M62. 2. EXEMPLES DE MÉTHODES DE RÉSOLUTION

O. GOUBET

1. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Rappelons le résultats suivant. Soit A une matrice $d \times d$ à coefficients réels. Soit b une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On cherche un vecteur Y dans $\mathbb{R}^d$ solution de

$$\dot{Y} = AY + b(t). \tag{1.1}$$

Proposition 1.1. *L'ensemble des solutions de* (1.1) *est un espace affine de dimension d inclus dans l'ensemble des fonctions continues du $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $b = 0$ l'ensemble des solutions de* (1.1) *est un espace vectoriel de dimension d.*

Dans le cas $b = 0$ on dit que l'équation est homogène.

1.1. Equations homogènes.

On va donner une méthode abstraite de résolution de (1.1). Rappelons que l'ensemble des matrices réelles $d \times d$ est un espace vectoriel de dimension finie donc peut être considéré comme un espace de Banach réel.

Définition 1.2. *On appelle exponentielle de matrice e^A la série normalement convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.*

Proposition 1.3. *L'ensemble des solutions de $\dot{Y} = AY$ est l'ensemble des $Z(t) = \exp(tA)Y_0$ où Y_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. L'ensemble des fonctions qui s'écrivent $\exp(tA)Y_0$ est clairement un espace vectoriel réel. De plus $Y_0 \mapsto \exp(tA)Y_0$ est une bijection dans cet espace est de dimension d.

Il reste à vérifier qu'une fonction de la forme $\exp(tA)Y_0$ est solution de l'équation $\dot{Y} = AY$. On commence par le calcul suivant

$$e^{tA}e^{sA} = \sum_{j,k} \frac{(tA)^k (sA)^j}{k!j!} = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{j+k=m} \frac{m! t^k s^j}{k!j!} \Big) \frac{A^m}{m!} = e^{(t+s)A}. \tag{1.2}$$

Par conséquent

$$(e^{(t+s)A} - e^{tA})Y_0 = (e^{sA} - Id)e^{tA}Y_0 = se^{tA}Y_0 + o(s). \tag{1.3}$$

On en déduit que $\frac{d}{dt}\exp(tA)Y_0 = A\exp(tA)Y_0$ ce qui conclut. $\square$

Exemple de calcul 1. On cherche à résoudre le système différentiel

$$\dot{x} = 2x + y,$$

$$\dot{y} = -4x - 2y.$$

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice A est de rang 1 donc admet 0 comme valeur propre l'autre valeur propre étant égale à sa trace donc 0 aussi. On en déduit que $A^2 = 0$. Par conséquent

$$e^{tA} = Id + tA = \begin{pmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$x(t) = (1+2t)x_0 + ty_0;\ y(t) = -4tx_0 + (1-2t)y_0.$$

Plus généralement on peut s'appuyer sur le résultat suivant

Proposition 1.4 (Décomposition de Dunford)**.** *Toute matrice A sécrit de manière unique $A = D + N$ avec D diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et N nilpotente vérifiant $DN = ND$. Dès lors $e^{tA} = e^{tD}(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{t^k N^k}{k!})$ où q est le plus petit entier tel que $N^q = 0$.*

Pour calculer la solution sous "forme d'exponentielle-polynôme" on peut être conduit à trigonaliser la matrice A vue comme matrice à coefficients complexes.

Exemple de calcul 2. on cherche à résoudre $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$.

Introduisons $Y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$. Posons $y = \dot{x}$. Alors on cherche à résoudre $\dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} Y = AY$.

La matrice A admet -1 comme valeur propre double. Sa décomposition de Dunford s'écrit alors $A = -Id + (A + Id)$, avec $(A + Id)^2 = 0$. Donc

$$\exp(tA) = (Id + t(A + Id))\exp(-t) = \exp(-t)\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & -1-t \end{pmatrix}.$$

On en déduit $x(t) = \exp(-t)(x_0 + t(x_0 + y_0))$.

Donnons une méthode alternative de résolution. On sait que la solution sécrit sous la forme d'une exponentielle -polynôme. On résoud l'équation caractéristique $e^{rt}(r^2 + 2r + 1) = 0$ ce qui donne $r = -1$ racine double. On a alors l'ensemble des solutions s'écrit $x(t) = ae^{-t} + bte^{-t}$.

1.2. **Equation inhomogène.** On va chercher à calculer une solution particulière de (1.1) par la **méthode de variation des constantes**.

L'idée est de chercher une solution sous la forme $e^{tA}Y_0(t)$ où on fait varier le vecteur constant Y_0. Il vient alors

$$\frac{d}{dt}e^{tA}Y_0(t) = Ae^{tA}Y_0(t) + e^{tA}\dot{Y}_0(t). \tag{1.4}$$

,
Il suffit alors de résoudre $\dot{Y}_0(t) = e^{-tA}b(t)$ soit par exemple $Y_0(t) = \int_0^t e^{-sA}b(s)ds + Y_0$. L'ensemble des solutions est alors

$$Y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds + e^{tA}Y_0.$$

Donnons un exemple de résolution. On cherche les solutions à $\ddot{x}+2\dot{x}+x = \sin(\omega t)$. On réécrit cette équation d'ordre 2 comme un système d'ordre 1 en

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

La méthode de variation des constantes nous conduit à résoudre

$$\dot{Y}_0(t) = e^{-tA}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \exp(t)\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & -1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on résout alors

$$\dot{a} = -te^t \sin(\omega t),$$

$$\dot{b} = e^t(t-1)\sin(\omega t).$$

Par exemple

$$a(t) = -\mathrm{Im}\left(\int_0^t se^{(i\omega+1)s}ds\right) = \mathrm{Im}\int_0^t \frac{e^{i\omega+1)s}}{i\omega+1}ds + \\ -\frac{te^t}{1+\omega^2}(\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)).$$

On finit le calcul aisément.

1.3. **Exemple d'équation à coefficients variables.** On illustre ici sur un exemple la résolution de

$$t\ddot{y} + 2\dot{y} + \omega^2 ty = 0,$$

sous la forme d'une série entière. Notons que respectivement sur le domaine $\{t > 0\}$ où $\{t < 0\}$ il s'agit d'une équation entrant dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz (diviser par t).

L'idée est de cherche une solution sous la forme

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Ceci conduit à résoudre le système infini d'équations sur les coefficients

$$a_1 = 0,$$

$$(n+1)na_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + \omega^2 a_{n-1} = 0.$$

Il vient $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = a_0 \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!}$ soit $y(t) = \frac{sin(\omega t)}{\omega t}$. Une fois que l'on a cette solution particulière on cherche une seconde solution (sans doute pas définie en $t = 0$) sous la forme $z(t) = a_0(t)y(t)$. Il vient alors

$$t\ddot{z} = t^2 a_0 \ddot{y} + 2t\dot{a}_0 \dot{y} + t\ddot{a}_0 y,$$

$$2\dot{z} = 2a_0\dot{y} + 2\dot{a}_0 y,$$

$$\omega^2 tz = \omega^2 t a_0 y.$$

On est donc amené à résoudre avec $\dot{y} = \frac{cos(\omega t)}{t} - \frac{1}{t}y$

$$t\ddot{a}_0 y + \dot{a}_0(2t\dot{y} + 2y) = 0.$$

En posant $w = \dot{a}_0$ il vient

$$\dot{w} + 2w(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{\omega cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}).$$

Il vient alors $\log |w(t)| = -2log|\sin(\omega t)| + C$ et donc $a_0(t) = -\frac{\cos(\omega t)}{\omega \sin(\omega t)}$. On a une deuxième solution qui s'écrit $\frac{\cos(\omega t)}{\omega t}$.

2. Exemples de résolution d'équations non linéaires

2.1. Equations à variables séparées. On cherche ici l'ensemble des solutions de l'équation

$$\dot{y} = f(t)g(y), \tag{2.1}$$

où f, g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Supposons de plus que g est de classe C^1. On est ainsi dans le cadre de Cauchy-Lipschitz. On joint une donnée de Cauchy $y(0) = y_0$.

On va alors discuter suivant la position de y_0 par rapport à l'ensemble des zéros de g, $Z_g = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 0\}$, qui est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Premier cas: $y_0 \in Z_g$. Alors $y(t) = y_0$ est *la* solution maximale du problème de Cauchy.

Second cas: $y_0 \notin Z_g$. Nécessairement il existe a et b deux zéros de g tels que $a < y_0 < b$. Au voisinage de 0, la fonction $t \mapsto g(y(t))$ ne s'annule pas. On résout alors l'équation intégrale (au voisinage de 0)

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{g(y(s))} ds = \int_0^t f(s) ds = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dx}{g(x)}. \tag{2.2}$$

Exemple: résoudre $\dot{y} = \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2}$ avec $y(1) = 1$ en posant $z = \frac{y}{t}$.

Il vient alors une équation à variables séparées

$$\dot{y} = z + t\dot{z} = z + z^2.$$

On résout $z(1) = 1$ et $\int_1^t \frac{ds}{s} = \int_1^{z(t)} \frac{dx}{x^2}$. Par conséquent $\log t = 1 - \frac{1}{z(t)}$. On conclut aisément.

2.2. **équations de Bernouilli et Riccati.** Soit α strictement plus grand que 1. On cherche à résoudre l'EDO où p, q sont des fonctions continues. On se limite à chercher des solutions positives ou nulles de l'équation de Bernoulli.

$$\dot{y} = p(t)y + q(t)y^\alpha.$$

On vérifie que nous sommes dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz. On a alors l'alternative suivante: soit $y(t)$ est identiquement nulle, soit elle ne s'annule jamais. Supposons $y > 0$. On divise alors l'équation par y^α ce qui donne

$$\frac{doty}{y^\alpha} = \frac{p(t)}{y^{\alpha-1}} + q(t).$$

On pose alors $z(t) = y^{-\alpha+1}$. Il vient

$$\frac{1}{1-\alpha}\dot{z} = p(t)z + q(t).$$

Les solutions de l'équation homogènes s'écrivent $a\exp(-\int_0^t (\alpha-1)p(s)ds$. Il reste à trouver une solution particulière.

Une équation de Riccati s'écrit

$$\dot{y} = a(t)y^2 + b(t)y + c(t).$$

Si on connait une solution particulière $\tilde{y}$ alors $z = y - \tilde{y}$ est solution de l'équation de Bernoulli

$$\dot{z} = (b(t) + 2a(t)\tilde{y}(t))z + a(t)z^2.$$

References

[1] M. Artigue, V. Gautheron Systèmes différentiels, étude graphique, Cedic/Fernand Nathan, 1983.
[2] S. Benzoni-Gavage, Calcul différentiel et équations différentielles, Dunod Paris 2010
[3] J-P. Demaily, Analyse numérique et équations différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1996

(Olivier Goubet) Laboratoire Paul Painlevé CNRS UMR 8524, et équipe projet INRIA PARADYSE, Université de Lille, 59 655 Villeneuve d'Ascq cedex.