

Logică pentru informatică - note de curs

Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iași

Facultatea de Informatică

Anul universitar 2022-2023

Ștefan Ciobâcă
Andrei Arusoaiie
Rodica Condurache
Cristian Masalagiu

Cuprins

1	Introducere	5
2	Logica propozițională informală	7
2.1	Propoziții	7
2.2	Propoziții atomice	8
2.3	Conjunții	8
2.4	Disjunții	9
2.5	Implicații	9
2.6	Negațiile	11
2.7	Echivalențe	12
2.8	Conectorii logici	12
2.9	Ambiguități în limba română	12
2.10	Fișă de exerciții	13
3	Sintaxa formală a logicii propoziționale	15
3.1	Noțiunea de alfabet în informatică	15
3.2	Alfabetul logicii propoziționale	16
3.3	Formule propoziționale	16
3.4	Cum arătăm că un cuvânt face parte din LP	17
3.5	Conectorul principal al unei formule	18
3.6	Cum arătăm că un cuvânt nu face parte din LP	19
3.7	Proprietatea de citire unică	20
3.8	Limbaj-obiect și meta-limbaj	21
3.9	Fișă de exerciții	22
4	Funcții recursive peste LP	25
4.1	Arborele de sintaxă abstractă al unei formule	26
4.2	Alte exemple de funcții definite recursiv	28
4.3	Demonstrații prin inducție structurală	29
4.4	Fișă de exerciții	31

Capitolul 1

Introducere

Dacă aritmetica este știința care studiază numerele și operațiile cu numere, logica este știința în care obiectul studiului este reprezentat de *propoziții* și de operații cu propoziții.

De exemplu, dacă în aritmetică observăm că suma a două numere pare este un număr par, în logică am putea observa că disjuncția a două propoziții adevărate este o propoziție adevărată.

Logica se găsește la intersecția filosofiei, matematicii și informaticii și a cunoscut cea mai mare dezvoltare începând cu anii 1950, datorită aplicațiilor numeroase în Informatică.

În acest curs, vom studia la nivel introductiv *logica propozițională* și *logica de ordinul I*.

Logica propozițională este extrem de simplă, dar conceptele pe care le studiem, metodele pe care le învățăm și problemele pe care le întâlnim în logica propozițională se pot generaliza la alte logici mai complexe. De asemenea, logica propozițională corespunde în mod intim organizării interne la nivel abstract a calculatoarelor, în sensul în care circuitele electronice se pot modela ca formule din logica propozițională. Logica propozițională are o teorie bogată și interesantă din punct de vedere matematic (exemple: teorema de compactitate, teorema de interpolare a lui Craig). *Problema satisfiabilității* pentru logica propozițională are multe aplicații în informatică. Este deosebit de importantă atât din punct de vedere teoretic (fiind problema canonică NP-completă) cât și practic (cu aplicații în verificarea programelor, în verificarea circuitelor, în optimizare combinatorială ș.a.).

Logica de ordinul I este o extensie a logicii propoziționale și are de asemenea aplicații numeroase în informatică, dar și în matematică. De exemplu, toată matematica pe care ați învățat-o în gimnaziu/liceu se bazează pe o așa numită teorie din logica de ordinul I numită **ZFC** (teoria **Zermelo–Fraenkel** a mulțimilor, împreună cu axioma alegerii – Axiom of **C**hoice). În Infor-

matică, aplicații ale logicii de ordinul I apar în domeniul complexității descriptive, în baze de date relaționale, în verificarea automată a hardware-ului și software-ului, ș.a. De asemenea, multe alte logici (de exemplu, logicile de ordin superior) au aplicații în teoria limbajelor de programare, în fundamentele matematicii, teoria tipurilor etc.

Capitolul 2

Logica propozițională informală

Logica propozițională este logica propozițiilor, conectate între ele prin *conectori logici* cum ar fi *sau*, *și* și *non*. În acest capitol, vom trece prin bazele logicii propoziționale.

2.1 Propoziții

O *propoziție* este o afirmație care este sau adevărată, sau falsă. Iată câteva exemple de propoziții:

1. *Port o cămașă albastră;*
2. *Tu deții un laptop și o tabletă, dar nu un telefon inteligent;*
3. $2 + 2 = 4$ (*Doi și cu doi fac patru*);
4. $1 + 1 = 1$ (*Unu plus unu este 1*);
5. $1 + 1 \neq 1$ (*Unu cu unu nu fac 1*);
6. *Dacă $1 + 1 = 1$, atunci Pământul este plat;*
7. *Toate numerele naturale sunt întregi;*
8. *Toate numere raționale sunt întregi.*

Iată câteva exemple de expresii care nu sunt propoziții:

1. *Roșu și negru* (nu este o afirmație);

2. π (nu este o afirmație);
3. *Plouă?* (întrebare, nu afirmație);
4. *Pleacă!* (exclamație, nu afirmație);
5. $x > 7$ (aici avem un predicat care depinde de x ; după ce fixăm o valoare pentru x , obținem o propoziție);
6. *Această afirmație este falsă.* (deși este o afirmație, nu este propoziție, deoarece nu este sau adevărată sau falsă: dacă ar fi adevărată, atunci ar fi și falsă și invers).

Câteodată nu este foarte clar dacă o afirmație este propoziție cu adevărat, sau nu este foarte clară valoarea ei de adevăr. De exemplu, suntem de acord că *zăpada este albă* în general, dar la fel de bine se poate susține și contrariul: de exemplu, există zăpadă neagră (pe stradă în țările subdezvoltate în timpul iernii), astfel încât valoarea de adevăr a afirmației *zăpada este albă* este pusă în discuție. Faptul că o afirmație este propoziție sau nu este mai mult o problemă de logică filosofică.

2.2 Propoziții atomice

Unele propoziții sunt atomice, în sensul în care nu pot fi descompuse în propoziții mai mici:

1. *Port o cămașă albastră;*
2. *Tu deții un laptop;*
3. $2 + 2 = 4$ (*Doi și cu doi fac patru*).

2.3 Conjunții

Unele propoziții sunt compuse din altele mai mici. De exemplu, propoziția *afară plouă și eu sunt supărat* este compusă din *afară plouă* și din *sunt supărat*, legate între ele prin *și*. Dacă două propoziții, φ și respectiv ψ , sunt legate printr-un *și*, propoziția rezultată, φ și ψ , se numește o *conjunție* (*conjunția lui φ și ψ*).

O conjuncție este adevărată dacă ambele părți componente sunt adevărate. De exemplu, propoziția *afară plouă și eu sunt supărat* este adevărată dacă atât propoziția *afară plouă* cât și propoziția *sunt supărat* sunt adevărate. În particular, din moment ce nu sunt supărat, această conjuncție este falsă.

O conjuncție nu conține neapărat cuvântul *și* în mod explicit. De exemplu, propoziția *afară plouă, dar eu am o umbrelă* este de asemenea o conjuncție, iar părțile ei componente sunt *afară plouă* și *eu am o umbrelă*. Aceste propoziții sunt legate prin conjuncția adversativă *dar*.

Exercițiul 1. *Găsiți părțile componente ale conjuncției mă joc acasă și învăț la școală.*

Exercițiul 2. *Dați un exemplu de o conjuncție falsă și un exemplu de o conjuncție adevărată.*

2.4 Disjuncții

Disjuncțiile sunt propoziții legate între ele prin *sau*. De exemplu, *afară plouă sau sunt supărat* este o disjuncție a propozițiilor *afară plouă* și *sunt supărat*.

Exercițiul 3. *Găsiți părțile componente ale disjuncției* Voi cumpăra un laptop sau o tabletă. *Atenție! Cele două părți componente trebuie să fie propoziții (anumite cuvinte din cele două părți componente pot să fie implicate și în consecință să nu apară în text).*

O disjuncție este adevărată dacă cel puțin una din părțile sale componente este adevărată. De exemplu, disjuncția $7 > 8$ sau $8 > 7$ este adevărată, deoarece $8 > 7$ este adevărată.

Acest înțeles al disjuncțiilor se numește *sau inclusiv* și este standard în matematică. Câteodată cuvântul *sau* este folosit în limbaj natural în sensul de *sau exclusiv*. De exemplu, în propoziția *albul sau negrul câștigă într-un joc de go*, cuvântul *sau* are înțeles de *sau exclusiv*. Înțelesul este că sau albul câștigă, sau negrul, dar nu amândoi simultan (este exclusă opțiunea să fie ambele adevărate în același timp).

În continuare, prin disjuncție vom înțelege *sau inclusiv* (interpretarea standard în matematică).

Exercițiul 4. *Dați un exemplu de o disjuncție falsă și un exemplu de o disjuncție adevărată.*

Exercițiul 5. *Când este disjuncția φ sau ψ falsă (în funcție de valorile lui φ și ψ)?*

2.5 Implicații

Implicațiile sunt propoziții de forma *dacă φ atunci ψ* . Propoziția φ se numește *antecedent* al implicației, iar propoziția ψ se numește *consecvent* (sau *concluzie*) al implicației.

Un exemplu de implicație este *dacă trec la Logică, dau o petrecere*. Antecedentul este *trec la Logică*, iar concluzia este *dau o petrecere*. Când este o implicație adevărată/falsă? O implicație este falsă dacă și numai dacă antecedentul este adevărat, dar consecventul este fals. Să presupunem că trec la Logică și că totuși nu dau o petrecere. Atunci implicația *dacă trec la Logică, dau o petrecere*, în ansamblul său, este falsă (antecedentul este adevărat, dar consecventul fals).

Înțelesul unei implicații merită o discuție mai amănunțită, deoarece poate fi contraintuitiv. Implicațiile, așa cum apar în matematică, pot fi diferite de implicațiile pe care le folosim în viața de zi cu zi. În viața de zi cu zi, când spunem *dacă trec la logică, dau o petrecere*, înțelegem că avem o legătura de cauzalitate între faptul de a trece la Logică și faptul de a da o petrecere. Alte exemple de astfel de legătură de cauzalitate: *dacă am bani, cumpăr o mașină* sau *dacă mă ajuți, te ajut*. În limbajul de zi cu zi, nu ne-am gândi niciodată să conectăm două propoziții printr-o implicație dacă cele două propoziții nu au legătură de cauzalitate între ele. De exemplu, propoziția *dacă pământul este rotund, atunci $2 + 2 = 4$* nu ar avea sens (deși este adevărată).

Implicația folosită în matematică se numește *implicație materială*. Valoarea de adevăr a unei implicații depinde doar de valorile de adevăr ale părților componente (antecedentul și consecventul), nu și de legătura de cauzalitate dintre ele. Acest înțeles al implicației materiale nu corespunde tot timpul cu înțelesul din limbajul natural (e.g., limba română), dar practica arată că este singurul înțeles rezonabil în matematică (și informatică).

În particular, atât propoziția *dacă pământul este plat, atunci $2+2=5$* , cât și propoziția *dacă pământul este plat, atunci $2 + 2 = 4$* sunt adevărate, deoarece antecedentul este fals.

Exercițiul 6. Care sunt valorile de adevăr ale propozițiilor *dacă $2 + 2 = 4$, atunci Pământul este plat* și *dacă $2 + 2 = 5$, atunci Pământul este plat*?

Valoarea de adevăr a implicației *dacă φ , atunci ψ* depinde doar de valorile de adevăr ale antecedentului, φ , și consecventului, ψ , și este prezentată în următorul tabel de adevăr:

φ	ψ	dacă φ , atunci ψ
fals	fals	adevărat
fals	adevărat	adevărat
adevărat	fals	fals
adevărat	adevărat	adevărat

Următorul exemplu arată că tabelul de adevăr de mai sus este singura interpretare rezonabilă a implicației. Sunteți cu siguranță de acord că orice număr natural este număr întreg. Altfel spus, propoziția *pentru orice număr x , dacă x este număr natural, atunci x este număr întreg* este adevărată. În

particular veți fi de acord că propoziția este adevărată în cazurile particulare $x = -10$, $x = 10$ și $x = 1.2$ (din moment ce este vorba despre *orice număr* x).

Obținem cazurile particulare *dacă* -10 *este număr natural*, *atunci* -10 *este număr întreg*, *dacă* 10 *este număr natural*, *atunci* 10 *este număr întreg* și *dacă* 1.2 *este număr natural*, *atunci* 1.2 *este număr întreg*., care trebuie toate să fie adevărate. Aceste cazuri particulare exemplifică rândurile 2, 4 și 1 ale tabelului de adevăr de mai sus (de obicei, studenții nu au încredere în rândul 2). Cât despre a treia linie, o propoziție de forma *dacă* φ , *atunci* ψ , unde φ este adevărată, dar ψ este falsă, nu poate fi decât falsă. Altfel, ar trebui să acceptăm ca fiind adevărate propoziții cum ar fi *Dacă* $2 + 2 = 4$, *atunci* $2 + 2 = 5$. (antecedentul, $2 + 2 = 4$, este adevărat, consecventul, $2 + 2 = 5$, este fals).

Unele implicații pot fi relativ dificil de identificat. De exemplu, în propoziția *trec la Logică doar dacă învăț.*, antecedentul este (împotriva aparențelor) *trec la Logică*, iar consecventul este *învăț*. Atenție! Propoziția de mai sus nu are același înțeles cu *dacă învăț, trec la Logică*.

Atenție! În propozițiile de forma *trec la Logică doar dacă învăț* sau *trec la Logică numai dacă învăț*, antecedentul este *trec la Logică*, iar consecventul este *învăț*. Aceste două propoziții nu au același înțeles cu propoziția *dacă învăț, atunci trec la Logică*.

Implicațiile în limba română pot câteodată să nu folosească șablonul *dacă ... atunci ...*. De exemplu, sensul cel mai rezonabil al propoziției *trec la Logică sau renunț la facultate* (aparent o disjuncție), este că *dacă nu trec la Logică, renunț la facultate* (implicație). Din fericire, cele două propoziții sunt echivalente, într-un sens pe care îl vom studia în cursurile următoare.

2.6 Negatiile

O propoziție de forma *nu este adevărat că* φ (sau pur și simplu *nu* φ) se numește *negația* lui φ . De exemplu, *nu plouă* este negația propoziției *plouă*. Valoarea de adevăr a negației unei propoziții φ este opusul valorii de adevăr al propoziției φ . În momentul în care scriu acest text, propoziția *plouă* este falsă, și deci propoziția *nu plouă* este adevărată.

Exercițiul 7. *Dați un exemplu de o propoziție falsă care folosește atât o negație, cât și o conjuncție.*

2.7 Echivalențe

O propoziție de forma φ *dacă și numai dacă* ψ se numește *echivalență* sau *dublă implicație*. O astfel de propoziție, în ansamblul său, este adevărată dacă φ și ψ au aceeași valoare de adevăr (ambele false sau ambele adevărate).

De exemplu, în momentul în care scriu acest text, propoziția *plouă dacă și numai dacă ninge* este adevărată. De ce? Deoarece atât propoziția *plouă* cât și propoziția *ninge* sunt false.

Exercițiul 8. *Care este valoarea de adevăr a propoziției* Numărul 7 este impar *dacă și numai dacă* 7 este număr prim?

Echivalențele sunt, din punct de vedere semantic, conjuncția a două implicații: φ *dacă și numai dacă* ψ transmite aceeași informație cu

$$\underbrace{\varphi \text{ dacă } \psi}_{\text{implicația inversă}} \quad \text{și} \quad \underbrace{\varphi \text{ numai dacă } \psi}_{\text{implicația directă}}.$$

Propoziția φ *dacă* ψ este aceeași cu *dacă* ψ , *atunci* φ (doar că are altă topică). Propoziția φ *numai dacă* ψ are același înțeles cu φ *doar dacă* ψ și cu *dacă* φ , *atunci* ψ , după cum am discutat în secțiunea referitoare la implicații.

2.8 Conectorii logici

Cuvintele/expresiile *și*, *sau*, *dacă-atunci*, *doar dacă*, *non*, *dacă-si-numai-dacă* (și altele similare) sunt numite *conectori logici*, deoarece pot fi folosite pentru a conecta propoziții mai mici pentru a obține propoziții mai mari.

Atenție! O propoziție este *atomică* în logica propozițională dacă nu poate fi despărțită în propoziții mai mici separate de conectorii logici discutați mai sus. De exemplu, propoziția *orice număr natural este și număr întreg* este o propoziție atomică (în logica propozițională).

Aceeași propoziție nu mai este neapărat atomică într-o altă logica mai bogată. De exemplu, în logica de ordinul I (pe care o vom studia în partea a doua a cursului), avem doi conectori suplimentari numiți *cuantificatori*. În logica de ordinul I, propoziția *orice număr natural este și număr întreg* nu este atomică.

2.9 Ambiguități în limba română

Am prezentat mai sus limbajul logicii propoziționale: propoziții atomice conectate prin *și*, *sau*, *non* etc. Până în acest moment, am folosit limba română.

Totuși, limba română (și orice alt limbaj natural) nu este potrivită pentru scopul nostru din cauza *ambiguităților*.

Iată exemple de propoziții ambigue:

1. *Ion și Maria sunt căsătoriți* (înțelesul 1: între ei; înțelesul 2: căsătoriți, dar posibil cu alte persoane);
2. *Văd negru* (înțeles 1: sunt supărat; înțeles 2: mă simt rău; înțeles 3: nu este lumină în jur etc.);
3. *Trimit mesajul lui Ion* (înțeles 1: mesajul este al lui Ion și eu îl trimit, nu se știe unde; înțeles 2: am un mesaj și îl trimit către Ion);
4. *Nu vorbesc și mănânc* (înțeles 1: neg faptul că și vorbesc și mănânc; înțeles 2: nu vorbesc, dar mănânc).

Astfel de ambiguități sunt cel puțin neplăcute dacă scopul nostru este să determinăm valoarea de adevăr a unei propoziții (dacă nici măcar nu suntem siguri ce înseamnă propoziția). Pentru peste 2000 de ani, logica a lucrat cu limbaj natural. Nevoia de a introduce un limbaj formal, simbolic, fără ambiguități, a apărut în secolele XVIII - XIX, odată cu dezvoltarea logicii matematice. În logica simbolică/formală, pe care urmează să o studiem, vom lucra cu un limbaj artificial, numit limbaj formal, care este proiectat de o asemenea manieră încât să nu conțină nicio ambiguitate.

În fapt, primul limbaj formal pe care îl vom studia va fi *limbajul formal al logicii propoziționale* (pe scurt, *logica propozițională*).

2.10 Fișă de exerciții

Exercițiul 9. *Stabiliți care dintre următoarele expresii sunt propoziții:*

Tu ai un laptop.

Zăpada este albă.

Zăpada nu este albă.

Tatăl meu merge la servici și eu merg la școală.

Afară plouă, dar eu am umbrelă.

Mâine va ploua sau nu va ploua.

Dacă obțin notă de trecere la logică, voi sărbători.

$2 + 2 = 4$. (Doi plus doi egal cu 4.)

Roșu și Negru.

π .

Plouă?

Hai la pescuit!

x este mai mare decât 7.

Această afirmație este falsă.

Exercițiul 10. *Pentru toate propozițiile identificate, stabiliți dacă sunt propoziții atomice sau compuse, iar dacă sunt compuse, stabiliți dacă sunt conjuncții, negații etc.*

Capitolul 3

Sintaxa formală a logicii propoziționale

În continuare, vom studia limbajul formal al logicii propoziționale.

Prin *sintaxă* înțelegem, în general, un ansamblu de reguli pentru scrierea corectă. După cum am promis în capitolul anterior, în acest capitol vom dezvolta un limbaj artificial, pe care îl vom numi *logica propozițională formală* (sau, pe scurt, doar *logica propozițională*). Sintaxa formală a logicii propoziționale se referă la regulile de scriere pentru acest limbaj.

3.1 Noțiunea de alfabet în informatică

În contextul informaticii, prin *alfabet* se înțelege o mulțime. Elementele unui alfabet se numesc *simboluri*. De cele mai multe ori, alfabetul este o mulțime finită (dar nu în cazul logicii propoziționale).

Care este diferența dintre o mulțime și un alfabet? A priori, niciuna. Conține intenția – ce vom face cu elementele mulțimii/alfabetului mai departe. Folosim elementele unui alfabet pentru a crea *cuvinte*. Un *cuvânt* peste un alfabet este o secvență de simboluri din alfabet.

Exemplul 11. Fie alfabetul $X = \{0, 1\}$. Șirurile/secvențele de simboluri 001010, 101011 și 1 sunt exemple de cuvinte peste alfabetul X .

Cuvântul *vid*, format din 0 simboluri ale alfabetului este notat de obicei cu ε .

3.2 Alfabetul logicii propoziționale

Limbajul logicii propoziționale este format din *formule propoziționale*, care modelează propoziții din logica propozițională, propoziții despre care am discutat în capitolul anterior.

Formulele propoziționale sunt cuvinte peste *alfabetul logicii propoziționale* (anumite cuvinte sunt formule; nu toate). *Alfabetul logicii propoziționale* este reuniunea următoarelor mulțimi:

1. $\{p, q, r, p', q_1, \dots\}$, mulțimea *variabilelor propoziționale*;
2. $\{\neg, \wedge, \vee\}$, mulțimea *conectorilor logici*;
3. $\{(\, , \,)\}$, mulțimea simbolurilor auxiliare (un simbol pentru paranteză deschisă și un simbol pentru paranteză închisă).

Vom nota mulțimea variabilelor propoziționale cu A (vom vedea de ce în continuare). Atenție! A nu este tot alfabetul logicii propoziționale, ci conține doar variabilele propoziționale.

Iată exemple de cuvinte peste alfabetul logicii propoziționale:

1. $((p \vee \wedge)$;
2. $\vee \vee \neg(p)$;
3. p ;
4. ppp ;
5. $\neg(p \vee q)$.

În cele ce urmează vom vedea ca doar anumite cuvinte se numesc formule propoziționale. De exemplu, ultimul cuvânt de mai sus, $\neg(p \vee q)$, este o formulă a logicii propoziționale, dar al doilea cuvânt, $\vee \vee \neg(p)$, nu este formulă. Următoarea definiție surprinde cu precizie care cuvinte sunt formule și care cuvinte nu sunt formule propoziționale.

3.3 Formule propoziționale

Definiția 12 (Mulțimea formulelor propoziționale, notată \mathbb{LP}). *Mulțimea \mathbb{LP} (mulțimea formulelor propoziționale) este cea mai mică mulțime de cuvinte peste alfabetul logicii propoziționale care satisface următoarele proprietăți:*

- *Cazul de Bază. Orice variabilă propozițională, văzută ca un cuvânt de lungime 1, este în mulțimea \mathbb{LP} ;*

- *Cazul Inductiv 1. Dacă $\varphi \in \mathbb{LP}$, atunci $\neg\varphi \in \mathbb{LP}$ (sau: dacă cuvântul φ este o formulă propozițională, atunci și cuvântul care începe cu simbolul \neg și continuă cu simbolurile din φ este formulă propozițională);*
- *Cazul Inductiv 2. Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$, atunci $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in \mathbb{LP}$ (sau: ... – exercițiu pentru acasă);*
- *Cazul Inductiv 3. Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$, atunci $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \mathbb{LP}$ (sau: ... – exercițiu pentru acasă).*

Iată câteva exemple de elemente ale mulțimii \mathbb{LP} :

$$\begin{aligned} p, \quad q, \quad \neg p, \quad \neg q, \quad \neg p', \quad \neg\neg p_1, \quad (p \vee q), \quad (p \wedge q), \\ \neg(p \vee q), \quad (\neg p \wedge \neg q), \quad \neg(\neg\neg p \vee p), \quad ((p \vee q) \wedge r), \\ (p \vee (q \wedge r)). \end{aligned}$$

Iată exemple de cuvinte care nu sunt în \mathbb{LP} :

$$pp, \quad q\neg q, \quad q \wedge \neg p, \quad p + q.$$

Definiția mulțimii \mathbb{LP} este un exemplu de *definiție inductivă*. Astfel de definiții sunt foarte importante în informatică și este obligatoriu să ajungem să le înțelegem foarte bine. Într-o definiție inductivă, există de obicei unul sau mai multe cazuri de bază, care definesc cele mai *mici* elemente ale mulțimii (în cazul nostru, variabilele propoziționale). Cazurile inductive arată cum se pot construi elemente mai *mari* pornind de la alte elemente mai *mici*, despre care știm deja că sunt în mulțime. Alt element important este restricția de minimalitate (subliniată în definiția de mai sus), care indică că **doar** elementele care pot fi construite apelând la cazurile de bază și la cazurile inductive fac parte din mulțime. Această restricție de minimalitate asigură unicitatea mulțimii (nu există o altă mulțime cu cele 4 proprietăți și care să fie minimală) și ne permite să arătăm ca anumite elemente nu fac parte din mulțime (cele care nu pot fi construite prin cazurile de bază/inductive).

De exemplu, cuvântul pp nu este în mulțimea \mathbb{LP} , deoarece nu poate fi construit prin aplicarea niciunui caz dintre cele 4 (cazul de bază sau cele trei cazuri inductive).

3.4 Cum arătăm că un cuvânt face parte din \mathbb{LP}

Putem arăta că un cuvânt face parte din \mathbb{LP} explicând cum se pot aplica pașii de bază și pașii inductivi. Iată o demonstrație a faptului că $\neg(p \vee q) \in \mathbb{LP}$:

1. $p \in \mathbb{LP}$ (din pasul de bază, deoarece $p \in A$);
2. $q \in \mathbb{LP}$ (din pasul de bază, deoarece $q \in A$);
3. $(p \vee q) \in \mathbb{LP}$ (din pasul inductiv 3, unde $\varphi_1 = p$ și $\varphi_2 = q$);
4. $\neg(p \vee q) \in \mathbb{LP}$ (din pasul inductiv 1, unde $\varphi = (p \vee q)$).

Putem rearanja lista de mai sus într-un *arbore de construcție adnotat* echivalent pentru formula $\neg(p \vee q)$:

$$\frac{\frac{\overline{p \in \mathbb{LP}} \text{ pas de bază} \quad \overline{q \in \mathbb{LP}} \text{ pas de bază}}{(p \vee q) \in \mathbb{LP}} \text{ pas inductiv 3}}{\neg(p \vee q) \in \mathbb{LP}} \text{ pas inductiv 1}$$

Vom vedea acest tip de notație de mai multe ori în Informatică și de aceea e important să ne familiarizăm cu ea. Fiecare linie orizontală se numește *inferență*; sub fiecare astfel de linie este concluzia inferenței și deasupra ei sunt ipotezele (0, 1 sau mai multe ipoteze). Inferențele cu 0 ipoteze se numesc axiome. Lângă fiecare linie se găsește numele regulii care a fost aplicată.

Dacă renunțăm la adnotații, obținem următorul *arbore de construcție* pentru formula $\neg(p \vee q)$:

$$\frac{\frac{\overline{p} \quad \overline{q}}{(p \vee q)}}{\neg(p \vee q)}$$

Este ușor de văzut că un cuvânt aparține \mathbb{LP} dacă și numai dacă există un arbore de construcție pentru acel cuvânt.

3.5 Conectorul principal al unei formule

O formulă care constă doar dintr-o variabilă propozițională (cum ar fi formula p sau formula q) se numește *formulă atomică*. Acest lucru explică de ce mulțimea A a variabilelor propoziționale se numește A (A , de la *atomic*).

Formulele mai complexe, cum ar fi $\neg p$ sau $(p \vee q)$, se numesc *compuse* (sau, în engleză, *moleculare*).

Orice formulă compusă are un *conector principal*, care este dat de ultima inferență din arborele său de construcție. De exemplu, conectorul principal al formulei $\neg(p \vee q)$ este \neg (negația), în timp ce conectorul principal al formulei

$(\neg p \vee q)$ este \vee (disjuncția). Numim formulele al căror conector principal este \wedge *conjunctii*. Similar, dacă conectorul principal al unei formule este \vee , formula este o *disjuncție*, iar dacă conectorul principal este \neg , atunci este o *negație*.

Orice formulă compusă are un conector principal.

3.6 Cum arătăm că un cuvânt nu face parte din \mathbb{LP}

Este puțin mai dificil (sau, mai bine spus, lung) să arătăm că un cuvânt nu face parte din \mathbb{LP} .

Dacă cuvântul nu este peste alfabetul corect, așa cum este cuvântul cu trei simboluri $p + q$ (care folosește simbolul străin $+$), atunci este evident că acesta nu face parte din \mathbb{LP} , deoarece \mathbb{LP} conține doar cuvinte peste alfabetul logicii propoziționale.

Dacă cuvântul este peste alfabetul corect și vrem să arătăm că nu face parte din \mathbb{LP} , atunci trebuie să ne folosim de condiția de minimalitate. Iată cum putem arăta că $(p \neg q) \notin \mathbb{LP}$:

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $(p \neg q) \in \mathbb{LP}$. În acest caz, din condiția de minimalitate, faptul că $(p \neg q) \in \mathbb{LP}$ trebuie să poată fi explicat prin una dintre cele patru reguli de formare (pasul de bază sau unul dintre cei trei pași inductivi).

Dar nu putem aplica cazul de bază pentru a arăta că $(p \neg q) \in \mathbb{LP}$, deoarece $(p \neg q) \notin A$.

De asemenea, nu putem aplica nici cazul inductiv 1, deoarece nu există nicio formulă φ astfel încât $(p \neg q) = \neg \varphi$ (orice formulă $\varphi \in \mathbb{LP}$ am alege, primul simbol al părții stângi ar fi $($, iar primul simbol al părții drepte ar fi \neg).

Nu putem aplica nici cazul inductiv 2, deoarece nu există formulele $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$ astfel încât $(p \neg q) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ (oricum am alege $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$, cuvântul din partea stângă nu conține simbolul \wedge , în timp ce cuvântul din dreapta îl conține).

Dintr-un motiv similar, nu putem aplica nici cazul inductiv 3.

Din moment ce niciunul dintre cele patru cazuri nu funcționează, presupunerea noastră este falsă, și deci $(p \neg q) \notin \mathbb{LP}$.

3.7 Proprietatea de citire unică

Definiția \mathbb{LP} are o proprietate importantă, care se numește *proprietatea de citire unică*:

Teorema 13 (Proprietatea de citire unică a formulelor propoziționale). *Pentru orice formulă $\varphi \in \mathbb{LP}$, există un unic arbore de construcție.*

Proprietatea de mai sus se mai numește și neambiguitatea gramaticii logicii propoziționale. Demonstrarea proprietății nu face parte din acest curs. Totuși, trebuie să înțelegem semnificația ei. În acest sens, vom considera o altă posibilă definiție (greșită) pentru \mathbb{LP} și vom arată în ce sens această definiție alternativă este ambiguă.

Începutul unei definiții greșite pentru \mathbb{LP} .

Să ne imaginăm că pasul inductiv 3 ar fi:

:

- Cazul Inductiv 3. Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$, atunci $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathbb{LP}$;

:

Singura diferență față de definiția corectă este că nu putem paranteze în jurul disjuncțiilor. Cu această definiție alternativă, fictivă, a lui \mathbb{LP} , am avea că $\neg p \vee q \in \mathbb{LP}$. Totuși, acest cuvânt ar avea doi arbori de construcție diferiți:

$$\frac{\frac{\overline{p}}{p} \quad \frac{\overline{q}}{q}}{p \vee q} \quad \frac{\frac{\overline{p}}{\neg p} \quad \frac{\overline{q}}{q}}{\neg p \vee q}$$

O astfel de ambiguitate ar fi deosebit de neplăcută pentru scopurile noastre, deoarece nu am putea ști dacă $\neg p \vee q$ este o disjuncție (ca în arborele de construcție din dreapta) sau o negație (ca în arborele de construcție din stânga). De fapt, evitarea unor asemenea ambiguități sintactice a fost unul dintre motivele pentru care am părăsit sfera limbajului natural și am început să studiem logica formală.

Sfârșitul unei definiții greșite pentru \mathbb{LP} .

După această incursiune, ar trebui să fie clar de ce teorema de citire unică este netrivială (ca un exercițiu pentru cei cu înclinare spre matematică, încercați să o demonstrați). De asemenea, ar trebui să fie clar de ce citirea unică este o proprietate esențială a definiției formulelor: ne arată că orice formulă propozițională poate fi citită într-un singur fel; cu alte cuvinte, orice formulă propozițională nu are ambiguități sintactice.

3.8 Limbaj-obiect și meta-limbaj

O particularitate a logicii este că studiem propoziții (analizăm, de exemplu, valoarea lor de adevăr), iar pentru a efectua studiul, ne folosim de raționament care, în mod natural, sunt și ele alcătuite din propoziții. De exemplu, în cursul studiului nostru, am putea efectua următorul raționament:

*Propoziția **nu merg la școală** este falsă dacă propoziția **merg la școală** este adevărată.*

De observat că afirmațiile care fac obiectul studiului (*nu merg la școală* și *merg la școală*) sunt propoziții, dar și întreaga afirmație *Propoziția **nu merg la școală** este falsă dacă propoziția **merg la școală** este adevărată* este la rândul ei o propoziție. Astfel, pare ca facem un raționament circular, în care studiem chiar metoda de studiu.

Această dificultate aparentă nu apare și în cazul aritmeticii, de exemplu. În aritmetică, studiem numere și operații peste numere, iar studiul îl facem folosind propoziții.

Dificultatea își are rezolvarea prin separarea strictă a *limbajului obiect* de *meta-limbaj*. Limbajul obiect este limbajul pe care îl studiem (\mathbb{LP}), iar meta-limbajul este limbajul pe care îl folosim pentru a efectua studiul (limba română).

Limbajul-obiect este limbajul care face obiectul studiului (în cazul nostru, logica propozițională). Meta-limbajul este limbajul pe care îl folosim pentru a comunica despre obiectul studiului (în cazul nostru, limba română).

În acest curs, pentru a diferenția ușor între cele două, facem următoarea convenție: toate elementele din limbajul-obiect le scriem cu font **sans-serif albastru** (de exemplu, $(p \wedge q)$), iar afirmațiile din meta-limbaj le scriem folosind **font negru obișnuit** (de exemplu, *orice formulă atomică este o formulă*).

Este extrem de important să facem diferența între limbajul-obiect și meta-limbaj. În acest scop, notele de curs folosesc o convenție tipografică. Elementele meta-limbajului sunt scrise cu font obișnuit, de culoare neagră. Elementele limbajului-obiect sunt scrise astfel: $(p \wedge q)$. Din acest motiv, dacă imprimați notele de curs, este recomandat să folosiți o imprimantă color.

3.9 Fișă de exerciții

Exercițiul 14. *Arătați că următoarele cuvinte sunt formule propoziționale (adică elemente ale mulțimii \mathbb{LP}), explicând care sunt pașii de construcție (pas de bază, respectiv unul dintre cei trei pași inductivi):*

1. $\neg q$;
2. $(p_1 \wedge q)$;
3. $\neg(p \vee q)$;
4. $(\neg p \vee \neg q)$;
5. $(\neg p \wedge \neg q)$.

Exercițiul 15. *Arătați că următoarele cuvinte nu sunt elemente ale mulțimii \mathbb{LP} (indicație: arătați că niciuna dintre cele 4 reguli de formare nu poate fi aplicată):*

1. $(\neg)q$;
2. $q \wedge \neg$;
3. pq ;
4. $p \wedge q$;
5. $(p) \wedge (q)$.

Exercițiul 16. *Care dintre următoarele cuvinte sunt formule din \mathbb{LP} și care nu sunt:*

1. p_1 ;
2. $p_1 \vee q_1$;

3. $(p_1 \vee q_1);$

4. $(\neg p_1 \vee q_1);$

5. $\neg(p_1 \vee q_1);$

6. $(\neg p)?$

Exercițiul 17. *Dați exemple de 5 formule propoziționale interesante (cu mai mulți conectori, mai multe variabile propoziționale etc.) și justificați că sunt într-adevăr formule.*

Capitolul 4

Funcții recursive peste \mathbb{LP}

Memento. Dacă X este o mulțime, prin 2^X notăm mulțimea părților lui X , adică mulțimea tuturor submulțimilor lui X . De exemplu, dacă $X = \{1, 2, 3\}$, atunci $2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Când X este finită, avem că $|2^X| = 2^{|X|}$, ceea ce explică notația. În liceu, este posibil să fi folosit notația $\mathcal{P}(X)$ în loc de 2^X .

Dacă o mulțime este *definită inductiv*, putem defini *funcții recursive* care operează pe elementele mulțimii. Definiția acestor funcții urmează *structura* elementelor din mulțimea definită inductiv.

Iată un exemplu de funcție care calculează mulțimea *subformulelor unei formule*:

$subf: \mathbb{LP} \rightarrow 2^{\mathbb{LP}}$, definită prin

$$subf(\varphi) = \begin{cases} \{\varphi\}, & \text{dacă } \varphi \in A; \\ \{\varphi\} \cup subf(\varphi'), & \text{dacă } \varphi = \neg\varphi' \text{ și } \varphi' \in \mathbb{LP}; \\ \{\varphi\} \cup subf(\varphi_1) \cup subf(\varphi_2), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}; \\ \{\varphi\} \cup subf(\varphi_1) \cup subf(\varphi_2), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}. \end{cases}$$

Iată cum se poate calcula $subf(\varphi)$ pentru $\varphi = \neg(p \vee q)$:

$$\begin{aligned}
 \text{subf}(\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})) &= \{\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})\} \cup \text{subf}((\mathbf{p} \vee \mathbf{q})) \\
 &= \{\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})\} \cup \{(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})\} \cup \text{subf}(\mathbf{p}) \cup \text{subf}(\mathbf{q}) \\
 &= \{\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})\} \cup \{(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})\} \cup \{\mathbf{p}\} \cup \{\mathbf{q}\} \\
 &= \{\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}), (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}), \mathbf{p}, \mathbf{q}\}.
 \end{aligned}$$

Observați cele două tipuri de paranteze care apar în calculul de mai sus. Pe de o parte, avem parantezele care mărginesc argumentul funcției *subf*, iar pe de altă parte avem parantezele din alfabetul logicii propoziționale. Primul tip de paranteze sunt paranteze obișnuite din matematică, în timp al doilea tip sunt simboluri ale alfabetului. Pentru a le diferenția, vom adopta convenția următoare în aceste note de curs: folosim paranteze cu font obișnuit, de obicei mai mari, pentru apelul de funcție (de exemplu (sau (, și parantezele (și), scrise cu font **sans – serif albastru**, pentru simbolurile alfabetului.

Ambele tipuri de paranteze sunt importante. De exemplu, este o greșeală să scriem *subf*(**p** \vee **q**) în loc de *subf*((**p** \vee **q**)), din moment ce cuvântul **p** \vee **q** nu este o formulă.

Funcția *subf* este prima dintre funcțiile pe care le vom defini recursiv, în funcție de structura formulei $\varphi \in \mathbb{LP}$. Aceste funcții se numesc *recursive structural*. Este foarte important să înțelegem cum operează aceste funcții pentru a înțelege restul cursului. Iată alte exemple de astfel de funcții.

4.1 Arborele de sintaxă abstractă al unei formule

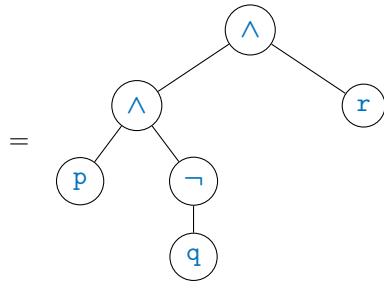
Următoarea funcție calculează *arborele de sintaxă abstractă* al unei formule:

$\text{arb} : \mathbb{LP} \rightarrow \text{Trees}$, definită prin:

$$arb(\varphi) = \left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{\varphi}, & \text{dacă } \varphi \in A; \\ \textcircled{\neg} \text{ --- } arb(\varphi'), & \text{dacă } \varphi = \neg\varphi' \text{ și } \varphi' \in \mathbb{LP}; \\ \begin{array}{c} \textcircled{\wedge} \\ \swarrow \quad \searrow \\ arb(\varphi_1) \quad arb(\varphi_2) \end{array}, & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}; \\ \begin{array}{c} \textcircled{\vee} \\ \swarrow \quad \searrow \\ arb(\varphi_1) \quad arb(\varphi_2) \end{array}, & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}. \end{array} \right.$$

Iată un calcul al arborelui abstract de sintaxă al formulei $((p \wedge \neg q) \wedge r)$.

$$\begin{aligned} arb(((p \wedge \neg q) \wedge r)) &= \begin{array}{c} \textcircled{\wedge} \\ \swarrow \quad \searrow \\ arb((p \wedge \neg q)) \quad arb(r) \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \textcircled{\wedge} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{\wedge} \quad \textcircled{r} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ arb(p) \quad arb(\neg q) \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \textcircled{\wedge} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{\wedge} \quad \textcircled{r} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{p} \quad \textcircled{\neg} \quad \textcircled{q} \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad arb(q) \end{array} \end{aligned}$$



Mulțimea *Trees* este mulțimea arborilor cu rădăcină, etichetați.

Arborii de sintaxă abstractă sunt extrem de importanți deoarece, din punct de vedere conceptual, o formulă propozițională *este* arborele abstract de sintaxă. Totuși, deoarece scrierea arborilor nu este convenabilă (pentru persoane), recurgem la notația convențională, și scriem formulele în stil tradițional, de la stânga la dreapta, sub formă de cuvinte. În schimb, la implementarea pe un calculator a diferiților algoritmi care prelucreză formule logice, vom prefera reprezentarea formulelor sub forma arborelui de sintaxă abstractă în dauna reprezentării sub forma unui cuvânt (șir de caractere).

4.2 Alte exemple de funcții definite recursiv

Iată încă trei exemple de funcții definite prin recursie structurală peste formule.

Prima funcție, $height : \mathbb{LP} \rightarrow \mathbb{N}$, calculează *înălțimea* arborelui abstract de sintaxă al unei formule:

$$height(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \varphi \in A; \\ 1 + height(\varphi'), & \text{dacă } \varphi = \neg\varphi' \text{ și } \varphi' \in \mathbb{LP}; \\ 1 + \max(height(\varphi_1), height(\varphi_2)), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}; \\ 1 + \max(height(\varphi_1), height(\varphi_2)), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}. \end{cases}$$

Funcția $max : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care apare în definiția funcției $height$ este funcția obișnuită care calculează maximul dintre două numere naturale.

Următoarea funcție, $size : \mathbb{LP} \rightarrow \mathbb{N}$, calculează *dimensiunea* arborelui abstract de sintaxă al unei formule (adică numărul de noduri):

$$size(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \varphi \in A; \\ 1 + size(\varphi'), & \text{dacă } \varphi = \neg\varphi' \text{ și } \varphi' \in \mathbb{LP}; \\ 1 + size(\varphi_1) + size(\varphi_2), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}; \\ 1 + size(\varphi_1) + size(\varphi_2), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}. \end{cases}$$

Ultimul exemplu, $prop : \mathbb{LP} \rightarrow 2^A$, calculează toate variabilele propoziționale care apar într-o formulă:

$$prop(\varphi) = \begin{cases} \{\varphi\}, & \text{dacă } \varphi \in A; \\ prop(\varphi'), & \text{dacă } \varphi = \neg\varphi' \text{ și } \varphi' \in \mathbb{LP}; \\ prop(\varphi_1) \cup prop(\varphi_2), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}; \\ prop(\varphi_1) \cup prop(\varphi_2), & \text{dacă } \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \text{ și } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}. \end{cases}$$

Asigurați-vă că înțelegeți și că știți să definiți și să calculați cu astfel de funcții.

4.3 Demonstrații prin inducție structurală

Câteodată, vom face demonstrații prin *inducție structurală*. Sunteți deja familiarizați din liceu cu demonstrațiile prin inducție matematică.

Pentru a demonstra o teoremă de forma

$$\text{Pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ este adevărat că } P(n),$$

principiul inducției matematice postulează că este suficient să arătăm că:

- (cazul de bază) $P(0)$ este adevărat;
- (cazul inductiv) $P(k)$ implică $P(k+1)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Demonstrațiile prin inducție structurală generalizează principiul de mai sus și pot fi aplicate oricărei mulțimi definite inductiv, cum ar fi \mathbb{LP} .

Pentru cazul \mathbb{LP} , principiul inducției structurale este că, pentru a demonstra o teoremă de forma

Pentru orice formulă propozițională $\varphi \in \mathbb{LP}$, este adevărat că $P(\varphi)$,

este suficient să arătăm că:

- (cazul de bază) $P(\varphi')$ are loc pentru orice formula atomică $\varphi' \in A$ (altfel spus, proprietatea P este adevărată pentru orice formulă atomică);
- (cazul inductiv 1) $P(\neg\varphi')$ are loc dacă $P(\varphi')$ are loc;
- (cazul inductiv 2) $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ are loc dacă $P(\varphi_1)$ și $P(\varphi_2)$ au loc;
- (cazul inductiv 3) $P(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ are loc dacă $P(\varphi_1)$ și $P(\varphi_2)$ au loc.

Iată un exemplu de teoremă și de demonstrația ei prin inducție structurală:

Teorema 18 (Exemplu de teoremă care poate fi demonstrată prin inducție structurală). *Pentru orice formulă propozițională φ , avem că $height(\varphi) \leq size(\varphi)$.*

Demonstrație: Facem demonstrația prin inducție structurală, unde proprietatea P este definită astfel:

$$P(\varphi) = height(\varphi) \leq size(\varphi).$$

Este suficient să arătăm că:

1. (cazul de bază) $height(\varphi') \leq size(\varphi')$ pentru orice variabilă propozițională $\varphi' \in A$.

Dar, prin definiție, $height(\varphi') = 1$ și $size(\varphi') = 1$ (deoarece $\varphi' \in A$). Și $1 \leq 1$, deci am terminat de demonstrat acest caz.

2. (cazul inductiv 1) Presupunând că $height(\varphi') \leq size(\varphi')$, arătăm că $height(\neg\varphi') \leq size(\neg\varphi')$.

Dar, din definiție, $height(\neg\varphi') = 1 + height(\varphi')$ și $size(\neg\varphi') = 1 + size(\varphi')$. Și $1 + height(\varphi') \leq 1 + size(\varphi')$ (ceea ce trebuia să arătăm), din moment ce știm deja că $height(\varphi') \leq size(\varphi')$.

3. (cazul inductiv 2) Presupunând că $height(\varphi_1) \leq size(\varphi_1)$ și $height(\varphi_2) \leq size(\varphi_2)$, arătăm că $height((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \leq size((\varphi_1 \wedge \varphi_2))$.

Dar, prin definiție, $height((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = 1 + \max(height(\varphi_1), height(\varphi_2))$ și, din moment ce $\max(a, b) \leq a + b$ (pentru orice numere naturale $a, b \in \mathbb{N}$), avem că $height((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \leq 1 + height(\varphi_1) + height(\varphi_2)$. Dar $height(\varphi_i) \leq size(\varphi_i)$ ($1 \leq i \leq 2$) din ipoteză, și deci $height((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \leq 1 + size(\varphi_1) + size(\varphi_2)$. Dar, din definiție, $size((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = 1 + size(\varphi_1) + size(\varphi_2)$, și deci $height((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \leq size((\varphi_1 \wedge \varphi_2))$, ceea ce trebuia să arătăm.

4. (cazul inductiv 3) analog cazului inductiv 2.

q.e.d.

4.4 Fișă de exerciții

Exercițiul 19. Calculați, folosind funcția subf, mulțimea de subformule ale formulelor:

1. $((p \wedge \neg q) \wedge r)$; 2. $((p \vee \neg q) \wedge r)$; 3. $\neg((p \vee \neg q) \wedge r)$.

Exercițiul 20. Calculați arborii abstracti ai următoarelor formule:

1. $((p \wedge \neg q) \wedge r)$;
2. $((p \vee \neg q) \wedge r)$;
3. $\neg((p \vee \neg q) \wedge r)$;
4. $(\neg(p \vee \neg q) \wedge r)$.

Exercițiul 21. Calculați, utilizând funcția $height : \mathbb{LP} \rightarrow \mathbb{N}$, înălțimea arborelui abstract de sintaxă pentru fiecare dintre formulele de la Exercițiul 20.

Exercițiul 22. Calculați, utilizând funcția $size : \mathbb{LP} \rightarrow \mathbb{N}$, numărul de noduri al arborelui abstract de sintaxă pentru fiecare dintre formulele de la Exercițiul 20.

Exercițiul 23. Calculați, utilizând funcția $prop : \mathbb{LP} \rightarrow 2^A$, mulțimea variabilelor propoziționale care apar în fiecare dintre formulele de la Exercițiul 20.

Exercițiul 24. Demonstrați utilizând principiul inducției structurale că pentru orice formulă propozițională φ , avem că $height(\varphi) < size(\varphi) + 1$.