Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence

2019

1 Introduction

Nous étudierons ici les suites numériques, c'est-à-dire des familles d'éléments indéxés sur $\mathbb{N}$ et à valeur dans un ensemble de nombres.
On notera $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites numériques à valeurs dans E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E.

2 Convergence des suites

2.1 Limite d'une suite

Définition 1

Soit (E,d) un espace métrique.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(u_n, \ell) < \varepsilon$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Si cette limite existe, alors elle est unique.

Si une suite n'est pas convergente, elle est divergente.

Proposition 1

Toute suite convergente est bornée.

Attention ! La réciproque n'est pas vraie, il suffit de regarder la suite définie par $u_n = (-1)^n$...
On peut se référer à la leçon sur la continuité pour voir une application directe de la convergence. (continuité séquentielle)

Théorème 1

Passage à la limite dans les inégalités larges
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
Si les deux suites convergent et si, àpdcr, on a $u_n \leq v_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Démonstration. □

Théorème 2

Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.

Démonstration. □

Théorème 3

Théorème de comparaison
Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Si, àpdcr, on a que (u_n) diverge vers $+\infty$ et

$$(u_n) \leqslant (v_n)$$

Alors (v_n) diverge également vers $+\infty$.

Démonstration. □

Théorème 4

Théorème d'encadrement
Soientt $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles.
Si, àpdcr, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (w_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge aussi vers ℓ.

Démonstration. □

Définition 2

Suites adjacentes
Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :

— L'une est croissante, l'autre décroissante.

— $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème 5

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Démonstration. □

Un exemple courant est celui des suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$, qui convergent toutes les deux vers e.

Lemme 2.1.1. *Lemme de Cesàro*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels ou complexes. Si elle converge vers ℓ, alors la suite de ses moyennes de Cesàro, de terme général $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge également, et sa limite est ℓ.

Lemme de l'escalier
Si une suite (u_n) vérifie $(u_n - u_{n-1} \to \ell$, alors elle vérifie aussi :

$$\left(\frac{u_n}{n}\right) \to \ell$$

Exemple 1

Suite divergente dont la moyenne de Cesàro converge
On peut prendre la suite périodique définie par $u_n = (0, 1, 0, \cdots, 0, 1)$ qui a pour moyenne de Cesàro $1/2$.

3 Valeurs d'adhérence, théorème de Bolzano-Weierstrass

3.1 Suites extraites

Définition 1

Suite extraite
Une suite extraite, ou sous-suite de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ appellée extractrice.

Proposition 1

Une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ.

On en déduit donc que si une suite admet des sous-suites n'ayant pas la même limite, alors elle est divergente.
Un peu vide..à compléter.

3.2 Valeurs d'adhérence

Définition 2

Valeur d'adhérence
Soit (u_n) une suite réelle et a un réel.
On dit que a est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers a.

Exemple 1

La suite $(sin(n))$ admet l'intervalle $[-1, 1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence. Ceci résulte du fait que l'ensemble des entiers modulo 2π est dense dans $\mathbb{R}$.
La suite $((-1)^n n$ n'admet aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.

Proposition 3

Une suite convergente n'admet qu'une valeur d'adhérence, c'est sa limite.

Faut-il plus de théorèmes/prop ?
Par définition, on a aussi que si une suite admet plusieurs valeurs d'adhérence, alors elle diverge.

Définition 3

Soit E un espace métrique.
On dit que X est une partie compacte de E si toute suite d'éléments de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X.

Théorème 1

Bolzano-Weierstrass
Toute suite contenue dans un compact admet une sous-suite convergente.

Ce théorème, capital, s'énonce d'une façon plus simple dans le cas réel. Il affirme en fait que de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente. Partie à compléter

3.3 Suites de Cauchy

Définition 4

Soit (E, d) un espace métrique.
Une suite (u_n) est dite de Cauchy, ou bien vérifie le critère de Cauchy, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q > N,\ d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

Intuitivement, là où pour une suite convergente les éléments se rapprochent de plus en plus d'une valeur, ici les termes se rapprochent entre eux.
Cette notion est fondamentale et sert à définir la notion d'espace complet, l'exemple le plus connu étant la complétude de $\mathbb{R}$ par rapport à l'incomplétude de $\mathbb{Q}$

Proposition 4

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 5

Espace complet
Soit (E, d) un espace métrique. Cet espace est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans (E, d) converge dans E.

On peut aussi dire que la métrique d est complète. La propriété de complétude étant totalement dépendante de la distance utilisée, il est nécessaire de la préciser à chaque fois.

Théorème 2

Soit (E, d) un espace complet.
Alors une suite d'éléments de E converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Exemple 2

L'espace $\mathbb{Q}$ des nombres rationels muni de la distance usuelle n'est pas complet. Néanmoins, il est possible de choisir une distance pour compléter $\mathbb{Q}$.
Soit p premier, p, q des entiers, q non nul.
En notant $v_p(n)$ la valuation p-adique de n, et en posant $v_p(p/q) = v_p(a) - v_p(a), v_p(0) = -\infty$, on peut définir une norme sur $\mathbb{Q}$:

$$|r|_p = p^{-v_p(r)}$$

On note alors $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adique, qui est le complété de $\mathbb{Q}$ par la norme $|\cdot|_p$

Construction de $\mathbb{R}$

Irrationalité de e