(18.06 Lecture 29)

Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = U \Sigma V^T$$

Σ diagonal / U, V orthogonal

Ultima y mejor forma de descomponer una matriz.

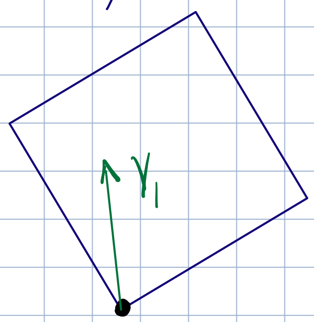
Funciona para cualquier matriz A.

Ejemplo: si la matriz es simétrica, tengo que sus autovectores son ortogonales luego

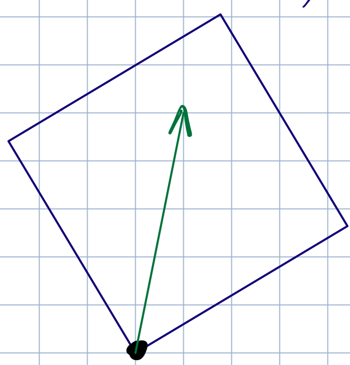
$$A = Q \Lambda Q^T \qquad A = U \Sigma V^T$$

Volvemos a la figura que nos permite representar cualquier transformación lineal (efecto que produce A sobre un vector)

R^n row space



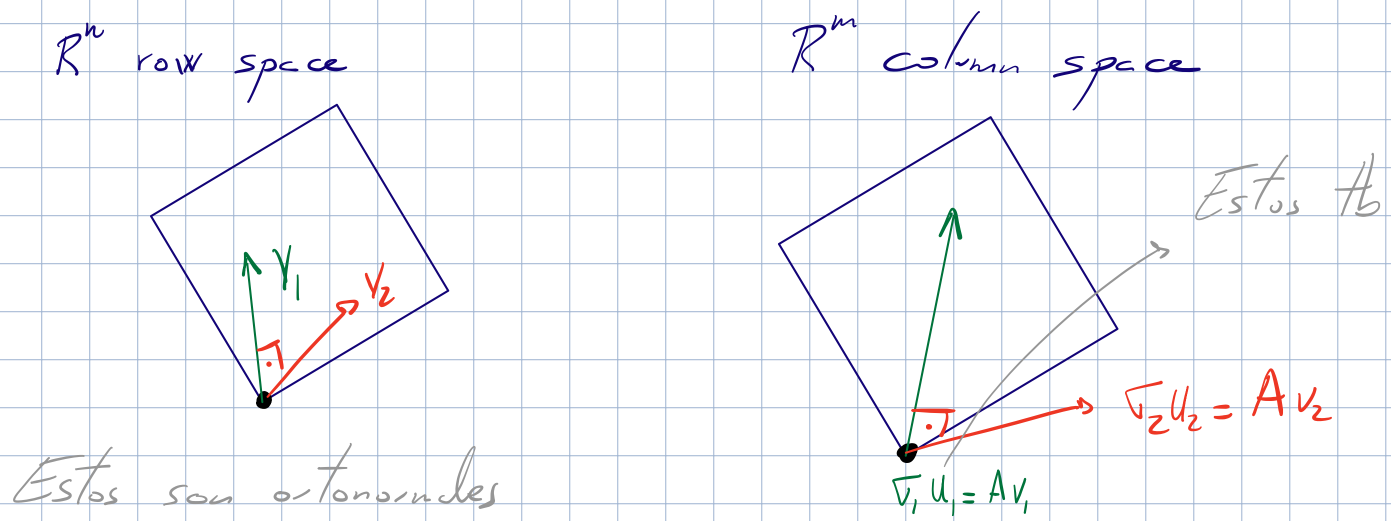
R^m column space



¿Qué busco en SVD? $A = U\Sigma V^T \leftrightarrow AV = U\Sigma$

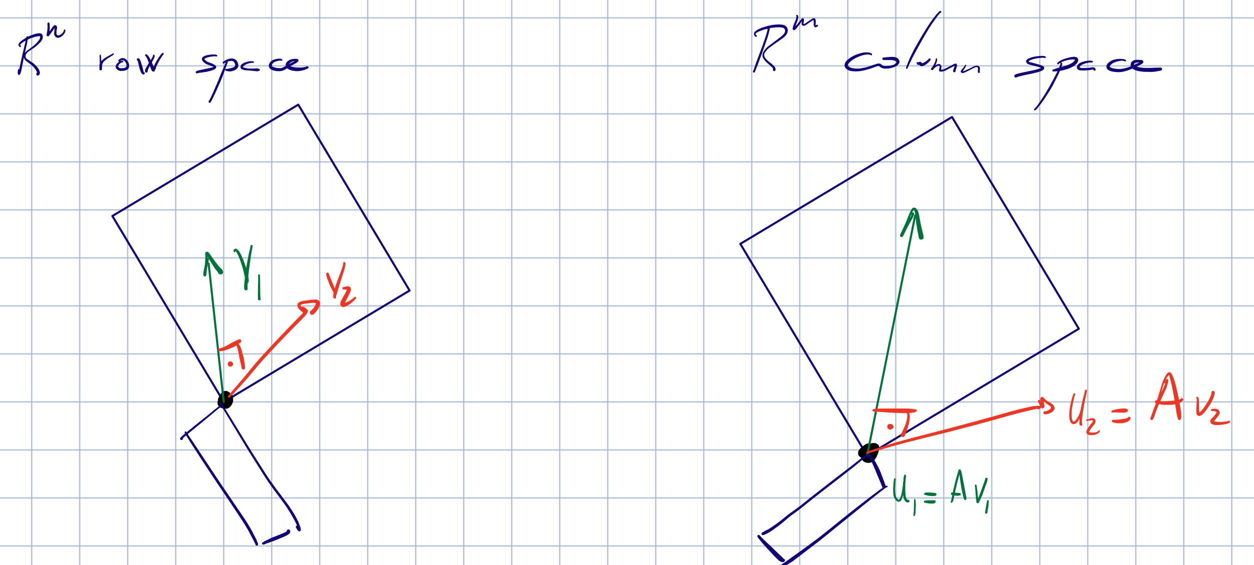
Y quiero que V y Σ tengan columnas ortonormales y Σ sea diagonal.

Lo que busco entonces es una base ortogonal en el espacio de las filas que (al aplicarle A) se transforme en una base ortogonal del espacio de las columnas.



¿Cómo puedo encontrar una base ortogonal para el espacio de las filas? $\longrightarrow$ Gram Schmidt

Pero claro, si solo hago eso, no hay motivo para que la base transformada sea ortogonal.



Podemos añadir los espacios nulos, que aparecerán como ceros en la diagonal de Σ

$$(Av = 0)$$

En forma matricial

rank of A

$$A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_r \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$AV = U\Sigma$$

Si hay espacio nulo

$$A \begin{bmatrix} | & | & & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & v_n \\ | & | & & | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_r & u_{r+1} & \cdots & u_m \\ | & | & & | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$ es invertible, luego rango es 2

Busco v_1, v_2 en rowspace $\mathbb{R}^2$

u_1, u_2 en columnspace $\mathbb{R}^2$

$\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ (scaling factors)

$$A v_1 = \sigma_1 u_1$$
$$A v_2 = \sigma_2 u_2$$

Matricialmente

$$AV = U\Sigma \rightarrow A = U\Sigma V^{-1} \rightarrow A = U \Sigma V^T$$

Voy a hacer desaparecer la U para que V sea más fácil de calcular.

esta matriz es simétrica (y como mínimo semidefinida positiva)

$$A^TA = A^T U \Sigma V^T = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T$$

$(A = U \Sigma V^T \rightarrow A^T = V \Sigma^T U^T = V \Sigma U^T)$

De modo que

$$A^TA = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} V^T$$

¡Autovalores y autovectores!
Y autovalores serán positivos (o 0)
pq A^TA es semidefinida positiva

¿Y ahora como consigo la U?

Camino 1 (difícil)

$$AA^T = U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U \Sigma^2 U^T \rightarrow \text{repito.}$$

Camino 2 (fácil)

$$A V \Sigma^{-1} = U$$

En nuestro ejemplo

$$A^TA = \begin{bmatrix}4 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25 & 7\\ 7 & 25\end{bmatrix}$$

Ahora necesito autovalores y autovectores

$$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = 32\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix} = 32\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = 18\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Normalizo}} \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{bmatrix} = 18\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix} = \overset{U}{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}\overset{\Sigma}{\begin{bmatrix}\sqrt{32} & 0\\ 0 & \sqrt{18}\end{bmatrix}}\overset{V}{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}}$$

Repetimos para U (Camino 1)

$$A\,A^T = \begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}32 & 0\\ 0 & 18\end{bmatrix}$$

Esto es un accidente, no es normal que salga diagonal

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = 32\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = 18\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$AA^T = \overset{U}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}\overset{\Sigma^2}{\begin{bmatrix}32 & 0\\ 0 & 18\end{bmatrix}}\overset{U^T}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

↳ otra vez 32 y 18 → No surprise.

Por tanto

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \overset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

¿Funciona?

$$\overset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}} \overset{V}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

¡Sigue está mal!

¿Qué pasó?

Hay varias maneras de arreglarlo (por ejemplo, cambiando de signo el autovector de V). Al final de la clase retomamos este tema.

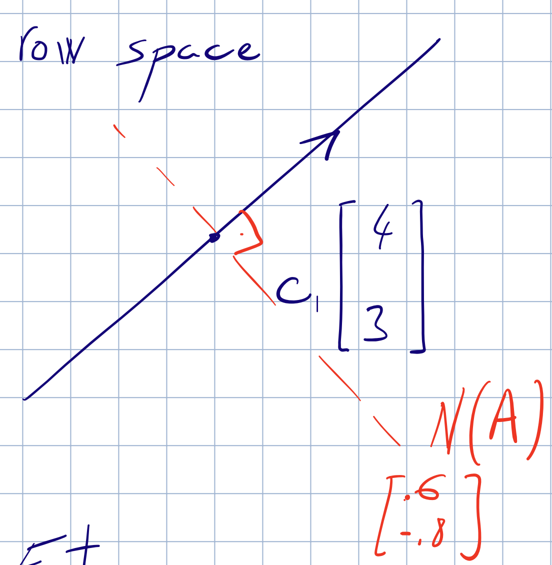
Ejemplo 2 (matriz singular)

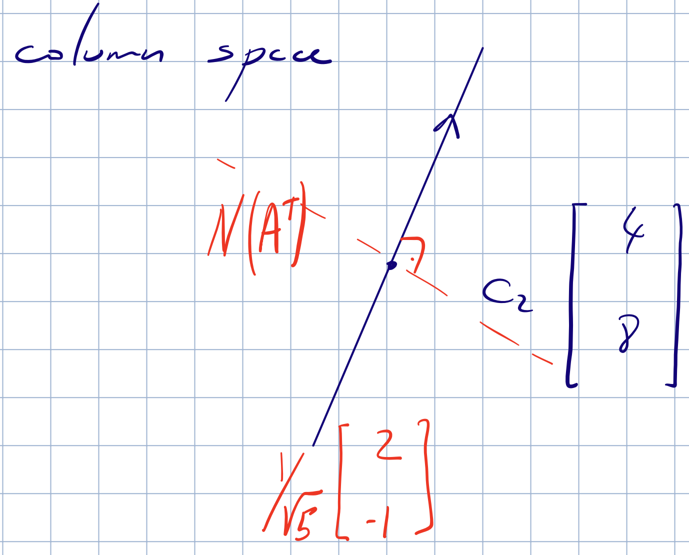
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$ no invertible, luego rango es 1

Busco v_1 en rowspace $\mathbb{R}^2$

u_1 en columnspace $\mathbb{R}^2$

$\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$ (scaling factors)





Entonces

$$v_1 = \begin{bmatrix} .8 \\ .6 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Y por tanto

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}} = \underset{U}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}} \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sqrt{125} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} .8 & .6 \\ .6 & -.8 \end{bmatrix}$$

Esto es el espacio Nulo

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 60 & 45 \end{bmatrix}$$

Matriz de rango 1 (todas columnas comb. lineal de $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$)

¿Autovalores de la matriz de rango 1? $\rightarrow 80 + 45 = \lambda_1 + \overset{0}{\cancel{\lambda_2}} \rightarrow \lambda_1 = 125$ *

Lo que estamos haciendo es elegir las bases adecuadas para los 4 subespacios del álgebra lineal

$v_1, \dots, v_r$	base ortonormal para rowspace	dim r
$u_1, \dots, u_r$	" " " columnspace	dim r
$v_{r+1}, \dots, v_n$	" " " nullspace	dim $n-r$
$u_{r+1}, \dots, u_m$	" " " nullspace of A^T	dim $m-r$

¡Y además! $\longrightarrow A v_i = \sigma_i u_i$

Fijaos que tengo el número de elementos adecuados para que las dimensiones cuadren.

Repaso

funciona para cualquier matriz (incluso rectangular)

$$A = (\text{ortogonal})(\text{diagonal})(\text{ortogonal}) = U \Sigma V^T$$

$$A^TA = (V \Sigma^T U^T)(U \Sigma V^T) = V \Sigma^2 V^T$$

$\sigma_i^2 = \lambda_i (A^TA)$

Factorización de una matriz simétrica

V eigenvector matrix for A^TA

$\sigma_i^2 \ \lambda_i (AA^T)$

$$AA^T = (U \Sigma V^T)(V \Sigma^T U^T) = U \Sigma^2 U^T$$

Factorización de una matriz simétrica

U eigenvector matrix for AA^T

Como vimos en el ejemplo, esto puede dar lugar a problemas. Grado de libertad al escoger signo de autovectores.

¿Cómo lo soluciono? → Camino 2

$$A v_i = \sigma_i u_i$$

Elijo los signos que quiera para v_i y con esta fórmula los u_i quedarán consistentes

Ejercicio:

Tengo esta descomposición SVD: $A = U \Sigma V^T$

a) $\begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T$

A es singular V/F

$A v_i = \sigma_i u_i \rightarrow A v_i \neq 0 \quad \forall v_i \rightarrow$ No singular

b) $\begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T$

Es una SVD V/F → σ_i son siempre positivos

c) $\begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T$

A es singular V/F $\qquad A v_2 = 0$

Su rango es 1 V/F

La dimensión de $N(A)$ es 1 V/F

El vector v_2 pertenece a $N(A)$ V/F

Ejercicio: calcular la descomposición SVD de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A = U \Sigma V^T$$

$$A_{3\times 2} = U_{3\times 3}\, \Sigma_{3\times 2}\, V^T_{2\times 2}$$

$$A^T A = V_{2\times 2} \underbrace{\Sigma^T \Sigma}_{2\times 2} V^T_{2\times 2} \longrightarrow \text{Problema de autovalores } 2\times 2$$

$$A A^T = U_{3\times 3} \underbrace{\Sigma \Sigma^T}_{3\times 3} U^T_{3\times 3} \longrightarrow \text{Problema de autovalores } 3\times 3$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Luego $\Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ y $V = V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De modo que $AV = A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = U\Sigma = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Luego

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para completar U con u_3 tenemos dos opciones:

a) Buscar un vector $\perp$ a u_1 y u_2 y $\|u_3\| = 1$
(Gram-Schmidt)

b) u_3 debe pertenecer a $N(A^T)$

$$U^T A = \Sigma V^T$$

$$\begin{bmatrix} — & u_1 & — \\ — & u_2 & — \\ — & u_3 & — \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego $u_3^T A = [\,0 \quad 0\,] \rightarrow u_3^T$ en $N(A^T)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 + \frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Luego $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{normalizando}]{} u_3 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

Luego la descomposición queda

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para terminar, podemos verificar los autovalores y autovectores de AA^T

```
In[8]:= AAT = Transpose[{{2, -1, 2}, {2, 2, -1}}].{{2, -1, 2}, {2, 2, -1}} // MatrixForm
```

A $\qquad$ A^T

```
Out[8]//MatrixForm=
(8   2   2)
(2   5  -4)
(2  -4   5)

In[7]:= Eigensystem[AAT] // MatrixForm

Out[7]//MatrixForm=
(    9          9           0     )
({2, 0, 1}  {2, 1, 0}  {-1, 2, 2})
```

en $N(A^T)$

$$A v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$A v_2 = \lambda_1 v_2$$

$$A(v_1 + v_2) = \lambda_1 (v_1 + v_2)$$

tengo libertad para escoger u_1 y u_2 en el plano formado por v_1 y v_2.