§1 连加符号与连乘符号

在数学中，常遇到一连串的数相加或者一连串的数相乘，例如 $1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$ 等。为简便起见，人们引入连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$$

这里的指标 i 仅仅用以表示求和或求乘积的范围，把 i 换成别的符号 j, k 等，也仍然表示同一和或同一乘积，例如：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n = \prod_{k=1}^{n} x_k$$

人们通常把这样的指标称为“哑指标”。

我们举几个例子说明连加符号与连乘符号的应用。

例 1 阶乘 $n!$ 的定义可以写成:

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

例 2 二项式定理可以表示为:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

这里组合数的定义为:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

例 3 $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{n 项}} = n$

例 4 我们来计算 $\sum_{k=1}^{n}[k^p-(k-1)^p]$，这个和式表示:

$$(1^p-0^p)+(2^p-1^p)+\cdots+(n^p-(n-1)^p)$$

因而:

$$\sum_{k=1}^{n}[k^p-(k-1)^p]=n^p$$

数的运算满足交换律、结合律以及（乘法对加法的）分配律，据此得到以下运算法则:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda c_i)=\lambda(c_1+\cdots+c_n)=\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i$$

例 5 我们有恒等式:

$$k^2-(k-1)^2=2k-1$$

对于 $k=1,2,\cdots,n$，将恒等式 $k^2-(k-1)^2=2k-1$ 累加，得:

$$\sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2]=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$

根据例 4 的结论，整理左边有

$$n^2=2\sum_{k=1}^{n}k-n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n(n+1)}{2}$$

我们得到了熟悉的公式

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

例 6 由恒等式

$$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$$

可得:

$$\sum_{k=1}^{n}[k^3-(k-1)^3]=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

而根据例 4 整理左边有

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n) + n$$

进一步整理上面的式子，有

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = (\frac{n(1+n)(2n+1)}{6})$$

类似地，由恒等式

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

可得

$$\sum_{k=1}^{4}(k^4 - (k-1)^4) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

整理左边有

$$n^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

也就是

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

采用类似的推理方式，利用数学归纳法可以证明以下结论：$\sum_{k=1}^{n} k^p$ 可以表示 n 的 $p+1$ 次多项式，其最高系数 $\frac{1}{p+1}$，常数项为 0，即

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + c_1 n^p + c_2 n^{p-1} + \cdots + c_p n$$

对于给定 p，上面公式中的系数 $c_1, \cdots, c_p$ 当然都可以具体算出。我们这里不再做深入的讨论了。