SUITES ET SERIES DE FONCTIONS
Mouhamadou DIABY
Séquence 3 :

SERIES ENTIERES

(ANALYSE 3)

Mouhamadou DIABY

Université Virtuelle du Sénégal

1er Avril 2021

Outline

Rayon de Convergence

Dans ce chapitre, on introduit la notion de séries entières. Ces fonctions sont importantes quant à leurs applications (sur les équations différentielles, par exemple). D'autre part, elles représentent une classe de fonctions se comportant "bien" : infiniment dérivable sans comportement étrange, etc.

Exemple 1.1 (*Présentation du problème*)

Si on considère une suite de fonctions $f_0, f_1, \cdots$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge. On peut alors définir $f_\infty : I \to \mathbb{R}$ par $f_\infty(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Définitions Notion de série entière

Définition 1.1

On appelle série entière de variable réelle, toute série de fonctions $\sum f_n$ dans laquelle f_n est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $z \mapsto a_n z^n$ où (a_n) est une suite donnée de nombre réels. Une telle série est notée $\sum a_n z^n$ et (a_n) est appelée la suite des coefficients de la série entière. On appelle somme de la série entière $\sum a_n z^n$ l'application S définie en tout point où cela a un sens par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Remarque

Il n'y aucune raison pour que la série $\sum a_n z^n$ converge pour un $x \in \mathbb{K}$ donnée. Cependant la série converge pour $x = 0$. Les séries entières sont une généralisation des fonctions polynômes.

Proposition 1 : Lemme d'Abel

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout nombre complexe z tel que $0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration.

On peut supposer $z_0 \neq 0$ (car $z_0 = 0$, il n'y a rien à démontrer !). Posons $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n z_0^n|$.
Si $0 \leq |z| < |z_0|$, on a $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times |\frac{z}{z_0}|^n \leq M q^n$ avec $0 \leq q = |\frac{z}{z_0}| < 1$.
Puisque $q \in]0, 1[$, $\sum q^n$ est une série géométrique convergente. La règle de comparaison permet d'en déduire que la série $\sum |a_n z^n|$ converge, i.e la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. $\square$

Remarque

La preuve montre aussi que si $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $\sum a_n z^n$ diverge pour tout z avec $|z| > |z_0|$.

Exemple 1.2

Soit la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$. Alors, on remarque que $x = 1$, la suite $(\frac{1}{n})$ est bornée. D'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$.

Proposition 2

Il existe un nombre réel R et un seul tel que

- si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument,
- Si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0 ; ici elle n'est pas bornée).
- Si $|z| = R$, la série peut converger ou diverger (cas limite).

N.B :

On peut avoir $R = 0$ ou $R = +\infty$. Si $R = +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et la somme de cette série entière définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dite **fonction entière**.

5 / 30

Démonstration.

- Existence : On pose $E = \{r \geq 0 \text{ tel que } (|a_n| r^n) \text{ soit bornée}\}$. Si cet ensemble n'est pas majorée, on pose $R = +\infty$ et on prouve que la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Si cet ensemble est majorée, c'est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure R. On prouve alors le résultat énoncé.
- Unicité : Si R_1 et R_2 vérifient les conditions énoncées avec $R_1 \neq R_2$, on prend $r \in]R_1, R_2[$ pour trouver une contradiction.

$\square$

6 / 30

Définition Rayon de convergence

Définition 1.2

L'élément R de $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définit ci-dessus par
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée $\}$ s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$. Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ est le **disque de convergence**. Il est vide si $R = 0$ et coïncide avec $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.
Si $z = x$ un réel, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; -R < x < R\}$ est l'intervalle de convergence de la série entière $\sum a_n\, x^n$

Remarque :

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$ est appelé le cercle d'incertitude.

Méthodes pratiques pour calculer R

Nous poserons $\frac{1}{R} = 0$ si $R = +\infty$, et $\frac{1}{R} = \infty$ si $R = 0$.

Proposition 3 : Règle D'Alembert

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière, et notons R son rayon de convergence. Si la suite de terme général $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ converge vers $L \in \bar{\mathbb{R}}_+$, alors $R = \frac{1}{L}$.

Démonstration.

On utilise le critère de D'Alembert des séries : $|\frac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}||z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$. Ainsi la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument dès que $l|z| < 1$. Ce qui permet de conclure. □

Exemple 1.3

Pour la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, on a
$\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Le rayon de convergence est donc égal à $+\infty$.

Remarque :

Si la suite de terme général $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ n'as pas de limite dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, la règle d'Alembert est inapplicable. C'est le cas de la série $\sum(2+(-1)^n))z^n$.

Proposition 4 : Formule de Hadamard

Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n\, z^n$ est donné par $R = \frac{1}{L}$ avec $L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration.

L'égalité $|a_n\, z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}}|z|$ montre que la série converge absolument pour $|z| \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ et diverge pour $|z| \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$. Par conséquent, la série converge absolument si $|z| < \frac{1}{L}$ et diverge si $|z| > \frac{1}{L}$. Donc $R = \frac{1}{L}$. □

9 / 30

Corollaire 1 : Règle de Cauchy

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière. Si la suite de terme général $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ converge vers $L \in \bar{\mathbb{R}}_+$, alors $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 1.4

Pour la série entière $\sum \frac{n}{2^n} z^n$, on a

$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n}}}{2} = \frac{1}{2}$.

D'où $R = 2$.

Remarque

Les critères de D'Alembert et de Cauchy sont en pratique les plus utilisés pour calculer des rayons de convergence. Cependant, il peut arriver que les limites considérées n'existent pas. On peut alors avoir recours à une formule explicite du rayon de convergence dite formule de Hadamard.

10 / 30

Comparaison de rayon de convergence

Soient $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

Proposition 5 : Comparaison et convergence

Si $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b alors

i. $\left(a_n =_{n\to+\infty} O(b_n)\right) \Rightarrow R_a \geq R_b$.

ii. $\left(a_n \sim_{n\to+\infty} b_n\right) \Rightarrow R_a = R_b$.

Démonstration.

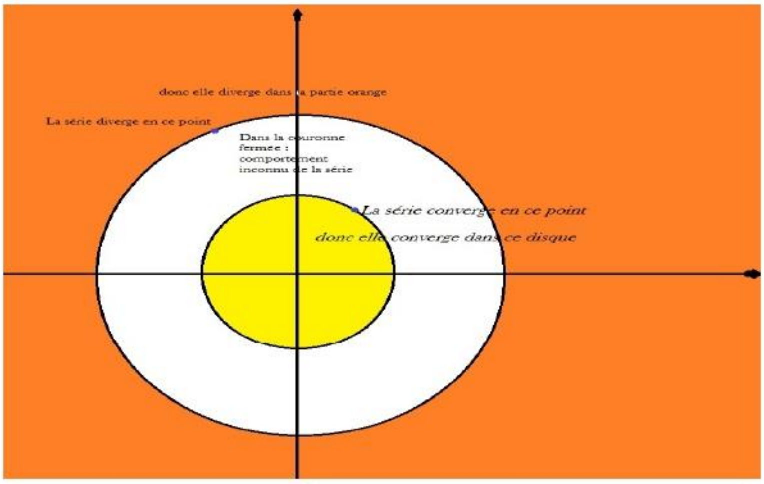
i. $\exists K \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| \leq K|b_n z^n|$. si $|z| < R_b$, alors $\sum b_n\, z^n$ converge absolument ainsi que $\sum a_n\, z^n$ et donc $|z| \leq R_a$; d'où $R_a \geq R_b$.

ii. On applique le point précédent car $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\frac{1}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq \frac{3}{2}|b_n|$. □

11 / 30

Exemple

$\forall N \in \mathbb{N}$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos n} \leq e$. Les séries $\sum e^{-1} z^n$ et $\sum e\, z^n$ étant de rayon de convergence égal à 1, la série $\sum e^{\cos n}\, z^n$ est elle aussi de rayon de convergence égal à 1.



12 / 30

Opérations sur les séries entières

Proposition 6

Soient $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ de rayon de convergence respectifs R_a et R_b, alors :

- Le rayon de convergence R de la série somme vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)\, z^n$,
- En multipliant $\sum a_n\, z^n$ par $\lambda \neq 0$, on ne change pas le rayon de convergence. De plus, si $|z| < R_a$, on a $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\, a_n)\, z^n$,
- Le rayon de convergence de la série produit (ou produit de Cauchy) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$
.

13 / 30

Démonstration.

- Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, d'après la proposition 2, les séries $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ sont absolument convergentes donc il en est de même de la série somme puisque $|(a_n + b_n)\, z^n| \leq |a_n\, z^n| + |b_n\, z^n|$. Et on a $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus l'égalité est clairement vérifiée. Supposons que $0 < R_a \leq R_b$. Pour tout réel positif r tel que $R_a < r < R_b$, la série $\sum (a_n + b_n)\, r^n$ est divergente comme somme d'une serre divergente $\sum a_n\, r^n$ et d'une convergente $\sum b_n\, r^n$. D'ou $R \leq \min(R_a, R_b) = R_a$ et l'égalité $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$.
- La preuve est évidente, notons que si l'on multiplie par 0 on obtient la série entière nulle, $R = +\infty$.
- Pour $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, les deux séries entières convergent absolument. Leur série produit converge également. On a donc $R \geq \min(R_a, R_b)$.

□

14 / 30

Série entière dérivée et Série entière primitive

Définition 1.3

- On appelle série entière dérivée d'une série entière $\sum a_n\, z^n$ la série entière $\sum (n+1) a_{n+1}\, z^n$ (ou encore $\sum_{n\geq 1} n\, a_n\, z^{n-1}$) ;
- On appelle série entière primitive d'une série entière $\sum a_n\, z^n$ la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1}\, z^{n+1}$.

Proposition 7

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
La série dérivée $\sum_{n\geq 1} n\, a_n\, z^{n-1}$ et la série primitive $\sum \frac{a_n}{n+1}\, z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence R.

Démonstration.

Comme $\sum a_n\, z^n$ est la série dérivée de $\sum \frac{a_n}{n+1}\, z^{n+1}$, il suffit de montrer qu'une série $\sum a_n\, z^n$ et sa dérivée $\sum_{n\geq 1} n\, a_n\, z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

Notons R et R' leur rayon de convergence respectif.

- Pour tout réel r tel que $0 \leq r < R'$, la suite $(n\, a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi en vertu de la majoration : $|a_n r^n| \leq |n a_n|\, r^n = r|n\, a_n|\, r^{n-1}$.
  Donc $r \leq R$ et on en déduit $R' \leq R$.
- Réciproquement, soit $r < R$ et fixons r_0 tel que $r < r_0 < R$.
  On a : $n a_n r^n = n(a_n r_0^n)(\frac{r}{r_0})^n$. Dans cette inégalité, la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et d'après le lemme d'Abel, $r < R'$ c'est-à-dire $R \leq R'$.

On a donc démontré la proposition $R = R'$. □

Propriétés de la fonction somme

Continuité de la fonction somme

Proposition 8

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et S la somme. Alors la fonction S est continue sur le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{K}/|z| < R\}$.

Démonstration.

Cas réel : on a vu en effet que la série convergeait normalement sur $[-r, r]$ pour $r < R$, donc S est continue sur un tel $[-r, r]$ et donc finalement sur $]-R, R[$.
Attention : On admet le résultat dans le cas de la variable complexe. $\square$

Remarque

Par la seule connaissance du rayon de convergence, on peut rien dire sur la définition et l'éventuelle continuité de f en $\pm R$.

17 / 30

Exemple 2.1

Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$. Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$. La fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est donc continue sur $]-1, 1[$.

- Cas : $x = -1$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, qui est divergente. Donc f n'est pas définie en $x = -1$.
- Cas : $x = 1$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, qu'est une série harmonique alternée convergente. Donc f est définie en $x = 1$. Ainsi, elle est continue en $x = 1$ par la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0, 1]$.

18 / 30

Dérivabilité de la fonction somme

Proposition 9

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction S, somme, définie sur $]-R, R[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée S' est la fonction somme de la série entière dérivée.
S' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,
$\forall x \in]-1, 1[$, $S^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$.

Démonstration.

La deuxième expression de $S^{(k)}$ se déduit de la première par un simple changement d'indice. Par récurrence sur k :

- $k = 1$: S est $\mathcal{C}^1$.
- si le résultat est vrai pour un certain k, on applique pour montrer l'hérédité.

□

19 / 30

Exemple 2.2

On a vu que la série géométrique $\sum x^n$ est de rayon de convergence 1 et que $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Par dérivation, on a $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

Par récurrence immédiate sur k, on en déduit que $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n) = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)\cdots(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!n!}x^n$.

Remarque :

Autrement dit, on peut dériver termes a termes la somme d'une série entière dans l'intervalle ouvert $]-R,R[$

Corollaire 2

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R. Sa fonction somme S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Intégrabilité de la fonction somme

Proposition 10

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme S. Alors $\forall x \in]-R,R[, \int_0^x S(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

On intègre "terme à terme".

Exemple 2.3

Comme vu dans l'exemple précédent, on peut affirmer que $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ admet un rayon de convergence égal à 1 et que S admet pour primitive sur $]-1,1[$ la fonction $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. F est l'unique primitive de S s'annulant en 0. Or, S coïncide avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$ et $x \mapsto -\ln(1-x)$ en est une primitive s'annulant en 0. Par unicité de la primitive s'annulant en 0 pour cette fonction, on conclut que

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

Fonctions développables en série entière

Fonctions développables en série entière

Définition 3.1

Soit f une fonction complexe de variable réelle, définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière en 0, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un nombre $r \in]0, R[$ avec $]-r, r[\subset X$ telle que $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exemple 3.1

Tout polynôme P est développable en série entière en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, d'après la formule de Taylor.

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{n=0}^{degP} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

22 / 30

Proposition 11 : Determination des coefficients a_n

Soit f une fonction développable en série entière en x_0, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le développement en série entière de f en x_0 est $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Cette série est appelée la série de Taylor de f en x_0.

Démonstration.

f est développable en série entière en x_0 alors $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. Or, la somme S de la série $\sum a_n(x-x_0)^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S^{(n)}(x_0) = n! a_n$.
En effet $f(x_0) = 0$. D'après le théorème de dérivation, $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ et alors, $f'(x_0) = a_1$, $\cdots$ □

Conditions pour qu'une fonction soit développable en SE

Pour qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit développable en série entière autour de 0, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites

- il existe un intervalle ouvert I centre en 0 tel que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ;
- la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a un rayon de convergence R non nul.

Cette série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est dite de Taylor.
Remarquez que ces conditions ne sont pas suffisantes !

Proposition 12 : CS DSE

Pour que la fonction f soit développable en série entière sur un intervalle ouvert centré en 0, il suffit qu'il existe des réels dans $C(0, r)$ et M tels qu'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-r, r[$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$.
La fonction f est alors développable en série entière sur $]-r, r[$.

Démonstration.

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre n sur $]-r,r[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k| = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\theta)| \leq M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$, avec $\theta \in]0,1[$ et $\lim_{n\to+\infty} M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Le rayon de convergence R vérifie alors $R \geq r$.

□

Attention !

S'il existe, un développement en série entière autour de 0, est unique.
Une fonction qui est DSE (développable en série entière) en chacun des points de son intervalle de définition est dite **analytique**.

Exemple 3.2 (***La fonction exponentielle***)

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$, pour tout $a \in [0,+\infty]$, $\sup_{x\in[-a,a]} |f^n(x)| \leq e^a$ alors $x \in [-a,a]$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et comme a est quelconque alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

25 / 30

Développement en séries entières usuels

- $R = +\infty, \quad \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $R = +\infty, \quad \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $R = +\infty, \quad \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
- $R = +\infty, \quad \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $R = +\infty, \quad \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

26 / 30

- $R=1, \quad]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^n}{n!}$
- $R=1, \quad]-1,1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n$
- $R=1, \quad]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
- $R=1, \quad]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,x^n}{n}$
- $R=1, \quad [-1,1[, \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

27 / 30

Application aux équations différentielles

Les sommes des séries entières étant des fonctions qui sont faciles à dériver enrichissent du coup notre liste de fonctions "classiques". D'où leur intérêt pour résoudre des équations différentielles comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 3.3

Soit l'ED0 $y' = y$, avec la condition initiale $y(0) = 1$. Imaginons que nous connaissons pas la fonction exponentielle et cherchons une solution parmi les fonctions DSE.
Une telle fonction $S : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est solution si et seulement si $S(0) = 1$, i.e $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ sur $]-R, R[$. Cela équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$, et puis par récurrence, on trouve $a_k = \frac{1}{k!}$.
On a déjà étudié une telle série (la fonction exponentielle). Elle est de rayon infini, donc sa somme est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. On démontre ainsi l'existence d'une solution à l'EDO donnée, définie sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, les séries entières sont utiles pour trouver des solutions particulières d'EDOs, notamment du second ordre : $a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.

28 / 30

Determination du rayon de convergence : En pratique (1)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, on peut :

- revenir à la définition en montrant que l'ensemble des réels r positifs tels que la série $\sum |a_n| r^n$ converge admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+$ (cette borne étant alors le rayon de convergence de la série entière) ;
- établir l'existence d'un réel R (parfois égal à 1) tel que pour tout nombre complexe z de module strictement inférieur à R, la série entière $\sum a_n z^n$ converge, et tel que tout nombre complexe z de module strictement supérieur à R, la série entière $\sum a_n z^n$ diverge (R étant alors le rayon de convergence de la série entière).

29 / 30

Determination du rayon de convergence : En pratique (2)

- appliquer la règle de D'Alembert :
- appliquer la règle de Cauchy
- si on reconnait une somme de deux séries entières de convergence respectifs R et R', se souvenir que le rayon $R"$ de la série entière somme vérifie : $R" \geq \inf(R, R')$; examiner alors si $\inf(R, R')$ est le rayon de cette série entière (ce qui est notamment le cas si $R \neq R'$).
- si on reconnait un produit de Cauchy de deux séries entières de rayons de convergence R et R', se souvenir que le rayon $R"$ de la série entière produit vérifie : $R" \geq \inf(R, R')$; examiner alors si $\inf(R, R')$ est le rayon de cette série entière ;

30 / 30