(18.06 Lecture 28)

SIMILAR MATRICES (Matrices semejantes)

$A, B \ / \ B = M^{-1} A M$

FORMA DE JORDAN

→ Skip $A^T A$ is positive definite!

Matrices semejantes $(n \times n)$

A y B son semejantes significa que para alguna M se puede escribir $B = M^{-1} A M$

Ejemplo

$S^{-1} A S = \Lambda \longrightarrow A$ y Λ son semejantes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}}_{B}$$

(triangular, inversa es trivial) (invertida)

A y B son semejantes y por tanto, tienen los mismos autovalores

$\lambda = 3, 1$ (check tr y det para cada matriz: A, B, Λ)

Matrices semejantes tienen los mismos autovalores

$$Ax = \lambda x$$
$$AMM^{-1}x = \lambda x$$
$$M^{-1}AMM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$$
$$BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$$

autovector ha cambiado $\to M^{-1}x$

λ es autovalor de B

Tengo esta familia de matrices que tienen los autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Estos dos autovalores son distintos, con lo que es diagonalizable.

Caso no-diagonalizable. (CASO MALO $\lambda_1 = \lambda_2$)

Ejemplo $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Una small familia tiene $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Otra big familia tiene $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(No son de la misma familia)
(No son semejantes)

No es semejante a ninguna otra $M^{-1}4IM = 4I \ \forall M$

Forma de Jordan
(Lo más diagonal que puede llegar a ser una matriz 2×2 con $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$)

Jordan descubrió la mejor matriz dentro de cada familia

Más miembros de la familia de $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$).

Es fácil si nos fijamos en $tr = 8$, $det = 16$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}$$

BTW, ninguna de estas es diagonalizable. Si lo fuera, $\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ pero ya he visto que eso es imposible $M^{-1} 4I M = 4I \ \forall M$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 8-a \end{bmatrix} \ / \ a(8-a) - bc = 16$$

Matrices semejantes tienen los mismos autovalores y mismo número de autovectores

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Autovalores? $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

(están en la diagonal)

Autovectores $N(A - \lambda I) = N(A) \to \dim N(A) = 2 \quad (4-r)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Autovalores? $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

(están en la diagonal)

Autovectores $N(A - \lambda I) = N(A) \to \dim N(A) = 2 \quad (4-r)$

Marie Ennemond Camille Jordan

Camille Jordan.

Información personal

Nombre en francés	Camille Jordan
Nacimiento	5 de enero de 1838 Lyon, Francia
Fallecimiento	22 de enero de 1922 (84 años) París, Francia
Nacionalidad	Francesa

2 autovectores y 2 faltan. Estas dos matrices son semejantes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Autovalores? $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

(están en la diagonal)

Autovectores $N(A - \lambda I) = N(A) \to \dim N(A) = 2 \quad (4-r)$

Pero esta no es semejante a las anteriores

Bloque de Jordan (cada bloque de Jordan tiene un autovector)

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & 0 & \\ & & \lambda_i & 1 & & \\ & 0 & & \lambda_i & 1 & \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

No son similares pq bloques no son del mismo tamaño.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Teorema de Jordan

Cada matriz cuadrada A es semejante a una matriz de Jordan J.

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

#bloques = #autovectores

Empezamos con una matriz A.

* Si todos los autovalores son distintos

$$\rightarrow S^{-1}AS = \Lambda \longrightarrow J = \Lambda$$

No es sencillo calcular la forma de Jordan, lo veremos en la próxima clase.