

# Algorithmique Appliquée

BTS SIO SISR

## Résolution de problèmes classiques



CHAMBRE DE COMMERCE  
ET D'INDUSTRIE

1<sup>er</sup> ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES



Loïc Yvonnet



# Plan

- Listes chaînées
- Queue et FIFO
- Pile et LIFO
- Comparaison entre FIFO et LIFO
- Rappels sur la théorie des ensembles
- Rappels sur le calcul matriciel

# Listes chaînées

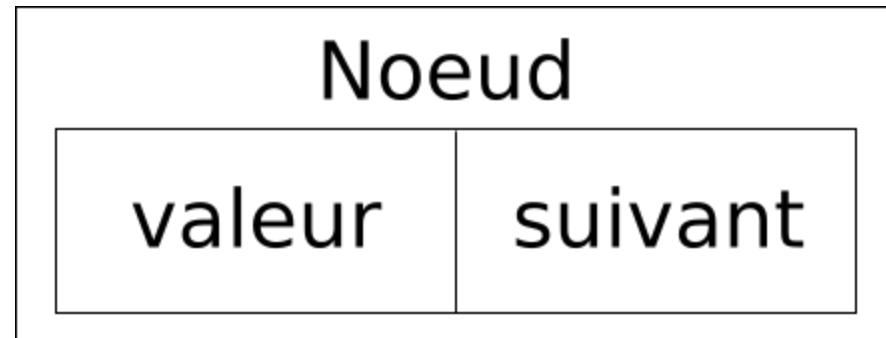
# Introduction

- En Python, une `list` permet de rassembler un nombre variable d'éléments.
- Nous allons voir une manière d'implémenter ce type de liste.

# Notion de liste chaînée

- Une liste chaînée est une **structure de données récursive**.
- Une liste chaînée est composée de **noeuds**.
- Un noeud comporte 2 variables :
  - Une valeur,
  - Le noeud suivant.

# Noeud d'une liste chaînée



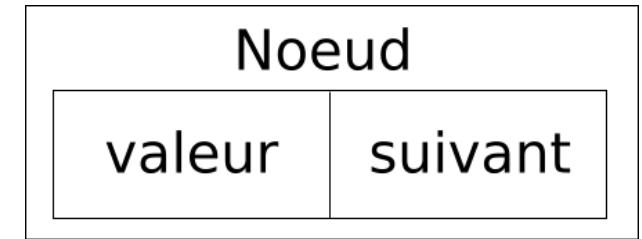
# 2 noeuds



# Structure de données

```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class Noeud:
    """Noeud de la liste chaine.
    La valeur peut etre n'importe quel objet
    Python valide.
    Le suivant doit avoir pour type Noeud
    ou None.
    """
    valeur = None
    suivant = None
```



# Noeud de départ

- Comment identifier le **noeud de départ** de la liste ?
- On souhaite que chaque noeud ait la **même représentation**.
- On introduit un nouveau type, `Liste`, qui référence le noeud de départ.
- Une `Liste` n'a pas de valeur.

# Noeud de départ identifié par la liste



# Structure de données

```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class Liste:
    """Liste chaînée.

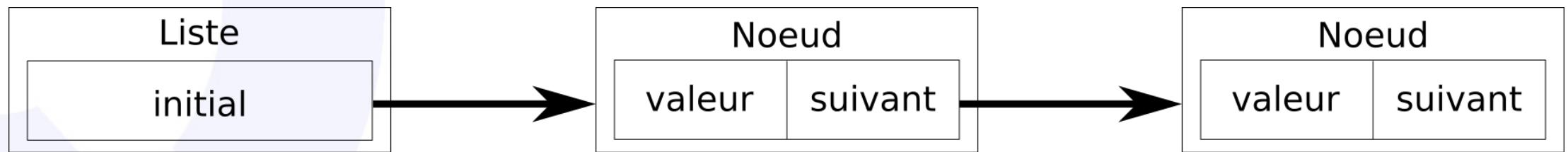
    Il s'agit simplement d'un point d'entrée
    vers le 1er noeud de la liste chaînée,
    nommé initial.

    La variable initial doit avoir pour type
    Noeud ou None.

    """
    initial = None
```

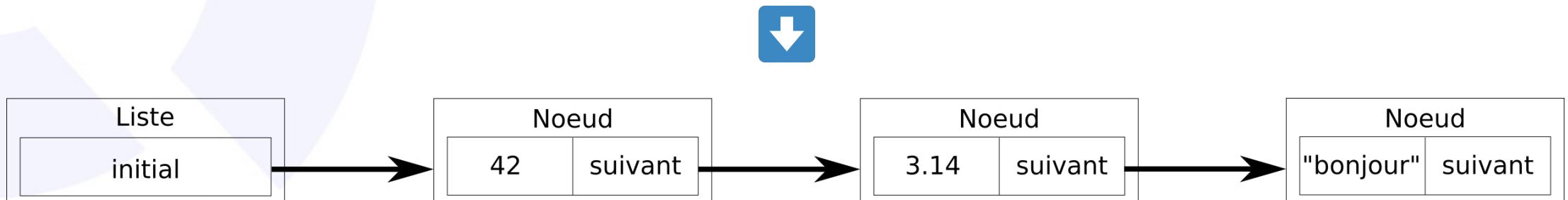
Liste  
initial

# Liste chaînée comportant 2 valeurs



# Exemple avec 3 valeurs

```
liste_chaine = creer_liste_chaine(42, 3.14, "bonjour")
```



# Dernier noeud

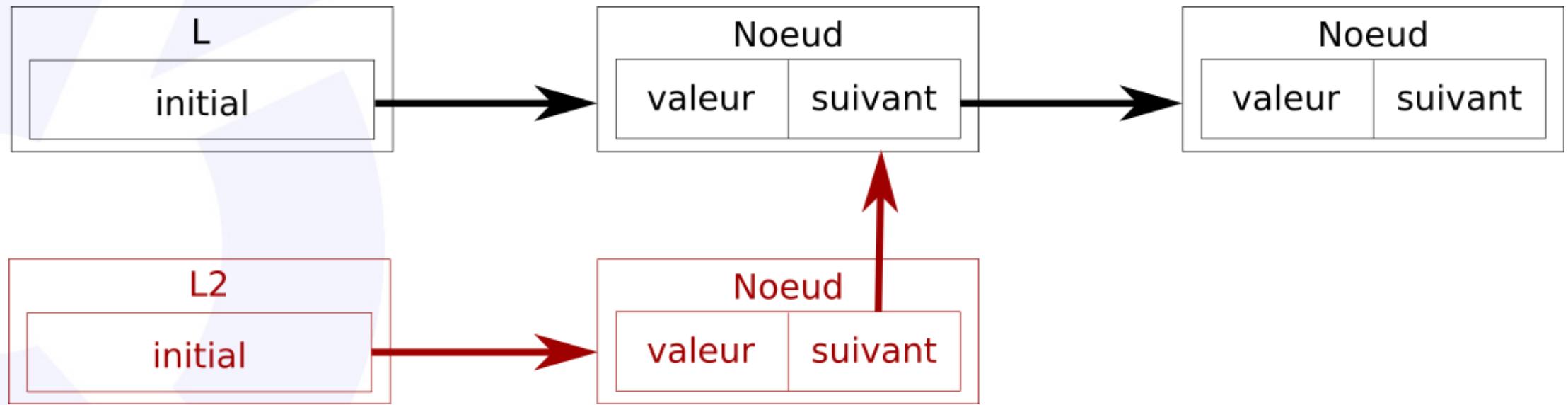
Le suivant du dernier noeud est None .

# Parcours d'une liste chaînée

```
def parcours(liste_chainee, f):
    """Appelle f sur chaque valeur de la liste chaînée.

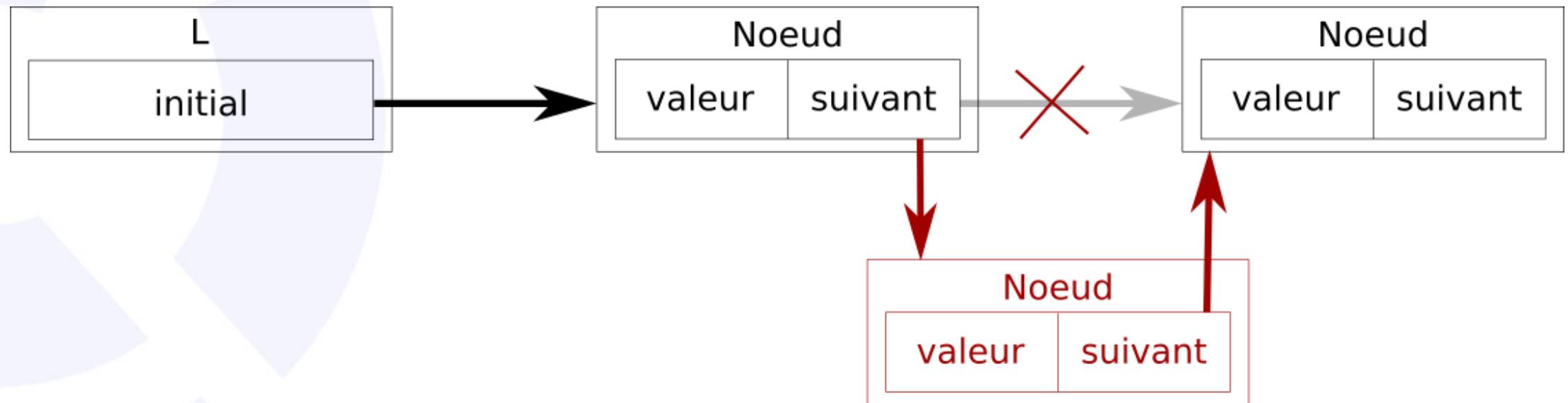
    liste_chainee - liste chaînée de type Liste.
    f - fonction prenant un argument.
    """
    noeud = liste_chainee.initial
    while noeud != None:
        f(noeud.valeur)          # appelle la fonction f
        noeud = noeud.suivant # passage au noeud suivant
```

# Insertion au début



L'insertion au début est **non-destructive**.  
Il est possible de construire des listes chaînées **immutables**.

# Insertion au milieu



# Insertion à la fin



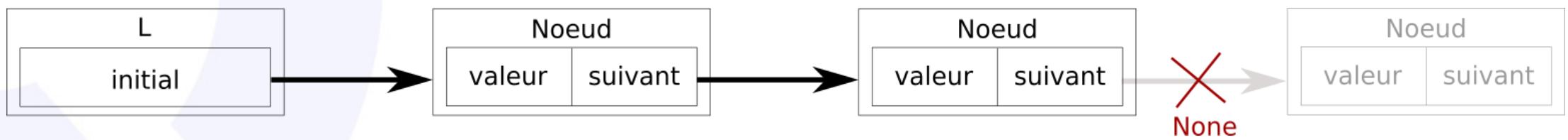
# Suppression au début



# Suppression au milieu



# Suppression à la fin



# Liste doubllement chaînée

```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class NoeudBidirectionnel:
    valeur = None
    suivant = None
    precedent = None    # Nouveau

@dataclass
class ListeBidirectionnelle:
    initial = None
    final = None        # Nouveau
```



# Evaluation des listes chaînées

- **Avantages :**
  - Insertion rapide au début.
  - Insertion rapide à la fin pour une liste doublement chaînée.
- **Inconvénients :**
  - Pas d'indexation : il faut parcourir potentiellement tous les éléments pour en retrouver un.
  - Mémoire éparse : chaque noeud a sa propre adresse en mémoire.

# Comparaison avec une list

- La Liste chaînée est un exercice intéressant pour comprendre comment une list peut être implémentée.
- La Liste chaînée introduite ici et dans le prochain TP a un but purement pédagogique.
- Dans du code industriel de production, utilisez une list .

# TP : Manipulation d'une liste chaînée

# TP : Manipulation d'une liste chaînée

[\*\*Lien\*\* vers le sujet de TP.](#)

# Queue et FIFO

First-In, First-Out 

# Notion de file d'attente

- Une **queue**, également nommée **file d'attente**, est une collection.
- Cette collection comporte 2 opérations principales :
  - Empiler un élément.
  - Dépiler le 1er élément empilé.
- Premier entré, premier sorti.

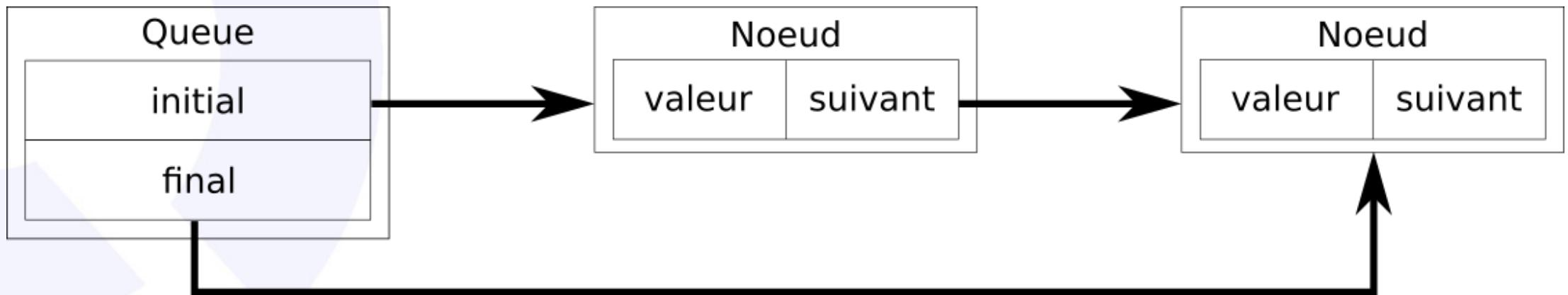
# Métaphore



# Principe



# Exemple avec 2 éléments

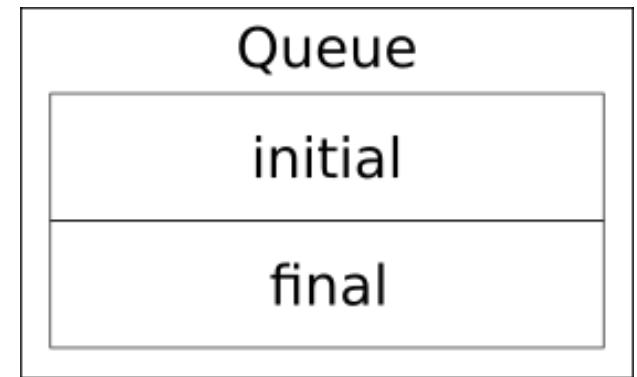


# Structure de données

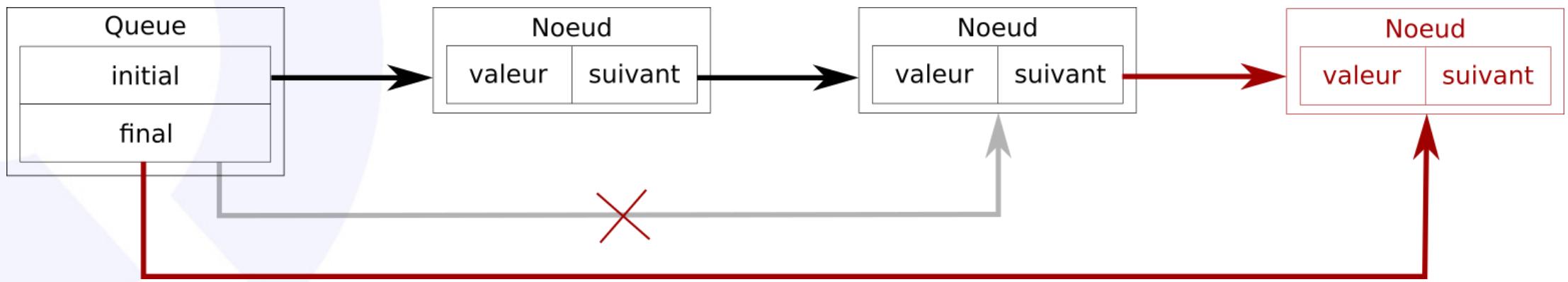
```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class Queue:
    """Queue utilisant une liste chaînée.

    initial - doit avoir pour type
              Noeud ou None.
    final - doit avoir pour type
            Noeud ou None.
    """
    initial = None
    final = None
```



# Empile



# Dépile



# Utilisation d'une list

```
def empile(queue, element):
    """Empile l'élément dans la queue.

    queue - la queue à modifier.
    element - élément à empiler dans la queue.
    """
    queue.append(element)

def depile(queue):
    """Dépile le 1er élément de la queue.

    queue - la queue à modifier.
    Retourne le 1er élément de la queue.
    """
    return queue.pop(0)
```



# Exemple

```
queue = [6, 3, 7]
empile(queue, 10)
print(queue)      # [6, 3, 7, 10]

valeur = depile(queue)
print(valeur)      # 6
print(queue)      # [3, 7, 10]
```

# Utilisation de deque

```
from collections import deque

def empile(queue, element):
    """Empile l'élément dans la queue.

    queue - la queue à modifier.
    element - élément à empiler dans la queue.
    """
    queue.append(element)

def depile(queue):
    """Dépile le 1er élément de la queue.

    queue - la queue à modifier.
    Retourne le 1er élément de la queue.
    """
    return queue.popleft()
```

# Exemple

```
queue = deque([6, 3, 7])
empile(queue, 10)
print(queue)          # deque([6, 3, 7, 10])

valeur = depile(queue)
print(valeur)          # 6
print(queue)          # deque([3, 7, 10])
```

# Pile et LIFO

Stack & Last-In, First-Out 

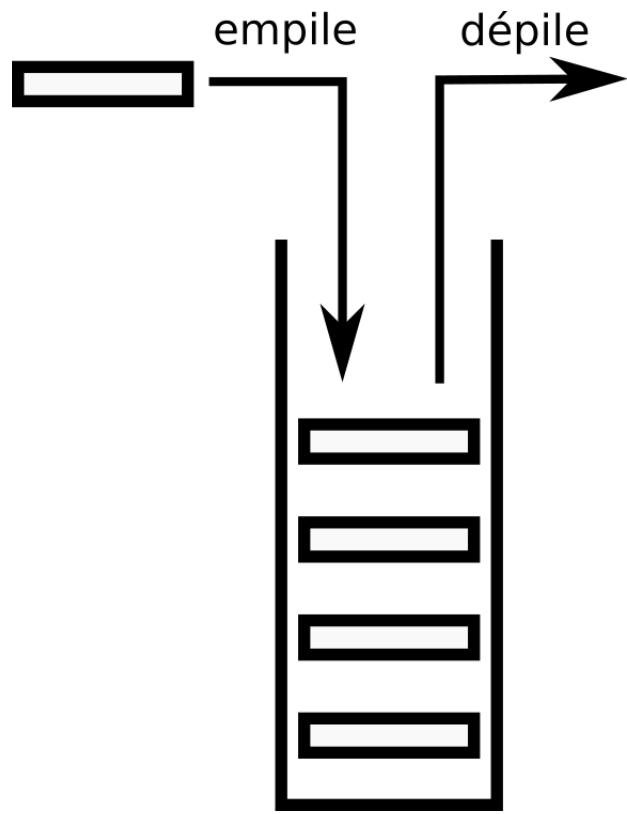
# Notion de pile

- Une **pile** est une collection.
- Cette collection comporte 2 opérations principales :
  - Empiler un élément.
  - Dépiler le **dernier** élément empilé.
- Dernier entré, premier sorti.

# Métaphore



# Principe



# Exemple avec 2 éléments



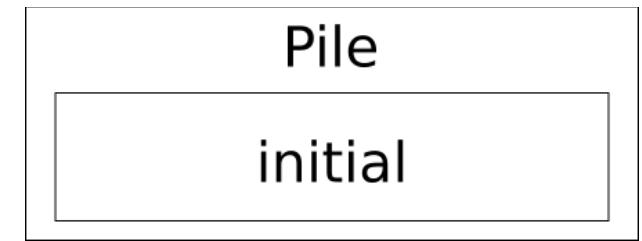
# Structure de données

```
from dataclasses import dataclass

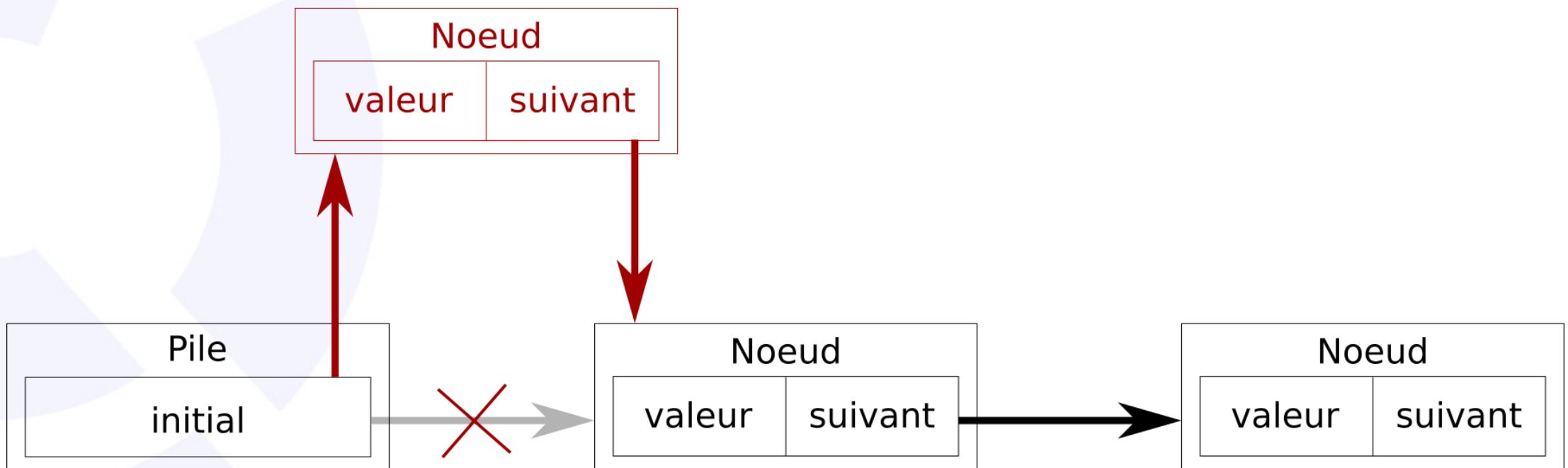
@dataclass
class Pile:
    """Pile utilisant une liste chaînée.

    initial - doit avoir pour type
              Noeud ou None.

    """
    initial = None
```



# Empile



# Dépile



# Utilisation d'une list

```
def empile(pile, element):
    """Empile l'élément dans la pile.

    pile - la pile à modifier.
    element - élément à empiler dans la pile.
    """
    pile.insert(0, element)

def depile(pile):
    """Dépile le 1er élément de la pile.

    pile - la pile à modifier.
    Retourne le 1er élément de la pile.
    """
    return pile.pop(0)
```



# Exemple

```
pile = [6, 3, 7]
empile(pile, 10)
print(pile)          # [10, 6, 3, 7]

valeur = depile(pile)
print(valeur)        # 10
print(pile)          # [6, 3, 7]
```

# Utilisation de deque

```
from collections import deque

def empile(pile, element):
    """Empile l'élément dans la pile.

    pile - la pile à modifier.
    element - élément à empiler dans la pile.
    """
    pile.appendleft(element)

def depile(pile):
    """Dépile le 1er élément de la pile.

    pile - la pile à modifier.
    Retourne le 1er élément de la pile.
    """
    return pile.popleft()
```



# Exemple

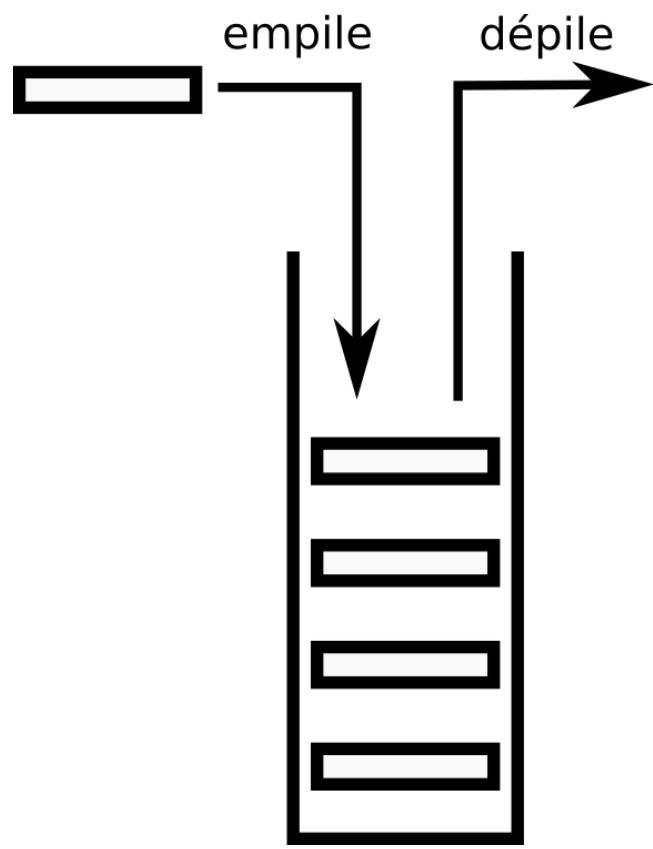
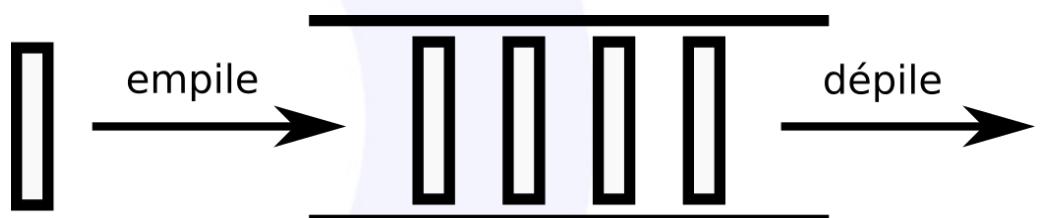
```
pile = deque([6, 3, 7])
empile(pile, 10)
print(pile)                  # deque([10, 6, 3, 7])

valeur = depile(pile)
print(valeur)                # 10
print(pile)                  # deque([6, 3, 7])
```

# Comparaison entre FIFO et LIFO

# FIFO LIFO

	Anglais	Français	Collection
FIFO	First In, First Out	Premier Entré, Premier Sorti	Queue
LIFO	Last In, First Out	Dernier Entré, Premier Sorti	Pile



# FIFO dans la réalité

## Les queues de messages

- Ordonnanceur de tâches (systèmes d'exploitation).
- Traitements asynchrones dans un système.
- Version itérative d'algorithmes récursifs.

# LIFO dans la réalité

- Pile d'appels de fonctions.
- Interpréteur.
- Version itérative d'algorithmes récursifs.

# TP : Queues de messages simples

# TP : Queues de messages simples

[Lien vers le sujet de DM.](#)

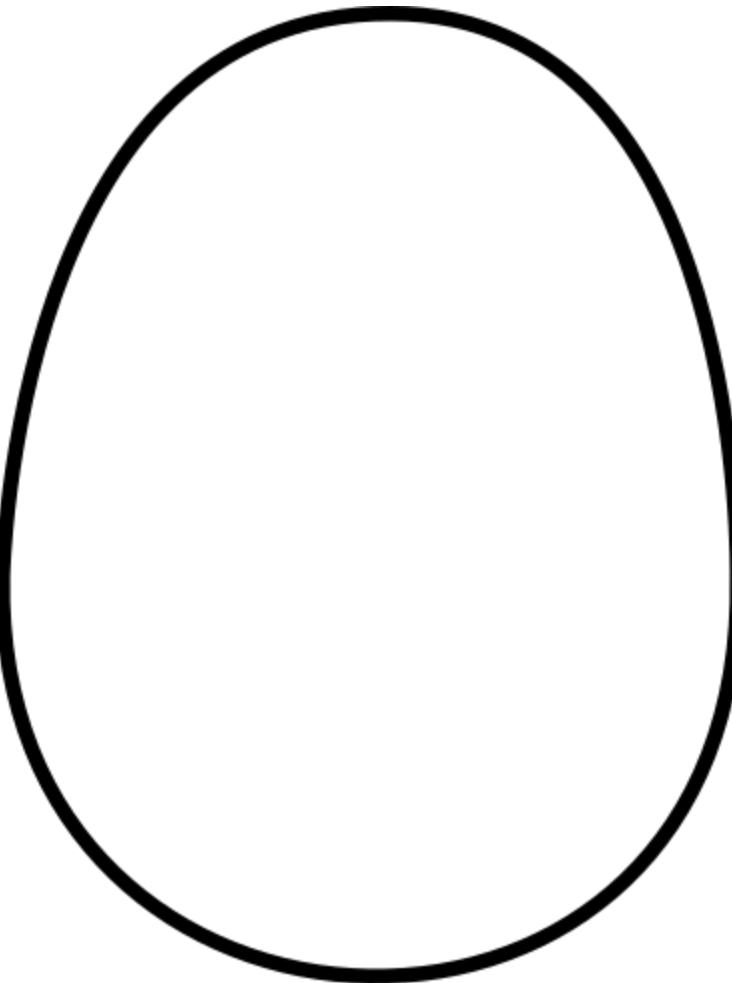
# Rappels sur la théorie des ensembles

## Union, intersection, différence

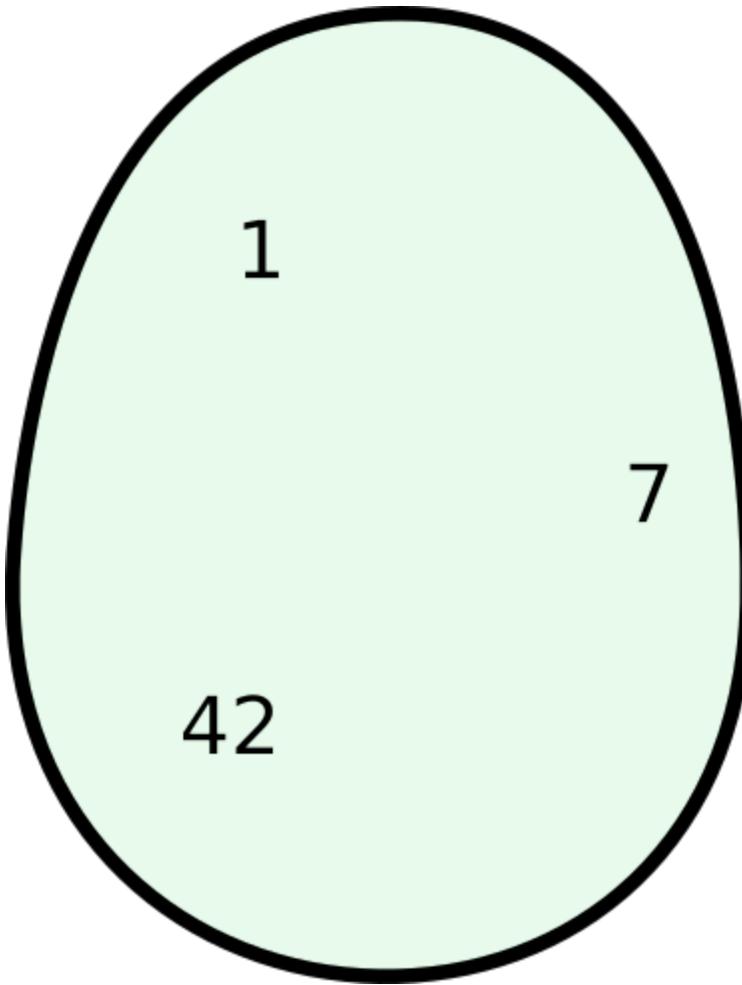
# Intérêt

- Nous avons vu le type `set` dans le cours précédent.
- Le DM n°3 vous demande d'implémenter les opérations classiques sur les ensembles.
- Nous revenons rapidement sur ces définitions pour préparer le DM.

# Ensemble vide



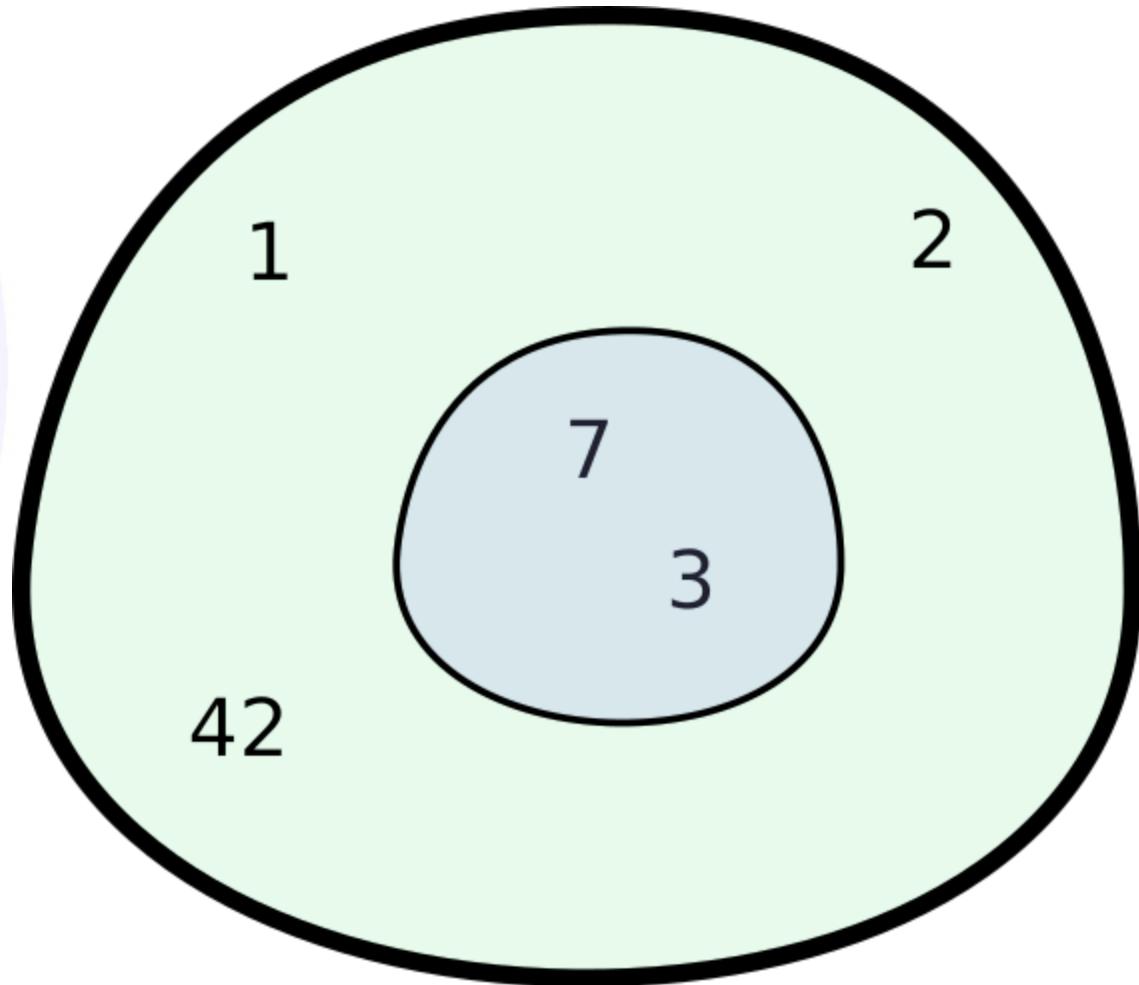
# Ensemble avec quelques éléments



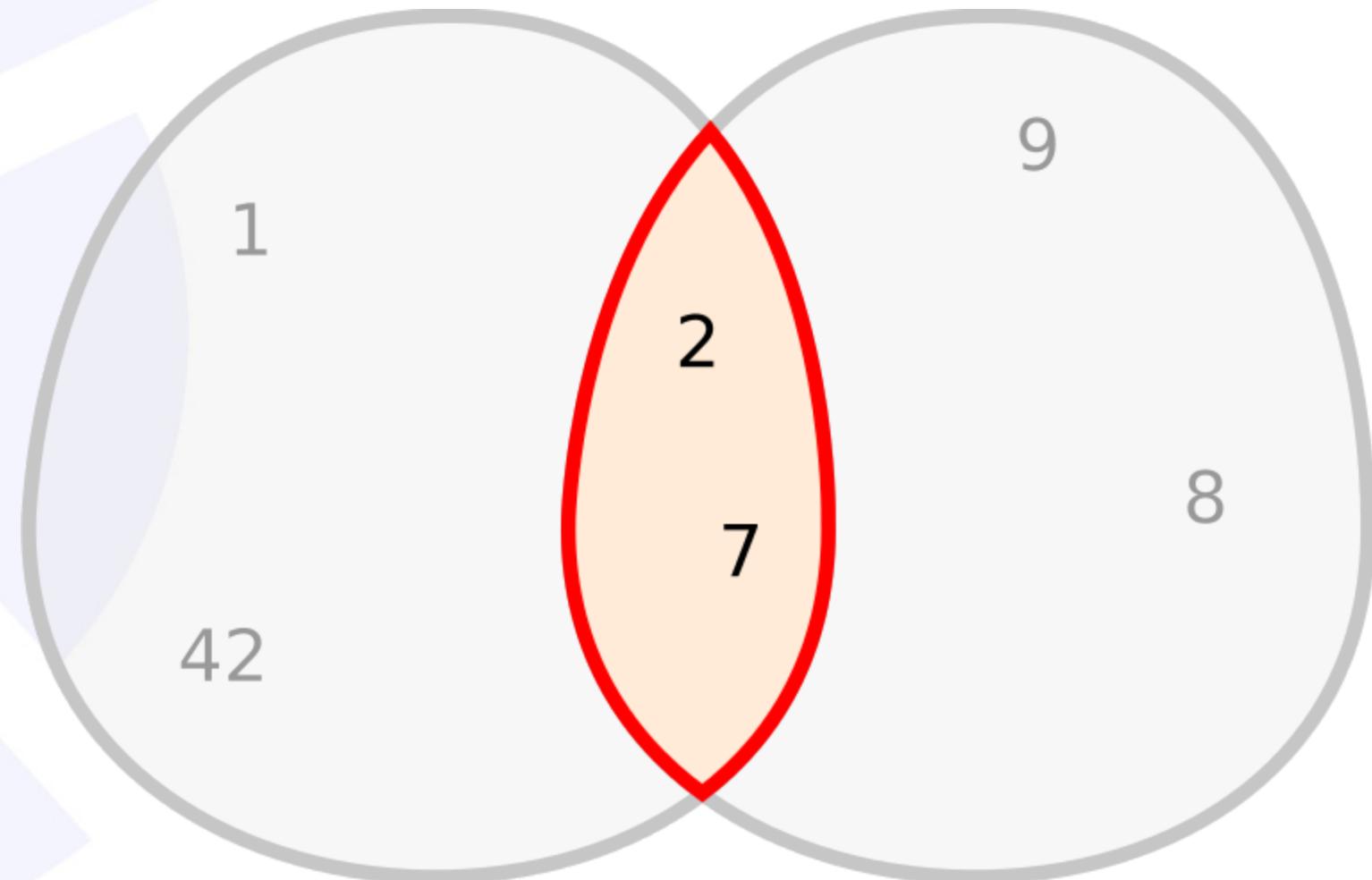
# Ensembles disjoints



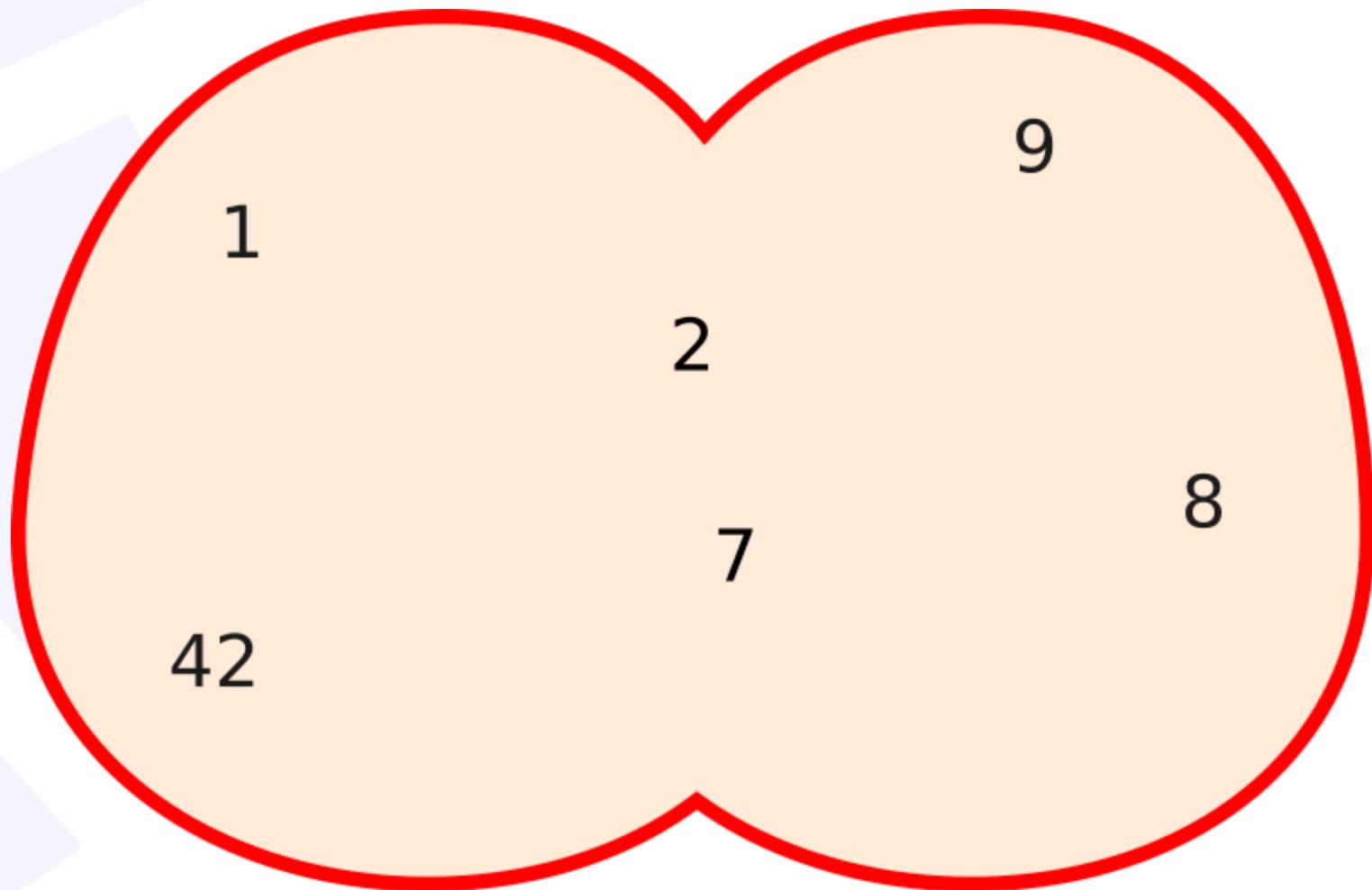
# Sous-ensemble



# Intersection



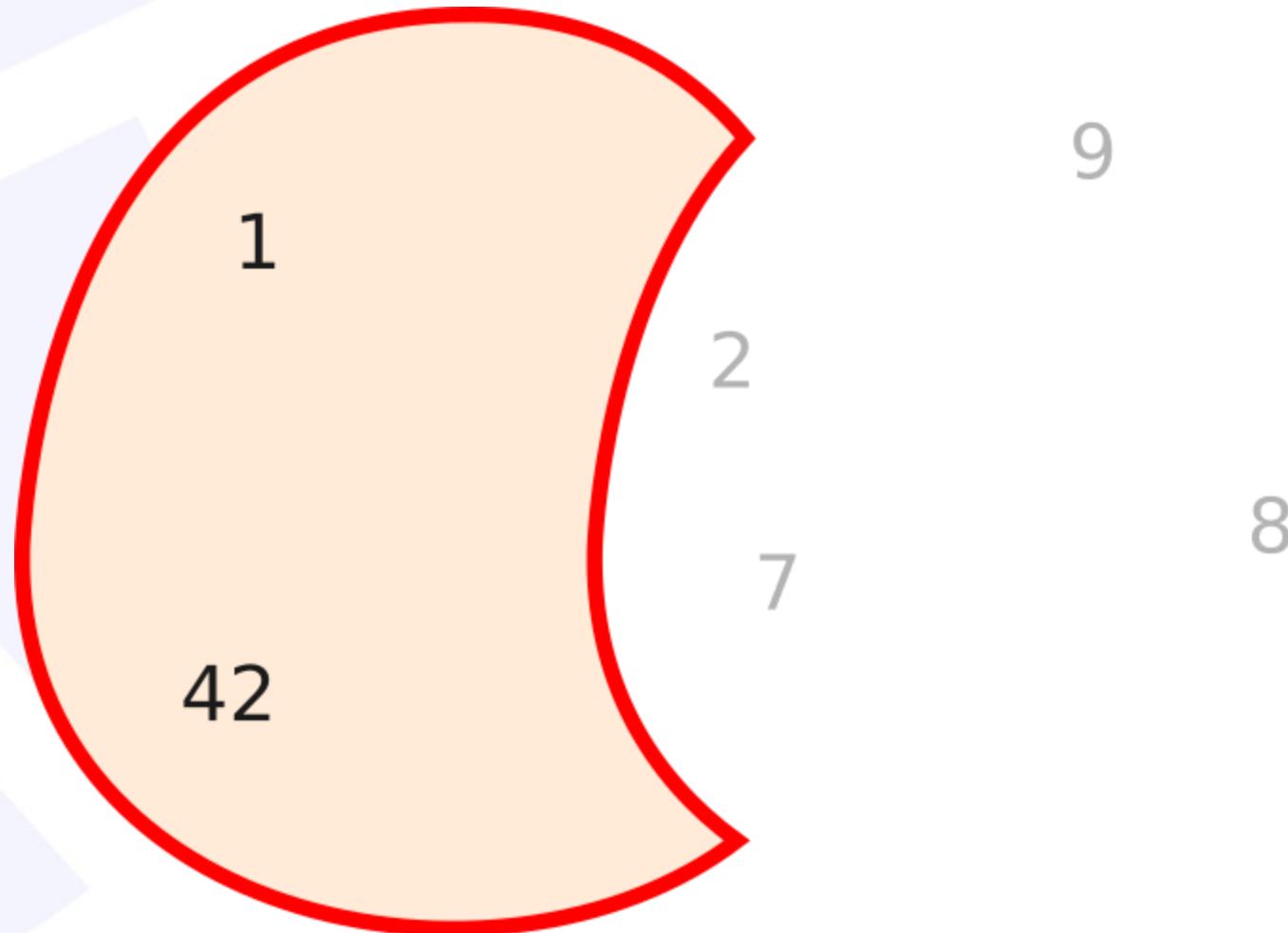
# Union



# Exclusion



# Différence



# Rappels sur le calcul matriciel

Résolution de systèmes d'équations linéaires

# Intérêt

- En prévision du DM n°3 et de l'examen.
- Pour faire des jeux vidéos.
- Pour la conception assistée par ordinateur.

# Déterminant d'une matrice

**2x2**

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

# Expansion de Laplace

Déterminant d'une matrice 3x3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'une définition récursive.

# Expansion de Laplace

## Déterminant d'une matrice NxN

$$|M| = \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,N} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N,1} & m_{N,2} & \dots & m_{N,N} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^N m_{1,j} (-1)^{1+j} |M_{1,j}|$$

Les  $M_{1,j}$  sont les **mineurs des matrices** de la première ligne de  $M$ .

# Mineur d'une matrice $M_{i,j}$

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,n} \\ m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j-1} & m_{n,j+1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Le mineur d'une matrice  $M$  aux indices  $(i, j)$  est noté  
 $M_{i,j}$ .

# Système d'équations linéaires

## Sous forme matricielle

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

# Résolution du système

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

**Problème :** L'inversion matricielle n'est pas triviale.

# Règle de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\det(M)}$$

# Matrice Identité

L'**élément neutre** de la multiplication matricielle est noté  $I$  et comporte des 0 partout sauf sur sa diagonale, composée de 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot M = M \cdot I = M$$

# Matrice triangulaire

Soit la partie supérieure de la matrice, soit la partie inférieure de la matrice, n'est composée que de 0.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

**$M_1$  est triangulaire supérieure.**

**$M_2$  est triangulaire inférieure.**

# Matrice diagonale

Tous les éléments de la matrice sont nuls, sauf ceux sur sa diagonale.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

# Puissance d'une matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad M^N = \begin{pmatrix} a^N & 0 & 0 \\ 0 & b^N & 0 \\ 0 & 0 & c^N \end{pmatrix}$$

Donc :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

# Diagonalisation : principe (1/2)

- Si une matrice  $M$  est diagonalisable alors on peut l'écrire  $M = PDP^{-1}$  où  $D$  est sa matrice diagonale, et  $P$  la matrice de passage.
- Pour diagonaliser, on calcule les **valeurs propres**  $\lambda$  telles que  $|M - \lambda I| = 0$ .
- Pour chaque valeur propre, on calcule le **vecteur propre** associé tel que  $MX = \lambda X$ .

# Diagonalisation : principe (2/2)

- La matrice diagonale équivalent  $D$  s'obtient en mettant les valeurs propres sur la diagonale.
- La matrice de passage  $P$  est obtenue en mettant les vecteurs propres obtenus en colonnes.

# Matrice augmentée

Si  $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ , et  $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Alors  $[M|D] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

# Elimination de Gauss Jordan (1/3)

On sait que les opérations suivantes sont possibles pour résoudre le système sans changer la solution :

- Interchanger 2 lignes.
- Multiplier une ligne par un scalaire non-nul.
- Ajouter un multiple d'une ligne à une autre.

# Elimination de Gauss Jordan (2/3)

- On parcourt chaque colonne  $col$  de  $M$  :
  - Le pivot est l'élément sur la diagonale dans cette colonne :  $Pivot = M[col][col]$ .
  - On parcourt chaque ligne  $lig$  de  $M$  sauf celle où se trouve le pivot :
    - On calcule le coefficient multiplicateur  $Coeff = \frac{M[lig][col]}{Pivot}$ .
    - On soustrait  $Coeff$  fois la ligne  $col$  à la ligne  $lig$ .

# Elimination de Gauss Jordan (3/3)

La solution est la dernière colonne dont chaque élément est divisé par le pivot sur la même ligne.

# Exemple

On considère, dans  $\mathbb{R}^3$ , le système suivant :

$$\begin{cases} x - 0.5y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$$

# Sous forme matricielle

$$\begin{cases} x - 0.5y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# Matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

# Sous forme de tableau

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	-0.5	-1	2
lig2	2	-1	1	1
lig3	1	-1	-2	3

# 1er pivot

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	-0.5	-1	2
lig2	2	-1	1	1
lig3	1	-1	-2	3

	col1	col2	col3	col4	Opérations
lig1	1	-0.5	-1	2	
lig2	0	0	3	-3	lig2 -= 2 * lig1
lig3	0	-0.5	-1	1	lig3 -= 1 * lig1

# Echange lig2 et lig3

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	-0.5	-1	2
lig3	0	-0.5	-1	1
lig2	0	0	3	-3

Un pivot ne peut pas être nul.

# 2e pivot

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	-0.5	-1	2
lig3	0	<b>-0.5</b>	-1	1
lig2	0	0	3	-3

	col1	col2	col3	col4	Opérations
lig1	1	0	0	1	lig1 -= lig3
lig3	0	<b>-0.5</b>	-1	1	
lig2	0	0	3	-3	lig2 -= 0 * lig3

# 3e pivot

	col1	col2	col3	col4
lig1	1	0	0	1
lig3	0	-0.5	-1	1
lig2	0	0	3	-3

	col1	col2	col3	col4	Opérations
lig1	1	0	0	1	lig1 -= 0 * lig2
lig3	0	-0.5	0	0	lig3 += 1/3 * lig2
lig2	0	0	3	-3	

# Dernière étape

**Division de la dernière colonne par les pivôts**

$$\text{col4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{Pivôts} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Devoir à la Maison 03

# DM : Retours sur les fonctions et le débogage

[\*\*Lien vers le sujet de DM.\*\*](#)