M62. EXERCICES 1

1. Exercice

Soit l'équation différentielle

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0. \tag{1.1}$$

1) Chercher une solution sous la forme $y(t) = \exp(rt)$ où r est un nombre complexe donné.

2) Calculez toutes les solutions de (1.1).

2. Exercice

1) Le problème de Cauchy

$$\dot{y} = |t|^{\frac{2}{3}},\ y(0) = 0,$$

rentre-t-il dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

2) Calculer la/les solutions à ce problème.

3. Exercice

Trouver la solution à $y(0) = 0$ et $\dot{y} = |y| + |t|$.

4. Exercice

On considére le problème de Cauchy

$$\dot{y} = |y|^{\frac{2}{3}},\ y(0) = 0.$$

1) Démontrer que la fonction $y(t) = (\frac{t}{3})^3$ est solution du problème.

2) Ce problème rentre-t-il dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz.

3) Construire une infinité de fonctions de classe C^1 solutions du problème de Cauchy.

5. Exercice

Soit l'équation différentielle

$$(1+t+t^2)\dot{y}+(2t+1)y=(1+t+t^2)^2, \tag{5.1}$$

avec la condition initiale $y(0)=0$.

1) Ecrire le problème de Cauchy associé à cette condition initiale et cette équation.

2) En posant $z(t)=(1+t+t^2)y(t)$ trouver une solution particulière à (5.1).

3) Calculer la solution au problème de Cauchy.

6. Exercice

On appelle solution du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -4x-2y+2e^t, \\ \dot{y} &= 6x+3y-2e^t, \end{aligned} \tag{6.1}$$

un couple (x,y) de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ solution de ce systéme.

1) Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace affine dont précisera la dimension.

2) Trouver une solution particulière à ce système différentiel.

3) Calculer toutes les solutions de ce système différentiel.

7. Exercice

Résoudre le système différentiel

$$\dot{x} = 4x + 3y - 7,$$

$$\dot{y} = 3x - 4y + 1.$$