Analyse 3
Mouhamadou DIABY
Séquence 1 : Séries Numériques

Outline

Motivation

On s'intéresse à des suites définies par une somme, c'est-à-dire de la forme $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. En fait c'est une somme "infinie", à laquelle on va donner un sens en terme de limite de suite.

Exemple 1.1

On rappelle la progression géométrique, vu normalement dans le chapitre des suites numériques. Avec $q = \frac{1}{2}$, on a $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} \rightarrow_{n\to+\infty} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2.$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = 0.$

On a envie d'écrire "$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$" Il faut donc donner un sens à cette somme infinie.

Définitions série, somme partielle

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les suites considérées seront à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle **série de terme général** u_n, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
  On la note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou encore $\sum u_n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est **la somme partielle d'ordre** n de la serie.
- Le réel (ou complexe) u_n est le $(n+1)^{me}$ terme de la série $\sum u_n$.

Définitions convergence, divergence

Une série n'est qu'une suite. Dire que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) revient donc simplement à dire que la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge), et la nature de la série $\sum u_n$ est par définition sa convergence ou sa divergence.
Mais si les séries ne sont que des suites, pourquoi se doter d'une théorie des séries ? La théorie des suites n'est-elle pas suffisante ? La réponse est non.

- Grande question de la théorie des suites : à quelle condition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
- Cette question spécifique appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet du chapitre.

somme d'une série convergente, restes

Définition 1.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La limite finie : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et appelée **la somme de la série**.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on pose : $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ (n^{ieme} **reste de la série**), alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Comme dans le cas des suites, les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa nature, i.e. sur sa convergence ou sa divergence. Ils affectent en revanche la valeur de sa somme lorsqu'elle est convergente.

Remarque

Veuillez à ne pas confondre les notations $\sum u_n$ (la série) et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (sa somme, si elle existe).
En général, on cherche à connaître la nature d'une série, mais il est souvent difficile de connaitre la somme d'une série convergente.

Définition-Théorème 1 : Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{K}$. La série $\sum q^n$, dite série géométrique de raison q, est convergente si et seulement si : $|q| < 1$. En outre, dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Nature de quelques séries classiques

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$

Le résultat découle donc de nos connaissances sur la limite de la SUITE géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

- Toute série dont le terme général est nul à partir d'un certain rang converge car $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, $\sum u_n$ est divergente, car $s_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \to +\infty$.
- Les séries arithmétiques de la forme $\sum a.n$ diverge si $a \neq 0$, car $s_n = \sum_{k=0}^{n} a.k = a \sum_{k=0}^{n} k = a\dfrac{n(n+1)}{2} \to \pm\infty$

Proposition 1

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes. Par contre, si la série est convergente, la somme va être modifiée. Retenons que l'indice de départ est sans importance pour la nature de la série.

Démonstration.

En effet, si $u_n = v_n$ pour tout $n \geq N$, alors la convergence de $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ équivaut à celle de $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puisque $U_n - V_n = \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - v_k) = constante$ □

Exemple 2.1

$\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(n+1)}$ sont toutes deux convergentes mais

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 \neq \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{2}$

Proposition 2 : Condition nécessaire de Convergence

Pour que la série $\sum u_n$ convergence, **il faut** que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Mais **ce n'est pas suffisant !**

Démonstration.

En effet, si $\lim_{n\to+\infty} u_n s_n = S$, alors on a : $u_n = s_n - s_{n-1} \to_{n\to+\infty} S - S = 0$ □

Exemple 2.2

La suite $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$, $(n \geq 1)$ converge vers 0, mais
$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \to +\infty$, donc la série diverge !

Vocabulaire

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série ne converge pas : on dit qu'elle **diverge grossièrement**.

Exemple 2.3

La série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

Proposition 3 : Lien suite série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par simplification télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ □

Vocabulaire

La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est appelée série télescopique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 2.4

Considérons la suite de terme général $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$, $(n\geq 1)$. Puisque $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, on en déduit que $\sum u_n$ est une série télescopique. Elle est donc convergente, et de plus on a

$\sum_{k=1}^{n}u_k=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$.

D'où la somme considérée $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n+1})=1$.

Remarque

La série $\sum u_n$, avec $u_n=a_{n+q}-a_n$ et $q\geq 1$ est encore une série télescopique.

Proposition 4 : Opérations sur les séries

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- Pour tout $\lambda\in\mathbb{K}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum(\lambda u_n)$ ont même nature.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, la série $\sum(u_n+v_n)$ converge aussi.
- Si la série $\sum u_n$ converge alors que la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

Démonstration.

Le résultat est vrai pour les suites, et justement les séries sont des suites. □

Attention

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent toutes les deux, on ne peut rien dire en général de $\sum(u_n+v_n)$. Par exemple, la série $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge, donc la série : $\sum\dfrac{1}{n}+\sum\dfrac{1}{n}=\sum\dfrac{2}{n}$ aussi ; mais la série : $\sum\dfrac{1}{n}-\sum\dfrac{1}{n}=0$ converge.

Attention

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on ne peut rien dire en général de la série $\sum u_n . v_n$. Nous verrons plus tard que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et pourtant la série : $\sum(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

Définition 2.1

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument ou est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge. Une série numérique qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite **semi-convergente**.

Proposition 5

Toute série absolument convergente est convergente. De plus, on a alors :
$|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

✗ La réciproque est fausse, $\sum u_n$ converge n'implique pas que $\sum u_n$ converge absolument. (Ex. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$)

Le résultat suivant permet d'établir **la convergence** (ou la divergence) d'une série **sans en connaitre à priori la somme**.

Proposition 6 : Critère de Cauchy

Une série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le **critère de Cauchy** :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leq \epsilon$

Démonstration.

La suite (s_n) des sommes partielles converge si et seulement si elle est de Cauchy. Pour conclure, il suffit de remarquer que $s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$. □

Exemple 2.5 (*Divergence de la série harmonique*)

C'est par définition la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.
On a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
Le critère de Cauchy n'étant pas vérifié, on en conclut que **la série harmonique est divergente**.

On étudie à présent les séries dont le terme général est positif ou nul. Ce qui est vrai de ces séries serait en fait vrai des séries dont le terme général est négatif ou nul. L'essentiel est donc, dans ce paragraphe, que le terme général soit de **SIGNE CONSTANT**, et même **À PARTIR D'UN CERTAIN RANG**.

⚠ Attention
Avant d'utiliser les théorèmes de ce paragraphe, toujours vérifier la positivité des suites étudiées !

Définition 3.1

On dit qu'une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Proposition 7 : Adaptation aux séries du théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ POSITIVE. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration.

La suite $(\sum_{k=0}^{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geq 0$. Elle converge donc en effet si et seulement si elle est majorée d'après le théorème de la limite monotone. □

Notation

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, on écrira $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. Cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.
De même, pour indiquer que la série de terme général $u_n \geq 0$ converge, on écrit parfois $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

Proposition 8 : Règle de comparaison

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration.

La nature des séries ne dépendant pas de ses premiers termes, on peut prendre $n_0 = 0$. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$.

- Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ est majorée, donc converge d'après le théorème de la limite monotone pour les séries à termes positifs.
- Si la série $\sum u_n$ diverge : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ d'après le théorème de la limite monotone pour les séries à termes positifs, donc :
$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$ par minoration, donc la série $\sum v_n$ diverge.

□

Exemple 3.1

- $\forall n \geq 2$, on a $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. On a vu que la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente, la règle de comparaison permet de déduire que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.
- $\forall n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique est divergente, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Attention

Le théorème est faux si les séries ne sont pas à termes positifs.
Contre-exemple : $\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ avec $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge.

La règle de comparaison permet d'établir un autre critère important qui est la règle d'équivalence.

Proposition 9 : Règle d'équivalence

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors :

- Les séries sont de même nature.
- En cas de convergence, les restes sont équivalents.
- En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalents.

Démonstration.

La relation d'équivalence sur les suites étant symétrique, il nous suffit de montrer que si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. Or par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc : $|\frac{u_n}{v_n}| < 2$ à partir d'un certain rang, ou encore : $0 \leq u_n \leq 2v_n$. Par comparaison du coup, si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. □

Exemple 3.2

Considérons la série $\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{\pi}{n})$. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{\pi}{n} \leq \pi$ donc $\sin(\frac{\pi}{n}) \geq 0$. Comme $\sin(x) \sim_0 x$ et que $\frac{\pi}{n} \to 0$, $\sin(\frac{\pi}{n}) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{n}$ avec $\frac{\pi}{n} > 0$ pour $n \geq 1$. Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{n} = \pi \sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), par le théorème d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{\pi}{n})$ diverge.

Exemple 3.3

Considérons la série $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n+8n^2+3}{4^n-63}$. Pour $n \geq 3$, $4^n - 63 > 0$ et donc $\frac{3^n+8n^2+3}{4^n-63} > 0$. De plus, $\frac{3^n+8n^2+3}{4^n-63} \sim_{+\infty} \frac{3^n}{4^n} = (\frac{3}{4})^n$. Or, $\sum_{n\geq 0}(\frac{3}{4})^n$ est la série géométrique de raison $0 < \frac{3}{4} < 1$, donc convergente.

Attention

Le théorème est faux si les séries ne sont pas à termes positifs.
Contre-exemple : Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$. On a $u_n \sim_{+\infty} v_n$ avec $\sum u_n$ diverge (car somme d'une convergente et d'une divergente). $\sum v_n$ converge (car somme de deux séries convergentes).

Séries de comparaison

Le résultat suivant traite des séries qui serviront de référence pour appliquer les règles de comparaison et d'équivalence.

Proposition 10

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

Si $\alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, or la série harmonique diverge, donc il en est de même pour la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Si $\alpha > 1$ et si on note $\beta = \alpha - 1 > 0$, la série télescopique $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta})$ est donc convergente. Or : $\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta}(1-(1+\frac{1}{n})^{-\beta}) \sim \frac{1}{n^\beta} \times \frac{\beta}{n} = \frac{\beta}{n^{\beta+1}} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$.
Par la propriété des séries positives équivalentes, on en déduit que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge, c'est-à-dire que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. □

Séries de comparaison

De la proposition précédente, on déduit les règles pratiques suivantes qui sont des conséquences faciles de la règle de comparaison.

Corollaire 1 : Règle $n^\alpha u_n$ (ou Règle de Riemann)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs

- Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers 0 et si $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers $+\infty$ et si $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

Montrer que ces relations permettent de comparer, pour n assez grand, u_n à un multiple du terme général d'une série de Riemann. En déduire la preuve.

□

Corollaire 2 : Règle de domination

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ quand $n \to +\infty$. Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$. Dans ce cas, les restes respectifs $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ vérifient $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration.

Montrer que ces relations permettent de comparer, pour n assez grand, u_n à un multiple du terme général d'une série de Riemann. En déduire la preuve.

□

Rappelons que si : $u_n =_{n\to+\infty} o(v_n)$, alors : $u_n =_{n\to+\infty} \mathcal{O}(v_n)$. Le théorème de comparaison par des grands $\mathcal{O}$ est ainsi souvent utilisé avec des petits o sans qu'on prenne la peine de revenir à des grands $\mathcal{O}$.

En plus des séries de Riemann, les séries de Bertrand fournissent une autre famille de séries de référence qui permettent parfois, grâce aux règles de comparaison et d'équivalence, de décider de la convergence ou non.

Proposition 11 : Séries de Bertrand

La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Démonstration.

- Cas 1 : $\alpha > 1$: Dans ce cas on a $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} > 1$. Utiliser la règle de Riemann.
- Cas 2 : $\alpha < 1$: Traduire $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$ et en déduire que $\forall A > 0, u_n > \frac{A}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge.
- Cas 2 : $\alpha = 1$: Si $\beta \leq 0$ alors $\forall n \geq 3$ on a $((\ln n)^{-\beta}) \geq 1$. D'ou $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$. Conclure Si $\beta > 0$, utiliser le théorème de comparaison d'une série avec une intégrale.

Critères classiques

Proposition 12 : Règle de Cauchy usuelle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$ existe. Alors

- Si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\lambda > 1$, la série diverge.

Démonstration.

Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$, on a alors : $\forall \epsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N; \lambda - \epsilon < \sqrt[n]{|u_n|} < \lambda + \epsilon$

- Si $\lambda < 1$ en prenant $\epsilon \in]0; 1-\lambda[$, alors on a $\forall n \geq N$; $\sqrt[n]{|u_n|} < \lambda + \epsilon < 1$. Conclure par comparaison à une série géométrique.
- Si $\lambda > 1$ en prenant $\epsilon = \lambda - 1$, on donc $\forall n \geq N; 1 < \lambda - \epsilon < \sqrt[n]{|u_n|}$. Conclure sur la divergence grossière.

□

Remarque

- Si $\lambda = 1$, on peut rien dire à priori.
- On essaiera d'appliquer la règle de Cauchy lorsque le terme général contient des puissances nièmes.

Exemple 3.4

Pour la série de terme général $u_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$, on a pour tout $n \geq 1$:
$\sqrt[n]{u_n} = (1-\frac{1}{n})^n = \exp[n\ln(1-\frac{1}{n})]$ et $\forall n$ suffisamment grand,
$\ln(1-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$. Donc $n\,\ln(1-\frac{1}{n}) = -1 + o(1)$.
Par la continuité de l'exponentielle on a alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-1}$. Comme $e^{-1} < 1$, on conclut que la série $\sum(1-\frac{1}{n})^{n^2}$ converge.

Critères classiques

Proposition 13 : Règle d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ non nulle à partir d'un certain rang.
Supposons que $\lim_{n\to+\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \lambda$ existe. Alors

- Si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\lambda > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

- Dans le premier cas, comparer u_n à une suite géométrique (v_n) de raison $\frac{\lambda+1}{2}$, en utilisant la décroissance à partir d'un certain rang n_0 de la suite $(\frac{u_n}{v_n})$. Conclure par comparaison à une série géométrique.
- Dans le second cas, montrer la divergence grossière.

Remarque

- Si $\lambda = 1$, on peut rien dire à priori.
- On essaiera d'appliquer la règle d'Alembert lorsque le terme général de la série contient des produits et des factorielles (et des puissances nièmes, même s'il est préférable d'utiliser la règle de Cauchy).

Exemple 3.5

Pour la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = a\frac{n}{n+1}$, donc $\lim_{n\to+\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = a$.
Il en résulte que $\sum(\frac{a^n}{n})$ converge si $a < 1$ et diverge si $a > 1$.
Si $a = 1$, on a $u_n = \frac{1}{n}$ et on sait que la série harmonique diverge.

Séries alternées

Définition 3.2 (*Série alternée*)

On appelle série alternée toute suite série de terme général $(-1)^n v_n$ où v_n est une suite réelle de signe constant.

Proposition 14 : Critère de Leibniz

Soit v_n une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum(-1)^n v_n$ est convergente. De plus, sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, $\forall n$ et son reste R_n d'ordre n vérifie $|R_n| \leq v_{n+1}$.

Démonstration.

Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nous allons montrer que les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, cela montrera qu'elles sont convergentes de même limite d'après le théorème des suites adjacentes., et donc que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le théorème des suites extraites. $\square$

Remarque

Si l'étude de la monotonie parait délicate, un mélange de techniques est souvent préférable.

Exemple 3.6

Soit la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, α fixé. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, donc $u_n = (-1)^n |u_n|$.

- Si $\alpha \leq 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \neq 0$. Donc la série $\sum(\frac{(-1)^n}{n^\alpha})$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, on a $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ de Riemann est donc convergente (car $\alpha > 1$). D'ou la série $\sum(\frac{(-1)^n}{n^\alpha})$ est absolument convergente et donc convergente.
- Si $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente car la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dans ce cas ne converge pas. Cependant on a la suite $(|u_n|)$ est décroissante et d'après le théorème précédent, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Produit de Cauchy de deux séries

Définition 3.3

Étant donné deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on définit leur série produit comme la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Exemple 3.7

Soient les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$. Ces deux séries vérifient les hypothèses du critère de Leibniz donc elles convergent.
Leur produit a pour terme général $w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\ln(n-k+2)}$.
De plus, $|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\ln(n-k+2)} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)}$. On en déduit que $|w_n| \geq \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n+2)}$. Donc la suite (w_n) ne tend pas vers 0, et la série produit $\sum w_n$ est divergente.
Cet exemple montre en particulier que le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut être une série divergente.

Règle d'Abel

Proposition 15

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes complexes tel que $u_n = a_n b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- $(a_n)_n$ est une suite réels positifs, décroissante et qui tend vers 0.
- Il existe un $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} b_k| \leq M$.

Alors, la série $\sum u_n$ converge.

Remarque

Le critère des séries alternées est un cas particulier de la règle d'Abel (en prenant $a_n = v_n$ et $b_n = (-1)^n$).

Récapitulatif des techniques de Convergence : Plan d'étude

Considérions une série $\sum u_n$ à termes quelconques. Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

- Si son terme général tend vers 0.
- Si elle est de signe constant :
  - on se ramène à une série à terme général positif.
  - on applique les théorèmes de comparaison/domination/équivalence avec/par des séries de références (géométrique, Riemann, exponentielle).
  - on peut essayer le critère d'Alembert.
- Si elle est de signe quelconque :
  - on étudie la convergence absolue de la série.
  - si la situation s'y prête, in applique le critère des séries alternées.
  - on peut essayer d'effectuer un développement limité de son terme general.