

Feuille d'exercice n°1

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Soit $r \in \mathbf{R}$ et

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto e^{rt} \end{cases}$$

Alors f est deux fois dérivable, et pour $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} f'(t) = r e^{rt} \\ f''(t) = r^2 e^{rt} \end{cases}$$

Donc f est solution de $y'' - 2y' + y = 0$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(r^2 - 2r + 1)e^{rt} = 0$, c'est à dire $r = 1$.

Donc une solution de (E) est donnée par $t \mapsto e^t$.

2) Soit $\varphi: J \rightarrow \mathbf{R}$ une solution de (E); c'est-à-dire :

$$\begin{cases} I \text{ est un intervalle non-vide, non réduit à un point} \\ \varphi \text{ est deux fois dérivable} \\ \forall t \in J, \varphi''(t) - 2\varphi'(t) + \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$g: \begin{cases} J \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varphi(t)e^{-t} \end{cases}$$

g est deux fois dérivable (car φ l'est) et pour tout $t \in J$,

$$\begin{cases} g'(t) = \varphi'(t)e^{-t} - \varphi(t)e^{-t} \\ g''(t) = 0 \end{cases}$$

Or, si $g'' = 0$ sur J un intervalle, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $t \in J$, $g(t) = \lambda t + \mu$.

Ainsi, pour tout $t \in J$, $\varphi(t) = (\lambda t + \mu)e^t$ et φ est restriction à J de

$$\phi_{\lambda, \mu}: \begin{cases} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t \end{cases}$$

Réciproquement, pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\phi_{\lambda, \mu}$ est solution de (E). (vérification directe)

Finalement, les solutions maximales de (E) sont les $\phi_{\lambda, \mu}$.

Remarque : Toutes les autres solutions sont des restrictions de celles-ci.

Exercice 2.

1)

$$(S): \begin{cases} y' = |t|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Nous allons utiliser le *Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, première version*.
Il est clair que f est continue, de plus

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall x, y \in \mathbf{R} |f(t, x) - f(t, y)| = ||t|^{2/3} - |t|^{2/3}|| = 0 \leq 1 \times |x - y|$$

et f est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Donc (S) rend dans le cadre du théorème. Ainsi, (S) admet une unique solution maximale et cette solution est définie sur \mathbf{R} .

2) Notons $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la solution maximale de (S). Alors φ est dérivable et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi'(t) = |t|^{2/3}$ et $\varphi(0) = 0$. Nous allons distinguer plusieurs cas :

— Si $t > 0$, alors $\varphi'(t) = t^{2/3}$ et donc $\varphi(t) = \frac{3}{5}t^{5/3} + c$, avec la condition initiale (en prenant la limite à droite), on trouve $c = 0$.

— Si $t < 0$, alors $\varphi'(t) = (-t)^{2/3}$ et de la même façon, on trouve $\varphi(t) = -\frac{3}{5}(-t)^{5/3}$
Ainsi,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{3}{5}t^{5/3} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -\frac{3}{5}(-t)^{5/3} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Exercice 3.

$$(S) : \begin{cases} y' = |y| + |t| = f(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Alors f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable par l'inégalité triangulaire, donc, pas CL, (S) admet une unique solution maximale et cette solution est définie sur \mathbf{R} . Notons la φ . Alors φ est dérivable, $\varphi(0) = 0$ et, pour tout réel t , $\varphi'(t) = |\varphi(t)| + |t|$. De plus, $\varphi'(t) \geq 0$, donc φ est croissante, or $\varphi(0) = 0$, ainsi

$$\begin{cases} \varphi \geq 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ \varphi \leq 0 \text{ sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$

Distinguons les deux cas.

— Sur $[0, +\infty[$:

$\forall t \geq 0$, $\varphi'(t) = \varphi(t) + t$, donc φ est solution sur $[0, +\infty[$ de $y' - y = t$ (E_+).

Or, les solutions maximales de (E_+) sont les

$$\phi_\lambda : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto -t - 1 + \lambda e^t \end{cases}$$

Recherche d'une solution particulière :

On a : $a(t) = -1$, donc $A(t) = -t$ et $e^{-A(t)} = e^t$ et $b(t) = t$.

$$\int b(t)e^{A(t)} dt = \dots = -(t+1)e^{-t}$$

Donc $e^t(t+1)e^{-t}e^{-A(t)} = -t-1$ est solution particulière.

Ainsi, il existe un réel λ tel que $\varphi = \phi_{\lambda}|_{[0, +\infty[}$, c'est-à-dire, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\varphi(t) = -t-1 + \lambda e^t$.

Or $0 = \varphi(0) = \lambda - 1$ donc $\lambda = 1$. donc sur $[0, +\infty[$, $\varphi(t) = -t-1 + e^t$.

— Sur $] -\infty, 0]$;

Par le même raisonnement, on trouve $\varphi(t) = -t + 1 - e^{-t}$. À faire au moins une fois!

Exercice 4.

- 1) C'est une vérification directe.
- 2) Si (S) entraînait dans le cadre du théorème, alors il aurait une unique solution maximale. Or l'identité est une autre solution maximale.
- 3) Commençons par un rapport de cours.
Soit $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Si $\varphi(t)$ est solution de $y' = F(y)$, alors pour tout réel a , $t \rightarrow \varphi(t + a)$ est également solution. En effet :

$$(\varphi(t + a))' = \varphi'(t + a) = F(\varphi(t + a))$$

Pour $a \geq 0$, considérons :

$$\phi_a : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \phi_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \left(\frac{t-a}{3}\right)^3 & \text{si } t > a \end{cases} \end{cases}$$

Rappel : Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, I un intervalle et $a \in I$. On suppose que f est continue sur I , dérivable (resp \mathcal{C}^1) sur $I \setminus \{a\}$ et que f' possède une limite finie en a . Alors f est dérivable (resp \mathcal{C}^1) sur I et $f'(a) = l$.

Dans notre cas, on peut vérifier assez facilement (distinguer les cas autour de a) que ϕ_a est continue sur \mathbf{R} , \mathcal{C}^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ et que pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$, $\phi_a(t) = 0$ si $t < a$ et $\left(\frac{t-a}{3}\right)^3$ si $t > a$. De plus, $\phi_a'(t)$ tend vers 0 en a . Donc ϕ_a est \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} et on vérifie aisément que $\phi_a(0) = 0$ et que ϕ_a vérifie le système. La conclusion suit.

Exercice 5.

- 1) Le système équivaut à (après simples vérifications) :

$$(S) : \begin{cases} y' + \frac{2t+1}{1+t+t^2} y = 1 + t + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- 2) Soit

$$\psi : t \in \mathbf{R} \rightarrow \frac{\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2}}{1+t+t^2} = t$$

Alors ψ est dérivable sur \mathbf{R} et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$(1+t+t^2)\psi'(t) = (2t+1)\psi(t) = ((1+t+t^2)\psi(t))' = \dots = (1+t+t^2)^2$$

Donc ψ est solution du système.

- 3) Puis que l'équation différentielle est linéaire du premier degré, le système admet une unique solution maximale. C'est-à-dire ψ .

Exercice 6.

1)

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} -4x - 2y + 2e^t \\ 6x + 3y - 2e^t \end{pmatrix}$$

Donc $Y' = AY + b(t)$ où :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$$

$$b: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -2e^t \end{pmatrix} \end{cases}$$

Puisque b est continue, l'ensemble des solutions (maximales) de $Y' = AY + b(t)$ est un espace affine de dimension 2.

2) *Indication* : Il faut déterminer (au brouillon) une solution de la forme

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t \\ y(t) = \beta e^t \end{cases}$$

On en déduit que $\psi: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ est une solution particulière car :

$$— \psi \in \mathcal{C}^1$$

$$— A\psi(t) + b(t) = \psi'(t)$$

3) Les solutions maximales de $Y' = AY + b(t)$ sont les

$$\begin{cases} R \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \psi(t) + e^{tA} X_0 \end{cases}$$

Calculons e^{tA} . A est diagonalisable, on peut montrer que $e^{tA} = P e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}} P^{-1}$ et on calcule

$$e^{tA} X_0 = \begin{pmatrix} -3a - 2b + (4a + 2b)e^{-t} \\ 6a + 4b - (6a + 3b)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, les solutions maximales du système sont :

$$\psi_{a,b}: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} -3a - 2b + (4a + 2b)e^{-t} \\ 6a + 4b - (6a + 3b)e^{-t} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 7. Notons $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$(S) \iff Y' = AY + b \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : A et b ne dépendant pas de t . On peut déterminer une solution particulière constante égale à C :

$$0 = AC + b \iff AC = -b \iff C = -A^{-1}b$$

On remarque que A est bien inversible. L'application $\psi : t \mapsto c \in \mathbf{R}^2$ est solution particulière de (S) (vérification).

Si $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est solution de $AC = -b$ donc $\alpha = \beta = 1$.

Ensuite, on calcule e^{tA} et on a l'ensemble des solutions maximales.