

Science Computer

DATAS STRUCTURE ADVANCED-CRT0026

Exercises And Resumes

Discente Victor Gabriel Martins de Oliveira Loiola Matrícula 473091

Professor

Msc. Luiz Alberto do Carmo Viana

Sumário

1	Exercises Resolved			
	1.1	Binary Search Tree	2	
	1.2	AVL Tree	5	
	1.3	Red-Black Tree	7	
2	2 Resumes		8	

1 Exercises Resolved

1.1 Binary Search Tree

Exercise 1. O que aconteceria caso remove(leftMaxkey); fosse posta como a última instrução em seu bloco?

Prova

Se deslocamos remove(leftMaxKey) como última instrução do seu bloco resultaria em uma **falha de segmentação** além do mais estaria também duplicando as chave e valor do leftMaxKey. Assim o conteúdo e a chave do **nó** que deseja-se apagar tem chave e valor do leftMaxKey.

Exercise 2. Por que o nó de leftMaxkey tem ao menos uma sub-árvore vazia?

Prova

Já que <u>leftMaxKey</u> é a chave com maior valor das sub-árvores da esquerda do nó pai, mas perceba que <u>leftMaxKey</u> está restrito somente a ter filho esquerdo ou não,resultando uma sub-árvore vazia que nesse caso seria a da direita.Logo concluir-se que <u>leftMaxKey</u> não deve ter filhos com chaves maiores que a sua, pois se tivesse ele não seria leftMaxKey e sim alguma chave maior na sub-árvore a sua direita.

Portanto <u>leftMaxKey</u> se tiver filho só pode ter-lo na sub-árvore a esquerda, o que resta uma sub-árvore vazia, mas no caso de não possuí filhos terá duas sub-árvores vazias.

Exercise 3. Pesquise sobre move semantics em C++.

Prova

No C ++ 11, as **semânticas de movimento** e as referências rvalue foram adicionadas à linguagem. Além disso, podemos aumentar significativamente o **desempenho**, evitando **cópias desnecessárias de objetos temporários**.

Exercise 4. Prove que, se um nó em uma Árvore Binária de Busca tem dois filhos, então seu sucessor não tem filho esquerdo e seu antecessor não tem filho direito.

Prova

Supondo por absurdo que o sucessor tem filho esquerdo e o antecessor tem filho direito. Por hipótese temos que um nó tem dois filhos, iremos chamar-lo de nó \mathbf{X} .

Vamos considerar que por definição o **antecessor** é o nó com maior valor de chave dentre os nós com valores menores que a que o pai(X). Analogamente o **sucessor** é considerado a por definição que é a chave com menor valor dentre as chaves com maiores valores ao nó pai(X).

Temos 2 casos para o antecessor e 2 casos sucessor, à considerar.

2 casos do antecessor.

Caso 1.1: O antecessor é pai do nó X, assim o nó X é seu filho direito e X tem sua sub-árvore esquerda vazia.

observe o desenho.

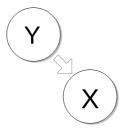


Figura 1: O nó Y é o antecessor do Nó X

Chegamos a um absurdo visto que nesse caso o nó X não pode ter filho esquerdo,pois o nó com valor da maior chave é o seu antecessor(pai) impossibilitando o nó X de possuir uma sub-árvore esquerda, e por hipótese o nó X possui dois filhos.

Caso 1.2: O antecessor de X é um descendente, assim ele possui chave com maior valor dentre os nós com chaves com menores valores que X. Assim a sub-árvore a direita do antecessor possui chave com valor entre o nó X e o antecessor.

$$A < FDA < X$$
 onde:

A é o Antecessor(Filho do nó X), FDA é o Filho Direito do Antecessor, X é o nó pai.

Supomos que o antecessor de X tem nó direito, o que é uma contradição com a definição de um nó antecessor, pois se o antecessor tiver filho direito, esse nó não pode ser intitulado antecessor, visto que o antecessor é o nó com chave de maior valor dentre os nós de chaves com os menores valores.

2 casos do sucessor.

Caso 2.1: O sucessor é pai do nó X, assim o nó X é seu filho esquerdo e X tem sua sub-árvore esquerda vazia.

observe o desenho.

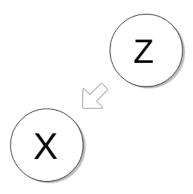


Figura 2: O nó Z é o sucessor do Nó X

Absurdo! Visto que por hipótese o nó X possui dois filhos, pela figura notamos que o nó X não pode ter filho direito, pois o sucessor é o nó com chave de maior valor, e os valores maiores que X ficam na

sub-árvore do sucessor(Y).

Caso 2.2: O sucessor é descendente do nó X.Portanto o sucessor possui chave com menor valor dentre a sub-árvore direita de X.Foi suposto que o sucessor tem filho esquerdo,logo, a chave do filho esquerdo do sucessor tem valor menor que a chave do sucessor e de chave com valor maior ao nó X.

$$S > FES > X$$
 onde:

S é o Sucessor(Filho do nó X), FES é o Filho Esquerdo do Sucessor, X é o nó pai.

Como foi suposto, o sucesso possui filho esquerdo. Chegamos a um absurdo pois há uma quebra de definição de sucessor, perceba se o sucesso tem uma chave menor que a dele, essa chave menor deveria ser o sucessor e não seu pai que antes era sucessor.

Logo provamos que, se um nó em uma Árvore Binária de Busca tem dois filhos, então seu sucessor não tem filho esquerdo e seu antecessor não tem filho direito.

1.2 AVL Tree

Exercise 5. Prove que uma árvore binária de altura h tem no máximo $2^{h+1} - 1$ nós. Dica: tente usar indução.

Prova via indução

Caso Base:

Com altura 0 tempos 1 nó, com altura 1 tempos 2 nós e com altura 2 tempos 7 nós.

h=0 contém 1 nó. h=1 contém 3 nós. h=2 contém 7 nós.

 2^0 tem no máximo 1 nó. $2^0 + 2^1$ tem no máximo 3 nós. $2^0 + 2^1 + 2^2$ tem no máximo 7 nós.

Agora utilizando a fórmula $2^{h+1}-1$ para verificarmos o **primeiro caso onde a altura é 0**, como será utilizada o **primeiro princípio da indução**, vulgo indução fraca, verificar até a altura 2 é opcional. Atente-se ao fato que a segunda quantidade máxima(2^1) de nós depende da primeira(2^0), a terceira depende(2^2) da primeira quantidade de nós e da segunda. Assim temos que pegar a 2^h e somar com quantidade de nós máximos anteriores ao nó que deseja-se calcular a quantidade máxima de nós, é válido ressaltar que 2^h com $h \geq 0$, onde h é a altura, é a base para que que possa fazer os cálculos dos determinados níveis.

$$\begin{array}{c} \operatorname{com}\,h=0\\ \text{pela fórmula}\,\,2^{h+1}-1\;\operatorname{obtemos:}\,\,2^{0+1}-1=1\;\operatorname{nó}\\ \operatorname{com}\,h=1\\ \text{pela fórmula}\,\,2^{h+1}-1\;\operatorname{obtemos:}\,\,2^{1+1}-1=3\;\operatorname{nós}\\ \text{pela fórmula}\,\,2^{h+1}-1\;\operatorname{obtemos:}\,\,2^{2+1}-1=7\;\operatorname{nós} \end{array}$$

Como o caso base é verdadeiro, partiremos para o passo indutivo.

Passo Indutivo: $P(h) \rightarrow (h+1)$.

Temos que a fórmula $2^{h+1}-1$ funciona até 2^h , com $h \ge 0$, sendo assim a hipótese de indução(H.I). Desejaja provar que a fórmula vale para os h+1-ésimos termos observe a estrutura abaixo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h + 2^{h+1}$$

Perceba que fórmula válida para calcular a quantidade de nós máximos em uma árvore de até 2^h que dá liberdade suficiente para utiliza-se a hipótese de indução(H.I).

Substituindo H.I no somatório e desenvolvendo a equação após a inserção:

$$\begin{array}{lll} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^h + 2^{h+1} \\ &= & 2^{h+1} - 1 + 2^{h+1} \\ &= & 2^{h+1} + 2^{h+1} - 1 \\ &= & 2^h (2^1 + 2^1) - 1 \\ &= & 2^h \cdot 4 - 1 \\ &= & 2^h \cdot 2^2 - 1 \\ &= & 2^{h+2} - 1 \end{array}$$

Como concluímos os passos base e passo indutivo, sendo ambos verdadeiros, concluímos que $2^{h+1} - 1$ com $h \ge 0$ é capaz de resultar no número de nós máximo em uma **árvore binária de busca** com altura h.

Exercise 6. Explique por que não é possível, mesmo após uma inserção ou remoção, haver um node com balance(node) $\in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Prova

Temos como propriedade da AVL Tree, que, cada nó pode ter o balance(node) $\in \{-1,0,1\}$.

*OBS:balance(node) é o mesmo que o fator de balanceamento.

É válido ressaltar que a cada operação de inserção/remoção são feitas verificações no caminho do nó inserido/removido até a raiz, sempre verificando se há quebra da propriedade do fator de balanceamento em cada nó do caminho. Outro detalhe que apenas um nó por vez é inserido ou removido. Então a cada operação, temos que um nó é inserido ou removido e que só depois as verificações do fator de balanceamento são feitas, ou seja, existe um pequeno intervalo na qual a AVL pode está ou não desbalanceada, na possibilidade da estrutura arbórea está balanceada, seu balance $(node) \in \{-1,0,1\}$ por propriedade(node).

Analisando a segunda possibilidade, no qual configura-se o desbalanceamento no instante da operação (inserção/remoção) e etapa de verificações do nós do caminho modificado, temos que pelo fato de inserimos um só nó ou remover-lo as manutenções na árvore só serão feitas caso o fator de balanceamento for diferente do esperado pela propriedade, sendo assim, no instante onde verifica-se o balance(node) é -2 ou 2 automaticamente é feito as operações de manutenção da árvore(rotações, atualizações de altura).

Logo como não possível inserir mais de um nó por vez, consequentemente também não é possível ter balance(node) ≤ -3 ou ≥ 3 pelo fato que quando chega a 2 ou -2 já são feitas as manutenções e a árvore volta a ser balanceada.

Portanto só é possível ter o balance(node) $\in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Observe que os valores de -2 e 2 são casos especiais, anteriormente já mencionados.

Exercise 7. Descreva uma forma de converter uma Árvore Binária de Busca com n nós em uma Árvore AVL em tempo O(nlogn).

Prova

TODO escreve isso quando fizer a questão ou transcreve-la do caderno.

Exercise 8. Em uma árvore binária, um nó é dito filho único sse ele tem pai e seu nó pai tem exatamente um filho. Vamos definir a razão de solidão de uma árvore binária T(RS(T)) como o número de filhos únicos em T dividido pelo número de nós de T. Prove que, se T é uma Árvore AVL, então $RS(T) \leq \frac{1}{2}$. Dica: quais nós de uma Árvore AVL podem ser filhos únicos?.

Prova

TODO escreve isso quando fizer a questão ou transcreve-la do caderno.

1.3 Red-Black Tree

 \mathbf{TODO} escreve o restante das questões quando termina-las ou transcrever do caderno.

2 Resumes

 \mathbf{TODO} escreve isso quando elaborá uma certa quantidade X de pequenos resumos.