

# Turinys

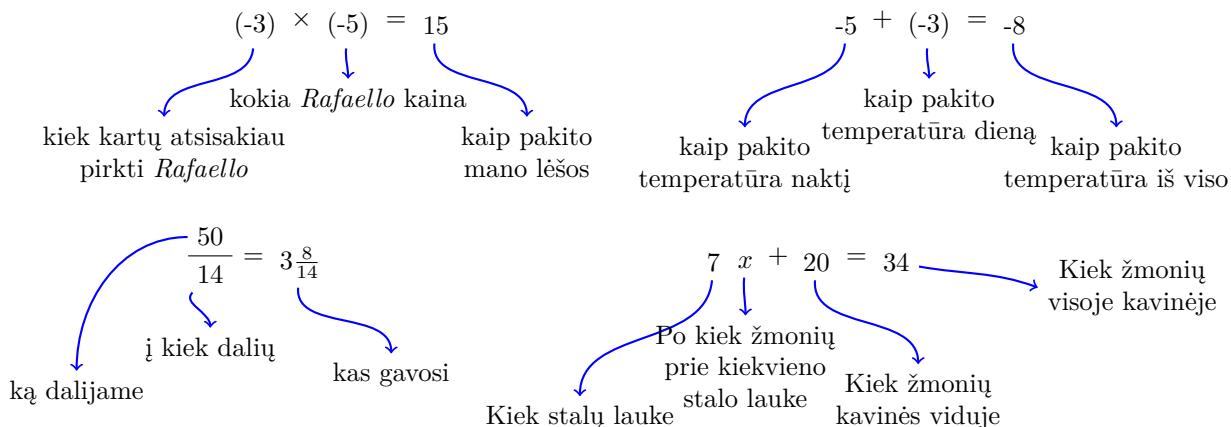
1 Šiame straipsnyje įvestų sąvokų žodynėlis	2
2 Tyrimo metodika	3
3 ORDER YOUR NUMBERS	4
3.1 Pirminis lygis . . . . .	4
3.2 Prasmės . . . . .	4
4 GET PROCEPTUAL	5
4.1 Pirminis lygis . . . . .	5
4.2 Sudētingesnis lygis . . . . .	6
4.3 Prasmės . . . . .	6
5 NOTHING MORE THAN LINEARITY	7
6 RULES OF MANHATTAN	8
7 LEVEL UP	10
8 IDENTITY OF ELEMENT	10
9 TRUPMENOS	14
9.1 Part-whole (dalis - visuma) . . . . .	15
9.2 Measurement (matavimas) . . . . .	16
9.3 Quotient (dalmuo) . . . . .	16
9.4 Operation (operacija) . . . . .	16
9.5 Ratio (santykis) . . . . .	17
9.6 Visų subkonstruktų apžvalga . . . . .	17
9.7 Trupmenų vaizdiniai iliustruojantys uždaviniai (16) . . . . .	18
9.8 Vaizdiniai, persidengiančiai su trupmenų vaizdiniais, iliustruojantys uždaviniai (23) . . . . .	20
9.9 Uždaviniai Mantui iš įrašymų . . . . .	23
10 Aukštesnio lygio mąstymo uždaviniai ne iš Kengūros	24
10.1 Kūrybiniai projektai . . . . .	26
10.2 Braškių laukai . . . . .	26
10.3 Tarpgalaktinis skrydis . . . . .	26
10.4 Plika akimis nematomai nuotoliai . . . . .	26
10.5 Aukštos įtampos laidai . . . . .	27
10.6 Garso bangos . . . . .	27
11 grafai, medžiai ir variantai	28

- Prieš akis matome veiksmą  $3 \times 5$ . Kokia galėtų būti kairėje parašyto skaičiaus prasmė?
- Trys.
- Tai reikšmė, o ne prasmė. Tačiau prasmę galima suvokti, jei žinai, kur gyvenime  $3 \times 5$  pasitaikė

## 1 Šiame straipsnyje įvestų sąvokų žodynėlis

**Matematinis supratimas** - tai sugebėjimas matematinę medžiagą išsiminti taip, kad ji būtų kuo geriau atkuriama atmintyje ilguoju mokymosi laikotarpiu.

**Matematinis vaizdinys** - tai prasmės, kurias moksleivis geba suteikti duoto simbolinio užrašo elementams. Pavyzdžiai:



**Matematinio vaizdinio suvokimas** - tai prasmę priskyrimas simboliniame matematikos užraše esantiems nariams. Suvokimas gali būti teisingas arba klaidingas. Laikysime, jog teisingai suvokti vaizdiniai spartina tolimesnį mokymosi procesą ir didina tolimesnę mokymosi motyvaciją, o klaidingai suvokti vaizdiniai stabdo mokymosi procesą ir mažina tolimesnę mokymosi motyvaciją. Pavyzdžiuui moksleivis gali suvokti, jog užraše  $\frac{50}{14}$  skaičius 14 nurodo picos gabaliukų kiekį, o 50 nurodo, į kiek dalių dalijama pica, tačiau šis vaizdinys yra suvoktas klaidingai. Taip pat vaizdinys gali būti ir nesuvoktas - simbolinio užrašo nariams nepriskiriamos jokios prasmės.

**Matematinio vaizdinio atkūrimas** - tai procesas, kuomet remiantis tam tikru suvokimu atmintyje yra atkuriamaus vaizdinio prasmės.

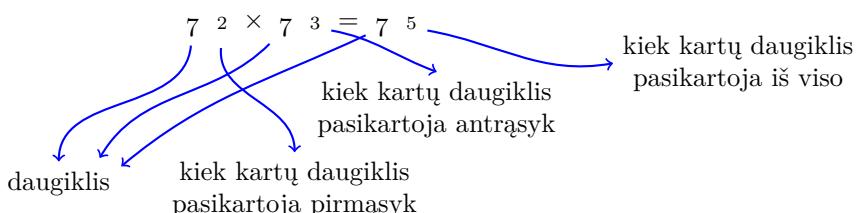
**Pradinis matematinio vaizdinio atkūrimo sudėtingumas** - tai vaizdinio, suvokto po pirmos pažinties su vaizduojamu objektu, atkūrimo atmintyje sudėtingumas vertinant jį intuityviai arba pagal moksliniai tyrimais grįstą pozūri.

**Matematinij vaizdinij** laikysime **papildančiu kitą**, jeigu norint patvirtinti jo suvokimo teisingumą galima remitis prasmėmis, suvoktomis ankstesniame vaizdinyje. Pavyzdžiuui bendravardiklininant dyi trupmenas reikia suvienodinti jų vardiklius ir gautas trupmenas sudėti. Tokios procedūros atkūrimas atmintyje ilguoju laikotarpiu reikalauja šių dviejų vaizdinijų suvokimo: 1) taisyklės  $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$  vaizdinio; 2) mažiausio bendrojo kartotinio sąvokos vaizdinio (kokia užrašo  $MBK(a, b)$  prasmė ir simbolių  $a, b$  prasmė?)

**Matematinij vaizdinij** laikysime **išvestu iš kito**, jeigu norint patvirtinti jo suvokimo teisingumą ne tik galima remitis prasmėmis, suvoktomis ankstesniame vaizdinyje, bet ir neišvengiamu (suvokiančiam vaizdinij).

**Matematinio vaizdinio suvokimą** laikysime **konkrečiu**, jeigu jis suvokiamas remiantis gyvenimiškose situacijose iškyylančiomis tikroviskų objektų prasmėmis. Pavyzdžiuui mažiausio bendrojo kartotinio sąvokos vaizdinys konkretus, nes užraše  $MBK(a, b)$  skaičiui  $a$  galime priskirti prasmę „per kiek minučių apibėga ratą pirmas bėgikas“, skaičiui  $b$  - „per kiek minučių apibėga ratą antras bėgikas“, o rezultatui  $MBK(a, b)$  - „po kiek laiko jie susitiks starto vietoje, jei startavo vienodu metu“.

**Matematinio vaizdinio suvokimą** laikysime **abstrakčiu**, jeigu jis suvokiamas remiantis abstrakcijomis, tokiomis, kaip kiekis, skaičius, šaknis, dėmuo ir pan. Pavyzdyje matyti, jog lygybės  $7^2 \times 7^3 = 7^5$  vaizdinio suvokimas yra abstraktus:



Iš šio pavyzdžio matyti dar ir kitas dalykas: šis vaizdinys yra išvestas iš laipsnio vaizdinio, nes neturint teisingo laipsnio matematinio vaizdinio suvokimo, nebūtų galima suvokti, kaip reiškinys  $7^2$  yra susijęs su daugiklio 7 pasikartojimu dusyk. Beje, reiškinys  $7^2$  turi ir abstraktų (7 siejamas su daugikliu), ir konkretų vaizdinį (7 siejamas su kvadrato kraštinės ilgiu).

**Matematinio vaizdinio suvokimą** laikysime **simboliniu**, jeigu simboliams nesuteikiamais kitokios prasmės, nei jų vieta simboliniame matematinio objekto užraše. Pavyzdžiu lygybės  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$  simbolinis suvokimas būtų toks: kairėje lygybės pusėje vienetai yra skaičiai, esantys viršuje, 2 ir 3 yra skaičiai, esantys apačioje, dešinėje pusėje 6 yra kairės pusės apatiniai skaičių sandauga, o 3 ir 2 yra tam tikrų kairėje pusėje esančių simbolų sandaugos.

**Matematinį vaizdinį** laikysime **abstrakčiu**, jeigu jis negali būti suvoktas konkretiai.

**Matematinį vaizdinį** laikysime **konkrečiu**, jeigu jis gali būti suvoktas ir konkretiai, ir abstrakčiai, tačiau pradinis konkretaus vaizdinio sudėtingumas yra mažesnis už pradinį abstraktaus vaizdinio sudėtingumą.

**Matematinį vaizdinį** laikysime **simboliniu**, jeigu jo simbolinio suvokimo sudėtingumas yra mažesnis už kitaip suvokto vaizdinio sudėtingumą.

**Matematinį vaizdinį** laikysime **konflikтиšku**, jeigu su vienomis simbolinio užrašo reikšmėmis vaizdinys negali būti suvokiamas taip, kaip su kitomis. Pavyzdžiu su laipsnio  $n$  reikšmėmis, lygiomis 1, 2 ir 3, skaičiaus  $7^n$  prasmė gali būti suvokta kaip tam tikros srities dydis, o su didesnėmis reikšmėmis negali. Be to su natūraliosiomis  $n$  reikšmėmis šio skaičiaus prasmė gali būti suvokta kaip  $n$  daugiklių daugyba, o su kitomis negali. Taip pat lygties  $7x + 20 = 34$  sprendimo vaizdinys gali būti siejamas su svarstyklėse atliekamais veiksmais (su sąlyga, kad jos pusiausvyros), o lygties  $7x - 20 = 36$  negali.

**Matematinio vaizdinio abstrakcija** vadinsime tokį suvokimą, kuris yra teisingas ir persidengia su grupe kitų konkretiai suvokiamų vaizdinių, be to, tinka jiems išvesti. Pavyzdžiu tiek laipsnio  $7^4$ , tiek sandaugos  $4 \times 7$  vaizdinius galima abstrahuoti ligi vieno vaizdinio, jei abu ketvertus laikysime „elementų pasikartojimo kiekiu“, o septynetus „pasikartojančiais elementais“ (šiuo tikslu matematikoje įvesta grupės sąvoka).

**Matematiniu portretu** vadinsime visų matematinį vaizdinių, kurie gali būti įtraukti į teisingą simbolinio užrašo, taisyklės ar uždavinio sprendimo paaiškinimą, visumą.

**Matematiniu paveikslu** vadinsime tą patį, tik paaiškinimai kyla besimokančiojo galvoje ir yra nebūtinai teisingi.

**Matematinio portreto fokusu** vadinsime uždavinio sprendimo, taisyklės įrodymo ar tam tikro įsiminimo būdo daileje esantį vaizdinį, kurį uždavinio sprendimo ar taisyklės atkūrimo metu intuityviai pamatyti atrodo sudėtingiausia. Pvz. Skirtingais skaitmenimis užrašomo devynženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 40 reikia nustatyti tokio skaičiaus skaitmenų sandaugą. Kokius dalykus reikia suvokti šiame uždavinyje? Kokie jų vaizdiniai? Kurio vaizdinio sudėtingumas gerokai išsiskiria iš kitų?

Šiame tekste **žalia spalva** žymimos naujos sąvokos, **oranžine spalva** žymimos temos, įeinančios į mokyklinį turini, **rožine spalva** žymimi gebėjimai, kurių reikia norint suprasti mokyklinį turinį.

## 2 Tyrimo metodika

Pagrindinis tyrimo tikslas yra kuo tikslesnis nustatymas, kokias kompetencijas reikštų ugdyti norint, jog matematikos mokomoji medžiaga būtų kuo geriau atkuriama atmintyje ilguoju mokymosi laikotarpiu. Mano paties penkerius metus siekianti matematikos mokymo patirtis rodo, jog klasikinis matematikos mokymasis, kuomet stengiamasi įveikti kuo daugiau uždaviniių iš vadovėlio arba uždavinynų, dažniausiai juos darant pagal analogijas su kitais uždaviniais, tokia prasme yra neproduktivus. Trumpai tariant, toks mokymasis apsiriboja metodais, kuomet stengiamasi kuo geriau prisiminti žingsnius, pagal kuriuos sprendžiami į atsiskaitymus įeinantys uždaviniai. Tikimasi, kad kuo uždaviniių sprendimas intensyvesnis, tuo rezultatai per atsiskaitymą geresni. Po kurio laiko taip įgytos žinios yra linkusios išblesti atmintyje, nes néra pakankamai prasmingos: sunku atrasti, kaip taisyklės siejasi tarpusavyje ir kokios gyvenimo situacijos jas galėtų pailiustruoti.

Moksleiviamas įvairių vaizdinių suvokimas mokantis spręsti mokyklinius uždavinius kartojimo būdu ir pagal analogijas dažniausiai būna simboliniis. Šiame straipsnyje akcentuojama, kad didesniajai į mokyklinį kursą įeinančių taisyklių daliai vaizdiniai yra konkretūs arba abstraktūs. Vaizdinio sudėtingumą lemia ne tik kaip jis suvokti yra mokomi mokiniai, bet ir:

1. kiek svarbos mokyklinėje programoje buvo teikiama vaizdiniam, iš kurių jis galima išvesti arba papildyti.
2. kiek patirties yra įguta dirbant su kitais vaizdiniais, turinčiais bendrą abstrakciją.
3. kiek vaizdinio konfliktišumas trukdo suvokti vaizdinį.

4. {nenagrinėjama} kiek besimokančiojo protas yra pasirengęs suvokti ne konkrečius, o abstrakčius arba simbolinius vaizdinius (amžius, gyvenimiškos veiklos ir kitos patirtys).
5. {nenagrinėjama} kokias būdais ankstesnėje matematikos istorijoje buvo įprasta suvokti vaizdinį.

Kalbant apie sudėtingumo sąvoką, prieikia ir svarbumo sąvokos. Galime laikyti, kad kiekvienas vaizdinys yra tiek svarbus, kiek:

1. kitų i mokyklinių kursų įeinančių taisyklių vaizdiniai gali būti iš jo papildyti arba išvesti.
2. kiek patirties yra įgyta dirbant su kitais vaizdiniais, turinčiais bendrą abstrakciją.

Šiame tyime pasirinkta nagrinėti matematinio konkurso **Kengūra** uždavinių sprendimų matematiniai portretai. Sprendimai pasirinkti taip, kaip gabiems moksleiviams autoriaus nuožiūra juos būtų spręsti paprasčiausia. Vaizdiniai, įeinančios į portretus abstrahuojami, kad gautų abstrakcijų kiekis būtų kuo mažesnis. Tokiu būdu gaunamos uždavinių temos, atspindinčios, kokias kompetencijas ir kokiame amžiuje galima ugdyti. Įprasta, jog toje pačioje temoje gali pasitaikyti ir uždaviniai, kurių sprendimų vaizdiniai simboliniai, ir uždaviniai kurių sprendimų vaizdiniai yra konkretūs arba abstraktūs, nes vystantis mąstymui to paties vaizdinio suvokimas linkęs pereiti iš konkretaus į abstraktų, o abstraktus suvokimas dažnai persipina su simboliniu.

### 3 ORDER YOUR NUMBERS

#### 3.1 Pirminis lygis

Tai uždaviniai, kuriuose reikia sukeisti narius (pagal komutatyvumą) arba veiksmų eiliškumą (pagal asociatyvumą). Taip pat gali prireikti vieną skaičių pamatyti kaip dvių kitų sumą ar skirtumą.

**M1.** Apskaičiavę  $2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2$ , gausime  
M2002 **A 0   B 2   C 4   D 12   E 20**

**M1.** Kam lygu  $2001 + 2002 + 2003 + 2004 + 2005$ ?  
M2004 **A 1 015   B 5 010   C 10 150   D 11 005   E 10 015**

**B1.** Kiek yra  $1000 - 100 + 10 - 1$ ?  
B2004 **A 111   B 900   C 909   D 990   E 999**

#### 3.2 Prasmės

Tai uždaviniai, kuriuose vienas sumavimo būdas yra verčiamas kitu sumavimo būdu ir kur neužtenka vien simbolinio skaičių perstūmimo. Dažniausiai uždaviniuose yra pateikiamas vaizdinys, kitaip šis tipas taptų labai siauru.

Daliniai atvejai	Apibendrinimai, sąsajos, tolimesni tyrimai	Plotmės
1. Rasti nežinomą sumos dėmenį, kai duota sumos išraiška kitais dėmenimis 2. Tas pats tik lentelėje eilučių ir stulpelių atžvilgiu 3. Ar įmanoma dėmenis padalinti į $n$ lygai susidedančių grupių?	<b>Get proceptual ?</b>	Veiksmų kiekis

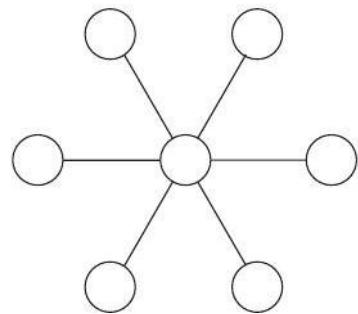
**M13.** Šeši svareliai — 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g — sudėlioti į 3 dėžutes po 2 į kiekvieną.  
M2006 Pirmos dėžutės svareliai kartu sveria 9 gramus. Antros dėžutės svareliai kartu sveria 8 gramus. Kokie svareliai yra trečioje dėžutėje?

**A 5 g ir 2 g   B 6 g ir 1 g   C 3 g ir 1 g   D 4 g ir 2 g   E 4 g ir 3 g**

**M16.** Kiekviename kvadratinės lentelės  $2 \times 2$  langelyje įrašytas skaičius. Pirmos eilutės skaičių suma lygi 3, antros eilutės skaičių suma lygi 8, pirmo stulpelio skaičių suma lygi 4. Kam lygi antrojo stulpelio skaičių suma?  
M2004 **A 4   B 6   C 7   D 8   E 11**

**B26.** I 7 skrituliukus po vieną įrašomi skaičiai  
 nuo 1 iki 7 taip, kad kiekvienų trijų vienoje tiesėje esančių skaičių suma būtų tą pati. Keli iš skaičių gali atsidurti centriniai me skrituliuke?

- A 0   B 1   C 2   D 3   E 4



**B23.** Paveikslėlyje yra 11 langelių.  
 B2004

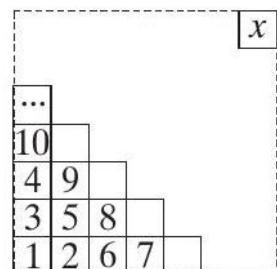
--	--	--	--	--	--	--	--	--

I kiekvieną langelį įrašytas skaičius. I pirmą langelį įrašytas skaičius 7, o i devintą – skaičius 6. Koks skaičius įrašytas į antrą langelį, jeigu bet kuriuose trijuose iš eilės einančiuose langeliuose įrašytų skaičių suma lygi 21?

- A 7   B 8   C 6   D 10   E 21

**B26.** I kiekvieną didžiojo kvadrato langelį įrašinėjame skaičius pagal taisykłę, nusakytą paveikslėlyje. Tada skaičius  $x$  negali būti lygus

- A 128   B 256   C 81   D 121   E 400



## 4 GET PROCEPTUAL

### 4.1 Pirminis lygis

Tai uždaviniai, kuriuose taikomas bent vienos atliekamos operacijos elementų invariantišumas. Skaičiaus  $x$  pokyčio reikšme laikome tokį skaičių  $k$ , o pokyčio rūšimi padidėjimą arba sumažėjimą skaičiumi arba kartų skaičiumi (4 skirtinges rūšys). Keleto skaičių pokyčius laikome:

- panašiais, jei jų padidėjimas arba sumažėjimas vyksta vienodu būdu (tik skaičiumi arba tik kartų skaičiumi).
- vienodais, jei jų rūšis ir reikšmė sutampa.
- atvirkštiniais, jei jų reikšmė vienoda, o rūšis panaši, bet ne vienoda.

Šiame kontekste laikysime, jog elementai  $a_1, a_2, \dots, a_n$  duotos operacijos  $\tau$  ir pokyčių  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  atžvilgiu yra invariantiški, jei egzistuoja toks pokytis  $\Pi$ , kad  $\tau(\pi_1(a_1), \pi_2(a_2), \dots, \pi_n(a_n)) = \Pi(\tau(a_1, a_2, \dots, a_n))$  galioja subet kuriomis skaičių  $a_1, a_2, \dots, a_n$  reikšmėmis.

Daliniai atvejai	Apibendrinimai, sąsajos, tolimesni tyrimai	Plotmės
Savybės: $(a + k) + (b - k) = a + b,$ $(a + k) - (b + k) = a - b$ $(a \times k) \cdot (b : k) = a \cdot b,$ $(a \times k) : (b \times k) = a : b$ $(a \times k) + (b \times k) = (a + b) \times k$	Loginis Ordering of terms pagrindas >Loginis Aritmetinės progresijos savybių pagrindas >Loginis ABC - ary systems pagrindas >Loginis trikampių panašumo savybių pagrindas	Pasikartojančių operacijų kiekis = 1 Elementų kiekis = 2 Operacija (+, -, ×, :) Ar rezultatas kinta Katra pokyčio ieškome

**M15.** Kuris reiškinys nėra lygus  $671 - 389$ ?

- M2004   A 771 – 489   B 681 – 399   C 669 – 391   D 1871 – 1589   E 600 – 318

**B3.** Kuriam iš reiškinių lygi sandauga  $(10 \cdot 100) \cdot (20 \cdot 80)$ ?

- B2004   A  $20\ 000 \cdot 80\ 000$    B  $2\ 000 \cdot 8\ 000$    C  $2\ 000 \cdot 80\ 000$    D  $20\ 000 \cdot 8\ 000$    E  $2\ 000 \cdot 800$

## 4.2 Sudėtingesnis lygis

Vystantis abstraktaus mąstymo gebėjimams (pagal Piaget teoriją) galima stebeti daugiau kaip dviejų dydžių kintimus. Pats paprasčiausias atvejis: daugyba užrašoma kartotine sudėtimi, kur dėmenų gali būti ne du, o norimai daug. Paradoksu, tačiau nors šios taisyklės iprasminimas su stačiakampio ploto skaičiavimu mokinamas antroje klasėje (?), tai gali tapti atradimu aštuntokui. Tai rodo, jog vidiniai, suderinti su kognityvinėmis galimybėmis, matematiniai gebėjimai, vystosi atskirai nuo gebėjimo išmokti mokyklos programoje esančias taisykles, tačiau pastarajį veikia. Problemų sprendimo įgūdžius, kurių mokykloje nemoko, tenka pavadinti kūrybine veikla pagal G. Myers *Psichologija* pateikiamą kūrybiškumo apibrėžimą. Vadinas, norintieji turėti aukštesnių matematinių sugebėjimų, turėtų pasinaudoti savo kognityvinėmis galimybėmis ir nevengti išairius dėsningumus atrasti patys, kas priklauso tik nuo jų kūrybiškumo. **Pagrindinės kliūtys**, bandant prisiminti **trupmenų savybes**, **neig. sk. savybes** ir **laipsnių savybes**:

1. Kognityvios: darbinė atmintis negeba savyje sutalpinti daugiau operacijos su daugiau nei 2 elementų ir vienu aritmetiniu veiksmu kitimo, todėl taisyklės, kurių loginis pagrindas susiveda į struktūrą, reikalaujančią bent trijų elementų stebėjimo, tampa išmokstamos tik **proceduriškai** (kaip pažingsninė instrukcija).
2. Patirties: klaidingi **vaizdiniai** arba jų visai nėra. Pvz. moksleivis mano, kad  $\frac{50}{14}$  atitinka situaciją, kai imame 14 dalį daikto, kuris dalijamas į 50 dalį; moksleiviui daugyba painiojasi su sudėtimi ir jis skaičiaus kėlimą kvadratu painioja su skaičiaus padvigubinimu.
3. Kalbos gebėjimų: pvz. kaip savykoje *vienašliai kampai* žodžio *vienašalis* morfologinė sandara paaiškina apibrėžimo prasmę (kas būtų viena šalis?); kaip 50 keturioliktujų atskleidžia daikto dalijimą į 14 dalį.
4. Psichologinės: vengimas į problemas žvelgti kūrybiškai, pvz. moksleivis vengia veiklos, kurioje ne pagal mokyklines taisykles sprendžiama kuo daugiau mokyklinių uždaviniių, o gilinamas į taisyklių **vaizdinius**; moksleivis yra praradęs atvirumą naujoms žinioms dėl motyvacijos trūkumo.

Daliniai atvejai	Apibendrinimai, sąsajos, tolimesni tyrimai	Plotmės
Pakartotinių operacijų savybės: $0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , $1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ , $a \times n = \underbrace{a + a + \dots + a}_n$ , $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n$ , b vertimas į sumą $(b - a) + a$ atimant jį iš mažesnio sk. a	Loginis <b>neig. sk. savybių</b> pagrindas Loginis <b>laipsnių savybių</b> pagrindas Loginis kai kurių <b>trupmenų savybių</b> pagrindas	Pasikartojančių operacijų kiekis $\geq 1$ Elementų kiekis $\geq 2$ Operacijų sudėtingumas Ar rezultatas kinta Katro pokyčio ieškome?

## 4.3 Prasmės

**M7.** Žmogaus širdis muša maždaug 70 kartų per minutę. Kiek kartų ji apytikriai muša per 1 valandą? M2002

**A** 42 000   **B** 7 000   **C** 4 200   **D** 700   **E** 420

**B20.** Penki berniukai pasisvérė po du, kiekvienas su kiekvienu. Svērimų rezultatai buvo: 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg ir 101 kg. Visi penki berniukai kartu sveria

**A** 225 kg   **B** 230 kg   **C** 239 kg   **D** 240 kg   **E** 250 kg

**B4.** Kiek valandų sudaro 360 000 sekundžių?

B2004 **A** 3   **B** 6   **C** 8,5   **D** 10   **E** Daugiau negu 90

**B9.** Devynios autobuso stotelės išsidėsčiusios maršrute lygiai tarpais. Atstumas nuo pirmos (pradinės) iki trečios stotelės yra 600 m. Kiek metrų sudaro atstumas nuo pirmos stotelės iki paskutinės (devintos)? B2004

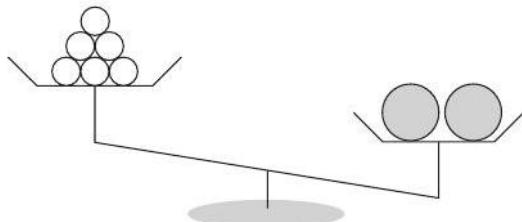
**A** 1800   **B** 2100   **C** 2400   **D** 2700   **E** 3000

## 5 NOTHING MORE THAN LINEARITY

Uždaviniai, kuriuos sprendžiant galima (bet nebūtina) sudaryti lygtį arba jų sistemą ir visos lygtys yra tiesinės.

Daliniai atvejai	Apibendrinimai, sąsajos, tolimesni tyrimai	Plotmės
1. Lygtys, kurias galima spręsti iš kito galo 2. Lygtys, kur nežinomujų ir skaičių yra abejose lygties pusėse 3. Uždaviniai, kur reikia apskaičiuoti reiškinio reikšmę radus nežinomajį 4. Lygčių sistemos 5. Lygčių sistemos pagal sudėtį 6. Tiesiskumas tam tikro reiškinio atžvilgiu	Loginis ar. progresijos $n$ tojo nario nustatymo pagrindas Sunkiosios vietos uždaviniai turinyje: 1. pastebėti, kad laikui bėgant amžių skirtumai nekinta 2. junginio „A yra k (vienetų ar kartų) daugiau už B“ interpretavimas 3. proporcijų dydžių naudojimas 4. skaičiavimas, kiek skaičių tarp A ir B	1. sprendžiamumas iš kito galo 2. proporcijų dydžių poreikis 3. lygčių sistemos poreikis 4. lygčių sistemos sprendimo sudėties būdu poreikis

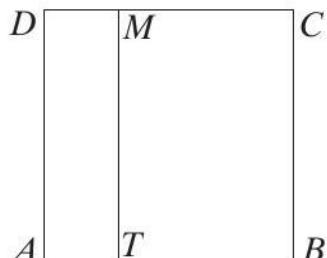
- M4.** Ant vienos svarstyklų lėkštėlės padėti 6 apelsinai, o ant kitos — 2 melionai. Kai M2002 padedame tokį pat trečią melioną prie apelsinų, svarstyklės pasidaro pusiausviros.



Kiek apelsinų sveria tiek pat, kaip vienas melionas?

- A 2   B 3   C 4   D 5   E 6**

- M8.** Kvadrato  $ABCD$  kraštinė lygi 10 cm. Stačiakampio  $ATMD$  trumpesnioji kraštinė M2002 lygi 3 cm.



Keliais centimetrais kvadrato  $ABCD$  perimetras didesnis už stačiakampio  $ATMD$  perimetram?

- A 14   B 10   C 7   D 6   E 4**

- M16.** Samanta ir Jolanta kartu turi 60 degtukų. Samanta paėmė tiek degtukų, kiek jų reikėjo sudėti trikampiui, kurio kiekvienos kraštinės ilgis šeši degtukai. Iš likusių degtukų Jolanta sudėjo stačiakampį, kurio vieną kraštinę taip pat sudarė šeši degtukai. Kiek degtukų buvo didesnėje stačiakampio kraštinėje?

- A 30   B 18   C 15   D 12   E 9**

- M20.** Žūklėje Petras pagavo tiek pat žuvų, kaip ir jo sūnus Lukas. Jonas pagavo triskart M2002 daugiau žuvų negu jo sūnus. Visi kartu jie pagavo 35 žuvis. Kiek žuvų pagavo Petras?

- A 21   B 14   C 7   D 6   E 0**

- M23.** Dvidešimt aštuoni mokiniai dalyvavo matematikos varžybose, ir jų rezultatai buvo skirtinti. Skaičius mokinių, atsidūrusių už Tomo, buvo dvigubai didesnis už skaičių mokinių, kuriems pasisekė geriau už Tomą. Kelintą vietą užėmė Tomas?

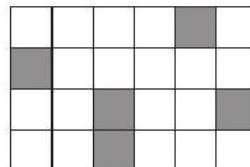
- A 16   B 17   C 8   D 9   E 10**

**M4.** Ant laido atsitūpė būrelis kregždžių. Vienu momentu 5 iš jų nuskrido, o po kurio laiko 3 parskrido atgal. Tada ant laido tupėjo 12 kregždžių. Kiek kregždžių atsitūpė ant laido iš pat pradžių?

**A 8   B 9   C 10   D 12   E 14**

**M6.** Kiek baltų kvadratelių reikia užtušuoti, kad užtušuotų kvadratelių būtų perpus mažiau negu baltujų?

**A 2   B 3   C 4   D 6   E To padaryti neįmanoma**



**M7.** Marijos ir Petro klasės visi mokiniai sustojo į eilę. Už Marijos stovėjo 16 mokiniai, tarp jų ir Petras. Prieš Petrą stovėjo 14 mokiniai, tarp jų ir Marija. Tarp Marijos ir Petro stovėjo 7 mokiniai. Kiek mokinį mokosi toje klasėje?

**A 37   B 30   C 23   D 22   E 16**

**M9.** Trys obuoliai ir du apelsinai sveria 255 g. Du obuoliai ir trys apelsinai sveria 285 g. Kiek gramų kartu sveria vienas obuolys ir vienas apelsinas?

**A 110   B 108   C 105   D 104   E 102**

**M13.** Karina rado knygą, iš kurios buvo išplėštas vienas gabalas. Atvertus tą vietą, kairėje buvo 24-tas puslapis, o dešinėje — 45-tas puslapis. Keli lapai buvo išplėsti iš knygos?

**A 9   B 10   C 11   D 20   E 21**

**M18.** Tomas turi 147 litus, o Simas 57 litus. Kiek litų Tomas turėtų duoti Simui, kad jam liktų dukart tiek pinigų, kiek turės Simas?

**A 11   B 19   C 30   D 45   E 49**

**M22.** Loterijos bilietas kainavo 4 litus. Trys vaikinai — Saulius, Petras ir Robertas susidėjo dviem bilietais. Saulius davė 1 litą, Petras — 3 litus, Robertas — 4 litus. Vienam iš jų nusipirkę bilietų atiteko 1000 litų laimėjimas. Vaikinai laimikį pasidalijo sažiningai, t. y. pagal kiekvieno jų indėlį. Kiek litų gavo Petras?

**A 300   B 375   C 250   D 750   E 425**

**M5.** Jonas mėtė į taikinį strėlytes. Iš pradžių jis turėjo 10 strėlyčių. Už kiekvieną pataikymą į centrą Jonas gaudavo po dvi papildomas strėlytes. Kiek kartų jis pataikė į centrą, jei po 20 metimų strėlyčių nebėliko?

**A 6   B 8   C 10   D 5   E 4**

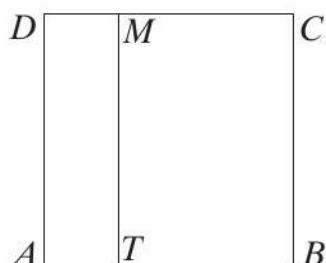
**M9.** Vienoje Ilgosios gatvės pusėje esančių namų numeriai yra 1, 3, 5, ..., 19, o kitoje pusėje esančių namų numeriai — 2, 4, 6, ..., 14. Kiek namų yra Ilgojoje gatvėje?

**A 8   B 16   C 17   D 18   E 33**

## 6 RULES OF MANHATTAN

Duota vienės ar keletas tarp vienodų taškų esančių maršrutų, kuriais galima judėti tik stačiakampėmis kryptimis. Reikia apskaičiuoti, įvertinti arba palyginti jų ilgius. Pagrindinė gudrybė: visi maršrutai, kuriuose néra papildomų pirmyn-atgal poslinkių, išlaiko vienodą ilgį.

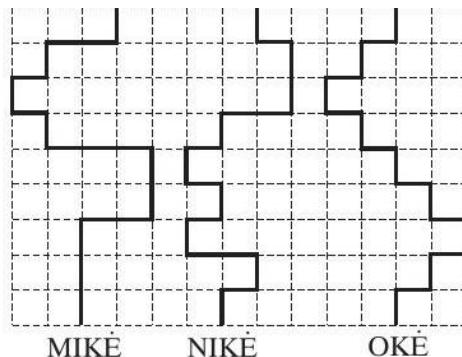
- M8.** Kvadrato  $ABCD$  kraštinė lygi 10 cm. Stačiakampio  $ATMD$  trumpesnioji kraštinė lygi 3 cm.  
M2002



Keliais centimetrų kvadrato  $ABCD$  perimetras didesnis už stačiakampio  $ATMD$  perimetras?

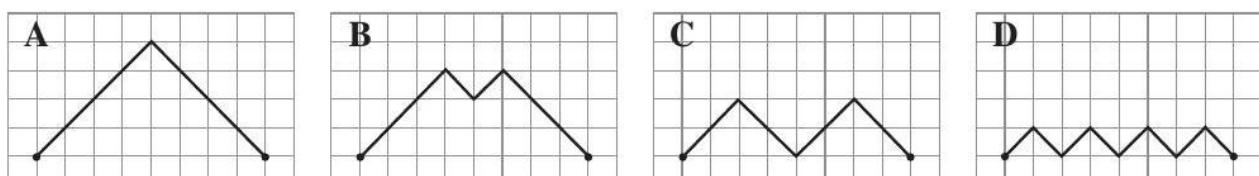
- A** 14   **B** 10   **C** 7   **D** 6   **E** 4

- M14.** Šokinėjimo zigzagais varžybose kengūros Mikė, Nikė ir Okė įveikė pavaizduotas distancijas. Kengūros šokinėjo tuo pačiu greičiu. Kuris sakinys teisingas?  
M2002



- A** Mikė ir Okė finišavo vienu metu  
**B** Nikė buvo pirma  
**C** Okė buvo paskutinė  
**D** Visos finišavo vienu metu  
**E** Mikė ir Nikė finišavo vienu metu

- M14.** Paveikslėliuose pavaizduoti keturi keliai, jungiantys tuos pačius du taškus. Kuris kelias yra trumpiausias?  
M2005



- E** Visų kelių ilgis vienodas

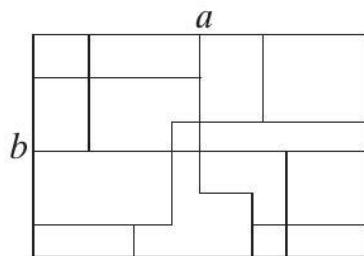
- M3.** Paveikslėlyje pavaizduotas kelias iš miesto  $M$  į miestą  $N$  (ištisinė linija) ir taisomo kelio atkarpos  $KL$  apvažiavimas (brūkšninė linija). Keliais kilometrais pailgėjo kelias darant apvažiavimą?  
M2004



- A** 3   **B** 5   **C** 6   **D** 10   **E** Nustatyti neįmanoma

- B22.** Stačiakampio kraštinių ilgiai yra  $a$  ir  $b$ . Raskite visų jo viduje nubrėžtų atkarpu ilgių sumą (kiekviename atkarpa lygiagreti vienai iš stačiakampio kraštinių).

M2002  
**A**  $3(a + b)$    **B**  $3a + b$   
**C**  $3a + 2b$    **D**  $2a + 3b$   
**E** Rasti neįmanoma



Daliniai atvejai	Apibendrinimai, sąsajos, tolimesni tyrimai	Plotmės
1. Horizontalūs ir vertikalūs poslinkiai vienodi	Loginis vektoriaus apibrėžimo pagrindas	Maršrutų kiekis
2. viename maršrute prisideda keletas pirmyn-atgal poslinkių	Loginis vektoriaus išreiškimo kitais pagrindas Galima plėstis į 3 matmenis	Išsiprastinančių paėjimų kiekis

## 7 LEVEL UP

Duota funkcija  $f : M \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , kur  $M \in N$ , reikia apskaičiuoti operacijos, kurios nariai yra aibės  $\{f(x_i) | x_i \in M\}$  elementai, rezultatą. Iprastai parenkami kuo vaizdingesni funkcijos variantai.

- M5.** Juozas gyvena trumpoje gatvelėje, kurios namų numeriai yra nuo 1 iki 24. Kiek kartų namų numeriuose pasikartoja skaitmuo 2?

M2002  
**A** 2   **B** 4   **C** 8   **D** 16   **E** 32

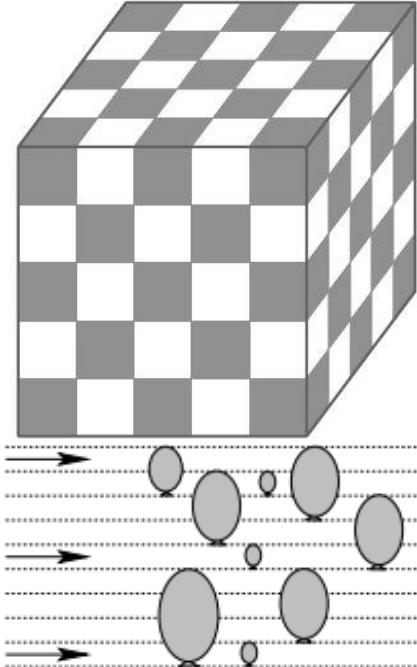
- M6.** Aplink kvadratinę staliuką gali sėdėti keturi žmonės. Tokie 7 staliukai buvo sustatyti vienas greta kito į vieną eilę. Taip susidarė ilgas stačiakampis stalas. Kiek žmonių galės prie jo susėsti?

**A** 14   **B** 16   **C** 21   **D** 24   **E** 28

- M21.** Kubas suklijuotas iš 125 baltų ir juodų kubelių.

M2004  
 Bet kurių dviejų bendrą sieną turinčių kubelių spalva skiriasi. Visi kubo kampai juodi. Kiek suklijuota juodų kubelių?

**A** 62   **B** 63   **C** 64   **D** 65   **E** 68



2. Paveikslėlyje pavaizduotos 3 lekiančios strėlės ir 9 pririšti balionai. Kai strėlė pataiko į balioną, šis sprogsta, bet strėlė lekia tolyn ta pačia kryptimi. I keliis balionus pataikys strėlės?

**A)** 2   **B)** 3   **C)** 4   **D)** 5   **E)** 6

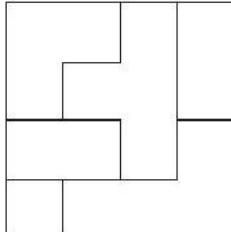
## 8 IDENTITY OF ELEMENT

Uždaviniai, kur reikia atrinkti aibės ar sekos elementus pagal atpažintas arba duotas jų savybes.

Daliniai atvejai	Apibendrinimai, sąsajos, tolimesni tyrimai	Plotmės
1. Kurio elemento nėra aibėje? 2. Kuris(-e) elementas(-i) tenkina savybes? 3. Aibė sudaroma pagal savybę 4. Lankstumo uždaviniai	1. Galima plėstis į labirintus ir medžius 2. Galima plėstis į sekų tėsimo uždavinius 3. Galima plėstis į Veno diagramas	1. Aibės dydis 2. Savybės sudėtingumas (atradimo arba taikymo) 3. Savybių kiekis

### M6. Žemiau pavaizduotas kvadratas.

M2002



Kurios iš pateiktų figūrų *negausime*, sukarę ji pagal nubrėžtas linijas?

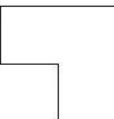
A



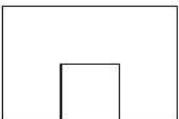
B



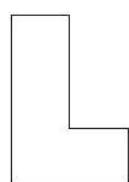
C



D

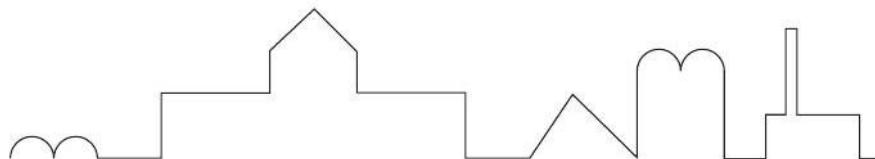


E



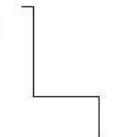
### M9. Paveikslėlyje matome pilies kontūrą.

M2002

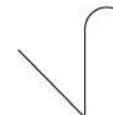


Kuri iš žemiau pavaizduotų linijų *nėra* to kontūro dalis?

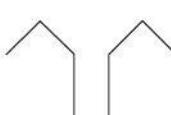
A



B



C



D



E



### M17. Iš popieriaus iškirptas stačiakampis.

M2002



Kuri iš pavaizduotų figūrų *negalėjo* susidaryti, perlenkus jį vieną kartą?

A



B



C



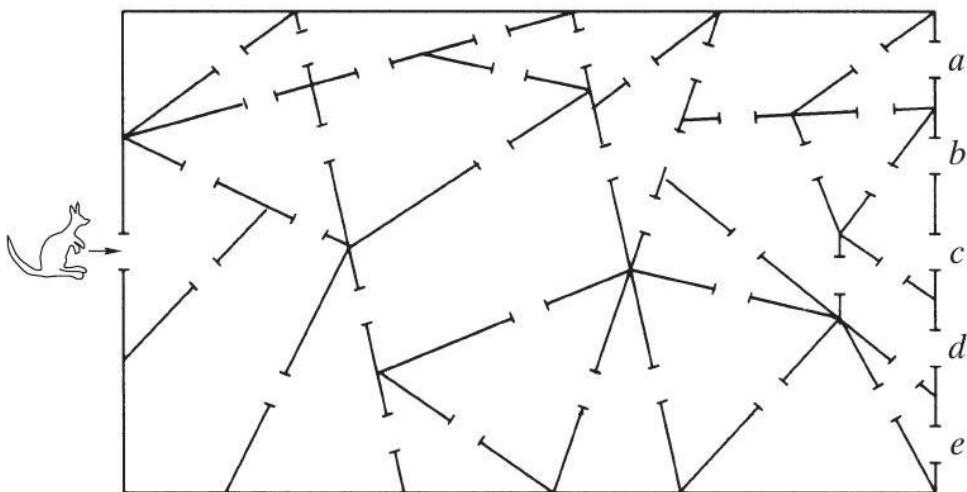
D



E



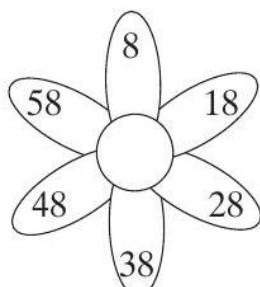
**M8.** Kengūrėlė įėjina į pastatą. Pro kurias duris kengūrėlė išeis iš pastato, jei ji eis tik per trikampius kambarius?



- A** a   **B** b   **C** c   **D** d   **E** e

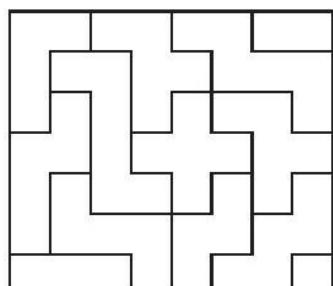
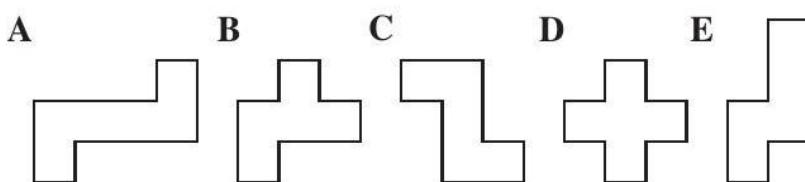
**M15.** Paveikslėlyje pavaizduota skaičių gėlytė. Onutė nuplēšė visus gėlytės lapelius su skaičiais, kuriuos dalijant iš 6 gaunama liekana lygi 2. Kam lygi Onutės nuplēštų lapelių skaičių suma?

- M2006** **A** 46   **B** 66   **C** 84   **D** 86   **E** 114



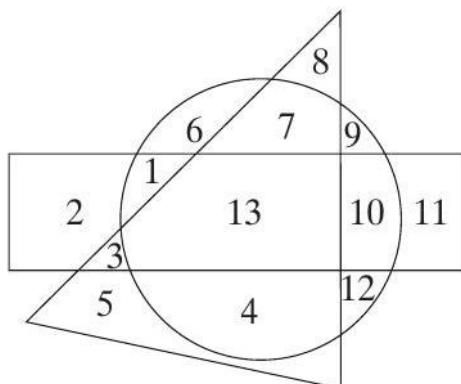
**M17.** Dešinėje pavaizduotoje dėlionėje nėra vienos iš apačioje pavaizduotų detalių. Kurios?

**M2006**



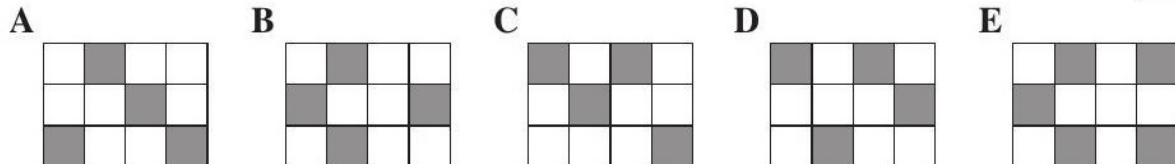
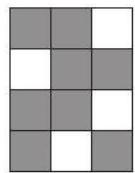
**M5.** Kurie skaičiai yra ir stačiakampyje, ir skritulyje, bet nėra trikampyje?

**M2004**



- A** 5 ir 11   **B** 1 ir 10   **C** 13   **D** 3 ir 9   **E** 6, 7 ir 4

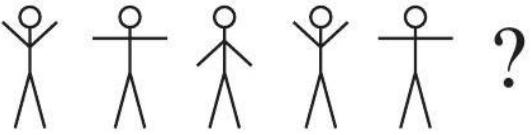
- M8.** Šeši vienodi permatomos plėvelės lapai buvo sudalyti į kvadratelius, po to kiekviename lape kai kurie kvadrateliai buvo užtušuoti. Kuri iš lapų **A**, **B**, **C**, **D** ir **E** galima taip uždengti dešinėje pavaizduotu lapu, kad gautume visiškai užtušuotą stačiakampį?



- M10.** Prie mažiausio dviženklio skaičiaus pridedame 17. Gautą sumą padaliję iš didžiausio vienaženklio skaičiaus, gausime

**A** 3   **B** 6   **C** 9   **D** 11   **E** 27

- M11.** Beta piešia tris skirtinges figūrėles vis ta pačia  
tvarka. Ką ji nupieš dabar?

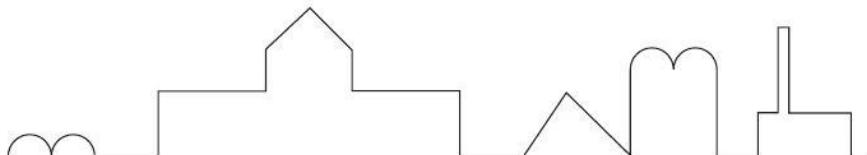


- B1.** Skaičius 2002 turi tokią savybę, kad nepasikeičia ir skaitomas iš dešinės į kairę.  
**B2002** Kuris iš žemai parašytų skaičių tos savybės *neturi*?

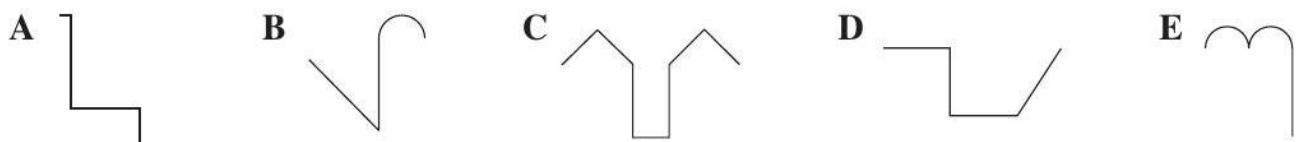
**A** 1991   **B** 2323   **C** 2112   **D** 2222   **E** 4334

- B2.** Paveikslėlyje matome pilies kontūrą.

**B2002**



Kuri iš pavaizduotų linijų *nėra* to kontūro dalis?

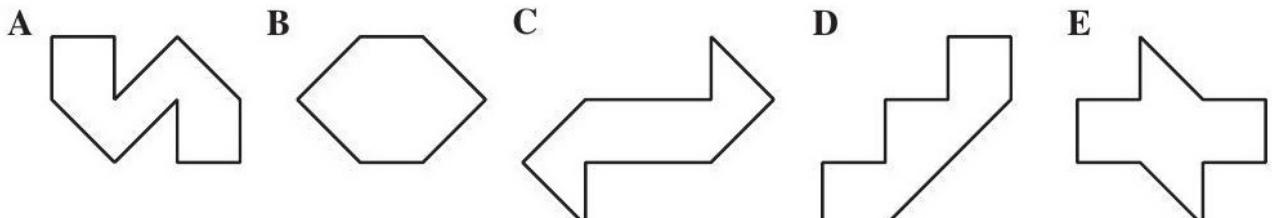
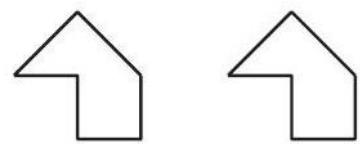


- B21.** Tu skaičiuoji balsu nuo 1 iki 100 ir suploji, kai pasakai arba skaičiaus 3 kartotinį, arba skaičių, kuris nėra skaičiaus 3 kartotinis, bet baigiasi skaitmeniu 3. Kiek kartų tu suplosi?

**A** 30   **B** 33   **C** 36   **D** 39   **E** 43

- B11.** Jūs turite dvi vienodas figūrėles, kurias galima sukioti, bet negalima vartyti.  
B2004

Kurios figūros neįmanoma sudėti iš tų dviejų figūrėlių?



- B12.** Matas perlenkia pusiau popieriaus ląpą penkis kartus, o tada sulankstytame lape praduria skyłę.  
B2004

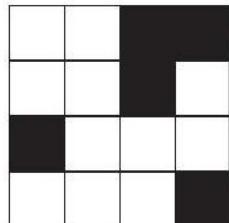


Kiek skylių bus atlankstytame lape?

- A 6   B 10   C 16   D 20   E 32**

- B16.** Kiek mažiausiai kvadratelių dar reikia nuspalvinti, kad  
B2004 paveikslėlis turėtų bent vieną simetrijos aši?

- A 1   B 2   C 3   D 4   E 5**



- B30.** Statusis trikampis su statiniais 6 cm ir 8 cm iškirptas iš popieriaus ir sulenkta per tam tikrą tiesę. Kuris iš žemiau parašytų skaičių galėtų būti daugiakampio plotas (kvadratiniais centimetrais)?  
B2004

- A 9   B 12   C 18   D 24   E 30**

## 9 TRUPMENOS

Iprasta situacija mokantis trupmenas su moksleiviais:

- $\frac{5}{12}$  yra skaitoma „penkios dvyliktosios“. Kaip manai, kas yra ta dvyliktoji?
- Nežinau.

- Gaila... Ši dalykų labai svarbu atsiminti. Dvyliktoji yra viena dalis, gauta daiktą dalijant į 12 lygių dalių. Štai stačiakampus, kurio matmenys yra  $4 \times 6$ . Kiek langelių jų sudaro?

- 24.
- Ar galėtum pasakyti, kiek langelių sudaro  $\frac{5}{12}$  šio stačiakampio?
- [Po ilgesnės pauzės] Ne.

- Pabandome iš naujo. Šis yra neklausiu, kas būtų  $\frac{5}{12}$  stačiakampio, o paklausiu, kas būtų viena dvyliktoji stačiakampio?

- Neatsimenu.
- Bet juk aš minėjau, kad ši dalykų labai svarbu atsiminti. Viena dvyliktoji yra ta dalis, kurią gauname stačiakampį dalydami į 12 lygių dalių. Taigi, arba dabar galėtum parodyti, kaip atrodys ši dalis stačiakampyje?
- Taip. Štai...

Pasibaigus pamokai suskaičiuoti  $\frac{3}{20}$  tam tikro duoto skaičiaus dalis pavyksta. Po savaitės pavyksta tik davus užuominą, kad dvyliktoji - tai viena dalis iš dvidešimt. Po mėnesio - vėl nebepavyksta.

Kodel trupmenas mokyti taip sunku? Mano atsakymas būtų: trupmenų vaizdinių suvokimų yra daug, dalis jų konfliktiški, dalis abstraktūs, todėl besimokantieji dažnai apsistoją ties simboliniu vaizdinių suvokimu, kuris yra greitai išblėstantis atmintyje. Taip prarandamos turinio žinios ir jų siejimasis su gyvenimu, kas paskatina tolimesni mokyklinio matematikos kursą suvokti tik simboliškai, o ne konkretiai ar abstrakčiai. Norėdami įvertinti trupmenų mokymosi sunkumus turime būti susipažinę su skirtingais jų vaizdiniais, konfliktinėmis dalimis ir kaip jie persidengia bei išsiveda vienas iš kito. Trumpa iliustracija, pailiustruojanti trupmenų vaizdinių suvokimų gausą (Wu ir kiti 2010, 2011):

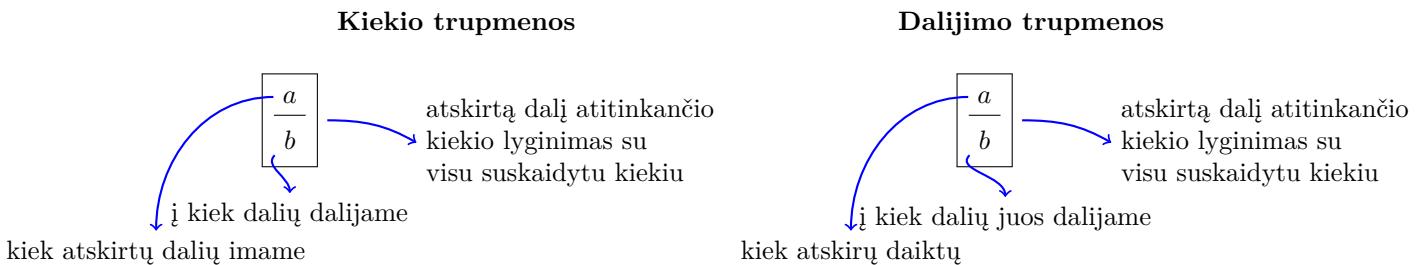
1. Trupmena yra dalmuo, gautas vieną sveikajį skaičių dalijant iš kito sveikojo skaičiaus.
2. Trupmena yra viena ar kelios lygios vieneto (ar visumos) dalys.
3. Trupmena yra dviejų sveikujų skaičių santykis.
4. Trupmena yra dydis dalies, gautos objekta (picą) dalinant į lygis dalis.
5. Trupmena yra taškas skaičių spindulyje.

Vienas iš svarbiausių trupmenos sąvokos supratimo tyrinėtojų buvo Thomas Kieren. Savo straipsnyje "The Rational Number Construct – Its Elements and Mechanisms" (1980), Kieren išskyrė penkis trupmenos sąvokos subkonstruktus: **whole/part** (dalis - visuma), **quotients** (dalmenys), **measures** (matavimai), **operators** (operatoriai) ir **ratios** (santykiai)

Remsiuos Vaivos straipsniu bei subkonstruktu apžvalga, kad įvertinčiau galimų vaizdinių tarpusavio ryšį ir kaip jie turėtų būti pristatomi mokyklose.

## 9.1 Part-whole (dalis - visuma)

Šiame subkonstrukte trupmena yra viena ar kelios lygios vieneto arba visumos dalys. Kol kas nagrinėjimi tik atvejai, kai skaitiklis nedidesnis už vardiklį.

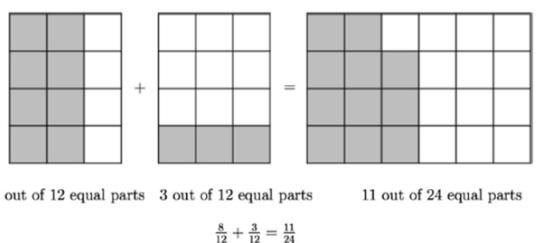


Paprastesnis yra vaizdinys, kur trupmena yra kiekinė, tačiau jo trūkumas yra tai, kad unikalaus vieneto (daikto, kurį dalinsime) dydį nustatyti būna sunku. Tačiau šio vaizdinio yra išvedamai daug kitų trupmenos vaizdinių. Dalijamas daiktas konkretiame vaizdinio suvokime gali būti figūra ar kelios vienodos figūros. Nors toks vaizdinio suvokimas yra tik konkretus, bet iš jo daugiausia naudos, kol vaikai maži, nes galima lyginti vizualiai. Tyrimai rodo tokio suvokimo svarbą. Taip pat galimas siejimas su popieriaus lankstymu. **Mokiniam svarbu:**

- žinoti, kad visos dalys lygaus dydžio; mokėti padalinti į lygius dalis; mokėti pamatyti visumą, kuri padalinta.
- suprasti, kad sujungtos visos tos dalys sudaro vienetą; į kuo daugiau dalių padalinta, tuo mažesnės bus dalys; santykis tarp dalių ir visumos išlieka nepriklausomas nuo lygių dalių dydžio, formos, jų komponavimo būdo ir krypties.
- APIBENDRINTAI – išmokti padalinti ir vėl sujungti dalis.

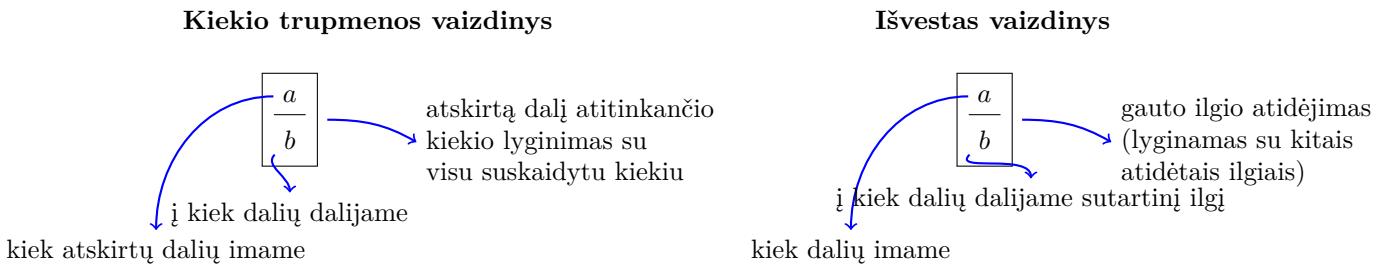
Kur šiuose pavyzdžiuose yra trupmenų suvokimo klaidos?

Jim writes  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  and draws this model to justify his conclusion. Where did Jim go wrong in his thinking? What might you do to help Jim? [Lecture]



## 9.2 Measurement (matavimas)

Šiame subkonstrukte trupmena yra glaustai susijusi su dviem sąvokomis: skaičius, atitinkantys tašką skaičių ašyje, ir skaičius, atitinkantis atkarpos ilgi. Šis matavimo vaizdinys išvestas iš kiekino trupmenos vaizdinio. Tai paaiškinama remiantis tokiu kategorizavimu: lyginimo atskiras tipas yra ilgių skaičių ašyje atidėjimas, o dalų atskiras tipas yra ilgai. Žemiau pateikiamas vaizdinių palyginimas.



### Mokiniams svarbu:

1. Atlikti šuolį nuo sveikų prie trupmeninių skaičių: iš pradžių jų vaizdinys konfliktiškas, nes trupmenomis nedalomų daiktų kiekiai neskaičiuojami. Šis konfliktas nuveda moksleivius į klaidingą trupmenų vaizdinį suvokiant jas kaip du skaičius ir lemia skaičiavimo klaidas, tokias kaip  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$ .
2. Gebėti panaudojant duotą intervalą rasti atstumą nuo pradžios taško.
3. Įsitikinti, kad jų trupmenos vaizdinio suvokimas nėra klaidingas: skaičiuojant nepainioti brūkšniukų su intervalais.
4. APIBENDRINTAI – būtina įsisąmoninti trupmenų išdėstymo eilės ir trupmenų ekvivalentumo aspektus.

## 9.3 Quotient (dalmuo)

Šiame subkonstrukte trupmena interpretuojama kaip dalybos rezultatas. Taigi trupmenos vaizdinys yra išvestas dalijimo trupmenos vaizdinio. Verta paminėti, jog dalijimo trupmenos vaizdinys persidengia su dalybos vaizdiniu. Dažnai remiamasi konkretiu vaizdiniu, kuomet dalmuo nurodo kiekvienam asmeniui tenkantį kiekį, o daliklis - asmenų, kuriems dalinama, kiekį, tačiau siekiama, kad trupmenos vaizdinio suvokimas turi tapti abstrakčiu. **Mokiniams svarbu:**

1. Išmokti atsiriboti nuo vieno objekto dalijimo į lygias dalis ir pereiti prie keleto objektų dalijimo į keletą dalių.
2. Suprasti, kad skaitiklis gali būti mažesnis/lygus/didesnis nei vardiklis. Tuo pačiu dalmuo irgi gali būti mažesnis/lygus/didesnis už daliklį.
3. APIBENDRINTAI – būtina suprasti dalybos proceso dvilypę struktūrą: po kiek kokio dydžio dalių sudaro visumą, jei dalinama gali būti kokios tik nori struktūros į kiek tik nori dalių.

## 9.4 Operation (operacija)

Šiame vaizdinyje trupmena yra susijusi su procesu, vykstančiu keičiant skaičių, objektą ar aibę, o šio pokyčio rezultatas priklauso nuo trupmenos skaitiklio ir vardiklio. Taigi trupmena yra transformavimo priemonė (i tie-s/plokštumos kito dydžio segmentus ar didesnį/mažesnį aibės elementų kiekį). **Mokiniams svarbu:**

1. Trupmeninį daugiklį išmokti interpretuoti įvairiais būdais.
2. Įvardinti trupmeną, galinčią aprašyti sudėtinę operaciją .
3. Susieti operacijos duomenis su rezultatu.
4. APIBENDRINTAI – isivaizduoti ištempimą/suspaudimą išlaikant tą patį dalių kiekį arba išlaikant tą patį dalių dydį; taip pat pakeisti dalių kiekį.

## 9.5 Ratio (santykis)

Šis subkonstruktas išreiškia dviejų dydžių palyginimą. Lyginimo rezultatas yra palyginimo rodiklis, simbolizuojantis proporciją. *Mokiniam svarbu::*

1. Sugebėti priskirti tinkamas prasme santykyje esantiems kiekiams.
2. Suvokti, kad du kiekiai santykyje galima keisti kartu taip, kad jų santykis išliktų nekintantis.
3. Žinoti, kad santykyje esančius kiekius padauginus iš to paties skaičiaus, pats jų santykis išliks tas pats.
4. APIBENDRINTAI – išplėtoti trupmenų ekvivalentumo apibrėžimą.

## 9.6 Visų subkonstruktų apžvalga

Kieren's Fraction Sub-Constructs		
<u>Sub-construct</u>	<u>Meaning</u>	<u>Example</u>
Part-whole relationship	To partition a continuous or discrete object/set into equal parts	 Three fourths
Quotient	To divide by a given number of parts	$\frac{3}{4}$ three divided into four parts
Measure	To assign a number to a region using iterations of a fraction unit	$\frac{3}{4}$ is three iterations of $\frac{1}{4}$
Ratio	The quantitative comparison of two measures	$\frac{3}{4}$ may describe the number of girls compared to the number of boys in a group
Operator	To shrink or stretch a given quantity.	A line is 12 cm long. Draw a line that is $\frac{3}{4}$ of this line.

- Trupmenų mokymas naudojant tik vieną subkonstruktą, pavyzdžiui dalies/visumos, gali būti nepakankamas, kai susiduriama su kitais subkonstruktais.
- Moksleivių apypilimas keliais subkonstruktais vienu metu teigiant, kad jie visi tinkami apibūdinti tą patį skaičių  $\frac{a}{b}$ , gali būti per sudėtinga net ir gabiausiemis moksleiviams.
- Norint, kad bet kuris sėkmingui naujo subkonstrukto mokymas pavyktų, naujas požiūris į trupmeną turi būti pristatomas išryškinant, kaip jis dera su kitais subkonstruktais (kaip papildo, ar kaip yra išvestas iš kitų vaizdinių).
- *Part-whole* subkonstruktas persidengia su kitais subkonstruktais arba naudojamas išvesti kitiems subkonstruktams, todėl pažintį su trupmenomis patartina pradėti nuo jo.

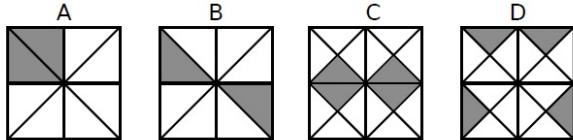
Fraction subconstructs that appeared in the Asian curricula and in EngageNY

Grades	Japanese	Korean	Taiwanese	EngageNY (US)
2	Part-whole			Part-whole
3	Part-whole Measure	Part-whole Measure Operator	Part-whole Measure	Part-whole Measure
4	Part-Whole Measure	Part-whole Measure Quotient	Part-whole Measure Quotient	Part-Whole Measure Operator
5	Part-Whole Quotient Measure	Part-whole Measure Quotient Operator	Part-whole Measure Quotient Operator	Part-Whole Measure Quotient Operator
6	Part-Whole Operator Ratio	Part-whole Measure Operator Ratio	Part-Whole Measure Quotient Ratio	Part-Whole Measure Operator Ratio

## 9.7 Trupmenų vaizdinius iliustruojantys uždaviniai (16)

11. Kuriamė iš žemiau pavaizduotų kvadratų A, B, C, D nuspalvinto ploto dalis yra didžiausia?

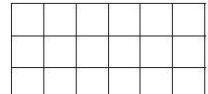
B2018



- A) A    B) B    C) C    D) D    E) Visur tokia pat

8. Ignas spalvina pavaizduoto stačiakampio kvadratelių. Trečdalį visų kvadratelių jis nuspalvins mėlynai, pusę visų kvadratelių – geltonai, o likusius – raudonai. Kiek kvadratelių Ignas nuspalvins raudonai?

B2017



- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

24. Nuvažiavus  $\frac{5}{8}$  kelio, liko 54 km. Koks maršruto ilgis?

B2017

- A) 120 km    B) 140 km    C) 144 km    D) 160 km    E) 192 km

2. Mikas supjaustė picą į keturią lygią dalis. Kiekvieną iš šių dalių jis padalijo į tris lygius gabalėlius. Kokią visos picos dalį sudaro vienas gabalėlis?

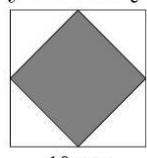
B2016

- A) Trečdalį    B) Ketvirtadalį    C) Septintadalį    D) Aštuntadalį    E) Dvyliktadalį

5. Kotryna nubraižė kvadratą, kurio kraštinės ilgis yra 10 cm. Sujungusi kvadrato kraštinių vidurio taškus, ji gavo mažesnį kvadratą. Koks mažesniojo kvadrato plotas?

B2016

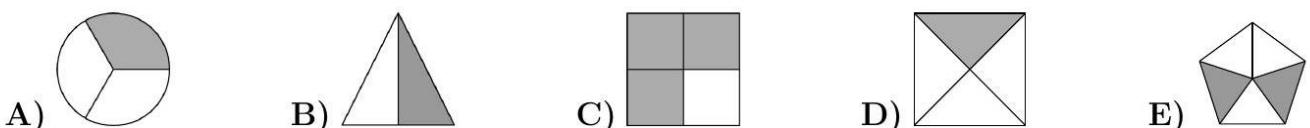
- A)  $10 \text{ cm}^2$     B)  $20 \text{ cm}^2$     C)  $25 \text{ cm}^2$     D)  $40 \text{ cm}^2$     E)  $50 \text{ cm}^2$



10 cm

1. Kurios figūros užtušuota lygiai pusę ploto?

B2015



6. Kuri iš šių trupmenų yra mažesnė už 2?

B2015

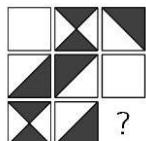
- A)  $\frac{19}{8}$     B)  $\frac{20}{9}$     C)  $\frac{21}{10}$     D)  $\frac{22}{11}$     E)  $\frac{23}{12}$

2. Tortas sveria 900 g. Paulius padalijo jį į 4 dalis. Didžiausia dalis sveria tiek, kiek likusios 3 kartu. Koks didžiausios dalies svoris?

B2014

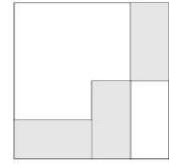
- A) 250 g    B) 300 g    C) 400 g    D) 450 g    E) 600 g

- B2014** 11. Kuria plytele reikia papildyti dešinėje pavaizduotą figūrą iki kvadrato, kad Jame viso tamsiojo ploto būtų tiek pat, kiek ir šviesiojo?



- A)   B)   C)   D)   E) Tai neįmanoma

- B2014** 25. Trys vienodi stačiakampiai yra kvadrate, kurio kraštinės ilgis 24 cm (žr. paveikslėli). Kam lygus vieno stačiakampio plotas?



- A)  $24 \text{ cm}^2$    B)  $32 \text{ cm}^2$    C)  $36 \text{ cm}^2$    D)  $48 \text{ cm}^2$    E)  $72 \text{ cm}^2$

- B2013** 23. Ūla nusipirklo šokolado plytelę ir grįžusi namo dalį jos suvalgė. I svečius užsukusi Alė suvalgė ketvirtadalį likusios dalies. Kartu jos suvalgė pusę šokolado plytelės. Kokią dalį visos šokolado plytelės suvalgė Alė?

- A)  $\frac{1}{2}$    B)  $\frac{1}{5}$    C)  $\frac{1}{6}$    D)  $\frac{1}{8}$    E)  $\frac{1}{12}$

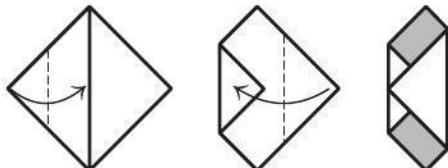
- B2012** 21. Gérimas „Sveikata“ daromas iš citrinų, apelsinų ir morkų sulčių. Šiame gérime citrinų ir apelsinų sulčių santykis yra  $1 : 2$ , o apelsinų ir morkų –  $3 : 1$ . Kuris iš žemiau parašytu teiginių yra teisingas?

- A) Gérime „Sveikata“ citrinų sulčių daugiau nei apelsinų  
 B) Gérime „Sveikata“ apelsinų sulčių daugiau nei citrinų ir morkų sulčių kartu  
 C) Gérime „Sveikata“ citrinų sulčių daugiau nei apelsinų ir morkų sulčių kartu  
 D) Gérime „Sveikata“ morkų sulčių daugiau nei citrinų ir apelsinų sulčių kartu  
 E) Citrinų sulčių tame gérime yra mažiausiai

- B2012** 24. Tango šoka vyros su moterimi. Vakarėlyje buvo ne daugiau kaip 50 dalyvių. Vienu metu  $\frac{3}{4}$  vyrų šoko su  $\frac{4}{5}$  moterų. Kiek žmonių šoko tuo metu?

- A) 20   B) 24   C) 30   D) 32   E) 46

- B2012** 28. Kvadrato formos  $64 \text{ cm}^2$  ploto popieriaus lapą du kartus perlenkiame paveikslėlyje parodytu būdu.



Kokia yra abiejų patamsintų stačiakampių plotų suma?

- A)  $10 \text{ cm}^2$    B)  $14 \text{ cm}^2$    C)  $15 \text{ cm}^2$    D)  $16 \text{ cm}^2$    E)  $24 \text{ cm}^2$

- B2006** 15. Stačiakampio  $ABCD$  (žr. pav.) kraštinė  $AB = 4 \text{ m}$ ,  $BC = 1 \text{ m}$ . Taškas  $E$  yra atkarpos  $AB$  vidurys. Taškas  $F$  yra atkarpos  $AE$  vidurys. Taškas  $G$  yra atkarpos  $AD$  vidurys. Taškas  $H$  yra atkarpos  $AG$  vidurys. Koks užtušuoto stačiakampio plotas?



- A)  $\frac{1}{4} \text{ m}^2$    B)  $1 \text{ m}^2$    C)  $\frac{1}{8} \text{ m}^2$   
 D)  $\frac{1}{2} \text{ m}^2$    E)  $\frac{1}{16} \text{ m}^2$

- B23.** Kuris iš žemiau surašytų trejetų skaičių tiesėje reiškia tris taškus, iš kurių vienas yra vienodai nutoles nuo kitų dviejų?

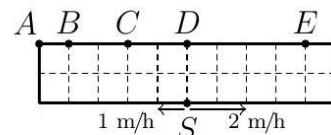
A)  $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$    B) 12; 21; 32   C) 0,3; 0,7; 1,3   D)  $\frac{1}{10}; \frac{9}{80}; \frac{1}{8}$    E) 24; 48; 64

### 9.8 Vaizdinius, persidengiančius su trupmenų vaizdiniais, iliustruojantys uždaviniai (23)

4. Sodas yra padalintas į lygius kvadratus. Dvi sraigės pradeda šliaužti iš taško  $S$  aplink sodą palei jo tvorą priešingomis kryptimis (žr. pav.).

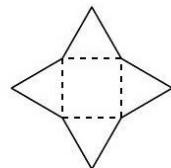
Viena sraigė šliaužia 1 metro per valandą greičiu (1 m/h), o kita – 2 metrų per valandą greičiu (2 m/h). Kuriame taške susitiks sraigės?

- A) A   B) B   C) C   D) D   E) E



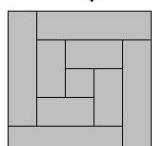
6. Paveikslėlyje pavaizduota žvaigždė, sudaryta iš keturių lygiakraščių trikampių ir kvadrato. Kvadrato perimetras lygus 36 cm. Koks yra žvaigždės perimetras?

- A) 144 cm   B) 120 cm   C) 104 cm   D) 90 cm   E) 72 cm



26. Jonas 8 cm pločio medinę lentą, pjaudamas skersai, supjaustė į 9 dalis – vieną kvadratinę ir 8 stačiakampes. Tada Jonas sudėjo visas dalis taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks buvo lento ilgis?

- A) 150 cm   B) 168 cm   C) 196 cm   D) 200 cm   E) 232 cm

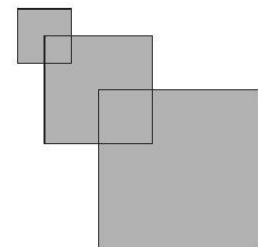


9. Kol Linas suvalgo 2 slyvas, Justas spėja suvalgyti 3 slyvas. Iš viso abu berniukai, valgydami kartu, suvalgė 30 slyvų. Keliomis slyvomis Justas suvalgė daugiau už Liną?

- A) 5   B) 6   C) 7   D) 8   E) 9

19. Trys kvadratai, kurių kraštinių ilgiai yra atitinkamai 2 cm, 4 cm ir 6 cm, nubraižyti taip, kad mažiausiojo kvadrato centras sutampa su viduriniojo kvadrato viršūne, o viduriniojo kvadrato centras – su didžiausiojo kvadrato viršūne (žr. pav.). Koks gautos figūros plotas?

- A)  $32 \text{ cm}^2$    B)  $51 \text{ cm}^2$    C)  $27 \text{ cm}^2$    D)  $16 \text{ cm}^2$    E)  $6 \text{ cm}^2$



8. Jonas ir Paulius turi po tiek pat kubelių ir iš jų visų sustatė po stačiakampį bloką. Pirmame paveikslėlyje pavaizduotas Jono blokas, o antrame paveikslėlyje – pirmasis Pauliaus bloko sluoksnis. Kelių sluoksninių blokų sustatė Paulius?

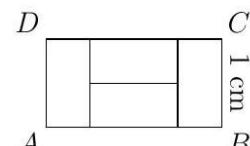
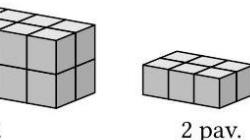
- A) 2   B) 3   C) 4   D) 5   E) 6

29. Senelis Vytautas nuo sodo medžių nuskynė 132 obuolius ir 204 kriausės. Visus šiuos vaisius jis nori išdalyti vaikams, kiekvienam vaikui duodamas po tiek pat obuolių ir po tiek pat kriausią. Kiek daugiausia vaikų senelis gali apdalyti vaisiais?

- A) 4   B) 11   C) 12   D) 6   E) 17

13. Stačiakampį  $ABCD$  paveikslėlyje sudaro 4 lygūs stačiakampiai. Koks yra  $AB$  ilgis, jei  $BC$  ilgis yra 1 cm?

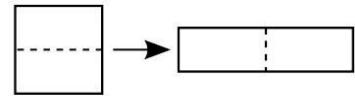
- A) 4 cm   B) 3 cm   C) 2 cm   D) 1 cm   E) 0,5 cm



**22.** Giedrius nusipirko 3 knygas. Už pirmą knygą jis sumokėjo pusę savo santaupų ir 1 eurą. Už antrają – pusę likusių pinigų ir 2 euros. Trečioji knyga kainavo pusę to, kas liko nusipirkus dvi knygas, ir 3 euros. Paaškėjo, kad Giedrius išleido visas savo santaupas. Kiek kainavo 3 knygos?

- A) 36 euros   B) 45 euros   C) 34 euros   D) 65 euros   E) 100 euros

**6.** Kvadratas, kurio perimetras lygus 48, buvo padalytas į dvi dalis, iš kurių sudėtas stačiakampis (žr. paveikslėlį). Kam lygus to stačiakampio perimetras?



- A) 24   B) 30   C) 48   D) 60   E) 72

**10.** Mažylis ir Karlsonas aptiko vazą saldainių. Karlsonas paėmė pusę saldainių ir, minutėlę pagalvojės, dar 2 saldainius. Mažylis tuomet paėmė pusę likusiųjų. Galų gale vazoje liko 3 saldainiai. Kiek jų buvo iš pradžių?

- A) 14   B) 16   C) 18   D) 20   E) 22

**24.** Ant kranto auga 60 medžių. Kas antras medis yra klevas, o kas trečias – arba klevas, arba uosis. Likusieji medžiai yra beržai. Kiek beržų ant kranto?

- A) 10   B) 15   C) 20   D) 24   E) 30

**3.** Vaikai išėjo pasivaikščioti. Kol Martynas padaro 9 žingsnius, Dovydas padaro 8, o Paulius – 7. Martynas per minutę padaro 90 žingsnių. Kiek žingsnių padarys visi vaikai kartu per 10 minučių trukšiantį pasivaikščiojimą?

- A) 240   B) 2013   C) 2400   D) 2700   E) 900

**8.** Vieną popietę Onutė praleido važiuodama dviračiu. Ji važiavo pastoviu greičiu, o jai pradedant ir baigiant pasivažinėjimą rankinio laikrodžio rodyklės buvo pavaizduotose padėtyse:



Kokioje padėtyje buvo laikrodžio minutinė rodyklė, kai Onutė buvo nuvažiavusi trečdalį kelio?

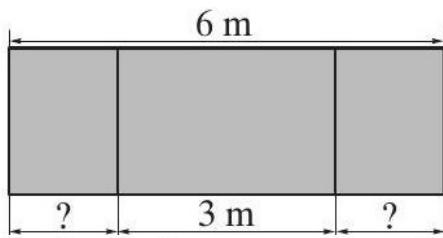


**14.** Žvejys Matas apžiūrinėja laimikį. Jei jis būtų pagavęs tris kartus daugiau žuvų, tai turėtų dyliką žuvų daugiau nei turi. Kiek žuvų pagavo Matas?

- A) 7   B) 6   C) 5   D) 4   E) 3

**B2.** Pavaizduotos lento plotis yra 6 m, viduriniosios dalies – 3 m, o abi šoninės dalys yra vienodo pločio. Koks šoninės dalies plotis?

- A) 1 m   B) 1,25 m   C) 1,5 m   D) 1,75 m   E) 2 m



**B3.** Iš 4 degtukų sudarytame kvadrate Salomėja sutalpina 4 monetas (žr. pav.).

**B2012** Kiek mažiausiai degtukų jai reikės sudaryti kvadratui, į kurį be persidengimų tilptų 16 tokijų monetų?

- A) 8   B) 10   C) 12   D) 15   E) 16

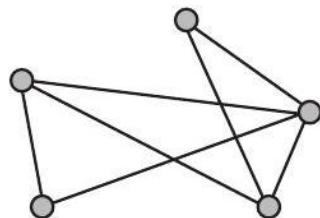


**B4.** Lėktuvo sėdynių eilės sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 25, praleidžiant 13. **B2012** Pirmoje eilėje yra 4 sėdynės, o likusiose – po 6. Kiek vietų yra lėktuve?

- A) 120   B) 138   C) 142   D) 144   E) 150

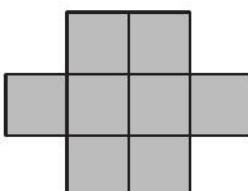
- B13.** Stebuklijoje yra 5 miestai. Bet kurius du miestus jungia vienas matomas arba nematomas kelias. Iš viso Stebuklijoje yra 7 matomi keliai, pavaizduoti žemėlapyje (žr. pav.). Kiek nematomų kelių yra Stebuklijoje?

A) 9   B) 8   C) 7   D) 3   E) 2



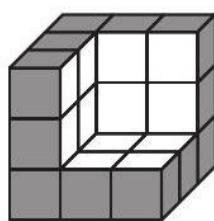
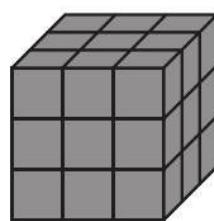
- B15.** Paveikslėlyje pavaizduotos iš vienodų kvadratelių sudėtos figūros perimetras yra 42 cm. Koks figūros plotas?

A)  $8 \text{ cm}^2$    B)  $9 \text{ cm}^2$    C)  $24 \text{ cm}^2$    D)  $72 \text{ cm}^2$    E)  $128 \text{ cm}^2$



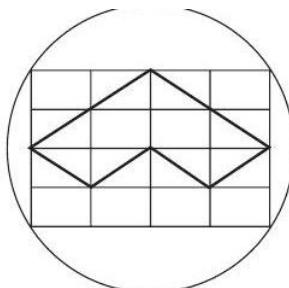
- B9.** Nudažyti visam kubui, sudėtam iš mažesnių kubelių, reikėjo 9 kg dažų. Kiek kilogramų dažų dar prireiks nudažyti baltam paviršiui, pavaizduotam dešiniajame paveikslėlyje, kuris sudarė iš nudažyto kubo išėmus keletą kubelių?

A) 2   B) 3   C) 4,5   D) 6   E) 7



- B18.** Šalia pavaizduoto apskritimo skersmuo lygus 10 cm, o visų mažųjų stačiakampių matmenys vienodi. Kam lygus storesnėmis linijomis išskirto šešiakampio perimetras?

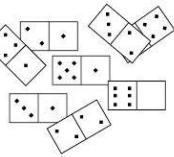
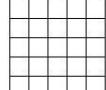
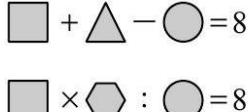
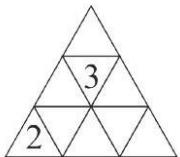
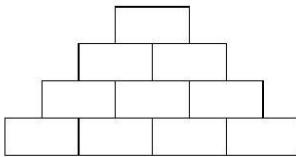
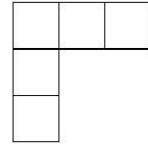
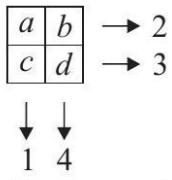
A) 8 cm   B) 16 cm   C) 20 cm   D) 25 cm   E) 30 cm



- B28.** Trys draugai — Adomas, Tomas ir Paulius žiemos atostogų metu 15 kartų buvo plaukimo baseine. Adomas už visų trijų bilietus mokėjo 8 kartus, Tomas — 7 kartus. Paulius draugams atidavė 30 litų — tiek jis buvo skolinges už bilietus. Kaip Adomas ir Tomas turi pasidalyti pinigus, kad kiekvienas iš draugų bilietams būtų išleidęs tiek pat?

A) 22 Lt Adomui ir 8 Lt Tomui   B) 20 Lt Adomui ir 10 Lt Tomui  
 C) 15 Lt Adomui ir 15 Lt Tomui   D) 16 Lt Adomui ir 14 Lt Tomui  
 E) 18 Lt Adomui ir 12 Lt Tomui

## 9.9 Uždaviniai Mantui iš įrašymų

- 29.** Ant stalo guli aštuoni domino kauliukai (žr. pav.). Vieno kauliuko viena pusė yra uždengta. Šiuos 8 kauliukus galima sudėti į kvadratinę lentelę  $4 \times 4$  taip, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio akučių sumos būtų lygios. Kiek akučių yra uždengtoje kauliuko pusėje?
- A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5
- 
- 27.** Gertrūda nori į kiekvieną  $5 \times 5$  lentelės langeli įrašyti 0 arba 1 taip, kad kiekviename kvadratėje  $2 \times 2$  būtų lygiai 3 vienodi skaičiai. Kokią didžiausią sumą gali gauti Gertrūda, sudėjusi visus lentelės skaičius?
- A) 22   B) 21   C) 20   D) 19   E) 18
- 
- 13.** Dviejose šalia užrašytose lygybėse kiekviena figūra žymi vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4 arba 5, o vienodos figūros žymi vienodus skaičius. Kokį skaičių žymi trikampis?
- A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5
- 
- 16.** Emilė nori įrašyti po skaičių į kiekvieną trikampės lentelės langelį taip, kad bet kurių dviejų skaičių, įrašytų į bendrą kraštinę turinčius langelius, suma būtų ta pati. Ji jau įrašė du skaičius. Kokia bus visų užpildytoje lentelėje skaičių suma?
- A) 18   B) 20   C) 21   D) 22   E) 24
- 
- 21.** Iš skaičių 3, 5, 2, 6, 1, 4 ir 7 Romas išsirinko tris skirtinges skaičius, kurių suma yra 8. Iš tų pačių skaičių Tomas išsirinko tris skirtinges skaičius, kurių suma yra 7. Kiek yra tokų skaičių, kuriuos išsirinko tiek vienas, tiek kitas berniukas?
- A) Nei vieno   B) 1   C) 2   D) 3   E) Neįmanoma nustatyti
- 25.** Albertas nori suskirstyti skaičius 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 į kelias grupes taip, kad kiekvienos grupės skaičių suma būtų tokia pati. I kiek daugiausia grupių galima suskirstyti skaičius?
- A) 2   B) 3   C) 4   D) 6   E) Kitas atsakymas
- 28.** Miglė į kiekvieną paveikslėlio langelį įrašė po natūralujį skaičių taip, kad į langelį įrašytas skaičius būtų dviejų po pat juo esančių skaičių suma (išskyrus paskutinę eilutę). Kiek daugiausiai nelyginių skaičių galėjo įrašyti Miglė?
- A) 4   B) 5   C) 6   D) 7   E) 8
- 
- 22.** Skaičius 1, 2, 3, 4 ir 5 reikia surašyti į penkis figūros langelius (po vieną į kiekvieną langelį). Tieki eilutėje iš kairės į dešinę, tieki stulpelyje iš viršaus į apačią skaičius reikia surašyti didėjimo tvarka. Kiek yra būdų taip padaryti?
- A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 8
- 
- 15.** Sudėjė kiekvieno stulpelio ir kiekvienos eilutės skaičius, gauname paveikslėlyje parodytas sumas. Kuris iš žemiau parašytų teiginių yra teisingas?
- A)  $a$  yra lygu  $d$    B)  $b$  yra lygu  $c$    C)  $a$  yra daugiau negu  $d$   
 D)  $a$  yra mažiau negu  $d$    E)  $c$  yra daugiau negu  $b$
- 
- 11.** Kiekviename paveikslėlio langelyje įrašyta po vieną natūralujį skaičių. Pirmų trijų skaičių suma lygi 21, o paskutinių trijų skaičių suma lygi 27. Visų penkių skaičių suma lygi 37. Koks skaičius įrašytas pilkajame langelyje?
- A) 3   B) 6   C) 10   D) 11   E) 16
- 
- 7.** Ant kiekvienos kubo sienos yra užrašyta po vieną skaičių. Ant priešingų sienų užrašytų skaičių sumos yra lygios. Penkių sienų skaičiai yra 5, 6, 9, 11 ir 14. Koks yra šeštosios sienos skaičius?
- A) 4   B) 7   C) 8   D) 13   E) 15

## 10 Aukštesnio lygio mąstymo uždaviniai ne iš Kengūros

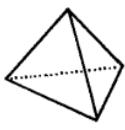
Kompetencijos, kurias reikia ugdyti 21 amžiuje:

- Kūrybiškumas
- Gebėjimas tyrinėti ir atrasti naujus dalykus
- Gebėjimas save nukreipti tinkama kryptimi, iniciatyvumas, atkaklumas
- Gebėjimas naudotis informacija
- Struktūruotas mąstymas
- Gebėjimas komunikuoti
- Samprotavimas

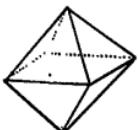
Analizuojant Matematika Tau 8 klasės vadovėlių pagal tai, kiek jo teorinėje medžiagoje, pateiktuose uždavinių sprendimo pavyzdžiuose ir uždavinių rinkiniuose reikalingas aukštesnio lygio mąstymas, paaiškėjo, kad tik 8 uždaviniuose iš 790 nagrinėtų tokią kompetenciją reikia.

Užduotelių pavyzdžiai:

1. Virtuvė su trimis prietaisais ir trijomis rozetėmis. (Polya)
2. Duota  $12^2 + 1^2 + 31^2$  ir  $13^2 + 1^2 + 21^2 = \dots$  Pratęskite lygybę. (Matematika Tau, 8kl.)
3. Paveikslėlyje pavaizduoti visi galimi erdviniai kūnai, kurių sienos yra taisyklingieji daugiakampiai:



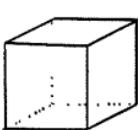
Tetrahedron



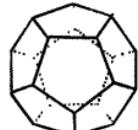
Octahedron



Icosahedron



Cube



Dodecahedron

Samprotavimas susideda iš šių etapų:

- Duota piramidė, kurios visos sienos yra vienodi lygiašoniai trikampiai. Kaip keisis kampai jos sienose, jei piramidės viršūnė slinksime palei tiesę, kurioje yra šios piramidės aukštinė?
  - Tarkime, kad kažkuri viršūnė yra bendra su  $n$  sienų. Kokias reikšmes gali įgyti sienų kampai, išeinantys iš tos viršūnės?
  - Kokiems taisyklingiesiems daugiakampiams tokie kampai galimi?
4. Duotas kvadratinis kiemas su apvaliais krūmais ir kvadratiniu baseinu. Kaip padidinti šio baseino plotą dvigubai, kad jis neitų per krūmus?
  5. Trikampių lygumo požymiai. Nustatykime tris parametrus, kurie trikampyje yra nekintami. Ar aišku, kaip turint šiuos parametrus vienareikšmiškai gauti trikampį? Ar aišku, kaip trikampis gali būti slenkamas nekeičiant šių parametru? Ar visada galima atlikti slinkimą, kad vienas trikampis sutaptų su kitu trikampiu, turinčiu tuos pačius parametrus?
  6. Trikampių lygumo požymis pagal tris kraštines. Kaip turint tris duoto ilgio atkarpas iš jų sudaryti trikampį?
  7. Funkcijų intelekstinis poreikis. Kur pasitaiko mokyklinės funkcijos  $3x+2$ ,  $x^2$ ,  $2^{-x}+2^x$ ,  $\cos x$ ,  $e^{-7x}$ ,  $e^{-7x} \times \cos(x)$ ,  $\frac{1}{x}$ ? Kur pasitaiko jų eskizai?
  8. Masteliai. Išrikiuokime fizikinių objektų pavyzdžius didėjimo tvarka pradedant nuo mikropasaulio ir baigiant makropasauliu ir juos pavaizduokime sąsiuvinyje taip, kad būtų proporcingai išlaikomi stebimų objektų matmenys ir atstumai. Galima remtis atskirais faktais, kurie žinomi iš įvairios literatūros.

Didelių išmatavimų pavyzdžiai:

- Atstumas nuo Žemės iki Mėnulio - kiek daugiau, nei šviessekundė.
- Žemės pusiaujas 40000 kilometrų.
- Jei į vieną eilę sudėtume 109 žemes, gautume Saulės skersmenį.
- Nuo Saulės iki Žemės šviesa sklinda 500 sekundžių ir nukeliauja 150mln. kilometrų

Mažų išmatavimų pavyzdžiai:

- Hadronų kolaideryje artišviesiniai greičiai priešpriešine kryptimi paleidžiamos atomus sudarančios dalelės ir joms susidūrus gaunamos kitos dalelės, iš kurių galima gauti informacijos apie pirmynkštės daleles, sudariusias visatą.
- Atomus sudaro branduolys su teigiamą krūvį turinčiomis dalelėmis (protonu ir neutronu), o aplink atomo branduolį įvairiomis orbitalėmis skrieja elektronai - neigiamą krūvį turinčios dalelės.
- Elektronai skrieja taip greitai, kad galima būtų tik teoriškai nustatyti trajektorijas, kuriomis jie skries.
- Trajektorija yra tarsi šviesos pėdsakas, kurį mes galime pamatyti, kuomet mojuojame degančiu pagaliu tamsoje, tačiau nematome stabilios pagalio galo padėties. Žmogaus akis apdoroja informaciją ne daugiau, nei 24 kadrais per sekundę, todėl tankesni kadrų susilieja ir telieka (šviesos arba pravažiuojančio automobilio) pėdsakas.
- Jei atomo branduolį įsivaizduotume kaip futbolo kamuolių, tai aplink jį skriejančius elektronas būtų už 50 kilometrų ir žirnio dydžio.
- Medžiagą galima apibūdinti pagal tai, iš kokių atomų ji sudaryta. Pvz. vandens molekulė yra iš dviejų vandenilio ir vieno deguonies atomo.
- Atomai turi pavadinimus. Pavyzdžiui azotas, deguonis, anglis, vandenilis. Jie skiriasi tik tuo, kad juos sudaro skirtinges atomų, neutronų ir elektronų kiekis.
- Ore 78% vietos užima azotas, 21% deguonis ir apie 1% - likusios medžiagos, tokios kaip argonas arba anglies dioksidas.
- Molekulės - tai iš kelių atomų sudarytos dalelės.
- Salyginai nedidelis molekulių kiekis yra genuose. Genai sudaro ląstelės chromosomas, kurios yra ląstelės branduolyje, o branduolys yra vienas iš ląstelės organoidų.
- Ląstelės sudaro skaidulas; skaidulos sudaro audinius, audiniai sudaro raumenis.

9. Perrinkite ir įvertinkite visus galimus variantus mano pateiktoje šaškių situacijoje
10. Duotas Paskalio trikampis. Ar galite pastebėti, kaip jis sudarytas ir ar mokate jį pratęsti?
11. NIM žaidimas: raskite laiminčiuosius ir pralaiminčiuosius skaičius nuo 1 iki 30, kai duotajam skaičiui du žaidėjai gali iš šaškių krūvos imti tik pirmynį skaičių šaškių.

## 10.1 Kūrybiniai projektais

Šiame straipsnyje išskirsime vietą ir keletui projektų, kurie turėtų atskleisti, kaip matematinės žinios gali būti taikomos sprendžiant realaus pasaulio problemas ir kaip šios žinios gali būti jungiamos su kitų dalykų žiniomis. Kiekvieno projekto tikslas - sužinoti kuo daugiau apie tai, kas vyksta erdvėje, kurios dar negalėjome pamatyti. Darant šį projektą matematinių gebėjimų nepakanka: jie neišvengiamai persipina su gebėjimais, kurių reikia mokantis kitus dalykus. Igudžiai, kuriuos įgysite atlikdami projekto užduotį, yra tokie:

- Taikyti matematines žinias įvertinant laiką, atstumą, greitį, temperatūrą ir daug kitų dydžių arba skaičių.
- Mokyti kuo greičiau susirasti informaciją internte.
- Plėsti kritinį mąstymą: nuolat kelti klausimus, vertinti, ar rasti atsakymai atitinka tikrovę.
- Kompetencijos pojūtis: pasitikėjimas, įgytas radus atsakymus į klausimus, kylantis susidomėjimas, motyvacija, azartas ieškant atsakymų.

Verta paminėti, kad kiekvieno projekto tematika nenuspėjama, nes ji labiau priklauso ne nuo skaičiavimų, kuriuos norime išmokti atlikti, o nuo klausimų, kurie gali nuvesti tyrinėtoją netikėtomis kryptimis ir pareikalauti tokių žinių, kurios gali beveik nesisieti su užduoties pradžioje keltais klausimais.

Paryškintos nuorodos gerokai palengvins atsakymų į keliamus klausimus ieškojimą. Projekto autorius Simona tikisi, jog po kurio laiko klausimų kėlimas ir žinojimas, kur ieškoti atsakymų į juos taps savaiminiu procesu.

## 10.2 Braškių laukai

## 10.3 Tarpgalaktinis skrydis

## 10.4 Plika akimi nematomi nuotoliai

Tikslas. Kuo giliau pažinti procesus, kurie vyksta plika akimi nematomoje erdvėje ir atrasti objektų su nurodytais, bet plika akimi nematomais dydžiais, pavyzdžiu.

Pradžia. [Filmukas](#) apie nematomą mažajį pasaulį. Prieš leidžiantis į tyrinėjimus siūlome susipažinti su mikroskopinių ilgių [matavimo vienetais](#). Daug išsamesnė informacija yra [angliškoje Vikipedijoje](#).

Užduotys.

1. Sudarykite lentelę. Jos stulpeliuose turi būti užrašyti objektai ir jų dydžiai pradedant nuo didžiausio ir baigiant mažiausiu. Taip pat atskirame stulpelyje arba prie kiekvieno nurodyto objekto nurodykite, kiek jis kartu mažesnis už anksčiau paminėtą. Siūloma įtraukti šių objektų matmenis: *galva, akis, plaukas, ląstelė, makroskaidula, mikroskaidula, protoskaidula, keratino molekulė, sieros, anglies, azoto ir deguonies atomai, elektrono orbitalės ilgis, orbitalės plotis, protonas, kvarkas*.
2. [Ląstelės](#).
  - (a) Išvardykite ląstelių [sudedamąsių dalis](#), kurios jums atrodo svarbiausios. Kaip jos vadinamos?
  - (b) Kaip ląstelės gauna medžiagą?
  - (c) Kas atitinktų ląstelės smegenis ir ką tos smegenys kontroliuoja? Kurioje ląstelės dalyje yra paveldima ląstelės informacija?
  - (d) [Kas](#) atitinka vieną žmogaus ląstelės atminties vienetą ir kiek žmogaus ląstelė jų turi?
  - (e) Koks yra šio atminties vieneto ilgis?
  - (f) [Iš kokių dalelių](#) ir [kokios medžiagos](#) tas atminties vienetas sudarytas?
  - (g) [Kokia forma](#) yra susivijusi šios medžiagos molekulė?
  - (h) Kokio storio ji maždaug galėtų būti?
  - (i) Kas sudaro molekules ir kaip jos atrodo? Pavyzdžiui vandens molekulė?
  - (j) Kodėl tokios medžiagos, kaip baltymai yra vadinamos makromolekulėmis ir iš ko jos sudarytos? Ar *DNR* yra taip pat makromolekulė? Ar nenusinuodytumė paragavę kokių nors medžiagų makromolekulų?
3. DNR ir paveldimumas. Akylas skaitytojas turėtų žvilgti ir [šaltinius](#), kuriais remiasi dominantys Vikipedijos straipsniai. Šiuo atveju norodoje informacija labai [išsami](#) ir tinkama mūsų tyrimui. Taip pat pasidairius po angliškos Vikipedijos iliustracijas galima atrasti ir kitų išsamių iliustracijų. Nauji klausimai, kuriuos galima išsikelti tiriant DNR:
  - (a) Kokių matmenų yra *ląstelė, jos branduolys, chromosoma, DNR?*

- (b) Kas vaizduojama brūkšneliais, įeinančiais į DNR?
- (c) Kiek genų būna žmogaus DNR? Kuri jų dalis atsakinga už paveldimumą?
- (d) Naudojantis pateikta iliustracija galima gauti tokį duomenų: *vienoje pilnoje spiralės apsukoje yra 10 bazių porų; apsukos ilgis siekia 34 atommetrus; apsukos plotis yra 20 atommetry; tarp dviejų balytyminių sąrėdžių yra 10 atommetrus*

## 10.5 Aukštos įtampos laidai

Tarp aukštosių elektros įtampos stulpų eina po tris laidininkus, tarp kurių teka srovė. Mechanikas Žilvinas po 6 val. skrydžio sraigtasparniu lazeriu nuskenavo 882 laidininkus, einančius tarp 295 stulpų. Tuo metu lauke buvo 20 laipsnių šilumos. Kiekvieno laidininko duomenys buvo įrašyti į duomenų failą. Laidininko duomenis sudaro 20, 30 arba 40 vienodais tarpais išdėstytytų taškų ir kiekvienam taškui užrašyta jo koordinatės žemės atžvilgiu bei aukštis:

```
Vertices=40 Hole=0 Level=17 Color=-1 Weight=-1 Style=2147483647 Reference=0
566014.7604 6575670.0925 52.5728
566016.8032 6575663.6837 51.9256
566018.8461 6575657.2748 51.3135
566020.8889 6575650.8659 50.7367
566022.9318 6575644.4571 50.1951
...
...
```

Darbdavys matematiko Simono paklausė, ar jis sugebėtų pagal aukšciau pateiktus 40 taškų, per kuriuos eina laidininkas, apskaičiuoti funkciją, skirtą nustatyti laidininko aukštį bet kuriame (nebūtinai duotame) jo taške. I tai Simonas atsakė: *man užtektų ir trijų taškų. Spėju, jog mano teoriškai gauta funkcija būtų pakankamai tikslia, o pagal likusių 37 taškų koordinates būtų galima ivertinti, kiek mano skaičiavimai apsirinka.*

Po savaitės darbo Simono spėjimai pasitvirtino. Jis parašė programą, kuri per dvi minutes kiekvienam iš 882 laidininkų ne tik suranda funkciją, bet ir nustato, kaip pasikeistų duotų 40 taškų koordinatės, kai laidininkas išiltų ligi 35 arba 70 laipsnių. Paleidus programą apskaičiuotos kiekvieno taško trimatės koordinatės yra įrašomos į naujai sukurtą .txt failą. Si programa vėliau bus naudojama aplikacijoje, kuri kreipiasi Komandinę eilutę (Command Prompt) ir leidžia pamatyti apskaičiuotas laidų padėties erdvėje (panašiai kaip žaidžiant kompiuterinį žaidimą).

## 10.6 Garso bangos

## 11 grafai, medžiai ir variantai

- 15.** Dvi kengūros, Kenga ir Riukas, ir trys triušiai, Adomas, Berta ir Domas, žaidžia kamuoliu.  
B2018 Kai kuri nors iš kengūrų turi kamuolį, ji meta kamuolį kitai kengūrai arba triušiui. Kai kuris nors iš triušių turi kamuolį, jis meta kamuolį kitam triušiui, bet ne tam, iš kurio ką tik jį gavo. Kenga pradeda žaidimą mesdama kamuolį Adomui. Kas penktasis mes kamuolį?

A) Kenga   B) Riukas   C) Adomas   D) Berta   E) Domas

- 17.** Pirmadienį Mantas sugalvojo slaptažodį ir išsiuntė jį 5 draugams. Kiekvienas, gavęs slaptažodį, rytojaus dieną išsiųsdavo jį dviem savo draugams, kurie iki tol slaptažodžio nežinojo. Kuria savaitės dieną slaptažodį žinančių asmenų skaičius tapo didesnis už 100?

A) Antradienį   B) Trečiadienį   C) Ketvirtadienį   D) Penktadienį   E) Šeštadienį

- 21.** Iš skaičių 3, 5, 2, 6, 1, 4 ir 7 Romas išsirinko tris skirtinges skaičius, kurių suma yra 8. Iš tų pačių skaičių Tomas išsirinko tris skirtinges skaičius, kurių suma yra 7. Kiek yra tokiu skaičių, kuriuos išsirinko tiek vienas, tiek kitas berniukas?

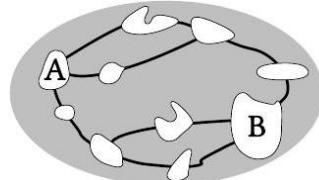
A) Nei vieno   B) 1   C) 2   D) 3   E) Neįmanoma nustatyti

- 23.** Jeigu  $A$ ,  $B$  ir  $C$  yra skirtinges skaitmenys, tai didžiausias įmanomas 6-iazenklis skaičius, užrašytas panaudojant tris skaitmenis  $A$ , du skaitmenis  $B$  ir vieną skaitmenį  $C$ , negali būti lygus

A) AAABBC   B) CAAABB   C) BBAAAC   D) AAABCB   E) AACCBB

- 5.** Ežere yra 10 salų ir 12 tiltų (žr. pav.). Iš pradžių visi tiltai yra atidaryti. Kiek mažiausiai tiltų reikia uždaryti, kad nebūtų galima nuvažiuoti iš salos A į salą B?

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

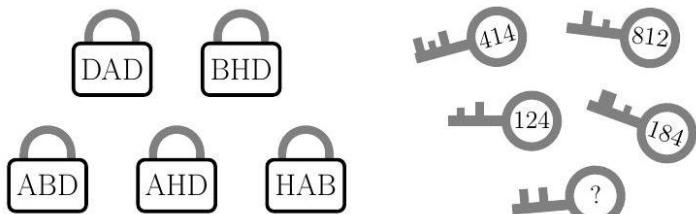


- 7.** Ant kiekvienos kubo sienos yra užrašyta po vieną skaičių. Ant priešingų sienų užrašytų skaičių sumos yra lygios. Penkių sienų skaičiai yra 5, 6, 9, 11 ir 14. Koks yra šeštосios sienos skaičius?

A) 4   B) 7   C) 8   D) 13   E) 15

- 12.** Kiekvienas iš 5 raktų tinkai lygiai vienai iš 5 spynų, o skaitmenys ant raktų atitinka raides ant spynų. Koks skaičius parašytas ant klaustuko pažymėto rakto?

A) 382   B) 282   C) 284   D) 823   E) 824



- 20.** Per rankinio varžybas keturi žaidėjai pelnė skirtinges skaičių įvarčių. Iš šių keturių žaidėjų Vainius pelnė mažiausiai įvarčių. Kiti trys kartu pelnė 20 įvarčių. Kiek daugiausiai įvarčių galėjo pelnyti Vainius?

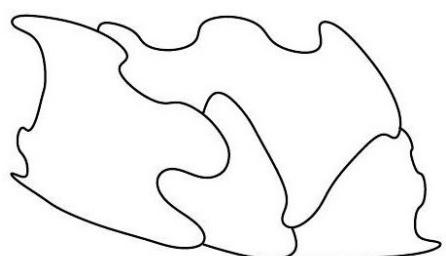
A) 2   B) 3   C) 4   D) 5   E) 6

- 26.** Dėžutėje yra tik raudoni ir žali rutuliai. Iš bet kurių paimtų 5 rutulių bus bent 1 raudonas, o iš bet kurių 6 rutulių bus bent 1 žalias. Kiek daugiausiai rutulių gali būti dėžutėje?

A) 11   B) 10   C) 9   D) 8   E) 7

- 29.** Julija turi keturis skirtinges spalvų pieštukus ir nori jais nuspavinti keturių šalių žemėlapį (žr. pav.). Žemėlapyje dvi šalys, turinčios bendrą sieną, turi būti nuspavintos skirtin-gomis spalvomis. Kiekviena šalis turi būti nuspavinta, bet nebūtina naudoti visas spalvas. Keliais būdais Julija gali nuspavinti žemėlapį?

A) 12   B) 18   C) 24   D) 36   E) 48



- 10.** Kiekviename lentos  $6 \times 6$  langelyje stovi po lempą. Dvi lempas vadinsime gretimomis, jei jos  
B2017 yra langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę. Iš pradžių kai kurios lemos šviečia, ir kiekvieną minutę užsidega tos lemos, kurios turi bent dvi gretimas šviečiančias lempas. Kiek mažiausiai lempų užtenka ijjungti iš pradžių, kad po kurio laiko visos lemos šviesėtų?

**A) 4    B) 5    C) 6    D) 7    E) 8**