Algèbre 3

Ange P Mayouma

Séquence 5 : Réduction des matrices (diagonalisation et trigonalisation) des endomorphismes

I- Diagonalisation d'une matrice carrée

I-1- Définition des matrices semblables

Deux matrices carrées d'ordre n A et B sont semblables s'il existe une matrice carrée inversible, P, telle que
$B = P^{-1}AP$ou $A = PBP^{-1}$

I-2- Théorème

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Preuve

$$det(B - \lambda I) = det(P^{-1}AP - \lambda I)$$
$$det(B - \lambda I) = det[P^{-1}(AP - \lambda I)P]$$
$$= det[P^{-1}(A - \lambda I)P]$$
$$= det[P^{-1}] \times det[A - \lambda I] \times det[P]$$
$$det(B - \lambda I) = det(A - \lambda I)$$

I-3-Diagonalisation

I-3-1 Définition

Soit M une matrice carrée d'ordre n. On dit que M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D. Autrement dit s'il existe une matrice inversible P dite matrice de passage telle que :
$D = P^{-1}MP$ou$M = PDP^{-1}$
Diagonaliser une matrice M, c'est trouver une matrice inversible P, telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

I-3-2- Cas où les valeurs propres sont deux à deux distinctes

Théorème1

Soit M une matrice carrée d'ordre n ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

Alors M est diagonalisable.

Démonstration
Soit $P = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$ la matrice formée des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres respectives$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.
On a :

$$\begin{aligned} MP &= [MX_1, MX_2, \cdots, MX_n] \\ &= [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_n X_n] \end{aligned}$$

$$MP = [X_1, X_2, \cdots, X_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$MP = PD$$

où

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

P est inversible car les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \cdots, \vec{X}_n$ sont linéairement indépendants.

$$MP = PD \Leftrightarrow P^{-1}MP = D$$

Exercice N° 1

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Les sous-espaces vectoriels propres sont :

$E_{\lambda=1} = \{\alpha(-3,1)/\alpha \in IR\}$. Engendré par le vecteur $(-3,1)$

$E_{\lambda=5} = \{\alpha(1,1)/\alpha \in IR\}$· Engendré par le vecteur $(1,1)$

La matrice de passage, P, formée des vecteurs propres de M est :

$$P = [X_1, X_2] = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de P est : $P^{-1} = [U_1, U_2]$

$$P^{-1} = [U_1, U_2] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P^{-1}MP = Diag[\lambda_1, \lambda_2]$$

I-3-3-Cas où les valeurs propres sont multiples

Soit M une matrice carrée d'ordre n ayant p valeurs propres deux à deux distinctes.
Notons r_il'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i pour tout $i = 1,2,\cdots,p$.
Notons $m_i$la dimension du sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre $\lambda_i$pour tout $i = 1,2,\cdots,p$.

Théorème 2

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée M d'ordre n soit diagonalisable est que pour chaque valeur propreλ_i, la dimension du sous-espace vectoriel propre E_{λ_i}soit égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i.
M diagonalisable $\Leftrightarrow dim\, E_{\lambda_i} = m_i = r_i \forall i = 1,2,\cdots,p$

Exercice N°2

On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que M est diagonalisable.
2) Trouver une matrice P et vérifier que $P^{-1}MP$

Corrigé

1.a) Recherche de valeurs propres

$$det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(3+\lambda)^2(\lambda - 3) = 0$$

Les valeurs propres de M sont :$\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3$
1.b) Recherche de vecteurs propres et s.e.v. associés.

$$(M - \lambda I)X = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Pour $\lambda = -3$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ y \in IR \\ z \in IR \end{cases}.$$

Posons $y = \alpha$ et $z = \beta$

$$X = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Donc le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre double$\lambda = -3$ est :

$$E_{\lambda=-3} = \{\alpha(2,1,0) + \beta(-1,0,1)/\alpha et \beta \in IR\}$$

$E_{\lambda=-3}$ est engendré par deux vecteurs $\vec{X}_1 = (2,1,0)$ et $\vec{X}_2 = (-1,0,1)$.
On a :$dim\, E_{\lambda=-3} = 2$

ii) Pour $\lambda = 3$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0(1) \\ -2x - 2y - 2z = 0(2) \\ x - 2y - 5z = 0(3) \end{cases}$$

En faisant (1) – (2) et (2) – (3) , on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 3z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z \in IR \end{cases}$$

Posons $z = \alpha$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Donc le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre double$\lambda = 3$ est :

$$E_{\lambda=3} = \{\alpha(1,-2,1)/\alpha \in IR\}$$

$E_{\lambda=3}$ est engendré par deux vecteurs $\vec{X}_3 = (1,-2,1)$.

On a :$dim\, E_{\lambda=3} = 1$

Alors la matrice M est diagonalisable d'après le théorème sur la condition nécessaire et suffisante.

2) Matrice de passage

$P = [X_1, X_2, X_3]$ avec$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

P s'écrit alors :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$DetP = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$ et $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On a :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}MP = D$$

I-4- Matrices symétriques

I-4-1-Théorème

Toute matrice carrée symétrique M d'ordre n a les propriétés suivantes :

- elle est diagonalisable
- toutes ses valeurs propres sont réelles
- deux vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux

Exercice N°3

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Recherche de valeurs propres et vecteurs propres.

Le polynôme caractéristique

$$P_3(\lambda) = Det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$$

$$P_3(\lambda) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Les valeurs propres de M sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 4$

i) Pour $\lambda_{.} = 2$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in R \\ z \in R \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = yU_1 + zU_2$$

$$E_{\lambda=2} = Vect(U_1, U_2)$$

On a : $DimE_{\lambda=2} = 2$

ii) Pour $\lambda_{.} = 4$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in R \\ z = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = xU_3$$

$$E_{\lambda=2} = Vect(U_3)$$

On a : $DimE_{\lambda=2} = 1$

Alors la matrice M est diagonalisable d'après le théorème sur la condition nécessaire et suffisante.

On a :

2) Matrice de passage

$$P = [U_1, U_2, U_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det(P) = 2 , alors P est inversible

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = D$$

$$P^{-1}MP = D$$

I-4-2- Remarque :
Pour obtenir une base formée des vecteurs propres unitaires, on norme chaque vecteur

II- Endomorphisme Nilpotent

II-1- Définition

Soit f un endomorphisme E d'un k -espace vectoriel de dimension finie.
L'endomorphisme f est dit nilpotent s'il existe un entier m > 0 vérifions $f^m = 0$

II-2- Théorème

Soit f un endomorphisme de E d'un k -espace vectoriel de dimension finie.
Si f est nilpotent, alors $Ker(f) \neq \{0_E\}$

Démonstration
Soit un entier $m \geq 1$ *tel que* $f^m = 0$.
Alors $Det(f^m) = Det(f)^m = Det(0) = 0$.
Ainsi Det(f) = 0.

II-3- Matrice nilpotent

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
La matrice A dite nilpotent s'il existe un entier m tel que : $A^m = O_n$

III- Application à la résolution des systèmes différentiels

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = x + 3y\\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y\end{cases}$$

Corrigé
Posons

$$X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\ et\ \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$$

Sous forme de matrice le système s'écrit :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Soit $\frac{dX}{dt} = AX$

a) Recherche de valeurs propres de A.

$$det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)$$

Les valeurs propres de A sont :$\lambda_1 = -1 \;\; et \; \lambda_2 = 4$

b) Recherche de vecteurs propres de A.

$\begin{cases} (1-\lambda)x + 3y = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$ (1)

Pour $\lambda = -1$, le système (1) devient :

$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} on\ a\ 2x + 3y = \ 0$

On a : $x = \frac{-3}{2}y$

Pour tout $X = (x, y) \in E_{\lambda=-1} on\ a\ X = \left(\frac{-3}{2}y, y\right) = y\left(-\frac{3}{2}, 1\right) = yU$

$$E_{\lambda=-1} = Vect = (U)$$

Pour $\lambda = 4$, le système (1) devient :

$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} on\ a\ x - y = \ 0$

On a : $x = y$

Pour tout $X = (x, y) \in E_{\lambda=4,} on\ a\ X = (x, x) = x = (1,1) = xV$

$$E_{\lambda=4} = Vect = (V)$$

La matrice A est diagonalisable.
La matrice de passage est :

$$P = (U, V) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; et\ P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dY}{dt} = AX$$

Posons $X = PY$

Le système s'écrit : $\frac{dX}{dt} = \frac{dPY}{dt} = P\frac{dX}{dt} = APY$

Multiplions à gauche par P^{-1}, on a :

$$P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}P\frac{dY}{dt} = P^{-1}APY$$

Donc :

$\frac{dY}{dt} = DY$

Soit : $\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -U \\ \frac{dV}{dt} = 4V \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = k_1 e^{-t} \\ V = k_2 e^{-t} \end{cases}$$

Pour revenir aux variables initiales x et y, on utilise la relation X=PY

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3}{2} U + V \\ y = U + V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} k_1 e^{-t} + k_2 e^{-t} \\ y = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-t} \end{cases}$$

IV- Trigonalisation

V-1- Matrice Triangulaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La matrice $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est dite matrice

V-1-1-Triangulaire supérieure: $si\ \forall i > j,\ a_{ij} = 0$

V-1-2-Triangulaire inférieure: $si\ \forall\ i < j\ , a_{ij} = 0$

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ est\ une\ matrice\ triangulaire\ supérieure$$

$$N = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ est\ une\ matrice\ triangulaire\ inférieure$$

V-2- Endomorphisme trigonalisable

Définition 1

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension fini n est dite trigonalisable s'il existe une base B de E par rapport à laquelle sa matrice est triangulaire.

Définition2

Soit A la matrice associée à l'endomorphisme f de E.

La matrice A est dite Trigonalisable s'il existe une matrice inversible P tel que la matrice : $A' = P^{-1}AP$ soit triangulaire.

V-3- Théorème :

Soit E un espace vectoriel de dimension fini n et $f \in \mathcal{L}(E)$
f est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique $P_f(x)$ est scindé.

Démonstration

- **Supposons que le polynôme $P_f(x)$ est scindé**
  Par récurrence sur n:
  Pour n = 1, évident

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n-1 pour n strictement supérieur à 1.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P_f(x)$ soit scindé, soit α_1 une valeur propre de f et V_1 un vecteur propre associé à α_1
Complétant V_1 *par* $V_2', V_3', \ldots, V_n'$, pour avoir une base B de E.
Posant $E = Vect(V_1)$ *et* $F = Vect(V_2', V_3', \ldots, V_n')$
$E = E' \oplus F$, on a deux cas :

Premier cas: $f(F) \subseteq F$, dans ce cas la restriction g de f à F est un de F.
Soit M la matrice de f dans la base B.

$f(V_1) = \alpha_1 V_1$.
$f(V'_2) = b_{22}V_2' + b_{23}V_3' + \ldots + b_{2n}V_n')$
.
.
.
$f(V'_n) = b_{n2}V_2' + b_{n3}V_3' + \ldots + b_{nn}V_n')$

La matrice de f dans la base B est :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & b_{22} & - & - & b_{n2} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ 0 & b_{2n} & - & - & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

B est une matrice dans la base (V_2', V_3', ..., V_n') de F.
$P_f(x) = (\alpha_1 - x)\det(B - xI_n) = (-1)^n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$
$P_g(x) = (-1)^{n-1}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$
$P_g(x)$ est scindé, d'après l'hypothèse de récurrence, g est trigonalisable, donc il existe une base B'= (V_2, V_3, ..., V_n) de f par rapport à laquelle la matrice B' de g est triangulaire
Posons C = (V_1, V_2, V_3, ..., V_n). C'est une base de F par rapport à laquelle la matrice M' de f est triangulaire.

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & O \\ O & B' \end{pmatrix}$$

Deuxième cas : $f(F) \not\subseteq F$ (F n'est pas stable par f)

$$\boldsymbol{F \to E = E'_1 \oplus F \to F}$$
$$\boldsymbol{\pi o g}$$

Posons $g = f/F$ *et* $h = \pi o g$

h est un endomorphisme de F.
La matrice de f dans la base B de E
B= (V_1', V_2', V_3', ..., V_n')
$f(V_1) = \alpha_1 V_1$.
$f(V'_2) = a_{22}V_2' + a_{23}V_3' + \ ... + a_{2n}V_n')$
.
.
.
$f(V'_n) = a_{n2}V_2' + a_{n3}V_3' + \ ... + a_{nn}V_n')$

La matrice M' de f dans la base B est :

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & - & - & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ 0 & a_{n2} & - & - & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} - -a_{1n} \\ O & B' \end{pmatrix}$$

B' est la matrice de h dans la base (V_2', V_3', ..., V_n') de F.

$$h(V'_j) = \pi o g(V'_j) = \pi\left(g(V'_j)\right) = \pi\left(f(V'_j)\right)$$

$$h(V_j') = \pi(a_{ij} + \sum_{i=2}^{n} a_{ij}V'_i) = \sum_{i=2}^{n} a_{ij}V'_i)$$

$P_f(X) = P_{m'}(X) = (\alpha_1 - x)P_{p'}(x)$
$P_f(X)$ scindé $\Longrightarrow$ $P_{B'}$(x) scindé.
$\Longrightarrow$ P_h(x) scindé, d'après l'hypothèse de récurrence h est trigonalisable donc il existe une base (U_2, U_3, ……, U_n) de F par rapport à laquelle la matrice de h est triangulaire
Posons C = (V'_1, U_2, U_3, ……, U_n)
La matrice A'' de f relativement à C est triangulaire.
$\Longrightarrow$ Supposons est f est trigonalisable
Dans ce cas, il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de f est triangulaire.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & - & - & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & - & - & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_f(x) = P_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & . & . & . \\ 0 & a_{22} - x & X & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & --- & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

$P_f(x) = (a_{11} - x)(\, a_{22} - x) \dots \dots \dots (a_{nn} - x)$

Alors $P_f(x)$ *est scindé*

Exercice N°4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ 2 & -x & 1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix}$$
$$= \big((3-x)(-x)(2-x) - 1 - 2\big) - \big(-x - (3-x) - 2(2-x)\big)$$
$$P_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$$

$P_A(x)$ est scindé alors A est trigonalisable

Déterminons les sous espaces vectoriels propres des valeurs propres 1 et 2

Les vecteurs propres X associé à la valeur propre α est solution de l'équation

$(A - \alpha I)X = O$ ou encore on cherche Kerf(f -αIdE)

Soit X = (x, y, z) un vecteur

Pour $\alpha = 1$, X est un vecteur propre du sous espace vectoriel propre E_1 si et seulement si :

$$(A - I)X = O$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \ (1) \\ x - y + z = 0 \ (2) \end{cases}$$

(1) − (2) ⇒ x = 0 et y = z

$$E_1 = \{(x\,,y,z\,) \in IR^3 \ tel\ que\ x = 0\ et\ y = z \ \ \}$$

Pour tout X = (x , y, z) de E_1, on a : X = (0, y, y) = y (0, 1, 1) = yU_1

Avec U_1 = (0, 1,1)

Pour $\alpha = 2$, X est un vecteur propre du sous espace vectoriel propre E_1 si et seulement si :

$$(A - 2I)X = O$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \ (1) \\ 2x - 2y + z = 0 \ (2) \\ x - y = 0 \ (3) \end{cases}$$
$$(3) \ \Rightarrow x = y \ \ et\ z = 0$$
$$E2 = \{(x\,,y,z\,) \in IR^3 \ tel\ que\ x = y\ et\ z = 0 \ \ \}$$

Pour tout X = (x , y, z) de E_2, on a : X = (x, x, 0) = y (1, 1, 0) = xU_2

Avec U_2 = (1, 1,0)

Complétons la base (U_1, U_2) par U_3 = (0, 0,1) pour avoir une base de IR^3

Vérifions que base (U_1, U_2, U_3) est une base

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, alors\ (U_1, U_2, U_3)$ est une base.

Déterminons la matrice de f dans la base (U_1, U_2, U_3) . Cette matrice est celle dont les colonnes sont les images par f des vecteurs U_1, U_2 et U_3 en fonction de vecteurs Ui.

$$f(U_1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U_1$$

$$f(U_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2U_2$$

$$f(U_3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On cherche les réels a, b et c tels que $aU_1 + bU_2 + cU_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On obtient : $\begin{cases} b = 1 \\ a + b = 1 \\ a + c = 2 \end{cases}$ ce qui donne a = 0, b =1 et c = 2

$$f(U_3) = U_2 + 2U_3$$

La matrice A’ de f dans la base (U_1, U_2, U_3)est :

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est triangulaire

Exercice N°5

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$P_A(x) = \begin{vmatrix} 13 - x & -5 & -2 \\ -2 & 7 - x & -8 \\ -5 & 4 & 7 - x \end{vmatrix} = -(x - 9)^3$

Déterminons-le sous espace vectoriel propre de la valeur propre 9

Les vecteurs propres X associé à la valeur propre α est solution de l’équation

$(A - \alpha I)X = O$ ou encore on cherche Kerf(f -αIdE)

Pour$\alpha = 9$, X est un vecteur propre du sous espace vectoriel propre E_1 si et seulement si :

$$(A - 9I)X = O$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 5y - 2z = 0 \ (1) \\ -2x - 2y - 8z = 0 \ (2) \\ -5x + 4y - 2z = 0 \ (3) \end{cases}$$

$$(1) - (3) \Rightarrow x = y \ \ et \ \ remplaçanon \ \ dans \ (1) \ on \ obtient \ x = -2z$$

Le sous espace vectoriel associé à la valeur propre 9

$$E_9 = \{(x , y, z) \in IR^3 \ tel \ que \ x = y = -2z \ \}$$

Pour tout X = (x, y, z) de E_9, on a : X = (-2z, -2z, z) = z (-2, -2, 1) = zU_1

Avec $U_1 = (-2, -2,1)$
On complète la base de, E_9 pour trouver une base pour laquelle la matrice A est triangulaire.
On choisit les vecteurs de la base canonique $U'_2 = (0, 1, 0)$ et $U'_3 = (0, 0,1)$
Déterminons la matrice de f dans la base (U_1, U'_2, U'_3). Cette matrice est celle dont les colonnes sont les images par f des vecteurs U_1, U_2 et U_3 en fonction de vecteurs Ui.

$$f(U_1) = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9U_1$$

$$f(U'_2) = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On cherche les réels a, b et c tels que $f(U'_2) = aU_1 + b\, U'_2 + c\, U'_3$

$$f(U'_2) = a\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On obtient : $\begin{cases} -2a = -5 \\ -2a + b = 7 \\ a + c = 4 \end{cases}$ ce qui donne a =5/2 , b =12 et c = 3/2

$f(U'_2) = \frac{5}{2}U_1 + 12\, U'_2 + \frac{3}{2}\, U'_3.$

$$f(U'_3) = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On cherche les réels a, b et c tels que $f(U'_3) = aU_1 + b\, U'_2 + c\, U'_3$

$$f(U'_3) = a\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On obtient : $\begin{cases} -2a = -2 \\ -2a + b = -8 \\ a + c = 7 \end{cases}$ ce qui donne a = 1, b = -6 et c = 6

$f(U'_3) = U_1 - 6\, U'_2 + 6\, U'_3$

La matrice de f dans la base (U_1, U'_2, U'_3) est :

$$A' = \begin{pmatrix} 9 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$ qui n'est pas triangulaire

E_9 et la famille (U'_2, U'_3) sont supplémentaires dans E

$$E = E_9 \oplus (U'_2, U'_3)$$

$$\underbrace{F \xrightarrow{g} E \xrightarrow{\pi}}_{\pi o g} F.$$

On se restreint alors à la base B de g.

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminons dans F, le sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 9.

F_9 = ker (B -9I_2)
Soit X =(x, y) ∈Ker(B -9I_9)
$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ \frac{3}{2}x - 3y = 0 \end{cases}$, on a x = 2y

$$F_9 = \{(x, y) tel\ que\ x = 2y\}$$

Pour tout X = (x, y)∈ F_9
X = (2y, y) = y (2, 1) = y V.
Avec V = (2, 1)
On cherche alors un vecteur U_2 dans F, en interprétant 2 et 1 comme les coordonnées de U_2 dans la base (U'_2, U'_3) de F.
$U_2 = 2U'_2 + U'_3$ = 2(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (0, 2, 1)
On complète la base (U_1, U_2, U'_3) par le vecteur U'_3 = (0, 0, 1)
avec U_1 = (-2, -2, 1) et U_2 = (0, 2, 1)

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, alors\ (U_1, U_2, U'_3)$. est une base.

On cherche la matrice de f dans la base (U_1, U_2, U'_3).

$$f(U_1) = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9U_1$$

$$f(U_2) = f(2U'_2 + U'_3) = 2f(U'_2) + f(U'_3)$$

$$= 2\left(\frac{5}{2}U_1 + 12U'_2 + \frac{3}{2}U'_3\right) + (U_1 - 6U'_2 + 6U'_3)$$

$$= 5U_1 + 24U'_2 + 3U'_3 + U_1 - 6U'_2 + 6U'_3 = 6U_1 + 18U'_2 + 9U'_3$$

$$f(U_2) = 6U_1 + 9(2U'_2 + U'_3) = 6U_1 + 9U_2$$

f(U'_3) =$U_1 - 6U'_2 + 6U'_3$ = U_1 -3 ($2U'_2$) +6U'_3
or $U_2 = 2U'_2 + U'_3$ alors $2U'_2 = U_2 - U'_3$
f(U'_3) = U_1-3(U_2 –U'_3) + 6U'_3 =U_1 -3U_2 + 9U'_3
On obtient :

$A' = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ qui est bien triangulaire.