SUITES ET SERIES DE FONCTIONS
Mouhamadou DIABY
Séquence 2 :

SUITES ET SERIES DE FONCTIONS
(ANALYSE 3)

Mouhamadou DIABY

Université Virtuelle du Sénégal

1er Avril 2021

Outline

1 / 36

Suites de fonctions

Dans cette partie, on s'intéresse à des suites et séries dont les termes sont des fonctions sur une même partie de $\mathbb{K}$. Une difference majeure avec l'étude des suites et séries numériques est que la notion de convergence pour les suites et séries de fonctions n'est pas univoque : il existe plusieurs notions qui ne sont pas équivalentes entre elles.

Exemple 1.1 (*Présentation du problème*)

Si on considère une suite de fonctions $f_0, f_1, \cdots$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge. On peut alors définir $f_\infty : I \to \mathbb{R}$ par $f_\infty(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

L'objet de cette leçon est de donner des outils qui permettent de savoir

- si la fonction f_∞ est continue,
- si la fonction f_∞ est derivable,
- si étant donné $a,\ b \in I$: $\int_a^b f_\infty(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$

Définitions suite de fonctions, convergence simple

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1

Une suite de fonction $(f_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{K}$ est une application : $n \mapsto f_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.2

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie sur un ensemble $\mathbb{D}$.

- Etant donné $x_0 \in \mathbb{D}$, on dit que la suite (f_n) **converge au point** x_0, si la suite numérique $(f_n(x_0))_n$ admet une limite quand $n \to +\infty$.
- Etant donné un ensemble $E \subseteq \mathbb{D}$, on dit que (f_n) **converge simplement sur** E si elle converge **en tout point** $t \in E$; autrement dit, si $\forall t \in E$, la suite $(f_n(t))_n$ est convergente. On peut dire aussi "$f_n(t)$ converge simplement sur E".
- On dit que la suite (f_n) **tend simplement vers** f **sur** E si $f_n(t) \to f$ pour tout $t \in E$. On écrit alors "$f_n \to f$ simplement sur E", ou encore "$f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur E".

3 / 36

Nota bene : Convergence simple

- Il est clair que la fonction limite f est unique puisque $\forall t \in E$, la suite numérique $(f_n(t))$ a une limite unique.
- Il est évident que si (f_n) converge simplement sur E, alors elle converge simplement sur tout ensemble $E' \subseteq E$.
- Pour montrer que $f_n \to f$ simplement sur E, il faut
  - fixer un point quelconque $t \in E$,
  - se débrouiller pour montrer que $f_n(t) \to f(t)$.
- $f_n \to f$ converge sur E si et seulement si
  $\forall x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

4 / 36

Exemple de suite de fonctions

Pour $n \geq 0$, soit f_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f_n(x) = x^n$.

(i) La suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $]-1, 1[$.

(ii) La suite (f_n) converge simplement sur $]-1, 1]$ vers la fonction f définie par $f(1) = 1$ et $f(x) = 0$, si $-1 < x < 1$.

(iii) La suite (f_n) ne converge pas au point $x = -1$, donc ne converge pas simplement sur $[-1, 1]$.

- On remarque que sur cet exemple que toutes les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $[0, 1]$ alors que f n'est même pas continue.
- En notant que N (dans la définition avec les quantificateurs), en général, de ϵ, et de x, on peut exiger que N soit indépendant de x, on obtient un mode de convergence plus restrictif, appelé **convergence uniforme**.

Définition Convergence uniforme

Définition 1.3

Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur I, et soit $E \subseteq I$.

- On suppose que (f_n) converge simplement sur E vers une fonction f. Alors, on dit que f_n tend **uniformément vers** f **sur** E si la chose suivante a lieu :
  $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon$ tel que $|f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ et pour tout $t \in E$.
  On écrit alors "$f_n \to f$ uniformément sur E", ou encore "$f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur E".
- On dit que (f_n) **converge uniformément sur** E si elle tend uniformément sur E vers une certaine fonction f.

Remarque : Faire en Exo

- La convergence uniforme (CVU) implique la convergence simple (CVS).
- La CVS sur $E \Longrightarrow$ CVU sur tout ensemble fini $F \subseteq E$.

Critères de convergence uniforme

De la définition précédente, on déduit immédiatement le critère suivant

Proposition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions de l'ensemble X dans $\mathbb{R}$, et soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons $\mu_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$.
Pour que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X il faut et il suffit que la suite numérique μ_n tende vers 0.

POINT-METHODE

Évidemment ce critère ne sert que lorsqu'on peut calculer μ_n. Par exemple, si X est un intervalle de $\mathbb{R}$, on obtient μ_n en étudiant les variations de la fonction réelle $f_n - f$.
Ou plus simplement, de majorer μ_n par une suite convergente vers 0.
Ou pour **prouver le contraire**, **la minorer** par une suite de nombre réelles positifs ne convergeant pas vers 0.

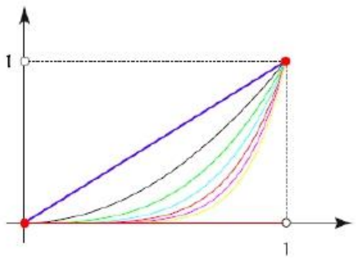
7 / 36

Exemple 1.2

Soit (f_n) donné par $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

On sait que $f_n \xrightarrow{CVS} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ f(1) = 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Mais (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$ puisque $\mu_n = \sup_{x \in [0,1]} |x^n - f(x)| = 1$.



8 / 36

Proposition 2 : Condition suffisante de Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$, et soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

- Pour que la suite (f_n) **converge uniformément** vers f sur X, **il suffit** qu'il existe une suite (ϵ_n) de nombres réels positifs, convergeant vers 0, telle que $\forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon_n$.
- Pour que (f_n) **ne converge pas uniformément** vers f sur X, **il suffit** qu'il existe une suite (x_n) de X telle que $(f_n(x) - f(x))$ ne tende pas vers 0.

Démonstration.

Notons $\mu_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$.

- Si la condition énoncée est vraie, on a $\mu_n \leq \epsilon_n$. D'où $(\mu_n) \to 0$, par la suite $f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur X.
- Si la condition énoncée ici est vraie, on a $\mu_n \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$. Par conséquent, μ_n ne tende pas vers 0, donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

□

Exemple 1.3

Considérons (f_n) sur $\mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^2x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Or, $\forall n \geq 1$, on a $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{1+\pi^2/4} \nrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
L'assertion du deuxième point de la proposition précédente permet de conclure que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

La définition de la convergence uniforme suppose connue la **fonction limite** f de la suite (f_n). Au cas contraire, on a le critère suivant :

Proposition 3 : Critère de Cauchy uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Pour que la suite (f_n) soit uniformément convergente, **il faut et il suffit** qu'a chaque nombre $\epsilon > 0$, on puisse associer un entier N tel que $\forall n \geq N$ et $\forall p \geq N \Rightarrow \forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

Démonstration.

A faire en exercice.

□

Exemple 1.4 (Converge uniforme ; Converge simple, non uniforme)

- $f_n : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n(1-x). \end{cases}$
  Il est clair que f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Pour déterminer $\mu_n = ||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$. On étudie les variations de f_n : $f_n^{'}(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$ donc f_n est croissante de 0 à $\frac{n}{n+1}$ et décroissante ensuite. Elle admet son maximum au point $\frac{n}{n+1}$, c'est à dire $0 \leq \mu_n = f_n(\frac{n}{n+1}) = (\frac{n}{n+1})^n(1-\frac{n}{n+1}) \leq 1 - \frac{n}{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Et f_n converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
- $f_n : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n\,x^n(1-x). \end{cases}$
  A nouveau, f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Mais $\mu_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(\frac{n}{n+1}) = n(\frac{n}{n+1})^n(1-\frac{n}{n+1}) \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$. Il y'a convergence simple, mais non uniforme, de la suite (f_n) vers la fonction nulle.

11 / 36

Propriétés de la convergence uniforme

Proposition 4 : Convergence uniforme et continuité

Soit (f_n) une suite uniformément convergente de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Si les fonctions f_n sont toutes continues en un point a de $\mathbb{R}$, alors leur limite f est continue au point a.

Démonstration.

Soient $\epsilon > 0$ et $x \in X$. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$. Il sagit alors de majorer chacun de ces trois termes. Par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f(a)| \leq ||f_n - f||_\infty + |f_n(x) - f_n(a)| + ||f_n - f||_\infty$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $||f_n - f||_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi, $|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f_n(a)| + \frac{2\epsilon}{3}$. Comme enfin f_n est continue en a, $\exists \eta > 0 / x \in]a-\eta, a+\eta[$, $|f_n(x) - f_n(a)| \leq \frac{\epsilon}{3}$. On a ainsi montré qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. □

12 / 36

Remarque

- On montre de même que si les f_n sont uniformément continues et convergent uniformément vers f, alors f est uniformément continue.
- Notons que ce théorème permet souvent de montrer, sans calcul que la convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme.

Exemple 1.5

- Soit (f_n) définie par $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}$. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et leur limite ne l'est pas. La convergence de (f_n) vers f n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
- La convergence uniforme d'une suite simplement convergente de fonctions continues est une condition suffisante, mais pas nécessaire pour que la fonction limite soit continue.

Proposition 5 : Convergence uniforme et intégration sur un segment

Soit (f_n) une suite uniformément convergente de fonctions intégrables sur l'intervalle compact $[a, b]$, et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors, la fonction limite f est integrable sur $[a, b]$ et on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Démonstration.

Par inégalité triangulaire, on a
$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| = |\int_a^b (f_n - f)| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \int_a^b ||f_n - f||_\infty = (b-a)||f_n - f||_\infty \underset{\infty}{\longrightarrow} 0.$ □

Corollaire 1 : Convergence uniforme et primitives

Soit (f_n) une suite de fonctions continues dénies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément vers f sur tout segment de I. Soit $x_0 \in I$, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)dt$ et $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$.
Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment I.

✎ Remarque

Les conditions du théorème 5 sont des conditions suffisantes et peuvent parfois être affaiblies : Il se peut notamment qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un segment $[a,b]$ converge simplement, non uniformément, vers une fonction f sur $[a,b]$ et que cependant : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

Exemple 1.6

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, est définie par : $\forall x \in [0,1]$; $f_n(x) = nx^n(1-x)$ converge simplement, non uniformément, vers la fonction nulle sur $[0,1]$, et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = 0$.

Proposition 6 : Convergence uniforme et dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Pour que f soit dérivable sur I, il suffit que la suite des dérivées (f_n') soit uniformément convergente sur I ; et pour tout $x\in I$, on a alors $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

Démonstration.

Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x\in I$, $f_n(x) = \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)$. Par convergence uniforme de f_n' vers g, $(x \mapsto \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $(x \mapsto \int_{x_0}^x g(t)\,dt$ sur tout segment de I. En passant à la limite (simple) dans l'égalité précédente, il vient : $\forall x\in I$,
$f(x) = \int_{x_0}^x g(t)\,dt + f(x_0)$. La fonction g étant continue sur I comme limite uniforme sur tout segment de I de fonctions continues, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.
Il ne reste plus qu'à montrer la convergence uniforme sur tout segment de I de (f_n) vers f, qui découle de celle de (h_n) vers h avec $h_n : x \mapsto f_n(x) - f_n(x_0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f(x_0)$. Pour tout segment $S \subset I$, on a $\forall x \in S$,
$|f_n(x) - f(x)| \leq |h_n(x) - h(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq ||h_n - h||_{\infty,S} + |f_n(x_0) - f(x_0)|$. Et par passage au $\sup$ on a bien $||f_n(x) - f(x)||_{\infty,S} \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Remarque

La convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables f_n n'assure nullement la dérivabilité de la limite f. Et même si celle-ci est dérivable, rien ne nous assure de la convergence de (f_n') vers f'. Cest l'objet de l'exemple suivant.

Exemple 1.7

On considère la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, dérivable.
- La convergence est en fait uniforme : $||f_n||_\infty \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable et $f_n'(x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement.

Séries de fonctions

Introduction

Comme pour les séries numériques, on peut, à partir d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ construire une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ où $S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$.
On obtient ainsi ce qu'on appelle une série de fonctions, notée $\sum f_n$.
Pour ces séries, on dispose d'un nouveau mode de convergence, dite **normale**, qui n'est en fait qu'une condition suffisante très commode pour établir la convergence uniforme.
On peut alors définir la série de terme général f_n :

- On appelle somme partielle au rang n la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.
- On appelle série de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  On la note $\sum f_n$.

Différents modes de convergence

Définition 2.1 (*Convergence simple*)

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles converge simplement sur X, on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X.
  Dans ce cas, on peut parler de la fonction somme $(x \mapsto S(x))$ de la série $\sum f_n$, et on note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n$.

- $\sum f_n$ CVS sur $X \Rightarrow \forall x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ CV dans $\mathbb{R}$. Et l'on a :
  $\forall x \in X,\ S(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

- Le reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$ est définie par
  $\forall x \in X,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Exemple 2.1

Soit $f_n(x) = xe^{-nx}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $xe^{-nx} = o(\frac{1}{n^2})$, donc la série numérique $\sum f_n(x)$ converge, ce qui montre la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ (pour $x = 0$, la convergence est évidente). Ici, on peut même déterminer la fonction somme de la série $\sum f_n$ puisque, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sum_{k=0}^n xe^{-kx} = x\sum_{k=0}^n (e^{-x})^k$ $= x\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{1-e^{-x}}$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-nx} = \frac{x}{1-e^{-x}}$, $\forall x > 0$ et 0 pour $x = 0$.

Exemple 2.2

La série de fonctions de terme général $f_n(x) = x(1-x)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, est simplement convergente sur $[0, 2[$. En effet, on a

- Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \Rightarrow S_n(0) = 0$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(0)$ est convergente, de somme nulle.
- Si $x \neq 0$, alors $S_n(x) = \sum_{p=0}^n f_p(x) = \sum_{p=0}^n x(1-x)^p = x[\frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)}]$ $= 1-(1-x)^{n+1}$, qui est une progression géométrique de raison $(1-x)$, convergente pour $|1-x| < 1$. Cette suite sera alors simplement convergente si $x \in]0, 2[$ vers la fonction $x \mapsto S(x) = 1$.

Différents modes de convergence

On peut, comme pour les suites de fonctions, définir la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ en utilisant la suite de fonctions des sommes partielles.

Définition 2.2 (*Convergence uniforme*)

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur X.
- Autrement dit : $\sum f_n$ CVU si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq N \Rightarrow$, $\forall x \in X$, $|S_n(x) - S(x)| = |\sum_{i=0}^n f_i(x) - S(x)| \leq \epsilon$.
- En d'autres termes, pour montrer la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur X, il faut d'abord vérifier la convergence simple de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note S la somme, puis vérifier que le reste converge uniformément vers 0.

Proposition 7 : Une condition nécessaire de CVU d'une série de fonctions

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 dans X.

Démonstration.

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction S sur X. Et alors la suite $f_n = S_n - S_{n-1}$ converge uniformément vers $S - S = 0$ sur X. □

NB

La suite $(\frac{1}{n^x})_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]1, +\infty[$ puisque $\forall x \in]1, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, mais la série $\sum \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

22 / 36

Proposition 8

Soit une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ simplement convergente. Pour que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X, il faut et il suffit que la suite (R_n) des restes partiels converge uniformément vers 0 dans X.

Démonstration.

- Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X vers S, alors il est clair que la suite des fonctions $S - S_n = R_n$ converge uniformément sur X vers 0.
- Réciproquement, il est tout aussi évident que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur X vers S et si la suite (R_n) converge uniformément sur X vers 0, alors la suite de terme général $S_n = S - R_n$ converge uniformément sur X vers S.

□

23 / 36

Exemple 2.3

D'après l'exemple 3.1, on a $f_n(x) = xe^{-nx}$. On va montrer que f_n ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
En effet, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} xe^{-kx} = \frac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$.
D'où $R_n(\frac{1}{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$. Et, on conclut par la proposition précédente.

Proposition 9 : Critère de Cauchy uniforme

La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X si, et seulement si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $p \geq 1$ on ait $\forall x \in X$, $|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)| \leq \epsilon$.

Démonstration.

C'est le critère de Cauchy uniforme appliqué à la suite des sommes partielles (S_n). □

Définition 2.3 (*Convergence absolue*)

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument sur X si, pour tout $x \in X$, la série réelle $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge.

Exemple 2.4

Le critère de Leibniz permet de voir que la série des fonctions définies par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, tandis que la règle de comparaison pour les séries à termes positifs permet de voir que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument sur $]1, +\infty[$.

Proposition 10

Si la série $\sum f_n$ converge absolument sur X, alors elle converge simplement sur X.

Démonstration.

Soit $x \in X$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument dans $\mathbb{R}$. Donc elle converge. □

Comme annoncé, nous allons voir maintenant un type de convergence *plus fort*, spécifique aux *séries de fonctions*, à tester en priorité.

Définition 2.4 (*Convergence normale*)

On dit que $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ converge normalement sur X s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $||f_n||_{\infty,X}$ est fini, et que la série numérique $(\sum_{n\geq 0} ||f_n||_{\infty,X})$ converge.

✌

Convergence normale (CVN) fait ainsi référence à la norme $||\cdot||_{\infty,X}$ (et pas au caractère ordinaire de la convergence !)

Proposition 11 : Caractérisation de de la CVN

La série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ est normalement convergente sur X si et seulement si il existe une suite réelle positive α_n vérifiant les deux conditions suivantes

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$
- la série $\sum \alpha_n$ converge.

Exemple 2.5

La série $\sum xe^{-nx}$ est normalement convergente sur $[a; +\infty[$ où $a > 0$.
En effet, pour n assez grand, on a $|xe^{-nx}| \leq ae^{-na}$, $\forall x \geq a$ et on conclut par la proposition précédente puisque $\sum e^{-na}$ est une suite géométrique convergente car de raison $e^{-a} \in]0,1[$.

Proposition 12

Si la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ converge normalement sur X, alors elle converge absolument et uniformément sur X, et l'on a $||\sum_{n=0}^{+\infty} f_n||_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n||_\infty$.

Démonstration.

Soit $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ une suite de fonctions convergeant normalement sur X. La preuve consiste à montrer qu'elle est uniformément de Cauchy. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\sum_{n\geq n_0} ||f_n||_{\infty,X})$ est une série numérique bien définie et convergente, donc sa suite de somme partielles est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$)... $\square$

NB

Une série peut converger uniformément et absolument mais sans converger normalement. En effet, la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}[\cup[\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\end{cases}.$$

Cette série converge uniformément sur $[0,1]$ puisque $|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)| \leq \frac{p}{n}$. Mais la convergence n'est pas normale puisque $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ et que $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente.

Proposition 13 : Critère de CVU pour les séries de fonctions alternées

Soit $\sum(-1)^n g_n$ une série de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ telle que

- pour chaque $x \in X$, la suite $(g_n(x))_n$ est décroissante,
- la suite de fonctions positives g_n converge uniformément sur X vers 0

Alors la série $\sum(-1)^n g_n$ converge uniformément sur X.

28 / 36

Démonstration.

Pour chaque $x \in X$, la suite réelle $(g_n(x))_n$ tend vers 0 en décroissant, donc tous ses termes sont positifs. La série alternée $\sum(-1)^n g_n(x)$ vérifie le critère de Leibniz, donc converge, et si $S(x)$ désigne sa limite, on a $|S(x) - S_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)|$. Comme (g_n) converge uniformément sur X on déduit que (S_n) converge uniformément sur X vers S. Donc la série $\sum(-1)^n g_n$ converge uniformément sur X. □

Exemple 2.6

Soit la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général défini sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On pose $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}}$, $\forall x \in [0,+\infty[$, alors$f_n(x) = (-1)^n g_n(x)$.

- Chaque fonction g_n est positive sur $[0,+\infty[$.
- $\forall x \in [0,+\infty[$, la suite $(g_n(x))_n$ est décroissante et converge simplement vers 0.
- De plus, $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$.

Par le critère de CVU pour les séries alternées, la série $\sum f_n$ CVU sur $[0,+\infty[$.

29 / 36

Propriétés des sommes de séries de fonctions

Proposition 14 : Dérivation terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la série $\sum f_n$ est simplement convergente et que la série $\sum f'_n$ formée avec leurs dérivées est uniformément convergente sur I. Alors la fonction somme S est dérivable sur I, et on a $\forall x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Démonstration.

Application directe de la proposition 6 à la suite (S_n) des sommes partielles. □

Remarques

La convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas la convergence de la suite des fonctions dérivées : sur $\mathbb{R}$, prenons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sin nx$. On s'est montrer que (f_n) CVU vers la fonction nulle. Pourtant, on a $f'_n : x \mapsto \cos(nx)$.

La suite (f'_n) ne converge donc même pas simplement.

Proposition 15 : Intégration terme à terme sur un segment

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle compact $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors

- sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$.
- La série de terme général $u_n = \int_a^b f_n(x)dx$ est convergente et on a $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration.

Puisqu'il y'a convergence uniforme, f est elle aussi continue, donc intégrable. Soit $\epsilon > 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in [a, b]$ $\quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. On en déduit que $\forall n \geq N$:

$$\begin{aligned} |\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| &= |\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx| \\ &\leq \int_a^b |(f_n(x) - f(x))|dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx = \epsilon. \end{aligned}$$

Il en découle que $\int_a^b f_n(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)dx$ quand $n \to +\infty$. □

Etude de Convergence : En pratique (1)

- **Comment établir la convergence simple ? :**
Pour étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur X, on considère $x \in X$ fixé et on étudie la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$. On peut penser en particulier :
  - à la convergence absolue ;
  - au théorème des séries alternées ; .
  - à établir un équivalent de $f_n(x)$ quand $n \to +\infty$ (à x fixé).

  Il est rare qu'il utiliser des méthodes plus évoluées (revoir cependant les méthodes pour démontrer la convergence d'une série numérique).
- **Comment établir la convergence normale ? :**
Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$ sur I, il faut obtenir une majoration de la forme : $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$; où α_n est indépendant de x et la série numérique $\sum \alpha_n$ converge.

Etude de Convergence : En pratique (2)

- **Comment établir la convergence uniforme ? :**
Pour établir la convergence uniforme $\sum f_n$ sur X, il faut tout d'abord établir la convergence simple sur X. Il faut ensuite obtenir une majoration de la forme : $\forall x \in X$, $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)| \leq \alpha_n$, où α_n est indépendant de x et $\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- **Comment démontrer la continuité de la somme ? :** Pour montrer que la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est continue sur X :
  - Montrer que chaque fonction f_n est continue sur X ;
  - Montrer que la série converge uniformément (ou normalement) sur X (ou sur tout segment $[a, b] \subset X$).

  L'hypothèse difficile à obtenir est la convergence uniforme (ou normale).

✍ Etude de Convergence : En pratique (3)

- ☞ **Comment démontrer le caractère $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$? :**
  Pour montrer que la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X :
  - Montrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X ;
  - Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur X ;
  - Montrer que la série $\sum f_n'$ converge uniformément (normalement) sur X (ou sur tout segment $[a, b] \subset X$).

  Pour montrer que la somme de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ sur X :
  - Montrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur X ;
  - Montrer que la série $\sum f_n$, $\sum f_n'$, $\cdots$, $\sum f_n^{(k-1)}$ converge simplement sur X ;
  - Montrer que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (normalement) sur X (ou sur tout segment $[a, b] \subset X$).

✍ Etude de Convergence : En pratique (4)

Pour montrer que la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle X :

- Montrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X ;
- Montrer que
  - ✓ la série $\sum f_n$ converge simplement sur X.
  - ✓ pour tout $k \geq 1$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (normalement) sur X (ou sur tout segment $[a, b] \subset X$).

  L'hypothèse difficile à démontrer est la convergence uniforme (normale).

- ☞ **Comment intégrer terme à terme ? :**
  Pour calculer l'intégrale de la somme d'une série $\sum f_n$, appliquer le théorème du cours qui est uniquement valable pour une intégrale sur un segment $[a, b]$.

✍ Etude de Convergence : En pratique (5)

- ☞ **Comment calculer la somme d'une série de foncions ? :**
  - Il est fréquent dans les exercices de déterminer l'expression de f' (ou une équation différentielle sur f) et d'en déduire une expression de f ;
  - Voir également les méthodes de calcul de la somme d'une série numérique.
- ☞ **Comment calculer des limites et obtenir des équivalents ? :**
  Pour déterminer la limite de la somme de la série $\sum f_n$, on peut :
  - utiliser des majorations, minorations et encadrements (en particulier réaliser un encadrement de la somme par des intégrales).

  Pour déterminer un équivalent de la somme :
  - Deviner l'équivalent et se ramener à un problème de limite.
  - Réaliser un encadrement de la somme par des intégrales.

36 / 36