22. Superficies. Integrales de superficie III

C. Integrales de superficie

Nos limitamos a superficies que admiten parametrizaciones simples y regulares. También nos limitamos a funciones acotadas y continuas en los dominios de integración.

1 Integral de superficie. Área de una superficie

Sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ y sea $S: D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$$(u,v)\longrightarrow S(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

Se define la integral de superficie de f sobre S

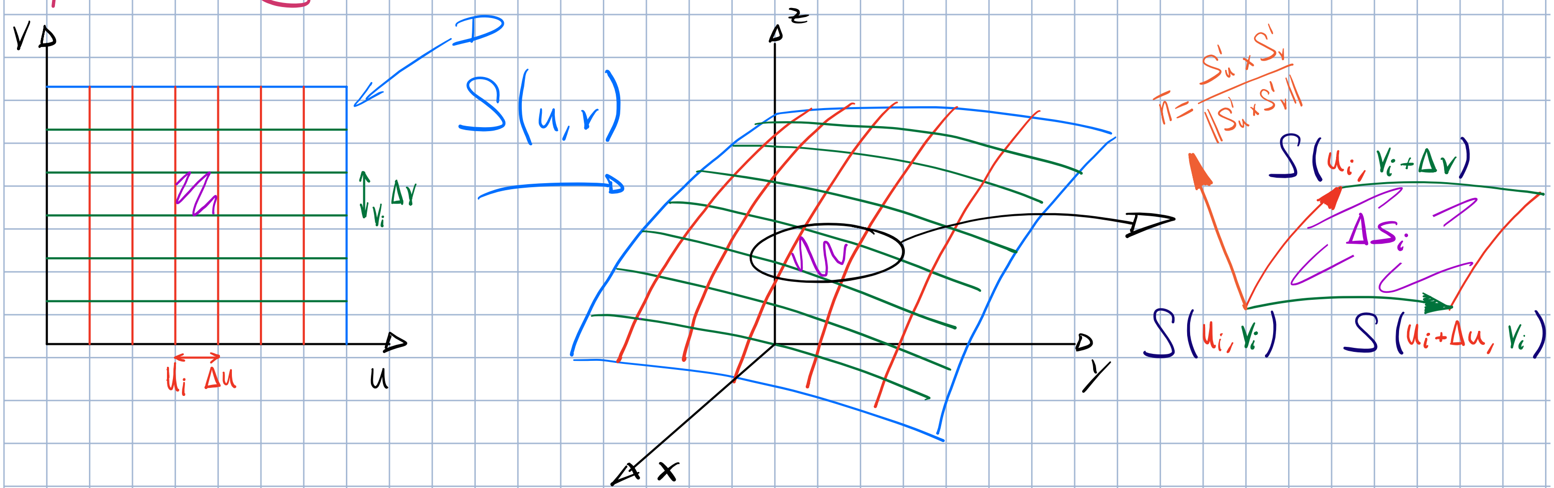
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(S(u,v))\,\|S'_u\times S'_v\|\,du\,dv$$

Nota:

$$S'_u=\frac{\partial S}{\partial u}$$

$$S'_v=\frac{\partial S}{\partial v}$$

Explicación geométrica



$$\Delta S_i=\left\|\left(S(u_i+\Delta u, v_i)-S(u_i,v_i)\right)\times\left(S(u_i,v_i+\Delta v)-S(u_i,v_i)\right)\right\|=$$

$$\left\|\frac{\left(S(u_i+\Delta u, v_i)-S(u_i,v_i)\right)}{\Delta u}\times\frac{\left(S(u_i,v_i+\Delta v)-S(u_i,v_i)\right)}{\Delta v}\right\|\Delta u\,\Delta v\underset{\substack{\Delta u\\ \Delta v}\to 0}{\simeq}\|S'_u\times S'_v\|\,\Delta u\,\Delta v$$

De modo que la integral queda:

$$I \approx \sum_{i=1}^{N} f(\bar{r}_i)\, \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} f(\bar{r}_i) \| S'_u \times S'_v \| \Delta u \Delta v \quad \text{y con } N \to \infty$$

$$\iint_D f(S) \underbrace{\| S'_u \times S'_v \| du\,dv}_{dS}$$

En resumen

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(S(u,v)) \| S'_u \times S'_v \| du\,dv$$

2 Propiedades

a El área de la superficie viene dada por

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \| S'_u \times S'_v \| du\,dv$$

(Sustituyendo $f(x,y,z)=1$ en la expresión anterior)

b Si $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ entonces

$$\iint_S f\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f\, dS$$

c Los resultados anteriores no dependen de la parametrización escogida para representar la superficie. (Más detalles en pts VII.C.15 y VII.C.16 de los guiones).

EJEMPLO. Calcular el área de una esfera de radio R.

$$S = \begin{cases} x(\theta,\varphi) = R\cos\theta\sin\varphi \\ y(\theta,\varphi) = R\sin\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = R\cos\varphi \end{cases} \qquad D = [0, \underset{\theta}{2\pi}] \times [0, \underset{\varphi}{\pi}]$$

$$S'_\theta = \begin{bmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad S'_\varphi = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$S'_\theta \times S'_\varphi = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -Rs\theta s\varphi & Rc\theta s\varphi & 0 \\ Rc\theta c\varphi & Rs\theta c\varphi & -Rs\varphi \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -R^2 c\theta s^2\varphi \\ -R^2 s\theta s^2\varphi \\ \underbrace{-R^2(s^2\theta s\varphi c\varphi + c^2\theta s\varphi c\varphi)}_{-R^2 s\varphi c\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\|S'_\theta \times S'_\varphi\| = \sqrt{R^4 c^2\theta s^4\varphi + R^4 s^2\theta s^4\varphi + R^4 s^2\varphi c^2\varphi} =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = R^2\sin\varphi$$

De modo que

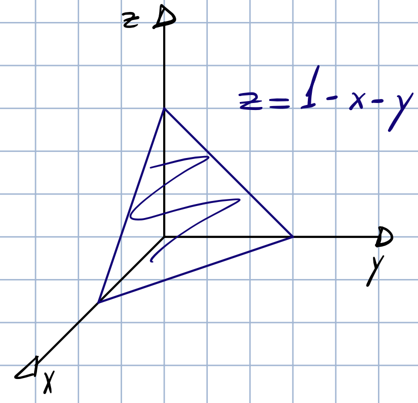
$$A(S) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi = 2\pi R^2 (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi =$$

$$= 4\pi R^2$$

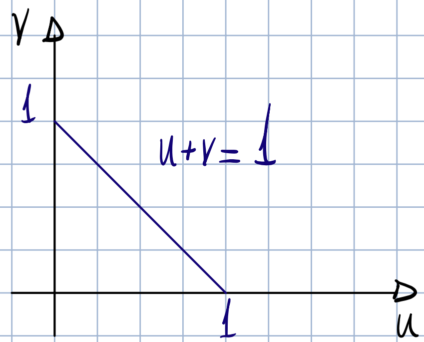
EJERCICIOS

1

$$\iint_S 6xy\,dS \ , \quad S = \begin{cases} x+y+z=1 \\ 1^{er} \text{ octante} \end{cases}$$



Esta superficie se puede representar con la siguiente parametrización explícita



$$x(u,v) = u$$
$$y(u,v) = v$$
$$z(u,v) = 1-u-v$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(S(u,v))\,\|S'_u \times S'_v\|\,du\,dv$$

1 D: $\quad 0 \leq u \leq 1$

$\quad 0 \leq v \leq 1-u$

* $S'_u = (1,0,-1)$

$S'_v = (0,1,-1)$

2 $f(S) = 6xy = 6uv$

$\|S'_u \times S'_v\| = \|(-1,1,1)\| = \sqrt{3}$

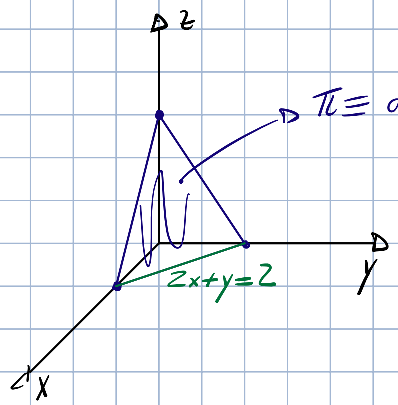
3 $dS = \|S'_u \times S'_v\|\,du\,dv \overset{*}{=} \sqrt{3}\,du\,dv$

$$\int_0^1 du \int_0^{1-u} 6uv\sqrt{3}\,dv = \int_0^1 6\sqrt{3}\,u \frac{1}{2} v^2 \Big|_0^{1-u} du = 3\sqrt{3}\int_0^1 u(1-u)^2\,du =$$

$$3\sqrt{3}\int_0^1 (u+u^3-2u^2)\,du = 3\sqrt{3}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{4}-\frac{2u^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Para casa

(2) $$\iint_S x\, dS \quad \text{con } S \text{ el triángulo de vértices } \left|\begin{matrix}(1,0,0)\\(0,2,0)\\(0,0,3)\end{matrix}\right|$$



$\pi \equiv ax+by+cz=1$

$(1,0,0) \rightarrow a=1$

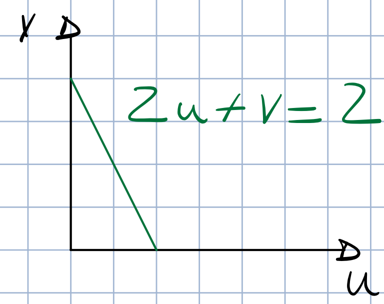
$(0,2,0) \rightarrow b=1/2$

$(0,0,3) \rightarrow c=1/3$

$$\left| \begin{matrix} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1 \\ 6x+3y+2z=6 \end{matrix} \right.$$

De modo que podemos parametrizar S con

$$S = \left| \begin{matrix} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \frac{1}{2}(6-6u-3v) \end{matrix} \right.$$



$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(S(u,v))\, \|S'_u \times S'_v\|\, du\, dv$$

1 D: $\quad 0 \leq u \leq 1$

$\quad\quad 0 \leq v \leq 2-2u$

2 $f(S) = x = u$

3 $dS = \|S'_u \times S'_v\|\, du\, dv \overset{*}{=} \frac{1}{2}\sqrt{46}\, du\, dv$

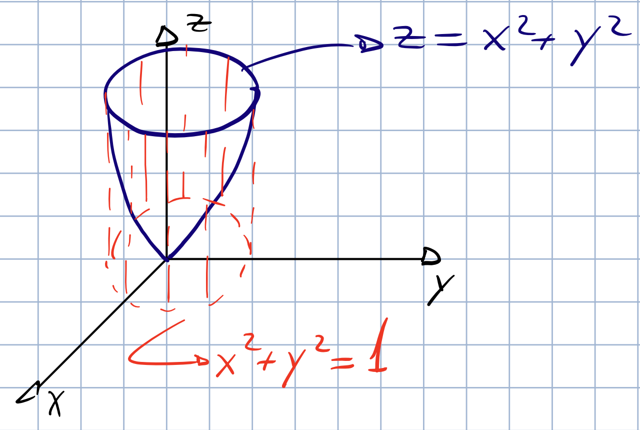
$*$ $S'_u = (1,0,-3)$

$S'_v = (0,1,-3/2)$

$\|S'_u \times S'_v\| = \|(3, \frac{3}{2}, 1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{46}$

$$\int_0^1\int_0^{2-2u} u\frac{1}{2}\sqrt{46}\, du\, dv = \frac{1}{2}\sqrt{46}\int_0^1 u(2-2u)\, du = \frac{\sqrt{46}}{2}\left(-(1-u)^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

③ $\iint_S z\,dS$ con $S \rightarrow z = x^2+y^2 \;,\; x^2+y^2 \leq 1$



Parametrización de la superficie

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = x^2+y^2 = r^2$

¿Pq utilizamos esta parametrización en vez de la explícita?

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(S(u,v))\,\|S'_u \times S'_v\|\,du\,dv$$

1 D: $0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

2 $f(S) = z = r^2$

3 $dS = \|S'_r \times S'_\theta\|\,dr\,d\theta \overset{*}{=} \sqrt{5}\,r\,dr\,d\theta$

$*$ $S'_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$S'_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 2r)$

$$S'_r \times S'_\theta = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 2r \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2r\sin\theta \\ -2r\cos\theta \\ r \end{bmatrix}$$

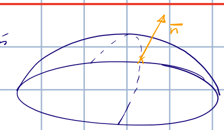
$$\|S'_r \times S'_\theta\| = \sqrt{5}\,r$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2(\sqrt{5}\,r)\,dr = \frac{\sqrt{5}}{4}\,2\pi = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$$

3 Integrales de superficie de campos vectoriales

Sea $S: D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada positivamente y sea $\overline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial continua, se llama integral de superficie, o flujo de $\overline{F}$ sobre S a:

> Una superficie tiene orientación positiva cuando su normal tiene sentido exterior (apunta hacia afuera)

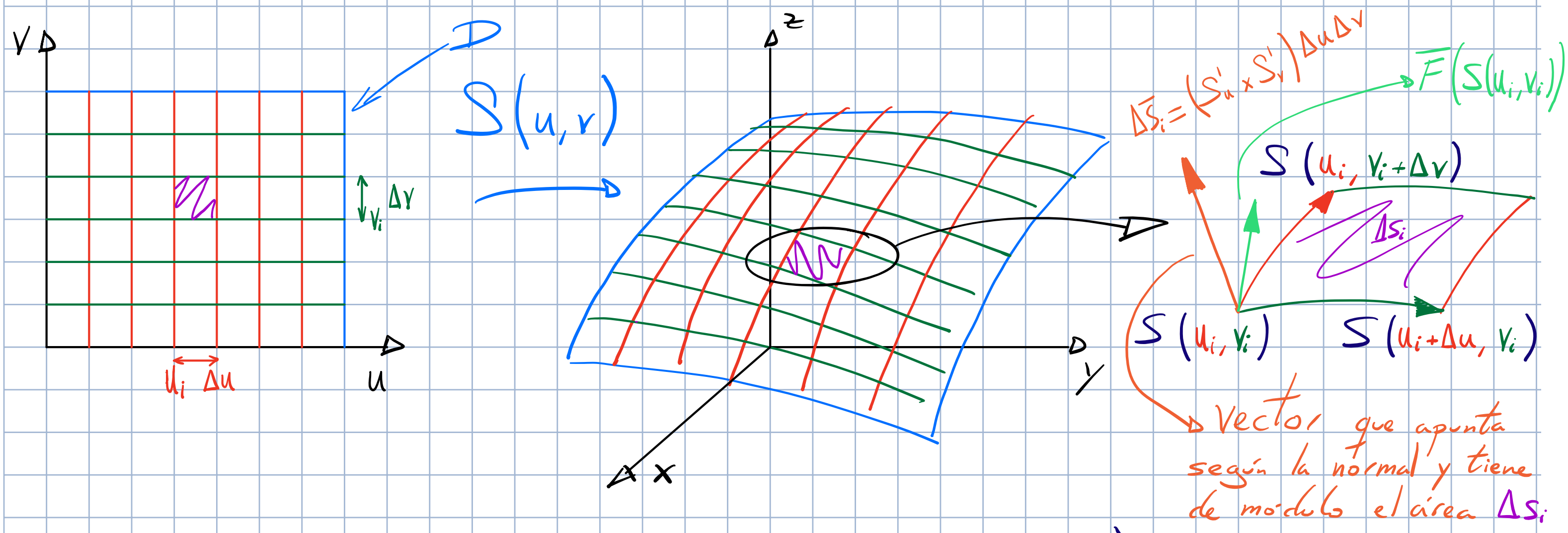


$$\iint_S \overline{F}\cdot d\overline{S} = \iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\, dS = \iint_D \overline{F}(S(u,v))\cdot(S'_u \times S'_v)\, du\, dv$$

$d\overline{S} = \overline{n}\, dS$

$$\overline{n}\, dS = \frac{S'_u \times S'_v}{\|S'_u \times S'_v\|}\|S'_u \times S'_v\|\, du\, dv$$

Significado físico. $\longrightarrow$ cantidad de líneas de campo que atraviesa la superficie S.



$$\Delta\overline{S}_i = \big(S(u_i+\Delta u, v_i) - S(u_i,v_i)\big)\times\big(S(u_i, v_i+\Delta v) - S(u_i,v_i)\big) =$$

$$\frac{\big(S(u_i+\Delta u, v_i) - S(u_i,v_i)\big)}{\Delta u}\times\frac{\big(S(u_i, v_i+\Delta v) - S(u_i,v_i)\big)}{\Delta v}\,\Delta u\,\Delta v \underset{\substack{\Delta u\\ \Delta v}\to 0}{\simeq} (S'_u \times S'_v)\,\Delta u\,\Delta v$$

De modo que el flujo quedaría:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}(S(u_i,v_i)) \cdot \Delta \bar{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(S(u_i,v_i)) \cdot (S'_u \times S'_v)\,\Delta u \,\Delta v$$

y si $n \to \infty$

$$\iint_D \bar{F}(S(u,v)) \cdot (S'_u \times S'_v)\, du\, dv$$

4 Propiedades

a Si $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ entonces

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

b Los resultados anteriores no dependen (salvo el signo) de la parametrización escogida para representar la superficie. (Más detalles en pts VII.C.17 y VII.C.18 de los guiones).

Si "$-S$" es la superficie orientada negativamente:

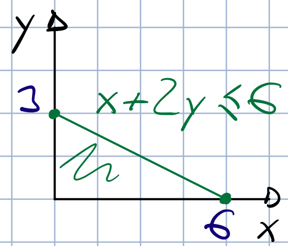
$$\iint_{-S} \bar{F} \cdot d\bar{S} = -\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

NOTA: definir la normal es equivalente a situarse en una "cara" de la superficie. Ver 22.A.8 para más detalles

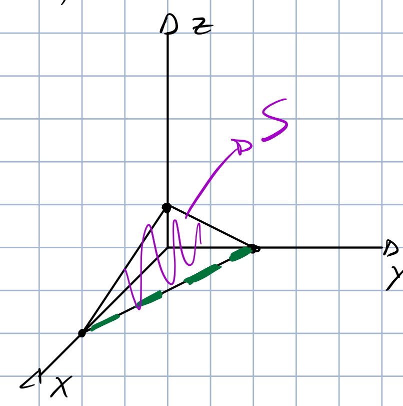
ESERCICIOS

1 $\iint_S \overline{F}\cdot d\overline{S}$, $\overline{F} = (x, -2y, z)$, $S: x+2y+3z=6$ (1er octante)

$$S(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{3}(6-2y-x) \end{bmatrix}$$



$0 \leq y \leq 3$



$$S'_x = (1, 0, -\tfrac{1}{3})$$
$$S'_y = (0, 1, -\tfrac{2}{3})$$
$$S'_x \times S'_y = \frac{(1,2,3)}{3}$$

{En estos problemas, la magnitud del vector es importante (no solo la dirección)

$$\iint_S \overline{F}\cdot d\overline{S} = \iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\, dS = \iint_D F(S(u,v))\cdot(S'_u \times S'_v)\, du\, dv$$

① D: $0 \leq y \leq 3$
$\quad\quad 0 \leq x \leq 2(3-y)$

② $$F(S(u,v)) = \left(x, -2y, \frac{1}{3}(6-2y-x)\right)$$

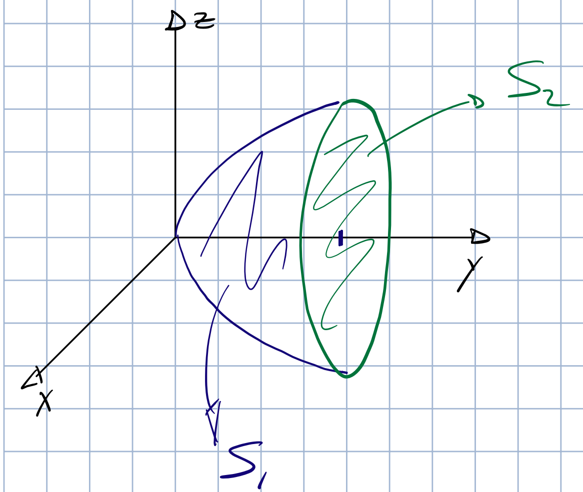
③ $$d\overline{S} = (S'_x \times S'_y)\, dx\, dy = \frac{1}{3}(1,2,3)\, dx\, dy$$

$$\frac{1}{3}\int_0^3 dy \int_0^{2(3-y)} \left(x, -2y, \frac{1}{3}(6-2y-x)\right)\cdot(1,2,3)\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 dy \int_0^{2(3-y)} (x-4y+6-2y-x)\, dx = \frac{6}{3}\int_0^3 dy \int_0^{2(3-y)} (1-y)\, dx = \dots = \frac{16}{3}$$

2 Hallar el flujo de $\overline{F} = (0, y, -z)$ que atraviesa

$$S = \begin{cases} S_1 \equiv y = x^2 + z^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ S_2 \equiv x^2 + z^2 \leq 1 \cap y = 1 \end{cases}$$



$$S_1 = \begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r^2 \\ z = r\sin\theta \end{pmatrix} \quad (r,\theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = 1 \\ z = r\sin\theta \end{pmatrix} \quad (r,\theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$$

$$\iint_S \overline{F} \cdot d\overline{S} = \iint_{S_1} \overline{F} \cdot d\overline{S} + \iint_{S_2} \overline{F} \cdot d\overline{S} = \ldots = -\pi + \pi = 0$$

$\iint_{S_1} \overline{F} \cdot d\overline{S}$

① $D = [0,1] \times [0, 2\pi]$

② $\overline{F}(S_1) = (0, r^2, -r\sin\theta)$

③ $d\overline{S} = \overline{S}_r \times \overline{S}_\theta \, dr\, d\theta = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos\theta & 2r & \sin\theta \\ -r\sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\, d\theta =$

$$= \begin{pmatrix} 2r^2\cos\theta \\ -r \\ 2r^2\sin\theta \end{pmatrix} dr\, d\theta \longrightarrow$$

Podemos ver que la normal apunta "hacia afuera", orientación ⊕

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (0, r^2, -r\sin\theta)\cdot(2r^2\cos\theta, -r, 2r^2\sin\theta)\, dr =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3(1+2\sin^2\theta)\, dr = -\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi}(1+2\sin^2\theta)\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\pi + \int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\, d\theta\right) = -\frac{1}{4}(2\pi + 2\pi) = -\pi$$

$$\iint_{S_2} \overline{F}\cdot d\overline{S}$$

1. $D = [0,1]\times[0,2\pi]$
2. $\overline{F}(S_1) = (0, y, -z) = (0, 1, -r\sin\theta)$
3. $d\overline{S} = r\,dr\,d\theta\,\overline{j}$ → este es el sentido de la normal que apunta "hacia afuera". No cambiamos ele cara a mitad del problema.

$$\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ r\sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = -r(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\overline{j} = -r\overline{j}$$

Cambiamos el signo para que normal apunte hacia afuera.

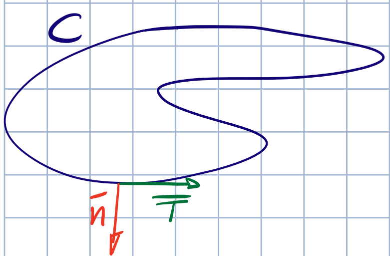
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (0, 1, -r\sin\theta)\cdot(0, r, 0)\, dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr = \pi$$

5 Flujo de un campo bidimensional

De manera análoga al flujo de un campo tridimensional a través de una superficie, se puede calcular el flujo de un campo bidimensional a través de una curva.

Sea $\overline{F}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longrightarrow \overline{F} = (F_1, F_2)$ una función vectorial continua y sea

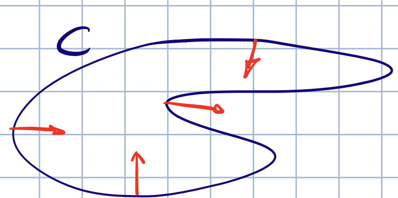
$$C \equiv \overline{r}: t \in [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x(t), y(t))$$



$$\int_C \overline{F}\cdot\underline{\overline{n}}\, ds = \int_a^b \left(F_1(\overline{r}(t)), F_2(\overline{r}(t))\right)\cdot\left(\pm y'(t), \mp x'(t)\right) dt$$

vector normal exterior a la curva

¿Pq no usamos la normal de Frenet? Va según curvatura, no el exterior



Explicación de la fórmula. Cálculo de la normal

$\overline{T}\cdot\overline{n} = 0$ de modo que si $\overline{T} = (a, b)$, entonces $\overline{n} = \pm(b, -a)$ de modo que $\overline{T}\cdot\overline{n} = \pm(a,b)\cdot(b,-a) = 0$.

En el capítulo de integrales de línea, vimos que:

$$d\overline{s} = \overline{T}\, ds = \frac{\overline{r}'(t)}{\|\overline{r}'(t)\|}\|\overline{r}'(t)\|\, dt = \overline{r}'(t)\, dt = (x'(t), y'(t))\, dt$$

De modo que: $\bar{n}\,ds = \pm\left(y'(t), -x'(t)\right) dt$

En resumen:

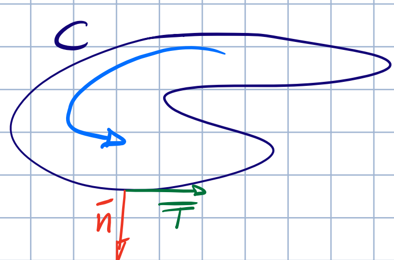
$$\bar{T} = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}\left(x'(t), y'(t)\right) \quad ; \quad \bar{n} = \frac{\pm 1}{\|\bar{r}'(t)\|}\left(y'(t), -x'(t)\right)$$

Analizamos $\oplus$ y $\ominus$ $\bar{n}$ por separado. ¿Apunta $\bar{n}$ hacia afuera?

$+\bar{n}$

$$\bar{T} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x' & y' & 0 \\ y' & -x' & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\|\bar{r}'\|^2} = \frac{1}{\|\bar{r}'\|^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x'^2 - y'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\bar{k}$$

$\bar{T}, \bar{n}, -\bar{k}$ forman un triedro a derechas y $\bar{T}$ apunta en la dirección de crecimiento de la curva según el parámetro t



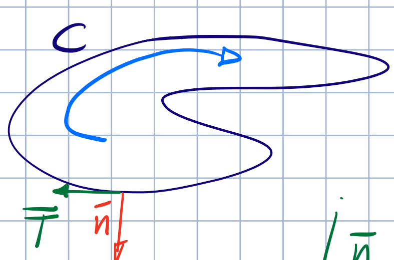
Sentido antihorario

$\bar{n} = -\bar{k} \times \bar{T}$

$-\bar{n}$

$$\bar{T} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x' & y' & 0 \\ -y' & x' & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\|\bar{r}'\|^2} = \frac{1}{\|\bar{r}'\|^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x'^2 + y'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{k}$$

$\bar{T}, \bar{n}, \bar{k}$ forman un triedro a derechas y $\bar{T}$ apunta en la dirección de crecimiento de la curva según el parámetro t



Sentido horario

$\bar{n} = \bar{k} \times \bar{T}$

¡$\bar{n}$ siempre apunta hacia afuera!

EJERCICIOS

3

VII.11 Sea S la superficie descrita por la parametrización:
$\overline{x}(u,v) = (2+\cos u, \sin u, u+v+\cos v)$ en $W = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \times [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

Determinar si es regular y calcular su área.

Superficie regular: admite parametrización regular

① Parametrización de clase C^1

② Existe vector normal $\overline{x}'_u \wedge \overline{x}'_v \neq 0$

No se dice nada de autointersecciones

① Par. C^1 ✓

② $\overline{x}'_u \wedge \overline{x}'_v \neq 0$ ✓

$$\overline{x}'_u \wedge \overline{x}'_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -\sin u & \cos u & 1 \\ 0 & 0 & 1-\sin v \end{vmatrix} = \left((1-\sin v)\cos u, (1-\sin v)\sin u, 0\right)$$

$$\overline{x}'_u \wedge \overline{x}'_v = 0: \quad \left.\begin{array}{l} \cos u\,(1-\sin v) = 0 \\ \sin u\,(1-\sin v) = 0 \end{array}\right\} \quad v = \frac{\pi}{2}, \ \forall u$$

En estos pts, la parametrización no sería regular, sin embargo, no pertenecen a W. $\longrightarrow$ Superficie regular en W

Cálculo de área: $A = \iint_S 1\, dA =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 1 \, \|\overline{x}'_u \wedge \overline{x}'_v\| \, du\, dv$$

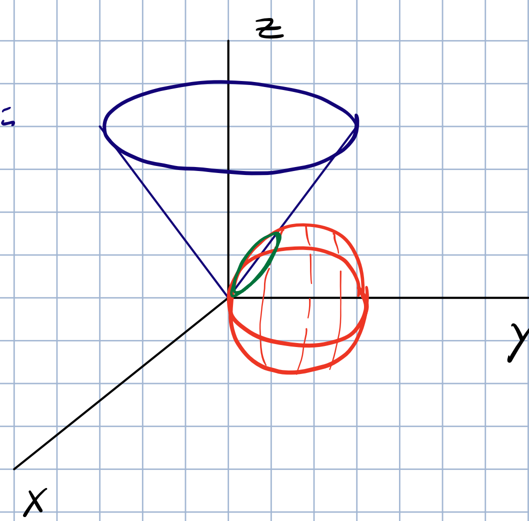
$$\|\bar{X}'_u \wedge \bar{X}'_v\| = \sqrt{\cos^2 u\,(1-\sin v)^2 + \sin^2 u\,(1-\sin v)^2} = |1-\sin v| = 1-\sin v$$

≥ 0 en W

$$A = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1-\sin v)\,du\,dv = \frac{\pi}{3}\Big[v + \cos v\Big]_{\pi/6}^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{9}$$

Para casa

4 Sea S la porción del cono $x^2+y^2=z^2$ contenida entre $z \geq 0$ y $x^2+(y-1)^2+z^2 \leq 1$. Calcular su área.



Empezaremos buscando la intersección entre la esfera y el cono.

$$x^2+(y-1)^2+(x^2+y^2)=1$$

$$2x^2+2y^2-2y=0$$

Voy a intentar reescribir como circunferencia $x^2+y^2-y=0$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

$$x^2+a^2-2ax+y^2+b^2-2by=R^2 \longrightarrow$$

$a=0$

$b=1/2 \quad b=R$

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4 \longrightarrow \text{Ptos intersección en plano } (x,y).$$

Interior es D

$$A = \iint_D \|\bar{S}'_x \times S'_y\|\,dx\,dy \longrightarrow \text{Necesito parametrización del cono}$$

Utilizo parametrización explícita:

$$\overline{S}(x,y) = (x, y, \text{cono}) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\overline{S}'_x \wedge \overline{S}'_y = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$$

$$\|\overline{S}'_x \wedge \overline{S}'_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$A = \iint_D \|\overline{S}'_x \times S'_y\| \, dx\,dy = \sqrt{2} \iint_D dx\,dy = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

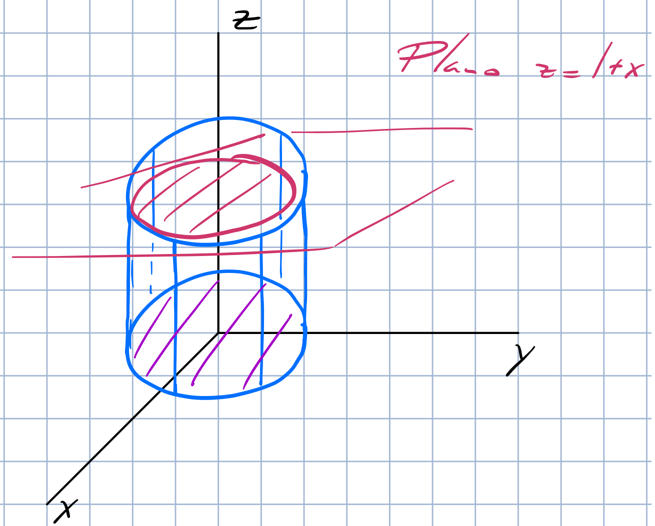
Puedo hacer esta integral o directamente poner el resultado

$$D\ (x,y) \,/\, \left\{ x^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1/4 \right\}$$

$$\iint_D dx\,dy = A(D) = \pi R^2 = \frac{\pi}{4}$$

(5) Calcular $I = \iint_S z\,dA$, donde S es la superficie cuyas caras son: $x^2+y^2=1$, $\{x^2+y^2 \leq 1$ en $z=0\}$, plano $z=1+x$ interior al cilindro.

Para casa



S_1: $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$

S_2: $x^2+y^2=1$; $0 \leq z \leq 1+x$

S_3: $x^2+y^2 \leq 1$; $z=1+x$

Tengo que calcular tres integrales de superficie

$$\iint_S f\,dA = \iint_{S_1} f\,dA + \iint_{S_2} f\,dA + \iint_{S_3} f\,dA$$

Para cada una de las integrales:

(1) Obtener parametrización de S_i: $\bar{S}_i(u,v) = (\ ,\ ,\ )$ $u \in [\ ,\ ]$, $v \in [\ ,\ ]$

(2) Calcular $dA = \|\bar{S}'_u \wedge \bar{S}'_v\|\,du\,dv$

(3) Particularizar $f(\bar{S}(u,v))$

S_1: $z=0 \rightarrow$ (3) $f(\bar{S}_1(u,v)) = 0 \longrightarrow \iint_{S_1} f\,dA = 0$

S_2: $x^2+y^2=1 \rightarrow S_2 = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$z \in [0, 1+x]$ $\qquad z \in [0, 1+\cos\theta]$

De modo que:

$$\bar{S}'_{2,\theta} \wedge \bar{S}'_{2,z} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\|\bar{S}'_{2,\theta} \wedge \bar{S}'_{2,z}\| = 1$$

$$\iint_{S_2} f\,dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{z=1+\cos\theta} z \cdot 1\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta = [\dots] = \frac{3\pi}{2}$$

S_3 $\quad x^2+y^2 \leqslant 1 \longrightarrow (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\quad r\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi]$

$\quad z = 1+x \longrightarrow \bar{S}_3 = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1+r\cos\theta)$

$$\bar{S}'_{3r} \wedge \bar{S}'_{3\theta} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = [\dots] = (-r, 0, r) \rightarrow \|\bar{S}'_{3r} \wedge \bar{S}'_{3\theta}\| = \sqrt{2}\,r$$

$$f(\bar{S}_3(r,\theta)) = 1 + r\cos\theta$$

$$\iint_{S_3} f\,dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} (1+r\cos\theta)\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta =$$

$$\sqrt{2}\pi$$

$$I = 0 + \frac{3\pi}{2} + \sqrt{2}\pi$$

⑥ Sea S la superficie del elipsoide Ordinario 20/21

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{y}{c}\right)^2 + z^2 = 1$$

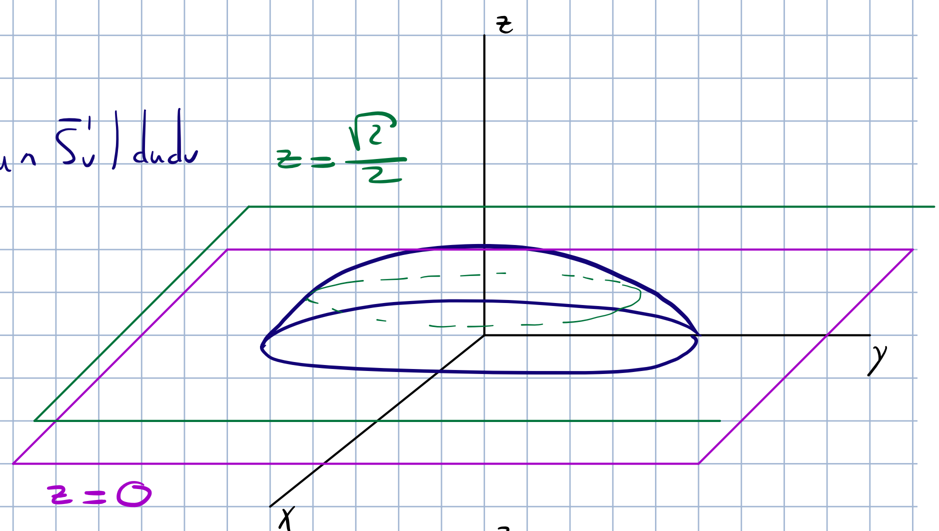
contenida entre los planos $z=0$ y $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
La superficie S está orientada tal que su normal coincide con la normal exterior al elipsoide.

Sea $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función definida como:

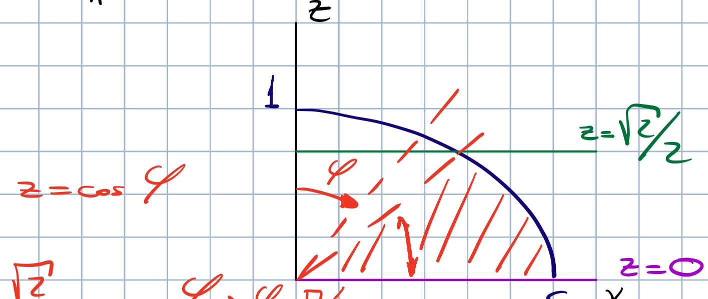
$$\bar{F}(x,y,z) = \left(b\,x,\ b\,y,\ b\,z\right)$$

La integral $\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S}$ vale:

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_D \bar{F}(\bar{S}(u,v))\cdot(\bar{S}'_u \wedge \bar{S}'_v)\,du\,dv$$



① Obtengo parametrización
② Obtengo $d\bar{S} = (\bar{S}'_u \wedge \bar{S}'_v)\,du\,dv$
③ Particularizo $\bar{F}(\bar{S}(u,v))$



$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pi/4$

$0 = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

La superficie S se puede parametrizar como:

¡Parametrizaciones típicas en guiones!

$$S(\varphi,\theta)=\begin{bmatrix} c\, s\varphi\, c\theta \\ c\, s\varphi\, s\theta \\ c\varphi \end{bmatrix} \quad \text{con } D \begin{cases} \theta\in[0,2\pi] \\ \varphi\in[\pi/4,\pi/2] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} s = \sin \\ c = \cos \end{matrix}}$$

De modo que:

$$S'_\varphi(\varphi,\theta)=\begin{bmatrix} c\, c\varphi\, c\theta \\ c\, c\varphi\, s\theta \\ -s\varphi \end{bmatrix} \qquad S'_\theta(\varphi,\theta)=\begin{bmatrix} -c\, s\varphi\, s\theta \\ c\, s\varphi\, c\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$S'_\varphi \times S'_\theta = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ c\,c\varphi\, c\theta & c\,c\varphi\, s\theta & -s\varphi \\ -c\,s\varphi\, s\theta & c\,s\varphi\, c\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} c\, s^2\varphi\, c\theta \\ c\, s^2\varphi\, s\theta \\ c^2\left(s\varphi\, c\varphi\, c^2\theta + s\varphi\, c\varphi\, s^2\theta\right) \end{bmatrix}$$

De modo que

1. $D: \quad \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

2. $d\bar{S} = \left(c\, s^2\varphi\, c\theta,\ c\, s^2\varphi\, s\theta,\ c^2\, s\varphi\, c\varphi\right)$

③ $\bar{F}(S(\varphi,\theta)) = b\,(c\,s\varphi\,c\theta,\; c\,s\varphi\,s\theta,\; c\varphi)$

Así que:

$$\int_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = b\,c^2 \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(s^3\varphi\,c^2\theta + s^3\varphi\,s^2\theta + s\varphi\,c^2\varphi\right) d\varphi\, d\theta =$$

$$= b\,c^2 \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(s^3\varphi + s\varphi\,c^2\varphi\right) d\varphi\, d\theta = b\,c^2 \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} s\varphi \; d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi\, b\, c^2 \left(-\cos\varphi\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \sqrt{2}\,\pi\, b\, c^2$$

VII.13

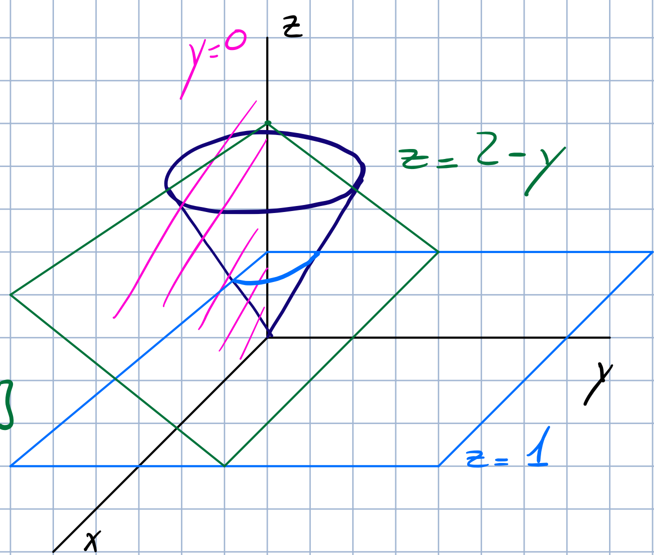
$$S_1 \equiv \bar{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$$

$$S_2 \equiv z = 2-y$$

$$C = S_1 \cap S_2$$

Area cono, octante ⊕ y limitado por planos $y=0$, $z=1$ y C.

$$\int_*^* \int_*^* \|\bar{S}'_u \times \bar{S}'_v\| \, du \, dv$$



Problema es encontrar *

Por ser primer octante $v \in [0, \pi/2]$

Vamos a ver quien es C

$$\bar{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$$

$$z = 2-y \quad \hookrightarrow \quad u = 2 - u\sin v$$

$$u + u\sin v = 2$$

$$u = \frac{2}{1+\sin v}$$

$$\int_0^{\pi/2} dv \int_1^{\frac{2}{1+\sin v}} \|\bar{S}'_u \times \bar{S}'_v\| \, du$$

$$\bar{S}'_u \times \bar{S}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ u \end{bmatrix}$$

$$\| \bar{S}'_u \times \bar{S}'_v \| = \sqrt{u^2\cos^2 v + u^2 \sin^2 v + u^2} = \sqrt{2}\,|u|$$

$$\int_0^{\pi/2} dv \int_1^{\frac{2}{1+\sin v}} \| \bar{S}'_u \times \bar{S}'_v \| \, du = \int_0^{\pi/2} dv \int_1^{2/1+\sin v} \sqrt{2}\, u \, du = \qquad (u>0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\left(\frac{2}{1+\sin v} \right)^2 - 1^2 \right] dv = [\ldots] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

Usar cambio
$u = \tan\left(\frac{v}{2}\right)$