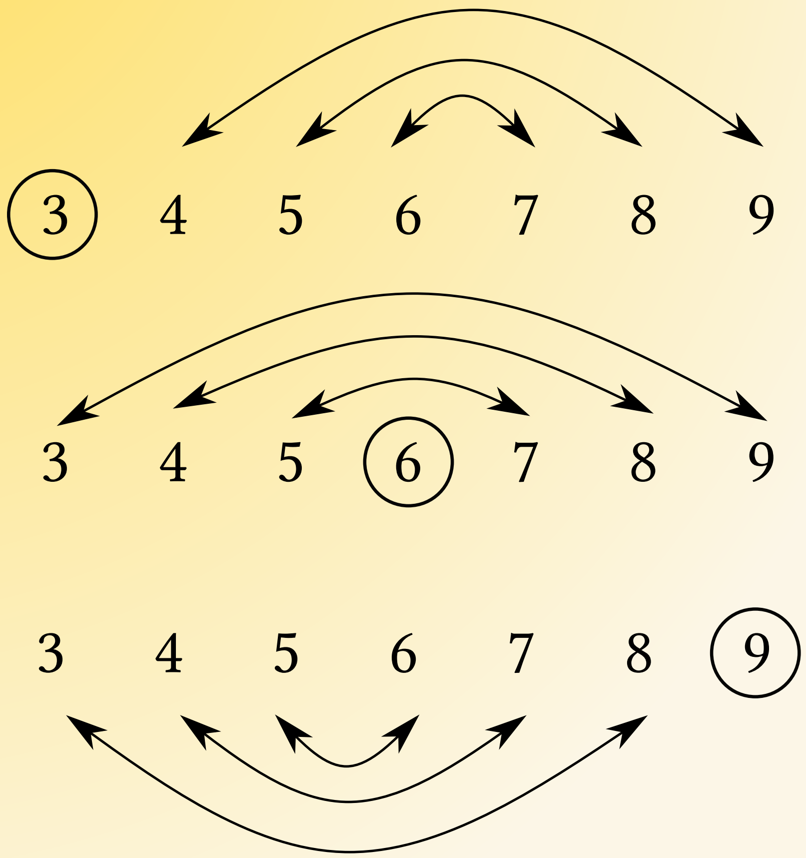
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Bičiulis



Užduotys ir sprendimai

2018

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2018. Bičiulis

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorė ir sudarytoja
Ugnė Šiurienė

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 45000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2018 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2018 metų kovo 15 dieną keliavo ir gausiai sprendė 5–6 klasių (*Bičiulio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9(G1)	10(G2)	11(G3)	12(G4)
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	7	☐	☐	☐	☐	☐	13	☐	☐	☐	☐	☐	19	☐	☐	☐	☐	☐	25	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	8	☐	☐	☐	☐	☐	14	☐	☐	☐	☐	☐	20	☐	☐	☐	☐	☐	26	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	9	☐	☐	☐	☐	☐	15	☐	☐	☐	☐	☐	21	☐	☐	☐	☐	☐	27	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	10	☐	☐	☐	☐	☐	16	☐	☐	☐	☐	☐	22	☐	☐	☐	☐	☐	28	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	11	☐	☐	☐	☐	☐	17	☐	☐	☐	☐	☐	23	☐	☐	☐	☐	☐	29	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	12	☐	☐	☐	☐	☐	18	☐	☐	☐	☐	☐	24	☐	☐	☐	☐	☐	30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

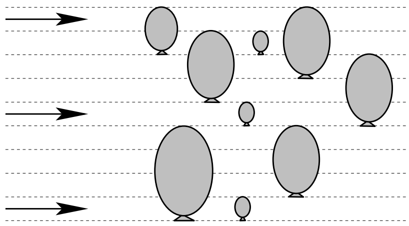
1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25 % uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2018

2018 m. *Bičiulio* užduočių sąlygos

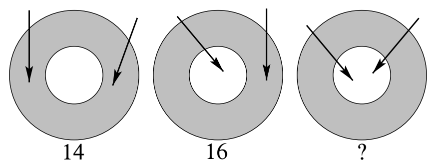
Klausimai po 3 taškus

1. Piešinyje pavaizduotos 3 skrendančios strėlės ir 9 pririšti balionai. Kai strėlė pataiko į balioną, šis sprogsta, o strėlė lekia tolyn ta pačia kryptimi. Kiek liks nesusprogusių balionų?
A) 3 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

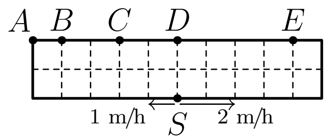


2. Kurio iš veiksmų reikšmė yra didžiausia?
A) 2+0+1+8 **B)** $2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 8$ **C)** $(2+0) \cdot (1+8)$ **D)** $20 \cdot 18$ **E)** $2 \cdot 0 + 1 \cdot 8$

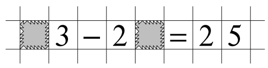
3. Pakabinti trys vienodi smiginio taikiniai. Daina metė po dvi streles į kiekvieną iš jų ir surinko 14 taškų iš pirmojo taikinio ir 16 – iš antrojo. Kiek taškų ji surinko iš trečiojo taikinio?
A) 17 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 22



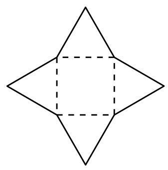
4. Sodas yra padalintas į lygius kvadratus. Dvi sraigės pradeda šliaužti iš taško S aplink sodą palei jo tvorą priešingomis kryptimis (žr. pav.). Viena sraigė šliaužia 1 metro per valandą greičiu (1 m/h), o kita – 2 metrų per valandą greičiu (2 m/h). Kuriame taške susitiks sraigės?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E



5. Aistė iš vieno dviženklio skaičiaus atėmė kitą dviženklį skaičių, o tada ji uždažė du langelius (žr. pav.). Kokia yra uždažytuose langeliuose esančių skaitmenų suma?
A) 8 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15



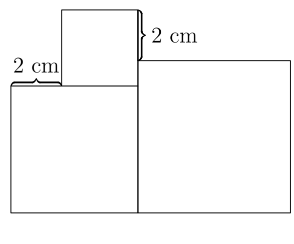
6. Paveikslėlyje pavaizduota žvaigždė, sudaryta iš keturių lygiakraščių trikampių ir kvadrato. Kvadrato perimetras lygus 36 cm. Koks yra žvaigždės perimetras?
A) 144 cm **B)** 120 cm **C)** 104 cm **D)** 90 cm **E)** 72 cm



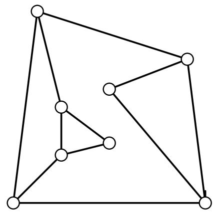
7. Mėnesio antroji diena buvo ketvirtadienis. Kokia savaitės diena buvo 25-oji to mėnesio diena?
A) Pirmadienis **B)** Trečiadienis **C)** Ketvirtadienis **D)** Šeštadienis **E)** Sekmadienis

8. Kiek mažiausiai kartų reikia paridenti lošimo kauliuką, kad bent dviejų metimų akučių skaičius visada sutaptų?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 12 **E)** 18

9. Brėžinyje pavaizduoti 3 kvadratai. Mažiausio kvadrato kraštinės ilgis 3 cm. Koks yra didžiausio kvadrato kraštinės ilgis?
A) 4 cm **B)** 5 cm **C)** 6 cm **D)** 7 cm **E)** 8 cm

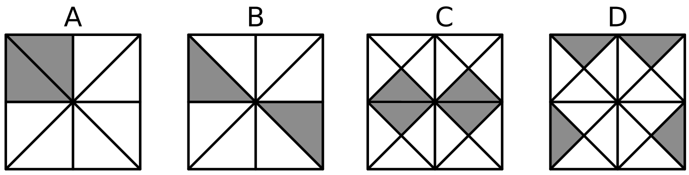


10. Paveikslėlyje pavaizduota lempučių sujungimo schema. Iš pradžių visos lemputės nešviečia. Palietus kurią nors lemputę, užsidega ji ir visos lemputės, sujungtos su ja tiesiogiai. Kiek mažiausiai lempučių reikia paliesti, kad užsidegtų visos lemputės?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



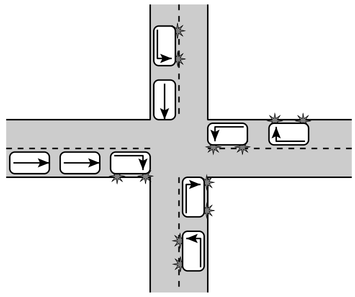
Klausimai po 4 taškus

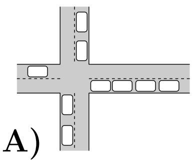
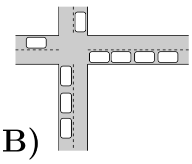
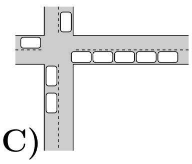
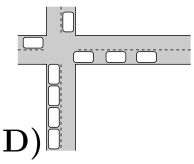
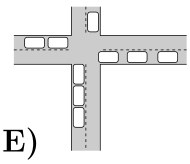
11. Kuriame iš žemiau pavaizduotų kvadratų A, B, C, D nuspalvinto ploto dalis yra didžiausia?



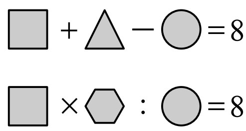
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** Visur tokia pat

12. Devynios mašinos atvažiuoja prie sankryžos ir toliau važiuoja rodyklių nurodytomis kryptimis (žr. pav. dešinėje). Kuriame iš žemiau esančių paveikslėlių pavaizduotos sankryžą pravažiavusios mašinos?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

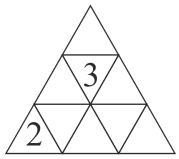
13. Dviejose šalia užrašytose lygybėse kiekviena figūra žymi vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4 arba 5, o vienodos figūros žymi vienodus skaičius. Kokį skaičių žymi trikampis?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



14. Liūtas yra už viename iš trijų kambarių. Ant 1-ojo kambario durų užrašyta „Liūto čia nėra“. Ant 2-ojo kambario durų užrašyta „Liūtas yra čia“. Ant 3-iojo kambario durų užrašyta „2+3 = = 5“. Tik vienas iš šių trijų sakinių yra teisingas. Kuriame kambaryje liūtas?
A) Pirmame **B)** Antrame **C)** Trečiame **D)** Gali būti bet kuriame
E) Gali būti ir pirmame, ir antrame

15. Dvi kengūros, Kenga ir Riukas, ir trys triušiai, Adomas, Berta ir Domas, žaidžia kamuoliu. Kai kuri nors iš kengūrų turi kamuolį, ji meta kamuolį kitai kengūrai arba triušiui. Kai kuris nors iš triušių turi kamuolį, jis meta kamuolį kitam triušiui, bet ne tam, iš kurio ką tik jį gavo. Kenga pradeda žaidimą mesdama kamuolį Adomui. Kas penktasis mes kamuolį?
A) Kenga **B)** Riukas **C)** Adomas **D)** Berta **E)** Domas

16. Emilė nori įrašyti po skaičių į kiekvieną trikampės lentelės langelį taip, kad bet kurių dviejų skaičių, įrašytų į bendrą kraštinę turinčius langelius, suma būtų ta pati. Ji jau įrašė du skaičius. Kokia bus visų užpildytos lentelės skaičių suma?

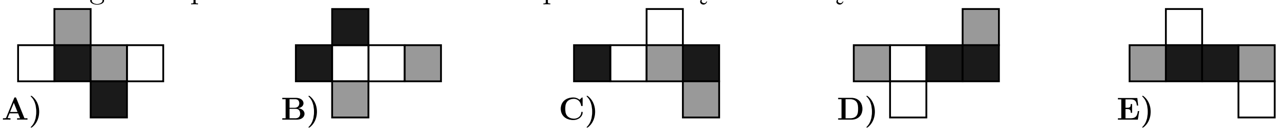


A) 18 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 24

17. Pirmadienį Mantas sugalvojo slaptažodį ir išsiuntė jį 5 draugams. Kiekvienas, gavęs slaptažodį, rytojaus dieną išsiųsdavo jį dviem savo draugams, kurie iki tol slaptažodžio nežinojo. Kurią savaitės dieną slaptažodį žinančių asmenų skaičius tapo didesnis už 100?

A) Antradienį **B)** Trečiadienį **C)** Ketvirtadienį **D)** Penktadienį **E)** Šeštadienį

18. Kubo sienos yra nuspalvintos juodai, baltai arba pilkai. Priešingos kubo sienos nuspalvintos skirtingomis spalvomis. Kuri iš žemiau pavaizduotų išklotinių tikrai nėra to kubo išklotinė?



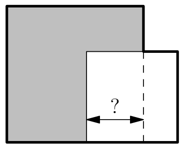
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

19. Sudėties pavyzdyje skaitmenys buvo pakeisti raidėmis (vienodi skaitmenys – vienodomis raidėmis). Koks skaitmuo buvo pakeistas raide B?

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\ CBA \\ \hline DDDD \end{array}$$

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

20. Du kvadratiniai popieriaus lapai uždėti vienas ant kito taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Pilkojo lapo kraštinės ilgis yra 12 cm, o baltojo – 8 cm. Gauta figūra paryškinta juoda linija. Šios figūros perimetras lygus 54 cm. Koks yra atkarpos, pažymėtos klaustuku, ilgis?



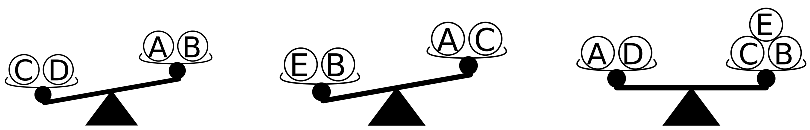
A) 3 cm **B)** 3,5 cm **C)** 4 cm **D)** 4,5 cm **E)** 5 cm

Klausimai po 5 taškus

21. Iš skaičių 3, 5, 2, 6, 1, 4 ir 7 Romas išsirinko tris skirtingus skaičius, kurių suma yra 8. Iš tų pačių skaičių Tomas išsirinko tris skirtingus skaičius, kurių suma yra 7. Kiek yra tokių skaičių, kuriuos išsirinko tiek vienas, tiek kitas berniukas?

A) Nei vieno **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Neįmanoma nustatyti

22. Penki rutuliai pažymėti raidėmis A, B, C, D ir E. Vienas iš jų sveria 30 g, kitas – 80 g, o likę trys – po 50 g. Paveikslėlyje pavaizduoti trijų svėrimų rezultatai. Kuris rutulys sveria 30 g?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

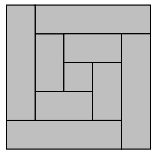
23. Jeigu A, B ir C yra skirtingi skaitmenys, tai didžiausias įmanomas 6-iaženklis skaičius, užrašytas panaudojant tris skaitmenis A, du skaitmenis B ir vieną skaitmenį C, negali būti lygus

A) $AAABBC$ **B)** $CAAABB$ **C)** $BBAAAC$ **D)** $AAABCB$ **E)** $AAACBB$

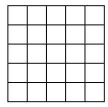
24. Barboros amžiaus ir jos mamos amžiaus suma lygi 36, o jos mamos ir močiutės amžių suma yra 81. Kiek metų buvo močiutei, kai gimė Barbora?
A) 28 **B)** 38 **C)** 45 **D)** 53 **E)** 56

25. Albertas nori suskirstyti skaičius 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 į kelias grupes taip, kad kiekvienos grupės skaičių suma būtų tokia pati. Į kiek daugiausia grupių galima suskirstyti skaičius?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** Kitas atsakymas

26. Jonas 8 cm pločio medinę lentą, pjaudamas skersai, supjaustė į 9 dalis – vieną kvadratinę ir 8 stačiakampes. Tada Jonas sudėjo visas dalis taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks buvo lentos ilgis?
A) 150 cm **B)** 168 cm **C)** 196 cm **D)** 200 cm **E)** 232 cm

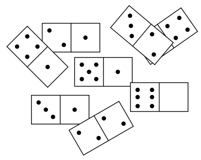


27. Gertrūda nori į kiekvieną 5×5 lentelės langelį įrašyti 0 arba 1 taip, kad kiekviename kvadrate 2×2 būtų lygiai 3 vienodi skaičiai. Kokią didžiausią sumą gali gauti Gertrūda, sudėjusi visus lentelės skaičius?
A) 22 **B)** 21 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 18

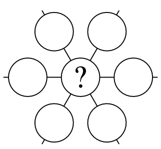


28. Prie apskrito stalo sėdi 14 žmonių. Kiekvienas iš jų yra arba melagis, arba tiesuolis. Melagis visada meluoja, tiesuolis visada sako tiesą. Visi sėdintys prie stalo sako: „Abu mano kaimynai yra melagiai“. Kiek daugiausiai melagių gali sėdėti prie stalo?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 14

29. Ant stalo guli aštuoni domino kauliukai (žr. pav.). Vieno kauliuko viena pusė yra uždengta. Šiuos 8 kauliukus galima sudėti į kvadratinę lentelę 4×4 taip, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio akučių sumos būtų lygios. Kiek akučių yra uždengtoje kauliuko pusėje?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

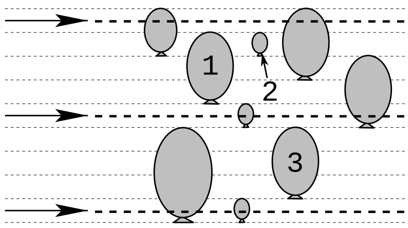


30. Andrius nori įrašyti skaičius 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 į septynis skrituliukus taip, kad kiekvienoje iš trijų nužymėtų tiesių visų trijų joje esančių skaičių suma būtų ta pati. Kokia yra suma visų skaičių, kuriuos Andrius gali įrašyti vietoje klaustuko?
A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18



Bičiulio užduočių sprendimai

1. (A) 3



! Suskaičiuojame, kiek yra balionų, kurių nekerta strėlių skridimo trajektorijos (pažymėtos brūkšnine linija). Tokių balionų yra 3 (paveikslėlyje jie sunumeruoti).

Renkamės atsakymą **A**.

2. (D) $20 \cdot 18$

? Peržvelgę atsakymus pastebime, kad variantas **D** yra dviejų didelių (t. y. dviženklių) skaičių sandauga. Spėjame, kad teisingas atsakymas – **D**.

! Atlikime veiksmus:

A) $2 + 0 + 1 + 8 = 11$
B) $2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 8 = 0$
C) $(2 + 0) \cdot (1 + 8) = 2 \cdot 9 = 18$
D) $20 \cdot 18 = 360$
E) $2 \cdot 0 + 1 \cdot 8 = 0 + 8 = 8$

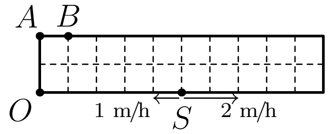
Didžiausią reikšmę įgyja veiksmas **D**.

3. (B) 18

! Pirmajame taikinyje abi Dainos strėlės pataikė į išorinį, pilkąjį ratą, taigi už vieną strėlę, pataikiusią į išorinį ratą, ji gavo $14 : 2 = 7$ taškus. Vadinasi, ir antrajame taikinyje ji gavo 7 taškus už strėlę, pataikiusią į išorinį ratą. Kadangi iš antrojo taikinio Daina iš viso surinko 16 taškų, tai už strėlę, pataikiusią į vidinį, baltąjį, ratą, ji gavo $16 - 7 = 9$ taškus. Trečiajame taikinyje abi Dainos strėlės pataikė į vidinį ratą, taigi iš viso šiame taikinyje ji surinko $2 \cdot 9 = 18$ taškų.

Teisingas atsakymas **B**.

4. (B) B



! Visos sodo tvoros (perimetro) ilgis yra $2 + 10 + 2 + 10 = 24$ kvadrato kraštinės. Sraigė, šliaužianti 1 m/h greičiu, yra du kartus lėtesnė už sraigę, šliaužiančią 2 m/h greičiu, todėl kai jos susitiks, antroji sraigė bus nušliaužusi du kartus daugiau nei pirmoji. Tuo metu jos kartu bus apšliaužusios visą sodo tvorą, taigi pirmoji sraigė nušliauš $\frac{1}{3}$, o antroji – $\frac{2}{3}$ viso tvoros ilgio. Tai reiškia, kad pirmoji sraigė nušliauš atstumą, lygų $24 : 3 = 8$ kvadrato kraštinėms: iš pradžių 5 kraštines į kairę iki sodo kampo O, tada 2 kraštines „į viršų“ iki kampo A ir dar $8 - 5 - 2 = 1$ kraštinę iki taško B, kur susitiks su dvigubai greitesne antrąja sraige.

Renkamės atsakymą **B**.

5. D 13

! Turinio vienetų skaitmuo lygus 3, o skirtumo vienetų skaitmuo yra 5, todėl atėminio vienetų skaitmuo yra lygus 8 (nes $13-8=5$). Tuomet lengvai surandame, kam lygus turinys: $25+28 = 53$. Uždažytuose langeliuose įrašytų skaičių suma yra $5+8=13$.

Renkamės atsakymą **D**.

6. E 72 cm

! Kvadrato perimetras yra 36 cm, todėl jo kraštinės ilgis yra $36 : 4 = 9$ cm. Toks pat yra ir trikampio kraštinės ilgis. Žvaigždės perimetrą sudaro aštuonios trikampių kraštinės, todėl jis lygus $9 \cdot 8 = 72$ cm. Renkamės atsakymą **E**.

7. D Šeštadienis

! Išrašykime pirmuosius to mėnesio ketvirtadienius: 2, 9, 16, 23. Tuomet 24-oji diena buvo penktadienis, o 25-oji – šeštadienis. Teisingas atsakymas – **D**.

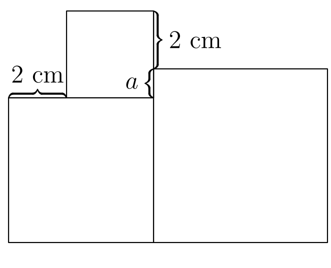
8. C 7

! Išridenus kauliuką 2 kartus, šių dviejų metimų akučių skaičius gali sutapti, bet gali ir nesutapti. Net 6 kartus išridenus lošimo kauliuką, visų metimų akučių skaičiai gali būti skirtingi. Tik 7-ąjį kartą išridenus lošimo kauliuką, jo akučių skaičius būtinai turės sutapti su kurio nors iš ankstesnių metimų akučių skaičiumi. Taigi kauliuką reikia išridenti mažiausiai 7 kartus, kad bent dviejų metimų akučių skaičius visada sutaptų. Renkamės atsakymą **C**.

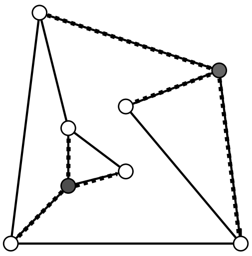
Pastaba: Konkurso metu šio uždavinio sąlyga buvo suformuluota be žodžio „visada“: „Kiek mažiausiai kartų reikia paridenti lošimo kauliuką, kad bent dviejų metimų akučių skaičius sutaptų?“ Dėl to uždavinys iš dalies tapo dviprasmiškas: būtų galima samprotauti, kad gali užtekti ir du kartus paridenti lošimo kauliuką, kad kauliuko akučių skaičius sutaptų. Nors pažvelgus į atsakymo variantus matyti, kad tokia interpretacija netinka, visgi ruošiant šią sprendimų knygelę nuspręsta uždavinio formuluotę patikslinti.

9. C 6 cm

! Kadangi mažojo kvadrato kraštinės ilgis yra 3 cm, tai vidutinio kvadrato kraštinės ilgis lygus $2+3=5$ cm. Atkarpos, pažymėtos raide a, ilgis yra $3-2=1$ cm, o tuomet didžiojo kvadrato kraštinės ilgis bus lygus $5+1=6$ cm. Teisingas atsakymas **C**.



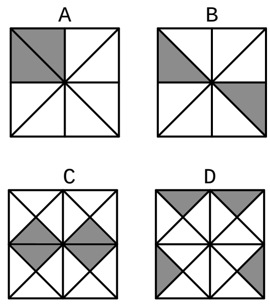
10. (**B**) 2



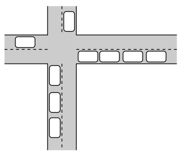
? Pamėginę „įjungti“ visas lemputes darydami kuo mažiau lietimų, randame, kad dvi paveikslėlyje užtušuotos lemputės uždegtų ir visas likusias lemputes. Renkamės atsakymą **B**.

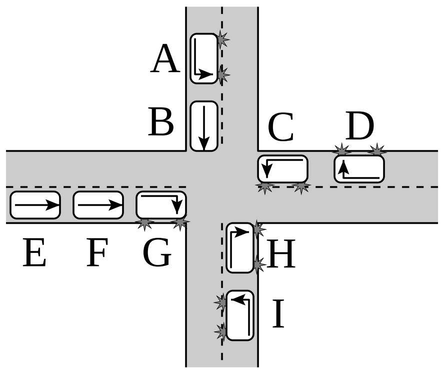
! Lieka įrodyti, kad tikrai neįmanoma uždegti visų lempučių palietus tik vieną iš jų. Išties, jei būtų tokia lemputė, kurią palietus užsidegtų ir visos likusios, tai toji lemputė būtų sujungta su visomis kitomis. Tačiau matome, kad lempučių iš viso yra 8 ir kiekviena lemputė yra sujungta daugiausiai su 3 kitomis lemputėmis. Todėl nė viena iš jų negali uždegti septynių kitų lempučių. Teisingas atsakymas **B**.

11. (**E**) Visur tokia pat



! Kvadratų A ir B nuspalvinta po 2 lygius trikampėlius iš 8, o tai sudaro $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ viso kvadrato ploto. Kvadratų C ir D nuspalvinta po 4 lygius trikampėlius iš 16, o tai irgi sudaro $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ viso kvadrato ploto. Taigi visų kvadratų nuspalvinta vienoda ploto dalis. Teisingas atsakymas **E**.

12. (**B**) 



! Visoms mašinoms pravažiavus sankryžą į viršutinįjį paveikslėlio kelią pasuks mašina D, į dešinįjį kelią atvažiuos mašinos A, E, F ir H, į apatinį kelią atvažiuos mašinos B, C ir G, o į kairįjį kelią pasuks mašina I. Peržiūrėję visus atsakymų variantus, matome, kad teisingas atsakymas **B**.

13. (**E**) 5

! Sąlygos lygybes perrašome taip: $\square + \triangle = 8 + \bigcirc$ ir $\square \times$ ⬡ $= 8 \times \bigcirc$.

Iš antrosios lygybės matome, kad $\square \times$ ⬡ būtinai dalijasi iš 8. Taip gali būti tik tada, kai $\square = 2$ arba $\square = 4$. Jei $\square = 2$, tai būtinai ⬡ $= 4$. Tuomet $\square \times$ ⬡ $= 4 \times 2 = 8 = 8 \times \bigcirc$ ir $\bigcirc = 1$. Įrašome žinomus skaičius į pirmąją lygybę: $\square + \triangle = 2 + \triangle = 8 + \bigcirc = 8 + 1 = 9$, todėl $\triangle$ turi būti lygus $9 - 2 = 7$, bet pagal uždavinio sąlygą $\triangle$ nedidesnis už 5. Gauname prieštarą, vadinasi, $\square$ negali būti lygus 2.

Jei $\square = 4$, tai kairioji pirmos lygybės pusė $\square + \triangle = 4 + \triangle \leqslant 4 + 5 = 9$. Tuo tarpu dešinioji lygybės pusė $8 + \bigcirc \geqslant 8 + 1 = 9$. Matome, kad lygybė bus teisinga tik tada, kai $\triangle$ įgis didžiausią įmanomą reikšmę – 5, o $\bigcirc$ – pačią mažiausią, t. y. 1. Tuomet iš antros lygybės ⬡ $= 8 : 4 = 2$. Renkamės atsakymą **E**.

Pastaba: Nors tai iš pradžių gali pasirodyti keista, bet iš sąlygos neišplaukia, kad skirtingos figūros žymi skirtingus skaičius. Pavyzdžiui, jei $\bigcirc = 1$, $\square = 2$, $\triangle = 2$, ⬡ $= 5$, tai tikrai kiekviena figūra žymi vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, bet skirtingos figūros $\square$ ir $\triangle$ žymi tą patį skaičių. Atkreipkime dėmesį, kad **!** dalyje pateiktas uždavinio sprendimas nesiremia prielaida, kad skirtingos figūros žymi skirtingus skaičius.

14. (A) Pirmame

! Užrašas ant 3-io kambario durų „$2+3=5$“ yra tikrai teisingas. O kadangi pagal sąlygą tik vienas užrašas yra teisingas, tai užrašai ant likusių kitų dviejų durų yra neteisingi. Kadangi užrašas ant pirmo kambario durų skelbia, kad liūto tame kambaryje nėra, ir taip skelbdamas meluoja, tai iš tiesų liūtas yra būtent 1-ame kambaryje. Pasitikriname su 2-o kambario durų užrašu: jis meluoja skelbdamas, kad liūtas yra antrame kambaryje, todėl iš tikrųjų liūto 2-ame kambaryje nėra. Teisingas atsakymas – **A**.

15. (C) Adomas

? Pabandykime sudėlioti kokią nors galima kamuolio perdavimo seką, pavyzdžiui: Kenga – Adomas – Berta – Domas – Adomas... Suskaičiuojame, kad penktas kamuolį meta Adomas. Pagal *Kengūros* konkurso taisykles galimas tik vienas teisingas atsakymas, todėl renkamės atsakymą **C**.

! Vistik smalsu (o griežtam sprendimui ir būtina) išsiaiškinti, ar visada taip išeina, kad penktas kamuolį meta Adomas. Pastebėkime du dalykus:

1. Kai jau vieną kartą kamuolys patenka į triušio rankas, tai toliau kamuoliu mėtosi tik triušiai, ir nė viena kengūra kamuolio nebegauna.

2. Iš viso yra trys triušiai, todėl kai kuris nors, pirmas, triušis meta kamuolį kitam, antram, triušiui, tai antras triušis nebegali mesti kamuolio atgal pirmam triušiui ir būtinai jį mes trečiam triušiui. Tuomet trečias triušis (vėl nebegalėdamas mesti atgal) būtinai mes pirmam triušiui ir taip triušiai mėtys kamuolį ratuku.

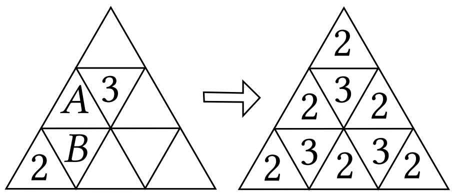
Kai triušis Adomas iš Kengos gauna kamuolį, jis meta Bertai arba Domui, ir toliau triušiai mėto kamuolį ratu. Dėl to turime lygiai du kamuolio perdavimų sekos variantus:

1. Kenga – Adomas – Berta – Domas – Adomas – Berta – Domas – Adomas – Berta ...

2. Kenga – Adomas – Domas – Berta – Adomas – Domas – Berta – Adomas – Domas ...

Matome, kad šitais dviem atvejais susikeičia tik Bertos ir Domo metimo eilė, todėl nesvarbu, ar Adomas mes Bertai, ar Domui, bet dar po dviejų metimų kamuolys būtinai sugrįš pas jį, ir atsakymas **C** yra teisingas. Taip pat Adomas būtinai mes ne tik 5-ą bet ir 8-ą kartą, 11-ą kartą ir t. t.

16. (C) 21



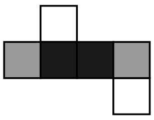
! Kadangi gretimuose trikampiuose įrašytų skaičių sumos turi būti lygios, tai langelio A ir 3 suma bus tokia pati, kaip langelių A ir B suma (žr. pirmą lentelę). Vadinasi, B langelyje turi būti įrašytas skaičius 3. Panašiai pastebime, kad langelio B ir 2 suma tokia pati, kaip langelių A ir B suma, todėl langelyje A reikia įrašyti 2. Taigi, bet kuriuose dviejuose gretimuose langeliuose įrašytų skaičių suma lygi $2+3=5$ ir nesunkiai užpildome visą lentelę (žr. antrą lentelę). Užpildytoje lentelėje yra 3 trejetai ir 6 dvejetai, taigi visos lentelės skaičių suma lygi $3\cdot 3+6\cdot 2=9+12=21$. Renkamės atsakymą **C**.

17. (D) Penktadienį

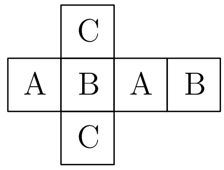
! Pirmadienį slaptažodį žinojo $1+5=6$ asmenys. Antradienį 5 Manto draugai išsiuntė slaptažodį dar $5 \cdot 2 = 10$ žmonių, taigi iš viso slaptažodį žinojo jau $1+5+10=16$ žmonių. Trečiadienį šie 10 žmonių išsiuntė slaptažodį $10 \cdot 2 = 20$ savo draugų, ketvirtadienį slaptažodį sužinojo dar $20 \cdot 2 = 40$ žmonių ir t. t., tad tolimesnėmis dienomis slaptažodį žinančių asmenų skaičius augo šitaip:

$$\begin{aligned} \text{trečiadienis:}\quad & 1+5+10+20=36, \\ \text{ketvirtadienis:}\quad & 1+5+10+20+40=76, \\ \text{penktadienis:}\quad & 1+5+10+20+40+80=156. \end{aligned}$$

Teisingas atsakymas – **D**, penktadienį.

18. (E) 

! Kad rastume šio uždavinio teisingą atsakymą, visų pirma turime gerai suvokti, kaip išklotinės „susilanksto“ į kubą ir kurios kubo sienos atsiduria viena priešais kitą. Visos penkios atsakymuose pateiktos išklotinės susideda iš trijų kvadratų eilių: viršutinės, vidurinės ir apatinės eilės. Galime įsivaizduoti, kad vidurinės eilės kvadratai lankstant kubą sudarytų tartum keturkampį žiedą (tvorą), vienas apatinės eilės kvadratas sudarytų kubo „dugną“, o vienas viršutinės eilės kvadratas sudarytų kubo „stogą“. Šie stogas ir dugnas (pažymėti raidėmis C, žr. į pav. šone) būtų viena kitai priešingos kubo sienos. Vidurinė sienų eilė taip pat sudaryta iš dviejų priešingų sienų porų (šios poros pažymėtos raidėmis A ir B).



Lieka patikrinti, kuriame atsakymo variante yra dvi priešingos sienos, nuspalvintos ta pačia spalva. Pastebime, kad išklotinė **E** turi baltai nuspalvintus dugną ir stogą, o kituose variantuose visos priešingos sienos nuspalvintos skirtingomis spalvomis. Vadinasi, teisingas atsakymas **E**.

19. (A) 0

? Sudedame du triženklius skaičius, kurių suma – keturženklis skaičius, todėl šios sumos tūkstančių skaitmuo tegali būti 1, $D=1$. Žiūrime į vienetų skaitmenis: matome, kad arba $C+A=1$, arba $C+A=11$. Bet šimtų skaitmenų suma turi būti „pakankamai didelė“, todėl $A+C=C+A=11$. Taigi skaitmenys B jau nieko nebegali „pridėti“ visai sumai, vadinasi, $B=0$. Pabandome atspėti skaitmenis, kad gautume teisingą sudėties veiksmą, pavyzdžiui $A=5$, $C=6$. Gauname teisingą sudėties veiksmą ir įsitikiname, kad tikrai $B=0$. Renkamės variantą **A**.

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ +\;\;C\,B\,A \\ \hline 1\;1\;1\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\;0\;6 \\ +\;\;6\;0\;5 \\ \hline 1\;1\;1\;1 \end{array}$$

! Papildykime spėjimą iki griežto sprendimo. Abu sumos dėmenys yra ne didesni už 999, todėl jų suma yra ne didesnė už $999+999=1998$. Pirmasis tos sumos skaitmuo nelygus 0, todėl $D=1$. $C+A$ negali būti 0, nes tada lyginis skaičius $B+B$ baigtųsi 1. Vadinasi, $C+A=11$. Todėl $B+B$ baigiasi 0, t. y. $B=0$ arba $B=5$. Bet $B=5$ negali būti, nes tada į šimtų sumą persikeltų 1, ir suma būtų 1211. Vadinasi, $B=0$. Aišku, kad A ir C gali būti bet kurie skaitmenys, kurių suma 11 – tai 2 ir 9, 3 ir 8, 4 ir 7, 5 ir 6, 6 ir 5, 7 ir 4, 8 ir 3, 9 ir 2.

Teisingas atsakymas **A**.

!! Pirmąjį dėmenį galime užrašyti taip: $100 \cdot A + 10 \cdot B + C$, antrąjį taip: $100 \cdot C + 10 \cdot B + A$, o jų suma (kaip radome **!** dalyje) lygi 1111. Perrašome sudėties veiksmą:

$$100 \cdot A + 10 \cdot B + C + 100 \cdot C + 10 \cdot B + A = 101 \cdot A + 20 \cdot B + 101 \cdot C = 101 \cdot (A + C) + 20 \cdot B = 1111.$$

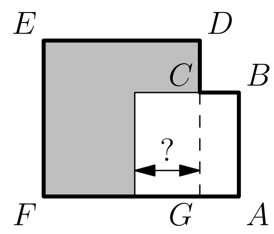
Šią lygybę perrašome taip:

$$\begin{aligned} 20B &= 1111 - 101 \cdot (A + C) \\ &= 101 \cdot 11 - 101 \cdot (A + C) \\ &= 101 \cdot (11 - (A + C)) \\ &= 101 \cdot (11 - (A + C)), \\ 20B : 101 &= 11 - (A + C) \end{aligned}$$

Taigi $20B$ turi dalytis iš 101. Tačiau kai $B > 0$ taip būti negali, nes skaičiai 20 ir 101 bendrų daliklių neturi (tiesą sakant, 101 yra pirminis skaičius ir dalijasi tik iš 1 ir savęs paties), o B yra vienaženklis skaičius. Todėl lygybė gali būti teisinga tik tokiu atveju, kai $B = 0$. Tada ir $11 - (A + C) = 0$, $11 = A + C$.

20. (**E**) 5 cm

! Kadangi atkarpa $CG = AB$, tai paryškintos figūros perimetras gaunamas prie didžiojo kvadrato $DEFG$ perimetro pridėjus atkarpų atkarpų BC ir AG ilgius, t. y. $48 + BC + AG = 60$, $BC + AG = 54 - 48 = 6$. Kita vertus, $AG = BC$, todėl $BC + AG = 2AG = 6$, $AG = 3$ (cm). Kadangi mažojo kvadrato kraštinės ilgis yra 8 cm, tai klaustuku pažymėtos atkarpos ilgis yra $8 - 3 = 5$ (cm).



Teisingas atsakymas – **E**.

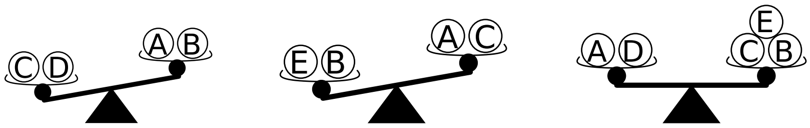
21. (**C**) 2

! Koks buvo didžiausias skaičius iš tų, kuriuos išsirinko Tomas? Kadangi dviejų mažųjų skaičių suma ne mažesnė už $1 + 2 = 3$, tai didysis jo skaičius ne didesnis už 4. Bet jeigu tai 3, tai mažieji – 1 ir 2, ir visų trijų suma $1 + 2 + 3 = 6$. Vadinasi, didysis jo skaičius 4, o kadangi mažiesiems lieka $7 - 4 = 3$, tai jie yra 1 ir 2. Taigi Tomas galėjo išsirinkti skaičius vieninteliu būdu: 1, 2 ir 4.

Panašiai samprotaukime ir Romo atveju. Didysis jo skaičius ne didesnis už 5. Jeigu tai 5, tai kiti du jo skaičiai yra 1 ir 2: $1+2+5 = 8$. Taip pat Romas galėjo išsirinkti 4: $4+1+3 = 8$, o daugiau būdų nebėra. Taigi jei Romas išsirinko skaičius 1, 2 ir 5, tai su Tomo skaičiais sutampa du skaičiai: 1 ir 2. Jei Romas išsirinko skaičius 1, 3 ir 4, tai vėl sutampa du skaičiai: 1 ir 4. Vadinasi, teisingas atsakymas **C**.

22. (**C**) C

? Visi rutuliai kartu sveria $30 + 50 \cdot 3 + 80 = 260$ (g). Vadinasi, trečiojo svėrimo metu ant kiekvienos iš lėkštelių padėta po $260 : 2 = 130$ (g). Kairėje padėti 50 g ir 80 g sveriantys rutuliai. Vadinasi, lengvasis (30 g sveriantis) rutulys bus vienas iš B, C, E, o sunkusis (80 g sveriantis) – A arba D. Jei lengvasis rutulys yra B arba E, tai antrojo svėrimo metu ant kairiosios lėkštelės buvo padėta $30 + 50 = 80$ (g), o dešinėje – arba $50 + 50 = 100$ (g), arba $50 + 80 = 130$ (g). Taip būti negali, nes kairioji svarstyklių pusė yra sunkesnė. Vadinasi, lengvasis rutulys yra C. Renkamės atsakymą **C**.



! Nors teisingą atsakymą ir radome, tęskime uždavinio sprendimą iki galo. Jeigu rutulys A svertų 80 g, tai antruoju svėrimu ant dešiniosios lėkštės būtų iš viso padėta $30 + 80 = 110$ g, o ant kairiosios – $50 + 50 = 100$ g ir nusvertų dešinioji svarstyklių pusė, bet taip nėra. Vadinasi, rutulys A sveria 50 g, o rutulys D – 80 g. Galime dar kartą patikrinti pagal pirmąjį svėrimą: kairėje pusėje yra $80 + 30 = 110$ g, o dešinėje – $50 + 50 = 100$ g, taigi kairė pusė sunkesnė.

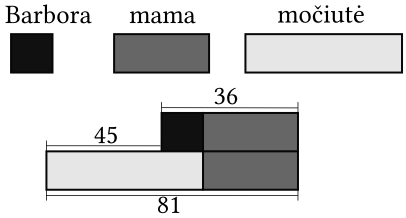
Akylesnis skaitytojas pastebėjo, kad ieškant teisingo atsakymo nebuvo būtina žinoti pirmojo svėrimo rezultato. Tokiais atvejais sakome, kad uždavinio sąlyga yra perteklinė. Nors atrodo, kad kuo daugiau žinai, tuo lengviau išspręsti uždavinį, kartais nereikalinga sąlyga gali ir sugluminti ar „paslėpti“ idėją, kaip galima išspręsti uždavinį.

23. (**D**) $AAABCB$

? Skaičius $AAABCB$ negali būti didžiausias: jei $B > C$, tai sukeitę 5-tą ir 6-tą skaitmenis, jį padidintume; jei $C > B$, tai sukeistume 4-tą ir 5-tą skaitmenis. Renkamės atsakymą **D**.

! Norėdami šiais skaitmenimis užrašyti kuo didesnį 6-iaženklį skaičių, iš pradžių išrinktume iš skaitmenų A, B ir C patį didžiausią, ir parašytume šį skaitmenį tiek kartų, kiek leidžia uždavinio sąlyga, tada pasirinktume antrą pagal didumą skaitmenį, ir vėl parašytume jį tiek kartų, kiek tik galime, ir galiausiai užrašytume likusius mažiausius skaitmenis. Taigi, nepriklausomai nuo to, kuris iš skaitmenų A, B ir C yra didžiausias ar mažiausias, užrašant patį didžiausią 6-iaženklį skaičių vienodi skaitmenys bus parašyti greta, vienas šalia kito. Peržiūrėję atsakymų variantus matome, kad būtent tokie yra variantai **A**, **B**, **C** ir **E**. Tuo tarpu variante **D** skaitmuo C yra įsiterpęs tarp dviejų skaitmenų B, taigi toks skaičius tikrai negali būti didžiausias.

24. (C) 45



! Norint sužinoti teisingą atsakymą, pakanka surasti, koks yra močiutės ir Barboros amžių skirtumas: juk būtent tiek metų buvo močiutei, kai gimė Barbora.

Pabandykime išspręsti uždavinį grafiškai, braižydami stačiakampiukus. Barboros amžių pažymėkime nedideliu juodu stačiakampiu, jos mamos amžių – ilgesniu tamsiai pilku stačiakampiu, o močiutės amžių – ilgiausiu šviesiai pilku stačiakampiu (žr. pav. viršuje). Sudėjus kartu Barboros ir mamos amžius gausime viršutinį iš dviejų ilgųjų, sudėtinių stačiakampių, taigi jo ilgis yra 36. Mamos ir močiutės amžių sumą atitiks apatinis iš dviejų sudėtinių stačiakampių, jo ilgis yra 81. Dabar jau nesunkiai pastebime, kad močiutės amžiaus stačiakampis yra ilgesnis už Barboros amžiaus stačiakampį lygiai tiek, kiek apatinis sudėtinis stačiakampis yra ilgesnis už viršutinį, todėl močiutės ir Barboros amžių skirtumas lygus $81 - 36 = 45$. Teisingas atsakymas – **C**.

!! Galima išspręsti šį uždavinį pasinaudojant lygtimis: tegu Barboros amžius būna lygus B, mamos ir Barboros amžių skirtumą pažymėkime m, tada mamos amžius bus lygus $B + m$, o močiutės ir Barboros amžių skirtumą pažymėkime n, tada močiutės amžius bus lygus $B + n$. Iš sąlygos žinome, kad:

$$\begin{cases} B + (B + m) = 36, \\ (B + m) + (B + n) = 81 \end{cases}$$

Pertvarkome antrąją lygybę: $(B+m)+(B+n) = (B+m)+B+n = ((B+m)+B)+n = 81$. Bet juk mes žinome iš pirmosios lygybės, kad $(B + m) + B) = 36$. Taigi $((B + m) + B) + n =$ $= 36 + n = 81$. Ir dabar atsakymas jau pasiekiamas ranka: $n = 81 - 36 = 45$. Kai gimė Barbora, jos močiutei buvo 45-eri.

25. (B) 3

! Jeigu šiuos skaičius suskirstysime taip, kad kiekvienos grupės skaičių suma būtų tokia pati, tai visų skaičių suma dalysis iš grupių skaičiaus. Taip pat visų skaičių suma dalysis iš kiekvienos grupės skaičių sumos. Suskaičiuokime visų skaičių sumą: $2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 54$. Į kuo daugiau grupių padalinsime šiuos skaičius, tuo mažesnė bus vienos grupės skaičių suma. Tačiau taip pat galime pastebėti, kad grupės skaičių suma turi būti ne mažesnė nei 10 (nes skaičius 10 įeina į kurią nors grupę). Mažiausias skaičius, didesnis už 10, iš kurio dalijasi 54, yra 18: $54 : 18 = 3$. Taigi daugiau negu į 3 grupes skaičių suskirstyti neįmanoma.

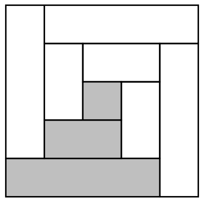
Lieka įsitikinti, jog įmanoma suskirstyti skaičius į 3 grupes, kad kiekvienos grupės suma būtų 18. Išties, šios grupės galėtų būti tokios (tai ne vienintelis būdas suskirstyti skaičius į grupes): 8 ir 10; 2, 7 ir 9; 3, 4, 5 ir 6.

Teisingas atsakymas – **C**.

26. (D) 200 cm

? Matome 4 ilgus stačiakampius, 4 vidutinius ir vieną kvadratą. Kvadrato kraštinės ilgis lygus lentos pločiui, 8 cm. Vidutiniai stačiakampiai atrodo dvigubai ilgesni už kvadratą – $8 \cdot 2 = 16$ cm, o ilgieji – du kartus ilgesni už vidutinius stačiakampius, tai yra $16 \cdot 2 = 32$ cm. Belieka tvarkingai sudėti visų dalių ilgius: $8 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 32 = 8 + 64 + 128 = 200$ (cm). Renkamės atsakymą **D**.

! Kiekvieno stačiakampio, kuris liečia centre esantį kvadratą, ilgis yra lygus kvadrato kraštinės ilgio ir lentos pločio sumai, o tai yra $8 + 8 = 16$ cm. Kiekvieno ilgojo (išorinio) stačiakampio ilgis lygus vidutinio stačiakampio ilgio ir dvigubo lentos pločio sumai, tai yra $16 + 8 + 8 = 32$ cm. Todėl visos lentos ilgis buvo $8 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 32 = 8 + 64 + 128 = 200$ (cm).



Teisingas atsakymas – **D**.

27. (B) 21

? Kad Gertrūda gautų kuo didesnę sumą, reikia įrašyti kuo mažiau nulių. Todėl stengsimės padaryti taip, kad kiekviename kvadrate 2×2 būtų trys 1 ir vienas 0. Lentelę pavyksta užpildyti įrašant iš viso keturis nulius (žr. pav. dešinėje). Šios lentelės skaičių sumą suskaičiuojame taip: jei į visus lentelės langelius Gertrūda būtų įrašiusi po 1, tai lentelės skaičių suma būtų $5 \cdot 5 = 25$, o dabar galime įsivaizduoti, kad keturis 1 ji pakeitė į 0, todėl ir visa suma sumažėjo 4 ir yra lygi $25 - 4 = 21$. Renkamės atsakymą **B**.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

! Įsitikinkime, kad tikrai niekaip Gertrūdai neišeis užpildyti lentelės su mažiau nulių ir daugiau vienetų. Lentelėje galime išskirti keturis nesikertančius kvadratus 2×2 (ir dar liks šiais kvadratais neuždengti du lentelės „kraštai“ ,žr. pav. dešinėje). Kad ir kaip dėliotume lentelėje skaičius 0 ir 1, kiekviename iš šių keturių kvadratų turėsime įrašyti bent po vieną 0. Vadinasi, visoje lentelėje turėsime įrašyti mažiausiai 4 nulius – tiek, kiek ir įrašėme sprendimo **?** dalyje. Taigi teisingas atsakymas yra **B**.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

28. (C) 9

? Galime pastebėti, kad niekur prie stalo vienas šalia kito nesėdės trys melagiai, nes tuomet vidurinis iš jų, sakydamas, kad abu jo kaimynai yra melagiai, sakytų tiesą, o taip būti negali, nes melagis visada meluoja. Taigi jei prie stalo greta sėdi du melagiai, tai jiems iš abiejų šonų turi sėdėti tiesuoliai. Kitaip tariant, bent kas trečias žmogus prie stalo turi būti tiesuolis:

M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-M.

Visgi į paskutines dvi vietas negalime sodinti dviejų melagių, nes už apskrito stalo greta paskutinių dviejų melagių sėdės du pirmieji melagiai, ir taip būsime iš eilės susodinę net ne tris, o keturis melagius. Tam, kad perskirtume šią keturių melagių grupę, į paskutinę, 14-ąją vietą turime sodinti ne melagį, o tiesuolį:

M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-M-T-M-T.

Taigi prie stalo gali sėdėti 9 melagiai. Renkamės atsakymą **C**.

! Kodėl aukščiau esantį sprendimą pažymėjome klaustuku, o ne šauktuku? Galbūt įmanoma kaip nors kitaip susodinti tiesuolius ir melagius taip, kad dar daugiau melagių tilptų prie stalo?

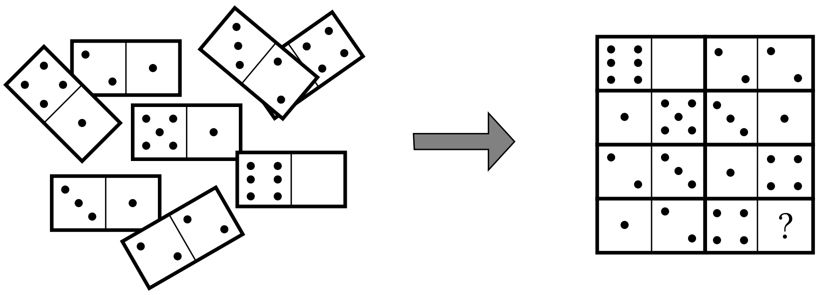
Tikrai žinome, kad:

1. Iš eilės vienas šalia kito gali sėdėti daugiausia 2 melagiai.
2. Jokie du tiesuoliai negali sėdėti vienas šalia kito (nes kiekvienas tiesuolis kalba tiesą sakydamas „abu mano kaimynai yra melagiai“).

Taigi visi melagiai sėdės prie stalo arba po vieną, arba poromis, o visi tiesuoliai sėdės po vieną. Jei prie stalo sėdėtų 4 tiesuoliai, tai tie tiesuoliai „padalintų“ tarp jų sėdinčius 10 melagių į 4 grupes (jei būtų dar mažiau tiesuolių, jie padalintų melagius į dar mažiau grupių). Bet 4-iose melagių grupėse pagal 1 taisyklę iš viso būtų ne daugiau nei $4 \cdot 2 = 8$ melagiai. Vadinasi, prie stalo būtinai turi sėdėti bent 5 tiesuoliai. Taigi teisingas atsakymas – **C**.

29. Ⓒ 3

? Sudėliokime kauliukus, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekvienos eilutės ir stulpelio suma bus lygi 10, jei uždengtoje kauliuko pusėje bus $10 - 1 - 2 - 4 = 10 - 7 = 3$ akutės. Renkamės variantą **C**.



! Įsitikinkime, kad pasislėpusių akučių skaičius negali būti kitoks. Iš pradžių suskaičiuokime, kiek akučių iš viso matome sąlygos paveikslėlyje: $4+1+2+1+3+2+4+5+1+3+1+2+2+6 = 37$. Kokia gali būti visų kauliukų akučių suma (pridėjus uždengtos kauliuko pusės akutes)? Uždengtoje pusėje gali būti mažiausiai 0 akučių, taigi mažiausia galima visų akučių suma yra 37, o daugiausiai gali būti 6 akutės, tada suma bus $37 + 6 = 43$. Taigi, visų akučių suma turi būti skaičius tarp 37 ir 43.

Jeigu kiekvienos eilutės akučių suma yra tokia pati, tai visų kauliukų akučių suma bus keturis kartus didesnė. Tai reiškia, kad visų akučių suma dalysis iš 4. Vienintelis skaičius, kuris yra tarp 37 ir 43 ir dalijasi iš 4, yra 40. Vadinasi, uždengtoje kauliuko pusėje privalo būti $40 - 37 = 3$ akutės. Teisingas atsakymas **C**.

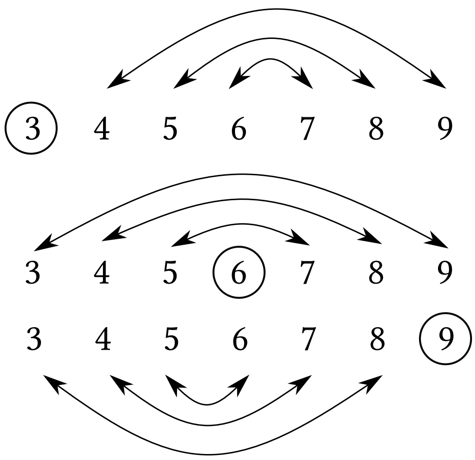
30. (E) 18

! Į vidurinį skrituliuką įrašytas skaičius atsidurs visose trijose sumose. Šį skaičių pažymėkime K. Jeigu sudėtume visų trijų tiesių skaičių sumas, tai šioje „sumų sumoje“ vidurinio skrituliuko skaičius K pasirodytų 3 kartus, o kiekvieno likusio skrituliuko skaičius pasirodytų po vieną kartą. Kitaip tariant, ši „sumų suma“ būtų lygi skaičių 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 sumai, prie jos dar du kartus pridėjus vidurinio skrituliuko skaičių, t. y. būtų lygi

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + K + K = 42 + 2 \cdot K.$$

Kita vertus, ši „sumų suma“ yra trigubai didesnė už vienos tiesės skaičių sumą, todėl ji būtinai turi dalytis iš 3. Kokius skaičius galime imti vietoje K, kad suma $42 + 2K$ dalytųsi iš 3? Jei $K = 3$, tai $42+2K = 45+2\cdot 3 = 51$, dalijasi iš trijų. Jei $K = 4$, tai $42+2K = 45+2\cdot 4 = 53$, nesidalija iš trijų. Jei $K = 5$, ši suma lygi 55, ir panašiu būdu perrinkę visus skaičius nuo 3 iki 9 randame, kad vietoje K tinka tik skaičiai 3, 6 ir 9 (vikresnė sprendėja galėjo ir neperrinkdama skaičių pastebėti, kad kadangi skaičius 42 dalijasi iš 3, tai ir suma $42 + 2K$ dalysis iš trijų tik tada, kai K irgi dalysis iš trijų, t. y. kai K bus vienas iš skaičių 3, 6 arba 9).

Lieka įsitikinti, kad tikrai įmanoma užpildyti visus skrituliukus skaičiais Andriaus norimu būdu, jei į vidurinį skrituliuką rašysime 3, 6 arba 9. Tarkime, kad į vidurį rašome 3. Kadangi vidurinis skaičius visoms tiesėms tas pats, užtenka likusius šešis skaičius padalinti į tris poras, kurių sumos lygios: 4 ir 9, 5 ir 8, 6 ir 7. Panašiai samprotaujame, kai į vidurinį skrituliuką įrašome 6 arba 9; grafiškai tai pavaizduota paveikslėlyje apačioje: apskritimu apvestą skaičių rašysime į vidurinį skrituliuką, o rodyklėmis sujungtus skaičius – į priešingus kraštinius tos pačios tiesės skrituliukus. Taigi ir 3, ir 6, ir 9 tikrai galima rašyti į vidurinį skrituliuką. O jų visų suma yra $3 + 6 + 9 = 18$. Teisingas atsakymas – **E**.



Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	A
2	D
3	B
4	B
5	D
6	E
7	D
8	C
9	C
10	B
11	E
12	B
13	E
14	A
15	C
16	C
17	D
18	E
19	A
20	E
21	C
22	C
23	D
24	C
25	B
26	D
27	B
28	C
29	C
30	E