§1 函数与映射

人们常说:“变量 y 随着变量 α 的变化而变化”或者“变量 y 是变量 x 的函数”。这些说法的确切含义是什么呢? 这就是说: 变量 x 所取的任何一个确定的值，决定了变量 y 的唯一确定的值。或者说: 对变量 x 的任何一个值，有变量 y 的唯一确定的值与之对应。采用集合论的术语对这些说法做进一步的概括，就得到映射的概念。

设 D 和 E 都是集合。我们把 D 的元素与 E 的元素之间的对应关系 f 叫作一个映射，如果按照这对应关系，对集合 D 中的任何一个元素 ξ，有集合 E 中唯一的一个元素 η 与之对应。f 是从 D 到 E 的一个映射这件事，通常记为:

$$f : D \to E$$

按照对应关系 f，由 D 中的元素 ξ 所决定的 E 中的唯一元素 η 记为 $f(\xi)$。有时候，我们用记号 $\xi \mapsto \eta$ 表示元素之间的对应。例如，设 $D = \mathbb{R}$，$E = \mathbb{R}$，而映射 $f : D \to E$ 定义为 $f(x) = x^2$，则这映射规定了元素之间这样的对应关系:

$$f : x \mapsto x^2$$

设 $f : D \to E$ 是一个映射，$A \subset D$，$B \subset E$。我们把集合

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}(\subset E)$$

叫作集合 A 经过映射 f 的像集，并把集合

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}(\subset D)$$

叫作集合 B 关于映射 f 的原像集。

如果 $D \subset \mathbb{R}$，$E = \mathbb{R}$，那么从 D 到 E 的映射就是通常的一元函数。但映射的概念远比这广泛。在以后的学习中，将会遇到更广泛的映射的例子。但在开始的时候，我们主要关心的是函数。

例 1：圆的面积函数

圆的面积 S 是半径 r 的函数:

$$S = \pi r^2$$

在这里，$D = \mathbb{R}^+$（正实数集），$E = \mathbb{R}$（实数集），对应关系由一个代数运算式来表示。

例 2：自由落体路程函数

自由落体经过的路程 s 是时间 t 的函数：

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

这里的函数关系也能用一个代数式来表示。

例 3：赫维赛德 (Heaviside) 函数

有一些函数关系具有“分段”的表达形式，例如在技术科学中有重要应用的赫维赛德 (Heaviside) 函数（又称单位阶跃函数）可以表示为：

$$H(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

例 4：狄利克雷 (Dirichlet) 函数

狄利克雷 (Dirichlet) 函数定义如下：

$$D(t) = \begin{cases} 1, & t \text{ 是有理数}, \\ 0, & t \text{ 是无理数} \end{cases}$$

或用集合符号简化表示为：

$$D(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q}, \\ 0, & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

例 5：气压随时间变化的函数

在自动记录气压计中，有一个匀速转动的圆柱形记录鼓。印有坐标方格的记录纸就裹在这个鼓上。记录鼓每 24 小时转动一周。气压计指针的端点装有一支墨水笔，笔尖接触着记录纸。这样，经过 24 小时之后，取下的记录纸上就描画了一条曲线。这条曲线表示气压 p 随时间 t 变化的函数关系。

例 6：自然数编号实数序列

设 $D=\mathbb{N}$（自然数集），$E=\mathbb{R}$（实数集）。一个映射

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

意味着用自然数编号的一串实数：

$$x_1=f(1),\ x_2=f(2),\ \cdots,\ x_n=f(n),\ \cdots$$

这样的一个映射，或者说这样的以自然数编号的一串实数 $\{x_n\}$，被称为实数序列。

现在补充复合函数的定义。设 $f:D\to E$ 是一个映射，$g:G\to H$ 也是一个映射。如果 $f(D)\subset G$，那么从 $\xi\in D$ 开始，相继经过 f 和 g 的作用，就得到 $g(f(\xi))$。这样的对应关系

$$\xi\mapsto g(f(\xi))$$

也是一个映射。我们把这个映射称为 g 与 f 的复合，记为 $g\circ f$。简言之，映射 g 与映射 f 的复合定义为

$$g\circ f:D\to H,\quad \xi\mapsto g(f(\xi))$$

例 7：幂函数的复合

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=x^n$，则有：

$$f\circ f(x)=f(f(x))=(x^n)^n=x^{n^2}$$

例 8：函数复合的顺序差异

考察函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\sin x$，我们有：

$$g\circ f(x)=\sin(x^2),\quad f\circ g(x)=(\sin x)^2=\sin^2 x$$

一般说来，对于映射 f 和 g，两种顺序的复合映射 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 不一定都有定义，即使有定义也不一定相同。让我们再看两个例子。

例 9：复合映射的定义域限制

考察函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ 和 $g(x)=x^2+10$。我们看到 $g\circ f$ 对 $x\leq 1$ 有定义而对 $f\circ g$ 无定义。

例 10：复合映射的结果差异

考察函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x+2$。这两者均在 $\mathbb{R}$ 上有定义，因而

$$g\circ f(x)=(x^2)+2=x^2+2$$

$$f\circ g(x)=(x+2)^2=x^2+4x+4$$