§1 切线、速度与变化率

初等几何课程已经告诉我们如何做圆的切线。但那做法依赖于圆的特殊几何性质，并没有提示做一般曲线的切线的方法。初等几何着眼于具体地研究每一特殊图形的性质，而高等数学却致力于寻求普遍地解决问题的方法。为此，首先引进坐标把几何问题“代数化”。

考察如下的典型问题。设 $y = f(x)$ 是在 (a, b) 上有定义的函数，它表示 OXY 坐标系中的一段曲线。我们希望过曲线 $y = f(x)$ $(x \in (a, b))$ 上的一点 $P_0(x_0, f(x_0))$，做这曲线的切线（图 0-3）。为此，考虑曲线上的另一点 $P(x, f(x))$。过这两点可以做一条直线——曲线的割线——P_0P，其斜率为:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

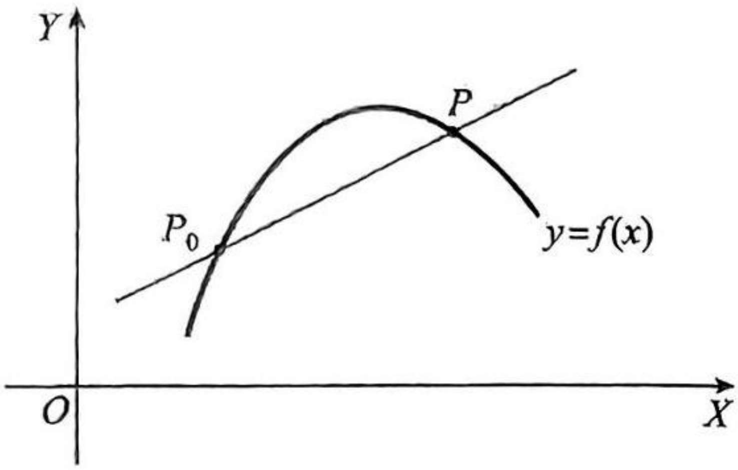

图 1: 作曲线的割线

当点 P 沿着曲线变动时，割线 P_0P 的方位也随着变动；当 P 无限接近于 P_0 时，割线 P_0P 的极限位置就应该是曲线过 P_0 点的切线。在以后的课程中，我们将看到，对于相当普遍的函数（包括我们在中学学过的所有的初等函数），当 P 趋于 P_0 时，割线 P_0P 确实有一个极限位置。这就是说，可以做曲线过 P_0 点的切线，其斜率为:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

我们把差商 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的极限 $f'(x_0)$ 称为导数或微商。

我们再来看一个属于运动学的问题。设物体沿 OX 轴运动，其位置 x 是时间 t 的函数

$$x = f(t)$$

如果运动比较均匀，那么我们可以用平均速度反映其快慢。在 $[t_1, t_2]$ 这一段时间里的平均速度定义为:

$$v_{[t_1,t_2]} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

如果物体的运动很不均匀，那么平均速度就不能很好地反映物体运动的状况，必须代之以在每一时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$。为了计算瞬时速度，我们取越来越短的时间间隔 $[t_0, t]$，以平均速度 $\bar{v}_{[t_0,t]}$ 作为瞬时速度 $v(t_0)$ 的近似值。让 t 趋于 t_0，平均速度 $\bar{v}_{[t_0,t]}$ 的极限即为物体在时刻 t_0 的瞬时速度:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

与切线问题一样，我们又遇到了差商 $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 的极限——导数（或微商）$f'(t_0)$。

速度问题只是更一般的变化率问题的一个例子。假设有一个随时间变化的量 $x = f(t)$。我们把差商:

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

称为这个量从时刻 t_1 到时刻 t_2 的平均变化率。当量 $x = f(t)$ 变化比较均匀时，平均变化率反映了它变化的快慢。如果量 $x = f(t)$ 的变化很不均匀，就需要用瞬时变化率来描述这个量的各个不同时刻的变化状况。取接近时刻 t_0 的一小段时间，考察这段时间内的平均变化率。当 t 趋于 t_0 时平均变化率的极限就是量 $x = f(t)$ 在时刻 t_0 的瞬时变化率:

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

例 1 设从时刻 0 到时刻 t 通过导线截面的电量是 $q = f(t)$。电量的平均变化率就是平均电流强度:

$$\bar{I}_{[t_1,t_2]} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

而电量的瞬时变化率则表示在时刻 t_0 的瞬时电流强度:

$$I(t_0) = f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

例 2 设容器内有某种放射性元素，其质量 m 随着时间 t 而变化：$m = f(t)$。因为放射性元素衰变的时候质量不断减少，所以质量的平均变化率总是负数:

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} < 0$$

平均变化率的绝对值被称为平均衰变速度。质量的瞬时变化率也是负数：

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} < 0$$

瞬时变化率的绝对值被称为瞬时衰变速度。

上面考察的几个问题，涉及几何学、力学、电学和物质放射性，而在这些问题中都出现了差商的极限————导数。

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

由此看来，对这样的极限进行研究很有必要。关于导数的计算，已经发展了一套行之有效的方法——微分法。这将是我们进一步学习的重要内容。