Algèbre 3

Ange P Mayouma

Séquence 2 : Algèbre Bilinéaire, Algèbre Quadratique

I- Formes bilinéaires, Formes bilinéaires symétriques

I-1-Définitions

Soit E et F deux espaces vectoriels sur K = IR

Définition 1 :

On appelle forme bilinéaire sur E toute application

$f\ :\ ExF \longrightarrow IR$ vérifiant les propriétés suivantes

1. f(x + x', y) = f(x, y) +f(x', y) $\forall\ x, x'\ \in E\ et\ \forall\ y\ \in F$
2. f(βx, y) = $\beta f(x,y)\quad \forall\ x \in E, \forall\ y\ \in F, \forall\ \beta \in IR$
3. f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y') $\forall\ x \in E, \forall\ y, y' \in F$
4. f(x, βy) = $\beta f(x,y)\quad \forall\ x \in E, \forall\ y\ \in F,\ \forall\ \beta \in IR$

En d'autre terme f est linéaire par rapport à chaque variable.

Notation :

- **L(E,F,K) l'ensemble des formes linéaires définies sur ExF à valeur dans le corps K ($f\ :\ ExF \longrightarrow K$)**
- **L(E, K) l'ensemble des formes linéaires définies sur E à valeur dans le corps K (E = F) ($f\ :\ ExE \longrightarrow K$**
- **Le corps de nombres réels K= IR ou le corps des nombres complexes K = C**

Définition 2 :

La forme bilinéaire f définie sur E est dite symétrique si f(x, y) = f(y, x) $\forall\ x, y \in E$

Exemple 1

1. $f\ :\ IRxIR \longrightarrow IR$

$(x,y) \longrightarrow xy$ f est bilinéaire symétrique

$$f(x+x',y) = (x+x')y = xy + x'y = f(x,y) + f(x',y)$$
$$f(\beta x, y) = \beta xy = \beta f(x,y)$$
$$f(x, y+y') = x(y+y') = xy + xy' = f(x,y) + f(x',y)$$
$$f(x, \beta y) = x\beta y = \beta xy = \beta f(x,y)$$

2. f : IR^3x $IR^3 \longrightarrow IR$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = 2x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ avec x + y = $((x_1+y_1\ ), (x_2+y_2), (x_3+y_3))$

- $f(x+x',y) = 2(x_1+x'_1)y_1 - (x_2+x'_2)y_2 + (x_3+x'_3)y_3$
$$= 2x_1y_1 + 2x'_1y_1 - x_2y_2 - x'_2y_2 + x_3y_3 + x'_3y_3$$

$$= 2x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + 2x'_1y_1 - x'_2y_2 + x'_3y_3 = f(x,y) + f(x',y)$$

- $f(\beta x, y) = 2\beta x_1y_1 - \beta x_2y_2 + \beta x_3y_3 = \beta(2x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3) = \beta f(x, y)$
- $f(x, y+y') = 2x_1(y_1 + y'_1) - x_2(y_2 + y'_2) + x_3(y_3 + y'_3)$
$$= 2x_1y_1 + 2x_1y'_1 - x_2y_2 - x_2y'_2 + x_3y_3 + x_3y'_3$$
$$= 2x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_1 - x_2y'_2 + x_3y'_3 = f(x,y) + f(x,y')$$
- $f(x, \beta y) = 2x_1\beta y_1 - x_2\beta y_2 + x_3\beta y_3 = \beta(2x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3) = \beta f(x, y)$

I-2- Propriétés

1. Soient $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ deux familles des vecteurs et
$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n,} \in IR$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in IR$
Et f une application bilinéaire
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j V_j, \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \beta_i\, \alpha_j f(U_i V_j)$$
2. $f(x, 0_E) = 0 \ \forall x \in IR$
3. $f(0_E, y) = 0 \ \forall y \in IR$

Démonstration

1.
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j V_j, \right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(U_i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j V_j) \quad \textit{linéairité par rapport à la 1 ere variable}$$
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\sum_{i=1}^{p} \beta_i U_i, V_j) \quad \textit{linéairité par rapport à la 2 eme variable}$$

2. Soit $x \in E, O_E = y - y$
$f(x, O_E) = f(x, y-y) = f(x,y) - f(x,y)$
3. Soit $y \in E, O_E = x - x$
$f(O_E, y) = f(x-x, y) = f(x,y) - f(x,y)$

NB: Si on note par:
$$X = \sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i \ \in E \ \ et \ \ Y = \sum_{j=1}^{p} e_j\, y_j \ \in F$$
$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i, \ \sum_{j=1}^{p} e_j\, y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j\, f(e_i\, e_j)$$

I-3- Forme Matricielle d'une forme bilinéaire

I-3-1- Définitions

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension fini respective n et p, muni des bases canoniques respectives $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(e'_i)_{1\le i\le p}$.
f une forme bilinéaire sur ExF à valeurs dans K.
On appelle matrice de la forme bilinéaire f par rapport aux bases $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(e'_i)_{1\le i\le p}$., la matrice
$$A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K) \qquad avec\ a_{ij} = f(e_i, e'_j)$$
A est une matrice de type (n, p)

Remarque :

Si E = F , $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ $\quad$ $avec\ a_{ij} = f(e_i, e_j)$ qui est une matrice carrée d'ordre n.

I-3-2- Théorème

Soient $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(e'_i)_{1\le i\le p}$ deux bases respectives de E et F, $f \in L(E, F, K)$ et $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ la matrice f par rapport aux bases (e_i) et (e'_j)

$$X = \sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i \ \in E \ \ et \ \ Y = \sum_{j=1}^{p} e'_j\, y_j \ \in F$$

Alors on a :

1. $f(x,y) = {}^tXA\,Y$

2. f est symétrique $\Leftrightarrow$ sa matrice A est symétrique

Démonstration

1. $Montrons\ que\ \ f(x,y) = {}^tXAY$

$$X = \sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \sum_{j=1}^{p} e'_j\, y_j = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i y_j\, f(e_i\, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j$$

$$f(x,y) = x_1 \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j + x_2 \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j + \cdots + \ x_n \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j = (x_1\,, x_2, \ldots, \ \ x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j} y_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2j} y_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{p} a_{nj} y_j \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = (x_1\,, x_2, \ldots, \ \ x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix} = {}^tXAY$$

2. $Montrons$ que si f est symétrique alors A est symétrique

$\Rightarrow si\ est\ symétriqe\ \forall (i,j) \in [1,n]x[1,p]$

$a_{ji} = f(e'_j, e_i) = f(e_i, e'_j) = a_{ij}$. Donc ${}^tA = A$

$\Leftarrow Supposons\ que$ A est symétrique on a :

$$f(y,x) = {}^tYAX$$

Or la matrice ${}^tYAX$ est une matrice à un seul coefficient, donc égale à sa transposée.

$$f(y,x) = {}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tX\,{}^tA\,{}^t({}^tY) = {}^tXAY = f(x,y)$$

$$Donc\ f est\ symétrique$$

Exemple 2

On considère f la forme linéaire définie sur IR^3 par :

$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3\ x_3y_3 + 6\ x_1y_3 +2\ x_1y_2 -3\ x_2y_3 +3\ x_3y_1 + x_3y_2$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de IR^3

Solution

$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3\ x_3y_3 + 6\ x_1y_3 +2\ x_1y_2 -3\ x_2y_3 +3\ x_3y_1 + x_3y_2$

$f(x, y) = x_1(y_1 +2\ y_2 +6\ y_3) + x_2(y_2 -3\ y_3) + x_3(3y_1 + y_2 +3\ y_3)$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ y_2 - 3y_3 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On déduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

I-3-3- Changement de base

Soit f une forme linéaire définie sur un espace vectoriel E et $B = (e_i)_{1\le i\le n}$

A la matrice de f par rapport à la base B

Soit $B' = (e'_i)_{1\le i\le n}$ une nouvelle base E. A' la matrice de f dans la base B'

P la matrice de passage entre B et B'.

$$X = \sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i \ = \sum_{i=1}^{n} e'_i\, x'_i\,, \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} e_j\, y_j \ = \sum_{j=1}^{n} e'_j\, y'_j\,, \qquad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ . \\ . \\ y'_n \end{pmatrix} \quad et\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \ {}^tXAY \qquad et\ f(x,y) = \ {}^tX'A'Y'$$

X = PX' et Y = PY'

$$f(x,y) = \ {}^tXAY = \ {}^t(PX')A(PY') = \ {}^tX'\ {}^tP\ AP\ Y' = \ {}^tX'\ A'\ Y'$$

Alors $A' = \ {}^tP\ AP$

I-3-4-Théorème

Soit A la matrice de f dans la base B de E et si A' est la matrice de f dans la nouvelle base B' de E , alors $A' = {}^tP\ AP$. Avec P la matrice de passage entre A et A'.

II- Formes quadratiques

II-1- Définition

Soit E un espace vectoriel sur le corps K et f une forme bilinéaire définie sur E.

On appelle forme quadratique engendrée par la forme bilinéaire f, l'application

$q\ :\ E \longrightarrow K$

$x \longrightarrow q(x) = f(x,x)$ et vérifiant les propriétés suivantes

1. Pour tout x de E et $\in K$, q$(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$

   En effet, q$(\alpha x) = f(\alpha x, \alpha x) = \alpha.\alpha f(x,x) = \ \alpha^2 q(x)$
2. Pour tout x, y de E, on a :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

$$En\ effet\ , q(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x, x+y) + f(y, x+y)$$
$$= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = f(x,x) + f(x,y) + f(x,y) + f(y,y)$$

$$q(x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y) = q(x) + 2f(x,y) + q(y)$$

D'où

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

F est appelée forme polaire de q.
A toute forme quadratique on peut toujours lui associer une forme bilinéaire symétrique appelée forme polaire

II-2- Théorème
Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel sur E et f sa forme polaire, alors on a :

$$f(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$$

En effet : q(x+ y) = f(x, x) + f(y, y)+ 2f(x, y) et q(x- y) = f(x, x) + f(y, y)-2f (x, y)
q(x+ y) –q(x –y) = f(x, x) + f(y, y)+ 2f(x, y) - f(x, x) - f(y, y) + 2f (x, y)
q(x+ y) – q(x –y = 4 f(x, y)

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$$

II-3- Matrice d'une forme quadratique
Soit q une forme quadratique sur E.
On appelle matrice de q , la matrice A de sa forme polaire f.

III- Orthogonalité

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q sa forme quadratique associée.

III-1- Définitions

Définition1
Deux vecteurs de E sont orthogonaux pour f si f(x, y) = 0.

Exemple 3
On pose E = IR^3

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad et\ y = (y_1, y_2, y_3)$$

Le produit scalaire classique dans IR^3 est défini par :

$$< x, y > = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

On rappelle que pour ce produit scalaire deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $< x, y > = 0$
Les vecteurs de la base canonique de IR^3 sont deux à deux orthogonaux

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

$< e_1, e_2 > = 0, < e_1, e_3 > = 0, < e_2, e_3 > = 0$

On considère la forme bilinéaire symétrique f définie sur IR^3 dont la matrice associée par rapport à la base canonique est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que la matrice de la forme bilinéaire est définie par $a_{ij} = f(e_i, e_j)$

$$f(e_1, e_2) = 1\ , alors\ e_1\ \ et\ e_2\ ne\ sont\ pas\ orthogonaux$$
$$f(e_1, e_1) = 2$$
$$f(e_1, e_3) = -2\ , alors\ e_1\ \ et\ e_3\ ne\ sont\ pas\ orthogonaux$$
$$f(e_2, e_3) = 3\ , alors\ e_2\ \ et\ e_3\ ne\ sont\ pas\ orthogonaux$$

Définition2
Soit $(x_1, \ x_2, \dots x_p)$ une famille des vecteurs de E et f une forme bilinéaire symétrique définie sur E.

On dit que cette famille est orthogonale pour f si f $(x_i , x_j) = 0 \ \forall i \ \neq j$

Définition3
Soit f une forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel E et x un vecteur de E.
On appelle orthogonale de x l'ensemble noté et défini par :

$$x^{\perp} = \{y \in E \ tel \ que \ f(x,y) = 0\}$$

Si F est une partie de E, L'orthogonale de F est défini par :

$$F^{\perp} = \{y \in E \ tel \ que \ f(x,y) = 0 \quad \forall x \in F\}$$

Définition4
Soit E un espace vectoriel dont la forme bilinéaire symétrique associée est f.
On appelle noyau de f , l'ensemble défini par :

$$Kerf = N = \{y \in E \ tel \ que \ f(x,y) = 0 \ \forall x \in E\}$$

$N = E^{\perp}$ qui est aussi le noyau de la forme quadratique associée à f.

Exemple 4
On pose E = IR^3

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad et \ y = (y_1, y_2, y_3)$$

Les vecteurs de la base canonique de IR^3 sont deux à deux orthogonaux

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

Et f la forme bilinéaire symétrique définie sur E tel que

$$f(x,y) = \ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Déterminons l'orthogonale de e_2

$$e_2{}^{\perp} = \{y \in E \ tel \ que \ f(e_2,y) = 0 \ \}$$
$$f(e_2,y) = \ 0.y_1 + 1.y_2 + 0.y_3 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$
$$e_2{}^{\perp} = \{y \in E \ tel \ que \ y_2 = 0 \ \} = \ \mathcal{L}in(e_1 \ ,e_3)$$

Exemple 5
Soit f la forme bilinéaire symétrique **définie par su**r IR^3.

$$f(x,y) = \ x_1y_1 - 2x_1y_2 - 3x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_3$$

Déterminons l'orthogonale de e_1

$$e_1{}^{\perp} = \{y \in E \ tel \ que \ f(e_1,y) = 0 \ \}$$
$$f(x,y) = \ 1.y_1 - 2.y_2 - 0.y_3 + 0.y_1 - 0.y_3 \ = 0$$
$$\Rightarrow y_1 - 2.y_2 = 0 \ on \ a: \ .y_1 = 2.y_2$$

$\forall \ y = (y_1, y_2, y_3) \in e_1{}^{\perp}$, on a : $y_1 = 2.y_2$
$y = (y_1, y_2, y_3) = (2y_2, y_2, y_3) = (2y_2, y_2, 0)$ +$(0, 0, y_3)$ = $y_2(2, 1, 0) + \ y_3 \ (0,0,1)$

$$y = y_2U_1 + y_3e_3$$
$$e_1{}^{\perp} = \{y \in E \ tel \ que \ y_1 = 2y_2 \ \} = \ \mathcal{L}in(U_1 \ ,e_3)$$

Définition5
Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel   muni d'une forme bilinéaire symétrique f.
On dit que A et B sont orthogonaux si f(x, y) = 0 $\forall x \in A \ et \ \forall y \in B$
On le note par $A \perp B$.

Définition6
Soit E un espace vectoriel de dimension fini n dont la forme bilinéaire symétrique associée est f.
On dit que f est non dégénérée si

$$Kerf = \{O_E\}$$

Définition7
Soit E un espace vectoriel de dimension fini n dont la forme bilinéaire symétrique associée est f. On appelle rang de f , le rang de sa matrice dans une base donnée.

III-2- Propriétés
Soit E un espace vectoriel dont la forme bilinéaire symétrique associée est f. Soient A et B deux parties de E. On a les propriétés suivantes

1. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
   En effet : on suppose que $A \subset B$ et soit $x \in B^{\perp}$, $f(x,y) = 0 \; \forall y \in B \; or \; A \subset B$
   Alors $\forall a \in A, f(x,a) = 0 \Rightarrow x \in A^{\perp}. Donc \; B^{\perp} \subset A^{\perp}$
2. $A^{\perp} = \{linA\}^{\perp}$
3. $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$
4. $A^{\perp} + B^{\perp} \subset (A \cap B)^{\perp}$
5. $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$
6. $\{0_E\}^{\perp} = E$

III-3-Théorème
Soit E un espace vectoriel de dimension fini n dont la forme bilinéaire symétrique associée est f. La forme bilinéaire f est non dégénérée si et seulement si le rang de f est égal à n.

Démonstration
On considère une base B de E

$$B = (V_1, V_2, \dots\dots, V_n)$$

$E^{\perp} = B^{\perp}$ et Kerf = $E^{\perp}$
Si x $\in Kerf \;\Leftrightarrow f(x, V_i) = 0 \;\; \forall \;\; 1 \leq i \leq n$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j V_j$$

$$f(x, V_i) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j V_j, V_i\right) \quad \forall i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j f(V_j, V_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(V_i, V_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \; \forall i$$

Or x $\in Kerf$, alors

$$f(x, V_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0$$

On obtient alors l'équation AX = 0 ce qui donne Kerf = O équivaut à X = 0
Ainsi l'équation AX = O a une seule solution X = 0 donc A est inversible et le rang de A est égal à n.

IV- Bases orthogonales

Soit E un espace vectoriel de dimension fini n dont la forme bilinéaire symétrique associée est f.

IV-1-Définitions
Définition1
Une $base \; B = (V_1, V_2, \dots\dots, V_n)$ est orthogonale par f si f(V_i, V_j) = 0 $\forall i \neq j$

Exemple 6
On considère les formes bilinéaires f et g définies sur IR^3 par :

$f(x,y) = -2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$ et
$g(x, y) = x_2y_2 - 2x_1y_3 + 2x_1y_2 + 3x_3y_1 + x_3y_2$
Vérifier si la base canonique de IR^3 est orthogonale par f ou par g.
Les vecteurs de la base canonique de IR^3 sont : $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$

$$f(e_1,e_2) = 0+0+0 = 0$$
$$f(e_1,e_3) = 0+0+0 = 0$$
$$f(e_2,e_3) = 0+0+0 = 0$$

On a : $f(e_i,e_j) = 0\ \forall i \neq j$, alors la base canonique est orthogonale par f.

$$g(e_1,e_2) = 2$$
$$g(e_1,e_3) = -2$$
$$g(e_2,e_3) = 0$$

Alors la base canonique n'est pas orthogonale par g.

Définition2
Soit q une forme quadratique définie sur un espace vectoriel E et x un vecteur de E.
On dit que x est isotrope pour q si q(x) = 0
Une partie A de E est isotrope si

$$A^{\perp} \cap A \neq \{O_E\}$$

Une partie A d E est non isotrope si

$$A^{\perp} \cap A = \{O_E\}$$

IV-2- Propositions
Proposition1
Soit E un espace vectoriel de dimension fini n muni d'une base $B = (V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n)$ et d'une forme bilinéaire symétrique sur E.
B est une base orthogonale pour f si et seulement si la matrice de f dans la base B est diagonale.

Démonstration
Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice de f dans la base B.

$$\Rightarrow a_{ij} = f(V_{i,}V_j) = 0 \qquad \forall\ i \neq j\ \ car\ B\ est\ orthogonale$$
$$a_{ij} = 0 \qquad \forall\ i \neq j\ \ ,alors\ la\ matrice\ A\ est\ diagonale$$
$$\Leftarrow Si\ A\ est\ diagonale\ alors\ a_{ij} = 0 \quad \forall\ i \neq j$$

On a : $f(V_{i,}V_j) = a_{ij} = 0 \quad \forall\ i \neq j\ \ alors\ B\ est\ orthogonale.$

Proposition2
Soit E un espace vectoriel de dimension fini n et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Alors pour tout sous espace vectoriel F de E, on a :
DimF + Dim $F^{\perp}$ = Dim E.

Proposition 3 .
Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q,
$B = (V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n)$ une base de E et $B' = (V'_1, V'_2, \ldots\ldots, V'_n)$ la base duale. Les conditions suivantes sont ´équivalentes :
(i) B est une base q-orthogonale ;
(ii) Mat_B (q) est diagonale ;
(iii) q est combinaison linéaire des carrées des formes linéaires li .

NB : Soient (K, +,x) un corps commutatif et E un K-espace vectoriel.
On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers K

L'ensemble L(E, K) des formes linéaires sur un K-espace vectoriel est appelé l'espace dual de E et noté E* . Une base de E* est appelée base dual.

V-Recherche des bases Orthogonaux
Réduction en carrée d'une forme quadratique
Soit E un espace vectoriel de dimension fini et q une forme quadratique **sur E.**

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j$$

Les $a_{ii}\, x_i^2$ sont les termes carrés et $a_{ij}\, x_i y_j$ *sont les termes rectangles.*
Premier cas si q contient des termes carrés
On cherche à décomposer en somme des carrées de la forme
Exemple 7

1. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1 x_2 - 4x_2 x_3$ (1)

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 - 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + {x_2}^2 - 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 4x_3^2 + 5x_3^2$$
$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$$
$$q(x) = (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + (l_2(x))^2 \quad (2)$$

La base $B^* = (l_1, l_2, l_3)$ *est une base du dual de* $E^* = IR^3$
(1) Est l'expression de q dans la base canonique B
(2) Est l'expression de q dans la base orthogonale B*
Soit P la matrice de passage de B à B*
X= PX'
Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *et* $X' = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} l_1 = x_1 + x_2 \\ l_2 = x_1 - 2x_2 \\ l_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = l_1 - l_2 - 2l_3 \\ x_2 = l_2 - 2l_3 \\ x_3 = l_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 - l_2 - 2l_3 \\ l_2 - 2l_3 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = PX'$$

V'_1= (1, 0, 0) , V'_2 = (-1, 1, 0) et V'_3 = (-2, -2, 1)
B'= (V'_1, V'_2, V'_3)

2. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_3^2$$
$$q(x) = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + 2x_2^2 - 2x_3^2$$
$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 - 2x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 4x_3^2$$
$$q(x) = (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 - (l_2(x))^2$$

$$\begin{cases} l_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ l_2 = x_1 - x_2 \\ l_3 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = l_1 - l_2 - l_3 \\ x_2 = l_2 + \frac{1}{2} l_3 \\ x_3 = \frac{1}{2} l_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 - l_2 - l_3 \\ l_2 - \frac{1}{2} l_3 \\ \frac{1}{2} l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = PX'$$

V’$_1$= (1, 0, 0) , V’$_2$ = (-1, 1, 0) et V’$_3$ = (-1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)
B’= (V’$_1$, V’$_2$, V’$_3$)

Deuxième cas si q contient des termes rectangles
On choisit un terme rectangle $a_{ij}\, x_i x_j$
On détermine les dérivées partielles $l_i = \frac{\delta q}{\delta x_i}$ et $l_j = \frac{\delta q}{\delta x_j}$
$q(x) = \frac{1}{a_{ij}} \frac{\delta q}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta q}{\delta x_j}$ + Terme correctif

Exemple 8

$$q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$$

$$l_1 = \frac{\delta q}{\delta x_1} = 5x_2 + 6x_3 \ ; \ l_2 = \frac{\delta q}{\delta x_2} = 5x_1 + 3x_3$$

$$q(x) = \frac{1}{5}(5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 3x_3) + \textit{terme correctif}$$

On développe $l_1 . l_2 = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3 + \frac{18}{5}\, x_3^2$. On déduit le terme correctif $\frac{18}{5}\, x_3^2$
Ainsi : $q(x) = \frac{1}{5}(5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 3x_3)$ - $\frac{18}{5}\, x_3^2$ = $\frac{1}{5} l_1 . l_2$ - $\frac{18}{5}\, x_3^2$
On veut exprimer le produit $l_1 . l_2$ en fonction des carrées.

$$(l_1 + l_2)^2 = l_1^2 + 2l_1 . l_2 + l_2^2 \ (1)$$
$$(l_1 - l_2)^2 = l_1^2 - 2l_1 . l_2 + l_2^2 \ (2)$$

On obtient en faisant (1) – (2) :

$$4l_1 . l_2 = (l_1 + l_2)^2 - (l_1 - l_2)^2$$
$$l_1 . l_2 = \frac{1}{4}[(l_1 + l_2)^2 - (l_1 - l_2)^2]$$
$$q(x) = \frac{1}{4}[(l_1 + l_2)^2 - (l_1 - l_2)^2] - \frac{18}{5}\, x_3^2$$

On remplace l_1 et l_2 par leurs valeurs respectives.

$$q(x) = \frac{1}{4}[(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - (5x_1 + x_2 + 3x_3)^2] - \frac{18}{5}\, x_3^2$$

VI-Caractérisation des formes quadratiques

VI-1- Caractérisation des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel IR

On considère un IR-espace vectoriel

VI-1-Définitions

Definition1
Une forme bilinéaire ou une forme quadratique sur IR sera dite réelle.

Definition2
On dit qu'une forme quadratique q est positive si et seulement si $q(x) \geq 0 \ \forall x \in IR$
On dit qu'une forme quadratique q est définie positive si et seulement si

$$q(x) > 0 \ \forall x \in IR \ddots \{0\}$$

Definition3
Une forme bilinéaire symétrique sur E est définie positive si la forme quadratique associée est définie positive.

VI-2- Propositions

Proposition1
Si la forme quadratique q est définie, alors elle est positive

Proposition2
Si la forme quadratique q est positive alors il y a égalité entre le noyau et l'ensemble des vecteurs singuliers appelés vecteurs isotopes

VI-3- Inégalité de Minkowwski

Si q est une forme quadratique positive, alors pour tous réels x et y, on a :

$$\sqrt{q(x+y)} \ \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

VI-4- Signature

On appelle signature d'une forme quadratique q définie sur un R- espace vectoriel, le couple S= (k, l) des entiers naturels qui rappelle que dans toute décomposition en carrées de q qu'il y a k coefficients positives et l coefficients négatives.
Pour la forme quadratique

$$q(x) = (x_1)^2 + (\,x_2)^2 - 4x_3^2$$

S = (2, 1)

VI-5- Théorème de Sylvestrer

Si (k, l) est la signature de la forme quadratique q, alors pour toute base orthogonale $B = (V_i)_{1\leq i\leq n}$ sur E , k (respectivement j) est le nombre des scalaires q(Vi)strictement positifs (respectivement négatifs)
La somme k +l est égale au rang de la forme quadratique q
Rang(q) = k +l