Continuité des fonctions réelles

Lily Gallois, Louis Loiseau

2019

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$

1 Premières définitions

Définition 1

f est continue en x_0 si et seulement si la limite de f en x_0 existe et vaut $f(x_0)$.

f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeur dans $\mathbb{R}$.
Fonction continue en aucun point
Soit f la fonction de Dirichlet, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

Preuve ? À partir de l'exemple précédent, il est même possible de construire une fonction discontinue partout...sauf en un point. En posant cette fois f telle que $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon, on obtient une fonction qui n'est continue qu'en 0.<

Proposition 1

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de de la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions.

On déduit directement de la stabilité par combinaison linéaire et par produit les opérations élémentaires sur les fonctions continues. De plus, la composée de fonctions continues est une fonction continue.

Théorème 1

Caractérisation séquentielle de la continuité
f est continue en x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Il arrive parfois qu'une fonction soit discontinue en un point - par exemple - et l'on aimerait bien pouvoir "recoller les deux bouts", c'est possible grâce au prolongement par continuité :

Définition 2

Prolongement par continuité
On suppose ici que x_0 est un point adhérent à I n'appartenant pas à I.
On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 lorsque f admet une limite finie ℓ en x_0.
On définit alors une nouvelle fonction $\tilde{f}$:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} & : & I \cup \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ \ell \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ sur $I \setminus \{0\}$.
On sait que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 et on peut alors définir la nouvelle fonction :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in I \setminus \{0\}$ n'est pas prolongeable par continuité car sa limite en 0 n'est pas finie.

Définition 3

Continuité par morceaux sur un segment
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une subdivision de I
La restriction de f aux intervalles $]a_{i-1}; a_i[$ est continue sur $]a_{i-1}; a_i$
si elle admet une limite à droite en a_{i-1} et une limite à gauche en a_i .
On dit que (a_i) est une subdivision adaptée à f.

La fonction partie entière est continue par morceaux sur tous les $]a, a+1[$, avec $a \in \mathbb{Z}$

2 Théorème des valeurs intermédiaires et applications

Théorème 1

Si f est définie et continue sur l'intervalle I, alors l'image $f(I)$ est aussi un intervalle.

On peut reformuler ce théorème en disant que si $[a, b]$ est un segment, alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Démonstration. On veut montrer que si $y \in [f(a), f(b)]$, alors il existe $c \in [a, b], f(c) = y$.
Sans perte de généralité, on peut supposer $f(a) < y < f(b)$.
Soit $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant y\}$, un ensemble non-vide ($a \in A$) et majoré (par b). A possède donc une borne supérieure c, montrons que c'est la solution recherchée.
Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'élements de A qui converge vers c. Par continuité, $f(c) = \lim f(x_n)$ et, par passage à la limite, $f(v) \leqslant y$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $y_n = c + \frac{b-c}{n}$. On a $y_n \in [a, b]$ et $y_n > c$, d'où $y_n \notin A$, et donc $f(y_n) > y$. Comme (y_n) est décroissante et minorée, elle converge, en l'occurrence vers c, et, par continuité à nouveau, $f(c) = \lim f(y_n)$. D'où $f(c) \geqslant y$. $\square$

Fonction non-continue vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires
La fonction de Conway en base 13 est une fonction qui vérifie la propriété

des valeurs intermédiaires (et même plus) mais qui est discontinue en tout point.
Ce théorème extrêment utile permet nottament la recherche des zéros d'une fonction. Nous en présenterons ici deux, la recherche dichotomique ainsi que la méthode de Newton-Raphson, beaucoup plus rapide. (convergence quadratique)
Recherche dichotomique
Méthode de Newton-Raphson
Une des applications les plus directes du TVI, et aussi une des plus utilisées, et son corrolaire : le théorème de la bijection. Il faut avoir en tête que si f est une fonction strictement monotone, alors le réel c de l'énoncé est unique...

Théorème 2

Théorème de la bijection
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle $[f(a), f(b)]$.

3 Continuité uniforme

Nous présentons maintenant une propriété plus forte que la continuité, définie dans les espaces métriques et dépendant de la distance considérée.

Définition 1

Continuité uniforme
Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques.
Une application $f : E \to E'$ est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, d(x, y) \leqslant \eta \to d'(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$$

On voit clairement qu'une fonction uniformémet continue est continue, mais il faut néanmoins faire attention, la continuité uniforme n'implique pas nécessairement la continuité. En effet, les fonctions carré et racine carrée sont continues, mais seulement la fonction racine carrée est uniformément continue.
Voyons maintenant dans quel cas une fonction continue est uniformément continue.

Théorème 1

Heine
Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Démonstration. □

Introduisons un nouveau type de fonction uniformément continue, vérifiant aussi une propriété plus forte que la continuité. (Mal dit)

Définition 2

Fonction lipschitzienne
Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques.
Une application $f : E \to E'$ est k-lipschitzienne si :

$$\exists k > 0, \forall (x, y) \in E, d(f(x), f(y)) \leqslant kd'(x, y)$$

On a ainsi régulé f, graphiquement, cela se traduit par le fait que la pente de f sera toujours inférieure à k en valeur absolue.

Remarque 3.0.1. *Si $k \in [0; 1[$, f est contractante.*

Théorème 2

Si f est lipschitzienne sur I, alors elle est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Soit $x, y \in I$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$. Alors :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant \varepsilon$$

□

Finir démo Fonction uniformémement continue non lipschitzienne
Soit $f : x \to \sqrt{x}$. f est définie est continue sur $\mathbb{R}_+$
Voyons maintenant une application pratique des fonctions lipchitzienne, plus particulièrement des fonctions contractantes.

Théorème 3

Point fixe (Banach-Picard) Supposons f contractante telle que $f(I) \subset I$. Alors :

1. f admet un point fixe ℓ dans I
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ

Démonstration. □

4 Équicontinuité

Pour cette section, nous ferons un pas dans l'analyse fonctionnelle.

Définition 1

Équicontinuité d'une famille de fonctions
Soient (E, d) un espace métrique, J un ensemble d'indices.
La famille $(f_j)_{j\in J}$ est équicontinue en $x \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \text{un voisinage de } x, \forall y \in V, \forall j \in J, d(f_j(x), f_j(y)) \leqslant 0$$

La famille (f_j) est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E.

Proposition 1

Si (f_i) est une suite équicontinue de fonctions, et si elle convergement simplement vers f, alors f est continue.

Définition 2

Une partie A d'un espace topologique X est relativement compacte dans X si sa fermeture est compacte.

Théorème 1

Ascoli Si K est un espace compact, F un espace uniforme et $A \subseteq \mathcal{C}(K, F)$ muni de sa structure uniforme.
Alors A est relativement compact si et seulement si A est équicontinue et, pour tout x dans K, l'ensemble $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$ est relativement compact dans F.