Feuille d'exercice n°2

Solutions des exercices

Rappel de cours :
Une application $f : (\Omega, \mathscr{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathscr{F}')$ est *mesurable* si $\forall A \in \mathscr{F}',\ f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction mesurable.
Ici, on a donc $(\Omega', \mathscr{F}') = (\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$

1) Soit $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue*. Montrons que $g \circ f$ est mesurable.
Pour $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$:

$$\left(g \circ f\right)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$$

Si A est ouvert, alors $g^{-1}(A)$ aussi par continuité. Donc $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in \mathscr{F}$ car f est mesurable et car $g^{-1}(A) \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$.
On a montré que les $(g \circ f)^{-1}(A)$ avec A ouvert dans $\mathbf{R}$ appartiennent à $\mathscr{F}$. Or les ouverts de $\mathbf{R}$ engendrent $\mathscr{B}$ donc les $(g \circ f)^{-1}(A)$ engendrent la tribu $(g \circ f)^{-1}(\mathscr{B})$. Donc

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}$$

.
Autre méthode : Une fonction continue est en particulier mesurable, par le même argument. Or la composée d'applications mesurables est mesurable.

a) Si $g(x) = |x|$ ou $g(x) = x^2$, par continuité sur $\mathbf{R}$, elles sont aussi mesurables d'après le point précédent.

b) Posons $g = 1/f$. On remarque que g n'est pas définie sur Ω tout entier. En effet, elle n'est pas définie sur les points où f s'annule. (*ie* : g est définie sur $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\}) \equiv \Omega'$)
Il faut donc définir une tribu sur Ω'.
Comme $E \in \mathscr{F}$ (car $\{0\} \in \mathscr{B}$ et f mesurable), alors

$$\mathscr{F}' = \{A \setminus E \mid A \in \mathscr{F}\}$$

est une tribu sur Ω'.
La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ $f : (\Omega', \mathscr{F}') \longrightarrow \mathbf{R}^*$ est mesurable ; donc $1/f$ est mesurable de $(\Omega', \mathscr{F}')$ dans $\mathbf{R}$.
Autre point de vue : On prolonge arbitrairement $1/f$ à Ω en posant $1/f(\omega) = 0$ si $\omega \in f^{-1}\{0\}$ (par exemple)
Alors $1/f$ ainsi prolongée est mesurable de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire.

$$X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{B}) \text{ mesurable.}$$

On suppose X de loi uniforme sur $]0,1[$, c'est-à-dire

$$X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow]0,1[$$

avec $\mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \lambda(A)$ pour $A \in]0,1[$

1) Soit $Y = \tan(\pi(X-1/2))$. Alors $Y = f(X) = f\circ X$, où

$$f :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \tan\left(\underbrace{\pi(x-1/2)}_{\in]-\pi/2,\pi/2[}\right)$$

$$Y : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{B}) \text{ mesurable d'après le premier exercice.}$$

On cherche $\mathbf{P}(Y^{-1}(A))$ pour $A \in \mathscr{B}$. Pour $A =]a,b]$:

$$Y^{-1}(]a,b]) = \left(f\circ X\right)^{-1}(]a,b]) = X^{-1}\left(f^{-1}(]a,b])\right)$$

Or, $f(x) = y \iff \pi(x-1/2) = \arctan(y) \iff x = \frac{1}{\pi}\arctan(y) + \frac{1}{2}$
Donc

$$Y^{-1}(]a,b]) = X^{-1}\left(\left]\frac{\arctan a}{\pi} + \frac{1}{2}, \frac{\arctan b}{\pi} + \frac{1}{2}\right[\right)$$

Ou encore

$$\mathbf{P}\left(Y^{-1}(]a,b])\right) = \lambda\left(\left]\frac{\arctan a}{\pi} + \frac{1}{2}, \frac{\arctan b}{\pi} + \frac{1}{2}\right[\right) = \frac{1}{\pi}(\arctan b - \arctan a) = F(b) - F(a)$$

Donc la loi de Y est égale à la mesure associée à la fonction $F(x) = \frac{arctanx}{\pi}$

2) $Z = g\circ X$, où

$$g : \begin{cases}]0,1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \ln\frac{1}{x}] \end{cases}$$

Alors $Z : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{B})$ mesurable d'après le premier exercice.
Z est à valeurs dans $]0,+\infty[$ donc sa loi est une mesure sur $]0,+\infty[$.

$$Z^{-1}(]a,b]) = (g\circ X)^{-1}(]a,b]) = X^{-1}(g^{-1}(]a,b]))$$

Soit $x \in]0,1]$ et $y \in]0,+\infty[$. Or $g(x) = y \iff x = e^{-y}$ Donc

$$Z^{-1}(]a,b]) = X^{-1}(g^{-1}(]a,b])) = X^{-1}([e^{-b}, e^{-a}[)$$

D'où

$$\mathbf{P}\big(Z^{-1}(]a,b])\big) = \lambda([e^{-b}, e^{-a}[) = e^{-a} - e^{-b} = G(b) - G(a)$$

Où $G(x) = -e^{-x}$ pour $x \in]0,+\infty[$.
La loi de Z est la mesure sur $]0,+\infty]$ associée à la fonction G, ou encore la mesure sur $\mathbf{R}$ associée à la fonction $\tilde{G} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $G(x)$ sur $]0,+\infty[$ et par 0 sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 3. Soit la variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ et sa fonction de répartition

$$F(x) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(]-\infty, x])\right) \equiv \mathbf{P}\left(X \in]-\infty, x]\right).$$

Rappels de cours :

— F est croissante

— $\lim\limits_{-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F(x) = 1$

— F est continue à droite en tout x $\left(\text{ie : } \lim_{y>x} F(y) = F(x)\right)$ et est continue en x si et seulement si $\mathbf{P}(X = x) = 0$.

Pour $u \in]0,1[$, on pose

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

Et $G(u) = 0$ sinon.

1) Comme $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} = 1$, on a que $\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$ est non vide et minoré par $u \in]0,1[$.
De plus, la borne inférieure de l'ensemble est atteinte d'après le fait précédent. C'est donc un minimum, car F est continue à droite de l'inf. Donc $G(u)$ appartient à l'ensemble et on a $F(G(u)) \geqslant u$.
De plus, si $x < G(u)$, x n'est pas dans l'ensemble, donc $F(x) < u$.
Si $x \geqslant G(u)$, on na $F(x) \geqslant F(G(u)) \geqslant u$. Donc

$$[G(u), +\infty[\subset \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

Puisque $G(u)$ est l'inf l'autre inclusion est évidente, donc

$$[G(u), +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

2) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = G \circ U : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
Par croissance de F, on a pour $u' \geqslant u$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u'\} \subset \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

Donc $G(u') \geqslant G(u)$. ie : G est croissante.
Par suite, $G :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}$ est mesurable. En effet, l'image inverse d'un intervalle par une application croissante est un intervalle. Comme les intervalles engendrent $\mathscr{B}$, on obtient $G^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}$.
Comme G et U sont mesurables, $Y = G \circ U$ aussi.
NB. Pour montrer que G est croissante, on n'a pas besoin que F le soit.

3) Pour montrer que X et Y ont même loi, il suffit de montrer qu'elles ont la même fonction de répartition.

$$\mathbf{P}(Y \leqslant x) \equiv \mathbf{P}(Y^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbf{P}\big((G \circ U)^{-1}(]\infty, x])\big) = 1 - \mathbf{P}\big(U^{-1}(G^{-1}(]x, +\infty[))\big)$$

On va montrer que

$$G^{-1}(]x, +\infty[) =]F(x), +\infty[$$

— $G^{-1}(]x, +\infty[) \subset]F(x), +\infty[$
Soit $u \in G^{-1}(]x, +\infty[)$. Montrons que $u > F(x)$. Raisonnons pas l'absurde. On suppose que $F(x) > u$.
On sait d'après (1) que $\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\} = [G(u), +\infty[$. Donc

$$F(x) \geqslant u \Longrightarrow x \geqslant G(u)$$

Ce qui est en contradiction avec $u \in G^{-1}(]x, +\infty[)$ $\lightning$

— $G^{-1}(]x, +\infty[) \supset]F(x), +\infty[$
Soit $u > F(x)$. On a toujours d'après (1) que $F(G(u)) \geqslant u$ et donc $F(G(u)) > F(x)$.
La croissance [1] de F entraîne que $G(u) > x$ Ainsi $u \in G^{-1}(]x, +\infty[)$

1. pas forcément stricte.

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \leqslant x) &= 1 - \mathbf{P}\big(U^{-1}(G^{-1}(]x, +\infty))\big) \\
&= 1 - \mathbf{P}\big(U \in]F(x), +\infty]\big) \\
&= \mathbf{P}\big(U \in]-\infty, F(x)])\big) \\
&= \mathbf{P}\big(U \in [0, F(x)]\big) \text{ car } U \text{ de loi uniforme sur } [0,1] \\
&= \lambda([0, F(x)]) \text{ car } 0 \leqslant F \leqslant 1 \text{ et car la loi de } U \text{ est la mesure uniforme sur } [0,1] \\
&= F(x)
\end{aligned}
$$

D'où $\mathbf{P}(Y \leqslant x) = F(x)$.

Exercice 4.

Exercice 5. Dans $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, on dispose d'évènements indépendants $A_1, \ldots A_n \in \mathscr{F}$ *indépendants* et tous de probabilité $p \in [0,1]$. Est-il possible que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 \ ?$$

Rappel de cours : $A_1, \ldots, A_n$ indépendants signifie que pour tout $B_1, \ldots, B_k \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ distincts, on a $\mathbf{P}(B_1 \cap \ldots B_k) = \mathbf{P}(B_1) \cdots \mathbf{P}(B_k)$
Crible de Poincaré : Pour tout $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathbf{P}(A) + \cdots + P(A_n) \\
&\quad - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) - \cdots - \mathbf{P}(A_{n-1} \cap A_n) \\
&\quad + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \mathbf{P}(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \cdots \\
&\quad + (-1)^n \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)k - 1) \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_k \leqslant n} \mathbf{P}\left(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)
\end{aligned}
$$

Autre méthode :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \Omega \setminus A_k\right)
\end{aligned}
$$

Comme $A_1, \ldots, A_n$ les événements contraires aussi. Autrement dit $\Omega \setminus A_1, \ldots, \Omega \setminus A_n$ sont indépendants et donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup A_k\right) = 1 - \prod \mathbf{P}(\Omega \setminus A_k) = 1 - \prod (1-p) = 1 - (1-p)^n$$

Si $p \neq 1$, on a $\mathbf{P}(\bigcup A_k) \neq 1$. Si $p = 1$, on a $\mathbf{P}(\bigcup A_k) = 1$, de plus les A_k sont indépendants.
Remarque : les évènements $A_1, \ldots, A_k$ sont indépendants si et seulement si les tribus engendrés $\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)$ le sont :
Si $\mathscr{C}, \mathscr{D} \subset \mathscr{F}$, si $\mathscr{C} \perp \mathscr{D}$ et si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont chacune stables par intersection finie, alors $\sigma(\mathscr{C}) \perp \sigma(\mathscr{D})$.

Exercice 6.

Exercice 7 (Absence de mesure canonique sur $\mathbf{N}^*$)**.**

1) On prend $s > 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^s}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{m^s} &= \frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}\cdots\\ \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{m^s} &= 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\\ \left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{m^s} &= 1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}\cdots\end{aligned}$$

On continue comme cela avec tous les premiers consécutifs.

$$\prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{m^s} = 1+\sum_{l\geqslant 1\ p_n\nmid l}\frac{1}{l^s}\xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ par comparaison.}$$

On obtient ainsi le résultat voulu.
Pour $s > 1$, on peut passer au logarithme :

$$\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) = -\ln\left(\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^s}\right)$$

Lorsque $s \longrightarrow 1$, on a en passant à la limite

$$\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = -\infty$$

On a l'équivalent $\ln(1-u) \sim_0 u$ donc la série est de même nature que $\sum -\frac{1}{p_n}$, qui diverge.

2) on suppose qu'il existe $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\mathbf{N}^*, \mathscr{P}(\mathbf{N}^*))$ telle que pour tout entier k non nul,

$$\mathbf{P}\left(\{n \in \mathbf{N}^* \mid k \mid n\}\right) = \frac{1}{k}$$

On prend $n_1, \dots, n_l \in \mathbf{N}^*$ deux à deux premiers entre eux. Soit

$$\begin{aligned}A_i &= \{\text{ entiers divisibles par } n_i\}\\ &= n_i \in \mathbf{N}^*\end{aligned}$$

Montrons que $A_1, \dots, A_l$ est une famille d'évènements indépendants.
Soit $B_1, \dots, B_m \in \{A_1, \dots, A_l\}$ deux à deux distincts. Il faut alors montrer :

$$\mathbf{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_m) = \mathbf{P}(B_1)\cdots P(B_m)$$

Soit $n'_1, \dots, n'_m \in \{n_1, \dots, n_l\}$ les entiers correspondants à $B_1, \dots, B_m$.

$$\begin{aligned}B_1 \cap \cdots \cap B_m &= \{\text{ entiers divisibles par } n'_1, \dots n'_m\}\\ &= \{\text{ entiers divisibles par } \mathrm{ppcm}(n'_1, \dots, n'_m)\}\\ &= \{\text{ entiers divisibles par } n'_1 \times \cdots \times n'_m\}\end{aligned}$$

car ils sont deux à deux premiers entre eux. Par suite :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_m) &= \frac{1}{n'_1 \cdots n'_m} \\ &= \frac{1}{n'_1} \times \cdots \times \frac{1}{n'_m} \\ &= \mathbf{P}(B_1) \cdots \mathbf{P}(B_m)\end{aligned}$$

3) On considère pour p premier l'ensemble A_p des entiers divisibles par p. On numérote les entiers premiers par $2 = p_1 < p_2 < \cdots$
L'ensemble des entiers divisibles par une infinité de nombres premiers est

$$\limsup A_{p_n}$$

On utilise l'exercice 8 : les A_{p_n} forment une famille d'évènements indépendants

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(A_{p_n}) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{p_n} = +\infty$$

D'après le lemme de BOREL-CANTELLI,

$$\mathbf{P}(\limsup A_{p_n}) = 1$$

C'est-à-dire que tout entier est divisible par une infinité de nombres premiers $\lightning$

Exercice 8 (Lemme de BOREL-CANTELLI)**.** On va appliquer la loi $0-1$ de KOLMOGOROV.
Ici, on a $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$ ou 1, car les A_n sont indépendants.
Supposons que $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$. La limsup est une intersection décroissante des $B_n = \bigcup_{k \geqslant n} A_k$.
Donc $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \lim_n \mathbf{P}(B_n)$. Or :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_n) &= 1 - \mathbf{P}(\Omega \setminus B_n) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\bigcap_{k \geqslant n} \Omega \setminus A_k) \\ &= 1 - \prod_{k \geqslant n} \mathbf{P}(\Omega \setminus A_k) \\ &= 1 - \prod (1 - \mathbf{P}(A_k))\end{aligned}$$

Comme $\lim \mathbf{P}(B_n) = 0$, on a $\prod(1 - \mathbf{P}(A_k) \longrightarrow 1$ donc $\mathbf{P}(A_k) \longrightarrow 0$, de plus en prenant le log, on obtient

$$\sum_{k \geqslant n} \log(1 - \mathbf{P}(A_k)) \longrightarrow \log 1 = 0$$

Donc $\sum_{\mathbf{N}^*} \log(1 - \mathbf{P}(A_k))$ converge. Or $\log(1-n) \sim u$ en 0.Donc $\sum_k \mathbf{P}(A_k)$ est convergente. Contradiction.

Exercice 9. $X, Y : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \mapsto (\mathbf{R}, \mathscr{B})$.
On considère $\sigma(X) = X^{-1}(\mathscr{B}) = \{X^{-1}(B) \mid B \subset \mathbf{R} \text{ borélien}\}$ C'est une tribu sur Ω, continue dans $\mathscr{F}$ (car X est mesurable).
Montrons que $(\Omega, \sigma(X)) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{B})$ est mesurable si et seulement si il existe $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ borélienne telle que $Y = f \circ X$.

1) C'est le sens $\Longleftarrow$.
Soit $B \in \mathscr{B}$, on a

$$Y^{-1}(B) = (f \circ X)^{-1} = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \sigma(X)$$

2) On suppose que f prend un nombre dénombrable de valeurs, on note les valeurs de f.(exo à finir de taper, capture du 16 mars.)

Complément de cours.

On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ (ou $\overline{\mathbf{R}}$) mesurable.
NB. $g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ mesurable si pour tout borélien $B \subset \mathbf{R}$, $g^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ et si $g^{-1}(\{+\infty\})$ et $g^{-1}(\{-\infty\})$ appartiennent à $\mathscr{F}$
Montrons que $S = \sup_n f_n$ et $s = \inf_n f_n$ sont mesurables de $(\Omega, \mathscr{F}) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$.

— Pour $b \in \mathbf{R}$, $S^{-1}(]-\infty, b]) = \{\omega \in \Omega \mid \sup_n f_n(\omega) \in]-\infty, b[\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbf{N}, f_n(\omega) \leqslant b\} = \bigcap_{\mathbf{N}} f_n^{-1}(]-\infty, b]) \in \mathscr{F}$
Comme les $]-\infty, b]$ engendrent la tribu des boréliens, on obtient que $S^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ pour tout borélien B de $\mathbf{R}$.
$S^{-1}(\{+\infty\}) = \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}\ f_n(\omega) \geqslant k\} = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f_n^{-1}([k, +\infty]) \in \mathscr{F}$
$S^{-1}(\{-\infty\}) = \{\omega \in \omega \mid \forall n \in \mathbf{N},\ f(\omega) = -\infty\} = \cap_{k \in \mathbf{N}} f_n^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{F}$
Conséquences : Si $f_n : (\Omega, \mathscr{F}) \longrightarrow \overline{R}$ est mesurable pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ aisso.
En effet, $\limsup f_n(\omega) = \lim_{n \to \infty} \sup\{f_k(\omega) \mid k \geqslant n\} = \inf_{\mathbf{N}} \sup\{f_k(\omega) \mid k \geqslant n\}$
Donc $\limsup f_n = \inf g_n$ avec $g_n(\omega) = \sup_{k \geqslant n}(f_k(\omega))$. Les g_n sont mesurables d'après ce qui précède. Donc $\inf_{\mathbf{N}} g_n$ aussi.
Seconde conséquence : Si $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ est mesurable pour tout $n \in \mathbf{N}$, et si f_n converge vers f, alors f est mesurable. En effet on a $f = \limsup_n f_n$.
Troisième conséquence : Si $f_n : (\Omega, \mathscr{F}) \longrightarrow \overline{R}$ est mesurable pour tout n et si pour tout ω la série $\sum_{\mathbf{N}} f_n(\omega)$ converge dans $\overline{\mathbf{R}}$ alors la fonction $S : \Omega \longrightarrow \overline{R}$ définie par $S(\omega) = \sum f_n(\omega)$ est mesurable.

Démonstration. Par définition $S(\omega) = \lim_n S_n(\omega)$ où $S_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} f_k(\omega)$ □

Exercice 10. Sur $E = \{1, \ldots, 6\}^6$ on a la tribu $\mathscr{P}(E)$. On muni $\Omega = E^{\mathbf{N}^*}$ de la tribu produit $(\mathscr{P}(E))^{\otimes \mathbf{N}^*}$, c'est-à-dire la plus petite tribu sur Ω telle que les applications $\omega_n : \Omega \longrightarrow (E, \mathscr{P}(E))$ soient mesurables.
On munit $(\Omega, (\mathscr{P}(E)^{\otimes \mathbf{N}^*}))$ de la mesure de probabilité $\mathbf{P} = \pi^{\otimes \mathbf{N}^*}$ où π est la mesure de probabilité uniforme sur E, c'est-à-dire $\pi(A) = \frac{|A|}{|E|}$ $\forall A \subset E$.
Pour cette probabilité $\mathbf{P}$, les variables aléatoires ω_i sont indépendantes et de loi π. Autrement dit, pour tout $A_1, \ldots, A_n \subset E$, on a $\mathbf{P}(\omega_1 \in A_1 \wedge \omega_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n \in A_n) = \pi(A_1) \cdots \pi(A_n)$, ce qui est équivalent à $\mathbf{P}(\omega_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap \omega_n^{-1}(A_n)) = \mathbf{P}(\omega_1^{-1}(A_1)) \cdots \mathbf{P}(\omega_n^{-1}(A_n))$

1) Ici, $A_k \subset \Omega$ désigne "la 1ère obtention de 2 avec le dé bleu a lieu au k-ième jet".

$$\begin{aligned}
A_k &= \{\omega \in \Omega \mid w_{1,1} \neq 2, \ldots, \omega_{k-1,1} \neq 2, \omega_{k,1} = 2 \\
\mathbf{P}(A_k) &= \pi(E \setminus \{2\} \times \{1, \ldots, 6\})^{k-1} \cdot \pi(\{2\} \times \{1, \ldots, 6\}) \\
&= \left(\frac{5 \times 6}{6 \times 6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6}{\times 6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

De la même façon, $\mathbf{P}(B_l) = \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} \cdot \frac{1}{3}$. Alors

$$\mathbf{P}(A_k \cap B_l) = \mathbf{P}(A_k) \cdot \mathbf{P}(B_l)$$

NB. Les variables aléatoires $\omega_{n,1}$ et $\omega_{p,2}$ forment une famille de vazriables aléatoires indépendantes (exo)
Donc A_k et B_l sont indépendantes.

2) $\mathbf{P}(\cup A_k) = \sum_{\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_k)$ car les A_k sont deux à deux disjoints et appartiennent à $\mathscr{F}$. $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 1$.
$A' = \omega \setminus \bigcup A_k$ donc $\mathbf{P}(A') = 1 - 1 = 0$.
De même $B' = \Omega \setminus \cup B_k$ et $\mathbf{P}(B') = 0$.
Remarque : $\limsup A_k = \{\omega \mid \omega \in A_k$ pour une infinité d'indices $k\} = \varnothing$ car $A_k \cap A_l = \varnothing$ si $k \neq l$
Remarque La tribu de queue associée au A_k est

$$\tau = \bigcap_{\mathbf{N}} \sigma\{\mathscr{A}_k \mid k \geqslant n\} = \sigma(A_k) = \{A_k, \Omega \setminus A_k, \varnothing, \Omega\}$$

$A' \subset (\Omega \setminus A_1)$.
A_1 et $\Omega \setminus A_1 \notin \sigma(A_k \mid k \geqslant 2)$

3) $\mathbf{P}(A' \cup B') \leqslant \mathbf{P}(A') + \mathbf{P}(B') = 0$ par sous-additivité. (NB : *a priori*, on n'a pas égalité car ils ne sont pas disjoints, *a posteriori*, l'égalité est vérifiée car ils sont de mesure nulle)

4) $C = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} C_k$ où $C_k = A_k \cap \bigcup_{l \geqslant k+1} B_l$. Les C_k sont disjoints car les A_k le sont.

$$\mathbf{P}(C) = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \mathbf{P}(C_k)$$

De plus, comme A_k est indépendante des B_l et donc de $\bigcup_{l \geqslant k+1} B_l$, on a

$$\mathbf{P}(C_k) = \mathbf{P}(A_k) \times \mathbf{P}(\bigcup_{l \geqslant k+1} B_l) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \sum_{l \geqslant k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$$

Donc $\mathbf{P}(C) = \sum \mathbf{P}(C_k) = \frac{1}{4}$

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20.

Exercice 21.

Exercice 22.

Exercice 23.

Exercice 24.

Exercice 25.

Exercice 26.