M61A : Intégration Probabilités
Louis Loiseau

L3 Mathématiques 2020–2021

Feuille d'exercice n°1

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) $\sum \frac{1}{1+n+n^2}$ $u_n \geqslant 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n^2}$

2) $\sum n^\alpha (\ln n)^\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

— Cas 1 : $\alpha < -1$:
On écrit $n^\alpha (\ln n)^\beta = (n^{\alpha+\varepsilon}) n^{-\epsilon} (\ln n)^\beta$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\alpha + \varepsilon < -1$.
Comme $-\varepsilon < 0$, on a $n^{-\varepsilon} (\ln n)^\beta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Donc, pour n assez grand, on a

$$0 \leqslant n^\alpha (\ln n)^\beta \leqslant n^{\alpha+\epsilon}$$

avec $\alpha + \varepsilon < 1$ donc $\sum n^{\alpha+\varepsilon}$ converge.

— Cas 2 : $\alpha > 1$
On écrit $n^\alpha (\ln n)^\beta = n^{-1} n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta$ avec $\alpha + 1 > 0$ donc $n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
Donc, pour n assez grand, on a

$$n^\alpha (\ln n)^\beta \geqslant n^{-1}$$

donc la série diverge.

— Cas 3 : $\alpha = -1$. On pose $f(x) = \frac{(\ln x)^\beta}{x}$ qui est monotone sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
On peut alors étudier

$$\begin{aligned} I = \int_a^b \frac{(\ln x)^\beta}{x} \mathrm{d}x &= \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} u^\beta \mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{u^{\beta+1}}{\beta^{\beta+1}} \right]_{\ln(a)}^{\ln(b)} \text{ si } \beta \neq 1 \\ &= [\ln(u)]_{\ln(a)}^{\ln(b)} \text{ si } \beta = 1 \end{aligned}$$

Donc I diverge si $\beta \geqslant 1$ et converge si $\beta < 1$.
Finalement, si $\alpha = -1$, la série converge si et seulement $\beta < 1$.

3) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

— Si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue.

— Si $\alpha \leqslant 0$, il y a convergence grossière.

— Si $0 < \alpha < 1$, il y a convergence par le théorème des séries alternées.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

1) Soit $x \in \limsup A_n$, alors $x \in \bigcup_{k \geqslant n} A_k$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc pour tout entier n, il existe $k \geqslant n$ tel que $x \in A_k$. Donc $x \in A_k$ pour une infinité d'indices k.
Récriproquement, si $x \in A_k$ pour une infinité d'indices k, alors pour tout entier n, il existe $k \geqslant n$ tel que $x \in A_k$.
Donc pour tout entier n, on a $x \in \bigcup_{k \geqslant n} A_k$, et donc
$$x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k \right)$$
NB. On aurait pu raisonner par équivalence, ce que nous allons faire pour la question suivante.

2)
$$\begin{aligned} x \in \liminf A_k &\iff \exists n \in \mathbf{N}\ x \in \bigcap_{k \geqslant n} A_k \\ &\iff \exists n \in \mathbf{N}\ x \in A_k, \forall k \geqslant n \end{aligned}$$

3) **Note :** Faire un dessin.
$\limsup = \{x \mid x$ appartient à une infinité deA_{2l} ou à une infinité de$A_{2l+1}\} = [-1,2] \cup [-2,1] = [-2,2]$
$\liminf = \{x \in A_{2l}$ et $x \in A_{2l+1}$ à partir d'un certain rang.$\} = [-1,1]$
Remarque : On a toujours $\liminf A_n \subset \limsup A_n$

Exercice 7. Raisonnons par l'absurde.
On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbf{N} \mapsto [0,1]$ surjective.
On note $x_k = \varphi(k) \in [0,1]$. Alors on a $[0,1] = \{x_k \mid k \in\}$.
On construit de proche en proche une suite d'intervalles fermés I_k de longueurs non nulles, avec $I_n \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0$ et $x_k \notin I_k$.
On choisit $I_0 \subset [0,1]$ fermé de longueur non nulle avec $x_0 \notin I_0$ et $I_1 \subset I_0$ avec $x_1 \notin I_1$. (si $x_1 \notin I_0$, on prend (par exemple) $I_1 = I_0$.)
On continue ainsi de proche en proche pour définir $I_2, I_3, \ldots$.
On considère maintenant $E = \bigcap_{k \in} I_k$. Il est non-vide. En effet, s'il était vide, on aurait une famille $\{I_k\}_{k \in}$ de fermés de $[0,1]$ d'intersection vide. Comme $[0,1]$ est compact, il existerait un nombre fini d'indice $k_0, \ldots, k_n$ tels que
$$\varnothing = I_{k_0} \cap I_{k_1} \cap \cdots \cap I_{k_n} = I_m$$
Où $m = \max\{k_0, \ldots, k_n\}$ (par décroissance de la famille (I_k)), donc E est non vide.
De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x_n \notin I_n$, donc $x_n \notin E$. Comme par hypothèse, $[0,1] = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ et comme $E \subset [0,1]$, on obtient $E = \varnothing$.
On a ainsi montré par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbf{N}$ dans $[0,1]$, il n'est donc pas dénombrable.

Exercice 8.

Exercice 9.

Définition. Soit $\{u_i\}_I$ une famille quelconque de nombres réels ou complexes. On dit qu'elle est *sommable* si

$$\sum_I |u_i| < +\infty$$

Supposons $u_i \in \mathbf{R}, \forall i \in I$. On définit $u_i^+ = \max\{0, u_1\}$ et $u_i^- = -\min\{0, u_i\}$.
On a $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$, $u_i = u_i^+ - u_i^-$.
De plus, $u_i^\pm \geqslant 0$. On a $\{u_i\}$ est sommable si et seulement si

$$\sum u_i^+ < -\infty \sum u_i^- < \infty$$

Définition. Si $\{u_i\}$ est sommable, on pose :

— Si $u_i \in \mathbf{R}$,

$$\sum u_i = \sum u_i^+ - \sum u_i^-$$

— Si $u_i \in \mathbf{C}$,

$$\sum u_i = \sum \mathfrak{Re}(u_i) + i \sum \mathfrak{Im}(u_i)$$

Proposition. Supposons que $\{u_i\}$ est une famille sommable et I est dénombrable. Alors pour tout bijection $\varphi : \mathbf{N} \mapsto I$ on a

$$\sum_I u_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$$

Démonstration. On utilise la proposition analogue pour les familles à termes positifs. □

Exercice 10. On partitionne la famille :

$$u_{2k} = \frac{1}{2k} \text{ et } u_{2k+1} = \frac{-1}{2k}$$

On a $\sum u_{2k} = +\infty$ et $\sum_{2k+1} = -\infty$
On cherche $\varphi : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}^*$ une bijection telle que

$$\sum_{n \geqslant 0} u_{\varphi(n)} = l$$

On définit φ de proche en proche.
On pose $\varphi(0) = u_0 = 1$ (arbitrairement, ça n'a aucune importance.)
On suppose qu'on a définit $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$ et on définit $\varphi(n)$ comme suit :

— Si $\sum_{k \geqslant 0}^{n-1} u_{\varphi(k)} \leqslant l$, on prend pour $\varphi(n)$ le plus petit entier pair différent de $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$.

— Si $\sum_{k \geqslant 0}^{n-1} u_{\varphi(k)} > l$, on prend pour $\varphi(n)$ le plus petit entier impair différent de $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$.

NB. Il est clair que, ainsi définie, φ est bijective.
Montrons que $\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $N \geqslant N_\varepsilon$,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} - \ell \right| \leqslant \varepsilon$$

D'abord, il existe un $K_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant K_\varepsilon \Longrightarrow |u_{\varphi(n)}| \leqslant \varepsilon$.
En effet φ est une injection donc $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et comme $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, on a $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Soit $M \geqslant K_\varepsilon$ et tel que

$$\sum_0^{M-1} u_{\varphi(n)} \leqslant l \leqslant \sum_0^{M} u_{\varphi(n)}$$

Pour le membre de droite, on a rajouté $u_{\varphi(M)}$ à la somme de gauche, avec $0 < u_{\varphi(M)} < \varepsilon$, donc

$$\ell \leqslant \sum_0^{M} u_{\varphi(n)} \leqslant \ell + \varepsilon$$

Comme pour $n \geqslant M$, on a $|u_{\varphi(n)}| \leqslant \varepsilon$ on obtient avec la def de φ et l'inégalité plus haut, que pour tout $N \geqslant M$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant \sum_0^{N} u_{\varphi(n)} \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc $N_\varepsilon = M$ convient.

Exercice 11.

Règles de calcul

— $[0, +\infty] = [0, +\infty] \cup \{+\infty\}$

— $a + (+\infty) = +\infty$ si $a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

— $a \times (+\infty) = +\infty$ si $a \in]0, +\infty]$

Rappel.
Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes, on définit (si elle existe) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_n, \quad S_n = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

Définition.
Soient I un ensemble et $\{u_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de $[0, +\infty]$. On définit

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\subset I \text{ fini}} \sum_{j\in J} u_j \ (\in [0, +\infty])$$

Proposition.

1) Si $\sum_I u_i < +\infty$, alors $I^* = \{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ est dénombrable et

$$\sum_I u_i = \sum_{I^*} u_i$$

2) Si I est dénombrable infini, aloirs pour tout bijection $\varphi : \mathbf{N} \to I$, on a

$$\sum_I u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

Démonstration. 1) $I^* = \{i \in I \mid u_i > 0\}$ car $u_i \in [0, +\infty]$ par hypothèse.
Alors $I^* = \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \{i \in I \mid u_i \geqslant 1/k\}$, c'est-à-dire une union d'ensembles finis (car les séries convergent). Comme une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable, on obtient que I^* est dénombrable.
Puisque pour $i \in I \setminus I^*$ on a $u_i = 0$, on voit, par définition de la somme que $\sum_I = \sum_{I^*}$.

2) Par définition, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \lim_{N\to+\infty} S_n$.
La suite (S_N) est croissante donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ existe dans $[0,+\infty]$ et on a :

$$\begin{aligned}\lim_N S_N &= \sup\{S_n \mid N \in \mathbf{N}\}\\ &= \sup_N \sum_{j\in\varphi(\{0,\cdots,N\})} u_j \leqslant \sum_I u_i\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \leqslant \sum_I u_i$.
D'autre part, soit $J \subset I$ fini. Comme $\varphi : \mathbf{N} \mapsto I$ est une bijection, il existe un $N \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi(\{0,\dots,N\}) \supset J$.
Donc $\sum_{j\in J} u_j \leqslant S_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.
En prenant le sup sur les J, on obtient que

$$\sum_I u_i \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

□

NB. Si $J \subset \{i \in I \mid u_i \geqslant 1/k\}$, alors $\sum_J u_i \geqslant |J| \times 1/k$

Proposition. Pour $n \in \mathbf{N}$, on suppose donné un sous-ensemble $A_n \subset X$ où X est un ensemble quelconque fixé.
On suppose A_n dénombrable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \subset X \text{ est dénombrable.}$$

Démonstration. On peut écrire $A_n = \{a_{nk} \mid k \in \mathbf{N}\}$ car A_n est dénombrable. Alors on a $A = \{a_{nk} \mid n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}\}$. Ainsi, l'application $\varphi : (n,k) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mapsto a_{nk} \in A$ est une surjection.
On sait qu'il existe une surjection $\psi : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ donc l'application $\varphi\circ\psi : \mathbf{N} \mapsto A$ est surjective.

□

Exercice 12. On cherche à savoir si

$$\sum_{(p,q)\in\mathbf{N}^{2*}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} < +\infty$$

Comme $\frac{1}{(p+q)^\alpha} \geqslant 0$, on a vu que l'on peut utiliser une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^{2*}$ et sommer suivant l'ordre de $\mathbf{N}$. On somme suivant les diagonales de $\mathbf{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. C'est-à-dire les ensembles de points à coordonnées entières sur les droites $\{(p,q) \mid p+q = k\}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. La k-ème diagonale porte $k+1$ points de $\mathbf{N}^2 \setminus \{(0,0\}$. Donc

$$\sum_{\mathbf{N}^2\setminus\{0,0\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k^\alpha}$$

Mais $\frac{k+1}{k^\alpha} \sim k^{1-\alpha}$. Alors la somme est finie si et seulement si $\sum k^{1-\alpha}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 13. On considère seulement des tribus de $\mathbf{R}$ qui contiennent deux intervalles donnés $[a,b]$ et $[c,d]$ avec a,b,c,d deux à deux distincts.
Soit $\mathscr{B}$ une telle tribu.

— Si $[a,b]$ et $[c,d]$ sont disjoints, alors $\mu : \mathscr{B} \mapsto [0, 1+\infty]$ définie par $\mu(A) = \mathrm{diam}(A)$ n'est pas une mesure.
En effet, comme $[a,b]$ et $[c,d]$ sont disjoints, on a

$$\mathrm{diam}([a,b] \cup [c,d]) > \mathrm{diam}[a,b] + \mathrm{diam}[c,d]$$

Or, une mesure est σ-additive, c'est-à-dire que si $\{A_n\}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathscr{B}$ qui sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

— Si $[a,b]$ et $[c,d]$ s'intersectent et *qu'aucun n'est contenu dans l'autre.*
On peut supposer $a < c$ et on a $[a,b] \in \mathscr{B}$ et $[c,d] \in \mathscr{B}$.
Donc $[a,b] \setminus [c,d] \in \mathscr{B}$ (on peut écrire le complémentaire comme $A \cap (X \setminus B)$)
Par suite, $[a,c[\in \mathscr{B}$. De même, $[c,d] \setminus [a,b] \in \mathscr{B}$, donc $]b,d] \in \mathscr{B}$.
Comme $\mathrm{diam}\,([a,c[\cup]b,d]) > \mathrm{diam}[a,c[+\mathrm{diam}]b,d]$ et comme $[a,b[$ et $]b,d]$ sont disjoints, diam n'est pas une mesure sur $\mathscr{B}$.

— Si l'un est contenu dans l'autre, par exemple $[c,d] \subset [a,b]$.
Les éléments de $\sigma([a,b],[c,d])$ sont :
  — $[a,b], [c,d]$
  — $\mathbf{R}, \varnothing$
  — $\mathbf{R} \setminus [c,d] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$
  — $\mathbf{R} \setminus [c,d] =]-\infty, c[\cup]d, +\infty$
  — $[a,b] \setminus [c,d] = [a,c[\cup]d,b]$
  — $[c,d] \cup (\mathbf{R} \setminus [a,b]) = X \setminus ([a,b[\cup]a,b[) =]-\infty, a[\cup[c,d]\cup]b,+\infty[$

On a $[a,b[\cup]d,b] \in \sigma([a,b],[c,d])$ et $[c,d] \in \sigma([a,b],[c,d])$. Ils sont disjoints et

$$\mathrm{diam}([a,c[\cup]d,b] \cup [c,d]) < \mathrm{diam}([a,c[\cup]d,b]) + \mathrm{diam}[c,d]$$

Donc diam n'est pas une mesure sur $\sigma([a,b],[c,d])$ et donc pas sur $\mathscr{B}$ non plus.

Exercice 14 (Mesure de DIRAC)**.**
Pour montrer que μ est une mesure, il suffit de vérifier la propriété de σ-additivité. C'est à dire montrer que

$$\mu\left(\bigcup_J E_j\right) = \sum_J \mu(E_j)$$

$$\iff \sum_{\{i \in I \mid x_i \in \cup E_j\}} = \sum_J \left(\sum_I m_i \delta_{x_i}\right)$$

Pour cela, on pose, pour $i \in I$ et $j \in J$, $m_i = \begin{cases} m_i \text{ si } x_i \in E_j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Alors l'application

$$\varphi : \{(i,j) \in I \times J \mid m_{ij} \neq 0\} \to \left\{ i \in I \mid x_i \in \bigcup_J E_j \right\}$$

est une bijection. (*vérification directe*).
De cette manière, on peut appliquer le théorème de FUBINI pour réécrire la somme, d'où le résultat.

Exercice 15 (Lemme de BOREL-CANTELLI).
D'après l'exercice 6, le problème revient à montrer que $\mu\left(\limsup A_i\right) = 0$.
Pour tout entier i, $\limsup A_i \subset \bigcup_{k\geqslant i} A_k$. Donc

$$0 \leqslant \mu(\limsup A_i) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k\geqslant i} A_k\right) \leqslant \sum_{k\geqslant i} \mu(A_k)$$

Or, le terme de droite est la reste d'une série convergente, donc tend vers 0.

Exercice 16.

1) Il s'agit de montrer que
$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbf{N}}\left(\bigcup_{k\geqslant i} A_k\right)\right) \geqslant \alpha$$
Comme la famille $\{\bigcup_{k\geqslant i} A_k\}_{\mathbf{N}} \equiv \{B_i\}$ est décroissante, et que pour $i = 0$, $B_0 = \bigcup_{k\geqslant 0} A_k$ est de mesure finie, on a d'après les propriétés sur les mesures, que
$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_i B_i\right) = \lim_{+\infty} \mu(B_i)$$
Comme $A_i \subset B_i$, on a $\mu(B_i) \geqslant \mu(A_i)$, donc $\mu(A) \geqslant \alpha$
2) Il est facile de construire un contre-exemple en prenant $\Omega = \mathbf{N}$, $B = \mathscr{P}(\mathbf{N})$, μ la mesure de comptage et $A_i = \{i\}$.

Exercice 17.

1) Montrons que $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ est engendré par les sous-ensembles de la forme
$$A = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$$
Il s'agit de montrer que $\mathscr{B}(\mathbf{R}) = \sigma(A)$. (ie : la plus petite tribu - pour l'inclusion - de $\mathbf{R}$ qui contient les éléments A)
Comme $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ contient les éléments de A et que c'est une tribu, $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ contient $\sigma(A)$. D'où $\sigma(A) \subset \mathscr{B}(\mathbf{R})$.
Montrons que $\mathscr{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(A)$. C'est-à-dire, montrons que pour tout $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbf{R}$, on a $\mathscr{O} \in \sigma(A)$. Cela entraine que $\sigma(A)$ contiendra tous les ouverts de $\mathbf{R}$, et comme c'est une tribu, on aura $\mathscr{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(A)$.
Il existe une suite dénombrable (I_n) d'intervalles ouverts bornés de $\mathbf{R}$ telle que
$$\mathscr{O} = \bigcup I_n.$$
Comme $I_n \in \sigma(A)$ et comme $\sigma(A)$ est stable par réunion dénombrable (c'est une tribu), on a $\mathscr{O} \in \sigma(A)$.
On va démontrer la propriété précédente.
On utilise le fait que $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ et que $\mathbf{Q}$ est dénombrable.
Pour chaque $x \in \mathscr{O} \cap \mathbf{Q}$, il existre un $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset \mathscr{O}$. ($\mathscr{O}$ est ouvert)
On prend $r = r_x = \mathrm{d}(x, \mathbf{R} \setminus \mathscr{O})$ et on a $]x - r_x, x + r_x[\subset \mathscr{O}$ (dans ce cas, r_x est le "meilleur" r.)
Montrons que
$$\mathscr{O} = \bigcup_{x\in\mathscr{O}\cap\mathbf{Q}}]x - r_x, x + r_x[$$

Comme $\mathscr{O} \cap \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}$ et que $\mathbf{Q}$ est dénombrable, $\mathscr{O} \cap \mathbf{Q}$ l'est aussi. On aura alors le résultat.
Soit $y \in \mathscr{O}$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$]y-\rho, y+\rho[\subset \mathscr{O} \text{ car } \mathscr{O} \text{ est ouvert.}$$

Comme $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, il existe $r \in \mathbf{Q} \cap]y-\rho/2, y+\rho/2[$.
On a alors $r_x \geqslant \rho/2$ et donc $y \in]x-r_x, x+r_x[$. (cela découle du fait qu'on a choisi le "meilleur" r_x).
D'où l'égalité.

2) $B = \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbf{Q}\}$
Montrons que $\sigma(B) = \mathscr{B}(\mathbf{R})$.
On a $]-\infty, a[\in \mathscr{B}(\mathbf{R})$ car $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ contient tous les fermés de $\mathbf{R}$ (comme complémentaires d'ouverts).
Donc $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ est une tribu qui contient B, donc elle contient $\sigma(B)$. Ainsi $\sigma(B) \subset \mathscr{B}(\mathbf{R})$
Montrons que $\sigma(A) \subset \sigma(B)$, comme $\sigma(A) = \mathscr{A}(\mathbf{R})$ on aura $\mathscr{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(B)$.
Il s'agit de montrer que $A \subset \sigma(b)$.
Soit $]a, b[\in A$, montrons que $]a, b[\in \sigma(B)$.
Remarque. $]-\infty, q] \in B \subset \sigma(B)$, donc $\mathbf{R} \setminus]-\infty, q] =]q, +\infty[\in \sigma(B)$. (stabilité par complémentaire)
Pour $p, q \in \mathbf{Q}, p < q$: $]-\infty, q] \in \sigma(B)$ et $]p, +\infty[\in \sigma(B)$.
Donc $]-\infty, q] \cap]p, +\infty[\in \sigma(B)$ (stabilité par intersection dénombrable), càd $]p, q] \in \sigma(B)$. On a :

$$]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbf{N}}]p_n, q_n]$$

avec $p_n \in \mathbf{Q}, q_n \in Q$, où $p_n \searrow a$ et $q_n \nearrow b$, strictement. (car $]p, q[= \cup]p, q-1/n[$.)
Comme une tribu est stable par réunion dénombrable, on a $]a, b[\in \sigma(B)$.

Exercice 18. Soit λ la mesure de LEBESGUE sur $\mathbf{R}$.

1) $\mathbf{Q}\cap]0,1[$ est dense dans $[0,1]$ et dénombrable. On a $\mathbf{Q}\cap[]0,1[=\{r_n\}_{\mathbf{N}}$.
On choisit pour chaque $n\in\mathbf{N}$ un intervalle ouvert I_n centré en r_n, contenu dans $]0,1[$ de longueur $\delta_n>0$ à définir. On pose :

$$U=\bigcup_{\mathbf{N}} I_n \subset]0,1[$$

C'est un ouvert dense dans $[0,1]$. De plus, par σ-sous-additivité,

$$\lambda(U)\leqslant \sum \lambda(I_n)=\sum \delta_n$$

Si on prend $\delta_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, alors

$$\lambda(U)<\varepsilon\sum 2^{-(n+1)}=\varepsilon$$

2) $F=[0,1]\setminus U\subset[0,1]$ est fermé dans $\mathbf{R}$ et

$$\lambda(F)=\lambda([0,1])-\lambda(U)>1-\varepsilon$$

De plus, comme U est dense dans $[0,1]$, son complémentaire dans $[0,1]$ est d'intérieur vide. Néanmoins, il n'en existe aucun de mesure 1. En effet, si F est d'intérieur vide, son complémentaire dans $[0,1]$ est un ouvert non-vide de $[0,1]$, alors contient un intervalle I de longueur non-nulle. On a alors

$$\lambda(F)=1-\lambda([0,1]\setminus F)\leqslant 1-|I| \ \lightning$$

Exercice 19. Soit λ la mesure de LEBESGUE sur $\mathbf{R}$.
Soit $E\subset\mathbf{R}$ quelconque.

$$\lambda^*(E)=\inf\left\{\sum_{j\in J}(b_j-a_j)\mid E\subset\bigcup_{j\in J}]a_j-b_j]\right\}$$

C'est une *mesure extérieure* sur $\mathscr{P}(\mathbf{R})$.
C'est une mesure sur la tribu des boréliens. On note λ la restriction de λ^* à $(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$. C'est la *mesure de* LEBESGUE sur $(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$.
NB :

$$\lambda^*(E)=\inf\left\{\sum_J \text{long}(I_j)\mid E\subset\bigcup_J I_j,\ I_j \text{ intervalles ouverts et } J \text{ dénombrable.}\right\}$$

Idem avec I_j intervalle fermé. (exo)
On va raisonner par encadrement.

— " $\leqslant$ ".
$E\subset U$ donc $\lambda(E)\leqslant\lambda(U)$ donc $\lambda(E)\leqslant\inf\{\ldots\}$.

— " $\geqslant$ ".
Soit $\varepsilon>0$. On cherche U ouvert tel que $E\subset U$ et $\lambda(E)\geqslant\lambda(U)-\varepsilon$.
Par définition, il existe une famille dénombrable $\{I_j\}_J$ d'intervalles ouverts tels que

$$E\subset\bigcup_{j\in J} I_j$$
$$\lambda(E)\geqslant\sum_{j\in J}\text{long} I_j-\varepsilon$$

On pose $U = \bigcup_J I_j$, c'est un ouvert par réunion. De plus, par σ-sous-additivité,

$$\begin{aligned}\lambda(U) &\leqslant \sum_{j\in J} \lambda(I_j)\\ &= \sum_{j\in J} \operatorname{long} I_j\end{aligned}$$

Et alors on a $\lambda(E) \geqslant \lambda(U) - \varepsilon$

Exercice 20.

1) $f_1 = g_1$ μ-pp signifique que l'ensemble

$$\{x \in X \mid f_1(x) \neq g_1(x)\}$$

est négligeable.
On considère

$$x \in X \mid (f_1 + f_2)(x) \neq (g_1 + g_2)(x) \subset \{x \in X \mid f_1(x) \neq g_1(x) \text{ ou } f_2(x) \neq g_2(x)\} = N_1 \cup N_2$$

Or, l'union est négligeable, donc notre ensemble est inclu dans un négligeable et l'est de facto lui-même.

2) On définit :

$$N_n = \{x \in X \mid f_n(x) \neq g_n(x)\}$$

Il faut montrer que

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} = \{x \in X \mid \sup f_n(x) \neq \sup g_n(x)\}$$

est négligeable. Il suffit de remarquer qu'il est inclu dans

$$\{x \in X \mid \exists n \in \mathbf{N},\ f_n(x) \neq g_n(x)\} = \bigcup_{\mathbf{N}} N_n$$

C'est-à-dire une union dénombrable de négligeables, donc négligeable.
⚠Une union *quelconque* de négligeables n'est pas négligeable en général. Par exemple, dans $(\mathbf{R}, \mathscr{B}, \lambda)$, les singletons sont négligeables, $\mathbf{R} = \bigcup_{x\in\mathbf{R}} \{x\}$ mais $\lambda(\mathbf{R}) = +\infty$.
Remarque : Dans $(\mathbf{R}, \mathscr{B}, \lambda)$, on a $A \subset \mathbf{R}$ négligeable $\longrightarrow$ A négligeable mais il existe des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ négligeables non dénombrables. Par exemple, le CANTOR triadique.

Remarque : En fait, l'hypothèse "*mesurable*" n'était pas utile.

Exercice 21.

1) Soit $f, g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ des fonctions continues. On suppose qu'elles sont égales presque-partout, c'est-à-dire que

$$N = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$$

est négligleable. On a :

$$\mathbf{R} \setminus N = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = g(x)\}$$

Comme $\lambda(N) = 0$, N ne contient aucun intervalle de longueur > 0, donc $\mathring{N} = \varnothing$. Par suite, $\mathbf{R} \setminus N$ est dense dans $\mathbf{R}$. De plus, $\mathbf{R} \setminus N = (f - g)^{-1}(\{0\})$ est fermé, car $f - g$ est continue.
Donc $\mathbf{R} \setminus N = \mathbf{R}$ et donc $f = g$ *partout*. L'affirmation est vraie.

2) Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire $f = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$. Alors

$$\{x \in \mathbf{R} \mid f \text{ n'est pas continue en } x\} = \{0\}$$

est un ensemble négligeable, donc f est pp continue.
Montrons qu'il n'existe *pas* de fonction continue $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f = g$ pp.
Raisonnons par l'absurde. On applique le premier point aux restrictions de f et g à $]0,+\infty[$ et à $]-\infty,0[$. On obtient donc que $f = g$ partout sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.
Cela entraîne que $\lim\limits_{x<0} g(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x>0} g(x)$. Mais g est continue en 0 $\lightning$

3) Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ quelconque et $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue.
On suppose que $f = g$ pp. On va montrer que f n'est pas forcément continue pp.
Prenons $g = 0$ et $f = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$. On a $f = g$ pp mais f est discontinue en tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 22 (Ensembles de CANTOR)**.**

1)

2) E est fermé comme intersections de fermés et borné dans $\mathbf{R}$, il est donc compact. Il est non vide car les extrêmités des intervalles E_n^k appartiennent à E. Montrons qu'il n'admet pas de point isolé.
Soit $x \in E$ et soit $r > 0$.
On cherche $y \in E,\ y \neq x$ et $|x - y| < r$. Les intervalles E_n sont de longueur $\delta_n 2^{-n}$ avec $\delta_n \searrow$ et $\delta_0 = 1$.
Il existe n tel que $\delta_n 2^{-n} < r$.
Sout E_n^k l'intervalle de E_n qui contient x. Ses extremités sont à distance $< r$ de x et appartiennent à E. L'une d'entre elles est différente de x, on l'appelle y. On a $y \in E,\ y \neq x$ et $|x - y| < r$.
$\overset{\circ}{E} = \varnothing$, sinon il contriendrait un intervalle de longueur non nulle. Soit $L > 0$ cette longueur. Comme E_n est formé d'intervalles disjoints de longueur $\delta_n 2^{-n}$, E_n ne contient pas d'intervalles de longueur L pour n assez grand. Donc E non plus. $\lightning$

3) On représente les intervalles de E_n par des n-uplets de 0 et de 1, c'est-à-dire par des éléments de $\{0,1\}^n$. On définit!

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbf{N}^*} & \longrightarrow & E \\ (u_k)_{k=1}^{\infty} & \longmapsto & \bigcap_k^{\infty} I(u_1,\dots,u_k) \end{array} \right.$$

où $I(u_1,\dots,u_n)$ est l'intervalle de E représenté par la suite $(u_1,\dots,u_n)$.
L'intersection est décroissante formée de fermés de longueurs $\delta_k 2^{-k}$ C'est un singleton. (*à démontrer* : utiliser la caractérisation des compacts les intersections de fermés).
Alors φ est bijective par construction. (à vérifier)

4)

$$E_n = \bigcap_{k \in \{1,\dots,2^n\}} E^n$$

union disjointe de boréliens.
$\lambda(E_0) = 1 < \infty$, donc $\lambda(E) = \lim \lambda(E_n) = \lim \delta_n$ où (δ_n) donnée telle que $\delta_n \nearrow$ et $\delta_0 = 0$.
Pour le Cantor triadique, on a $\delta_n = (2/3)^n$ et $\lambda(E) = 0$.

5) Sur $\{0,1\}$, on a la tribu

$$\mathscr{P}(\{0,1\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

On muni Ω de la tribu produit

$$\mathscr{F} = \mathscr{P}(\{0,1\}) \otimes \mathscr{P}(\{0,1\}) \otimes \cdots \equiv \mathscr{P}(\{0,1\})^{\otimes \mathbf{N}^*}$$

C'est la tribu engendrée par les $\pi_i^{-1}(\mathscr{P}(\{0,1\}))$ où

$$\pi_i : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \{0,1\} \\ u = (u_1, u_2, \dots) \longrightarrow u_i \end{cases}$$

$\mathscr{F}$ est engendrée par les sous-ensembles de Ω de la forme

$$\pi_i^{-1}(\{0\}) = \{u \in \Omega \mid u_i = 0\}$$
$$\pi_i^{-1}(\{1\}) = \{u \in \Omega \mid u_i = 1\}$$

Elle est aussi engendrée par les *cylindres*, c'est-à-dire les

$$C(u_1, \dots, u_n) = \{v \in \Omega \mid v_1 = u_1, \dots, v_n = u_n\}$$

On a $\varphi(C(u_1, \dots, u_n)) = I(u_1, \dots, u_n) \cap E$ par définition de φ.
On veut comparer $\mathscr{F}$ avec $\mathscr{B}(E)$ où $\mathscr{B}(E)$ est la tribu des boréliens de E, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de E. $\mathscr{B}(E) \subset \mathscr{P}(E)$.
Montrons que $\varphi(\mathscr{F}) = \mathscr{B}(E)$.
NB : $\varphi(\mathscr{F})$ est une tribu car φ est bijective.

— $\varphi(\mathscr{F}) \subset \mathscr{B}(E)$:
  $\mathscr{F}$ est engendrée par les cylindres, donc $\varphi(\mathscr{F})$ est engendrée par les images des cylindres. Ce sont des fermés de E, donc ils appartiennent à $\mathscr{B}(E)$
— $\mathscr{B}(E) \subset \varphi(\mathscr{F})$:
  Soit U un ouvert de E. Il faut montrer que $U \subset \varphi(\mathscr{F})$.
  Comme U est un ouvert de E, il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\cap E \subset U$.
  Pour n assez grand, l'intervalle $I_(u_1, \dots, u_n)$ qui contient x est de longueur $< r$. Par suite il existe $(u_1, \dots, u_n) \in \{0,1\}^n$ tel que

  $$x \in (I(u_1, \dots, u_n) \cap E) \subset (]x-r, x+r[\cap E) \subset U$$

  Donc U est l'union d'ensembles de la forme

  $$I(u_1, \dots, u_n) \cap E$$

  Comme les intervalles $I(u_1, \dots, u_n)$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in \{0,1\}^n$ forment une famille *dénombrable*, U est une union dénombrable d'ensembles de cette forme. Chacun d'entre eux appartiennent à $\varphi(\mathscr{F})$ donc $U \in \varphi(\mathscr{F})$.
  Remarque : Il existe une mesure de probabilité μ sur $\Omega, \mathscr{F})$ unique, telle que

  $$\mu(C(u_1, \dots, u_n)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

  En la transportant sur E, on obtient une mesure sur $(E, \mathscr{B}(E))$, notée $\varphi_*(\mu)$ telle que

  $$\big(\varphi_*(\mu)\big)(I(u_1, \dots, u_n) \cap E) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 23. 1) OK

2)