Lógica Computacional

DCC/FCUP

2020/21

Repetição

Numa dedução podemos sempre repetir uma conclusão já obtida. A essa regra chamaremos repetição:

$$\frac{\phi}{\phi}\,\mathbf{R}$$

Mostrar que $(p \wedge q) \vee q \vdash q$

1	$(p \wedge q) \vee q$	
2	$\quad p \wedge q$	
3	$\quad q$	$\wedge$E, 2
4	$\quad q$	
5	$\quad q$	R, 4
6	q	$\vee$E, 1, 2–3, 4–5

Uso de sub-deduções

1	$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$	
2	$\quad p \wedge q$	
3	$\quad p$	$\wedge$E, 2
4	$\quad q$	$\wedge$E, 2
5	$\quad q \wedge r$	
6	$\quad q$	$\wedge$E, 5
7	q	$\vee$E, 1, 2–4, 5–6
8	$q \wedge p$	$\wedge$I, 7, 3

Esta dedução está ERRADA! No passo 8 é usado uma fórmula que foi deduzida numa sub-dedução que já terminou.

Uma sub-dedução é iniciada com introdução de novas hipóteses (premissas) e as deduções aí feitas dependem delas. Quando termina a sub-dedução, essas hipóteses deixam de ser assumidas e portanto não se podem utilizar.

Regras de inferência *DN*: Negação

Eliminação Corresponde a uma das partes do princípio da dupla negação.

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\mathbf{E}$$

Introdução

Esta regra corresponde a demonstrações por contradição.
Representamos por $\perp$ uma contradição (p.e $\phi \wedge \neg\phi$).

$$\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}$$
$$\frac{\perp}{\neg\phi}\neg\mathbf{I}$$

Se supondo ϕ podemos deduzir uma contradição, então podemos deduzir $\neg\phi$ das premissas originais.

Regras de inferência *DN*: $\perp$

Se não considerarmos $\perp$ como uma abreviatura de $\phi \wedge \neg\phi$, temos de ter uma regra para o introduzir:

Introdução $(*)$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \neg\phi\end{array}}{\perp}\,\perp\mathbf{I}$$

Se deduzimos ϕ e $\neg\phi$ então temos uma contradição.

Exemplo

Mostrar $\phi \vdash \neg\neg\phi$

1	ϕ	
2	$\quad \neg\phi$	
3	$\quad \bot$	$\bot$ **I**, 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg$I, 2–3

Regras de inferência *DN*: $\perp$

Eliminação

$$\frac{\perp}{\phi}\,\perp\mathbf{E}$$

Se deduzimos uma contradição podemos deduzir qualquer fórmula.

Um conjunto de fórmulas Σ diz-se inconsistente se $\Sigma \vdash \perp$.

Notação de Fitch $\neg$ e $\perp$

Introdução	**Eliminação**	
$\neg$	$\begin{array}{\|l} \begin{array}{\|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \perp \end{array} \\ \neg\phi \qquad\qquad \neg\mathsf{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|l} \vdots \\ \neg\neg\phi \\ \vdots \\ \phi \qquad\qquad \neg\mathsf{E} \end{array}$
$\perp$	$\begin{array}{\|l} \phi \\ \vdots \\ \neg\phi \\ \vdots \\ \perp \quad \perp\mathbf{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|l} \vdots \\ \perp \\ \vdots \\ \phi \quad \perp\mathbf{E} \end{array}$

Regras de inferência *DN*: Implicação

Eliminação

Esta regra é habitualmente conhecida por modus ponens (em latim, *modo que afirma*) e corresponde a raciocínios condicionais:

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to\mathbf{E}$$

Se já deduzimos ϕ e $\phi \to \psi$ então podemos deduzir ψ.

Exercício

Mostrar que $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$:

1	$p \to (q \to r)$	
2	$p \to q$	
3	p	
4	$q \to r$	$\to$E, 1, 3
5	q	$\to$E, 2, 3
6	r	$\to$E, 4, 5

Regras de inferência *DN*: Implicação

Introdução (regra da dedução)
A regra para introduzir uma implicação necessita duma sub-dedução: supondo ϕ tentamos deduzir ψ. Se tal acontecer, terminamos a sub-dedução (retirando a suposição) e concluímos $\phi \to \psi$:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\to\mathrm{I}$$

Exercício:

Mostrar que $(p \vee q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$:

1	$(p \vee q) \rightarrow r$	
2	$\quad p$	
3	$\quad p \vee q$	$\vee$I, 2
4	$\quad r$	$\rightarrow$E, 1, 3
5	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$I, 1, 2–4

Introdução		Eliminação	
ϕ		ϕ	
$\vdots$		$\vdots$	
ψ		$\phi \to \psi$	
$\phi \to \psi$	$\to$I	$\vdots$	
		ψ	$\to$E

Deduções sem premissas

Com a introdução da implicação (regra da dedução) podemos converter qualquer dedução com premissas numa dedução sem premissas:

Exercício: Mostrar $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$

1	ϕ	
2	$\neg\phi$	
3	$\bot$	$\bot$ **I**, 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg$I, 2–3
5	$\phi \to \neg\neg\phi$	$\to$I, 1–4