Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

L'algorithme du simplexe fut proposé en 1947 par G. B. Dantzig comme méthode de résolution générale des programmes linéaires.

La solution optimale est approchée par étapes ou itérations successives.

Chaque étape correspond au calcul de la valeur économique d'une solution.

Comme il existe une infinité de solutions admissibles, la méthode propose de n'explorer qu'un nombre limité de solutions parmi lesquelles se trouve à coup sûr la solution optimale.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 1 : Enoncé

Un ébéniste fabrique des bureaux sous forme standard ou luxe. Des études de marché ont montré que pour l'année à venir, les possibilités de vente s'élèvent à 300 unités pour le modèle luxe et à 400 unités pour le modèle standard. L'approvisionnement en bois est suffisant pour fabriquer annuellement 500 bureaux quel que soit le type. Par ailleurs, le temps de fabrication d'un modèle luxe est le double de celui d'un bureau de modèle standard. La capacité annuelle de fabrication est telle que, si tous les bureaux fabriqués étaient de type standard, on pourrait en fabriquer 700 au maximum. La vente d'un bureau sous le modèle luxe conduit à une marge unitaire sur coût variable égale à 7, celle d'un bureau de type standard égale à 5.

On se propose de rechercher le programme annuel de fabrication conduisant au profit global maximum.

ESGI
école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

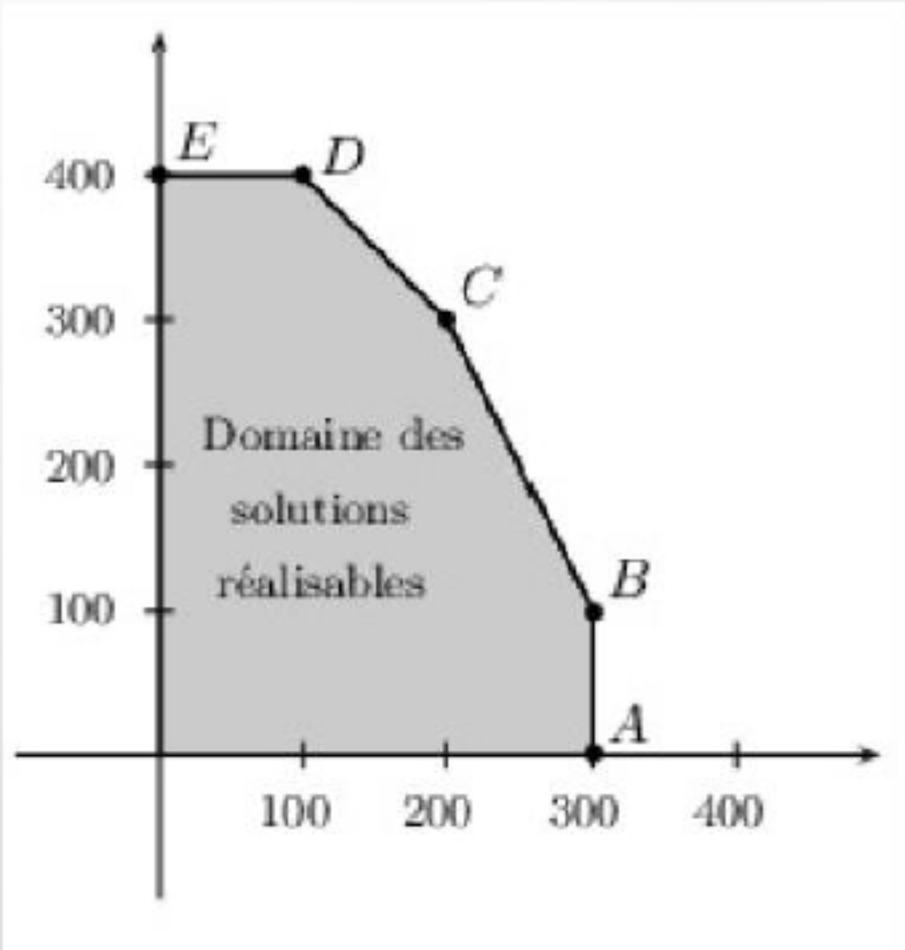
LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 2 : Mise en équation du Programme Linéaire

Soit x_1 le nombre de bureaux de type luxe
Soit x_2 le nombre de bureaux de type standard.

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
$x_1 \leq 300$
$x_2 \leq 400$
$x_1 + x_2 \leq 500$
$2x_1 + x_2 \leq 700$

$Z\,(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$ à maximiser



Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 3 : Forme Standard du Programme Linéaire

On introduit les variables d'écart x_i avec $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ positives ou nulles.

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
$x_1 \leq 300$	$x_1 + x_3 = 300$
$x_2 \leq 400$	$x_2 + x_4 = 400$
$x_1 + x_2 \leq 500$	$x_1 + x_2 + x_5 = 500$
$2x_1 + x_2 \leq 700$	$2x_1 + x_2 + x_6 = 700$

$Z(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$ à maximiser

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 4 : Variables Hors Base & Variables dans la Base

Une solution de base est avant tout une **solution admissible.** Elle satisfait l'ensemble des contraintes et conditions de signe.

Toute solution de base comporte deux catégories de variables :

– Des variables ayant une valeur prédéterminée nulle :
ces variables nulles sont dites **variables Hors Base** (ou variables exclues)

– Des variables ayant une valeur non nulle :
ce sont les **variables dans la Base** (ou variables retenues).

Pour amorcer l'algorithme du simplexe, il est nécessaire de connaître une solution de base.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 4 : Variables Hors Base & Variables dans la Base

VDB	VHB
x_3	x_1
x_4	x_2
x_5	
x_6	

La solution de base de départ de l'ébéniste consiste à ne rien produire :

$x_1 = x_2 = 0$. Ces variables x_1, x_2 qui sont nulles sont donc **hors-base**.

Dans ce cas, d'après le programme : $x_3 = 300$, $x_4 = 400$, $x_5 = 500$, $x_6 = 700$

Les variables x_3, x_4, x_5, x_6 (non nulles) sont donc **dans la base**.

La valeur de la fonction économique est donc $Z(0, 0) = 7 \times 0 + 5 \times 0 = 0$.

ESGI école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 4 : Variables Hors Base & Variables dans la Base

VDB	VHB
x_3	x_1
x_4	x_2
x_5	
x_6	

On écrit maintenant le tableau initial :

VDB \ VHB	x_1	x_2	x_3 •	x_4 •	x_5 •	x_6 •	cste	
x_3	1	0	1	0	0	0	300	$x_1 + x_3 = 300$
x_4	0	1	0	1	0	0	400	$x_2 + x_4 = 400$
x_5	1	1	0	0	1	0	500	$x_1 + x_2 + x_5 = 500$
x_6	2	1	0	0	0	1	700	$2x_1 + x_2 + x_6 = 700$
Z	7	5	0	0	0	0	0	$Z = 7x_1 + 5x_2$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

La solution de base de départ consiste à ne rien produire soit $x_1 = x_2 = 0$. On étudie ensuite, à partir de cette solution, jusqu'à quel niveau on peut porter x_1 ou x_2 conformément aux contraintes de façon à accroître au maximum le profit.

Il se pose le problème du choix de la variable x_1 ou x_2 qui va passer de la valeur 0 à une valeur strictement positive. La variable choisie sera appelée *variable entrante*.

Critère de sélection de la variable entrante : **Règle du plus grand gain marginal**

Fonction économique : $Z(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$

La sélection portera sur x_1 qui, par unité rapporte le plus

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

On exprime ensuite x_3, x_4, x_5, x_6 et Z en fonction des variables hors-base x_1 et x_2. Puis la variable x_2 reste hors-base donc **nulle**, la variable x_1 entre en base. On reporte alors $x_2 = 0$ dans ce système et on obtient :

$$
\begin{array}{lclcl}
x_1 + x_3 = 300 & \Rightarrow & x_3 = 300 - x_1 & \Rightarrow & x_3 = 300 - x_1 \\
x_2 + x_4 = 400 & \Rightarrow & x_4 = 400 - x_2 & \Rightarrow & x_4 = 400 \\
x_1 + x_2 + x_5 = 500 & \Rightarrow & x_5 = 500 - x_1 - x_2 & \Rightarrow & x_5 = 500 - x_1 \\
2x_1 + x_2 + x_6 = 700 & \Rightarrow & x_6 = 700 - 2x_1 - x_2 & \Rightarrow & x_6 = 700 - 2x_1 \\
Z = 7x_1 + 5x_2 & \Rightarrow & Z = 7x_1 + 5x_2 & \Rightarrow & Z = 7x_1
\end{array}
$$

On cherche jusqu'à quel niveau il est possible de porter x_1, de façon compatible avec les contraintes de positivité des x_i.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

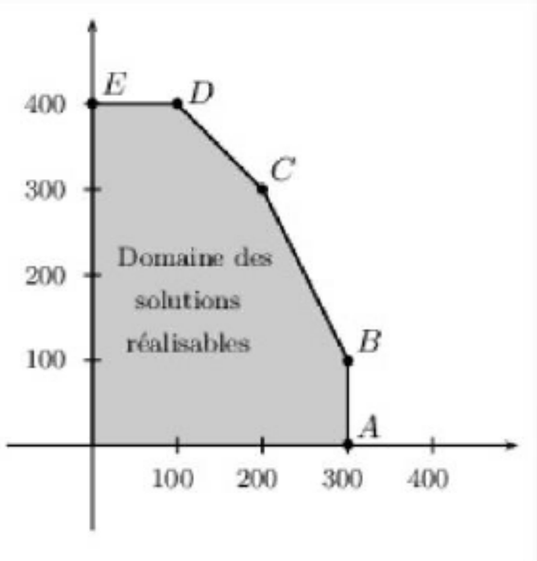
$x_3 = 300 - x_1 \qquad x_1 \leq 300$

$x_4 = 400$

$x_5 = 500 - x_1 \qquad x_1 \leq 500$

$x_6 = 700 - 2x_1 \qquad x_1 \leq 350$

$Z = 7x_1$



La valeur maximale de x1 est donc x1 = 300. On remplace dans le système.

$x_3 = 0 \qquad x_4 = 400$

$x_5 = 200 \qquad x_6 = 100$

$Z(300,0) = 2100$

VDB		VHB
x_1	$\leftrightarrow$	x_3
x_4		x_2
x_5		
x_6		

La variable x_3 est devenue nulle, elle est sortie de la base, x_3 est appelée variable sortante. Les variables x_1 et x_3 ont permuté.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

On exprime le programme standard en fonction des nouvelles variables hors-base x_2, x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 500 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 700 \\ Z = 7x_1 + 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 300 - x_3 \\ x_4 = 400 - x_2 \\ x_5 = 500 - (300 - x_3) - x_2 \\ x_6 = 700 - 2(300 - x_3) - x_2 \\ Z = 7(300 - x_3) + 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

On exprime ce nouveau programme à l'aide d'un second tableau. Pour l'obtenir, on remplace dans le premier tableau la variable x_3 par la variable x_1 (x_1 et x_3 ont permuté) et ceci dans la colonne **variables dans la base**.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 5 : Première Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

Pour la fonction économique Z, le coefficient constant 2100 est affecté impérativement du signe – et on place –2100.

VDB \ VHB	x_1 •	x_2	x_3	x_4 •	x_5 •	x_6 •	cste	
x_1	1	0	1	0	0	0	300	$x_1 + x_3 = 300$
x_4	0	1	0	1	0	0	400	$x_2 + x_4 = 400$
x_5	0	1	-1	0	1	0	200	$x_2 - x_3 + x_5 = 200$
x_6	0	1	-2	0	0	1	100	$x_2 - 2x_3 + x_6 = 100$
Z	0	5	-7	0	0	0	-2100	$Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

Sélection de la variable entrante : $Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100$

On sélectionne x_2. En effet, toute augmentation de x_3 à partir de la valeur 0 provoquerait une diminution de la fonction économique Z.

Sélection de la variable sortante :

La variable x_3 reste hors-base donc nulle, on remplace x_3 par 0 dans le système précédent.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$

On obtient :

$x_1 = 300$

$x_4 = 400 - x_2$

$x_5 = 200 - x_2$

$x_6 = 100 - x_2$

Les Contraintes de Positivité imposent :

$x_2 \leq 400$

$x_2 \leq 200$

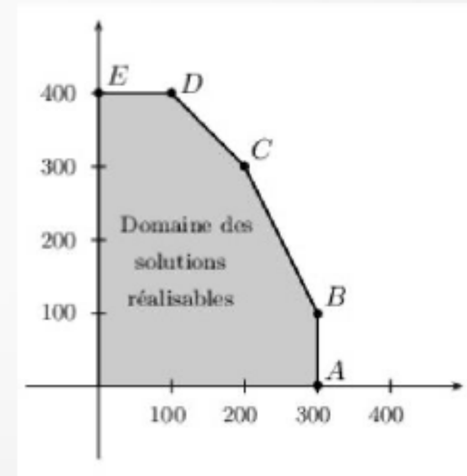
$x_2 \leq 100$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ Z = 5x_2 - 7x_3 + 2100 \end{cases}$$



La valeur prise par x2 est donc x2 = 100

$x_1 = 300$

$x_4 = 400 - x_2 \Rightarrow x_4 = 300$

$x_5 = 200 - x_2 \Rightarrow x_5 = 100$

$x_6 = 100 - x_2 \Rightarrow x_6 = 0$

VDB		VHB
x_1		x_3
x_2	$\leftrightarrow$	x_6
x_4		
x_5		

La variable sortante est donc x6.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

On exprime le programme standard en fonction des nouvelles variables hors-base *x*3, *x*6 :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 + x_4 = 400 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 500 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 700 \\ Z = 7x_1 + 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 300 - x_3 \\ x_2 = 700 - 2(300 - x_3) - x_6 = 100 + 2x_3 - x_6 \\ x_4 = 400 - (100 + 2x_3 - x_6) \\ x_5 = 500 - (300 - x_3) - (100 + 2x_3 - x_6) \\ Z = 7(300 - x_3) + 5(100 + 2x_3 - x_6) \end{cases}$$

On arrive au nouveau programme :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 6 : Deuxième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$

On prend la colonne des variables dans la base du second tableau et on y remplace *x6* par *x2* (ces deux variables permutent). Pour la fonction économique *Z*, le coefficient constant 2600 est affecté du signe – et on place –2600.

VHB / VDB	x_1 •	x_2 •	x_3	x_4 •	x_5 •	x_6	cste	
x_1	1	0	1	0	0	0	300	$x_1 + x_3 = 300$
x_4	0	0	2	1	0	-1	300	$2x_3 + x_4 - x_6 = 300$
x_5	0	0	1	0	1	-1	100	$x_3 + x_5 - x_6 = 100$
x_2	0	1	-2	0	0	1	100	$x_2 - 2x_3 + x_6 = 100$
Z	0	0	3	0	0	-5	-2600	$Z = 3x_3 - 5x_6 + 2600$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$

Sélection de la variable entrante : $Z = 3x_3 - 5x_6 + 2600$
On sélectionne x_3. En effet, toute augmentation de x_6 à partir de la valeur 0 provoquerait une diminution de la fonction économique Z.

Sélection de la variable sortante :
La variable x_6 reste hors-base donc nulle, on remplace x_6 par 0 dans le système précédent.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$
\begin{cases}
x_1 + x_3 = 300 \\
x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\
2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\
x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\
Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6
\end{cases}
$$

On obtient :

$x_1 = 300 - x_3$

$x_2 = 100 + 2x_3$

$x_4 = 300 - 2x_3$

$x_5 = 100 - x_3$

Les Contraintes de Positivité imposent :

$x_3 \leq 300$

$x_3 \leq 150$

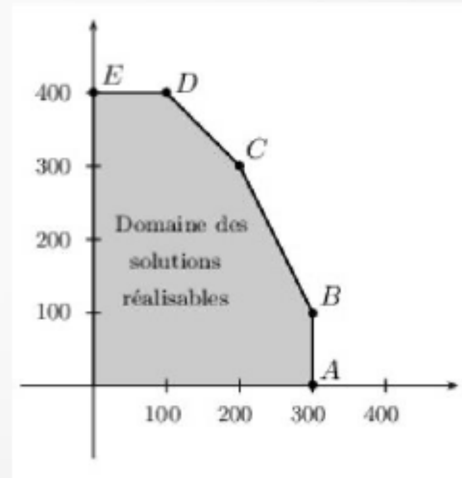
$x_3 \leq 100$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases}$$



La valeur prise par x_3 est donc $x_3 = 100$

On obtient : $x_1 = 300 - x_3 = 200$

$x_2 = 100 + 2x_3 = 300$

$x_4 = 300 - 2x_3 = 100$

$x_5 = 100 - x_3 = 0$

VDB		VHB
x_3	$\leftrightarrow$	x_5
x_1		x_6
x_2		
x_4		

La variable sortante est donc x_5. Les variables x_3 et x_5 ont permuté.

Cette itération conduit au sommet $C(200, 300)$.

La fonction économique vaut $Z = 2900$.

école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

On exprime les variables dans la base en fonction des variables hors-base $x5$ et $x6$.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 - 2x_3 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + x_4 - x_6 = 300 \\ x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ Z = 2600 + 3x_3 - 5x_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 100 - x_5 + x_6 \\ x_1 = 300 - (100 - x_5 + x_6) = 200 + x_5 - x_6 \\ x_2 = 100 + 2(100 - x_5 + x_6) = 300 - 2x_5 + x_6 \\ x_4 = 300 - 2(100 - x_5 + x_6) = 100 + 2x_5 - x_6 \\ Z = 2600 + 3(100 - x_5 + x_6) = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

On arrive au nouveau programme :

$$\begin{cases} x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ x_1 - x_5 + x_6 = 200 \\ x_2 + 2x_5 - x_6 = 300 \\ x_4 - 2x_5 + x_6 = 100 \\ Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ x_1 - x_5 + x_6 = 200 \\ x_2 + 2x_5 - x_6 = 300 \\ x_4 - 2x_5 + x_6 = 100 \\ Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

On prend la colonne des variables dans la base du second tableau et on y remplace *x*5 par *x*3 (ces deux variables permutent). Pour la fonction économique *Z*, le coefficient constant 2900 est affecté du signe – et on place −2900.

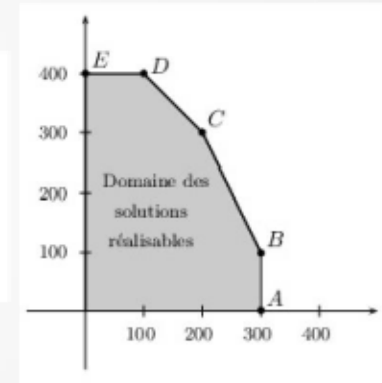
VHB / VDB	x_1 •	x_2 •	x_3 •	x_4 •	x_5	x_6	cste	
x_1	1	0	0	0	−1	1	200	$x_1 - x_5 + x_6 = 200$
x_4	0	0	0	1	−2	1	100	$x_4 - 2x_5 + x_6 = 100$
x_3	0	0	1	0	1	−1	100	$x_3 + x_5 - x_6 = 100$
x_2	0	1	0	0	2	−1	300	$x_2 + 2x_5 - x_6 = 300$
Z	0	0	0	0	−3	−2	−2900	$Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6$

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 7 : Troisième Itération

$$\begin{cases} x_3 + x_5 - x_6 = 100 \\ x_1 - x_5 + x_6 = 200 \\ x_2 + 2x_5 - x_6 = 300 \\ x_4 - 2x_5 + x_6 = 100 \\ Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6 \end{cases}$$



Conclusion : $Z = 2900 - 3x_5 - 2x_6$

x_5 et x_6 sont hors-base donc nulles <u>mais</u> toute augmentation de x_5 ou x_6 entraîne une diminution de Z. Il n'est plus possible d'améliorer la fonction économique, la solution ($x_1 = 200$, $x_2 = 300$) est la solution optimale.

On interprète les résultats de la manière suivante :

$x_1 = 200$ bureaux de modèle luxe
$x_2 = 300$ bureaux de modèle standard
$x_3 = 100$, il reste une possibilité de fabriquer 100 bureaux de modèle luxe
$x_4 = 100$, il reste une possibilité de fabriquer 100 bureaux de modèle standard
$x_5 = 0$, tout le bois disponible est utilisé
$x_6 = 0$, tout le temps disponible est utilisé
Z est maximum et vaut 2900.