

1 Repaso de Matemáticas I

Desarrollo en serie de Taylor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

→ orden 1: recta tangente

→ centrado en un punto (x_0)

→ no funciona si la función es discontinua.

Ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

Desarrollo de Taylor centrado
en 0.

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = 1 + x$$

$$T_2 = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$$

$$T_3 = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$$

Series truncadas. Añadir términos
mejora la aproximación.

2 Desarrollo limitado de Taylor (\mathbb{R}^n)

Sea $f: C \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^n en un entorno de $\bar{x}_0 \in C$,
entonces cuando $\Delta \bar{x} \rightarrow 0$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) + o(\|\Delta \bar{x}\|^n)$$

Polinomio de Taylor de orden n (T_n)

Resta

$$\text{donde } d^k f(\bar{x}_0; \Delta \bar{x}) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^p \frac{\partial^k f(\bar{x}_0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} \Delta x_{j_1} \Delta x_{j_2} \dots \Delta x_{j_k}$$

$$= \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_p \frac{\partial}{\partial x_p} \right)^k f(\bar{x}_0)$$

(Ver clase anterior si
esto no se entiende)

Comentarios:

* El polinomio de Taylor es el único polinomio de grado n que approxima a f en un entorno de \bar{x}_0 hasta orden n :

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\|f(\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}) - T_n(\bar{x}_0, \Delta \bar{x})\|}{\|\Delta \bar{x}\|^n} = 0$$

Similar al diferencial,
para orden superior.

Veamos que, por ejemplo para orden 1 tenemos que:

$$\lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\|f(\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}) - T_1(\bar{x}_0, \Delta \bar{x})\|}{\|\Delta \bar{x}\|} = \lim_{\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\|f(\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}_0) - df(\bar{x}_0, \Delta \bar{x})\|}{\|\Delta \bar{x}\|} = 0$$

3 Caso particular. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Sea $f: C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^n en un entorno de $\bar{x}_0 \in C$.

Se define el polinomio de Taylor de orden n de $f(x, y)$ en $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} T_n(x, y) &= f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f((x_0, y_0); (\Delta x, \Delta y)) = \\ &= f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Por ejemplo, particularizando para orden 1, T_1 , plano tangente.

$$\begin{aligned}
 T_1(x, y) &= f(x_0, y_0) + df((x_0, y_0); (\Delta x, \Delta y)) = \\
 &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = \\
 &\quad \text{Vector gradiente} \\
 \text{Matrix form} &= f(x_0, y_0) + [f'_x(x_0, y_0) \quad f'_y(x_0, y_0)] \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \\
 &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)
 \end{aligned}$$

Para orden 2, tenemos

$$\begin{aligned}
 T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + [f'_x(x_0, y_0) \quad f'_y(x_0, y_0)] \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - x_0, \quad y - y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\
 &\quad \text{Matriz Hessiana} \\
 &\quad |(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Dada $f(x, y) = e^x \cos y$, hallar la aproximación de Taylor de orden 2 en un entorno de $(0, 0)$.

Tenemos que calcular $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ en $(0, 0)$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_x} \Big|_{(0,0)} = e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1$$

$$T_2(x,y) = 1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} \end{smallmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} +$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_y} \Big|_{(0,0)} = -e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_{xx}} \Big|_{(0,0)} = e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_{xy}} \Big|_{(0,0)} = -e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_{yy}} \Big|_{(0,0)} = -e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = -1$$

4 Desarrollo de MacLaurin

Desarrollo de Taylor centrado en $\bar{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)$

Ejemplo: calcular el desarrollo limitado de MacLaurin de segundo orden de $f(x,y) = e^{y^2} + 2 \sin xy$ (10.3 Guiones)

$$\underset{\cancel{3}}{g'_x} \Big|_{(0,0)} = 2y \cos xy \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_y} \Big|_{(0,0)} = 2ye^{y^2} + 2x \cos xy \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$T_2(x,y) = 1 + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} \end{smallmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} +$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_{xx}} \Big|_{(0,0)} = -2y^2 \sin xy \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cancel{2} \\ \frac{2}{2} & \cancel{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_{xy}} \Big|_{(0,0)} = 2 \cos xy - 2x \sin xy \Big|_{(0,0)} = 2$$

$$1 + 2xy + y^2$$

$$\underset{\cancel{3}}{g'_{yy}} \Big|_{(0,0)} = 2e^{y^2} + 4y^2 e^{y^2} - 2x^2 \sin xy \Big|_{(0,0)} = 2$$

Ejercicios 10.4 - 10.6 son teóricos y sirven para justificar el $o(\|(x,y)\|^n)$ que utilizamos como resto de Taylor.

10.4 Demostrar que si $\alpha, \beta > 0$ y $(x,y) \rightarrow (0,0)$ entonces $|x|^\alpha |y|^\beta = o(\|(x,y)\|^n)$ para todo $0 < n < \alpha + \beta$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\cancel{\lim}} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(\sqrt{x^2+y^2})^n} \quad (\text{Hipótesis: } l=0 \text{ e intentemos acotar})$$

$$\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(\sqrt{x^2+y^2})^n} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha (\sqrt{x^2+y^2})^\beta}{(\sqrt{x^2+y^2})^n} = \left(\sqrt{x^2+y^2} \right)^{\alpha+\beta-n}$$

Si $\alpha+\beta > n > 0$

10.5 Demostrar que si $g(x,y) = o(|x|^\alpha |y|^\beta)$ con $\alpha, \beta > 0$ y $(x,y) \rightarrow (0,0)$ entonces $g(x,y) = o(\|(x,y)\|^n)$ donde $0 < n \leq \alpha + \beta$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\cancel{\lim}} \frac{g(x,y)}{|x|^\alpha |y|^\beta} = 0 \longrightarrow \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\cancel{\lim}} \frac{g(x,y)}{\|(x,y)\|^n} = 0$$

$$\frac{g(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^n} = \underbrace{\frac{g(x,y)}{|x|^\alpha |y|^\beta}}_{\text{tiende a cero}} \underbrace{\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(\sqrt{x^2+y^2})^n}}_{\text{acotada}*} \rightarrow 0$$

* Si $\alpha + \beta > n$, por 10.4 el límite tiende a 0.

Si $\alpha + \beta = n$

$$\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(\sqrt{x^2+y^2})^n} = \frac{|x|^\alpha}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \frac{|y|^\beta}{(\sqrt{x^2+y^2})^\beta} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^\alpha} + \frac{|x|^\beta}{|x|^\beta} = 2$$

Acotada

10.6 Demostrar que si $r(x,y) = o((x-y)^2)$ entonces $r(x,y) = o(x^2+y^2)$.

$$\underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\mathcal{L}} \frac{r(x,y)}{(x-y)^2} = 0 \rightarrow \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\mathcal{L}} \frac{r(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

$$\left| \frac{r(x,y)}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{r(x,y)}{(x-y)^2} \right| \cdot \left| \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \right| \rightarrow 0$$

Acotado *

$$\left| \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{|2xy|}{x^2+y^2}$$

$$2 \frac{|xy|}{x^2+y^2} = 2 \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \leq 2 \left(\frac{|x|}{|x|} \cdot \frac{|y|}{|y|} \right) = 2$$

5 Cálculo práctico de los desarrollos de MacLaurin

Al igual que hacíamos en matI, podemos componer desarrollos

$$f(x,y) = e^{y^2} + 2 \sin(xy) \quad \text{Ejemplo 10.3 g-iones}$$

$$e^\alpha = 1 + \frac{1}{1!} \alpha + \frac{1}{2!} \alpha^2 + \dots + \frac{1}{n!} \alpha^n ; \quad \sin \beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!}$$

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + o(y^2)$$

$$\sin(xy) = xy + o(xy)$$

$$f(x,y) = 1 + y^2 + 2xy + o(y^2) + o((xy))$$

Grado 2 Grado 2
 \uparrow \uparrow
 $o(\sqrt{x^2+y^2})^2$ $o((\sqrt{x^2+y^2}))^2$

Ver ejercicios
 10.4, 10.5, 10.6

$$f(x,y) = 1 + y^2 + 2xy + o(\sqrt{x^2+y^2}^2)$$

me quedo solo con el término
 más grande. (El de menor grado)

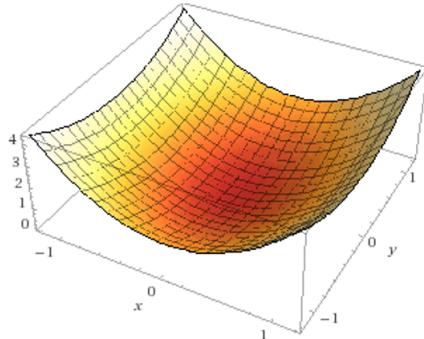
Ejercicio:

$$\text{Ejercicio (casa)}: F(x,y,z) = z - 2x^2 + y^2 = 0$$

(1) Hallar el plano tangente en (0.5,0,0.5).

(Es lo mismo que calcular el polinomio de Taylor de orden 1)

(2) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en (0.5,0,0.5).



III.7 Dadas las funciones $f(x,y) = (1 - e^{x-y})(x+y) - 2y^2$ y $g(x,y) = e^{x+y} \sin(x^2 + y)$.
 Se pide:

a) Desarrollar f y g en fórmula de Maclaurin hasta términos de segundo grado.

Resultados: a) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + o(x^2 + y^2)$, $g(x,y) = y + x^2 + xy + y^2 + o(x^2 + y^2)$.

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= \left(1 - [1 + (x-y) + o(x-y)] \right) (x+y) - 2y^2 = \\
 &= -(x-y)(x+y) - 2y^2 + (x+y)o(x-y) * \\
 &= -x^2 + y^2 - 2y^2 + o(x^2 + y^2) *
 \end{aligned}$$

* $o(x-y)$ significa que toda la expresión que es en realidad va aquí (desarrollo de Taylor completo) es pequeño en comparación con $(x-y)$. En otras palabras, llamando $g(x,y)$ al resto

$$\underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\mathcal{L}} \frac{g(x,y)}{(x-y)} = 0$$

Lo que nosotros tenemos es $(x+y)o(x-y)$, veamos que es más pequeño que (x^2+y^2) en base a lo anterior:

$$\begin{aligned} & \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\mathcal{L}} \frac{g(x,y)(x+y)}{x^2+y^2} = \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\mathcal{L}} \frac{g(x,y)(x+y)}{x^2+y^2} \frac{(x-y)}{(x-y)} = \\ &= \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\mathcal{L}} \frac{g(x,y)}{(x-y)} \frac{(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \text{Acotada} \end{aligned}$$

* Explicación alternativa. Desarrollo de Taylor es único. Si ya he calculado todos los términos de grado dos, el resto tiene esa forma.

$$g(x,y) = e^{x+y} \sin(x^2+y)$$

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + (x+y)^2 + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$\sin(x^2+y) = (x^2+y) - \frac{1}{3}(x^2+y)^3 + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$g(x,y) = (1 + x+y)(x^2+y) + o(\|(x,y)\|^2) = y + x^2 + y^2 + xy + o(\|(x,y)\|^2)$$

no continuo operando con estos ya que quedan como orden superior al mult por el seno.

III.8 Desarrollar en fórmula de Maclaurin, hasta términos de tercer grado, las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ siguientes:

$$\textcircled{a} \quad f(x,y) = \frac{x+2y+xy^2-y^3}{1-x+xy}, \quad \textcircled{b} \quad g(x,y) = (1+x)^y.$$

Resultados: $f(x,y) = x + 2y + x^2 + 2xy + x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + o(\|(x,y)\|^3)$, $g(x,y) = 1 + xy - \frac{1}{2}x^2y + o(\|(x,y)\|^3)$.

(a) Usamos el desarrollo conocido

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + o(z^3) \rightarrow + o(\|z\|^3) = o(\sqrt{x^2+y^2}^3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(-x+xy)} &= 1 - (-x+xy) + (-x+xy)^2 - (-x+xy)^3 + o(\sqrt{x^2+y^2}^3) = \\ &= 1 + x - xy + x^2 + \cancel{x^2y^2}^{\text{4º orden}} - 2x^2y - \left(-x^3 + o(\sqrt{x^2+y^2}^3) \right) + o(\sqrt{x^2+y^2}^3) \\ &= 1 + x - xy + x^2 - 2x^2y + x^3 + o(\sqrt{x^2+y^2}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+2y+xy^2-y^3}{1+(-x+xy)} &= (x+2y+xy^2-y^3) \left(1 + x - xy + x^2 - 2x^2y + x^3 + o(\sqrt{x^2+y^2}^3) \right) \\ &= x+2y+xy^2-y^3+x^2+2xy-x^2y-2xy^2+x^3+2yx^2+o(\sqrt{x^2+y^2}^3) = \\ &= x+2y+x^2+2xy+x^3-y^3-xy^2+x^2y-y^3+o(\sqrt{x^2+y^2}^3) \end{aligned}$$

$$\textcircled{b} \quad g(x,y) = (1+x)^y$$

$$(1+x)^y = e^{\ln(1+x)^y} = e^{y \ln(1+x)}$$

$$\text{Ahora usando el desarrollo conocido } \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(\|(x,y)\|^3)$$

$$y \ln(1+x) = xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y + o(\|(x,y)\|^3)$$

Por ultimo

$$e^{xy} - \frac{1}{2}x^2y = 1 + xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}\left(xy - \frac{1}{2}x^2y\right)^2 + o\left(\|(x,y)\|^3\right)$$