(18.06 Lecture 21)

Autovalores - autovectores

$\det[A - \lambda I] = 0$

traza $= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

¿Que es un autovector?

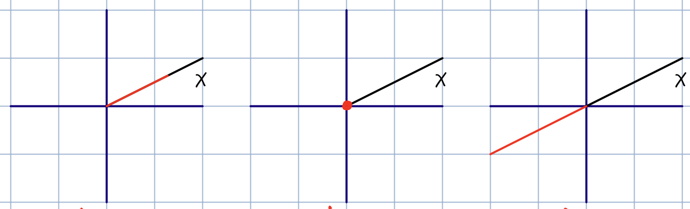
Ax → Veamos esta matriz como una aplicación lineal (una función en Cálculo)

Autovectores son los "x" en una dirección específica tal que $Ax \parallel x$. De forma que mi ecuación es:

$$Ax = \lambda x$$

x → autovector

λ → autovalor



$\lambda > 0$ $\quad$ $\lambda = 0$ $\quad$ $\lambda < 0$

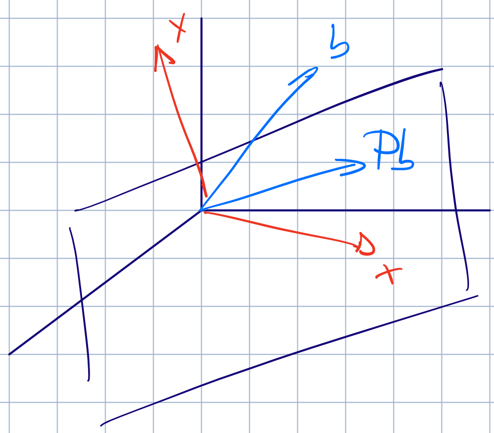
¡λ puede hasta ser imaginario!

Si A es singular, $\lambda = 0$ es autovalor

↳ $Ax = 0$ tiene sol. distinta de la trivial.

Ejemplos

¿Cuáles son los x's y los λ's para una matriz de proyección?



Cualquier vector x en el plano cumple $Px = x$ → Luego $\lambda = 1$

Por otro lado, cualquier $x \perp$ al plano de proyección cumple que $Px = 0x \longrightarrow \lambda = 0$.

¿Cuáles son los x's y los λ's para una matriz de permutación?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ Esta matriz cambia las componentes 1 y 2 de un vector.

¿Qué vector se queda igual?

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow Ax = x \rightarrow \lambda = 1$$

La matriz es 2×2, probablemente habrá un segundo autovector.

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow Ax = -x \rightarrow \lambda = -1$$

Una matriz de tamaño $n \times n$ tiene n autovalores y autovectores. Además, se cumple que la suma de los elementos de su diagonal (su traza) es igual a la suma de sus autovalores

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$$

¿Cómo resolver $Ax = \lambda x$? → Una eq. con dos incógnitas.

Reescribir: $\underline{(A - \lambda I)}\, x = 0$

↳ Si hay solución, $A - \lambda I$, es singular

SINGULAR → $\det(A - \lambda I) = 0$ → Encontrar primero los λ.

Luego, con λ conocido → $(A - \lambda I)\, x = 0$ → encontrar espacio nulo.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

→ Matriz simétrica → Autovalores reales

↳ además, si autovalores distintos, entonces autovectores son ortogonales.

Aplicamos el método. (Para cualquier matriz 2x2, traza determinante)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2) = \to \lambda_1 = 4$$

$$\to \lambda_2 = 2$$

Ahora calculamos autovectores

$\lambda_1 = 4$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En realidad, cualquier vector sobre estas líneas es un autovector

¿Hay alguna relación con este problema que resolvimos antes?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \; x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1, \; x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = 3I + A$$

¿Puedo sacar de esto alguna conclusión para los autovalores y autovectores?

→ Comparar autovalores y autovectores de ambos problemas.

Si $Ax = \lambda x$

entonces $(A + 3I)x = \lambda x + 3Ix = (\lambda + 3)x$

La x no cambia (autovectores) pero sí los λ (autovalores) a los que se les suma 3.

NOT SO GREAT

Si $Ax = \lambda x$, B tiene un autovalor α, ¿qué puedo decir de $A+B$?

Incorrecto

$$Bx = \alpha x$$

$$(A+B)x = (\lambda + \alpha)x$$

¿Pq? Solo funciona si x es autovector de B.

En general, $By = \alpha y$

Tampoco se pueden sacar conclusiones de AB

Ejemplo

Matriz de rotación (90°). Matriz ortogonal.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \text{traza} &= 0+0 = \lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \det &= 1 \quad = \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

¡Esto tb se cumple siempre!

¿Qué vector puede quedar sin modificar después de una rotación de 90°?

$$\det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= i \\ \lambda_2 &= -i \end{aligned}$$

Recordemos que las matrices reales pueden tener autovalores (y autovectores) complejos.

Lo que sí sabemos es que son complejos conjugados (solución de polinomio real).

Esta matriz es antisimétrica $Q^T = -Q$. En este caso, la parte real de los autovalores es 0. Caso "contrario" de matrices simétricas.

Hay un caso hasta peor que autovalores imaginarios

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3$

Si la matriz es triangular, los autovalores están sobre la diagonal.

Det. matriz triangular = producto diagonal.

λ_1, λ_2

$$(A - \lambda I)\,x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = ?$$

Solo tengo uno

matriz degenerada, veremos más adelante como tratar este problema.