## Теория к семинару №2

Схема Рунге-Кутты для решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u_0} \end{cases} \tag{1}$$

имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau_n \sum_{k=1}^{s} b_k \boldsymbol{\omega}_k,\ \tau_n = t_{n+1} - t_n; \\ \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{f}\left( \mathbf{u}_n + \tau_n \sum_{l=1}^{L} \alpha_{kl} \boldsymbol{\omega}_l, t_n + \tau_n a_k \right), 1 \le k \le s. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\tau_n$ - шаги по времени, $s$ - число стадий, коэффициенты $\alpha_{kl}$ образуют матрицу Бутчера $\mathbf{A}$, а $a_k$ и $b_k$ - элементы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, вместе с матрицой Бутчера полностью задающих схему Рунге-Кутта.

Для реализации на компьютере в системе MATLAB удобнее записать (2) в векторной форме

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau_n \boldsymbol{\omega} \mathbf{b}^T,\ \tau_n = t_{n+1} - t_n; \\ \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n + \tau_n \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\alpha}_k^T,\ t_n + \tau_n a_k), 1 \le k \le s, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{k}$ - $k$-тая строка матрицы промежуточных результатов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b}$ - вектор-строка коэффициентов $b$ и $\boldsymbol{\alpha}_k$ - $k$-тая строка матрицы Бутчера. Верхний индекс $T$ означает транспанирование.

## Задачи к семинару №2

1. Записать расчетные формулы для схемы Кутта, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2. Перейти к длине дуги в задаче

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u^2 + t^2, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{5}$$

3. Реализовать схему Кутта на компьютере.

   Тестовые функции (правые части):

   a)
```
function y = myfun(t, u)
y = u+t^2+1;
```

   Начальное условие: `u0 = 0.5`

   b)
```
function f = ff(t, u)
om = [sin(t) cos(t) sin(t+pi/4)];
Omega = [0 -om(3) om(2); om(3) 0 -om(1); -om(2) om(1) 0];
f = Omega*u;
```

   Начальное условие: `u0 =[1; -0.5; 0.6]`

   Временной отрезок для обеих функций - от 0 до 1.

   Провести 7 расчетов на сгущающихся вдвое сетках, начиная с минимально возможной сетки из 1 интервала.

   Для первой функции построить график эффективного порядка метода от числа интервалов сетки (по последнему узлу, т.е. в последнем узле сетки при $t = 1$), для второй – построить график решения (3 кривые на одном графике).

4. Реализовать явную схему Рунге-Кутты в общем виде.

   Для отладки использовать 7-стадийную схему Хаммуда 6 порядка:

```
butcher = [       0      0       0 0 0 0 0;...
               4/7      0       0 0 0 0 0;...
           115/112 -5/16       0 0 0 0 0;...
           589/630  5/18 -16/45 0 0 0 0;...
229/1200-29/6000*5^0.5 119/240-187/1200*5^0.5 -
14/75+34/375*5^0.5 -3/100*5^0.5 0 0 0;...
```

```
71/2400-587/12000*5^0.5 187/480-391/2400*5^0.5 -
38/75+26/375*5^0.5 27/80-3/400*5^0.5 (1+5^0.5)/4 0 0;...
-49/480+43/160*5^0.5 -425/96+51/32*5^0.5 52/15-4/5*5^0.5 -
27/16+3/16*5^0.5 5/4-3/4*5^0.5 5/2-0.5*5^0.5 0];

a = [0 4/7 5/7 6/7 (5-5^0.5)/10 (5+5^0.5)/10 1];
b = [1/12 0 0 0 5/12 5/12 1/12];
```

Провести 7 расчетов на сгущающихся вдвое сетках, начиная с минимально возможной сетки из 1 интервала.

Протестировать на тех же тестовых функциях, построить такие же графики.