Problemas associados a Equações Diferenciais Parciais de segunda ordem do tipo Elíptico

Daniel Morales

Universidade Federal de São Paulo

26 de Novembro 2019

Estrutura

Conceptos fundamentales

Equações diferenciais parciais de segunda ordem

EDP de segunda ordem

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ uma expressão com a forma

$$F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0, \tag{1}$$

é chamado de EDP de segunda ordem, onde

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$$

es dada y

$$u : U \to \mathbb{R}$$

é desconhecida.

Conceitos fundamentais

EDP linear de segunda ordem

A equação (1) é chamada linear se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

onde as funções a_α, f são dadas. Sim $f \equiv 0$, essa equação linear é chamada homogênea.

Conceitos fundamentais

Espaços Sobolev

Derivadas fracas

Sean $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e α um multi-índice Diremos que $v \in L^1_{loc}(U)$ es $\alpha-$ésima derivada parcial fraca de u sim para todas as funções $\phi \in C^\infty_c(U)$ está satisfeito

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^\alpha \int_U v \phi dx.$$

Conceitos fundamentais

Espaços Sobolev

Definição

Fixo $p \in [1, \infty]$ diremos que o espaço Sobolev

$$W^{k,p}(U)$$

consiste em todas as funções localmente sumável $u : U \to \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a L^p.

Exposição do problema

Notação

- Vamos denotar, em $\mathbb{R}^2$, por Δ o operador

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

- Seja $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, e $\Gamma = \left\{(x,0) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}$.
- Seja $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ uma $T-$periódica com

$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1$$

quase sempre para $x \in \mathbb{R}$ e denotemos por $M(g)$ o valor medio de g sobre $(0,T)$.
- Para ϵ_0 suficiente pequeno, vamos considerar $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$ e defina-sé por ω_ϵ o conjunto

$$\left\{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \epsilon g(\frac{x}{\epsilon})\right\}.$$

Exposição do problema

Notação

- Vamos denotar, em $\mathbb{R}^2$, por Δ o operador
$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$
- Seja $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, e $\Gamma = \left\{(x,0) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}$.
- Seja $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ uma $T-$períodica com
$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1$$
quase sempre para $x \in \mathbb{R}$ e denotemos por $M(g)$ o valor medio de g sobre $(0,T)$.
- Para ϵ_0 suficiente pequeno, vamos considerar $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e defina-sé por ω_ϵ o conjunto
$$\left\{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \epsilon g(\frac{x}{\epsilon})\right\}.$$

Exposição do problema

Notação

- Vamos denotar, em $\mathbb{R}^2$, por Δ o operador

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

- Seja $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, e $\Gamma = \left\{(x,0) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}$.
- Seja $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ uma $T-$periódica com

$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1$$

quase sempre para $x \in \mathbb{R}$ e denotemos por $M(g)$ o valor medio de g sobre $(0,T)$.

- Para ϵ_0 suficiente pequeno, vamos considerar $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e defina-sé por ω_ϵ o conjunto

$$\left\{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \epsilon g(\frac{x}{\epsilon})\right\}.$$

Exposição do problema

Notação

- Vamos denotar, em $\mathbb{R}^2$, por Δ o operador
$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$
- Seja $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, e $\Gamma = \left\{(x,0) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}$.
- Seja $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ uma $T-$periódica com
$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1$$
quase sempre para $x \in \mathbb{R}$ e denotemos por $M(g)$ o valor medio de g sobre $(0,T)$.
- Para ϵ_0 suficiente pequeno, vamos considerar $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e defina-sé por ω_ϵ o conjunto
$$\left\{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \epsilon g(\frac{x}{\epsilon})\right\}.$$

Exposição do problema

Hipotesis

Seja $f \in H^1(\Omega)$ e para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, considere uma família de funções V_ϵ que satisfaz

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} |V_\epsilon|^2 \leq C,$$

por alguma constante $C > 0$ independente de ϵ.

Exposição do problema

Hipotesis

Se houver uma função $V_0 \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon \phi = \int_\Gamma V_0 \phi,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ então, existe $\lambda_0 \geq 0$ independente de ϵ para o qual sim $\lambda \geq \lambda_0$ soluções de problema

Exposição do problema

Problema(Continuación)

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon + \lambda u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\chi_{\omega_\epsilon} V_\epsilon u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\chi_{\omega_\epsilon} f, & \Omega \\ \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

convergir em $H^1(\Omega)$ para a única solução de problema

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \lambda u_0 = 0, & \Omega \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} + V_0 u_0 = M(g) f, & \Gamma \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \setminus \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

Solução de problema

Paso 1 : Uso del Teorema de Lax Maxmilgram

- Se houvesse funções u_ϵ, u_0 soluções para problemas os (2), (3) para todas as funções $\phi \in H^1(\Omega)$ estes satisfazem :
- $$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u_\epsilon \phi + \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon u_\epsilon \phi = \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} f \phi$$
- $$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u_0 \phi + \int_\Gamma V_0 u_0 \phi = M(g) \int_\Gamma f \phi$$

Solução de problema

Paso 1 : Uso del Teorema de Lax Maxmilgram

- Se houvesse funções u_ϵ, u_0 soluções para problemas os $(2), (3)$ para todas as funções $\phi \in H^1(\Omega)$ estes satisfazem :
- $$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u_\epsilon \phi + \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon u_\epsilon \phi = \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} f \phi$$
- $$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u_0 \phi + \int_\Gamma V_0 u_0 \phi = M(g) \int_\Gamma f \phi$$

Solução de problema

Paso 1 : Uso del Teorema de Lax Maxmilgram

- Se houvesse funções u_ϵ, u_0 soluções para problemas os $(2),(3)$ para todas as funções $\phi \in H^1(\Omega)$ estes satisfazem :
- $$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u_\epsilon \phi + \frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon u_\epsilon \phi = \frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} f\phi$$
- $$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi + \lambda \int_\Omega u_0 \phi + \int_\Gamma V_0 u_0 \phi = M(g)\int_\Gamma f\phi$$

Solução de problema

Paso 1

Teorema(Lax-Milgram)

Seja H um espaço de Hilbert real e suponha que exista uma forma bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ para qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ para qualquer $u, v \in H$.
2. $\beta \|u\|^2 \leq B[u,u]$ para toda $u \in H$.

Se $f : H \to \mathbb{R}$ é um funcional linear delimitado em H então existe apenas um único elemento $u \in H$ tal que para todo $v \in H$

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle .$$

Solução de problema

Paso 1

Agora, defina as seguintes formas bilineares :

$$a_\epsilon(\phi, \Phi) = \int_\Omega \nabla\Phi\nabla\phi + \lambda \int_\Omega \Phi\phi + \frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon \Phi\phi, \tag{4}$$

$$a_0(\phi, \Phi) = \int_\Omega \nabla\Phi\nabla\phi + \lambda \int_\Omega \Phi\phi + \int_\Gamma V_0\Phi\phi \tag{5}$$

Solução de problema

Paso 1

- Para a primeira forma bilinear podemos considerar, para cada $\phi \in H^1(\Omega)$, a seguinte desigualdade

$$a_\epsilon(\phi,\phi) \geq \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} (V_\epsilon)^- \phi^2.$$

- Para a última integral, usando a desigualdade de Minkowski, obtemos a seguinte dimensão

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} (V_\epsilon)^- \phi^2 \leq C \left(\int_{\omega_\epsilon} |\phi|^4\right)^{1/2}.$$

Solução de problema

Paso 1

Escolhendo $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ y $s \in [\frac{3}{4}, 1)$ e considerando $q = 4$, nós usamos o seguinte

Lema 1

Suponha que $u \in H^s(\Omega,\ s \in (\frac{1}{2}, 1)$ e $s - 1 \geq \frac{-1}{q}$. Então para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, existe uma constante $C > 0$ independente de ϵ tal que

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} |u|^q \leq C\,\|u\|^q_{H^s(\Omega)}.$$

Assim

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} (V_\epsilon)^- \phi^2 \leq C\,\|\phi\|^{2s}_{H^1(\Omega)}\|\phi\|^{2(1-s)}_{L^2(\Omega)}$$

Solução de problema

Paso 1

Usando a desigualdade de Young, temos que existe um $\delta > 0$ para o qual

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon}(V_\epsilon)^-\phi^2 \leq \delta\,\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} + C\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente

$$a_\epsilon(\phi,\phi) \geq [\lambda - (1 + C_\delta)]\,\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + (1-\delta)\,\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}\,,$$

e para uma escolha de δ y λ apropriado, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$a_\epsilon(\phi,\phi) \geq C\,\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)},$$

para todas as funções $\phi \in H^1(\Omega)$ y $C = C(\lambda)$.

Solução de problema

Paso 2 : Mostrar que $\{u_\epsilon\}$ é uniformemente limitada em $H^1(\Omega)$ em relação à ϵ.

Observe que, sob a equação (4), temos

$$a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega f u_\epsilon.$$

Então, usando o lema anterior e o próximo

Lema 2

Suponha que $f \in H^1(\Omega)$ então existe $C > 0$, independente de ϵ, tal que

$$\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |f|^2 \leq C.$$

nós podemos garantir que

Solução de problema

Paso 2

$$a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq \left(\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |u_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,\|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

Então, usando o resultado final da etapa anterior, garantimos que existe $C > 0$ tal que

$$\|a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

para todo $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$. Assim, há uma subcessão, que iremos denotar u_ϵ tal que converge para $u \in H^1(\Omega)$ quando ϵ tende a 0. Como existe uma imersão compacta de $H^1(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$ para $s < 1$ temos que

$$u_\epsilon \to u$$

quando ϵ tende a 0 em $H^s(\Omega)$.

Solução de problema

Paso 3 : Vamos mostrar que $u = u_0$

Do passo anterior, temos que $u_\epsilon \to u$ em $H^1(\Omega)$ quando ϵ tende a 0 y pelo tanto $\nabla u_\epsilon \to \nabla u$ en $L^2(\Omega)$ quando ϵ tende a 0. Nós temos assim

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \phi = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi,$$

para toda função $\phi \in H^1(\Omega)$.
Além disso, como $u_\epsilon \to u$ em $L^2(\Omega)$ quando ϵ tende a 0, podemos afirmar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega u_\epsilon \phi = \int_\Omega u\phi$$

para tuda função $\phi \in H^1(\Omega)$.

Solução de problema

Paso 3

Usando os seguintes lemas

Lema 3

Seja f uma função suave no fechamento de Ω. Então :

1. Para tuda função ϕ suave, definida no fechamento de Ω, temos que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} f\phi = M(g) \int_\Gamma f\phi.$$
2. Se $u_\epsilon \to u_0$ en $H^1(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$ então
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} u_\epsilon\phi = M(g) \int_\Gamma u_0\phi.$$

Solução de problema

Paso 3

Lema 4

Com a hipótese do problema 9, para $\sigma > \frac{1}{2}, s > \frac{1}{2}$ y $s + \sigma > \frac{3}{2}$, se definirmos os operadores $P_\epsilon : H^s(\Omega) \to (H^\sigma(\Omega))^*$ como

$$\langle P_\epsilon(u), \phi \rangle = \int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon u \phi \quad , \quad \langle P_0(u), \phi \rangle = \int_\Gamma V_0 u \phi$$

para $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ então $P_\epsilon(u) \to P_0(u)$ em $\mathcal{L}(H^s(\Omega), (H^\sigma(\Omega))^*)$

Solução de problema

Paso 3

Assim,

1. Para tuda função $\phi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} f\phi = M(g) \int_\Gamma f\phi.$$

2. Para $s = \sigma$, $\frac{3}{4} < s < 1$ y para $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ tenemos $P_\epsilon(u) \to P_0(u)$ para tuda função $\phi \in H^1(\Omega)$.

Então, tendo limite quando $\epsilon \to 0$ à expressão obtida de (2), temos que u é a solução do problema (3) e pela singularidade desse problema, $u = u_0$.

Solução de problema

Paso 4 : u_ϵ tende a u_0 en $H^1(\Omega)$ quando ϵ tende a 0

Sendo $H^1(\Omega)$ uniformemente convexo, basta considerar a convergência na norma.

- A partir do segundo passo, temos que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \to \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

quando ϵ tende a 0.

- Para verificar se

$$\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \to \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

quando ϵ tende a 0, se considerarmos a forma bilinear $a(u_\epsilon, u_\epsilon)$ e como ∇u_ϵ converge em $L^2(\Omega)$ a ∇u_0 quando ϵ tende a 0 então está satisfeito que

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Solução de problema

Paso 4

Considerando a equação $a(u_\epsilon, u_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} f u_\epsilon$, temos que

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = \limsup_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} f u_\epsilon - \lambda\int_\Omega |u_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon |u_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por fim, considerando as convergências apresentadas na etapa anterior, temos que

$$\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \to \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

quando ϵ tende a 0. Logo,

$$\|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \to \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

quando ϵ tende a 0.

Conclusion

sous forme de tableau

Newton	**Rel. Restreinte**	**Rel. Générale**
$531''$/siècle	($+7''$/siècle)	$+43''$/siècle
Observations : $574''$/siècle		

TABLE – Effet des différentes théories

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2e page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4e (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3e et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2e page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4e (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3e et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2e page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4e (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3e et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2^{e} page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4^{e} (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3^{e} et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparition d'une figure

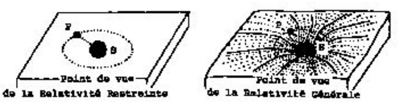
On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure

Et le texte qui suit

Exemples

Apparition d'une figure

On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure

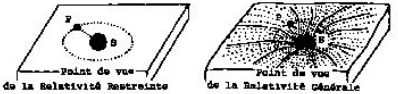


Et le texte qui suit

Exemples

Apparition d'une figure

On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure



Et le texte qui suit

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1\times\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2}\times\theta=\overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1\times\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2}\times\theta=\overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times {\omega_0}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times {\omega_0}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times {\omega_0}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times {\omega_0}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$