# FACTORIZACIÓN MATRICIAL. LU II (18.06 Lecture 05)

$PA = LU$

Vector spaces and subspaces

En la clase anterior vimos la descomposición $A = LU$. Esta descripción solo es correcta si hacemos la eliminacion sin intercambiar filas.

¿Cómo hago si tengo intercambio de filas?

Recordatorio:

- A mano: tengo que hacer intercambio de filas si algún pivote es 0.
- Ordenador: siempre hago intercambio de filas para garantizar trabajar con el mayor pivote y minimizar los errores numéricos.

La descripción de eliminación con intercambio de filas es:

$$PA = LU$$

Donde P es la matriz que realiza el intercambio de filas.

Permutations P: execute row exchanges

P es la matriz identidad con las filas reordenadas

¿Cuantas posibilidades?

$$n! = n(n-1)\dots(3)(2)(1)$$

Esto sirve para contar las distintas maneras de ordenar las filas $\longrightarrow$ cuenta todas las permutaciones $n \times n$

Propiedades:

$\rightarrow$ Son invertibles ($P^{-1}$ deshace el intercambio de filas) y su inversa es $P^{-1} = P^T \longrightarrow P^T P = I$

Las matrices que cumplen esta prop. son interesantes.

Traspuestas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasponer es cambiar los papeles de filas y columnas

En simbolos $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Matrices simétricas $A^T = A$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Hay un truco para obtener matrices simétricas de matrices que no lo son.

Tomemos este ejemplo:

$$R^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^T R$ siempre será simétrica (no solo para este ejemplo)

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 11 & - & - \\ 7 & - & - \end{bmatrix}$$

Funciona pq las operaciones son simétricas

Comprobamos ahora la condición de simetría $A^T = A$

$$(R^T R)^T = R^T (R^T)^T = R^T R$$

⇨ Esta es la prueba (y el pq las matrices simétricas aparecen en muchas aplicaciones)

# ESPACIOS VECTORIALES

¿Qué hacemos con los vectores?

→ Sumas

→ Multiplicación por un escalar

Si queremos un espacio vectorial, necesito unas reglas decentes

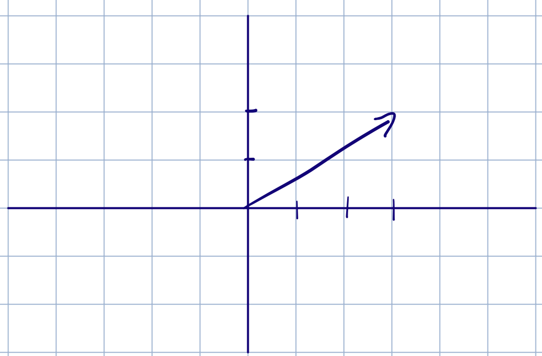
## Ejemplos.

$\mathbb{R}^2$ = todos los vectores reales de dim. 2 (xy plane)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix}, \dots$$

¿Los puedo sumar? Sí (y obtengo elementos del espacio)

Representación gráfica



Si quito solo un elemento eg. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ya no es un espacio vectorial. ¿Pq?

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Me salgo del espacio}$$

$\mathbb{R}^3$ = todos los vectores con tres componentes reales

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ aunque esto sea 0, pertenece a $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n$ = todos los vectores con n componentes

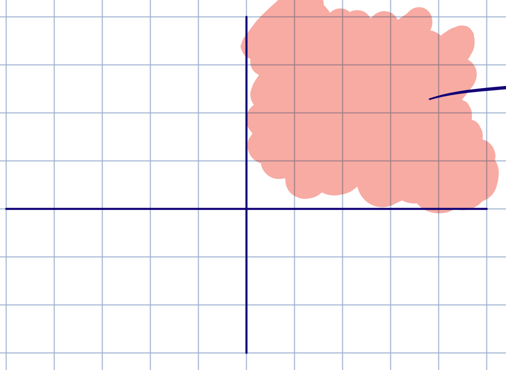
Reglas.

Hay 8 reglas que tienen que cumplir los espacios (suma, resta, producto por escalar etc) que tienen que cumplir los espacios vectoriales (se pueden consultar en el libro Strang), pero esas no suelen ser un problema.

El problema usual es que al combinar elementos me salga del espacio

Ejemplo:

Not a vector space.

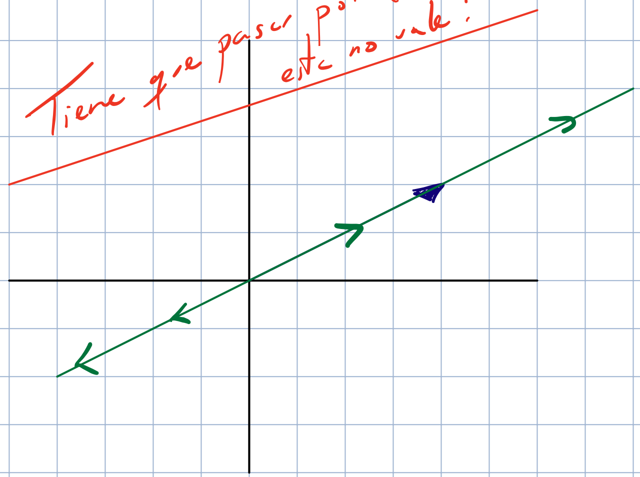


¼ vector space

Puedo sumar pero problemas si multiplico por negativos

(No cerrado ante multiplicación por escalar)

¿Qué sí sería un <u>sub</u>espacio dentro de $\mathbb{R}^2$?




Si sumo o multiplico por escalar, me mantengo en la línea
incluso 0

## Subespacios de $\mathbb{R}^2$

1. Todo $\mathbb{R}^2$
2. Cualquier línea que pase por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
3. Solo el vector cero $Z$
   - → lo puedo sumar por el mismo y sigo allí
   - → lo puedo mult. por cualquier número y sigo allí

## Subespacios en $\mathbb{R}^3$

$Z$, línea (atraviesa origen), plano (atraviesa origen), $\mathbb{R}^3$

Podemos crear subespacios de matrices

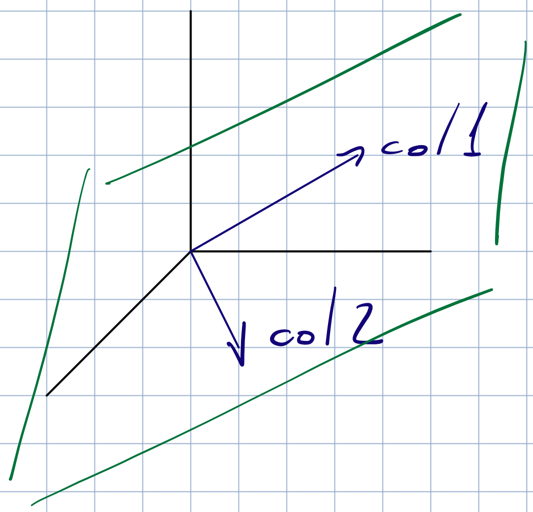
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Columnas en $\mathbb{R}^3$ ¿Qué subespacio generan las columnas de esta matriz? No vale poner solo los dos vectores sueltos.

Todas las comb. lineales de las dos columnas sí generan un subespacio.

Le llamaremos espacio columna $C(A)$.

Geométricamente




Si hago todas las combinaciones genero un plano que pasa por el origen (subespacio de $\mathbb{R}^3$)