Теория к семинару №3

Семейство одностадийных схем Розенброка для задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u_0} \end{cases} \tag{1}$$

имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{E} - \alpha\tau\mathbf{f}_u\right)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}, t + \dfrac{\tau}{2}\right), \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau \operatorname{Re}\boldsymbol{\omega}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь α - параметр схемы, τ - шаг схемы по времени, $\mathbf{f}_u$ - производная правой части по переменной $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ - численное решение в текущий и следующий моменты времени соответственно. Практический интерес представляют схемы из семейства одностадийных схем Розенброка при $\alpha = \dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{1+i}{2}$.

Векторная переменная $\boldsymbol{\omega}$ получается из решения системы линейных уравнений с правой частью $\mathbf{f}\left(\mathbf{u}, t + \dfrac{\tau}{2}\right)$ и матрицей системы $\mathbf{E} - \alpha\tau\mathbf{f}_u$. Эту матрицу **НЕ СЛЕДУЕТ** обращать численно, так как если вычислять $\boldsymbol{\omega}$ как $\left(\mathbf{E} - \alpha\tau\mathbf{f}_u\right)^{-1}\mathbf{f}\left(\mathbf{u}, t + \dfrac{\tau}{2}\right)$, то это потребует большего объема вычислений, чем решение линейной системы. Особенно заметна разница в производительности, если матрица системы имеет ленточную форму, что часто бывает при применении схем Розенброка к решению систем дифференциальных уравнений, возникающий при численном решении уравнений в частных производных.

Матрицу производных $\mathbf{f}_u$ при реализации схем Розенброка в общем виде лучше вычислять численно с помощью центральной разности с шагом $\Delta u = 10^{-5}$. Ее надо строить таким образом, чтобы в 1 строке $\mathbf{f}_u$ были производные 1 компоненты вектор-столбца $\mathbf{f}$, по всем компонентам $\mathbf{u}$, во 2 строке – производные 2 компоненты $\mathbf{f}$ по всем компонентам $\mathbf{u}$ и т.д.

Задачи к семинару №3

1. Решить задачу Коши с правой частью, задаваемой функцией

```
function y = f2(t, u)
y = [-50*(u(1)-cos(t))+10*u(2); 1.2*u(1)-u(2)*u(1)];
```

на временном отрезке [0; 0.75] при начальном значении u0 = [1;1] с помощью явной схемы Рунге-Кутта второго порядка типа предиктор-корректор, задаваемой матрицей Бутчера $\mathbf{A}$ и векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. предыдущий семинар)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Расчет провести с шагом по времени $\tau = 1/8$ и $\tau = 1/128$.

2. Реализовать семейство одностадийных схем Розенброка в общем виде. Для тестирования использовать задачу Коши из предыдущей задачи. Положить на один график результаты расчета этой задачи при $\alpha = \frac{1}{2}; 1; \frac{1+i}{2}$. Взять шаг по времени $\tau = 1/8$. На тот же график положить результат расчета, полученный явной схемой, при $\tau = 1/128$. На графике должны присутствовать обе компоненты вектора решения (т.е. всего должно быть 8 кривых). Для построения графика удобно использовать, например, такую команду

```
plot(t,cros,'r+-',t,ros05,'g+-',t,ros1,'b+-',t0, rk2, 'k');
```

Здесь t задает редкую сетку по времени, а t0 – более подробную.

Объяснить поведение кривых численного решения в терминах A – устойчивость, Lp – устойчивость, t – монотонность.