(18.06 Lecture 11)

Bases de nuevos espacios vectoriales
Matrices de rango unitario
El pequeño mundo de los grafos

Continuamos con la idea del capítulo anterior sobre espacios vectoriales cuyos elementos no son vectores.

Ejemplo: M todas las matrices 3×3

Subespacios:

S Simétricas 3×3	U Triangulares superiores 3×3
- Si sumo dos simétricas, sigo teniendo una simétrica - Si mult. por escalar... - Si mult. dos matrices simétricas... eso me da igual, no es una operación de interés.	

Base para M (todas las 3×3)

Parece lógico que la dimensión sea 9 (una por número)

Y la base más directa sería:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En realidad, esto no es muy distinto de $\mathbb{R}^9$ pero con los números escritos en una caja

Base para U (Triang. sup 3×3)

Dim = 6 (grados de libertad que tengo para elegir la matriz). Puedo coger 6 elementos de la base de M para construir mi base (no es el caso típico).

Base para S (Simétricas 3×3)

Dim = 6 (grados de libertad que tengo para elegir la matriz). No puedo coger 6 elementos de la base de M para construir mi base

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya repasamos en la clase anterior que $S \cap U = D$ es subespacio (intersección siempre lo es).

¿Que hay de $S \cup U$? Esto no es un subespacio. Es como tomar dos lineas del plano y para ahí, sin completar el plano.

Lo que me puede interesar es: $S+U \rightarrow$ suma de subespacios.

$S+U$ = cualquier elemento en S + cualquier elemento en U = = todas las 3×3 = M

Repasamos las dimensiones:

$$\dim(S) = 6, \quad \dim(U) = 6, \quad \dim(S\cap U) = 3, \quad \dim(S+U) = 9$$

$$\dim(S+U) = \dim(S) + \dim(U) - \dim(S\cap U)$$
$$9 = 6 + 6 - 3$$

Otro ejemplo de espacio vectorial sin vectores

Este ejemplo es de ecuaciones diferenciales, un poco avanzado.

¿Soluciones?

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

repetido

$$y = \cos x, \ \sin x, \ e^{ix}$$

espacio nulo de las soluciones

Solución completa:

$$y = c_1 \underline{\cos x} + c_2 \underline{\sin x}$$

Esto es una base del subespacio

$$\dim\begin{pmatrix}\text{espacio de} \\ \text{soluciones}\end{pmatrix} = 2$$

Estos elementos vuelven a no parecer vectores ¿no? Son funciones. Pero como las podemos sumar y multip. por escalares, nos valen como elementos de un espacio vectorial.

Matrices de rango 1

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

¿Que puedo poner aquí para que rango = 1 ?

Base para row space $C(A^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}^T$

$$\dim C(A) = \dim(A^T) = 1$$

Estas matrices se pueden escribir como una columna por una fila

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Todas las matrices de rango 1 $A = uv^T$. Estas matrices se pueden usar como bloques para construir otras matrices.

→ En la clase original, aquí hay un par de ejemplos más de subespacios vectoriales. (min 26-39)

→ Del 39 al final es sobre grafos.