Algorithmique Appliquée

BTS SIO SISR

Introduction à la complexité algorithmique

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE
1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES
Yvo Solutions
Loïc Yvonnet

Plan

- Intuition sur la complexité
- Complexité temporelle et spatiale
- Notation $O(...)$
- Classes de complexité
- Comparaison des classes de complexité
- Limites de l'étude de la complexité
- Approche pragmatique
- Discussion concernant la parallélisation
- Discussion sur la distribution
- Problèmes NP-complet
- Discussion sur les machines quantiques

Correction du travail à la maison

DM : Ensembles et calcul matriciel

Lien vers le sujet de DM.

Intuition sur la complexité

Complexité conceptuelle et complexité algorithmique

- La **complexité conceptuelle** d'un algorithme est la difficulté à le comprendre.
- La **complexité algorithmique** s'intéresse à l'**efficacité** d'un algorithme.
- Un algorithme plus efficace peut être plus difficile à comprendre.
- Il s'agit d'un **compromis** entre la complexité conceptuelle et la complexité algorithmique.

Recherche linéaire et dichotomique

- Une recherche linéaire est **très simple à comprendre**.
- Une recherche dichotomique est plus complexe à comprendre.
- Une recherche dichotomique est **plus efficace** qu'une recherche linéaire.
- On dit que la recherche dichotomique a une **meilleure complexité algorithmique**.

Force brute

- Une manière **naïve** de rechercher une solution consiste à explorer toutes les solutions possibles et à vérifier celles qui sont correctes.
- Ce type de solution s'appelle une recherche en **force brute**.
- Exemple : recherche linéaire.

Approximation

- Combien de temps va prendre mon programme ?
- Objectif : **comparer** les algorithmes **indépendamment d'une machine**.
- La comparaison ne doit pas se baser sur des mesures.
- Approximation : **compter le nombre d'instructions**.

Instruction

- Dans ce modèle :
  - Une instruction (ou étape) prend un **temps fixe**.
  - Toute instruction prend le **même temps**.
- Une instruction peut être aussi bien :
  - Une opération arithmétique.
  - Assignation d'une variable.
  - Effectuer une comparaison.
  - Etc.

Fonction des entrées

- Dans ce modèle, le **temps d'exécution** est fonction du **nombre d'instructions**.
- Si le nombre d'instructions varie avec la taille d'une entrée, alors le temps d'exécution est fonction de la **taille des entrées**.

Exemple : recherche linéaire

```
def recherche(liste, x):
    for element in liste:
        if element == x:
            return True
    return False
```

Si la taille de la liste est de 10 éléments, on aura au maximum 10 comparaisons.
Si la taille de la liste est de 1 000 000 éléments, on aura au maximum 1 000 000 comparaisons.

Exemple : déterminant de rang 25 (1/2)

- Soit $m_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 25$, les éléments d'une matrice M dont on cherche le déterminant :

$$|M| = \sum_{\sigma \in S_{25}} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{25,\sigma(25)}$$

- S_{25} désigne l'ensemble des permutations de $\{1; 2; \ldots; 25\}$.
- $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permution σ.
- La signature d'une permutation vaut ± 1.

Exemple : déterminant de rang 25 (2/2)

- Il y a autant de produits à 25 termes à calculer que de permutations.
- C'est à dire $25!$.
- Formule de Stirling : $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
- Cela implique donc environ $1.5 \cdot 10^{25}$ instructions.
- Avec un processeur qui exécute 10 milliards de produits par secondes, il faudra environ **50 millions d'années** pour calculer ces produits.

Loi de Murphy

- **Cas favorable** : le minimum d'instruction est exécuté.
  - Exemple : l'élément recherché est en 1er.
- **Pire cas** : le maximum d'instructions est exécuté.
  - Exemple : l'élément recherché est à la fin.
- **Cas moyen** : temps moyen pour des entrées classiques (par exemple, 90% des cas).
- **Loi de Murphy** : si un problème peut survenir, il surviendra. On se concentre donc sur le pire cas.

Réflexion sur la complexité temporelle et spatiale

Complexité temporelle

- C'est le type de complexité algorithmique dont nous avons discuté jusqu'à présent.
- On s'attache à évaluer le temps d'exécution sur une machine théorique.

Complexité spatiale

- La **complexité spatiale** s'attache à déterminer la place mémoire nécessaire pour la résolution d'un algorithme.
- Il s'agit d'une fonction des entrées de l'algorithme étudié.

Temporel et spatial

- On se focalise d'abord sur la complexité temporelle.
- Si 2 algorithmes ont la même complexité temporelle, on compare leurs complexités spatiales.

Notation $O(\ldots)$

Notation asymptotique

- **Notation asymptotique** : manière formelle de relier le temps d'exécution à la taille des entrées.
- On s'intéresse au cas où la taille des entrées approche l'**infini**.

Exemple (1/2)

```python
def f(x):
    y = 0
    for i in range(x):
        for j in range(x):
            y += 1
            y += 1

    for i in range(x):
        y += 1

    for i in range(99):
        y += 1

    return y
```

On a $2x^2 + x + 100$ instructions.

Exemple (2/2)

- Pour $x = 3$, on a $2 \cdot 3^2 + 3 + 100 = 121$ instructions. On est dominé par le **facteur constant**.
- Pour $x = 10$, on a 310 instructions, dont 200 dans la première boucle imbriquée.
- Pour $x = 100$, la première boucle imbriquée **écrase** les autres : 20000 instructions contre seulement 200.

Conclusions

- L'exemple précédent montre qu'asymptotiquement, quand x tend vers l'infini, **seul le terme de rang le plus élevé compte** : $2x^2$.
- On peut même dire que la croissance dépend essentiellement de x^2.
- Nous souhaitons simplifier l'étude de la complexité des algorithmes en **éliminant les termes insignifiants**.

Notation $\sim$

Approximation tilde

- Soit $f(n)$ et $g(n)$ deux suites positives indexées sur $\mathbb{N}$.
- On dit que $g \sim f$, si $\lim\limits_{\infty} \frac{g}{f} = 1$.
- f et g sont **asymptotiquement égaux**.

Exemples avec $\sim$

Fonction	Approximation $\sim$
$2x^2 + x + 100$	$\sim 2x^2$
$3x^3 + 3000x + 10000000$	$\sim 3x^3$
$\log(x) + 100000$	$\sim \log(x)$
300	~ 300

Notation Grand O (1/2)

- On l'appelle **notation de Landau**.
- Il s'agit de la **notation la plus utilisée** en algorithmique pour comparer des algorithmes.
- Cette notation se lit : **Grand O de [...]**.
- On l'appelle également **ordre de grandeur**, ou ordre de croissance.

Notation Grand O (2/2)

- Soit $f(n)$ et $g(n)$ deux suites positives indexées sur $\mathbb{N}$.
- On dit que $g = O(f)$ s'il existe n_0 et $C > 0$ tels que pour tout $n > n_0$, on a $g(n) \leq Cf(n)$.
- Autrement dit, g est dominé par f à partir d'un certain rang.

Exemples avec $\sim$ et O

Fonction	**Approximation $\sim$**	**Grand O**
$2N^2 + N + 100$	$\sim 2N^2$	$O(N^2)$
$3N^3 + 3N + 3$	$\sim 3N^3$	$O(N^3)$
$\log(N) + 10$	$\sim \log(N)$	$O(\log(N))$
300	~ 300	$O(1)$

Notation petit o

- On dit que $g = o(f)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que si $n > n_\varepsilon$, alors $g(n) \leq \varepsilon f(n)$.
- Cette notation se lit : **g est un petit o de f**.
- Autrement dit, g est négligeable devant f.
- Si $f(n) \neq 0$, alors $\lim\limits_{\infty} \frac{g}{f} = 0$.
- C'est tout simplement l'**inverse de Grand O**.
- Notation alternative : $g = o(f) \iff g = \Omega(f)$.

Notation $\asymp$

- On dit que $g \asymp f$, s'il existe n_0 et $C_1, C_2 > 0$ tels que si $n > n_0$, alors $C_1 f(n) \leq g(n) \leq C_2 f(n)$.
- f et g sont **comparables**.
- Notation alternative : $g \asymp f \iff g = \Theta(f)$.

Comparaison

	Approximation Tilde	**Grand O**	**Grand Oméga**	**Grand Théta**
Notation algo	$\sim$	O	Ω	Θ
Notation maths	$\sim$	O	o	$\asymp$
Définition	Asymptotiquement égal	Borne supérieure	Borne inférieure	Borne serrée
Utilité pratique	Très rare	**Très élevée**	Très rare	Elevée

Abus de langage fréquent

On utilise si souvent la notation Grand O qu'on l'utilise parfois en lieu et place de Grand Θ.

Autres notations

Description	Description 🇬🇧	Notation	Explications
Plancher	Floor	$\lfloor x \rfloor$	Plus grand entier plus petit que x
Plafond	Ceil	$\lceil x \rceil$	Plus petit entier plus grand que x
Logarithme binaire	Binary logarithm	$\lfloor \log_2 N \rfloor$	Nombre de bits -1 dans la représentation binaire de N

- Exemples :
  - $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$
  - $\lceil 3.6 \rceil = 4$
  - $\lfloor \log_2 15 \rfloor = \lfloor 3.9068905956085 2 \rfloor = 3$

Classes de complexité

Résumé

- $O(1)$ désigne une complexité **constante**.
- $O(\log N)$ désigne une complexité **logarithmique**.
- $O(N)$ désigne une complexité **linéaire**.
- $O(N \cdot \log N)$ désigne une complexité **linéarithmique**.
- $O(N^k)$ désigne une complexité **polynomiale**, en particulier :
  - $O(N^2)$ désigne une complexité **quadratique**.
  - $O(N^3)$ désigne une complexité **cubique**.
- $O(C^N)$ désigne une complexité **exponentielle**.

Complexité constante

$$O(1)$$

```python
def f(N):
    return N + 3
```

- Nombre fixe d'opérations.
- Complexité asymptotique indépendante de la taille des entrées.

Complexité logarithmique (1/3)

$$O(\log N)$$

```python
def serialise(N):
    """Sérialise l'entier N positif en chaîne de caractères."""
    if N == 0:
        return "0"

    chiffres = "0123456789"
    resultat = ""

    while N > 0:
        resultat = chiffres[N % 10] + resultat
        N //= 10

    return resultat
```

Complexité logarithmique (2/3)

$$O(\log N)$$

- L'ordre de grandeur est proportionnel au **logarithme** de la taille des entrées.
- Une recherche dichotomique est en $O(\log N)$.
- Si à chaque itération d'une boucle, on divise par 2 la taille des données restant à traiter, on a une complexité logarithmique.

Complexité logarithmique (3/3)

- La base de la fonction $\log$ n'interfère pas avec l'ordre de grandeur.
- En effet, il existe un **facteur multiplicatif constant** entre les bases.

$$\forall\{a, b, N\} \in \mathbb{N}_+^3, \log_b(N) = \frac{\log_a(N)}{\log_a(b)}$$

Exemple :

$$O(\log_2(N)) = O\left(\frac{\log_{10}(N)}{\log_{10}(2)}\right) = O\left(\frac{1}{\log(2)}\log(N)\right) = O(\log(N))$$

Complexité linéaire (1/2)

$$O(N)$$

```python
def f(N):
    resultat = 0
    for i in range(N):
        resultat += i ** 2

    return resultat
```

- Le temps d'exécution est **proportionnel à N**.
- En général : une boucle `for`.

Complexité linéaire (2/2)

$$O(N)$$

```python
def factorielle(N):
    return 1 if N == 1 else N * factorielle(N - 1)
```

- Une fonction récursive peut aussi être **linéaire**.

Complexité linéarithmique

$$O(N \cdot \log N)$$

- Le temps d'exécution pour des entrées de taille N est $N \cdot \log N$.
- Cette classe de complexité est légèrement plus complexe.
- Typiquement les algorithmes Tri Fusion et Tri Rapide ont cette classe.
- Nous étudierons ces algorithmes en détail dans un prochain cours.

Complexité quadratique

$$O(N^2)$$

```python
def verifie_paires(liste):
    """Retourne le nombre de paires égales dans la liste."""
    N = len(liste)
    compteur = 0
    for i in range(N):
        for j in range(i + 1, N):
            if liste[i] == liste[j]:
                compteur += 1

    return compteur
```

- Le temps d'exécution est proportionnel au carré de N.
- En général : 2 boucles `for` imbriquées.

Complexité cubique

$$O(N^3)$$

```python
def verifie_triplets(liste):
    """Retourne le nombre de triplets dont la somme est nulle."""
    N = len(liste)
    compteur = 0
    for i in range(N):
        for j in range(i + 1, N):
            for k in range(j + 1, N):
                if liste[i] + liste[j] + liste[k] == 0:
                    compteur += 1

    return compteur
```

- Le temps d'exécution est proportionnel au cube de N.
- En général : 3 boucles `for` imbriquées.

Complexité polynômiale

$$O(N^k)$$

- Le temps d'exécution est proportionnel à N^k.
- En général, on a k boucles imbriquées.
- Les boucles peuvent être disséminées dans des sous-fonctions ou des appels récursifs.
- Au-dessus de $k = 3$, on obtient des temps d'exécution assez long lorsque N grandit.

Complexité exponentielle

$$O(C^N)$$

```python
def fibonacci(N):
    return 1 if N <= 1 else fibonacci(N - 2) + fibonacci(N - 1)
```

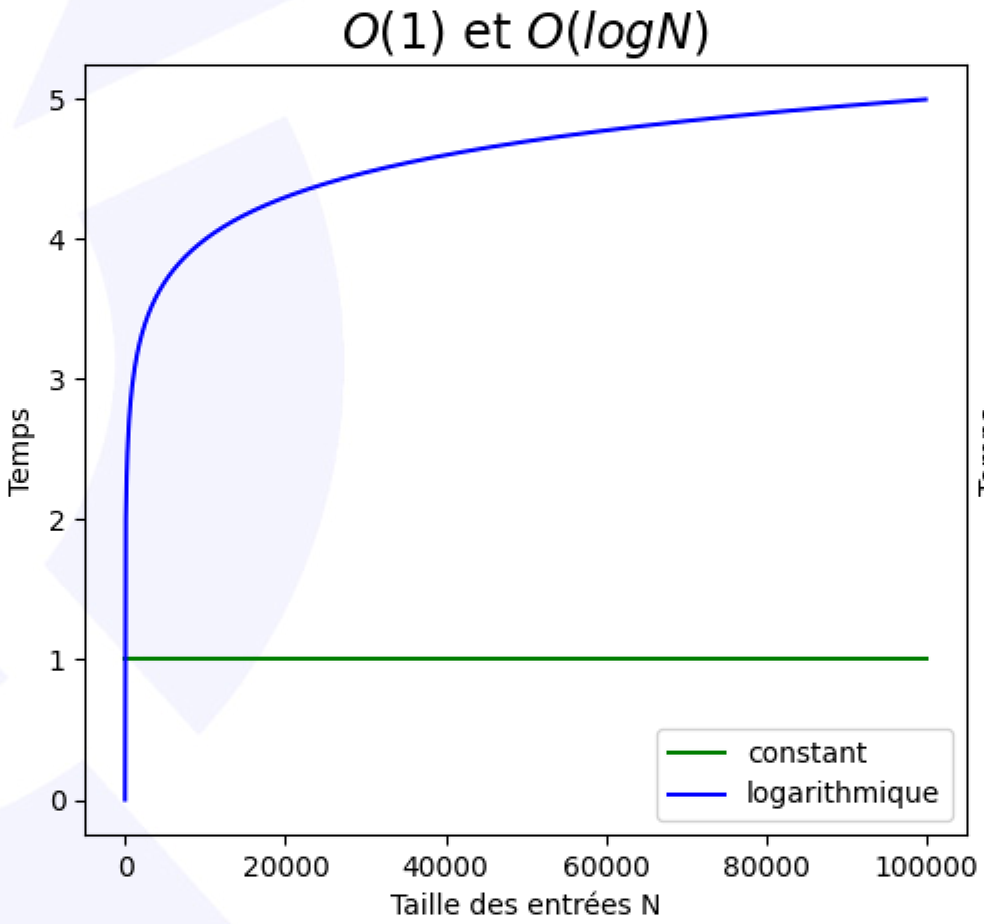
- Cette implémentation de Fibonacci est en $O(2^N)$.
- Même pour $C = 2$, le nombre d'instructions devient ingérable pour $N > 50$.
- Malheureusement, de **nombreux problèmes** sont dans cette classe.

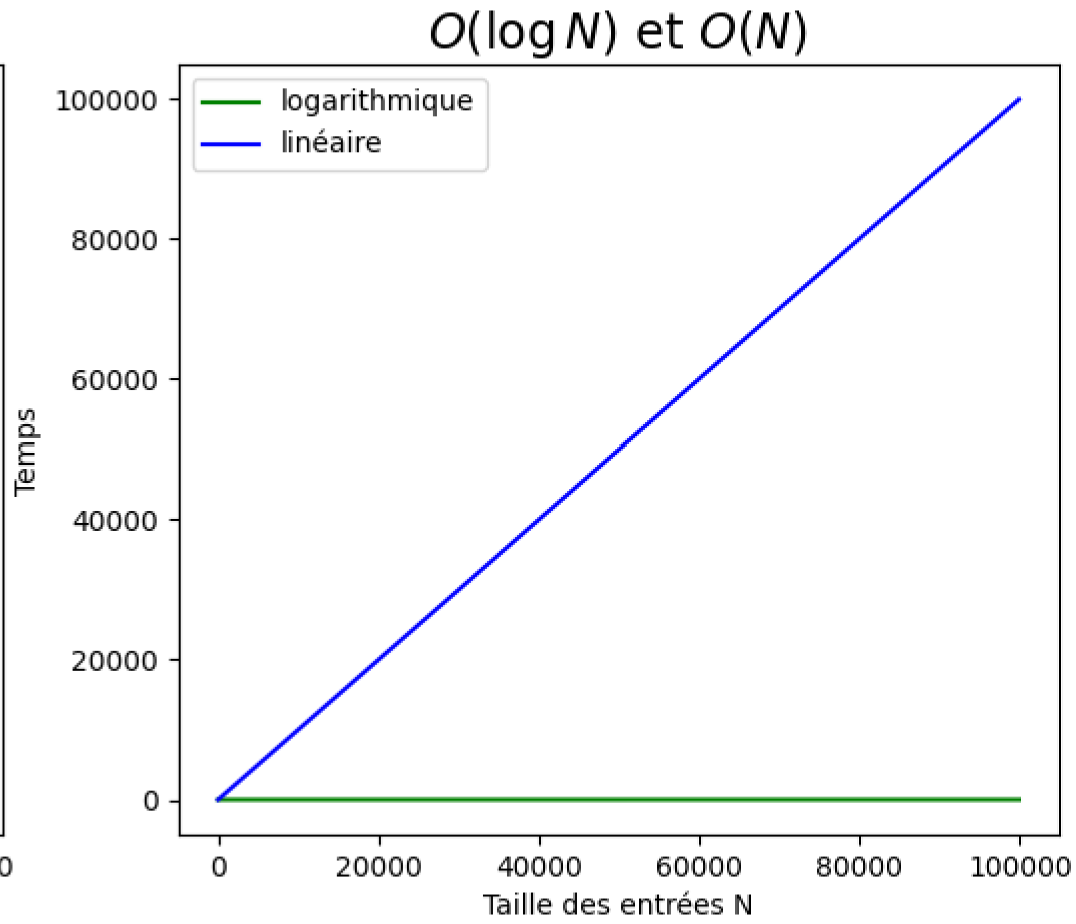
Complexité d'un problème

- S'il existe plusieurs algorithmes pour résoudre un problème, alors la complexité de ce problème correspond à la classe de l'algorithme la plus efficace.
- Exemple : il existe des algorithmes en $O(N)$ et $O(\log N)$ pour trouver un nombre dans une liste triée. Ce problème a donc pour complexité $O(\log N)$.

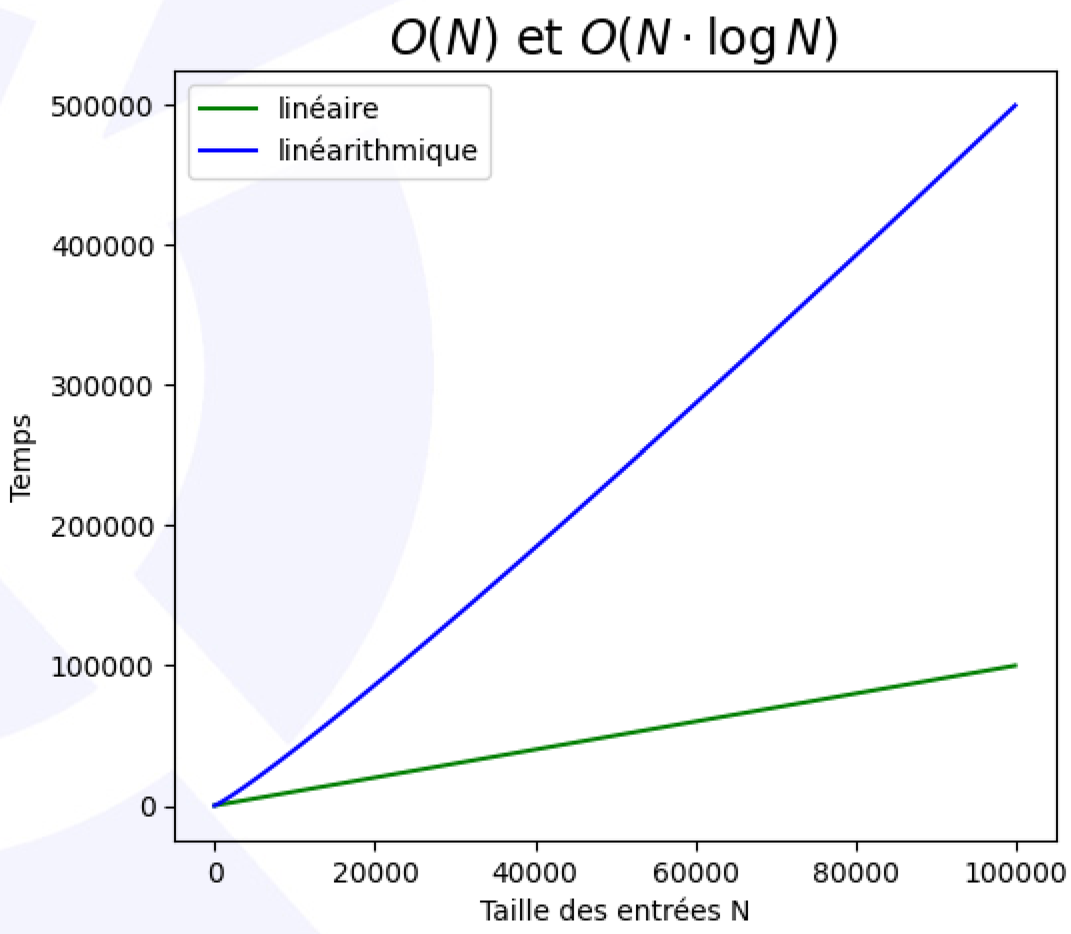
Comparaison des classes de complexité

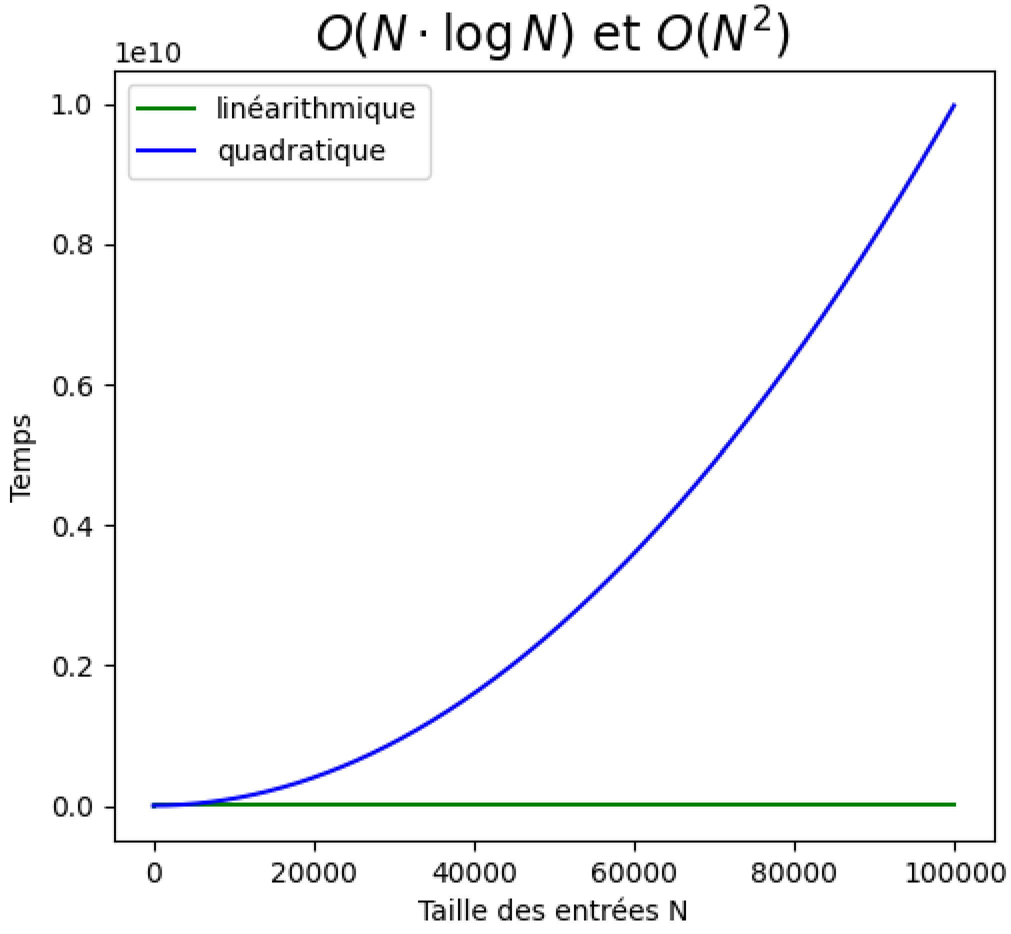
Complexité constante, linéaire et logarithmique



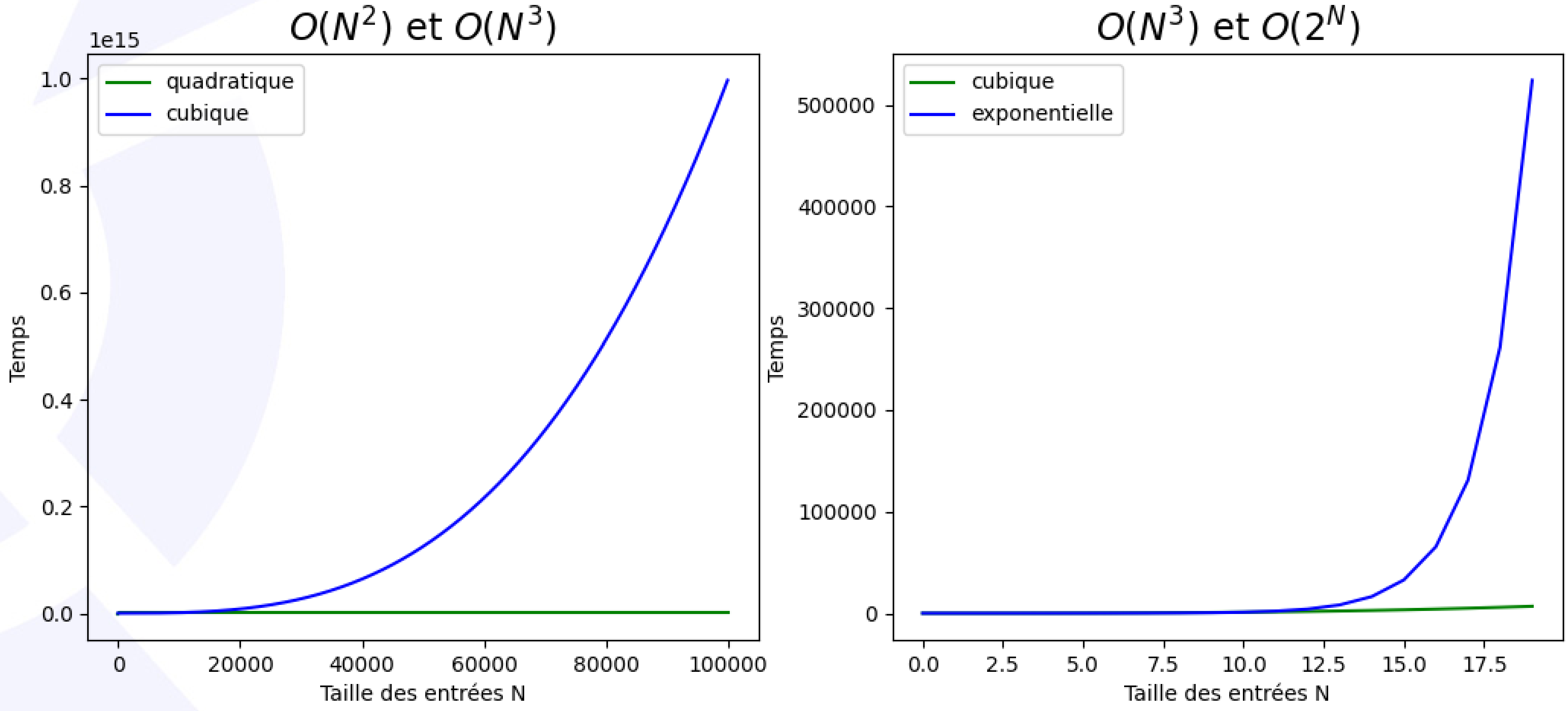


Complexité linéaire, linéarithmique et quadratique

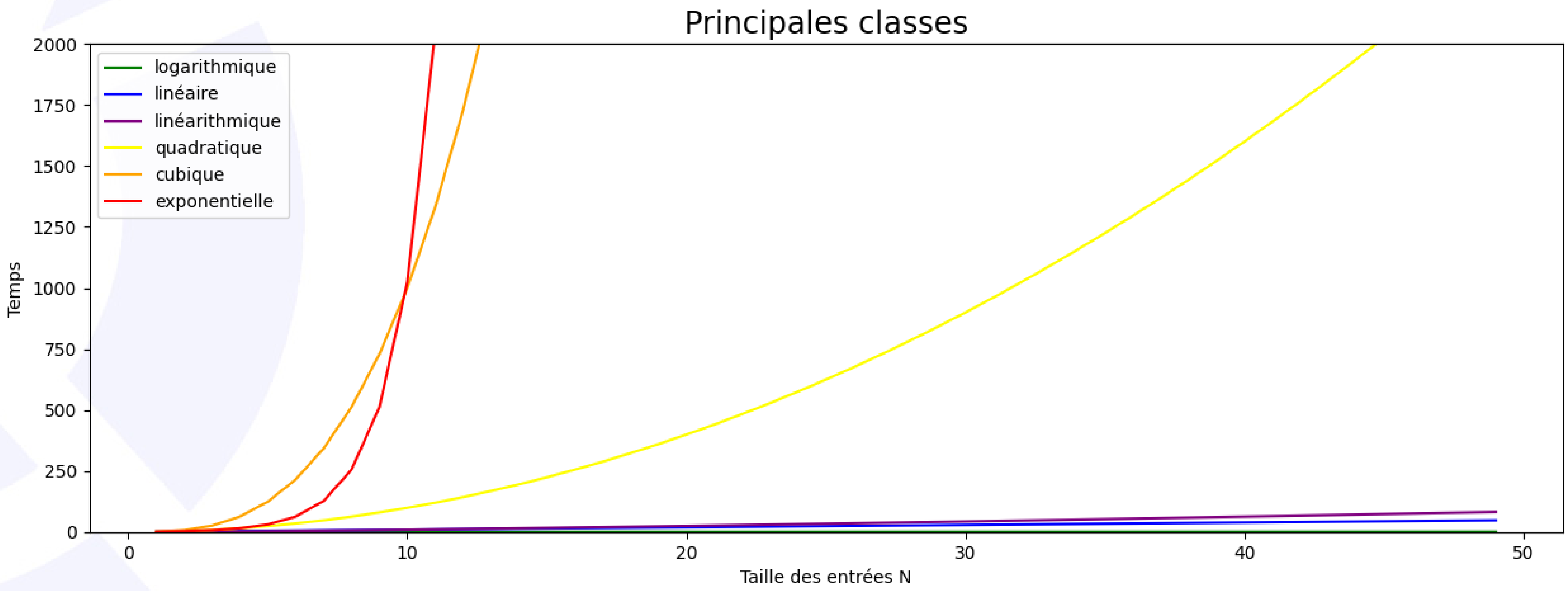




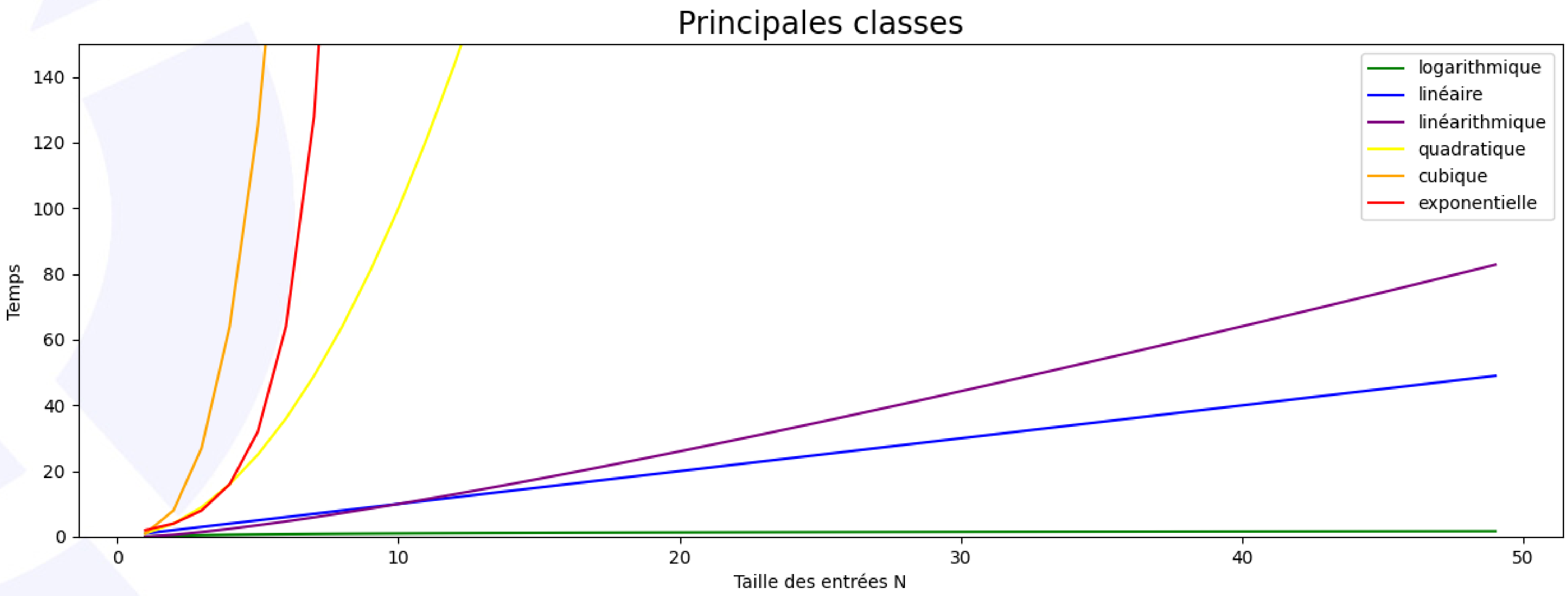
Complexité quadratique, cubique et exponentielle



Une comparaison de toutes les classes (1/2)



Une comparaison de toutes les classes (2/2)



Prédictions basées sur l'ordre de grandeur

Programme prenant quelques heures pour une taille N

Description	Fonction	Facteur 2x	Facteur 10x	Temps pour $10N$	Temps pour $10N$ avec une machine 10x plus rapide
linéaire	N	2	10	un jour	quelques heures
linéarithmique	$N \log N$	2	10	un jour	quelques heures
quadratique	N^2	4	100	quelques semaines	un jour
cubique	N^3	8	1000	plusieurs mois	quelques semaines
exponentielle	2^N	2^N	2^{9N}	jamais	jamais

TD : Evaluation de compléxité

TD : Evaluation de compléxité

Lien vers le sujet de TD.

Limites de l'étude de complexité

Architecture d'un processeur

- Les architectures modernes des CPUs sont **complexes** et **difficiles à modéliser** mathématiquement.
- Il peut arriver que l'exécution d'un algorithme théoriquement plus efficace soit **plus lente** qu'un algorithme plus naïf.

Exemples

- **Prédiction de branche** : un CPU peut prédire statistiquement quel code devra être exécuté, et l'exécuter en avance.
- **Hiérarchie de mémoires** : certains algorithmes compacts en mémoire permettent d'utiliser efficacement les hiérarchies de cache et de pagination.
- **Appels systèmes** : par exemple, les allocations mémoires peuvent avoir des impacts importants.

Grandes constantes

- On a vu que $O(2N^2 + CN) = O(N^2)$.
- Si la constante C est **très grande**, l'ordre de grandeur O peut être trompeur en pratique.
- Exemple : $C = 10^{100}$.

Boucle interne non-dominante

- Le modèle de coût s'intéresse essentiellement à la **boucle interne**.
- De nombreux algorithmes comporte un nombre significatif d'instructions en-dehors de la boucle interne.

```python
compteur = 0
for i in range(N):
    for j in range(N):

        #
        # Potentiellement de nombreuses instructions ici
        #

        for k in range(N):
            # On dit juste que l'on est en O(N^3)
            compteur += 1
```

Temps d'instruction

- Le modèle suppose que chaque instruction prend un temps équivalent.
- Cela est faux en pratique : cela dépend de l'**unité arithmétique et logique** du processeur.
- Même les accès à un très grand tableau ne sont pas nécessairement en temps constant. En effet, si le tableau ne rentre pas dans le cache du processeur, il peut y avoir des **fautes de cache** (cache miss) voire des **fautes de page**.

Plusieurs paramètres

- On s'est concentré sur le cas où le temps d'exécution dépend de 1 paramètre N.
- De nombreux problèmes dépendent de plusieurs paramètres N, M, K, etc.
- Exemple : Il peut s'agir de listes différentes.

Approche pragmatique

Mesures et benchmarks

Mesurer, mesurer, mesurer

- Le scientifique cherche un modèle mathématique : la théorie de la complexité.
- L'artisan, le technicien et l'ingénieur font des mesures et des abaques.
- Les 2 approches **se complètent**.

Rappel sur `time`

```python
import time

def fonction_a_mesurer(N):
    pass

debut = time.process_time()

N = 10000
fonction_a_mesurer(N)

fin = time.process_time()
temps_ecoule = fin - debut
print(f"Temps d'exécution : {temps_ecoule}s")
```

Même chose avec `datetime`

```python
from datetime import datetime

def fonction_a_mesurer(N):
    pass

debut = datetime.now()

N = 10000
fonction_a_mesurer(N)

fin = datetime.now()
temps_ecoule = fin - debut
print(f"Temps d'exécution : {temps_ecoule.total_seconds()}s")
```

Problèmes

- Les mesures avec `time` et `datetime` ne sont **pas indépendantes**.
- Ces mesures sont fortement impactées par les autres processus exécutés par la machine au même moment.

Benchmark avec `timeit`

- On utilise une fonction d'ordre supérieur avec `timeit`

```python
from timeit import timeit

def fonction_a_mesurer(N):
    pass

N = 10000
test = lambda: fonction_a_mesurer(N)

timeit(test, number=1)
```

Avantages

- Les mesures avec `timeit` sont indépendantes donc beaucoup plus fiables.
- On peut spécifier le nombre de fois à exécuter, pour faire plus facilement des statistiques.

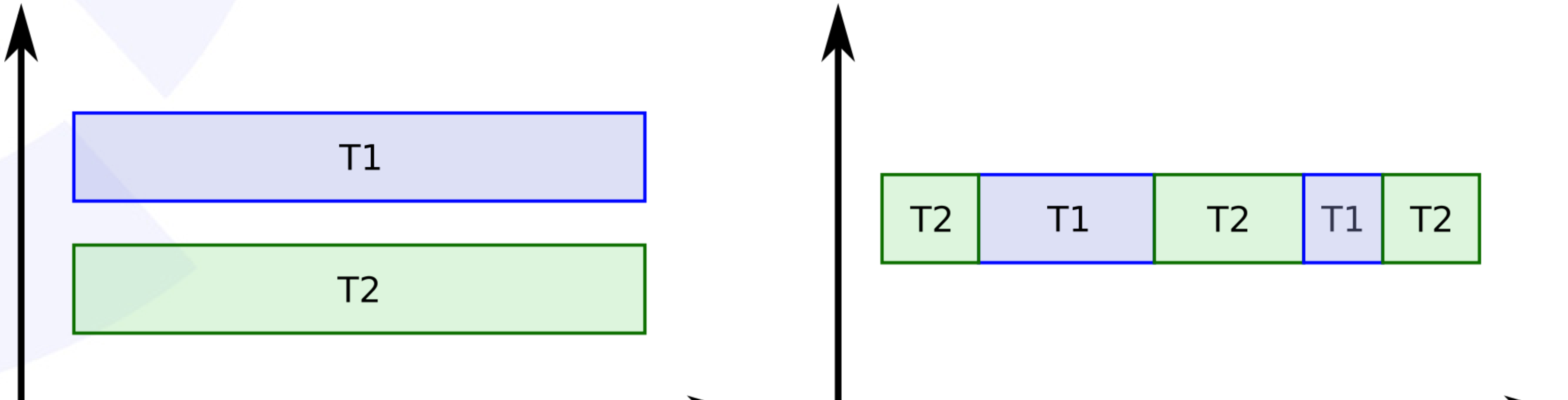
Discussion concernant la parallélisation

Plusieurs choses en même temps

- Un ordinateur peut comporter **plusieurs CPU** (processeur de calcul) et **GPU** (processeur graphique).
- Un CPU moderne peut comporter quelques dizaines de coeurs.
- Un GPU moderne peut comporter quelques centaines voire milliers de coeurs.
- Chaque coeur peut exécuter **une instruction en même temps**.

Parallélisme et concurrence

- **Parallélisme** : les tâches sont découpées et exécutées par la même ressource pour donner l'illusion de parallélisme.
- **Concurrence** : les tâches sont exécutées en même temps.



Amélioration de l'efficacité

- Peut-on améliorer l'efficacité de nos algorithmes en les parallélisant ?
- Oui mais cela **ne change pas la classe de complexité** d'un algorithme.
- Cela permet malgré tout des gains substantiels.

Principe de parallélisation

- On divise une tâche en **sous-tâches**.
- On **distribue** les sous-tâches sur différents coeurs (via des fils d'exécution).
- On récupère le **résultat local** de chaque sous-tâche.
- On **combine les résultats** des sous-tâches pour déterminer la solution globale de la tâche principale.

Evaluation des gains

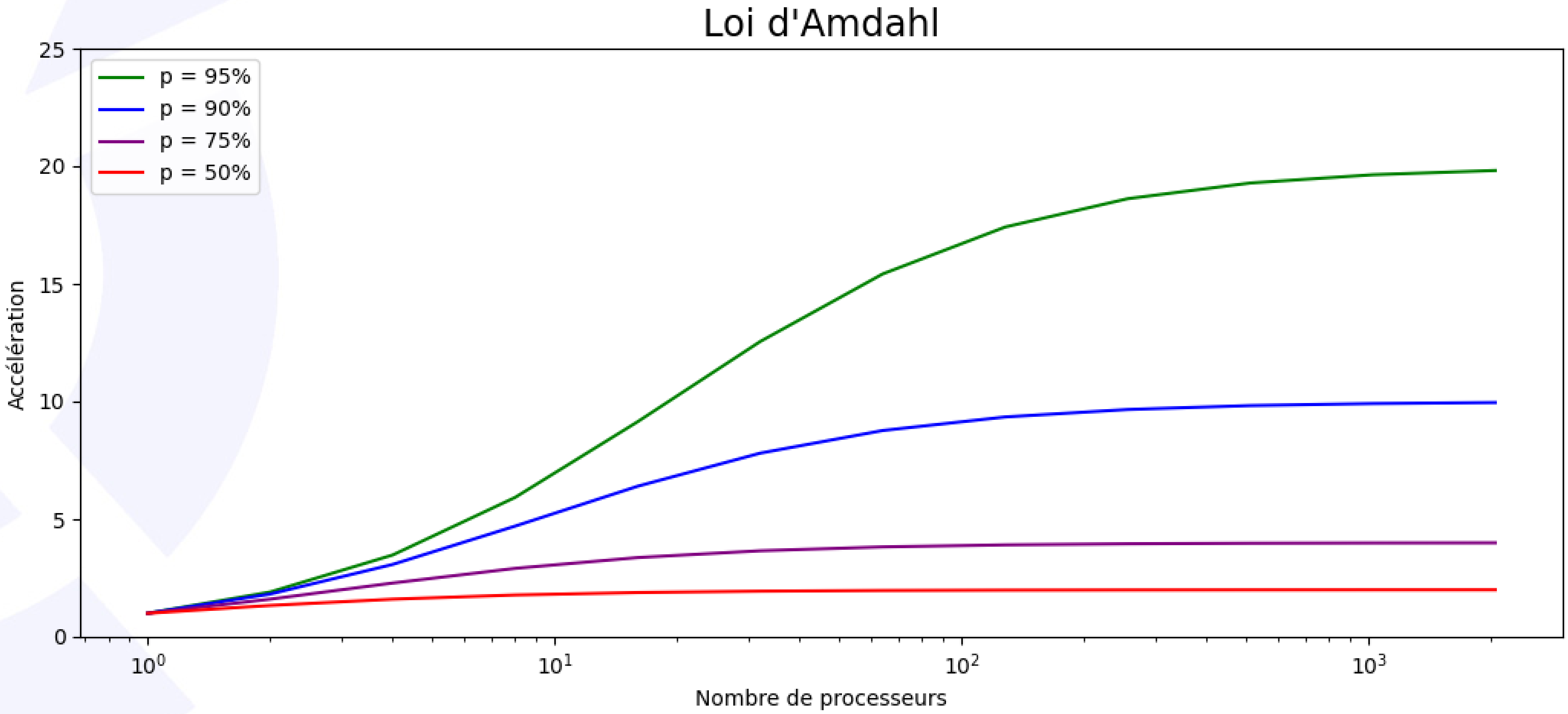
- De combien peut-on améliorer un algorithme en le parallélisant ?
- Naïvement, on dirait que le facteur multiplicateur est le nombre de coeurs.
- En pratique, il existe de nombreuses limitations :
  - certaines parties du code **ne sont pas parallélisables**.
  - il est nécessaire d'**orchestrer et synchroniser** les calculs.

Loi d'Amdahl

Pour tout $s \in \mathbb{N}$ représentant le nombre de coeurs exploitables, et $p \in [0; 1]$ le pourcentage de temps d'exécution passé dans le code parallélisable *avant* la parallélisation, la loi d'Amdahl définit la fonction f d'**accélération théorique maximale** :

$$f(s, p) = \frac{1}{1 - p + \frac{p}{s}}$$

Représentation graphique de la loi d'Amdahl



Supercalculateurs

- Il s'agit d'un ordinateur massif rassemblant un grand nombre de processeurs.
- Un système d'exploitation particulier gère tous ces processeurs.
- Le supercalculateur Fugaku rassemble **7,3 millions de processeurs**.
- Il atteint **415 PFLOPS**, c'est-à-dire $415 \cdot 10^{15}$ instructions à virgule flottante par seconde.

Conclusions

- La parallélisation du code permet d'obtenir des **gains significatifs**.
- Ces gains sont **limités** par la loi d'Amdahl.
- La parallélisation **ne change pas la classe de complexité**, qui reste le facteur déterminant de l'efficacité.

Discussion sur la distribution de calcul

Cluster et sur le Cloud

Noeuds de calcul

- La parallélisation sur le CPU et GPU d'une machine se fait **localement**.
- Il est possible de **distribuer** un calcul sur un **cluster de machines** mises en réseau.
- Chaque machine s'appelle, dans ce contexte, un **noeud de calcul**.

On-Premise ou dans le Cloud

- **On-Premise** 🇬🇧 : exécution dans un cluster appartenant à l'entité (entreprise/personne) effectuant le calcul.
- **Cloud Computing** 🇬🇧 : exécution dans un cluster localisé dans un datacenter appartenant à un fournisseur tiers.

Avantages

- Le **coût** :
  - Un supercalculateur est généralement trop onéreux.
  - Mettre en réseau des ordinateurs du marché est généralement moins coûteux.
  - Possibilité de **location** de noeuds de calcul dans le Cloud et de payer **à l'usage**.
- L'**évolutivité horizontale** (scalability 🇬🇧) : On peut facilement augmenter les capacités de calcul en rajoutant simplement une machine supplémentaire.

Défis supplémentaires

- **Lenteur du réseau** : les échanges de données sur un réseau sont beaucoup plus lents qu'au sein d'une machine.
- **Pannes** : chaque noeud de calcul peut être sujet à des pannes.

Algorithmes distribués

- Il existe de nombreux algorithmes et techniques dédiés au calcul distribué.
- De nombreuses technologies offrent des solutions sur étagère pour répondre à ces problématiques complexes.
- Exemple : Map Reduce.

Conclusions

- Avec des supercalculateurs ou des clusters de calcul dans le Cloud, on a accès à de très grandes puissances de calcul.
- Pourquoi a-t-on besoin d'autant de puissance ?
- Pourquoi ne peut-on pas utiliser que des algorithmes de complexité logarithmique ?

Problèmes NP-complet

Problèmes "faciles" et "difficiles"

- On en a eu l'intuition : les algorithmes exponentiels ne sont pas vraiment applicables en pratique.
- **Problème "facile"** : il existe un algorithme polynômial (ou meilleur) pour résoudre ce problème.
- **Problème "difficile"** : on n'a pas (encore) trouvé d'algorithme polynômial et on est obligé d'utiliser un algorithme exponentielle.
- On recherche s'il existe des algorithmes non-exponentiels permettant de résoudre le problème.

Exemples de problèmes "difficiles"

- **Problème de satisfaisabilité Booléenne (SAT)** : Etant donné un ensemble M d'équations impliquant N variables Booléennes, trouver des valeurs pour chaque variable telles que toutes les équations sont satisfaites, or rapporter qu'aucune solution n'existe.
- **Applications** : diagnostique, planification, vérification de modèle, cryptographie.

Exemples de problèmes "difficiles"

- **Load Balancing** : Etant donné un ensemble de tâches d'une durée spécifiée et une limite de temps T, comment ordonnancer ces tâches sur 2 processeurs identiques de telle sorte qu'elles se terminent avant T ?
- **Application** : Routage de paquets sur un réseau.

Exemples de problèmes "difficiles"

- **Chemin Hamiltonien** : Etant donné un graphe, trouver un chemin qui visite chaque vertex exactement une fois, ou reporter qu'aucune solution n'existe.
- **Applications** : GPS, jeu vidéo.

Formalisation

- **P** est l'ensemble de tous les problèmes qui peuvent être résolus en temps **polynômial** par une Machine de Turing déterministe (c'est-à-dire un ordinateur classique).
- **NP** est l'ensemble de tous les problèmes décidés par une Machine de Turing **N**on-Déterministe en temps **P**olynômial.

Problème NP-complet

- Un problème est NP-complet si :
  - on peut facilement et rapidement vérifier qu'une solution est correcte.
  - tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale.
- Cela signifie que le problème est au moins aussi "difficile" que les autres problèmes de la classe NP.

Implications concrètes

- Il existe certains problèmes pour lesquels **on n'a aujourd'hui pas de meilleure solution** que :
  - un algorithme exponentiel,
  - une solution en force brute consistant à explorer tout l'espace de solution (quand il est fini).
- **On n'est pas encore capable de prouver l'existence, ou non, de meilleures solutions**.

Discussion sur les machines quantiques

Qubit

Machine de Turing déterministe

- Sur nos machines actuelles, un bit a pour valeur 0 ou 1.
- Un octet est codé sur 8 bits.
- Un octet peut donc prendre des valeurs entre $[0; 2^8 - 1]$, soit $[0; 255]$.
- Les opérations principales sur un bit sont celles de la logique Booléenne : AND, OR, XOR, NOT, SHIFT.

Physique quantique

- En physique quantique, la fonction d'onde d'une particule prend une valeur **au moment de son observation**.
- Tant qu'elle n'est pas observée, une particule est dans un **état quantique**.
- Cet état quantique est régi par **des probabilités**.

Le chat de Schrödinger

- On met le chat dans une boîte.
- Un incident survient.
- Tant que l'on ne regarde pas dans la boîte, le chat est à la fois mort **ET** vivant.
- Ce n'est qu'une fois que l'on regarde dans la boîte que le chat est mort *ou* vivant.

Bit quantique - Qubit (1/2)

- Un bit quantique est représenté par un vecteur (p, q) .
- p est la probabilité pour que le bit soit égal à 0.
- q est la probabilité pour que le bit soit égal à 1.
- Lorsqu'on lit la valeur du bit quantique, il a pour valeur 0 ou 1.

Bit quantique - Qubit (2/2)

- On a : $p + q = 1$, puisque soit p, soit q est vérifié.
- On pose le vecteur d'amplitudes (α, β) tel que $p = \alpha^2, q = \beta^2$.
- On a donc $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
- On peut donc représenter l'espace d'amplitude sur un cercle trigonométrique.
- Les opérations principales sur un bit quantique sont : rotation, symmétrie, porte d'Hadamar, etc.

Machine de Turing Non-Déterministe

- Une machine quantique permet de simuler une machine de Turing Non-Déterministe.
- Par conséquent, elle vise à traiter les **problèmes NP** en un temps meilleur que les machines déterministes.

Etat de l'art (1/3)

- Il existe déjà près d'**une centaine d'algorithmes quantiques**.
- Les applications possibles sont variées : cryptographie, apprentissage par machine, calcul scientifique.
- La recherche sur le sujet est très active.

Etat de l'art (2/3)

- Les machines quantiques actuelles :
  - coûtent **très cher**,
  - ne comportent que **quelques qubits**,
  - **ne permettent pas d'exécuter** la plupart des algorithmes quantiques.

Etat de l'art (3/3)

- Il existe déjà des **langages de programmation quantiques** (ex : Q# de Microsoft).
- On **simule des machines quantiques** sur des ordinateurs classiques.

TP : Benchmark et complexité

TP : Benchmark et complexité

Lien vers le sujet de TP.