Calcul trigonométrique

Prof. AYOUB SIRAI

INFO	NIVEAU : 1BAC	MATIÈRE : MATHÉMATIQUES
Mode	Hello World	

Outils didactiques: Tableau, livre, craie, marqueurs.

I. FORMULES DE TRANSFORMATION DE BASE

1. FORMULES D'ADDITION

PROPRIÉTÉS

Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

EXEMPLES

Calculer : $A = \cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{12\pi}{11} + \sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{12\pi}{11}$

On a :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{11} - \frac{12\pi}{11}\right) = \cos\left(\frac{-11\pi}{11}\right) = \cos(-\pi) = -1$$

Par conséquent : $A = -1$.

Calculons $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

On a : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

Par conséquent :

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

Par conséquent :

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

APPLICATIONS

1. En remarquant que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$**, calculer :** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **et** $\sin\frac{7\pi}{12}$**.**

2. Calculer : $A=\sin\frac{5\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$**.**

3. Montrer que : $A=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}=2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$**.**

4. Soit $x\in\mathbb{R}$**. Établir les égalités suivantes :**

- $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$
- $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

PROPRIÉTÉS (TANGENTE)

Soient a et b deux réels tels que : $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On a les formules suivantes :

Si $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors :

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$$

Si $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$$

EXEMPLES (TANGENTE)

Calculons $\tan\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{7\pi}{12}$:

On a : $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ donc :

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

Par conséquent : $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

On a : $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ donc :

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{1-3}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{-2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

Par conséquent : $\tan\dfrac{7\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$.

APPLICATIONS (TANGENTE)

Montrer que : $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=1$.

2. TRANSFORMATION DE $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ ET $\tan(2a)$

PROPRIÉTÉS

Soit a un nombre réel. On a les formules suivantes :

- $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- $\sin(2a)=2\sin a\cdot\cos a$

Si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ et $2a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, alors :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Remarques (Linéarisation)

- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$

EXEMPLES

Calculons les rapports trigonométriques de $\dfrac{\pi}{8}$:

On a : $2 \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\cos^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Puisque $\dfrac{\pi}{8} \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$, alors $\cos\dfrac{\pi}{8} \geq 0$.

Par suite : $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

De même : $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Puisque $\dfrac{\pi}{8} \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$, alors $\sin\dfrac{\pi}{8} \geq 0$.

Par suite : $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Enfin :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \sqrt{2}-1$$

Ainsi : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

Remarques Supplémentaires

On a pour tout réel a :

- $1+\cos a = 2\cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right)$

- $1-\cos a = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$
- $\sin a = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$

On rappelle que pour tout réel a : $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$.

APPLICATIONS

1. a) Par utilisation de $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$**, donner la valeur de** $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

b) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **et** $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. Soit α **un réel, tel que :** $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$**. Montrer que :** $\cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ **et** $\cos(2\alpha) = \sin(\alpha)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$**. Montrer que :**

$$1+\cos x+\sin x = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

3. FORMULES DE $\cos(a)$, $\sin(a)$ ET $\tan(a)$ EN FONCTION DE $\tan(\frac{a}{2})$

PROPOSITION

Soit a un nombre réel tel que : $a \neq \pi + 2k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On pose : $t = \tan\frac{a}{2}$.

On a :

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

EXEMPLES

Soit a un nombre réel tel que : $\tan\frac{a}{2} = \sqrt{5}$.

Calculons $\cos a$, $\sin a$ et $\tan a$:

$$\cos a = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{1-(\sqrt{5})^2}{1+(\sqrt{5})^2} = \frac{1-5}{1+5} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

$$\sin a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{1+5} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{2\sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Par suite : $\cos a = -\frac{2}{3}$; $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan a = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

APPLICATIONS

Soit x un nombre réel tel que $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2$.

Calculer : $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

II. TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES ET SOMMES EN PRODUITS

1. TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES

PROPRIÉTÉS

Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

EXEMPLES

1. Calculons $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$.

On a :

$$\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\right]$$

Par conséquent : $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

On a :

$$\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

Par conséquent : $\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\iff\frac{1}{2}-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\iff\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

On sait que $-\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, d'où :

$$\begin{cases}x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})\iff\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=-\pi+2k\pi\end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation est : $S=\left\{-\pi+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

APPLICATIONS

Résolvons dans l'intervalle $[0;2\pi[$ l'inéquation suivante : $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

2. TRANSFORMATION DE SOMMES EN PRODUITS

PROPRIÉTÉS

Soient p et q deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

EXEMPLES

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos(2x)\cos(x)$$

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(5x) - \cos(x) = -2\sin\left(\frac{5x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-x}{2}\right) = -2\sin(3x)\sin(2x)$$

3. Factorisons la somme suivante : $F(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\sin(2x)\cos(x)$$

et :

$$\sin 4x + \sin(2x) = 2\sin\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right) = 2\sin(3x)\cos(x)$$

Si on groupe $(\sin 3x + \sin 2x)$ et $(\sin 4x + \sin x)$:

$F(x) = (\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x)$

$= 2\sin(2.5x)\cos(1.5x) + 2\sin(2.5x)\cos(0.5x)$

$= 2\sin(2.5x)[\cos(1.5x) + \cos(0.5x)]$

$= 2\sin(2.5x)[2\cos(x)\cos(0.5x)]$

$= 4\cos(x)\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Par suite : $F(x) = 4\cos(x)\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

APPLICATIONS

1. Écrire sous forme de produit l'expression : $\sin(x) + \sin(2x)$ **où** $x \in \mathbb{R}$**.**

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ **de l'équation :** $\sin(x) + \sin(2x) = 0$**.**

3. TRANSFORMATION DE L'EXPRESSION $a\cos(x)+b\sin(x)$

PROPOSITION

Soient a et b deux nombres réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$. Alors il existe un réel α tel que :

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

avec $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

EXEMPLE

Écrivons $\cos x+\sqrt{3}\sin x$ sous la forme : $r\sin(x-\alpha)$.

On a : $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$, car on a $a=1$ et $b=\sqrt{3}$.

Par conséquent :

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Ainsi : $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.