§1 面积、路程与功的计算

我们已经会求直线图形和圆的面积。为了计算更一般的曲线图形的面积，需要寻求更有效的方法。

先来看一个具体的例子。设有这样一个曲线图形，它由曲线 $y = x^p$, OX 轴和直线 $x = b$ 围成，我们来求它的面积（图 0-1）。

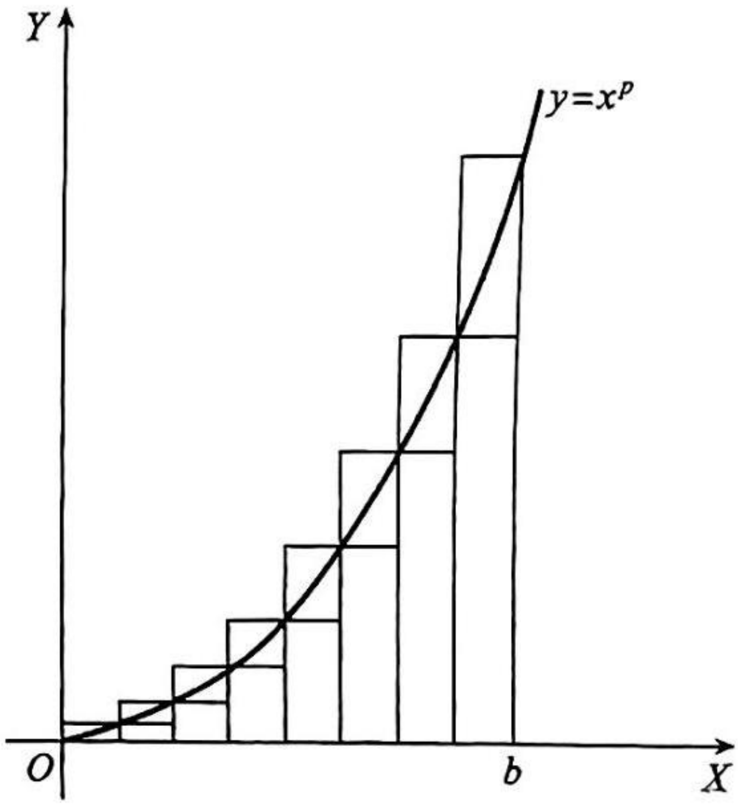

图 1: 非负的曲面面积计算

我们把 OX 轴上的闭区间 $[0, b]$ 分成 n 等分，其中第 k 个等分是

$$\left[\frac{(k-1)b}{n}, \frac{kb}{n}\right].$$

相应地把上述曲线图形分成 n 个等宽的条形:

$$\frac{k-1}{n}b \leq x \leq \frac{k}{n}b, \quad 0 \leq y \leq x^p, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

每一条形的面积 S_k 介于二矩形条的面积之间：

$$\left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^p \cdot \frac{b}{n} \leq S_k \leq \left(\frac{kb}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}.$$

因而所求的曲线图形的面积 S 应该介于以下两个和数之间：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(k-1)}{n}b\right)^p \cdot \frac{b}{n} \leq S \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p \cdot \frac{b}{n}.$$

我们可以把矩形条面积之和当作曲线图形面积 S 的近似值。所分成的矩形条越细，这样的近似值的精确度就越高。事实上，分别处理两个和数，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p \cdot \frac{b}{n} &= \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p \\
&= \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\left(\frac{1}{p+1}n^{p+1} + c_1 n^p + \cdots + c_p n\right) \\
&= b^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_p}{n^p}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}b\right)^p \cdot \frac{b}{n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p \cdot \frac{b}{n} - \frac{b^{p+1}}{n} \\
&= b^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{c_1-1}{n} + \cdots + \frac{c_p}{n^p}\right).
\end{aligned}$$

当 n 无限增大时，上面两个和数趋于共同的极限值 $\frac{b^{p+1}}{p+1}$，这共同的极限值应该看作所求的面积 S。这样，我们求得

$$S = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

再来看一般的情形。设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且非负（即只取大于或等于 0 的值）。曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$, $x=b$, $y=0$ 围成一个图形，我们来求这个曲线图形的面积 S。为此，用一串分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

把闭区间 $[a,b]$ 分成 n 段，相应地把上述曲线图形分成 n 个条形，其中第 j 个条形为 $x_{j-1} \leq x \leq x_j$, $0 \leq y \leq f(x)$。

在闭区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上任取一点 ξ_j，我们把高为 $f(\xi_j)$，底长为 $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ 的矩形条的面积，当作曲线图形的第 j 个条形的面积的近似值。这样得到曲线图形面积的近似值

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

以后将证明，对于相当普遍的函数 f，当分割的条形越来越窄时，上述和式有确定的极限。这极限应当视为所求曲线图形的面积。

我们还可以讨论更一般的情形。设 $y = f(x)$ 是在闭区间 $[a, b]$ 上有定义的函数（不一定非负），考察由直线 $x = a$, $x = b$, $y = 0$ 与曲线 $y = f(x)$ 所围图形的面积。

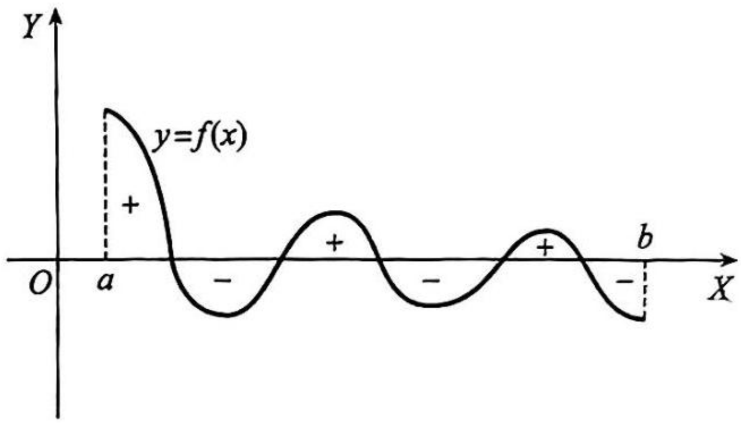

图 2: 一般性的曲面面积计算

我们约定，对于函数 f 取负值的部分，曲线 $y = f(x)$ 与 OX 轴所夹的面积为负值（图 0-2）。这样，我们仍能把所述图形的面积的近似值表示为

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

对于相当普遍的函数 f，当分割的条形越来越窄时，上述和式有确定的极限。这极限应当视为所述曲线图形的面积的代数值。

再来看一些取自物理学的例子。

设物体做变速直线运动，其速度 v 是时间 t 的函数 $v = f(t)$。我们来计算这个物体从时刻 a 到时刻 b 经过的路程。为此，用一串分点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

把这段时间分成 n 小段。在第 j 段时间中物体通过的路程可以认为近似等于

$$f(\tau_j)\Delta t_j,$$

这里 τ_j 是 $[t_{j-1}, t_j]$ 中的一个时刻（作为这个小段的代表速度），$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$。于是，从时刻 a 到时刻 b 物体通过的路程近似等于

$$\sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)\Delta t_j.$$

当所分割的时间间隔越来越短时，上述和式的极限值即为物体从时刻 a 到时刻 b 通过的路程。

另一取自物理学的问题是求变力所做的功。设物体 m 受到一个沿 OX 轴方向的力 F 的作用，它沿这个轴从 a 点运动到 b 点。如果力 F 随着 x 而改变，即

$$F = f(x)$$

，我们来求 F 对这物体 m 所做的功。为此，在 a 和 b 之间插入一串分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

设 ξ_j 是 $[x_{j-1}, x_j]$ 上任意一点，而 $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$。在路程 $[x_{j-1}, x_j]$ 上把力 $F = f(x)$ 近似地看成常力 $f(\xi_j)$，则在这段上力 F 所做的功近似地等于

$$f(\xi_j)\Delta x_j.$$

变力 $F = f(x)$ 在整段路程 $[a, b]$ 上所做的功近似地等于

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

当所分割的路程间隔越来越小时，上述和式的极限值即为变力 $F = f(x)$ 所做的功 W。

在上面列举的例子中，来源不同的几个问题都可以用类似的方法讨论。还可以举出更多的例子，所涉及的问题归结为如下形式的和数的极限

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

当分割无限加细的时候，上述和数的极限值称为函数 $f(x)$ 的积分，记为

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

其中 a, b 表示和数展布的区间，积分号 $\int$（拉长了的 S）表示求和求极限的过程，而 $f(x)\,dx$ 表示求和各项的形状。如果把 $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ 中最大的一个记为

$$\max \Delta x_j,$$

那么我们就可以写

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

早在公元前 3 世纪，古希腊时代的著名学者阿基米德（Archimedes）就已经会计算曲线图形

$$0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le x^2$$

的面积。但他的方法（所谓"穷竭法"）陈述起来并不那么简单清楚，所以在很长的一段时间里没有被人们普遍接受。直到两千年以后，牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）创立了微积分学，特别是把积分的计算与微分联系起来，人们才有了统一地解决多种多样的问题的简单而有效的工具。