

22. SUPERFICIES. INTEGRALES DE SUPERFICIE I

A. Superficies

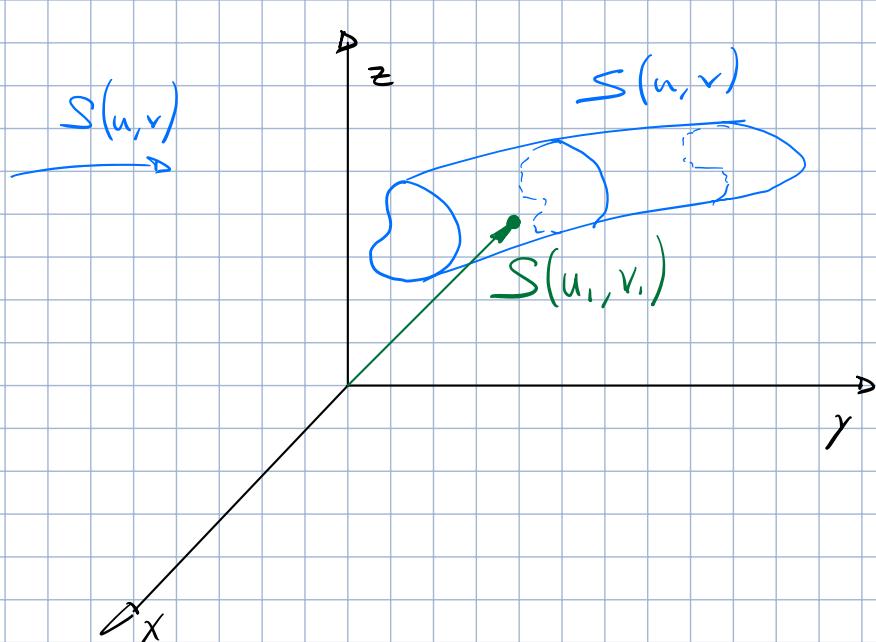
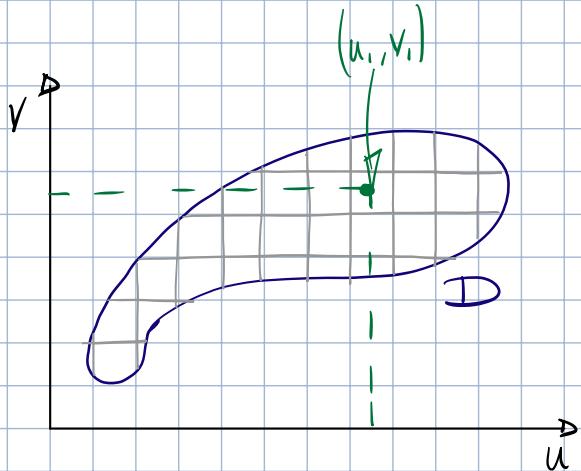
Son conjuntos de \mathbb{R}^3 que genera un punto al moverse con dos grados de libertad (Tipicamente llamadas u, v)

1 Expresión paramétrica

Se define $S \subset \mathbb{R}^3$ como el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 definidos a partir de la función continua

$$S: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



2 Expresión explícita

Cuando la superficie S puede expresarse como

$$\begin{cases} z = g(x, y) \\ y = g(x, z) \\ x = g(y, z) \end{cases}$$

Puede verse como un caso particular de expresión paramétrica donde dos de las variables actúan como parámetros.

Ejemplo: $S(u, v) = (u, v, g(u, v))$

3 Expresión implícita

Cuando expresamos la superficie como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = 0\}$$

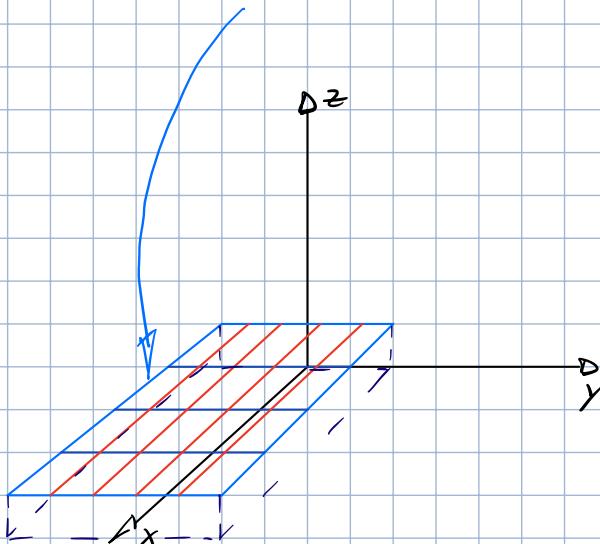
Ejemplo: esfera $\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$

EJEMPLOS (se recomienda hacer representación gráfica usando herramientas como Geogebra)

① $S: D = [0, 5] \times [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u, v) \longrightarrow S(u, v) = (u, v, 1)$

Esto es:

$$\begin{array}{l|l} x \in [0, 5] & \text{Plano de tangencia} \\ y \in [-2, 2] & \text{finito paralelo} \\ z = 1 & \text{a } xy \end{array}$$



(2) $S: D = [0, 1] \times [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \longrightarrow S(u, v) = (1+u, u-v, 2-u+3v)$$

Como todas las relaciones
son lineales, esto define un
plano.

Podemos reescribir esta relación de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \bar{p}_0 + u\bar{v}_1 + v\bar{v}_2$$

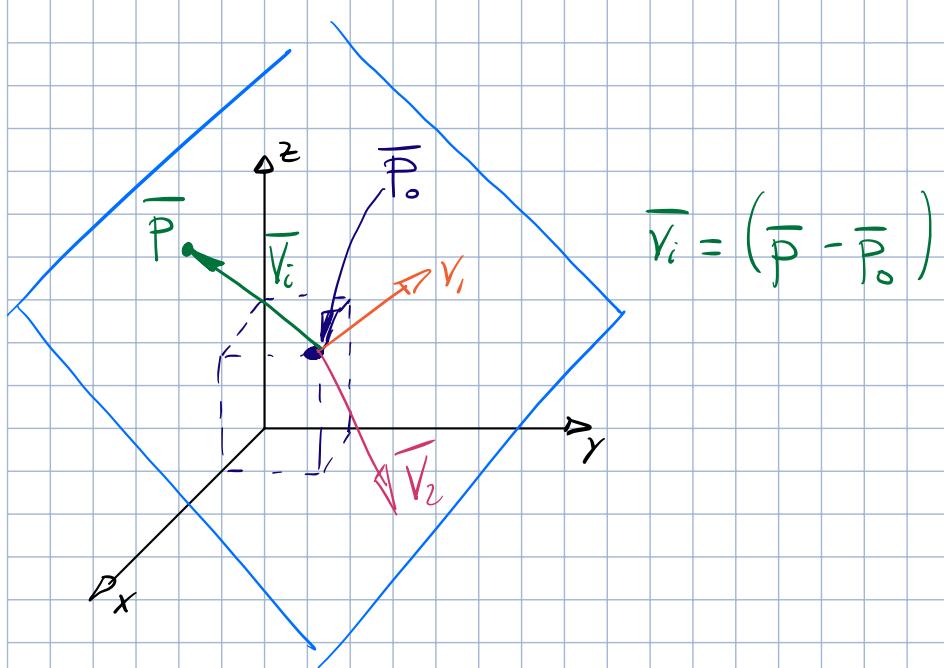
Punto, \bar{p}_0 Vector 1, \bar{v}_1 Vector 2, \bar{v}_2

Una opción para obtener una representación implícita a partir de esta es igualar a 0 el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Esto es } F(x, y, z) = 0$$

El exigir que este determinante sea cero es equivalente a pedir que \bar{v}_i sea coplano con \bar{v}_1 y \bar{v}_2 .

Es decir, los pts $\bar{p} = (x, y, z)$ que forman la superficie son aquellos tales que el vector $\bar{v}_i = (\bar{p} - \bar{p}_0)$ es coplano con \bar{v}_1 y \bar{v}_2 .



$$\bar{V}_i = (\bar{P} - \bar{P}_0)$$

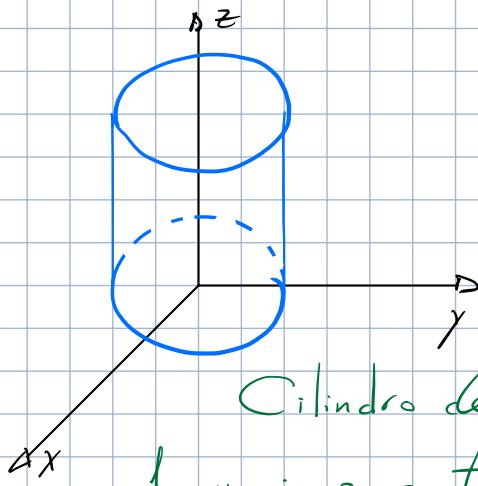
③ $S: [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \longrightarrow S(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Esto es lo mismo que decir

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$z \geq 0$$



Cilindro de radio
1 y eje z centrado en
el eje z

④ $S: [0, 2\pi] \times [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\theta, z) \longrightarrow S(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$$

Radio variable con alt., z

$$x^2 + y^2 = z^2 \longrightarrow z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow \text{cono}$$

⑤

$$S: [0, 2\pi] \times [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, z) \longrightarrow S(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z^2)$$

Radio variable con altura

$$x^2 + y^2 = z \rightarrow \text{paraboloide el\'iptico}$$

El paraboloide genera circunferencias cuyos radios varian cuadráticamente con la altura, mientras que el cono genera circunferencias que varian linealmente con la altura.

⑥

$$\text{Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

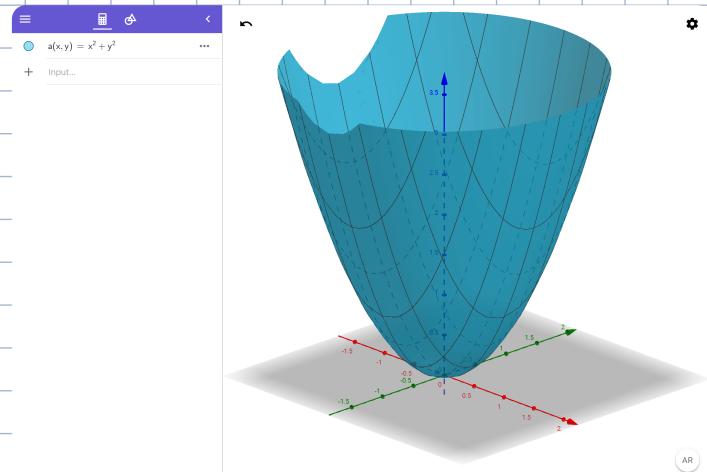
Definimos S como gráfica de $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in [-1, 1]^2$

¿Cómo podemos encontrar la expresión paramétrica?

Vimos antes que una expresión paramétrica era

$$S(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \text{ sin embargo, es complicado representar}$$

aquí $D = (x, y) \in [-1, 1]^2$



En este caso, queda mucho más sencillo hacer una parametrización de la forma explícita, esto es:

$$S: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longrightarrow S(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Comentario:

Si S es la gráfica de una función ($S \equiv$ gráfica de $f(x, y)$, $S \equiv$ gráfica de $f(x, z)$ o $S \equiv$ gráfica de $f(y, z)$), la parametrización explícita es muy conocida.

Sin embargo, no todas las superficies se pueden parametrizar de forma explícita. Por ejemplo, la esfera ha tengo q.e describir por mitades

$$S \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad | \quad \begin{aligned} z_1 &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z_2 &= -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Moraleja: no todas las curvas / superficies son funciones.

4 Parametrización regular // Pto ordinario, singular. Sup. simple

Se dice que una superficie es regular si admite parametrización regular

Una parametrización es regular si cumple:

1 $S \in C^1$, es decir, $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in C^1$

2 $S_u' \times S_v' \neq 0$ (existe el plano tangente)

Equivalente a $\nabla F \neq 0$ con parametrización implícita

Veremos más adelante que S_u y S_v son vectores tangentes a la superficie, y su producto vectorial deriva la normal al plano tangente.

Punto ordinario: un punto $\bar{p} = (x, y, z)$ se dice ordinario si la superficie se puede representar localmente en \bar{p} de forma explícita de clase C^1

Euros de \bar{p} } \rightarrow Superficie admite param. regular } \rightarrow Pto ordinario
 \rightarrow + No autointersecciones

Punto singular: no ordinario (autointersecciones o plano tang. no def.)

Superficie simple: todos sus pts son ordinarios.

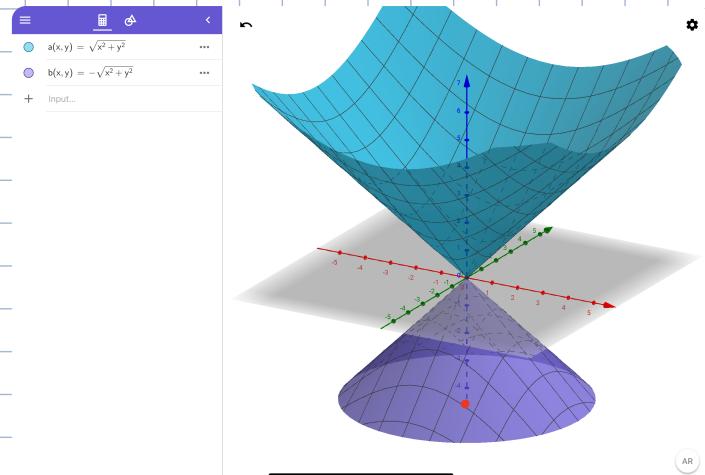
ESEMPIO

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \right\} \text{ ¿Es regular?}$$

$$F \in C^\infty \checkmark \quad y \quad \nabla F = (2x, 2y, -2z) \rightarrow \nabla F(0,0,0) = 0 \quad X$$

En $(0,0,0)$ no está definido el plano tangente de modo que no voy a poder encontrar una parametrización regular.

Voy a probar con un par de parametrizaciones introducidas previamente.



Parametrización $S = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$

① $S \in C^\infty$ en $(u=0, v=0)$ \times

$$\begin{aligned} ② S'_u &= (1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}) & S'_u \times S'_v &= \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right) \\ S'_v &= (0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}) & \times & \text{No definido en } (0, 0) \end{aligned}$$

Parametrización $S = (u \cos v, u \sin v, u)$

① $S \in C^\infty$ en $(0, 0)$ \checkmark

$$\begin{aligned} ② S'_u &= (\cos v, \sin v, 1) & S'_u \times S'_v &= (-u \cos v, -u \sin v, u) \\ S'_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0) & (u=0, v=0) \rightarrow S'_u \times S'_v &= (0, 0, 0) \times \end{aligned}$$

Nota: esfera es una s -superficie simple y regular, pero la parametrización nos puede engañar. Hay pts que parecen conflictivos y no lo son.

5 Cambios de parámetro

Sea $S = S_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y sea $\phi: D_2 \rightarrow D_1$
 $(u, v) \rightarrow S_1(u, v)$ $(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow (u, v) = \phi(\tilde{u}, \tilde{v})$

una función continua, biyectiva y con inversa continua, si

$S_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $S_2 = (S_1 \circ \phi) = S_1(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) =$
 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow S_2(\tilde{u}, \tilde{v})$ $= S_1(u, v)$

entonces S_2 es una parametrización de S .

ESEMPIO

$$S_1 = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

$$S_2 = (\tilde{u} \cos \tilde{v}, \tilde{u} \sin \tilde{v}, \tilde{u}) \quad \tilde{u} > 0$$

Ambas representan la misma

superficie

Vamos a buscar $\phi: D_2 \rightarrow D_1$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow (u, v) = \phi(u, v)$$

que relaciona ambas

$$\phi: D_2 \rightarrow D_1$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow (u, v) = (\tilde{u} \cos \tilde{v}, \tilde{u} \sin \tilde{v})$$

La transformación inversa $\phi^{-1}: D_1 \rightarrow D_2$ querría:

$$(u, v) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$$

$$* \tilde{u} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \tilde{u} \cos \tilde{v} \\ v = \tilde{u} \sin \tilde{v} \end{array} \right\} \rightarrow u^2 + v^2 = \tilde{u}^2$$

$$* \tilde{v} = \arccos \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

El cambio de parámetro es admisible o regular

Si:

$$\textcircled{1} \quad \phi = (\phi_1, \phi_2) \in C^1(D_2)$$

$$\phi: D_2 \rightarrow D_1$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow (u, v) = \phi(u, v)$$

$\textcircled{2}$ Su matriz jacobiana es no singular en el interior de D_2 (\mathring{D}_2)

$$\left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| \neq 0 \quad \forall u, v \in \mathring{D}_2$$

6 Curvas coordenadas

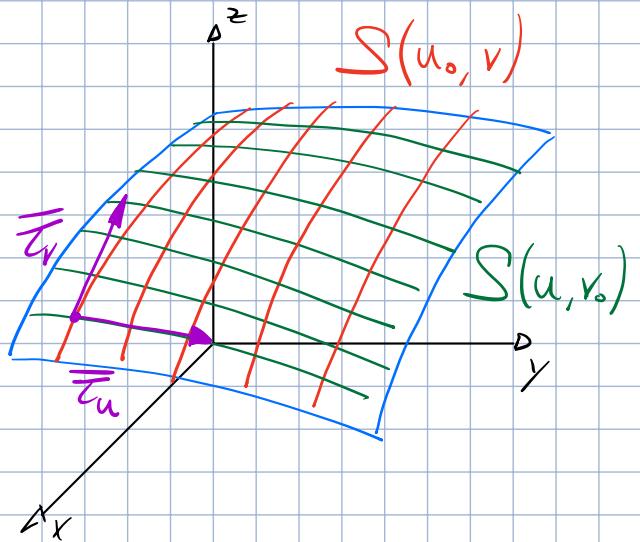
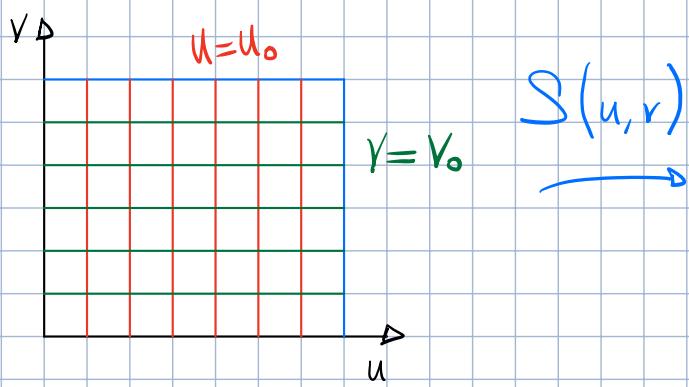
Sea la superficie $S: D \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u, v) \mapsto S(u, v) = (x, y, z)$

A las curvas de S que se obtienen como resultado de congelar un parámetro y dejar el otro libre, es decir,

$$I_1 = S(u_0, v)$$

$$I_2 = S(u, v_0)$$

Se las denomina curvas coordenadas.



Cada una de estas curvas funciona como las curvas del capítulo anterior. Podemos definir un vector tangente

$$\bar{e}_u = \frac{dS(u, v_0)}{du} = S'_u(u, v_0) ; \bar{e}_v = \frac{dS(u_0, v)}{dv} = S'_v(u_0, v)$$

A través de ellos, podemos obtener un vector normal a la superficie $\vec{n} = S'_u \times S'_v$ y la ecuación del plano tangente:

$$\pi \equiv \bar{x} = S(u_0, v_0) + u S'_u(u_0, v_0) + v S'_v(u_0, v_0)$$

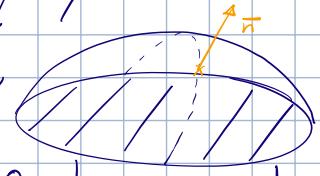
$$\pi = \vec{n} \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

$$S'_u(u_0, v_0) \times S'_v(u_0, v_0) \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

7 Orientación de una superficie

Se llama orientación de una superficie a la función continua que en cada punto de la superficie devuelve el vector normal a la misma. Si dicha función existe, decimos que la superficie es orientable.

Una superficie cerrada tiene orientación positiva cuando su normal tiene sentido exterior (apunta hacia afuera). Una superficie orientable admite dos orientaciones \oplus y \ominus . Intuitivamente, son las "caras" de la superficie.



Orientación positiva

8 Plano tangente

*Superficies no orientables.
"Banda de Möbius"

Veamos la expresión del plano tangente para superficies en forma paramétrica, explícita e implícita.

① Forma paramétrica $(S'_u \times S'_v \neq 0) \rightarrow$ existe plano tg

$$\pi \equiv \bar{x} = S(u_0, v_0) + u S'_u(u_0, v_0) + v S'_v(u_0, v_0)$$

$$\pi = \vec{n} \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

$$S'_u(u_0, v_0) \times S'_v(u_0, v_0) \cdot (\bar{x} - S(u_0, v_0)) = 0$$

② Forma explícita siempre tiene plano tangente si es C^1 (es decir, si admite polinomio de Taylor)

$$z = f(x, y) \rightarrow [S(x, y), S(x_0, y_0) \text{ son las curvas coordenadas}]$$

$$\pi \equiv z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se deja como tarea encontrar las expresiones para
 $x = f(y, z)$ o $y = f(x, z)$

③ Forma implícita tiene plano tangente si $F \in C^1$ y $\nabla F \neq \vec{0}$. Esto es equivalente a decir que admite representación local explícita (TFI) $F(x, y, z) = 0 \xrightarrow{\text{TFI}} z = g(x, y)$

Supongamos que $F'_z \neq 0$, el resto se hace igual.

Como $\nabla F \neq \vec{0}$, al menos uno de F'_x, F'_y, F'_z serán $\neq 0$.

$$F'_z \neq 0 \rightarrow S(x, y, f(x, y)), S'_x = \left(1, 0, -\frac{F_x}{F_z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow S'_y = \left(0, 1, -\frac{F_y}{F_z}\right)$$

De modo que

$$S'_x \times S'_y = \frac{1}{F'_z} (F'_x, F'_y, F'_z)$$

Así que

$$\pi \equiv \nabla F \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

ESEMPIO

Calcular plano tangente en cada punto de la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$F(x, y, z) = 0 \rightarrow \bar{n} = \nabla F = (2x, 2y, 2z) \propto (x, y, z)$$

$$\text{PT en } (x_0, y_0, z_0) \quad \pi \equiv ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot \bar{n} = 0$$

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 0$$

Usando coord. esféricas.

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$$

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix}$$

De modo que

$$\bar{n} = S_u^T \times S_v^T = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin u \sin v & \cos u \sin v & 0 \\ \cos u \cos v & \sin u \cos v & -\sin v \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos u \sin^2 v \\ -\sin u \sin^2 v \\ -\sin v \cos v \end{bmatrix}$$

$$= -\sin v \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix} = -\sin v \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mismo resultado salvo $v=0$, donde no está definido. Problema de parametrización, no superficie

EJERCICIOS

1)

Sea la superficie definida por $\bar{S}(u,v) = (u+v^3, u^3+v, u^2+v^2)$

a) Determinar sus puntos singulares, si los tiene.

b) Comprobar que $(2,2,2)$ es un pto ordinario. Calcular el plano tangente y el vector normal en ese punto.

Pto ordinario: admite representación explícita local de clase C^1 .

No singular. // Admite paráms regulares $\left\{ \begin{matrix} C^1 \\ N \neq 0 \end{matrix} \right\}$ + no auto-intersección.

Pto singular: No ordinario. Problemas posibles:

① \nexists Plano tangente / vector normal

② Representación explícita local no es C^1

③ Pto de auto-intersección de la superficie.

①

Buscamos pts donde el vector normal no esté definido.

$$\bar{N} = \bar{S}_u \wedge \bar{S}_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3u^2 & 2u \\ 3v^2 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (6u^2v - 2u, 6uv^2 - 2v, 1 - 9u^2v^2)$$

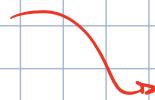
$$= (2u(3uv - 1), 2v(3uv - 1), 1 - (3uv)^2)$$

La normal no está definida para $\bar{N} = \bar{0}$

$$(1) 2u(3uv - 1) = 0$$

$$(2) 2v(3uv - 1) = 0$$

$$(3) 1 - (3uv)^2 = 0$$



$$\left\{ \begin{array}{l} u=0 \quad \text{Sol I} \\ 3uv=1 \quad \text{Sol II} \end{array} \right.$$

Sustituyendo I en (2) obtengo:

$$2v(-1) = 0 \rightarrow v=0 \quad (3) \quad 1-0=0 \rightarrow 16 \text{ es sol.}$$

Sustituyendo II en (2) obtengo:

$$2v(0) = 0 \rightarrow \text{Se cumple } \forall v \quad (3) \quad 1-1\cdot 0 \rightarrow \text{Se cumple siempre}$$

De modo que si $uv=1/3$ no hay vector normal/plano tan.

(2)

La representación paramétrica es C^∞ en todos los puntos

(3) Superficie tiene autointersecciones.

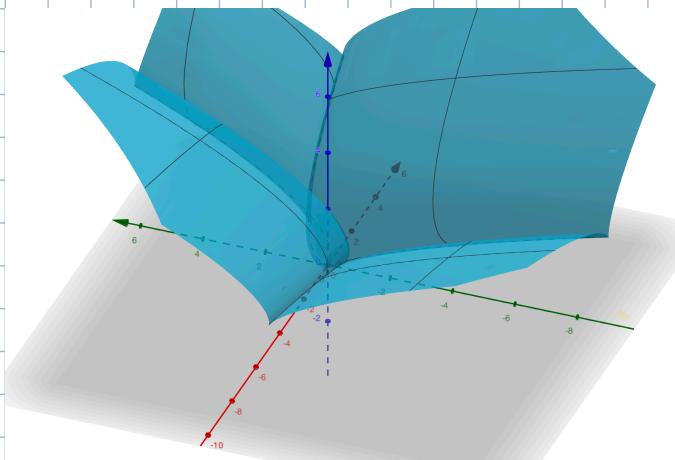
Por ej:

$$x = u+v^3 \quad (1, 0) = (1, 1, 1)$$

$$y = u^3 + v \quad (0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$z = u^2 + v^2$$

↳ Distintos valores de (u, v) nos llevan al mismo (x, y, z) .



$\bar{S}(u, v)$ [Geogebra]

Este condición es difícil de comprobar, no la analizaremos.

b) Comprobar que $(2, 2, 2)$ es un pto ordinario. Calcular el plano tangente y el vector normal en ese punto.

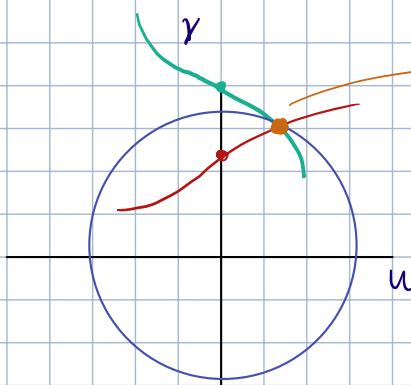
$$\begin{array}{l|l} 2 = u + v^3 & \text{Única solución de este sistema es } u=1, v=1 \\ 2 = u^3 + v & (u_0, v_0) = (1, 1) \rightarrow 16 \text{ es pto de autointersección.} \\ 2 = u^2 + v^2 & \end{array}$$

Justificación solución única

$$v = \sqrt[3]{2-u}$$

$$v = 2 - u^3$$

$$2 = u^2 + v^2$$



Único pto que pertenece a las tres curvas a la vez.

Además, del apartado \ominus sabemos que el vector normal está definido.

$$\bar{N} = \left(2u(3uv - 1), 2v(3uv - 1), 1 - (3uv)^2 \right) \Big|_{(1,1)} = \\ = (2(2), 2(2), 1 - 3^2) = (4, 4, -8) \parallel (1, 1, -2)$$

Plano normal: $\bar{N} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$

$$(1, 1, -2) \cdot ((x, y, z) - (2, 2, 2)) = 0$$

$$x - 2 + y - 2 - 2(z - 2) = 0 \rightarrow x + y - 2z = 0$$

② 22.3 ↴ Analizar si es regular y/o simple la superficie $\bar{x} = (u^2 - 1, u^3 - u, v)$

Superficie regular: admite parametrización regular

① Parametrización de clase C^1

② Existe vector normal $\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v \neq 0$

{ No se dice nada de autointersecciones

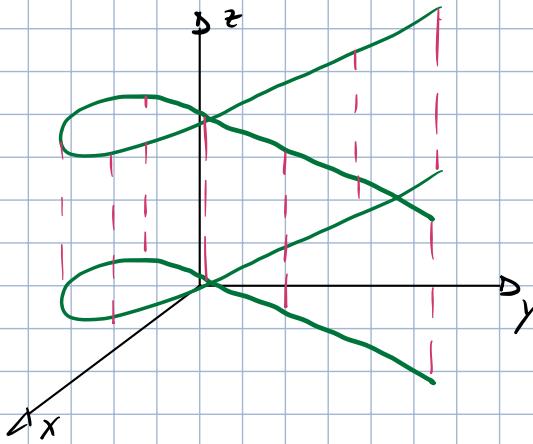
Superficie simple: admite representación explícita local en todos sus pts ~ Satisfac condic de TF implícita

No p-debe tener autointersecciones. (Regular + no autointersección)

S. Regular

$$\bar{x}(u, v) = \underbrace{(u^2 - 1, u(u^2 - 1), v)}_{\substack{\text{Curva plana en} \\ \text{plano } xy}} \quad \underbrace{\text{Traslació-} \\ \text{en } z}_{\substack{\text{Traslació-} \\ \text{en } z}}$$

} Superficie de
traslación



Veremos que en los pts $(0, 0, z)$ tendremos problemas.

① Parametrización C^1 ✓

② Vector normal definido en todo pto.

$$\bar{N} \parallel \bar{x}'_u \wedge \bar{x}'_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 3u^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3u^2 - 1, -2u, 0)$$

Curva plana
trasladada

Vemos que $\bar{N} \neq \bar{0} \ \forall u \rightarrow$ Superficie regular

S. Simple

Buscamos autointersecciones. Para ello:

① Buscamos representación implícita

② Aplicamos TFI. Buscamos candidatos a pts problemáticos

③ Comprobamos si se produce autointersección.

$$\begin{aligned} ① \quad x &= u^2 - 1 \\ y &= u(u^2 - 1) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{y} = ux \rightarrow y^2 = u^2 x^2 \rightarrow y^2 = (x+1)x^2 \rightarrow x^3 + x^2 = y^2 \end{array} \right\}$$

Podemos comprobar que la expresión función

$$\begin{aligned}x^3 &= (u^2 - 1)^3 & x^3 + x^2 &= (u^2 - 1) \left[(u^2 - 1)^2 + (u^2 - 1) \right] = \\x^2 &= (u^2 - 1)^2 & &= (u^2 - 1) [u^4 - 1 - 2u^2 + u^2 - 1] = \\y^2 &= u^2(u^2 - 1)^2 & &= (u^2 - 1) [u^4 - u^2] = u^2(u^2 - 1)^2 = y^2\end{aligned}$$

Representación implícita: $F(x, y) = x^3 + x^2 - y^2 = 0$

TF implícita asegura que existe rep. explícita en (x_0, y_0) si:

$$* F \in C^K \quad K \geq 1$$

$$* F(x_0, y_0) = 0$$

$$* \nabla F(x_0, y_0) \neq \vec{0} \rightarrow \nabla F = (3x^2 + 2x, -2y)$$

$$\nabla F = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0 \quad ; \quad x = -2/3 \\ -2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

(I) $(x, y) = (0, 0)$. Candidato 1. Pruebo si es de auto-inter.

$$F(0, 0) = 0 \checkmark \quad (0, 0) = (u^2 - 1, u^3 - u^2) \rightarrow u = \pm 1$$

Este pto se alcanza dos veces al recorrer la curva. La superficie no es simple.

(II) $(x, y) = (-2/3, 0)$. Candidato 2.

$$F(-2/3, 0) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 0^2 \neq 0 \rightarrow \text{No es pto de la curva}$$