DERIVADA N-ÉSIMA

1 Derivadas sucesivas

$\mathbb{R}^2$

Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos calcular sus funciones derivadas parciales como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad // \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Estas f'_x, f'_y son dos nuevas funciones que, si son derivables, puedo volver a derivar

$$\begin{tikzcd}
 & & g'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right) \\
 & f'_x(x,y) \equiv g(x,y) \arrow[ur, "\partial/\partial x"] \arrow[dr, "\partial/\partial y"'] & \\
 & & g'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right) \\
f(x,y) \arrow[uur, "\partial/\partial x"] \arrow[ddr, "\partial/\partial y"'] & & \\
 & & h'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y(x,y)\right) \\
 & f'_y(x,y) \equiv h(x,y) \arrow[ur, "\partial/\partial x"] \arrow[dr, "\partial/\partial y"'] & \\
 & & h'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right)
\end{tikzcd}$$

¡Son dos nuevas funciones que puedo derivar!

$\mathbb{R}^p$

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, se definen las funciones derivadas parciales como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{x} \longrightarrow f'_{x_i}(\bar{x})$$

¡Calculamos las derivadas parciales de las funciones derivadas parciales!

2 Notación

El orden importa. En general, no es lo mismo derivar primero respecto de x y luego respecto de y que al contrario.

$$D_{ij} f = D_j (D_i f_i) = f''_{ij} = \left(f'_{x_i}\right)'_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \underline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}$$

Esta se usará en exámenes para evitar dudas.

EJEMPLO $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{cases} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{cases} \end{cases}$$

3 Derivadas sucesivas según vectores

Sea $f: \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \bar{x} \longrightarrow f(\bar{x}) \end{array}$ y $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ podemos definir la función derivada según $\bar{u}$ $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{u}}: \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \bar{x} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{u}}(\bar{x}) \end{array}$. Una vez definida esta función, puedo volver a derivarla según otro vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^p$.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}\,\partial \bar{v}} = f''_{\bar{u}\bar{v}}$$

Veremos algún ejemplo más adelante

EJEMPLO

$f(x,y) = \cos(2x) - x^2 e^{5y} + 3y^2$. Calcular $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$

$$f'_x = -2\sin(2x) - 2x e^{5y}$$

$$f'_y = -5x^2 e^{5y} + 6y$$

$$f'_{xx} = -4\cos(2x) - 2e^{5y}$$

$$f'_{xy} = -10x\, e^{5y}$$

Qué curioso... son iguales

$$f'_{yx} = -10\, x e^{5y}$$

$$f'_{yy} = -25x^2 e^{5y} + 6$$

4 Funciones de clase C^r

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, f es de clase C^r en D (abierto) si existen sus derivadas parciales hasta orden r (incluyendo las cruzadas) y son continuas.

Por extensión, C^∞ significa ∞ derivadas parciales continuas.

Polinónimos (incluyendo constante, o 0), exponencial, trigonométricas... son funciones C^∞. Es lo habitual en ingeniería.

NOTA $* \; C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset C^3 \supset \cdots \supset C^\infty$

$* \; C^1, C^2, \ldots, C^\infty \rightarrow$ todas son continuas.

$*$ Recordar

$$C^\infty \rightarrow C^2 \rightarrow C^1 \longrightarrow \text{diferenciable} \longrightarrow \text{continua}$$

§ Teorema de Schwarz-Clairaut

Si $f: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 (derivadas parciales continuas hasta orden 2), las derivadas mixtas (cruzadas) coinciden

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}$$

Esto tb funciona en orden superior. Por ejemplo, si $f \in C^3$, entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_K} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_K} = \frac{\partial^3 f}{(\text{cualquier orden})}$$

EJEMPLO Caso donde no se cumple el Tma de Schwarz-Clairaut

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Continuidad. Continua en $\mathbb{R}^2$

Único pto problemático es $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

$$0\leq \left|f(x,y)-\ell\right| = \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq |xy|\frac{x^2}{x^2+y^2}+|xy|\frac{y^2}{x^2+y^2}\leq 2|xy|\to 0$$

(b) Derivadas parciales. (1er orden)

Derivo de forma usual $\forall \bar{x}\neq(0,0)$ y usando def en $\bar{x}=(0,0)$.

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } \bar{x}\neq\bar{0}\\[2ex] \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{0-0}{h}=0 & \text{si } \bar{x}=\bar{0}\end{cases}$$

Aquí hay dos caminos. El primero es derivar f'_y.
El segundo es usar simetrías. Seguimos el segundo.

Simetría $\longrightarrow f(y,x)=-f(x,y)\longrightarrow f(x,y)=-f(y,x)$

Puedo derivar ambas expresiones respecto la segunda componente

$$\text{"}\frac{\partial}{\partial y}\text{"}\longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-f(y,x)\right)\longrightarrow f'_y(x,y)=-f'_y(y,x)$$

¿Y cómo calculo $-f'_y(y,x)$? Es $f'_x(x,y)$ donde pongo "x" donde aparezca "y" y viceversa, cambiado de signo.

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } \bar{x} \neq \bar{0} \\ 0 & \text{si } \bar{x} = \bar{0} \end{cases}$$

Continuidad de derivadas parciales.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

orden 5 / orden 4

den $= 0$ en $\bar{x} = 0$ ✓

$$0 \leq |f(x,y) - \ell| = \left| \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| \leq \frac{x^4|y|}{(x^2+y^2)^2} + \underset{*}{\frac{4x^2y^2|y|}{(x^2+y^2)^2}} + \frac{y^4|y|}{(x^2+y^2)^2} \leq$$

$$\leq |y| + 4|y| + |y| \to 0$$

$*$ Dos caminos

① $\dfrac{4x^2y^2|y|}{x^4+y^4+2x^2y^2} \leq 2|y|$

② $\dfrac{4(x^2y^2)|y|}{(x^2+y^2)^2} \leq \dfrac{4(x^2+y^2)^2|y|}{(x^2+y^2)^2} = 4|y|$

De modo que f'_x (y por simetría f'_y) son continuas y $f \in C^1$

c) Derivadas parciales de segundo orden

Derivo de forma usual $\forall \bar{x} \neq (0,0)$ y usando def en $\bar{x} = (0,0)$.

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1$$

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0) \xrightarrow{\text{Tma SC}}$$ Alguna de las derivadas de 2º orden no es continua

Lo comprobamos calculando f''_{xx} y analizando su continuidad.

$$f''_{xx}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^4+12x^2y^2-5y^4)(x^2+y^2)^2 - (x^4y+4x^2y^3-y^5)\,2x\cdot 2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} & \bar{x}\neq \bar{0} \\[2ex] \lim_{h\to 0} \dfrac{f'_x(h,0) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0 \end{cases}$$

¿Es continua? Simplificando $f''_{xx}(x,y)$, $\bar{x}\neq\bar{0}$, tenemos

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{x^6 - 4x^5y + 13x^4y^2 - 16x^3y^3 + 7x^2y^4 + 4xy^5 - 5y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

De modo que $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f''_{xx}(x,y)$

grado (6) / grado 6
den $= 0$ solo con $\bar{x} = \bar{0}$ $\Big\}$ Mala pinta.

Prebo tray. lineales $y=mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-4m+13m^2-16m^3+7m^4+4m^5-5m^6)x^6}{(1+m^2)^3 x^6} = \nexists$$

6 Cálculo práctico de derivadas según vectores.

Sea $f \in C^2$: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla f \cdot \bar{u} = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} u_i$

De modo que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}\partial \bar{v}} = \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right) v_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i\right) v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j \longrightarrow \overset{p=2}{[v_1, v_2]} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

De modo similar, si $f \in C^3$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{u}\partial \bar{v}\partial \bar{w}} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i v_j w_k$$

7 EJERCICIOS

① Sea $f(x,y) = e^{y-x} + \dfrac{x^2+1}{y+1}$, calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2}(1,1)$ según $\bar{u} = (3,2)$

La función es C^∞ en $(1,1)$, de forma que podemos calcular la derivada según el vector como:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla f \cdot \bar{u} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2} = f''_{xx} u_1 u_1 + f''_{yy} u_2 u_2 + 2 f''_{xy} u_1 u_2$$

$$f'_x = -e^{y-x} + \frac{2x}{y+1} \qquad f''_{xx} = e^{y-x} + \frac{2}{y+1} \xrightarrow{(1,1)} 2$$

$$f'_y = e^{y-x} - \frac{x^2+1}{(y+1)^2} \qquad f''_{xy} = -e^{y-x} - \frac{2x}{(y+1)^2} \longrightarrow -3/2$$

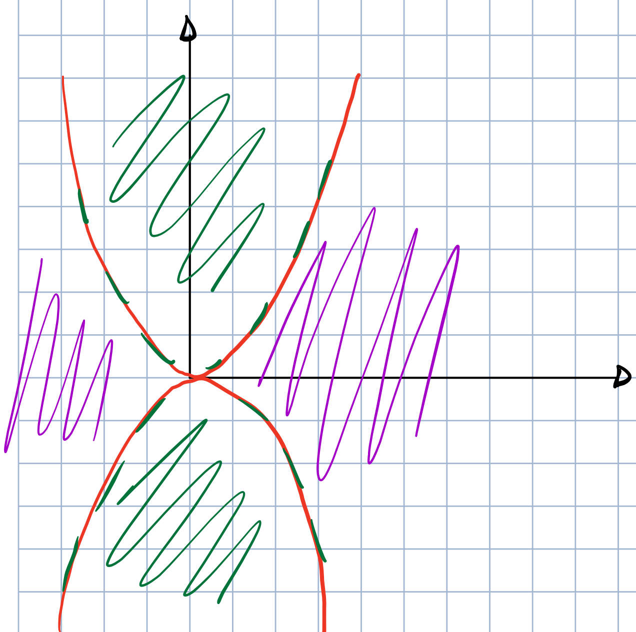
$$f''_{yy} = e^{y-x} + 2\,\frac{(x^2+1)}{(y+1)^3} \longrightarrow 3/2$$

Y aplicando la fórmula,

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}}\right|_{(1,1)} = 2\cdot 3\cdot 3 + \frac{3}{2}\cdot 2\cdot 2 + 2\left(-3/2\right)\cdot 3\cdot 2 = 6$$

III.6

② Sea $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & |y| < x^2 \\ xy & |y| \geq x^2 \end{cases}$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$



¡La descripción del dominio es fundamental para el cálculo de las derivadas!

Salvo en las zonas rojas, en todos los demás ptos puedo "derivar normal".

Esto es:

$$\text{Si } |y| > x^2 \longrightarrow f(x,y) = xy \longrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = y \\ f'_y(x,y) = x \end{cases}$$

$$\text{Si } |y| < x^2 \longrightarrow f(x,y) = x^2+y^2 \longrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = 2x \\ f'_y(x,y) = 2y \end{cases}$$

Estas definiciones no son válidas en los pts de cambio de def
Allí hay que aplicar la definición.

$$* f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+0^2-0}{h} = 0$$

$$* f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Es fácil comprobar que las parciales son continuas y por tanto la función es C^1.

Vamos ahora a calcular las cruzadas en el origen.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h} = \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

Derivadas mixtas no coinciden, luego la función no puede ser C^2