5 Infinitésimos.

Si la función no es un cociente de polinomios, la convertimos en uno. Infinitésimos (Maclaurin 1er orden).

Definición: sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f es un infinitésimo cuando $\bar{x} \to \bar{a}$, ($\bar{a}$ pto de acumulación de D) si:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = 0$$

Notación de Landau: f, g infinitésimos en $\bar{x} \to \bar{a}$

1/ Si $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = 0 \longleftrightarrow f(\bar{x}) = o(g(\bar{x})) \longrightarrow f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = g(\bar{x}) + o(g(\bar{x}))$

* f es infinitésimo de orden superior a g.
tiende a cero más deprisa.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$; $x^2 = o(x) \to x^2 + x = x + o(x)$

2/ Si $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = l \longleftrightarrow f(\bar{x}) = O(g(\bar{x}))$

* f y g son infinitésimos comparables
(tienden a cero a la misma velocidad)

¿Utilidad? Si $l = 1 \to \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \dfrac{f(\bar{x})}{h(\bar{x})} = \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \dfrac{g(\bar{x})}{h(\bar{x})}$

no se calcular

si se calcular

Ejemplo:

$\mathbb{R}$: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+o(x)} = 1$

$\mathbb{R}^2$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x+y+(x+y)^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x+y+o(x+y)} = 1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{(x+y)} = 0$

6 Infinitésimos equivalentes.

Nos permiten transformar funciones trascendentes en polinomios.

Cuando $x \to 0$ se cumple que:

$e^x - 1 \sim x$	$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$
$\sin x \sim x$	$\tan x \sim x$
$\operatorname{asin} x \sim x$	$\operatorname{atan} x \sim x$
$\ln(1+x) \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$\sin(x^2+y^2) \sim x^2+y^2$

Ejemplo: ⓐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)\ln(2-x)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\ln(2-x)}{x^2+y^2} = \ln 2$

ⓑ $\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{\sin(x^2)\sin\left(\frac{1}{y+2}\right)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^2}{x} \sin\left(\frac{1}{y+2}\right) = 0 \cdot \text{acotada} = 0$

P7

7 Ejercicios

① Den bueno

② $O(\text{num}) > O(\text{den})$

① $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+x^2y^2+y^6)}{\sin(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^2y^2+y^6}{x^2+y^2}$$

$\ln(1+x) \sim x$

Hipótesis: $\exists \ell \to$ acotar.

$$\left| \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} + \frac{y^6}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| x^2 \frac{x^2}{x^2+y^2} + x^2 \frac{y^2}{x^2+y^2} + y^4 \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq$$

$$\leq \left| x^2 + x^2 + y^4 \right| \longrightarrow 0$$ ✓ Límite existe y vale cero.

A4

$1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

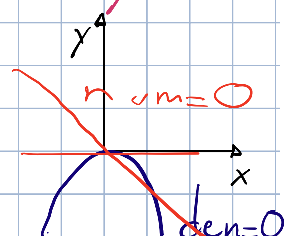
② $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2-y^2)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{(x^2-y^2)^2}{2}}{(x-y)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2(x+y)^2}{2(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x+y)^2}{2} = 0$$

Existe pese a tener denominador "malo" ya que podemos factorizar.

$\sin(x+y) \sim x+y$

① Den malo $(y=-x^2)$



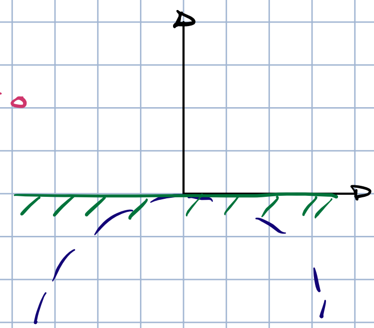
③ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x+y)}{y+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x+y)}{y+x^2}$$

Hipótesis: $\nexists \ell \to$ pruebo tray. $y=-x^2+x^k,\ k>2$

$$\lim_{x\to 0} f(x,-x^2+x^k) = \lim_{x\to 0} \frac{(\underbrace{-x^2+x^k}_{o(x^2)})(\underbrace{x-x^2+x^k}_{o(x)})}{x^k} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{x^k} \begin{cases} k=3: \ \ell=-1 \\ k\geq 4: \ \ell=\nexists \end{cases}$$ X

4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\sin(x+y)}{y+x^2}$ en $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geqslant 0\}$

Den. malo pero tray. fuera del dominio de definición de la función.
¿Es realmente "malo" el denominador?



TRUCO

Si dominio de función es de tipo $y\geqslant 0$, $x+y\geqslant 0$...
Puedo añadir valores absolutos sin cambiar función

$$y\geq 0 \longrightarrow y=|y|$$

De modo que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|(x+|y|)}{|y|+x^2}$$

① Den "bueno"! (Solo $=0$ en $(0,0)$)
② $O(\text{num})\sim O(\text{den})$ No está claro.

Hipótesis $\exists l \longrightarrow$ intento acotar

$$\left|\frac{|y|(x+|y|)}{|y|+x^2}\right| \overset{A4}{\leqslant} |x+|y|| \longrightarrow 0$$

Casos generales: estos casos generales incluyen muchos de los vistos anteriormente. Su acotación es más compleja, se proponen como ejercicios avanzados.

(5)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^p y^q}{(x^2+y^2)^t}, \quad p, q, t > 0.$$

$$\left|\frac{x^p y^q}{(x^2+y^2)^t}\right| = \frac{|x|^p|y|^q}{(x^2+y^2)^t} \leq \frac{\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^p\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^q}{(x^2+y^2)^t} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{p+q}{2}-t} \to 0$$

Si $p+q>2t$

$*$ Si $p+q>2t \to \exists\, \ell = 0$

¿Y si no se cumple? $\to$ No sé nada, pruebo tray.

$*$ Si $p+q=2t \to$ pruebo $y=mx$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^p m^q x^q}{(1+m^2)^t x^{2t}} = \frac{m^q}{(1+m^2)^t} \lim_{x\to 0} \frac{x^{p+q}}{x^{2t}} = \frac{m^q}{(1+m^2)^t} \to \nexists\, \ell$$

$*$ Si $p+q<2t \to$ La misma trayectoria

$$\frac{m^q}{(1+m^2)^t} \lim_{x\to 0} x^{p+q-2t} = \nexists\, \ell$$

Conclusión:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^p y^q}{(x^2+y^2)^t} = \begin{cases} \exists\, \ell,\ \ell=0 & , \text{ si } p+q>2t \\ \nexists\, \ell & , \text{ si } p+q\leq 2t \end{cases}$$

Ejemplo: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ $\quad p=1,\ q=1,\ t=1/2 \to 1+1 \overset{?}{\gtrless} 2\cdot\frac{1}{2}$

$2>1 \to \ell = 0$

⑥ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^p y^q}{(|x|^r+|y|^s)^t}$

[Ej. 3 de la clase anterior. $\dfrac{x^5}{x^4+y^2}$ $p=5,\ q=0$ $r=4,\ s=2$ $t=1$]

$$|x| = (|x|^r)^{1/r} \leq (|x|^r+|y|^s)^{1/r}$$

$$|y| = (|y|^s)^{1/s} \leq (|x|^r+|y|^s)^{1/s}$$

$$\left|\frac{x^p y^q}{(|x|^r+|y|^s)^t}\right| = \frac{|x|^p|y|^q}{(|x|^r+|y|^s)^t} \leq \frac{(|x|^r+|y|^s)^{p/r}(|x|^r+|y|^s)^{q/s}}{(|x|^r+|y|^s)^t} =$$

$$= \frac{(|x|^r+|y|^s)^{p/r+q/s}}{(|x|^r+|y|^s)^t} \longrightarrow \boxed{\frac{p}{r}+\frac{q}{s} > t} \longrightarrow \exists\, l,\ \underline{\underline{l=0}}$$

Ejemplo 3

$$\frac{5}{4}+\frac{0}{2} > 1 \quad ✓$$

$$\frac{y^3}{x^4+y^2} \to \frac{0}{4}+\frac{3}{2} > 1 \quad ✓$$