



ÉTUDE ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE



Prof. AYOUB
SIRAI

INFO

NIVEAU : 1BAC

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES

Mode

Affichage dynamique JSON

 **Outils didactiques:** Tableau, livre, craie, marqueurs.

I. ÉTUDE ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

> 1. EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

PROPOSITION

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

PROPERTIES

- $\vec{i} \cdot \vec{u} = x$
- $\vec{j} \cdot \vec{u} = y$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

💡 EXEMPLES

1. Soient $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{w} = -4\vec{j}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + (-3) \times 4 = 6 - 12 = -6$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 0 + (-3) \times (-4) = 12$$

2. Soient $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$. Montrons que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 12 - 12 = 0$$

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

APPLICATIONS

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$.

2. A-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$? Justifier la réponse.

3. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ sachant que $\vec{u} = 5\vec{i} + m\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - 10\vec{j}$ sont orthogonaux.

> 2. EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA NORME D'UN VECTEUR ET DE LA DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

PROPOSITION

- Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur du plan, alors sa norme est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points du plan, alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLES

1. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

2. On considère les points $A(3; 4)$, $B(1; 1)$, $C(5; 1)$. Montrons que le triangle ABC est isocèle en A .

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Puisque $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A .

3. On considère les points $A(3; 2)$, $B(-4; -5)$, $C(-2; -7)$.

$$\vec{BA}(7; 7) \quad \text{et} \quad \vec{BC}(2; -2)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 7 \times 2 + 7 \times (-2) = 14 - 14 = 0$$

Par conséquent, $\vec{BA} \perp \vec{BC}$, et le triangle ABC est rectangle en B .

4. On considère dans le plan les points suivants $A(-2; 2)$, $B(-1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 3)$. Montrons que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

$$\vec{AB}(1; -2) \quad \text{et} \quad \vec{DC}(1; -2) \implies \vec{AB} = \vec{DC}$$

Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{AD}(2; 1) \quad \text{et} \quad \|\vec{AD}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme et $AD = AB$, c'est un losange.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$$

Puisque $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, alors $(AB) \perp (AD)$. Par suite, $ABCD$ est un carré.

APPLICATIONS

1. Calculer les normes : $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ pour $\vec{u} = \vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{v}(4; -3)$, $\vec{w} = \vec{i} + m\vec{j}$ ($m \in \mathbb{R}$).

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\|\vec{w}\| = \sqrt{5}$.

2. Montrer que le quadrilatère $A(-1; 2)$, $B(1; 1)$, $C(3; 2)$, et $D(1; 3)$ est un losange.

II. L'EXPRESSION DE $\cos(\theta)$ ET $\sin(\theta)$



PROPOSITION

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls, et θ une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.

On a alors les formules suivantes :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

et

$$\sin \theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

EXEMPLES

1. On considère les vecteurs $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{(-2) \times 3 + 3 \times 2}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{-6 + 6}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = 0$$

$$\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{(-2) \times 2 - 3 \times 3}{13} = \frac{-13}{13} = -1$$

Par conséquent: $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

2. On considère les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$.

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{3 \times (-2) + (-1) \times 4}{\sqrt{9 + 1} \sqrt{4 + 16}} = \frac{-10}{\sqrt{10} \sqrt{20}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{3 \times 4 - (-1) \times (-2)}{10\sqrt{2}} = \frac{12 - 2}{10\sqrt{2}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par conséquent: $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

3. Déterminons une mesure de l'angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$ où $A(-1; -1)$, $B(2; 2)$, et $C(-1; 5)$.

$$\vec{AB}(3; 3) \quad \text{et} \quad \vec{AC}(0; 6)$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 0 + 3 \times 6 = 18$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 3 \times 0 = 18$$

$$\cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{18}{18\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\det(\vec{AB}; \vec{AC})}{AB \times AC} = \frac{18}{18\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On en déduit que: $(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

APPLICATIONS

1. Calculer $\cos(\vec{u}; \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}; \vec{v})$ dans les deux cas suivants :

a) $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

b) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = (\sqrt{3} - 1)\vec{i} + (\sqrt{3} + 1)\vec{j}$

2. Soient $A(-3; 3)$, $B(-1; 3)$, et $C(1; 7)$.

a) Calculer $\cos(\vec{BA}; \vec{BC})$ et $\sin(\vec{BA}; \vec{BC})$.

b) En déduire une mesure de l'angle $(\vec{BA}; \vec{BC})$.

c) Calculer l'aire du triangle ABC .

Remarque

L'aire S du triangle ABC est:

$$S = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}; \vec{AC})|$$

Exemple:

Calculons l'aire du triangle ABC où $A(1; 2)$, $B(0; 1)$, $C(3; 9)$.

$$\vec{AB}(-1; -1) \quad \text{et} \quad \vec{AC}(2; 7)$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \times 7 - (-1) \times 2 = -7 + 2 = -5$$

Par conséquent: $S = \frac{1}{2} |-5| = \frac{5}{2}$.

III. ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA DROITE DANS LE PLAN

> 1. VECTEUR NORMAL À UNE DROITE

DÉFINITION

Soit (D) une droite du plan. Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) est appelé **vecteur normal** à la droite (D) .

PROPOSITION

Soit (D) une droite dans le plan P dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Si \vec{n} et \vec{n}' sont deux vecteurs normaux à (D) , alors ils sont colinéaires.
- Si $\vec{u}(\alpha; \beta)$ est un vecteur directeur de (D) , alors le vecteur $\vec{n}(-\beta; \alpha)$ est normal à (D) .
- Si une équation cartésienne de (D) est $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$, alors le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est normal à la droite (D) .

EXEMPLES

1. $\vec{n}(2; -3)$ est un vecteur normal à la droite (D) d'équation: $2x - 3y + 7 = 0$.
2. $\vec{n}(0; 1)$ est un vecteur normal à la droite (Δ) d'équation: $y - 3 = 0$.

APPLICATIONS

Considérons les droites $(D) : 3x + y + 5 = 0$ et $(D') : 3y = x + 1$. Les droites (D) et (D') sont-elles orthogonales ? Justifier la réponse.

2. ÉQUATION D'UNE DROITE DÉFINIE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL À CETTE DROITE

PROPOSITION

Soient \vec{n} un vecteur non nul et A un point du plan P .

- L'ensemble des points M du plan P tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est la droite (D) passant par A et de vecteur normal \vec{n} .
- Si $A(x_A; y_A)$ et $\vec{n}(a; b)$, alors une équation cartésienne de la droite (D) est:

$$(D) : a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

EXEMPLES

1. Soit (D) la droite passant par $A(2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) .

- 1ère méthode:

Le vecteur $\vec{n}(2; -5)$ est normal à (D) , donc une équation est de la forme:

$$(D) : 2x - 5y + c = 0 \quad (*)$$

Puisque $A(2; 1) \in (D)$, en substituant les coordonnées:

$$2(2) - 5(1) + c = 0 \implies 4 - 5 + c = 0 \implies c = 1.$$

Ainsi:

$$(D) : 2x - 5y + 1 = 0$$

- 2ème méthode:

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in (D) \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\iff 2(x - 2) - 5(y - 1) = 0$$

$$\iff 2x - 4 - 5y + 5 = 0$$

$$\iff 2x - 5y + 1 = 0$$

Ainsi:

$$(D) : 2x - 5y + 1 = 0$$

2. On considère les points suivants $A(2; 0)$, $B(4; 2)$, $C(0; -1)$.

- Déterminons une équation de la droite (D) , médiatrice du segment $[AB]$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$. $I(\frac{2+4}{2}; \frac{0+2}{2}) = I(3; 1)$.

$\vec{AB}(4 - 2; 2 - 0) = \vec{AB}(2; 2)$ est un vecteur normal à (D) .

Une équation de (D) est de la forme $2x + 2y + c = 0$.

Puisque $I(3; 1) \in (D)$, $2(3) + 2(1) + c = 0 \implies 6 + 2 + c = 0 \implies c = -8$.

Donc l'équation cartésienne de (D) est:

$$(D) : 2x + 2y - 8 = 0 \quad \text{ou} \quad (D) : x + y - 4 = 0$$

APPLICATIONS

1. Écrire une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} :

a) $A(0; 3)$ et $\vec{n}(1; 2)$

b) $A(-1; 2)$ et $\vec{n} = 2\vec{j}$

c) $A(1; 1)$ et $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j}$

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $A(3; -1)$ et orthogonale à la droite (D) d'équation $x - y - 1 = 0$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) , la médiatrice du segment $[AB]$ où $A(1; -2)$ et $B(3; 0)$.

> 3. CONDITION DE PERPENDICULARITÉ DE DEUX DROITES

PROPOSITION

Soient (D) et (D') deux droites du plan P .

- Si \vec{n} et \vec{n}' sont deux vecteurs normaux à (D) et (D') respectivement, alors:

$$(D) \perp (D') \iff \vec{n} \perp \vec{n}' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

- Si les droites (D) et (D') sont définies par les équations cartésiennes: $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, alors:

$$(D) \perp (D') \iff aa' + bb' = 0$$

🔗 EXEMPLES

1. On considère les droites $(D_1) : 3x - y + 4 = 0$ et $(D_2) : x + 3y - 1 = 0$.

Puisque $3 \times 1 + (-1) \times 3 = 3 - 3 = 0$, alors $(D_1) \perp (D_2)$.

2. On considère les droites $(\Delta_1) : x - y + 1 = 0$ et $(\Delta_2) : 3x + 2y + 2 = 0$.

Puisque $1 \times (3) + (-1) \times 2 = 1 \neq 0$, les droites (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas perpendiculaires.

✏ APPLICATIONS

1. Déterminer la valeur de $m \in \mathbb{R}$ pour que les droites $(\Delta_1) : x - my + 2 = 0$ et $(\Delta_2) : 2x + y - 1 = 0$ soient perpendiculaires.

2. Soient $A(5; 4)$, $B(-2; -3)$, $C(1; 5)$, $D(4; 2)$. Montrer que $(AB) \perp (CD)$.

> 4. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

PROPOSITION

Soit (D) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite (D) est donnée par :

$$d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemples:

La distance du point $A(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ à la droite (D) d'équation $3x + 4y - 7 = 0$ est :

$$d(A; (D)) = \frac{|3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|1 + 2 - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-4|}{5} = \frac{4}{5}$$

APPLICATIONS

1. Calculer la distance $d(A; (D))$ dans les cas suivants :

a) $A(1; 2)$ et $(D) : x + 3y + 3 = 0$

b) $A(-1; 1)$ et $(D) : 3x - 4y + 2 = 0$

2. Soient $A(1; 2)$, $B(3; 1)$, $C(-3; -2)$.

a) Montrer que $x + 2y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB) .

b) Calculer $d(C; (AB))$ puis en déduire l'aire du triangle ABC .

c) Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) .

IV. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN CERCLE

> 1. LE CERCLE

DÉFINITION

Soient Ω un point du plan P et R un réel positif.

Le cercle (C) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.

Il est noté $C(\Omega; R)$.

$$M \in C(\Omega; R) \iff \Omega M = R$$

> 2. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN CERCLE

PROPOSITION

Une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R ($R \geq 0$) est:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Que l'on peut écrire:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad \text{où } c = a^2 + b^2 - R^2$$

EXEMPLES

1. Déterminons une équation du cercle (C_1) de centre $\Omega_1(2; -3)$ et de rayon $R_1 = 2$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (C_1) &\iff (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 2^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$(C_1) : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$$

2. Déterminons une équation du cercle (C_2) de centre $\Omega_2(1; -1)$ et passant par $A(4; 3)$.

Le rayon du cercle (C_2) est:

$$R_2 = A\Omega_2 = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (C_2) &\iff (x - 1)^2 + (y - (-1))^2 = 5^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 25 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$(C_2) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$$

APPLICATIONS

1. Écrire une équation cartésienne du cercle (C) de centre Ω et de rayon R :

a) $\Omega(2; 4)$ et $R = 3$

b) $\Omega(-3; 0)$ et $R = 2\sqrt{2}$

c) $\Omega(-2; 2)$ et $R = 2\sqrt{2}$

2. Écrire une équation du cercle (C) de centre Ω et passant par le point A :

a) $\Omega(1; 0)$ et $A(2; 1)$

b) $\Omega(2; 1)$ et $A(2; -3)$

➤ 3. ÉQUATION D'UN CERCLE DÉFINI PAR L'UN DE SES DIAMÈTRES

PROPOSITION

Soient A et B deux points distincts dans le plan P .

- L'ensemble des points M du plan tels que: $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ est le cercle (C) de diamètre $[AB]$.
- Le centre Ω du cercle (C) est le point milieu du segment $[AB]$.
- Son rayon est $R = \frac{AB}{2}$.
- Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, et $M(x; y)$, alors une équation cartésienne du cercle (C) est:

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Autrement dit:

$$x^2 + y^2 - (x_A + x_B)x - (y_A + y_B)y + (x_A x_B + y_A y_B) = 0$$

Exemple:

On considère les points $A(1; 5)$ et $B(3; 1)$. Déterminons l'équation du cercle (C) de diamètre $[AB]$.

- 1ère méthode (Produit Scalaire):

Soit $M(x; y)$ un point du plan P .

$$\begin{aligned} M \in (C) &\iff \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \\ &\iff (x - 1)(x - 3) + (y - 5)(y - 1) = 0 \\ &\iff x^2 - 4x + 3 + y^2 - 6y + 5 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$(C) : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

- **2ème méthode (Centre et Rayon):**
- Le centre I du cercle (C) est le milieu de $[AB]$.

$$x_I = \frac{1 + 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Donc $I(2; 3)$ est le centre du cercle (C) .

- Le diamètre est

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

- Le rayon est $R = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.
- L'équation est:

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (C) &\iff (x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 5 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$(C) : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

Applications:

On considère les points $A(1; 3)$, $B(3; -1)$, $C(-3; -2)$.

- a) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C_1) de diamètre $[AB]$.
- b) Calculer le produit scalaire $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$. Que peut-on déduire ?
- a) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C_2) de diamètre $[AC]$.
- b) En déduire le centre et le rayon du cercle (C_2) .

> 4. ÉQUATION D'UN CERCLE DÉFINI PAR TROIS POINTS NON ALIGNÉS

PROPOSITION

Par trois points non alignés A , B et C passe un seul cercle (C) (le cercle circonscrit au triangle ABC).

- Son centre Ω est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC .
- Son rayon est $R = \Omega A$.

EXEMPLES

1. Déterminons une équation du cercle circonscrit au triangle ABC tel que $A(4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(-2; 0)$.

- 1ère méthode (Système d'équations):

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R . Son équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, où $c = a^2 + b^2 - R^2$.

$$\begin{cases} A \in (C) \implies 4^2 + 0^2 - 2a(4) - 2b(0) + c = 0 \\ B \in (C) \implies 0^2 + 4^2 - 2a(0) - 2b(4) + c = 0 \\ C \in (C) \implies (-2)^2 + 0^2 - 2a(-2) - 2b(0) + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 - 8a + c = 0 & (1) \\ 16 - 8b + c = 0 & (2) \\ 4 + 4a + c = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow -8a + 8b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$(1) - (3) \Rightarrow (16 - 8a + c) - (4 + 4a + c) = 0 \Rightarrow 12 - 12a = 0 \Rightarrow a = 1$$

Donc $a = b = 1$. Le centre est $\Omega(1; 1)$.

$$\text{Le rayon est } R = \Omega A = \sqrt{(4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}.$$

L'équation est:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad \text{ou encore} \quad (C) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8 = 0$$

- 2ème méthode (Médiatrices):

$I(2; 2)$ est le milieu de $[AB]$. $\vec{AB}(-4; 4)$ est normal à (Δ) , la médiatrice de $[AB]$.

$$M(x; y) \in (\Delta) \iff \vec{AB} \cdot \vec{IM} = 0 \iff -4(x-2) + 4(y-2) = 0$$

$$(\Delta) : x - y = 0$$

$J(1; 0)$ est le milieu de $[AC]$. $\vec{AC}(-6; 0)$ est normal à (Δ') , la médiatrice de $[AC]$.

$$M(x; y) \in (\Delta') \iff \vec{AC} \cdot \vec{JM} = 0 \iff -6(x-1) + 0(y-0) = 0$$

$$(\Delta') : x - 1 = 0$$

Le centre Ω est l'intersection de (Δ) et (Δ') :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$$

Donc $\Omega(1; 1)$.

$$\text{Le rayon est } R = A\Omega = \sqrt{(1-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}.$$

L'équation est:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad \text{ou encore} \quad (C) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8 = 0$$

Applications:

Déterminer une équation du cercle circonscrit (C) au triangle ABC dans les deux cas suivants :

a) $A(2; 1)$, $B(4; -1)$, et $C(0; 3)$

b) $A(3; -1)$, $B(5; 3)$, et $C(1; 1)$

V. REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UN CERCLE

PROPOSITION

Le cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui vérifient le système:

$$\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

Ce système est appelé une **représentation paramétrique** du cercle (C) .

EXEMPLES

1. On considère le cercle (C) de centre $\Omega(2; 3)$ et de rayon $R = 5$.

Une représentation paramétrique de (C) est donnée par:

$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos \theta \\ y = 3 + 5 \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

2. Déterminons l'ensemble (Γ) des points $M(x; y)$ du plan tels que:

$$\begin{cases} x = 2 + 4 \cos \theta \\ y = -3 + 4 \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

À partir du système:

$$\begin{cases} x - 2 = 4 \cos \theta \\ y + 3 = 4 \sin \theta \end{cases}$$

En élevant au carré et en additionnant les deux équations:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= (4 \cos \theta)^2 + (4 \sin \theta)^2 \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 16(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 16 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Ceci est l'équation du cercle (Γ) de centre $\Omega(2; -3)$ et de rayon $R = \sqrt{16} = 4$.

APPLICATIONS

1. Donner une représentation paramétrique du cercle (C) dans les cas suivants :

a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$

2. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cos t \\ y = -1 + 3 \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan tels que:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta \\ y = -1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

VI. ENSEMBLE DES POINTS

$M(x; y)$ DU PLAN TELS QUE: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

PROPOSITION

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan P vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, où $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On pose :

$$d = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

- Si $d < 0$, alors l'ensemble (Γ) est vide: $(\Gamma) = \emptyset$.
- Si $d = 0$, alors l'ensemble (Γ) est un singleton (un seul point):

$$(\Gamma) = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$$

- Si $d > 0$, alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$ et de rayon $R = \sqrt{d}$.

EXEMPLES

1. Soit (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan P tels que: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

$$-\frac{a}{2} = -\frac{(-2)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad c = -4$$

$$d = 1^2 + (-2)^2 - (-4) = 1 + 4 + 4 = 9 > 0$$

Par conséquent, (C) est un cercle de centre $\Omega(1; -2)$ et son rayon $R = \sqrt{9} = 3$.

2. Soit (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan P tels que: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 12 = 0$.

$$-\frac{a}{2} = -\frac{(-6)}{2} = 3 \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2} = -\frac{(-2)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad c = 12$$

$$d = 3^2 + 1^2 - 12 = 9 + 1 - 12 = -2 < 0$$

Par conséquent: $(C) = \emptyset$.

3. Soit (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan P tels que: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$.

$$-\frac{a}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2} = -\frac{(-8)}{2} = 4 \quad \text{et} \quad c = 20$$

$$d = (-2)^2 + 4^2 - 20 = 4 + 16 - 20 = 0$$

Par conséquent: $(C) = \{\Omega(-2; 4)\}$.

APPLICATIONS

Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan (P) dans les cas suivants :

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 29 = 0$

X. INTÉRIEUR ET EXTÉRIEUR D'UN CERCLE

>

DÉFINITION

Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R ($R > 0$), et M un point du plan P .

- Le point M est sur le cercle (C) si et seulement si : $\Omega M = R$.
- Le point M est à l'intérieur du cercle (C) si et seulement si : $\Omega M < R$.
- Le point M est à l'extérieur du cercle (C) si et seulement si : $\Omega M > R$.

PROPOSITION

Soit (C) le cercle d'équation cartésienne: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, où $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$.

Pour tout point $M(x_0; y_0)$ du plan:

- M est un point du cercle (C) si et seulement si : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$.
- M est à l'intérieur du cercle (C) si et seulement si : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$.
- M est à l'extérieur du cercle (C) si et seulement si : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$.

Ainsi, le cercle (C) détermine trois parties disjointes dans le plan P .

EXEMPLES

1. Soit (C) le cercle de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $R = 3$. Déterminons la position des points $A(3; -1)$ et $B(0; 1)$ par rapport au cercle (C) .

$$\Omega A = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\Omega B = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

- Puisque $\Omega A = 5$ et $R = 3$, $\Omega A > R$, alors le point A est à l'extérieur du cercle (C) .
- Puisque $\Omega B = \sqrt{2} \approx 1.41$ et $R = 3$, $\Omega B < R$, alors le point B est à l'intérieur du cercle (C) .

2. Résolvons graphiquement l'inéquation (E) : $(x; y) \in \mathbb{R}^2$: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 < 0$.

L'inéquation est équivalente à : $(x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) + 1 < 0$.

En complétant le carré: $((x - 2)^2 - 4) + ((y - 1)^2 - 1) + 1 < 0$.

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 4 < 0 \quad (1)$$

L'équation $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ représente un cercle (C) de centre $\Omega(2; 1)$ et de rayon $R = 2$.

Les solutions de l'inéquation (1) sont les coordonnées des points situés à l'intérieur du cercle (C) .

3. Résolvons graphiquement le système (S) suivant: $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y \leq 7 & (1) \\ 2x \leq y & (2) \end{cases}$$

- Inéquation (1): $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 \leq 0$.

En complétant le carré: $((x + 1)^2 - 1) + ((y - 1)^2 - 1) - 7 \leq 0$.

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9$$

La frontière est le cercle (C) de centre $\Omega(-1; 1)$ et de rayon $R = 3$. Les solutions sont les points sur le cercle et à son intérieur.

- Inéquation (2): $y \geq 2x$.

La frontière est la droite (D) d'équation $y = 2x$. Les solutions sont les points sur la droite et au-dessus d'elle.

L'ensemble solution de (S) est l'ensemble des coordonnées des points appartenant à l'intersection de l'intérieur (et de la frontière) du cercle (C) et de la région au-dessus (et sur) la droite (D) .