

## Capítulo 2

# Optimización Multi-objetivo

La optimización multi-objetivo puede ser definida como el problema de encontrar un vector de variables de decisión que satisfacen restricciones y optimiza un vector de funciones cuyos elementos representan las funciones objetivo. Estas definiciones aparecen en los trabajos de Coello [Coello1999] y Deb [Deb1999].

Las funciones objetivo representan los criterios que el diseñador desea optimizar simultáneamente, generalmente en conflicto entre sí. Por ejemplo, en la elección de rutas se podrían tener dos funciones objetivo como el costo de los caminos utilizados y el tiempo total de viaje. Por lo tanto, la optimización multi-objetivo significa encontrar un conjunto de soluciones óptimas, considerando simultáneamente todas las funciones objetivo.

### 2.1. Definición formal

Formalmente, en la optimización multi-objetivo se desea encontrar un vector de decisión

$$\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (2.1)$$

generalmente con  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , que deberá satisfacer  $\omega$  restricciones de desigualdad

$$g_i(\vec{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, \omega \quad (2.2)$$

y optimizar el vector de funciones objetivo

$$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_b(\vec{x})]^T \quad (2.3)$$

que generalmente cumple con  $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^b$ . El conjunto de todas las soluciones que atienden 2.2 es conocido como dominio de soluciones factibles, y se representa como  $\Omega$ , en general  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

El correspondiente conjunto imagen  $\Omega_o$  se define como:

$$\Omega_o = \{ \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^b \mid \vec{x} \in \Omega \} \quad (2.4)$$

## 2.2. Optimalidad Pareto

La teoría de la optimalidad Pareto proporciona definiciones matemáticas precisas de los conceptos multi-objetivos generales, como las soluciones no comparables y las soluciones dominadas. Estos conceptos se ilustran en la tabla 1.1, donde cada situación posible entre dos soluciones dadas  $u, v \in \Omega$  genera una consecuencia acerca de la comparación entre las mismas.

**Tabla 1.1.** Teoría de la optimalidad Pareto

Situación	Consecuencia
$u$ domina a $v$	$u$ es mejor solución que $v$
$v$ domina a $u$	$v$ es mejor solución que $u$
Ninguna de las anteriores	$u$ y $v$ son soluciones no comparables

Basados en la teoría de la optimalidad Pareto podemos dar una definición formal acerca del concepto de dominancia mencionado en la tabla 1.1 y denominada en la optimización multi-objetivo como dominancia Pareto.

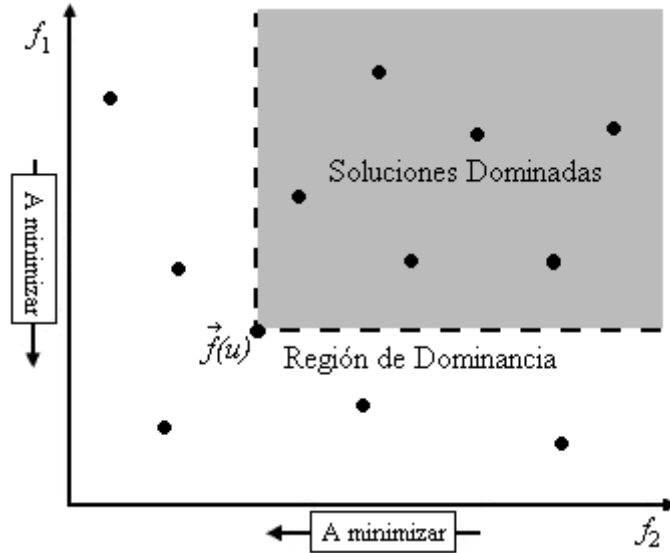
**Definición 1:** *Dominancia Pareto:* Sean dos soluciones  $u, v \in \Omega$ . Se dice que  $u$  domina a  $v$  (denotado como  $u \succ v$ ) si es mejor o igual que  $v$  en cada uno de los objetivos y estrictamente mejor en al menos un objetivo.

Como ejemplo, en un contexto de minimización  $u \succ v$  si y solo si:

$$f_i(u) \leq f_i(v) \forall i \in \{1, 2, \dots, b\} \wedge \exists j \in \{1, 2, \dots, b\} \mid f_j(u) < f_j(v) \quad (2.5)$$

Considerando una función de dos objetivos a minimizar y dado un punto específico  $\vec{f}(u) \in \Omega_o$ , podemos dibujar una semirrecta paralela al eje de las abcisas y otra paralela al eje de las ordenadas que parten del punto  $\vec{f}(u)$  orientadas hacia el infinito en caso de minimizar y hacia menos infinito en caso contrario. La región formada se denomina región de dominancia del punto  $u$ , como se ilustra en la figura 2.1.

Todas las soluciones ubicadas en la región de dominancia de  $u$  son soluciones dominadas por  $u$ . Conociendo la definición de dominancia Pareto se pueden mencionar otras definiciones utilizadas en el contexto de la optimización multi-objetivo.



**Figura 2.1.** Región de dominancia del punto  $f(u) \in \Omega_0$

**Definición 2:** *Soluciones no comparables:* Dados  $u, v \in \Omega$ , si  $u \not\prec v$  ni  $v \not\prec u$ , se dice que son soluciones no comparables, lo que se denota como  $u \sim v$ .

**Definición 3:** *Conjunto Pareto:* El conjunto de todas las soluciones  $\vec{x}$  no dominadas en  $\Omega$  se denomina Conjunto Pareto, lo que se denota como  $CP$ . Las soluciones  $\vec{x}$  que pertenecen a  $CP$  se denotarán como  $x^*$ .

**Definición 4:** *Frente Pareto:* La imagen del Conjunto Pareto a través de la función  $\vec{f}$  se denomina Frente Pareto, denotado por  $Y$ .

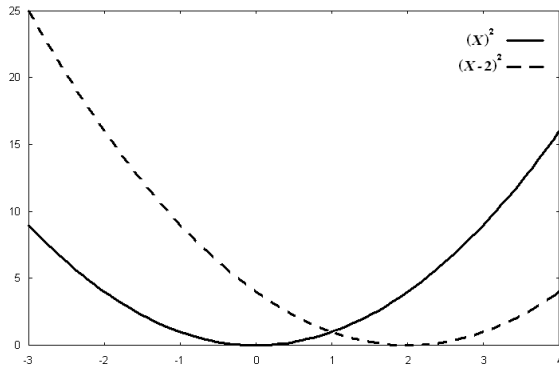
Como ejemplo podemos minimizar la función  $\vec{f}_2$  de Schaffer [Zitzler1998] definida como:

$$\vec{f}_2(x) = \{x^2, (x-2)^2\} \quad (2.6)$$

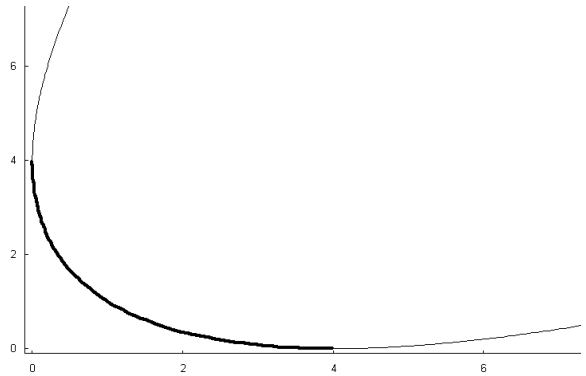
En la figura 2.2 se muestran ambas funciones objetivo trazadas en el dominio acotado para  $x \in [-3, 4]$ , y su imagen a través de la función  $\vec{f}_2$  se muestra en la figura 2.3.

Como podemos observar en el ejemplo, las soluciones Pareto óptimas de este problema corresponden al intervalo  $x \in [0, 2]$ . Estos puntos producen la sección resaltada de la curva en la

figura 2.3, que constituyen así al Frente Pareto del problema. El espacio de búsqueda de soluciones también es denominado dominio de decisión, que en el ejemplo corresponde al dominio de la variable de decisión  $x$ . Mientras que el dominio de la función objetivo también es denominado espacio solución del problema.



**Figura 2.2.** Funciones objetivo en el dominio  $x \in [-3, 4]$ .



**Figura 2.3.** Frente Pareto para la función de Schaffer.

En consecuencia, podemos afirmar que la optimización multi-objetivo se centra en la búsqueda de un conjunto de soluciones óptimas denominado Conjunto Pareto, y en el cual todas las soluciones son no comparables entre sí. Estas soluciones no comparables representan para el diseñador un conjunto de alternativas de decisión donde cada una es mejor que las demás en al menos un objetivo del problema.

## 2.3. Métodos clásicos no basados en la Optimalidad Pareto

En la literatura existen métodos alternativos de optimización multi-objetivo que generalmente generan una versión mono-objetivo a partir del problema multi-objetivo a resolver. Estos métodos son clasificados como métodos clásicos [Deb1999] y a continuación se presentan dos métodos reconocidos y generalmente muy utilizados en la minimización y maximización de funciones matemáticas, dentro del contexto de la ingeniería.

### 2.3.1. Método de suma ponderada

Las múltiples funciones objetivo son combinadas en una función general  $\vec{f}$ . En un contexto de minimización, esto se define como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && \vec{f} = \sum_{j=1}^b \delta_j \cdot f_j(\vec{x}) \\
&\text{donde} && \vec{x} \in \Omega \\
&\text{y generalmente} && \sum_{j=1}^b \delta_j = 1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Al agregar las funciones objetivo en una única función se obtiene una única solución óptima, correspondiente a la combinación lineal de valores asignados a los pesos  $\delta_j$ . Para obtener diferentes soluciones Pareto óptimas, se pueden asignar diferentes pesos  $\delta_j$  a las funciones objetivo y volver a optimizar la función  $\vec{f}$ .

Una consideración a tener en cuenta al utilizar este método es la necesidad de normalización de los valores de las funciones objetivo en caso que las mismas posean distintos dominios de definición e inclusive estén medidas con distintas magnitudes. Como ejemplo consideremos el caso de utilizar una función objetivo de costo medida en dólares y en el intervalo de 1.000 a 100.000 dólares, y otra función de distancia recorrida medida en kilómetros y en el intervalo de 800 a 2000 kilómetros. Claramente puede notarse la necesidad de normalizar estos valores para posteriormente poder agregarlos de manera ponderada, en caso contrario se estarían agregando valores inconsistentes entre sí.

### 2.3.2. Método de perturbación $\epsilon$

Se construye un problema de optimización mono-objetivo en el cual una función objetivo es tomada como la función a optimizar y las demás son utilizadas como restricciones. En un contexto de minimización se define formalmente como:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && f_k(\vec{x}) \quad , k \in \{1, 2, \dots, b\} \\
&\text{Sujeto a} && f_j(\vec{x}) \leq \epsilon_j \quad , \forall j \neq k \\
&\text{donde} && \vec{x} \in \Omega
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para encontrar una solución Pareto óptima, valores apropiados de  $\epsilon_j$  son escogidos para la  $j$ -ésima función objetivo con  $j \neq k$ , donde  $k \in \{1, 2, \dots, b\}$  y  $f_k$  representa la  $k$ -ésima función objetivo a optimizar. Estos valores apropiados de  $\epsilon$  requieren un conocimiento a priori del problema. Para encontrar diferentes soluciones Pareto óptimas, el procedimiento se repite asignando diferentes valores a cada  $\epsilon_j$  con  $j \in \{1, 2, \dots, b\}$ .

## Capítulo 3

# Formulación de los Problemas Considerados

Muchos problemas reales pueden ser modelados mediante la teoría de grafos [Stutzle2002]. Generalmente, un problema real de ingeniería u otras áreas implica una compleja optimización combinatoria, y por ende es clasificado como NP-Completo [Sahni1976]. En este capítulo se formulan tres de este tipo de problemas NP-Completo y que son generalmente modelados mediante grafos con pesos asociados a cada arista que interconecta los nodos.

En el caso particular de los problemas formulados en este trabajo, las soluciones corresponden a permutaciones de los nodos correspondientes al grafo que modela el problema. Por este motivo, estos problemas son referidos como de “alta” complejidad, ya que la optimización consiste en una búsqueda de las permutaciones factibles y óptimas, de acuerdo a la optimalidad Pareto, de entre todas las permutaciones.

Se puede notar fácilmente que estando las permutaciones en función al número de nodos del grafo ( $n$ ), el espacio de búsqueda de permutaciones crece con una tasa no polinómica con respecto a  $n$ . Así, computacionalmente, podemos estimar una cota inferior para este espacio en función al número de nodos mediante la expresión  $n!$  (factorial de  $n$ ). Claramente, resulta impráctico utilizar métodos de búsqueda exhaustiva para resolver este tipo de problemas considerando una gran cantidad de nodos ( $n$  grande), y resulta razonable utilizar otros métodos heurísticos, como los mencionados en este trabajo.

A continuación se presenta la formulación matemática de los siguientes problemas:

- 1- TSP (*Traveling Salesman Problem*).
- 2- QAP (*Quadratic Assignment Problem*).
- 3- VRPTW (*Vehicle Routing Problem*).

### 3.1. Traveling Salesman Problem (TSP)

El TSP o problema del cajero viajante puede ser representado como un grafo completo  $G=(N, Ar)$ , donde  $N$  es el número de nodos, o ciudades, y  $Ar$  es el conjunto de arcos que interconectan completamente los nodos. Cada arco  $(i, j) \in Ar$  posee un valor  $c_{ij}$  que representa la distancia entre la ciudad  $i$  y la ciudad  $j$ . El problema consiste en encontrar el camino más corto que visite todas las ciudades exactamente una vez y vuelva a la ciudad de origen. Este camino se denomina camino Hamiltoniano, y por ende el TSP puede ser definido como encontrar el camino Hamiltoniano más corto. Para los TSP simétricos, la distancia  $c_{ij} = c_{ji}$ . La definición detallada del problema puede encontrarse en [Gómez2004] y pertenece al conjunto de problemas NP-completos [Sahni1976].

En el caso bi-objetivo, se asocia a cada arco  $(i, j)$  un par de valores, uno para cada objetivo, que representan las distancias entre las ciudades  $i$  y  $j$  de acuerdo a cada objetivo. El problema consiste en minimizar:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N c_{\phi_i \phi_{i+1}}^1 \\ \sum_{i=1}^N c_{\phi_i \phi_{i+1}}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde minimizar se refiere a la optimalidad Pareto, y  $\phi_i$  representa la  $i$ -ésima ciudad visitada. De manera a agregar el costo de retorno a la ciudad de origen, se considera a ésta como la siguiente, luego de la  $N$ -ésima ciudad visitada.

El *bi-objective TSP* posee aplicaciones prácticas en la optimización de rutas considerando, por ejemplo, tiempo de viaje y distancia recorrida.

## ***Aplicaciones Prácticas***

Para enfatizar la importancia de este paradigmático problema, a continuación se presentan algunas aplicaciones prácticas.

### **3.1.1. Programa espacial *Starlight* de la NASA**

El propósito del programa espacial es mostrar imágenes de cuerpos celestiales mediante un par de satélites involucrados en la misión [Bailey2000]. El objetivo es minimizar el consumo de combustible utilizado por ambos satélites en su posicionamiento y la obtención de imágenes de los cuerpos celestiales.

En este caso las ciudades del TSP son las posiciones de los dos satélites para obtener información de los cuerpos celestiales, y el costo de viaje está representado por la cantidad de combustible requerida para volver a posicionar a ambos satélites de un punto adecuado para un cuerpo celeste, a otro apropiado para otro cuerpo celeste.

### **3.1.2. Optimización de rutas aéreas**

Este problema consiste en determinar la ruta aérea de menor distancia que recorra todos los aeropuertos que un avión debe visitar. Es un ejemplo clásico del TSP en donde los aeropuertos están ubicados en distintos puntos geográficos y existe una distancia asociada a cada par de aeropuertos.

La importancia de la optimización de las rutas aéreas es la disminución de los costos de viaje, como el ahorro de combustible y el tiempo total de viaje que redundan en la satisfacción del cliente.

### **3.1.3. Determinación de una topología de anillo**

El diseño de una red en topología de anillo requiere claramente pasar por cada punto de acceso a la red exactamente una vez y volver al punto de partida. En el caso práctico, el laboratorio de investigación de la compañía *Bell Communications* diseñó en una ocasión una herramienta basada en el TSP para encontrar la topología virtual en anillo de menor longitud para una red mallada de fibras ópticas. Es fácil notar la importancia de minimizar la longitud del anillo de manera a disminuir el costo total de la red. Las ciudades son representadas por los puntos de acceso a la red que se desean conectar y el costo de viaje viene dado por las distancias entre cada punto de acceso.



### 3.1.4. Otros

Encontrar el camino de menor longitud para un repartidor de diarios que debe entregar el diario a  $n$  clientes. En este caso las ciudades son los clientes y el costo de viaje está determinado por la distancia entre cada cliente y/o el tiempo de traslado.

Otra aplicación similar es la recolección de monedas de los teléfonos públicos. En este caso los teléfonos públicos representan las ciudades y el costo de viaje está dado por la distancia y/o entre cada teléfono. Se desea determinar la ruta de menor longitud y/o tiempo que visite todos los teléfonos exactamente una vez.

La recolección de basura y la ruta de transporte escolar son otros ejemplos de aplicaciones reales del TSP.

## 3.2. Quadratic Assignment Problem (QAP)

El QAP o problema de asignación cuadrática es un problema NP-completo [Sahni1976], y consiste en asignar un conjunto de instalaciones a un conjunto de localidades con distancias conocidas entre cada par de localidades, dados los flujos entre cada par de instalaciones, de manera a minimizar la suma del producto entre los flujos y las distancias [Çela1998].

El QAP multi-objetivo (mQAP), propuesto por Knowles y Corne [Knowles2003] utiliza diferentes matrices de flujo, y mantiene la misma matriz de distancia. Dadas  $n$  instalaciones y  $n$  localidades, una matriz  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  donde  $a_{ij}$  representa la distancia entre las localidades  $i$  y  $j$ , y  $b$  matrices  $B^q = \{b_{ij}^q\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $q = 1, \dots, b$  donde  $b_{ij}^q$  representa el  $q$ -ésimo flujo entre las instalaciones ubicadas en las localidades  $i$  y  $j$ , el mQAP se define como:

$$\text{Minimizar } \vec{f}(\vec{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}^1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}^b \end{cases} \quad (3.2)$$

donde minimizar se refiere a la optimalidad Pareto. La aplicabilidad real de este problema aparece en la ubicación de hospitales e instituciones sociales. Para este trabajo se consideró el bQAP (QAP bi-objetivo).

## ***Aplicaciones Prácticas***

A continuación se presentan algunas aplicaciones prácticas del QAP.

### **3.2.1. Ubicación de edificios en hospitales y facultades dentro de una ciudad universitaria**

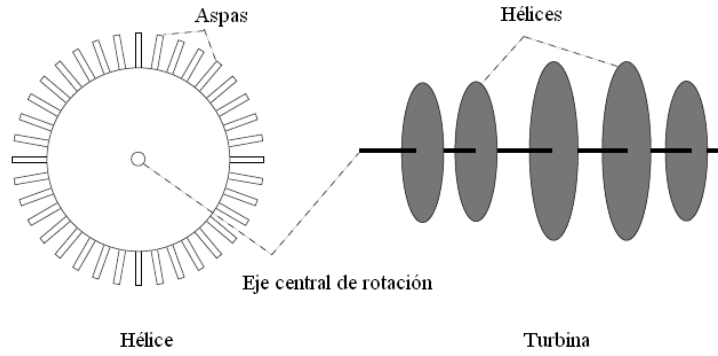
Instituciones de gran tamaño como hospitales y universidades poseen generalmente varios edificios, y normalmente existen diferentes flujos de movimiento de personas entre cada par de edificios. Por este motivo se busca ubicar físicamente los mismos de tal forma a minimizar las distancias entre aquellos pares de edificios con elevado flujo de movimiento de personas. Esta es una aplicación directa del QAP.

### **3.2.2. Diseño del teclado para escritura**

El teclado de un computador o máquina de escribir posee muchas posiciones posibles y muchas teclas distintas a ubicar. En este caso, las localidades del QAP son las posiciones físicas posibles para una tecla dentro del teclado y las instalaciones están representadas por las teclas distintas a colocar. Normalmente se conoce el flujo de utilización de cada par de teclas posibles para un idioma dado. El objetivo es encontrar la distribución de teclas que optimice la distancia entre los pares de teclas frecuentemente utilizados. De esta forma se busca minimizar el movimiento de los dedos.

### **3.2.3. Balanceo de turbinas**

Este problema se presenta en [Mason1997]. Un motor con turbina, sea del tipo hidráulico, a gas o a vapor, está compuesto por hélices que giran alrededor del eje central de la turbina, ver figura 3.1. Cada hélice está compuesta por aspas colocadas en la periferia de un disco en puntos equidistantes. Las masas de estas aspas generalmente no son idénticas debido a errores en el proceso de fabricación o por desgaste de utilización. Por este motivo el centro de masas de la hélice depende de la ubicación de estas aspas en su periferia. Cuando el centro de gravedad de la hélice no coincide con el eje central de rotación se produce desbalanceo estático, denominado desbalanceo de la turbina. Esto no es deseable ya que produce vibraciones y reduce el tiempo de vida útil de la turbina. Normalmente la ubicación óptima de las aspas se aproxima mediante métodos de prueba y error o mediante la intuición de una persona experta pudiendo tomar días o semanas dependiendo del tipo de turbina.



**Figura 3.1.** Representación gráfica de una turbina, ver [Mason1997]

Cada posición posible para un aspa está representada por un vector de posición  $d_i$ , y cada aspa posee una masa o peso  $w_i$ . El momento generado al colocar un aspa de peso  $w_i$  en la posición  $i$  está dado por  $M_i = w_i \cdot d_i$ . El momento de la hélice que contiene a todas las aspas está representado por la suma de los momentos individuales de cada aspa. El problema consiste en asignar las aspas a posiciones de manera a minimizar la suma de los momentos individuales de cada aspa. Una magnitud elevada para el momento de la hélice representa desbalanceo estático [Mason1997]. En este caso el problema puede plantearse como un QAP donde las aspas representan las instalaciones y se conoce la distancia entre cada posición posible para cada aspa, y el objetivo es minimizar la suma de los momentos de cada aspa.

### 3.3. Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW)

El VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*), cuya definición puede encontrarse en [Barán2003], busca encontrar rutas de costo mínimo para una flota de vehículos, que se originan y terminan en un depósito central, minimizando además el número de vehículos a utilizar. Cada cliente debe ser visitado exactamente una vez y posee una demanda que debe ser cubierta por los vehículos sin exceder la capacidad de los mismos. Además, cada cliente posee una ventana de tiempo que representa el tiempo de recepción permitido que debe ser respetado por los camiones. En cada cliente se tiene en cuenta un tiempo de servicio durante el cual el vehículo permanece en el mismo. Matemáticamente el problema bi-objetivo consiste en minimizar el vector:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{|V_i|} t_{j,j+1} \right\} \quad (3.3)$$

sujeeto a:

$$\sum_{j=1}^{|\psi_i|} q_j \leq Q \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, v\}$$

$$b_k \leq \sum_{j=1}^{k-1} (t_{j,j+1} + s_j) \leq e_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, |\psi_i|\}$$

donde:

$v$	representa la cantidad de vehículos necesarios;
$n$	es la cantidad de clientes; esto es, $n = \sum_{i=1}^v  \psi_i $ ;
$C = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$	representa el conjunto de $n$ clientes y el depósito $c_0$ , donde $c_j$ representa al cliente $j$ ;
$\psi_i$	representa el conjunto de clientes visitados por el $i$ -ésimo vehículo;
$t_{j,j+1}$	es el tiempo de viaje entre un cliente $c_j$ y el siguiente cliente $c_{j+1}$ , visitado por un mismo vehículo;
$Q$	la capacidad máxima de un vehículo, que se asume constante para todos los vehículos;
$q_j$	demanda del cliente $c_j$ , con $q_j \leq Q$ y $q_0 = 0$ ;
$[b_j, e_j]$	ventana de tiempo aceptable del cliente $j$ , donde $b_j$ es el instante más temprano de servicio del cliente $c_j$ y $e_j$ es el instante más tarde;
$s_j$	representa el tiempo de servicio en el cliente $c_j$ .

### ***Aplicaciones Prácticas***

Encontrar la manera más eficiente de distribuir mercaderías en una red logística es un objetivo primordial en una cadena de proveedores. Incluso si la mejora en las rutas de camiones es mínima, en el sentido económico resulta importante, ya que la distribución de mercaderías normalmente se realiza constantemente, inclusive diariamente, con lo cual las ganancias obtenidas mediante el ahorro son acumuladas en el tiempo. En consecuencia, se presenta a continuación un ejemplo de distribución de mercaderías.

## Optimización de rutas en una cadena de supermercados

La optimización de rutas en una cadena de supermercados representa una aplicación directa del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo. En la realidad, una cadena de supermercado normalmente tiene la necesidad de distribuir sus mercaderías. Para el efecto, generalmente cuenta con una flota de vehículos y distintos puntos de distribución que normalmente representan supermercados pertenecientes a la cadena. Estos puntos de distribución establecen un horario de recepción de mercaderías, que representa la ventana de tiempo del cliente.

Es de interés para la cadena de supermercados minimizar el tiempo total de viaje y/o la distancia total recorrida de los camiones de manera a obtener ahorros en el coste logístico de la distribución de mercaderías. Así mismo se desea minimizar el tamaño de la flota de camiones, que lógicamente representa un significativo ahorro en costos de adquisición y mantenimiento de vehículos. Además, se debe cumplir con las ventanas de tiempo impuestas por el cliente, de forma a organizar el horario del personal y no incurrir en gastos extras. En la tabla 3.1 se presentan algunas otras aplicaciones reales del VRPTW según distintas áreas económicas. Puede notarse mediante la tabla 3.1 que éste problema es directamente aplicable a una amplia gama de situaciones en la vida real.

**Tabla 3.1.** Aplicaciones reales del VRPTW para distintas áreas económicas

Área económica	Aplicación Real
Industria del automóvil	Entrega de piezas de repuesto
Prensa	Distribución de periódicos y revistas
Banca	Reparto y recolección de dinero en efectivo
Sector público	Reparto de correo, Limpieza de calles
Agricultura	Recolección de cereales, leche
Educación	Rutas de transportes escolares
Defensa	Rutas de aviones espías, logística militar
Salud	Distribución de medicamentos a farmacias
Industria	Distribución de mercaderías entre almacenes
Servicios	Reparación de electrodomésticos a domicilio
Transporte	Planificación de rutas de aviones, trenes, camiones.