Liste d'exercices 2

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $g \circ f$ est mesurable.
2. Etudier la mesurabilité de $|f|, f^2, \frac{1}{f}$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.

1. On pose $Y = \tan(\pi(X - \frac{1}{2}))$. Quelle est la loi de Y ?
2. On pose $Z = \ln(1/X)$. Quelle est la loi de Z ?
3. On pose $L = \ln(X)$. Quelle est la loi de L ?

Exercice 3 Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soient X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(u) := \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geqslant u\}, \text{ si } u \in]0,1[$$

et $G(u) = 0$ sinon. On pose aussi $Y := G(U)$.

1. Soit $u \in]0,1[$. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geqslant u\} \neq \emptyset$, que $\inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geqslant u\} \in \mathbb{R}$, et que

$$\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geqslant u\} = [G(u), +\infty[.$$

2. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle.
3. Montrer que X et Y ont même loi.
4. En quoi ce résultat est-il utile en pratique ?

Exercice 4

1. On choisit un point uniformément **sur le cercle unité** dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la loi de son abscisse ?
2. On choisit un point uniformément **dans le disque unité** dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la loi de son abscisse ?

Exercice 5 (Indépendance) Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier ?

Exercice 6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. On note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

On considère l'espace de probabilités $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, \text{Leb})$, où Leb désigne la mesure de Lebesgue. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit une variable X_n à valeurs réelles en posant

$$\forall x \in [0,1[, \ X_n(x) = \lfloor 2\{2^{n-1}x\} \rfloor.$$

1. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$. On pose $a = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon_k$ et $b = a + 2^{-n}$. Montrer que

$$\{x \in [0,1[: X_1(x) = \varepsilon_1, \ldots, X_n(x) = \varepsilon_n\} = [a,b[.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer la loi de X_n puis la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$.
La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$*, définie sur l'espace de probabilités* $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, \text{Leb})$*, constitue un jeu de pile ou face infini.*

2. Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} X_n 10^{-n}$$

est convergente et définit une variable aléatoire, qu'on notera Y.

3. Montrer que la fonction de répartition de Y est continue.
4. Montrer qu'il existe une partie $C \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle telle que $\mathbb{P}(Y \in C) = 1$. En déduire que la loi de Y n'admet pas de densité.

Exercice 7 (Absence de mesure canonique sur $\mathbb{N}^*$)

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, la probabilité d'être divisible par n est égale à $1/n$.

1. Rappeler comment on démontre la formule d'Euler
$$\forall s > 0, \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$
et en déduire que la somme des inverses des nombres premiers diverge.
2. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'une probabilité $\mathbb{P}$ ayant la propriété requise existe. Montrer que pour $n_1, \ldots, n_k$ deux à deux premiers entre eux, les événements "être divisble par n_i", pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ sont indépendants sous $\mathbb{P}$.
3. En considérant les événements "être divisible par p" pour tous les p premiers, établir alors que $\mathbb{P}$-presque tout nombre a une infinité de diviseurs premiers, ce qui est absurde.

Exercice 8 (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements indépendants sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n) = 1$.

Exercice 9 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On veut montrer que Y est mesurable par rapport à $\sigma(X)$, la tribu engendrée par X, si et seulement si il existe une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

1. Montrer que si il existe une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$, alors Y est $\sigma(X)$-mesurable.
2. On suppose dans cette question qu'il existe une partition dénombrable de Ω par des événements $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et une suite de réels $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tels que
$$Y = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \mathbf{1}_{A_j}.$$
Montrer alors que pour tout j, $A_j \in \sigma(X)$ et conclure dans ce cas.
3. On suppose maintenant que Y est $\sigma(X)$-mesurable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_n(x) := \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor$ puis $Y_n := \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\sigma(X)$-mesurable.
4. Conclure.

Exercice 10 (Un double temps d'attente) On dispose d'un dé bleu et d'un dé rouge *équilibrés* et on effectue une suite infinie de lancers de cette paire de dés. Pour un lancer nous pouvons modéliser cette expérience par l'ensemble $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ des couples à composantes dans $\{1, \ldots, 6\}$, la première composante représentant le nombre indiqué par le dé bleu et la deuxième celui indiqué par le dé rouge. Pour représenter la suite infinie de lancers, nous utiliserons l'ensemble
$$\Omega := E^{\mathbb{N}^*} = \big\{(\omega_n)_{n \geqslant 1};\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n = (\omega_{n,1}, \omega_{n,2}) \in E\big\}$$
des suites infinies de couples éléments de E. Définissons les événements suivants.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k est l'événement ≪ la première obtention du chiffre 2 avec le dé bleu a lieu lors du k^{e} lancer ≫.
- A' est l'événement ≪ le dé bleu ne donne jamais le chiffre 2 ≫.
- Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, B_ℓ est l'événement ≪ la première obtention du chiffre 3 ou du chiffre 6 avec le dé rouge a lieu lors du ℓ^{e} lancer ≫.
- B' est l'événement ≪ le dé rouge ne donne jamais le chiffre 3 ni le 6 ≫,
- E est l'événement ≪ le dé bleu finit par sortir un 2 et le dé rouge finit par sortir un multiple de 3 ≫,
- C est l'événement ≪ le dé bleu donne 2 pour la première fois avant que le rouge donne un 3 ou un 6 ≫.

1. Calculez $\mathbb{P}(A_k)$, $\mathbb{P}(B_\ell)$ et $\mathbb{P}(A_k \cap B_\ell)$, pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculez $\mathbb{P}\big(\cup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\big)$ et en déduire que $\mathbb{P}(A')=0$. Que vaut $\mathbb{P}(B')$?
3. Calculez $\mathbb{P}(A'\cup B')$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.
4. Calculez $\mathbb{P}(C)$.

Exercice 11 (Théorème d'Egorov) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $A\subset\mathbb{R}$ un borélien de mesure finie. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de A dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction $f : A\to\mathbb{R}$.

1. Pour $\varepsilon>0$ et un entier n fixés, on pose
$$G_n=\{x\in A\ ;\ |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\ \text{et}\ A_n=\cup_{k\geqslant n}G_k.$$
Montrer que $\lambda(A_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire la propriété suivante : pour tout $\delta>0$, il existe un borélien $B\subset A$ avec $\lambda(B)<\delta$, et il exite $N\in\mathbb{N}$, tels que pour tout $x\in A\setminus B$ et pour tout $n\geqslant N$ on ait $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
3. Etablir le théorème d'Egorov : pour tout $\delta>0$, il existe un borélien $B\subset A$ avec $\lambda(B)<\delta$, tel que la suite (f_n) converge uniformément sur $A\setminus B$ vers f.
(Indication : appliquer la question précédente à une suite (ε_k,δ_k) convenable).

Exercice 12 Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega)<+\infty$, et soit $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. Pour $y\in\mathbb{R}^+$, on note
$$M_f(y)=\mu\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)>y\}.$$

1. Montrer que la fonction $M_f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ est décroissante. Quelle sa limite lorsque y tend vers $+\infty$?
2. Calculer $\lim_{y\to y_0^+} M_f(y)$ et $\lim_{y\to y_0^-} M_f(y)$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}^+$. Soit f sa limite. Montrer que $(M_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions convergeant vers M_f.
4. Montrer que l'on a $\int_\Omega f d\mu=\int_{\mathbb{R}^+} M_f\ d\lambda$, d'abord pour toute fonction étagée positive f, puis pour toute fonction mesurable f de Ω dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13

1. (Inégalité de Tchebychev) Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré et soit $f:\Omega\to[0,+\infty]$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $y\geqslant 0$ on a
$$y\cdot\mu\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)\geqslant y\}\leqslant\int_\Omega f\ d\mu.$$
2. Soit $f:\Omega\to[0,+\infty]$ une fonction mesurable. Montrer que $f=0$ μ-p.p. si et seulement si $\int_\Omega f\ d\mu=0$.
3. Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que $f=0$ μ-p.p. si et seulement si $\int_A f\ d\mu=0$ pour tout $A\in\mathcal{F}$.

Exercice 14

1. Pour $\Omega=\mathbb{N}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mu=\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta_n$ et $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, déterminer $\int f\ d\mu$.
2. Pour $\Omega=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$, $\mu=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\delta_{x_k}$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, déterminer $\int f\ d\mu$.

Exercice 15 (Mesure à densité) Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré et soit $f:\Omega\to[0,+\infty]$ une fonction mesurable. On définit une application $\nu:\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ par
$$\nu(A)=\int_A f\ d\mu.$$

1. Montrer que ν est une mesure sur $\mathcal{F}$.
Elle est appelée mesure de densité f par rapport à μ, et notée $\nu=f\cdot\mu$.
2. Montrer que si $\mu(A)=0$ alors $\nu(A)=0$.

Exercice 16 Les fonctions suivantes sont-elles Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}$?

1. $f_1(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$.
2. $f_2(x) = x^2\chi_{(\mathbb{R}\setminus Q)\cap[0,1]}(x)$.
3. $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}(x)$.
4. $f_4(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$.
5. $f_5(x) = \frac{\sin x}{x}$.
6. $f_6(x) = (\sin \frac{1}{x})\chi_{[-1,1]}(x)$.

Exercice 17 (Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable ; en particulier f est bornée et l'intervalle $[a,b]$ aussi.

1. Montrer qu'il existe des suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que :
$$\varphi_0 \leqslant \varphi_1 \leqslant ... \leqslant f \leqslant ... \leqslant \psi_1 \leqslant \psi_0,$$
et telles que
$$\lim_n \int_a^b \varphi_n(x)\ dx = \lim_n \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$
(Indication : le sup d'une famille finie de fonctions en escalier est une fonction en escalier, de même pour l'inf).
2. Soit φ et ψ les fonctions limites des suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'elles sont Lebesgue intégrables sur $[a,b]$ et que :
$$\lim_n \int_{[a,b]} \varphi_n\ d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi\ d\lambda, \quad \lim_n \int_{[a,b]} \psi_n\ d\lambda = \int_{[a,b]} \psi\ d\lambda.$$
3. Montrer que $\varphi = f = \psi$ p.p. En déduire que f est Lebesgue intégrable et que $\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f\ d\lambda$.

Exercice 18 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $A \in \mathcal{F}$ avec $\mu(A) < +\infty$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est μ-intégrable.
2. $\int_{\{x\in A\ ;\ |f(x)|>n\}} |f|\ d\mu \to 0$ quand $n \to +\infty$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} n \cdot \mu\{x \in A\ ;\ n < |f(x)| \leqslant n+1\} < +\infty$.
4. $\sum_{n\geqslant 0} \mu\{x \in A\ ;\ |f(x)| > n\} < +\infty$.

Indication : montrer que $1 \Leftrightarrow 2$, $1 \Leftrightarrow 3$, $4 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 4$ (utiliser $3 \Rightarrow 2$).

Exercice 19 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit (f_n) la suite de fonctions définies par :
$$f_n(x) = n^2 x\chi_{[0,1/n]}(x) + n^2(2/n - x)\chi_{]1/n,2/n]}(x).$$
Appliquer le lemme de Fatou à la suite (f_n). Comparer $\int \limsup f_n\ d\lambda$ et $\limsup \int f_n\ d\lambda$.

Exercice 20 Etudier :

1. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x\ dx$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\ dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^\infty \frac{1+nx}{(1+x)^n}\ dx$.

Exercice 21

1. Montrer que pour tout $\alpha > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$
2. Etudier $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-ax} dx$ dans les cas $a > 1$ et $a \leqslant 1$.

Exercice 22 Soit q un entier positif et p un réel strictement plus grand que -1.

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n x^p(\ln x)^q\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n dx = \int_0^\infty x^p(\ln x)^q e^{-x}dx.$$
2. En déduire que $\int_0^\infty e^{-x}\ln x\; dx = \lim_{n\to+\infty}[\ln n - (1+1/2+...+1/n)]$.

Exercice 23 1. Calculer $\int_0^1 x^n \ln x\; dx$ pour tout entier $n>0$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\; dx$ sachant que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 24 Etablir la relation
$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x-1}\; dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{n^2+a^2}.$$

Exercice 25 1. Etablir la relation
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\; dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

2. En déduire que $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 26 (Escalier du diable) Rappelons d'abord la construction de l'ensemble triadique de Cantor (voir Ex. 22 feuille 1). Soit $E_0=[0,1]$. Supposons l'ensemble E_n construit de sorte qu'il soit réunion de 2^n intervalles fermés E_n^k $(1\leqslant k\leqslant 2^n)$ deux à deux disjoints, chacun de longueur 3^{-n}. On construit alors E_{n+1} de la manière suivante : dans chaque intervalle E_n^k on retire un intervalle ouvert de même centre que celui de E_n^k et de longueur 3^{-n-1}, de sorte que les deux intervalles restants sont de longueur 3^{-n-1}. Les 2^{n+1} intervalles ainsi obtenus forment E_{n+1}. L'ensemble triadique de Cantor est
$$E=\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n.$$

On définit à présent une suite de fonctions continues croissantes (f_n) de $[0,1]$ dans $[0,1]$ comme suit. La fonction f_0 est l'identité de $[0,1]$. Supposons f_n définie et affine sur chaque intervalle E_n^k $(1\leqslant k\leqslant 2^k)$. On construit f_{n+1} en modifiant f_n sur chaque E_n^k, de manière continue, comme suit. Sur l'intervalle de longueur 3^{-n-1} centré au centre de E_n^k, la fonction f_{n+1} est constante égale à la demi-somme des valeurs de f_n aux extrémités de E_n^k. Sur les deux intervalles restants, elle est affine et égale à f_n aux extrémités de E_n^k.

1. Dessiner les graphes de f_1, f_2.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$, et f constante sur chaque intervalle de $[0,1]\setminus E$.
3. Montrer que f est dérivable λ-presque partout sur $[0,1]$.
4. A-t'on $f(1)-f(0)=\int_{[0,1]} f'\; d\lambda$?