Algèbre 3

Ange P Mayouma

Séquence 3 : Déterminant et orientation de base d'un espace et calcul des volumes

I- Rappel sur les groupes symétriques

I-1- Groupes symétriques

Soit σ la permutation des éléments de l'ensemble $[1, n]$

L'ensemble des permutations de degrés n est appelé groupe symétrique non commutatif et noté S_n

Une permutation est généralement notée.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(4) & \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$$

NB : Le nombre de permutation Sn est n !

I-2- Transposition

Une transposition est une permutation qui n'échange que deux nombres. On la note t(i ,j) pour tout i et j de S_n.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ } et\ une\ transposition\ t(1,4)$$

I-3- Support d'une permutation

Soit $\sigma \in S_n$

On appelle support de la permutation σ, noté supp(σ), l'ensemble des éléments de $[1, n]$ qui ne sont pas fixés par σ ou encore l'ensemble des éléments qui interviennent dans la permutation.

Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$$

$\text{Supp}(\sigma) = \{1, 3, 4\}$

Deux permutations de σ sont disjointes si leurs supports sont disjoints.

I-4- Cycle

Soit $k \in [1, n]$ $et\ \sigma \in S_n$
On appelle k-cycle ou cycle de longueur k toute permutation σ de S_n définie par :
$\sigma(x_1) = x_2,\ \sigma(x_2) = x_3, \ldots, \sigma(x_k) = x_1,$
et $\sigma(x_j) = x_j\ si\ x_j \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$
Un k-cycle est noté $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ $\ et\ de\ supp(\sigma) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$

NB : Une transposition est un 2-cycle.

I-5- Théorème : Décomposition d'une permutation

Toute permutation de S_n peut se décomposer en un produit commutatif de cycles de support disjoints. Cette décomposition est unique.

Exemple :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8})(\mathbf{2}, \mathbf{9})(\mathbf{3}, \mathbf{7}, \mathbf{5})$$

I-6- Inversion d'une permutation

Soit $\sigma \in S_n$ et soient $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Une inversion de $\boldsymbol{\sigma}$ est un couple des valeurs $(\sigma(i), \sigma(j))$ et vérifiant :
$i<j$ et $\sigma(j) < \sigma(i)$
Le nombre d'inversion de σ est noté $N(\sigma)$

Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$Les\ paires\ suivants\ (1, 2), (1,3), (1,5), (2, 3), et\ (4,5) sont\ des\ inversion$$

En effet, pour le couple (1, 2) , on a : $1 < 2$ et $\sigma(1) = 4 > \sigma(2) = 2$
Ou encore on regarde la dernière ligne de la permutation en commençant par 4.
4 est plus petit que 2, alors le couple (1,2) est une inversion
4 est plus petit que 1, alors le couple (1,3) est une inversion
4 est plus petit que 3, alors le couple (1,5) est une inversion
2 est plus petit que 1, alors le couple (2,3) est une inversion
5 est plus petit que 3, alors le couple (4,5) est une inversion

$$N(\sigma) = 5$$

I-7- Signature d'une permutation

Soit $\sigma \in S_n$,
On appelle signature de la permutation σ le nombre noté $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$
Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad N(\sigma) = 5$$
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$$

La signature d'une transposition est toujours égale à -1 car dans une transposition il y a qu'une inversion.

I-8- Théorèmes

Théorème1 :

On peut décomposer une permutation σ en produit de transposition.

$$\sigma = t_1.t_2\dots t_m \quad ,alors \;\; \varepsilon(\sigma) = (-1)^m$$

Exemple :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & . \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & . \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{1}\,,\mathbf{3})(\mathbf{2},\mathbf{7})(\mathbf{4},\mathbf{8},\mathbf{5},\mathbf{6})$$
$$\varepsilon(\sigma) = (-\mathbf{1})(-\mathbf{1})(-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$$

Théorème 2 :

Soit $\sigma \in S_n$

On peut décomposer la permutation σ en produit de m cycles disjoints.

$$\sigma = c_1.c_2 \dots .c_k.$$

On note par m le nombre des valeurs fixées par σ les nombres qui n'ont pas changés.

Alors , on a : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k-m}$

Exemple:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = (1,3,2)(4,8,5,6)$$

On a : n = 9, k = 2 car on a deux cycles et m = 2 car on a deux nombres qui n'ont pas changés (7 et 9)

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k-m} = (-1)^{9-2-2} = -1$$

II- Déterminant

II-1- Définitions

Définitions 1 :

On rappelle que si E est un K espace vectoriel de dimension n, alors l'espace $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, il existe une unique forme n- linéaire alternée f_o sur E telle que $f_o(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. Cette forme linéaire est appelée **Déterminant** dans la base $\mathcal{B}$ et noté $Det_{\mathcal{B}}$.

Ainsi, $Det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, ou encore $Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. Toutes formes n-linéaires alternées sur E sont alors de la forme $\alpha Det_{\mathcal{B}}$ avec $\alpha \in K$.

Si $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ est une famille de n vecteurs de E, le scalaire $Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est le déterminant de la famille V dans la base $\mathcal{B}$.

NB : Il y a aucun sens de parler d'un déterminant d'une famille de p (avec p $\neq n$) vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n.

Rappel :
Soit f une forme n – linéaire alternée définie sur un K-espace vectoriel E. f est alternée si et seulement si , pour tout vecteur $v_1, \dots, v_p$ de E et σ un élément de S_p, $f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}\right) = \varepsilon(\sigma)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p})$
Soit f une forme n – linéaire alternée définie sur un K-espace vectoriel E. Soient $v_1, \dots, v_p$ p vecteurs de E. Soit σ un élément de S_p.
Alors $f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}\right) = \varepsilon(\sigma)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p})$

Définitions 2:
Soit $E \neq \{0_E\}$ un K espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
On appelle déterminant de la famille $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ de n vecteurs de E de matrice $M = (a_{ij})$ dans la base $\mathcal{B}$, la valeur prise en (V_i) par l'unique forme n-linéaire alternée f tel que $f(V_1, V_2, \dots, V_n) = 1$

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = \sum_{\sigma \in S_n}^{.} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

II-2- Déterminant d'une matrice carrée
II-2-1- Matrice carrée d'ordre 2

Soit E un K espace vectoriel de dimension 2 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$
Soient $V_1 = (x_{11}, x_{21})$ *et* $V_2 = (x_{12}, x_{22})$ deux vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$.

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) = \sum_{\sigma \in S_2}^{.} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{2} x_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2}$$
$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$$

Les seules permutations σ dans S_2 sont : Id , (1 2) de signature 1 et -1 respectivement.
On retrouve le résultat classique du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 c-à-d
Soient A $\in \mathcal{M}_{2,2}(K)$.

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{Det(A)} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$$

II-2-2- Matrice carrée d'ordre 3

Soit E un K espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$
Soient $V_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31}), V_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{32})$ *et* $V_3 = (x_{13}, x_{23}, x_{33})$ trois vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$.

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1,V_2,V_3) = \sum_{\sigma \in S_3}^{.} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{3} x_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} x_{\sigma(3)3}$$

Les permutations σ dans S_3 sont : {Id, (1 2 3), (1 3 2), (1 2), (1 3) , (2 3)}
Les trois premières ont pour signature 1 et les trois dernières -1.

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1,V_2,V_3) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23}$$
$$-x_{31}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23}$$

$$Det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$
$$= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23}$$
$$-x_{31}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23}$$

On peut retrouver ce résultat avec la Méthode de Sarrus vue antérieurement.

III- Matrice d'un endomorphisme

III-1- Définition :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. Alors, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E,
le scalaire $Det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = Det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est indépendant du choix de la base de E : On l'appelle déterminant de l'endomorphisme f, on le note Det(f)
Ainsi, $Det(f) = Det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E
Si $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une famille des n vecteurs de E, on a ;
$f(V) = (f(V_1), f(V_2), f(V_n))$

$$Det_{\mathcal{B}}(f(V)) = \mathrm{Det}(f) Det_{\mathcal{B}}(V)$$

III-2- Théorèmes

III-2-1- Théorème : Déterminant d'une composée

Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors
Det(fog) = Det(f) Det(g)
Si A est une matrice de l'endomorphisme f, Alors Det(A) = Det(f)

III-2-2- Théorème : changement de base

2-2-1- Soit $E \neq \{O_E\}$ un R-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}\ et\ \mathcal{B}'$ deux bases de E et $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une famille des n vecteurs de E.

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') Det_{\mathcal{B}'}(V_1, V_2, \dots, V_n)$$

2-2-2- $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est une base si et seulement si $Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$

Démonstration

2-2-1- Comme $Det_{\mathcal{B}}$est une forme n-linéaire alternée, en peut l'exprimer en fonction de $\mathcal{B}'$. On obtient :

$$Det_{\mathcal{B}} = Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') Det(\mathcal{B}')$$

Pour la valeur de cette forme n-linéaire en $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ donne :

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')Det_{\mathcal{B}'}(V_1, V_2, \dots, V_n)$$

Si on pose $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$

$$Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')Det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$$

Or $Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, alors : $Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')Det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1 \Rightarrow Det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{Det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$

2-2-2- Si $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ est une base, d'après ce qui précède,

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = Det_{(V_1, \dots\dots, V_n)}(\mathcal{B}') = 1$$

Alors $Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$

Réciproquement si $(V_1, V_2, \dots, V_n)$est une famille liée et comme $Det_{\mathcal{B}}$est une forme n-linéaire alternée alors $Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = 0$

IV- Orientation des espaces vectoriels

IV-1- Définitions :

1-1- Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ deux bases de E.

On dit que $\mathcal{B}_2$ a la même orientation que $\mathcal{B}_1$ si le $Det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$.

On peut définir une relation d'équivalence sur les bases de E suivante.

Soient $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, $\mathcal{B}_2 \mathcal{R} \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow Det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$.

Cette relation d'équivalence divise l'ensemble des bases en deux classes d'équivalence ; les classes dont les éléments seront comme positifs et l'autre dont les éléments seront négatifs.

Ainsi :

Si deux bases $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ appartiennent à la même classe alors $Det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$

Si non $Det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) < 0$

1-2- Orienter un espace vectoriel E, c'est choisir une de ces deux classes, dont les éléments seront appelés bases directes, tandis que les éléments de l'autre classe seront appelés bases rétrogrades.

1-3- Une base est dite directe si elle a la même orientation que la base canonique de E et indirecte si non. Elle est aussi dite positivement orientées

1-4- Une base est dite indirecte si elle n'a pas la même orientation que la base canonique. Elle est aussi dite base négativement orientée ou rétrograde.

IV-2- Théorème

Soit $E \neq \{O_E\}$ un R-espace vectoriel de dimension finie n et f un automorphisme de E.

a) Si Det(f)> 0, alors l'image de toute base directe (respectivement indirecte) de E est une base directe (respectivement indirecte) de E. On dit que f préserve l'orientation.
b) Si Det(f) < 0, alors l'image de toute base directe (respectivement indirecte) de E est une base indirecte (respectivement directe) de E. On dit que f renverse l'orientation.

IV-3- Orientation induite

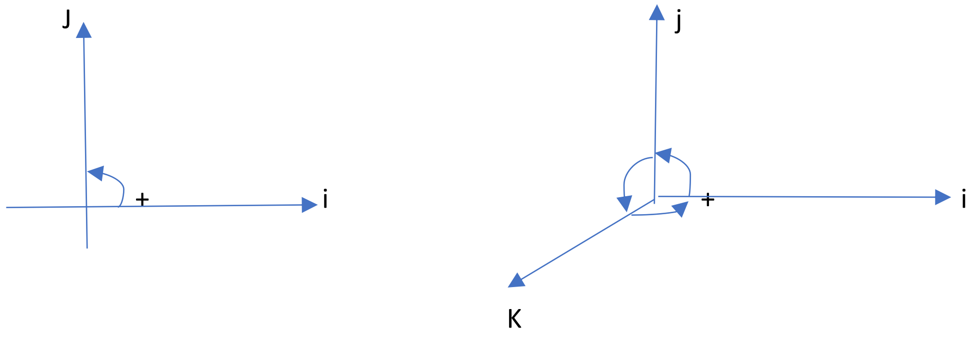
Soit P un plan de E et u un vecteur normal à P non nul.

On peut définir une orientation sur P de sorte que, pour une base $B = (V_1, V_2)$ de P, alors :

$$(V_1, V_2) \textit{est une base directe de P si et seulement si}$$
$$(V_1, V_2) \textit{ est une base directe de E}$$

Cette orientation s'appelle l'orientation induite sur P par le vecteur U.

Dans R^2, on peut choisir comme base directe, la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$
Dans R^3, on peut choisir comme base directe, la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$



La règle de la main droite donne les sens positif d'un repère $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le pouce donne la direction $\vec{\imath}$, l indexe $\vec{\jmath}$ et le major $\vec{k}$. Le sens s'inverse avec la main gauche.

V- Produit scalaire, Produit vectoriel et produit mixte

V-1- Rappels

V-1-1-Fonction bilinéaire

1-1-1-Soit E un k-espace vectoriel et f : $\underbrace{E.E. \dots .E}_{n\, fois} \rightarrow K$ une forme n- linéaire.

Si n = 2, on dit que f est une forme bilinéaire

1-1-2- Soit E un k-espace vectoriel.
Une application $f\,:\, ExE \longrightarrow R$ est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à ces deux variables.

V-1-2- Fonction bilinéaire symétrique, antisymétrique

Soit E un k-espace vectoriel.

1-2-1- Une application bilinéaire
$f\,:\, ExE \longrightarrow R$ est symétrique si pour tout $(V_1, V_2) \in ExE$, f(V_1, V_2) = f(V_2, V_1).

1-2-2- Une application bilinéaire
$f\,:\, ExE \longrightarrow R$ est antisymétrique si pour tout. $(V_1, V_2) \in ExE$, f(V_1, V_2) = -f(V_2, V_1)

Exemple :

1. f : IR^2x $IR^2 \rightarrow IR$

$(V_1, V_2) \longrightarrow f(V_1, V_2) = x_{11}x_{21} + x_{21}y_{22}$ est une application bilinéaire symétrique
Avec $U = (x_{11}, x_{21})$,$V = (\, x_{12,}y_{22})$

V-1-3-Fonction bilinéaire symétrique définie ou non dégénérée

Soit E un espace vectoriel de dimension fini n et f une forme bilinéaire symétrique sur E.

$$Kerf = \{(V_1, V_2) \in ExE, f(V_1, V_2) = O_E\}$$

On dit que f est non dégénérée si

$$Kerf = \{O_E\}$$

V-1-4-Fonction bilinéaire symétrique définie positive

Soit E un espace vectoriel de dimension fini n et f une forme bilinéaire symétrique définie sur E.
f est positive si pour tout $(V_1, V_2) \in ExE$, $on\ a\ f(V_1, V_2) > 0$

V-2- Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
Pour deux vecteurs $V_1\ et\ V_2$ de E, on le note : $< V_1, V_2 >\ ou\ V_1.V_2$

Exemple :
Le produit scalaire usuel de IR^n

$$V_1 = (\boldsymbol{x_{11}}, \dots.., \boldsymbol{x_{n1}})\boldsymbol{et}\ V_2 = (\boldsymbol{x_{12}}, \dots.., \boldsymbol{x_{n2}})$$

$$f(V_1, V_2) = < V_1, V_2 >= V_1.V_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\, x_{i2}$$

- Si $\propto$ est l'angle formé par les vecteurs x et y, alors :

$< V_1, V_2 >= \|V_1\|.\|V_2\| cos \propto$

V-3- La norme

On appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $< x, y >$ tout application :

$$\|.\|: E \longrightarrow IR^+$$

$$V : \longrightarrow \|V\| = \sqrt{< V, V >} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

Un vecteur dont la norme est égale à un est un vecteur unitaire.

V-4- Espace Préhilbertien, espace Euclidien

V-4-1- On appelle espace préhilbertien réel tout couple (E, f) où E est un IR-espace vectoriel et f une forme bilinéaire sur E symétrique, positive et non dégénérée.

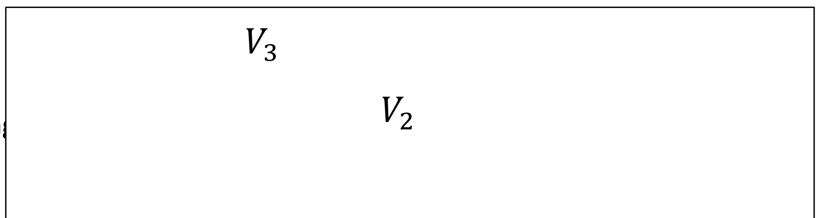
V-4-2- On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien de dimension finie non nul.

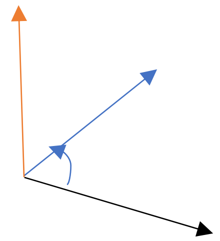
V-5- Produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On appelle produit vectoriel sur E, toute forme bilinéaire antisymétrique définie sur E.
Pour deux vecteurs $V_1\ et\ V_2$ de E, on le note : $V_1 \wedge V_2$

- Le produit vectoriel $V_1 \wedge V_2$ est un vecteur V_3. On a : $V_1 \wedge V_2 = V_3$

La direction du vecteur $V_1 \wedge V_2 = V_3$ donne le triplet (V_1, V_2, V_3) une orientation directe donnée par la règle de la main droite.





- Les vecteurs V_1 et V_2 sont sur le même plan et le vecteur V_3 est perpendiculaire au plan de V_1 et V_2.
- Soient $V_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}$

$$V_1 \wedge V_2 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22} \\ x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12} \\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \end{pmatrix} = V_3$$

- Comme le produit vectoriel est antisymétrique $V_1 \wedge V_2 = -V_2 \wedge V_1$
- Si $\propto$ est l'angle formé par les vecteurs $V_1 et\ V_2$, alors :
  $\|V_1 \wedge V_2\| = \|V_1\|.\|V_2\| sin \propto$ U, avec U un vecteur unitaire.

Remarque :
Le produit scalaire $< V_1, V_2 >$ est un scalaire et le produit vectoriel est un vecteur.

V-6- Produit Mixte

Soient $V_1,\ V_2\ et\ V_3$ trois vecteurs de l'espace vectoriel E. On appelle produit mixte de $V_1,\ V_2, V_3$ pris dans cet ordre, le nombre réel noté $(V_1,\ V_2, V_3)$ défini par :
$(V_1,\ V_2, V_3) = V_1.(V_2 \wedge V_3)$

- Soient $V_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}\ et\ V_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}$

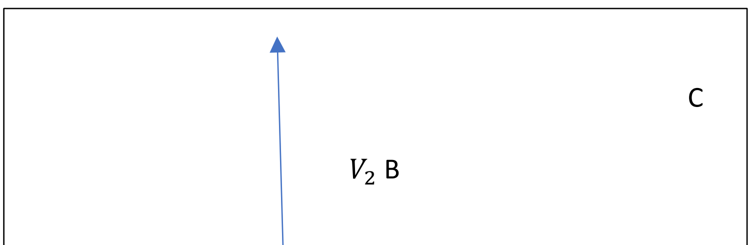
$$V_1.(V_2 \wedge V_3) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23} \\ x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13} \\ x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13} \end{pmatrix}$$
$$= x_{11}\left(y_{22}z_{33} - y_{32}z_{23}\right) + x_{21}\left(y_{12}z_{33} - y_{32}z_{13}\right) + x_{31}\left(y_{12}z_{23} - y_{22}z_{13}\right)$$
$$= x_{11}y_{22}z_{33} + x_{21}y_{12}z_{33} + x_{31}y_{12}z_{23} - x_{11}y_{32}z_{23} - x_{21}y_{32}z_{13} - x_{31}y_{22}z_{13}$$

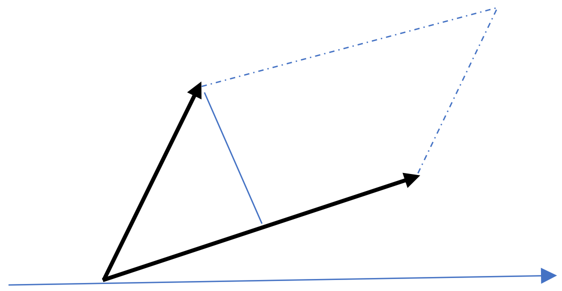
VI- Interprétation géométrique du déterminant Calcul des surfaces et des volumes

VI-1- Calcul de la surface d'un parallélogramme

On considère deux vecteurs $V_1\ et\ V_2$ du plan

$$V_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}\ et\ V_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$





L'aire du parallélogramme (OACB)

$$S = OAh$$

La distance OB' est la projection orthogonale du vecteur V_2 sur la droite de vecteur directeur V_1.

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{V_2.V_1}{V_1.V_1}\overrightarrow{V_1}. \quad on\ a : OB'^2 = \frac{V_2.V_1}{V_1.V_1}.\frac{V_2.V_1}{V_1.V_1}V_1.V_1 = \frac{(V_2.V_1)^2}{V_1.V_1}$$

Dans le triangle rectangle (OB'B)

$$h^2 = \|V_2\|^2 - OB'^2 = V_2.V_2 - \frac{(V_2.V_1)^2}{V_1.V_1}$$

$$L'aire \quad S^2 = OA^2h^2 = \|V_1\|^2h^2 = V_1.V_1\left(V_2.V_2 - \frac{(V_2.V_1)^2}{V_1.V_1}\right)$$

$$S^2 = (V_1.V_1).(V_2.V_2) - (V_2.V_1)^2$$

On peut calculer ces produits scalaires avec les coordonnées des vecteurs les $V_1 = (x_{11}, x_{21}) et\ V_2 = (x_{12}, x_{22})$

$S^2 = (x_{11}^2 + x_{21}^2)(x_{12}^2 + x_{22}^2) - (x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22})^2 = (x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})^2$

On obtient alors : $S = |x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}|$

D'autre part, le déterminant dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2) = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$$

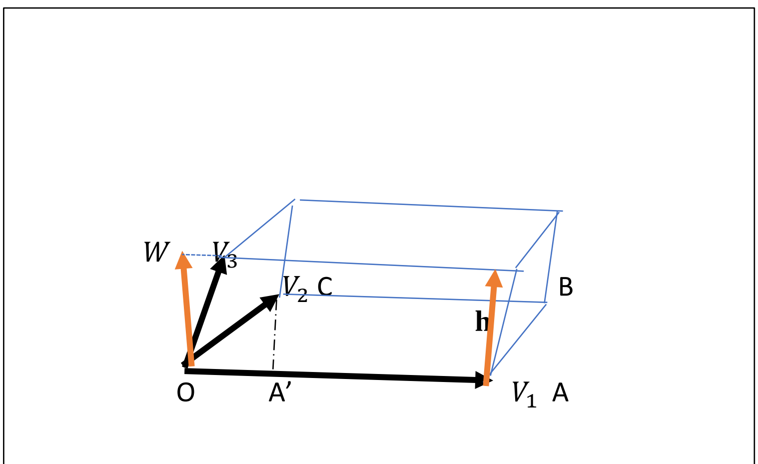
On remarque finalement que l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $V_1\ et\ V_2$ n'est autre que la valeur absolue du déterminant de la base (V_1, V_2).

Conclusion :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base canonique de R^2

$$|\boldsymbol{Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2)}| = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{Aire\ du\ parallélogramme\ porté\ par\ les\ vecteurs\ V_1\ et\ V_2}$$

VI-2- Calcul du volume d'un parallélépipède



On considère le parallélépipède porté par les vecteurs de R³ $V_1, V_2\ et\ V_3$
On veut calculer le volume de ce parallélépipède.
Le vecteur OA' est la projection orthogonale du vecteur V_2 sur la droite de vecteur directeur V_1
L'aire du parallélogramme OABC est $S = \|V_1\|\|A'C\|$
Or $\|A'C\| = \|V_2\|\sin(V_1, V_2)$
Alors $S = \|V_1\|\|V_2\|\sin(V_1, V_2)$
On reconnait par cette expression de la norme du produit vectoriel des vecteurs $V_1 et\ V_2$
Ainsi : $S = \|V_1\|\|V_2\|\ \sin(V_1, V_2) = \|V_1 \wedge V_2\|$

Le vecteur OW est la projection orthogonale du vecteur V_3

$$\|OW\| = h\ qui\ est\ la\ hauteur\ du\ parall\acute{e}l\acute{e}pid\grave{e}de$$

$$h = \|V_3\|\cos(V_3, OW)$$

Le volume du $parall\acute{e}l\acute{e}pid\grave{e}de$

$$V = Sh = \|V_1 \wedge V_2\|.\|V_3\|\cos(V_3, OW)$$

On reconnait l'expression du produit scalaire entre le vecteur $(V_1 \wedge V_2)\ et\ V_3$

$$V = |(V_1 \wedge V_2).V_3|$$

NB : Cette expression est prise en valeur absolue pour s'assure d'avoir un nombre positif.
D'après l'expression analytique du produit vectoriel défini au **V-6**

$$\boldsymbol{V} = x_{11}y_{22}z_{33} + x_{21}y_{12}z_{33} + x_{31}y_{12}z_{23} - x_{11}y_{32}z_{23} - x_{21}y_{32}z_{13} - x_{31}y_{22}z_{13}$$

D'autre part, dans une base canonique $\mathcal{B}$ de R³

$$Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, V_3) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23}$$
$$-x_{31}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23}$$

Alors : $V = |Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, V_3)| = |(V_1 \wedge V_2).V_3|$

Conclusion :

$|\boldsymbol{Det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, V_3)}|$ **= Le volume du parallélépipède porté par les vecteurs** $V_1, V_2\ et\ V_3$**.**