Лабораторная работа по "Уравнениям математической физики"

Выполнил: Пономарев Александр
Вариант: 19

1 Постановка задачи

1. Словесное описание

Струна конечной длины. Оба конца струны закреплены. Струна подвергается воздействию распределенной неоднородной силы:

$$F(t,x) = ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{\gamma^2}}$$

Параметры: плотность струны, натяжение струны, длина струны, амплитуда силы a, точка приложения силы x_0 (внутри струны) и характерная ширина её распределения γ.

2. Физический смысл

Физический смысл задачи описывает колебания струны, которая в начальный момент находилась в покое в положении равновесия и колеблется в результате внешнего воздействия, приложенного к её точке приложения и обеспечивающего перемещение этих концов по заданным законам.

В данной задаче используется волновое уравнение, которое описывает малые поперечные колебания однородной струны, продольные колебания стержня и другие колебательные процессы.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x)$$

В случае колебания струны:

$$c^2 = \frac{T}{\rho_l}, \qquad f(t,x) = \frac{F(t,x)}{\rho_l}$$

Где:

- l - длина струны.
- c - фазовая скорость.
- T - сила натяжения струны.
- ρ_l - линейная плотность.
- $h(t,x)$ - плотность распределения внешней силы, дейстующей на струну.

3. Постановка краевой задачи (Кз)

Т.к. концы струны закреплены, используем граничные условия первого рода:

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,l) = 0 \end{cases}$$

Введем начальные условия:

$$\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

Где:

- $\varphi(x)$ задает начальное положение точек струны.
- $\psi(x)$ задает скорость точек струны в начальный момент времени.

В итоге получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + \dfrac{a}{\rho} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\gamma^2}} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

2 Аналитическое решение задачи

1. Первая вспомогательная задача

Примем $f(t,x) = 0$ и решим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(t,0) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

Тогда уравнения имеет вид:

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda = \begin{cases} +k^2 \\ -k^2 \\ 0 \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Из которой полумаем:

$$X_n(x) = C_n \sin k_n x \qquad \lambda = -k_n^2$$

Где:

$$k_n = \frac{\pi n}{l}$$

Найдем соответствующую $T_n(t)$:

$$T_n'' + \omega_n T_n = 0$$

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

Где:

$$\omega_n = c k_n = \frac{\pi n c}{l}$$

В силу линейности уравнения:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin k_n x$$

Найдем a_n и b_n из начальных условий:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin k_n x$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin k_n x = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin k_n x$$

В силу единственности разложения в ряд Фурье:

$$a_n = \varphi_n \qquad b_n = \frac{\psi_n}{\omega_n}$$

Где φ_n и ψ_n можно найти непосредственно по формулам коэффициентов ряда Фурье:

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin k_n x dx \qquad \psi_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(x) \sin k_n x dx$$

Решением первой вспомогательно задачи будет:

$$u_1(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n \cos\omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n}\sin\omega_n t)\sin k_n x$$

2. Вторая вспомогательная задача

Примем $f(t,x) \neq 0$ и решим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

Будем искать решение уравнения в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin k_n x$$

Тогда уравнения примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t))\sin k_n x = f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin k_n x$$

В силу единснственности разложения в ряд Фурье получим уравнение:

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t)$$

Воспользуемся преобразованием Лапласа:

$$T_n(t) = \mathcal{T}_n(p) = \int_0^{\infty} T_n(t)e^{-pt}dt$$

$$T_n''(t) = p^2\mathcal{T}_n(p)$$

$$f_n(t) = \mathcal{F}_n(p)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$(p^2 + \omega_n^2)\mathcal{T}_n(p) = \mathcal{F}_n(p)$$

$$\mathcal{T}_n(p) = \frac{1}{\omega_n}\mathcal{F}_n(p)\frac{\omega_n}{p^2+\omega_n^2}$$

Заметим, что:

$$\sin\omega_n t = \frac{\omega}{p^2+\omega_n^2}$$

Тогда свертка:

$$\int_0^t f_n(t)\sin(t-\tau)d\tau = \mathcal{F}_n(p)\frac{\omega_n}{p^2+\omega_n^2} = \mathcal{T}_n(p)\omega_n$$

Из чего получаем:

$$T_n(t) = \mathcal{T}_n(p) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(t)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

Где $f_n(t)$ можно найти непосредственно по формуле коэффициентов ряда Фурье:

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin k_n x dx = \frac{a}{l\rho}\int_0^l e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\gamma^2}}\sin kx dx$$

Решением второй вспомогательной задачи будет:

$$u_2(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin k_n x$$

В итоге решением исходной краевой задачи будет:

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t) \sin k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin k_n x$$

Где:

- $k_n = \frac{\pi n}{l}$
- $\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \frac{\pi n}{l}$
- $\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin k_n x dx$
- $\psi_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(x) \sin k_n x dx$
- $T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t t_n(t) \sin \omega_n (t-\tau) d\tau$
- $f_n(t) = \frac{a}{l\rho} \int\limits_0^l e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\gamma^2}} \sin kx dx$

3 Постановка разностной задачи

1. Корректность и сходимость разностной задачи

Разностная задача (схема) может быть получена из дифференциальной заменой производных разностными отношениями.

Узлы сетки, значения сеточной функции, в которых использованы для записи разностной задачи, заменяющей краевую задачу, образуют конфигурацию, которую называют шаблоном схемы.

Разностная задача считается корректно поставленной при достаточно малом шаге $|h|$, если:

- она однозначно разрешима относительно любых вхоных данных;
- разностная задача, устойчива, т.е. решение разностной задачи и h непрерывно зависят от правой части уравнения и правых частей граничных условий, причем зависимость равномерна по h

Если разностная схема устойчива, то она сходится.

Сеточная область

$W^{(h)} = [(t_p, x_m), p = 0, 1, 2, ...m\frac{1}{\tau}; m = 0, 1, 2, ..., \frac{1}{h}]$ Где

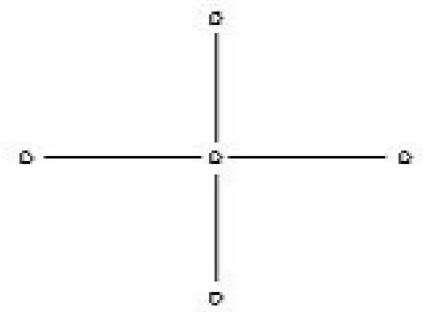
- $t_p = p\tau$, τ - шаг по времени
- $x_m = mh$, h - шаг по координате x

$U^{(h)} = U_m^p$, $p = 0, 1, 2, ..., P$; $m = 0, 1, 2, ..., M$ M - искомая сеточная функция

U_m^p - значения сеточной функции, относящейся к узлу (t_p, x_m)

2. Явная центральная четырехточечная схема

Схема "Крест"



Разностный уравнения для внутренних узлов сетки:

$$\frac{U_m^{p+1} - 2U_m^p + U_m^{p-1}}{\tau^2} - \frac{a^2(U_{m+1}^p - 2U_m^p + U_{m-1}^p)}{h^2} = f_m^p$$

Где:

- $p = 1, 2, ...$;
- $m = 1, 2, ..., M - 1$

Аппроксимация краевых условий:

$$U_0^p = \Psi_1(t_p), \qquad U_M^p = \Psi_2(t_p)$$

Где:

- $p = 1, 2, ...$

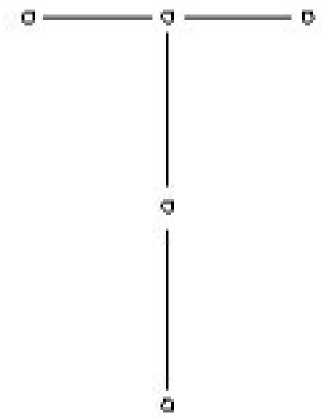
Аппроксимация начальных условий:

$$U_m^0 = \Phi_1(x_m), \qquad \frac{U_m^1 - U_m^0}{\tau} = \Phi_2(x_m)$$

Где:

- $m = 1, 2, ..., M$

3. Неявная схема (1) (шаблон)



Разностные уравнения для внутренних узлов сетки:

$$\frac{U_m^{p+1} - 2U_m^p + U_m^{p-1}}{\tau^2} - \frac{a^2(U_{m+1}^{p+1} - 2U_m^{p+1} + U_{m-1}^{p+1})}{h^2} = f_m^{p+1}$$

Где:

- $p = 1, 2, ...$;
- $m = 1, 2, ..., M - 1$

Аппроксимация краевых условий:

$$U_0^p = \Psi_1(t_p), \qquad U_M^p = \Psi_2(t_p)$$

Где:

- $p = 1, 2, ...$

Аппроксимация начальных условий:

$$U_m^0 = \Phi_1(x_m), \qquad \frac{U_m^1 - U_m^0}{\tau} = \Phi_2(x_m)$$

Где:

- $m = 1, 2, ..., M$

Абсолютно устойчива, но практически не используется, т.к. дает слишком грубые результаты.

4 Выбор шагов по τ и h, точность, устойчивость

1. Дифференциальная краевая задача

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = f(t,x)$$

$$U(t,0) = \psi_1(t)$$

$$U(t,l) = \psi_2(t)$$

$$U(0,x) = \psi_1(x)$$

$$U'(0,x) = \psi_2(x)$$

2. Сеточная область

$$W^h = [(t_p, x_m)], \qquad p = 0,1,...,P \qquad m = 0,1,...,M$$

$$u^h = [u_m^p], \qquad p = 0,1,...,P \qquad m = 0,1,...,M$$

где u_m^p - компонента сеточной функции, относящаяся к узлу (t_p, x_m), $t_p = p\tau$, где τ - шаг по времени, $P\tau = T$, $x_m = mh$, h - шаг по координате, $Mh = 1$

3. "Крест"

3.1 Невязка

Выберем в качестве опорной точку (t_p, x_m), для разностной схемы "Крест"представим значения $[u(t,x)]$, входящие в выражение для ∂f_m^p в виде разложения в ряд Тейлора относительно этой точки.

$$u_m^{p+1} = u_m^p + \partial \frac{u_m^p}{\partial t}\tau + \frac{1}{2!}\partial^2 \frac{u_m^p}{\partial t^2}\tau^2 + \frac{1}{3!}\partial^3 \frac{u_m^p}{\partial t^3}\tau^3 + O(\tau^4)$$

$$u_m^{p-1} = u_m^p - \partial \frac{u_m^p}{\partial t}\tau + \frac{1}{2!}\partial^2 \frac{u_m^p}{\partial t^2}\tau^2 - \frac{1}{3!}\partial^3 \frac{u_m^p}{\partial t^3}\tau^3 + O(\tau^4)$$

$$u_{m+1}^p = u_m^p + \partial \frac{u_m^p}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\partial^2 \frac{u_m^p}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{3!}\partial^3 \frac{u_m^p}{\partial x^3}h^3 + O(h^4)$$

$$u_{m-1}^p = u_m^p - \partial \frac{u_m^p}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\partial^2 \frac{u_m^p}{\partial x^2}h^2 - \frac{1}{3!}\partial^3 \frac{u_m^p}{\partial x^3}h^3 + O(h^4)$$

$$\partial f_m^p = \frac{U_m^{p+1} - 2U_m^p + U_m^{p-1}}{\tau^2} - c^2 \frac{U_{m+1}^p - 2U_m^p + U_{m-1}^p}{h^2} - f_m^p$$

$$\frac{U_m^{p+1} - 2U_m^p + U_m^{p-1}}{\tau^2} = \frac{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial x^2}h^2 + O(h^4) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial x^2}h^2 + O(h^4)}{h^2} = \frac{\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial x^2}h^2 + O(h^4)}{h^2} = \frac{\partial^2 u_m^p}{\partial x^2} + O(h^2)$$

$$\partial f_m^p = (\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_m^p}{\partial x^2} - f_m^p) + O(\tau^2 + h^2)$$

Таким образом, порядок аппроксимации $||\partial f_m^p|| = O(\tau^2 + h^2)$. Однако в данном варианте схемы второе начальное условие аппроксимируется простейшим образом - с первым порядком точности (по t). Поэтому в целом это схема первого порядка. Порядок аппроксимации $||\partial f_m^p|| = O(\tau + h^2)$.

Соответственно точность решения задачи будет зависеть от величины $\tau + h^2$. Т.е. чтобы получить решение с точностью порядка ϵ, нужно выбрать такие τ, h, что $\tau + h^2 \le A\epsilon$, A - скорость сходимости решения, линейная по времени и квадратичная по координате.

3.2 Спектральный признак устойчиости

Спектральный признак состоит в следующем: Заменем праую часть разностного уравнения нулем, краевую зачау - задачей Коши, функцию φ_m заменяем гармоникой $e^{im\omega}$, и ищем решение в виде $u_m^p = \lambda^p e^{im\omega}$, где ω произвольное целое число, $0 < \omega < 2\pi$, Для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы $|\lambda| \le 1$.

Итак, $u_m^p = \lambda^p e^{im\omega}$ поставим в разностное уравнени, получим

$$\frac{\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}}{\tau^2} - c^2 \frac{e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}}{h^2} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2(1 - \frac{2\tau^2 c^2}{h^2}\frac{\omega}{2})\lambda + 1 = 0$$

Произведение корней этого уравнения равно единице. Если дискриминант $D(\omega) = \frac{4\tau^2 c^2}{h^2}\frac{\omega}{2}$ квадратного уравнения отрицателен, то корни $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ комплексно-сопряженные и равны единице по модулю.

Разностная схема устойчива, если выполнено неравентсво $|\lambda| \leq 1$,т.е. когда $\{\ t, h\}$ выраны так, что $\frac{\tau^2 c^2}{h^2} \leq 1$.

4. Неявная схема (1) сшаблоном

4.1. Невязка

Выберем в качестве опорной точку (t_p, x_m), для разностной схемы "Неявна схема (1) с шаблоном"и представим значения $[u(t,x)]$, входящие в выражение для ∂f_m^p в виде разложения в ряд Тейлора относительно точки.

$$u_m^{p+1} = u_m^p + \frac{\partial u_m^p}{\partial t}\tau + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2}\tau^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u_m^p}{\partial t^3}\tau^3 + O(\tau^4)$$

$$u_m^{p-1} = u_m^p - \frac{\partial u_m^p}{\partial t}\tau + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2}\tau^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u_m^p}{\partial t^3}\tau^3 + O(\tau^4)$$

$$u_{m-1}^{p+1} = u_m^{p+1} - \frac{\partial u_m^{p+1}}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^{p+1}}{\partial x^2}h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u_m^{p+1}}{\partial x^3}h^3 + O(h^4)$$

$$u_{m+1}^{p+1} = u_m^{p+1} + \frac{\partial u_m^{p+1}}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^{p+1}}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u_m^{p+1}}{\partial x^3}h^3 + O(h^4)$$

$$\partial f_m^p = \frac{U_m^{p+1} - 2U_m^p + U_m^{p-1}}{\tau^2} - c^2\frac{U_{m+1}^{p+1} - 2U_m^{p+1} + U_{m-1}^{p+1}}{h^2} - f_m^{p+1}$$

$$\frac{U_m^{p+1} - 2U_m^p + U_m^{p-1}}{\tau^2} = \frac{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2}\tau^2 + O(\tau^4) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2}\tau^2 + O(\tau^4)}{\tau^2} = \frac{\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2}\tau^2 + O(\tau^4)}{\tau^2} = \frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2} + O(\tau)$$

$$\frac{U_{m+1}^{p+1} - 2U_m^{p+1} + U_{m-1}^{p+1}}{h^2} = \frac{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^{p+1}}{\partial x^2}h^2 + O(h^4) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u_m^{p+1}}{\partial x^2}h^2 + O(h^4)}{\tau^2} = \frac{\frac{\partial^2 u_m^{p+1}}{\partial x^2}h^2 + O(h^4)}{h^2} = \frac{\partial^2 u_m^{p+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$$

$$\partial f_m^p = (\frac{\partial^2 u_m^p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u_m^{p+1}}{\partial x^2} - f_m^{p+1}) + O(\tau + h^2)$$

Таким образом, порядок аппроксимации $||\partial f_m^p|| = O(\tau + h^2)$.

4.2. Спектральный признак устойчивости

$u_m^p = \lambda^p e^{im\omega}$ подставим в разностное уравнение, получим

$$\frac{\lambda^{p+1}e^{im\omega} - 2\lambda^p e^{im\omega} + \lambda^{p-1}e^{im\omega}}{\tau^2} - c^2\frac{\lambda^{p+1}e^{i(m+1)\omega} - 2\lambda^{p+1}e^{im\omega} + \lambda^{p+1}e^{i(m-1)\omega}}{h^2} = 0$$

$$\frac{\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}}{\tau^2} - c^2\lambda\frac{e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}}{h^2} = 0$$

$$(\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}) - \frac{c^2\tau^2\lambda}{h^2}(\cos\cos\omega - 2) = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - \frac{c^2\tau^2\lambda^2}{h^2}(\cos\cos\omega - 2) = 0$$

$$\lambda^2(1 - \frac{c^2\tau^2}{h^2}(\cos\cos\omega - 2)) - 2\lambda + 1 = 0$$

$$a = (1 - \frac{c^2\tau^2}{h^2}(\cos\cos\omega - 2)) \geq 1$$

$D = 4 - 4a > 0$, если $a < 1$, что невозможно. При $D = 0$

$$a = (1 - \frac{c^2\tau^2}{h^2}(\cos\cos\omega - 2)) = 1$$

$$\frac{c^2\tau^2}{h^2} = 0$$

Тогда

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1(\omega) = \lambda_2(\omega) = 1$$

Если $D < 0$ $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ комплексно-сопряженные и меньше единицы по модулю.
Значит схема устойчива при любых $\frac{c^2\tau^2}{h^2}$.

5 Решение в MATLAB

Струна конечной длины. Оба конца струны закреплены. Струна находится в поле распределенной переменной силы, меняющейся по закону: $F(t,x) = ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{\gamma^2}}$.
Параметры: плотность струны ρ, натяжение струны T, длина струны l, амплитуда a, точка приложения силы x_0 (внутри стрнуы) и характерная ширина ее распределния γ.

Возьмем следующие параметры:

- Точка приложения силы: $x_0 = 0.5$ (м)
- Линейная плотность: $\rho_l = 0.05$ (кг/м)
- Характерная ширина распределения: $\gamma = 2.5$ (м)
- Амплитуда: $a = 0.5$

Тогда наша функция $f(t,x)$ будет иметь вид:

$$f(t,x) = 0.5e^{-\frac{(x-0.5)^2}{2.5^2}}$$

Граничные условия:

- $U(t,0) = 0$
- $U(t,l) = 0$

Начальные условия:

- $U(0,x) = \sin \pi x$
- $U_t'(0,x) = 0$

Используем схему "Крест":

```
c = 10;
l = 1;
ro = 0.03;
a = 6;
omega = 0.8;
f = @(t,x)(a*exp((x - 0.5)^2 / 0.00025))/(l*ro);
u_0x = @(x)sin(pi*x);
Ut_0x = @(x)0;
u_t0 = @(x)0;
u_tl = @(x)0;
st = 1;

save = 0;
X0 = 0; Xl = 1;
T0 = 0; Tl = 5;
N = 1000;
h = (Xl-X0)/N; tau = (Tl-T0)/N;
while(c*tau/h >= 1)
   tau = tau/2;
   h = h*2;
end
M = (Xl-X0) / h;
P = (Tl-T0) / tau;
U = zeros(M+1, P+1);

for m = 1:M+1
    U(m,1) = u_0x(X0+(m-1)*h);
    U(m,2) = tau*Ut_0x(X0+(m-1)*h) + U(m,1);
end

 U(1,2) = u_t0(T0+tau);
 U(M+1,2) = u_tl(T0+tau);


for p = 2:P
    for m = 2:M
    U(m,p+1) = (tau^2)*(f(T0+tau*(m-1),X0+h*(p-1))+((c^2)/(h^2))*(U(m+1,p)-2*U(m,p)+U(m-1,p)))+2*U(m,p)-U(m,p-1);
    end
end

X = X0:h:Xl;
figure;
if(save == 1)
   hold on;
end
for (i = 1:st:P+1)
   plot(X,U(:,i),'b-','linewidth',2);
   axis([0 1 -1.4 1.4]);
   grid on;
   xlabel('x'); ylabel('U(t,x)');
   pause(0.001)
end
```

Результат:

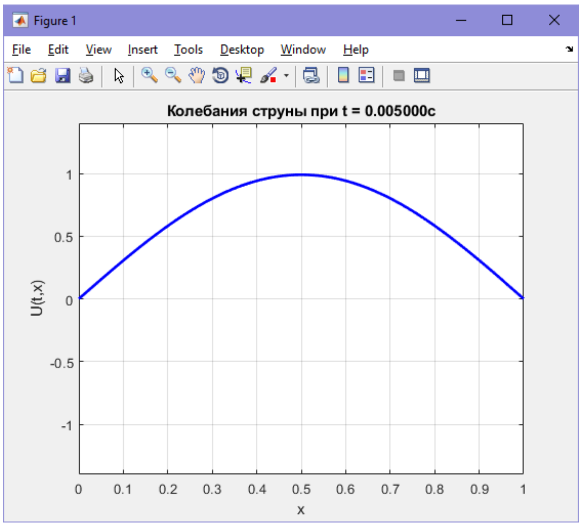


Рис. 1:

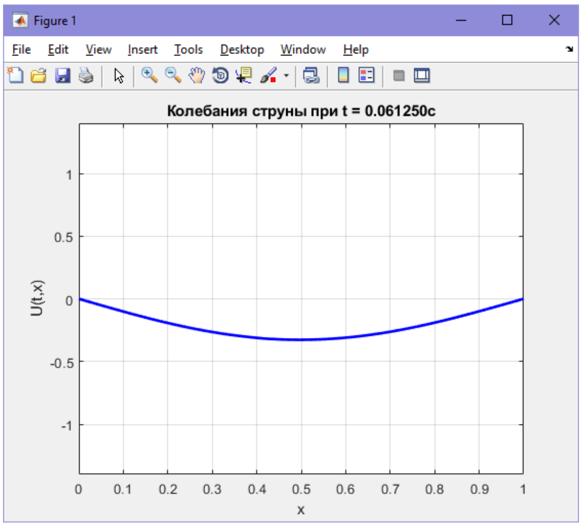


Рис. 2:

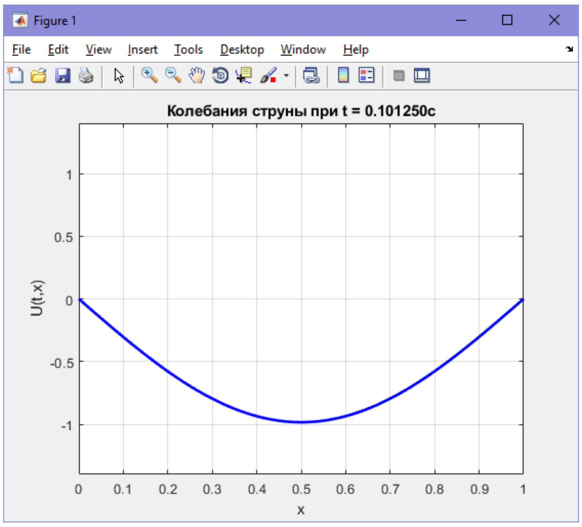


Рис. 3:

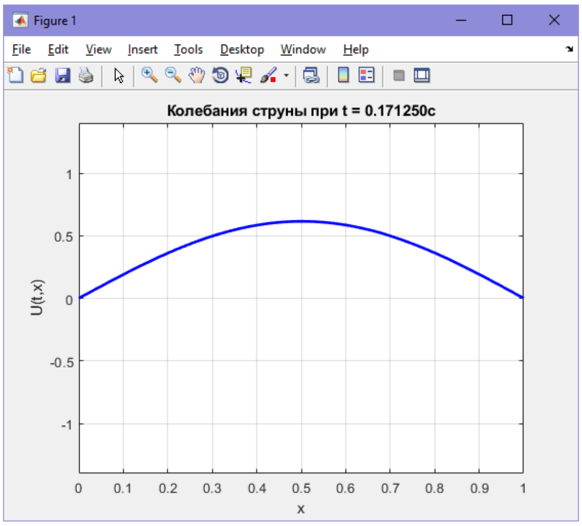


Рис. 4:

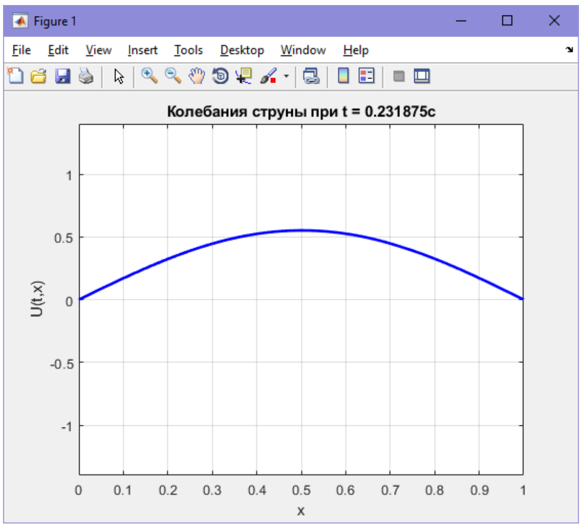


Рис. 5: