Algorithmique Appliquée

BTS SIO SISR

Algorithmes de recherche et de tri

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo Solutions

Plan

- Algorithmiques classiques
- Recherche en Python
- Recherche linéaire
- Recherche binaire
- Tri en Python
- Algorithmes de tri en $O(N^2)$
- Partition
- Tri Rapide
- Tri Fusion

Correction du travail à la maison

CHAMBRE DE COMMERCE
ET D'INDUSTRIE
1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo
Solutions

DM : Retour sur la complexité et les tests

Lien vers le sujet de DM.

Retour sur les classes de problèmes usuelles en algorithmique

CHAMBRE DE COMMERCE
ET D'INDUSTRIE

1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo
Solutions

Familles d'algorithmes classiques

Famille d'algorithmes	Exemple de problème	Exemple d'algorithme
Recherche	Trouver un nombre dans une liste	Recherche binaire
Tri	Trier une liste	Tri Fusion
Graphes	Trouver le plus court chemin	Bellman-Ford
Chaînes de caractères	Trouver une sous-chaîne	Boyer-Moore

Intérêt

- De nombreux problèmes peuvent se décomposer en **sous-problèmes**.
- Ces sous-problèmes se ramènent souvent à ceux **résolus par les algorithmes classiques**.

Exemples d'autres problèmes

- Optimisation :
  - Graphes, Tri, Recherche.
- Décision :
  - Graphes, Tri, Recherche.
- Classification :
  - Graphes, Tri, Recherche.
- Résolution d'équations (solver 🇬🇧)

Recherche en Python

Opérateur `in`

```python
L = [1, 4, 8, 62]
if 4 in L:
    print("On a trouvé 4")
```

⬇

```
On a trouvé 4
```

Egalement pour les `set` et `tuple`

```
S = {1, 4, 8, 62}
if 4 in S:
    print("On a trouvé 4")

T = (1, 4, 8, 62)
if 4 in T:
    print("On a trouvé 4")
```

```
On a trouvé 4
On a trouvé 4
```

Chaînes de caractères

```
Ch = "1, 4, 8, 62"
if "4" in Ch:
    print("On a trouvé 4")
```

```
On a trouvé 4
```

Dictionnaires

```python
D = {"un": 1, "quatre": 4, "huit": 8, "soixante deux": 62}
if "quatre" in D:
    print("On a trouvé quatre")

if 4 in D.values():
    print("On a trouvé 4")
```

```
On a trouvé quatre
On a trouvé 4
```

Valeur par défaut

```
resultat = D.get("trois", -1)
print(resultat)
```

```
-1
```

Recherche linéaire

CHAMBRE DE COMMERCE
ET D'INDUSTRIE

1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo
Solutions

Implémentation itérative

```python
def recherche_lineaire(collection, cle):
    for i in range(len(collection)):
        if collection[i] == cle:
            return i
    return -1
```

Preuve d'algorithme

Preuve triviale

- On parcourt chaque élément de la collection une unique fois, donc l'algorithme s'arrête quand chaque élément est traité.
- Chaque élément est comparé à la clé.
- Donc si un élément est égal à la clé, il sera trouvé.

Complexité

- $O(N)$: on parcourt chaque élément une fois.
- $\Omega(1)$: si le 1er élément est égal à la clé, l'algorithme s'arrête immédiatement.

Implémentation récursive

```
def recherche_lineaire(collection, cle):
    def recherche_lineaire_impl(collection, cle, index):
        if index == len(collection):
            return -1
        if collection[index] == cle:
            return index
        return recherche_lineaire_impl(collection, cle, index + 1)

    return recherche_lineaire_impl(collection, cle, 0)
```

Preuve de la version récursive

- L'index est incrémenté à chaque récursion.
- La récursion s'arrête lorsque l'index est égal à la taille de la collection.
- A chaque récursion, on teste l'élément à l'index actuel.
- La récursion s'arrête si l'élément à l'index actuel est égal à la clé.
- On parcourt donc chaque élémént une fois et le reste est identique à la version itérative.

Recherche binaire

Binary search 🇬🇧

CHAMBRE DE COMMERCE
ET D'INDUSTRIE
1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

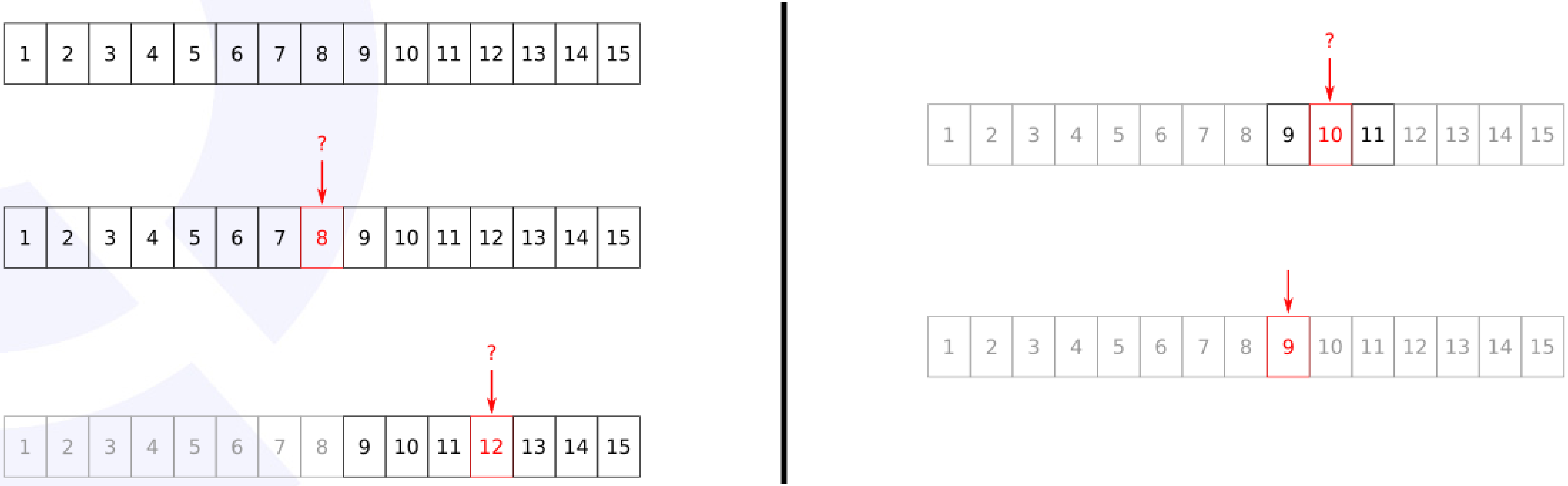
Yvo
Solutions

Implémentation itérative

```python
def recherche_binaire(collection, cle):
    debut = 0
    fin = len(collection) - 1

    while debut <= fin:
        milieu = debut + (fin - debut) // 2
        actuel = collection[milieu]

        if cle < actuel:
            fin = milieu - 1
        elif cle > actuel:
            debut = milieu + 1
        else:
            return milieu

    return -1
```

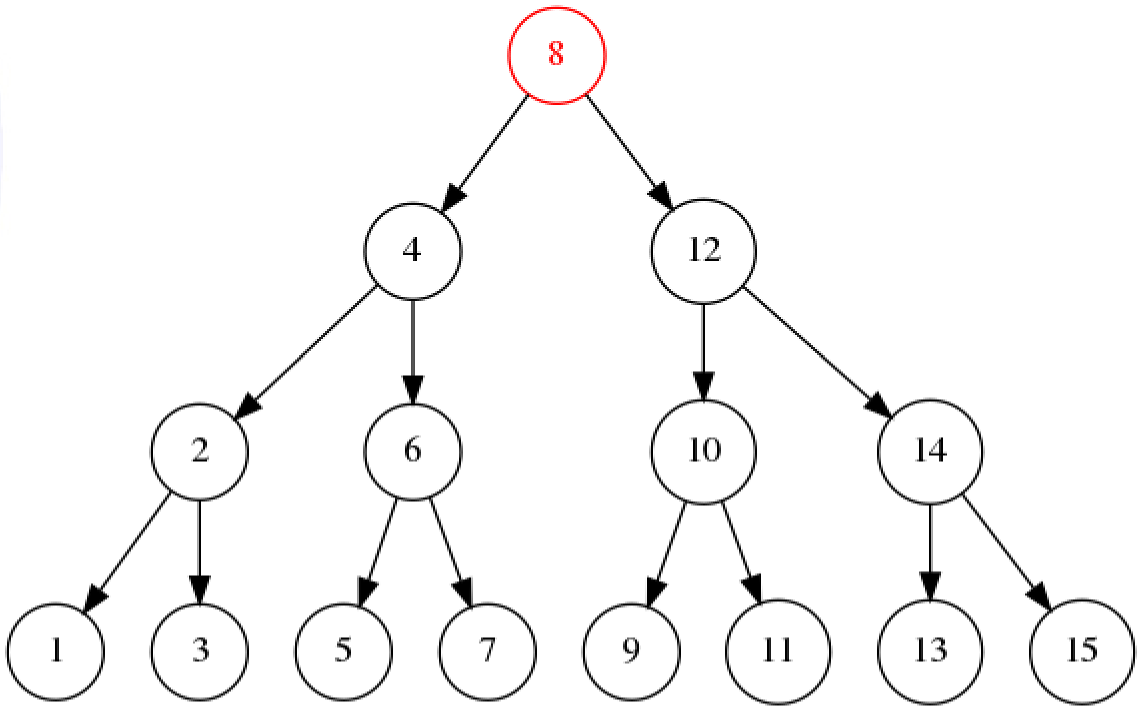
Illustration de l'exécution

Recherche du chiffre 9



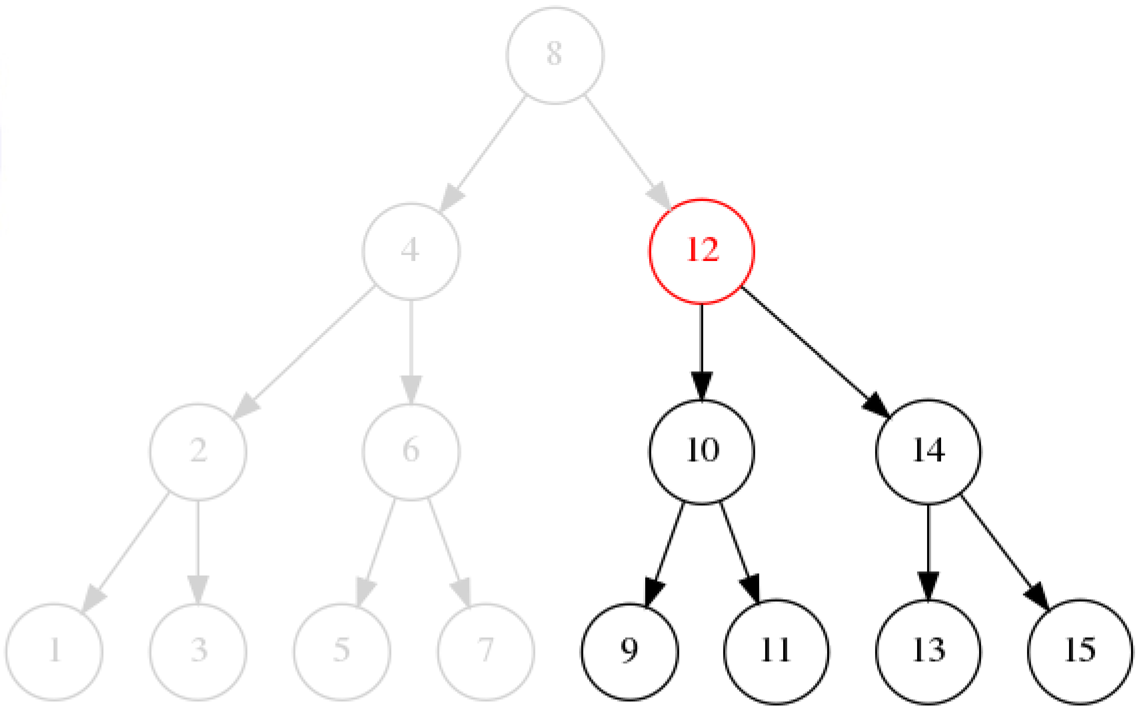
Exécution sous forme d'arbre (1/4)

Recherche du chiffre 9



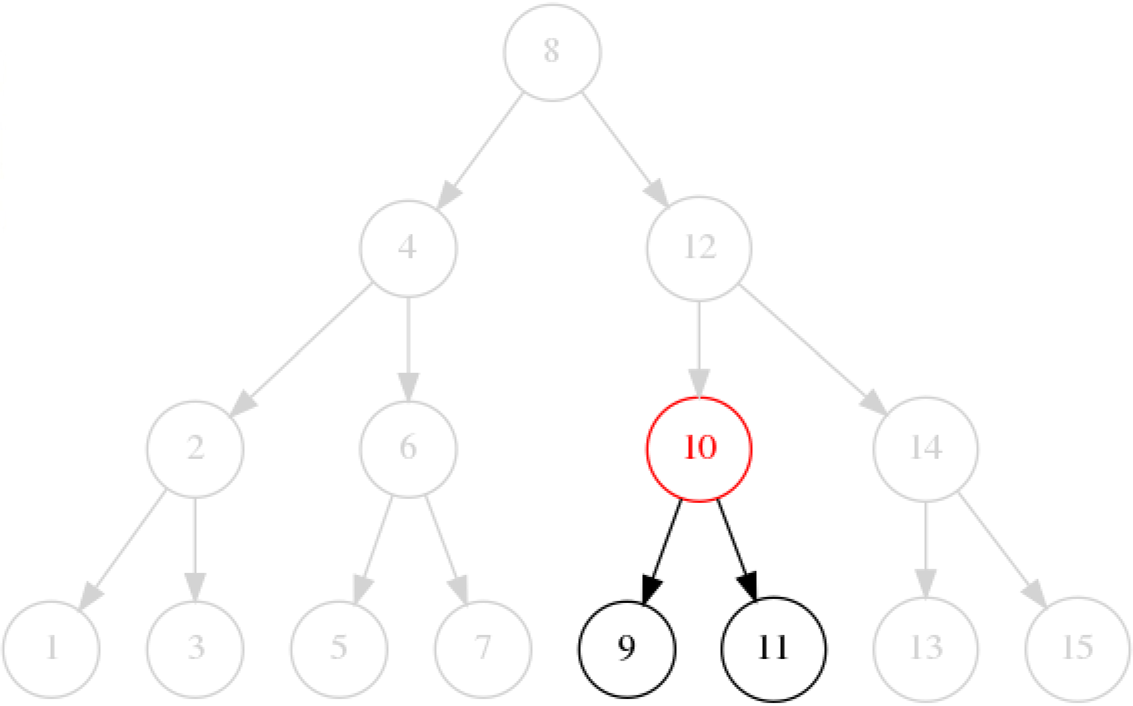
Exécution sous forme d'arbre (2/4)

Recherche du chiffre 9



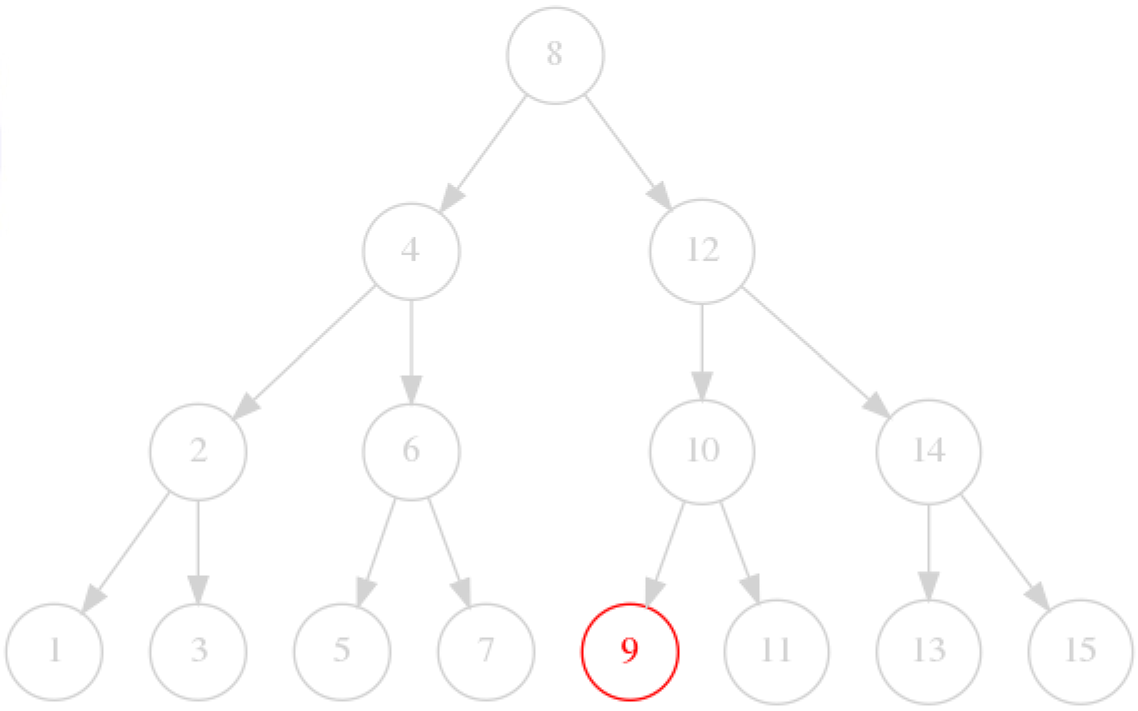
Exécution sous forme d'arbre (3/4)

Recherche du chiffre 9



Exécution sous forme d'arbre (4/4)

Recherche du chiffre 9



Preuve d'algorithme

- A chaque itération :
  - Soit on trouve la clé et l'algorithme s'arrête.
  - Soit l'interval de recherche est réduit de moitié et converge vers la clé car la collection est triée :
    - Soit la borne de fin va au milieu,
    - Soit la borne de début va au milieu.

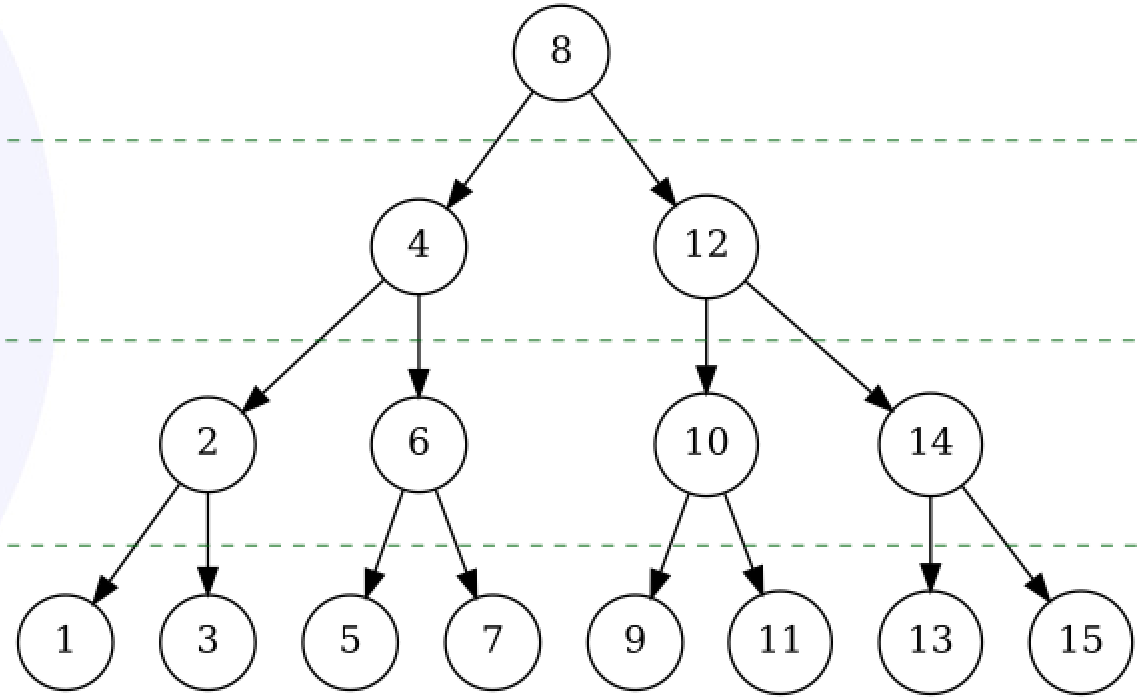
Complexité

- $O(\log N)$: on parcourt chaque étage de l'arbre binaire une fois au maximum.
- $\Omega(1)$: si l'élément du milieu est égal à la clé, l'algorithme s'arrête immédiatement.

Profondeur de l'arbre (1/6)

- A la racine de l'arbre (profondeur $p = 1$), on a un seul noeud.
- A chaque niveau, on multiplie le nombre de noeuds par 2.
- A un niveau donné, on a donc 2^{p-1} noeuds.

Profondeur de l'arbre (2/6)



Profondeur p	Arbre	Nombre de noeuds	
1		$2^0 = 1$	2^{p-1}
2		$2^1 = 2$	2^{p-1}
3		$2^2 = 4$	2^{p-1}
4		$2^3 = 8$	2^{p-1}

$$\text{Total} = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i = 15$$

Profondeur de l'arbre (3/6)

Donc le nombre total maximal de noeuds N est relié à la profondeur p :

$$N = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i$$

Profondeur de l'arbre (4/6)

Un peu d'arithmétique

$$\begin{aligned} 2^p &= 2^p \times 1 \\ &= 2^p \times (2 - 1) \\ &= 2^{p+1} - 2^p \end{aligned}$$

Profondeur de l'arbre (5/6)

Application à la somme des profondeurs

$$N = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i = 2^{p-1} + 2^{p-2} + \cdots + 2^0$$

$$\begin{aligned}
&= (2^p - 2^{p-1}) + (2^{p-1} - 2^{p-2}) + \cdots + (2^2 - 2^1) + (2^1 - 2^0) \\
&= 2^p + (-2^{p-1} + 2^{p-1}) + \cdots + (-2^1 + 2^1) - 2^0 \\
&= 2^p - 2^0 \\
&= 2^p - 1
\end{aligned}$$

Profondeur de l'arbre (6/6)

Retour sur le logarithme

$$
\begin{aligned}
2^p - 1 &= N \\
2^p &= N + 1 \\
\log_2(2^p) &= \log_2(N+1) \\
p\log_2(2) &= \log_2(N+1) \\
p &= \log_2(N+1)
\end{aligned}
$$

Preuve de la complexité

$$\begin{aligned} O(p) &= O(\log_2(N+1)) \\ &= O(\log(N)) \end{aligned}$$

On avait vu que la complexité de la recherche binaire était proportionnelle à la profondeur p de l'arbre, c'est-à-dire $O(p)$ soit $O(\log N)$.

Implémentation récursive

```python
def recherche_binaire(collection, cle):
    def recherche_binaire_impl(collection, cle, debut, fin):
        if fin < debut:
            return -1

        milieu = debut + (fin - debut) // 2
        actuel = collection[milieu]

        if cle < actuel:
            return recherche_binaire_impl(collection, cle, debut, milieu - 1)
        elif cle > actuel:
            return recherche_binaire_impl(collection, cle, milieu + 1, fin)
        else:
            return milieu

    debut = 0
    fin = len(collection) - 1

    return recherche_binaire_impl(collection, cle, debut, fin)
```

Relation de récurrence

- Une autre manière de prouver la complexité serait d'utiliser une **relation de récurrence**.
- On pose que le nombre maximal de comparaisons C pour $N = 1$ est $C(1) = 1$.
- On établi alors que $C(N) = 1 + C(\frac{N}{2})$.
- La résolution de la relation de récurrence donne également $O(\log_2(N))$.

TP : Recherche dans une collection

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo Solutions

TP : Recherche dans une collection

Lien vers le sujet de TP.

Tri en Python

Tri interne

In-place sort 🇬🇧

```
L = [6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4]
L.sort()
print(L)
```

⬇️

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

Renvoie une liste triée

```python
L1 = [6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4]
L2 = sorted(L1)
print(f"L1 = {L1}")
print(f"L2 = {L2}")
```

⬇

```
L1 = [6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4]
L2 = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

Cas des tuples

```python
T = (6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4)
T2 = sorted(T)
print(T2)
```

⬇

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

Cas des sets

```python
S = {6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4}
S2 = sorted(S)
print(S2)
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

Cas des chaînes de caractères (1/2)

```python
Ch = "6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4"
Ch2 = sorted(Ch)
print(Ch2)
```

⬇

```
[' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ',
 ',', ',', ',', ',', ',', ',', ',', ',',
 '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9']
```

Cas des chaînes de caractères (2/2)

```
Ch = "6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4"
Ch3 = sorted(Ch.replace(" ", "").replace(",", ""))
print(Ch3)
```

⬇

```
['1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9']
```

Cas des dictionnaires (1/2)

```python
D = {"un": 1, "deux": 2, "trois": 3}
D2 = sorted(D)
print(D2)
```

```
['deux', 'trois', 'un']
```

Cas des dictionnaires (2/2)

```
D = {"un": 1, "deux": 2, "trois": 3}
D3 = sorted(D.values())
print(D3)
```

⬇

```
[1, 2, 3]
```

Tri décroissant

```
L = [6, 2, 5, 1, 6, 9, 3, 8, 7, 4]
L.sort(reverse=True)
print(L)
```

⬇

```
[9, 8, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
```

Fonction de tri

```
L = [(4, 3, 2, 1), [3, 2, 1], "ba"]
L.sort(key=len)
print(L)
```

```
['ba', [3, 2, 1], (4, 3, 2, 1)]
```

Tri d'une structure de données

```python
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class paiement:
    euros: int = 0
    centimes: int = 0

L = [paiement(10, 0), paiement(3, 55), paiement(3, 99)]
L.sort(key=lambda x: (x.euros, x.centimes))
print(L)
```

```
[paiement(euros=3, centimes=55), paiement(euros=3, centimes=99),
 paiement(euros=10, centimes=0)]
```

Combinaison

```
L = [paiement(10, 0), paiement(3, 55), paiement(3, 99)]
L.sort(key=lambda x: (x.euros, x.centimes), reverse=True)
print(L)
```

⬇

```
[paiement(euros=10, centimes=0), paiement(euros=3, centimes=99),
 paiement(euros=3, centimes=55)]
```

Tri dans des ordres inversés sur différentes clés

```
from dataclasses import dataclass

@dataclass
class outil:
    nom: str = ""
    masse: float = 0.

L = [outil("marteau", 1.), outil("niveau", 0.5),
     outil("cutter", 0.3), outil("compas", 0.3)]
L.sort(key=lambda x: (-x.masse, x.nom))
print(L)
```

⬇

```
[outil(nom='marteau', masse=1.0), outil(nom='niveau', masse=0.5),
 outil(nom='compas', masse=0.3), outil(nom='cutter', masse=0.3)]
```

Algorithmes de tri en $O(N^2)$

CHAMBRE DE COMMERCE
ET D'INDUSTRIE

1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo
Solutions

Intérêt de l'étude du tri

- Dans le cas général, utilisez `sort` et `sorted` pour trier en Python.
- Vous pourriez avoir à implémenter **votre propre structure de données** et **avoir à la trier**.
- Les algorithmes de tri sont des cas d'école à connaître **en entretien d'embauche**.
- Ils présentent un véritable intérêt pédagogique pour aborder les **algorithmes linéarithmiques**.

Différents algorithmes

- Il existe de nombreux algorithmes de tri.
- Nous allons en étudier 6.
- Ils sont séparés en 2 familles :
  - Algorithmes en $O(N^2)$ donc **quadratiques**.
  - Algorithmes en $O(N \log N)$ donc **linéarithmique**.

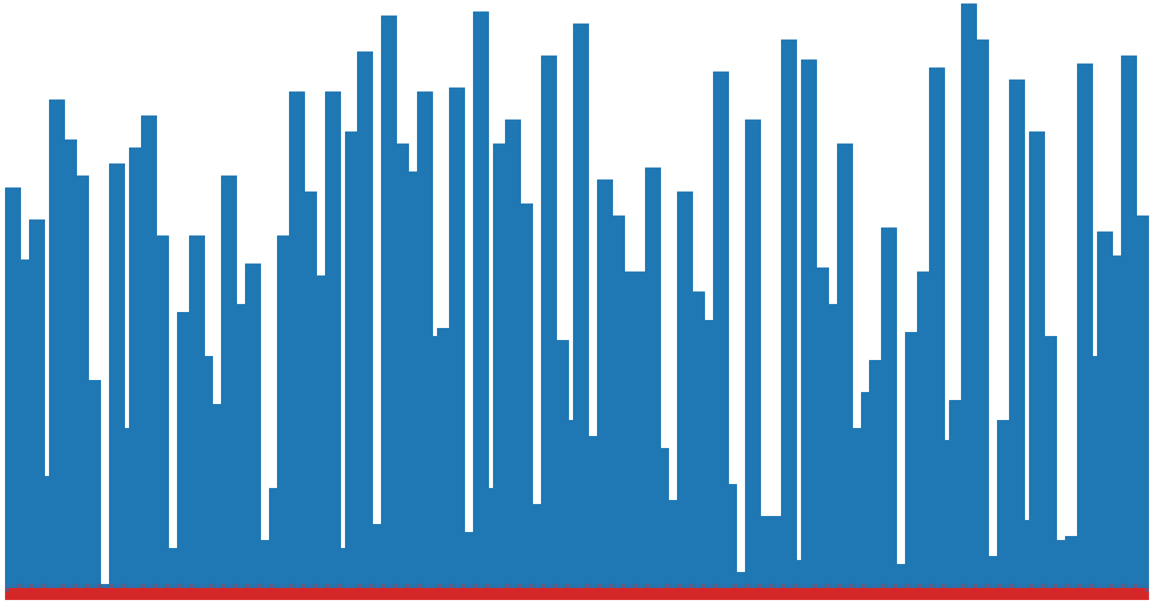
Tri sélection

Algorithme (selection sort 🇬🇧)

```
def tri_selection(a):
    N = len(a)

    for i in range(N):
        min = i
        for j in range(i, N):
            if a[j] < a[min]:
                min = j
        a[i], a[min] = a[min], a[i]

    return a
```

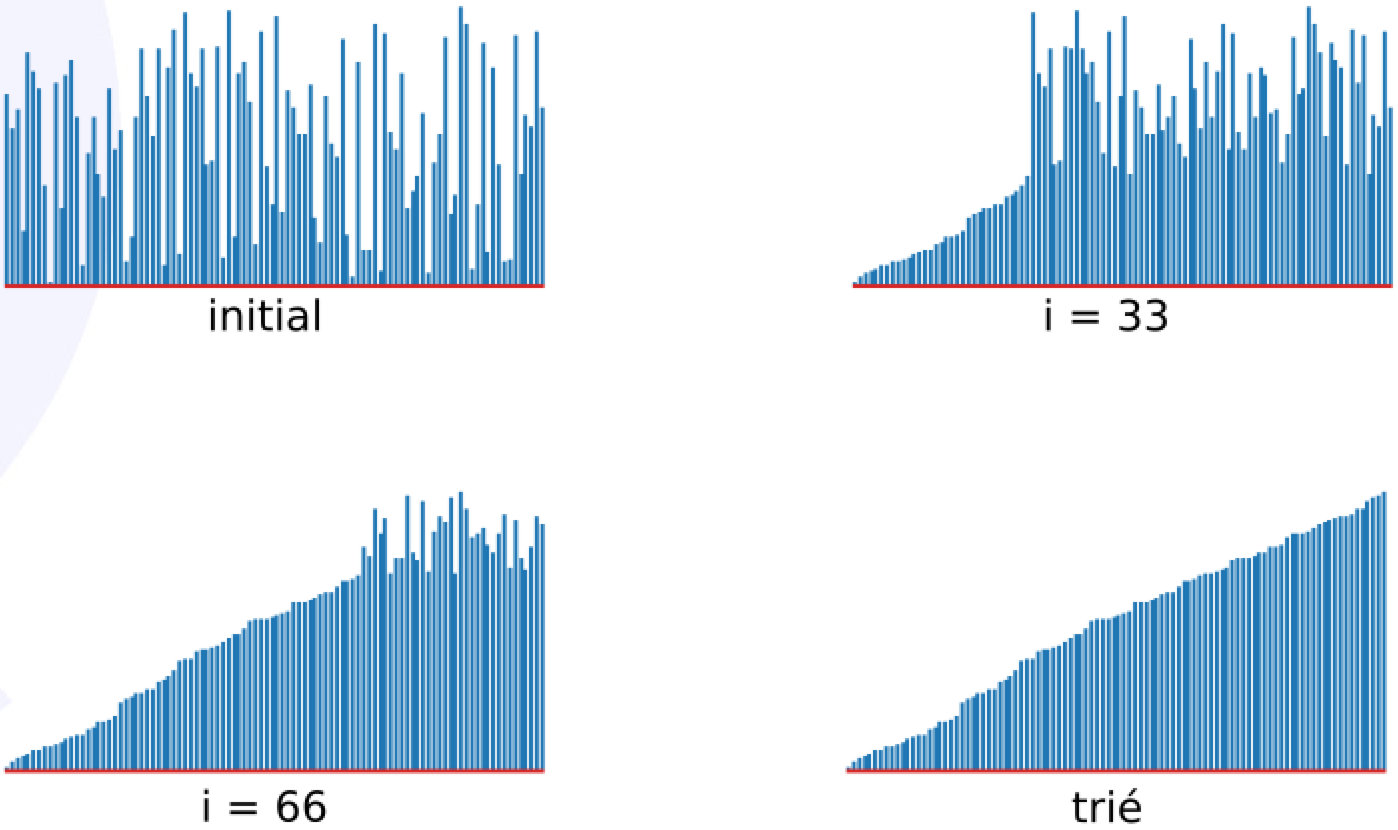
Tri sélection

Exécution animée



Tri sélection

Quelques étapes d'exécution



Tri sélection

Complexité

- On a $N\frac{N-1}{2}$ comparaisons et N échanges.
- Par conséquent, on a $\sim \frac{N^2}{2}$ comparaisons.
- Donc on est en $O(N^2)$.

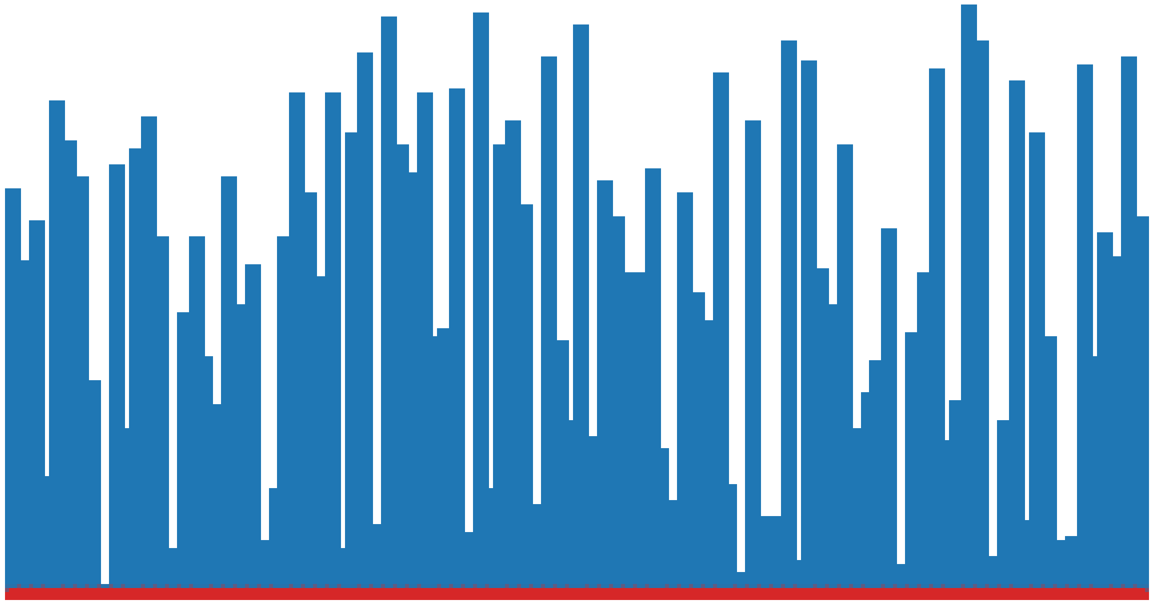
Tri à bulles

Algorithme (bubble sort 🇬🇧)

```python
def tri_bulles(a):
    N = len(a)

    for i in range(N - 1):
        for j in range(N - (i + 1)):
            if a[j] > a[j+1]:
                a[j], a[j+1] = a[j+1], a[j]

    return a
```

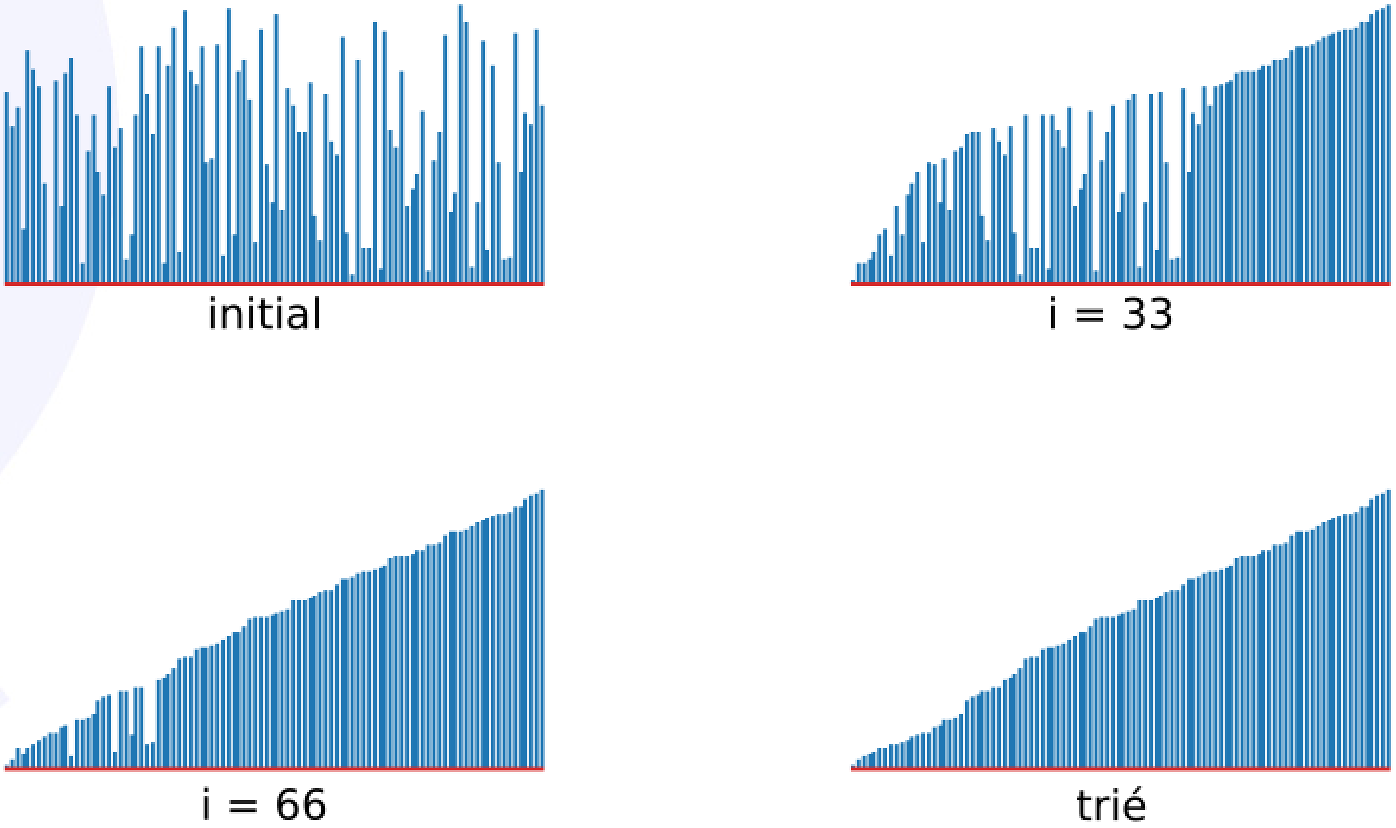
Tri à bulles

Exécution animée



Tri à bulles

Quelques étapes d'exécution



Tri à bulles

Complexité

- On a $N\frac{N-1}{2}$ comparaisons et au pire $N\frac{N-1}{2}$ échanges.
- Par conséquent, on a $\sim \frac{N^2}{2}$ comparaisons.
- Donc on est en $O(N^2)$.

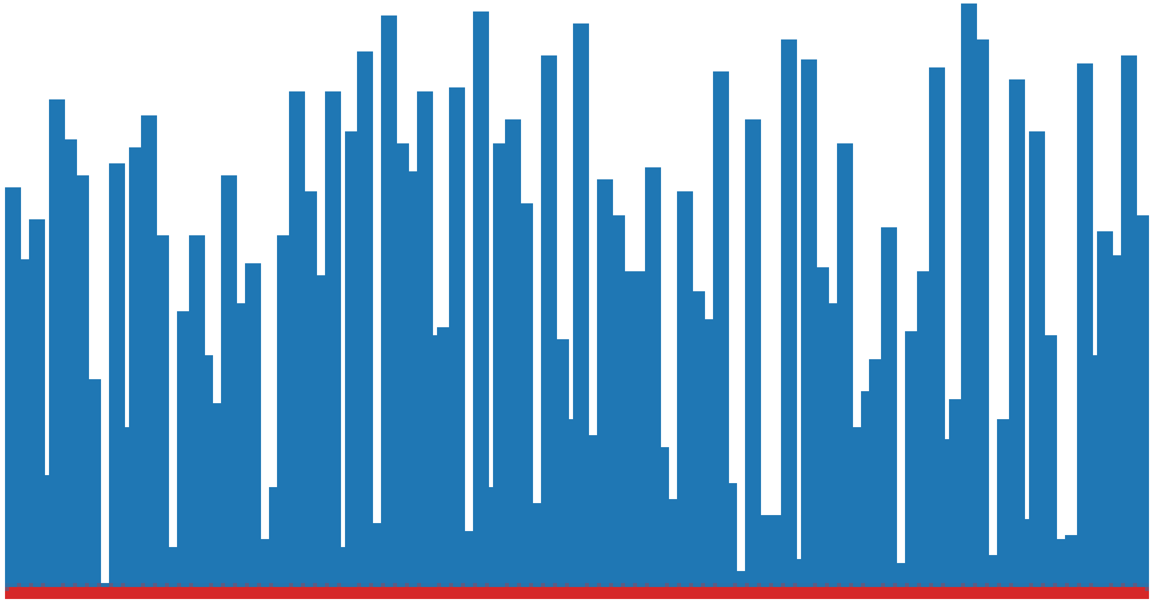
Tri insertion

Algorithme (insertion sort 🇬🇧)

```python
def tri_insertion(a):
    N = len(a)

    for i in range(1, N):
        j = i
        while j > 0 and a[j] < a[j-1]:
            a[j], a[j-1] = a[j-1], a[j]
            j -= 1

    return a
```

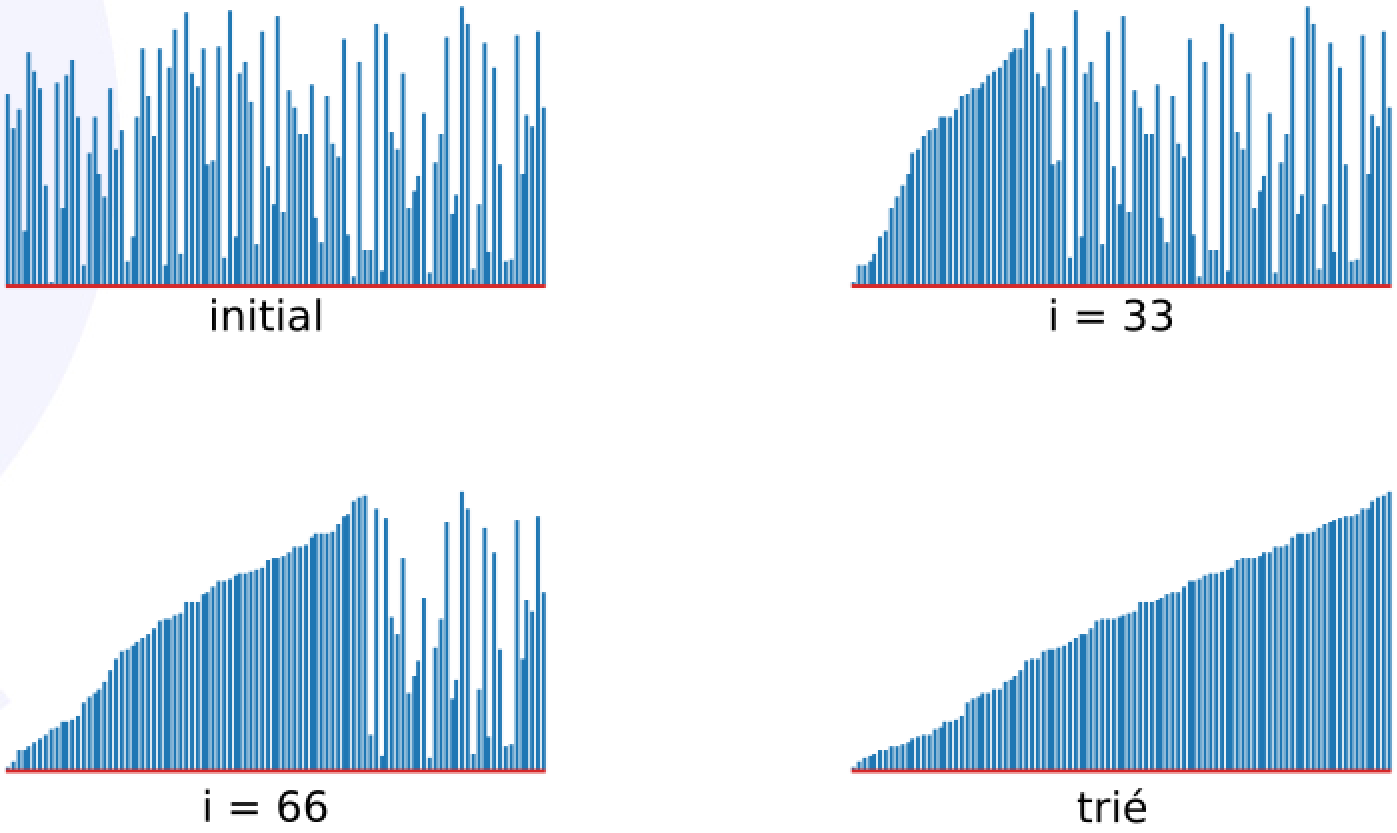
Tri insertion

Exécution animée



Tri insertion

Quelques étapes d'exécution



Tri insertion

Complexité

- On a $\sim \frac{N^2}{4}$ comparaisons et $\sim \frac{N^2}{4}$ échanges.
- Donc on est en $O(N^2)$.

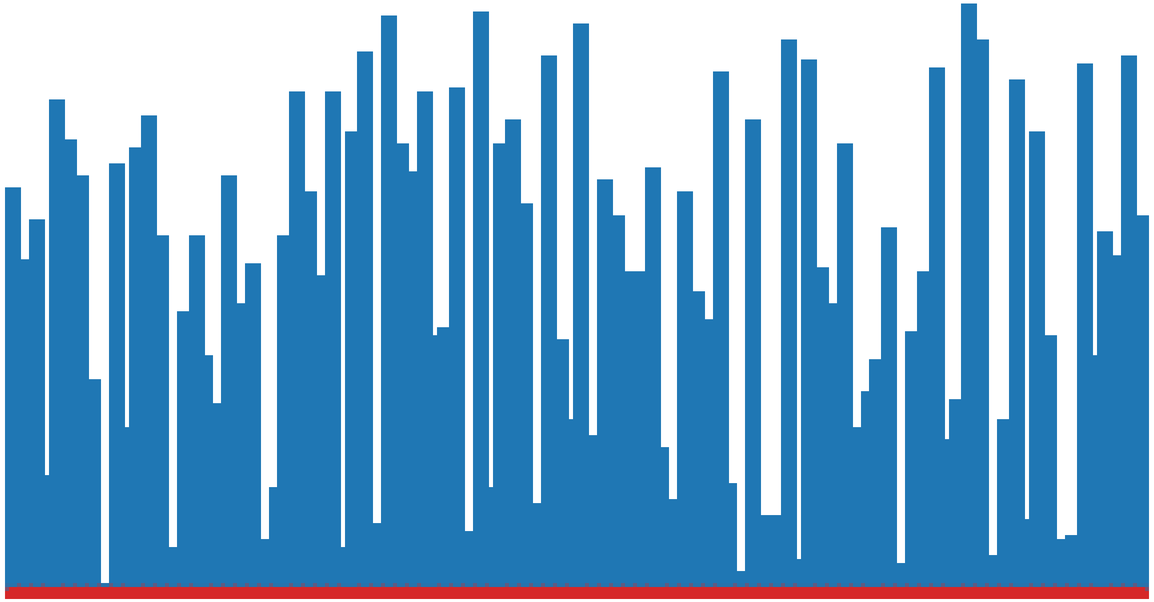
Tri coquille

Algorithme (shell sort 🇬🇧)

```
def tri_coquille(a):
    N = len(a)
    h = 1
    while h < N // 3:
        h = 3 * h + 1

    while h >= 1:
        for i in range(h, N):
            j = i
            while j >= h and a[j] < a[j-h]:
                a[j], a[j-h] = a[j-h], a[j]
                j -= h

        h //= 3

    return a
```

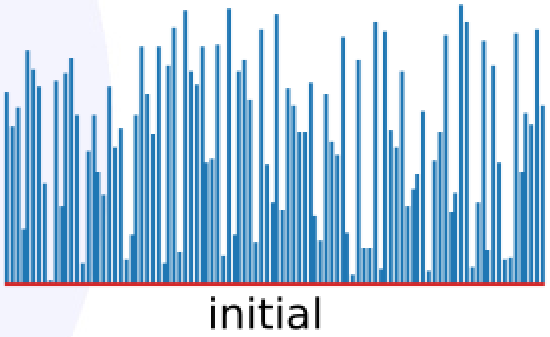
Tri coquille

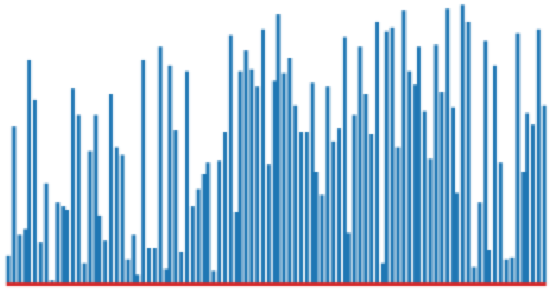
Exécution animée

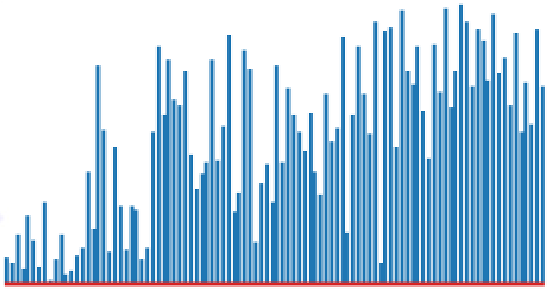


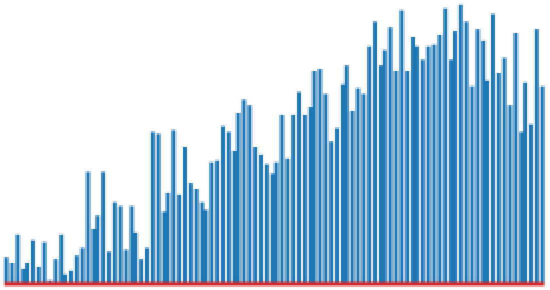
Tri coquille

Quelques étapes d'exécution (1/2)



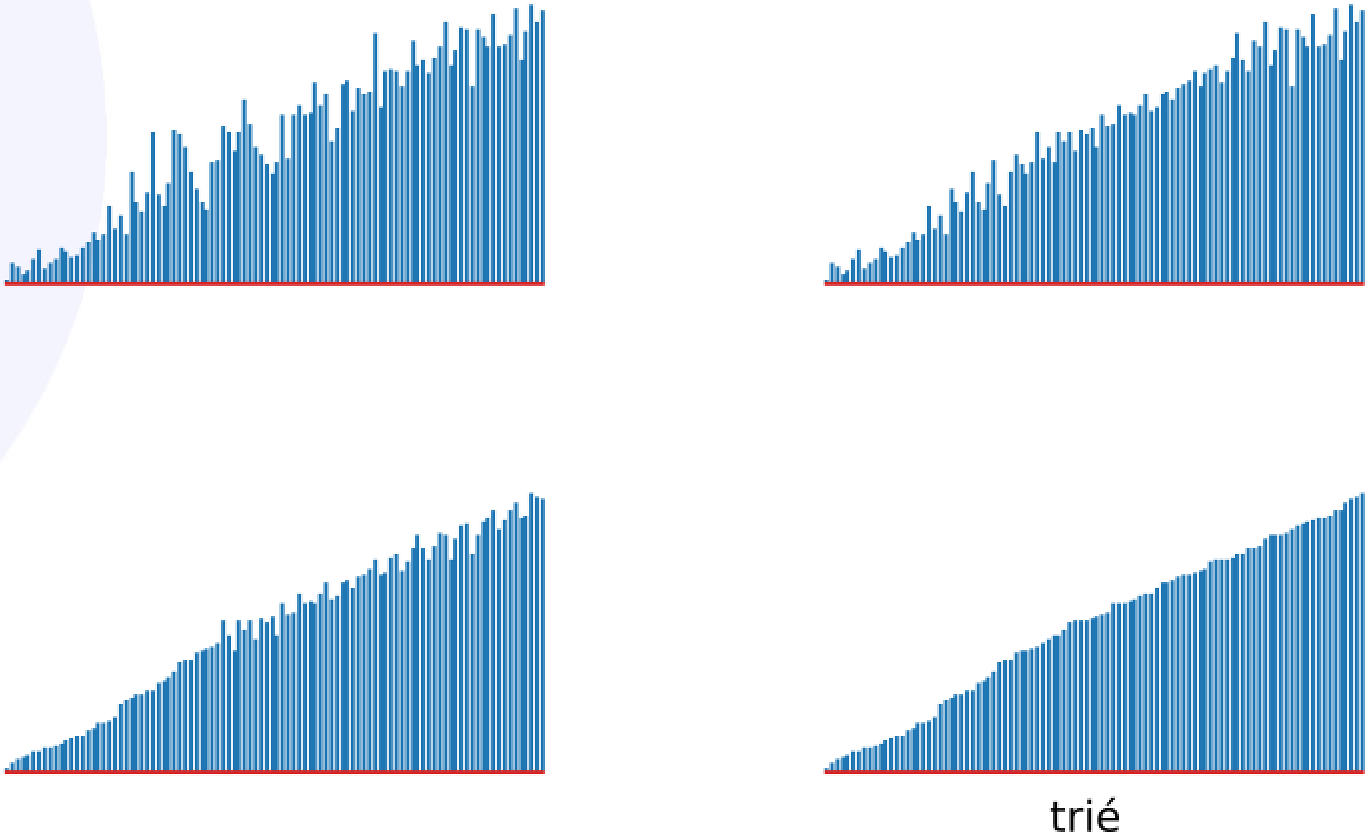






Tri coquille

Quelques étapes d'exécution (2/2)

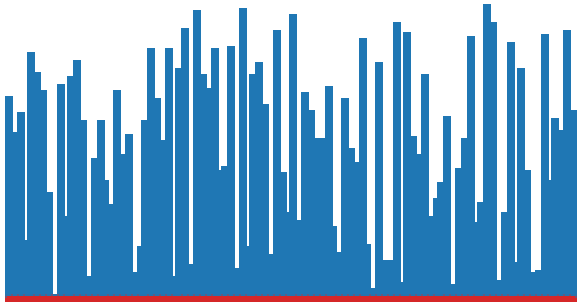


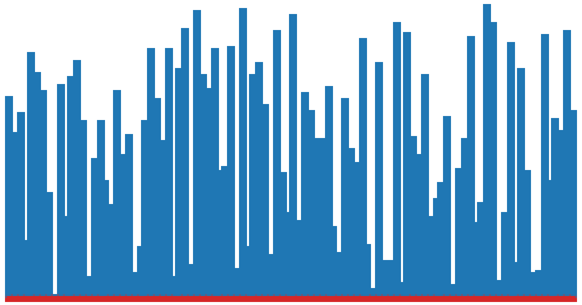
Tri coquille

Complexité

- On a $\sim \sqrt{N^3}$ comparaisons.
- Donc on est en $O(N^{3/2})$.

Comparaison

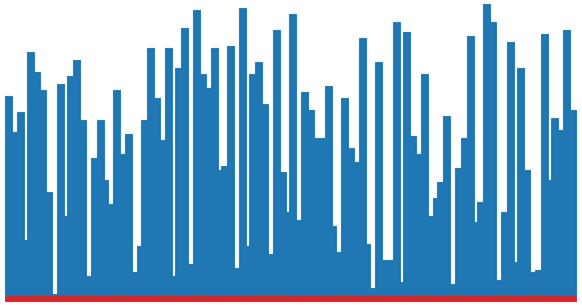




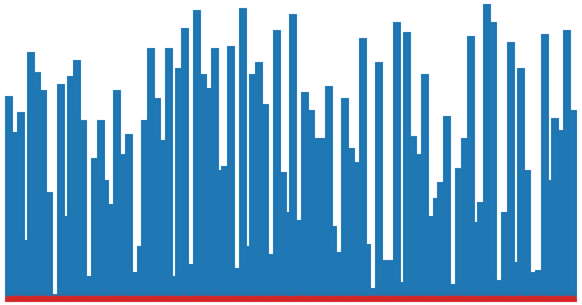
Tri sélection

Tri à bulles

Comparaison

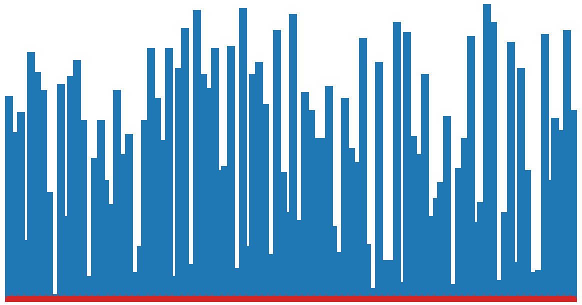


Tri sélection

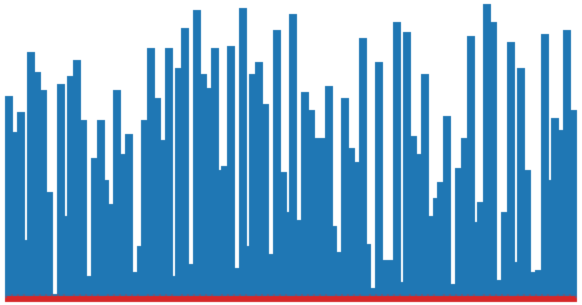


Tri insertion

Comparaison



Tri insertion



Tri coquille

Partition : diviser et conquérir

Divide-and-Conquer 🇬🇧

Diviser et conquérir

- Le principe de **diviser et conquérir** est fondamental en algorithmique.
- On a vu avec la recherche binaire que le fait de diviser en 2 un problème permet de le résoudre beaucoup plus rapidement.

Rappel sur la partition

- En **mathématiques**, une partition d'un ensemble est un regroupement de ses éléments dans des sous-ensembles non-vides tel que chaque élément est inclu dans exactement un sous-ensemble.
- Exemple :
  - pour l'ensemble $E = \{6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4\}$,
  - le sous-ensemble $C_1 = \{2, 5, 1, 3, 4\}$,
  - le sous-ensemble $C_2 = \{6\}$,
  - le sous-ensemble $C_3 = \{9, 8, 7\}$,
  - on a C_1, C_2, C_3 qui forment une partition de E.

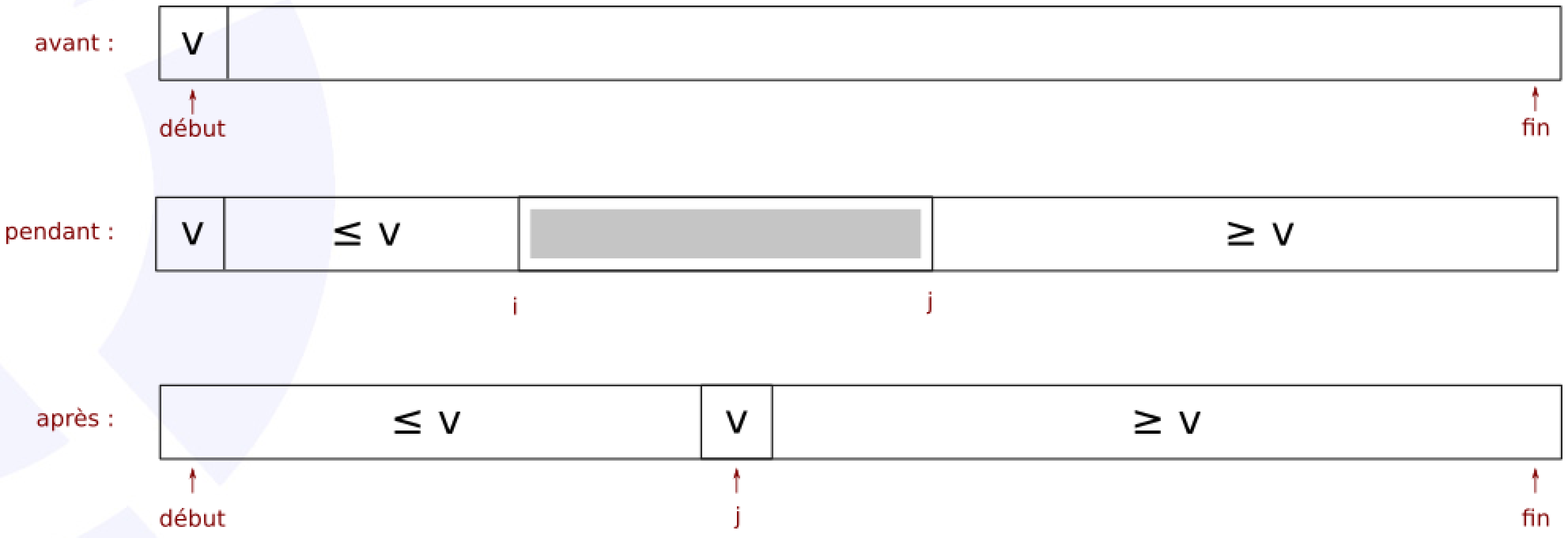
Partitionner en 2

- L'**algorithme de partition** vise à diviser un ensemble en 2 sous-ensembles :
  - L'ensemble des éléments strictement plus petit qu'une valeur.
  - L'ensemble des autres éléments.

Partition

```
def partition(e):
    N = len(e)
    valeur = e[0]
    i = 0
    j = N

    while True:
        i += 1 # Garanti la progression à droite
        while e[i] < valeur and i != N: i += 1 # Scan vers la droite

        j -= 1 # Garanti la progression à gauche
        while valeur < e[j] and j != 0: j -= 1 # Scan vers la gauche

        if i >= j: break # Si les indices se croisent on s'arrête

        # Echange des éléments entre les 2 partitions
        e[j], e[i] = e[i], e[j]

    # Met la valeur de partitionnment entre les 2 partitions
    e[j], e[0] = e[0], e[j]
```

Illustration de l'exécution



Exemple

```
L = [6, 2, 5, 1, 9, 3, 8, 7, 4]
partition(L)
print(L)
```

⬇

```
[3, 2, 5, 1, 4, 6, 8, 7, 9]
```

```python
L = [6, 2, 5, 1, 6, 9, 3, 8, 7, 4]
partition(L)
print(L)
```

```
[3, 2, 5, 1, 4, 6, 9, 8, 7, 6]
```

Complexité

- On a $N+1$ comparaisons.
- On est donc en \thicksim N^, et $O(N)$.

Tri Rapide

Quick Sort 🇬🇧

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo Solutions

Tri rapide

Introduction

- Le tri rapide a une **meilleure complexité** que les autres algorithmes de tri vu jusqu'ici.
- Il est également plus complexe à comprendre.
- Il repose sur la **partition** et une définition **naturellement récursive**.

Tri rapide - Partition

```
def partition(a, debut, fin):
    i = debut
    j = fin + 1
    valeur = a[debut]

    while True:
        i += 1
        while a[i] < valeur and i != fin: i += 1

        j -= 1
        while valeur < a[j] and j != debut: j -= 1

        if i >= j: break

        a[j], a[i] = a[i], a[j]

    a[j], a[debut] = a[debut], a[j]

    return j
```

Tri rapide

Algorithme (quick sort 🇬🇧)

```
def tri_rapide_recursif(a, debut, fin):
    if fin > debut:
        j = partition(a, debut, fin)
        tri_rapide_recursif(a, debut, j - 1)
        tri_rapide_recursif(a, j + 1, fin)
```

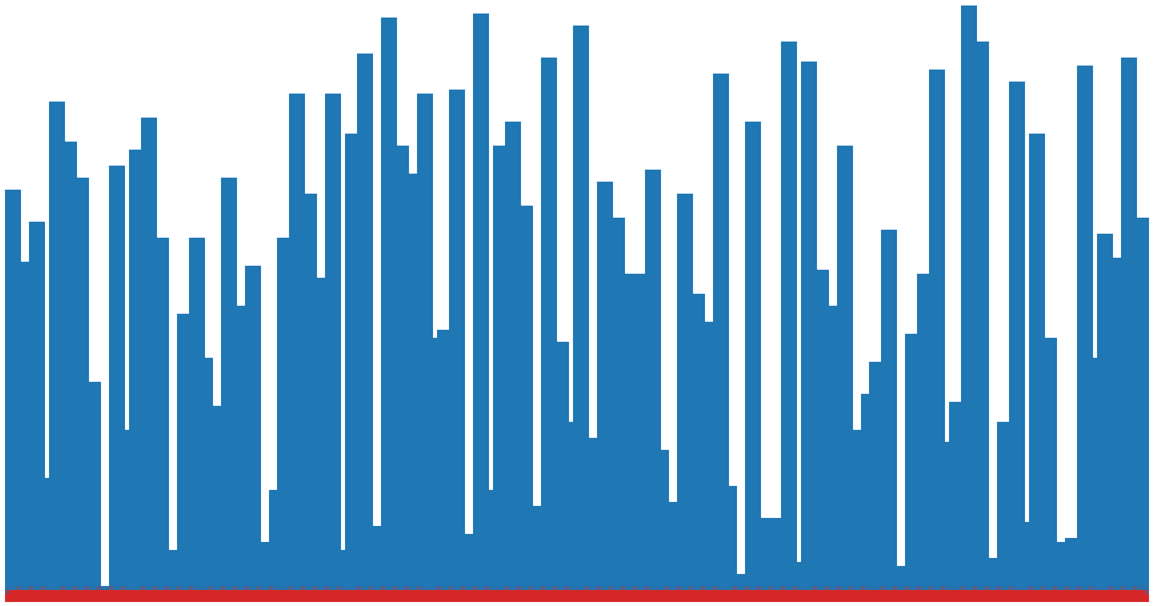
Tri rapide

Interface

```
def tri_rapide(a):
    N = len(a)
    tri_rapide_recursif(a, 0, N - 1)
```

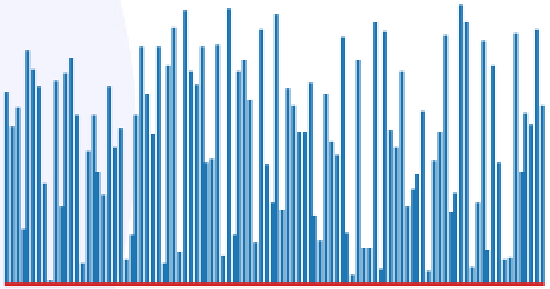
Tri rapide

Exécution animée

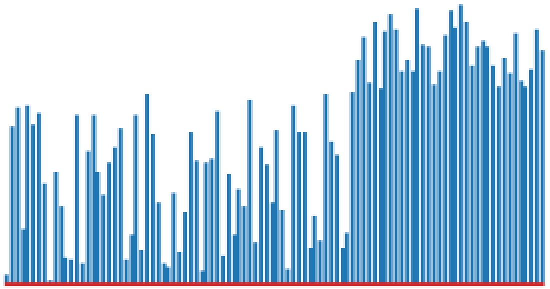


Tri rapide

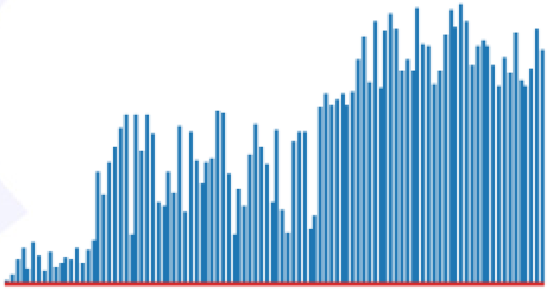
Quelques étapes d'exécution (1/2)



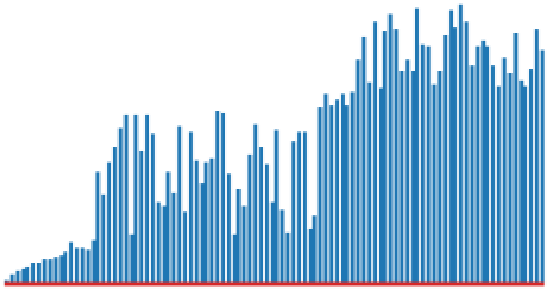
initial



partition 1



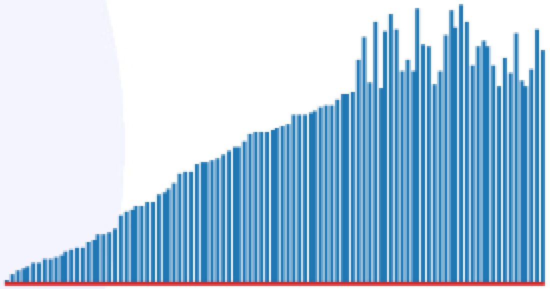
partition 4



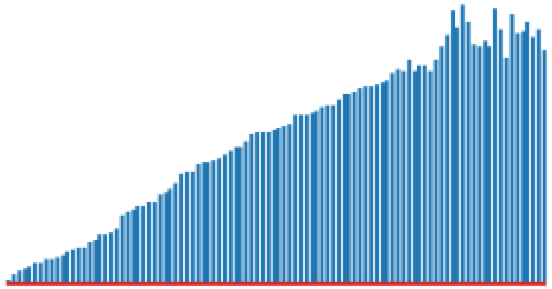
partition 10

Tri rapide

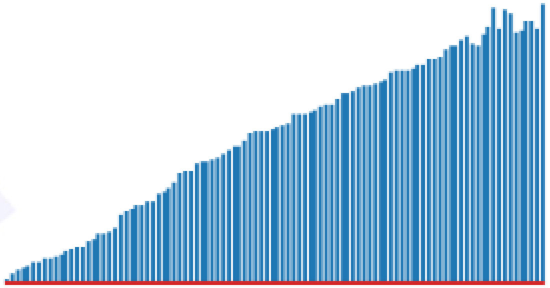
Quelques étapes d'exécution (2/2)



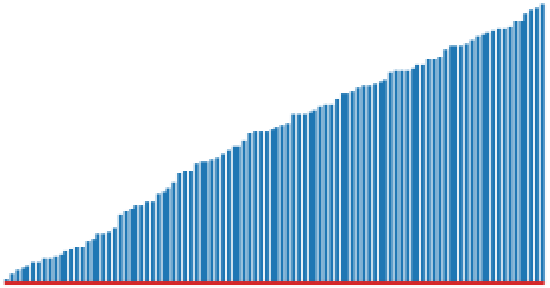
partition 45



partition 50



partition 60



trié

Tri rapide

Complexité

- On a $\sim 2N \log N$ comparaisons en moyenne.
- On a $\sim \frac{N^2}{N}$ comparaisons dans le pire cas.
- Comme on peut facilement se prévenir du pire cas, on admet $O(N \log N)$ en pratique.

Le *pire* cas (1/2)

- Le pire cas survient lorsque la collection est **déjà triée**.
- En effet, le partionnement n'a **aucun effet** dans ce cas.
- On a vu dans la partie sur l'algorithme de partition que la valeur `v` ne se retrouve pas forcément au milieu.
- Si la valeur `v` se retrouve **toujours en premier**, cela signifie que la collection est déjà triée et le tri rapide sera lent et inutile.

Le *pire* cas (2/2)

- On peut se prévenir du pire cas en **testant initialement** si le tableau est trié.
- On peut s'éloigner du pire cas en **mélangeant les éléments**.

Le *meilleur* cas

- Le tri rapide est à son maximum lorsque `v` se retrouve toujours *exactement* au milieu à chaque partitionnement.
- Dans ce cas, la relation de récurrence C définissant le nombre de comparaisons $C_N = 2C_{N/2} + N$.
- $C_N \sim N \log N$, ce qui est un début de preuve pour la complexité de cet algorithme.

Tri Fusion

Merge Sort 🇬🇧

CHAMBRE DE COMMERCE
ET D'INDUSTRIE
1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo
Solutions

Tri Fusion

Introduction

- Dans le tri rapide, on partitionne en 2 sous-ensembles puis on applique l'algorithme récursivement à chaque sous-ensemble.
- Dans le tri fusion, on fait les opérations dans le sens inverse : on applique **d'abord** récursivement l'algorithme puis on **fusionne** les résultats.
- C'est la fusion qui entraine le tri.

Tri Fusion

Fusion

```
def fusion(a, debut, milieu, fin):
    i = debut
    j = milieu + 1
    auxiliaire = a[:]
    for k in range(debut, fin + 1):
        if i > milieu:
            a[k] = auxiliaire[j]
            j += 1
        elif j > fin:
            a[k] = auxiliaire[i]
            i += 1
        elif auxiliaire[j] < auxiliaire[i]:
            a[k] = auxiliaire[j]
            j += 1
        else:
            a[k] = auxiliaire[i]
            i += 1
```

Tri Fusion

Algorithme (merge sort 🇬🇧)

```python
def tri_fusion_recursif(a, debut, fin):
    if fin > debut:
        milieu = debut + (fin - debut) // 2
        tri_fusion_recursif(a, debut, milieu)
        tri_fusion_recursif(a, milieu + 1, fin)
        fusion(a, debut, milieu, fin)
```

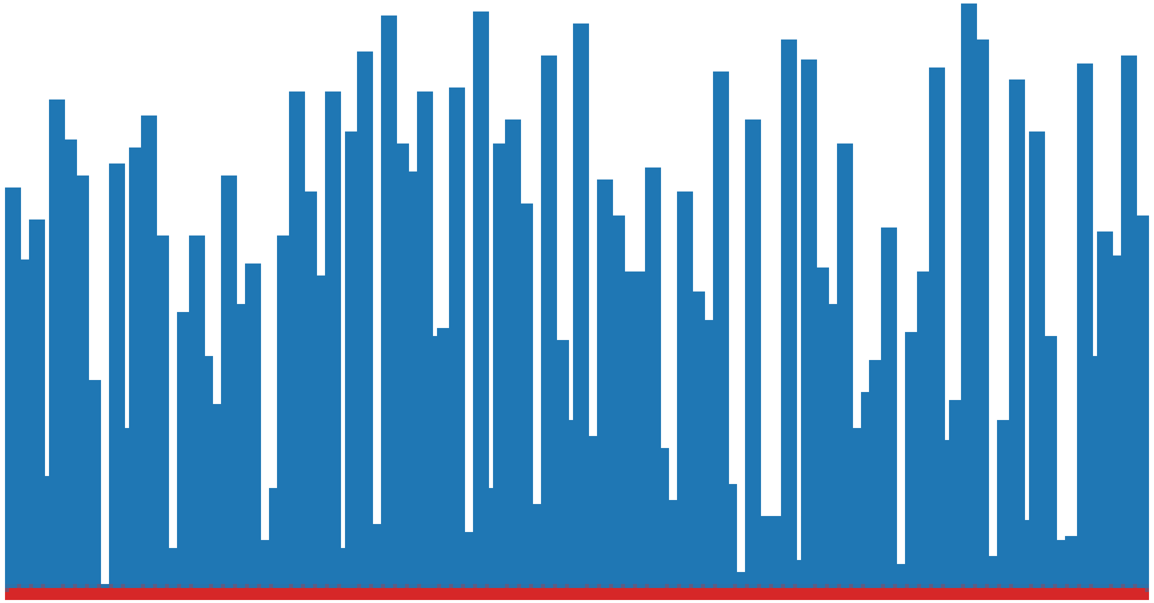
Tri Fusion

Interface

```
def tri_fusion(a):
    N = len(a)
    tri_fusion_recursif(a, 0, N - 1)
```

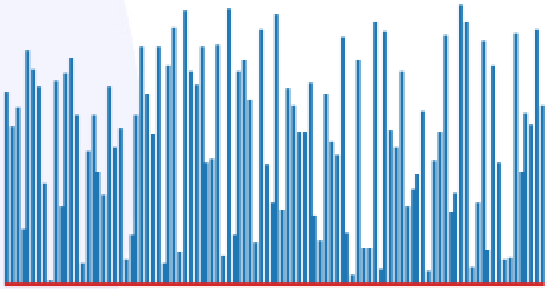
Tri Fusion

Exécution animée

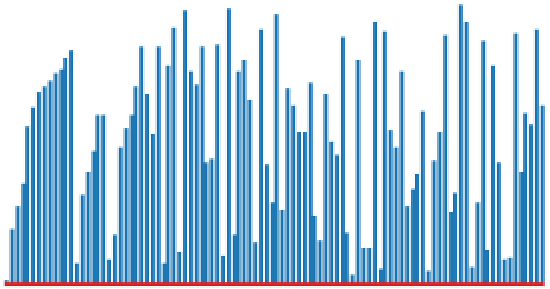


Tri Fusion

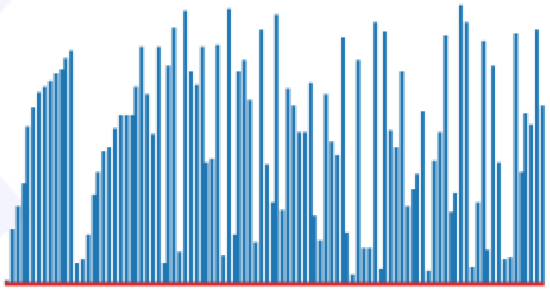
Quelques étapes d'exécution (1/2)



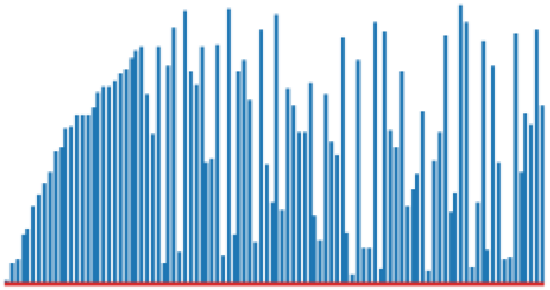
initial



fusion 22



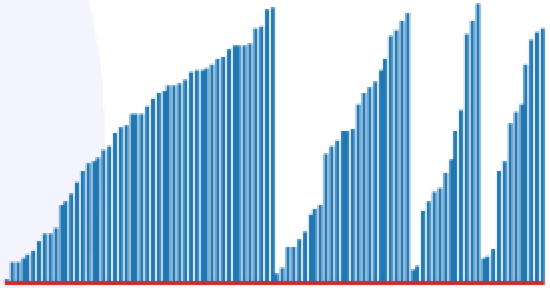
fusion 23



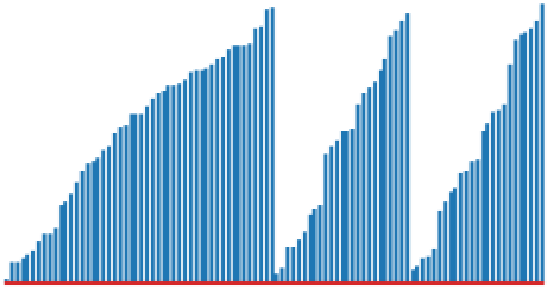
fusion 24

Tri Fusion

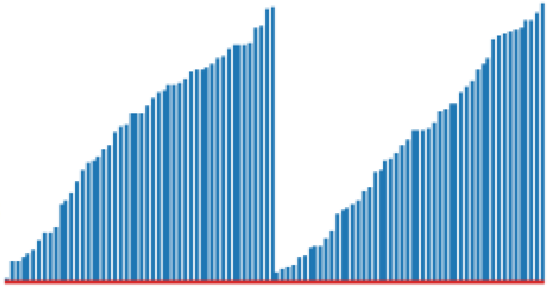
Quelques étapes d'exécution (2/2)



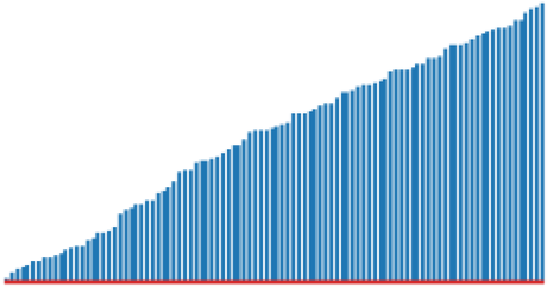
fusion 96



fusion 97



fusion 98



trié

Tri Fusion

Complexité

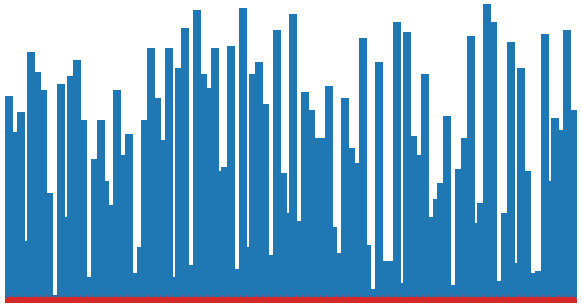
- La complexité de la fusion elle-même est $\Theta(N)$
- Pour le tri fusion :
  - On a entre $\frac{1}{2}N\log N$ et $N\log N$ comparaisons.
  - On est en $\Theta(N\log N)$.

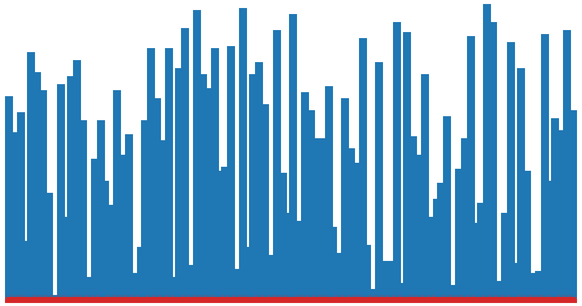
Tri Fusion

Intuition de preuve

- A chaque récursion, on divise l'espace en 2.
- On peut dessiner un arbre binaire pour représenter les appels.
- La profondeur p de cet arbre binaire est proportionnel à $O(\log N)$.
- On a donc $\log N$ fusions, soit $O(N \log N)$ opérations au total.

Comparaison





Tri rapide

Tri fusion

Existe-t-il un algorithme plus efficace ?

- Autrement dit, existe-t-il un algorithme ayant une meilleure complexité que $O(N \log N)$ pour trier une collection ?
- **Non**, il est possible de prouver que **la meilleure complexité** pour le tri est $O(N \log N)$.
- En revanche, les implémentations peuvent recevoir de **petites améliorations**.
- Par exemple, il existe possible de **paralléliser** tri rapide ou tri fusion.

Eléments de preuve

- On considère que tous les éléments à trier sont distincts.
- On construit un **arbre binaire** de toutes les **permutations possibles**.
- Il y a $N!$ permutations possibles (par définition).
- On s'intéresse à la **profondeur** p et comme l'arbre est binaire, on a $O(p) = O(\log(N!))$.
- L'**approximation de Stirling** nous donne $\log(N!) \sim N\log(N)$.

TP : Tri de collections

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

1er ACCÉLÉRATEUR DES ENTREPRISES

Yvo Solutions

TP : Tri de collections

Lien vers le sujet de TP.