Pastebėtos mokinių spragos

Pastovus užmiršimas, kokie yra veiksmų su teig./neig. skaičiais rezultatai

Spragos pavyzdys.
Kam lygu -2.5+3? Kam lygu 40:(-5)? Moksleivis spėja kelis kartus, kol pataiko.

Spragos priežastys. Išmokus neigiamų ir teigiamų skaičių veiksmų taisykles, jos dažnai užsimiršinėja. Tai vyksta todėl, kad įgyta patirtis mokantis taisykles yra nuobodi, neprasminga ir nepatikrinama.

Kaip pašalinti spragą Mokantis ilgam lakotarpiui reikia stengtis labiau ne prisiminti neigiamų skaičių veiksmų taisykles, o prasmingus pavyzdžius, kur jos pasitaiko. Tuose pavyzdžiuose turi atsispindėti skaičių ir jų veiksmų prasmės. Pavyzdžiui:

Veiksmas	Prasmė
$2-3,5=-1,5$	uždirbau 2 ir išleidau 3,5, vadinasi turiu 1,5 minuso
$-1,5-3,5=-5$	išleidau 1,5 ir išleidau 3,5, vadinasi turiu 5 minuso
$-1,5+3,5=2$	išleidau 1,5 ir uždirbau 3,5, dabar turiu 2 pliuso
$-1,5-(-3,5)=2$	išleidau 1,5 ir išleidau išleidau 3,5, dabar turiu (?)

Iš paskutinio veiksmo pavyzdžio matome, kad ne visada naujas sugalvotas kontekstas pakankamai stiprus paaiškinti visus veiksmus. Tai dažnas atvejis matematikoje pereinant prie vis sudėtingesnių sąvokų. Nepaisant to reikia stengtis išlikti kūrybišku ir paieškoti naujų prasmių.

Veiksmas	Prasmė
$2-3,5=-1,5$	pirmyn 2 ir atbulai 3,5, vadinasi atbulai 1,5
$-1,5-3,5=5$	atbulai 1,5 ir atbulai 3,5, vadinasi atbulai 5
$-1,5+3,5=2$	atbulai 1,5 ir pirmyn 3,5, vadinasi pirmyn 2
$-1,5-(-3,5)=2$	atbulai 1,5 ir atbulai nuo atbulinės krypties 3,5, vadinasi atbulai 1,5 ir pirmyn 3,5, vadinasi pirmyn 2

Iš šių pavyzdžių reikia prisiminti tik tiek, kad skaičių sudėtį ir atimtį lengviausia paaiškinti suteikiant veiksmams tokias prasmes:

$$\text{Skaičius} = \begin{cases}\textbf{poslinkis pirmyn}, \text{ jei jis teigiamas}\\ \textbf{poslinkis atgal}, \text{ jei jis neigiamas}\end{cases} \quad \text{Minuso ženklas} = \textbf{krypties apgręžimas}$$

Taip pat matėme, kad sudėties ir atimties prasmė gali būti

$$\text{Skaičius} = \begin{cases}\textbf{uždirbta suma}, \text{ jei skaičius teigiamas}\\ \textbf{išleista suma}, \text{ jei skaičius neigiamas}\end{cases},$$

tačiau ji nepakankamai užbaigta, nes sumos apgręžimas gyvenime nepasitaiko.

Panašiomis idėjomis remdamiesi galime sugalvoti, kokią prasmę turi teigiamų ir neigiamų skaičių daugyba.

Veiksmas	Prasmė
$2\cdot 3,5=7$	2 kartus sutikau uždirbti po 3,5, vadinasi turiu 7 pliuso
$2\cdot(-3,5)=-7$	2 kartus sutikau išleisti po 3,5, vadinasi turiu 7 minuso
$-2\cdot 3,5=-7$	2 kartus atsisakiau uždirbti po 3,5, vadinasi turiu 7 minuso
$-2\cdot(-3,5)=7$	2 kartus atsisakiau išleisti po 3,5, vadinasi turiu 7 pliuso

Šiuo atveju daugybos prasmė tokia:

$$\text{Pirmas daugiklis} = \begin{cases}\textbf{kiek kartų sutikau}, \text{ jei jis teigiamas}\\ \textbf{kiek kartų atsisakiau}, \text{ jei jis neigiamas}\end{cases}$$

$$\text{Antras daugiklis} = \begin{cases}\textbf{uždirbta suma}, \text{ jei jis teigiamas}\\ \textbf{išleista suma}, \text{ jei jis neigiamas}\end{cases}$$

Dalybos atveju užtenka prisiminti, kad rezultatų ženklai yra tokie patys, kaip daugybos atveju. Pavyzdžiai iš gyvenimo yra per daug tolimi, kad galėtume suteikti dalybai prasmę ir tokiu atveju yra vadovaujasi matematiniu išvedimu (loginis pagrindas: padalinti iš -1 reiškia padauginti iš -1).

Nemokėjimas taikyti distributyvumo

Spragos pavyzdys. Įprastai moksleiviams nuo 5 iki 12 klasės duodu atlikti testą, kur reikia apskaičiuoti:

1. kiek bus $x+x$? (5 klasės lygis)
2. kiek bus 1km+2km? (pradinių klasių lygis)

3. kiek bus $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$? (5 - 6 klasės lygis)

4. kiek bus $\sqrt{7}+2\sqrt{7}$? (9 klasės lygis)

5. kiek bus $2(x^2+1)+3(x^2+1)$? (7? klasės lygis)

Moksleivių atsakymai į šį testą stulbinamai skiriasi. Gabus penktokas atsako į visus klausimus išskyrus paskutinį. 8-9 klasės moksleiviai, turintys daug spragų mintinai žino, kam lygu 1km+2km. Taip pat jie moka procedūriškai (neinterpretuodami) atlikti $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$, veiksmo $x+x$ rezultatą pateikia kaip $2x^2$ arba kaip vieną galimą iš $2x$ ir $2x^2$, o $\sqrt{7}+2\sqrt{7}$ ir $2(x^2+1)+3(x^2+1)$ yra per sunku. Palyginimui gabesnioji abiturientė į visus klausimus atsako teisingai, tačiau paskutinįjį apskaičiuoja ilgesniu procedūriniu būdu (iš pradžių atskliaudžiame, tuomet sutraukiame panašiuosius narius)

Spragos priežastys. Visi pavyzdžiai pasižymi tuo, kad juose reikia sudėti po kažkelis vienodus objektus ir parašyti, kiek jų gavosi. Šie objektai - tai iksas, kilometras, trečioji, šaknis iš 7 ir reiškinys x^2+1. Moksleiviai nukenčia stengdamiesi kiekvienam veiksmui taikyti skirtingas procedūras (kurių dažnai neatsimena), tačiau neturi pakankamų mąstymo įrankių suprasti, jog visi atlikti veiksmai pasižymėjo ta pačia pagrindine savybe.

Kaip pašalinti spragą Pagal Piaget (kognityvinės raidos pradininką) tokia mąstysena priskiriama formalių operacijų fazei, kuri yra priklausanti ne nuo matematinių taisyklių mokėjimo, o kognicijos išsivystymo. Norint paspartinti šį išsivystymą reikėtų individui suteikti tam tikros patirties. Tyrimai parodė, kad silpnesnieji moksleiviai matematiką geriau išmoksta projektų pagalba. Dėl to siūlau per pamoką atikti projektą **Veiksmai su kortelėmis**.

Pagal profesorių D. Tall, 30 metų atlikusio tyrimus apie tai, kaip žmonės išmoksta mąstyti matematiškai, daugelis matematikoje vartojamų reiškinių yra ypatingos sintaksės struktūros ***proceptai***, nepasitaikantys kalboje, nes vienu metu žymi ir *procesą*, ir *sąvoką*. Pvz. 2+3 žymi ir sudėtį, ir sumą, o $2x+6$ žymi ir skaičiavimo procesą (padauginti iš 2 ir pridėti 6) ir algebrinę išraišką, pasižyminčią jai priskirtinomis *savybėmis* (gali įgyti reikšmę arba būti išskaidyta). *Proceptualus mąstymas* - tai toks mąstymas, kuomet dirbant su reiškiniais pagal kontekstą gebama lanksčiai šokinėti tarp proceso, sąvokos bei jų savybių. Tuo tarpu mūsų šalies moksleiviai, kurie nėra gabūs matematikoje, pasižymi *Procedūriniu mąstymu* - tokiu mąstymu, kuomet matematiniuose uždaviniuose yra stengiamasi ne sugalvoti, o prisiminti, ką po ko reikia atlikti, norint gauti atsakymą. Remdamasis D. Tall galiu pasiūlyti pluoštą pratimų, skirtų ugdyti proceptualų mąstymą, kai procedūrinis nesiseka. Jie yra tokio pobūdžio:

1. Pavaizduokite, kodėl taisyklė $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ yra teisinga ir pritaikykite ją reiškiniams $2x+3$ ir $x+2$

2. Užrašykite, kaip atrodys taisyklės atlikus įvardytus įsistatymus arba pratęskite lygybes atlikdami nurodytus pakeitimus.

a) $\sin(x+y) \underbrace{=}_{\begin{cases} x\to x \\ y \to x\end{cases}} \sin x\cos y+\cos x\sin y$

b) $(a^3)^5 \underbrace{=}_{a^3\to a\cdot a\cdot a} \dots \underbrace{=}_{(a\cdot a\cdot a)^5=?} \dots .$

c) $(x+y)^2 \underbrace{=}_{\begin{cases} x\to x \\ y \to 2\end{cases}} x^2+2xy+y^2$

d) $(x+y)^2 \underbrace{=}_{\begin{cases} x\to 1 \\ y \to 2\end{cases}} x^2+2xy+y^2$

e) $(x+y)^2 \underbrace{=}_{\begin{cases} x\to a \\ y \to b\end{cases}} x^2+2xy+y^2$

f) $(x+y)^2 \underbrace{=}_{\begin{cases} x\to x \\ y \to y+z\end{cases}} x^2+2xy+y^2$

g) $(x+y)^2 \underbrace{=}_{\begin{cases} x\to \sin x \\ y \to cosx\end{cases}} x^2+2xy+y^2$

h) $x^2+2xy+y^2 \underbrace{=}_{x^2+y^2\to 7} \dots$

i) $\frac{7}{\sin x^2+\cos y^2} \underbrace{=}_{\sin x^2+\cos y^2\to 1} \dots$

j) $a=\frac{v-v_0}{t} \underbrace{=}_{t\to\frac{s}{v}} \dots$

Lygybės tęsimas bet kaip keičiant reiškinio dalis

Spragos pavyzdys.

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$...

$\sqrt{45}$ =... nežinau, kaip išskaidyti, kad pasidarytų.

Spragos priežastys.

Galimas daiktas, jog į lygybę žiūrima kaip į komandą „daryk kažką". Lygybės savybė, kad ji gali būti pratęsta atlikus tam tikroje dalyje reiškinio teisingus skaičiavimus arba pertvarkymus nėra iki galo suprasta. Pavyzdžiui, jei mokinys $\sqrt[3]{2}$ pol lygybės pakeičia į $\sqrt[3]{8}$, tai gali rodyti, jog $\sqrt[3]{8}$ turi per mažai bendro su jai lygia reikšme 2 panašiai kaip 2+7 turi per mažai bendro su 11-2. Spėju, kad tai proceptualaus mąstymo trūkumas, kuomet šaknies traukimo procesas (kartais pavykstantis, o kartais ne) per sunkiai siejasi su šaknimi, kaip su sąvoka arba vientisu objektu, kurio struktūros sprendimo eigoje nekeičiame. Kitas proceptualaus mąstymo trūkumo signalas būtų nesugebėjimas lanksčiai parinkti tinkamos sandaugos $45 = 9 \cdot 5$, kad vienas daugiklis būtų toks, iš kurio šaknies traukimas pavyksta.

Kaip pašalinti spragą

Moksleiviui reikia įgyti patirties bandant kiekvieną skaičių išskaidyti daugikliais visais įmanomais būdais. Skaidymo dauginamaisiais procedūros paskirtis yra tą patį skaičių gebėti užrašyti skirtingomis formomis. Tačiau pajusti, kokia forma yra palankiausia šaknies traukimui, galima tik savo patirtimi. Tik vėliau galima pereiti prie nagrinėjimo, kokį vaidmenį atlieka šaknies traukimo procesas iš sandaugos ir sandaugos, kuri parašyta tinkamiausia forma. Rekomenduojai pratimai: išskaidyti keletą skaičių: 100, 104, 75, 243, 98 visomis įmanomomis sandaugomis ir nustatyti šių skaičių šaknis skirstant pirminius daugiklius į grupes.

$15^2 + 8^2 = c^2$

$289 = c^2$

$\sqrt{289} = c$

$17 = c$