Complementos sobre matrices

Operaciones por columnas

$$Av = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 A_1 + v_2 A_2 + \ldots + v_n A_n$$

$$AB = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Operaciones por cajas

Podemos descomponer una matriz en cajas y operar con las cajas

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

Matriz diagonal por cajas

A es diagonal por cajas si es posible descomponer en cajas tales que solo las cajas de la diagonal sean $\neq 0$.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Cajas de la diag.

Cajas no diag. son 0

Ejemplo 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Cajas diag.

Cajas no diag.

Si A y B son diag. por cajas con la misma estructura AB será diag. por cajas con la misma estructura

Polinomios de matrices

Igual que tenemos polinomios de números reales

$3x^3 + 2x^2 + 1$

Podemos construir polinomios de matrices

$3A^3 + 2A^2 + I$

donde A es una matriz de tamaño $n \times n$.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad p(x) = x^2 - 5x - 1$$

$$p(A) = A^2 - 5A - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponencial de una matriz

Recordemos que

$$\exp A = e^A = I + A + \frac{1}{2}(A)^2 + \frac{1}{6}(A)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A)^n + \cdots$$

* Si A es invertible, tb lo es $\exp A$

* Si A es diagonal por cajas $\longrightarrow$ ver def.

$$\begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \boxed{A_3} \end{bmatrix} \longrightarrow \exp A = \begin{bmatrix} \boxed{\exp A_1} & & \\ & \boxed{\exp A_2} & \\ & & \boxed{\exp A_3} \end{bmatrix}$$

* $\exp O = I$ $\longrightarrow$ ver def.

* $\exp[\lambda I] = e^{\lambda} I$

$$\exp[\lambda I] = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!}[\lambda I]^K = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!}\lambda^K I = \sum_{K=0}^{\infty}\left[\frac{1}{K!}\lambda^K\right] I = e^{\lambda} I$$

* Si A y B conmutan, entonces:

(A y B conmutan significa que $AB = BA$)

$\rightarrow$ A y $\exp B$ conmutan

$\rightarrow$ $\exp(A+B) = \exp A \; \exp B$

* $\exp(\lambda I + A) = e^{\lambda} \exp A$

$\lambda I A = \lambda A = A \lambda I \rightarrow \lambda I$ y A conmutan

$$\exp(\lambda I + A) = \exp(\lambda I)\exp A = e^{\lambda} I A = e^{\lambda} \exp A$$

* $[\exp A]^{-1} = \exp(-A)$

$$I = \exp 0 = \exp(A - A) = \exp A \; \exp(-A)$$

* Si una matriz A es nilpotente de orden K entonces

* $A^K = 0$ pero $A^{K-1} \neq 0$

$\rightarrow$ $\exp A$ es un polinomio de grado $K-1$ de A

$$\exp A = e^{A} = I + A + \frac{1}{2}(A)^2 + \frac{1}{6}(A)^3 + \dots + \frac{1}{K-1!}(A)^{K-1} + \frac{1}{K!}\cancel{A^K}^{\,0} + \dots$$

Todos 0 después ya que $A^{K+1} = AA^K = A0 = 0$.

* Si $A = P^{-1} B P \rightarrow \exp A = P^{-1} \exp B \, P$

$$\exp A = e^{A} = I + A + \frac{1}{2}(A)^2 + \ldots =$$

$$= I + P^{-1}BP + \frac{1}{2} P^{-1}BPP^{-1}BP + \ldots =$$

$$= I + P^{-1}BP + \frac{1}{2} P^{-1}B^2P + \ldots =$$

$$= P^{-1}\left(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \ldots\right) P =$$

$$= P^{-1} \exp B \, P$$

Ejemplo

Calcular $\exp A = \exp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Como A solo tiene elementos en la diagonal $\rightarrow$

$\exp A = \begin{bmatrix} e^{1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \longrightarrow$ Series de Taylor desacopladas en cada elemento de la diagonal.

Autovalores y pol. característico

$\rightarrow$ Pol. característico $P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I]$

$\rightarrow$ Autovalores son las raíces de $P_A(\lambda)$

$\rightarrow$ Multiplicidad aritmética de λ: # de veces que aparece repetido en $P_A(\lambda)$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$ Mult. aritm. 1

$\lambda_2 = 2$ Mult. aritm. 2

→ Multiplicidad geométrica de λ. # de autovectores distintos que le corresponden. O visto de otra forma, dimensión del espacio nulo $N(A - \lambda I)$.

→ Multiplicidad geom. es siempre menor o igual que la multiplicidad aritmética.

→ CASO BUENO.

Para cada autovalor, Mult. geom = Mult. alg. → diagonalizable

→ CASO MALO

Para algún autovalor, Mult. geom < Mult. alg. → no diag

↓

JORDAN

Teorema de Cayley - Hamilton

Si $p_A(x)$ es el polinomio característico de una matriz A, entonces $p_A(A) = 0$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

$$p(A) = A^2 - 5A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Aplicaciones del teorema de Cayley-Hamilton

→ Cálculo de inversas

Sea A una matriz regular (no singular) de tamaño $n \times n$. Entonces, $\det(A) \neq 0$ y su pol. característico será

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + \det(A).$$

Ahora aplicando el teorema anterior,

$$(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + \det(A) I = 0$$

Operando

$$(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A = -\det(A) I$$

$$-\left((-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A\right) \frac{1}{\det(A)} = I$$

$$-\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_1 I\right) \frac{1}{\det(A)} A = I$$

$$A^{-1} = -\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_1 I\right) \frac{1}{\det(A)}$$

Ejemplo. Matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to P_A(x) = (a-x)(d-x) - bc =$$

$$= ad + x^2 - ax - dx - bc =$$

$$= \underset{\oplus}{x^2} - \underbrace{(a+d)}_{tr} x + \underbrace{ad-bc}_{det}$$

$$A^{-1} = -\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 I\right)\frac{1}{det(A)} =$$

$$= -\left((-1)^2 A - (a+d) I\right)\frac{1}{det(A)} = -\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}\right)\frac{1}{detA} =$$

$$= \frac{-1}{detA}\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

→ Exponencial de una matriz con un único autovalor.

Sea A matriz $n\times n$ con un único autovalor λ de mult. aritmética n.

$$\exp A = \exp[\lambda I + A - \lambda I] = \exp[\lambda I]\exp[A-\lambda I] = e^{\lambda}\exp[A-\lambda I]$$

λI y $(A-\lambda I)$ conmutan

Como A tiene un solo autovalor, $P_A(x) = (\lambda - x)^n$.

Si aplicamos Cauchy-Hamilton:

$$p_A(A) = (\lambda I - A)^n = 0$$

Esto es, $(A-\lambda I)$ es nilpotente de orden (a lo sumo) n. Aplicando en este caso la def. de exponencial

$$\exp(A-\lambda I) = I + (A-\lambda I) + \frac{1}{2}(A-\lambda I)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}(A-\lambda I)^{n-1} *$$

* resto de términos, serán 0.

de modo que

$$\exp A = e^{\lambda}\exp[A-\lambda I]$$
$$= e^{\lambda}\left(I + (A-\lambda I) + \frac{1}{2}(A-\lambda I)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}(A-\lambda I)^{n-1}\right)$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Calcular A^{-1} y $\exp A$

Inversa A

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -2-\lambda & -3 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = [\dots] = (1-\lambda)^3 =$$
$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) =$$
$$= (1+\lambda^2-2\lambda)(1-\lambda) =$$
$$= (1+\lambda^2-2\lambda-\lambda-\lambda^3+2\lambda^2)$$
$$= -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1$$

Usamos tma de Cayley-Hamilton

$$(I-A)^3 = -A^3 + 3A^2 - 3A + I = 0$$

$$I = A^3 - 3A^2 + 3A$$

$$I = (A^2 - 3A + 3I)A \rightarrow A^{-1} = (A^2 - 3A + 3I)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

exp A

conmutan, $\lambda = 1$

$$\exp A = \exp(I + A - I) = e \exp(A - I) =$$

$$= e\left(I + (A-I) + \frac{1}{2}(A-I)^2\right)$$ resto de términos son 0.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad [A-I]^2 = 0 \rightarrow \exp A = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ -2e & -2e & -3e \\ 2e & 3e & 4e \end{bmatrix}$$

Vectores propios generalizados

v es autovector asociado a λ si $Av = \lambda v$, o lo que es lo mismo $v \in N[(A - \lambda I)]$

v es autovector generalizado asociado a λ si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(A - \lambda I)^r v = 0$, $v \in N[(A - \lambda I)^r]$

Los espacios generalizados cumplen que

$$N[(A-\lambda I)^r] \subseteq N[(A-\lambda I)^{r+1}]$$

Tiene sentido, si:

$$(A-\lambda I)^r v = 0 \rightarrow (A-\lambda I)(A-\lambda I)^r v = 0$$

Se llama cadena de vectores propios generalizados de tamaño s a un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ en la que cada vector $v_k \in N[(A-\lambda I)^k]$ y cumple $[A-\lambda I] v_k = v_{k-1}$ $\forall k = s, \dots, 2$

Nótese que por construcción, v_1 es vector propio asociado a $\lambda \longrightarrow [A-\lambda I] v_1 = 0$.

Construcción cadena generalizada de tamaño k

1. Buscar un vector $v_k \in N[(A-\lambda I)^k]$ pero $v_k \notin N[(A-\lambda I)^{k-1}]$
2. Obtenemos el resto multiplicando por $[A-\lambda I]$

$$v_{k-1} = [A-\lambda I]\, v_k$$

$$v_{k-2} = [A-\lambda I]\, v_{k-1} = [A-\lambda I]^2 v_k$$

$$\vdots$$

$$v_r = [A-\lambda I]\, v_{r+1} = [A-\lambda I]^{k-r} v_k$$

$$\vdots$$

$$v_1 = [A-\lambda I]\, v_2 = [A-\lambda I]^{k-1} v_k$$

Con esta construcción $v_r \in N[(A-\lambda I)^r]$ $\forall r = 1, \dots K-1$

$$(A-\lambda I)^r v_r = (A-\lambda I)^r (A-\lambda I)^{K-r} v_K = (A-\lambda I)^K v_K = 0$$

y este era justo el objetivo.

Also apuntes en PDF!

Propiedades

→ Todos los vectores de la cadena son independientes

→ Vectores de dos cadenas asociadas a autovalores distintos son independientes

→ Vectores de cadenas que comparten autovalor pero no autovector v_1, son independientes.

* Es posible encontrar una base de $\mathbb{R}^n$ formada por cadenas de autovectores de cualquier matriz A $n \times n$ *

Base de vectores propios generalizados

Sea A matriz de $n \times n$ con autovalor λ de multiplicidad aritmética m.

En la seccion anterior hemos visto que cada espacio propio generalizado contiene a los anteriores.

Ejemplo → Encontrar forma de Jordan (J) y M. $J = M^{-1} A M$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \qquad \lambda = 1$$

Multiplicidad algebraica es 3.

Calculamos autovectores

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad r = 1 \qquad \dim N[A - I] = 2$$

Puedo encontrar dos vectores propios asociados a $\lambda = 1$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = S^{-1} A S$$

Falta un autovector para construir S. Vamos a ver como construir M.

M tendrá la siguiente forma

$$M = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & w \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

→ autovectores

→ autovectores generalizados

Son independientes → forman una base → M es invertible

Orden de las columnas puede que cambie.

El proceso para encontrar autovectores generalizados es el siguiente:

Busco vectores en $N[(A-\lambda I)^m]$, donde m es la multiplicidad algebraica del autovalor y que no estén en $N[(A-\lambda I)^{m-1}]$.

Si encuentro alguno (o varios) me lo/s quedo.

Si no hago $m \leftarrow m-1$, y continuo.

En nuestro caso, $(A-I)^2 = 0 \longrightarrow (A-I)^3 = 0$. De esta forma $N[(A-I)^3] = N[(A-I)^2] = \mathbb{R}^3$.

Como no encuentro ninguno, busco alguno que esté en $N[(A-I)^2] = \mathbb{R}^3$ pero no en $N[(A-I)]$

$N[(A-I)]$ ya lo hemos calculado

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pero no $\in (A-I)$.

Al vector $\mathbb{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ se le llama vector propio generalizado.

El siguiente paso es hacer $v_1 = (A-\lambda I)\mathbb{w}$:

Con cada $\mathbb{w}$ que encontremos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Este paso, lo justificaremos al construir $MJ = AM$ *

Fijaos que v_1 es dependiente de x_1 y x_2, es decir, es autovector.

$$(A-\lambda I)\, v_1 = (A-\lambda I)(A-\lambda I)\, w = (A-\lambda I)^2 w = 0$$

Además v_1 es independiente de w

$$c_1 v_1 + c_2 w = 0 \longrightarrow c_1 (A-\lambda I) w + c_2 w = 0$$

$$\cancel{c_1 (A-\lambda I)^2 w}^{\to 0} + c_2 \underbrace{(A-\lambda I)\, w}_{\neq 0 \text{ (por construcción)}} = 0 \to c_2 = 0 \to c_1 = 0$$

Ya tengo 2 de las 3 columnas de M. Para terminar busco un segundo autovector independiente de v_1.

Por ejemplo:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Repasando, v_1 y v_2 son autovectores $(\lambda = 1)$, luego

$$A v_1 = \cancel{\lambda}^{1} v_1 \quad y \quad A v_2 = \cancel{\lambda}^{1} v_2$$

*Obtenemos la forma de Jordan

El tercer vector cumple que:

$$v_1 = (A - \lambda I) w \longrightarrow A w = \cancel{\lambda}^{1} w + v_1$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J}$$

Y M es invertible ya que v_1, v_2 y w son linealmente independientes. (Comprobad vosotros que funciona...)

Teorema de Jordan ← Recordatorio.

Cada matriz cuadrada A es semejante a una matriz de Jordan J.

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

#bloques = #autovectores

Luego siempre podré encontrar M con esta construcción.

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ w \\ | \end{bmatrix} = \cancelto{1}{\lambda} \begin{bmatrix} | \\ w \\ | \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancelto{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \cancelto{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow v_1 = [A - I] v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(Vemos que $v_1 \in N'$)

Completamos la base con un vector $w \in N'$ independiente de v_1, por ejemplo

$$w = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fijaos, que v_1 y w son autovectores, luego cumplen asociados a $\lambda = 1$

$$A v_1 = v_1 \quad ; \quad A w = w$$

Por otro lado v_2 cumple que $v_1 = [A - I] v_2$, luego

$$v_1 = A v_2 - v_2 \longrightarrow A v_2 = v_1 + v_2$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & w \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & w \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J}$$

Y M es invertible ya que v_1, v_2 y w son linealmente independientes. (Comprobad vosotros que funciona...)

Teorema de Jordan ← Recordatorio.

Cada matriz cuadrada A es semejante a una matriz de Jordan J.

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

#bloques = #autovectores

Luego siempre podré encontrar M con esta construcción.

Problema:

Matriz A de tamaño 4×4 con 2 autovalores λ_1 y λ_2. λ_1 tiene multiplicidad 1 y λ_2 tiene multiplicidad 3. (TFA garantiza que $1+3=4$)

λ_1 tendrá un autovector

λ_2 tendra uno, dos o tres autovectores.

Si no tiene tres, matriz no diagonalizable.

Suponemos λ_2 tiene

Ejemplo. Cálculo de la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.- Calculamos autovalores

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}} =$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)^3 = (2-\lambda)^4$$

$\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 4

2.- Calculamos autovectores $N(A-\lambda I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2 \rightarrow \dim N(A-\lambda I) = 2$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.- Busco autovectores generalizados

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda I)^4 = 0 \;\ldots$

$N(A-\lambda I)^4 = \mathbb{R}^4$; $N(A-\lambda I)^3 = \mathbb{R}^4$; $N(A-\lambda I)^2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Busco w en $N(A-\lambda I)^3$ pero no en $N(A-\lambda I)^2$

$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ autovector generalizado.

$$v_1 = (A - \lambda I)\, w =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

autovector generalizado

$$v_2 = (A - \lambda I)\, v_1 = (A - \lambda I)^2\, w =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este es autovector

$$(A - \lambda I)\, v_2 = \underbrace{(A - \lambda I)^3\, w = 0}_{\text{Def. de } w}$$

Las columnas de M serán

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w & v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

autovector independiente de v_2. Eg $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

4.- Revisamos ecuaciones y ponemos en forma matricial.

$$A v_2 = \lambda v_2 \qquad A w = \lambda w + v_1$$

$$A v_3 = \lambda v_3 \qquad A v_1 = \lambda v_1 + v_2$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_2 & v_1 & w & v_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_2 & v_1 & w & v_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}\underset{M}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{M}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}\underset{J}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego $AM = MJ \rightarrow A = MJM^{-1} \rightarrow$ A es semejante a J.