Planification du cours d'électricité et magnétisme

Loïc Séguin-Charbonneau

4 janvier 2022

v. 2.0

1 Charge électrique

1.1 Propriétés de la charge électrique

Tremblay §1.1 à 1.6
Lafrance §1.1 et 1.2

Objectif

1. L'étudiant saura qu'il existe deux types de charges électriques et comprendra quelles expériences permettent de le démontrer.
2. L'étudiant connaîtra le principes de conservation de la charge et saura l'appliquer pour résoudre des problèmes simples.
3. L'étudiant connaîtra le principe de quantification de la charge et pourra l'appliquer pour résoudre des problèmes simples.
4. L'étudiant comprendra la polarisation induite dans les isolants.

Matériel

1. Tige de plastique
2. Tige de verre
3. Tige métallique
4. Laine
5. Fourrure

10 minutes

Démonstration de l'existence de deux types de charges

1. Si on approche les deux tiges de plastique, rien ne se produit.
2. Si on frotte les deux tiges de plastique avec de la laine, elles se repoussent. Comme les deux tiges ont subi le même traitement, elles ont la même **charge**. Donc, **les charges identiques se repoussent**.
3. On répète avec les tiges de verre qu'on frotte avec la fourrure.
4. On frotte une tige de plastique et une tige de verre, elles s'attirent. Il semble donc que la charge de la tige de verre soit différente de celle de plastique et que **les charges opposées s'attirent**.

5. Si on approche la laine qui a chargé le plastique de la tige de verre, elles se repoussent. Par conséquent la tige de plastique a transféré ses charges à la laine qui acquiert donc une charge identique à celle de la tige de verre.
6. Si on approche un objet métallique non chargé de la tige de plastique chargée, on constate une attraction. Le métal se charge par **induction** et l'extrémité proche de la tige de plastique acquiert une charge opposée à celle du plastique.

Propriétés de la charge électrique

5 minutes

Il existe deux types de charges électriques
- la charge **positive** (celle du verre) ;
- la charge **négative** (celle du plastique).

Les objets possédant une charge électrique exercent une force les uns sur les autres :
- deux objets avec le même type de charge se repoussent ;
- deux objets avec des charges opposées s'attirent.

On notera souvent les charges électriques par des q : q, Q, q_1, q_2, ...

L'unité SI pour la charge est le **coulomb** (C). La **charge élémentaire** est la charge du proton et vaut

$$e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}.$$

Valeur exacte décidée le 16 novembre 2018, en application à partir du 20 mai 2019

L'électron a une charge de $-e$.

Au centre d'un atome se trouve un noyau dense contenant des protons chargés positivement et des neutrons sans charge électrique. Un nuage d'électrons chargés négativement entoure le noyau.

Lorsqu'on charge par frottement, ce sont les électrons qui sont arrachés d'un matériau et transféré à l'autre. Les protons sont « cachés » au centre des atomes.

Un objet **neutre** a autant de protons que d'électrons. La plupart des objets dans l'univers sont neutres.

5 minutes

Question

Un téléphone d'une marque connue a une batterie d'une capacité de 6556 C. Combien d'électrons peuvent être déplacés par cette batterie ?

Il suffit de diviser la charge totale que peut déplacer la batterie par la charge d'un seul électron

$$\frac{6556\,\mathrm{C}}{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C}} = 4{,}092\times10^{22} = 67{,}95\,\mathrm{mmol}$$

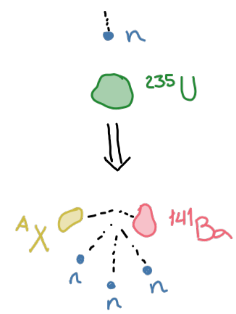
Principe de conservation de la charge

La charge électrique totale dans un système fermé est toujours la même. 10 minutes

Par exemple, la charge est conservée lors de la désintégration d'un neutron libre (temps de demi-vie d'environ 10,3 minutes) :

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$$

5 minutes



Question

Dans un réacteur nucléaire typique, un neutron lent entre en collision avec un noyau d'uranium ce qui provoque la fission du noyau en deux noyaux plus petits :

$$\mathrm{n} + {}^{235}\mathrm{U} \longrightarrow 3\,\mathrm{n} + {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{A}\mathrm{X}$$

Quel est le noyau X ?

On détermine la charge au départ : le neutron a une charge nulle, l'uranium a 92 protons. La charge initiale est donc $92e$. Après la fission, on a trois neutrons qui ne contribuent pas à la charge, un noyau de barium qui a 56 protons et un noyaux mystère avec Z protons. La charge finale est donc $(Z+56)e$. Par le principe de conservation de la charge, la charge initiale et la charge finale doivent être égales d'où

$$92e = (Z+56)e$$
$$Z = 36$$

Le noyau X est donc du krypton, Kr. Si on ajoute le principe de conservation du nombre de masse, on peut aussi déduire que la masse du krypton doit être de 92 : ${}^{A}X = {}^{92}Kr$.

10 minutes

Question

Indiquez si chacune des réactions suivantes est possible.

1. $H^{+} + OH^{-} \longrightarrow H_2O$
2. $\pi^{+} + p^{+} \longrightarrow \Sigma^{0} + K^{+}$
3. ${}^{4}_{2}He^{2+} + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{17}_{8}O + p^{+}$

5 minutes

Quantification de la charge

La charge électrique ne peut prendre que des valeurs qui correspondent à des multiples entier de la charge élémentaire.

Par exemple, on peut avoir des charges de e, $10^8 e$, $-45e$, etc. On ne peut pas avoir une charge de $0.1e$, $-\frac{1}{2}e$ ou $3{,}51 \times 10^{-4} e$.

10 minutes

Question

Est-ce qu'un objet peut avoir les charges suivantes ?

1. $q_0 = 0{,}452 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
2. $q_1 = -2{,}050\,56 \times 10^{-17}\,\mathrm{C}$
3. $q_2 = 3{,}748\,68 \times 10^{-18}\,\mathrm{C}$
4. $q_3 = 4{,}00\,\mathrm{C}$

La charge q_0 est inférieure à la charge élémentaire, donc impossible. La charge q_1 est 128 fois la charge d'un électron, donc c'est possible. q_2 est $23.4e$, donc impossible. Finalement, la charge q_3 est tellement grande, qu'à moins qu'on puisse faire une mesure précise jusqu'à la 19e décimale, on peut, à toute fin pratique, considérer que cette charge est possible.

1.2 Isolants et conducteurs

10 minutes
Tremblay §1.7 et 1.8
Lafrance §1.3

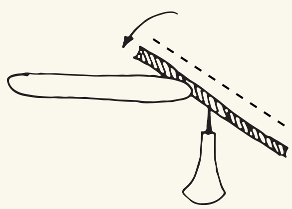
Lorsqu'on frotte une tige de verre ou de plastique, des électrons sont arrachés à un des matériaux et transférés sur l'autre. L'énergie pour arracher les électrons est fournies par la personne qui frotte. Nous avons vu qu'un objet métallique est attiré par une tige de plastique chargée. Dans un métal, des électrons sont libres de se déplacer (environ un électron par atome) ce qui leur permet de se réorganiser dans le matériau lorsqu'ils ressentent une force électrique externe. La tige métallique n'a pas été frottée mais elle attire néanmoins la tige de plastique chargée.

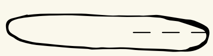
On dit qu'on a **induit** une redistribution de la charge dans un métal en approchant un objet chargé. Aucune charge n'est transférée entre les deux objets.

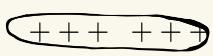
Question

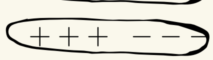
5 minutes

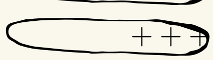
On induit une séparation de charge dans une tige métallique en approchant une tige de plastique chargée. Comment sont disposées les charges dans la tige métallique ?



1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

Un **conducteur** est un matériau dans lequel les charges peuvent se déplacer rapidement. Un **isolant** est un matériau dans lequel les charges ont beaucoup de difficulté à se déplacer.

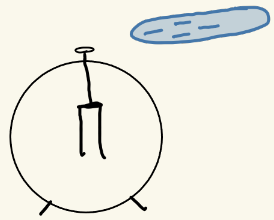
La différence entre les deux types est le **temps de relaxation**, c'est-à-dire le temps que des charges mettent à se déplacer jusqu'à leur position d'équilibre.

Exemple : cuivre 1×10^{-12} s, verre 2 s, polystyrène 1×10^{10} s.

Question

5 minutes
Électroscope

Que se passe-t-il si on touche la partie du haut avec une tige chargée négativement puis qu'on la retire ?



Une partie des électrons excédentaires sur la tige seront transférés à l'électroscope lors du contact. Par conséquent, l'électroscope aura une charge nette négative. Les deux feuillets de l'électroscope, avec des charges de même signe, se repousseront. Puisque les électrons n'ont nulle part où aller, ils demeureront sur l'électroscope et les feuillets demeureront écartés.

Objets conducteurs identiques en contact

3 minutes

Si deux objets conducteurs identiques sont mis en contact, les charges qu'ils portaient seront très rapidement réparties également entre les deux objets.

Question

10 minutes

Deux fourchettes métalliques identiques ont des charges Q et $-6Q$, respectivement. Les deux fourchettes sont mises en contact puis sont séparées. Quelles sont les charges sur chacune des fourchettes ?

La charge totale dans le système avant le contact est $Q + -6Q = -5Q$.

Par le principe de conservation de la charge, la charge totale après le contact sera aussi de $-5Q$.

Puisque les deux fourchettes sont des conducteurs, les charges (électrons) pourront se déplacer d'une à l'autre.

Puisque les fourchettes sont identiques la charge sur chacune d'elle après le contact doit être la même.

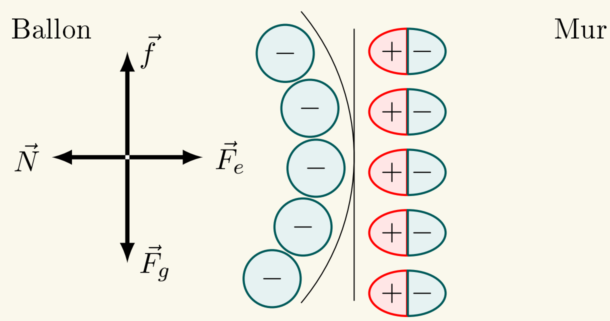
Par conséquent, elles ont chacun la moitié de la charge totale, soit $-2{,}5Q$.

Polarisation dans les isolants

Comment un ballon qu'on frotte sur ses cheveux peut-il tenir au mur si le ballon et le mur sont des isolants ? 10 minutes Ballon

Le ballons est chargé par frottement et acquiert une charge négative. Le mur est neutre et isolant, donc les électrons ne sont pas libres de se déplacer. Par contre, les atomes à proximité du ballon vont se réorganiser très légèrement : le nuage d'électron s'éloignera du ballon alors que le noyau s'en rapprochera. Les atomes seront **polarisés**. Puisque le ballon est plus près des charges positives que des charges négatives, il y a une attraction nette entre le ballon et le mur.

Le coefficient de frottement entre le mur et le ballon est 0,6, et la masse du ballon est de 2,9 g. Quel est le module de la force électrique entre le ballon et le mur ?



On suppose que le ballon est à l'équilibre, donc $F_e = N$ et $f = F_g$. Par conséquent, $f = mg$. Si on suppose que le frottement est le frottement statique maximum, autrement dit le ballon est sur le point de tomber, alors on a que $f = \mu_s N = \mu_s F_e$. Donc

$$F_e = \frac{mg}{\mu_s} = 47{,}37\,\mathrm{mN}$$

On peut aussi voir le même phénomène en attirant des morceaux de papier avec un bout de plastique chargé. Le bout de plastique chargé induit une polarisation dans le papier et le papier est attiré par le plastique.

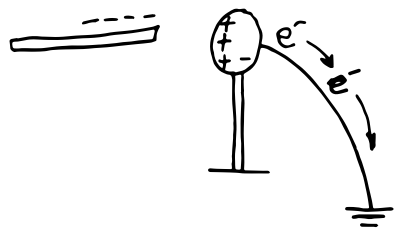
Vidéo

Le vidéo `polarisation-isolant-attraction.mov` montre un morceau de *spaghetti* frotté sur des cheveux (donc chargé négativement) qui attire des morceaux de pitas secs.

Charge par induction

5 minutes

Nous avons parlé de charge par frottement. Il est également possible de charger un conducteur par induction.



On approche une tige chargée négativement du conducteur, sans lui toucher. La présence de la tige chargée créera une séparation de charge dans le conducteur par induction. On relie le côté du conducteur le plus éloigné de la tige à la *terre*. C'est ce qu'on appelle une **mise à la terre**. Le surplus d'électrons qui s'étaient déplacés de ce côté parce qu'ils étaient repoussés par les électrons de la tige pourront aller à la terre. On déconnecte ensuite la mise à la terre, puis, on éloigne la tige chargée. Il reste une charge nette positive sur le conducteur.

1.3 Loi de Coulomb

Objectif

Tremblay §1.9
Lafrance §1.4

1. L'étudiant comprendra la loi de Coulomb et comment cette loi capture toutes les observations faites précédemment au sujet des charges.
2. L'étudiant pourra faire des calculs de forces électrostatiques.
3. L'étudiant comprendra le principe de superposition.

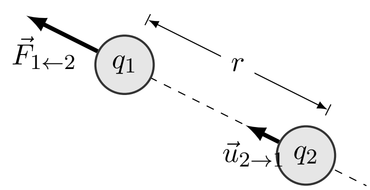
Observations clés

10 minutes

— charges opposées s'attirent
— charges de même signe se repoussent
— plus la charge est grande, plus la force est grande
— plus les charges sont éloignées, plus la force est petite

La loi de Coulomb capture tous ces éléments.

Considérons deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r.



On doit avoir

$$\begin{aligned} F_{1\leftarrow 2} &\propto |q_1|\,, \\ F_{1\leftarrow 2} &\propto |q_2|\,, \\ F_{1\leftarrow 2} &\propto \frac{1}{r^\gamma}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$F_{1\leftarrow 2} = \frac{k\,|q_1 q_2|}{r^\gamma}.$$

où k est une constante de proportionnalité. L'exposant peut être trouvé expérimentalement. C'est ce qu'à fait Charles Augustin de Coulomb. L'exposant est 2, soit le même que celui qui apparaît dans la loi de la gravitation newtonienne.

Pour spécifier l'orientation, nous utilisons un vecteur unitaire $\vec{u}_{2\rightarrow 1}$ qui pointe de la charge q_2 vers la charge q_1. Si les deux charges sont de même signe, la force est répulsive et la force sur q_1 est dans la même direction que $\vec{u}_{2\rightarrow 1}$. On note que $q_1 q_2$ est positif. Donc

Loi de Coulomb

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{u}_{2\rightarrow 1}$$

On peut facilement trouver les unités de k par analyse dimensionnelle. La valeur est déterminée expérimentalement :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$$

La constante de proportionalité k est reliée à une constante fondamentale de l'Univers qu'on appelle la **constante électrique** ou la **permittivité du vide** ϵ_0.

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$$

Principe de superposition

Si plusieurs charges $q_1, q_2, \ldots, q_N$ et agissent sur une charge Q, alors la force nette sur Q est la somme des forces exercées par chacune des charges

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$$

Vous vous tenez à 2 m de votre ami. Combien d'électrons devez vous lui transférer pour que la force électrique entre vous deux ait la même grandeur que votre poids ?

Votre poids a une grandeur mg. Si vous transférez n électrons à votre ami, votre charge devient ne et la charge de votre ami devient $-ne$. Par conséquent la grandeur de la force électrique est

$$F_e = \frac{kn^2e^2}{r^2}$$

On veut

$$\frac{kn^2e^2}{r^2} = mg$$
$$n = \sqrt{\frac{mgr^2}{ke^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{r}{e}$$

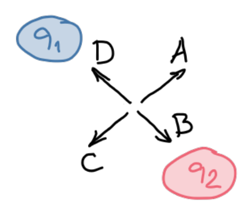
Supposons que votre masse est $m = 60\,\mathrm{kg}$. Alors

$$n = \sqrt{\frac{60\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{8{,}99\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}}}\frac{2\,\mathrm{m}}{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C}}$$
$$= 3{,}193\times10^{15}$$

C'est l'équivalent d'une charge de 0,5115 mC.

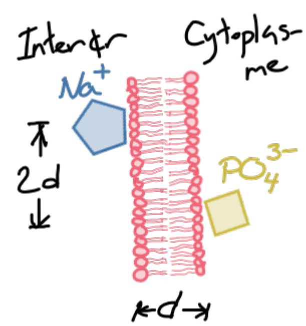
Question

On considère une charge négative q_1 et une charge positive q_2.
Dans quelle direction est la force de q_1 sur q_2, $\vec{F}_{2\leftarrow1}$?
Dans quelle direction est la force de q_2 sur q_1, $\vec{F}_{1\leftarrow2}$?
Dans quelle direction est le vecteur $\vec{u}_{1\rightarrow2}$?
Dans quelle direction est le vecteur $\vec{u}_{2\rightarrow1}$?



Exemple

Un ion Na^+ et un ion ${PO_4}^{3-}$ se trouvent de part et d'autre d'une membrane cellulaire. L'épaisseur de la membrane est de 5 nm et les deux ions sont décalés de 10 nm l'un par rapport à l'autre le long de la membrane. Quelle est la force exercée par le sodium sur le phosphate ?



On peut placer l'origine du système de coordonnées de telle sorte que la position du sodium soit $\vec{r}_{\mathrm{Na}} = 0\vec{\imath} + 2d\vec{\jmath}$ et la position du phosphate soit $\vec{r}_{\mathrm{PO}} = d\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$. Par la loi de Coulomb

$$\vec{F}_{\mathrm{PO}} = \frac{kq_{\mathrm{Na}}q_{\mathrm{PO}}}{r^2}\vec{u}_{\mathrm{Na}\rightarrow\mathrm{PO}}$$

On sait que $q_{\text{Na}} = e$ et $q_{\text{PO}} = -3e$, donc

$$\vec{F}_{\text{PO}} = \frac{-3ke^2}{r^2}\vec{u}_{\text{Na}\to\text{PO}}$$

Le vecteur unitaire est

$$\begin{aligned}\vec{u}_{\text{Na}\to\text{PO}} &= \frac{\vec{r}_{\text{PO}} - \vec{r}_{\text{Na}}}{|\vec{r}_{\text{PO}} - \vec{r}_{\text{Na}}|}\\ &= \frac{d\vec{\imath} - 2d\vec{\jmath}}{r}\end{aligned}$$

Donc

$$\vec{F}_{\text{PO}} = \frac{-3kde^2}{r^3}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right)$$

On peut trouver r simplement à l'aide du théorème de Pythagore

$$r = \sqrt{(2d)^2 + d^2} = \sqrt{5}d$$

Donc

$$\vec{F}_{\text{PO}} = \frac{-3ke^2}{5^{3/2}d^2}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la valeur numérique

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{PO}} &= \frac{-3 \cdot 8{,}99 \times 10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2\left(1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}\right)^2}{5^{3/2}(5 \times 10^{-9}\,\text{m})^2}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right)\\ &= -2{,}476 \times 10^{-12}\,\text{N}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right)\end{aligned}$$

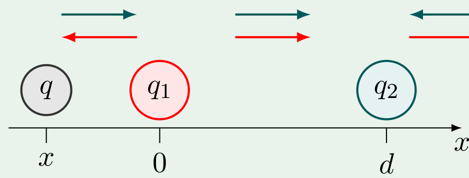
C'est une force toute petite, mais on parle de l'interaction entre deux atomes, donc on ne s'attend à rien d'énorme. De plus, puisque les deux ions ont des charges opposées, on s'attend à ce que la force soit attractive et c'est bien ce que le calcul donne.

Exercice

20 minutes

Deux charges immobiles $q = 4{,}00\,\text{nC}$ et $Q = -6{,}00\,\text{nC}$ sont situées à 5 cm l'une de l'autre. Où doit-on positionner une troisième charge de telle sorte qu'elle soit à l'équilibre ?

D'abord, on fait un schéma de la situation. Imaginons que la charge qu'on ajoute est positive. La direction de la force exercée par q_1 et q_2 dans différentes régions est indiquée sur la figure.



À gauche de q_1, les deux forces sont opposées et la plus grande charge en valeur absolue est plus éloignée. Il est possible que les deux forces s'annulent.

Entre q_1 et q_2, les deux forces sont dans la même direction : elles ne peuvent pas s'annuler.

À droite de q_2, les deux forces sont opposées et la plus grande charge en valeur absolue est plus proche. Il est impossible que les deux forces s'annulent.

On conclut donc que la position recherchée est pour une valeur x négative. La distance entre la nouvelle charge q et q_1 est donc $|x|$ alors que la distance entre q et q_2 est de $d - x$. On peut calculer le module de la force exercée par q_1 et q_2 sur q ainsi que les composantes.

$$F_1 = \frac{k\,|q_1 q|}{x^2} \qquad F_{1x} = -\frac{k q_1 q}{x^2}$$
$$F_2 = \frac{k\,|q_2 q|}{(d-x)^2} \qquad F_{2x} = -\frac{k q_2 q}{(d-x)^2}$$

La force nette sur q est nulle car on veut que cette particule soit à l'équilibre. Par le principe de superposition, la force nette sur q est

$$\begin{aligned}
F_x &= F_{1x} + F_{2x} \\
&= 0 \\
F_{1x} &= -F_{2x} \\
-\frac{kq_1q}{x^2} &= \frac{kq_2q}{(d-x)^2} \\
-\frac{q_1}{x^2} &= \frac{q_2}{(d-x)^2} \\
x^2q_2 + q_1(d-x)^2 &= 0 \\
x^2q_2 + q_1d^2 - 2q_1dx + q_1x^2 &= 0 \\
(q_1+q_2)x^2 - 2q_1dx + q_1d^2 &= 0 \\
x &= \frac{2q_1d \pm \sqrt{4q_1^2d^2 - 4(q_1+q_2)q_1d^2}}{2(q_1+q_2)}
\end{aligned}$$

Les deux réponses possibles sont $x = -22{,}25\,\mathrm{cm}$ et $x = 2{,}247\,\mathrm{cm}$. On sait que la particule doit être à gauche de q_1, donc la bonne solution est $x = -22{,}25\,\mathrm{cm}$.

1.4 Résumé

- Deux types de charges (positive et négative).
- Charges de même signe se repoussent, de signe opposé s'attirent.
- Charge est conservée.
- Charge est quantifiée.
- Dans un conducteur, charges peuvent se déplacer, pas dans un isolant.
- Loi de Coulomb.
- Principe de superposition des forces.
- Trois façons de charger un objet :
  - Par frottement (fonctionne bien avec isolants)
  - Par contact (fonctionne bien avec les conducteurs)
  - Par induction (fonctionne avec les conducteurs seulement)

2 Champ électrique

2.1 La notion de champ

Objectif

Tremblay §2.1
Lafrance §2.1

1. L'étudiante comprendra ce qu'est un champ électrique.
2. Elle pourra calculer le champ électrique produit par un ensemble de charges ponctuelles en appliquant le principe de superposition.

5 minutes

Le concept d'action à distance est troublant. La loi de Coulomb suggère que si deux charges interagissent et que l'une des deux se déplace, l'autre subira les effets instantanément. Or, cela voudrait dire qu'il est possible de faire voyager de l'information plus vite que la vitesse de la lumière. De plus, des expériences minutieuses confirment qu'il y a un délai avant que la deuxième charge ne détecte un changement de la position de la première. Ce délai est de l'ordre de 1×10^{-8} s pour deux charges séparées d'environ 1 m.

Il faut donc un intermédiaire entre les deux charges. Cet intermédiaire est le **champ électrique**. Un objet chargé génère autour de lui un champ électrique.

Analogie avec le champ gravitationnel

5 minutes

Selon la loi de la gravitation universelle de Newton

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

La partie Gm_1/r^2 ne dépend que de la source du champ gravitationnel et de la distance entre le centre de masse de cet objet et le point où on veut calculer la force. Par exemple, à la surface de la Terre on a

$$\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \equiv g$$

et on peut calculer la force sur un objet de masse m à la surface de la Terre avec

$$F_g = mg.$$

Pour la force électrique, c'est le même principe. À partir de la loi de Coulomb

$$\vec{F}_e = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

on reconnait qu'une partie de l'expression ne dépend que de la source et de la distance à laquelle on se trouve de cette source

$$\vec{E} = \frac{kq_1}{r^2}\vec{u}_r.$$

On peut calculer la force sur une particule chargée située à une distance r de q_1 en faisant simplement

$$\vec{F}_e = \vec{E}q_2.$$

Définition du champ électrique

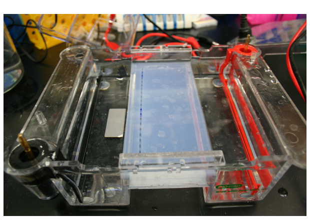
Le champ électrique en un point de l'espace, est la force par unité de charge que subirait une charge électrique située en ce point

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q}$$

Exercice

On place une charge de 8,00 nC à un endroit P. Elle subit une force de 24,0 µN vers la gauche.

— Quel est le champ électrique au point P ?
— Quel est le champ électrique au point P si on enlève la charge de 8,00 nC ?
— Quelle serait la force sur une particule de charge -2 mC placée au même endroit ?


PlaxcoLab (CC BY-2.0)

Électrophorèse sur gel

L'électrophorèse sur gel est une technique en biologie moléculaire pour séparer des grosses molécules (le plus souvent ADN ou protéines) selon leur poids moléculaire. L'ADN est naturellement chargée négativement ce qui fait en sorte que si on la place dans un champ électrique, elle subira une force. On peut utiliser cette force pour faire migrer les molécules dans un gel. Plus la molécule est petite, plus elle pourra se déplacer facilement dans le gel et elle ira plus vite qu'une plus grosse molécule.

On place des fragments d'ADN dans un appareil d'électrophorèse sur gel et on active un champ électrique de $500\,\mathrm{N/C}$. La densité de charge de l'ADN est environ $-942\,\mathrm{pC/m}$. La densité de masse est de $3{,}155 \times 10^{-21}\,\mathrm{g/nm}$.

Quelle est la force électrique sur un fragment d'ADN de $10{,}0\,\mu\mathrm{m}$?

En supposant que la force électrique est la seule force en jeu (cette supposition est incorrecte), quelle serait l'accélération du fragment d'ADN ?

Kominami, H., Kobayashi, K. & Yamada, H. Molecular-scale visualization and surface charge density measurement of Z-DNA in aqueous solution. Sci Rep 9, 6851 (2019). https://doi.org/10.1038/s41598-019-42394-5
Boal David, Mechanics of the cell, 2nd edition, Cambridge University Press 2012, p.89 table 3.2

La charge sur le brin d'ADN est

$$\begin{aligned} q &= \lambda L \\ &= -942\,\mathrm{pC/m} \cdot 10{,}0\,\mu\mathrm{m} \\ &= -9{,}420 \times 10^{-15}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

Donc la force électrique sera

$$\begin{aligned} F_e &= |q|\,E \\ &= |\lambda|\,LE \\ &= 9{,}420 \times 10^{-15}\,\mathrm{C} \cdot 500\,\mathrm{N/C} \\ &= 4{,}71 \times 10^{-12}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

vers l'électrode positive.

Pour trouver l'accélération, on utilise la deuxième loi de Newton

$$\begin{aligned} F_e &= ma \\ a &= \frac{F_e}{m} \\ &= \frac{|\lambda|\,LE}{\lambda_m L} \\ &= \frac{|\lambda|\,E}{\lambda_m} \\ &= \frac{942 \times 10^{-12}\,\mathrm{C/m} \cdot 500\,\mathrm{N/C}}{3{,}155 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg/m}} \\ &= 1{,}493 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

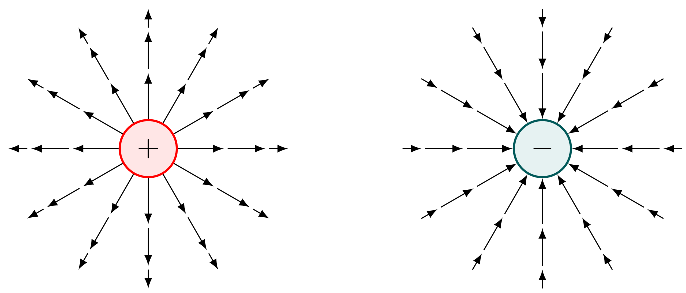
L'accélération est vers l'électrode positive.

2.2 Champ électrique d'une charge ponctuelle

Tremblay §2.2
Lafrance §2.2
5 minutes

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{kq}{r^2}\vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire qui s'éloigne de la charge ponctuelle.



5 minutes

Principe de superposition

Le champ électrique total en un point de l'espace est la somme des champs électrique causés par toutes les charges à proximité.

On peut voir que c'est vrai à partir du principe de superposition pour les forces électriques.

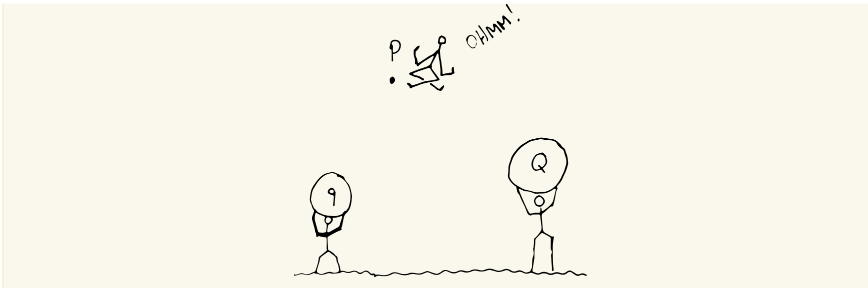
$$\begin{aligned}
\vec{F} = q\vec{E} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \\
&= q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \cdots + q\vec{E}_n \\
&= q\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n\right)
\end{aligned}$$

25 minutes

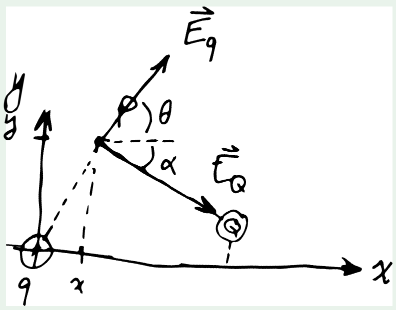
Exercice

Une charge $q = 30\,\mu\mathrm{C}$ est placée à $160\,\mathrm{cm}$ du sol. À droite de cette charge, une charge $Q = -50\,\mu\mathrm{C}$ est placée à $2\,\mathrm{m}$ au-dessus du sol. La distance horizontale entre les deux charges est $D = 3\,\mathrm{m}$.

Calculer le champ électrique au point P situé à $1\,\mathrm{m}$ à droite de la charge q et à $4\,\mathrm{m}$ au-dessus du sol.



Les coordonnées du point P sont $x = 1\,\mathrm{m}$, $y = 2{,}4\,\mathrm{m}$.



Le champ électrique de la charge q au point P est de grandeur et composantes

$$E_q = \frac{k\,|q|}{x^2+y^2}$$

$$E_{qx} = E_q\cos\theta \quad = \frac{k\,|q|}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k\,|q|\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad = 15\,344\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{qy} = E_q\sin\theta \quad = \frac{k\,|q|}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k\,|q|\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad = 36\,827\,\mathrm{N/C}$$

Le champ électrique de la charge Q au point P est de grandeur et composantes

$$
\begin{aligned}
E_Q &= \frac{k\,|Q|}{r_Q^2} \\
E_{Qx} = E_Q \cos\alpha \quad &= \frac{k\,|Q|}{r_Q^2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{k\,|Q|}{\sqrt{2}r_Q^2} \quad = 39\,730\,\mathrm{N/C} \\
E_{Qy} = -E_Q \sin\alpha \quad &= -\frac{k\,|Q|}{r_Q^2}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{k\,|Q|}{\sqrt{2}r_Q^2} \quad = -39\,730\,\mathrm{N/C}
\end{aligned}
$$

Par le principe de superposition

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_q + \vec{E}_Q \\
&= (55\,075\vec{\imath} - 2903\vec{\jmath})\,\mathrm{N/C}
\end{aligned}
$$

2.3 Lignes de champ électrique

Tremblay §2.4
Lafrance §2.6

Objectif

1. L'étudiante connaîtra le lien entre les lignes de champ et le champ électrique.
2. L'étudiante saura interpréter un diagramme de lignes de champ.

Démonstration

10 minutes
Cette démonstration fonctionne très mal à l'automne.

Matériel

1. Un vase de Pétri
2. Huile végétale
3. Graines de gazon
4. Source de champ électrique (générateur de Van de Graaff)
5. Électrodes
6. Fils

Manipulations

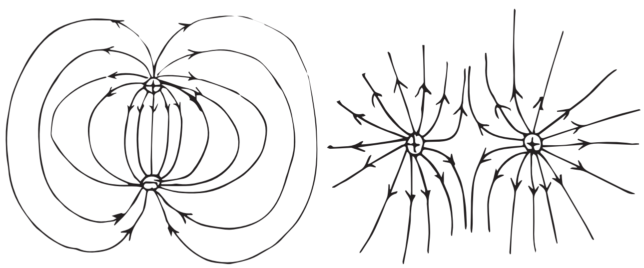
1. Mettre de l'huile dans le vase de Pétri
2. Ajouter les graines de gazon dans l'huile
3. Connecter un fil à la sphère et un fil à la mise à la terre
4. Connecter l'autre extrémité des fils aux électrodes
5. Mettre les électrodes dans l'huile et démarrer le Van de Graaf.

Caractéristiques des lignes de champ

Les lignes de champ électrique permettent de visualiser le champ électrique. Lorsqu'on les trace, on doit respecter les règles suivantes :

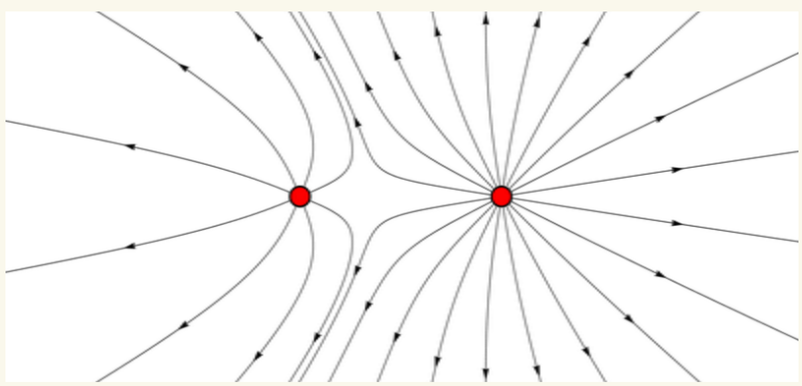
10 minutes

— le champ électrique est tangent aux lignes de champ ;
— la norme du champ électrique est proportionnelles à la densité de lignes de champ.
— les lignes de champ commence sur les charges positives ou à l'infini
— les lignes de champ se termine sur les charges négatives ou à l'infini



Conséquences de ces règles :
— le nombre de lignes de champ qui se terminent ou qui commencent sur une charge est proportionnel à la charge ;
— les lignes de champ ne se croisent jamais.

Exercice lignes de champ



Quels sont les signes des deux charges ?
Laquelle des deux charges est la plus grande en valeur absolue ?
Où le champ électrique est-il le plus grand ?

https://www.st-andrews.ac.uk/~physapps/fande/Electric_Field_Lines.html
Voir aussi http://www.falstad.com/emstatic/EMStatic.html

2.4 Distributions de charge

Tremblay §2.5
Lafrance §2.4

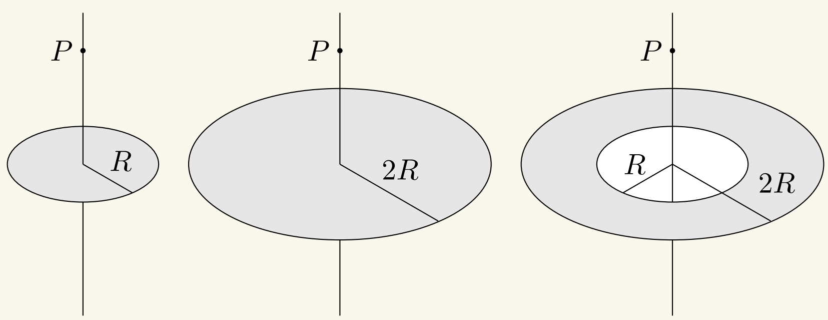
Objectif

1. L'étudiant pourra calculer le champ électrique produit par une distribution de charge.
2. L'étudiant comprendra qu'on peut diviser un objet étendu en petits morceau, considérer ces morceaux comme des particules, puis additionner les contributions de ces morceaux pour obtenir l'effet total.
3. L'étudiant pourra utiliser le calcul intégral pour résoudre des problèmes de calcul de champ électrique.

10 minutes

Exercice d'introduction aux distributions de charge

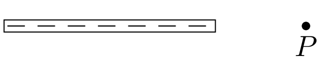
Chaque disque et l'anneau ont tous la même charge Q. Classer les objets en ordre croissant de la grandeur du champ électrique au point P.



(a) (b) (c)

2.4.1 Calcul de champ le long de l'axe d'une tige chargée

20 minutes

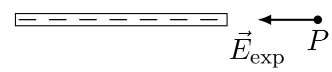


Imaginez que vous prenez une tige de plastique et que vous la chargez uniformément, c'est-à-dire que vous répartissez la charge également partout sur la tige. Votre, mission, si vous l'acceptez, sera de déterminer le champ électrique produit par cette tige à un point P situé le long de son axe.

Pour l'instant, vous ne connaissez qu'une expression mathématique pour le champ produit par une charge ponctuelle. Ce serait bien si vous pouviez utiliser cette connaissance pour déterminer le champ produit par la tige. Le but de cet exercice est justement de développer une méthode qui vous permettra de calculer le champ électrique produit par des objets étendus à partir du champ d'une charge ponctuelle. Bien que cette méthode soit générale et s'applique à des objets de toutes formes, nous nous contenterons de l'utiliser dans des cas simples pour éviter les calculs trop monstrueux.

Supposons que la tige a une longueur $L = 10\,\mathrm{cm}$ et qu'elle porte une charge totale de $Q = -5\,\mathrm{nC}$ répartie uniformément sur toute sa longueur. On cherche le champ électrique à un point P situé à $d = 6\,\mathrm{cm}$ de l'extrémité droite de la tige.

Une expérimentatrice talentueuse a réalisé l'expérience pour vous et a obtenu une valeur expérimentale du champ électrique. Le champ électrique qu'elle a mesuré a une grandeur de $E_{\mathrm{exp}} = (4681 \pm 3)\,\mathrm{N/C}$ et il pointe vers la gauche.



Premier modèle : la tige comme une charge ponctuelle

Vous vous dites que le modèle le plus simple est de considérer la tige comme une charge ponctuelle située en son centre. En utilisant ce modèle, calculez le champ électrique au point P.

La distance entre le centre de la tige et le point P est $L/2 + d$. On considère que toute la charge Q de la tige est en son centre. Par conséquent, le champ électrique est obtenu à partir de l'expression pour le champ d'une charge ponctuelle

$$\begin{aligned} E &= \frac{k\,|Q|}{(L/2+d)^2} \\ &= 3715\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

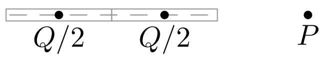
Le champ pointe vers la tige, donc vers la gauche, parce que la charge de la tige est négative.

Est-ce que le résultat que vous obtenez concorde avec le résultat expérimental ?

L'ordre de grandeur est correct, mais avec un écart de plus de 20 %, ce n'est pas un résultat très exact.

Deuxième modèle : la tige comme deux charges ponctuelles

Votre premier modèle ne vous satisfait pas. Vous croyez que vous pouvez faire mieux. Vous pensez à diviser la tige en deux « sous-tiges »



et à considérer chacune de ces sous-tiges comme une charge ponctuelle, chacune avec la moitié de la charge totale de la tige. Une des charge serait à la moitié de la première sous-tige, l'autre charge à la moitié de la deuxième sous-tige. En utilisant ce modèle, calculez le champ électrique au point P.

La charge de gauche est à une distance $3L/4 + d$ du point P. En utilisant l'expression du champ pour une charge ponctuelle, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{gauche}} &= \frac{k\,|Q/2|}{(3L/4+d)^2} \\ &= 1233{,}2\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

La charge de droite est à une distance $L/4 + d$ du point P. En utilisant l'expression du champ pour une charge ponctuelle, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{droite}} &= \frac{k\,|Q/2|}{(L/4+d)^2} \\ &= 3110{,}7\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Puisque les deux champs pointent dans la même direction (vers la gauche), on peut appliquer le principe de superposition directement

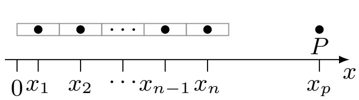
$$\begin{aligned} E &= E_{\text{gauche}} + E_{\text{droite}} \\ &= 4344\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Est-ce que le résultat que vous obtenez concorde avec le résultat expérimental ?

C'est beaucoup mieux ! L'écart est encore important (environ 7 %), mais on sent qu'on progresse dans la bonne direction.

Troisième modèle : la tige comme n charges ponctuelles

Bien heureux de votre succès avec le deuxième modèle, vous décidez de poursuivre dans cette voie. Vous décidez de « briser » la tige en n « sous-tiges » chacune de largeur L/n et portant chacune une charge Q/n. Pour vous aider dans vos calculs, vous définissez un système d'axe avec l'axe des x qui pointe vers la droite. Vous placez l'origine



à l'extrémité gauche de la tige. Pourquoi n'avez-vous pas vraiment besoin d'un axe y ou z dans cette situation ?

Le champ généré par la tige au point P pointe vers la gauche parce que le point P est aligné avec l'axe de la tige et que la tige est négative. Il n'y a aucune composante du champ électrique dans une direction autre que celle de l'axe x.

Quelle est la position du point P, x_p ?

Le point P est à une distance d à droite de la fin de la tige de longueur L. Puisque l'origine est à gauche de la tige, $x_p = L+d = 16\,\mathrm{cm}$.

Vous décidez d'appeler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les positions des différents morceaux de charge Q/n. Écrivez une expression qui vous permet de calculer la position du morceau de charge i, x_i.

$$x_i = (i-1)\frac{L}{n} + \frac{1}{2}\frac{L}{n}$$

Écrivez l'expression qui permet de calculer la composante x du champ électrique produit par le morceau de charge i.

$$E_{ix} = \frac{kQ/n}{(L+d-x_i)^2}$$

Appliquez le principe de superposition pour obtenir une expression pour la composante x du champ électrique total.

$$E_x = \sum_i \frac{kQ/n}{(L+d-x_i)^2}$$

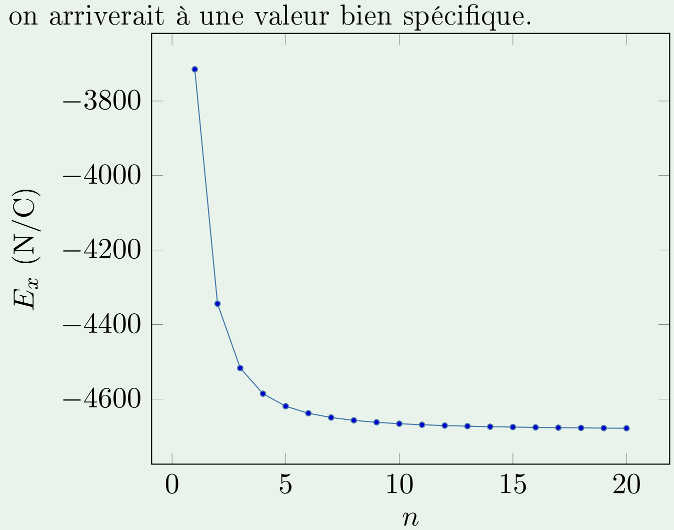
En combinant cette expression avec celle qui donne les valeurs de x_i, vous pouvez calculer le champ électrique pour n'importe quel nombre de morceaux. C'est un peu laborieux, mais un ordinateur est l'outil parfait pour faire ce genre de calculs répétitifs. Le tableau ci-contre

n	E_x (N/C)
1	−3714,9
2	−4343,9
3	−4516,8
4	−4585,4
5	−4619,1
6	−4637,9
7	−4649,4
8	−4657,0
9	−4662,3
10	−4666,0
11	−4668,8
12	−4671,0
13	−4672,6
14	−4674,0
15	−4675,0
16	−4675,9
17	−4676,6
18	−4677,2
19	−4677,8
20	−4678,2

montre les valeurs de champ obtenu pour différentes valeurs de n jusqu'à 20.

En regardant les valeurs dans ce tableau, que remarquez-vous qu'il se passe à mesure que les valeurs de n augmente ? Voyez-vous une tendance intéressante ?

La composante x du champ électrique semble se stabiliser à une valeur proche de $-4680\,\mathrm{N/C}$. Les mathématiciens diraient que la suite semble **converger** vers cette valeur. Probablement que si on continuait les calculs avec des valeurs de plus en plus grandes de n, on arriverait à une valeur bien spécifique.



Est-ce que le champ électrique obtenu avec 20 morceaux concorde avec celui obtenu expérimentalement ?

Oui ! Compte tenu de l'incertitude sur la valeur expérimentale, les deux valeurs sont égales.

Quatrième modèle : la tige comme une infinité de charges ponctuelles

Vous remarquez que plus n devient grand, plus les « sous-tiges » sont petites et plus leur charge est petite. Vous vous retrouvez donc à additionner un très grand nombre de contributions qui sont chacune très petites. Un ami vous suggère d'utiliser la notation dQ pour représenter la valeur de charge (le Q/n) lorsque le nombre de morceaux tend vers l'infini. Il vous suggère aussi de remplacer le symbole usuel de sommation $\sum$ par un S stylisé $\int$. Vous voyez, votre ami est un mathématicien, et ces gens sont réputés pour leur appréciation des notations compliquées. En utilisant cette nouvelle notation, récrivez l'expression pour la composante x du champ électrique au point P en supposant que le nombre de morceaux tend vers l'infini.

$$E_x = \int \frac{kdQ}{(L+d-x)^2}$$

Dans cette expression, le x est la position d'un des petits morceaux.

Dans cette expression, qu'on appelle une intégrale indéfinie, on ne spécifie pas quel est le domaine d'intégration, c'est-à-dire la région de l'espace sur laquelle on fait la somme. Évidemment, vous êtes en train d'additionner les contributions des différents morceaux de la tige, vous devez donc faire l'intégrale sur toute la tige.

$$E_x = \int_{\text{tige}} \frac{kdQ}{(L+d-x)^2}$$

On appelle une des petites sous-tiges un **élément** de tige. La longueur d'une des sous-tige est dx et la tige est uniformément chargée, de telle sorte que la charge par unité de longueur est λ. Vous pouvez récrire l'élément de charge dQ en fonction de l'élément de longueur dx et de la densité linéique de charge λ.

$$dQ = \lambda dx$$

En remplaçant dans l'expression du champ électrique et en prenant soin de bien indiquer les bornes d'intégration pour que la variable x couvre toute la tige, vous obtenez une intégrale définie que vous êtes capables d'évaluer grâce à vos connaissances en calcul intégral. Faites le calcul et vérifiez si la valeur numérique obtenue concorde avec la valeur expérimentale.

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_{\text{tige}} \frac{k\lambda dx}{(L+d-x)^2} \\
&= \int_0^L \frac{k\lambda dx}{(L+d-x)^2} \\
&= k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(L+d-x)^2} \\
&= k\lambda \int_{L+d}^{d} \frac{-du}{u^2} \qquad\qquad \text{où } u = L+d-x \text{ donc } du = -dx \\
&= k\lambda \left[\frac{1}{u}\right]_{L+d}^{d} \\
&= k\lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right)
\end{aligned}
$$

La densité de charge est $\lambda = Q/L = -5\,\mathrm{nC}/10\,\mathrm{cm} = -5\times10^{-8}\,\mathrm{C/m}$. On trouve donc

$$
\begin{aligned}
E_x &= 8{,}99\times10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\left(-5\times10^8\,\mathrm{C}\right)\left(\frac{1}{6\,\mathrm{cm}} - \frac{1}{10\,\mathrm{cm}+6\,\mathrm{cm}}\right) \\
&= -4682{,}3\,\mathrm{N/m}
\end{aligned}
$$

Donc $\vec{E} = -4682{,}3\,\mathrm{N/m}\vec{\imath}$.

Si on est très loin du fil, alors le fil ressemble de plus en plus à un point. Vous vous attendez donc à ce que le champ du fil se rapproche de celui d'un point. Montrez que c'est le cas en utilisant l'expression symbolique que vous avez obtenue pour la composante x du champ.

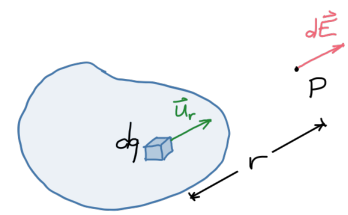
$$
\begin{aligned}
E_x &= k\lambda\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right) \\
&= k\lambda\frac{L}{d(L+d)}
\end{aligned}
$$

Si on est très loin de la tige, alors $d \gg L$ et $L + d \approx d$ d'où

$$\begin{aligned} E_x &= k\lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d} \right) \\ &= k\lambda \frac{L}{d^2} \\ &= \frac{kQ}{d^2} \end{aligned}$$

2.4.2 Méthode générale pour calculer le champ produit par une distribution de charge

De façon générale, si on a un objet chargé, on peut diviser cet objet en éléments de charge dq qui sont suffisamment petits pour être considérés comme des charges ponctuelles. On peut donc utiliser le champ produit par une charge ponctuelle et le principe de superposition pour calculer le champ produit à un point donné



$$\vec{E} = \int \frac{k dq}{r^2} \vec{u}_r$$

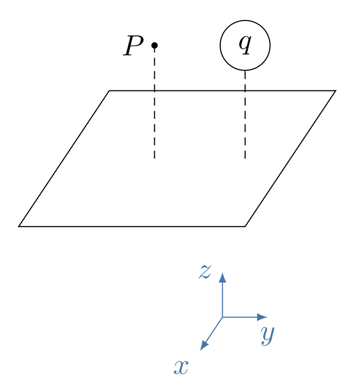
où $\vec{u}_r$ est un vecteur qui pointe de l'élément de charge dq vers le point où on essaie de calculer le champ électrique.

2.5 Champ électrique d'un plan infini

On peut diviser un plan infini en charges ponctuelles, en tiges infinies, en anneaux concentriques, etc. Peu importe la méthode qu'on choisi, lorsqu'on additionne toutes les contributions au champ électrique en un point, on obtient un résultat remarquablement simple : le champ électrique est indépendant de la distance à laquelle on se trouve du plan. Il pointe toujours perpendiculairement au plan. Si la charge par unité de surface est σ, le champ a une grandeur de

Lafrance §2.5

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$



Une plaque de métal de $2{,}00\,\mathrm{m}^2$ porte une charge totale de $4{,}00\,\mu\mathrm{C}$.

Quelle est la densité de charge de cette plaque ?

Quel est la grandeur du champ électrique au point P situé à

8,00 cm au-dessus du plan ?

On ajoute une charge de 80 nC à 8,00 cm du plan, 3,00 cm à droite du point P. Quel est maintenant le champ électrique au point P ?

2.6 Mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme

Tremblay §2.6
Lafrance §2.7

Si le champ $\vec{E}$ est le même partout dans l'espace on dit qu'il est **uniforme**. Dans un champ uniforme, une particule chargée subit une accélération constante. En effet,

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

par la deuxième loi de Newton. Donc

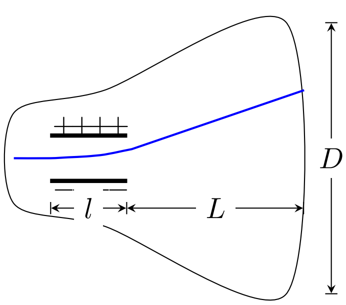
$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

est constante.

Tube à rayons cathodiques

30 minutes

Il y a quelques années, téléviseurs et écrans d'ordinateur fonctionnaient avec des tubes à rayons cathodiques.



Le principe est simple : un élément chauffant produit un faisceau d'électrons qui est accéléré dans un champ électrique. Les électrons sont ensuite déviés par un autre champ électrique. Lorsqu'ils atteignent l'écran, ils transfèrent leur énergie à des phosphores qui produisent de la lumière.

Les plaques métalliques génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E}$. Les dimensions du tube sont $l = 2$ cm, $L = 40$ cm et $D = 60$ cm. Avant de passer entre les plaques du déflecteur, la vitesse des électrons est 5% de la vitesse de la lumière vers la droite.

Déterminer la norme du champ électrique nécessaire pour que les électrons atteignent le haut de l'écran.

Soit v_x et v_y les composantes horizontales et verticales de la vitesse des électrons à leur entrée entre les deux plaques.

Pas de force dans la direction x donc v_x est constante : $v_x = 0.05c$.

Le temps requis pour que les électrons traversent les plaques est

$$t_l = \frac{l}{v_x}$$

Pendant la traversée des plaques, les électrons sont soumis à une force constante vers le haut dont la grandeur est

$$F = eE$$

où E est la grandeur du champ électrique. Par la deuxième loi de Newton

$$a_y = \frac{eE}{m}.$$

La composante verticale de la vitesse à la sortie des plaques est donc

$$v_{yl} = \frac{eEt_l}{m} = \frac{eEl}{mv_x}$$

Le déplacement vertical pendant le passage entre les plaques est

$$\begin{aligned} y_l &= \frac{1}{2}a_y t_l^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l^2}{v_x^2} \\ &= \frac{eEl^2}{2mv_x^2} \end{aligned}$$

Pour la partie après les plaques, il n'y a pas de force, donc vitesse constante.

$$t_L = \frac{L}{v_x}$$

et

$$\begin{aligned} y_L &= v_{yl}t_L \\ &= \frac{eEl}{mv_x}\frac{L}{v_x} \\ &= \frac{eElL}{mv_x^2}. \end{aligned}$$

Pour atteindre le haut de l'écran, $y_L = D/2$ donc

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} &= \frac{eEl^2}{2mv_x^2} + \frac{eElL}{mv_x^2} \\ &= \frac{eEl}{mv_x^2}\left(\frac{l}{2} + L\right) \\ E &= \frac{Dmv_x^2}{2el(l/2+L)} = 46{,}7\,\mathrm{kN/C} \end{aligned}$$

2.7 Résumé

- Un vecteur de champ électrique est associé à chaque point de l'espace.
- Le champ électrique en un point est obtenu en plaçant une charge q à cet endroit, en mesurant la force électrique sur la charge $\vec{F}$ et en calculant la force par unité de charge $\vec{E} = \vec{F}/q$.
- Le champ produit par une charge ponctuelle est $\vec{E} = kq/r^2\vec{u}_r$.
- Le principe de superposition pour les champs.
- Interpréter les lignes de champ électrique.
- Appliquer le principe de superposition et le calcul intégral pour calculer le champ d'une distribution continue de charge.
- Champ électrique d'un plan infini uniformément chargé.
- Analyser le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme.

3 Théorème de Gauss

3.1 Équilibre électrostatique

Tremblay §2.9
Lafrance §3.5

Objectif

1. L'étudiant comprendra ce qui se passe avec les charges dans un conducteur soumis à un champ électrique.
2. L'étudiant saura comment déterminer le champ électrique dans un conducteur de même que dans une cavité à l'intérieur d'un conducteur.

Le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul

Preuve : s'il ne l'était pas, le champ électrique à l'intérieur exercerait une force sur les électrons libres. Ils se déplaceraient dans la direction opposée au champ électrique. On aurait alors une charge + solitaire et une charge − solitaire qui généreraient un champ électrique dans la direction opposée à celle du champ initial. Le processus continuerait tant et aussi longtemps que le champ électrique initial n'a pas été complètement neutralisé.

Le champ électrique à la surface d'un conducteur est toujours perpendiculaire à la surface

Preuve : si ce n'était pas le cas, on aurait un mouvement des électrons libres proches de la surface qui finirait par neutraliser la composante tangentielle du champ.

Dans un conducteur chargé, toute la charge se retrouve à la surface extérieure

Preuve : Le champ électrique à l'intérieur doit être nul. Si une charge nette macroscopique se trouvait à l'intérieur, à proximité de cette charge, le champ électrique serait non-nul.

Dans une cavité à l'intérieur d'un conducteur, le champ électrique est nul

On crée une cavité dans le conducteur. Tout le matériel enlevé est neutre à cause du paragraphe précédent. Par conséquent, le matériel enlevé n'exerçait aucune force sur les charges situées à la surface du conducteur. Comme les charges à la surface étaient à l'équilibre avant d'enlever le matériel, enlever du matériel qui n'exerçait aucune force ne changera pas leur état d'équilibre.

Le champ électrique où le matériel a été enlevé était nul avant de faire le trou. On a enlevé du matériel neutre qui ne contribuait donc pas au champ électrique. Les charges qui étaient à la surface n'ont pas bougé (argument du paragraphe précédent). Le champ électrique est déterminé complètement par la configuration des charges. Par conséquent, le champ électrique dans la cavité doit encore être nul.

Exercices avec une cage de Faraday

3.2 Champ électrique dans les diélectriques

Tremblay §2.10
Lafrance §3.6

Constante diélectrique

Le champ électrique induit dans un diélectrique est en général proportionnel au champ électrique externe et dans la direction opposée au champ externe

$$\vec{E}_{\text{diel}} = -\alpha \vec{E}_{\text{vide}}$$

pour une certaine constante positive α. Le champ électrique total est donc

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{vide}} + \vec{E}_{\text{diel}} = (1-\alpha)\vec{E}_{\text{vide}}.$$

On définit la **constante diélectrique** comme

$$\kappa \equiv \frac{1}{1-\alpha}$$

c'est-à-dire que

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa}\vec{E}_{\text{vide}}.$$

La constante diélectrique est toujours plus grande ou égale à 1 donc le champ dans un diélectrique est plus faible que le champ extérieur.

Rigidité diélectrique

Si le champ électrique externe appliqué sur un diélectrique est trop élevé, les électrons seront arrachés aux atomes et un courant pourra traverser le diélectrique. C'est ce qu'on appelle une **décharge**. Chaque matériau est capable de supporter un champ électrique maximum qu'on appelle la **rigidité diélectrique**.

4 Potentiel électrique

4.1 Énergie potentielle électrique

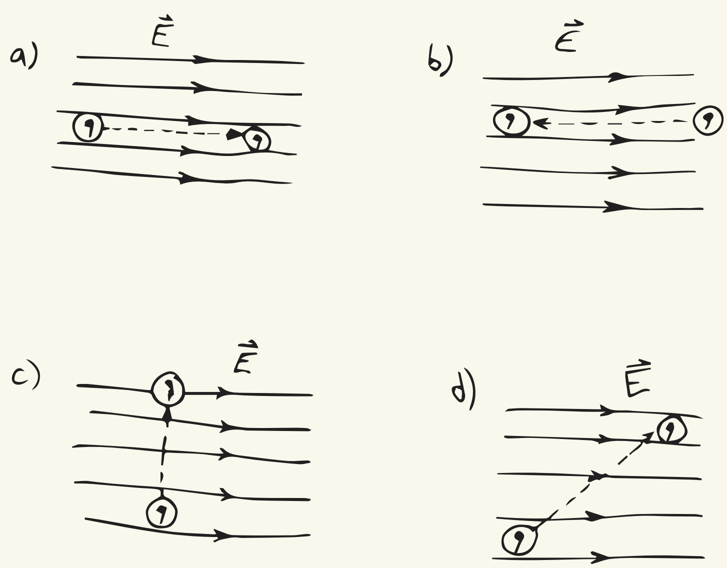
Objectif

Tremblay §4.1
Lafrance §4.1

1. L'étudiant pourra calculer le travail fait par une force électrique.
2. L'étudiant saura comment démontrer que la force électrique est une force conservative.
3. L'étudiant pourra calculer l'énergie potentielle électrique et sera en mesure d'expliquer le lien entre la force et l'énergie potentielle.

Exercice de rappel sur la notion de travail

Classez les situations suivantes en ordre croissant du travail fait par la force électrique sur la charge $q > 0$.



Solution : $W_b < W_c < W_a = W_d$

Le travail fait par une force électrique

Si une particule se déplace du point A au point B, le travail effectué par une force est

$$W \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

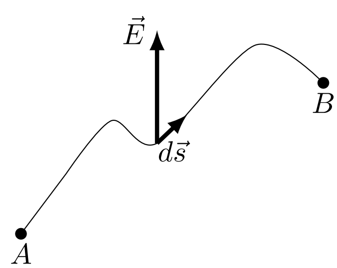
où $d\vec{s}$ est une petite partie du chemin parcouru.

Dans le cas simple où la trajectoire est une ligne droite de longueur L et la force est constante

$$W = FL.$$

On considère une région d'espace avec un champ électrique $\vec{E}$. Une charge ponctuelle q dans cette région subit une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. On peut récrire l'expression du travail en terme du champ électrique

$$W = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



La force électrique est conservative

On peut montrer que le travail fait par la force électrique est indépendante du chemin suivi pour aller du point A au point B. Vous avez vu le même genre de résultat pour la force gravitationnelle. Par opposition, le travail fait par le frottement est dépendant du chemin.

Une force pour laquelle le travail est indépendant du chemin est **conservative**.

Rappelez-vous le cas de la force gravitationnelle à la surface de la Terre (avec l'axe y qui pointe vers le haut)

$$W_g = -mg\Delta y$$

Énergie potentielle électrique

Puisque la force électrique est conservative, on peut lui associer une énergie potentielle. On définit l'énergie potentielle électrique de la même façon que nous avons défini l'énergie potentielle gravitationnelle : c'est l'opposé du travail fait par la force,

$$\Delta U \equiv -W$$

c'est-à-dire,

$$\Delta U = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

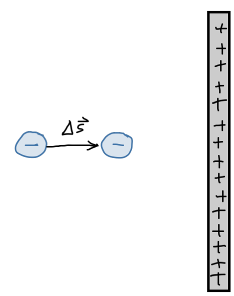
Exercice

Une particule de charge $-8{,}00\,\mu\mathrm{C}$ est placée $2{,}00\,\mathrm{m}$ à gauche d'une grande plaque verticale portant une charge surfacique de $50{,}0\,\mathrm{nC/m^2}$. La particule s'approche de $1{,}00\,\mathrm{m}$ de la plaque.

Quel est le travail effectué par la force électrique ?

Quel est la variation d'énergie potentielle électrique ?

Si aucun travail externe n'est effectué et que la particule était initialement au repos, quelle est la vitesse de la particule à la fin de son mouvement ?



Le champ produit par la plaque a une grandeur $E = \sigma/2\varepsilon_0$ et est orienté vers la droite. Le travail produit par la force électrique est donc

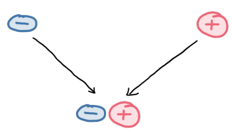
$$\begin{aligned} W &= q \int_{0\,\mathrm{m}}^{1\,\mathrm{m}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= -qE \int_{0\,\mathrm{m}}^{1\,\mathrm{m}} ds \\ &= -qEL \\ &= 22{,}59\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle électrique a donc diminuée de $22{,}59\,\mathrm{mJ}$.

Par le principe de conservation de l'énergie, l'énergie cinétique a augmenté de $22{,}59\,\mathrm{mJ}$. Puisque l'énergie cinétique initiale était nulle, on a donc que la vitesse à la fin est

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{\frac{2K_f}{m}} \\ &= 475{,}3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

vers la droite.



Un atome d'hydrogène est constitué d'un électron et d'un proton. On assemble un atome d'hydrogène à partir d'un électron et d'un proton isolé qu'on approche jusqu'à une distance de $1{,}06 \times 10^{-10}$ m. Si on pose que l'énergie potentielle du système est nulle lorsque les deux particules sont isolées, quelle est l'énergie potentielle de l'atome d'hydrogène assemblé ?

On place le proton à l'origine. L'électron est à l'infini. La force électrique sur l'électron est donnée par la loi de Coulomb

$$\vec{F} = -\frac{ke^2}{r^2}\vec{u}_r$$

Le travail fait par la force électrique est

$$\begin{aligned} W &= \int_{\infty}^{a} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= -ke^2 \int_{\infty}^{a} \frac{dr}{r^2} \\ &= -ke^2 \left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{a} \\ &= -ke^2 \left(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{\infty}\right) \\ &= \frac{ke^2}{a} \\ &= 2{,}156 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Le changement d'énergie potentielle est $\Delta U = -W = -2{,}156 \times 10^{-18}$ J. L'énergie potentielle au début est nulle, alors l'énergie potentielle finale est $-2{,}156 \times 10^{-18}$ J.

4.2 Potentiel électrique

Objectif

Tremblay §4.2
Lafrance §4.2

1. L'étudiant comprendra les concepts de potentiel électrique et de différence de potentiel. Il pourra expliquer le lien entre le potentiel et le champ électrique.

Dans la formule pour l'énergie potentielle électrique

$$\Delta U = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

on remarque que l'intégrale ne dépend pas du tout de la charge qui se déplace. L'intégrale dépend uniquement de la source du champ électrique. Comme nous l'avions fait avec la force et le champ électrique, nous pouvons définir une quantité qui ne dépend que de la source

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Cette quantité s'appelle une **différence de potentiel électrique**. C'est l'énergie potentielle par unité de charge

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q}$$

À chaque point de l'espace on peut assigner une valeur de **potentiel électrique** définie de telle sorte que $\Delta V = V_B - V_A$.

Les unités de la différence de potentiel sont les volts

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{Nm/C}$$

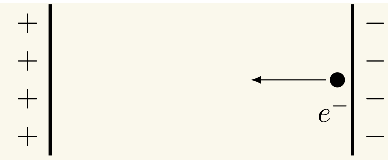
On exprime souvent le champ électrique en V/m.

Si une particule chargée q se déplace entre deux points séparés par une différence de potentiel ΔV, sont énergie potentielle varie de

$$\Delta U = q\Delta V$$

Électron entre des plaques

Deux grandes plaques métalliques sont maintenues à une différence de potentiel de 12 V. Elles sont séparées d'une distance de 1 cm. Un électron qui se trouve juste à côté d'une des plaques se déplace jusqu'à l'autre plaque. Si l'électron est initialement immobile, déterminer le module de sa vitesse lorsqu'il atteint l'autre plaque.



L'énergie cinétique initiale est de 0 car l'électron est au repos. La variation d'énergie potentielle lorsque l'électron passe de la plaque négative à la plaque positive est de

$$\begin{aligned}\Delta U &= q\Delta V \\ &= -e\Delta V\end{aligned}$$

où $\Delta V = 12\,\mathrm{V}$. Par le principe de conservation de l'énergie mécanique, on a

$$\begin{aligned}\Delta K + \Delta U &= 0 \\ K_f - e\Delta V &= 0 \\ K_f &= e\Delta V \\ K_f &= e \cdot 12\,\mathrm{V} \\ K_f &= 12\,\mathrm{eV} \\ v &= \sqrt{\frac{2 \cdot 12\,\mathrm{eV}}{m}} \\ v &= 2{,}055 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

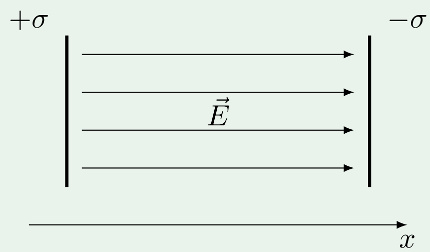
Électron-volt pour mesurer l'énergie

L'**électron-volt** (eV) est une unité de mesure d'énergie. Un eV correspond à l'énergie cinétique que va acquérir un électron accéléré dans une différence de potentiel de 1 V.

$$1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Plaques qu'on éloigne

Deux grandes plaques métalliques sont maintenues à une différence de potentiel de 12 V. On augmente la distance entre les plaques. Expliquez ce qui doit se produire avec la densité surfacique de charge sur les plaques pour que la différence de potentiel demeure constante.



Le champ généré par chaque plaque entre les plaques est

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

donc le champ total entre les plaques est constant de grandeur

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Si on va d'un point x_0 à un point x, la différence de potentiel est

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int_{x_0}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= -\int_{x_0}^{x} E dx \\ &= -E \int_{x_0}^{x} dx \\ &= -E(x - x_0) \\ &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x - x_0) \end{aligned}$$

En particulier, si on va de la plaque négative à la plaque positive,

$$\Delta V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

donc, si la ddp est constante et que la distance entre les plaques augmente, la densité surfacique de charge doit diminuer.

4.3 Surfaces équipotentielles

Lafrance §4.3

Une région connexe de l'espace qui est au même potentiel électrique est appelée une **surface équipotentielle**. Par exemple, puisque le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul, la surface d'un conducteur est une équipotentielle.

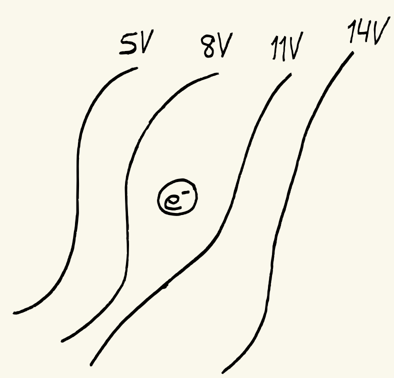
Les surfaces équipotentielles sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ électrique. En effet, si on se déplace le long d'une équipotentielle, $\Delta V = 0$. Or,

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

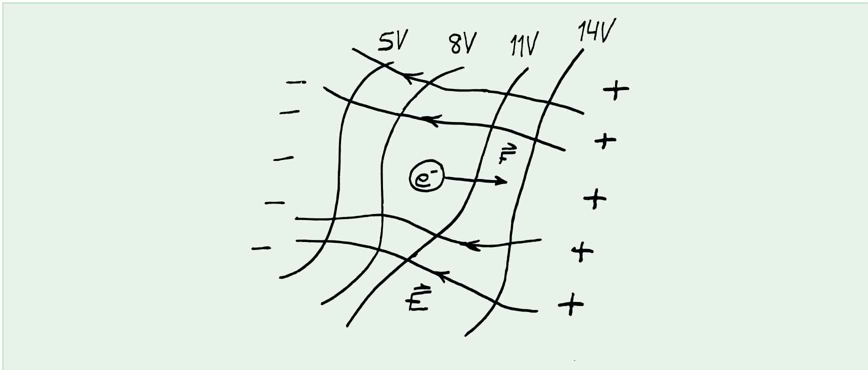
n'est égal à zéro que si l'angle entre le déplacement et le champ électrique est nul (en supposant que le champ électrique et le déplacement ne sont pas nuls).

Exercice

On place un électron dans une région de l'espace où les surfaces équipotentielles sont telles qu'illustrées dans le schéma ci-dessous.



1. Dans quelle direction est la force que subit l'électron ?
2. Tracez les lignes de champ électrique.



Cet exercice permet de mettre en lumière quelques propriétés importantes des équipotentielles et du potentiel électrique.

- Plus les équipotentielles sont rapprochées les unes des autres, plus le champ électrique est grand à cet endroit.
- Les lignes de champ électrique vont des potentiels élevés vers les potentiels faibles.
- Une particule chargée négativement subira une force vers les potentiels élevés.
- Une particule chargée positivement subira une force vers les potentiels plus faibles.

4.4 Potentiel électrique d'une charge ponctuelle

Lafrance §4.4

Pour une charge ponctuelle

$$E_r = k\frac{q}{r^2}.$$

La différence de potentiel entre deux points A et B est donc

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \\
&= -\int_{r_A}^{r_B} k\frac{q}{r^2}\,dr \\
&= -kq\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\,dr \\
&= -kq\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} \\
&= \frac{kq}{r_B} - \frac{kq}{r_A} \\
&= V_B - V_A
\end{aligned}$$

donc

$$V = \frac{kq}{r}$$

4.5 Potentiel d'un ensemble de charges

Tremblay §4.3
Lafrance §4.5

Le principe de superposition s'applique au potentiel électrique : le potentiel d'un ensemble de charges est la somme des potentiels.

On peut utiliser ce principe pour calculer le potentiel de n'importe quel objet chargé :

$$V = \int_{\text{objet}} \frac{kdq}{r}.$$

Énergie potentielle électrique d'un ensemble de charges

On considère un ensemble de n charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Pour calculer l'énergie potentielle de cet ensemble de charges, on doit l'assembler, une charge à la fois. Placer la première charge ne requiert aucun travail puisque le champ électrique est nul au départ. Apporter la seconde charge nécessite un travail puisqu'on doit la déplacer dans le champ électrique produit par la première charge. L'énergie requise est

$$U_2 = q_2 V_1.$$

Pour la troisième charge, on doit tenir compte du potentiel créé par les deux premières charges. Puisque le potentiel respecte le principe de superposition, on a

$$U_3 = q_3V_1 + q_3V_2 = q_3(V_1 + V_2).$$

On peut répéter l'argument pour les charges suivantes. On obtient l'énergie potentielle totale du système en additionnant les énergies $U_1, U_2, \ldots, U_n$. La somme contient un terme pour chaque paire de charges.

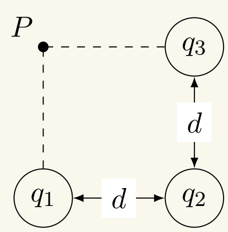
$$U = \sum_{i<j} q_i V_j$$

Exercice

Trois charges sont placées aux sommets d'un carré de côté $d = 3\,\text{cm}$. Les charges sont de $q_1 = 1{,}7\,\mu\text{C}$, $q_2 = -3\,\mu\text{C}$, et $q_3 = 2\,\mu\text{C}$.

— Déterminer le potentiel au point P, $3\,\text{cm}$ au-dessus de la charge q_1.

— On amène une charge $q_4 = -4\,\mu\text{C}$ de l'infini jusqu'à P. Quel est le changement d'énergie potentielle du système ? Que signifie la réponse ?



$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 \\ &= \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3} \\ &= 509\,433\,\text{V} + -635\,689\,\text{V} + 599\,333\,\text{V} \\ &= 473\,078\,\text{V} \end{aligned}$$

Le potentiel à l'infini est nul donc $\Delta U = U_f - U_i = U_f$.

$$\begin{aligned} U &= q_4(V_1 + V_2 + V_3) \\ &= -1{,}89\,\text{J} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle du système a diminué, ce qui signifie que le système est plus stable dans cette configuration que lorsque la charge q_4 est à l'infini.

5 Condensateurs

Objectif

1. L'étudiante saura ce qu'est un condensateur et comprendra le concept de capacité.
2. L'étudiante sera en mesure de calculer la capacité de condensateurs dont la géométrie est simple.
3. L'étudiante saura comment calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur.
4. L'étudiante comprendra comment se comportent des condensateurs en série et en parallèle.

5.1 Condensateurs plans

Tremblay §7.2
Lafrance §5.2, 5.1

On considère deux grandes plaques parallèles connectées à une source de tension. Si on applique une différence de potentiel ΔV entre les deux plaques, quelle charge sera emmagasinée sur chacune des plaques ?

1. Décrire le champ électrique entre les deux plaques.
2. Déterminer le lien entre le champ électrique et la différence de potentiel.
3. Montrer que la relation suivante est vraie

$$Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Delta V.$$

Un **condensateur** est constitué de deux **armatures** conductrices portant des charges opposées séparées par un isolant. Dans un **condensateur plan**, les armatures sont de très grandes plaques.

La **capacité** d'un condensateur décrit quelle charge peut être accumulée sur l'armature positive pour chaque volt de différence de potentiel appliquée entre les armatures. C'est une quantité qui ne dépend que de la géométrie du condensateur et qui est reliée à la charge et à la différence de potentiel par

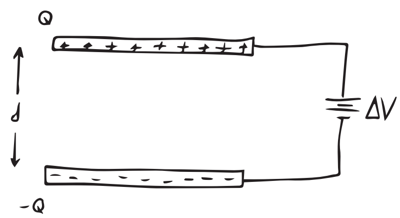
$$C = \frac{Q}{\Delta V}.$$

Dans le cas d'un condensateur plan

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

Dans le système international, la capacité se mesure en farad (F). On note que

$$1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V}$$



Propriétés de condensateurs plans

Lequel des énoncés suivants est vrai.

1. Si l'aire des plaques augmente, la capacité diminue.
2. La charge accumulée sur un condensateur plan augmente proportionnellement à la différence de potentiel entre les plaques.
3. Si on augmente la distance entre les plaques, l'énergie potentielle du condensateur diminue.

Lequel des énoncés suivants est vrai.

1. Plus la distance entre les plaques est grande, plus la différence de potentiel doit être élevée pour maintenir la même charge sur les plaques.
2. Si la densité surfacique de charge augmente et que la différence de potentiel demeure la même, c'est parce que la distance entre les plaques a diminué.
3. Pour un condensateur donné, plus la différence de potentiel entre les plaques augmente, plus la capacité diminue.

5.1.1 Condensateurs et diélectriques

Objectif

Tremblay §7.7

1. L'étudiante connaîtra la définition de la constante diélectrique.
2. L'étudiante comprendra comment l'introduction d'un diélectrique influence la capacité d'un condensateur.

10 minutes

Demander aux étudiants de résumer comment l'introduction d'un condensateur entre les armatures d'un condensateur chargé affecte le champ électrique, la différence de potentiel et la capacité.

Les éléments suivants devraient se retrouver dans la description.

— Diélectrique se polarise ce qui crée un champ électrique dans le diélectrique dans la direction opposé au champ électrique causé par les armatures.
— Par le principe de superposition, le champ électrique total a un module inférieur à celui des armatures seules.
— La différence de potentiel diminue du même facteur puisqu'elle est proportionnelle au champ électrique.
— La charge sur les armatures est la même, mais la différence de potentielle est plus faible, donc la capacité a augmenté (car $C = Q/\Delta V$).

Constante diélectrique

5 minutes

Le champ électrique induit dans un diélectrique est en général proportionnel au champ électrique externe et en sens opposé

$$\vec{E}_{\text{diel}} = -\alpha \vec{E}_{\text{vide}}$$

donc le champ électrique total est

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{vide}} + \vec{E}_{\text{diel}} = (1-\alpha)\vec{E}_{\text{vide}}.$$

On définit la **constante diélectrique** comme

$$\kappa = \frac{1}{1-\alpha}$$

c'est-à-dire que

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa}\vec{E}_{\text{vide}}.$$

Par conséquent, la différence de potentiel entre les plaques chute d'un facteur κ et la capacité devient

$$C = \frac{Q}{\Delta V/\kappa} = \kappa C_{\text{vide}}.$$

Rigidité diélectrique

Si le champ électrique externe appliqué sur un diélectrique est trop élevé, les électrons seront arrachés aux atomes et un courant pourra traverser le diélectrique. C'est ce qu'on appelle un **claquage**. Chaque matériau est capable de supporter un champ électrique maximum qu'on appelle la **rigidité diélectrique**. Le tableau ci-dessous donne la rigidité diélectrique de quelques matériaux.

Substance	Rigidité diélectrique (V/cm)
Air	30 000
Verre	100 000
Polystyrène	197 000
Papier ciré	500 000
Diamant	20 000 000

5.2 Énergie dans un condensateur chargé

Tremblay §7.5
Lafrance §5.3

On doit construire la configuration de charge, ie, calculer le travail nécessaire pour amener chacune des charges à sa place sur le condensateur.

Considérons un condensateur avec une capacité C dont les armatures sont maintenues à une différence de potentiel ΔV.

La différence de potentiel lorsque la charge est q est

$$\Delta V = \frac{q}{C}$$

donc l'énergie requise pour amener une charge supplémentaire dq est

$$\begin{aligned} dU &= dq\Delta V \\ &= \frac{q}{C}dq \end{aligned}$$

L'énergie totale est la somme des variations d'énergie pour chacune des petites charges nécessaires pour faire passer la charge totale du condensateur de 0 à Q :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_0^Q \frac{q}{C}dq \\ &= \left.\frac{q^2}{2C}\right|_0^Q \\ &= \frac{Q^2}{2C} \end{aligned}$$

Condensateur qui explose

Si on applique une différence de potentiel trop élevée aux armatures d'un condensateur, le champ électrique entre les armatures deviendra plus grand que la rigidité diélectrique du matériel isolant et on assistera à une décharge. Très souvent, un condensateur qui subit une décharge explosera tel qu'illustré dans le vidéo suivant `https://youtu.be/XBoaBwMRbnk?t=30`.

Dans un des cas, on voit un condensateur de 470 µF qui explose. Supposons qu'il a explosé à une tension de 200 V. Quelle est la quantité d'énergie qui peut être relâchée durant cette explosion ?

$$\begin{aligned} U &= \frac{C\Delta V^2}{2} \\ &= 9{,}40\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

C'est environ l'énergie d'un bloc de 1 kg qui tombe d'une hauteur de 1 m sur le bout de votre doigt...

5.3 Circuits simples avec des condensateurs

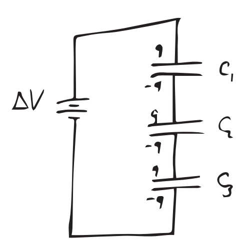
Condensateurs en série

Tremblay §7.4

15 minutes

Si plusieurs condensateurs sont placés en série, est-ce que la capacité de l'ensemble est plus grande, plus petite ou égale à la somme des capacités ?

La charge accumulée sur chacun des condensateurs est la même parce les armatures opposées doivent avoir des charges opposées, et chaque section du circuit doit être électriquement neutre.



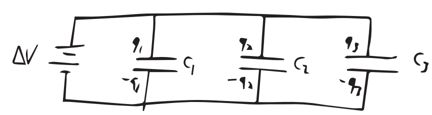
De plus, la somme des différences de potentiel aux armatures de chacun des condensateurs doit être la même que la différence de potentiel fournie par la source. On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\
\frac{q}{C_{\text{eq}}} &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} \\
\frac{1}{C_{\text{eq}}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}
\end{aligned}$$

Condensateurs en parallèle

15 minutes

Dans le cas de condensateurs en parallèle, la charge accumulée sur chaque condensateur n'est pas nécessairement la même, mais la ddp aux bornes de chaque condensateur elle doit être identique. La charge qui sera accumulée sur un condensateur équivalent aux trois condensateurs doit être la somme des charges sur chaque condensateur.

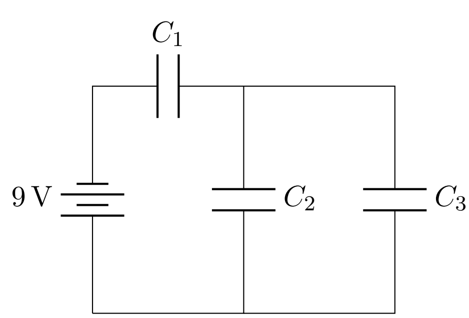


On a donc

$$\begin{aligned}
q &= q_1 + q_2 + q_3 \\
C_{\text{eq}}\Delta V &= C_1\Delta V + C_2\Delta V + C_3\Delta V \\
C_{\text{eq}} &= C_1 + C_2 + C_3
\end{aligned}$$

Exemple

On construit le circuit suivant avec une pile de 9 V. Le condensateur 1 a une capacité $C_1 = 45\,\mu\text{F}$ et ses armatures sont séparées par du vide. Les condensateurs 2 et 3 sont construits exactement de la même façon que le condensateur 1 sauf que tout l'espace entre leurs armatures est rempli par du germanium et du papier, respectivement. La constante diélectrique du germanium est 16 alors que celle du papier est 3.



1. Déterminer la capacité équivalente à ces trois condensateurs.
2. Déterminer la charge accumulée sur la plaque positive du condensateur 2.
3. Déterminer l'énergie accumulée dans le condensateur 3.

D'abord

$$C_2 = \kappa_{\mathrm{Ge}} C_1 = 16 C_1 = 720\,\mu\mathrm{F}$$
$$C_3 = \kappa_{\mathrm{papier}} C_1 = 3 C_1 = 135\,\mu\mathrm{F}$$

C_2 et C_3 sont en parallèle donc

$$\begin{aligned} C_{23} &= C_2 + C_3 \\ &= 855\,\mu\mathrm{F} \end{aligned}$$

C_1 est en série avec C_{23} donc

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{eq}} &= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}}} \\ &= 42{,}8\,\mu\mathrm{F} \end{aligned}$$

La charge accumulée sur cette capacité équivalente serait la même que celle accumulée sur C_1 et C_{23}. Donc

$$\begin{aligned} Q_{23} &= C_{\mathrm{eq}} \Delta V \\ &= 384{,}75\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

La différence de potentiel aux bornes de C_2 (et C_3) est donc

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= \frac{Q_{23}}{C_{23}} \\ &= 0{,}45\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

d'où on peut déduire la charge accumulée sur C_2

$$\begin{aligned} Q_2 &= C_2 \Delta V_2 \\ &= 324\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

L'énergie emmagasinée dans C_3 est obtenue par

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{Q_3^2}{2C_3} = \frac{C_3 \Delta V_3^2}{2} \\ &= 13{,}67\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

6 Courant électrique

6.1 Courant électrique

Tremblay §5.1, 5.2
Lafrance §6.1

Objectif

1. L'étudiant analysera un modèle de conduction impliquant la vitesse de dérive des électrons dans un conducteur.

Le courant donne la quantité de charge par unité de temps qui traverse un fil

$$i_{\text{moy}} \equiv \left|\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|$$

En général, cette quantité peut fluctuer et la définition générale est

$$i \equiv \left|\frac{dQ}{dt}\right|$$

La direction du courant est la direction des charges positives.

6.1.1 Vitesse de dérive

Regardons de plus près des électrons de conduction dans un fil.

Ils se déplacent dans des directions aléatoires. En première approximation, on peut considérer les électrons de conduction comme formant un gaz parfait. D'après le théorème d'équipartition en thermodynamique, l'énergie des électrons est

$$\frac{3}{2}kT$$

ce qui permet de déterminer que leur vitesse thermique est de l'ordre de 1×10^5 m/s.

Avec une différence de potentiel, les électrons se déplaceront légèrement plus vers le potentiel le plus élevé. La vitesse thermique demeure et les collisions aussi. Dans l'ensemble, la vitesse effective avec laquelle les électrons se déplacent vers le potentiel positif est appelée la **vitesse de dérive**. En général, la vitesse de dérive est de l'ordre de 1×10^{-6} m/s.

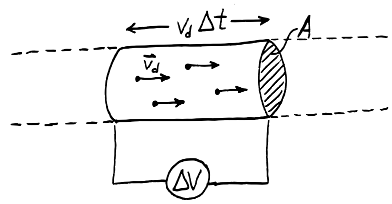
6.1.2 Courant et vitesse de dérive

Considérons une section de fil de surface A. Dans un intervalle de temps dt, seul les électrons qui se trouvent à une distance inférieure à $v_d dt$ pourront traverser la section de fil. Combien d'électron de conduction y a-t-il ? Supposons qu'il y en a n par unité de volume dans le fil. La charge totale qui peut traverser la surface est donc

$$dQ = -env_d dtA$$

d'où

$$i = env_d A$$



On définit la **densité de courant** par

$$\begin{aligned} J &\equiv \frac{i}{A} \\ &= env_d \end{aligned}$$

6.2 Modèle de conduction et résistance

Tremblay §5.3
Lafrance §6.2, 6.4, 6.5

Qu'en est-il de la vitesse de dérive ? On se doute qu'elle dépend du champ électrique, mais comment ? D'abord, clarifions le fait qu'il existe un champ électrique dans le fil même si c'est un conducteur. En effet, il y a des charges qui bougent, donc la situation n'est pas à l'équilibre électrostatique. Si le champ électrique est constant, on s'attend à ce que la force électrique sur les charges en mouvement soit constante et donc que l'accélération des charges soit constante. Si c'était le cas, on aurait une vitesse de dérive qui augmente continuellement. Ce n'est pas ce qui est observé. On constate plutôt que la vitesse de dérive est constante. Ceci est causé par les nombreuses collisions que les charges en mouvement subissent lors de leur déplacement. Ces collisions sont équivalentes à un mouvement dans un milieu résistant, comme une voiture qui se déplace dans l'air. Si le milieu exerce une force proportionnelle à la vitesse, on peut montrer que les charges atteindront une vitesse limite constante. On a donc que

$$v_d = \mu_e E$$

où μ_e est une constante de proportionnalité, la **mobilité** des électrons. En combinant avec le résultat obtenu plus haut, on obtient la relation suivante entre le courant et le champ électrique

$$i = en\mu_e AE.$$

En terme de la densité de courant, on obtient

$$J = en\mu_e E.$$

On définit la constante

$$\rho \equiv \frac{1}{en\mu_e}$$

comme étant la **résistivité** du matériau.

Si on applique une différence de potentiel ΔV entre deux extrémités d'un fil de longueur l et de section A, le champ électrique est

$$E = \frac{\Delta V}{l}$$

donc la densité de courant est

$$J = \frac{1}{\rho l}\Delta V$$

et le courant est

$$I = JA = \frac{A}{\rho l}\Delta V.$$

On définit la **résistance** d'un matériau comme le rapport de la différence de potentiel sur le courant :

$$R = \frac{\Delta V}{I}.$$

À partir de la relation ci-haut, on a donc

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

Un matériel pour lequel la résistance est indépendante de la différence de potentiel est appelé un matériel ohmique. On dit que ce matériel satisfait la **loi d'Ohm**, c'est-à-dire que la relation entre la tension et le courant est linéaire.

6.3 Puissance

Tremblay §5.4

La puissance est l'énergie dissipée (ou fournie) par unité de temps. On sait que si une charge dq se déplace entre deux points séparés par une différence de potentiel ΔV, l'énergie potentielle changera de

$$dU = \Delta V dq.$$

L'énergie cinétique demeurera constante si on suppose que le courant est uniforme entre les deux points qui nous intéressent (ce qui est souvent le cas). Par conséquent, le taux de variation de l'énergie dans le temps est

$$\begin{aligned} P &= \frac{dU}{dt} \\ &= \frac{\Delta V dq}{dt} \\ &= \Delta V I \\ &= RI^2 \end{aligned}$$

Diapo

Exercice

Un cable de transport d'électricité à haute tension d'Hydro-Québec est fait de cuivre et a un diamètre d'environ 10 cm. Le câble relie la centrale Manic-5, sur la Côte-Nord, à Montréal et a une longueur de 685 km. Le câble est maintenu à une tension de 735 kV (par rapport au sol) par la turbine de la centrale. La densité de courant dans le câble est de 0,8 A/mm^2.

1. Quel est le courant qui circule dans le câble ?
2. Combien d'électrons traversent une section du câble à chaque minute ?
3. Déterminez la résistance du câble (la résistivité du cuivre est de $1{,}678 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$).
4. Quel est le champ électrique dans le câble ?
5. En combien de temps un électron partant de Manic-5 atteindrait-il Montréal ? (La mobilité des électrons dans le cuivre est de 0,0033 m^2/Vs.)
6. Combien d'énergie est perdue sous forme de chaleur dans le câble à chaque jour ?
7. Sachant que la centrale produit une puissance de 1596 MW, quelle est la proportion de la puissance produite qui est perdue dans le câble ?

Solution

1. $I = \pi r^2 J = 6283\,\mathrm{A}$
2. $N = I \times 60\,\mathrm{s}/e = 2{,}353 \times 10^{24} = 3{,}907\,\mathrm{mol}$
3. $R = \rho l/\pi r^2 = 1{,}463\,\Omega$
4. $E = \Delta V/l = RI/l = 0{,}013\,42\,\mathrm{V/m}$
5. $v_d = \mu_e E = 0{,}0443\,\mathrm{mm/s}$ donc $t = l/v_d = 490\,\mathrm{annes}$
6. $P = RI^2 = 57{,}78\,\mathrm{MW}$ donc $E = P \times 24\,\mathrm{h} = 4{,}99\,\mathrm{TJ}$
7. $P/1596\,\mathrm{MW} = 3{,}62\,\%$

On a une différence de potentiel de 9195 V entre les extrémités du câble.

7 Circuits

Objectif

1. L'étudiante comprendra les lois de Kirchhoff et saura les appliquer à des circuits composés de piles et de résistances.
2. L'étudiante saura comment calculer la résistance équivalente à des agencements de résistances en série et en parallèle.

7.1 Force électromotrice

Tremblay §6.1, 6.2
Lafrance §4.9

Dans un circuit, il faut quelque chose qui fournit de l'énergie aux charges pour les mettre en mouvement. Autrement dit, il faut une source de différence de potentiel. Une source peut être une batterie (qui convertit de l'énergie chimique en énergie électrique), une centrale hydroélectrique (qui convertit de l'énergie potentielle gravitationnelle en énergie électrique), une interface électronique (qui convertit de l'énergie électrique et énergie électrique), etc. Ces sources font activement un travail pour générer la tension dans le circuit. On les appelle souvent des sources de **force électromotrice**, représentée par le symbole $\mathcal{E}$.

Attention ! Une force électromotrice n'est pas une force, c'est une différence de potentiel maintenue activement par un processus quelconque dans la source.

7.2 Lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

Tremblay §6.5
Lafrance §7.2

Dans notre analyse des circuits, nous supposerons que le courant est constant ou qu'il varie suffisamment lentement pour que l'équilibre puisse s'établir dans les fils. Par conséquent, aucune charge ne peut s'accumuler dans les éléments de circuit (sauf sur les condensateurs).

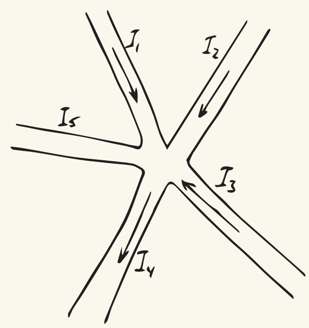
Si les charges ne peuvent s'accumuler, le courant entrant à chaque point du circuit doit être le même que le courant sortant de ce point (par conservation de la charge). C'est la **loi des nœuds**.

Exercice sur la loi des nœuds

Le diagramme ci-dessous illustre un nœud dans un circuit. Les courants sont

$$I_1 = 100\,\mathrm{mA}$$
$$I_2 = 45\,\mathrm{mA}$$
$$I_3 = 80\,\mathrm{mA}$$
$$I_4 = 300\,\mathrm{mA}$$

Déterminer I_5 et la direction du courant dans cette branche.



Parmi les courants connus, la somme des courants entrant est

$$I_1 + I_2 + I_3 = 225\,\mathrm{mA}$$

et la somme des courants sortant est

$$I_4 = 300\,\mathrm{mA}.$$

Pour que la loi des noeuds soit satisfait, il faut que

$$I_{\text{entrant}} = I_{\text{sortant}}.$$

Par conséquent, le courant I_5 doit nécessairement être un courant entrant d'où

$$I_{\text{entrant}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_5$$

et

$$I_{\text{sortant}} = I_4.$$

Donc

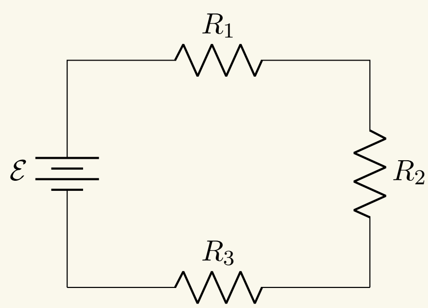
$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 + I_5 &= I_4 \\ I_5 &= I_4 - I_1 - I_2 - I_3 \\ &= 75\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

Loi des mailles

Le long de n'importe quel chemin fermé, la somme des différences de potentiel doit donner 0. C'est une conséquence du fait que la force électrique est conservative, autrement dit, c'est parce que l'énergie est conservée.

Exercice sur la loi des mailles

On considère le circuit suivant dans lequel $\mathcal{E} = 12\,\mathrm{V}$, $R_1 = 100\,\Omega$ et $R_3 = 50\,\Omega$. Le courant qui circule dans le circuit est de $I = 30\,\mathrm{mA}$. Déterminer R_2.



Si on fait le tour de la maille

$$\mathcal{E} - R_1 I - R_2 I - R_3 I = 0$$

donc

$$R_2 = \frac{\mathcal{E} - R_1 I - R_3 I}{I} = \frac{\mathcal{E}}{I} - R_1 - R_3$$

$$R_2 = 250\,\Omega$$

7.3 Pile réelle

Tremblay §6.9
Lafrance §7.3

Objectif

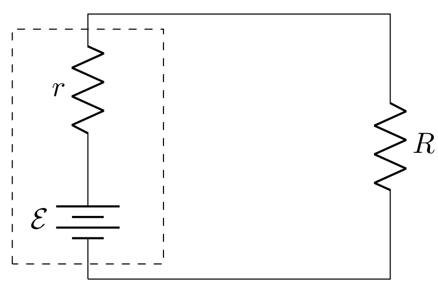
1. L'étudiant saura quelle est la différence entre une pile réelle et une pile idéale.

Cette section sera présentée au laboratoire, avant le labo 4.

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré les piles comme des piles idéales, c'est-à-dire que la f.é.m. est égale à la différence de potentiel lorsque la pile est branchée à un circuit. Or, en pratique, ce n'est pas le cas. Lorsqu'on branche une pile à un circuit, la différence de potentiel entre les bornes n'est plus égale à la f.é.m.

Exemple

On considère une pile AA 1,5 V (nominal) avec une f.é.m. réelle de 1,590 V. Lorsque cette pile est branchée à une résistance de 100,3 Ω, la différence de potentiel mesurée entre les bornes est 1,570 V. Quelle est la résistance interne de la pile ?



Le courant circule de la borne positive vers la borne négative de la pile donc dans le sens horaire. Utilisons la loi des mailles en parcourant la maille dans le même sens que le courant.

$$\mathcal{E} - rI - RI = 0 \tag{7.1}$$

La différence de potentiel aux bornes de la pile lorsqu'elle est connectée au circuit est la différence de potentiel entre les points a et b. En allant de a à b

$$\begin{aligned} V_a + \mathcal{E} - rI &= V_b \\ V_b - V_a &= \mathcal{E} - rI \\ \Delta V_{ab} &= \mathcal{E} - rI \end{aligned} \tag{7.2}$$

En remplaçant dans l'équation 7.1 on trouve

$$\begin{aligned} \Delta V_{ab} - RI &= 0 \\ I &= \frac{\Delta V_{ab}}{R} \end{aligned}$$

qu'on remplace dans l'équation 7.1

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - r\frac{\Delta V_{ab}}{R} - R\frac{\Delta V_{ab}}{R} &= 0 \\ r &= \frac{R(\mathcal{E} - \Delta V_{ab})}{\Delta V_{ab}} \end{aligned}$$

Donc

$$r = 1{,}278\,\Omega$$

Quelle est la puissance nette fournie par la pile ?

Il y a de nombreuses façons de procéder. La plus simple est d'utiliser le principe de conservation de l'énergie : la puissance nette fournie par la pile doit être dissipée dans la résistance.

$$\begin{aligned} P_{\text{nette}} &= P_R \\ &= \Delta V_R I \\ &= \frac{(\Delta V_{ab})^2}{R} \\ &= 0{,}0246\,\text{W} \end{aligned}$$

Batterie d'ordinateur

Un ordinateur portable a une batterie de 49,9 W h avec une f.é.m. de 11,4 V. L'ordinateur vient avec un chargeur de 30 W. Lorsque la batterie fournit un courant de 800 mA à l'ordinateur, la différence de potentiel à ses bornes chute à 10,9 V.

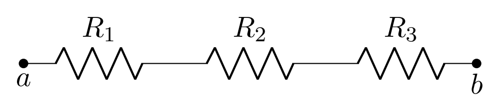
1. Quelle est la résistance interne de la batterie ?
2. Quelle est la puissance perdue sous forme de chaleur dans la batterie ?
3. Si la batterie est complètement vide au départ, combien de temps est nécessaire pour la charger complètement ? (Vous pouvez négliger la résistance interne ici.)

1. $r = (\mathcal{E} - \Delta V)/i = 0{,}625\,\Omega$
2. $P = ri^2 = 0{,}400\,\mathrm{W}$
3. $\Delta t = 49{,}9\,\mathrm{W\,h}/30\,\mathrm{W} = 1{,}66\,\mathrm{h}$

7.4 Associations de résistances

Lafrance §7.4

Dans l'exemple précédent, nous avons placé des résistances en série. Comment peut-on calculer la résistance équivalente à un ensemble de résistances en série ?



De a à b

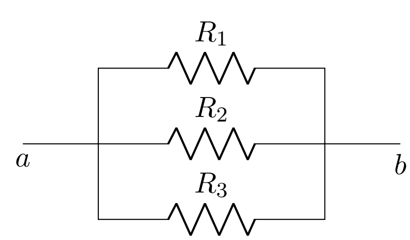
$$\begin{aligned} V_a - R_1 I - R_2 I - R_3 I &= V_b \\ R_1 I + R_2 I + R_3 I &= V_a - V_b \\ (R_1 + R_2 + R_3) I &= \Delta V \end{aligned}$$

donc

$$R_{\mathrm{eq}} = \sum_i R_i$$

Si les résistances sont en parallèle la différence de potentiel est la même aux bornes de chaque résistance. Par la loi des noeuds,

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

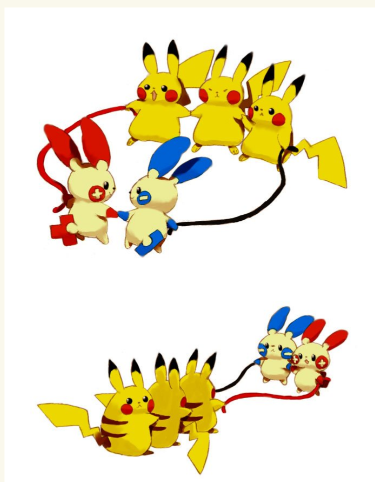


Pour trouver la résistance équivalente

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= R_{\text{eq}} I \\
&= R_{\text{eq}}(I_1 + I_2 + I_3) \\
&= R_{\text{eq}} \left(\frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \frac{\Delta V}{R_3} \right) \\
1 &= R_{\text{eq}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\
\frac{1}{R_{\text{eq}}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}
\end{aligned}
$$

Exercice

Soit R_s la résistance équivalente à trois Pikachus en série et R_p la résistance équivalent à trois Pikachus en parallèle. On suppose que tous les Pikachus ont la même résistance.



http://i.imgur.com/4fPjx.jpg

Quelle est la valeur du rapport $\frac{R_s}{R_p}$?

1. 9
2. 3
3. 1

4. 1/3
5. 1/9

7.5 Circuits à plusieurs mailles

Tremblay §6.8
Lafrance §7.6

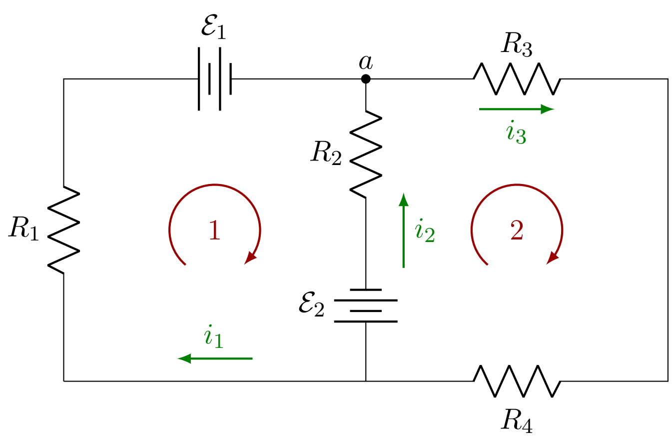
Objectif

1. L'étudiant pourra calculer le courant et la tension dans différent circuits.

Exemple

Diapo

Considérons le circuit suivant dans lequel $\mathcal{E}_1 = 12\,\mathrm{V}$, $\mathcal{E}_2 = 9\,\mathrm{V}$, $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 200\,\Omega$ et $R_4 = 300\,\Omega$. On cherche le courant dans chaque branche du circuit.



$$
\begin{aligned}
\text{Maille 1 :} & -R_1 i_1 - \mathcal{E}_1 + R_2 i_2 + \mathcal{E}_2 = 0 \\
\text{Maille 2 :} & -\mathcal{E}_2 - R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_3 = 0 \\
\text{Nœud } a : & \; i_1 + i_2 - i_3 = 0
\end{aligned}
$$

Pour simplifier les calculs, on peut récrire ces équations avec les valeurs numériques qu'on connaît.

$$\begin{aligned} \text{Maille 1 :} -100\,\Omega\cdot i_1 - 12\,\mathrm{V} + 2000\,\Omega\cdot i_2 + 9\,\mathrm{V} &= 0 \\ -100\,\Omega\cdot i_1 + 2000\,\Omega\cdot i_2 - 3\,\mathrm{V} &= 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} \text{Maille 2 :} -9\,\mathrm{V} - 2000\,\Omega\cdot i_2 - 200\,\Omega\cdot i_3 - 300\,\Omega\cdot i_3 &= 0 \\ -9\,\mathrm{V} - 2000\,\Omega\cdot i_2 - 500\,\Omega\cdot i_3 &= 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\text{Nœud } a : i_1 + i_2 - i_3 = 0 \tag{7.5}$$

De l'équation 7.3, on a

$$i_1 = \frac{2000\,\Omega\cdot i_2 - 3\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 20i_2 - 30\,\mathrm{mA}$$

De l'équation 7.4, on a

$$i_3 = \frac{-9\,\mathrm{V} - 2000\,\Omega\cdot i_2}{500\,\Omega} = -18\,\mathrm{mA} - 4i_2$$

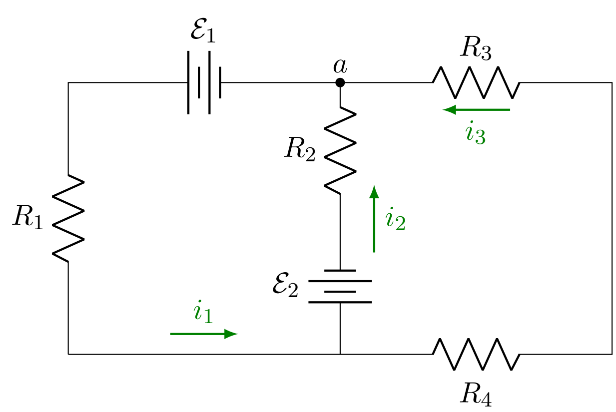
En remplaçant ces deux équations dans l'éqation 7.5 on obtient

$$\begin{aligned} 20i_2 - 30\,\mathrm{mA} + i_2 - (-18\,\mathrm{mA} - 4i_2) &= 0 \\ 25i_2 - 12\,\mathrm{mA} &= 0 \\ i_2 &= 0{,}48\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

D'où on tire que $i_1 = -20{,}4\,\mathrm{mA}$ et $i_3 = -19{,}92\,\mathrm{mA}$. On conclut donc que i_1 et i_2 étaient mal orientés sur le schéma. On a donc des courants

$$\begin{aligned} i_1 &= 20{,}4\,\mathrm{mA} \\ i_2 &= 0{,}48\,\mathrm{mA} \\ i_3 &= 19{,}92\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

orientés tel qu'illustré ci-dessous.



7.6 Charge et décharge d'un condensateur

Objectif

Tremblay §7.6
Lafrance §7.7

1. L'étudiant comprendra comment le courant fluctue lorsqu'on charge ou qu'on décharge un condensateur.

Démonstration

On prend deux résistances ($200\,\Omega$ et $1000\,\Omega$) et deux condensateurs ($500\,\mu\text{F}$ et $1000\,\mu\text{F}$). On montre que le temps de charge et de décharge est proportionnel à la résistance et à la capacité.

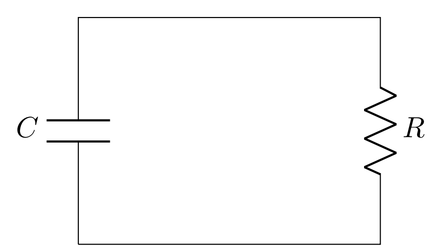
Raisonnement intuitif

Capacité plus élevée $\implies$ plus de charges (différence de potentiel identique au départ) donc courant pendant un plus long moment.

Résistance plus élevée $\implies$ courant plus faible donc plus long pour que toutes les charges passent.

7.6.1 Décharge d'un condensateur

Appliquer la loi des mailles (conservation de l'énergie) au circuit suivant pour déterminer le lien entre le courant et le temps.



$$\begin{aligned}
-RI + \frac{Q}{C} &= 0\\
-R\left|\frac{dQ}{dt}\right| + \frac{Q}{C} &= 0\\
R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0
\end{aligned}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut résoudre par séparation de variables.

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{RC}\\ \frac{dQ}{Q} &= \frac{-dt}{RC}\\ \ln|Q| &= \frac{-t}{RC} + k\end{aligned}$$

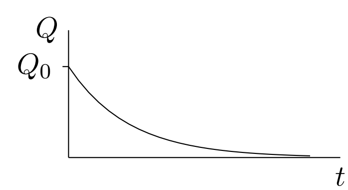
On sait que Q est la charge sur la plaque positive donc $|Q| = Q$. À $t = 0$, la charge est la charge initiale Q_0. On peut utiliser cette condition initiale pour trouver la valeur de la constante d'intégration.

$$\ln Q_0 = k$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln Q - \ln Q_0 &= \frac{-t}{RC}\\ \ln\frac{Q}{Q_0} &= \frac{-t}{RC}\\ \frac{Q}{Q_0} &= e^{-t/RC}\\ Q(t) &= Q_0 e^{-t/RC}\end{aligned}$$

Au départ, la charge décroit rapidement car la différence de potentiel est élevée donc les charges veulent aller vers l'autre plaque. Plus la différence de potentiel diminue, moins les charges sont « motivées » à aller vers l'autre plaque donc la charge diminue de moins en moins rapidement.



Quelle est la limite de validité de ce modèle ?

Si la charge est trop petite, on se heurte à la quantification de la charge. Notre modèle est correct tant que la charge est assez grande pour qu'on puisse la considérer comme continue.

Demi-vie et constante de temps

Combien de temps faut-il pour décharger le condensateur jusqu'à ce que sa charge soit la moitiée de la charge initiale ?

$$
\begin{aligned}
Q(t_{1/2}) = \frac{Q_0}{2} &= Q_0 e^{-t_{1/2}/RC} \\
\frac{1}{2} &= e^{-t_{1/2}/RC} \\
\frac{-t_{1/2}}{RC} &= \ln 2 \\
t_{1/2} = RC \ln 2 &
\end{aligned}
$$

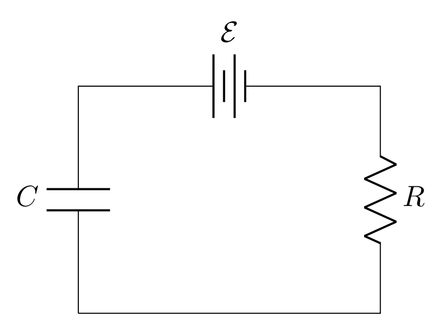
C'est le temps de demi-vie.

Quelles sont les unités de RC ?

$\tau = RC$ est la constante de temps pour le circuit RC. De combien a diminué la charge lorsque $t = RC$?

7.6.2 Charge d'un condensateur

Essayez de déterminer l'expression pour la charge en fonction du temps sur un condensateur qu'on charge.



On applique la loi des mailles

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} - RI - \frac{Q}{C} &= 0 \\
\mathcal{E} - R\left|\frac{dQ}{dt}\right| - \frac{Q}{C} &= 0 \\
\mathcal{E} - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} &= 0 \\
\frac{dQ}{dt} &= \frac{C\mathcal{E} - Q}{RC} \\
\frac{dQ}{C\mathcal{E} - Q} &= \frac{dt}{RC} \\
-\ln|C\mathcal{E} - Q| &= \frac{t}{RC} + k \\
\ln|C\mathcal{E} - Q| &= \frac{-t}{RC} - k
\end{aligned}$$

$C\mathcal{E}$ est la charge maximale que le condensateur peut supporter, Q_m.

$$\ln(Q_m - Q) = \frac{-t}{RC} - k$$

À $t = 0$, $Q = 0$, donc

$$\begin{aligned}
\ln Q_m &= -k \\
\ln \frac{Q_m - Q}{Q_m} &= \frac{-t}{RC} \\
1 - \frac{Q}{Q_m} &= e^{-t/RC} \\
Q &= Q_m\left(1 - e^{-t/RC}\right)
\end{aligned}$$

Défibrillateur

Un défibrillateur cardiaque est composé d'une source de tension dont la fém est 2500 V et d'un condensateur de 32 µF. Pour charger le condensateur, on le place en série avec une résistance de 10 kΩ.

Quel est le temps requis pour que le condensateur atteigne 95 % de sa charge maximale ?

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \\
e^{-t/RC} &= 1 - \frac{\Delta V}{\mathcal{E}} \\
\frac{-t}{RC} &= \ln\left(1 - \frac{\Delta V}{\mathcal{E}}\right) \\
t &= -RC\ln\left(1 - \frac{\Delta V}{\mathcal{E}}\right) \\
&= -RC\ln(1 - 0{,}95) \\
&= 0{,}9586\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Maintenant que le condensateur est chargé, on peut utiliser le défibrillateur. On connecte le condensateur en série avec le cœur et le condensateur se décharge à travers ce dernier. La décharge dans le cœur prend 5 ms et est complète lorsqu'il ne reste que 10 % des charges initiales sur le condensateur. Quelle est la résistance du thorax ?

Quel était le courant dans le cœur 1 ms après le début de la décharge ?

Quelle est l'énergie qui est fournie par le condensateur au cœur ?

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \Delta V_0 e^{-t/R_tC} \\
e^{-t/R_tC} &= \frac{\Delta V}{\Delta V_0} \\
\frac{-t}{R_tC} &= \ln\left(\frac{\Delta V}{\Delta V_0}\right) \\
R_t &= -\frac{t}{C\ln(0{,}1)} \\
&= 67{,}86\,\Omega
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 e^{-t/R_t C} \\
&= \frac{\Delta V_0}{R_t} e^{-t/R_t C} \\
&= 22{,}08\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} C(\Delta V_0^2 - 0{,}1 \Delta V_0^2) \\
&= 81{,}23\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

8 Champ magnétique

Objectif

1. L'étudiant saura comment interagissent des pôles magnétiques à proximité.
2. L'étudiant pourra appliquer la loi de Biot-Savart au calcul du champ magnétique produit par un fil infini.

8.1 Rappels sur les aimants

Tremblay §8.1
Lafrance §8.1

Un aimant a un pôle nord et un pôle sud. Le pôle nord est attiré vers le pôle nord géographique. Le pôle sud de l'aimant est attiré vers le pôle sud géographique.

Si on place deux aimants à proximité, les pôles de même type se repoussent, les pôles opposés s'attirent. Par conséquent, le nord géographique est un pôle sud magnétique.

Un aimant peut attirer certains matériaux non aimantés. C'est semblable à ce qu'on observait entre une tige chargée et un matériau neutre.

Si on coupe un aimant en deux, chaque morceau possède un pôle nord et un pôle sud. Il est impossible d'isoler un pôle. Autrement dit, il n'existe pas (selon nos connaissances actuelles) de monopôles magnétiques.

Les aimants sont entourés d'un champ magnétique.

Le champ magnétique se mesure en tesla (T) ou en gauss ($1\,\mathrm{G} = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}$). Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de $0{,}5\,\mathrm{G}$. Le champ magnétique produit par une machine d'imagerie par résonance magnétique est de l'ordre de $2\,\mathrm{T}$.

8.1.1 Lignes de champ magnétique

Comme pour le champ électrique, on peut définir des lignes de champ magnétique. Elles possèdent les propriétés suivantes :

- champ magnétique tangent aux lignes de champ
- grandeur du champ magnétique proportionnel à la densité de lignes de champ

— à l'extérieur d'un aimant, les lignes de champ vont du pôle nord vers le pôle sud.

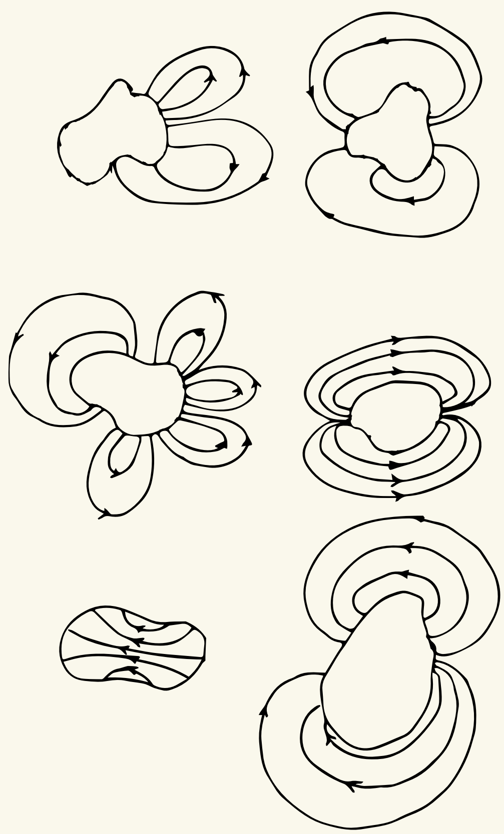
Puisqu'il n'y a pas de monopôle magnétique, les lignes de champ forment toujours des courbes fermées.

Question

Quelle est l'orientation du champ magnétique à l'intérieur d'un aimant ?

Exercice

Pour chacune des situations suivantes, déterminer si les deux objets s'attirent, se repoussent, ou n'exercent aucune force l'un sur l'autre. (Note : les lignes de champ ne sont tracées que partiellement.)



8.2 Source des champs magnétiques

Objectif

Lafrance §8.2

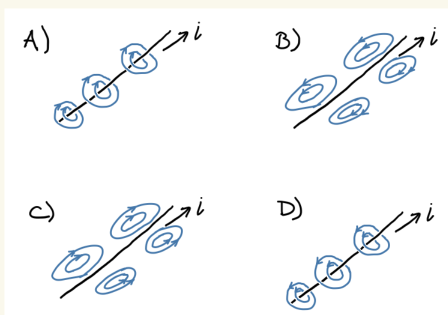
1. L'étudiant pourra appliquer la loi de Biot-Savart au calcul du champ magnétique produit par un fil infini.

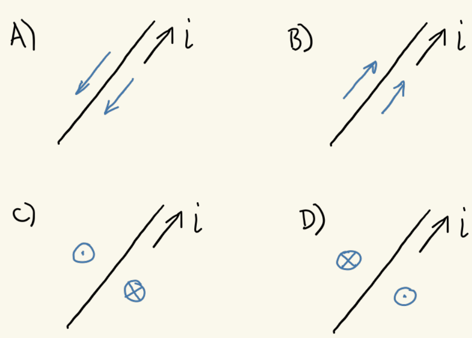
Démo avec un fil traversé d'un courant et une boussole. Montrer que la boussole pointe toujours dans une direction tangente à un cercle centré sur le fil.

La source des champs magnétiques est le courant.

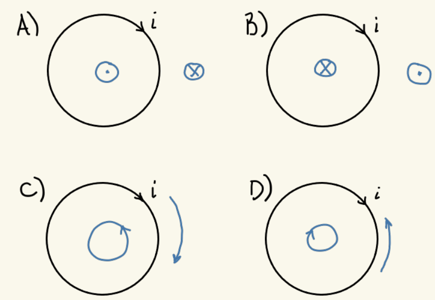
Les lignes de champ magnétique autour d'un long fil sont circulaire, centrées sur le fil. L'orientation est obtenue à partir de la règle de la main droite.

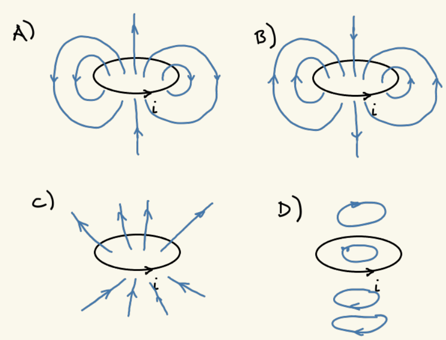
Quelle image illustre correctement le champ magnétique produit par le courant dans le fil ?





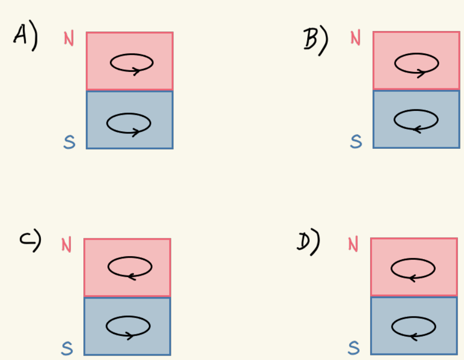
Quelle image illustre correctement le champ magnétique produit par le courant dans la boucle ?





Champ magnétique d'un aimant

Quelle image illustre correctement les petites boucles de courant qui génèrent le champ d'un aimant ?

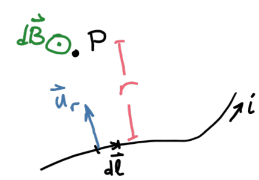


Loi de Biot-Savart

La loi de Biot-Savart est une formulation de ce qu'on vient d'observer.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ va de la source du champ magnétique vers le point où le champ magnétique est calculé.



La constante μ_0 s'appelle la **perméabilité du vide** (ou constante magnétique) et vaut

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}$$

Le champ magnétique satisfait le principe de superposition, c'est-à-dire que le champ magnétique en un point est la somme vectorielle des champs produits par tous les courants à proximité.

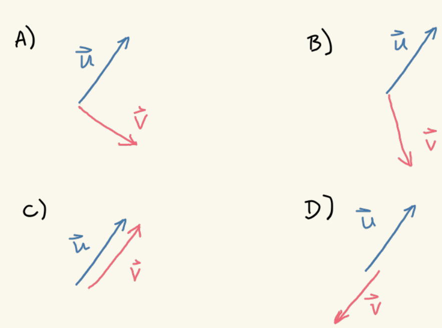
Intermède mathématique : le produit vectoriel

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur de grandeur

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = uv \sin\theta$$

orienté à 90° de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le sens donné par la règle de la main droite.

Classer les situations suivantes en ordre croissant de la grandeur du produit $|\vec{u} \times \vec{v}|$.



Algébriquement, on peut calculer le produit vectoriel de $\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$ et $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ comme suit

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\,\vec{\imath} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\vec{\jmath} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\vec{k}$$

Une approche complètement équivalente est de calculer le déterminant

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculer le produit vectoriel du vecteur $\vec{u} = 3\vec{\imath} + -2\vec{\jmath} + 1\vec{k}$ et du vecteur $\vec{v}$ dans le plan xy, de longueur 2 et qui fait un angle de 30° avec l'axe des x positifs.

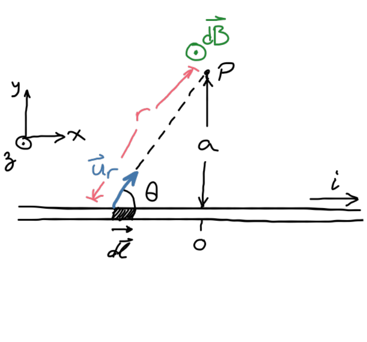
On peut trouver les composantes de $\vec{v}$ avec un peu de trigonométrie : $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k}$. Ensuite, il suffit de calculer le produit

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath} + (3 + 2\sqrt{3})\vec{k} \end{aligned}$$

Champ magnétique d'un fil infini

Calculons le champ magnétique produit par un long fil rectiligne portant un courant i, à une distance a du centre du fil.

Par la loi de Biot-Savart,



$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta \vec{k}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx a \vec{k}}{r^3} \end{aligned}$$

Par le principe de superposition, le champ total est obtenu en additionnant les champs produits par tous les petits morceaux de fil :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int_{\text{fil}} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx a \vec{k}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \vec{k} \int_{\text{fil}} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

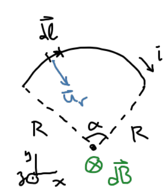
Pour couvrir le fil au complet, on intègre de $x = -\infty$ à $x = +\infty$.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \vec{k} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \vec{k} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k}\end{aligned}$$

Champ magnétique d'un arc de cercle

Calculons le champ magnétique d'un fil en forme d'arc de cercle de rayon R sous-tendant un angle α et portant un courant i, au centre de l'arc de cercle.

Tous les petits morceaux du fil sont à la même distance du centre puisque c'est un arc de cercle. L'angle entre $d\vec{l}$ et $\vec{u}_r$ est toujours de 90° parce que c'est un arc de cercle. Par la loi de Biot-Savart,



$$\begin{aligned}d\vec{B} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta(-\vec{k})}{R^2} \\ &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \vec{k} dl\end{aligned}$$

Par le principe de superposition, le champ total est obtenu en additionnant les champs produits par tous les petits morceaux de fil :

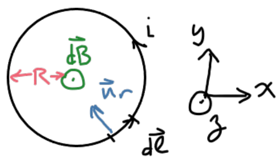
$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \int_{\text{fil}} -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{k}dl \\
&= -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{k}\int_{\text{fil}} dl \\
&= -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{k}R\alpha \\
&= -\frac{\mu_0 i\alpha}{4\pi R}\vec{k}
\end{aligned}
$$

On a intégré pour couvrir tout le fil, donc on obtient simplement longueur totale du bout de fil.

Machine d'imagerie par résonance magnétique

Aarnink, R. and Overweg, J. Magnetic Resonance Imaging a success story for superconductivity. Europhysics News, 43 4 (2012) 26-29. DOI : https://doi.org/10.1051/epn/2012404

Une machine d'imagerie par résonance magnétique permet de produire des images de l'intérieur du corps humain sans utiliser de technique invasive ni de rayonnement ionisant. Une machine typique produit un champ magnétique de 1,50 T au centre d'une bobine fait d'un supraconducteur (typiquement du nickel-titanium ou du nickel-étain). Si la bobine est faite de 10 000 tours de fil et a un rayon de 50 cm, quel est le courant qui doit circuler dans le fil ?



Calculons le champ magnétique d'une boucle de fil.

Tous les petits morceaux du fil sont à la même distance du centre puisque c'est un cercle. L'angle entre $d\vec{l}$ et $\vec{u}_r$ est toujours de 90° parce que c'est un cercle. Par la loi de Biot-Savart,

$$
\begin{aligned}
d\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{k}dl
\end{aligned}
$$

Par le principe de superposition, le champ total est obtenu en additionnant les champs produits par tous les petits morceaux de fil :

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1 &= \int_{\text{boucle}} \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{k}dl \\
&= \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{k}\int_{\text{fil}} dl \\
&= \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{k}2\pi R \\
&= \frac{\mu_0 i}{2R}\vec{k}
\end{aligned}$$

On a intégré pour couvrir tout le fil, donc on obtient simplement longueur totale de la boucle. Chaque boucle génère un champ identique, donc le champ total, par le principe de superposition, est

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= N\vec{B}_1 \\
&= \frac{\mu_0 i N}{2R}\vec{k}
\end{aligned}$$

Le champ total est connu, on cherche le courant donc

$$\begin{aligned}
i &= \frac{2RB}{\mu_0 N} \\
&= \frac{2 \cdot 50\,\text{cm} \cdot 1{,}5\,\text{T}}{4\pi \times 10^{-7} \cdot 10\,000} \\
&= 119{,}4\,\text{A}
\end{aligned}$$

Si on utilisait du fil de cuivre de calibre 12 AWG ($4\,\text{mm}^2$), la résistance du fil serait de

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\rho \cdot 2\pi R N}{A} \\
&= 131{,}9\,\Omega
\end{aligned}$$

et la puissance dissipée dans le fil serait de

$$\begin{aligned}
P &= Ri^2 \\
&= 1880\,\text{kW}
\end{aligned}$$

C'est l'équivalent d'environ 450 cuisinières électriques qui fonctionnent à plein régime ! De quoi faire des frites bien croustillantes !

8.3 Champ magnétique d'un solénoïde

Lafrance §8.6

Un solénoïde idéal est une succession de boucles de courant adjacentes formées en enroulant un long fil autour d'un cylindre. On considère que le solénoïde a une longueur infinie. Le champ magnétique peut être obtenu en appliquant le principe de superposition pour additionner les champs produits par les boucles individuelles. Le résultat est que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul et le champ magnétique à l'intérieur est uniforme et de grandeur

$$B = \mu_0 i \frac{N}{L}$$

où N/L est le nombre de tours par unité de longueur. La direction du champ magnétique est obtenue en enroulant les doigts de la main droite dans la direction du courant. Le pouce indique alors la direction du champ magnétique.

Le réacteur à fusion nucléaire ITER est constitué d'une cavité toroïdale dans laquelle un plasma à haute température est confiné grâce à un champ magnétique de 5,3 T. Le champ magnétique est produit par un solénoïde toroïdal (un solénoïde dont les extrémités sont reliées ensembles). Le tore a un rayon d'environ 6,5 m et les spires ont un rayon d'environ 6,2 m. Le courant qui circule dans le câble est de 68 kA. Quelle est la longueur de câble totale utilisée dans le solénoïde ?

Le nombre de ligne de champ par unité de longueur peut être obtenu par

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 i n \\ n &= \frac{B}{\mu_0 i} \\ &= 62{,}02\,\mathrm{m}^{-1} \end{aligned}$$

La longueur du solénoïde est

$$\begin{aligned} L &= 2\pi R \\ &= 40{,}84\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

où $R = 6{,}5\,\mathrm{m}$. Le nombre total de tour est donc

$$\begin{aligned} N &= nL \\ &= \frac{2\pi RB}{\mu_0 i} \\ &= 2533 \end{aligned}$$

Chaque tour de câble a une longueur de $2\pi r$ où $r = 6{,}2\,\mathrm{m}$. La longueur totale de câble est donc

$$\begin{aligned} d &= N \cdot 2\pi r \\ &= \frac{4\pi^2 rRB}{\mu_0 i} \\ &= 98{,}68\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

9 Force magnétique

Objectif

1. L'étudiant connaîtra l'expression de la force magnétique sur une particule chargée.
2. L'étudiant pourra analyser un mouvement circulaire.
3. L'étudiant comprendra le fonctionnement du sélecteur de vitesse, du spectromètre de masse.

9.1 Force magnétique sur une charge ponctuelle

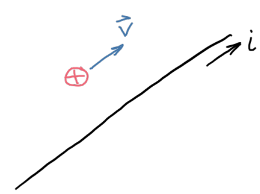
La force magnétique est proportionnelle à la charge, à la vitesse et au champ magnétique. De plus, elle est perpendiculaire à la fois au champ magnétique et à la vitesse.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Lafrance §9.1, 9.2
Tremblay §8.3, 8.4

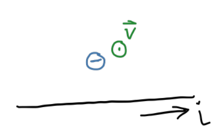
Un proton a une vitesse parallèle à un long fil parcouru d'un courant i. La vitesse du proton est dans la même direction que le courant. Le proton

1. se rapprochera du fil
2. s'éloignera du fil
3. continuera son chemin en ligne droite



Un électron a une vitesse perpendiculaire à un long fil parcouru d'un courant i. La force sur l'électron est

1. vers le fil
2. parallèle au fil
3. nulle



4. pointe en s'éloignant du fil

Exemple - Mouvement circulaire

On envoie des particules avec une vitesse horizontale de $3{,}52 \times 10^5$ m/s dans une région où existe un champ magnétique uniforme de 1 G vers le bas. On observe qu'à leur arrivée dans le champ magnétique, les particules tournent dans le sens horaire lorsqu'on les regarde du dessus. Le rayon de leur trajectoire est de 2 cm.

1. Déterminer le signe de la charge de ces particules.
2. Déterminer le rapport q/m pour ces particules.
3. Déterminer la fréquence de leur mouvement.

Signe est négatif car $\vec{v} \times \vec{B}$ pointe dans le sens anti-horaire donc la charge doit être négative.

La force qui agit sur ces particules est

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ F &= |q|\, vB \end{aligned}$$

Par la deuxième loi de Newton,

$$\begin{aligned} F &= \frac{mv^2}{R} \\ &= |q|\, vB \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{|q|}{m} &= \frac{v}{RB} \\ &= 1{,}76 \times 10^{11}\ \mathrm{C/kg} \end{aligned}$$

(Ce sont des électrons !)

Pour déterminer la fréquence, on veut savoir combien de tours sont effectués chaque seconde.

$$\begin{aligned} f &= \frac{v}{2\pi R} \\ &= 2{,}80 \times 10^6\ \mathrm{Hz} = 2{,}80\ \mathrm{MHz} \end{aligned}$$

Force de Lorentz

Si une particule chargée est dans une région où il y a à la fois un champ magnétique et un champ électrique, alors la force totale sur la particule est la somme de la force électrique et de la force magnétique

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

Exemple - Sélecteur de vitesse

Des particules α sont envoyées dans une région où se trouvent un champ électrique uniforme de 236 V/m et un champ magnétique uniforme perpendiculaire de 155 mT. Quelle est l'énergie cinétique des particules α qui continuent leur trajectoire en ligne droite ?

La force est

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \\
&= 0 \\
\vec{v} \times \vec{B} &= -\vec{E} \\
v &= \frac{E}{B \sin\theta} \\
v &= 1522{,}58\,\mathrm{m/s} \\
K &= \frac{1}{2} \times 6{,}6465 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}(1522{,}58\,\mathrm{m/s})^2 \\
&= 48{,}1\,\mathrm{meV}
\end{aligned}$$

9.2 Force magnétique sur les fils

Si on a un fil parcouru d'un courant dans un champ magnétique, le fil subira une force. En effet, les électrons se déplacent parce qu'il y a un courant. Leur vitesse est la vitesse de dérive donc la force sur les charges mobiles est Lafrance §9.5

$$\vec{F}_1 = q\vec{v} \times \vec{B}$$

et la force totale est la somme de toutes les forces sur les porteurs de charge soit

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \sum \vec{F}_1 \\
&= \sum q\vec{v} \times \vec{B}
\end{aligned}$$

Toutes les charges se déplacent à la même vitesse et se trouvent dans le même champ magnétique donc on peut mettre en évidence le produit vectoriel

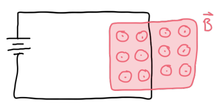
$$\vec{F} = \left(\sum q\right) \vec{v} \times \vec{B}$$

La quantité entre parenthèse est la charge totale qui se déplace qu'on peut aussi écrire comme le produit du volume du fil $A\ell$, de la densité volumique de charge n et de la charge d'un porteur de charge

$$\vec{F} = nA\ell q\vec{v} \times \vec{B}$$

On se rappelle que le courant est définit comme $i = nAqv$ donc, en définissant le vecteur $\vec{\ell}$ comme un vecteur de longueur ℓ qui pointe dans la direction du courant,

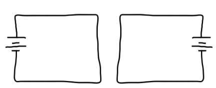
$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$$



Une section de fil de 8 cm parcouru d'un courant de 10 A se trouve dans un champ magnétique uniforme de 5 T. Quelle est la force sur le fil ?

La force est vers la gauche (RMD) et de grandeur

$$\begin{aligned} F &= ilB\sin 90° \\ &= ilB \\ &= 4\,\mathrm{N} \end{aligned}$$



Une section de fil de 8 cm parcouru d'un courant de 10 A se trouve à proximité d'une section de fil parallèle de même longueur parcouru d'un courant de 5 A. Les deux fils sont séparés d'une distance de 2 cm.

1. Quelle est la force sur le fil de gauche ?
2. Quelle est la force sur le fil de droite ?

La force est vers la droite (RMD) et de grandeur

$$\begin{aligned} F &= i_1 l B_2 \sin 90° \\ &= i_1 l B_2 \\ &= i_1 l \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \\ &= 4 \times 10^{-5}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

La force sur le fil de droite est de même grandeur et vers la gauche, par la troisième loi de Newton.

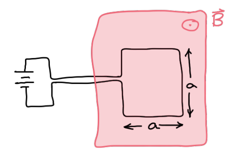
9.2.1 Moteur simple

Lafrance §9.6

Un moteur est simplement une boucle (ou une bobine) de fil qui se trouve dans un champ magnétique (produit par un aimant permanent ou un électroaimant). Le fil est parcouru d'un courant dont la direction est changée à chaque demi-tour grâce à un petit tour de passe passe mécanique qu'on appelle un commutateur. L'idée est d'exercer un moment de force sur la boucle grâce au champ magnétique.

Déterminer la force magnétique sur la boucle suivante.

1. iaB
2. $4iaB$
3. ia^2B
4. 0

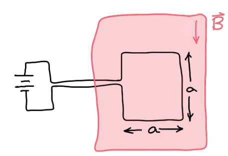


Est-ce que la boucle tournera ?

1. Oui, la partie du haut s'approchera de nous
2. Oui, la partie du haut s'éloignera de nous
3. Oui, la partie de droite s'approchera de nous
4. Non

Déterminer la force magnétique sur la boucle suivante.

1. iaB
2. $4iaB$
3. ia^2B
4. 0



Est-ce que la boucle tournera ?

1. Oui, la partie du haut s'approchera de nous
2. Oui, la partie du haut s'éloignera de nous
3. Oui, la partie de droite s'approchera de nous
4. Non

10 Induction électromagnétique

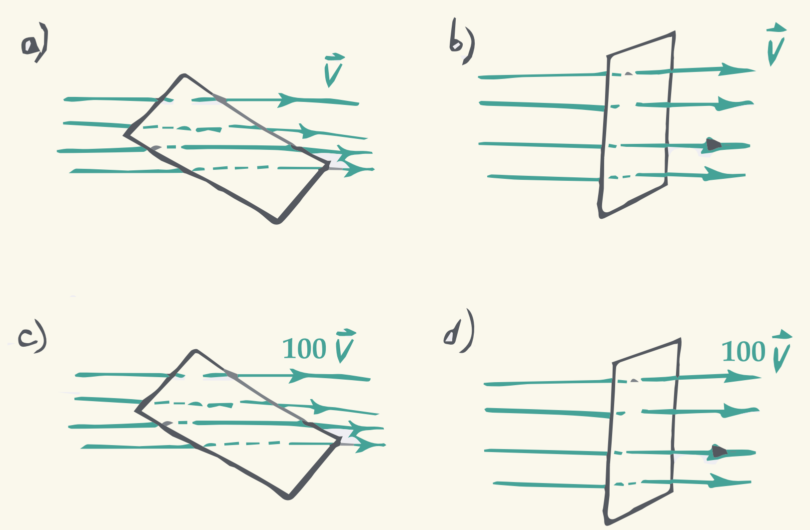
Objectif

1. L'étudiant connaîtra le concept de flux magnétique.
2. L'étudiant connaîtra la loi de Lenz-Faraday.

10.1 Flux magnétique

Le flux magnétique Φ_B est une mesure du nombre de lignes de champ qui traversent une surface. Pour aider à comprendre, il est utile de faire une analogie avec un fluide. Lafrance §10.2

Classez les situations suivantes en ordre croissant de la quantité de liquide qui passe à travers le cadre.



Définition du flux magnétique

On veut donc que le flux soit proportionnel à la composante du champ magnétique perpendiculaire à la surface et à l'aire. Donc

$$\Phi_B = BA\cos\theta$$

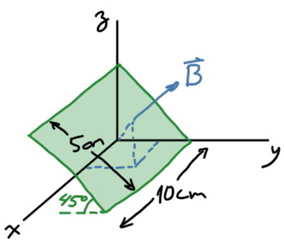
Si on définit $\vec{A}$ comme un vecteur dont la longueur est l'aire de la surface et qui est perpendiculaire à la surface, alors

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Si le champ magnétique n'est pas uniforme ou la surface n'est pas plane, alors il faut considérer le flux à travers un petit morceau de surface puis intégrer sur la surface en entier.

$$\Phi_B = \int_{\text{surface}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Les unités du flux sont des tesla mètres carrés ou des weber (Wb).



Exercice flux magnétique

La boucle ci-contre est dans une région où se trouve un champ magnétique uniforme $\vec{B} = \left(1\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 1\vec{k}\right)$ G. Quel est le flux magnétique à travers la boucle ?

Le vecteur surface est $\vec{A} = \frac{ab}{\sqrt{2}}(\vec{\jmath} + \vec{k})$. Le flux est donc

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{ab}{\sqrt{2}}(1+1)\text{G} \\ &= 5\sqrt{2} \times 10^{-7}\text{Wb} \end{aligned}$$

10.2 Loi de Faraday

Lafrance §10.3, 10.4

Une observation que vous avez faite au laboratoire est qu'un champ magnétique variable induit une f.é.m. dans une boucle de fil conducteur. Faraday a découvert que la f.é.m. induite est proportionnelle au taux de variation du flux magnétique.

Loi de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Le signe positif de la fém correspond à la direction des doigts de la main droite lorsque le pouce est dans la direction du champ magnétique externe.

Dans le cas d'un champ uniforme et d'une boucle plate, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{d}{dt}\vec{B}\cdot\vec{A}\\ &= \frac{dB}{dt}A\cos\theta + B\frac{dA}{dt}\cos\theta + BA\frac{d\cos\theta}{dt}\\ &= \frac{dB}{dt}A\cos\theta + B\frac{dA}{dt}\cos\theta - BA\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

Donc on peut obtenir une fém induite en faisant varier soit la grandeur du champ, soit l'aire, soit l'orientation de la boucle dans l'espace.

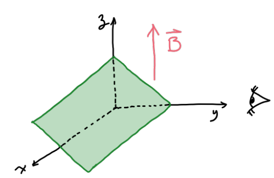
Le courant dans la boucle peut circuler dans deux directions différentes. Pour déterminer la direction, on utilise la loi de Lenz :

Loi de Lenz

Le courant induit dans la boucle circule de façon à générer un champ magnétique induit qui s'oppose à la variation de flux magnétique.

Exemple d'application de la loi de Lenz

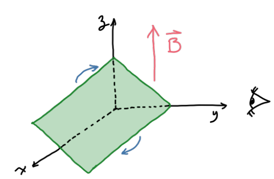
Une boucle de fil se trouve dans un champ magnétique uniforme tel qu'illustré sur le dessin ci-dessous.



La grandeur du champ magnétique augmente avec le temps. Quelle est la direction du courant induit dans la boucle ?

La grandeur du champ magnétique diminue avec le temps. Quelle est la direction du courant induit dans la boucle ?

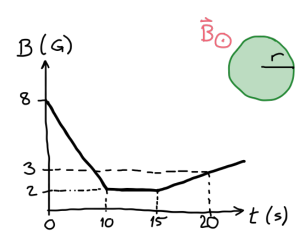
La boucle tourne dans le sens indiqué sur le dessin. Quelle est la direction du courant induit dans la boucle ?



1. sens horaire
2. sens anti-horaire
3. aucun courant induit

Loi de Faraday - Champ magnétique variable

Une bobine circulaire de 5 cm de rayon comportant 50 tours se trouve dans un champ magnétique uniforme dont la grandeur varie dans le temps tel qu'illustré dans le graphique ci-dessous.



Déterminez la f.é.m. induite et la direction du courant à

1. $t = 5\,\mathrm{s}$
2. $t = 11\,\mathrm{s}$
3. $t = 20\,\mathrm{s}$

Le flux est

$$\Phi_B = \pi r^2 BN$$

car le champ magnétique et le vecteur normal à la boucle sont dans la même direction. La f.é.m. est donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -\pi r^2 N \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

Puisque la grandeur du champ magnétique est linéaire par morceau, le taux de variation est simplement la pente du segment de droite approprié. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_5 &= -\pi r^2 N \frac{2\,\mathrm{G} - 8\,\mathrm{G}}{10\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} \\ &= 0{,}2356 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

Puisque le champ magnétique diminue, le flux diminue et le champ induit doit être dans la même direction que le champ externe et le courant est donc dans le sens anti-horaire par la RMD.

À $t = 11\,\mathrm{s}$, le champ magnétique ne varie pas, donc il n'y a pas de f.é.m. induite.

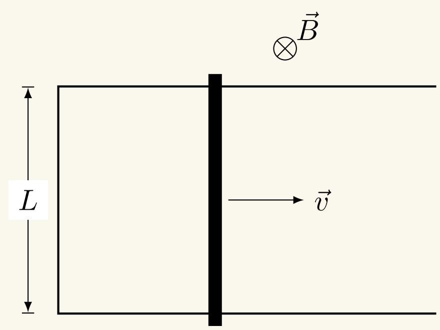
Enfin,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{20} &= -\pi r^2 N \frac{3\,\mathrm{G} - 2\,\mathrm{G}}{20\,\mathrm{s} - 15\,\mathrm{s}} \\ &= -0{,}078\,54 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

Puisque le champ magnétique externe augmente, le flux augmente et le champ induit doit être dans la direction opposée au champ externe. Le courant est donc dans le sens horaire par la RMD.

Générateur linéaire

Un cadre métallique fixe sert de support à une tige métallique mobile. La tige se déplace vers la droite à 20 cm/s et sa longueur est de 35 cm. Le champ magnétique externe est uniforme de 120 G. Si la résistance de la boucle est de 4 Ω, déterminer le courant induit dans la boucle.



Le flux magnétique dans la boucle change parce que l'aire change. Dans un intervalle de temps dt, l'aire change de

$$dA = Lvdt.$$

Autrement dit

$$\frac{dA}{dt} = Lv$$

Le flux magnétique est

$$|\Phi_B| = BA$$

donc le changement de flux est

$$\begin{aligned} \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| &= B\frac{dA}{dt} \\ &= BLv \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathcal{E} = BLv$$
$$I = \frac{BLv}{R}$$
$$= 0{,}210\,\mathrm{mA}$$

Puisque l'aire augmente, le flux augmente donc la fém induite doit produire un champ magnétique dans la direction opposée à celle du champ externe. Le courant circule donc dans le sens anti-horaire.

Générateur

Une boucle rectangulaire tourne à vitesse angulaire ω dans un champ magnétique externe $\vec{B}$. Un courant alternatif sera produit dans la boucle. La position angulaire de la boucle est donnée par

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Le flux magnétique est

$$\Phi_B = BA\cos(\theta_0 + \omega t)$$

donc

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BA\omega\sin(\theta_0 + \omega t)$$

Quelle est la tension efficace ?

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{BA\omega}{\sqrt{2}}$$