

# Feuille d'exercice n°1

## Solutions des exercices

### Exercice 1.

1)  $\sum \frac{1}{1+n+n^2}$   $u_n \geq 0$  et  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$

2)  $\sum n^\alpha (\ln n)^\beta$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .

— Cas 1 :  $\alpha < -1$  :

On écrit  $n^\alpha (\ln n)^\beta = (n^{\alpha+\varepsilon}) n^{-\varepsilon} (\ln n)^\beta$  avec  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $\alpha + \varepsilon < -1$ .

Comme  $-\varepsilon < 0$ , on a  $n^{-\varepsilon} (\ln n)^\beta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Donc, pour  $n$  assez grand, on a

$$0 \leq n^\alpha (\ln n)^\beta \leq n^{\alpha+\varepsilon}$$

avec  $\alpha + \varepsilon < -1$  donc  $\sum n^{\alpha+\varepsilon}$  converge.

— Cas 2 :  $\alpha > -1$

On écrit  $n^\alpha (\ln n)^\beta = n^{-1} n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta$  avec  $\alpha + 1 > 0$  donc  $n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

Donc, pour  $n$  assez grand, on a

$$n^\alpha (\ln n)^\beta \geq n^{-1}$$

donc la série diverge.

— Cas 3 :  $\alpha = -1$ . On pose  $f(x) = \frac{(\ln x)^\beta}{x}$  qui est monotone sur tout  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .  
On peut alors étudier

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{(\ln x)^\beta}{x} dx = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} u^\beta du \\ &= \left[ \frac{u^{\beta+1}}{\beta+1} \right]_{\ln(a)}^{\ln(b)} \quad \text{si } \beta \neq -1 \\ &= [\ln(u)]_{\ln(a)}^{\ln(b)} \quad \text{si } \beta = -1 \end{aligned}$$

Donc  $I$  diverge si  $\beta \geq -1$  et converge si  $\beta < -1$ .

Finalement, si  $\alpha = -1$ , la série converge si et seulement  $\beta < -1$ .

3)  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ , avec  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

— Si  $\alpha > 1$ , il y a convergence absolue.

— Si  $\alpha \leq 0$ , il y a convergence grossière.

— Si  $0 < \alpha < 1$ , il y a convergence par le théorème des séries alternées.

### Exercice 2.

### Exercice 3.

### Exercice 4.

### Exercice 5.

**Exercice 6.**

- 1) Soit  $x \in \limsup A_n$ , alors  $x \in \bigcup_{k \geq n} A_k$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Donc pour tout entier  $n$ , il existe  $k \geq n$  tel que  $x \in A_k$ . Donc  $x \in A_k$  pour une infinité d'indices  $k$ .  
 Réciproquement, si  $x \in A_k$  pour une infinité d'indices  $k$ , alors pour tout entier  $n$ , il existe  $k \geq n$  tel que  $x \in A_k$ .  
 Donc pour tout entier  $n$ , on a  $x \in \bigcup_{k \geq n} A_k$ , et donc

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left( \bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

**NB.** On aurait pu raisonner par équivalence, ce que nous allons faire pour la question suivante.

2)

$$\begin{aligned} x \in \liminf A_k &\iff \exists n \in \mathbf{N} \ x \in \bigcap_{k \geq n} A_k \\ &\iff \exists n \in \mathbf{N} \ x \in A_k, \forall k \geq n \end{aligned}$$

3) **Note :** Faire un dessin.

$\limsup = \{x \mid x \text{ appartient à une infinité de } A_{2l} \text{ ou à une infinité de } A_{2l+1}\} = [-1, 2] \cup [-2, 1] = [-2, 2]$

$\liminf = \{x \in A_{2l} \text{ et } x \in A_{2l+1} \text{ à partir d'un certain rang.}\} = [-1, 1]$

**Remarque :** On a toujours  $\liminf A_n \subset \limsup A_n$

**Exercice 7.** Raisonnons par l'absurde.

On suppose qu'il existe  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow [0, 1]$  surjective.

On note  $x_k = \varphi(k) \in [0, 1]$ . Alors on a  $[0, 1] = \{x_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ .

On construit de proche en proche une suite d'intervalles fermés  $I_k$  de longueurs non nulles, avec  $I_n \subset \dots \subset I_1 \subset I_0$  et  $x_k \notin I_k$ .

On choisit  $I_0 \subset [0, 1]$  fermé de longueur non nulle avec  $x_0 \notin I_0$  et  $I_1 \subset I_0$  avec  $x_1 \notin I_1$ . (si  $x_1 \notin I_0$ , on prend (par exemple)  $I_1 = I_0$ .)

On continue ainsi de proche en proche pour définir  $I_2, I_3, \dots$ .

On considère maintenant  $E = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} I_k$ . Il est non-vidé. En effet, s'il était vide, on aurait une famille  $\{I_k\}_{k \in \mathbf{N}}$  de fermés de  $[0, 1]$  d'intersection vide. Comme  $[0, 1]$  est compact, il existerait un nombre fini d'indice  $k_0, \dots, k_n$  tels que

$$\emptyset = I_{k_0} \cap I_{k_1} \cap \dots \cap I_{k_n} = I_m$$

Où  $m = \max\{k_0, \dots, k_n\}$  (par décroissance de la famille  $(I_k)$ ), donc  $E$  est non vide.

De plus, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $x_n \notin I_n$ , donc  $x_n \notin E$ . Comme par hypothèse,  $[0, 1] = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$  et comme  $E \subset [0, 1]$ , on obtient  $E = \emptyset$ .

On a ainsi montré par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection de  $\mathbf{N}$  dans  $[0, 1]$ , il n'est donc pas dénombrable.

**Exercice 8.****Exercice 9.**

**Définition.** Soit  $\{u_i\}_I$  une famille quelconque de nombres réels ou complexes. On dit qu'elle est *sommable* si

$$\sum_I |u_i| < +\infty$$

Supposons  $u_i \in \mathbf{R}, \forall i \in I$ . On définit  $u_i^+ = \max\{0, u_i\}$  et  $u_i^- = -\min\{0, u_i\}$ .

On a  $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$ ,  $u_i = u_i^+ - u_i^-$ .

De plus,  $u_i^\pm \geq 0$ . On a  $\{u_i\}$  est sommable si et seulement si

$$\sum u_i^+ < +\infty \text{ et } \sum u_i^- < +\infty$$

**Définition.** Si  $\{u_i\}$  est sommable, on pose :

— Si  $u_i \in \mathbf{R}$ ,

$$\sum u_i = \sum u_i^+ - \sum u_i^-$$

— Si  $u_i \in \mathbf{C}$ ,

$$\sum u_i = \sum \Re(u_i) + i \sum \Im(u_i)$$

**Proposition.** Supposons que  $\{u_i\}$  est une famille sommable et  $I$  est dénombrable. Alors pour tout bijection  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow I$  on a

$$\sum_I u_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$$

*Démonstration.* On utilise la proposition analogue pour les familles à termes positifs. □

**Exercice 10.** On partitionne la famille :

$$u_{2k} = \frac{1}{2k} \text{ et } u_{2k+1} = -\frac{1}{2k}$$

On a  $\sum u_{2k} = +\infty$  et  $\sum u_{2k+1} = -\infty$

On cherche  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}^*$  une bijection telle que

$$\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)} = l$$

On définit  $\varphi$  de proche en proche.

On pose  $\varphi(0) = u_0 = 1$  (arbitrairement, ça n'a aucune importance.)

On suppose qu'on a défini  $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)$  et on définit  $\varphi(n)$  comme suit :

- Si  $\sum_{k \geq 0}^{n-1} u_{\varphi(k)} \leq l$ , on prend pour  $\varphi(n)$  le plus petit entier pair différent de  $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)$ .
- Si  $\sum_{k \geq 0}^{n-1} u_{\varphi(k)} > l$ , on prend pour  $\varphi(n)$  le plus petit entier impair différent de  $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)$ .

**NB.** Il est clair que, ainsi définie,  $\varphi$  est bijective.

Montrons que  $\sum_{n=0}^N u_{\varphi(n)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} l$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on cherche  $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $N \geq N_\varepsilon$ ,

$$\left| \sum_{n=0}^N u_{\varphi(n)} - l \right| \leq \varepsilon$$

D'abord, il existe un  $K_\varepsilon \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq K_\varepsilon \implies |u_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon$ .

En effet  $\varphi$  est une injection donc  $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  et comme  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , on a  $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Soit  $M \geq K_\varepsilon$  et tel que

$$\sum_0^{M-1} u_{\varphi(n)} \leq l \leq \sum_0^M u_{\varphi(n)}$$

Pour le membre de droite, on a rajouté  $u_{\varphi(M)}$  à la somme de gauche, avec  $0 < u_{\varphi(M)} < \varepsilon$ , donc

$$\ell \leq \sum_0^M u_{\varphi(n)} \leq \ell + \varepsilon$$

Comme pour  $n \geq M$ , on a  $|u_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon$  on obtient avec la def de  $\varphi$  et l'inégalité plus haut, que pour tout  $N \geq M$  :

$$\ell - \varepsilon \leq \sum_0^N u_{\varphi(n)} \leq \ell + \varepsilon$$

Donc  $N_\varepsilon = M$  convient.

### Exercice 11.

#### Règles de calcul

- $[0, +\infty] = [0, +\infty] \cup \{+\infty\}$
- $a + (+\infty) = +\infty$  si  $a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$
- $a \times (+\infty) = +\infty$  si  $a \in ]0, +\infty]$

#### Rappel.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de nombres réels ou complexes, on définit (si elle existe) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_n, \quad S_n = \sum_{n=0}^N u_n$$

#### Définition.

Soient  $I$  un ensemble et  $\{u_i\}_{i \in I}$  une famille quelconque d'éléments de  $[0, +\infty]$ . On définit

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{J \subset I \text{ fini}} \sum_{j \in J} u_j \quad (\in [0, +\infty])$$

#### Proposition.

- 1) Si  $\sum_I u_i < +\infty$ , alors  $I^* = \{i \in I \mid u_i \neq 0\}$  est dénombrable et

$$\sum_I u_i = \sum_{I^*} u_i$$

- 2) Si  $I$  est dénombrable infini, alors pour tout bijection  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow I$ , on a

$$\sum_I u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

*Démonstration.* 1)  $I^* = \{i \in I \mid u_i > 0\}$  car  $u_i \in [0, +\infty]$  par hypothèse.

Alors  $I^* = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} \{i \in I \mid u_i \geq 1/k\}$ , c'est-à-dire une union d'ensembles finis (car les séries convergent). Comme une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable, on obtient que  $I^*$  est dénombrable.

Puisque pour  $i \in I \setminus I^*$  on a  $u_i = 0$ , on voit, par définition de la somme que  $\sum_I = \sum_{I^*}$ .

2) Par définition,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ .

La suite  $(S_N)$  est croissante donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$  existe dans  $[0, +\infty]$  et on a :

$$\begin{aligned} \lim_N S_N &= \sup\{S_N \mid N \in \mathbf{N}\} \\ &= \sup_N \sum_{j \in \varphi(\{0, \dots, N\})} u_j \leq \sum_I u_i \end{aligned}$$

Donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \leq \sum_I u_i$ .

D'autre part, soit  $J \subset I$  fini. Comme  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow I$  est une bijection, il existe un  $N \in \mathbf{N}$  tel que  $\varphi(\{0, \dots, N\}) \supset J$ .

Donc  $\sum_{j \in J} u_j \leq S_N \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ .

En prenant le sup sur les  $J$ , on obtient que

$$\sum_I u_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

□

**NB.** Si  $J \subset \{i \in I \mid u_i \geq 1/k\}$ , alors  $\sum_J u_i \geq |J| \times 1/k$

**Proposition.** Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on suppose donné un sous-ensemble  $A_n \subset X$  où  $X$  est un ensemble quelconque fixé.

On suppose  $A_n$  dénombrable pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors

$$A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \subset X \text{ est dénombrable.}$$

*Démonstration.* On peut écrire  $A_n = \{a_{nk} \mid k \in \mathbf{N}\}$  car  $A_n$  est dénombrable. Alors on a  $A = \{a_{nk} \mid n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}\}$ . Ainsi, l'application  $\varphi : (n, k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mapsto a_{nk} \in A$  est une surjection.

On sait qu'il existe une surjection  $\psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  donc l'application  $\varphi \circ \psi : \mathbf{N} \rightarrow A$  est surjective.

□

**Exercice 12.** On cherche à savoir si

$$\sum_{(p,q) \in \mathbf{N}^{2*}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} < +\infty$$

Comme  $\frac{1}{(p+q)^\alpha} \geq 0$ , on a vu que l'on peut utiliser une bijection entre  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^{2*}$  et sommer suivant l'ordre de  $\mathbf{N}$ . On somme suivant les diagonales de  $\mathbf{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . C'est-à-dire les ensembles de points à coordonnées entières sur les droites  $\{(p, q) \mid p + q = k\}$  avec  $k \in \mathbf{N}^*$ . La  $k$ -ème diagonale porte  $k + 1$  points de  $\mathbf{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Donc

$$\sum_{\mathbf{N}^2 \setminus \{0,0\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k^\alpha}$$

Mais  $\frac{k+1}{k^\alpha} \sim k^{1-\alpha}$ . Alors la somme est finie si et seulement si  $\sum k^{1-\alpha}$  converge, c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha > 2$ .

**Exercice 13.** On considère seulement des tribus de  $\mathbf{R}$  qui contiennent deux intervalles donnés  $[a, b]$  et  $[c, d]$  avec  $a, b, c, d$  deux à deux distincts.

Soit  $\mathcal{B}$  une telle tribu.

- Si  $[a, b]$  et  $[c, d]$  sont disjoints, alors  $\mu : \mathcal{B} \mapsto [0, 1 + \infty]$  définie par  $\mu(A) = \text{diam}(A)$  n'est pas une mesure.

En effet, comme  $[a, b]$  et  $[c, d]$  sont disjoints, on a

$$\text{diam}([a, b] \cup [c, d]) > \text{diam}[a, b] + \text{diam}[c, d]$$

Or, une mesure est  $\sigma$ -additive, c'est-à-dire que si  $\{A_n\}$  est une famille dénombrable d'éléments de  $\mathcal{B}$  qui sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

- Si  $[a, b]$  et  $[c, d]$  s'intersectent et qu'aucun n'est contenu dans l'autre.

On peut supposer  $a < c$  et on a  $[a, b] \in \mathcal{B}$  et  $[c, d] \in \mathcal{B}$ .

Donc  $[a, b] \setminus [c, d] \in \mathcal{B}$  (on peut écrire le complémentaire comme  $A \cap (X \setminus B)$ )

Par suite,  $[a, c] \in \mathcal{B}$ . De même,  $[c, d] \setminus [a, b] \in \mathcal{B}$ , donc  $]b, d] \in \mathcal{B}$ .

Comme  $\text{diam}([a, c] \cup ]b, d]) > \text{diam}[a, c] + \text{diam}]b, d]$  et comme  $[a, b]$  et  $]b, d]$  sont disjoints,  $\text{diam}$  n'est pas une mesure sur  $\mathcal{B}$ .

- Si l'un est contenu dans l'autre, par exemple  $[c, d] \subset [a, b]$ .

Les éléments de  $\sigma([a, b], [c, d])$  sont :

- $[a, b], [c, d]$
- $\mathbf{R}, \emptyset$
- $\mathbf{R} \setminus [c, d] = ]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$
- $\mathbf{R} \setminus [c, d] = ]-\infty, c[ \cup ]d, +\infty[$
- $[a, b] \setminus [c, d] = [a, c[ \cup ]d, b]$
- $[c, d] \cup (\mathbf{R} \setminus [a, b]) = X \setminus ([a, b[ \cup ]a, b]) = ]-\infty, a[ \cup ]c, d] \cup ]b, +\infty[$

On a  $[a, b[ \cup ]d, b] \in \sigma([a, b], [c, d])$  et  $[c, d] \in \sigma([a, b], [c, d])$ . Ils sont disjoints et

$$\text{diam}([a, c[ \cup ]d, b] \cup [c, d]) < \text{diam}([a, c[ \cup ]d, b]) + \text{diam}[c, d]$$

Donc  $\text{diam}$  n'est pas une mesure sur  $\sigma([a, b], [c, d])$  et donc pas sur  $\mathcal{B}$  non plus.

#### Exercice 14 (Mesure de DIRAC).

Pour montrer que  $\mu$  est une mesure, il suffit de vérifier la propriété de  $\sigma$ -additivité. C'est à dire montrer que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_j E_j\right) &= \sum_j \mu(E_j) \\ \iff \sum_{\{i \in I \mid x_i \in \bigcup_j E_j\}} &= \sum_j \left( \sum_I m_i \delta_{x_i} \right) \end{aligned}$$

Pour cela, on pose, pour  $i \in I$  et  $j \in J$ ,  $m_i = \begin{cases} m_i & \text{si } x_i \in E_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors l'application

$$\varphi : \{(i, j) \in I \times J \mid m_{ij} \neq 0\} \rightarrow \left\{ i \in I \mid x_i \in \bigcup_j E_j \right\}$$

est une bijection. (*vérification directe*).

De cette manière, on peut appliquer le théorème de FUBINI pour réécrire la somme, d'où le résultat.

**Exercice 15** (Lemme de BOREL-CANTELLI).

D'après l'exercice 6, le problème revient à montrer que  $\mu(\limsup A_i) = 0$ .

Pour tout entier  $i$ ,  $\limsup A_i \subset \bigcup_{k \geq i} A_k$ . Donc

$$0 \leq \mu(\limsup A_i) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq i} A_k\right) \leq \sum_{k \geq i} \mu(A_k)$$

Or, le terme de droite est la reste d'une série convergente, donc tend vers 0.

**Exercice 16.**

- 1) Il s'agit de montrer que

$$\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{k \geq i} A_k\right)\right) \geq \alpha$$

Comme la famille  $\{\bigcup_{k \geq i} A_k\}_{i \in \mathbf{N}} \equiv \{B_i\}$  est décroissante, et que pour  $i = 0$ ,  $B_0 = \bigcup_{k \geq 0} A_k$  est de mesure finie, on a d'après les propriétés sur les mesures, que

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_i B_i\right) = \lim_{+\infty} \mu(B_i)$$

Comme  $A_i \subset B_i$ , on a  $\mu(B_i) \geq \mu(A_i)$ , donc  $\mu(A) \geq \alpha$

- 2) Il est facile de construire un contre-exemple en prenant  $\Omega = \mathbf{N}$ ,  $B = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ ,  $\mu$  la mesure de comptage et  $A_i = \{i\}$ .

**Exercice 17.**

- 1) Montrons que  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  est engendré par les sous-ensembles de la forme

$$A = \{]a, b[ \mid a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$$

Il s'agit de montrer que  $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(A)$ . (ie : la plus petite tribu - pour l'inclusion - de  $\mathbf{R}$  qui contient les éléments  $A$ )

Comme  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  contient les éléments de  $A$  et que c'est une tribu,  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  contient  $\sigma(A)$ . D'où  $\sigma(A) \subset \mathcal{B}(\mathbf{R})$ .

Montrons que  $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(A)$ . C'est-à-dire, montrons que pour tout  $\mathcal{O}$  ouvert de  $\mathbf{R}$ , on a  $\mathcal{O} \in \sigma(A)$ . Cela entraîne que  $\sigma(A)$  contiendra tous les ouverts de  $\mathbf{R}$ , et comme c'est une tribu, on aura  $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(A)$ .

Il existe une suite dénombrable  $(I_n)$  d'intervalles ouverts bornés de  $\mathbf{R}$  telle que

$$\mathcal{O} = \bigcup I_n.$$

Comme  $I_n \in \sigma(A)$  et comme  $\sigma(A)$  est stable par réunion dénombrable (c'est une tribu), on a  $\mathcal{O} \in \sigma(A)$ .

On va démontrer la propriété précédente.

On utilise le fait que  $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$  et que  $\mathbf{Q}$  est dénombrable.

Pour chaque  $x \in \mathcal{O} \cap \mathbf{Q}$ , il existe un  $r > 0$  tel que  $]x - r, x + r[ \subset \mathcal{O}$ . ( $\mathcal{O}$  est ouvert)

On prend  $r = r_x = d(x, \mathbf{R} \setminus \mathcal{O})$  et on a  $]x - r_x, x + r_x[ \subset \mathcal{O}$  (dans ce cas,  $r_x$  est le "meilleur"  $r$ .)

Montrons que

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O} \cap \mathbf{Q}} ]x - r_x, x + r_x[$$

Comme  $\mathcal{O} \cap \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}$  et que  $\mathbf{Q}$  est dénombrable,  $\mathcal{O} \cap \mathbf{Q}$  l'est aussi. On aura alors le résultat. Soit  $y \in \mathcal{O}$ , il existe  $\rho > 0$  tel que

$$]y - \rho, y + \rho[ \subset \mathcal{O} \text{ car } \mathcal{O} \text{ est ouvert.}$$

Comme  $\mathbf{Q}$  est dense dans  $\mathbf{R}$ , il existe  $r \in \mathbf{Q} \cap ]y - \rho/2, y + \rho/2[$ .

On a alors  $r_x \geq \rho/2$  et donc  $y \in ]x - r_x, x + r_x[$ . (cela découle du fait qu'on a choisi le "meilleur"  $r_x$ ).

D'où l'égalité.

2)  $B = \{ ]-\infty, a] \mid a \in \mathbf{Q} \}$

Montrons que  $\sigma(B) = \mathcal{B}(\mathbf{R})$ .

On a  $]-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  car  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  contient tous les fermés de  $\mathbf{R}$  (comme complémentaires d'ouverts).

Donc  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  est une tribu qui contient  $B$ , donc elle contient  $\sigma(B)$ . Ainsi  $\sigma(B) \subset \mathcal{B}(\mathbf{R})$

Montrons que  $\sigma(A) \subset \sigma(B)$ , comme  $\sigma(A) = \mathcal{A}(\mathbf{R})$  on aura  $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(B)$ .

Il s'agit de montrer que  $A \subset \sigma(B)$ .

Soit  $]a, b[ \in A$ , montrons que  $]a, b[ \in \sigma(B)$ .

**Remarque.**  $]-\infty, q] \in B \subset \sigma(B)$ , donc  $\mathbf{R} \setminus ]-\infty, q] = ]q, +\infty[ \in \sigma(B)$ . (stabilité par complémentaire)

Pour  $p, q \in \mathbf{Q}, p < q$  :  $]-\infty, q] \in \sigma(B)$  et  $]p, +\infty[ \in \sigma(B)$ .

Donc  $]-\infty, q] \cap ]p, +\infty[ \in \sigma(B)$  (stabilité par intersection dénombrable), càd  $]p, q] \in \sigma(B)$ . On a :

$$]a, b[ = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} ]p_n, q_n]$$

avec  $p_n \in \mathbf{Q}, q_n \in \mathbf{Q}$ , où  $p_n \searrow a$  et  $q_n \nearrow b$ , strictement. (car  $]p, q[ = \bigcup ]p, q - 1/n[$ .)

Comme une tribu est stable par réunion dénombrable, on a  $]a, b[ \in \sigma(B)$ .



**Exercice 18.** Soit  $\lambda$  la mesure de LEBESGUE sur  $\mathbf{R}$ .

1)  $\mathbf{Q} \cap ]0, 1[$  est dense dans  $[0, 1]$  et dénombrable. On a  $\mathbf{Q} \cap ]0, 1[ = \{r_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ .

On choisit pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  un intervalle ouvert  $I_n$  centré en  $r_n$ , contenu dans  $]0, 1[$  de longueur  $\delta_n > 0$  à définir. On pose :

$$U = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n \subset ]0, 1[$$

C'est un ouvert dense dans  $[0, 1]$ . De plus, par  $\sigma$ -sous-additivité,

$$\lambda(U) \leq \sum \lambda(I_n) = \sum \delta_n$$

Si on prend  $\delta_n \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ , alors

$$\lambda(U) < \varepsilon \sum 2^{-(n+1)} = \varepsilon$$

2)  $F = [0, 1] \setminus U \subset [0, 1]$  est fermé dans  $\mathbf{R}$  et

$$\lambda(F) = \lambda([0, 1]) - \lambda(U) > 1 - \varepsilon$$

De plus, comme  $U$  est dense dans  $[0, 1]$ , son complémentaire dans  $[0, 1]$  est d'intérieur vide. Néanmoins, il n'en existe aucun de mesure 1. En effet, si  $F$  est d'intérieur vide, son complémentaire dans  $[0, 1]$  est un ouvert non-vide de  $[0, 1]$ , alors contient un intervalle  $I$  de longueur non-nulle. On a alors

$$\lambda(F) = 1 - \lambda([0, 1] \setminus F) \leq 1 - |I| < 1$$

**Exercice 19.** Soit  $\lambda$  la mesure de LEBESGUE sur  $\mathbf{R}$ .

Soit  $E \subset \mathbf{R}$  quelconque.

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} (b_j - a_j) \mid E \subset \bigcup_{j \in J} ]a_j - b_j] \right\}$$

C'est une *mesure extérieure* sur  $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ .

C'est une mesure sur la tribu des boréliens. On note  $\lambda$  la restriction de  $\lambda^*$  à  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ . C'est la *mesure de LEBESGUE* sur  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ .

**NB :**

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_J \text{long}(I_j) \mid E \subset \bigcup_J I_j, I_j \text{ intervalles ouverts et } J \text{ dénombrable.} \right\}$$

Idem avec  $I_j$  intervalle fermé. (exo)

On va raisonner par encadrement.

— " $\leq$ ".

$E \subset U$  donc  $\lambda(E) \leq \lambda(U)$  donc  $\lambda(E) \leq \inf\{\dots\}$ .

— " $\geq$ ".

Soit  $\varepsilon > 0$ . On cherche  $U$  ouvert tel que  $E \subset U$  et  $\lambda(E) \geq \lambda(U) - \varepsilon$ .

Par définition, il existe une famille dénombrable  $\{I_j\}_J$  d'intervalles ouverts tels que

$$E \subset \bigcup_{j \in J} I_j$$

$$\lambda(E) \geq \sum_{j \in J} \text{long} I_j - \varepsilon$$

On pose  $U = \bigcup_j I_j$ , c'est un ouvert par réunion. De plus, par  $\sigma$ -sous-additivité,

$$\begin{aligned}\lambda(U) &\leq \sum_{j \in J} \lambda(I_j) \\ &= \sum_{j \in J} \text{long} I_j\end{aligned}$$

Et alors on a  $\lambda(E) \geq \lambda(U) - \varepsilon$

### Exercice 20.

- 1)  $f_1 = g_1$   $\mu$ -pp signifie que l'ensemble

$$\{x \in X \mid f_1(x) \neq g_1(x)\}$$

est négligeable.

On considère

$$x \in X \mid (f_1 + f_2)(x) \neq (g_1 + g_2)(x) \subset \{x \in X \mid f_1(x) \neq g_1(x) \text{ ou } f_2(x) \neq g_2(x)\} = N_1 \cup N_2$$

Or, l'union est négligeable, donc notre ensemble est inclus dans un négligeable et l'est de facto lui-même.

- 2) On définit :

$$N_n = \{x \in X \mid f_n(x) \neq g_n(x)\}$$

Il faut montrer que

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} = \{x \in X \mid \sup f_n(x) \neq \sup g_n(x)\}$$

est négligeable. Il suffit de remarquer qu'il est inclus dans

$$\{x \in X \mid \exists n \in \mathbf{N}, f_n(x) \neq g_n(x)\} = \bigcup_{\mathbf{N}} N_n$$

C'est-à-dire une union dénombrable de négligeables, donc négligeable.

⚠ Une union *quelconque* de négligeables n'est pas négligeable en général. Par exemple, dans  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , les singletons sont négligeables,  $\mathbf{R} = \bigcup_{x \in \mathbf{R}} \{x\}$  mais  $\lambda(\mathbf{R}) = +\infty$ .

**Remarque :** Dans  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , on a  $A \subset \mathbf{R}$  négligeable  $\longrightarrow A$  négligeable mais il existe des sous-ensembles de  $\mathbf{R}$  négligeables non dénombrables. Par exemple, le CANTOR triadique.

**Remarque :** En fait, l'hypothèse "*mesurable*" n'était pas utile.

### Exercice 21.

- 1) Soit  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  des fonctions continues. On suppose qu'elles sont égales presque-partout, c'est-à-dire que

$$N = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable. On a :

$$\mathbf{R} \setminus N = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = g(x)\}$$

Comme  $\lambda(N) = 0$ ,  $N$  ne contient aucun intervalle de longueur  $> 0$ , donc  $\overset{\circ}{N} = \emptyset$ . Par suite,  $\mathbf{R} \setminus N$  est dense dans  $\mathbf{R}$ . De plus,  $\mathbf{R} \setminus N = (f - g)^{-1}(\{0\})$  est fermé, car  $f - g$  est continue.

Donc  $\mathbf{R} \setminus N = \mathbf{R}$  et donc  $f = g$  partout. L'affirmation est vraie.

2) Soit  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire  $f = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}$ . Alors

$$\{x \in \mathbf{R} \mid f \text{ n'est pas continue en } x\} = \{0\}$$

est un ensemble négligeable, donc  $f$  est pp continue.

Montrons qu'il n'existe *pas* de fonction continue  $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  telle que  $f = g$  pp.

Raisonnons par l'absurde. On applique le premier point aux restrictions de  $f$  et  $g$  à  $]0, +\infty[$  et à  $] -\infty, 0[$ . On obtient donc que  $f = g$  partout sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] -\infty, 0[$ .

Cela entraîne que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ . Mais  $g$  est continue en 0  $\nmid$

3) Soit  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  quelconque et  $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  continue.

On suppose que  $f = g$  pp. On va montrer que  $f$  n'est pas forcément continue pp.

Prenons  $g = 0$  et  $f = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ . On a  $f = g$  pp mais  $f$  est discontinue en tout  $x \in \mathbf{R}$ .

### Exercice 22 (Ensembles de CANTOR).

1)

2)  $E$  est fermé comme intersections de fermés et borné dans  $\mathbf{R}$ , il est donc compact. Il est non vide car les extrémités des intervalles  $E_n^k$  appartiennent à  $E$ . Montrons qu'il n'admet pas de point isolé.

Soit  $x \in E$  et soit  $r > 0$ .

On cherche  $y \in E$ ,  $y \neq x$  et  $|x - y| < r$ . Les intervalles  $E_n$  sont de longueur  $\delta_n 2^{-n}$  avec  $\delta_n \searrow$  et  $\delta_0 = 1$ .

Il existe  $n$  tel que  $\delta_n 2^{-n} < r$ .

Sout  $E_n^k$  l'intervalle de  $E_n$  qui contient  $x$ . Ses extrémités sont à distance  $< r$  de  $x$  et appartiennent à  $E$ . L'une d'entre elles est différente de  $x$ , on l'appelle  $y$ . On a  $y \in E$ ,  $y \neq x$  et  $|x - y| < r$ .

$\overset{\circ}{E} = \emptyset$ , sinon il contiendrait un intervalle de longueur non nulle. Soit  $L > 0$  cette longueur. Comme  $E_n$  est formé d'intervalles disjoints de longueur  $\delta_n 2^{-n}$ ,  $E_n$  ne contient pas d'intervalles de longueur  $L$  pour  $n$  assez grand. Donc  $E$  non plus.  $\nmid$

3) On représente les intervalles de  $E_n$  par des  $n$ -uplets de 0 et de 1, c'est-à-dire par des éléments de  $\{0, 1\}^n$ . On définit!

$$\varphi : \begin{cases} \{0, 1\}^{\mathbf{N}^*} & \longrightarrow E \\ (u_k)_{k=1}^{\infty} & \longmapsto \bigcap_k I(u_1, \dots, u_k) \end{cases}$$

où  $I(u_1, \dots, u_n)$  est l'intervalle de  $E$  représenté par la suite  $(u_1, \dots, u_n)$ .

L'intersection est décroissante formée de fermés de longueurs  $\delta_k 2^{-k}$ . C'est un singleton. (à démontrer : utiliser la caractérisation des compacts les intersections de fermés).

Alors  $\varphi$  est bijective par construction. (à vérifier)

4)

$$E_n = \bigcup_{k \in \{1, \dots, 2^n\}} E_n^k$$

union disjointe de boréliens.

$\lambda(E_0) = 1 < \infty$ , donc  $\lambda(E) = \lim \lambda(E_n) = \lim \delta_n$  où  $(\delta_n)$  donnée telle que  $\delta_n \nearrow$  et  $\delta_0 = 0$ .

Pour le Cantor triadique, on a  $\delta_n = (2/3)^n$  et  $\lambda(E) = 0$ .

5) Sur  $\{0, 1\}$ , on a la tribu

$$\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

On muni  $\Omega$  de la tribu produit

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{0, 1\}) \otimes \mathcal{P}(\{0, 1\}) \otimes \cdots \equiv \mathcal{P}(\{0, 1\})^{\otimes \mathbf{N}^*}$$

C'est la tribu engendrée par les  $\pi_i^{-1}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$  où

$$\pi_i : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \{0, 1\} \\ u = (u_1, u_2, \dots) \longrightarrow u_i \end{cases}$$

$\mathcal{F}$  est engendrée par les sous-ensembles de  $\Omega$  de la forme

$$\begin{aligned} \pi_i^{-1}(\{0\}) &= \{u \in \Omega \mid u_i = 0\} \\ \pi_i^{-1}(\{1\}) &= \{u \in \Omega \mid u_i = 1\} \end{aligned}$$

Elle est aussi engendrée par les *cylindres*, c'est-à-dire les

$$C(u_1, \dots, u_n) = \{v \in \Omega \mid v_1 = u_1, \dots, v_n = u_n\}$$

On a  $\varphi(C(u_1, \dots, u_n)) = I(u_1, \dots, u_n) \cap E$  par définition de  $\varphi$ .

On veut comparer  $\mathcal{F}$  avec  $\mathcal{B}(E)$  où  $\mathcal{B}(E)$  est la tribu des boréliens de  $E$ , c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de  $E$ .  $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{P}(E)$ .

Montrons que  $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(E)$ .

**NB :**  $\varphi(\mathcal{F})$  est une tribu car  $\varphi$  est bijective.

—  $\varphi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(E)$  :

$\mathcal{F}$  est engendrée par les cylindres, donc  $\varphi(\mathcal{F})$  est engendrée par les images des cylindres. Ce sont des fermés de  $E$ , donc ils appartiennent à  $\mathcal{B}(E)$

—  $\mathcal{B}(E) \subset \varphi(\mathcal{F})$  :

Soit  $U$  un ouvert de  $E$ . Il faut montrer que  $U \subset \varphi(\mathcal{F})$ .

Comme  $U$  est un ouvert de  $E$ , il existe  $r > 0$  tel que  $]x - r, x + r[ \cap E \subset U$ .

Pour  $n$  assez grand, l'intervalle  $I(u_1, \dots, u_n)$  qui contient  $x$  est de longueur  $< r$ . Par suite il existe  $(u_1, \dots, u_n) \in \{0, 1\}^n$  tel que

$$x \in (I(u_1, \dots, u_n) \cap E) \subset ]x - r, x + r[ \cap E \subset U$$

Donc  $U$  est l'union d'ensembles de la forme

$$I(u_1, \dots, u_n) \cap E$$

Comme les intervalles  $I(u_1, \dots, u_n)$  avec  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $(u_1, \dots, u_n) \in \{0, 1\}^n$  forment une famille *dénombrable*,  $U$  est une union dénombrable d'ensembles de cette forme. Chacun d'entre eux appartiennent à  $\varphi(\mathcal{F})$  donc  $U \in \varphi(\mathcal{F})$ .

**Remarque :** Il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\Omega, \mathcal{F}$  unique, telle que

$$\mu(C(u_1, \dots, u_n)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En la transportant sur  $E$ , on obtient une mesure sur  $(E, \mathcal{B}(E))$ , notée  $\varphi_*(\mu)$  telle que

$$(\varphi_*(\mu))(I(u_1, \dots, u_n) \cap E) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

**Exercise 23.** 1) OK

2)