M62. EXERCICES 3

1. Exercice

Soit $f(t)$ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Soit l'équation différentielle

$$\ddot{x} - x = f(t).$$

1) Démontrer que cette équation admet *au plus* une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer cette solution (si elle existe)

2. Exercice

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = x + y + e^t,$$

$$\dot{y} = x + y - e^t.$$

1) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions ?

2) Résoudre l'équation homogène associée à ce système différentiel.

3) Déterminer toutes les solutions de ce système différentiel.

3. Exercice

Soit les matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer B^n et C^n et en déduire e^{tB} et e^{tC}

2) Résoudre le système différentiel (par la méthode de variation des constantes)

$$\dot{y}_1 = y_2 + 1$$
$$\dot{y}_2 = y_1$$
$$\dot{y}_3 = y_3 + y_4$$
$$\dot{y}_4 = y_4 + e^t.$$

4. Exercice

On appelle solution du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} &= 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

un couple (x, y) de fonctions C^1 solution de ce système.

1) Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension que l'on précisera.

2) Calculer toutes les solutions de ce système différentiel.

5. Exercice

Trouver toutes les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ solutions de

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \frac{1}{\sqrt{|t|}}.$$

6. Exercice

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. On appelle solution $y(t)$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\ddot{y} + q(t)y = 0.$$

1) Montrer que l'ensemble des solutions S est un espace vectoriel de dimension 2.

Soit $y(t)$ une solution non identiquement nulle dont l'ensemble des zéros est

$$Z(y) = \{t \in \mathbb{R}; y(t) = 0\}.$$

On appelle *point d'accumulation* de $Z(y)$ un t dans $Z(y)$ qui vérifie: pour tout m entier non nul il existe t_m dans $Z(y)$ tel que $0 < |t - t_m| \leq \frac{1}{m}$.

2) Montrer que si t point d'accumulation de $Z(y)$ alors $\dot{y}(t) = 0$.

3)En déduire que $Z(y)$ ne contient pas de point d'accumulation.

Soit $e(t), f(t)$ une base de S. Soit $w(t) = \dot{e}(t)f(t) - \dot{f}(t)e(t)$.

4) Démontrer que $w(t) = C =$ constante.

5) Démontrer que cette constante ne peut pas être nulle.

Soient $t_1 < t_2$ deux éléments consécutifs dans $Z(e)$ (i.e. $Z(e) \cap]t_1, t_2[= \emptyset$).

6) Démontrer que $w(t_1)w(t_2) > 0$.

7) En déduire qu'entre t_1 et t_2 il existe un et un seul zéro de f.