Algorithmique Appliquée

BTS SIO SISR

Résolution de problèmes classiques

Plan

- Listes chaînées
- Queue et FIFO
- Pile et LIFO
- Comparaison entre FIFO et LIFO
- Rappels sur la théorie des ensembles
- Rappels sur le calcul matriciel

Listes chaînées

Introduction

- En Python, une `list` permet de rassembler un nombre variable d'éléments.
- Nous allons voir une manière d'implémenter ce type de liste.

Notion de liste chaînée

- Une liste chaînée est une **structure de données récursive**.
- Une liste chaînée est composée de **noeuds**.
- Un noeud comporte 2 variables :
    - Une valeur,
    - Le noeud suivant.

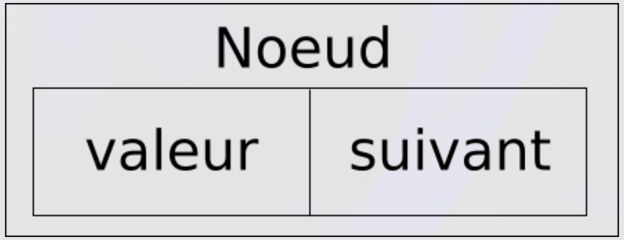
Noeud d'une liste chaînée

Noeud	
valeur	suivant

2 noeuds

Structure de données

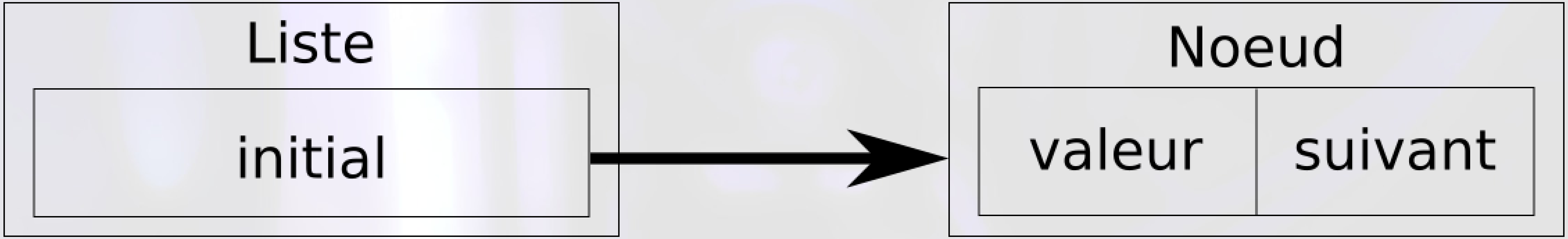
```python
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class Noeud:
    """Noeud de la liste chainee.

    La valeur peut etre n'importe quel objet
    Python valide.
    Le suivant doit avoir pour type Noeud
    ou None.
    """
    valeur = None
    suivant = None
```



Noeud de départ

- Comment identifier le **noeud de départ** de la liste ?
- On souhaite que chaque noeud ait la **même représentation**.
- On introduit un nouveau type, `Liste`, qui référence le noeud de départ.
- Une `Liste` **n'a pas de valeur**.

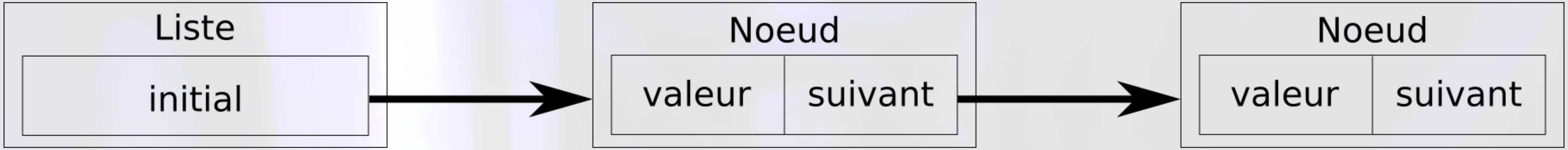
Noeud de départ identifié par la liste



Structure de données

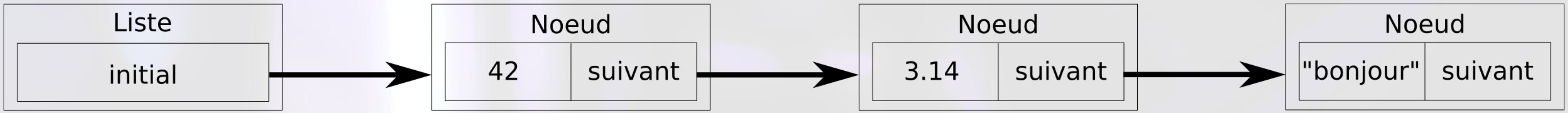
```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class Liste:
    """Liste chainee.

    Il s'agit simplement d'un point d'entree
    vers le 1er noeud de la liste chainee,
    nommé initial.
    La variable initial doit avoir pour type
    Noeud ou None.
    """
    initial = None
```

Liste chaînée comportant 2 valeurs



Exemple avec 3 valeurs

```
liste_chainee = creer_liste_chainee(42, 3.14, "bonjour")
```



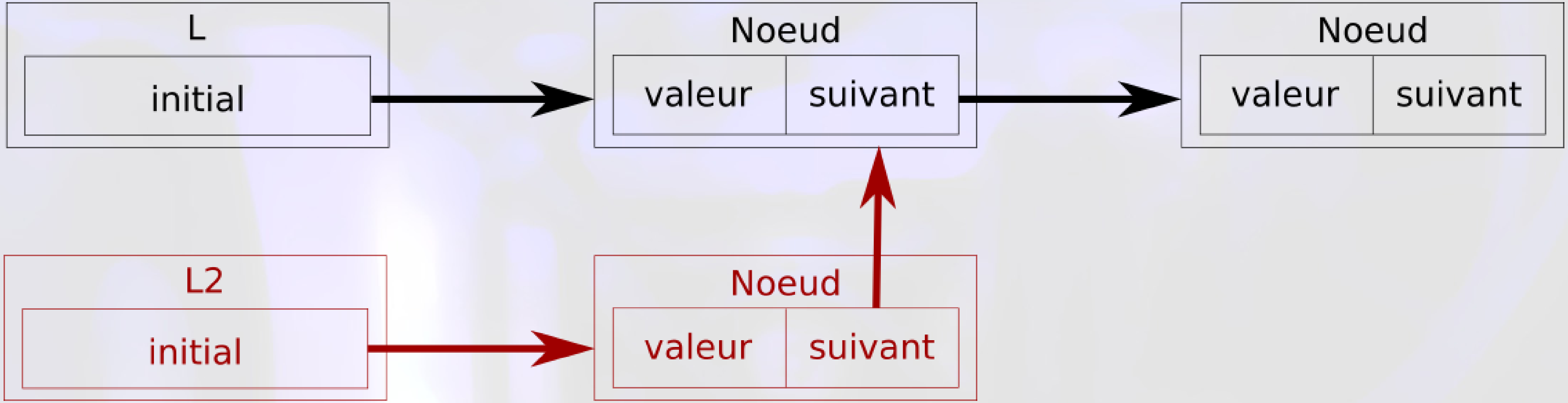
Dernier noeud

Le `suivant` du dernier noeud est `None`.

Parcours d'une liste chaînée

```python
def parcours(liste_chainee, f):
    """Appelle f sur chaque valeur de la liste chaînée.

    liste_chainee - liste chaînée de type Liste.
    f - fonction prenant un argument.
    """
    noeud = liste_chainee.initial
    while noeud != None:
        f(noeud.valeur)       # appelle la fonction f
        noeud = noeud.suivant # passage au noeud suivant
```

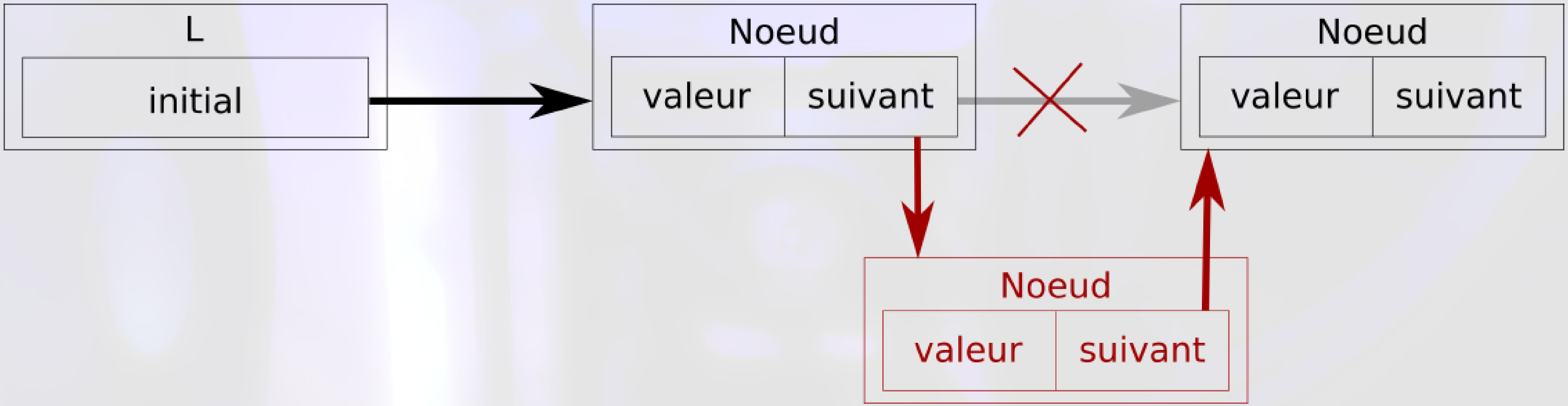
Insertion au début



L'insertion au début est **non-destructive**.

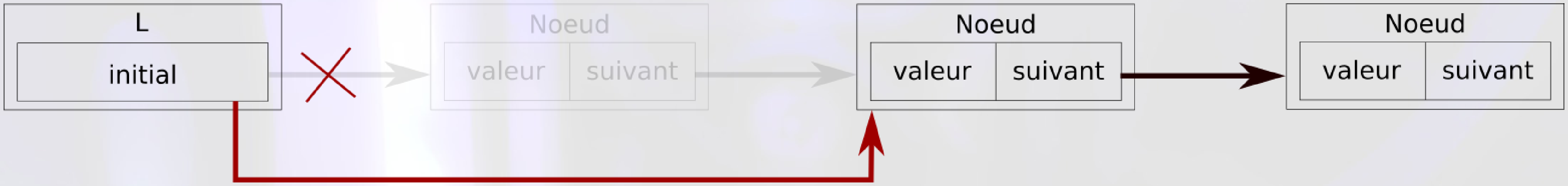
Il est possible de construire des listes chaînées **immutables**.

Insertion au milieu

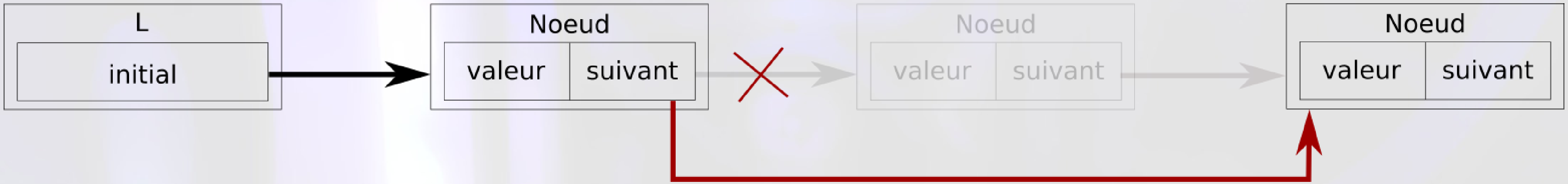


Insertion à la fin

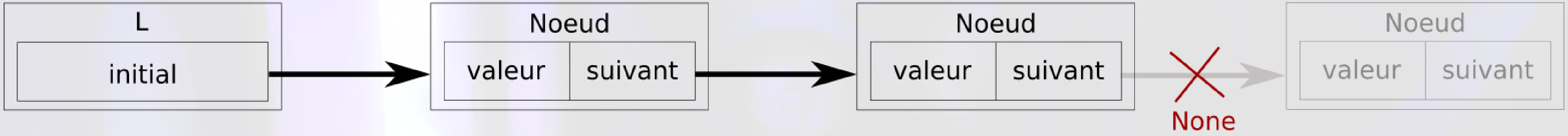
Suppression au début



Suppression au milieu



Suppression à la fin



Liste doublement chaînée

```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class NoeudBidirectionnel:
    valeur = None
    suivant = None
    precedent = None   # Nouveau

@dataclass
class ListeBidirectionnelle:
    initial = None
    final = None       # Nouveau
```

Evaluation des listes chaînées

- **Avantages** :
  - Insertion rapide au début.
  - Insertion rapide à la fin pour une liste doublement chaînée.
- **Inconvénients** :
  - Pas d'indexation : il faut parcourir potentiellement tous les éléments pour en retrouver un.
  - Mémoire éparse : chaque noeud a sa propre adresse en mémoire.

Comparaison avec une `list`

- La `Liste` chaînée est un exercice intéressant pour comprendre comment une `list` peut être implémentée.
- La `Liste` chaînée introduite ici et dans le prochain TP a un but purement pédagogique.
- Dans du code industriel de production, utilisez une `list`.

TP : Manipulation d'une liste chaînée

TP : Manipulation d'une liste chaînée

Lien vers le sujet de TP.

Queue et FIFO

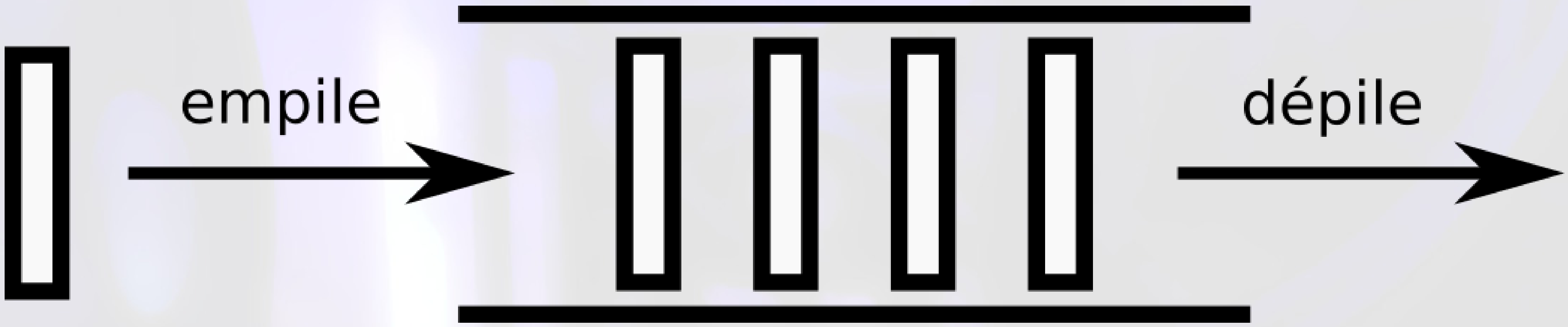
First-In, First-Out 🇬🇧

Notion de file d'attente

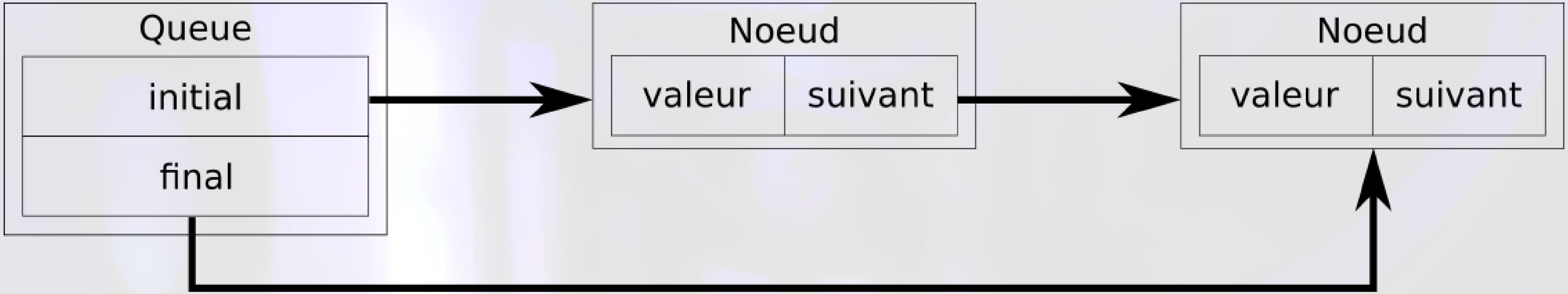
- Une **queue**, également nommée **file d'attente**, est une collection.
- Cette collection comporte 2 opérations principales :
  - Empiler un élément.
  - Dépiler le 1er élément empilé.
- Premier entré, premier sorti.

Métaphore

Principe

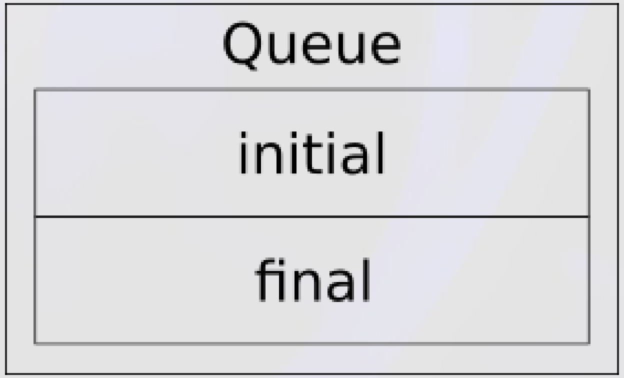


Exemple avec 2 éléments

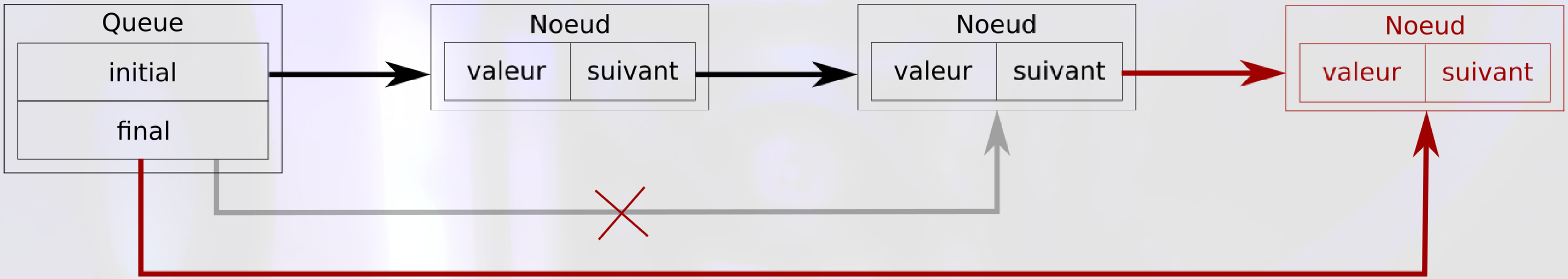


Structure de données

```python
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class Queue:
    """Queue utilisant une liste chainee.

    initial - doit avoir pour type
              Noeud ou None.
    final - doit avoir pour type
            Noeud ou None.
    """
    initial = None
    final = None
```

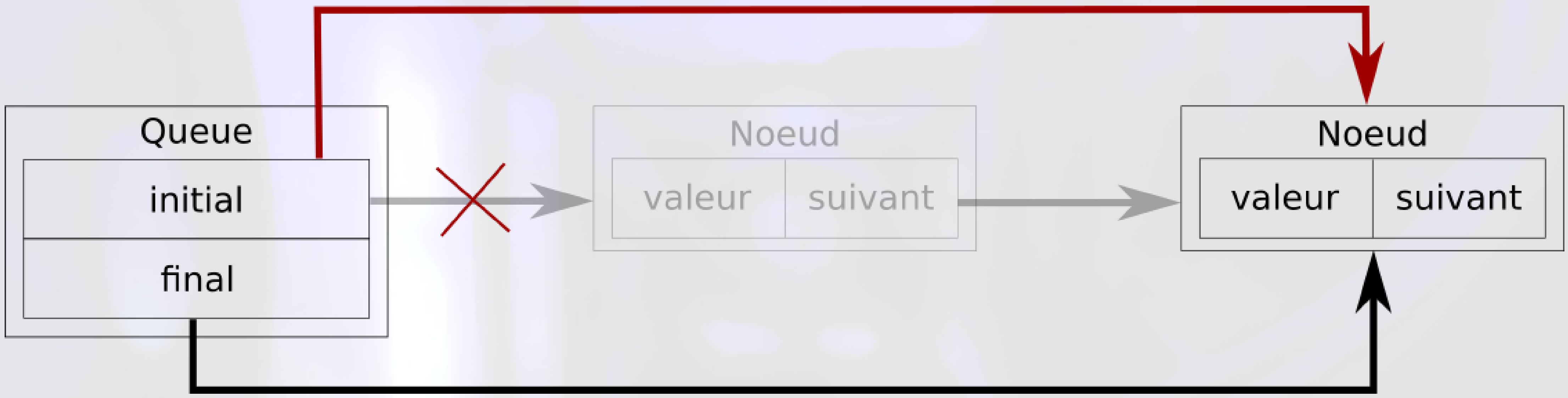


Empile



Queue
initial
final
Noeud
valeur
suivant
Noeud
valeur
suivant
Noeud
valeur
suivant

Dépile


Queue
initial
final
Noeud
valeur
suivant
Noeud
valeur
suivant

Utilisation d'une `list`

```
def empile(queue, element):
    """Empile l'élément dans la queue.

    queue - la queue à modifier.
    element - element à empiler dans la queue.
    """
    queue.append(element)

def depile(queue):
    """Depile le 1er élément de la queue.

    queue - la queue à modifier.
    Retourne le 1er élément de la queue.
    """
    return queue.pop(0)
```

Exemple

```
queue = [6, 3, 7]
empile(queue, 10)
print(queue)           # [6, 3, 7, 10]

valeur = depile(queue)
print(valeur)          # 6
print(queue)           # [3, 7, 10]
```

Utilisation de deque

```
from collections import deque

def empile(queue, element):
    """Empile l'élément dans la queue.

    queue - la queue à modifier.
    element - element à empiler dans la queue.
    """
    queue.append(element)

def depile(queue):
    """Depile le 1er élément de la queue.

    queue - la queue à modifier.
    Retourne le 1er élément de la queue.
    """
    return queue.popleft()
```

Exemple

```
queue = deque([6, 3, 7])
empile(queue, 10)
print(queue)                # deque([6, 3, 7, 10])

valeur = depile(queue)
print(valeur)               # 6
print(queue)                # deque([3, 7, 10])
```

Pile et LIFO

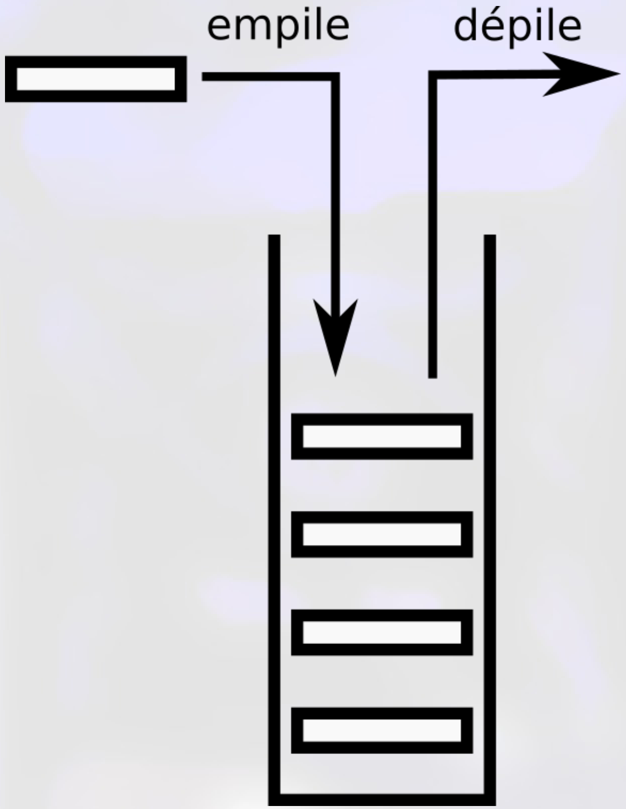
Stack & Last-In, First-Out 🇬🇧

Notion de pile

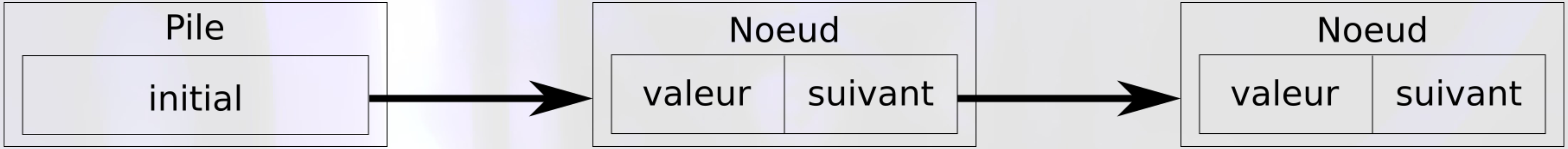
- Une **pile** est une collection.
- Cette collection comporte 2 opérations principales :
  - Empiler un élément.
  - Dépiler le **dernier** élément empilé.
- Dernier entré, premier sorti.

Métaphore

Principe

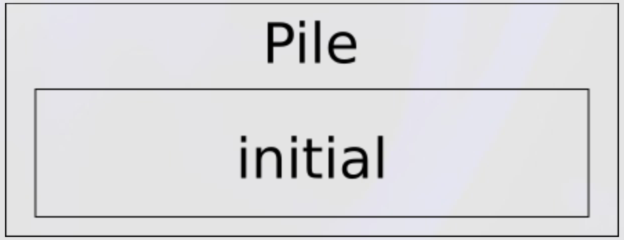


Exemple avec 2 éléments

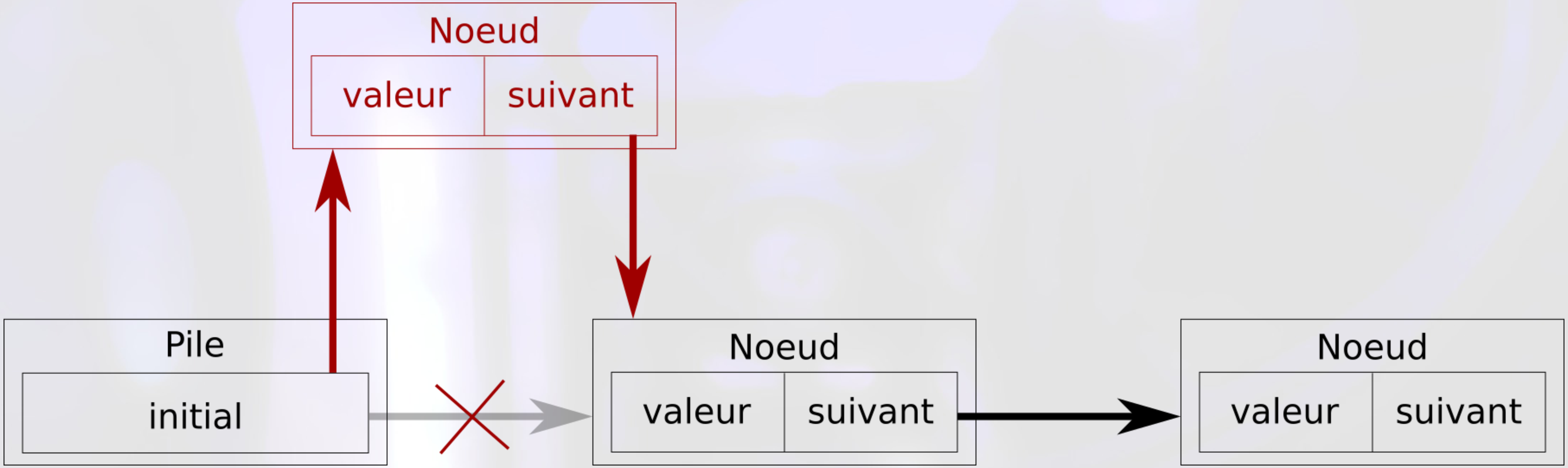


Structure de données

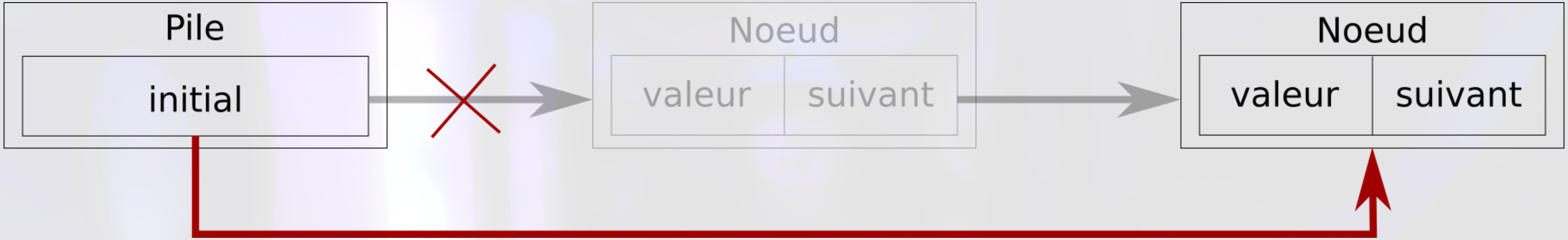
```python
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class Pile:
    """Pile utilisant une liste chainee.

    initial - doit avoir pour type
              Noeud ou None.
    """
    initial = None
```



Empile


Noeud
valeur
suivant
Pile
initial
Noeud
valeur
suivant
Noeud
valeur
suivant

Dépile



Utilisation d'une `list`

```
def empile(pile, element):
    """Empile l'élément dans la pile.

    pile - la pile à modifier.
    element - element à empiler dans la pile.
    """
    pile.insert(0, element)

def depile(pile):
    """Depile le 1er élément de la pile.

    pile - la pile à modifier.
    Retourne le 1er élément de la pile.
    """
    return pile.pop(0)
```

Exemple

```
pile = [6, 3, 7]
empile(pile, 10)
print(pile)                   # [10, 6, 3, 7]

valeur = depile(pile)
print(valeur)                 # 10
print(pile)                   # [6, 3, 7]
```

Utilisation de `deque`

```python
from collections import deque

def empile(pile, element):
    """Empile l'élément dans la pile.

    pile - la pile à modifier.
    element - element à empiler dans la pile.
    """
    pile.appendleft(element)

def depile(pile):
    """Depile le 1er élément de la pile.

    pile - la pile à modifier.
    Retourne le 1er élément de la pile.
    """
    return pile.popleft()
```

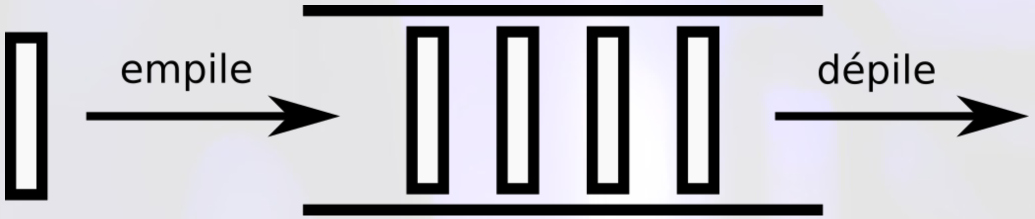
Exemple

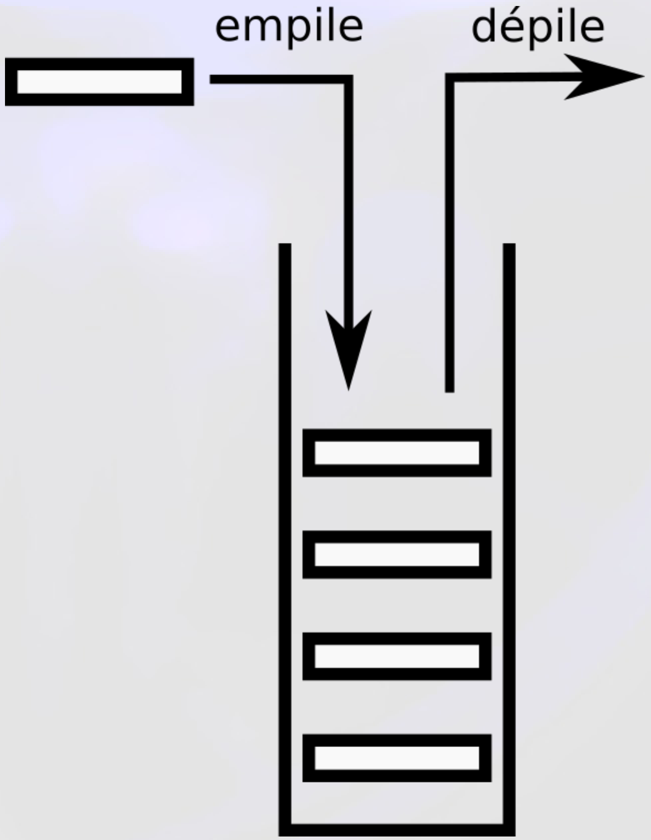
```
pile = deque([6, 3, 7])
empile(pile, 10)
print(pile)                 # deque([10, 6, 3, 7])

valeur = depile(pile)
print(valeur)               # 10
print(pile)                 # deque([6, 3, 7])
```

Comparaison entre FIFO et LIFO

FIFO VS LIFO

	Anglais	Français	Collection
FIFO	First In, First Out	Premier Entré, Premier Sorti	Queue
LIFO	Last In, First Out	Dernier Entré, Premier Sorti	Pile


empile
dépile


empile
dépile

FIFO dans la réalité

Les queues de messages

- Ordonnanceur de tâches (systèmes d'exploitation).
- Traitements asynchrones dans un système.
- Version itérative d'algorithmes récursifs.

LIFO dans la réalité

- Pile d'appels de fonctions.
- Interpréteur.
- Version itérative d'algorithmes récursifs.

TP : Queues de messages simples

TP : Queues de messages simples

Lien vers le sujet de DM.

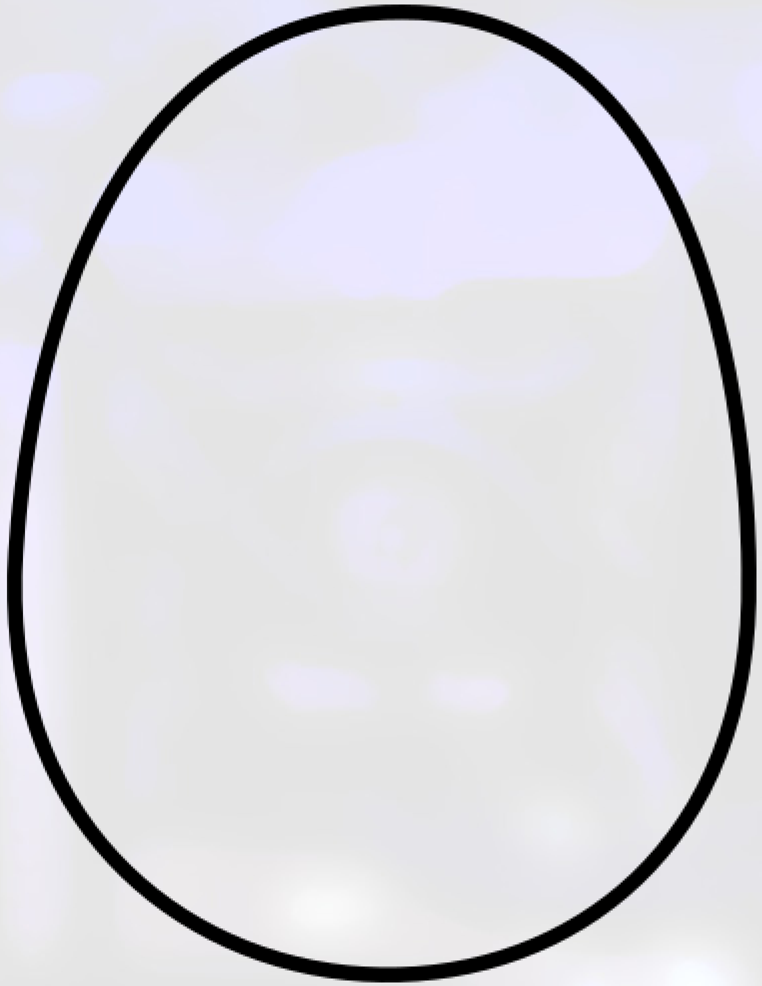
Rappels sur la théorie des ensembles

Union, intersection, différence

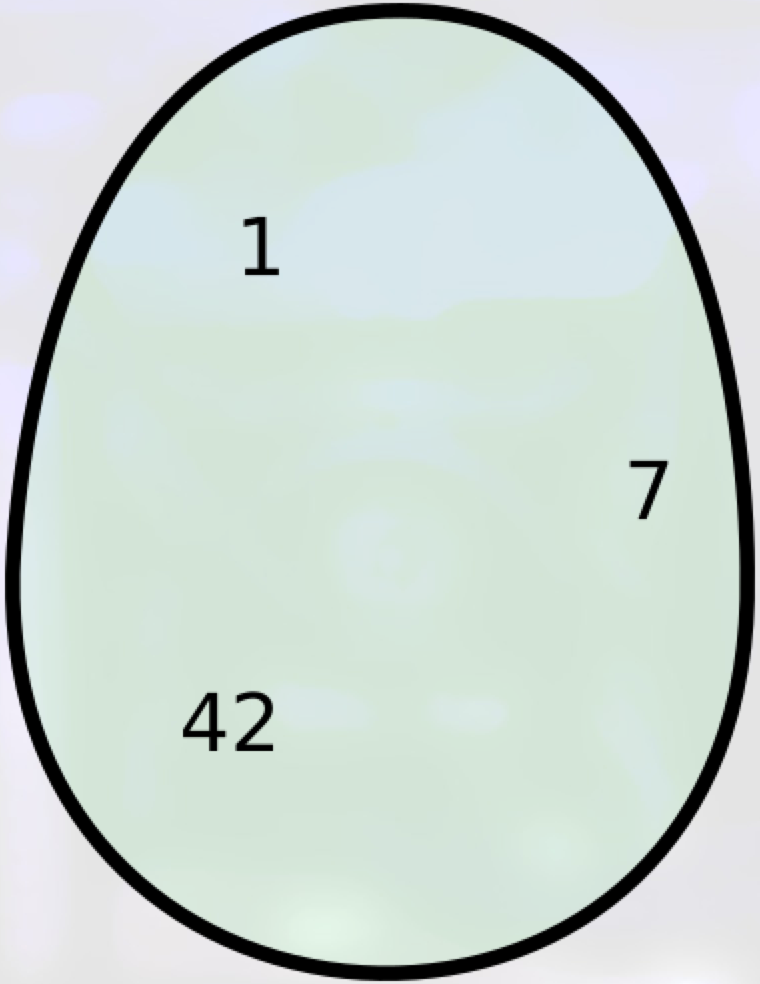
Intérêt

- Nous avons vu le type `set` dans le cours précédent.
- Le DM n°3 vous demande d'implémenter les opérations classiques sur les ensembles.
- Nous revenons rapidement sur ces définitions pour préparer le DM.

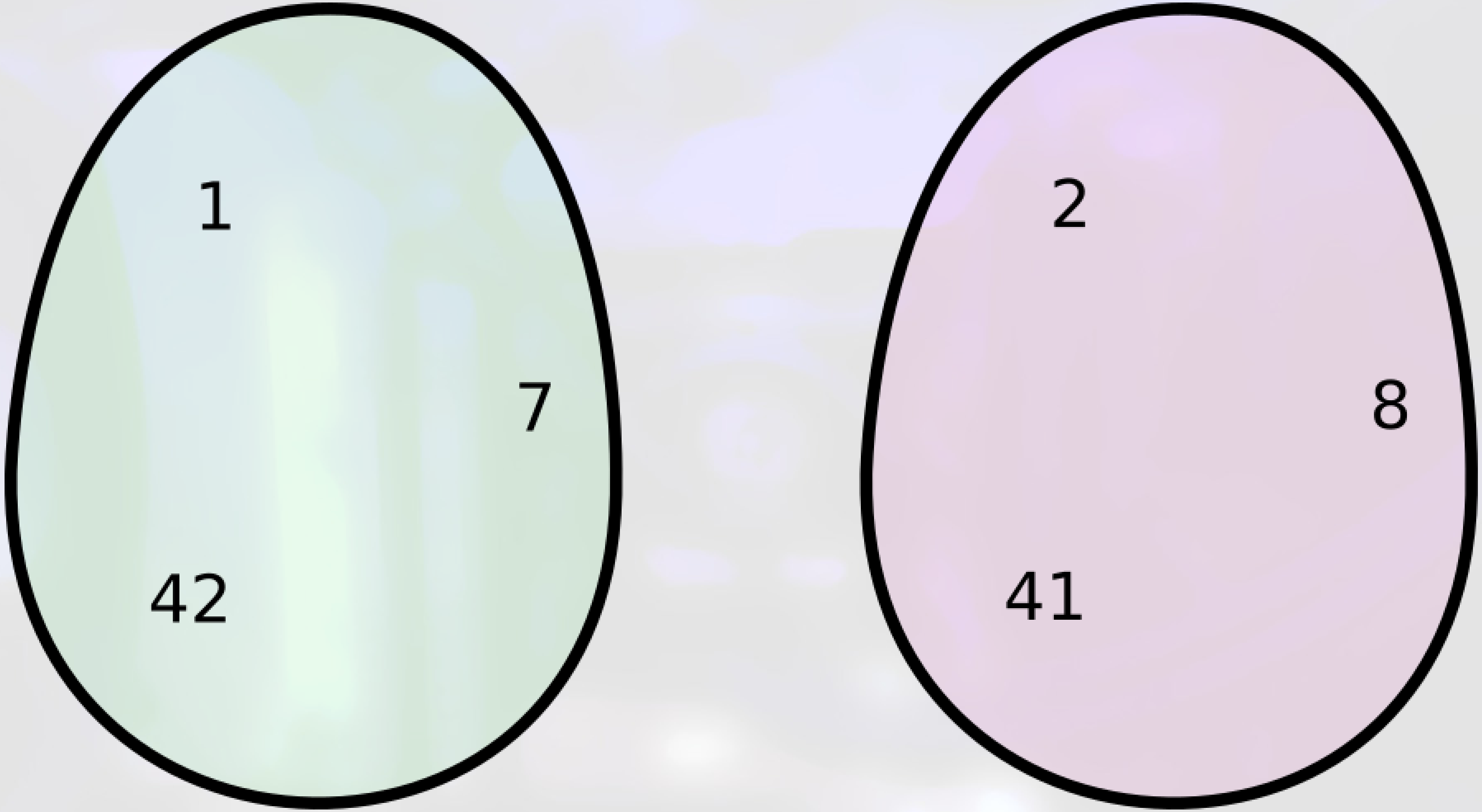
Ensemble vide



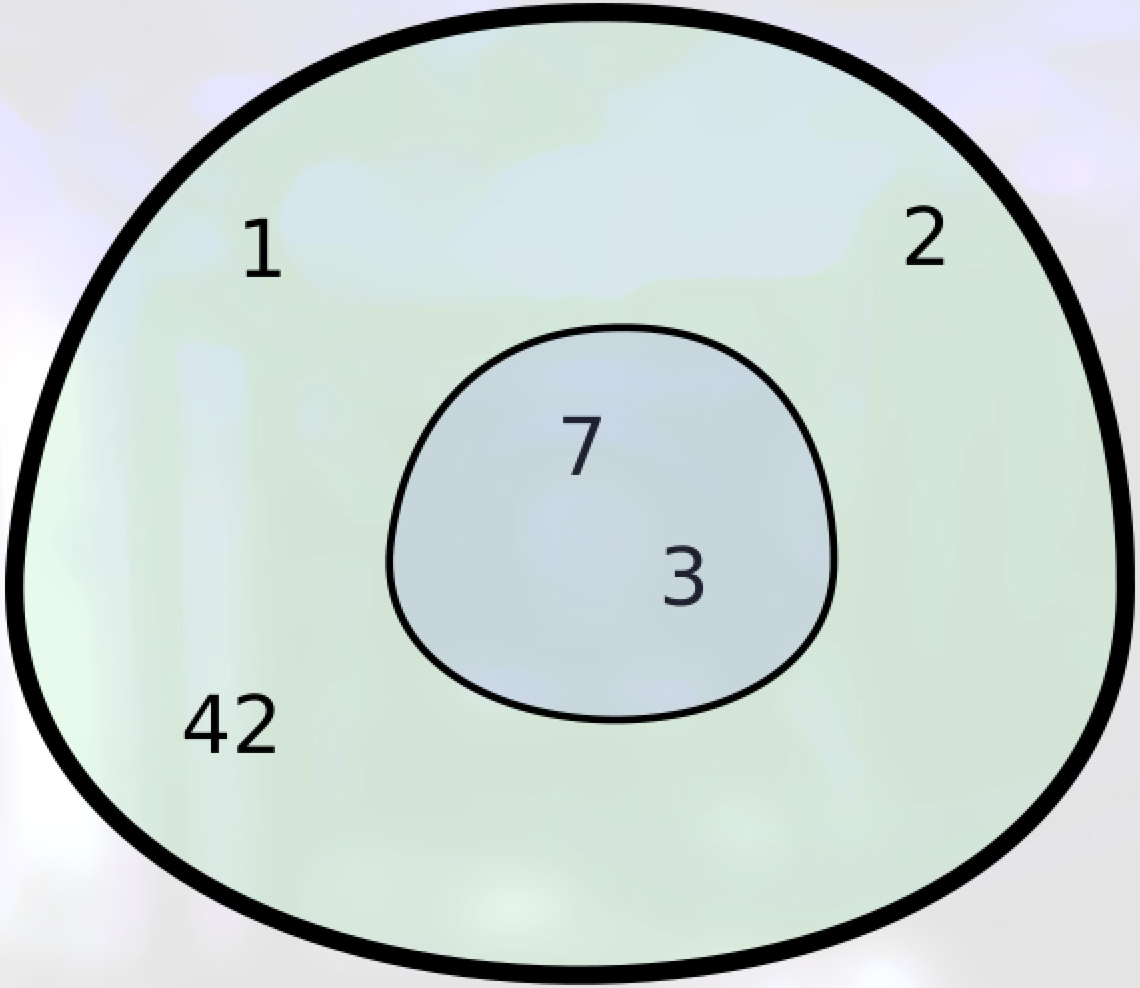
Ensemble avec quelques éléments



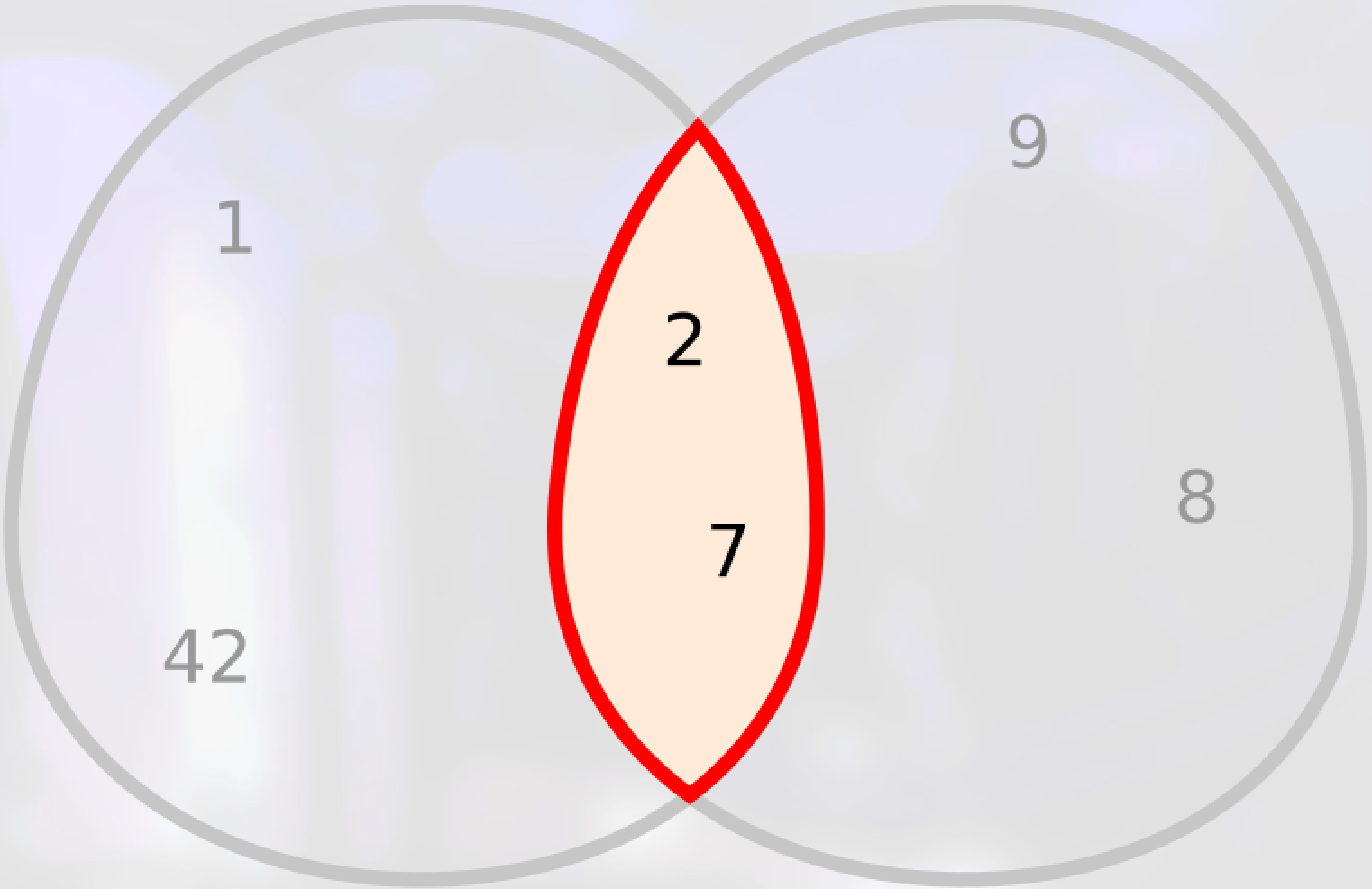
Ensembles disjoints



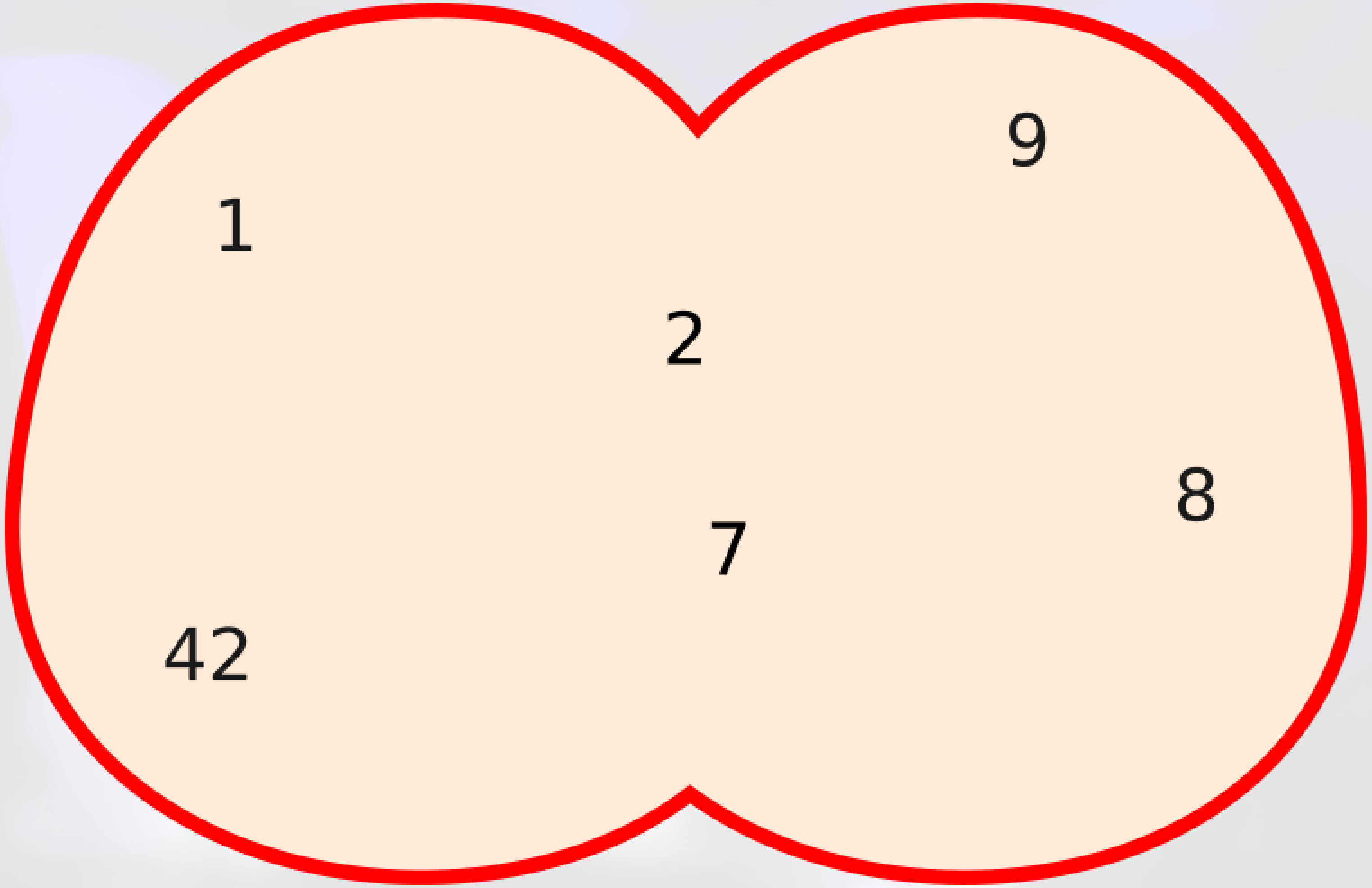
Sous-ensemble



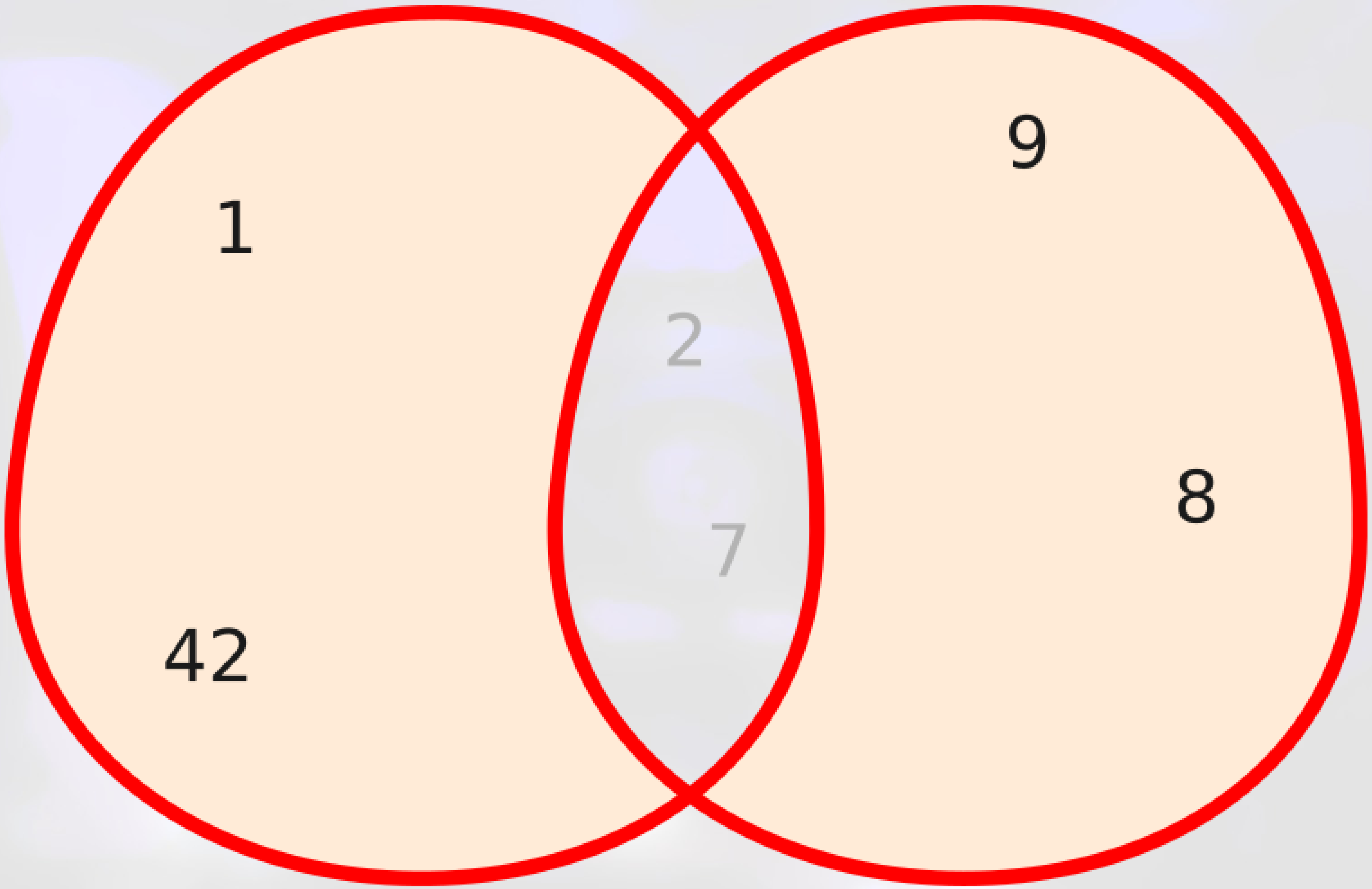
Intersection



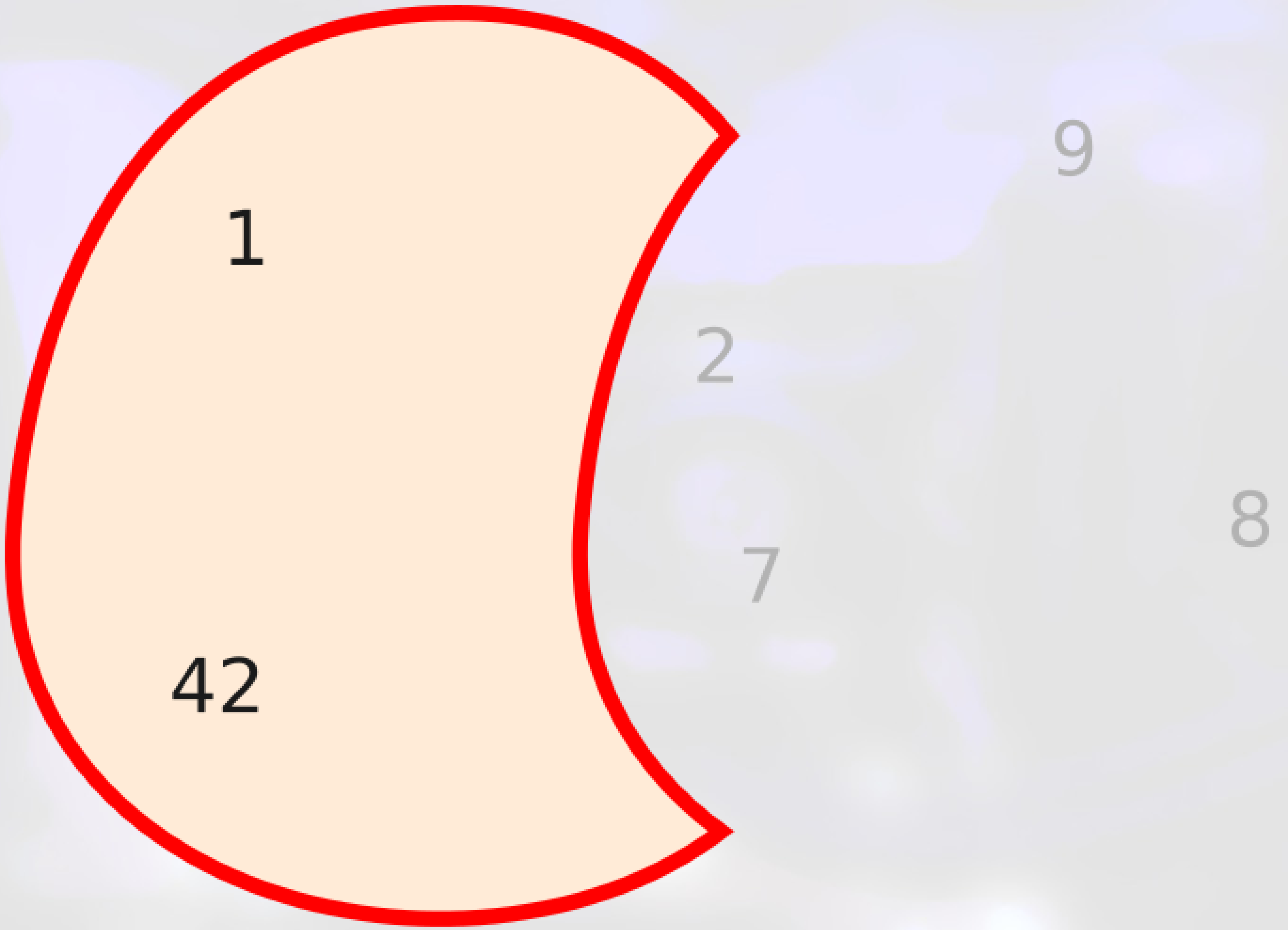
Union



Exclusion



Différence



Rappels sur le calcul matriciel

Résolution de systèmes d'équations linéaires

Intérêt

- En prévision du DM n°3 et de l'examen.
- Pour faire des jeux vidéos.
- Pour la conception assistée par ordinateur.

Déterminant d'une matrice 2x2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Expansion de Laplace

Déterminant d'une matrice 3x3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'une définition **récursive**.

Expansion de Laplace

Déterminant d'une matrice NxN

$$|M| = \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,N} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N,1} & m_{N,2} & \cdots & m_{N,N} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{N} m_{1,j} (-1)^{1+j} \, |M_{1,j}|$$

Les $M_{1,j}$ sont les **mineurs des matrices** de la première ligne de M.

Mineur d'une matrice $M_{i,j}$

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j-1} & m_{1,j+1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j+1} & \cdots & m_{i-1,n} \\ m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j+1} & \cdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j-1} & m_{n,j+1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Le mineur d'une matrice M aux indices (i, j) est noté $M_{i,j}$.

Système d'équations linéaires

Sous forme matricielle

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Résolution du système

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Problème : L'inversion matricielle n'est pas trivialle.

Règle de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\det(M)}$$

Matrice Identité

L'**élément neutre** de la multiplication matricielle est noté I et comporte des 0 partout sauf sur sa diagonale, composée de 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot M = M \cdot I = M$$

Matrice triangulaire

Soit la partie supérieure de la matrice, soit la partie inférieure de la matrice, n'est composée que de 0.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

M_1 est **triangulaire supérieure**.
M_2 est **triangulaire inférieure**.

Matrice diagonale

Tous les éléments de la matrice sont nuls, sauf ceux sur sa diagonale.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Puissance d'une matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad M^N = \begin{pmatrix} a^N & 0 & 0 \\ 0 & b^N & 0 \\ 0 & 0 & c^N \end{pmatrix}$$

Donc :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Diagonalisation : principe (1/2)

- Si une matrice M est diagonalisable alors on peut l'écrire $M = PDP^{-1}$ où D est sa matrice diagonale, et P la matrice de passage.
- Pour diagonaliser, on calcule les **valeurs propres** λ telles que $|M - \lambda I| = 0$.
- Pour chaque valeur propre, on calcule le **vecteur propre** associé tel que $MX = \lambda X$.

Diagonalisation : principe (2/2)

- La matrice diagonale équivalent D s'obtient en mettant les valeurs propres sur la diagonale.
- La matrice de passage P est obtenue en mettant les vecteurs propres obtenus en colonnes.

Matrice augmentée

$$\text{Si} \quad M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors} \quad [M|D] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Elimination de Gauss Jordan (1/3)

On sait que les opérations suivantes sont possibles pour résoudre le système sans changer la solution :

- Interchanger 2 lignes.
- Multiplier une ligne par un scalaire non-nul.
- Ajouter un multiple d'une ligne à une autre.

Elimination de Gauss Jordan (2/3)

- On parcourt chaque colonne col de M :
  - Le pivôt est l'élément sur la diagonale dans cette colonne : $Pivot = M[col][col]$.
  - On parcourt chaque ligne lig de M sauf celle où se trouve le pivôt :
    - On calcule le coefficient multiplicateur $Coeff = \frac{M[lig][col]}{Pivot}$.
    - On soustrait $Coeff$ fois la ligne col à la ligne lig.

Elimination de Gauss Jordan (3/3)

La solution est la dernière colonne dont chaque élément est divisé par le pivôt sur la même ligne.

Exemple

On considère, dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{cases} x - 0.5y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{cases} x - 0.5y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sous forme de tableau

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	-0.5	-1	2
lig2	2	-1	1	1
lig3	1	-1	-2	3

1er pivôt

	col1	col2	col3	col4
lig1	**1**	-0.5	-1	2
lig2	2	-1	1	1
lig3	1	-1	-2	3

	col1	col2	col3	col4	Opérations
lig1	**1**	-0.5	-1	2	
lig2	0	0	3	-3	`lig2 -= 2 * lig1`
lig3	0	-0.5	-1	1	`lig3 -= 1 * lig1`

Echange lig2 et lig3

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	-0.5	-1	2
lig3	0	-0.5	-1	1
lig2	0	0	3	-3

Un pivôt ne peut pas être nul.

2e pivôt

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	-0.5	-1	2
lig3	0	**-0.5**	-1	1
lig2	0	0	3	-3

	col1	col2	col3	col4	Opérations
lig1	1	0	0	1	`lig1 -= lig3`
lig3	0	**-0.5**	-1	1	
lig2	0	0	3	-3	`lig2 -= 0 * lig3`

3e pivôt

	col1	**col2**	**col3**	**col4**
lig1	1	0	0	1
lig3	0	-0.5	-1	1
lig2	0	0	**3**	-3

	col1	**col2**	**col3**	**col4**	**Opérations**
lig1	1	0	0	1	`lig1 -= 0 * lig2`
lig3	0	-0.5	0	0	`lig3 += 1/3 * lig2`
lig2	0	0	**3**	-3	

Dernière étape

Division de la dernière colonne par les pivôts

$$\mathrm{col4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Pivôts} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Devoir à la Maison 03

DM : Retours sur les fonctions et le débogage

Lien vers le sujet de DM.