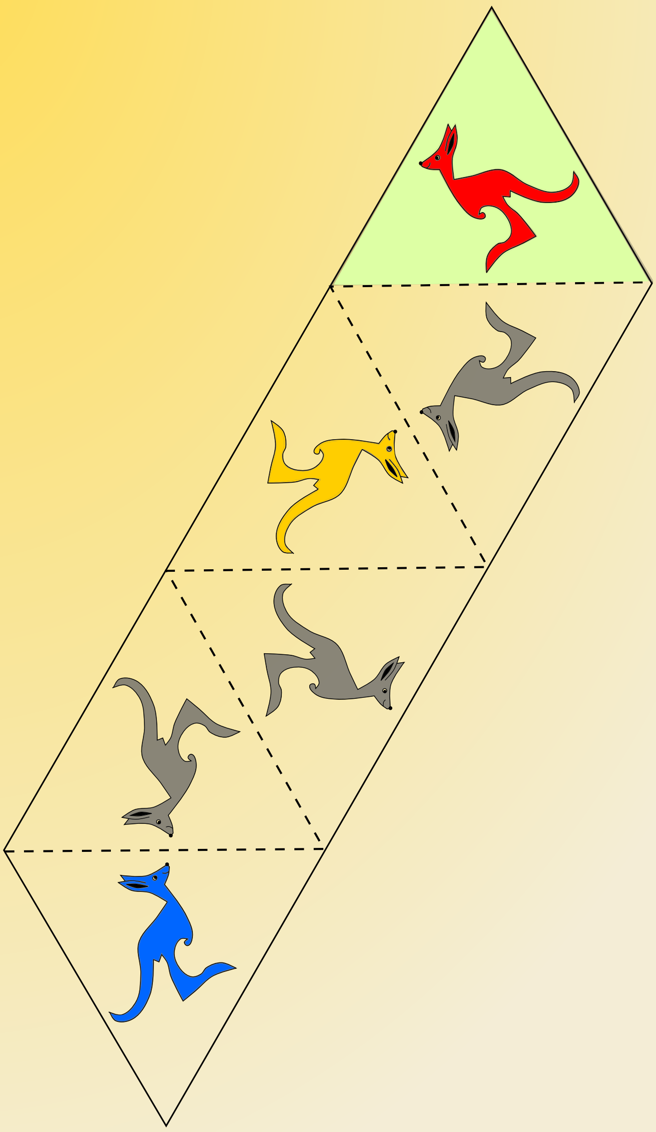
Kengūra

B I Č I U L I S



Uždoutys ir sprendimai
2017

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2017. Bičiulis

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Jonas Šiurys

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 48000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2017 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2017 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 5–6 klasių (*Bičiulio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Bičiulis, 5 klasė, 50 geriausiųjų

Rokas Valuckas,	Vilniaus „Ąžuolyno“ progimnazija,	Vilniaus m., 138.75
Andrius Gasiukevičius,	Ignalinos Česlovo Kudabos progimnazija,	Ignalinos r., 131.00
Aleksas Pupliauskas,	Kauno dailės gimnazija,	Kauno m., 128.75
Vakarė Stankevičiūtė,	Nacionalinė M. K. Čiurlionio menų mokykla,	Vilniaus m., 127.50
Augustas Pupinas,	UAB „Ateities laboratorija“,	Vilniaus r., 127.50
Rokas Braidokas,	Širvintų „Atžalyno“ progimnazija,	Širvintų r., 126.25
Jokūbas Jasiūnas,	Progimnazija „Magis“,	Vilniaus m., 125.00
Paula Chalimavičiūtė,	Taikos progimnazija,	Vilniaus m., 123.75
Pija Chmieliauskaitė,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 122.50
Roman Mumm,	„Santarvės“ pagrindinė mokykla,	Klaipėdos m., 122.50
Meilė Graužinytė,	Širvintų „Atžalyno“ progimnazija,	Širvintų r., 122.50
Dominykas Šatikas,	Tuskulėnų gimnazija,	Vilniaus m., 121.25
Daniel Maciulevič,	Bezdonių Julijaus Slovackio gimnazija,	Vilniaus r., 121.25
Modesta Ravluškievič,	Bezdonių Julijaus Slovackio gimnazija,	Vilniaus r., 121.25
Vilius Birgeris,	Kauno Šv. Kazimiero progimnazija,	Kauno m., 120.00
Rusnė Mackevičiūtė,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 120.00
Paulius Kalinauskas,	Jašiūnų „Aušros“ vidurinė mokykla,	Šalčininkų r., 120.00
Kostas Šilingas,	Kuršėnų Pavenčių mokykla,	Šiaulių r., 119.75
Erikas Zaura,	VšĮ Kazimiero Paltaroko gimnazija,	Panevėžio m., 118.75
Danyla Jaroš,	VšĮ Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m., 118.75
Antanas Oržekauskas,	Vilniaus Balsių progimnazija,	Vilniaus m., 117.50
Robertas Šatkevič,	„Ryto“ progimnazija,	Vilniaus m., 117.50
Dominyka Lenickaitė,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 117.50
Dovydas Labanauskas,	Šiaulių Jovaro progimnazija,	Šiaulių m., 117.50
Titas Motekaitis,	VšĮ Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m., 116.25
Viltė Maselskaitė,	Šaltinių pagrindinė mokykla,	Alytaus m., 114.75
Eimantas Lazauskas,	Baltupių progimnazija,	Vilniaus m., 113.75
Kamilija Voinič,	Bezdonių Julijaus Slovackio gimnazija,	Vilniaus r., 113.75
Domas Venckus,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 113.75
Domilė Šidlaitė,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 113.75
Armandas Motiejauskas,	VšĮ Klaipedos „Universa Via“ tarptautinė mokykla,	Klaipėdos m., 112.50
Simonas Bikelis,	Utenos Aukštakalnio progimnazija,	Utenos r., 112.50
Vitalij Katin,	Vilniaus „Ateities“ mokykla,	Vilniaus m., 111.25
Kristijonas Gikys,	Baltupių progimnazija,	Vilniaus m., 111.25
Joana Dacevič,	Bezdonių Julijaus Slovackio gimnazija,	Vilniaus r., 111.25
Kamilė Kijanskaitė,	Elektrėnų „Ąžuolyno“ progimnazija,	Elektrėnų sav., 111.00
Justinas Letukas,	Vilniaus Jeruzalės progimnazija,	Vilniaus m., 110.00
Oskaras Rorodionov,	Hermano Zudermano gimnazija,	Klaipėdos m., 110.00
Deimantė Juknevičiūtė,	Mykolo Karkos pagrindinė mokykla,	Panevėžio m., 109.75
Gabrielius Rutkauskas,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 109.50
Aneta Kairytė,	Bezdonių Julijaus Slovackio gimnazija,	Vilniaus r., 108.75
Domas Sargevičius,	Pasvalio Svalios pagrindinė mokykla,	Pasvalio r., 108.75
Aistis Gvazdauskas,	„Vilties“ progimnazija,	Panevėžio m., 108.75
Edgaras Mačiuitis,	Rietavo Lauryno Ivinskio gimnazija,	Rietavo sav., 108.25
Deividas Dumčius,	Kauno Prezidento Valdo Adamkaus gimnazija,	Kauno m., 107.50
Klaudija Jackevičiūtė,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 107.50
Matas Kantautas,	Šlienavos pagrindinė mokykla,	Kauno r., 107.00
Emilis Motuzas,	Vilniaus krikščionių gimnazija,	Vilniaus m., 106.25
Kamilė Galinytė,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav., 106.25
Aironas Zakarka,	Utenos Aukštakalnio progimnazija,	Utenos r., 106.25

Bičiulis, 6 klasė, 50 geriausiųjų

Vytenis Kalinauskas,	Vilniaus Simono Daukanto progimnazija,	Vilniaus m., 150.00
Danielė Ramanauskaitė,	Progimnazija „Magis“,	Vilniaus m., 140.00
Jorė Džiaugytė,	Vilniaus „Versmės“ katalikiškoji gimnazija,	Vilniaus m., 138.75
Karolis Liutkus,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 138.75
Pijus Abukauskas,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 138.75
Xue Bai,	VšĮ Tarptautinė Amerikos mokykla,	Vilniaus m., 138.75
Tomas Babelis,	Utenos Rapolo Šaltenio progimnazija,	Utenos r., 137.50
Rokas Urbonas,	VšĮ Kazimiero Paltaroko gimnazija,	Panevėžio m., 136.25
Tomas Andzelis,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 134.75
Jurgita Skersytė,	Progimnazija „Magis“,	Vilniaus m., 133.75
Nedas Bolevičius,	Kėdainių „Ryto“ pagrindinė mokykla,	Kėdainių r., 133.75
Radvilas Rumšas,	Lietuvos sveikatos mokslų universiteto gimnazija,	Kauno m., 132.50
Jorūnė Babarskaitė,	Taikos progimnazija,	Vilniaus m., 131.25
Faustas Puzeras,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m., 131.25
Ūla Mitkevičiūtė,	Ragainės progimnazija,	Šiaulių m., 129.75
Tomas Paznėkas,	Jono Basanavičiaus progimnazija,	Vilniaus m., 128.75
Aušrinė Beskajevaitė,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 128.75
Jokūbas Baltūšis,	VšĮ Kretingos Pranciškonų gimnazija,	Kretingos r., 128.75
Augustė Motiejūnaitė,	Emilijos Pliaterytės progimnazija,	Vilniaus m., 127.50
Pijus Mačiulis,	Šv. Kristoforo progimnazija,	Vilniaus m., 127.50
Pijus Šapnagis,	Lietuvos sveikatos mokslų universiteto gimnazija,	Kauno m., 127.50
Kasparas Savickis,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 127.50
Evelina Auškalnytė,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 127.50
Kazimieras Pčiolinas,	Rokiškio Senamiesčio progimnazija,	Rokiškio r., 127.50
Jorūnas Janaudis,	Utenos r. Užpalių gimnazija,	Utenos r., 127.25
Dmitrij Gavrilov,	„Santaros“ gimnazija,	Vilniaus m., 126.25
Andrius Aleknavičius,	Lietuvos sveikatos mokslų universiteto gimnazija,	Kauno m., 126.25
Erdenė Garynkšytė,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 125.75
Mira Gozbenko,	Maksimo Gorkio pagrindinė mokykla,	Klaipėdos m., 125.00
Rapoals Petrutis,	Palangos „Baltijos“ pagrindinė mokykla,	Palangos m., 125.00
Justinas Staskevičius,	VDU „Atžalyno“ progimnazija,	Kauno m., 124.50
Emilija Vildaitė,	Vidzgirio pagrindinė mokykla,	Alytaus m., 123.75
Austė Sčepkauskaitė,	Grigiškių „Šviesos“ gimnazija,	Vilniaus m., 123.50
Emilija Rimšelytė,	Trakų Vokės gimnazija,	Vilniaus m., 122.50
Lukas Dambrauskas,	Progimnazija „Magis“,	Vilniaus m., 122.50
Patricija Legataitė,	Tuskulėnų gimnazija,	Vilniaus m., 122.50
Juozapas Jurkša,	Kauno Dainavos progimnazija,	Kauno m., 122.50
Augustė Dambrauskaitė,	Karsakiškio Strazdelio pagrindinė mokykla,	Panevėžio r., 122.50
Benas Raišutis,	VšĮ Vilniaus tarptautinė Meridiano mokykla, „VIMS“,	Vilniaus m., 121.25
Lukas Milieška,	Kauno jėzuitų gimnazija,	Kauno m., 121.25
Juta Adomaitytė,	Joniškio Mato Slančiausko progimnazija,	Joniškio r., 121.25
Ugnius Žagarys,	Lietuvos sveikatos mokslų universiteto gimnazija,	Kauno m., 121.00
Liepa Petrošiūtė,	„Verdenės“ progimnazija,	Klaipėdos m., 121.00
Martynas Vilimas,	Vilniaus Sofijos Kovalevskajos progimnazija,	Vilniaus m., 120.00
Beatričė Šimelytė,	„Ryto“ progimnazija,	Vilniaus m., 120.00
Saulius Liuberskis,	Kauno Jono Žemaičio-Vytauto mokykla,	Kauno m., 120.00
Pranas Kraučiūnas,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 120.00
Greta Martinėnaitė,	Vilniaus jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m., 120.00
Ignas Vasiliauskas,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav., 120.00
Medas Savickas,	Ukmergės Užupio pagrindinė mokykla,	Ukmergės r., 120.00
Deividas Petrušis,	Varėnos „Ryto“ progimnazija,	Varėnos r., 120.00
Rytis Jonika,	Punios mokykla – daugiafunkcis centras,	Alytaus r., 120.00
Karolis Margis,	Salantų gimnazija,	Kretingos r., 120.00

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2017 m. *Bičiulio* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

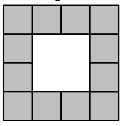
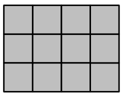
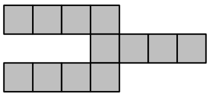
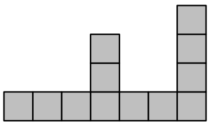
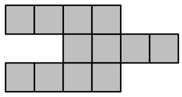
1. Viena šalia kitos padėtos keturios kortelės (žr. pav.). Kokios kortelių sekos negalima gauti, jei sukeičiame vietomis tik dvi korteles?

2 0 1 7

A) 2 7 1 0 **B)** 0 1 2 7 **C)** 1 0 2 7 **D)** 0 2 1 7 **E)** 2 0 7 1

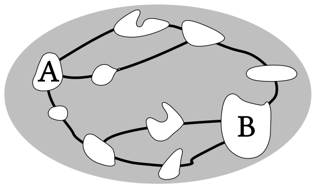
2. Musė turi 6 kojas, o voras – 8. Iš viso 3 musės ir 2 vorai turi tiek pat kojų, kiek 9 viščiukai ir
A) 2 katės **B)** 3 katės **C)** 4 katės **D)** 5 katės **E)** 6 katės

3. Vėjūnė turi keturias tokios formos figūrėles: . Kurios figūros ji negali sudėti iš tų 4 figūrėlių?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

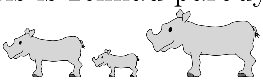
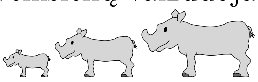
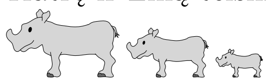
4. Lukas žino, kad $1111 \times 1111 = 1234321$. Kam lygu 1111×2222?
A) 3456543 **B)** 2345432 **C)** 2234322 **D)** 2468642 **E)** 4321234

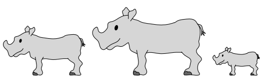
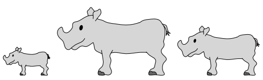
5. Ežere yra 10 salų ir 12 tiltų (žr. pav.). Iš pradžių visi tiltai yra atidaryti. Kiek mažiausiai tiltų reikia uždaryti, kad nebūtų galima nuvažiuoti iš salos A į salą B?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

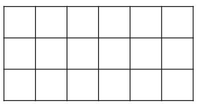
6. Jonė, Katrė ir Lina išėjo pasivaikščioti. Jonė eina pirma, Katrė eina viduryje, o Lina eina paskutinė. Jonė sveria 500 kg daugiau negu Katrė. Katrė sveria 1000 kg mažiau negu Lina. Kuris iš žemiau parodytų paveikslėlių vaizduoja Jonę, Katrę ir Liną teisinga tvarka?

A)  **B)**  **C)** 

D)  **E)** 

7. Ant kiekvienos kubo sienos yra užrašyta po vieną skaičių. Ant priešingų sienų užrašytų skaičių sumos yra lygios. Penkių sienų skaičiai yra 5, 6, 9, 11 ir 14. Koks yra šeštosios sienos skaičius?
A) 4 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 13 **E)** 15

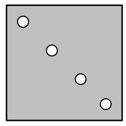
8. Ignas spalvina pavaizduoto stačiakampio kvadratėlius. Trečdalį visų kvadratėlių jis nuspalvins mėlynai, pusę visų kvadratėlių – geltonai, o likusius – raudonai. Kiek kvadratėlių Ignas nuspalvins raudonai?

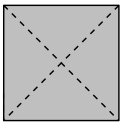
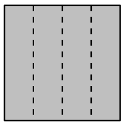
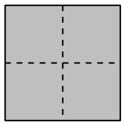
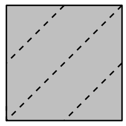
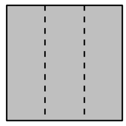


A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9. Kol Linas suvalgo 2 slyvas, Justas spėja suvalgyti 3 slyvas. Iš viso abu berniukai, valgydami kartu, suvalgė 30 slyvų. Keliomis slyvomis Justas suvalgė daugiau už Liną?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

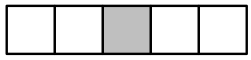
10. Matas keletą kartų perlenkė popieriaus lapą ir jį pradūrė. Paveikslėlyje šalia parodytas atlankstytas popieriaus lapas. Kuriame iš žemiau pateiktų paveikslėlių pavaizduotos linijos, per kurias Matas lenkė lapą?



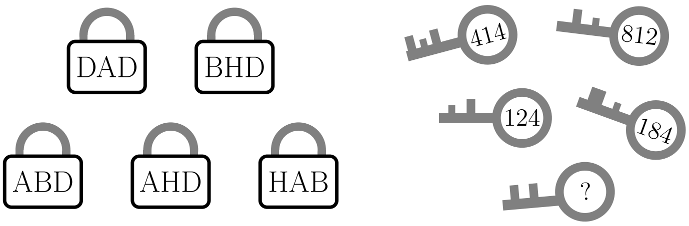
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Klausimai po 4 taškus

11. Kiekviename paveikslėlio langelyje įrašyta po vieną natūralųjį skaičių. Pirmų trijų skaičių suma lygi 21, o paskutinių trijų skaičių suma lygi 27. Visų penkių skaičių suma lygi 37. Koks skaičius įrašytas pilkajame langelyje?
A) 3 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 16

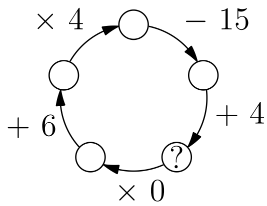


12. Kiekvienas iš 5 raktų tinka lygiai vienai iš 5 spynų, o skaitmenys ant raktų atitinka raides ant spynų. Koks skaičius parašytas ant klaustuku pažymėto rakto?
A)382 **B)**282 **C)**284 **D)**823 **E)**824

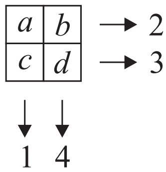


13. Viltė iš eilės surašė visus skaičius nuo 1 iki 20 ir gavo 31-ženklį skaičių 12345678910111213141516171819 20. Tada ji ištrynė tokius 24 šio skaičiaus skaitmenis, kad likęs skaičius būtų didžiausias įmanomas. Kokį skaičių gavo Viltė?
A) 9671819 **B)** 9567892 **C)** 9781920 **D)** 9912345 **E)** 9818192

14. Kokį skaičių reikia įrašyti į klaustuku pažymėtą skrituliuką?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14



15. Sudėję kiekvieno stulpelio ir kiekvienos eilutės skaičius, gauname paveikslėlyje parodytas sumas. Kuris iš žemiau parašytų teiginių yra teisingas?
A) a yra lygu d **B)** b yra lygu c **C)** a yra daugiau negu d
D) a yra mažiau negu d **E)** c yra daugiau negu b

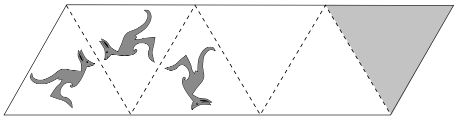


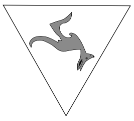
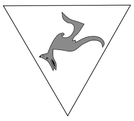
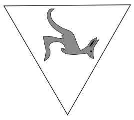
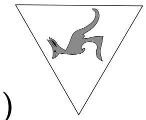
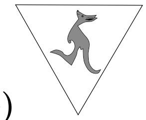
16. Vytenis per 5 dienas nuėjo 70 km. Kiekvieną dieną jis nueidavo 2 km daugiau negu praėjusią dieną. Kiek kilometrų Vytenis nuėjo ketvirtą dieną?
A) 12 km **B)** 13 km **C)** 14 km **D)** 15 km **E)** 16 km

18. Tomas mano, kad jo laikrodis vėluoja 8 minutes, o iš tikrųjų jo laikrodis skuba 7 minutes. Tomas pažiūrėjo į laikrodį ir nusprendė, kad dabar yra 12:00. Kokį laiką rodytų tiksliai einantis laikrodis?

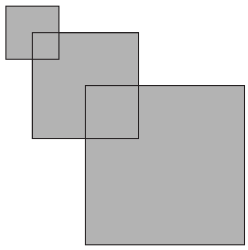
A) 11:45 **B)** 11:53 **C)** 11:59 **D)** 12:07 **E)** 12:15

17. Kairiajame paveikslėlio trikampyje pavaizduota kengūra. Punktyrinės linijos veikia kaip veidrodžiai. Pirmi du atspindžiai jau pavaizduoti. Kaip atrodo pilkajame trikampyje esantis atspindys?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

19. Trys kvadratai, kurių kraštinių ilgiai yra atitinkamai 2 cm, 4 cm ir 6 cm, nubraižyti taip, kad mažiausiojo kvadrato centras sutampa su viduriniojo kvadrato viršūne, o viduriniojo kvadrato centras – su didžiausiojo kvadrato viršūne (žr. pav.). Koks gautos figūros plotas?



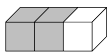
A) 32 cm^2 **B)** 51 cm^2 **C)** 27 cm^2 **D)** 16 cm^2 **E)** 6 cm^2

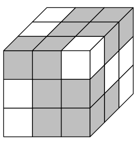
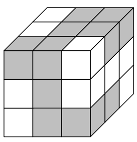
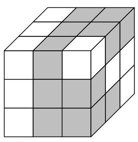
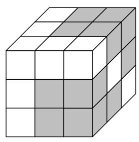
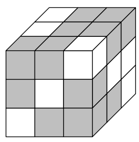
20. Per rankinio varžybas keturi žaidėjai pelnė skirtingą skaičių įvarčių. Iš šių keturių žaidėjų Vainius pelnė mažiausiai įvarčių. Kiti trys kartu pelnė 20 įvarčių. Kiek daugiausiai įvarčių galėjo pelnyti Vainius?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

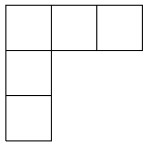
Klausimai po 5 taškus

21. Strypelis suklijuotas iš 2 pilkų ir 1 balto kubelio (žr. pav.). Iš 9 tokių strypelių buvo pastatytas kubas. Kuris?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

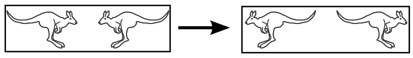
22. Skaičius 1, 2, 3, 4 ir 5 reikia surašyti į penkis figūros langelius (po vieną į kiekvieną langelį). Tiek eilutėje iš kairės į dešinę, tiek stulpelyje iš viršaus į apačią skaičius reikia surašyti didėjimo tvarka. Kiek yra būdų taip padaryti?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

23. Aštuonios kengūros stovi vienoje eilėje (žr. 1 pav.). Vienu ėjimu sukeičiamos vietomis kurios nors dvi gretimos kengūros, atsisukusios viena į kitą (žr. 2 pav.). Tai daroma, kol nebeįmanoma sukeisti jokių dviejų kengūrų.

1 pav.



2 pav.

Kiek ėjimų bus padaryta?

A) 2 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 16

24. Nuvažiavus $\frac{5}{8}$ kelio, liko 54 km. Koks maršruto ilgis?

A) 120 km **B)** 140 km **C)** 144 km **D)** 160 km **E)** 192 km

25. Triženklio skaičiaus skaitmenų sandauga mažesnė už 2. Kiek yra tokių skaičių?

A) 1 **B)** 181 **C)** 180 **D)** 171 **E)** 172

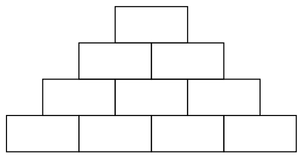
26. Dėžutėje yra tik raudoni ir žali rutuliai. Iš bet kurių paimtų 5 rutulių bus bent 1 raudonas, o iš bet kurių 6 rutulių bus bent 1 žalias. Kiek daugiausiai rutulių gali būti dėžutėje?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

27. Ana mėgsta lyginius skaičius, Beatai patinka dalūs iš 3 skaičiai, o Cilei patinka dalūs iš 5 skaičiai. Mergaitės viena po kitos priėjo prie dėžutės, kurioje iš pradžių buvo skaičiais pažymėti 8 rutuliai, ir kiekviena paėmė visus jos mėgstamais skaičiais pažymėtus rutulius. Paaiškėjo, kad Ana paėmė rutulius su skaičiais 32 ir 52, Beata – su skaičiais 24, 33 ir 45, o Cilė – su skaičiais 20, 25 ir 35. Kuria tvarka mergaitės ėjo prie dėžutės?

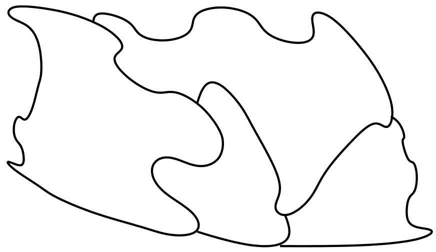
A) Ana, Cilė, Beata **B)** Cilė, Beata, Ana **C)** Beata, Ana, Cilė **D)** Beata, Cilė, Ana **E)** Cilė, Ana, Beata

28. Miglė į kiekvieną paveikslėlio langelį įrašė po natūralųjį skaičių taip, kad į langelį įrašytas skaičius būtų dviejų po pat juo esančių skaičių suma (išskyrus paskutinę eilutę). Kiek daugiausiai nelyginių skaičių galėjo įrašyti Miglė?



A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

29. Julija turi keturis skirtingų spalvų pieštukus ir nori jais nuspalvinti keturių šalių žemėlapį (žr. pav.). Žemėlapyje dvi šalys, turinčios bendrą sieną, turi būti nuspalvintos skirtingomis spalvomis. Kiekviena šalis turi būti nuspalvinta, bet nebūtina naudoti visas spalvas. Keliais būdais Julija gali nuspalvinti žemėlapį?



A) 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 48

30. Kiekviename lentos 6×6 langelyje stovi po lempą. Dvi lempas vadinsime gretimomis, jei jos yra langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę. Iš pradžių kai kurios lempos šviečia, ir kiekvieną minutę užsidega tos lempos, kurios turi bent dvi gretimas šviečiančias lempas. Kiek mažiausiai lempų užtenka įjungti iš pradžių, kad po kurio laiko visos lempos šviestų?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Bičiulio užduočių sprendimai

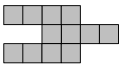
1. (B) 0 1 2 7

? Atsakymą **A** galima gauti sukeitus antrą ir trečią korteles; atsakymą **C** gauname sukeitę pirmą ir trečią korteles; sukeitę pirmas dvi korteles gauname atsakymą **D**; **E** atsakymą galima gauti sukeitus paskutines dvi korteles. Kadangi bent vienas atsakymas turi būti teisingas, renkamės atsakymą **B**.

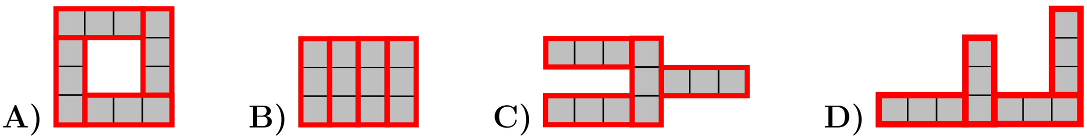
! Atkreipkite dėmesį, kad atsakyme **B** net trys kortelės yra ne savo vietoje, todėl tokios sekos negalima gauti sukeitus tik dvi korteles vietomis.

2. (C) 4 katės

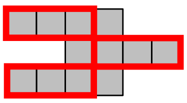
! Trys musės turi $3 \cdot 6 = 18$ kojų, o du vorai – $2 \cdot 8 = 16$ kojas. Devyni viščiukai turi $9 \cdot 2 = 18$ kojų – tiek pat kiek trys musės. Taigi 24 kojas turės $16 : 4 = 4$ katės.

3. (E) 

! Nesunku pastebėti, kad atsakymuose **A**, **B**, **C** ir **D** pavaizduotas figūras galima sudėti:



Įrodykime, kad atsakyme **E** pavaizduotos figūros negalime sudėti. Pradėkime dėlioti figūrą **E** nuo „išsikišimų“:



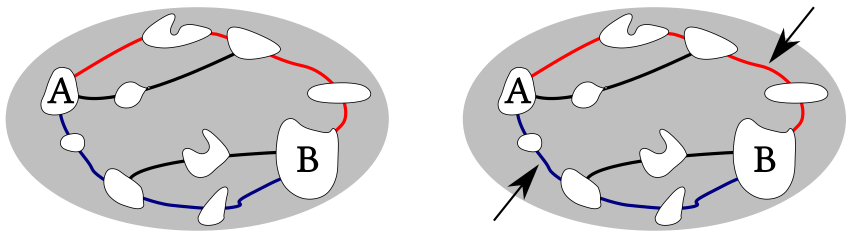
Lieka trys langeliai, kurių niekaip neuždengsi sąlygoje nurodyta figūrėle, todėl figūros **E** sudėti negalima.

4. (D) 2468642

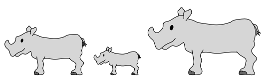
! Kadangi $1111 \times 1111 = 1234321$, tai $1111 \times 2222 = 1111 \times 1111 \times 2 = 1234321 \times 2 = 2468642$.

5. (**B**) 2

! Iš salos A į salą B galima nuvažiuoti bent dviem skirtingais maršrutais, kuriuose nėra bendrų tiltų (žr. kairįjį paveikslėlį). Tam, kad iš salos A į salą B nebūtų galima nuvažiuoti, reikia pakelti bent vieną raudono ir bent vieną mėlyno maršruto tiltą. Taigi reikia pakelti mažiausiai du tiltus.



Nesunku įsitikinti, kad pakėlus dešiniajame paveikslėlyje nurodytus tiltus, iš salos A į salą B nuvykti nebepavyks.

6. (**A**) 

? Iš sąlygos aišku, kad Katrė yra lengvesnė ir už Jonę, ir už Liną. Vienintelis paveikslėlis, kuriame mažiausias raganosis yra viduryje, yra **A**, todėl jį ir renkamės.

! Žinome, kad lengviausia yra Katrė. Galima išsiaiškinti kuri sunkesnė – Jonė ar Lina. Jonė sveria 500 kg daugiau nei Katrė, o Lina sveria 1000 kg daugiau nei Katrė. Vadinasi, Lina yra sunkesnė už Jonę. Įsitikinome, kad vienintelis paveikslėlis, vaizduojantis Jonę, Katrę ir Liną teisinga tvarka, yra **A**.

7. (**E**) 15

? Kadangi visų skaičių sumą sudaro 3 lygios sumos, tai visų 6 skaičių suma turi dalytis iš 3. Bet sąlygos 5 skaičių suma $5+6+9+11+14=45$ dalijasi iš 3, todėl iš šeštasis skaičius turi dalytis iš 3. Toks yra tik atsakyme **E** – 15.

! Ant priešingų sienų užrašytų skaičių sumos yra lygios, todėl mažiausias ir didžiausias skaičiai turi būti užrašyti ant priešingų sienų. Nagrinėkime tris atvejus.

1) Mažiausias skaičius yra 5, o didžiausias 14. Tuomet ant priešingų sienų užrašytų skaičių suma lygi $5+14=19$. Tačiau jokių dviejų iš likusių skaičių suma nelygi 19: $6+9=15$, $6+11=17$, o $9+11=20$. Taigi trūksta arba mažiausio, arba didžiausio skaičiaus.

2) Trūksta mažiausio skaičiaus. Tuomet 14 yra didžiausias skaičius, o ant priešingų sienų bus skaičiai 5 ir 11, bei 6 ir 9. Bet $5+11=16>15=6+9$, vadinasi, trūksta didžiausio skaičiaus.

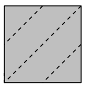
3) Trūksta didžiausio skaičiaus. Kadangi 5 bus pora didžiausiam skaičiui, tai ant priešingų sienų bus skaičiai 6 ir 14, bei 9 ir 11. Patikriname, kad $6+14=20=9+11$. Vadinasi, didžiausias skaičius yra 15.

8. C 3

! Iš viso stačiakampyje yra $3 \cdot 6 = 18$ kvadratėlių. Kai Ignas nuspalvins trečdalį kvadratėlių mėlynai ir pusę geltonai, jam liks $18-\frac{18}{3}-\frac{18}{2} = 3$ kvadratėliai, kuriuos jis nuspalvins raudonai.

9. B 6

! Kol Linas suvalgo 2 slyvas, Justas suvalgo 3 slyvas. Taigi per šį laiką berniukai suvalgo iš viso 5 slyvas ir Justas viena slyva pralenkia Liną. Trisdešimt slyvų suvalgyti jiems reikės $30 : 5 = 6$ kartus daugiau laiko, todėl Justas pralenks Liną 6 slyvomis.

10. D 

! Punktyrinės linijos dalija lapą į sritis. Kiekvienoje srityje gali būti daugiausiai 1 skylė. Taip iš karto atmetame atsakymus **C** ir **E**. Atsakyme **A** visos skylės atsiduria ant lenkimo linijos, o taip būti negali (skylės išduriamos, o ne iškerpamos). Jei Matas popieriaus lapą būtų lankstęs kaip pavaizduota atsakyme **B**, tai skylių eilutė būtų lygiagreti popieriaus lapo kraštui. Lieka atsakymas **D**, kurį ir renkamės. Kad jis tikrai teisingas, galima įsitikinti sulanksčius popierių kaip parodyta ir jį pradūrus.

11. D 11

! Paskutinių dviejų skaičių suma lygi $37-21 = 16$. Pirmųjų dviejų skaičių suma lygi $37-27 = 10$. Todėl pilkojo langelio skaičius lygus $37 - 16 - 10 = 11$.

!! Uždavinį galima išspręsti užsirašius lygčių sistemą. Pažymėkime į langelius įrašytus skaičius iš kairės į dešinę raidėmis a, b, c, d, e. Tuomet

$$\begin{cases} a+b+c & = 21, \\ c+d+e & = 27, \\ a+b+c+d+e & = 37. \end{cases}$$

Sudėję pirmas dvi lygtis gauname

$$\begin{cases} a+b+2c+d+e & = 48, \\ a+b+c+d+e & = 37. \end{cases}$$

Galiausiai, atėmę antrą lygtį iš pirmos gauname, kad $c = 11$. Taigi teisingas atsakymas yra **D**.

12. C 284

! Pirmiausia pastebėkime, kad yra tik viena spyna, kurios pirma ir trečia raidės sutampa – DAD. Vadinasi, yra tik vienas skaičius ant raktų, kurio pirmas ir paskutinis skaitmenys sutampa. Mes jį matome ant vieno iš raktų – 414. Taip mes sužinojome, kad raidė D atitinką skaitmenį 4, o raidė A – skaitmenį 1.

Yra net keturios spynos, kurių paskutinė raidė yra D, todėl turi būti keturi skaičiai ant spynų, kurie baigiasi skaitmeniu 4. Mes matome tris tokius skaičius, vadinasi, ieškomas skaičius taip pat baigiasi skaitmeniu 4. Vienintelė spyna, kurios paskutinė raidė nėra D, yra HAB, todėl ji atitinka skaičių 812. Taip mes iššifravome likusias dvi raides: H atitinka 8, o B atitinka 2.

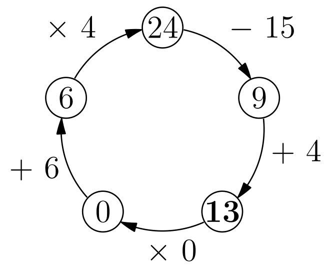
Dabar jau nesunku pabaigti. Spyna ABD atitinka skaičių 124, spyna AHD atitinka skaičių 184, o spyna BHD – skaičių 284. Ant raktų nematome tik skaičiaus 284, todėl jis yra ant klaustuku pažymėto rakto.

13. C 9781920

! Viltė iš 31-ženklio skaičiaus ištrynė 24 skaitmenis ir gavo 7-ženklį skaičių. Didžiausias 7-ženklis skaičius yra 9999999, bet tokio skaičiaus Viltė negali gauti, nes pradiniame skaičiuje yra tik 2 devynetai. Ji negali gauti net skaičiaus, kuris prasideda dviem devynetais, nes išbraukusi visus skaitmenis iki pirmo devyneto ir visus skaitmenis tarp pirmo ir antro devynetų, ji gautų keturženklį skaičių. Skaičiaus, kuris prasideda 98 ji taip pat negali gauti, nes didžiausias toks skaičius būtų šešiaženklis. O štai 7-ženklį skaičių, kuris prasideda 97 ji gali gauti. Išbraukusi visus skaitmenis iki pirmo devyneto ir išbraukusi visus skaitmenis tarp pirmo devyneto ir antro septyneto Viltė gautų skaičių 97181920. Tai yra 8-ženklis skaičius ir nesunku įsitikinti, kad didžiausią 7-ženklį skaičių ji gaus tada, kai išbrauks pirmą vienetą.

14. D 13

! Kad ir koks būtų ieškomas skaičius, padauginę jį iš 0 gausime 0. Taigi nesunkiai galime užpildyti visą ratą:



15. D a yra mažiau negu d

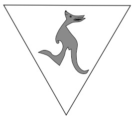
? Pamėginkime įsistatyti tokias a, b, c ir d reikšmes, kad gautume paveikslėlyje parodytas sumas. Tarkime $a = 1$, tada $b = 1$, $c = 0$, o $d = 3$. Vienintelis teisingas teiginys šiuo atveju yra **D**.

! Įsitikinkime, kad teiginys **D** visada yra vienintelis teisingas. Pastebėkime, kad $a + b = 2$, o $b + d = 4$. Taigi $a < d$. Panašiai, $a + b = 2$, o $a + c = 1$, todėl $b > c$. Vienintelis teisingas atsakymas yra **D**.

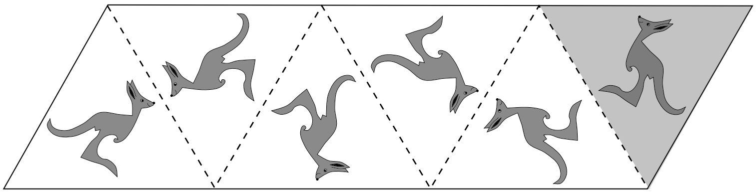
16. (E) 16 km

! Pirmą dieną Vytenis nuėjo x kilometrų. Tada antrą dieną jis nuėjo $x+2$, trečią $x+4$, ketvirtą $x+6$, o penktą $x+8$ kilometrus. Per 5 dienas jis nuėjo $5x+20=70$ kilometrų. Taigi pirmą dieną jis nuėjo $\frac{70-20}{5}=10$ km, o ketvirtą – 16 km.

!! Vidutiniškai per dieną Vytenis nuėjo $70:5=14$ km. Nesunku suprasti, kad tiek jis nuėjo trečiąją dieną. Vadinasi, ketvirtą dieną jis nuėjo $14+2=16$ km.

17. (E) 

! Atsakymą randame mintyse „atspindėdami“ kengūrą:



18. (A) 11:45

! Tomas mano, kad laikrodis vėluoja 8 minutes, todėl laiką jis sužino prie laikrodžio rodmenų pridėjęs 8 minutes. Tomas nusprendė, kad dabar yra 12:00, taigi jo laikrodis rodė 11:52. Tačiau Tomo laikrodis skuba 7 minutes, todėl tikslus laikas yra 11:45.

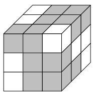
19. (B) 51 cm^2

! Trijų kvadratų bendras plotas yra $2^2+4^2+6^2=56$ cm^2. Mažiausias ir vidurinis kvadratai persidengia ketvirtadaliu mažiausiojo kvadrato ploto – 1 cm^2, o vidurinis ir didžiausias kvadratai persidengia ketvirtadaliu viduriniojo kvadrato ploto – 4 cm^2. Vadinasi, figūros plotas yra $56-1-4=51$ cm^2.

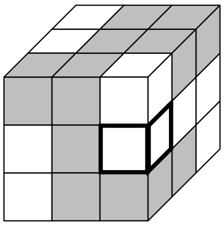
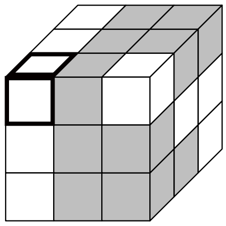
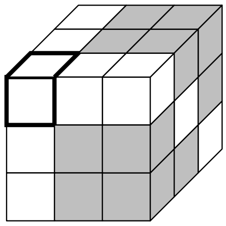
20. (C) 4

! Žaidėjus pagal rezultatyvumą mažėjimo tvarka pažymėkime taip: A, B, C ir Vainius. Vainius daugiausiai galėjo pelnyti vienu įvarčiu mažiau, negu žaidėjas C. Jei C būtų pelnęs 6 įvarčius, tai A ir B kartu būtų pelnę ne mažiau kaip $7+8=15$ įvarčių. Taigi bendras A, B ir C įvarčių skaičius viršytų 20. O 5 įvarčius žaidėjas C galėjo pelnyti, pavyzdžiui, jei žaidėjai A ir B pelnė atitinkamai 9 ir 6 įvarčius. Vadinasi, Vainius galėjo pelnyti daugiausiai 4 įvarčius.

!! Jei Vainius pelnė V įvarčių, tai $C\geqslant V+1$, $B\geqslant V+2$, $A\geqslant V+3$. Bet $A+B+C=20$, todėl $V+1+V+2+V+3\leqslant 20$, $3V\leqslant 14$, $V\leqslant 4$. Vainius tikrai galėjo pelnyti 4 įvarčius, pavyzdžiui, $V=4$, $C=5$, $B=6$, $A=9$.

21. A 

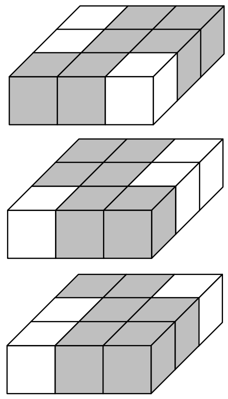
? Kiekvienas kubelis priklauso vienam iš 9 strypelių. Strypeliai kube gali būti padėti trimis kryptimis. Atsakymuose **B**, **C** ir **D** pavaizduotuose kubuose pažymėti kubeliai, kurie negali priklausyti jokia kryptimi padėtam strypeliui.

B)  C)  D) 

Panagrinėkime atsakymą **E**. Priekinės sienos centrinis kubelis gali priklausyti tik per kubo centrą einančiam strypeliui. Matomos šoninės sienos centrinis kubelis taip pat gali priklausyti tik per kubo centrą einančiam strypeliui. Bet du strypeliai negali kirstis. Vadinasi, atsakymas **E** yra neteisingas.

Renkamės atsakymą **A**.

! Lieka įsitikinti, kad atsakyme **A** pavaizduotą kubą tikrai galima sudėti (žr. pav.).



22. D 6

! Kadangi skaičius reikia rašyti didėjimo tvarka, tai 1 būtinai turi būti kampiniame langelyje, o 2 būtinai bus arba dešinėje nuo 1, arba po pat 1. Suskaičiuokime, kiek yra būdų surašyti skaičius, kai 2 yra dešinėje nuo 1. Į paskutinį eilutės langelį galima įrašyti bet kurį iš skaičių 3, 4 arba 5. Į likusius du stulpelio langelius įrašome paskutinius du skaičius didėjimo tvarka vieninteliu būdu. Gauname 3 būdus. Kai 2 yra po vienetu, tai panašiai samprotaudami gausime vėl 3 būdus. Visi šie būdai bus skirtingi, vadinasi iš viso skaičius galima surašyti 6 būdais.

23. D 13

! Paveikslėlyje matome 3 kengūras, kurios žiūri į kairę, ir 5 kengūras, kurios žiūri į dešinę. Kiekviena į kairę žiūrinti kengūra bus sukeista su tomis į dešinę žiūrinčiomis kengūromis, kurias ji mato. Pirmoji į kairę žiūrinti kengūra mato 3 į dešinę žiūrinčias kengūras, o paskutinės dvi kengūros mato po 5 į dešinę žiūrinčias kengūras. Taigi iš viso bus padaryta $3 + 5 + 5 = 13$ ėjimų.

24. C 144 km

! Kelio ilgį pažymėkime x. Tuomet $x - \frac{5}{8}x = \frac{3}{8}x = 54$ km. Iš paskutinės lygybės randame $x = 144$ km.

25. E 172

! Nagrinėkime tris atvejus: kai skaičiuje yra 2 nuliai, kai yra 1 nulis ir kai visi skaitmenys didesni už 0. (Trys 0 negali būti, nes pirmas skaičiaus skaitmuo būtinai didesnis už 0.)

Pirmu atveju skaičiaus paskutiniai 2 skaitmenys yra nuliai, o pirmas skaitmuo gali būti bet kuris didesnis už nulį skaitmuo. Gauname 9 skaičius.

Antru atveju nulis gali būti arba antras, arba trečias skaitmuo, o likę du bet kokie nenuliniai skaitmenys. Gauname $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$ skaičius.

Trečiu atveju vienintelis skaičius, kurio skaitmenų sandauga mažesnė už 2, yra 111. Iš viso gauname $9 + 162 + 1 = 172$ skaičius.

26. C 9

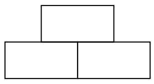
! Iš bet kurių 5 rutulių yra bent 1 raudonas, taigi žalių rutulių negali būti daugiau kaip 4. Iš bet kurių 6 rutulių yra bent 1 žalias, todėl raudonų rutulių negali būti daugiau kaip 5. Vadinasi, daugiausiai dėžutėje gali būti $4 + 5 = 9$ rutuliai.

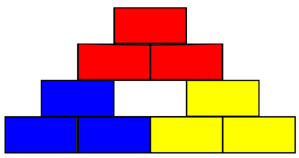
27. D Beata, Cilė, Ana

! Beata ir Cilė turi lyginiais skaičiais pažymėtų rutulių, vadinasi, Ana priėjo prie dėžutės paskutinė. Beata paėmė rutulį, pažymėtą skaičiumi 45, taigi ji prie dėžutės ėjo prieš Cilę. Vadinasi pirma ėjo Beata, antra – Cilė, o trečia – Ana.

28. D 7

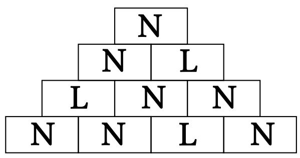
? Pastebėkime, kad į paveikslėlyje dešinėje pavaizduotą piramidės elementą, Miglė gali įrašyti daugiausiai 2 nelyginius skaičius. Visą piramidę galima padalinti į 3 tokius elementus, ir dar lieka vienas langelis.



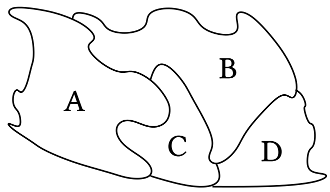


Taigi nelyginių skaičių bus ne daugiau kaip $2 \cdot 3 + 1 = 7$. Spėjame, kad teisingas atsakymas **D**.

! Lieka įsitikinti, kad tikrai galima įrašyti 7 nelyginius skaičius. Paveikslėlyje parodytas vienas iš būdų (L raidė reiškia lyginį skaičių, o N – nelyginį).



29. (E) 48



! Pažymėkime šalis raidėmis A, B, C ir D (žr. pav.). Žemėlapiui nuspalvinti neužtenka 2 spalvų, nes bet kurios dvi iš A, B ir C šalių turi bendrą sieną.

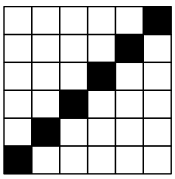
Tarkime, kad Julija spalvina žemėlapį 3 spalvomis. Tas tris spalvas ji panaudos spalvindama A, B ir C šalis, o šalį D ji gali spalvinti tik šalies A spalva. Taigi šalį A ji gali spalvinti 4 būdais, tuomet šaliai B lieka 3 galimos spalvos, o šaliai C – 2 spalvos. Vadinasi, žemėlapį 3 spalvomis galima nuspalvinti $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdais.

Jei Julija žemėlapį spalvina 4 spalvomis, tai visos šalys bus skirtingų spalvų. Kaip ir trijų spalvų atveju, šaliai A Julija gali parinkti vieną iš 4 spalvų, tuomet šaliai B lieka 3 galimos spalvos, o šaliai C – 2 spalvos, o šalį D mergaitė spalvina paskutine likusia spalva. Žemėlapiui 4 spalvomis nuspalvinti yra $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ būdai.

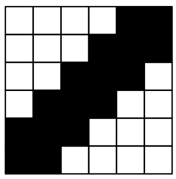
Taigi žemėlapį galima nuspalvinti iš viso $24 + 24 = 48$ būdais.

30. (C) 6

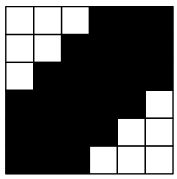
? Uždavinys labai sunkus, bet teisingą atsakymą galima atspėti pabandžius įvairius variantus. Tarkime, kad iš pradžių šviečia šešios lempos, išsidėsčiusios ant lentos įstrižainės (juodieji langeliai, žr. 1 pav.). Kitą minutę užsidegs gretimos lempos virš įstrižainės ir gretimos lempos po įstrižaine (žr. 2 pav.). Trečią minutę pradės šviesti lempos, parodytos 3 paveikslėlyje ir t. t. Po 5 minučių švies visos lempos.



1 pav.



2 pav.

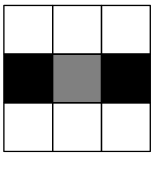


3 pav.

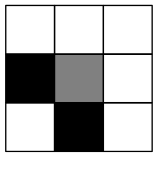
Nesėkmingai pabandę su 5 lempom spėjame, kad teisingas atsakymas yra **C**.

! (Michael Lambrou pasiūlytas sprendimas.) Įrodykime, kad jei pradžioje šviečia mažiau negu šešios lempos, tai visos lempos niekada nešvies. Užtenka parodyti, kad penkių lempų nepakanka.

Tam, kad lempa užsidegtų, reikia bent dviejų jai gretimų šviečiančių lempų. Galimi du skirtingi atvejai parodyti 4 ir 5 paveikslėliuose. (Kiti atvejai gaunami pasukus nurodytus.)



4 pav.



5 pav.

Pilkas langelis žymi lempą, kuri užsidegs kitą minutę. Pastebėkime, kad pradžioje figūros, sudarytos iš juodų kvadratėlių, perimetras abiem atvejais yra $4 + 4 = 8$. Kitą minutę užsidegus pilkame langelyje esančiai lempai (ir pilkam langeliui pavirtus juodam) naujos juodos figūros perimetras nepasikeis (patikrinkite!). Taigi užsidegus naujoms lempoms juodos figūros perimetras negali padidėti. Jei pradžioje šviečia 5 lempos, tai iš juodų kvadratėlių sudarytos figūros perimetras bus daugiausiai $5 \cdot 4 = 20$. Tuo tarpu visos lentos perimetras yra $6 \cdot 4 = 24 > 20$. Vadinasi, penkių šviečiančių lempų nepakanka.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	C
3	E
4	D
5	B
6	A
7	E
8	C
9	B
10	D
11	D
12	C
13	C
14	D
15	D
16	E
17	E
18	A
19	B
20	C
21	A
22	D
23	D
24	C
25	E
26	C
27	D
28	D
29	E
30	C