Feuille d'exercice n°3

Solutions des exercices

Rappel : Soit une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants :

$$(E)\ y_{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

où les $a_i \in \mathbf{R}$ et b est une fonction continue.
L'ensemble des solutions maximales de (E) est un espace affine de dimension n. Il s'obtient en additionnant une solution maximale particulière aux solutions maximales de

$$(E_H) : y_{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y == 0$$

Les solutions maximales de (E_H) sont définies sur $\mathbf{R}$ et forment un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Un *système fondamental de solution (SFS)* est une base de ce $\mathbf{R}$-ev.
Première méthode : Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ le *polynôme caractéristique de* (E_h). $P(X) \in \mathbf{R}[X]$.
Notons :

— $r_1, \cdots r_k$ les racines réelles de P avec multiplicité $m_1, \ldots, m_k$.
  $\lambda_1 \pm i\omega_1, \ldots, \lambda_l \pm i\omega_l$ les racines complexes non réelles de P avec multiplicité $s_1, \ldots, s_l$.

Dans ce cas :

$$P(X) = (X - r_1)^{m_1} \cdots (X - r_k)^{m_k} \big((X - \lambda_1)^2 + \omega_1^2\big)^{s_1} \cdots \big((X - \lambda_l)^2 + \omega_l^2\big)$$

Alors un SFS de (E_H) est donné par :

— $\begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto t^p e^{r_j t} \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant k,\ 0 \leqslant p \leqslant m_j - 1$

— $\begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto t^p \cos(\omega_j t) \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant s,\ 0 \leqslant p \leqslant s_j -$

— $\begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto t^p \sin(\omega_j t) \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant s,\ 0 \leqslant p \leqslant s_j -$

Il y a bien $m_1 + \cdots + m_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = n$ solutions.

Exercice 1.

1)

$$(E)\ y'' - y = f(t)$$

Soient φ, ψ deux solutions sur $\mathbf{R}$ bornée de (E).
Alors $\varphi - \psi$ est solution sur $\mathbf{R}$ de (E_H). Or les solutions sur $\mathbf{R}$ de (E_H) sont les $\phi_{\alpha,\beta} : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t}$.
Ainsi, $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\phi - \psi = \phi_{\alpha,\beta}$. Puisqu'elles sont bornées, ϕ aussi.
Si $\alpha \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \phi(t) &= \lim(\alpha e^t + \beta e^{-t} \\ &= \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ -\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc ϕ n'est pas bornée.
De même, si $\beta \neq 0$, alors ϕ n'est pas bornée.
Donc $\alpha = \beta = 0$. Ainsi $\varphi - \psi = \phi_{0,0} = 0$, ie $\varphi = \psi$. D'où (E) admet au plus une solution bornée sur $\mathbf{R}$.

2) Nous allons appliquer la méthode de *la variation de la constante*.
On considère $\varphi_1 : t \mapsto e^t$ et $\varphi_2 : t \mapsto e^{-t}$. Déterminons une solution particulière de la forme

$$\psi(t) = \alpha(t)e^t + \beta(t)e^{-t}$$

telle que $\alpha' e^t + \beta'(t)e^{-t}$

$$\psi'(t) = \alpha(t)e^t - \beta(t)e^{-t} + \alpha'(t)e^t + B'(t)e^{-*t}$$
$$\psi'' = \alpha(t)e^t + \beta(t)e^{-t} + \alpha'(t)e^t - \beta'(t)e^{-t}$$
$$\alpha'(t)e^t - \beta'(t)e^{-t} = \psi'' - \psi(t) = f(t)$$

Donc

$$\alpha'(t)e^t - \beta'(t)e^{-t} = f(t) \tag{1}$$
$$\alpha'(t)e^t + \beta'(t)e^{-t} = 0 \tag{2}$$

En faisant (1) + (2), on obtient $\alpha'(t) = \frac{1}{2}f(t)e^{-t}$.
En faisant $-(1) + (2)$, on obtient $\beta'(t) = \frac{1}{2}f(t)e^t$.
Soient $\alpha, \beta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définies par

$$\begin{cases} \alpha(t) = \int_0^t \frac{1}{2}f(u)e^{-u}\mathrm{d}u \\ \beta(t) = \int_0^t -\frac{1}{2}f(u)e\hat{u}\mathrm{d}u \end{cases}$$

Ainsi les solutions sur $\mathbf{R}$ de (E) sont les

$$\phi_{a,b} : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto (a + \alpha(t))e^t + (b + \beta(t))e^{-t} \end{cases}$$

Question : Parmi ces solutions, y en-a-t-il une qui est bornée ?

— Pour $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} |\beta(t)| &= \left| \int -\frac{1}{2}f(u)e^u \mathrm{d}u \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t |f(u)|e^u \mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2}\int_0^t e^u \mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2}e^t \end{aligned}$$

et donc $|(b + \beta(t))e^{-t}| \geqslant |b|e^{-t} + |\beta(t)|e^{-t} \geqslant |b| + \frac{\|f\|_\infty}{2}$
Ainsi $t \mapsto (b + \beta(t))e^{-t}$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

— Pour $t \leqslant 0$
Par le même raisonnement, $t \mapsto (a + \alpha(t)e^t$ est bornée sur $]-\infty, 0]$.

Donc $\phi_{a,b}$ est bornée si et seulement si les deux applications ci-dessus le sont.
Supposons $\phi_{a,b}$ bornée. Donc $t \mapsto (a+\alpha(t))e^t$ est bornée sur $[0,+\infty[$ et donc $\lim_\infty a + \alpha(t) = 0$. Donc $a = -\lim \alpha(t) = -\lim \int_0^t \frac{1}{2} f(u)e^{-u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u}\mathrm{d}u$
De même avec b. En résumé, si $\phi_{a,b}$ est bornée, alors

$$a = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u}\mathrm{d}u$$
$$b = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(u)e^{u}\mathrm{d}u$$

Réciproquement, si on prend a, b défini comme au dessus, pour $t \in \mathbf{R}$ on a

$$\phi_{a,b} = -\frac{e^t}{2}\int_t^{+\infty} f(u)e^{-u}\mathrm{d}u - \frac{e^{-t}}{2}\int_{-\infty}^{t} f(u)e^{u}\mathrm{d}u$$

et donc

$$|\phi(t| \leqslant \|f\|_\infty < +\infty$$

(calcul à faire!) Et donc ϕ est bornée.
Conclusion : $y'' - y = f(t)$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$ bornée qui est

$$t \mapsto -\frac{e^t}{2}\int_t^{+\infty} f(u)e^{-u}\mathrm{d}u - \frac{e^{-t}}{2}\int_{-\infty}^{t} f(u)e^{t}\mathrm{d}u$$

Exercice 2.

1) Notons $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Donc $(S) \iff Y' = AY + b(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$.
Puisque b est définie sur $\mathbf{R}$ et est continue sur $\mathbf{R}$, les solutions maximales sont définies sur $\mathbf{R}$ et forment un $\mathbf{R}$-espace affine de dimension 2.

2)

$$(S_H) : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y \end{cases} \iff Y' = AY$$

Les solutions maximales de $Y' = AY$ sont les $\phi_{X_0} : t \mapsto e^{tA}X_0$ où $X_0 \in \mathbf{R}^2$.
Méthode : On diagonalise A, puis on calcule $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$, puis on prend un $X_0 \in \mathbf{R}^2$ et on trouve l'expression de ϕ. Finalement, l'ensemble des solutions maximales de (S_H) est $\{x_{a,b}, y_{a,b} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ où $x_{a,b} : t \mapsto \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}e^{2t}$ et $y_{a,b} : t \mapsto \frac{-a+b}{2} + \frac{a+b}{2}e^{2t}$

3) Déterminons une solution particulière de $Y' = AY + b(t)$ de la forme $\psi(t) = e^{tA}X(t)$ où X est dérivable.

$$\psi'(t) = Ae^{tA}X(t) + e^{tA}X'(t) = A\psi(t) + e^{tA}X'(t)$$

Donc ψ est solution si et seulement si

$$\forall t \in \mathbf{R},\ e^{tA}X'(t) = b(t)$$

Ou encore
$$\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = e^{-tA} b(t)$$
Un calcul nous montre que $X(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$, d'où on en déduit [1]
$$\psi(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$
Ainsi, les solutions maximales de $Y' = AY + b(t)$ sont les
$$\phi_{X_0}(t) + \psi(t) = \begin{cases} \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} e^{2t} + e^t \\ \frac{-a+b}{2} + \frac{a+b}{2} e^{2t} - e^t \end{cases}$$
Ce qui donne un ensemble de solutions maximales de (S) de la forme $\{u_{a,b}, v_{a,b}\}$.

Exercice 3.

1) Un calcul direct nous montre que $B^n = B$ si n est impair, I_2 sinon. Pour C^n, on peut écrire $C = I_2 = N$ et utiliser le binôme de NEWTON, et on trouve $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Ensuite, il suffit d'écrire la formule d'une exponentielle de matrice en regroupant les bons termes, et on trouve
$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$$
Pour la seconde, il suffit de remarquer que $\sum \frac{t^n}{n!} n = te^t$ et s'en suit
$$e^{tC} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

2) Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
$$Y' = BY + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Z' = CZ + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$
Donc
$$(S) \iff \begin{cases} Y' & = BY + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (E_1) \\ Z' & = CZ + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \ (E_2) \end{cases}$$

a) Résolvons (E_1).
B est inversible donc $t \mapsto -B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution particulière. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les solutions maximales de (E_1) sont donc les
$$\phi_{a,b} : t \mapsto e^{tB} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Attention, c'est bien un autre calcul, ce n'est pas $X = \psi$

b) Résolvons (E_2).
Déterminons une solution particulière de la forme $\psi(t) = e^{tC}X(t)$ où X est dérivable.

$$X'(t) = e^{-tC}\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

et donc $X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}$ convient. S'en suit

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}e^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

Et alors les solutions maximales de (E_2) sont données par

$$\varphi_{c,d} : t \mapsto e^{tC}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \psi(t)$$

Finalement, les solutions maximales de (S) sont données par

$$\{(u_{a,b}, v_{a,b}, w_{c,d}, z_{c,d})\}$$

Exercice 4.

1) Notons $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$(S) \iff Y' = AY + b(t)$$

Où $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $b(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t-1} \\ \frac{-3}{e^t-1} \end{pmatrix}$ $e^t - 1 = 0 \iff e^t = 1 \iff t = 0$ donc b est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
Notons $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.
Alors l'ensemble S_I des solutions sur I de (S) est un $\mathbf{R}$-espace affine de dimension 2.

2) On commence par diagonaliser A pour déterminer e^{tA}.
Déterminons une solution particulière ψ de (E) sur I de la forme $\psi(t) = e^{tA}X(t)$ où X est dérivable. On a

$$e^{tA}X'(t) = b(t)$$

Alors

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2e^t}{e^t-1} \\ \frac{-3e^t}{e^t-1} \end{pmatrix}$$

On peut prendre $X(t) = \begin{pmatrix} 2\ln|e^t - 1| \\ -3\ln|e^t - 1| \end{pmatrix}$ Puis

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{tA}X(t) \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t}\ln|e^t - 1| \\ -3e^{-t}\ln|e^t - 1| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de $Y' = AY + b(t)$ sur I sont les

$$\psi_{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} : \begin{cases} 2e^{-t}\ln|e^t - 1| \\ -3e^{-t}\ln|e^t - 1| \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (S) sur $]0, +\infty[$ est donné par l'espace engendré par ces deux solutions définies sur $]0, +\infty[$. Pareil pour $]-\infty, 0[$.

Exercice 5. **Remarque** : Il n'y a pas de solutions sur $\mathbf{R}$ tout entier car $\frac{1}{\sqrt{|t|}}$ n'est pas définie en 0

On résout l'équation (E) sur $I = R_-^*$ ou R_+^*.

L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + 2r + 1 = 1 \iff (r+1)^2 = 0$.

Un SFS sur I est $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto te^{-t}$.

Déterminons une solution particulière de (E) de la forme

$$\psi(t) = \alpha(t)e^{-t} + \beta(t)te^{-t}$$

où $\alpha, \beta : I \to \mathbf{R}$ sont dérivables telles que

$$\forall t \in I,\ \alpha'(t)e^{-t} + \beta'(t)te^{-t} = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \alpha(t)e^{-t} + \beta(t)(1-t)e^{-t} \\
\psi''(t) &= -\alpha'(t)e^{-t} + \beta'(t)(1-t)e^{-t} + \alpha(t)e^{-t} + \beta(t)(t-2)e^{-t} \\
\psi''(t) + 2\psi'(t) + \psi(t) &= \frac{1}{\sqrt{|t|}}
\end{aligned}$$

Alors

$$-\alpha'(t)e^{-t} + \beta'(t)(1-t)e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \tag{4}$$

(3) + (4) nous donne $\beta'(t) = \frac{e^t}{\sqrt{|t|}}$

(3) nous donne $\alpha'(t) = -t\beta'(t) = -\frac{te^t}{\sqrt{|t|}}$ Ce qui donne les solutions de (E) sur I.

Exercice 6.

1)
$$(E) : y'' + q(t)y = 0$$

Notons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ Alors
$$(E) \iff Y' = A(t)Y$$
où $A : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}$

Â est continue (car q l'est) donc les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbf{R}$ et forment un $\mathbf{R}$-espace vectoriel S de dimension 2.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ une solution de (E) non nulle.

2) $Z(\varphi) = \{t \in \mathbf{R} \mid \varphi(t) = 0\}$

Soit a un point d'accumulation de $Z(\varphi)$. Montrons que $\varphi'(a) = 0$.

Il existe (t_m), où $t_m \in Z(\varphi)$ et $\forall m \geqslant 1,\ 0 < |a - t_m| < \frac{1}{m}$.

$$0 = \lim_{m\to\infty} \frac{\varphi(t_m) - \varphi(a)}{t_m - a} = \varphi'(a)$$

Ainsi $\varphi'(a) = 0$.

3) Supposons que $Z(\varphi)$ possède un point d'accumulation a. Alors $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) = 0$ par la question précédente. Ainsi, φ est une solution maximale du système de Cauchy

$$(S) : \begin{cases} y'' + q(t)y = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(a) = 0 \end{cases}$$

Ainsi φ et $n : t \mapsto 0$ sont solutions maximales de (S). Puisque la solution est unique par CL, on en déduit que $\varphi = n$. D'où $Z(\varphi)$ n'a pas de point d'accumulation.
S est de dimension 2. Soit (e, f) une base de S. $(e, f : \mathbf{R} \to \mathbf{R})$. Notons $w : t \mapsto e'(t)f(t) - e(t)f'(t)$.

4) w est dérivable (car e, f le sont deux fois) et pour t réel :

$$\begin{aligned} w'(t) &= e'' f(t) + e'(t)f'(t) - e(t)f''(t) \\ &= -q(t)e(t)f(t) + e(t)q(t)f(t) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, w est constante sur $\mathbf{R}$.

$$\exists c \in \mathbf{R}\ \forall t \in \mathbf{R}, w(t) = c$$

5) D'après CL,

$$\begin{cases} S \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \phi \to \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un polynôme. En particulier, la base (e, f) de S est envoyée sur la base

$$\left(\begin{pmatrix} e(0) \\ e'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathbf{R}^2$. Ainsi, le déterminant de la matrice associée est non-nul, c'est à dire :

$$e(0)f'(0) - e'(0)f(0) \neq 0$$

Ou encore $-w(0) \neq 0$. Ainsi

$$c = w(0) \neq 0$$

$e \neq 0$ donc $Z(e)$ n'a pas de points d'acc.
Soient $t_1 < t_2$ deux éléments consécutifs de $Z(E)$.

6) $w(t_1)w(t_2) = c^2 > 0$

7) On a
   - $e(t_1) = 0,\ e(t_2) = 0$
   - e ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$

   Alors, comme $e(t_1) = 0,\ e \in S$ et $e\ neq0$, on a $e'(t_1) \neq 0$ (car $\phi : S \to \mathbf{R}^2$ est bijective par CL, en particulier $\phi(0) = \phi'(0) = 0 \Longrightarrow \phi = 0$.

$$w(t_1) = e'(t_1)f(t_1) - e(t_1)f'(t_1) = e'(t_1)f(t_1)$$

Donc $f(t_1) = \frac{w(t_1)}{e'(t_1)}$.
De même, $e'(t_2) \neq 0$ et $f(t_2) = \frac{w(t_2)}{e'(t_2)}$.
Ainsi $f(t_1)f(t_2) = \frac{w(t_1)w(t_2)}{e'(t_1)e'(t_2)}$ On a : $e'(t_1)e'(t_2) < 0$. (on peut distinguer $e > 0$ et $e < 0$) et donc $f(t_1)f(t_2) < 0$. Alors, d'après le TVI, f s'annule entre t_1 et t_2.
Supposons maintenant que f s'annule deux fois entre t_1 et t_2. En échangeant le rôle de e et f, on montrerait qu'entre deux zéros consécutifs de f entre t_1 et t_2, il y aurait un zéro de e, qui serait alors entre t_1 et t_2 $\lightning$ (car t_1 et t_2 sont deux zéros consécutifs)
Ainsi, entre t_1 et t_2, il existe un et un seul zéro de f.