



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
UFC-CAMPUS CRATEÚS

Science Computer

DATAS STRUCTURE ADVANCED-CRT0026

Exercises And Resumes

Discente

Victor Gabriel Martins de Oliveira Loiola

Matrícula 473091

Professor

Msc. Luiz Alberto do Carmo Viana

Crateús

2020

Sumário

1	Exercises Resolved	2
1.1	Binary Search Tree	2
1.2	AVL Tree	5
1.3	Red-Black Tree	7
2	Resumes	8

1 Exercises Resolved

1.1 Binary Search Tree

Exercise 1. O que aconteceria caso `remove(leftMaxKey)`; fosse posta como a última instrução em seu bloco?

Prova

Se deslocamos `remove(leftMaxKey)` como última instrução do seu bloco resultaria em uma **falha de segmentação**, além do mais estaria também duplicando as chave e valor do `leftMaxKey`. Assim o conteúdo e a chave do nó que deseja-se apagar tem chave e valor do `leftMaxKey`.

Exercise 2. Por que o nó de `leftMaxKey` tem ao menos uma sub-árvore vazia?

Prova

Já que `leftMaxKey` é a chave com maior valor das sub-árvores da esquerda do nó pai, mas percebe que `leftMaxKey` está restrito somente a ter filho esquerdo ou não, resultando uma sub-árvore vazia que nesse caso seria a da direita. Logo concluir-se que `leftMaxKey` não deve ter filhos com chaves maiores que a sua, pois se tivesse ele não seria `leftMaxKey` e sim alguma chave maior na sub-árvore a sua direita.

Portanto `leftMaxKey` se tiver filho só pode ter-lo na sub-árvore a esquerda, o que resta uma sub-árvore vazia, mas no caso de não possuir filhos terá duas sub-árvores vazias.

Exercise 3. Pesquise sobre move semantics em C++.

Prova

No C++ 11, as **semânticas de movimento** e as referências rvalue foram adicionadas à linguagem. Além disso, podemos aumentar significativamente o **desempenho**, evitando **cópias desnecessárias de objetos temporários**.

Exercise 4. Prove que, se um nó em uma Árvore Binária de Busca tem dois filhos, então seu sucessor não tem filho esquerdo e seu antecessor não tem filho direito.

Prova

Supondo por absurdo que o sucessor tem filho esquerdo e o antecessor tem filho direito. Por hipótese temos que um nó tem dois filhos, iremos chamá-lo de nó **X**.

Vamos considerar que por definição o **antecessor** é o nó com maior *valor de chave dentre os nós com valores menores* que a que o pai(X). Analogamente o **sucessor** é considerado a por definição que é a *chave com menor valor dentre as chaves com maiores valores* ao nó pai(X).

Temos 2 casos para o antecessor e 2 casos sucessor, à considerar.

2 casos do antecessor.

Caso 1.1: O antecessor é pai do nó **X**, assim o nó X é seu filho direito e X tem sua sub-árvore esquerda vazia.

observe o desenho.

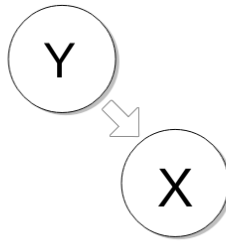


Figura 1: O nó Y é o antecessor do Nó X

Chegamos a um absurdo visto que nesse caso o nó X não pode ter filho esquerdo, pois o nó com valor da maior chave é o seu antecessor(pai) impossibilitando o nó X de possuir uma sub-árvore esquerda, e por hipótese o nó X possui dois filhos.

Caso 1.2: O antecessor de X é um descendente, assim ele possui chave com maior valor dentre os nós com chaves com menores valores que X. Assim a sub-árvore a direita do antecessor possui chave com valor entre o nó X e o antecessor.

$$A < FDA < X$$

onde:

A é o **A**ntecessor(Filho do nó X),
 FDA é o **F**ilho **D**ireito do **A**ntecessor,
 X é o nó pai.

Supomos que o antecessor de X tem nó direito, o que é uma contradição com a definição de um nó antecessor, pois se o antecessor tiver filho direito, esse nó não pode ser intitulado antecessor, visto que o antecessor é o nó com chave de maior valor dentre os nós de chaves com os menores valores.

2 casos do sucessor.

Caso 2.1: O sucessor é pai do nó X, assim o nó X é seu filho esquerdo e X tem sua sub-árvore esquerda vazia.

observe o desenho.

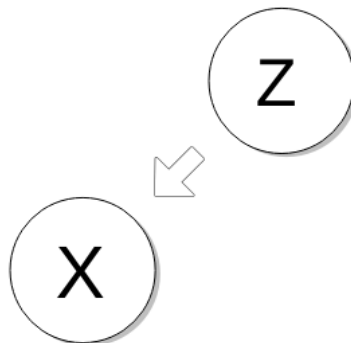


Figura 2: O nó Z é o sucessor do Nó X

Absurdo! Visto que por hipótese o nó X possui dois filhos, pela figura notamos que o nó X não pode ter filho direito, pois o sucessor é o nó com chave de maior valor, e os valores maiores que X ficam na

sub-árvore do sucessor(Y).

Caso 2.2: O sucessor é descendente do nó X. Portanto o sucessor possui chave com menor valor dentre a sub-árvore direita de X. Foi suposto que o sucessor tem filho esquerdo, logo, a chave do filho esquerdo do sucessor tem valor menor que o sucessor e com valor maior ao nó X.

$$S > FES > X$$

onde:

S é o **Sucessor**(Filho do nó X),
FES é o **Filho Esquerdo** do **Sucessor**,
X é o nó pai.

Como foi suposto, o sucesso possui filho esquerdo. Chegamos a um absurdo pois há uma quebra de definição de sucessor, perceba se o sucesso tem uma chave menor que a dele, essa chave menor deveria ser o sucessor e não seu pai que antes era sucessor.

Logo provamos que, se um nó em uma Árvore Binária de Busca tem dois filhos, então seu sucessor não tem filho esquerdo e seu antecessor não tem filho direito.

1.2 AVL Tree

Exercise 5. Prove que uma árvore binária de altura h tem no máximo $2^{h+1} - 1$ nós. Dica: tente usar indução.

Prova via indução

Caso Base:

Com altura 0 temos 1 nó, com altura 1 temos 2 nós e com altura 2 temos 7 nós.

$h = 0$ contém 1 nó.

$h = 1$ contém 3 nós.

$h = 2$ contém 7 nós.

2^0 tem no máximo 1 nó.

$2^0 + 2^1$ tem no máximo 3 nós.

$2^0 + 2^1 + 2^2$ tem no máximo 7 nós.

Agora utilizando a fórmula $2^{h+1} - 1$ para verificarmos o **primeiro caso onde a altura é 0**, como será utilizada o **primeiro princípio da indução**, vulgo indução fraca, verificar até a altura 2 é opcional. Atente-se ao fato que a segunda quantidade máxima (2^1) de nós depende da primeira (2^0), a terceira depende (2^2) da primeira quantidade de nós e da segunda. Assim temos que pegar a 2^h e somar com quantidade de nós máximos anteriores ao nó que deseja-se calcular a quantidade máxima de nós, é válido ressaltar que 2^h com $h \geq 0$, onde h é a altura, é a base para que possa fazer os cálculos dos determinados níveis.

com $h = 0$

pela fórmula $2^{h+1} - 1$ obtemos: $2^{0+1} - 1 = 1$ nó

com $h = 1$

pela fórmula $2^{h+1} - 1$ obtemos: $2^{1+1} - 1 = 3$ nós

pela fórmula $2^{h+1} - 1$ obtemos: $2^{2+1} - 1 = 7$ nós

Como o caso base é verdadeiro, partiremos para o passo indutivo.

Passo Indutivo: $P(h) \rightarrow (h + 1)$.

Temos que a fórmula $2^{h+1} - 1$ funciona até 2^h , com $h \geq 0$, sendo assim a hipótese de indução ($H.I$). Deseja-se provar que a fórmula vale para os $h + 1$ -ésimos termos. observe a estrutura abaixo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h + 2^{h+1}$$

Perceba que fórmula válida para calcular a quantidade de nós máximos em uma árvore de até 2^h que dá liberdade suficiente para utiliza-se a hipótese de indução ($H.I$).

Substituindo $H.I$ no somatório e desenvolvendo a equação após a inserção:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h + 2^{h+1} \\ &= 2^{h+1} - 1 + 2^{h+1} \\ &= 2^{h+1} + 2^{h+1} - 1 \\ &= 2^h(2^1 + 2^1) - 1 \\ &= 2^h \cdot 4 - 1 \\ &= 2^h \cdot 2^2 - 1 \\ &= 2^{h+2} - 1 \end{aligned}$$

Como concluímos os passos base e passo indutivo, sendo ambos verdadeiros, concluímos que $2^{h+1} - 1$ com $h \geq 0$ é capaz de resultar no número de nós máximo em uma **árvore binária de busca** com altura h .

Exercise 6. Explique por que não é possível, mesmo após uma inserção ou remoção, haver um node com $\text{balance}(\text{node}) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Prova TODO escreve o restante das questões quando termina-las ou transcrever do caderno.

TODO escreve o restante das questões quando termina-las ou transcrever do caderno.

1.3 Red-Black Tree

TODO escreve o restante das questões quando termina-las ou transcrever do caderno.

2 Resumes

TODO escreve isso quando elaborá uma certa quantidade X de pequenos resumos.