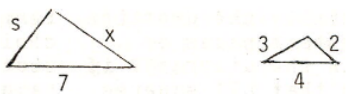
Moksleiviai dažnai neatsimena, kaip spręsti uždavinius, kuriuos jie mokėsi spręsti prieš kelias pamokas, o mokytojai dažnai nustemba, kaip tokių lengvų uždavinių galima neišspręsti. Supaprastintas šio reiškinio paaiškinimas būtų tai, jog matematikos mokymosi sėkmingumas priklauso ne vien nuo ilgalaikio autoritariniu būdu mokomų procedūrų atlikinėjimo tol, kol jos yra įsisavinamos, bet ir nuo įvairių mąstymo būdų, suderintų su besimokančiojo abstraktaus mąstymo sugebėjimais, taikymo mokymosi metu (G. Harel, 2008). Toks paaiškinimas skatina kelti daugybę klausimų apie abstraktų mąstymą:

- Kaip greitai įvertinti moksleivio abstraktaus mąstymo gebėjimus?
- Kiek mokantis spręsti konkrečius matematinius uždavinius rezultatus nulemia atkaklus darbas, o kiek abstraktaus mąstymo gebėjimai?
- Kaip atrodo uždaviniai, kuriuose abstraktaus mąstymo gebėjimų reikia labiausiai?
- Ar galima abstraktaus mąstymo gebėjimus ugdyti pamokose?

Atsakydamas į minėtus klausimus remsiuosi medžiaga iš šio straipsnio. Pagrindinis šio straipsnelio motyvas - pasiūlyti kuo patikimesnį testą, skirtą įvertinti abstraktaus mąstymo lygį.

Matematiniai uždaviniai, reikalaujantys abstraktaus mąstymo

Kaip tokių uždavinių iliustraciją pateiksime keletą mūsų 5 - 9 klasės lygio uždavinių ir Amerikos koledžuose studijuojančių pirmakursių sprendimų.

1. 

   Abu pavaizduoti trikampiai yra panašūs. Raskite kraštinės s ilgį.

   Studento sprendimas: $s \leftrightarrow 2, 7 \leftrightarrow 4, x \leftrightarrow 3$. Kadangi $2:4:3$, tai $s:7:x$ arba $5:7:6$. Vadinasi, $s = 5$

2. Tarkime, kad jūsų mokytojui yra 40 metų, o jums 18 metų. Kiek procentų esate jaunesnis už savo mokytoją?

   Studento sprendimas: $\frac{18}{40} = 0.45 \times 100 = 45\%$ jaunesnis.

   Kito studento sprendimas: $\frac{40}{100} \times \frac{18}{x} = \frac{720}{100} = 7.2\%$

3. Žiurkė, esanti tam tikrame labirinte, pereina kelią, sudarytą iš keturių išsišakojimų. Kiekviename išsišakojime ji gali pasirinkti tik sukti kairėn arba sukti dešinėn. Vienas iš šių kelių galėtų būti pažymėtas DDKK, kas reiškia, kad pirmąsyk žiurkė suks dešinėn, antrąsyk dešinėn, po to du kartus į kairę. Naudodami šį žymėjimą užrašykite visus kelius, kuriais galėjo eiti žiurkė

   Studento sprendimas: KKKK, KKDD, KDKD, KKKD, KDDK, KDDD, DDKK, DKDK, DDDK, DKKD, DKKK, DDDD (12 kelių).

Šie sprendimai atspindi tam tikrus abstraktaus mąstymo gebėjimų trūkumus, tokius kaip nepilną proporcingų dydžių suvokimą ir visų galimų variantų perrinkimą (Inhelder ir Piaget, 1958). Piaget mąstymo raidos teorija numato tam tikrus rodiklius, pagal kuriuos galima atskirti abstraktaus mąstymo gebėjimus turinčius moksleivius nuo turinčių vien tik konkretaus mąstymo gebėjimus. Pagal šią teoriją mąstymas pereina 4 fazes, iš kurių paskutiniosios yra vadinamos konkrečių operacijų ir formalių operacijų fazėmis. Nagrinėjamų mokyklinių uždavinių sąlygos buvo parinktos tiksliai taip, kad pagal šią klasifikaciją atskirtų konkrečių operacijų ir formalių operacijų fazes.

Testo klausimai

L. Copes (1975), daug kur remdamasis J. D. Herron (1975) darbais aprašo užduotis, kurias dažniausiai geba atlikti tik moksleiviai, pasiekę paskutiniąją formalių operacijų mąstymo fazę. Čia pateiksime šiek tiek pakoreguotą šių užduočių sąrašą. Skliausteliuose esantys duomenys reiškia, jog buvo surengta baigusių mokyklą dalyvių apklausa, ir nurodo vietą, datą, dalyvių skaičių ir teisingų atsakymų procentinę dalį.

1. (1944m., York University, Torontas, <61%) Įsivaizduokite, jog rankose suspaudžiate molinį rutulį ir pakeičiate jo formą. Nustatykite, ar pasikeis:

   a) Molio kiekis.
   b) Rutulio svoris.
   c) Rutulio tūris.

2. (1973m., University of Oklahoma, 185, 72%) Abu rutuliai yra vienodo tūrio. Kuris rutulys išstums (iš sklidino indo) daugiau vandens: sunkesnis ar lengvesnis?

3. (1944m., York University, Torontas, <63%) Žinoma, kad pasibaigus antram pasauliniui karui dalis negailestingų vyrų susilaukė žiaurios mirties. Kadangi Heidrichas buvo vienas negailestingiausių fašistų budelių, tai (*užbaikite sakinį*):

   - Heidrichas, fašistų budelis, susilaukė žiaurios mirties.
   - Heidrichas galbūt susilaukė žaurios mirties.
   - Heidrichas nesusilaukė žiaurios mirties.
   - Nei vienas iš šių teiginių nėra logiškai teisingas.

4. Žinoma, kad visi mokytojai yra pedagogai. Įvardykite, kuris teiginys teisingas:

   a) Visi pedagogai yra mokytojai.
   b) Kai kurie pedagogai yra mokytojai.
   c) Nėra pedagogų, kurie nebūtų ir mokytojai.

5. Pateikite po pavyzdį, kaip apskaičiuotumėte šiuos dydžius (be matavimo prietaisų): greitį, pagreitį, plotą ir tūrį.

6. Keturi draugai valgė ledus. Mikas suvalgė daugiau nei Tadas, Jonas suvalgė daugiau nei Vytas, Jonas suvalgė mažiau nei Tadas. Išrikiuokite berniukus nuo suvalgiusio daugiausiai iki suvalgiusio mažiausiai.

7. Moneta yra metama 4 kartus. Surašykite visas įmanomas šio eksperimento baigtis (baigties užrašymo pavyzdys: SHHS).

8. Kitą savaitę iš 5 galimų miestų A, B, C, D ir E aš nusprendžiau aplankyti tris. Surašykite visus galimus mano pasirinkimus (pasirinkimo užrašymo pavyzdys: ACE).

9. Restoranas siūlo 4 skirtingų rūšių kavas, kurias pažymėkime skaičiais 1, 2, 3 ir 4. Aš nusprendžiau 4 artimiausias dienas išbandyti po kiekvieną prieš tai nebandytą šio rinkinio kavą, tačiau pirmą dieną 2 ir 4 kavos bandyti nenoriu. Surašykite visas galimas eilės tvarkas, pagal kurias aš galiu šias kavas išbandyti (eilės tvarkos užrašymo pavyzdys: 3241).

10. Duotas reiškinys $\frac{1}{x}$. Nustatykite kaip kinta šio reiškinio reikšmė, kai x reikšmė didėja?

Papildomi 5 - 8 klasių lygio klausimai, kuriuos siūlo Melvin C. Thornton (1982m.):

1. Ant stalo padėti du buteliukai: vienas 3 decimetrų aukščio, o kitas 5 decimetrų. Aukštesnio buteliuko šešėlis yra nutįsęs 7 decimetrus. Kiek nutįsęs žemesnio buteliuko šešėlis?

2. Keliais procentais sumažėjo dydis, jei jo reikšmė sumažėjo nuo 8 ligi 6?

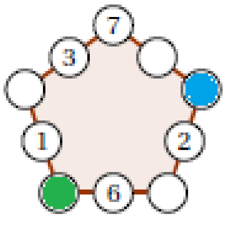
Mano siūlomi klausimai:

1. Automobilio greitis 25 proc. didesnis už motociklo greitį. Apskaičiuokite motociklo greitį, jei automobilio greitis yra 85 km/h. (2014m. neprivalomas VBE, 50%)

2. Kubo kraštines padidinome trigubai. Kaip pasikeitė šio kubo tūris (panašus klausimas užduotas 2015m. neprivalomame VBE, 74%)

3. Duomenų rinkinyje yra 2000 skaičių. Programuotojas užrašė programą, kuri kiekvieną iš šių skaičių padidina 10 vienetų. Kaip paleidus jo sukurtą programą pasikeičia šių 2000 skaičių suma?

4. Adelė įrašė po skaičių į 5 iš 10 skrituliukų kaip pavaizduota paveikslėlyje. Ji nori įrašyti skaičius į likusius 5 skrituliukus taip, kad kiekvienoje penkiakampio kraštinėje suma gautųsi ta pati. Ar galite nustatyti, kokį skaičių ji turi įrašyti į žalia spalva nuspalvintą rutuliuką? Jei taip, tai ar žinote, ką ji turi įrašyti į mėlyna spalva nuspalvintą rutuliuką?



Teorinės žinios, pagal kurias buvo sudaryti testo klausimai

Daugumos pasaulio šalių šiandienės mokyklinės matematikos ugdymo sistemos susiklostė vykdant reformas, kurių pradžia siejama su „naująja matematika“ (angl. new math) vadinamu judėjimu. Praėjusio šimtmečio šeštame ir septintame dešimtmečiais vyko svarbūs pokyčiai Vakarų šalių ekonomikoje ir kultūroje. Buvo tikima, kad tolesniam ekonominiam ir kultūriniam vystymuisi būtini aukštos kvalifikacijos darbuotojai ir mokslininkai. Kitas svarbus faktorius buvo konkurencija su tuometine Sovietų Sąjunga, kuri 1957 m. spalio 4 d. į kosminę erdvę sėkmingai paleido dirbtinį žemės palydovą. Baimė tapti technologiškai ir kariniu atžvilgiu atsilikusiomis valstybėmis paskatino jas peržiūrėti matematikos ir gamtos mokslų mokymą.

Antru svarbiu reformas paskatinusiu faktoriumi buvo pačios matematikos evoliucija. Grupė prancūzų matematikų, pasivadinusi *N. Bourbaki* slapyvardžiu, sugebėjo suvienyti atskiras matematikos sritis aibių teorijos pagrindu bei išplėtoti aksiomatinį metodą. Tai padėjo susiformuoti požiūriui į matematiką kaip į mokslo kalbą. Buvo tikima, kad matematika yra reikalinga visose srityse.

Trečias „naujosios matematikos“ judėjimo atsiradimo faktorius buvo pokyčiai pedagogikoje susiję su šveicarų psichologo *J. Piaget* darbais. Jis įžvelgė analogiją tarp skaičiaus sąvokos formavimosi mechanizmo vaiko sąmonėje ir matematinių struktūrų. Be to, Piaget akcentavo aktyvų mokymosi būdą, o *N. Bourbaki* stiliaus matematika atrodė labai tam tinkama.

Šveicaras Jeanas Piaget - vienas žymiausių XX a. raidos psichologų, pirmasis sistemingai tyrinėjęs kognityvųjį vystymąsi. Iki jo dauguma žmonių, užmiršę savo ikimokyklinius metus, manė, jog vaikai tiesiog mažiau žino, negu suaugusieji. Savo pirmajame darbe Piaget uždavinėjo vaikams klausimus, tikėdamasis nustatyti, kokio amžiaus vaikai gali atsakyti į pateiktus klausimus teisingai. Jam kilo klausimas, kodėl vieno amžiaus vaikai negali atsakyti į tam tikrą klausimą, o teisingai atsako į jį tik vėliau, būdami vyresni. Vėliau paaiškėjo, jog atsakymus į klausimus nulemia kognityvinė vaikų vystymosi raida. Psichologo nuomone, vaikas, pereidamas iš vienos su amžiumi susijusios stadijos į kitą, patiria pokyčių protrūkius, kuriuos seka stabilumo periodai. Kiekvienai stadijai būdingos skirtingos ypatybės, kurios lemia specifines mąstymo rūšis. Šios keturios stadijos yra:

- **Sensomotorinė stadija** (dažniausiai iki 2 m.). Pasaulis patiriamas pojūčiais ir veiksmais (žiūrint, liečiant, kramtant, sugriebiant)

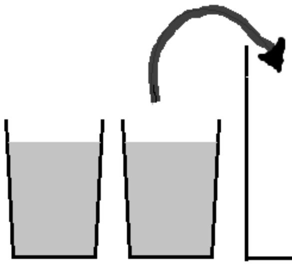
- **Priešoperacinė stadija** (maždaug nuo 2 iki 6 metų). Daiktus ženklina žodžiai ar vaizdai, bet logiškai nesamprotaujama.

- **Konkrečių operacijų stadija** (maždaug nuo 7 iki 11 metų). Logiškai mąstoma apie konkrečius įvykius; suprantamos konkrečios analogijos ir atliekamos aritmetinės operacijos.

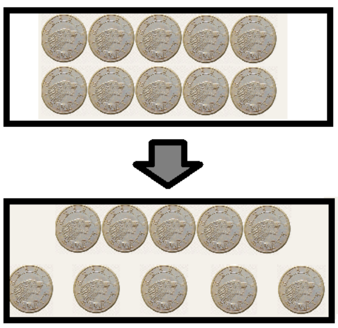
- **Formaliųjų operacijų stadija** (dažniausiai nuo 12 m.). Mąstoma abstrakčiai. Keliamos hipotezės, domimasi, kodėl tam tikri gamtoje esantys reiškiniai vyksta, imamas suvokti priežasties - pasekmės ryšys.

Šiuolaikiniai mokslininkai raidą laiko esant tolydesnę negu manė Piaget. Susipažinę su šiomis stadijomis aptarsime keletą į jo tyrimus įėjusių ir su vaikais atliktų uždavinių.

1. *Iš pradžių ant stalo yra padėtos dvi vienodos stiklinės, kuriose yra po lygiai vandens ir viena, aukštesnė ir siauresnė, tuščia. Apklausėjas paklausia vaiko, ar jose yra po lygiai sulčių. Gavęs teigiamą atsakymą jis perpila iš pilnos stiklinės vandenį į tuščią ir pakartoja tą patį klausimą.*



2. *Iš pradžių ant stalo yra padėtos dvi vienodos eilės monetų po penkias monetas. Apklausėjas paklausia vaiko, ar eilėse yra po lygiai monetų. Gavęs atsakymą jis antroje eilėje monetas perdeda taip, kad monetų išsidėstymas būtų platesnis ir pakartoja tą patį klausimą.*



3. *Iš pradžių stalo pusėje, prie kurios sėdi vaikas, yra padėtas vienas sausainis, o kitoje pusėje du sausainiai. Apklausėjas paklausia vaiko ar tokios dalybos yra sąžiningos. Tada perlaužia vaiko pusėje esantį sausainį ir pakartoja klausimą.*
4. *Mintinai atsakykite, kiek bus 4+5. Dabar mintinai atsakykite, kiek 9 - 5.*
5. *Mintinai atsakykite, kiek bus 3x+x?*
6. *Birutė yra aukštesnė už Augustą, o Dominykas aukštesnis už Birutę. Kuris iš jų yra aukščiausias?*
7. *Apklausos dalyviui, sėdinčiam prie stalo, duodame skirtingo ilgio siūlus, prie kurių galima pririšti skirtingo svorio daiktus ir paklausiame, nuo ko labiausiai priklauso švytuoklės svyravimo dažnumas: nuo siūlo ilgio, daikto svorio ar pradinio paleidimo greičio.*

Pirmose trijose situacijose apklausiami vaikai į pirmą klausimą atsako teisingai. Tačiau į antrą klausimą teisingai gebama atsakyti tik kognicijai pasiekus konkrečių operacijų stadiją. Priešoperacinės stadijos vaikams atrodys, kad trečioje stiklinėje sulčių yra daugiau, antroje eilėje monetų yra daugiau ir kad dalybos yra sąžiningos. Šiuos atsakymus jie paaiškina teiginiais „sulčių daugiau, nes stiklinė aukštesnė", „monetų daugiau, nes jų eilė platesnė" ir „dvi sausainio dalys yra tiek pat, kiek du sausainiai". Iš šių eksperimentų galime suprasti, kad vaikai dažnai gali pastebėti tik vieną lyginamų objektų savybę (ilgį, plotį, kiekį, dydį), mano, kad keičiantis daikto formai, keičiasi ir jo kiekis. Ketvirta situacija parodo, kad priešoperacinėje stadijoje vaikai negali apgręžti atliekamos operacijos ir rezultatą $4 + 5$ apskaičiuoti užtruks tiek pat laiko, kiek rezultatą 9 - 5. Įžengus į kitą stadiją atvirkčio veiksmo atlikimas bus suvoktas ir atsakymas gautas iškart.

Likę trys klausimai iliustruoja vaiko kognicijos perėjimą į formalių operacijų stadiją. Priešingu atveju į 5 klausimą atsakyti mintyse yra per sunku. Savo užsiėmimuose su moksleiviais ne kartą esu pastebėjęs, kad vaikas gali atsakyti tada uždavus konkretizuotą klausimą „Kiek bus 3 obuoliai + obuolys?" ir paaiškinus, jog x - tai bet kokio daikto ar dydžio žymėjimas. Į 6 klausimą mintinai pilnai atsakyti jis taip pat negali: jam reikia nusibraižyti vaikų ūgius popieriuje arba atsakymas gaunamas spėjimo būdu. Norint atsakyti į paskutinį klausimą, paprasčiausia yra pasirinkti bet kurį dydį (ilgį, svorį arba paleidimo greitį) ir jį pakeitus stebėti, ar pasikeičia dažnumas. Formalių operacijų stadijoje procesas atliekamas teisingai, o kitu atveju vaikai nėra tokie nuovokūs, dydžius keičia atsitiktine tvarka arba po kelis iš karto ir negali nustatyti teisingo atsakymo.

Šioje stadijoje atsiranda sugebėjimai kelti prielaidas ir svarstyti apie galimas išvadas, leidžiantys vaikui konstruoti savą matematiką. Be to, vaikai paprastai pradeda vystyti abstrakčius minčių modelius, kuriuose samprotavimas vykdomas naudojant simbolius nenaudojant apčiuopiamų duomenų. Pavyzdžiui mokiniai gali išspręsti lygtį $x + 2x = 9$ nesiremdami mokytojo padiktuota sąlyga kaip antai *„Tomas suvalgė tam tikrą kiekį saldainių, o jo sesė suvalgė du kartus daugiau. Abu kartu jie suvalgė 9 saldainius. Kiek saldainių suvalgė Tomas?"*. Samprotavimo įgūdžiai šioje stadijoje remiasi mentaliniais procesais, dalyvaujančiais loginių argumentų apibendrinime ir įvertinime (Anderson, 1990). Trumpai apibūdinsime svarbiausias šių procesų savybes.

- **Paaiškinimas** padeda moksleiviams atpažinti ir išnagrinėti uždavinio detales ir leidžia moksleiviams iššifruoti visą reikiamą informaciją, kurios prireiks sprendimui. Skatindami moksleivius išrinkti svarbią informaciją iš uždavinyje nurodytų teiginių mokytojai padeda jiems stiprinti matematinį supratimą.

- **Gebėjimas kelti išvadą** skirstomas į dedukcinį ir indukcinį samprotavimą. Dedukcinis samprotavimas leidžia taikyti apibendrintas sąvokas ar taisykles konkretiems pavyzdžiams, o indukcinis - pastebėti konkrečių objektų ar įvykių panašumus ir skirtumus, išvesti jiems bendras taisykles.

- **Įvertinimas** padeda moksleiviams nustatyti kriterijus, pagal kuriuos galima įvertinti sprendimo logiškumą. Mokytojai iš anksto apibrėžia taisykles, kuriomis remdamiesi moksleiviai gali nustatyti, ar sprendimas teisingas. Ši savybė reikalinga kelti prielaidoms apie būsimus įvykius ir svarstyti apie keliamų išvadų pagrįstumą.

- **Pritaikymas** padeda moksleiviams sieti matematines sąvokas su realaus pasaulio pavyzdžiais. Vienas iš pavyzdžių galėtų būti racionaliosios lygties $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$ taikymas spęsti uždaviniui „Nepatyręs skynėjas vagą braškių nuskina per 6 valandas, o patyręs per 4. Per kiek laiko jie nuskins vagą kartu?"

Susipažinus su Piaget intektualinio vystymosi teorija, tampa aktualu, ar kognityviniai procesai gali būti paspartinti tinkamos mokomosios veiklos. Iš tiesų, pokyčiai tampa įmanomais tik tada, kai mokinys aktyviai sąveikauja su jį supančia fizine ir socialine aplinka, o darbas klasėje tėra to sąveikavimo dalimi. Tas pats atsakymas atsispindi ir Piaget (1964) pastebėjimuose:

„Nors patirtis yra būtina intelektualinio vystymosi dalis, tačiau galime atsidurti iliuzijoje, kad patirties suteikimas subjektui yra pakankamas jam atskirti struktūras. To nepakanka. ***Subjektas turi būti aktyvus, gebėti keisti daiktus ir atrasti struktūras savo paties sąveikoje su objektais."***

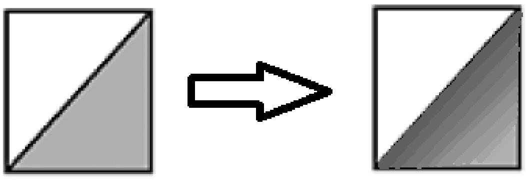
Tolimesnis teorinių žinių taikymas

Aprašytą teoriją pailiustruosime vieno silpnus gebėjimus turinčio šeštoko atvejo analize.

Pirmas pratimas mokiniui. Atlik veiksmus su trupmenomis, kuriuos neseniai ėjote: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$.
Mokinio sprendimas.

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}$
2. $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{21}{49}+\frac{14}{49}=\frac{35}{49}$
3. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$

Antras pratimas mokiniui. Sugalvok tekstinį uždavinį, kuriame reikia dauginti du skaičius.
Mokinio sprendimas. Vienos mašinos greitis yra 60, kitos 140. Sudauginę gausime 8400.
Signalinis klausimas. Kur gyvenime tau prireikė naudoti daugybą?
Mokinio atsakymas. Neprireikė.
Trečias pratimas mokiniui. Kas įvyks, jei paveikslėlyje parodytą užtušuotą dalį padidinsime tris kartus? Pavaizduok tai sąsiuvinyje.
Mokinio sprendimas.

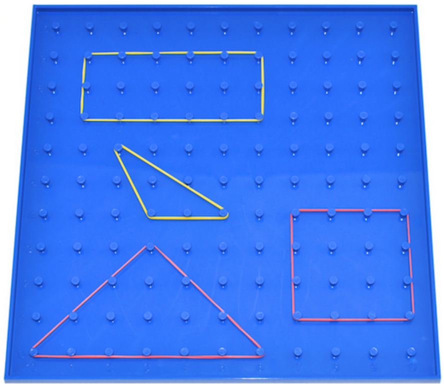


Remiantis pateikta Piaget vystymosi teorija išaiškėja, kodėl šis šeštokas pateikė tokius atsakymus. Pirma, moksleivis buvo įsitikinęs, jog neatrado matematinių struktūrų, kuriose jam tektų susidurti su daugyba. Antra, jo suvokimas nebuvo pakankamas atskirti saryšiams tarp stebimų objektų savybių. Tą patvirtina du pavyzdžiai: pirma, moksleivis daugina du mašinos greičius, kai prasmę turi tik jų sudėtis ir lyginimas; antra, moksleivis painioja juslėmis suvokiamą ryškumo savybę su figūros didumo savybe. Dėl panašių priežaščių gerokai abstraktesni objektai, tokie kaip trupmenos, o tuo labiau jų saryšiai, moksleiviui bus nesuprantami.

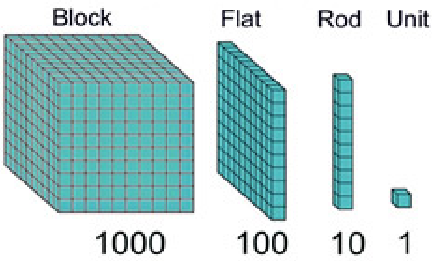
Tam, kad mokiniai įgytų supratimą apie abstrakčius objektus ir jų matematines operacijas (pereitų į formalių operacijų stadiją), konkrečių operacijų stadijos metu jiems būtina pirmiausia įgyti kuo daugiau patirties dirbant su konkrečiais objektais. Tam mokytojai gali naudoti įvairias mokomąsias priemones (*pav. kitame puslapyje*).

(a) Tangram

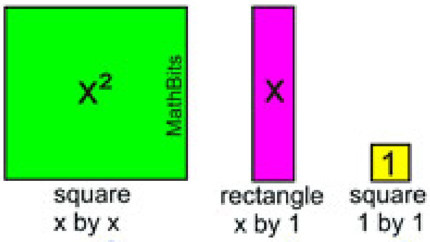
(b) Pattern blocks



(c) Geoboard



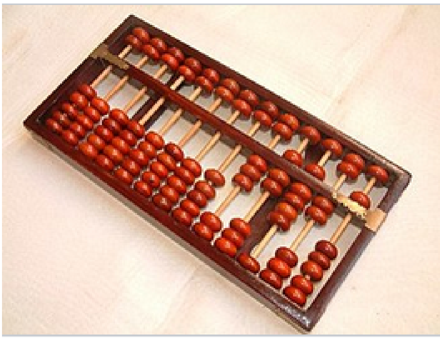
(d) Base 10 blocks



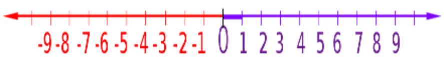
(e) Algebra blocks

(f) Cuisenaire rods

(g) Algebra cubes

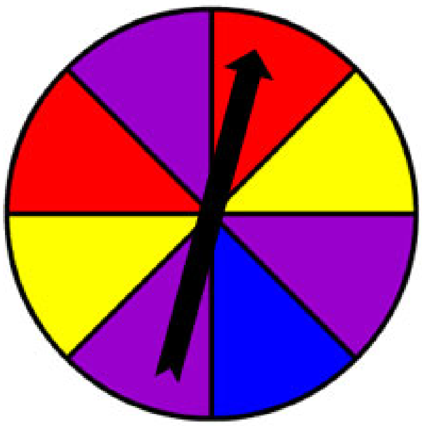


(h) Abacus



(i) Number line

(j) Dice



(k) Spinners

(l) Counters