1

Reiškinys yra **tautologija** tada, kai su visais kintamųjų rinkiniais jis įgyja reikšmę, lygią 1.

Distributyvumas yra dėsnis , nusakantis sąryšį tarp sudėties ir daugybos. Jo atitikmuo algebroje:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Remiantis distributyvumo savybe, galima atskliausti reiškinius, pvz.

$$(a + b)(c + d) = ac + bd + bc + bd$$

Matematinėje logikoje distributyvumas apibrėžia sąryšį tarp operacijų $\vee$ ir &. Pavyzdžiai analogiški:

$$\begin{aligned} &a\&(b \vee c) = (a\&b) \vee (a\&c) = a\&b \vee a\&c \\ &a \vee (b\&c) = (a \vee b)\&(a \vee c) \end{aligned} \tag{1}$$

Taip pat galima atskliausti sudėtingesnius reiškinius:

$$\begin{aligned} (a\&b) \vee (c\&d) &= (a \vee c)\&(a \vee d)\&(b \vee c)\&(b \vee d) \\ (a \vee b)\&(c \vee d) &= (a\&c) \vee (a\&d) \vee (b\&c) \vee (b\&d) \end{aligned} \tag{2}$$

Toliau remsimės Morgano dėsniais

$$\begin{aligned} \overline{a\&b} &= \bar{a} \vee \bar{b} \\ \overline{a \vee b} &= \bar{a}\&\bar{b} \end{aligned} \tag{3}$$

Dar prireiks **implikacijos** $\Rightarrow$ ir **ekvivalentumo** $\Leftrightarrow$ sąryšių taisyklių

$$a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b \tag{4}$$

$$a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b)\&(b \Rightarrow a) \tag{5}$$

Taip pat taikysime paprasčiausius suprastinimus

$$\begin{aligned} (a\&b) \vee a &= a \\ (a \vee b)\&a &= a \end{aligned} \tag{6}$$

Uždavinys. Įsitikinsime, kad reiškinys $(\boldsymbol{y} \vee \bar{\boldsymbol{z}}) \Rightarrow \boldsymbol{z}\&(\overline{\boldsymbol{x}\&\boldsymbol{y}})) \vee (\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{z})$ nėra **tautologija**.

Sprendimas. Prastinimus atliksime pirmoje formulės dalyje

$$
\begin{aligned}
(y \vee \bar{z}) \Rightarrow z\&(\overline{x\&y})) \vee (x \Leftrightarrow z) &\overset{4}{=} \\
(\overline{y \vee \bar{z}}) \vee z\&(\overline{x\&y})) \vee (x \Leftrightarrow z) &\overset{3}{=} \\
((\bar{y}\&z) \vee z\&(\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (x \Leftrightarrow z) &\overset{6}{=} \\
z\&(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (x \Leftrightarrow z)
\end{aligned}
$$

Galime paimti tokius x ir z, kad išraiškos $\boldsymbol{z}\&(\bar{\boldsymbol{x}} \vee \bar{\boldsymbol{y}}))$ ir $\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{z}$ būtų nulinės. Pavyzdžiui $z = 0$ ir $y = 1$. Tuomet reiškinys įgyja 0, vadinasi, nėra **tautologija**.

Galim pasitikrinti, ar teisingai darėme

2

Į uždavinį įeinančias sąvokas ir pavyzdžius galima rasti prisegtoje santraukoje.

Uždavinys. Ištirsime funkciją $\boldsymbol{f(x, y, z) = (z\&\bar{x}) \Rightarrow (z \vee x \Leftrightarrow y)}$

Sprendimas.

Pasinaudodami loginių operacijų lentele

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \vee y$	$x\&y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x\|y$	$x \downarrow y$
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0

sudarome funkcijos **teisingumo lentelę** :

x	y	z	$\bar{x}$	$z\&\bar{x}$	$z \vee x$	$z \vee x \Leftrightarrow y$	$(z\&\bar{x}) \Rightarrow (z \vee x \Leftrightarrow y)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Pasitikriname, ar teisingai sudarėme lentelę

a) Remdamiesi teisingumo lentele, suprastiname funkciją: $\boxed{\boldsymbol{f(x, y, z) = x \vee y \vee \bar{z}}}$

b) Funkcija $f(x, y, z)$ yra tiesinė, jei egzistuoja reikšmės c_0, c_1, c_2 ir c_3 tokios, kad $f(x, y, z) = c_0 \oplus c_1\&x_1 \oplus c_2\&x_2 \oplus c_3\&x_3$

Darome prielaidą, kad c_0, c_1, c_2 ir c_3 egzistuoja. Kiekvienas iš rinkinių (x, y, z) turi įgyti teisingumo lentelės reikšmę $f(x, y, z)$.

- $f(0, 0, 0) = c_0 \oplus c_1\&0 \oplus c_2\&0 \oplus c_3\&0 = c_0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = c_0 \oplus 0 \overset{lentelė}{=} 1$
  Vadinasi, $c_0 = 1$
- $f(0, 0, 1) = 1 \oplus c_1\&0 \oplus c_2\&0 \oplus c_3\&1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus c_3 = 1 \oplus c_3 \overset{lentelė}{=} 0$
  Vadinasi, $c_3 = 1$

- $f(0,1,0) = 1 \oplus c_1\&0 \oplus c_2\&1 \oplus 1\&0 = 1 \oplus 0 \oplus c_2 \oplus 0 = 1 \oplus c_2 \overset{lentelė}{=} 1$
  Vadinasi, $c_2 = 0$
- $f(1,0,0) = 1 \oplus c_1\&1 \oplus 0\&0 \oplus 1\&0 = 1 \oplus c_1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \oplus c_1 \overset{lentelė}{=} 1$
  Vadinasi, $c_1 = 0$

Gavome, kad $f(x,y,z) = 1 \oplus 0\&x_1 \oplus 0\&x_2 \oplus 1\&x_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus x_3 = 1 \oplus x_3$

Ši reikšmė nėra tapačiai lygi su $x \vee y \vee \bar{z}$, nes nepriklauso nuo x_1 ir x_2. Vadinasi, prielaida buvo neteisinga ir funkcija yra netiesinė.

c) Funkcija nėra monotoninė, nes $(0,0,0) \preceq (0,0,1)$, tačiau $f(0,0,0) \not\preceq f(0,0,1)$

d) Funkcijos $\boldsymbol{f(x,y,z) = x \vee y \vee \bar{z}}$ dualioji funkcija yra lygi $\boldsymbol{f(x,y,z) = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z}}$. Paėmę x, y ir z reikšmes, lygias 1, gausime, kad funkcija nesutampa su jos dualiąja funkcija, vadinasi nėra savidualioji.

e) iš teisingumo lentelės matome, kad $f(0,0,0) = 0$, vadinasi funkcija nekeičia nulio. Taip pat matome, kad $f(1,1,1) = 0$, vadinasi funkcija keičia vienetą

f) rasime jos konjunkcinę ir disjunkcinę formas

> **Atomu** vadiname bet kurį kintamąjį arba jo neiginį.
>
> **Disjunktu** vadiname operatorių „$\vee$"
>
> **Konjunktu** vadiname operatorių „&"
>
> **Tobuląja disjunkcine forma** vadiname formulę, kuri susideda iš elementų (kurie yra atomai arba atomai, atskirti konjuktais), atskirtų disjunktais „$\vee$".
>
> **Tobuląja konjunkcine forma** vadiname formulę, kuri susideda iš elementų (kurie yra atomai arba atomai, atskirti disjuktais), atskirtų konjunktais „&".

Gauta formulė sutampa su savo disjunkcine forma: $\boxed{\boldsymbol{f(x,y,z) = x \vee y \vee \bar{z}}}$

Tam, kad gautume tobuląją disjunkcinę formą, pasižiūrime į **teisingumo lentelės** paskutinį stulpelį ir sukonstruojame reiškinį

> $\boldsymbol{f(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})\&(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\&(\bar{x} \vee y \vee z)\&}$
>
> $\boldsymbol{\&(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})\&(x \vee \bar{y} \vee z)\&(x \vee y \vee \bar{z})\&(x \vee y \vee z)}$

3

Uždavinys. Nustatysime propozicinės formulės

$$\Bigg(\Big(y \to x \to \Big((\overline{s}\&b) \to b\&x\Big)\&\Big(s \vee y\Big)\Big)\&\Big((\overline{y\&s}|\overline{c})\&(\overline{c \vee b})\Big)\Bigg)$$

$\Leftrightarrow \Big(y \Rightarrow (c\&b)\Big)$ gylį.

Sprendimas. Kiekvieno žingsnio metu naudosime keitinius tol, kol galiausiai nebeliks operacijų. Per kiekvieną žingsnį panaudotus keitinius pažymėsime apjungtus sistemos ženklu.

$$\begin{cases} A = x \to y \\ B = \overline{s} \\ C = b\&x \\ D = s \vee y \\ E = y\&s \\ F = \overline{c} \\ G = c \vee b \\ H = c\&b \end{cases} \quad \begin{cases} I = B\&b \\ J = \overline{E} \\ K = \overline{G} \\ L = y \Rightarrow H \end{cases} \quad \begin{cases} M = I \to C \\ N = J|F \end{cases} \quad \begin{cases} O = M\&D \\ P = N\&K \end{cases} \quad \begin{array}{r} R = A \to O \\ S = R\&P \\ T = S \Leftrightarrow L \end{array}$$

Skaičiavimai:

$$\text{formulė} = \Bigg(\Big(A \to \Big((B\&b) \to C\Big)\&D\Big)\&\Big((\overline{E}|F)\&\overline{G}\Big)\Bigg) \Leftrightarrow \Big(y \Rightarrow H\Big) =$$

$$= \Bigg(\Big(A \to \Big(I \to C\Big)\&D\Big)\&\Big((J|F)\&K\Big)\Bigg) \Leftrightarrow L =$$

$$= \Bigg(\Big(A \to M\&D\Big)\&\Big(N\&K\Big)\Bigg) \Leftrightarrow L =$$

$$= \Bigg(\Big(A \to O\Big)\&P\Bigg) \Leftrightarrow L = \Big(R\&P\Big) \Leftrightarrow L = S \Leftrightarrow L = T$$

Prireikė 7 lygybių todėl formulės gylis yra 7.

4

Ketvirtame ir penktame uždaviniuose reikės būtinai atkreipti dėmesį, kad **implikacija** atliekama po **konjunkto** ar **disjunkto**:

$$\begin{cases} a \vee b \to c = (a \vee b) \to c \\ a\&b \to c = (a\&b) \to c \end{cases} \quad \begin{cases} a \to b \vee c = a \to (b \vee c) \\ a \to b\&c = a \to (b\&c) \end{cases}$$

Uždavinys. Perrašysime formulę

$$\Bigg(\Big(y \to x \to \Big((s\&b) \oplus b \to x\Big)\&\Big(s \vee y\Big)\Big)\&\Big((\overline{y\&s}|\overline{c})\&(\overline{c \vee b})\Big)\Bigg)$$

$\leftrightarrow \Big(y \to (c\&b)\Big)$ prefiksiniu pavidalu.

Sprendimas. Po kiekvieno pakeitimo visas išraiškas $A * B$, kur $*$ yra operacija, perrašysime į pavidalą $*AB$.

Formulė =

$$\leftrightarrow AB, \text{ kur } \begin{cases} A = y \to x \to \Big((s\&b) \oplus b \to x\Big)\&\Big(s \vee y\Big)\Big)\&\Big((\overline{y\&s}|\overline{c})\&(\overline{c \vee b})\Big) \\ B = y \to (c\&b) \end{cases} =$$

$$= \leftrightarrow \&CD \to yE, \text{ kur } \begin{cases} C = y \to x \to \Big((s\&b) \oplus b \to x\Big)\&\Big(s \vee y\Big) \\ D = (\overline{y\&s}|\overline{c})\&(\overline{c \vee b}) \\ E = c\&b \end{cases} =$$

$$= \leftrightarrow \& \to FG\&HI \to y\&cb, \text{ kur } \begin{cases} F = y \to x \\ G = \Big((s\&b) \oplus b \to x\Big)\&\Big(s \vee y\Big) \\ H = \overline{y\&s}|\overline{c} \\ I = \overline{c \vee b} \end{cases} =$$

$$= \leftrightarrow \& \to \to yx\&JK\&|LM\neg \vee cb \to y\&cb, \text{ kur } \begin{cases} J = (s\&b) \oplus b \to x \\ K = s \vee y \\ L = \overline{y\&s} \\ M = \overline{c} \end{cases} =$$

$$= \leftrightarrow \& \to \to yx\& \to Mx \vee sy\&|\neg\&ys\neg c\neg \vee cb \to y\&cb, \text{ kur } M = (s\&b) \oplus b =$$

$$= \leftrightarrow \& \to \to yx\& \to \oplus Nbx \vee sy\&|\neg\&ys\neg c\neg \vee cb \to y\&cb, \text{ kur } N = s\&b =$$

$$= \boxed{\leftrightarrow \& \to \to yx\& \to \oplus\&sbbx \vee sy\&|\neg\&ys\neg c\neg \vee cb \to y\&cb}$$

5

Uždavinys. Perrašysime formulę

$$\Bigg(\Big(y \to x \to \Big((s\&b) \oplus b\Big)\&\Big(s \vee y \to x\Big)\Big)\&\Big((\overline{y\&s}|\overline{c})\&(\overline{c \vee b})\Big)\Bigg)$$

$\leftrightarrow \Big(y \to (c\&b)\Big)$ postfiksiniu pavidalu.

Sprendimas. Po kiekvieno pakeitimo visas išraiškas $A * B$, kur $*$ yra operacija, perrašysime į pavidalą $AB*$.

Formulė =

$$AB \leftrightarrow, \text{ kur } \begin{cases} A = \Big(y \to x \to \Big((s\&b) \oplus b\Big)\&\Big(s \vee y \to x\Big)\Big)\&\Big((\overline{y\&s}|\overline{c})\&(\overline{c \vee b})\Big) \\ B = y \to (c\&b) \end{cases} =$$

$$= CD\&yE \to \leftrightarrow, \text{ kur } \begin{cases} C = y \to x \to \Big((s\&b) \oplus b\Big)\&\Big(s \vee y \to x\Big) \\ D = (\overline{y\&s}|\overline{c})\&(\overline{c \vee b}) \\ E = c\&b \end{cases} =$$

$$= FG \to HI\&\&ycb\& \to \leftrightarrow, \text{ kur } \begin{cases} F = y \to x \\ G = \Big((s\&b) \oplus b\Big)\&\Big(s \vee y \to x\Big) \\ H = \overline{y\&s}|\overline{c} \\ I = \overline{c \vee b} \end{cases} =$$

$$= yx \to JK\& \to LM|cb \vee \neg\&\&ycb\& \to \leftrightarrow, \text{ kur } \begin{cases} J = (s\&b) \oplus b \\ K = s \vee y \to x \\ L = \overline{y\&s} \\ M = \overline{c} \end{cases} =$$

$$= yx \to Pb \oplus Qx \to \& \to ys\&\neg c\neg|cb \vee \neg\&\&ycb\& \to\leftrightarrow \text{, kur } \begin{cases} P = s\&b \\ Q = s \vee y \end{cases}$$
$$= \boxed{yx \to sb\&b \oplus sy \vee x \to \& \to ys\&\neg c\neg|cb \vee \neg\&\&ycb\& \to\leftrightarrow}$$

6

Uždavinys. Turnyre dalyvauja šeši sportininkai: Gediminas, Kęstas, Algis, Vilius, Mindaugas, Nerijus. Tą pačią rungtynių vietą gali užimti tik vienas sportininkas. Penki sportinės loterijos lošėjai prognozavo tokius rezultatus:

(G3 ir K1), (V1 ir A2), (N1 ir V4), (A4 ir A2), (G2 ir M5).

Yra žinoma, kad kiekvienas lošėjas atspėjo bent vieną rungtynių rezultatą. Kas kokią vietą užėmė?

Sprendimas. Pagal nurodytas žaidėjų prognozes galime sudaryti **konjunkcinę rungtynių baigties formą**. Tam, kad nustatytume, kas kokią vietą užėmė, turime iš jos gauti **tobuląją konjunkcinę formą**, kurios kiekvienas atomas nusako laimėtojo pirmą vardo raidę ir vietą. Išspręsti pagal **teisingumo lentelę** būtų daug darbo, bet galime prisiminti ir pritaikyti jau matytus pavyzdžius su **distributyvumu**. Kiekvienoje lygybėje taikysime distributyvumą ir išprastinsime reiškinius, kurie visuomet įgyja 0, nes tas pats sportininkas negali užimti dviejų skirtingų vietų ir du sportininkai negali užimti tos pačios vietos. (**Konjunktą**„&", esantį tarp dviejų **atomų**, dėl aiškumo praleisime).

$$(G3 \vee K1)\&(V1 \vee A2)\&(N1 \vee V4)\&(A4 \vee A2)\&(G2 \vee M5) =$$
$$\Big(G3V1 \vee G3A2 \vee \cancel{K1V1} \vee K1A2\Big)\&(N1A4 \vee N1A2 \vee \cancel{V4A4} \vee V4A2)\&(G2 \vee M5) =$$
$$\Big(G3V1 \vee G3A2 \vee K1A2\Big)\&$$
$$\&(N1A4G2 \vee \cancel{N1A2G2} \vee \cancel{V4A2G2} \vee N1A4M5 \vee N1A2M5 \vee V4A2M5) =$$
$$\Big(G3V1 \vee G3A2 \vee K1A2\Big)\&(N1A4G2 \vee N1A4M5 \vee N1A2M5 \vee V4A2M5) =$$
$$\cancel{G3V1N1A4G2} \vee \cancel{G3V1N1A4M5} \vee \cancel{G3V1N1A2M5} \vee \cancel{G3V1V4A2M5} \vee$$
$$\vee \cancel{G3A2N1A4G2} \vee \cancel{G3A2N1A4M5} \vee G3A2N1A2M5 \vee G3A2V4A2M5 \vee$$
$$\vee \cancel{K1A2N1A4G2} \vee \cancel{K1A2N1A4M5} \vee \cancel{K1A2N1A2M5} \vee K1A2V4A2M5 =$$
$$G3A2N1A2M5 \vee G3A2V4A2M5 \vee K1A2V4A2M5$$

Iš pirmos išraiškos matyti 2 galimos rungtynių baigtys: $\left[\begin{array}{l}(N1, A2, G3, V4, M5, K6)\\(N1, A2, G3, K4, M5, V6)\end{array}\right.$

.

Iš antros išraiškos matyti dar 2 galimos rungtynių baigtys: $\left[\begin{array}{l}(K1, A2, G3, V4, M5, N6)\\(N1, A2, G3, V4, M5, K6)\end{array}\right.$.

Iš trečios išraiškos matyti dar 2 galimos rungtynių baigtys: $\left[\begin{array}{l}(K1, A2, G3, V4, M5, N6)\\(K1, A2, N3, V4, M5, G6)\end{array}\right.$.

Dalis variantų sutampa ir lieka tik 4 galimi rungtynių baigties rezultatai:

$$\left[\begin{array}{l}(N1, A2, G3, V4, M5, K6) \\ (N1, A2, G3, K4, M5, V6) \\ (K1, A2, G3, V4, M5, N6) \\ (K1, A2, N3, V4, M5, G6)\end{array}\right.$$