1 Kaip įgyjamas matematikos supratimas?

Šiame tekste remdamasis psichologijos žiniomis apie mąstymo procesą bei jo vystymosi raidą mėginsiu atsakyti į klausimą, kodėl moksleiviams ir studentams dažnai yra sunku pasiekti gerų rezultatų matematikoje ir kaip padidinti matematikos mokymosi efektyvumą.

1.1 Moksleivių ir studentų sunkumų sprendžiant uždavinius pavyzdžiai

Amerikiečių kolegijos dėstytojas M. Thornton (1984) aprašo reiškinį, kai kiekvienais metais į kolegiją įstoja keli studentai, pradiniuose kursuose visiškai nesuprantantys, kas vyksta matematikos paskaitose. Šie studentai neatrodo tingintys ar kvaili, kai kurie iš jų prie matematikos praleidžia labai daug laiko ir gerai išlaiko kitus dalykus. Atrodo, kad jiems mokantis kyla ne supratimas, o nusivylimas. Ši patirtis ypač pasimato studijuojant geometriją. Dėstytojas teigia būdamas pirmakursiu pats gavęs gerus pažymius daug atsimindamas, bet ne suprasdamas. Jis pripažino, jog būdamas antrakursiu nebuvo pasiruošęs deduktiniam samprotavimui, įrodymų ir aksiomomų supratimui, nes neturėjo tam reikiamų išvystytų mąstymo įgūdžių. Čia parodyta, kaip toje kolegijoje uždavinius sprendė kai kurie studentai.



Abu pavaizduoti trikampiai yra panašūs. Raskite kraštinės s ilgį.

Studento sprendimas: $s \leftrightarrow 2, 7 \leftrightarrow 4, x \leftrightarrow 3$. Kadangi 2: 4: 3, tai s:7:x arba 5: 7: 6. Vadinasi, s=5

2. Tarkime, kad jūsų mokytojui yra 40 metų, o jums 18 metų. Kiek procentų esate jaunesnis už savo mokytoją? **Studento sprendimas:** $\frac{18}{40} = 0.45 \times 100 = 45\%$ jaunesnis.

Kito studento sprendimas: $\frac{40}{100} \times \frac{18}{x} = \frac{720}{100} = 7.2\%$

3. Žiurkė, esanti tam tikrame labirinte, pereina kelią, sudarytą iš keturių išsišakojimų. Kiekviename išsišakojime ji gali pasirinkti tik sukti kairėn arba sukti dešinėn. Vienas iš šių kelių galėtų būti pažymėtas DDKK, kas reiškia, kad pirmąsyk žiurkė suks dešinėn, antrąsyk dešinėn, po to du kartus į kairę. Naudodami šį žymėjimą užrašykite visus kelius, kuriais galėjo eiti žiurkė

Studento sprendimas: KKKK, KKDD, KDKD, KKKD, KDDK, KDDD, DDKK, DKDK, DDDK, DKKD, DKKK, DDDD (12 kelių).

Uždaviniai, kuriuos pavyzdyje pateikė dėstytojas atitinka mūsų šalies vidurinio ugdymo programą. Aprašytą atvejį galiu papildyti panašiu atveju su moksleiviais, kuomet mokydamas vieną šeštoką matematikos uždaviau jam kelis klausimus.

Pirmas pratimas mokiniui. Atlik veiksmus su trupmenomis, kuriuos neseniai ėjote: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$. **Mokinio sprendimas**.

1.
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

2.
$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{21}{49} + \frac{14}{49} = \frac{35}{49}$$

3.
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

Antras pratimas mokiniui. Sugalvok tekstinį uždavinį, kuriame reikia dauginti du skaičius.

Mokinio sprendimas. Vienos mašinos greitis yra 60, kitos 140. Sudauginę gausime 8400.

Signalinis klausimas. Kur gyvenime tau prireikė naudoti daugybą?

Mokinio atsakymas. Neprireikė.

Trečias pratimas mokiniui. Kas įvyks, jei paveikslėlyje parodytą užtušuotą dalį padidinsime tris kartus? Pavaizduok tai sąsiuvinyje.

1

Mokinio sprendimas.



Pagal pateiktus atvejus stengiantis išnagrinėti sunkumus, kylančius mokantis matematiką, tektų apsiriboti tik sunkumais, kylančiais mokantis mokyklinę programą. Studentams, besimokantiems matematiką Lietuvoje tokie pratimai būtų per lengvi, todėl vaizdžiai kalbant, nors šių pratimų analizė ir gali suteikti vertingų žinių apie matematikos mokymosi problemas, tačiau tai yra tik akiniai, skirti žiūrėti į tolį. Ji negali paaiškinti, kodėl turintys pakankamas kompetencijas studentai dažnai nepajėgia suprasti aukštosios matematikos teoremų, jų įrodymų ir dažnai pamiršta, kaip jas taikyti sprendžiant uždavinius.

1.2 Mastymo vystymosi vaidmuo matematikos ugdymo sistemoje

Daugumos pasaulio šalių šiandienės mokyklinės matematikos ugdymo sistemos susiklostė vykdant reformas, kurių pradžia siejama su "naująja matematika" (angl. new math) vadinamu judėjimu. Praėjusio šimtmečio šeštame ir septintame dešimtmečiais vyko svarbūs pokyčiai Vakarų šalių ekonomikoje ir kultūroje. Buvo tikima, kad tolesniam eknominiam ir kultūriniam vystymuisi būtini aukštos kvalifikacijos darbuotojai ir mokslininkai. Kitas svarbus faktorius buvo konkurencija su tuometine Sovietų Sąjunga, kuri 1957 m. spalio 4 d. į kosminę erdvę sėkmingai paleido dirbtinį žemės palydovą. Baimė tapti technologiškai ir kariniu atžvilgiu atsilikusiomis valstybėmis paskatino jas peržiūrėti matematikos ir gamtos mokslų mokymą.

Antru svarbiu reformas paskatinusiu faktoriumi buvo pačios matematikos evoliucija. Grupė prancūzų matematikų, pasivadinusi *N. Bourbaki* slapyvardžiu, sugebėjo suvienyti atskiras matematikos sritis aibių teorijos pagrindu bei išplėtoti aksiomatinį metodą. Tai padėjo susiformuoti požiūriui į matematiką kaip į mokslo kalbą. Buvo tikima, kad matematika yra reikalinga visose srityse.

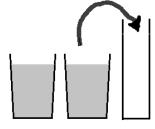
Trečias "naujosios matematiko" judėjimo atsiradimo faktorius buvo pokyčiai pedagogikoje susiję su šveicarų psichologo *J. Piaget* darbais. Jis įžvelgė analogiją tarp skaičiaus sąvokos formavimosi mechanizmo vaiko sąmonėje ir matematinių struktūrų. Be to, Piaget akcentavo aktyvų mokymosi būdą, o *N. Bourbaki* stiliaus matematika atrodė labai tam tinkama. Šio darbo didžiąją dalį užims būtent šio psichologo idėjų aptarimas, praplėtimas ir pritaikymas.

Šveicaras Jeanas Piaget - vienas žymiausių XX a. raidos psichologų, pirmasis sistemingai tyrinėjęs kognityvųjį vystymąsi. Iki jo dauguma žmonių, užmiršę savo ikimokyklinius metus, manė, jog vaikai tiesiog mažiau žino, negu suaugusieji. Savo pirmajame darbe Piaget uždavinėjo vaikams klausimus, tikėdamasis nustatyti, kokio amžiaus vaikai gali atsakyti į pateiktus klausimus teisingai. Jam kilo klausimas, kodėl vieno amžiaus vaikai negali atsakyti į tam tikrą klausimą, o teisingai atsakoį jį tik vėliau, būdami vyresni. Vėliau paaiškėjo, jog atsakymus į klausimus nulemia kognityvinė vaikų vystymosi raida. Psichologo nuomone, vaikas, pereidamas iš vienos su amžiumi susijusios stadijos į kitą, patiria pokyčių protrūkius, kuriuos seka stabilumo periodai. Kiekvienai stadijai būdingos skirtingos ypatybės, kurios lemia specifines mąstymo rūšis. Šios keturios stadijos yra:

- Sensomotorinė stadija (dažniausiai iki 2 m.). Pasaulis patiriamas pojūčiais ir veiksmais (žiūrint, liečiant, kramtant, sugriebiant)
- **Priešoperacinė stadija** (maždaug nuo 2 iki 6 metų). Daiktus ženklina žodžiai ar vaizdai, bet logiškai nesamprotaujama.
- Konkrečių operacijų stadija (maždaug nuo 7 iki 11 metų). Logiškai mąstoma apie konkrečius įvykius; suprantamos konkrečios analogijos ir atliekamos aritmetinės operacijos.
- Formaliųjų operacijų stadija (dažniausiai nuo 12 m.). Mąstoma abstrakčiai. Keliamos hipotezės, domimasi, kodėl tam tikri gamtoje esantys reiškiniai vyksta, imamas suvokti priežasties pasekmės ryšys.

Susipažinę su šiomis stadijomis aptarsime keletą į jo tyrimus įėjusių ir su vaikais atliktų uždavinių.

1. Iš pradžių ant stalo yra padėtos dvi vienodos stiklinės, kuriose yra po lygiai vandens ir viena, aukštesnė ir siauresnė, tuščia. Apklausėjas paklausia vaiko, ar jose yra po lygiai sulčių. Gavęs teigiamą atsakymą jis perpila iš pilnos stiklinės vandenį į tuščią ir pakartoja tą patį klausimą.





- 2. Iš pradžių ant stalo yra padėtos dvi vienodos eilės monetų po penkias monetas. Apklausėjas paklausia vaiko, ar eilėse yra po lygiai monetų. Gavęs atsakymą jis antroje eilėje monetas perdeda taip, kad monetų išsidėstymas būtų platesnis ir pakartoja tą patį klausimą.
- 3. Iš pradžių stalo pusėje, prie kurios sėdi vaikas, yra padėtas vienas sausainis, o kitoje pusėje du sausainiai. Apklausėjas paklausia vaiko ar tokios dalybos yra sąžiningos. Tada perlaužia vaiko pusėje esantį sausainį ir pakartoja klausimą.
 - 4. Mintinai atsakykite, kiek bus 4+5. Dabar mintinai atsakykite, kiek 9 5.
 - 5. *Mintinai atsakykite, kiek bus* 3x+x?
 - 6. Birutė yra aukštesnė už Augustą, o Dominykas aukštesnis už Birutę. Kuris iš jų yra aukščiausias?
- 7. Apklausos dalyviui, sėdinčiam prie stalo, duodame skirtingo ilgio siūlus, prie kurių galima pririšti skirtingo svorio daiktus ir paklausiame, nuo ko labiausiai priklauso švytuoklės svyravimo dažnumas: nuo siūlo ilgio, daikto svorio ar pradinio paleidimo greičio.

Pirmose trijose situacijose apklausiami vaikai į pirmą klausimą atsako teisingai. Tačiau į antrą klausimą teisingai gebama atsakyti tik kognicijai pasiekus konkrečių operacijų stadiją. Priešoperacinės stadijos vaikams atrodys, kad trečioje stiklinėje sulčių yra daugiau, antroje eilėje monetų yra daugiau ir kad dalybos yra sąžiningos. Šiuos atsakymus jie paaiškina teiginiais "sulčių daugiau, nes stiklinė aukštesnė", "monetų daugiau, nes jų eilė platesnė" ir "dvi sausainio dalys yra tiek pat, kiek du sausainiai". Iš šių eksperimentų galime suprasti, kad vaikai dažnai gali pastebėti tik vieną lyginamų objektų savybę (ilgį, plotį, kiekį, dydį), mano, kad keičiantis daikto formai, keičiasi ir jo kiekis. Ketvirta situacija parodo, kad priešoperacinėje stadijoje vaikai negali apgręžti atliekamos operacijos ir rezultatą 4 + 5 apskaičiuoti užtruks tiek pat laiko, kiek rezultatą 9 - 5. Įžengus į kitą stadiją atvirkčio veiksmo atlikimas bus suvoktas ir atsakymas gautas iškart.

Likę trys klausimai iliustruoja vaiko kognicijos perėjimą į formalių operacijų stadiją. Priešingu atveju į 5 klausimą atsakyti mintyse yra per sunku. Savo užsiėmimuose su moksleiviais ne kartą esu pastebėjęs, kad vaikas gali atsakyti tada uždavus konkretizuotą klausimą "Kiek bus 3 obuoliai + obuolys?" ir paaiškinus, jog x - tai bet kokio daikto ar dydžio žymėjimas. Į 6 klausimą mintinai pilnai atsakyti jis taip pat negali: jam reikia nusibraižyti vaikų ūgius popieriuje arba atsakymas gaunamas spėjimo būdu. Norint atsakyti į paskutinį klausimą, paprasčiausia yra pasirinkti bet kurį dydį (ilgį, svorį arba paleidimo greitį) ir jį pakeitus stebėti, ar pasikeičia dažnumas. Formalių opercijų stadijoje procesas atliekamas teisingai, o kitu atveju vaikai nėra tokie nuovokūs, dydžius keičia atsitiktine tvarka arba po kelis iš karto ir negali nustatyti teisingo atsakymo.

1.3 Kokių sugebėjimų trūksta mokantis mokyklinę matematiką

Taikant kognityvinę vystymosį teoriją ikimokyklinukams ir kai kuriems pradinukams patariama jiems duoti pratimų, kuriuose klasifikuojami įvairūs objektai ir užduoti nukreipiančius klausimus, pvz.,,kaip nusprendei, kokiai grupei kiekvienas daiktas priklauso?" arba "ar yra kitų būdų sugrupuoti daiktus?".

Remiantis pateikta teorija išaiškėja, kodėl referato pradžioje paminėtas šeštokas pateikė tokius atsakymus. Pirma, moksleivis buvo įsitikinęs, jog neatrado matematinių struktūrų, kuriose jam tektų susidurti su daugyba. Antra, jo suvokimas nebuvo pakankamas atskirti saryšiams tarp stebimų objektų savybių. Tą patvirtina du pavyzdžiai: pirma, moksleivis daugina du mašinos greičius, kai prasmę turi tik jų sudėtis ir lyginimas; antra, moksleivis painioja juslėmis suvokiamą ryškumo savybę su matematine figūros didumo savybe. Dėl panašių priežascių gerokai abstraktesni objektai, tokie kaip trupmenos, o tuo labiau jų saryšiai, moksleiviui bus nesuprantami.

1.4 Kokių sugebėjimų trūksta mokantis sudėtingesnę matematiką

Pavyzdys su studentais kol kas nėra tinkamas analizuoti remiantis Piaget tyrinėjimais tėra aišku, kad studentų mąstysena turi būti paskutiniame kognicijos etape, kas įvyksta apie 12-us metus. Tiesa, galima spėti, kad jie uždaviniuose pateiktų saryšių tarp matematinių objektų pilnai nesuprato todėl, kad besimokydami apie juos mokyklinėje programoje nebuvo pasiruošę mąstyti formaliai, del ko ir atsirado matematinės spragos. Šiuolaikiniai mokslininkai raidą laiko esant tolydesnę negu manė Piaget. XXa. 8 - ajame dešimtmetyje atlikti psichologų tyrimai pagrindžia mąstymo įgūdžių trūkumo pasireiškimą ir suaugusių žmonių tarpe. Pastebėta, kad tik 50 - 60% suaugusių žmonių tarp 25 - 30 metų, pagal kitų pratimų rodiklius pasiekę formalių operacijų stadiją, praeina mūsų nagrinėtą švytuoklės testą.

Formalių operacijų stadijoje atsiranda sugebėjimai kelti prielaidas ir svarstyti apie galimas išvadas, leidžiantys vaikui konstruoti savą matematiką. Be to, vaikai paprastai pradeda vystyti abstrakčius minčių modelius, kuriuose samprotavimas vykdomas naudojant simbolius vietoj apčiuopiamų duomenų. Pavyzdžiui mokiniai gali išspręsti lygtį x + 2x = 9

nesiremdami mokytojo padiktuota salyga kaip antai "Tomas suvalgė tam tikrą kiekį saldainių, o jo sesė suvalgė du kartus daugiau. Abu kartu jie suvalgė 9 saldainius. Kiek saldainių suvalgė Tomas?" (Thornton, 1982). Samprotavimo įgūdžiai šioje stadijoje remiasi mentaliniais procesais, dalyvaujančiais loginių argumentų apibendrinime ir įvertinime (Anderson, 1990). Trumpai apibūdinsime svarbiausias šių procesų savybes.

- Paaiškinimas padeda moksleiviams atpažinti ir išnagrinėti uždavinio detales ir leidžia moksleiviams iššifruoti visą
 reikiamą informaciją, kurios prireiks sprendimui. Skatindami moksleivius išrinkti svarbią informaciją iš uždavinyje
 nurodytų teiginių mokytojai padeda jiems stiprinti matematinį supratimą.
- Gebėjimas kelti išvadą skirstomas į dedukcinį ir indukcinį samprotavimą. Dedukcinis samprotavimas leidžia taikyti apibendrintas sąvokas ar taisykles konkretiems pavyzdžiams, o indukcinis pastebėti konkrečių objektų ar įvykių panašumus ir skirtumus, išvesti jiems bendras taisykles.
- **Įvertinimas** padeda moksleiviams nustatyti kriterijus, pagal kuriuos galima įvertinti sprendimo logiškumą. Mokytojai iš anksto apibrėžia taisykles, kuriomis remdamiesi moksleiviai gali nustatyti, ar sprendimas teisingas. Ši savybė reikalinga kelti prielaidoms apie būsimus įvykius ir svarstyti apie keliamų išvadų pagrįstumą.
- **Pritaikymas** padeda moksleiviams sieti matematines sąvokas su realaus pasaulio pavyzdžiais. Vienas iš pavyzdžių galėtų būti racionaliosios lygties $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$ taikymas spęsti uždaviniui "Nepatyręs skynėjas vagą braškių nuskina per 6 valandas, o patyręs per 4. Per kiek laiko jie nuskins vagą kartu?"

1.5 Kodėl turinio žinios negarantuoja išmokimo?

Susipažinus su Piaget intektualinio vystymosi teorija, tampa aktualu, ar kognityviniai procesai gali būti paspartinti tinkamos mokomosios veiklos. Iš tiesų, pokyčiai tampa įmanomais tik tada, kai mokinys aktyviai sąveikauja su jį supančia fizine ir socialine aplinka, o darbas klasėje tėra to sąveikavimo dalimi. Tas pats atsakymas atsispindi ir Piaget (1964) pastebėjimuose:

"Nors patirtis yra būtina intelektualinio vystymosi dalis, tačiau galime atsidurti iliuzijoje, kad patirties suteikimas subjektui yra pakankamas jam atskirti struktūras. To nepakanka. Subjektas turi būti aktyvus, gebėti keisti daiktus ir atrasti struktūras savo paties sąveikoje su objektais."

Piageto intelektualinio vystymosi teorija ne tik pateikia įtikinamą samprotavimo gebėjimų aprašymą. Ji taip pat pateikia idėjų, kaip apibūdinti studentų vystymąsi [prisiminkime, kad pradžioje pateikti studentų uždaviniai atitiko mūsų mokyklinius]. Savo moksliniuose straipsniuose (1974) Piaget rašo: mano pirminė išvada būtų, kad struktūrų mokymasis paklūsta tiems patiems dėsniams kaip ir natūralus jų formavimasis sąmonėje. Kitaip tariant, mokymasis yra nulemtas vystymosi, bet pats vystymosi nulemti negali. Pagal šią mintį, jei moksleivis atsilieka savo vystymosi raidoje ir yra konkrečių operacijų stadijoje, šio atsilikimo negalime pašalinti mokydami jį vien tik turinio (specifinių faktų, sąvokų ir metodų). Reikėtų pirmiausia pakeisti jo vystymosi lygį iki kol jis bus pajėgus mokytis matematikos turinį reikiamu lygiu.

Anksčiau minėtos mintys ryškiai atspindi ir mūsų švietimo sistemos skaudulius. Daug lengviau būtų apsiriboti ties matematikos pamokų plano rengimu nei gilintis į kiekvieno moksleivio intelektualinius gebėjimus individualiai. Atrasti, kaip moksleivis samprotauja spręsdamas uždavinius reikalauja daug daugiau pastangų, nei patikrinti, ar jo atsakymas teisingas, o laikas, skiriamas samprotavimo analizavimui užima laiką, kurį reiktų skirti matematinės medžiagos mokymui. Šiandien mokiniams matematikos turinys yra pateikiamas kaip tarpusavyje nesusijusių taisyklių rinkinys, kuris yra per abstraktus suprasti moksleiviams, esantiems konkrečių operacijų stadijoje. Trupmenos sąvokos mokymas - puikus pavyzdys.

1.6 Kaip išeiti iš aklavietės ir išugdyti reikiama mastymo lygi?

Norint įgyti reikiamus mąstymo gebėjimus moksleiviai turėtų ne tik susidurti su situacijomis, kurias įmanoma interpretuoti mąstant pagal konkrečių operacijų lygį, bet ir įdarbinti šį gebėjimą situacijose, kurios veda į aukštesnį (formalų) lygį. Dažnai sutinkame moksleivio klausimą

aš negabus matematikai, kaip man ją reikėtų išmokti?

Jei laikytume, kad šis klausimas yra nuorodą į konkretesnę problemą

kaip man pasiekti formalių operacijų vystymosi stadiją, kad man geriau sektųsi matematikoje?

tai dalį atsakymų būtų galima rasti Hyung Huh (1981) tyrimuose. Juose siūlomas mokymo modelis, kuriame uždavinys, įveikiamas tik pasiekus formalių operacijų vystymosi stadiją, yra skaidomas į atskirus žingsnius, kurie būtų įkandami ir jai dar nespėjus išsivystyti. Eksperimentas buvo atliktas Ajovos valstijos universitete su 57 dalyviais, studijavusiais psichologiją, iš kurių viena dalis buvo apmokyta pagal šį modelį, o kita neapmokyta. Vėliau dalyviai atliko pakartotinį testą ir buvo lyginami abiejų grupių rezultatai tarpusavyje. Viena iš testinių užduočių buvo nustatyti, kurie iš išvardytų veiksnių (siūlo ilgis, svarsčio paleidimo aukštis, svarsčio paleidimo jėga, svarsčio masė) nulemia švytuoklės svyravimo dažnį. Pagal siūlomą mokymo modelį, apmokomi eksperimento dalyviai turėjo atlikti bandymą skaidydami jį tokius etapus:

- patikrinti, ar teisinga, kad svyravimo dažnis priklauso nuo siūlo ilgio.
- patikrinti, ar teisinga, kad svyravimo dažnis priklauso nuo paleidimo aukščio.
- patikrinti, ar teisinga, kad svyravimo dažnis priklauso nuo svarsčio paleidimo jėgos.
- patikrinti, ar teisinga, kad svyravimo dažnis priklauso nuo svarsčio masės.

Po kiekvieno etapo dalyviams buvo teikiamas grįžtamasis ryšys pakomentuojant, kaip dalyviai atliko užduotis ir kaip buvo teisinga atlikti. Tyrimo išvadas pateiksime vietoj atsakymo į moksleivio rūpimą klausimą.

- Mokymo programą perdarius pagal šį modelį galima paspartinti moksleivių gebėjimus mąstyti formaliai (tačiau tai vis dar lieka švietimo programos sudarinėtojų atsakomybe).
- Pasiūlytas apmokymo modelis duoda teigiamų rezultatų lavinant gebėjimą kelti išvadas dedukciškai.
- Pagerėję gebėjimai atsispindėjo taip pat ir atlikus pakartotinius testus po mėnesio.
- Pagerėję gebėjimai atsispindėjo taip pat ir srityse, kurios nebuvo susietos pagal turinį.

1.7 Šaltiniai

- 1. Melvin Thornton. Piagetian Programs in Higher Education
- 2. Rimas Norvaiša. Matematikos mokymas laike įstrigęs pasaulis
- 3. Rimas Norvaiša apie trupmenos sąvoką vadovėliuose
- 4. David G. Myers. Psichologija. 2008
- 5. Hyung Huh. A Piagetian experiment with the concrete inquiry instruction model for acquisition and transfer of hypothetic-deductive scientific reasoning
- 6. Bobby Ojose. Applying Piaget's Theory of Cognitive Development to Mathematics Instruction