

**VILNIAUS UNIVERSITETAS**  
**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**

**Simonas Mamaitis**

**Kaip matematinės žinios tampa atkuriamomis atmintyje?**

Referatas

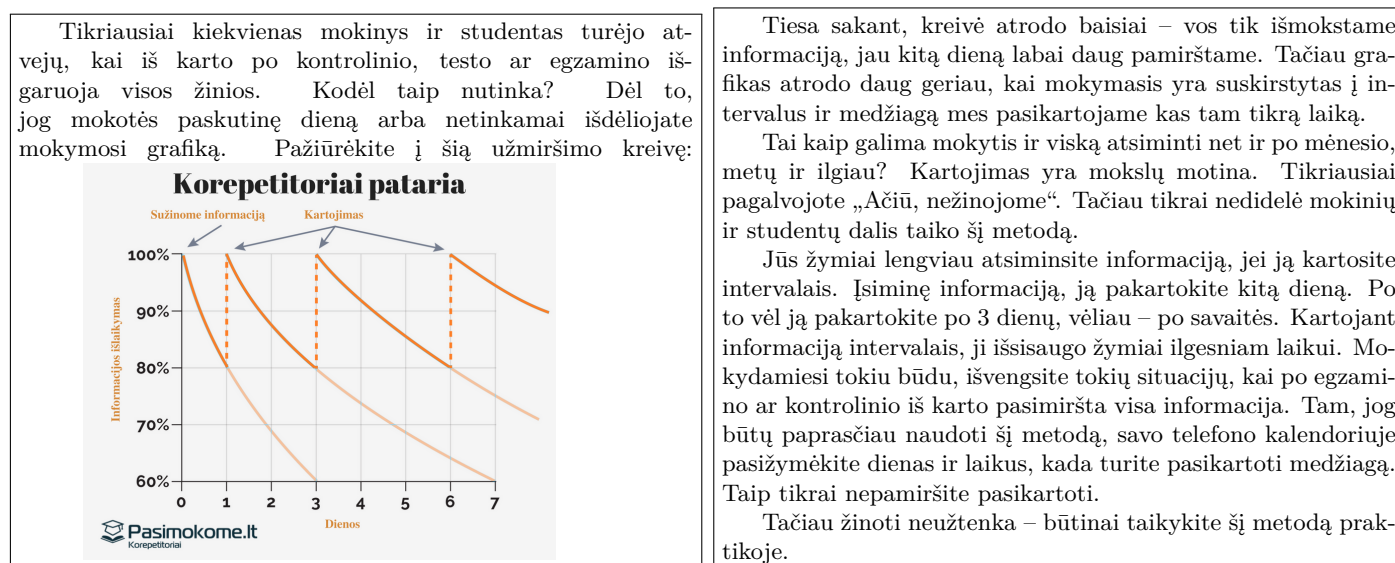
Dėstytojas      Raivydas Šimėnas

Vilnius 2018

Matematinių taisyklių įrodymas moksleiviams dažniausiai būna per sunkiai suprantamas procesas, todėl prieš daugiau nei 20 metų politiškai buvo nuspręsta, jog mokytis mokyklinių taisyklių įrodymų programoje neprivaloma. Vadvėliuose dauguma taisyklių užrašoma dažniausiai ne tik be įrodymų, bet ir be prasminių (gyvenimiškoms situacijoms pritaikytų) paaiškinimų. Šiuos reiškinius galima pavadinti matematiniu samprotavimo atsisakymu. Iš mokojo matematinio turinio pašalinus samprotavimą moksleiviai matematiką pradėjo vertinti kaip tarpusavyje nesisiejančių taisyklių ir formulų rinkinį, savo gausa keliantį baimę. Šio straipsnelio motyvas yra kuo paprasčiau apibūdinti ir palyginti praktinę naudą, gaunamą iš prasminių paaiškinimų bei įrodymų nagrinėjimo.

## Ką laikome praktine nauda?

Praktine nauda šiuo atveju laikome teigiamų veiksmų visumą, nulemiančią aukštą įvertinimą iš matematikos. Pavyzdžiui per kontrolinį išvengtas stresas pasimokius, pakilusi motyvacija žinant, kad pavyko išspręsti sunkiausią uždavinį arba geras taisyklių suvokimas, įgytas dirbant su korepetitoriaus pagalba prieš atsiskaitymą. Vienas iš tokių veiksmų yra kartojimasis prieš mokantis. Jo praktinė nauda yra šitaip aiškinama šiame korepetitorių puslapyje:



Nors būtų neteisinga prieštarauti, jog kartojantis rezultatai pagerėja, tačiau tai nepaaiškina, kodėl kai kurie moksleiviai intensyviai kartodamiesi negali pasiekti tokių aukštų rezultatų kaip gabesnieji, dažnai įdedantys mažiau pastangų. Dažnai gabesnieji moksleiviai kur kas geriau nujaučia tai, ką reikia įsiminti per matematikos pamokas, kad įsimintą informaciją pavyktų sėkmingai atkurti per atsiskaitymus.

Šiame straipsnelyje pagrindiniu praktinės naudos veiksmu laikysime galimybes kuo geriau matematinėje medžiagoje atrinkti tai, ką įsiminti, kad įsimintą medžiagą galima būtų kuo geriau atkurti per atsiskaitymą.

## Taisyklės

Įsivaizduokite, kad esate 7 klasėje ir stengiatės kuo geriau įsiminti veiksmus su neigiamais ir teigiamais skaičiais. Mokymosi sunkumai, su kuriais susidursite, greičiausiai atsikartos ir kitose temose. Pervertus visą skyrių, iš kurio rašomas kontrolinis, atrasite daug taisyklių, kaip pavyzdžiui:

- *Sudėdami skaičius su vienodais ženklais: parašome bendrąjį dėmenų ženklą ir sudedame tų skaičių modulius.*
- *Kai abu dauginamieji yra skirtingų ženklų, tai jų sandauga neigiama.*

Tai, ką jūs darote klasės darbo metu, greičiausiai bus nuolatinis veiksmų su neigiamais ir teigiamais skaičiais kartojimas tol, kol išmoksime nesunkiai spręsti daug veiksmų reikalaujančius uždavinius, tokius kaip  $(-3\frac{1}{2} : 1,75) + 1,1$ . Toks mokymasis ilgainiui gali tapti nuobodus, o įgyta patirtis yra neprasminga, nepatikrinama ir slopinanti tolimesnį norą mokytis. Atėjus kontroliniui kai kurie moksleiviai negeba atlikti veiksmų, tokių kaip  $-2,5 + 3$  arba  $40 : (-5)$ , nes nežinojo būdų, kaip įsiminti tiek daug taisyklių, jų nesuprato, arba per mažai kartojosi. Net ir išmokus neigiamų ir teigiamų skaičių veiksmų taisykles, jos dažnai užsimiršinėja.

## Taisyklių prasminiai paaiškinimai

Išeitis iš minėtos keblios situacijos galėtų būti mokymasis naudojant prasminius paaiškinimus.

Prasminis paaiškinimas - tai toks taisyklės paaiškinimas, kuomet kiekvienam skaičiui, aritmetiniui veiksmui ar kitas matematiniui elementui yra suteikiama neprieštaringa prasmė iš mus supančio pasaulio.

Prasminio paaiškinimo pavyzdys:

Veiksmas	Prasmė
$2 - 3,5 = -1,5$	uždirbau 2 ir išleidau 3,5, vadinasi turiu 1,5 minuso
$-1,5 - 3,5 = -5$	išleidau 1,5 ir išleidau 3,5, vadinasi turiu 5 minuso
$-1,5 + 3,5 = 2$	išleidau 1,5 ir uždirbau 3,5, dabar turiu 2 pliuso
$-1,5 - (-3,5) = 2$	išleidau 1,5 ir <b>išleidau išleidau</b> 3,5, dabar turiu (?)

Iš paskutinio veiksmo pavyzdžio matome, kad ne visada prasminis paaiškinimas yra pakankamai stiprus paaiškinti visiems veiksmams. Tai yra dažnas atvejis matematikoje pereinant prie vis sudėtingėjančių sąvokų. Nepaisant to reiktų (kiek pavyksta) išlaikyti kūrybiškumą ir paieškoti naujų prasmų:

Veiksmas	Prasmė
$2 - 3,5 = -1,5$	pirmyn 2 ir atbulai 3,5, vadinasi atbulai 1,5
$-1,5 - 3,5 = 5$	atbulai 1,5 ir atbulai 3,5, vadinasi atbulai 5
$-1,5 + 3,5 = 2$	atbulai 1,5 ir pirmyn 3,5, vadinasi pirmyn 2
$-1,5 - (-3,5) = 2$	atbulai 1,5 ir <b>atbulai nuo atbulinės krypties 3,5</b> , vadinasi atbulai 1,5 ir pirmyn 3,5, vadinasi pirmyn 2

Iš šių pavyzdžių reikia prisiminti tik tiek, kad skaičių sudėtį ir atimtį lengviausia paaiškinti suteikiant veiksmams tokias prasmes:

$$\text{Skaičius} = \begin{cases} \text{poslinkis pirmyn, jei jis teigiamas} \\ \text{poslinkis atgal, jei jis neigiamas} \end{cases} \quad \text{Minusų ženklas} = \text{krypties apgręžimas}$$

Taip pat matėme, kad sudėties ir atimties prasmė gali būti

$$\text{Skaičius} = \begin{cases} \text{uždirbta suma, jei skaičius teigiamas} \\ \text{išleista suma, jei skaičius neigiamas} \end{cases},$$

tačiau ji nepakankamai užbaigta, nes išleistos sumos apgręžimas sunkiai interpretuojamas.

Panašiomis idėjomis remdamiesi galime sugalvoti, kokią prasmę turi teigiamų ir neigiamų skaičių daugyba.

Veiksmas	Prasmė
$2 \cdot 3,5 = 7$	2 kartus sutikau uždirbti po 3,5, vadinasi turiu 7 pliuso
$2 \cdot (-3,5) = -7$	2 kartus sutikau išleisti po 3,5, vadinasi turiu 7 minuso
$-2 \cdot 3,5 = -7$	2 kartus atsisakiau uždirbti po 3,5, vadinasi turiu 7 minuso
$-2 \cdot (-3,5) = 7$	2 kartus atsisakiau išleisti po 3,5, vadinasi turiu 7 pliuso

Šiuo atveju daugybos prasmė tokia:

$$\text{Pirmas daugiklis} = \begin{cases} \text{kiek kartų sutikau, jei jis teigiamas} \\ \text{kiek kartų atsisakiau, jei jis neigiamas} \end{cases}$$

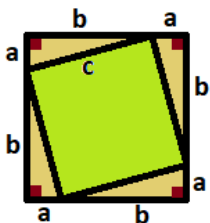
$$\text{Antras daugiklis} = \begin{cases} \text{uždirbta suma, jei jis teigiamas} \\ \text{išleista suma, jei jis neigiamas} \end{cases}$$

## Teoremų įrodymai

Matematinis įrodymas - tai toks taisyklės aiškinimas, kuriame faktai grindžiami tik matematinėmis aksiomomis (akivaizdžiais teiginiais) arba jau įrodytomis taisyklėmis.

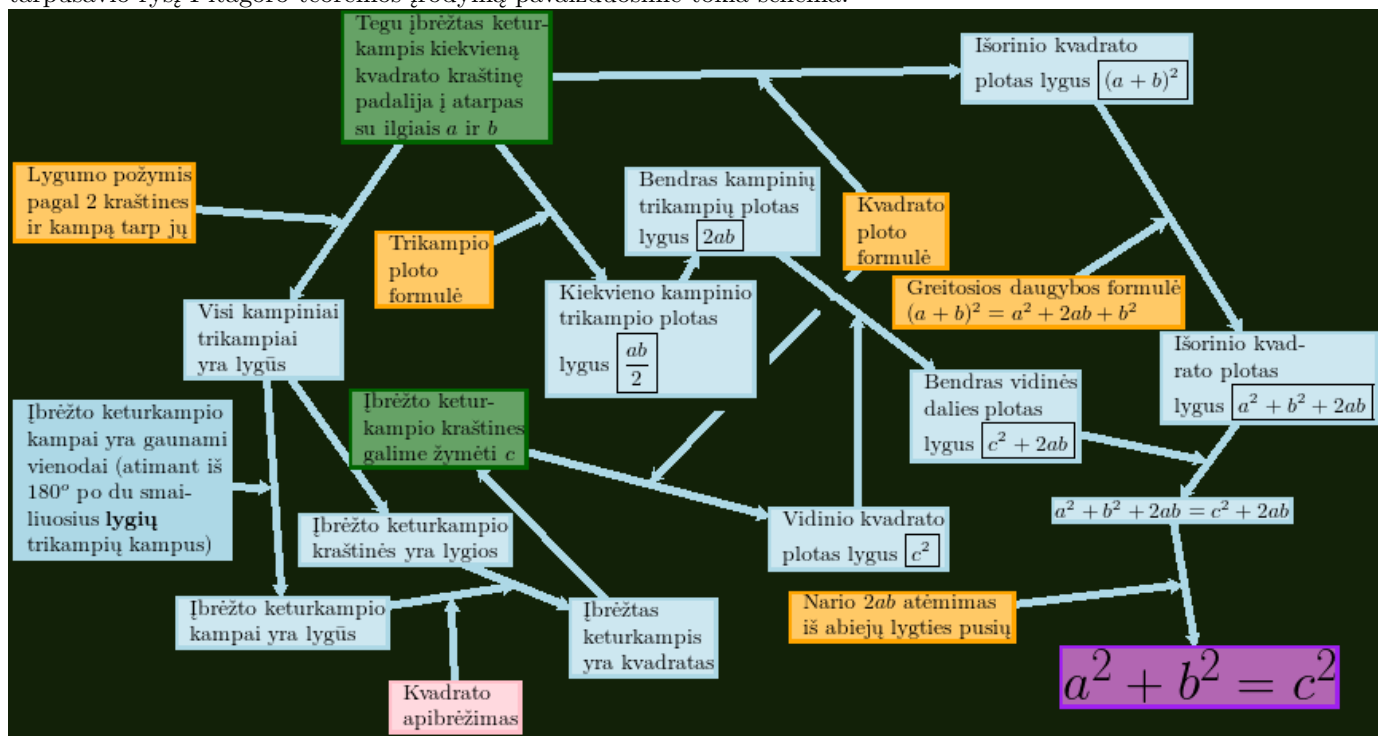
Norėdami pamatyti bent vieno matematinio įrodymo pavyzdį panagrinėkime Pitagoro teoremos įrodymo žingsnius.

Pitagoro teorema teigia, kad jei stačiojo kraštinio statiniai lygūs  $a$  ir  $b$ , o įžambinė lygi  $c$ , tai  $a^2 + b^2 = c^2$ . Vienas iš būdų įrodyti šį teiginį yra nagrinėti brėžinyje pateiktą geometrinę konstrukciją, kurioje pavaizduotas įbrėžtas į kvadratą keturkampis taip, kad jo kvadrato kraštinės jis dalytų į kraštines, kurių ilgiai yra  $a$  ir  $b$ .



1. Pagal trikampių lygumo požymius visi brėžinyje esantys trikampiai yra lygūs.
2. Pagal trikampių lygumą įbrėžto keturkampio kraštinės lygios.
3. Pagal trikampių lygumą visi įbrėžto keturkampio kampai yra gaunami vienodai (atimant iš  $180^\circ$  po vienodą smailiųjų kampų porą).
4. Pagal kvadrato apibrėžimą keturkampis, kurio kampai vienodi ir kraštinės vienodos, yra kvadratas.
5. Pagal trikampio ploto formulę trikampio plotas lygus  $\frac{ab}{2}$ . Vadinasi 4 trikampių plotai lygus  $2ab$ .
6. Pagal kvadrato ploto formulę įbrėžto kvadrato plotas lygus  $c^2$ .
7. Didesniojo kvadrato plotas lygus šių plotų sumai  $2ab + c^2$
8. Iš kitos pusės didesniojo kvadrato kraštinės ilgis lygus  $a + b$ , taigi jo plotas taip pat lygus  $(a + b)^2$ .
9. Prilyginame:  $(a + b)^2 = 2ab + c^2$
10. Pagal kvadratų skirtumo formulę lygybėje pakeičiame kairę pusę:  $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$
11. Abejose lygybės pusėse pašalinę dėmenį  $2ab$  gauname tai, ką reikėjo:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Pitagoro teoremos įrodymas susideda tik iš tokių žingsnių, kuriuos galima paaiškinti remiantis mokykline programa ligi 8 klasės. Vadinasi Pitagoro teoremos įrodymą galima suprasti baigus 8 klases. Norėdami pavaizduoti šių žingsnių tarpusavio ryšį Pitagoro teoremos įrodymą pavaizduosime tokia schema:



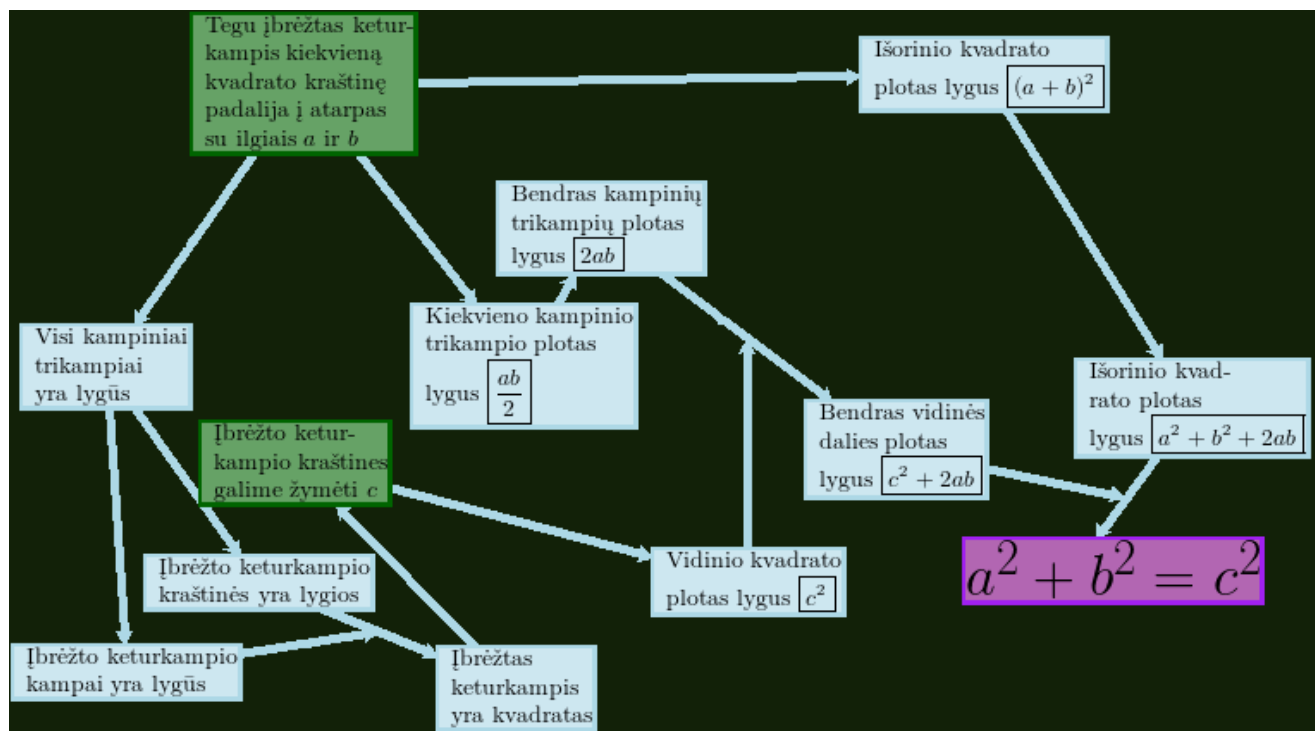
Keletas paaiškinimų dėl sutartinių žymėjimų:

- Atskiri įrodymo žingsniai žymimi šviesiai mėlyna spalva.
- Oranžine arba rožine spalva žymimos mokyklinės taisyklės, kurias reikia taikyti norint atlikti žingsnius.
- Žalia spalva žymimos įvedamos sąlygos
- Violetine spalva žymimas iš jų išvestas teiginys.
- Rodyklė tarp dviejų blokų žymi loginį žingsnį, o į ją nukreipta kita rodyklė žymi jo paaiškinimą.

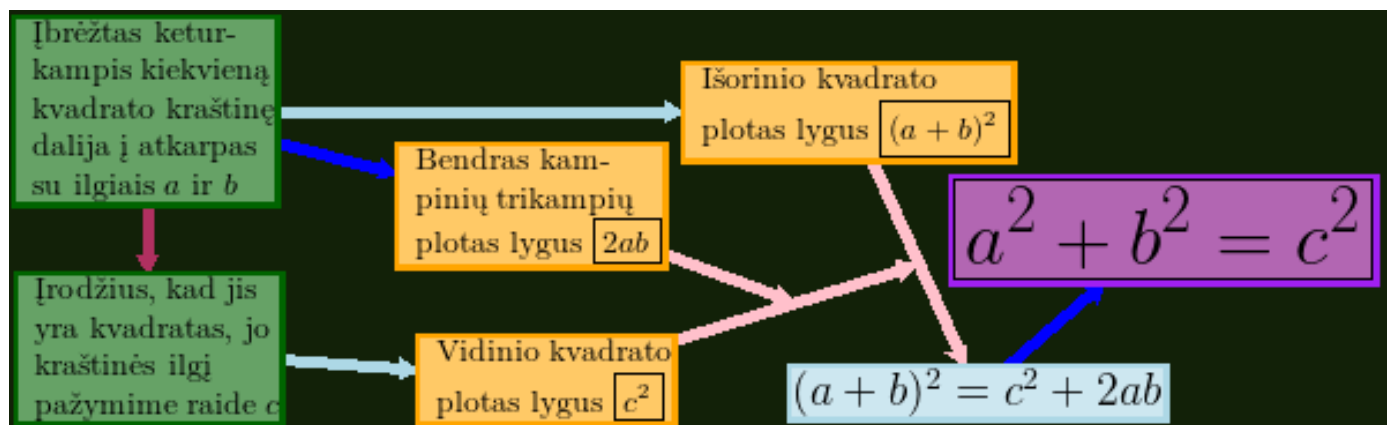
Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti, jog šis matematinis įrodymas savyje talpina tiek faktinės medžiagos, jog gali būti įdomus tik matematikos mėgėjams. Daugumą į mokyklinę programą įtrauktų taisyklių galima įrodyti matematiškai arba jos yra matematinės aksiomos. Nesudėtingi įrodymai dažniausiai susideda iš keleto žingsnių, kurie remiasi taisyklėmis, įeinančiomis į mokyklinę programą, tačiau moksleiviui gali būti arba lengvesni, arba užtrunkantys suprasti. Sudėtingesni įrodymai (pvz. išvestinių ir integralų taisyklės) gali susidėti iš tokių žingsnių, kurių supratimas moksleiviui nėra prieinamas, nes jis nestudijuoja aukštosios matematikos.

Tačiau turėtų kilti klausimas, ar supratimu laikome gebėjimą paaiškinti kiekvieną įrodymo žingsnį, ar tik pritaikyti, o gal visus žingsnius reiktų atsiminti iš eilės? Mokyklinėje programoje didžiausias dėmesys skiriamas tik taikymui (be paaiškinimų kodėl žingsnis gali būti pritaikytas įrodyme). Žingsnių paaiškinimas yra gera priemonė patikrinti, kiek mūsų supratime yra logika paremto taisyklių taikymo ir kiek nuo logikos atriboto įsitikinimo, jog mūsų uždavinio sprendimas yra geras.

Žingsnių paaiškinimas turi ir kitą paskirtį: atminties prasme jie yra tarsi medžiaga, kuri sulipdo padrikai taikomas taisykles. Didėjant matematiniam gebėjimams žinios galvoje mums nejudant persiformuoja taip, kad atliekami procesai, į kuriuos įeina tos pačios pasikartojančių žingsnių sekos, atmintyje nusistovėtų kaip vientisesni daug atminties nereikalaujantys objektai. Tai paaiškina, kodėl moksleivio gabumai didėja, jei jis bent keletą kartų atlieka panašius samprotavimus. Toks moksleivis, norėdamas sumąstyti pažingsniui sprendžiamo uždavinio sprendimą, jau gali nebesistengti ieškoti užuominų sunkiai prisimenamose taisyklėse, o vietoj to jas ima taikyti savaime nesunaudodamas didesnių atminties resursų. Dabar Pitagoro teoremos įrodymo eiga jam galėtų atrodyti paprastesnė:

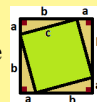


Moksleiviai, besidomintys matematika už mokyklos ribų, savo mąstymo lankstumą gali dar labiau padidinti. Vaizdžiai tariant bet kuris moksleivis mokymdamasis matematiką stimuliuoja jungtis tarp neuronų. Biocheminių pokyčių pagalba intensyviausiai stimuliuojamos jungtys tampa aktyviausiomis, todėl tam tikri mąstymo keliai tampa vis labiau susiekti. Dėl šių neuroprocesų jūsų matematinis supratimas gali būti vystomas be ribų. Pateiksime paskutinį Pitagoro teoremos išvedimo mintinį žemėlapią, kurį mintyse gali turėti puikiai matematiškai mąstyti gebantys moksleiviai:



Pabaigai atkreipsime dėmesį, kad oranžine spalva nuspalvinti blokai pagal įsimenamos informacijos pobūdį buvo labai panašūs. Tuo pasinaudodami apibūdinsime, koks Pitagoro teoremos vaizdinys yra matematiko Simono galvoje:

Pitagoro teorema - tai išvada, kurią gauname geometrinėje konstrukcijoje  
 čiudami didesniojo kvadrato plotą.



dviem skirtingais būdais suskai-

Simonas giriasi, jog svarbiausia, ką jis atsimena apie Pitagoro teoremos išvedimą, yra tik pavaizduota nesudėtinga geometrinė konstrukcija, o visą likusią įrodymo eigą jis gali atkurti vien panaudodamas savo bendrą matematikos išsilavinimą.

## Prasminiai paaiškinimai vs teoremų įrodymai: praktinė nauda

Priminsime, jog šiame straipsnelyje praktinės naudos veiksniai laikome galimybes kuo produktyviau atkurti išmoktą medžiagą atsiskaitymo metu. Skyrelyje **Taisyklės** buvo iškelta problema, jog mokantis per atsiskaitymus (ypač sprendžiant daugiau veiksmų reikalaujančius uždavinius) taisyklės dažnai užsimiršta. Susidūrus su nauja taisykle reikėtų neskubėti jos kalti mintinai, o pamėginti sugalvoti jai prasminį paaiškinimą. Prasminius paaiškinimus dažnai atsiminti būna daug lengviau nei taisykles. Jei ruošdamiesi atsiskaitymui arba per atsiskaitymą taisyklę pamiršote, pabandykite ją atkurti panaudodami prasminį paaiškinimą. Remiantis Simono patirtimi užtenka tik keletas to paties prasminio paaiškinimo panaudojimų, kad taikoma taisyklė atmintyje taptų neišblėstanti, o prasminiai paaiškinimai būtų nebūtini. Jie yra tarsi statybinė medžiaga, skirta įtvirtinti taisykles visam laikui. Kiekvienas moksleivis savo mintyse konstruoja savo vidinę matematiką, kuri yra sutvirtinama teisingais ir klaidingais prasminiais paaiškinimais arba paaiškinimais, kurie nėra prasminiai. Taigi matematinį supratimą šiuo atveju galima laikyti tarsi statiniu, kurio tvirtumas priklauso nuo statybinės medžiagos.

Teoremų įrodymas turi kitokią paskirtį. Dažniausiai jis kaip produktyvus taisyklės atkūrimas atmintyje netinka. Pavyzdžiui atsiminti lygybę  $a^2 + b^2 = c^2$  yra daug paprasčiau, nei panaudoti Pitagoro teoremos įrodymą tam, kad šią formulę galėtume atkurti. Tačiau Pitagoro teoremos sandaroje matėme daugybę paprastesnių taisyklių, kuriomis rėmėmės nagrinėdami įrodymo žingsnius. Pirmoji įrodymo schema pakankamai aiškiai jas pateikia:

- Trikampių lygumo požymis pagal 2 kraštines ir kampą tarp jų
- Trikampio ploto formulė
- Kvadrato ploto formulė
- Formulė  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Panašiųjų narių suprastinimas abejuose lygties pusėse

Visos šios taisyklės yra pakankamai nesudėtingos, kad joms galėtumėte sugalvoti prasminius paaiškinimus (pabandykite!).

Matematinį įrodymų nagrinėjimo praktinė nauda būtų tokia:

- Įrodymų struktūrose atsispindi panašūs samprotavimo elementai, taisyklės ir žingsniai, kaip ir atsiskaitymų uždaviniuose.
- Tiek samprotavimas, tiek mėginimai sukurti atrastų taisyklių prasminius paaiškinimus yra didelė investicija į produktyvų informacijos atkūrimą per egzaminą.
- Nagrinėdami įrodymų žingsnius galite įvertinti, kurias taisykles mokate taikyti geriau, o kurias praščiau, taip pat susidaryti vaizdą, kurios taisyklės yra svarbesnės, bei pastebėti galbūt dar nesutiktus, bet į atsiskaitymą galinčius pakliūti jų taikymo būdus.
- Nagrinėjant įrodymų žingsnius vyksta savaiminis jūsų žinių struktūrų susisiekimo gerinimas tose smegenų srityse, kurios turės būti aktyvios ir per atsiskaitymą (tose žiniose, kurių prireiks per atsiskaitymą).

## Literatūra

- [1] *Matematinio ugdymo bendrojo ugdymo mokykloje gairės*, psl. 8 ir 12.  
Adresas internete: [https://www.upc.smm.lt/ugdymas/dokumentai/svarstomi/matemat/Matematinio\\_ugdymo\\_gaires.pdf](https://www.upc.smm.lt/ugdymas/dokumentai/svarstomi/matemat/Matematinio_ugdymo_gaires.pdf)
- [2] *Kaip nepamiršti to, ką išmokai?*  
Adresas internete:  
<https://www.pasimokome.lt/2017/12/20/kaip-nepamirsti-ka-ismokai/>
- [3] AUTORIŲ KOLEKTYVAS. *Matematika Tau plius. 7 klasė. I dalis [vadovėlis]*, 2015
- [4] R. NORVAIŠA, *Kodėl neigiamųjų skaičių sandauga yra teigiamas skaičius?*  
Adresas internete: <http://norvaisa.lt/matematika/mokykline-matematika/kodel-neigiamuju-skaiciu-sandauga-yra-teigiamas-skaicius/>
- [5] D. TALL, *How humans learn to think mathematically*, 2013

## Brėžiniai

Siekiant pailustruoti Pitagoro teoremos įrodyme išlaikomus hierarchinius ryšius, buvo taikyta speciali programa, sukurta su *Python* programavimo kalba. Šiame interneto adrese pateikiama, kaip atrodo šios programos programinis kodas:

<https://pastebin.com/kL7mYri8>