EXTREMOS III. Extremos condicionados

1 Introducción

Sabemos obtener extremos libres, e.g. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

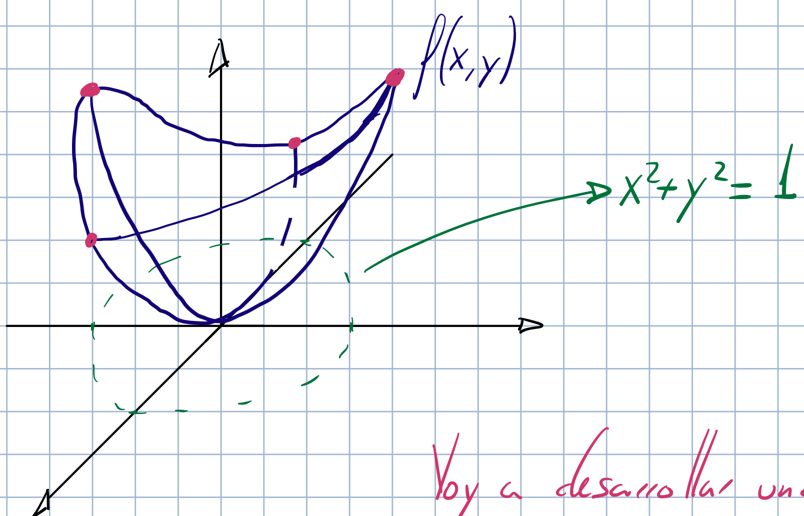
$$\nabla f = (2x, 4y) = (0,0) \longrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \Delta f > 0 \quad (\text{mínimo})$$

Vamos a estudiar ahora cómo resolver extremos sujetos a ligaduras. Condición a satisfacer por las variables.

EJEMPLO

Extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en puntos que cumplan $x^2+y^2=1$



$(1,0) \to f=1$

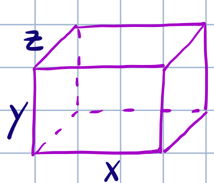
$(0,1) \to f=2$

$(-1,0) \to f=1$

$(0,-1) \to f=2$

Voy a desarrollar una técnica que me permita encontrar extremos sujetos a una restricción.

Ejemplo: ¿Qué dimensiones tiene una caja de volumen 1 con área mínima?



$$\text{Área} = f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz \quad \Big/ \quad f(x,y,z)\Big|_{V=xyz=1}$$

$$\text{Volumen} = xyz = 1$$

* Tenemos que obtener los extremos de $f(x)\Big|_C \neq$ extremos de $f(x)$ libres
* Se parece a lo que hacíamos con la frontera. Añadir una ligadura disminuye en 1 la dimensión del problema.

Opción 1

Podemos despejar / parametrizar la curva (no siempre es posible). Lo convertimos en un problema de extremos libres con una dim. menos.

Para el caso anterior:

Extremos de $f(x,y) = x^2+2y^2$ en puntos que cumplan $x^2+y^2=1$

Puede ir bien un cambio de variable a polares.

$$\left.\begin{array}{l} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta \end{array}\right\} \quad x^2(\theta)+y^2(\theta) = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Se cumple de forma automática la ligadura.

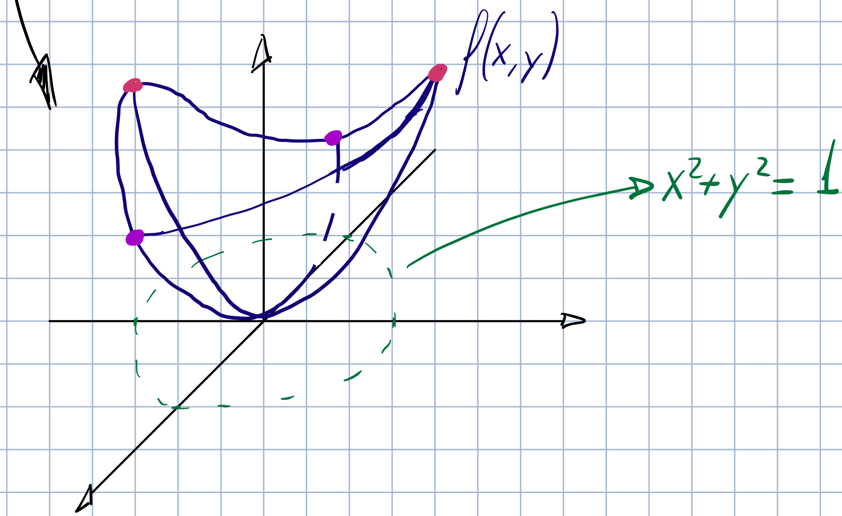
$$f(x,y)\Big|_C = f(x(\theta), y(\theta)) = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 1+\sin^2\theta = f_C(\theta)$$

Ahora es un problema de cálculo de extremos estándar. Busco los puntos críticos.

$$f_C'(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta = 0 \begin{cases} \cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \xrightarrow{(x,y)} (0,1);\ (0,-1) \\ \sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0,\ \pi \rightarrow (1,0);\ (-1,0) \end{cases}$$

$$f_c''(\theta) = -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta$$

- $\theta = 0, \pi \longrightarrow f_c''(\theta) = 2 > 0$ (mínimos)
- $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \longrightarrow f_c''(\theta) = -2 < 0$ (máximos)



Opción 2

Esta opción es válida incluso si no podemos introducir la ligadura en la función a optimizar.

Ejemplo $\quad f(x,y) = x+y$

$$C \equiv xe^{y} + ye^{x} = 0$$

Para estos casos tengo que usar el método de los multiplicadores de Lagrange

2 Método de los multiplicadores de Lagrange

$\mathbb{R}^2$

Del ejemplo anterior concluimos que los extremos de $f(x,y): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ condicionados a $g(x,y)=0$ son los puntos críticos de $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con
$(x,y;\lambda) \longrightarrow \mathcal{L}(x,y;\lambda)$

$$\boxed{\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)}$$

Proof. Los puntos críticos de esta función son $\nabla\mathcal{L}=0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f'_x + \lambda g'_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f'_y + \lambda g'_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x,y) = 0$$

(Recordamos que esto funciona siempre que $\nabla g \neq 0$)

Ejemplo:

Extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en puntos que cumplan $x^2+y^2=1$

Función a optimizar: $f(x,y) = x^2 + 2y^2$
Restricción: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\rightarrow$ 3 ecuaciones: $f'_x(x_0,y_0) = \lambda g'_x(x_0,y_0)$

$f'_y(x_0,y_0) = \lambda g'_y(x_0,y_0)$

$g(x_0,y_0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2+y^2-1 &= 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} 2x(1-\lambda) &= 0 \\ 2y(2-\lambda) &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

3 ecs con 3 incógnitas. Resolvemos:

$$x=0 \to \begin{aligned} &\cancel{2x(1-\lambda)=0} \\ &2y(2-\lambda)=0 \longrightarrow \pm 2(2-\lambda)=0 \to \lambda=2 \\ &x^2+y^2=1 \to y=\pm 1 \end{aligned}$$

$$y=0 \to \begin{aligned} &2x(1-\lambda)=0 \longrightarrow \pm 2(1-\lambda)=0 \to \lambda=1 \\ &\cancel{2y(2-\lambda)=0} \\ &x^2+y^2=1 \to x=\pm 1 \end{aligned}$$

Soluciones: $(0,\pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$ (Valor de λ no es importante)

→ Candidatos a extremo.

¡Solo lo mismo que sustituyendo!

¿Magia? Ya veremos...

$\mathbb{R}^p$ Esto es extensible a un caso más general $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}: \begin{aligned} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;\lambda) &\longrightarrow \mathcal{L}(x;\lambda) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(x;\lambda) = f(x) + \lambda\, g(x)}$$

$x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_p]$

Multiplicador de Lagrange

$$\text{p ecuaciones}\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = f'_{x_1} + \lambda g'_{x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = f'_{x_2} + \lambda g'_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_p} = f'_{x_p} + \lambda g'_{x_p} = 0 \end{cases} \qquad \text{+1 ecuación}\left\{ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x) = 0 \right.$$

p+1 ecuaciones para
p+1 incógnitas $[x_1, x_2, \dots, x_p] + \lambda$

Si en vez de una tengo varias restricciones, puedo seguir usando la misma metodología añadiendo multiplicadores.

Puntos críticos de $f(x)$ restringido a $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$.
A través del teorema de la función implícita llegamos a:

$$\mathcal{L}(x; \lambda, \mu) = f(x) + \lambda g(x) + \mu h(x) \longrightarrow \nabla f = -\lambda \nabla g - \mu \nabla h$$

$\hookrightarrow x = [x_1, x_2, \dots, x_p]$

example 5 Find the extreme points of $f(x, y, z) = x + y + z$ subject to the two conditions $x^2 + y^2 = 2$ and $x + z = 1$.

solution Here there are two constraints:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{and} \quad g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

Solución:

Thus, we must find x, y, z, λ_1, and λ_2 such that

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z),$$
$$g_1(x, y, z) = 0, \quad \text{and} \quad g_2(x, y, z) = 0.$$

Computing the gradients and equating components, we get

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1, \\ x^2 + y^2 &= 2, \quad \text{and} \quad x + z = 1. \end{aligned}$$

These are five equations for x, y, z, λ_1, and λ_2. From the third equation, $\lambda_2 = 1$, and so $2x\lambda_1 = 0$, $2y\lambda_1 = 1$. Because the second implies $\lambda_1 \neq 0$, we have $x = 0$. Thus, $y = \pm\sqrt{2}$ and $z = 1$. Hence, the possible extrema are $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. By inspection, $(0, \sqrt{2}, 1)$ gives a relative maximum, and $(0, -\sqrt{2}, 1)$ a relative minimum.

The condition $x^2 + y^2 = 2$ implies that x and y must be bounded. The condition $x + z = 1$ implies that z is also bounded. If follows that the constraint set S is closed and bounded. By Theorem 7 it follows that f has a maximum and minimum on S that must therefore occur at $(0, \sqrt{2}, 1)$ and $(0, -\sqrt{2}, 1)$, respectively. ▲

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}'_x = 0 & f'_x + \lambda_1 g'_{1x} + \lambda_2 g'_{2x} = 0 & & 1 + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 & f'_y + \lambda_1 g'_{1y} + \lambda_2 g'_{2y} = 0 & & 1 + \lambda_1 2y = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 0 & f'_z + \lambda_2 g'_z + \lambda_2 g'_{2z} = 0 & & 1 + \lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}'_{\lambda_1} = 0 & g_1 = 0 & & x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ \mathcal{L}'_{\lambda_2} = 0 & g_2 = 0 & & x + z - 1 = 0 \end{array}$$

$\lambda_2 = -1 \rightarrow 2x\lambda_1 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow z = 1$

$2y\lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_1 \neq 0$

Ejemplo.

Distancia mínima de $P(1,0)$ a $y^2 = 4x$.

$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 \longrightarrow$ distancia de todos los puntos del plano (x,y) al $P(1,0)$

$g(x,y) = y^2 - 4x \longrightarrow$ restricción

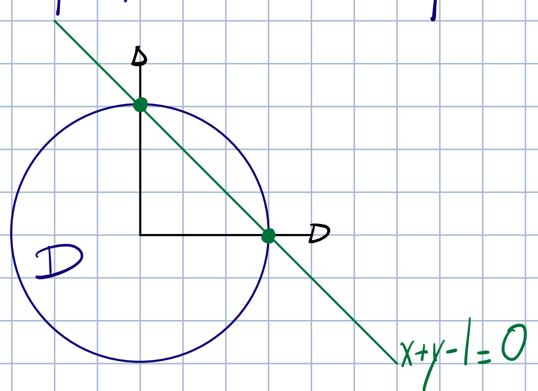
$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(y^2 - 4x)$

$\frac{\partial}{\partial x}: \; 2(x-1) - 4\lambda = 0 \longrightarrow 2x - 4\lambda = 2$ $\quad y = 0 : x = 0, \; \lambda = -2$

$\frac{\partial}{\partial y}: \; 2y + 2y\lambda = 0 \longrightarrow 2y(1+\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda = -1 : x = -1, \; y = \cancel{\exists}$

$\frac{\partial}{\partial \lambda}: \; y^2 = 4x$

Ejemplo Calcular extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ condicionado a $x + y - 1 = 0$



$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$

$\nabla \mathcal{L} = 0: \; \left.\begin{array}{l} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right| \; \begin{array}{l} x = y = \frac{1}{2} \\ \lambda = -1 \end{array}$

La función está definida en D compacto. Tengo que estudiar los puntos frontera que además cumplen la restricción: $(1,0)$ y $(0,1)$

x	y	f	tipo
½	½	½	mínimo
1	0	1	máximo
0	1	1	máximo

Obtengo el tipo comparando los distintos valores.

3 Extremos condicionados. Condiciones necesarias (Dem $\mathbb{R}^2$)

Sea $f(x,y): D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y sea $g(x,y)=0$ con $g(x,y): D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ambas de clase C^1.

Obtener extremos (x_0,y_0) de $f(x,y)$ condicionada a $g(x,y)=0$, $f(x,y)\Big|_{g(x,y)=0}$.

→ El extremo es un punto que cumple $g(x_0,y_0)=0$

→ $g(x,y)=0$ es una ecuación que relaciona ambas variables.

¿Puedo despejar localmente una en función de la otra?

Teorema de la función implícita

$g\in C^1$

$g(x_0,y_0)=0$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0 \longrightarrow y=y(x),\quad y'(x_0)=-\frac{\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0 \longrightarrow x=x(y),\quad x'(y_0)=-\frac{\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}}{\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}}$$

Si $\nabla g(x_0,y_0)\neq(0,0)$ entonces puedo despejar alguna en función de la otra

Extremos condicionados. Supongamos $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, entonces localmente $y = y(x)$. $f(x,y)\Big|_C = f(x, y(x)) = f_c(x)$ → Lo he convertido en un problema de extremos libres.

Puedo obtener pts críticos: $f_c'(x) = 0 = \frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right) =$

$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = 0$, o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left[-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right] = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{f_x'}{g_x'} = \frac{f_y'}{g_y'} \equiv \lambda}$$

→ Defino un factor de proporcionalidad λ

Es decir:

$$\left.\begin{aligned} f_x' &= \lambda g_x' \\ f_y' &= \lambda g_y' \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\nabla f = \lambda \nabla g}$$

* Son paralelos
* Ojo $\nabla g \neq [0\ 0]$

Resumen: obtener pts críticos.

1. Extremos libres $f(x,y)$: $\nabla f = (f_x', f_y') = (0,0)$

→ 2 ecuaciones $f_x'(x_0, y_0) = 0$, $f_y'(x_0, y_0) = 0$

→ 2 incógnitas: x_0, y_0

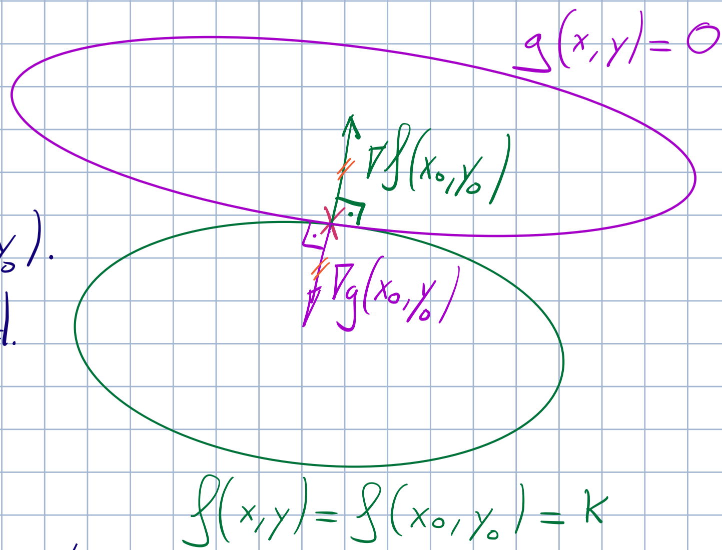
② Extremos $f(x,y)$ condicionados a $g(x,y)=0$ (con $\nabla g \neq 0$).

Introducimos una nueva incógnita, λ, tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$

→ 3 ecuaciones:
$$f'_x(x_0,y_0) = \lambda g'_x(x_0,y_0)$$
$$f'_y(x_0,y_0) = \lambda g'_y(x_0,y_0)$$
$$g(x_0,y_0) = 0$$

→ 3 incógnitas (x_0, y_0, λ)

$\mathbb{R}^2$ Significado geométrico



La curva de nivel de $f(x,y)$ que pasa por el extremo condicionado es $f(x,y)=K=f(x_0,y_0)$. El gradiente $\nabla f(x,y)$ es perpend. a las curvas de nivel.

La restricción $g(x,y)=0$ es una curva de nivel de $g(x,y)$. El gradiente $\nabla g(x_0,y_0)$ es perpendicular a la restricción.

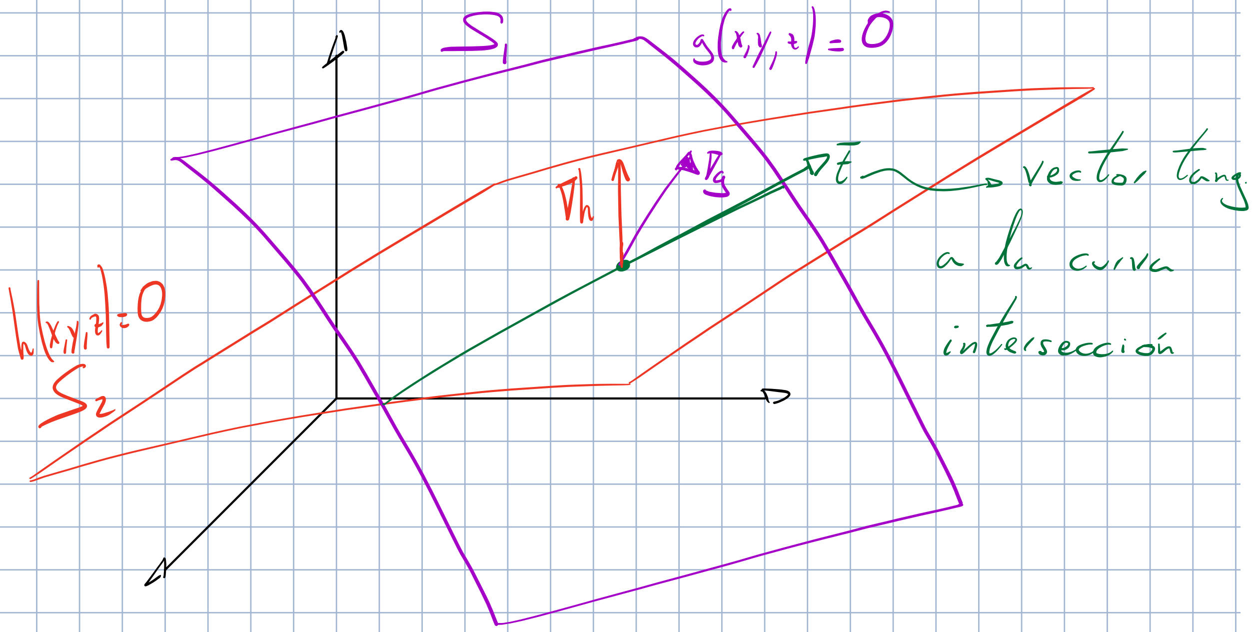
En (x_0,y_0) las normales a la curva de nivel y a la restricción son paralelas. Esto significa que la curva de nivel de $f(x,y)$ tiene un gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$ que es $\perp$ a la restricción.

$\mathbb{R}^3$

Significado geométrico, caso $g, h \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$g(x,y,z) = 0 \longrightarrow$ Superficie de nivel
$h(x,y,z) = 0 \longrightarrow$ Superficie de nivel

Intersección de dos superficies $\longrightarrow$ curva



$\nabla f = -\lambda \nabla g - \mu \nabla h \longrightarrow$ Significa que el ∇f apunta en dirección perpendicular a la curva intersección de las superficies de nivel que representan las restricciones.

EJEMPLO

Hallar los pts de $x^2+y^2+xy=3$ cuya distancia al origen es mínima / máxima

Distancia al origen $f(x,y)=x^2+y^2$

Restricción $g(x,y)=x^2+y^2+xy-3=0$

$$\mathcal{L}=x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$$

$$\nabla\mathcal{L}=0:\quad \begin{cases} 2x+\lambda(2x+y)=0 \\ 2y+\lambda(2y+x)=0 \\ x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$$

$$\lambda=-\frac{2x}{2x+y}=-\frac{2y}{2y+x}$$

$$2(2y+x)x=2(2x+y)y$$

$$2xy+x^2=2xy+y^2$$

$$x^2=y^2\longrightarrow \begin{array}{ll} x=y & (\mathrm{I}) \\ x=-y & (\mathrm{II}) \end{array}$$

(I) $x=y\rightarrow x^2+y^2+xy-3=0$

$\rightarrow 3x^2-3=0\longrightarrow x=\pm1\longrightarrow(1,1),\ (-1,-1),\ f(\pm1,\pm1)=2$

mínimo

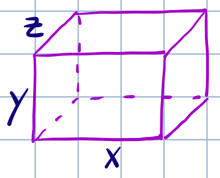
(II) $x=-y\rightarrow x^2+y^2+xy-3=0$

$\rightarrow x^2-3=0\longrightarrow x=\pm\sqrt{3}\longrightarrow(\sqrt{3},-\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3},\sqrt{3}),\ f(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})=6$

máximo

Con lo que tengo puedo encontrar puntos críticos pero no clasificarlos. Hasta ahora los hemos estado clasificando comparándolos entre sí.

Ejemplo: ¿Qué dimensiones tiene una caja de volumen 1 con área mínima?



$$\text{Área} = f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz \qquad \Big/ \quad f(x,y,z)\Big|_{V = xyz = 1}$$
$$\text{Volumen} = xyz = 1$$

$$\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = 2xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 1)$$

$$\nabla \mathcal{L} = 0: \quad \begin{aligned} 2y + 2z + \lambda yz &= 0 \\ 2x + 2z + \lambda xz &= 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy &= 0 \\ xyz &= 1 \end{aligned}$$

Intento que xyz aparezca en las tres primeras ecuaciones (sé que $xyz = 1$).

$$\begin{aligned} x(2y + 2z + \lambda yz &= 0) &\longrightarrow\quad 2xy + 2xz &= -\lambda \\ y(2x + 2z + \lambda xz &= 0) & 2xy + 2yz &= -\lambda \\ z(2x + 2y + \lambda xy &= 0) & 2xz + 2yz &= -\lambda \end{aligned}$$

$$2xy = 2xz \qquad (\text{si } x \neq 0, \text{ que debe serlo para } xyz = 1)$$
$$y = z$$

$$2xz = 2yz$$
$$x = y$$

De modo que $x = y = z = 1$ $\longrightarrow$ ¡No sabemos si esto es área máxima o mínima!

En este problema, podríamos haber sustituido, llegando a:

$$f(x,y) = 2xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$$

Se deja como problema para casa comprobar si lo que encontramos es un máximo o un mínimo. (Criterio del Hessiano).

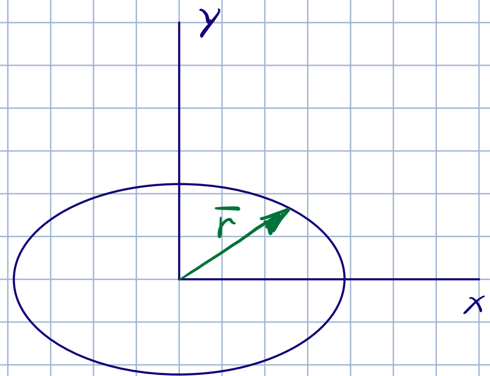
Ejemplo:

Calcúlese la distancia máxima y mínima al origen de coordenadas de los puntos de la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Se verifica que:

Seleccione una opción:

- 1. La distancia mínima es $d_{min} = 1$ y se alcanza en los puntos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- 2. La distancia máxima es $d_{max} = 4$ y se alcanza en los puntos $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- 3. La distancia mínima es $d_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y se alcanza en los puntos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
- 4. La distancia máxima es $d_{max} = 2$ y se alcanza en los puntos $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



Puntos de la elipse: $\bar{x} \,/\, 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

Distancia de un pto al origen: $d^2 = \|\bar{x}\|^2 = x^2 + y^2$

$d^2_{max/min} \longrightarrow \frac{\partial d^2}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial d^2}{\partial y} = 2y \longrightarrow$ cuanto más lejos, más grande.

Extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ condicionados a

$g(x,y) \longrightarrow 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$.

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8)$$

$\nabla \mathcal{L} = 0; \quad 2x + \lambda(10x + 6y) = 0$

$2y + \lambda(6x + 10y) = 0$

$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

$\lambda = \dfrac{-2x}{10x + 6y} \qquad \lambda = \dfrac{-2y}{6x + 10y} \longrightarrow$ Esto es válido siempre que los denominadores sean $\neq 0$

$$2y + \frac{-2x}{10x + 6y}(6x + 10y) = 0$$

$$2y(10x + 6y) - 2x(6x + 10y) = 0$$

$$\cancel{20xy} + 12y^2 - 12x^2 \cancel{- 20xy} = 0$$

$$\boxed{y^2 = x^2}$$

$$\boxed{y = \pm x}$$

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

$y = x \rightarrow 5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0 \rightarrow 16x^2 = 8$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \quad y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$d_{min} = 1$

$y = -x \rightarrow 5x^2 - 6x^2 + 5y^2 - 8 = 0$

$4x^2 - 8 = 0$

$x_{max} = \pm\sqrt{2} \rightarrow y_{max} = \mp\sqrt{2} \rightarrow d_{max} = 2$

example 6 Find the absolute maximum of $f(x, y) = xy$ on the unit disc D, where D is the set of points (x, y) with $x^2 + y^2 \leq 1$.

solution By Theorem 7 in Section 3.3, we know the absolute maximum exists. First, we find all the critical points of f in U, the set of points (x, y) with $x^2 + y^2 < 1$. Because

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

$(0, 0)$ is the only critical point of f in U. Now consider f on the unit circle, the level curve $g(x, y) = 1$, where $g(x, y) = x^2 + y^2$. To locate the maximum and minimum of f on C, we write down the Lagrange multiplier equations: $\nabla f(x, y) = (y, x) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(2x, 2y)$ and $x^2 + y^2 = 1$. Rewriting these in component form, we get

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Thus,

$$y = 4\lambda^2 y,$$

or $\lambda = \pm 1/2$ and $y = \pm x$, which means that $x^2 + x^2 = 2x^2 = 1$ or $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. On C we compute four candidates for the absolute maximum and minimum, namely,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

The value of f at both $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ and $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ is $1/2$. The value of f at $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ and $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ is $-1/2$, and the value of f at $(0, 0)$ is 0. Therefore, the absolute maximum of f is $1/2$ and the absolute minimum is $-1/2$, both occurring on C. At $(0, 0)$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 0$ and $\partial^2 f/\partial x\, \partial y = 1$, so the discriminant is -1 and thus $(0, 0)$ is a saddle point. ▲

4 Clasificación de extremos condicionados. ¡Avanzado. No entra en examen!

Sea un problema de extremos condicionados en un entorno U de x_0.

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

Con $g(\overline{x}_0) = \overline{0}$ y $\text{rango}\left(Jg(\overline{x}_0) \right) = p$

Para cumplir TFI garantiza que algún $\left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \right| \neq 0$

Un punto crítico de la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(\overline{x}; \overline{\lambda}) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, g_i(\overline{x})$$

llamando $\Delta \overline{x} = \overline{x} - \overline{x}_0$ tenemos que:

$d^2\mathcal{L}(\overline{x}_0; \overline{\Delta x})\Big\vert_{dg(\overline{x}_0; \overline{\Delta x}) = Jg(\overline{x}_0) \cdot \Delta x = 0}$	Forma función $f(\overline{x})$ condicionada a $g(\overline{x}) = \overline{0}$
Definida positiva	Mínimo relativo
Definida negativa	Máximo relativo
Indefinida	No es extremo
Semidef. positiva	Ni idea
Semidef negativa	Ni idea

Ejemplo

Extremos de $f(x,y,z) = z^2 - 2xy$ condicionados a

$g(x,y,z) = 2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$

$$\mathcal{L}(\bar{x};\lambda) = z^2 - 2xy + \lambda(2x^3 + 2y^3 + z^3 - 4)$$

$\nabla\mathcal{L} = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} -2y + 6x^2\lambda = 0 \\ -2x + 6y^2\lambda = 0 \end{array}\right| \lambda = \frac{2y}{6x^2} = \frac{2x}{6y^2} \longrightarrow 12x^3 = 12y^3 \longrightarrow x = y \; ; \; \lambda = \frac{1}{3x}$$

$$2z + 3z^2\lambda = 0 \quad z(2 + 3z\lambda) = 0 \left| \begin{array}{l} z = 0 \;(\mathrm{I}) \\ 2 + 3z\lambda = 0 \longrightarrow 2 + \frac{z}{x} = 0 \end{array}\right.$$

$$z = -2x \;(\mathrm{II})$$

$x=y$

$$2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$$

$$4x^3 + z^3 = 4$$

(I) $z = 0 \longrightarrow x = 1,\; y = 1,\; \lambda = \frac{1}{3} \qquad (1,1,0;1/3)$

(II) $z = -2x \longrightarrow 4x^3 - 8x^3 = 4 \longrightarrow x = -1,\; y = -1,\; \lambda = -\frac{1}{3} \qquad (-1,-1,2;-1/3)$

$z = 2$

Procedo a clasificar estos dos puntos.

Punto $(1,1,0;1/3)$

1. Calculo el subespacio $dg(\bar{x}_0;\Delta\bar{x}) = 0$.

$$dg(\bar{x}_0;\Delta\bar{x}) = 6x_0^2\Delta x + 6y_0^2\Delta y + 3z_0^2\Delta z$$

$$dg(1,1,0;\Delta\bar{x}) = 6\Delta x + 6\Delta y = 0 \longrightarrow \Delta x = -\Delta y$$

② Calculo la forma cuadrática.

$$d^2\mathcal{L}(\bar{x}_0;\overline{\Delta x}) = \frac{1}{2}[\Delta x, \Delta y, \Delta z]\begin{bmatrix} 12x_0\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 12y_0\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+6z_0\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

③ Evalúo en el pto $(\bar{x}_0;\lambda) = (1,1,0;\,1/3)$

$$\frac{1}{2}[\Delta x, \Delta y, \Delta z]\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

④ Restringo al subespacio $\Delta x = -\Delta y \quad (d_g = 0)$

$$\frac{1}{2}[\Delta x, \Delta y, \Delta z]\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\Delta x^2 + 4\Delta y^2 + 2\Delta z^2 - 4\Delta x\Delta y\right) = \quad \Delta y = -\Delta x$$

$$= 2\Delta x^2 + 2\Delta x^2 + 2\Delta x^2 + \Delta z^2 = 6\Delta x^2 + \Delta z^2$$

Forma cuadrática definida positiva $\rightarrow$ mínimo relativo.

Punto $(-1,-1,2;-1/3)$

① Calculo el subespacio $dg(\bar{x}_0;\Delta\bar{x})=0$.

$$dg(\bar{x}_0;\Delta\bar{x}) = 6x_0^2\Delta x + 6y_0^2\Delta y + 3z_0^2\Delta z$$

$$dg(-1,-1,2;\Delta\bar{x}) = 6\Delta x + 6\Delta y + 12\Delta z = 0 \rightarrow \Delta x + \Delta y + 2\Delta z = 0$$

② Calculo la forma cuadrática.

$$d^2\mathcal{L}(\bar{x}_0;\Delta\bar{x}) = \frac{1}{2}[\Delta x, \Delta y, \Delta z]\begin{bmatrix} 12x_0\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 12y_0\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+6z_0\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{bmatrix}$$

③ Evalúo en el pto $(\bar{x}_0;\lambda)=(-1,-1,2;-1/3)$

$$[\Delta x, \Delta y, \Delta z]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{bmatrix}$$

④ Restringo al subespacio $\Delta x + \Delta y + 2\Delta z = 0$ $(dg=0)$

$$2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - \Delta z^2 - 2\Delta x\Delta y =$$

$$= 2(-\Delta y - 2\Delta z)^2 + 2\Delta y^2 - \Delta z^2 - 2(-\Delta y - 2\Delta z)\Delta y =$$

$$= 2(\Delta y^2 + 4\Delta z^2 + 4\Delta y\Delta z) + 2\Delta y^2 - \Delta z^2 + 2\Delta y^2 + 4\Delta y\Delta z =$$

$$= 6\Delta y^2 + 7\Delta z^2 + 12\Delta y\Delta z =$$

$$= [\Delta y \;\; \Delta z]\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta y \\ \Delta z\end{bmatrix}$$

$A_1 = 6 > 0$

$A_2 = 42 - 36 > 0$

definida positiva → mínimo

Also pivots for def ⊕

Avanzado: existe una forma más elegante de pasar de la forma cuadrática sin restringir a la restringida.

$$d^2\mathcal{L}(\bar{x}_0;\overline{\Delta x})\Big|_{dg(\bar{x}_0;\overline{\Delta x})=0} = \frac{1}{2}\Delta x^T H \Delta x\Big|_{dg(\bar{x}_0;\overline{\Delta x})} =$$

$\Delta x'$ es el subespacio que cumple la restricción $dg(\bar{x}_0;\overline{\Delta x})=0$

$$= \frac{1}{2}\Delta x'^T P^T H P \Delta x' =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta x'^T H' \Delta x'$$

$$\Delta\bar{x} = P\Delta\bar{x}'$$

Ejemplo

$$\frac{1}{2}\Delta x^T H \Delta x = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

Restringido a $\Delta x + \Delta y + 2\Delta z = 0$ $(dg = 0)$

↳ No valen todos los puntos del espacio, solo los de ese plano. Pasa por el origen, es un subespacio vectorial.

Dicho plano puede representarse usando dos vectores contenidos en él multiplicados por dos parámetros.

$$v = (-\Delta y - 2\Delta z, \Delta y, \Delta z) = \Delta y \underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + \Delta z \underbrace{(-2, 0, 1)}_{v_2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}}_{\Delta\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}}_{\Delta\bar{x}'}$$

Estos pts quedan sujetos a la restricción

De modo que:

$$\frac{1}{2}\Delta x^T H \Delta x\Big|_{dg(\bar{x}_0;\,\overline{\Delta x})} = \begin{bmatrix}\Delta_y & \Delta_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_y\\ \Delta_z\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\Delta_y & \Delta_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_y\\ \Delta_z\end{bmatrix}$$

EJERCICIO

$$\left.\begin{aligned} z &= f(x,y,u,v)\\ \varphi(x,y,u,v) &= 0\\ \psi(x,y,u,v) &= 0\end{aligned}\right|$$

Sea $A(x_0, y_0, u_0, v_0)$ un pto crítico de $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = f + \lambda\varphi + \mu\psi$$

Si $d\varphi(A) = dx + dy - du - dv$ y $d^2\mathcal{L}(A) = dx^2 + du^2 - 3\,dy\,dv$

$d\psi(A) = dx - dy + du - dv$

Estudiar el extremo (¿Es un máximo, un mínimo...?)

Tengo que estudiar $d^2\mathcal{L}(A)\Big|_{\substack{d\varphi(A)=0\\ d\psi(A)=0}}$

$$d\varphi(A) = dx + dy - du - dv = 0 \longrightarrow dx + dy = du + dv$$
$$d\psi(A) = dx - dy + du - dv = 0 \longrightarrow dx - dy = du - dv$$

Lo más sencillo en este caso parece eliminar dos de las cuatro variables (dx, dy, du, dv) de $d^2\mathcal{L}(A) = dx^2 + du^2 - 3\,dy\,dv$ usando $dx + dy = du + dv$ y $dx - dy = du - dv$

$$
\begin{array}{l}
+\;\begin{cases} dx + dy = du + dv \\ dx - dy = -du + dv \end{cases} \\
\hline
2\,dx = 2\,dv \\
dx = dv
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
-\;\begin{cases} dx + dy = du + dv \\ dx - dy = -du + dv \end{cases} \\
\hline
2\,dy = 2\,du \\
dy = du
\end{array}
$$

Con lo que $d^2\mathcal{L}(A) = dx^2 + du^2 - 3\,dy\,dv$ se transforma en

$$d^2\mathcal{L}(A) = dx^2 + dy^2 - 3\,dx\,dy =$$

$$= [dx \;\; dy] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{\text{Gauss}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 - \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

Pivotes > 0 y < 0

$\rightarrow \lambda > 0$ y $\lambda < 0$

Pto de silla.