M62 : Équations Différentielles Ordinaires

Louis Loiseau

L3 Mathématiques 2020–2021

# Feuille d'exercice n°3

# Solutions des exercices

**Rappel :** Soit une équation différentielle d'ordre $n$ à coefficients constants :

$$(E)\ y_{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

où les $a_i \in \mathbf{R}$ et $b$ est une fonction continue.
L'ensemble des solutions maximales de $(E)$ est un espace affine de dimension $n$. Il s'obtient en additionnant une solution maximale particulière aux solutions maximales de

$$(E_H) : y_{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y == 0$$

Les solutions maximales de $(E_H)$ sont définies sur $\mathbf{R}$ et forment un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$.
Un *système fondamental de solution (SFS)* est une base de ce $\mathbf{R}$-ev.
**Première méthode :** Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ le *polynôme caractéristique de* $(E_h)$. $P(X) \in \mathbf{R}[X]$.
Notons :

— $r_1, \cdots r_k$ les racines réelles de $P$ avec multiplicité $m_1, \dots, m_k$.
$\lambda_1 \pm i\omega_1, \dots, \lambda_l \pm i\omega_l$ les racines complexes non réelles de $P$ avec multiplicité $s_1, \dots, s_l$.

Dans ce cas :

$$P(X) = (X - r_1)^{m_1} \cdots (X - r_k)^{m_k} \big((X - \lambda_1)^2 + \omega_1^2\big)^{s_1} \cdots \big((X - \lambda_l)^2 + \omega_l^2\big)$$

Alors un SFS de $(E_H)$ est donné par :

— $\begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t^p e^{r_j t} \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant k,\ 0 \leqslant p \leqslant m_j - 1$

— $\begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t^p \cos(\omega_j t) \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant s,\ 0 \leqslant p \leqslant s_j -$

— $\begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t^p \sin(\omega_j t) \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant s,\ 0 \leqslant p \leqslant s_j -$

Il y a bien $m_1 + \cdots + m_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = n$ solutions.

**Exercice 1.**

**Exercice 2.**