M62. EXERCICES 5

1. Exercice

On considère ici les solutions du système différentiel dans $\mathbb{R}^2$, i.e. les trajectoires $M(t) = (x(t), y(t))$ solutions de

$$\dot{x} = x(1 + \frac{3}{x^2 + y^2 + 2}),$$
$$\dot{y} = -y(1 - \frac{3}{x^2 + y^2 + 2}).$$

1) Etablir que ce système différentiel autonome entre dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2) Démontrer que

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leq 5(x^2 + y^2);$$

En déduire que les trajectoires existent pour tout temps positif, i.e. que $T_{max} = +\infty$.

3) Démontrer que l'ensemble des trajectoires est symétrique par rapport à $(0, 0)$, i.e. par la symétrie centrale $M \mapsto -M$.

4) Tracer les isoclines I_0 et I_∞. En déduire les points fixes du système.

5) Quelle est la nature de ces points fixes ?

6) Démontrer que les axes $0x$ et $0y$ sont réunions d'orbites.

7) Démontrer que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ la trajectoire $M(t)$ demeure confinée dans le quart de plan $x > 0$ et $y > 0$.

On considère le régionnement suivant.

- $R1 = \{M; x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$

- $R2 = \{M; x^2 + y^2 > 1, x > 0, y > 0\}$

8) Montrer qu'une trajectoire issue de $R1$ à $t = 0$ entre dans $R2$ en temps fini.

9) Montrer qu'une trajectoire issue de $R2$ à $t = 0$ vérifie $\lim_{+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{+\infty} y(t) = 0$.

2. Exercice

On considère ici les solutions du système différentiel, i.e. les trajectoires $M(t) = (x(t), y(t))$ solutions de

$$\dot{x} = x^2 - y,$$

$$\dot{y} = x.$$

1) Ce système est-il dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

2) Démontrer que l'ensemble des trajectoires est symétrique par rapport à l'axe $\{x = 0\}$.

3) Déterminer les isoclines I_0 et I_∞.

4) Déterminer qu'il existe un point fixe pour ce système. Que peut-on dire de la nature de ce point fixe ?

Régionnement: on appelle respectivement

- $R1 = \{M; x > 0 \text{ et } y < x^2\}$.
- $R2 = \{M; x > 0 \text{ et } y > x^2\}$.
- $R3 = \{M; x < 0 \text{ ,et } y > x^2\}$.
- $R4 = \{M; x < 0 \text{ ,et } y < x^2\}$.

5) Représenter le sens de variation de de $x(t)$, $y(t)$, suivant les régions

On considère la trajectoire $M(t)$ issue de $A = (0, \sigma)$ avec $\sigma > 0$ à $t = 0$.

6) Démontrer que cette trajectoire coupe I_∞ en un point B en temps fini.

La trajectoire poursuit alors sa course dans la région $R4$.

7) Démontrer que la trajectoire coupe la droite $y = 0$ en un point C en un temps fini.

8) Démontrer que la trajectoire coupe ensuite la droite $x = 0$ en un point D en un temps fini.

9) Démontrer que cette trajectoire est périodique.

On considère à présent la fonction $\varphi(t) = y(t) - x^2(t) + \frac{1}{2}$.

10) Démontrer que $\varphi(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire que l'on résoudra.

11) Démontrer que la parabole $P = \{M; y = x^2 - \frac{1}{2}\}$ est une trajectoire pour le système différentiel.

12) Dessiner l'allure des trajectoires.