REPASO DE ALGEBRA (18.06 Lecture 08)

Solución completa de $Ax=b$ $\longrightarrow$ $x = x_p + x_n$

Rango r

$r=m$: { existe sol $r=n$ { sol única

Partimos de la misma matriz de la clase anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= b_1 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= b_2 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 &= b_3 = 6 \end{aligned}$$

$F_3 = F_2 + F_1 \longrightarrow$ Una ligadura para los valores de b y poder encontrar soluciones.

$b_3 = b_2 + b_1 \longrightarrow$ Si esto no se cumple, no hay sol.

eliminación nos va a permitir encontrar esta relación

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right] \rightarrow$$

Matriz aumentada $[A \vdots b]$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow b_3 = b_2 + b_1$

Condición para existencia de sols

$Ax=b$ resoluble si b pertenece a $C(A)$

Otra manera de verlo es:

Si una comb. de las filas de A nos da la fila 0, entonces la misma comb sobre las comp. de b tiene que dar 0.

Encontrar la solución completa de $Ax=b$

① $x_{particular}$: fijemos todas las variables libres a 0. Resolvemos $Ax=b$ para las variables pivote.

En nuestro ejemplo $x_2=0$, $x_4=0$.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_3 &= 3/2 \end{aligned} \qquad \text{Así que } x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② $x_{nullspace}$ (vimos en la clase anterior como calcularlos)

$$Ax_{nullspace} = 0$$

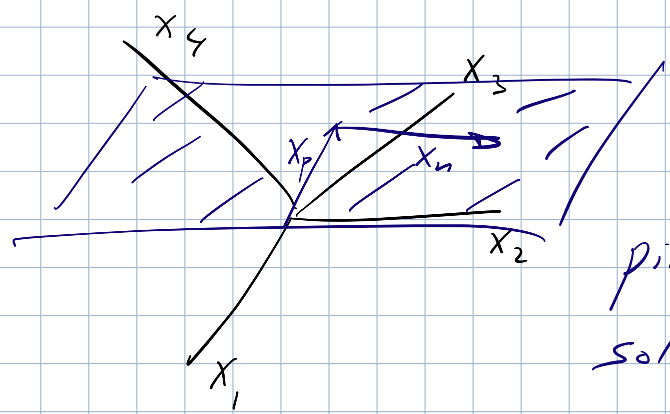
La solución del sistema será de la forma $x = x_p + x_n$

DEM

$$\left.\begin{aligned} Ax_p &= b \\ Ax_n &= 0 \\ \hline A(x_p+x_n) &= b \end{aligned}\right| \quad x = x_p + x_n$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1$$
$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5$$
$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6$$

$$x_{complete} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



This is the picture of the solution.

PREGUNTAS:

Matriz A de tamaño $m \times n$ y rango r = # of pivots

¿Relación entre r y m? $r \leq m$ → max m col pivote

¿Relación entre r y n? $r \leq n$ → max 1 pivote por col.

Rango completo por columnas $r = n$:

Todas las columnas tienen pivote

→ no hay variables libres.

→ $N(A) = \{\text{zero vector}\}$

→ Solución $Ax = b$ → $x = x_p$ (Si hay solución)

(Hay 0 o 1 solución)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Se puede hacer fácilmente de cabeza)

$$\left.\begin{array}{l} r = 2 \\ n = 2 \end{array}\right\} \; r = n = 2$$

Este sistema tiene una solución (si $b \in C(A)$) o ninguna si no se cumple esa condición.

Rango completo por filas $r = m$

Todas las filas tienen pivote:

→ Puedo resolver $Ax = b$ para cualquier b.

→ Habrá $\underset{n-m}{\overset{}{n-r}}$ variables libres

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

F

Rango completo (por filas y columnas) $r = m = n$

→ Solución para cada b (y solo una solución)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

→ $N(A) = \{\text{zero vector}\}$

→ Matriz invertible

RESUMEN

la F puede quedar mezclada con la I

$r = m = n$	$r = n < m$	$r = m < n$	$r < m$, $r < n$
$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 sol $Ax = b$	(0 o 1 sol) $Ax = b$	∞ solutions	(0 o ∞ sols).

El rango nos da toda la info que necesitamos sobre el comportamiento de las soluciones del problema.