

Diferencial Segundo (en este capítulo, todo es C^2 necesario para lo que haremos)

Si $f: D \subset \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$, dado que, es de clase C^2 , se define la diferencial segunda como:

$$d^2f(\bar{x}; \Delta \bar{x}) = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P f''_{ij}(\bar{x}) \Delta x_i \Delta x_j$$

(P2)

$$d^2f((x,y); (\Delta x, \Delta y)) = f''_{xx}(x,y) \Delta x^2 + f''_{yy}(x,y) \Delta y^2 + 2f''_{xy}(x,y) \Delta x \Delta y$$

El "2" en las mixtas es consecuencia de Tm SC y C^2 .

DEM

Sea $f \in C^2$, de modo que, $df = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$, esto es:

$$df((x,y); (\Delta x, \Delta y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Delta y = g(x,y)$$

Ahora, si $g(x,y)$ es C^1 (lo cual es verdad si: $f \in C^2$), tenemos que

$$dg((x,y); (\Delta x, \Delta y)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \Delta y =$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Delta y \right] \Delta x +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Delta y \right] \Delta y =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Delta y \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Delta y \Delta x + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2$$

↑
fec²

EJEMPLO

Calcular la diferencial segunda de $f(x,y) = \cos(2x) - x^2 e^{5y} + 3y^2$

Camino 1. Diferenciando dos veces. ($d^2f = d(df)$)

$$df((x,y); (dx,dy)) = (-2\sin(2x) - 2x e^{5y}) dx + (-5x^2 e^{5y} + 6y) dy$$

df se puede ver como otra función $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \rightarrow df \end{matrix}$ dx y dy son parámetros

$$\frac{\partial}{\partial x} df = (-4\cos(2x) - 2e^{5y}) dx + (-10xe^{5y}) dy$$

$$\frac{\partial}{\partial y} df = -10xe^{5y} dx - (25x^2 e^{5y} - 6) dy$$

$$\text{Ahora } d^2f = \frac{\partial}{\partial x} df dx + \frac{\partial}{\partial y} df dy$$

$$d^2f((x,y); (dx,dy)) = d(df) =$$

$$\left[(-4\cos(2x) - 2e^{5y}) dx + (-10xe^{5y}) dy \right] dx +$$

$$\left[-10xe^{5y} dx - (25x^2 e^{5y} - 6) dy \right] dy =$$

$$(-4\cos(2x) - 2e^{5y})dx^2 + (-25x^2e^{5y} + 6)dy^2 + 2(-10xe^{5y})dxdy$$

Camino 2. Aplicando la fórmula

$$d^2f((x,y);(\Delta x, \Delta y)) = f''_{xx}(x,y)\Delta x^2 + f''_{yy}(x,y)\Delta y^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y$$

Para casa. Probar que con la fórmula sale lo mismo.

2 Matriz Hessiana

Vemos que es posible ordenar los términos de la fórmula anterior en forma matricial.

$$d^2f((x,y);(dx, dy)) = (dx, dy) \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = d\bar{x}^T \cdot Hf(x,y) \cdot d\bar{x}$$

Matriz Hessiana $Hf(x,y)$

Nota. Si f es de clase C^2 → Matriz Hessiana es simétrica

$$(f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}) \text{ Tma Sc.}$$

Caso $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir diferencial segundo en forma matricial como

Matriz Hessiana $Hf(x)$

$$d^2f(\bar{x}; \Delta \bar{x}) = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_p) \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & \cdots & f''_{x_1 x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_p x_1} & \cdots & f''_{x_p x_p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_p \end{pmatrix}$$

3 Diferenciales de orden superior

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^r \xrightarrow{\text{diff}} df(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\bar{x}) dx_i$$

$\downarrow d$

Diferencial segunda $d^2f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{j=1}^n d\bar{f}'_j(\bar{x}) dx_j =$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n f''_{ij}(\bar{x}) dx_i \right) dx_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{ij} dx_i dx_j$$

$\downarrow d$

Diferencial tercera $d^3f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{k=1}^n d\bar{f}''_k(\bar{x}) dx_k =$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f'''_{ijk} dx_i dx_j \right) dx_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f'''_{ijk} dx_i dx_j dx_k$$

$\downarrow d$
 $\downarrow d$

Diferencial r-ésima $d^r f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^n f^{r'}_{i_1, i_2, \dots, i_r} dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}$

4 Regla simbólica

Tres formas de calcular $d^r f$

① Usando la fórmula

$$d^r f(\bar{x}; d\bar{x}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^n f^{r'}_{i_1, i_2, \dots, i_r} dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}$$

② Diferenciar r veces: $d^r f = \underbrace{d(d(\dots(d f)))}_{r \text{ veces}}$

Ejemplo / comentario: $d^2 f_{x_i} = 0$

③ Regla simbólica: $df = Df$, $D = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$

"Multiplicando D por f " ... $Df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

Entonces: $d^r f = D^r f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^r f$

Ejemplo:

(R²) $d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial}{\partial xy} dxdy \right) f =$

$$= f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + 2 f''_{xy} dxdy$$

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \right.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \left. + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3 \right) f$$

3 Derivadas sucesivas respecto de vectores.

Recordar que ya vimos una forma de hacer esto en la clase anterior.

$$f \in C^1: \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\bar{x}) u_i = \nabla f \cdot \bar{u} = df(\bar{x}; \bar{u})$$

$$f \in C^2: \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j} u_i v_j \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j} u_i u_j = \\ = d^2 f(\bar{x}; \bar{u})$$

f $\in C^3 \dots$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{u}^3} = d^3 f(\bar{x}; \bar{u})$$

Fijos que esta expresión se puede escribir de forma matricial, similar a la diferencial segunda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = [u_1, u_2] \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \rightarrow \text{Fácil de recordar.}$$

H_f

$$= u^T H_f v$$

6 Funciones vectoriales

Como en anteriores ocasiones, se aplica la definición componente a componente:

$$\bar{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$\bar{f}(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} y_1(\bar{x}_0) \\ \vdots \\ y_q(\bar{x}_0) \end{bmatrix} \quad d^2 \bar{f}(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{x}^T H_{y_1} \Delta \bar{x} \\ \Delta \bar{x}^T H_{y_2} \Delta \bar{x} \\ \vdots \\ \Delta \bar{x}^T H_{y_q} \Delta \bar{x} \end{bmatrix}$$

ESERCICIOS

① Sea $f(x,y) = e^{y-x} + \frac{x^2+1}{y+1}$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2}(1,1)$ según

$$\bar{u} = (3, 2)$$

Para casa, repetir usando nueva fórmula

② Sea $f(x,y) = 2y \ln x + x^2 y^2 + x e^y$, calcular $d^2 f(1,0); (dx, dy)$ y

$d^3 f(1,0); (dx, dy)$. $f \in C^\infty$

$$d^2 f(1,0); (dx, dy) = f''_{xx}(1,0) dx^2 + f''_{yy}(1,0) dy^2 + f''_{xy}(1,0) dx dy$$

$$d^3 f(1,0); (dx, dy) = f'''_{xxx}(1,0) dx^3 + 3f'''_{xxy}(1,0) dx^2 dy + 3f'''_{xyx}(1,0) dx dy^2 + f'''_{yyy}(1,0) dy^3$$

Para casa: calcular derivadas y evaluar en $(1,0)$

$$d^2 f(1,0); (dx, dy) = 6 dx dy + 3 dy^2$$

$$d^3 f(1,0); (dx, dy) = -6 dx^2 dy + 15 dx dy^2 + dy^3$$

III.5 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida mediante:

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + xz, e^{y-z}, \sin(x-y))$$

III.5

Guiones

(2)

- Calcular la matriz jacobiana de f en $(0, 0, 0)$.
- Determinar los puntos en los que el jacobiano de f es nulo.
- Analizar si existe algún vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $f'_v(0, 0, 0) = 0$. Determinar los vectores $u \in \mathbb{R}^3$ tales que $f'_u(0, 0, 0) = u$.
- Calcular $d^2 f(0, 0, 0)$.
- Sean $u = (1, 1, 1)$ y $v = (-1, 0, 1)$; calcular $f''_{uv}(0, 0, 0)$ y $f''_{vu}(0, 0, 0)$

a) Matriz jacobiana de \bar{f} en $(0, 0, 0)$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \\ g_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \nabla \bar{f} \Big|_0 & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla g_1 \Big|_0 & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \nabla g_2 \Big|_0 & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \nabla g_3 \Big|_0 & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x+z & 1 & x \\ 0 & e^{y-z} & -e^{y-z} \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) & 0 \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Jacobiano $\equiv \det(\nabla \bar{f})$

$\det(\nabla \bar{f})$ es cero si hay alguna fila / columna que es cero

$$\cos(x-y) \text{ es } 0 \text{ si: } x-y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$\det(\nabla \bar{f})$ es cero si una fila / columna es comb. lineal de las demás. Sumo las tres columnas (Única forma de cancelar filas 2 y 3)

$$\begin{bmatrix} 3x+z+1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si: } 3x+z+1=0 \rightarrow \det(\nabla \bar{f})=0$$

Otra opción es calcular el det. y resolver ecuaciones no lineal.

c) $d\bar{f}'_{\bar{v}}(0,0,0) = 0?$

$$\bar{f}'_{\bar{v}}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No se puede porque la matriz no es singular en dichos pto.

$d\bar{f}'_{\bar{u}}(0,0,0) = \bar{u}?$

$$\bar{f}'_{\bar{u}}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Autovector para autovalor $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Calcular $d^2\bar{f}(0,0,0)$

$$d^2\bar{f}(\bar{0}; \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}) = \begin{bmatrix} d^2\bar{f}_1(\bar{0}; \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}) \\ d^2\bar{f}_2(\bar{0}; \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}) \\ d^2\bar{f}_3(\bar{0}; \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}) \end{bmatrix}$$

$$d^2\bar{f}_i(\bar{0}; \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}) = [-\Delta \bar{x}] \begin{bmatrix} H\bar{f}_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Sf: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^9$$

$$\nabla f(x, y, z)$$

La matriz Hessiana tiene todas las derivadas (respecto de x, y, z) de todos los componentes (9). Así que tiene $9 \times 3 = 27$ entradas.

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x + z & 1 & x \\ 0 & e^{y-z} & -e^{y-z} \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f_1$$

$$\nabla f_2$$

$$\nabla f_3$$

$$Hf_1 = \begin{bmatrix} f_{1xx}'' & f_{1xy}'' & f_{1xz}'' \\ f_{1yx}'' & f_{1yy}'' & f_{1yz}'' \\ f_{1zx}'' & f_{1zy}'' & f_{1zz}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Hf_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{y-z} & -e^{y-z} \\ 0 & -e^{y-z} & e^{y-z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Hf_3 = \begin{bmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) & 0 \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d\tilde{f}_1 = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = 2\Delta^2 x + 2\Delta x \Delta z$$

$$d\tilde{f}_2 = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \Delta^2 y + \Delta^2 z - 2\Delta y \Delta z$$

$$d\tilde{f}_3 = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = 0$$

$$d\tilde{f} = \begin{bmatrix} 2\Delta^2 x + 2\Delta x \Delta z \\ \Delta^2 y + \Delta^2 z - 2\Delta y \Delta z \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Sean $\bar{u} = (1, 1, 1)$, $\bar{v} = (-1, 0, 1)$. Calcular

$$\bar{f}_{\bar{u}\bar{v}}''(0,0,0) = d^2\bar{f}((0,0,0); \bar{u}, \bar{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mirai siguiente página.

$$df_1((0,0,0), \bar{u}, \bar{v}) = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$df_2((0,0,0), \bar{u}, \bar{v}) = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$df_3((0,0,0), \bar{u}, \bar{v}) = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$