

23. TEOREMAS DE INTEGRACIÓN DEL CÁLCULO VECTORIAL III

3 Teorema de Stokes

El teorema de Stokes relaciona la integral de linea de un campo vectorial alrededor de una curva simple cerrada C en \mathbb{R}^3 con la integral sobre una superficie para la cual C es su borde.

Para enunciar el teorema de Stokes, necesitamos ver un concepto previo, que es la orientación induida en el borde de una superficie orientada.

Supongamos que $\bar{\phi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\bar{c}(t) = (u(t), v(t))$ una parametrización de ∂D . Si $\bar{\phi}$ es una parametrización inyectiva $\forall D$, entonces $\bar{\phi}(\partial D)$ será la frontera geométrica (el borde) de $S = \bar{\phi}(D)$.

NOTA: existen superficies sin borde. Por ejemplo, una esfera sería una superficie sin borde.

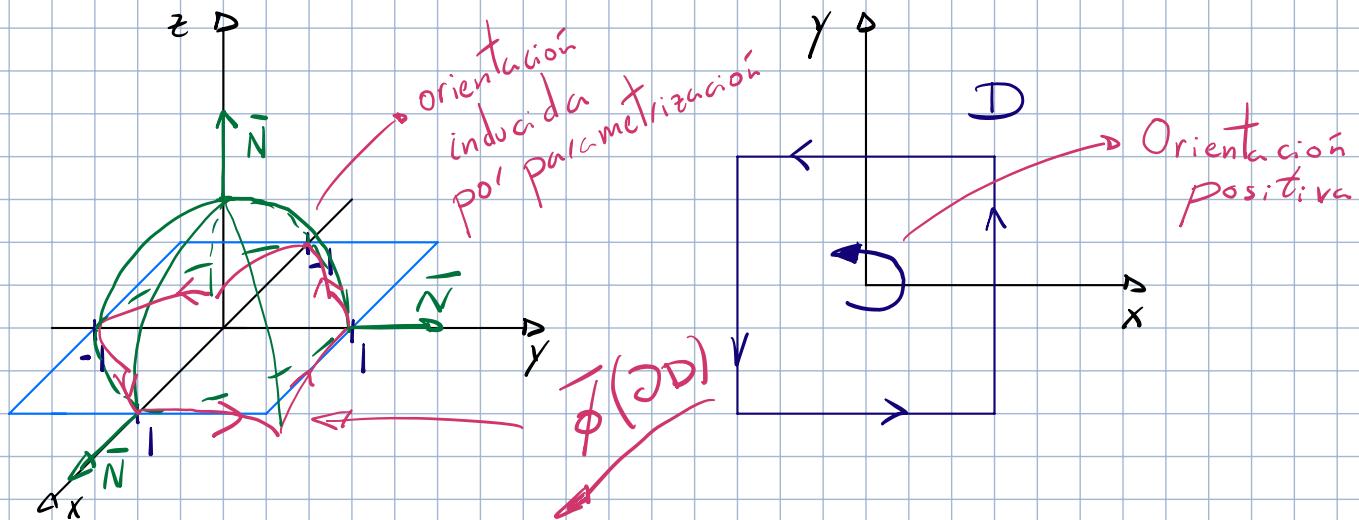
Si $\bar{c}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D en sentido positivo definimos el borde de S , ∂S , como la curva simple cerrada y con orientación induida por la parametrización $\partial S = \bar{\phi}(\partial D) = \bar{\phi}(u(t), v(t))$.

* Sentido positivo es el usado para el teorema de Green.

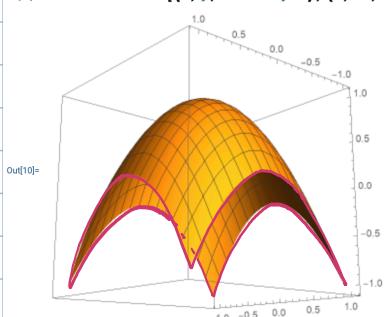
Para recordar el sentido positivo de recorrido en el teorema de Green, imaginemos que somos un "observador" caminando sobre el borde de la superficie con la normal apuntando hacia arriba; nos movemos en sentido positivo si la superficie queda "a nuestra izquierda".

EJEMPLO:

$$S = \bar{\phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \bar{\phi} = (x, y, 1 - x^2 - y^2) \quad \begin{array}{l} x \in [-1, 1] \\ y \in [-1, 1] \end{array}$$



In[10]:= ParametricPlot3D[{x, y, 1 - x^2 - y^2}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]

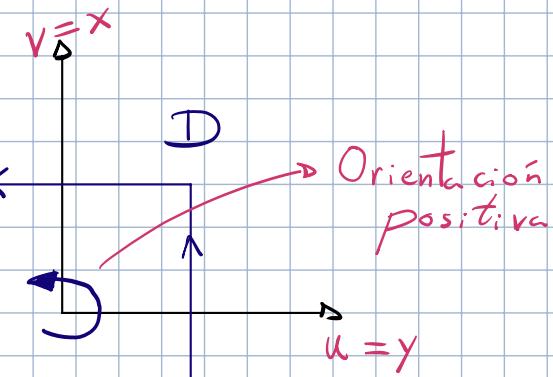
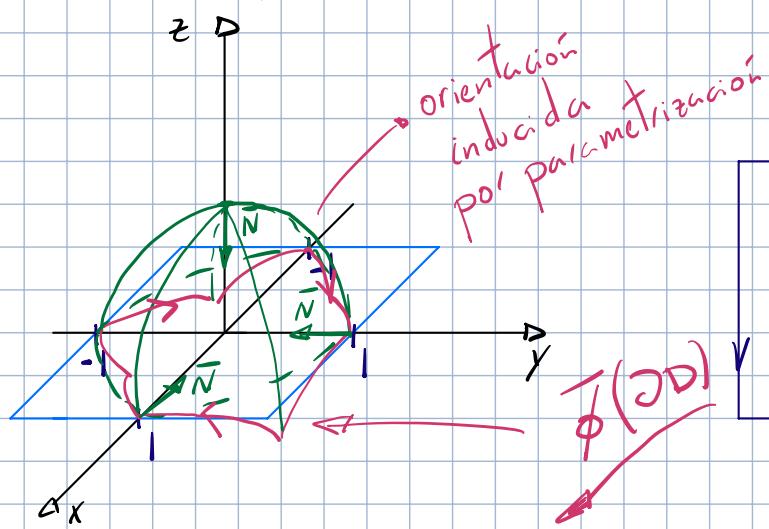


$$\bar{N} = S'_x \times S'_y = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + \bar{k}$$

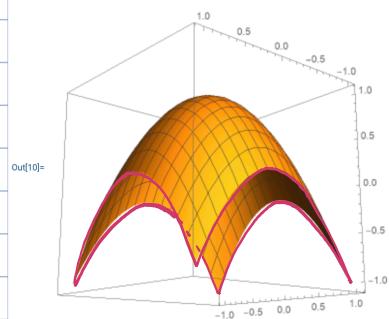
Recordemos que cambiar el orden de los parámetros afecta al sentido de la normal. ¿Qué pasa si hago $\bar{\phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

EJEMPLO 2:

$$S = \bar{\phi}: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(u,v)} \mathbb{R}^3 \quad \bar{\phi} = (v, u, 1 - v^2 - u^2) \quad u \in [-1, 1] \\ v \in [-1, 1]$$



In[10]:= ParametricPlot3D[{x, y, 1 - x^2 - y^2}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]

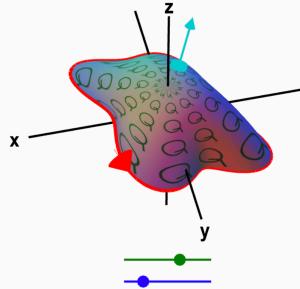


$$\bar{N} = S_u^1 \times S_v^1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & -2u \\ 1 & 0 & -2v \end{vmatrix} = -2v \bar{i} - 2u \bar{j} - \bar{k}$$

El sentido de la normal a la superficie ha cambiado
y tb el sentido de recorrido de ∂S (aunque el sentido de recorrido de ∂D se ha mantenido constante)

NOTA: si la superficie se define de forma explícita como $f(x,y)$ y la normal a la superficie como $\bar{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$, es decir, apuntando según $z+$, el sentido de recorrido de ∂S es el antihorario para regiones simples, como pasaba en el teorema de Green.

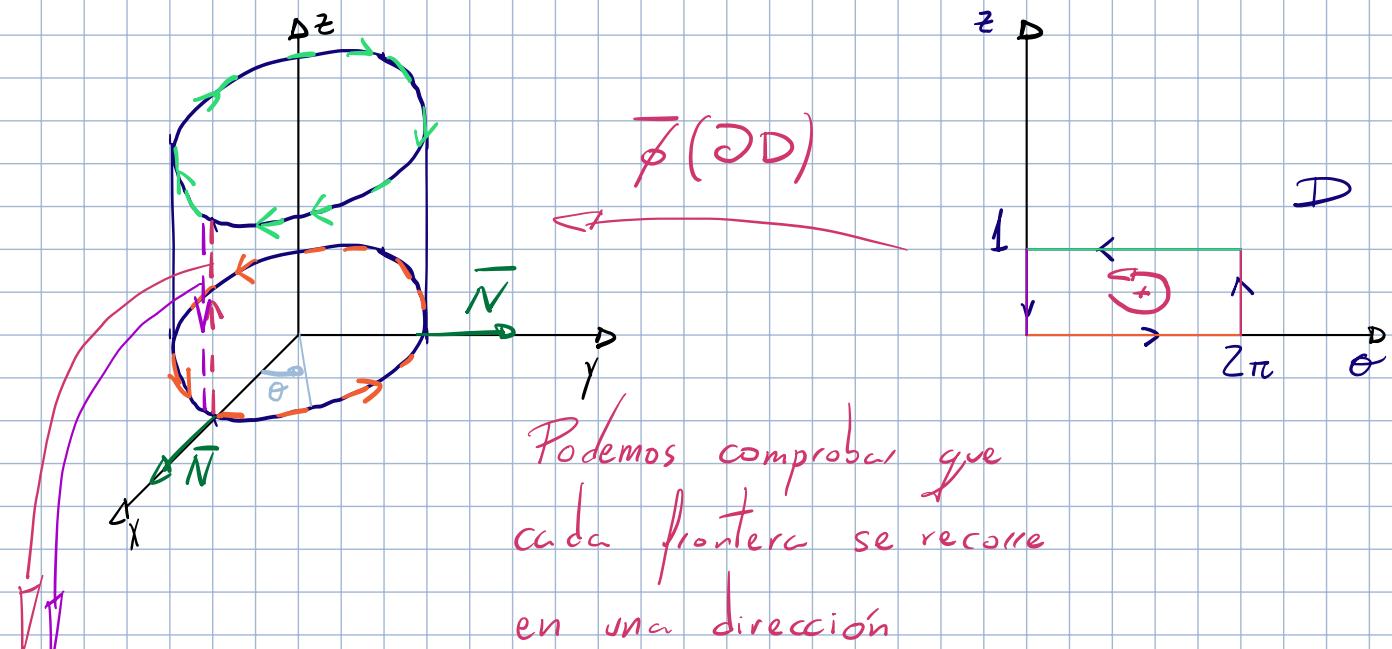
NOTA 2: en la web —
 se puede encontrar información
 adicional sobre este tema y
 en particular sobre la correcta
 orientación de la superficie
 y su borde para la aplicación
 del teorema de Stokes.



https://mathinsight.org/stokes_theorem_orientation

EJEMPLO 3: caso de tener varios bordes. Cilindro.

$$S = \bar{f}: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(0,z)} \mathbb{R}^3, \bar{f} = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad) \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, 1]$$



esto no es una
 frontera geométrica
 real, sino una

consecuencia de

parametrización no
 inyectiva.

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta \bar{i} + \sin\theta \bar{j}$$

Teorema de Stokes: sea S una superficie orientada definida por la parametrización inyectiva $\bar{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, donde D es una región en la que aplica el teorema de Green. Sea ∂S el borde orientado de S y sea \bar{F} un campo vectorial C^1 definido en S . Entonces:

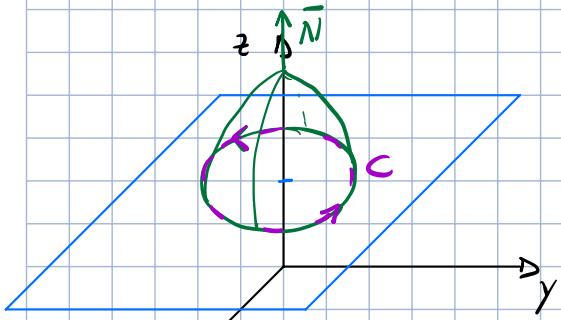
$$\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \int_{\partial S} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

NOTA 3: si la superficie no tiene borde (por ejemplo una esfera) entonces

$$\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = 0. \quad (\text{Se demostrará más adelante})$$

EJEMPLO: Calcular $\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S}$ (normal apuntando hacia $z+$) con

$$\bar{F} = (z^2, -3xy, x^3y^3) \quad y \quad S = z = 5 - x^2 - y^2 \geq 1$$



Superficie en forma
explícita, D simple y N apunta
hacia $z+$ → orientación antihoraria, como Green.

$$z = 1 \rightarrow S - x^2 - y^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

$$S \equiv \bar{\Phi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Primero, vamos a calcular $\iiint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ para lo que:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - 3xy & x^3y^3 & \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^3y^2 \\ 2z - 3x^2y^3 \\ -3y \end{bmatrix}$$

Este es el rotacional para cualquier pto. Particularizo ahora para la superficie.

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 3x^2y^2 \\ 2(z - x^2 - y^2) - 3x^2y^3 \\ -3y \end{bmatrix}$$

$$\text{Y el } d\vec{S} = S_x^1 \times S_y^1 dx dy = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -2y) dx dy = \\ = (2x, 2y, 1) dx dy$$

De modo que la integral queda:

$$\iiint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D (3x^2y^2, 2(z - x^2 - y^2) - 3x^2y^3, -3y) \cdot (-2x, -2y, 1) dx dy \\ = \iint_D (6x^4y^2 + 4y(z - x^2 - y^2) - 6x^2y^4 - 3y) dx dy$$

Ahora tengo que poner D es función de x, y o hacer un cambio de variable a polares. No lo acabo por este camino.

Usando Stokes.

$$\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt$$

$$C \equiv \bar{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 1) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\bar{F}(\bar{r}(\theta)) = (1, -3 \cdot 4 \cos \theta \sin \theta, 64 \cos^3 \theta \sin^3 \theta)$$

$$d\bar{s} = d\bar{r} = \bar{r}'(\theta) d\theta = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta$$

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} (1, -3 \cdot 4 \cos \theta \sin \theta, 64 \cos^3 \theta \sin^3 \theta) \cdot$$

$$(-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} (-2 \sin \theta - 24 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta = 0$$

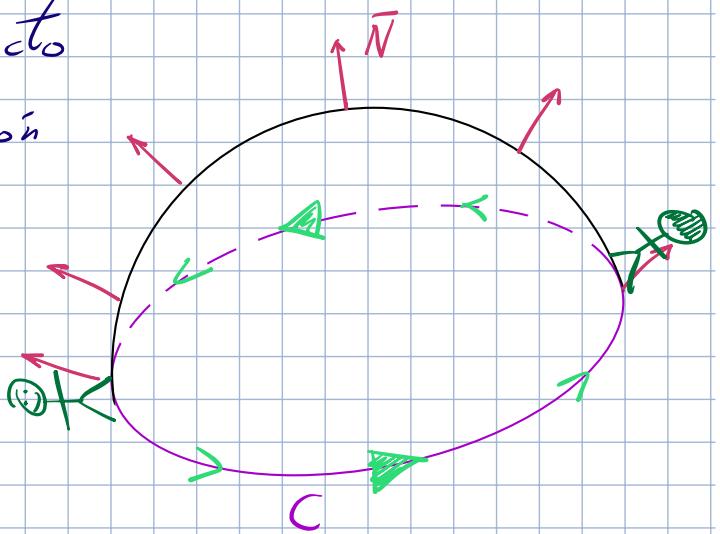
función impar

En este caso, el teorema de Stokes nos simplifica los cálculos.

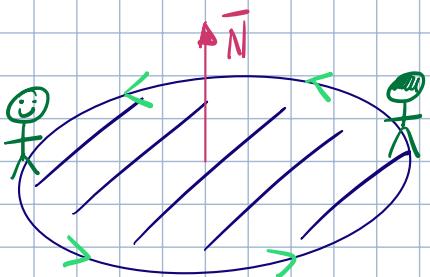
* Una manera sencilla de encontrar la orientación de la curva frontera consistente con el teorema de Stokes *

Supongamos que tenemos una superficie orientable con una normal dada \bar{N} . Ahora colocamos un observador $\hat{\Omega}$ sobre la curva C que actúa como borde de nuestra superficie. La cabeza de $\hat{\Omega}$ apuntando como \bar{N}

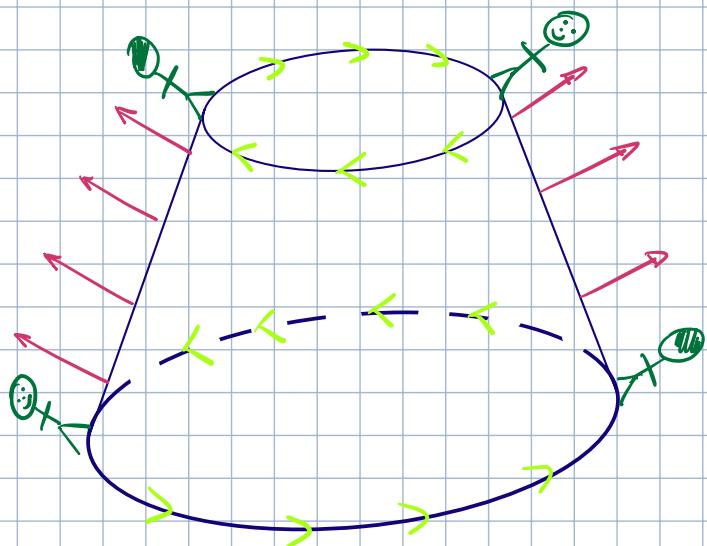
El sentido de recorrido correcto de C (consistente con la definición de \bar{N}) hará que el observador deje siempre la superficie a su izquierda y el borde a su derecha.



Esta regla es consistente con lo que se usó para Green, es decir, tb aplica en el plano:



Y sirve tb para casos más complicados, como este tronco de cono:

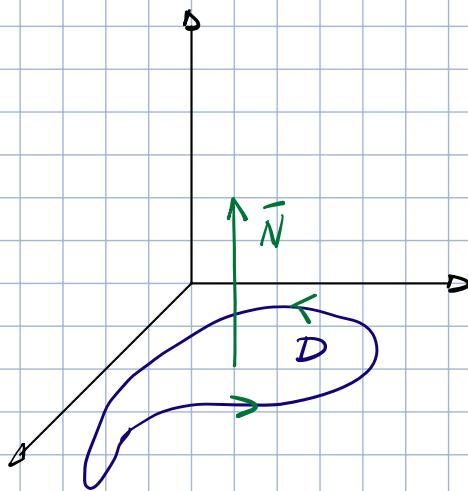


* Teorema de Green es un caso particular de Stokes *

$$\bar{F} = (P(x, y), Q(x, y), 0)$$

$$\bar{S} = (x, y, 0) \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q'_x - P'_y \end{bmatrix}$$



$$d\bar{S} = S'_x \times S'_y dx dy = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) dx dy = \bar{k} dx dy$$

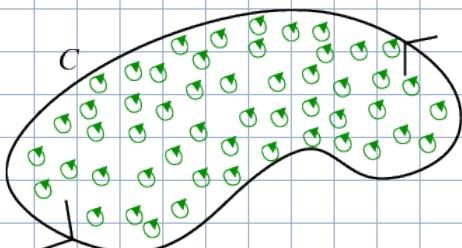
$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} \cdot \bar{k} dx dy$$

Stokes

Green

* Significado físico de los teoremas de Green y de Stokes.

El rotacional de un campo $\nabla \times \bar{F}$ está relacionado con microrotaciones en cada punto. Si sumamos todas esas microrotaciones, podemos esperar una gran rotación que llamaremos circulación.



$$\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \iint_S "rotación microscópica" \cdot d\bar{S} = \oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} \rightarrow \text{circulación}$$

Notar que esto tb justifica el sentido de giro usado para los teoremas de Green y Stokes.

NOTA 4: otra consecuencia del teorema de Stokes es que el flujo de rotacional a través de una superficie no depende de la forma de esta sino solo de su borde ∂S .

4 Propiedades

1 Si S es cerrada y $\bar{F} \in C^2$:

$$\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \iint_E \nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) dV = 0$$

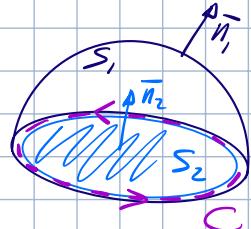
Gauss

$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) = 0$ por ser $\bar{F} \in C^2$

\iint_S (Stokes) \int_C (ϕ) (Conjunto vacío)

2 Si dos superficies comparten el borde: $\partial S_1 = \partial S_2 = C$

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S}$$



Esto puede verse aplicando Stokes a cada superficie:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$$\iint_{S_2} (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{S_1} (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{S} \end{array} \right.$$

O considerando la superficie $S = S_1 \cup (-S_2)$

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

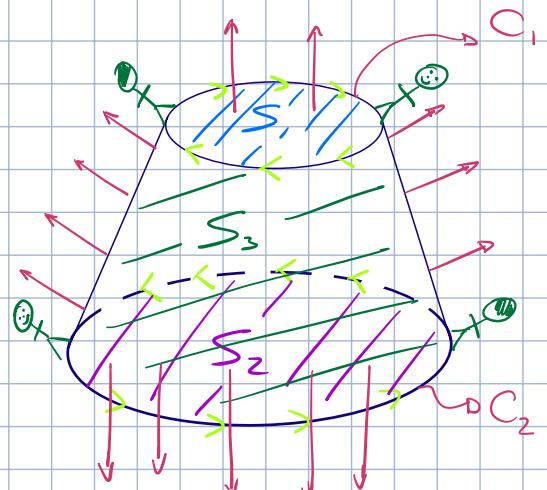
Queremos que la
normal apunte siempre
hacia afuera de la
superficie cerrada S
(Para poder aplicar Gauss)

Luego

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Esto permite estudiar de diversas formas superficies a las que se les puede "poner tapas" para convertirlas en superficies cerradas.

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} + \\ &+ \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_E \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) dV = 0 \end{aligned}$$



$$\rightarrow \iint_{S_3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} =$$

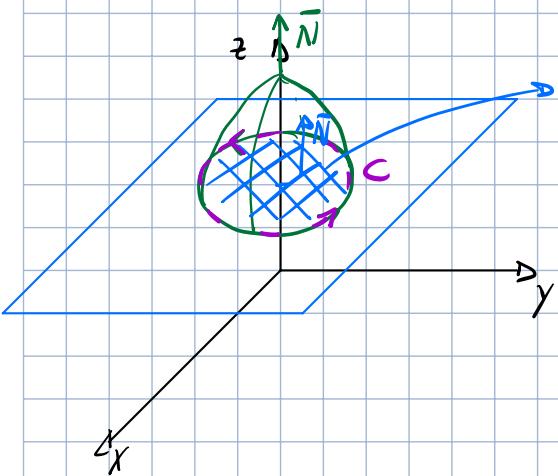
$$= * \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

El signo ha cambiado al adaptarse el sentido de
recorrido de las curvas al especificado en el dibujo.

Volvamos ahora al ejemplo anterior con estos conocimientos:

EJEMPLO: Calcular $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ con

$$\vec{F} = (z^2, -3xy, x^3y^3) \quad y \quad S: z = 5 - x^2 - y^2 \geq 1$$



S^* Utilizamos la superficie S^* que es más cómoda y da el mismo resultado.
(Usando la propiedad 2)

$$S^* \equiv \vec{\phi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$d\vec{S}^* = \vec{S}_x^{*1} \times \vec{S}_y^{*1} dx dy = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) dx dy = (0, 0, 1) dx dy$$

$$\nabla \times \vec{F} = (3x^3y^2, 2z - 3x^2y^3, -3y)$$

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = -3y dx dy$$

$$\begin{aligned} \iint_{S^*} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_D -3y dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -3r \sin \theta r dr d\theta = \\ &= -3 \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

PROBLEMA DE EXAMEN

① V/F. Sea $\bar{F}: D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C' en D , con componentes $\bar{F} = (P, Q)$ tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D$. Sea C una curva cerrada, regular y simple contenida en D . Necesariamente

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = 0.$$

¿Qué pasaría si \bar{F} con tres componentes? Volveremos más adelante.

Es decir.

V/F. Sea $\bar{F}: D = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C' en D , con componentes $\bar{F} = (P, Q, R)$ tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y,z) \in D$. Sea C una curva cerrada, regular y simple contenida en D .

Necesariamente

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = 0.$$

Asumimos que $P(x,y)$ y $Q(x,y)$, es decir, el campo no depende de la componente z .

Podemos calcular el rotacional del campo, con lo que tenemos:

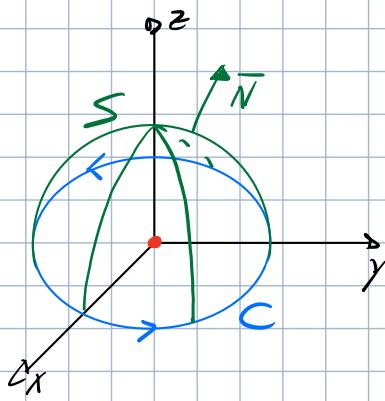
$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial Q}{\partial z}}, \cancel{\frac{\partial P}{\partial z}}, 0 \right) = (0,0,0)$$

Es decir, el campo es irrotacional salvo en $(0,0,0)$ donde no está definido.

En este caso, podemos tener una curva contenida en el plano xy que rodee al O y demostrar que

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0$$



Para ello, no hay más que considerar una superficie S que se apoye sobre C y no contenga el pto $(0,0,0)$. El campo \bar{F} es C' sobre S , por lo que podemos aplicar Stokes

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot d\bar{s} = 0.$$

TEOREMAS INTEGRALES. TEOREMA DE STOKES

Test 8 3 Sean S la superficie definida por los parámetros de helicóide (2012-2013) $\bar{x}(r,t) = (3r\cos t, 4r\sin t, t)$ situada en el 1º octante, interior al cilindro $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ con $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ y orientada de modo que la tercera componente del vector normal sea no negativa. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz^2, -xz^2, -xy)$

$$\oint \iint_S \bar{\nabla} \times \bar{F} \cdot d\bar{S}?$$

$$(3r\cos t, 4r\sin t, t)$$

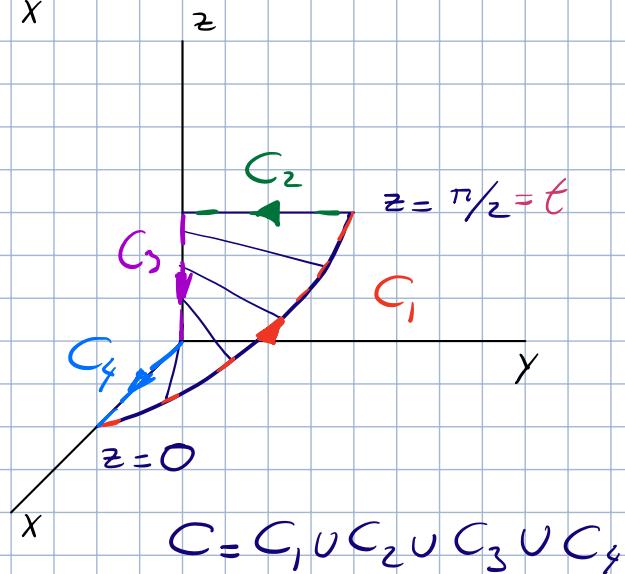
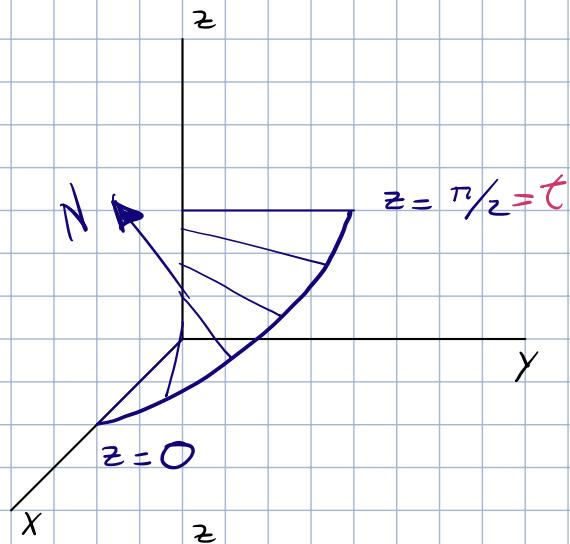
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$$

$$r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t \leq 1 \rightarrow r^2 \leq 1$$

$$D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$$

$$\iint_S \bar{\nabla} \times \bar{F} = \oint_C \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

Aplico Stokes



Sentido de recorrido correcto con la normal escogida

$$C_1 \quad \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt$$

$$\bar{r}(t) = (3 \cos t, 4 \sin t, t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\bar{r}'(t) = (-3 \sin t, 4 \cos t, 1)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (4t^2 \sin t, -3t^2 \cos t, -12 \cos t \sin t)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) &= -12t^2 \sin^2 t - 12t^2 \cos^2 t - 12 \cos t \sin t = \\ &= -12(t^2 + \cos t \sin t) = -12(t^2 + \frac{1}{2} \sin 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -12 \int_0^{\pi/2} t^2 + \frac{1}{2} \sin 2t dt &= -12 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{4} \cos 2t \right)_0^{\pi/2} = -\frac{\pi^3}{2} - \left(\frac{12}{4} + \frac{12}{4} \right) = \\ &= -\left(\frac{\pi^3}{2} + 6 \right) \end{aligned}$$

C_2 + C_3 + C_4 \rightarrow Por grupos en clase.

C₂

$$\bar{r}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \pi/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \in [0, 4]$$

$$\bar{r}'_2(t) = (0, -1, 0)$$

$$\bar{F}(\bar{r}_2(t)) = (X, 0, X)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0 \\ \end{array} \right\}$$

C_3

$$\bar{r}_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\bar{r}'(t) = (0, 0, -1)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (\textcolor{red}{X}, \textcolor{red}{X}, 0)$$

$$\left. \int_{C_3} \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0 \right\}$$

C_4

$$\bar{r}_4(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \in [0, 4]$$

$$\bar{r}'(t) = (1, 0, 0)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (0, \textcolor{red}{X}, \textcolor{red}{X})$$

$$\left. \int_{C_4} \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0 \right\}$$

$$\iint_S \nabla \times \bar{F} = \oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C_3} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C_4} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\left(\frac{\pi^3}{2} + 6\right)$$

⑥

Ordinario
2015
2016

Sea $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido mediante $\bar{F}(x, y, z) = (y^2 + z, y + z^2, z^2 + x^2)$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el campo escalar $f(x, y, z) = e^{\cos(x^2 + yz)}$.

Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, x \geq 0, 0 \leq y \leq 2, z \geq 0\}$

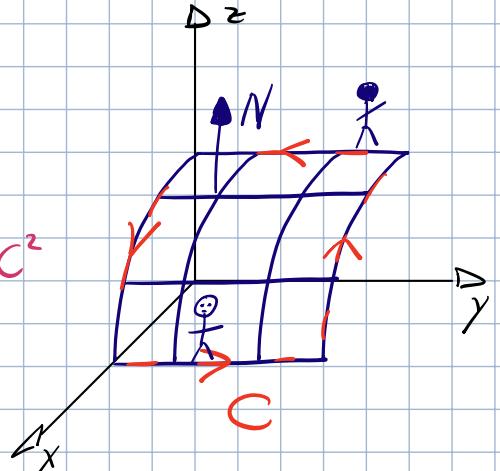
Sea C la curva frontera de S orientada de forma que su proyección sobre el plano $z=0$ se recorre en sentido antihorario.

$$\text{d} \oint_C (\bar{F} + \nabla f) \cdot d\bar{s} = ? \quad \textcircled{a} -12 \quad \textcircled{b} -24 \quad \textcircled{c} -16 \quad \textcircled{d} -30$$

$$\oint_C (\bar{F} + \nabla f) \cdot d\bar{s} = \iint_S \nabla \times (\bar{F} + \nabla f) \cdot d\bar{s} =$$

$$= \iint_S \nabla \times \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$\nabla \times \nabla f = 0$ por ser $f \in C^2$



$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z & y + z^2 & z^2 + x^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ 1 - 2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}(\theta, y) = \begin{bmatrix} 2 \cos \theta \\ y \\ 2 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\theta, y) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2]$$

$$d\bar{S} = \bar{S}'_x \wedge \bar{S}'_y \, d\theta dy = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin\theta & 0 & 2\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cos\theta \\ 0 \\ -2\sin\theta \end{bmatrix} \, d\theta dy$$

Este normal tiene signo contrario a la que me interesa. Luego:

$$\iint_S \nabla_n F \cdot d\bar{S} =$$

$$\nabla_n F \cdot d\bar{S} = [-4\sin\theta, X, -2y] \begin{bmatrix} +2\cos\theta \\ 0 \\ +2\sin\theta \end{bmatrix} = -8\sin\theta\cos\theta - 4y\sin\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (-4\sin 2\theta - 4y\sin\theta) dy d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \left[-8\sin^2\theta - 8\sin\theta \right] =$$

$$= 8 \left[\frac{1}{2} \cos 2\theta + \cos\theta \right]_0^{\pi/2} = 8 \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 \right] = -16$$