Questions de cours S4

Louis Loiseau

February 2020

1 Intégrales multiples et curvilignes

Proposition 1

L'image d'un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ par une application $f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ est négligeable.

Proof. Puisque $]a,b[$ peut être recouvert par une famille dénombrable de segments on peut se limiter au cas où $]a,b[$ est un segment $[a,b]$.
On a $f = f(t) = (x(t), y(t))$ tel que $x'(t)$ et $y'(t)$ sont continues sur $[a,b]$ donc x' et y' sont bornées et on peut poser $M = \sup_{t\in[a,b]}\{|x'(t)|, |y'(t)|\}$.
Pour tout $t \in]a,b]$, par le théorème de la moyenne, il existe $\xi \in]a,t[$ tel que $x(t) - x(a) = x'(\xi)(t-a)$ donc $|x(t)-x(a)| \leq M(t-a) \leq M(b-a)$, idem pour y, $\forall t \in]a,b]$, $|y(t)-y(a)| \leq M(b-a)$, d'où $f([a,b]) \in Q(f(a), M(b-a))$, le pavé centré en $f(a)$ de coté $2M(b-a)$.

$$Q(P,R) = [x_p - R, x_p + R] \times [y_p - R, y_p + R],\ P = (x_p, y_p)$$

$\mu(Q(P,R)) = 4R^2$, on peut maintenant subdiviser $[a,b]$ en n segments $[t_{i-1}, t_i]$ de longueur $\frac{b-a}{n}$ et appliquer la même majoration à chaque segment $[t_{i-1}, t_i]$.
On obtient $f([t_{i-1}, t_i]) \in Q(f(t_i), M([t_{i-1}, t_i) = Q_i,\ t_i = \frac{i(b-a)}{n}$.
On a donc recouvert $f([a,b])$ par n pavés $Q_i, i = 1, \dots, n$ telle que la somme de leurs aires soit:

$$n\mu(Q_i) = n\left(2 \times \frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{4(b-a)^2}{n}$$

donc:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(Q_i) \mapsto 0$$

Ce qui démontre que $f([a,b])$ est négligeable. □

Théorème 1

Fubini dans $\mathbb{R}^2$
Soient $Q = [a,b] \times [c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : Q \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors:

$$\underline{\iint_Q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \underline{\int_{[a,b]}} \left(\underline{\int_{[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \leq \underline{\int_{[a,b]}} \left(\overline{\int_{[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \leq \overline{\int_{[a,b]}} \left(\overline{\int_{[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Supposons de plus que f est intégrable sur Q alors toutes les inégalités deviennent des égalités et on a:

$$\forall \phi : [a,b] \mapsto \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in [a,b],$$

$$\underline{\int_{[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}y \leq \phi(x) \leq \overline{\int_{[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}y \text{ est } \mathbb{R}\text{-intégrable et } \iint_Q f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b Q(x)\mathrm{d}x$$

Avec les hypothèses de la proposition précedente, et si on suppose la fonction $f : [c,d] \mapsto \mathbb{R}$-intégrable sur $[c,d]$, alors:

$$\iint_Q f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Proof. Pour toute subdivision $\sigma = \alpha \times \beta$ de Q avec $\alpha = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b)$ et $\beta = (c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d)$ on note:

$$\begin{aligned} K_i &= [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, p \\ L_j &= [x_{i-1}, y_i], j = 1, \ldots, n \\ Q_{ij} &= K_i \times L_j \end{aligned}$$

Et on a:

$$\begin{aligned} s(f,\sigma) = \sum_{i,j} (\inf_{x_i y \in L_j} f(x,y)) |K_i \times K_j|) &\leq \sum_i \inf_{x_i} \left(\sum_j (\inf_{y_j} f(x,y)|L_j|)|K_i| \right) \\ \leq \sum_i \inf_{x_i} \left(\underline{\int_{[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) |K_i| &\leq \sum_i \sup_{x_i} \left(\int_{[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}y \right) |K_i| \\ \leq \sum_i \sup_{x \in K_i} \left(\sum_j \sup_{x_j} f(x,y)|L_j| \right) |K_i| &\leq \sum_{i,j} \sup_{(x,y) \in K_i \times L_j} f(x,y)|K_i \times L_j| = S(f,\sigma) \end{aligned}$$

On passe à la limite avec

$$\lambda(\sigma) = \max(|K_i|, |L_j|) \to 0$$

Ce qui montre l'inégalité. $\square$

Proposition 2

Si $f \leq 0$, alors l'existence d'une limite $\lim\limits_{i\to\infty} \int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x$ pour un épuisement (E_i) de E entraine la convergence de $\int_E f(x)\mathrm{d}x$

Proof. Soit (E'_k) un autre épuisement.
Alors (E_{kn}), où $E_{kn} = E'k \cap E_n$ est un épuisement de E'_k.
Par la proposition II/1), on a:

$$\int_{E'_k} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E_{kn}} f(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = A$$

Puisque $f \leq 0,\ E'_k \subset E'_{k+1}$, la suite $\left(\int_{E'_k} f(x)\mathrm{d}x\right)$ est croissante, majorée par A, d'où l'existence de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E'_k} f(x)\mathrm{d}x = B \leq A$$

Les rôles de E'_k et (E_n) étant symétrique, on a $A \leq B$ d'où $A = B$. □

Coordonées sphériques dans $\mathbb{R}^n$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose $x_n = r\cos\theta_1$. On s'occupe ensuite de $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ (projection sur l'hyperplan). On a donc, par récurrence:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta_1 \times \cdots \times \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1 \times \cdots \times \cos\theta_{n-1} \\ \vdots \\ r\sin\theta_1 \times \cdots \times \sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-i=1} \\ \vdots \\ r\cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$x_i = r\left(\prod_{j=1}^{n-i}\sin\theta_j\right)\cos_{n-i=1} \quad \theta_n = 0$$

Si on paramètre une boule $\overline{B}_n(O,R)$;

$$\overline{B}_n(O,R) = \{(x_1,\dots,x_n),\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le R^2\} \quad 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta_1 \le \pi, \dots 0 \le \theta_{n-2} \le \pi, 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi$$

Alors $J\phi = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} (\sin\theta_{n-1-1})^i$
On montre par réccurence que $V_{\overline{B}_n(O,R)} = cnR^n$ et on en déduit une relation de recurrence pour c_n : $c_1 = 2, c_2 = \pi, c_3 = 4/3\pi$.

$$\begin{aligned} V_{B_n(R)} &= \int_{-R}^{R} c_{n-1}(R^2 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x_n \quad \text{avec } x_n = R\sin\varphi \\ &= c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{pi/2}(R\cos\varphi)^{n-1}\dot{R}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= c_{n-1}R^n\int_{-\pi/2}^{pi/2}(\cos\varphi)^n\mathrm{d}\varphi \\ &= c_nR^n \text{ avec } c_n\int_{-\pi/2}^{pi/2}(\cos\varphi)^n\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Notons $I_m = \int_{-\pi/2}^{pi/2}(\cos\varphi)^n\mathrm{d}\varphi$. En intégrant 2 fois par parties on a

$$I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2}$$

.
On peut itérer: $I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2} = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)}I_{m-4}, \dots$ On note $k!!$ le produit des entiers entre 1 et k de même parité que k. On obtient:

$$I_{2k+1} = 2 \times \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},\ I_{2k} = \pi \times \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$
\begin{aligned}
c_{2k=1} &= c_{2k} \times 2 \times \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \\
&= c_{2k-1} \times 2\pi \times \frac{1}{2k+1} \\
&= c_{2k-3} \times \frac{2\pi}{2k+1} \times \frac{2\pi}{2k-1} \\
&= c_1 \times \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}
\end{aligned}
$$

De même;

$$
\begin{aligned}
c_{2k} &= c_{2k-1} \times \pi \times \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \\
&= c_{2k-2} \times 2 \times \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \times \pi \times \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \\
&= c_{2k-2} \times \frac{2\pi}{2k} \\
&= c_{2k-4} \times \frac{2\pi}{2k} \times \frac{2\pi}{2k-2} \\
&= c_2 \times 2 \times \frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!}
\end{aligned}
$$

D'où:

$$
V_{B_{2k+1}(R)} = 2 \times \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \times R^{2k+1} \text{ et } V_{B_{2k}(R)} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} \times R^{2k}
$$

Le $(n-1)$ volume de la sphère $\mathcal{S}^{n-1}(R)$ est donné par:

$$
\delta B_n(R) = \frac{\delta B_n(R)}{\mathrm{d}R} = n c_n R^{n-1}
$$

Théorème 2

Equivalence d'arcs reguliers de même support géométrique
Soit $\gamma : I \mapsto R^n$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ $(k > 0)$ de support géométrique $\Gamma = \gamma(I)$.

1. Tout arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ de support géométrique Γ est $\mathcal{C}^k$-équivalent à γ.
2. Les arcs réguliers de classe $\mathcal{C}^k$ de supporte géométrique Γ présentent exactement deux orientation: celle de γ et son opposée.

Proof. Soit $\gamma : I \mapsto \Gamma,\ \ \tilde{\gamma} : \tilde{I} \mapsto \tilde{J}$ deux arcs réguliers de classe $\mathcal{C}^k$ de support $\Gamma = \gamma(I) = \tilde{\gamma}(\tilde{I})$.
Alors $\varphi = \gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ et $\psi = \varphi^{-1} = \tilde{\gamma}^{-1}\gamma$ sont des bijections mutuellement inverses entre I et $\tilde{I}$.
Il suffit alors de démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^k$, la continuité de ψ suivra par symétrie.
En effet, la seconde assertion est une conséquence évidente du fait que toute bijection continue entre deux intervalles est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.
Soit $s_0 \in \tilde{I}, t_0 = \varphi(s_0) \in I$. Montrons que $\varphi \in \mathcal{C}^k$.
Par définition, $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \cdots, \gamma'_n(t)$ ne s'annulle en aucun point de I, donc: $\exists i, \gamma'_i(t_0) \neq 0$.
Par continuité de γ'_i, il existe tout un intervalle $J \subset I$ tel que $t_0 \in J$ et $\gamma'_i(t)$ ne s'annulle pas et est de même signe que $\gamma'_i - t_0)$. (et est donc de signe constant.)
Alors $\gamma_{i|J} : J \mapsto K$ est une bijection.
De plus, $\kappa = \left(\gamma_{i|J}\right)^{-1} : K \mapsto J$ est de classe $\mathcal{C}^k$, sa dérivée étant: $\kappa'(x) = \frac{1}{\gamma'_i(\kappa(u))}\ \forall u \in K$.
Alors $\Gamma' = \gamma(J) = \gamma(\tilde{J}),\ \tilde{J} \subset \tilde{I}$.
$\tilde{J} = \psi(J)$ et Γ' se projette sur K bijectivement.
On a: $\varphi_{|\tilde{J}} = \kappa \circ \tilde{\gamma}$ est de classe $\mathcal{C}^k$car ${}^ppa \in \mathcal{C}^k$ et $\tilde{\gamma}_i \in \mathcal{C}^k$.
On a démontré que $\varphi \in \mathcal{C}^k(\mathcal{V}(s_0)$ ☐

2 Dualité, formes bilinéaires

Proposition 1

Soit E un K-ev non-nul.

1. $\forall \varphi \in E^* \neq 0,\ \ker\varphi$ est un hyperplan.
2. $\forall$ hyperplan $H \subset E, \exists \varphi \in E^* \neq 0$, unique à un vecteur près, telle que $H = \ker\varphi$

Proof. 1. On a, pour $\varphi \in E^*$:

$$\dim \operatorname{im} E + \dim \ker E = \dim E = n$$

De plus, $\{0\} \subset \operatorname{im} E \subset K \implies \dim E = \{0, 1\}$ Par l'hypothèse $\varphi \neq 0$, $\dim \operatorname{im} E \neq 0$ et donc $\dim \operatorname{im}\varphi = 1$, et donc $\dim \ker\varphi = n - 1$.

2. Soit $H \subset E$ un hyperplan.
Choisissons une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H et complétons-la.
Définissons la forme linéaire $\psi : E \mapsto K$ en donnant sa matrice dans la base chosie:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

C'est-à-dire: $\psi : \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_n$.
Alors $\psi(e_i) = \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ donc $\psi|_H = 0$.
Mais $\psi(e_n) \neq 0$ donc $H \subset \ker\varphi$ et, en particulier, $H = \ker\varphi$ car $\dim H = \dim\ker\varphi$

□

Proposition 2

Soit E un K-ev de dimension n. Alors toute base $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$ admet une unique base antéduale.

Proof. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base quelconque de E. Posons $a_{i,j} = \mathcal{E}_i(f_j),\ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$.
On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}_i) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$.
$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\sum \lambda_i \mathcal{E}_i) = \sum \lambda_i (a_{i1}, \ldots, a_{in})$
Pour $\varphi \in E^*$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$.
On en conclut que $(\mathcal{E}_i)$ est libre, et donc que les lignes de A sont libres.
Donc A est inversible. Alors le systeme linéaire:

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où 1 est à la ième position, a une unique solution.} \tag{1}$$

Ce système exprime l'égalité:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \mathcal{E}_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathcal{E}_j(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k a_{jk} \end{aligned}$$

Notons cette unique solution $e_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$.
On a donc démontré, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'existence et l'unicité de $e_i \in F$ tel que $\mathcal{E}_j(e_i) = \delta_{ij}$.

Il reste à montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base. Notons la solution X de (1) par $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On obtient $B = (b_{ij})$ tq $e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
La propriété $\mathcal{E}_i(e_j) = \delta_{ij}$ se réécrit $AB = I_n$.
Donc B est inversible et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, liée avec $(f_1, \dots, f_n)$ par la matrice de passage B. □

Théorème 1

Soit E un K-ev. Alors il existe $\phi : E \mapsto E^{**}$ tq:

$$\forall v \in E, \forall l \in E^*, \varphi(v)(l) = l(v) \tag{2}$$

Si, de plus, E est de dimension finie, φ est un isomorphisme.

Proof.

1. Pour chaque v de E, la fonction $E^* \mapsto K, l \mapsto l(v)$ est linéaire, donc est un élement de E^{**}.
   On pose $\varphi(v) = l$.
   On a donc défini une application $\varphi : E \mapsto E^{**}$ satisfait (2).
   Pour tout $l \in E^*, l(v)$ est linéaire, donc φ aussi. Et donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, E^{**})$.

2. Soit $\dim E = n$. Si $v \in E \setminus \{0\}$, on peut compléter v en une base $v = e_1, \dots, e_n$ de E.
   On peut alors trovuer une forme linéaire dans E^* qui ne s'annulle pas sur v.
   On peut choisir $l = e_1^*$, où (e_i^*) est la base duale de la base (e_i).
   Mais alors $l(v) = l_1(v_1) = 1 \neq 0$.

   Donc $\varphi(v) \neq 0$ car $\varphi(v)$ est une forme linéaire sur E^* qui prend la vleur $l(v) = 1 \neq 0$ sur l. On a montré $\ker \varphi = \{0\}$.

3. En dimension finie, l'injectivité implique la bijectivité, et donc ϕ est un isomorphisme.

□

Théorème 2

Classification des formes quadratiques sur les espaces réels de dimension finie.]
Soit q une forme quadratique sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors il existe un unique $p \in \{1, \dots, n\}$ tel que q s'écrit, dans une base convenable, par la matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} I_p & (0) & (0) \\ (0) & -I_q & (0) \\ (0) & (0) & (0) \end{pmatrix}$$

Où $q = r - p,\ r = \mathrm{rg}(q)$ $(0 \leq r \leq n)$

Proof. On sait qu'il existe une base orthogonale $(\mathcal{E}_i)$ telle que $\lambda_i = q(e_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq p,\ \lambda_i = q(e_i) < 0$ pour $p+1 \leq i \leq p+q$.
Alors la matrice de q est de la forme du théorème dans la base:

$$\mathcal{E}' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} e_{p+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n \right)$$

Montrons maintenant l'unicité.
Le nombre $p+q$ est déterminé par q, car $p + q = r$ est le rang de q.
Il reste à démontrer que p est déterminé par q.
Soient $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases orthogonales dans lesquelles:

$$q(e_1) = \dots = q(e_p) = 1; \quad q(e'_1) = \dots = q(e'_{p'}) = 1$$

$$q_{e_{p+1}} = \cdots = q(e_r) = -1 \quad q(e'_{p'+1}) = \cdots = q(e'_r) = -1$$
$$q(e_i) = q(e'_i) = 0 \forall i = r+1, \cdots, n$$

. Soient $V = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, $W = \mathrm{Vect}(e'_{p'+1}, \ldots, e'_n)$
Alors $\forall x \in V \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i^2 q(e_i) \end{aligned} \qquad = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0$$

Pour $x \in W, q(x) \leq 0$ de la même façon.
Donc $V \cap W = \{0\}$, et alors $\dim V + \dim W \leq n$, c'est-à-dire, $p + n - p' \leq n$, d'où $p \leq p'$.
Les rôles de p, p' étant symétriques, on a aussi $p' \leq p$, donc $p = p'$. $\square$

Théorème 3

Soit $F \subset E$. Si φ est non-dégénérée, on a:

$$\dim F^{\perp} + \dim F = n$$

Proof. Soient $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F, complétons-la en une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E. On note $a_{ij} = a_{ji} = \varphi(e_i, e_j), A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$.
Pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a:

$$x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(e_i, x) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \hfill \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Puisque $\ker \varphi = \{0\}$, A est non-dégénérée, donc les k premières lignes de A sont linéairements indépendantes. Le système est alors de rang k.
Son espace de solution étant en bijection linéaire avec $F^{\perp}$, on conclut que $\dim F^{\perp} = n - k$ $\square$