Théorie des Représentations

Louis Loiseau

Résumé

Dans cet article, nous introduirons les notions de base de la théorie des représentations linéaire des groupes finis afin d'étudier les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$ de petit ordre. ($n \leqslant 5$) Afin de condenser nos résultats, nous présenterons la méthode des diagrammes de YOUNG, un outil pratique qui permet de représenter les informations obtenues avec un tableau de n cases selon une certaine organisation.
Le plan suit de (très) près [FH13], et les démonstrations en sont pour la plupart directement reprises. Le gros du travail a été la traduction [1], une nouvelle présentation du sujet adaptée à des étudiants de licence, ainsi que les "petites" démonstrations.
Il est important de noter que ce document a d'abord été rédigé en deuxième année de licence *pour* des étudiants de licence, **néanmoins**, il a été enrichi au fil de l'apprentissage des notions (actions de groupe, produit hermitien,..) mais les prérequis nécessaires à la lecture ne dépassent normalement pas le niveau de L2, les nouvelles notions étant toujours introduites, ce qui n'était pas toujours le cas dans les références (typiquement, le produit tensoriel est quasi-systèmatiquement considéré comme connu, ce qui n'était pas le cas ici.)

1 Représentations des groupes finis

1.1 Définitions

Définition 1. Une représentation d'un groupe fini G sur un espace vectoriel complexe V de dimension finie est un morphisme $\rho : G \mapsto \mathrm{GL}(V)$ de G sur le groupe des **automorphismes** de V. On dit que ρ confère à V une structure de G**-module**.

Avec cette définition, l'étude d'un groupe fini se réduit à l'étude d'une action linéaire de celui-çi sur un espace vectoriel quelconque. Ainsi, on change de

1. A la manière de [HP09], découvert plus tard..

point de vue et on voit les éléments de notre groupe en terme d'applications linéaires. (et donc de matrices !) [2]

Remarque 2. On retrouve aussi la notation équivalente de $\mathrm{Aut}(V)$, mais nous privilégions ici le groupe linéaire pour garder le lien avec l'algèbre linéaire.

Nous dirons parfois, pour simplifier, que V est une représentation de G. On écrira aussi parfois $g \cdot v$ pour dire $\rho(g)(v)$.

Définition 3. Une application φ entre deux représentations V et W est une applications linéaire $\varphi : V \mapsto W$ tel que :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\rho(g)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] & W \end{tikzcd}$$

soit commutatif pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$

Définition 4. Une sous-représentation de V est un sous-espace vectoriel W de V invariants sous l'action de G.

Définition 5. Une représentation V est dite irréductible si V et $\{0\}$ sont différents et sont les deux seuls sous-espaces stables.

Remarque 6. Le dual est une représentation.

1.2 Lemme de Schur et semi-simplicité

Proposition 7. Si W est une sous-représentation de V d'un groupe fini G, alors il existe un sous-espace supplémentaire stable W' de V.

$$V = W \bigoplus W'$$

Démonstration. [FH13]
Nous allons définir un produit scalaire hermitien H sur V invariant par G (c'est-à-dire par n'importe quel g, ou plutot $\rho(g)$).
L'idée fondamentale va être de *moyenniser* pour rendre invariant. Soit H_0 un produit hermitien quelconque sur V, alors on définit H de la façon suivante :

$$H(v, w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H_0(gv, gw)$$

2. Et pour aller plus loin, nous verrons que les opérations sur ce groupe pourront être vues comme addition et produit matriciel.

On vérifie facilement que c'est un produit hermitien, et on peut montrer qu'il est bien invariant par G (c'est un jeu d'écriture dans la somme)
Alors l'orthogonal $W^{\perp}$ est un supplémentaire de W dans V. $\square$

Il existe, dans le même livre, une autre démonstration, en considérant un sous-espace U arbitraire supplémentaire à W, et en posant la bonne application, mais elle est moins intuitive.
On tire de ce résultat le corollaire (fondamental!) :

Corollaire 8. Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

Cette propriété est dite de *semi-simplicité.* [3]

Théorème 9 (Lemme de SCHUR)**.** Soient V et Wdes représentations irréductibles de G est $\varphi : V \longrightarrow W$ une application G-linéaire. Alors

1. φ est soit un isomorphisme, soit identiquement nulle.
2. Si φ est un endomorphisme, alors $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ pour un certain λ complexe.

Démonstration.

1. $\ker \varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$ sont invariants sous l'action de G, et on conclut avec le théorème du rang.
2. φ admet une valeur propre **complexe**, donc $\ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\}$, et on conclut par (1).

$\square$

Ces premiers résultats peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème 10. Toute représentation V d'un groupe fini G, il existe une unique décomposition

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

Où les V_i sont des représentations irréductibles distinctes.

Démonstration. L'existence a été montrée en [8]. L'unicité découle du lemme de SCHUR. $\square$

Ces résultats en main, notre premier objectif dans l'étude de ces représentations, est de décrire toutes les représentations irréductibles d'un groupe G, puis de trouver un moyen d'écrire la somme de [10] dans des cas spécifiques.

3. On trouve aussi, dans la littérature, le terme de « complète réductibilité », par exemple dans des "vieux" travaux de JP Serre ([Ser04]), mais semisimplicité semble être devenu l'usage en France!

Références

[dS] L Pirutka-N de Saxcé. Les représentations du groupe symétrique.

[FH13] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory : a first course*, volume 129. Springer Science & Business Media, 2013.

[HP09] Patrick Hilger and Norbert Poncin. Théorie des représentations du groupe symétrique. 2009.

[Mé18] Ariane Mézard. Algèbre 1. *Cours donné à l'ENS*, 2017-2018.

[RS09] David Renard and Laurent Schwartz. Groupes et représentations. *Ecole polytechnique*, 2009.

[Ser04] Jean-Pierre Serre. Complète réductibilité. *Séminaire Bourbaki*, 2003 :195–217, 2004.