Теория к семинару №6

Видоизменим краевую задачу из предыдущего семинара, сделав из нее задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((k_0 + k_1 u^2)\dfrac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $[a;b]$ - отрезок, на котором ищется решение.

Разностная схема легко получается из схемы для краевой задачи заменой $-h^2 f_n$ на $h^2 \lambda u_n$:

$$\begin{cases} (u_{n+1} - u_n)(k_0 + k_1 \dfrac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{2}) - (u_n - u_{n-1})(k_0 + k_1 \dfrac{u_n^2 + u_{n-1}^2}{2}) + h^2 \lambda u_n = 0, \\ u_0 = u_N = 0, \end{cases} \tag{2}$$

здесь h - шаг равномерной сетки, N - число интервалов сетки.

Поскольку это нелинейная задача на собственные значения, то для ее решения надо использовать метод дополненного вектора – вариант метода Ньютона для задач на собственные значения.

В этом методе строится новый вектор $\mathbf{v}$ по следующему правилу

$$\begin{cases} v_n = u_n,\ 0 \le n \le N, \\ v_{N+1} = \lambda. \end{cases} \tag{3}$$

Добавление новой переменной потребует увеличения на одно числа уравнений – иначе задача не будет иметь однозначного решения. Так мы снова приходим к необходимости постановки дополнительного граничного условия в задаче на собственные значения.

Дальше задача решается методом Ньютона, подобно тому, как это делалось при решении нелинейной краевой задачи в предыдущем семинаре. Переделки программы будут минимальными.

В данном случае очень полезно провести серию расчетов на сгущающихся сетках и понаблюдать за сходимостью серии найденных собственных значений к некоторому пределу. Это важно, чтобы вовремя заметить «перескок» на другое собственное значение, если он будет иметь место. При «перескоке» серию расчетов придется повторить с другим начальным приближением.

Ясно, что результат расчета на более грубой сетке следует использовать в качестве начального приближения при расчете на более подробной. Для равномерной сетки и сгущения сетки в 2 раза значения в нечетных узлах переносятся непосредственно (1 в 3, 2 в 5 и т.п.), а в четных получаются интерполяций – полусуммой соседних нечетных узлов (например $u_2 = 0.5(u_1 + u_3)$). Вычисленное на грубой сетке собственное значение переносится на подробную непосредственно, выполняя роль начального приближения.

К полученному в результате серии расчетов набору приближенных значений λ можно применять методы апостериорной оценки погрешности решения Ричардсона и Эйткена. Используя рекуррентное сгущение, можно получить результат с высокой точностью даже на не слишком подробных сетках.

Задание к семинару №6

Задачу следует решать на отрезке $[0;1]$, $k_0 = 1$, $k_1 = 0.5$, начальное приближение для собственного значения $\lambda_0 = 40$, самая первая сетка пусть имеет 8 интервалов, последняя – 512 (серия из 7 расчетов).

Дополнительное граничное условие выглядит следующим образом (здесь u – дополненный вектор):

```
u(end/2+1)-u(end/2-1)-2*h = 0.
```

В данном случае ставится условие на производную собственной функции в середине отрезка (она должна быть равна 1).

Построить график λ от номера расчета. Также вывести на график собственную функцию с самой подробной сетки. По полученному набору λ определить эффективный порядок метода и получить апостериорную оценку погрешности. С помощью техники рекуррентных сгущений вычислить собственное значение с максимально возможной точностью.