Planification du cours d'électricité et magnétisme

Loïc Séguin-Charbonneau

6 septembre 2021

v. 2.0

1 Charge électrique

1.1 Propriétés de la charge électrique

Objectif

Tremblay §1.1 à 1.6
Lafrance §1.1 et 1.2

1. L'étudiant saura qu'il existe deux types de charges électriques et comprendra quelles expériences permettent de le démontrer.
2. L'étudiant connaîtra le principes de conservation de la charge et saura l'appliquer pour résoudre des problèmes simples.
3. L'étudiant connaîtra le principe de quantification de la charge et pourra l'appliquer pour résoudre des problèmes simples.
4. L'étudiant comprendra la polarisation induite dans les isolants.

Matériel

1. Tige de plastique
2. Tige de verre
3. Tige métallique
4. Laine
5. Fourrure

10 minutes

Démonstration de l'existence de deux types de charges

1. Si on approche les deux tiges de plastique, rien ne se produit.
2. Si on frotte les deux tiges de plastique avec de la laine, elles se repoussent. Comme les deux tiges ont subi le même traitement, elles ont la même **charge**. Donc, **les charges identiques se repoussent**.
3. On répète avec les tiges de verre qu'on frotte avec la fourrure.
4. On frotte une tige de plastique et une tige de verre, elles s'attirent. Il semble donc que la charge de la tige de verre soit différente de celle de plastique et que **les charges opposées s'attirent**.

5. Si on approche la laine qui a chargé le plastique de la tige de verre, elles se repoussent. Par conséquent la tige de plastique a transféré ses charges à la laine qui acquiert donc une charge identique à celle de la tige de verre.
6. Si on approche un objet métallique non chargé de la tige de plastique chargée, on constate une attraction. Le métal se charge par **induction** et l'extrémité proche de la tige de plastique acquiert une charge opposée à celle du plastique.

Propriétés de la charge électrique

5 minutes

Il existe deux types de charges électriques
- la charge **positive** (celle du verre) ;
- la charge **négative** (celle du plastique).

Les objets possédant une charge électrique exercent une force les uns sur les autres :
- deux objets avec le même type de charge se repoussent ;
- deux objets avec des charges opposées s'attirent.

On notera souvent les charges électriques par des q : q, Q, q_1, q_2, ...

L'unité SI pour la charge est le **coulomb** (C). La **charge élémentaire** est la charge du proton et vaut

$$e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\text{C}.$$

Valeur exacte décidée le 16 novembre 2018, en application à partir du 20 mai 2019

L'électron a une charge de $-e$.

Au centre d'un atome se trouve un noyau dense contenant des protons chargés positivement et des neutrons sans charge électrique. Un nuage d'électrons chargés négativement entoure le noyau.

Lorsqu'on charge par frottement, ce sont les électrons qui sont arrachés d'un matériau et transféré à l'autre. Les protons sont « cachés » au centre des atomes.

Un objet **neutre** a autant de protons que d'électrons. La plupart des objets dans l'univers sont neutres.

5 minutes

Question

Un téléphone d'une marque connue a une batterie d'une capacité de 6556 C. Combien d'électrons peuvent être déplacés par cette batterie ?

Il suffit de diviser la charge totale que peut déplacer la batterie par la charge d'un seul électron

$$\frac{6556\,\mathrm{C}}{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C}} = 4{,}092\times10^{22} = 67{,}95\,\mathrm{mmol}$$

Principe de conservation de la charge

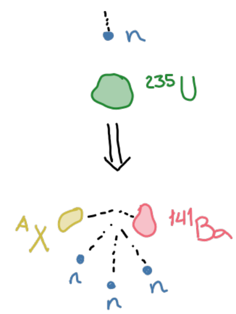
La charge électrique totale dans un système fermé est toujours la même.

10 minutes

Par exemple, la charge est conservée lors de la désintégration d'un neutron libre (temps de demi-vie d'environ 10,3 minutes) :

$$n \rightarrow p^{+} + e^{-} + \bar{\nu}_e.$$

5 minutes



Question

Dans un réacteur nucléaire typique, un neutron lent entre en collision avec un noyau d'uranium ce qui provoque la fission du noyau en deux noyaux plus petits :

$$\mathrm{n} + {}^{235}\mathrm{U} \longrightarrow 3\,\mathrm{n} + {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{A}\mathrm{X}$$

Quel est le noyau X ?

On détermine la charge au départ : le neutron a une charge nulle, l'uranium a 92 protons. La charge initiale est donc $92e$. Après la fission, on a trois neutrons qui ne contribuent pas à la charge, un noyau de barium qui a 56 protons et un noyaux mystère avec Z protons. La charge finale est donc $(Z+56)e$. Par le principe de conservation de la charge, la charge initiale et la charge finale doivent être égales d'où

$$\begin{aligned} 92e &= (Z+56)e \\ Z &= 36 \end{aligned}$$

Le noyau X est donc du krypton, Kr. Si on ajoute le principe de conservation du nombre de masse, on peut aussi déduire que la masse du krypton doit être de 92 : $^{\mathrm{A}}\mathrm{X}{=}^{92}\mathrm{Kr}$.

10 minutes

Question

Indiquez si chacune des réactions suivantes est possible.

1. $\mathrm{H}^+ + \mathrm{OH}^- \longrightarrow \mathrm{H_2O}$
2. $\pi^+ + p^+ \longrightarrow \Sigma^0 + K^+$
3. $^4_2\mathrm{He}^{2+} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + \mathrm{p}^+$

5 minutes

Quantification de la charge

La charge électrique ne peut prendre que des valeurs qui correspondent à des multiples entier de la charge élémentaire.

Par exemple, on peut avoir des charges de e, 10^8e, $-45e$, etc. On ne peut pas avoir une charge de $0.1e$, $-\frac{1}{2}e$ ou $3{,}51 \times 10^{-4}e$.

10 minutes

Question

Est-ce qu'un objet peut avoir les charges suivantes ?

1. $q_0 = 0{,}452 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
2. $q_1 = -2{,}050\,56 \times 10^{-17}\,\mathrm{C}$
3. $q_2 = 3{,}748\,68 \times 10^{-18}\,\mathrm{C}$
4. $q_3 = 4{,}00\,\mathrm{C}$

La charge q_0 est inférieure à la charge élémentaire, donc impossible. La charge q_1 est 128 fois la charge d'un électron, donc c'est possible. q_2 est $23.4e$, donc impossible. Finalement, la charge q_3 est tellement grande, qu'à moins qu'on puisse faire une mesure précise jusqu'à la 19e décimale, on peut, à toute fin pratique, considérer que cette charge est possible.

1.2 Isolants et conducteurs

10 minutes
Tremblay §1.7 et 1.8
Lafrance §1.3

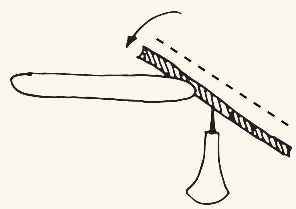
Lorsqu'on frotte une tige de verre ou de plastique, des électrons sont arrachés à un des matériaux et transférés sur l'autre. L'énergie pour arracher les électrons est fournies par la personne qui frotte. Nous avons vu qu'un objet métallique est attiré par une tige de plastique chargée. Dans un métal, des électrons sont libres de se déplacer (environ un électron par atome) ce qui leur permet de se réorganiser dans le matériau lorsqu'ils ressentent une force électrique externe. La tige métallique n'a pas été frottée mais elle attire néanmoins la tige de plastique chargée.

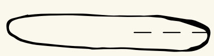
On dit qu'on a **induit** une redistribution de la charge dans un métal en approchant un objet chargé. Aucune charge n'est transférée entre les deux objets.

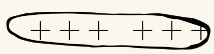
Question

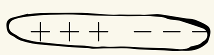
5 minutes

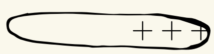
On induit une séparation de charge dans une tige métallique en approchant une tige de plastique chargée. Comment sont disposées les charges dans la tige métallique ?



1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

Un **conducteur** est un matériau dans lequel les charges peuvent se déplacer rapidement. Un **isolant** est un matériau dans lequel les charges ont beaucoup de difficulté à se déplacer.

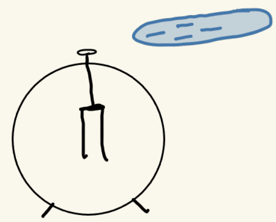
La différence entre les deux types est le **temps de relaxation**, c'est-à-dire le temps que des charges mettent à se déplacer jusqu'à leur position d'équilibre.

Exemple : cuivre 1×10^{-12} s, verre 2 s, polystyrène 1×10^{10} s.

5 minutes
Électroscope

Question

Que se passe-t-il si on touche la partie du haut avec une tige chargée négativement puis qu'on la retire ?



Une partie des électrons excédentaires sur la tige seront transférés à l'électroscope lors du contact. Par conséquent, l'électroscope aura une charge nette négative. Les deux feuillets de l'électroscope, avec des charges de même signe, se repousseront. Puisque les électrons n'ont nulle part où aller, ils demeureront sur l'électroscope et les feuillets demeureront écartés.

3 minutes

Objets conducteurs identiques en contact

Si deux objets conducteurs identiques sont mis en contact, les charges qu'ils portaient seront très rapidement réparties également entre les deux objets.

10 minutes

Question

Deux fourchettes métalliques identiques ont des charges Q et $-6Q$, respectivement. Les deux fourchettes sont mises en contact puis sont séparées. Quelles sont les charges sur chacune des fourchettes ?

La charge totale dans le système avant le contact est $Q + -6Q = -5Q$.

Par le principe de conservation de la charge, la charge totale après le contact sera aussi de $-5Q$.

Puisque les deux fourchettes sont des conducteurs, les charges (électrons) pourront se déplacer d'une à l'autre.

Puisque les fourchettes sont identiques la charge sur chacune d'elle après le contact doit être la même.

Par conséquent, elles ont chacun la moitié de la charge totale, soit $-2{,}5Q$.

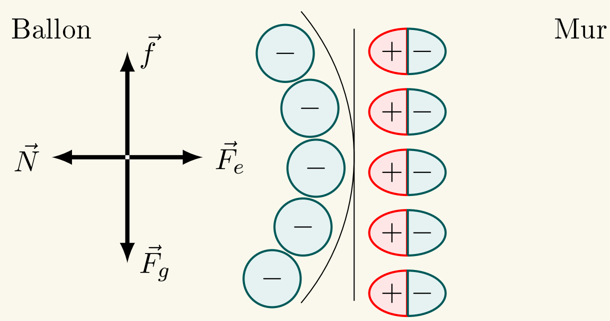
Polarisation dans les isolants

Comment un ballon qu'on frotte sur ses cheveux peut-il tenir au mur si le ballon et le mur sont des isolants ?

10 minutes
Ballon

Le ballons est chargé par frottement et acquiert une charge négative. Le mur est neutre et isolant, donc les électrons ne sont pas libres de se déplacer. Par contre, les atomes à proximité du ballon vont se réorganiser très légèrement : le nuage d'électron s'éloignera du ballon alors que le noyau s'en rapprochera. Les atomes seront **polarisés**. Puisque le ballon est plus près des charges positives que des charges négatives, il y a une attraction nette entre le ballon et le mur.

Le coefficient de frottement entre le mur et le ballon est 0,6, et la masse du ballon est de 2,9 g. Quel est le module de la force électrique entre le ballon et le mur ?



On suppose que le ballon est à l'équilibre, donc $F_e = N$ et $f = F_g$. Par conséquent, $f = mg$. Si on suppose que le frottement est le frottement statique maximum, autrement dit le ballon est sur le point de tomber, alors on a que $f = \mu_s N = \mu_s F_e$. Donc

$$F_e = \frac{mg}{\mu_s} = 47{,}37\,\mathrm{mN}$$

On peut aussi voir le même phénomène en attirant des morceaux de papier avec un bout de plastique chargé. Le bout de plastique chargé induit une polarisation dans le papier et le papier est attiré par le plastique.

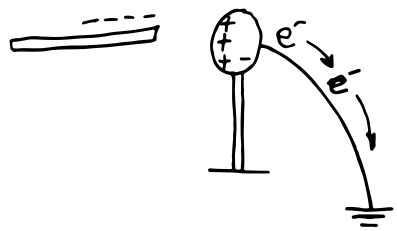
Vidéo

Le vidéo `polarisation-isolant-attraction.mov` montre un morceau de *spaghetti* frotté sur des cheveux (donc chargé négativement) qui attire des morceaux de pitas secs.

Charge par induction

5 minutes

Nous avons parlé de charge par frottement. Il est également possible de charger un conducteur par induction.



On approche une tige chargée négativement du conducteur, sans lui toucher. La présence de la tige chargée créera une séparation de charge dans le conducteur par induction. On relie le côté du conducteur le plus éloigné de la tige à la *terre*. C'est ce qu'on appelle une **mise à la terre**. Le surplus d'électrons qui s'étaient déplacés de ce côté parce qu'ils étaient repoussés par les électrons de la tige pourront aller à la terre. On déconnecte ensuite la mise à la terre, puis, on éloigne la tige chargée. Il reste une charge nette positive sur le conducteur.

1.3 Loi de Coulomb

Objectif Tremblay §1.9

1. L'étudiant comprendra la loi de Coulomb et comment cette loi capture toutes les observations faites précédemment au sujet des charges. Lafrance §1.4
2. L'étudiant pourra faire des calculs de forces électrostatiques.
3. L'étudiant comprendra le principe de superposition.

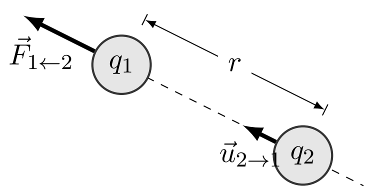
Observations clés

10 minutes

— charges opposées s'attirent
— charges de même signe se repoussent
— plus la charge est grande, plus la force est grande
— plus les charges sont éloignées, plus la force est petite

La loi de Coulomb capture tous ces éléments.

Considérons deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r.



On doit avoir

$$\begin{aligned} F_{1\leftarrow 2} &\propto |q_1|\,, \\ F_{1\leftarrow 2} &\propto |q_2|\,, \\ F_{1\leftarrow 2} &\propto \frac{1}{r^\gamma}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$F_{1\leftarrow 2} = \frac{k\,|q_1 q_2|}{r^\gamma}.$$

où k est une constante de proportionnalité. L'exposant peut être trouvé expérimentalement. C'est ce qu'à fait Charles Augustin de Coulomb. L'exposant est 2, soit le même que celui qui apparaît dans la loi de la gravitation newtonienne.

Pour spécifier l'orientation, nous utilisons un vecteur unitaire $\vec{u}_{2\rightarrow 1}$ qui pointe de la charge q_2 vers la charge q_1. Si les deux charges sont de même signe, la force est répulsive et la force sur q_1 est dans la même direction que $\vec{u}_{2\rightarrow 1}$. On note que $q_1 q_2$ est positif. Donc

Loi de Coulomb

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{u}_{2\rightarrow 1}$$

On peut facilement trouver les unités de k par analyse dimensionnelle. La valeur est déterminée expérimentalement :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$$

La constante de proportionalité k est reliée à une constante fondamentale de l'Univers qu'on appelle la **constante électrique** ou la **permittivité du vide** ϵ_0.

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$$

Principe de superposition

Si plusieurs charges $q_1, q_2, \ldots, q_N$ et agissent sur une charge Q, alors la force nette sur Q est la somme des forces exercées par chacune des charges

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$$

Vous vous tenez à 2 m de votre ami. Combien d'électrons devez vous lui transférer pour que la force électrique entre vous deux ait la même grandeur que votre poids ?

Votre poids a une grandeur mg. Si vous transférez n électrons à votre ami, votre charge devient ne et la charge de votre ami devient $-ne$. Par conséquent la grandeur de la force électrique est

$$F_e = \frac{kn^2e^2}{r^2}$$

On veut

$$\frac{kn^2e^2}{r^2} = mg$$
$$n = \sqrt{\frac{mgr^2}{ke^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{r}{e}$$

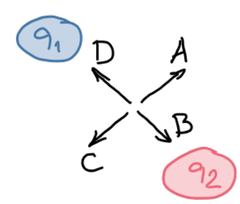
Supposons que votre masse est $m = 60\,\mathrm{kg}$. Alors

$$n = \sqrt{\frac{60\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{8{,}99\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}}}\frac{2\,\mathrm{m}}{1{,}602\times 10^{-19}\,\mathrm{C}}$$
$$= 3{,}193\times 10^{15}$$

C'est l'équivalent d'une charge de 0,5115 mC.

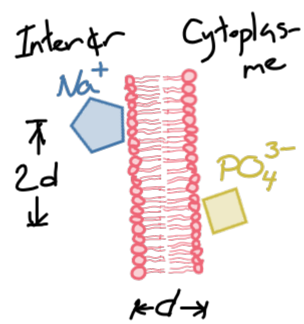
Question

On considère une charge négative q_1 et une charge positive q_2.
Dans quelle direction est la force de q_1 sur q_2, $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$?
Dans quelle direction est la force de q_2 sur q_1, $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$?
Dans quelle direction est le vecteur $\vec{u}_{1\to 2}$?
Dans quelle direction est le vecteur $\vec{u}_{2\to 1}$?



Exemple

Un ion Na^+ et un ion $PO_4{}^{3-}$ se trouvent de part et d'autre d'une membrane cellulaire. L'épaisseur de la membrane est de 5 nm et les deux ions sont décalés de 10 nm l'un par rapport à l'autre le long de la membrane. Quelle est la force exercée par le sodium sur le phosphate ?



On peut placer l'origine du système de coordonnées de telle sorte que la position du sodium soit $\vec{r}_{\mathrm{Na}} = 0\vec{\imath} + 2d\vec{\jmath}$ et la position du phosphate soit $\vec{r}_{\mathrm{PO}} = d\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$. Par la loi de Coulomb

$$\vec{F}_{\mathrm{PO}} = \frac{kq_{\mathrm{Na}}q_{\mathrm{PO}}}{r^2}\vec{u}_{\mathrm{Na}\to\mathrm{PO}}$$

On sait que $q_{\mathrm{Na}} = e$ et $q_{\mathrm{PO}} = -3e$, donc

$$\vec{F}_{\mathrm{PO}} = \frac{-3ke^2}{r^2}\vec{u}_{\mathrm{Na}\to\mathrm{PO}}$$

Le vecteur unitaire est

$$\begin{aligned}\vec{u}_{\mathrm{Na}\to\mathrm{PO}} &= \frac{\vec{r}_{\mathrm{PO}} - \vec{r}_{\mathrm{Na}}}{|\vec{r}_{\mathrm{PO}} - \vec{r}_{\mathrm{Na}}|} \\ &= \frac{d\vec{\imath} - 2d\vec{\jmath}}{r}\end{aligned}$$

Donc

$$\vec{F}_{\mathrm{PO}} = \frac{-3kde^2}{r^3}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right)$$

On peut trouver r simplement à l'aide du théorème de Pythagore

$$r = \sqrt{(2d)^2 + d^2} = \sqrt{5}d$$

Donc

$$\vec{F}_{\mathrm{PO}} = \frac{-3ke^2}{5^{3/2}d^2}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la valeur numérique

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{PO}} &= \frac{-3 \cdot 8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}\left(1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)^2}{5^{3/2}(5 \times 10^{-9}\,\mathrm{m})^2}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right) \\ &= -2{,}476 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\right)\end{aligned}$$

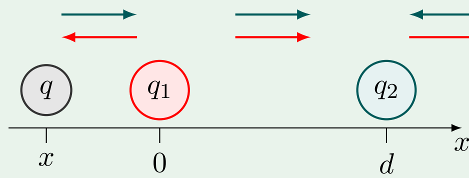
C'est une force toute petite, mais on parle de l'interaction entre deux atomes, donc on ne s'attend à rien d'énorme. De plus, puisque les deux ions ont des charges opposées, on s'attend à ce que la force soit attractive et c'est bien ce que le calcul donne.

20 minutes

Exercice

Deux charges immobiles $q = 4{,}00\,\mathrm{nC}$ et $Q = -6{,}00\,\mathrm{nC}$ sont situées à $5\,\mathrm{cm}$ l'une de l'autre. Où doit-on positionner une troisième charge de telle sorte qu'elle soit à l'équilibre ?

D'abord, on fait un schéma de la situation. Imaginons que la charge qu'on ajoute est positive. La direction de la force exercée par q_1 et q_2 dans différentes régions est indiquée sur la figure.



À gauche de q_1, les deux forces sont opposées et la plus grande charge en valeur absolue est plus éloignée. Il est possible que les deux forces s'annulent.

Entre q_1 et q_2, les deux forces sont dans la même direction : elles ne peuvent pas s'annuler.

À droite de q_2, les deux forces sont opposées et la plus grande charge en valeur absolue est plus proche. Il est impossible que les deux forces s'annulent.

On conclut donc que la position recherchée est pour une valeur x négative. La distance entre la nouvelle charge q et q_1 est donc $|x|$ alors que la distance entre q et q_2 est de $d - x$. On peut calculer le module de la force exercée par q_1 et q_2 sur q ainsi que les composantes.

$$F_1 = \frac{k\,|q_1 q|}{x^2} \qquad F_{1x} = -\frac{k q_1 q}{x^2}$$
$$F_2 = \frac{k\,|q_2 q|}{(d-x)^2} \qquad F_{2x} = -\frac{k q_2 q}{(d-x)^2}$$

La force nette sur q est nulle car on veut que cette particule soit à l'équilibre. Par le principe de superposition, la force nette sur q est

$$\begin{aligned}
F_x &= F_{1x} + F_{2x} \\
&= 0 \\
F_{1x} &= -F_{2x} \\
-\frac{kq_1q}{x^2} &= \frac{kq_2q}{(d-x)^2} \\
-\frac{q_1}{x^2} &= \frac{q_2}{(d-x)^2} \\
x^2q_2 + q_1(d-x)^2 &= 0 \\
x^2q_2 + q_1d^2 - 2q_1dx + q_1x^2 &= 0 \\
(q_1+q_2)x^2 - 2q_1dx + q_1d^2 &= 0 \\
x &= \frac{2q_1d \pm \sqrt{4q_1^2d^2 - 4(q_1+q_2)q_1d^2}}{2(q_1+q_2)}
\end{aligned}$$

Les deux réponses possibles sont $x = -22{,}25\,\mathrm{cm}$ et $x = 2{,}247\,\mathrm{cm}$. On sait que la particule doit être à gauche de q_1, donc la bonne solution est $x = -22{,}25\,\mathrm{cm}$.

1.4 Révision

- Deux types de charges (positive et négative).
- Charges de même signe se repoussent, de signe opposé s'attirent.
- Charge est conservée.
- Charge est quantifiée.
- Dans un conducteur, charges peuvent se déplacer, pas dans un isolant.
- Loi de Coulomb.
- Principe de superposition des forces.
- Trois façons de charger un objet :
  - Par frottement (fonctionne bien avec isolants)
  - Par contact (fonctionne bien avec les conducteurs)
  - Par induction (fonctionne avec les conducteurs seulement)

2 Champ électrique

2.1 La notion de champ

Objectif

Tremblay §2.1
Lafrance §2.1

1. L'étudiante comprendra ce qu'est un champ électrique.
2. Elle pourra calculer le champ électrique produit par un ensemble de charges ponctuelles en appliquant le principe de superposition.

5 minutes

Le concept d'action à distance est troublant. La loi de Coulomb suggère que si deux charges interagissent et que l'une des deux se déplace, l'autre subira les effets instantanément. Or, cela voudrait dire qu'il est possible de faire voyager de l'information plus vite que la vitesse de la lumière. De plus, des expériences minutieuses confirment qu'il y a un délai avant que la deuxième charge ne détecte un changement de la position de la première. Ce délai est de l'ordre de $1 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$ pour deux charges séparées d'environ $1\,\mathrm{m}$.

Il faut donc un intermédiaire entre les deux charges. Cet intermédiaire est le **champ électrique**. Un objet chargé génère autour de lui un champ électrique.

Analogie avec le champ gravitationnel

5 minutes

Selon la loi de la gravitation universelle de Newton

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

La partie Gm_1/r^2 ne dépend que de la source du champ gravitationnel et de la distance entre le centre de masse de cet objet et le point où on veut calculer la force. Par exemple, à la surface de la Terre on a

$$\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \equiv g$$

et on peut calculer la force sur un objet de masse m à la surface de la Terre avec

$$F_g = mg.$$

Pour la force électrique, c'est le même principe. À partir de la loi de Coulomb

$$\vec{F}_e = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

on reconnait qu'une partie de l'expression ne dépend que de la source et de la distance à laquelle on se trouve de cette source

$$\vec{E} = \frac{kq_1}{r^2}\vec{u}_r.$$

On peut calculer la force sur une particule chargée située à une distance r de q_1 en faisant simplement

$$\vec{F}_e = \vec{E}q_2.$$

Définition du champ électrique

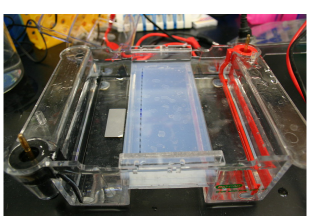
Le champ électrique en un point de l'espace, est la force par unité de charge que subirait une charge électrique située en ce point

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q}$$

Exercice

On place une charge de 8,00 nC à un endroit P. Elle subit une force de 24,0 µN vers la gauche.

— Quel est le champ électrique au point P ?
— Quel est le champ électrique au point P si on enlève la charge de 8,00 nC ?
— Quelle serait la force sur une particule de charge -2 mC placée au même endroit ?


PlaxcoLab (CC BY-2.0)

Électrophorèse sur gel

L'électrophorèse sur gel est une technique en biologie moléculaire pour séparer des grosses molécules (le plus souvent ADN ou protéines) selon leur poids moléculaire. L'ADN est naturellement chargée négativement ce qui fait en sorte que si on la place dans un champ électrique, elle subira une force. On peut utiliser cette force pour faire migrer les molécules dans un gel. Plus la molécule est petite, plus elle pourra se déplacer facilement dans le gel et elle ira plus vite qu'une plus grosse molécule.

On place des fragments d'ADN dans un appareil d'électrophorèse sur gel et on active un champ électrique de $500\,\mathrm{N/C}$. La densité de charge de l'ADN est environ $-942\,\mathrm{pC/m}$. La densité de masse est de $3{,}155 \times 10^{-21}\,\mathrm{g/m}$.

Quelle est la force électrique sur un fragment d'ADN de $10{,}0\,\mu\mathrm{m}$?

En supposant que la force électrique est la seule force en jeu (cette supposition est incorrecte), quelle serait l'accélération du fragment d'ADN ?

Kominami, H., Kobayashi, K. & Yamada, H. Molecular-scale visualization and surface charge density measurement of Z-DNA in aqueous solution. Sci Rep 9, 6851 (2019). `https://doi.org/10.1038/s41598-019-42394-5`
Boal David, Mechanics of the cell, 2nd edition, Cambridge University Press 2012, p.89 table 3.2

La charge sur le brin d'ADN est

$$\begin{aligned} q &= \lambda L \\ &= -942\,\mathrm{pC/m} \cdot 10{,}0\,\mu\mathrm{m} \\ &= -9{,}420 \times 10^{-15}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

Donc la force électrique sera

$$\begin{aligned} F_e &= |q|\,E \\ &= |\lambda|\,LE \\ &= 9{,}420 \times 10^{-15}\,\mathrm{C} \cdot 500\,\mathrm{N/C} \\ &= 4{,}71 \times 10^{-12}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

vers l'électrode positive.

Pour trouver l'accélération, on utilise la deuxième loi de Newton

$$\begin{aligned} F_e &= ma \\ a &= \frac{F_e}{m} \\ &= \frac{|\lambda|\,LE}{\lambda_m L} \\ &= \frac{|\lambda|\,E}{\lambda_m} \\ &= \frac{942 \times 10^{-12}\,\mathrm{C/m} \cdot 500\,\mathrm{N/C}}{3{,}155 \times 10^{-24}\,\mathrm{kg/m}} \\ &= 1{,}493 \times 10^{17}\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

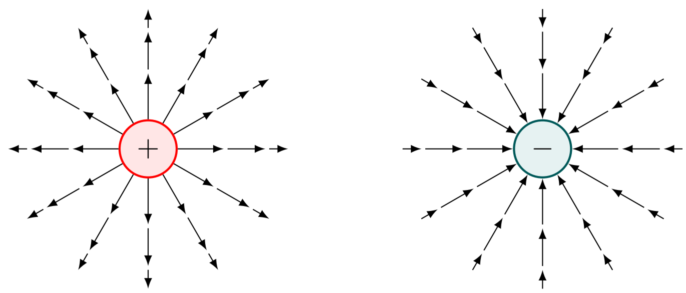
L'accélération est vers l'électrode positive.

2.2 Champ électrique d'une charge ponctuelle

Tremblay §2.2
Lafrance §2.2
5 minutes

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{kq}{r^2}\vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire qui s'éloigne de la charge ponctuelle.



5 minutes

Principe de superposition

Le champ électrique total en un point de l'espace est la somme des champs électrique causés par toutes les charges à proximité.

On peut voir que c'est vrai à partir du principe de superposition pour les forces électriques.

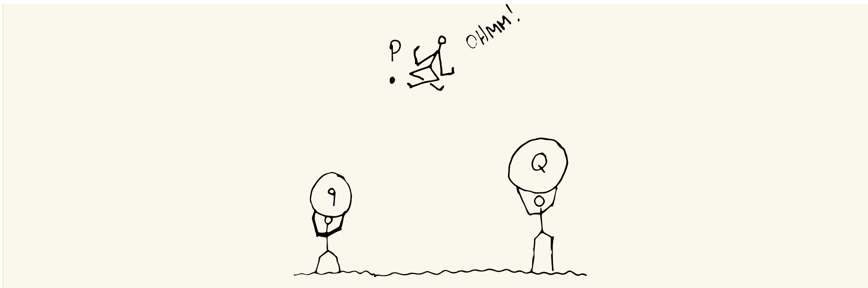
$$\begin{aligned}\vec{F} = q\vec{E} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \\ &= q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \cdots + q\vec{E}_n \\ &= q\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n\right)\end{aligned}$$

25 minutes

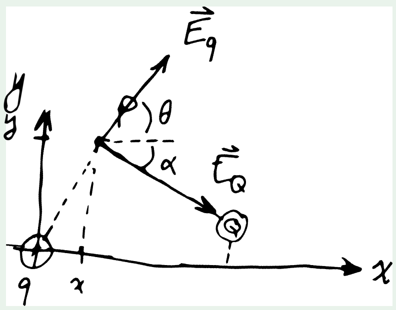
Exercice

Une charge $q = 30\,\mu\text{C}$ est placée à $160\,\text{cm}$ du sol. À droite de cette charge, une charge $Q = -50\,\mu\text{C}$ est placée à $2\,\text{m}$ au-dessus du sol. La distance horizontale entre les deux charges est $D = 3\,\text{m}$.

Calculer le champ électrique au point P situé à $1\,\text{m}$ à droite de la charge q et à $4\,\text{m}$ au-dessus du sol.



Les coordonnées du point P sont $x = 1\,\mathrm{m}$, $y = 2{,}4\,\mathrm{m}$.



Le champ électrique de la charge q au point P est de grandeur et composantes

$$E_q = \frac{k\,|q|}{x^2+y^2}$$

$$E_{qx} = E_q\cos\theta \quad = \frac{k\,|q|}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k\,|q|\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad = 15\,344\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{qy} = E_q\sin\theta \quad = \frac{k\,|q|}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k\,|q|\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad = 36\,827\,\mathrm{N/C}$$

Le champ électrique de la charge Q au point P est de grandeur et composantes

$$\begin{aligned}
E_Q &= \frac{k\,|Q|}{r_Q^2} \\
E_{Qx} = E_Q\cos\alpha &= \frac{k\,|Q|}{r_Q^2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{k\,|Q|}{\sqrt{2}r_Q^2} &&= 39\,730\,\mathrm{N/C} \\
E_{Qy} = -E_Q\sin\alpha &= -\frac{k\,|Q|}{r_Q^2}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{k\,|Q|}{\sqrt{2}r_Q^2} &&= -39\,730\,\mathrm{N/C}
\end{aligned}$$

Par le principe de superposition

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_q + \vec{E}_Q \\
&= (55\,075\vec{\imath} - 2903\vec{\jmath})\,\mathrm{N/C}
\end{aligned}$$

2.3 Lignes de champ électrique

Tremblay §2.4
Lafrance §2.6

Objectif

1. L'étudiante connaîtra le lien entre les lignes de champ et le champ électrique.
2. L'étudiante saura interpréter un diagramme de lignes de champ.

Démonstration

10 minutes
Cette démonstration fonctionne très mal à l'automne.

Matériel

1. Un vase de Pétri
2. Huile végétale
3. Graines de gazon
4. Source de champ électrique (générateur de Van de Graaff)
5. Électrodes
6. Fils

Manipulations

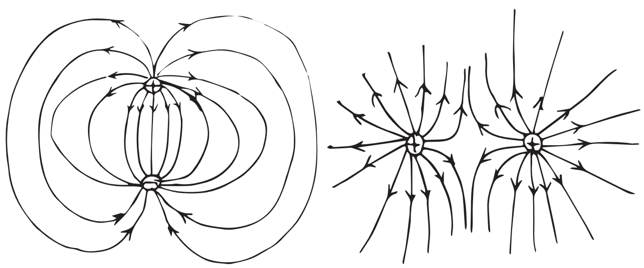
1. Mettre de l'huile dans le vase de Pétri
2. Ajouter les graines de gazon dans l'huile
3. Connecter un fil à la sphère et un fil à la mise à la terre
4. Connecter l'autre extrémité des fils aux électrodes
5. Mettre les électrodes dans l'huile et démarrer le Van de Graaf.

Caractéristiques des lignes de champ

10 minutes

Les lignes de champ électrique permettent de visualiser le champ électrique. Lorsqu'on les trace, on doit respecter les règles suivantes :

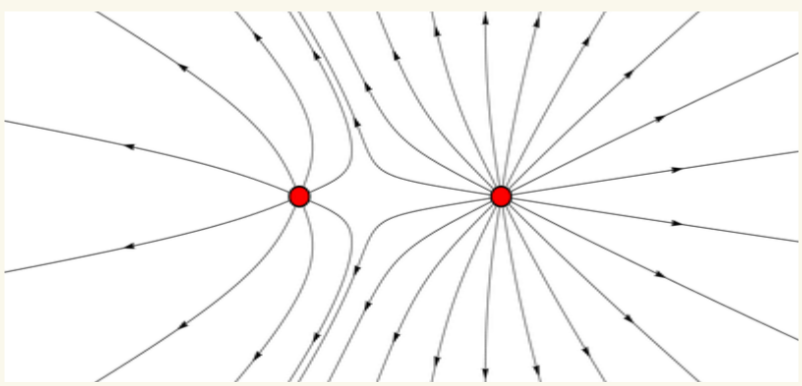
— le champ électrique est tangent aux lignes de champ ;
— la norme du champ électrique est proportionnelles à la densité de lignes de champ.
— les lignes de champ commence sur les charges positives ou à l'infini
— les lignes de champ se termine sur les charges négatives ou à l'infini



Conséquences de ces règles :

— le nombre de lignes de champ qui se terminent ou qui commencent sur une charge est proportionnel à la charge ;
— les lignes de champ ne se croisent jamais.

Exercice lignes de champ



Quels sont les signes des deux charges ?
Laquelle des deux charges est la plus grande en valeur absolue ?
Où le champ électrique est-il le plus grand ?

`https://www.st-andrews.ac.uk/~physapps/fande/Electric_Field_Lines.html`
Voir aussi `http://www.falstad.com/emstatic/EMStatic.html`

2.4 Distributions de charge

Tremblay §2.5
Lafrance §2.4

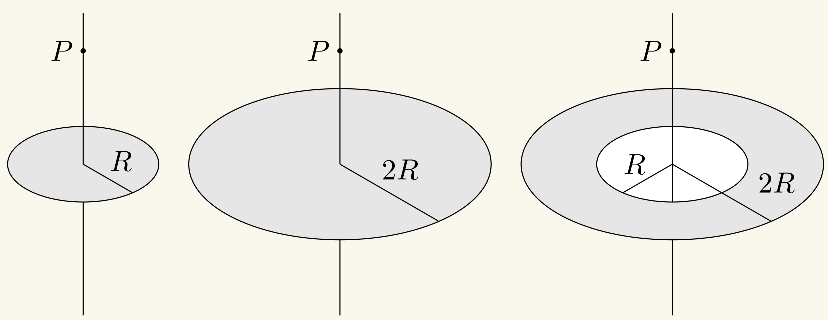
Objectif

1. L'étudiant pourra calculer le champ électrique produit par une distribution de charge.
2. L'étudiant comprendra qu'on peut diviser un objet étendu en petits morceau, considérer ces morceaux comme des particules, puis additionner les contributions de ces morceaux pour obtenir l'effet total.
3. L'étudiant pourra utiliser le calcul intégral pour résoudre des problèmes de calcul de champ électrique.

10 minutes

Exercice d'introduction aux distributions de charge

Chaque disque et l'anneau ont tous la même charge Q. Classer les objets en ordre croissant de la grandeur du champ électrique au point P.

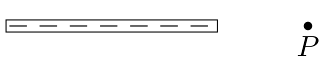


(a) (b) (c)

2.4.1 Calcul de champ le long de l'axe d'une tige chargée

20 minutes

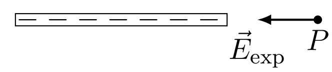
Imaginez que vous prenez une tige de plastique et que vous la chargez uniformément, c'est-à-dire que vous répartissez la charge également partout sur la tige. Votre, mission, si vous l'acceptez, sera de déterminer le champ électrique produit par cette tige à un point P situé le long de son axe.



Pour l'instant, vous ne connaissez qu'une expression mathématique pour le champ produit par une charge ponctuelle. Ce serait bien si vous pouviez utiliser cette connaissance pour déterminer le champ produit par la tige. Le but de cet exercice est justement de développer une méthode qui vous permettra de calculer le champ électrique produit par des objets étendus à partir du champ d'une charge ponctuelle. Bien que cette méthode soit générale et s'applique à des objets de toutes formes, nous nous contenterons de l'utiliser dans des cas simples pour éviter les calculs trop monstrueux.

Supposons que la tige a une longueur $L = 10\,\mathrm{cm}$ et qu'elle porte une charge totale de $Q = -5\,\mathrm{nC}$ répartie uniformément sur toute sa longueur. On cherche le champ électrique à un point P situé à $d = 6\,\mathrm{cm}$ de l'extrémité droite de la tige.

Une expérimentatrice talentueuse a réalisé l'expérience pour vous et a obtenu une valeur expérimentale du champ électrique. Le champ électrique qu'elle a mesuré a une grandeur de $E_{\mathrm{exp}} = (4681 \pm 3)\,\mathrm{N/C}$ et il pointe vers la gauche.



Premier modèle : la tige comme une charge ponctuelle

Vous vous dites que le modèle le plus simple est de considérer la tige comme une charge ponctuelle située en son centre. En utilisant ce modèle, calculez le champ électrique au point P.

La distance entre le centre de la tige et le point P est $L/2 + d$. On considère que toute la charge Q de la tige est en son centre. Par conséquent, le champ électrique est obtenu à partir de l'expression pour le champ d'une charge ponctuelle

$$\begin{aligned} E &= \frac{k\,|Q|}{(L/2 + d)^2} \\ &= 3715\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

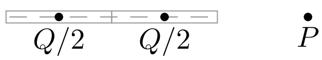
Le champ pointe vers la tige, donc vers la gauche, parce que la charge de la tige est négative.

Est-ce que le résultat que vous obtenez concorde avec le résultat expérimental ?

L'ordre de grandeur est correct, mais avec un écart de plus de 20 %, ce n'est pas un résultat très exact.

Deuxième modèle : la tige comme deux charges ponctuelles

Votre premier modèle ne vous satisfait pas. Vous croyez que vous pouvez faire mieux. Vous pensez à diviser la tige en deux « sous-tiges » et à considérer chacune de ces sous-tiges comme une charge ponctuelle, chacune avec la moitié de la charge totale de la tige. Une des charge serait à la moitié de la première sous-tige, l'autre charge à la moitié de la deuxième sous-tige. En utilisant ce modèle, calculez le champ électrique au point P.



La charge de gauche est à une distance $3L/4 + d$ du point P. En utilisant l'expression du champ pour une charge ponctuelle, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{gauche}} &= \frac{k\,|Q/2|}{(3L/4 + d)^2} \\ &= 1233{,}2\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

La charge de droite est à une distance $L/4 + d$ du point P. En utilisant l'expression du champ pour une charge ponctuelle, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{droite}} &= \frac{k\,|Q/2|}{(L/4 + d)^2} \\ &= 3110{,}7\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Puisque les deux champs pointent dans la même direction (vers la gauche), on peut appliquer le principe de superposition directement

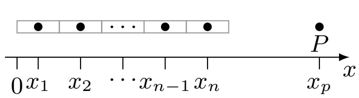
$$\begin{aligned} E &= E_{\text{gauche}} + E_{\text{droite}} \\ &= 4344\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Est-ce que le résultat que vous obtenez concorde avec le résultat expérimental ?

C'est beaucoup mieux ! L'écart est encore important (environ 7 %), mais on sent qu'on progresse dans la bonne direction.

Troisième modèle : la tige comme n charges ponctuelles

Bien heureux de votre succès avec le deuxième modèle, vous décidez de poursuivre dans cette voie. Vous décidez de « briser » la tige en n « sous-tiges » chacune de largeur L/n et portant chacune une charge Q/n. Pour vous aider dans vos calculs, vous définissez un système d'axe avec l'axe des x qui pointe vers la droite. Vous placez l'origine



à l'extrémité gauche de la tige. Pourquoi n'avez-vous pas vraiment besoin d'un axe y ou z dans cette situation ?

Le champ généré par la tige au point P pointe vers la gauche parce que le point P est aligné avec l'axe de la tige et que la tige est négative. Il n'y a aucune composante du champ électrique dans une direction autre que celle de l'axe x.

Quelle est la position du point P, x_p ?

Le point P est à une distance d à droite de la fin de la tige de longueur L. Puisque l'origine est à gauche de la tige, $x_p = L + d = 16\,\text{cm}$.

Vous décidez d'appeler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les positions des différents morceaux de charge Q/n. Écrivez une expression qui vous permet de calculer la position du morceau de charge i, x_i.

$$x_i = (i-1)\frac{L}{n} + \frac{1}{2}\frac{L}{n}$$

Écrivez l'expression qui permet de calculer la composante x du champ électrique produit par le morceau de charge i.

$$E_{ix} = \frac{kQ/n}{(L+d-x_i)^2}$$

Appliquez le principe de superposition pour obtenir une expression pour la composante x du champ électrique total.

$$E_x = \sum_i \frac{kQ/n}{(L+d-x_i)^2}$$

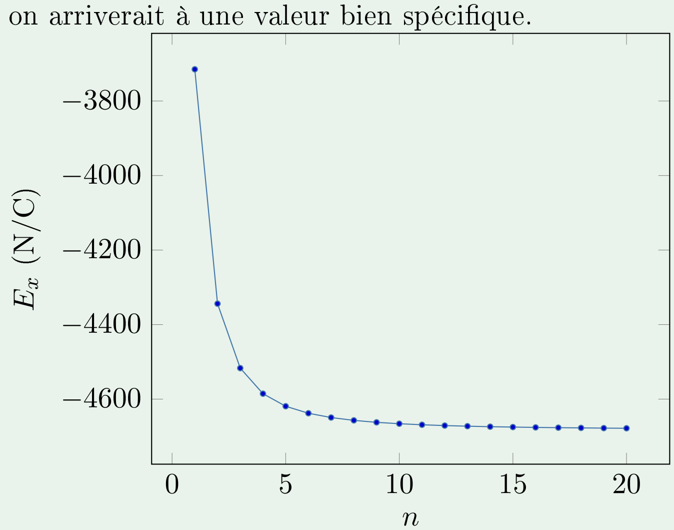
En combinant cette expression avec celle qui donne les valeurs de x_i, vous pouvez calculer le champ électrique pour n'importe quel nombre de morceaux. C'est un peu laborieux, mais un ordinateur est l'outil parfait pour faire ce genre de calculs répétitifs. Le tableau ci-contre

n	E_x (N/C)
1	−3714,9
2	−4343,9
3	−4516,8
4	−4585,4
5	−4619,1
6	−4637,9
7	−4649,4
8	−4657,0
9	−4662,3
10	−4666,0
11	−4668,8
12	−4671,0
13	−4672,6
14	−4674,0
15	−4675,0
16	−4675,9
17	−4676,6
18	−4677,2
19	−4677,8
20	−4678,2

montre les valeurs de champ obtenu pour différentes valeurs de n jusqu'à 20.

En regardant les valeurs dans ce tableau, que remarquez-vous qu'il se passe à mesure que les valeurs de n augmente ? Voyez-vous une tendance intéressante ?

La composante x du champ électrique semble se stabiliser à une valeur proche de $-4680\,\mathrm{N/C}$. Les mathématiciens diraient que la suite semble **converger** vers cette valeur. Probablement que si on continuait les calculs avec des valeurs de plus en plus grandes de n, on arriverait à une valeur bien spécifique.



Est-ce que le champ électrique obtenu avec 20 morceaux concorde avec celui obtenu expérimentalement ?

Oui ! Compte tenu de l'incertitude sur la valeur expérimentale, les deux valeurs sont égales.

Quatrième modèle : la tige comme une infinité de charges ponctuelles

Vous remarquez que plus n devient grand, plus les « sous-tiges » sont petites et plus leur charge est petite. Vous vous retrouvez donc à additionner un très grand nombre de contributions qui sont chacune très petites. Un ami vous suggère d'utiliser la notation dQ pour représenter la valeur de charge (le Q/n) lorsque le nombre de morceaux tend vers l'infini. Il vous suggère aussi de remplacer le symbole usuel de sommation $\sum$ par un S stylisé $\int$. Vous voyez, votre ami est un mathématicien, et ces gens sont réputés pour leur appréciation des notations compliquées. En utilisant cette nouvelle notation, récrivez l'expression pour la composante x du champ électrique au point P en supposant que le nombre de morceaux tend vers l'infini.

$$E_x = \int \frac{kdQ}{(L+d-x)^2}$$

Dans cette expression, le x est la position d'un des petits morceaux.

Dans cette expression, qu'on appelle une intégrale indéfinie, on ne spécifie pas quel est le domaine d'intégration, c'est-à-dire la région de l'espace sur laquelle on fait la somme. Évidemment, vous êtes en train d'additionner les contributions des différents morceaux de la tige, vous devez donc faire l'intégrale sur toute la tige.

$$E_x = \int_{\text{tige}} \frac{kdQ}{(L+d-x)^2}$$

On appelle une des petites sous-tiges un **élément** de tige. La longueur d'une des sous-tige est dx et la tige est uniformément chargée, de telle sorte que la charge par unité de longueur est λ. Vous pouvez récrire l'élément de charge dQ en fonction de l'élément de longueur dx et de la densité linéique de charge λ.

$$dQ = \lambda dx$$

En remplaçant dans l'expression du champ électrique et en prenant soin de bien indiquer les bornes d'intégration pour que la variable x couvre toute la tige, vous obtenez une intégrale définie que vous êtes capables d'évaluer grâce à vos connaissances en calcul intégral. Faites le calcul et vérifiez si la valeur numérique obtenue concorde avec la valeur expérimentale.

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{\text{tige}} \frac{k\lambda dx}{(L+d-x)^2} \\
&= \int_0^L \frac{k\lambda dx}{(L+d-x)^2} \\
&= k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(L+d-x)^2} \\
&= k\lambda \int_{L+d}^{d} \frac{-du}{u^2} \qquad \text{où } u = L+d-x \text{ donc } du = -dx \\
&= k\lambda \left[\frac{1}{u}\right]_{L+d}^{d} \\
&= k\lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right)
\end{aligned}$$

La densité de charge est $\lambda = Q/L = -5\,\mathrm{nC}/10\,\mathrm{cm} = -5 \times 10^{-8}\,\mathrm{C/m}$. On trouve donc

$$\begin{aligned}
E_x &= 8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\left(-5 \times 10^8\,\mathrm{C}\right)\left(\frac{1}{6\,\mathrm{cm}} - \frac{1}{10\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm}}\right) \\
&= -4682{,}3\,\mathrm{N/m}
\end{aligned}$$

Donc $\vec{E} = -4682{,}3\,\mathrm{N/m}\vec{\imath}$.

Si on est très loin du fil, alors le fil ressemble de plus en plus à un point. Vous vous attendez donc à ce que le champ du fil se rapproche de celui d'un point. Montrez que c'est le cas en utilisant l'expression symbolique que vous avez obtenue pour la composante x du champ.

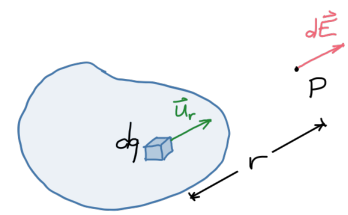
$$\begin{aligned}
E_x &= k\lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d}\right) \\
&= k\lambda \frac{L}{d(L+d)}
\end{aligned}$$

Si on est très loin de la tige, alors $d \gg L$ et $L + d \approx d$ d'où

$$\begin{aligned} E_x &= k\lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L+d} \right) \\ &= k\lambda \frac{L}{d^2} \\ &= \frac{kQ}{d^2} \end{aligned}$$

2.4.2 Méthode générale pour calculer le champ produit par une distribution de charge

De façon générale, si on a un objet chargé, on peut diviser cet objet en éléments de charge dq qui sont suffisamment petits pour être considérés comme des charges ponctuelles. On peut donc utiliser le champ produit par une charge ponctuelle et le principe de superposition pour calculer le champ produit à un point donné



$$\vec{E} = \int \frac{k dq}{r^2} \vec{u}_r$$

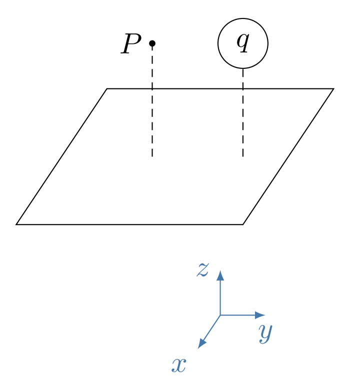
où $\vec{u}_r$ est un vecteur qui pointe de l'élément de charge dq vers le point où on essaie de calculer le champ électrique.

2.5 Champ électrique d'un plan infini

Lafrance §2.5

On peut diviser un plan infini en charges ponctuelles, en tiges infinies, en anneaux concentriques, etc. Peu importe la méthode qu'on choisi, lorsqu'on additionne toutes les contributions au champ électrique en un point, on obtient un résultat remarquablement simple : le champ électrique est indépendant de la distance à laquelle on se trouve du plan. Il pointe toujours perpendiculairement au plan. Si la charge par unité de surface est σ, le champ a une grandeur de

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$



Une plaque de métal de 2,00 m^2 porte une charge totale de 4,00 µC.

Quelle est la densité de charge de cette plaque ?

Quel est la grandeur du champ électrique au point P situé à

8,00 cm au-dessus du plan ?

On ajoute une charge de 80 nC à 8,00 cm du plan, 3,00 cm à droite du point P. Quel est maintenant le champ électrique au point P ?

2.6 Mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme

Tremblay §2.6
Lafrance §2.7

Si le champ $\vec{E}$ est le même partout dans l'espace on dit qu'il est **uniforme**. Dans un champ uniforme, une particule chargée subit une accélération constante. En effet,

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

par la deuxième loi de Newton. Donc

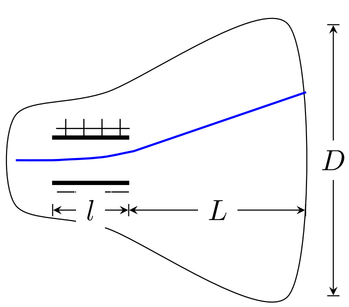
$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

est constante.

Tube à rayons cathodiques

30 minutes

Il y a quelques années, téléviseurs et écrans d'ordinateur fonctionnaient avec des tubes à rayons cathodiques.



Le principe est simple : un élément chauffant produit un faisceau d'électrons qui est accéléré dans un champ électrique. Les électrons sont ensuite déviés par un autre champ électrique. Lorsqu'ils atteignent l'écran, ils transfèrent leur énergie à des phosphores qui produisent de la lumière.

Les plaques métalliques génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E}$. Les dimensions du tube sont $l = 2$ cm, $L = 40$ cm et $D = 60$ cm. Avant de passer entre les plaques du déflecteur, la vitesse des électrons est 5% de la vitesse de la lumière vers la droite.

Déterminer la norme du champ électrique nécessaire pour que les électrons atteignent le haut de l'écran.

Soit v_x et v_y les composantes horizontales et verticales de la vitesse des électrons à leur entrée entre les deux plaques.

Pas de force dans la direction x donc v_x est constante : $v_x = 0.05c$.

Le temps requis pour que les électrons traversent les plaques est

$$t_l = \frac{l}{v_x}$$

Pendant la traversée des plaques, les électrons sont soumis à une force constante vers le haut dont la grandeur est

$$F = eE$$

où E est la grandeur du champ électrique. Par la deuxième loi de Newton

$$a_y = \frac{eE}{m}.$$

La composante verticale de la vitesse à la sortie des plaques est donc

$$v_{yl} = \frac{eEt_l}{m} = \frac{eEl}{mv_x}$$

Le déplacement vertical pendant le passage entre les plaques est

$$\begin{aligned} y_l &= \frac{1}{2}a_y t_l^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l^2}{v_x^2} \\ &= \frac{eEl^2}{2mv_x^2} \end{aligned}$$

Pour la partie après les plaques, il n'y a pas de force, donc vitesse constante.

$$t_L = \frac{L}{v_x}$$

et

$$\begin{aligned} y_L &= v_{yl}t_L \\ &= \frac{eEl}{mv_x}\frac{L}{v_x} \\ &= \frac{eElL}{mv_x^2}. \end{aligned}$$

Pour atteindre le haut de l'écran, $y_L = D/2$ donc

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} &= \frac{eEl^2}{2mv_x^2} + \frac{eElL}{mv_x^2} \\ &= \frac{eEl}{mv_x^2}\left(\frac{l}{2} + L\right) \\ E &= \frac{Dmv_x^2}{2el(l/2+L)} = 46{,}7\,\mathrm{kN/C} \end{aligned}$$