Wojciech Lotko

Zadanie numeryczne 1

Sprawozdanie

## Polecenie:

Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:

a) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

b) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Przeanalizuj jak zachowuje się błąd $|Dhf(x) - f'(x)|$ dla funkcji $f(x) = cos(x)$ oraz punktu x = 0.3 przy zmianie parametru h dla różnych typów zmiennoprzecinkowych (float, double). Wykreśl $|Dhf(x) - f'(x)|$ w funkcji h w skali logarytmicznej. Poeksperymentuj również używając innych funkcji.

## Wstęp:

Przybliżanie pochodnej w obliczeniach maszynowych ( w zasadzie nie tylko pochodnej) za pomocą iloczynu różnicowego wiążę się z pojawianiem się błędów, w naszym przypadku pojawiają się dwa główne błędy negatywnie wpływające na wynik obliczeń. Mianowice:

1) Wybierając małe h będziemy odejmować od siebie dwie bliskie liczby co spowoduje błędy zaokrągleń (urywanie) jak i będziemy dzielić przez małą liczbę co również negatywnie wpłynie na wynik.

2) Wybierając duże h musimy mieć na uwadze, że stosowany przez nas zwór jedynie przybliży nam wynik względem dokładnej wartości pochodnej.

## Omówmy błąd wynikający ze skończonego h:

Rozwijając funkcję f(x+h) w szereg potęgowy możemy owy błąd wyznaczyć

$$f(x+h) = \frac{(x+h-x)^0}{0!} f(x) + \frac{(x+h-x)^1}{1!} f'(x) + \frac{(x+h-x)^2}{2!} f''(\in)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\in)$$

Po wyznaczeniu z równania f'(x) otrzymujemy:

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\in)$$

$$f'(x) = D_h f(x) - \frac{h}{2} f''(\in)$$

Naszym błędem w tym przypadku byłby ostatni człon równania: $\frac{h}{2} f''(\in)$

Następnie przyjrzyjmy się „bliżej" jak wygląda błąd przybliżeń:

Biorąc zaburzone wartości funkcji mianowicie:

- $\widetilde{f(x)} = f(x) + f(x) * \varepsilon_1$

- $f(\widetilde{x+h}) = f(x+h) + f(x+h) * \varepsilon_2$

Możemy przedstawić zaburzoną wartość pochodnej $D_h\widetilde{f(x)}$ jako:

$$D_h\widetilde{f(x)} = \frac{f(\widetilde{x+h}) + \widetilde{f(x)}}{h} = \frac{f(x+h) + f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) - f(x) * \varepsilon_1}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) * \varepsilon_1}{h}$$

Co daje nam ostatecznie

$$D_h\widetilde{f(x)} = D_h f(x) + \frac{f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) * \varepsilon_1}{h}$$

Z czego wynika ,że nasz błąd zaokrąglenia możemy wyrazić jako człon:

$$\frac{f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) * \varepsilon_1}{h}$$

Niestety podczas liczenia pochodnej mamy styczność z obiema rodzajami błędów zobaczmy jak wygląda ich połączenie

Po połączeniu równań

1) $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\in)$
2) $D_h\widetilde{f(x)} = D_h f(x) + \frac{f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) * \varepsilon_1}{h}$ // wyznaczamy $Dhf(x)$ i wstawiamy do 1)
3) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Otrzymujemy:

$$f'(x) = D_h\widetilde{f(x)} + \frac{f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) * \varepsilon_1}{h} - \frac{h}{2} f''(\in)$$

Przerzucamy błędy na jedną stronę :

$$f'(x) - D_h\widetilde{f(x)} = \frac{f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) * \varepsilon_1}{h} - \frac{h}{2} f''(\in)$$

Obejmujemy obie strony wartością bezwzględną i dochodzimy do wartości poszukiwanej

$$|D_h\widetilde{f(x)} - f'(x)| = \left| \frac{f(x+h) * \varepsilon_2 - f(x) * \varepsilon_1}{h} - \frac{h}{2} f''(\in) \right|$$

Nasze $\frac{f(x+h)*\varepsilon_2 - f(x)*\varepsilon_1}{h}$ a w szczególności $f(x+h)$ możem ponownie przybliżyć z szeregu Taylora i otrzymujemy:

$$\approx \left| \frac{f(x)*\varepsilon_2 - f(x)*\varepsilon_1}{h} - \frac{h}{2}f''(\in) \right| = \left| \frac{f(x)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{h} - \frac{h}{2}f''(\in) \right|$$

Nasze $\in \ \epsilon \ (x\ ,\ x+h)$ i dla wystarczająco małego h równa się x czyli człon

$\frac{h}{2}f''(\in) \ \approx \ \frac{h}{2}f''(x)$ mamy więc:

$$\left| \frac{f(x)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) \right|$$

Korzystając z własności wartości bezwzględnej: $|A+B| \ \leq \ |A| \ + \ |B|$ szacujemy:

$$\left| \frac{f(x)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) \right| \leq \ \frac{|f(x)||\varepsilon_2 - \varepsilon_1|}{h} + \frac{h}{2}|f''(x)|$$

Następnie zakładamy że :
$\varepsilon_1 \ \leq \varepsilon\ , \varepsilon_2 \leq \varepsilon$

Wykonując szacowanie górne
$|\varepsilon_2 - \ \varepsilon_{1|} \ \leq 2\varepsilon$

Otrzymujemy:

$$\frac{|f(x)|*2\varepsilon}{h} + \frac{h}{2}|f''(x)|$$

Nasz błąd możemy więc zapisać jako funkcję

$$E(h) = \frac{|f(x)|*2\varepsilon}{h} + \frac{h}{2}|f''(x)|$$

## Co możemy zrobić aby zminimalizować nasze błędy

1) Podczas obliczeń komputerowych powinniśmy używać zmiennych potrafiących przechowywać odpowiednio dużo cyfr znaczących aby zminimalizować ryzyko ucinania.
2) W przypadku obliczania pochodnej powinniśmy dobrać odpowiednie h aby nasz błąd E(h) był jak najmniejszy

Jak znaleźć h odpowiednie? (oznaczmy h*

Szukamy parametru dla którego funkcja E(h) przyjmuje wartość najmniejszą szukamy więc minimum funkcji. Robimy to licząc E'(h) i porównując pochodną do 0:

$$E'(h) = \frac{-2\varepsilon|f(x)|}{h^2} + \frac{|f''(x)|}{2} = 0$$

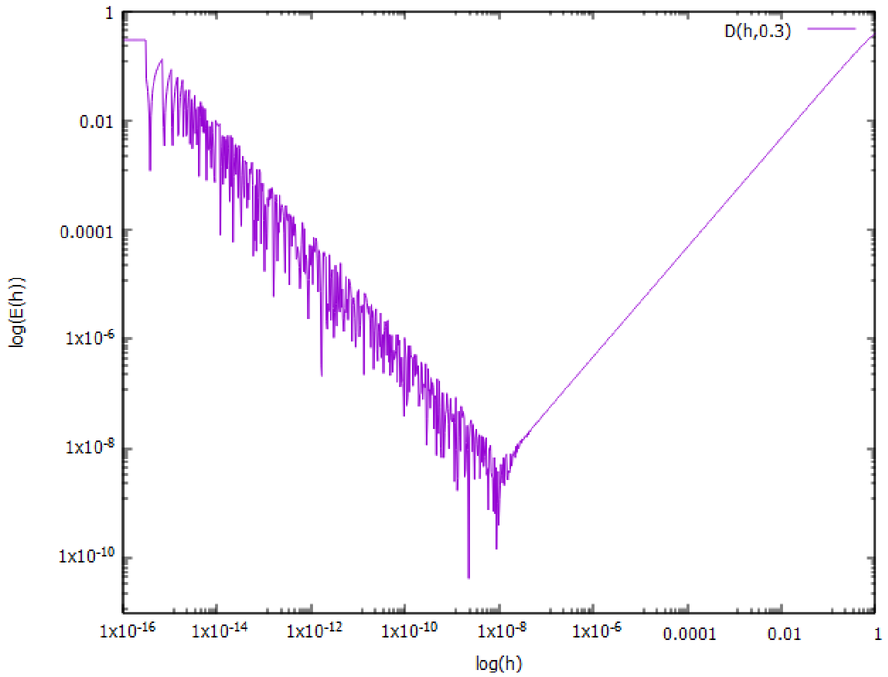
Wyciągając z równania nasze h otrzymujemy:

$$h^{*} = \sqrt{\frac{4\varepsilon|f(x)|}{|f''(x)|}}$$

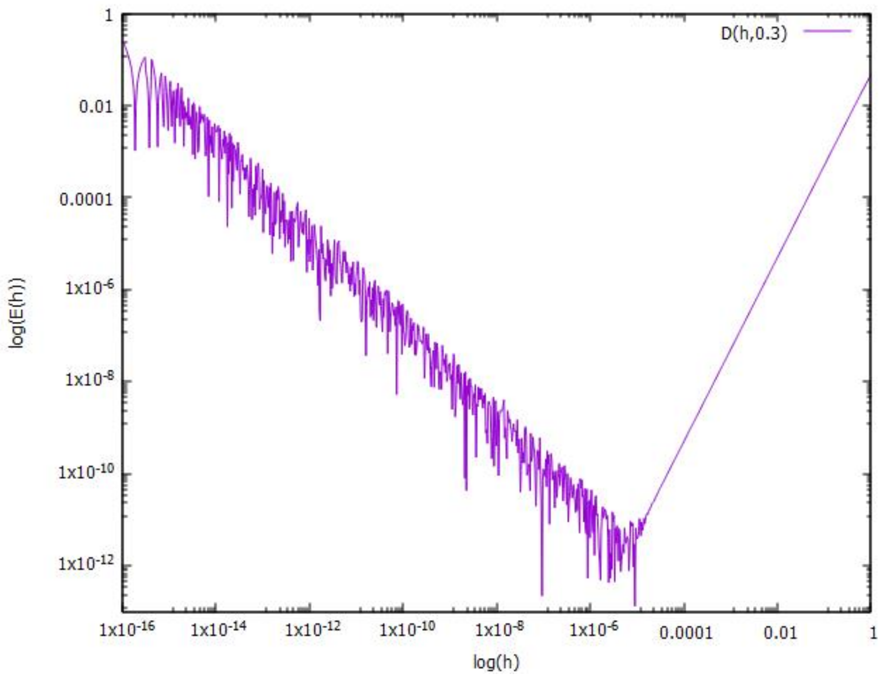
Dla takiej wartości parametru h nasz błąd będzie miał wartość minimalną.

Wykresy oraz wyniki

Dla punktu a)




Dla punktu b)



Jak widać na obu wykresach dochodzimy do takiego punktu h w którym szukany błąd jest najmniejszy tak jak wynikało z wzorów i wcześniejszych rozważań. Widać również, że używając wzoru z punktu b) nasz błąd jest mniejszy. Oznacza to ,że dana metoda jest bardziej dokładna.

Wyniki wykonania programu:

W programie wczytujemy zadaną wartość h dla której chcemy obliczyć przybliżoną wartość pochodnej. Wyświetlane są wyniki w okolicy punktu x = 0.3 dla zmiennych typu double oraz float używając obu przedstawionych wzorów. Przykładowy wynik  wykonania programu wygląda następująco:

```
Wprowadz wartosc h= 1e-5
a) Blad z uzyciem double:

Wynik przyblizony wynosi: -0.295524983340289537636635941453278064727783203125
Wartosc bledu wynosi: 4.776678949991453038137478870339691638946533203125e-06

b) Blad z uzyciem double:

Wynik przyblizony wynosi: -0.2955202066612372391318785957992076873779296875
Wartosc bledu wynosi: 1.02307051719208175200037658214569091796875e-13

a) Blad z uzyciem float:

Wynik przyblizony wynosi: -0.298023223876953125
Wartosc bledu wynosi: 0.00250301719643175601959228515625

b) Blad z uzyciem float:

Wynik przyblizony wynosi: -0.29504299163818359375
Wartosc bledu wynosi: 0.00047721501323394477367401123046875
```

```
Wprowadz wartosc h= 0.0937319279891769
a) Blad z uzyciem double:

Wynik przyblizony wynosi: -0.339827667850532366689009222682216204702854156494140625
Wartosc bledu wynosi: 0.04430746118919282050541141870780847966670989990234375

b) Blad z uzyciem double:

Wynik przyblizony wynosi: -0.295087672661533406692768721768516115844249725341796875
Wartosc bledu wynosi: 0.00043253399980613949082908220589160919189453125

a) Blad z uzyciem float:

Wynik przyblizony wynosi: -0.33982789516448974609375
Wartosc bledu wynosi: 0.0443076901137828826904296875

b) Blad z uzyciem float:

Wynik przyblizony wynosi: -0.2950878143310546875
Wartosc bledu wynosi: 0.00043239232036285102367401123046875
```

Od razu widzimy różnicę w przybliżonych wynikach między typem float a double zaledwie parę miejsc po przecinku. Wynika to z tego, że typ double gwarantuje nam większą precyzję zapisu niż typ float. Ma to duży wpływ na błędy zaokrągleń wpływające na wynik.