



## 经典的投资组合理论 . 第17讲



渔阳 2018-04-17 17:31

字数 7,145

阅读需 18分钟

“欢迎来到量化小学”

▲ 加入[“量化小学”校友圈儿](#)提问交流

详细内容请观看PPT视频

<本期课程约7568字，视频约25分钟，请合理安排学习时间>



## 本期内容

大家好，欢迎来到量化小学。今天我们讲一讲经典的投资组合理论。

其实我们前面已经做了挺多铺垫的了，讲了单个资产的收益率波动率，上一次我们讨论了怎么样计算资产之间的相关性。那么今天我们就来看一看现代金融学是怎样把这些组合在一起来构建投资组合的。

主要是三个话题，第一个是上期的思考题的讲解；第二个是现代的投资组合理论；最后我们也指出这个组合理论在实践当中的一些问题，为下面的内容做一些铺垫。

## 上期思考题

首先是上期的思考题，咱们讲了资产之间的相关性，那么A股当中有3000多只股票，如何来量化它们之间的相关性？

解决方法：多因子风险模型 – 把各种“共性”抽象成因子

- 30个左右的行业因子（银行、食品、电子、化工等）
- 10个左右的风格因子（规模、成长、价值、动量等）
- 只需考虑风险因子的协方差矩阵即可，维度降低到40左右

投资全球更要投资自己

W | PREMIUM

01

下一篇:

大佬们的秘诀：成功  
投资背后的简单逻辑  
· 第18讲 0

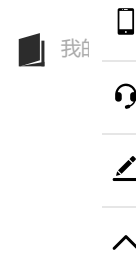
最直接的做法就是每一对股票之间都直接计算，但是这样的话相关性矩阵就会有3000多维，其实是不太现实的，因为首先你需要非常多的数据。另外，结果的可靠性稳定性也都

来自特辑



量化小学

解放你的投资动手能力





是大问题。

前面咱们讲过量化常见的一些坑，包括过拟合呀等等，这个如果你计算一个3000多维的矩阵的话，是很容易掉到这个坑里面去的。

另外就是计算的计算量本身也是一个也是一个问题，一个3000多位的矩阵用起来也非常的困难，比如说你涉及到矩阵求逆，这几乎就变成一个不太可能的问题了。

那么我们怎么样做呢？通常的解决方法是利用多因子风险模型。意思就是说，股票之间的相关性是来自于一些共性，比如说市场可能会涨，或者是这个大股票会捧一个小股票等等。

多因子风险模型就是首先把各种共性抽象成因子。一个比较基本的框架是，首先会有行业因子，一般在30个左右，包括银行、食品、饮料、电子、化工等等的行业，每支股票都属于一个行业。那在这之上还有10个左右的风格因子，包括了规模、成长、价值、动量、流动性等等。

这40个左右的因子描述了3000只股票相互之间的共性，而共性之外的东西就是这个股票的独特性。

所以在下面这个数学公式里面，我们现在第一项是一个巨大的求和，每支股票的收益率可以看成是在因子上的暴露和因子回报的和。然后后面这一项 $\epsilon_i$ 实际上说的是他自己的个性带来的回报。

那么在这样一个多因子的框架下，我们就把一个3000多维的相关性矩阵给他降低成了一个40维左右的相关性或者斜方差的矩阵。我们只需要考虑因子之间的相关性，或者斜方差就



最近更新

【学业总结】量化学习的脉络梳理，以及  
继续学习提高的路径

2019-04-12更新

进阶研究：集成学习和深度学习. 第31讲

2019-03-28更新



可以了。在这个之外的股票的独特性，他们相互之间都是独立的。

那么这样就把这个问题大大简化了，而且因为因子本身它是有意义的，无论是行业也好或者风格也好，你比较不容易掉到那个过拟合或者其他的一些坑里去。

刚才其实我们也讲了相关性矩阵或者协方差矩阵，复习一下上次讲过的内容，这两个之间就差了一个波动率，相关性矩阵乘以波动率就是新方差矩阵。这算是一个简单的预习吧，在后面第五章当中，我们将会详细的介绍多因子的风险模型，如果现在就感兴趣的同学们可以阅读本期的课后资料里的一篇中信证券的研报，在这堂课最后我会把这个研报给列出来。

## 现代投资组合理论

那下面我们就来讲一讲现代投资组合理论。这里面还有一个小故事，现在投资组合理论的发明人叫做Harry M. Markowitz，中文翻译叫**亨利·马科维茨**。

50年代初，他在著名的芝加哥大学读经济学博士。芝加哥大学大家都知道，有一个非常著名的芝加哥学派，这是经济学领域当中可以说是最有名的几个学派之一。

那么在这样一所非常牛的大学里面读经济学博士的Markowitz快要毕业的时候，他要需要写毕业论文。他对股票比较感兴趣，他对投资组合构建比较感兴趣，然后就写了这样一篇论文，就是利用波动率、相关性、预期收益率等等我们前面讲到的概念来构建投资组合。

但是他在答辩的时候，台下坐的委员会的成员，包括著名的经济学家、后来诺贝尔奖得主米尔顿·弗里德曼。这个老教授就打断了他的他的这个答辩，说你写这个论文首先不是一个经济学的论文，也不是一个数学的论文，同样不是一个工商管理的论文，所以我不能让你毕业。



当然，马克位子实际上还是毕业了。不但如此，他这篇并不长的毕业论文成为了现代金融学的开端，因为他创建的就是这个Markowitz投资组合理论。

因为这个事，Markowitz最终还在1990年获得了诺贝尔经济学奖。当然，当初那位审他审查稿的老教授弗里德曼还是嘴硬说，我当时说的并没有错，你这既不是经济学的论文，也不是数学论文，你这是开创了一个新的学科，就是现代金融学。

所以有这样一个小故事，也是一个挺有意思的事儿。其实一些领域的开山之作并不是那么复杂，也比较短，这篇论文我们也会在本堂课后的资料中给大家列出来。其实一共有十几页，我建议大家抽空去看一看。

### 现代组合理论（MPT）的基本逻辑

好，那么这个Markowitz理论到底是怎么回事？既然涉及到数学，我们先要看一看它的基本假设和基本逻辑。

首先第一点，这个理论认为投资人都是理性的，叫rational，那么理性的表现就是喜爱收益、厌恶风险。如果这个两个投资组合的预期收益率是相同的，那么显然我会选择风险最低的、或者是波动率最低的那个投资组合。同样，如果几个投资组合是相同的风险，那么我很显然会选择预期收益率最高的那个组合。

其二，我们要用数学，就需要对资产的收益率的数学性质做一些刻画。这个前前面我们都做了铺垫了，单个资产的预期收益率和波动率是符合正态分布的，这是第一个假设。

第二个假设是个资产之间的预期收益率的关系，可以用相关性矩阵或者是斜方差矩阵来刻画。再重复一遍，相关性矩阵和协方差矩阵之间就差了一个波动率的向量。



那么第三点是Markowitz带来的一个非常重要的概念，就是传统上来讲，大家都关心的是单个资产的预期收益和风险。但是马克维茨说这个并不是最重要的，最重要的是你把这些资产都组合在一起的时候，他对组合的收益和风险的贡献。

这在当年是一个很重要的一个想法，举一个非常直观的例子，如果你在一个组合当中引入一个和别的资产都是负相关的这样一个股票，那其实就很有价值，因为它不但能给你带来收益，还可以把其他的风险都给冲抵掉。

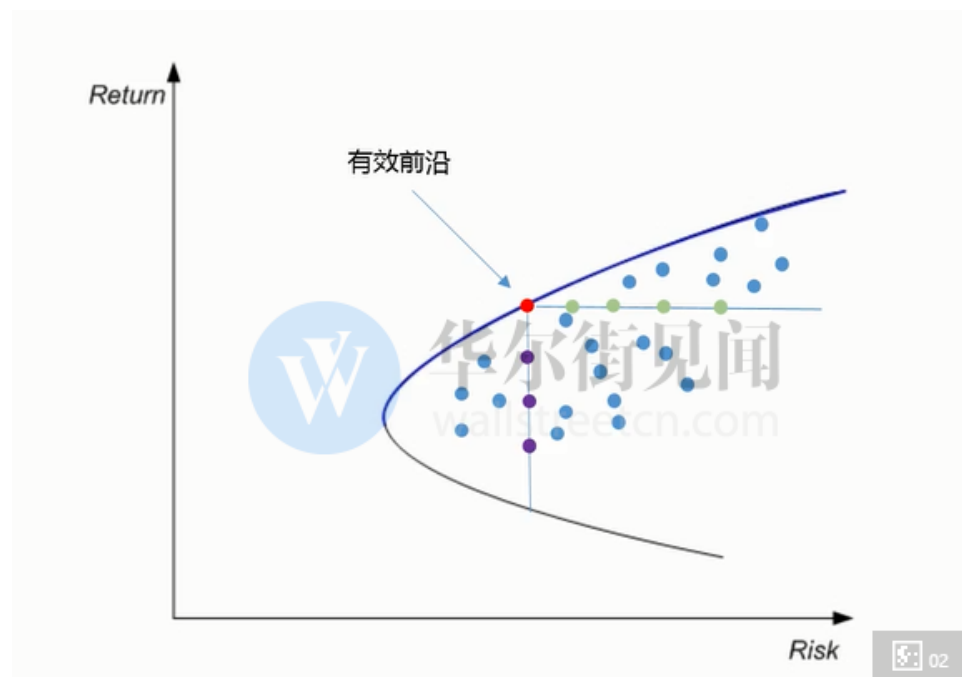
所以在这样的框架下，现代投资组合理论就变成了一个数学问题，叫做均值方差的优化（mean-variance optimization）。我们接下来就看一看这个均值方差优化会带来什么样的结果。

### 现代组合理论（1）

输入参数就是每个资产的预期收益率，每个资产的波动率，还有资产之间的相关性矩阵。那么我们组合构建目标就是一个理性的投资者，同样的预期收益率希望波动率最小，或者同样的波动率需要预期收益率最大。

第三点我们还需要加一个限制条件，所有的资产的权重之和为100%。看上去很简单，但是Markowitz得到了一个什么样的结论？就是我右面画的这张图。





这张图有两个轴，纵轴是投资组合的预期收益，横轴是投资组合的波动率或风险。那么很显然，按照各种各样权重生成的这些投资组合，都在平面上对应的一个点。把这些点对应起来，Markowitz就指出，这在数学上是一个二次型，它就像彗星一样的形状。

那么既然是彗星这样一个形状，就会存在着一个最外端紫色和黑色的这个线，就相当于所有投资组合风险收益的这样一个边界。特别是在子弹头形状的上半部分，用紫色标注的这条线，它代表的是一个从风险收益的角度来说最好的一条线，也称为马科维茨有效前沿（Markowitz Efficient Frontier）。

更具体的说来，在这个前沿上的点就都是符合同样的预期收益率的情况下，波动率最小或者是同样的波动的情况下，预期收益率最大的。



比如这个红色的点，他和底下的这三个紫色的点相比，风险是一样的，因为是向下一条直线。但是它的收益率是最高的，那么这个红点和右侧的这几个绿点相比，它们的预期收益是一样的，但是红点的风险最低，所以这就是一个Markowitz有效前沿的概念。

quant<OS>模拟实操

那么现在当然这是理论了，现在我们切到quant<OS>看一下实际的模拟，看看会不会到底是不是这样？



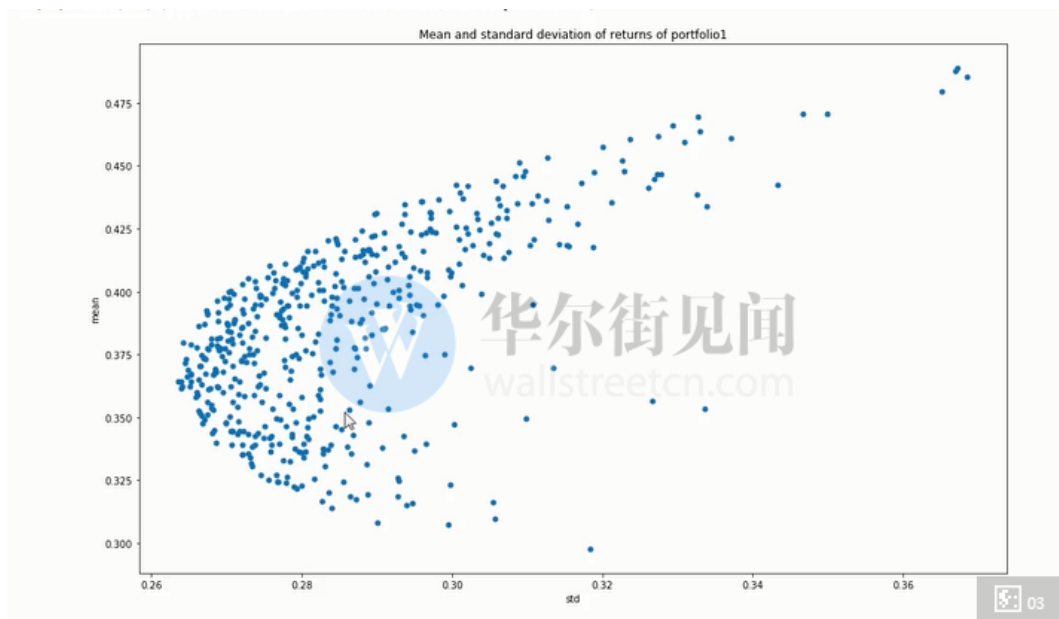
<quant<OS>模拟实操>

我们现在已经切到了第17课的这个样例代码，这个马克维斯的投资组合优化，代码本身我就不讲了，我们来直接看看他画出来的图像在这张图是怎么生成的。





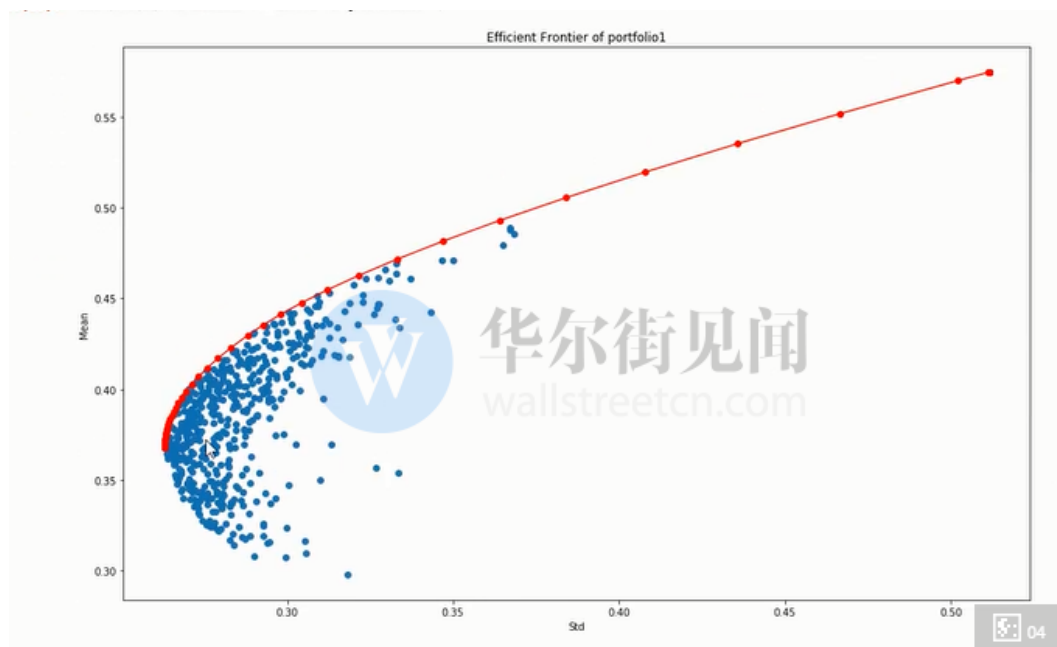
我首先取出了四只股票，然后按照他过去几年的历史收益率，作为对未来的一种预期，同时我计算了它们之间的波动率和相关性。



那么我们确实在这张图上看到一个类似于马克维茨意见的一个子弹头的形状，因为我是随机的生成了500组权重，然后按照这个相关性矩阵按照波动率，把它们的预期风险预期收益都算出来，直接画在这张图上，我们看到确实是一个类似于子弹头的形状。

那么在底下这张图当中，我们直接用数学里面的二次型画出了预期的有效前沿。可以看到这个和实际的随机生成的那500个组合还是很接近的，这500组合里面最好的基本上确实就是在这个有效前沿上面。





所以这一个简单的例子告诉我们，就是马科维茨的理论确实是能够在这个实践当中被得到证明的。

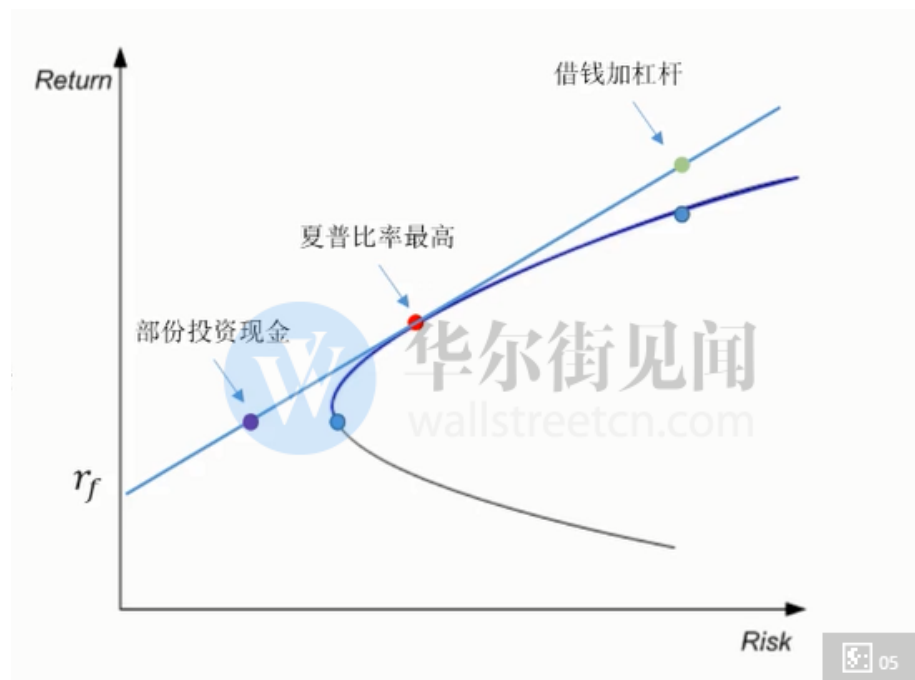
## 现代组合理论 (2)

那接下来我们怎么来用？这个就比较有意思了，我们有了这个有效前沿之后，所以有一个基本的动作。如果说你想多赚点钱，怎么办？你就沿着这个有效前沿向右移动，那么就是说我这个投资组合承受更多一点的风险，你看这个红点向右的时候预期收益率就上去了。

那么如果说我觉得这个风险太大了，我想保险那怎么办？你就沿着这个有效前沿向左移动，那么最左边有一个这个子弹头的顶点，它是风险最小的一个投资组合，这是基础动作。



那么有没有更好的方法？其实也是有的，我们这个马科维茨的有效前沿，它是利用一些风险资产组合起来的，但是在现实的投资实践当中，还有那种无风险资产。比如说短期国债，甚至是在大银行里的存款等等。如果我们引入无风险资产会怎么样？还是比较有意思的。



在这张图上面，我们假设无风险利率是 $r_f$ 的话，那么它自然是在这个纵轴上是一个就一个点了，因为他没有风险，所以它的波动率是零。当然从收益率角度来说，他可能也会稍微低一些。

那么从数学上来讲，一个点和一个二次型之间，我会画出一条切线来，就是这个红色的点。那么这个红色的点它有一个非常有意思的数学性质，它是夏普比率最高的。前面我们讲过夏普比率的定义是要用你这个组合的预期收益率减掉无风险利率，再除以波动率。



那么在这个形状当中，这个数学大家自己可以去想一想，这个切线红点就是夏普比率，是最高的那个投资组合。

那么我们怎么来利用它呢？两种用法，首先在红点的左边，我们可以部分的投资于现金，部分的投资于这个红色的这个最好的portfolio，那我们会得到比如这个紫色的点。我们发现他有一个非常有意思的数学性质，它的这个从预期收益率的角度来说，它和右面这个有效前沿上的蓝点是一样的，但是它的风险比这个蓝色的点 小。

那么在红点的右侧，我们有一个借钱投资或者是上杠杆的逻辑。比如说这个绿色的点，相当于是我假设我按照无风险利率来借了一些钱，投资这个夏普比率最高的这个红色的点的 portfolio 的话，那我会得到一个这个绿色的点，它的风险度和有效前沿这个蓝色的点是一样的，但它的预期收益率却比较高。

所以这个挺挺有意思的一件事情，就是我们简单地引入了一个无风险资产，那么我们所得到的投资效果居然会比这个马科维茨的有效前沿更好。这个当然有一个前提假设吧，就是它能够利用无风险利率来投资来借钱，很有意思。

### 现代组合理论 (3)

这个一个是切线，一个是红点，那到底是什么呢？其实可以对应到我们前面讲过的一些金融理论。那么最基础的是有效市场派，一般来说是学院派的这个逻辑链。他们就是讲市场是有效的，你没有办法预测未来嘛，这是有效市场假说告诉我们的。你们不用模仿预测未来，所以你自然就没有办法战胜市场。

那因此从逻辑上来讲，夏普比率最高的必然就是市场组合，所谓市场组合就是这个把市场上所有能投资的标的，按照他们自然的权重给它组合在一起。那么这个市场组合是什么？



就是刚才那张图上的红点，那么理性的投资者，你只应该沿着那条切线，投资于无风险资产和市场组合，就只有两个基本的选择，你无非是调整它的权重而已。

那么刚才我们讲的一条切线有一个特别的名称叫做资本市场线，英文就是capital market line。所以在有效市场派的看来，他把这个投资组合的问题就给简化了，一个是市场组合，一个是无风险资产，你只要在这里跟两个里面进行组合就完了。

那下一次我们会讲到，我就先做个预告，下一期叫做大脑的秘诀，其实也会讲到就是你看似简单的理论，可以演化出非常有这个价值的商业模式来。那么在主动管理派看来，它首先既然是主动管理嘛，那就是说我对资产的预期收益率、波动率和相关性都有自己的判断。

那怎么判断？当然是通过一些模型或者一些主观的一些认知。所以说我既然对每一个预期资产的性质都有自己的判断，那么前面那个红点是什么？自然就是我基于上述判断构件的夏普比率最高的组合，所以这个是和有效市场化就不一样了，这个最佳的组合不一定是市场组合，而是说根据我自己的判断来得到的。

那么这个切线又代表了什么？就是我可以沿着这个切线来通过加减杠杆的方法来增厚我的收益率，或者是降低我的风险是吧？所以说我们看到了无论你是被动投资派还是主动投资派，现代组合理论对你都会是有帮助的。那只不过说这个最佳的投资组合是怎么回事？两派的看法是不一样的。

## 现代组合理论 (4)

那下面我们就更直观的来看一看这个事，还是这个有效前沿，对吧？在理想的情况下，我们是首先可以通过优化来找到夏普比率，最高的组合就是这个红点。当然如果你是有效市



场，你也不用找了，这就是那个market portfolio。

那么第二点，我们是可以通过调节资金杠杆，沿着切线移动来调节风险度和预期收益，挺好的，是一个不错的理论。那么因此这个切线也称为资产配置线capital allocation line。我们刚刚讲过，如果是有效市场派的话，这个就变成了资本市场线了capital market line。

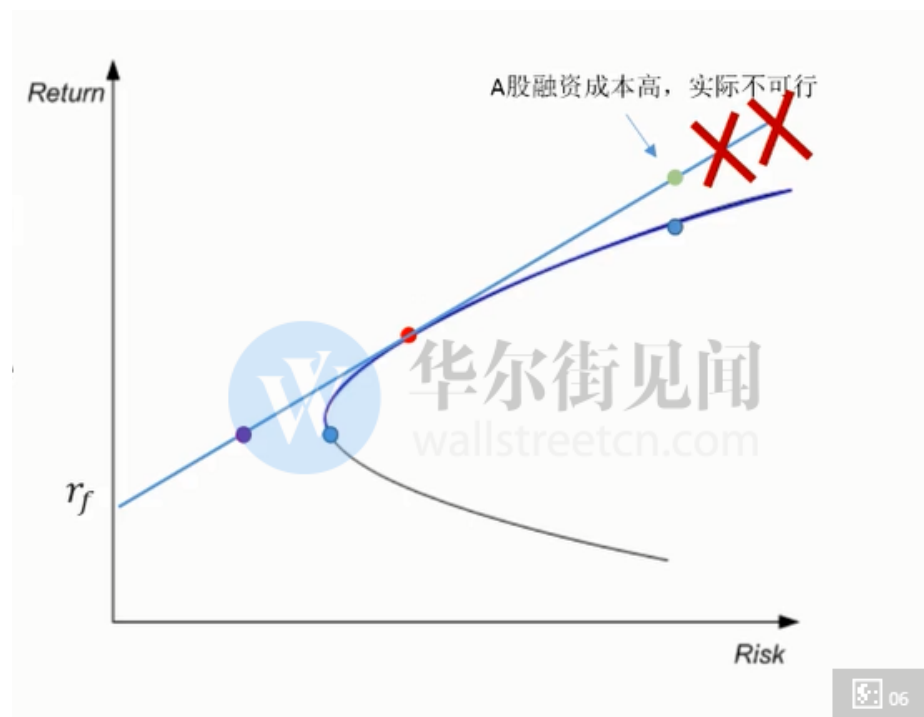
那这是理想的情况，但是现实世界总是不那么完美的。那么我们在这对比一下，美国市场和A股市场。在美国市场借钱是比较容易的，成本也比较低，所以尽管你不可能用无风险利率来借到钱，实际上差的不是那么远。因此在美国市场理论还是接近于正确的。

但是在A股市场其实你就不能这么用了，因为借钱的成本是非常高的。我们的现在无风险利率可能是3%、4%的样子，但是你如果去融资的话，那可能要起码要7%左右了，差的太多了。因此在这个资本配置线的这个红点的右端，这个上杠杆投资的方法往往是不够现实的。

那因此我们这个理论如果运用在A股市场的话，我个人的观点是红点右面的这个线是没有意义的。你要想增厚收益你怎么办？你只能回到这个马科维茨的有效前沿上面，沿着这个原来这有效前沿向右移动，因为这个你是不需要借钱的，直接按照你的资本来组合就可以了。

那由此我们就必然延伸出一个结论，中国和美国的这个主动管理型的基金经理，他考虑的重点是不一样的。这可能是一个比较深的概念了，我估计绝大部分的量化课程也不会讲到这一点，这也是我个人吧在美国做过，然后我回国实践了蛮长时间之后，我逐步总结出来的一些心得。





## 进阶话题

下面我们来讲一个进阶的话题，就是在中国和美国做对冲基金究竟有什么不一样的地方？



## 进阶话题

在美国做equity stat-arb：

- 风控非常重要 – 找到“最佳组合”，然后加减杠杆（通常5倍左右，第3集内容）

华尔街见闻

在A股做选股策略：

- 更重视信号 – 在资源有限、难加杠杆的情况下，“赚钱能力”比精细的风险控制更重要

07

我是这么看待的，在美国做市场中性equity stat-arb,风控是非常重要的，因为你把风控做好了，你就能找到那个夏普比率更高的投资组合，然后通过加减杠杆来实现比较高的收益。关于equity stat-arb，第三季当中我们就讲到了这个的基本逻辑，有兴趣的同学可以复习一下。这是在国外，风控极为重要。

在A股做选股策略就不完全是这样了，因为你风控做的再精致，你的这个投资组合的夏普比率再高，也没有什么特别大的用处。原因在于你不能随便加杠杆，对吧？在国外的一个基本的逻辑是说，我也许我投资组合只有3%的预期收益率，但是我加上那个五倍的杠杆，我就变成15%了，是吧？再减掉一些杠杆的成本也不是太贵，但是在国内这个行不通。

那么你要想多赚钱怎么办？你那条切线对你的帮助不大，你只能沿着这个有效前沿去寻找回报率更高的投资组合，那因此在A股做选股策略应该更重视信号，这主要是因为资源有限，你就那么多钱又不容易加杠杆的情况下，其实赚钱能力是比精细的风险控制更重要的。





这是由于两个市场不同的这个基本架构这个构成的。当然我们可以展望一下，如果以后在A股市场借钱变得更容易，上杠杆变得更容易的情况下，自然精细的风控也就变得更重要了。

## 课后思考题

好，那今天其实我们讲的挺多的，那么最后我们也提出一些作为课后的思考题吧。就是这个现代金融学理论，就是这个马科维茨有效前沿，然后均值方差优化，数学上挺优美的。但是它实际当中会不会有什么样的问题，我们又怎么样去解决？

### 课后思考题

Markowitz组合理论（均值方差优化）的参数输入：

- a) 每个资产预期收益率 – 很难精确预估
- b) 每个资产的波动率 – 相对容易一些
- c) 资产之间的相关性 – 也比较难（往往不稳定）

思考题1：均值方差优化对参数的敏感程度如何？（请利用样例程序，在金融终端上自己试验）

思考题2：实际投资中，如何解决这些问题？

08

我们来看一下，这个数学理论吧，它都是建立在假设上面的，因此我们要去对一个数学理论作为做一个批判性的研究的时候，我们往往是从他的这个输入来入手的。我们来看一看马科维茨理论的输入有没有什么问题。



我们主要需要知道三件事，第一个是每个资产的预期收益率。其实这个是非常难以精确预估的，前面我们反复地讲就是说你要想预测未来是非常困难的一个事情，那有效市场假说根本就告诉你，这是不可能的。所以这是第一个难点。资产的预期收益率是不容易知道的。

那么第二点，就是每个资产的波动率，这个相对容易一些，但也不是说完完全全的就你也做不到100%精确吧我们前面讲过你用历史波动率就差不多了，但是未来毕竟跟历史不完全一样。

第三件事我们需要知道资产之间的相关性。其实这个也是比较难的，特别是很多资产之间的相关性往往不太稳定，短期看是一回事，长期看又是另外一回事。另外在金融危机的时候，往往资产的相关性就会大大增加。所以马科维茨理论就是有这样的难点，因为它的输入，经济不容易很精确的计算。

因此请大家思考两个问题。第一个问题其实是一个应该是一个实验题，就是均值方差优化对于参数的敏感程度究竟如何？希望大家用我们的这个样例的程序在金融中那自己实验一下。我们不是用四只股票做了那样一个投资组合吗？你可以尝试着把这个四只股票的预期的收益率还有波动率相关性都稍微的做一个调整，看看画出来那个子弹头形状的那个有效前沿是不是还一样，实际上我可以告诉你，他们是不一样，而且会变得很变变得很大。我们有一些样例的代码在那里，大家请尝试的变换参数。

那么第二点，在实际的投资当中，你应该怎么样来解决这些问题？我也是我们下一期的内容。

**预告&资料**



我们来看一看一些真正的成功的机构投资者是怎么样来在实践当中解决马科维茨理论的难题的，所以请看下一期大佬们的秘诀。

那最后给大家推荐一些学习资料，首先还是这个quant<OS>金融终端上的样例，第二是马克维兹那一篇1952年的论文。那第三是我们在开始的时候讲到了多因子模型的构建方法，这个有一篇中信证券的研报，感兴趣的同学们可以先看一看，我们在第五章当中还会更详细地讲。

### 学习资料

1. 策略实现样例：quant<OS>金融终端教学频道  
<https://www.quantos.org/courses/index.html>
2. Portfolio Selection -- Harry Markowitz, March 1952, The Journal of Finance
3. 《关于多因子模型构建方法实用性的理论探讨》 -- 中信证券研报，2018年2月

本集涉及的重要金融概念和理论：

- 现代组合理论（MPT），均值方差优化，CAPM定价模型，APT定价模型，多因子模型

09

那么最后我把本集当中涉及的一些重要的金融概念和理论给大家再归纳一下。这里面包括了现代组合理论（MPT）、均值方差优化、CAPM定价模型、APT定价模型、多因子模型等等。因为我们上课的时间实在是有限的，所以我们不可能一个一个的很详细地讲。

### 校长留言



量化小学的目的是什么？

是希望先给大家一个直观的一个理解，就是你有了这个你了解了这个理论实际上是要解决什么样的问题之后，你再去看那些论文，你就会觉得事半功倍，就会容易很多。

比如说如果你熟练地掌握了我们今天讲到的这些投资组合理论的想法，你再去看这个马科维茨的论文，或者你再去看这个多因子模型的构建方法，你就会容易很多，所以这个是我们量化小学的目的。

那么我也希望真的对现代金融理论感兴趣、真的想在这个金融里面有发展的同学们一定要做延伸的阅读。

好，那今天的课程就到这里，谢谢大家。

-END-

加入“量化小学”的见识圈，关注动态

感谢您订阅本特辑，扫描下方二维码或[点击圈子链接](#)，即可加入专属见识圈子提问交流





## 量化小学



渔生

小学而大不遗，量化师生联谊会

感谢大家订阅《量化小学》，这里是学校见识社群，你可以随时提问、随时互动，我们一起投资，一起分享！



## 风险提示及免责条款

市场有风险，投资需谨慎。本文不构成个人投资建议，也未考虑到个别用户特殊的投资目标、财务状况或需要。用户应考虑本文中的任何意见、观点或结论是否符合其特定状况。据此投资，责任自负。

## 写评论

请发表您的评论



表情 图片

发布评论

### 华尔街见闻

关于我们  
广告投放  
版权与商务合作  
联系方式  
意见反馈

### 声明

未经许可，任何人不得复制、转载、或以其他方式使用本网站的内容。  
评论前请阅读网站[“跟帖评论自律管理承诺书”](#)

### 法律信息

版权声明  
用户协议  
付费内容订阅协议  
隐私政策

### 违法和不良信息

举报电话: 021-60675200 (周一到周五9:30-11:30, 13:00-18:30)  
举报邮箱: [contact@wallstreetcn.com](mailto:contact@wallstreetcn.com)  
网站举报: [点击这里](#)



华尔街见闻APP



华尔街见闻公众号



微博@华尔街见闻



中央网信办  
违法和不良信息举报中心

上海市互联网  
违法和不良信息举报信息

[违法和不良信息举报受理和处置管理办法](#)

[清朗·财经违规内容专项整治公告](#)



举报中心

## 友情链接

[腾讯财经](#) | [财经网](#) | [澎湃新闻](#) | [界面新闻](#) | [全景财经](#) | [陆家嘴金融网](#) | [富途牛牛](#) | [网易财经](#) | [凤凰网财经](#) | [虎嗅](#)

© 2010 - 2022 上海阿牛信息科技有限公司 版权所有 沪ICP备13019121号



沪公网安备 31010102002334 号 增值电信业务经营许可证沪B2-20180399

