L 1 Médecine **(2022 – 2023)**

Biostatistiques

Par : Dr. BOUFEKANE Bilal

Chapitre 03 : Probabilités

- **Introduction:**
- **Calcul de probabilités :**
    1. Probabilité d'un évènement
    2. Evènements indépendants
    3. Probabilité totale
    4. Probabilité conditionnelle
    5. Théorème de BAYES
    6. Applications

Introduction

▸ Rappels sur la théorie des ensembles

- **Définition**

Soit deux ensembles A et B. On note :

$A \cup B$: **Union**

$A \cap B$: **Intersection**

$\overline{A}$: **le complémentaire de l'ensemble A**

$A \subset B$: **signifie que l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B**

$A \not\subset B$: **signifie que l'ensemble A n'est pas contenu dans l'ensemble B**

$\{\,\}$: **pour désigner un ensemble**

$\emptyset$: **désigne l'ensemble vide**

- Propriétés sur les ensembles

Commutativité : $A \cup B = B \cup A$

Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Transitivité : $A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

- Remarques :

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \end{cases}$$

Introduction

- Rappels sur l'analyse combinatoire

  - Propriétés des combinaisons

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n étant $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, alors

(1) $C_n^0 = C_n^n = 1$ car $C_n^0 = C_n^n = \dfrac{n!}{n!}$

(2) si $n \geq 1$ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ avec $C_n^1 = C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{n-1!}$

(3) si $n \geq 2$ $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Introduction

▸ Expérience aléatoire, Evènement, Probabilité

Toute action est une EXPERIENCE ou ÉPREUVE

Déterministe

- **Le résultat est connu avec certitude avant même d'effectuer cette expérience.**
- **On peut prévoir le résultat avec une loi (modèle ou fonction).**

Ex : Mouvement rectiligne uniforme :

$$\Rightarrow D(t) = V_0 \times t - d_0$$

$$avec : t \in \mathbb{R}^* \Rightarrow D \in \mathbb{R}^*$$

Aléatoire

- **Le résultat ne peut être prévu avant la fin de l'expérience.**
- **On ne peut prédire le résultat avec certitude.**
- **On peut décrire à priori l'ensemble de tous les résultats possibles.**

Ex : Accouchement d'une mère $\Rightarrow \Omega = \{G, F\}$

- **La probabilité que le nouveau né $= G$ est :**

$$p(G) = \frac{1}{2} \Rightarrow G \in \Omega \leadsto p(G) \in [0;1]$$

Le passage d'une description de type ensembliste des phénomènes aléatoires vers une équation (*loi mathématique*) se fait par le calcul des probabilités

Probabilités = outil mathématique pour quantifier la réalisation (l'occurrence) d'un phénomène aléatoire.

Introduction

- Expérience aléatoire, Evènement, Probabilité
  - Définitions et notations :
    - **Univers** (**Espace**) d'une expérience aléatoire (Ω) = **ensemble de tous les résultats possibles**.
    - **Evènement** associé à une expérience aléatoire = **sous-ensemble** (**partie**) de Ω.
      Noté habituellement par : A, B, C, D, E ... $A \subset \Omega$
    - **Evènements remarquables** :
      - → **Evènement élémentaire** = ne contient qu'un seul élément de Ω .
      - → **Evènement impossible** = ne contient aucun élément de Ω.
        $$\Longrightarrow A = \{\ \ \} = \emptyset$$
      - → **Evènement certain** = contient tous les élément de Ω .
        $$\Longrightarrow A = \Omega$$
      - → **L'événement complémentaire (ou contraire)** d'un événement A, noté $\overline{A}$ = l'événement qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

Introduction

- Expérience aléatoire, Evènement, Probabilité

 Exemple :

Epreuve : contrôle sanguin d'un individu

$$\Downarrow$$

- **L'ensemble des résultats possibles, si on s'intéresse uniquement au groupe sanguin, est :**

$$\Omega = \{A, B, AB, O\}$$

- **L'ensemble des résultats possibles, si on s'intéresse au groupe sanguin et au facteur rhésus, est :** $U = \{A^+, A^-, B^+, B^-, AB^+, AB^-, O^+, O^-\}$

- **L'événement A « l'individu est de rhésus positif » est représenté par :**

$$A = \{A^+, B^+, AB^+, O^+\}$$

- **L'événement B « l'individu est donneur universel » est représenté par :**

$$B = \{O^-\}$$ **un seul élément = événement élémentaire**

- **L'événement C « l'individu a 6 groupes sanguin » est représenté par :**

$$C = \{\quad\} = \emptyset$$ **événement impossible**

- **L'événement D « l'individu est de rhésus négatif » est représenté par :**

$$D = \{A^-, B^-, AB^-, O^-\} = \overline{A}$$ **événement complémentaire de A**

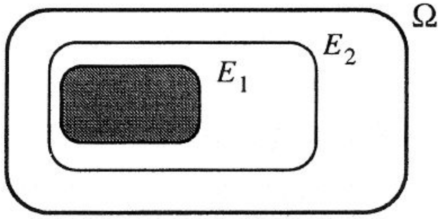
Introduction

- Expérience aléatoire, Evènement, Probabilité
  - Operations sur les évènements :

Soient E_1 *et* E_2 deux évènements d'une expérience aléatoire , alors :

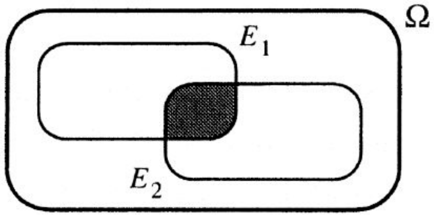
- **Implication (inclusion) :**

  $E_1 \subset E_2$ signifie : E_1 se réalise $\Longrightarrow$ E_2 se réalise



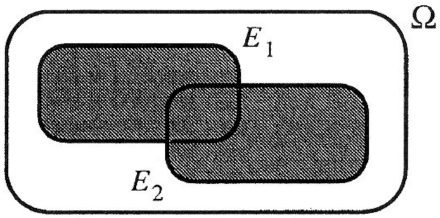
- **Intersection (produit logique) :**

  $E_1 \cap E_2$ signifie : E_1 <u>et</u> E_2 se réalisent tous les deux

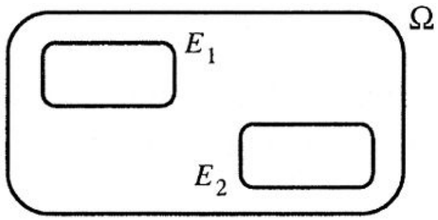


- **union (somme logique) :**

  $E_1 \cup E_2$ signifie : E_1 <u>ou</u> E_2 se réalisent (au moins un les deux)



- **Evènements incompatibles : $E_1 \cap E_2 = \phi$**



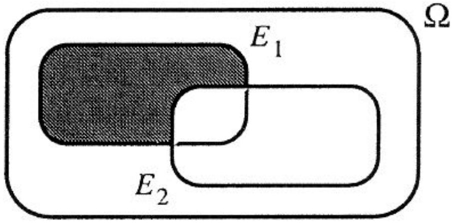
Introduction

- Expérience aléatoire, Evènement, Probabilité
  - Operations sur les évènements :

Soient E_1 *et* E_2 deux évènements d'une expérience aléatoire , alors :

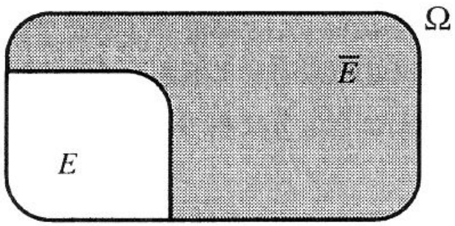
- **Différence :**

  $E_1 \setminus E_2$ signifie : E_1 se réalise sans que E_2 se réalise



- **Complémentaire :**

  soit E un évènement, le complémentaire de E est noté $\overline{E}$: $\Longrightarrow \overline{E} = \Omega \setminus E$



Remarques:

1. $E \cap \overline{E} = \phi \quad \Longrightarrow E$ *et* $\overline{E}$ sont complémentaires
2. $E \cup \overline{E} = \Omega$
3. E *et* $\overline{E}$ *constituent une partition de* Ω

Calcul de probabilités

1. Probabilité d'un évènement

- Définition :
  - La probabilité est une valeur numérique qui quantifie la possibilité de réalisation d'un événement associé à une expérience aléatoire.

→ Quelques propriétés simples :

1. Pour tout évènement E : $0 \leq P(E) \leq 1 \iff P(E) \in [0\,;1]$
2. Si E est partitionné en deux évènements e_1 et e_2 :
$$P(E) = P(e_1) + P(e_2)$$
3. Dans l'univers Ω, si $\overline{E}$ est le complémentaire de E :
$$P(E) + P(\overline{E}) = 1 \iff P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$
En particulier, le complémentaire de Ω est ϕ : $P(\phi) = 0 \; et \; P(\Omega) = 1$
4. La somme des probabilités de tous les éven[ts] élémentaires E_k ($1 \leq k \leq n$) est égale à 1 : $\Omega = \{E_1; E_2; E_3; \; \dots \; ; E_n\}$
$$\Longrightarrow P(E_1) + P(E_1) + \; \dots \; + P(E_n) = 1$$

Calcul de probabilités

1. Probabilité d'un évènement

- Calcul dans le cas d'une expérience aléatoire équiprobable :

Dans une expérience aléatoire équiprobable ayant N événements élémentaires, on a :

1. la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{N}$
2. la probabilité d'un événement quelconque A est donnée par :

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{k}{N}$$

↳ **Exemple :**

Si on jette un dé, on a :

1. la probabilité d'avoir un 1 = …= la probabilité d'avoir un $6 = \frac{1}{6}$
2. la probabilité d'avoir un chiffre paire $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
3. la probabilité d'avoir un chiffre supérieure à $4 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Calcul de probabilités

1. Probabilité d'un évènement

- Calcul dans le cas d'une expérience aléatoire répétée **N** fois de manière indépendante et identique :

Dans une expérience aléatoire répétée N fois de manière indépendante et identique. Si on s'intéresse à l'évènement A, on a :

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

Où, n_A = le nombre de réalisations de A

- Exemple : Probabilité d'avoir de la fièvre ou des adénopathies

	Adénopathies (A)	Pas d'Adénopathies (PA)	Total
Fièvre (F)	57	3	60
Pas de Fièvre (PF)	13	117	130
Total	70	120	190

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{70}{190} = 0{,}3684 \quad ; \quad P(F) = \frac{n_F}{N} = \frac{60}{190} = 0{,}3158$$

Calcul de probabilités

2. Evènements indépendants

L'indépendance entre évènements et plus généralement entre épreuves successives.

- Définition **On dit que deux évènements A et B sont indépendants si l'on a :** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- Remarque : **Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles.**

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ **indépendants**

  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ **compatibles**

- Propriétés :
  - A **et** Ω **sont indépendants :** $A \cap \Omega = A$

    $P(A \cap \Omega) = P(A) \times P(\Omega) = P(A)$ **car** $P(\Omega) = 1$
  - A **et** B **sont indépendants si et seulement si :**

    → A **et** $\overline{B}$ **(ou** $\overline{A}$ **et** B**) sont indépendants**

    → $\overline{A}$ **et** $\overline{B}$ **(ou** $\overline{A}$ **et** B**) sont indépendants**

Calcul de probabilités

2. Evènements indépendants

- Exemple 01 :

Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, non pipé, les deux évènements : A « le résultat est pair » et B « le résultat est un multiple de trois » sont indépendants.

On a : $A = \{2,4,6\}$; $B = \{3,6\}$; $A \cap B = \{6\}$

Avec : $P(A) = 3/6$; $P(B) = 2/6$; $P(A \cap B) = 1/6$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 3/6 \times 2/6 = 6/36 = 1/6$$

- Exemple 02 :

Si l'on considère une famille de deux enfants, les deux évènements : A « enfants de sexe différent » et B « au plus une fille » ne sont pas indépendants.

On a : l'espace probabilisé Ω, contient 4 évènements élémentaires

$$\Omega = A \cup B = \{GG, GF, FG, FF\}$$

Avec : $A = \{GF, FG\}$; $B = \{GG, GF, FG\}$ et $A \cap B = \{GF, FG\}$

$$P(A)\,) = 2/4 = 1/2 \;;\; P(B) = 3/4 \;\; et \;\; P(A \cap B) = 1/2$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) = 1/2 \times 3/4 = 3/8 \neq 1/2$$

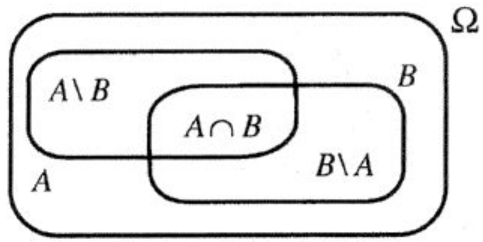
Calcul de probabilités

3. Probabilité totale

- Dans une expérience aléatoire, on consière deux événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

  a) Si A *et* B sont deux événements quelconques, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Updownarrow$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) + P(A \cup B)$$



Théorème des probabilités totales

  b) Si A *et* B sont deux événements incompatibles, alors :

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \quad \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

  c) Si A *et* B sont deux événements indépendants, alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$\Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

- Extension à 3 événements A, B et C, alors :

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Calcul de probabilités

3. Probabilité totale

- **Exemple 01 :** On lance un dé à 6 faces, non pipé, et on considère l'évènement A « le résultat est pair » et l'événement B « le résultat est un multiple de 3 ».

On a :

$A = \{2,4,6\}$ et $B = \{3,6\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{2,3,4,6\}$; $A \cap B = \{6\}$

avec : $P(A) = \frac{3}{6}$; $P(B) = \frac{2}{6}$;

$P(A \cup B) = 4/6$; $P(A \cap B) = 1/6$

$\Longrightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6$

- **Exemple 02 :** Probabilité d'avoir de la fièvre ou des adénopathies.

	Adénopathies (A)	Pas d'Adénopathies (PA)	Total
Fièvre (F)	57	3	60
Pas de Fièvre (PF)	13	117	130
Total	70	120	190

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{70}{190} = 0{,}3684$$

$$P(F) = \frac{n_F}{N} = \frac{60}{190} = 0{,}3158$$

$$P(A\ et\ F) = P(A \cap F) = \frac{n_{A \cap F}}{N} = \frac{57}{190} = 0{,}3$$

$$P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) = \frac{n_A}{N} + \frac{n_F}{N} - \frac{n_{A \cap F}}{N}$$

$$= \frac{70}{190} + \frac{60}{190} - \frac{57}{190} = \frac{73}{190} = 0{,}3842$$

Calcul de probabilités

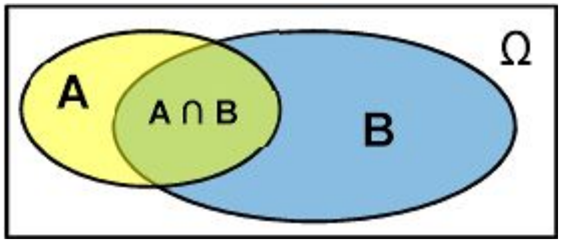
4. Probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements quelconques de Ω. Avec, $P(B) \neq 0$

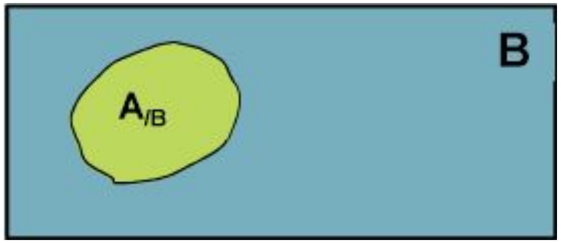
- Si on s'intéresse uniquement à A une fois que B est réalisé.

$\Downarrow$

On restreint l'ensemble des résultats possibles (Ω) à B.



$\Downarrow$



On appelle probabilité conditionnelle de A relativement à B, notée $P(A|B)$ ou $P_B(A)$, la probabilité pour que A se réalise sachant que B est réalisé. Obtenue par :

$$P(A\ sachant\ B) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Si on s'intéresse à B sachant que A est réalisé $\Longrightarrow$ on restreint les résultats possibles (Ω) à A.

$\Longrightarrow$

$$P(B\ sachant\ A) = P_A(B)$$
$$= P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Calcul de probabilités

4. Probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements quelconques de Ω. Avec, $P(B) \neq 0$

- Si on s'intéresse à A sachant que B est réalisé ou inversement. $\Longrightarrow$ On restreint l'ensemble des résultats possibles (Ω) à B ou à A.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} P\,(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) \\ P\,(B \cap A) = P(B|A) \times P(A) \end{cases}$$

- Comme : $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$\Downarrow$$

$$P\,(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$ → Loi (ou règle) de multiplication

- Si A *et* B sont indépendants

$$\Downarrow$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(A|B) = P(A) = P(A|\overline{B}) \\ P(B|A) = P(B) = P(B|\overline{A}) \end{cases}$$

4. Probabilité conditionnelle

- Exemple 01 : Probabilité d'avoir de la fièvre et/ou des adénopathies.

	Adénopathies (A)	Pas d'Adénopathies (PA)	Total
Fièvre (F)	57	3	60
Pas de Fièvre (PF)	13	117	130
Total	70	120	190

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{70}{190} = 0,3684$$

$$P(F) = \frac{n_F}{N} = \frac{60}{190} = 0,3158$$

$$P(A \cap F) = \frac{n_{A\cap F}}{N} = \frac{57}{190} = 0,3$$

$$\Longrightarrow P(A \cap F) \neq P(A) \times P(F)$$

Donc, A et F sont dépendants

Mais, $P(A) \times P(F) = \frac{n_A}{N} \times \frac{n_F}{N} = \frac{70}{190} \times \frac{60}{190} = 0,1163$

$$P(F|A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{n_{A\cap F}}{N}}{\frac{n_A}{N}} = \frac{n_{A\cap F}}{n_A} = \frac{57}{70} = 0.8143$$

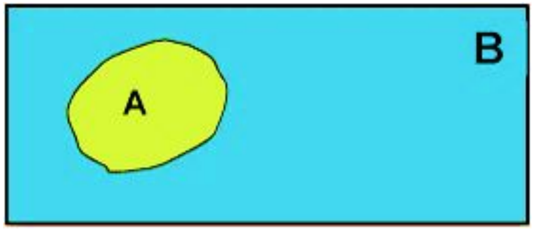
$$P(PF|A) = \frac{P(PF \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{n_{A\cap PF}}{N}}{\frac{n_A}{N}} = \frac{n_{A\cap PF}}{n_A} = \frac{13}{70} = 0.1857$$

4. Probabilité conditionnelle

- Si $A \subset B$ (A est inclus dans B), on a alors :

$$A \cap B = A \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} \\ P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1 \end{cases}$$

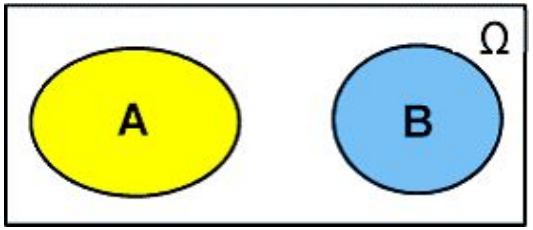


Lorsque A est $\subset B$, les deux évènements ne peuvent pas être indépendants.

- Si A et B sont incompatibles, on a alors :

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad P(A|B) = P(B|A) = 0$$



Deux évènements incompatibles, ne sont pas indépendants.

Calcul de probabilités

4. Probabilité conditionnelle

ATTENTION :

Ne pas confondre

Incompatibles: $P(AUB) = P(A) + P(B)$

$$\neq$$

Indépendants: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Ne pas confondre

Probabilité conditionnelle : Proportion de sujet présentant *A* parmi la population *B* : $P(A/B)$

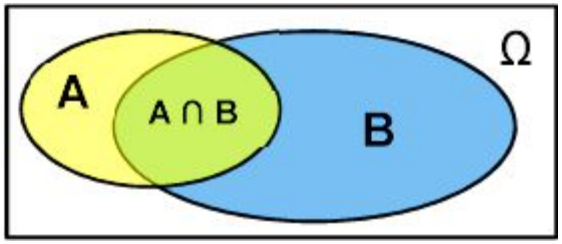
$$\neq$$

Probabilité d'une intersection : Proportion de tous les sujets qui présentent à la fois *A* et *B* : $P(A \cap B)$

Calcul de probabilités

5. Théorème de **BAYES**

- Théorème de Bayes dans le cas de deux évènements :



Soient A et B deux événements quelconques de Ω.

- **Si on se place dans le cas d'une probabilité conditionnelle $P(A|B)$**

$$\Downarrow$$

De la règle de la multiplication, on a :

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Théorème de Bayes dans le cas de deux évènements

Calcul de probabilités

5. Théorème de **BAYES**

- Théorème de Bayes dans le cas de deux évènements :

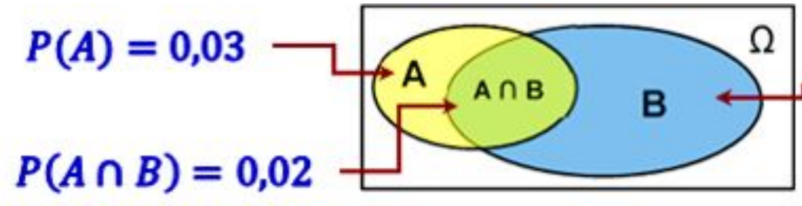
  - Exemple d'application :

Soient A «Avoir un cancer des poumons» et l'événement B «Etre fumeur régulier», avec :

$P(A) = 0{,}03$: Probabilité d'avoir un cancer des poumons dans la population générale Ω (Fumeur + non fumeur).

$P(B) = 0{,}1$: Probabilité de compter parmi les fumeurs réguliers dans la population générale Ω.

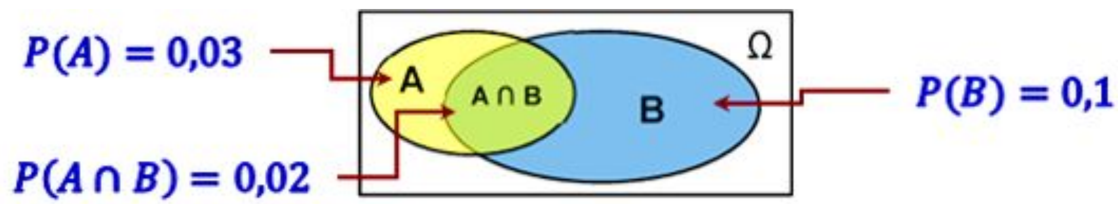
$P(A \cap B) = 0{,}02$: Probabilité par rapport à l'ensemble de la population Ω d'être à la fois fumeur régulier et de développer un cancer des poumons.



5. Théorème de **BAYES**

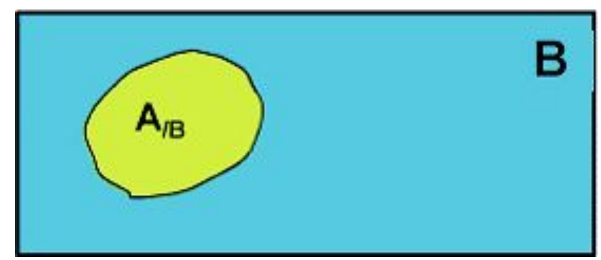
- Théorème de Bayes dans le cas de deux évènements :

  - Exemple d’application :



- Si on cherche à savoir la probabilité de développer un cancer des poumons, chez les fumeurs

  $\Leftrightarrow P(A|B) = ?$



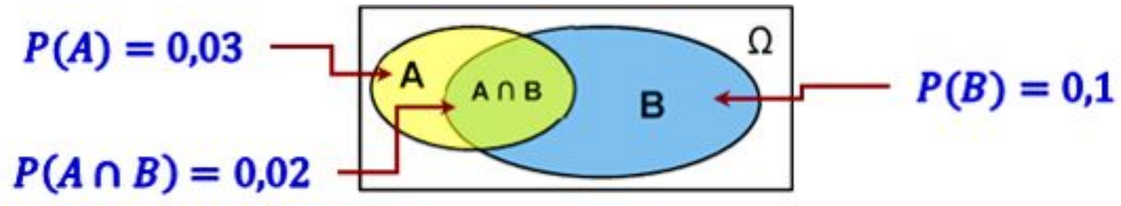
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}2$$

soit 20% de risque pour un fumeur de développer un cancer des poumons.

5. Théorème de **BAYES**

- Théorème de Bayes dans le cas de deux évènements :

  - Exemple d’application :



- **Si on cherche désormais à déterminer la probabilité pour une personne atteinte d’un cancer des poumons d’être un fumeur régulier**

  $\Leftrightarrow P(B|A) = ?$

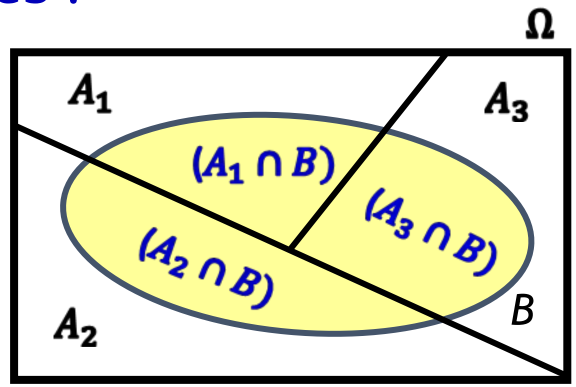
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \times P(B)}{P(A)} = \frac{0,2 \times 0,1}{0,03} = \frac{2}{3} = 0,67$$

soit 67% de fumeurs réguliers parmi les personnes atteintes d’un cancer des poumons.

Calcul de probabilités

5. Théorème de **BAYES**

- Forme générale du théorème de Bayes :



Soient les événements A_1, A_2 *et* A_3 qui forment une partition de Ω.
Et, A_1, A_2, A_3 sont forcément incompatibles !

$$\Longrightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$$

Soit l'événement quelconque $B \subset \Omega$

- Si, on applique le théorème des probabilités totales sur B.

$$\Longrightarrow P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

- En appliquant la règle de multiplication

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(A_1 \cap B) = P(B|A_1) \times P(A_1) \\ P(A_2 \cap B) = P(B|A_2) \times P(A_2) \\ P(A_3 \cap B) = P(B|A_3) \times P(A_3) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3)$$

5. Théorème de **BAYES**

- Forme générale du théorème de Bayes :

  - En appliquant la formule de Bayes pour A_1 par exemple (l'application pourrait être pour A_2 ou A_3 également), on aura :

$$\Longrightarrow \quad P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1) \times P(A_1)}{P(B)}$$

  - En remplaçant $P(B)$ par :

$$P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \times P(A_1)}{P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3)}$$

5. Théorème de **BAYES**

D'où,

La forme générale du théorème de Bayes

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_i) \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \times P(A_i)}$$

Et la forme générale du théorème des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

6. Applications

- Diagramme en arbre (ou Arborescence) :

  - **Soit une séquence finie d'expériences avec un nombre fini de résultats.**
  - **On considère que les résultats possibles de l'expérience n dépendent de l'expérience $n-1$.**

$\Longrightarrow$ On parle de probabilités conditionnelles comme vu précédemment.

$\Downarrow$

La manière la plus simple de représenter ce genre de séries d'expériences est un diagramme en arbre (ou une arborescence).

et

Pour calculer la probabilité de «chaque branche» on utilisera le théorème de la multiplication.

Calcul de probabilités

6. Applications

- Diagramme en arbre (ou Arborescence) :

Règle de calcul

1. La somme des probabilités des branches partant d’une même racine est toujours égale à 1.
2. Les chemins s'excluent mutuellement.
3. La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise est, d'après le théorème de la multiplication, le produit des probabilités de chaque branche du chemin.
4. La somme de toutes les probabilités finales obtenues doit être de 1.
5. La probabilité d’un évènement est la somme des probabilités des chemins correspondants à cet évènement.

Calcul de probabilités

6. Applications

- Diagramme en arbre (ou Arborescence) :

Exemple

On considère un échantillon de 100 personnes tirées au hasard. Parmi cet échantillon :

- → 40 ont été vaccinées contre la grippe.
- → Les 60 personnes restantes n'ont pas reçu cette prévention.
- → Parmi les patients vaccinés, 10 ont tout de même contracté la grippe.
- → 30 parmi les 60 personnes non vaccinées ont également eu la grippe.

Solution

- On Suppose que : V : l'évènement «être vacciné»,
  $\overline{V}$: l'événement «Non vacciné»,
  G : l'événement «Avoir la grippe»,
  $\overline{G}$: l'événement «Ne pas avoir la grippe».

6. Applications

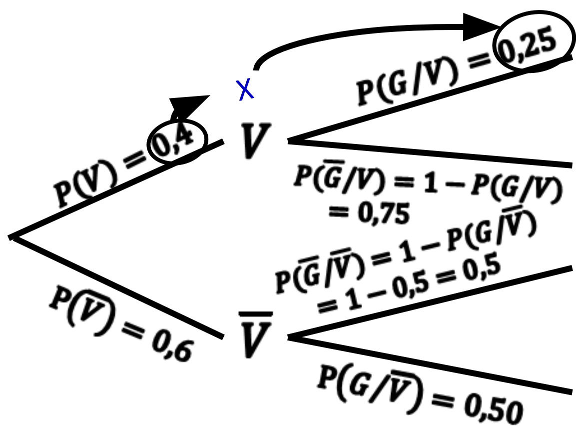
▸ Diagramme en arbre (ou Arborescence) :

- Probabilités directement issues de l'énoncé :

$$P(V)=\frac{n_V}{N}=\frac{40}{100}=0{,}4\ ;\quad \mathrm{P}(\overline{V})=\frac{n_{\overline{V}}}{N}=\frac{60}{100}=0{,}6$$

$$P(G/V)=\frac{n_{G\cap V}}{n_V}=\frac{10}{40}=0{,}25\ ;\mathrm{P}(G/\overline{V})=\frac{n_{G\cap\overline{V}}}{n_{\overline{V}}}=\frac{30}{60}=0{,}50$$

- Construction de l'arbre :



$V\cap G \Rightarrow P(V\cap G)=P(G/V)\times P(V)=0{,}1$

$+$

$V\cap \overline{G} \Rightarrow P(V\cap \overline{G})=P(\overline{G}/V)\times P(V)=0{,}3$

$+$

$\overline{V}\cap \overline{G} \Rightarrow P(\overline{V}\cap \overline{G})=P(\overline{G}/\overline{V})\times P(\overline{V})=0{,}3$

$+$

$\overline{V}\cap G \Rightarrow P(\overline{V}\cap G)=P(G/\overline{V})\times P(\overline{V})=0{,}3$

$=1$

$$\Rightarrow\ P(G)=P(V\cap G)+P(\overline{V}\cap G)=0{,}4\ \ et\ \ P(\overline{G})=P(V\cap\overline{G})+P(\overline{V}\cap\overline{G})=0{,}6$$

6. Applications

- Calcul de probabilité à partir d'un tableau de contingence :

Exemple

La distribution des Groupes Sanguins selon les régions est donnée dans le tableau suivant :

	Est	Centre	Ouest	Somme
AB	10	20	30	
O^+	20	10	15	
O^-	30	25	25	
Somme				

- **Calculer les probabilités suivantes :**

$P(O^+)$; $P(Est)$; $P(O^+|Est)$; $P(AB|Ouest$;
$P(Ouest|O^-$ et $P(Centre|AB)$

1). Le tableau complet :

	Est	Centre	Ouest	Somme
AB	$N_{AB\cap Est}$ =10	$N_{AB\cap Centre}$ =20	$N_{AB\cap Ouest}$ =30	N_{AB} =60
O^+	$N_{O^+\cap Est}$ =20	$N_{O^+\cap Centre}$ =10	$N_{O^+\cap Ouest}$ =15	N_{O^+} =45
O^-	$N_{O^-\cap Est}$ =30	$N_{O^-\cap Centre}$ =25	$N_{O^-\cap ouest}$ =25	N_{O^-} =80
Somme	N_{Est} =60	N_{Centre} =55	N_{Ouest} =70	N_{Total} =185

2). Les probabilités :

$$P(O^+) = \frac{N_{O^+}}{N_{Total}} = \frac{45}{185} = 0.243$$

$$P(Est) = \frac{N_{Est}}{N_{Total}} = \frac{60}{185} = 0.324$$

$$P\left({O^+}/{Est}\right) = \frac{P(O^+ \cap Est)}{P(Est)} = \frac{N_{O^+\cap Est}}{N_{Est}} = \frac{20}{60} = 0.333$$

$$P\left({AB}/{Ouest}\right) = \frac{P(AB \cap Ouest)}{P(Ouest)} = \frac{N_{AB\cap Ouest}}{N_{Ouest}} = \frac{30}{70} = 0.429$$

$$P\left({Ouest}/{O^-}\right) = \frac{P(Ouest \cap O^-)}{P(O^-)} = \frac{N_{Ouest\cap O^-}}{N_{O^-}} = \frac{25}{80} = 0.3125$$

$$P\left({Centre}/{AB}\right) = \frac{P(Centre \cap AB)}{P(AB)} = \frac{N_{Centre\cap AB}}{N_{AB}} = \frac{20}{60} = 0.333$$

Fin du chapitre