Licence de Mathématiques

Intégrations - Probabilités

Printemps 2021

Chapitre 5

Intégration au sens de Lebesgue

5.1 Intégration des fonctions étagées

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.
On dit que $f : \Omega \mapsto \mathbf{C}$ est étagée si elle est mesurable et son image est finie.
Autrement dit, il existe $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles mesurables disjoints tels que

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{E_k}$$

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction étagée.
Soit $E \in \mathcal{F}$. L'intégrale de f par rapport à μ sur E est donnée par

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu(E_k \cap E)$$

En particulier, si $E = \Omega$,

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu(E_k)$$

Proposition 1

Soient f, g deux fonctions étagées positives. Soient $\alpha \geqslant 0$ et $E \in \mathcal{F}$. Alors :

1. $\int_E \alpha f \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \mathrm{d}\mu$
2. $\int_E f + g \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu + \int_E g \mathrm{d}\mu$
3. Si $f \leqslant g$, alors $\int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \mathrm{d}\mu$

Démonstration. 1. En réécrivant la forme normale de f et g, on a :

$$\begin{aligned}\int_E \alpha f + g\mathrm{d}\mu &= \int_E \sum_k \sum_l \alpha c_k + d_l frm[o]--_{E_k\cap F_l}\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_k \sum_l \alpha c_k + d_l\mu(E_k\cap F_l\cap E) \\ &= \sum_k \alpha c_k \sum_l \mu(E_k\cap F_l\cap E) + \sum_l d_l \sum_k \mu(E_k\cap F_l\cap E) \\ &= \sum_k \alpha c_k\mu(E_k\cap E) + \sum_l d_l\mu(F_l\cap E) \\ &= \alpha\int_E f\mathrm{d}\mu + \int_E g\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

2. Si $f \leqslant g$, alors pour tout (k,l) tels que $E_k\cap F_l \neq \varnothing$, $c_k \leqslant d_l$. Et donc

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}\mu &= \sum_k\sum_l c_k\mu(E_k\cap F_l\cap \mu) \\ &\leqslant \sum_k\sum_l \mu(E_k\cap F_l\cap E) \\ &= \int_E g\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

Proposition 2

Soit f étagée positive. Alors la fonction

$$\nu_f : \begin{cases}\mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty] \\ E \longrightarrow \int_E f\mathrm{d}\mu\end{cases}$$

est une mesure sur $(\Omega,\mathcal{F})$.

Démonstration. Nous allons juste montrer la σ-additivité. Soit $(F_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints. On note $F = \bigcup_i F_i$. Alors :

$$\begin{aligned}\nu(F) &= \int_F f\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_k c_k\mu(E_k\cap F) \\ &= \sum_k c_k\mu\left(\bigcup_i E_k\cap F_i\right) \\ &= \sum_k c_k\sum_i \mu(E_k\cap F_i) \\ &= \sum_i\sum_k c_k\mu(E_k\cap F_i) \\ &= \sum_k \nu(F_i)\end{aligned}$$

□

5.2 Intégration des fonctions mesurables positives

Définition 1

Soit $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
L'intégrale de f par rapport μ est donnée par :

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_\Omega s \mathrm{d}\mu \mid 0 \leqslant s \leqslant f \text{ étagée} \right\}$$

Remarque 1. *1. Si f est étagée, la définition reste cohérente.*

2. Soit $E \in \mathcal{F}$, on peut définir $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathbf{1}_E \mathrm{d}\mu$

Proposition 1

Soient f et g deux fonctions mesurables positives telles que $f \leqslant g$. Alors

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega g \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. exercice. □

Proposition 2

Soit f une fonction mesurable positive.

1. Si $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu < \infty$, alors f est finie μ-ps.
2. Si $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0$, alors f est nulle μ-ps.

Démonstration. 1. On pose $E = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = +\infty\}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f \leqslant s_n = n\mathbf{1}_E + 0\mathbf{1}_{\Omega \setminus E}$. Donc, par définition de l'intégrale, $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \geqslant n\mu(E)$.
Si E, n'est pas de mesure nulle, alors l'intégrale diverge.

2. exercice.

□

Théorème 1 (Convergence monotone - Beppo-Levi)

Soit $f_n : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors :

1. $f = \lim f_n$ est mesurable.
2. $\int_\Omega \lim f_n = \lim \int_\Omega f_n$

Démonstration. 1. exercice

2. Par croissance :
$$I_m = \int_\Omega f_m \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \int \int_\Omega f \mathrm{d}\mu$$
La suite (I_n) est croissante, donc elle a une limite et
$$\lim I_n \leqslant \int f \mathrm{d}\mu$$
Réciproquement, soit s étagée telle que $0 \leqslant s \leqslant f$, et soit $\alpha \in]0,1[$. On pose :
$$E_n = \{\omega \mid f_n(\omega) \geqslant \alpha s(\omega)\}$$
Par croissance, $E_m \subset E_n$. Donc (E_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables.
— $\forall \omega$ tq $s(\omega) \neq 0$, $\alpha s(\omega) < f(\omega)$, et comme f_n tend en croissant vers f, il existe un rang au dessus duquel $f_n(\omega) \geqslant \alpha s(\omega)$, et donc $\omega \in E_n$.
— Si $s(\omega) = 0, \omega \in E_n$ pour tout n.
Donc $\Omega = \bigcup_{\mathbf{N}} E_n$ et
$$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \alpha \int_{E_n} s \mathrm{d}\mu = \alpha \nu_s(E_n)$$
Comme ν_s est une mesure, $\nu_s(\bigcup E_n) = \nu_s(\Omega) = \int_\Omega s \mathrm{d}\mu$.
On conclut par définition de l'intégrale.

□

Corollaire 1 (Inversion série-intégrale)

Soit $f_n : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables positives.
La suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^n f_k)_{\mathbf{N}}$ converge vers une fonction mesurable $f = \sum_{\mathbf{N}} f_n$ et on a :
$$\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{n \in \mathbf{N}^*} f_n \right) \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. On applique le théorème de convergence monotone à $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$. □

Théorème 2 (Lemme de Fatou)

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors :
$$\int_\Omega \liminf f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. On pose $g_n = \inf_{i \geqslant n} f_i$. C'est une suite croissante de fonctions mesurables positives. Par convergence monotone :
$$\begin{aligned} \int_\Omega \liminf f_n \mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \lim g_n \mathrm{d}\mu \\ &= \lim \int_\Omega g_n \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

5.3 Intégration des fonctions mesurables à valeurs réelles

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$. La partie positive et négative de f sont données par :

$$f^+(\omega) = \max(f(\omega), 0)$$
$$f^-(\omega) = \max(-f(\omega), 0)$$

Proposition 1

Si f est mesurable,

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty \iff \int_\Omega f^\pm < \infty$$

Démonstration. $|f| \leqslant f^+ + f^-$ et $\max(f+, f-) \leqslant |f|$. □

Définition 1

On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est intégrable si elle est mesurable et que $\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty$.
Dans ce cas, $\forall E \in \mathcal{F}$,

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \mathrm{d}\mu$$

On note $\|f\|_1 = \int |f| \mathrm{d}\mu$

Remarque 2. *L'espace des fonctions réelles intégrables est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme sur cet espace.*

Proposition 2

Pour toute fonction intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

$$\left| \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \|f\|_1$$

Démonstration. Encadrer $\int f$ par $\|f\|$ et $-\|f\|$ □

Proposition 3

Soit f intégrable. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu = 0$
2. $f = 0$ presque-sûrement
3. $\forall E \in \mathcal{F}, \int_E f \mathrm{d}\mu = 0$

Démonstration. (3) $\Longrightarrow$ (1) :
Supposons que $\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu > 0$. On a donc $\int f^+ > 0$ ou $\int f^- > 0$. Supposons que $\int f^+ > 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $E_\varepsilon = \{\omega \mid f^+(\omega) \geqslant \varepsilon\}$. Il existe alors un ε_0 tq $\mu(E_{\varepsilon_0}) > 0$.

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_{E_{\varepsilon_0}} f^+ \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon_0 \mu(E_{\varepsilon_0})$$

> 0 □

Définition 2

Soit Ω un espace mesuré. Pour f, g deux fonctions mesurables, on note $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ presque-sûrement.
On note $\mathbf{L}^1(\Omega, \mu)$ l'espace des classes d'équivalence des fonctions intégrables à valeurs réelles pour la relation $\sim$.

Remarque 3. *Cette fois,* $\|\cdot\|_1$ *est bien une norme. (sur* $\mathbf{L}^1$*.*

Théorème 1 (Convergence dominée)

Soit f_n une suite de fonction mesurables. On suppose que :

1. La limite simple $f = \lim f_n$ existe presque-partout
2. Il existe une fonction positive intégrable g telle que $\forall n, |f_n| \leqslant g$ presque-sûrement.

Alors, la limite f est intégrable et,

$$\lim \|f_n - f\|_1 = 0$$

En particulier,

$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu = \int \lim f_n \mathrm{d}\mu$$

Démonstration. Par hypothèse et en passant à la limite, on a $|f_n - f| \leqslant 2g$. On va appliquer le lemme de Fatou à $2g - |f_n - f| \geqslant 0$:

$$\int \liminf 2g - |f_n - f| \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int 2g - |f_n - f| \mathrm{d}\mu$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \limsup \int |f - f_n| \mathrm{d}\mu &\leqslant \int \limsup |f - f_n| \mathrm{d}\mu \\ &= \int \lim |f_n - f| \mathrm{d}\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et donc $\|f - f_n\|_1 \to 0$. □

Corollaire 1

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que $\sum_n \|f_n\|_1 < \infty$. (convergence normale)
Alors la série de terme général f_n converge μ-pp vers $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathbf{L}^1$ et

$$\int \sum f_n = \sum \int f_n$$

Et de plus,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n - \sum_{n=0}^{N} f_n \right| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Démonstration. Beppo-Levi + TCD □

Théorème 2 (Transfert)

Soit $f : (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \mapsto (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Alors f est μ_T-intégrable si et seulement si $f \circ T$ est μ-intégrable.

Démonstration. à faire □

On rappelle que μ_T est la mesure image de μ par T, ie $\mu_T(A) = \mu(T^{-1}(A))$

Définition 3

Soit X une variable aléatoire réelle. Si $X \geqslant 0$ ou si X est $\mathbf{P}$-intégrable, on définit l'espérence de X comme

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X \mathrm{d}\mathbf{P}$$

Par le théorème de transfert, on a en particulier

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbf{R}} x \mathrm{d}\mathbf{P}_X(x)$$

On peut, de plus, vérifier que si $\mathbf{P}_X = \sum p_k \delta_{x_k}$, alors

$$\mathbf{E}(X) = \sum p_k x_k = \sum x_k \mathbf{P}(X = x_k)$$

Chapitre 6

Intégration sur un espace produit

Soient $(X,\mathcal{M}),(Y,\mathcal{N})$ deux espaces mesurables.
Soit $x \in X$. On définit :

$$i_x : \begin{cases} Y \longrightarrow X \times Y \\ y \longrightarrow (x,y) \end{cases}$$

Proposition 1

1. $\forall x \in X$ i_x est $\mathcal{N}$-mesurable.
2. De la même façon, i^y est mesurable.

Démonstration. Soient $A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N}$.

$$i_x^{-1} : \begin{cases} B \text{ si } x \in A \\ \varnothing \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

□

Corollaire 1

Soit $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. On définit :

$$\forall x \in X, E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$$

$$\forall y \in Y, E^y = \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$$

Alors, $\forall x, E_x \in \mathcal{N}$ et $\forall y \in Y, E^y \in \mathcal{M}$

Démonstration. $E_x = i_x^{-1}(E)$ et $E^y = i^{y-1}(E)$ □

Proposition 2

Soit f une fonction $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ mesurable.

1. Pour tout $x \in X,\ f_x : Y \longrightarrow X \times Y$ est $\mathcal{N}$-mesurable.
2. Pour tout $y \in Y,\ f^y : X \longrightarrow X \times Y$ est $\mathcal{M}$-mesurable.

Démonstration. $f_x = f \circ i_x, \ f^y = f \circ i^y$ □

Dans la suite, on prend X, Y deux espaces mesurés dont les mesures μ, ν sont σ-finies.

Proposition 3

1. $\forall E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}, \varphi_E : x \in X \longrightarrow \nu(E_x) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est $\mathcal{M}$-mesurable et
$$\int_X \varphi_E \mathrm{d}\mu = \mu \otimes \nu(E)$$
2. $\forall E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}, \ \psi^E : y \in Y \longrightarrow \mu(E^y) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est $\mathcal{N}$ mesurable et
$$\int_Y \psi^E \mathrm{d}\nu = \mu \otimes \nu(E)$$

Démonstration. Premier cas : on suppose que $\nu(Y), \mu(X) < \infty$.
Si $E = A \times B, \ A \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}$.

1. Si $x \in A, \ E_x = B, \ \varphi_E(x) = \nu(B)$
2. Si $x \notin B, \ E_x = \varnothing, \ \varphi_E(x) = 0$

$$\varphi_E = \nu(b) \cdot \mathbf{1}_A$$

Donc
$$\int_X \varphi_E \mathrm{d}\mu = \nu(B) \int_X \mathbf{1}_A \mathrm{d}\mu = \nu(B)\mu(A) = \mu \otimes \nu(E)$$

Soit
$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \mid \int \varphi_E \mathrm{d}\mu = \mu \otimes \nu(E)\}$$

Montrons que $\mathcal{C}$ est une classe monotone :

1. $X \times Y \in \mathcal{C}$ car $X \times Y$ est un pavé
2. $E, F \in \mathcal{C}, E \subset F$,
$$\mu \otimes \nu(F \setminus E) = \mu \otimes \nu(F) - \mu \otimes \nu(E)$$
$$\forall x \in X, \ (F \setminus E)_x = F_x \setminus E_x, \ E_x \subset F_x$$
$$\nu((F \setminus E)_x) = \nu(F_x \setminus E_x) = \nu(F_x) - \nu(E_x)$$
$$\varphi_{F \setminus E} = \varphi_F - \varphi_E$$
$$\int \varphi_{F \setminus E} \mathrm{d}\mu = \int \varphi_F \mathrm{d}\mu - \int \varphi_E \mathrm{d}\mu = \mu \otimes \nu(F \setminus E)$$
Donc $F \setminus E \in \mathcal{C}$.
3. exercice : montrer que $\mathcal{C}$ est stable par réunion croissante.

$\mathcal{C}$ est une classe monotone qui contient $\{A \times B, A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$ donc elle contient $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$
Second cas : μ, ν sont σ-finies.
Soit (D_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ telle que
$$\bigcup_{\mathbf{N}} D_n = X \times Y$$

et $\forall n \in \mathbf{N},\ \mu \otimes \nu(D_n) < \infty$.
Par la première étape, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\int \varphi_{E\cap D_n} \mathrm{d}\mu = \mu \otimes \nu(E \cap D_n)$$

Et on conclut par convergence monotone pour le membre de gauche, et continuité par limite croissante pour le membre de droite. □

Remarque 4. *Si $f(x,y) = \mathbf{1}_E(x,y)$, on a "naïvement" $\varphi_E(x) = \int f_x \mathrm{d}\nu = \int f(x,y)d\nu(y)$ et $\int \varphi_E \mathrm{d}\nu = \int\int f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)$, c'est à-dire Fubini.*

Théorème 1 (Tonelli)

Soient X, Y deux espaces mesurés munies de mesures σ-finies.
Soit $f : X \times Y \longrightarrow R_+$ mesurable positive. Alors on a :

$$\int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \int_Y f_x \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \int_X f^y \mathrm{d}\mu d\nu(y)$$

Démonstration. Par la proposition précendete, le théorème est vrai pour $f = \mathbf{1}_E,\ E = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.
Par linéarité, il est aussi vrai si f est étagée positive.
Si f est mesurable positive, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées positives telles que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$.
La suite $(f_n)_x$ est croissante, $(f_n)_x \xrightarrow[n\to\infty]{} f_x$ pour tout $x \in X$. Pour tout n, on a

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int \int (f_n)_x \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu(x)$$

Puis on conclut en appliquant le théorème de convergence monotone à gauche et à droite. □

Proposition 4 (Application de Tonelli)

Soit f une fonction mesurable positive sur Ω. Alors :

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geqslant t\}\big)\mathrm{d}t$$

Démonstration. On a $X = \Omega, Y = \mathbf{R}_+,\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$.
On définit $A = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+,\ f(\omega) \geqslant t\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ (exercice !).
On applique Tonelli à $g = \mathbf{1}_A$. □

Remarque 5.

1. *Si X est une variable aléatoire à valeurs positives,* $\mathbf{E}(X) = \int 0^\infty \mathbf{P}(X \geqslant t)\mathrm{d}t$
2. *Si X est une variable aléatoire discrète positive,* $\mathbf{E}(X) = \sum_k \mathbf{P}(X \geqslant k)$

Théorème 2 (Fubini)

Soit X, Y deux espaces mesurés de mesures σ-finies.
Soit $f : X \times Y$ mesurable et $\mu \otimes \nu$-intégrable.
Alors, pour μ-presque tout x, la fonction f_x est ν-intégrable.
Et, pour ν-presque tout y, la fonction f^y est μ-intégrable.

$$\int f \mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int \int f_x \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu = \int \int f^y \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $|f|_x = |f_x|$.
On applique Tonelli puis trois fois le théorème de convergence dominée.

Théorème 3 (Changement de variable)

Soit $U \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert et φ un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ de U sur $\varphi(U)$.
Soit f une fonction borélienne de $\varphi(U)$ dans $\mathbf{R}$ positive ou λ_d-intégrable. Alors

$$\int_{\varphi(U)} f \mathrm{d}\lambda_d = \int_U f \circ \varphi \cdot |\mathrm{det} J_\varphi| \cdot \mathrm{d}\lambda_d$$

$\square$

Chapitre 7

Variables aléatoires réelles et vecteurs aléatoires à densité

7.1 Mesures à densité

Soit Ω un espace mesuré de mesure *de référence* μ.
On se donne une fonction h positive mesurable de Ω dans $\mathbf{R}$. On définit

$$\nu : \begin{cases} \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ A \longrightarrow \nu(A) = \int_A h \mathrm{d}\mu \end{cases}$$

On dit que ν est de densité h par rapport à μ.

Proposition 1

Soit ν une mesure σ-finie. Soient h_1, h_2 deux fonctions mesurables positives qui sont toutes deux des densités de ν par rapport à μ.
Alors $h_1 = h_2$ μ-presque partout.

Démonstration. Distinguer deux cas, dans le premier $\nu(\Omega)$ est finie, décomposer $|h_1 - h_2|$ selon $h_1 > h_2$ ou $h_2 > h_1$. Etendre à ν σ-fini. □

Proposition 2

Si ν a pour densité h par rapport à μ, alors, pour toute fonction g mesurable.

$$\int |g| \mathrm{d}\nu = \int |g| h \mathrm{d}\mu$$

Si cette quantité finie, $\int g \mathrm{d}\nu = \int g h \mathrm{d}\mu$

Si X est une variable aléatoire telle que $\mathbf{P}_X$ a une densité h par rapport à λ, on dit que X est une variable aléatoire réelle à densité.

Proposition 3

Soit X une variable aléatoire rélle de densité f_X.
Alors, $\forall a \in \mathbf{R},\ \mathbf{P}(X = a) = 0$ et pour $a < b,\ \mathbf{P}(X \in [a, b]) = \mathbf{P}(X \in]a, b[)$.
Soit g mesurable positive ou telle que $\mathbf{E}(|g(X)|) < \infty$, alors $\mathbf{E}(g(X)) = \int_{\mathbf{R}} g \cdot f_x \mathrm{d}\lambda$.

7.2 Retour sur l'indépendance

Théorème 1

Soient $X_1, \ldots, X_n$ vecteurs aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
2. $\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}$

Démonstration. Soit $\mathcal{C} = \{A_1 \times \cdots \times A_n,\ \forall i \leqslant n,\ A_i \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{p_i})\}$.
On sait que $\mathcal{C}$ est stable par intersection et $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^{p_1+\cdots+p_n})$ donc il suffit de montrer l'égalité des mesures sur $\mathcal{C}$.
Soit $A = A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(X_1,\cdots,X_n)}(A) &= \mathbf{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \in A_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{X_i}(A_i) \\
&= \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}(A)
\end{aligned}$$

Réciproquement, soient $B_1, \ldots, B_n$ tels que $\forall i \leqslant n,\ b_i \in \sigma(X_i)$. C'est-à-dire que pour tout $i \leqslant n$, il existe un $A_i \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{p_i})$ tel que $B_i = \{X_i \in A_i\}$.
On pose $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) &= \mathbf{P}\left(\{X_i \in A_i\}\right) \\
&= \mathbf{P}_{(X_1,\cdots,X_n)}(A) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{X_i}(A_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \in A_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)
\end{aligned}$$

□

Proposition 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
Soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\mathbf{E}(|d(X)|) < \infty \text{ et } \mathbf{E}(|g(Y)|) < \infty$$

Alors $\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\mathbf{E}(g(Y))$.
La même formule est vraie si f, g positives.

Démonstration. On va appliquer, dans l'ordre, le théorème de transfert, l'hyporhèse d'indépendantes et le théorème de Tonelli.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \int_\Omega |f(X)g(Y)|\mathrm{d}\mathbf{P} &= \int |f(x)g(y)|\mathrm{d}\mathbf{P}_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \int |f(x)g(y)|\mathrm{d}\mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y(x,y) \\
&= \int \int |f(x)||g(y)|\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x)\mathrm{d}\mathbf{P}_Y(y) \\
&= \int |g(y)|\mathrm{d}\mathbf{P}_Y(y) \times \int |f(x)|\mathrm{d}\mathbf{P}_Y(x) \\
&= \mathbf{E}(|g(y)|) \times \mathbf{E}(|f(X)|) < \infty
\end{aligned}$$

□

Remarque 6.
1. *On peut faire le même calcul sans les valeurs absolues avec le théorème de Fubini.*
2. *Soient X, Y variables aléatoires réelles indépendantes dont l'espérence du carré est finie. Montrer que la variance est additive.*

7.3 Indépendance et vecteurs aléatoires à densités

Théorème 1

Soient Ω, Ω' deux espace smesurés σ-finis.
Soit ν une mesure sur $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')$ de densité h par rapport à $\mu \otimes \mu'$.
Alors si on définit $\pi : \Omega \times \Omega' \longrightarrow \Omega$ et ν_π la mesure image de ν par π, alors ν_π a une densité f par rapport μ donnée par

$$f(x) = \int h_x \mathrm{d}\mu'$$

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
\nu_\pi(B) &= \nu(\pi^{-1}(B)) = \nu(B \times \Omega') \\
&= \int_{B\times\Omega'} \mathrm{d}\nu = \int_{B\times\Omega'} h \mathrm{d}\mu \otimes \mu' \\
&= \int_B \int_{\Omega'} h_x \mathrm{d}\mu' \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_B f(x) \mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}$$

Donc f est bien de densité ν_π par rapport μ. $\square$

Chapitre 8

Modes de convergence de variables aléatoires

8.1 Convergence presque-sûre

Définition 1

On dit que la suite (X_n) converge $\mathbf{P}$-presque sûrement vers une variable aléatoire X si et seulement si il existe un sous-ensemble mesurable $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\mathbf{P}(\Omega') = 1$ et

$$\forall \omega \in \Omega',\ X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$$

On note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$

Proposition 1

(X_n) converge vers X p.s. si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\sup_{k\geqslant n} |X_k - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Démonstration. Soit $\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}$. Alors :

$$\Omega' = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geqslant 0} \bigcap_{k\geqslant n} \{\omega \in \Omega,\ |X_k(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon\} = A_\varepsilon$$

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X &\iff \mathbf{P}(\Omega') = 1 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}(A_\varepsilon) = 1 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}(A_\varepsilon^{\complement}) = 0 \end{aligned}$$

$$A_\varepsilon^{\complement} = \bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{k\geqslant n} \{\omega \in \Omega,\ \mid |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = \bigcap B_{n,\varepsilon}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, $(B_{n,\varepsilon})_n$ est une famille décroissante d'événements.

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{P}(A_\varepsilon^\complement) &= \lim \mathbf{P}(B_{n,\varepsilon}) \\ &= \lim \mathbf{P}(\sup_{k\geqslant n} |X_k - X| > \varepsilon) \end{aligned}$$

□

Commençons par un rappel :

Proposition 2 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit (A_n) une suite d'événements sur Ω.

1. Si $\sum_{\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$
2. Si (A_n) est une famille indépendante d'événements et que $\sum_{\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$

Proposition 3

1. Si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, alors X_n tend vers X p.s.
2. Supposons que (X_n) est une famille de variables aléatoires indépendantes. Alors :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X \iff \forall \varepsilon > 0, \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$$

Démonstration.

1. On suppose que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

On note, pour tout p entier non-nul, $A_{n,p} = \{\omega \in \Omega, \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{p}\}$.
On a donc $\sum_n \mathbf{P}(A_{n,p}) < \infty$.
Par la premier point de Borel-Cantelli, $\mathbf{P}(\limsup_n A_{n,p}) = 0$. C'est-à-dire :

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \ \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{k\geqslant n} A_{k,p} = 0 = \mathbf{P}(B_p)\right)$$

La famille (B_p) est croissante, et donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{p\geqslant 1} B_p\right) = \lim_p \mathbf{P}(B_p) = 0$$

En passant au complémentaire, on a le résultat voulu.

2. Le sens direct se fait en utilisant le second point de Borel-Cantelli. La réciproque est directe en appliquant le point précédent avec $X = 0$

□

8.2 Convergence en probavilité

Définition 1

On dit que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probablité vers X si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_n \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

On note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} X$.

Remarque 7. *La convergence presque-sûre implique la convergence en probabilité. La réciproque est fausse ! cf contre-exemple.*

Proposition 1 (Réciproque partielle)

Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} X$, alors il existe une sous-suite (X_{n_k}) qui converge presque-sûrement vers X.

Démonstration. Supposons que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} X$.
Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On sait que

$$\mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \frac{1}{p}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc il existe n_p tel que $\forall n n_p$;

$$\mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p^2})$$

On pose $A_p = \{|X_{n_p X}| \geqslant \frac{1}{p}\}$.
On a $\sum_{p\in\mathbf{N}^*} \mathbf{P}(A_p) \leqslant \sum_p \frac{1}{p^2} < \infty$.
Donc, par Borel-Cantelli,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\limsup_p A_p) = 0 \\ \iff &\mathbf{P}((\limsup_p A_p)^\complement) = 1 \\ \iff &X_{n_p} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} X \end{aligned}$$

□

Proposition 2

Pour X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω, on pose $d(X,Y) = \mathbf{E}(|X - Y| \wedge 1)$
Alors d est bien une distance et

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} X \iff d(X_n X) \to 0$$

Démonstration. Vérifier que d est une distance.
Soit $0 < \varepsilon < 1$.

$$\mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(|X_n - X| \wedge 1 \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{d(X_n, X)}{\varepsilon}$$

Grâce à l'inégalité de Markov.
Supposons que $d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Alors $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Réciproquement, si X_n converge en probabilité vers X,

$$d(X_n, X) = \mathbf{E}(|X_n - X| \wedge 1) = \mathbf{E}\big((|X_n - X| \wedge 1)(\mathbf{1}_{|X_n - X \leqslant \varepsilon|} + \mathbf{1}_{|X_n - X| > \varepsilon})\big)$$

Et donc pour tout $\varepsilon > 0$, $d(X_n, X) \leqslant \varepsilon + 0$ donc $\lim d(X_n, X) = 0$. □

Proposition 3

Supposons que (X_n) est une suite de Cauchy pour la distance d.
Alors (X_n) converge en probabilité pour la distance d.

8.3 Convergence dans $\mathbf{L}^p$

Définition 1

La suite de variables aléatoires (X_n) converge dans $\mathbf{L}^p$ vers X si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) = 0$$

On note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{L}^p} X$

Remarque 8. *Par l'inégalité de Jensen, si $p' \leqslant p$, la convergence dans $\mathbf{L}^p$ implique la convergence dans $\mathbf{L}^{p'}$.*

Proposition 1

La convergence dans $\mathbf{L}^p$ entraîne la convergence en probabilités.

Démonstration. On suppose que $\mathbf{E}(|X_n - X|^p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(|X - X|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|_n - X|^p)}{\varepsilon^o}$$

Donc $\mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \to 0$ □

Remarque 9. *La réciproque n'est pas vraie. Par exemple, soit $\Omega = [0, 1]$. Pour $n \geqslant 1$, $X_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$.*
Soit $\varepsilon > 0$. $\mathbf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) = 1/n$ pour n assez grand.
Donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0$. Or, $\mathbf{E}(|X_n|) = 1 \neq 0$

Définition 2

Une famille $(X_i)_I$ de variables aléatoires intégrables est dite uniformément intégrable si et seulement si

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{|X_i|>C} |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} = 0$$

Remarque 10. *1. Si X est une variable aléatoire intégrable, alorrs elle est uniforme intégrable.*

2. Une famille fini de variables aléatoires intégrables est uniforme intégrable

3. Si il existe une variable aléatoire intégrable Y tel que $\forall i \in i,\ |X_i| \leqslant Y$, alors $(X_i)_I$ est uniforme intégrable.

Proposition 2

$(X_i)_I$ est uniforme intégrable si et seulement si $\sup_I \mathbf{E}(|X_i|) < \infty$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) \leqslant \eta$, on a :

$$\forall i \in I,\ \int_A |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. Supposons que $(X_i)_I$ est uniforme intégrable.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C > 0,\ \sup_I \int_{|X_i|>C} |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon/2$$

Or,

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \forall i \in I,\ \int_A |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{A\cap\{|X_i|>C\}} |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} + \int_{A\cap\{|X_i|\leqslant C\}} |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{2c}$, alors $\forall A$ tel que $\mathbf{P}(A) \leqslant \eta$, on a

$$\forall i \in I,\ \int_A |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon$$

Par ailleurs pour $A = \Omega,\ \forall i \in I, \int |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C \implies \sup_I \mathbf{E}(|X_i|) < \infty$.
Réciproquement, on pose $M = \sup_I \mathbf{E}(|X_i|) < \infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit η tel que $\mathbf{P}(A) \leqslant \eta \implies \int_A |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon$.
On pose $C_0 = \frac{M}{\eta}$.

$$\forall C \geqslant C_0,\ \forall i \in I,\ \mathbf{P}(|X_i| > C) \leqslant \frac{\mathbf{E}|X_i|}{C_0} = \eta$$

donc pour tout $i \in I$, $\int_{|X_i|>C} |X_i| \mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon$ $\square$

Proposition 3

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires intégrables. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} X$ et $(X_n)_{\mathbf{N}}$ est uniforme intégrable.
2. $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|) = 0$ et X est intégrable.

Démonstration. Supposons (1).
On peut extraire une sous-suite (X_{n_k}) qui converge presque-sûrmeent vers X.
Par le lemme de Fatou,

$$\mathbf{E}|X| \leqslant \limsup_k \mathbf{E}|X_{n_k}| \leqslant \sup_{\mathbf{N}} \mathbf{E}|X_n| < \infty$$

Donc X intégrable.
Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|X_n - X| &= \mathbf{E}\big(|X_n - X|(\mathbf{1}_{|X_n-X|\leqslant\varepsilon} + \mathbf{1}_{|X_n-X|>\varepsilon})\big)\\ &\leqslant \varepsilon + \int_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}} |X_n|\mathrm{d}\mathbf{P} + \int_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}} |X|\end{aligned}$$

Comme $(X_n), X$ uniforme intégrables, il existe un η tel que

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \eta \Longrightarrow \begin{cases}\int_A |X_n|\mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon\\ \int_A |X|\mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon\end{cases}$$

Comme $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$,

$$\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \eta$$

Pour $n \geqslant n_0,\ \mathbf{E}|X_n - X| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$.
Donc $\lim \mathbf{E}|X_n - X| = 0$.
Réciproquement, supposons (2) et montrons que (X_n) est uniforme intégrable. On a :

$$\mathbf{E}|X_n| \leqslant \mathbf{E}|X_n - X| + \mathbf{E}|X|$$

Donc $\sup_n \mathbf{E}|X_n - X| < \infty$. De même pour X_n.
Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_A |X_n|\mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \int_A |X_n - X|\mathrm{d}\mathbf{P} + \int_A |X|\mathrm{d}\mathbf{P}$$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \mathbf{E}|X_n - X| \leqslant \varepsilon$.
Par ailleurs, X est uniforme intégrable et $(X_n - X)_{n\leqslant n_0}$ aussi car c'est une famille finie. Donc

$$\exists \eta,\ \mathbf{P}(A) \leqslant \eta \Longrightarrow \begin{cases}\int_A |X|\mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon\\ \forall n \leqslant n_0,\ \int_A |X_n - X|\mathrm{d}\mathbf{P}\varepsilon\\ \forall n \geqslant n_0,\ \int_A |X_n - X|\mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \mathbf{E}|X - X_n| \leqslant \varepsilon\end{cases}$$

Finalement, pour tout A tel que $\mathbf{P}(A) \leqslant \eta$, on a $\int_A |X_n|\mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant \varepsilon + \varepsilon$ □

8.4 Lois des grands nombres

La loi des grands nombre s'applique dans une situation où un e suite de variables aléatoires converge vers une quantité déterministe.
On parle de loi faible si la convergence a lieu en probabilité, de loi forte si elle est presque-sûre.

Théorème 1 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, centrées, non-corrélées ($\mathbf{E}(X_iX_j) = 0\ \forall i \neq j$) telle que

$$\exists C > 0,\ \forall n \geqslant 1\ \mathrm{Var}(X_n) \leqslant C$$

Alors $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P},\mathbf{L}^2} 0$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{E}(X_iX_j)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)\\ &\leqslant \frac{nC}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

□

Corollaire 1

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires iid telle que $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$ alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P},\mathbf{L}^2} \mathbf{E}(X_1)$

Démonstration. On pose pour $n \geqslant 1,\ Y_n = X_n - \mathbf{E}(X_1)$. On vérifie aisément qu'elle est centrée, non-corrélé et on conclut par LGN. □

Théorème 2 (Loi forte des grands nombres $\mathbf{L}^4$)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles, centrées et indépendantes.
Supposons qu'il existe $C > 0,\ \forall n \geqslant 1,\ \mathbf{E}(X_n^4) \leqslant C$.
Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} 0$

Démonstration. On va montrer que $Y = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 < \infty$ ps.
Commençons par montrer que $\mathbf{E}(Y) < \infty$. Cela entrainera la finitude de Y ps et le résultat demandé. Premièrement, un calcul montre que $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(S_n^4)$. De là, on applique Cauchy-Schwarz (Holder avec $p = q = 2$). Par comparaison à une série convergente on aura la résultat. □

Théorème 3 (Loi forte des grands nombres iid)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées.
Alors $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ si et seulement si $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)$.

Remarque 11. *Pour finir ce chapitre, voir les concepts de convergence en loi, ainsi que les théorèmes de Levy (fonction carac/transformée de Fourier de la loi), ou de Portmanteau "topologique) (avec la lim sup,...), de la limite centrale ainsi que quelques notions de statistiques.*