Уравнения Лапласа и Пуассона для электростатического потенциала (вывод с использованием уравнений Максвелла), краевые условия и их физический смысл, краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

Определения:

Уравне́ние Пуассо́на — эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает

- электростатическое поле,
- стационарное поле температуры,
- поле давления,
- поле потенциала скорости в гидродинамике.

Оно названо в честь французского физика и математика Симеона Дени Пуассона.

Это уравнение имеет вид:

$$\Delta\varphi = f,$$

где Δ — оператор Лапласа, или лапласиан, а f — вещественная или комплексная функция на некотором многообразии.

В трёхмерной декартовой системе координат уравнение принимает форму:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x,y,z) = f(x,y,z).$$

В декартовой системе координат оператор Лапласа записывается в форме ∇^2 и уравнение Пуассона принимает вид:

$$\nabla^2\varphi = f.$$

Если f стремится к нулю, то уравнение Пуассона превращается в уравнение Лапласа (уравнение Лапласа — частный случай уравнения Пуассона):

$$\Delta\varphi = 0.$$

Уравнения максвела:

Название	СГС[29]	СИ	Примерное словесное выражение
Закон Гаусса	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$	Электрический заряд является источником электрической индукции.
Закон Гаусса для магнитного поля	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	Магнитные заряды не обнаружены.[30]
Закон индукции Фарадея	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	Изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле.[30]
Теорема о циркуляции магнитного поля	$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	Электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле

Жирным шрифтом в дальнейшем обозначаются векторные величины, курсивом — скалярные.

Введённые обозначения:

- ρ — объёмная плотность стороннего электрического заряда (в единицах СИ — Кл/м³);
- $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока (плотность тока проводимости) (в единицах СИ — А/м²); в простейшем случае — случае тока, порождаемого одним типом носителей заряда, она выражается просто как $\mathbf{j} = \mathbf{u}\rho_1$, где $\mathbf{u}$ — (средняя) скорость движения этих носителей в окрестности данной точки, ρ_1 — плотность заряда этого типа носителей (она в общем случае не совпадает с ρ)[31]; в общем случае это выражение надо усреднить по разным типам носителей;
- c — скорость света в вакууме (299 792 458 м/с);
- $\mathbf{E}$ — напряжённость электрического поля (в единицах СИ — В/м);
- $\mathbf{H}$ — напряжённость магнитного поля (в единицах СИ — А/м);
- $\mathbf{D}$ — электрическая индукция (в единицах СИ — Кл/м²);
- $\mathbf{B}$ — магнитная индукция (в единицах СИ — Тл = Вб/м² = кг•с$^{-2}$•А$^{-1}$);
- ∇ — дифференциальный оператор набла, при этом:
  $\nabla\times\mathbf{E} \equiv \operatorname{rot}\mathbf{E}$ означает ротор вектора $\mathbf{E}$,
  $\nabla\cdot\mathbf{E} \equiv \operatorname{div}\mathbf{E}$ означает дивергенцию вектора $\mathbf{E}$.

Вывод:

Электростатика [править | править код]

Уравнение Пуассона является одним из важнейших уравнений электростатики. Нахождение $\Phi(r)$ для данного f — важная практическая задача, поскольку это обычный путь для нахождения электростатического потенциала для данного распределения заряда. В единицах системы СИ:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где ϕ — электростатический потенциал (в вольтах), ρ — объёмная плотность заряда (в кулонах на кубический метр), а ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума (в фарадах на метр).

В единицах системы СГС:

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho.$$

В области пространства, где нет непарной плотности заряда, имеем:

$$\rho = 0,$$

и уравнение для потенциала превращается в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2\phi = 0.$$

Уравнение Пуассона выводится из закона Гаусса и определения статического потенциала:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot(-\nabla\phi) = -\nabla\cdot\nabla\phi = -\nabla^2\phi,$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Краевые задачи:

Задачей Дирихле называется краевая задача, состоящая из уравнения Лапласа и граничных условий первого рода:

$$\Delta U = 0$$
$$U|_{\Gamma} = \mu(x, y, z)$$

Задачей Неймана разновидность краевой задачи, состоящая из уравнения Лапласа и граничных условий второго рода (задано не значение функции а ее производная)

$$\Delta U = 0$$
$$U'|_{\Gamma} = \nu(x, y, z)$$

Задача Дирихле решение для Лапласа:

уравнению Лапласа

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0,$$

а на его границе $\Gamma = \{(r,\varphi) | r = r_0\}$ *- условию*

$$u|_{\Gamma} = \mu(\varphi)$$

и непрерывную в замкнутом круге $\bar{D} = \{(r,\varphi) | 0 \le r \le r_0\}$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi,\ n = 0, 1, 2, \ldots \quad (7.30)$$

Таким образом, формально полученное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге имеет вид

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (7.31)$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются равенствами (7.30).

Формула Пуассона для потенциала, внутренняя и внешняя задачи Дирихле

Формула Пуассона:

Потенциал точечного заряда [править | править код]

Потенциал, источником которого служит точечный заряд,

$$\Phi_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

— то есть кулоновский потенциал - есть по сути (а строго говоря при $q = 1$) функция Грина

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

для уравнения Пуассона,

то есть решение уравнения

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\ ,$$

где $\delta(x)$ - обозначение дельта-функции Дирака, а произведение трех дельта-функций есть трехмерная дельта-функция, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В связи с этим ясно, что решение уравнения Пуассона с произвольной правой частью может быть записано как

$$\Phi(x, y, z) = \int \rho(\xi, \eta, \zeta)\Phi_1(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}d\xi d\eta d\zeta.$$

- Здесь имеется в виду наиболее простой случай «без граничных условий», когда принимается, что на бесконечности решение должно стремиться к нулю. Рассмотрение более общего случая произвольных граничных условий и вообще более подробное изложение - см. в статье Функция Грина.
- Физический смысл последней формулы - применение принципа суперпозиции (что возможно, поскольку уравнение Пуассона линейно) и нахождение потенциала как суммы потенциалов точечных зарядов ρdV.

Внутренняя и внешняя задачи Дирихле

Вернемся к задаче Дирихле. Допустим перед нами стоит КЗ:

$$\Delta U = 0$$
$$U|_\Gamma = \mu(x, y, z)$$

Предположим, что перед нами Γ - это окружность. Но мы можем рассматривать область внутри окружности или снаружи окружности. Как нам известно, чтобы задать область, одной формулы функции недостаточно, нужно неравенство.

Чтобы не было недосказанности, обычно используют термин "Внутренняя задача Дирихле" когда рассматривается область внутри Γ и внешняя задача Дирихле когда рассматривается область снаружи поверхности.

Внутренняя задача Дирихле:

Внутренняя задача Дирихле

Рассмотрим двумерный случай:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$
$$U|_\Gamma = \mu(x, y)$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 = R^2$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$U_{rr} + U_r\frac{1}{r} + U_{\phi\phi}\frac{1}{r^2} = 0$$
$$U(R, \phi) = \mu(\phi)$$
$$\mu(\phi) = \mu(\phi + 2\pi k), k \in \mathbb{N}$$
$$\mu(0 - d\phi) = \mu(0 + d\phi)$$

Решаем методом разделения переменных:

$$U = R(r)\Phi(\phi)$$

После подстановки (Для разделения переменных умножим на r^2 и разделим на $R\Phi$:

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}$$

Как видим перед нами классический пример с разделяющимися переменными и мы можем получить из него систему из двух ОДУ:

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ r^2R''+rR'-\lambda R=0\end{cases}$$

Первое ДУ решить достаточно просто, второе чуть посложнее. Здесь сразу важно упомянуть, что у нас есть очень интересное условие: Поскольку перед нами полярная система координат, то вдоль "окружности" наше граничное условие должно быть непрерывным, иными словами

$$\mu(0)=\mu(2\pi)\implies\mu(\phi)=\mu(\phi+2\pi k),k\in\mathbb{N}$$

Из этого условия несложно восстановить значение константы разделения:

$$\begin{gathered}U(R,0)=U(R,2\pi)\\ R(R)\Phi(0)=R(R)\Phi(2\pi)\\ \Phi(0)=\Phi(2\pi k),k\in\mathbb{N}\end{gathered}$$

Это возможно только если функция Φ Это линейная комбинация синусов и косинусов, причем $\lambda=n^2,n\in\mathbb{N}$

$$\Phi(\phi)=\sum_n A_n\sin(n\phi)+B_n\cos(n\phi)$$

Теперь имея уже знания о константе разделения перейдем к решению второго уравнения

$$r^2R''+rR'-n^2R=0$$

Как всегда опустим способ решения неоднородного ОДУ и сразу запишем результат:

$$R(r)=\sum_n C_nr^n+D_nr^{-n}$$

Теперь самое главное. Наша функция **внутри круга** т.е. должна существовать при всех $0\leq r\leq R$, в том числе в нуле. Таким образом, $D_n=0$.

Теперь запишем итоговый ответ (Общее решение нашего уравнения):

$$U(r,\phi)=\sum_n r^n\left(A_n\sin(n\phi)+B_n\cos(n\phi)\right),n\in\mathbb{N}$$

Теперь не забудем про ГУ:

$$U(R,\phi)=\mu(\phi)=\sum_n R^n\left(A_n\sin(n\phi)+B_n\cos(n\phi)\right)$$

$$
\begin{gathered}
U(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \frac{r^n}{R^n}(a_n \sin(n\phi) + b_n \cos(n\phi)) \\
a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mu(\phi)\sin(n\phi)d\phi \\
b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mu(\phi)\cos(n\phi)d\phi
\end{gathered}
$$

Теорема: Если задача Дирихле задана внутри круга, то решение Задачи Дирихле единственно и будет иметь указанный вид

Таким образом полное решение:

Внешняя задача Дирихле

Внешняя задача Дирихле

Внешняя Задача Дирихле накладывает дополнительное условие в бесконечности. Рассмотрим двумерный случай:

$$
\begin{gathered}
U_{xx} + U_{yy} = 0 \\
U|_{\Gamma} = \mu(x,y) \\
\Gamma : x^2 + y^2 = R^2 \\
\lim_{r\to\infty}(U) = 0
\end{gathered}
$$

На самом деле последнее условие является избыточным т.к. будет автоматически выполняться для любого решения, но оно хорошо иллюстрирует физические основы поставленной проблемы. Решение при этом не сильно отличается от решения внутренней здачи Дирихле ровно с одним отличием:

В момент анализа $R(r) = \sum_n C_n r^n + D_n r^{-n}$ на этот раз нулю будут равны все C_n т.к. наше выражение должно стремиться к нулю при $r \to \infty$.

Можно сразу записать ответ:

$$
\begin{gathered}
U(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \frac{R^n}{r^n}(a_n \sin(n\phi) + b_n \cos(n\phi)) \\
a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mu(\phi)\sin(n\phi)d\phi \\
b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mu(\phi)\cos(n\phi)d\phi
\end{gathered}
$$

Как видите, разница только в отношении радиусов.. Меньший радиус всегда делится на больший радиус.

Уравнение Шрёдингера и краевые задачи для стационарных квантовых состояний

Уравнение Шредингера

Уравнение Шредингера описывает волновую функцию - квантовое состояние элементарных частиц. Считается, что любая элементарная частица описывается волновой функцией. В настоящий момент нам достоверно известно, что это хорошее приближение для описания поведения таких частиц, как **Электроны, Мюоны и Тау-частицы**.

Уравнение Шредингера это ДУЧП, схожее с уравнением теплопроводности (что в принципе логично т.к. растекается это "вещество", "тепло" или что-то еще - не принципиально)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z,t)+f(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t)$$

Или поменяв наименования, мы легко можем перейти к другому виду, более привычному нам:

$$i\hbar U_t=-\frac{\hbar^2}{2m}U_{xx}+fU$$

Как уже говорилось в лекции по тепловому уравнению, слагаемое, содержащие саму функцию может быть представлена как тормозящая среда - некое силовое поле. Если тормозащего поля нет, то можно сократить наше уравнение (**Движение свободной частицы**):

$$U_t=\frac{i\hbar}{2m}U_{xx}$$

Есть и другой вариант - можно рассмотреть **стационарные состояния** (случаи наличия внешнего поля и отсутсивя изменений)

$$\frac{\hbar^2}{2m}U_{xx}=fU$$

Как видно, частных случаев может возникнуть достаточно много, однако общее правило должно быть нам понятно:

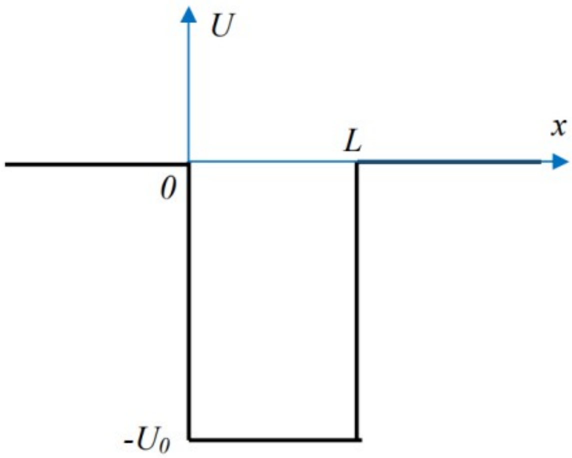
1. Наличие тормозящего воздействия приводит к выравниванию волновой функции и ее падению "по экспоненте"
2. Стационарные состояния и решения в виде $U=XT$ можно представить в виде синусов и косинусов

> Описания выше нам должно быть достаточно с точки зрения физики, дополнительные пояснения - на консультации

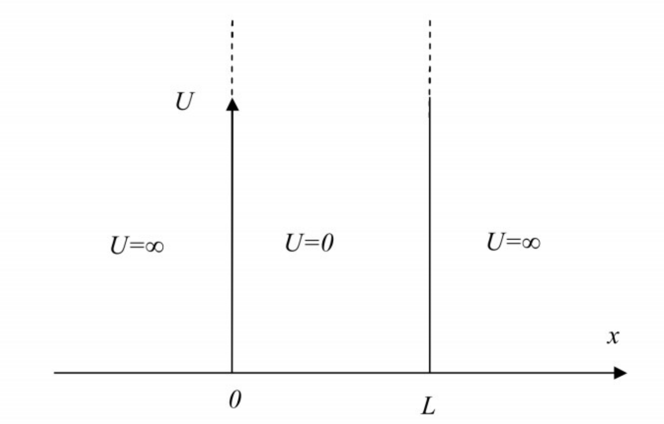
Потенциальная яма и поведение частиц

Потенциальная яма – область пространства, в которой существует локальный минимум потенциальной энергии. Такая модель пригодна для описания многих физических ситуаций. Например, электрон в атоме Бора, электроны проводимости в металлах.

Наиболее просто выглядит одномерная потенциальная яма прямоугольной формы. Потенциальная энергия частицы всюду, кроме отрезка $0 < x < L$ равна нулю, а на нем ее значение $-U_0$. На рисунке ось абсцисс – это пространственная координата x , а ось ординат – потенциальная энергия частицы.



Пусть для энергии микрочастицы, находящейся в потенциальной яме, справедливо $E \sim U_0$. Частица находится вблизи дна ямы. Тогда яму можно считать бесконечно глубокой. Энергию в этом случае удобно отсчитывать от дна ямы, а на стенках считать бесконечной. Одномерная бесконечно глубокая потенциальная яма показана на рисунке. Решение уравнения Шредингера для такой потенциальной ямы оказывается достаточно простым.



Запишем краевую задачу для такого уравнния. Для начала введем замену координат для поиска сационарного решения:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z,t) + f(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t)$$

При этом решение мы ищем в классическом виде с разделяющимися переменными

$$\Psi = Ue^{-itE/\hbar}$$

где E - полная энергия частицы. (почему так получается увидим после подстановки в исходное уравнение)

$$-EUe^{-itE/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta Ue^{-itE/\hbar} + fUe^{-itE/\hbar}$$

Разделим на общий множитель и сгруппируем слагаемые с одной стороны:

$$\Delta U + \frac{2m}{\hbar^2}(E - f)U = 0$$

Или в одномерном случае:

$$U_{xx} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - f)U$$

Или можно сказать, что перед нами классическое решение

$$U = iA\sin(\phi x) + B\cos(\phi x)$$

Обратите внимание, что в отличие от действительного случая у нас тут появилась мнимая еденица. т.е. мы немног можем переписать решение через экспоненциальную форму. Взаимоотношение A и B в данном случае определит фазу числа. Назовем ее k.

$$U = A\exp(ikx)$$

Подставим в исходное выражение

$$-k^2U + \frac{2m}{\hbar^2}(E - f)U = 0$$

Что может быть правдой только при $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Запишем наш итоговый ответ:

$$\Psi = Ae^{-i(Et/\hbar - kx)} = Ae^{-i(\omega t - kx)}$$

Где коэффициент перед переменной времени - **частота**, а перед иксом - **начальная фаза**

Теперь вернемся к нашей исходной задаче:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx} = -f\Psi$$
$$\Psi_{xx} = -k^2\Psi$$
$$\Psi(0) = 0$$
$$\Psi(L) = 0$$

Такое уравнение мы уже решали и решение можем записать через собственные значения:

$$\Psi = A\sin(kx) = A\sin(\frac{\pi n x}{L}) \implies k = \frac{\pi n}{L}$$

И отсюда самое интересное что мы можем увидеть это значение для энергии:

$$E = \frac{(\pi n \hbar)^2}{2mL^2}$$

Следовательно **энергия элементарных частиц в потенциальной яме - дискретна**

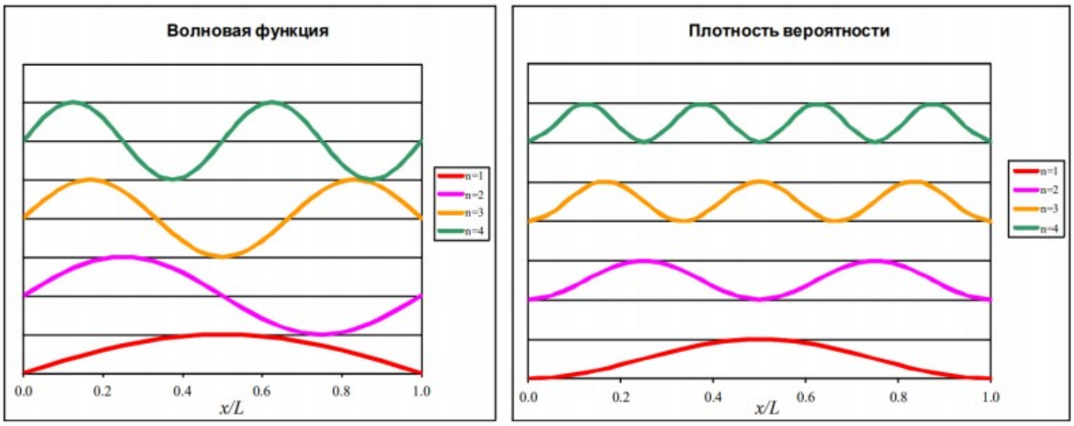
Теперь найдем константу A. Ее найдем из условий нормировки. Вероятность обнаружения частицы в "яме" должна быть равна единице:

$$P(x) = \Psi * \overline{\Psi}$$
$$\int_0^L P(x)dx = \int_0^L \Psi\overline{\Psi}dx = 1$$
$$1 = \int_0^L \Psi\overline{\Psi}dx = A^2\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Это замечание достаточно легко визуализировать -



Как можно заметить, это чем-то похоже на колебания струны. Хотя чему удивляться, если уравнение такое же?

Уравнение электрических колебаний в цепи с распределенными параметрами
телеграфное уравнение (вывод), примеры краевых условий.

Уравнения Лапласа в неограниченном пространстве. Формула Пуассона для потенциала Специальные функции (полиномы Эрмита, гамма-функция), вывод и физическая интерпретация

Специальные функции (функции Бесселя, полиномы Лежандра) Вывод и физический смысл.

Уравнение Гельмгольца (Функции Бесселя)

Давайте рассмотрим уравнение колебаний:

$$U_{tt} = c^2 U_{xx} + f(x,t)$$
$$U(x,t) = X(x)T(t)$$
$$XT'' = c^2 X'' T + f(x,t)$$

Теперь предположим: Допустим что при разложении функция времени $T(x)$ у нас задана не в виде синуса или косинуса, а в виде полного комплексного числа: $T = e^{-iwt}$, тогда ее вторая производная $T'' = -w^2 T$ и исходное уравнение можно переписать, полностью убрав производную по времени.

$$U_{xx} + \frac{w^2}{c^2} U = \bar{f}(x,t)$$

Обратите внимание, что мы разделили на c^2 и функцию внешних сил в том числе.

$$\Delta U + k^2 U = \bar{f}(x,t)$$

Физический смысл такого уравнения? **Перед нами уравнение колебаний в амплитудах**. То есть, вместо того чтобы видеть конкретные значения функции в конкретный момент времени, мы видим амплитуду колебаний в заданной точке. Какое значение функция имеет в тот или иной момент? Иногда это не важно. Например при измерении напряжения в электрической сети переменного тока (в розетке) нам не важно, сколько вольт именно в момент измерения, нам важно сколько собственно вольт там вообще бывает.

Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра

Многочлены Лежандра - очередная функциональная система, которая получается очень просто но при этом имеет очень много применений и глубокий смысл.

Полиномы Лежандра это результат ортогонолизации Грамма Шмидта массива из стандартных полиномов $[1, x, x^2, x^3 \dots]$. при норме:

$$f(x) * g(x) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

В то же время, Полиномы Лежандра это функции, являющиеся решением уравнения потенциала в полярной системе координат, т.е. являются решением задачи Штурма-Лиувилля вида:

$$(x+1)\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}(x+1)U(x)\right) + n(n+1)U(x) = 0$$

Или, если раскрыть скобки:

$$(1 - x^2)U'' - 2xU' + n(n+1)U = 0$$

Что описывает эта задача? Это потенциал поля от объекта который расположен НЕ в начале координат. Иными словами, это форма уравнения Ньютоновского потенциала (это способ найти потенциал поля гравитации Земли не принимая во внимание собственно сам центр Земли, ее плотность и распределение масс, не зная ее радиус точно, а опираясь только на численные измерения потенциальной энергии)

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla F}{\|x - y\|} dV$$

(центр потенциала находится в точке y). Если точка $y = 0$ То уравнение сводится к уравнению обычного потенциала точечного заряда в виде Пуассона.

Криволинейные координаты, основные дифференциальные операторы в криволинейных координатах. Полярные, цилиндрические координаты вращения и сферические координаты, оператор Лапласа в этих координатах.

Понятие о полях. Уравнения полей. Линейные ДУЧП 2-го порядка. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.

Понятие об обобщённых функциях. Дельта-функция и тэта-функция, их свойства. Фурье преобразование обобщённых функций, Фурье преобразование дельта-функции и тэта-функции

1. Основные функции. Будем называть *основной* функцией всякую непрерывную вещественную ограниченную функцию $\varphi(x)$, определенную на всей действительной оси, имеющую непрерывные производные любого порядка и обращающуюся в нуль вне некоторого конечного интервала (как говорят, *финитную* функцию). Примером такой функции

2. Определение обобщенных функций. С помощью всякой обычной функции $g(x)$ (вообще говоря, интегрируемой на любом конечном интервале) можно каждой основной функции $\varphi(x)$ поставить в соответствие число:

$$T_g(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx \stackrel{\text{det}}{=} (g,\varphi), \tag{1.3}$$

где интеграл, очевидно, фактически берется по конечному интервалу, вне которого функция $\varphi(x)$ обращается в нуль.

Заданный таким образом функционал линеен:

$$T_g(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1\,T_g(\varphi_1) + a_2\,T_g(\varphi_2)$$

и непрерывен в следующем смысле: $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(g,\ \varphi_n) = 0$, если последовательность основных функций $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$. Оба свойства очевидным образом следуют из свойств интеграла. Поскольку функционал (1.3) определен для любой основной функции, то говорят, что это линейный функционал на пространстве Ω (подробнее о линейных функционалах см. в [3, глава 4]).

Если на пространстве Ω основных функций задан некоторый линейный непрерывный функционал $T_g(\varphi)$, то будем говорить, что таким образом задана *обобщенная функция* $g(x)$. Обобщенные функции, которые могут быть представлены в виде (1.3), называются обычно *регулярными*, однако ими не исчерпываются все функционалы, которые можно было бы ввести на этом пространстве. Обобщенные функции, не представимые в виде (1.3), называются *сингулярными*. Заметим, что определенная так обобщенная функция *одной* переменной может зависеть еще и от других переменных как от параметров — тогда и функционал $T_g(\varphi)$ также будет в общем случае зависеть от них как от параметров.

Из данного определения ясно, что говорить о значениях обобщенной функции в отдельных точках, вообще говоря, не имеет смысла. Можно, однако, говорить об обращении обобщенной функции в нуль в некоторой области D, если $(g,\varphi) = 0$ для всякой основной функции φ, обращающейся в нуль вне D. Это позволяет определить также равенство двух обобщенных функций в произвольной области (в частности, разумеется, и в $\mathbb{R}$).

Данные выше понятия и определения, очевидно, без труда переносятся на случай многих переменных. Таким образом вводятся обобщенные функции нескольких переменных. Например, регулярная обобщенная функция двух переменных будет определяться кратным двойным интегралом типа (1.3) на пространстве основных функций двух переменных.

на элементарные составляющие — гармонические колебания с разными частотами (подобно тому, как музыкальный аккорд может бы

Преобразование Фурье функции f вещественной переменной является интегральным и задаётся следующей формулой:

$$\hat{f}\,(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}\,dx.$$

Дельта функция

Определения [править | править код]

Существуют различные взгляды на понятие дельта-функции. Получающиеся при этом объекты, строго говоря, различны, однако обладают рядом общих характерных свойств. Все указанные ниже конструкции естественно обобщаются на случаи пространств большей размерности ($\mathbb{R}^n,\ n > 1$).

Простое определение [править | править код]

Дельта-функцию (функция Дирака) одной вещественной переменной можно определить как функцию $\delta(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0; \end{cases}$
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$

То есть эта функция не равна нулю только в точке $x = 0$, где она обращается в бесконечность таким образом, чтобы её интеграл по любой окрестности $x = 0$ был равен 1. В этом смысле понятие дельта-функции аналогично физическим понятиям точечной массы или точечного заряда. Для понимания интеграла полезно представить себе некую фигуру на плоскости с единичной площадью, например, треугольник. Если уменьшать основание данного треугольника и увеличивать высоту так, чтобы площадь была неизменной, то в предельном случае мы получим треугольник с малым основанием и очень большой высотой. По предположению его площадь равна единице, что и показывает интеграл. Вместо треугольника можно без ограничения общности использовать любую фигуру. Аналогичные условия верны и для дельта-функций, определённых на $\mathbb{R}^n$.

Эти равенства не принято считать определением дельта-функции, однако во многих учебниках по физике она определяется именно так, и этого достаточно для точного определения дельта-функции. Отметим, что из данного определения дельта-функции вытекает следующее равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) f(x)\, dx = f(y)$$

(фильтрующее свойство) для любой функции f. Действительно, в силу свойства $\delta(x-y) = 0$ при $x \neq y$ значение этого интеграла не изменится, если функцию $f(x)$ заменить функцией $\tilde f(x)$, которая равна $f(x)$ в точке $x = y$, а в остальных точках имеет произвольные значения. Например, берём $\tilde f(x) = f(y) = \mathrm{const}$, затем выносим $f(y)$ за знак интеграла и, используя второе условие в определении дельта-функции, получаем нужное равенство.

Производные от дельта-функции также почти всюду равны 0 и обращаются в $\pm\infty$ при $x = 0$.

Свойства [править | править код]

- Дельта-функция чётная.
- Интеграл от дельта-функции по любому интервалу, содержащему в себе ноль, то есть интервалу вида $(-a_1,\ a_2)$, где a_1 и a_2 — произвольные действительные положительные числа, равен 1.
- $x\delta'(x) = -\delta(x)$.
- $\delta(f(x)) = \sum\limits_k \dfrac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}$, где x_k — простые нули функции $f(x)$.
- Первообразной одномерной дельта-функции является функция Хевисайда:

  $$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

- Фильтрующее свойство дельта-функции:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)\, dx = f(x_0).$$

Преобразование Фурье [править | править код]

- *В этом параграфе мы будем применять нормировку, соответствующую соглашению о единичном коэффициенте в обратном преобразовании, то есть имея в виду* $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$
- Формулы этого параграфа имеют соответствующие аналоги для многомерного преобразования Фурье.

К дельта-функции можно применить преобразование Фурье:

$$F\{\delta(t - t_0)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega \cdot t_0}.$$

Таким образом, спектр (Фурье-образ) дельта-функции, центрированной в точке t_0, является „волной" в пространстве частот, обладающей „периодом" $\dfrac{2\pi}{t_0}$. В частности, спектр (Фурье-образ) дельта-функции, центрированной в нуле, является константой (нестрого говоря — „волной" с бесконечно большим „периодом"):

$$F\{\delta(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega \cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Соответственно, наоборот - дельта-функция является Фурье-образом чистой гармонической функции или константы.

Функция Хевисайда

Фу́нкция Хевиса́йда (**едини́чная ступе́нчатая функция**, **функция едини́чного скачка**, **включённая едини́ца**, **«ступенька»**) — кусочно-постоянная функция, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице — для положительных[1]. В нуле эта функция, вообще говоря, не определена, однако её обычно доопределяют в этой точке некоторым числом, чтобы область определения функции содержала все точки действительной оси. Чаще всего неважно, какое значение функция принимает в нуле, поэтому могут использоваться различные определения функции Хевисайда, удобные по тем или иным соображениям[⇨], например:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция Хевисайда является первообразной функцией для дельта-функции Дирака, $\theta' = \delta$, это также можно записать как:

$$\theta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt.$$

Преобразование Фурье [править | править код]

Производная **функции Хевисайда** равна дельта-функции (то есть функция Хевисайда — первообразная дельта-функции):

$$\theta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt.$$

Следовательно, применив преобразование Фурье к первообразной дельта-функции $\theta(t)$, получим её изображение вида:

$$\frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{1}{2}\delta(\omega),$$

то есть:

$$\theta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{1}{2}\delta(\omega)\right) e^{i\omega t}\,d\omega$$

(второй член — соответствующий нулевой частоте в разложении — описывает постоянное смещение функции Хевисайда вверх; без него получилась бы нечётная функция).

Общее решение однородного волнового уравнения с постоянными коэффициентами
Уравнение теплопроводности (вывод для одномерной геометрии), краевые условия (вывод).