12. Justifica a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes onde p, q, r e s são variáveis proposicionais. Nota: sem construir a tabela de verdade.

(a) $\models (p \to (((q \to p) \to p) \to r)$.

(b) $\models (p \to (q \to s)) \to (q \to (p \to s))$.

(c) $\models (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

(d) $\models ((p \land q) \to (s \lor t)) \to ((p \to s) \lor (q \to t))$.

(e) $\models (p \land \neg p) \to (p \land \neg r)$.

(f) $\models (q \lor \neg r) \to (q \land \neg q)$.

(g) $\{(p \to q) \lor r, ((p \to q) \lor r) \to \neg r, (p \to q) \to (q \to r)\} \models \neg q$.

(h) $\{(p \lor q) \to r)\} \models (p \to r) \lor (q \to r)$.

(i) $\{p \lor \neg q, \neg r \to \neg\neg q, r \to \neg s, \neg\neg s\} \models p$.

(j) $\{\neg(q \land r), q\} \models \neg r$.

(k) $\{\neg q \to r, q\} \models \neg r$.

(l) $\{\neg p \lor \neg q \lor r, q \lor r, p\} \models r$.

(m) $\{(p \land q) \to r, \neg r\} \models p \lor q$.

(n) $\{(p \land q) \to r, r\} \models \neg p$.

(o) $\{p, \neg p \to q, q \to \neg p\} \models \neg q$.

(p) $\{p \land q\} \models (p \to \neg q) \land (\neg q \to p)$.

13. Justifica a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, onde Γ e Σ representam conjuntos de fórmulas e $\phi, \psi, \theta, \gamma$ representam fórmulas da lógica proposicional. Caso a afirmação seja falsa deves dar um contra-exemplo indicando valores particulares dos conjuntos ou das fórmulas para as quais a afirmação é falsa. Caso a afirmação seja verdade deves justificar usando as definições.

(a) $\models (\theta \lor \phi) \to (\neg\theta \to \phi)$.

(b) $\{\phi \to \psi, \psi \to \phi\} \models (\phi \lor \psi) \to (\phi \land \psi)$.

(c) $\{\psi \to \phi, \gamma \to \theta\} \models \psi \lor \gamma \to \phi \land \theta$.

(d) $\{\psi \to (\neg\phi \lor \gamma), \neg\gamma\} \models \neg\phi \to \neg\psi$.

(e) Se $\phi, \psi \models \theta \to \gamma$ e $\phi \models \theta$ então $\phi, \psi \models \gamma$.

(f) Se $\Gamma \models \theta$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$, então $\Sigma \models \theta$.

(g) Se $\Sigma \models \theta$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$, então $\Gamma \models \theta$.

(h) Se $\Gamma \models \theta$ e $\Sigma \models \theta$, então $\Gamma \cap \Sigma \models \theta$.

(i) Se $\Sigma \models \theta$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$, então $\Sigma \cap \Gamma \models \theta$.

(j) Se $\Sigma \models \theta$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$, então $\Sigma \cap \Gamma \models \theta$.

(k) Se $\Sigma \models \theta$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$ então $\Sigma \cup \Gamma \models \theta$.

(l) Se $\Gamma \cup \{\phi\}$ é satisfazível então $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não é satisfazível.

(m) $\phi \models \psi \to \theta$ e $\gamma \models \psi$ se e só se $\phi, \gamma \models \theta$.

(n) Se Σ é um conjunto de fórmulas satisfazível então para toda a fórmula ϕ, $\Sigma \cup \{\phi\}$ é satisfazível ou $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ é satisfazível.

(o) Se $\Sigma \models \phi$ e $\Gamma \models \phi$ então $\Sigma \cup \Gamma \models \phi$.

(p) Se Σ é satisfazível então existe uma fórmula ϕ tal que $\Sigma \not\models \phi$.

14. Mostra que cada um dos seguintes conjuntos de conectivas são completos:

(a) $\{\tilde{\vee}, \mathbf{V}\}$;

(b) $\{\tilde{\wedge}, \mathbf{F}\}$;

(c) $\{\neg, \wedge\}$.

15. Constrói uma fórmula em forma normal disjuntiva e uma em forma normal conjuntiva, cujas funções de verdade são dadas pelas seguintes tabelas:

(a)

x_1	x_2	x_3	f
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

(b)

x_1	x_2	x_3	f
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

16. Para cada uma das funções de verdade *(a)*, *(b)* e *(c)* seguintes, constrói uma fórmula em forma normal disjuntiva e uma fórmula em forma normal conjuntiva:

p	q	r	(a)	(b)	(c)
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**

17. Para cada uma das seguintes fórmulas determina, por equivalências semânticas e indicando todos o passos, uma fórmula equivalente em forma normal disjuntiva e outra em forma normal conjuntiva. Escreve as fórmulas em forma conjuntiva como um conjunto de cláusulas e cada cláusula como um conjunto de literais.

(a) $\neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg p \to q))))$;
(b) $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$;
(c) $\neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg p \to q))))$;
(d) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$;
(e) $((p \to q) \to p) \to p$;
(f) $p \to \neg(q \to \neg(p \to q))$;
(g) $(p \to q) \wedge (\neg r \to (q \vee (\neg p \wedge r)))$;
(h) $(p \to q) \wedge (\neg q \to (p \vee \neg q))$;
(i) $p \to (q \to \neg(\neg q \to \neg p))$;
(j) $p \to (q \to (p \wedge q))$;
(k) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$;
(l) $((p \vee q) \to (r \wedge s)) \to (p \vee \neg r)$;
(m) $(p \to q) \wedge \neg((q \to s) \to (p \to s))$;

18. Escreve um programa para manipular formulas da lógica proposicional com as conectivas básicas: negação, disjunção, conjunção e implicação.

(a) Dada uma fórmula deve permitir:
  - dada uma valorização das variáveis, calcular a valorização da fórmula
  - calcular a tabela de verdade da fórmula
  - determinar se a fórmula é satisfazível, contradição ou tautologia
  - obter uma fórmula em forma normal conjuntiva equivalente
  - obter uma fórmula em forma normal disjuntiva equivalente

(b) Dadas duas fórmulas determinar se uma é consequência semântica da outra, concluindo se são ou não equivalentes.

19. Considera o algoritmo de satisfabilidade para fórmulas de Horn dado no curso.

(a) Descreve o algoritmo em pseudo-código e implementa-o.

(b) Justifica a correção do algoritmo, isto é, que atribui o valor verdade se e só se a fórmula de Horn é satisfazível.

(c) Aplica o algoritmo às seguintes fórmulas:
  - $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge q$
  - $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
  - $\neg p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$
  - $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg r$

20. Aplica o algoritmo David-Putman (DLL) aos conjuntos de cláusulas seguintes.

(a)
$$\{p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee \neg r,\ p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee q, \neg p \vee r, p \vee \neg q \vee r\}$$

(b)
$$\{\neg p \vee q \vee r, p \vee q \vee r, p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee r, p \vee \neg q \vee \neg r\}$$

(c)
$$\{p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg p \vee q, \neg p \vee r\}$$

(d)
$$\{p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q \vee r, p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r\}$$

(e)
$$\{p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q \vee \neg r, p \vee q \vee \neg r\}$$

21. Implementa o algoritmo de David-Putman para a satisfabilidade de cláusulas.

Lógica Proposicional: sistemas dedutivos (Aulas 4, 5 e 6)

Sistema de Dedução Natural, DN

Todas as deduções devem usar o sistema de dedução natural DN e a notação de Fitch dada nas aulas.

Observações para a obtenção de uma dedução duma fórmula φ

- Se a fórmula φ for uma implicação $\psi \to \theta$, supor ψ e deduzir θ; aplicando de seguida a regra da introdução da implicação.
- Se a fórmula φ for uma negação $\neg\psi$, supor ψ e deduzir F; aplicando de seguida a regra da introdução da negação.
- Por redução ao absurdo: supor $\neg\varphi$ e deduzir F. Caso haja uma negação $\neg\psi$ nas premissas, poder-se-á deduzir ψ para obter F.
- Suponhamos que uma das premissas é $\varphi \lor \psi$ e se pretende deduzir γ. Podemos: supor φ e deduzir γ, supor ψ e deduzir γ; aplicando de seguida a regra de eliminação da disjunção.
- Suponhamos que uma premissa é $\neg\varphi$ e pretendemos obter **F**: podemos tentar obter φ e aplicar a regra da introdução de **F**.
- Suponhamos que temos uma implicação $\phi \to \theta$. Podemos entao tentar deduzir ϕ e aplicar a regra da eliminação da implicação (modus ponens) para obter θ.

Notar que cada passo da dedução tem de ser obtido por aplicação duma regra ou ser uma repetição duma fórmula já deduzida ou uma premissa. Assim cada passo de dedução tem de ser ou uma suposição ou resultar da aplicação duma regra a fórmulas já deduzidas, pelo que não se podem usar "equivalências semânticas".

22. Indica se as seguintes deduções são válidas. Em caso afirmativo indica as regras usadas em cada passo. Se não for válida indica qual o passo em que não está correcta e se existe uma dedução correcta com as mesmas premissas e conclusão.

a)
$$\begin{array}{r|l}
1 & p \lor q \\ \hline
2 & \quad \vert\ p \\
3 & \quad \vert\ p \\
4 & \quad \vert\ q \\
5 & \quad \vert\ q \\
6 & p \land q
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l}
1 & (p \land q) \lor r \\ \hline
2 & \quad \vert\ p \land q \\
3 & \quad \vert\ p \\
4 & \quad \vert\ p \lor r \\
5 & \quad \vert\ r \\
6 & \quad \vert\ p \lor r \\
7 & p \land r
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l}
1 & \neg(p \lor \neg q) \\ \hline
2 & \quad \vert\ \neg q \\
3 & \quad \vert\ p \lor \neg q \\
4 & \quad \vert\ \mathbf{F} \\
5 & \neg\neg q \\
6 & q
\end{array}$$

d)
$$
\begin{array}{r|l}
1 & p \to q \\ \cline{2-2}
2 & \quad \vert\ \underline{p} \\
3 & \quad \vert\ q \\
4 & \quad \vert\ \neg p \lor q \\
5 & \neg p \lor q
\end{array}
$$

e)
$$
\begin{array}{r|l}
1 & p \to \neg p \\ \cline{2-2}
2 & \quad \vert\ \underline{p} \\
3 & \quad \vert\ \neg p \\
4 & \quad \vert\ \mathbf{F} \\
5 & \neg p
\end{array}
$$

f)
$$
\begin{array}{r|l}
1 & \neg p \to \neg q \\ \cline{2-2}
2 & \quad \vert\ \underline{q} \\
3 & \quad \vert\ \neg q \\
4 & \quad \vert\ \mathbf{F} \\
5 & \quad \vert\ p \\
6 & q \to p
\end{array}
$$