tb lo será $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx$$

Analizamos por separado el tipo 1 y el tipo 2.

Tipo 1. Límites de integración fijos.

Sean un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, un intervalo $I = [a, b]$ y una función
$$f: \Lambda \times I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{\lambda}, x) \longrightarrow f(\bar{\lambda}, x)$$

Si, para cada $\bar{\lambda} \in \Lambda$, la función $x \longrightarrow f(\bar{\lambda}, x)$ es continua en I, entonces

$$F: \bar{\lambda} \in \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(\bar{\lambda}) = \int_a^b f(\bar{\lambda}, x)\, dx$$

es una función continua definida por una integral (paramétrica).

Nota: la definición es igual que en el apartado 1, pero hemos cambiado integrable $\longrightarrow$ continua. Con esto no solo garantizamos la existencia de $F(\lambda)$ sino tb su continuidad.

Tipo 2. Límites de integración variables

Sean un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, y sea $S(a, b)$ el conjunto simple definido por las funciones continuas $a: \Lambda \to \mathbb{R}$ y $b: \Lambda \to \mathbb{R}$

Se considera una función
$$f: S(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{\lambda}, x) \longrightarrow f(\bar{\lambda}, x)$$

Si, para cada $\bar{\lambda} \in \Lambda$, la función $x \to f(\bar{\lambda}, x)$ es continua en $[a(\lambda), b(\lambda)]$, entonces

$$F : \bar{\lambda} \in \Lambda \to \mathbb{R} \qquad F(\bar{\lambda}) = \int_{a(\bar{\lambda})}^{b(\bar{\lambda})} f(\bar{\lambda}, x)\, dx$$

es una función continua definida por una integral (paramétrica).

3 Derivación de las integrales paramétricas

En este apartado se establece bajo que condiciones se pueden intercambiar derivación e integración

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(\lambda, x)\, dx = \int_a^b \frac{d}{d\lambda} f(\lambda, x)\, dx$$

a esta propiedad se la conoce como regla de Leibniz.

Tipo 1. Límites de integración fijos

Si existe $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ y es continua entonces $F(\bar{\lambda})$

$F(\bar{\lambda}) = \int_a^b f(\bar{\lambda}, x)\, dx$ es derivable respecto a λ_i y su derivada vale

REGLA DE LEIBNIZ $$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\bar{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\int_a^b f(\bar{\lambda}, x)\, dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f(\bar{\lambda}, x)}{\partial \lambda_i}\, dx$$

Si además $f \in C^K$ (con $K \geq 1$) entonces $F \in C^K$

Demostración práctica de la fórmula

$$\frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(\lambda,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda} f(\lambda,x)\,dx$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^b f(\lambda+h,\,x)\,dx - \int_a^b f(\lambda,\,x)\,dx}{h} = \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(\lambda+h,x)-f(\lambda,x)}{h}\,dx$$

$$\int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(\lambda+h,x)-f(\lambda,x)}{h}\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial\lambda}\,dx$$

Ejemplo:

caso real esto se podría hacer o no

$$F(\lambda) = \int_0^1 \lambda x^2\,dx = \lambda \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{\lambda}{3}$$

$$\frac{d}{d\lambda}F(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda}{3} = \frac{1}{3}$$

Son iguales!

$$\int_0^1 \frac{d}{d\lambda}\lambda x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

CASO ESPECIAL: INTEGRALES IMPROPIAS

Recordemos que llamábamos integral impropia a

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x \varphi(t)\,dt = \int_a^{\to b}\varphi(t)\,dt$$

En este caso, la integral paramétrica sería

$$F(\bar{\lambda}) = \int_{c}^{\vec{b}} f(\bar{\lambda}, x)\, dx$$

Y la regla de Leibniz quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\bar{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\int_a^{\vec{b}} f(\bar{\lambda}, x)\, dx\right) = \int_a^{\vec{b}} \frac{\partial f(\bar{\lambda}, x)}{\partial \lambda_i}\, dx$$

Hay que tener cuidado, ya que "no hay garantías"* de que la integral resultante sea convergente.

* En realidad, sí hay unas condiciones bajo las cuales se puede garantizar, pero no las veremos en este curso.

Ejemplo: función Γ de Euler

$$\Gamma(p) = \int_{\to 0}^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx$$

Esta función aparece en varias funciones de distribución de probabilidad. La usaréis bastante en Estadística.

Comprobar que su derivada es:

orden de derivación

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_{\to 0}^{\infty} (\ln x)^n e^{-x} x^{p-1}\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo $\Gamma''(p) = \int_{\to 0}^{\infty} (\ln x)^2 e^{-x} x^{p-1}\, dx$

$$\Gamma'(p) = \int_{\to 0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-x} x^{p-1}\right) dx = \int_{\to 0}^{\infty} \ln x \underset{*}{e^{-x}} x^{p-1}\, dx$$

$$\Gamma''(p) = \int_{\to 0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(\ln x\, e^{-x} x^{p-1}\right) dx = \int_{\to 0}^{\infty} (\ln x)^2 e^{-x} x^{p-1}\, dx$$

$\vdots$

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_{\to 0}^{\infty} (\ln x)^n e^{-x} x^{p-1}\, dx$$

$*$Note: $\frac{\partial}{\partial p} x^{p-1} = \frac{\partial}{\partial p} e^{\ln x^{p-1}} = \frac{\partial}{\partial p} e^{(p-1)\ln x} = \ln x\, e^{(p-1)\ln x}$

$= (\ln x)\, x^{p-1}$

Tipo 2. Límites de integración variables

Si existen $\frac{\partial a}{\partial \lambda_i}$, $\frac{\partial b}{\partial \lambda_i}$ y $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ y son continuas

entonces $F(\bar{\lambda}) = \int_{a(\bar{\lambda})}^{b(\bar{\lambda})} f(\bar{\lambda}, x)\, dx$ es derivable respecto a λ_i

y su derivada vale

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\bar{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\int_a^b f(\bar{\lambda}, x)\, dx \right) =$$

$$= \int_{a(\bar{\lambda})}^{b(\bar{\lambda})} \frac{\partial f(\bar{\lambda}, x)}{\partial \lambda_i}\, dx + f(\bar{\lambda}, b(\bar{\lambda}))\frac{\partial b(\bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} - f(\bar{\lambda}, a(\bar{\lambda}))\frac{\partial a(\bar{\lambda})}{\partial \lambda_i}$$

Si además $f \in C^K$, $a \in C^K$ y $b \in C^K$ (con $K \geq 1$)
entonces $F \in C^K$

Demostración

Por simplicidad, demostraremos el caso donde $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Cambiamos un poco la notación

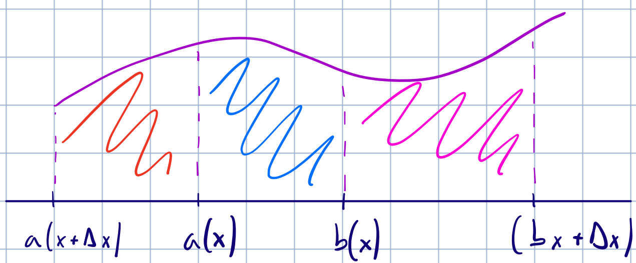
$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\, dt$$

Aplicando la def de derivada a la F, tenemos:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{a(x+\Delta x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt}{\Delta x}$$

Por la propiedad de linealidad de las integrales:

$$\int_{a(x+\Delta x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\,dt = \int_{a(x+\Delta x)}^{a(x)} f(x+\Delta x, t)\,dt + \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+\Delta x, t)\,dt + \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\,dt$$



De modo que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{a(x+\Delta x)}^{a(x)} f(x+\Delta x, t)\,dt + \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+\Delta x, t)\,dt + \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt}{\Delta x}$$

Reordenando

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{a(x)}^{b(x)} f(x+\Delta x, t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt}{\Delta x}}_{1} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{a(x+\Delta x)}^{a(x)} f(x+\Delta x, t)\,dt + \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\,dt}{\Delta x}}_{2}$$

Nos centramos en 1

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{a(x)}^{b(x)} \left(f(x+\Delta x, t) - f(x,t)\right) dt}{\Delta x} \stackrel{*}{=} \int_{a(x)}^{b(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, t) - f(x,t)}{\Delta x}\, dt =$$

Se puede hacer si ∃ la integral definida.

$$= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt$$

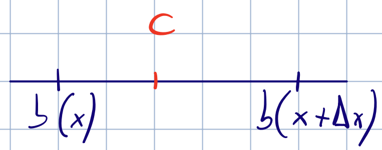
Ahora analizamos ②, en particular $\int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\, dt$. Recordemos el teorema de valor medio:

Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists\, c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b-a)$$

Aplicado a nuestro caso:

$$\int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\, dt = f(x+\Delta x, c)\left(b(x+\Delta x) - b(x)\right)$$



Si ahora hacemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\, dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, c)\left(b(x+\Delta x) - b(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x, c) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b(x+\Delta x) - b(x)}{\Delta x} = f(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx}$$

Por el mismo razonamiento

$$\int_{a(x+\Delta x)}^{a(x)} f(x+\Delta x, t)\, dt = -\int_{a(x)}^{a(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, t)\, dt = [\dots] = -f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx}$$

Juntando ahora ① y ② tenemos

$$\frac{dF(x)}{dx} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt + f(x, b(x))\,\frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x))\,\frac{da(x)}{dx}$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{1/x} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt =$$

$$\int_{x^2}^{1/x} \frac{\cancel{t}\cos(xt)}{\cancel{t}}\, dt + \frac{\sin(x\ 1/x)}{1/x}\,\frac{d\,1/x}{dx} - \frac{\sin(x^3)}{x^2}\,\frac{d\,(x^2)}{dx} =$$

$$= \frac{1}{x}\sin(xt)\Big|_{t=x^2}^{t=1/x} + x\sin(1)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2\,\frac{\sin(x^3)}{x} =$$

$$= \frac{1}{x}\sin(1) - \frac{1}{x}\sin(x^3) - \frac{1}{x}\sin(1) - \frac{2}{x}\sin(x^3) =$$

$$= -\frac{3}{x}\sin(x^3)$$

La regla de Leibniz puede verse como una generalización del teorema fundamental del cálculo

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{si } f \text{ continua} \longrightarrow F'(x) = f(x)$$

Por regla de Leibniz

$$F'(x) = \int_0^x \cancelto{0}{\frac{\partial f(t)}{\partial x}}\, dt + f(x)\,\frac{dx}{dx} - f(0)\,\cancelto{0}{\frac{d0}{dx}} = f(x)$$

EJERCICIOS

1 A partir de la igualdad $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+a\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+4}}$,

hallar la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$$

Derivando respecto de "a" ambos miembros de la relación original, se tiene (Regla de Leibniz)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+a\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\sin x}{(2+a\sin x)^2}\,dx = \frac{-2a\pi}{(a^2+4)^{3/2}}$$

Como el objetivo es resolver $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$ hacemos $a = 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\sin x}{(2+\sin x)^2}\,dx = \frac{-2\pi}{5^{3/2}}$$

Ahora usamos el siguiente truco para que aparezca I

$$\int_0^{2\pi} \frac{2-2-\sin x}{(2+\sin x)^2}\,dx = \frac{-2\pi}{5^{3/2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{(2+\sin x)^2}\,dx - \int_0^{2\pi} \frac{2+\sin x}{(2+\sin x)^2}\,dx = \frac{-2\pi}{5^{3/2}}$$

$$2I = -\frac{2\pi}{5^{3/2}} + \int_0^{2\pi} \frac{2+\sin x}{(2+\sin x)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{2\pi}{5^{3/2}} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,dx =$$

Enunciado

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+a\sin x} \xrightarrow{a=1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$= -\frac{2\pi}{5^{3/2}} + \frac{2\pi}{5^{1/2}} = 2\pi\,\frac{4}{5^{3/2}}$$

De modo que $\boxed{I = \dfrac{4\pi}{5^{3/2}}}$

2 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y considérese la integral

$$I(a) = \int_{1/a}^{a} f(x^7 + x^{-7})\,\frac{\ln x}{x}\,dx \qquad a>0$$

Comprobar que $I(a)$ no depende de a y calcularla.

Si $I(a)$ no depende de a, es constante, luego $I(a) = K$, y por tanto $\frac{d}{da} I(a) = \frac{d}{da} K = 0$.

Usando la regla de Leibniz, derivamos $I(a)$

REGLA DE LEIBNIZ

$$F'(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(\lambda,x)}{\partial \lambda}\,dx + f(\lambda, b(\lambda))\frac{db(\lambda)}{d\lambda} - f(\lambda, a(\lambda))\frac{da(\lambda)}{d\lambda}$$

$$I'(a)=\cancel{\int_{1/a}^{a} 0\,dx}^{\,\to 0} + f(a^7+a^{-7})\frac{\ln a}{a}\cdot 1 - f\left((1/a)^7+(1/a)^{-7}\right)\frac{\ln 1/a}{1/a}\left(\frac{-1}{a^2}\right)$$

$$= f(a^7+a^{-7})\frac{\ln a}{a} - f(a^7+a^{-7})\frac{\ln a}{a} = 0 \to I(a)=k,$$

como se quería demostrar.

Si la integral es $I(a)=k$, tb será $I(1)=k$ y en este caso:

$$I(1)=\int_1^1 f(x^7+x^{-7})\frac{\ln x}{x}\,dx = 0 \to I(a)=0 \blacksquare$$

3 Se considera la función $\varphi(t)$ definida por la siguiente integral

$$\varphi(t)=\int_0^{\sqrt{|t|}} |t\,x^{5/3}|\,dx$$

Analizar si $\varphi(t)$ es derivable en $t=0$

NO podemos aplicar el teorema de la derivabilidad de las integrales paramétricas ya que ni el integrando, ni el límite de integración superior son derivables en $t=0$.

Tenemos que buscar una forma alternativa. En este caso particular, no es difícil calcular la integral propuesta.

- $t>0$

$$\varphi(t)=\int_0^{\sqrt{t}} t\,x^{5/3}\,dx=\frac{3}{8}t\,x^{8/3}\Big|_0^{\sqrt{t}}=\frac{3}{8}t\,t^{4/3}=\frac{3}{8}t^{7/3}$$

- $t<0$

$$\varphi(t)=\int_0^{\sqrt{-t}} -t\,x^{5/3}\,dx=\frac{-3}{8}t\,x^{8/3}\Big|_0^{\sqrt{-t}}=\frac{-3}{8}t\,t^{4/3}=\frac{-3}{8}t^{7/3}$$

- $t=0$

$$\varphi(t)=\int_0^{0} -t\,x^{5/3}\,dx=0$$

Luego $\varphi(t)=\begin{cases}\frac{3}{8}t^{7/3} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t=0\\ -\frac{3}{8}t^{7/3} & \text{si } t<0\end{cases}$ que es una función definida a trozos y podemos analizar con las técnicas de Cálculo I.

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{3}{8}h^{7/3}-0}{h}=0 \quad \Big\| \quad \varphi'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\frac{3}{8}h^{7/3}-0}{h}=0$$

La derivada en 0 existe y vale cero.

4 Obtener el desarrollo limitado de Maclaurin, con polinomio de 2º grado de la función

$$F(t) = \frac{d}{dt}\int_t^{t^2} \frac{\sin tx}{x}\, dx$$

El desarrollo que nos piden tendrá la forma:

$$F(t) = a + bt + ct^2 + o(t^2)$$

Empezamos utilizando la regla de Leibniz

REGLA DE LEIBNIZ

$$F'(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda}\, dx + f(\lambda, b(\lambda))\frac{db(\lambda)}{d\lambda} - f(\lambda, a(\lambda))\frac{da(\lambda)}{d\lambda}$$

$$F(t) = \int_t^{t^2} \frac{x\cos tx}{x}\, dx + \frac{\sin t^3}{t^2}\, 2t - \frac{\sin t^2}{t}\cdot 1 =$$

$$= \frac{\sin tx}{t}\Big|_t^{t^2} + 2\frac{\sin t^3}{t} - \frac{\sin t^2}{t} =$$

$$= \frac{\sin t^3}{t} - \frac{\sin t^2}{t} + 2\frac{\sin t^3}{t} - \frac{\sin t^2}{t} =$$

$$= \frac{3\sin t^3}{t} - 2\frac{\sin t^2}{t} = \frac{1}{t}\left(3\sin t^3 - 2\sin t^2\right) =$$

Por último usamos los desarrollos conocidos

$$= \frac{1}{t}\left(3\left(t^3 + o(t^8)\right) - 2\left(t^2 + o(t^5)\right)\right) = -2t + 3t^2 + o(t^2)$$

5 (a) Calcular la integral $\varphi(t)=\int_0^\infty x e^{-tx^2}dx$ para $t>0$.

(b) A partir de este resultado calcular la integral

$$F_n(t)=\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-tx^2}dx$$ (Son derivadas de $\varphi(t)$)

(a) $$\int_0^\infty xe^{-tx^2}dx=\frac{-1}{2t}e^{-tx^2}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2t}$$

(b) Derivamos ambos miembros respecto de t (Regla de Leibniz)

$$-F_1(t)=-\int_0^\infty x^3e^{-tx^2}dx\overset{*}{=}\frac{1}{2}\left(-t^{-2}\right)$$

Derivando nuevamente

$$F_2(t)=\int_0^\infty x^5e^{-tx^2}dx\overset{*}{=}\frac{1}{2}(1\cdot 2)\,t^{-3}$$

[...]

$$F_n(t)=\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-tx^2}dx\overset{*}{=}\frac{n!}{2}\,t^{-(n+1)}$$