M62. EXERCICES 4

1. Exercice

1.1. **Introduction.** Le but de ce petit texte est de décrire un modèle qui décrit la propagation d'une maladie infectieuse dans une population. L'hypothèse essentielle du modèle est qu'une personne malade puis guérie développe une réaction immunitaire à la maladie.

1.2. **Le modèle.** Notre population de cardinal N se divise naturellement en trois types. La population des personnes susceptibles de développer la maladie (mais non encore atteints), de cardinal S, la population de malades de cardinal I, et la population de guéris de cardinal R.

La maladie se propage chez une personne suivant le schéma

$$S \to I \to R.$$

A un temps t, les populations des trois différentes catégories de personnes sont donc $S(t), I(t), R(t)$.

L'évolution de la population menacée par la maladie est régie par les équations différentielles suivantes, où r et a paramètres réels positifs,

$$\frac{dS}{dt} = -rSI, \tag{1.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI, \tag{1.2}$$

$$\frac{dR}{dt} = aI. \tag{1.3}$$

1.3. **Première partie.** 1) Etablir que l'on est bien dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2) Démontrer que $S + I + R = \text{constante} = N$.

3) Démontrer que si $I(0) > 0$, $R(0) > 0$ et $S(0) > 0$ alors les trois quantités $S(t), I(t), R(t)$ restent positives pour tout $t > 0$.

Soit une population N. Soit un triplé de conditions initiales $S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) = 0$. Soient a, r qui sont caractéristiques de la maladie. On suppose que $rS(0) > a$.

4) Démontrer que le nombre de malades augmente, puis décroit après un pic.

1.4. **Seconde partie.** On considère le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ composé de (1.1) et (1.2), avec $I(0) > 0, S(0) > 0$,

$$\frac{dS}{dt} = -rSI,$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI.$$

5) Déterminer les isoclines du système.

6) Déterminer les points fixes et préciser leur nature.

7) Dessiner l'allure des trajectoires (on justifiera les dessins).

2. Exercice

Soit $x(t), y(t)$ deux fonctions régulières du temps qui décrivent respectivement la proportion de proies (des sardines par exemple) et de prédateurs (des requins donc). Le modèle décrit ici précise que les quantités sont solutions du système différentiel dit de Lotka-Volterra, où a, b, c, d paramètres strictement positifs

$$\dot{x} = ax - bxy,$$

$$\dot{y} = -cy + dxy.$$

1) Vérifier que ce système différentiel rentre dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2) Etudier le système ci-dessus en l'absence de prédateurs, i.e. si $y(t) = 0$ pour tout t.

3) Etudier le système ci-dessus en l'absence de proies, i.e. si $x(t) = 0$ pour tout t.

On ajoute à ce système deux conditions initiales $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$.

4) Démontrer que pout tout t dans l'intervalle maximal d'existence on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.

5) Tracer les iscolines I_0 et I_∞.

6) Déterminer les points fixes du système.

7) Trouver une intégrale première pour le système.

8) Dessiner (avec justification) l'allure des trajectoires.