УДК 621.391

А. Б. Сергиенко

MATLAB и преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье [1–6], реализуемое в MATLAB с помощью функций **fft** и **ifft**, играет важную роль в анализе сигналов. Однако, как показывает опыт общения с пользователями MATLAB в форуме на сайте http://www.matlab.ru, это в общем-то несложное преобразование вызывает значительное число вопросов и недоразумений. В статье разъясняются некоторые из них.

Формулы дискретного преобразования Фурье

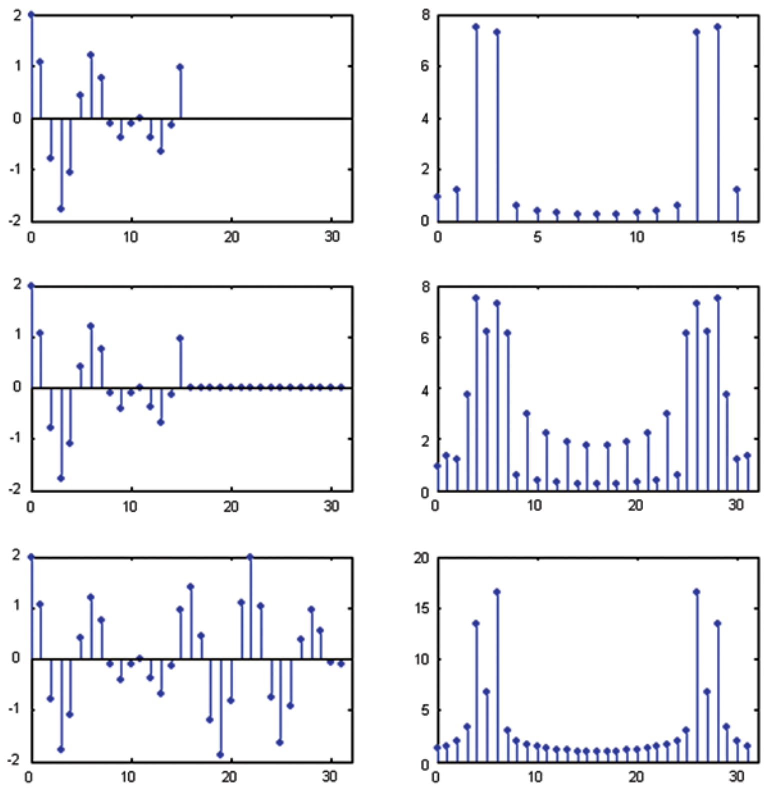
Итак, дискретное преобразование Фурье (ДПФ) позволяет превратить N отсчетов сигнала $\{x(k)\}$ в столько же спектральных отсчетов $\{\dot{X}(n)\}$. Связь между представлениями сигнала во временной и частотной областях выражается следующими формулами:

$$\dot{X}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right), \qquad (1)$$

$$x(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\dot{X}(n)\exp\left(j\frac{2\pi nk}{N}\right). \qquad (2)$$

В приведенных формулах индексы меняются от нуля до $N-1$. В MATLAB нумерация элементов векторов начинается с единицы, поэтому *первый* элемент результата, возвращаемого функцией **fft**, равен $\dot{X}(0)$, второй — $\dot{X}(1)$ и т. д.

Выражения для прямого (1) и обратного (2) ДПФ отличаются лишь знаком в показателе комплексной экспоненты и наличием в обратном преобразовании множителя $1/N$ перед оператором суммирования.



▼ **Рис. 1.** Слева — сигнал в виде суммы двух синусоид, справа — модуль его ДПФ при $N=16$ (сверху), $N=32$ (снизу) и при дополнении 16 отсчетов сигнала 16 нулями (в центре).

Формула (2) представляет сигнал $x(k)$ в виде суммы комплексных экспоненциальных слагаемых, обладающих общим периодом, равным N отсчетам. Отсюда следует, что ДПФ неявно подразумевает *периодическое продолжение* анализируемого фрагмента сигнала. С этой периодичностью связан ряд свойств ДПФ, речь о которых пойдет далее.

Для вещественного сигнала $x(k)$ ДПФ обладает комплексно-сопряженной симметрией:

$$\dot{X}(n)=\dot{X}^*(N-n).$$

Градуировка частотной оси

В формулах (1) и (2) нет никакого указания на реальные моменты времени или частоты — в них фигурируют лишь *номера* отсчетов во временной и частотной областях. Чтобы говорить о временном и частотном масштабах, необходимо знать, с какой частотой брались отсчеты анализируемого сигнала. Если последовательность $\{x(k)\}$ представляет собой отсчеты, взятые с частотой дискретизации F_s (то есть с интервалом $T=1/F_s$), то *частоты анализа*, соответствующие спектральным отсчетам, полученным в результате вычисления ДПФ, будут расположены с шагом F_s/N. Первый элемент полученного вектора соответствует нулевой частоте, последний — частоте $F_s(N-1)/N$. Ниже приводится код MATLAB, позволяющий получить вектор значений частот для ДПФ размерности N, если частота дискретизации сигнала равна Fs:

```
f = (0:N-1) / N * Fs;
```

Из сказанного следуют два важнейших положения.

- Чтобы расширить полосу анализа, нужно увеличить F_s, то есть брать отсчеты чаще.
- Чтобы улучшить частотное разрешение без изменения полосы анализа, нужно увеличить N, то есть анализировать более длинный фрагмент сигнала. При этом следует различать два возможных случая.
  – Длина сигнала увеличивается за счет *дополнения нулями*. В этом случае мы получаем *тот же спектр, интерполированный к более частой сетке частот*. Поскольку новых данных не добавляется, характерные параметры спектра, такие как ширина спектральных пиков, не меняются. Слова «улучшение разрешения» означают при этом только расчет спектра для большего количества частот.
  – Длина сигнала увеличивается за счет добавления *новых данных*, то есть мы действительно анализируем более длинный фрагмент сигнала. В этом случае получится *новый спектр*, а слова «улучшение разрешения» обретают реальный смысл — спектральные пики, соответствующие содержащимся в сигнале гармоническим составляющим, станут более узкими.

В качестве примера на рис. 1 показано, что происходит с ДПФ сигнала в виде суммы двух синусоид с близкими частотами (сверху) при его дополнении нулями (в центре) и при реальном увеличении длины анализируемого фрагмента (снизу). На графиках хорошо видно, что дополнение сигнала нулями до 32 отсчетов дало более частую сетку частот анализа, но, так же как и 16-точечное ДПФ, не дало возможности увидеть два спектральных пика раздельно. А вот 32-точечное ДПФ, вычисленное по 32 отсчетам суммы синусоид, показало два пика на разных частотах. Ниже приведен код MATLAB, использованный для получения данного рисунка.

```
t = 0:31; % вектор моментов времени
s = cos(1.15*t)+cos(0.85*t);
% сигнал в виде суммы синусоид
X1 = fft(s, 16); % длина сигнала — 16 отсчетов
X2 = fft(s(1:16), 32);
% 16 отсчетов сигнала дополнены 16 нулями
X3 = fft(s, 32); % длина сигнала — 32 отсчета
subplot(3,2,1)
stem(0:15, sn(1:16), '.')
xlim([0 32])
subplot(3,2,2)
stem(0:15, abs(X1), '.')
xlim([0 16])
subplot(3,2,3)
stem(0:31, [sn(1:16) zeros(1,16)], '.')
xlim([0 32])
subplot(3,2,4)
stem(0:31, abs(X2), '.')
xlim([0 32])
subplot(3,2,5)
stem(0:31, sn, '.')
xlim([0 32])
subplot(3,2,6)
stem(0:31, abs(X3), '.')
xlim([0 32])
```

Дополнение сигнала нулями необязательно делать явно — можно просто указать желаемую длину в качестве второго параметра функции **fft**.

Размерности

Формула (1) представляет собой линейную комбинацию отсчетов сигнала, причем коэффициенты этой комбинации (комплексные экспоненты) являются безразмерными. Поэтому размерность спектральных отсчетов $\dot{X}(n)$ совпадает с размерностью исходных отсчетов сигнала $x(k)$. Какой смысл имеет абсолютная величина спектральных отсчетов? Дать ответ на этот вопрос можно с помощью нескольких простейших примеров.

- Вычисление ДПФ для *постоянного* сигнала $(x(k) = A$ для всех $k)$ даст следующее:

$$\dot{X}(n) = \begin{cases} AN, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

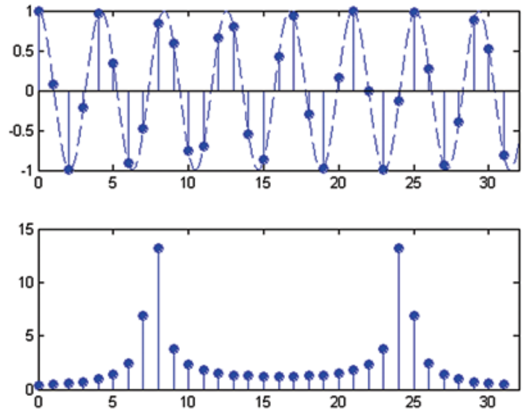
- Пусть преобразуемый сигнал представляет собой *синусоиду* с амплитудой A и частотой, *совпадающей* (это важно!) с одной из частот анализа $(f_0 = n_0 F_s / N)$. Тогда ДПФ даст два ненулевых значения, равных (по модулю) $AN/2$ и соответствующих частоте синусоиды и ее «зеркальному отражению» от частоты дискретизации:

$$\left|\dot{X}(n)\right| = \begin{cases} AN/2, & n = n_0 \text{ и } n = N - n_0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

- Если частота синусоиды находится где-то *между* частотами анализа, будет иметь место так называемое *растекание спектра* (spectrum leakage), о котором поговорим подробнее.

Растекание спектра

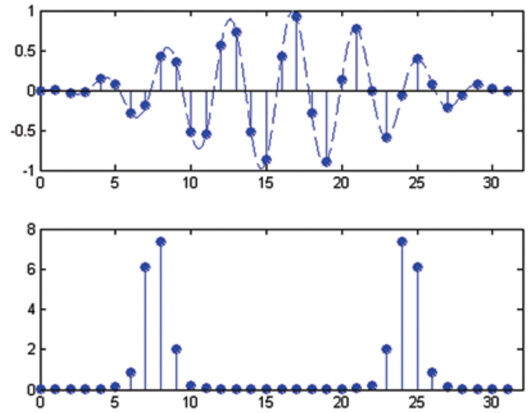
Растекание спектра проявляется в том, что при вычислении ДПФ синусоиды с частотой, не совпадающей ни с одной из частот анализа, мы вместо узкого пика получаем сложный спектр, в котором в общем случае могут содержаться *все* возможные частоты. Причина растекания спектра состоит в том, что ДПФ неявно подразумевает периодическое продолжение анализируемого фрагмента сигнала. Если на рассматриваемом промежутке укладывается целое число периодов синусоиды (это эквивалентно условию совпадения ее частоты с одной из частот анализа), периодически продолженный сигнал также будет непрерывной синусоидой, в спектре которой содержится единственная частота. Если же число периодов на интервале анализа не является целым, при периодическом продолжении сигнала непрерывность синусоиды окажется нарушенной и спектр «растечется» (рис. 2). Ниже приведен код MATLAB, использованный для получения данного рисунка.



▲ **Рис. 2.** Растекание спектра.

```
td = (0:31)';
t = (0:0.01:32)';
w=1.5;           % частота синусоиды
s = cos(w*t);    % аналоговый сигнал
sd = cos(w*td);  % дискретный сигнал
subplot(2,1,1), plot(t,s,'—')
hold on, stem(td,sd,'filled'), hold off
xlim([t(1) t(end)])
subplot(2,1,2)
stem(td, abs(fft(sd)),'filled')
xlim([t(1) t(end)])
```

Для борьбы с растеканием спектра используются *весовые*, или *оконные*, функции (window). При этом сигнал перед вычислением ДПФ умножается на некоторую функцию, спадающую от середины к краям. Это позволяет ослабить влияние разрывов, возникающих на стыках фрагментов сигнала при его периодическом продолжении. На рис. 3 показаны сигнал и модуль его ДПФ при использовании окна Хана (функция **hann**). Видно, что использование весовой функции позволило существенно ослабить побочные спектральные составляющие — правда, за счет расширения спектральных пиков. Последнее, к сожалению, неизбежно. Вот код MATLAB, использованный для получения этого рисунка:



▲ **Рис. 3.** При вычислении ДПФ применено окно Хана.

```
sw = s.*hann(length(s));
sdw = sd.*hann(length(sd),'periodic');
subplot(2,1,1), plot(t,sw,'—')
```

```
hold on, stem(td,sdw,'filled'), hold off
xlim([t(1) t(end)])
subplot(2,1,2)
stem(td, abs(fft(sdw)),'filled')
xlim([t(1) t(end)])
```

Пакет Signal Processing Toolbox содержит примерно полтора десятка функций для расчета различных окон.

Дискретное и быстрое преобразования Фурье — в чем разница?

Математическое преобразование, описываемое формулами (1) и (2), называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ; Discrete Fourier Transform — DFT). Термин «быстрое преобразование Фурье» (БПФ; Fast Fourier Transform — FFT) относится к *способу вычисления* ДПФ. Основная идея алгоритма БПФ рассматривается практически во всех учебных пособиях по обработке сигналов [1–5] и вкратце может быть изложена следующим образом: если размерность преобразования N может быть разложена на множители, то и само преобразование можно разделить на несколько преобразований меньшей размерности, а затем объединить их результаты. При этом удается уменьшить требуемое для вычисления ДПФ количество вычислительных операций. Наибольшее ускорение вычислений достигается, когда N равно степени двойки.

Важно понимать, что БПФ не является приближенным алгоритмом; при отсутствии вычислительных погрешностей он даст в точности тот же результат, что и исходная формула ДПФ (1). Ускорение достигается исключительно за счет оптимальной организации вычислений. Кроме того, необходимо помнить, что алгоритм БПФ предназначен для одновременного расчета *всех* спектральных отсчетов $\dot{X}(n)$. Если же необходимо получить эти отсчеты лишь для некоторых n, может оказаться предпочтительнее прямая формула ДПФ (1) или алгоритм Герцеля.

Алгоритм Герцеля [3, 4] позволяет вычислить ДПФ для одной частоты. Его идея состоит в том, что формула (1) представляется как результат обработки сигнала рекурсивным фильтром второго порядка. В пакете Signal Processing Toolbox для этого имеется функция **goertzel**.

Оценка спектра аналогового сигнала

Выше уже говорилось, что ДПФ подразумевает периодичность анализируемого сигнала, что и приводит к дискретной сетке частот анализа. Конечный набор отсчетов имеет *непрерывный* спектр, который может быть рассчитан так:

$$\dot{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j2\pi k \frac{f}{F_s}\right). \qquad (3)$$

В MATLAB рассчитать по формуле (3) непрерывный спектр конечного фрагмента дискретного сигнала x на частотах f при частоте дискретизации Fs можно с помощью функции **freqz**, вызвав ее следующим образом:

```
X = freqz(x, 1, f, Fs);
```

Если отсчеты $x(k)$ получены путем дискретизации аналогового сигнала $s(t)$, имеющего спектральную функцию $\dot{S}(f)$, то спектр дискретного сигнала представляет собой сумму бесконечного числа сдвинутых по частоте копий спектра аналогового сигнала:

$$\dot{X}(f) = F_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}(f - nF_s).$$

Отсюда следует, что если спектр аналогового сигнала на частотах, превышающих $F_s/2$, пренебрежимо мал, то его оценку в полосе $0...F_s/2$ можно получить из спектра дискретного сигнала: $\dot{S}(f) \approx \dot{X}(f)/F_s$. Это соответствует интерполяции дискретных отсчетов функциями $\sin(\pi(F_s t - k))/(\pi(F_s t - k))$ согласно теореме Котельникова.

Аналитически вычислить преобразование Фурье можно средствами Symbolic Math Toolbox с помощью функций **fourier** и **ifourier**.

Преобразование Фурье — это еще не весь спектральный анализ!

В заключение этой небольшой статьи обратим внимание читателя на следующее. К сожалению, довольно широко распространено мнение о том, что спектральный анализ сигнала есть вычисление его преобразования Фурье, дискретного или непрерывного. Однако преобразование Фурье — всего лишь взаимно однозначное математическое преобразование, позволяющее получить частотный состав *конкретного* анализируемого фрагмента. Если же, как в большинстве практических задач и бывает, анализируемый сигнал является *случайным*, подходы к спектральному анализу существенно меняются. Для случайного сигнала имеет смысл только *спектральная плотность мощности* (СПМ; Power Spectral Density — PSD), и ее *оценка* может быть получена различными способами. Подробную информацию о существующих методах спектрального оценивания можно найти, например, в книге [6].

В пакете Signal Processing Toolbox для выполнения спектрального анализа случайных сигналов имеются следующие функции:

- **periodogram** — периодограмма;
- **pwelch** — метод Уэлча;
- **pmtm** — метод Томсона;
- **pburg**, **pcov**, **pmcov**, **pyulear** — разновидности авторегрессионных методов;
- **pmusic**, **peig** — методы MUSIC и EV.

Литература

1. Гоноровский И. С., Демин М. П. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов.— М.: Радио и связь, 1994.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по спец. «Радиотехника».— М.: Высшая школа, 2000.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие.— СПб.: Питер, 2002.
4. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов / Пер. с англ., под ред. А. М. Трахтмана.— М., «Советское радио», 1973.— 368 с.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ.; под ред. Ю. И. Александрова.— М.: Мир, 1978.
6. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ.— М.: Мир, 1990.

Автор:

Сергиенко Александр Борисович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ радиотехники; Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», г. Санкт-Петербург