波动的惩罚：波动亦有规则？. 第7讲

渔阳 2018-01-07 22:23

字数 5,561 阅读需 14分钟

“欢迎来到量化小学”

波动的惩罚：波动亦有规则？

▲ 订阅特辑 加入“量化小学”校友圈儿

投资全球更要投资自己
我的订阅

上一篇:
概率的游戏：不确定的世界 . 第6讲
0
下一篇:
收藏
螺纹+国债+股指：试试在中国玩转波动率交易 . 第8讲

来自特辑

量化小学
解放你的投资动手能力
最近更新
【学业总结】量化学习的脉络梳理，以继续学习提高的路径
2019-04-12更新

详细内容请观看PPT视频

校长语录

- “富贵险中求，波动大也未必都是坏事，如果你手顺的时候，会赚更多的钱。”
- “...我们都是被平均的中产阶级。”
- “数学其实并不枯燥，它是一种刻画世界的优美语言。”

内容梗概

大家好，欢迎来到量化小学，我是渔阳。

今天是2018年的第一次课，首先祝大家新年快乐！我也做了一个新年计划：这个特辑更新的快一点，让大家更快地看到新的内容。

在前面几次当中，我们反复谈到，**投资是在收益和风险当中取得平衡，而波动率大是一件不好的事情。**

那为什么是这样呢？今天我们就来谈一谈这个话题——**波动的惩罚。**

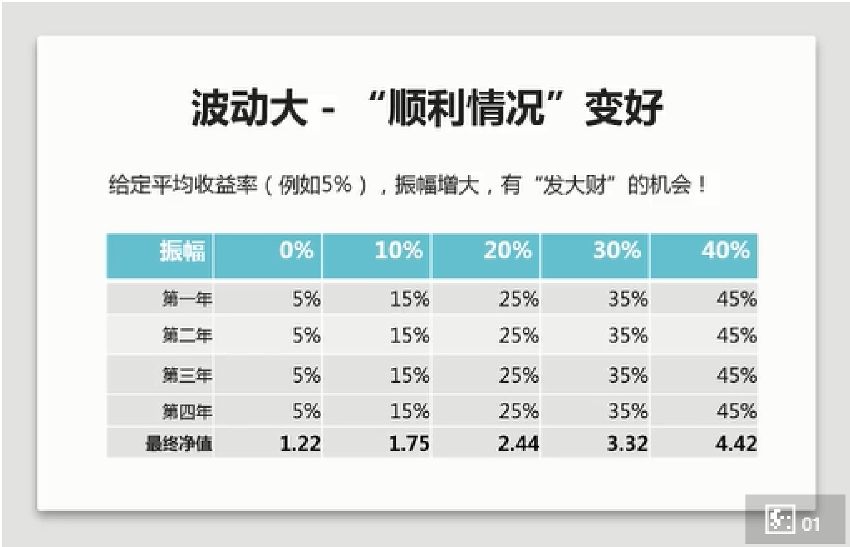
今天会涉及到一些数学，大家先把结论记住：在相同的预期收益率的情况下，波动率越小越好。

今天咱们从两个角度来谈：**第一，波动率的直观理解；第二，金融工程基础。**

波动率的直观理解

其实波动大也未必都是坏事，如果你手顺的时候，会赚更多的钱。咱们看一个例子：

我列了一个表 *（如下图）* ，如果平均收益率是5%，当我把收益率振幅增大的时候，其实在手顺的情况下，我就有“发大财”的机会。



振幅	0%	10%	20%	30%	40%
第一年	5%	15%	25%	35%	45%
第二年	5%	15%	25%	35%	45%
第三年	5%	15%	25%	35%	45%
第四年	5%	15%	25%	35%	45%
最终净值	**1.22**	**1.75**	**2.44**	**3.32**	**4.42**

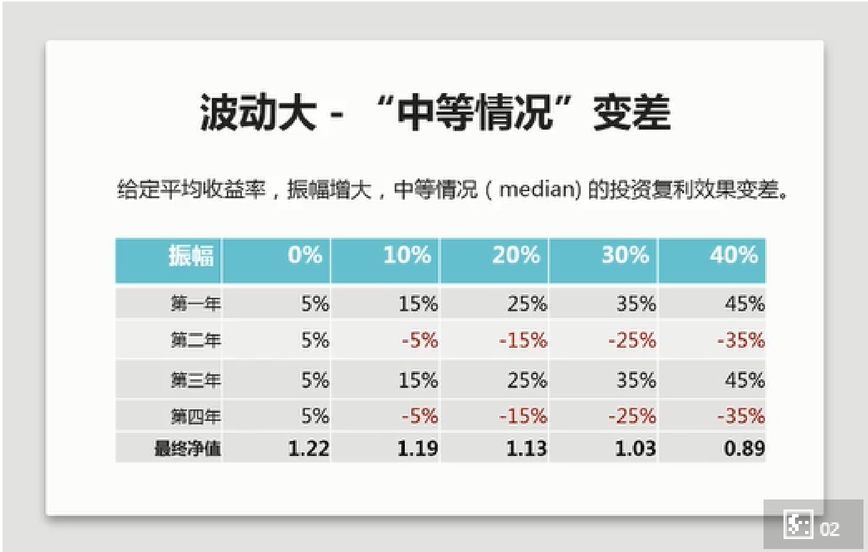
这里面有几列：第一列，是完全没有波动率，每年都赚5%，过了四年之后，最终的净值就是1.22。

第二列，有10%的上下振幅，但是我运气好，每一次都是振到上面去了，所以每年都赚15%，四年下来就变成1.75。同样振幅继续增大，当20%、30%、40%的情况，赚钱速度就越来越快了。那么在最后一种情况下，四年过后净值会变成4.42。

当然，如果我要错了，就变成每年亏35%（5%-40%），会亏很多钱。但是为了发财，有一句古话叫“富贵险中求”，所以波动率大也有大的好处。

那么它的坏处是什么呢？它会把“中等情况”给拉下来，咱们先来定义一下什么叫“**中等情况**”：

从概率的角度来说，叫median或者叫中位数。更具体的来说，不是四年吗？如果有两年是比较好的情况，两年是比较差的情况，那么总的而言就是一个中等的情况。



振幅	0%	10%	20%	30%	40%
第一年	5%	15%	25%	35%	45%
第二年	5%	-5%	-15%	-25%	-35%
第三年	5%	15%	25%	35%	45%
第四年	5%	-5%	-15%	-25%	-35%
最终净值	**1.22**	**1.19**	**1.13**	**1.03**	**0.89**

在这里还是同一张表 *（如上图）* ，如果完全没有波动率，那跟刚才没有差别，四年下来是1.22；如果把振幅扩大到10%，那么两年运气比较好的时候，第一年和第三年都是赚了15%；剩下两年运气比较差的时候，各亏了5%，最后净值变成了1.19，比刚才低了。

那如果继续放大波动率，就会发现最终净值是越来越低的。在最后一种情况下，振幅已经放大到40%，也就意味着赚钱的时候固然很爽，赚45%，到亏钱的时候亏35%，也会亏很多。四年下来，其实就变成赔钱了，因为净值就只有0.89，这是一个非常有意思的观察。

随着波动率变大，中位数的情况（Median case）会变得越来越差，我们也就陷入了沉思。有两个非常重要的问题：

> 第一个问题，我们为什么要关心中位数（median）的收益率，而不是平均(mean)的收益率呢？
>
> 第二个问题，在高波动的情况下，如果打一个比喻：把这个中位数（median）称为“中产阶级”的话，那么“中产阶级”的情况变差了，他的钱到哪里去了？

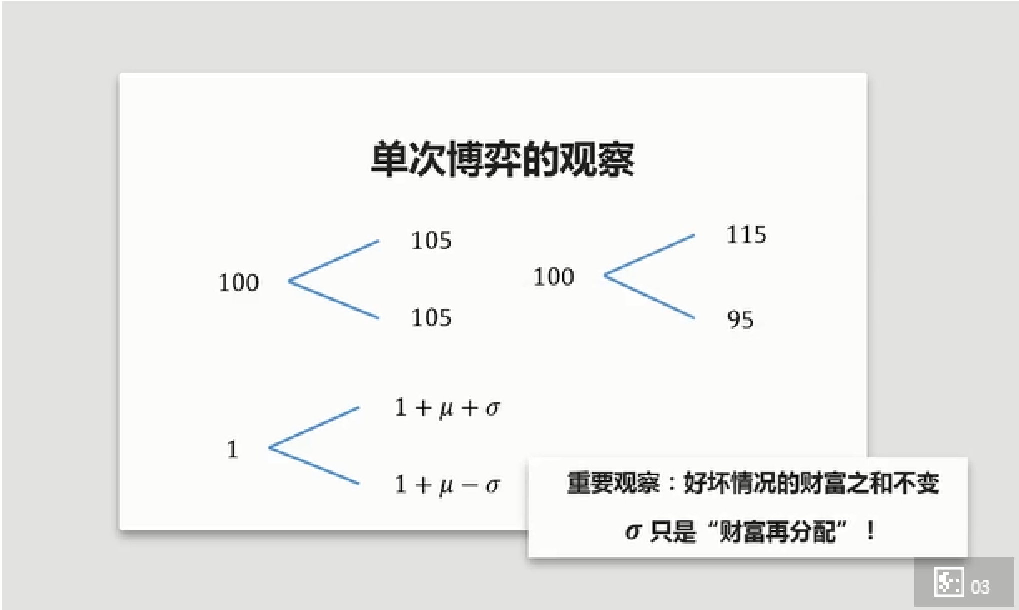
其实，根据刚才这两个例子，我们可能隐隐约约会有一个感觉:就是“中产阶级”的钱都跑到富豪那去了。

接下来就具体的看一看为什么是这样？渐渐地要进入数学模型了。

单次博弈的观察

咱们首先可以描述一下单次博弈的情况：我用简单的二叉树做一个刻画，开始是100块钱，如果完全没有波动，往上往下都会变成105。

给它加一个10块钱的振幅，那么好的情况变成了115，多赚10块；差的情况变成了95，少赚10块。



我们发现总财富是没有变化的。这在数学上也是很显然的，我把它更抽象一点*（如上图）*：

> 比较好的情况：1+μ，这是预期收益，再加上一个正向的震动σ，即1+μ+σ。
>
> 比较差的情况：1+μ-σ。
>
> 非常显然在这里面：**好坏情况的财富之和是不变的，而σ（波动率或者振幅）只是“财富再分配”的一种工具而已。**

这就很有意思了，接下来就把单周期的情况推广到多周期，这就是金融工程中最常用的叫二叉树（binomial tree）模型。

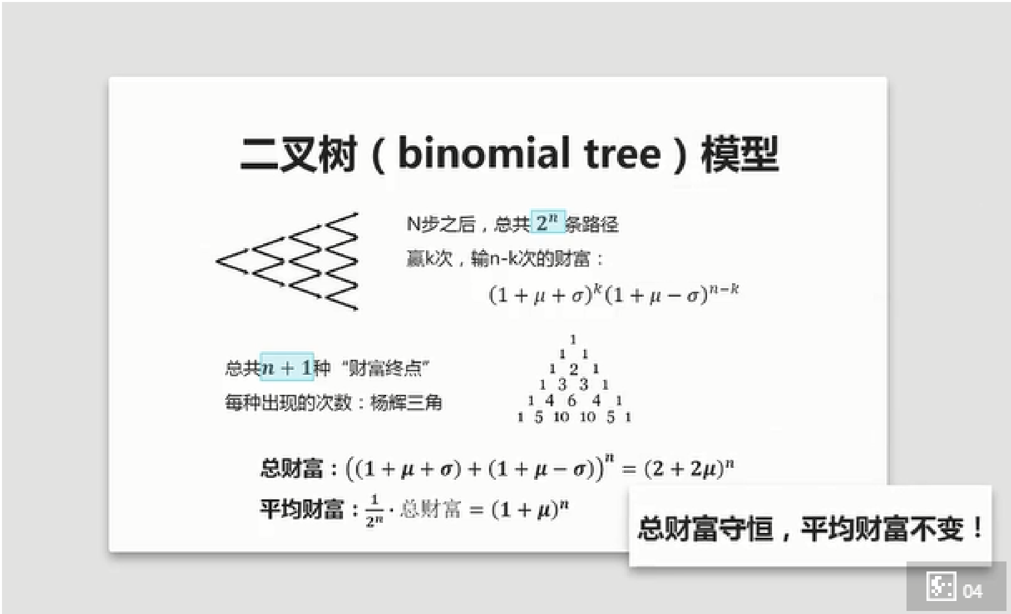
可以看到：如果我们往前走N步之后会怎么样呢？数学咱们都学过，每一步向上向下概率都是50%，那么N步之后，总共就会有2^n条路径。

最后，运气特别不好的时候是一次都没赢，运气非常好的时候是每次都赢。

比较一般的情况：赢了K次、输了（N-K）次，那最后的财富自然就是：（1+μ+σ）的K次方再乘以（1+μ-σ）的N减K次方，这是非常显然的。

二叉树模型

在二叉树模型当中 *（如下图）* ，最后“财富终点”有n+1种情况。因为可能一次也没赢一直到每次都赢，所以一共是n+1种。



很显然每一种情况出现次数是不一样的，比如在n比较大的时候，要想每次都赢，或者每次都不赢，那是非常困难。相对来说，在中间情况就会比较常见。

上次其实我们也讲到这样二叉树的模型，最终它会变成正态分布。其实这是在中学我们也都学过，就是n+1种“财富终点”当中，每一种出现的次数是可以确定的，叫做杨辉三角，在国外叫毕达哥拉斯三角。

我在右边列出这一组数字，比如这是n=5的情况,就是二叉树模型向前推了五步之后，一共有多少条路径呢？2^5一共是32条路径，对吧？

最左边和最右边就是全输或者全赢的可能性，各只有一种。左二就是1胜4负的情况，一共是五种。左三是2胜3负的情况，一共是十种。然后3胜2负、4胜1负，一直到五战全胜。

所以杨辉三角告诉我们：每一种情况发生的次数。有了杨辉三角之后，我们就可以算出来，如果把每一个情况发生的次数和对应的财富都加起来，它就是好的情况加上坏的情况的n次方。

如果把它展开之后，就是刚才那个杨辉三角。很显然，在这个式子当中，加σ和减σ是可以消掉的，所以就变成（2+2μ）的n次方。

也就是说把所有的情况都加总，最后总财富就是这么多。那么平均财富呢？也就非常显然了，一共有2^n条路径，再把它给除回来，所以平均财富就是（1+μ）的n次方，这就是非常有意思的观察：

> - **第一，总财富是守恒的。**

> - **第二，平均财富是不变的。**

（1+μ）的n次方，只跟二叉树走了多少步有关系，跟波动率σ是没有关系的。

真相时刻

因此刚才我们已经看到了，为什么不研究平均财富要去研究中位数的情况。对于刚才那两个问题就有了解答。这其实可以说是一个真相时刻：

第一，总财富（运气好、运气坏的情况相加）只和平均收益率和时间有关，和波动率没有关系。

它很显然是和收益率有关的，为什么和时间有关？因为每往前推一步都可以多赚一点钱，所以和μ以及t有关，但是和波动率没有关系。

那么有几个重要的推论：第一，给定μ和t的情况下，“最终财富”的平均值（mean）是不变的，刚才已经数学上推出来了。

第二，波动率是干什么的呢？其实可以直观地把它理解成**“财富分配”的指标**。最后就是在波动率大的情况下，会出现“富者愈富”的情况；中间的“中产阶级”（median）就被平均掉了,这其实是一个非常深刻的结论。

“财富分配”示例

接下来我们用一个例子具体演示一下，“财富分配”的示例：先假设平均收益率是5%，可以尝试在不同的振幅σ的情况下，经过100个时间周期之后，财富会怎么进行分配呢？

“财富分配”示例1

咱们来看三种情况：第一种情况，就是正确的次数比较多，我们把它称之为“富豪”。如果100次里面有76次是运气好的，其实这已经很难出现了，概率上来讲就只有十万分之一了，或者直观地理解全中国14亿人里面富豪大概有14000个。

第二类是中产阶级，很显然中产阶级就是对一半、错一半，所以就是50次是运气好的。

最后是困难群众，只有40次运气好，这40次是怎么算出来的？它其实是利用上次咱们讲过标准差的知识，是-2std事件,概率约为2.5%，大家可以去复习一下上次内容。

在这儿也可以做一个小练习：

> 标准差std=5，因此40次就是-2std的事件，但是std=5是怎么算出来的呢？

这完全可以利用上次我们讲过的内容给推出来，大家可以尝试一下。答案我们会放在www.quantos.org量化小学的tab底下。除了练习题的答案之外，你还可以在这发现一些辅助材料以及上课当中用到程序的例子。

在这个财富分配的实例当中，我们就研究三种情况：富豪76次是对的；中产阶级一半对、一半错；困难群众40次是对的，60次是错的，我们看看会怎么样？

	0%	5%	10%	20%
富豪	1,315,013	13,990,849	119,784,988	4,690,457,506
中产阶级	1,315,013	1,173,909	833,820	207,227
困难群众	1,315,013	452,593	123,404	4,381

"财富分配"示例2

不同波动率情况下的财富分配，首先，完全没有波动率，那么你运气好、运气坏的时候都是一样的，每次赚5%，所以三类人如果初始本金是10000块钱，在100个时间周期之后，

他们的钱都是一样的，都变成了131万，所以这可以理解为是一种共产主义的理想国，星辰大海，这是我们奋斗的目标。

接下来把波动率上升到5%，可以看到贫富开始有差距了，但还是共同富裕的一种模式：富豪最终会有1300万，中产阶级1万块钱变成117万，困难群众1万块钱也变成了45万，所以是共同富裕。

接下来再把波动率上升到10%，就发现贫富开始有点分化了。富豪的财富变成1.19亿元了，因为他对的次数多；中产阶级也还行，有80多万，但是比刚才少；最后是困难群众，就只剩12万。

最后一种情况，当我把波动率调整20%，就发现富豪的财富在迅速增加，最终的1万块钱已经变成46亿元了。

我倒是觉得这跟社会实际比较类似，中国最富裕的1万多人，我觉得就是几十亿的水平。

然后中产阶级的财富进一步下降，平均只有20万了，富豪的钱从哪来的呢？就是中产阶级的钱变少了。

那么最后困难群众就稍微有点惨了，他最开始1万块钱经历100个时间周期之后，只剩4000块钱。因为他有60次是错的，在错的时候他亏15%，尽管剩下的40次是对的，赚25%，但总体来讲还是亏的。

我们可以设想：**当把波动率进一步提升，最后中产阶级的钱也会变得越来越少。在极端的情况下，就是所有的钱都会跑到富豪那去了。**

通过这样一个直观的例子，我们也看到了大家经常在微信上开玩笑的社会现象：**我们都是被平均的中产阶级。**

更严谨的数学

刚才是直观的理解为什么波动性大的时候，中位数的情况会受到影响。那从更严谨的数学来看，在量化投资当中，首先我们通常都是研究对数收益率的，因为它的数学性质良好（收益可加）。

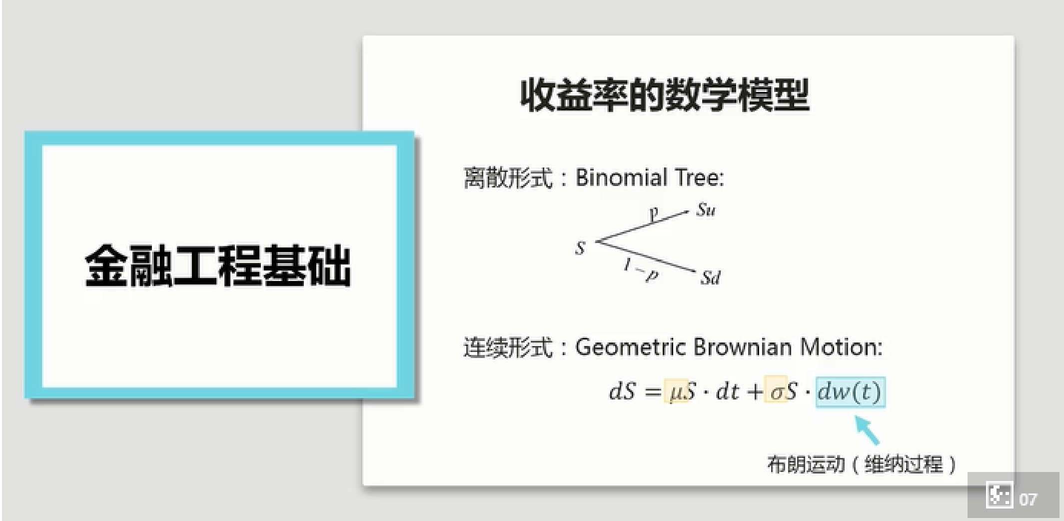
在大学或者高中的课程里，我们学过对数收益率（e^r）是可以加起来的。咱们上大学微积分里面，都学过泰勒展开，也知道在r比较小的情况下，对数收益率实际上和我们通常所说收益率是非常接近的。

另外在量化投资当中，我们通常都是研究的一天收益率的预期或者是一个星期收益率的预期，它数值本来就比较小，因此对数收益率和普通的收益率是非常近的。

金融工程基础

那么接下来我们就可以谈论一些金融工程的基础知识，首先，刚才我们谈到二叉树（binomial tree）模型，就是一支股票可以向上也可以向下，它的概率分别是P和1-P，刚才我们研究这个情况当中分别都是1/2。

那么在连续的形式下，它会变成什么样子呢？就是所谓的Geometric Brownian Motion（几何布朗运动），接下来就是一个这样随机过程的方程式（如下图）。



不要被这个东西吓倒，其实这就是刚才我们说的那些事情的一种数学刻画。首先这里边有个μ，就是平均的收益率。所以这个式子说的是在每一个小的时间周期上，股票的变化就等于平均收益率乘以股票价格再乘以时间，很显然的。

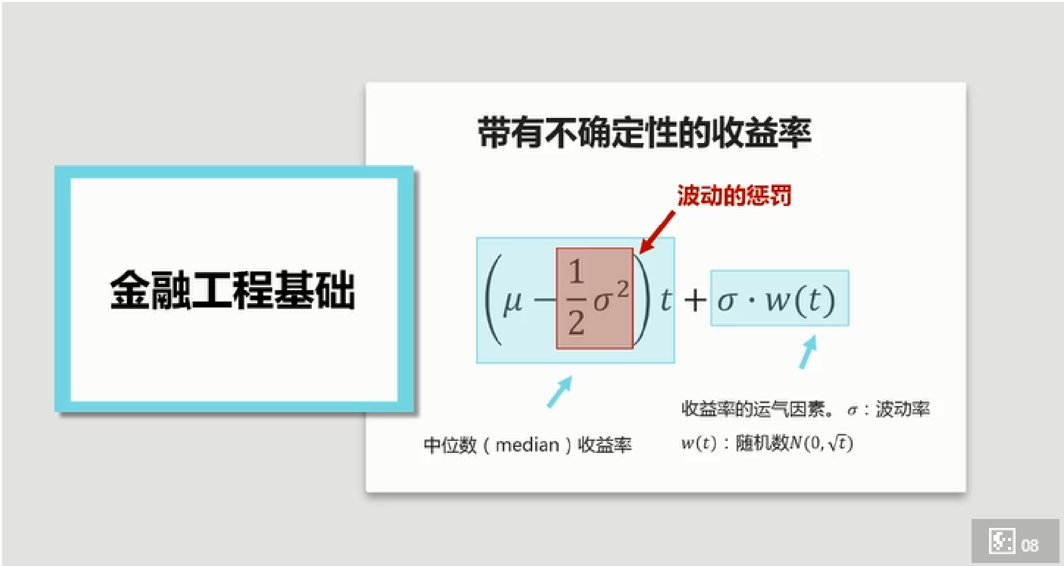
后面一项σ，就是我们说的波动率。最后还有一个dw(t),这实际上就是所谓的布朗运动或者也叫维纳过程，它就是符合标准正态分布的一个随机数。

因此几何布朗运动的数学模型，就是说股票的变化有一个预期收益率，后面还加上带波动率的不确定的过程。

布朗运动刻画了股价变化的过程，最后股票的价格它会变成什么样子呢？我们看一看：如果是没有波动性，就非常简单。所以如果最开始的股价是S(0)，那么经过t之后就变成S(0)e^μt,肩膀上扛的这个东西(μt)是一个确定的收益率。

我们可以看到它只跟时间有关，随着时间线性放大。有波动性的股票价格计算，它会变成什么样子呢？我们看到肩膀上扛的这个收益率(μt)就变得比较复杂了。

实际上这会用到随机过程中的伊藤积分，我们不展开讲，就先看这个结果。它不再是μt，有一些奇奇怪怪其他的东西，是一个带有不确定性的收益率。



咱们就更深入地来看一看这个不确定性的收益率是怎么回事（如上图）：放大一下，看到这里面有几项，首先σ*w(t)代表的是收益率的运气的因素,σ是刚才我们讲的波动率，w(t)就是布朗运动或者做维纳过程，是符合正态分布的一个随机数，平均值是0。

它的标准差是$\sqrt{t}$,上次我们讲过了，波动率是会随着时间的平方根来扩大，所以w(t)的方差也会随着时间的平方根来扩大。

那么对于一个中产阶级来说，右面这一项自然就是0，因为中间那种情况就是取到随机数中间的情况，左边自然就是中位数情况下的收益率。

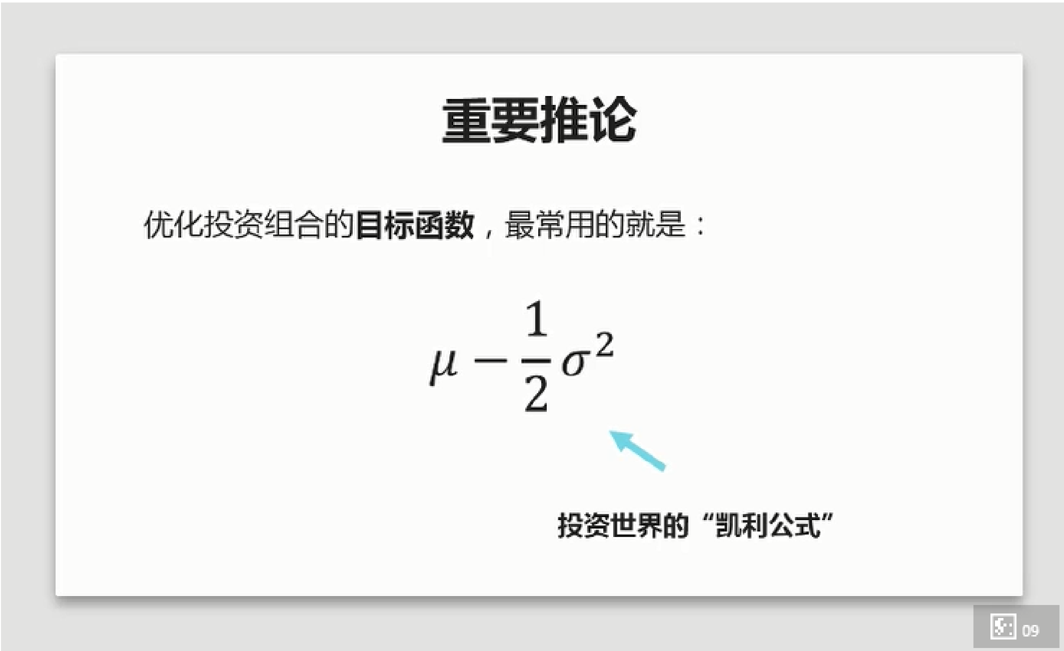
我们看到，这就很有意思：如果在没有波动的情况下，刚才是μt。那现在有了波动，就多出来一项，而且这一项是σ的平方，永远是正的，也就意味着这一项对于中位数收益率的

影响永远都是负的。

我给它起了一个名字叫波动的惩罚，这也就是我们今天这一讲的题目。它讲的是一个什么事呢？就是在波动率大的情况下，中位数（median）的收益率就变差了。刚才我们看到的一些具体的例子，包括二叉树模型，看似高大上的数学，其实背后的逻辑是挺直观的。

我学金融工程的时候，老师并没有这样告诉过我，我也是经历挺长时间之后，才意识到原来是这么回事。所以希望通过今天的课程，能让大家对金融工程里面比较复杂的数学模型有更直观的理解。

因此我们就有一个重要的推论：在做投资组合优化的时候，最常用的目标函数就是：**μ-1/2σ^2**。



换句话说，我们是在优化中位数的情况（作为中产阶级），因为不能假设自己每次的运气都很好，必须要假设拿到的是中间的结果，因此我也可以把这个称之为投资世界的“凯利公式”，它涉及到你怎样去分配你的赌注，怎样去构建投资组合。

这儿大家先有一个印象，接下来我们会看例子，在后边的课程当中，我们还会具体的讲怎么样做投资组合的优化。

进阶内容

今天的课程讲到这就差不多了，我们也可以总结一下：好像是一些挺直观的例子、一些挺简单的数学，其实已经涉及到随机过程中许多貌似高深、高大上的数学理论。

我在这儿简单的罗列一下：首先咱们讲到了**二叉树（binomial tree）模型**。在金融当中二叉树模型的提出者马克•鲁宾斯坦(Mark Rubinstein)教授，还是我在 Berkeley的时候教这门课的老师。

第二，咱们刚才讲到在连续的情况下，二叉树就变成了**几何布朗运动（Geometric Brownian Motion）**。我们在算GBM股票价格的时候，其实是用到**伊藤引理（Ito’s Lemma）和伊藤积分（Ito’s Calculus）**的。

这都是随机过程非常基础的理论，如果有的朋友愿意去学金融工程，无论在国内还是国外，一定会涉及到这些东西的。

这里面也用到了一些更基础的数学理论，比如刚才我们讲的**维纳过程（Wiener Process）、布朗运动**，它其实是**马尔科夫过程（Markov Process）的一种特殊形式。**然后我们在做数学推导的时候，也用了到**鞅（Martingale）的 概念**。

从这些数学理论当中，如果我们再往前推导一下，其实就可以得出期权定价公式：**Black-Scholes Equation**。

所以也就看到，数学理论的背后逻辑还是可以挺清楚的。当你把那些具体的例子看明白，道理想明白了之后，就会觉得数学其实是非常直观的。我以前也说过这样的话，再次重复：数学其实并不枯燥，它是一种刻画世界的优美语言。

希望大家通过量化小学，能够对数学公式背后的逻辑有一个直观的理解，然后感兴趣的同学们可以再去看教科书，再去更精准的掌握高大上的数学。

今天这期就到这里，咱们讲了挺多理论，下一次我们就具体看一看波动性是如何计算的。

最后也再一次提醒大家：跟课程有关的样例、补充材料，包括思考题的答案，都可以在quant<OS>网站上找到。只要点击量化小学的Tab，就可以得到很多附加的材料。

好，那今天的讲座就到这，谢谢大家。

> **【校长，同学们托我来和您反应反应噢！】**
>
> 2018年，《量化小学》开学一个月啦！同学，你难道没有什么想和校长聊聊的嘛？
> 我们（制作团队）邀请你给校长写一封意见信，顺便...也回答两个小问题，期待可以更好地服务大家！
>
> **点击链接：** 一封给校长的意见信

加入“量化小学”的见识圈，一起学习

感谢您订阅本特辑，全年订阅用户请扫描下方二维码或点击圈子链接，即可加入专属见识圈子深入交流学习。

量化小学


渔生

小学而大不遗，量化师生联谊会

感谢大家订阅《量化小学》，这里是学校见识社群，你可以随时提问、随时互动，我们一起投资，一起分享！

风险提示及免责条款

市场有风险，投资需谨慎。本文不构成个人投资建议，也未考虑到个别用户特殊的投资目标、财务状况或需要。用户应考虑本文中的任何意见、观点或结论是否符合其特定状况。据此投资，责任自负。

写评论

请发表您的评论

表情 图片 发布评论

华尔街见闻

关于我们
广告投放
版权与商务合作
联系方式
意见反馈

法律信息

版权声明
用户协议
付费内容订阅协议
隐私政策

华尔街见闻APP
华尔街见闻公众号
微博@华尔街见闻

声明

未经许可，任何人不得复制、转载、或以其他方式使用本网站的内容。
评论前请阅读网站“跟帖评论自律管理承诺书”

违法和不良信息

举报电话: 021-60675200（周一到周五9:30-11:30，13:00-18:30）
举报邮箱: contact@wallstreetcn.com
网站举报: 点击这里

中央网信办违法和不良信息举报中心
上海市互联网违法和不良信息

违法和不良信息举报受理和处置管理办法
清朗·财经违规内容专项整治公告
举报中心

友情链接

腾讯财经 | 财经网 | 澎湃新闻 | 界面新闻 | 全景财经 | 陆家嘴金融网 | 富途牛牛 | 网易财经 | 凤凰网财经 | 虎嗅

© 2010 - 2022 上海阿牛信息科技有限公司 版权所有 沪ICP备13019121号 沪公网安备 31010102002334 号 增值电信业务经营许可证沪B2-20180399