GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Prof. AYOUB SIRAI

INFO	NIVEAU : 1BAC	MATIÈRE : MATHÉMATIQUES
Mode	Hello World	

Outils didactiques: Tableau, livre, craie, marqueurs.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

DÉFINITION

On appelle suite numérique toute fonction u de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'image d'un entier n de $\mathbb{N}$ (ou de I) par la suite u est notée u_n.

Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite u; c'est aussi le terme de rang n de la suite u.

Notations

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ une suite numérique définie par $n \mapsto u(n) = u_n$.

La suite numérique u sera notée $(u_n)_{n\in I}$ au lieu de u.

Si $I = \mathbb{N}$, la suite u sera notée $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n). Le premier terme est u_0.

Si $I = \mathbb{N}^*$, la suite u sera notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$. Le premier terme est u_1.

Si $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$), alors la suite u sera notée $(u_n)_{n \geq n_0}$. Le premier terme est u_{n_0}.

Remarques

u_n se lit aussi : « u indice n ».

Il ne faut pas confondre la suite (u_n) et son terme général u_n, terme d'indice n de la suite (u_n).

Les suites rencontrées en pratique sont souvent définies sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. On peut toujours ramener l'étude d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ en posant: $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n = u_{n+n_0}$.

EXEMPLES

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique définie par: $u_n = 3n + 5$.

Le premier terme de la suite (u_n) est: $u_0 = 3 \times 0 + 5 = 5$.

Le terme de rang 6 de la suite (u_n) est: $u_6 = 3 \times 6 + 5 = 23$.

Soit $(v_n)_{n \geq 2}$ la suite numérique définie par: $v_n = \dfrac{3n}{n-1}$.

Le premier terme de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est: $v_2 = \dfrac{3 \times 2}{2-1} = 6$.

On a: $v_4 = \dfrac{3 \times 4}{4-1} = 4$ et $v_7 = \dfrac{3 \times 7}{7-1} = \dfrac{7}{2}$ et $v_{13} = \dfrac{3 \times 13}{13-1} = \dfrac{13}{4}$.

Soit $(w_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par: $w_n = \sqrt{2n}$.

Le premier terme de la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est: $w_1 = \sqrt{2 \times 1} = \sqrt{2}$.

On a: $w_{32} = \sqrt{64} = 8$ et $w_{50} = \sqrt{2 \times 50} = 10$.

Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par: $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Le premier terme de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est: $S_1 = 1$.

On a: $S_2 = 1 + 2 = 3$ et $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$.

2. MODES USUELS DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

DÉFINITION

Une suite (u_n) peut être définie :

Par une formulation explicite de son terme général u_n:

En particulier $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique donnée.

Par la donnée de son premier terme (ou de ses premiers termes) et une relation de récurrence:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases} \quad \text{... etc.}$$

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_n = n^2 + n$. La suite (u_n) est définie explicitement.

Soit (v_n) la suite numérique définie par: $v_n = \cos(3n)$. La suite (v_n) est définie explicitement.

Soit (w_n) la suite numérique définie par: $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 4w_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (w_n) est définie par une relation de récurrence.

Calculons w_1, w_2 et w_3:

$w_1 = 4w_0 + 3 = 4 \times 1 + 3 = 7$;

$w_2 = 4w_1 + 3 = 4 \times 7 + 3 = 31$;

$w_3 = 4w_2 + 3 = 4 \times 31 + 3 = 127$.

APPLICATION

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ **la suite numérique définie par :** $u_0 = 1$ **et** $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer: u_1, u_2, u_3 **et** u_4.

b) Vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n}$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ **la suite numérique définie par :** $u_0 = 2$ **et** $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

a) Calculer: u_1, u_2, u_3 **et** u_4.

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}(3 - u_n)$.

c) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

II. SUITE MAJORÉE – SUITE MINORÉE – SUITE BORNÉE

1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

DÉFINITION

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n\in I)\quad u_n\leq M$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n\in I)\quad u_n\geq m$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_n=4-3n$.

Montrons que la suite (u_n) est majorée par 4:

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $-3n\leq 0$.

Alors $4-3n\leq 4$.

C'est-à-dire: $u_n\leq 4$.

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par 4.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n=2+\dfrac{1}{n}$.

Montrons que la suite (u_n) est minorée par 2:

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n}>0$.

Alors $2+\dfrac{1}{n}>2$, c'est-à-dire $u_n>2$.

Ainsi, la suite (u_n) est minorée par 2.

Montrons que la suite (u_n) est majorée par 3:

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $n\geq 1$.

Alors \dfrac{1}{n}\le1$.

C'est-à-dire $2+\dfrac{1}{n}\leq 3$, donc $u_n\leq 3$.

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par 3.

Puisque la suite (u_n) est majorée et minorée, alors elle est bornée.

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2 :

Initialisation: Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$, donc $u_0 \geq 2$.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geq 2$ et montrons que $u_{n+1} \geq 2$.

On a: $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2)$.

On a par hypothèse $u_n \geq 2$, donc $u_n - 2 \geq 0$ et alors $\frac{1}{2}(u_n - 2) \geq 0$.

Par conséquent : $u_{n+1} - 2 \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 2$.

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$. Ainsi, la suite (u_n) est minorée par 2.

Remarques

On prendra garde au fait que, dans la définition ci-dessus, les réels M et m sont des constantes et ne dépendent pas de l'indice de la suite. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ vérifie l'inégalité $u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais n'est pas une suite majorée.

S'il existe un réel $S \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq S$, alors la suite (u_n) est bornée.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_n = 2\cos(n)$.

Montrons que la suite (u_n) est bornée :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\cos(n)| \leq 1$ alors, pour $n \in \mathbb{N}$: $|2\cos(n)| \leq 2$.

Par conséquent : $|u_n| \leq 2$.

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq 2$. Ainsi, la suite (u_n) est bornée.

APPLICATIONS

Soit (a_n) la suite numérique définie par: $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Montrer que la suite (a_n) est majorée par 1 et minorée par 0.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par: $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

a) Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$.

b) Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

III. MONOTONIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

1. SENS DE VARIATION

DÉFINITION

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si:
$(\forall(n;m)\in I^2)(m\geq n\Rightarrow u_m\geq u_n)$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si:
$(\forall(n;m)\in I^2)(m\geq n\Rightarrow u_m\leq u_n)$.

Remarques

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante alors: $(\forall n\in I)\quad u_n\geq u_{n_0}$.

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante alors: $(\forall n\in I)\quad u_n\leq u_{n_0}$.

On définit de même une suite strictement croissante et strictement décroissante. Il suffit de remplacer dans la définition précédente, les symboles $\leq$ et $\geq$ par les symboles $<$ et $>$.

PROPOSITION

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si, et seulement si:
$(\forall n\in I)\quad u_{n+1}-u_n\geq 0$.

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si, et seulement si:
$(\forall n\in I)\quad u_{n+1}-u_n>0$.

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si, et seulement si:
$(\forall n\in I)\quad u_{n+1}-u_n\leq 0$.

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante si, et seulement si:
$(\forall n\in I)\quad u_{n+1}-u_n<0$.

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si, et seulement si: $(\forall n\in I)\quad u_{n+1}=u_n$.

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone si, et seulement si, elle est croissante ou décroissante.

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_n = 3 - 5n$.

Étudions la monotonie de la suite (u_n):

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = 3 - 5(n+1) - (3 - 5n) = 3 - 5n - 5 - 3 + 5n = -5 < 0.$

C'est-à-dire: $u_{n+1} - u_n < 0$.

En résumé, la suite (u_n) est strictement décroissante.

APPLICATIONS

Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies par: $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$ et $v_n = 2^n$.

On considère la suite numérique (w_n) définie par: $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{4}w_n + \dfrac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_n > 1$.

b) Vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_{n+1} - w_n = \dfrac{-3}{4}(w_n - 1)$ et en déduire que la suite (w_n) est décroissante.

On considère la suite numérique (a_n) définie par: $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 3}{3a_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N} : a_n > 1$.

b) Vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+1} - a_n = \dfrac{3(1 + a_n)(1 - a_n)}{3a_n + 4}$ et en déduire que la suite (a_n) est décroissante.

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$.

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

c) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

IV. SUITE ARITHMÉTIQUE – SUITE GÉOMÉTRIQUE

1. SUITE ARITHMÉTIQUE

DÉFINITION

On dit que la suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 2n - 5$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 5 - (2n-5) = 2n + 2 - 5 - 2n + 5 = 2$.

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = 2$.

Par conséquent, la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 3$ et $2u_{n+1} = 2u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(2u_n - 6) - u_n = u_n - 3 - u_n = -3$.

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = -3$.

Par conséquent, la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -3$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrons que la suite (v_n) est arithmétique :

On a pour tout
$n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{u_n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n+1}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n + 1 - 1}{u_n} = 1$
.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = 1$. Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison : $r = 1$.

APPLICATIONS

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_n = -7n + 1$.

Montrer que la suite (u_n) est arithmétique et déterminer sa raison r.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par: $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{25}{10 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$.

Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison r.

PROPOSITION

Pour que la suite (u_n) soit arithmétique, il faut et il suffit que:
$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$.

Remarque

Pour que trois réels x, y et z, choisis dans cet ordre, soient des termes consécutifs d'une suite arithmétique, il faut et il suffit que: $x + z = 2y$.

APPLICATIONS

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_1 + u_2 + u_3 = 15$. Calculer u_2.

PROPOSITION

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n: $u_n = u_0 + nr$.

Remarques

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r, alors:
$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = u_1 + (n-1)r$.

Si la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est arithmétique de raison r, alors pour tout $(n;p) \in I^2 : u_n = u_p + (n-p)r$.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.

Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $u_0=3$.

Déterminons le terme u_{20}:

On sait que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n=u_0+nr$; d'où : $u_{20}=u_0+20r=3+20\times 2=43$.

Par conséquent: $u_{20}=43$.

Déterminons l'expression de u_n en fonction de n:

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=u_0+nr=3+2n$.

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n=3+2n$.

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que: $u_1=2$ et $u_7=20$.

Déterminons la raison r de la suite (u_n) :

On sait que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n=u_1+(n-1)r$; d'où : $u_7=u_1+(7-1)r$.

$\Rightarrow 20=2+6r$.

Par conséquent: $r=\dfrac{18}{6}=3$.

Déterminons l'expression de u_n en fonction de n:

On a pour tout
$n\in\mathbb{N}$: $u_n=u_1+(n-1)r=2+(n-1)\times 3=2+3n-3=3n-1$.

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n=3n-1$.

APPLICATIONS

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que: $u_2+u_3+u_4=15$ et $u_6=20$.

Déterminer u_3, u_0 puis en déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n}$.

On pose: $(n\in\mathbb{N}) \quad v_n=\dfrac{1}{1-u_n}$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Vérifier que la suite (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

c) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

2. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

PROPOSITION

Soit (u_n) une suite arithmétique et si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Alors on a :

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

En particulier:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$n - p + 1$ est le nombre de termes de la somme.

u_p est le premier terme de la somme.

u_n est le dernier terme de la somme.

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que : $u_0 = 2$ et $u_{39} = 80$.

Calculons la somme: $S_{39} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{39}$.

La suite (u_n) est arithmétique on a donc :
$u_0 + u_1 + \ldots + u_{39} = \frac{39+1}{2}(u_0 + u_{39}) = 20 \times (2 + 80) = 1640$.

Par conséquent: $S_{39} = 1640$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_n = 3n + 1$.

Montrons que la suite (u_n) est arithmétique.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - 3n - 1 = 3$.

Par conséquent, la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$.

Calculons la somme: $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{60}$.

La suite (u_n) est arithmétique on a donc :
$u_1 + u_2 + \ldots + u_{60} = \frac{60-1+1}{2}(u_1 + u_{60}) = 30 \times (4 + 181) = 5550$.

Par conséquent: $S = 5550$.

APPLICATIONS

Calculer en fonction de n la somme: $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1)$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que: $u_1 + u_2 + ... + u_{30} = 1080$ et $u_{30} = 65$.

a) Calculer u_1 et r puis u_n en fonction de n.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Vérifier que la suite (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

b) Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de n.

3. SUITE GÉOMÉTRIQUE

DÉFINITION

On dit que la suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite (u_n).

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 5 \times (\frac{2}{3})^n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5 \times (\frac{2}{3})^{n+1} = 5 \times (\frac{2}{3})^n \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} u_n$.

Par conséquent, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 2 \times (\frac{7}{5})^n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2 \times (\frac{7}{5})^{n+1}}{2 \times (\frac{7}{5})^n} = \dfrac{7}{5}$.

Par conséquent, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{7}{5}$.

Remarques

Si la suite (u_n) est géométrique de raison q, alors: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = u_1 q^{n-1}$.

Si la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est géométrique de raison q, alors: $\forall (n;p) \in I^2 \quad u_n = u_p q^{n-p}$.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.

Si $u_{n_0} > 0$ et $q > 1$, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante.

Si $u_{n_0} > 0$ et $0

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Déterminons le terme u_5:

On sait que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 q^n$; d'où : $u_5 = u_0 q^5 = 3 \times 2^5 = 96$.

Par conséquent: $u_5 = 96$.

Déterminons l'expression de u_n en fonction de n:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 q^n = 3 \times 2^n$.

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 3 \times 2^n$.

Soit (u_n) la suite géométrique telle que: $u_1 = 2$ et $u_4 = 54$.

Déterminons la raison de la suite (u_n):

On sait que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$; d'où : $u_4 = u_1 \times q^{4-1} = u_1 \times q^3$.

$\Rightarrow 54 = 2 \times q^3$.

Par conséquent : $q^3 = \dfrac{54}{2} = 27 = 3^3$ ce qui donne : $q = 3$.

Déterminons l'expression de u_n en fonction de n:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$.

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 2 \times 3^{n-1}$.

APPLICATIONS

Soit (u_n) une suite géométrique à termes positifs de raison q telle que :
$u_2 \times u_4 = 576$ et $u_6 = 192$.

Déterminer u_3, u_0 et q puis en déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

On considère la suite numérique (u_n) définie par: $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} = \dfrac{1}{5} u_n + 2$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{5}{2} - u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que :
$\begin{cases} a+b+c=26 \\ abc=216 \end{cases}$

Déterminer a, b et c.

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{1+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 2}$.

a) Calculer u_1 et v_0.

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{2v_n}{v_n - 1}$; puis u_n en fonction de n.

4. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

PROPOSITION

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Alors on a:

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

En particulier:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$n-p+1$ est le nombre de termes de la somme.

u_p est le premier terme de la somme.

Remarques

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 1$ et si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_p$$

EXEMPLES

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Calculons les sommes :

$S = u_0 + u_1 + ... + u_9$ et $T = u_2 + u_3 + ... + u_{15}$.

La suite (u_n) est géométrique, on a donc :
$S = u_0 \times \dfrac{1 - q^{9-0+1}}{1-q} = 3 \times \dfrac{1-2^{10}}{1-2} = 3069.$

Par conséquent: $S = 3069$.

La suite (u_n) est géométrique, on a donc :

$T = u_2 \times \dfrac{1 - q^{15-2+1}}{1-q} = 12 \times \dfrac{1-2^{14}}{1-2} = 196596.$

Par conséquent: $T = 196596$. (Ici: $u_2 = u_0 q^2 = 3 \times 2^2 = 12$).

Calculons en fonction de n la somme: $S_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n$. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 3$.

On a donc: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1-3^{n+1}}{1-3} = 1 \times \dfrac{1-3^{n+1}}{-2}$. Ainsi:
$S_n = \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1).$