

Technologijos, kurias galima panaudoti mokymė. 1 dalis

Simonas Mamaitis

VU

2019 Birželis

Šioje dalyje bus pademonstruojamos technologijos, kurias galima panaudoti aiškinant matematinę medžiagą:

- Vizualizacijos, prieinamos kuriant .pdf failus per Latex skriptą

Sprendimų vaizdavimas su .pdf failais

1. Uždavinių sprendimų automatizavimas su Python

- Tikslas: palengvinti kelią mokantis matematines procedūras.
- Uždavinys būna žinomas. Pvz. išspresti lygčių sistemą Gauso metodu.
- Į aplinką įvedami pradiniai duomenys.
- Programa sugeneruoja sprendimą .tex formatu
- Sprendimą vėliau rankiniu būdu arba automatiškai galima versti į .pdf failą.

Automatizavimo pavyzdys

Lygčių sistemos sprendimas Gauso metodu.

$$\begin{cases} 1a + 1b + 2c + 1d = 7 \\ 3a + 4b + 8c + 5d = 29 \\ 1a + 3b + 7c + 8d = 30 \\ 2a + 2b + 5c + 6d = 23 \end{cases}$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 5 & 29 \\ 1 & 3 & 7 & 8 & 30 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & 23 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times (-3)} \xrightarrow{\downarrow \times (-1)} \xrightarrow{\downarrow \times (-2)} =$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times (-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & -46 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times (0)} =$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times (-1)} =$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times (-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times (-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times (-1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\uparrow \times (-2)} \xrightarrow{\uparrow \times (-2)} =$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times (-1)} =$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Automatizavimo pavyzdys

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1a & = 1 \\ 1b & = 2 \\ 1c & = 1 \\ 1d & = 2 \end{array} \right.$$

Sprendimų vaizdavimas su .pdf failais

2. Interaktyvūs aiškinimai klausimų - atsakymų forma.

- Tikslas: parodyti, kaip reikšti ir perfrazuoti mintis tiek matematiškai, tiek naudojant kasdieninę kalbą.
- Tipiniai komponentai: kintamųjų prasmių užrašymas, lygybių sudarymas, lygybių pertvarkymas, grįžimas prie prasmės gavus reikšmes.
- Komponentai gali būti smulkinami į mažesnius.
- Sprendimo struktūra išlieka vienoda nepriklausomai nuo uždavinio temos ir sudėtingumo.

Interaktyvaus aiškinimo pavyzdys

Melionas ir arbūzas kartu sveria 8 kg. Arbūzas yra $\overbrace{x \text{ ir } x+2}$ už melioną. Kiek sveria melionas?

Tegu: $\begin{cases} x \text{ yra arbūzo svoris} \\ x + 2 \text{ yra meliono svoris} \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{matrix} \text{arbūzo svoris} & \text{meliono svoris} \\ x & x+2 \end{matrix}}_{\text{visų dalių svoris}} = 8$$

Iš kokius raktinius žodžius atkreipiame dėmesį?

Kokių raidinių reiškinius naudojame?

Ką žymi šie reiškiniai?

Koks kitas faktas yra nurodytas sąlygoje?

Sudarykite šį faktą atitinkančią lygtį.

Išspręskite sudarytą lygtį

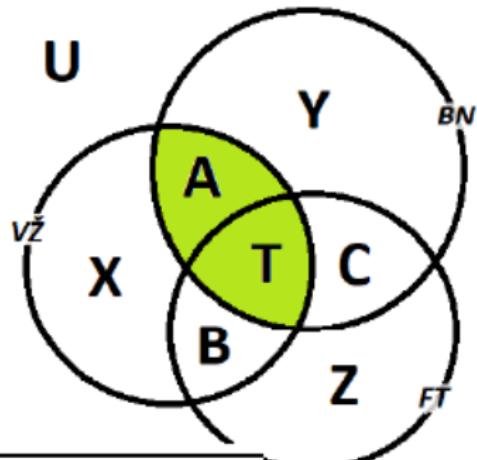
Interaktyvaus aiškinimo pavyzdys

70-ties verslo lyderių apklausa atskleidė, kad:

- ▷ 30 iš jų reguliariai skaito "Verslo žinias"
- ▷ 25 iš jų reguliariai skaito "Baltic News"
- ▷ 20 iš jų reguliariai skaito "Financial Times"
- ▷ 10 skaito "Verslo žinias" ir "Baltic News"
- ▷ 7 skaito "Verslo žinias" ir "Finantial Times"
- ▷ 8 skaito "Baltic News" ir "Finantial Times"
- ▷ 3 skaito visus tris leidinius

Kiek iš apklaustųjų verslininkų skaito:

- ▷ Nors vieną iš minėtų laikrasčių?
- ▷ Bent du iš minėtų laikrasčių?
- ▷ Po vieną iš minėtų laikrasčių?



Tegu: $\begin{cases} \text{skritulys } V\bar{Z} \text{ atitinka verslo lyderius, kurie skaito "Verslo žinias"} \\ \text{skritulys } BN \text{ atitinka verslo lyderius, kurie skaito "Baltic News"} \\ \text{skritulys } FT \text{ atitinka verslo lyderius, kurie skaito "Finantial Times"} \end{cases}$

$$X + Y + Z + A + B + C + T + U = 70$$

$$X + A + B + T = 30 \quad \text{Brėžinyje pavaizduokite Veno diagramą}$$

$$Y + A + C + T = 25 \quad \text{Ką atitinka vaizduojami skrituliai?}$$

$$Z + B + C + T = 20 \quad \text{Atskiras Veno diagramų zonas pažymėkite kintamaisiais}$$

$$A + T = 10 \quad \text{Kurią sritį atitinka tai, kas nurodyta paryškintoje uždavinio sąlygos dalyje?}$$

Sprendimų vaizdavimas su .pdf failais

3. Prasmės pavaizdavimas reiškiniuose.

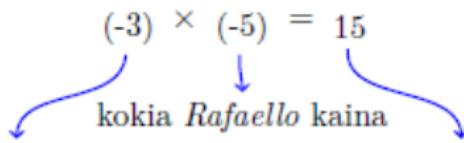
- Tikslas: ugdyti įprotį įsimenant matematinę medžiagą kreipti dėmesį ne tik į reikšmes, bet ir į prasmes.
- Tipinis vadovėlinis klausimas: kokia reiškinio $x(x + 1)$ reikšmė, kai $x = 2$?
- Mano klausimas: kokia šio reiškinio prasmė?

$$(-3) \times (-5) = 15$$

kokia Rafaello kaina

kiek kartų atsisakiau pirkti Rafaello

kaip pakito mano lėšos

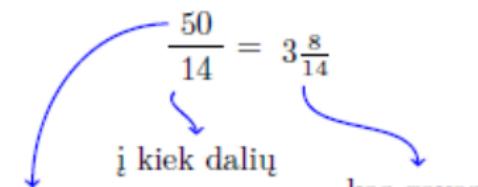


$$\frac{50}{14} = 3\frac{8}{14}$$

į kiek dalijų

ką dalijame

kas gavosi



Sprendimų vaizdavimas su .pdf failais

4. Iššokančiosios užuominos.

- Tikslas: suteikti galimybę sprendimo aiškinimo gylį pasirinkti pačiam pagal poreikius.
- Sprendimo žingsnių paaiškinimus galima klasifikuoti į atskirus tipus: įvedamų kintamųjų prasmės paaiškinimas, parodymas, kas įstatoma ir į kokią formulę, parodymas, kokia lygybe remiantis buvo atliktas pertvarkymas.

$$(x+y)^2 \quad \underbrace{=} \quad x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{cases} x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \end{cases}$$

$$(x+y)^2 \quad \underbrace{=} \quad x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow y+z \end{cases}$$

$$(x+y)^2 \quad \underbrace{=} \quad x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \sin x \\ y \rightarrow \cos x \end{cases}$$

Iššokančiu užuominų pavyzdys

Tekste galima talpinti kaip nors žymimus interaktyvius laukelius.

Kiek keturženklių skaičių, kurie dalijasi iš 4, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, jeigu skaitmenys nepasikartoja?

Sprendimas. Panaudojame dalumo iš 4 požymį (■) ir nustatome, kad pirmą dvięjų paskutinių pasirinkimas priklauso nuo pirmų dviejų. Pavyzdys (■). Nagrinėdami dalinius atvejus, remsimės tokiais pastebėjimais:

- Visi skaičiai, kurie yra dalūs iš 4, gali baigtis tik 2 arba 4 (■).

Paspaudus ant pažymėtos teksto dalies iššoka užuomina:

Kiek keturženklių skaičių, kurie dalijasi iš 4, galima sudaryti iš skaitmenų

1, 2, 3, 4, 5, jeigu pasirenkame, kad pirmas skaitmuo būtų 2, o antras 4,

Spai negalėsime sudaryti nei vieno tokio skaičiaus.

mu Tačiau pasirinkus pradžią „13”, galima sudaryti netgi 3 tokius skaičius: 1312, 1352, 1324

(■). Nagrinėdami dalinius atvejus, remsimės tokiais pastebėjimais:

- Visi skaičiai, kurie yra dalūs iš 4, gali baigtis tik 2 arba 4 (■).

Paspaudus dar sykj, užuominą išnyksta.

5. Animacijos.

- Tikslas: supaprastinti įvairius stebėjimus, pakeisti medžiagos formatą į lengviau įsisavinamą.
- Galima rinktis du animavimo būdus: ar kadrus kursime su Python, ar su LaTeX.

Animacijų pavyzdžiai: Latex programavimas

Animacijų pavyzdžiai: Python programavimas

Į kvadratą įbrėžiame apskritimą.

Padalijame šį kvadratą į $n \times n$ kvadratelių.

Kvadratelius, kurie yra vidinėje šio apskritimo dalyje, bet nėra kertami apskritimo, nuspalviname šviesiai mėlynai.

Kvadratelius, kurie yra kertami apskritimo, nuspalviname tamsiai mėlynai.

Kurią dalį kvadrato sudaro mėlyni kvadrateliai?

Animacijų pavyzdžiai: Python programavimas

Eksperimentas, kuris leidžia geriau išsivaizduoti, į ką panašėja figūra, gauta skritulį dalijant į vis daugiau lygių dalių:

Animacijų pavyzdžiai: animuoti pertvarkymai su LaTeX

Sprendimų vaizdavimas su .pdf failais

6. Kiti nesudėtingi triukai, išskiriantys Latex iš kitų priemonių:

- Nuorodų įkėlimas. Pvz. galime tam tikrus pertvarkymus pasitikrinti internte:

Pasitirkinkime, ar teisingai darėme

- Skripto talpinimas.

```
for i in range(3):
    skaiciai = np.sqrt(skaiciai)
plt.plot(np.linspace(0,10,100), skaiciai)
```

Sprendimų vaizdavimas su .pdf failais

- Lygčių lygiavimas. Leidžia aiškiau matyti pertvarkymus.

Lygties sprendimas

$$\frac{x-2}{3} + 1 = \frac{2x}{7}$$

Įsitikiname, kad trupmenų vardiklių sandauga 21 nelygi 0, tad iš jos padauginame

$$7(x - 2) + 21 = 6x$$

$$7x - 14 + 21 = 6x$$

$$7x + 7 = 6x$$

Vienanarius surenkame į kairę lygties pusę, o laisvuosius narių į dešinę pusę
Sutvarkome lygtį

$$7x - 6x = -7$$

$$x = -7$$

Sprendimų vaizdavimas su .pdf failais

- Tekstas rėmeliuose.

SVARBU: norėdami sprendimą peržiūrėti pažingsniui privalote susiinstaliuoti pdf

galime apskaičiuoti kiekvienos srities, kurią įmanoma padalinti į stačiakampius, plotą

Tarp miestų A ir B lygiagrečiai viena kitai nutiestos dvi telefono linijos. Atstumas tarp A ir B yra n kilometrų, o linijos nutolusios viena nuo kitos per m kilometrų. Kontroliniam matavimui speciali aparatūra prijungiamama prie atsitiktinai parinktų abiejų linijų taškų. Raskite atstumo kvadrato tarp matavimo vietų vidutinę reikšmę

Gebėjimai, kurių reikia

Spresti tiesines lygtis, atliliki aritmetinius veiksmus su sveikaisiais ir trupmeniniais skaičiais.

- Interaktyvus turinys. Leidžia jeiti į pasirinktą temą

Vaizdavimo privalumai ir trūkumai

- Darbo rezultatas padeda daug matematinės medžiagos vizualizuoti. Tai yra puiki pagalbinė priemonė norint aiškiai ir įsimenamai atsakyti į pagrindinius mokymosi klausimus: kaip pasikeis teiginio (reiškinio, lygybės, figūros...) forma taikant samprotavimo žingsnį, kaip pasikeis vieno kintamo objekto (reiškinio, teiginio, grafiko, figūros, lygybės) forma keičiant kitą objektą.

Vaizdavimo privalumai ir trūkumai

- Rezultatą sunku pasiekti: daugybę techninių klausimų išsiaiškinti trunka per daug laiko. LaTeX yra redaktūros, o ne programavimo įrankis, todėl animacijų kūrimas yra labai sudėtingas.
- Dviejų skriptų pavyzdys: Tangento animacijos su LaTeX ir skritulio ploto animacijos su Python.
- Abu skriptai reikalauja pradinių žinių, kaip naudotis specialiais paketais ir jų komandomis, skirtomis „patalpinti“ įvairius objektus į atskirus paketus. Šios žinios yra įgyjamos praleidžiant daug laiko skaitant tų paketų dokumentacijas.

Vaizdavimo privalumai ir trūkumai

- Skirtumas tarp programavimo būdų: Python komandų arsenalas ne tokis didelis ir lengviau perprantamas įprastam programuotojui, o dirbant su LaTeX reikia kur kas daugiau laiko praleisti aiškinantis klausimus, kurie įprastame programavime nekiltę. Laiko nuostoliai dideli.
- Pavyzdys: kodėl ši komanda neveikia?

```
\begin{mybox}{Gebėjimai, kurių reikia}
```

Spręsti tiesines lygtis, atlikti aritmetinius veiksnius
\end{mybox}

Atsakymas:

Gebėjimai, kurių reikia **reikėjo** pakeisti į

Gebėjimai\text{}, {} kurių reikia

Vaizdavimo privalumai ir trūkumai

- LaTeX: pagrindiniai laiko nuostoliai dirbant kyla dėl neinformatyvių klaidų pranešimų. Pvz. pranešimas:

```
inframe by 1\relax \relax \expandafter \iterate \fi \let \iterate \relax \beamer@writeslidenumber@beamer@resetecodes ' between \begin{minted}[<key=value>] and \lineend
```

```
\FV@Error ... {FancyVerb Error:  
\space \space #1  
}
```

- Kuriant animacijas kadru apdorojimas lėtas. Pvz. vien ši pateiktis yra apdorojama tik per 2 minutes dėl didelio animacijų kieko.
- Norint išgauti tam tikras galimybes reikia aiškintis daug pašalinių klausimų. Pvz. skriptų rodymas ir iššokančiosios užuominos neveiks leidžiant skriptą per kitus kompiuterius, neturinčius tų pačių nustatymų. Be to, animacijas ir užuominas galima matyti tik per Adobe Acrobat Reader.

Vaizdavimo privalumai ir trūkumai

Išvados: LaTeX patogus naudoti tik paprastoms, su teksto redagavimu susijusioms užduotims. Jei norime kurti animacijas ir paveisklēlius, laiko prasme kadrus geriau kurti su programavimo kalba.

Alternatyvos LaTeXui: .md formatas

- .md failų formatas - tai formatas, pritaikytas įvairių programų dokumentacijoms.
- Jo redaktūra yra supaprastinta.
- README .md failas yra įprastinė kiekvieno programavimo projekto dalis.
- Skaitymui ir redagavimui galima naudoti redaktorius, tokius kaip Typora <https://typora.io>.
- Geras pavyzdys yra čia.
- Kompiliavimas neužtrunka, tačiau failą perkélus į kitą kompiuterį, iliustracijų nesimatys, nes bus prarastos jų nuorodos.

Alternatyvos LaTeXui: .md sintaksė

- .md failų formatas - tai formatas, pritaikytas įvairių programų dokumentacijoms.
- Jo redaktūra yra supaprastinta.
- README.md failas yra įprastinė kiekvieno programavimo projekto dalis.
- Skaitymui ir redagavimui galima naudoti redaktorius, tokius kaip <https://typora.io> Typora.
- Geras pavyzdys yra čia.
- Kompiliavimas neužtrunka, tačiau failą perkélus į kitą kompiuterį, iliustracijų nesimatys, nes bus prarastos jų nuorodos.

Alternatyvos LaTeXui: .md formatas

- Lentelės

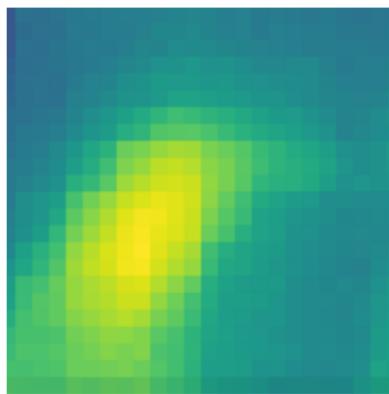
First	Second
-----	-----
plan A	plan B

First	Second
plan A	plan B

Alternatyvos LaTeXui: .md formatas

- Paveikslėlių įkėlimas

```
! [] (readme_image.png)
```



- Antraščių dydis reguliuojamas grotelėmis prieš tekštą.
- Pasvirimas, paryškinimas ir sąrašo sudarymas reguliuojami * simboliais.

Programavimas gyvai

Mokiniams atrodo sudėtinga įvairias matematines užduotis atlikti kompiuteriu, pvz. :

- pažymėti koordinacijų plokštumos taškus
- nubraižyti stulpelinę diagramą
- nustatyti skaičiaus daliklius
- išrašyti visas įmanomos elementų poras iš 2 aibėjų

Kas bendra tarp šių uždavinių?

- Kam daugiausiai gali būti lygus stačiakampio plotas, jei jo perimetras lygus 8?
- Aptyksliai įvertinkite skaičių, kurį sudauginę su savimi 12 kartų gausite 2.
- Su kuriuo N dešimtainis skaičiaus $1/N$ užrašas turės pabaigą?
- Kaip pasikeis rezultatas, jei dalmenį sumažinsime 3 kartus?
- Kiek yra dviženklių skaičių?
- Kaip keisis rezultatas iš jo daug kartų traukiant šaknį?
- Ar šaknų iš skaičių sandauga lygi šakniai iš skaičių sandaugos?

Tipinė sprendimo struktūra:

- Kas tai yra? Ar galime rasti pavyzdžių?
- Ar galime iš rastų pavyzdžių pastebėti dėsningumą?
- Ar galime patikrinti, kiek pastebėtas dėsningumas atitinka tiesą?
- Ar galime paaiškinti, kodėl dėsningumas galioja?

Tipinė sprendimo struktūra (paryškinti klausimai gali būti lengviau atsakomi naudojant programavimą):

- Kas tai yra? Ar galime rasti pavyzdžių?
- Ar galime iš rastų pavyzdžių pastebėti dėsningumą?
- Ar galime patikrinti, kiek pastebėtas dėsningumas atitinka tiesą?
- Ar galime paaiškinti, kodėl dėsningumas galioja?

Programavimas gyvai

```
skaiciai = np.linspace(0,2,100)
for i in range(3): skaiciai = np.sqrt(skaiciai)
plt.plot(np.linspace(0,10,100), skaiciai)
plt.show()
```

Programavimas: už ir prieš

- Programavimas padeda suvokti, jog svarbu ne tik kintamieji, bet ir jų kategorijos taip, kaip ir matematikoje.
- Mokiniai nėra įpratę prie aukščiau minėtų samprotavimo žingsnių
- Kai kurios loginės konstrukcijos per sudėtingos. Pvz. kuo skiriasi dviejų skaičių sumos kvadratas nuo jų kvadratų sumos?
- Būtinas, nes dirbtinis intelektas ima pranokti vaikus