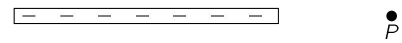
Exercices sur les distributions continues de charges

203-NYB-05 Électricité et magnétisme

Imaginez que vous prenez une tige de plastique et que vous la chargez uniformément, c'est-à-dire que vous répartissez la charge également partout sur la tige. Votre, mission, si vous l'acceptez, sera de déterminer le champ électrique produit par cette tige à un point P situé le long de son axe.

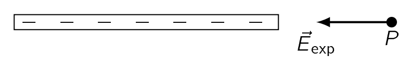


Pour l'instant, vous ne connaissez qu'une expression mathématique pour le champ produit par une charge ponctuelle. Ce serait bien si vous pouviez utiliser cette connaissance pour déterminer le champ produit par la tige. Le but de cet exercice est justement de développer une méthode qui vous permettra de calculer le champ électrique produit par des objets étendus à partir du champ d'une charge ponctuelle. Bien que cette méthode soit générale et s'applique à des objets de toutes formes, nous nous contenterons de l'utiliser dans des cas simples pour éviter les calculs trop monstrueux.

Champ électrique sur l'axe d'une tige uniformément chargée

Supposons que la tige a une longueur $L = 10\,\text{cm}$ et qu'elle porte une charge totale de $Q = -5\,\text{nC}$ répartie uniformément sur toute sa longueur. On cherche le champ électrique à un point P situé à $d = 6\,\text{cm}$ de l'extrémité droite de la tige.

Une expérimentatrice talentueuse a réalisé l'expérience pour vous et a obtenu une valeur expérimentale du champ électrique. Le champ électrique qu'elle a mesuré a une grandeur de $E_{\text{exp}} = (4681 \pm 3)\,\text{N/C}$ et il pointe vers la gauche.



Premier modèle : la tige comme une charge ponctuelle

Vous vous dites que le modèle le plus simple est de considérer la tige comme une charge ponctuelle située en son centre. En utilisant ce modèle, calculez le champ électrique au point P.

La distance entre le centre de la tige et le point P est $L/2 + d$. On considère que toute la charge Q de la tige est en son centre. Par conséquent, le champ électrique est obtenu à partir de l'expression pour le champ d'une charge ponctuelle

$$\begin{aligned} E &= \frac{k\,|Q|}{(L/2+d)^2} \\ &= 3715\,\text{N/C} \end{aligned}$$

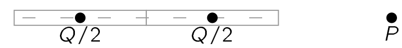
Le champ pointe vers la tige, donc vers la gauche, parce que la charge de la tige est négative.

Est-ce que le résultat que vous obtenez concorde avec le résultat expérimental ?

L'ordre de grandeur est correct, mais avec un écart de plus de 20 %, ce n'est pas un résultat très exact.

Deuxième modèle : la tige comme deux charges ponctuelles

Votre premier modèle ne vous satisfait pas. Vous croyez que vous pouvez faire mieux. Vous pensez à diviser la tige en deux « sous-tiges » et à considérer chacune de ces sous-tiges comme une charge ponctuelle, chacune avec la moitié de la charge totale de la tige. Une des charge serait à la moitié de la première sous-tige, l'autre charge à la moitié de la deuxième sous-tige.



En utilisant ce modèle, calculez le champ électrique au point P.

La charge de gauche est à une distance $3L/4 + d$ du point P. En utilisant l'expression du champ pour une charge ponctuelle, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{gauche}} &= \frac{k\,|Q/2|}{(3L/4+d)^2} \\ &= 1233{,}2\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

La charge de droite est à une distance $L/4 + d$ du point P. En utilisant l'expression du champ pour une charge ponctuelle, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{droite}} &= \frac{k\,|Q/2|}{(L/4+d)^2} \\ &= 3110{,}7\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Puisque les deux champs pointent dans la même direction (vers la gauche), on peut appliquer le principe de superposition directement

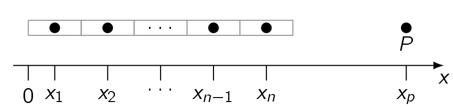
$$\begin{aligned} E &= E_{\text{gauche}} + E_{\text{droite}} \\ &= 4344\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Est-ce que le résultat que vous obtenez concorde avec le résultat expérimental ?

C'est beaucoup mieux ! L'écart est encore important (environ 7 %), mais on sent qu'on progresse dans la bonne direction.

Troisième modèle : la tige comme n charges ponctuelles

Bien heureux de votre succès avec le deuxième modèle, vous décidez de poursuivre dans cette voie. Vous décidez de « briser » la tige en n « sous-tiges » chacune de largeur L/n et portant chacune une charge Q/n.



Pour vous aider dans vos calculs, vous définissez un système d'axe avec l'axe des x qui pointe vers la droite. Vous placez l'origine à l'extrémité gauche de la tige. Pourquoi n'avez-vous pas vraiment besoin d'un axe y ou z dans cette situation ?

Le champ généré par la tige au point P pointe vers la gauche parce que le point P est aligné avec l'axe de la tige et que la tige est négative. Il n'y a aucune composante du champ électrique dans une direction autre que celle de l'axe x.

Quelle est la position du point P, x_p ?

Le point P est à une distance d à droite de la fin de la tige de longueur L. Puisque l'origine est à gauche de la tige, $x_p = L + d = 16\,\text{cm}$.

Vous décidez d'appeler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les positions des différents morceaux de charge Q/n. Écrivez une expression qui vous permet de calculer la position du morceau de charge i, x_i.

$$x_i = (i-1)\frac{L}{n} + \frac{1}{2}\frac{L}{n}$$

Écrivez l'expression qui permet de calculer la composante x du champ électrique produit par le morceau de charge i.

$$E_{ix} = \frac{kQ/n}{(L+d-x_i)^2}$$

Appliquez le principe de superposition pour obtenir une expression pour la composante x du champ électrique total.

$$E_x = \sum_i \frac{kQ/n}{(L+d-x_i)^2}$$

n	E_x (N/C)
1	−3714,9
2	−4343,9
3	−4516,8
4	−4585,4
5	−4619,1
6	−4637,9
7	−4649,4
8	−4657,0
9	−4662,3
10	−4666,0
11	−4668,8
12	−4671,0
13	−4672,6
14	−4674,0
15	−4675,0
16	−4675,9
17	−4676,6
18	−4677,2
19	−4677,8
20	−4678,2

En combinant cette expression avec celle qui donne les valeurs de x_i, vous pouvez calculer le champ électrique pour n'importe quel nombre de morceaux. C'est un peu laborieux, mais un ordinateur est l'outil parfait pour faire ce genre de calculs répétitifs. Le tableau ci-contre montre les valeurs de champ obtenu pour différentes valeurs de n jusqu'à 20.

En regardant les valeurs dans ce tableau, que remarquez-vous qu'il se passe à mesure que les valeurs de n augmente ? Voyez-vous une tendance intéressante ?

La composante x du champ électrique semble se stabiliser à une valeur proche de $-4680\,\text{N/C}$. Les mathématiciens diraient que la suite semble **converger** vers cette valeur. Probablement que si on continuait les calculs avec des valeurs de plus en plus grandes de n, on arriverait à une valeur bien spécifique.

Est-ce que le champ électrique obtenu avec 20 morceaux concorde avec celui obtenu expérimentalement ?

Oui ! Compte tenu de l'incertitude sur la valeur expérimentale, les deux valeurs sont égales.

Quatrième modèle : la tige comme une infinité de charges ponctuelles

Vous remarquez que plus n devient grand, plus les « sous-tiges » sont petites et plus leur charge est petite. Vous vous retrouvez donc à additionner un très grand nombre de contributions qui sont chacune très petites. Un ami vous suggère d'utiliser la notation dQ pour représenter la valeur de charge (le Q/n) lorsque le nombre de morceaux tend vers l'infini. Il vous suggère aussi de remplacer le symbole usuel de sommation $\sum$ par un S stylisé $\int$. Vous voyez, votre ami est un mathématicien, et ces gens sont réputés pour leur appréciation des notations compliquées. En utilisant cette nouvelle notation, récrivez l'expression pour la composante x du champ électrique au point P en supposant que le nombre de morceaux tend vers l'infini.

$$E_x = \int \frac{k\,dQ}{(L+d-x)^2}$$

Dans cette expression, le x est la position d'un des petits morceaux.

Dans cette expression, qu'on appelle une intégrale indéfinie, on ne spécifie pas quel est le domaine d'intégration, c'est-à-dire la région de l'espace sur laquelle on fait la somme. Évidemment, vous êtes en train d'additionner les contributions des différents morceaux de la tige, vous devez donc faire l'intégrale sur toute la tige.

$$E_x = \int_{\text{tige}} \frac{k\,dQ}{(L+d-x)^2}$$

On appelle une des petites sous-tiges un **élément** de tige. La longueur d'une des sous-tige est dx et la tige est uniformément chargée, de telle sorte que la charge par unité de longueur est λ. Vous pouvez récrire l'élément de charge dQ en fonction de l'élément de longueur dx et de la densité linéique de charge λ.

$$dQ = \lambda dx$$

En remplaçant dans l'expression du champ électrique et en prenant soin de bien indiquer les bornes d'intégration pour que la variable x couvre toute la tige, vous obtenez une intégrale définie que vous êtes capables d'évaluer grâce à vos connaissances en calcul intégral. Faites le calcul et vérifiez si la valeur numérique obtenue concorde avec la valeur expérimentale.

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{\text{tige}} \frac{k\lambda dx}{(L+d-x)^2} \\
&= \int_0^L \frac{k\lambda dx}{(L+d-x)^2} \\
&= k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(L+d-x)^2} \\
&= k\lambda \int_{L+d}^{d} \frac{-du}{u^2} && \text{où } u = L+d-x \text{ donc } du = -dx \\
&= k\lambda \left[\frac{1}{u}\right]_{L+d}^{d} \\
&= k\lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right)
\end{aligned}$$

La densité de charge est $\lambda = Q/L = -5\,\mathrm{nC}/10\,\mathrm{cm} = -5 \times 10^{-8}\,\mathrm{C/m}$.
On trouve donc

$$\begin{aligned} E_x &= 8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\left(-5 \times 10^8\,\mathrm{C}\right)\left(\frac{1}{6\,\mathrm{cm}} - \frac{1}{10\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm}}\right) \\ &= -4682{,}3\,\mathrm{N/m} \end{aligned}$$

Donc $\vec{E} = -4682{,}3\,\mathrm{N/m}\vec{\imath}$.

Si on est très loin du fil, alors le fil ressemble de plus en plus à un point. Vous vous attendez donc à ce que le champ du fil se rapproche de celui d'un point. Montrez que c'est le cas en utilisant l'expression symbolique que vous avez obtenue pour la composante x du champ.

$$\begin{aligned} E_x &= k\lambda\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right) \\ &= k\lambda\frac{L}{d(L+d)} \end{aligned}$$

Si on est très loin de la tige, alors $d \gg L$ et $L + d \approx d$ d'où

$$\begin{aligned} E_x &= k\lambda\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right) \\ &= k\lambda\frac{L}{d^2} \\ &= \frac{kQ}{d^2} \end{aligned}$$