Algorithmique et optimisation

Loïc Demange
loic.demange@etud.univ-paris8.fr

08-15 octobre 2020

Sécante

- Comment trouver efficacement le zéro d'une fonction continue avec la méthode de la sécante ?

Sécante

- Comment trouver efficacement le zéro d'une fonction continue avec la méthode de la sécante ?

Prendre un intervalle $[a, b]$ où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou inversement), et tracer un segment $[AB]$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

La droite (AB) passe par l'origine, et son zéro est facilement déterminable. On peut donc resserer l'intervalle en $[a', b]$ (ou $[a, b']$), a' (ou b') étant le point où (AB) intersecte l'axe des abscisses.

On peut continuer cette logique au fur et à mesure.

Sécante

Méthode de la sécante

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$.
Alors la suite définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$ est croissante et converge vers la solution de $(f(x) = 0)$.

Sécante

Méthode de la sécante

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$.
Alors la suite définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$ est croissante et converge vers la solution de $(f(x) = 0)$.

Preuve

1. L'équation de la droite (AB) est $y = (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)$. Vu que la droite intersecte 0 en $(a', 0)$, alors $0 = (a'-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)$ et donc $a' = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$.

Méthode de la sécante

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$.
Alors la suite définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$ est croissante et converge vers la solution de $(f(x) = 0)$.

Preuve

2. On sait que $f(a_0) = f(a) \leq 0$ par hypothèse. Prouvons que si $f(a_n) \leq 0$, alors $f(a_{n+1}) \leq 0$.
   - Si $a_{n+1} < a_n$, alors $f(a_{n+1}) < f(a_n) \leq 0$ (car f croissante).
   - Si $a_{n+1} \geq a_n$, alors on constate que la sécante entre $(a_n, f(a_n))$ et $(b, f(b))$ est au dessus du graphe f.
     Or, le point $(a_{n+1}, 0)$ (qui est par définition sur cette sécante) est au dessus de $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$. Donc $f(a_{n+1}) \leq 0$.

   Factuellement, vu qu'on sait que f est croissante et que $a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$, on sait aussi que $a_{n+1} \geq a_n$.

Méthode de la sécante

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$.
Alors la suite définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$ est croissante et converge vers la solution de $(f(x) = 0)$.

Preuve

3. On sait que la suite a_n est croissante et majorée par b. Elle est donc convergente. Notons l sa limite.
   On sait que pour tout n, $f(a_n) \leq 0$. Donc $f(l) \leq 0$, et donc $l < b$.

   Comme $a_n \to l$, $a_{n+1} \to l$, $f(a_n) \to f(l)$, l'égalité
   $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$ devient, lorsque $n \to +\infty$,
   $l = l - \frac{b-l}{f(b)-f(l)} f(l)$. Donc $f(l) = 0$.
   Donc (a_n) converge bien vers la solution de $(f(x) = 0)$.

Sécante

Calcul de l'erreur

Soit $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et l tel que $f(l) = 0$.
S'il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout $x \in I$, $\mid f'(x) \mid \geq m$ alors $\mid x - l \mid \leq \frac{|f(x)|}{m}$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.

Exemple Soit $f(x) = x^2 - 3$ et l'intervalle $\mathcal{I} = [1, 2]$. Alors $f'(x) = 2x$, et donc $\mid f'(x) \mid \geq 2$ sur $\mathcal{I}$. On pose $l = \sqrt{3}$, $x = a_n$ et $m = 2$.

On a donc comme approximation de l'erreur :
$\epsilon_n = \mid l - a_n \mid \leq \frac{|f(a_n)|}{m} = \frac{|a_n^2 - 3|}{2}$.

Sécante

Exercices :

- Approximer à la main $\sqrt{11}$ en 3 itérations (indice : $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$)
- Écrire un algorithme itératif qui permet d'approximer un zéro d'une fonction avec la méthode de la sécante, supposant que vous avez déjà un premier encadrement $[a, b]$ et n le rang de la suite voulu
- Écrire cet algorithme de manière récursive