Algèbre 3

Ange Mayouma

Séquence 1 : Applications et formes multilinéaires

I- Rappels Applications linéaires

I- 1- Définitions d'une application linéaire

Soient F et G deux E V sur R l'application f : F → G est linéaire si

$$\forall u , v \in F, on\ a : f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$\forall \alpha \in R, \forall u \in F, f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

Si F = G, f est appelée endomorphisme de F
Si G = IR, f est appelée forme linéaire sur F
L'ensemble des applications linéaires de F dans G est noté par : $L_R(F,G)$
L'ensemble des endomorphismes de F est noté par : $L_R(F)$

I-2- Autre définition

Soient F et G deux E V sur R l'application f : F → G est linéaire
Si $\forall\ u, v \in F\ \ et\ \ \alpha, \beta \in R, on\ a\ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Exemple

Soit l'application définie de f : IR^3 dans IR^3
(x, y ,z) f(x, y ,z) =(x – y +z, x +y +z , 2x –y –z)
Montrer que f est une application linéaire.
Soient X = (x, y, z)∈ R^3 et Y = (x', y' z')∈ R^3
X + Y = (x +x', y +y', z +z')
f(X+Y) = ((x +x')-(y +y')+ (z +z'), (x +x')+(y +y')+ (z +z'), 2(x +x')-(y +y')- (z +z'),
f(X+Y) = (x – y +z, x +y +z , 2x –y –z) +(x' – y' + z', x' + y' + z' , 2x' –y' –z')
f(X+Y) = f(X) +f(Y)

Soient X = (x, y, z)∈ R^3 et $\alpha \in R$

$$\alpha X = \alpha(x, y , z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

f(αX) $= f(\alpha(x,y,z)$ = (αx – αy +αz, αx + αy +αz , 2αx –αy –αz)
$$= \alpha(\mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{z}, \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z}, 2\mathrm{x} - \mathrm{y} - \mathrm{z})$$

$\mathbf{f(\alpha X) = \alpha f(X)}$
Alors f est bien une application numérique

I-3-Propriété

Si $f \in L_K(F,G)$, alors $f(O_F) = O_G$

I-4- Noyau et image
Soit f une application linéaire de E dans F

I-4-1-Noyau
On appelle noyau de f, l'ensemble, noté Kerf, définie par :
Kerf = $\{x \in \backslash f(x) = 0\}$

I-4-2-Image
On appelle Image de f , l'ensemble, noté Imf, défini par :
Im = $\{y \in F \backslash \exists x \in E \backslash f(x) = y\}$

I-4-3-Théorèmes
I-4-3-1-Kerf est un sous espace vectoriel de E et Imf est un sous espace vectoriel de F

I-4-3-2-Théorème des dimensions
Si E et F sont deux sous espaces vectoriels de G
DimG = Dim E + Dim F

I-5-Injection, surjection et bijection
Soit f une application linéaire de E dans F

I-5-1- Injection
f est injective si pour tout x et y de E vérifiant : f(x) = f(y) alors x = y

I-5-2- Surjection
f est surjective si pour tout y de F, il existe x de E tel que f(x) = y

I-5-3-Bijection
f est bijective si f est subjective et injective
Si f est bijective, on parle d'isomorphisme.
Si E = F, on parle d'endomorphisme.
Si E = F et f bijective, on parle d'automorphisme.

I-5-4-Proposition
I-5-4-1- f est injective si et seulement si Kerf = { 0}

I-5-4-2- f est bijective si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F
I-5-4-3- Par définition de la subjectivité, une application linéaire est surjective
I-5-4-4-si et seulement si son image est égale à son espace d'arrivée :
F est surjective, Im f = F

I-7- Rang d'une application linaire

I-7-1-Définition

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Rappelons que Imf est un sous espace vectoriel de F. Si Im f est un sous espace vectoriel de dimension finie dans F, alors on appelle rang de l'application linéaire f la dimension de Im f . On notera rg f le rang de f.

I-7-2- Proposition Formule du rang

Si E et F sont des k-espaces vectoriels, que E est
de dimension finie, et que f est une application linéaire de E dans F alors f vérifie: dim Ker f + rg f = dim E.

I-7-3- Propriétés du rang :

si $f \in$ L(E ;F) , dimE = n ; dim F= p; alors

I-7-3-1- rg(f) $\leq min(n;p)$

I-7-3-2- rg(f) = n, si et seulement si est injective

I-7-3-3- rg(f) = p, si et seulement si est surjective

I-7-3-4- rg(f) = n= p, f est bijective

II- Applications multilinéaires

II-1- Définitions

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F, des espaces vectoriels sur un corp K.
Soit une application $f: E_1$x E_2x ... x $E_n \longrightarrow F$
On dit que f est une application multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacun des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$, c-à-d lorsqu'elle conserve les combinaisons linéaires effectuées sur l'un quelconque d'entre eux.

Par exemple, si on choisit deux vecteurs $v_i, \; et \; v'_i \; de \; E_i$ et deux scalaires $\alpha \; et \; \beta$
On a : $f(v_1, \dots, \alpha v_i + \beta v'_i, \dots, v_n) = \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \beta f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)$
On notera par :
$\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n$; F) l'ensemble des applications multilinéaires sur $E_1.E_2.\dots.E_n$ a valeur dans F. Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n$; F) ayant n éléments sera appelée application n-linéaire.
Pour n = 1, On parlera d'une application linéaire qu'on a vu à la première partie
Pour n = 2, on parlera bien entendu d'application bilinéaire
Pour n = 3, on parlera d'application trilinéaire.
Si $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$,
$\mathcal{L}(R^n, F)$ sera l'ensemble des application n-linéaire sur E^n à valeur dans F
$\mathcal{L}_p(E, F)$ l'ensemble des applications p- linéaire de E dans F.

II-2- Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n$; F) est un k espace vectoriel. Si chacun des E_i est de dimension finie n_i et si F est de dimension p, alors $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n$; F) est de dimension finie et on a Dim($\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n$; F) = $pn_1n_2 \dots n_n$

Exercice N°1

Démontrer II-2- proposition

Exercice N°2

Dans chacun des cas suivants dire si l'application
$f: R^3 \text{x} R^3 \text{x} R^3 \to R$ est multilinéaire.

1) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)) = x_1 + y_2 + z_3$
2) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Remarque :

Si f est une application n-linéaire sur E, alors, pour tous vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ de E et tous n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on a :

$$f(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n) = \alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n f(v_1, \dots, v_n)$$

En particulier si $\alpha \in K$,

$$f(\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n) = \alpha^n f(v_1, \dots, v_n)$$

II-3- Expression analytique dans une base

II-3-1- Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F, des espaces vectoriels sur un corp K. On considère une base $\{e_{i,1,} e_{i,2,} \dots, e_{i,n_i}\}$ une base de E_i

Pour tout vecteur $v_i \in E_i$ *, on a* :

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} e_{i,j}$$

D'après ce qui précède on peut écrire :

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_n,}^{\cdot} x_{1,n_1} . x_{2,n_2} \dots x_{n,n_n} f(e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_n})$$

Au second membre, la somme est faite sur tous les indices $n_{1,} n_{2,} \dots, n_{n,}$ variant indépendamment de 1 à n.

Posant : $A_{n_1, n_2, \dots, n_n,} = f\left(e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_n}\right)$ qui sont des scalaires fixes du corp K indépendants du choix des vecteurs, et l'on a :

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_n,}^{\cdot} A_{n_1, n_2, \dots, n_n,} x_{1,n_1} . x_{2,n_2} \dots x_{n,n_n}$$

Le second membre est un polynôme de degré n par rapport à l'ensemble des variables x_{i,n_i}

II-3-2-Théorème

Toute fonction n fois linéaire s'exprime dans une base quelconque par une forme n fois linéaire des coordonnées des vecteurs. Les coefficients sont les valeurs de la fonction pour les arrangements avec répétition des vecteurs de base pris n à n.

II-4- Applications multilinéaires alternées

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F, des espaces vectoriels sur un corp K.
Soit une application n- linéaire $f: E_1 \text{x } E_2 \text{x} \dots \text{x } E_n \longrightarrow F$ est dite alternée si $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont égaux.

Remarque :

$\boldsymbol{\mathcal{A}}(E^n; F)$ est l'ensemble des applications multilinéaires alternées de $E^n \; dans \; F$
$\boldsymbol{\mathcal{A}}_p(E, F)$ est l'ensemble des applications p-linéaire alternées de E dans F
$\boldsymbol{\mathcal{A}}_p(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E, F)$.

II-5- Applications multilinéaires symétriques et antisymétriques

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F, des espaces vectoriels sur un corp K.
Soit une application n- linéaire $f: E_1 \text{x } E_2 \text{x} \dots \text{x } E_n \longrightarrow F$

II-5-1-Application multilinéaire symétrique

L'application n- linéaire f est dite symétrique
Si pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E_1 . E_2 . \dots . E_n$, pour tout , $j \in \{1, \dots, n\}$, alors
$f\left(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\right) = f\left(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\right)$

II-5-2-Application multilinéaires Antisymétrique

L'application n- linéaire f est dite antisymétrique
Si pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E_1 . E_2 . \dots . E_n$, pour tout , $j \in \{1, \dots, n\}$, alors
$f\left(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\right) = -f\left(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\right)$

Rappels :

- *L'ensemble des bijections* $\sigma: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ *est noté* S_n.

Une telle bijection est appelée une permutation.

- S_n *muni d'une loi de composition des applications possède une structure de groupe.*
- *Une permutation préservant tous les éléments de* $\{1, \dots, n\}$ *sauf deux qu'elle permute est appelée une transposition. Toute permutation est produit de transposition. Le nombre de transposition intervenant dans cette décomposition est indépendant de la décomposition choisie.*
- *Il existe un morphisme de groupe surjectif* $\varepsilon: S_n \to \{-1,1\}$ *où* $\{-1,1\}$ *muni de sa structure multiplicative. L'image de* ε *sur une permutation est appelée la signature de cette permutation.*

- *Si $\sigma \in S_p$, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$où n est le nombre de transposition dans une décomposition de σ en produit de transposition.*

II-5-3- Proposition
L'application f n- linéaire est dite alternée si et seulement si elle est antisymétrique.
Démonstration
Supposons f est n linéaire et alternée
Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $avec\ i < j$
On a : $f(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) = 0$

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$$

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$$

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

On suppose que f est antisymétrique
On a :

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$$

Alors $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$

III- Formes multilinéaires

III-1-Définition
Une forme multilinéaire sur $E_1 \text{x}\, E_2 \text{x} \ldots \text{x}\, E_n$ est une application multilinéaire à valeurs dans le corps K.

$$\mathcal{F}(E_1 \text{x}\, E_2 \text{x} \ldots \text{x}\, E_n; K)\ est\ l'ensemble\ des\ formes\ n-linéaires$$
$$sur\ E_1 \text{x}\, E_2 \text{x} \ldots \text{x}\, E_n \text{ à } valeur\ dans\ K.$$

Si $E_1. = E_2 = \cdots = E_n = E$,
$\mathcal{F}(E^n; K)$ est l'ensemble des formes n- linéaire de E^n $dans\ K$

$$\mathcal{L}_p(E, K)\ \ l'ensemble\ des\ formes\ p-linéaires\ de\ E\ dans\ K$$

III-2- Forme bilinéaire, forme trilinéaire
Soit E un k-espace vectoriel et f : $\underbrace{E.E.\ldots.E}_{n\ fois} \to K$ une forme n- linéaire.
Si n = 2, on dit que f est une forme bilinéaire
Si n = 3, on dit que f est une forme trilinéaire

Remarques :

- ***Toutes les définitions et propriétés sur les applications multilinéaires sont transposables sur les formes multilinéaires.***
- ***Pour une application multilinéaire $f(v_1, \ldots, v_n)$ est un vecteur de F, mais pour une forme multilinéaire $f(v_1, \ldots, v_n)$ est un scalaire de K.***

III-3- Propositions

Proposition 1 :
Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur un corp K. L'ensemble des n-formes linéaires sur $E_1, E_2, \dots, E_n$ muni de l'addition des fonctions à valeurs dans K et de la multiplication par un scalaire a une structure de K- espace vectoriel.

$$\mathcal{L}_n(E, K) \; est \; un \; sous \; K - espace \; vectoriel \; de \; \mathcal{F}(E^n; K)$$

Démonstration :
Il suffit juste de montrer que c'est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $E_1, E_2, \dots, E_n$ à valeurs dans K.

Proposition 2
Soit f une forme n – linéaire alternée définie sur un K-espace vectoriel E. Soient $v_1, \dots, v_p$ n vecteurs de E. Soit σ un élément de S_p.
Alors $f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}\right) = \varepsilon(\sigma)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p})$
Preuve
Comme les permutations sont des produits de transposition, il suffit de montrer que cette égalité pour une transposition.
Soient $i, j \in \{1, \dots, n\} \; avec \; i \neq j$ et soit t la transposition qui échange i et j

$$\begin{aligned} f\left(v_{t(1)}, \dots, v_{t(i)}, \dots, v_{t(j)}, \dots, v_{t(n)}\right) &= f\left(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\right) \\ &= -f\left(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\right) \end{aligned}$$

Proposition 3
L'ensemble des formes n-linéaires alternées (ou antisymétriques) forment un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, K)$. On le notera $A_n(E, K)$

Exercice 3
Soit f une forme n-linéaire sur un K-espace vectoriel E. Montrer que f est alternée si et seulement si , pour toute famille liée $(v_1, \dots, v_p)$, on a $f(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p}) = 0$
Si E est de dimension finie p avec p< n , que peut-on dire des formes n- linéaires alternées sur E.

Exercice 4
Soit $E = R^2 \; et \; F = R^3 \; et \; soit \; n = 2$

1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f: \quad E^2 = R^2 \, x \; R^2 &\longrightarrow R^3 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (0, x_1 y_2 - y_1 x_2, 0) \end{aligned}$$

2) L'application

$$\begin{aligned} f: \quad E^2 = R^2 \, x \; R^2 &\longrightarrow R^3 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (0, x_1 y_1 - x_2 y_2, 0) \end{aligned}$$

Est-elle bilinéaire ?

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur le corp K, rapport à une base

$B = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $\alpha, \beta \in K$
On considère la forme bilinéaire :

$$f(x_1e_1 + \ x_2e_2 + x_3e_3, y_1e_1 + \ y_2e_2 + y_3e_3) \mapsto (x_1y_3 + \alpha x_2y_1 + \beta x_3y_2$$

Est -il possible de choisir $\alpha\ et\ \ \beta\ pour\ que\ cette\ forme\ linéaire\ soit\ alternée$?