Liste d'exercices 1

Exercice 1 Etudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{1+n+n^2}$.
2. $\sum n^\alpha (\ln n)^\beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_1^\infty x^\alpha (\ln x)^\beta dx$ et $\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^\beta dx$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Exercice 3 Etant donnée une fonction continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $f_n(x) = (1-x)^n \varphi(x)$.

Exercice 4 Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$. La suite (f_n) converge-t'elle uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

Exercice 5

1. Rappeler les définitions des limites supérieures et inférieures d'une suite (u_n) de nombres réels. On les note $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$.
2. Montrer que pour toute suite (u_n) on a $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$, avec égalité si et seulement si (u_n) converge dans $[-\infty, +\infty]$.
3. Que valent $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ dans les cas suivants :
   (a) $u_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$.
   (b) $u_n = \cos \frac{2n\pi}{3}$.
   (c) $u_n = \cos n$.
4. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Montrer qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers $\liminf u_n$ et une sous-suite qui converge vers $\limsup u_n$.

Exercice 6 Soit X un ensemble et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. On définit la limite supérieure et inférieure de (A_n) par

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big), \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \Big(\bigcap_{k\geqslant n} A_k\Big).$$

1. Montrer que $x \in \limsup A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_k.
2. Montrer que $x \in \liminf A_n$ si et seulement si il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_k$ pour tout $k \geqslant k_0$.
3. Traiter l'exemple $X = \mathbb{R}$, $A_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n}[$, $A_{2n+1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1]$.

Exercice 7 Montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 8 Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble dont tous les points sont isolés. Autrement dit, pour tout $a \in A$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \{a\}$.

1. Montrer que A est dénombrable. (Indication : si A_ε désigne l'ensemble des $a \in A$ satisfaisant la relation ci-dessus, alors $A_\varepsilon \cap I$ est fini pour tout intervalle borné I.)
2. Donner un exemple d'un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ qui ne possède aucun point isolé.

Exercice 9 On dit que deux ensembles X et Y ont même cardinal si il existe une bijection de X sur Y, ou ce qui est équivalent (théorème de Schroeder-Bernstein) si il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X.
On dit que X est de cardinal inférieur à Y s'il existe une injection de X dans Y.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et l'intervalle $[0,1]$ ont même cardinal.

2. (Théorème de Cantor) Montrer que tout ensemble A a un cardinal strictement inférieur à celui de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ de ses parties. (Indication : montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection f de A sur $\mathcal{P}(A)$ en considérant l'ensemble $\{a \in A \mid a \notin f(a)\}$.
3. En déduire que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 10 Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. La famille $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $k \mapsto n_k$, telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n_k} = \ell$.

Exercice 11
1. Montrer que la série $\sum_{s=2}^{+\infty}(\sum_{n=2}^{+\infty} n^{-s})$ est convergente et calculer sa somme.
2. Calculer $\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n n^{-s}$.

Exercice 12 Discuter, selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la sommabilité des familles :

$$u_{pq} = \frac{1}{(p+q)^\alpha} \quad , \quad v_{pq} = \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$$

où (p,q) parcourt $\mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 13 Soit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ définie pour tout $E \subset \mathbb{R}$ par :

$$\mu(E) = \mathrm{diam}(E) = \sup_{x,y\in E} |x-y|.$$

Déterminer les tribus $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ pour lesquelles l'application μ est-elle une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$.

Exercice 14 Soit Ω un ensemble, soit $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de points de Ω et soit $\{m_i\}_{i\in I}$ une famille de nombres réels strictement positifs. On définit $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$ par

$$\mu(E) = \sum_{\{i\in I \mid x_i \in E\}} m_i.$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. (Elle est en général notée $\sum_{i\in I} m_i\delta_{x_i}$).

Exercice 15 (Lemme de Borel-Cantelli) Soit μ une mesure définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\sum_{i\in I}\mu(A_i) < \infty$. Montrer que l'ensemble des éléments qui appartiennent à une infinité de A_i est de mesure nulle.

Exercice 16 Soit μ une mesure définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\mu(\cup_i A_i) < \infty \quad \text{et} \quad \inf_i \mu(A_i) = \alpha > 0.$$

1. Montrer que l'ensemble A des éléments qui appartiennent à une infinité de A_i satisfait $\mu(A) \geqslant \alpha$.
2. La première condition est-elle essentielle ?

Exercice 17 Montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est également engendrée par chacune des familles suivantes :
1. $\{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$.
2. $\{]-\infty,a] \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 18 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert $U \subset [0,1]$ dense dans $[0,1]$ avec $\lambda(U) < \varepsilon$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un fermé $F \subset [0,1]$ d'intérieur vide et de mesure $\lambda(F) > 1-\varepsilon$. Existe-t'il un fermé $F \subset [0,1]$ d'intérieur vide et de mesure 1 ?

Exercice 19 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer que λ est *régulière* c'est-à-dire qu'elle satisfait pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(U) \mid U \text{ ouvert},\ E \subset U\}.$$

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(F) \mid F \text{ fermé, } F \subset A\}.$$

Exercice 20 Soit X un ensemble et μ une mesure sur X.

1. Soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions μ-mesurables. On suppose que $f_1 = g_1$ μ-p.p. et $f_2 = g_2$ μ-p.p. Montrer que $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μ-p.p.
2. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions μ-mesurables. On suppose que $f_n = g_n$ μ-p.p. On pose $f = \sup_n f_n$ et $g = \sup_n g_n$. A t'on $f = g$ μ-p.p.?

Exercice 21 On considère sur $\mathbb{R}$ la mesure de Lebesgue λ. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Deux fonctions continues égales presque partout sont égales.
2. Une fonction presque partout continue est égale presque partout à une fonction continue.
3. Une fonction presque partout égale à une fonction continue est presque partout continue.

Exercice 22 (Ensembles de Cantor) Soit (δ_n) une suite strictement décroissante de nombres réels positifs tels que $\delta_0 = 1$. Soit $E_0 = [0, 1]$. Supposons l'ensemble E_n construit de sorte qu'il soit réunion de 2^n intervalles fermés E_n^k ($1 \leqslant k \leqslant 2^n$) deux à deux disjoints, chacun de longueur $\delta_n 2^{-n}$. On construit alors E_{n+1} de la manière suivante : dans chaque intervalle E_n^k on retire un intervalle ouvert de même centre que celui de E_n^k de sorte que les deux intervalles restants aient pour longueur $\delta_{n+1}2^{-n-1}$ (ce qui est possible puisque $\delta_{n+1} < \delta_n$). Les 2^{n+1} intervalles ainsi obtenus forment E_{n+1}. L'ensemble de Cantor associé à (δ_n) est défini par

$$E = \bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n.$$

1. Dessiner E_1, E_2, E_3 dans le cas où $\delta_n = (\frac{2}{3})^n$.
2. Montrer que E est un compact sans point isolé, et qu'il est d'intérieur vide.
3. Montrer que E est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
4. Calculer la mesure de Lebesgue de E en fonction de la suite (δ_n).
5. Identifions E avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Comparer la tribu borélienne de E avec la tribu produit $(\mathcal{P}(\{0, 1\}))^{\otimes\mathbb{N}}$. Soit P la mesure de probabilité “pile ou face” sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Que vaut $P(E_n^k)$?

Exercice 23 (Construction d'un sous-ensemble qui n'est pas Lebesgue mesurable)

1. A l'aide de l'axiome du choix, montrer qu'il existe une partie $A \subset [0, 1]$ qui possède la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $a \in A$ tel que $x - a \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que

$$[0, 1] \subset \Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} A + r\Big) \subset [-1, 2],$$

et que si r et s sont deux rationnels distincts alors $A + r$ et $A + s$ sont disjoints.

3. En déduire que A n'est pas Lebesgue mesurable.

Exercice 24 (Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ lorsque $d \geqslant 2$) On appelle *pavé* de $\mathbb{R}^d$ tout sous-ensemble de la forme $P = I_1 \times ... \times I_d$, où $I_1, ..., I_d$ sont des intervalles ouverts, tous de même longueur. Leur longueur commune est appelée la *longueur des cotés* de P et notée $\mathrm{long}(P)$. Le *volume* de P est $\mathrm{vol}(P) = \mathrm{long}(P)^d$. On définit $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ de la façon suivante. Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^d$:

$$\lambda^*(E) = \inf\{\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(P_j) \mid \{P_j\}_{j\in J} \text{ est un recouvrement dénombrable de } E \text{ par des pavés}\}.$$

1. Montrer que λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est contenue dans la tribu des sous-ensembles mesurables de λ^*, notée Σ_{λ^*}. La restriction de λ^* à Σ_{λ^*} s'appelle la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ et se note λ.
3. Montrer que $\lambda(P) = \mathrm{vol}(P)$ pour tout pavé $P \subset \mathbb{R}^d$.
4. Montrer que $(\mathbb{R}^d, \Sigma_{\lambda^*}, \lambda)$ est égal à l'extension complète de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)})$.