INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}^p$ I

15.- Integración en intervalos de $\mathbb{R}^p$

16.- Integrabilidad y continuidad (en intervalos)

1.- Definiciones asociadas a la medida

Sea un intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$:

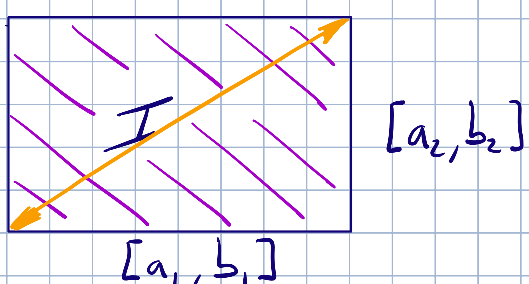
$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$$

* La medida es: $\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_p - a_p)$

Si $p=1$ es una longitud, $p=2$ es un área y $p=3$ un volumen

* El diámetro es: $|I| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + \dots + (b_p-a_p)^2}$

EJEMPLO: $\mathbb{R}^2$



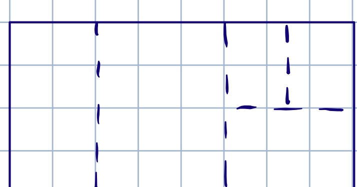
$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$

$|I| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$

* La partición es: conjunto finito de intervalos compactos $I_i \subset \mathbb{R}^p$ que recubren I sin solaparse. Esto es:

$$I = \bigcup_{i=1}^{K} I_i \quad ; \quad I_i \cap I_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

EJEMPLO: $\mathbb{R}^2$



* El diámetro de una partición es el mayor de los diámetros de los intervalos que la forman

$$|P(I)| \equiv \max\{|I_j|\}_{j=1,2,\dots,n}$$

* La medida de I es igual a la suma de las medidas de los intervalos que forman $P(I)$

$$\mu(I) = \mu(I_1) + \dots + \mu(I_n)$$

Pensarlo como áreas en $\mathbb{R}^2$ o volúmenes en $\mathbb{R}^3$

* P' es posterior a P (refinamiento de P) si se obtiene subdividiendo alguno de los intervalos de P.

$$|P'| \leq |P|$$

Mirar def. de diámetro más arriba.

2.- Sumas de Riemann. Definiciones.

Sea $f: I \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ acotada en I y sea $P = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ se definen:

* Suma inferior de f asociada a P

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \mu(I_i) \quad \text{con} \quad m_i = \inf\{f(x);\ x \in I_i\}$$

* Suma superior de f asociada a P

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \mu(I_i) \quad \text{con} \quad M_i = \sup\{f(x);\ x \in I_i\}$$

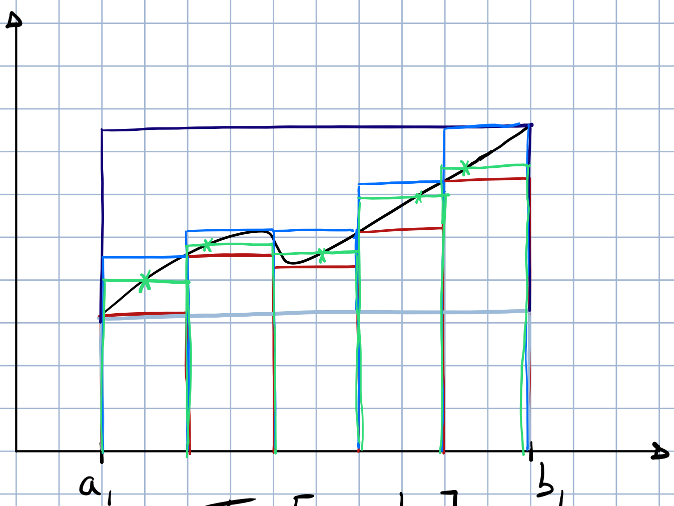
* Suma de Riemann de f asociada a P y $\{x_i^*\}$ ← Conjunto de pts

$$\sigma(f, P, \{x_i^*\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\mu(I_i) \quad \text{con} \quad x_i^* \in I_i$$

3.- Sumas de Riemann. Propiedades.

Para cualquier partición P.

$$\inf(f, I)\,\mu(I) \leq s(f,P) \leq \sigma(f, P, \{x_i^*\}) \leq S(f,P) \leq \sup(f,I)\,\mu(I)$$



$I = [a_1, b_1]$

$\mu(I) = b_1 - a_1$

$\inf(f,I)\,\mu(I)$

$s(f,P)$

$\sigma(f, P, \{x_i^*\})$

$S(f,P)$

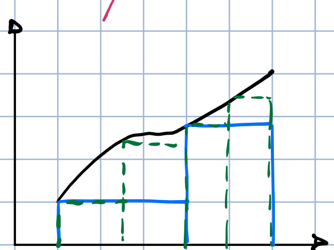
$\sup(f,I)\,\mu(I)$

Las distintas sumas, vienen dadas por la suma del área de los rectángulos.

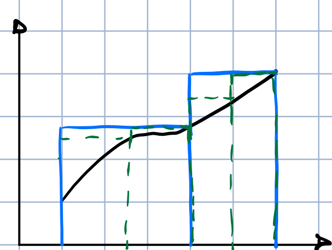
Si P' es posterior a P, se cumple que:

$$s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$$

Las sumas inferiores crecen mientras que las sumas superiores decrecen.



$s(f,P) \leq s(f,P')$ $\leq$ $S(f,P') \leq S(f,P)$



De modo que podemos concluir:

El conjunto de sumas superiores está acotado inferiormente y el conjunto de sumas inferiores está acotado superiormente.

* Supremo de las sumas inferiores: $\underline{\int_I} f = \sup\{s(f,P)\}$

* Ínfimo de las sumas superiores: $\overline{\int_I} f = \inf\{S(f,P)\}$

Se cumple que: $\underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f$

EJEMPLO: $f: [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

Creamos una sucesión de particiones:

$P_0 = \underbrace{[0,2]}_{I_1^0}$

$P_1 = \{\underbrace{[0,1]}_{I_1^1}, \underbrace{[1,2]}_{I_2^1}\}$

$P_2 = \{\underbrace{[0,1/2]}_{I_1^2}, \underbrace{[1/2,1]}_{I_2^2}, \underbrace{[2/2,3/2]}_{I_3^2}, \underbrace{[3/2,4/2]}_{I_4^2}\}$

$P_3 = \{\underbrace{[0,1/4]}_{I_1^3}, \underbrace{[1/4,2/4]}_{I_2^3}, \underbrace{[2/4,3/4]}_{I_3^3}, \underbrace{\ldots}_{\ldots}, \underbrace{\left[\frac{7}{4},\frac{8}{4}\right]}_{I_8^3}\}$

$\vdots$

$P_k = \left\{\underbrace{\left[0,\frac{1}{2^{k-1}}\right]}_{I_1^k}, \underbrace{\left[\frac{1}{2^{k-1}},\frac{2}{2^{k-1}}\right]}_{I_2^k}, \underbrace{\left[\frac{2}{2^{k-1}},\frac{3}{2^{k-1}}\right]}_{I_3^k}, \ldots, \underbrace{\left[\frac{i-1}{2^{k-1}},\frac{i}{2^{k-1}}\right]}_{I_i^k}, \ldots, \underbrace{\left[\frac{2^k-1}{2^{k-1}},\frac{2^k}{2^{k-1}}\right]}_{I_{2^k}^k}\right\}$

Todos los intervalos son del mismo tamaño $\mu(I_i^K) = \frac{1}{2^{K-1}} = \frac{2}{2^K}$

Además, para $\mathbb{R}$, $\mu(I_i^K) = |I_i^K|$, de modo que $|P_K| = \mu(I_i^K)$

Por ser $f(x) = x^2$ una función creciente en $[0,2]$, las sumas inferiores se construirán tomando los valores mínimos de "x" (a la izq.) mientras que las superiores se construirán tomando los valores máximos de "x" (a la dch). Ver dibujo

Observando el intervalo I_i^K, vemos que

$$I_i^K = \left[\frac{i-1}{2^{K-1}}, \frac{i}{2^{K-1}}\right]$$

x_{min} en intervalo I_i^K es $\frac{i-1}{2^{K-1}}$

x_{max} en intervalo I_i^K es $\frac{i}{2^{K-1}}$

Ver inciso de series más adelante

De modo que la suma inferior queda:

$$s^K = s(f,P) = \sum_{i=1}^{2^K} \left(\frac{i-1}{2^{K-1}}\right)^2 \frac{2}{2^K} = \frac{2^3}{2^{3K}} \sum_{i=1}^{2^K} (i-1)^2 = \frac{2^3}{2^{3K}} \frac{(2^K-1)(2^K)(2(2^K-1)+1)}{6}$$

Si hacemos $K \to \infty \to \mu(I_i^K) \to 0$, tenemos que:

$$\lim_{K\to\infty} s^K = \lim_{K\to\infty} \frac{2^3}{2^{3K}} \frac{(2^K-1)(2^K)(2(2^K-1)+1)}{6} = \lim_{K\to\infty} \frac{2^3 \cdot 2^{3K+1}}{2^{3K} \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8}{3}$$

Recordar que $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$ ...

Por otro lado, la suma superior queda

Ver inciso de series más adelante

$$S^K = S(f, P_K) = \sum_{i=1}^{2^K} \left(\frac{i}{2^{K-1}}\right)^2 \frac{2}{2^K} = \frac{2^3}{2^{3K}} \sum_{i=1}^{2^K} i^2 = \frac{2^3}{2^{3K}} \frac{2^K(2^K+1)(2\cdot 2^K+1)}{6}$$

Si hacemos $K \to \infty \to \mu(I_i^K) \to 0$, tenemos que:

$$\lim_{K\to\infty} S^K = \lim_{K\to\infty} \frac{2^3}{2^{3K}} \frac{2^K(2^K+1)(2\cdot 2^K+1)}{6} = \lim_{K\to\infty} \frac{2^{3K}\cdot 2^4}{2^{3K}\cdot 6} = \frac{8}{3}$$

De forma que:

$$\lim_{K\to\infty} (S^K - s^K) = 0$$

En el próximo apartado veremos las implicaciones de este resultado.

INCISO SERIES

La suma $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2 \overset{*}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

De modo que $\sum_{i=1}^{2^K} i^2 =$

$$= \frac{2^K(2^K+1)(2\cdot 2^K+1)}{6}$$

Además, $\sum_{i=1}^{2^K} (i-1)^2 =$

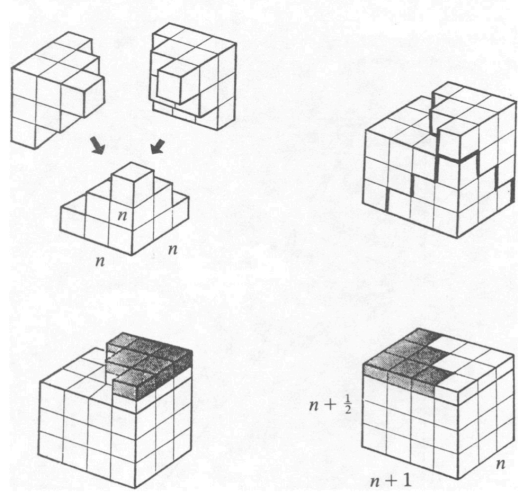
$$= 0^2+1^2+2^2+\dots+(2^K-1)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{2^K-1} i^2 = \sum_{i=1}^{2^K-1} i^2 =$$

$$= \frac{(2^K-1)(2^K)(2\cdot(2^K-1)+1)}{6}$$

* **Proof without words: Sum of squares**

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})$$



—MAN-KEUNG SIU
University of Hong Kong

4 Integración en intervalos de $\mathbb{R}^p$

Sea $f: I \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ acotada en I, y sean $P_1, P_2, \dots,$ una sucesión infinita de particiones de I que cumplen

$$|P_1| > |P_2| > |P_3| > \dots \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$$

f es integrable en I si y solo si (defs. equivalentes):

1. $$\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \int_I f$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \left(S(f, P_n) - s(f, P_n)\right) = 0$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P, \{x_i^*\}) = \int_I f \quad \text{con} \quad x_i^* \in I_i \subset P_n$$

15.2

EJERCICIO: Sea $f: I = [0,2]\times[0,3] \to \mathbb{R}$. Sea P_n la partición obtenida dividiendo I en "n" partes iguales. Si en cada subintervalo, $I_{ij} \in P_n$, se cumple que $M_{ij} - m_{ij} < \frac{2}{n^3}$, ¿es integrable?

$$P_n = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{3(j-1)}{n}, \frac{3j}{n}\right]$$

Comparar construcción con ejercicio anterior.

$$\mu(I_{ij}^n) = \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{6}{n^2}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \frac{6}{n^2} \qquad s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \frac{6}{n^2}$$

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij}) \frac{6}{n^2} = \frac{6}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij})$$

Además, en el enunciado dicen que $M_{ij}-m_{ij}<\frac{2}{n^3}$, de modo que

$$\frac{6}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M_{ij}-m_{ij})<\frac{6}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{n^3}=\frac{6}{n^2}\,n^2\cdot\frac{2}{n^3}=\frac{12}{n^3}$$

Cuando el diámetro de la partición tiende a cero, $n\to\infty$ y entonces:

$$\lim_{n\to\infty}(S-s)<\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n^3}\longrightarrow 0 \quad \text{ES INTEGRABLE}$$

15.4

EJERCICIO. Sea $f(x,y)=\begin{cases} xy & \text{si } (x,y)\in \mathbb{I} \\ -xy & \text{si } x\in\mathbb{Q} \text{ o } y\in\mathbb{Q}\end{cases}$

$I=[0,1]^2$. ¿Es $f(x,y)$ integrable en I?

Primero consideramos una partición de I de la forma:

$$P_n=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\underbrace{\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]}_{I_{ij}} \quad , \mu(I_{ij})=\frac{1}{n^2}$$

$$m_i=-xy\longrightarrow s=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{j}{n}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij=$$

$$\overset{*}{=}-\frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=-\frac{1}{n^4}\frac{n^2(n^2+1+2n)}{4}\longrightarrow\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{4}-\frac{n^2+2n^3}{4n^4}=$$

$$-\frac{1}{4}$$

* Resultado series $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

Por otro lado,

$$M_i = xy \longrightarrow S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{j}{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij =$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{n^4}\,\frac{n^2(n^2+1+2n)}{4} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} + \frac{n^2+2n^3}{4n^4} =$$

$$\frac{1}{4}$$

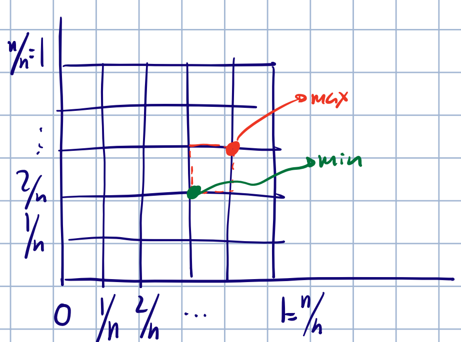
$*$ Resultado series $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

No coinciden, luego esta función no es integrable.

15.3 Sea $f: I \to \mathbb{R}$ la función definida en $I = [0,1]\times[0,1]$ mediante $f(x,y) = xy$. Pruébese que f satisface en I a la condición "$\varepsilon : P$" de integrabilidad y que $\int_I f = 1/4$.

$$f : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow xy$$

f cumple $(\varepsilon : P)$ $\quad \int_I f = 1/4$



$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{jk}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{n} j =$$

$$= \frac{1}{n^4}\,\frac{(1+n)n}{2}\,\frac{(1+n)n}{2} = \frac{1}{4}\,\frac{(n+1)^2}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

$$s(f, P_n) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{(j-1)(k-1)}{n^4} \overset{*}{=} \frac{(n-1)^2}{n^2}\,\frac{1}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/4$$

$$\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)\right) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\sum_{j=0}^{n-1} j\right) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\right) = \frac{(n(n-1))^2}{4n^4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) - s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{n^2} = 0$$

5 Condiciones suficientes de integrabilidad (Sentido Riemann)

Sea $I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_p,b_p]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$ y $f: I\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ acotada. Si f es continua en I, entonces f es integrable en I

Continua $\to$ Integrable. Condición suficiente

No me da información si f no es continua.

EJEMPLO:

Sea $f(x)=\begin{cases} 2 & x=1/2 \\ 1 & x\neq 1/2 \end{cases}$ en $I=[0,1]$ ¿Integrable?

No es continua, recurro a la definición. Creo una P_n

$$P_n=\left\{[0,1/n],[1/n,2/n],\ldots,\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right],\ldots\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right]\right\}$$

$$s(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(I_i)m_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}1=1$$

$$S(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(I_i)M_i \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{n}\,1+2\left(\frac{1}{n}\cdot 2\right)=\frac{n-2}{n}+\frac{4}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}+\frac{4}{n}=1$$

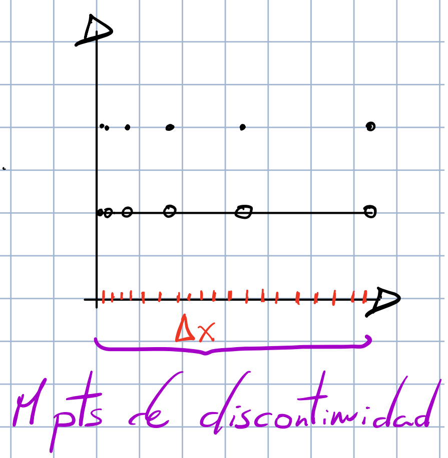
* En el peor de los casos, dos intervalos contienen en sus extremos a $x=1/2$ y por tanto $M=2$. Incluso en ese caso con $n\to\infty$ el valor de la suma superior es 1.

Luego es una función discontinua e integrable

Número finito de discontinuidades $\longrightarrow$ Integrable (cond. suf.)

EJEMPLO:

Sea $f(x)=\begin{cases} 2 & x=1/m \\ 1 & x\neq 1/m \end{cases}$ en $I=[0,1]$ ¿Integrable?



$m\in\mathbb{N}\longrightarrow$ discontinuidades en $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$

Genero una partición que recubra los pts de discontinuidad con intervalos de tamaño $\Delta x=\frac{\varepsilon}{M+1}$, con ε un parámetro pequeño.

Tb recubro $x=0$, donde se acumulan las discontinuidades.

Si tomo la diferencia entre S y s en la partición, solo tendrían una contribución $\neq 0$ los intervalos que incluyan una discontinuidad, esto es:

$$S-s=\sum_{j=1}^{M+1}(2-1)\Delta x=(M+1)\frac{\varepsilon}{M+1}=\varepsilon$$

Pero este parámetro, puede ser tan pequeño como quiera.
Luego $\lim_{\varepsilon \to 0} S - s = 0 \longrightarrow$ Función integrable

Este caso tenía infinitas discontinuidades, sin embargo era integrable. El "truco" estaba en que las ∞ discont. se acumulaban alrededor de un pto.

EJEMPLO:

Sea $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ en $I = [0, 1]$ ¿Integrable?

En este caso, $S = 2$ y $s = 1$ para cualquier partición.
Es discontinua $\forall x \in I$.

Veamos ahora otra condición suficiente que incluye más funciones que las continuas.

Sea $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$ y $f : I \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ acotada. Si f es continua en $I - C$ y C es un conjunto de contenido nulo, entonces f es integrable en I

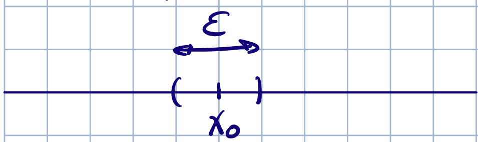
* C es un conjunto de contenido nulo en $\mathbb{R}^p$ si: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un recubrimiento finito de C

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \;/\; C \subset R \text{ con } \mu(R) \leq \varepsilon$$

Es decir, podemos cubrir todas las discontinuidades con un número finito de parches, aunque hagamos estos parches de un tamaño infinitesimal.

EJEMPLOS: $\mathbb{R}$

* $\{x_0\}$ tiene contenido nulo en la recta real



$R = \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \; x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ recubre al pto

y $\mu(R) = \varepsilon$ (Podemos hacerlo tan pequeño como queramos)

* $\{x_0, x_1\}$ tiene contenido nulo ya que

$R = R_1 \cup R_2$ $\left(R_1 = (x_0 - \varepsilon/4, \; x_0 + \varepsilon/4) \; ; \; R_2 = (x_1 - \varepsilon/4, \; x_1 + \varepsilon/4)\right)$

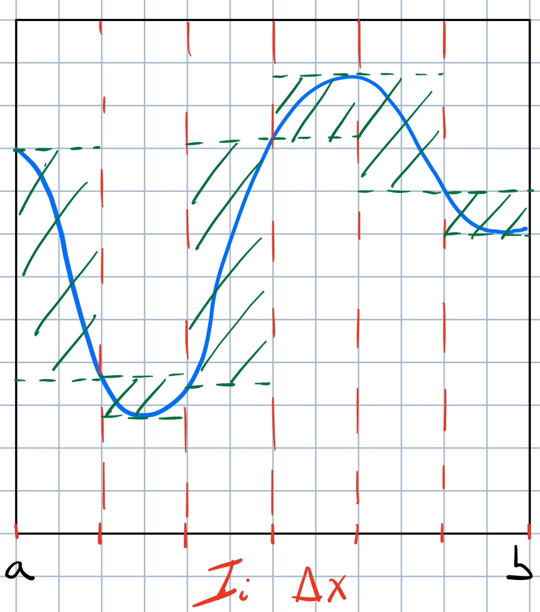
$\mu(R) = \mu(R_1) + \mu(R_2) = \varepsilon$

* $x \neq 1/m$ $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$. Ya construimos (sin decirlo) un recubrimiento de contenido nulo en el ejemplo.
* En cambio, no podemos hacerlo en todo $\mathbb{R}$, necesitaríamos infinitos parches y tendría contenido.

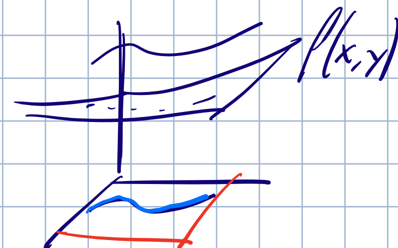
EJEMPLO $\mathbb{R}^2$

La gráfica de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f integrable) tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^2$

1. Hacemos una partición de $[a,b]$ de diámetro Δx (ver dibujo)
2. En cada I_i, buscamos máximo M_i y mínimo m_i
3. Construimos rectángulos $I_i \times [m_i, M_i] = R_i$
4. Tamaño recubrimiento. $\mu(R) = \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\Delta x$
5. No hay problema con hacer $\Delta x \to 0$, donde $\mu(R) \to 0$



→ Rectángulos cubren completamente la discontinuidad. → Esos intervalos de $\mathbb{R}^2$ hacen de recubrimiento.



Consecuencia

Si $f(x,y)$ es discontinua sobre la gráfica de una función (discontinua sobre un conjunto de pts (x,y) que podemos escribir como $y = g(x)$) entonces es integrable.

Al igual que antes, tb tiene contenido nulo un conjunto finito de gráficas de funciones integrables

Guiones V. 2

V.2 Sea $I=[-2,2]\times[0,1]$ y sean los conjuntos $C_i=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/x^2+y^2=\frac{1}{i}\right\}$ con $i=1,2,\cdots 20$. Sea $C=\bigcup_{i=1}^{20} C_i$. Si $f: I\to\mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & \text{si } (x,y)\in C\\ 1 & \text{si } (x,y)\notin C,\end{cases}$$

entonces la integral $J=\iint_I f$:

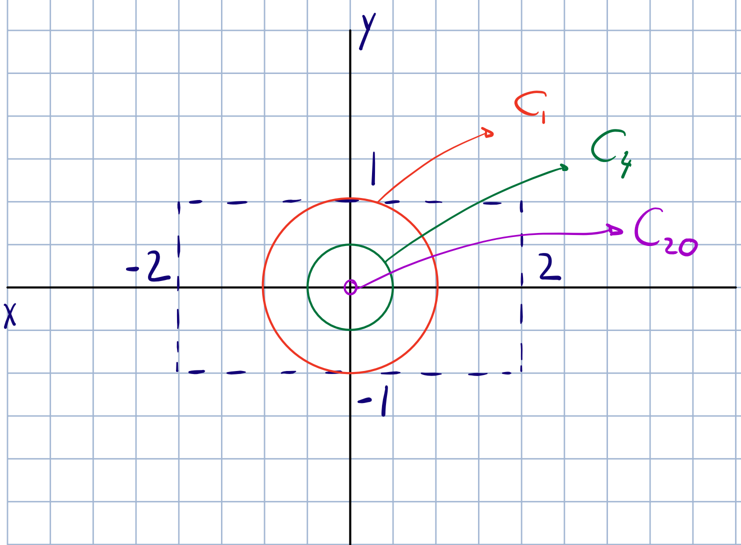
a) Existe y vale $J=4$.

b) No existe porque la función f es discontinua en I.

c) Existe y vale $J=8$.

d) Existe y es $4<J<8$.

Determinar cuál de las opciones anteriores es cierta, razonando la respuesta.



f acotada en I

Esto es un ejemplo de función casi-continua. Es continua salvo en ptos que pueden ser descritos como gráficas de funciones continuas. (Se verá con más detalle en teoría).

f es integrable

¿Cuánto vale la integral?

Podemos ver que la suma inferior, "s"

$$s=(4\times 2)\times 1=8$$

medida del intervalo

valor mínimo de la función en todo intervalo

Por ser integrable

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\int_I f = 8$$