Turinys

1 skyrius

Lygtys

Lygtis - tai lygybė, kurioje siūloma rasti tokias nežinomųjų reikšmes, su kuriomis ji taptų teisinga. Šios reikšmės vadinamos lygties sprendiniais. Išspręsti lygtį reiškia rasti visus jos sprendinius.

Kokius veiksmus leidžiama atlikti su lygtimi?

- Kiekvienoje lygties pusėje esančius reiškinius galima pertvarkyti (pavyzdžiui atskliausti ir sutraukti panašiuosius narius).

$$(x+2)(x+1) = x(x+5)$$
$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 5x$$

- Prie abiejų lygties pusių galima pridėti arba iš jų atimti kokį nors skaičių. Jei norime pridėti arba atimti kokį nors lygtyje esantį narį, tai sakome, kad jį perkeliame į kitą lygties pusę. **Perkeliant narį keičiasi ženklas!**

$$\cancel{x^2} + 3x + 2 = \cancel{x^2} + 5x$$
$$3x + 2 = 5x$$
$$3x - 5x + 2 = 0$$
$$3x - 5x = -2$$

- Abi lygties puses galime padauginti arba padalinti iš kokio nors **nelygaus 0** skaičiaus.

$$-2x = -2$$
$$x = 1$$

Kaip pradėti spręsti lygtį?

Remdamiesi šiais leistinais veiksmais kiekvieną lygtį, nepriklausomai nuo jos sudėtingumo, pradėsime spręsti nuo jos **sutvarkymo**. Taikant bet kurį lygčių sprendimo metodą visada tikrinsime ar galima sutvarkyti lygtį vienu iš šių būdų:

$\frac{3x-2x}{x-6} = 2 \cdot \frac{3}{x-6}$, $\boxed{x-6 \neq 0}$

1. Jeigu lygtyje yra trupmena, tai abejas lygties puses dauginame iš jos vardiklio. Jei yra kelios trupmenos, dauginame iš jų vardiklių sandaugos. Gautas naujas trupmenas suprastiname. **Nurodome sąlygą: skaičiai, iš kurių dauginome, negali būti lygūs 0**

$3x - 2x = 2 \cdot 3$

2. Jeigu lygtyje yra nesutvarkytų sandaugų, jas sudauginame

$3x - 2x = 6$

3. Jeigu lygtyje yra panašiųjų narių, juos sudedame.

$x = 6$

Lygties sprendimo pabaigoje nepamirštame patikrinti sąlygos. Gavome sprendinį, kuris prieštarauja sąlygai, kad $\boxed{x-6 \neq 0}$. Vadinasi, lygtis $\frac{3x-2x}{x-6} = 2 \cdot \frac{3}{x-6}$ neturi sprendinių. Rašome $x \in \emptyset$. Šiame pavyzdyje neprireikė jokių kitų sprendimo metodų, tik lygties sutvarkymo. **Tik išmokus be klaidų sutvarkyti lygtį, galime nagrinėti tolimesnį lygčių kursą.**

Išimtiniai atvejai

Lygtys, kuriose lygybė niekada negali galioti (pvz. -1=3) **sprendinių neturi**.

Lygtys, kuriose lygybė visada galioja (pvz. 6=6) **turi be galo daug sprendinių**.

1.1 Tiesinės lygtys

Tai lygtys, kurių išraiška yra $ax + b = 0$

Norint sėkmingai spręsti tiesines lygtis, reikia išmokti veiksmų seką, kurią vykdant atsakymą gausime ne tik visada, bet ir greičiausiu būdu:

- Iš pradžių lygtį **sutvarkome**.
- Atskiriame vienanarius nuo paprastųjų skaičių ir sukeliame juos į skirtingas puses **nepamiršdami pakeisti jų ženklo**. Atlikus panašiųjų narių sutraukimą, vienoje lygties pusėje turime gauti vienanarį, o kitoje - paprastąjį skaičių
- Padalíję abi lygties puses iš vienanario koeficiento, gauname nežinomojo reikšmę
- Patikriname, ar nežinomojo reikšmė atitinka **sąlygąs, leidžiančias atlikti pertvarkymus**
- Jeigu abejojame, ar nepadarėme klaidų, patikriname, ar gautasis sprendinys tenkina pradinę lygtį

Sprendimo pavyzdys 1

$$\frac{x-2}{3}+1=\frac{2x}{7}$$

Įsitikiname, kad trupmenų vardiklių sandauga 21 nelygi 0, tada iš jos padauginame

$$21\cdot\left(\frac{x-2}{3}+1\right)=21\cdot\frac{2x}{7}\cdot 2x$$

Abi puses pertvarkome

$$7(x-2)+21=6x$$

$$7x-14+21=6x$$

$$7x+7=6x$$

vienanarius surenkame į kairę lygties pusę, o laisvuosius narius į dešinę pusę

$$7x-6x=-7$$

sutvarkome lygtį

$$x=-7$$

gavome atsakymą

Sprendimo pavyzdys 2

$\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x}$

Dauginame abejas puses iš sandaugos $x(x-3)(x+3)$ ir nurodome sąlygas: $\boxed{x\neq 0,\ x-3\neq 0,\ x+3\neq 0}$.

$$\frac{2x}{\cancel{x-3}}\cdot(\cancel{x-3})(x+3)+\frac{1}{\cancel{x+3}}\cdot(x-3)(\cancel{x+3})=\frac{3}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}(x-3)(x+3)$$

Sutvarkome lygtį: atskliaudžiame dauginamuosius, sudedame panašiuosius narius

$2x(x+3)+x(x-3)=3(x-3)(x+3)$

$2x^2+6x+x^2-3x=3(x^2-9)$

$\cancel{3x^2}+3x=\cancel{3x^2}-27$

$3x=-27$

Abi lygties puses dalijame iš 3.

$x=-9$

Patikriname, ar gauta reikšmė tenkina sąlygas: $\boxed{x \neq 0,\ x-3 \neq 0,\ x+3 \neq 0}$. Įsitikiname, kad tenkina, vadinasi -9 yra vienintelis lygties $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x}$ sprendinys.

2 skyrius

Lygčių sistemos

Lygčių sistemos sprendiniu vadinamas toks nežinomųjų rinkinys, su kuriuo kiekviena sistemos lygtis yra teisinga.

2.1 Dviejų tiesinių lygčių sistemos

Sprendžiamos keitimo arba sudėties/atimties būdu.

Keitimo būdas

- Bet kurios lygties vieną nežinomąjį išreiškiame kitu. Stengiamės pasirinkti tą lygtį, iš kurios išreikšti lengviau.

  $$\begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ x - y = 9 \Leftrightarrow x = 9 + y \end{cases}$$

- Gautą išraišką įrašome į kitą sistemos lygtį.

  $$\begin{cases} 7x + 4y = 8 \Leftrightarrow 7(9 + y) + 4y = 8 \\ x = 9 + y \end{cases}$$

- Išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju.

  $$\begin{cases} 7(9 + y) + 4y = 8 \Leftrightarrow 63 + 7y + 4y = 8 \Leftrightarrow 63 + 11y = 8 \Leftrightarrow 11y = -55 \Leftrightarrow y = -5 \\ x = 9 + y \end{cases}$$

- Apskaičiuojame atitinkamas kito nežinomojo reikšmes.

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = 9 + (-5) = 4 \end{cases}$$

- Jeigu abejojame, ar nepadarėme klaidų, patikriname, ar gautieji sprendiniai tenkina pradinę sistemą.

  Gavome $(x, y) = (4, -5)$, įsitikiname, kad $\begin{cases} 7 \cdot (4) + 4 \cdot (-5) = 8 \\ 4 - (-5) = 9 \end{cases}$

2.2 Lygčių sistemos, kai viena lygtis netiesinė

Šio tipo sistemų sprendimas nuo ankstesnio tipo skiriasi tuo, kad sprendimo eigoje greičiausiai gausis kvadratinė lygtis, su kuria reikės susitvarkyti.

- Iš pradžių pasirenkame tiesinę lygtį, tada iš jos galime išreikšti kurį nors nežinomąjį

  $$\begin{cases} x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x \\ x^2 - xy = -1 \end{cases}$$

- Įrašę gautąją lygtį į kitą sistemos lygtį gausime netiesinę vieno nežinomojo lygtį

  $$\begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - x(3 - x) = -1 \end{cases}$$

- Šią lygtį išsprendžiame metodais, kuriuos esame išmokę

  $x^2 - x(3-x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + x^2 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$

- Kiekvienam gautam sprendiniui apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmes

  Kai $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 3 - x_1 = 2$ ir $x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = 3 - x_1 = 2\frac{1}{2}$

2.3 Kokias sistemas teko spręsti diferencialinėse lygtyse:

$$\begin{cases} C_2 + 1 = 3 \\ C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1 = 1 \\ 2C_2 + \frac{1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ 2C_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{6} = 0 \\ -C_1 - 2C_2 + \frac{1}{6} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = -\frac{8}{3} = 0 \end{cases}$$