

§1 实数系的连续性

关于实数系的连续性，有若干种相互等价的描述办法。本节将要介绍的“确界原理”，就是其中便于运用的一种陈述方式。通过在以后各章中的运用，读者将会逐渐加深对这一原理的理解。先来介绍有关的术语。

【上界与下界，有界集】

设 $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ 。如果存在 $L \in \mathbb{R}$ (一个实数)，使得

$$x \leq L, \forall x \in E,$$

那么我们就说集合 E 有上界，并且说 L 是集合 E 的一个上界。如果存在 $l \in \mathbb{R}$ ，使得

$$x \geq l, \forall x \in E,$$

那么我们就说集合 E 有下界，并且说 l 是集合 E 的一个下界。如果一个集合有上界并且也有下界，那么我们就说这集合有界，或者说这集合是有界集。

如果 L 是集合 E 的上界， $L_1 > L$ ，那么 L_1 也是集合 E 的一个上界。因此，一个有上界的集合，不可能有最大的上界（因为总能找到更大 L_n ）。下面，我们来考察一个意义十分重大的问题：

\Rightarrow 非空而有上界的实数集合，是否总有一个最小的上界？

这种“最小的上界”，通常称为上确界。

【上确界】

设 E 是实数的非空集合，即设 $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ 。如果存在一个实数 M ，满足下面的条件(i)和(ii)，那么我们就把 M 叫作集合 E 的上确界。条件(i)和(ii)分别是：

(i) M 是集合 E 的一个上界，即 $x \leq M, \forall x \in E$;

(ii) M 是集合 E 的最小的上界：任何小于 M 的实数 M' 都不再是集合 E 的上界，即 $(\forall M' < M)(\exists x' \in E)(x' > M')$.

上确界定义中的条件(ii)等价于说：集合 E 的任何上界 $M_1 \geq M$ 。

如果 M 和 M_1 都是集合 E 的上确界，那么就应该有 $M_1 \geq M, M \geq M_1$ ，因而有 $M_1 = M$ ，由此得知：集合 E 的上确界如果存在就必定只有一个。我们把这唯一的上确界记为

$$\sup E.$$

类似地可以定义下确界。

【下确界】

设 $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ 。如果存在一个实数 m ，满足以下的条件(i)和(ii)，那么我们就把

m 叫作集合 E 的下确界：

- (i) m 是集合 E 的一个下界，即 $x \geq m, \forall x \in E$ ；
- (ii) m 是集合 E 的最大的下界：任何大于 m 的实数 m' 都不再是集合 E 的下界，即 $(\forall m' > m)(\exists x' \in E)(x' < m')$.

集合 E 的下确界如果存在就必定是唯一的。我们把这唯一的下确界记为

$$\inf E.$$

设 E 是实数的非空集合。我们以 $-E$ 表示 E 中各数的相反数组成的集合，即定义

$$-E = \{-x \mid x \in E\}.$$

请读者自己验证以下简单事项：

1. 集合 E 有上界（下界）的充要条件是集合 $-E$ 有下界（上界）；
2. 集合 E 有上确界的充要条件是集合 $-E$ 有下确界，并且 $\sup E = -\inf(-E)$ ；
3. 集合 E 有下确界的充要条件是集合 $-E$ 有上确界，并且 $\inf E = -\sup(-E)$ 。

证明示范：

$$(\forall x \in E) \leq M \iff \forall x \in E, -x \geq -M \iff \forall y \in -E, y \geq -M \text{ (令 } y = -x) \iff -E \text{ 有下界且为 } -M.$$

我们来介绍实数系的一个重要性质——**连续性**。这一性质体现为以下的确界原理：

【确界原理（第一种陈述）】

\mathbb{R} 的任何非空而有上界的子集合 D 在 \mathbb{R} 中有上确界。

我们将证明与这陈述等价的另一陈述（即证明的是第二种陈述）：

【确界原理（第二种陈述）】

\mathbb{R} 的任何一个非空并且有下界的子集合 E 在 \mathbb{R} 中有下确界。

证明：在下面的讨论中，为了书写方便而作这样的约定：允许用记号

$$\frac{1}{10^n}$$

代表相应的有尽小数

$$\underbrace{0.0 \cdots 0}_n 1 = \underbrace{0.0 \cdots 0}_{n \text{ 个 } 0} 1000 \cdots$$

我们分两种情形讨论。

情形 1：设 0 是集合 E 的一个下界。

因为 $E \neq \emptyset$, 所以 $\exists x \in E$ 。于是又 $\exists k \in \mathbb{N}$, 使得 $k > x$ 。我们看到: 0 是 E 的一个下界, k 不是 E 的下界。

依次考察 $0, 1, \dots, k - 1$ 这些数, 可以断定: 存在 $a_0 \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, 使得 a_0 是 E 的一个下界, 而 $a_0 + 1$ 不是 E 的下界。

然后依次考察 $a_0.0, a_0.1, \dots, a_0.9$ 这些数, 又可断定: 存在 $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, 使得 $a_0.a_1$ 是 E 的一个下界, 而 $a_0.a_1 + \frac{1}{10}$ 不是 E 的下界。

再依次考察 $a_0.a_10, a_0.a_11, \dots, a_0.a_19$ 这些数, 又可断定: $\exists a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, 使得 $a_0.a_1a_2$ 是 E 的一个下界, 而 $a_0.a_1a_2 + \frac{1}{10^2}$ 不是 E 的下界。继续这样做下去, 我们得到一串数:

$$a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \dots, a_0.a_1a_2 \cdots a_n, \dots$$

这些数满足条件: $a_0.a_1a_2 \cdots a_n$ 是集合 E 的下界, 而 $a_0.a_1a_2 \cdots a_n + \frac{1}{10^n}$ 不是集合 E 的下界。我们将证明:

$a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$ 是一个规范小数, 它正好就是集合 E 的下确界。

假如 $a_0.a_1a_2 \cdots a_n$ 不是规范小数, 那么必定存在 $p \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$a_p + 1 = a_p + 2 = \cdots = 9$$

不妨设 p 是满足这个条件的最小的非负整数。对任意的 $\beta \in E$, 设 β 的规范小数表示为 $\beta = \beta_0.\beta_1\beta_2 \cdots$, 则必定存在 $n > p$, 使得 $\beta_n < 9$ 。因为

$$\beta \geq a_0.a_1 \cdots a_n$$

, 所以又必定存在 $q \in \{0, 1, \dots, p\}$, 使得

$$\beta_0 = a_0, \dots, \beta_{q-1} = a_{q-1}, \beta_q \geq a_q + 1$$

否则 $\beta < a_0.a_1 \cdots a_n$ 。于是有

$$\begin{aligned} \beta &\geq a_0.a_1 \cdots a_{q-1}(a_q + 1) \\ &\geq a_0.a_1 \cdots a_{p-1}(a_p + 1) \\ &= a_0.a_1 \cdots a_{p-1}(a_p) + \frac{1}{10^p} \end{aligned}$$

我们看到,

$$\beta \geq a_0.a_1 \cdots a_p, \forall \beta \in E$$

由 $a_0.a_1\cdots$ 是非规范小数的假定导出的这一结论，与 a_p 的选择办法相矛盾。由此得知： $a_0.a_1\cdots a_n$ 必定是规范小数。

下面，我们来证明实数 $a = a_0.a_1a_2\cdots$ 是集合 E 的下确界。首先指出： $\forall \gamma \in E$ 必定满足

$$\gamma \geq a_0.a_1a_2\cdots.$$

如果不是这样，就必定存在 $h \in \mathbb{Z}^+$ ，使得

$$\gamma < a_0.a_1a_2\cdots a_h$$

，这与 $a_0.a_1a_2\cdots a_h$ 的选取方法矛盾。其次，对于任何一个 $b > a_0.a_1a_2\cdots$ ，必定存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ ，使得

$$b \geq a_0.a_1a_2\cdots a_k + \frac{1}{10^k}$$

，这样的 b 不可能是集合 E 的下界。

至此，对于 0 是 E 的下界的情形，我们证明了集合 E 在 \mathbb{R} 中必定有下确界。

情形 2：设 0 不是集合 E 的下界。

这就是说， $\exists x \in E$ ，使得

$$x < 0.$$

于是， E 的任何下界 l 必定小于 0：

$$l < 0.$$

我们来考察 \mathbb{R} 的另一非空子集合

$$F = \{-l \mid l \text{ 是 } E \text{ 的下界}\}$$

。容易看出：0 是集合 F 的一个下界。利用情形 1 中已经证明的结果，可以断定： F 在 \mathbb{R} 中有下确界，即

$$\exists c = \inf F \in \mathbb{R}.$$

我们指出： $a = -c$ 是集合 E 的下确界。

为此，考察 $\gamma \in E$ 。显然对任何 $-l \in F$ 都有

$$\gamma \geq l, -\gamma \leq -l$$

这说明 $-\gamma$ 是集合 F 的一个下界。因而，

$$-\gamma \leq c, \quad \gamma \geq -c = a$$

。这说明 $a = -c$ 是集合 E 的一个下界。另一方面，对于任意的 $b > a$ ，我们有 $-b < -a = c$ ，因此 $-b \notin F$ 。这就是说，任何大于 a 的实数 b 都不是集合 E 的下界。我们证明了 a 是 E 的下确界。□