Zur Deutung der intuitionistischen Logik.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

Die vorliegende Abhandlung kann von zwei ganz verschiedenen Standpunkten aus betrachtet werden.

1. Wenn man die intuitionistischen erkenntnistheoretischen Voraussetzungen nicht anerkennt, so kommt nur der erste Paragraph in Betracht. Die Resultate dieses Paragraphen können etwa wie folgt zusammengefaßt werden:

Neben der theoretischen Logik, welche die Beweisschemata der theoretischen Wahrheiten systematisiert, kann man die Schemata der Lösungen von Aufgaben, z. B. von geometrischen Konstruktionsaufgaben, systematisieren. Dem Prinzip des Syllogismus entsprechend tritt hier z. B. das folgende Prinzip auf: *Wenn wir die Lösung von b auf die Lösung von a und die Lösung von c auf die Lösung von b zurückführen können, so können wir auch die Lösung von c auf die Lösung von a zurückführen.*

Man kann eine entsprechende Symbolik einführen und die formalen Rechenregeln für den symbolischen Aufbau des Systems von solchen Aufgabenlösungsschemata geben. So erhält man neben der theoretischen Logik eine neue *Aufgabenrechnung*. Dabei braucht man keine speziellen erkenntnistheoretischen, z. B. intuitionistischen Voraussetzungen.

Es gilt dann die folgende merkwürdige Tatsache: *Nach der Form fällt die Aufgabenrechnung mit der Brouwerschen, von Herrn Heyting neuerdings formalisierten*[1]*, intuitionistischen Logik zusammen.*

2. Im zweiten Paragraphen wird, unter Anerkennung der allgemeinen intuitionistischen Voraussetzungen, die intuitionistische Logik kritisch untersucht; es wird dabei gezeigt, daß sie durch die Aufgabenrechnung ersetzt werden sollte, denn ihre Objekte sind in Wirklichkeit keine theoretischen Aussagen, sondern vielmehr Aufgaben.

---

[1]) Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitz. d. Pens. Akad. (1930), I, S. 42; II, S. 57; III, S. 158.

§ 1.

Wir definieren nicht, was eine *Aufgabe* ist, sondern erklären dies durch einige Beispiele. Aufgaben sind:

1. Vier solche ganze Zahlen x, y, z, n finden, für welche die Relationen

$$x^n + y^n = z^n, \qquad n > 2, \tag{1}$$

gelten.

2. Die Falschheit des Fermatschen Satzes beweisen.

3. Durch drei gegebene Punkte (x, y, z) einen Kreis ziehen[2]).

4. Vorausgesetzt, daß eine Wurzel der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gegeben ist, die andere zu finden.

5. Vorausgesetzt, daß die Zahl π rational ausgedrückt ist:

$$\pi = \frac{n}{m},$$

einen analogen Ausdruck für die Zahl e finden.

Daß die zweite Aufgabe von der ersten verschieden ist, ist klar und bildet noch keine speziell intuitionistische Behauptung[3]). Die vierte und fünfte Aufgabe sind Beispiele von *konventionellen* Aufgaben; dabei ist die Voraussetzung in der fünften Aufgabe unmöglich, und folglich ist die Aufgabe selbst *inhaltslos*. Der Beweis, daß eine Aufgabe inhaltslos ist, wird weiter immer als ihre Lösung betrachtet werden.

Wir glauben, daß nach diesen Beispielen und Erklärungen die Begriffe „Aufgabe" und „Lösung der Aufgabe" in allen Fällen, welche in den konkreten Gebieten der Mathematik vorkommen, ohne Mißverständnis gebraucht werden können[4]). Aufgaben werden weiterhin mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ bezeichnet.

Wenn a und b zwei Aufgaben sind, bezeichnet $a \wedge b$ die Aufgabe „beide Aufgaben a und b lösen", während $a \vee b$ die Aufgabe bezeichnet „mindestens eine der Aufgaben a und b lösen". Weiter ist $a \supset b$ die Aufgabe „vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, b lösen", oder, was dasselbe bedeutet, „die Lösung von b auf die Lösung von a zurückzuführen".

Wir haben früher nicht vorausgesetzt, daß jede Aufgabe lösbar ist. Wenn z. B. der Fermatsche Satz richtig ist, so wäre die Lösung der ersten

---

[2]) Um ganz präzis zu sein, sollte man natürlich bei der Formulierung dieser Aufgabe die erlaubten Konstruktionsmittel angeben.

[3]) Die *Aussagen* „der Fermatsche Satz ist falsch" und „vier (1) genügende Zahlen existieren" sind dagegen vom Standpunkt der klassischen Logik aus äquivalent.

[4]) Die Hauptbegriffe der Aussagenlogik „Aussage" und „Beweis der Aussage" befinden sich nicht in besserer Lage.

Aufgabe kontradiktorisch. Dementsprechend bezeichnet $\neg a$ die Aufgabe „vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, einen Widerspruch erhalten“ [5]).

Nach diesen Definitionen bezeichnet, wenn $a, b, c, d, \ldots$ die Aufgaben sind, jede mit der Hilfe von den Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\neg$ zusammengesetzte Formel $p(a, b, c, \ldots)$ auch eine Aufgabe. Wenn aber $a, b, c, \ldots$ nur Symbole der unbestimmten Aufgaben sind, sagt man, daß $p(a, b, c, \ldots)$ eine Funktion der Aufgabenvariablen $a, b, c, \ldots$ ist. Im allgemeinen bedeutet, wenn x eine Variable (von beliebiger Art) ist und $a(x)$ eine Aufgabe bezeichnet, deren Sinn von dem Werte von x abhängt, $(x)\, a(x)$ die Aufgabe „eine allgemeine Methode für die Lösung von $a(x)$ bei jedem einzelnen Wert von x anzugeben“. Man soll dies so verstehen: Die Aufgabe $(x)\, a(x)$ zu lösen, bedeutet, imstande sein, für jeden gegebenen Einzelwert x_0 von x die Aufgabe $a(x_0)$ nach einer endlichen Reihe von im voraus (schon vor der Wahl von x_0) bekannten Schritten zu lösen [6]).

Für die Funktionen $p(a, b, c, \ldots)$ von unbestimmten Aufgaben $a, b, c, \ldots$ schreibt man weiter statt

$$(a)(b)(c)\ldots p(a, b, c, \ldots)$$

einfach

$$\vdash p(a, b, c, \ldots).$$ [6a])

$\vdash p(a, b, c, \ldots)$ bezeichnet also die Aufgabe „eine allgemeine Methode anzugeben für die Lösung von $p(a, b, c, \ldots)$ bei jeder einzelnen Auswahl der Aufgaben $a, b, c, \ldots$“.

Die Aufgaben von der Form $\vdash p(a, b, c, \ldots)$, wo p durch die Zeichen $\vee$, $\wedge$, $\supset$ und $\neg$ ausgedrückt ist, bilden den Gegenstand der *elementaren Aufgabenrechnung* [7]).

Die entsprechenden Funktionen $p(a, b, c, \ldots)$ sind *die elementaren Aufgabenfunktionen.*

---

[5]) Es sei bemerkt, daß man $\neg a$ nicht als die Aufgabe „die Unlösbarkeit von a beweisen“ zu verstehen hat. Wenn man im allgemeinen „die Unlösbarkeit von a“ als einen wohldefinierten Begriff betrachtet, erhält man nur den Satz, daß aus $\neg a$ die Unlösbarkeit von a folgt, jedoch nicht die Umkehrung davon. Wenn es z. B. bewiesen wäre, daß die Durchführung einer Wohlordnung des Kontinuums unsere Fähigkeiten übersteigt, könnte man noch nicht behaupten, daß aus der Gegebenheit einer solchen Wohlordnung ein Widerspruch folgt.

[6]) Auch hier, wie früher, hoffen wir, daß diese Definition zu keinen Mißverständnissen in den konkreten mathematischen Gebieten führen können.

[6a]) Diese Erklärung der Bedeutung des Zeichens $\vdash$ ist vom Heytingschen ganz verschieden, obwohl sie zu denselben Rechenregeln führt.

[7]) Diese Definition ist der Definition der elementaren Aussagenrechnung analog. In der Aussagenrechnung lassen sich aber die zu $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\neg$ analogen logischen Funktionen durch zwei unter ihnen ausdrücken. In der Aufgabenrechnung sind alle vier Funktionen unabhängig.

Daß *ich* eine Aufgabe gelöst habe, ist eine rein subjektive Tatsache, welche an sich noch kein allgemeines Interesse hat. Die logischen und mathematischen Aufgaben besitzen aber die spezielle Eigenschaft *der Allgemeingültigkeit ihrer Lösungen*: Wenn ich eine logische oder mathematische Aufgabe gelöst habe, so kann ich diese Lösung allgemeinverständlich darstellen, und es ist *notwendig*, daß sie als richtige Lösung anerkannt wird, obwohl diese Notwendigkeit einen einigermaßen idealen Charakter hat, denn sie setzt eine genügende Intelligenz der Zuhörer voraus[8]).

Der eigentliche Zweck der Aufgabenrechnung besteht darin, eine Methode für die Lösung von Aufgaben der Form $\vdash p(a, b, c, \ldots)$, wo $p(a, b, c, \ldots)$ eine elementare Aufgabenfunktion ist, durch die mechanische Anwendung einiger einfacher Rechenregeln anzugeben. Wir müssen aber, um alles auf diese Rechenregeln zurückzuführen, voraussetzen, daß die Lösungen von einigen elementaren Aufgaben schon bekannt sind. Wir nehmen als *Postulate* an, daß wir die zwei folgenden Aufgabengruppen A und B schon gelöst haben. Die weitere Darstellung wendet sich nur an einen solchen Leser, welcher alle diese Aufgaben gelöst hat[9]).

$$
\text{A.}\quad \left\{\begin{array}{ll}
2.1. & \vdash . a \supset a \wedge a .\ ^{10)} \\
2.11. & \vdash . a \wedge b \supset b \wedge a . \\
2.12. & \vdash . a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c . \\
2.13. & \vdash . a \supset b . \wedge . b \supset c . \supset . a \supset c , \\
2.14. & \vdash . b \supset . a \supset b . \\
2.15. & \vdash . a \wedge . a \supset b . \supset b . \\
3.1. & \vdash . a \supset a \vee b . \\
3.11. & \vdash . a \vee b \supset b \vee a . \\
3.12. & \vdash . a \supset c . \wedge . b \supset c . \supset . a \vee b \supset c . \\
4.1. & \vdash . \neg a \supset . a \supset b . \\
4.11. & \vdash . a \supset b . \wedge . \supset \neg b . a \supset \neg a .
\end{array}\right.
$$

Wir setzen also voraus, daß der Leser bei jeder Wahl der Aufgaben a, b, c alle hier nach dem Zeichen $\vdash$ stehenden Aufgaben lösen kann. Das bietet auch keinerlei Schwierigkeiten dar. In der Aufgabe (2.12) soll man z. B. in der Annahme, daß die Lösung von a auf die Lösung von b schon

---

[8]) All dies gilt wörtlich auch für die Beweise von theoretischen Aussagen. Es ist jedoch wesentlich, daß jede bewiesene Aussage *richtig* ist; für die Aufgaben hat man keinen dieser Richtigkeit entsprechenden Begriff.

[9]) Im Falle der Aussagenrechnung soll man sich zuerst von der Richtigkeit der Axiome überzeugen, wenn man die Richtigkeit der Folgerungen feststellen will.

[10]) Über die Numerierung der Formeln und den Gebrauch von Trennungszeichen (Punkten) vgl. Heyting I.

zurückgeführt ist, die Lösung von $b \wedge c$ auf die Lösung von $a \wedge c$ zurückführen. Es sei die Lösung von $a \wedge c$ gegeben; das bedeutet, daß sowohl die Lösung von a als auch die Lösung von c gegeben sind; aus der Lösung von a können wir nach Voraussetzung die Lösung von b ableiten; da die Lösung von c schon gegeben ist, erhalten wir die Lösung der beiden Aufgaben b und c, also die Lösung von $b \wedge c$. In dieser Überlegung ist eine allgemeine Methode zur Lösung der Aufgabe

$$a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c$$

enthalten, welche bei beliebigen a, b, c gültig ist. Wir haben also das Recht, die Aufgabe

$$2.13. \quad \vdash . a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c .$$

(mit dem Allgemeinheitszeichen $\vdash$) als gelöst zu betrachten.

Was insbesondere die Aufgabe 4.1. betrifft, so ist, sobald $\neg a$ gelöst ist, die Lösung von a unmöglich und die Aufgabe $a \supset b$ inhaltslos.

Die zweite *Aufgabengruppe B*, für die wir die Gegebenheit der Lösungen postulieren, enthält nur drei Aufgaben[11]). Wir setzen nämlich voraus, daß wir immer imstande sind (eine allgemeine Methode besitzen), für beliebige elementare Aufgabenfunktionen $p, q, r, s, \ldots$ die folgenden Aufgaben zu lösen:

I. Wenn $\vdash . p \wedge q .$ gelöst ist, $\vdash p$ zu lösen.

II. Wenn $\vdash p$ und $\vdash . p \supset q .$ gelöst sind, $\vdash q$ zu lösen.

III. Wenn $\vdash p(a, b, c, \ldots)$ gelöst ist, $\vdash p(q, r, s, \ldots)$ zu lösen.

Jetzt können wir *die Regeln* unserer Aufgabenrechnung angeben:

1. Wir bringen zuerst auf die Liste der gelösten Aufgaben die Aufgaben der Gruppe A.

2. Wenn auf unserer Liste $\vdash . p \wedge q .$ schon steht, ist es gestattet, auch $\vdash p$ dorthin zu setzen.

3. Wenn die beiden Formeln $\vdash p$ und $\vdash . p \supset q .$ dort stehen, dürfen wir auch $\vdash q$ setzen.

4. Wenn $\vdash p(a, b, c, \ldots)$ schon in der Liste steht und $q, r, s, \ldots$ beliebige elementare Aufgabenfunktionen sind, ist es gestattet, auch $p(q, r, s, \ldots)$ dorthin zu setzen.

Man überzeugt sich leicht auf Grund der vorher angenommenen Postulate, daß diese formalen Rechnungen wirklich die Lösungen der entsprechenden Aufgaben sicherstellen.

---

[11]) Sie lassen sich aber nicht in den Zeichen der elementaren Aufgabenrechnung symbolisch ausdrücken.

Wir verzichten hier auf die weitere Ausführung dieser Rechnungen, denn alle obigen formalen Rechnungsregeln und a priori geschriebenen Formeln fallen mit den Rechnungsregeln und Axiomen der ersten Heytingschen Abhandlung[12]) zusammen; folglich können wir alle Formeln dieser Abhandlung als Aufgaben deuten und alle diese Aufgaben für gelöst halten.

Wir merken uns hier nur einige besonders interessante unter diesen Aufgaben (sie sind also als schon gelöst zu betrachten):

$$4.3. \quad \vdash . a \supset \neg\neg a.$$

$$4.2. \quad \vdash . a \supset b . \supset . \neg b \supset \neg a.$$

$$4.32. \quad \vdash . \neg\neg\neg a \supset a.$$

Die Lösung von 4.3. und 4.2. ist auch ohne Rechnung klar. Die Lösung von 4.32. erhält man aus 4.3. und 4.2., wenn man in 4.2. die Aufgabe b durch $\neg\neg a$ ersetzt.

Wenn man zu den a priori angenommenen Formeln B noch die Formel

$$(1) \qquad \vdash . a \vee \neg a.$$

(in der Aussagenlogik das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten) hinzufügt, erhält man ein vollständiges Axiomensystem der klassischen Aussagenlogik. In unserer Aufgabendeutung lautet die Formel (1) folgendermaßen: Eine allgemeine Methode anzugeben, um für jede Aufgabe a entweder eine Lösung zu finden, oder aus der Gegebenheit von dieser Lösung einen Widerspruch zu folgern! Im einzelnen, wenn die Aufgabe a im Beweis einer Aussage besteht, soll man eine allgemeine Methode besitzen, um jede Aussage entweder zu beweisen oder zum Widerspruch zu führen. Wenn unser Leser sich nicht für allwissend hält, wird er wohl bestimmen, daß die Formel (1) sich nicht auf der Liste der von ihm gelösten Aufgaben befinden kann.

Es ist aber merkwürdig, daß man die Aufgabe

$$4.8. \quad \vdash . \neg\neg . a \vee \neg a.$$ [13])

lösen kann, wie die Heytingschen Rechnungen zeigen.

Die Formel

$$(2) \qquad \vdash . \neg\neg a \supset a.$$

(in der Aussagenlogik das Prinzip von der zweifachen Negation) kann in unserer Aufgabenrechnung ebenfalls nicht erscheinen, da aus ihr mit Hilfe von 4.8. die Formel (1) folgt.

---

[12]) Heyting I.

[13]) In der Aussagenlogik stellt (4.8) den Brouwerschen Satz über die Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten dar.

Wir sehen also, daß, im Gegensatz zu den Heytingschen Formeln der intuitionistischen Logik, schon sehr einfache Formeln der klassischen Aussagenlogik in unserer Aufgabenrechnung nicht erscheinen können.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn eine Formel $\vdash p$ in der klassischen Aussagenlogik falsch ist, die entsprechende Aufgabe $\vdash p$ nicht gelöst werden kann. Man kann, in der Tat, aus einer solchen Formel $\vdash p$ mit Hilfe von früher angenommenen Formeln und Rechnungsregeln der Aufgabenrechnung die offensichtlich kontradiktorische Formel $\vdash . \urcorner a .$ ableiten[14]).

§ 2.

Das Grundprinzip der intuitionistischen Kritik der logischen und mathematischen Theorien ist das folgende: *Jede nicht inhaltslose Aussage soll auf eine oder mehrere ganz bestimmte, für unsere Erfahrung zugängliche Sachverhalte hinweisen*[15]).

Wenn a eine allgemeine Aussage von der Form „jedes Element der Menge K besitzt die Eigenschaft A" ist, und wenn überdies die Menge K unendlich ist, so genügt die Negation von a, „a ist falsch", dem obigen Prinzip nicht. Um diesen Umstand zu vermeiden, gibt Brouwer eine neue Definition der Negation: „a ist falsch" soll bedeuten „a führt zu einem Widerspruch". So verwandelt sich die Negation von a in eine *Existenzaussage*: „Es existiert eine Kette von logischen Schlüssen, welche in der Annahme der Richtigkeit von a zu einem Widerspruch führt." Die Existenzaussagen wurden aber von Brouwer auch einer tiefen Kritik unterworfen.

Es hat nämlich vom intuitionistischen Standpunkt gar keinen Sinn, einfach zu sagen: „Es gibt unter den Elementen einer unendlichen Menge K mindestens ein Element mit der Eigenschaft A", ohne dieses Element zu zeigen.

Brouwer will aber nicht die Existenzaussagen ganz aus der Mathematik hinauswerfen. Er erklärt nur, daß man eine Existenzaussage nicht aussprechen soll, ohne eine entsprechende Konstruktion anzugeben. Anderseits ist eine Existenzaussage nach Brouwer kein bloßes Konstatieren, daß wir ein entsprechendes Element in K schon gefunden haben; im letzteren Falle wäre die Existenzaussage *vor* der Erfindung der Konstruktion falsch und nur *nachher* richtig. So entsteht diese ganz besondere Art von Aussagen, welche zwar einen mit der Zeit nicht veränderlichen Inhalt haben sollen und doch nur unter speziellen Bedingungen ausgesprochen werden können.

---

14) Vgl. V. Glivenko, Acad. r. de Belgique, 5e série, 15 (1929), S. 183.

15) Vgl. H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 39. Die ganze weitere Untersuchung der negativen und der Existenzaussagen schließt wesentlich an diese Weylsche Arbeit an.

Man kann natürlich fragen, ob vielleicht diese spezielle Art von Aussagen nur eine Fiktion ist. Es liegt in der Tat eine *Aufgabe* vor, „in der Menge K ein Element mit der Eigenschaft A zu finden"; diese Aufgabe hat wirklich einen bestimmten, von dem Zustand unserer Kenntnisse unabhängigen Sinn; wenn man diese Aufgabe *gelöst* hat, d. h. wenn man ein entsprechendes Element x gefunden hat, erhält man eine empirische Aussage: „Jetzt ist unsere Aufgabe gelöst." Also ist das, was Brouwer unter einer Existenzaussage versteht, vollständig in zwei Elemente zerlegt: das objektive Element (die Aufgabe) und das subjektive (ihre Lösung). Somit findet man keinen Gegenstand übrig, den man als Existenzaussage im eigentlichen Sinne zu bezeichnen hätte.

Daher soll das Hauptresultat der intuitionistischen Kritik der negativen Aussagen einfach so formuliert werden: *Für eine allgemeine Aussage ist es im allgemeinen sinnlos, ihre Negation als bestimmte Aussage zu betrachten.* Dabei verschwindet aber das Objekt der intuitionistischen Logik, da jetzt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten für alle Aussagen gilt, für welche die Negation im allgemeinen einen Sinn hat[16]).

Für die Mathematik folgt daraus, daß man die Lösung von Aufgaben als ihren selbständigen Zweck (neben dem Beweis von theoretischen Aussagen) betrachten soll. Wie im ersten Paragraph gezeigt wurde, erhalten im Bereich von Aufgaben und Lösungen auch die Formeln der intuitionistischen Logik einen neuen Sinn[17]).

Göttingen, 15. Januar 1931.

---

[16]) Es entsteht aber eine neue Frage: Welche logischen Gesetze gelten für Aussagen, deren Negation keinen Sinn hat?

[17]) Bemerkung bei der Korrektur. Diese Interpretation der intuitionistischen Logik hängt eng zusammen mit den Ideen, welche Herr Heyting im letzten Bande der „Erkenntnis" (2 (1931), S. 106) entwickelt hat; bei Heyting fehlt allerdings eine klare Unterscheidung zwischen Aussagen und Aufgaben.

(Eingegangen am 6. Februar 1931.)