

Algorithmique Appliquée

BTS SIO SISR

Introduction à la théorie des graphes



CHAMBRE DE COMMERCE
ET D'INDUSTRIE

1^{er} ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES



Loïc Yvonnet





Plan

- Discussion sur les hiérarchies
- Arbre de recherche binaire
- Insertion et recherche
- Arbre de recherche N-aire
- Discussion concernant les graphes
- Théorie des graphes
- Représentations des graphes
- Parcours en profondeur
- Parcours en largeur
- Identification d'un cycle
- Graphe pondéré : représentation
- Plus court chemin
- Chemin critique

Correction du travail à la maison

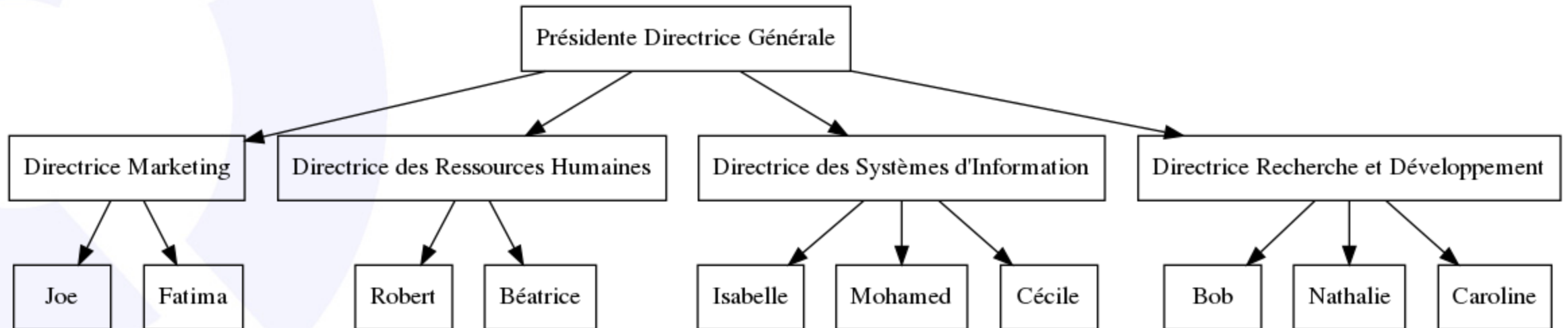


TP : Plus de modules

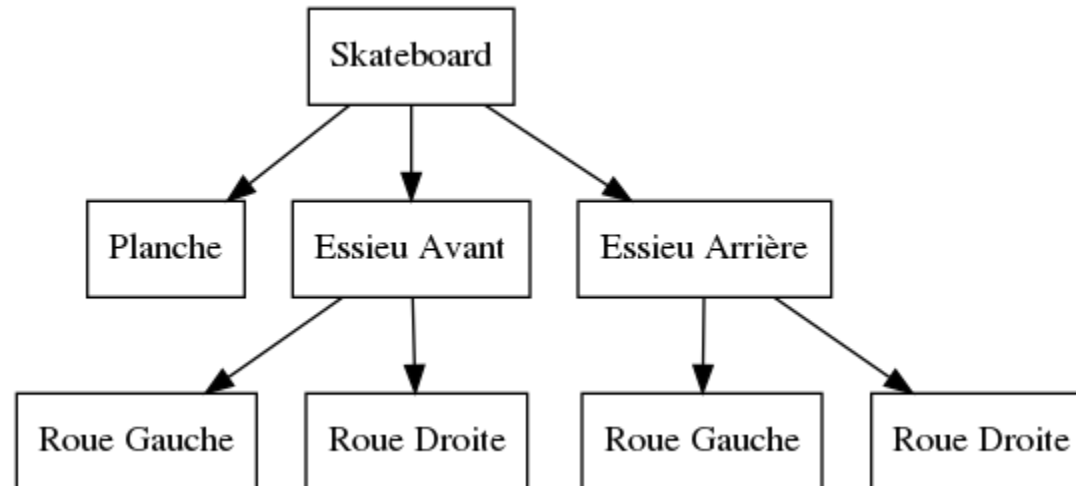
Lien vers le sujet de DM.

Discussion sur les hiérarchies

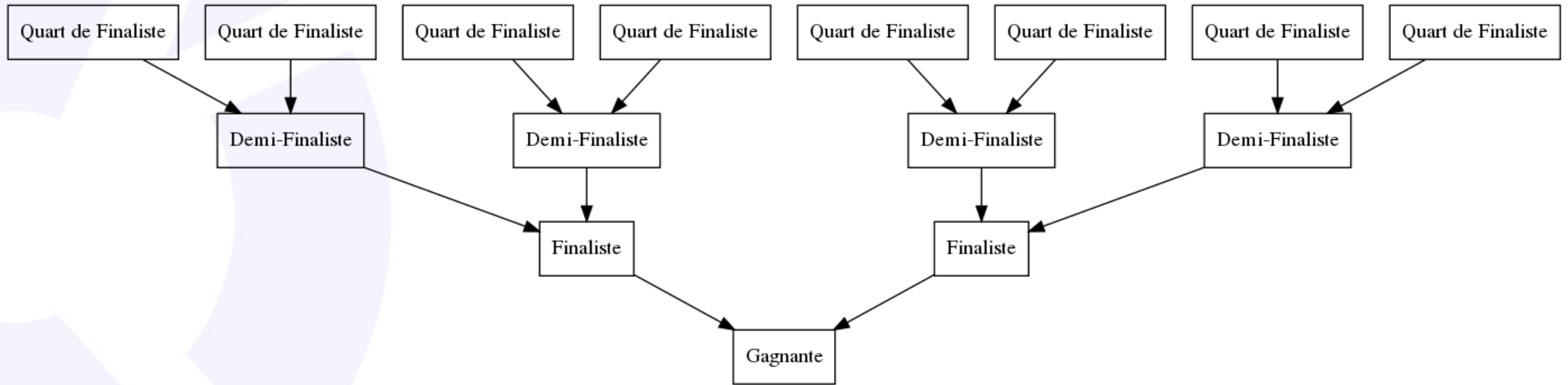
Hiérarchie en entreprise



Structure produit

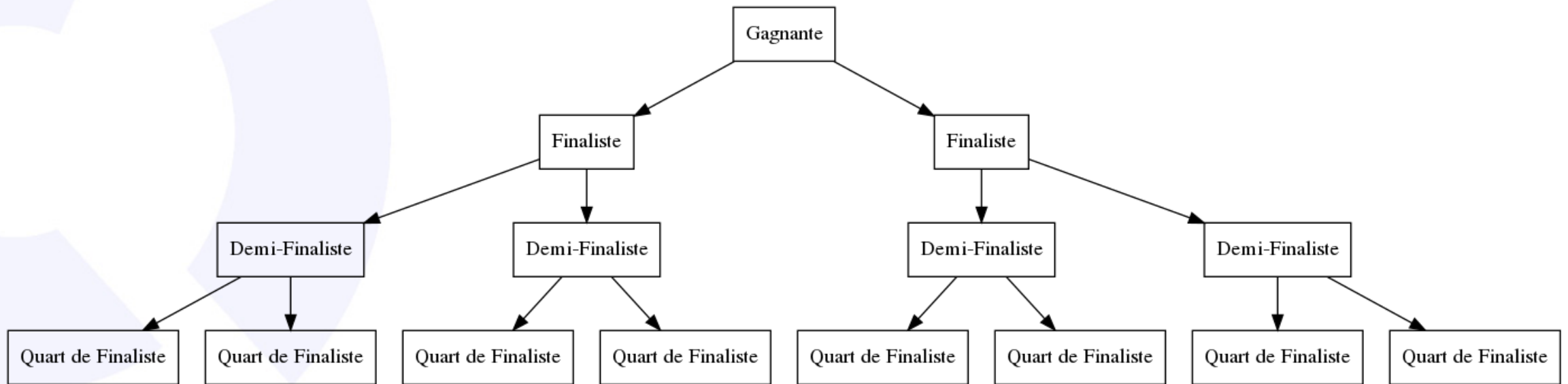


Compétition (1/2)



Il est possible d'inverser la représentation pour obtenir une hiérarchie.


Compétition (2/2)



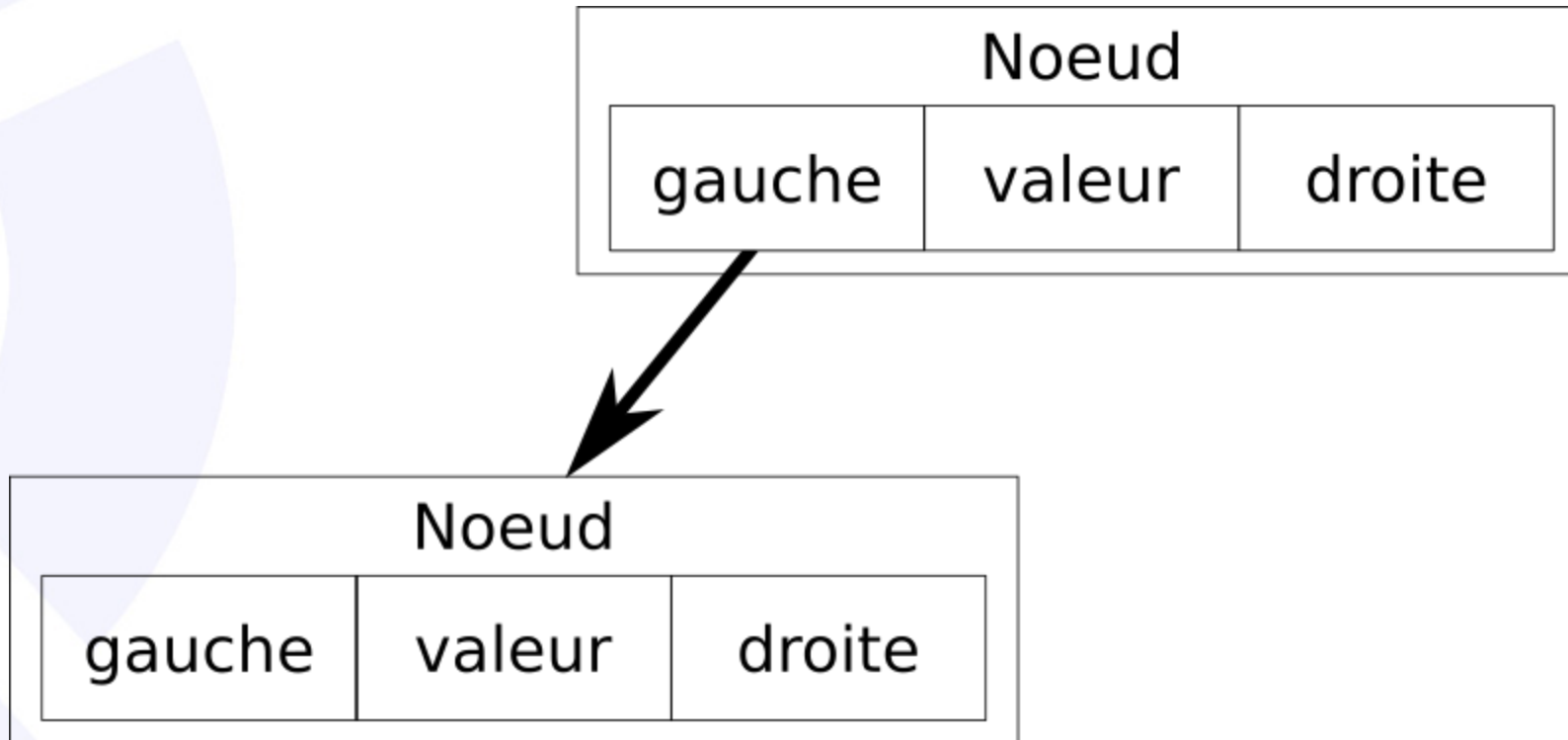
Arbre de recherche binaire

Binary Search Tree 

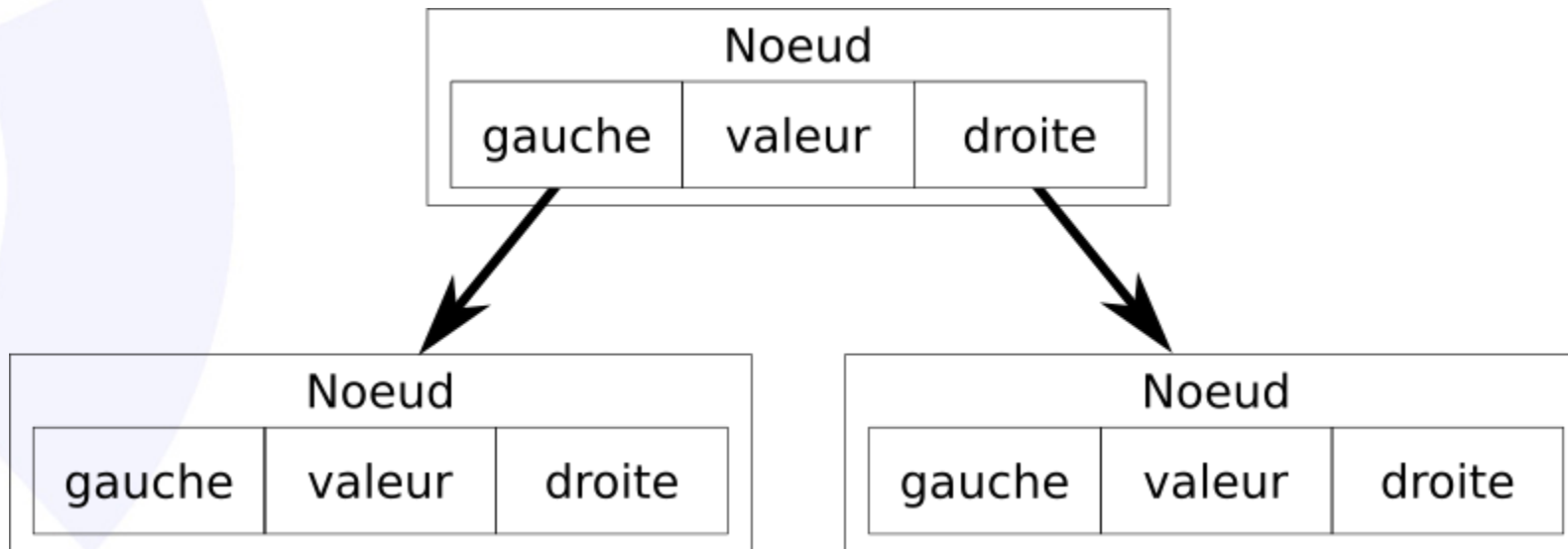
Notion d'arbre

- Une **hiérarchie** peut être représentée sous la forme d'un **arbre**.
- Un **arbre de recherche binaire** (BST - binary search tree ) ne comporte que **2 branches**.
- Chaque noeud peut avoir un sous-noeud à gauche et/ou à droite.

Exemple avec 2 noeuds



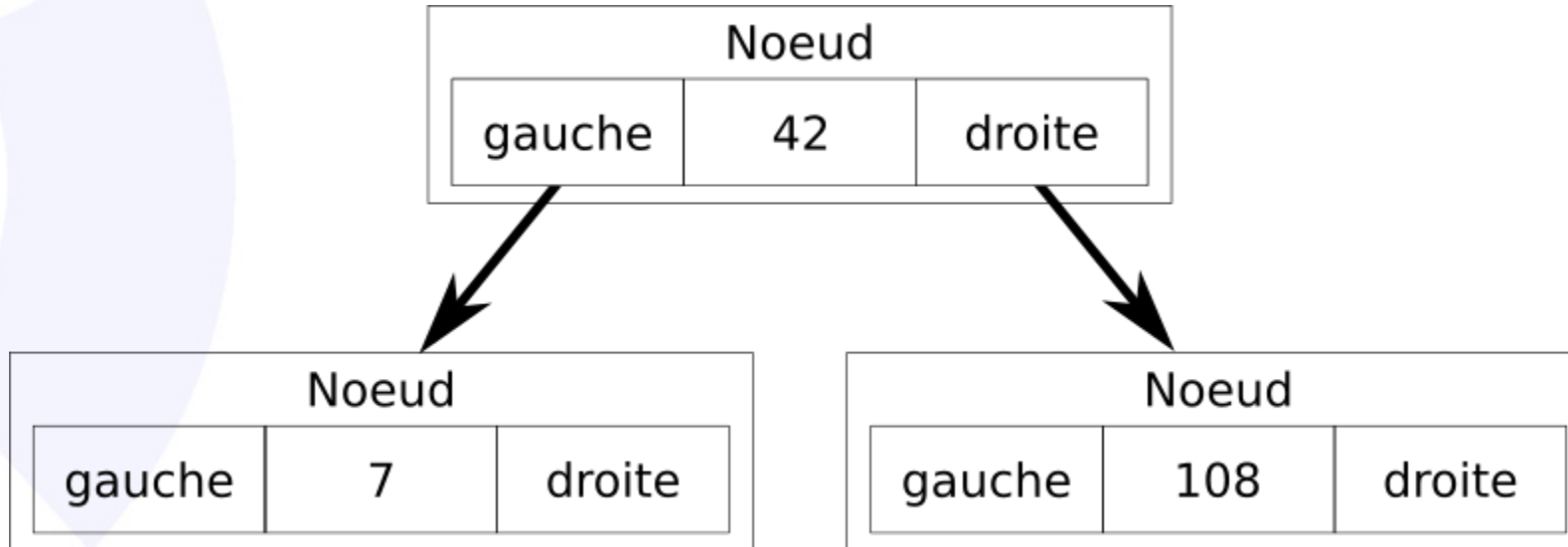
Exemple avec 3 noeuds



Relation d'ordre

- La valeur du noeud à **gauche** est **plus petite** que celle du parent.
- La valeur du noeud à **droite** est **plus grande** que celle du parent.

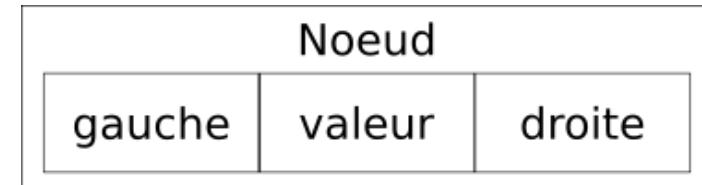
Exemple : $7 < 42 < 108$



Structure de données

```
from dataclasses import dataclass
from typing import Any

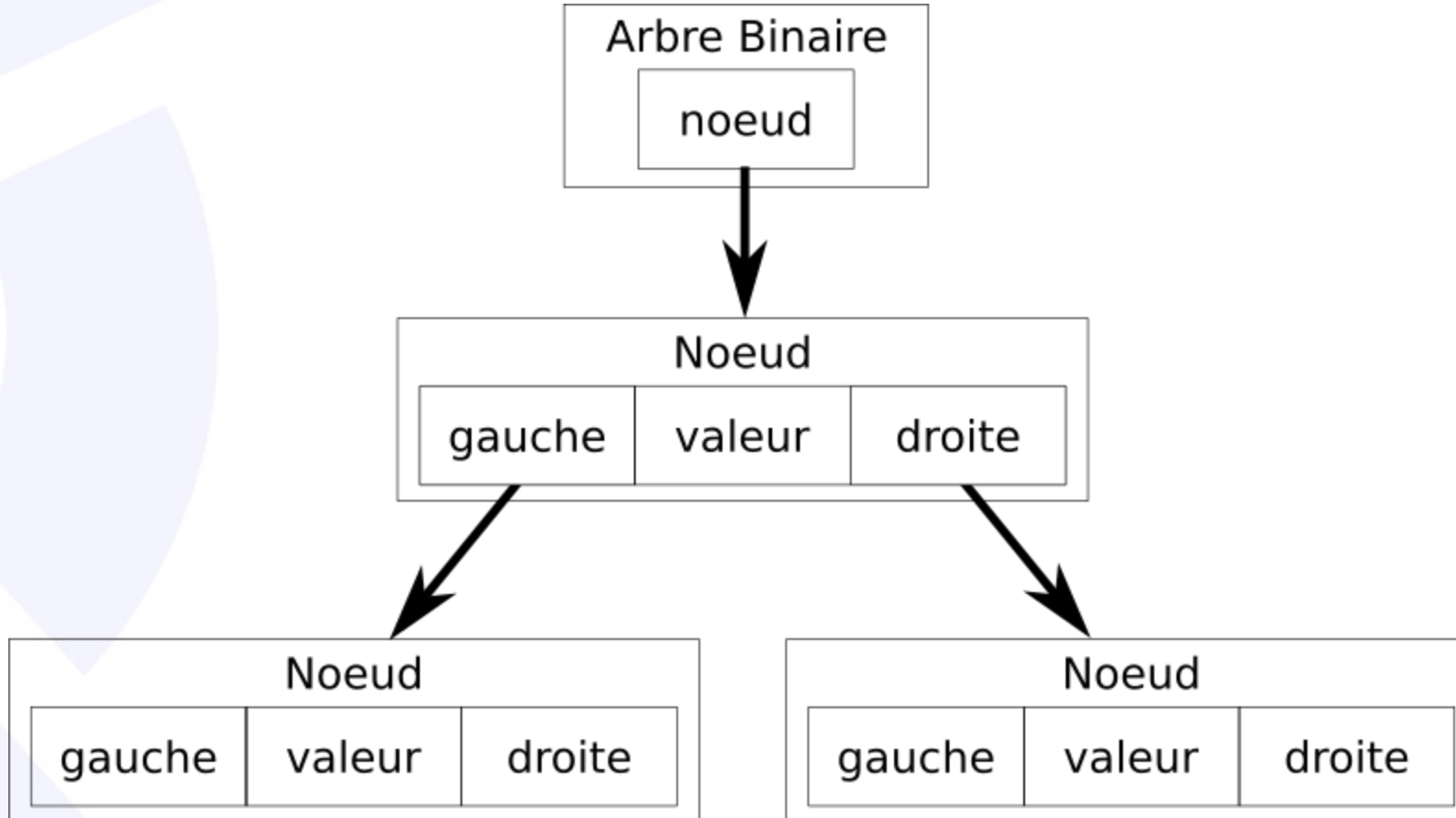
@dataclass
class Noeud:
    """Noeud d'un arbre binaire."""
    valeur: Any = None
    gauche: Any = None
    droite: Any = None
```



Noeud de départ

- Comment identifier le **noeud de départ** de l'arbre binaire ?
- On souhaite que chaque noeud ait la **même représentation**.
- On introduit un nouveau type, `ArbreBinaire` , qui référence le noeud de départ.
- Un `ArbreBinaire` **n'a pas de valeur**.

Noeud de départ identifié par l' `ArbreBinaire`



Structure de données

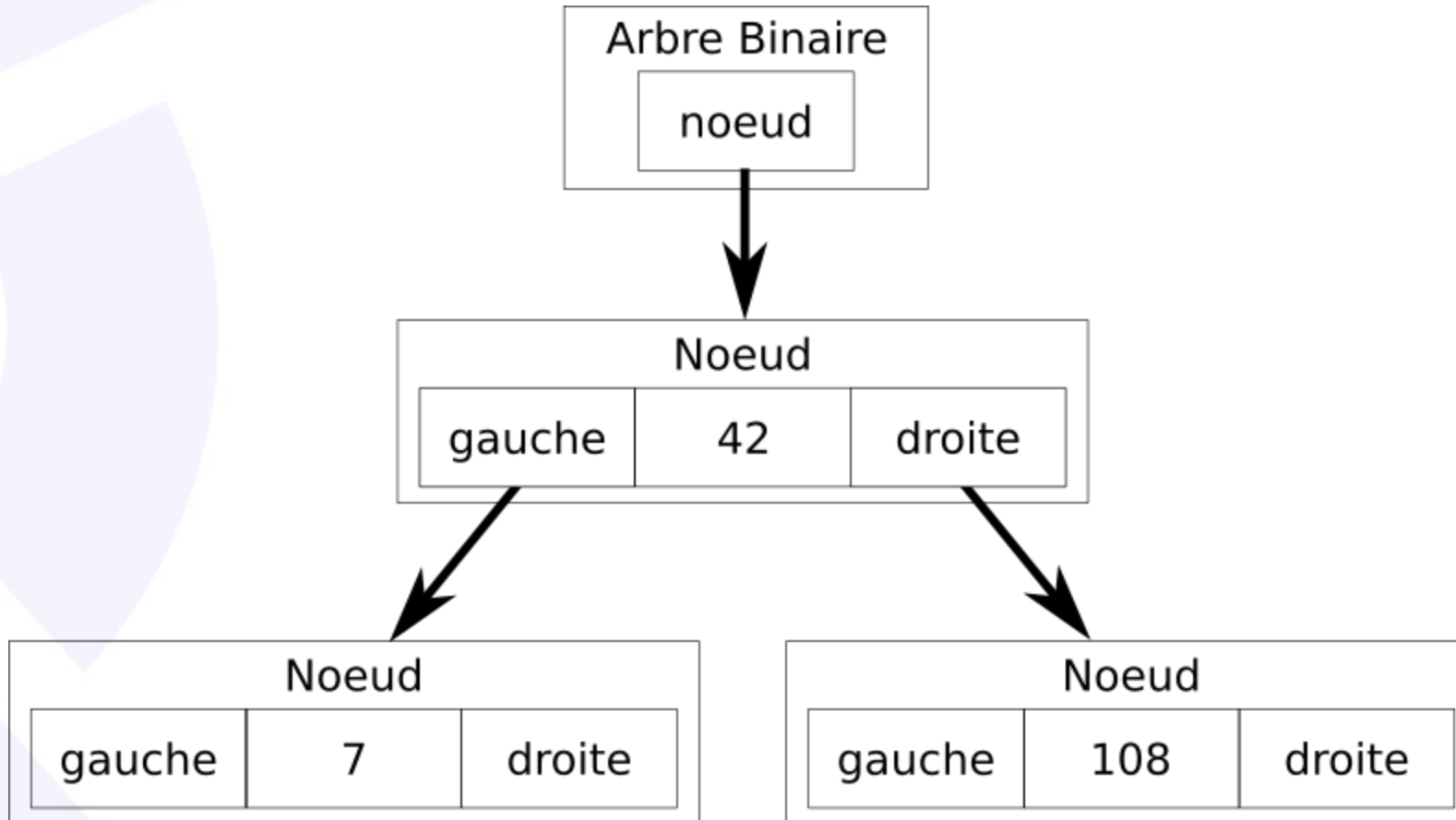
```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class ArbreBinaire:
    """Arbre binaire."""
    noeud: Noeud = None
```

Arbre Binaire

noeud

Exemple complet



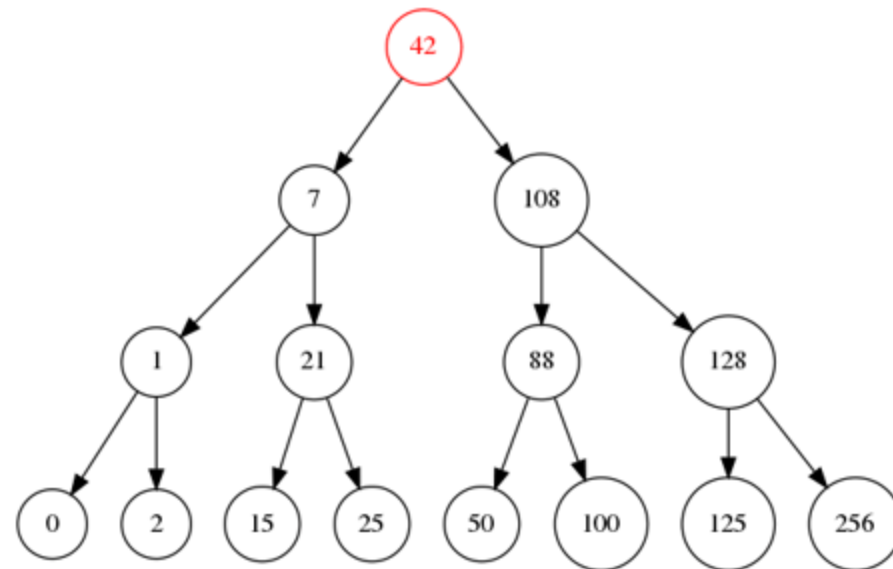
Insertion et recherche dans un arbre binaire

Recherche : principe

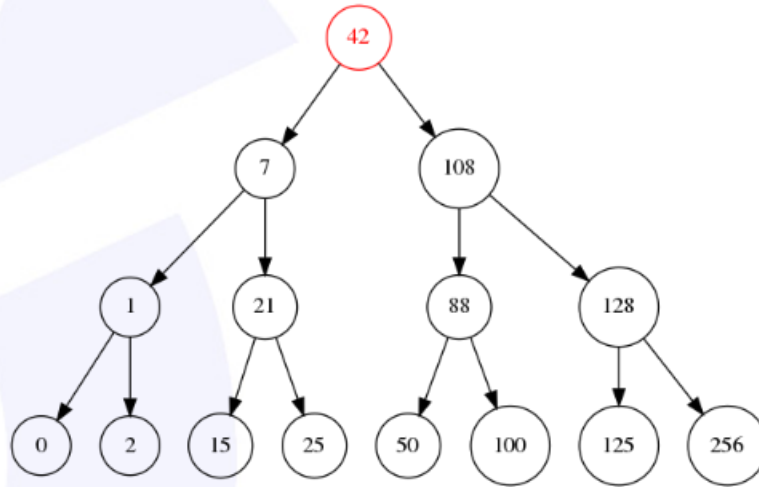
- On part du noeud à la **racine**.
- On utilise la **relation d'ordre** pour savoir si on doit aller à gauche ou à droite.
- On **descend** dans l'arbre jusqu'à trouver la valeur ou ne plus avoir de descendants.

Illustration de la recherche

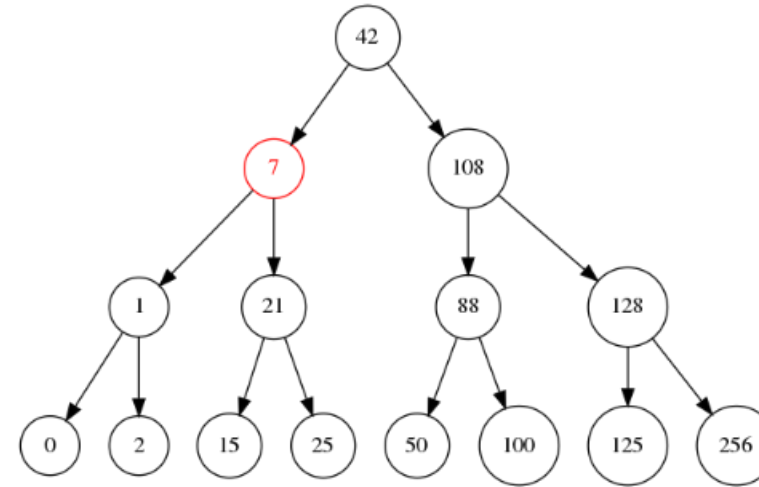
Valeur recherchée : 25



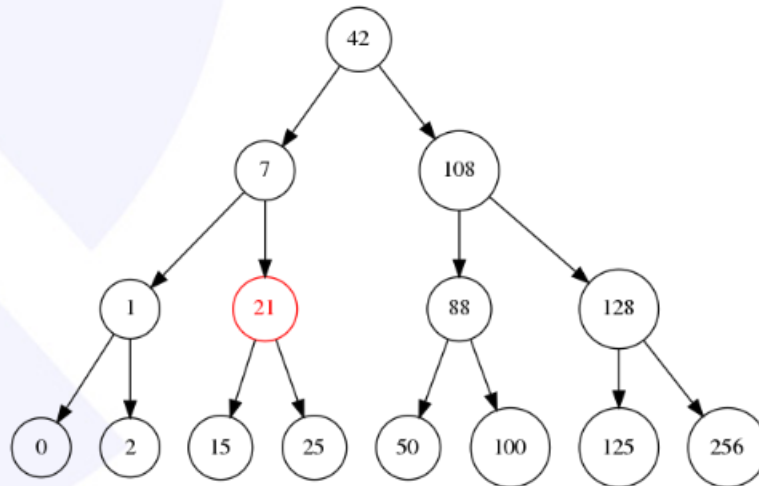
Etapes de recherche



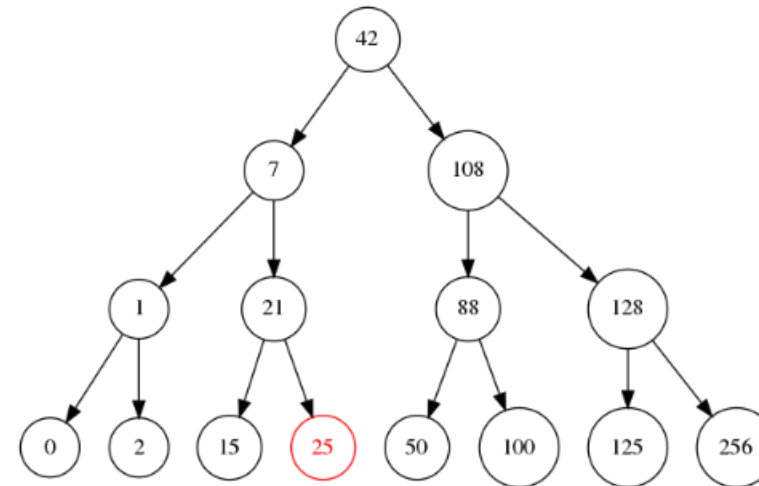
Etape 0



Etape 1



Etape 2



Etape 3

Algorithme de recherche dans un arbre binaire

```
def trouve_valeur_dans_arbre_binaire(arbre, valeur):  
    """Trouve une valeur dans l'arbre binaire."""  
    noeud = arbre.noeud  
    while noeud != None and noeud.valeur != valeur:  
        if valeur < noeud.valeur:  
            noeud = noeud.gauche  
        else:  
            noeud = noeud.droite  
  
    return noeud
```

Complexité

- Le nombre d'étapes est fonction de la profondeur p .
- Pour un arbre binaire *équilibré* de N noeuds, la recherche prend $O(\log N)$.
- Pour un arbre binaire *non-équilibré* de N noeuds, la recherche prend $O(N)$.

Insertion : principe

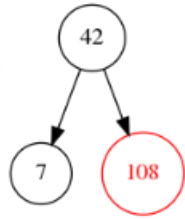
- Si le noeud racine est vide, la nouvelle valeur est positionnée à la racine.
- Sinon :
 - On utilise la **relation d'ordre** pour descendre dans l'arbre.
 - On crée un nouveau noeud dans un nouvel emplacement.



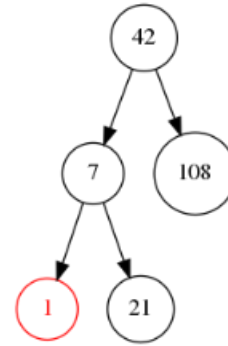
Illustration de l'insertion

42

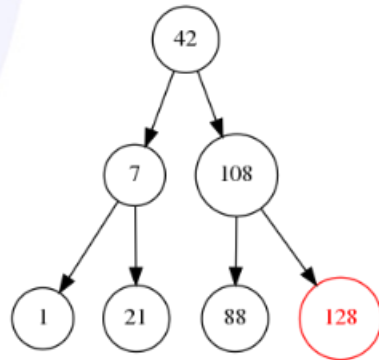
Etapes d'insertion



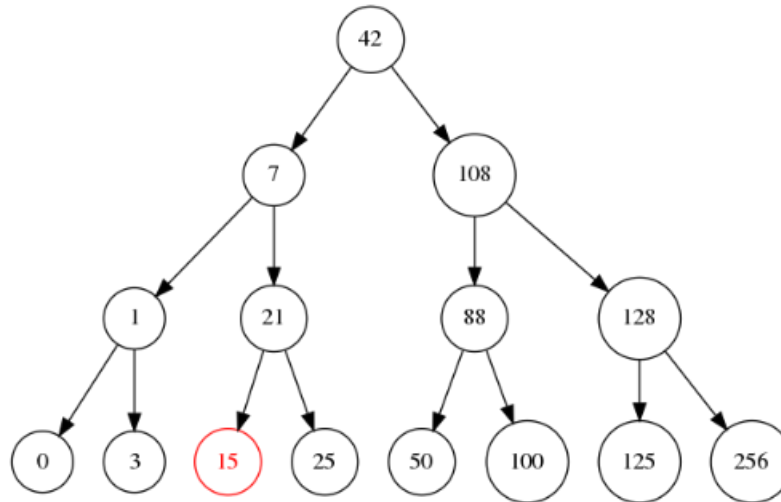
Etape 2



Etape 4



Etape 6



Etape 14

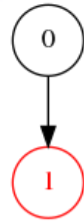
Algorithme d'insertion

```
def insere_noeud_dans_arbre_binaire(arbre, valeur):  
    """Insère un nouveau noeud dans un arbre binaire."""  
    if arbre.noeud == None:  
        arbre.noeud = Noeud(valeur=valeur)  
        return arbre.noeud  
  
    noeud = arbre.noeud  
    while noeud.valeur != valeur:  
        if valeur < noeud.valeur:  
            if noeud.gauche == None:  
                noeud.gauche = Noeud(valeur=valeur)  
            noeud = noeud.gauche  
        else:  
            if noeud.droite == None:  
                noeud.droite = Noeud(valeur=valeur)  
            noeud = noeud.droite  
  
    return noeud
```

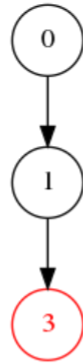
! Problème !

0

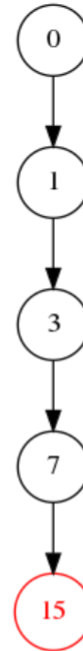
Etapes arbre binaire non-équilibré



Etape 1



Etape 2



Etape 4



Etape 6

Arbre non-équilibré

- Si on insère toujours des valeurs à droite (ou à gauche), on obtient l'équivalent d'une **liste chaînée**.
- On perd alors l'équilibre de l'arbre, et la **complexité** d'insertion et de recherche **augmente**.
- La complexité passe de logarithmique à linéaire dans les 2 cas.

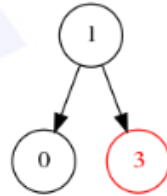
Solution : rééquilibrage

- Un **arbre binaire rouge-noir** (red-black binary search tree 🇬🇧) rééquilibre l'arbre à chaque insertion.
- Des **rotations** sont effectuées pour échanger des noeuds.

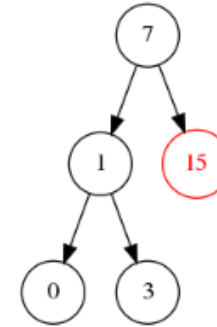
Illustration d'un arbre rouge-noir

0

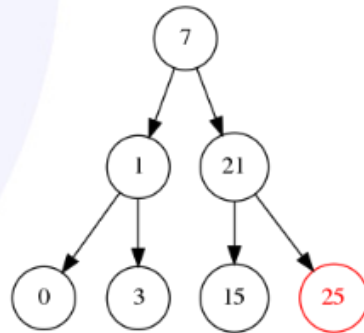
Etapes d'insertion dans un arbre rouge-noir



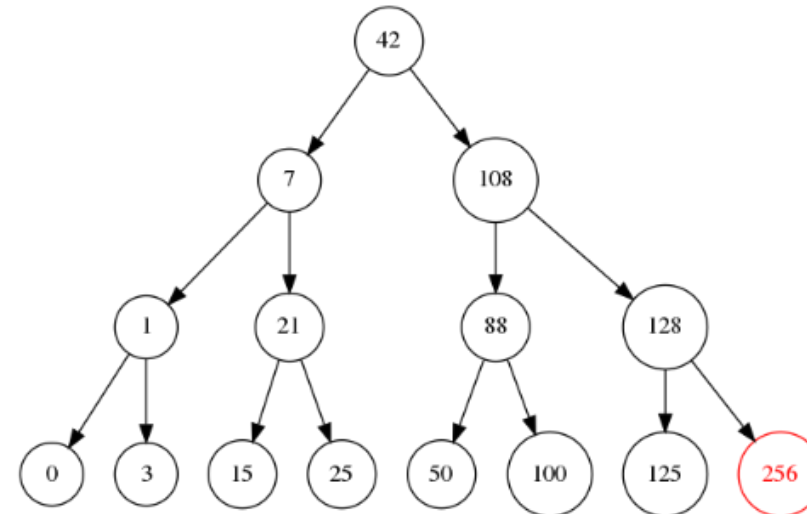
Etape 2



Etape 4



Etape 6



Etape 14



Complexité

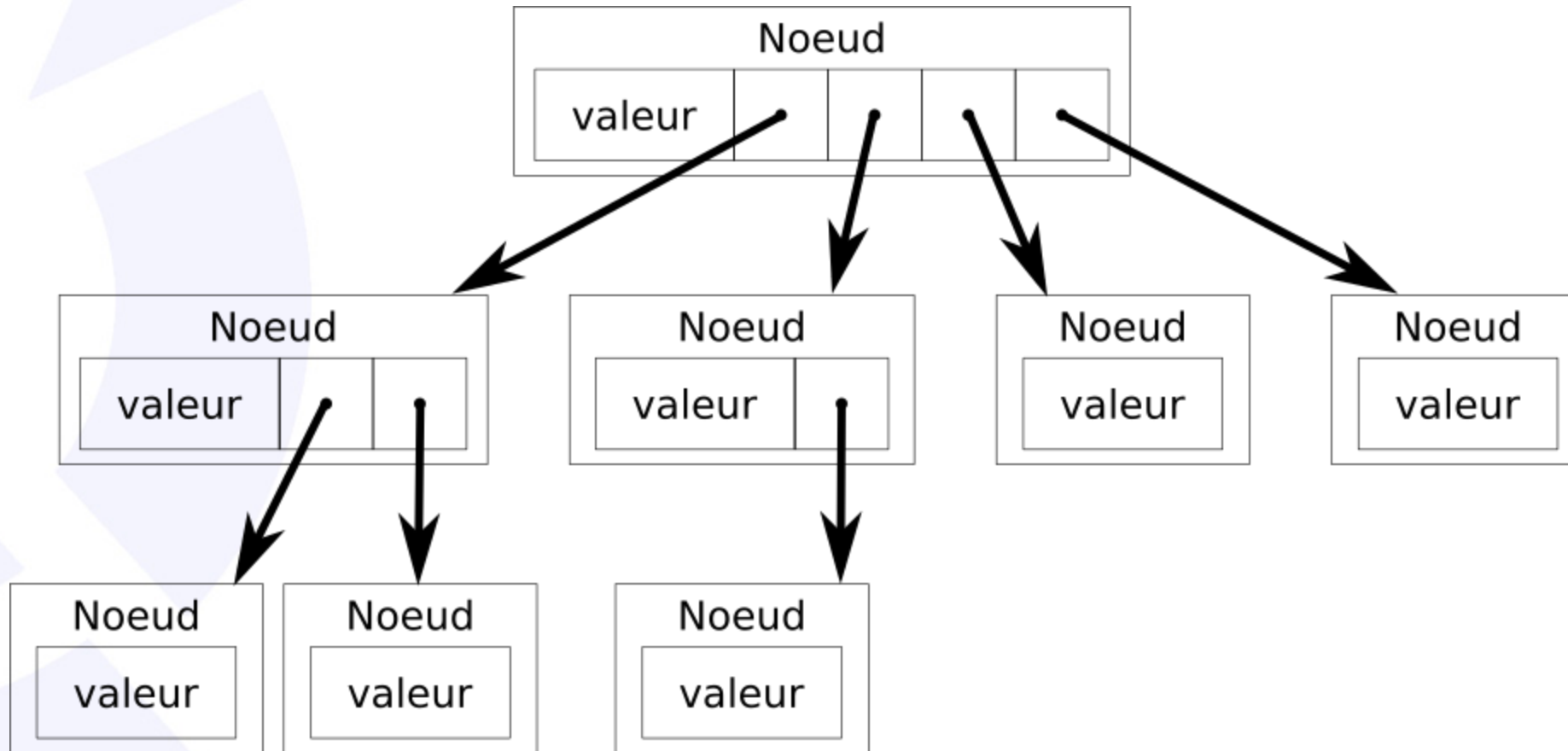
Dans un arbre rouge-noir, la recherche et l'insertion sont en $O(\log N)$.

Arbre de recherche N-aire

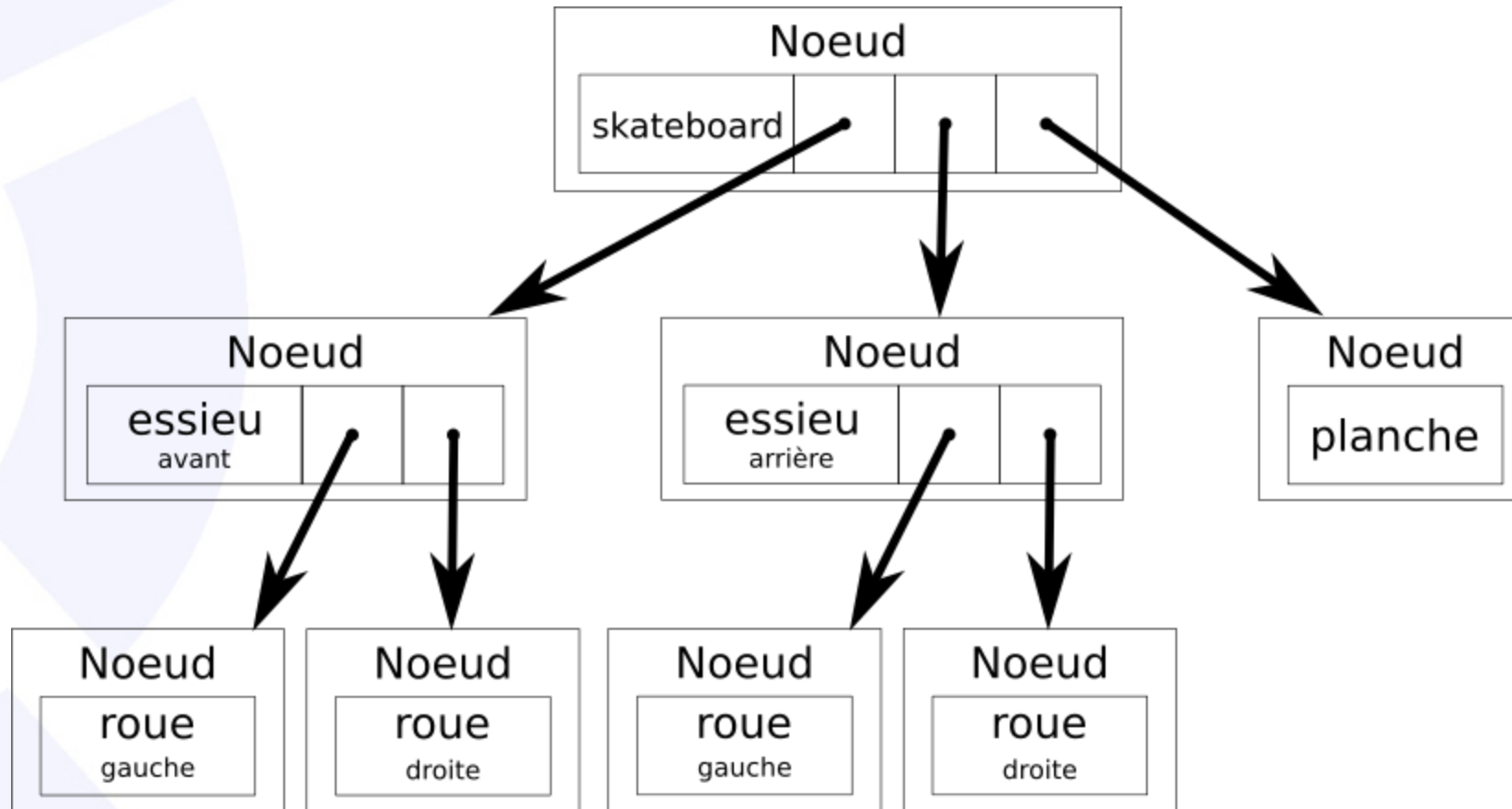
Généralisation

- Les arbres binaires ont de nombreuses propriétés intéressantes (complexité logarithmique).
- Toute hiérarchie ne peut être représentée avec un arbre binaire.
- Les arbres n-aires peuvent avoir n **descendants**.
- Les descendants peuvent être une `list`.

Illustration d'un arbre n-aire



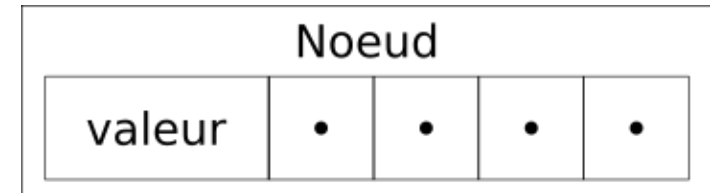
Exemple avec une structure produit



Structure de données

```
from dataclasses import dataclass, field
from typing import Any, List

@dataclass
class Noeud:
    """Noeud d'un arbre n-aire."""
    valeur: Any = None
    descendants: List = field(default_factory=list)
```



TP : Arbres binaires

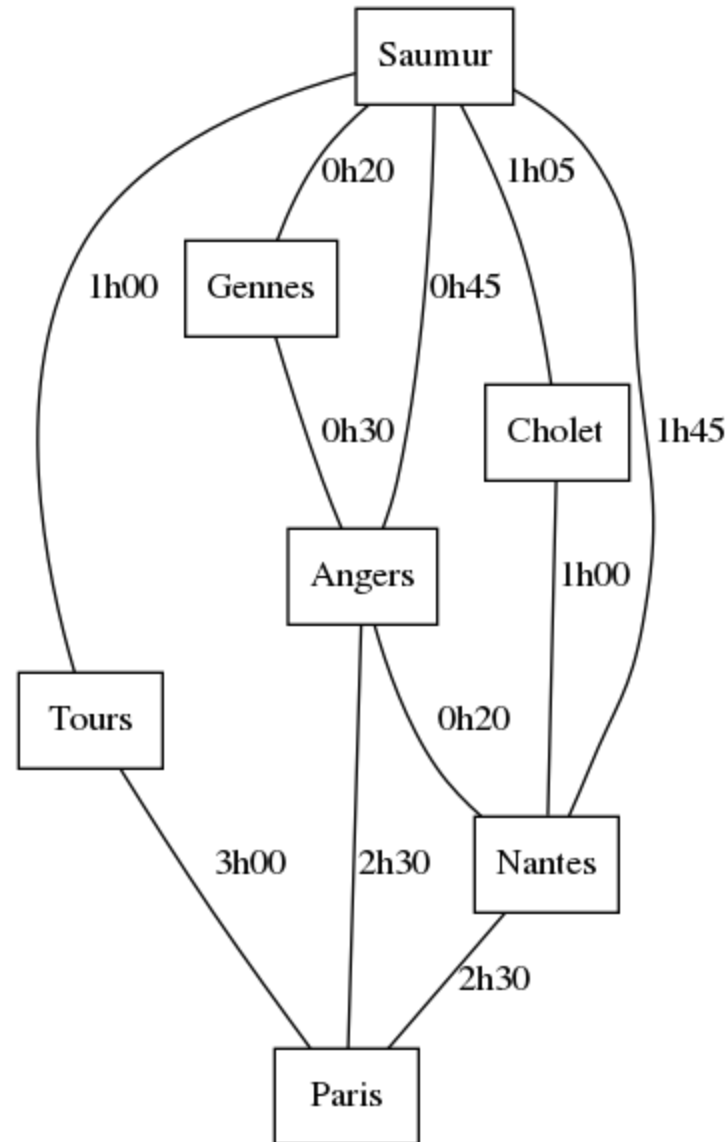


TP : Arbres binaires

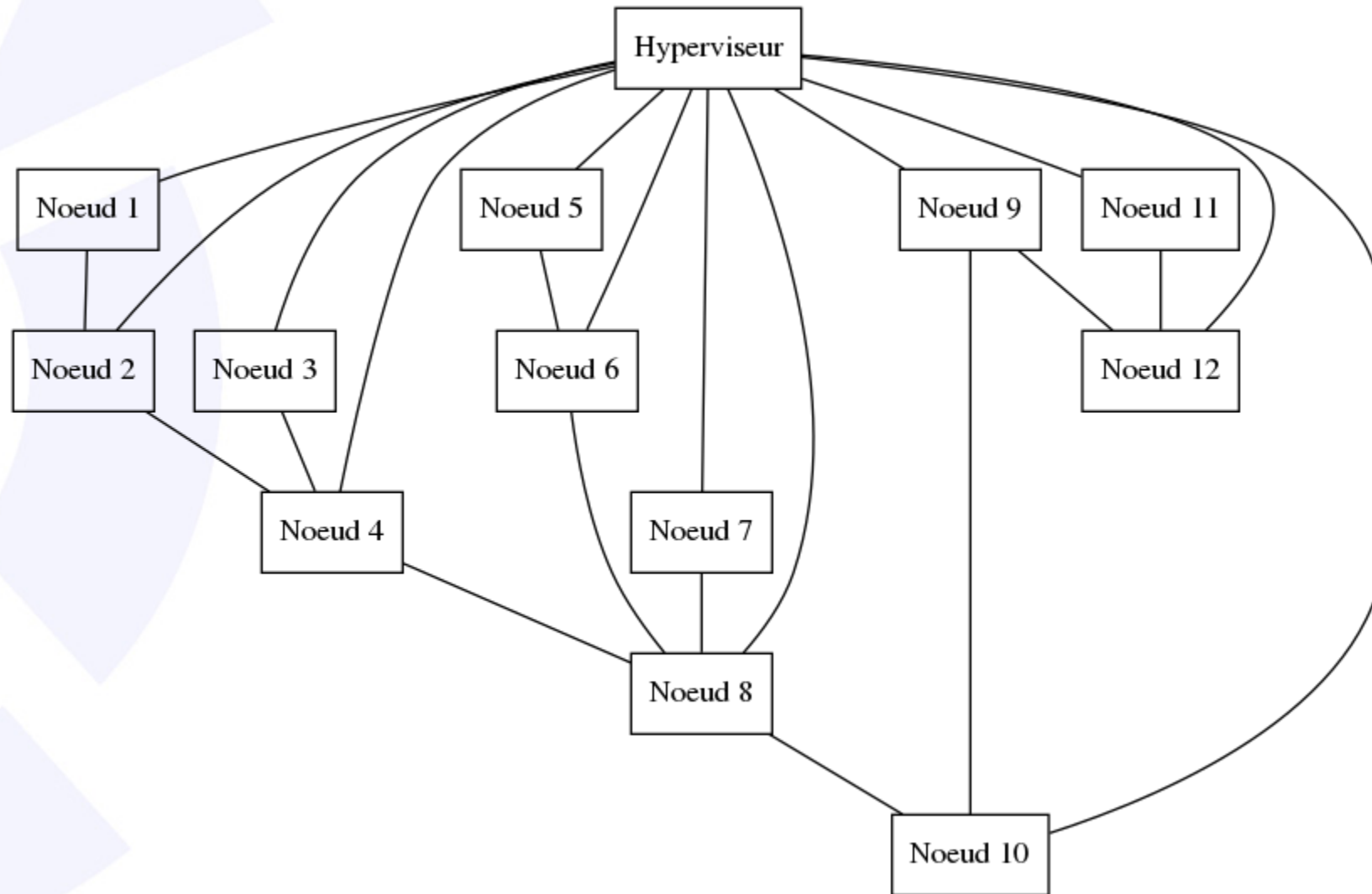
[Lien vers le sujet de TP.](#)

Discussion concernant les problèmes impliquant des graphes

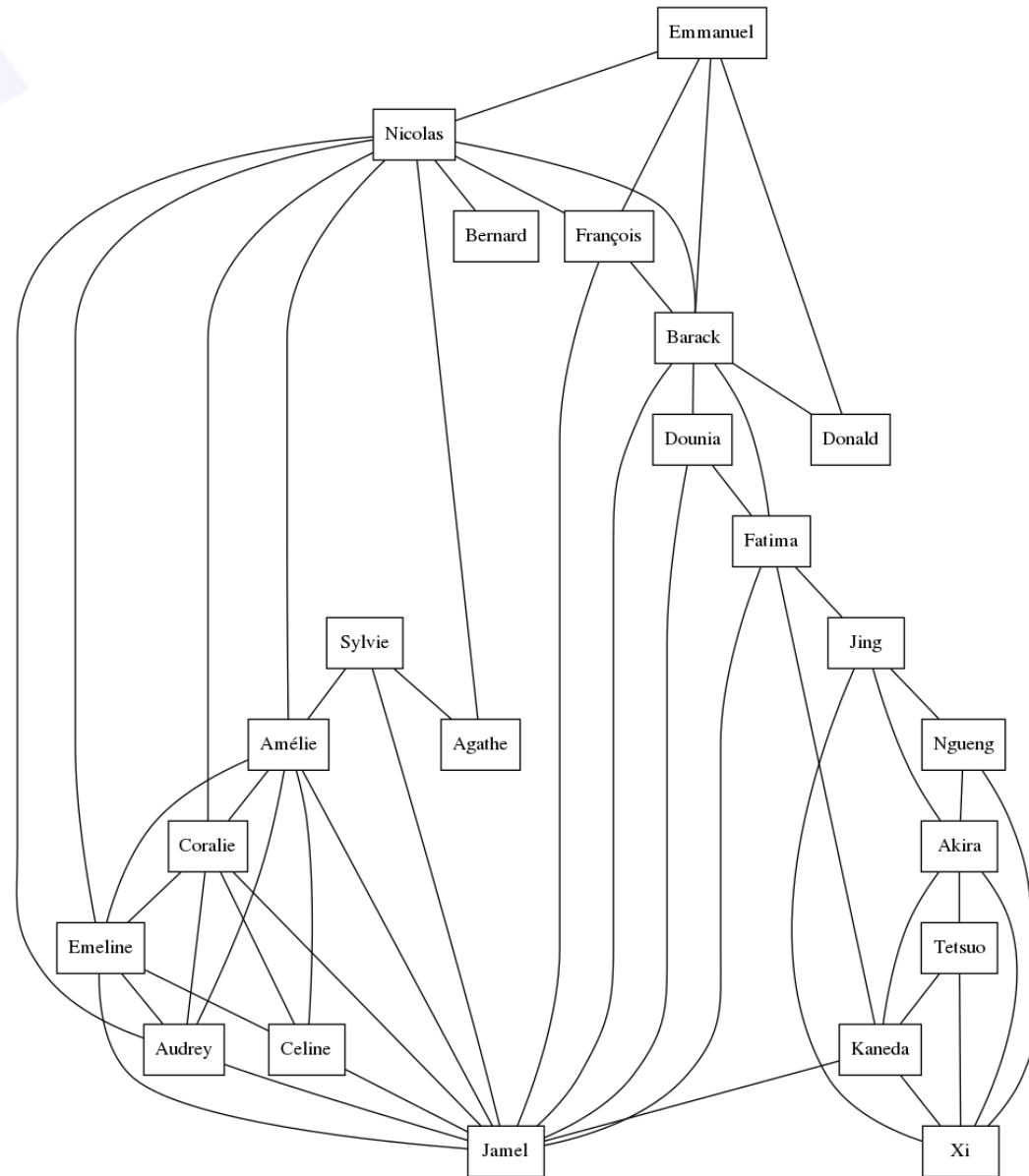
Trajet le plus rapide



Réseau



Réseau social



Introduction à la théorie des graphes



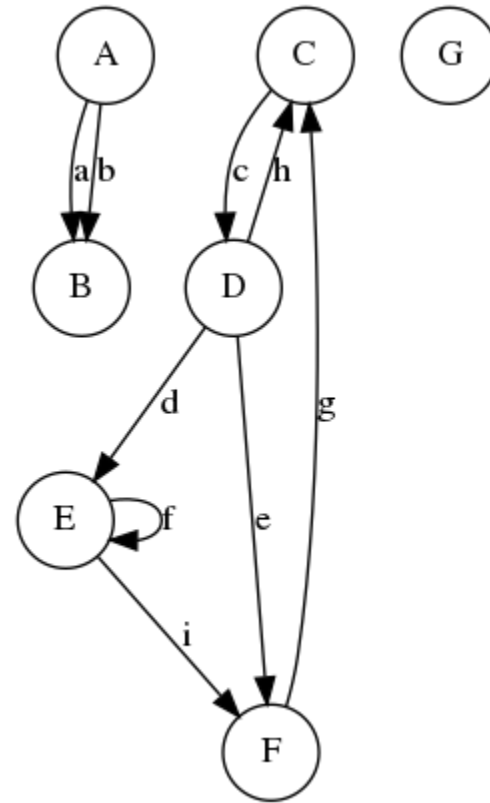
Graphe orienté (1/2)

- Un **graphe orienté** (*directed graph* ou *digraph* 🇬🇧) est caractérisé par :
 - un ensemble S de **sommets** (*vertices* ou *vertex* 🇬🇧).
 - un ensemble A d'**arcs** (*edges* 🇬🇧).


Graphe orienté (2/2)

- Chaque arc a une **origine** (*source* 🇬🇧) et un **but** (*target* 🇬🇧).
- On note $s \xrightarrow{a} t$, un arc a d'origine s et de but t .
- t est un **successeur** de s .
- s est un **prédécesseur** de t .

Exemple de graphe orienté



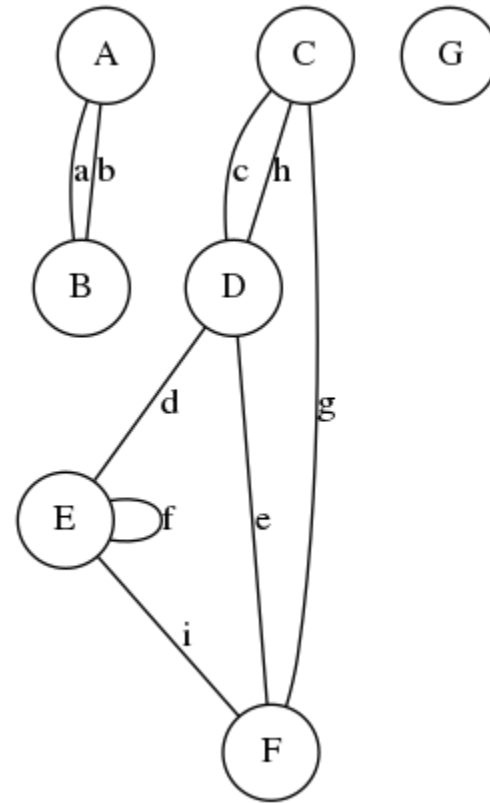
Graphe non-orienté (1/2)

- Un graphe **non-orienté** (*undirected graph* ) ou graphe **symétrique** est caractérisé par :
 - un ensemble S de **sommets**.
 - un ensemble A d'**arêtes**.

Graphe non-orienté (2/2)

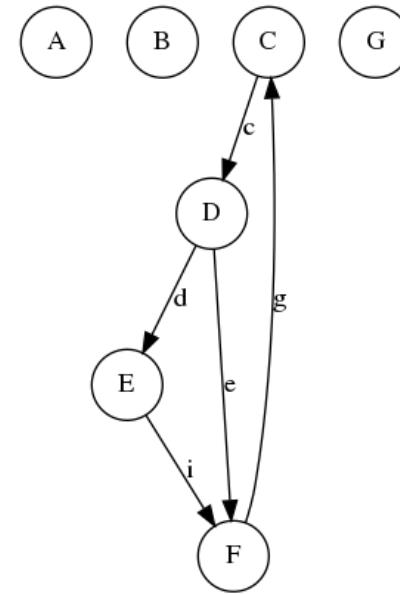
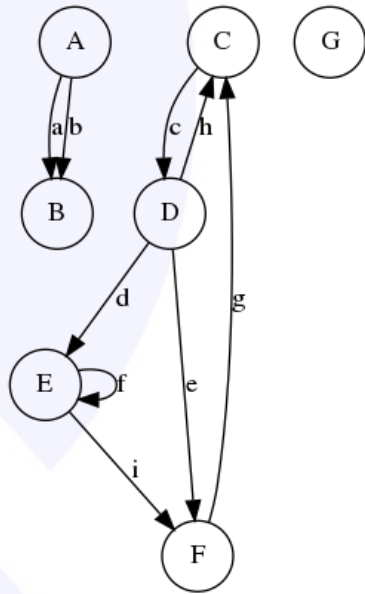
- Chaque arête a 2 **extrémités** (éventuellement confondues).
- Tout graphe orienté admet un graphe non-orienté **sous-jacent**.
- Le graphe sous-jacent est composé de l'ensemble des arêtes correspondant aux arcs du digraph.

Exemple de graphe non-orienté



Graphe partiel

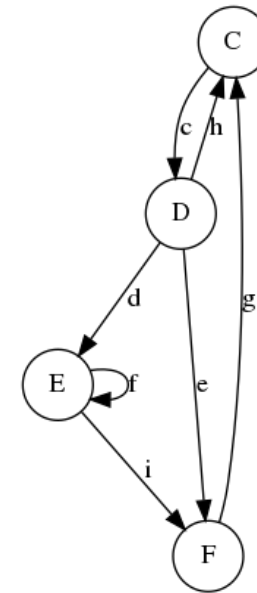
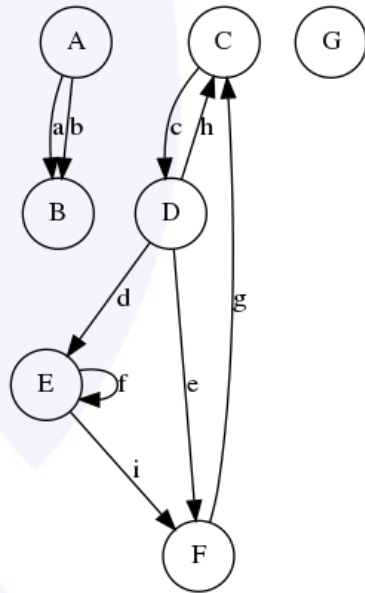
- On peut restreindre un graphe (orienté ou non) à une partie de ses arcs ou arêtes.
- Il s'agit d'un **graphe partiel**.



Graphe orienté G_0 G_1 : graphe partiel de G_0

Graphe induit

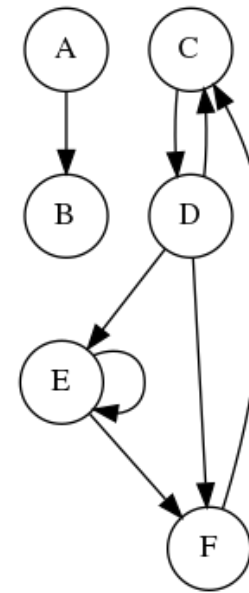
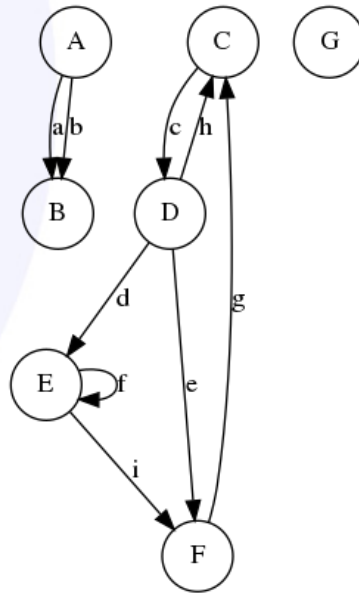
- On peut restreindre un graphe (orienté ou non) à une partie de ses sommets.
- Il s'agit d'un **graphe induit** (ou **sous-graphe**).



Graphe orienté G_0 G_2 : graphe induit de G_0

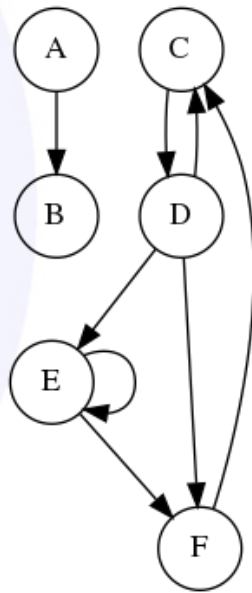
Graphe simple

- Un graphe est dit **simple** s'il existe au plus un arc (ou arête) entre une origine et un but.
- Dans ce cas, un arc (s, t) est noté $s \longrightarrow t$.

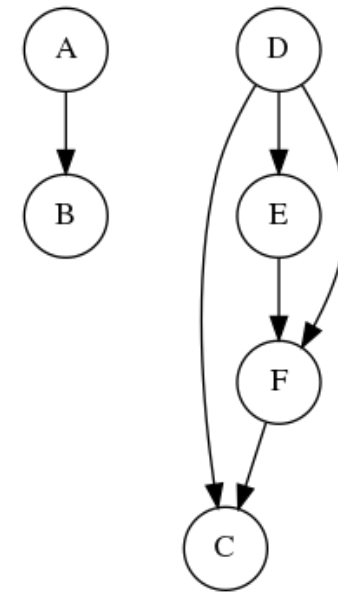


Graphe antisymétrique

- Un graphe orienté simple est dit **antisymétrique** si, pour tout arc $s \longrightarrow t$, il n'existe pas d'arc $t \longrightarrow s$.



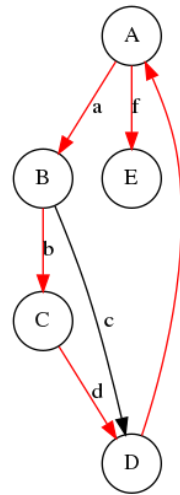
Graphe simple G_3 (non antisymétrique)



G_4 : graphe antisymétrique

Chemin

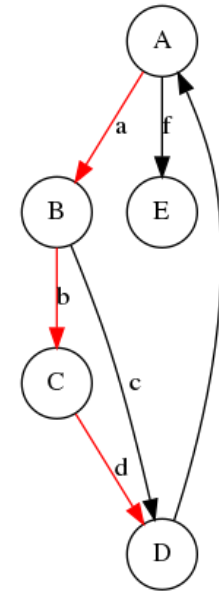
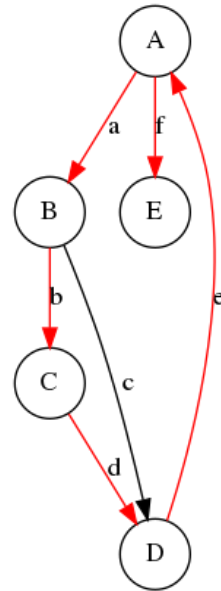
- Un **chemin** d'un graphe orienté est une suite d'arcs.
- L'origine d'un arc est le but de l'arc précédent.
- Le chemin $s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \cdots s_{n-1} \xrightarrow{a_n} s_n$ désigne un chemin d'**origine** s_0 , de **but** s_n et de longueur n .



Chemin $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{d} D \xrightarrow{e} A \xrightarrow{f} E$

Chemin simple

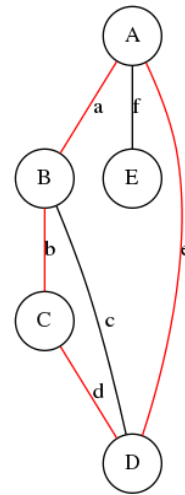
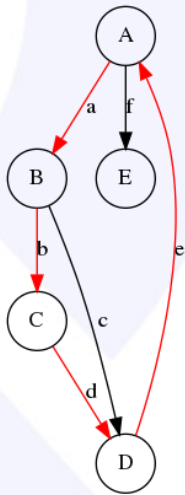
- Un **chemin simple** ne passe pas 2 fois par le même arc.



Chemin non simple Chemin simple

Cycle (ou circuit)

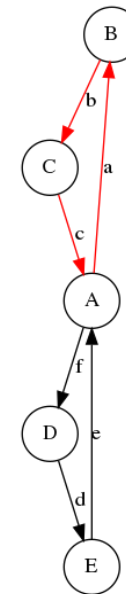
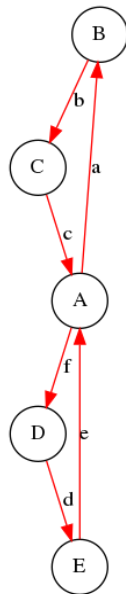
- Dans un graphe orienté, un **circuit** est un chemin dont l'origine et le but sont confondus.
- Dans un graphe non-orienté, un **cycle** est un chemin dont l'origine et le but sont confondus.



Circuit Cycle dans le graphe sous-jacent

Circuit élémentaire

- Un circuit est **élémentaire** s'il ne passe pas 2 fois par le même sommet (sauf l'origine et le but).

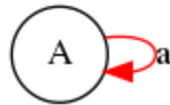


Circuit non élémentaire

Circuit élémentaire

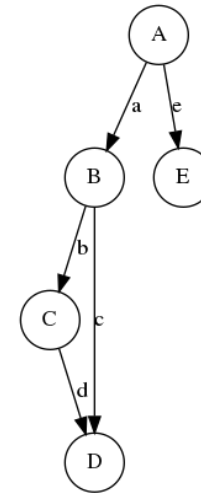
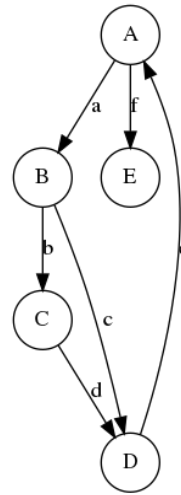
Boucle

- Une **boucle** est un circuit composé d'un seul arc.



DAG (Directed Acyclic Graph)

- Un **DAG** est un graphe orienté sans circuit.
- Ce type de graphe est courant.

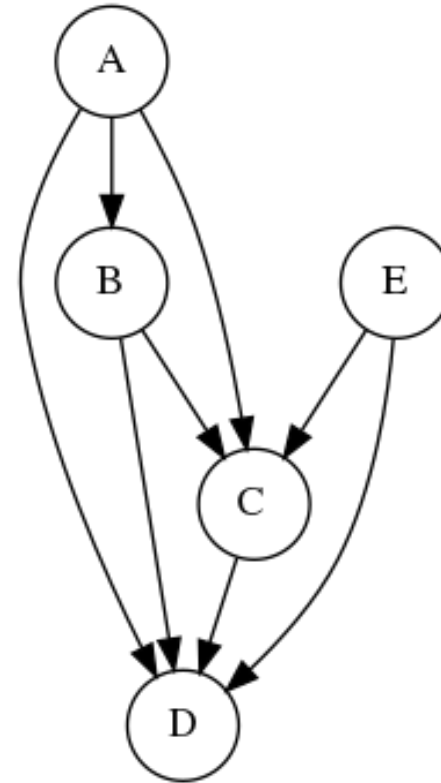
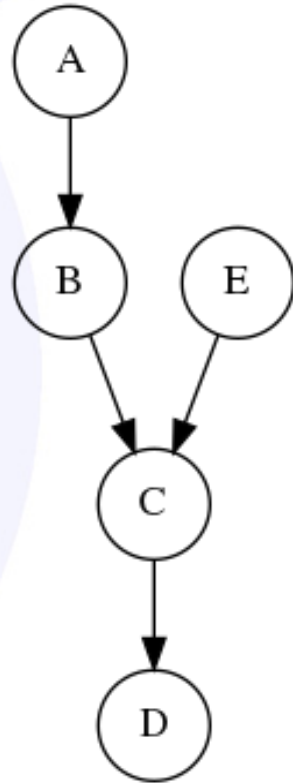


G_5 n'est pas un DAG DAG

Fermeture transitive - définition (1/2)

- La **fermeture transitive** (ou clôture transitive) d'un graphe simple G comporte les sommets et les arcs de G . On y ajoute d'autres arcs.
- Pour tout couple de sommets s et t de G , s'il existe un chemin entre s et t mais pas d'arc $s \longrightarrow t$, alors on ajoute l'arc $s \longrightarrow t$.

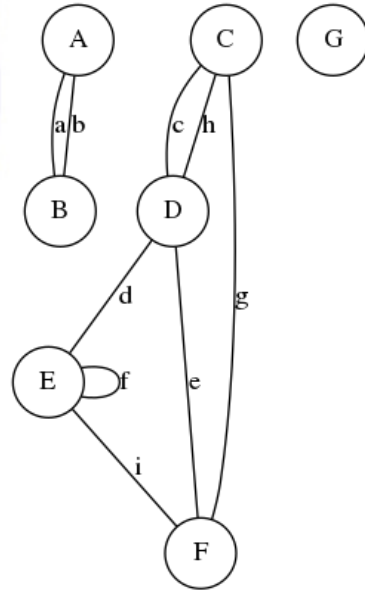
Fermeture transitive - exemple (2/2)



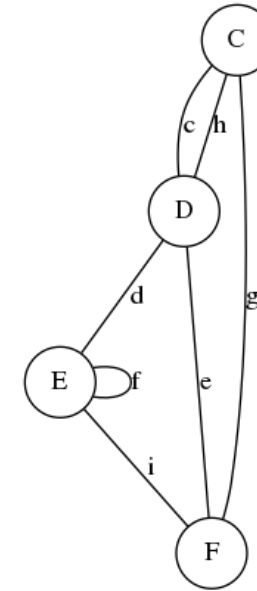
Graphe simple Fermeture transitive

Graphe connexe

- Un graphe non-orienté est **connexe** s'il existe un chemin entre chaque couple de sommets de ce graphe.



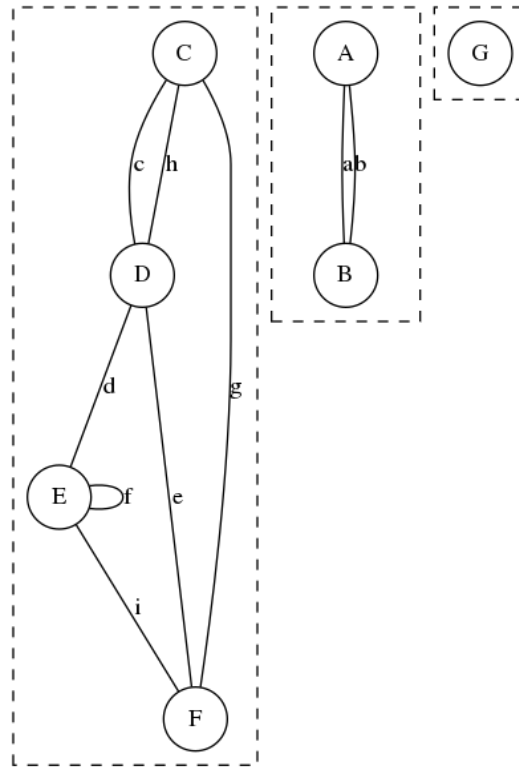
Graphe non connexe



Graphe connexe

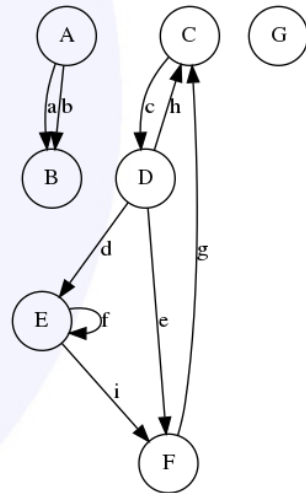
Composante connexe

- La **composante connexe** d'un sommet s est l'ensemble des sommets qui lui sont reliés.

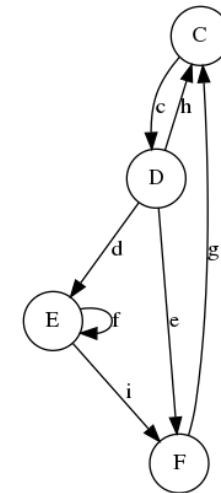


Graphe fortement connexe

- Un graphe orienté est **fortement connexe** s'il existe un chemin entre chaque couple de sommets de ce graphe.



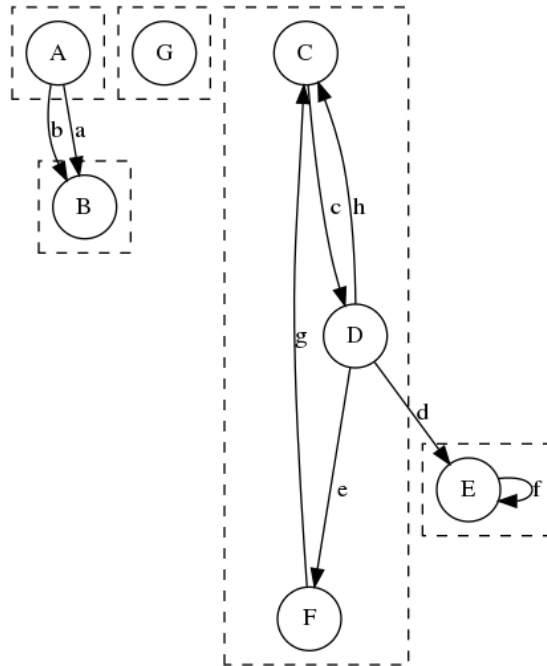
Graphe non fortement
connexe



Graphe fortement
connexe

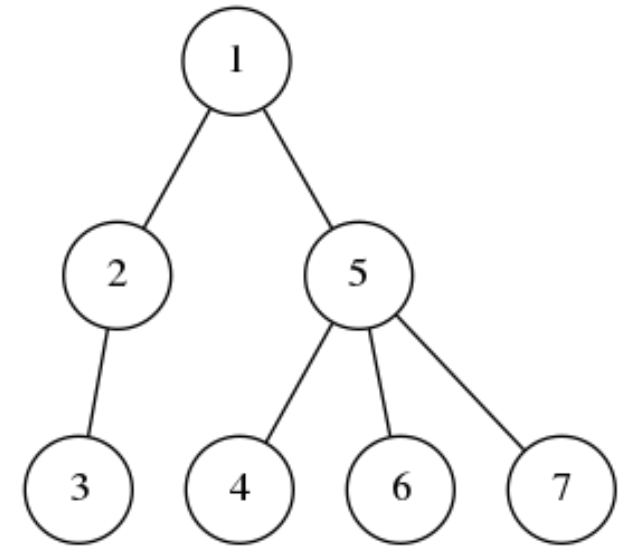
Composante fortement connexe

- La **composante fortement connexe** d'un sommet s est l'ensemble des sommets t tels qu'il existe un chemin de s à t , et un chemin de t à s .



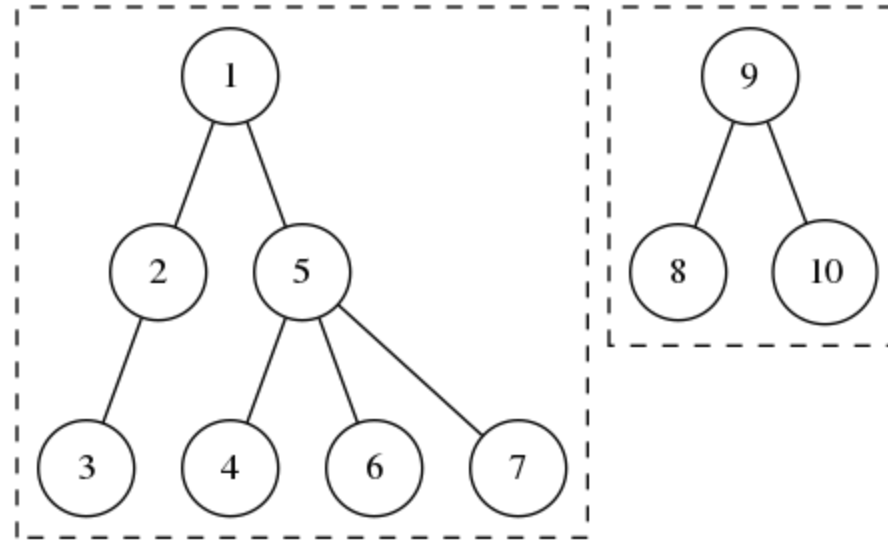
Arbre

- En théorie des graphes, un **arbre** est un graphe non-orienté simple, connexe et sans cycle.
- Deux sommets quelconques ne sont reliés que par un unique chemin.
- Le nombre d'arcs est relié au nombre de sommets par la relation : $|A| = |S| - 1$.



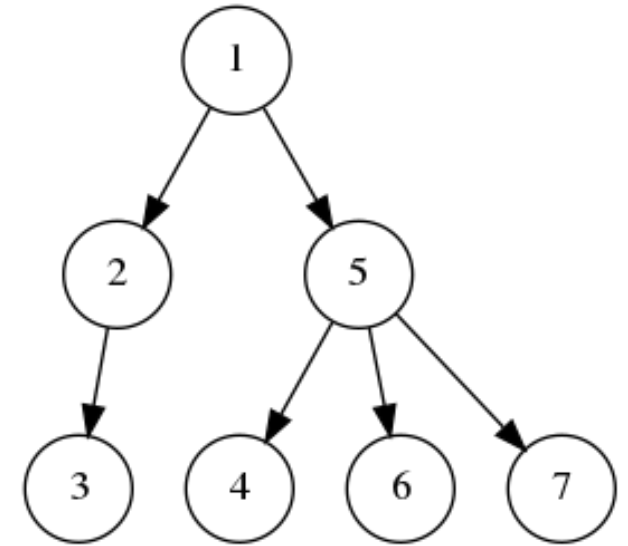
Forêt

- Une forêt est un graphe non-orienté dont les composantes connexes sont des arbres.



Arborescence

- Une **arborescence** est un graphe orienté possédant un sommet privilégié, la **racine**.
- Il existe un unique chemin de la racine à tout autre sommet.
- La racine n'a pas de prédécesseur.
- Tout autre sommet a un unique prédécesseur : son **parent**.



Représentations des graphes

Plusieurs représentations

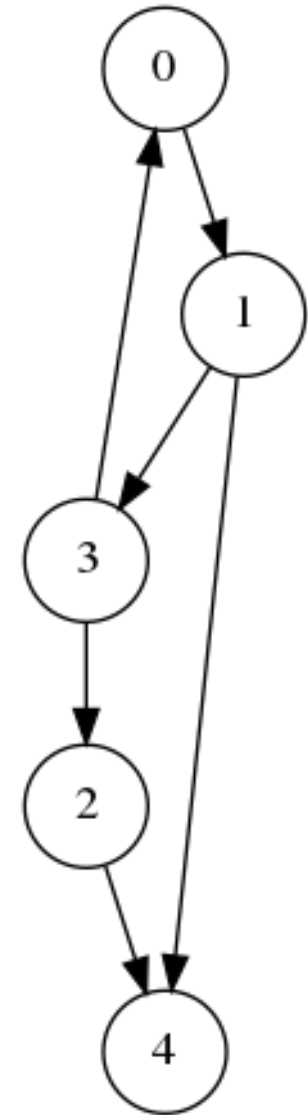
- Il existe **plusieurs manières** de représenter un graphe en informatique.
- Chaque représentation a des **avantages** et des **inconconvénients**.
- Un type de représentation **ne convient pas** à tous les types de graphes.

Liste de listes d'arcs (1/4)

- Le graphe orienté peut être caractérisé par une **liste de sommets**.
- Chaque sommet est caractérisé par une **liste d'arcs** et une éventuelle étiquette.

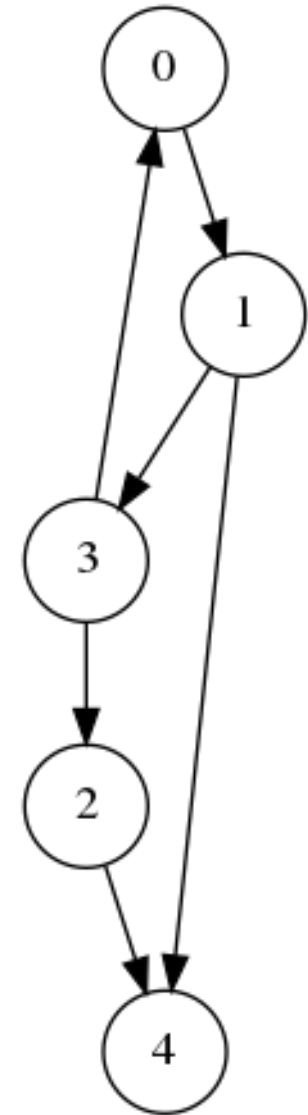
Liste de listes d'arcs (2/4)

- sommet 0 : $0 \longrightarrow 1$
- sommet 1 : $1 \longrightarrow 3$, $1 \longrightarrow 4$
- sommet 2 : $2 \longrightarrow 4$
- sommet 3 : $3 \longrightarrow 0$, $3 \longrightarrow 2$
- sommet 4 : \emptyset



Liste de listes d'arcs (3/4)

```
G = [  
  [1],           # 0 -> 1  
  [3, 4],        # 1 -> 3, 1 -> 4  
  [4],           # 2 -> 4  
  [0, 2],        # 3 -> 0, 3 -> 2  
  []             # aucun  
]
```



Liste de listes d'arcs (4/4)

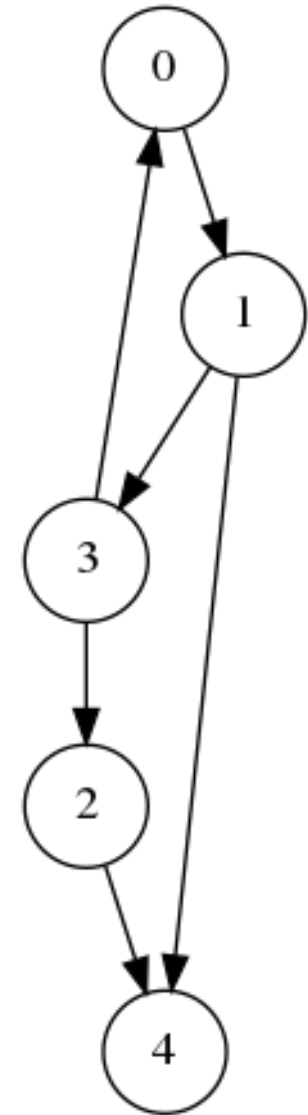
- Il est possible également de représenter un **graphe non-orienté** en dupliquant les arcs pour former les arêtes.
- **Avantages** : simplicité de mise à jour et de parcours.
- **Inconvénients** : difficulté d'obtention de la liste des prédécesseurs sans dupliquer les arcs (pour avoir les arcs "retour").

Matrice d'adjacence (1/6)

- Un graphe simple à n sommets numérotés peut être représenté par une **matrice carrée** $M_{n,n}$ d'entiers.
- L'élément $M[i][j]$ vaut 1 si l'arc $i \longrightarrow j$ existe, et 0 sinon.

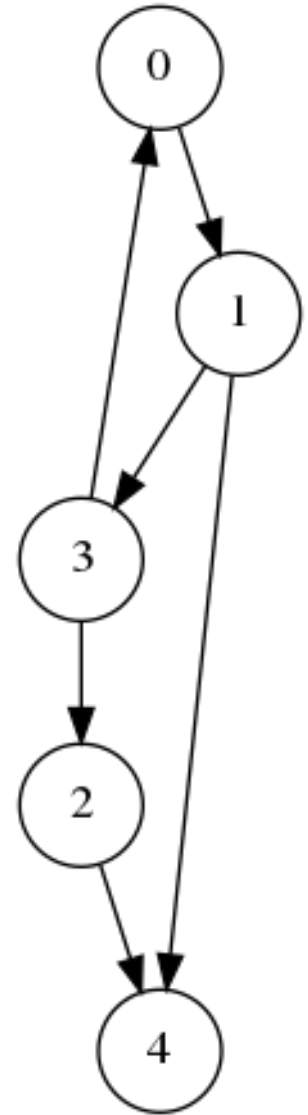
Matrice d'adjacence (2/6)

| sommets | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|---|---|---|---|---|
| sommet 0 : | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| sommet 1 : | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| sommet 2 : | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| sommet 3 : | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| sommet 4 : | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |



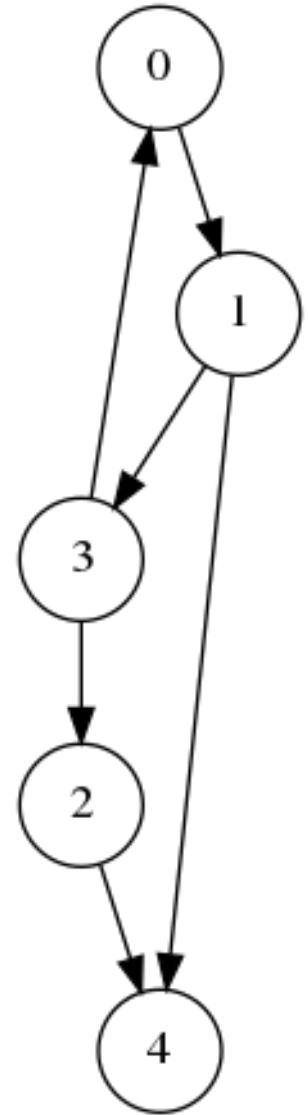
Matrice d'adjacence (3/6)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrice d'adjacence (4/6)

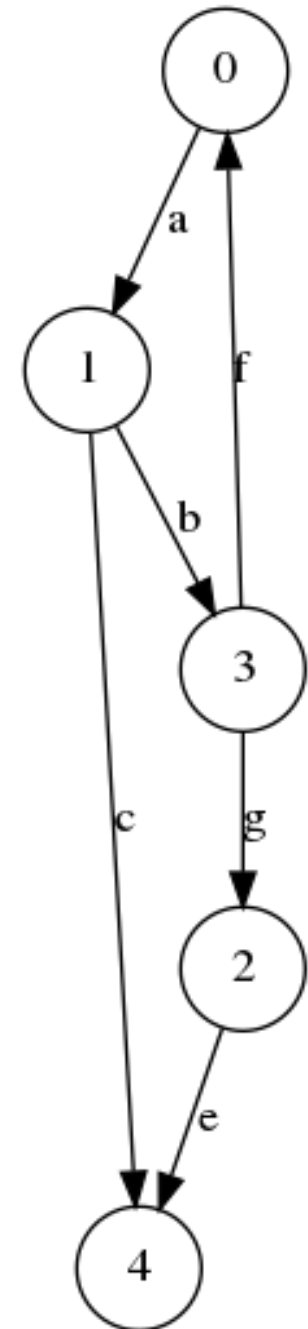
```
M = [
  [0, 1, 0, 0, 0],
  [0, 0, 0, 1, 1],
  [0, 0, 0, 0, 1],
  [1, 0, 1, 0, 0],
  [0, 0, 0, 0, 0]
]
```



Matrice d'adjacence (5/6)

- Si les arcs sont étiquetés, on peut utiliser ce type de représentation :

```
M = [
  [None, "a", None, None, None],
  [None, None, None, "b", "c"],
  [None, None, None, None, "e"],
  ["f", None, "g", None, None],
  [None, None, None, None, None]
]
```



Matrice d'adjacence (6/6)

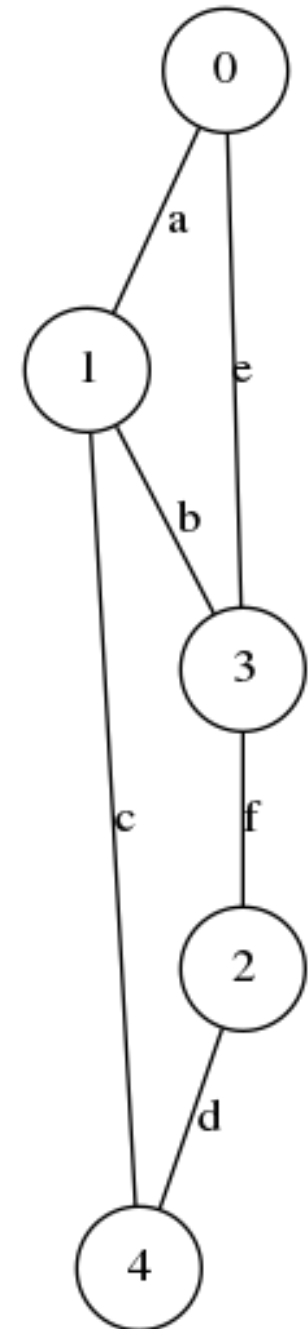
- **Avantages** : représentation compacte, rapidité des recherches (notamment des prédécesseurs) et simplicité des algorithmes de calcul.
- **Inconvénients** : nombreux zéros dans la matrice (information "inutile"), redondance des informations pour les graphes non-orientés, ne convient que pour les graphes simples.

Matrice d'incidence (1/5)

- Un graphe non-orienté à n sommets numérotés et p arêtes numérotées peut être représenté par une **matrice carrée** $M_{n,p}$ d'entiers.
- L'élément $M[i][j]$ vaut 1 si le sommet i est l'une des 2 extrémités de l'arête j , et 0 sinon.
- Une colonne de cette matrice comporte donc toujours deux éléments à 1 : les 2 extrémités de l'arête.

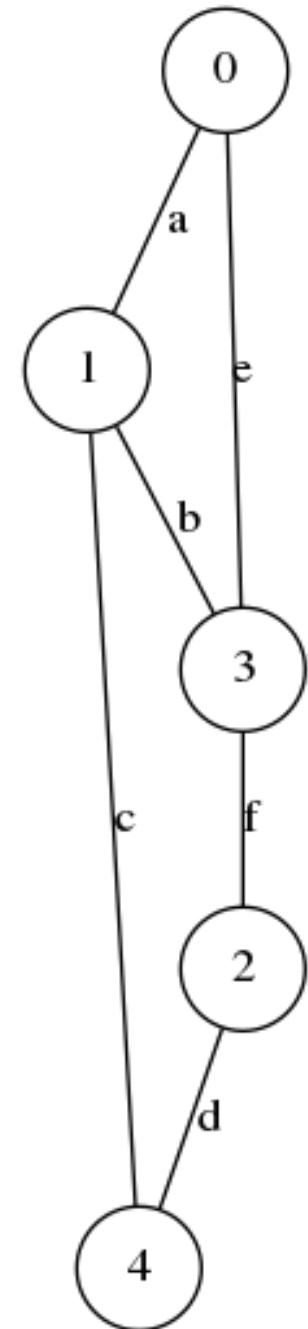
Matrice d'incidence (2/5)

| arêtes | a | b | c | d | e | f |
|------------|---|---|---|---|---|---|
| sommet 0 : | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| sommet 1 : | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| sommet 2 : | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| sommet 3 : | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| sommet 4 : | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |



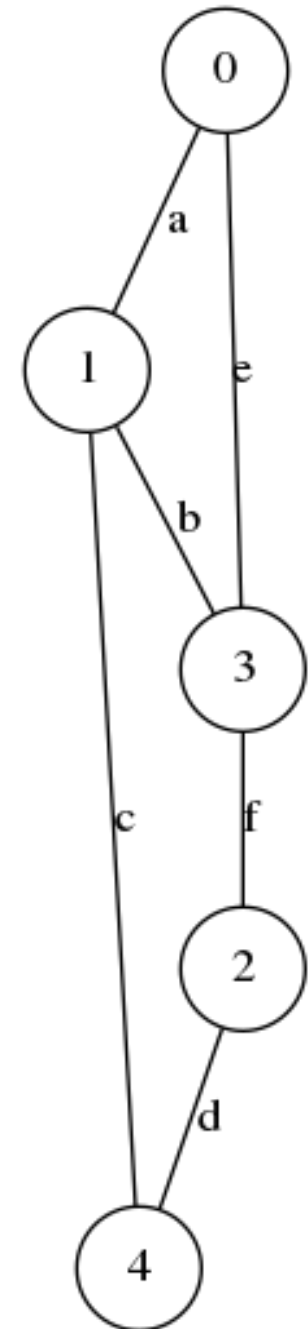
Matrice d'incidence (3/5)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrice d'incidence (4/5)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Matrice d'incidence (5/5)

- **Avantages** : informations non redondantes pour les graphes non-orientés, représentation compacte, rapidité des recherches.
- **Inconvénients** : nombreux zéros dans la matrice (information "inutile"), certaines opérations matricielles ne s'appliquent pas.

Parcours en profondeur

Depth-First Search 


Intérêt

- Tous les algorithmes d'analyse de graphes ont besoin de parcourir les graphes.
- Les algorithmes de parcours constituent le socle de ces algorithmes plus avancés.

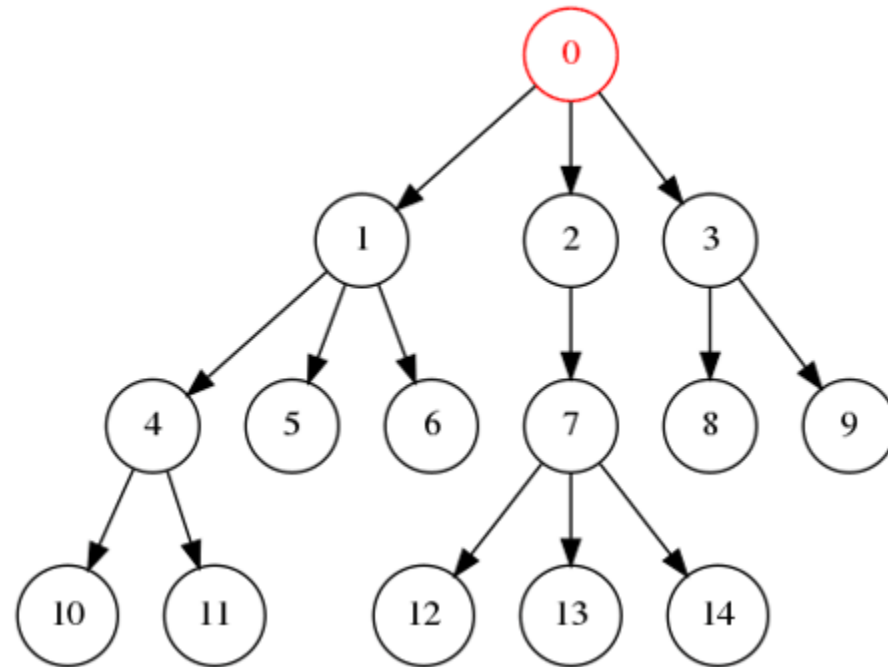
Principe

- On parcourt chaque sommet du graphe.
- Les ordres de parcours dépendent de l'ordre des sommets et de l'ordre des successeurs de chaque sommet.
- Il existe 2 algorithmes principaux de parcours d'un graphe :
 - le parcours en profondeur,
 - le parcours en largeur.

Parcours en profondeur

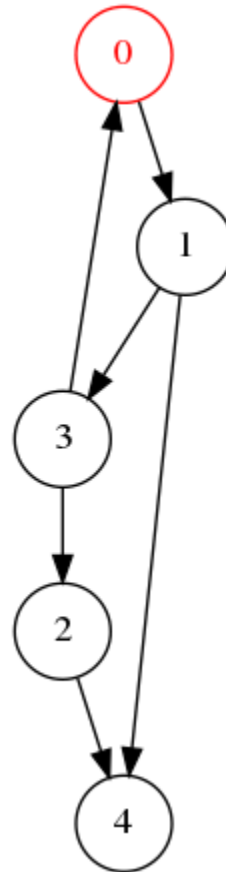
- Le **parcours en profondeur** (**DFS** - Depth-First Search ) consiste à aller aussi profondément que possible dans le graphe à chaque étape.
- On visite le 1er successeur du 1er sommet, puis son 1er successeur, puis son 1er successeur, etc.
- On remonte ensuite la chaîne pour visiter le 2e successeur du dernier sommet visité, puis le 1er successeur de ce nouveau sommet, etc.

Exemple avec une arborescence



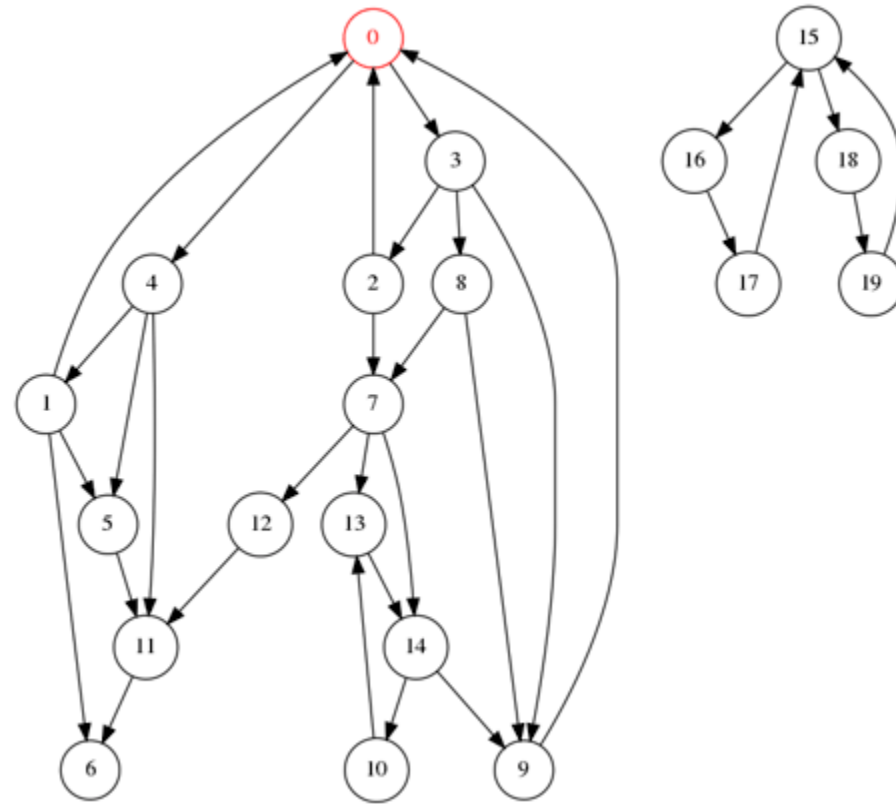
Ordre de visite : 0, 1, 4, 10, 11, 5, 6, 2, 7, 12, 13, 14,
3, 8, 9.

Exemple avec un graphe simple



Ordre de visite : 0, 1, 3, 2, 4.

Exemple avec un graphe non-connexe



Ordre de visite : 0, 3, 2, 7, 12, 11, 6, 13, 14, 9, 10, 8, 4, 1, 5, 11, 15, 16, 17, 18, 19.

Algorithme DFS (récursif)

```
def parcours_en_profondeur(m, f):  
    """Applique la fonction f à chaque sommet du graphe.  
  
    m - matrice d'adjacence.  
    f - fonction prenant un sommet en argument.  
    """  
    def parcours_successeurs(m, s, f, marque):  
        """Traitement récursif."""  
        if s not in marque:  
            marque.append(s)  
            f(s)  
            suivants = successeurs(m, s)  
            for suivant in suivants:  
                parcours_successeurs(m, suivant, f, marque)  
  
    marque = []  
    for s in range(len(m)):  
        parcours_successeurs(m, s, f, marque)
```

Complexité

- Chaque sommet est visité.
- Or, les sommets déjà visités sont marqués pour ne pas être traités à nouveau.
- Donc chaque sommet est visité exactement 1 fois.
- Chaque arc d'origine est visité 1 fois.
- Dans le pire cas, le nombre maximal d'opérations sera limité soit par le nombre de sommets, soit par le nombre d'arcs.
- La complexité est donc $O(|A| + |S|)$, où $|A|$ est le nombre d'arc et $|S|$ est le nombre de sommets.

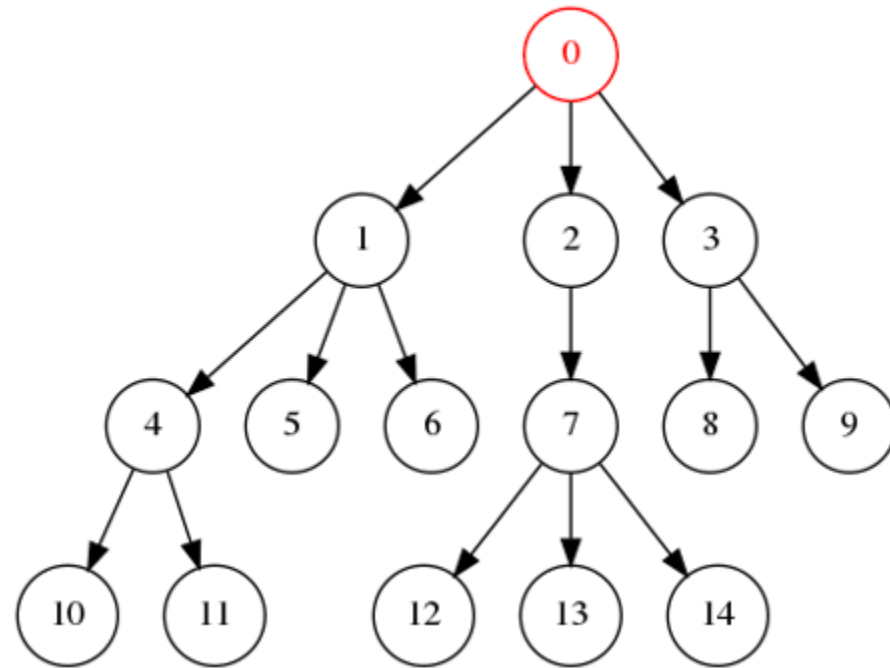
Parcours en largeur

Breadth-First Search 

Parcours en largeur

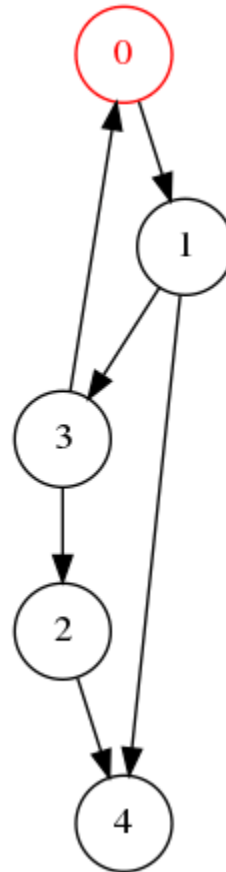
- Le **parcours en largeur** (**BFS** - Breath-First Search) consiste à visiter d'abord tous les successeurs directs.
- Une fois que tous les successeurs directs ont été visités, on passe aux successeurs du 1er successeur, etc.

Exemple avec une arborescence



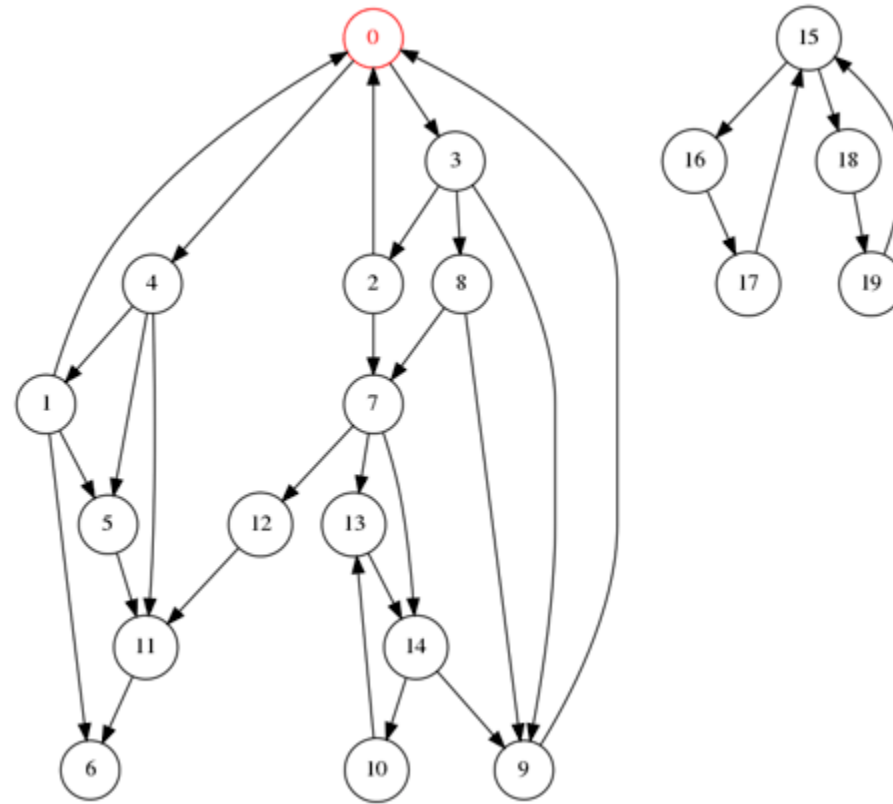
Ordre de visite : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

Exemple avec un graphe simple



Ordre de visite : 0, 1, 3, 4, 2.

Exemple avec un graphe non-connexe



Ordre de visite : 0, 3, 4, 2, 8, 9, 1, 5, 11, 7, 6, 12, 13, 14, 10, 15, 16, 18, 17, 19.

Algorithme BFS

```
def parcours_en_largeur(m, f):  
    """Applique la fonction f à chaque sommet du graphe.  
  
    m - matrice d'adjacence.  
    f - fonction prenant un sommet en argument.  
    """  
    marque = [] # On ne souhaite pas traiter plusieurs fois un sommet  
    queue = [] # On utilise une queue pour traiter d'abord les plus proches  
    for s in range(len(m)): # Visite chaque sommet pour les graphes non-connexes  
        if s not in marque: # Evite de traiter 2 fois un sommet  
            marque.append(s) # Marque le sommet courant à traiter  
            queue.append(s) # Empile dans la queue des sommets à traiter  
            while len(queue) != 0: # Tant que la queue est non vide  
                s_i = queue.pop(0) # On prend le 1er sommet  
                f(s_i) # On traite s_i  
                suivants = successeurs(m, s_i) # On prend les successeurs  
                for suivant in suivants: # On parcourt les successeurs  
                    if suivant not in marque: # Les successeurs non marqués  
                        marque.append(suivant) # sont marqués  
                        queue.append(suivant) # et empilés.
```

Complexité

- On parcourt chaque sommet exactement une fois.
- La complexité est en $O(|A| + |S|)$, où $|A|$ est le nombre d'arc et $|S|$ est le nombre de sommets.

Identification d'un cycle

Intérêt

- De nombreux algorithmes ne fonctionnent qu'avec des graphes acycliques.
- Il faut donc pouvoir identifier si un cycle existe avant d'utiliser de tels algorithmes.

Principe

- Pour identifier un cycle, on peut utiliser le parcours en profondeur.
- On ajoute un argument à la fonction récursive pour identifier le chemin courant.
- Si on cherche à revisiter un sommet dans ce chemin, on a identifié un cycle.
- Il ne reste plus qu'à retourner ce cycle.

Algorithme

```
def recherche_cycle_en_profondeur(m, s, marque, chemin):  
    """Recherche en profondeur un cycle.  
  
    m - matrice d'adjacence.  
    s - sommet à visiter.  
    marque - liste de sommets marqués.  
    chemin - chemin jusqu'à s.  
    """  
  
    cs = chemin + [s]          # On construit le nouveau chemin cs  
    if s in chemin:            # Si un cycle est identifié dans le chemin,  
        return cs              # on le renvoie.  
    if s not in marque:        # Parcours en profondeur  
        marque.append(s)        # On marque le sommet s  
        suivants = successeurs(m, s) # On prend les successeurs de s  
        for suivant in suivants:    # On vérifie les sous-chemins  
            cycle = recherche_cycle_en_profondeur(m, suivant, marque, cs)  
            if cycle != None:        # Si un cycle a été identifié dans  
                return cycle         # un sous-chemin, on le renvoie.  
    return None # Pas de cycle identifié
```

Interface

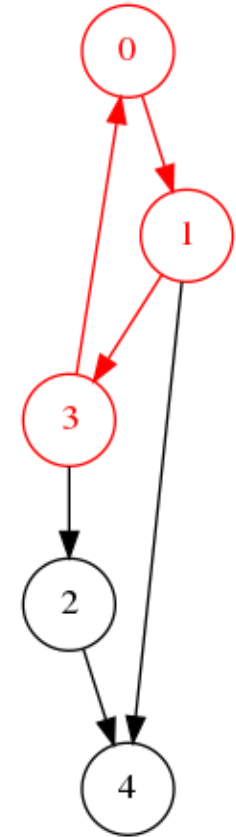
```
def identifie_cycle(m):  
    """Retourne le premier cycle identifié ou None."""  
    marque = []  
    for s in range(len(m)):  
        cycle = identifie_cycle_dans_chemin(m, s, marque, [])  
        if cycle != None:  
            return cycle  
  
    return None
```


Example

```
cycle = identify_cycle(G)  
print(cycle)
```



```
[0, 1, 3, 0]
```



Complexité

- La complexité est la même que pour le parcours en profondeur : $O(|A| + |S|)$.

Graphe pondéré : représentation

Principe

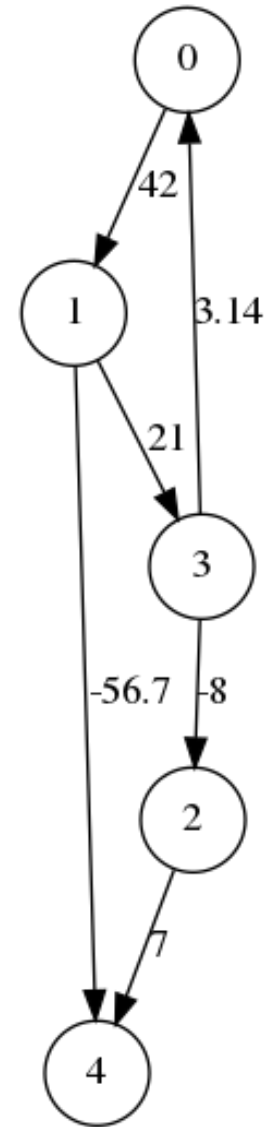
- On associe un **poids** à chaque arc ou arête.
- Le poids est un **nombre flottant**.
- Le poids peut donc être positif ou négatif.
- *Exemple* :
 - un sommet peut représenter une ville,
 - une arête pondérée peut représenter le temps de trajet entre ces villes.

Liste de listes de listes (1/3)

- Pour un graphe non-pondéré, on pouvait utiliser une liste de listes.
- Chaque sous-liste représente les successeurs d'un sommet.
- Pour ajouter les poids, on ajoute une dimension.
- On obtient la hiérarchie suivante :
 - liste de sommets
 - liste de successeurs
 - liste des labels et poids

Liste de listes de listes (2/3)

```
G = [  
  [ # 0 -> 1 (poids = 42)  
    [1, 42]  
  ],  
  [ # 1 -> 3 (poids = 21), 1 -> 4 (poids = -56.7)  
    [3, 21],  
    [4, -56.7]  
  ],  
  [ # 2 -> 4 (poids = 7)  
    [4, 7]  
  ],  
  [ # 3 -> 0 (poids = 3.14), 3 -> 2 (poids = -8)  
    [0, 3.14],  
    [2, -8]  
  ],  
  [] # aucun  
]
```



Liste de listes de listes (3/3)

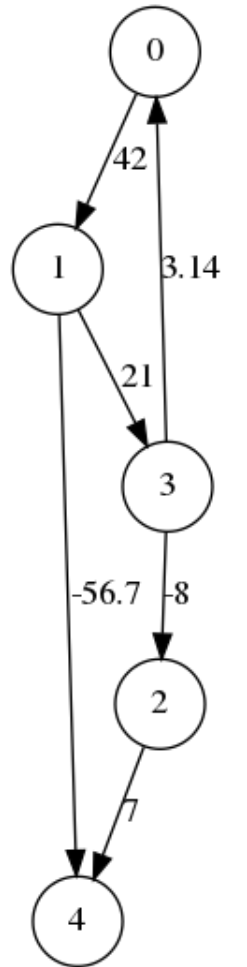
- **Avantages** : évolution simple d'une représentation non-pondérée.
- **Inconvénient** : mêmes inconvénients qu'avec une liste de listes, plus difficile à comprendre et à maintenir.

Matrice d'adjacence (1/5)

- On peut représenter un graphe orienté valué à n sommets avec une matrice carrée $M_{n,n}$ telle que $M[i][j]$ a pour valeur le poids de l'arc $i \longrightarrow j$ si cet arc existe, ou $+\infty$ sinon.

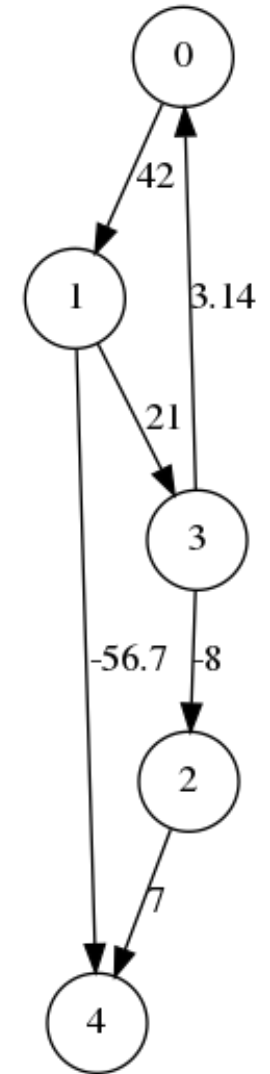
Matrice d'adjacence (2/5)

| sommets | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| sommet 0 : | $+\infty$ | 42 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| sommet 1 : | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 21 | -56.7 |
| sommet 2 : | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 7 |
| sommet 3 : | 3.14 | $+\infty$ | -8 | $+\infty$ | $+\infty$ |
| sommet 4 : | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |



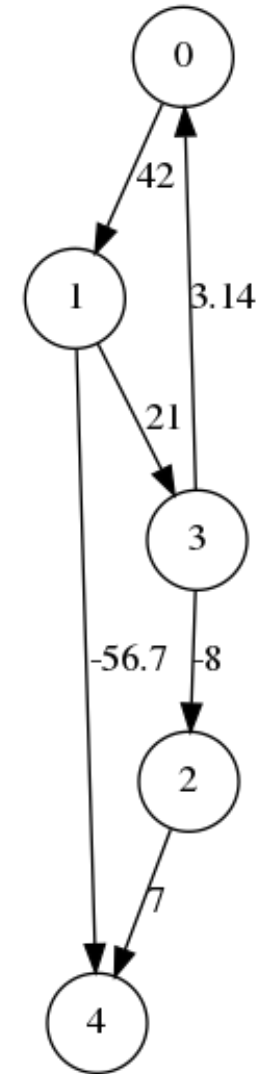
Matrice d'adjacence (3/5)

$$M = \begin{pmatrix} +\infty & 42 & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 21 & -56.7 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 7 \\ 3.14 & +\infty & -8 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}$$



Matrice d'adjacence (4/5)

```
M = [  
  [None, 42, None, None, None],  
  [None, None, None, 21, -56.7],  
  [None, None, None, None, 7],  
  [3.14, None, -8, None, None],  
  [None, None, None, None, None]  
]
```



Matrice d'adjacence (5/5)

- **Avantages** : mêmes avantages qu'une matrice d'adjacence non-pondérée.
- **Inconvénients** : mêmes inconvénients qu'une matrice d'adjacence non-pondérée (mais pas d'inconvénient supplémentaire contrairement à la liste de listes de listes).

Structures de données (1/3)

```
@dataclass
class Sommet:
    """Sommet d'un graphe."""
    label: int = 0

@dataclass
class Arc:
    """Arc d'un graphe orienté"""
    origine: int = 0
    but: int = 0
    poids: float = 0.

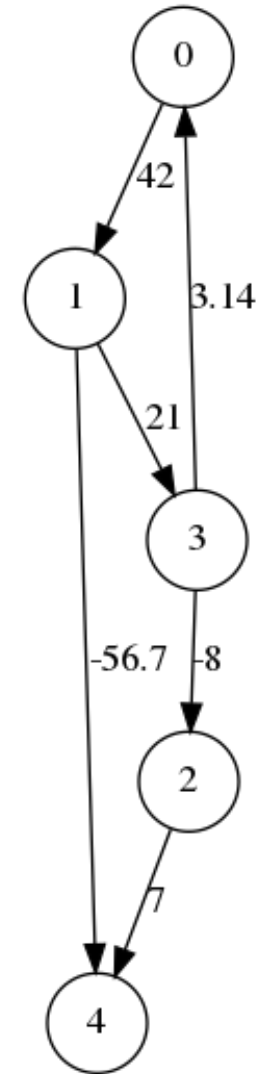
@dataclass
class GraphePondere:
    """Graphe orienté pondéré."""
    sommets: List = field(default=list)
    arcs: List = field(default=list)
```

Structures de données (2/3)

```
s0 = Sommet(0)
s1 = Sommet(1)
s2 = Sommet(2)
s3 = Sommet(3)
s4 = Sommet(4)
```

```
a0 = Arc(origine=0, but=1, poids=42)
a1 = Arc(origine=1, but=3, poids=21)
a2 = Arc(origine=1, but=4, poids=-56.7)
a3 = Arc(origine=2, but=4, poids=7)
a4 = Arc(origine=3, but=2, poids=-8)
a5 = Arc(origine=3, but=0, poids=3.14)
```

```
G = GraphePondere(sommets=[s0, s1, s2, s3, s4],
                  arcs=[a0, a1, a2, a3, a4, a5])
```



Structures de données (3/3)

- **Avantages** : Les données sont plus structurées qu'avec une liste de liste de listes.
- **Inconvénients** : On a les mêmes inconvénients qu'avec une liste de listes.



Plus court chemin

Principe

- La recherche du chemin le plus court dans un graphe pondéré est un problème classique.
- Le poids d'un chemin est égal à la somme des poids des arcs sur ce chemin.
- Il existe différents algorithmes pour résoudre ce problème.
- Nous étudierons uniquement l'algorithme **Bellman-Ford** dans ce cours.

Bellman-Ford - principe (1/2)

- L'algorithme **Bellman-Ford** permet de construire un **arbre des plus courts chemins (SPT - shortest path tree 🇬🇧)**.
- Cet algorithme considère les graphes orientés pondérés sans circuit négatif.

Bellman-Ford - principe (2/2)

- Cet algorithme part d'un sommet s donné.
- Au départ, on évalue toutes les distances de s aux autres sommets à l'infini.
- On effectue, sur le principe, un parcours en largeur pour réévaluer à chaque étape la distance minimale de s à chaque autre sommet.
- L'implémentation suivante utilise une matrice d'adjacence.

Bellman-Ford - algorithme (1/4)

```
def adjacents(m, s):  
    """Renvoie les arcs adjacents à s dans m."""  
    adj = []  
    for j in range(len(m[s])):  
        if m[s][j] != None:  
            adj.append(Arc(origine=s, but=j, poids=m[s][j]))  
  
    return adj
```

Bellman-Ford - algorithme (2/4)

```
def recalcule_bellman_ford(m, s, dist_a, arc_vers, queue):  
    """Recalcule la distance minimale en considérant les successeurs de s.  
  
    m - matrice d'adjacence pondérée.  
    s - sommet dans les successeurs sont considérés.  
    dist_a - liste des distances minimales aux autres sommets.  
    arc_vers - liste des arcs conservés pour aller à un sommet donné.  
    queue - queue pour le parcours en largeur.  
    """  
    adj = adjacents(m, s)  
    for arc in adj:  
        w = arc.but  
        if dist_a[w] == None or dist_a[w] > dist_a[s] + arc.poids:  
            dist_a[w] = dist_a[s] + arc.poids  
            arc_vers[w] = arc  
            if w not in queue:  
                queue.append(w)
```

Bellman-Ford - algorithme (3/4)

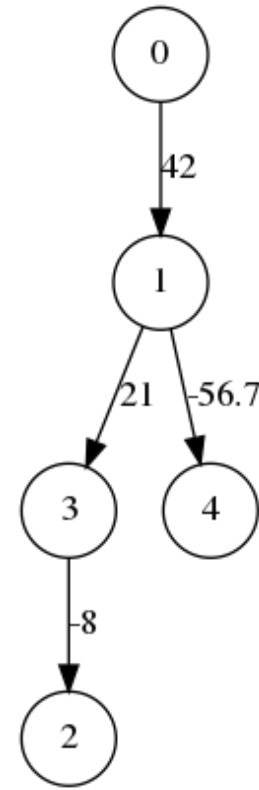
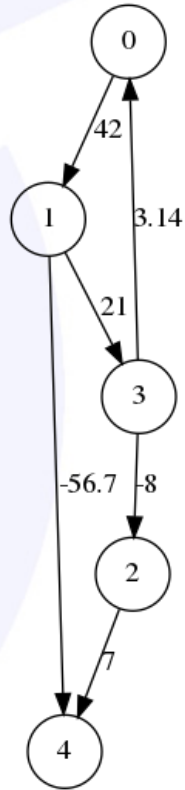
```
def bellman_ford_impl(m, s):  
    """Implémentation de Bellman-Ford sans gestion de cycles négatifs.  
  
    m - matrice d'adjacence pondérée.  
    s - sommet de départ.  
    Renvoie la liste des distances aux autres sommets et la liste des  
    arcs constituant les plus courts chemins.  
    """  
  
    dist_a = [None for _ in range(len(m))] # distances à l'infini  
    dist_a[s] = 0 # distance à lui-même  
    arc_vers = [None for _ in range(len(m))] # résultat  
    queue = [s]  
    while len(queue) != 0:  
        v = queue.pop(0)  
        recalcule_bellman_ford(m, v, dist_a, arc_vers, queue)  
  
    return dist_a, arc_vers
```

Bellman-Ford - algorithme (4/4)

```
def bellman_ford(m, s):  
    """Renvoie une matrice d'adjacence correspondant au shortest path  
    tree (SPT) et la liste des distances minimales."""  
    dist_a, arc_vers = bellman_ford_impl(m, s)  
    spt = [[None for _ in range(len(m))] for _ in range(len(m))]  
    for arc in arc_vers:  
        if arc != None:  
            spt[arc.origine][arc.but] = arc.poids  
  
    return spt, dist_a
```

Note : Nous omettons la recherche de circuit négatif pour simplifier l'implémentation.

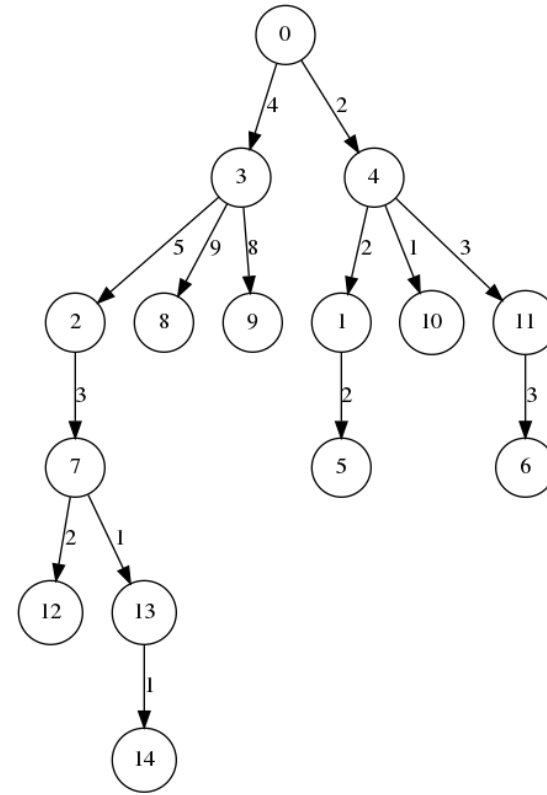
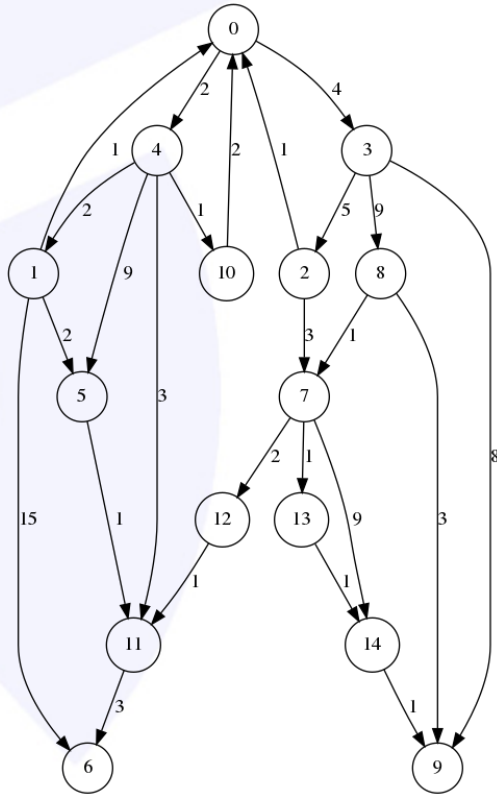
Bellman-Ford - exemple (1/2)



Graphe pondéré Arbre de distances minimales pour s_0

Coûts = `[0, 42, 55, 63, -14.7]`

Bellman-Ford - exemple (2/2)



Graphe pondéré

Arbre de distances minimales pour s_0

Coûts = [0, 4, 9, 4, 2, 6, 8, 12, 13, 12, 3, 5, 14, 13, 14]

Complexité

- La complexité de l'algorithme **Bellman-Ford** est en $O(|A| \cdot |S|)$, où $|A|$ est le nombre d'arcs et $|S|$ le nombre de sommets.
- Cet algorithme est applicable dans de nombreux cas en pratique, sa complexité est correcte et son implémentation est relativement simple.
- L'algorithme de **Dijkstra** offre une meilleure complexité en $O(|A| \log |S|)$, mais son implémentation implique souvent une queue de priorité, que nous n'avons pas abordé.

Recherche de chemin critique

Problème d'ordonnancement

- Un **problème d'ordonnancement** *simple* est caractérisé par un ensemble de **tâches** à exécuter.
- Chaque tâche a une **durée** déterminée.
- Chaque tâche a des **contraintes de précédence** : pour exécuter une tâche, ses prédecesseurs doivent être exécutés préalablement.

Caractérisation des tâches

- **Tâche critique** : son exécution ne peut être allongée ou différée sans allonger la durée du projet.
- **Marge libre d'une tâche** : temps maximal dont cette tâche peut être allongée ou différée sans retarder le projet, indépendamment des autres tâches.

Méthode PERT (1/2)

- La méthode **PERT** (Project Evaluation and Review Technique 🇬🇧) utilise un **DAG** (graphe orienté acyclique) pour représenter et solutionner un problème d'ordonnancement.
- Le sommet **début** est à la racine du graphe.
- Le sommet **fin** marque la fin du projet.

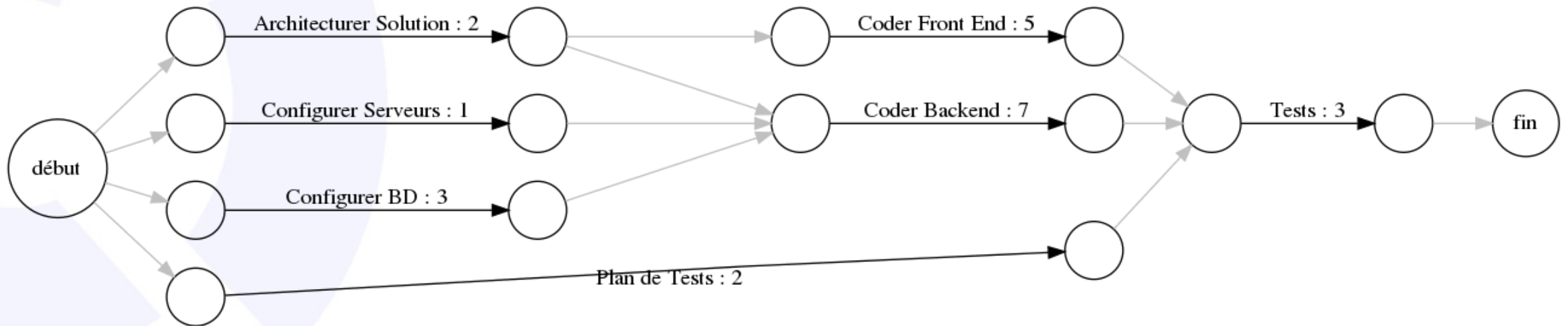
Méthode PERT (2/2)

- Chaque tâche est représentée par un **arc pondéré** par la durée de la tâche.
- Les relations de précédences sont représentées par des **arcs de poids nul**.

Exemple (1/3)

| Tâches | Durée (jours) | Prédécesseurs |
|-----------------------------|---------------|---------------|
| T1 : Architecturer Solution | 2 | |
| T2 : Configurer Serveurs | 1 | |
| T3 : Configurer BD | 3 | |
| T4 : Plan de Tests | 2 | |
| T5 : Coder Front End | 5 | T1 |
| T6 : Coder Backend | 7 | T1, T2, T3 |
| T7 : Tests | 3 | T4, T5, T6 |

Exemple (2/3)



Example (3/3)

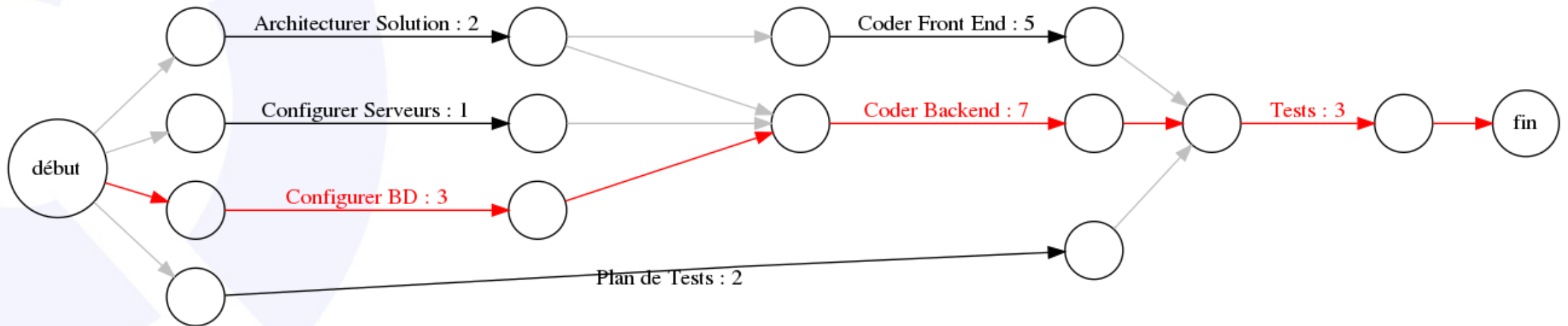
NA = None # Non Applicable

```
M = [
# 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
[NA, 0, 0, 0, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0, NA, NA, NA, NA], # 0
[NA, NA, NA, NA, 2, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA], # 1
[NA, NA, NA, NA, NA, 1, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA], # 2
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, 3, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA], # 3
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0, 0, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA], # 4
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA], # 5
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA], # 6
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 5, NA, NA, NA, NA, NA, NA], # 7
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 7, NA, NA, NA, NA, NA], # 8
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0, NA, NA], # 9
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0, NA, NA], # 10
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 2, NA, NA, NA], # 11
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0, NA, NA], # 12
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 3, NA], # 13
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0], # 14
[NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA] # 15
# 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
]
```

Chemin critique

- Un **chemin critique** est un chemin de **poids maximal** allant de **début** à **fin**.
- Il peut y avoir **plusieurs chemins critiques**.
- Toute tâche sur un chemin critique est une **tâche critique**.
- Nous cherchons à trouver un chemin critique.

Exemple de chemin critique



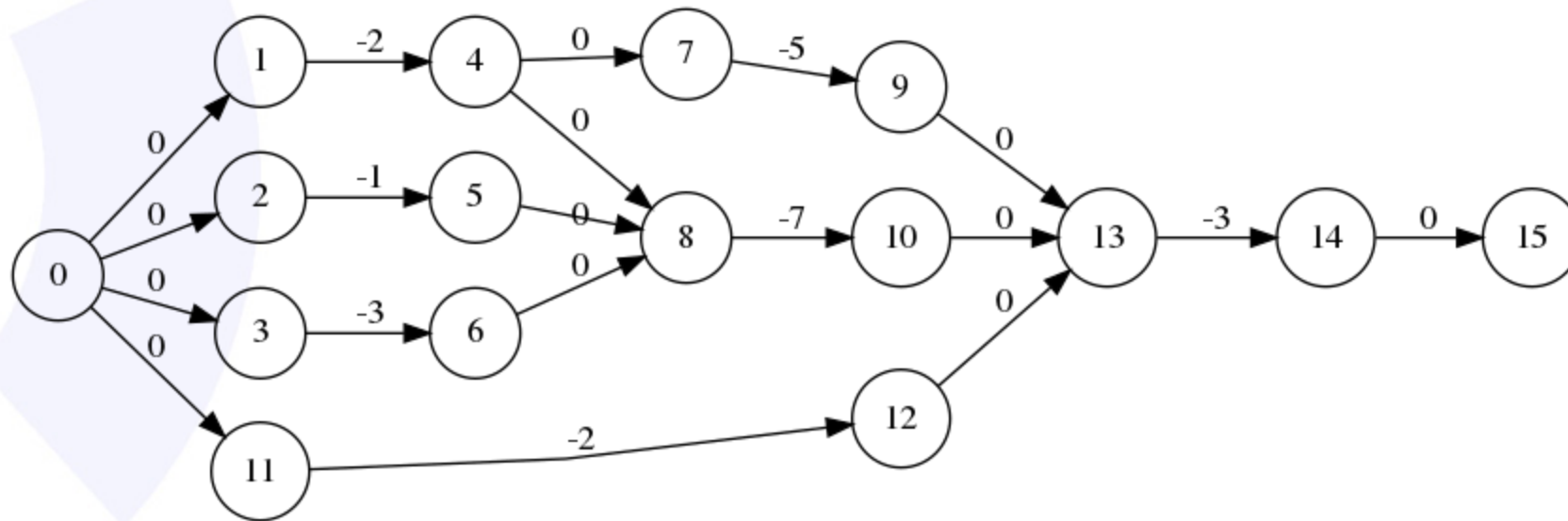
Plus long chemin (1/2)

- Un chemin critique est donc un **plus long chemin** de début à fin.
- Il est possible d'utiliser un algorithme de **plus court chemin** pour calculer un plus long chemin.
- L'astuce consiste à créer un DAG équivalent avec des **poids négatifs**.
- Un poids de 2 devient donc un poids de -2 par exemple.

Plus long chemin (2/2)

- Avec des poids négatifs, le plus court chemin va trouver le plus long chemin en valeur absolue.
- Comme PERT utilise un DAG, on va pouvoir utiliser **Bellman-Ford**.
- En effet, un DAG ne contient pas de circuit et par conséquent, il ne contient pas de circuit négatif.

Exemple de plus long chemin



Algorithme (1/3)

```
def oppose_poids(m):  
    """Renvoie une matrice d'adjacence dont les poids sont opposés."""  
    resultat = []  
  
    for i in range(len(m)):  
        ligne = []  
        for j in range(len(m)):  
            if m[i][j] == None:  
                ligne.append(None)  
            else:  
                ligne.append(-m[i][j])  
        resultat.append(ligne)  
  
    return resultat
```


Algorithme (2/3)

```
def chemin_vers(s, dist_a, arc_vers):  
    """Renvoie le chemin vers le sommet s."""  
    if dist_a[s] == None:  
        return None  
  
    chemin = []  
    arc = arc_vers[s]  
    while arc != None:  
        predecesseur = arc.origine  
        chemin.insert(0, predecesseur)  
        arc = arc_vers[predecesseur]  
  
    return chemin
```

Algorithme (3/3)

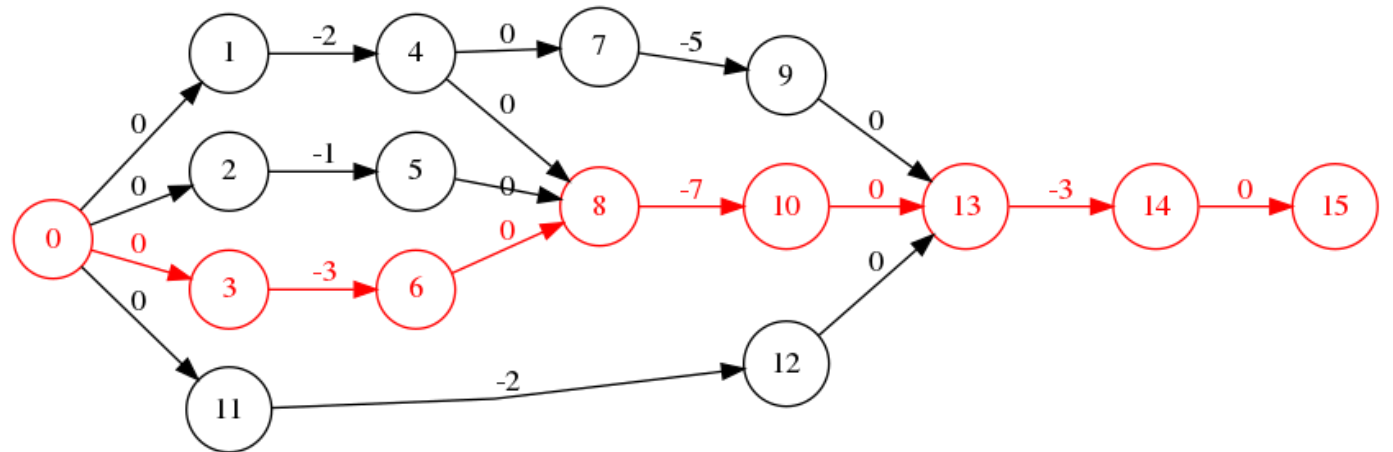
```
def chemin_critique(m):  
    """Renvoie le chemin critique en utilisant PERT.  
  
    Utilise Bellman-Ford sur l'opposé de la matrice d'adjacence.  
    La matrice d'adjacence doit représenter un DAG.  
    Par convention, le début est supposé être le 1er sommet, et  
    la fin est supposée être le dernier sommet.  
    """  
    # Construit une matrice d'adjacence avec les poids opposés  
    m_p = oppose_poids(m)  
  
    # Calcule l'arbre des plus courts chemins  
    dist_a, arc_vers = bellman_ford_impl(m_p, 0)  
  
    # Le chemin vers la fin est le chemin critique  
    fin = len(m) - 1  
    chemin = chemin_vers(fin, dist_a, arc_vers)  
  
    return chemin
```

Exemple

```
c = chemin_critique(M)  
print(c)
```



```
[0, 3, 6, 8, 10, 13, 14]
```



Complexité

- On utilise Bellman-Ford, et donc la complexité est similaire : $O(|A| \cdot |S|)$, où $|A|$ est le nombre d'arcs et $|S|$ le nombre de sommets.



TP : Graphes



TP : Graphes

[Lien vers le sujet de TP.](#)