Problemas associados a Equações Diferenciais Parciais de segunda ordem do tipo Elíptico

Daniel Morales

Universidade Federal de São Paulo

26 de Novembro 2019

Estrutura

Exposição do problema

Notação

- Vamos denotar, em $\mathbb{R}^2$, por Δ o operador

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

- Seja $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ uma função $T-$períodica com

$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1$$

quase sempre para $x \in \mathbb{R}$ e denotemos por $M(g)$ o valor medio de g sobre $(0, T)$.

- Defina-se por ω_ϵ o conjunto

$$\left\{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \epsilon g(\frac{x}{\epsilon})\right\}.$$

Exposição do problema

Hipótesis

- Seja $f \in H^1(\Omega)$ e para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, considere uma família de funções V_ϵ que satisfaz

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} |V_\epsilon|^2 \leq C,$$

por alguma constante $C > 0$ independente de ϵ.

- Se houver uma função $V_0 \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} V_\epsilon \phi = \int_\Gamma V_0 \phi,$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega)$ então, existe $\lambda_0 \geq 0$ independente de ϵ para o qual sim $\lambda \geq \lambda_0$ as soluções do problema

Exposição do problema

Teorema (Aragao, Pereira, Pereira)

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon + \lambda u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\chi_{\omega_\epsilon} V_\epsilon u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\chi_{\omega_\epsilon} f, & \Omega \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

convergen em $H^1(\Omega)$ para a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \lambda u_0 = 0, & \Omega \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} + V_0 u_0 = M(g) f, & \Gamma \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \setminus \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Exposição do problema

Notação

Nesta palestra, vamos olhar as soluções do seguinte problema

Problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon + u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\chi_{\omega_\epsilon}, & \Omega \\ \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

para diferentes valores do ϵ, e considerando $g = |sin(x)|$, olhar o comportamiento das soluções quando ϵ tende a 0.

Exemplo

$\epsilon = 1$ vs. Problema Límite

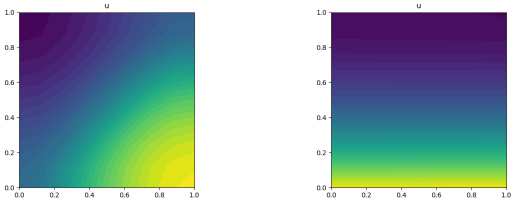
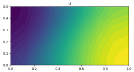
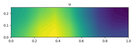


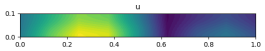
FIGURE – $\epsilon = 1$

Exemplo

Diversos valores de ϵ

[$\epsilon = 0.5$] 

[$\epsilon = 0.25$] 

[$\epsilon = 0.1$] 

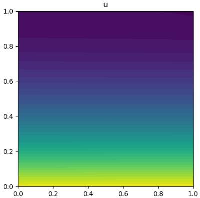
[Límite] 

FIGURE – Convergência

Conceptos fundamentales

Equações diferenciais parciais de segunda ordem

EDP de segunda ordem

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ uma expressão com a forma

$$F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0, \tag{4}$$

é chamado de EDP de segunda ordem, onde

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$$

é dada e

$$u : U \to \mathbb{R}$$

é desconhecida.

Conceitos fundamentais

EDP linear de segunda ordem

A equação (4) é chamada linear se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

onde as funções a_α, f são dadas. Se $f \equiv 0$, essa equação linear é chamada homogênea.

Conceitos fundamentais

Espaços Sobolev

Derivadas fracas

Sejam $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e α um multi-índice Diremos que $v \in L^1_{loc}(U)$ é a $\alpha-$ésima derivada parcial fraca de u se para todas as funções $\phi \in C_c^\infty(U)$ u satisfaz

$$\int_U uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx.$$

Conceitos fundamentais

Espaços Sobolev

Definição

Fixado $p \in [1, \infty]$ diremos que o espaço Sobolev

$$W^{k,p}(U)$$

consiste em todas as funções localmente sumável $u : U \to \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a L^p.

Solução do problema

Paso 1 : Uso do Teorema de Lax Milgram

- Se houvesse funções u_ϵ, u_0 soluções para problemas os $(3), (2)$ para todas as funções $v \in H^1(\Omega)$ estas satisfazem :
- $$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v + \int_\Omega u_\epsilon v = \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} fv$$
- $$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \int_\Omega u_0 v = M(g) \int_\Gamma fv$$

Solução do problema

Paso 1 : Uso do Teorema de Lax Milgram

- Se houvesse funções u_ϵ, u_0 soluções para problemas os $(3), (2)$ para todas as funções $v \in H^1(\Omega)$ estas satisfazem :
- $$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v + \int_\Omega u_\epsilon v = \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} fv$$
- $$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \int_\Omega u_0 v = M(g) \int_\Gamma fv$$

Solução do problema

Paso 1 : Uso do Teorema de Lax Milgram

- Se houvesse funções u_ϵ, u_0 soluções para problemas os $(3), (2)$ para todas as funções $v \in H^1(\Omega)$ estas satisfazem :
- $$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v + \int_\Omega u_\epsilon v = \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} f v$$
- $$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \int_\Omega u_0 v = M(g) \int_\Gamma f v$$

Solução do problema

Paso 1

Teorema(Lax-Milgram)

Seja H um espaço de Hilbert real e suponha que exista uma forma bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ para a qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ para qualquer $u, v \in H$.
2. $\beta \|u\|^2 \leq B[u,u]$ para toda $u \in H$.

Se $f : H \to \mathbb{R}$ é um funcional linear delimitado em H então existe apenas um único elemento $u \in H$ tal que para todo $v \in H$

$$B[u,v] = \int fv.$$

Solução do problema

Paso 1

Agora, defina as seguintes formas bilineares :

$$a_\epsilon(u_\epsilon, v) = \int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v + \int_\Omega u_\epsilon v, \tag{5}$$

$$a_0(u, v) = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \int_\Omega uv \tag{6}$$

Solução do problema

Paso 1

- Para a primeira forma bilinear podemos considerar, para $u_\epsilon \in H^1(\Omega)$, a seguinte igualdade

$$a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon) = \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Por tanto, $a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon)$ é coerciva.

Solução do problema

Paso 2 : Mostrar que $\{u_\epsilon\}$ é uniformemente limitada em $H^1(\Omega)$ em relação à ϵ.

Observe que, pela equação (5), temos

$$a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega f u_\epsilon.$$

Então, usando o seguinte lema

Lema

Suponha que $f \in H^1(\Omega)$ então existe $C > 0$, independente de ϵ, tal que

$$\frac{1}{\epsilon} \int_\Omega |f|^2 \leq C.$$

nós podemos garantir que

Solução do problema

Paso 2

$$a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq \left(\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |u_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,\|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

Então, usando o resultado final da etapa anterior, garantimos que existe $C > 0$ tal que

$$\|a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

para todo $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$.

Solução do problema

Paso 2

Assim,

- Há uma subcessão, que iremos denotar u_ϵ tal que converge para $u \in H^1(\Omega)$ quando ϵ tende a 0.
- Como existe uma imersão compacta de $H^1(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$ para $s < 1$ temos que

$$u_\epsilon \to u$$

quando ϵ tende a 0 em $H^s(\Omega)$.

Solução do problema

Paso 3 : Vamos mostrar que $u = u_0$

Agora,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v = \int_\Omega \nabla u \nabla v,$$

para toda função $v \in H^1(\Omega)$.

Além disso, podemos afirmar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega u_\epsilon v = \int_\Omega uv$$

para tuda função $v \in H^1(\Omega)$.

Solução do problema

Paso 3

Lema 3

Seja f uma função suave no fechamento de Ω. Então :

1. Para tuda função ϕ suave, definida no fechamento de Ω, temos que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} f\phi = M(g) \int_\Gamma f\phi.$$
2. Se $u_\epsilon \to u_0$ en $H^1(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$ então
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega_\epsilon} u_\epsilon\phi = M(g) \int_\Gamma u_0\phi.$$

Solução do problema

Paso 4 : u_ϵ tende a u_0 en $H^1(\Omega)$ quando ϵ tende a 0

Sendo $H^1(\Omega)$ uniformemente convexo, basta considerar a convergência na norma.

- A partir do segundo passo, temos que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \to \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

  quando ϵ tende a 0.

- Como ∇u_ϵ converge em $L^2(\Omega)$ a ∇u_0 quando ϵ tende a 0 então

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Solução do problema

Paso 4

Considerando a equação $a(u_\epsilon, u_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} f u_\epsilon$, temos que

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = \limsup_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{\omega_\epsilon} f u_\epsilon - \int_\Omega |u_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \to \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

quando ϵ tende a 0.