Feuille d'exercice n°2
Solutions des exercices

Exercice 1. Notons $g : t \in \mathbf{R} \mapsto g(t) = f(t) + f'(t) \in \mathbf{R}$. Alors g est continue car f est $\mathscr{C}^1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$. Alors f est solution de

$$(E): \ y' + y = g(t)$$

.
On écrit (E) sous la forme $y' + a(t)y = g(t)$. Alors a est continue (car constante = 1) et $A : t \to t$ est une primitive de a et $B : t \to B(t) = \int_0^t g(u)e^u \mathrm{d}u$ est une primitive de $t \to g(t)e^{At} = g(t)e^t$. Alors les solutions maximales de (E) sont les

$$\phi_\lambda : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \phi_\lambda(t) = B(t)e^{-t} + \lambda e^{-t} \end{cases}$$

Avec λ réel. Puisque f est solution de (E), il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f = \phi_\lambda$, ie : $f(t) = B(t)e^{-t} + \lambda e^{-t}$. Puisque $\lim_{t\to+\infty} \lambda e^{-t} = 0$n il suffit de montrer que $\lim B(t)e^{-t} = 0$ pour montrer la limite en f.
Soit $\varepsilon > 0$. $\lim g(t) = 0$ par hypothèse, donc il existe $a \geqslant 0$ tel que, $\forall t \geqslant a, \ |g(t)| \leqslant \varepsilon/2$.
$\lim |B(a)|e^{-t} = 0$ donc il existe $b \geqslant 0$ tel que, $\forall t \geqslant b, \ |B(a)|e^{-t} \leqslant \varepsilon/2$.
Notons $c = \max(a, b) \geqslant 0$.
Pour $t \geqslant c$,

$$B(t) = \int_0^t g(u)e^u \mathrm{d}u = \int_0^a g(u)e^u \mathrm{d}u + \int_a^t g(u)e^u \mathrm{d}u = B(a) + \mathrm{Int}_a^t g(u)e^u \mathrm{d}u$$

$$|B(t)| \leqslant |B(a)| + \left| \int_a^t g(u)e^u \mathrm{d}u \right|$$

$$\leqslant |B(a)| + \int_a^t |g(u|e^u \mathrm{d}u$$

$$\leqslant |B(a)| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_a^t e^u \mathrm{d}u$$

$$\leqslant |B(a)| + \frac{\varepsilon}{2} e^t$$

Et donc $|B(t)|e^{-t} \leqslant |B(a)|e^{-t} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
AInsi $\lim\limits_{t\to+\infty} |B(t)|e^{-t} = 0$

Exercice 2.

1)

$$(S) \iff \begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'application $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est dérivable et de dérivée majorée par 1 donc f est 1-lipschitzienne. On en déduit que F est aussi globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. De plus, elle est continue. Donc, par CL, (S) admet une unique solution définie sur $\mathbf{R}$. (qui est donc globale).

2) Notons $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ cette solution. C'est une équation *autonome à variables séparées.* On peut alors calculer la solution globale de (S) ; $t \mapsto \varphi(t) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^t - \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{-t}$

Exercice 3.

1) — Soit $t > 0$.

$$ty' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{t}y = 0 \iff y' = F(t,y)$$

. F est $\mathscr{C}^1$ donc on peut appliquer CL.

— Soit $t \in \mathbf{R}$
Le système n'est pas de la forme $y' = F(t,y)$ donc on ne peut pas appliquer CL sur $\mathbf{R}$.

2) Sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} ty' + 0 &\iff y' + \frac{1}{t}y = 0 \\ &= y' + a(t)y + 0 \ \ (E) \end{aligned}$$

Où $a : t \in]0,+\infty[\to a(t) = \frac{1}{t} \in \mathbf{R}$. ALors $A : t \to \ln(t)$ est une primitive de a.
Donc les solutions maximales de E sont les $\varphi_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} = \frac{\lambda}{t}$.
Ainsi, les solutions de $ty' + y = 0$ définies sur un intervalle ouvert inclus dans $]0,+\infty[$ sont les restrictions de φ_λ

3) Sur $]-\infty,0[$.

$$ty' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{t} = 0 \ \ (E^-)$$

Une primitive de $\frac{1}{t}$ est $t \to \ln|t|$ Donc les solutions maximales de (E^-) sont les $\psi_\lambda : t \in]-\infty,0[\to \lambda e^{-\ln|t|} = \frac{-\lambda}{t}$.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une solution de $ty' + y = 0$ sur $\mathbf{R}$. ALors f est continue en 0 et donc, d'après les points précédents, $f(t) = 0$ sur tout $\mathbf{R}$. Réciproquement, la fonction nulle est bien solution. D'où $ty' + y = 0$ admet une unique solution définie sur $\mathbf{R}$ qui est $t \mapsto 0$

Exercice 4.

1) $y' = F(t,y)$ où

$$F : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (t,x) \mapsto \frac{x}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2+2}\right) \end{cases}$$

Notons $f : x \to f(x) = F(\cdot,x)$. Alors f est dérivable et on peut montrer qu'elle est $\frac{5}{4}$-lipschitzienne. Donc F est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable et continue, ainsi F vérifie les hypothèses de CL.

2) Soi φ la solution maximale de

$$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

Puisque F est globalement lipschitzienne, alors φ est définie sur $\mathbf{R}$. En particulier, le temps maximal positif d'existence est $+\infty$.

3) On remarque que la fonction nulle est une autre solution maximale. DOnc $\varphi \neq 0$. Alors, comme φ est continue (car dérivable), qu'elle ne s'annule pas et que $\varphi(0) > 0$, d'après le TVI, $\forall\, t \in \mathbf{R},\ \varphi(t) > 0$.

4) A FAIRE (notes du 11 février)

Exercice 5.

1)

$$(S) : \begin{cases} y'' = 4y - 6y^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Notons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Alors

$$(S) \iff (S') : \begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Où } F : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \left(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 4x_1 - 6x_1^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

F est $\mathscr{C}^1$ donc, par CL, (S') admet une unique solution maximale. D'où, (S) admet une unique solution maximale.

2) Notons $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$ la solution maximale de (S). Par CL, I est un intervalle ouvert. De plus, $0 \in I$. Notons

$$\psi : \begin{cases} -I \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \psi(t) = \varphi(-t) \end{cases}$$

Alors ψ est deux fois dérivable car φ l'est et, pour tout $t \in -I$,

$$\psi'(t) = -\varphi'(-t)$$
$$\psi''(t) = \varphi''(-t) = 4\varphi(-t) - 6\varphi(-t)^2$$
$$= 4\psi(t) - 6\psi(t)^2$$

De plus,

$$\begin{cases} \psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = 1 \\ \psi'(0) = -\varphi'(-0) = -\varphi'(0) = -0 = 0 \end{cases}$$

Donc ψ est solution de (S). Ainsi, par CL, ψ est restriction à $-I$ de la solution maximale de (S) : $\psi = \varphi_{|-I}$
En particulier, $-I \subset I$ et donc $-I = I$.
De plus, $\forall\, t \in I,\ \varphi(-t) = \psi(t) = \varphi(t)$

3)

$$\begin{aligned} \varphi'(t)^2 &= \varphi'(0)^2 + \int_0^t \left(\varphi(u)^2\right)' \mathrm{d}u \\ &= \int_0^t 8\varphi'(u)\varphi(u) - 12\varphi'(u)\varphi(u)^2 \mathrm{d}u \\ &= \left[4\varphi(u)^2 - 4\varphi(u)^3\right]_0^t \\ &= 4\varphi'(t)^2 - 4\varphi(t)^3 - 4\varphi(0)^2 - 4\varphi(0)^3 \\ &= 4\varphi(t)^2 - 4\varphi(t)^3 \\ &= 4\varphi(t)^2(1 - \varphi(t)) \end{aligned}$$

4) Supposons qu'il existe un temps $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Alors $\varphi'(t_0) = 0$. Ainsi, φ est solution du système de CAUCHY

$$\begin{cases} y'' = 4y - 6y^2 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Or, ce systèùe admet une unique solution maximale qui est la fonction nulle n sur tout $\mathbf{R}$.
Donc $\varphi = n_{|I}$ et, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = 0$ $\lightning$. D'où, $\forall t \in I$, $\varphi(t) \neq 0$.
Comme $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue, que I est un intervalle qui contient 0 et que φ ne s'annulle pas, d'après le TVI, $\forall t \in I, \varphi(t) > 0$. C'est-à-dire

$$\varphi > 0$$

De plus, $\forall t \in I,\ 1 - \varphi(t) = \frac{\varphi'(t)p2}{4\varphi(t)^2} \geqslant 0$ et donc $\varphi(t) \leqslant 1$. C'est-à-dire :

$$\varphi \leqslant 1$$

$\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est la solution maximale de (S) donc

$$\phi : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est la solution maximale de (S'). Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} 0 < \varphi(t) &\leqslant 1 \\ \varphi'(t)^2 = 4\varphi(t)^2(1 - \varphi(t)) &\leqslant 4 \\ |\varphi'(t)| &\leqslant 2 \end{aligned}$$

Et donc $\|\phi(t)\|_\infty = \max(|\varphi(t)|, |\varphi'(t)|) \leqslant 2$
D'où ϕ est bornée, et donc $I = \mathbf{R}$ par CL.
Soit $E = \{a \in \mathbf{R}_+ \mid \forall t \in [0, a],\ \varphi'(t) \leqslant 0\}$.
$E \neq \varnothing$ car $0 \in E$.
Supposons E majoré. Alors $\alpha = \sup E \in \mathbf{R}$ existe. on a :

— $\forall t \in [0, \alpha[,\ t \in E$ et donc $\varphi'(t) \leqslant 0$.
  Puisque φ' est continue en α, on en déduit $\varphi'(\alpha) \leqslant 0$
— Pour $n \geqslant 1,\ \alpha + \frac{1}{n} \notin E$ et donc il existe un temps $t_n \in]\alpha, \alpha + \frac{1}{n}[$ tel que $\varphi'(t_n) > 0$.
  Ainsi, $\varphi'(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \varphi'(t_n) \geqslant 0$

D'où $\varphi'(\alpha) = 0$. Ainsi

$$0 = \varphi'(\alpha)^2 = 4\varphi(\alpha)^2(1 - \varphi(\alpha))$$

Et donc $\varphi(\alpha) = 1$ (car $\varphi(\alpha) > 0$).
Par conséquent, $\varphi''(\alpha) = 4\varphi(\alpha) - 6\varphi(\alpha)^2 = -2$.
φ'' est continue en α donc il existe $\mu > 0$ $\forall t \in [\alpha, \alpha + \mu$ $\varphi''(t) \leqslant -1$.
Donc, pour tout $t \in [\alpha, \alpha + \mu]$,

$$\varphi'(t) = \varphi'(\alpha) + (t - \alpha)\varphi''(\theta)$$

avec $\theta \in [\alpha, t]$ et donc

$$\varphi'(t) \leqslant -(t-\alpha) \leqslant 0$$

D'où, $\forall t \in [0, \alpha+\mu],\ \varphi'(t) \leqslant 0 : \alpha+\mu \in E,\ \lightning$
D'où E n'est pas majoré et

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \varphi'(t) \leqslant 0$$

5) Pour $t \in \mathbf{R}$

- $\varphi'(t) \leqslant 0$
- $0 < \varphi(t) \leqslant 1$
- $\varphi'(t)^2 = 4\varphi(t)^2(1-\varphi(t))$

Et donc $\varphi'(t) = -2\varphi(t)\sqrt{1-\varphi(t)}$. L'application

$$\begin{cases}]0,1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{1}{-2x\sqrt{1-x}} \end{cases}$$

est continue et une primitive de cette application est

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{1}{-2x\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{-2(1-u^2)u} - 2u\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{1}{1-u} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}(\ln|u+1| - \ln|u-1|) \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-xt}}\right) \end{aligned}$$

Soit $F = \{a > 0 \mid \forall t \in]0, a], \varphi(t) \neq 1\}$. $F \neq \varnothing$. En effet :
$\varphi(0) = 1$ et donc $\varphi'' = -2 < 0$. Donc i lexiste $a > 0$ tel que $\forall t \in [0, a],\ \varphi'' \leqslant -1$ (par continuité de φ'' en 0).
Soit $t \in]0, a]$.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = \varphi'(0) + (t-0)\varphi''(\theta) \\ &= t\varphi''(\theta) \leqslant -t < 0 \end{aligned}$$

Où l'on a appliqué le TAF et $\theta \in [0, t]$.
Ainsi, $\forall t \in]0, a],\ \varphi'(t)\ neq 0$.
Donc $\forall t \in [0, a],\ \varphi(t) \neq$ car $0 \neq \varphi'(t)^2 = 4\varphi(t)^2(1-\varphi(t))$.
Notons $\alpha = \sup F \in \mathbf{R}_+^* \cup \{\infty\}$. on a :

$$\forall t \in]0, \alpha[\ -2\varphi(t)\sqrt{1-\varphi(t)} \neq 0$$

et

$$\frac{\varphi'(t)}{-2\varphi(t)\sqrt{1-\varphi(t)}} = 1$$

Soit $t_0 \in]0, \alpha[$.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(t)}{-2\varphi(t)\sqrt{1-\varphi(t)}} \mathrm{d}u$$
$$= [F(\varphi(u))]_{t_0}^{t}$$
$$= G(\varphi(t)) - G(\varphi(t_0))$$

Donc $G(\varphi(t)) = t + G(\varphi(t_0)) - t_0 = t + b$ où $b = G(\varphi(t_0)) - t_0 \in \mathbf{R}$.
Pour $t \in]0, \alpha[$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t+b)}$$

(calcul à faire!!) Et

$$0 = \varphi(0) = \lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t+b)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(b)}$$

Donc $\mathrm{ch}^2(b) = 1$ puis $\mathrm{cj}(b) = 1$ (car ch est positive) et $b = 0$.
Ainsi, $\forall\, t \in]0, \alpha[,\ \varphi(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$.
Puisque $\alpha = \sup F$ et $\forall\, t > 0,\ \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)} < 1$, on obtient $\alpha = +\infty$.
Donc $\forall\, t \in]0, +\infty[,\ \varphi(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$.
Puisque $\varphi(0) = 1 = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(0)}$ et que φ est paire, on en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$. Ainsi

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varphi(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)} \end{cases}$$