Теория к семинару №4

Дифференциально-алгебраическая система содержит как дифференциальные, так и алгебраические уравнения. В общем виде она записывается как

$$\begin{cases} \mathbf{G}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u},t), \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u_0}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{G}$ - матрица коэффициентов при производных.

Для ее решения можно использовать семейство схем Розенброка, заменив в них матрицу $\mathbf{E}$ матрицей $\mathbf{G}$

$$\begin{cases} \left(\mathbf{G} - \alpha\tau\mathbf{F}_u\right)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}, t + \dfrac{\tau}{2}\right), \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau\,\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\omega}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь α - параметр схемы, τ - шаг схемы по времени, $\mathbf{F}_u$ - производная правой части по переменной $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ - численное решение в текущий и следующий моменты времени соответственно.

Для получения второго порядка в одностадийной схеме Розенброка для задачи Коши необходимо брать $\alpha = \dfrac{1}{2}$ или $\alpha = \dfrac{1+i}{2}$. Для неавтономных дифференциально-алгебраических систем даже при этих α получить второй порядок точности не удается из-за противоречивых требований к выбору смещения по времени при вычислении правой части. Поэтому для получения второго порядка необходимо провести автономизацию, то есть убрать явную зависимость от времени в правой части.

Задачи к семинару №4

1. Требуется рассчитать работу транзисторного усилителя. Для этого необходимо решить дифференциально-алгебраическую систему.

Параметры электрической схемы:

```
global r0 r1 r2 r3 r4 r5 ub;
```

```
r0 = 1000; r1 = 9000; r2 = r1; r3 = r1; r4 = r1; r5 = r1;
c1 = 1e-6; c2 = 2e-6; c3 = 3e-6; ub = 6;
```

Начальные условия:

```
u0 = [0; ub*r1/(r1+r2); ub*r1/(r1+r2); ub; 0];
```

Матрица коэффициентов при произоводных:

```
G = [-c1 c1 0 0 0;c1 -c1 0 0 0;0 0 -c2 0 0;0 0 0 -c3 c3;...
    0 0 0 c3 -c3];
```

Правая часть:

```
function y = ue(t)
y = 0.1*sin(200*pi*t);

function y = ff(u)
y = 1e-6*(exp(u/0.026) - 1);

function y = F(t, u)
global r0 r1 r2 r3 r4 r5 ub;
y = [u(1)/r0 - ue(t)/r0; 0.01*ff(u(2)-u(3))-ub/r2+u(2)*(1/r1+1/r2);...
    u(3)/r3 - ff(u(2)-u(3)); 0.99*ff(u(2)-u(3))-ub/r4+u(4)/r4;
u(5)/r5];
```

Расчет провести с шагом $h = 1/5000$ на временном отрезке от 0 до 0.3 при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1+i}{2}$. Вывести результат расчета на график (на одном графике будет 2 семейства кривых для двух разных α, в каждом семействе по 5 кривых, соответствующих 5 компонентам $\mathbf{u}$). Объяснить разницу между численными решениями при разных α.

2. Определить эффективный порядок метода с помощью сгущения сеток. Для экономии времени расчет вести до $t = 0.01$. Провести автономизацию и вновь определить эффективный порядок.