Лабораторная работа номер 1

Выполнил: Пономарев Александр. Вариант 19.

Постановка задачи, словестное описание:

Струна конечной длины. Оба конца струны закреплены. Струна подвергается воздействию распределенной неоднородной силы: `$ a e^{ -(x - x_0)^2 / ⍰^2 } $`. Параметры: плотность струны, натяжение струны, длина струны, амплитуда силы a, точка приложения силы x_0 (внутри струны) и характерная ширина её распределения γ.

Физический смысл.

Физический смысл задачи описывает колебания струны, которая в начальный момент находилась в покое в положении равновесия и колеблется в результате внешнего воздействия, приложенного к её точке приложения и обеспечивающего перемещение этих концов по заданным законам.

Вывод краевой задачи

Общий вид одноименного волнового уравнения:

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = f(t, x)$$

Для коллебания струны:

$$c^2 = \frac{T}{\rho_l}, f(t, x) = \frac{F(t, x)}{\rho_l}$$

- l – длина струны.
- – фазовая скорость.
- T – сила натяжения струны.
- ρ_l – линейная плотность.

$$f(t, x) = F(t, x)/\rho_l$$

Границы закреплены:

$$\begin{cases} u(t, 0) = 0 \\ u(t, l) = 0 \end{cases}$$

Введем начальные условия:

$$\begin{cases} u(t, 0) = \phi \\ u_t(t, l) = \psi \end{cases}$$

Где: - $\phi(x)$ задает начальное положение точек струны. - $\psi(x)$ задает скорость точек струны в начальный момент времени.

Краевая задача:

$$\begin{cases} u(t,0) = \phi \\ u_t(t,l) = \psi \end{cases}$$

Получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = \dfrac{a}{\rho_l} e^{-(x-x_0)^2/\gamma^2} \\ u(t,0) = \phi \\ u_t(t,l) = \psi \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \end{cases}$$

Первая вспомогательная задача.

Примем $f(t,x) = 0$ и решим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(t,0) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

Тогда уравнения имеет вид:

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda = \begin{cases} +k^2 \\ -k^2 \\ 0 \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Из которой полумаем:

$$X_n(x) = C_n \sin k_n x \qquad \lambda = -k_n^2$$

Где:

$$k_n = \frac{\pi n}{l}$$

Найдем соответствующую T_n(t):

$$T_n'' + \omega_n T_n = 0$$
$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

Где:

$$\omega_n = c k_n = \frac{\pi n c}{l}$$

В силу линейности уравнения:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin k_n x$$

Найдем a_n и b_n из начальных условий:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin k_n x$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin k_n x = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin k_n x$$

В силу единственности разложения в ряд Фурье:

$$a_n = \varphi_n \qquad b_n = \frac{\psi_n}{\omega_n}$$

Где φ_n и ψ_n можно найти непосредственно по формулам коэффициентов ряда Фурье:

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin k_n x dx \qquad \psi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin k_n x dx$$

Решением первой вспомогательно задачи будет:

$$u_1(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t) \sin k_n x$$

Вторая вспомогательная задача.

Примем $f(t,x) \neq 0$ и решим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

Будем искать решение уравнения в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin k_n x$$

Тогда уравнения имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)) \sin k_n x = f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin k_n x$$

В силу единсности разложения в ряд Фурье получим уравнение:

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t)$$

Воспользуемся преобразованием Лапласа:

$$T_n(t) \risingdotseq \mathcal{T}_n(p) = \int_0^{\infty} T_n(t) e^{-pt} dt$$

$$T_n''(t) \risingdotseq p^2 \mathcal{T}_n(p)$$

$$f_n(t) \risingdotseq \mathcal{F}_n(p)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$(p^2 + \omega_n^2) \mathcal{T}_n(p) = \mathcal{F}_n(p)$$

$$\mathcal{T}_n(p) = \frac{1}{\omega_n}\mathcal{F}_n(p)\frac{\omega_n}{p^2+\omega_n^2}$$

Заметим, что:

$$\sin\omega_n(t) \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega_n^2}$$

Тогда свертка:

$$\int\limits_0^t f_n(t)\sin(t-\tau)d\tau \risingdotseq \mathcal{F}_n(p)\frac{\omega_n}{p^2+\omega_n^2} = \mathcal{T}_n(p)\omega_n$$

Из чего получаем:

$$T_n(t) \risingdotseq \mathcal{T}_n(p) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t f_n(t)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

Где $f_n(t)$ можно найти непосредственно по формуле коэффициентов ряда Фурье:

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t,x)\sin k_n x dx$$