(2) a)

Imagine que temos n discos para o jogo.

n-1 discos em azul

1 disco em vermelho

Respeitando as regras da Torre de Hanoi, sabe-se que temos que mover todos os discos, exceto a base, na qual moveremos nos passos finais para demonstrarmos o funcionamento do jogo. Baseado nisso, temos que mover n-1 discos primeiramente, -1 é a base, na qual retiramos, anteriormente mencionado. Para mover os n-1 da haste para outra, é nescessário $T_{n-1}-1$ movimentos, ou seja $T_{n-1}-1$ representa a quantidade mínima para mover n-1 discos de uma haste para outra, sempre obedecendos as regras.

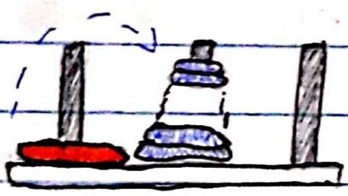
Supondo que todos os discos estão na haste mais a esquerda (n-1+1 discos), e que devemos mover com quantidade mínima (T_{n-1}) n-1 discos para a haste central. Mover todos primeiramente exceto a base

$T_{n-1} + 1$ | daí surge o -1 dos n-1 discos.

→ quantidade mínima para mover n-1 discos.

→ quantidade mínima para base ser deslocada.

* Essas quantidades mínimas são de movimentos mínimos para deslocar uma certa quantidade de discos de uma haste para outra.



* Movidos n-1 da haste da esquerda para a haste central. Ficando assim 1 disco (base) na haste ~~da~~ a esquerda.

1º Passo: Depois de mover os n-1 discos, agora é nescessário mover a base, da haste da esquerda para a haste da direita.

n-1 discos

Disco da base

Já que anteriormente movemos T_{n-1} discos e agora a base, e a base como é um disco só, a quantidade mínima de movimentos é apenas 1.

Ou seja $T_{n-1} + 1$ → movimentos da base, mínimos.

↳ movimentar os n-1 discos

~~* Ant~~ * anteriormente isso já foi ressaltado.

2º Passo: Deslocar novamente n-1 discos da haste central para a haste da direita onde a base se encontra, nisso foi nescessario T_{n-1} movimentos mínimos somados as expressões obtidas dos passos anteriores, resultando:

$\underbrace{T_{n-1} + 1} + T_{n-1}$ → T_{n-1} movimentos ~~+~~ mínimos dos n-1 discos da haste para a direita.

↳ Movimentos da base somado a dos T_{n-1} movimentos mínimos de n-1 discos (1º) Passo.

Discussão: Depois que deslocamos n-1 discos da haste central para a haste da direita ~~onde~~, onde se encontra a base. Logo o jogo foi finalizado com êxito para os n discos ou seja a quantidade mínima de movimentos para deslocar uma pilha de n discos de uma haste para outra, corresponde a seguinte

Expressão:

$$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} \Rightarrow T_n = 2T_{n-1} + 1$$

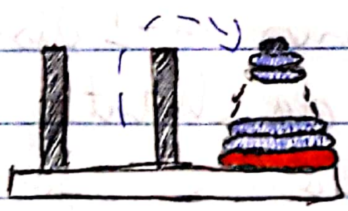
Onde: $T_n \Rightarrow$ Quantidade de movimentos de n discos.
~~T_{n-1}~~ $T_{n-1} + 1 \Rightarrow$ movimentos mínimos dos n-1 discos e da base (1 disco).

Portanto a quantidade de movimentos quando tem n discos corresponde, a seguinte expressão: $2T_{n-1} + 1$, percebe-se que é uma fórmula de recorrência, em paralelo, como se trata de uma fórmula de recorrência, é preciso o ponto de partida, caso base. Assim sendo, o ~~o~~ ponto de partida é com $n=1$, onde é necessário apenas um movimento mínimo ($T_1 = 1$).

Conclui-se, que essas duas expressões

$$\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_n = 2T_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Definem uma sequência de números que corresponde a um número mínimo de movimentos que é preciso fazer para n discos, portanto é uma expressão da fórmula de recorrência.



n-1 discos

Disco da base

Exemplos da aplicação

$T_1 = 1$

$T_2 = 2T_{2-1} + 1 = 3$

$T_3 = 2T_{3-1} + 1 = 7$

$T_4 = 2T_{4-1} + 1 = 15$

O passo 2 pode ser observado por meio do desenho acima onde os n-1 discos foram para haste a direita.

2 Questão

b)

Pela forma de recorrência podemos escrever a torre para n discos, baseado na ideia de cada movimento posterior precisa do anterior.

Resultando nas seguintes expressões:

$$T_1 = 1$$
$$T_2 = 2T_1 + 1$$
$$T_3 = 2T_2 + 1$$
$$\vdots$$
$$T_{n-2} = 2T_{n-3} + 1$$
$$T_{n-1} = 2T_{n-2} + 1$$
$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

Para que conseguirmos cancelar boa parte dos termos, seguindo os mesmos artifícios do cancelamento de termos de fórmulas de recorrências para uma fórmula fechada, ~~cade~~ valida para um $\underline{n}$ e seu intervalo.

Observado a expressões de baixo ~~parar~~ para cima, temos que cancelar o $2T_{n-1}$ e para isso, basta multiplicar T_{n-1} de ambos os lados da expressão por 2, depois de cancelar o $2T_{n-1}$, preocuparmos em cancelar $2T_{n-2}$, então vamos forçar a "barra" e multiplicar T_{n-2} por (em decorrência o que vai depois da igualdade) 2^2

Perceba que existe um padrão, observe que o número que multiplica as expressões é uma potência de 2 e o expoente que aparece nesse ~~2~~ 2 somado ao índice do seu ~~x~~ T_n da sempre ele, ou seja T_n.

Para ficar mais claro, note:

$$2^{n-1} T_1 = 1 \cdot 2^{n-1}$$
$$2^{n-2} \cdot T_2 = 2^{n-1} T_1 + 1 \cdot 2^{n-2}$$
$$2^{n-3} \cdot T_3 = 2^{n-2} T_2 + 1 \cdot 2^{n-3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot$$
$$2^2 \cancel{T_{n-2}} = 2^3 T_{n-3} + 1\, 2^2$$
$$2^1 \cancel{T_{n-1}} = 2^2 T_{n-2} + 1 \cdot 2^1$$
$$T_n = 2 T_{n-1} + 1$$

Agora e somamos todas as linhas

$$\cancel{2^{n-1} T_1} = 1 \cdot 2^{n-1}$$
$$\cancel{2^{n-2} T_2} = \cancel{2^{n-1} T_1} + 1 \cdot 2^{n-2}$$
$$\cancel{2^{n-3} T_3} = \cancel{2^{n-2} T_2} + 1 \cdot 2^{n-3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot$$
$$\cancel{2^2 T_{n-2}} = \cancel{2^3 T_{n-3}} + 2^2$$
$$\cancel{2^1 T_{n-1}} = \cancel{2^2 T_{n-2}} + 2$$
$$T_n = \cancel{2 T_{n-1}} + 1$$

Logo o que nos resta é apenas:

$$T_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots 2^2 + 2^1 + 2^0$$

A soma acima tem todas as suas parcelas correspondendo a uma parcela de 2

Agora precisamos resolver a soma T_n

Mas, percebe-se que as parcelas estão em progressão Geométrica, agora basta aplicar a fórmula de soma de termos em P.G, obtemos:

$$\cancel{T_n = T_n}$$

$$T_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_n = 2^n - 1}$$

Assim chegamos a conclusão, a partir da fórmula aberta, a fórmula ~~de~~ fechada para o problema da Torre de Hanoi.

C) Solução do problema para 64 discos, 18.446.744.073.709.551.615 movimentos

(2) (b) Queremos mostrar que a fórmula fechada serve para os $n \geq 0$.

Seguindo as etapas a seguir:

(1º Passo
provar para T_1

$T_1 = 2T_0 + 1 \Rightarrow T_1 = 1$ ou seja, $2^n - 1 \Rightarrow 2^1 - 1 = 1$
é verdadeira

(2º Passo
Hipótese de indução: $T(n) = 2^n - 1$

Passo indutivo, $P(K) \rightarrow P(K+1)$, com $K \in \mathbb{Z}_+$, ou seja $n = K$.

$$2T_{(K+1-1)} + 1 = 2^{K+1} - 1$$
$$= 2T_K + 1 = 2^{K+1} - 1$$

Percebe-se que conhecendo T_K, que é a hipótese da indução, agora basta substituir

$$2(2^K - 1) + 1$$

desenvolvimento

$$= 2^{K+1} - 2 + 1$$
$$= 2^{K+1} - 1$$

Queremos chegar em $2^{K+1} - 1$

Percebe-se que chegamos onde queríamos, logo como $P(1)$ e $P(K+1)$ também, a fórmula fechada é válida para todo n.