Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies — Département de Mathématiques

M62 : Équations Différentielles Ordinaires
Louis Loiseau L3 Mathématiques 2020–2021

Feuille d'exercice n°1
Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Soit $r \in \mathbf{R}$ et

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto e^{rt} \end{cases}$$

Alors f est deux fois dérivable, et pour $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} f'(t) = re^{rt} \\ f''(t) = r^2 e^{rt} \end{cases}$$

Donc f est solution de $y'' - 2y' + y = 0$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(r^2 - 2r + 1)e^{rt} = 0$, c'est à dire $r = 1$.
Donc une solution de (E) est donnée par $t \mapsto e^t$.

2) Soit $\varphi : J \to \mathbf{R}$ une solution de (E) ; c'est-à-dire :

$$\begin{cases} I \text{ est un intervalle non-vide, non réduit à un point} \\ \varphi \text{ est deux fois dérivable} \\ \forall t \in J,\ \varphi''(t) - 2\varphi'(t) + \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$g : \begin{cases} J \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varphi(t)e^{-t} \end{cases}$$

g est deux fois dérivable (car φ l'est) et pour tout $t \in J$,

$$\begin{cases} g'(t) = \varphi'(t)e^{-t} - \varphi(t)e^{-t} \\ g'' t() = 0 \end{cases}$$

Or, si $g'' = 0$ sur J un intervalle, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $t \in J$, $g(t) = \lambda t + \mu$.
Ainsi, pour tout $t \in J$, $\varphi(t) = (\lambda t + \mu)e^t$ et φ est restriction à J de

$$\phi_{\lambda,\mu} : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t \end{cases}$$

Réciproquement, pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\phi_{\lambda,\mu}$ est solution de μ. (vérification directe)
Finalement, les solutions maximales de (E) sont les $\phi_{\lambda,\mu}$.
Remarque : Toutes les autres solutions sont des restrictions de celles-çi.

Exercice 2.

1)

$$(S) : \begin{cases} y' = |t|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Nous allons utiliser le *Théorème de* CAUCHY-LIPSCHITZ*, première version.*
Il est clair que f est continue, de plus

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \forall x, y \in \mathbf{R}\ |f(t,x) - f(t,y)| = ||t|2/3| - |t^{2/3}|| = 0 \leqslant 1 \times |x - y|$$

et f est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
Donc (S)rendre dans le cadre du théorème. Ainsi, (S) admet une unique solution maximale et cette solution est définie sur $\mathbf{R}$.

2) Notons $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la solution maximale de (S). ALors φ est dérivable et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi'(t) = |t|^{2/3}$ et $\varphi(0) = 0$. Nous allons distinguers plusieurs cas :

— Si $t > 0$, alors $\varphi'(t) = t^{2/3}$ et donc $\varphi(t) = \frac{3}{5}t^{5/3} + c$, avec la condition initiale (en prenant la limite à droite), on trouve $c = 0$.

— Si $t < 0$, alors $\varphi'(t) = (-t)^{2/3}$ et de la même façon, on trouve $\varphi(t) = -\frac{36}{(} - t)^{5/3}$
Ainsi,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{3}{5}t^{5/3} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \\ -\frac{3}{5}(-t)^{5/3} \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Exercice 3.

$$(S) : \begin{cases} y' = |y| + |t| = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Alors f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable par l'inégalité triangulaire, donc, pas CL, $S)$ admet une unique solution maximale et cette solution est définie sur $\mathbf{R}$. Notons la φ. Alors φ est dérivable, $\varphi(0) = 0$ et, pour tout réel t, $\varphi'(t) = \varphi(t)| + |t|$. De plus, $\varphi'(t) \geqslant 0$, donc φ est croissante, or $\varphi(0) = 0$, ainsi

$$\begin{cases} \varphi \geqslant 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ \varphi \leqslant 0 \text{ sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$

Distinguons les deux cas.

— Sur $[0, +\infty[$:
$\forall t \geqslant 0$, $\varphi'(t) = \varphi(t) + t$, donc φ est solution sur $[0, +\infty[$ de $y' - y = t$ (E_+).
Or, les solutions maximales de (E_+) sont les

$$\phi_\lambda : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto -t - 1 + \lambda e^t \end{cases}$$

Recherche d'une solution particulière :
On a : $a(t) = -1$, donc $A(t) = -t$ et $e^{-A(t)} = e^t$ et $b(t) = t$.

$$\int b(t)e^{A(t)}\mathrm{d}t = \cdots = -(t+1)e^{-t}$$

Donc $e^(t+1)e^{-t}e^{-A(t)} = -t-1$ est solution particulière.
Ainsi, il existe un réel λ tel que $\varphi = \phi_{\lambda|[0,+\infty[}$, c'est-à-dire, pour tout $t \in [0,=\infty[$, $\varphi(t) = -y-1+\lambda e^t$.
Or $0 = \varphi(0) = \lambda - 1$ donc $\lambda = 1$. donc sur $[0,+\infty[$, $\varphi(t) = -t-1+e^t$.

— Sur $]-\infty, 0]$;
Par le même raisonnement, on trouve $\varphi(t) = -t+1-e^{-t}$. *À faire au moins une fois!*

Exercice 4.

1) C'est une vérification directe.

2) Si (S) entrait dans le cadre du théorème, alors il aurait une unique solution maximale. Or l'identité est une autre solution maximale.

3) Commençons par un rapport de cours.
Soit $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Si $\varphi(t)$ est solution de $y' = F(y)$, alors pour tout réel a, $t \to \varphi(t+a)$ est également solution. En effet :

$$\left(\varphi(t+1)\right)' = \varphi'(t+a) = F(\varphi(t+a))$$

Pour $a \geqslant 0$, considérons :

$$\phi_a : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \phi_a(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant a \\ \left(\frac{t-a^3}{3}\right) \text{ si } t > a \end{cases} \end{cases}$$

Rappel : Soit $f : I \to I$, I un intervalle et $a \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable (resp $\mathscr{C}^1$) sur $I \setminus \{a\}$ et que f' possède une limite finie en a. ALors f est dérivable (resp $\mathscr{C}^1$) sur $I \setminus \{a\}$ et $f'(a) = l$
Dans notre cas, on peut vérifier assez facilement (distinguer les cas autour de a) que ϕ_a est continue sur $\mathbf{R}$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ et que pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$, $\phi_a(t) = 0$ si $t < a$ et $\left(\frac{t-a^2}{3}\right)$ si $t > a$. De plus, $\phi_a'(t)$ tend vers 0 en a. Donc ϕ_a est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et on vérifie aisément que $\phi_a(0) = 0$ et que ϕ_a vérifie le système. La conclusion suit.

Exercice 5.

1) Le système équivaut à (après simples vérifications) :

$$(S) : \begin{cases} y' + \frac{2t+1}{1+t+t^2} y = 1+t+t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2) Soit

$$\psi : t \in \mathbf{R} \longrightarrow \frac{\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2}}{1+t+t^2} = t$$

Alors ψ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$(1+t+t^2)\psi'(t) = (2t+1)\psi(t) = \left((1+t+t^2)\psi(t)\right)' = \cdots = (1+t+t^2)^2$$

Donc ψ est solution du système.

3) Puis que l'équation différentielle est linéaire du premier degré, le système admet une unique solution maximale. C'est-à-dire ψ.

Exercice 6.

1)
$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} -4x - 2y + 2e^t \\ 6x + 3y62e^t \end{pmatrix}$$

Donc $Y' = AY + b(t)$ où :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$$
$$b : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -2e^t \end{pmatrix} \end{cases}$$

Puisque b est continue, l'ensemble des solutions (maximales) de $Y' = AY + b(t)$ est un espace affine de dimension 2.

2) *Indication :* Il faut déterminer (au brouillon) une solution de la forme

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t \\ y(t) = \beta e^t \end{cases}$$

On en déduit que $\psi : t \to \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ est une solution particulière car :

— $\psi \in \mathscr{C}^1$

— $A\psi(t) + b(t) = \psi'(t)$

3) Les solutions maximales de $Y' = AY + b(t)$ sont les

$$\begin{cases} R \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \psi(t) + e^{tA} X_0 \end{cases}$$

Calculons e^{tA}. A est diagonalisable, on peut montrer que $e^{tA} = Pe^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}} P^{-1}$ et on calcule

$$e^{tA} X_0 = \begin{pmatrix} -3a - 2b + (4a + 2b)e^{-t} \\ 6a + 4b - (6a + 3b)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, les solutions maximales du systèmes sont :

$$\psi_{a,b} : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} -3a - 2b + (4a + 2b)e^{-t} \\ 6a + 4b - (6a + 3b)e^{-t} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 7. Notons $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. ALors

$$(S) \iff Y' = AY + b \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : A et b ne dépendant pas de t. On peut déterminer une solution particulière constance égale à C :

$$0 = AC + b \iff AC = -b \iff C = -A^{-1}b$$

On remarque que A est bien inversible. L'application $\psi : t \mapsto c \in \mathbf{R}^2$ est solution particulière de (S) (vérification).
Si $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est solution de $AC = -b$ donc $\alpha = \beta = 1$.
ENsuite, on calcule e^{tA} et on a l'ensemble des solutions maximales.