LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Prof. AYOUB SIRAI

INFO	NIVEAU : 1BAC	MATIÈRE : MATHÉMATIQUES
Mode	Hello World	

Outils didactiques: Tableau, livre, craie, marqueurs.

I. LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1. FONCTION DÉFINIE AU VOISINAGE D'UN NOMBRE RÉEL

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et a un nombre réel.

On dit que f est définie au voisinage de a sauf peut-être en a s'il existe un réel strictement positif r tel que : $]a-r;a+r[-\{a\} \subset D_f$.

On dit que f est définie au voisinage de a à droite s'il existe un réel r strictement positif tel que $]a;a+r[\subset D_f$.

On dit que f est définie au voisinage de a à gauche s'il existe un réel r strictement positif tel que : $]a-r;a[\subset D_f$.

EXEMPLES

La fonction $f : x \mapsto x^3$ est définie au voisinage de $a=0$ car $D_f = \mathbb{R}$ et $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[-\{0\} \subset D_f$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est définie au voisinage de $a=1$ sauf en 1 car $D_f = \mathbb{R}-\{1\}$ et $]\frac{1}{2};\frac{3}{2}[-\{1\} \subset D_f$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie au voisinage de 0 à droite car $D_f = \mathbb{R}^+$ et $]0;1[\subset D_f$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ est définie au voisinage de 1 à gauche car $D_f =]-\infty; 1]$ et $]-1; 0[\subset D_f$.

2. LIMITE NULLE EN ZÉRO D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0.

Si l'on peut rendre $f(x)$ aussi voisin que l'on veut de 0, pourvu que x soit assez voisin de 0, alors on dit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on écrit : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

EXEMPLES

$\lim_{x\to 0} x = 0$; $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$; $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$; $\lim_{x\to 0} x^n = 0$; $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$.

Remarques

Pour tous $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to 0} kx^n = 0$ et $\lim_{x\to 0} k\sqrt{|x|} = 0$.

On peut avoir $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ sans que la fonction soit définie en 0.

EXEMPLES SUPPLÉMENTAIRES

$\lim_{x\to 0} 2x = 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{2}{5}x^2 = 0$; $\lim_{x\to 0} -7x^3 = 0$; $\lim_{x\to 0} \sqrt{3}x^5 = 0$; $\lim_{x\to 0} 4\sqrt{|x|} = 0$.

PROPOSITION

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r; r[-\{0\}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors :

$$\begin{cases} (\forall x \in I)|f(x)| \leq u(x) \\ \lim_{x\to 0} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

EXEMPLES D'APPLICATION

Montrons que pour tout $x \in]-1; 1[$: $|x^2 + 3x| \leq 4|x|$ puis déterminons $\lim_{x\to 0}(x^2 + 3x)$:

On a : $|x^2+3x| = |x|\cdot|x+3|$. De plus, pour tout $x \in]-1;1[$: $2

Il s'ensuit donc que : $(\forall x \in]-1;1[)|x^2+3x| \leq 4|x|$.

Comme $\lim_{x\to 0} 4|x| = 0$ alors $\lim_{x\to 0}(x^2+3x) = 0$.

Montrons que : $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\dfrac{3}{x}) = 0$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $|\sin(\dfrac{3}{x})| \leq 1$, donc : $|x^2\sin(\dfrac{3}{x})| \leq x^2$.

Comme $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, alors $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\dfrac{3}{x}) = 0$.

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} x^3 \cos(\dfrac{1}{x})$ **et** $\lim_{x\to 0} 2x\sin(x)$.

Justifier que pour tout $x \in]-1;1[$, $|x^3+7x^2| \leq 8x^2$ **puis déterminer :** $\lim_{x\to 0}(x^3+7x^2)$.

On considère la fonction f **définie sur** $\mathbb{R}^+$ **par :** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)|f(x)| \leq \sqrt{x}$.

b) En déduire : $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3. LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un réel a et $l \in \mathbb{R}$.

Dire que f a pour limite l quand x tend vers a signifie : la valeur de $f(x)$ s'approche de l, d'aussi près que l'on voudra, quitte à attribuer à la variable x des valeurs suffisamment proches de a.

On écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ou $\lim_a f = l$.

Remarque

En posant $x - a = h$, on obtient : $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) - l = 0$.

EXEMPLES

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2+3x$.

Montrons que : $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$.

On pose $h = x - 1$: $f(h+1) - 4 = (h+1)^2 + 3(h+1) - 4 = h^2 + 3h$.

D'après l'exemple précédent on a : $\lim_{h\to 0}(h^2+3h)=0$.

Par conséquent $\lim_{x\to 1} f(x)=4$.

PROPOSITION

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I=]a-r;a+r[-\{a\}$ avec $r\in\mathbb{R}_+^*$, $a\in\mathbb{R}$ et $l\in\mathbb{R}$.

Alors :

$$\begin{cases}(\forall x\in I)|f(x)-l|\leq u(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=l$$

Remarques

Pour tout $(a;k)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to a} k(x-a)^n=0$ et $\lim_{x\to a} k\sqrt{|x-a|}=0$.

Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

EXEMPLES DÉTAILLÉS

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+5x$.

Montrons que : $\lim_{x\to -2} f(x)=-6$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)+6=x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. (1)

Soit maintenant $x\in]-3;-1[$. On a : $-3

De (1) et (2) on en déduit que : $|f(x)+6|\leq 2|x+2|$.

Comme $\lim_{x\to -2} 2|x+2|=0$, alors : $\lim_{x\to -2} f(x)=-6$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

Montrons que : $\lim_{x\to 2} g(x)=4$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: $g(x)-4=\dfrac{2x-4x+4}{x-1}=\dfrac{2(2-x)}{x-1}$. (1)

Soit maintenant $x\in]\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}[$. On a : $\dfrac{1}{2}

De (1) et (2) on en déduit que : $|g(x)-4|\leq 4|x-2|$.

Comme $\lim_{x\to 2} 4|x-2|=0$, alors : $\lim_{x\to 2} g(x)=4$.

APPLICATIONS

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+3x+5$.

a) Montrer que pour tout $x \in]-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}[$, $|f(x)-3| \leq \frac{3}{2}|x+1|$.

b) En déduire : $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1}$.

a) Montrer que pour tout $x \in [\frac{3}{2};\frac{5}{2}[$, $|g(x)-\frac{4}{3}| \leq \frac{2}{15}|x-2|$.

b) Conclure la valeur de la limite : $\lim_{x\to 2} g(x)$.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})|h(x)-1| \leq (x-1)^2$.

b) Conclure la valeur de la limite : $\lim_{x\to 1} h(x)$.

4. LIMITE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES EN UN POINT

PROPOSITION

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$

Si $Q(a) \neq 0$, alors $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$

$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a$

Si $a > 0$ alors $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

EXEMPLES

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$.

On a f est une fonction polynomiale, par conséquent :

$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 0$; $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 9$ et $\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x) = f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 4$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $g(x) = \frac{3x}{2x-4}$.

g étant une fonction rationnelle et $4 \in \mathbb{R}-\{2\}$ et $8 \in \mathbb{R}-\{2\}$, par conséquent :

$\lim_{x\to 4} g(x) = g(4) = 3$ et $\lim_{x\to 8} g(x) = g(8) = 2$.

On a immédiatement : $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$; $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\tan x=\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$.

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 1}(3x^2+5x-4)$; $\lim_{x\to -1}(x^{2018}-x^{2019}+3)$; $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x+3}{4x-6}$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\sin x$;

$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{2x^2+2}{x^2-1}$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos x$.

5. LIMITE À DROITE - LIMITE À GAUCHE

DÉFINITION

Soit r un réel strictement positif et $a\in\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $]a;a+r[$, admet une limite finie l en a à droite, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de l, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs supérieures à a.

Ce réel l, s'il existe, est unique. Il est noté : $l=\lim_{x\to a^+}f(x)$ ou $l=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$.

On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $]a-r;a[$, admet une limite finie l en a à gauche, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de l, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs inférieures à a.

Ce réel l, s'il existe, est unique. Il est noté : $l=\lim_{x\to a^-}f(x)$ ou
$l=\lim_{\substack{x\rightarrow a \ x

EXEMPLE

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x(x+1)}{|x|}$.

Si $x>0$ alors : $f(x)=x+1$; donc : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$.

Si $x<0$ alors : $f(x)=-(x+1)$; donc : $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}-(x+1)=-1$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x|(2x+1)$.

Si $x>0$ alors : $f(x)=x(2x+1)$; donc : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x(2x+1)=0$.

Si $x<0$ alors : $f(x)=-x(2x+1)$; donc : $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}-x(2x+1)=0$.

PROPOSITION

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un point a sauf peut-être en a.

Pour que f admette une limite l en a, il faut et il suffit qu'elle admette la limite l à droite et à gauche au point a. Autrement dit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to a^+} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \to a^-} f(x) = l \right)$$

EXEMPLES D'APPLICATION DE LA PROPOSITION

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{|x|}$.

On a déjà vu que : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Puisque $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$, alors f n'admet pas de limite au point $a = 0$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x-1|x$.

Si $x < 1$ alors : $g(x) = -x(x-1)$; donc : $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 0$.

Si $x > 1$ alors : $g(x) = x(x-1)$; donc : $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$.

Puisque $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$, alors g admet une limite en 1 et de plus : $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$.

APPLICATIONS

Étudier la limite de la fonction f au point a dans les cas suivants : ($E(x)$ étant la partie entière de x)

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x-2|}$ et $a = 2$.

$f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - x}$ et $a = 0$.

II. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

1. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN ZÉRO

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0.

Dire que f a pour limite $+\infty$ en 0 signifie : la valeur de $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes, d'aussi près que l'on voudra, quitte à attribuer à la variable x des valeurs suffisamment proches de 0.

On écrit : $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_0 f = +\infty$.

Dire que f a pour limite $-\infty$ en 0 signifie : $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 0.

On écrit : $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ou $\lim_0 f = -\infty$.

Limites Usuelles

On a les résultats importants suivants :

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$.

Remarques

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On a les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{k}{x^n} = +\infty$ si $k > 0$, $-\infty$ si $k < 0$.

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{k}{x^n} = +\infty$ si l'entier n est pair et $k > 0$; $-\infty$ si l'entier n est impair et $k > 0$.

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{k}{\sqrt{x}} = +\infty$ si $k > 0$.

PROPOSITION

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r; r[- \{0\}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq u(x)$ et $\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Si pour tout $x \in I$: $f(x) \leq u(x)$ et $\lim_{x\to 0} u(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Ces propriétés restent valables si x tend vers 0 à droite ou à gauche.

EXEMPLES

Calculons $\lim_{x\to0} 1+\dfrac{1}{x^2}$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $1+\dfrac{1}{x^2}>\dfrac{1}{x^2}$.

Puisque $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim_{x\to0}(1+\dfrac{1}{x^2})=+\infty$.

Calculons $\lim_{x\to0^-}(\dfrac{2}{x^3}-x^2)$: On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{2}{x^3}-x^2\leq\dfrac{2}{x^3}$.

Puisque $\lim_{x\to0^-}\dfrac{2}{x^3}=-\infty$ alors : $\lim_{x\to0^-}(\dfrac{2}{x^3}-x^2)=-\infty$.

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$; $\lim_{x\to0^+}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$; $\lim_{x\to0}(\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{2}{x})$; $\lim_{x\to0}(\dfrac{5}{x^4}-x^4)$.

2. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de a sauf peut-être en a.

Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x prend des valeurs de plus en plus proches de a.

On écrit : $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim_a f=+\infty$.

Dire que f a pour limite $-\infty$ en a signifie : $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x prend des valeurs de plus en plus proches de a.

On écrit : $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim_a f=-\infty$.

Remarques

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$\lim_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$; $\lim_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$.

$\lim_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^n}=+\infty$ si n est un nombre pair.

$\lim_{x \to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ et $\lim_{x \to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ si n est un nombre impair.

$\lim_{x \to a^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty.$

EXEMPLES

On a : $\lim_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{2}{(x-1)^3} = -\infty.$

Calculons $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{1+\sqrt{x}}{(x-3)^3}$:

On a pour tout $x \in]3; +\infty[$, $1+\sqrt{x} > 1$ et $(x-3)^3 > 0$ donc : $\dfrac{1+\sqrt{x}}{(x-3)^3} > \dfrac{1}{(x-3)^3}$.

Comme $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^3} = +\infty$, alors : $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{1+\sqrt{x}}{(x-3)^3} = +\infty.$

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2}$; $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$; $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2+1}{(x-3)^2}$; $\lim_{x \to 1} \dfrac{1+\cos^2 x}{(x-1)^3}$.

III. LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

1. LIMITE NULLE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp. de la forme $]-\infty, A[$).

On dit que f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une limite nulle si, pour $x \in D_f$, $|f(x)|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x (resp. $-x$) soit suffisamment grand.

On écrit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ou $\lim_{+\infty} f = 0$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ou $\lim_{-\infty} f = 0$).

Limites Usuelles

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0.$

Remarques

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{\sqrt{-x}} = 0.$

EXEMPLE

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^5} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^4} = 0.$

2. LIMITE FINIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN $+\infty$ ET $-\infty$

DÉFINITION

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et l un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x) - l$ est nulle quand x tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{+\infty} f = l$.

Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et l un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x) - l$ est nulle quand x tend vers $-\infty$ et on écrit : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{-\infty} f = l$.

PROPOSITION

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et l un nombre réel.

Si pour tout $x \in I$: $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$ et l un nombre réel.

Si pour tout $x \in I$: $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} u(x) = 0$, alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

EXEMPLES

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

Déterminons $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) + 2 = \dfrac{1}{x^2+1}$ donc : $|f(x) + 2| \leq \dfrac{1}{x^2}$.

Comme $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Montrons que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3$:

On a pour tout $x > 0$: $g(x) - 3 = \dfrac{3\sqrt{x} - 3 - 3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{-3}{1+\sqrt{x}}$ donc : $|g(x) - 3| \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}} = 0$, alors : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3$.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $h(x) = \dfrac{2\sin(x)}{x^3 - 1}$.

Montrons que $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

On a pour tout $x < 0$: $|h(x)| \leq \dfrac{2}{|x^3 - 1|}$ (car $|\sin x| \leq 1$).

Comme $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2}{|x^3 - 1|} = 0$ alors : $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

APPLICATIONS

Montrer que :

$\lim_{x \to +\infty}(-1 + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}) = -1$; $\lim_{x \to +\infty}(\dfrac{2x^2}{3+x^2}) = 2$; $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sin x}{x^3 - 1} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 + 2}{x^3 + 1} = 3$.

IV. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN $+\infty$ ET $-\infty$

1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

DÉFINITION

Une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) la limite $+\infty$ si, pour tout $x \in D_f$, $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut dès que x (resp. $-x$) prend des valeurs suffisamment grandes.

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$).

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Une fonction f admet pour limite $-\infty$ si la fonction $(-f)$ admet pour limite $+\infty$.

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$).

Limites Usuelles

On a les résultats importants suivants :

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$.

Remarques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si l'entier n est pair et $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si l'entier n est impair.

PROPOSITION

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.

Si pour tout $x \in I : f(x) \geq u(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si pour tout $x \in I : f(x) \leq u(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$, alors :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$.

Si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq u(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Si pour tout $x \in I$: $f(x) \leq u(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

EXEMPLES

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$. Montrons que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) \geq x^2$. Comme $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + x - 1$. Montrons que : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

On a pour tout $x < 1$: $g(x)

Calculons $\lim_{x \to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1})$: On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} > \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ alors : $\lim_{x \to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}) = +\infty$.

APPLICATIONS

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 2x$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq 3x^2$ (pour x assez grand) puis en déduire $\lim_{x \to +infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + \cos x - 1$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \leq x^3$ puis en déduire $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} x^2(2 + \cos x)$; $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x} - 1 + x^2)$; $\lim_{x \to -\infty}(x^3 + x^2 - 1)$.

V. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

1. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES FINIES

Introduction

Il n'est pas toujours facile de déterminer une majoration, une minoration ou un encadrement convenable pour une fonction pour calculer sa limite en un point a ou à l'infini ! Ceci explique l'usage fréquent des techniques de calculs et le recours systématique aux opérations suivantes que l'on admettra.

PROPOSITION

Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ alors :

$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = l + l'$

$\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = l \cdot l'$

$\lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$

Si $l' \neq 0$ alors : $\lim_{x \to a}(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{l'}$ et $\lim_{x \to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{l}{l'}$.

Si $k \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \to a}(kf)(x) = kl$.

Si $l > 0$ alors $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.

Remarques

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers a à droite ou à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$.

On peut démontrer ces propriétés en utilisant la définition de la limite finie en un point.

EXEMPLES

Calculons la limite : $\lim_{x \to 1}(2x^2 + 3x + \frac{2x}{x+1})$

On pose : $f(x) = 2x^2 + 3x + \frac{2x}{x+1}$. On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

La fonction $f_1 : x \mapsto 2x^2 + 3x$ est polynomiale; donc : $\lim_{x \to 1} f_1(x) = f_1(1) = 5$;

La fonction $f_2 : x \mapsto \frac{2x}{x+1}$ est rationnelle; donc : $\lim_{x \to 1} f_2(x) = f_2(1) = 1$;

Il s'ensuit donc que : $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f_1(x) + \lim_{x \to 1} f_2(x) = 5 + 1 = 6$; d'où :
$\lim_{x \to 1}(2x^2 + 3x + \frac{2x}{x+1}) = 6$.

Calculons la limite : $\lim_{x \to -\infty}(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3})$

On a : $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} -\frac{5}{x^3} = 0$; d'où : $\lim_{x \to -\infty}(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3}) = 3$.

Calculons la limite : $\lim_{x \to 2}(5x - 4 + \sqrt{x^2 + 5})$

On a : $\lim_{x \to 2} 5x - 4 = 6$ et $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{9} = 3$; d'où : $\lim_{x \to 2}(5x - 4 + \sqrt{x^2+5}) = 9$.

APPLICATIONS

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x + \dfrac{2x-6}{x-1}$.

Calculer : $\lim_{x \to 2} f(x)$ et $\lim_{x \to -3} f(x)$.

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to +\infty}(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2})$; $\lim_{x \to 1^+}(2 - \dfrac{1}{x^3})(3 + 2x)$;

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{6 - \dfrac{1}{x}}{3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$; $\lim_{x \to \infty}(\dfrac{5x+2}{x+3})$.

2. LIMITES FINIES ET ORDRE

PROPOSITION

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un ensemble $I =]a - r; a + r[- \{a\}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et f est positive sur I, alors : $l \geq 0$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ et $f \leq g$ sur I, alors : $l \leq l'$.

Si $\lim_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim_{x \to a} h(x) = l$ et $g \leq f \leq h$ sur I, alors : $\lim_{x \to a} f(x) = l$ (Théorème des gendarmes).

Remarque

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers a à droite ou à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLES

Calculons la limite : $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(\dfrac{1}{x})$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $-1 \leq \cos(\dfrac{1}{x}) \leq 1$ et $x^2 > 0$; il en résulte donc :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) - x^2 \leq x^2 \cos(\dfrac{1}{x}) \leq x^2$.

Puisque $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0$, alors : $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(\dfrac{1}{x}) = 0$.

Calculons la limite : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$; par conséquent : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) -\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Puisque $\lim_{x \to +\infty}(-\dfrac{1}{x}) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

APPLICATIONS

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 \leq f(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x}$ **puis en déduire la limite :** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5x^2+3}{x^2+1}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - 5| \leq \dfrac{2}{x^2}$ **puis en déduire la limite :** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{3 - \sin(x)}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{3 - \sin(x)} \leq \dfrac{1}{2}$ **puis en déduire la limite :** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES INFINIES

Introduction

On admet toutes les opérations suivantes.

Dans ce qui suit, a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; l et l' sont deux nombres réels.

Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.

L'abréviation "F.I" signifie "Forme Indéterminée", c'est-à-dire qu'on ne peut pas conclure la limite immédiatement et tout résultat est possible.

Tableaux des opérations

- *Limite d'une somme de deux fonctions :**

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

- *Limite d'un produit de deux fonctions :**

$\lim f$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ or $-\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(f\times g)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**

- *Limite d'un quotient de deux fonctions :**

$\lim f$	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0	∞
$\lim g$	$l'\neq 0$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	∞
$\lim(f/g)$	$\dfrac{l}{l'}$	∞ (signe)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**	**F.I**

EXEMPLES

Calculons $\lim_{x\to 0}(x^2+x+2+\dfrac{1}{x^2})$:

On a : $\lim_{x\to 0}(x^2+x+2)=2$ et $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; par conséquent :
$\lim_{x\to 0}(x^2+x+2+\dfrac{1}{x^2})=+\infty$.

On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x^3+1}{x-1}$. Calculons $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$:

Calcul de $\lim_{x\to 1^-} f(x)$:

On a : $\lim_{x\to 1^-}(x^3+1)=2$ et $\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0^-$; Par conséquent : $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

Calcul de $\lim_{x\to 1^+} f(x)$:

On a : $\lim_{x\to 1^+}(x^3+1)=2$ et $\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0^+$; Par conséquent : $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

Calcul de $\lim_{x\to +\infty} f(x)$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*-\{1\}$: $f(x)=\dfrac{x^3(1+\dfrac{1}{x^3})}{x(1-\dfrac{1}{x})}=x^2\times\dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}}{(1-\dfrac{1}{x})}$.

Puisque : $\lim_{x\to +\infty} x^2=+\infty$; $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$, alors :
$\lim_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{x^3})=1$ et $\lim_{x\to +\infty}(1-\dfrac{1}{x})=1$.

Par suite : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

On considère la fonction $f: x\mapsto 3x^2-5x+4$. Calculons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x)$:

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=x^2(3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2})$. De plus : $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{5}{x}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$.

Par conséquent : $\lim_{x\to +\infty}(3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2})=3$.

Comme $\lim_{x\to +\infty} x^2=+\infty$, alors : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

On a de même $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, d'où : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

EXEMPLE SUPPLÉMENTAIRE

On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x+1}{x^2-2x}$. Calculons $\lim_{x\to0^-}f(x)$, $\lim_{x\to0^+}f(x)$, $\lim_{x\to2^-}f(x)$ et $\lim_{x\to2^+}f(x)$.

Le tableau de signe du trinôme x^2-2x est :

x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$

--- | --- | --- | --- | ---

x^2-2x | $+$ | $0\,(-)\,0$ | $+$

Calcul de $\lim_{x\to0^-}f(x)$ et $\lim_{x\to0^+}f(x)$:

On a : $\lim_{x\to0^-}(x+1)=\lim_{x\to0^+}(x+1)=1$ et $\lim_{x\to0^-}(x^2-2x)=0^+$ et $\lim_{x\to0^+}(x^2-2x)=0^-$.

Par suite : $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

Calcul de $\lim_{x\to2^+}f(x)$:

On a : $\lim_{x\to2^+}(x+1)=3$ et $\lim_{x\to2^+}(x^2-2x)=0^+$; par suite : $\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$.

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x}+x^2)$; $\lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+4x)$;

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{x^2+3}$; $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x}{(x-2)^2}$;

$\lim_{x\to3^+}\dfrac{2x}{3-x}$; $\lim_{x\to2^-}\dfrac{x-5}{2-x}$;

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2018}}{x^{2019}+1}$; $\lim_{x\to1}\dfrac{x}{(1-x)^2}$;

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}(3-\sqrt{x})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0;1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.

Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim_{x\to0^+}f(x)$; $\lim_{x\to0^-}f(x)$; $\lim_{x\to-1^+}f(x)$; $\lim_{x\to-1^-}f(x)$.

Remarques sur les Formes Indéterminées

L'obtention d'une forme indéterminée "F.I" signifie que la méthode mise en place pour calculer la limite de la fonction trébuche. Cela ne signifie en aucun cas que la fonction n'a pas de limite.

Des méthodes seront présentées au fur et à mesure, pour lever les indéterminations les plus classiques, à savoir : "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \times \infty$", "$+\infty + (-\infty)$".

Attention NE JAMAIS L'ECRIRE SUR COPIE : "$+\infty - (-\infty) = +\infty$"; "$-\infty + l = -\infty$"; "$-\infty \times (-\infty) = +\infty$"; "$\frac{3}{-\infty} = 0$"; "$\frac{-1}{0^+} = -\infty$"; "$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$".

VI. QUELQUES MÉTHODES POUR LEVER UNE INDÉTERMINATION

1. LIMITES D'UNE FONCTION POLYNÔME ET RATIONNELLE EN $+\infty$ ET $-\infty$

PROPOSITION

Soit P et Q deux fonctions polynômes définies par :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ et
$Q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

où $a_n, \ldots, a_1, a_0, b_p, \ldots, b_0$ des réels tels que : $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du monôme de plus haut degré :

$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$ et $\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$.

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient des monômes de plus haut degré :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$.

EXEMPLES

On considère le polynôme : $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 7$.

On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$.

Calculons les limites : $\lim_{x \to +\infty} ((1-2x)^3 + 3x)$ et $\lim_{x \to -\infty} (x+1)^3 (1-3x)^2$.

On a : $\lim_{x \to +\infty} ((1-2x)^3 + 3x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x)^3 = \lim_{x \to +\infty} -8x^3 = -\infty$.

On a : $\lim_{x \to -\infty} (x+1)^3 (1-3x)^2 = \lim_{x \to -\infty} x^3 \times (-3x)^2 = \lim_{x \to -\infty} 9x^5 = -\infty$.

On considère la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{4x^2+1}{2x^2+3}$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2} = 2$ et
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2} = 2.$

Calculons les limites : $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x-1}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+2x}$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty;$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}(-2x^4+3x^3+2)$; $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+\frac{2x}{x+1})$; $\lim_{x\to+\infty}(1-x)^3(x+1)^2$;
$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^3}$.

PROPOSITION (RACINES)

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Remarque

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers $-\infty$ ou vers a à droite ou à gauche.

EXEMPLES AVEC RACINES

Calculons $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}$:

On a : $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+1) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; donc : $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$.

Calculons $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$:

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$; donc : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = +\infty$.

Calculons $\lim_{x\to0} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$:

On a : $\lim_{x\to0}(1+\frac{1}{x^2}) = +\infty$; donc : $\lim_{x\to0} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

2. LIMITES DU TYPE $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ AVEC $f(a)=g(a)=0$

Méthode

Pour lever une forme indéterminée lorsqu'il s'agit des limites aux réels a qui annulent le dénominateur, on peut :

Factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$ ou $\sqrt{x-a}$ ou $(x-a)^n$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$), puis simplifier.

Utiliser la technique de la quantité conjuguée, si l'expression contient des racines carrées, et on simplifie.

EXEMPLES

Calculons les limites suivantes : $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ et $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2;$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x-2}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}.$$

Calculons les limites suivantes : $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ et $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5-3^2}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(\sqrt{2x+5}+3)}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}.$$

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}$; $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$; $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$; $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$;
$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}$.

3. LIMITES DU TYPE $\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta)$

Méthode

Pour calculer une limite du type $\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta)$, deux questions se posent alors :

La limite à calculer peut-elle s'obtenir de façon directe à l'aide des règles d'opérations sur les limites et des limites classiques ? Dans ce cas, il n'y a donc pas de forme indéterminée à l'horizon et les calculs se font simplement.

La limite à déterminer fait-elle surgir une forme indéterminée ? Dans ce cas, il faut lever l'indétermination. Pour cela, deux grandes techniques peuvent en général être adoptées :

La 1ère technique :

Si $\sqrt{a} \neq |\alpha|$, il suffit de factoriser par x (ou $|x|$) en utilisant les égalités suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}$ et
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}$.

La 2ème technique :

Si $\sqrt{a} = |\alpha|$, on multiplie et on divise par le conjugué puis, si nécessaire, on factorise par x au numérateur et au dénominateur puis simplifier par x.

Remarque

Signalons au passage que cette démarche est adaptable avec la plupart des limites du type $\lim_{x\to\pm\infty}(P(x) \pm \sqrt{Q(x)})$ où P et Q sont des polynômes.

EXEMPLES (1ÈRE TECHNIQUE)

Calculons les limites : $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x)$.

On a : $\lim_{x\to-\infty} x^2+3x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty$.

Par suite : $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x) = +\infty$.

Comme $\sqrt{1} \neq |-2|$, on utilise la 1ère technique pour $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x)$:

On a : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2(1+\dfrac{3}{x})}-2x = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-2)$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ alors : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}=1$ et par conséquent :
$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-2)=1-2=-1.$

Comme $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-2)=-\infty.$

Par suite : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x)=-\infty.$

EXEMPLES (2ÈME TECHNIQUE)

Calculons les limites : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x)$ et $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x)$.

$\lim_{x\to+\infty}4x^2+1=\lim_{x\to+\infty}4x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$, alors :
$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x)=+\infty.$

Comme $\sqrt{4}=|2|$ on utilise la 2ème technique pour $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x)$:

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{4x^2+1}+2x)(\sqrt{4x^2+1}-2x)}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$
.

Puisque : $\lim_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$ alors : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty.$

Comme $\lim_{x\to-\infty}-2x=+\infty$, alors $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}-2x=+\infty.$

Par suite : $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=0$. En définitive : $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x)=0.$

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+2}+5x)$; $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+2x}-3x)$; $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+4}-x^2)$;
$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

4. LIMITES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

PROPOSITION

Soit a un réel non nul. On a :

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$; $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1.$$

EXEMPLES

Calculons les limites suivantes : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{\sin(x)}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^3}$.

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}2\times\frac{\sin(2x)}{2x}=2\times 1=2.$

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan(3x)}{3x}\times 3x}{\frac{\sin x}{x}\times x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan(3x)}{3x}\times 3}{\frac{\sin x}{x}}=1\times\frac{3}{1}=3.$

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x^2}.$

Puisque : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$

Ainsi : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^3}=+\infty.$

Calculons les limites : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\sin x}$.

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\times 3^2$. En posant $X=3x$ on obtient :

$\lim_{X\to 0}\frac{1-\cos(X)}{X^2}\times 9=\frac{1}{2}\times 9=\frac{9}{2}.$

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\times x=\frac{1}{2}\times 0=0.$

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\times\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$

APPLICATIONS

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^2(x)}$; $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+\tan x}{x^2}$;

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{x}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x^2}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{1-\cos\sqrt{x}}$;

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{1-\cos 2x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}$.