Pagalba atsimenant teorinę dalį

Tema

Teorinė dalis

Uždaviniai

1. Rinkinių sudarymas, kai narių eilės tvarka svarbi

Rinkinių sudarymo uždaviniuose pagrindinis klausimas yra, keliais būdais galime sudaryti rinkinį iš tam tikrų narių. Kartais yra įvedamos tam tikros taisyklės (pvz., kad nariai nesikartoja arba tenkina tam tikrą sąryšį)

Paprastesniuose uždaviniuose, kur kiekvieno tolimesnio nario galimų parinkimų kiekis **nepriklauso** nuo to, kokie konkrečiai ankstesni nariai buvo parinkti, turime:

- Išsiaiškinti, keliais būdais galime parinkti pirmą narį, o tada rasti, keliais būdais galime parinkti kiekvieną tolimesnį narį.
- Įsitikinti, kad tikrai būdingas **nepriklausomumas** tolimesnio nario parinkimų kiekiui.
- Sudauginti gautus rezultatus.

1. **pavyzdys.** Keliais būdais galima sudaryti automobilio automobilio numerį (iš trijų 26 angliškų raidžių ir 3 skaitmenų?).

Sprendi
pvz.: jei vidurinė raidė raidė yra (O), tai trečia raidė nepriklausomai nuo antros, gali būti parinkta vienu iš 26 būdų; trečios raidės parinkimas nuo antros visiškai nepriklauso
būdais, o
kiekiui an
neturi (■). Atsakymas: $\boxed{26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10}$.

2. **pavyzdys.** Keliais būdais galima sudaryti lyginį keturženklį skaičių?

Sprendimas.

Skaitmuo parenkamas iš aibės {1,2,3,4,5,6

- Pirmam skaitmeniui parinkti yra 9 Skaitmuo parenkamas iš aibės {0,1,2,3,4,5,6
- Antram skaitmeniui parinkti yra 10 Skaitmuo parenkamas iš aibės {0,1,2,3,4,5,6
- Trečiam skaitmeniui parinkti yra 10 būdų (■);
- Paskutinia paskutinis lyginio skaičiaus skaitmuo yra lyginis ginumo savybę (■), skaitmuo parenkamas iš aibės {0,2,4,6,8}.

Kiekvieno skaitmens parinkimų kiekis nepriklauso nuo ankstesnių skaitmenų parinkimo, taigi atsakymas yra $\boxed{9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4500}$.

3. **pavyzdys.** Picerijoje galima užsisakyti 12 skirtingų rūšių picų, iš kurių kiekviena gali būti 4 skirtingų dydžių, o šalia picos galima užsisakyti 5 rūšių kokteilius, 4 rūšių sultis ir 3 rūšių limonadus. Keliais skirtingais būdais galima užsisakyti komplektą iš picos ir gėrimo?

Sprendimas. Renkantis komplektą svarbu trys parametrai: picos rūšis, picos dydis ir gėrimo rūšis. Jie vienas nuo kito nepriklauso, todėl atsakymas bus visų picų rūšių, jų dydžių ir visų gėrimų rūšių sandauga $\boxed{12 \times 4 \times (5+4+3) = 576}$.

4. **pavyzdys.**

5. **pavyzdys.** Kiek yra dviženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 8? Raskite juos.

Sprendimas.

1,2,3,4,5,6,7 arba 8

- Pasirinkti pirmąjį skaitmenį yra 8 būdai (■).
- Pasirinkus pirmąjį Jei pirmasis skaitmuo yra x, tai antrasis gali būti tik $8-x$ visada lygus 1. (■). Tuo įsitikinti galėsime išrašę visus skaičius.

Atsakymas: $\boxed{8 \times 1 = 8}$. Visi skaičiai yra $\boxed{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80}$.

Keliais būdais galime sudaryti triženklį skaičių, kurio skaitmenys yra skirtingi?

Skaitmuo parenkamas iš aibės {1,2,3,4,5,6

- Pirmam Skaitmuo parenkamas iš aibės {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} atmetus pirmąjį ska
- Antram skaitmeniui parinkti yra 9 būdai (■); parinkimų skaičius nepr Skaitmuo parenkamas iš aibės {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, atmetus pirmus du skai
- Trečiam skaitmeniui parinkti yra 8 būdai (■); parinkimų skaičius nepriklauso nuo to, kurie pirmi du skaitmenys buvo pasirinkti.

Vadinasi būdų sudaryti triženklį skaičių yra $\boxed{9 \times 9 \times 8 = 648}$.

6. **pavyzdys.** Keliais būdais galime sudaryti triženklį skaičių, kurio skaitmenys yra skirtingi nelyginiai skaičiai?

Sprendimas.

Skaitmuo parenkamas iš aibės {2,4

- Pirmam skaitmeni Skaitmuo parenkamas iš aibės {0,2,4,6,8} atmetus pirmąjį ska
- Antram skaitmeniui parinkti yra 4 būdai (■); parinkimų skaičius nepriklauso n Skaitmuo parenkamas iš aibės {0,2,4,6,8} atmetus pirmus du skai
- Trečiam skaitmeniui parinkti yra 3 būdai (■); parinkimų skaičius nepriklauso nuo to, kurie pirmi du skaitmenys buvo pasirinkti.

Vadinasi būdų sudaryti triženklį skaičių yra $\boxed{4 \times 4 \times 3 = 48}$.

7. **pavyzdys.** Keliai būdais galime sudaryti triženklį skaičių, kurio pirmas ir paskutinis skaitmuo yra vienodas?

Sprendimas.

Skaitmuo parenkamas iš aibės {1,2,3,4,5,6

- Pirmam Skaitmuo parenkamas iš aibės {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} atmetus pirmąjį ska
- Antram skaitmeniui parinkti yra 9 būdai (■); parinkimų skaičius nepriklauso nuo to, kuris pirmas skaitmuo buvo pasirinktas.
- Nors trečio skaitmens parinkimas priklauso nuo pirmo skaitmens parinkimo, tačiau variantų kiekis parinkti trečią skaitmenį, kai žinomi

pirmi du skaitmenys, išlieka pastovus ir lygus 1: į trečio skaitmens poziciją leistina įrašyti tik tokį patį skaitmenį, kaip ir pirmasis.

Todėl atsakymas $\boxed{9 \times 9 \times 1 = 81}$

UŽDAVINIAI.

(1) Kiek natūraliųjų skaičių, mažesnių už 50, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, jeigu skaitmenys gali pasikartoti (`VBE 2012 (1/60)`)?

(2) Kiek triženklių skaičių, užrašomų skirtingais skaitmenimis, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 7 (`VBE 2012 (1/60)`)?

(3) Iš dėžės traukiami du rutuliukai: ištraukus pirmąjį, užrašomas ant rutuliuko esantis skaičius ir rutuliukas grąžinamas atgal į dėžę, po to traukiamas antrasis rutuliukas ir ant jo užrašytas skaičius sudedamas su prieš tai užrašytuoju. Raskite:
   a) kiek yra užrašymų variantų.
   b) visus užrašymų variantus, kai gauta suma lygi 4 (`VBE 2012 (1/60)`)?

(4) Iš skaitmenų 0, 3, 5 sudaromi visi galimi triženkliai skaičiai. Skaičiaus skaitmenys gali kartotis (pvz., 555, 300, 303, ...). Raskite:
   a) kiek tokių triženklių skaičių galima sudaryti? (`VBE 2013 (1/60)`)?
   b) keli iš šių skaičių dalijasi iš 3? (`VBE 2013 (1/60)`)?

(5) Standartinis šešiasienis lošimo kauliukas metamas du kartus.
   a) Kelios skirtingos baigtys gali įvykti? (`VBE 2014 (0.5/59)`)?
   b) Kelios skirtingos baigtys gali įvykti, kai žinoma, jog antrąkart pasirodė daugiau akučių, nei pirmą? (`VBE 2014 (1/59)`)?

Sudėtinguose uždaviniuose, kur kiekvieno tolimesnio nario galimų parinkimų kiekis **priklauso** nuo to, kokie ankstesni nariai buvo parinkti, nagrinėjami **daliniai atvejai**, kuriuose to priklausymo nėra. Tam, kad įsitikintume, jog uždavinys yra būtent iš šios kategorijos, turime rasti bent vieną priklausymo **pavyzdį**.

8. **pavyzdys.**

Kiek keturženklių skaičių, kurie dalijasi iš 4, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2

jeigu pasirenkame, kad pirmas skaitmuo būtų 2, o antras 4,
tai negalėsime sudaryti nei vieno tokio skaičiaus.
Tačiau pasirinkus pradžią „13", galima sudaryti netgi 3 tokius skaičius: 1312, 1352,

Sp

mu

(■). Nagrinėdami **dalinius atveju**

pagal dalumo iš 2 požymį, kad paskutinis skaitmuo

- Visi skaičiai, kurie yra dalūs iš 4, gali baigtis tik 2 arba 4 (■).
- Jeigu paskutinis skaitmuo yra 2, tai visi tinkami priešpaskutiniai skaitmenys yra 1, 3 ir 5.
- Jeigu 4, tai priešpaskutinis skaitmuo gali būti tik 2.

Taigi, iš viso galime išskirti šiuos 4 **dalinius atvejus**:

- Skaičiaus galas yra 12;
- Skaičiaus galas yra 32;
- Skaičiaus galas yra 52;
- Skaičiaus galas yra 24.

Kiekvieną variantą jau galime spręsti kaip uždavinį, kuriame išlaikomas nepriklausomumas. Visais atvejais į pirmo skaitmens poziciją galime įrašyti vieną iš likusių 3 skaitmenų (nes 2 jau panaudoti), o į antro - vieną iš 2 (nes dabar jau trys skaitmenys panaudoti). Taigi, visais atvejais skaičius gali būti sudaromas $3 \times 2 = 6$ būdais. Sudėję visų variantų rezultatus, gauname atsakymą: $\boxed{6+6+6+6=24}$

9. **pavyzdys.** Keliais būdais galime sudaryti triženklį skaičių, kurio visi skaitmenys yra skirtingi, o dviejų paskutinių skaitmenų suma lygi 9?

Sprendimas. skaičiaus, kurio pradžia yra 54, trečiajam skaitmeniui parinkti nėra vari
gorijos, nes tre jei pradžia yra 62, tai yra vienintelis variantas: 627
skaitmenų parinkimo: (■)

I būdas (darbas žmogų puošia) Išskiriame 109, ~~118~~, 127, 136, 145, 154, 163, 172, ~~18~~

- Kai pirmas skaitmuo lygus 1, bus 8 sud 209, 218, ~~227~~, 236, 245, 254, 263, ~~272~~, 28
- Kai pirmas skaitmuo lygus 2, bus 8 sud 309, 318, 327, ~~336~~, 345, 354, ~~363~~, 372, 38
- Kai pirmas skaitmuo lygus 3, bus 8 sud 409, 418, 427, 436, ~~445~~, ~~454~~, 463, 472, 48
- Kai pirmas skaitmuo lygus 4, bus 8 sud 509, 518, 527, 536, ~~545~~, ~~554~~, 563, 572, 58
- Kai pirmas skaitmuo lygus 5, bus 8 sud 609, 618, 627, ~~636~~, 645, 654, ~~663~~, 672, 68
- Kai pirmas skaitmuo lygus 6, bus 8 sud 709, 718, ~~727~~, 736, 745, 754, 763, ~~772~~, 78
- Kai pirmas skaitmuo lygus 7, bus 8 sud 809, ~~818~~, 827, 836, 845, 854, 863, 872, ~~88~~
- Kai pirmas skaitmuo lygus 8, bus 8 sud ~~909~~, 918, 927, 936, 945, 954, 963, 972, 98
- Kai pirmas skaitmuo lygus 9, bus 8 sudarymo galimybės (■).

Taigi, atsakymas $\boxed{8+8+8+8+8+8+8+8+8=72}$

Gavome įdomius dėsningumus:

- trečio skaitmens parinkimų kiekis **priklauso** nuo to, kokius pirmus du skaitmenis parinkome,
- paskutinių dviejų skaitmenų parinkimų kiekis **nepriklauso** nuo to, kokį pasirinkome pirmąjį skaitmenį.

Būtent dėl antro dėsningumo visi dėmenys sumoje vienodi.

II būdas (uždavinys paprastas, kai laiku pastebi dėsningumą) Matėme, jog antro dėsningumo pastebėjimas gerokai sumažintų darbo. Tačiau galima išskirti ir tokius **dalinius atvejus**

- Jei skaičiaus galas yra 09 arba 90, tai pirmą skaitme 1,2,3,4,5,6,7,8 -mai nuo galo, galima pasirinkti 8 būdais (iš aibės ■)
- Jei skai renkamės iš aibės {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, neįskaitant dviejų gale esančių skai skaitmens, nepriklausomai nuo galo, pasirinkimų kiekis yra 7 (■).

Pirmu atveju turime $2 \times 8 = 16$ sudarymo būdų, o antru atveju $7 \times 8 = 56$. Iš viso gauname 72 būdus.

2. Rinkinių sudarymas, kai narių eilės tvarka nesvarbi

Keliais būdais galima sudaryti k daiktų rinkinį iš n daiktų?

Keliais būdais galima sudaryti k daiktų rinkinį iš n daiktų?