(18.06 Lecture 25)

Symmetric matrices

Eigenvalues / Eigenvectors

Start: Positive definite matrices

Definición matriz simétrica: $A = A^T$

① Los autovalores son reales

② Los autovectores son ortogonales

Pueden ser elegidos (caso de autovalores repetidos)

Ejemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1$ y todo $\mathbb{R}^3$ es autovector de forma que autovectores pueden ser elegidos como ortogonales

---

Caso estándar $A = S \Lambda S^{-1}$

Caso simétrico $A = Q \Lambda Q^{-1} = \underline{Q \Lambda Q^T}$

esta factorización es simétrica $(Q\Lambda Q^T)^T = Q\Lambda Q^T$

Factorización de una matriz simétrica

Autovectores que puedo hacer ortonormales (Columnas de Q)

A esto se le llama teorema espectral

A spectral theorem is a result about when a linear operator or matrix can be diagonalized (that is, represented as a diagonal matrix in some basis).

Todas las matrices simétricas son diagonalizables

¿Pq autovalores reales?

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

No asumo nada, de forma que tanto x como λ pueden tener parte real e imaginaria.

Notación: $\bar{\lambda}$ es complejo conjugado de λ
Luego si $\lambda = 1 + 3i \rightarrow \bar{\lambda} = 1 - 3i$

Esto siempre se puede hacer $\bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$. Como A es real, entonces

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

Esto quiere decir que si una matriz real A tiene como autovalor/autovector λ, x, tb tiene como autovalor/autovector $\bar{\lambda}, \bar{x}$. Si complejos, son complejos conjugados. Si traspongo

$$\bar{x}^T A^T = \bar{x}^T \bar{\lambda}$$

Ahora si la matriz es simétrica $A = A^T$

$$\bar{x}^T A = \bar{x}^T \bar{\lambda} \qquad (2)$$

Ahora multiplico (1) por $\bar{x}^T$ por la izq. y (2) por $\bar{x}$ por la dch

<u>Opciones</u>

$$\bar{x}^T A x = \lambda\, \bar{x}^T x$$
$$\bar{x}^T A x = \bar{\lambda}\, \bar{x}^T x$$

$*_1$ $\lambda = \bar{\lambda} \rightarrow$ <u>λ real</u>

$*_2$ $\bar{x}^T x = 0$

¿Puede esto ser 0?

$$\bar{x}^T x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots =$$

$(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$

La parte imaginaria se va

suma de nºs positivos (salvo si x es el vector 0, que no me interesa) luego $\bar{x}^T x > 0$ y $*_2$ no es una opción.

Esto es la generalización del prod. escalar, medida del vector etc para complejos

$\bar{x}^T x \rightarrow$ (longitud del vector incluso si es complejo)

Matrices "buenas"

Def. de "buena" $\begin{cases} \lambda \text{ real} \\ x \text{ perpendiculares} \end{cases}$

Si la matriz es real $A = A^T \rightarrow$ Simétrica

" " " " real o compleja $A = \bar{A}^T$ generalización

→ Ejercicio Repetir ¿Pq autovalores reales? asumiendo que A es compleja y que se cumple $A = \bar{A}^T$

Volvemos al caso A real. Si $A = A^T \rightarrow A = Q \Lambda Q^T$

$$A = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & q_1^T & — \\ — & q_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & q_n^T & — \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & \lambda_1 q_1^T & — \\ — & \lambda_2 q_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & \lambda_n q_n^T & — \end{bmatrix} = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \ldots \lambda_n q_n q_n^T$$

RECORDATORIO

Camino 4: AB = suma de ((cols A) x (filas B))

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

Todas las matrices simétricas son combinaciones de matrices de proyección perpendiculares

$q_i q_i^T$ es matriz de proyección ya que cumple las propiedades: $P^T = P$ y $P^2 = P$

$$(q_i q_i^T)^T = q_i q_i^T \quad ; \quad q_i q_i^T q_i q_i^T = q_i q_i^T$$

Ya que se que los autovalores de una matriz simétrica son reales, la siguiente pregunta es ¿Son positivos o negativos? Recordad importancia para ecuaciones diferenciales.

Nota: calcular autovalores numéricamente es caro y difícil. El método del det. es caro e inestable, no sirve para problemas grandes. Primeros métodos se desarrollaron a finales de 1950 (QR - John GF Francis 1934-Vivo (en 2023))

Sin embargo, calcular los pivotes es barato y sencillo
→ pivotes sin intercambio de filas

Si $A = A^T$ # pos pivots = # pos eigenvalues

Se puede usar en combinación con shift para saber donde están los autovalores.

① Calculo pivotes → # of pos. λ

② Aplico shift → $A+I$ → # of pos λ

Si $Ax=\lambda x \rightarrow (A+I)x = \lambda x + x = (\lambda+1)x$

③ Si sumar 1 cambia # pos. eigen. en 3, es que había 3 autovalores en $(-1, 0)$. etc.

Fact: producto de pivotes es determinante

Matrices definidas positivas (se asume que son simétricas)

$A = A^T$ + Todos los λ son positivos.

(Todos los pivotes son positivos)

↳ como consecuencia, su determinante será positivo (lo cual no es condición suficiente de definida positiva)

(todos los subdeterminantes son positivos)*

→ Tienen que ser todos para garantizar.

Ejemplo $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ pivots $5, \frac{11}{5}$ (det es 11)

$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0 \rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{5}$

Ambos positivos todos.