<u>פרוייקט:</u> 1A

<u>אינטגרציה של פונקציה:</u> $\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$

<u>בתחום:</u> $(-2,3)$

בעבודה זאת אנו נחשב אינטגרל של פונקציה $f(x)=\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$ בעזרת שיטה נומרית. נרה את התכונות של השיטה כמה התכנסות , שגיאה , תלות בפרמטרים. נרא גם אלגוריתם ותוכנית בשפת ++C לפיתרון האינטגרל. נתבוינן בהגבלות האלגוריתם , דרישות של משתמש ובדיקות עבור התוכנית.

מבוא לשיטות נומריות ומונחים בסיסיים

אינטגרל.

אנטגרל של פונקציה $f(x)$ בקטע [a,b] זה שטח הכלול בין פונקציה וציר ה-X . אם נחלק את הקטע שלנו ל-n קטעים שווים בגודל Δx כל אחד אז אפשר להגיד : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

שיטה נומרית.

כמו כל דבר גם חישוב אינטגרלי , לא תמיד ניתן לבצע לפי טבלאות. בכל תחום של פעילות אנושית אנו נפגשים עם פונקציות לא פשוטות אשר בלתי אפשרי לחשב איטגרל שלהן לפי טבלה. אז נרצה להשתמש בשיטה נומרית. שיטה נומרית – זאת שיטה , אשר נותנת ערך מקורב לערך מדויק (אנליטי). בעבודה זאת נשתמש בשיטה ע"ש אוילר , או שיטת בלבנים , על מנת למצוא ערך של אינטגרל של פונקציה נתונה.

התכנסות.

הגדרה: אנו נקרא לסדרה – **סדרה מתכנסת** , אם סכום החלקי שלה מתכנס לערך סופי.
בשיטה שלנו אנו נחלק את האינטגרל לסכום סופי של n חלקים , ואז ככל ש- n ישאף לאינסוף כך הסכום שלנו התכנס לערך אמיתי של האינטגרל.

שגיאה.

ברגע שאמרנו ששיטה נומרית נותנת ערך מקורב לערך מדויק , נשאלת שאלה : מהי שגיאה של ערך מקורב ואיך לקבל דיוק טוב?
שגיאה – זאת סכום החלקי של שאר האיברי הסדרה , החל מהאיבר אחד אחרי סכום החלקי.
ישנם שני סוגי שגיאה : שגיאה מוחלטת ושגיאה יחסית. אם נסמן את ערך מדויק ב- X ואת הערך מקורב ב- X* אזי:
שגיאה מוחלטת : $\Delta x = |X - X^*|$
שגיאה יחסחת: $\delta x = \frac{|X - X^*|}{X}$

* את כל הביטוים מתמטיים נקבל בהמשך.

דרישות והגבלות

<u>דרישות הקלט.</u>

1. נדרוש הכנסת תחום האינטגרציה : גבול תחתון וגבול עליון.
פה יש צורך בבדיקה : האם גבול עלוין גדול מהגבול תחתון.

2. נדרוש הכנסת דיוק , שעליו רוצים להגיע , כדי לחשב את מספר החלקים על מנת לחלק את הקטע.
פה יש צורך בבדיקה : האם זה מפר גדול מאפס.

3. נדרוש הכנסה של מספר החלוקות הגדול האפשרי , על מנת להגביל ולשלוט במספר החלוקות.

<u>תנאי עצירה.</u>

1. נעצור אם הגענו לסוף החישוב.

2. נעצור אם מספר חלוקות הנדרש על מנת להגיע לדיוק נדרש , גדול ממספר חלוקות האפרויות.

<u>פלט.</u>

1. ערך מקורב של אינטגרל והודעה שהיגענו בהצלחה לסוף החישוב.

2. הודעת שגיאה : מספר החלוקות גדול ממספר האפשרי.

<u>הגבלות של אלגוריתם.</u>

1. אלגוריתם שלי דורש ערך של מקסימום של נגזרת שניה של פונקציה בקטע הנתון על מנת לחשב את מספר החלוקות הנדרש : $\varepsilon < \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$ לכן הוא לא יעבוד לפונקציה אחרת או קטע אחר בלי שינויים בתוכנה.

2. אם נכניס כקלט דיוק גבוהה מאוד התוכנה אלולה לתת ערך שגוי , לכן יש להגביל אותה עם מספר חלוקות מקסימלי.

כדי לחשב אינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ בקטע (a,b) , נחלק את הקטע ל-n קטעים שווים בגודל δx כך ש:

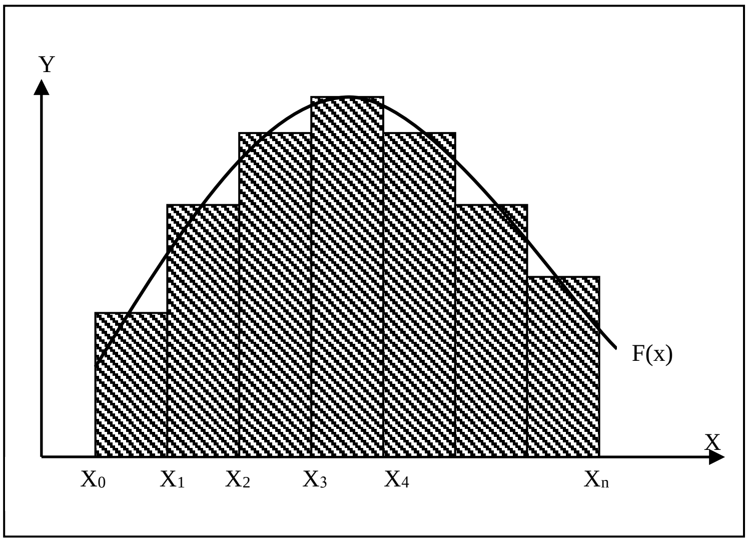
$$\delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$X_0 = a$$

$$X_1 = X_0 + \delta x$$

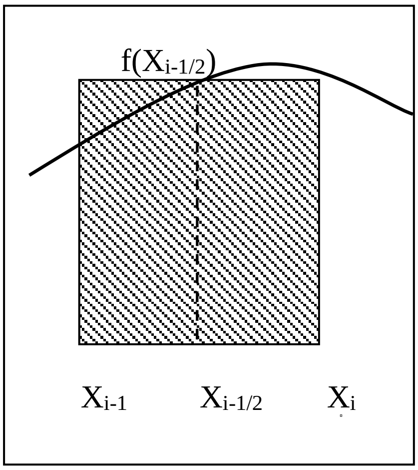
$$X_2 = X_1 + \delta x = X_0 + 2\delta x$$

$$X_n = X_{n-1} + \delta x = X_0 + n\delta x = a + (b-a) = b$$



לכן מחליפים אינטגרל I לסכום של אינטגרלים יותר קטנים:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{X0}^{X1} f(x)dx + \int_{X1}^{X2} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{Xn-1}^{Xn} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{Xi-1}^{Xi} f(x)dx$$



לפי משוואת הישר:

$$f(x) = f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right) + \left(X - \frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)$$

$$\int_{X_{i-1}}^{X_i} f(x)dx = \int_{X_{i-1}}^{X_i} f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right) + \left(X - \frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)dx =$$

$$= f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)\left(X_i - X_{i-1}\right) + \left[\frac{\left(X - \frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)^2}{2}\right]_{X_{i-1}}^{X_i} =$$

$$= f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)\delta x + \frac{\left(\frac{2X_i - X_i - X_{i-1}}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{2X_{i-1} - X_i - X_{i-1}}{2}\right)^2}{2} = f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)\delta x$$

$$\int_{X_{i-1}}^{X_i} f(x)dx \approx f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)\delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx = \delta x \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{X_j + X_{j-1}}{2}\right) = E(\delta x)$$

<u>ביטוי של שגיאה</u>

אם נסמן את האינטגרל ב- **I** אז שגיאה **Error(δx)** שמקבלים לפי שיטה שלנו:

$$I = E(\delta x) + Error(\delta x)$$

$$Error(\delta x) = I - E(\delta x)$$

נפתח טור טיילור עבור **f(x)** סביב נקודה $X^* = \left(\dfrac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(X^*) \frac{\left(X - X^*\right)^j}{j!}$$

$$\int_{X_{i-1}}^{X_i} f(x)dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(X^*)}{j!} \int_{X_{i-1}}^{X_i} (X - X^*)^j dx =$$

$$\int_{X_{i-1}}^{X_i} (X - X^*)^j dx = \left. \frac{\left(X - \dfrac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)^{j+1}}{j+1} \right|_{X_{i-1}}^{X_i} = \frac{(X_i - X_{i-1})^{j+1} - (X_{i-1} - X_i)^{j+1}}{(j+1)2^{j+1}} =$$

$$= \frac{(\delta x)^{j+1} + (\delta x)^{j+1}(-1)^j}{(j+1)2^{j+1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(X^*)}{(j+1)!} \frac{1}{2^{j+1}} \left((\delta x)^{j+1} + (\delta x)^{j+1}(-1)^j\right) = f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)(\delta x) + \frac{1}{24} f^{II}\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)(\delta x)^3 +$$

$$+ \dots + \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{2^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)\left((\delta x)^{k+1} + (\delta x)^{k+1}(-1)^k\right) + \dots$$

נגזרת מסדקר k של פונקציה **f(x)** רציפה בקטע אז היא חסומה , לכן $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M_k$

קיבלנו ביטוי לאנטגרל בקטע (X_{i-1},X_i) , נחזור לחישוב אינטגרל המקורי:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)(\delta x) + \frac{1}{24} M_2 (\delta x)^3 + \dots \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{X_i + X_{i-1}}{2}\right)(\delta x) + \frac{(\delta x)^3}{24} \sum_{i=1}^{n} M_2 + O(\delta x)^5$$

סכום הראשון בביטוי, זה ביטוי לחישוב אינטגרל לפי שיטת אוילר , שפיתחנו קודם
כל השאר זאת שגיאה:

$$Error(\delta x) = \frac{(\delta x)^3}{24} \sum_{i=1}^{n} M_2 + O(\delta x)^5$$

נתעלם מ – $O(\delta x)^5$ ונסתכל על הסכום :

$$Error(\delta x) = \frac{(\delta x)^3}{24} n M_2 = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} M_2 = (\delta x)^2 \frac{(b-a)}{24} M_2$$

התכנסות השיטה.

כדי לראות ששיטה מתכנסת לאינטגרל נרצה ש- δx תשאף לאפס.

$$\lim_{\delta x\to 0}\left(E(\delta x)+Error(\delta x)\right)=\lim_{\delta x\to 0}\left(\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{X_j+X_{j-1}}{2}\right)\delta x+\left(\delta x\right)^2\frac{\left(b-a\right)}{24}\mathrm{M}_2\right)=$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{X_j+X_{j-1}}{2}\right)\delta x+\lim_{\delta x\to 0}\left(\delta x\right)^2\frac{\left(b-a\right)}{24}\mathrm{M}_2=\lim_{\delta x\to 0}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{X_j+X_{j-1}}{2}\right)\delta x=I$$

הביטוי שקיבלנו זאת הגדרה של אינטגרל , לכן השיטה מתכנסת.

.גוף התוכנית

```
#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<assert.h>

#define M2 0.289                       //maximal value of second derivation
double func(double);                   // source function
void main()
{
        int iA,iB,iMax,iNumIter;  // iNumIter - number of iteratoins to reach accuracy
        double dEpsilon,dDeltaX; // dEpsilon - accuracy
  double dIntegral=0      ;
        cout<<"Enter lower border: ";
        cin>>iA;
        cout<<"Enter upper border: ";
        cin>>iB;
        assert (iB > iA);          // check if borders are right
        cout<<"Enter epsilon: ";
        cin>>dEpsilon;
        assert (dEpsilon > 0);      // check if epsilon is posetive
        cout<<"Enter maximal number of divisions: ";
        cin>>iMax;
        iNumIter = (int)sqrt((pow((iB-iA),3)*M2)/(24*dEpsilon));
        cout<<"iNumIter = "<<iNumIter<<endl;
        if(iMax > iNumIter)
        {
          iMax = iNumIter;
          dDeltaX = (double)(iB-iA)/iMax;  // culculate dx
          cout<<"DeltaX = "<<dDeltaX<<endl;
          for(int i =0 ; i< iMax ; i++)
         {
            dIntegral = dIntegral + dDeltaX*func(iA + (0.5 + i)*dDeltaX );
         }
         cout.precision(9);
         cout<<"Approximation of integral is = "<<dIntegral<<endl;
        }
        else
         cout<<"Maximal number of divisions reached!"<<endl;
}
double func(double _dX)
{
        if(_dX == 0) // if x =0 f(x) not difine so return 1
         return 1;
        else
         return (sin(_dX)/sinh(_dX));
}
```

תוצאות הרצה של תוכנה:

```
Enter lower border: -2
Enter upper border: 3
Enter epsilon: 0.0001
Enter maximal number of divisions: 100000
iNumIter = 122
DeltaX = 0.0409836
Approximation of integral is = 2.85572869395082
Press any key to continue
```

```
Enter lower border: -2
Enter upper border: 3
Enter epsilon: 0.00000001
Enter maximal number of divisions: 100000
iNumIter = 12268
DeltaX = 0.000407564
Approximation of integral is = 2.85569455942719
Press any key to continue
```

```
Enter lower border: -2
Enter upper border: 3
Enter epsilon: 0.000000000001
Enter maximal number of divisions: 10000000
iNumIter = 1226869
DeltaX = 4.07541e-006
Approximation of integral is = 2.85569455605146
Press any key to continue
```

```
Enter lower border: -2
Enter upper border: 3
Enter epsilon: 0.00000000000001
Enter maximal number of divisions: 10000000000
iNumIter = 12268693
DeltaX = 4.07541e-007
Approximation of integral is = 2.85569455605099
Press any key to continue
```

<u>בדיקות תוכנה.</u>

נבדוק את התוכנה על פונקציות ידועות: $x^2, e^x, \cos(x)$

נחשב את $\int_a^b x^2 dx$ ונשנה את הגבולות של אינטגרל ואת הדיוק.

גבולות		דיוק			ערך מדויק
a	b	0.001	0.0001	0.00001	
0	1	0.332304527	0.333227041	0.33332327	0.33333333
0	0.9	0.241760185	0.242894512	0.24298973	0.243
0.1	1	0.331760204	0.332894531	0.332989754	0.333
0.1	0.9	0.241481462	0.242559981	0.242656499	0.24266667

נחשב את $\int_a^b e^x dx$ ונשנה את הגבולות של אינטגרל ואת הדיוק.

גבולות		דיוק			ערך מדויק
a	b	0.001	0.0001	0.00001	
0	1	1.71756609	1.71821609	1.71827546	1.718281828
0	0.9	1.45899506	1.45954022	1.45959697	1.459603111
0.1	1	1.61243898	1.61304147	1.61310419	1.61311091
0.1	0.9	1.35369531	1.35436943	1.35442588	1.354432193

נחשב את $\int_a^b \cos x dx$ ונשנה את הגבולות של אינטגרל ואת הדיוק.

גבולות		דיוק			ערך מדויק
a	b	0.001	0.0001	0.00001	
0	3	0.14116815	0.141124718	0.14112048	0.14112048
0	2.9	0.239336498	0.239257621	0.239250066	0.239249329
0.1	3	0.0413016484	0.0412880364	0.041286733	0.041286591
0.1	2.9	0.139466434	0.139420865	0.139416318	0.139415912

כעת נבדוק את הפונקציה המקורית ונראה דיוק המקסימלי שאליו נוכל להגיע בתוכנה:

ערך המתקבל	מספר חלוקות	דיוק הנדרש
2.8592208861526	12	10^{-2}
2.85572869395082	122	10^{-4}
2.8556948940988	1226	10^{-6}
2.85569455942719	12268	10^{-8}
2.85569455608487	122686	10^{-10}
2.85569455605146	1226869	10^{-12}
2.85569455605099	12268693	10^{-14}
2.85569455605084	122686932	10^{-16}

<u>מסכנה</u>: אחרי בדיקות רואים שתוכנה עומדת בשינוים קטנים של קלט ויש תלות בין קלט ופלט , ודיוק המקסימלי איתו נוכל לחשב את האינטגרל הוא : 10^{-14}

<u>חקירת פונקציה</u>

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}, x\in\left[a,b\right]$$

<u>נקודות אי הגדרה</u> , <u>חיתוך</u>:

$$\sinh(x)\neq 0\rightarrow x\neq \arcsin(0)\rightarrow x\neq 0$$

$$f(x)=0\rightarrow \sin(x)=0\rightarrow x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

<u>התנהגות של פונקציה סביב נקודות אי הגדרה ואין סוף</u>:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}=\frac{1}{1}=1$$

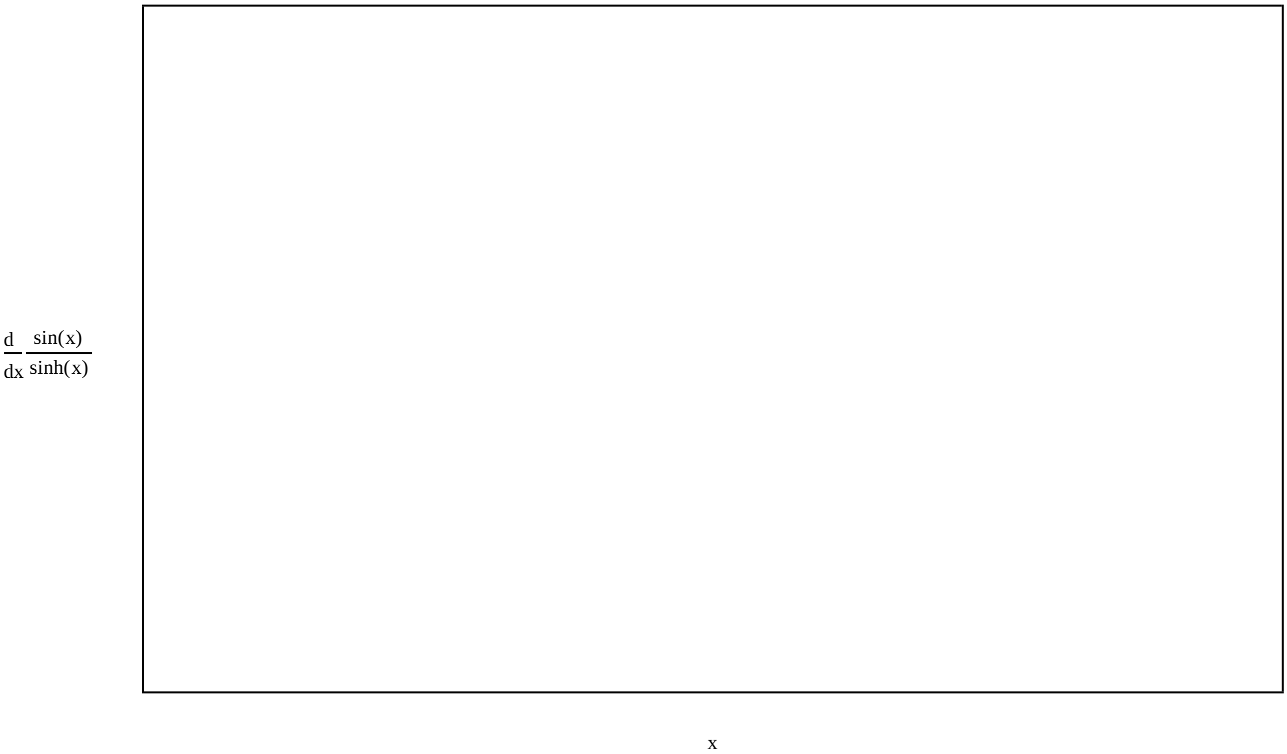
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}=\frac{1}{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}=\frac{2}{e^{\infty}-\frac{1}{e^{\infty}}}=\frac{2}{\infty}=0$$

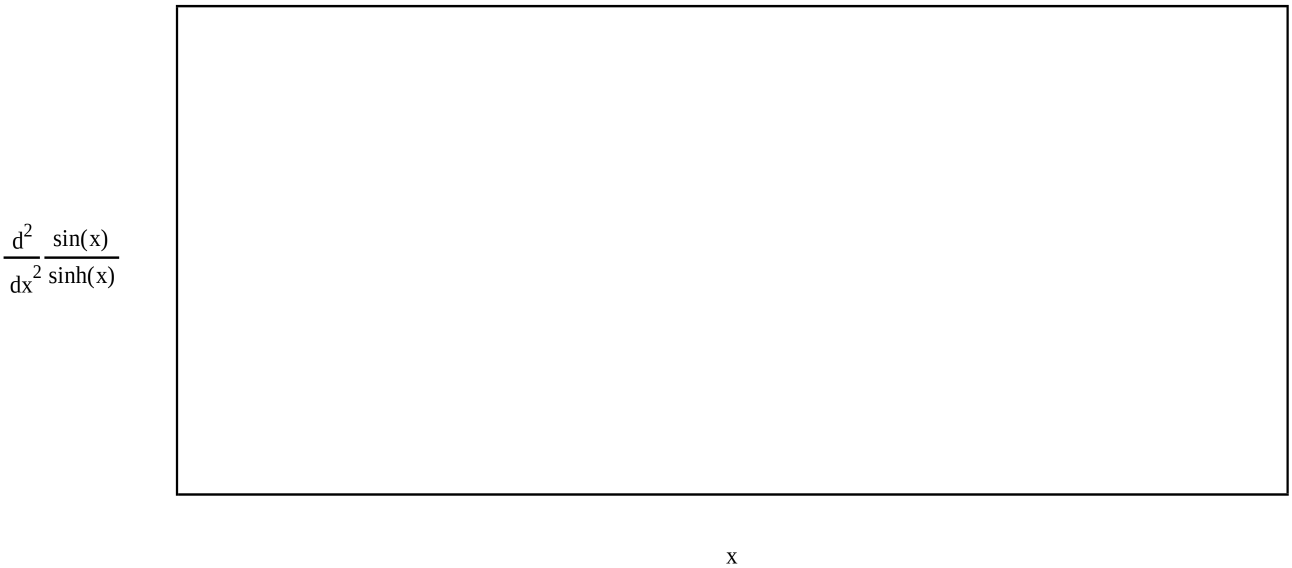
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}=\frac{1}{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}=\frac{2}{e^{-\infty}-e^{\infty}}=\frac{2}{-\infty}=0$$

נגזרות :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}\right)=\frac{\cos(x)}{\sinh(x)}-\frac{\sin(x)\cdot\cosh(x)}{\sinh^2(x)}$$



$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}\right)=(-2)\cdot\left(\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}\right)+(-2)\cdot\frac{\cos(x)\cdot\cosh(x)}{\sinh^2(x)}+2\cdot\frac{\sin(x)\cdot\cosh^2(x)}{\sinh^3(x)}$$



גרף של פונקציה מקורית.

$\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$

x

סיפרות, תוכנות עזר.

1. Calculus with analytic geometry / C. H. Edwards , Jr., David E. Penney --- 5th edition.

2. Guide of higher mathematics / M. Vigorodsky.

3. Numerical Recipes in C/ William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery --- The Art of Scientific Computing 2nd Edition