

22. SUPERFICIES. INTEGRALES DE SUPERFICIE II

B. Ejemplos de superficies

El objetivo de este punto es aprender a reconocer la representación implícita de algunos ejemplos de superficie así como sus representaciones paramétricas más comunes.

1 Cuádricas

a Cuádricas ordinarias

a.1 Con centro

→ Elipsoide

Representación implícita:

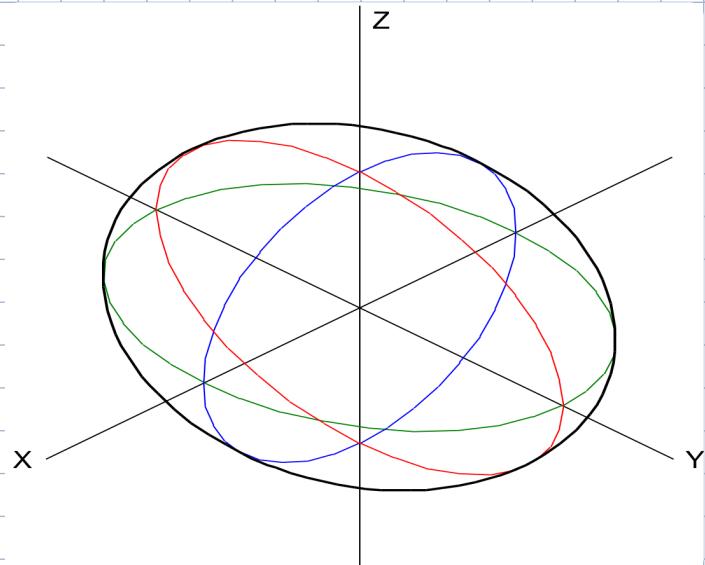
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultados elipses:

Corte con $x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Corte con $y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Corte con $z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

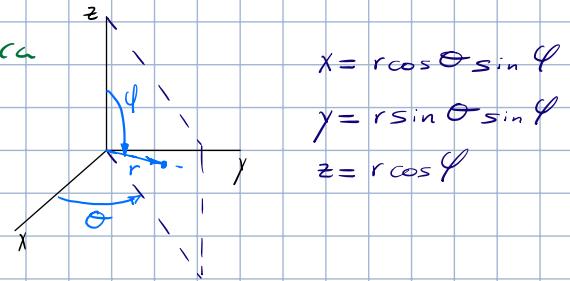


Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes del elipsoide

Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x} = (a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$$

Nota: esta representación paramétrica tiene un paralelismo claro con las coordenadas esféricas.



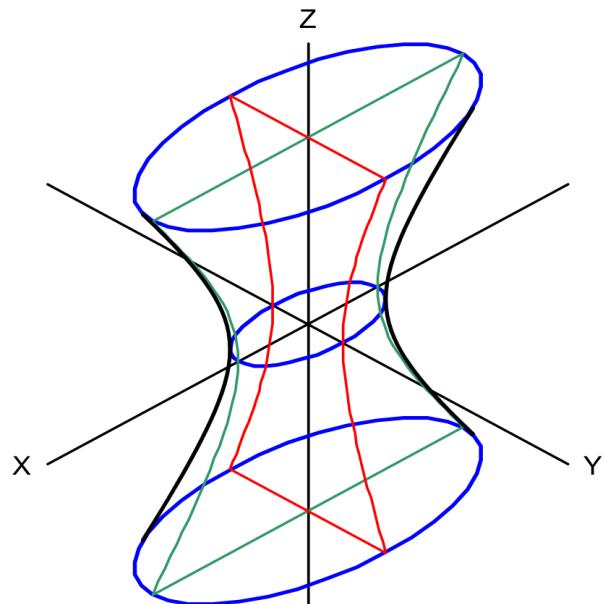
→ Hiperbolóide de una hoja

Representación implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Los cortes con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ dan como resultados:

$$\text{Corte con } x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperbolas

$$\text{Corte con } y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolas

$$\text{Corte con } z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipses

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x} = (a \cos u \cosh v, b \sin u \cosh v, c \sinh v), u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

El signo \ominus delante de la "z" hace que las funciones hiperbólicas sean útiles por la relación

$$\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1.$$

Comprobar que la representación paramétrica cumple la ecuación implícita.

→ Hiperboloides de dos hojas

Representación implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

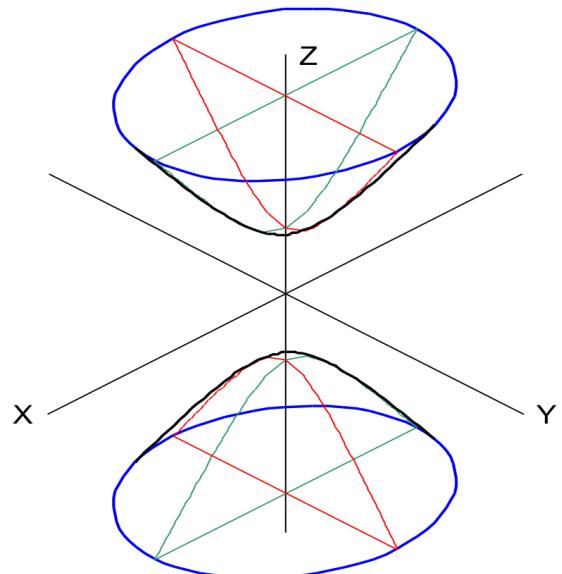
Los cortes con los planos $x=0, y=0$ y $z=0$ dan como resultados:

Corte con $x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Hiperbolas

Corte con $y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Hiperbolas

Corte con $z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ Sin solución

Corte con $z=c \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{c^2}{c^2}$ Elipses (Si $\frac{c^2}{c^2} > 1$)



Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x} = (a \cos u \sinh v, b \sin u \sinh v, \pm c \cosh v), u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

(Necesitamos el \pm para representar la hoja superior y la inferior del hiperbolóide)

Comprobar que la representación paramétrica cumple la ecuación implícita.

a.2 Paraboloides

→ Elíptico:

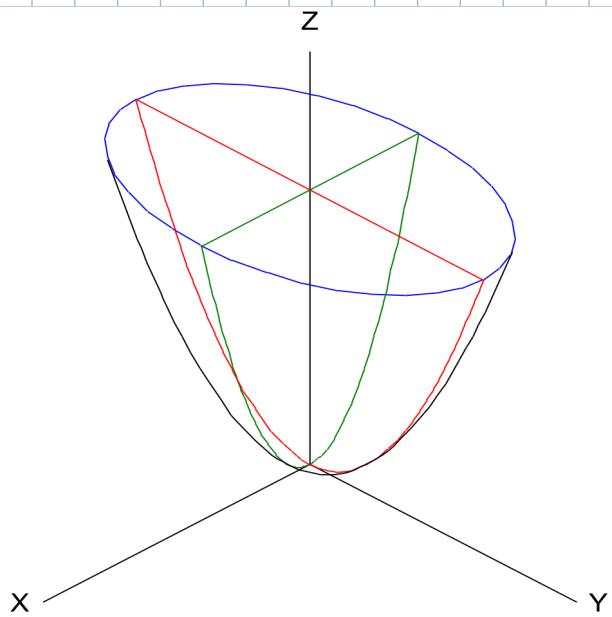
Representación implícita:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Los cortes con los planos $x=0, y=0$ y $z=0$ dan como resultado:

Corte con $x=0 \rightarrow z = \frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Paraboloides

Corte con $y=0 \rightarrow z = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow$ Paraboloides



Corte con $z=0 \rightarrow 0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow x=0, y=0 \rightarrow (0,0)$

Corte con $z=C \rightarrow C = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Elipses
($C>0$)

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x} = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right), u, v \in \mathbb{R} \quad (\text{parametrización explícita})$$

Otra posible parametrización es:

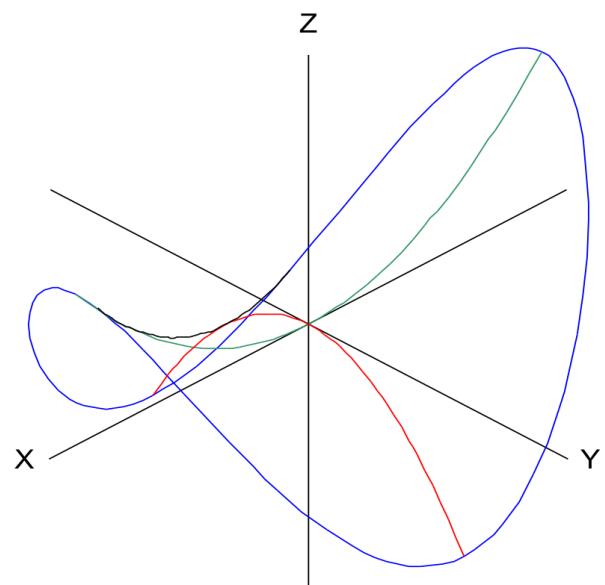
$$\bar{x} = (au \cos v, bu \sin v, u^2) \quad v \in [0, 2\pi], u > 0$$

→ Hiperbólico:

Representación implícita:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Los cortes con los planos $x=0, y=0$ y $z=0$ dan como resultados:



Corte con $x=0 \rightarrow z = -\frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Paraboloidas \cap

Corte con $y=0 \rightarrow z = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow$ Paraboloidas \cup

Corte con $z=0 \rightarrow 0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \rightarrow \frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b} \rightarrow$ rectas

Corte con $z=c \rightarrow C = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Hiperbolas

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x} = \left(\frac{a}{2}(u+v), \frac{b}{2}(u-v), uv \right), u, v \in \mathbb{R}$$

Otra posible parametrización es:

$$\bar{x} = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2) \quad v \in \mathbb{R}, u > 0$$

b) Cuádricas degeneradas

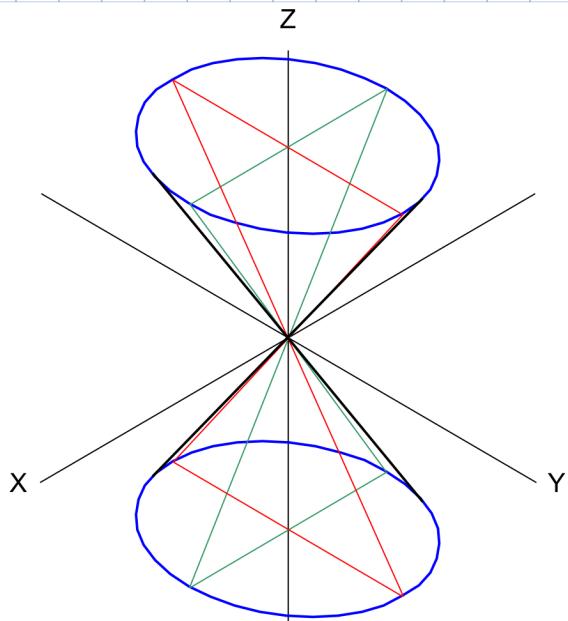
→ Conos

Representación implícita:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Los cortes con los planos

$x=0, y=0$ y $z=0$ dan como resultados:



Corte con $x=0 \rightarrow z = \pm \frac{y}{b} \rightarrow$ Rectas

Corte con $y=0 \rightarrow z = \pm \frac{x}{a} \rightarrow$ Rectas

Corte con $z=0 \rightarrow 0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Pto $(0,0)$

Corte con $x=c \rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow$ Elipses

Nota: esta representación implícita asume un sistema de referencia alineado con los ejes

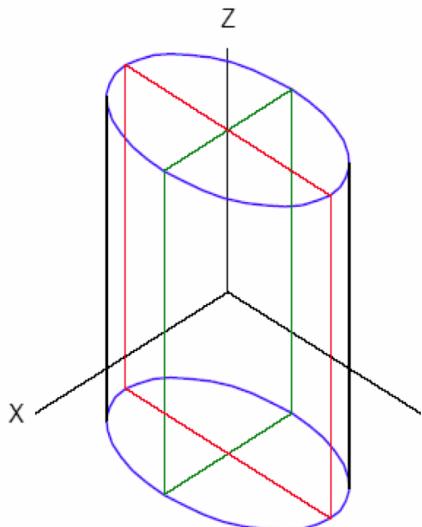
Ejemplo de representación paramétrica:

$$\bar{x} = (a \cos u, b \sin u, \pm v), u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

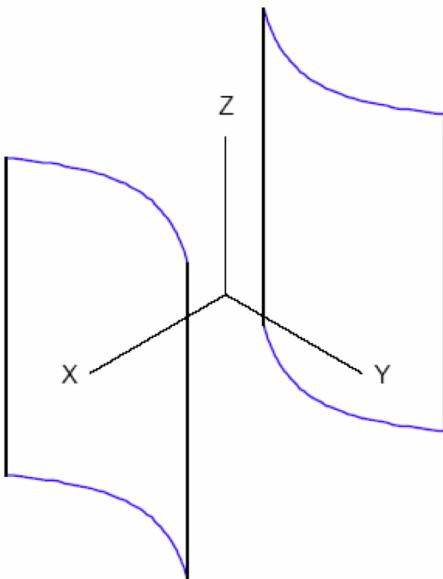
→ Cilindros

Tomamos una recta paralela al eje z y la desplazamos siguiendo una cónica.

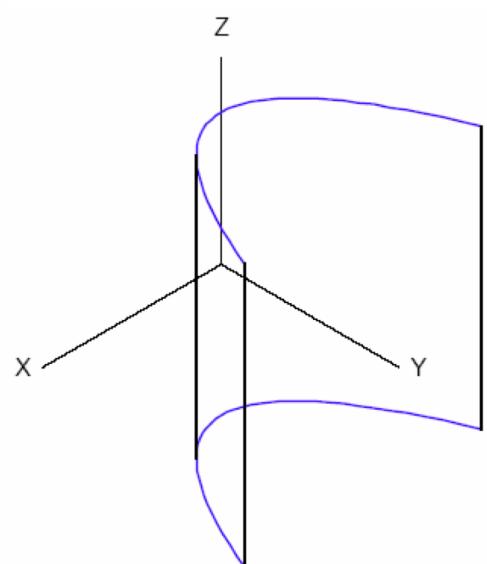
Cilindro elíptico



Cilindro hiperbólico



Cilindro parabólico



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 = 2py$$

Cilindro elíptico:

$$\bar{x} = (a \cos u, b \sin u, v) \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

Cilindro hiperbólico:

$$\bar{x} = (\pm a \cosh u, b \sinh u, v) \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Cilindro parabólico:

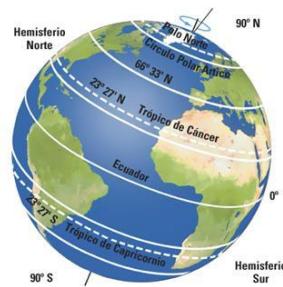
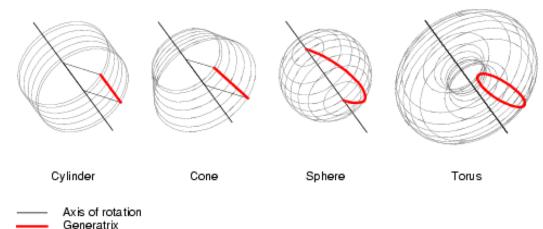
$$\bar{x} = \left(u, \frac{u^2}{2p}, v \right) \quad u, v \in \mathbb{R}$$

2 Superficies de revolución

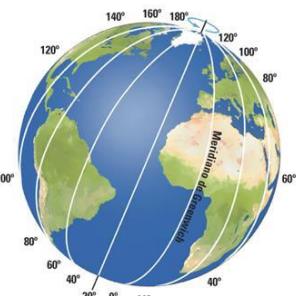
Generadas por una curva C (generatriz) al girar alrededor de una recta R (eje de revolución).

Se llaman paralelos a los cortes de la superficie con planos perpendiculares al eje de revolución.

Se llaman meridianos a los cortes de la superficie con planos que contienen al eje de revolución.



Paralelos



Meridianos

Veamos el caso particular de una superficie generada al girar una curva contenida en el plano $y=0$ alrededor del eje z .

Con estas restricciones, la curva se podrá representar como:

$$\bar{r}(t) = (x(t), 0, z(t))$$

Y la superficie será:

$$S(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t))$$

Construimos la superficie a base de circunferencias colocadas a altura $z = z(t)$ y de radio $r = x(t)$.

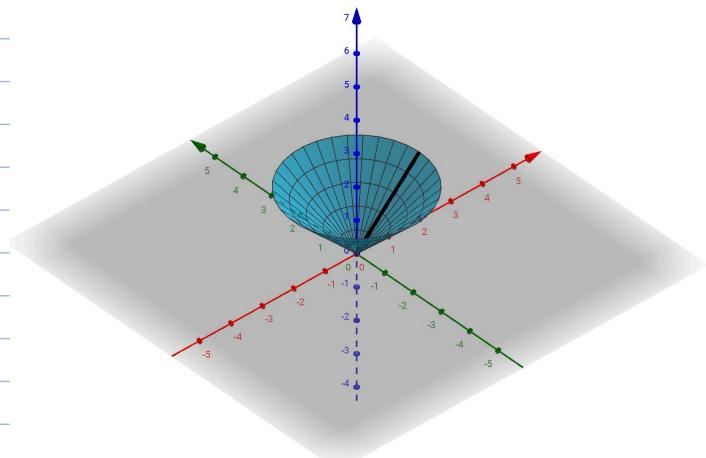
Ejemplos:

$$\bar{r}(t) = (t, 0, t)$$

(recta $z=x$)

$$S(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t)$$

Cono

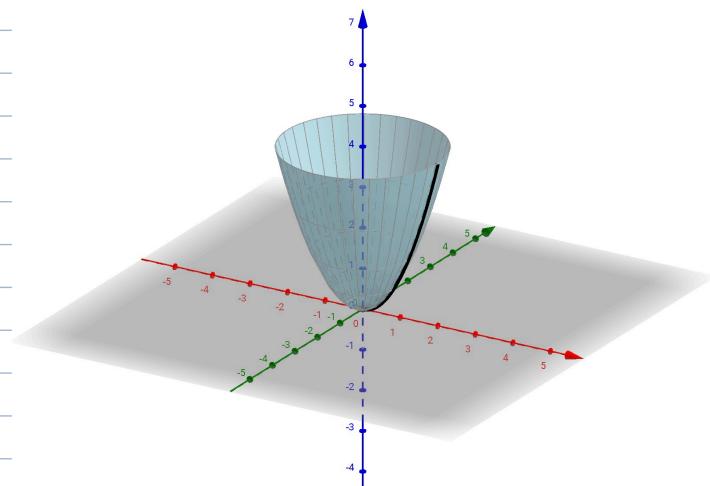


Paraboloid

$$\vec{r}(t) = (t, 0, t^2)$$

(recta $z = x$)

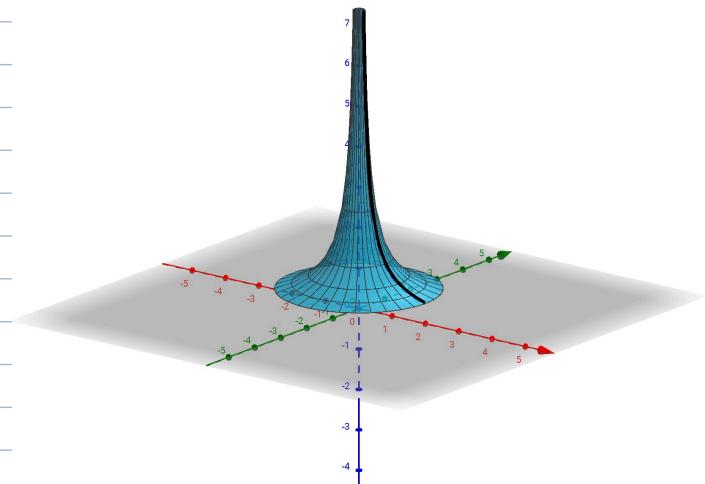
$$S(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t^2)$$



Cuerno de Gabriel

$$\vec{r}(t) = (t, 0, 1/t)$$

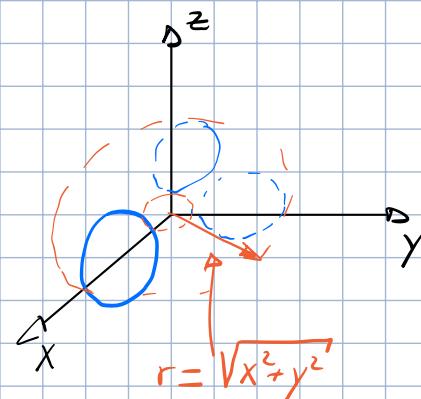
$$S(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, 1/t)$$



Si conocemos la curva en forma implícita, esto es
 $C: F(x, z) = 0, y = 0$, la superficie queda:

$$S: F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

A $z = \text{cte}$ obtengo circunferencias de diversos radios. Para $y = 0$ recupero la curva generatriz.



ESEMPIO

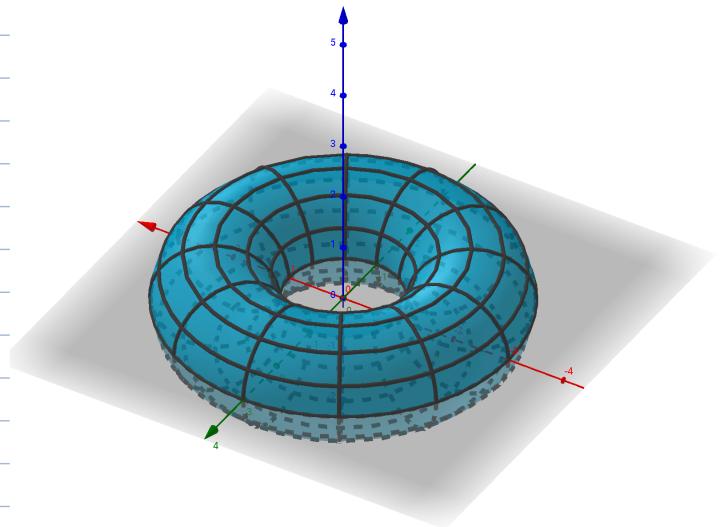
$$F(x, z) = 0 \rightarrow (x - 2)^2 + z^2 = 1$$

$$S = ((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2) = 1$$

TORO

Este mismo toro, puedo generarlo como antes, considerando:

$$\bar{r}(t) = (2 + \cos t, 0, \sin t)$$



$$S(t, \theta) = ([2 + \cos t] \cos \theta, [2 + \cos t] \sin \theta, \sin t)$$

a = Surface($\cos(u)(2 + \cos(v))$, $\sin(u)(2 + \cos(v))$, $\sin(v)$) ...

● → $\begin{pmatrix} \cos(u)(2 + \cos(v)) \\ \sin(u)(2 + \cos(v)) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$

+ Input...

3 Superficies de traslación

Generadas cuando una curva C_1 se traslada de modo que uno de sus puntos, P_0 , recorre otra curva C_2 . Si:

$$C_1: \bar{x} = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$$

$$C_2: \bar{y} = (y_1(u), y_2(u), y_3(u))$$

$$P_0 = \bar{x}_0$$

Nota: P_0 pertenece a ambas curvas C_1 y C_2

Entonces

$$S: S(u, v) = \bar{x}(u) + (\bar{y}(v) - \bar{x}_0)$$

$$\text{Si } v_0 / \bar{y}(v_0) - \bar{x}_0 = 0 \rightarrow S(u, v_0) = \bar{x}(u)$$

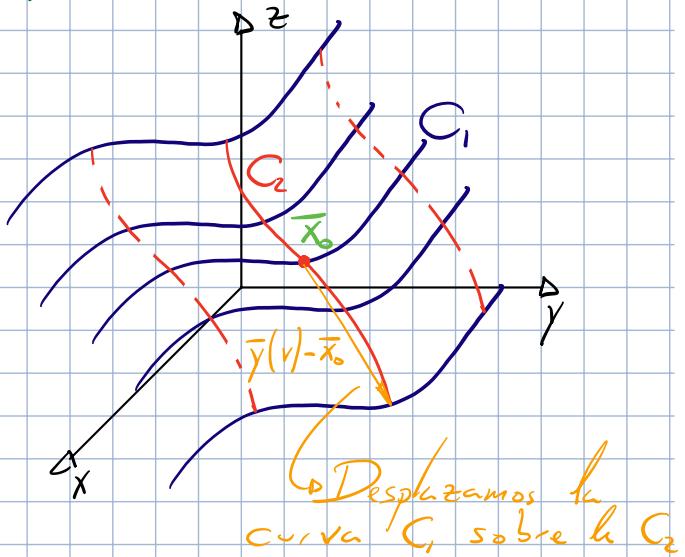
recupero la curva

Para otros valores distintos de v lo que implica es un desplazamiento en el espacio de $\bar{x}(u)$.

Notese que los paralelos de C_1 y C_2 son intercambiables.

Por construcción, las superficies de traslación cumplen que:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = 0$$



DEM:

$$S(u, v) = \bar{x}(u) + (\bar{y}(v) - \bar{x}_0)$$

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial u} = \bar{x}'(u) \rightarrow \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u \partial v} = 0$$

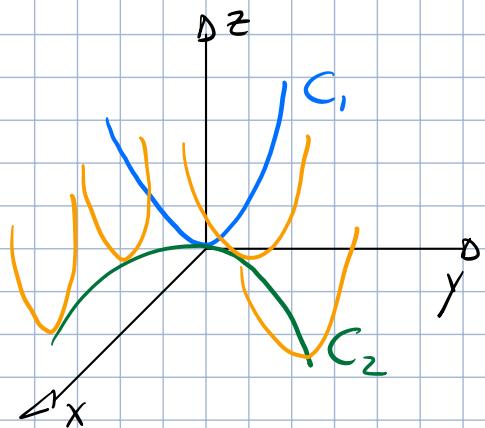
EJEMPLO. Parabolóide hiperbólico.

El parabolóide hiperbólico se construye trasladando una parábola sobre otra colocando perpendicularmente.

Por ejemplo:

$$\rightarrow C_1: \bar{x}(t) = (t, 0, t^2)$$

$$\rightarrow C_2: \bar{y}(t) = (0, t, -t^2)$$

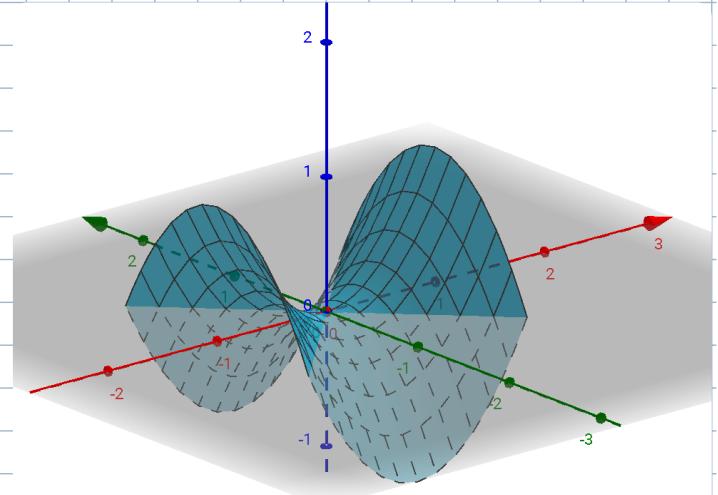


Puedo trasladar C_1 sobre C_2 para obtener la superficie. En este caso, $P_0 = (0, 0, 0)$.

$$S(u, v) = \bar{x}(u) + \bar{y}(v) - P_0 =$$

$$= (u, 0, u^2) + (0, v, -v^2) =$$

$$= (u, v, u^2 - v^2)$$



4 Superficies regladas

Son las formadas por rectas.

S es una superficie reglada si admite una parametrización del tipo $S(u, v) = \bar{y}(u) + v \bar{i}(u)$ donde $\bar{y}(u)$ es una curva C_1 (se llama curva directriz) e $\bar{i}(u)$ es un vector (llamado vector director).

Las rectas que forman S se apoyan sobre C_1 y tienen la dirección del vector director.

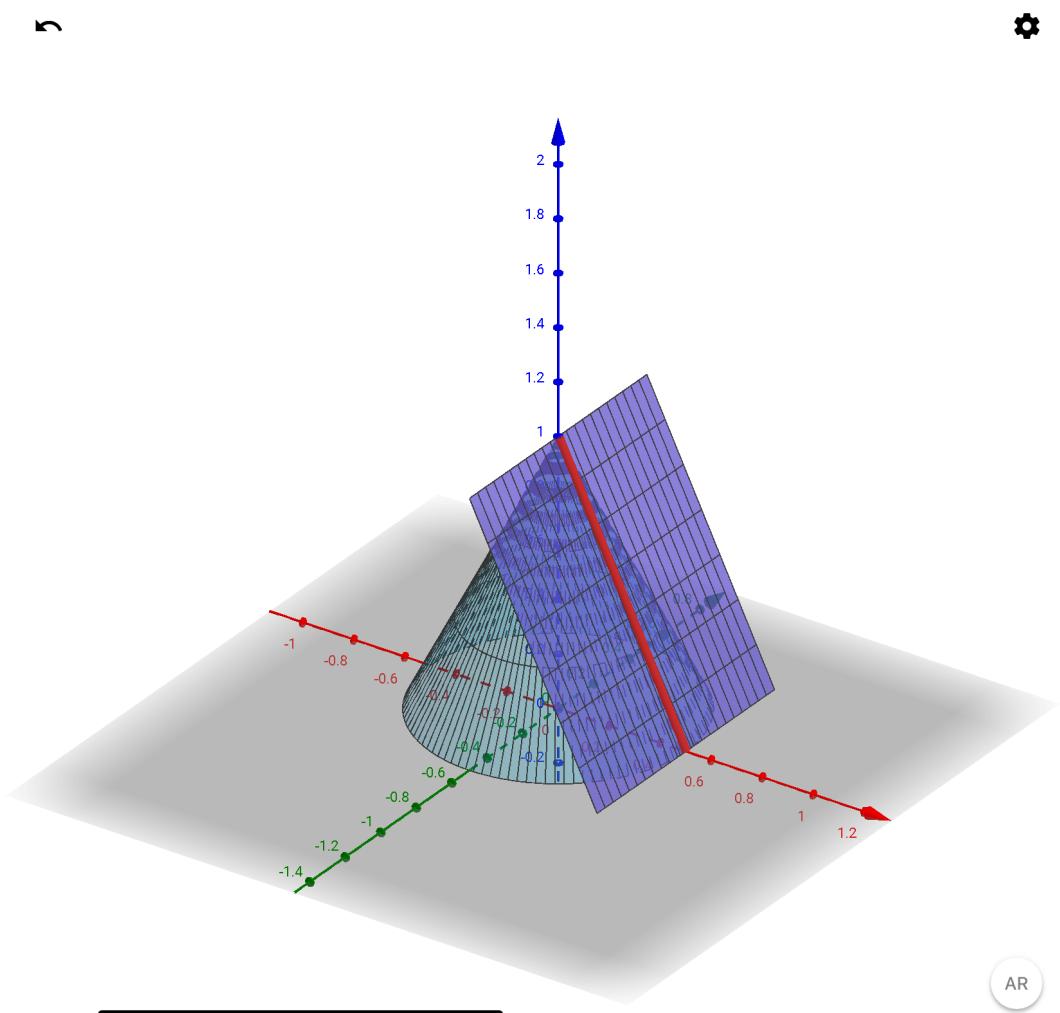
Clasificación de superficies regladas.

→ Desarrollables: el plano tangente no cambia al moverme sobre una de las rectas q-e forma la superficie.

Ejemplos: cilindros y conos.

"Puede construirse enrollando un papel"

≡	█	⊕	◀
$a = \text{Surface}\left(\frac{u}{2} \cos(v), \frac{u}{2} \sin(v), 1 - u\right)$...		
$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{u}{2} \cos(v) \\ \frac{u}{2} \sin(v) \\ 1 - u \end{pmatrix}$			
$u = 1$...		
<input type="radio"/> -5	—	5	▶
$b = \text{Curve}\left(\frac{u}{2}, 0, 1 - u, u, 0, 1\right)$...		
$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{2} \\ y = 0 \\ z = 1 - u \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1$			
$v = 1$...		
<input type="radio"/> -5	—	5	▶
$\text{urface}\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}, 1 - u, u, 0, 1, v, -1, 1\right)$...		
$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{u}{2} \\ \frac{v}{2} \\ 1 - u \end{pmatrix}$			
+ Input...			

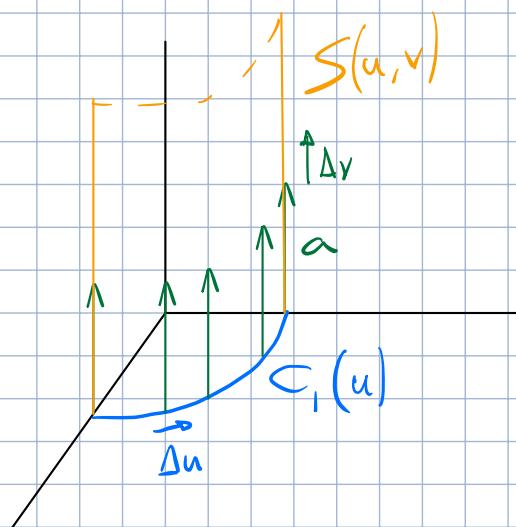


El plano tangente, es tangente a la superficie en todos los puntos de la recta.

Ejemplos:

*Cilindros: dado un vector $\bar{a} \neq \bar{0}$ y una curva $C_1: \bar{y} = \bar{y}(u)$ se llama cilindro de directriz C_1 y sus generatrices son rectas en la dirección de \bar{a} a las superficies que engendran las rectas que tienen la dirección de \bar{a} y cortan a C_1

$$S(u, v) = \bar{y}(u) + v\bar{a}$$



Veamos que la normal a la superficie $\bar{n} \propto S'_u \times S'_v$ no depende de v (y por tanto no depende de la posición en la que estemos sobre una recta) \rightarrow Plano tang. no cambia

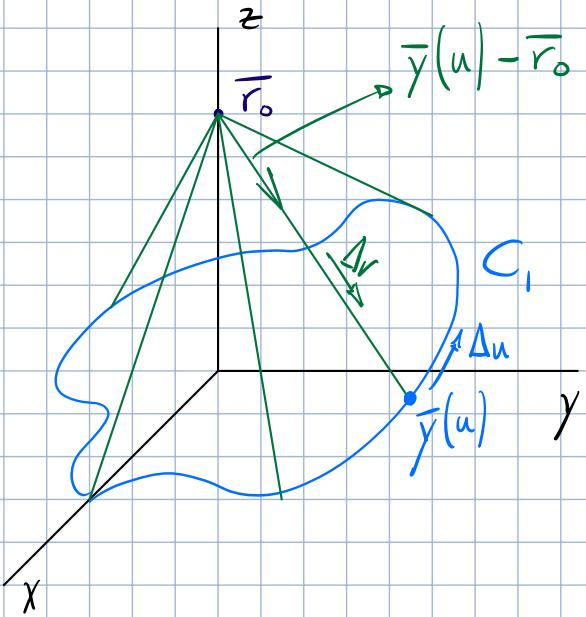
$$\begin{aligned} S'_u &= \bar{y}'(u) \\ S'_v &= \bar{a} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{n} \propto \bar{y}'(u) \times \bar{a} \\ \bar{a} \propto \text{proporcional a} \end{array} \right.$$

$\propto \equiv$ Proporcional a

*Conos: dado un punto \bar{r}_0 y una curva C_1 :

$\bar{y} = \bar{y}(u)$, se llama cono de vértice \bar{r}_0 y directriz C_1 a la superficie que engendran las rectas que pasan por \bar{r}_0 y cortan a C_1

$$S(u, v) = \bar{r}_0 + v(\bar{y}(u) - \bar{r}_0)$$



Veamos que la normal a la superficie $\bar{n} \propto S_u \times S_v$ no depende de v (y por tanto no depende de la posición en la que estemos sobre una recta) \rightarrow Plano tang. no cambia *

* $S_u = v \bar{y}'(u)$, $S_v = \bar{y}(u) - \bar{r}_0$

De modo que:

$$S_u \times S_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v y'_1(u) & v y'_2(u) & v y'_3(u) \\ y_1(u) - r_{01} & y_2(u) - r_{02} & y_3(u) - r_{03} \end{vmatrix} = v \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ y'_1(u) & y'_2(u) & y'_3(u) \\ y_1(u) - r_{01} & y_2(u) - r_{02} & y_3(u) - r_{03} \end{vmatrix}$$

y no tiene efecto sobre la dirección del vector normal. En $v=0$ la normal no está bien definida, como era de esperar (vértice del cono).

→ Alabeadas: si no son desarrollables. Es decir, en estos casos, el plano tangente cambia al moverme sobre la recta

Ejemplos:

*Hiperboloido hiperbólico:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Paraboloido hiperbólico:

$$x^2 - y^2 + z = 0$$

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} -u \\ u \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{bmatrix}$$

