

TRUPMENOS

Įprasta situacija mokantis trupmenas su moksleiviais:

- $\frac{5}{12}$ yra skaitoma „penkios dvyliktosios“. Kaip manai, kas yra ta dvyliktoji?
- Nežinau.
- Gaila... Ši dalyką labai svarbu atsiminti. Dvyliktoji yra viena dalis, gauta daiktą dalijant į 12 lygių dalių. Štai stačiakampis, kurio matmenys yra 4×6 . Kiek langelių jį sudaro?
- 24.
- Ar galėtum pasakyti, kiek langelių sudaro $\frac{5}{12}$ šio stačiakampio?
- [Po ilgesnės pauzės] Ne.
- Pabandome iš naujo. Šįsyk neklausiu, kas būtų $\frac{5}{12}$ stačiakampio, o paklausiu, kas būtų viena dvyliktoji stačiakampio?
- Neatsimenu.
- Bet juk aš minėjau, kad ši dalyką labai svarbu atsiminti. Viena dvyliktoji yra ta dalis, kurią gauname stačiakampį dalydami į 12 lygių dalių. Taigi, arba dabar galėtum parodyti, kaip atrodo šis dalis stačiakampyje?
- Taip. Štai...

Pasibaigus pamokai suskaičiuoti $\frac{3}{20}$ tam tikro duoto skaičiaus dalis pavyksta. Po savaitės pavyksta tik davus užuominą, kad dvyliktoji - tai viena dalis iš dvidešimt. Po mėnesio - vėl nebepavyksta.

Kodėl trupmenas mokytis taip sunku? Mano atsakymas būtų: trupmenų vaizdinių suvokimų yra daug, dalis jų konfliktiški, dalis abstraktūs, todėl besimokantieji dažnai apsistoja ties simboliu vaizdinių suvokimu, kuris yra greitai išblėstantis atmintyje. Taip prarandamos turinio žinios ir jų siejimas su gyvenimu, kas paskatina tolimesnį mokyklinio matematikos kursą suvokti tik simboliškai, o ne konkrečiai ar abstrakčiai. Norėdami įvertinti trupmenų mokymosi sunkumus turime būti susipažinę su skirtingais jų vaizdiniais, konfliktinėmis dalimis ir kaip jie persidengia bei išsiveda vienas iš kito. Trumpa iliustracija, pailustruojanti trupmenų vaizdinių suvokimų gausą (Wu ir kiti 2010, 2011):

1. Trupmena yra dalmuo, gautas vieną sveikąjį skaičių dalijant iš kito sveikojo skaičiaus.
2. Trupmena yra viena ar kelios lygios vieneto (ar visumos) dalys.
3. Trupmena yra dviejų sveikųjų skaičių santykis.
4. Trupmena yra dydis dalies, gautos objektą (picą) dalinant į lygis dalis.
5. Trupmena yra taškas skaičių spindulyje.

Vienas iš svarbiausių trupmenos sąvokos supratimo tyrinėtojų buvo Thomas Kieren. Savo straipsnyje “The Rational Number Construct – Its Elements and Mechanisms” (1980), Kieren išskyrė penkis trupmenos sąvokos subkonstruktus: **whole/part** (dalis - visuma), **quotients** (dalmenys), **measures** (matavimai), **operators** (operatoriai) ir **ratios** (santykiai)

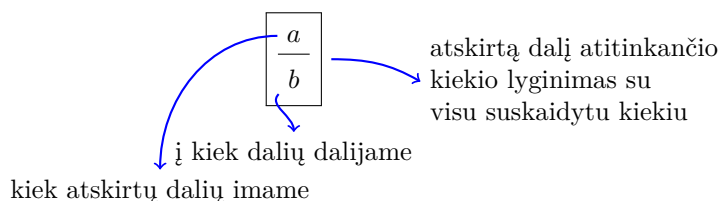
Remsiuos Vaivos straipsniu bei subkonstruktų apžvalga, kad įvertinčiau galimų vaizdinių tarpusavio ryšį ir kaip jie turėtų būti pristatomi mokyklose.

Trupmenų subkonstruktai

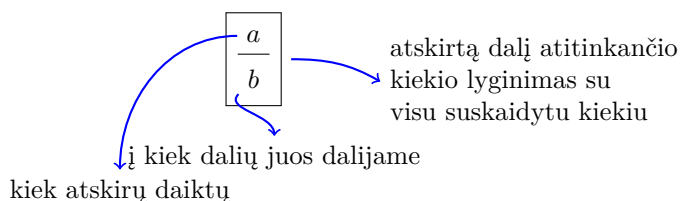
Part-whole (dalis - visuma)

Šiame subkonstrukte trupmena yra viena ar kelios lygios vieneto arba visumos dalys. Kol kas nagrinėjimi tik atvejai, kai skaitiklis nedidesnis už vardiklį.

Kiekio trupmenos



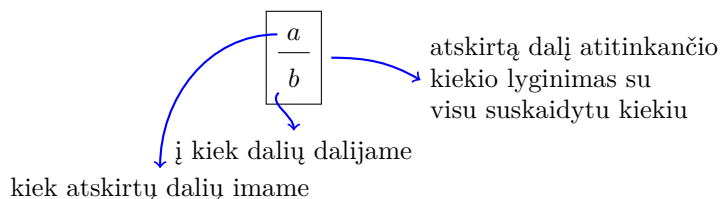
Dalijimo trupmenos



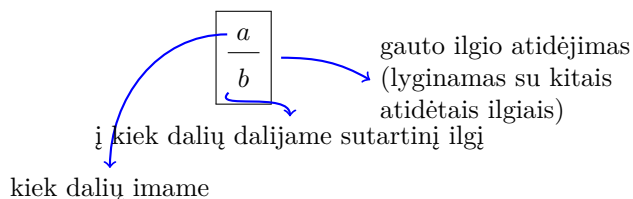
Measurement (matavimas)

Šiame subkonstrukte trupmena yra glaudai susijusi su dviem sąvokomis: skaičius, atitinkantis tašką skaičių ašyje, ir skaičius, atitinkantis atkarpos ilgį. Šis matavimo vaizdinys išvestas iš kiekinio trupmenos vaizdinio. Tai paaiškinama remiantis tokiu kategorizavimu: lyginimo atskiras tipas yra ilgių skaičių ašyje atidėjimas, o dalių atskiras tipas yra ilgiai. Žemiau pateikiamas vaizdinių palyginimas.

Kiečio trupmenos vaizdinys



Išvestas vaizdinys



Quotient (dalmuo)

Šiame subkonstrukte trupmena interpretuojama kaip dalybos rezultatas. Taigi trupmenos vaizdinys yra išvestas dalijimo trupmenos vaizdinio. Verta paminėti, jog dalijimo trupmenos vaizdinys persidengia su dalybos vaizdiniu. Dažnai remiamasi konkrečiu vaizdiniu, kuomet dalmuo nurodo kiekvienam asmeniui tenkantį kiekį, o daliklis - asmenų, kuriems dalinama, kiekį, tačiau siekiama, kad trupmenos vaizdinio suvokimas turi tapti abstrakčiu.

Operation (operacija)

Šiame vaizdinyje trupmena yra susijusi su procesu, vykstančiu keičiant skaičių, objektą ar aibę, o šio pokyčio rezultatas priklauso nuo trupmenos skaitiklio ir vardiklio. Taigi trupmena yra transformavimo priemonė (į tiesės/plokštumos kito dydžio segmentus ar didesnę/mažesnę aibės elementų kiekį).


Ratio (santykis)

Šis subkonstruktas išreiškia dviejų dydžių palyginimą. Lyginimo rezultatas yra palyginimo rodiklis, simbolizuojantis proporciją.

0.1 Visų subkonstruktų apžvalga

Fraction subconstructs that appeared in the Asian curricula and in EngageNY

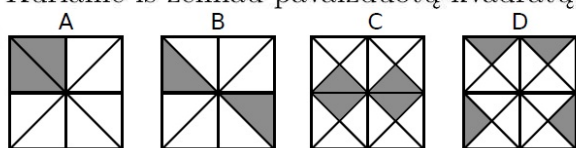
Grades	Japanese	Korean	Taiwanese	EngageNY (US)
2	Part-whole			Part-whole
3	Part-whole Measure	Part-whole Measure Operator	Part-whole Measure	Part-whole Measure
4	Part-Whole Measure	Part-whole Measure Quotient	Part-whole Measure Quotient	Part-Whole Measure Operator
5	Part-Whole Quotient Measure	Part-whole Measure Quotient Operator	Part-whole Measure Quotient Operator	Part-Whole Measure Quotient Operator
6	Part-Whole Operator Ratio	Part-whole Measure Operator Ratio	Part-Whole Measure Quotient Ratio	Part-Whole Measure Operator Ratio

Kieren's Fraction Sub-Constructs		
Sub-construct	Meaning	Example
Part-whole relationship	To partition a continuous or discrete object/set into equal parts	 Three fourths
Quotient	To divide by a given number of parts	$\frac{3}{4}$ three divided into four parts
Measure	To assign a number to a region using iterations of a fraction unit	$\frac{3}{4}$ is three iterations of $\frac{1}{4}$ unit
Ratio	The quantitative comparison of two measures	$\frac{3}{4}$ may describe the number of girls compared to the number of boys in a group
Operator	To shrink or stretch a given quantity.	A line is 12 cm long. Draw a line that is $\frac{3}{4}$ of this line.

Trupmenų vaizdinius iliustruojantys uždaviniai (16)

11. Kuriame iš žemiau pavaizduotų kvadratų A, B, C, D nuspalvinto ploto dalis yra didžiausia?

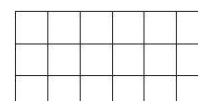
B2018



A) A B) B C) C D) D E) Visur tokia pat

8. Ignas spalvina pavaizduoto stačiakampio kvadratėlius. Trečdalį visų kvadratėlių jis nuspalvins mėlynai, pusę visų kvadratėlių – geltonai, o likusius – raudonai. Kiek kvadratėlių Ignas nuspalvins raudonai?

B2017



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

24. Nuvažiavus $\frac{5}{8}$ kelio, liko 54 km. Koks maršruto ilgis?

B2017

A) 120 km B) 140 km C) 144 km D) 160 km E) 192 km

2. Mikas supjaustė picą į keturias lygias dalis. Kiekvieną iš šių dalių jis padalijo į tris lygius gabalėlius. Kokią visos picos dalį sudaro vienas gabalėlis?

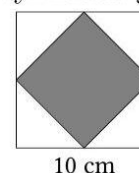
B2016

A) Trečdalį B) Ketvirtadalį C) Septintadalį D) Aštuntadalį E) Dvyliktadalį

5. Kotryna nubraižė kvadratą, kurio kraštinės ilgis yra 10 cm. Sujungusi kvadrato kraštinių vidurio taškus, ji gavo mažesnę kvadratą. Koks mažesniojo kvadrato plotas?

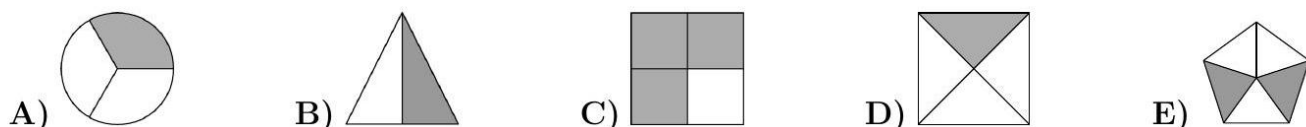
B2016

A) 10 cm² B) 20 cm² C) 25 cm² D) 40 cm² E) 50 cm²



1. Kurios figūros užtušuota lygiai pusė ploto?

B2015



6. Kuri iš šių trupmenų yra mažesnė už 2?

B2015

- A) $\frac{19}{8}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{21}{10}$ D) $\frac{22}{11}$ E) $\frac{23}{12}$

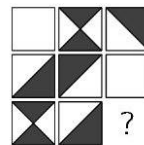
2. Tortas sveria 900 g. Paulius padalijo jį į 4 dalis. Didžiausia dalis sveria tiek, kiek likusios 3 kartu. Koks didžiausios dalies svoris?

B2014

- A) 250 g B) 300 g C) 400 g D) 450 g E) 600 g

11. Kuria plytele reikia papildyti dešinėje pavaizduotą figūrą iki kvadrato, kad jame viso tamsiojo ploto būtų tiek pat, kiek ir šviesiojo?

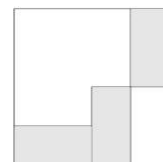
B2014



- A) B) C) D) E) Tai neįmanoma

25. Trys vienodi stačiakampiai yra kvadrato, kurio kraštinės ilgis 24 cm (žr. paveikslėlį). Kam lygus vieno stačiakampio plotas?

B2014



- A) 24 cm^2 B) 32 cm^2 C) 36 cm^2 D) 48 cm^2 E) 72 cm^2

23. Ūla nusipirko šokolado plytelę ir grįžusi namo dalį jos suvalgė. Į svečius užsukusi Alė suvalgė ketvirtadalį likusios dalies. Kartu jos suvalgė pusę šokolado plytelės. Kokią dalį visos šokolado plytelės suvalgė Alė?

B2013

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{12}$

B21. Gėrimas „Sveikata“ daromas iš citrinų, apelsinų ir morkų sulčių. Šiame gėrime citrinų ir apelsinų sulčių santykis yra 1 : 2, o apelsinų ir morkų — 3 : 1. Kuris iš žemiau parašytų teiginių yra teisingas?

B2012

- A) Gėrime „Sveikata“ citrinų sulčių daugiau nei apelsinų
B) Gėrime „Sveikata“ apelsinų sulčių daugiau nei citrinų ir morkų sulčių kartu
C) Gėrime „Sveikata“ citrinų sulčių daugiau nei apelsinų ir morkų sulčių kartu
D) Gėrime „Sveikata“ morkų sulčių daugiau nei citrinų ir apelsinų sulčių kartu
E) Citrinų sulčių tame gėrime yra mažiausiai

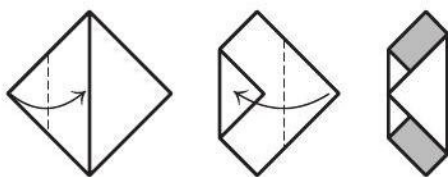
B24. Tango šoka vyras su moterimi. Vakarėlyje buvo ne daugiau kaip 50 dalyvių. Vienu metu $\frac{3}{4}$ vyrų šoko su $\frac{4}{5}$ moterų. Kiek žmonių šoko tuo metu?

B2012

- A) 20 B) 24 C) 30 D) 32 E) 46

B28. Kvadrato formos 64 cm^2 ploto popieriaus lapą du kartus perlenkiame paveikslėlyje parodytu būdu.

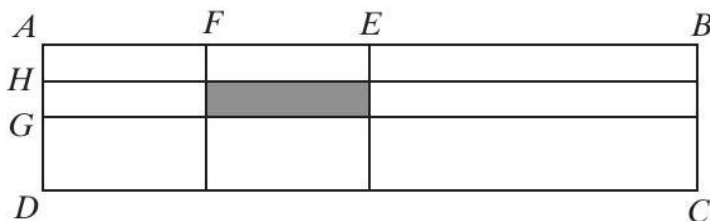
B2012



Kokia yra abiejų patamsintų stačiakampių plotų suma?

- A) 10 cm^2 B) 14 cm^2 C) 15 cm^2 D) 16 cm^2 E) 24 cm^2

- B15.** Stačiakampio $ABCD$ (žr. pav.) kraštinė $AB = 4$ m, $BC = 1$ m. Taškas E yra atkarpos AB vidurys. Taškas F yra atkarpos AE vidurys. Taškas G yra atkarpos AD vidurys. Taškas H yra atkarpos AG vidurys. Koks užtušuoto stačiakampio plotas?



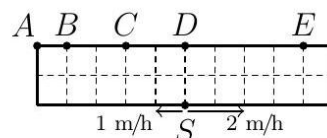
- A $\frac{1}{4}$ m² B 1 m² C $\frac{1}{8}$ m²
D $\frac{1}{2}$ m² E $\frac{1}{16}$ m²

- B23.** Kuris iš žemiau surašytų trejetų skaičių tiesėje reiškia tris taškus, iš kurių vienas yra vienodai nutolęs nuo kitų dviejų?

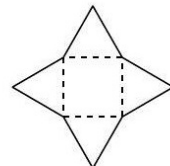
- A $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ B 12; 21; 32 C 0,3; 0,7; 1,3 D $\frac{1}{10}; \frac{9}{80}; \frac{1}{8}$ E 24; 48; 64

Vaizdinius, persidengiančius su trupmenų vaizdiniais, iliustruojantys uždaviniai (23)

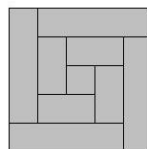
4. Sodas yra padalintas į lygius kvadratus. Dvi sraigės pradeda šliaužti iš taško S aplink sodą palei jo tvorą priešingomis kryptimis (žr. pav.). Viena sraigė šliaužia 1 metro per valandą greičiu (1 m/h), o kita – 2 metrų per valandą greičiu (2 m/h). Kuriame taške susitiks sraigės?
A) A B) B C) C D) D E) E



6. Paveikslėlyje pavaizduota žvaigždė, sudaryta iš keturių lygiakraščių trikampių ir kvadrato. Kvadrato perimetras lygus 36 cm. Koks yra žvaigždės perimetras?
A) 144 cm B) 120 cm C) 104 cm D) 90 cm E) 72 cm

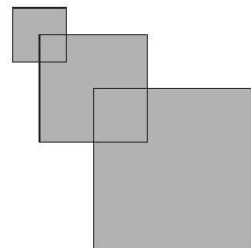


26. Jonas 8 cm pločio medinę lentą, pjaudamas skersai, supjaustė į 9 dalis – vieną kvadratinę ir 8 stačiakampes. Tada Jonas sudėjo visas dalis taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks buvo lentos ilgis?
A) 150 cm B) 168 cm C) 196 cm D) 200 cm E) 232 cm

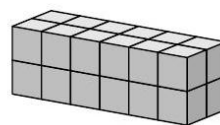


9. Kol Linas suvalgo 2 slyvas, Justas spėja suvalgyti 3 slyvas. Iš viso abu berniukai, valgę kartu, suvalgė 30 slyvų. Keliomis slyvomis Justas suvalgė daugiau už Liną?
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

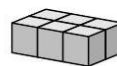
19. Trys kvadratai, kurių kraštinių ilgiai yra atitinkamai 2 cm, 4 cm ir 6 cm, nubraižyti taip, kad mažiausiojo kvadrato centras sutampa su viduriniojo kvadrato viršūne, o viduriniojo kvadrato centras – su didžiausiojo kvadrato viršūne (žr. pav.). Koks gautos figūros plotas?
A) 32 cm² B) 51 cm² C) 27 cm² D) 16 cm² E) 6 cm²



8. Jonas ir Paulius turi po tiek pat kubelių ir iš jų visų sustatė po stačiakampį bloką. Pirmame paveikslėlyje pavaizduotas Jono blokas, o antrame paveikslėlyje – pirmasis Pauliaus bloko sluoksnis. Kelių sluoksnių bloką sustatė Paulius?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



1 pav.



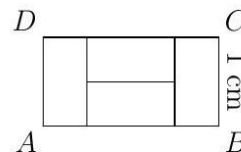
2 pav.

29. Senelis Vytautas nuo savo sodo medžių nuskynė 132 obuolius ir 204 kriaušes. Visus šiuos vaisius jis nori išdalyti vaikams, kiekvienam vaikui duodamas po tiek pat obuolių ir po tiek pat kriaušių. Kiek daugiausia vaikų senelis gali apdalyti vaisiais?

A) 4 B) 11 C) 12 D) 6 E) 17

13. Stačiakampį $ABCD$ paveikslėlyje sudaro 4 lygūs stačiakampiai. Koks yra AB ilgis, jei BC ilgis yra 1 cm?

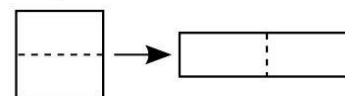
A) 4 cm B) 3 cm C) 2 cm D) 1 cm E) 0,5 cm



22. Giedrius nusipirko 3 knygas. Už pirmą knygą jis sumokėjo pusę savo santaupų ir 1 eurą. Už antrąją – pusę likusių pinigų ir 2 eurus. Trečioji knyga kainavo pusę to, kas liko nusipirkus dvi knygas, ir 3 eurus. Paaiškėjo, kad Giedrius išleido visas savo santaupas. Kiek kainavo 3 knygos?

A) 36 eurus B) 45 eurus C) 34 eurus D) 65 eurus E) 100 eurų

6. Kvadratas, kurio perimetras lygus 48, buvo padalytas į dvi dalis, iš kurių sudėtas stačiakampis (žr. paveikslėlį). Kam lygus to stačiakampio perimetras?



A) 24 B) 30 C) 48 D) 60 E) 72

10. Mažylis ir Karlsonas aptiko vazą saldainių. Karlsonas paėmė pusę saldainių ir, minutėlę pagalvojęs, dar 2 saldainius. Mažylis tuomet paėmė pusę likusiųjų. Galų gale vazoje liko 3 saldainiai. Kiek jų buvo iš pradžių?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

24. Ant kranto auga 60 medžių. Kas antras medis yra klevas, o kas trečias – arba klevas, arba uosis. Likusieji medžiai yra beržai. Kiek beržų ant kranto?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 24 E) 30

3. Vaikai išėjo pasivaikščioti. Kol Martynas padaro 9 žingsnius, Dovydas padaro 8, o Paulius – 7. Martynas per minutę padaro 90 žingsnių. Kiek žingsnių padarys visi vaikai kartu per 10 minučių truksiantį pasivaikščiojimą?

A) 240 B) 2013 C) 2400 D) 2700 E) 900

8. Vieną popietę Onutė praleido važiuodama dviračiu. Ji važiavo pastoviu greičiu, o jai pradedant ir baigiant pasivažinėjimą rankinio laikrodžio rodyklės buvo pavaizduotose padėtyse:



Kokioje padėtyje buvo laikrodžio minutinė rodyklė, kai Onutė buvo nuvažiavusi trečdalį kelio?

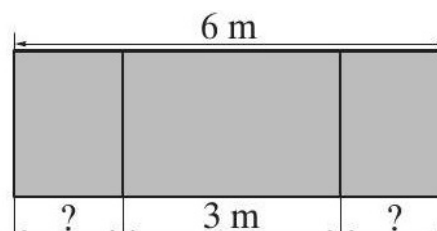
A) B) C) D) E)

14. Žvejys Matas apžiūrinėja laimikį. Jei jis būtų pagavęs tris kartus daugiau žuvų, tai turėtų dvylika žuvų daugiau nei turi. Kiek žuvų pagavo Matas?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

- B2. Pavaizduotos lentos plotis yra 6 m, vidurinėsios dalies – 3 m, o abi šoninės dalys yra vienodo pločio. Koks šoninės dalies plotis?

A) 1 m B) 1,25 m C) 1,5 m D) 1,75 m E) 2 m

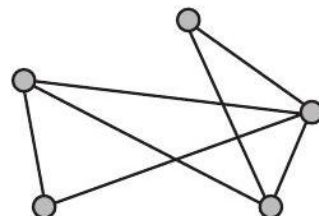


- B3.** Iš 4 degtukų sudarytame kvadrato Salomėja sutalpina 4 monetas (žr. pav.).
 B2012 Kiek mažiausiai degtukų jai reikės sudaryti kvadrato, į kurį be persidengimų tilptų 16 tokių monetų?
 A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

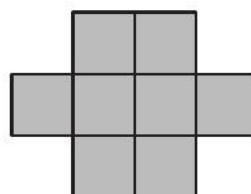


- B4.** Lėktuvo sėdynių eilės sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 25, praleidžiant 13.
 B2012 Pirmoje eilėje yra 4 sėdynės, o likusiose — po 6. Kiek vietų yra lėktuve?
 A) 120 B) 138 C) 142 D) 144 E) 150

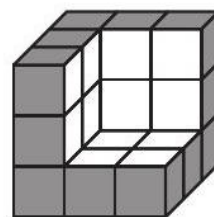
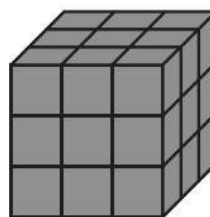
- B13.** Stebuklijoje yra 5 miestai. Bet kuriuos du miestus jungia
 B2012 vienas matomas arba nematomas kelias. Iš viso Stebuklijoje yra 7 matomi keliai, pavaizduoti žemėlapyje (žr. pav.). Kiek nematomų kelių yra Stebuklijoje?
 A) 9 B) 8 C) 7 D) 3 E) 2



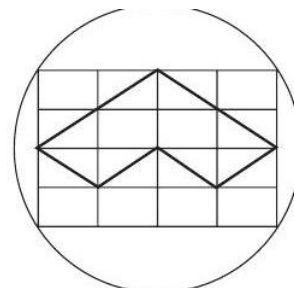
- B15.** Paveikslėlyje pavaizduotos iš vienodų kvadratėlių sudėtos figūros
 B2012 perimetras yra 42 cm. Koks figūros plotas?
 A) 8 cm^2 B) 9 cm^2 C) 24 cm^2 D) 72 cm^2 E) 128 cm^2



- B9.** Nudažyti visam kubui, sudėtam iš mažesnių
 B2006 kubelių, reikėjo 9 kg dažų. Kiek kilogramų dažų dar prireiks nudažyti baltam paviršiui, pavaizduotam dešiniajame paveikslėlyje, kuris susidarė iš nudažyto kubo išėmus keletą kubelių?
 A 2 B 3 C 4,5 D 6 E 7



- B18.** Šalia pavaizduoto apskritimo skersmuo lygus 10 cm,
 B2006 o visų mažųjų stačiakampių matmenys vienodi. Kam lygus storesnėmis linijomis išskirto šešiakampio perimetras?
 A 8 cm B 16 cm C 20 cm D 25 cm E 30 cm



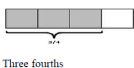
- B28.** Trys draugai — Adomas, Tomas ir Paulius žiemos atostogų metu 15 kartų buvo
 B2006 plaukimo baseine. Adomas už visų trijų bilietus mokėjo 8 kartus, Tomas — 7 kartus. Paulius draugams atidavė 30 litų — tiek jis buvo skolingas už bilietus. Kaip Adomas ir Tomas turi pasidalyti pinigus, kad kiekvienas iš draugų bilietams būtų išleidęs tiek pat?
 A 22 Lt Adomui ir 8 Lt Tomui B 20 Lt Adomui ir 10 Lt Tomui
 C 15 Lt Adomui ir 15 Lt Tomui D 16 Lt Adomui ir 14 Lt Tomui
 E 18 Lt Adomui ir 12 Lt Tomui

Mokinių stebėjimas

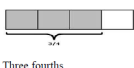
Ankstesnėse tyrinėjimo versijose buvo siekiama patikrinti tam tikro 6kl. moksleivio atsakymus ir juos suvedus į lentelę įvertinti, kiek jie gerai supranta kiekvieną iš subkonstruktų.

Dabartinėje tyrinėjimo versijoje mokiniai jau metais paaugę, tačiau anksčiau tyrinėjimas apsiribojo tik atsakymų aptarimu su jais. Todėl dabar siūlau remiantis šiuo (tam specialiai skirtu) sutrumpintu tekstu subkonstruktą priskirti atsakymo aptarimo eigoje kartu su moksleiviu.

Pirma dalis

Užduotis	Ats.:	Sim.:		Kuris trupmenos įsivaizdavimas artimiausias?			
				$\frac{3}{4}$ three divided into four parts	$\frac{3}{4}$ is three iterations of $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$ may describe the number of girls compared to the number of boys in a group	A line is 12 cm long. Draw a line that is $\frac{3}{4}$ of this line.
B2018_11							
B2017_8							
B2017_24							
B2016_2							
B2016_5							
B2015_1							
B2015_6							
B2014_2							
B2014_11							
B2014_25							
B2013_23							
B2012_21							
B2012_24							
B2012_28							
B2006_15							
B2006_23							

Antra dalis

Užduotis	Ats.:	Sim.:		Kuris trupmenos įsivaizdavimas artimiausias?			
				$\frac{3}{4}$ three divided into four parts	$\frac{3}{4}$ is three iterations of $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$ may describe the number of girls compared to the number of boys in a group	A line is 12 cm long. Draw a line that is $\frac{3}{4}$ of this line.
B2018_11							
B2018_4							
B2018_6							
B2018_26							
B2017_9							
B2017_19							
B2016_8							
B2016_29							
B2015_13							
B2015_22							
B2014_6							
B2014_10							
B2014_24							
B2013_3							
B2013_8							
B2013_14							
B2012_2							
B2012_3							
B2012_4							
B2012_13							
B2012_15							
B2006_9							
B2006_18							
B2006_28							