TEMA 1- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES Y CURVAS DE NIVEL

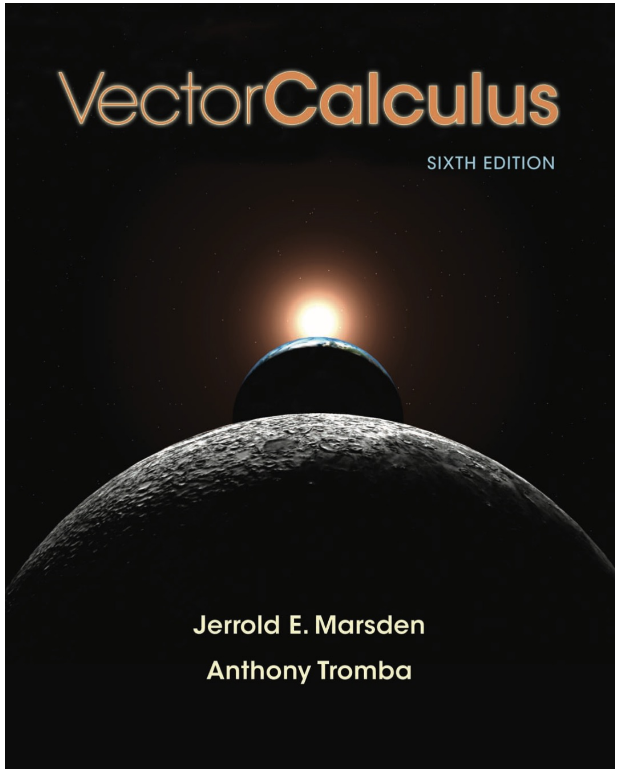
COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS

CURSO 2023-2024

Gonzalo Rubio
g.rubio@upm.es

Lectura recomendada

- Marsden y Tromba – 2.1 The geometry of real-valued functions
    - Se recomienda lectura del capítulo y practicar con los ejercicios propuestos



2.1 The Geometry of Real-Valued Functions

We launch our investigation of real-valued functions by developing methods for visualizing them. In particular, we introduce the notions of a graph, a level curve, and a level surface of such functions.

Functions and Mappings

Let f be a function whose domain is a subset A of $\mathbb{R}^n$ and with a range contained in $\mathbb{R}^m$. By this we mean that to each $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, f assigns a value $f(\mathbf{x})$, an m-tuple in $\mathbb{R}^m$. Such functions f are called ***vector-valued functions***[1] if $m > 1$, and ***scalar-valued functions*** if $m = 1$. For example, the scalar-valued function $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ maps the set A of $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$, in this case) to $\mathbb{R}$ ($m = 1$). To denote f we sometimes write

$$f: (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Definición de función. Contexto histórico

"Una cantidad obtenida a partir de otras cantidades por una sucesión de operaciones algebraicas o por cualquier otra operación imaginable"

1667 James Gregory

"Si unas magnitudes dependen de otras de tal manera que sufren variaciones cuando éstas varían, entonces las primeras se llaman funciones de las segundas."

1755 Euler

"Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ellos.

Dos variables X y Y están asociadas de tal forma que al asignar un valor a X entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a Y, se dice que Y es una función (unívoca) de X.

La variable X, a la que se asignan libremente valores, se llama variable independiente, mientras que la variable Y, cuyos valores dependen de la X, se llama variables dependientes.

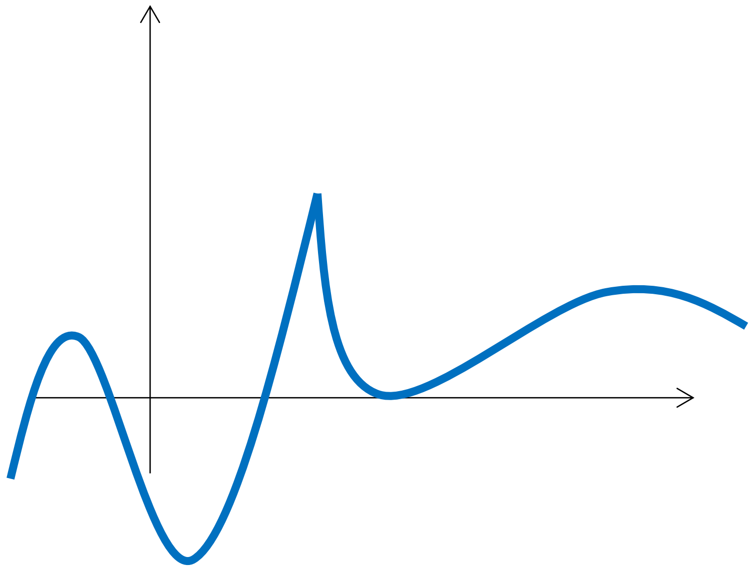
Los valores permitidos de X constituyen el dominio de definición de la función y valores que toma Y constituye su recorrido"

1829 Dirichlet

Función real de variable real. (Matemáticas I)

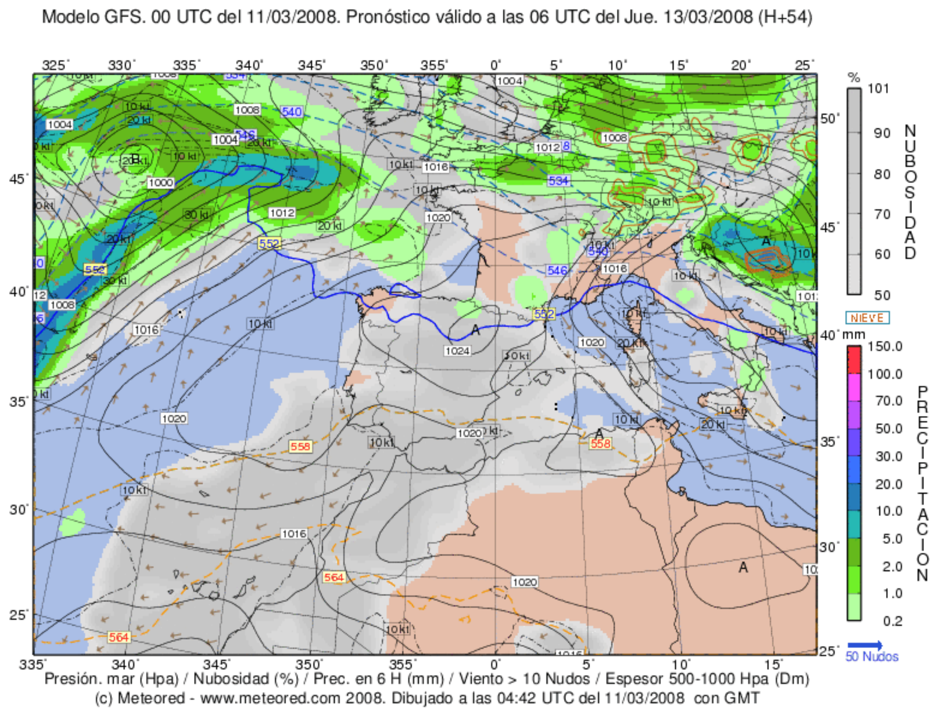
$$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \in D \to f(x) = y$$

Dominio de la función
Imagen de la función
Gráfica
Límite
Continuidad
Derivabilidad
…



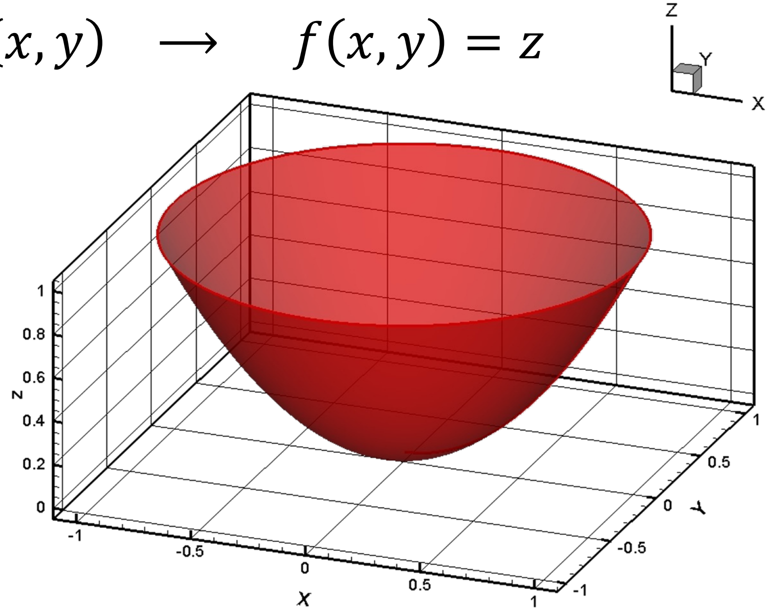
Función <u>real</u> de varias <u>variables reales</u>. (Matemáticas II)

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = y \end{aligned}$$



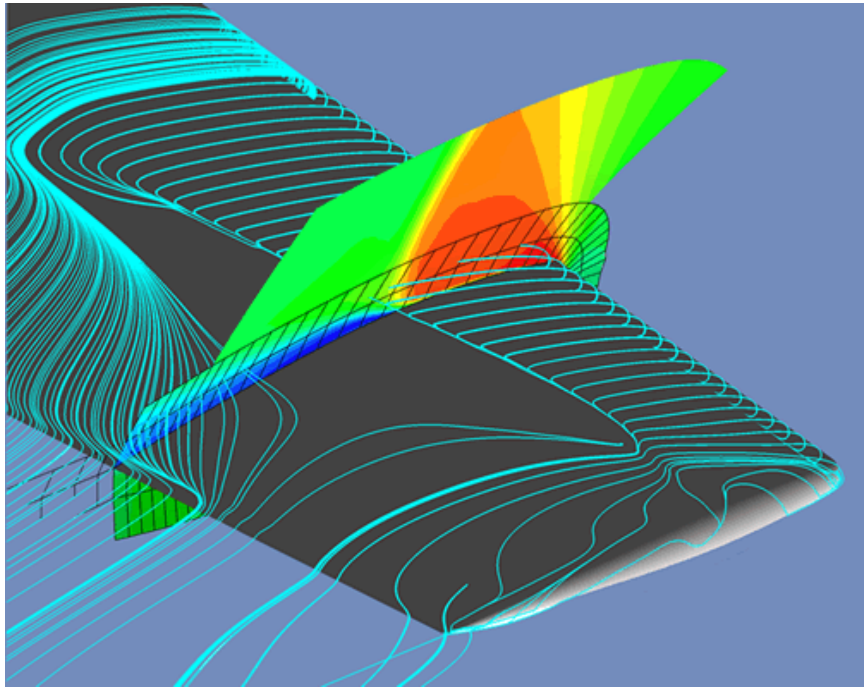
$\boxed{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow f(x, y) = z \end{aligned}$$



Función real de varias variables reales. (Matemáticas II)

$$
\begin{array}{lcl}
f: D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longrightarrow & f(\boldsymbol{x}) = y
\end{array}
$$



Distribución de presión. ONERA-M6

$$
\boxed{\mathbb{R}^3}\quad
\begin{array}{lcl}
f: D \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\
(x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z)
\end{array}
$$

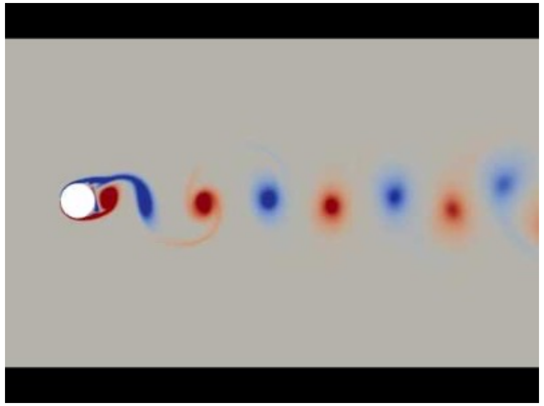
- Presión
- Temperatura

Función vectorial real de varias variables reales. (Matemáticas II)

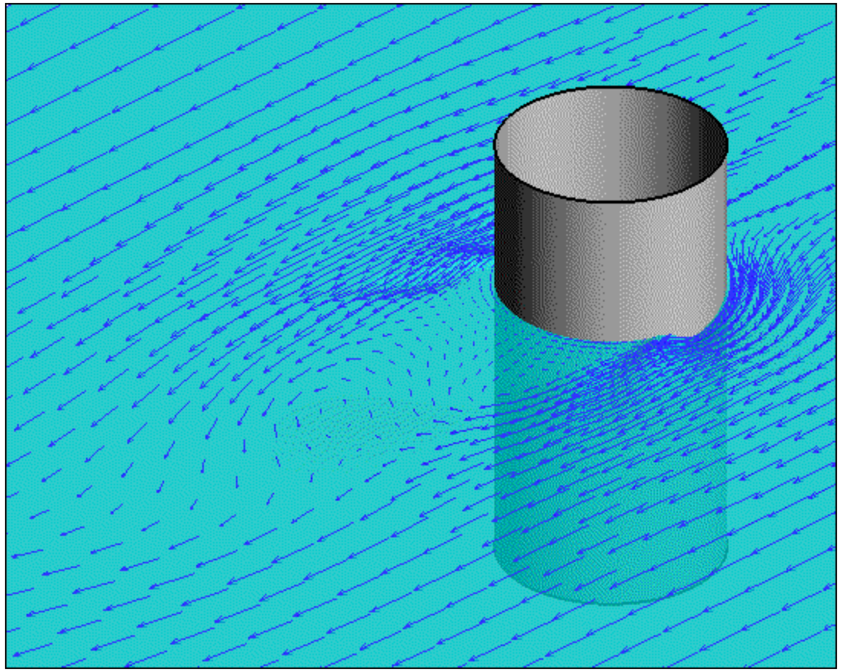
$$\boldsymbol{F}: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow I \subset \mathbb{R}^p$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \left(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \dots, f_p(\boldsymbol{x})\right)$$

$y_j = f_j(\boldsymbol{x})$ función coordenada

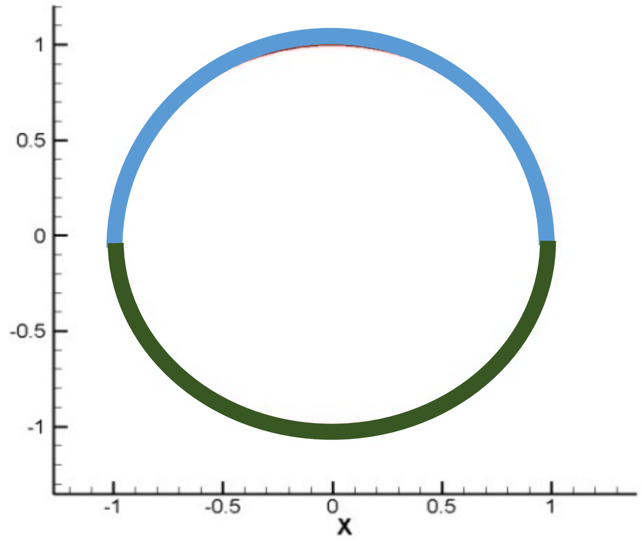


- Campo eléctrico
- Campo magnético
- Campo velocidad



Función vectorial real de varias variables reales. (Matemáticas II)

- Forma explícita de una función: $\begin{array}{c} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{array}$



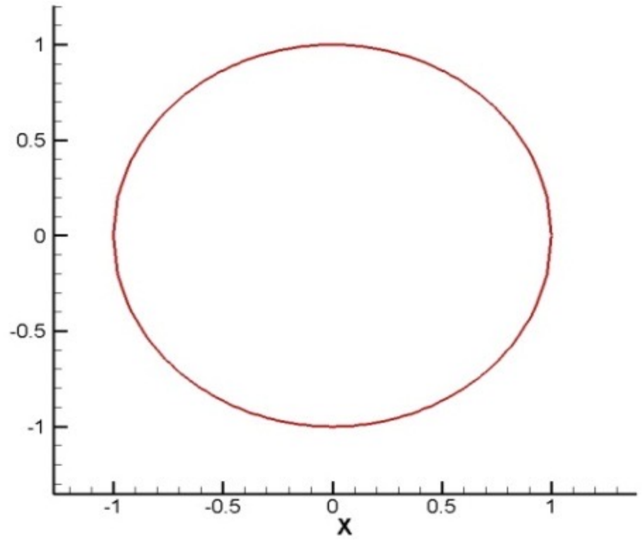
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

Función vectorial real de varias variables reales. (Matemáticas II)

- Forma explícita de una función: $\begin{array}{c} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{array}$

- Forma implícita de una función: $g(\boldsymbol{x}, y) = 0$ con $\begin{array}{c} g: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, y) \rightarrow g(\boldsymbol{x}, y) \end{array}$



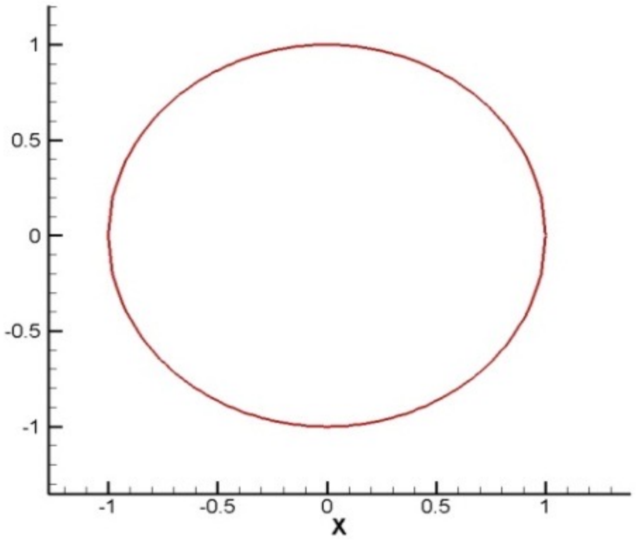
$g(x, y)$: $x^2 + y^2 = 1$

Función <u>vectorial real</u> de varias <u>variables reales</u>. (Matemáticas II)

- Forma explícita de una función: $\begin{array}{c} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{array}$

- Forma implícita de una función: $g(\boldsymbol{x}, y) = 0$ con $\begin{array}{c} g: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, y) \rightarrow g(\boldsymbol{x}, y) \end{array}$

- Forma paramétrica de una función: $\begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{r}}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \\ \quad \boldsymbol{t} \rightarrow \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{t}), \dots, \boldsymbol{x_n}(\boldsymbol{t})) \end{array}$



$\vec{r}(\theta) = (cos\theta, sen\theta); \quad \theta \in [0,2\pi]$

Definiciones asociadas:

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ una función real de varias variables reales:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = y$$

Definiciones asociadas:

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ una función real de varias variables reales:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = y$$

Se define:

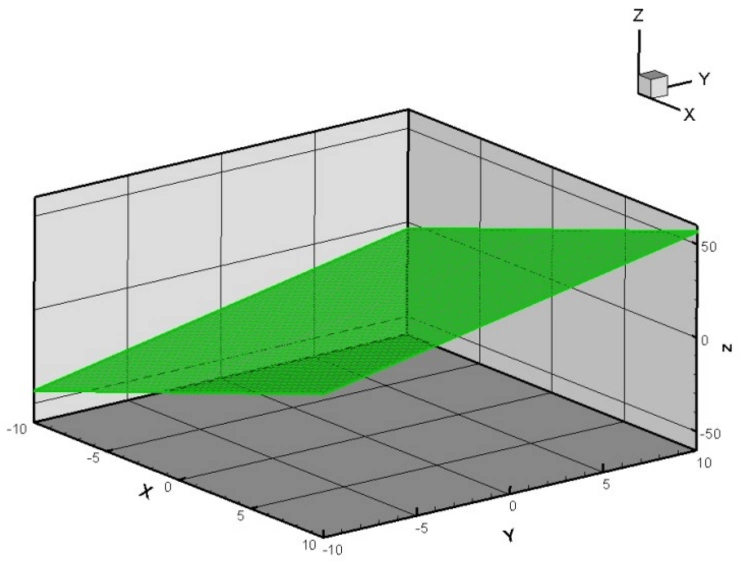
- Dominio de $f \equiv D = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{:existe } y \in \mathbb{R} \text{ con } f(\vec{x}) = y \right\}$
- Imagen de $f \equiv I = \left\{ y \in \mathbb{R} \text{ :existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ con } f(\vec{x}) = y \right\}$

Ejemplo: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = 3x + 2y + 7$$

Dominio de $f = D = \mathbb{R}^2$

Imagen de $f = I = \mathbb{R}$



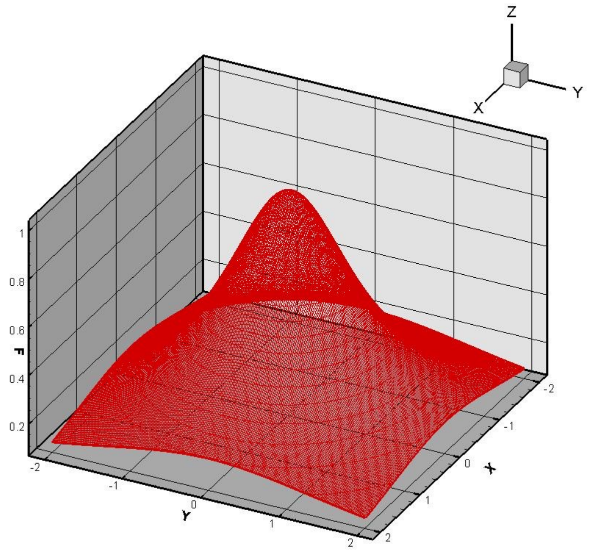
Definiciones asociadas:

Ejemplo 2:
$$\begin{array}{rcl} f: D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{array}$$

Definiciones asociadas:

Ejemplo 2: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$



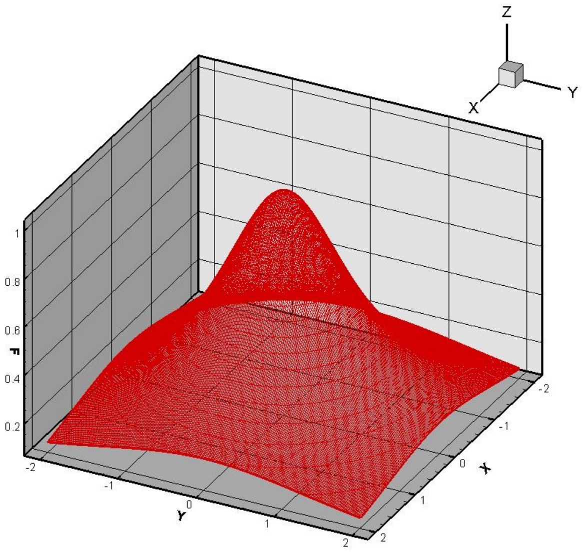
Dominio de $f = D = \mathbb{R}^2$

Imagen de $f = I = (0,1]$

Definiciones asociadas:

Ejemplo 2: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$



Dominio de $f = D = \mathbb{R}^2$

Imagen de $f = I = (0,1]$

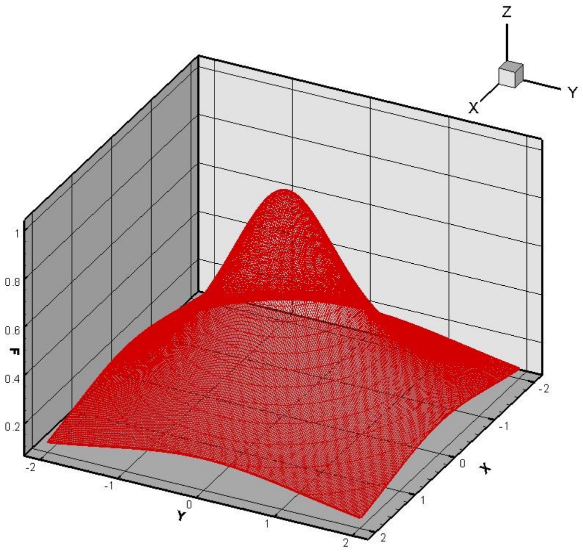
Ejemplo 3 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{3x-5y}{y-x^2}$$

Definiciones asociadas:

Ejemplo 2: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

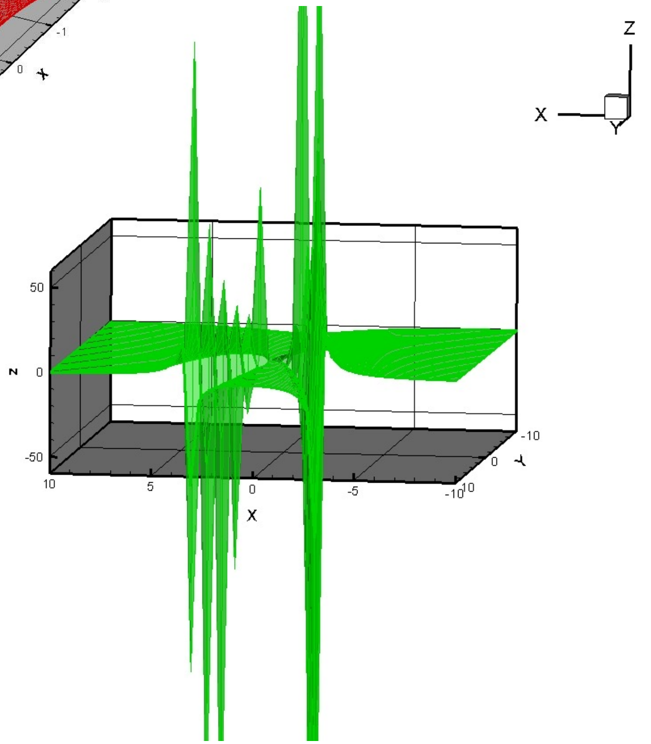


Dominio de $f = D = \mathbb{R}^2$

Imagen de $f = I = (0,1]$

Ejemplo 3 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{3x-5y}{y-x^2}$$



Dominio de $f = D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad y - x^2 \neq 0\}$

Imagen de $f = I = \mathbb{R}$

Definiciones asociadas:

Ejemplo 4: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$$

Definiciones asociadas:

Ejemplo 4: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$$

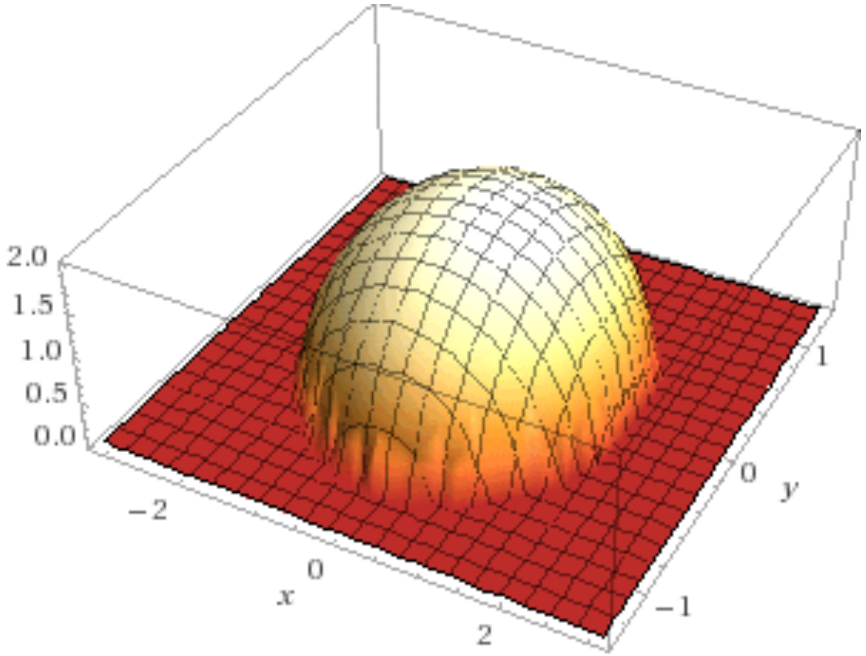
Dominio de $f = D = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 4 - x^2 - 4y^2 \geq 0\} \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$

Imagen de $f = I = [0,2]$

Observad que $0 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq 4 - x^2 - 4y^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} \leq 2.$

Los valores extremos se alcanzan en el borde de la elipse y el centro, respectivamente



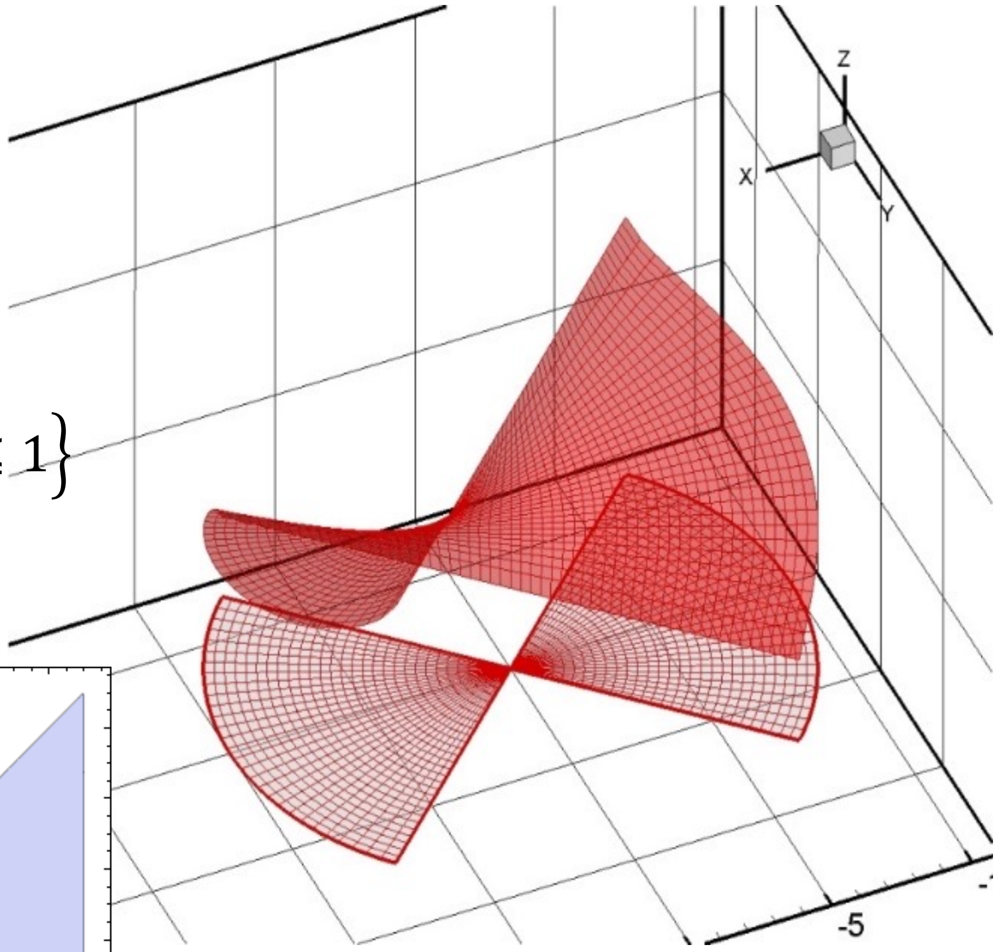
Definiciones asociadas:

Ejemplo 5: $$\begin{array}{rcl} f: D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) = 2\, arcsen\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

Definiciones asociadas:

Ejemplo 5: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$

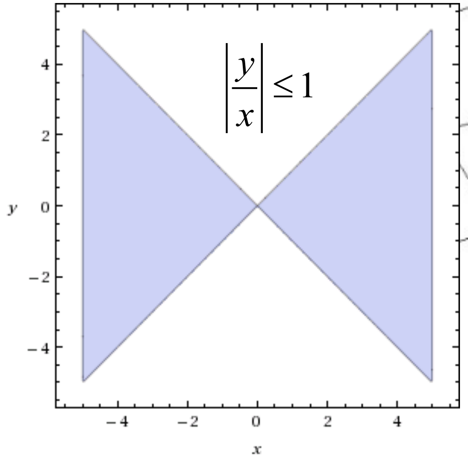
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = 2\, arcsen\left(\frac{y}{x}\right)$$



Dominio de $f = D = \mathbb{R}^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1\right\}$

Imagen de $f = I = [-\pi, \pi]$

Recordad $-\pi/2 \leq arcsen(x) \leq \pi/2, \quad -1 \leq x \leq 1$



GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ una función real de varias variables reales:

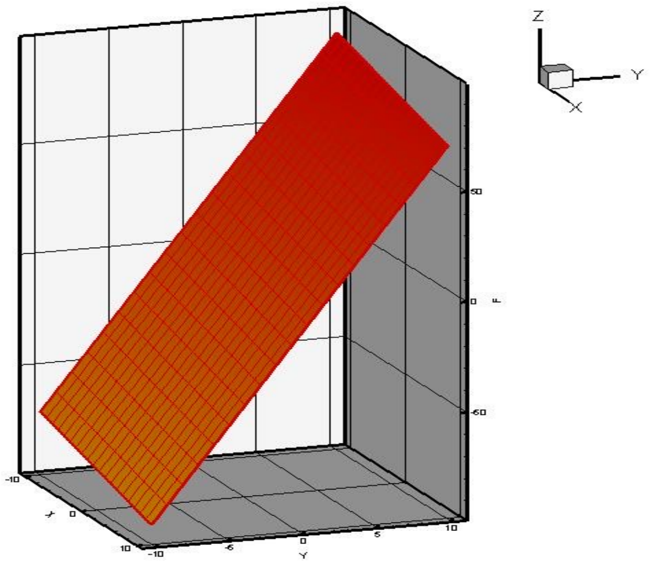
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = y$$

Se define:

- Gráfica de $f \equiv graf(f) = \{G \subset \mathbb{R}^{n+1}: \left(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) \text{ con } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$

$$Ej: f(x, y) = f(x, y) = -x - 8y$$

$$\text{Gráfica de } f = (x, y, z) = (x, y, -x - 8y)$$

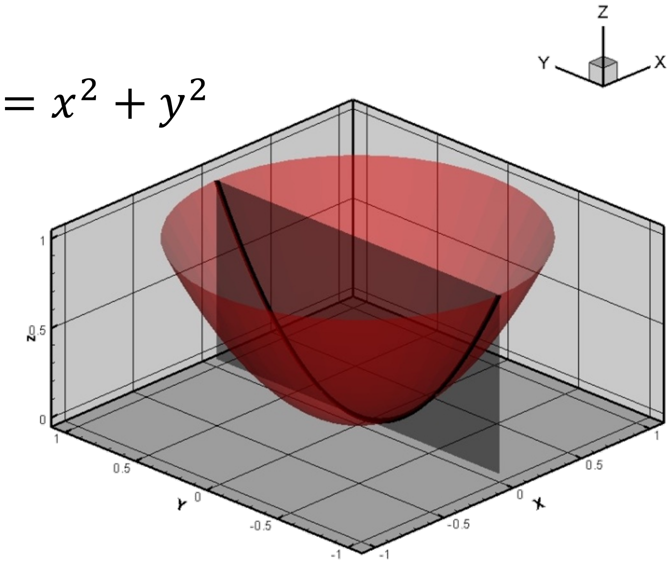


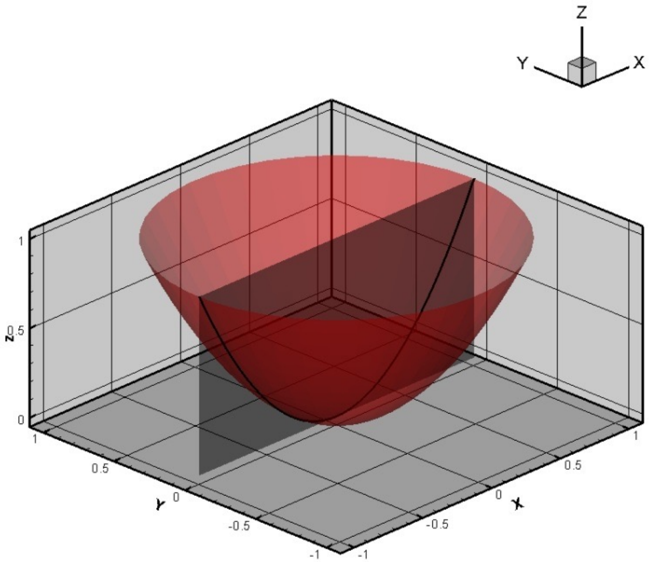
CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

¿Cómo identificar gráficas de funciones en $\mathbb{R}^2$?

- Intersección con planos coordenados

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \quad I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\longrightarrow \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \end{aligned}$$





$x \equiv cte \longrightarrow \; f(x, y) = f(y) = y^2 + k$ parábola

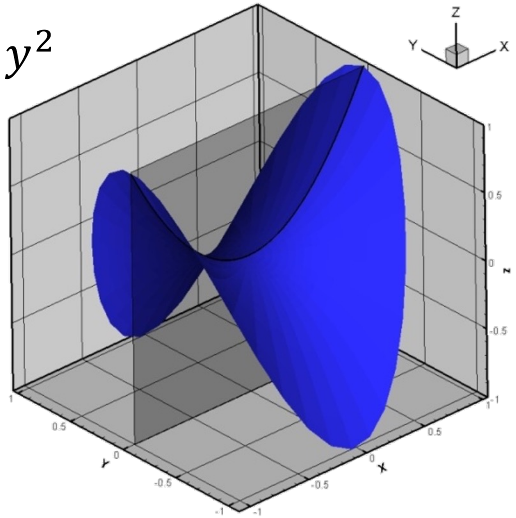
$y \equiv cte \longrightarrow \; f(x, y) = f(x) = x^2 + k$ parábola

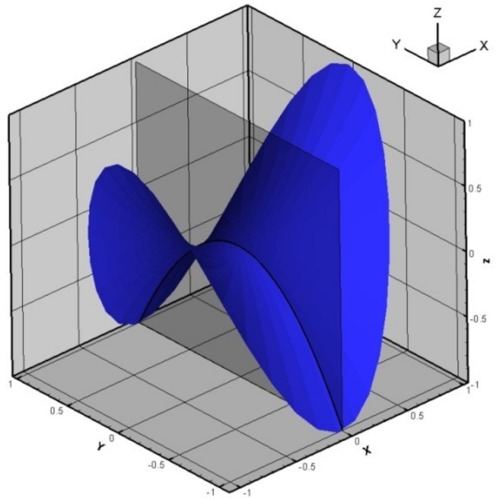
CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

¿Cómo identificar gráficas de funciones en $\mathbb{R}^2$?

- Intersección con planos coordenados

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow I \subset \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) = x^2 - y^2 \end{aligned}$$





$y \equiv cte \longrightarrow f(x,y) = f(x) = x^2 - k$ parábola

$x \equiv \text{cte} \longrightarrow f(x,y) = f(y) = k - y^2$ parábola

CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ una función real de varias variables reales:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = y$$

Se define:

- Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$

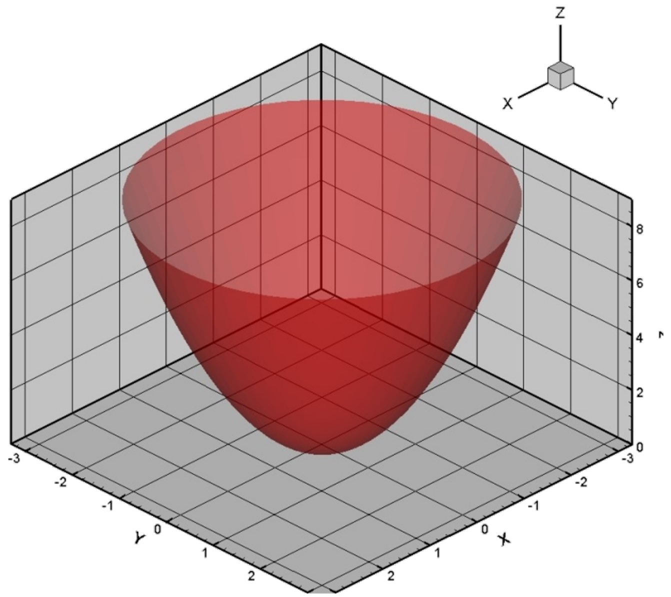
  - Los conjuntos de nivel también pueden servir para identificar la gráfica de una función.
  - Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ los conjuntos de nivel son curvas
  - Si $f: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ los conjuntos de nivel son superficies

CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

- Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$

$$\begin{array}{rcl} f: D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x,y) = x^2 + y^2 \end{array}$$

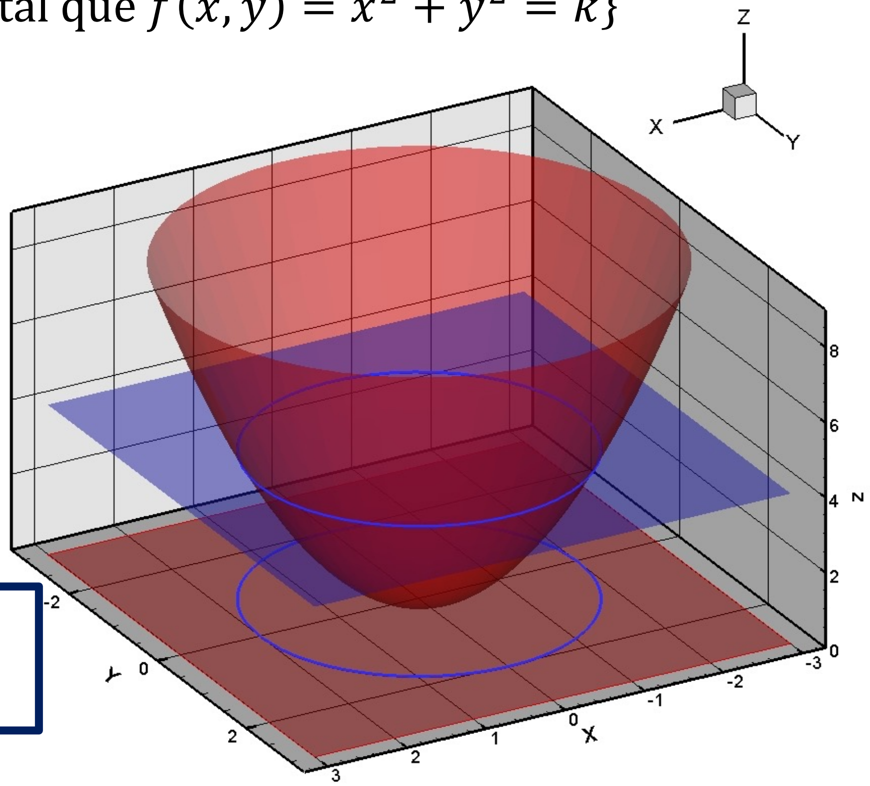
$$C_k = \{(x, y) \text{ tal que } f(x, y) = x^2 + y^2 = k\}$$



Intersección con planos horizontales de altura *k*

$$x^2 + y^2 = k$$

Circunferencias de radio $\sqrt{k}$

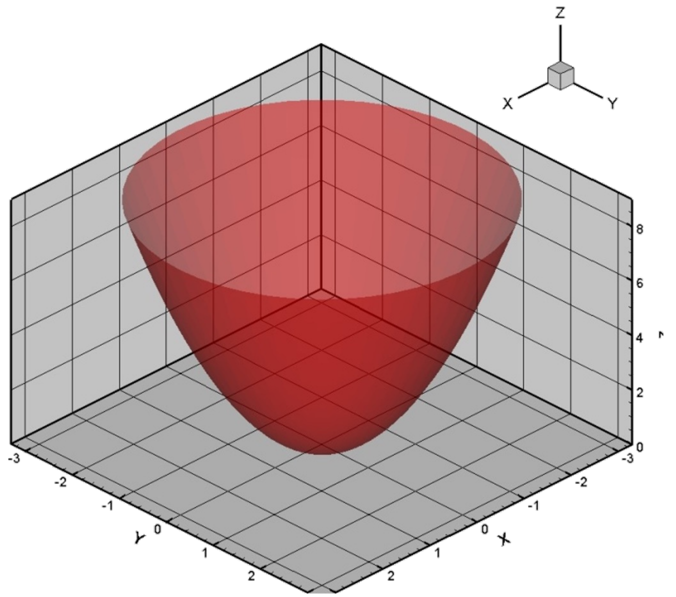


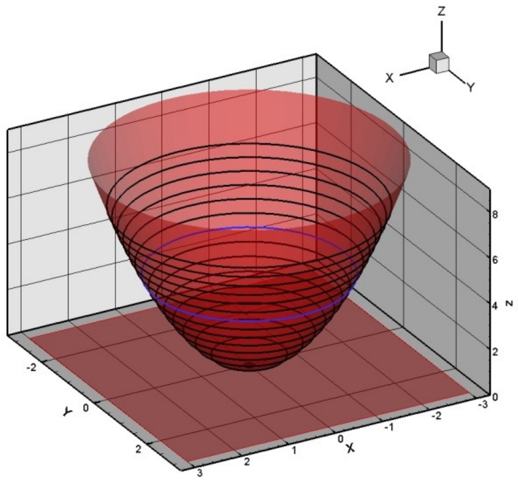
CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

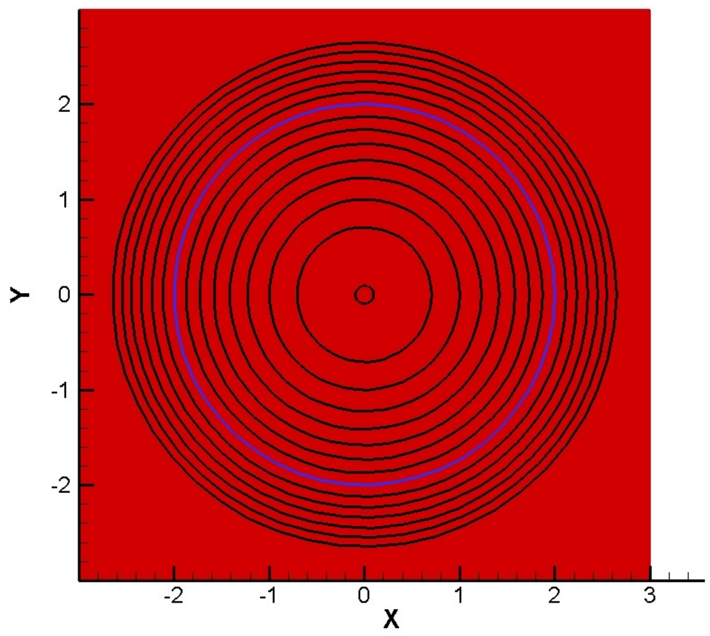
- Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$

$$\begin{array}{rcl} f: D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) = x^2 + y^2 \end{array}$$

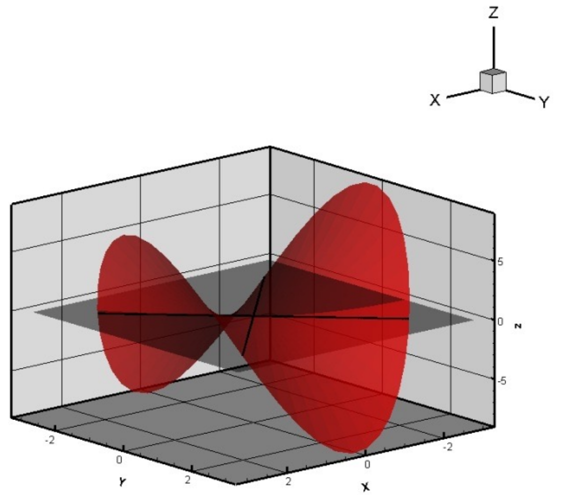
$$C_k = \{(x, y) \text{ tal que } f(x, y) = x^2 + y^2 = k\}$$







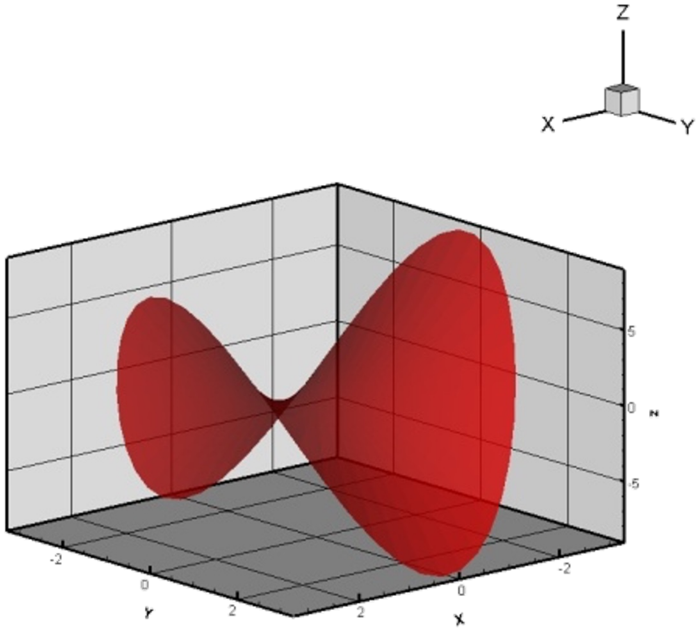
CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

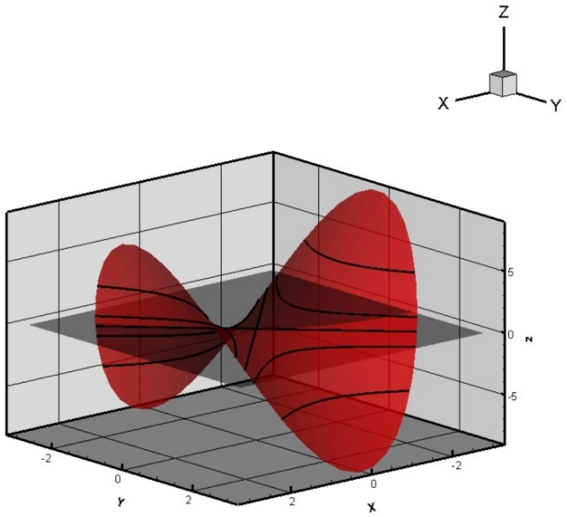


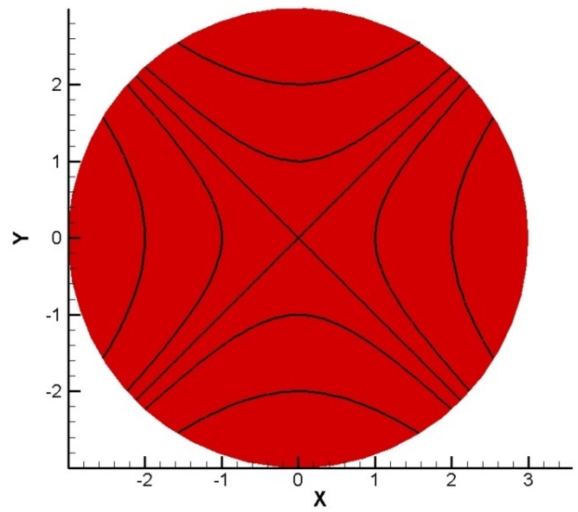
- Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$

$$\begin{array}{rcl} f: D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) = x^2 - y^2 \end{array}$$

$$C_k = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 - y^2 = k\}$$



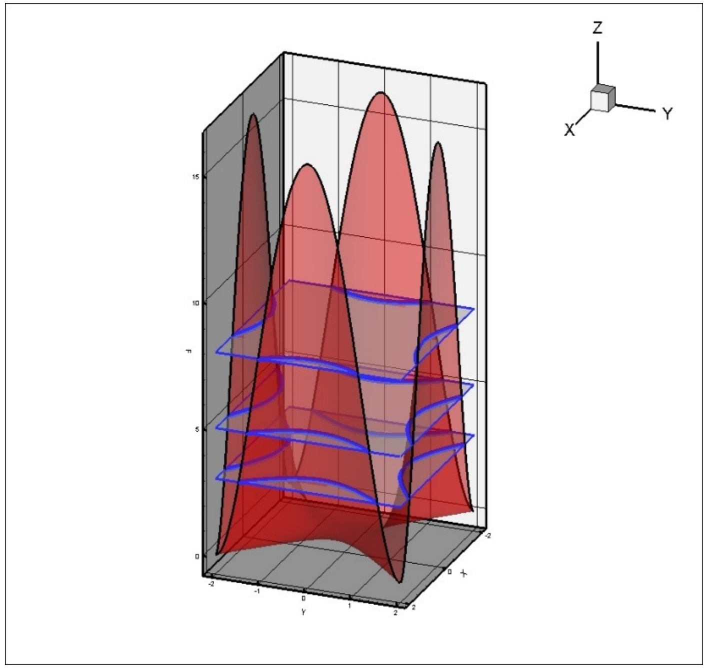


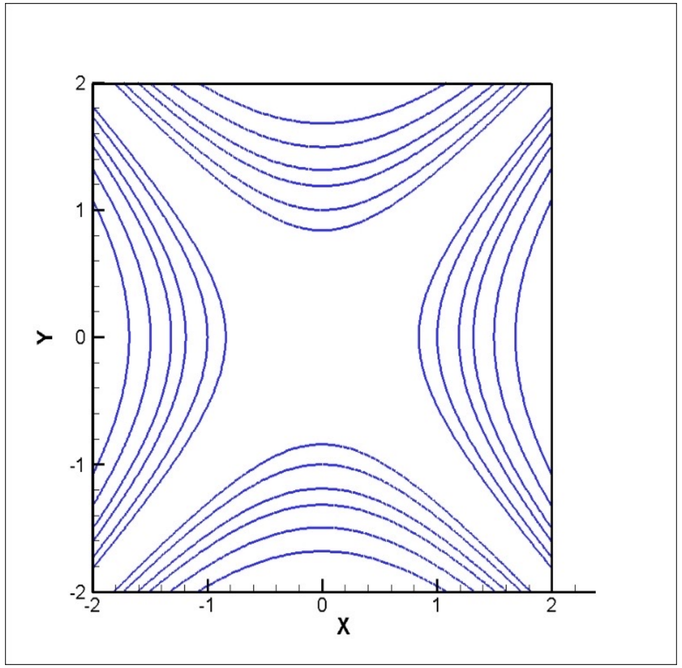


CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

- Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\}$

$$\begin{array}{rcl} f: D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \end{array}$$



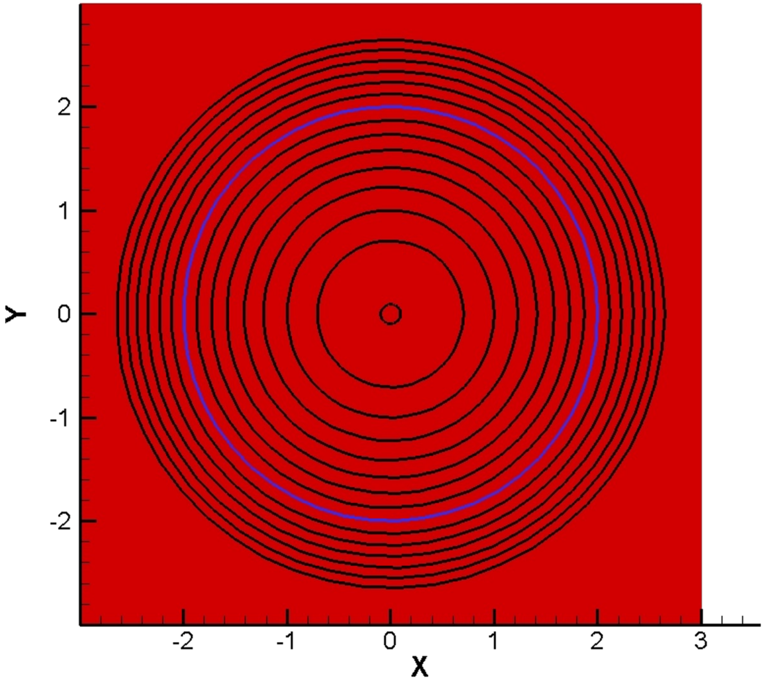


Curvas de nivel $\quad f(x,y) = c \Rightarrow \left(x^2 - y^2\right)^2 = c \Rightarrow x^2 - y^2 = \sqrt{c} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{\sqrt{c}} - \dfrac{y^2}{\sqrt{c}} = 1}$ *Hipérbola*

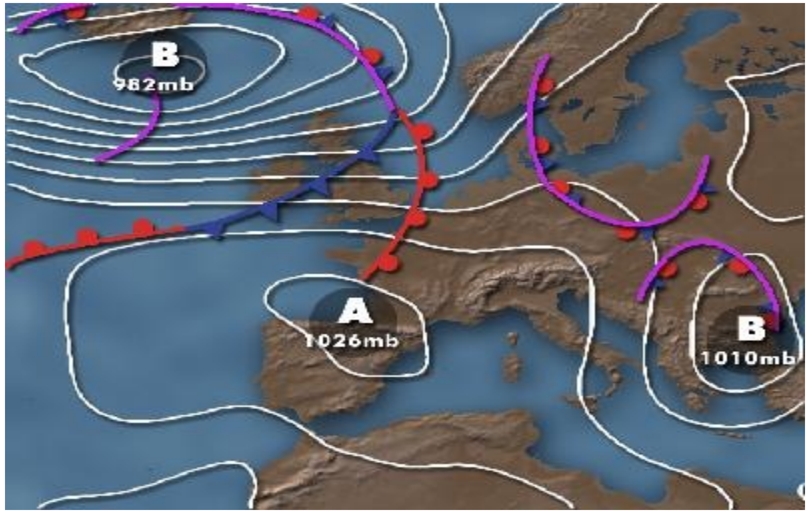
CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$

- Los conjuntos de nivel también pueden servir para identificar la gráfica de una función.
- La distancia entre curvas de nivel indica la velocidad de variación de la función.



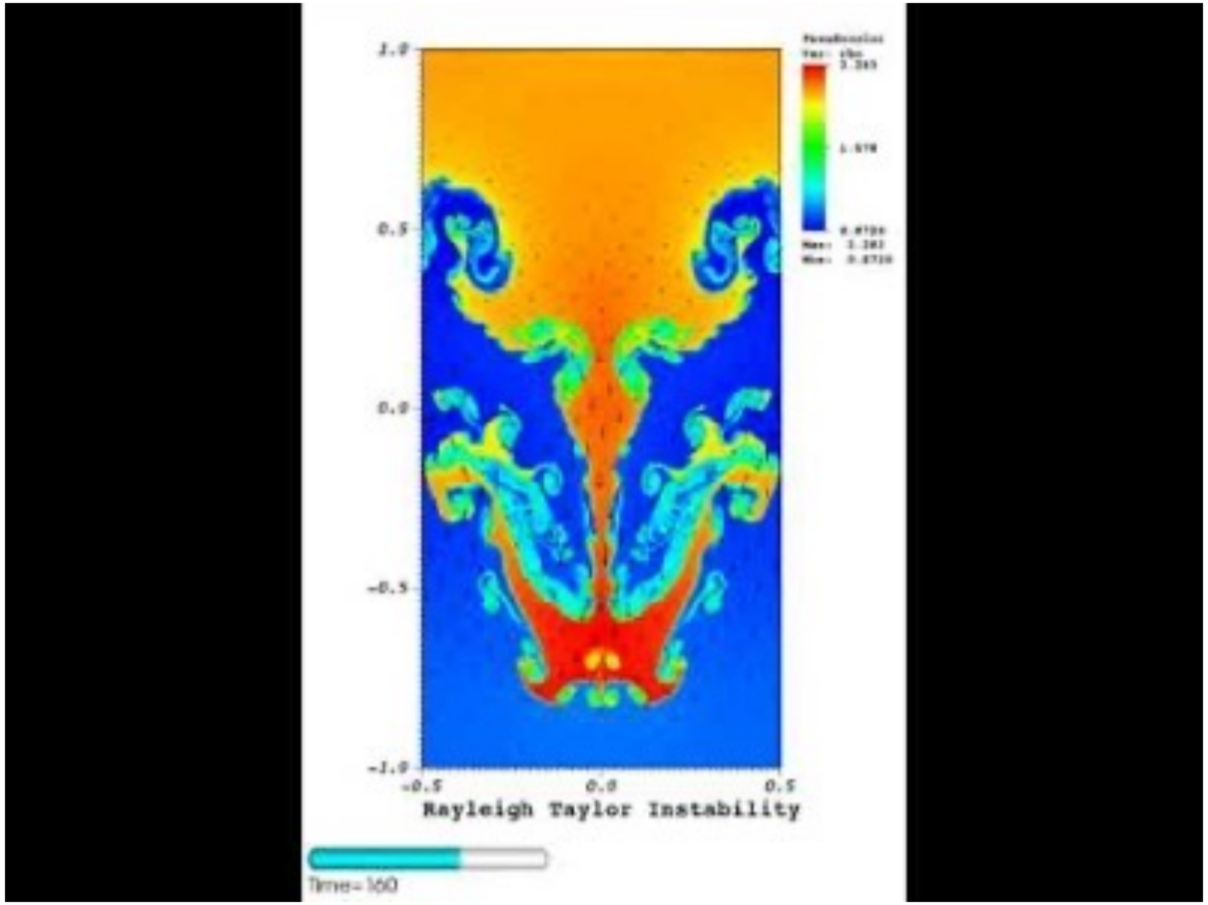
Curvas de nivel juntas indican crecimiento rápido



CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k$
$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$

- Método Level Set (conjunto de nivel en inglés) permite resolución de problemas multifase en CFD
- Se identifica la interfaz como el conjunto de puntos (x,y,z) en los que una función (llamada función distancia) vale cero.



CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

- Gráficas de funciones que debemos identificar:

$$
\begin{aligned}
f: D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow I \subset \mathbb{R} \\
(x, y) &\longrightarrow f(x, y) = x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

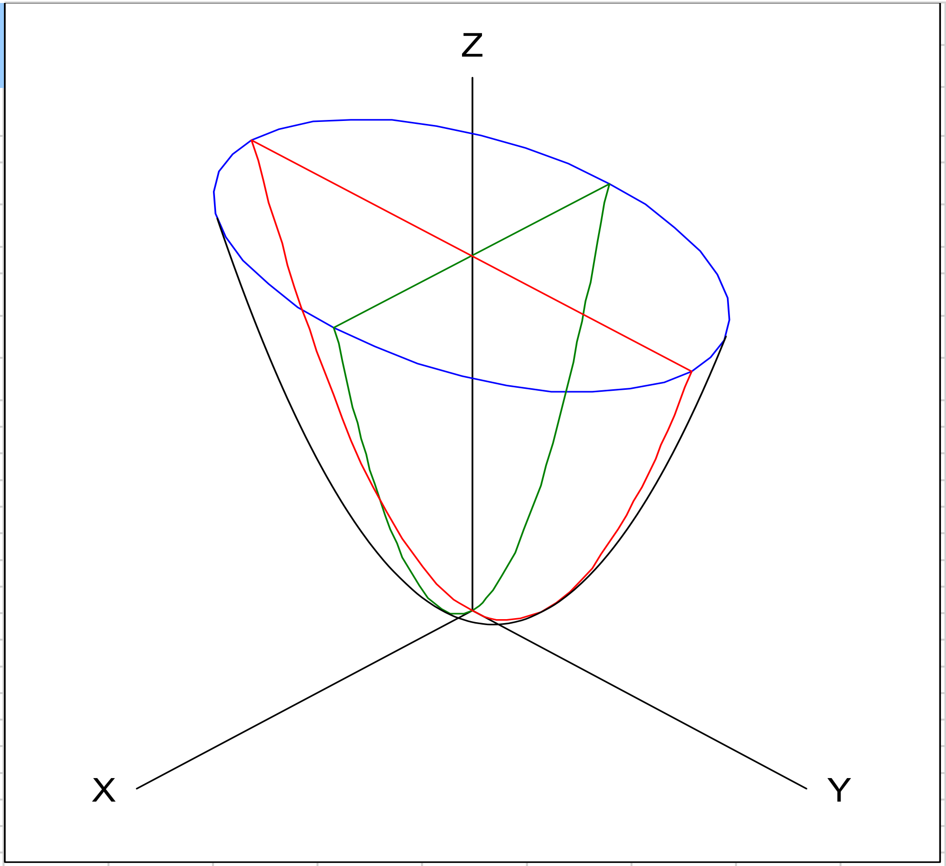
Paraboloide elíptico

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$

Objetivo: Visualizar la superficie para diversos valores de a y b

Introducir valores:

a	b
0,5	0,8



CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

- Gráficas de funciones que debemos identificar:

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \quad I \subset \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\longrightarrow \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \end{aligned}$$

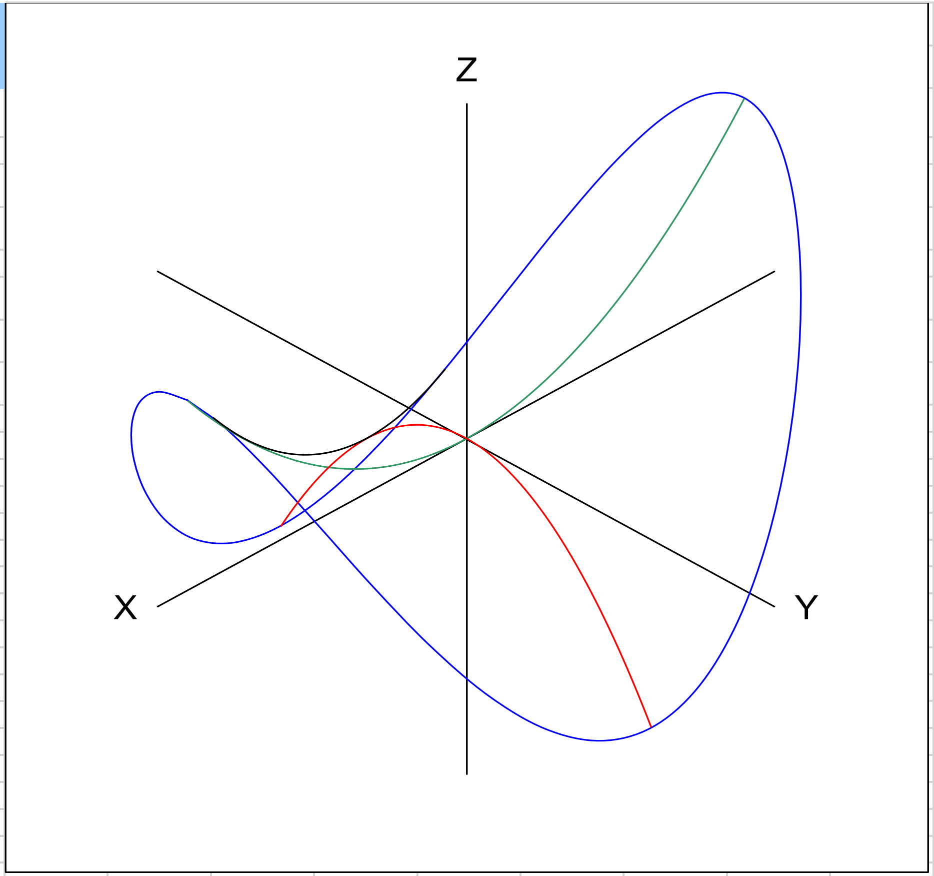
Paraboloide hiperbólico

x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z

Objetivo: Visualizar la superficie para diversos valores de a y b

Introducir valores:

a	b
1,2	0,8



CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

- Gráficas de funciones que debemos identificar:

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

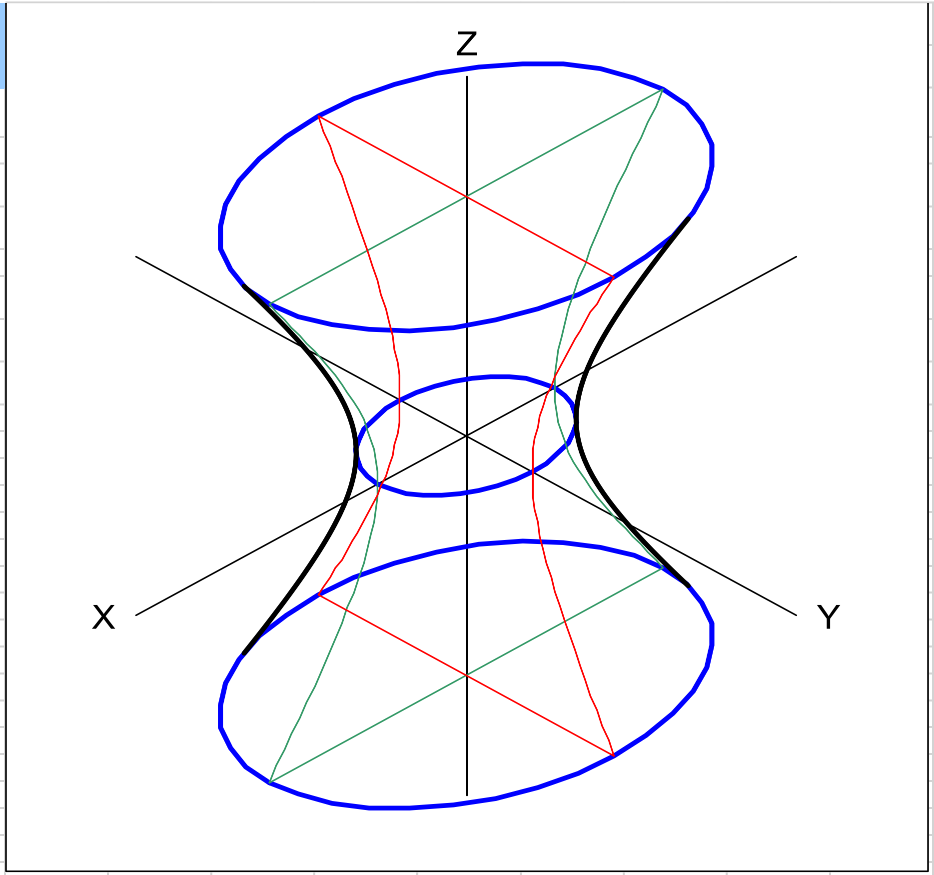
Hiperboloide de 1 hoja

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$

Objetivo: Visualizar la superficie para diversos valores de a,b,c

Introducir valores:

a	b	c
0,8	**0,6**	**1**



CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

- Gráficas de funciones que debemos identificar:

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

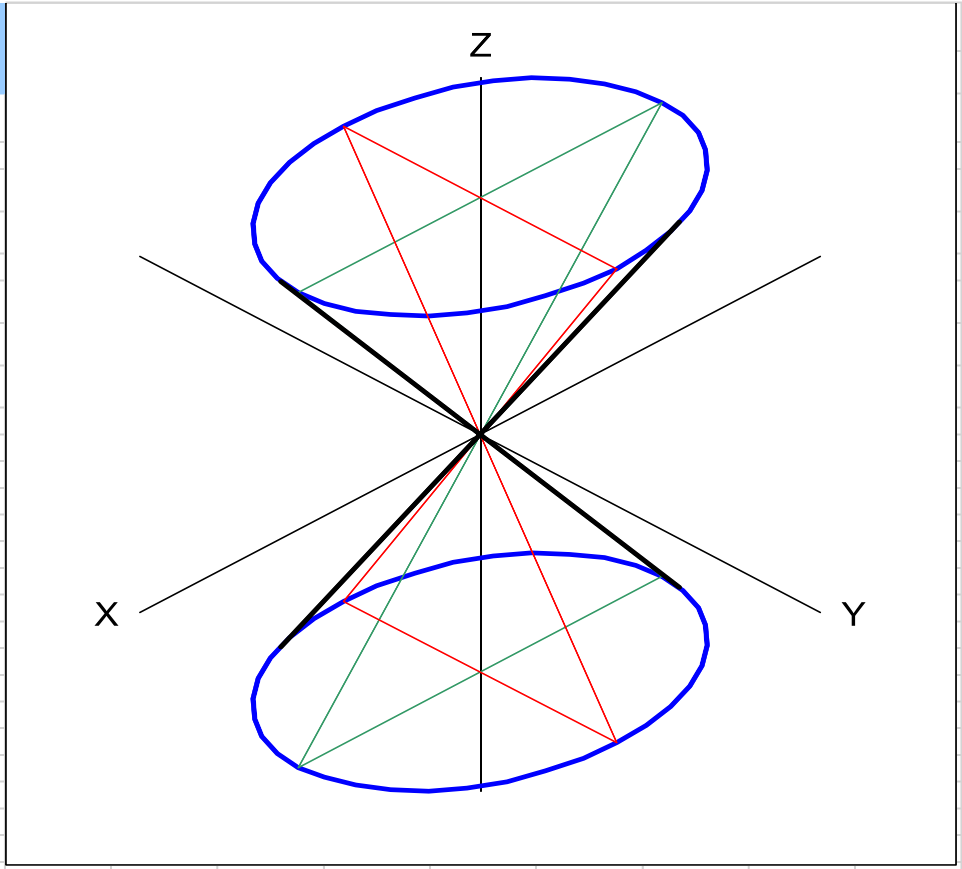
Cono

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$

Objetivo: Visualizar la superficie para diversos valores de a,b,c

Introducir valores:

a	b	c
0,8	0,6	1



CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

- Gráficas de funciones que debemos identificar:

$$
\begin{array}{ccc}
f: D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & I \subset \mathbb{R} \\
(x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}
\end{array}
$$

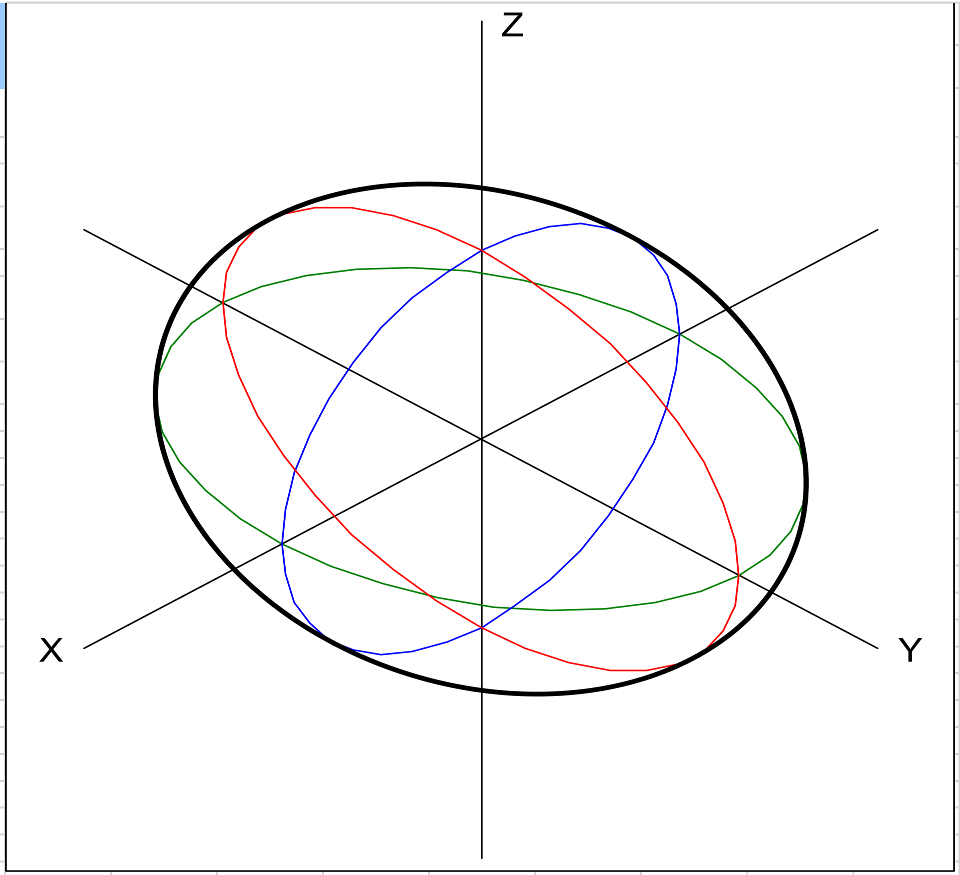
Elipsoide

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

Objetivo: Visualizar la superficie para diversos valores de a,b,c

Introducir valores:

a	b	c
1	**1,3**	**0,9**



CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

¿Cómo identificar gráficas de funciones en $\mathbb{R}^2$?

- Ejercicio $\text{Sea}: f: D \subset R^2 \longrightarrow R$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \left(x^2 - y^2\right)^2$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = sen\left(|x| + |y|\right)$$

CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

¿Cómo identificar gráficas de funciones en $\mathbb{R}^2$?

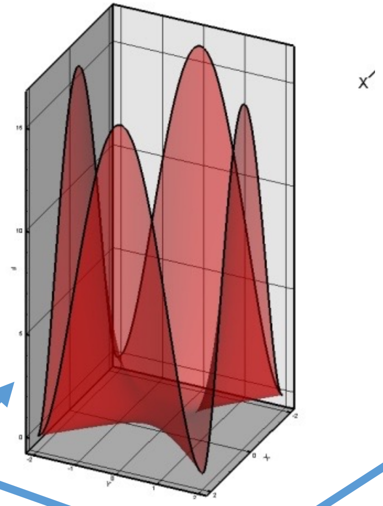
- Ejercicio $\text{Sea}: f : D \subset R^2 \longrightarrow R$

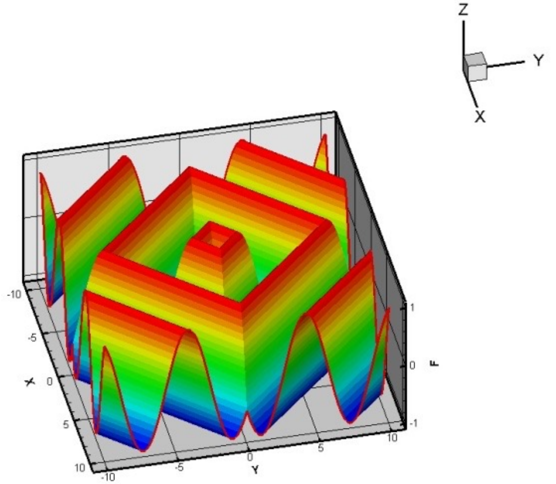
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

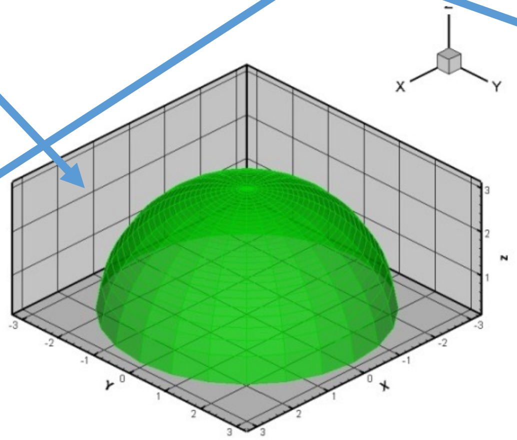
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

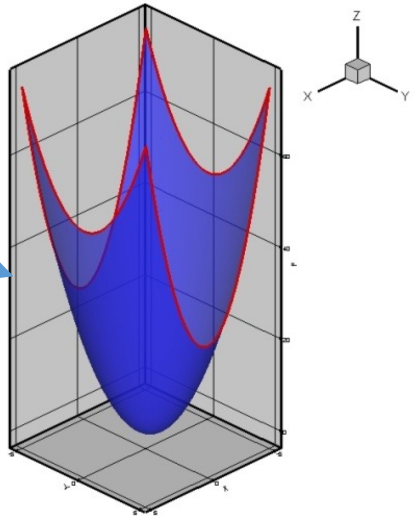
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)^2$$

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = sen\left(|x| + |y|\right)$$









CONJUNTOS DE NIVEL, CURVAS Y SUPERFICIES

Conjunto de nivel C_k de $f \equiv C_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \colon f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$

- Los conjuntos de nivel también pueden servir para identificar la gráfica de una función.
- La distancia entre curvas de nivel indica la velocidad de variación de la función.
- Curvas de nivel elípticas se corresponden con extremos de funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Ej: f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$$