§1 实数系的基本性质综述

本节综述实数系的一些最基本的性质。这些性质将是我们以后讨论的基础。以下分三组介绍这些性质：运算性质、顺序性质和连续性质。

一、运算性质

在实数系 $\mathbb{R}$ 中定义了加法运算“$+$”和乘法运算“$\cdot$”，使得对任意的 $a \in \mathbb{R}$ 和 $b \in \mathbb{R}$，都有确定的 $a+b \in \mathbb{R}$ 和确定的 $a \cdot b \in \mathbb{R}$ 与之对应，并且以下运算律成立：

(F_1) 加法是交换的，即

$$a+b=b+a, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

(F_2) 加法是结合的，即

$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(F_3) $0 \in \mathbb{R}$ 对于加法起着特定的作用，即

$$0+a=a+0=a, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

(F_4) 对每一个 $a \in \mathbb{R}$，都存在一个与它相反的数 $-a \in \mathbb{R}$，使得

$$(-a)+a=a+(-a)=0.$$

(F_5) 乘法是交换的，即

$$a \cdot b=b \cdot a, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

(F_6) 乘法是结合的，即

$$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c), \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(F_7) $1 \in \mathbb{R}$ 对于乘法起着特定的作用，即

$$1 \cdot a=a \cdot 1=a, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

(F_8) 对每一个 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$，都存在一个倒数 $a^{-1} \in \mathbb{R}$，使得

$$a^{-1} \cdot a=a \cdot a^{-1}=1.$$

(F_9) 乘法对于加法是分配的，即

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\qquad \forall\, a,b,c\in\mathbb{R}.$$

二、顺序性质

在实数系 $\mathbb{R}$ 中定义了顺序关系“$<$”(在以下的陈述中也出现记号“$>$”，我们约定：“$a>b$”只是“$b<a$”的另一种写法，表示的是同一件事情)。顺序关系“$<$”具有以下性质：

(O_1) 对任意的 $a\in\mathbb{R}$ 与 $b\in\mathbb{R}$，必有并且只有以下三种情形之一出现：

$$a<b,\quad a=b,\quad \text{或者 } a>b.$$

（这一性质通常叫作三歧性。）

(O_2) 关系“$<$”具有传递性，即

$$a<b,\ b<c\ \Rightarrow\ a<c.$$

(O_3) 加以实数的运算保持顺序关系，即

$$a<b\ \Rightarrow\ a+c<b+c.$$

(O_4) 乘以正实数的运算保持顺序关系，即

$$a<b,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c<b\cdot c.$$

三、连续性质

在实数系 $\mathbb{R}$ 中，以下的确界原理成立：

(C) 确界原理：$\mathbb{R}$ 的任何一个非空而有上界的子集合，在 $\mathbb{R}$ 中都有上确界。

我们对上面所列的性质做一些说明。

定义有加法与乘法运算并且符合运算律 $(F_1)\sim(F_9)$ 的集合，通常称为域。实数系是一个域，有理数系和复数系也都是域。

定义有顺序关系“$<$”并且符合 $(O_1)\sim(O_4)$ 要求的一个域，被称为有序域。实数系是一个有序域，有理数系也是一个有序域，但复数系不是有序域。

确界原理 (C) 说明了实数系的连续性。因此我们说：实数系 $\mathbb{R}$ 是一个连续的有序域。