M62. 5. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS AUTONOMES. FIN

O. GOUBET

1. Systèmes dissipatifs. Fonction de Lyapunov

1.1. **Le pendule avec frottements.** Soit k un paramètre strictement positif. On supposera $k << 1$. Soit l'équation du pendule pesant avec frottements qui s'écrit

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \sin x = 0.$$

Comme déterminer l'allure des trajectoires. Dans le cas $k = 0$ on avait une intégrale première/énergie du système qui était conservée soit

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + (1 - \cos x).$$

Ici

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + \sin x) = -k\dot{x}^2 \leq 0.$$

On a une *décroissance* de l'énergie due aux frottements.

1.2. **Fonction de Lyapunov.** Soit $\dot{Y} = F(Y)$ un système différentiel sur $\mathbb{R}^2$ avec F de classe C^1.

Définition 1.1 (Fonction de Lyapunov)**.** *On appelle fonction de Lyapunov $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, minorée telle que i) Si $Y(t)$ trajectoire alors $t \mapsto L(Y(t))$ décroissante. ii) Si $t \mapsto L(t)$ est constante sur un petit intervalle ouvert $]a, b[$ alors $Y(t) = Y^*$ où $F(Y^*) = 0$.*

Proposition 1.2 (LaSalle)**.** *Soit $Y(t)$ une trajectoire issue de Y_0 d'un système dynamique admettant une fonctionnelle de Lyapunov. Alors les valeurs d'adhérence quand $t \to +\infty$ de $Y(t)$ sont des points fixes.*

Démonstration. On va utiliser la notation $Y(t) = S(t)Y_0$, la notation semigroupe. Rappelons que vu que le système est autonome $S(t+s) = S(t)S(s)$. Soit Y^* une valeur d'adhérence de $S(t)Y_0$. Il existe alors une suite de temps t_n qui tend vers l'infini tel que $Y(t_n) \to Y^*$. on peut supposer que $t_{n+1} - t_n \geq 1$. On utilise alors la fonction de Lyapunov pour écrire, pour chaque t dans $]0, 1[$,

$$L(S(t_{n+1}Y_0)) \leq L(S(t)S(t_nY_0)) \leq L(S(t_nY_0)).$$

En laissant n tendre vers l'infini il vient

$$L(Y^*) \leq L(S(t)Y^*) \leq L(Y^*).$$

On en déduit que Y^* est un point fixe par ii). □

2. Etude du pendule pesant avec frottements

On étudie dorénavant le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - \sin x. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1. Existence d'une fonction de Lyapunov. Soit $L(x,y) = \frac{1}{2}y + (1 - \cos x)$. Alors $\dot{L} = -ky^2$. On a bien une fonctionnelle décroissante le long des trajectoires soit $t \mapsto L(Y(t))$ décroissante. Si L est constante sur un petit intervalle $]a,b[$ alors $k\int_a^b y^2(s)ds = 0$. On en déduit que sur $]a,b[$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ 0 &= -k0 - \sin x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Alors on est bien sur un point fixe de la forme $(m\pi, 0)$ avec m entier relatif.

2.2. Symétries et isoclines. Dans le cas du pendule pesant avec frottements, observons que si $(x(t), y(t))$ est une trajectoire alors $(-x(t), -y(t))$ et $(x(t)+2\pi, y(t))$ est aussi une trajectoire. L'ensemble des trajectoires est alors invariant par la symétrie centrale en l'origine et les translations d'amplitude $2k\pi$ dans le sens horizontal.

Calculons les isoclines. $I_\infty = \{y = 0\}$ et $I_0 = \{(x,y); ky + \sin x = 0\}$.

Ces isoclines nous permettent un régionnement du plan d'étude.

2.3. Etude des points fixes. Regardons $(0,0)$. Son linéarise au voisinage de $(0,0)$ le système linéarisé s'écrit

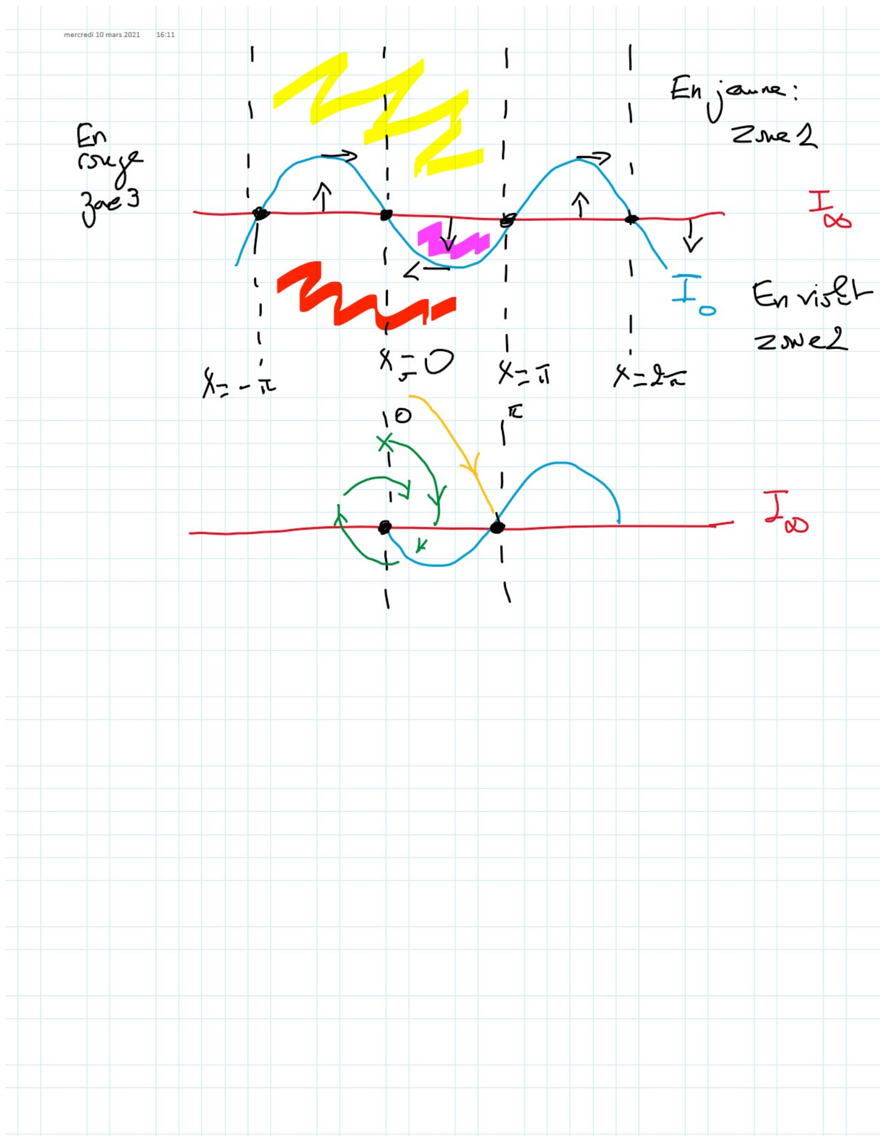
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$? On a deux valeurs propres réelles de produit 1 et de somme $-k$. Les deux valeurs propres sont complexes conjuguées et de partie réelles négative. Il s'agit d'un foyer attractif (hyperbolique).

Regardons $(\pi, 0)$. Son linéarise au voisinage de $(\pi, 0)$ le système linéarisé s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -kv + u. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$? On a deux valeurs propres réelles de produit -1 et de somme $-k$. Les deux valeurs propres sont réelles de signe opposées. Il s'agit d'un col (hyperbolique).



2.4. **Allure des trajectoires.** Observons que $L(0,0) = 0$ et $L(\pi, 0) = 2$.

Soit une trajectoire qui part de l'axe $x = 0$ avec un y_0 dans $(0,2)$. Comme $t \mapsto Y(t)$ est décroissante, la trajectoire est captive pour les temps positifs dans le compact $L(x,y) \leq 2$. La trajectoire existe pour tout temps positif.

Elle ne peut atteindre le point fixe $(\pi, 0)$ ni $(0, 0)$ en restant dans la zone 1. Elle rentre donc en temps fini dans la zone 2. Dans la zone 2 elle ne peut converger directement vers $(0, 0)$ qui est un point fixe. Elle recoupe donc l'axe $x = 0$. Elle continue sa trajectoire en convergeant en spirales vers $(0, 0)$.

References

[1] M. Artigue, V. Gautheron Systèmes différentiels, étude graphique, Cedic/Fernand Nathan, 1983.

[2] S. Benzoni-Gavage, Calcul différentiel et équations différentielles, Dunod Paris 2010

[3] J-P. Demaily, Analyse numérique et équations différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1996

(Olivier Goubet) Laboratoire Paul Painlevé CNRS UMR 8524, et équipe projet INRIA PARADYSE, Université de Lille, 59 655 Villeneuve d'Ascq cedex.