

## Feuille d'exercice n°2

### Solutions des exercices

**Exercice 1.** Notons  $g : t \in \mathbf{R} \mapsto g(t) = f(t) + f'(t) \in \mathbf{R}$ . Alors  $g$  est continue car  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ . Alors  $f$  est solution de

$$(E) : y' + y = g(t)$$

On écrit  $(E)$  sous la forme  $y' + a(t)y = g(t)$ . Alors  $a$  est continue (car constante = 1) et  $A : t \mapsto t$  est une primitive de  $a$  et  $B : t \mapsto B(t) = \int_0^t g(u)e^u du$  est une primitive de  $t \mapsto g(t)e^{At} = g(t)e^t$ . Alors les solutions maximales de  $(E)$  sont les

$$\phi_\lambda : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \phi_\lambda(t) = B(t)e^{-t} + \lambda e^{-t} \end{cases}$$

Avec  $\lambda$  réel. Puisque  $f$  est solution de  $(E)$ , il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $f = \phi_\lambda$ , ie :  $f(t) = B(t)e^{-t} + \lambda e^{-t}$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda e^{-t} = 0$  on il suffit de montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t)e^{-t} = 0$  pour montrer la limite en  $f$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$  par hypothèse, donc il existe  $a \geq 0$  tel que,  $\forall t \geq a$ ,  $|g(t)| \leq \varepsilon/2$ .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} |B(a)|e^{-t} = 0$  donc il existe  $b \geq 0$  tel que,  $\forall t \geq b$ ,  $|B(a)|e^{-t} \leq \varepsilon/2$ .

Notons  $c = \max(a, b) \geq 0$ .

Pour  $t \geq c$ ,

$$B(t) = \int_0^t g(u)e^u du = \int_0^a g(u)e^u du + \int_a^t g(u)e^u du = B(a) + \int_a^t g(u)e^u du$$

$$\begin{aligned} |B(t)| &\leq |B(a)| + \left| \int_a^t g(u)e^u du \right| \\ &\leq |B(a)| + \int_a^t |g(u)e^u| du \\ &\leq |B(a)| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_a^t e^u du \\ &\leq |B(a)| + \frac{\varepsilon}{2} e^t \end{aligned}$$

Et donc  $|B(t)|e^{-t} \leq |B(a)|e^{-t} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Ainsi  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |B(t)|e^{-t} = 0$

**Exercice 2.**

1)

$$(S) \iff \begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'application  $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$  est dérivable et de dérivée majorée par 1 donc  $f$  est 1-lipschitzienne. On en déduit que  $F$  est aussi globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. De plus, elle est continue. Donc, par CL, (S) admet une unique solution définie sur  $\mathbf{R}$ . (qui est donc globale).

2) Notons  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  cette solution. C'est une équation *autonome à variables séparées*.

On peut alors calculer la solution globale de (S);  $t \mapsto \varphi(t) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^t - \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{-t}$

**Exercice 3.**1) — Soit  $t > 0$ .

$$ty' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{t}y = 0 \iff y' = F(t, y)$$

.  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  donc on peut appliquer CL.

— Soit  $t \in \mathbf{R}$ 

Le système n'est pas de la forme  $y' = F(t, y)$  donc on ne peut pas appliquer CL sur  $\mathbf{R}$ .

2) Sur  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} ty' + 0 &\iff y' + \frac{1}{t}y = 0 \\ &= y' + a(t)y = 0 \quad (E) \end{aligned}$$

Où  $a : t \in ]0, +\infty[ \mapsto a(t) = \frac{1}{t} \in \mathbf{R}$ . Alors  $A : t \mapsto \ln(t)$  est une primitive de  $a$ .

Donc les solutions maximales de  $E$  sont les  $\varphi_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} = \frac{\lambda}{t}$ .

Ainsi, les solutions de  $ty' + y = 0$  définies sur un intervalle ouvert inclus dans  $]0, +\infty[$  sont les restrictions de  $\varphi_\lambda$

3) Sur  $] -\infty, 0[$ .

$$ty' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{t}y = 0 \quad (E^-)$$

Une primitive de  $\frac{1}{t}$  est  $t \mapsto \ln|t|$  Donc les solutions maximales de  $(E^-)$  sont les  $\psi_\lambda : t \in ] -\infty, 0[ \mapsto \lambda e^{-\ln|t|} = \frac{-\lambda}{t}$ .

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une solution de  $ty' + y = 0$  sur  $\mathbf{R}$ . Alors  $f$  est continue en 0 et donc, d'après les points précédents,  $f(t) = 0$  sur tout  $\mathbf{R}$ . Réciproquement, la fonction nulle est bien solution. D'où  $ty' + y = 0$  admet une unique solution définie sur  $\mathbf{R}$  qui est  $t \mapsto 0$

**Exercice 4.**1)  $y' = F(t, y)$  où

$$F : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ (t, x) \mapsto \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{3}{x^2+2} \right) \end{cases}$$

Notons  $f : x \rightarrow f(x) = F(\cdot, x)$ . Alors  $f$  est dérivable et on peut montrer qu'elle est  $\frac{5}{4}$ -lipschitzienne. Donc  $F$  est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable et continue, ainsi  $F$  vérifie les hypothèses de CL.

2) Soit  $\varphi$  la solution maximale de

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

Puisque  $F$  est globalement lipschitzienne, alors  $\varphi$  est définie sur  $\mathbf{R}$ . En particulier, le temps maximal positif d'existence est  $+\infty$ .

3) On remarque que la fonction nulle est une autre solution maximale. Donc  $\varphi \neq 0$ . Alors, comme  $\varphi$  est continue (car dérivable), qu'elle ne s'annule pas et que  $\varphi(0) > 0$ , d'après le TVI,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $\varphi(t) > 0$ .

4) A FAIRE (notes du 11 février)

### Exercice 5.

1)

$$(S) : \begin{cases} y'' = 4y - 6y^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Notons  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ . Alors

$$(S) \iff (S') : \begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Où } F : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \left( t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 4x_1 - 6x_1^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$F$  est  $\mathcal{C}^1$  donc, par CL,  $(S')$  admet une unique solution maximale. D'où,  $(S)$  admet une unique solution maximale.

2) Notons  $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$  la solution maximale de  $(S)$ . Par CL,  $I$  est un intervalle ouvert. De plus,  $0 \in I$ . Notons

$$\psi : \begin{cases} -I \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \psi(t) = \varphi(-t) \end{cases}$$

Alors  $\psi$  est deux fois dérivable car  $\varphi$  l'est et, pour tout  $t \in -I$ ,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -\varphi'(-t) \\ \psi''(t) &= \varphi''(-t) = 4\varphi(-t) - 6\varphi(-t)^2 \\ &= 4\psi(t) - 6\psi(t)^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{cases} \psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = 1 \\ \psi'(0) = -\varphi'(-0) = -\varphi'(0) = -0 = 0 \end{cases}$$

Donc  $\psi$  est solution de  $(S)$ . Ainsi, par CL,  $\psi$  est restriction à  $-I$  de la solution maximale de  $(S)$  :  $\psi = \varphi|_{-I}$

En particulier,  $-I \subset I$  et donc  $-I = I$ .

De plus,  $\forall t \in I$ ,  $\varphi(-t) = \psi(t) = \varphi(t)$

3)

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t)^2 &= \varphi'(0)^2 + \int_0^t (\varphi(u)^2)' du \\
 &= \int_0^t 8\varphi'(u)\varphi(u) - 12\varphi'(u)\varphi(u)^2 du \\
 &= [4\varphi(u)^2 - 4\varphi(u)^3]_0^t \\
 &= 4\varphi'(t)^2 - 4\varphi(t)^3 - 4\varphi(0)^2 - 4\varphi(0)^3 \\
 &= 4\varphi(t)^2 - 4\varphi(t)^3 \\
 &= 4\varphi(t)^2(1 - \varphi(t))
 \end{aligned}$$

4) Supposons qu'il existe un temps  $t_0 \in I$  tel que  $\varphi(t_0) = 0$ . Alors  $\varphi'(t_0) = 0$ . Ainsi,  $\varphi$  est solution du système de CAUCHY

$$\begin{cases} y'' = 4y - 6y^2 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Or, ce système admet une unique solution maximale qui est la fonction nulle  $n$  sur tout  $\mathbf{R}$ .

Donc  $\varphi = n|_I$  et, pour tout  $t \in I$ ,  $\varphi(t) = 0 \nlessdot$ . D'où,  $\forall t \in I$ ,  $\varphi(t) \neq 0$ .

Comme  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$  est continue, que  $I$  est un intervalle qui contient 0 et que  $\varphi$  ne s'annule pas, d'après le TVI,  $\forall t \in I$ ,  $\varphi(t) > 0$ . C'est-à-dire

$$\varphi > 0$$

De plus,  $\forall t \in I$ ,  $1 - \varphi(t) = \frac{\varphi'(t)p^2}{4\varphi(t)^2} \geq 0$  et donc  $\varphi(t) \leq 1$ . C'est-à-dire :

$$\varphi \leq 1$$

$\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$  est la solution maximale de (S) donc

$$\phi : \begin{cases} I \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est la solution maximale de (S'). Pour tout  $t \in I$ ,

$$0 < \varphi(t) \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t)^2 &= 4\varphi(t)^2(1 - \varphi(t)) \leq 4 \\
 |\varphi'(t)| &\leq 2
 \end{aligned}$$

Et donc  $\|\phi(t)\|_\infty = \max(|\varphi(t)|, |\varphi'(t)|) \leq 2$

D'où  $\phi$  est bornée, et donc  $I = \mathbf{R}$  par CL.

Soit  $E = \{a \in \mathbf{R}_+ \mid \forall t \in [0, a], \varphi'(t) \leq 0\}$ .

$E \neq \emptyset$  car  $0 \in E$ .

Supposons  $E$  majoré. Alors  $\alpha = \sup E \in \mathbf{R}$  existe. on a :

—  $\forall t \in [0, \alpha[, t \in E$  et donc  $\varphi'(t) \leq 0$ .

Puisque  $\varphi'$  est continue en  $\alpha$ , on en déduit  $\varphi'(\alpha) \leq 0$

— Pour  $n \geq 1$ ,  $\alpha + \frac{1}{n} \notin E$  et donc il existe un temps  $t_n \in ]\alpha, \alpha + \frac{1}{n}[$  tel que  $\varphi'(t_n) > 0$ .

Ainsi,  $\varphi'(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi'(t_n) \geq 0$

D'où  $\varphi'(\alpha) = 0$ . Ainsi

$$0 = \varphi'(\alpha)^2 = 4\varphi(\alpha)^2(1 - \varphi(\alpha))$$

Et donc  $\varphi(\alpha) = 1$  (car  $\varphi(\alpha) > 0$ ).

Par conséquent,  $\varphi''(\alpha) = 4\varphi(\alpha) - 6\varphi(\alpha)^2 = -2$ .

$\varphi''$  est continue en  $\alpha$  donc il existe  $\mu > 0 \forall t \in [\alpha, \alpha + \mu] \varphi''(t) \leq -1$ .

Donc, pour tout  $t \in [\alpha, \alpha + \mu]$ ,

$$\varphi'(t) = \varphi'(\alpha) + (t - \alpha)\varphi''(\theta)$$

avec  $\theta \in [\alpha, t]$  et donc

$$\varphi'(t) \leq -(t - \alpha) \leq 0$$

D'où,  $\forall t \in [0, \alpha + \mu], \varphi'(t) \leq 0 : \alpha + \mu \in E, \nless$

D'où  $E$  n'est pas majoré et

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \varphi'(t) \leq 0$$

5) Pour  $t \in \mathbf{R}$

—  $\varphi'(t) \leq 0$

—  $0 < \varphi(t) \leq 1$

—  $\varphi'(t)^2 = 4\varphi(t)^2(1 - \varphi(t))$

Et donc  $\varphi'(t) = -2\varphi(t)\sqrt{1 - \varphi(t)}$ . L'application

$$\begin{cases} ]0, 1[ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{1}{-2x\sqrt{1-x}} \end{cases}$$

est continue et une primitive de cette application est

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{1}{-2x\sqrt{1-x}} dx \\ &= \int \frac{1}{-2(1-u^2)u} - 2u du \\ &= \int \frac{1}{1-u} du \\ &= \frac{1}{2} (\ln|u+1| - \ln|u-1|) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} \right) \end{aligned}$$

Soit  $F = \{a > 0 \mid \forall t \in ]0, a], \varphi(t) \neq 1\}$ .  $F \neq \emptyset$ . En effet :

$\varphi(0) = 1$  et donc  $\varphi'' = -2 < 0$ . Donc il existe  $a > 0$  tel que  $\forall t \in [0, a], \varphi'' \leq -1$  (par

continuité de  $\varphi''$  en 0).

Soit  $t \in ]0, a]$ .

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \varphi'(0) + (t-0)\varphi''(\theta) \\ &= t\varphi''(\theta) \leq -t < 0\end{aligned}$$

Où l'on a appliqué le TAF et  $\theta \in [0, t]$ .

Ainsi,  $\forall t \in ]0, a]$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ .

Donc  $\forall t \in [0, a]$ ,  $\varphi(t) \neq \text{car } 0 \neq \varphi'(t)^2 = 4\varphi(t)^2(1-\varphi(t))$ .

Notons  $\alpha = \sup F \in \mathbf{R}_+^* \cup \{\infty\}$ . on a :

$$\forall t \in ]0, \alpha[ \quad -2\varphi(t)\sqrt{1-\varphi(t)} \neq 0$$

et

$$\frac{\varphi'(t)}{-2\varphi(t)\sqrt{1-\varphi(t)}} = 1$$

Soit  $t_0 \in ]0, \alpha[$ .

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \frac{\varphi'(u)}{-2\varphi(u)\sqrt{1-\varphi(u)}} du \\ &= [F(\varphi(u))]_{t_0}^t \\ &= G(\varphi(t)) - G(\varphi(t_0))\end{aligned}$$

Donc  $G(\varphi(t)) = t + G(\varphi(t_0)) - t_0 = t + b$  où  $b = G(\varphi(t_0)) - t_0 \in \mathbf{R}$ .

Pour  $t \in ]0, \alpha[$ ,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t+b)}$$

(calcul à faire!!) Et

$$0 = \varphi(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{ch}^2(t+b)} = \frac{1}{\text{ch}^2(b)}$$

Donc  $\text{ch}^2(b) = 1$  puis  $\text{cj}(b) = 1$  (car  $\text{ch}$  est positive) et  $b = 0$ .

Ainsi,  $\forall t \in ]0, \alpha[$ ,  $\varphi(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)}$ .

Puisque  $\alpha = \sup F$  et  $\forall t > 0$ ,  $\frac{1}{\text{ch}^2(t)} < 1$ , on obtient  $\alpha = +\infty$ .

Donc  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)}$ .

Puisque  $\varphi(0) = 1 = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{\text{ch}^2(0)}$  et que  $\varphi$  est paire, on en déduit que pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\varphi(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)}$ . Ainsi

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varphi(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)} \end{cases}$$