§1 实数的四则运算

两个实数的和、差、积、商是什么意思？这是需要予以确切定义的。为了定义实数 a 与 b 之和，我们考察满足以下条件的有尽小数 α,α' 与 β,β'：

$$\alpha \le a \le \alpha', \qquad \beta \le b \le \beta'.$$

两实数 a 与 b 之和 $a+b$ 的合理定义应该满足

$$\alpha+\beta \le a+b \le \alpha'+\beta'.$$

上式中的 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha'+\beta'$ 都只涉及有尽小数的加法运算，因而是已经有定义的。我们将利用已有定义的有尽小数的运算来定义实数的相应运算。(接下来请注意区分定理，引理的关系。)

定理 1 设 a 和 b 是实数（不要求有尽），则存在唯一实数 u（不要求有尽），使得对于满足条件

$$\alpha \le a \le \alpha', \qquad \beta \le b \le \beta'$$

的任何有尽小数 α,α' 和 β,β'，都有

$$\alpha+\beta \le u \le \alpha'+\beta'.$$

证明这样的实数 u 存在比较容易。事实上，实数

$$u = \sup\left\{\alpha+\beta \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ 和} \beta \text{ 是有尽小数，} \\ \alpha \leqslant a, \beta \leqslant b \end{array}\right\}$$

就符合定理的要求。唯一性的证明基于以下想法：我们可以取彼此充分靠近的有尽小数 α,α'，以及彼此充分靠近的有尽小数 β,β'，使得

$$\alpha \le a \le \alpha', \qquad \beta \le b \le \beta'.$$

于是 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha'+\beta'$ 可以任意接近，因而在它们之间容不下两个不同的数（Sandwich / Squeeze Theorem）。

以上推想方式是令人信服的，但要严格地写出每一步证明，却是一件细致的工作。我们把这部分内容放到本节后的附录中，供喜欢寻根究底的读者参考。初学者不必也不宜在这些细节上花费太多时间，尤其不要因此而分散了对主要问题的注意力。

定义 1 我们把定理 1 中所述的唯一确定的实数 u 叫作实数 a 与实数 b 之和，并约定把它记为 $a+b$。

定义 2 实数 a 与实数 b 之差定义为 a 与 $-b$ 之和，即规定

$$a-b=a+(-b).$$

为了定义两个非负实数的乘积，我们需要以下定理。

定理 2 设 a 和 b 是非负实数（不要求有尽），则存在唯一实数 v（不要求有尽），使得对于满足条件

$$0\le \alpha\le a\le \alpha^{'},\qquad 0\le \beta\le b\le \beta^{'}$$

的任何有尽小数 $\alpha,\alpha^{'}$ 和 $\beta,\beta^{'}$，都有

$$\alpha\beta\le v\le \alpha^{'}\beta^{'}.$$

这一定理的证明也放在本节后的附录中。

定义 3 我们把定理 2 中所述的唯一确定的实数 v 叫作非负实数 a 与非负实数 b 的乘积，并约定把它记为 ab。

定义 4 任意实数 a 与 b 的乘积 ab 定义如下：

$$ab=\begin{cases}|a|\,|b|, & \text{如果}a\text{ 与}b\text{ 同号},\\ -|a|\,|b|, & \text{如果}a\text{ 与}b\text{ 异号}.\end{cases}$$

至于实数的除法，我们将在下面的附录中予以讨论。

补充内容

在这部分内容里，我们补充定理 1 和定理 2 的证明，并对实数的除法作相应的讨论。

引理 1 设 a 是任意一个实数（不要求有尽），则对任何正的有尽小数 ε，存在有尽小数 α 和 $\alpha^{'}$，满足条件

$$\alpha\le a\le \alpha^{'},\qquad \alpha^{'}-a<\varepsilon.$$

（无论实数本身是不是有尽，它总能被两个足够近的有尽小数描述）

证明 我们设

$$\varepsilon=\varepsilon_0.\varepsilon_1\cdots\varepsilon_p,$$

并设其中第一位不等于 0 的数字出现在第 $k-1$ 位，其中 $0 \le k-1 \le p$，则有

$$\frac{1}{10^k} < \varepsilon.$$

若 a 的规范小数表示为

$$a = a_0.a_1a_2\cdots,$$

则（根据 $\frac{1}{10^k} < \varepsilon$）取

$$\alpha = a_0.a_1\cdots a_k, \qquad \alpha^{'} = a_0.a_1\cdots a_k + \frac{1}{10^k}.$$

（即：找出规范小数 a 的第 k 位小数，α 等于 a 的前 k 位，$\alpha^{'}$ 其余部分一样，第 k 位小数要 $+1$）

若 a 的规范小数表示为

$$a = -a_0.a_1a_2\cdots,$$

则取

$$\alpha = -a_0.a_1\cdots a_k - \frac{1}{10^k}, \qquad \alpha^{'} = -a_0.a_1\cdots a_k.$$

对这两种情形都有

$$\alpha \le a \le \alpha^{'}, \qquad \alpha^{'} - a = \frac{1}{10^k} < \varepsilon.$$

证毕。 □

引理 2 设 c 和 $c^{'}$ 是实数，且 $c \le c^{'}$。如果对任何正的有尽小数ε，存在有尽小数γ 和$\gamma^{'}$，满足条件

$$\gamma \le c \le c^{'} \le \gamma^{'}, \qquad \gamma^{'} - \gamma < \varepsilon,$$

那么必定有

$$c = c^{'}.$$

（当一个实数不小于另一个实数（无论这两个实数是不是有尽），能够落入一对足够近的有尽实数内，那么这两个实数相等。）

证明 用反证法。假如 $c \ne c^{'} \implies c < c^{'}$，那么存在有尽小数 η 和 $\eta^{'}$，使得

$$c < \eta < \eta^{'} < c^{'}.$$

对于 $\varepsilon = \eta^{'} - \eta > 0$（此时 ε 是有尽的），任何满足

$$\gamma \leq c < \eta < \eta^{'} < c^{'} \leq \gamma^{'}$$

的有尽小数 γ 和 $\gamma^{'}$，都有

$$\gamma^{'} - \gamma \geq \eta^{'} - \eta = \varepsilon,$$

这与 $\gamma^{'} - \gamma < \varepsilon$ 矛盾。

因此，如果引理所述的前提成立，则必定有 $c = c^{'}$。证毕。 $\square$

引理 3 设 ε 是正的有尽小数，M 和 N 是自然数，则存在正的有尽小数 $\varepsilon^{'}$ 和 $\varepsilon^{''}$，使得

$$M\varepsilon^{'} + N\varepsilon^{''} < \varepsilon.$$

（总能有一对正的有尽小数，能把两个自然数关进一个足够小的区间）

证明 我们设

$$\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p,$$

并设其中第一位不等于 0 的数字是 ε_{k-1}，其中 $0 \leq k-1 \leq p$，则有

$$\frac{1}{10^k} < \varepsilon.$$

对引理中 M, N，我们取自然数 m, n，使得

$$10^m \geq M, \qquad 10^n \geq N.$$

再取

$$\varepsilon^{'} = \frac{1}{10^{m+k+1}}, \qquad \varepsilon^{''} = \frac{1}{10^{n+k+1}}$$

于是

$$\begin{aligned} M\varepsilon^{'} + N\varepsilon^{''} &\leq 10^m\varepsilon^{'} + 10^n\varepsilon^{''} \\ &= \frac{1}{10^{k+1}} + \frac{1}{10^{k+1}} \\ &< \frac{1}{10^k} \\ &< \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

现在开始证明前面正文的内容。

定理 1 的证明

存在性 实数

$$u = \sup\left\{ \alpha + \beta \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha \text{ 和} \beta \text{ 是有尽小数，} \\ \alpha \leqslant a, \beta \leqslant b \end{array} \right\}$$

符合定理的要求。

唯一性 对于任意正的有尽小数 ε 和自然数 $M = N = 1$。根据引理 3，存在正的有尽小数 $\varepsilon^{'}$ 和 $\varepsilon^{''}$，使得

$$\varepsilon^{'} + \varepsilon^{''} < \varepsilon.$$

又根据引理 1，存在有尽小数 $\alpha, \alpha^{'}$ 和 $\beta, \beta^{'}$，分别满足

$$\alpha \leq a \leq \alpha^{'}, \qquad \alpha^{'} - a < \varepsilon^{'},$$

以及

$$\beta \leq b \leq \beta^{'}, \qquad \beta^{'} - \beta < \varepsilon^{''}.$$

于是有

$$(\alpha^{'} + \beta^{'}) - (\alpha + \beta) < 2\varepsilon.$$

（前面的 2 不影响数量级）由于 ε 可以取任意正的有尽小数（引理 2: 意味着可以把那两个实数关进 $\implies$ 这实际是一个数），根据引理 2，满足

$$\alpha + \beta \leq u \leq \alpha^{'} + \beta^{'}$$

的实数 u 是唯一的。 $\square$

定理 2 的证明

存在性 实数

$$z = \sup\left\{ \alpha\beta \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha \text{ 和} \beta \text{ 是有尽小数，} \\ 0 \leq \alpha \leq a, 0 \leq \beta \leq b \end{array} \right\}$$

符合定理的要求。

唯一性 首先取自然数 M, N，使得

$$0 \leq a < M, \qquad 0 \leq b < N.$$

其次，对于任意正的有尽小数 ε，根据引理 3，存在正的有尽小数 ε' 和 ε''，使得

$$M\varepsilon' + N\varepsilon'' < \varepsilon.$$

又根据引理 1，存在有尽小数 α, α' 和 β, β'，分别满足

$$0 \le \alpha \le a \le \alpha' < M, \qquad \alpha' - \alpha < \varepsilon'',$$

以及

$$0 \le \beta \le b \le \beta' < N, \qquad \beta' - \beta < \varepsilon'.$$

于是

$$\begin{aligned}
\alpha'\beta' - \alpha\beta &= \alpha'\beta' - \alpha'\beta + \alpha'\beta - \alpha\beta \\
&= \alpha'(\beta' - \beta) + (\alpha' - \alpha)\beta \\
&< M\varepsilon' + N\varepsilon'' \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

由于 ε 可以取任意正的有尽小数，根据引理 2，符合定理要求的实数 v 是唯一的。 □

下面讨论实数的除法。在初等数学的课程里，我们学习过有尽小数的"长除法"(除法竖式)。这是一种可以用来确定近似商的除法手段。对于给定的正的有尽小数 α, β 和自然数 n，通过逐位试商，可以确定存在一个有尽小数

$$\gamma = \gamma_0.\gamma_1 \cdots \gamma_n$$

满足

$$\gamma \cdot \alpha \le \beta < \left(\gamma + \frac{1}{10^n}\right) \cdot \alpha.$$

对于给定的 α, β 和 n，这样的 γ 是唯一确定的。我们把这样的

$$\gamma \quad \text{和} \quad \gamma' = \gamma + \frac{1}{10^n}$$

分别叫作 $\beta \div \alpha$ 的、精确到小数点以后 n 位的 **不足近似商和过剩近似商**，并约定用以下记号表示它们:

$$(\frac{\beta}{\alpha})_n = \gamma, \qquad (\frac{\beta}{\alpha})'_n = \gamma'.$$

为了定义任意实数 b 除以任意非零实数 a 的商，可以先考察 $a > 0,\ b = 1$ 的情形。只要

对 $a>0$ 的情形定义了 $1/a$，就可以按以下方式定义任意实数 b 除以任意非零实数 a 的商：

$$\frac{b}{a}=\begin{cases}\frac{1}{|a|}\cdot|b|, & a\text{ 与}b\text{ 同号},\\ -\frac{1}{|a|}\cdot|b|, & a\text{ 与}b\text{ 异号}.\end{cases}$$

定理 3　对任何正实数 a，存在唯一的正实数 w，使得对于满足

$$0<\alpha\le a\le\alpha^{'}$$

的任何有尽小数 $\alpha,\alpha^{'}$，以及任意自然数 m,n，都有

$$\left(\frac{1}{\alpha^{'}}\right)_m\le w\le\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n^{'}.$$

定义　我们把定理 3 中所述的唯一确定的正实数 w 叫作正实数 a 的倒数，并把它记为 $1/a$。在下面的证明中，我们将利用有尽小数乘法的以下性质：

对于任何正的有尽小数 $\beta,\gamma,\gamma^{'}$，都有

$$\begin{aligned}\beta\gamma<\beta\gamma^{'} &\iff \gamma<\gamma^{'},\\ \beta\gamma=\beta\gamma^{'} &\iff \gamma=\gamma^{'},\\ \beta\gamma>\beta\gamma^{'} &\iff \gamma>\gamma^{'}.\end{aligned}$$

定理 3 的证明

存在性　由于

$$\alpha^{'}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^{'}}\right)_m\le 1\le\alpha\cdot\left(\frac{1}{\alpha^{'}}\right)_n\le\alpha^{'}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^{'}}\right)_n$$

所以

$$\left(\frac{1}{\alpha^{'}}\right)_m\le\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n^{'},\qquad\forall\, m,n\in\mathbb{N}.$$

由此容易看出，实数实数

$$w=\sup\left\{(\frac{1}{\alpha^{'}})_m\;\middle|\;\begin{array}{l}\alpha^{'}\text{是有尽小数},\\ \alpha^{'}\ge a,m\in\mathbb{N}\end{array}\right\}$$

符合定理的要求。

唯一性 首先，取

$$\sigma = \frac{1}{10^k}, \qquad M = 10^l,$$

使得

$$0 < \sigma < a < M.$$

其次，设 ε 是任意一个正的有尽小数。根据引理 3，存在正的有尽小数 $\varepsilon', \varepsilon''$，使得

$$\varepsilon' + 10^{2(k+1)}\varepsilon'' < \varepsilon.$$

从而

$$\sigma^2\varepsilon' + M^2\varepsilon'' = \sigma^2(\varepsilon' + 10^{2(k+1)}\varepsilon'') < \sigma^2\varepsilon.$$

我们可以选取有尽小数 α, α' 和自然数 n，满足

$$0 < \sigma < a \leq \alpha' < M, \qquad \alpha' - a < \sigma^2\varepsilon', \qquad \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon''.$$

这样选取 α，α' 和 n 应该使得

$$\begin{aligned}
\sigma^2\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n' - \left(\frac{1}{\alpha'}\right)_n\right\} &\leq \alpha\alpha'\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n' - \left(\frac{1}{\alpha'}\right)_n\right\} \\
&= \alpha\alpha'\left\{\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n + \frac{1}{10^n}\right) - \left(\left(\frac{1}{\alpha'}\right)_n' - \frac{1}{10^n}\right)\right\} \\
&= \alpha'\left\{\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n\right\} - \alpha'\left\{\alpha\left(\frac{1}{\alpha'}\right)_n'\right\} + 2\alpha\alpha'\frac{1}{10^n} \\
&< \alpha' - \alpha + \alpha\alpha'\frac{1}{10^{n-1}} \\
&< \sigma^2\varepsilon' + M^2\varepsilon'' < \sigma^2\varepsilon.
\end{aligned}$$

于是有

$$(\frac{1}{\alpha})_n' - (\frac{1}{\alpha})_n < \varepsilon$$

因为这里的 ε 可以是任意正的有尽小数，故满足定理条件的实数 w 不能多于一个，从而唯一性得证。 □