Théorie des Catégories

Louis Loiseau

Mars 2020

1 Catégories

1.1 Catégories et foncteurs

Définition 1

Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée de:

1. Un ensemble $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
2. Pour tout $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, un ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
3. Pour tout $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une application:

   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

   appelée la composition.

La composition doit être associative et admet l'identité comme neutre.

Un élement de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est appelé un objet de $\mathcal{C}$, un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est appelé un morphisme.
Une catégorie $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est $\mathcal{U}$-petit pour tout X, Y.
Une catégorie $\mathcal{U}$-petite est une $\mathcal{U}$-catégorie telle que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est $\mathcal{U}$-petite.

Deux morphismes f et g sont parallèles s'ils ont le même ensemble de départ et d'arrivée. On note $f, g : X \rightrightarrows Y$
Un morphisme f