INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}^p$ II

17. Propiedades de las integrales en intervalos de $\mathbb{R}^p$

1 Propiedades de las funciones integrables

Sean $f, g : I \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en I (compacto)

① Linealidad. $\int_I k(f \pm g) = k\int_I f \pm k\int_I g$

② Producto y cociente. $f \cdot g$ es integrable en I

$g(x) \geq c > 0 \longrightarrow f/g$ es integrable en I

③ Monotonía: $f \leq g$ en $I \longrightarrow \int_I f \leq \int_I g$

④ Valor absoluto: $|f|$ es integrable en I y $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$

⑤ Aditividad: $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ con $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $i \neq j \longrightarrow \int_I f = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f$

2 Cálculo efectivo de integrales

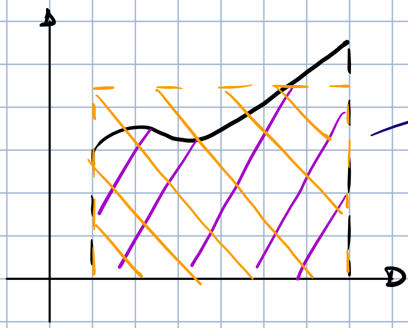
ⓐ Teorema del valor medio integral

Sean $f: I \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en un compacto I

$\rightarrow$ Si f es integrable en $I \longrightarrow \exists c \in [m, M] \, / \int_I f = c\mu(I)$

mínimo máximo

→ Si f es continua en I → $\exists\, \overline{x}_0 \in I \,/ \int_I f = f(\overline{x}_0) \cdot \mu(I)$



→ Las dos áreas coinciden

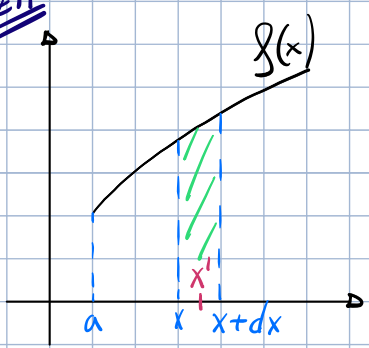
Repaso $\mathbb{R}$

⑤ Teorema fundamental del cálculo

* Si f es integrable en $I=[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en I

* Si f es continua en $I=[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en I y $F'(x) = f(x)$

DEM



Teorema valor medio integral

* $A(x+dx) - A(x) = f(x')\,dx \quad (x' \in [x, x+dx])$

Luego $f(x') = \dfrac{A(x+dx) - A(x)}{dx}$

Si $dx \to 0$, $x' \to x$ y $f(x) = A'(x)$ ∎

*$A(x)$ es una función que devuelve el área bajo la curva entre los pts "a" y "x".

© Regla de Barrow

* Si f es continua en $I=[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de f en $I=[a,b]$, es decir

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + C, \text{ entonces } \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

DEM

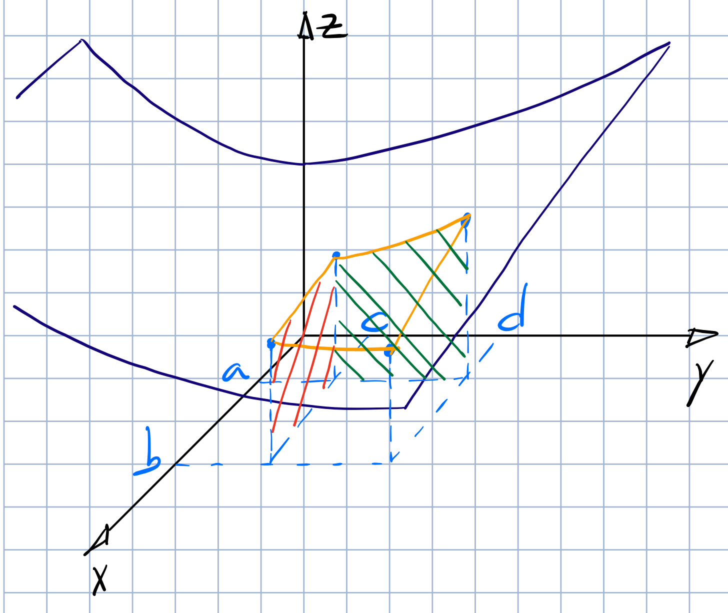
$$\left.\begin{aligned} F(b)&=\int_a^b f(x)\,dx + C \\ F(a)&=\int_a^a f(x)\,dx + C \end{aligned}\right| \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

3 Teorema de Fubini ($f: I \to \mathbb{R}$ acotada en I)

El teorema de Fubini permite el cálculo práctico de integrales en $\mathbb{R}^p$.

$$\mathbb{R}^2: \iint_I f(x,y)\,dA = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)}_{\text{Area }(x)} dx = \int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)}_{\text{Area }(y)} dy$$

*



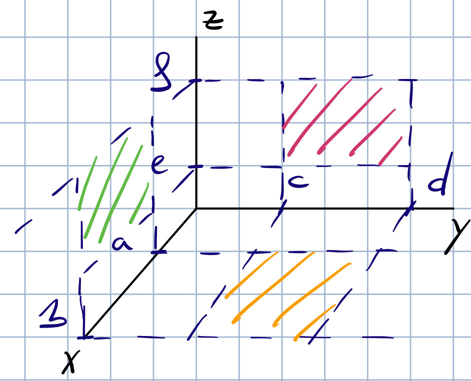
* Sumar todas las áreas verdes moviéndonos entre a y b

* Sumar todas las áreas rojas moviéndonos entre c y d

$\mathbb{R}^3$: $I_{xy} = [a,b] \times [c,d]$

$I_{xz} = [a,b] \times [e,f]$

$I_{yz} = [c,d] \times [e,f]$



$$\iiint_I f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left(\iint_{I_{yz}} f(x,y,z)\, dA \right) = \int_c^d \left(\iint_{I_{xz}} f(x,y,z)\, dA \right) = \int_e^f \left(\iint_{I_{xy}} f(x,y,z)\, dA \right)$$

Cada una de estas es un caso de $\mathbb{R}^2$ que puedo resolver como en el caso anterior.

Recordar, ($f: I \to \mathbb{R}$ acotada en I)

El teorema de Fubini es de aplicación siempre que se cumpla alguna de las condiciones siguientes:

a) f continua en I

b) f discontinua en un conjunto de contenido nulo y existe la integral entre paréntesis.

NOTA: Producto de funciones de una variable

$$\int_c^d \int_a^b f(x) \cdot g(y)\, dx\, dy = \int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_c^d g(y)\, dy$$

Prueba

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x) \cdot g(y)\, dx \right) dy = \int_c^d g(y) \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) dy = \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \int_c^d g(y)\, dy$$

EJEMPLO 1

$$\iint_R (x^2+y)\,dA \quad , \quad \text{con} \quad R = [0,1]\times[0,1]$$

La función a integrar es continua $\longrightarrow$ podemos aplicar Fubini

Camino 1

$$\iint_R (x^2+y)\,dA = \int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \Bigg[\underbrace{\int_0^1 (x^2+y)\,dx}\Bigg]dy$$

$$\int_0^1 (x^2+y)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y\right]dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{6}$$

Camino 2

$$\iint_R (x^2+y)\,dA = \int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \Bigg[\underbrace{\int_0^1 (x^2+y)\,dy}\Bigg]dx$$

$$\int_0^1 (x^2+y)\,dy = x^2y + \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{2}\right]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

ESEMPIO 2

$$\iint_R y\,(x^3-12x)\,dA\,, \qquad \text{con} \quad R=[-2,1]\times[0,1]$$

f continua en $R \longrightarrow$ Fubini

Camino 1

$$\iint_R y\,(x^3-12x)\,dA = \int_0^1 \left[\int_{-2}^1 y(x^3-12x)\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 y\left[\frac{x^4}{4} - 12\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 dy = \frac{57}{4}\int_0^1 y\,dy = \frac{57}{4}\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{57}{8}$$

Camino 2

$$\iint_R y\,(x^3-12x)\,dA = \int_{-2}^1 \left[\int_0^1 y(x^3-12x)\,dy \right] dx = \int_{-2}^1 (x^3-12x)\,\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_{-2}^1 \frac{1}{2}(x^3-12x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 \right]_{-2}^1 = \frac{57}{8}$$

EJEMPLO 3

$$\int_0^1\int_0^2 x e^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 e^{xy}\Big|_0^2 dx = \int_0^1 \left(e^{2x} - e^{0x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}$$

¿Y si lo hago al revés?

$$\int_0^2\int_0^1 x e^{xy}\,dx\,dy$$

$$\int_0^1 x e^{xy}\,dx = \frac{x}{y}e^{xy}\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{1}{y}e^{xy}\,dx = \frac{e^y}{y} - \frac{1}{y^2}e^{xy}\Big|_{x=0}^1 =$$

$u = x \qquad du = dx$

$v = \frac{1}{y}e^{xy} \qquad dv = e^{xy}\,dx$

$$= \frac{e^y}{y} - \frac{1}{y^2}e^y + \frac{1}{y^2}$$

$$\int_0^2 \left[\frac{e^y}{y} - \frac{e^y}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right]dy = ?$$

Además divido por cero la función, mala pinta

Moraleja: no siempre los dos caminos funcionan. Incluso si ambos funcionan, uno puede ser mucho más sencillo que el otro.

EJEMPLO 4 (Guiones V.1 ©)

$$\int_I y\sin(xy)\,dx\,dy \qquad \text{con} \qquad I = [1,2]\times[0,\pi]$$

El teorema de Fubini me permite calcular la integral por dos caminos

$$(1) \rightarrow \int_1^2\left(\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\right)dx = \int_0^\pi\left(\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\right)dy \leftarrow (2)$$

Camino 1

$u = y \qquad du = dy$

$v = -\frac{1}{x}\cos(xy) \qquad dv = \sin(xy)\,dy$

$$\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy = -\frac{y}{x}\cos(xy)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{x}\cos(xy)\,dy =$$

$$= -\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}$$

$$\int_1^2\left(-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)dx = \ldots$$

El teorema de Fubini me permite dos caminos. Si una integral queda difícil es útil probar el otro camino.

Camino 2

$$\int_1^2 y\sin(xy)\,dx = -\cos(xy)\Big|_1^2 = \cos(y) - \cos(2y)$$

$$\int_0^\pi\left(\cos(y) - \cos(2y)\right)dy = \sin(y) - \frac{1}{2}\sin(2y)\Big|_0^\pi = 0$$

17.1 (Guiones) $\rightarrow$ Ellos

$$\int_I f \quad \text{con} \quad I=[1,2]\times[0,1] \quad y \quad f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+y^2)}}$$

$$\int_1^2\left[\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+y^2)}}\,dy\right]dx=\int_1^2 \frac{\sqrt{(x^2+1)(x^2+y^2)}}{(x^2+1)}\Bigg|_{y=0}^{1} dx=\int_1^2 \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}}\Bigg|_{y=0}^{1} dx$$

$$=\int_1^2\left(\sqrt{\frac{(x^2+1)}{(x^2+1)}}-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right)dx=\int_1^2 dx-\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=$$

$$=2-1-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_{x=1}^{2}=2-1-\sqrt{5}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-\sqrt{5}$$

17.2 (Guiones) $\rightarrow$ Ellos

$$\int_I f \quad \text{con} \quad I=[0,1/2]\times[0,\pi], \quad f(x,y)=x^3\sin(yx^2)$$

$$\int_0^{1/2}\left[\int_0^{\pi} x^3\sin(yx^2)\,dy\right]dx=\int_0^{1/2} -x\cos(yx^2)\Big|_{y=0}^{\pi} dx=$$

$$=\int_0^{1/2}\left[x\cos(0)-x\cos(\pi x^2)\right]dx=\frac{x^2}{2}-\frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi}\Bigg|_{x=0}^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\pi}=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$$

Guiones V.1

V.1 Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy \right) dx$

b) $\displaystyle\iiint_I \frac{dx\,dy\,dz}{x+y+z}$, donde $I = [1,2]\times[0,1]\times[0,1]$

Resultados: a) 0; b) $22\ln 2 - \left(\frac{27}{2}\right)\ln 3$

(b)

$$\iiint_I \frac{1}{x+y+z}\, dx\,dy\,dz \qquad I = [1,2]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$\int_1^2 \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{x+y+z}\, dz\right] dy\,dx = \int_1^2 \int_0^1 \ln(x+y+z)\Big|_0^1 dy\,dx =$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \left[\ln(1+x+y) - \ln(x+y)\right] dy\,dx =$$

$$= \int_1^2 \left[(1+x+y)\ln(1+x+y) - (1+x+y) - \left[(x+y)\ln|x+y| - (x+y)\right]\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_1^2 \Big[(2+x)\ln(2+x) - \cancel{(2+x)} - (1+x)\ln(1+x) + \cancel{(1+x)} - (1+x)\ln(1+x)$$

$$+ \cancel{(1+x)} + x\ln(x) - \cancel{x}\Big] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[(2+x)\ln(2+x) - 2(1+x)\ln(1+x) + x\ln x\right] dx =$$

$$= \frac{(2+x)^2}{2}\ln(2+x) - \frac{(2+x)^2}{4} - \frac{2(1+x)^2}{2}\ln(1+x) + \frac{2(1+x)^2}{4} + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\Bigg|_{x=1}^{2} =$$

$$= 8\ln 4 - 4 - 9\ln(3) + \frac{9}{2} + 2\ln 2 - 1$$

$$- \frac{9}{2}\ln 3 + \frac{9}{4} + 4\ln 2 - 2 - \cancel{\frac{1}{2}\ln 1}^{\,0} + \frac{1}{4} = 0 + 22\ln 2 - \frac{27}{2}\ln 3$$

* Para las integrales de tipo $(a+x)\ln(a+x)$ se ha usado el siguiente relación:

$$\int (a+x)\ln(a+x)\,dx = \frac{(a+x)^2}{2}\ln(a+x) - \int \frac{1}{2}\frac{(a+x)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a+x)}}\,dx =$$

$u = \ln(a+x) \qquad du = \frac{1}{a+x}\,dx$

$$= \frac{(a+x)^2}{2}\ln(a+x) - \frac{1}{4}(a+x)^2$$

$v = \frac{(a+x)^2}{2} \qquad dv = (a+x)\,dx$

17.3 (Guiones)

17.3 Sea $f: I \to \mathbb{R}$ la función definida en $I = [0,1] \times [0,1]$ mediante $f(x,y) = \begin{cases} y, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-y, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

a) Para cada $x \in [0,1]$, estúdiese si existe $\int_0^1 f(x,y)\,dy$.

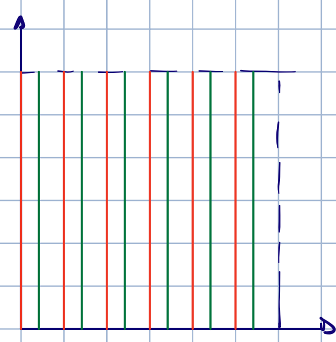
b) Para cada $y \in [0,1]$, estúdiese si existe $\int_0^1 f(x,y)\,dx$.

c) Analizar si existe $\iint_I f$.

d) Analizar si existe $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$; ¿hay contradicción entre los resultados c) y d)?

a)

En "y" función continua, en "x" infinitas discontinuidades



Fijo valor de $x \to x_0$

$$\int_0^1 f(x_0,y)\,dy \Rightarrow \text{Si } x_0 \in \mathbb{Q} \to \int_0^1 y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x_0 \notin \mathbb{Q} \to \int_0^1 (1-y)\,dy = y - \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

b)

Fijo valor de $y \to y_0$

$\int_0^1 f(x,y_0)\,dx \to$ Infinitas discont. $\to$ No integrable.

c)

$\iint_I f$ cada intervalo de la partición siempre incluye a las dos defs de la función luego la suma superior y la inferior, no pueden coincidir.

(d)

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

El teorema de Fubini es de aplicación siempre que se cumpla alguna de las condiciones siguientes:

(a) f continua en I

(b) f discontinua en un conjunto de contenido nulo y existe la integral entre paréntesis.

En este caso, el conjunto de ptos de discontinuidad tiene contenido, luego aunque se pueda calcular la integral,

$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$ no tiene que coincidir con $\iint_I f$