Autovalores y pol. característico

→ Pol. característico $P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I]$

→ Autovalores son las raíces de $P_A(\lambda)$

→ Multiplicidad aritmética de λ: # de veces que aparece repetido en $P_A(\lambda)$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$ Mult. aritm. 1

$\lambda_2 = 2$ Mult. aritm. 2

→ Multiplicidad geométrica de λ. # de autovectores distintos que le corresponden. O visto de otra forma, dimensión del espacio nulo $N(A - \lambda I)$.

→ Multiplicidad geom. es siempre menor o igual que la multiplicidad aritmética.

→ CASO BUENO.

Para cada autovalor, Mult. geom = Mult. alg. → diagonalizable

→ CASO MALO

Para algún autovalor, Mult. geom < Mult. alg. → no diag

↓

JORDAN

Vectores propios generalizados

v es autovector asociado a λ si $Av = \lambda v$, o lo que es lo mismo $v \in N[(A-\lambda I)]$

v es autovector generalizado asociado a λ si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(A-\lambda I)^r v = 0$, $v \in N[(A-\lambda I)^r]$

Los espacios generalizados cumplen que

$$N[(A-\lambda I)^r] \subseteq N[(A-\lambda I)^{r+1}]$$

Tiene sentido, si:

$$(A-\lambda I)^r v = 0 \rightarrow (A-\lambda I)(A-\lambda I)^r v = 0$$

Se llama cadena de vectores propios generalizados de tamaño s a un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ en la que cada vector $v_k \in N[(A-\lambda I)^k]$ y cumple $[A-\lambda I] v_k = v_{k-1}$ $\forall k = s, \dots, 2$

Nótese que por construcción, v_1 es vector propio asociado a $\lambda \longrightarrow [A-\lambda I] v_1 = 0$.

Construcción cadena generalizada de tamaño k

① Buscar un vector $v_k \in N[(A-\lambda I)^k]$ pero $v_k \notin N[(A-\lambda I)^{k-1}]$

② Obtenemos el resto multiplicando por $[A-\lambda I]$

$$v_{K-1} = [A-\lambda I]\ v_K$$

$$v_{K-2} = [A-\lambda I]\ v_{K-1} = [A-\lambda I]^2\ v_K$$

$$\vdots$$

$$v_r = [A-\lambda I]\ v_{r+1} = [A-\lambda I]^{K-r}\ v_K$$

$$\vdots$$

$$v_1 = [A-\lambda I]\ v_2 = [A-\lambda I]^{K-1}\ v_K$$

Con esta construcción $v_r \in N[(A-\lambda I)^r]\ \forall r = 1, \dots K-1$

$$(A-\lambda I)^r v_r = (A-\lambda I)^r (A-\lambda I)^{K-r} v_K = (A-\lambda I)^K v_K = 0$$

y este era justo el objetivo.

Propiedades

→ Todos los vectores de la cadena son independientes

→ Vectores de dos cadenas asociadas a autovalores distintos son independientes

→ Vectores de cadenas que comparten autovalor pero no autovector v_1, son independientes.

* Es posible encontrar una base de $\mathbb{R}^n$ formada por cadenas de autovectores de cualquier matriz A nxn *

Ejemplo → Encontrar forma de Jordan (J) y M. $J = M^{-1} A M$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$ $\lambda = 1$ Multiplicidad algebraica es 3.

Calculamos autovectores

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad r = 1 \qquad \dim N[A-I] = 2$$

Puedo encontrar dos vectores propios asociados a $\lambda = 1$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = S^{-1} A S$$

Falta un autovector para construir S. Vamos a ver como construir M.

M tendrá la siguiente forma

$$M = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & w \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

→ autovectores

→ autovectores generalizados

Orden de las columnas puede que cambie.

Son independientes → forman una base → M es invertible

El proceso para encontrar autovectores generalizados es el siguiente:

Busco vectores en $N[(A-\lambda I)^m]$, donde m es la multiplicidad algebraica del autovalor y que no estén en $N[(A-\lambda I)^{m-1}]$.

Si encuentro alguno (o varios) me lo/s quedo.

Si encuentro varios, una cadena por cada uno

Si no hago $m = m-1$, y continuo.

En nuestro caso, $(A-I)^2 = 0 \longrightarrow (A-I)^3 = 0$. De esta forma $N[(A-I)^3] = N[(A-I)^2] = \mathbb{R}^3$.

Como no encuentro ninguno, busco alguno que esté en $N[(A-I)^2] = \mathbb{R}^3$ pero no en $N[(A-I)]$

$N[(A-I)]$ ya lo hemos calculado

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pero no $\in (A-I)$.

Al vector $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ se le llama vector propio generalizado.

El siguiente paso es hacer $v_1 = (A-\lambda I)w$:

Con cada w que encontremos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

↳ Este paso, lo justificaremos al construir $MJ = AM$ *

Fijaos que v_1 es dependiente de x_1 y x_2, es decir, es autovector.

$$(A-\lambda I)\, v_1 = (A-\lambda I)(A-\lambda I)\, w = (A-\lambda I)^2 w = 0$$

Además v_1 es independiente de w

$$c_1 v_1 + c_2 w = 0 \longrightarrow c_1 (A-\lambda I)\, w + c_2 w = 0$$

$$\cancel{c_1 (A-\lambda I)^{2}} w + c_2 \underbrace{(A-\lambda I)\, w}_{\neq 0 \text{ (por construcción)}} = 0 \qquad (A-\lambda I)^2 \to 0$$

$\neq 0$ (por construcción) $\to c_2 = 0$

$\to c_1 = 0$

Ya tengo 2 de las 3 columnas de M. Para terminar busco un segundo autovector independiente de v_1.

Por ejemplo:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Repasando, v_1 y v_2 son autovectores $(\lambda = 1)$, luego

$$A v_1 = \cancel{\lambda}^{1} v_1 \quad \text{y} \quad A v_2 = \cancel{\lambda}^{1} v_2$$

*Obtenemos la forma de Jordan

El tercer vector cumple que:

$$v_1 = (A - \lambda I) w \longrightarrow A w = \cancel{\lambda}^{1} w + v_1$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J}$$

Y M es invertible ya que v_1, v_2 y w son linealmente independientes. (Comprobad vosotros que funciona...)

Teorema de Jordan ← Recordatorio.

Cada matriz cuadrada A es semejante a una matriz de Jordan J.

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

#bloques = #autovectores

Luego siempre podré encontrar M con esta construcción.

- ¿Qué cadenas de vectores propios son posibles en un bloque de la matriz de Jordan?

  Vamos aumentando la dimensión de la multiplicidad algebraica del autovalor λ_i para ver las posible dimensiones de los subespacios propios.

1. $m_i = 2$ Buscamos dos vectores

   La única combinación posible es:

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I))$ =1

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2) = 2 = m_i$

   $$\begin{matrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{matrix}$$

2. $m_i = 3$ Buscamos tres vectores

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I))$ =1

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2) = 2$

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^3) = 3 = m_i$

   $$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{matrix}$$

   Caso 1 (1 autovector)

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)) = 2$

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2) = 3 = m_i$

   $$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & \\ & & \lambda_i \end{matrix}$$

   Caso 2 (2 autovectores)

   En esta combinación hay 2 autovectores (1ª y 3ª columnas) $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)) = 2$ y en $\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2$ completamos el tercer vector propio generalizado de la cadena de $\boldsymbol{v}_1$

3. $m_i = 4$ Buscamos cuatro vectores

   CASO1

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I))$ =1

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2) = 2$

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^3) = 3$

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^4) = 4 = m_i$

   $$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{matrix}$$

   Una cadena de 1 autovector y 3 vectores propios generalizados

   CASO2

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I))$ =2

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2) = 3$

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^3) = 4 = m_i$

   $$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \lambda_i \end{matrix}$$

   Una cadena de 1 autovector y 2 vectores propios generalizados + 1 autovector

   CASO3

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I))$ =2

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2) = 4 = m_i$

   $$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{matrix}$$

   Dos cadenas, cada una con 1 autovector y 1 vector propio generalizados

   CASO4

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I))$ =3

   $dim(\mathcal{N}(A-\lambda_i I)^2) = 4 = m_i$

   $$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \lambda_i \end{matrix}$$

   Una cadena de 1 autovector y 1 vector propios generalizado + 2 autovectores

Ejemplo. Cálculo de la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.- Calculamos autovalores

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

0

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)^3 = (2-\lambda)^4$$

$\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 4

2.- Calculamos autovectores $N(A-\lambda I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2 \rightarrow \dim N(A-\lambda I) = 2$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.- Busco autovectores generalizados

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda I)^4 = 0 \quad \ldots$

$N(A-\lambda I)^4 = \mathbb{R}^4 \; ; \quad N(A-\lambda I)^3 = \mathbb{R}^4 \; ; \quad N(A-\lambda I)^2 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Busco w en $N(A-\lambda I)^3$ pero no en $N(A-\lambda I)^2$

$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ autovector generalizado.

$$v_1 = (A - \lambda I)\, w =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

autovector generalizado

$$v_2 = (A - \lambda I)\, v_1 = (A - \lambda I)^2\, w =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este es autovector

$$(A - \lambda I)\, v_2 = \underbrace{(A - \lambda I)^3\, w}_{\text{Def. de } w} = 0$$

Las columnas de M serán

$$\begin{matrix} | & | & | & | \\ w & v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | & | \end{matrix}$$

autovector independiente de v_2. Eg $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

4.- Revisamos ecuaciones y ponemos en forma matricial.

$$A v_2 = \lambda v_2 \qquad A w = \lambda w + v_1$$

$$A v_3 = \lambda v_3 \qquad A v_1 = \lambda v_1 + v_2$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ V_2 & V_1 & W & V_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ V_2 & V_1 & W & V_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}\underset{M}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{M}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}\underset{J}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego $AM = MJ \rightarrow A = MJM^{-1} \rightarrow$ A es semejante a J.

1

Ejercicios: ~~Hallar exp(At) para~~ $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ CALCULAR FORMA DE JORDAN

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$ con multiplicidad 2, $m = 2$

$\mathcal{N}(A-2I) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow dim(\mathcal{N}^1) = 1 < 2$ Tenemos que ir al siguiente subespacio

$\mathcal{N}(A-2I)^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{N}^2 \equiv \mathbb{R}^2$ Busco un vector en $\mathcal{N}^2$ que no esté en $\mathcal{N}^1$

Por ejemplo: $\boldsymbol{v}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y por tanto $\boldsymbol{v}_1^1 = (A-2I)\,\boldsymbol{v}_2^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Base de Jordan asociada a la matriz $B_J = \{\boldsymbol{v}_1^1, \boldsymbol{v}_2^1\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ con $\boldsymbol{v}_2^1 \in \mathcal{N}^2, \boldsymbol{v}_1^1 \in \mathcal{N}^1$

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

2

~~Ejercicios: Hallar exp(At) para~~ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ CALCULAR LA FORMA DE JORDAN

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \text{ multiplicidad } m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \text{ multiplicidad } m_2 = 2 \end{array}$$

- $\lambda_1 = 1$

  $\mathcal{N}(A-I) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow dim(\mathcal{N}^1) = 1 = m_1$ He terminado con este autovalor

- $\lambda_2 = -1$

  $\mathcal{N}(A+I) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow dim(\mathcal{N}^1) = 1 < m_2 = 2$ Sigo al siguiente subespacio

  $\mathcal{N}(A+I)^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{N}^2 \equiv \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, dim(\mathcal{N}^2) = 2 = m_2$

  Busco un vector en $\mathcal{N}^2$ que no esté en $\mathcal{N}^1$

  Por ejemplo: $\boldsymbol{w}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y por tanto $\boldsymbol{w}_1^1 = (A+I)\,\boldsymbol{w}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ya tengo base de Jordan $B_J = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1^1, \boldsymbol{w}_2^1\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejercicio

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -2 & -9 & 6 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

Pol carac. $(\lambda+3)^2(\lambda+1)$

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = -3$ será problemático si su multiplicidad geométrica es menor que la algebraica

$$N(A+3I) \to \quad A+3I = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $N(A+3I)$ solo tiene un elemento $v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Necesitaré un autovector generalizado / $w \in N(A+3I)^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 & -16 \\ -8 & -20 & 16 \\ -8 & -20 & 16 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece a $N(A+3I)^2$ y además puede comprobarse que no pertenece a $N(A+3I)$

Solo falta calcular $v_2 \in N(A+I)$ (autovector de $\lambda_2 = 1$)

$$A+I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & -8 & 5 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Revisando, veo que tengo 3 ecuaciones

$$A v_1 = -3 v_1$$
$$A w = v_1 - 3 w \rightarrow (A + 3I) w = v_1$$
$$A v_2 = - v_2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J}$$

Hagamos la comprobación $A\cancel{P}H = \cancel{P}HJ$. Por un lado,

$$\cancel{P}HJ = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3-6 & 1 \\ -6 & 2+0 & -1 \\ -3 & 1-3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A\cancel{P}H &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -2 & -9 & 6 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+8-5 & -4+0-5 & 2+4-5 \\ 6-18+6 & -4+0+6 & 2-9+6 \\ 9-16+4 & -6+0+4 & 3-8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \end{aligned}$$