

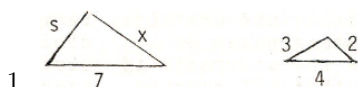
# Vystymosi raidos įtaka matematikos supratimui

Šiame tekste remdamasis psichologijos žiniomis apie vystymosi raidą mėginsiu atsakyti į klausimą, kodėl moksleiviams ir studentams dažnai yra sunku pasiekti gerų rezultatų matematikoje ir kaip šį procesą galima palengvinti.

## Silpno matematinio supratimo problema

### Studentai

Amerikiečių kolegijos dėstytojas Melvin C. Thornton aprašo reiškinį, kai kiekvienais metais į kolegiją įstoja keli studentai, pradinuose kursuose visiškai nesuprantantys, kas vyksta. Šie studentai neatrodo tingintys ar kvaili, kai kurie iš jų prie matematikos praleidžia labai daug laiko ir gerai išlaiko kitus dalykus. Atrodo, kad jiems mokantis kyla ne supratimas, o nusivylimas. Ši patirtis ypač pasimato studijuojant geometriją. Dėstytojas teigia būdamas pirmakursiu pats gavęs gerus pažymius daug atsimindamas, bet ne suprasdamas. Būdamas antrakursiu, jis nebuvo pasiruošęs deduktiniam samprotavimui, įrodymams, aksiomoms ir t.t., nes pas jį dar nebuvo išvystyti tam reikalingi mąstymo įgūdžiai.



1.

Abu pavaizduoti trikampiai yra panašūs. Raskite kraštinės  $s$  ilgį.

**Studento sprendimas:**  $s \leftrightarrow 2, 7 \leftrightarrow 4, x \leftrightarrow 3$ . Kadangi  $2 : 4 : 3$ , tai  $s : 7 : x$  arba  $5 : 7 : 6$ . Vadinasi,  $s = 5$

2. Tarkime, kad jūsų mokytojui yra 40 metų, o jums 18 metų. Kiek procentų esate jaunesnis už savo mokytoją?

**Studento sprendimas:**  $\frac{18}{40} = 0.45 \times 100 = 45\%$  jaunesnis.

**Kito studento sprendimas:**  $\frac{40}{100} \times \frac{18}{x} = \frac{720}{100} = 7.2\%$

3. Žiurkė, esanti tam tikrame labirinte, pereina kelią, sudarytą iš keturių išsišakojimų. Kiekviename išsišakojime ji gali pasirinkti tik sukti kairėn arba sukti dešinėn. Vienas iš šių kelių galėtų būti pažymėtas DDKK, kas reiškia, kad pirmąsyk žiurkė suks dešinėn, antrąsyk dešinėn, po to du kartus į kairę. Naudodami šį žymėjimą užrašykite visus kelius, kuriais galėjo eiti žiurkė

**Studento sprendimas:** KKKK, KKDD, KDKD, KKKD, KDDK, KDDD, DDKK, DKDK, DDDK, DKKD, DKKK, DDDD (12 kelių).

### Moksleiviai

Pastebėjau, kad dėstytojo pateikta problema dar labiau atsispindi dirbant su moksleiviams. Vėliau nagrinėsime atsakymus į klausimus, kuriuos uždaviau vienam šeštaklasiui.

**Pirmas pratimas mokiniui.** Atlik veiksmus su trupmenomis, kuriuos neseniai ėjote:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ ,  $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ ,  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ .

**Mokinio sprendimas.**

1.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$

2.  $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{21}{49} + \frac{14}{49} = \frac{35}{49}$

3.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$

**Antras pratimas mokiniui.** Sugalvok tekstinį uždavinį, kuriame reikia dauginti du skaičius.

**Mokinio sprendimas.** Vienos mašinos greitis yra 60, kitos 140. Sudauginę gausime 8400.

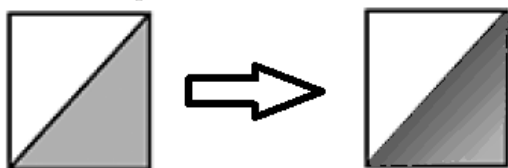
**Signalinis klausimas.** Kur gyvenime tau prireikė naudoti daugybą?

**Mokinio atsakymas.** Neprireikė.

**Trečias pratimas mokiniui.** Kas įvyks, jei paveikslėlyje parodytą užtušuotą dalį padidinsime tris kartus?

Pavaizduok tai sąsiuvinyje.

**Mokinio sprendimas.**



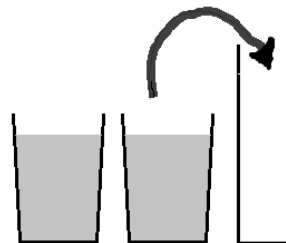
**Ankstesėse pamokose užduotas klausimas.** Kas tau matematikoje yra įdomu ir kodėl?

**Mokinio atsakymas.** Trupmenų dauginimas, nes jis lengvas.

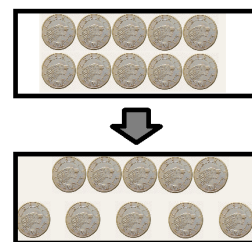
## Psichologijos žinios apie vystymosi raidą

Šveicaras Jeanas Piaget - vienas žymiausių XX a. raidos psichologų. Iki Piaget dauguma žmonių, užmiršę savo ikimokyklinius metus, manė, jog vaikai „tiesiog mažiau žino, negu suaugusieji“. Savo pirmajame darbe Piaget uždavinėjo vaikams klausimus, tikėdamasis nustatyti, kokio amžiaus vaikai gali atsakyti į pateiktus klausimus teisingai. Jam kilo klausimas, kodėl vieno amžiaus vaikai negali atsakyti į tam tikrą klausimą, o teisingai atsako į jį vėliau, būdami vyresni. Čia pateiksiu tų klausimų pavyzdžius

1. Iš pradžių ant stalo yra padėtos dvi vienodos stiklinės, kuriose yra po lygiai vandens ir viena, aukštesnė ir siauresnė, tuščia. Apklausėjas paklausia vaiko, ar jose yra po lygiai sulčių. Gavęs teigiamą atsakymą jis perpila iš pilnos stiklinės vandenį į tuščią ir pakartoja tą patį klausimą.



2. Iš pradžių ant stalo yra padėtos dvi vienodos eilės monetų po penkias monetas. Apklausėjas paklausia vaiko, ar eilėse yra po lygiai monetų. Gavęs atsakymą jis antroje eilėje monetas perdėda taip, kad monetų išsidėstymas būtų platesnis ir pakartoja tą patį klausimą.



3. Iš pradžių stalo pusėje, prie kurios sėdi vaikas, yra padėtas vienas sausainis, o kitoje pusėje du sausainiai. Apklausėjas paklausia vaiko ar tokios dalybos yra sąžiningos. Tada perlaužia vaiko pusėje esantį sausainį ir pakartoja klausimą.

4. Mintinai atsakykite, kiek bus  $4+5$ . Dabar mintinai atsakykite, kiek  $9-5$ .

5. Mintinai atsakykite, kiek bus  $3x+x$ ?

6. Birutė yra aukštesnė už Augustą, o Dominykas aukštesnis už Birutę. Kuris iš jų yra aukščiausias?

7. Apklausos dalyviui, sėdinčiam prie stalo, duodame skirtingo ilgio siūlus, prie kurių galima pririšti skirtingo svorio daiktus ir paklausiamo, nuo ko labiausiai priklauso švytuoklės svyravimo dažnumas: nuo siūlo ilgio, daikto svorio ar pradinio paleidimo greičio.

Skirtingo amžiaus vaikai šiuos uždavinius spręstų nevienodai. Analizuodamas jų sprendimus psichologas ne tik priėjo išvados, kad tai, kaip vaikai mąsto, priklauso nuo jų protinių sugebėjimų, o ne nuo to, ką jie yra išmokę. Dar daugiau: jis aprašė keturias pagrindines pažintinės raidos stadijas, pasižyminčias skirtingomis ypatybėmis, nulemiančias specifines mąstymo rūšis:

- **Sensomotorinė stadija** (dažniausiai iki 2 m.). Pasaulis patiriamas pojūčiais ir veiksmiais (žiūrint, liečiant, kramtant, sugriebiant)
- **Priešoperacinė stadija** (maždaug nuo 2 iki 6 metų). Daiktus ženklina žodžiai ar vaizdai, bet logiškai nesamprotaujama.
- **Konkrečių operacijų stadija** (maždaug nuo 7 iki 11 metų). Logiškai mąstoma apie konkrečius įvykius; suprantamos konkrečios analogijos ir atliekamos aritmetinės operacijos.
- **Formaliųjų operacijų stadija** (dažniausiai nuo 12 m.). Mąstoma abstrakčiai. Keliamos hipotezės, domimasi, kodėl tam tikri gamtoje esantys reiškiniai vyksta, imamas suvokti priežasties - pasekmės ryšys.

Piaget išvystyta stadijų teorija padeda identifikuoti raidos stadiją pagal tai, kaip jis geba spręsti anksčiau minėtus testo uždavinius.

Pirmose trijose situacijose apklausiami vaikai į pirmą klausimą atsako teisingai. Tačiau į antrą klausimą teisingai geba atsakyti tik vaikai, pasiekę konkrečių operacijų stadiją. Priešoperacinėje stadijoje esantiems vaikams atrodys, kad trečioje stiklinėje sulčių yra daugiau, antroje eilėje monetų yra daugiau ir kad dalybos yra sąžiningos. Šiuos atsakymus jie paaiškina teiginiais „sulčių daugiau, nes stiklinė aukštesnė“, „monetų daugiau, nes jų eilė platesnė“ ir „du sausainio dalys yra tiek pat, kiek du sausainiai“. Iš šių eksperimentų galime suprasti, kad vaikai dažnai gali pastebėti tik vieną lyginamų objektų savybę (ilgį, plotį, kiekį, dydį), mano, kad keičiantis daikto formai, keičiasi ir jo kiekis. Ketvirta situacija parodo, kad priešoperacinėje stadijoje vaikai negali apgretinti

atliekamos operacijos ir rezultata 4 + 5 apskaičiuoti užtruks tiek pat laiko, kiek rezultata 9 - 5. Įžengus į kitą stadiją atvirkščio veiksmo atlikimas bus suvoktas ir atsakymas gautas iškart.

Likę trys klausimai iliustruoja vaiko perėjimą į formalų operacijų stadiją. Jei vaikas dar jos nėra pasiekęs, tai į 5 klausimą atsakyti mintyse jam bus sunku. Remiantis savo patirtimi pastebėjau, kad vaikas gali atsakyti tada, kai jam užduodame pagalbinį klausimą „o kiek bus 3 obuoliai + obuolys?“. Į 6 klausimą mintinai pilnai atsakyti jis taip pat negali: jam reikia nusibražyti vaikų ūgius popieriuje arba atsakymas gaunamas spėjimo būdu. Norint atsakyti į paskutinį klausimą, paprasčiausia yra pasirinkti bet kurį dydį (ilgį, svorį arba paleidimo greitį) ir jį pakeitus stebėti, ar pasikeičia dažnumas. Pasiekę formalią stadiją vaikai dažniausiai šį procesą atlieka teisingai, o likę nėra tokie nuvokūs, dydžius keičia atsitiktine tvarka arba po kelis iš karto ir negali nustatyti teisingo atsakymo.

Susipažinus su Piaget intelektualinio vystymosi teorija pats pirmiausias ir svarbiausias klausimas būtų, ar kognityviniai procesai gali būti paspartinti tinkamos mokymosios veiklos. Iš tiesų, pokyčiai tampa įmanomais tik tada, kai mokinys aktyviai sąveikauja su jį supančia fizine ir socialine aplinka, o darbas klasėje tampa to sąveikavimo dalimi. Tas pats atsakymas atsispindi ir Piaget (1964) pastebėjimuose:

*„Nors patirtis yra būtina intelektualinio vystymosi dalis, tačiau galime atsidurti iliuzijoje, kad patirties suteikimas subjektui yra pakankamas jam atskirti struktūras. To nepakanka. Subjektas turi būti aktyvus, gebėti keisti daiktus ir atrasti struktūras savo paties sąveikoje su objektais.“*

Nepaisant to, kad vaikai eina į tą pačią klasę ar yra vienodo amžiaus, mūsų šalies mokyklose dažnai tenka su **vaikų sugebėjimų nuvertinimu**, kad vienų vaikų buvimas pritinginčiais ar mažo intelekto, o kitų gabiais apsprendžia tolimesnius gebėjimus. Panašią tendenciją galiu pastebėti ir mūsų universitete. Teisingas požiūris būtų, kad loginis mąstymas yra išugdomas, jei mokytojai, dėstytojai ir tėvai besimokančiuosius ugdo atsižvelgdami į tai, jog skirtingi vaikai pasiekia tuos pačius vystymosi raidos etapus skirtingame amžiuje.

## Problemos sprendimai remiantis žiniomis apie vystymosi raidą

Taikant vystymosi teoriją ikimokyklinukams ir kai kuriems pradinukams patariama jiems duoti pratimų, kuriuose klasifikuojami įvairūs objektai ir užduoti nukreipiančius klausimus, pvz. „kaip nusprendei, kokiai grupei kiekvienas daiktas priklauso?“ arba „ar yra kitų būdų sugrupuoti daiktus?“

Taip pat pagal vystymosi teoriją dabar jau galime aiškiai suvokti, kodėl referato pradžioje paminėtas šeštokas pateikė tokius klaidingus atsakymus. Pirma, moksleivis buvo įsitikinęs, jog neatrado matematinių struktūrų, kuriose jam tektų susidurti su daugyba. Antra, jo suvokimas nebuvo pakankamas atskirti sąryšiams tarp stebimų objektų savybių. Tą patvirtina du pavyzdžiai: moksleivis daugina du mašinos greičius, kai prasmę turi tik jų sudėtis ir lyginimas; moksleivis painioja jūslėmis suvokiamą ryškumo savybę su matematine figūros didumo savybe. Dėl panašių priežasčių gerokai abstraktesni objektai, tokie kaip trupmenos, o tuo labiau jų sąryšiai, moksleiviui bus nesuprantami.

Pavyzdį su studentais analizuoti yra sudėtinga, nes remiantis Piaget tyrinėjimais tėra aišku, kad studentų mąstysena turi būti pilnai išsivysčiusi. Kol kas atsakymas apsiriboja tik spėjimu, kad jie uždaviniuose pateiktų sąryšių tarp matematinių objektų pilnai nesuprato todėl, kad besimokydami apie juos mokyklinėje programoje nebuvo pasiruošę mąstyti formaliai, dėl ko ir atsirado matematinės spragos. Tačiau su laiku vystymosi raidos teorijoje atsirado naujų pastebėjimų. Pavyzdžiui XXa. 8 - ajame dešimtmetyje atlikti psichologų tyrimai pagrindžia mąstymo įgūdžių trūkumo pasireiškimą ir suaugusių žmonių tarpe. Pastebėta, kad tik 50 - 60% suaugusių žmonių tarp 25 - 30 metų, pagal kitus rodiklius pasiekę formalų operacijų stadiją praeina mūsų nagrinėtą švytuoklės testą. Norint paaiškinti studentų mokymosi sunkumus neišvengiamai prireikia gilesnių tyrinėjimų apie formalų operacijų stadijos specifiką.

Formalių operacijų stadijoje atsiranda sugebėjimai kelti prielaidas ir svarstyti apie galimas išvadas, leidžiantys vaikui konstruoti savą matematiką. Be to, vaikai paprastai pradeda vystyti abstrakčius minčių modelius, kuriuose samprotavimas vykdomas naudojant simbolius vietoj apčiuopiamų duomenų. Pavyzdžiui mokiniai gali išspręsti lygtį  $x + 2x = 9$  nesiremiant mokytojo padiktuota sąlyga kaip antai „Tomas suvalgė tam tikrą kiekį saldainių, o jo sesė suvalgė du kartus daugiau. Abu kartu jie suvalgė 9 saldainius. Kiek saldainių suvalgė Tomas?“ (Thornton, 1982). Samprotavimo įgūdžiai šioje stadijoje remiasi mentaliniais procesais, dalyvaujančiais loginių argumentų apibendrinime ir įvertinime (Anderson, 1990). Trumpai apibūdinsime svarbiausias šių procesų savybes.

- **Paaiškinimas** padeda moksleiviams atpažinti ir išnagrinėti uždavinio detales ir leidžia moksleiviams išsifruoti visą reikiamą informaciją, kurios prireiks sprendimui. Skatindami moksleivius išrinkti svarbią informaciją iš uždavinyje nurodytų teiginių mokytojai turėtų padėti jiems stiprinti matematinį supratimą.
- **Gebėjimas kelti išvadą** skirstomas į dedukcinį ir indukcinių samprotavimą. Dedukcinis samprotavimas leidžia taikyti apibendrintas sąvokas ar taisykles konkretiems pavyzdžiams, o indukcinis - pastebėti konkrečių objektų ar įvykių panašumus ir skirtumus, išvesti jiems bendras taisykles.

- **Įvertinimas** padeda moksleiviams nustatyti kriterijus, pagal kuriuos galima įvertinti sprendimo logiškumą. Mokytojai turėtų iš anksto apibrėžti taisykles, kuriomis remdamiesi moksleiviai gali nustatyti, ar sprendimas teisingas. Ši savybė reikalinga kelti prielaidoms apie būsimus įvykius ir svarstyti apie keliamų išvadų pagrįstumą.
- **Pritaikymas** padeda moksleiviams sieti matematines sąvokas su realaus pasaulio pavyzdžiais. Vienas iš pavyzdžių galėtų būti racionaliosios lygties  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$  taikymas spęsti uždaviniui „Nepatyręs skynėjas vagą braškių nuskina per 6 valandas, o patyręs per 4. Per kiek laiko jie nuskins vagą kartu?“