Уравнения математической физики
БДЗ-1

Пономарев Александр ПМ-31

1 Найти общее решение однородного ДУЧП.

$$xU_x + 2xU_y = 0$$

Решение:
1. Тривиальное решение при $x = 0$: $U(x, y) = \omega(y)$
2. Решение при $x \neq 0$:
Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2x}$$

Сокращаем $x \neq 0$

$$2dx = dy$$

Интегрируем левую и правую часть

$$2x = y + \phi$$
$$\phi = 2x - y$$

Тогда:

$$U(x, y) = \omega(2x - y)$$

Окончательный ответ:

$$U(x, y) = \begin{cases} \omega(y), & x = 0 \\ \omega(2x - y), & x \neq 0 \end{cases}$$

2 Найти решение задачи Коши.

$$y^2U_x + \frac{x^2}{y^2}U_y = 0$$

$$x = t^5, y = t^3, U(x, y) = e^t$$

Решение:
Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{y^2dy}{x^2}$$

$$x^2dx = y^4dy$$

Интегрируем левую и правую часть

$$\frac{x^3}{3} = \frac{y^5}{5} + \psi$$

$$\psi = \frac{x^3}{3} - \frac{y^5}{5}$$

Общее решение:

$$U(x, y) = \omega(\frac{x^3}{3} - \frac{y^5}{5})$$

Переходим к задаче Коши:

$$g(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^5}{5}$$

$$g(x(t), y(t)) = \frac{t^15}{3} - \frac{t^15}{5} = \frac{2t^15}{15} \Rightarrow t = \sqrt[15]{\frac{15g}{2}}$$

$$t = \sqrt[15]{\frac{15}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{y^5}{5})}$$

Ответ:

$$U(x, y) = exp[\sqrt[15]{\frac{15}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{y^5}{5})}]$$

3 Найти общее решение квазилинейного уравнения.

$$\frac{1}{\sin(x)}U_x + \frac{2}{x^3}U_y = U$$

Решение:
Составим дифференциальное уравнение:

$$\sin(x)dx = \frac{x^3}{2}dy = \frac{dU}{U}$$

1.

$$\sin(x)dx = \frac{dU}{U}$$

$$-\cos(x) = \ln|U| - \phi_1$$

$$\phi_1 = \cos(x) + \ln|U|$$

2.

$$\frac{x^3}{2}dy = \frac{dU}{U}$$

$$\frac{yx^3}{2} = \ln|U| + \phi_2$$

$$\phi_2 = \frac{yx^3}{2} - \ln|U|$$

Ответ:

$$\psi(\frac{yx^3}{2} - \ln|U|, \cos(x) + \ln|U|) = 0$$

4 Найти решение задачи Коши

$$2U_x + \frac{x^2}{y}U_y = U^2 + 1$$

$$x = 4, y = 2t, U(x, y) = \sin(8t)$$

Решение:
Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{2} = \frac{ydy}{x^2} = \frac{dU}{U^2+1}$$

1.

$$x^2 dx = 2ydy$$

$$\frac{x^3}{3} = y^2 + \phi_1$$

$$\phi_1 = \frac{x^3}{3} - y^2$$

2.

$$\frac{dx}{2} = \frac{dU}{U^2+1}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan(U) + \phi_2$$

$$\phi_2 = \frac{x}{2} - \arctan(U)$$

Общее решение:

$$\psi(\frac{x^3}{3} - y^2, \frac{x}{2} - \arctan(U)) = 0$$

Переходим к задаче Коши:

$$\phi_1 = \frac{64}{3} - 4t^2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{(\frac{64}{3} - \phi_1)\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{16}{3} - \frac{\phi_1}{4}}$$

$$\phi_2 = 2 - \arctan(\sin(8t))$$

$$\phi_2 = 2 - \arctan(\sin(\pm 8\sqrt{\frac{16}{3} - \frac{\phi_1}{4}}))$$

Ответ:

$$\psi = \phi_2 - 2 + \arctan(\sin(\pm 8\sqrt{\frac{16}{3} - \frac{\phi_1}{4}}))$$

5 Задание 5

Опеределить тип, привести к каноническому виду:

$$8U_x - U_y - 4U_{xx} - 3U_{xy} + 2Uyy = 0$$

Найдем коэффициенты:

$$a_1 = 8 \quad a_2 = -1 \quad a_{11} = -4 \quad a_{12} = -\tfrac{3}{2} \quad a_{22} = 2$$

$$d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \tfrac{9}{4} + 8 = \tfrac{41}{4} > 0 \quad \text{значит уравнение гиперболического типа}$$

$$\tfrac{dy}{dx} = \tfrac{a_{12} \pm \sqrt{d}}{a_{11}} = \tfrac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

Оно эквивалентно сововкупности дифференциальных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3+\sqrt{41}}{8}x + c_1 \\ y = \dfrac{3-\sqrt{41}}{8}x + c_2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} c_1 = y - \dfrac{3+\sqrt{41}}{8}x \\ c_2 = y - \dfrac{3-\sqrt{41}}{8}x \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} n = \dfrac{3+\sqrt{41}}{8} \\ m = \dfrac{3-\sqrt{41}}{8} \end{array}\right.$$

Делаем замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = y - nx \\ \eta = y - mx \end{cases}$$

Вычислим частные производные:
$\xi_x = -n, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_x = -m, \quad \eta_y = 1$
Якобиан:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -n & 1 \\ -m & 1 \end{vmatrix} = -n + m \neq 0 \tag{1}$$

Все остальные частные производные второго порядка равны 0.
$-4 \;|U_{xx} = m^2 U_{\xi\xi} + n^2 U_{\eta\eta} + 2mnU_{\xi\eta}$
$2 \quad |U_{yy} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + 2U_{\xi\eta}$
$-3 \;|U_{xy} = (-m)U_{\xi\xi} + (-n)U_{\eta\eta} + (-m-n)U_{\xi\eta}$
$8 \quad |U_x = (-n)U_\xi + (-m)U_\eta$
$-1 \;|U_y = U_\xi + U_\eta$
Получаем:
$(-4-\sqrt{41})U_\xi + (-4+\sqrt{41})U_\eta + \frac{25}{4}U_{\xi\eta} = 0$
Введем функцию для упрощения:
$U(\xi,\eta) = e^{\alpha\xi + \beta\eta}\upsilon(\xi,\eta)$
Тогда:

$U_\xi = e^{\alpha\xi+\beta\eta}(\alpha\upsilon + \upsilon_\xi)$
$U_\eta = e^{\alpha\xi+\beta\eta}(\beta\upsilon + \upsilon_\eta)$
$U_{\xi\eta} = e^{\alpha\xi+\beta\eta}(\alpha\beta\upsilon + \beta\upsilon_\xi + \alpha\upsilon_\eta + \upsilon_{\xi\eta})$
При подстановке получим:
$(-4-\sqrt{41})(\alpha\upsilon + \upsilon_\xi) + (-4+\sqrt{41})(\beta\upsilon + \upsilon_\eta) + \frac{25}{4}(\alpha\beta\upsilon + \beta\upsilon_\xi + \alpha\upsilon_\eta + \upsilon_{\xi\eta}) = 0$
Найдем $\alpha, \beta:$
$\alpha = \frac{4(4-\sqrt{41})}{25}$ $\beta = \frac{4(4+\sqrt{41})}{25}$
Подставив получим:
$4\upsilon + \frac{25}{4}\upsilon_{\xi\eta} = 0$

Ответ: $\upsilon + \frac{25}{16}\upsilon_{\xi\eta} = 0$

6 Задание 6

Опеределить тип, привести к каноническому виду:

$$8U_x + 4U_y - 4U_{xx} + xyU_{xy} - 3U_{xy} + 2Uyy = 0$$

Найдем коэффициенты:

$$a_{11} = -4 \quad a_{12} = \frac{xy-3}{2} \quad a_{22} = 2$$
$$d = \frac{(xy-3)^2}{4} + 8 = \frac{(xy)^2-6xy+41}{4}$$
$$D_{xy} = 36 - 164 < 0 \Rightarrow d > 0 \Rightarrow \text{Гиперболический тип}$$

найдем $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{d}}{a_{11}} = \frac{xy-3\pm\sqrt{(xy)^2-6xy+41}}{-8}$$

При любых значениях x и y уравнение будет иметь гиперболический тип, а дифференциальное уравнение не решается простыми способами.