

# 四旋翼型水下自主航行器的可控性分析

**摘要:** 最近一种和四旋翼空中无人飞行器相似但又有所不同的四旋翼型水下无人航行器(QLAUV)被报道出来。本文研究了 QLAUV 的可控性问题,为进一步的定位和导航研究奠定了基础。利用几何控制理论,首先分析论文 QLAUV 的可达性。而后,分析了平面运动(包括运动学和动力学)的非线性可控性,也叫小时间局部可控性(STLC)。最后,我们研究了 STLC 应该满足的条件。

## 一、简介

水下自动航行器(AUVs)的发展最早在开始于十九世纪七十年代。自那以后,由于传感器技术和计算机技术的迅猛发展,AUVs 越来越多地被用于科学、军事研究和商业应用等各种应用[1-3]。精确的导航和定位对于这些应用来说是必不可少的。一般情况下,考虑到航行器的重量、可靠性、复杂性和效率,AUVs 通常被设计成不带侧向驱动器,是一种典型的欠驱动控制系统。对于这样一个系统,导航和控制仍是一个具有挑战性的研究领域,并且越来越受到人们的关注,部分原因是因为它具有非完整的约束条件和不能被完全反馈线性化[5,6]。从理论角度来看,平滑的静态反馈不能使其稳定下来[7]。为了研究 AUVs 的定位和导航的局限性,研究 AUVs 的可控性对控制器的设计有很大的帮助。

可控性是一个在有限时间内用给定的输入去驱动系统从一个点到另一个点的能力的问题。在半个世纪以前卡尔曼等人[8]就已经给出了线性系统可控性的答案。对于非线性系统,由于其不满足一般的叠加性,研究其全局可控性是十分困难的;我们往往只分析其局部可控性[9]。研究局部非线性可控性的方法主要由两种。经典的非线性可控性分析方法是利用给定点的局部线性化。在文献[10]中,作者回顾了第一种局部非线性可控性的结果,该结果表明如果在平衡点  $p$  点线性化的系统是可控的,那么这个系统在很短时间内在  $p$  点局部可控。这种“小时间局部可控性”又简称 STLC。

然而,对于一个在给定点处线性化系统来说,其可控性对于非线性系统是不必要的,应为存在一类线性不可控但非线性可控的系统[11]。另一种方法是利用几何控制理论来分析局部非线性系统的可控性。在文献[12]中,Bloch 以非线性系统的可控性分析为背景,介绍了几何控制理论的一些定义和应用。在文献[13]中,全面介绍了基于规划算法的非线性系统的可达性和可控性。在文献[10]中,非线性系统在平衡点上局部可控性的一般充分条件被证明,并且证明了以前许多方法都是该结果的特例。在[10]的基础上,Goodwine 提出了一种评估单侧控制输入系统非线性可控性的方法[14]。一些学者已经对空中和水中飞行器的可控性进行了研究。在文献[15]中,Saïde 解决了多旋翼无人机在执行击鼓失效时的姿态控制问题,作者利用非线性控制理论分析了系统姿态动力学的小时间局部可控性问题(STLC),并且比较了多种执行器结构的容错能力。Hassan 在[16]和[17]中分别利用线性可控性分析和几何控制规则研究了空中飞行器的动力学。在文献[19]中,Smith 验证了水下航行器在适当的垂直驱动下,利用水流速度和方向的时空变化,可以满足广泛可控。

本文对四旋翼式水下自主航行器(QLAUV)的非线性可控性进行了全面的分析。

与四旋翼无人机(UAV)类似,我们设计的 QLAUV 具有四个相同推力推进器,只是为了实现其运动控制[20]。在这片论文中,对 QLAUV 的 STLC 分析是从平面运动的几何控制理论出发的。本文的剩余部分组织如下。在第二章节中给出了 QLAUV 的运动学和动力学模型。基于几何控制理论的非线性可控性分析在第三章节中介绍。章节四中,分析了 QLAUV 在水平面运动的 STLC。最后,第五章中做了一些总结。

## 二、QLAUV 非线性建模

本节主要介绍了 QLAUV 运动的运动学和动力学方程。章节 II-A 中整体描述了航行器。章节 II-B 给出了航行器系统的运动学和动力学方程,并且考虑到了复杂的水动力效应。最后,章节 II-C 研究了与力相关的驱动系统的瞬时方程。

### A. 航行器描述

我们实验室最近已经开发出了 QLAUV[20]。由工业控制国家重点实验室支持。这个 QLAUV 长 120cm,直径为 28cm,装配有四个相同的推进器。为了减少水动力阻力的负面影响,航行器壳体被设计成非常典型的圆柱形,头和尾都设计为椭圆形。图 1 给出了 QLAUV 的实际形状。

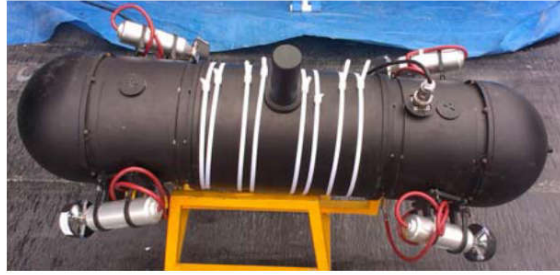


Fig. 1. Quadrotor-like autonomous underwater vehicle

正如图 1 所示,四个推进器对称分布在壳体两侧,并且 QLAUV 的重心和推力的几何中心都被设计在同一平面上。然而推进器与水平面存在一个偏转角。另外,推进器的朝向是相反的:在推进器的一边两个推进器头部靠近,而另一边两个推进器的头部是彼此远离的。通过上述推进器的组态,QLAUV 的姿态控制能由 QLAUV 的驱动系统独立实现。

### B. 航行器的运动学和动力学

在分析 QLAUV 的运动学和动力学之前,为了方便起见,定义原点位于  $O_n$  的惯性坐标系  $\{U\}=(x_n, y_n, z_n)$  和原点在  $O_b$  的机体坐标系  $\{B\}=(x_b, y_b, z_b)$ ,如图二所示。详细的机体坐标系定义为:

- $x_b$ : 纵轴(由尾至首)
- $y_b$ : 横轴(指向右舷)
- $z_b$ : 垂直轴(由顶至底)

其中  $x_b, y_b, z_b$  与惯性主轴一致。假设飞行器(CG)重心与  $O_b$  一致。

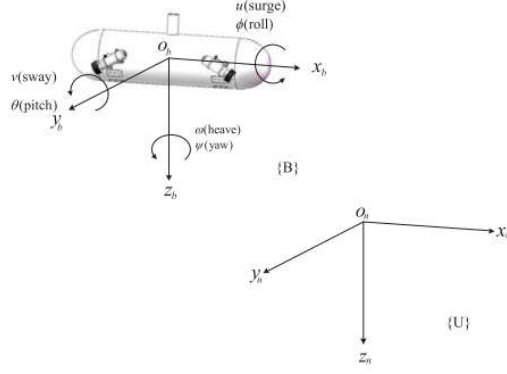


Fig. 2. Inertial frame and body-fixed frame for QLAUV.

假设水下航行器是自然浮力。在假设且忽略由于稳心高度而产生的重力/浮力的力矩所产生的水静力学，水下航行器的运动学和动力学模型如[21,22]所示：

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= J(\eta)\nu \\ (M_{RB} + M_A)\dot{\nu} &= -(C_{RB}(\nu) + C_A(\nu))\nu - D(\nu)\nu + \Gamma\end{aligned}\quad (1)$$

$\eta=[x,y,z,\phi,\theta,\psi]^T$ ,  $\nu=[u,v,w,p,q,r]^T$ 。  $\phi$ 、 $\theta$ 、 $\psi$ 、 $p$ 、 $q$  和  $r$  分别表示翻滚、俯仰和偏航角以及对应的角速度； $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $u$ 、 $v$ 、 $w$  分别为前进，横漂和起伏位移以及其对应的速度。 $J(\eta)$ 、 $M_{RB}$ 、 $M_A$ 、 $C_{RB}(\nu)$ 、 $C_A(\nu)$ 、 $D(\nu)$ 和  $\Gamma$  分别表示运动学变换、刚体惯性质量、水动力附加质量、刚体科氏力、水动力科氏力、阻尼及驱动系统将在随后被定义。

运动方程  $J(\eta)$  定义如下：

$$\begin{aligned}J(\eta) &= \begin{bmatrix} J_1(\eta) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & J_2(\eta) \end{bmatrix} \\ J_1(\eta) &= \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\theta & c\psi s\theta c\phi + s\psi s\theta \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\theta & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\theta \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \\ J_2(\eta) &= \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2)$$

$c(\cdot)$ 、 $s(\cdot)$ 和  $t(\cdot)$ 分别为  $\cos(\cdot)$ 、 $\sin(\cdot)$ 和  $\tan(\cdot)$ 的简化形式。假设航行器有三个对称平面，所以航行器的惯性、附加质量和阻尼矩阵为对角阵。在该设定下，惯性质量  $M_{RB}$  和附加质量  $M_A$  的表达式如下：

$$\begin{aligned}M_{RB} &= \text{diag}(m, m, m, I_x, I_y, I_z) \\ M_A &= -\text{diag}(X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}).\end{aligned}\quad (3)$$

刚体科氏力  $C_{RB}(\nu)$ 和水动力科氏力  $C_A(\nu)$ 能由基尔霍夫方程[21]得出，其具体表达式如下：

$$\begin{aligned}
C_{RB}(\nu) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & mw & -mv & 0 & I_z r & -I_y q \\ -mw & 0 & mu & -I_z r & 0 & I_x p \\ mv & -mu & 0 & I_y q & -I_x p & 0 \end{bmatrix} \\
C_A(\nu) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}} w & Y_{\dot{v}} v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}} w & 0 & -X_{\dot{u}} u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}} v & X_{\dot{u}} u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}} w & Y_{\dot{v}} v & 0 & -N_{\dot{r}} r & M_{\dot{q}} q \\ Z_{\dot{w}} w & 0 & -X_{\dot{u}} u & N_{\dot{r}} r & 0 & -K_{\dot{p}} p \\ -Y_{\dot{v}} v & X_{\dot{u}} u & 0 & -M_{\dot{q}} q & K_{\dot{p}} p & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (4)$$

阻尼矩阵  $D$  的表达式为:

$$D = \text{diag}(X_u, Y_v, Z_w, K_p, M_q, N_r). \quad (5)$$

为了简化处理, 忽略  $D$  的非线性阻尼部分。驱动系统  $\Gamma$  将在下一段介绍。

### C. 驱动系统 $\Gamma$

由于 AUV 的动力学模型试验航行器固定坐标系中推导出来的, 所以驱动系统因该在同一坐标系中进行描述。推进系统的结构如图 3, 推进器  $i$  表示第  $i$  的推进器,  $i=1,2,3,4$ 。如果没有特殊说明, 在论文的其余部分  $i$  的取值范围是相同的。图 3 给出了位于 QLAUV 右侧蓝色标记的 1 号和 2 号推进器和位于 QLAUV 左侧红线标记的 3 号和 4 号推进器。

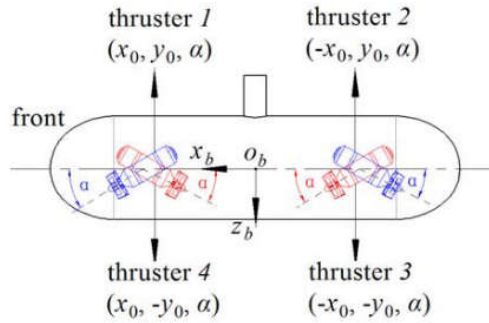


Fig. 3. The configuration of the thrusts in a left view.

正如章节 II-A 所描述的, 四个推进器的中心对称分布于由  $x_b$  轴和  $y_b$  轴构成的  $x_b$ - $y_b$  平面上。推进器相对于原点的位置可以用向量  $\mathbf{q}=(x_0, y_0, \alpha)$  表示,  $x_0, y_0, \alpha$  分别表示以  $x_b$ - $y_b$  平面为参考的纵向位置、横向位置和偏转角。注意, 四个推进器的偏转角是相同的。因此, 四个推进器的位置分别为  $(x_0, y_0, \alpha), (-x_0, y_0, \alpha), (-x_0, -y_0, \alpha)$  和  $(x_0, -y_0, \alpha)$ 。

根据 QLAUV 的几何形状, 其驱动系统瞬时推力与 QLAUV 所受总的力的关系为

$$\Gamma = BF \quad (6)$$

$\Gamma=[X,Y,Z,K,M,N]^T$  表示 QLAUV 瞬时所受总的力,  $F=[F_1,F_2,F_3,F_4]^T$  表示每个推进器的推力, 参数化形式的力分布矩阵  $B$  为

$$B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \alpha & \cos \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha \\ y_0 \sin \alpha & y_0 \sin \alpha & -y_0 \sin \alpha & -y_0 \sin \alpha \\ -x_0 \sin \alpha & x_0 \sin \alpha & x_0 \sin \alpha & -x_0 \sin \alpha \\ -y_0 \cos \alpha & y_0 \cos \alpha & y_0 \cos \alpha & -y_0 \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (7)$$

矩阵  $B$  的元素是由 QLAUV 的受力分析得出的。例如, 如图 4 所示,  $f_{ixb}$ ,  $f_{iyb}$  和  $f_{izb}$  分别表示  $F_i$  相对于  $x_b$ 、 $y_b$ 、 $z_b$  轴的分量,  $o_i$  表示  $F_i$  的作用点。  $f_{ixb}$  的幅度可以由  $F_i \cos \alpha$  表示。因此, 纵摇运动  $X$  的总力可以通过以下表达式计算:

$$\begin{aligned} X &= f_{1xb} + f_{2xb} + f_{3xb} + f_{4xb} \\ &= F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha + F_3 \cos \alpha - F_4 \cos \alpha \quad (8) \\ &= [\cos \alpha \quad -\cos \alpha \quad \cos \alpha \quad -\cos \alpha] F, \end{aligned}$$

是通过矩阵  $B$  的第一行计算的。其他方向上的运动也可类似的计算。

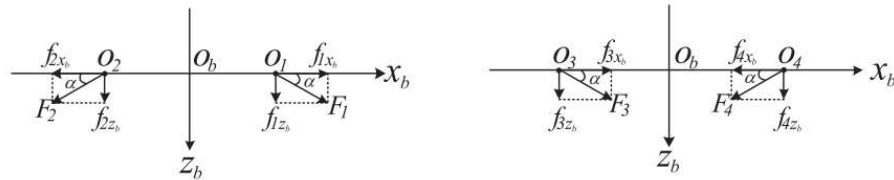


Fig. 4. The decomposition of the thrusts lifts in the plane of projection of  $x_b, z_b$ -plane.

矩阵  $B$  的每一列表示每个推进器都可以提供横漂、起伏、翻滚、俯仰和偏航方向上的力矩, 所以驱动系统是耦合的。这里, 介绍一个转换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4 \cos \alpha} & \frac{1}{4 \sin \alpha} & \frac{1}{4 y_0 \sin \alpha} & -\frac{1}{4 x_0 \sin \alpha} \\ -\frac{1}{4 \cos \alpha} & \frac{1}{4 \sin \alpha} & \frac{1}{4 y_0 \sin \alpha} & \frac{1}{4 x_0 \sin \alpha} \\ \frac{1}{4 \cos \alpha} & \frac{1}{4 \sin \alpha} & -\frac{1}{4 y_0 \sin \alpha} & \frac{1}{4 x_0 \sin \alpha} \\ -\frac{1}{4 \cos \alpha} & \frac{1}{4 \sin \alpha} & -\frac{1}{4 y_0 \sin \alpha} & -\frac{1}{4 x_0 \sin \alpha} \end{bmatrix} \quad (9)$$

用于解耦这个驱动系统。定义  $F'=[F'_1, F'_2, F'_3, F'_4]^T$  满足

$$F = T F', \quad (10)$$

驱动系统映射成

$$\Gamma = \begin{bmatrix} F'_1 \\ 0 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \\ \beta F'_4 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

现在,  $\beta=(y_0 \cos \alpha) / (x_0 \sin \alpha)$  是推进系统中唯一的耦合项。保证矩阵  $B$  列满秩和矩阵

$T$  为非奇异矩阵。参数  $\alpha$  应该满足  $\alpha \neq k\pi/2, k \in \mathbb{N}$ 。与传统 AUVs 采用推力控制速度和方向舵控制角度相比，QLAUV 能够控制多方向的独立运动。例如，由于偏航角的控制是独立于横漂控制的，QLAUV 能够普在无横漂速度的条件下实现偏航控制。

应用上述符号，系统(1)可以写成以下仿射非线性模型：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i F_i' \quad (12)$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{g}_i$  为平滑的线性空间， $F_i'$  表示解耦的推力。其具体形式在附录中呈现。

### 三、 非线性小时间局部可控性分析

在研究仿射系统的 STLC 之前应当先给出一些定义及一些准则。考虑定义在平滑  $n$  维流形上的仿射非线性控制系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i, \quad (13)$$

$\mathbf{x} \in M$ ,  $\mathbf{g}_i, i=1, \dots, m$  为  $M$  上的光滑实解析向量场。容许控制输入  $u_i$  是一个从非负实数到一个约束集合  $\Omega \subset \mathbb{R}$  的时变映射。

**定义 3.1([12]):** 给定  $\mathbf{x}_0 \in M$ ,  $R(\mathbf{x}_0, t)$  定义为对于所有输入  $\mathbf{x} \in M$ , 都存在一个容许控制将控制系统从  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$  引导到  $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}$ 。从  $\mathbf{x}_0$  到时间  $T$  的可达性条件定义为

$$R_T(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{0 < t \leq T} R(\mathbf{x}_0, t). \quad (14)$$

**定义 3.2([14]):** 如果一个系统被称作对于任何  $T > 0$  是可达的，集合  $R_T$  内部非空；另外，如果  $\mathbf{x}_0$  位于集合  $R_T$ , 那么这个系统就叫做在  $\mathbf{x}_0$  小时间局部可控。

然而，用以上的定义去分析系统的可达性和 STLC 是十分困难的。一个更加实际的方法是运用几何控制理论。下面介绍了相关定义和定理。

**定义 3.3([12]):** 系统的可达性代数  $\zeta(13)$  是在包含于  $M$  中的向量场  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  的最小李代数。

注意，可达性代数只是  $\mathbf{f}$  的在李代数中的所有可能和  $\mathbf{g}_i$  的范围。

**定义 3.4([12]):** 系统的可达性分布  $C(13)$  定义为在  $\zeta$  中的向量场产生的分布规律；即  $C(\mathbf{x})$  使在  $\zeta$  中  $\mathbf{x}$  处向量场  $X$  的范围。

此外，Bloch 根据在[12]中的上述定义给出了(13)的可达性的如下条件。

**定理 3.1:** 考虑系统(13)，如果  $C(\mathbf{x}_0)$  的维度是  $n$  (即，可达性的代数范围在  $\mathbf{x}_0$  从切空间跨越到  $M$ )，对于任何  $T > 0$ ，集合  $R_T(\mathbf{x}_0)$  的内部非空；即在  $\mathbf{x}_0$  处系统具有可达性。

当这个定理的假设成立，我们就说李代数秩条件(LARC)在  $\mathbf{x}_0$  处成立。

对于一个零向量的向量场  $f$  的无定向控制仿射控制系统, LARC 等价于 STLC[15]。然而, 对于飘动的这个条件是不充分的, 因为一些涉及飘动项的向量可能存在方向约束, 这阻碍了系统的可控性[13]。对于这些飘动系统, Sussman's General 定理[10]指出, 为了保证 STLC, 在满足 LARC 同时还需满足一些关于李括号的好的和坏的条件。

**定理 3.2:** 一个满足 LARC 的系统是由于好的李括号阶数  $i$  是 STLC, 如果坏的李括号阶数  $j \leq i$  是中立的。

注意, 如果一个坏的李括号可以用低阶的李括号的线性组合来表示, 那么这个坏括号就被中和了。因此, 坏括号不会阻碍 STLC。特别的, 如果坏的李括号在  $x_0$  处等于 0, 那么它不会阻碍 STLC。

一个分辨李括号好坏的方法[10]如下: 对于一个由飘动向量  $f$  和控制向量  $g_1, \dots, g_m$  构成的李括号  $X$ ,  $X$  的阶数由  $f$  和  $g_i$  确定, 分别表示为  $\chi^f(X)$  和  $\chi^{g_i}(X)$ , 定义为:

- $\chi^f(X)$ :  $f$  在括号  $X$  出现的次数,
- $\chi^{g_i}(X)$ :  $g_i$  在括号中出现的次数。

$X$  的阶数由  $\chi^f(X) + \sum_{i=1}^m \chi^{g_i}(X)$  的值确定, 如果  $\chi^f(X) + \sum_{i=1}^m \chi^{g_i}(X)$  是奇数并且  $\chi^{g_i}(X)$  是偶数(包括了 0), 那么这个括号被称作坏括号; 反之则成为好括号。对于仿射系统(13),  $f, [g_1, [f, g_1]]$  和  $[g_2, [f, g_2]]$  都是坏括号, 然而,  $[g_1, [f, g_2]]$  和  $[f, g_2]$  都被认为是好括号。

#### 四、 AUV 的运动学和动力学几何控制规则

本节主要运用几何控制理论, 包括动力学和运动学, 分析了 QLAUV 在水平面运动条件下的 STLC。

##### A. 动态可控性

动态可控性主要关键点是航行器的速度和角度, 而不考虑航行器的位移和姿态。在平面运动中, 系统动力学中我们主要考虑横漂速度、摇摆速度和偏航角速度。QLAUV 的三自由度动力学可以用控制仿射形式表示为(13), 其中  $x=[u, v, t]^T$  为状态, 详细形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F'_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F'_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F'_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \frac{1}{m_6} \end{bmatrix} F'_4. \quad (15)$$

阻尼场  $f$  写成  $f(x)=[f_{1,2}, f_6]^T$ , 简化形式的  $f_{1,2}$  解释可以在附录中找到。  $g_i$  是相对于  $F'_i$  合适阶数的控制输入向量。在剩下的章节中类似的表达式被有一点滥用。在应用李括号和李代数时, 可达性分布表示为:

$$C = \text{span}\{g_1, g_4, [g_1, [f, g_4]]\} \quad (16)$$

当  $\beta \neq 0$  时,  $\det(C) = (-\beta^2)/(m_1 m_2 m_6^2) \neq 0$ , 所以其维度等于状态  $x$  的维度。当最大阶



数不大于 3 时，LARC 满足好括号。

注意，所有的坏括号都满足阶数不大于 3，包括

$$f, [g_1, [f, g_1]], [g_2, [f, g_2]], [g_3, [f, g_3]], [g_4, [f, g_4]]. \quad (17)$$

在零速度状态，上述所有括号都等于  $0_{3 \times 1}$ ，由于它们能够写成低阶好括号的线性组合，所以被叫做中和。因此，在零速度状态下系统只考虑  $u, v, r$  阶数能得到 STLC。即使飘动向量  $f$  在平衡处等于零，系统也不能被看作是无定向的，例如系统会损失一些动能，导致李括号  $[g_1, [f, g_4]]$  成为  $0_{3 \times 1}$ 。

如第二部分所示，耦合项  $\beta$  与  $\alpha$  偏转相关。当推进器与水平面垂直式，也就是  $\alpha=\pi/2$  时， $\beta$  的值为 0。可达性分布  $C$  的秩也为 0。因此，在零速度状态下 LARC 不成立，系统也没有 STLC。

## B. 水平面运动学的可控性

这一部分在  $x=[u, v, r, x, y, \psi]^T$ ，阻尼场  $f=[f_{1-2}, f_{6-8}, f_{12}]^T$ 。考虑航行器在水平面上的运动学和动力学，控制输入场  $g_i$  为：

$$\begin{aligned} g_1 &= [1/m_1, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ g_2 &= g_3 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ g_4 &= [0, 0, 1/m_6, 0, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (18)$$

可达性分布表示为：

$$C = \text{span}\{g_1, g_4, [f, g_1], [f, g_4], [g_1, [f, g_1]], [g_1, [f, [f, g_4]]]\} \quad (19)$$

$\det(C)=(-\beta^4(c\varphi)^2(m_1-m_2))/(m^3_1m^2_2m^4_6)$ 。翻滚角  $\varphi \approx 0$ ， $c\varphi \approx 1$ ，当  $m_1 \neq m_2$  时  $\det(C) \approx \beta^4(m_1-m_2)/(m^3_1m^2_2m^4_6) \neq 0$ 。故 LARC 在阶数不大于 4 时满足。由于坏括号的阶数时奇数，(17)中相应的坏括号满足阶数不大于 4。简单的计算表明，在零速度状态下上述的坏括号等于  $0_{6 \times 1}$ ，所以如果  $m_1 \neq m_2$ ，系统 STLC 成立。

## 五、 结论

在这片论文中，利用几何控制理论分析了 QLAUV 的 STLC，并且技术性的引入了一个转换矩阵  $T$  大大简化了可达性分布  $C$  的计算。水平面运动的 STLC 被发展了并且这种 STLC 适用于零速度状态下的临界水平面运动。

## QLAUV 的详细模型

本节中，我们给出了本论文中所使用的仿射非线性的 QLAUV 详细模型。模型可以用控制仿射系统表示为：

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^4 g_i F'_i \quad (20)$$

之中



$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= [u, v, w, p, q, r, x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T \\
\mathbf{g}_1 &= [1/m_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{g}_2 &= [0, 0, 1/m_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{g}_3 &= [0, 0, 0, 1/m_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{g}_4 &= [0, 0, 0, 0, 1/m_5, \beta/m_6, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}]^T \\
&= \begin{bmatrix} -(X_u u - m_2 v r + m_3 w q)/m_1 \\ -(Y_v v + m_1 u r - m_3 w p)/m_2 \\ -(Z_w w - m_1 u q + m_2 v p)/m_3 \\ -(K_p p - (m_5 - m_6) q r + (m_2 - m_3) v w)/m_4 \\ -(M_q q + (m_4 - m_6) p r - (m_1 - m_3) u w)/m_5 \\ -(N_r r - (m_4 - m_5) p q + (m_1 - m_2) u v)/m_6 \\ w(s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta) - v(c\phi s\psi - c\psi s\phi s\theta) + u c\psi c\theta \\ v(c\phi c\psi + s\phi s\psi s\theta) - w(c\psi s\phi - c\phi s\psi s\theta) + u c\theta s\psi \\ w c\phi c\theta - u s\theta + v c\theta s\phi \\ p + r c\phi t\theta + q s\phi t\theta \\ q c\phi - r s\theta \\ r c\phi/c\theta + q s\phi/c\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中  $m_1=m-X_u, m_2=m-Y_v, m_3=m-Z_w, m_4=I_x-K_p, m_5=I_y-M_q, m_6=I_z-N_r$ 。为了简化，在论文中阻尼场  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  表示成组合形式。例如

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_{1-3}, f_{5-6}]^T = [f_1, f_2, f_3, f_5, f_6]^T。$$

## 六、 致谢

这项工作由中央高校基础研究基金(2018XZZX001-06)和工业控制技术国家重点实验室(ICT1811)研究项目资助。

## 参考文献

- [1] L. Paull, S. Saeedi, M. Seto, and H. Li, "AUV Navigation and Localization: A Review," *IEEE J. Oceanic Eng.*, vol. 39, no. 1, pp. 131–149, Jan. 2014.
- [2] M. Jacobi, "Autonomous inspection of underwater structures," *Robot. Autonom. Syst.*, vol. 67, pp. 80–86, May 2015.
- [3] E. I. Sarda and M. R. Dhanak, "A USV-Based Automated Launch and Recovery System for AUVs," *IEEE J. Oceanic Eng.*, vol. 42, no. 1, pp. 37–55, Jan. 2017.
- [4] X. Xiang, L. Lapierre, and B. Jouvencel, "Smooth transition of AUV motion control: From fully-actuated to underactuated configuration," *Robot. Autonom. Syst.*, vol. 67, pp. 14–22, May 2015.
- [5] M. Reyhanoglu, A. V. D. Schaft, N. H. Mcclamroch, and I. Kolmanovsky, "Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 9, pp. 1663–1671, Sept. 1999.
- [6] R. W. Brockett, *Differential geometric control theory*. Boston, MA: Birkhauser, 1983.
- [7] W. Dong and Y. Guo, "Global time-varying stabilization of underactuated surface vessel," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, no. 6, pp. 859–864, Jun. 2005.
- [8] R. E. Kalman, Y. C. Ho, and K. S. Narendra, "Controllability of linear dynamical systems," *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, no. 2, pp. 189–213, 1962.
- [9] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1978.
- [10] H. J. Sussmann, "A general theorem on local controllability," *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 25, no. 1, pp. 158–194, 1987.
- [11] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [12] A. M. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics 24, New York: Springer-Verlag, 2003.
- [13] S. Lavalle, *Planning algorithms*. Cambridge University Press, 2006.
- [14] B. Goodwine and J. Burdick, "Controllability with unilateral control inputs," in *Proc. Conf. Decision and Control*, 1996, pp. 3394–3399.
- [15] M. Saied, H. Shraim, B. Lussier, I. Fantoni, and C. Francis, "Local controllability and attitude stabilization of multirotor UAVs: Validation on a coaxial octocopter," *Robot. Autonom. Syst.*, vol. 91, pp. 128–138, 2017.
- [16] A. M. Hassan and H. E. Taha, "Airplane loss of control problem: Linear controllability analysis," *Aerospace Science and Technology*, vol. 55, pp. 264–271, 2016.
- [17] A. M. Hassan and H. E. Taha, "Geometric control formulation and nonlinear controllability of airplane flight dynamics," *Nonlinear Dyn.*, vol. 88, no. 4, pp. 1–19, Jun. 2017.

- [18] K. Y. Pettersen and O. Egeland, "Exponential stabilization of an underactuated surface vessel," in *Proc. Conf. Decision and Control*, 1996, pp. 967–971.
- [19] R. N. Smith and M. Dunbabin, "Controlled Drift: An Investigation into the Controllability of Underwater Vehicles with Minimal Actuation," in *Proc. Australasian Conf. Robot. Autom.*, Jul. 2011, EP115751.
- [20] J. Bian, J. Xiang, and H. Liang, "A quadroto-rotor-like unmanned underwater vehicle," in *Proc. Chin. Control Decision Conf.*, 2016, pp. 6360–6365.
- [21] T. I. Fossen, *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. John Wiley and Son, Chichester, UK, 2011.
- [22] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. John Wiley and Son, Chichester, UK, 1994.
- [23] J. M. Coron, *Control and Nonlinearity*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2007.