(18.06 Lecture 17)

Base ortogonal $q_1, \dots, q_n$

Matriz ortogonal Q

Gram - Schmidt $A \to Q$

Dos vectores son ortonormales si:

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Construimos una matriz usando esos vectores como columnas:

$$Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Ahora escribimos $q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ en versión matricial

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} — & q_1 & — \\ & \vdots & \\ — & q_n & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

¡No es necesario que la matriz original sea cuadrada!

Por convención, se reserva el nombre de <u>matriz ortogonal</u> al caso en que la matriz sea <u>cuadrada</u>

Si Q es cuadrada, entonces $Q^TQ = I$ nos dice que $Q^T = Q^{-1}$.

Ejemplos:

Matrices de permutación

$$Q = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad Q^T = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$Q^TQ = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = I$$

Matrices de rotación

$$Q = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \qquad Q^T = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

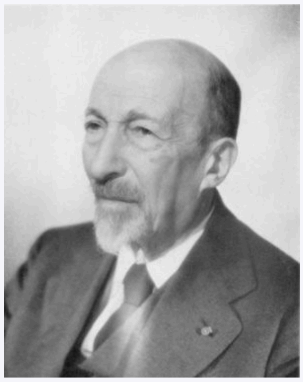
Matriz de Hadamard

Para que $q_i^Tq_i = 1$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

Jacques Hadamard

ForMemRS



Jacques Salomon Hadamard

Born	8 December 1865 Versailles, France
Died	17 October 1963 (aged 97) Paris, France
Nationality	French

El tamaño de estas matrices es 1, 2 o múltiplo de 4. Es condición necesaria, pero no asegura su existencia

H $n=428$ se encontró en 2005

H $n=668$ no se conoce

Se pueden construir de forma recursiva $\begin{bmatrix}H & H\\ H & -H\end{bmatrix}$

Función matlab → hadamard

Ejemplo rectangular $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad Q^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$QQ^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

¿Pq son interesantes las matrices ortogonales?

Recordemos la fórmula para proyectar en el espacio de las columnas (recordatorio Lecture 15-16) aplicada a una matriz ortogonal Q

$$P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QQ^T$$

Si Q es cuadrada, $Q^T = Q^{-1} \rightarrow P = I$. Veamos si tiene sentido:

Q $n \times n$

Además, columnas independientes, ya que son ortogonales

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_3 v_3 \longrightarrow v_3^T c_1 v_1 + v_3^T c_2 v_2 = v_3^T c_3 v_3$$

$$0 + 0 = c_3 \rightarrow c_3 = 0$$

Así que rank $Q = n \rightarrow \dim C(Q) = n$ y no hay que hacer ninguna proyección

Veamos si cumple las propiedades de una matriz de proyección (caso general) $P = QQ^T$

① Es simétrica: $P = P^T = (QQ^T)^T = QQ^T = P$ ✓

② Si proyecto dos veces, la segunda vez no hace nada

$$(QQ^T)(QQ^T) = QQ^T$$
$$QQ^T = QQ^T \quad ✓$$

Si aplicamos esto a la resolución de sistemas lineales (mínimos cuadrados) (Slides mínimos cuadrados)

$$A^TA\,\hat{x} = A^Tb \longrightarrow Q^TQ\,\hat{x} = Q^Tb \rightarrow \hat{x} = Q^Tb$$

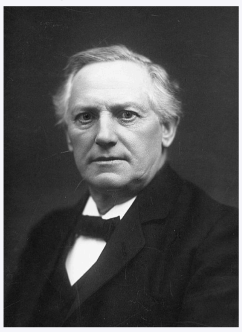
Esto es, cada componente de $\hat{x}_i = q_i^T b \rightarrow$ si tenemos una base ortogonal, la proyección sobre la componente i es $q_i^T b$, el producto escalar. Este resultado es muy importante y aparece en muchas ramas de las matemáticas.

Gram-Schmidt and QR

Recordatorio + extensión → QR

Dado un conjunto de vectores me da una base ortogonal.

Jørgen Pedersen Gram



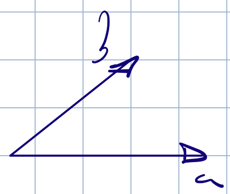
Born	27 June 1850 Nustrup, Duchy of Schleswig, Denmark
Died	29 April 1916 (aged 65) Copenhagen, Denmark

Erhard Schmidt

Erhard Schmidt (courtesy MFO)

Born	13 January 1876 Tartu, Governorate of Livonia (now Estonia)
Died	6 December 1959 (aged 83) Berlin

Vectores a, b (independientes) $\longrightarrow$ Los quiero convertir en ortogonales A, B

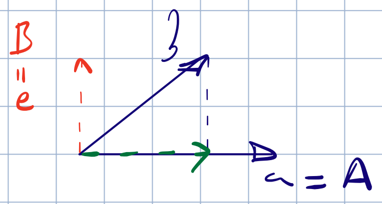


$\downarrow$

Al final los normalizo

$$q_1 = \frac{A}{\|A\|}, \quad q_2 = \frac{B}{\|B\|}$$

Todo el proceso se basa en una sencilla idea



$$B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A$$ $\longrightarrow$ repaso, fórmula proyección.

Comprobemos que $A \perp B$:

$$A^T B = A^T \left(b - \frac{A^T b}{A^T A} A \right) = 0$$

Parece que el proceso funciona con dos vectores, probemos ahora con 3.

Vectores independientes a, b, c $\longrightarrow$ Vectores ortogonales A, B, C $\longrightarrow$ Vectores ortonorm. $q_1 = \frac{A}{\|A\|}, q_2 = \frac{B}{\|B\|}, q_3 = \frac{C}{\|C\|}$

A y B los hacemos igual que antes

Ahora necesito C que sea $\perp$ a $\underline{A}$ y a $\underline{B}$

$$C = c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B$$

$C \perp A$ y $C \perp B$ (comprobadlo vosotros)

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} - \frac{\overset{A^Tb}{3}}{\underset{A^TA}{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B \perp A}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

¡No es lo mismo!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C(A) = C(Q)$$

¡Generan el mismo espacio!

B es comb. lineal de a y b

Igual que el proceso de eliminación resultaba en LU, el proceso de Gram-Schmidt resulta en QR

$A = LU$, $\boxed{A = QR}$ Gram-Schmidt en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^T q_1 & a_2^T q_1 \\ a_1^T q_2 & a_2^T q_2 \end{bmatrix}$$

R es triangular superior

Más detalles en la próxima clase