Extraordinario 20/21 (Preg. 4) Extremos

D. Dada la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = (2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

calcúlense los extremos relativos y absolutos en $\mathbb{R}^2$. Se verifica:

13) f tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$ y el valor máximo absoluto de f es $2/e$.
14) f tiene cuatro extremos relativos, pero ninguno es absoluto.
15) f tiene dos máximos relativos en $(1,0)$ y $(-1,0)$ y dos mínimos relativos, y su valor mínimo absoluto es $1/e$.
16) f tiene un mínimo absoluto $(0,-1)$ y el valor máximo absoluto de f es $1/e$.

$$f(x,y) = (2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} \qquad (f \in C^\infty)$$

Cond. necesaria $\nabla f = 0$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x e^{-(x^2+y^2)} - (2x^2+y^2)2x e^{-(x^2+y^2)} \\ 2y e^{-(x^2+y^2)} - (2x^2+y^2)2y e^{-(x^2+y^2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x(2-2x^2-y^2) \\ 2y(1-2x^2-y^2) \end{bmatrix} e^{-(x^2+y^2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluciones del sistema:

$$x=0 \begin{cases} \to y=0 \\ \to 1-y^2=0 \to y=\pm 1 \end{cases}$$

$$y=0 \begin{cases} \to x=0 \\ \to 2-2x^2=0 \to x=\pm 1 \end{cases}$$

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	$1/e$
0	-1	$1/e$
1	0	$2/e$
-1	0	$2/e$

Candidatos

(Los dos términos entre paréntesis no pueden ser cero a la vez. Si los restamos, obtenemos $2-1=0 \to$ absurdo)

Para caracterizar los pts críticos, podemos recurrir a la condición suficiente (Hessiano).

$$Hf = \begin{bmatrix} 2(2-2x^2-y^2)+2x(-4x)-2x(2-2x^2-y^2)2x & \dots \\ 2y(-4x)-2y(2-2x^2-y^2)2x & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 2y(-4x)-2y(2-2x^2-y^2)2x \\ \dots & 2(2-2x^2-y^2)+2y(-2y)-2y(2-2x^2-y^2)2y \end{bmatrix} e^{-(x^2+y^2)}$$

De modo que

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} e \rightarrow \text{mínimo local}$$

$$Hf(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-1} \rightarrow \text{pto silla}$$

$$Hf(0,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-1} \rightarrow \text{pto silla}$$

$$Hf(1,0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-1} \rightarrow \text{posible máximo local}$$

$$Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-1} \rightarrow \text{posible mínimo local}$$

D. Dada la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

calcúlense los extremos relativos y absolutos en $\mathbb{R}^2$. Se verifica:

13) f tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$ y el valor máximo absoluto de f es $2/e$.
14) f tiene cuatro extremos relativos, pero ninguno es absoluto.
15) f tiene dos máximos relativos en $(1,0)$ y $(-1,0)$ y dos mínimos relativos, y su valor mínimo absoluto es $1/e$.
16) f tiene un mínimo absoluto $(0,-1)$ y el valor máximo absoluto de f es $1/e$.

14. Falso. Como mucho son 3 extremos relativos

15. Falso. No hay dos mínimos relativos y mínimo absoluto es 0

16. Falso. Mínimo absoluto en $(0,0)$.

13. $\left.\begin{array}{l} x\to\pm\infty \\ y\to\pm\infty \end{array}\right\} f\to 0$ Luego max. absoluto es el mayor de los relativos.

Por otra parte $f\geq 0$ y solo $f=0$ en $(x,y)=(0,0)\to$ min. absoluto

(No era necesario hacer la parte del Hessiano!).

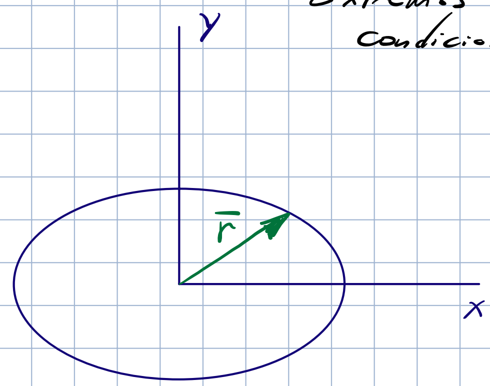
Calcúlese la distancia máxima y mínima al origen de coordenadas de los puntos de la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Se verifica que:

Seleccione una opción:

1. La distancia mínima es $d_{min} = 1$ y se alcanza en los puntos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
2. La distancia máxima es $d_{max} = 4$ y se alcanza en los puntos $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. La distancia mínima es $d_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y se alcanza en los puntos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
4. La distancia máxima es $d_{max} = 2$ y se alcanza en los puntos $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Test moodle 20/21
Extremos condicionados



Puntos de la elipse : $\bar{x} \,/\, 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

(dist. al cuadrado) Distancia de un pto al origen: $d^2 = \|\bar{x}\|^2 = x^2 + y^2$

$d^2_{max/min} \longrightarrow \dfrac{\partial d^2}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial d^2}{\partial y} = 2y \longrightarrow$ cuanto más lejos, más grande.

Extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ condicionados a

$g(x,y) \longrightarrow 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0.$

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8)$$

$$\nabla \mathcal{L} = 0; \quad \begin{aligned} 2x + \lambda(10x + 6y) &= 0 \\ 2y + \lambda(6x + 10y) &= 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Ligadura. Cualquier pto $\nabla \mathcal{L} = 0$ cumple la ligadura de forma automática.

$$\lambda = \frac{-2x}{10x + 6y} \qquad \lambda = \frac{-2y}{6x + 10y}$$

$$2y + \frac{-2x}{10x + 6y}(6x + 10y) = 0$$

$$2y(10x+6y) - 2x(6x+10y) = 0$$

$$\cancel{20}xy + 12y^2 - 12x^2 - \cancel{20}xy = 0$$

$$\boxed{y^2 = x^2}$$

$$\boxed{y = \pm x}$$

$$5x^2+6xy+5y^2-8 = 0$$

$$y=x \longrightarrow 5x^2+6x^2+5x^2-8 = 0 \longrightarrow 16x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$d_{min} = 1$$

$$y=-x \longrightarrow 5x^2-6x^2+5y^2-8 = 0$$

$$4x^2 - 8 = 0$$

$$x_{max} = \pm\sqrt{2} \longrightarrow y_{max} = \mp\sqrt{2} \longrightarrow d_{max} = 2$$

¡Cuidado con d^2!

No clasificación de extremos a través de Hessiano en Lagrange (en examen).

Por comparación:

14.6 Estudiar si $f(x,y,u,v)=xyuv+1$ tiene un extremo relativo condicionado por las ligaduras $x^2+xv+v^2=3$ e $y^2+yu+u^2=3$ en el punto $(x,y,u,v)=(1,1,1,1)$ ~~y, en caso afirmativo, ¿es máximo o mínimo?~~

$$\mathcal{L}(x,y,u,v;\mu,\lambda) = xyuv + 1 - \lambda(x^2+xv+v^2-3) - \mu(y^2+yu+u^2-3)$$

$$\nabla \mathcal{L} = 0 \qquad \underbrace{(x,y,u,v)=(1,1,1,1)}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x &= yuv - \lambda(2x+v) = 0 & \quad 1 - 3\lambda &= 0\\
\mathcal{L}_y &= xuv - \mu(2y+u) = 0 & \quad 1 - 3\mu &= 0\\
\mathcal{L}_u &= xyv - \lambda(x+2v) = 0 & \quad 1 - 3\lambda &= 0\\
\mathcal{L}_v &= xyu - \mu(y+2u) = 0 & \quad 1 - 3\mu &= 0\\
\mathcal{L}_\lambda &= x^2+xv+v^3-3 = 0 & \quad 3 - 3 &= 0\\
\mathcal{L}_\mu &= y^2+yu+u^2-3 = 0 & \quad 3 - 3 &= 0
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\lambda = 1/3 \qquad \mu = 1/3}$$

Candidato a extremo relativo.

Extraordinario 20/21. Integracion

E. Hallar el área de la región $D \subset \mathbb{R}^2$ que es interior a la circunferencia: $x^2+y^2=8$ y está por encima de la parábola: $2y=x^2$.

La respuesta correcta es:

17) $A=\left(2\pi-\frac{1}{3}\right)$ **18)** $A=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\right)$

19) $A=\left(\pi+\frac{2}{3}\right)$ **20)** $A=\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)$

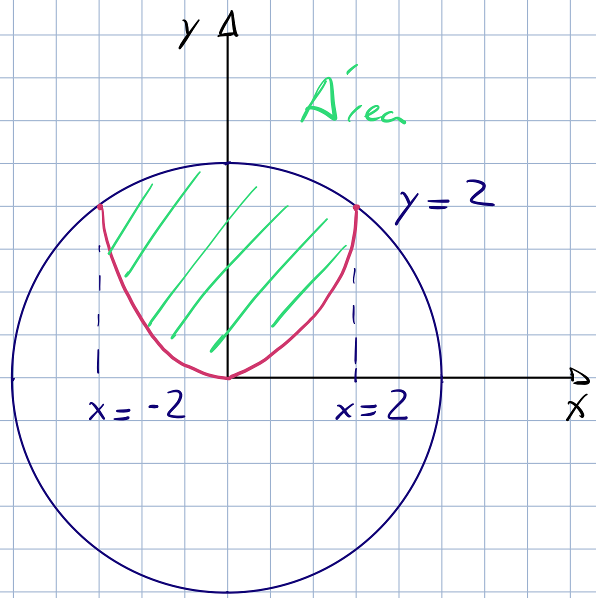
Pto de corte

$$2y+y^2-8=0 \longrightarrow y=2$$

$$2y=x^2 \rightarrow 4=x^2 \rightarrow x=\pm 2$$

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2/2}^{\sqrt{8-x^2}} dy = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx =$$

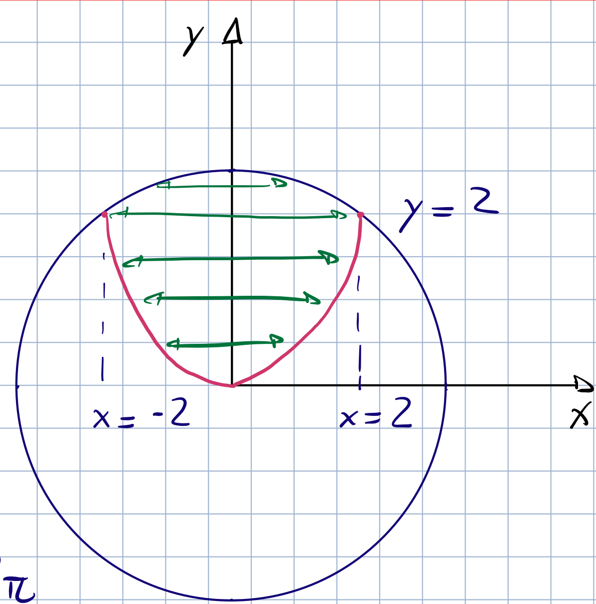
$$= 4/3 + 2\pi$$



¿Se podría plantear al revés?

$$\int_{y=0}^{y=2} dy \int_{x=-\sqrt{2y}}^{x=\sqrt{2y}} dx + \int_{y=2}^{y=\sqrt{8}} dy \int_{x=-\sqrt{8-y^2}}^{x=\sqrt{8-y^2}} dx =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} 2\sqrt{2y}\, dy + \int_{y=2}^{\sqrt{8}} 2\sqrt{8-y^2}\, dy = [\dots] = \frac{4}{3} + 2\pi$$




```
In[4]:= Simplify[Integrate[2 Sqrt[2 y], {y, 0, 2}] + Integrate[2 Sqrt[8 - y^2], {y, 2, Sqrt[8]}]]
        simplifica  integra  raíz cuadrada  integra  raíz cuadrada  raíz cuadrada
```

Out[4]= $\frac{4}{3}+2\pi$

Ordinario 20/21

5

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\}$$

$$I = \iiint_D x^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 dy \int_0^{y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}} x^2\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 dy\ x^2 z \Big|_0^{y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 x^2 y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{\pi}{24}$$

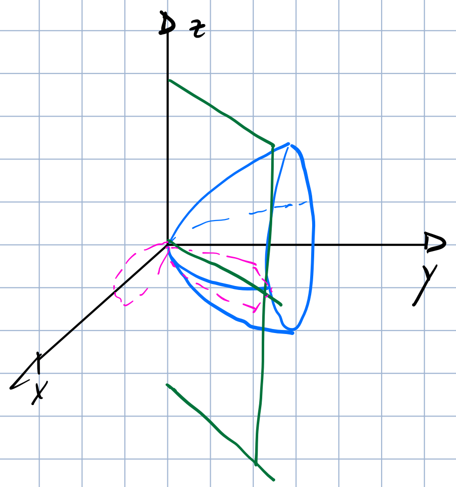
Dos integrales de Mat. I

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{array}{c}\text{Cambio variable}\\ x = \sin u\end{array} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\left(1-y^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = 1/3$$

Ordinario 18/19

5 Calcular el volumen del sólido $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+z^2 \leq y \leq x\}$



$$x^2+z^2 = x$$

$$z = \pm\sqrt{x-x^2}$$

$$V = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dz \int_{x^2+z^2}^{x} dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dz\left(-x^2-z^2+x\right) =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x-x^2-\frac{z^2}{3}\right) z \Big|_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \left(\left(x-x^2-\frac{(x-x^2)}{3}\right)\sqrt{x-x^2} +\right.$$

$$\left. + \left(x-x^2-\frac{x-x^2}{3}\right)\sqrt{x-x^2}\right)dx = \int_0^1 2\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x^2\right)\sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{4}{3}\int_0^1 (x-x^2)^{3/2}dx =$$

$$[\ldots] = \frac{\pi}{32}$$

Alternativa mediante cambio de variable no trivial

La proyección de la intersección es $x^2-x+z^2=0$. Completando cuadrados, podemos reescribir esto como:

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\tfrac{1}{4}$$

Esto es una circunferencia con centro en $1/2$, que queda muy simplificada usando el cambio:

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta+\tfrac{1}{2}\\ y&=y\\ z&=\rho\sin\theta \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned}&\rho\in[0,\tfrac{1}{2}]\\ &\theta\in[0,2\pi]\end{aligned}$$

$$M=\left\{\rho^2\cos^2\theta+\tfrac{1}{4}+\rho\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta\leq y\leq\rho\cos\theta+\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$=\left\{\rho^2+\tfrac{1}{4}+\rho\cos\theta\leq y\leq\rho\cos\theta+\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/4}d\rho\int_{\rho^2+1/4+\rho\cos\theta}^{\rho\cos\theta+1/2}\rho\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/4}\rho\left(\cancel{+\rho\cos\theta}+\tfrac{1}{2}-\rho^2-\tfrac{1}{4}\cancel{-\rho\cos\theta}\right)d\rho=$$

$$=2\pi\int_0^{1/4}\left(\tfrac{1}{4}-\rho^2\right)\rho\,d\rho=\frac{\pi}{32}$$

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función definida en el volumen

mediante la expresión:

$$f(x,y,z) = \frac{6\,(5\,z+3)\,x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{para} \quad (x^2+y^2) \neq 0$$

Se pide calcular la integral triple $I = \int_D f$

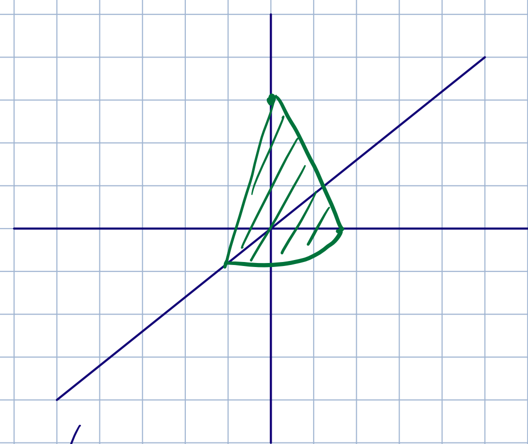
NOTA.- El resultado es un número entero que debe introducirse en la casilla dispuesta para ello.

Respuesta:

Examen 20/21

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \right\}$$

$$\int_D \frac{6(5z+3)\,xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dV$$

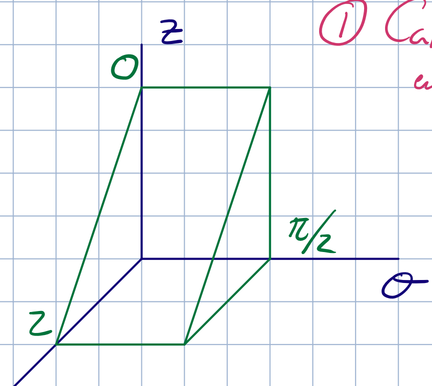


Cilíndricas

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$z = z$



① Cambio en región

② Cambio en función

③ Cambio en diferencial

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2} d\rho \int_0^{1-\frac{\rho}{2}} \frac{6(5z+3)\,\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho}}\, \rho\, dz =$$

$$6\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^2\rho^2 d\rho\left(\int_0^{1-\frac{\rho}{2}}(5z+3)\,dz\right)=$$

$$3\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^2\rho^2 d\rho\left(\int_0^{1-\frac{\rho}{2}}(5z+3)\,dz\right)=-\frac{3}{2}\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/2}\int_0^2\rho^2 d\rho\int_0^{1-\rho/2}(5z+3)\,dz=$$

$$=3\int_0^2\rho^2\left(\frac{5}{2}z^2+3z\right)\Big|_{z=0}^{z=1-\rho/2}d\rho=3\int_0^2\rho^2\left(\frac{5}{2}(1-\rho/2)^2+3(1-\rho/2)\right)d\rho=$$

$$\underset{*}{=}\dots=8$$

$$\overset{*}{=}3\int_0^2\rho^2 d\rho\left(\frac{5}{2}(1-\rho/2)^2+3(1-\rho/2)\right)=6\int_0^2\rho^2\left(\frac{5}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{4}-\rho\right)+3\left(1-\rho/2\right)\right)d\rho$$

$$=3\int_0^2\rho^2\left(\frac{5}{2}+3-\rho\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{8}\rho^2\right)d\rho=6\Bigg[\left(\frac{5}{2}+3\right)\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

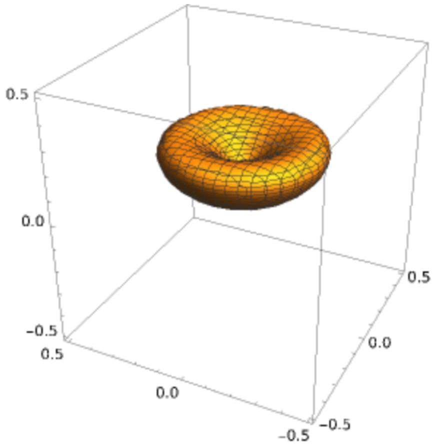
$$+\frac{5}{8}\frac{2^5}{5}\Bigg]=3\cdot 2^3\left[\left(\frac{5+6}{2}\right)\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{2}\right)+\frac{\cancel{5}\cdot 4}{8\cdot\cancel{5}}\right]=$$

$$=3\cdot 8\left[\frac{11}{6}-2+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=3\cdot 8\left[\frac{11-12+3}{6}\right]=8$$

19.4

```
ContourPlot3D[
representación 3D de contornos
  (x^2 + y^2 + z^2)^2 == z (x^2+y^2), {x, -0.5, 0.5}, {y, -0.5, 0.5}, {z, -0.5, 0.5}]
```



$$\rho^4 = 2\rho\cos\varphi\,(\rho^2\sin^2\varphi)$$

$$\rho = 2\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$z \geq 0$ (no hay solución en caso contrario) $\rightarrow \varphi \in [0, \pi/2]$

$$z = \rho\cos\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sin^2\varphi\cos\varphi} r^2 \sin\varphi \, dr = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi}{3}\left(2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} 8 \int_0^{\pi/2} \sin^7\varphi\cos^3\varphi \, d\varphi \underset{*}{=} \frac{2\pi 8}{3\cdot 40}$$

$$* \int_0^{\pi/2} \sin^7\varphi\cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^7\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \int_0^{\pi/2} \sin^9\varphi\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{\sin^8\varphi}{8}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^{10}\varphi}{10}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$$

Examen 20/21

Versión 1

Sea el intervalo $I = [0,1] \times [0,1]$ y sea P la partición de I consistente en subdividir el intervalo en x y el intervalo en y en n subintervalos iguales. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = x + y$. Entonces

a) $S(f;P) = 1 + \frac{1}{n}$.

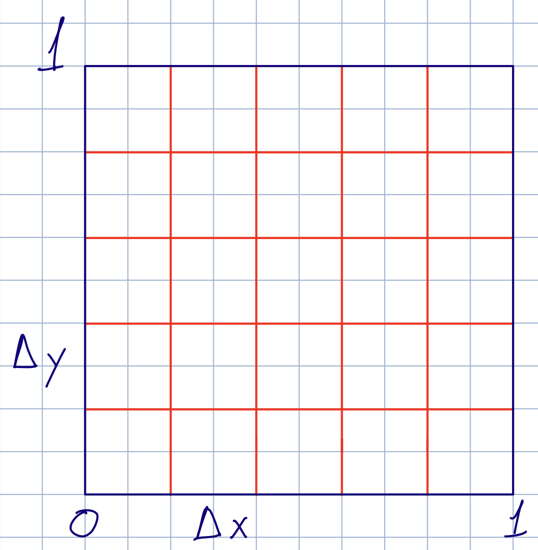
b) $s(f;P) = 2 - \frac{1}{n}$.

c) $\underline{\int}_I f = 2$.

d) El supremo de f en el cuadrado $C_{ij} = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ es $M_{ij} = \frac{i+j-1}{n}$.

Ayuda: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(Versión final creo que se simplificó para que la serie quedara más simple).



$$f(x,y) = x+y$$

$$\Delta x = \frac{1}{n} \qquad x_i = \frac{i}{n}$$

$$\Delta y = \frac{1}{n} \qquad y_i = \frac{i}{n}$$

$$* S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta x \Delta y =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{i}{n} + \frac{j}{n} \right) \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(n i + \frac{n(n+1)}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(\cancel{2} n \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} \right) = \frac{n^3}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$* \ s(f; P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{i-1}, y_{i-1}) \Delta x \Delta y =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n} + \frac{j-1}{n} \right) \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(i+j-2 \right) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} - 2n \right) =$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(\cancel{2} n \frac{n(n(n+1))}{\cancel{2}} - 2n^2 \right) = \frac{n^3}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} - 2\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$* \ \underline{\int_I} f = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$ Ínfimo de sumas superiores

$$* \ \overline{\int_I} f = \lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$ Supremo de sumas inferiores

$*$ Supremo e ínfimo de f en $C_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right]$

$$M_{ij} = \frac{i}{n} + \frac{j}{n} = \frac{i+j}{n} \qquad m_{ij} = \frac{i-1}{n} + \frac{j-1}{n} = \frac{i+j-2}{n}$$