Licence de Mathématiques

Algèbre Bilinéaire

Louis Loiseau

2020

Table des matières

1 Dualité **3**
1.1 Formes linéaires et espace dual . . . 3
1.1.1 Représentation dans une base . . . 3
1.1.2 Hyperplan . . . 4
1.1.3 Base duale . . . 4
1.2 Double dual, annulateurs, transposée . . . 6

2 Formes bilinéaires et quadratiques **6**
2.1 Formes bilinéaires . . . 6
2.2 Dans une espace vectoriel de dimension finie . . . 7
2.3 Changement de base . . . 8
2.4 Formes bilinéaires symétriques . . . 8
2.5 Formes quadratiques . . . 8
2.6 Orthogonalité . . . 9
2.7 Bases orthogonales . . . 11
2.8 Projections orthogonales . . . 12
2.8.1 Calcul de la projection orthogonale . . . 13
2.9 Décomposition en somme de carrés de formes linéaires . . . 13
2.10 Formes quadratiques positives, espaces euclidiens . . . 13
2.11 Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ . . . 14
2.11.1 Classification sur $\mathbb{C}$ . . . 14
2.11.2 Classification sur $\mathbb{R}$, dimension finie . . . 15
2.12 Procédé de Gram-Schmidt et critère de Sylvester . . . 16

3 Espaces euclidiens **17**
3.1 Normes, distances, angles, volumes . . . 17
3.2 Le groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$ . . . 19
3.2.1 Symétrie orthogonale . . . 19
3.2.2 Groupe spécial orthogonal . . . 19
3.2.3 Cas $n = 1$ . . . 20
3.3 Le cas $n = 2$ . . . 20
3.3.1 Orientation . . . 22
3.3.2 Sens géométrique des éléments de $\mathcal{O}(2)$ . . . 22
3.4 Le cas $n = 3$ . . . 23
3.4.1 Endormorphismes orthogonaux en dimension 3 . . . 24
3.4.2 Éléments caractéristiques des rotations en dimension 3 . . . 25
3.5 Endomorphismes des espaces euclidiens . . . 26
3.5.1 Endormorphismes orthogonaux en dimension quelconque . . . 26
3.5.2 Endomorphismes adjoints et autoadjoints . . . 28
3.5.3 Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints . . . 30
3.6 Endomorphismes symétriques et formes bilinéaires symétriques . . . 31
3.7 Application à la classification des coniques dans le plan euclidien . . . 32

4 Espaces hermitiens **34**
4.1 Formes hermitiennes . . . 34
4.1.1 Formes hermitiennes en base . . . 34
4.1.2 Orthogonalité . . . 36
4.2 Espaces hermitiens . . . 37
4.2.1 Projections orthogonales . . . 37
4.2.2 Endomorphisme adjoint . . . 38
4.2.3 Endomorphismes unitaires . . . 38

4.2.4 Le cas de la dimension 2 . . . 39
4.2.5 Endomorphismes auto-adjoints . . . 39
4.2.6 Diagonalisation en base orthonormée . . . 40
4.3 Décomposition polaire . . . 41
4.4 Compléments . . . 43
4.4.1 Endomorphismes normaux . . . 43

5 Question de cours **45**

1 Dualité

1.1 Formes linéaires et espace dual

Soient E, F deux K-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications de E dans F.

Définition 1

Lorsque $F = K$, on appelle les éléments de $\mathcal{L}(E, K)$ formes linéaires et on nomme $\mathcal{L}(E, K)$ espace dual de E, E^* ;

1.1.1 Représentation dans une base

$1 \in K$ est une base canonique de $K = \mathbf{R}$.
Si $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, $\varphi \in E^*$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = (\varphi(e_1), \cdots \varphi(e_n)) \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$$

Si $a_i = \varphi(e_i)$,

$$\varphi(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i e_i) = (a_1, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proposition 1

Changement de base
$\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n) \mapsto^P \mathcal{E}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$
On note alors P la matrice de passage,

$$P_{\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'}, \ P = (p_{i,j})_{i,j}, \ e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$$

On peut donc écrire φ dans la nouvelle base $\mathcal{E}'$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) \times P$$

$$(a'_1, \cdots, a'_n) = (a_1, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition 2

Transformation des coordonnées de vecteurs

$$x = \sum x_i e_i = \sum x_i e'_i$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

1.1.2 Hyperplan

Proposition 3

Soit E un K-espace vectoriel non-nul.

1. $\forall \varphi \in E^*$ non nulle sur E, $\ker \varphi$ est un hyperplan.
2. Pour tout hyperplan $A \subset E, \exists \varphi \in E^*$ non nulle sur E, unique à un vecteur près, telle que $H = \ker \varphi$

Démonstration.

1. On a, pour $\varphi \in E^*$,
$$\dim \operatorname{Im} E + \dim \ker E = \dim E = n$$
De plus, $\{0\} \subset \operatorname{Im} E \subset K \implies \dim E \in \{0, 1\}$
Par l'hypothèse $\varphi \neq 0$, $\dim \operatorname{Im} \varphi \neq 0$ et donc $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$ et $\dim \ker \varphi = n - 1$
2. Soit $H \subset E$ un hyperplan.
Choisissons une base $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de H et complétons la.
Définissons la forme linéaire $\varphi : E \mapsto K$ en donnant sa matrice dans la base chosie :
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = (0, 0, \cdots, 1)$$
C'est à dire :
$$\varphi : \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_n$$
Alors :
$$\varphi(e_1) = 0 \forall i = 0, \cdots, n-1 \text{ et donc } \psi_H = 0$$
Mais $\varphi(e_n) \neq 0$ donc $H \subset \ker \varphi$ et $H = \ker \varphi$ car $\dim H = dim \ker \varphi$

□

1.1.3 Base duale

Proposition 4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Alors pour $i = 1, \cdots, n$, l'application $e_i^* : E \mapsto K$ associant à tout vecteur de E sa i-ième coordonée dans la base $\mathcal{E}$ est une forme linéaire sur E, et $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de E^*.

Démonstration.

1. On note les coordonées de x dans la base $\mathcal{E}$ par $[x]_1^{\mathcal{E}}, \cdots$
Les coordonées d'un vecteur dans une base est déterminé de façon unique par ce vecteur, donc les applications
$$e_i : E \mapsto K, x \mapsto [x_i]^{\mathcal{E}}$$
sont bien définies et linéaires.
2. $\forall \varphi \in E^*$, en posant $a_i = \varphi(e_i)$ on a, par linéarité :
$$\forall x \in E, x = \sum [x]_i^{\mathcal{E}} \implies \varphi(x) = \sum a_i [x]_i^{\mathcal{E}} = \sum a_i e_i^*(x) \implies \varphi = \sum a_i e_i^*$$
Donc $E^* = \operatorname{Vect}(e_1^*, \cdots, e_n^*)$. De plus, $\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi(a_i) = 0 \forall i$.
Si $\varphi = \sum a_i e_i^* = 0$, alors $\varphi(e_j) = \sum a_i e_i^*(e_j) = \sum a_i \delta_{i,j}$.
On a donc montré : $\sum a_i e_i^* = 0 \implies a_1 = \cdots = a_n = 0$, donc les e_i^* sont indépendants.

□

Définition 2

La base $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ s'appelle la base duale de la base $\mathcal{E}$.
Une base $(\mathcal{E}_i)_i$ de E^* s'appelle base duale pour une base $(e_i)_i$ si $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{i,j}$

Définition 3

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $(\mathcal{E}_i)_i$ une base de E^*.
Une base $(e_i)_i$ de E telle que $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{i,j}$ s'appelle base antéduale de la base $(\mathcal{E})_{\rangle})_{\rangle}$.

Proposition 5

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Alors toute base $(\mathcal{E}_i)_i$ admet une base antéduale.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base quelconque de E. Posons $a_{i,j} = \mathcal{E}_i(f_j),\ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$.
On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}_i) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$.
$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\sum \lambda_i \mathcal{E}_i) = \sum \lambda_i (a_{i1}, \ldots, a_{in})$
Pour $\varphi \in E^*$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$.
On en conclut que $(\mathcal{E}_i)$ est libre, et donc que les lignes de A sont libres.
Donc A est inversible. Alors le systeme linéaire :

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où 1 est à la ième position, a une unique solution.} \tag{1}$$

Ce système exprime l'égalité :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \mathcal{E}_j(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathcal{E}_j(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k a_{jk} \end{aligned}$$

Notons cette unique solution $e_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$.
On a donc démontré, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'existence et l'unicité de $e_i \in F$ tel que $\mathcal{E}_j(e_i) = \delta_{ij}$.

Il reste à montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base. Notons la solution X de (1) par $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On obtient $B = (b_{ij})$ tq $e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.
La propriété $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{ij}$ se réécrit $AB = I_n$.
Donc B est inversible et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, liée avec $(f_1, \ldots, f_n)$ par la matrice de passage B. □

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel de dimension n ; $\mathcal{E}, \mathcal{E}^*$ deux bases de E ; $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}'^*$ leurs bases duales. Alors on a les matrices de passage :

$$P_{\mathcal{E}^* \mapsto \mathcal{E}'^*} = \left({}^t P_{\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'} \right)^{-1}$$

1.2 Double dual, annulateurs, transposée

Théorème 1 (Isomorphisme canonique $E \to E^{**}$)

Soit E un K-espace vectoriel. Alors il existe une application $\phi : E \mapsto E^{**}$;

$$\forall v \in E, \forall l \in E^*, \phi(v)(l) = l(v)$$

Si, de plus, E est de dimension finie, alors ϕ est un isomorphisme.

Démonstration.

1. Pour chaque v de E, la fonction $E^* \mapsto K, l \mapsto l(v)$ est linéaire, donc est un élement de E^{**}.
   On pose $\varphi(v) = l$.
   On a donc défini une application $\varphi : E \mapsto E^{**}$ satisfait (2).
   Pour tout $l \in E^*, l(v)$ est linéaire, donc φ aussi. Et donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, E^{**})$.
2. Soit $\dim E = n$. Si $v \in E \setminus \{0\}$, on peut compléter v en une base $v = e_1, \ldots, e_n$ de E.
   On peut alors trovuer une forme linéaire dans E^* qui ne s'annulle pas sur v.
   On peut choisir $l = e_1^*$, où (e_i^*) est la base duale de la base (e_i).
   Mais alors $l(v) = l_1(v_1) = 1 \neq 0$.

   Donc $\varphi(v) \neq 0$ car $\varphi(v)$ est une forme linéaire sur E^* qui prend la vleur $l(v) = 1 \neq 0$ sur l. On a montré $\ker \varphi = \{0\}$.
3. En dimension finie, l'injectivité implique la bijectivité, et donc ϕ est un isomorphisme.

□

Finir : annulateurs, transposée.

2 Formes bilinéaires et quadratiques

2.1 Formes bilinéaires

Définition 1 (Formes bilinéaires)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\mapsto F \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

est qualifiée d'application bilinéaire si : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z)$ et
$\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z)$

L'ensemble $\mathcal{E}(E \times E, F)$ des applications bilinéaires de $E \times E$ dans F possède une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1

1. $\varphi : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$$

2. $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

2.2 Dans une espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n munie d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soient :

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=0}^{n} y_i e_i$$

Par bilinéarité, on a :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$

Définition 2 (Représentation d'une forme bilinéaire par une matrice dans une base)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et φ une forme bilinéaire sur E. On appelle matrice de la forme bilinéaire φ par rapport à la base $\mathcal{B}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{i,j}) = \varphi(e_i, e_j)$$

La relation plus haut se réécrit :

$$\varphi(x, y) =^t XAY$$

Exercice 1

Déterminer la matrice de l'application $\mathrm{Tr}({}^t AB)$ par rapport à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2.3 Changement de base

Proposition 1

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si φ est une forme bilinéaire sur E, de matrice M dans la base $\mathcal{B}$ et de matrice M' dans la base $\mathcal{B}'$, alors :

$$M' = {}^tPMP$$

Définition 3

Soit φ une application bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle rang de l'application bilinéaire φ le rang de la matrice de ϕ dans une base quelconque de E.

2.4 Formes bilinéaires symétriques

Définition 4

Soit φ une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. φ est dite symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
2. φ est dite antisymétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$

Proposition 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et φ une forme bilinéaire sur E. La forme bilinéaire φ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique (resp. antisymétrique).

Proposition 3

Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Leurs dimensions sont respectivements de $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$

Démonstration. Écrire $M = \frac{1}{2}(M +^t M) + \frac{1}{2}(M -^t M)$ □

2.5 Formes quadratiques

Définition 5

Une application q d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ est appellée forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire φ sur E telle que :

$$\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$$

Proposition 4 (Formule de polarisation)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour toute forme quadratique q sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ_0 pour laquelle on a

$$\forall x \in E, q(x) = \varphi_0(x, x)$$

Cette forme bilinéaire symétrique φ_0 s'appelle la forme polaire de q. Elle est donnée par la relation :

$$\forall (x, y) \in E^2 \varphi_0(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$$

Remarque 1. *Une fois que l'on connait φ_0, il peut être intéressant de réécrire sous la forme :*

$$q(x + y) = q(x) + 2\varphi_0(x, y) + q(y)$$

Proposition 5

Une application q d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique si et seulement si :

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. $(x, y) \in E^2 \longrightarrow \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) \in \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire.

Définition 6

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finie, $\mathcal{B}$ une base de E et q une forme quadratique sur E.
On appelle matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de la forme polaire de q dans la base $\mathcal{B}$
Le rang de la forme quadratique q est le rang de la matrice de q.

L'égalité $q(x) = \varphi_0(x, x)$ s'écrit matriciellement

$$q(x) = {}^tXAX$$

2.6 Orthogonalité

Définition 7

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et φ_0 la forme polaire de q. Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux selon q (ou selon φ_0) si $\varphi_0(x, y) = 0$.

Une forme polaire étant symétrique, si x et y sont orthogonaux selon q alors y et x sont aussi orthogonaux selon q.

Exemple 2

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la forme quadratique $q : x \mapsto x_1^2 + x_2^2$
2. Dans $\mathbb{R}^2$, la forme quadratique $q : x \mapsto x_1^2 - 2x_1x_2$

Définition 8 (Orthogonal)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, q une forme quadratique sur E et φ_0 la forme polaire associée à q.

On appelle orthogonal de A selon q (ou selon φ_0) l'ensemble :

$$A^{\perp} = \{x \in E; \forall y \in A \ \varphi(x, y) = 0\}$$

Les deux ensembles A et B sont dits orthogonaux selon q (ou selon φ_0 et on note A si :

$$\forall x \in A \ \forall y \in B \ \varphi_0(x, y) = 0$$

Proposition 6

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur Eet A un sous-ensemble de E.

1. L'ensemble $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. On a $A \subset A^{\perp\perp}$

Théorème 1

Soit $F \subset E$. Si φ est non-dégénérée, on a :

$$\dim F^{\perp} + \dim F = n$$

Démonstration. Soient $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F, complétons-la en une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E. On note $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(e_i, e_j), A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$.
Pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(e_i, x) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Puisque $\ker \varphi = \{0\}$, A est non-dégénérée, donc les k premières lignes de A sont linéairements indépendantes.
Le système est alors de rang k.
Son espace de solution étant en bijection linéaire avec $F^{\perp}$, on conclut que $\dim F^{\perp} = n - k$ $\square$

2.7 Bases orthogonales

Définition 9

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et q une forme quadratique sur E de forme polaire associée φ_0.

1. La famille $\mathcal{F}$ est dite q-orthogonale si :

$$\forall (f, f') \in \mathcal{F}^2 \ f \neq f' \implies \varphi_0(f, f') = 0$$

2. La famille $\mathcal{F}$ est dite q-orthonormale si :

$$\text{Elle est q-orthogonale et } \ \forall f \in \mathcal{F} \ \varphi_0(f, f) = 1$$

Proposition 7

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Toute famille de vecteurs de E qui est q-orthonormale est une famille libre.

Démonstration. □

Définition 10

On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ sur E est dégénérée (resp. non dégénérée) si $E^{\perp_\varphi} \neq 0$ (resp. $E^{\perp_\varphi} = 0$).

On se place désormais dans le cas de la dimension finie.

Définition 11

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est q-orthogonale (resp q-orthonormale) si la famille $\mathcal{B}$ est q-orthogonale. (resp. q-orthonormale.)

Proposition 8

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. La matrice de q dans une base q-orthonormale est la matrice identité.

Démonstration. □

Théorème 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. L'espace vectoriel E admet une base q-orthogonale.

Démonstration. □

Proposition 9

Toute matrice symétrique réelle est congrue à une matrice diagonale. En d'autres termes, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale. De plus, la marice P est inversible.

Démonstration. □

2.8 Projections orthogonales

Définition 12

Soit $E = K \bigoplus L$, somme directe de deux sous-espaces vectoriels.
Pour tout v de E, il existe une unique paire $(x, y) \in K \times L$ tel que $v = x + y$.
La projection linéaire de v sur K parallèlement à L (resp sur L parallèlement à K) est définie par :

$$p_K^L(v) = x \text{ (resp. } p_L^K(v) = y)$$

Proposition 10

L'application $p = p_K^L : E \mapsto E$ satisfait aux propriétés suivantes :

1. $p \in \mathcal{L}(E),\ \ker p = L,\ \operatorname{Im} p = K$
2. $p^2 = p$
3. Soit $q = Id_E - p$. Alors $q = p_L^K$.
   On a $p + q = Id_E,\ p^2 = p,\ q^2 = q,\ pq = qp = 0$

Réciproquement, si $p = p^2$. Alors p est la projection linéaire simple sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$

Définition 13

Une projection linéaire p_K^L est dite orthogonale si $P \perp L$

Définition 14

On dit qu'un espace vectoriel $F \subset E$ est non-dégénéré si et seulement si :

1. $Q_F = Q|_F(\varphi_F = \varphi|_F)$ est une forme dégénérée
2. $\Leftrightarrow F$ non dégénérée $\Leftrightarrow F \cap F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow E = F \bigoplus F^\perp$ $(\ker \varphi|_{F\times F} = F \cap F^\perp)$

Proposition 11

Soit $F \subset E$.

1. Si F est non-dégénéré, alors il existe une unique projection orthogonale d'image F, que l'on notera p_F
2. Si, en plus, Q est non-dégénérée sur E, alors la réciproque est vraie : l'existence d'une projection orthogonale d'image F entraine la non-dégénéréscence de F.

Remarque 2. *1. Si Q est non-dégénérée alors : (F non dégénérée $\Leftrightarrow F^{\perp}$ non-dégénérée) et donc p_F est bien définie si et seulement si p_F est bien définie, et $p_F + p_{F^\perp} = I_E$.*

2. Si $\dim F = 1,\ F = K\dot{\delta}(\delta \in E \setminus 0)$, alors F est non-dégénérée.
$\Leftrightarrow Q(\delta) \neq 0$

2.8.1 Calcul de la projection orthogonale

Proposition 12

Soit $F \subset E$ non-dégénéré et $(u_1, \dots, u_k)$ une base orthogonale de F. Alors :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(u_i, x)}{\varphi(u_i, u_i)} u_i$$

2.9 Décomposition en somme de carrés de formes linéaires

Théorème 3 (Théorème de Gauss)

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le rang de q est égal à r.
2. Il existe r formes linéaires indépendanrtes $f_1, f_2, \cdots, f_r$ sur E et il existe r réels non nuls $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ tels que :
$$q = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i f_i^2$$

Démonstration. importante □

2.10 Formes quadratiques positives, espaces euclidiens

Définition 15

Soit q une forme quadratique de forme polaire associée φ_0.

1. q est dite positive (resp négative) si $q(x) \geq 0$ (resp $q(x) \leq 0$) pour tout x de E.
2. q est dite définie positive (resp définie négative) si elle est positive (resp négative) et si $q(x) > 0$ pour tout vecteur x non-nul.

Définition 16

Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie munie d'une forme quadratique définie positive.
La forme polaire de cette forme quadratique s'appelle produit scalaire.

2.11 Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}, \mathbb{R}$

Définition 17 (Noyau d'une forme quadratique)

Le noyau d'une forme quadratique q (ou sa forme polaire associée φ_0) est définie par :

$$\ker \varphi_0 = \ker q = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi_0(x, y) = 0\} = E^{\perp_{\varphi_0}}$$

Lemme 2.11.1. $\ker \varphi_0$ *est un sous-espace vectoriel de* E *de dimension* $n - r$*, où* r *est le rang de* Mat_{e_i} *dans n'importe quelle base* (e_i) *de* E*.*

Démonstration. □

Définition 18 (Image d'une forme quadratique)

Le rang de q (ou de φ_0) est le rang de la matrice Mat_{e_i} dans n'importe quelle base (e_i) de E.
De façon équivalente, on peut définir $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(\varphi_0) = n - \dim \ker \varphi_0$
On dit que la forme q est non-dégénérée si $\mathrm{rg}(q) = n$, ou de façon équivalente si $\ker q = \{0\}$.

Définition 19

Deux formes quadratiques q et q' sur E et E'sont dites équivalentes si une des propriétés suviantes est vérifiée :

1. Il existe un isomorphisme linéaire $h : E \xrightarrow{\simeq} E'$ tel que $q' = q \circ h$
2. Il existe des bases (e_i) et (ϵ_j) de E, E' respectivement telles que $\mathrm{Mat}_{(e_i)}(q) = \mathrm{Mat}_{(\epsilon_j)}(q')$
3. Pour to bases (e_i) et (ϵ_j) de E, E', il existe une matrice il une matrice inversible T telle que ???

2.11.1 Classification sur $\mathbb{C}$

Théorème 4

Toute forme quadratique q sur un espace vectoriel E de dimension n s'écrit, dans une base convenable, de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de q.
Deux formes quadratiques complexes q et q' sont équivalentes si $\dim E = \dim E'$ et $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(q')$

Démonstration. □

Sur un $\mathbb{C}$-ev de dimension n, il existe précisement $n+1$ classes d'équivalence de formes quadratiques, distinguées par leur rang.

2.11.2 Classification sur $\mathbb{R}$, dimension finie

Théorème 5

Classification des formes quadratiques sur les espaces réels de dimension finie.]
Soit q une forme quadratique sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors il existe un unique $p \in \{1, \dots, n\}$ tel que q s'écrit, dans une base convenable, par la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} I_p & (0) & (0) \\ (0) & -I_q & (0) \\ (0) & (0) & (0) \end{pmatrix}$$

Où $q = r - p,\ r = \mathrm{rg}(q)\ (0 \leq r \leq n)$

Démonstration. On sait qu'il existe une base orthogonale $(\mathcal{E}_i)$ telle que $\lambda_i = q(e_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq p,\ \lambda_i = q(e_i) < 0$ pour $p+1 \leq i \leq p+q$.
Alors la matrice de q est de la forme du théorème dans la base :

$$\mathcal{E}' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} e_{p+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n \right)$$

Montrons maintenant l'unicité.
Le nombre $p+q$ est déterminé par q, car $p+q = r$ est le rang de q.
Il reste à démontrer que p est déterminé par q.
Soient $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases orthogonales dans lesquelles :

$$q(e_1) = \dots = q(e_p) = 1; \quad q(e'_1) = \dots = q(e'_{p'}) = 1$$

$$q_{e_{p+1}} = \dots = q(e_r) = -1 \quad q(e'_{p'+1}) = \dots = q(e'_r) = -1$$

$$q(e_i) = q(e'_i) = 0 \forall i = r+1, \cdots, n$$

. Soient $V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p),\ W = \mathrm{Vect}(e'_{p'+1}, \dots, e'_n)$
Alors $\forall x \in V \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i^2 q(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0 \end{aligned}$$

Pour $x \in W, q(x) \leq 0$ de la même façon.
Donc $V \cap W = \{0\}$, et alors $\dim V + \dim W \leq n$, c'est-à-dire, $p + n - p' \leq n$, d'où $p \leq p'$.
Les rôles de p, p' étant symétriques, on a aussi $p' \leq p$, donc $p = p'$. □

Définition 20 (Signature)

Le couple $(p,q) = (p_q, q_q)$ associé à une forme quadratique q réelle s'appelle la signature de q.

1. p : dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de E telle que la restriction de q soit positive
2. q : dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de E telle que la restriction de q soit négative

Deux formes quadratiques sur des espaces vectoriels réels de dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature3 Une forme quadratique réelle de signature (p,q) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n est :

1. positive si et seulement si $q = 0$
2. définie positive si et seulement si $p = n \Leftrightarrow (p,q) = (n,0)$

2.12 Procédé de Gram-Schmidt et critère de Sylvester

Théorème 6 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une base de E telle que pour tout i, $F_i = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_i))$ est non-dégénéré. Alors les vecteurs :

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(u_i, v_k)}{\phi(u_i, u_i)}$$

sont biens définis et forment une base orthogonale $\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_n$ de E.
On a :

$$q(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} x_i^2$$

où $\Delta_k = \det A_k$, $A_k = \mathrm{Mat}_{(v_1,\cdots,v_k)}(\varphi_{F_k \times F_k}) = (\varphi(v_i, v_j)_{1 \leq i,j \leq k}$

Démonstration. Par récurrence sur $k = 1, \cdots, n$, on doit montrer que :

1. $(u_1, \cdots, u_k$ est une base de F_k
2. La matrice de passage $P_{(v_1,\cdots,v_k)\mapsto(u_1,\cdots,u_k)}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & (*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

□

Théorème 7 (Critère de Sylvester)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E, $a_{i,j} = \varphi(v_i, v_j)_{1 \leq i,j \leq n}$, $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, $A_k = (a_{i,j})1 \leq i, j \leq n = \text{Mat}_{(v_1, \dots, v_n)}(\varphi_{F_k \times F_k})$, $\Delta_k = \det A_k$. Alors :

1. φ est définie positive si et seulement si $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$
2. Supposons que $\Delta_1 \leq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$ et notons $\Delta_0 = 1$.
   Alors l'indice négatif q de φ est égal au nombre de changement de signe dans la suite $\Delta_1, \dots, \Delta_n$.
3. φ est définie négative si et seulement si le signe de Δ_i est $(-1)^i$ pour $i = 1, \dots, n$.
   C'est à dire $\Delta_i = (-1)^i |\Delta_i| \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$.

Remarque 3. *Il y a changement de signe au rant i si $\Delta_i \Delta_{i-1} < 0$.*
L'indice positif de φ est le rang de $\varphi \dot{q}$, où le rang de φ est n si $\Delta_n \neq 0$, $n-1$ sinon.

sp

Démonstration. cf cours. □

3 Espaces euclidiens

3.1 Normes, distances, angles, volumes

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire φ est appellé espace euclidien si E est de dimension finie et φ est définie positive.
φ est alors appellée produit scalaire.

$$\langle x|y \rangle = \varphi(x, y) \ \forall x, y \in E$$

Par définition, $\langle x|x \rangle \geq 0$ et $\langle x|x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
On note $\langle x|x \rangle = \|x\|^2, \ \|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.
Dans la suite, on suppose $(E, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Proposition 1

Pour tout $x, y \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
2. $\|x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle$ **(Théorème des cosinus)**
3. En particulier, si $x \perp y$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. **(Théorème de Pythagore)**
4. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ **(Identité du parallèlogramme)**
5. $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \dot{\|} y\|$ **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**
   L'égalité étant réalisé si x et y sont colinéaires.
6. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(Inégalité de Minkoswki)**
   L'égalité étant réalisée si et seulement si x et y sont colinéaires, d'un facteur strictement positif.

Démonstration. cf cours. □

Définition 1

Soit V un K-espace vectoriel.
On appelle norme sur V une application $N : V \mapsto \mathbb{R}^2$ telle que :

1. $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |x| N(x)$ **(Homogéinité)**
2. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **(Séparation)**
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ **(Sous-additivité)**

D'après la proposition précédente, la norme euclidienne est une norme sur E.

Définition 2

Soit X non-vide. On appelle distance, ou métrie, sur X toute fonction $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}^{+\star}$ telle que :

1. $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$ **(Symétrie)**
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ **(Séparation)**
3. $\forall (x,y,z) \in K^3,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ **(Inégalité triangulaire)**

Un espace métrique est un ensemble (X, d).
D'après la proposition précédente, la fonction de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^\star$ définie par $(x,y) \mapsto \|y - x\|$ est une distance. C'est la distance euclidienne.

Remarque 4. *Toute espace euclidien possède une base orthonormée et est donc isomorphe à $\mathbb{R}^n$ munie de son produit scalaire standard.*

Par Cauchy-Schwarz, on a :

$$\forall x, y \in E \setminus \{0\},\ -1 \leq \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

Définition 3 (Angle)

L'angle $\widehat{(x,y)}$ entre deux vecteurs nons-nuls x, y de E est défini par l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que :

$$\cos\theta = \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|} \qquad \theta = \widehat{\langle x|y\rangle} = \arccos\frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

Définition 4 (Volume)

1. Pour une famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_k)$ de vecteurs de E, le parallélepipède engendré par ces vecteurs est :
$$\Pi = \Pi(\sigma) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid t_i \in [0,1] \right\}$$
2. Le k-volume de $\Pi(\sigma)$ est définit comme suit :
   (a) Si les vecteurs sont liés, $\mathrm{Vol}_k(\Pi(\sigma)) = 0$
   (b) Si les vecteurs sont libres, $\mathrm{Vol}_k(\Pi(\sigma)) = |\det P_{\mathcal{E}\to V}|$; où P est la matrice de passage d'une base orthonormée quelconque de F à la base V.

Lemme 3.1.1. *Cohérence de cette définition*
$|\det P_{\mathcal{E}\to V}|$ *ne dépend pas du choix de* $\mathcal{E}$.

Démonstration. cf cours □

3.2 Le groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble (en fait, le groupe) des endomorphismes orthogonaux de E :

$$\mathcal{O}(E) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x), v(x)\rangle = \langle x, y\rangle\}$$

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, v_n)$ une base de E, $G = (g_{ij})$ la matrice du produit scalaire. Alors on a :

$$\mathcal{O}(E) = \left\{u \in \mathcal{L}(E) \mid \ {}^tAGA = G\right\}$$

Où A est la matrice de u dans la base $\mathcal{E}$.
Cas particulier : si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée, $G = I_n$. On note $\mathcal{O}_n = \left\{u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \ {}^tAA = I\right\}$

3.2.1 Symétrie orthogonale

Soit $F \subset E,\ F \neq \varnothing$ et $G = F^\perp$.
L'endomorphisme $s_F = p_F - p_G = \mathrm{Id}_E - 2p_G = 2p_F - \mathrm{Id}_E$ est l'unique endomorphisme de E tel que :

$$u_{|F} = \mathrm{Id}_E,\ u_{|F^\perp} = \mathrm{Id}_{F^\perp}.$$

Si on choisit une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$ de F et une base orthonormée $\mathcal{E} = (ek+1, \ldots, e_n)$ de G, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(s_F) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix};\ A \in \mathcal{O}(n)$$

3.2.2 Groupe spécial orthogonal

On définit le groupe spécial orthogonal :

Définition 5

$\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) < 1\}$
$\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(u) = 1\}$

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u),\ \mathcal{E}$ une base orthonormée de E, alors :

$${}^tAA = I_n \implies \left(\det(A^2) = 1 \implies [u \in \mathcal{O}(n) \implies \det(u) \pm 1]\right)$$

Définition 6

On définit $\mathcal{O}^-(E) = \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$

Remarque 5. $\mathcal{O}^-$ *n'est pas un sous-groupe de* E

3.2.3 Cas $n = 1$

$E = \text{Vect}(e), e \neq 0$ un vecteur.

1. (e) est une base orthonormée ssi $\|e\|^2 = 1$
   $\mathcal{L}(E) \cong \mathbb{R}$, chaque $u \in \mathcal{E}$ est la multiplication par un scalaire λ_u qui ne dépend pas du choix de base dans E.
2. $u \in \mathcal{O}(E) \iff \forall x \in E, \|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \iff \lambda_u^2 = 1 \iff \lambda_u = \pm 1$.
   $\mathcal{O}(E)$ comme sous-groupe de $\text{GL}_n(1) = \mathbb{R}^*$ est $\{\pm 1\}$, d'ordre 2; $\mathcal{SO}(E) = \{1\},\ \mathcal{O}^-(E) = \{-1\}$

3.3 Le cas $n = 2$

Proposition 2

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E, u un endomorphisme de E et A sa matrice.

1. $u \in \mathcal{SO}(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
2. $u \in \mathcal{O}^-(E) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

Démonstration. □

On note $R^\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ la matrice de rotation d'angle θ.

Proposition 3

Soit E un plan euclidien. Un élément $u \in \mathcal{SO}(E)$ est donné par la même matrice R^θ dans 2 bases orthonormées $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ liées par une matrice de passage P telle que $\det(P) > 0$.
Si $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont deux bases orthonormées telles que $P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} < 0$, et si $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = R^\theta,\ \text{Mat}'_{\mathcal{E}}(u) = R^{\theta'}$, alors $\theta + \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $R^{\theta'} = (R^\theta)^{-1}$.

Démonstration. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases orthonormées.

$$\begin{aligned} &\iff P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} \in \mathcal{O}(2) \\ &\iff \exists \varphi \in \mathbb{R}\ P = R^\theta \text{ ou } P = R^\theta T,\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u') = R^{\theta'} =\ {}^t(R^\varphi)^{-1} R^\theta R$ ou ${}^t(R^\varphi T) R^\theta R^\varphi T$

1. Cas 1 :
   On a ${}^t(R^\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = (R^\varphi)^{-1} = R^{-\varphi}$
   $\implies\ {}^t(R^\varphi) R^\theta R^\varphi = R^{-\varphi} R^\theta R^\varphi = R^\theta$
   Donc $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u') = R^\theta$
2. ${}^t(R^\theta T) R^\theta R^\varphi T = T R^{-\varphi} R^\theta R^\varphi T = T R^\theta T = R^\theta$

□

Proposition 4

Soit E un plan euclidien.

1. $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
   Cet isomorphisme est composé de l'isomorphisme $\mathcal{SO}(E) \cong \mathcal{SO}(2)$ et de l'isomorphisme $\overline{\chi} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathcal{SO}(2)$ provenant de la surjection $\chi : \mathbb{R} \to \mathcal{SO}(2),\ \theta \to R^\theta$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
2. $\mathcal{O}^-(E)$ est envoyé sur $\mathcal{O}^-(2)$ par l'isomorphisme $\mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(2)$ correspondant à un choix d'une base orthonormée de E, et $\mathcal{O}^-(E) = \mathcal{SO}(2) \cdot T = T$

3.3.1 Orientation

Soit V un espace euclidien de dimension finie.
On peut diviser l'ensemble $\mathcal{B}(V)$ de toutes les bases de V en deux parties disjointes, classes d'équivalence par la relation d'équivalence :

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}' \iff \det P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = 0$$

Définition 7

Munir V d'une orientation c'est choisir laquelle des 2 classes d'équivalence sera appellée classe des bases directes.
Les classes de l'autre classe seront appellées bases indirectes.

Proposition 5 (Corrolaire de la proposition précédente)

Soit E un plan euclidien orienté.
On a un isomorphisme canonique $\chi : \mathcal{SO}(E) \to \mathcal{SO}(2)$ qui associe à chaque élément u de $\mathcal{SO}(E)$ sa matrice R^θ dans n'importe quelle base orthonormée directe.
L'angle de rotation θ de u modulo 2π ne dépend pas du choix d'une base orthonormée directe.

3.3.2 Sens géométrique des éléments de $\mathcal{O}(2)$

Lemme 3.3.1. *Tout élement u de $\mathcal{O}^-(E)$ a $\{1, -1\}$ pour spectre, donc s'écrit par la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base formée de vecteurs propres.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit par :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(u)\lambda + \det(u)$$

Par les propositions précédentes, $u \in \mathcal{O}^-(E) \implies \operatorname{tr}(u) = 0, \det(u) = 1$ donc :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

□

On peut maintenant vérifier que les sous-espaces E_1, E_{-1} pour $u \in \mathcal{O}^-(E)$ sont orthogonaux, de deux façons différentes.

Lemme 3.3.2. *Calcul explicite*
Les vecteurs propres unitaires de la matrice $A = R^\theta T$ sont :

$$v_1 = \pm(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)) \tag{2}$$
$$v_2 = \pm(-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2)) \tag{3}$$

Lemme 3.3.3. *Soit V un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(V)$. On note V_λ le sous-espace propre de V pour u de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :*

1. $\operatorname{Spec}(u) \cap \mathbb{R} \subset \{1, -1\}$ *(les vp possibles de u sont 1 et -1)*
2. *Pour tout vecteur propre v de u de valeur propre $\in \mathbb{R}$, on a $u(v^\perp) = v^\perp$.*
   Aussi $u(V_\lambda^\perp) = V_\lambda^\perp$
3. $V_1 \perp V_{-1}$

Démonstration. Soit $v \in V$ un vecteur propre non-nul de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $u(v) = \lambda v$.

1. $\|u(v)\|^2 = |\lambda|^2\|v\|^2 = \|v\|^2$
2. $w \in V^\perp \iff \langle v, w\rangle = 0 \implies (u \in \mathcal{O}(v))\ \langle u(v), u(w)\rangle = 0 \iff \langle v, u(w)\rangle = 0 \iff u(v) \in v^\perp$.
   Donc $u(V^\perp) \subset V^\perp$.
   Pareil pour $w \in V_\lambda^\perp \iff \forall z \in V_\lambda, \langle w, z\rangle = 0 \implies \forall z \in V_\lambda, \langle u(w), u(z)\rangle = \pm\langle u(w), z\rangle = 0 \implies u(w) \implies V_\lambda^\perp$.
   Donc pour $H = v^\perp$ ou $V^\perp$, $u(H) \subset H$.
   Or $\ker u = \{0\}$ donc $u_{|H} : H \to H$ n'a pas de noyau non plus.
   Donc $u_{|H} \in \mathcal{L}(E)$ est injectif.
   Puisque H est de dimension finie, il y aussi bijectivité. Donc $u(H) = H$.
3. $v \in V_1, w \in V_{-1} \implies \langle v, w\rangle = \langle u(v), u(w)\rangle = \langle v, -w\rangle = -\langle v, w\rangle \implies \langle v, w\rangle = 0$

□

Les 3 lemmes entrainent :

Proposition 6

Soit E un plan euclidien. Les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont les réflexions orthogonales (ou symétries orthogonales).
$\forall u \in \mathcal{O}^-(E)$, il y a exactement 4 bases orthonormées de E dans lesquelles u s'écrit par la matrice T.
Si E est orienté, deux de ces bases sont directes, et deux sont indirectes.

3.4 Le cas $n = 3$

On prend E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une orientation. On note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bases de E. On a :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^+(E) \sqcup \mathcal{B}^-(E) \supset \mathcal{B}_{\text{on}}(E)$$

Définition 8

Soit $V = (u, v, w)$ une famille de trois vecteurs de E.
Le réel $\det_{\mathcal{E}}(u)$, déterminant de la matrice 3×3 dont les colonnes sont formées des coordonées des vecteurs u, v, w dans une base orthonormée directe ne dépend pas de $\mathcal{E}$ et est appellé produit mixte.
On note $[u, v, w]$.

Proposition 7 (Propriétés du produit mixte)

$\mathcal{P} : E^3 \to \mathbb{R},\ (u, v, w) \to [u, v, w]$ est trilinéaire et antisymétrique. Pour $V \subset E^3$, on a :

1. $\mathcal{P}(V) = 0 \implies V$ est liée
2. $\mathcal{P}(\sigma(V)) = \varepsilon(\sigma)\mathcal{P}(u, v, w)$
3. $U \in \mathcal{B}_{on}^+(E) \implies \mathcal{P}(U) = \pm 1$

Démonstration. 3) Si $U \in \mathcal{B}_{on}^+(E)$, on peut utiliser $\mathcal{E} = U$ pour le calcul de $[u, v, w]$. Alors $\det(U) = \det I_3 = 1$
Si $U \in \mathcal{B}_{on}^-(E)$, alors $\mathcal{E} = (u_1, v_1, -w) \in \mathcal{B}_{on}^+$. □

Lemme 3.4.1. *Soit V un espace euclidien. Alors $\psi : V \to V^*, x \to \langle x, \cdot \rangle$ est un isomorphisme canonique de V sur V^*.*

Démonstration. Par définition d'une forme bilinéaire, $\forall x \in V, \psi(x) : V \to \mathbb{R}, y \to \langle x, y \rangle$ est une forme bilinéaire ssi $\psi(x) \in V^*$.
Donc $\psi : V \mapsto V^*$ est bien définie.
Toujours par définition, $\langle x, y \rangle$ est aussi linéaire en c, ce qui montre que l'application $V \to V, x \to \psi(x)$ est linéaire, c'est-à-dire que ψ est une application linéaire entr V et V^*.
De plus, $\ker \psi = \{x \in V \mid \forall y \in V, \psi(x)(y) = 0\}$ (une forme linéaire est nulle si et seulement si ses valeurs sur tous les vecteurs sont nulles.) $= \ker(\langle \cdot, \cdot \rangle = 0)$ (car le produit scalaire est non-dégénéré).
Donc, ψ est injective et donc bijective d'après le théorème du rang.
De plus, cet isomorphisme est canonique car la construction de ψ est déterminée par la structure euclidienne de V.

□

Définition 9 (Produit vectoriel)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Le produit vectoriel de deux vecteurs est l'unique vecteur de E, noté $u \wedge v$ tel que, pour tout $w \in E$, $[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$ ou, de façon équivalente, $u \wedge v = \psi^{-1}([u, v, w])$, où $\psi : V \to V^*$, est l'isomorphisme du dernier lemme.

Proposition 8 (Propriétés du produit vectoriel)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Le produit vectoriel est bilinéaire antisymétrique
2. $u \wedge v = 0 \implies u, v$ colinéaires.
3. $u \wedge v \perp u,\ u \wedge v \perp v$
4. u, v colinéaires $\implies (u, v, u \wedge v)$ est libre et est une base directe.
5. Si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe, alors $\forall ij \in \{1, 2, 3\}^2$,

$$e_i \wedge e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \mathcal{E}_{ijk} & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Où $\{k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$, $\mathcal{E}_{ijk} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3$ si $i \neq j$

6. Si $u = \sum u_i e_i,\ v = \sum v_i e_i$,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

3.4.1 Endormorphismes orthogonaux en dimension 3

Lemme 3.4.2. *Un endormorphisme orthogonal d'un espace euclidien de dimension 3 a toujours une valeur propre réelle $\lambda = \pm 1$, égale à son déterminant.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{O}(3), P_u(t)$ le polynôme caractéristique de u.
Puis que P est de degré 3, il admet une racine réelle λ. Par un lemme de la partie précédente, toutes les valeurs propres réelles d'un endormorphisme orthogonal sont contenues dans $\{1, -1\}$. Montrons que $\det(u)$ est une racine de P.

1. Si toutes les racines de P sont réelles,alors on a que 4 cas possibles pour les vecteurs propres à permutation près : $(1,1,1), (-1,1,1), (-1,-1,1), (-1,-1,-1)$. Dans tous les cas, $\det(u)$ est parmi les racines.
2. Dans le cas contraire, P admet une racine complexe non réelle, et le spectre de u est $\{\lambda, \mu, \overline{\mu}\}$. On a dans ce cas $\det(u) = \lambda \cdot \mu \cdot \overline{\mu} = \lambda|\mu|^2$ qui est de même signe que λ. De plus, $\det(u) = \pm 1$ donc $\det(u) = \lambda$.

□

Proposition 9

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, u un endormorphisme orthogonal, $\lambda = \det(u) = \pm 1$. Alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{E}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & R^\theta \end{array}\right]$$

Démonstration. Par le lemme, $\lambda = \det(u)$ est une valeur propre de u. Soit e_1 un vecteur unitaire de valeur propre λet (e_1, e_3) une base orthonormée du plan $H = e_1^\perp$. Quitte à remplacer e_1 par $-e_1$, on peut supposer que $\mathcal{E} = (-e_1, e_2, e_3)$ orthonormée directe.
Par un autre lemme, on sait que $u(H) = H$, donc $u_{|H} \in \mathcal{O}(H)$.
D'après la partie 2 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right]$$

Où $A = R^\theta$ ou $TR^\theta T$. Or, $\det(u) = \lambda = \lambda \det(A)$ d'où $\det(A) = 1$ et $A = R^\theta$. □

Remarque 6. *Le choix de θ est unique modulo 2π.*

Définition 10

Un axe de E est une droite vectorielle orientée dans E. Tout axe est dirigé par un unique vecteur de norme 1.
L'élement $u \in \mathcal{SO}(E)$ de matrice $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R^\theta \end{array}\right]$ dans une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) s'appelle rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé par e_1.

On notera R_v^θ, avec $v = \alpha e_1$.

Corollaire 1

Soit $u \in \mathcal{SO}(E) \neq Id_E$. Alors u possède deux axes de rotation,ayant pour support la même droite vectoriel $\mathbb{R}v \subset E$, où $v \in E \setminus 0$: l'un est dirigé par v, l'autre $-v$.
L'axe et l'angle sont les éléments caractéristiques dune rotation de E.

3.4.2 Éléments caractéristiques des rotations en dimension 3

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.

1. On trouve $v \neq 0$ solution de $u(v) = v$
2. On détermine le signe de $\cos\theta$ par la relation $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(u)$.

3. On détermine le signe de $\sin\theta$, qui coincide avec le signe de $[x, u(x), v]$ pour tout x de E non colinéaire avec v (ex : $x = e_1$) grâce à la relation :

$$[x, u(x), v] = \|v\|(\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta \text{ si } x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \text{ dans une bon directe.}$$

Avec ces choix, $u = R_v^\theta$.

Remarque 7. $R_v^\theta = R_{-v}^{-\theta},\ R_v^\pi = R_{-v}^\pi$

3.5 Endomorphismes des espaces euclidiens

3.5.1 Endormorphismes orthogonaux en dimension quelconque

Lemme 3.5.1. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par u, alors :*

$$u(F) = F,\ u(F^\perp) = F^\perp$$

Démonstration. 1. $u(F) \subset F \implies u$ induit par restriction un endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(E)$: $\forall x \in F, u_F(x) = u(x) \in F$. Puisque u est inversible, $\ker u = \{0\}$ et u_F est bijectif.
Donc $u_{|F} = u(F) = F$.

2. Soit $x \in F, y \in F^\perp$, alors $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle = 0$.
Donc $u(y) \in (u(F))^\perp = F^\perp \implies u(F^\perp) \subset F^\perp$.
On applique ensuite la preuve 1) à $F^\perp$ au lieu de F.

□

Lemme 3.5.2. *Soit V un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(V)$. Alors u a un sous-espace stable de dimension* 1 *ou* 2.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V.
Soit $A = \mathrm{Mat}(u)$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A. Il suffit de montrer que u_A possède un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1 ou 2.
En effet, si on note $S : \mathbb{R}^n \to V,\ (x_1, \ldots, x_n) \to \sum x_i e_i$, alors S est un isomorphisme d'espace vectoriel tel que $u = S u_A S^{-1}$, et F est stable par u_A ssi $S(F)$ stable par u.
On cherche donc un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par u_A, de dimension 1 ou 2.
Soit P_A le polynôme caractéristique de A. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, P_A possède une racine complexe λ.
Les racines de P_A sont les valeurs propres complexes de u_A. Distinguons deux cas.

1. $\lambda \in \mathbb{R} \implies u_A$ admet un vecteur propre $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : u_A(v) = \lambda v$.
On pose $F = \mathbb{R}v \implies \dim F = 1$, F est u_A-stable.
2. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On note $\tilde{u}_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. $\tilde{u}_A$ admet un vecteur propre v. On note $x = \mathrm{Re}(v), y = \mathrm{Im}(v),\ \alpha = \mathrm{Re}(\lambda),\ \beta = \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$.
On note aussi par X, Y, V les matrices colonnes des vecteurs x, y, v.
On a :
$$AV = A(X + iY) = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y)$$
Puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par identification :
$$AX = \alpha X - \beta Y,\ AY = \beta X + \alpha Y$$
C'est à dire :
$$u_A(x) = \alpha x - \beta y,\ u_A(y) = \beta x + \alpha y$$
Donc $F =_{\mathbb{R}} (x, y)$ est u_A stable. Puisque $v \neq 0$, on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ donc $F \neq \{0\}$ et alors $\dim F \leqslant 2$

□

Remarque 8. *Si* $\dim F = 1$*,* F *est une droite stable, donc un sous-espace propre de* u_A *de valeur propre réelle* μ*. Puisque* $x, y \in F, u_A(x) = \mu x, u_A(y) = \mu y$ *donc* $\tilde{u}_A = \mu(x + iy)$*, donc* v *serait un vecteur propre de valeur propre réelle, c'est absurde donc* $\dim F = 2$*.*

Lemme 3.5.3. *Soit* $u \in \mathcal{O}(E)$*. Alors* E *est une somme directe orthogonale de sous-espace stable de dimension* 1 *ou* 2*.*

Démonstration. lemme 1 + lemme 2 + récurrence sur n □

Théorème 1

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Alors il existe une base de E dans laquelle u s'écrit par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \cos\theta_i & -\sin\theta_i & \\ &&&&&& \sin\theta_i & \cos\theta_i & \\ &&&&&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

Avec $i = 1, \dots, r$ et $\theta_1, \dots \theta_r$ convenables.

Démonstration. D'après le lemme 3, $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s;\ F_i \perp F_j$.
$u(F_i) = F_i, \dim F_i \in \{1, 2\}$. On peut supposer que les F_i sont des sous-espaces stables minimaux : si un F_i, de dimension 2 se décompose en 2 droites stables orthogonales, $F_i = F_i' \oplus F_i''$, alors on remplace F_i par $F_i' \oplus F_i''$. Alors il n'y a pas de F_i pour lesquels $u_{|F_i}$ soit une réflexion dans un plan.
Donc $u_{|F_i} \in \mathcal{SO}(F_i)$ (rotation) pour tout F_i de dimension 2.
Le résultat suit maintenant des cas $n = 1$ et $n = 2$ déjà traités. □

Remarque 9. *On peut imposer les rotations* $0 < \theta_i < \pi$*. Effectivement :*

1. $\theta_i \in \pi\mathbb{Z} \implies \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} = \pm I_2 \implies F_i$ *pas minimal.*
2. $\cos, \sin$ *sont* 2π*-périodiques, on peut donc supposer que* $\theta \in]-\pi, \pi[$*.*
3. $TR^\theta T = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$*, donc, quitte à remplacer une base orthonormée* $(e_{1\dots,e_i)}$ *de* F_i *par* $(e_i, \dots, e_r)$*, on peut supposer que* $\theta_i \in]0, \pi[$*.*

Corollaire 2

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $|\lambda| = 1$.

3.5.2 Endomorphismes adjoints et autoadjoints

Proposition 10 (Définition)

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

1. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle \tag{4}$$
L'endormorphisme u ainsi défini s'appelle **endomorphisme adjoint** de u et est noté u^*.
2. Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(v)$. Pour deux vecteurs x, y de E de matrices X, Y, on a :

$$\langle u(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY$$
$$\langle x, v(y)\rangle = {}^tX(BY) = {}^tXBY$$

On voit donc que la propriété (3) sera satisfaite si on définit v comme l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans la base $\mathcal{E}$. On a montré l'existence de v. Montrons l'unicité.
Soient $v, v' \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes satisfaisant (3). Alors :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, v(y)\rangle = \langle x, v'(y)\rangle$$

Fixons $y \in E$. On a alors :
$$\forall x \in E, \langle x, v(y) - v'(y)\rangle = 0$$
Cela signifie que $v(y) - v'(y) \in E^\perp$. Or $E^\perp = \{0\}$. En effet, aucun vecteur non nul z de E ne peut être orthogonal à E tout entier,car $\langle z, z\rangle = \|z\|^2 \neq 0$; donc

$$z \in E, z \perp E \implies z = 0$$

On obtient donc que $v(y) = v'(y)$. Comme on a montré ce résultat pour y quelconque, $v = v'$.
Le second point suit de la preuve de l'existence : on a construit $v = u^*$ en le définissant par la matrice ${}^tA$ dans la base orthonormée $\mathcal{E}$ dans laquelle $A = \mathrm{Mat}(u)$ □

Proposition 11

Soient E un espace euclidien et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors on a :

1. $(f^*)^* = f$
2. $(f + g)^* = f^* + g^*$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f)^* = \lambda f^*$ $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Définition 11

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint, ou symétrique si $u = u^*$.
Ce qui est équivalent à :
$$\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Corollaire 3

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : u autoadjoint
$\iff$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est une matrice symétrique dans toute base orthonormée
$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$
est une matrice symétrique.

Exemple 1

1. Une projection orthogonale est autoadjointe.
2. Toute symétrie orthogonale est autoadjointe.

Corollaire 4

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff u^* = u^{-1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{O}(E) &\iff \forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \\ &\iff \forall x \in E, \forall y \in E \langle x, u^*u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \\ &\iff \forall y \in E, u^*u(y) - y \in E^\perp \\ &\iff \forall y \in E u^*u(y) - y = 0 \\ &\iff u^*u = Id_E \end{aligned}$$

□

On notera $\mathcal{S}_E$ le sous-espace des endomorphismes autoadjoints et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ les matrices symétriques.

Proposition 12

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}_E$ et F un sev de E stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$ quelconque. Alors :

$$\forall y \in F, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$$

car $x \in F^\perp$ et, par la stabilité de F, $y‘ \in F \implies u(y) \in F$.
Donc pour tout $x \in F^\perp, u(x) \in F^\perp$. □

Proposition 13

Dans les mêmes hypothèses, soit u_F l'endormorphisme de F obtenu par la restriction de u. Alors $u_F \in \mathcal{S}_F$

Proposition 14

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}_E$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deux valeurs propres réelles de u. Soient $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ les sep associés. Alors ils sont orthogonaux.

3.5.3 Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints

Théorème 2 (Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints)

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors :

1. $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}$
2. Il existe une bon $\mathcal{E}$ telle que la matrice de u soit diagonale

Démonstration. On démontrera d'abord, par récurrence sur $n = \dim E$, qu'il existe une décomposition de E en somme directe orthogonale de sous-espaces de dimension 1 ou 2 stables par u.
SI $n \leq 2$, il n'y a rien à démonter.
Soit $n \geq 3$. Par un lemme de la partie précédente, tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension > 0 possède un sous-espace stable de dimension 1 ou 2. Par les propriétés précédentes, $F^\perp$ est u-stable et $u_{F^\perp} \in S_{F^\perp}$. On a :

$$0 < \dim F^\perp < n$$

donc, par l'hypothèse de récurrence, il existe une décomposition :

$$F^\perp = F_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} F_r$$

Où $u(F_i) = F_i, \dim F_i \in \{1, 2\}$.
Il reste à poser $F_{r+1} = F$, et alors :

$$E = F_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} F_{r+1}$$

est une décomposition en somme directe orthogonale de sous-espaces u-stables de dimension 1 et 2.
Seconde étape :
Étant donné une décomposition de E en une somme directe orthogonale de sous-espaces u-stables de dimension 1 ou 2, on va la raffiner en remplaçant chaque facteur de dimension 2 par une somme directe orthogonale de deux droites u-stables.
Comme résultat, on aura une décomposition $E = F_1 \bigoplus^\perp \cdots \bigoplus^\perp F_n,\ \dim F_i = 1, u(F_i) \subset F_i$. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable de dimension 2, alors $u_F \in \mathcal{S}_F$.
Choisissons une base orthonormée (e_1, e_2) de F, la matrice $A = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u_F)$ est symétrique : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
On calcule le polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$$

et son discriminant :

$$\Delta = (a + c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2$$

Donc $\Delta \geq 0$, et deux cas se présentent :

1. $\Delta = 0$, alors $a = c$ et $b = 0$, donc $u_F = c\mathrm{Id}_F$.
   On peut chosiir $F' = \mathbb{R}e_1, F'' = \mathbb{R}e_2$, alors $F = F' \bigoplus^\perp F''$, où F', F'' sont des droites u-stables orthogonales.

2. $\Delta > 0$, alors P_A a deux racines réelles distinctes, et on définit F', F'' comme deux droites engendrées par les vecteurs propres respectifs.
   Comme on a $F' \perp F''$, alors $F = F \bigoplus^{\perp} F''$.

On peut représenter E comme somme directe de n droites u-stables deux à deux orthogonales.
Choisissant, pour chaque i un vecteur unitaire e_i-générateur de F_i, on obtient une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ dans laquelle

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, u(e_i) = \lambda_i e_i$$

Donc $\mathrm{Spec}(u) = \{\lambda_i\} \subset \mathbb{R}$ et la matrice de u dans la base $\mathcal{E}$ est diagonale, égale à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. □

Corollaire 5

Si $u \in \mathcal{S}_E$ et $\mathrm{Spec}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ (distincts) alors :

$$E = V_{\lambda_1} \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} V_{\lambda_r}$$

Corollaire 6

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ tel que la matrice

$$D = {}^tPAP = P^{-1}AP$$

soit diagonale.

3.6 Endomorphismes symétriques et formes bilinéaires symétriques

On a une correspondance bijective vectorielle H entre l'espace $\mathcal{S}_E$ des endomorphismes symétriques de E et $\mathcal{S}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E.

1. Construction de $H : u \in \mathcal{S}_E \to H(u) = \varphi \in \mathcal{S}(E)$
   $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$ La bilinéarité est évidente.
2. Construction de H^{-1} :
   H est bijective, car dans une base orthonormée, u et $H(u)$ ont la même matrice.

Proposition 15

Toute forme bilinéaire symétrique $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ une base $\langle \cdot, \cdot \rangle$-orthonormale et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ Alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donc $u_A \in \mathcal{S}_E$. où $u_A H^{-1}(\varphi)$ est l'endomorphisme de E ayant A pour matrice dans la base $\mathcal{E}$. Par un théorème précédent, il existe une base orthonormée $\mathcal{E}'$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u_A) = D$ soit diagonale, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où $\{\lambda_i\} = \mathrm{Spec}(u_A) \subset \mathbb{R}\}$. Si $P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, alors $D = P^{-1}AP$. Puisque $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont orthonormées, $P \in \mathcal{O}(n)$, donc $P^{-1} = {}^tP$ et $D = {}^tPAP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi)$
Donc φ se diagonalise dans la même base $\mathcal{E}'$ que u_A ; cette base est donc à la fois orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et orthogonale pour φ. □

Proposition 16 (Endormorphismes symétriques positifs, définis positifs)

Soit $u \in \mathcal{S}_E$. Alors on a :

1. $u \in \mathcal{S}_E^+ \iff \text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+$
2. $u \in \mathcal{S}_E^{++} \iff \text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_*$

Corollaire 7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ une base orthonormée. Alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}_E &\iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ u \in \mathcal{S}_E^+ &\iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \\ u \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Proposition 17

Soit $u \in \mathcal{S}_E^+$. Alors il existe un unique $v \in \mathcal{S}_E^+$ tq $v^2 = u$.

Démonstration. cf prochain chapitre. □

3.7 Application à la classification des coniques dans le plan euclidien

Soit E un plan euclidien.
Une conique dans E est l'ensemble des zéros d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de la forme $f = q + l + c$, où q est une forme quadratique sur E, l une forme linéaire et c un réel.
En coordonées (x, y) dans une base orthonorlée (e_1, e_2), une conique est le lieu des zéros d'un polynôme de degré 2 en x, y.

$$\begin{gathered} f(x,y) = a_{11}x + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c \\ C = \{xe_1 + ye_2 \in E \mid f(x,y) = 0\} \end{gathered}$$

Le problème de classification consiste à ramener l'équation de C à une forme normale par une transformation affine de E préservant les distances. (isométrie affine de E).
La formule générale d'une isométrie affine est :

$$\varphi : E \times E, x \to ux + v,\ u \in \mathcal{O}(E), v \in E$$

En coordonées, si on identifie E avec $\mathbb{R}^2$ (par un choix d'une base orthonormée), cette équation devient :

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2(x,y) \to P(x,y) + (x_0, y_0),\ P \in \mathcal{O}(2), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Les isométries affines forment le groupe $\text{Iso}(E)$ et le sous-groupe des isométries avec $u \in \mathcal{SO}(E)$ est noté $\text{Iso}^+(E)$ (isométries directes.)

Étapes de la réduction à une forme normale :

1. On diagonalise la forme quadratique $q = a_{11}x^2 + 2_{12}xy + a_{22}y^2$ par une transformation orthogonale $P \in \mathcal{O}(2)$:
$$^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Soit (e'_1, e'_2) la base orthonormée donnée par la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, et (x', y') les coordonées associées. On a :

$$f = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + c \ (b'_1, b'_2) = (b_1, b_2)P; \ P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(l)$$

2. On élimine le maximum de termes de degré 1 :
   Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_1 x'^2 + b'_1 x = \lambda_1 \left(x' + \frac{b'_1}{2\lambda 1}\right) - \frac{b'^2_1}{4\lambda_1}$, et on pose $x'' = x' + \frac{b'_1}{2\lambda_2}$, et pareil pour y' si $\lambda_2 \neq 0$.

Définition 12 (Formes normales)

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, une ellipse aux demi-axes $a > 0, b > 0$
2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, une hyperbole (si $+1, a$ est le demi-axe réel, b le demi-axe imaginaire.)
3. $2py = x^2$ ou $2px = y^2$, une parabole de paramètre focal $p > 0$. (par le changement de variables $x \to -x, y \to -x$ si nécessaire)
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, l'ensemble vide, dit une ellipse imaginaire.
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, une paire de droites concourantes.
6. $x^2 = a^2$ ou $y^2 = b^2$,une paire de droites parallèles.
7. $x^2 = 0$ ou $y^2 = 0$, une droite double
8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, une paire de droites concourantes imaginaires. (comme sous-ensemble de E, c'est juste l'origine)
9. $x^2 = -a^2$ ou $y^2 = -b^2$, une paire de droites parallèles imaginaires.

La classification affine (non métrique)
Les classes distinctes sont :

1. $x^2 + y^2 = 1$
2. $x^2 + y^2 = -1$
3. $x^2 = 0$
4. $x^2 + y^2 = 0$
5. $x^2 - y^2 = 1$
6. $x^2 + y^2 = 0$
7. $y = x^2$
8. $x^2 = 1$
9. $x^2 = -1$

4 Espaces hermitiens

Convention : Par "espace vectoriel" on sous-entend un sev de dimension finie sauf mention contraire.

4.1 Formes hermitiennes

Définition 1

Soit E un $\mathbb{C}$-ev. Une forme hermitienne sur E est une application $f : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :

1. $\forall a \in E, f(a, \cdot)$ est linéaire, ie :
   (a) $\forall x, y \in E, f(a, x + y) = f(a, x) + f(a, y)$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, f(a, \lambda x) = \lambda f(a, x)$.
2. $\forall b \in E$ l'application $f(\cdot, b)$ est semi-linéaire ou antilinéaire. C'est à dire :
   (a) $\forall x, y \in E, f(x + y, b) = f(x, b) + f(y, b)$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, f(\lambda x, b) = \overline{\lambda} f(x, b)$
3. $\forall x, y \in E, f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ (condition de la symétrie hermitienne ; on dit : f est une forme à symétrie hermitienne.)

Une forme hermitienne f est un produit scalaire hermitien. Si en plus, elle satisfait

1. $\forall x \in E \setminus \{0\}, f(x, x) \in \mathbb{R}^+$ (définie positive.)

Remarque 10. *La condition* (3) *entraine que pour tout x de E, $f(x, x) \in \mathbb{R}$. On dit que f est positive et on écrit $f \geq 0$ si $\forall x \in E, f(x, x) \geq 0$.*

Notation pour f définie positive : $f > 0$.
On note ainsi :

$$\mathcal{H}(E) = \{\text{formes hermitiennes sur E}\}$$
$$\cup$$
$$\mathcal{H}^+(E) = \{f \in \mathcal{H}(E) \mid f \geq 0\}$$
$$\cup$$
$$\mathcal{H}^{++}(E) = \{f \in \mathcal{H}(E) \mid f > 0\}$$

Exemple 1

1. $\langle \cdot, \cdot \, angle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$;
$$\langle x, y \rangle = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n$$
   (produit scalaire standard)
2. E un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace des fonctions continues $[a, b] \to \mathbb{C}$ défini sur un segment $|a, b] \subset \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}, (f, g) \to \langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x$.

4.1.1 Formes hermitiennes en base

Soient $f \in \mathcal{H}(E), \mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On définit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = (f(e_i, e_j))$. C'est une matrice hermitienne.

Définition 2

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si pour tout $i, j = 1, \cdots, n,\ \overline{a_{ij}} = a_{ij}$. (en particulier, $a_{ij} \in \mathbb{R}$) De façon équivalente :

$$^tA = \overline{A}$$

Ou encore :

$$A^* = A$$

Où on définit la matrice adjointe A^* de A par :

$$A^* = {}^t\overline{A}$$

.

Notation pour l'ensemble des matrices hermitiennes :

$$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

Ecriture d'une forme hermitienne en coordonées :

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{ij} a_{ij} \overline{x_i} y_j$$

Changement de base :
Soient $\mathcal{E}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une autre base. $P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}, B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(f), A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ Alors

$$B = P^* A P$$

Définition 3

On appelle forme quadratique hermitienne une application $q : E \times \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme hermitienne $\varphi \in \mathcal{H}(E)$ pour laquelle pour tout $x \in E$,

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

Cette forme satisfait la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in E,\ q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$$

Remarque 11. *On peut voir E comme un $\mathbb{R}$-ev de dimension $2n$. (Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une $\mathbb{C}$-base, $(e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots,$ est une $\mathbb{R}$-base.).*
On note E comme $\mathbb{R}$-ev par $E_{\mathbb{R}}$. Alors la forme $q : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, x \to \varphi(x, x)$ associée à une forme $\varphi \in \mathcal{H}(E)$ est une forme quadratique dans le sens du chapitre 2. Or, q n'est pas une forme quadratique sur le $\mathbb{C}$-ev E d'origine. Car en général, pour $\lambda \in \mathbb{C}, x \in E, q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x) \neq \lambda^2 q(x)$.

Proposition 1

La forme quadratique hermitienne $q = q_\varphi : E \to \mathbb{R}, x \to \varphi(x, x)$ associée à une forme $\varphi \in \mathcal{H}(E)$ détermine φ de façon unique. En particulier, $q_\varphi \equiv 0 \iff \varphi \equiv 0$

Démonstration. On a : $\mathrm{Re}(\varphi(x,y)) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2} = \frac{q(x+y)-q(x-y)}{4}$, $\mathrm{Im}(\varphi(x,y)) = \frac{q(x-iy)-q(x)-q(y)}{2} = \frac{q(x-iy)-q(x+iy)}{4}$ □

Remarque 12. *En coordonées*
$q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i<j} 2\mathrm{Re}(a_{ij})\overline{x_i} x_j$.

4.1.2 Orthogonalité

Définition 4

Soit $\varphi \in \mathcal{H}(E)$.

1. Pour deux vecteurs $x, y \in E$, on dit que x est orthogonal à y et on écrit $x \perp y$ ou $x \perp_\varphi y$ si :
$$\varphi(x,y) = 0$$
C'est une relation symétrique.
2. Pour une partie $X \subset E$, on définit :
$$X^\perp = X^{\perp_\varphi} = \{y \in E \mid \forall x \in X, x \perp_\varphi y\}$$
C'est un sous-espace vectoriel de E.
3. Le noyau de φ est défini par :
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\} = E^\perp$$
4. φ est non-dégénérée si et seulement si $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$
5. Une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E est dite orthogonale ssi $e_i \perp e_j$ pour $\forall i \neq j$ ssi la matrice de φ dans cette base est diagonale. Si, de plus, $\varphi(e_i, e_i) = 1 \forall i$, on dit qu'elle est orthonormée.

Comme pour les formes bilinéaires, on démontre les faits suivants.

Proposition 2

Soit $\varphi \in \mathcal{H}(E)$ non-dégénérée. Alors :

1. $\forall F \subset E, \dim F + \dim F^\perp = n$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
2. Pour deux s-ev F, GE, on a :
$$F \subset G \iff G^\perp F^\perp$$
$$(G \cap F)^\perp) = F^\perp + G^\perp$$
$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$
3. $\forall F \subset E$, la restriction $\varphi_{|F} = \varphi_{|F \times F} \in \mathcal{H}(F)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_{|F}) = F \cap F^\perp$. Donc $\varphi_{|F}$ est non-dégénérée ssi $\varphi_{|F^\perp}$ est non-dégénée ssi $F \cap F^\perp = \{0\}$ ssi $E = F \bigoplus F^\perp$
4. Si φ est définie positive alors φ est non-dégénérée et, de plus, pour tout $F \subset E, F \cap F^\perp = \{0\}$.
Donc les assertions équivalentes du (3) sont vérifiées pour tout $F \subset E$.

Théorème 1

Pour toute forme $\varphi \in \mathcal{H}(E)$, il existe des bases φ-orthogonale.

Théorème 2

Soit $\varphi \in \mathcal{H}(E)$. Alors il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q \leq n$ telle que φ s'écrit, dans une base convenable :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Définition 5

Le couple $(p,q) = (p_\varphi, q_\varphi)$ s'appelle signature de φ. La somme $p+q$ est le rang de φ. $r_\varphi = \dim E - \dim \ker \varphi = \operatorname{rang} \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ dans n'importe quelle base $\mathcal{E}$ de E.
La forme est définie positive ssi $(p_\varphi, q_\varphi) = (n, 0)$, et alors la base du théorème 2 est orthonormée.

Exercice résolu !!!

4.2 Espaces hermitiens

Définition 6

Un espace hermitien est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdots, \cdots \rangle$. On note : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \forall x \in E$.
Dans la suite $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace hermitien de dimension n.

Proposition 3 (Propriétés du produit scalaire)

Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$, alors :

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénité)
2. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle$
3. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$ et l'égalité se réalise ssi il existe un $\lambda \in \mathbb{C}, x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
4. Inégalité triangulaire (Minkowski) :
   $\|x+y\| \geq \|x\| + \|y\|$ et l'égalité se réalise ssi il existe un $\lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
5. Identité de la médiane :
   $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

4.2.1 Projections orthogonales

Définition 7

Pour tout $F \subset E$, on a $E = F \bigoplus F^\perp$.
Pour tout $x \in E, \exists!(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp, x = x_F + x_{F^\perp}$.
On définit $p_F \in \mathcal{L}(E)$ par $p_F(x) = x_F$.
On a aussi $p_{F^\perp} = x_{F^\perp}$, c'est-à-dire $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$.

Les distances, angles, volumes dans E sont ceux de l'espace euclidien $E_{\mathbb{R}}$ de dimension $2n$.
Soit $(f_1, \cdots, f_k)$ une base orthogonale de F. Alors :

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle f_j, x\rangle}{\|f_j\|^2} f_j$$

Remarque 13. *On ne peut pas inverser f_j et x.*

4.2.2 Endomorphisme adjoint

Définition 8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

s'appelle adjoint de u^*.

Proposition 4 (Propriétés de l'adjoint)

Soient $u, v\mathcal{L}(E), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a :

1. Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée, alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u^*) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u)^*$
2. $(\lambda u + \mu v)^* = \overline{\lambda} u^* + \overline{\mu} v^*$
3. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
4. $(u^*)^* = u$
5. $u \in \mathrm{GL}(E) \implies (u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$
6. Si $F \subset E$ est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.
7. $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^*)$

4.2.3 Endomorphismes unitaires

Définition 9

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit unitaire si une des propriétés équivalentes suivante est vérifiée :

1. $\|u(x)\| = \|x\| \forall x \in E$
2. $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \forall x, y \in E$
3. u est inversible et $u^{-1} = u^*$
4. $A^* G A = G$
5. Pour une base orthonormée : $A^{-1} = A^*$
6. Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée, et A est la matrice de u dans cette base, alors les colonnes de A (resp les lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ pour son produit scalaire hermitien standard.

Définition 10 (Matrices unitaires et spéciales unitaires)

$$\mathcal{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*$$
$$\mathcal{SU}(n) = \{A \in \mathcal{U}(n) \mid \det A = 1\}$$

Remarque 14. $A \in \mathcal{U}(n) \iff A^*A = I_n \implies \overline{\det A} \cdot \det A = 1 \implies |\det A| = 1$

On a aussi $\mathcal{U}(E)$ pour les endomorphismes unitaires de E et $\mathcal{SU}(E)$ des endomorphismes unitaires de déterminant 1.

4.2.4 Le cas de la dimension 2

Proposition 5

$$\mathcal{U}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\alpha\bar{b} \\ b & \alpha\bar{a} \end{pmatrix} \mid (a,b,\alpha) \in \mathbb{C}^3,\ |a|^2 + |b|^2 = 1, |\alpha| = 1 \right\}$$
$$\mathcal{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Démonstration. !!!!!!!!!!!! □

Remarque 15. $\mathcal{O}(n) \subset \mathcal{U}(n) \subset \mathcal{SO}(2n)$

4.2.5 Endomorphismes auto-adjoints

Définition 11

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit autoadjoint ou hermitien si $u = u^*$. On note $\mathcal{H}_E$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints.

Proposition 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $u \in \mathcal{H}_E$
2. Il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{H}_n$
3. Pour toute base orthonormée, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{H}_n$.
4. L'application $\psi : E \times E \to \mathbb{C}, (x,y) \to \langle x, u(y)\rangle$ est une forme hermitienne.
5. $\forall x \in E, \langle x, u(x)\rangle \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Exercice. □

Définition 12

Un endomorphisme $u \in \mathcal{H}_E$ est positif ($u \geq 0$) si $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0$. Si, de plus, $\langle x, u(x) \rangle = 0 \implies x = 0$, on dit que u est défini positif ($u > 0$).
On notera $\mathcal{H}_E^{++} \subset \mathcal{H}_E^{+}$

4.2.6 Diagonalisation en base orthonormée

Lemme 4.2.1. *Soient $u \in \mathcal{H}_E$, (resp $u \in \mathcal{U}(E)$), F un sous-espace de E stable par u, $u_F \in \mathcal{L}(E)$ la restriction de u. Alors :*

1. *$F^\perp$ est aussi stable par u,*
2. *$u_F \in \mathcal{H}_F$ (resp $u_F \in \mathcal{U}(F)$)*

Démonstration. Indication : Revoir la démonstration dans le cas de $\mathcal{S}_E, \mathcal{O}(E)$ □

Lemme 4.2.2. *Les valeurs propres d'un endomorphisme unitaire sont de valeur absolues* 1.

Démonstration. Soient $u \in \mathcal{U}(E), \lambda$ une valeur propre de $u, v \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre de valeur propre $\lambda : u(v) = \lambda v$. Alors $u \in \mathcal{U}(E) \implies \|u(v)\|^2 = \|v\|^2$.
Or, $\|u(v)\|^2 = \|\lambda v\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2$.
Donc $|\lambda|^2 \|v\|^2 = \|v\|^2$. De plus, $v \neq 0 \implies \|v\|^2 \neq 0$.
Donc $|v|^2 = 1$ et $|\lambda| = 1$. □

Lemme 4.2.3. *Les valeurs propres d'un endomorphisme hermitien sont réelles.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 7

Soit $u \in \mathcal{H}_E$ (resp $u \in \mathcal{U}(E)$). Alors il existe des bases orthonormées de E pour lesquelles $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est diagonale aux éléments diagonaux complexes de valeur absolue 1.

Démonstration. Par les lemmes $2, 3$, il suffit de démontrer qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u. On le fait par récurrence sur $n = \dim E$.
Si $n = 1$, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $\frac{v}{\|v\|}$ forme une base orthonormée voulue.
Soit $n > 1$. Alors le polynôme caractéristique P_u de u possède une racine $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, et u a un vecteur propre $v_1 \in E \setminus \{0\}$ de valeur propre $\lambda_1 : u(v_1) = \lambda_1 v_1$.
Soit $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ et $F = \mathbb{C} \cdot v_1$.
Alors F est stable par u, et donc $F^\perp$ est stable par u et $u_{F^\perp} \in \mathcal{H}_{F^\perp}$. (resp $u_{F^\perp} \in \mathcal{U}(F^\perp)$) par le lemme 1.
Puisque $\dim F^\perp = n - 1$, l'hypothèse de récurrence donne une base orthonormée $(e_2, \cdots, e_n)$ de $F^\perp$ et $\lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ telle que $u(e_2) = \lambda_2 e_2, \ldots, u(e_n) = \lambda_n e_n$. En ajoutant e_1, on obtient une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Corollaire 1

Soit $u \in \mathcal{H}_E$, alors :

$$u \in \mathcal{H}_E^{+} \iff \mathrm{Spec} u \subset \mathbb{R}, \; u \in \mathcal{H}_E^{++} \iff \mathrm{Spec} u \subset \mathbb{R}_+^*$$

Définition 13

Une matrice $A \in \mathcal{H}_n$ est positive (resp definie positive) ssi son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$ (resp $\mathbb{R}_+^*$).

EXERCICE RESOLU 2

4.3 Décomposition polaire

Théorème 3

Soit $u \in \mathcal{H}_E^+$. Alors $\exists ! v \in \mathcal{H}_E^+, u = v^2$.

Démonstration. de l'existence.

Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où $\mathrm{Spec} u = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$.

(une telle base existe d'après la prop 6).

On définit $v \in \mathcal{L}(E)$ en donnant sa matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(v)$: $B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Alors $B^2 = D \implies v \circ v = u$.
De plus, $B^* = B$, où B est la matrice de v dans UNE BASE ORTHONORMÉE, donc $v \in \mathcal{H}_E$.
Puisque $\mathrm{Spec} v = \{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+,\ v \in \mathcal{H}_E^+$. □

Lemme 4.3.1. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E), fg = gf$. Alors :*

1. *Tout sous-espace propre de f est stable par g.*
2. *f, g ont un vecteur propre commun.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec} f$. Alors $F = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace de E non-nul.
Pour tout $x \in F,\ f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, donc $g(x) \in F$.
Donc F est stable par g et g induit un endomorphisme $g_F \in \mathcal{L}(F)$ par la réstriction à F.
Sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme d'un espace vectoriel non nul a un vecteur propre, donc il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $x \in F \setminus \{0\}$ tel que $g_F(x) = g(x) = \mu x$.
Ce vecteur x est un vecteur propre commun de f, g : $f(x) = \lambda x, g(x) = \mu x, x \neq 0$. □

Lemme 4.3.2. *Deux endomorphismes hermitiens commutants $f, g \in \mathcal{H}_E$ admettent une diagonalisation simultanée en base orthonormée :*

$$\exists \mathcal{E} \in \mathcal{B}_{on}(E), \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f), \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) \text{ sont diagonales.}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n = \dim E$.
Le cas $n = 1$ est évident.
Soit $n > 1$, et soit $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre commun de f, g : $\exists \lambda_1 \in \mathrm{Spec} u \subset \mathbb{R},\ \exists \mu_1 \in \mathrm{Spec} g \subset \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = \lambda_1 x,\ g(x) = \lambda_1 g(x)$.
Alors $F = \mathbb{C}x$ est stable par f, g donc $F^\perp$ est stable par f, g et les restrictions $f_{F^\perp}, g_{F^\perp}$ sont aussi hermitiennes.
Puisque $\dim F^\perp = n - 1$, par l'hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_2, \cdots, \lambda_n, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée $(e_2, \cdots, e_n)$ de $F^\perp$ telle que $\forall i = 2, \ldots, e_n,\ f(e_i) = \lambda_i e_i,\ g(e_i) = \lambda_i e_i$.

On a $F \bigoplus F^\perp = E$, donc en ajoutant $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$, on obtient une base $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ orthonormée de E pour laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = D,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

□

Démonstration. (De l'unicité dans le théorème 3)
Soit $u \in \mathcal{H}_E^+$.
On a montré l'existence d'un $v \in \mathcal{H}_E$ tel que $v^2 = u$, montrons maintenant l'unicité.
Soit $v \in \mathcal{H}_E^+$ tel que $v^2 = u$. Alors $vu = uv = v^3$, donc, par le lemme précedent, il existe une base orthonormée de E, $\mathcal{E}$ dans laquelle $f = u, g = v$ s'écrivent par les matrices diagonales plus haut avec $\lambda_i, \mu_i \geq 0$.
Soit $\lambda \in \{\lambda_i\}$ et soient $i_1, \ldots, i_k$ tous les indices pour lesquels $\lambda_i = \lambda$.
Alors $\mathrm{Vect}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = V_\lambda(u)$, le sous-espace propre de valeur propre $\lambda : V_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$.
Puisque $u = v^2, \forall i \in \{i_1, \cdots, i_k\}, u(e_i) = \lambda_i e_i = v(v(e_i)) = \mu_i e_i$.
Donc $\lambda_i = \mu_i^2$, de plus, $\mu_i \geq 0$ (car $v \in \mathcal{H}_E^+$), donc $\mu_i = \sqrt{i} = \lambda$ pour tout $i \in \{i_1, \cdots, i_k\}$.
Donc la restriction $v_{|V_\lambda(u)} = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{V_\lambda(u)}$.
On a démontré :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}u, \forall x \in V_\lambda(u), v(x) = \sqrt{\lambda}x$$

Puisque $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}u} V_\lambda(u)$, chaque vecteur $x \in E$ a une unique représentation de la forme $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Secu}} \sqrt{\lambda} x_\lambda$. On a démontré l'unciité de v. □

Théorème 4

Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Alors il existe une uniqu paire $(w, p) \in \mathcal{U}(E) \times \mathcal{H}_E^{++}$ telle que $u = wp$. (on appelle cette représentation la décomposition polaire de u.)

Remarque 16. *En dimension* 1*,* $\mathcal{L}(E) \cong \mathbb{C}$*, et* $\forall u \in C^*$*, on peut écrire* $u = re^{i\theta}, r = |u| \in \mathbb{R} = \mathcal{H}_E^{++}, \theta \in \mathbb{R}$ *et* $e^{i\theta} \in \mathcal{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$*.*

Démonstration. **EXISTENCE :**
On a $u^*u \in \mathcal{H}_E^{++}$ (exercice !, donc il existe $p \in \mathcal{H}_E^{++}$ tq $v^2 = u^*u$.
On pose $w = up^{-1}$. Alors :

$$ww^* = wp^{-1}(p^{-1})^*u^* = up^{-1}(p^*)^{-1} = u(p^*p)^{-1}u^* = u(p^2)^{-1} = u(u^*u)^{-1}u^* = uu^{-1}(u^*)^{-1}u^* = \mathrm{Id}_E$$

.
Pour $w \in \mathcal{U}(E)$, l'existence est démontrée.
UNICITÉ :
Soient $u = wp = \tilde{w}\tilde{p}$ deux décompositions de ce type.
On a : $u^*u = (wp)^*wp = p^*w^* = p^*\mathrm{Id}_E p = p^*p = p^2$, mais aussi $u^u = (\tilde{w}\tilde{p})^*\tilde{w}\tilde{p} = p^2$. Donc $p, \tilde{p} \in \mathcal{H}_E^{++}$ sont deux racines carrées de u^*u, par le théorème précedent, $p = \tilde{p}$.
Alors $\tilde{w} = u\tilde{p}^{-1} = up^{-1} = w$.
Donc $(\tilde{w}, \tilde{p}) = (w, p)$. □

Corollaire 2

Pour toute $M \in \mathcal{H}_n^+$, il existe une unique $P \in \mathcal{H}_n^+$ telle que $M = P^2$.

Corollaire 3

Pour toute $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une unqiue paire $(\Omega, P) \in \mathcal{U}(n) \times \mathcal{H}_n^{++}$ telle que $M = \Omega P$.

Démonstration. On applique les deux théorèmes à l'endomorphisme u_M de $\mathbb{C}^n$ de matrice M. $\square$

Corollaire 4

Pour toute $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique $P \in \mathcal{H}_n^+$ telle que $M = P^2$, et cette P est réelle, $P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Corollaire 5

Pour toute $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique paire $(\Omega, P) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{H}_n^{++}$ telle que $M = \Omega P$, et cette paire est réelle, $(\Omega, P) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

EXERCICE CORRIGÉ 3 EXERCICE CORRIGÉ 4

4.4 Compléments

On considère E un espace hermitien de dimension n.

4.4.1 Endomorphismes normaux

Définition 14

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $uu^* = u^*u$.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $A^*A = AA^*$.

Remarque 17. *$u \in \mathcal{H}(E)$ ou $u \in \mathcal{U}(E) \implies u$ est normal.*

Proposition 8

Si u est normal, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

Démonstration. On démontre par récurrence sur $n = \dim E$.
L'assertion est triviale si $n = 1$. On suppose maintenant que $n \geq 2$.
Puisque le polynôme caractéristique $P_u(\lambda)$ possède des racines complexes, u a une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, et, $F_1 = \ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.
Si $F_1 = E$, toute base orthonormée de E convient. Soit $F_1 \neq E$.
Puisqu u, u^* commutent, les espaces prorpes de u sont stables par u^*. Donc F_1 est stable par u^*.
Cela entraine que $F_1^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$. Puisque $(u_{|F_1^\perp})^* = u^*_{|F_1^\perp}$ la restriction $u_{F_1^\perp}$ est un endomorphisme normal de $F_1^\perp$.
On a $\dim F_1^\perp = n - \dim F_1 \in \{1, \cdots, n-1\}$ donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $F_1^\perp, u_{F_1^\perp}$: il existe une base orthonormée $(e_{k+1}, \cdots, e_n)$ de $F_1^\perp$ formée de vecteurs propre de u, où $k = \dim F_1$.
En la complétant par une base orthonormée $e_1, \cdots, e_k$ de F_1, on obtient une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. $\square$

Notations :

$\mathcal{N}(E) = \{\text{endomorphismes normaux de E}\}$
$\mathcal{N}(\mathbb{C}) = \{\text{matrices normales}\} = \{$matrices des endomorphismes normaux de $\mathbb{C}^n$ par rapport au produit scalaire stan

Et la proposition entraine :

$$\mathcal{N}_n(\mathbb{C}) = \left\{ P^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P \mid (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n, P \in \mathcal{U}(n) \right\}$$
$$\bigcup$$
$$\mathcal{H}_n = \left\{ P^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P \mid (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, P \in \mathcal{U}(n) \right\}$$

Exemple 2 (de matrices normales)

1. Tout multiple complexe d'une matrice unitaire, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2(\mathbb{C})$ car $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(2)$
2. Tout multiple complexe d'une matrice hermitienne, par exemple $2i \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & -4i \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2(\mathbb{C})$.
3. Toute matrice diagonale complexe, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2(\mathbb{C})$

Remarque 18. *Attention : en général, si $\mathcal{E}$ est une base de $E, u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ n'implique pas $u \in \mathcal{N}(E)$.*
Cette implication a lieu sous une hypothèse supplémentaire : $\mathcal{E}$ est une base orthonormée.

EXERCICE 5

5 Question de cours

1. La bijection naturelle entre les hyperplans de E et les classes de proportionnalité des formes linéaires sur E p4
2. Existence d'une base antéduale. 5
3. Isomorphisme canonique $E \cong E^{**}$ p6
4. Théorème de classification des formes quadratiques sur E pour $K = \mathbb{R}$ p 15
5. $\dim F + \dim F^{\perp} = n$, où F est un sous-espace de E et φ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur E p10
6. Inégalité de Cauchy—Schwarz dans un espace hermitien p37
7. Paramétrisation de SU(2) et de U(2) p39
8. La caractérisation des espaces hermitiens p39
9. Deux endomorphismes hermitiens commutants sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée p41