1.8.6 Sąvokos

1. Senovės Graikijoje buvo vartojama tokia Pitagoro teoremos formuluotė: „Kvadratas ant stačiojo trikampio įžambinės BC yra suma kvadratų ant trikampio statinių BA ir AC.” Pabandyk tą pačią mintį išreikšti taisyklingai vartodamas šiuolaikinę matematinę kalbą.
2. *Elementai* - tai didžiausią įtaką matematikos vystymuisi padaręs vadovėlis, išleistas maždaug 300m. prieš mūsų erą senovės graikų matematiko Euklido. Jame pateikti tokie sąvokų apibrėžimai:
   - *Vienetas yra tai, kas pagal prigimtį egzistuoja kaip vienas daiktas.*
   - *Skaičius yra vienetų daugis.*

   Palygink, kuo ši skaičiaus samprata skiriasi nuo dabartinės skaičiaus sampratos. Gali remtis angliškoje Vikipedijoje nurodytu skaičiaus apibrėžimu:
   - Skaičius yra matematinis objektas, naudojamas skaičiavime, matavime arba numeravime.
3. Įrodyk, kad bet kurių dviems skaičiams a ir b visada galioja teiginys „jų sumos kvadrato ir jų skirtumo kvadrato suma yra nemažesnė už jų kvadratų sumos ir bet kurio iš jų kvadrato sumą”.
4. Kiek skaičiaus 2018 užraše yra skaitmenų porų, tokių, kad poros narys, skaičiaus užraše esantis pirmiau likusio poros nario, yra už tą narį didesnis?
5. Kada dviejų skaičių kubų santykis nėra lygus jų santykio kubui?
6. *Pateik būdą, kaip bet kuriam racionaliajam skaičiui sudaryti lygtį, kuriai šis skaičius yra sprendinys.
7. *Kaip vadinama aibė skaičių, gautų kiek nori kartų naudojant 1 ir leistinas operacijas, jei
   (a) leidžiama tik operacija „+”;
   (b) leidžiamos tik operacijos „+” ir „-”;
   (c) leidžiamos tik operacijos „+”, „-” ir „×”;
   (d) leidžiamos tik operacijos „+”, „-”, „×” ir „:”.
8. Lentoje ant kvadrato viršūnių yra surašyti tam tikri skaičiai, lygūs a, b, c ir d. Bonifacijus atsitiktinai pasirinko vieną iš sudėties ir daugybos operacijų, o paskui ją atlikęs su kiekviena iš gretimose viršūnėse esančių skaičių porų, lentoje užrašė 4 tos operacijos rezultatus. Tada vėl pasirinko vieną iš sudėties ir daugybos operacijų ir ją atlikęs su šiais 4 rezultatais gavo tam tikrą skaičių.
   (a) Užrašyk visas galimas šio skaičiaus išraiškas.
   (b) *Nustatyk visas galimas skaičių a, b, c ir d sumos reikšmes, jei gautasis skaičius lygus 2018.
9. *Įrodyk, kad tarp dviejų skirtingų realiųjų skaičių visada egzistuoja racionalusis skaičius.
10. *Įrodyk, kad tarp dviejų skirtingų realiųjų skaičių visada egzistuoja iracionalusis skaičius.

1.8.7 Prastinimai

1.

a) $\left(\frac{2x^4}{y^2}\right)^{-3} \cdot \left(x^{-2}y\right)^6$

b) $a^8 - (a^4 - 8)(a^4 + 8)$

c) $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$

d) $(y^2+8y-6)(y^5-5y+7)-(y^2-2y+4)(y^2+5y-33)$

e) $(a + 2b)^3 - 6b(a + b)^2$

f) $(p - 2a)(p + 2a) - (p - a)(p^2 + pa + a^2)$

g) $\frac{5a^3+3a-1}{a^2+4a+4} + \frac{5-4a^3}{a^2+4a+4} - \frac{3a+12}{a^2+4a+4}$

h) $\frac{n^2}{n^2-x^2} - \frac{n+x}{n-x} - \frac{x^2}{x^2-n^2}$

i) $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b} + \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

j) $\frac{a^2-b^2+a+b}{x^2-y^2+x-y} : \frac{3a+3b}{2x-2y}$

k) $1 - \frac{a+3b}{2a} \cdot \left(\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a-3b}\right)$

l) $\frac{16a^2}{16a^2-1} - \frac{8}{(4a-1)(4a+1)} + \frac{1}{16a^2-1}$

m) $\frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a+b}{a-b}$

n) $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + 1\right) \cdot \frac{y}{y+x}$

o) $\frac{\frac{m^4-n^4}{m^2-2mn+n^2}}{\frac{m^2+mn}{m-n}}$

p) $\frac{2x-\frac{x^2+y^2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

q) $(n^4 - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1\right)$

r) $\frac{1}{x+\frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}}$

s) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

2.

a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)$

b) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$

c) $\sqrt{30\cdot 66\cdot 220}$

d) $2\sqrt{8}-\sqrt{32}$

e) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

f) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\sqrt{20}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$

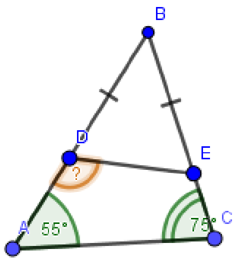
h) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$

i) (*) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$

j) (*) $\sqrt{a^2+4a+4}\cdot(a-2)+a+1$

1.8.8 Geometrija

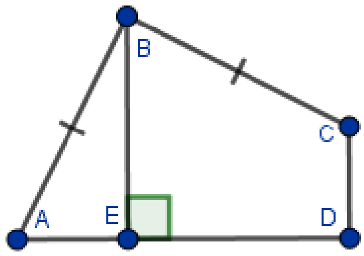
1. * Pavyzdiniai stojamieji į licėjų 2007.



Duota: $\angle A = 55^o$, $\angle C = 75^o$, $BD = BE$

Rasti: $\angle ADE$

2. Stojamasis į licėjų 2008.

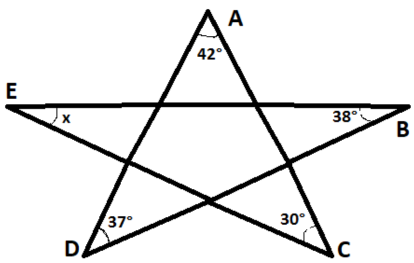


Duota: $AB = BC$, $\angle ABC = \angle D = \angle AEB = 90^o$, $BE = 1$

Rasti: S_{ABCD}

3. Folkloras

*

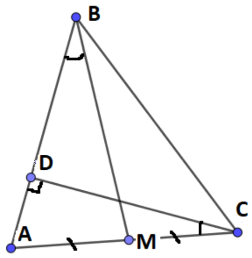


Duota: $\angle A = 42^o$, $\angle B = 38^o$, $\angle C = 30^o$, $\angle D = 37^o$

Rasti: $\angle E$

4. Varžytuvės

*

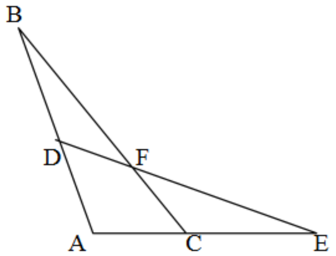


Duota: BM - trikampio ABC pusiaukraštinė, CD - trikampio ABC aukštinė, $\angle ABM = \angle ACD$, $AB = 1$

Rasti: BC

5. Varžytuvės

*

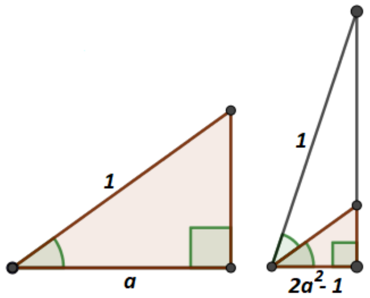


Duota: $AB = AE = 4$
$AD = AC = 1$
$S_{ADE} = a$

Rasti: S_{ADFC}

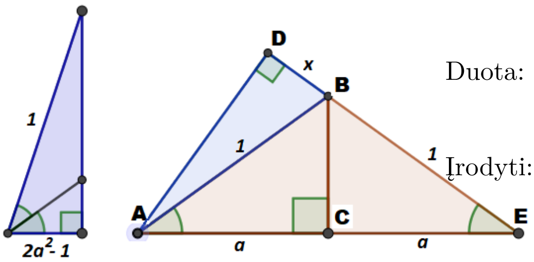
Olimpiadiniai geometriniai uždaviniai nuo neolimpiadinių dažniausiai tuo, kad juose reikia remtis kokių nors pagalbinių geometrinių objektų savybėmis. Šie pagalbiniai objektai neįgudusiam moksleiviui sunkiai pastebimi, tačiau jų nepastebėjus negausime ir savybių, reikiamų uždaviniui išspręsti. Pastabumas ateina per patirtį sprendžiant sudėtingesnius uždavinius, tačiau dažnai įvyksta, kad gavus per sunkų uždavinį pasiduodama ir iš jo naujų žinių nepavyksta pasisemti. Čia pateiksiu tokius uždavinius, kurie atrodo labai sudėtingi, tačiau pasinaudojus užuominomis gerokai palengvėja (Užuominas pateikiu tik pirmuose dviejuose uždaviniuose).

1. *



Duoti du statieji trikampiai tokie, kad jų įžambinės yra lygios 1, o kampai prie pagrindo skiriasi du kartus.

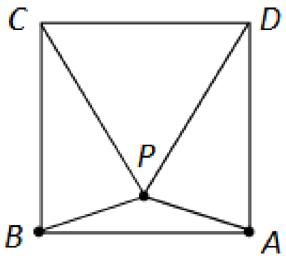
- Įrodykite, kad, jei pirmajame trikampyje pagrindas a, tai antrajame jis bus lygus $2a^2 - 1$. *Užuomina: nagrinėkite žemiau nurodytą geometrinę situaciją, kur sujungiami abu rusvieji trikampiai ir gautam naujam trikampiui išvedama aukštinė*
- Įsitikinkite, kad teiginys galioja kampų porai 30^o ir 60^o
- Naudodami kampų porą 15^o ir 30^o raskite trikampio, kurio kampai yra 15^o, 75^o ir 90^o, statinius, jei įžambinės ilgis yra lygus 1.
- Gautą išvadą užrašykite trigonometrine forma, kur matyti priklausomybė tarp kampų α ir 2α trigonometrinių funkcijų.



Duota: $AB = BE = 1$
$AC = CE = a$
$\angle ADE$ - status

Įrodyti: $\angle DBA = 2\angle BAC$
$DB = 2a^2 - 1$

2. *

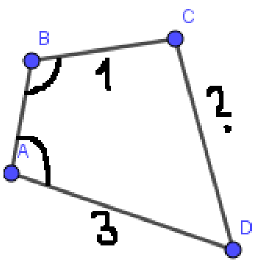


Duota: $ABCD$ - kvadratas
$\angle ABP = \angle BAP = 15^o$
$BN = NC$

Rasti: $\angle DCP$

Užuomina: analogiškai kraštinėje BC *pasirinkti tokį tašką* R, *kad trikampiai* $\triangle BCR$ *ir* $\triangle ABP$ *būtų vienodi ir tada nagrinėti trikampį* $\triangle BPR$

3. *

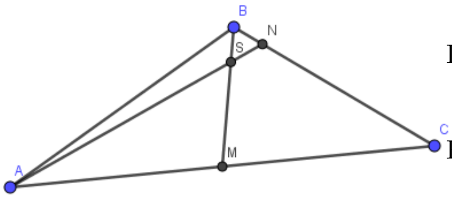


Duota: $ABCD$ - iškilasis keturkampis
$\angle DAB = \angle ACB$
$BC = 1$
$AD = 3$

Įrodyti: $CD > 2$

4. * Lygiašonę trapeciją jos įstrižainė dalija į du lygiašonius trikampius. Raskite tos trapecijos kampus.

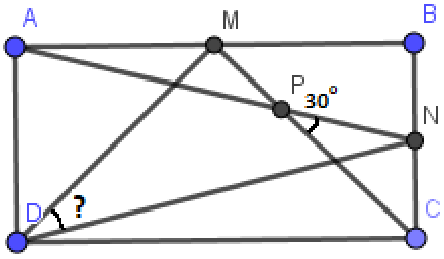
5. *



Duota: BM - trikampio ABC pusiaukraštinė
$3BS = SM$
$S_{ABC} = 40$

Rasti: S_{CMSN}

6. *



Duota: $ABCD$ - stačiakampis
$AM = MB$
$BN = NC$
$\angle NPC = 30^o$

Rasti: $\angle MDN$