1 Vector gradiente

Sea $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\overline{x_0}$. Se define el vector gradiente de f en $\overline{x_0}$ como:

$$\nabla f(\overline{x_0}) = \left(f'_{x_1}(\overline{x_0}),\ f'_{x_2}(\overline{x_0}),\ \dots,\ f'_{x_p}(\overline{x_0}) \right)$$

Es un vector de $\mathbb{R}^p$, con las derivadas parciales.

$\mathbb{R}^2$ $\quad \nabla f(x_0, y_0) = \left(f'_x(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0) \right)$

$\mathbb{R}^3$ $\quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(f'_x(x_0, y_0, z_0),\ f'_y(x_0, y_0, z_0),\ f'_z(x_0, y_0, z_0) \right)$

ESEMPLO Calcular el gradiente de $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$

$$\nabla f = \left(f'_x, f'_y \right) = \left((1-2x^2)e^{-x^2-y^2},\ -2yxe^{-x^2-y^2} \right)$$

2 Significado del gradiente (PPT Diferenciación_3_gradiente)

Propiedad preliminar: sea $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\overline{x_0}$, entonces la derivada de f según cualquier vector $\overline{u} \in \mathbb{R}^p$ es:

$$f'_{\overline{u}}(\overline{x_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x_0} + h\overline{u}) - f(\overline{x_0})}{h} = \nabla f(\overline{x_0}) \cdot \overline{u} = df(\overline{x_0}, \overline{u})$$

f diferenciable

(Lo vimos en la clase anterior como propiedad del diferencial)

Dem. Por ser f diferenciable

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \frac{f(\bar{x})-f(\bar{x}_0)-df(\bar{x}_0;\bar{x}-\bar{x}_0)}{\|\bar{x}-\bar{x}_0\|} = \lim_{\Delta\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{x}_0+\Delta\bar{x})-f(\bar{x}_0)-df(\bar{x}_0;\Delta\bar{x})}{\|\Delta\bar{x}\|} = 0$$

El límite $\exists$, luego se cumple según todas las tray. en particular, según $\Delta\bar{x}=h\bar{u}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_0+h\bar{u})-f(\bar{x}_0)-df(\bar{x}_0;h\bar{u})}{h\|\bar{u}\|} = 0$$

escalar $\neq 0$, lo quitamos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_0+h\bar{u})-f(\bar{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\bar{x}_0)\cdot h\bar{u}}{h} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial\bar{u}}(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0)\cdot\bar{u} \quad \blacksquare$$

a) Dirección de máximo crecimiento

→ La derivada según un vector $\bar{u}$ es la pendiente de la recta tangente a $f(x,y)$ según $\bar{u}$. Tasa de crecimiento de f según $\bar{u}$.

→ El gradiente nos permite calcular cualquier derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{u}} = \nabla f(\bar{x}_0)\cdot\vec{u} = \|\nabla f(\bar{x}_0)\|\cdot\underbrace{\|\bar{u}\|}_{1}\cdot\cos\theta$$

1 si son derivadas direccionales.

→ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial\bar{u}}\right|_{max}$ se alcanza para $\theta=0$ $(\cos\theta=1)$.

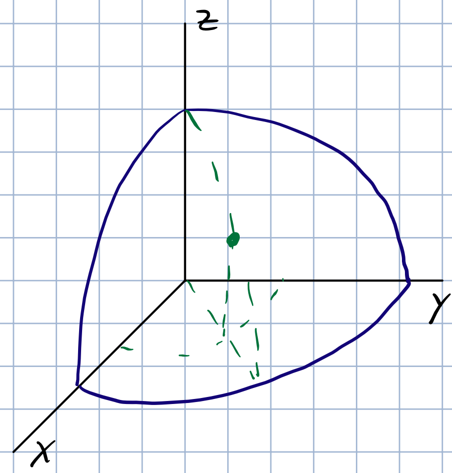
Dos conclusiones:

1.- $\bar{u}\parallel\nabla f(\bar{x}_0)$. $\nabla f(\bar{x}_0)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de $f(\bar{x})$

2.- $\max\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right) = \|\nabla f(\bar{x}_0)\|$. Su módulo es la derivada direccional más grande de $f(\bar{x})$.

EJEMPLO

Sea $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Calcular ∇f en $(1/2, 1/2)$. ¿Hacia dónde apunta?



$$\nabla f = \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$$\nabla f\Big|_{(1/2,1/2)} = \left(-\frac{1/2}{\sqrt{1/2}}, -\frac{1/2}{\sqrt{1/2}} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

b) Normal a las curvas de nivel

Recordemos: curva de nivel $\longrightarrow C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = k\}$

En el caso anterior, son circunferencias (cuartos de circ.)

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = K \longrightarrow x^2+y^2 = 1-K^2 = R^2$$

Dado $(x_0, y_0) \in C_k$, podemos dar un desplazamiento $\Delta \bar{x}$ /

a) Tangente. Nos mantenemos en la curva.

b) Normal. Cambiamos de curva.

Asumamos que $\Delta\bar{x}$ es un desplazamiento tangente. En ese caso:

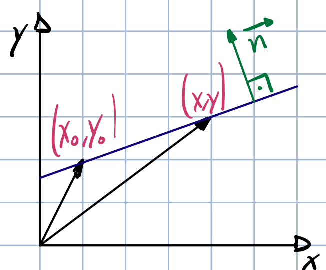
$$\bar{x}_0: \quad K = f(x_0, y_0) \quad ; \quad \bar{x}_0 + \Delta\bar{x} = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = K$$

Por otro lado, por la def de diferencial: (es más la cond. necesaria de existencia)

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}_{=K} = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=K} + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \Delta\bar{x} \rightarrow \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \Delta\bar{x} = 0 \quad \blacksquare$$

* $\Delta\bar{x}$ es tangente a la curva de nivel $\rightarrow$ desplazamiento según $\Delta\bar{x}$ me mantiene en la curva de nivel ($\Delta\bar{x} \rightarrow \bar{0}$).
* $\nabla f(\bar{x}_0) \perp \Delta\bar{x} \longrightarrow \nabla f(\bar{x}_0)$ es normal a curvas de nivel.
* Esto se podría haber inferido de ⓐ ya que:
  - $\rightarrow \nabla f(\bar{x}_0)$ apunta en la dirección de máximo cambio.
  - $\rightarrow$ La forma más rápida de cambiar f es saltar de curva de nivel de la forma más rápida posible $\rightarrow$ ir normal a la curva.

INCISO. Forma implícita de recta en $\mathbb{R}^2$ y plano en $\mathbb{R}^3$.



$$\vec{n} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0 \quad \text{(Luego despejo "y")}$$

(Pensar en casa pq vale) Vectores perpendiculares.

$\mathbb{R}^2$ $\quad n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$ $\quad$ Recta

$\mathbb{R}^3$ $\quad n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$ $\quad$ Plano

Recta tangente a una curva de nivel $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(\overline{x_0}) \cdot (\overline{x} - \overline{x_0}) = 0$$

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

NOTA: forma explícita de recta tangente a una curva.

$$y = f(x) \longrightarrow \quad (y - y_0) = f'(x) \cdot (x - x_0)$$

$$F(x,y) = y - f(x) = 0 \longrightarrow \nabla F = (f_x, f_y) = (-f'(x), +1) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \nabla F \cdot (\overline{x} - \overline{x_0}) = -f'_x(x - x_0) + y - y_0 = 0 \longrightarrow y - y_0 = f'_x (x - x_0)$$

Plano tangente a una superficie de nivel $\mathbb{R}^3$

$F(x,y,z): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

∇F es $\perp$ a las superficies de nivel $F(x,y,z) = k$.

El plano tangente a dicha superficie es:

$$\pi \equiv \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\overline{x} - \overline{x_0}) =$$

$$= F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

NOTA: forma explícita del plano tangente a una superficie.

$$z = f(x,y) \longrightarrow z - z_0 = f'_x(\overline{x_0})(x - x_0) + f'_y(\overline{x_0})(y - y_0)$$

$$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0 \qquad \nabla F(\overline{x_0}) = \left(f'_x(\overline{x_0}), f'_y(\overline{x_0}), f'_z(\overline{x_0})\right) =$$

$$= \left(-f'_x(\overline{x_0}), -f'_y(\overline{x_0}), 1\right) \longrightarrow$$

$$\to \nabla F(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}-\bar{x}_0) = -f'_x(\bar{x}_0)(x-x_0) - f'_y(\bar{x}_0)(y-y_0) + (z-z_0) \to$$

$$\to z - z_0 = f'_x(\bar{x}_0)(x-x_0) + f'_y(\bar{x}_0)(y-y_0) \blacksquare$$

c) Proyección sobre xy del vector normal al plano tangente

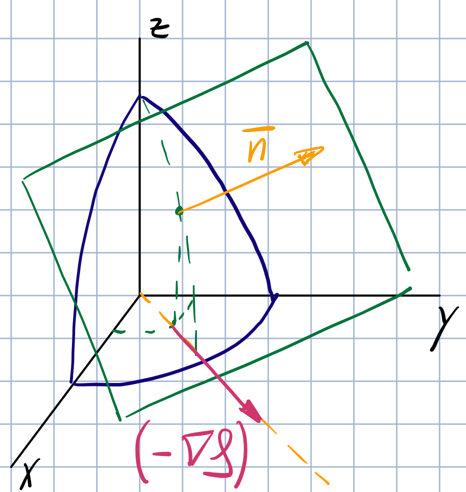
Supongamos que tenemos una superficie definida en $\mathbb{R}^3$ como $z=f(x,y)$. En ese caso, el plano tangente en un pto es:

$$z = f(x,y) \to z - f(x,y) = 0 \to F(x,y,z) = 0$$

Plano tangente $\quad \nabla F(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}-\bar{x}_0) = 0 \implies$

$$\implies -f'_x(\bar{x}_0)(x-x_0) - f'_y(\bar{x}_0)(y-y_0) + (z-z_0) = 0$$

$$\vec{n} = \left(-f'_x(\bar{x}_0), -f'_y(\bar{x}_0), 1\right) = \left(-\nabla f(\bar{x}_0), 1\right) \in \mathbb{R}^{2+1}$$



Para casa: Probar todo con el ejemplo $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Resumen: ∇f, con f diferenciable

(a) Dirección de máximo crecimiento

(b) Perpendicular a las curvas/superficies de nivel

→ Curvas $f(x,y)=k$ → recta tangente

$$\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\,y-y_0)=0$$

→ Superficies $F(x,y,z)=k$ → plano tangente

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,\,y-y_0,\,z-z_0)=0$$

(c) Proyección sobre el plano xy del vector normal a $f(x,y)$, $\bar{n}=(-\nabla f,\,1)$.

f no diferenciable. ∇f puede existir, pero no tiene implicaciones geométricas.

EJEMPLOS

(1) Calcular la recta tangente a $x^2+2y^2=4$ en $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

$x^2+2y^2=4$ es la curva de nivel de $f(x,y)=x^2+2y^2$, con $k=4$. Como paso previo, comprobaremos si el punto pertenece a la curva. En caso contrario, el problema no tiene sentido.

$f\left(1,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=1+3=4$ ✓

Vector normal a la curva:

$$\nabla f = (2x, 4y)\Big|_{\left(1, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)} = \left(2, 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

por lo que la recta tangente es $\left(\nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0 \right)$

$$2(x-1) + 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

2 Calcular el plano tangente a $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en $\left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}, 4\right)$

$$\bar{n} = (-\nabla f, 1) = (-2x, -4x, 1)\Big|_{\left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}, 4\right)} = \left(-2, -4\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$$

De modo que

$$\pi \equiv \bar{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\left(-2, -4\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) \cdot \left(x-1, y - \sqrt{\frac{3}{2}}, z-4\right) = 0$$

3 Calcular el plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ en $(1, -2, 5)$

Superficie definida de forma implícita : $F(x,y,z) = k$

Es una superficie de nivel.

$$\pi \equiv \nabla F\Big|_{(1,-2,5)} \cdot (x-1, y+2, z-5) = (2x, 2y, 2z)\Big|_{(1,-2,5)} \cdot (x-1, y+2, z-5) =$$

$$= 2(x-1) - 4(y+2) + 10(z-5) = 0$$

(4) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$. Calcular a,b,c tales que $\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right|_{max}$ en $(1,2,-1)$ se alcanza según $\bar{u}=(0,0,1)$ y valga 64.

$$\nabla f=(ay^2+3cz^2,\ 2axy+bz,\ by+2c+x^3)\Big|_{(1,2,-1)}=$$

$$=(4a+3c,\ 4a-b,\ 2b-2c)$$

$\nabla f\parallel\bar{u}\longrightarrow\nabla f=\alpha(0,0,1)$ | $\nabla f=(4a+3c,4a-b,2b-2c)=$

$\left.\frac{\partial f}{\partial\bar{u}}\right|_{max}=64\to\|\nabla f\|=\alpha=64$ | $=(0,0,64)$

Resolviendo el sistema lineal

$a=6,\ b=24,\ c=-8$

(5) Sea $f(x,y)=\begin{cases}0 & \bar{x}=0\\ \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \bar{x}\neq 0\end{cases}$. Calcular $f'_{\bar{u}}(0,0)$

¿Puede ser diferenciable?

Primero comprobamos si es continua. ¿$\lim\limits_{\bar{x}\to 0}f(\bar{x})=0$?

$$\left|f(x,y)-\ell\right|=\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\leq|x|\frac{x^2}{x^2+y^2}+|y|\frac{y^2}{x^2+y^2}\leq|x|+|y|\longrightarrow 0$$

Luego la función es continua. Paso a calcular las derivadas parciales en el origen, usando la definición:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{-h^3/h^2 - 0}{h} = -1$$

Aplico ahora la definición de diferencial

$$\lim_{(\Delta \bar{x} \to \bar{0})} \frac{\dfrac{\Delta^3 x - \Delta^3 y}{\Delta^2 x + \Delta^2 y} - 0 - (\Delta x - \Delta y)}{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{1/2}} =$$

$$\lim_{(\Delta \bar{x} \to \bar{0})} \frac{\dfrac{\Delta^3 x - \Delta^3 y - \Delta^3 x + \Delta^3 y + \Delta^2 x \Delta y - \Delta^2 y \Delta x}{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{1/2}} =$$

$$\lim_{(\Delta \bar{x} \to \bar{0})} \frac{\Delta^2 x \Delta y - \Delta^2 y \Delta x}{(\Delta^2 x + \Delta^2 y)^{3/2}} =$$

Para que la función sea diferenciable, este límite debe valer cero. Probamos trayectorias lineales (orden (num) = orden (den))

$y = mx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{m x^3 - m^2 x^3}{(x^2 + m^2 x^2)^{3/2}} = \lim_{x \to 0} \frac{m - m^2}{(1+m^2)^{3/2}} \frac{x^3}{x^3} = \frac{m - m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$$

Luego la función no es diferenciable.

Podemos calcular la derivada según $\bar{u}$ usando la definición

$$f'_{\bar{u}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0)}{h} =$$

Cualquier vector unitario lo podemos escribir como

$\bar{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3\cos^3\alpha - h^3\sin^3\alpha}{h^2} - 0}{h} = \cos^3\alpha - \sin^3\alpha$$

3 Función vectorial. Diferencial y matriz Jacobiana.

DIFERENCIAL

Hemos visto el concepto de diferencial de una función real de varias variables $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

Vamos a extenderlo a una función vectorial $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

Sea $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Es diferenciable en $\bar{x}_0 \in D$ si lo son sus componentes $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ y es

$$d\bar{f} = (df_1, df_2, \dots, df_q)$$

Siendo $df_i = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \nabla f_i \cdot d\bar{x}$

MATRIZ JACOBIANA

Equivalente al gradiente pero para $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

Caso $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\bar{f}(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: velocidad (u,v) en un plano (x,y)

$$d\bar{f} = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}}^{Jf} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d\bar{f} = Jf \cdot d\bar{x}} \sim df = \nabla f \cdot d\bar{x}$$

La matriz Jacobiana es el equivalente al gradiente de la función vectorial.

$$Jf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix}$$

Caso general $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

$$\vec{x} \to \vec{y} = \bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^q$$

$$d\bar{f} = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 \, dx_1 + \partial f_1/\partial x_2 \, dx_2 + \dots + \partial f_1/\partial x_p \, dx_p \\ \partial f_2/\partial x_1 \, dx_1 + \partial f_2/\partial x_2 \, dx_2 + \dots + \partial f_2/\partial x_p \, dx_p \\ \vdots \\ \partial f_q/\partial x_1 \, dx_1 + \partial f_q/\partial x_2 \, dx_2 + \dots + \partial f_q/\partial x_p \, dx_p \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \dots & \partial f_1/\partial x_p \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \dots & \partial f_2/\partial x_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_q/\partial x_1 & \partial f_q/\partial x_2 & \dots & \partial f_q/\partial x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_p \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana. $Jf \in M_{q \times p}$

→ Las filas de la matriz Jacobiana son los gradientes de las funciones f_i

→ Las entradas de la matriz Jacobiana son:

$$Jf\Big|_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Caso $p=q$ $\quad f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$

→ La matriz Jacobiana es cuadrada

→ Se define el jacobiano como $J = \det(Jf)$

EJEMPLO Sea $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{f}(x,y,z) = \left(xz + y^2 + e^z, 3\sqrt[3]{xy+z}\right)$

Calcular $J\bar{f}(-1,2,1)$ y $d\bar{f}(-1,2,1)$

Primero calculamos las derivadas:

$$f_1 = xz + y^2 + e^z \quad \left| \begin{array}{l} f_{1x} = z \\ f_{1y} = 2y \\ f_{1z} = x + e^z \end{array} \right. \quad \left| \xrightarrow{(-1,2,1)} \right. \quad \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ e-1 \end{array}$$

$$f_2 = 3(xy+z)^{1/3} \quad \left| \begin{array}{l} f_{2x} = y(xy+z)^{-2/3} \\ f_{2y} = x(xy+z)^{-2/3} \\ f_{2z} = (xy+z)^{-2/3} \end{array} \right. \quad \left| \xrightarrow{(-1,2,1)} \right. \quad \begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}$$

$$Jf(-1,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & e-1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Colocamos los gradientes por filas

$$d\bar{f} = \nabla f \cdot d\bar{x} = \left(dx + 4dy + (e-1)dz,\ 2dx - dy + dz \right)$$