21. CURVAS PLANAS Y ALABEADAS III

D. Integrales de línea

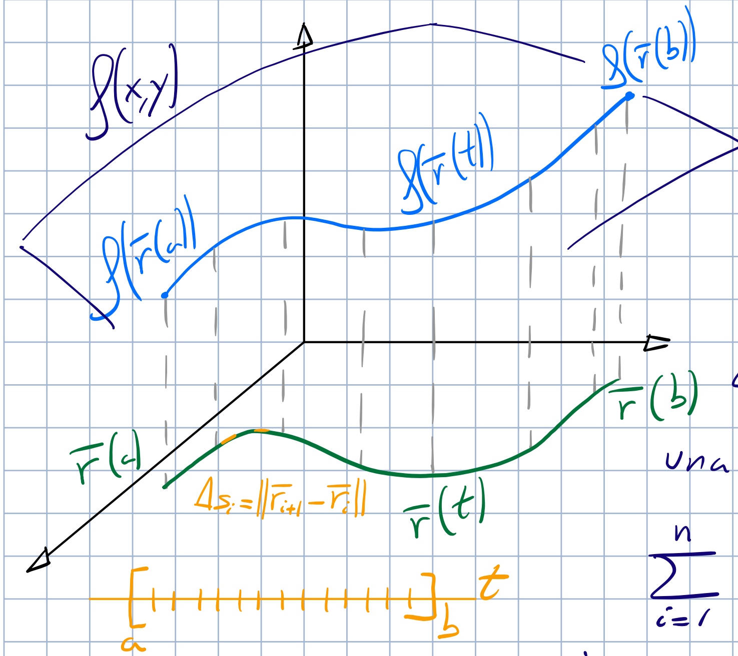
1 Integral de línea de un campo escalar

Sea $f: \mathbb{R}^{2,3} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea C una curva regular parametrizada por $\bar{r}(t)$, $\bar{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{2,3}$

Se llama integral de línea de f a lo largo de C a:

$$\int_C f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \underbrace{\|\bar{r}'(t)\| \, dt}_{ds}$$

Intuición geométrica: área debajo de la curva



Supongamos que queremos calcular el área de la superficie gris

Esto podría calcularlo como una suma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \, f(\bar{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\Delta \bar{r}_i\|}{\Delta t} \Delta t \, f(\bar{r}_i)$$

Si hago $\Delta t \longrightarrow 0$: $\displaystyle\int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\| \, dt = \int_C f \, ds$

La integral no depende de la parametrización escogida

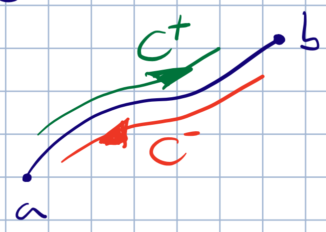
DEM17. Independencia de la parametrización. Las integrales de línea no se alteran al sustituir la trayectoria de integración por otra equivalente en el sentido que se explica a continuación. Sea $\boldsymbol{x}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria regular a trozos y sea $\boldsymbol{y}: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ una **reparametrización cualquiera** de $\boldsymbol{x}$ (es decir, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ \phi$, donde $\phi: [c,d] \to [a,b]$ es una función biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que $\phi'(t) \neq 0$, y por tanto estrictamente monótona, entonces

$$\int_a^b f(\boldsymbol{x}(t)) \, ||\boldsymbol{x}'(t)|| \, dt = \int_c^d f(\boldsymbol{y}(\tau)) \, ||\boldsymbol{y}'(\tau)|| \, d\tau.$$

Este resultado nos permite definir (bajo ciertas condiciones) una integral de línea de campos escalares que no depende de la parametrización concreta que utilicemos para calcularla.

2 Propiedades de la integral de línea de un campo escalar

a No depende del sentido de recorrido: $\displaystyle\int_{C^+} f\,ds = \int_{C^-} f\,ds$



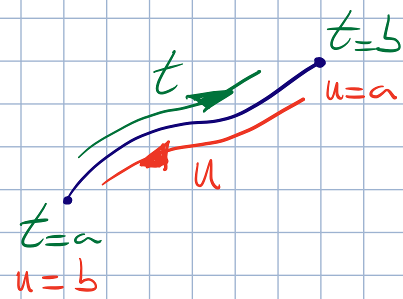
DEM

$$\int_a^b f(\bar{r}(t))\|\bar{r}'(t)\|\,dt$$

Para cambiar el sentido de recorrido de la curva tenemos que hacer: $u = a+b-t$ de modo que:

$$\bar{r}^*: u \in [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\bar{r}^*(u) = \bar{r}(a+b-u)$$



$$\int_a^b f(\bar{r}(t))\|\bar{r}'(t)\|\,dt = -\int_b^a f(\bar{r}^*(u))\|\bar{r}^{*\prime}(u)\|\,du = \int_a^b f(\bar{r}^*(u))\|\bar{r}^{*\prime}(u)\|\,du$$

Cambio de variable

$t = a+b-u$

$$f(\bar{r}(t)) \longrightarrow f(\bar{r}(a+b-u)) = f(\bar{r}^*(u))$$

$$\|\bar{r}'(t)\| \xrightarrow{*} \|\bar{r}^{*\prime}(u)\|$$

$$dt \longrightarrow -du$$

$$\int_{t=a}^{t=b} \longrightarrow \int_{u=b}^{u=a}$$

$$* \; \bar{r}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(a+b-u) =$$

$$= \frac{d}{du}\bar{r}(a+b-u)\frac{du}{dt} = \bar{r}^{*\prime}(u)\cdot(-1)$$

$$\bar{r}'(t) = -\bar{r}^{*\prime}(t)$$

NOTA: La evaluación de las integrales siempre se hace en sentido de parámetro creciente, es decir, si $a<b$, entonces

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\|\,dt$$

Si cambiamos el orden de los límites de integración, por las propiedades de las integrales lo que obtenemos es:

$$\int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\|\,dt = -\int_b^a f(\bar{r}(t)) \cdot \|\bar{r}'(t)\|\,dt$$

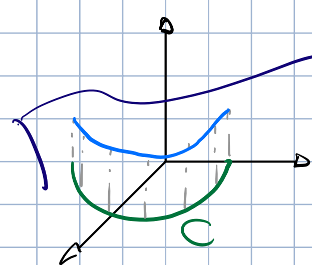
b Si descomponemos la curva C en una unión finita de curvas, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \ldots \cup C_n$, entonces

$$\int_C f\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f\,ds$$

EJERCICIO

Calcular la integral de $\int_C 4xy^4\,ds$ en $C = \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x\geq 0 \end{cases}$

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|r'(t)\|\,dt$$



La función no se parece a esto pero da igual

Lo primero que hago es parametrizar la curva (encontrar $\bar{r}(t)$).

$x(t) = 4\cos t \qquad x \geq 0 \longrightarrow t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$y(t) = 4\sin t$

$\bar{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t)$

$\bar{r}'(t) = (-4\sin t, 4\cos t) \longrightarrow \|\bar{r}'(t)\| = 4$

$$\int_C f(x,y)\, ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

$$\int_C 4xy^4\, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4(4\cos t)(4\sin t)^4 \cdot 4\, dt = \frac{4^7}{5} \sin^5 t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4^7 \cdot 2}{5}$$

Veamos que pasa si utilizamos otra parametrización para la curva (que la recorre en sentido contrario).

$t = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - u = -u$

$x^*(u) = 4\cos(-u) = 4\cos u \qquad u \in [-\pi/2, \pi/2]$

$y^*(u) = 4\sin(-u) = -4\sin u$

$\bar{r}^{*\prime}(u) = (-4\sin u, -4\cos u) \longrightarrow \|\bar{r}^{*\prime}(u)\| = 4$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cdot 4\cos u\, (-4\sin u)^4 \cdot 4\, du = \frac{4^7}{5} \sin^5 u \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4^7 \cdot 2}{5}$$

3 Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\overline{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y sea C una curva regular parametrizada por $\overline{r}(t)$, $\overline{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Se llama integral de línea de $\overline{F}$ sobre C (ó circulación de $\overline{F}$) a:

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{S} = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = \int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \underline{\overline{r}'(t)\,dt}$$

Notación

Ver pag 360 Marsden y Tromba

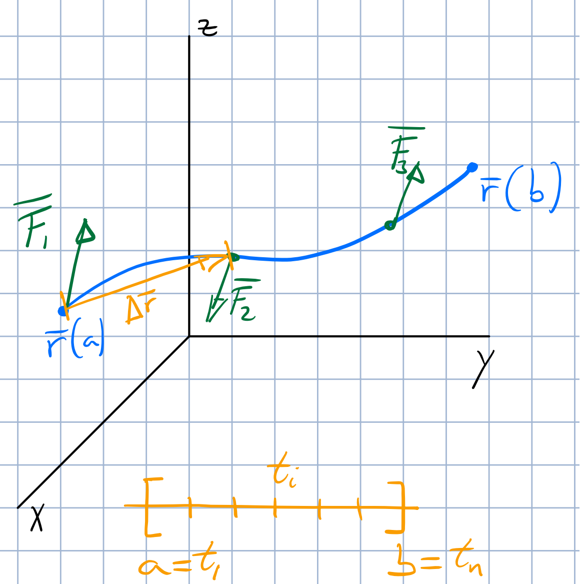
$$d\overline{S} = \overline{T}\,ds = \frac{\overline{r}'(t)}{\|\overline{r}'(t)\|}\|\overline{r}'(t)\|\,dt = \overline{r}'(t)\,dt$$

$d\overline{S}$ es un vector de módulo ds y dirección tangente a la curva $(\overline{T})$, es decir, $d\overline{S} = \overline{T}\,ds$

Significado físico: trabajo realizado por el campo para llevar una partícula de $\overline{r}(a)$ a $\overline{r}(b)$

$$W \simeq \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(\overline{r}_i) \cdot \Delta \overline{r}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(\overline{r}_i) \cdot \frac{\overline{r}(t_{i+1}) - \overline{r}(t_i)}{\underbrace{t_{i+1} - t_i}_{\Delta t_i}} \cdot \Delta t_i$$



$$\left.\begin{array}{l} n \to \infty \\ t_{i+1} \to t_i \end{array}\right| \quad W = \int_a^b \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\,dt$$

La integral no depende de la parametrización escogida

[Salvo el signo que depende del sentido de recorrido]

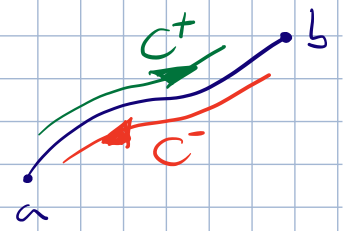
19. Independencia de la parametrización para integrales de línea de campos vectoriales.
Sea $\boldsymbol{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una parametrización regular y sea $\boldsymbol{y}:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ una reparametrización de $\boldsymbol{x}$, entonces para todo campo vectorial continuo $\boldsymbol{F}:C\to\mathbb{R}^n$ $(C:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}([a,b]))$ se verifica que

$$\int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \sigma \int_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s},$$

donde $\sigma=1$ si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ determinan la misma orientación, mientras que si $\sigma=-1$ determinan orientaciones opuestas. Nótese que este resultado es consecuencia del hecho de que la integral de línea de campos vectoriales involucra $\boldsymbol{x}'(t)$ y no sólo su norma como ocuacotadarre con los campos escalares. La razón por la que aparece la constante σ es que la integral de línea para campos vectoriales depende del sentido del vector $\boldsymbol{x}'(t)$. Así pues, este resultado nos permite definir la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva regular C, indepedientemente de la parametrización regular que se considere, salvo la orientación que ésta determine.

4 Propiedades de la integral de línea de un campo vectorial

a $$\int_{C^+} \overline{F}\cdot d\overline{S} = -\int_{C^-} \overline{F}\cdot d\overline{S}$$



b Si $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_n \longrightarrow \int_C \overline{F}\cdot d\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \overline{F}\cdot d\overline{S}$

Comentario: a veces se llama $d\overline{r}$

$$d\overline{r} = \overline{r}'(t)\,dt = (x'(t)\,dt,\ y'(t)\,dt,\ z'(t)\,dt)$$

a $d\overline{S}$ porque es la diferencial de $\overline{r}(t)$

c En el caso de campos vectoriales gradientes

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar tal que $f \in C^1$

Sea $\overline{x}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria regular a trozos.

Entonces

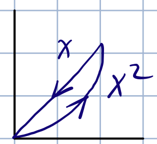
$$\int_{\overline{x}} \nabla f \cdot d\overline{s} = f(\overline{x}(b)) - f(\overline{x}(a))$$

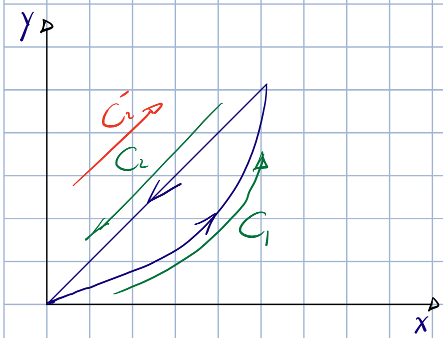
De modo que si la curva es cerrada $[(\overline{x}(b) = \overline{x}(a)]$ entonces

$$\int_{\overline{x}} \nabla f \cdot d\overline{s} = 0$$

EJEMPLO

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{S} \quad \Bigg| \quad \bar{F} = (2x, -2y)$$

$C:$ 



$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{S} + \int_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{S} = 0 + 0$$

$*$ $\qquad$ $*$

$C_1: \ \bar{r}(t) = (t, t^2) \ , \quad t \in [0,1]$

① $[a,b] = [0,1]$

② $\bar{F}(\bar{r}(t)) = (2x(t), -2y(t)) = (2t, -2t^2)$

③ $d\bar{S} = \bar{r}'(t)\,dt = (1, 2t)\,dt$

$$* \int_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_0^1 (2t, -2t^2)\cdot(1, 2t)\,dt = \int_0^1 (2t - 4t^3)\,dt = (t^2 - t^4)\Big|_0^1 = 0$$

$C_2^-: \ \bar{r}(t) = (t, t) \ , \quad t \in [0,1]$

$C_2: \ \bar{r}(t) = (1-u, 1-u), \quad u \in [0,1]$

Dos opciones $\displaystyle\int_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{S} = -\int_{C_2^-} \bar{F}\cdot d\bar{S}$

$t = 1 + 0 - u$

Elijo usar C_2^-. $\quad C_2^-: \ \bar{r}(t) = (t, t) \ , \quad t \in [0,1]$

① $[a,b]=[0,1]$

② $\bar{F}(\bar{r}(t)) = (2x(t), -2y(t)) = (2t, -2t)$

③ $d\bar{S} = \bar{r}'(t)\,dt = (1,1)\,dt$

$$* \int_{C_2^-} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_0^1 (2t,-2t)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0 \rightarrow \int_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{S} = -0$$

EJERCICIOS

① **21.2** Probar que la integral de línea de $f(x,y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r=r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r,\theta)\sqrt{r^2+r'(\theta)^2}\,d\theta$. Calcular la longitud de arco de $r=1+\cos(\theta)$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

ⓐ ¿Cómo queda una trayectoria en coordenadas polares $\bar{r}=\bar{r}(\theta)$?

$$\bar{r}(\theta) = (\underbrace{r(\theta)\cos\theta}_{x(\theta)}, \underbrace{r(\theta)\sin\theta}_{y(\theta)})$$

$$\bar{r}'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin(\theta), r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$

De modo que

$$\|\bar{r}'(\theta)\| = \Big[r'(\theta)^2\cos^2\theta + r(\theta)^2\sin^2\theta \cancel{-2r(\theta)r'(\theta)\sin\theta}\cos\theta +$$

$$r'(\theta)^2\sin^2\theta + r(\theta)^2\cos^2\theta + \cancel{2r(\theta)r'(\theta)\sin\theta\cos\theta}\Big]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$$

Luego,

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \underbrace{\|\bar{r}'(t)\|\,dt}_{ds} \longrightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r,\theta)\sqrt{r^2 + r'(\theta)^2}\,d\theta$$

b Calcular la longitud de arco de

$$\bar{r}(\theta) = ([1+\cos\theta)\cos\theta,\ [1+\cos\theta]\sin\theta) =$$

$$= (1+\cos\theta)[\cos\theta,\ \sin\theta]$$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\bar{x}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'(\theta)^2}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = \ldots = 2\sqrt{2+2\cos\theta}\,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 8$$

②

21.3 Calcular las siguientes integrales de línea $\int_{\boldsymbol{x}} f(x,y,z)ds$, donde

a) $f(x,y,z)=x+y+z$, $\quad \boldsymbol{x}(t)=(\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $\quad 0\le t\le 2\pi$

b) $f(x,y,z)=x\cos z$, $\quad \boldsymbol{x}(t)=(t,t^2,0)$, $\quad 0\le t\le 1$

a $$\int_{\bar{x}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\bar{x}(t))\cdot \underbrace{\|\bar{x}'(t)\|\,dt}_{ds}$$

$f(x,y,z)= x+y+z$, $\quad \bar{x}(t)=(\sin t, \cos t, t)$ $\quad a=0,\ b=2\pi$

$\bar{x}'(t)=(\cos t, -\sin t, 1)$

$f(x(t),y(t),z(t))= \sin t+\cos t+t$

$$\int_0^{2\pi}(\sin t+\cos t+t)\sqrt{1+\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}(t+\sin t+\cos t)\sqrt{2}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{t^2}{2}-\cos t+\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{2}\,\frac{4\pi^2}{2}=2\sqrt{2}\,\pi^2$$

b $$\int_{\bar{x}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\bar{x}(t))\cdot \underbrace{\|\bar{x}'(t)\|\,dt}_{ds}$$

$f(x,y,z)= x\cos z$ $\quad \bar{x}(t)=(t,t^2,0)$ $\quad a=0,\ b=1$

$f(x(t),y(t),z(t))= t\cos(0)= t$ $\quad \bar{x}'(t)=(1,2t,0)$

$\|\bar{x}'(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$

$$\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt=\frac{2}{3}\frac{1}{8}(1+4t^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right)$$

③

21.6 Evaluar cada una de las siguientes integrales:

a) $\int_{\boldsymbol{x}} x dy - y dx, \quad \boldsymbol{x}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$

b) $\int_{\boldsymbol{x}} x^2 dx - xy dy + dz$, donde $\boldsymbol{x}$ es la parábola $z = x^2, y = 0$ de $(-1, 0, 1)$ a $(1, 0, 1)$.

a

$$\int_{\bar{X}} x\,dy - y\,dx \rightarrow \int_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt$$

$\bar{F} = (-y, \ x)$ $\qquad$ $\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad a = 0, b = 2\pi$

$\bar{F}(t) = (-\sin t, \ \cos t)$ $\qquad$ $\bar{x}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

b

$$\int_{\bar{X}} x^2 dx - xy\,dy + dz \rightarrow \int_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt$$

$\bar{F} = (x^2, -xy, 1)$; $\bar{x} = (t, 0, t^2)$ $\quad a = -1, b = 1$

$\bar{F}(t) = (t^2, 0, 1)$; $\bar{x}' = (1, 0, 2t)$

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (t^2, 0, 1) \cdot (1, 0, 2t)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2 + 2t)\, dt = \frac{t^3}{3} + t^2 \Big|_{-1}^{1} = \cancel{\frac{1}{3}} + 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + 1 = 2$$

* (es inventado, no está en guiones)

c $\int_{\bar{x}} x\,dx - y\,dy$, con $\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_{\bar{x}} x\,dx - y\,dy \rightarrow \int_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\, dt$$

$\bar{F} = (x, -y)$ $\qquad$ $\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad a = 0, b = 2\pi$

$\bar{F}(t) = (\cos t, -\sin t)$ $\qquad$ $\bar{x}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, -\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2 \sin t \cos t\, dt = \cos^2 t \Big|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0$$

¿Hacía falta hacer los cálculos? $F = (x, -y)$ que es un campo gradiente con $f = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)$. $(F(x,y) = \nabla f(x,y))$ y la curva es cerrada $\bar{x}(a) = \bar{x}(b)$. El resultado es cero, sin necesidad de hacer operaciones