b) $\begin{cases} 5x - 9 \le 0, \\ 2x + 7 \le 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 6 > 5, \\ 1 - 4x > 8. \end{cases}$

130. Daugianarį išskaidykite dauginamaisiais:

a) $y^4 - y^3 + 0{,}25y^2$; c) $x^2y^2 + 2x^2 - 8y^2 - 16$;

b) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x$; d) $6a^2b^2 + 3b^3 - 8a^2 - 4b$.

9. NELYGYBIŲ SPRENDIMAS INTERVALŲ METODU

Išnagrinėkime funkciją

$f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 5)$.

Šios funkcijos apibrėžimo sritis — visa skaičių aibė. Funkcijos nuliai yra skaičiai -2, 3, 5. Funkcijos apibrėžimo sritį jie suskaido į intervalus $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$ ir $(5; +\infty)$ (35 *a* pav.).

Reiškinys $(x + 2)(x - 3)(x - 5)$ yra trijų dauginamųjų sandauga. Lentelė rodo kiekvieno jų ženklą nagrinėjamame intervale:

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 3)$	$(3; 5)$	$(5; +\infty)$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	$+$

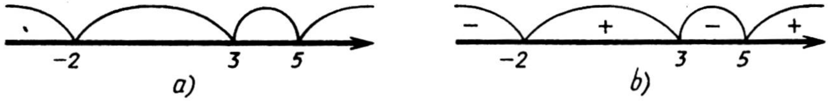
Matome, kad:

jei $x \in (-\infty; -2)$, tai $f(x) < 0$;
jei $x \in (-2; 3)$, tai $f(x) > 0$;
jei $x \in (3; 5)$, tai $f(x) < 0$;
jei $x \in (5; +\infty)$, tai $f(x) > 0$.

Kiekviename iš intervalų $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$, $(5; +\infty)$ funkcijos ženklas yra pastovus, o pereinant per taškus -2, 3 ir 5 jis keičiasi (35 *b* pav.).

Sakykime, kad funkcija išreikšta formule

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$,



35 pav.

kurios x — kintamasis, x_1, x_2, ..., x_n — vienas kitam nelygūs skaičiai. Skaičiai x_1, x_2, ..., x_n yra funkcijos nuliai. Jie funkcijos apibrėžimo sritį suskaido į intervalus. Kiekviename jų funkcijos ženklas pastovus, jis keičiasi pereinant per nulį.

Ši savybė taikoma sprendžiant tokias nelygybes:

$$(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0, \qquad (1)$$
$$(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) < 0,$$

čia x_1, x_2, ..., x_n — vienas kitam nelygūs skaičiai.

1 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę

$$(x + 6)(x + 1)(x - 4) < 0.$$

Ji tokia pat, kaip ir (1) nelygybės. Juk kairiojoje pusėje parašyta sandauga $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, kurios $x_1 = -6$, $x_2 = -1$ ir $x_3 = 4$. Sprendžiant ją, patogu taikyti pakaitomis besikeičiančių funkcijos ženklų savybę.

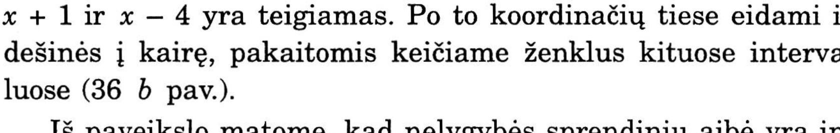
Koordinačių tiesėje pažymėkime funkcijos

$$f(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 4)$$

nulius (36 *a* pav.). Raskime funkcijos ženklą kiekviename šių intervalų: $(-\infty; -6)$, $(-6; -1)$, $(-1; 4)$ ir $(4; +\infty)$. Pakanka nustatyti funkcijos ženklą viename iš tų intervalų, o kituose juos keisime pakaitomis. Patogu pradėti nuo kraštinio dešiniojo intervalo $(4; +\infty)$, nes jame funkcija $f(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 4)$ tikrai yra teigiama. Iš tikrųjų: su visomis x reikšmėmis, esančiomis į dešinę nuo visų funkcijos nulių, kiekvienas iš dauginamųjų $x + 6$, $x + 1$ ir $x - 4$ yra teigiamas. Po to koordinačių tiese eidami iš dešinės į kairę, pakaitomis keičiame ženklus kituose intervaluose (36 *b* pav.).

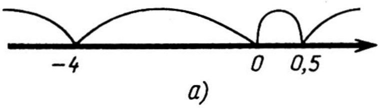
Iš paveikslo matome, kad nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $(-\infty; -6)$ ir $(-1; 4)$ sąjunga.

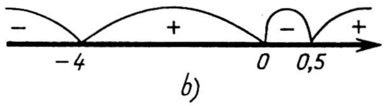
A t s a k y m a s: $(-\infty; -6) \cup (-1; 4)$.



36 pav.

4.





37 pav.

Nelygybę sprendėme vadinamuoju *intervãlų metodù*.

Išnagrinėkime kelis nelygybių, kurios pakeičiamos (1) tipo nelygybėmis, sprendimo pavyzdžius.

2 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $x(0{,}5 - x)(x + 4) < 0$.

Ją pakeiskime (1) tipo nelygybe: iškelkime už skliaustų dvinario $0{,}5 - x$ dauginamąjį -1. Gauname:

$$-x(x - 0{,}5)(x + 4) < 0;$$

iš čia

$$x(x - 0{,}5)(x + 4) > 0.$$

Gavome (1) tipo nelygybę, ekvivalenčią pradinei.

Koordinačių tiesėje pažymėkime funkcijos $f(x) = x(x - 0{,}5)\times$ $\times(x + 4)$ nulius (37 *a* pav.). Kraštiniame iš dešinės intervale funkcija įgyja teigiamas reikšmes. Slinkdami koordinačių tiese į kairę, pažymime funkcijos ženklą kiekviename intervale (37 *b* pav.). Vadinasi, nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $(-4;\ 0)$ ir $(0{,}5;\ +\infty)$ sąjunga.

A t s a k y m a s: $(-4;\ 0)\cup(0{,}5;\ +\infty)$.

3 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $(5x + 1)(5 - x) \geq 0$.

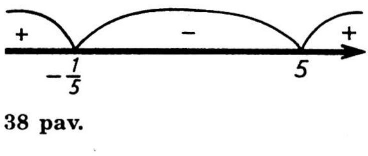
Iškelkime už skliaustų pirmo dvinario dauginamąjį 5, o antrojo -1:

$$-5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)\geq 0.$$

Abi nelygybės puses padalijame iš -5:

$$\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)\leq 0.$$

Koordinačių tiesėje pažymime funkcijos $f(x) = \left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)$, nulius, t. y. taškus $-\frac{1}{5}$ ir 5, ir parašome funkcijos ženklus sudarytuose intervaluose (38 pav.). Matome, kad nelygybės sprendinių aibę sudaro



38 pav.

skaičiai $-\frac{1}{5}$ ir 5 ir tarp jų esantys skaičiai, kitaip sakant, intervalas $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$.

A t s a k y m a s: $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$.

Šią nelygybę galima spręsti ir kitaip: remiantis kvadratinės funkcijos savybėmis.

4 p a v y z d y s. Išspręskime nelygybę $\frac{7-x}{x+2} < 0$.

Kadangi trupmenos $\frac{7 - x}{x + 2}$ ženklas sutampa su sandaugos $(7 - x)(x + 2)$ ženklu, tai sprendžiama pradinei nelygybei ekvivalenti nelygybė

$(7 - x)(x + 2) < 0$.

Nelygybę $(7 - x)(x + 2) < 0$ pakeitę jai ekvivalenčia (1) nelygybe ir pritaikę intervalų metodą, randame jos, taigi ir nelygybės $\frac{7-x}{x+2} < 0$, sprendinių aibę, kuri yra intervalų $(-\infty; -2)$ ir $(7; +\infty)$ sąjunga.

A t s a k y m a s: $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.

● **131.** Išspręskite nelygybę intervalų metodu:

a) $(x + 8)(x - 5) > 0$; c) $(x - 3{,}5)(x + 8{,}5) \geq 0$;

b) $(x - 14)(x + 10) < 0$; d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right) \leq 0$.

● *132.* Išspręskite nelygybę:

a) $(x + 25)(x - 30) < 0$; c) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right) \leq 0$;

b) $(x + 6)(x - 6) > 0$; d) $(x + 0{,}1)(x + 6{,}3) \geq 0$.

133. Išspręskite nelygybę:

a) $(x - 2)(x - 5)(x - 12) > 0$;

b) $(x + 7)(x + 1)(x - 4) < 0$;

c) $x(x + 1)(x + 5)(x - 8) > 0$.

134. Su kuriomis x reikšmėmis:

a) sandauga $(x + 48)(x - 37)(x - 42)$ teigiama;

b) sandauga $(x + 0{,}7)(x - 2{,}8)(x - 9{,}2)$ neigiama?

135. Išspręskite nelygybę:
a) $(x + 9)(x - 2)(x - 15) < 0$;
b) $x(x - 5)(x + 6) > 0$;
c) $(x - 1)(x - 4)(x - 8)(x - 16) < 0$.

136. Raskite nelygybės sprendinių aibę:
a) $5(x - 13)(x + 24) < 0$;
b) $-\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\geq 0$;
c) $(x + 12)(3 - x) > 0$;
d) $(6 + x)(3x - 1) \leq 0$.

137. Išspręskite nelygybę:
a) $2(x - 18)(x - 19) > 0$;
b) $-4(x + 0{,}9)(x - 3{,}2) < 0$;
c) $(7x + 21)(x - 8{,}5) \leq 0$;
d) $(8 - x)(x - 0{,}3) \geq 0$.

138. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:
a) $y=\sqrt{(5-x)(x+8)}$;
b) $y=\sqrt{(x+12)(x-1)(x-9)}$.

139. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę:
a) $\sqrt{(2x+5)(x-17)}$;
b) $\sqrt{x(x+9)(2x-8)}$?

140. Išspręskite nelygybę:
a) $\frac{x-5}{x+6}<0$;
b) $\frac{1{,}4-x}{x+3{,}8}<0$;
c) $\frac{2x}{x-1{,}6}>0$;
d) $\frac{5x-1{,}5}{x-4}>0$.

141. Išspręskite nelygybę:
a) $\frac{x-21}{x+7}<0$;
b) $\frac{x+4{,}7}{x-7{,}2}>0$;
c) $\frac{6x+1}{3+x}>0$;
d) $\frac{5x}{4x-12}<0$.

Kartojimo pratimai

142. Nubraižykite funkcijos $y = x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$ grafiką, išvardykite jos savybes.

143. Kuriuose koordinatiniuose ketvirčiuose yra funkcijos grafikas:
a) $y = 3x^2 + 4$; b) $y = -5x^2 - 1$; c) $y = 2x^2 - 4$?