Autovalores y autovectores imaginarios

1 Introducción y motivación $\quad Av = \lambda v$

Autovalor / autovector: cómo una transformación lineal escala ciertos vectores sin cambiar su dirección.

No todas las transformaciones lineales admiten direcciones invariantes reales.

Autovalores y autovectores imaginarios aparecen de forma natural en rotaciones, oscilaciones, vibraciones, aeroelasticidad...

Recuperamos el ejemplo del otro día.

Ejemplo

Matriz de rotación (90°). Matriz ortogonal.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{traza} = 0 + 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$\det = 1 = \lambda_1 \lambda_2$$

¡Esto tb se cumple siempre!

¿Qué vector puede quedar sin modificar después de una rotación de 90°?

$$\det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{matrix}$$

Recordemos que las matrices reales pueden tener autovalores (y autovectores) complejos.

Lo que sí sabemos es que son complejos conjugados (solución de polinomio real).

Esta matriz es antisimétrica $Q^T = -Q$. En este caso, la parte real de los autovalores es 0. Caso "contrario" de matrices simétricas.

2 Teoría de autovalores/autovectores. Caso general.

Sea A una matriz real cuadrada de dimensión n. Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^n$ tal que:

$$A v = \lambda v$$

Como en el caso real reescribimos como

$$(A - \lambda I) v = 0$$

Para que el sistema tenga soluciones no triviales debe cumplirse que

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Este será un polinomio de coeficientes reales (A es real) pero sus soluciones (λ) pueden ser imaginarias (pares conjugados).

Propiedad fundamental

Si A es real y $\lambda = a + ib$ $(b \neq 0)$ es autovalor tb lo es su conjugado $\bar{\lambda} = a - ib$

Revisar que esto se cumple en el caso anterior $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3 Cálculo de autovalores complejos

Paso 1: Calcular polinomio característico $\det(A - \lambda I)$

Paso 2: Resolver ecuación característica $(\lambda \in \mathbb{C}^n)$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$$

Paso 2: $\underset{\text{Real}}{\lambda_1 = 2}$ $\quad \underbrace{\lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i}_{\text{Par conjugado}}$

4 Cálculo de autovectores complejos

El procedimiento es idéntico al caso real. Lo veremos con un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{matrix}$$

1. Plantear sistema homogeneo $(A - \lambda I)\, v = 0$
2. Sustituir valor de λ_i. Eg. $\lambda_1 = i$

$$A - iI = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

3. Encontrar el espacio nulo de $A - iI$. Más complicado al ser álgebra compleja, pero misma idea.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Podemos repetir para $\lambda_2 = -i \rightarrow A + iI = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 2$

$$(A-2I)v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = i$

$$(A-iI)v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-xi - y = 0 \rightarrow y = -ix$

$x - yi = 0$ Tomamos x como variable libre $x=1$

$(2-i)z = 0 \rightarrow z = 0$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si repetimos con $\lambda_3 = -i \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$

Si nos fijamos $v_3 = \overline{v_2} \rightarrow$ complejo conjugado.

Propiedad fundamental

Si A es real y $\lambda = a+ib$ $(b \neq 0)$ es autovalor tb lo es su conjugado $\overline{\lambda} = a - ib$

Si v es autovector de $\lambda \rightarrow Av = \lambda v$ tb lo es su conjugado $\overline{v}$ de $\overline{\lambda}$

Dem:

$$Av = \lambda v \to \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \text{ pero } A \text{ es real luego}$$

$$A\bar{v} = \overline{\lambda v} \quad \text{y por último} \quad A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

*

$$* \quad \overline{u^T v} = \overline{(u_1 v_1 + u_2 v_2)} = (\overline{u_1 v_1} + \overline{u_2 v_2}) =$$

$$= (\bar{u}_1 \bar{v}_1 + \bar{u}_2 \bar{v}_2) = \bar{u}^T \bar{v}$$

The ***complex conjugate*** of $a+ib$ is the number $a-ib$. *The sign of the imaginary part is reversed.* It is the mirror image across the real axis; any real number is its own conjugate, since $b=0$. The conjugate is denoted by a bar or a star: $(a+ib)^* = \overline{a+ib} = a-ib$. It has three important properties:

1. The conjugate of a product equals the product of the conjugates:

$$\overline{(a+ib)(c+id)} = (ac-bd) - i(bc+ad) = \overline{(a+ib)}\,\overline{(c+id)}. \qquad (1)$$

2. The conjugate of a sum equals the sum of the conjugates:

$$\overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c) - i(b+d) = \overline{(a+ib)} + \overline{(c+id)}.$$

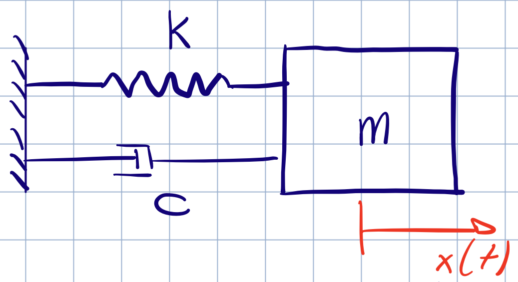
3. Multiplying any $a+ib$ by its conjugate $a-ib$ produces a real number a^2+b^2:

Absolute value $\qquad (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = r^2. \qquad (2)$

This distance r is the ***absolute value*** $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

5 Ejemplo de aplicación física: solución de un sistema dinámico masa - muelle - amortiguador

Consideremos el siguiente sistema físico:



Una masa m, unida a una pared a través de un muelle de constante K y un amortiguador viscoso de coeficiente c.

La masa solo puede moverse en una dirección $x(t)$

Las fuerzas que actúan sobre la masa son:

- Fuerza elástica - Ley de Hooke $\quad F_k = -Kx$
- Fuerza de amortiguamiento $\quad F_c = -c\dfrac{dx}{dt} = -c\dot{x}$

Ahora, la segunda Ley de Newton dice que:

$$\sum F = m\ddot{x} = m\frac{d^2}{dt^2}x$$

Luego $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \longrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Podemos reescribir como un sistema de primer orden

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} y$$

Luego $\dot{y} = Ay$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$

Tb vimos que la solución de este sistema venía dada por sus autovalores. Calculamos autovalores

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\Delta}}$$

Y clasificamos en función del signo del discriminante

Caso 1: amortiguamiento débil ($\Delta < 0$)

$$\lambda = -\frac{c}{m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \longrightarrow -\frac{c}{m} \pm i\,\omega_d$$

frecuencia amortiguada

Autovalores complejos conj.

Como vimos en clases anteriores, la solución de este problema es:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Así que, en nuestro caso

$$y(t) = c_1 e^{(-c/2m + i\omega_d)t} v + c_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - i\omega_d\right)t} \overline{v}$$

¿Es la solución compleja? ¿Qué significa esto físicamente?

Fíjate que $y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$ Posición, Velocidad $\Big\} \in \mathbb{R}$

Como y es real, hacemos $c_2 = \overline{c_1}$, de esta forma

$$y(t) = c_1 e^{(-c/2m + i\omega_d)t} v + \overline{c_1} e^{\left(-\frac{c}{2m} - i\omega_d\right)t} \overline{v} =$$

$$= e^{-\frac{c}{2m}t} \left[c_1 e^{i\omega_d t} v + \overline{c_1} e^{-i\omega_d t} \overline{v} \right] =$$

$$= e^{-\frac{c}{2m}t} \Big[\underbrace{c_1 e^{i\omega_d t} v + \overline{c_1 e^{i\omega_d t} v}} \Big]$$

Solución es real, ya que sumamos algo + su conjugado.

Pero recordemos que $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, luego

$$= e^{-\frac{c}{2m}t}\left[c_1 \Big(\cos(\omega_d t)+i\sin(\omega_d t)\Big) v + \overline{c_1 \Big(\cos(\omega_d t)+i\sin(\omega_d t)\Big) v}\right] =$$

$$= e^{-\frac{c}{2m}t}\left[2\,\mathrm{Re}\left[c_1 \Big(\cos(\omega_d t)+i\sin(\omega_d t)\Big) v\right]\right]$$

Recordemos tb que solo nos interesa la primera comp. de $y(t)$. Simplificando:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[\underline{A}\cos(\omega_d t) + \underline{B}\sin(\omega_d t)\right]$$

↳ Absorben contribuciones de c_1 y v.

Interpretación de la forma exponencial

$$e^{(-c/2m \pm i\omega_d)t} = \underbrace{e^{-\frac{c}{2m}t}}_{\text{Amortiguamiento}} \cdot \underbrace{e^{\pm i\omega_d t}}_{\text{Oscilación}}$$

Caso 2: amortiguamiento crítico $(\Delta = 0)$

$\lambda = -\frac{c}{m}$ Autovalor real doble $\rightarrow$ Necesitamos forma de Jordan (caso que viene)

Caso 3: sobreamortiguado

$$\lambda = -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{-k}{m} + \frac{c^2}{4m^2}} \longrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

La solución en este caso es:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

Sistema retorna al equilibrio sin oscilar.