Lógica Computacional - Formas normais

DCC/FCUP

2020/21

Uso de conectivas

Definição: Um conjunto de conectivas C diz-se completo se e só se para qualquer $n \geq 1$ e qualquer função $f : \{\top, \bot\}^n \longrightarrow \{\top, \bot\}$ existir uma fórmula φ_f com n variáveis proposicionais $p_1, \ldots, p_n$ envolvendo somente conectivas em C, tal que para qualquer $(v_1, \ldots, v_n) \in \{\top, \bot\}^n$ se tem $v(\varphi_f) = f(v_1, \ldots, v_n)$, onde $v(p_1) = v_1, \ldots, v(p_n) = v_n$.

Nota: Podemos restringir-nos só a conjuntos completos de conectivas. Assim podiamos ter só considerado na definição da linguagem da Lógica proposicional, apenas:

- as conectivas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
- as conectivas $\rightarrow$ e $\neg$
- ...

E considerar as restantes abreviaturas.
Uma das vantagens seria ter um número menor de tipos de fórmulas o que é bom para as demonstrações...

Mais conectivas

Mas também podemos definir outras conectivas. Por exemplo, uma para cada uma das funções de verdade unárias ou binárias... As mais usuais são:

Designação	Conectiva	Fórmula semanticamente equivalente
Falso	$\bot$	$\phi \wedge \neg\phi$
Verdade	$\top$	$\phi \vee \neg\phi$
Implicação	$\phi \rightarrow \psi$	$\neg\phi \vee \psi$
Equivalência	$\phi \leftrightarrow \psi$	$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)$
Ou Exclusivo	$\phi \dot{\vee} \psi$	$(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$
Não-e	$\phi \tilde{\wedge} \psi$	$\neg(\phi \wedge \psi)$
Não-ou	$\phi \tilde{\vee} \psi$	$\neg(\phi \vee \psi)$

Formas normais

Vamos ver que podemos transformar fórmulas em fórmulas semânticamente equivalentes de tal modo a obter fórmulas de formas especiais e que nos permitam decidir mais facilmente sobre a satisfazibilidade ou validade das fórmulas originais... algumas dessas formas normais existem para qualquer fórmula outras apenas para certas classes de fórmulas...

Forma normal negativa

Um literal é uma variável proposicional p ou a sua negação, $\neg p$. Uma fórmula diz-se em forma normal negativa se $\neg$ ocorre apenas em literais.

Proposição: Qualquer fórmula contendo apenas as conectivas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ é semanticamente equivalente a uma fórmula em forma normal negativa.

Demonstração.

Basta usar as Leis de DeMorgan e eliminar as duplas negações. $\square$

Forma normal negativa

Exemplo:

$$
\begin{array}{rl}
\neg((p \vee q) \wedge \neg p) & \\
\neg(p \vee q) \vee \neg\neg p & \text{(DeMorgan)} \\
(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg\neg p & \text{(DeMorgan)} \\
(\neg p \wedge \neg q) \vee p & \text{(Dupla Negação)}
\end{array}
$$

Forma normal disjuntiva

Uma fórmula diz-se em forma normal disjuntiva se for da forma:

$$(\alpha_{11} \wedge \ldots \wedge \alpha_{1k_1}) \vee \ldots \vee (\alpha_{n1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{nk_n})$$

onde cada α_{ij} é um literal.

Lema: Para qualquer função $f : \{\top, \bot\}^n \longrightarrow \{\top, \bot\}$, existe uma fórmula ϕ com n variáveis proposicionais em forma normal disjuntiva, tal que $F_\phi = f$.

x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$

$p_1 \wedge p_2$

Demonstração.

Se f é $\bot$, para todos os valores dos argumentos, então $\phi = p_1 \wedge \neg p_1$.
Senão, para cada valoração v seja

$$l_i^v = \begin{cases} p_i & \text{se } v(p_i) = \top \\ \neg p_i & \text{se } v(p_i) = \bot \end{cases}$$

Quanto é $v(l_i^v)$?
e então

$$\phi_v = l_1^v \wedge \ldots \wedge l_n^v$$

Nota que $v(\phi_v) = \top$. Então, basta considerar

$$\phi = \bigvee_{f(v(p_1),\ldots,v(p_n))=\top} \phi_v$$

(Verifique!) $\square$

Exemplo

Para a seguinte função de verdade:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

uma fórmula em forma normal disjuntiva é:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

Corolário: Qualquer fórmula é semanticamente equivalente a uma fórmula em forma normal disjuntiva.

Demonstração.

Dada uma fórmula é possível transformá-la numa semanticamente equivalente em forma normal disjuntiva, considerando os seguintes passos:

1. obter uma fórmula apenas com as conectivas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
2. obter uma fórmula em forma normal negativa
3. aplicar a distributividade: $(\phi \vee \psi) \wedge \theta \leftrightarrow (\phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$

$\square$

Exemplo

Determina uma forma normal disjuntiva para

$$(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$$

$$
\begin{aligned}
&(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv \\
&((p \vee r) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge ((q \wedge \neg p) \rightarrow (p \vee r)) \equiv \\
&(\neg(p \vee r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg(q \wedge \neg p) \vee (p \vee r)) \equiv \\
&((\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge ((\neg q \vee p) \vee (p \vee r)) \equiv \\
&(((\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg q \vee p)) \vee \\
&(((\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (p \vee r)) \equiv \\
&(\neg p \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee p)) \vee (q \wedge \neg p \wedge (\neg q \vee p)) \vee \\
&(\neg p \wedge \neg r \wedge (p \vee r)) \vee (q \wedge \neg p \wedge (p \vee r)) \equiv \\
&(\neg p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p \wedge p) \\
&\vee(\neg p \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge r) \vee (q \wedge \neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg p \wedge r)
\end{aligned}
$$

Satisfazibilidade de fórmulas em FND

Lemma: Uma conjunção de literais $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$ é satisfazível se e só se para todo o $1 \leq i, j \leq n$, l_i não é $\neg l_j$.

Exemplo: Serão satisfazíveis?

$p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge q$

$\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$

Exemplo:

$p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge q$ Não

$\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$ Sim

Corolário: Uma fórmula ϕ em forma normal disjuntiva é satisfazível se e só se alguma das suas conjunções de literais o for. Obtemos assim um método de determinar se uma fórmula é satisfazível.

Exemplo

Determina se é satisfazível

$$(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$$

$$\begin{aligned}
&(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv \\
&(\neg p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee \\
&(q \wedge \neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge r) \\
&\vee (q \wedge \neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg p \wedge r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv \\
&(\neg p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee \\
&(q \wedge \neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge r) \\
&\vee (q \wedge \neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg p \wedge r)
\end{aligned}$$

Sim

Forma normal conjuntiva

Uma fórmula diz-se em forma normal conjuntiva se for da forma:

$$(\alpha_{11} \vee \ldots \vee \alpha_{1k_1}) \wedge \ldots \wedge (\alpha_{n1} \vee \ldots \vee \alpha_{nk_n})$$

onde cada α_{ij} é um literal.

Por dualidade temos

Lemma: Uma disjunção de literais $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ é uma tautologia se e só se para algum $1 \leq i, j \leq n$, l_i é $\neg l_j$.

Então é fácil determinar se uma fórmula em forma normal conjuntiva é uma tautologia: verificar se todas as disjunções são tautologias, pelo método dado no Lema anterior.

Mas como obter uma fórmula em forma normal conjuntiva?

1. se tivermos a tabela de verdade, por um método dual ao da forma normal disjuntiva: isto é, escolher as linhas que correspondem a $\perp$ considerar para cada uma a disjunção de literais tal que se $x_i = \top$ coloca-se $\neg p_i$ e se $x_i = \perp$ coloca-se p_i; e finalmente tomar a conjunção dessas disjunções.
2. adaptar o método dado para a forma normal disjuntiva,usando a distributividade para a conjunção: $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$

Exercícios

Obtenha uma fórmula em forma normal conjuntiva correspondente à tabela de verdade

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$$(\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)$$

Exercícios

Determine uma forma normal conjuntiva para a fórmula abaixo e verifique se é uma tautologia

$$(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$$

$$\begin{aligned}
&(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv \\
&((p \vee r) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge ((q \wedge \neg p) \rightarrow (p \vee r)) \equiv \\
&(\neg(p \vee r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg(q \wedge \neg p) \vee (p \vee r)) \equiv \\
&((\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge ((\neg q \vee p) \vee (p \vee r)) \equiv \\
&((\neg p \wedge \neg r) \vee q) \wedge ((\neg p \wedge \neg r) \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p \vee p \vee r) \equiv \\
&(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p \vee p \vee r)
\end{aligned}$$

Não