

Moksleiviai dažnai neatsimena, kaip spręsti uždavinius, kuriuos jie mokėsi spręsti prieš kelias pamokas, o mokytojai dažnai nustemba, kaip tokių lengvų uždavinių galima neišspręsti. Supaprastintas šio reiškinių paaiškinimas būtų tai, jog matematikos mokymosi sėkmingumas priklauso ne vien nuo ilgalaikio autoritariniu būdu mokomų procedūrų atlikinėjimo tol, kol jos yra įsisavinamos, bet ir nuo įvairių mąstymo būdų, suderintų su besimokančiojo abstraktaus mąstymo sugebėjimais, taikymo mokymosi metu (G. Harel, 2008). Toks paaiškinimas skatina (Simonas, 2018) kelti daugybę klausimų apie abstraktų mąstymą:

- Kaip greitai įvertinti moksleivio abstraktaus mąstymo gebėjimus?
- Kaip atrodo uždaviniai, kuriuose abstraktaus mąstymo gebėjimų reikia labiausiai?
- Kiek mokantis spręsti konkrečius matematinius uždavinius rezultatus nulemia atkaklus darbas, o kiek abstraktaus mąstymo gebėjimai?
- Kaip galima abstraktaus mąstymo gebėjimus ugdyti pamokose?

Šis tekstas yra tarsi ankstesnio straipsnelio *Vystymosi įtaka matematikos mokymuisi* tęsinys. Straipsnelyje buvo pateiktas modelis, pagal kurį vertinama raida, o čia abstraktus mąstymas negriežtai vadinamas mąstymu, kuris pasižymi formalių operacijų stadijos savybėmis. O šioje dalyje aptarsiu galimus testavimo būdus, paremtus šiuo modeliu ir pasiūlytus įvairiuose pasaulyje atliktuose tyrimuose, lietuvių moksleivių rezultatuose bei pasiūlytus mano paties.

## Dabartinis darbinis modelis, skirtas įvertinti abstrakčiam mąstymui

Melvin Thornton savo straipsnyje cituoja J. D. Herron (1975), L. Copes (1975) ir darbą, kur siūlo būdą gebėjimams įvertinti daug detaliau.

Konkrečios operacijos	Formalios operacijos
Atlikti matavimus ir stebėjimus	Įvertinti tokius dydžius kaip greitis ir pagreitis arba plotas ir tūris be tiesioginio matavimo
Teisingas atsakymas į klausimą <i>ko paveikslėlyje daugiau: stačiakampių ar kvadratų</i> tada, kai suvokiama, kad visi kvadratai yra stačiakampiai	pasirinkti, kuris teiginys teisingas: Visi stačiakampiai yra kvadratai Dalis stačiakampių yra kvadratai Tarp stačiakampių nėra kvadratų
Išrikiuoti lazdelių rinkinį pagal dydį	Mintinai įvertinti, kas aukščiausias, jei Deividas yra aukštesnis už Dovydą, bet mažesnis už Darių
Atlikti elementarias aritmetines operacijas	taikyti perstatymo ir jungimo savybes skaičiavimuose
Pertvarkyti algebrinius reiškinius, kartu ir trupmenas	Nustatyti, kaip pasikeis $y$ , jei $x$ padidės duotose lygybėse $3x^2$ ir $y = \frac{1}{x}$
Apibendrinti gautus duomenis, pvz. nurodyti, kad visų kvadratinų reiškinių $x$ atžvilgiu grafikai atitinka parabolės	Apibendrinti reiškinius nepriklausomai nuo į juos įeinančių kintamųjų, pvz. suvokti, kad parabolės gali atitikti reiškinius, nebūtinai turintys $x$

Remdamasis savo vėlesnio darbo patirtimi, jis siūlo praplėsti sąrašą (dar neišversta):

<u>Can</u>	<u>But Can't</u>
solve $x/3 = 7/5$ for $x$	find the shadow of a three foot child when his five foot mother has a seven foot shadow
change a number from base ten into base two using a memorized procedure	use the analogous process to write numbers in base three
write numbers in scientific notation	solve linear equations with coefficients written in scientific notation
apply memorized formulas to find the mean and standard deviation	decide whether the computed mean and standard deviation are at all reasonable for the data
find the intersection of two given finite sets	draw a Venn diagram to represent "some A are also B"
list all possible outcomes of flipping two coins	easily list the outcomes of three and certainly not for four coins
work through a flowchart with a given set of data points	discover that the flowchart just counts the positive data
write simple truth tables involving implication	gives a specific example of the denied antecedent fallacy
compute what percent 6 is of 8	find the percent change from 8 to 6.

## Testai, kurių rezultatai žinomi

Skliausteliuose esantys duomenys reiškia, jog buvo surengta baigusių mokyklą dalyvių apklausa, ir nurodo vietą, datą, dalyvių skaičių ir teisingų atsakymų procentinę dalį.

1. (1944m., York University, Torontas, <61%) Įsivaizduokite, jog rankose suspaudžiate molinį rutulį ir pakeičiate jo formą. Nustatykite, ar pasikeis:
  - a) Molio kiekis.
  - b) Rutulio svoris.
  - c) Rutulio tūris.
2. (1973m., University of Oklahoma, 185, 72%) Abu rutuliai yra vienodo tūrio. Kuris rutulys išstums (iš sklidino indo) daugiau vandens: sunkesnis ar lengvesnis?
3. (1944m., York University, Torontas, <63%) Žinoma, kad pasibaigus antram pasauliniui karui dalis negailestingų vyrų susilaukė žiaurios mirties. Kadangi Heidrichas buvo vienas negailestingiausių fašistų budelių, tai (*užbaikite sakinį*):
  - Heidrichas, fašistų budelis, susilaukė žiaurios mirties.
  - Heidrichas galbūt susilaukė žiaurios mirties.
  - Heidrichas nesusilaukė žiaurios mirties.
  - Nei vienas iš šių teiginių nėra logiškai teisingas.
4. Žinoma, kad visi mokytojai yra pedagogai. Įvardykite, kuris teiginys teisingas:
  - a) Visi pedagogai yra mokytojai.
  - b) Kai kurie pedagogai yra mokytojai.
  - c) Nėra pedagogų, kurie nebūtų ir mokytojai.
5. (1981m., Thornton and Fuller, >1000, 60% of verbal, 80% of symbolic). Saulė įstrižai šviečia į penkių metrų aukščio medį ir medis meta septynių metrų šešėlį. Kokio ilgio šešėlį meta kitas medis, kurio aukštis yra trys metrai? [Sąlyga pakoreguota]
6. (2014m. neprivalomas VBE, 50%) Automobilio greitis 25 proc. didesnis už motociklo greitį. Apskaičiuokite motociklo greitį, jei automobilio greitis yra 85 km/h.
7. (perfrazavus 2015m. neprivalomame VBE, 74%) Kubo kraštinės padidiname trigubai. Kaip pasikeitė šio kubo tūris?

Papildomi klausimai, pagal Melvin C. Thornton

8. Ant stalo padėti du buteliukai: vienas 3 decimetrų aukščio, o kitas 5 decimetrų. Aukštesnio buteliuko šešėlis yra nutįsęs 7 decimetrus. Kiek nutįsęs žemesnio buteliuko šešėlis?
9. Keliais procentais sumažėjo dydis, jei jo reikšmė sumažėjo nuo 8 ligi 6?

## Mano interpretacija

10. Pateikite po pavyzdį, kaip apskaičiuotumėte šiuos dydžius (be matavimo prietaisų): greitį, pagreitį, plotą ir tūrį.
11. Keturi draugai valgė ledus. Mikas suvalgė daugiau nei Tadas, Jonas suvalgė daugiau nei Vytas, Jonas suvalgė mažiau nei Tadas. Išrikiuokite berniukus nuo suvalgiusio daugiausiai iki suvalgiusio mažiausiai.
12. Moneta yra metama 4 kartus. Surašykite visas įmanomas šio eksperimento baigtis (baigties užrašymo pavyzdys: SHHS).
13. Kitą savaitę iš 5 galimų miestų A, B, C, D ir E aš nusprendžiau aplankyti tris. Surašykite visus galimus mano pasirinkimus (pasirinkimo užrašymo pavyzdys: ACE).
14. Restoranas siūlo 4 skirtingų rūšių kavas, kurias pažymėkime skaičiais 1, 2, 3 ir 4. Aš nusprendžiau 4 artimiausias dienas išbandyti po kiekvieną prieš tai nebandytą šio rinkinio kavą, tačiau pirmą dieną 2 ir 4 kavos bandyti nenoriu. Surašykite visas galimas eilės tvarkas, pagal kurias aš galiu šias kavas išbandyti (eilės tvarkos užrašymo pavyzdys: 3241).
15. Duotas reiškinys  $\frac{1}{x}$ . Nustatykite kaip kinta šio reiškinio reikšmė, kai  $x$  reikšmė didėja?

## Mano interpretacija: platesni tyrinėjimai

16. Duomenų rinkinyje yra 2000 skaičių. Programuotojas užrašė programą, kuri kiekvieną iš šių skaičių padidina 10 vienetų. Kaip paleidus jo sukurtą programą pasikeičia šių 2000 skaičių suma?
17. Kam daugiausiai gali būti lygus stačiakampio plotas, jei jo perimetras lygus 8?
18. Apytiksliai įvertinkite skaičių, kurį sudauginę su savimi 12 kartų gausite 2.
19. Su kuriuo  $N$  dešimtainis skaičiaus  $1/N$  užrašas turės pabaigą?
20. Kaip pasikeis rezultatas, jei dalmenį sumažinsime 3 kartus?
21. Kiek yra dviženkliai skaičiai?
22. Kaip keisis rezultatas iš jo daug kartų traukiant šaknį?
23. Ar šaknų iš skaičių sandauga lygi šakniai iš skaičių sandaugos?