Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 4 : Variables Hors Base & Variables dans la Base

VDB	VHB
x_3	x_1
x_4	x_2
x_5	
x_6	

La solution de base de départ de l'ébéniste consiste à ne rien produire :

$x_1 = x_2 = 0$. Ces variables x_1, x_2 qui sont nulles sont donc **hors-base**.

Dans ce cas, d'après le programme : $x_3 = 300$, $x_4 = 400$, $x_5 = 500$, $x_6 = 700$

Les variables x_3, x_4, x_5, x_6 (non nulles) sont donc **dans la base**.

La valeur de la fonction économique est donc $Z(0, 0) = 7 \times 0 + 5 \times 0 = 0$.

ESGI école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 4 : Variables Hors Base & Variables dans la Base

Une solution de base est avant tout une **solution admissible.** Elle satisfait l'ensemble des contraintes et conditions de signe.

Toute solution de base comporte deux catégories de variables :

– Des variables ayant une valeur prédéterminée nulle :
ces variables nulles sont dites **variables Hors Base** (ou variables exclues)

– Des variables ayant une valeur non nulle :
ce sont les **variables dans la Base** (ou variables retenues).

Pour amorcer l'algorithme du simplexe, il est nécessaire de connaître une solution de base.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 3 : Forme Standard du Programme Linéaire

On introduit les variables d'écart *xi* avec $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ positives ou nulles.

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$	$x1 \geq 0, x2 \geq 0$
$x1 \leq 300$	$x1 + x3 = 300$
$x2 \leq 400$	$x2 + x4 = 400$
$x1 + x2 \leq 500$	$x1 + x2 + x5 = 500$
$2x1 + x2 \leq 700$	$2x1 + x2 + x6 = 700$

$Z(x1, x2) = 7x1 + 5x2$ à maximiser

Programmation Linéaire

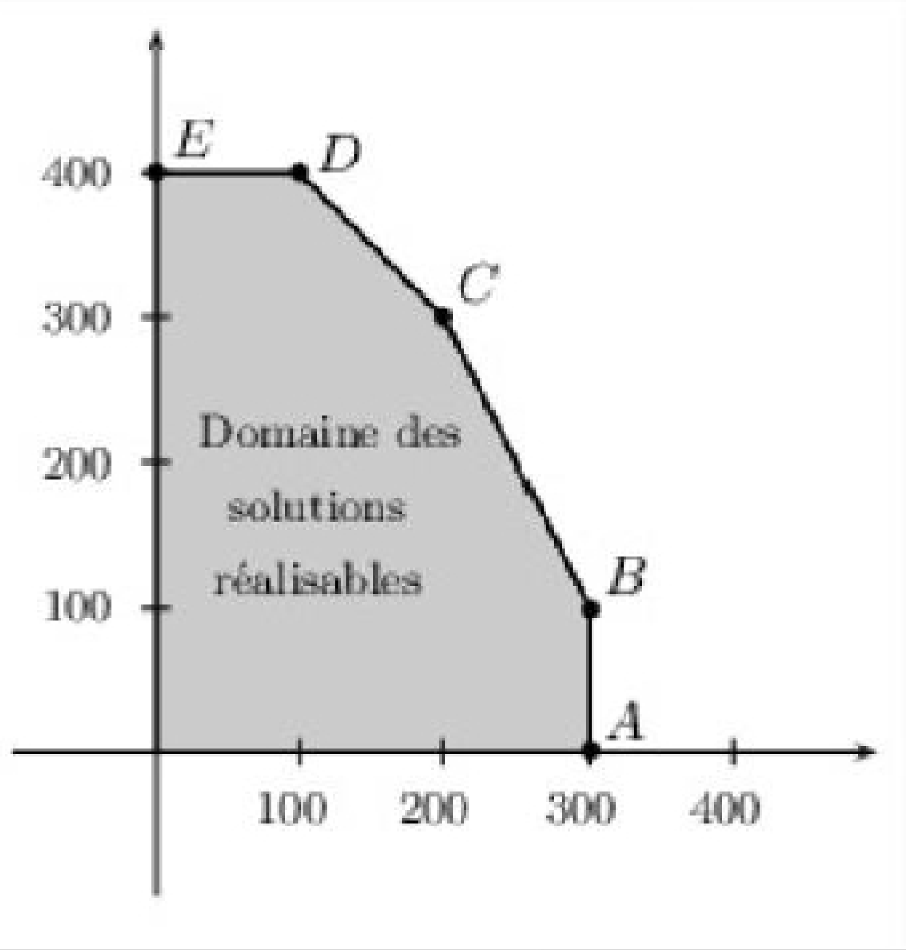
LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 2 : Mise en équation du Programme Linéaire

Soit x_1 le nombre de bureaux de type luxe
Soit x_2 le nombre de bureaux de type standard.

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
$x_1 \leq 300$
$x_2 \leq 400$
$x_1 + x_2 \leq 500$
$2x_1 + x_2 \leq 700$

$Z(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$ à maximiser



Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

Phase 1 : Enoncé

Un ébéniste fabrique des bureaux sous forme standard ou luxe. Des études de marché ont montré que pour l'année à venir, les possibilités de vente s'élèvent à 300 unités pour le modèle luxe et à 400 unités pour le modèle standard. L'approvisionnement en bois est suffisant pour fabriquer annuellement 500 bureaux quel que soit le type. Par ailleurs, le temps de fabrication d'un modèle luxe est le double de celui d'un bureau de modèle standard. La capacité annuelle de fabrication est telle que, si tous les bureaux fabriqués étaient de type standard, on pourrait en fabriquer 700 au maximum. La vente d'un bureau sous le modèle luxe conduit à une marge unitaire sur coût variable égale à 7, celle d'un bureau de type standard égale à 5.

On se propose de rechercher le programme annuel de fabrication conduisant au profit global maximum.

Programmation Linéaire

LA METHODE DU SIMPLEXE

L'algorithme du simplexe fut proposé en 1947 par G. B. Dantzig comme méthode de résolution générale des programmes linéaires.

La solution optimale est approchée par étapes ou itérations successives.

Chaque étape correspond au calcul de la valeur économique d'une solution.

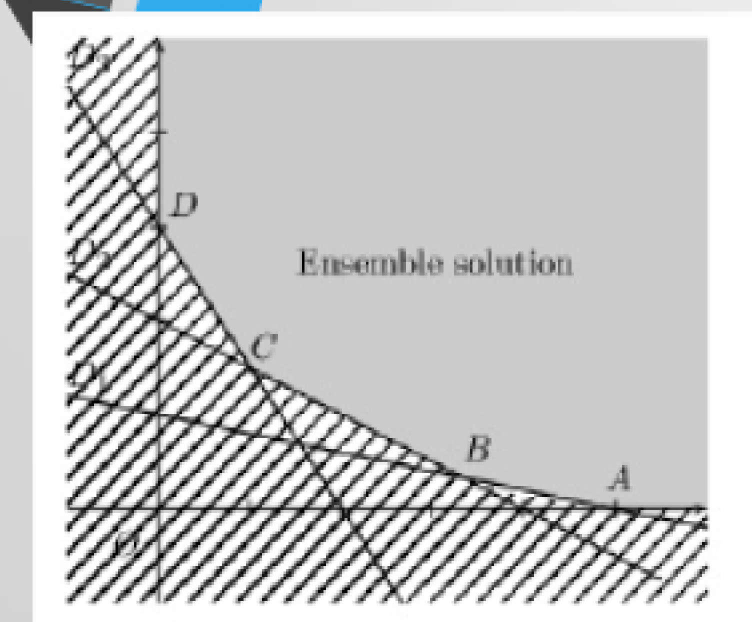
Comme il existe une infinité de solutions admissibles, la méthode propose de n'explorer qu'un nombre limité de solutions parmi lesquelles se trouve à coup sûr la solution optimale.

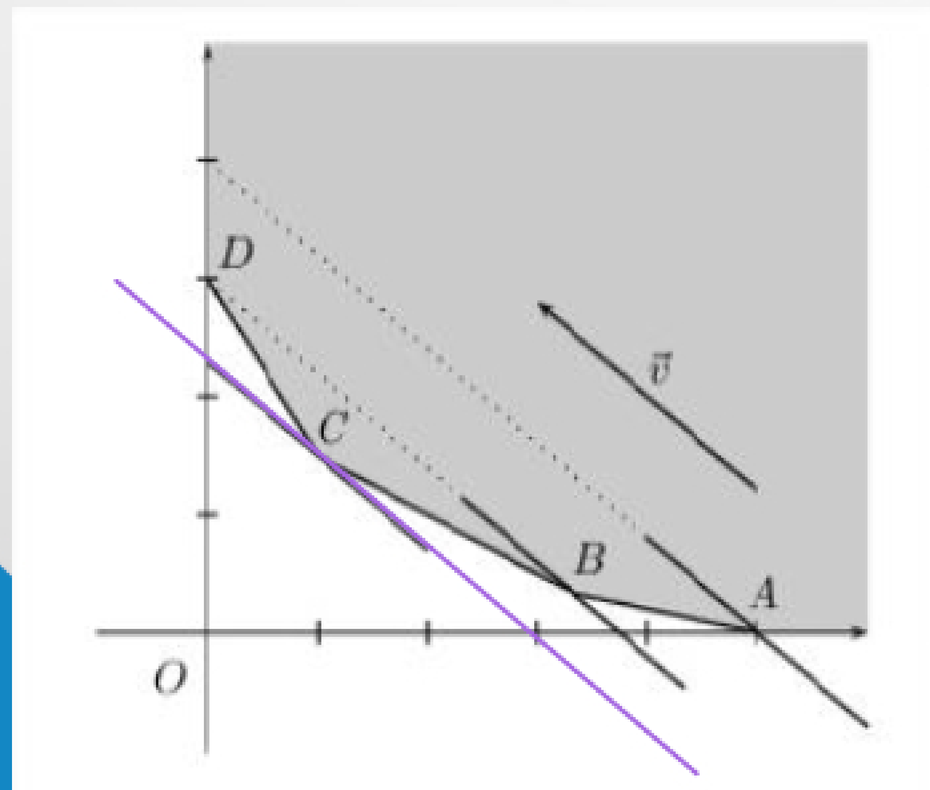
Programmation Linéaire

Résolution graphique d'un programme linéaire à deux inconnus

Autre système à résoudre : $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$
$x_1 + 5\,x_2 \geq 5$
$x_1 + 2\,x_2 \geq 4$
$3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 6$

On ajoute alors la fonction objectif : **$Z(x_1,x_2) = 20\,x_1 + 25\,x_2$** à minimiser





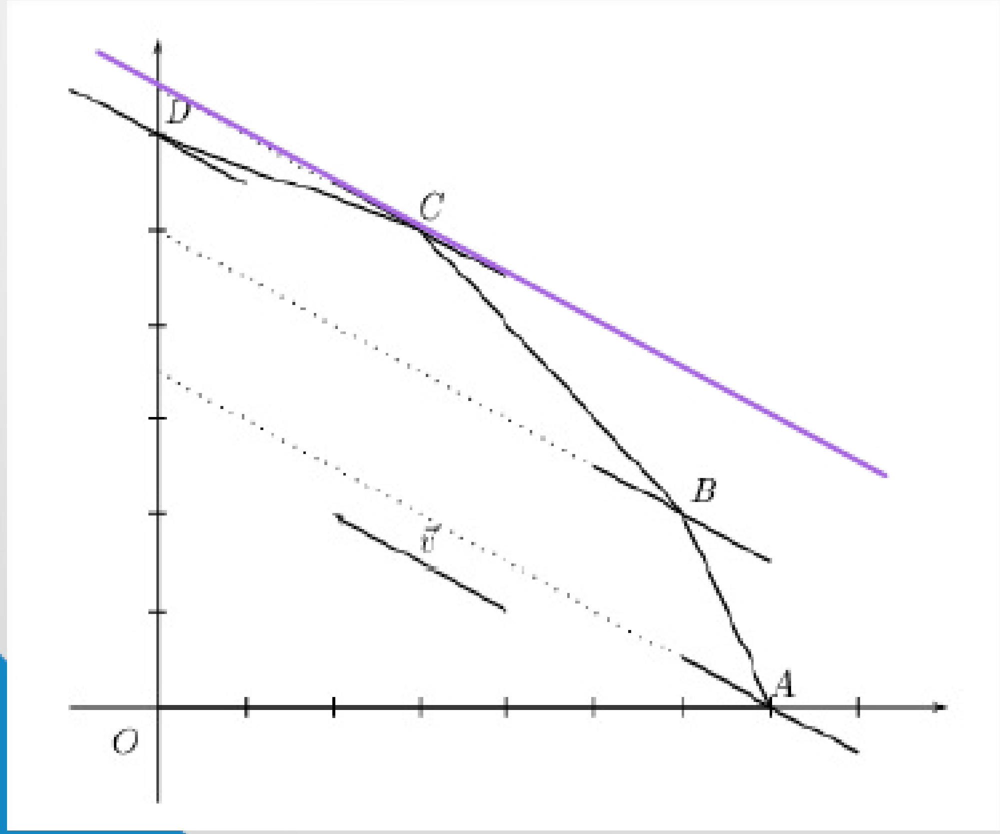
On trace la droite (Dz) :
$20\,x_1 + 25\,x_2 = 0$
Puis on trace ses parallèles passant par tous les points du polyèdre. La droite ayant une ordonnée à l'origine minimale donne la solution :
le point C

Programmation Linéaire

Résolution graphique d'un programme linéaire à deux inconnus

Soit à résoudre le système : $x1 \geq 0$; $x2 \geq 0$
$x1 + 3\ x2 \leq 18$
$x1 + x2 \leq 8$
$2\ x1 + x2 \leq 14$

On ajoute alors la fonction objectif : **$Z\ (x1, x2) = 2\ x1 + 4\ x2$** à maximiser



On trace la droite (Dz) :
$2\ x1 + 4\ x2 = 0$
Puis on trace ses parallèles passant par tous les points du polyèdre. La droite ayant une ordonnée à l'origine maximale donne la solution :
le point C

Programmation Linéaire

Résolution graphique d'un programme linéaire à deux inconnus

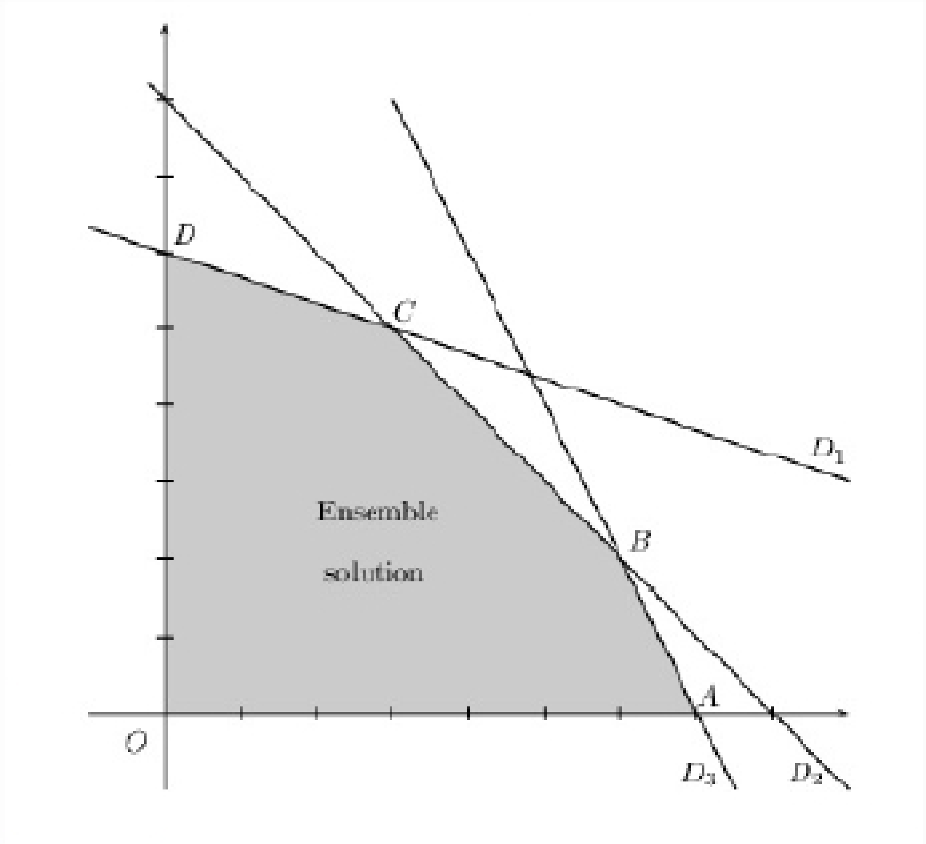
Soit à résoudre le système : $x_1 \geq 0 \,;\, x_2 \geq 0$

$x_1 + 3\,x_2 \leq 18$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$2\,x_1 + x_2 \leq 14$

On ajoute alors la fonction objectif : **$Z(x_1, x_2) = 2\,x_1 + 4\,x_2$** à maximiser



Parmi l'ensemble solutions, quelles sont les valeurs de x_1 et de x_2 qui vont maximiser la fonction $Z(x_1, x_2)$?

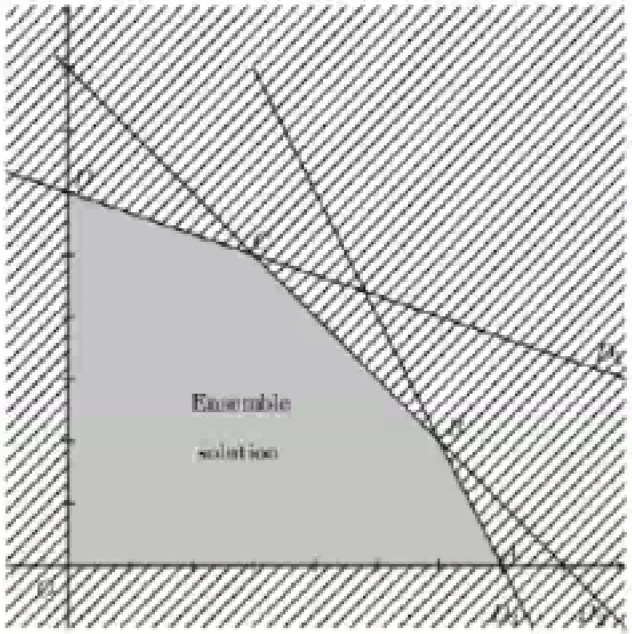
ESGI
école supérieure de génie informatique

CAMPUS SCIENCES-U LYON

Programmation Linéaire

Résolution graphique d'un <u>système d'inéquations</u> à deux inconnus

Soit à résoudre le système : $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$
$x_1 + 3\,x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$2\,x_1 + x_2 \leq 14$



On trace les droites :

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$
- $x_1 + 3\,x_2 = 18$
- $x_1 + x_2 = 8$
- $2\,x_1 + x_2 = 14$

On hachure les demi plans non solutions.

Programmation Linéaire

Dans le cas général, on a :

Ressources \ Activités	1	…	j	…	n
1	a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i	a_{i1}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$
m	a_{m1}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}

$$
\begin{cases}
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_1 \\
\quad \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_i \\
\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_m
\end{cases}
$$

Fonction à optimiser : $\boxed{Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n}$

école supérieure de
génie informatique

Programmation Linéaire

Exemple 2

L'intendant d'un lycée doit composer un menu qui doit contenir un minimum d'éléments nutritifs et qui doit être le moins coûteux possible. On se limite à une situation simple, deux denrées alimentaires principales D_1, D_2 et trois éléments nutritifs, les vitamines V, les calories C et les protéines P.

Le tableau suivant indique le nombre d'éléments nutritifs par unité d'aliment :

	V	C	P
D_1	1	1	3
D_2	5	2	2

Une unité de D_1 contient 1 unité de V, 1 unité de C et 3 unités de P.

- *Contraintes diététiques.* Le menu doit comporter au minimum 5 unités de V, 4 unités de C, 6 unités de P. Les coûts unitaires sont 20 pour D_1, 25 pour D_2.
- *Réalisation du menu.* Un menu contenant x_1 unités de D_1, x_2 unités de D_2 est réalisable si le couple (x_1, x_2) vérifie :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases}$$

- *Le programme linéaire.* Le problème consiste à déterminer deux nombres x_1 et x_2 tels que :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ Z(x_1, x_2) = 20x_1 + 25x_2 \end{cases}$$

où Z est la fonction objectif à minimiser.

Programmation Linéaire

Exemple 1

- *Données numériques des contraintes.* La disponibilité en matières premières est de 18 unités de M_1, 8 unités de M_2 et 14 unités de M_3.
- *Caractéristiques de fabrication.* Elles sont données dans le tableau ci-dessous :

	M_1	M_2	M_3
P_1	1	1	2
P_2	3	1	1

- *Hypothèses de linéarité du modèle.* La fabrication est à rendement constant, c'est-à-dire que pour fabriquer x_1 unités de P_1, il faut $1 \times x_1$ unités de M_1, $1 \times x_1$ unités de M_2 et $2 \times x_1$ unités de M_3, de même pour la fabrication de x_2 unités de P_2.
- *Linéarité de la fonction économique.* On suppose que le bénéfice peut s'exprimer à l'aide des bénéfices unitaires c_1, c_2 sous la forme :

$$\boxed{Z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2}$$

- *Réalisation d'un schéma de production.* Un schéma de production est un couple (x_1, x_2), x_1 et x_2 désignant respectivement les quantités de P_1 et P_2 fabriquées donc vendues, qui doit vérifier les contraintes $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Deux questions se posent : un tel schéma est-il réalisable ? A-t-on suffisamment de matières premières pour assurer une telle production ?
- *Le programme linéaire* :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ Z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

où Z est une fonction économique ou fonction objectif qu'il faut maximiser.

Programmation Linéaire

Modélisation d'un problème linéaire :

La détection du problème et l'identification des variables.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_n$

La formulation de la fonction économique à partir des variables.

$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n$

La formulation des contraintes (sous formes d'équations & inéquations)

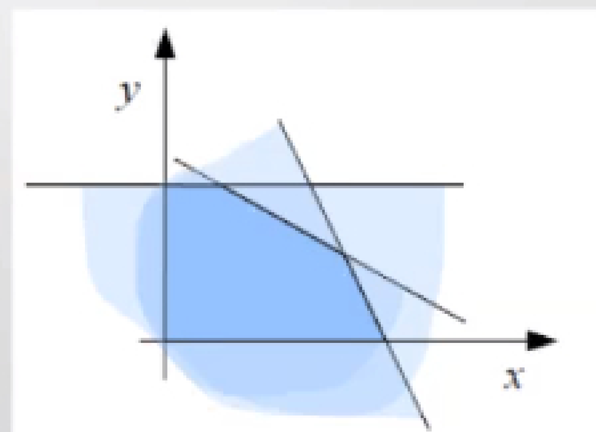
$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b_1$

....

....

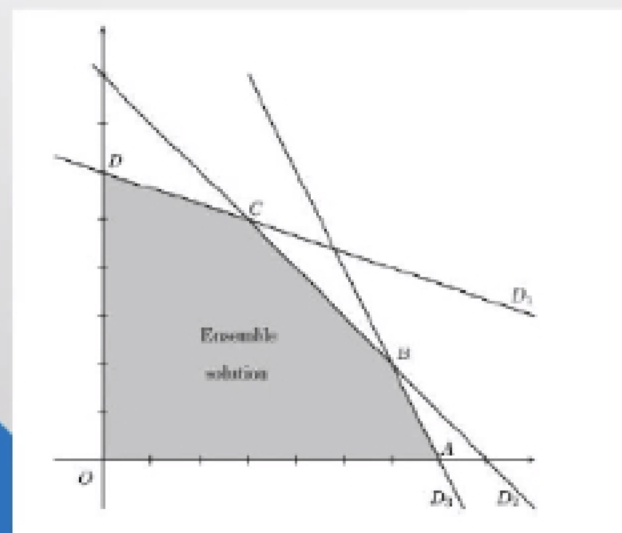


Programmation Linéaire

Optimisation Linéaire avec contraintes :

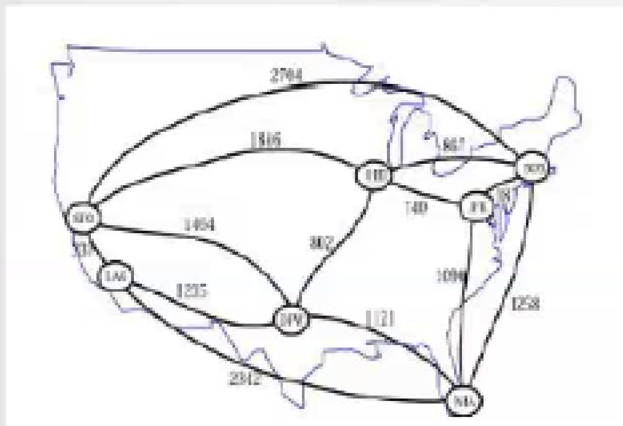
Lorsqu'il n'y a que **deux** variables de décision, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique. C'est ce que nous allons voir dans un premier temps.

Lorsqu'il y a un plus grand nombre de variables, un algorithme mis en oeuvre sous la forme d'un programme informatique s'avère nécessaire. Il s'agit de l'algorithme du simplexe que nous verrons dans une seconde partie.



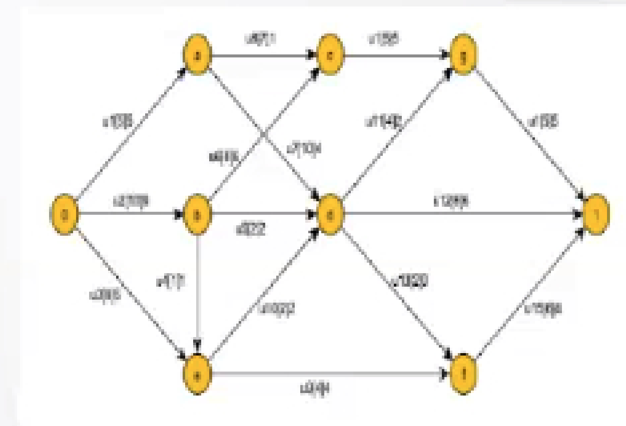
Programmation Linéaire

Recherche Opérationnelle : Différents Algorithmes



Plus court chemin

TSP



Flot de valeur maximum

Préférences des femmes	Préférences des hommes
A : F D E	D : A B C
B : E D F	E : B C A
C : F D E	F : A C B

Mariages Stables

Codes	Tâches	Antériorités	Durée (en jours)	Suivants
A	Excavation	-	5	B,F
B	Fondation	A	2	C
C	Pose de canalisations	B	4	D
D	Essais en pression	C,G	8	E
E	Etanchéité	D	9	J

Ordonnancement MPM PERT

Programmation Linéaire

Introduction

En 1940, Patrick Blackett est appelé par l'état-major anglais à diriger la première équipe de recherche opérationnelle, pour résoudre certains problèmes tels que l'implantation optimale de radars de surveillance ou la gestion des convois d'approvisionnement. Le qualificatif "opérationnelle" vient du fait que la première application d'un groupe de travail organisé dans cette discipline avait trait aux opérations militaires.

Après la guerre, les techniques de RO-AD (Aide à la Décision) se sont considérablement développées grâce, notamment, à l'explosion des capacités de calcul des ordinateurs.