M62. 3. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS AUTONOMES

O. GOUBET

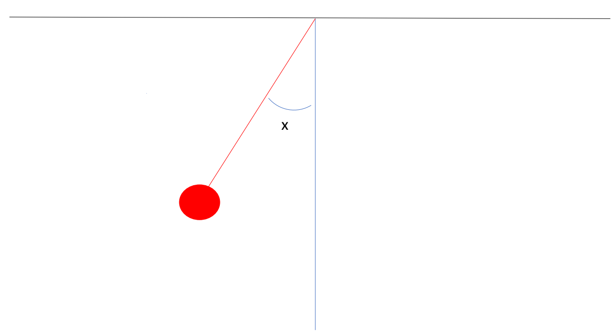
1. Quelques propriétés spécifiques aux systèmes autonomes

1.1. **Le problème du pendule pesant.** On cherche à déterminer l'allure des trajectoires solutions de $\ddot{x} + \sin x = 0$. Même si on ne sait pas calculer explicitement les solutions on va chercher à en déterminer quelques propriétés.

On réecrit ceci sous la forme d'un système pour le vecteur $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\dot{x} = y \; ; \; \dot{y} = -\sin x. \tag{1.1}$$

Esquissons l'origine physique de ce problème. Une masse ponctuelle est placée sur une tige rigide de longueur l, sans poids dont l'autre extrémité est fixée au plafond. La seule force agissant sur le système est la force de gravité.



Les constantes physiques étant toutes normalisées à 1. L'énergie cinétique du système est $\frac{\dot{x}^2}{2}$ où x est l'angle que fait la tige avec la verticale. L'énergie potentielle est $1 - \cos x$. L'équation ci-dessus s'obtient en écrivant la conservation de l'énergie en l'absence de frottements.

$$0 = \frac{d}{dt}(\frac{\dot{x}^2}{2} + 1 - \cos x) = (\ddot{x} + \sin x)\dot{x}OK.$$

1.2. **Définitions et premières propriétés.**

Définition 1.1 (Autonome)**.** *On appelle problème* **autonome** *un problème de Cauchy (ou un système différentiel) tel que la fonction f ne dépende pas de la variable t, i.e.*

$$\dot{Y} = f(Y),$$

avec l'application f de $\mathbb{R}^D$ dans $\mathbb{R}^D$ localement lipschitzienne en Y.

Dans l'exemple du pendule pesant, on a $f(Y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$. Cette application est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc localement lipschitzienne par l'inégalité des accroissements finis.

Définition 1.2 (Orbite ou trajectoire)**.** *On appelle* **orbite ou trajectoire** *l'ensemble $\{Y(t); t$ appartient à l'intervalle maximal d'existence $\}$.*

Proposition 1.3 (Conséquences de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes **autonomes**)**.** *Soit un système autonome $\dot{Y} = f(Y)$, dans le cadre de Cauchy-Lipschitz*

(1) *Deux orbites sont soient distinctes soient confondue.*
(2) *Si on note $S(t)Y_0 = Y(t)$ la solution au temps t alors $S(t+s) = S(t)S(s)$ (propriété de semigroupe)*
(3) *Une orbite qui se recoupe elle même correspond à une solution périodique en temps.*

Démonstration. Démontrons le point 1). Soient deux trajectoires $\{Yt)\}$ et $\{Z(t)\}$. Si elles se coupent, il existe t_1 et t_2 tels que $Y(t_1) = Z(t_2)$. On applique alors le théorème de Cauchy-Lipschitz à

$$\dot{W} = f(W) \; ; \; W(t_1) = Y(t_1).$$

Les deux fonctions $Yt)$ et $Z(t + t_2 - t_1)$ sont solutions maximales de ce problème de Cauchy. Elles coincident donc, i.e. $Y(t) = Z(t + t_2 - t_1)$ pour tout t dans l'intervalle maximal d'existence. Donc les orbites sont confondues (elle dessinent la même trajectoire sur $\mathbb{R}^D$). Pour le point 3) supposons qu'il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $Y(t_1) = Y(t_2)$. Alors $Y(t)$ et $Y(t - t_1 + t_2)$ sont solutions du même problème de Cauchy. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz $Y(t) = Y(t - t_1 + t_2)$ d'où la périodicité de l'orbite. L'orbite étant bornée, le principe d'explosion dit que cette solution est globale. Démontrons le point 2). Les fonctions $Y(t) = S(t)S(s)Y_0$ et $Z(t) = S(t+s)Y_0$ sont toutes deux solutions de l'EDO avec même valeur si $t = 0$. Elles sont donc identiques. $\square$

Définition 1.4 (Point fixe)**.** *On appelle* **point fixe** *Y^* une* **solution stationnaire** *de l'équation autonome, i.e. qui vérifie $f(Y^*) = 0$.*

Pour le pendule pesant les points fixes sont de la forme $(k\pi, 0)$ où k est un entier relatif.

Lemme 1.5. *Si $Y(t) \to Y$ quand t tend vers $\pm\infty$ alors Y est un point fixe.*

Démonstration. Il faut bien noter que ici on suppose que la solution est définie jusqu'à $T_{max} = +\infty$. Faisons une démonstration par l'absurde. Supposons $f(Y) \neq 0$. Alors il existe T tel que pour $t > T$ on ait

$$||f(Y(t)) - f(Y)|| \leq \frac{1}{2}||f(Y)||.$$

On écrit alors

$$||\int_T^t \dot{Y}(s)ds|| = ||\int_T^t f(Y(s))ds|| \geq ||\int_T^t f(Y)ds|| - ||\int_T^t (f(Y(s)) - f(Y))ds||.$$

On en déduit

$$||Y(t) - Y(T)|| \geq (t - T)(||f(Y)|| - \frac{1}{2}||f(Y)||).$$

Faire $t \to +\infty$ donne une contradiction.

$\square$

Définition 1.6. *On appelle trajectoire* **hétérocline** *l'orbite d'une solution* $Y(t)$ *globale telle que* $\lim_{t\to-\infty} = Y$ *un point fixe du système et* $\lim_{t\to+\infty} = Z$ *avec* $Y \neq Z$. *Si* $Y = Z$ *l'orbite est* **homocline.**

Regardons l'équation différentielle

$$\dot{x} + x^3 - x = 0. \tag{1.2}$$

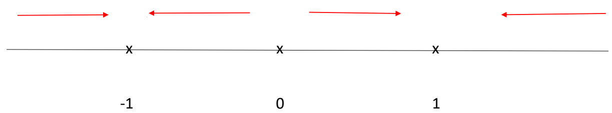
Quelles sont les orbites associées à cette équation différentielle ? On a trois points fixes $0, 1, -1$. Si la donnée initiale est comprise strictement entre 0 et 1 la trajectoire est piégée dans une zone compacte $[0, 1]$ où $\dot{x} > 0$. On a alors une trajectoire hétérocline joignant 0 à 1. Si la donnée initiale x_0 est strictement plus grande que 1 la trajectoire est captive dans la région $x > 1$ où $\dot{x} < 0$. En vertu de la proposition précédente on a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$. Pour le comportement dans les temps négatifs faisons le changement de variable $y(t) = x(-t)$. Alors

$$\dot{y} = y^3 - y \geq (y_0 - 1)y^2.$$

On en déduit

$$\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)} \geq (y_0 - 1)t,$$

d'où l'explosion en temps fini de $y(t)$. On complète la figure par symétrie $x \mapsto -x$.



Les trois x sont les trois points fixes. La droite réelle est partitionnée en sept orbites distinctes.

2. Etude du pendule pesant

Soit un système général sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x,y), \\ \dot{y} &= b(x,y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour le pendule pesant $a(x,y) = y$ et $b(x,y) = -\sin x$.

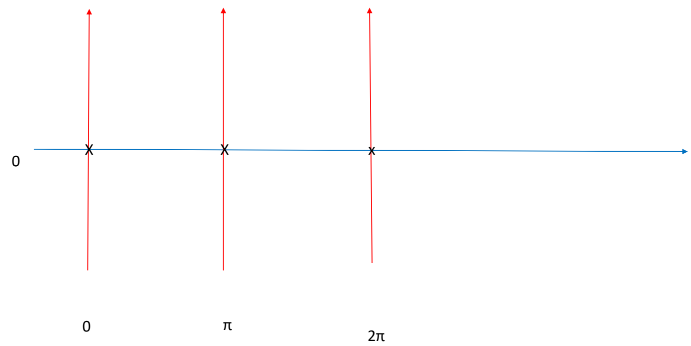
2.1. **Isoclines.** On commence par un résultat général sur $\mathbb{R}^2$. Une trajectoire est le lieu géométrique couvert par $(x(t), y(t))$. On veut s'appuyer sur le théorème des fonctions implicites pour écrire ce lieu géométrique sous la forme d'une courbe $y = \varphi(x)$.

Théorème 2.1. *Supposons que $\dot{x}(t_0) \neq 0$. Il existe alors un voisinage de t_0 sur lequel on peut inverser l'application $t \mapsto x(t)$ en $\tilde{t} : x \mapsto t(x)$ sur un voisinage de $x(t_0)$. Localement $y = y(\tilde{t}(x))$ s'écrit donc sous la forme d'une courbe $y = \varphi(x)$.*

Remarquons qu'en outre la pente de la tangente $\varphi'(x)$ se calcule en $\dot{y} = \varphi'(x)\dot{x}$, i.e. si le système s'écrit $\dot{y} = b(x,y)$ et $\dot{x} = a(x,y)$ alors $b(x,y) = \varphi'(x)a(x,y)$.

Définition 2.2 (Isoclines)**.** *On appelle* **isocline** I_α *le lieu géométrique des points (x,y) tels que $b(x,y) = \alpha a(x,y)$.*

L'isocline I_0 correspond aux points où la tangente est horizontale et I_∞ correspond aux points où la tangente est verticale. En rouge I_∞ pour le pendule pesant, en bleu I_0.

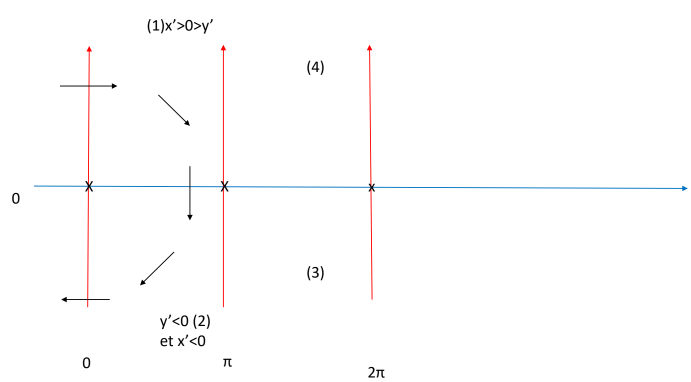


A noter que les *points fixes* sont situés à l'intersection des isoclines (représentés ici par des croix).

2.2. **Symétries et régionnement.** Dans le cas du pendule pesant, observons que si $(x(t), y(t))$ est une trajectoire alors $(-x(t), -y(t))$ et $(x(t) + 2\pi, y(t))$ est aussi une trajectoire. L'ensemble des trajectoires est alors invariant par la symétrie centrale en l'origine et les translations d'amplitude $2k\pi$ dans le sens horizontal.

Il suffit alors détudier le système pour une donnée initiale (x_0, y_0) dans $[0, \pi] \times [0, +\infty[$.

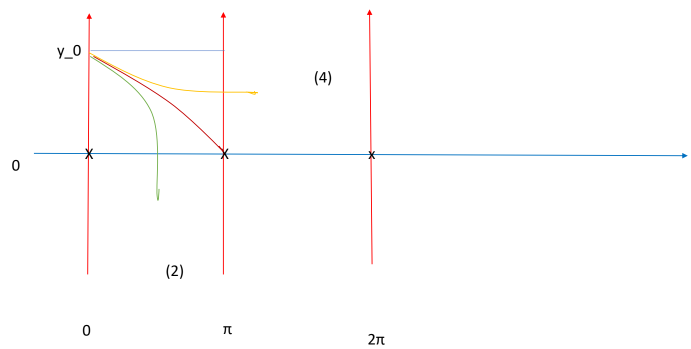
On partitionne alors le domaine suivant les signes respectifs de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ comme ci-dessous, ce qui permet de déterminer grossièrement l'allure des trajectoires



2.3. **Exemple d'étude qualitative.** On part du point $(0, y_0)$ ave $y_0 > 0$ La trajectoire $(x(t), y(t))$ rentre nécessairement dans la région (1) pour un intervalle de temps fini ou non $]0, T_1[$. Dans cette région $x(t)$ est croissante et $y(t)$ est décroissante. On a donc l'alternative suivante

- Soit la trajectoire est captive durant son temps de vie positif dans le rectangle dessiné sur la figure ci-dessous. Auquel cas $T = +\infty$ par le principe d'explosion.
- Soit elle entre dans (4) en temps fini.
- Soit elle entre dans (2) en temps fini.

Comment décider ? Remarquons que le premier scenario la solution existant pour tout temps alors $x(t)$ et $y(t)$ convergent de manière monotone vers (x_*, y_*) qui est nécessairement le point fixe $(\pi, 0)$. Cela ressemble à un bout d'orbite exceptionnelle hétérocline...



Que fait la trajectoire qui rentre dans (2) ? $x(t)$ devient décroissant et $y(t)$ reste décroissant. L'absence de point fixe dans la zone $y < 0$ fait que seuls deux scénarios sont a priori possibles. On traverse $x = 0$ en temps fini ou on reste dans la zone avec $y(t)$ qui tend vers l'infini par valeurs négatives.

2.4. **Intégrale première.**

Définition 2.3. *On appelle intégrale première pour le système différentiel autonome une application $E : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}, y \mapsto E(y)$ qui soit constante sur trajectoires. Si il existe une intégrale première les orbites sont captives dans les lignes de niveau $E(Y) = E(Y_0)$.*

Cherchons une intégrale première pour le pendule pesant. Il vient

$$0 = \frac{d}{dt}E(x, y) = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial E}{\partial x}y - \frac{\partial E}{\partial y}\sin x.$$

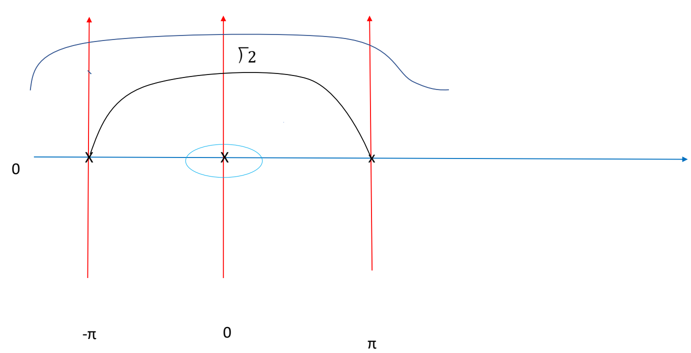
Une solution évidente est $\frac{\partial E}{\partial x} = \sin x$ et $\frac{\partial E}{\partial y} = y$. On retrouve donc par exemple l'énergie totale du système

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + (1 - \cos x).$$

L'énergie du point fixe $(\pi, 0)$ est $E = 2$. Si on part du point $x_0 = 0$ et $y_0 = \sqrt{2}$ qui a la même énergie l'orbite étant captive dans la ligne de niveau $E = 2$ on montre ainsi l'existence d'une trajectoire exceptionnelle qui tend vers $(0, \pi)$ quand t tend vers $+\infty$. On montre de même la convergence vers $(-\pi, 0)$ quand t tend vers $-\infty$.

Si $x_0 = 0$ et y_0 est dans $]0, \sqrt{2}[$ on se trove captif dans le compact délimité par les deux orbites hétéroclines symétriques. La solution est globale. Elle tourne autour de $(0, 0)$ et comme elle est captive dans une ligne de niveau d'énergie est recoupe le demi axe $x = 0, y > 0$ au même point. Elle est donc *périodique*.

Si $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$ on ne peut pas couper l'orbite hétérocline et donc on rentre dans la zone (4) en temps fini.



References

[1] M. Artigue, V. Gautheron Systèmes différentiels, étude graphique, Cedic/Fernand Nathan, 1983.

[2] S. Benzoni-Gavage, Calcul différentiel et équations différentielles, Dunod Paris 2010

[3] J-P. Demaily, Analyse numérique et équations différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1996

(Olivier Goubet) Laboratoire Paul Painlevé CNRS UMR 8524, et équipe projet INRIA PARADYSE, Université de Lille, 59 655 Villeneuve d'Ascq cedex.