Algèbre 3

Ange P Mayouma

Séquence 4 : Polynôme caractéristique et polynôme minimal d'une matrice carrée

I-Valeurs propres- Vecteurs propres

I-1-Définitions

Soit E une K-espace vectoriel de dimension n

Soit f : E $\rightarrow E$ un endomorphisme. M la matrice de *f* par rapport à une base de E. On appelle **vecteur propre** de *f* tout vecteur $\vec{X}$ non nul de E tel qu'il existe un scalaire λ vérifiant :

$f(\vec{X}) = \lambda\vec{X}$ ou $MX = \lambda X$ (1)

Le scalaire λ est appelé valeur propre de *f* correspondant au vecteur propre $\vec{X}$.

Remarques

1) Si $\vec{x}$ est vecteur propre de *f*, $\vec{x}$ n'est pas unique.
   Pour tout scalaire k non nul, $k\vec{X}$ est aussi un vecteur propre de f .
   En effet, on a :
   $f(k\vec{X}) = kf(\vec{X}) = k(\lambda\vec{X}) = \lambda(k\vec{X})$.
   Donc $k\vec{X}$ est un vecteur propre de *f*.
2) L'équation (1) admet la solution triviale $\vec{X} = \vec{0}$ qui n'est pas un vecteur propre car un vecteur propre n'est jamais nul.
3) L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé spectre de f. On le note par Sp(f) ou encore $\sigma(f)$

I-2- Polynôme et équation caractéristique

I-2-1- Définition

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n

Soit $f: E \rightarrow E$ un endomorphisme. M la matrice associée à *f*. λ est valeur propre de *f* correspondant au vecteur propre $\vec{X}$ si :

$$MX = \lambda X$$
$$MX - \lambda X = 0$$
$$(M - \lambda I_n)X = 0 \quad (2)$$

Le système (2) est un système homogène d'ordre n.

- Si $(M - \lambda I_n) \neq 0$ alors $\vec{X} = \vec{0}$
- Si $\vec{X} \neq \vec{0}$, c'est-à-dire si $\vec{X}$est un vecteur propre de M, alors $det(M - \lambda I_n) = 0$

Posons : $P_f(\lambda) = Det(M - \lambda I_n)\ ou\ P_M(\lambda) = Det(M - \lambda I_n)$

Soit M une matrice carrée d'ordre n.

On appelle **polynôme caractéristique**, $P_f(\lambda)$, le déterminant de la matrice $M - \lambda I_n$

Remarque :

- Trouver les valeurs propres de M revient à déterminer les racines du polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$
- $P_M(\lambda)$est dit scindé s'il se décompose en produit de monôme de premier degrés

I-2-2- Equation caractéristique

Soit $e = Id_E$ l'application identité.

Siλ est la valeur propre de f et $\vec{X}$ un vecteur propre correspondant

$$f(\vec{X}) = \lambda\vec{X} \Leftrightarrow f(\vec{X}) - \lambda\vec{X} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow f(\vec{X}) - \lambda e(\vec{X}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda e)\vec{X} = \vec{0}$$

Rappel :

Si f et g sont deux applications linéaires, pour tous scalaires α et β ,
$\alpha f + \beta g$ est aussi une application linéaire.

I-2-3- Théorème : Caractérisation des vecteurs propres

Soit E un K- espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

Alors tout scalaire λ est valeur propre de f si et seulement si l'application $f - \lambda e$ non injective.

Démonstration

D'après le rappel si dessous $f - \lambda e$ est une application linéaire définie sur E

$\vec{X}$est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si

$$(f - \lambda e)\vec{X} = \vec{0}$$

Alors $\vec{X}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si $\vec{X}$appartient au noyau de $f - \lambda e$.

$$\vec{X} \in Ker(f - \lambda e)$$

Comme un vecteur propre est toujours non nul, alors l'application linéaire $f - \lambda e$ n'est pas injective.

Réciproquement, soit$f - \lambda e$ non injective.

Alors il existe un vecteur $\vec{X}$ non nul tel que $\vec{X} \in Ker(f - \lambda e)$

$$(f - \lambda e)\vec{X} = \vec{0}$$

$f(\vec{X}) - \lambda\vec{X} = \vec{0}$

$$f(\vec{X}) = \lambda\vec{X}$$

Ainsi λ est la valeur propre de f et $\vec{X}$ un vecteur propre correspondant

I-3- Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Soit λ_i une valeur propre de l'endomorphisme f qui n'est autre qu'une racine du polynôme caractéristique P.
On appelle **ordre** de multiplicité de la valeur propre λ_i le plus grand entier r_i tel que $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ divise le polynôme $P_f(\lambda)$.

Exercice N°1

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme de de R^2 dont la matrice associée est M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique et Recherche des valeurs propres

Soit λ une valeur propre de M, on a :

$$P_M(\lambda) = Det(M - \lambda I_2) = 0$$

$$P_M(\lambda) = Det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$
Donc les valeurs propres de la matrice M sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$
Les deux racines ont pour ordre de multiplicité 1.

I-4-Polynôme annulateur

Soit E un espace vectoriel sur K et P un polynôme à coefficients dans K.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$f : E \to E \text{ un endomorphisme de } E$$

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \quad avec\ f^k = fofo\ldots..of \qquad\qquad k\ fois$$

Si A est une matrice carrée

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

I-4-1-Définition

On dit que P est un polynôme annulateur de f si P(f) = O (O est l'endomorphisme nul).
P est annulateur de A si P(A) = O

I-4-2- Théorèmes

Théorème1 :
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n et P un polynôme annulateur de f. Alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

Démonstration

Soit α une valeur propre de f et V un vecteur propre associé

$$O = P(f)V = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k\right)(V) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k\,(V)$$

f(V) = αV , f^2(V) = f(f(V)) = f(αV)= $\alpha f(V) = \alpha^2 V$
Par récurrence on montre que $f^k(V) = \alpha^k V$

$$O = P(f)V = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k\right)(V) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k\,(V) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k\, V$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k\right) V = O_E$$

Et comme V est un vecteur propre de non nul , on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0\,, alors\;\; a\; est\; une\; racine\; de\; P$$

Dim E finie , f∈ $\mathcal{L}(E)$, on a Dim E = n et Dim $\mathcal{L}(E) = n^2$
$\{f^0, \mathrm{f}, f^2, \dots, f^{n^2}\}$ est un système de n^2+ 1 éléments de $\mathcal{L}(E)$
Comme Dim $\mathcal{L}(E)$= n^2, ce système est lié donc il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$ non tous nuls

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$$

En posant

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k\,, on\; a\; P_f\; = O, P\; est\; annulateur\; de\; f$$

Théorème2 : (Cayley –Hamilton)
Soit f∈ $\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel sur de dimension n.
Alors le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f. P_f(f) = O

Démonstration
On travaille sur le corps K = C comme tout polynôme à coefficient dans C est scindé.

$$P_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots . (x - \lambda_n)$$

Alors f est trigonalisable.
Il existe une base B = {V_1, V_2, …, V_n} de E par rapport à laquelle, la matrice de f est triangulaire.
$A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ la matrice de f dans la base B
On a : $a_{ii} = \lambda_i$, f(V_j) $1 \le j \le n$

$$f(V_j) = \sum_{k=1}^{j-1} a_{kj} V_k + \lambda_j V_j$$

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1$$
$$f(V_2) = a_{12}\; V_1 + \lambda_2 V_2$$
$$f(V_3) = a_{13}\, V_1 + a_{23}\, V_2 + \lambda_3 V_3$$

Posons Fi = Lin { V_1, V_2, …, V_i}
Fi = Lin { V_1, V_2, …, V_i}= E

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique A et en déduire ses valeurs propres
2. Montrer que $P(A) = 0_3$
3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse
4. Calculer A^n

Solution

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A

$$P_A\,(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = -(x-1)(x+2)^2 = -x^3 - 3x^2 + 4$$

On a deux valeurs propres $\alpha_1 = -1\ et\ \alpha_2 = -2$

2. Montrons que $P_A(A) = O \Rightarrow -A^3 - 3A^2 + 4I_3 = 0_3$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$-A^3 - 3A^2 + 4I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse

$P_A(A) = 0_3 \Rightarrow -A^3 - 3A^2 + 4I_3 = 0_3$

$-A^3 - 3A^2 = -4I_3$

$A\left(\frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{4}A\right) = I_3 \qquad (1)$

$\left(\frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{4}A\right)A = I_3 \qquad (2)$

(1) et (2) montre que A est invisible et d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{4}A$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{4}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

4. calculons A^n

Faisons la division euclidienne de x^n par $P_A\,(x)$

$$(1) \qquad ,x^n = P_A\,(x)Q(x) + H(x) \quad avec\ d\acute{e}g(H(x) \leq 2$$

En remplaçant x par la matrice A on en déduit la puissance n de la matrice A.

$A^n = P_A\,(A)Q(A) + H(A)$

Or $P_A\,(A) = 0\,, alors\ A^n = H(A) = aA^2 + bA + cI_n$

$$H(x) = ax^2 + bx + c$$

On cherche les coefficients a, b et c

1 et -2 sont les racines du polynôme $P_A\,(x)$

$$P_A\,(1) = 0$$

$$1^n = P_A\,(1)Q(1) + H(1) = a + b + c$$

$$P_A(-2) = 0$$
$$(-2^n) = P_A(-2)Q(-2) + H(-2) = 4a - 2b + c$$

On dérive la relation (1) , on obtient : $n\,x^{n-1} = P'_A(x)Q(x) + P_A(x)Q'^{(x)} + H'^{(x)}$

$P_A(-2) = 0$, $P'_A(-2) = 0$ et H'(x) =2ax +b

On obtient : $n(-2)^{n-1} = -4a + b$

On a : $\begin{cases} a + b + c = 1 \quad (1) \\ 4a - 2b + c = \quad (-2)^n \quad (2) \\ -4a + b = n(-2)^{n-1} \quad (3) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow c = -a - b + 1$$

Et c dans (2) donne : $\begin{cases} 3a - 3b + 1 = (-2)^n \\ 4a + b = n(-2)^{n-1} \end{cases}$

On obtient

$$a = -\frac{1}{15} + \frac{1}{15}(-2)^n + \frac{1}{5}n(-2)^{n-1}$$
$$b = \frac{4}{15} - \frac{4}{15}(-2)^n + \frac{1}{5}n(-2)^{n-1}$$
$$c = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}(-2)^n - \frac{3}{5}n(-2)^{n-1}$$

Théorème 3

Soit E un K- espace vectoriel et f un endomorphisme de E de matrice associée M qui est une matrice carrée d'ordre n. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de M deux à deux distinctes et $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \cdots, \vec{X}_p$ les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ respectivement. Alors les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \cdots, \vec{X}_p$ sont linéairement indépendants. En particulier, si $p = n$ alors les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \cdots, \vec{X}_n$ est une base de E.

I-5- Sous-espaces propres

I-5-1- Définitions :

Définition 1

Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme f d'un K espace vectoriel E de matrice associée M, l'ensemble des vecteurs solutions de l'équation
$(f - \lambda e)\vec{X} = \vec{0}$, auquel on adjoint le vecteur nul, constitue un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel propre** associé à la valeur propre λ.

Définition 2 :

Soit E une K-espace vectoriel de dimension n
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. M la matrice associée à f. λ est valeur propre de f correspondant au vecteur propre $\vec{X}$
Le sous espace vectoriel $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id_E) = \{\vec{X} \in E, f(\vec{X}) = \lambda\vec{X}\}$ est appelé sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre λ.

Exercice N°2

On considère l'endomorphisme de R^2 dont la matrice associée est M définie par :
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette endomorphisme.

a) Recherchons les valeurs propres

Soit λ une valeur propre de M, on a :

$$P_M(\lambda) = Det(M - \lambda I_2) = 0$$

$$P_M(\lambda) = Det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$

Donc les valeurs propres de la matrice M sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$

Les deux racines ont pour ordre de multiplicité 1.

b) Recherchons les vecteurs propres associés

Soit $\vec{X} = (x, y)$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ, on a :

$(M - \lambda I_n)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$(M - \lambda I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 3y = 0 \\ x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

i) Pour $\lambda = 1$, le système devient

$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 0 \Leftrightarrow x = -3y$

On fixe $y = \alpha \in IR$

Un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 1$, s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha V_1$$

Le sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 est

$$E_{\lambda=1} = Ker(f - \lambda Id_E) = \{\vec{X} \in E, f(\vec{X}) = \lambda\vec{X}\}$$

$$E_{\lambda=1} = \{\vec{X} \in E, f(\vec{X}) = \vec{X}\} = vect(V_1)\ avec\ V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $est\ un\ vecteur\ propre\ de\ f.$

ii) Pour $\lambda = 5$, le système devient

$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

On fixe $y = \alpha \in IR$

Un vecteur propre de M associé à la valeur propre$\lambda = 5$, s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha V_2$$

Le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $est\ un\ vecteur\ propre\ de\ f.$

Le sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 5 est

$$E_{\lambda=5} = Ker(f - \lambda Id_E) = \{\vec{X} \in E, f(\vec{X}) = \lambda\vec{X}\}$$

$$E_{\lambda=5} = \{\vec{X} \in E, f(\vec{X}) = 5\vec{X}\} = vect(V_2)\ avec\ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I-5-2- Théorème : Décomposition d'un espace vectoriel en somme directe de sous-espaces caractéristiques

Soit f un endomorphisme d'un K espace vectoriel E de dimension n et P_f le polynôme caractéristique de f. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les racines du polynôme P_f que l'on suppose deux à deux distinctes de multiplicités respectives $r_1, r_2, \dots, r_p$. Alors :

- La somme des sous espaces vectoriels propres $E_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i Id_E)$ de f est directe. $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} \subseteq E$
- La dimension de chaque sous espace vectoriel E_{λ_i} vérifie : $DimE_{\lambda_i} \leq r_i$

Démonstration

On va utiliser la démonstration par récurrence sur $n \in \{1, 2, \dots, P\}$ pour établir que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p}$est directe

- Pour n= 1, Cette est trivialement directe car il n'y qu'un seul terme
- Pour n = 2, Soient $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ deux valeurs propres tels que $V_1 \in E_{\lambda_1}\ et\ V_2 \in E_{\lambda_2}$

Supposons que :

$$V_1 + V_2 = O \ (1)$$
$$f(V_1 + V_2) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0 \ (2)$$

D'autre part, on peut multiplier λ_2 l'équation (1),

On : $\lambda_2 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0$ (3)

(2) – (3) $\quad (\lambda_1 - \lambda_2)V_1 = 0$

Comme $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ sont distincts alors $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0\ ce\ qui\ donne\ V_1 = 0$

Alors $V_2 = 0$. Ainsi, $si\ V_1 + V_2 = O \Longrightarrow V_1 = V_2 = O$

- Supposons que la somme est directe au rang n -1
  c-à-d $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_{n-1}}$ est directe.
  Montrons qu'elle est aussi directe au rang n.
- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n valeurs propres tels que
  $V_1 \in E_{\lambda_1}, V_2 \in E_{\lambda_2}, \dots, V_n \in E_{\lambda_n}$

Supposons que

$$V_1 + V_2 + \ \dots + V_n = 0 \ \ (4)$$
$$f(V_1 + V_2 + \ \dots + V_n) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 +, \dots, + \lambda_n V_n = 0 \ \ (5)$$

D'autre part, on peut multiplier λ_n l'équation (4),

$$\lambda_n V_1 + \lambda_n V_2 +, \dots, + \lambda_n V_n = 0 \ \ (6)$$

(5)-(6) $(\lambda_1 - \lambda_n)V_1 + (\lambda_2 - \lambda_n)V_2 +, \dots, + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)V_{n-1} = 0$

Comme les λ_i sont distincts deux à deux alors d'après l'hypothèse de récurrence

$$V_1 = V_2 = \ \dots = V_{n-1} = 0$$

D'après (4) on a forcement $V_n = 0$

Ainsi : $V_1 = V_2 = \ \dots = V_n = 0$

Donc la somme est bien directe.

- Montrons maintenant $DimE_{\lambda_i} \leq r_i$

Soit E_{λ_i} un sous espace vectoriel propre et posons $d = DimE_{\lambda_i}$
Soit $(U_1, \dots, U_k)$ *une base de* E_{λ_i} que l'on peut compléter dans la base $(U_1, \dots, U_n)$ de E. Pour tout $i \leq d$, $f(U_i) = \lambda_i U_i$
Soient A la matrice de f dans la base $(U_1, \dots, U_n)$ et C une matrice de f dans la base $(U_d, \dots, U_n)$.
C est une matrice carrée d'ordre n – d.
Comme les d valeurs propres $\lambda_i$sont deux à deux distinctes, alors :

$$P_f(x) = Det(A - xI_n) = (\lambda_i - x)^d Det(C - xI_{n-d})$$

$$Det(C - xI_{n-d}) \text{ est le polynôme caractéristique de } C$$

Ainsi la multiplicité de la racine λ_i est au moins égale. Alors dim$E_{\lambda_i} \leq r$

Application : Exercice 2

$$DimE_{\lambda=1} = 1;\ DimE_{\lambda=5} = 1 \text{ et } E_{\lambda=1} \cap E_{\lambda=5} = \emptyset$$

$$DimE_{\lambda=1} + DimE_{\lambda=5} = DimR^2 = 2$$

Donc $R^2 = E_{\lambda=1} \oplus E_{\lambda=5}$

II- Polynôme Minimal

II-1- Définitions

Définition 1

Soit P ∈ $K[x]$ un polynôme à coefficient dans K.
On dit que P est normal de d degrés si le coefficient de son monôme de plus haut degrés est égal à 1.
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots . + a_dx^d$
P est normalisé si $a_d = 1$

Définition 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On appelle polynôme minimal de f le polynôme $m_{f(x)}$ est normalisé, annulateur de f de degrés minimum parmi les polynômes annulateurs de f.
2-1- $m_{f(x)}$ = normalisé
2-2-m_f = 0
2-3- P(f) = o alors dg($m_{f(x)}$) $\leq d^0$P
Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
Le polynôme minimal et le polynôme caractéristiques ont les même racines avec en général des multiplicités différents.

$$P_f(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^{a_i} \quad avec \sum_{i=1}^{n} ai = n$$

$$m_f(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^{b_i} \qquad avec\ 1 \leq b_i \leq a_i$$

II-2- Application

Exemple 2

On considère la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

P_f(x) $= -(x-1)(x+2)^2$ (voir exemple 1)

$$m_f(x) = \begin{cases} (x-1)(x+2) = P_1(x) \\ ou \\ (x-1)(x+2)^2 = P_2(x) \end{cases}$$

$dgP_1 < dgP_2$ si P1(A) = 0, alors $m_f(x) = P_1(x) = (x-1)(x+2)$

$$P_1(A) = (A-I)(A+2I) = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$Donc\ m_f(x) = P_1(x) = (x-1)(x+2)$$