Feuille d'exercice n°2

Solutions des exercices

Rappel de cours :
Une application $f : (\Omega, \mathscr{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathscr{F}')$ est *mesurable* si $\forall A \in \mathscr{F}',\ f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction mesurable.
Ici, on a donc $(\Omega', \mathscr{F}') = (\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$

1) Soit $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue*. Montrons que $g \circ f$ est mesurable.
Pour $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$:

$$\left(g \circ f\right)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$$

Si A est ouvert, alors $g^{-1}(A)$ aussi par continuité. Donc $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in \mathscr{F}$ car f est mesurable et car $g^{-1}(A) \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$.
On a montré que les $(g \circ f)^{-1}(A)$ avec A ouvert dans $\mathbf{R}$ appartiennent à $\mathscr{F}$. Or les ouverts de $\mathbf{R}$ engendrent $\mathscr{B}$ donc les $(g \circ f)^{-1}(A)$ engendrent la tribu $(g \circ f)^{-1}(\mathscr{B})$. Donc

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}$$

.
Autre méthode : Une fonction continue est en particulier mesurable, par le même argument. Or la composée d'applications mesurables est mesurable.

a) Si $g(x) = |x|$ ou $g(x) = x^2$, par continuité sur $\mathbf{R}$, elles sont aussi mesurables d'après le point précédent.

b) Posons $g = 1/f$. On remarque que g n'est pas définie sur Ω tout entier. En effet, elle n'est pas définie sur les points où f s'annule. (*ie* : g est définie sur $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\}) \equiv \Omega'$)
Il faut donc définir une tribu sur Ω'.
Comme $E \in \mathscr{F}$ (car $\{0\} \in \mathscr{B}$ et f mesurable), alors

$$\mathscr{F}' = \{A \setminus E \mid A \in \mathscr{F}\}$$

est une tribu sur Ω'.
La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ $f : (\Omega', \mathscr{F}') \longrightarrow \mathbf{R}^*$ est mesurable ; donc $1/f$ est mesurable de $(\Omega', \mathscr{F}')$ dans $\mathbf{R}$.
Autre point de vue : On prolonge arbitrairement $1/f$ à Ω en posant $1/f(\omega) = 0$ si $\omega \in f^{-1}\{0\}$ (par exemple)
Alors $1/f$ ainsi prolongée est mesurable de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire.

$$X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{B}) \text{ mesurable.}$$

On suppose X de loi uniforme sur $]0,1[$, c'est-à-dire

$$X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow]0,1[$$

avec $\mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \lambda(A)$ pour $A \in]0,1[$

1) Soit $Y = \tan(\pi(X-1/2))$. Alors $Y = f(X) = f\circ X$, où

$$f :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \tan\left(\underbrace{\pi(x-1/2)}_{\in]-\pi/2,\pi/2[}\right)$$

$$Y : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{B}) \text{ mesurable d'après le premier exercice.}$$

On cherche $\mathbf{P}(Y^{-1}(A))$ pour $A \in \mathscr{B}$. Pour $A =]a,b]$:

$$Y^{-1}(]a,b]) = \left(f\circ X\right)^{-1}(]a,b]) = X^{-1}\left(f^{-1}(]a,b])\right)$$

Or, $f(x) = y \iff \pi(x-1/2) = \arctan(y) \iff x = \frac{1}{\pi}\arctan(y) + \frac{1}{2}$
Donc

$$Y^{-1}(]a,b]) = X^{-1}\left(\left]\frac{\arctan a}{\pi} + \frac{1}{2}, \frac{\arctan b}{\pi} + \frac{1}{2}\right[\right)$$

Ou encore

$$\mathbf{P}\left(Y^{-1}(]a,b])\right) = \lambda\left(\left]\frac{\arctan a}{\pi} + \frac{1}{2}, \frac{\arctan b}{\pi} + \frac{1}{2}\right[\right) = \frac{1}{\pi}(\arctan b - \arctan a) = F(b) - F(a)$$

Donc la loi de Y est égale à la mesure associée à la fonction $F(x) = \frac{arctan x}{\pi}$

2) $Z = g\circ X$, où

$$g : \begin{cases}]0,1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \ln\frac{1}{x}] \end{cases}$$

Alors $Z : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{B})$ mesurable d'après le premier exercice.
Z est à valeurs dans $]0,+\infty[$ donc sa loi est une mesure sur $]0,+\infty[$.

$$Z^{-1}(]a,b]) = (g\circ X)^{-1}(]a,b]) = X^{-1}(g^{-1}(]a,b]))$$

Soit $x \in]0,1]$ et $y \in]0,+\infty[$. Or $g(x) = y \iff x = e^{-y}$ Donc

$$Z^{-1}(]a,b]) = X^{-1}(g^{-1}(]a,b])) = X^{-1}([e^{-b}, e^{-a}[)$$

D'où

$$\mathbf{P}\left(Z^{-1}(]a,b])\right) = \lambda([e^{-b}, e^{-a}[) = e^{-a} - e^{-b} = G(b) - G(a)$$

Où $G(x) = -e^{-x}$ pour $x \in]0,+\infty[$.
La loi de Z est la mesure sur $]0,+\infty]$ associée à la fonction G, ou encore la mesure sur $\mathbf{R}$ associée à la fonction $\tilde{G} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $G(x)$ sur $]0,+\infty[$ et par 0 sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 3. Soit la variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ et sa fonction de répartition

$$F(x) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(]-\infty, x])\right) \equiv \mathbf{P}(X \in]-\infty, x]).$$

Rappels de cours :

— F est croissante

— $\lim\limits_{-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F(x) = 1$

— F est continue à droite en tout x $\left(\text{ie : } \lim\limits_{y>x} F(y) = F(x)\right)$ et est continue en x si et seulement si $\mathbf{P}(X = x) = 0$.

Pour $u \in]0,1[$, on pose

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

Et $G(u) = 0$ sinon.

1) Comme $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} = 1$, on a que $\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$ est non vide et minoré par $u \in]0,1[$.
   De plus, la borne inférieure de l'ensemble est atteinte d'après le fait précédent. C'est donc un minimum, car F est continue à droite de l'inf. Donc $G(u)$ appartient à l'ensemble et on a $F(G(u)) \geqslant u$.
   De plus, si $x < G(u)$, x n'est pas dans l'ensemble, donc $F(x) < u$.
   Si $x \geqslant G(u)$, on na $F(x) \geqslant F(G(u)) \geqslant u$. Donc

$$[G(u), +\infty[\subset \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

   Puisque $G(u)$ est l'inf l'autre inclusion est évidente, donc

$$[G(u), +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

2) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = G \circ U : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
   Par croissance de F, on a pour $u' \geqslant u$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u'\} \subset \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\}$$

   Donc $G(u') \geqslant G(u)$. ie : G est croissante.
   Par suite, $G :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}$ est mesurable. En effet, l'image inverse d'un intervalle par une application croissante est un intervalle. Comme les intervalles engendrent $\mathscr{B}$, on obtient $G^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}$.
   Comme G et U sont mesurables, $Y = G \circ U$ aussi.
   NB. Pour montrer que G est croissante, on n'a pas besoin que F le soit.

3) Pour montrer que X et Y ont même loi, il suffit de montrer qu'elles ont la même fonction de répartition.

$$\mathbf{P}(Y \leqslant x) \equiv \mathbf{P}(Y^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbf{P}\big((G \circ U)^{-1}(]\infty, x])\big) = 1 - \mathbf{P}\big(U^{-1}(G^{-1}(]x, +\infty[))\big)$$

   On va montrer que

$$G^{-1}(]x, +\infty[) =]F(x), +\infty[$$

   — $G^{-1}(]x, +\infty[) \subset]F(x), +\infty[$
     Soit $u \in G^{-1}(]x, +\infty[)$. Montrons que $u > F(x)$. Raisonnons pas l'absurde. On suppose que $F(x) > u$.
     On sait d'après (1) que $\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geqslant u\} = [G(u), +\infty[$. Donc

$$F(x) \geqslant u \Longrightarrow x \geqslant G(u)$$

     Ce qui est en contradiction avec $u \in G^{-1}(]x, +\infty[)$ $\lightning$

   — $G^{-1}(]x, +\infty[) \supset]F(x), +\infty[$
     Soit $u > F(x)$. On a toujours d'après (1) que $F(G(u)) \geqslant u$ et donc $F(G(u)) > F(x)$. La croissance [1] de F entraîne que $G(u) > x$ Ainsi $u \in G^{-1}(]x, +\infty[)$

1. pas forcément stricte.

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \leqslant x) &= 1 - \mathbf{P}\big(U^{-1}(G^{-1}(]x, +\infty))\big) \\
&= 1 - \mathbf{P}\big(U \in]F(x), +\infty]\big) \\
&= \mathbf{P}\big(U \in]-\infty, F(x)])\big) \\
&= \mathbf{P}\big(U \in [0, F(x)]\big) \text{ car } U \text{ de loi uniforme sur } [0,1] \\
&= \lambda([0, F(x)]) \text{ car } 0 \leqslant F \leqslant 1 \text{ et car la loi de } U \text{ est la mesure uniforme sur } [0,1] \\
&= F(x)
\end{aligned}
$$

D'où $\mathbf{P}(Y \leqslant x) = F(x)$.

Exercice 4.

Exercice 5. Dans $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, on dispose d'évènements indépendants $A_1, \dots A_n \in \mathscr{F}$ *indépendants* et tous de probabilité $p \in [0,1]$. Est-il possible que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1\ ?$$

Rappel de cours : $A_1, \dots, A_n$ indépendants signifie que pour tout $B_1, \dots, B_k \in \{A_1, \dots, A_n\}$ distincts, on a $\mathbf{P}(B_1 \cap \dots B_k) = \mathbf{P}(B_1) \cdots \mathbf{P}(B_k)$
Crible de Poincaré : Pour tout $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{F}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = {} & \mathbf{P}(A) + \cdots + P(A_n) \\
& - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) - \cdots - \mathbf{P}(A_{n-1} \cap A_n) \\
& + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \mathbf{P}(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \cdots \\
& + (-1)^n \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
= {} & \sum_{k=1}^{n} (-1)k-1) \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_k \leqslant n} \mathbf{P}\left(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)
\end{aligned}
$$

Autre méthode :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \Omega \setminus A_k\right)
\end{aligned}
$$

Comme $A_1, \dots, A_n$ les événements contraires aussi. Autrement dit $\Omega \setminus A_1, \dots, \Omega \setminus A_n$ sont indépendants et donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup A_k\right) = 1 - \prod \mathbf{P}(\Omega \setminus A_k) = 1 - \prod (1-p) = 1 - (1-p)^n$$

Si $p \neq 1$, on a $\mathbf{P}(\bigcup A_k) \neq 1$. Si $p = 1$, on a $\mathbf{P}(\bigcup A_k) = 1$, de plus les A_k sont indépendants.
Remarque : les évènements $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants si et seulement si les tribus engendrés $\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n)$ le sont :
Si $\mathscr{C}, \mathscr{D} \subset \mathscr{F}$, si $\mathscr{C} \perp \mathscr{D}$ et si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont chacune stables par intersection finie, alors $\sigma(\mathscr{C}) \perp \sigma(\mathscr{D})$.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8 (Lemme de BOREL-CANTELLI)**.** On va appliquer la loi $0-1$ de KOLMOGOROV.
Ici, on a $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$ ou 1, car lmes A_n sont indépendants.
Supposons que $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$. La limsup est une intersection décroissante des $B_n = \bigcup_{k\geqslant n} A_k$.
Donc $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \lim_n \mathbf{P}(B_n)$. Or :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_n) &= 1 - \mathbf{P}(\Omega \setminus B_n) \\
&= 1 - \mathbf{P}(\bigcap_{k\geqslant n} \Omega \setminus A_k) \\
&= 1 - \prod_{k\geqslant n} \mathbf{P}(\Omega \setminus A_k) \\
&= 1 - \prod (1 - \mathbf{P}(A_k))
\end{aligned}$$

Comme $\lim \mathbf{P}\overrightarrow{\qquad}(B_n) = 0$, on a $\prod(1 - \mathbf{P}(A_k) \longrightarrow 1$ donc $P'A_k) \longrightarrow 0$, de plus en prenant le log, on obtient

$$\sum_{k\geqslant n} \log(1 - P(A_k)) \longrightarrow \log 1 = 0$$

Donc $\sum_{\mathbf{N}^*} \log(1 - \mathbf{P}(A_k))$ converge. Or $\log(1-n) \sim u$ en 0.Donc $\sum_k \mathbf{P}(A_k)$ est convergente. Contradiction.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20.

Exercice 21.

Exercice 22.

Exercice 23.

Exercice 24.

Exercice 25.

Exercice 26.