

Diagonalizando $S^{-1}AS = \Lambda$

Potencias de A / ecuación $U_{k+1} = AU_k$

Supongamos que tenemos n autovectores linealmente independientes para A .

Con ellos, formemos la matriz S

$$AS = A \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = S\Lambda$$

↑ Matriz diagonal

Reaso multiplicación matricial
(cols. linea de columnas)

de los autovectores

$$AS = S\Lambda$$

→ Hasta aquí no hay problemas si tengo autovectores repetidos.

Si tengo n autovectores independientes:

$$S^{-1}AS = \Lambda \quad \text{o visto de otra forma } A = S\Lambda S^{-1}$$

Nueva factorización (ya tenemos $A=LU$, $A=QR$, $A=S\Lambda S^{-1}$)

Vemos a donde uso a la nueva factorización:

Si $Ax = \lambda x$

Entonces $\underline{A^2}x = \lambda Ax = \underline{\lambda^2}x$

Vemos esto mismo pero usando la nueva factorización

$$\underline{A^2} = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda\Lambda S^{-1} = S\underline{\Lambda^2} S^{-1}$$

Podemos escribir esto $A^K = S\Lambda^K S^{-1}$. Como vemos, los autovectores no cambian, solo autovalores.

Descomposición $A=S\Lambda S^{-1}$ es la manera buena de estudiar las potencias de una matriz.

Teorema: $A^K \rightarrow 0$ cuando $K \rightarrow \infty$ si todos sus autovalores "son menores que 1" ($|\lambda_i| < 1$)

* Tiene en cuenta autovalores negativos e imaginarios.

El teorema se cumple siempre que la matriz sea diagonalizable, n independientes autovectores.

A tiene n autovectores independientes (y, por tanto, es diagonalizable) si todos los autovectores son diferentes (no repeated λ 's).

Si autovalores repetidos, hay que mirar en más detalle.
Puede que si (o puede que no) haya autovectores repetidos

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \text{ Pero } \text{cada } \text{uno } \text{tiene } \text{un } \text{vector } \text{propio } \text{distinto.}$$

Ejemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 = 0$$

Multiplicidad algebraica = 2
(grado pol)

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{H-Hiplicid geometrice} = 1$$

Asumamos que estamos en el caso bueno (A diagonalizable)

Aplicación: Ecuación $u_{k+1} = A u_k$

Empiezamos con un vector cualquiera u_0

$$u_1 = A u_0, \quad u_2 = A^2 u_0, \quad \boxed{u_k = A^k u_0}$$

Esto es un sistema de ecuaciones en diferencias.

¿Cómo resolver?

Escribimos

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \xrightarrow{\text{autovectores,}} \text{forman una base.}$$

$$u' = A u_0 = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \dots + c_n \lambda_n x_n$$

Si queremos obtener la iteración $k = 100$

$$u^{100} = A^{100} u_0 = c_1 \lambda_1^{100} x_1 + c_2 \lambda_2^{100} x_2 + \dots + c_n \lambda_n^{100} x_n =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{100} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_n^{100} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = S \Lambda^{100} c$$

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = S c$$

$$S^{-1} u_0 = c$$

$$\boxed{u^{100} = S \Lambda^{100} S^{-1} u_0 = A^{100} u_0}$$

Ejemplo Fibonacci

BBC NEWS MUNDO

Noticias América Latina Internacional Hay Festival Economía Ciencia Salud

Cultura Tecnología Centroamérica Cuenta BBC Extra

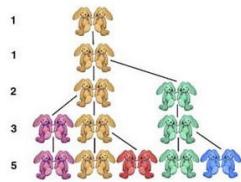
Fibonacci, el matemático que se puso a contar conejos y descubrió la secuencia divina

Redacción
BBC News Mundo
23 febrero 2019
Actualizado 23 noviembre 2021

<https://www.bbc.com/mundo/noticias-46926506>



Leonardo de Pisa
(Fibonacci)



0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13..., $F_{100} = ?$

¿Cómo de rápido están creciendo?

$$F_{K+2} = F_{K+1} + F_K$$

TRUCO

Añadir
ecuación

$$F_{K+1} = F_{K+1}$$

(Ecuación de segundo orden. Aumento el
número de variables para reducir orden.)

Ej. se usa tb en ecuaciones diferenciales)

$$\begin{bmatrix} F_{K+2} \\ F_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{K+1} \\ F_K \end{bmatrix} \quad \text{y definiendo } U_K = \begin{bmatrix} F_{K+1} \\ F_K \end{bmatrix} \quad U_{K+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U_K$$

Simétrica $\rightarrow \lambda$ real, \times orthogonal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow (A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como vimos en el caso anterior, es más sencillo proyectar la condición inicial en la base de autovectores y analizar ahí la evolución

$$u_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_1 x_1 + C_2 x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow S c = u_0 \rightarrow c = S^{-1} u_0$$

$$u^{100} = A u_0 = C_1 \lambda_1^{100} x_1 + C_2 \lambda_2^{100} x_2 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{100} x_1 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{100} x_2 \approx$$

$$\approx C_1 (1.618)^{100} x_1 + C_2 (-0.618)^{100} x_2 \approx$$

$$\approx C_1 \underbrace{(1.618)^{100}}_{\text{Tas. de crecimiento de números de Fibonacci}} x_1$$

Dependencia de condición inicial