M64 : Groupes Anneau CORPS II
Louis Loiseau L3 Mathématiques 2020–2021

TD 2 – Anneaux

Solutions des exercices

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.
Soit A intègre, $a \in A \setminus \{0\}$, A d'ordre fini. On veut montrer que a est inversible.
On considère la suite $a, a^2, a^3, \dots$ des puissances de a.
Püisque $|A| < \infty$, cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.
Il existe donc $k, l \in \mathbf{N}^*$, $k < l$ tels que $a^k = a^l$. On a :

$$a^k a^l \longrightarrow a^l - a^k = (a^{l-k} - 1)a^k = 0$$

On a $a^k \neq 0$. En effet, sinon on aurait $a \cdot a^{k-1} = 0$, donc soit $k = 1$ et $a = 0$, ce qui contredit le choix de a, ou $k > 2$ et $a \neq 0$, donc $a^{k-1} = 0$ par l'intégrité de A. Par récurrence sur k, on montre que $a^k = 0$ est impossible. $\lightning$
Donc, puisque A est intègre, $a^{l-k} = 1$. Donc $a \cdot a^{l-k-1} = 0$ (on a $l - k > 0$, donc on peut écrire a^{l-k-1}), et a^{l-k-1} est l'inverse de a.
On a montré que si $|A| < \infty$,

$$A \text{ intègre} \implies A \text{ est un corps.}$$

La réciproque est vraie même sans l'hypothèse que A est fini.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

1) Les idéaux maximaux de $\mathbf{C}[X]$:
L'anneau des polynômes en 1 variable sur un corps est euclidien, donc il est principal : tout idéal est principal. Donc les idéaux de $\mathbf{C}[X]$ sont tous de la forme (P), où P parcourt les polynômes unitaire (plus l'idéal nul, qui est aussi principal).
Un idéal (P) de $\mathbf{C}[X]$ est premier si et seulement si P est irréductible. C'est-à-dire

$$\text{Un idéal } I \subset \mathbf{C}[X] \text{ est premier } \iff \begin{cases} I \neq (1) \text{ et} \\ x, y \in \mathbf{C}[X], xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I \end{cases}$$

Et on sait que (P) premier implique P irréductible.
Soit $P = AB$. Alors $AB \in (P)$, donc $A \in (P)$ ou $B \in (P)$. Si, par exemple, $A \in (P)$, il existe un polynôme Q tel que $A = QP$, donc $\deg A = \deg Q + \deg P \geqslant \deg P$, donc $\deg A = \deg P$, donc $\deg Q = 0$, $Q \in \mathbf{K}^*$, donc $Q \in \mathbf{K}[X]^\times$. On a :

$$P = AB\ A = QP,\ Q \text{ inversible } \Longrightarrow P = Q^{-1}A = AB \Longrightarrow A(B - Q^{-1}) = 0 \Longrightarrow B = Q^{-1} \text{ par intégrité.}$$

Pareil si $B \in (P)$.
On a donc montré le sens direct. On montre facilement la réciproque.
On a montré pour tout K,

$$0 \neq P \in \mathbf{K}[X] \text{ irréductible } \iff (P) \text{ premier dans } \mathbf{K}[X]$$

Les irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Donc les idéaux premiers de $\mathbf{C}[X]$ sont les idéaux $(X - \alpha),\ \alpha \in \mathbf{C}$.
Tous ces idéaux sont maximaux. En effet

$$(P) \subset (Q),\ P \neq 0,\ Q \neq 0 iff Q \mid P$$

$$(P) \subsetneq (Q),\ P \neq 0, Q \neq 0 \iff Q \mid P \text{ et } \deg Q < \deg P$$

Si on prend $Q = (X - \alpha)$, alors la seule possibilité pour un polynôme Q de satisfaire à cette condition est la situation où $Q \in \mathbf{C}^*$. Donc $(Q) = (1) = \mathbf{C}[X]$. Cela démontre la maximalité de $(X - \alpha)$.
Une autre façon de le voir :
$(X - \alpha)$ est maximal dans $\mathbf{C}[X]$ car

$$\mathbf{C}[X]/(X - \alpha) \cong C \text{ un corps}$$

2) Les idéaux maximaux de $\mathbf{R}[X]$:
Les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont :
   — Les polynômes de degré 1

   — Les polynômes de degré 2, avec $\Delta < 0$.

   Cela nous donne la description des idéaux premiers non nuls de $\mathbf{R}[X]$; ce sont les idéaux engendrés par les polynômes irréductibles, qu'on peut supposer unitaires. Oar l'exercice 4) v), ce sont tous les idéaux maximaux de $\mathbf{R}[X]$.
   Remarque. L'idéal nul (0) est premier, mais non maximal dans les anneaux $\mathbf{R}[X], \mathbf{C}[X]$

3) Les idéaux maximaux de $\mathbf{Z}$:
Les idéaux sont (n), où n parcourt $\mathbf{N}$.
Les idéaux premiers sont (0) et (p), où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.
Les idéaux maximaux sont les (p).

4) Les idéaux maximaux de $\mathbf{Z}/nZ$:
   — Si $n \neq 0$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$. On a décrit les ideaux maximaux de $\mathbf{Z}$.
   — Si $n = \pm 1$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{0\}$, pas d'ideaux maximaux.

— Soit $n \in \mathbf{Z} \backslash \{0, \pm 1\}$. Les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont en bijection avec les idéaux de $\mathbf{Z}$ contenant $n\mathbf{Z} = (n)$:
Soit $\pi : \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{Z}/(n)$ la surjection canonique. Alors cette bijection est décrite par

$$\begin{aligned} \{\text{idéaux de } \mathbf{Z} \text{ contenant } (n)\} &\cong \{\text{idéaux de } \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\} \\ J &\longrightarrow \pi(J) \\ \pi^{-1}(K) &\longleftarrow K \end{aligned}$$

Un idéal $J \subset Z$ est de la forme (m), $m \in \mathbf{N}$;

$$J \supset (n) \iff (m) \supset (n) \supset \exists k \in \mathbf{Z} \,|\, n = km \iff m \mid n$$

Donc les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont $(m + n\mathbf{Z})$, où m parcourt les diviseurs positifs de n.
Puisque π est surjectif, pour un idéal $K \subset \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$,

$$K \text{ maximal} \iff \pi^{-1}(K) \text{ maximal}$$

Donc les idéaux maximaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont les $(p + n\mathbf{Z})$, où p parcourt les diviseurs premiers de n.

Exercice 7. 1) Théorème chinois pour n idéaux : par récurrence sur n.
A un anneau, $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux tels que $I_i + I_j = A$ pour tous i, j. Alors

$$A/I_1 \cap \cdots \cap I_n = A/I_1 \ldots I_n \cong A/I_1 \times \cdots \times I_n$$

— $n = 1$: rien à démontrer

— $n = 2$: le cas démontré dans le cours.

— Supposons la propriété vraie pour $n \geqslant$. Applications le cas 2 aux idéaux $I = I_1 \cdots I_{n-1}$, $J = I_n$. On vérifie d'abord que $I + J = A$. Par l'hypothèse, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $I_i + I_n = A$, donc il existe $x_i \in I_i$ et $y_i \in I_n$ tels que $x_i + y_i = 1$. on a :

$$\begin{aligned} 1 = \prod_{i=1}^{n-1} (x_i + y_i) &= x_i \ldots x_{n-1} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} x_1 \ldots x_{j-1} y_j x_{j+1} \ldots x_{n+1} \\ &+ \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n-1} x_1 \ldots x_{j-1} y_j x_{j+1} \ldots x_{k-1} y_k x_{k+1} \ldots x_{n-1} \ldots \\ &+ y_1 \ldots y_{n-1} \end{aligned}$$

On a montré que $1 \in I + J$, donc $I + J = (1) = A$. On a donc l'isomorphisme, par (H_2) :

$$A/I_1 \ldots I_{n-1} \cap I_n = A/I_1 \ldots I_2 \cong A_{I1} \ldots I_{n-1} \times A/I_n$$

Par (H_{n-1}) :

$$A/I_1 \ldots I_{n-1} = A/I_1 \cap \cdots \cap I_{n-1} \cong A/I_1 \times \cdots \times A/I_{n-1}$$

La substitution de cette relation dans la précédente donne (H_n)

2) Avec les mêmes hypothèses, on a :

$$A/I_1^{m_1}\cap\cdots\cap I_n^{m_n} = A/I_1^{m_1}\dots I_n^{m_n} \cong A/I_1^{m_1}\times\cdots\times A/I_n^{m_n}$$

Il sufffit de montrer : si $I_1,\dots I_n$ satisfont à l'hypothèse

$$I_i + I_j = A\ \forall i,j,\ 1\leqslant i<j\leqslant n$$

Alors les idéaux $J_1 = I_1^{m_1},\dots J_n = I_n^{m_n}$ satisfont à la même hypothèse :

$$J_i + j_j = A\ \forall i,j\ 1\leqslant i<j\leqslant n$$

Par récurrence sur n on réduit cette assertion aux cas de deux idéaux.
Soient I,J deux idéaux de A tels que $I+J=A$, $r\geqslant 1$, $s\geqslant 1$, *alors,* $I^r + J^s = A$.
En effet, soient $u\in I, v\in J$ tels que $u+v=1$. Alors $(u+v)^r = 1$. Or

$$(u+v)^r = u^r + \underbrace{\left(C_r^1 u^{r-1}+\cdots+C_r^r v^{r-1}\right)v}_{\in J} \in I^r + J$$

Donc on a trouvé $a\in I^r,\ b\in J$ tels que $a+b=1$. Alors $(a+b)^s = 1$, et

$$(a+b)^s = a\underbrace{\left(C_s^0 a^{r-1}+\cdots+C_s^{r-1} b^{r-1}\right)}_{\in I^r} + C_s^s b^s$$

Donc $1\in I^r + J^s$ et $I^r + J^s = (1) = A$.

Exercice 8.

1) $\mathbf{Z}/((17)\cap(11)\cap(8)) = \mathbf{Z}/(17\cdot 11\cdot 8) \longrightarrow$ pgcd$(17,11)=1$, donc $(17)+(11)=(1)=\mathbf{Z}$.
On écrit souvent $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ au lieu de $\mathbf{Z}/(n)$.
On se donne $(a_1,a_2,a_3) = (6+(17), 4+(11), -3+(8)) \in \mathbf{Z}/(17)\times\mathbf{Z}/(11)\times\mathbf{Z}/(8)$.
On cherche $x\in\mathbf{Z}$ tel que $f : x+(17\cdot 11\cdot 8) \longrightarrow (a_1,a_2,a_3)$.
$f(x+(17\cdot 11\cdot 8)) = (x+(17), x+(11), x+(8))$.
Donc trouver x équivaut à résoudre le système de congruence

$$\begin{cases} x & \equiv 6[17] \\ x & \equiv 4[11] \\ x & \equiv -3[8] \end{cases}$$

Il existe une méthode générale : pour résoudre le système $x\equiv c_1[m_i]$; où les m_i sont deux à deux premiers. $(i=1,\dots,n)$. On commence par trouver les y_i tels que

$$\frac{M}{m_i} y_i \equiv 1[m_i]\ i = 1,\dots n$$

Où $M = m_1\dots m_n = $ ppcm$(m_1\dots m_n)$. Alors l'unique solution modulo M du système de congruence donné est

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{m_i} y_i c_i$$

Ici $n = 3$.

$$\begin{cases} 11 \cdot 8 y_i & \equiv 1[17] \\ 17 \cdot 8 y_2 & \equiv 1[11] \\ 17 \cdot 11 y_3 & \equiv 1[8] \end{cases} \iff \begin{cases} 3 y_1 & \equiv 1[17] \\ 4 y_2 & \equiv 1[11] \\ 3 y_3 & \equiv 1[8] \end{cases}$$

Une solution est donnée par : $y_1 = 6,\ y_2 = 3,\ y_3 = 3$. On trouve

$$x \equiv 11 \cdot \underbrace{8 \cdot 6 \cdot 6}_{288=272+16} + \underbrace{17 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 4 + 17 \cdot 11 \cdot 11 \cdot (-3)}_{17 \cdot 3 \cdot (8 \cdot 4 - 11 \cdot 3) = -51} [14]$$

$$x \equiv 11 \cdot 16 - 51 \equiv 176 - 51 \equiv 125\ [M]$$

$$x = 125 + (1496) = 125 + 1496\mathbf{Z}$$

2) $A = \mathbf{R}[X],\ I_k = (X - t_k),\ a_k = y_k + I_k,\ k = 1, \dots n$, où $(_1, \dots, t_n),\ (y_1, \dots y_n) \in \mathbf{R}^n$ et les t_i sont distincts.
Est-ce que $I_i + I_j = A$ si $i \neq j$?
Oui,par exemple, on peut écrire

$$1 = \underbrace{\frac{1}{t_j - t_i}(X - t_i)}_{\in I_i} + \underbrace{\frac{1}{t_i - t_j}(X - t_j)}_{I_j}$$

Les hypothèses du théorème des restes sont vérifiées. On cherche :

$$x = P(x) + I_1 \cdots I_n = P(x) + \underbrace{\big((X - t_1) \dots (X - t_n)\big)}_{\text{idéal}} \text{ tel que}$$

$$P(X) \equiv y_i\ [X - t_i] \iff P(t_i) = y_i\ \forall i = 1, \dots, n$$

Une solution de ce problème est donnée par le polynôme d'interpolation de LAGRANGE :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X - t_1) \cdots (X - t_{i-1})(X - t_{i+1}) \cdots (X - t_n)}{(t_i - t_1) \cdots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \cdots (t_i - t_n)} y_i$$

Exercice 9.

1) $\mathbf{Q}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$? On peut construire un isomorphisme comme suit :
On commence par le morphisme

$$f : \begin{cases} \mathbf{Q}[x] \longrightarrow \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \\ P(X) \mapsto (P(1), P(-1)) \end{cases}$$

On applique la *propriété universelle* :

$$\operatorname{Ker} f = \{P(X) \in \mathbf{Q}[X] \mid P(1) = 0, P(-1) = 0\} = (X-1) \cap (X+) = \underbrace{\big(X(-1)(X+1)\big)}_{\text{premiers entre eux, idéal engendré}} = \big((X^2 - 1)\big)$$

Donc $\operatorname{Im} f \cong \mathbf{Q}[X]/(X^2-1)$. Or, f est surjectif car $f(X-1) = (0,-2)$, $f(X+1) = (2,0)$, donc $\forall (a,b) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$, on a

$$(a,b) = f\left(-\frac{b}{2}(X-1) + \frac{a}{2}(X+1)\right)$$

Donc $\operatorname{Im} f = \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ et

$$\mathbf{Q}\times\mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}[X]/(X^2-1)$$

2) P a n racines donc $P = u(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ où $u \in \mathbf{K}^\times$ et $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \mathbf{K}$ distincts racines de P.
On veut construire un isomorphisme explicite

$$\phi : \mathbf{K}[X]/(P) \longrightarrow \mathbf{K}^n$$

On commence par considérer le morphisme

$$\psi : \begin{cases} \mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathbf{K}^n \\ Q \mapsto (Q(\alpha_1),\ldots,Q(\alpha_n)) \end{cases}$$

Alors $Q \in \ker\psi \iff Q(\alpha_i) = 0\ \forall i = 1,\cdots,n \iff X-\alpha_i | Q$.
Puisque les α_i sont distincts, les polynômes $X-\alpha_i$ sont deux à deux premiers. Donc

$$X-\alpha_1|Q,\ldots,X-\alpha_n|Q \iff \operatorname{ppcm}(X-\alpha_1,\ldots,X-\alpha_n) = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)|Q \iff P|Q \iff Q \subset (P)$$

On a montré que $\ker\psi = (P)$. Donc ψ définit, par passage au quotient, l'isomorphisme $\mathbf{K}[X]/(P) \cong \operatorname{Im}\psi = \psi(\mathbf{K}[X])$.
Il reste à vérifier la surjectivité de ψ.
Pour tout $(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{K}$, on peut donner un antécédent $Q \in \psi^{-1}(y_1,\ldots,y_n)$ comme un polynôme d'interpolation de LAGRANGE :

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{k-1}(X-\alpha_{k+1}\ldots(X-\alpha_n)}{(\alpha_k-\alpha_1)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1}(\alpha-\alpha_{k+1}\ldots(\alpha_k-\alpha_n)} y_k$$

Remarque : $\psi = (ev_{\alpha_1},\ldots,ev_{\alpha_n}$, où on note ev_α le morphisme d'évaluation d'un polynôme en $\alpha \in \mathbf{K}$:

$$ev_\alpha \begin{cases} \mathbf{K}[X] \longrightarrow K \\ Q \mapsto Q(\alpha) \end{cases}$$

Remarque : On peut aussi démontrer le $9b$ sans présenter une construction explicite de ϕ à l'aide du théorème des restes. On l'applique aux idéaux $I_1 = (X-\alpha_1),\ldots,(X-\alpha_n)$. Il donne immédiatement un isomorphisme $\mathbf{K}[X]/I_1\ldots I_n = \mathbf{K}[X]/(P) \xrightarrow{\sim} \prod_{k=1}^{n}\mathbf{K}[X]:(X-\alpha_k)$, et il reste à utiliser l'isomorphisme

$$\mathbf{K}[X]/(X-\alpha) \cong \mathbf{K}$$

dont la construction s'obtient par la considération du morphisme d'évaluation.

Exercice 10.

1) $A = \mathbf{R}[X]/(X^1)$ $B = \mathbf{R}[Y]/(Y^1 + Y + 1)$

Remarque : Pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 2 avec discriminant $\delta < 0$, $\mathbf{R}[X]/(P) \simeq \mathbf{C}$.

Construisons un isomorphisme explicite $\varphi : A \longrightarrow B$.

— Approche 1 :

On commence par construire un morphisme $\phi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow B$ de sorte que $\ker\phi = (X^2 + 1)$.

On sait que $\ker\phi = (X^2 + 1)$

Donc l'image de X doit être une racine de $X^2 + 1$ vu comme polynôme de $B[X]$ [1]. On doit alors trouver une racine de $X^2 + 1$ dans B. Soit $\overline{Y} = Y + (Y^2 + Y + 1) \in B$. Tout élément de B se représente sous la forme $a\overline{Y} + b$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

On substitue $a\overline{Y} + b$ dans $X^2 + 1$:

$$\begin{aligned}(a\overline{Y} + b)^2 + 1 &= a \underbrace{\overline{Y}^2}_{\equiv -\overline{Y}-1} + 2ab\overline{Y} + b^2 + 1 \\ &= a^2\overline{Y} - a^2 + 2ab\overline{Y} + b^2 + 1 \\ &= a(2b - a)\overline{Y} + 1 + b^2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a(2b-a) = 0 \\ 1 + b^2 - a^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) : \ a = 0 \Longrightarrow \text{ pas de solutions réelles} \\ (2) : \ a = 2b \Longrightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Dans le cas (2), on peut choisir le signe "+". On trouve une racine $\alpha = a\overline{Y} + b = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\overline{Y} + 1)$. On définit :

$$\phi : \begin{cases} \mathbf{R}[X] \longrightarrow B \\ X \mapsto \alpha \end{cases}$$

Alors $\forall Q \in \mathbf{R}[X]$, $\phi(Q) = Q(\alpha)$. Déterminons $\ker\phi$.

Soit $Q \in \ker\phi$. Alors $Q(\alpha) = 0$, $X - \alpha | Q$ dans $B[X]$.

Rappel : B est un corps isomorphe à $\mathbf{C}$.

$-\alpha$ est une racine de $X^2 + 1$, $X^2 + 1 = (X - \alpha)(X + \alpha)$.

On veut montrer :

$$X - \alpha | Q \text{ dans } B[X] \Longrightarrow X + \alpha | Q \text{ dans } B[X]$$

On le démontre comme suit :

$$X - \alpha | X^2 + 1, \ X - \alpha | Q \text{ dans } B[X]$$

Donc,

$$X - \alpha | \mathrm{pgcd}(X^2 + 1, Q) \text{ dans } B[X]$$

Or, $\mathrm{pgcd}(X^2 + 1, Q)$ peut être calculé comme le dernier reste non nul de l'algorithme d'EUCLIDE appliqué à la paire $(Q, X^2 + 1) \in \mathbf{R}[X]^2$. Puisque les deux polynômes sont

1. Il n'y a pas d'erreur. C'est bien un anneau de polynôme sur un quotient d'anneaux de polynômes.

à coefficients réels, leurs pgcd est aussi à coefficient réel et le pgcd de Q et de X^2+1 est à la fois dans $B[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$.
Dans $\mathbf{R}[X]$, X^2+1 est irréductible, donc le fait que $\text{pgcd}(Q, X^2+1)$ soit $\neq 1$ entraîne qu'il est égal à X^2+1. Donc $X^2+1|Q$.
En fait, on a montré que pour un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$,

$$Q(\alpha) = 0 \iff X^2+1|Q$$

Donc

$$\ker\phi = (X^2+1)$$

Alors ϕ induit l'isomorphisme $\varphi : A \xrightarrow{\sim} \text{im}\phi \subset B$

Montrons la surjectivité.
Les deux anneaux $A, B \supset \mathbf{R}$, ϕ, φ sont $\mathbf{R}$-linéaires;

$$\dim_{\mathbf{R}} A = \dim_{\mathbf{R}} B \simeq Z$$

Cela entraîne que φ est un isomorphisme de plans vectoriels sur $\mathbf{R}$, donc surjectif, donc isomorphismes d'anneaux. (et même de corps)

— Approche 2 :
On peut passer par les isomorphismes sur $\mathbf{C}$:

$$ev_i : \overline{X} \in \mathbf{R}[X]/(X^2+1) \longrightarrow i \in \mathbf{C}$$
$$ev_j : \overline{Y} \in \mathbf{R}[Y]/(Y^2+Y+1) \longrightarrow j \in \mathbf{C}$$
$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$j = e^{i\frac{2\pi}{2}}$$

Un isomorphisme $\phi : B \longrightarrow A$ peut être donné par $\phi(\overline{Y}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{X}$, où

$$\forall a + b\overline{Y} \in b,\ \phi(a+b\overline{Y}) = a + b\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{X}\right)$$

2) $A = \mathbf{C}[X]/(X-1)^2,\ B = \mathbf{C}[X]/(X^2-1)$.
$A \not\cong B$ car A contient un nilpotent et B n'en possède pas.
Rappel : Un élément a d'un anneau A est dit *nilpotent* si $a \neq 0$ et il existe $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2,\ a^n = 0$
Ici, pour $a = \overline{X} - 1 = X - 1 + (X-1)^2$ est nilpotent car $a \neq 0$ mais $a^2 = 0$. Or, $B \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ (par l'exo 9), et $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ n'a pas de nilpotents.

3)

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.