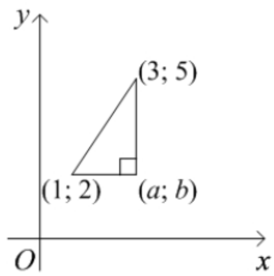
1 Vektoriai

1.1 Ankstesnės temos

Prieš mokydamiesi šią temą, įsitikinkite, kad turite pakankamai žinių iš ankstesnių geometrinių temų. Pabandykite šiuos uždavinius:

1. Stačiojo trikampio įžambinės galų koordinatės yra (1; 2) ir (3; 5). Remdamiesi brėžiniu nustatykite trečiosios trikampio viršūnės koordinates (a; b). ***VBE 2011, 2užd. (1tšk)***



2. Įrodykite, kad trikampyje, turinčiame kampus $(90^o, 30^o, 60^o)$, kraštinės visada sutinka santykiu $1 : 2 : \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Įrodykite, kad trikampyje, turinčiame kampus $(90^o, X^o, (90 - X)^o)$, kraštinės visada sutinka santykiu $(1, \sin(X^o), \cos(X^o))$

1.2 Ilgis ir kampas atskirai (apžvalga, ką jau turime mokėti)

Ankstesnėse temose jums yra tekę pasinaudojant įvairiomis savybėmis ir teoremomis susieti atkarpų ilgius ir kampus. Iš pat pradžių uždaviniams išspręsti užtekdavo šių taisyklių:

- Pitagoro teoremos, kuri parodo sąryšį tarp trijų kraštinių, kai žinome, kad kampas tarp kažkurių dviejų lygus 90^o.
- Lygiašonio trikampio savybe, kad 2 lygios kraštinės jame bus tada ir tik tada, kai bus 2 lygūs kampai.

Vėliau būdavo galima išvesti dar vieną taisyklę:

- Trikampių, turinčių kampus $(90^o, 30^o, 60^o)$, kraštinės visada sutinka santykiu $1 : 2 : \frac{\sqrt{3}}{2}$, tačiau ši taisyklė tėra tik ankstesnių dviejų savybių hibridas, nes šį teiginį galima įrodyti tada ir tik tada, kai taikome Pitagoro teoremą ir pastebime, kad trikampis su kampais $(90^o, 30^o, 60^o)$ yra lygiakraščio trikampio pusė.

Dar vėliau domėjomės, kokias kraštinių proporcijas išlaiko šįkart jau bet kurie trikampiai su kampais $(90^o, X^o, (90-X)^o)$ ir radome atsakymą:

- Trikampio su kampais $(90^o, X^o, (90 - X)^o)$ kraštinės sutinka santykiu $(1, \sin(X^o), \cos(X^o))$.

Kai jau pakankamai susipažinome, kokie yra sąryšiai tarp atkarpų ilgių ir kampų, metas patyrinėti geometrinius objektus, kuriems aprašyti reikia ir ilgio, ir kampo kartu.

1.3 Ilgis ir kampas viename. Kas yra vektorius ir kam jį panaudoti?

Geometrinė interpretacija

Vektorius yra geometrinis objektas, turintis kryptį ir ilgį. Jis visada gali būti vaizduojamas kaip rodyklė.

Algebrinė interpretacija

Vektorius (*lot. vector - vežikas*) **apibrėžia, kokiomis koordinatėmis reikia paslinkti tašką** A**, kad jis patektų į tašką** B. Vadinasi, jis gali būti aprašomas ir kaip koordinačių seka. Pvz. (x, y) yra plokštumos vektorius, o (x, y, z) yra trimatės erdvės vektorius.

Vadinasi, vektoriai gali būti panaudoti spręsti geometriniams uždaviniams, kuriuose yra patogiau naudoti koordinates, nei tik kampus ir atkarpas. Toliau mokysimės, kaip įvairias operacijas su vektoriais aprašyti algebriškai, t.y. naudojant koordinačių sekas.

1.4 Vektorių operacijos

Veiksmai, kuriuos galima atlikti su vektoriais (**juos privaloma mokėti egzaminui**):

- Apskaičiuoti vektoriaus $\overrightarrow{x}$ ilgį $|\overrightarrow{x}|$.
- Apkeisti vektoriaus $\overrightarrow{x}$ kryptį padauginę jo koordinates iš -1.
- Padauginti vektorių $\overrightarrow{x}$ iš skaliaro k (bet kurio nenulinio realiojo skaičiaus) ir gauti naują k kartų ilgesnį vektorių $k\overrightarrow{x}$, išlaikantį tą pačią kryptį, jei $k > 0$ ir priešingos krypties, jei $k < 0$
- Sudėti du vektorius $\overrightarrow{x}$ ir $\overrightarrow{y}$ ir gauti naują vektorių $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, kurio ilgis ir kryptis sutampa su lygiagretainio, kurio kraštinės yra vektoriuose $\overrightarrow{x}$ ir $\overrightarrow{y}$, įstrižaine.
- Atimti du vektorius $\overrightarrow{x}$ ir $\overrightarrow{y}$ ir gauti naują vektorių, lygų vektorių $\overrightarrow{x}$ ir $-\overrightarrow{y}$ sumai.
- Sudauginti du vektorius $\overrightarrow{x}$ ir $\overrightarrow{y}$ skaliariškai ir gauti jų skaliarinę sandaugą $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$.
- Patikrinti, ar du vektoriai $\overrightarrow{x}$ ir $\overrightarrow{y}$ statmeni: jie statmeni tada ir tik tada, kai $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$
- Patikrinti, ar du vektoriai $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ kolinearūs (*angl. co - bendras, line - tiesė*), t.y. ar jie gali būti pavaizduoti vienoje tiesėje: tai įmanoma tada ir tik tada, jeigu egzistuoja skaliaras (nenulinis) k, kad $\overrightarrow{x} = k \cdot \overrightarrow{y}$

1.5 Uždaviniai, kurie padės susieti geometrinę ir algebrinę interpretacijas

1. Koordinačių plokštumoje pažymėkite bet kuriuos du taškus $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$. Nubrėžkite rodyklę iš taško A į tašką B, kuri atitinka vektorių $\overrightarrow{AB}$. Remkitės $\boxed{\text{algebrine vektoriaus interpretacija}}$ ir grafiškai parodykite, kad $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
2. Kodėl vektoriaus (x, y) ilgis lygus $\sqrt{x^2 + y^2}$? Į šį klausimą galite atsakyti koordinačių plokštumoje pažymėję taškus $A(0, 0)$ ir $B(x, y)$ ir parodydami, kad vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgis lygus $\sqrt{x^2 + y^2}$
3. Koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus $A(0, 0)$, $B(x, y)$, $C(kx, ky)$. $\overrightarrow{AB}$. Įsitikinkite, kad $k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
4. Įsitikinkite, kad bet kuriam trikampiui ABC, esančiam ant koordinačių plokštumos, galioja:
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
   (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (0, 0)$
5. Koordinačių plokštumoje pažymėkite du vektorius $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$ ir $\overrightarrow{BC} = (x_2, y_2)$, taip, kad $\overrightarrow{AB}$ galas sutaptų su $\overrightarrow{BC}$ pradžia ir įsitikinkite, kad vektorių (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) suma lygi $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
6. Duota, kad kampas tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BC}$ yra lygus 67^o. Kam lygus kampas tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $-\overrightarrow{BC}$?
7. Vektorių $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ ir $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ skaliarinė sandauga $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ visuomet lygi $x_1 y_1 + x_2 y_2$. Įrodykite, kad kiekvienam dvimačiui vektoriui $\overrightarrow{a} = (x, y)$ visuomet galioja $|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$. Ar ši tapatybė teisinga trimačiams vektoriams?

1.6 Pora tapatybių, kurias reikia mokėti egzaminui

Egzaminų lape pateikiami du skaliarinės sandaugos apibrėžimai (tai yra viskas, ką pateikia iš vektorių temos):

Vektorių skaliarinė sandauga. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$;
čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

Jais pasinaudojus galima gauti, kad kampas α, kurį sudaro vektoriai $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ir $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ tenkina

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

Kitaip tariant, to kampo kosinusas lygus vektorių $\vec{u}$ ir $\vec{v}$ ilgių sandaugai, padalintai iš skaliarinės sandaugos. Ar sugebėtumėte rasti kampą tarp vektorių $\vec{u} = (1,0,1)$ ir $\vec{v} = (1,1,1)$?

Lieka neaišku, kodėl skaliarinę sandaugą galima aprašyti dviem būdais. Pasirodo, tai yra kosinusų teoremos išvada. Įrodymą galite išsinagrinėti šioje nuorodoje

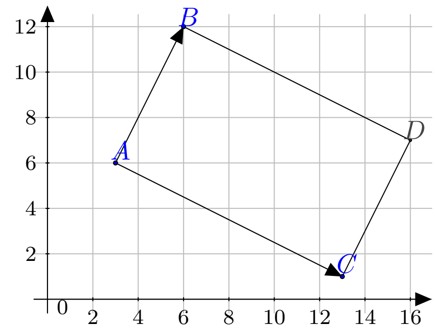
Dar viena tapatybė, kuri pasitaiko egzaminuose:

$$\boxed{|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}}$$

1.7 Ruošiamės egzaminui

1. ***VBE 2009, 2užd. (1tšk)***
   Jei lygiakraščio trikampio ABC kraštinės ilgis lygus 4, tai kam lygi skaliarinė sandauga $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$?

2. ***VBE 2010, 19užd. (1tšk,2tšk,2tšk)***

   Koordinačių plokštumoje duoti trys taškai $A(3;6)$, $B(6;12)$ ir $C(13;1)$.

   (a) Užrašykite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates.

   (b) Ar vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ statmeni?

   (c) Toje pačioje koordinačių plokštumoje pasirinktas taškas D, kad keturkampis $ABCD$ būtų lygiagretainis. Nustatykite taško D koordinates.

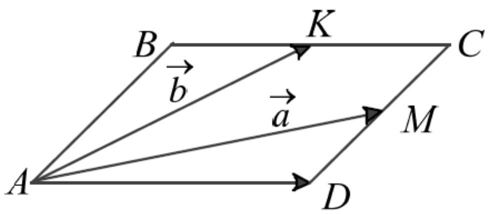
3. ***VBE 2012, 24užd. (2tšk)***
   Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{c} = (x-5)\vec{i} + \vec{j}$ ir $\vec{c} = (2x-1)\vec{i} - \vec{j}$ yra kolinearūs? ($\vec{i}$ ir $\vec{j}$ yra vienetiniai vektoriai koordinačių ašyje, lygūs $(1,0)$ ir $(0,1)$)

4. ***VBE 2013, 20užd. (2tšk)***
   Vektoriai $\vec{a} - 2\vec{b}$ ir $\vec{a} + 2\vec{b}$ statmeni, $|\vec{a}| = 5$. Raskite $|\vec{b}|$.

5. ***VBE 2014, 16užd. (2tšk)***
   Duoti taškai $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$. Apskaičiuokite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$ didumą.

6. ***VBE 2014, 28užd. (4tšk)***

   Taškai K ir M yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidurio taškai. Vektorių $\overrightarrow{AD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{AK} = \vec{b}$.

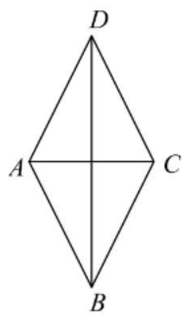
   

7. ***VBE 2014band, 17užd. (2tšk)***
   Raskite vektoriaus $\vec{c}$ ilgį, jei $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ ir $\vec{a} = (0;0,5)$, $\vec{b} = (-2;3)$.

8. ***VBE 2015band, 16užd. (2tšk, 2tšk)***
   Keturkampis $ABCD$ yra rombas.

   (a) Užrašykite vektorių, lygų vektorių sumai $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

   (b) Apskaičiuokite vektorių skaliarinę sandaugą $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$

9. ***VBE 2015, 7užd. (2tšk)***
Su kuria x reikšme vektoriai $\overrightarrow{a} = (x; 3)$ ir $b = (-2; 6)$ yra kolinearūs?