Algorithmique et optimisation

Loïc Demange
loic.demange@etud.univ-paris8.fr

24 septembre 2020

Dichotomie

- Comment chercher efficacement un mot dans un dictionnaire ?

Dichotomie

- Comment chercher efficacement un mot dans un dictionnaire ?

Ouvrir à la moitié, et découper en deux au fur et à mesure en fonction de la position du mot.

Dichotomie

- Comment trouver efficacement la bonne valeur dans le jeu “Plus ou moins” ?

Dichotomie

- Comment trouver efficacement la bonne valeur dans le jeu “Plus ou moins” ?

Prendre $\frac{max+min}{2}$, et découper en deux au fur et à mesure en fonction de la réponse.

Exemple On doit trouver un nombre dans l’intervalle $[0, 100]$.
On propose $\frac{max+min}{2} = \frac{100+0}{2} = 50$.
Si le jeu répond “Plus”, on itérera dans l’intervalle $[50, 100]$.
Si le jeu répond “Moins”, on itérera dans l’intervalle $[0, 50]$.

Dichotomie

- Comment trouver efficacement le zéro d'une fonction continue ?

Dichotomie

- Comment trouver efficacement le zéro d'une fonction continue ?

Prendre un intervalle $[a, b]$ où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou inversement), et découper en deux les bornes supérieures ou inférieures au fur et à mesure en fonction du signe.

Remarque Si $f(b) > 0$ et $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, alors $[a, \frac{a+b}{2}]$ est un intervalle valide.
Si $f(a) < 0$ et $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, alors $[\frac{a+b}{2}, b]$ est un intervalle valide.

Dichotomie

On peut approximer une valeur réelle.
Par exemple, la fonction $x^2 - 3$ a pour zéro $\sqrt{3}$ (et son négatif).

Dichotomie

Exercices :

- Comment trouver efficacement une valeur dans un tableau trié ?
- Approximer à la main $\sqrt{11}$ en 5 itérations (indice : $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$)

Dichotomie

On peut chercher à approximer un zéro à une précision 10^{-N} près.

On sait que si on a un intervalle $[a, b]$, alors la longueur de cet intervalle est $b - a$.
A la première itération, on aura l'intervalle $[\frac{a+b}{2}, b]$ (ou $[a, \frac{a+b}{2}]$), soit de longueur $b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$ (ou $\frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$).

Ce qui signifie qu'à la n-ième itération, on sera à $\frac{b-a}{2^n}$.
On peut donc poser l'équation $\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-N}$.

Dichotomie

$\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-N}$

Dichotomie

$\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-N}$

$\iff (b-a)10^N \leq 2^n$

Dichotomie

$\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-N}$

$\iff (b-a)10^N \leq 2^n$

$\iff \log(b-a) + \log(10^N) \leq \log(2^n)$

Dichotomie

$\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-N}$

$\iff (b-a)10^N \leq 2^n$

$\iff \log(b-a) + \log(10^N) \leq \log(2^n)$

$\iff log(b-a) + N \leq n\log(2)$

Dichotomie

$\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-N}$

$\iff (b-a)10^N \leq 2^n$

$\iff \log(b-a) + \log(10^N) \leq \log(2^n)$

$\iff log(b-a) + N \leq n \log(2)$

$\iff n \geq \frac{log(b-a)+N}{\log(2)}$

Exercices :

- Combien d'itérations faut-il pour approximer $\sqrt{11}$ à 10^{-4} près, avec comme intervalle initial $[3, 4]$.
- Écrire un algorithme qui permet de calculer un zéro d'une fonction, en y précisant la précision.