

# Kaip mokytis trigonometriją

Vadovėlis pilną funkcionalumą išlaiko tik atidarant jį su Adobe Acrobat. Tai reiškia, failą naršyklėje neveiks animacijos ir galbūt nuorodos. Norėdami išbandyti pirmo brėžinio funkcijas, turite būti suinstaliavę Geogebra. Norėdami patikrinti uždavinių atsakymus, į WolframAlpha laukelį įveskite komandas  $180 \text{ degrees}$ ,  $\sin(180)$ ,  $\sin(\pi/4)$ ,  $4\sin(x)\cos(x)$  ir pan. Hint: paspaudus ant uždavinių pakliūsite į vertingas nuorodas.

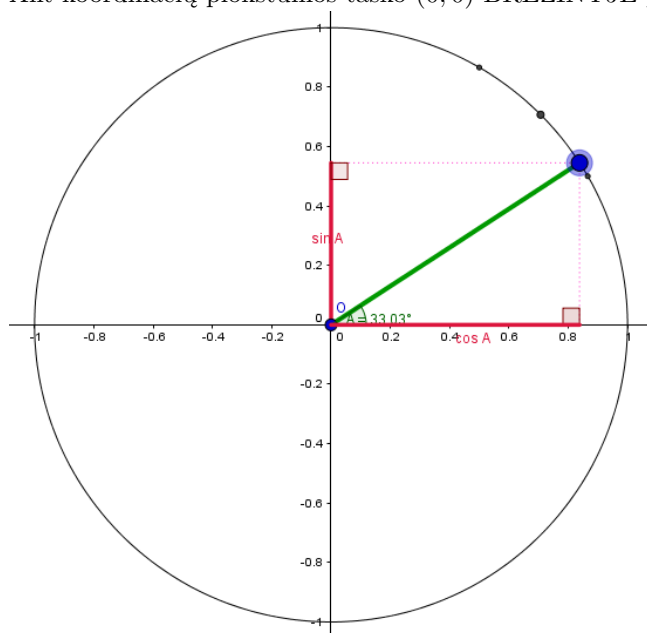
Kuo šis vadovėlis skiriasi nuo nuobodžių mokyklinių vadovėlių?

- Jame yra atsižvelgiama, kad matematinės žinios yra įgyjamos keliais vienas po kito einančiais mokymosi lygmenimis: susipažįstant ir eksperimentuojant su nagrinėjamos sąvokos vaizdiniu, praktikuojantis su aritmetinėmis operacijomis ir galiausiai apibendrinant tą, ką būtina įsiminti, kuo paprastesniu būdu. Todėl temos pristatomos parodant kuriuos keliu visuose lygmenyse reikėtų judėti.
- Apibendrinimas neįsisavinamas tol, kol nagrinėjami dalykai nepačiupinėjami jūsų pačių. Pratimai čia skirti ne tam, kad išmoktumėte atkartoti į kontrolinius ir egzaminus įeinančias procedūras, o tam, kad įgytumėte patirties, leidžiančios patiems pastebėti kelią, kuriuo reikia eiti atakuojant kontrolinių bei egzaminų uždavinius. Taip didinamas pasitikėjimas savo žiniomis matematikoje ir sumažinamas nuolatinis įgytų žinių užmiršimas.
- Siūlomi nestandartiniai, efektyvesni metodai spręsti uždaviniams ir įsiminti informacijai.

# 1 Kampai ir jų trigonometrinės funkcijos

## 1.1 BRĖŽINYS, kuris padeda lengvai įsivaizduoti $\sin x$ ir $\cos x$ funkcijas

Ant koordinačių plokštumos taško  $(0, 0)$  BRĖŽINYJE pavaizduojame vienetinį apskritimą:



Šią konstrukciją, paaiškinančią  $\sin$  ir  $\cos$  prasmę, vadiname trigonometrinio skrituliu.

- Kampo  $A$  sinusą  $\boxed{\sin A}$  nurodo pavaizduoto spindulio šėšėlinė dalis Oy ašyje. Konkrečiau: statmens į  $y$  pagrindo padėtis  $y$  ašyje.
- Kampo  $A$  kosinusą  $\boxed{\cos A}$  nurodo pavaizduoto spindulio šėšėlinė dalis Ox ašyje. Konkrečiau: statmens į  $x$  pagrindo padėtis  $x$  ašyje.
- Kampo  $A$  tangentu  $\boxed{\operatorname{tg} A}$  vadiname santykį  $\frac{\sin A}{\cos A}$ . Šis santykis yra būdas apibrėžti, kas yra tangentas.
- Kampo  $A$  kotangentu  $\boxed{\operatorname{ctg} A}$  vadiname santykį  $\frac{\cos A}{\sin A}$ . Šis santykis yra būdas apibrėžti, kas yra kotangentas.
- Sinusas ir kosinusas bet kuriam kampui  $A$  yra susieti sąryšiu

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Tai galioja pagal Pitagoro teoremą.

1. Naudodamiesi BRĖŽINIU nustatykite, kokius ženklus įgyja  $\sin(\alpha)$  ir  $\cos(\alpha)$ , kai:

- a)  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$       b)  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$       c)  $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$       d)  $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$

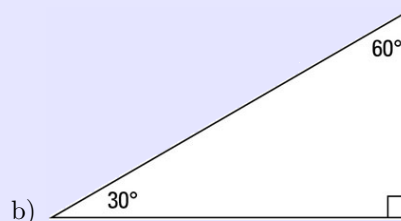
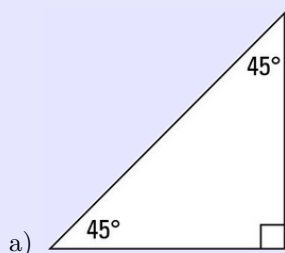
2. Naudodamiesi BRĖŽINIU nustatykite, kaip kinta (auga ar mažėja)  $\sin(\alpha)$  ir  $\cos(\alpha)$  reikšmės, kai:

- a)  $\alpha$  auga nuo  $0^\circ$  ligi  $90^\circ$ .      b)  $\alpha$  auga nuo  $90^\circ$  ligi  $180^\circ$ .  
c)  $\alpha$  auga nuo  $180^\circ$  ligi  $270^\circ$ .      d)  $\alpha$  auga nuo  $270^\circ$  ligi  $360^\circ$ .

3. Naudodamiesi BRĖŽINIU nustatykite trigonometrinių funkcijų reikšmes

- a)  $\sin 0^\circ$  ir  $\cos 0^\circ$       b)  $\sin 90^\circ$  ir  $\cos 90^\circ$       c)  $\sin 180^\circ$  ir  $\cos 180^\circ$   
d)  $\sin 270^\circ$  ir  $\cos 270^\circ$       e)  $\sin 360^\circ$  ir  $\cos 360^\circ$       f)  $\sin 450^\circ$  ir  $\cos 450^\circ$   
g)  $\sin(-90^\circ)$  ir  $\cos(-90^\circ)$       h)  $\sin(-270^\circ)$  ir  $\cos(-270^\circ)$       i)  $\sin 900^\circ$  ir  $\cos 900^\circ$

4. Duota, jog stačiojo trikampio įžambinė lygi 1. Abiem iš pavaizduotų atvejų naudodamiesi geometrinėmis žiniomis raskite jo likusių kraštinių ilgius:



5. Patalpinkite šiuos trikampius trigonometriiniame skritulyje. Pasinaudodami ankstesnio pratimo rezultatais nustatykite  $\cos 30^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 45^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$  reikšmes.
6. Pasinaudodami ankstesnio pratimo išvadamis nustatykite  $\operatorname{tg} 30^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 45^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 60^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 30^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 45^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 60^\circ$  reikšmes.
7. (VBE 2014, 10) Raskite  $\operatorname{tg} \alpha$  reikšmę, kai  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2$
8. (VBE 2017, 24) Įrodykite, kad  $\frac{1}{3}\pi(6 \cos \alpha)^2 \cdot 6 \sin \alpha = 72\pi(\sin \alpha - \sin^3 \alpha)$
9. Suprastinkite reiškinius:

a)  $1 + \operatorname{tg}^2 x$

b)  $1 + \operatorname{ctg}^2 x$

c)  $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

d)  $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

## 1.2 Specialieji statieji trikampiai

Laikant valstybinį egzaminą yra pateikiama tokia kampų ir jų trigonometrinių funkcijų lentelė:

$\alpha$ laipsniais	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha$ radianais	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Nors naudojantis šia lentele tolimesnis išmanymas apie  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  ir  $90^\circ$  kampų trigonometrinių funkcijų reikšmių nustatymą tampa nebūtinas, tačiau jo atsisakydami moksleiviai apriboja galimybę efektyviai spręsti geometrijos uždavinius bei apskaičiuoti kitokių kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes. Šiame skyriuje pateiksime svarbiausius aspektus siekiant tą išmanymą įgyti.

**Specialieji statieji trikampiai** - tai trikampiai, kurie turi kampus  $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$  arba  $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ .

Pratimuose šie trikampiai buvo verti atskiroms nagrinėjimo dėl dviejų priežasčių.

Pirma, žinant jų proporcijas galime nustatyti  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ir  $60^\circ$  kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes. Išmokę tai padaryti įgyjame pasitikėjimą, jog turime pakankamas žinias rasti  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ir  $60^\circ$  kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes patys ir tolimesnes žinias galime įgyti remdamiesi savo patirtimi, kuri yra kur kas prasmingesnė, nei kampų trigonometrinių funkcijų nurašymas iš lentelės.

Antra, kiekvienam trikampiui išvedus aukštinę, jis „susiskaido“ į stačiuosius trikampius, kurie daugumoje uždavinių būna specialieji trikampiai. Kadangi specialieji trikampiai yra pagrindinis daugumos geometrinių uždavinių elementas, juos turime kuo geriau pažinti iš anksto dar prieš tokių uždavinių sprendimą. Norint efektyviai spręsti uždavinius apie specialiuosius trikampius svarbu atsiminti šiuos faktus:

- Trikampio, kurio kampai yra  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  ir  $90^\circ$ , kraštinės sutinka santykiu  $1 : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}$ .
- Trikampio, kurio kampai yra  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  ir  $90^\circ$ , kraštinės sutinka santykiu  $1 : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Apibendrinkime tai, ką svarbu pastebėti sprendžiant pratimus:

- $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  ir kitų kampų, kurie yra  $90^\circ$  laipsnių kartotiniai, trigonometrines funkcijas gali būti randamos naudojantis trigonometriniu skrituliu. Šiek tiek pasipraktikavus trigonometrinio skritulio braižyti ant popieriaus nėra būtina: tai galima daryti mintyse.
- Norėdami  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ir  $60^\circ$  kampų trigonometrines funkcijų reikšmes rasti patys, taikome nesudėtingas geometrijos žinias. Tolimesnėje eigoje geometrinis reikšmių ieškojimo procesas tampa gerai įsisąmonintas ir lieka tik svarbiausias pastebėjimas:

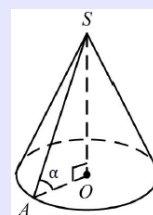
Kampų  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ir  $60^\circ$  sinusai bei kosinusai yra lygūs skaičiams  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ir  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  kažkuria tvarka.

10. Duotas trikampis, kurio kraštinės yra lygios 2,  $\sqrt{3}$  ir 1.

- Kam lygūs šio trikampio kampai?
- Kuri iš paminėtų kraštinių yra šio trikampio įžambinė?
- Kiek kartų reikia padidinti trikampio kraštines, kad įžambinės ilgis taptų lygus 6?
- Kam tokiu atveju bus lygūs kitų kraštinių ilgiai?

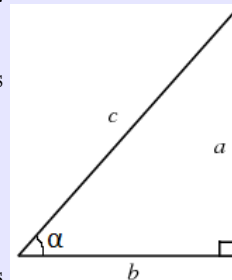
11. (VBE 2017, 24) Pavaizduotame kūgyje  $SA = 6$ . Raskite:

- $AO$ , kai  $\alpha = 60^\circ$
- $AO$  ir  $SO$ , kai  $\alpha$  laisvai pasirenkamas.



12. Stačiojo trikampio įžambinės ilgis yra lygus  $c$ , o statinių ilgiai yra lygūs  $a$  ir  $b$ . Vienas iš kampų, esančių prie statinių, lygus  $\alpha$ .

- Kiek kartų reikia sumažinti trikampio kraštines, kad trikampio įžambinės ilgis būtų lygus 1?
- Kam lygūs sumažinto trikampio statiniai?
- Ar pakito  $\alpha$  reikšmė sumažinus trikampį?
- Patalpinkite sumažintą trikampį trigonometriiniame skritulyje. Kam lygios reikšmės  $\sin \alpha$  ir  $\cos \alpha$ ?



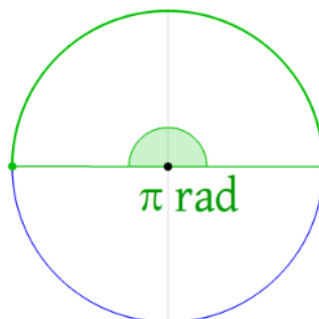
13. (VBE 2014, 22) Metalinį 2 m ilgio strypą sulenkė tiksliai per vidurį taip, kad tarp strypo dalių susidarė  $120^\circ$  kampas. Koks atstumas tarp sulenkto strypo galų? Atsakymą suapvalinkite iki centimetrų. *Pastaba:*  $\sqrt{3} \approx 1,73205$



### 1.3 Laipsnių vertimas į radianus

Vienas iš sunkumų pereinant nuo paprastos geometrijos prie trigonometrijos yra tai, jog geometrinių figūrų kampus įprasta išreikšti laipsniais, o trigonometriiniame skritulyje kampai gali būti išreikšti ir laipsniais, ir radianais. Jei norime paversti tam tikrą kampą radianais, imame tą kampą atitinkančio lanko ilgį vienetiniame skritulyje. Pavyzdžiui vienetiniame skritulyje  $180^\circ$  kampą atitinka  $\pi$ , nes  $180^\circ$  kampą atitinkančio lanko ilgis tame skritulyje yra  $\pi$ . Atitiktį tarp laipsnių ir jų radianų galima pavaizduoti lentele:

Laipsniai	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Radianai	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$



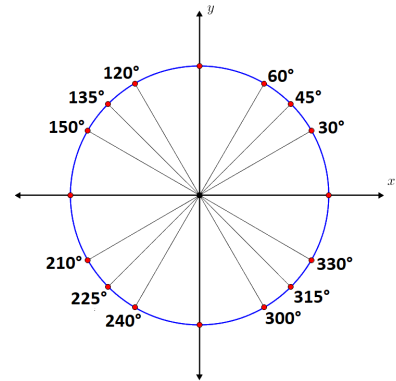
14. Išreikškite  $1^\circ$ ,  $20^\circ$  ir  $220^\circ$  kampus radianais.

15. Išreikškite  $\frac{\pi}{180}$ ,  $\frac{\pi}{10}$  ir  $\frac{\pi}{5}$  kampus laipsniais.

## 1.4 Kitų nesudėtingų kampų trigonometrinių funkcijų radimas

Ankstesnėse dalyse matėme kaip nustatyti  $\cos 30^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 45^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$  ir reikšmes. Pagal apibrėžimus  $\operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a}$  ir  $\operatorname{ctga} = \frac{\cos a}{\sin a}$  galima nustatyti ir tų pačių kampų tangentus bei kotangentus. Lieka neaišku, kaip nustatomos likusių kampų trigonometrinės funkcijos.

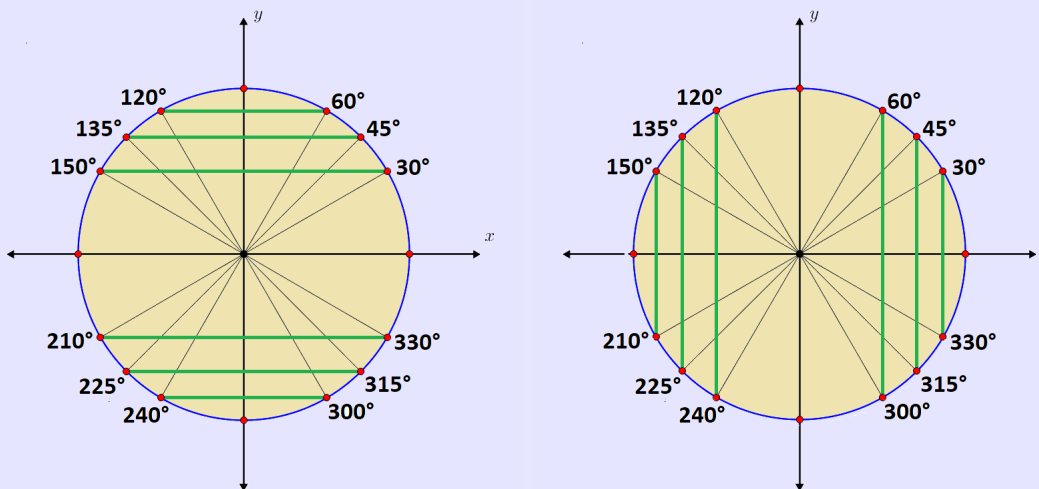
- Kampų  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $36^\circ$  ir t.t. trigonometrinių funkcijų reikšmės įgyja sudėtingesnes formas. Pavyzdžiui  $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ . Tokioms reikšmėms gauti reikia remtis trigonometrinėmis tapatybėmis, kurias aptarsime antrame skyriuje.
- Kampai  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$  (antras ketvirtis),  $210^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $240^\circ$  (trečias ketvirtis) ir  $300^\circ$ ,  $315^\circ$ ,  $330^\circ$  (ketvirtas ketvirtis) yra  $30^\circ$  arba  $45^\circ$  kartotiniai, todėl kuriame nors trigonometrinio skritulio ketvirtyje atskelia trečdali arba pusę. Jie atitinka parodytus spindulio pasukimus trigonometriniame skritulyje. Dėl šios savybės šiuos kampus laikome nesudėtingais. Jų funkcijų reikšmes apskaičiuoti taip pat galime, jei remsimės tokiu dėsningu:



Kiekvieno nesudėtingo kampo sinusai bei kosinusai yra lygūs skaičiams  $\pm \frac{1}{2}$ ,  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  ir  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Kodėl tai galioja išsiaiškinsime kitame poskyryje

Pateiktuose paveikslėliuose taškai, gauti trigonometrinio skritulio spindulį nukreipiant kampais  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ , ...,  $330^\circ$ , yra sujungti žaliomis atkarpomis kaip parodyta.



14. Paaiškinkite, kodėl pirmame paveikslėlyje žalios atkarpos yra lygiagrečios  $x$  ašiai, o antrame  $y$  ašiai.

15. Remdamiesi dėsningu didėjimo tvarka nurodykite:

a) ordinates visų taškų, priklausančių pirmojo paveikslėlio žalioms atkarpoms

b) abscises visų taškų, priklausančių antrojo paveikslėlio žalioms atkarpoms

(abiejų dalių atsakymas vienodas)

16. Remdamiesi paveikslėliais išrašykite visas juose pavaizduotų kampų  $\alpha$  ir  $\beta$  poras, tokias, kad

a)  $\sin \alpha = \sin \beta$

b)  $\cos \alpha = \cos \beta$

17. Remdamiesi antruoju paveikslėliu paaiškinkite, kodėl  $\cos(x) = \cos(-x)$  kiekvienam  $x$ .

18. Teisingai atlikus pratimą su kampų poromis galima pastebėti, jog  $\sin(90^\circ + x) = \sin(90^\circ - x)$ , kai  $x$  lygus  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ . Iš tiesų ši lygybė galioja su visais kampais  $x$ . Remdamiesi pirmu brėžiniu pamėginkite apibūdinti kampo  $x$  prasmę.

Kitas skyrius - redukcijos formulės

1. Naudodamiesi BRĖŽINIU apskaičiuokite trigonometrinių funkcijų reikšmes

- |  |                          |  |                                       |                                      |
|--|--------------------------|--|---------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\sin \frac{\pi}{3}$                | b) $\sin \frac{\pi}{2}$  | c) $\sin \frac{\pi}{4}$                | d) $\cos \frac{\pi}{4}$               | e) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ |
| f) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$   | g) $\sin \frac{2\pi}{3}$ | h) $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ | i) $\cos \frac{2\pi}{3}$              | j) $\sin \frac{3\pi}{2}$             |
| k) $\sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ | l) $\cos \frac{2\pi}{3}$ | m) $\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ | n) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$ |                                      |

## 1.5 Trigonometrinių funkcijų GRAFIKAI

Pavaizduosime, kaip pasinaudojant BRĖŽINIU yra gaunami trigonometrinių funkcijų grafikai.

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \operatorname{tg}(x)$$

## 1.6 Atvirkštinės funkcijos

Trigonometrinių funkcijų  $\sin x$ ,  $\cos x$  ir  $\operatorname{tg} x$  atvirkštinės funkcijos  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  ir  $\arctan x$  yra apibrėžiamos taip:

$x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\Leftrightarrow$	$y = \arcsin x$
$x = \cos y, y \in [0, \pi]$	$\Leftrightarrow$	$y = \arccos x$
$x = \operatorname{tgy}, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\Leftrightarrow$	$y = \arctan x$

Intervalai, kuriuose kinta  $y$ , yra specialiai parinkti taip, kad funkcijos  $\sin y$ ,  $\cos y$  ir  $\operatorname{tgy}$  dukart neįgytų tos pačios reikšmės. **Tik tokiu atveju jos gali turėti atvirkštines funkcijas.**

1. Naudodamiesi BRĖŽINIU arba trigonometrinių funkcijų GRAFIKAIS raskite visus kampus  $x$  intervale  $[0, 2\pi]$ , tokius, kad:

- |   |  |                                  |
|---|--|----------------------------------|
| a) $\sin x = 1$                               | b) $\cos x = 1$                                | c) $\sin x = 0$                  |
| d) $\cos x = 0$                               | e) $\operatorname{tg} x = 1$                   | f) $\operatorname{ctg} x = 1$    |
| g) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$              | h) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$               | i) $\sin x = 0,5$                |
| j) $\cos x = 0,5$                             | k) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$               | l) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| m) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | n) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |                                  |

2. Pasinaudosime šio skyrelio žiniomis

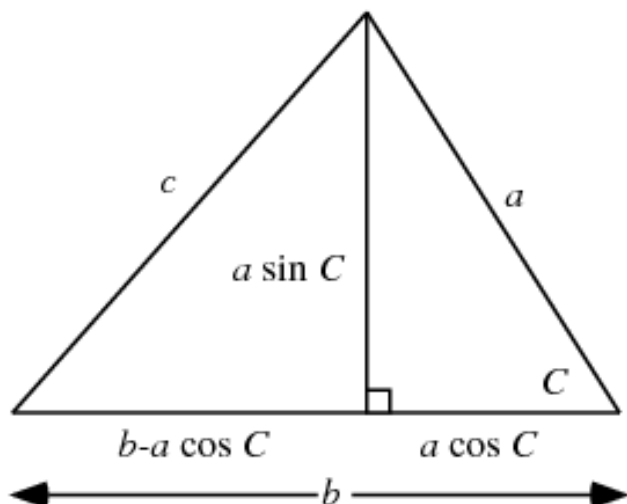
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin \text{ ir } \cos \text{ geometrinė interpretacija} \end{cases}$$

bei ankstesnėmis žiniomis

$$\begin{cases} \text{greitosios daugybos formulė } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{Pitagoro teorema } c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$



ir įrodysime Kosinusų Teoremą  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .



Remdamiesi brėžiniu paaiškinkite:

- Kodėl trikampio aukštinė yra lygi  $a \sin C$ ? (BRĖŽINYS)
- Kodėl dešinioji pagrindo dalis yra lygi  $a \cos C$ ? (BRĖŽINYS)
- Kodėl kairioji pagrindo dalis yra lygi  $b - a \cos C$ ?
- Kodėl tenkinama lygybė  $c^2 = (a \sin C)^2 + (b - a \cos C)^2$ ?
- Įrodykite tapatybę  $(a \sin C)^2 + (b - a \cos C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  (FORMULĖ  $(a - b)^2$ )

3. **Bonus.** Įrodykite Herono formulę: bet kurio trikampio su kraštinėmis  $a, b, c$  ir pusperimetriu  $p$  plotas  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ . Galite remtis išvada  $S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{ab \sqrt{1 - \cos^2 C}}{2}$

## 2 Antra pamoka

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \xrightarrow{y \rightarrow x} \sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \xrightarrow{y \rightarrow x} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Kaip galima greitai gauti kampų sumos formules? Galite pasinaudokite egzaminų lapu arba atsiminti tokiu būdu:

- Tapatybes  $\begin{cases} \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{cases}$  įsiminti šiaip ar taip teks
- Parašome:  $\begin{cases} \sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x \\ \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x \end{cases}$
- Šiose išraiškose pasirenkame narius  $\sin x$  ir  $\cos x$ , ir pakeičiame į  $\sin y$  ir  $\cos y$  taip, kad naujoji išraiška nebūtų suprastinama:

$$\begin{array}{l} \sin x \cos x + \sin x \cos x \rightarrow \\ \sin x \cos y + \sin y \cos x \end{array}$$

ir

$$\begin{array}{l} \cos x \cos x - \sin x \sin x \rightarrow \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{array}$$

1. Kampų sumos formulėse įstatykite  $y \rightarrow -y$  ir jas pertvarkykite į kampų skirtumo formules:

- a)  $\sin(x-y)$
- b)  $\cos(x-y)$

2. Pasinaudoję tangento apibrėžimu (pirma pamoka) bei kampų sumos formulėmis, įrodykite, kad

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

3. **Bonus!** Sudėkite  $\sin(x-y)$  ir  $\sin(x+y)$  formules, pakeiskite  $\begin{cases} x-y=A \\ x+y=B \end{cases}$ , įsitikinkite, kad galioja

$$\begin{cases} x-y=A \\ x+y=B \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{A+B}{2} \\ y=\frac{B-A}{2} \end{cases}$$

ir pasinaudoję pakeitimu išveskite reiškinių formulę  $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{B+A}{2}\right) \cos\left(\frac{B-A}{2}\right)$

4. **Bonus!** Sudėkite  $\cos(x-y)$  ir  $\cos(x+y)$  formules, pakeiskite  $\begin{cases} x-y=A \\ x+y=B \end{cases}$ , įsitikinkite, kad galioja

$$\begin{cases} x-y=A \\ x+y=B \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{A+B}{2} \\ y=\frac{B-A}{2} \end{cases}$$

ir pasinaudoję pakeitimu išveskite reiškinių formulę  $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{B+A}{2}\right) \cos\left(\frac{B-A}{2}\right)$

5. Egzamino uždavinys (sunkus): išspręskite lygtį  $\sin x = \cos 75^\circ + \cos 15^\circ$
6. **Bonus!** Sinusoide yra vadinama funkcija, kurią galime parašyti kaip  $k \sin ax + b$  (arba  $k \cos ax + b$ ). Įrodysime, kad visos funkcijos, užrašomos forma  $a \sin x + b \cos x$ , yra sinusoidės.

- Pakeiskite reiškinį į  $\sqrt{a^2+b^2} \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x \right)$
- Parodykite, kad skaičiai  $X = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$  ir  $Y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  tenkina  $X^2 + Y^2 = 1$ , kas reiškia, jog  $X$  ir  $Y$  visada gali būti to paties kampo sinusas ir kosinusas:
$$\begin{cases} X = \cos t \\ Y = \sin t \end{cases}$$
- Kam lygus reiškinys  $\cos t \sin x + \sin t \cos x$ ?

7. Panaudokite formulę  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$  reiškiniui

$2 \sin(4\alpha) \cos(2\alpha) - \sin(6\alpha)$  suprastinti.