1 Sekos ribos apibrėžimas

Sekos x_i riba lygi a, jeigu seka tenkina taisyklę:

- Su visais $\varepsilon > 0$ egzistuoja sekos N (prikl. nuo ε) toks, kad $|a - x_n| < \varepsilon$ su visais $n > N$.

1. Pagal sekos ribos apibrėžimą įrodysime, kad:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, kai $x_n = \frac{n+1}{n}$.
   Turime:
   $$\begin{aligned} |a - x_n| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ |1 - \frac{n+1}{n}| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ |\frac{n}{n} - \frac{n+1}{n}| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n \end{aligned}.$$
   Pagal apibrėžimą egzistuoja $N = \frac{1}{\varepsilon}$, įrodyta.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, kai $x_n = \frac{2-n}{2+n}$.
   Turime:
   $$\begin{aligned} |a - x_n| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \left|-1 - \frac{2-n}{2+n}\right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \left|\frac{-2-n}{2+n} - \frac{2-n}{2+n}\right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \left|\frac{-2-n-2+n}{2+n}\right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \frac{4}{2+n} &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \frac{4}{\varepsilon} &< 2+n \Leftrightarrow \\ \frac{4}{\varepsilon} - 2 &< n\varepsilon \end{aligned}.$$
   Pagal apibrėžimą egzistuoja $N = \frac{4}{\varepsilon} - 2$, įrodyta.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, kai $x_n = \frac{4}{n^3}$.

Turime:

$$|a - x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\left|-\frac{4}{n^3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{n^3} < \varepsilon \Leftrightarrow \quad .$$
$$\frac{4}{\varepsilon} < n^3 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}} < n$$

Pagal apibrėžimą egzistuoja $N = \sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}}$, įrodyta.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, kai $x_n = \frac{2}{\sqrt{2n-1}}$.

Turime:

$$|a - x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\left|-\frac{2}{\sqrt{2n-1}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\frac{2}{\sqrt{2n-1}} < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{2n-1} \Leftrightarrow .$$
$$\frac{4}{\varepsilon^2} < 2n - 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{\varepsilon^2} + 1 < 2n \Leftrightarrow$$
$$\frac{2}{\varepsilon^2} + 0,5 < n$$

Pagal apibrėžimą egzistuoja $N = \frac{2}{\varepsilon^2} + 0,5$, įrodyta.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$, kai $x_n = \frac{2n+3}{0,5-n}$.

Turime:

$$\begin{aligned}
|a - x_n| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left| -2 - \frac{2n+3}{0,5-n} \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left| \frac{2n-1}{0,5-n} - \frac{2n+3}{0,5-n} \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left| \frac{-4}{0,5-n} \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left| \frac{4}{n-0,5} \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\frac{4}{\varepsilon} &< n - 0,5 \Leftrightarrow \\
\frac{4}{\varepsilon} + 0,5 &< n
\end{aligned} .$$

Pagal apibrėžimą egzistuoja $N = \frac{4}{\varepsilon} + 0,5$, įrodyta.

2. Pagal vyriausiųjų narių koeficientų santykį randame, kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$, kai $x_n = \frac{5n+6}{n+1}$. Taikome apibrėžimą:

$$\begin{aligned}
|5 - \frac{5n+6}{n+1}| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left| \frac{5n+5}{n+1} - \frac{5n+6}{n+1} \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left| \frac{-1}{n+1} \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\frac{1}{n+1} &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\varepsilon} &< n + 1 \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n
\end{aligned}$$

Gavome, kad ribą nustatėme teisingai ir $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Kai $\varepsilon = 0,01$, gauname, kad $N = \frac{1}{0,01} - 1 = 99$ Pagal vyriausiųjų narių koeficientų santykį randame, kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5}{7}$, kai $x_n = \frac{5n^2+1}{7n^2-3}$. Taikome apibrėžimą:

$$\left|\frac{5}{7}-\frac{5n^2+1}{7n^2-3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\left|\frac{5}{7}\cdot\frac{7n^2-3}{7n^2-3}-\frac{5n^2+1}{7n^2-3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\left|\frac{5n^2-15/7}{7n^2-3}-\frac{5n^2+1}{7n^2-3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\left|\frac{-22/7}{7n^2-3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\frac{22/7}{7n^2-3}<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\frac{22/7}{\varepsilon}<7n^2-3 \Leftrightarrow$$
$$\frac{22/7}{\varepsilon}+3<7n^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{22}{49\varepsilon}+\frac{3}{7}<n^2 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\frac{22}{49\varepsilon}+\frac{3}{7}}<n$$

Gavome, kad ribą nustatėme teisingai ir $N=\sqrt{\frac{22}{49\varepsilon}+\frac{3}{7}}$. Kai $\varepsilon=0,05$, gauname, kad $N=\sqrt{\frac{22}{49\cdot 0,05}+\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{461}{49}}>3$

3. a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-7/n+1/n^2}{2/n^2-5/n-6}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7}-\frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1/n}{5+7/n}-\frac{1/n^3+2}{2/n^3+5}\right)=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$

2 Apibrėžti reiškiniai

Jeigu taške $x=a$ funkcija $f(x)$ yra apibrėžta, tai

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

1.
$$\lim_{x\to 0}(5x+2)=2$$

2.
$$\lim_{x\to 0}(2\sqrt[3]{x}+3)=3$$

3.
$$\lim_{x\to -2}(3x-5)=-11$$

4.
$$\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x-1} = 0$$

5.
$$\lim_{x \to -2} (x+2)^4 = 0$$

3 Neapibrėžti, bet turintys ribą reiškiniai

Tam tikrais atvejais funkcija $f(x)$ yra neapibrėžta, tačiau ribą vis tiek galime rasti.

1.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^4} = 0$$

2.
$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} = \pm\infty$$

3.
$$\lim_{x \to 0} 2^{\frac{2}{x}} = \pm\infty$$

4.
$$\lim_{x \to 0} 2^{\frac{-2}{x^2}} = 0$$

5.
$$\lim_{x \to \infty} \sin(x) \text{ neegzistuoja, nes sinusas kinta tarp -1 ir 1}$$

6.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sin(x)} = 0$$

7.
$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2+6x+9} = 0$$

4 Tigrų lenktynės

1.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3x+1}{1+2x^2} = 0$$

2.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x+1}{1+2x} = +\infty$$

3.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x+1}{1+2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\cancel{\frac{3x}{x^2}}+\cancel{\frac{1}{x^2}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}+2} = \frac{1}{2}$$

4.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+2n+4n^2}}{1+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\cancel{\frac{1}{n^2}} + \cancel{\frac{2n}{n^2}} + 4}}{\cancel{\frac{1}{n}} + 1} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

5.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+4n}{1+5n} = \frac{4}{5}$$

6.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+4n}+\sqrt{1+16n}}{n} = 0$$

7.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+4n}+\sqrt{1+16n}}{\sqrt{4n}} = \frac{5}{2}$$

8. (*)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+3x^4}}{\sqrt[3]{1-x^4}+\sqrt[3]{1+2x^2}} = -\sqrt[3]{3}$$

5 Šaknų pašalinimas

Tam tikrais atvejais funkcijos $f(x)$ tam tikroje dalyje yra patogu atlikti pakeitimus $a-b \leftrightarrow a^n - b^n$. Kai $n=2$ arba n nelyginis, galime taip pat keisti ir sumą: $a+b \leftrightarrow a^n + b^n$.

Pagalbinės kvadratų skirtumo formulės

- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$
- $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$

Pagalbinės kubų sumos ir skirtumo formulės

- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

Nagrinėkime sumą $a+b$ ir skirtumą $a+b$, kuriuos išreiškėme abejose lentelėse. Vietoj a ir b kvadratų skirtumo formulėse imkime $\sqrt{a}$ ir $\sqrt{b}$, o kubų skirtumo formulėse $\sqrt[3]{a}$ ir $\sqrt[3]{b}$. Taip gausime pagalbines formules, kurios padės išspręsti dar vieną ribos uždavinių klasę.

- $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

- $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$
- $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+5x}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\frac{(1+5x)-1}{\sqrt{1+5x}+1}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}^{1} \cdot (\sqrt{1+5x}+1)}{\cancel{(1+5x)-1}_{5}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+5x}+1}{5} = \dfrac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\frac{\cancel{x-1}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}}{\frac{\cancel{x-1}}{\sqrt{x}+1}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{2} = 1$

4. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\frac{(1-\tan x)-(1+\tan x)}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}}{2\sin x\cos x} =$

   $= \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{-2\tan x}{2\sin x \cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\tan x})} =$

   $= \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{-\cancel{2}\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}}{\cancel{2\sin x}\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\tan x})} = -\dfrac{1}{2}$

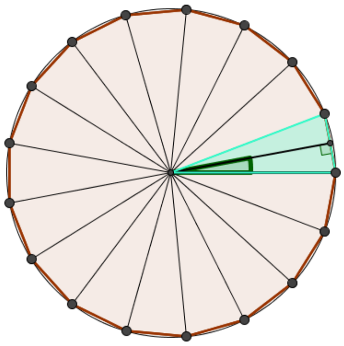
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2} = 1$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+3x+3x^2}-1} = 1$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{2}{3}$

6 Savybė $\sin x \to x$, kai $x \to 0$

Paveikslėlyje pavaizduotas vienetinis apskritimas. Jei įbrėžtinio taisyklingojo daugiakampio viršūnių skaičius artėja į begalybę, tai jo kraštinės ilgis artėja į atkirsto nuo apskritimo lanko ilgiui. Tas pats galioja ir pavaizduotam kampui α. Jo atkirsto lanko ilgis yra lygus α, o pusės daugiakampio kraštinės, esančios prieš tą kampą, ilgis yra $\sin\alpha$. Taigi, $\sin\alpha \to \alpha$, kai $\alpha \to 0$.



Pagrindinės trigonometrinės formulės:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\arcsin(\sin x) = x$
- $\arccos(\cos x) = x$

Naujų trigonometrinių formulių išvedimas iš pagrindinių. Jų galima neįsidėmėti, tik prisiminti išvedimą:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \\ 1 + \cos x = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \end{array}\right. \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \sin x = \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} \\ 1 + \sin x = \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} \end{array}\right. \end{array}\right.$
- $\left[\begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x \overset{\cos^2 x = 1-\sin^2 x}{=} 1 - 2\sin^2 x \\ \cos 2x \overset{\sin^2 x = 1-\cos^2 x}{=} 2\cos^2 x - 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \\ 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \\ 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} \end{array}\right.$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 7x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{\cos 7x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{7 \cdot \frac{\cancel{\sin 7x}}{\cos 7x}}{\cancel{7x}} = \lim_{x\to 0} \frac{7}{\cos 7x} = 7$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^2 4x}{1+\cos 4x}}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x \sin x (1+\cos 4x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin^2 4x} \cdot \frac{(4x)^2}{\cancel{\sin^2 4x}}}{x\cancel{\sin x} \cdot \frac{x}{\cancel{\sin x}} \cdot (1+\cos 4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{16\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} \cdot (1+\cos 4x)} = \frac{16}{2} = 8$$
(pirmas būdas)

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{\sin^2 2x} \cdot \frac{(2x)^2}{\cancel{\sin^2 2x}}}{x\cancel{\sin x} \cdot \frac{x}{\cancel{\sin x}}} = \frac{8\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 8$$
(antras būdas)

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^2 3x}{1+\cos 3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin^2 3x} \cdot \frac{(3x)^2}{\cancel{\sin^2 3x}}}{x^2 \cdot (1+\cos 3x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{9\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+\cos 3x)} = \frac{9}{2}$$

(pirmas būdas)

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2\sin^2\frac{3x}{2}}\cdot\frac{(3x/2)^2}{\cancel{\sin^2(3x/2)}}}{x^2}=\frac{\frac{9}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\frac{9}{2}$$

(antras būdas)

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\cancel{x}}{\cancel{x}}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\cdot\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{x^2}\cos x\cdot(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=7$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=2$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{5}}{x^2}=\frac{1}{25}$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}=\frac{1}{4}$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}=18$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{4}}{x^3}=\frac{1}{64}$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\sin x}=3$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=3$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\sin 6x}{x^2}=18$

7 Ką daryti, kai gauname 1^∞ ?

Tarkime, jog gavome skaičiuoti reiškinio formos $f(x)^{g(x)}$ ribą ir matome, jog $f(x)\to 1$ ir $g(x)\to\infty$. Vienintelis planas, ką šiuo atveju galime nuveikti, yra vieneto atskėlimas:

$$f(x)^{g(x)}=(1+(f(x)-1))^{g(x)}$$

Padarykim panašiai ir su laipsniu: atskelkim tam tikrą jo dalį:

$$(1+(f(x)-1))^{g(x)}=\left((1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Atlikę šį didįjį algebrinį triuką, galime pastebėti du dalykus:

- Atskeltas nuo vieneto dėmuo $f(x) - 1$ artėja į 0, nes $f(x)$ artėja į 1.
- Atskėlėme laipsnį taip, kas šio dėmens ir atskelto laipsnio sandauga yra lygi 1.

Vos tik įsitikinome, kad šios dvi sąlygos galioja, vietoje siaubingojo reiškinio $\left((1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x)-1}} \right)$ galime rašyti skaičių e.

Taigi, galime išvesti pagalbinę formulę (jos vadovėliuose nebus). Tie, kas nori „pasukčiauti", galės ją išbandyti:

$$f(x)^{g(x)} \to e^{g(x)\cdot(f(x)-1)}, \text{ kai } f(x) \to 1 \text{ ir } x \to +\infty$$

Kas tas skaičius e?
Tai ribos $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ vertė.

Atkreipkim dėmesį, kad skaičius e tenkina abi mūsų paminėtas sąlygas. Tik tada, kai jos tenkinamos, galime skaičiuodami ribą reiškinį suprastinti ligi e. Toliau spręsime uždavinius samprotaudami panašiai, kaip pirmoje lentelėje. „Sukčiavimo" nenaudosime, nebent patys to norėtumėte.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{2x} = e$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{3x} = e$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{-3x}\right)^{-3x} = e$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$
   užuomina: darsyk perskaityti sąlygas
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{5/3} = e^{\frac{5}{3}}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{5}{x}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(1 - \dfrac{5}{x}\right)^{-\frac{x}{5}} \right)^{-\frac{5(x+2)}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{5(x+2)}{x}} = e^{-5}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{4x-1}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(1 + \dfrac{2}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2}} \right)^{3x\cdot\frac{2}{4x-1}} =$
   $= \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{6x}{4x-1}} = e^{\frac{3}{2}}$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\Big(1+(\sin x-1)\Big)^{\frac{1}{\sin x-1}}\right)^{\tan x\cdot(\sin x-1)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\tan x\cdot(\sin x-1)} =$

$$= \left\{ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\Big(\tan x\cdot(\sin x-1)\Big) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x(\sin x-1)}{\cos x}\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x\left(\frac{\sin^2 x-1}{\sin x+1}\right)}{\cos x}\right) = \right.$$

$$\left. = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x\left(\frac{-\cos^{\cancel{2}} x}{\sin x+1}\right)}{\cancel{\cos x}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x\cdot\sin x}{\sin x+1}\right) = 0 \right\} = e^0 = 1$$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(2x\big(\ln(3x-1)-\ln(3x)\big)\Big) = \lim\limits_{x\to+\infty}\Big(2x\ln(\frac{3x-1}{3x})\Big) = \lim\limits_{x\to+\infty}\Big(2x\ln(1-\frac{1}{3x})\Big) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{-3x\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}\right) = \ln(e^{\frac{-2}{3}}) = -\frac{2}{3}$$