# Лабораторная работа №1.

# Дискретизация и квантование сигналов

## Часть 1. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве. Ряды Фурье. Частотное представление сигнала

### Цель работы

Изучение ортогональных систем в гильбертовом пространстве, а также преобразования Фурье.

### Задание

1. Найти коэффициенты разложения функции  в ряд Фурье по системе Хаара, используя функцию *fseries*. (можно использовать функцию *heaviside* для задания *f*(*x*)).

Проверить выполнение равенства Парсеваля , где  (письменно).

function c = fseries(target\_fun, T0, T1, K, basis)

% НахождениекоэффициентовФурье.

% Использование:

% c = fseries(target\_fun, T0, T1, K, basis)

% target\_fun – исходнаяфункция

% basis – 'fourier' (по умолчанию), 'walsh', 'rademacher'

% T0, T1 – начало и конец интервала анализа функции

% K – вектор номеров искомых коэффициентов

% c – вектор коэффициентов Фурье

%

% Пример:

% >> c = fseries(@(x) sin(x), 0, 1, [0:3], 'walsh')

% c =

% 0.4597 -0.2149 -0.1057 -0.0148

if (nargin< 5)

basis = 'fourier';

end

switch lower(basis)

case 'fourier'

f\_int= @(t, k) target\_fun(t) .\* exp(-i \* 2 \* pi \* k \* t / (T1 - T0));

fromZero = 0;

case 'rademacher'

f\_int = @(t, k) target\_fun(t) .\* rademacher((t - T0) / (T1 - T0), k);

fromZero = 1;

case 'walsh'

f\_int = @(t, k) target\_fun(t) .\* walsh((t - T0) / (T1 - T0), k);

fromZero = 1;

case 'haar'

c = haar\_coef(target\_fun, K, T0, T1);

return;

end

l = 1;

for k = K

if (fromZero& k < 0)

c(l) = 0;

else

c(l) = 1 / (T1 - T0) \* quadl(@(t) f\_int(t, k), T0, T1);

end

l = l + 1;

end

ФункцииХаара:

function y = haar(t, n)

% k-я функцияХаара

L = length(t);

if (n == 0)

y(1:L) = 1;

return;

end

k = floor(log2(n));

m = n - 2^k;

y = zeros(1, L);

step\_width = L / 2^(k+1);

support\_start = floor(step\_width \* 2 \* m) + 1;

support\_middle = floor(step\_width \* (2\*m+1));

support\_end =floor(step\_width \* (2\*m+2));

if (support\_end> L)

support\_end = L;

end

y(support\_start:support\_middle) = sqrt(2^k);

y(support\_middle + 1 : support\_end) = -sqrt(2^k);

Нахождение коэффициентов ряда Фурье для системы Хаара:

function res = haar\_coef(f\_int, K, T0, T1)

i = 1;

for n = K

if n < 0

res(i) = 0;

elseif n == 0

res(i) = quadl(f\_int, T0, T1);

else

k = floor(log2(n));

m = n - 2^k;

step\_width = 1 / 2 ^ (k + 1);

support(1) = step\_width \* 2 \* m;

support(2) = step\_width \* (2 \* m + 1);

support(3) = step\_width \* (2 \* m + 2);

support = support \* (T1 - T0) + T0;

res(i) = quadl(f\_int, support(1), support(2));

res(i) = res(i) - quadl(f\_int, support(2), support(3));

res(i) = res(i) \* sqrt(2 ^ k);

end

i = i + 1;

end

res = res / (T1 - T0);

1. Представить синусоиду в виде последовательности частичных сумм ряда Фурье по системам Уолша и Хаара, используя программу sum\_task.m

clear;

close all;

total\_num = 20; % всегокоэффициентовФурье

basis = 'walsh'; % базис (fourier, walshилиhaar)

T0 = 0; % начало отрезка

T1 = 1;% конец отрезка

points = 300; % число точек для вычисления функции

T = T1 - T0;

plot\_time = linspace(T0, T1, points);

h = figure;

set(h, 'DoubleBuffer', 'on');

K = [-total\_num :total\_num];

% номера коэффициентов Фурье. Обратите внимание, что для разложения по %системам Уолша и Хаара они должны начинаться с 0, а для ряда Фурье в %комплексной форме могут быть отрицательными.

% Здесь нужно вычислить коэффициенты разложения функции fun

% в ряд Фурье.

% C = fseries(...);

fvalues = fun(plot\_time);

fori = 3 : 2 : length(K)

ind = [-floor(i/2) : floor(i/2)] + total\_num + 1;

% также проверьте корректность коэффициентов для всех разложений.

% Здесь нужно вычислить частичную сумму ряда Фурье.

% Индексы коэффициентов из вектора C, которые нужно

% суммировать, содержатся в векторе ind.

% Если задание выполнено верно, то при нажатии F5 вы

% увидите, как происходит приближение функции fun

% частичными суммами ряда Фурье

% в выбранном базисе

% S = real(fsum(...));

plot(plot\_time,fvalues,'k',plot\_time,S,'r','LineWidth',2);

grid;

axis([T0 T1 min(fvalues)-0.1 max(fvalues)+0.1]);

title('Аппроксимация частичными суммами ряда Фурье')

drawnow;

end

Функция для нахождения частичных сумм:

functionSn = fsum(c, K, T0, T1, t, basis)

% частичная сумма ряда Фурье

% Использование:

% Sn = fsum(c, K, T0, T1, t, basis)

% c – вектор коэффициентов Фурье

% T0, T1 – начало и конец отрезка наблюдения функции

% t – вектор отсчетов времени

% basis – базис 'fourier' (поусолчанию), 'walsh',

% 'rademacher'

% Sn–частичная сумма

%

% Пример:

% c = [0.4597, -0.2149, -0.1057, -0.0148];

% K = [0 : 3];

% >>plot(fsum(c, K, 0, 1, [0:0.01:1], 'walsh'))

if (nargin< 6)

basis = 'fourier';

end

Sn = zeros(1, length(t));

switch lower(basis)

case {'rademacher', 'walsh', 'haar'}

basefun = inline([basis, '(t, k)'], 't', 'k');

i = 1;

for k = K

w(i,:) = feval(basefun, (t - T0) / (T1 - T0), k);

i = i + 1;

end

for m = 1 : length(t)

Sn(m) = sum(c .\* w(:,m)');

end

case 'fourier'

for k = 1 : length(t)

Sn(k) = sum(c .\* exp(j \* 2 \* pi \* K \* t(k)...

/ (T1 - T0)));

end

end

1. С помощью программы sum\_task.m выполнить интегральное преобразование Фурье (в символьном виде) тестового сигнала, построить амплитудный и фазовый спектры.

% Построение спектра Фурье в символьном виде

functionsym\_fourier

% Отрезок, на котором будет строиться график

xmin = -3;

xmax = 3;

syms t v w f

close all;

f = -heaviside(t–1-0.5) + heaviside(t-0.5);

Sw = fourier(f);

S = subs(Sw, w, 2\*pi\*v);

% ЧХ

subplot(2, 1, 1);

hold on

h = ezplot(действительная\_часть\_S, [xmin, xmax]);

set\_pretty(h, [xmin, xmax, -1, 1.5]);

h = ezplot(мнимая\_часть\_S, [xmin, xmax]);

hold off

set\_pretty(h, [xmin, xmax, -1, 1.5], 'r');

grid;

% АЧХ

subplot(2, 1, 2);

% Здесь нужно построить АЧХ

h = ezplot(АЧХ, [xmin, xmax]);

set\_pretty(h, [xmin, xmax, -1, 1.5]);

return;

functionset\_pretty(h, axis\_xy, color)

ifnargin< 3

color = 'b';

end

grid;

set(h, 'LineWidth',2.5, 'Color', color);

title(''); xlabel('');

% xminxmaxyminymax

axis(axis\_xy);

### Примечание.

По каждому заданию необходимо привести код (который напишите самостоятельно), вывод функций и графики при их наличии.

## Часть 2. Исследование эффектов дискретизации

### Цель работы

Исследование влияния частоты дискретизации на спектр дискретных сигналов.

### Теоретические сведения

Пусть  – непрерывная (или кусочно-непрерывная) функция, принимающая любые конечные значения. Сигналы, описываемые такими функциями, называются аналоговыми. Аналоговыми сигналами  описывается большинство реальных физических процессов, причем интервал наблюдения обычно конечный: .

Если , то последовательность  называют дискретным сигналом. Рассмотрим дискретизацию аналогового сигнала с постоянным шагом , то есть будем измерять аналоговый сигнал  через равные промежутки времени , называемые интервалом (периодом) дискретизации. Тогда получим некоторую последовательность значений  – отсчётов дискретного сигнала. Величина  называется частотой дискретизации (samplingfrequency). От ее выбора зависит возможность восстановления аналогового сигнала из дискретного без искажений. Согласно теореме Котельникова (отсчётов), точное восстановление непрерывного сигнала, имеющего спектр ограниченной частотной полосы (т.е. при, ), по его дискретным отсчётам возможно только в том случае, когда частота дискретизации  удовлетворяет условию:

*fs* > 2*F*max. (1)

При несоблюдении этого условия возможно возникновение эффекта наложения частот, то есть в спектре дискретного сигнала могут появиться гармоники, которых, возможно, не было в исходном сигнале. Этот эффект приводит к необратимым искажениям в восстановленном аналоговом сигнале.

Аналогично одномерным ведут себя и двумерные сигналы. Эффект наложения частот хорошо заметен на цифровых изображениях (роль независимой переменной – аналога времени в одномерных сигналах – в этом случае играют две пространственные координаты) при их некорректном масштабировании.

### Задание

1. Синтезировать сигнал , представляющий из себя сумму нескольких синусоид с разными частотами.
2. Определить допустимые значения частоты дискретизации  для сигнала .
3. Построить по отсчетам график исходного сигнала и его амплитудного спектра при нескольких различных частотах дискретизации (больше и меньше граничной частоты дискретизации). Сделать вывод.
4. Проиллюстрировать на примере сигнала  эффект наложения частот. Для этого необходимо привести сигнал *x*`(*t*), который при некоторой частоте дискретизации будет совпадать с сигналом *x*(*t*). Такого эффекта можно добиться, если провести дискретизацию сигнала *x*(*t*) с неверной частотой дискретизации и затем восстановить его.
5. Загрузить тестовое изображение. Уменьшить частоту дискретизации в 2, 3, 4 раза с помощью прореживания матрицы исходного изображения. Сравнить полученные результаты с результатом использования скрипта, приведенного далее. Для проверки результатов дополнительно можете сравнить с функцией imresize.

fd = double(imread(image)); %считывание исходного изображения

[M, N] = size(fd); % размеры изображение fd

k = 3;% коэффициент прореживания. Должен быть натуральным числом!

Mk = floor(M / k); % строк в прореженном изображении

Nk = floor(N / k); % столбцов в прореженном изображении

ff = fd(1:k:(Mk \* k), 1:k:(Nk \* k)); % прореженное изображение

% функции Котельникова задаем таблично в SincArray

ColumnInd = [1:max(Mk, Nk)];

for j = 1:max(M,N)

SincArray(j, ColumnInd) = sinc(j / k - ColumnInd);

end

%получаем интерполированное по формуле Котельникова изображение:

F = SincArray(1:M, 1:Mk) \* ff \* SincArray(1:N, 1:Nk)’;

imshow(uint8(F));

### Примечание

При выполнении работы в MATLAB можно использовать следующие функции: fft, imread, imshow.

### Контрольные вопросы

1. Что такое спектр кусочно-гладкой функции?
2. Дать определение амплитудного и фазового спектра.
3. Как связаны друг с другом дискретное и интегральное преобразования Фурье?
4. Сформулировать теорему Котельникова.
5. Что такое спектр дискретного сигнала?
6. Как связаны спектры аналогового сигнала  и соответствующего дискретного сигнала ?
7. Чему равен период спектра дискретного сигнала?
8. Схематично изобразить спектр дискретного сигнала с частотой дискретизации .
9. В чем заключается эффект наложения частот? Привести пример эффекта наложения частот.

## Часть 3. Исследование эффектов квантования

### Цель работы

Исследование влияния параметров квантования на качество сигналов, изучение статистических аспектов квантования.

### Теоретические сведения

Дискретный сигнал , полученный из непрерывного сигнала , может принимать любые значения из диапазона . Квантование сигнала заключается в замене каждого отсчёта  значением из некоторого конечного множества , где  – возможные уровни квантования, в соответствии с некоторым правилом [1]. Полученный сигнал  называется цифровым.

Разобьем отрезок нав общем случае неравных частей (по числу уровней квантования) точками , называемыми порогами квантования, где  и . В этом случае правило квантования  будет иметь следующий вид: если , то принять , . Обычно , где  – число бит для представления одного отсчёта сигнала.

Отсчёты дискретного сигнала удобно рассматривать как реализацию некоторой случайной величины  непрерывного типа, при этом процесс квантования представляет собой процесс преобразования случайной величины непрерывного типа в случайную величину дискретного типа: . Выбор правила квантования  определяется техническими возможностями реализации квантователя, а также наличием информации о законе распределения .

Для оценки ошибки квантования используется либо величина

, (2)

где обозначение  используется для математического ожидания, а горизонтальная черта означает операцию усреднения; либо отношение сигнал-шум (signal-to-noise ratio, SNR):

, (3)

где  и  – среднеквадратичные значения (rootmeansquare, RMS) сигнала и шума соответственно, а под шумом понимается сигнал ошибки . Вычисление среднеквадратичного значения дискретного сигнала производится по формуле

. (4)

Отношение сигнал-шум выражается в децибелах (дБ). SNR тем выше, чем меньше энергия шума по отношению к энергии сигнала.

#### Равномерное квантование

Равномерное квантование удобно использовать в случае, когда о величине  известно лишь то, что она попадает в некоторый диапазон , либо необходимо реализовать простейший вариант квантователя [1].

При равномерном квантовании диапазон  разбивается на  равных интервалов длины : , . В качестве уровней квантования  выбираются середины интервалов : . Правило квантования при этом имеет следующий вид: если , то .

Если шаг равномерного квантования  достаточно мал, можно считать, что ошибка квантования  подчиняется равномерному закону распределения на отрезке . В этом случае , а дисперсия ошибки равна [1]

. (5)

#### Оптимальное квантование

В случае, когда известна функция плотности распределения вероятностей  случайной величины , причем при и  при , ошибка квантования(2) принимает вид [1]:

. (6)

Для нахождения оптимального правила квантования необходимо решить задачу минимизации функции (6) по переменным , . Данная задача сводится к решению системы уравнений:

 (7)



Решение системы (7), которое в общем случае находится численными методами, определяет квантователь Ллойда-Макса и дает минимальное значение ошибки (6).

### Задание

Примечание: для анализа удобно выполнять сравнения с помощью графиков.

1. Синтезировать случайный дискретный сигнал  с равномерным распределением. Построить по отсчетам его график.
2. Провести равномерное квантование отсчетов сигнала , используя от 1 до 8 бит на отсчет. Построить ступенчатые графики сигнала после квантования.
3. Экспериментально оценить ошибку квантования (2). Сравнить полученные результаты с теоретической оценкой. Построить график зависимости ошибки квантования от количества бит на отсчет.
4. Вычислить SNR (3). Исследовать зависимость SNR от числа бит, выделяемого для хранения одного отсчета сигнала.
5. Синтезировать случайный дискретный сигнал  с нормальным распределением. Построить по отсчетам его график.
6. По полученной выборке оценить параметры  и .
7. Определить параметры квантователя Ллойда-Макса:

,

где  и  – параметры оптимального квантования для нормального распределения с параметрами  (см. приложение).

1. Выполнить оптимальное квантование сигнала , используя от 1 до 4 бит на отсчет.
2. Вычислить выборочные значения ошибки (2), (6) и SNR.
3. Выполнить равномерное квантование сигнала  при числе бит на отсчет от 1 до 4. Сравнить результат с полученным в предыдущем пункте.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается процесс квантования?
2. Какие величины используются для оценки ошибки квантования? От чего зависит ошибка квантования?
3. Что такое равномерное квантование? В каких случаях его применяют?
4. Что такое оптимальное квантование Ллойда-Макса?
5. Чем нужно руководствоваться при выборе метода квантования?

### Приложение

Пороги и уровни оптимального квантования Ллойда-Макса для случайной величины со стандартизованным нормальным распределением:

1. При использовании 1 бита на отсчет:



1. При использовании 2 бит на отсчет:



1. При использовании 3 бит на отсчет:



1. При использовании 4 бит на отсчет:



### Литература

1. Умняшкин С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов: учебное пособие. М.: Техносфера, 2019. – 550с.