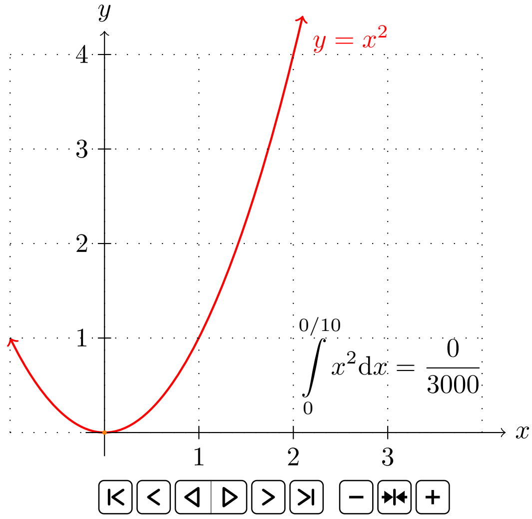
1 Integralai

1.1 Kas yra integralas?

Integralu $\int_a^b f(x)dx$ laikomas srities tarp Ox ašies ir $f(x)$ plotas, kai $x \in [a, b]$. Intervalo $[a, b]$ kraštai (**pastovieji dydžiai**) a ir b yra vadinami integralo rėžiais.

1.2 Integravimo rėžiuose iliustracija



1.3 Integravimo rėžiuose algebrinė prasmė

Kaip formaliai apskaičiuoti $\int_a^b f(x)dx$?

- Sričiai $[a, b]$ imame dalą P, aprašomą $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
- Apskaičiuojame sumą $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
- Apskaičiuojame ribą $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=i}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right)$

Skaičiavimai daug supaprastėja, kai $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ yra išsidėstę vienodais atstumais. Tuomet galioja

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = a + \frac{1}{n} \\ x_2 = a + \frac{2}{n} \\ \cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_0 = \frac{1}{n} \\ x_2 - x_1 = \frac{1}{n} \\ \cdots \\ x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{ir telieka apskaičiuoti ribą } \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f\left(a + \frac{i}{n}\right)}{n}$$

1.4 Uždaviniai iš integralų

1. Suvesti į kvadratų sumą/skirtumą:

a) x^2+4x+4

b) x^2+4x+6

c) x^2+4x

d) x^2-4x+4

e) x^2-4x

f) x^2+6x+8

g) $x^2+7x+12$

h) x^2-7x+1

i) x^2-5x+5

Hint: formoje x^2+ax+b pirmasis kvadratas visada lygus $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2$

2. Apskaičiuoti integralus funkcijoms

a) x^2

b) x^5

c) x^6

d) $\dfrac{1}{x^3}$

e) $\dfrac{1}{x^5}$

f) $\dfrac{1}{x^6}$

g) $\sqrt{x}$

h) $\sqrt{x^3}$

i) $\sqrt[3]{x^4}$

j) $\sqrt[5]{x^3}$

k) $\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}$

l) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^5}}$

m) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{x^6}}$

Hints: dalyba keičia laipsnio ženklą, o n-tojo laipsnio šaknis dalija iš n:
$1/x^n=x^{-n}$ ir $\sqrt[n]{x^a}=x^{a/n}$. Toliau - formulė $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

3. Naudojame formules $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $\displaystyle\int\cos x\,dx=sinx+C$, $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$, $\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$. Apskaičiuoti integralus funkcijoms

a) e^{2x}

b) $\cos 3x$

c) e^{x+23}

d) $\dfrac{1}{x-7}$

e) $\cos(3x-23)$

f) $\dfrac{1}{2x-7}$

g) $\cos(-5x+8)$

h) e^{8-9x}

1.5 Uždavinių iš integralų atsakymai

1. a) $(x+2)^2$
b) $(x+2)^2+2$
c) $(x+2)^2-2^2$
d) $(x-2)^2$
e) $(x-2)^2-2^2$
f) $(x+3)^2-1$
g) $(x+3.5)^2+0.5^2$
h) $(x-3.5)^2-\left(\sqrt11.25\right)^2$
i) $(x-2.5)^2-\left(\sqrt1.25\right)^2$

2. a) $\frac{x^3}{4}$
b) $\frac{x^5}{6}$
c) $\frac{x^4}{7}$
d) $-x^{-2}/2=-\frac{1}{2x^2}$
e) $-x^{-4}/4=-\frac{1}{4x^4}$
f) $-x^{-5}/5=-\frac{1}{5x^5}$
g) $\frac{x^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$
h) $\frac{x^{\left(1+\frac{3}{2}\right)}}{\left(1+\frac{3}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{x^5}}{5}$
i) $\frac{x^{\left(1+\frac{4}{3}\right)}}{\left(1+\frac{4}{3}\right)}=\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7}$
j) $\frac{x^{\left(1+\frac{3}{5}\right)}}{\left(1+\frac{3}{5}\right)}=\frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8}$
k) $\frac{x^{\left(1+\frac{-3}{2}\right)}}{\left(1+\frac{-3}{2}\right)}=-2\sqrt{\frac{1}{x}}$
l) $\frac{x^{\left(1+\frac{-5}{3}\right)}}{\left(1+\frac{-5}{3}\right)}=-\frac{3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}{2}$
m) $\frac{x^{\left(1+\frac{-6}{7}\right)}}{\left(1+\frac{-6}{7}\right)}=7\sqrt[7]{x}$

3. a) $\frac{e^{2x}}{2}$
b) $\frac{\sin 3x}{3}$
c) e^{x+23}
d) $\ln(x-7)$
e) $\frac{\sin(3x-23)}{3}$
f) $\frac{ln(2x-7)}{2}$
g) $-\frac{\sin(-5x+8)}{5}$
h) $-\frac{e^{8-9x}}{9}$