§1 实数系的连续性

关于实数系的连续性，有若干种相互等价的描述办法。本节将要介绍的“确界原理”，就是其中便于运用的一种陈述方式。通过在以后各章中的运用，读者将会逐渐加深对这一原理的理解。先来介绍有关的术语。

【上界与下界，有界集】

设 $E \subset \mathbb{R}$，$E \neq \varnothing$。如果存在 $L \in \mathbb{R}$（一个实数），使得

$$x \leq L, \forall x \in E,$$

那么我们就说集合 E 有上界，并且说 L 是集合 E 的一个上界。如果存在 $l \in \mathbb{R}$，使得

$$x \geq l, \forall x \in E,$$

那么我们就说集合 E 有下界，并且说 l 是集合 E 的一个下界。如果一个集合有上界并且也有下界，那么我们就说这集合有界，或者说这集合是有界集。

如果 L 是集合 E 的上界，$L_1 > L$，那么 L_1 也是集合 E 的一个上界。因此，一个有上界的集合，不可能有最大的上界（因为总能找到更大 L_n）。下面，我们来考察一个意义十分重大的问题：

$\Longrightarrow$ 非空而有上界的实数集合，是否总有一个最小的上界?

这种“最小的上界”，通常称为上确界。

【上确界】

设 E 是实数的非空集合，即设 $E \subset \mathbb{R}$，$E \neq \varnothing$。如果存在一个实数 M，满足下面的条件 (i) 和 (ii)，那么我们就把 M 叫作集合 E 的上确界。条件 (i) 和 (ii) 分别是：

(i) M 是集合 E 的一个上界，即 $x \leq M, \forall x \in E$;

(ii) M 是集合 E 的最小的上界：任何小于 M 的实数 M' 都不再是集合 E 的上界，即 $(\forall M' < M)(\exists x' \in E)(x' > M')$.

上确界定义中的条件 (ii) 等价于说：集合 E 的任何上界 $M_1 \geq M$。

如果 M 和 M_1 都是集合 E 的上确界，那么就应该有 $M_1 \geq M, M \geq M_1$，因而有 $M_1 = M$，由此得知：集合 E 的上确界如果存在就必定只有一个。我们把这唯一的上确界记为

$$\sup E.$$

类似地可以定义下确界。

【下确界】

设 $E \subset \mathbb{R}$，$E \neq \varnothing$。如果存在一个实数 m，满足以下的条件 (i) 和 (ii)，那么我们就把

m 叫作集合 E 的下确界：

(i) m 是集合 E 的一个下界，即 $x \geq m, \forall x \in E$;

(ii) m 是集合 E 的最大的下界：任何大于 m 的实数 m' 都不再是集合 E 的下界，即 $(\forall m' > m)(\exists x' \in E)(x' < m')$.

集合 E 的下确界如果存在就必定是唯一的。我们把这唯一的下确界记为

$$\inf E.$$

设 E 是实数的非空集合。我们以 $-E$ 表示 E 中各数的相反数组成的集合，即定义

$$-E = \{-x \mid x \in E\}.$$

请读者自己验证以下简单事项：

1. 集合 E 有上界（下界）的充要条件是集合 $-E$ 有下界（上界）;
2. 集合 E 有上确界的充要条件是集合 $-E$ 有下确界，并且 $\sup E = -\inf(-E)$;
3. 集合 E 有下确界的充要条件是集合 $-E$ 有上确界，并且 $\inf E = -\sup(-E)$。

证明示范：

$(\forall x \in E) \leq M \iff \forall x \in E, -x \geq -M \iff \forall y \in -E, y \geq -M$(令 y=-x) $\iff -E$有下界且为 $-M$.

我们来介绍实数系的一个重要性质——连续性。这一性质体现为以下的确界原理：

【确界原理（第一种陈述）】

$\mathbb{R}$ 的任何非空而有上界的子集合 D 在 $\mathbb{R}$ 中有上确界。

现在证明与这陈述等价的另一陈述：

【确界原理（第二种陈述）】

$\mathbb{R}$ 的任何一个非空并且有下界的子集合 E 在 $\mathbb{R}$ 中有下确界。

证明：在下面的讨论中，为了书写方便而作这样的约定：允许用记号

$$\frac{1}{10^n}$$

代表相应的有尽小数

$$\underbrace{0.0\cdots0}_{\text{n 个 0}}1 = \underbrace{0.0\cdots0}_{\text{n 个 0}}1000\cdots$$

我们分两种情形讨论。

情形 1：设 0 是集合 E 的一个下界。

因为 $E\neq\varnothing$，所以 $\exists x\in E$。于是又 $\exists k\in\mathbb{N}$，使得 $k>x$。我们看到：0 是 E 的一个下界，k 不是 E 的下界。

依次考察 $0,1,\ldots,k-1$ 这些数，可以断定：存在 $a_0\in\{0,1,\ldots,k-1\}$，使得 a_0 是 E 的一个下界，而 a_0+1 不是 E 的下界。

然后依次考察 $a_0.0,a_0.1,\ldots,a_0.9$ 这些数，又可断定：存在 $a_1\in\{0,1,\ldots,9\}$，使得 $a_0.a_1$ 是 E 的一个下界，而 $a_0.a_1+\frac{1}{10}$ 不是 E 的下界。

再依次考察 $a_0.a_10,a_0.a_11,\ldots,a_0.a_19$ 这些数，又可断定：$\exists a_2\in\{0,1,\ldots,9\}$，使得 $a_0.a_1a_2$ 是 E 的一个下界，而 $a_0.a_1a_2+\frac{1}{10^2}$ 不是 E 的下界。继续这样做下去，我们得到一串数：

$$a_0,a_0.a_1,a_0.a_1a_2,\ldots,a_0.a_1a_2\cdots a_n,\cdots$$

这些数满足条件：$a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是集合 E 的下界，而 $a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{10^n}$ 不是集合 E 的下界。

（不妨把上面的办法看作算法）

$\Longrightarrow$ 现在需要证明的问题转变为：这样找出的 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是一个规范小数，且它正好就是集合 E 的下确界。

首先证明它是规范小数（否则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n,\cdots$ 改成规范小数（最后一位非 9 的 +1，后面的改 0）会出 bug）。使用反证法，假如 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 不是规范小数，那么必定存在 $p\in\mathbb{Z}^+$，使得

$$a_p+1=a_p+2=\cdots=9$$

不妨设 p 是满足这个条件的最小的非负整数（从第 $p+1$ 位开始，全是 9）。对任意的 $\beta\in E$，设 β 的规范小数表示为 $\beta=\beta_0.\beta_1\beta_2\cdots$，则必定存在 $n>p$，使得 $\beta_n<9$（描述的是：因为 $p<n$，所以此时 α 的第 n 位是 9，而 β 的第 n 位小于 9）。又因为上面的找法是找下界，因此

$$\beta\geq a_0.a_1\cdots a_n$$

，也就是必定存在 $q\in\{0,1,\ldots,p\}$，使得

$$\beta_0=a_0,\cdots,\beta_{q-1}=a_{q-1},\beta_q\geq\alpha_q+1$$

（否则从第 $p+1$ 位开始就没有希望比赢大小了）。于是有

$$\begin{aligned}\beta&\geq a_0.a_1\cdots a_{q-1}(a_q+1)\\&\geq a_0.a_1\cdots a_{p-1}(a_p+1)(\text{这里是把位数往后放宽})\\&=a_0.a_1\cdots a_{p-1}a_p+\frac{1}{10^p}\end{aligned}$$

我们看到，

$$\beta \geq a_0.a_1 \cdots a_p + \tfrac{1}{10^p}, \forall \beta \in E$$

由 $a_0.a_1 \cdots$ 是非规范小数的假定，导出 $a_0.a_1 \cdots a_p + \frac{1}{10^p}$ 也是下界，而这与前面的选择办法相矛盾。由此得知：$a_0.a_1 \cdots a_n$ 必定是规范小数。

现在我们来证明这样找出的实数 $a = a_0.a_1a_2 \cdots$ 是集合 E 的下确界。首先指出：$\forall \gamma \in E$ 必定满足

$$\gamma \geq a_0.a_1a_2 \cdots .$$

如果不是这样，就必定存在 $h \in \mathbb{Z}^+$，使得

$$\gamma < a_0.a_1a_2 \cdots a_h$$

, 这与 $a_0.a_1a_2 \cdots a_h$ 的选取方法矛盾。其次，对于任何一个 $b > a_0.a_1a_2 \cdots$，必定存在 $k \in \mathbb{Z}^+$，使得

$$b \geq a_0.a_1a_2 \cdots a_k + \tfrac{1}{10^k}.$$

也就是哪怕 b 只要比前面算法找到的大一点，也会导致 $a_0.a_1a_2 \cdots a_k + \frac{1}{10^k}$ 成为下界，因此 b 不可能是集合 E 的下界。至此，对于 0 是 E 的下界的情形，我们证明了集合 E 在 $\mathbb{R}$ 中必定有下确界。

情形 **2**：设 0 不是集合 E 的下界。

这就是说，

$$\exists x \in E \text{ such that } x < 0.$$

于是，E 的任何下界 l 必定小于 0：

$$l < 0.$$

我们来考察 $\mathbb{R}$ 的另一非空子集合

$$F = \{-l \mid l \text{ 是} E \text{ 的下界}\}$$

。容易看出：0 是集合 F 的一个下界。利用情形 1 中已经证明的结果，可以断定：由集合 E 的下界的相反数组成的集合 F 在 $\mathbb{R}$ 中有下确界，即

$$\exists c = \inf F \in \mathbb{R}.$$

现在考察（这个下界的相反数组成的集合的下确界再求得的相反数）$a=-c$ 会不会是集合 E 的下确界。

为此，考察 $\gamma \in E$。显然对任何 $-l \in F$ 都有

$$\gamma \geq l\text{，}-\gamma \leq -l$$

这说明 $-\gamma$ 是集合 F 的一个下界。因而，

$$-\gamma \leq c\text{，}\gamma \geq -c=a$$

。这说明 $a=-c$ 是集合 E 的一个下界。

另一方面，对于任意的 $b>a$，我们有 $-b<-a=c$，因此 $-b \notin F$。这就是说，任何大于 a 的实数 b（因为它的相反数都进不去集合 F，所以）都不是集合 E 的下界。我们证明了 a 是 E 的下确界。□

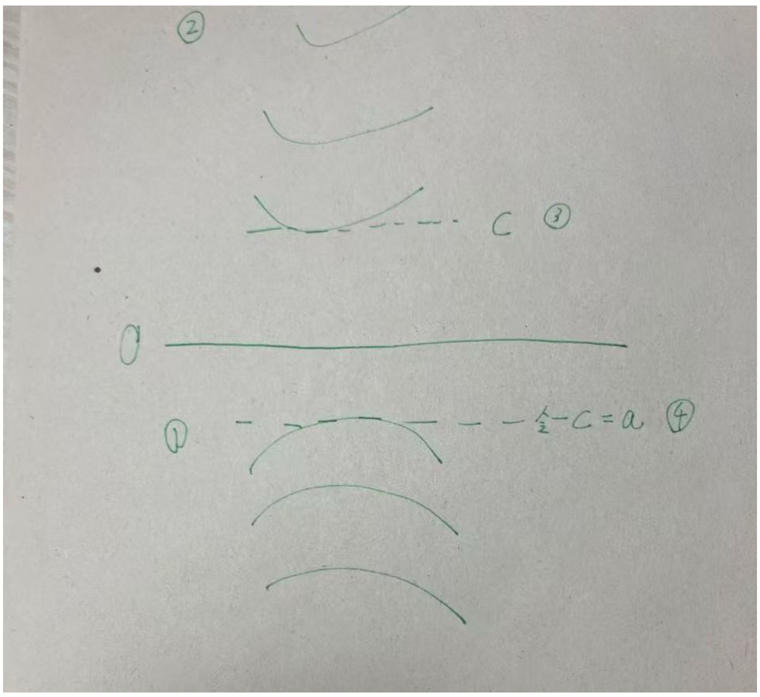

图 1: 下界的相反数组成的集合。0 以下的弧线代表集合 E 的下界（供参考）