

23. TEOREMAS DE INTEGRACIÓN DEL CÁLCULO VECTORIAL I

1 Teoremas en dos dimensiones

\mathbb{R}^2 : Sea $C = \partial E$ una curva regular a trozos orientada positivamente (normal exterior) y cerrada y simple y sea E la región del plano delimitada por la misma.

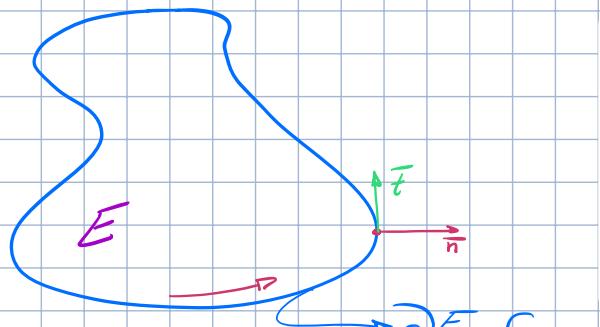
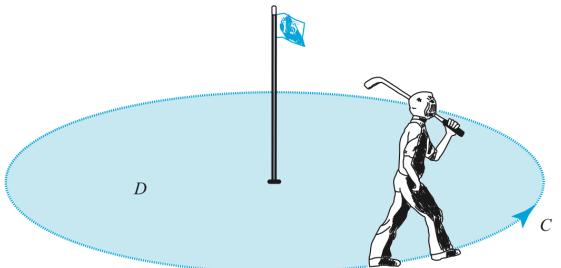


figure 8.1.4 The correct orientation for the boundary of a region D .

Orientación positiva



Vector Calculus, Marsden & Tromba

Sea $\bar{F}: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función vectorial C^1 en E , entonces

$$(x, y) \rightarrow (P(x, y), Q(x, y))$$

Teorema de la divergencia en el plano

$$\iint_E (\nabla \cdot \bar{F}) dA = \iint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot \bar{n} dS$$

vector normal exterior
a la curva. Ver
capítulo anterior.

Flujo a través de C

Teorema de Green

$$\begin{vmatrix} i & j & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \bar{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

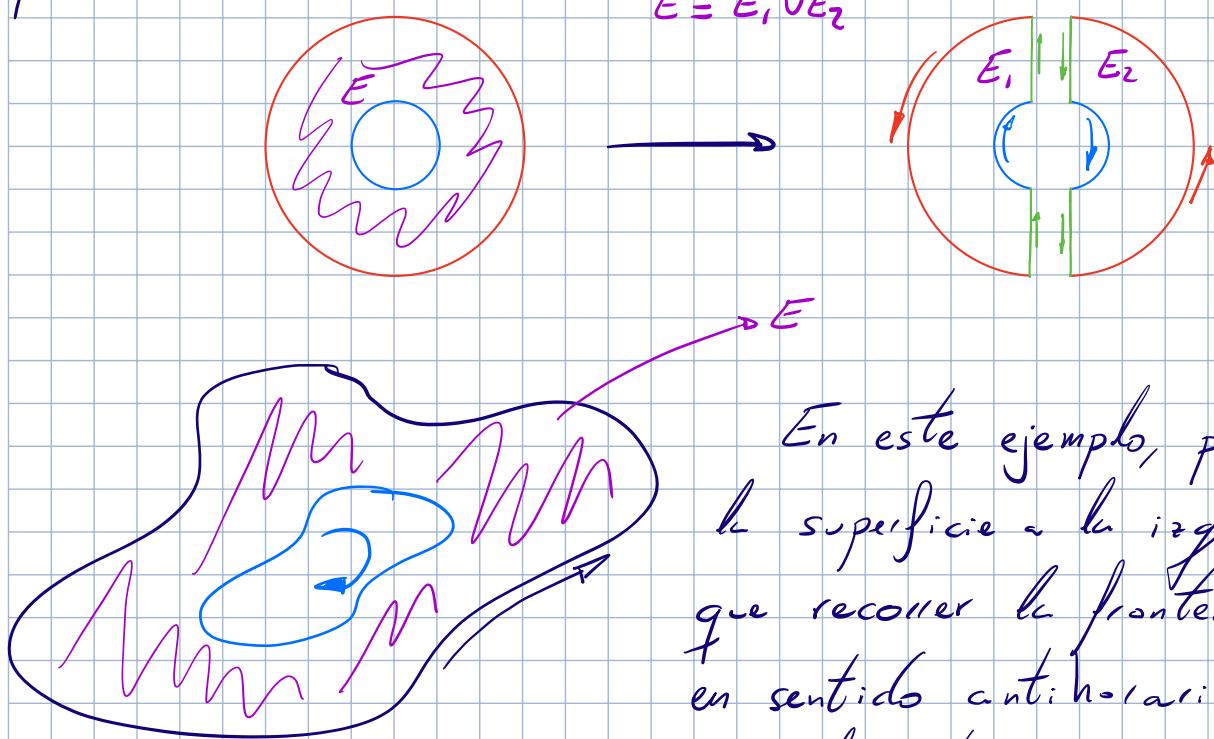
$$\iint_E (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{k} dA = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E (\circlearrowleft)} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

indica que la
integral es sobre
una curva o sup.
cerrada

Circulación en C

NOTA: para estas relaciones es muy importante la correcta orientación de la curva C . La orientación será positiva si al recorrerla dejamos la superficie a la izquierda.

NOTA: estos teoremas se pueden aplicar a regiones más complejas siempre que se puedan descomponer en regiones rectangulares por curvas:

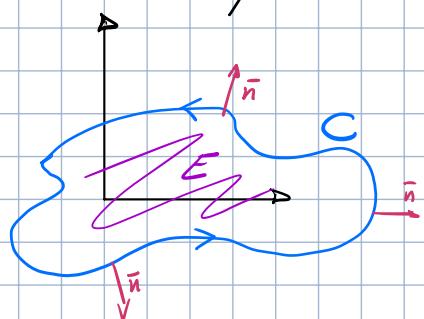


EJEMPLOS:

1 Calcular $\int_C \bar{F} \cdot \bar{n} dS$ en C (regular a trozos, cerrado y con normal ext.)
con $\bar{F} = (y, -x)$

Usamos el teorema de div. en el plano:

$$\iint_E (\nabla \cdot \bar{F}) dA = \iint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot \bar{n} dS$$

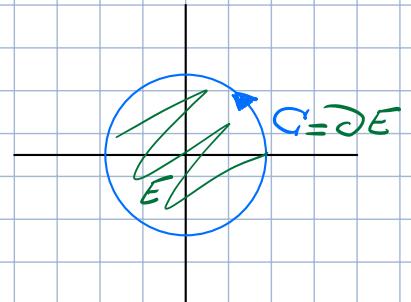


De modo que

$$\oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iint_E (\nabla \cdot \bar{F}) dA = \iint_E \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \right) dA = 0$$

2 $\oint_C y^3 dx - x^3 dy$ con $C: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \oint_C F_1 dx + F_2 dy \rightarrow \bar{F} = (y^3, -x^3)$$



Primero hacemos los cálculos sobre la curva:

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_C^5 \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt$$

$$1 \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$2 \quad \bar{F}(\bar{r}(t)) = (\sin^3 t, -\cos^3 t)$$

$$3 \quad d\bar{s} = \bar{r}'(t) dt = (-\sin t, \cos t) dt$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin^3 t, -\cos^3 t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^4 t - \cos^4 t) dt = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (3 + \cos(4t)) dt = - \frac{3}{4} t - \frac{1}{16} \sin(4t) \Big|_0^{2\pi} = - \frac{3}{4} 2\pi = - \frac{3}{2} \pi$$

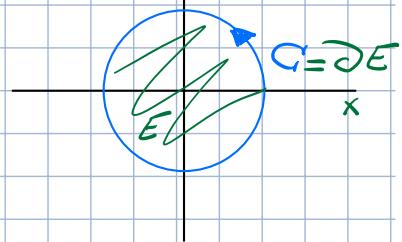
$$* \frac{1}{4} (3 + \cos(4t)) = \frac{1}{4} (3(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 + \cos 4t) =$$

$$= \frac{1}{4} (3(\sin^4 t + \cos^4 t + 2\sin^2 t \cos^2 t) + \cos^4 t + \sin^4 t - 6\cos^2 t \sin^2 t) = \frac{1}{4} (4\sin^4 t + 4\cos^4 t) = \sin^4 t + \cos^4 t$$

Aplicaremos ahora el teorema de Green para resolver el mismo problema:

$$E = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\iint_E (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{k} dA = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$



$$\bar{F} = (y^3, -x^3) \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$$

$$\oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -3 \iint_E (x^2 + y^2) dx dy = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = -\frac{3}{4} 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

Cambio de variable a polares	1 $E \equiv 0 \leq r \leq 1$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$
	2 $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta \rightarrow f^*(r, \theta) = r^2$
	3 $ \det J\varphi = r$

Podemos comprobar que, como dice el teorema de Green, el resultado es idéntico por ambos caminos.

PROBLEMA DE EXAMEN

① V/F. Sea $\bar{F}: D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C' en D, con componentes $\bar{F} = (P, Q)$ tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D$. Sea C una curva cerrada, regular y simple contenida en D. Necesariamente

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0.$$

¿Qué pasaría si \bar{F} con tres componentes? Volveremos más adelante.

Falso. No se puede aplicar Green ya que la región E delimitada por la curva C podría incluir el $(0,0)$, donde \bar{F} no está definida.

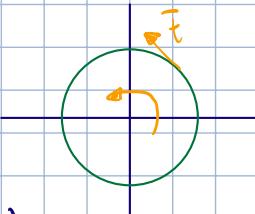
Contraejemplo: $\bar{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)} + \frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)} = 0$$

Rotacional es 0 salvo en el origen donde no está definido.

Calculamos $\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s}$ en una curva que incluya al origen $x^2+y^2=1$ orientada positivamente

$$C \equiv \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$



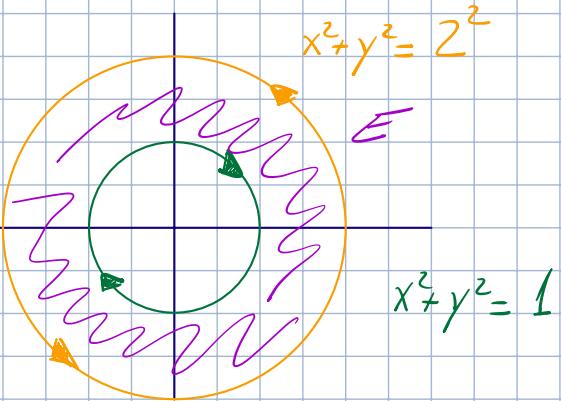
$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin \theta}{1}, \frac{\cos \theta}{1} \right) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi$$

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{s} \neq 0 \rightarrow \text{Teorema de Green no funciona así.}$$

Sin embargo, si no incluimos al origen, todo funciona bien.
Ejemplo:

$$\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{s} =$$

$$= \int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$



$$C^+ \quad F(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-2\sin\theta}{4}, \frac{2\cos\theta}{4} \right) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta) d\theta = 2\pi$$

$$C^+ \quad F(t) = (-\cos t, -\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin\theta}{1}, \frac{\cos\theta}{1} \right) \cdot (-\sin\theta, -\cos\theta) d\theta = -2\pi$$

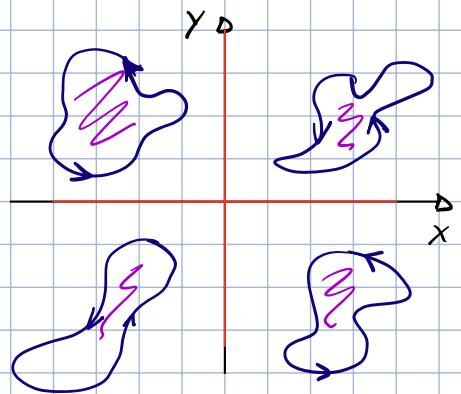
$$\int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{C^+} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -2\pi + 2\pi = 0 \quad \text{Como decía el Teorema Green}$$

(2)

V/F Sea $\bar{H}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial $\bar{H}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} (y, x)$

con $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0, y \neq 0\}$. El Teorema de Green es aplicable a cualquier curva $C^+ \subset R$ regular, cerrada y simple orientación positivamente y de su aplicación resulta:

$$\int_{C^+} \left(y \frac{1}{x^2 y^2} dx + x \frac{1}{x^2 y^2} dy \right) = 0$$



Verdadero.

El teorema de Green es aplicable en las condiciones descritas en el enunciado.

$$\oint_{C^+ = \partial E} \bar{H} \cdot d\bar{S} = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0$$

$$Q'_x = \frac{1}{x^2 y^2} + x \left(\frac{-2}{x^3 y^2} \right) = -\frac{1}{x^2 y^2} \quad P'_y = -\frac{1}{x^2 y^2}$$

③ Sea $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\bar{F}(x,y) = (y^2, 2xy+1)$. Sea C la curva abierta de \mathbb{R}^2 $C = C_1 \cup C_2$ con

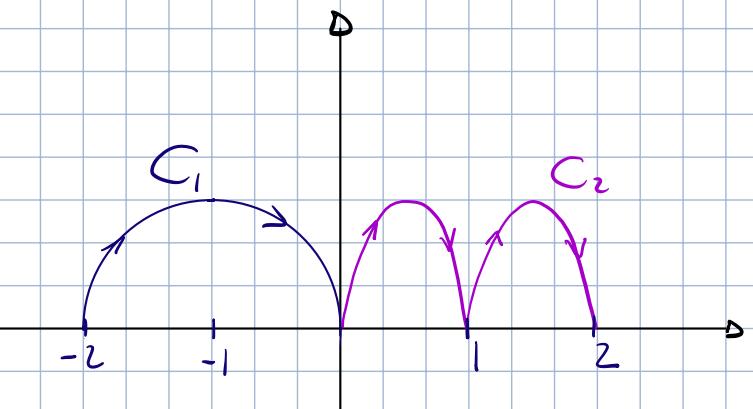
$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sin^2(\pi x), 0 \leq x \leq 2\}$$

ambas recorridas en sentido creciente de x .

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \textcircled{a} 4 \quad \textcircled{b} 2 \quad \textcircled{c} 0 \quad \textcircled{d} -4$$

Las curvas especificadas en el enunciado son:



Para resolver este problema, sería útil aplicar el teorema de Green, ya que

$$\iint_E (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{k} dA = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

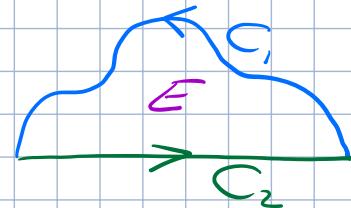
y en este caso,

$$\bar{F}(x,y) = (y^2, 2xy+1)$$

$$\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x \rightarrow \iint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0$$

Pero recordemos que el teorema de Green requiere de una región encerrada por una curva cerrada. ¿Díjiste algo que me permita aplicarlo?

Consideremos el conjunto E encerrado por C_1 y C_2 . En este caso,

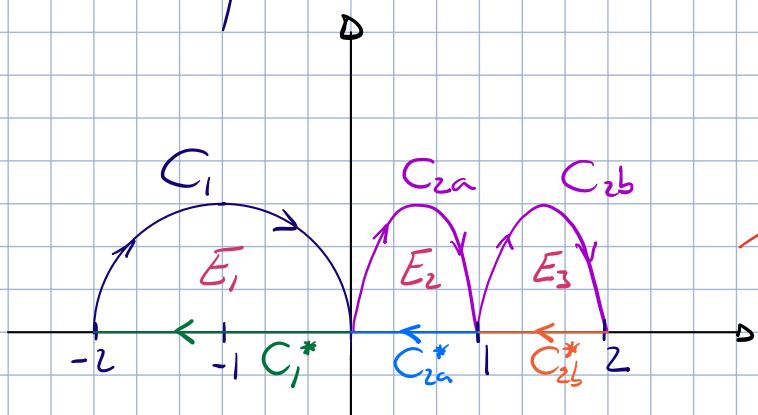


$$\iint_{C=\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_E (\nabla \times F) \cdot \bar{k} dA$$

De modo que:

$$\int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_E (\nabla \times F) \cdot \bar{k} dA - \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

Puedo aplicar esto a mi caso, con lo que tendría:



Cuidado con los sentidos de recorridos, que están al revés para hacer Green.

$$\iint_{E_1} (\nabla \times F) \cdot \bar{k} dA = - \left(\int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \int_{C_1^*} \bar{F} \cdot d\bar{S} \right) = 0$$

Luego $\int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} = - \int_{C_1^*} \bar{F} \cdot d\bar{S}$ y lo mismo para C_{2a} y C_{2b} .

$$C_1^* = \{(t, 0), -2 \leq t \leq 0\}$$

orientación contraria al dibujo

$$\int_{C_1^*} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_{-2}^0 (0, 1) \cdot (1, 0) dt = 0 \quad y \quad \text{lo mismo en } C_{2a}^* \text{ y } C_{2b}^*.$$

De modo gr

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \int_{C_{2a}} \bar{F} \cdot d\bar{S} + \int_{C_{2b}} \bar{F} \cdot d\bar{S} = 0 + 0 + 0 = 0.$$