CAPÍTULO 2. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

1 Funciones

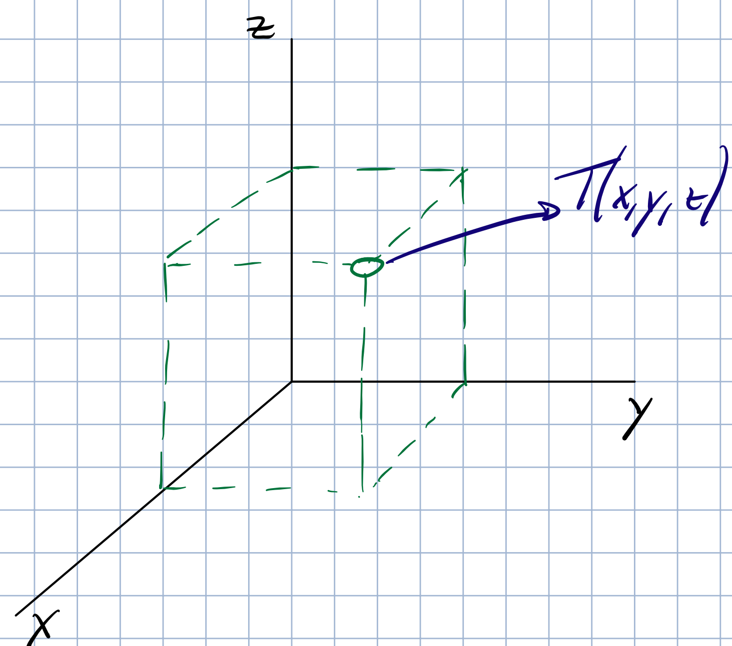
En este curso, trabajaremos con dos tipos de funciones: escalares y vectoriales.

* Función escalar: una regla que asigna a cada $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ un número real $f(\bar{x}) = y \in \mathbb{R}$. Tb llamada función real de varias variables.

Notación: $\underbrace{f}_{\text{Nombre}} : \underbrace{\mathbb{R}^p}_{\text{Espacio salida}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Espacio llegada.}}$

Ejemplo: temperatura del aire en una habitación. Asigna a cada posición espacial (x, y, z) un escalar T (temp).

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{x} = (x, y, z) \longrightarrow T(x, y, z)$$



El dominio de la función puede estar restringido a un conjunto $D \subset \mathbb{R}^p$:

Notación:

$$f: D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

En este caso la función asigna valores solo a los puntos $\bar{x} \in D$ y no a todos los $\in \mathbb{R}^p$.

Si no se especifica un dominio, se asume que es el mayor en el que la definición tiene sentido.

Ejemplo:

$$z(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$$

* Función vectorial: una regla que asigna a cada $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ un vector $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$

$$f: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$$
$$\bar{x} \longrightarrow \bar{y} = f(\bar{x})$$

Ejemplo: velocidad del aire $\vec{v} = (u, v, w)$ alrededor de un objeto. Asignamos a cada posición $\bar{x} = (x, y, z)$ un vector $\bar{v} = (u, v, w)$.

$$\mathrm{vel}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x} = (x, y, z) \longrightarrow \vec{v} = \mathrm{vel}(\vec{x})$$

2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PTO

Definición ε-δ de límite

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, y sea $\overline{x_0}$ un pto de acumulación de D, y sea $\overline{l} \in \mathbb{R}^q$

↳ Pto del interior de D o de su frontera que no esté aislado. Necesito cierto grado de "continuidad" para definir el límite.

Se dice que $\overline{l}$ es el límite de f en $\overline{x_0}$, esto es,

$\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\overline{x}) = \vec{l}$, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \text{si } \underbrace{0 < \|\overline{x} - \overline{x_0}\| < \delta}_{\overline{x} \in B^*_\delta(\overline{x_0})} \longrightarrow \|f(\overline{x}) - \overline{l}\| < \varepsilon$$

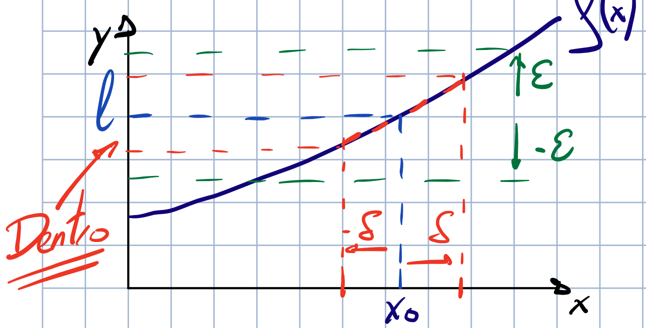
Para todo, Existe, tal que, Norma, entonces, Norma

ⓐ Recordatorio de mat. I ($\mathbb{R}$)

Sea $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$ y $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \text{si } 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

Caso que existe límite:



⓪ Asumo valor de l

① Doy ε

② ¿Puedo encontrar δ?

③ ¿Sigue funcionando para $\varepsilon \to 0$?

✓ ⟶ Existe límite y vale l.

Para cualquier entorno (de radio ε) de l encuentro un entorno (de radio δ) de x_0 tal que sus elementos tienen sus imágenes dentro del entorno de l seleccionado.

Observaciones

① $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \longrightarrow |f - l|$ está acotada en un entorno de x_0
(condición necesaria de $\exists$ de lim)

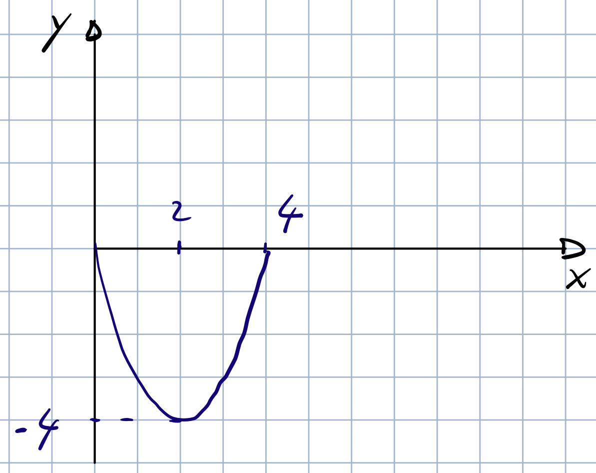
Si $|f - l|$ no acotada en x_0 $\longrightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$

② Para cada ε existen ∞ δ. Si encontramos un δ válido, tb lo será cualquier $\delta' / \delta' < \delta$ (ver dibujo).

③ El valor que toma $f(x)$ en x_0 no interviene en la definición de límite. Puede no existir o tomar un valor distinto de l.

Ejemplo: sea $f(x) = x^2 - 4x$, demostrar que $\lim_{x \to 2} f(x) = -4$

¿Nos vale de algo (de momento) evaluar el valor de la función en el punto?



Sigamos los pasos de antes:

0) Asumir valor de ℓ. $\longrightarrow \ell = -4$

1,2,3) * Buscar una relación entre ε y δ que funcione para cualquier valor de ε.

* Comprobar que $\varepsilon \to 0 \longrightarrow |f(x) - \ell| \to 0$.

Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces

$$|f(x) - \ell| = |x^2 - 4x - (-4)| = |x^2 - 4x + 4| < \varepsilon$$ ← Objetivo

¿Que $\delta(\varepsilon)$ hace que esto se cumpla?

El "truco" es escribir $|f(x) - \ell|$ en función de $|x-2| < \delta$. ← Es mi "dato"

La idea es llegar a algo de tipo:

$$|f(x) - \ell| = h(|x - x_0|) < \underbrace{h(\delta) \leq \varepsilon}_{\text{Relación } \varepsilon - \delta}$$

Veamos cómo queda esto en nuestro ejemplo concreto:

$$|x^2 - 4x + 4| = |x-2|^2 < \delta^2 = \varepsilon \to \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

← necesito ponerlo en función de $(x-2)$

Busco raíces de $x^2 - 4x + 4$.

Esta relación permite encontrar los valores de δ para cada valor de ε. Esto garantiza la existencia de un δ para todo $\varepsilon > 0$ (Condición ε-δ).

Por último, hay que comprobar que $|f(x)-l| \to 0$ con $\varepsilon \to 0$.

$\varepsilon \to 0 \longrightarrow \delta \to 0 \longrightarrow x \to 2 \longrightarrow |x^2-4x+4| \to 0$ ✓

La forma de escribir $|f(x)-l| = h(|x-x_0|)$ es viendo las raíces de $f(x)-l$. Ejemplo: $(x \to 2,\ f(x) = x^2-5x,\ l = -6)$

$$|f(x)-l| = |x^2-5x+6| = |(x-2)(x-3)| \leq |x-2|^2 + |x-2| \leq \delta^2+\delta = \varepsilon$$

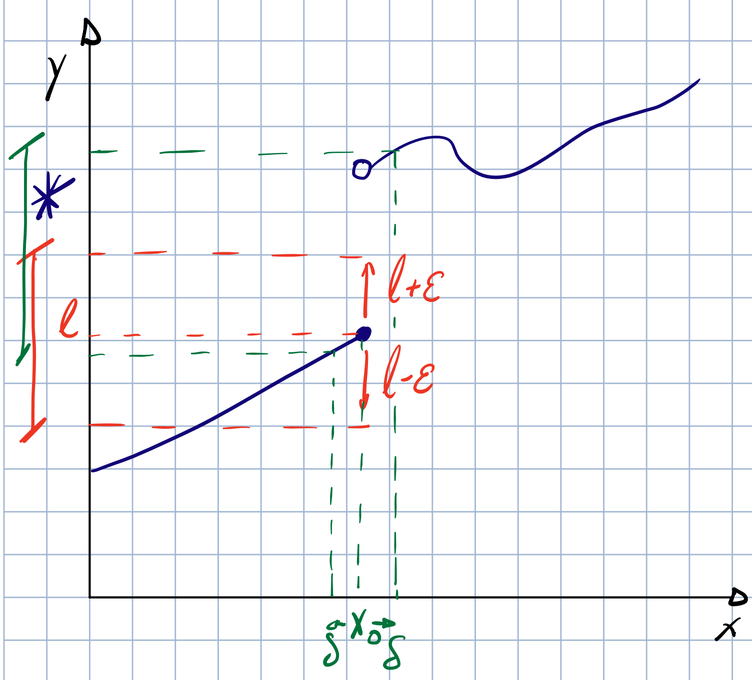
$$|x-3| = |x-2-1| \leq |x-2| + |-1|$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \left.\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right\} (x-2)(x-3)$$

Caso que no existe límite:

$(\forall \varepsilon, \exists \delta / 0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)-l|<\varepsilon)$

Basta con encontrar un valor de ε para el que no se cumple la definición (no sea posible encontrar un valor de δ)



* Por muy pequeño que sea δ, el intervalo verde nunca estará contenido en el rojo. Esto pasa para cualquier posible valor de l, luego no $\exists$ límite.

(b) Límites en $\mathbb{R}^p$

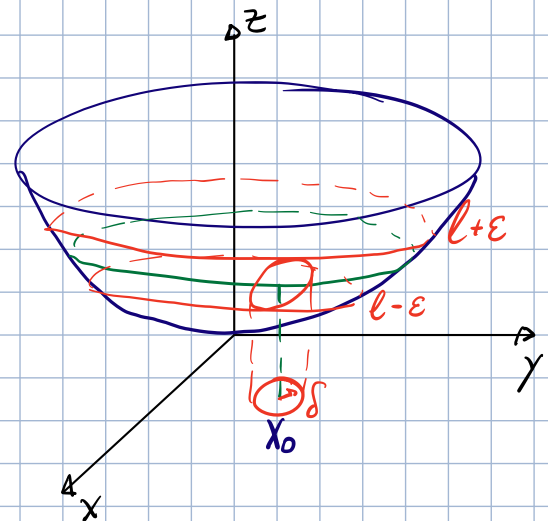
Extensión de def. de límite a $\mathbb{R}^2$ (función escalar)

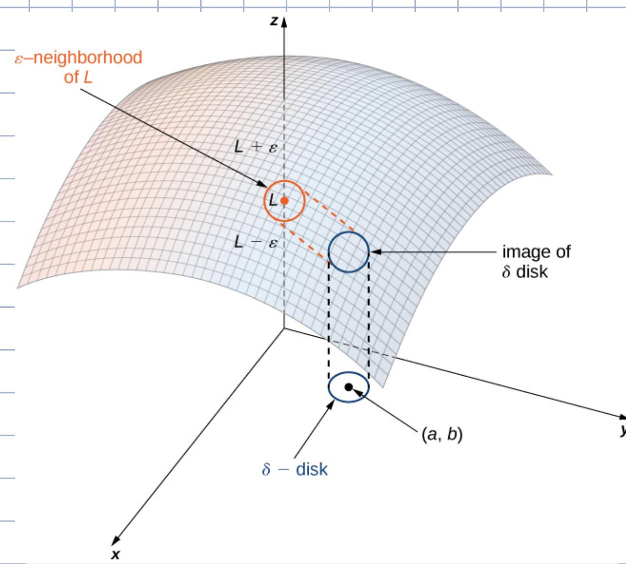
Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \in D \longrightarrow z = f(x,y)$

Definición de límite: sea (x_0, y_0) un pto de acumulación de D y sea $l \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, / \, 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$





Para cualquier entorno $|f(x,y) - l| < \varepsilon$, encuentro una bola reducida $B^*_\delta(x_0, y_0)$ cuyos elementos tienen imagen en el intervalo $|f - l| < \varepsilon$.

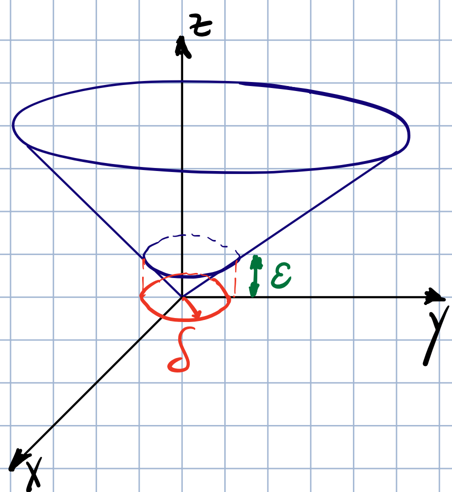
Ejemplo: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, probar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

→ Mi dato en este caso es $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow$

Norma L^2 $\quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta$

→ $|f(x)-\ell| = \left|\sqrt{x^2+y^2}-0\right| = \left|\sqrt{x^2+y^2}\right| < \delta \leq \varepsilon$

Y además $|f(x)-0| = \left|\sqrt{x^2+y^2}\right| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$



Comentario final: la demostración es poco práctica para resolver problemas ya que es complicado hallar la relación $\varepsilon-\delta$.

(Y hay que conocer el valor del límite a priori).