

Rekordinis pasaulio priartinimas

Aš. Šią pamoką, kiek mums pavyks, norėčiau papasakoti apie procesus, kurie vyksta mikroskopinėje erdvėje: ląsteles, chromosomas, DNR, molekules ir atomus. Galėčiau parodyti, kaip reiktų kelti klausimus, susirasti reikiamą informaciją ir kokių prireikia skaičiavimų norint atsakyti į tam tikrus klausimus. Mūsų mikroskopinio pasaulio nagrinėjimas turėtų prasidėti nuo šio [filmuko](#).

Simonas. Žiūrėk, ir aš noriu kai ką parodyti. Praeitą savaitę pamačiau patį galingiausią mikroskopą. Ar galiu parodyti šį [video](#)?

Aš. Kaip manai, kiek šis mikroskopas kartų gali padidinti daiktus?

Simonas. Nežinau, manau milijoną.

Aš. Neteisingai. Nuorodoje matyti du skaičiai: 10^{198} ir 350000000 iterations. Pirmasis reiškia, kiek kartų didiname, antrasis - kiek perskaičiavimų reikėjo daryti. Padidinę milijoną kartų žmogaus plauką, mes galėtume pamatyti keratino - baltymo, iš kurio jis sudarytas - molekulę. Ji yra taip pat plona ir ilga, kaip plaukas, tačiau 50000 kartų už ją plonesnė. O jei padidintume milijoną kartų, pamatytume sieros, deguonies, azoto ir anglies atomus, kurių skersmuo yra trumpesnis už plauko skersmenį nuo milijono iki dviejų milijonų kartų. Tačiau milijonas yra skaičius, turintis vienetą su šešiais nuliais, kai tuo tarpu šiame video atliekamas padidinimas skaičiumi, kuris turi vienetą su 198 nulių. Ar žinai, kas čia didinama?

Simonas. Ne.

Aš. Tai kaip gali sakyti, jog čia rekordas? Reikia išsiaiškinti. Video pavadinimas yra *Malderbrot zoom*. Kas tai yra? Kaip sužinoti?

Simonas. Neįsivaizduoju.

Aš. Iš tiesų, tai mes žinome, ką reiškia *zoom*. Bet nežinom, ką reiškia Malderbrot. Reikia nukopijuoti ir įvesti tai į Google. Išmeta [nuorodą](#) į angliską Vikipediją su tokiu apibrėžimu:

The Mandelbrot set is the set of complex numbers c for which the function $f_c(z) = z^2 + c$ does not diverge when iterated from $z = 0$, i.e., for which the sequence $0, f_c(0), f_c(f_c(0)), \dots$, remains bounded in absolute value.

Ar aiškiau?

Simonas. Ne.

Aibės ir fraktalai

Aš. Tad reikia žiūrėti, kokius žodžius suprantame ir kokius ne. Ar aišku, kas yra aibė?

Simonas. Taip, tai gali būti keleto skaičių rinkinys.

Aš. Gerai. O ar ji gali būti begalinė?

Simonas. Taip, pavyzdžiu realieji skaičiai.

Aš. Matau, kad suprasti sekasi visai neblogai. Pradžiai reikėtų patyrinėti įdomesnes aibes. Pavyzdžiu [Kantoro aibė](#). Ji yra sudaroma pradžioje paimant atkarpa (tarkim einančią nuo 0 ligi 1). Ir ties kiekvienu žingsniu visose gautose atkarpose išimant po vidurį. Tą atliekant be galo daug kartų paaiškėja, kad gautoje atkarpoje visai neliko taškų. Pavyzdžiu nuorodės skaičių 0,32 aš iš karto žinau, kad taško, nutolusio nuo atkarpos pradžios per 0,32 toje aibėje nebus. Kaip ir bet kurio kito taško. Kaip taip gali būti?

Simonas. Nesuvokiam.

Aš. Nuorodoje matome, kad sulig kiekvienu žingsniu atkarpoje lieka vis daugiau tuščios erdvės. Tai atlikus kiek nori daug išėmimų atkarpoje tiesiog nieko neliks. Bet pabandykime tokius sumažėjimus suvokti dar giliau. Tam patyrinėkime [Kocho snaigę](#). Tai yra baigtinio ploto ir begalinio perimetro geometrinė figūra. Ar aišku, kaip kinta šios figūros perimetras sulig kiekvienu žingsniu?

Simonas. Bando skaičiuoti. Iš pradžių mano, kad iš 3 virsta į 9. Po to paaiškėja, kad iš tiesų ties antru žingsniu yra ne 9, o 12 sienelių - kiekvienai antros žvaigždės viršūnei iš 6 turi būti po dvi sieneles. Vėliau Simonui reikia priminti, kad darant pakeitimą iš „—“ į „_“ gautos kreivės ilgis niekaip negali iš 1 pavirsti 4. Pamatęs savo klaidą Simonas spėja, kad naujos atkarpos ilgis bus 1,5. Tačiau teisingas atsakymas turėjo būti $\frac{4}{3}$. Čia atsiranda naujos problemos. Reikia suprasti, jog atkarpos ilgi yra įmanoma padidinti ne tik 2 ar 5 kartus, bet taip pat ir $\frac{4}{3}$ karto. Simonas žino, kad norint padauginti skaičių iš $\frac{4}{3}$ reikia padalyti iš 3 ir padauginti iš 4, tačiau su atkarporomis to dar nėra darės. Suvokti, kad kiekvieną žvaigždės kraštą pakeitus į kreivę, kurios ilgis yra $\frac{4}{3}$ karto didesnis, perimetras taip pat padidės $\frac{4}{3}$ karto, užtrunka šiek tiek laiko.

Aš. Tad išsiaiškinom, kad sulig kiekvienu žingsniu naujos žvaigždės perimetras padidėja $\frac{4}{3}$ karto. Taigi, jei jis iš pradžių buvo lygus 1, tai po to bus jau $\frac{4}{3}$. O koks bus dar po to?

Simonas. Gal $\frac{8}{6}$?

Aš. Tai juk reikia prisiminti, ką reiškia perimetras, kurio dydis yra $\frac{4}{3}$ padidinti dar $\frac{4}{3}$ karto.

Simonas. A, tai tada $\frac{16}{9}$?

Aš. Teisingai. Beveik 2. O kaip su kitais perimetrais?

Simonas. Po to dauginti dar iš $\frac{4}{3}$.

Aš. Gerai. Tai bus $\frac{64}{27}$ Jau virš 2. Gal reiktu pabandyti atspausdinti pirmuosius 100 rezultatų. *Atsiverčiu Python ir rašau kodą* (trunka apie minutę):

```
k=4/3  
for i in range(1,101): print(i, k); k*=4/3
```

Bet geriau rašyti šitaip:

```
k=4/3  
for i in range(1,101):  
    print(i, k)  
    k*=4/3
```

Rezultatas:

1	1.3333333333333333
2	1.7777777777777777
3	2.3703703703703702
4	3.1604938271604937
5	4.213991769547325
6	5.6186556927297655
7	7.491540923639687
8	9.988721231519582
9	13.318294975359443
10	17.757726633812588
⋮	⋮
98	1753865105741.9583
99	233846807655.9443
100	3117982410207.926

Pastaba: Simonas kodą gali nukopijuoti iš [Online interpretatorių](#) ir stebėti, kas vyksta atskiruose programos veikimo žingsniuose.

Aš. Kaip manai, kokie bus tolimesni rezultatai?

Simonas. Artės į begalybę.

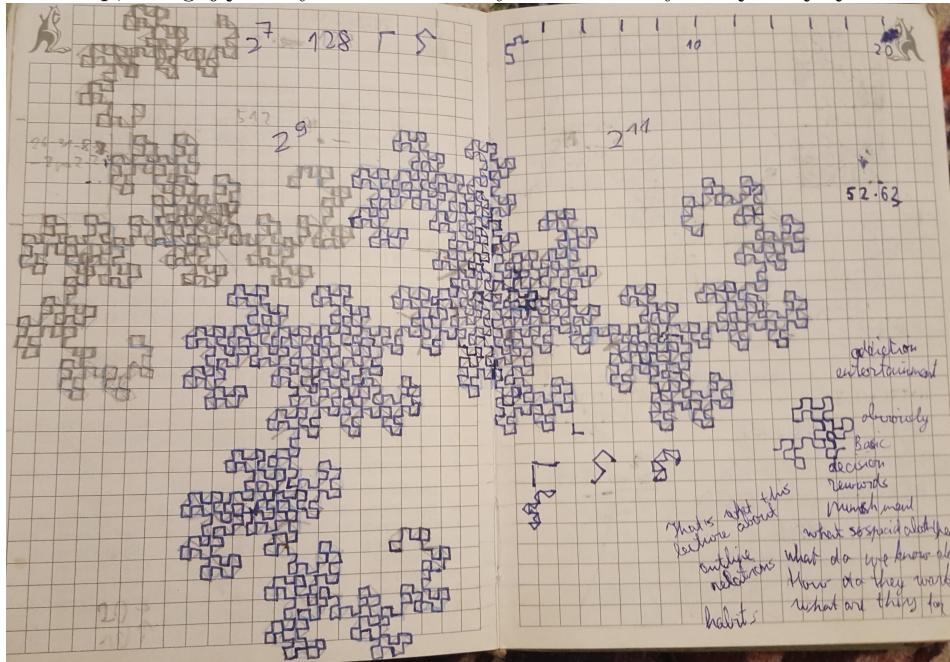
Aš. Teisingai. O gal žinai, kaip greit gauti šimtajį nari?

Simonas. Reikėtų $\frac{4}{3}$ pakelti šimtuojų laipsniu.

Aš. Taip, viskas teisingai. Gavome, kad rezultatas artėja į begalybę. Vadinasi, figūros perimetras bus begalinis. O plotas, kaip matome, ne.

Simonas. Parodyk čia žemiau. Aš esu mates tą kreivę, kur ketvirtoj eilutėj.

Aš. Taip, aš irgi ją braižydavau. Štai čia yra mano mokyklinių laikų sasiuvinis:



Ši kreivė yra vadinama **Drakono kreive**. Aš ją pajėgiau kiekvieną fragmentą „_“ keidamas į fragmentą „/\“. Po to gautą brėžinį ištirindavau ir vėl perpajėgiau detalesni brėžini toje pačioje vietoje. Tad iš pradžiu būdavo tik

vienas brūkšnys, po to 2, 4, 8, 16 ir t.t. - kaskart po dvigubai daugiau. Vikipedijos [nuorodoje](#) kreivę konstruoja kitokiu būdu, bet rezultatas tas pats.

Daugianarių daugyba ir kaip greitai dauginti

Aš. Iš to, ką aptarėme, jau pasimatė labai daug apie įvairių fraktalų gavimo būdus. Vis dėlto mūsų pamoka prasidėjo nuo aiškinimosi, kas yra **Malderbroto aibė**. Skaitydami apibrėžimą supratome, kas yra aibė *aibė*, bet nesupratome, kas yra kompleksiniai skaičiai, funkcijos, divergavimas ir kas tie keisti užrašai $0, f_c(0), f_c(f_c(0))$. Ir nors mokykloje nekalba apie tokius įdomius dalykus, kaip kompleksiniai skaičiai ir jų veiksmai, aš esu pasiruošęs papasakoti apie juos esminius dalykus. Bet tam mums reikės paskubomis susipažinti su daugianarių daugyba. Tad pradékime. Įsivaizduokime dvi atkarpas. Tegu viena jų yra sudaryta iš ruožų a ir b , o kita iš ruožų c ir d . Tuomet kyla klausimas: kam lygus stačiakampio, kurio gretimos kraštinės yra tokios atkarpos, plotas? Sprendimą galima pailiustruoti:

	a	b
c	ac	bc
d	ad	bd

Vadinasi, plotą galima užrašyti dvejopai: arba kaip skaičių $a + b$ ir $c + d$ sandaugą $(a + b)(c + d)$ arba kaip atskirų sandaugų sumą $ac + bc + ad + bd$. Toks būdas leidžia greitai apskaičiuoti reiškinius, kuriuos vengia duoti dauginti mūsų mokyklose, nes dauginimas būtų per sudėtingas. Tačiau aš tokį vieną veiksmą pademonstruoju. Tarkime, kad mums reikia skaičių $a + b + c$ padauginti iš savęs. Tuomet mano lentelė bus tokia:

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2

Matome, kad lentelėje nariai ab , bc ir ac pasikartoja po dusyk. Todėl turime:

$$(a + b + c) \cdot (a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

Dalį iš tokų rezultatų vadina [greitosios daugybos formulėmis](#) ir moko jas 8 klasėje. Tau duosiu pabandyti sudauginti reiškinius $(a + b)(a - b)$

Simonas. Daro lentelę. Darydamas įvelia klaidų, bet žino, kaip jas ištaisyti. Prasitaria, kad mokykloje neigiamų skaičių nemoko, bet jis turėjo juos praetoje mokykloje ir žino, kad $3 \times (-5) = -15$. Todėl žino ir, kad $a \times (-b) = -ab$.

Simono sprendimas:

	a	-b
a	a^2	$-ab$
b	ba^2	$-ab$

	a	-b
a	a^2	$-ab$
b	ab	$-b^2$

Aš. Gerai. Nepaisant klaidų galutinis rezultatas visai geras. Be to, kai visus langelius dedame, sumoje $a^2 - ab + ab - b^2$ nariai $-ab$ ir ab išsiprastina. Vadinasi, turėsime tokią lygybę:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Likusias greitosios daugybos formules palikim kitam kartui, nes jos ne tokios aktualios norint suprasti Mandelbroto aibes. Bet nenorečiau likti vien papasakojet apie daugianarių daugybą ir nepapasakojet apie patį svarbiausią triuką, kur ji gali būti panaudota. Štai uždavinys: reikia sudauginti skaičius 67 ir 73. Kaip juos daugintum, Simonai?

Simonas. Čia kažkur jau bus kažkokia gudrybė, bet aš nežinau kur. Aš matyt dauginčiau 67 iš 7 ir dėčiau su 67, padaugintu iš 3 (vieną užrašytą po kitu, kaip reikia).

Aš. Taip, bus gudrybė. Ši uždavinį aš daryčiau mintinai ir užtrukčiau ne daugiau kaip dvi sekundes. Štai mano sprendimas:

$$67 \times 73 = (70 - 3) \times (70 + 3) = 70^2 - 3^2 = 4900 - 9 = 4891$$

Tiesa, skaičių 70 aš randu imdamas vidurį tarp 67 ir 73. Tuomet ir 67 ir 73 skiriasi nuo 70 po tris.

Simonas. Oho...

Aš. O dabar tu pamégink. Tegu veiksmas bus 37×53 .

Simonas. Nežinau, kaip čia...

Aš. Na, o koks bus vidurys?

Simonas. 40. Ai ne, juk čia 53. Tada 45.

Aš. Gerai, tėsk.

Simonas. Gavau 1225.

Aš. Oj, tikrai neteisingai. Parodyk, kaip skaičiavai?

Simonas. $45 \times 45 = 2025$, tada... Oi, kokia klaida. Aš atėmiau 800, o reikėjo atimti 64...

Aš. Na va, mes norim išsiaiškinti apie Malderbroto aibes, o net paprasti veiksmai nesigauna. Šio uždavinio sprendimas toks:

$$37 \times 53 = (45 - 8)(45 + 8) = 45^2 - 8^2 = 2025 - 64 = 1961$$

Visgi labai gerai, kad supranti idėjas. Mes atradom labai įdomų dalykų: dviženklių skaičių daugyba greičiausiai eitusi daug lengvai, jei ne tik mokėtume greit skaičiuoti vidurius su skirtumais, bet būtume įsiminę visus dviženklių skaičių kvadratus.

Nuokrypis į matematikos istoriją

Aš. Tai, ką mes iki dabar darėme, buvo susipažinimas su modernija, t.y. pačia naujausia 20 amžiaus matematika. Aš išskirčiau tris tarpsnius, kuri link judėjo matematika:

- Antikos laikais rasti tam tikrą ilgį reiškė atlikti geometrinę konstrukciją (vien linijos ir skriestuvo pagalba), iš kurios matyti, kaip tą ilgį gauti. Tais laikais geometrai buvo labai stiprūs, o pati geometrija vadinama euklidine. Tai reiškia, kad mažai kalbama apie kitokius dalykus, nei kampai, atkarpos, tiesės, taškai, apskritimai, pusiaukraštinės, pusiaukampinės, daugiakampiai ir pan.
- Renesanso laikais matematikos vis didesnę dalį ēmė užimti mokslos apie judėjimą. Kokiu keliu juda patrankos sviedinys? Kaip sukasi planetos apie Saulę? **Kaip spindi** šviesa arbatos puodelyje? **Kokiu keliu** juda dviračio rato stipinas? **Štai čia** galima rasti daugybę kreivių pavyzdžių.
- Naujausiai laikais atsirado dar viena geometrija - fraktalų geometrija. Tokie patys begaliniai atsikartojimai, kuriuos mes nagrinėjom. Tačiau yra kur kas sudėtingiau. Spalvingoji Mandelbroto aibė, kurios artinimą mes stebėjom, buvo gauta panaudojant kompleksinius skaičius ir jų savybes. Kaip ir daugybė kitų įstabių fraktalų

Papildoma informacija, kurios nepaminėjau per pamoką. Dekarto įvesta koordinacių sistema, kurią mes moko mės mokykloje, buvo genialus įrankis susieti geometrijos ir algebrros žinias. Ją pasitelkę 17a. antros pusės matematikai Niutonas ir Leibnica susiejo aprašyti planetų judėjimą ir sukurti naują teoriją apie visatos judėjimą. Skaičiavimo technologijos, kuriomis žmonės remiasi paleisdami palydovus skristi virš Žemės ir kuriomis suplanavo Žmonių išsilaidinimą Mėnulyje ir net paleido aparatą, išskridusį už Saulės sistemos ribų, - visa tai Niutono ir Leibnico laikų matematikos palikimas.

Tačiau besibaigiant 17 - ajam amžiui kompleksinių skaičių veiksmai vis dar buvo paslaptimi. Niutonas juos atmetė kaip neturinčius jokios geometrinės ir fizikinės prasmės. Leibnica skaičių $\sqrt{-1}$ apibūdino kaip idealaus pasaulio pranašą, kuris yra tarsi amfibija tarp būties ir nebūties. Ir nors ankstyvojo renesanso intelektualas John Wallis siūlė į skaičių $x + y\sqrt{-1}$ žvelgti kaip į tašką koordinacių plokštumoje, kuris turi koordinates $(x; y)$, ši idėja nesusilaikė dėmesio. Vietoj to, algebrinius metodus, kurie galiojo su teigiamais skaičiais, ēmė taikyti ir neigiamiems skaičiams ir taip gaudavosi lygčių sprendimo rezultatai, neturintys jokios prasmės.

Neaiškumas prasklaidė matematikas Oileris. Jis įvedė žymėjimą $i = \sqrt{-1}$ ir priprato visur kompleksinių skaičių veiksmuoose pamatės reiškinį i^2 jį pakeisti skaičiumi -1, o tokius skaičius kaip $\sqrt{-3}$ žymėti $i\sqrt{3}$. Oileris išvedė būdus, kaip pavaizduoti kompleksinių skaičių sudėtį ir daugybą koordinacių plokštumoje. Dabar kompleksiniai skaičiai jau igavo visai kitą prasmę. Galima sakyti, geometrinės interpretacijos atradimas užtruko visą amžių arba daugiau.

Simonas. Kažin, kai taip viskas vystosi, kas gi dėsis dar toliau?

Aš. Aš pats tai nemanau, kad kažkas stipriai kitokio dėsis. Praetą pamoką buvau užsiminęs, kad topologiją sujungus su vaizdo atpažinimo algoritmais buvo mokslinkų pastebėta, kad tolimiausiuose visatos kampuose galaktikos jungiasi kažkuo, kas panašu į gijomis susipynusius debesėlius. Tačiau ne visai tą galima vadinti matematika. Jau greičiau tai galima vadinti matematikos taikymais. O patys matematikai tik gerina vaizdo atpažinimo algoritmus, įrodo vis naujas teoremas topologijoje. Galbūt matematinių žinių poreikis tiriant kosmose ir paspartinti matematinius atradimus tam tikrose srityse. Tačiau yra vienas didelis skirtumas tarp dabartinės ir ankstesnės matematikos. Dabar mokslininkai dirba siaurose srityse. Tokiose kaip Kardiodidės kreivės praplėtimas n - matėje erdvėje. Tačiau dabartinės matematikos žinios yra neaprēpiamos vieno žmogaus protui taip, kaip per antiką arba per renesansą. Paskutinis genijus, kuris buvo pajėgus suprasti visą matematiką, mirė prieš 100 - 150 metų (neatsimenu vardo, bet jį galima rasti knygoje *V. Stakėnas. Matematikos istorijos skiautiniai*). Dabartinėje matematikoje vykstantys judėjimai didžiaja dalimi jau senai ištyrinėti, taigi jų teorija neturėtų stipriai keistis.

Simonas. O tai ką nagrinėja matematikos mokslininkai dabar?

Aš. Imkime štai pavyzdžiui vieną mūsų šalyje sėkmingiausią tavo tėvų amžiaus matematiką Giedrių Alkauską. Jis aš pažįstu kaip poetą, kompozitorių ir matematikos mokslininką. Kaip jis sako - aš pusantrų metų skiriu muzikai, o po to pusantrų matematikai. **Štai čia** nuejė iš pirmų lūpų išgirstume jo pristatymą apie pačius naujausius jo mokslinius darbus. Ar ką nors pavyko suprasti?

Simonas. Ne.

Aš. Man beveik irgi ne.

Kompleksinių skaičių sudėjimai ir dauginimai

Aš. Prieš pradedant kalbėti apie kompleksinius skaičius reikštų mažų mažiausiai žinoti, kaip bet kuris taškas gali būti aprašytas skaičiais. Mano kompiuteryje matome įjungtą programą [Geogebra Classic 6](#). Tai labai populiarai programa, kurią naudoja visas pasaulis. Pavyzdžiu šios programos naudojimas yra ištrauktas iš prancūzų moksleivių matematikos programą. Dabar savo kompiuteryje aš pažymėsiu vieną tašką. Ar galėtum pasakyti jo „skaičius“?

Simonas. Taip, tai būtų koordinatės (2; 3).

Aš. Žinoma, teisingai. Kiekvienam taškui aprašyti reikia dviejų skaičių, vadina-
mų jo koordinatėmis, ir ne kitaip. O dabar pažymėsiu keletą kitų taškų. Kokios
yra jų koordinatės?

Simonas. (1; 5), (-2; 2) ir (1; 3).

Aš. Viskas būtų gerai, tik taško C koordinatę pasakei visai ne tokia.

Simonas. Aaa... Tai turi būti (1; -3).

Aš. Na matai. Tai ir su paprasta koordinačių sistema trūksta patirties. Ką ir
bekalbėti apie kompleksinius skaičius, kurių mokykloje nebus. Tačiau laiko mes
daug neturim ir reikia pagaliau atsakyti į klausimą, kas ta Malderbroto aibė,
tad iš karto eisim prie kompleksinių skaičių. Tik ateičiai tau, Simonai, reikšt
nepamiršti, kad ir paprastoje koordinačių sistemoje,

kurią eina kaip tik šeštoje klasėje, tu dar ne visai gaudaisi. Tu jau minėjai, kad ši tą žinai apie neigiamus skai-
čius, nors mokykloje juos eisite tik kitoje klasėje. Pavyzdžiu, kam lygu $-3 \times (-5)$?

Simonas. Aš atsimenu, kad 15.

Aš. Taip, teisingai. Sudauginus du neigiamus skaičius visuomet gausime teigiamą. Tačiau renesanso pradžioje
neigiami skaičiai buvo kažkas, ką matematikai vengė naudoti. Labiausiai juos erzino, kad negalime traukti iš jų
šaknies. Pavyzdžiu, juk galima ištraukti iš 9 šaknį?

Simonas. Aš galiu. Tai bus 3.

Aš. O kokia būtų šaknis iš -9?

Simonas. Nežinau. Galvoju, kad tai nesąmonė. Iš tikrujų, 3 negali būti. Bet negali būti ir -3, nes jis padaugine
su savimi turėsime 9.

Aš. Labai geros mintys. Iš tiesų, šaknis iš -9 negali būti traukiama. Nesigauna
joks skaičius, kurio sandauga su savimi būtų -9. Tačiau, jei matematikai nebūtų
apsimetę, kad toks skaičius yra, tai matematika visai nebūtų pasistūmusi į priekį.
Taigi, jie paėmė ir pažymėjo skaičių $\sqrt{-1}$ simboliu i (*imaginary* - įsivaizduojamas). Paaiškėjo, kad visos dauginimo ir sudėties taisyklės, kurias mes šiandien
šiek tiek pasimokėme su daugianariais, tokiems skaičiams irgi tinkta. Pavyzdžiu,
paimkime skaičių $2 + 3i$. Jame yra „kažkiek“ realiosios dalies ir „kažkiek“ įsi-
vaizduojamos. Realiosios dalies dydis yra 2, o įsivaizduojamos, kuri pasako, kiek
skaičiuje yra šaknų iš -1, dydis yra 3. Pavyzdžiu imkime ir sudékime du kom-
pleksinius skaičius: $2 + 3i$ ir $1 + 2i$. Dabar galime pasižiūrėti, kaip jie sudedami
koordinačių plokštumoje. Ar galėtum joje pažymeti taškus $(2; 3)$ ir $(1; 2)$.

Simonas. Taip, štai jie.

Aš. Teisingai. Dabar aš pasiimsiu tašką A ir paslinksiu jį taip, kaip yra pasislinkęs
taškas B nuo 0. Mano brėžinys atrodys štai taip. Ar suprant, kas čia įvyko?

Simonas. Tiesą sakant, nelabai.

Aš. Na, nieko keisto. Šitas dalykas nėra pats sudétingiausias, tačiau jis vis tiek mokiniai tik 11 klasėje. Tiesa,
tema, kur reikia slankioti taškus, vadinasi *vektorai*. Tačiau vienuoliktokai ją taip greit išeina, kad dažnai ir nespėja
suprasti, kas tie vektorai. Manau, jog su kompleksinių skaičių sudėtimi šiandien daug mokytis neverta. Tau užteks
žinoti, kad kompleksiniai skaičiai gali būti vaizduojami kaip taškai koordinačių plokštumoje, ir kad juos sudėjė mes
gauname kitą skaičių, kurio vietą plokštumoje taip pat galima gauti ir geometriškai. Šiuo atveju matome, kad gaunasi
gražus lygiagretainis. O dabar panagriniukime kompleksinių skaičių daugybą. Tuo duosiu tau užduotélę. Ar galėtum
sudauginti išraišką $1 + i$ su savimi taip, kaip mes mokémės su lentelėmis?

Simonas. (Manės padedamas bando):

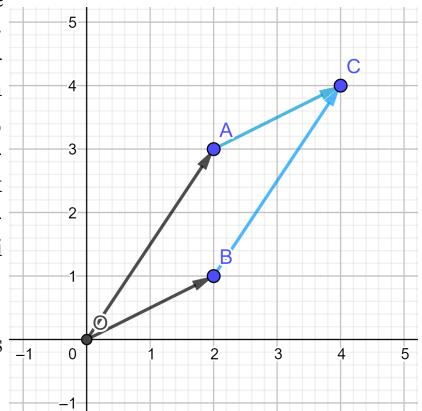
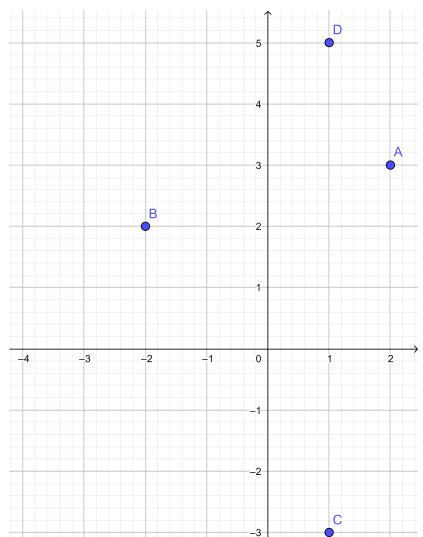
	1	i
1	1	i
i	i	?

Nesuprantu, kaip toliau daryti.

Aš. Norint suprasti, kam lygu $i \times i$, reikšt labiau pamästyti apie tai, kaip mes suprantame, kas yra šaknis iš
skaičiaus. Kaip tu suprantai šaknį?

Simonas. Tai yra tai, ką reikia padauginti iš savęs, kad gautume pošaknį.

Aš. Teisingai. O ką reikia padauginti iš savęs, kad gautume -1?



Simonas. Bet juk tokio skaičiaus nėra. Jei dauginame neigiamą iš neigiamo, gausime teigiamą. Su teigiamais - tuo labiau.

Aš. Bet mes juk tik ką kalbėjome, kad skaičius $i = \sqrt{-1}$, yra būtent tai, ką reikia padauginti iš savęs, kad gautume -1 . Vadinas $i \times i = -1$. Ir nepaisant to, kad skaičiaus i tikrovėje nėra, o matematikai turėjo apsimesti, kad jis yra, mes su juo atliekame veiksmus. Baigiamo pildyti lentelę:

	1	i
1	1	i
i	i	-1

I ką susideda visi langeliai?

Simonas. Na, 1 ir 1 atsiima, tai lieka i ir i . Tada gaunasi $2i$.

Aš. Taip, visi langeliai susideda į $2i$. Gaunasi netikėtas rezultatas: $(1+i)^2 = 2i$. Tolimesnę pamoką kompleksinių skaičių nedauginsime, nes jie juk nejeina į mokyklinę programą. Paliksiu šį darbą kompiuteriui. Tik prieš tai man reikės šiek tiek laiko paprogramuoti, o tu galési pamatyti, kaip greitai šiaiš laikais galima atliki matematinius skaičiavimus naudojant kompiuterį.

(*Po 3 minučių programavimo.*)

```
import sympy as sp
from IPython.display import display
sp.init_printing()
z, c1, c2 = sp.symbols("z c1, c2", real=True)
c1, c2 = 1, 1
c = c1+sp.I*c2
z= c
print(r'$\begin{array}{|c|c|c|}\hline')
for i in range(11):
    #print(' &'.join([str(i+1),sp.latex(z),sp.latex(sp.expand_complex(z))]) + r' \\ \hline')
    display(sp.expand_complex(z))
    z=z*c
print(r'\end{array}$')
```

Savo programe aš skaičių $1 + i$ dauginu iš savęs 10 kartų.

Programa išmeta tokį rezultatą:

Žingsnis	Veiksmas	Rezultatas
1	$1 + i$	$1 + i$
2	$(1 + i)^2$	$2i$
3	$(1 + i)^3$	$-2 + 2i$
4	$(1 + i)^4$	-4
5	$(1 + i)^5$	$-4 - 4i$
6	$(1 + i)^6$	$-8i$
7	$(1 + i)^7$	$8 - 8i$
8	$(1 + i)^8$	16
9	$(1 + i)^9$	$16 + 16i$
10	$(1 + i)^{10}$	$32i$

Šalia parašysiu tuos skaičius atitinkančių taškų koordinates:

Koordinatė
(1; 1)
(0; 2)
(-2; 2)
(-4; 0)
(-4; -4)
(0; -8)
(8; -8)
(16; 0)
(16; 16)
(0; 32)

Simonai, ar galėtum gautus taškus pavaizduoti koordinačių plokštumoje kompiuteryje?

Simonas. Galima pelė? (Vaizduoja taškus)... Štai taip (*Paveikslėlyje*)

Aš. (Lyg ir) vienas taškas iš pradžių pažymėti nesigavo, bet visi kiti gerai.

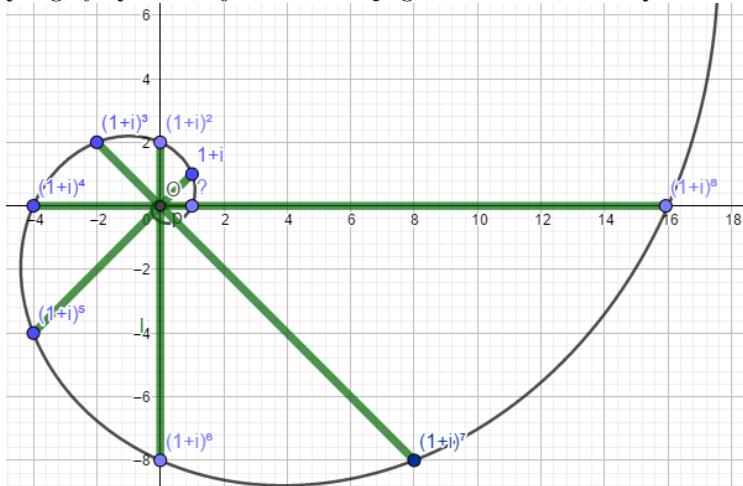
Paskutiniai štrichai suvokiant įstabujį fraktalą

Simonas. Klausykite, mums tuo bus likęs tik pusvalandis laiko. Gal bus galima jau eiti prie erdvinių kūnų, nes aš noriu dar iš jų pasiruošti.

Aš. Gerai, būtinai. Iš tikrujų, mums jau liko visai nedaug. Toki didelį darbą padarėm, tad gaila būtų neužbaigtai. Kaip manai, kaip koordinacijų plokštumoje būtų išsidėstę grafiko taškai, jei testume toliau?

Simonas. Manau, jog eis į begalybę ir gausis spiralė.

Aš. Taip, teisingai. Artėjimas į begalybę net gi turi savo pavadinimą: *divergimas*. Tai štai, ką Vikipedija turėjo mintyje sakydama, kad sekos nariai artėja į begalybę. Aš tuoju šiek tiek pagražinsiu savo brėžinį:



Aš. Tai štai kokios galios slypi kompleksiniuose skaičiuose. Jų daugyboje atsispindi fraktalai! Kaip tai vyksta?

Kompleksiniai skaičiai turi nuostabią savybę: kai juos daugini, jų pasiskimai nuo x koordinatės susideda, o atstumai nuo koordinacijų pradžios susidaugina. Pavyzdžiu išskicius $1 + i$ turi pasiskimą, lygį 45 laipsniams ir ilgi, lygį $\sqrt{2}$. Jei jį padauginsime iš savęs, darsyk prisdės tokis pats kampas, o nuotolis nuo koordinacijų pradžios taško susidaugins su $\sqrt{2}$ ir gausis ilgis, lygus 2. Todėl į skaičių $(1 + i)^2$ atitinkanti tašką nukreipta atkarpa bus pasiskusi 90 laipsnių. O jei $(1 + i)^2$ padaugintume dar iš $1 + i$, tai pamatybtume, kad naujoji atkarpa jau yra pasiskusi 135 laipsniais nuo x , o jos ilgis yra jau $2\sqrt{2}$.

Tačiau, deja, ne visus kompleksinius skaičius vis dauginant su savimi turėsime artėjimą į begalybę. Kartais taip dauginant kompleksinius skaičius jau greičiau važiuosime link tam tikro taško, negu, kad į begalybę.

Na, o dabar jau jmanoma paaiškinti, ir kas ta Malderbroto aibė. Tai yra aibė, sudaryta iš tokų kompleksinių skaičių, kuomet pakartotinai atliekant tam tikrą veiksmą, rezultatai artės link tam tikro skaičiaus, bet ne į begalybę. Šie skaičiai atitinka koordinacijų plokštumos taškus. Jie yra išsidėstę taip įdomiai, kaip ligi praeito amžiaus galo dar niekas nebuvo matę. Paveikslėlyje matome juodą sritį. Ji sudaryta, iš juodų taškų. Šie juodi taškai atitinka skaičius, su kuriais pakartotinai atliekant tą pačią operaciją, nauji rezultatai artės į tam tikrą sritį, kuri nėra ties begalybe. Tuo tarpu atliekant tą operaciją su užribyje likusiais taškais, gausime rezultatus, kurie bus vis artimesni begalybei, kaip ir toje kriauklėje, kurią nagrinėjome. Na, o jei dar pridėsime spalvas ir jas parinksime pagal tai, kokiui greičiu skaičiai artėja į begalybę, tai ir gausime įstabujį mirguliuojantį Mandelbroto fraktalą.

Moralas

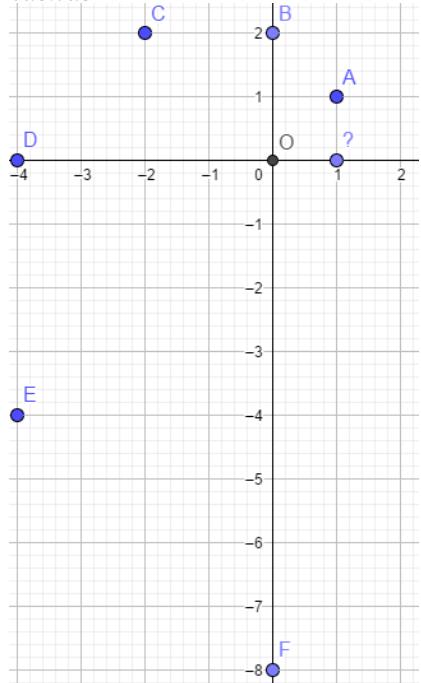
Informacijos interneite yra labai daug, bet ar tikrai aišku, kaip ja naudotis?

- Ar aš tikrai suprantu tai, apie ką skaitau? Kas ta *Malderbroto aibė*? Kiek kartų ji priartinama?
- Ar aš tikrai suprantu kiekvieną žodį, einantį į tiriamo objekto apibrėžimą. Ką reiškia apibrėžime naudojamos sąvokos: *complex numbers, functions, diverge, iterated, bounded*?
- Ar teiginiai tikrai teisingi? Ar aibės padidinimas 10^{198} kartų tikrai yra pasaulio rekordas?
- Kur ieškotume reikiemis informacijos? [Google](#), [Youtube](#), [lietuviška Vikipedija](#), [angliška Vikipedija](#), [Quora](#), [Wolfram](#)

Detalės, likusios užkulisiuose, bet nemažiau svarbios

Operacija, kurią pakartotinai atlieka, Malderbroto aibėje yra kėlimas kvadratu ir pasirinkto skaičiaus c pridėjimas. Pavyzdžiu, jei $c = i$, tai gaunasi tokia seka:

Štai čia *Simonas* vaizduoja taškus:



Sekos narys	Nesuprastinta skaičiaus išraiška	Suprastinta išraiška
0	0	0
1	i	i
2	$\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}$	$-1+i$
3	$\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i$	$-i$
4	$\left(\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i\right)^2+i$	$-1+i$
5	$\left(\left(\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i$	$-i$
6	$\left(\left(\left(\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i$	$-1+i$
7	$\left(\left(\left(\left(\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i$	$-i$
8	$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i$	$-1+i$
9	$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i$	$-i$
10	$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{-1+i}{(-1+i)^2+i}\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i\right)^2+i$	$-1+i$

Kadangi néra artėjimo į begalybę, tai skaičius $c = i$ priklauso Malderbroto aibei.

Geogebros puslapyje yra patalpinta interaktyvi žingsnių Malderbroto aibėje [vizualizacija](#). Ant fraktalo galima užvesti tašką, kuris atitinka skaičių c . Tuomet paveikslėlyje bus pailiustruotas tašką, gautą sekos 0, c , $c^2 + c$... kiekvieną narių pakeliant kvadratū ir pridedant c , rinkinys. Malderbroto aibėje bus stebimas sekos narių artėjimas į vieną tašką, o už jos ribų - vis platesnis išsiskirstymas.

UŽDUOTYS

Nors pateikiamus pratimus galima išspręsti remiantis šia medžiaga, tačiau į pateikiamus klausimus atsakymų reiktų ieškoti internete. Atsakymų spėlioti nereikėtų, o vietoj to reikėtų įgusti susirasti reikiama informaciją internete per kuo trumpesnį laiką.

1. Kas vadinama fraktalu?
2. Kada buvo atrasta Malderbroto aibė?

Kaip pasileisti python?

- Reikės atsisiųsti ji [iš čia](#)
- Reikės aplinkos su kuria dirbsime. Patartina naudoti [Spyder](#)

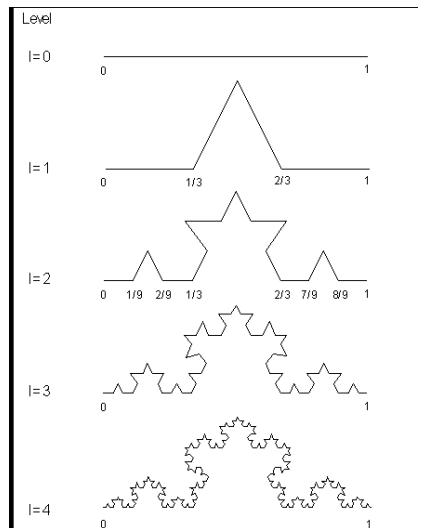
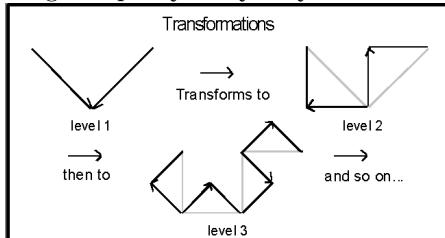
3. Pabandykite susiinstaliuoti Python savo kompiuteryje ir paleisti šias eilutes:

```
from time import*
t=time(); [i**2 for i in range(10000000)]; print(time()-t)
```

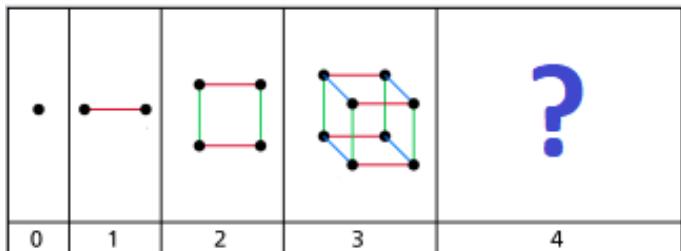
Programa naudoja `time` modulį, kad apskaičiuotų savo veikimo laiką. Pačioje programoje yra keliami kvadratu skaičiai nuo 0 iki 10000000 milijonų. Kiek laiko kvadratu yra keliamas vienas skaičius? Kaip pasikeis situacija, jei skaičių kelsime kubu?

[Šiame puslapyje](#) yra apžvelgiami žymiausi fraktalai.

4. Ar galite prateesti šią seką?



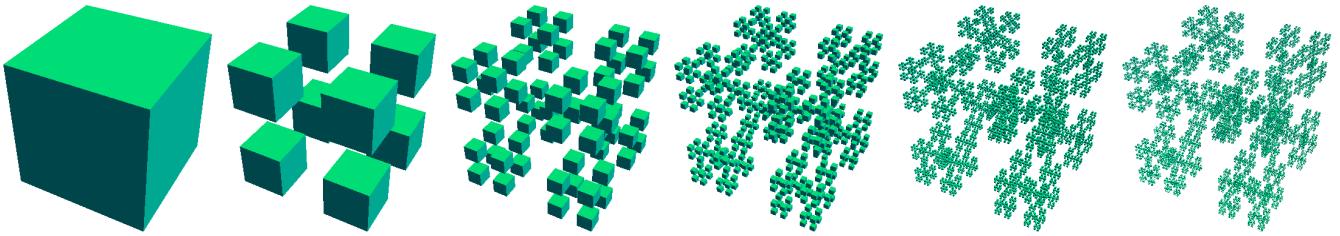
5. Tęsiant šią seką kaip parodyta yra gaunamas vis tikslesnis Drakono kreivės priartinimas. Kaip pasikeis kreivės ilgis po bet kurių 10 žingsnių?
6. Kokie yra pavaizduotų kreivių ilgiai, jei pirmosios ilgis yra lygus 1? (pav. dešinėje)
7. Ar jums pavyks nupiešti keturmatį kubą? Jį gausite pateiktoje sekoje suradę nežinomą nari:



HACK! Jei jums nepavyko sugalvoti atsakymo, dar ne viskas prarasta. Yra būdas, kaip reiktų ieškoti atsakymo internete.

- Jei naudojate Windows, savo kompiuteryje susiraskite programėlę ***Snipping Tool*** (*Iškarpu įrankis*).
- Iš šio failo išsikirpkite sekos paveikslėlių ir išsisaugokite.
- Google paieškoje paspauskite ***Images(Vaizdai)*** ir įkelkite išsaugotą paveikslėliuką
- Jei viskas pavyks, paieška turėtų atrasti panašų paveikslėlių su atsakymu ir nuoroda į tinklapį, iš kurio paveikslėlis buvo paimtas.

8. Čia pateikiamas Kantoro aibės išémimų variantas, atliekamas su kubais:



Tarkime, jog pradinio kubo tūris lygus 1. Ar galėtumėte nustatyti kitų kubų tūrius? Link kokio skaičiaus jie artėja?

9. Ankstesnio pratimo iliustracija pateikiama susiradus [angliškos Vikipedijos straipsnį](#) apie Kantoro aibę. Animaciją galima rasti prie skyrelio „Cantor dust”. Tarkime, jog norime sužinoti, kaip toks fraktalus vadinasi. Parodysiu, kaip tokio tinkamo klausimo iškėlimas leidžia atrasti kitų naudingų nuorodų:

- Animaciją galima rasti prie skyrelio „Cantor dust”.
- Tame pačiame skyrelyje yra pateikiama [nuoroda](#) į kitą panašų fraktalą.
- Iš [Vikipedijos straipsnio](#) apie fraktalus arba išsivertę sužinome, kad šis panašus fraktalus vadinamas Mengerio kempine.
- Ieškome lietuviškų nuorodų apie [Mengerio kempine](#) ir atrandame [nuoroda](#), kurioje kalbama, kaip fraktalai susiję su fizika.
- Paėjė anksčiau matome, kad surastas puslapis gali pasiūlyti ir daugybę kitų lietuviškų ir įdomių straipsnių apie fiziką.
- Labiausiai mus turėtų dominti straipsnio dalys, kuriose kalba apie fraktalus. Joms surasti naudojame klavišų kombinaciją *CTRL + F*
- Dažniausiai žodžiuose, prasidedančiuose „fraktal” bus paslėpta nuoroda į kitą interneto adresą. Kokį?
- Ar galite nuėjė į šį adresą matyti įspūdingąsias Mandelbroto fraktalo nuotraukas?

Ar remdamiesi šiuo straipsniu galėtumėte atsakyti, kaip fraktalai susiję su fizika? Ar galėtumėte atsakyti ne tik, kada buvo atrasta Malderbroto aibė, bet ir kada žinios apie ją buvo pradėtos populiarinti Lietuvoje?

Tolimesnių uždavinių atsakymus padės pasitikrinti [Wolfram Alpha](#)

10. Ši užduotis atitinka dabartinės mokyklos 8 klasę, tačiau čia pristatomos jų atlikimo metodas yra daug paprastesnis už mokykloje mokomą kitą metodą. Kompleksiniai skaičiai mokykloje nemokomi, tačiau jų veiksmus galima atlikti remiantis šiuo palengvintu (lentelės) metodu.

Atlikite šiuos veiksmus remdamiesi lentelėmis:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $51 \times 69 = (60 - 9) \times (60 + 9) = ?$ | b) $89 \times 91 = ?$ | c) $49 \times 49 = (50 - 1) \times (50 - 1) = ?$ |
| d) $64 \times 64 = (60 + 4) \times (60 + 4) = ?$ | e) $(x - 2) \times (x + 2) = ?$ | f) $(x - \sqrt{3}) \times (x + \sqrt{3}) = ?$ |
| g) $(x + 2) \times (x + 2) = ?$ | h) $(x - 3) \times (x - 3) = ?$ | i) $(a + b) \times (a + b) = ?$ |
| j) $(a - b) \times (a - b) = ?$ | k) $(a + b) \times (a - b) = ?$ | l) $(a + b) \times (a^2 - ab + b^2) = ?$ |
| m) $(a - b) \times (a^2 + ab + b^2) = ?$ | n) $(x - 1) \times (x^3 + x^2 + x + 1) = ?$ | o) $(x - 1) \times (x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = ?$ |
| p) $(x^2 - 2x + 2) \times (x^2 + 2x + 2) = ?$ | q) $(a + b + c) \times (a + b + c) = ?$ | |
| r) $(a + b + c) \times (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = ?$ | | |
| s) $(1 + x + x^2 + x^3) \times (1 + x + x^2 + x^3) = ?$ | | |
| t) $(a - b)(b - c)(c - a) = ?$ | | |
| u) $(1 + 2i) \times (2 + 3i) = ?$ | v) $(1 + 2i) \times (1 - 2i) = ?$ | w) $(x + i)(x - i) = ?$ |
| x) $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \times (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = ?$ | | |

11. **IDÉJA KITAM PROJEKTUI.** Šiame video publiką stulbina žmogus, galintis per minutę sudauginti du penkiaženklius skaičius. Ar galėtumėte apibūdinti bent keletą jo naudojamų metodų? Ar šis veikėjas galėtų sumušti pasaulio rekordą?
12. * Kuo ankstesnio uždavinio paskutinysis variantas yra susijęs su kauliuko ridenimu dusyk? Kuo lygybė $(s+h)^5 = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1$ yra susijusi su monetos metimu 5 kartus?
13. Kompleksinių skaičių koordinatėse pažymėkite šiuos skaičius:
- | | | | |
|-------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| a) $1 + 2i$ | b) $1 - 2i$ | c) $2 + 3i$ | d) $8 - i$ |
| e) $1, 2, 2^2$ ir 2^3 | f) $2, 2i, (2i)^2$ ir $(2i)^3$ | g) $-1, -2, (-2)^2$ ir $(-2)^3$ | h) $-2, (-2i), (-2i)^2$ ir $(-2i)^3$ |
14. *Kokį veiksmą (veiksmus) reiktų atlikti ankstesniame pratime, kad taškai išsidėstyti į taisyklingą daugiakampį?
15. Kokį skaičių dauginant iš savęs gausime 3? O jei daugintume 5 kartus? Jei nepavyksta pasakyti tiksliai, pasakykite bent apytiksliai.
16. **IDÉJA KITAM PROJEKTUI.** Šiame straipsnyje susipažinome su dviejų skirtingu pakartotinių kompleksinių skaičių operacijų pavaizdavimu kompleksinių skaičių plokštumoje. Kokių? Ar galima išrasti daugiau tokų operacijų?