③ [ordinario 2015/2016].

CONTINUIDAD

C. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Analizar si f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Sea C un conjunto de $\mathbb{R}^2$, se verifica que:

13) Si $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x\leq 1,\ -1\leq x+y\leq 1\}$ entonces $f(C)$ no es compacto.

14) Si $C=\overline{B}((2,2),1)\cup B((2,-2),1)$ entonces $f(C)$ es un intervalo.

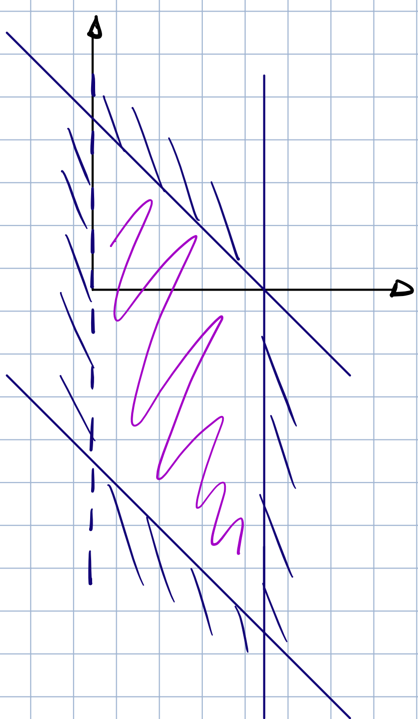
15) Si $C=\overline{B}((2,2),1)\cup B((-2,2),1)$ entonces $f(C)$ es un intervalo.

16) Si $C=\overline{B}((0,0),1)-\{(0,y)\in\mathbb{R}^2: |y|\leq 1\}-\{(x,0)\in\mathbb{R}: |x|\leq 1\}$ entonces $f(C)$ es un intervalo.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0? \longrightarrow 0 \leq \left|\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x^2| \to 0$$

$f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$

I) Si $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x\leq 1,\ -1\leq x+y\leq 1\}$, $f(C)$ no es compacto



$y \leq 1-x$

$y \geq -1-x$

C no es compacto.

f cont + C comp $\longrightarrow f(C)$ comp.

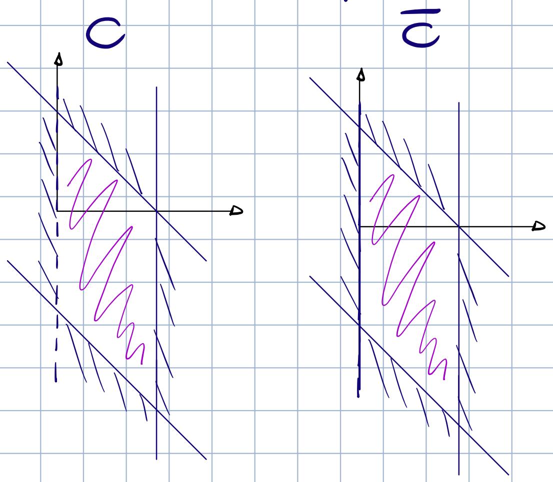
f cont + C no comp $\longrightarrow f(C)$ puede ser o no comp.

$f(\overline{C})$ es compacto

$f(C)$ es compacto?

Si soy capaz de probar que $f(C)=f(\overline{C})$, entonces, $f(C)$ es compacto.

La única dif. entre ambos intervalos es $f(0,y)$

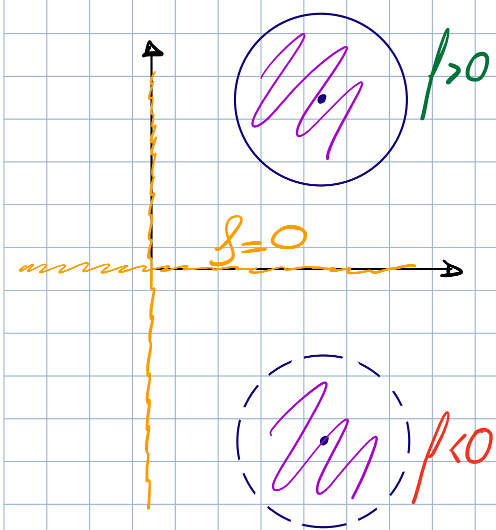


$$f(0,y)=\frac{0^2 y}{\sqrt{0^2+y^2}}=0$$

Si alcanzo el 0 u otro pto $\in C$, $f(C)$ será compacto.

Podemos ver que $f(0,x)=0$ F

II) Si $C=\overline{B}((2,2),1)\cup B((2,-2),1)$, $f(C)$ es intervalo.



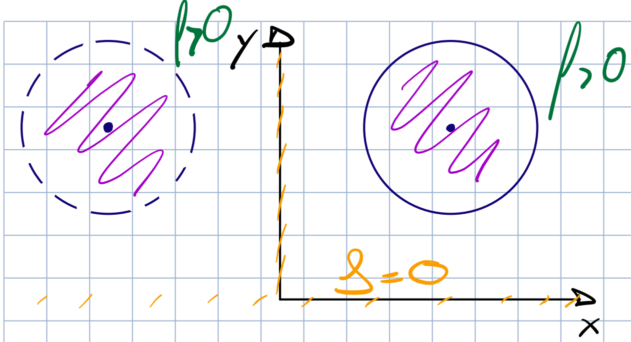
✓ ✗ ?

f cont + C conexo $\longrightarrow$ $f(C)$ conexo [intervalo en $\mathbb{R}$]

Tenemos que mirar la def de la función.

Vemos que $f(C)=(-b,-a)\cup[a,b]$ y eso no es un intervalo. F

III) Si $C=\overline{B}((2,2),1)\cup B((-2,2),1)$, $f(C)$ es intervalo.



f cont + C conexo $\longrightarrow f(C)$ conexo [intervalo en $\mathbb{R}$]

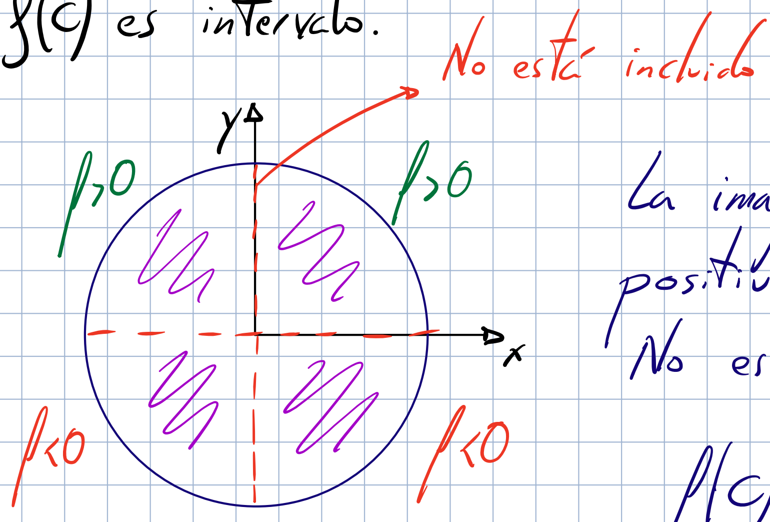
Tenemos que mirar la def de la función.

Por simetría, ambos subintervalos ($\overline{B}$ y B) tienen las mismas imágenes (salvo frontera).

$$f(-x,y)=\frac{(-x)^2 y}{\sqrt{(-x)^2+y^2}}=\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(x,y)$$

De modo que $\underset{\text{conexo}}{f(\overline{B})} = f(B\cup\overline{B}) \longrightarrow$ conexo $\longrightarrow$ intervalo V

~~IV~~ Si $C=\overline{B}((0,0),1)-\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 / |y|\leq 1\}-\{(x,0)\in\mathbb{R}^2/|x|<1\}$, $f(C)$ es intervalo.



La imagen de la función toma valores positivos y negativos pero no el cero. No es intervalo.

$$f(C)=[-a,0)\cup(0,a]$$

$\hookleftarrow$ esto es un entorno reducido, pero no un intervalo.

④

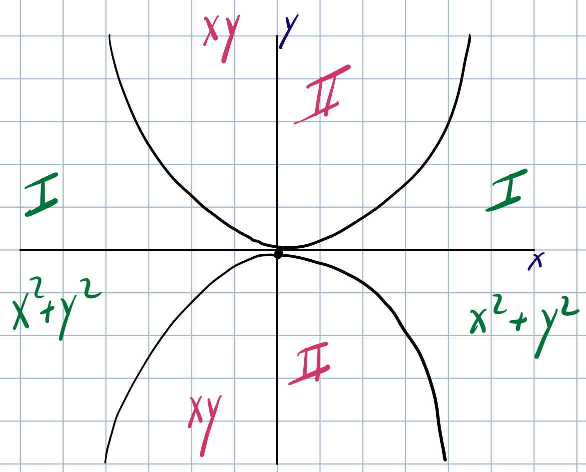
REPASO HASTA DIFERENCIABILIDAD

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } |y| < x^2 \quad \mathrm{I} \\ xy & \text{si } |y| \geq x^2 \quad \mathrm{II} \end{cases}$$

Estudiar: dominio, continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad

$Dom(f) = \mathbb{R}^2$



Continuidad

Puntos sobre $y = x^2$, $(x_0, x_0^2) \longrightarrow f(x,y) = xy$

$$f(x_0, x_0^2) = x_0^3$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^2)} f(x,y) = \begin{cases} x_0^3 \\ x_0^2 + x_0^4 \end{cases} \qquad x_0^3 = x_0^2 + x_0^4$$

$$x_0^2(x_0 - 1 - x_0^2) = 0 \begin{cases} \to x_0 = 0 \\ \to x_0 - 1 - x_0^2 = 0 \longrightarrow \text{No } \exists \text{ sol real.} \end{cases}$$

$$-\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0$$

Solo se cumple en $(0,0)$

Puntos sobre $y = -x^2$, $(x_0, -x_0^2)$

$$f(x_0, -x_0^2) = -x_0^3$$

$$\lim_{\bar{x} \to (x_0, -x_0^2)} f(x,y) = x_0^2 + x_0^4$$

Igual que antes, solo se cumple en $(0,0)$

Luego es continua en $\mathbb{R}^2 - \{ |y| = x^2 \} \cup \{(0,0)\}$

Derivadas parciales

Sobre las curvas $|y| = x^2$ no pueden existir, ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{e}_j) - f(\bar{x}_0)}{h} \to \lim_{h \to 0} f(\bar{x}_0 + h\bar{e}_j) \neq f(\bar{x}_0)$$

Estudiamos lo que ocurre en el origen, donde si son continuas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 0^2 - 0}{h} = 0$$

$f = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 \cdot h - 0}{h} = 0$$

$f = xy$

¿Son continuas en $(0,0)$? El punto $(0,0)$ forma parte de la frontera del dominio de definición de $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$. No tiene sentido hablar de continuidad en un punto frontera.

$\longrightarrow$ Según las trayectorias $|y| = x^2$ $\nexists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, de modo que no pueden ser continuas.

Diferenciabilidad (en el origen)

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - df}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

$$|y| \geq x^2 : \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x \Delta y - 0 - 0}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq \left| \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} \right| = \left| (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \right| \to 0$$

$$|y| < x^2 : \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Por tanto es diferenciable en el origen.

III.12 Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en todo $\mathbb{R}^2$ definida mediante,

$$F(x,y)=(g\circ f)(x,y) \quad \text{donde} \quad f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}-1$$

y $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ en todo $\mathbb{R}$ de la que se sabe que $g(t)=1+t+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$. Obtener el desarrollo limitado de McLaurin de orden 2 de la función F. Se verifica que:

a) $F(x,y)=1+x-y+x^2-2xy+y^2+o(x^2+y^2)$. **b)** $F(x,y)=1+x-y+x^2+2xy+y^2+o(x^2+y^2)$.

c) $F(x,y)=1+x-y+x^2+2xy-y^2+o(x^2+y^2)$. **d)** $F(x,y)=1+x-y+x^2-2xy-y^2+o(x^2+y^2)$.

Opción 1

$$F(x,y)=(g\circ f)(x,y) = F(0,0) + d(g\circ f)(0,0)(x,y) + d^2(g\circ f)(0,0)(x,y) + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}\right)$$

$$F(0,0) = g(f(0,0)) = g(0) = 1$$

$$JF = JG\big|Jf\big| = [\ \ldots\ ]$$

Opción 2

Sabemos cómo se comporta g cerca de $t=0$ (hasta orden 2). Queremos saber cómo se comporta $g\circ f(x,y)$ cerca de $(0,0)$. Para ello, necesitamos que $f(0,0)=0$, para que el desarrollo de g funcione. Podemos desarrollar f en torno a $(0,0)$ y componer desarrollos

$$f(x,y) = 0 + e^{x-y}\Big|_{(0,0)} x - e^{x-y}\Big|_{(0,0)} y + \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y}\end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= x - y + \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x - y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy + o(x^2+y^2)$$

Componiendo los desarrollos tenemos que

$$g\circ f = 1 + \left(x - y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy\right) + \frac{\left(x - y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy\right)^2}{2} + o\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy + o\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= 1 + x - y + x^2 + y^2 - 2xy + o\left(x^2+y^2\right) \longrightarrow a$$