Lógica Computacional

DCC/FCUP

2020/21

Raciocínios

1	Se o André adormecer e alguém o acordar, ele diz palavrões
2	O André adormeceu
3	Não disse palavrões
4	Ninguém o acordou

Será um raciocínio válido?

Raciocínios

Forma geral do raciocínio anterior:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & (p \wedge q) \rightarrow r \\
2 & p \\
3 & \neg r \\
\hline
4 & \neg q
\end{array}
$$

Só nos interessa a estrutura lógica das frases.

Raciocínios válidos e íntegros

Informalmente um raciocínio é uma sequência de afirmações das quais uma – a conclusão – deve ser consequência das restantes – as premissas.

A conclusão é uma consequência lógica das premissas, se for verdadeira sempre que as premissas forem verdadeiras...

Neste caso temos uma raciocínio válido.

Num raciocínio válido se as premissas forem verdadeiras o raciocínio é íntegro.O raciocínio que vimos era válido e íntegro...

Outro raciocínio

1	Se reprovares, tens de repetir
2	Se não estudares, reprovas
3	Não estás a repetir
4	Estudaste ou Reprovaste ou Ambos

Também é válido.

Formalmente

1	$r \to t$
2	$\neg e \to r$
3	$\neg t$
4	$e \lor r \lor (e \land r)$

Métodos de dedução

Mas como mostramos que uma conclusão é uma consequência lógica das premissas?

Construindo uma sucessão de passos em que em cada um, a conclusão é consequência das conclusões e premissas anteriores

Formalmente iremos definir sistemas de dedução

Por outro lado, para mostrar que uma conclusão não é consequência lógica das premissas, temos que mostrar que existe uma situação em que as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão falsa. Essa situação é designada de contra-exemplo.

Dedução versus Semântica

É fácil ver que se uma fórmula ϕ é é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ então $\Gamma \models \phi$ isto é ϕ é consequência semântica de Γ.

Porque usar sistemas de dedução?

Para ter um método automático ou pelo menos semi-automático para obter a validade de uma fórmula ou a sua consequência a partir de outras.

Uma dedução é um método sintático.

Sistemas de dedução axiomáticos

Sistema de dedução axiomático $\mathcal{D}$

É constituído por:

axiomas (lógicos) fórmulas base que traduzem as propriedades das conectivas

regras de inferência modo de obter fórmulas a partir de outras

Dedução, $\Sigma \vdash_{\mathcal{D}} \phi_n$

Uma sucessão finita de fórmulas $\phi_1, \ldots \phi_n$ é uma dedução de ϕ_n em $\mathcal{D}$ a partir de um conjunto Σ de fórmulas se para cada $1 \leq i \leq n$ se verifica:

- $\phi_i \in \Sigma$, ou
- ϕ_i é um axioma, ou
- ϕ_i resulta de $\phi_1 \ldots \phi_{i-1}$ por aplicação duma regra de inferência

E escreve-se $\Sigma \vdash_{\mathcal{D}} \phi_n$

Sistemas de Dedução

Teorema e Demonstração

Se $\Sigma = \emptyset$, ϕ_n é um teorema (de $\mathcal{D}$) escreve-se $\vdash_{\mathcal{D}} \phi_n$.
Neste caso, a dedução $\phi_1, \ldots \phi_n$ diz-se uma demonstração de ϕ_n.

Se $\Sigma = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ é finito, em vez de $\Sigma \vdash_{\mathcal{D}} \phi$ escreve-se

$$\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash_{\mathcal{D}} \phi$$

e $\mathcal{D}$ será omitido se for explícito no contexto.

$$\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \phi$$

Sistema de Dedução natural, *DN*

Sistema inventado por G. Gentzen (1935) e cujas regras pretendem reflectir as formas de raciocínio usadas nas demonstrações matemáticas.

- permite a introdução de hipóteses no meio da dedução
- não tem axiomas... só regras de inferência

Para cada conectiva lógica existem dois tipos de regras: de introdução e de eliminação. Partimos de fórmulas com as seguintes conectivas:

$\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\perp$ e $\to$

Exemplo: Como mostrar que é válida (i.e um tautologia)?

$$(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

p	$q \wedge r$
$p \vee q$	q
$p \vee r$	r
$((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	$p \vee q$
	$p \vee r$
	$((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Representação das regras

Uma regra de inferência é da forma:

de $\phi_1 \ldots \phi_k$ infere-se ϕ_n

E pode ser representada graficamente por:

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_k}{\phi_n}$$

Regras de inferência *DN*: Conjunção

Introdução

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \land \psi}\land\mathbf{I}$$

A partir de ϕ e de ψ podemos deduzir $\phi \land \psi$ Eliminação

$$\frac{\phi \land \psi}{\phi}\land\mathbf{E_1} \qquad \frac{\phi \land \psi}{\psi}\land\mathbf{E_2}$$

A partir de $\phi \land \psi$ podemos deduzir ϕ; e podemos também deduzir ψ.

Exemplo:

Mostrar que

$$p \wedge q, r \vdash q \wedge r$$

Podemos construir a dedução numa *árvore*:

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\wedge\mathbf{E}_2 \qquad r}{q \wedge r}\wedge\mathbf{I}$$

Em que as folhas são as premissas...
Mas estas árvores podem ficar muito grandes...

Notação de Fitch

Vamos considerar um representação linear para as deduções: numera-se os passos e indica-se qual a regra a aplicar e quais as fórmulas que intervêm:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & p \land q & \\
2 & r & \\
\hline
3 & q & \land\mathrm{E},\ 1 \\
4 & q \land r & \land\mathrm{I},\ 3,\ 2
\end{array}
$$

Notação de Fitch $\wedge$

Introdução	**Eliminação**	
$\begin{array}{\|ll} \phi & \\ \vdots & \\ \psi & \\ \vdots & \\ \phi \wedge \psi & \wedge\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \phi \wedge \psi & \\ \vdots & \\ \phi & \wedge\mathrm{E} \end{array}$	$\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \phi \wedge \psi & \\ \vdots & \\ \psi & \wedge\mathrm{E} \end{array}$

Exemplo

Mostrar que

$$(p \wedge q) \wedge r \vdash r \wedge q$$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	
2	$p \wedge q$	$\wedge$E, 1
3	r	$\wedge$E, 1
4	q	$\wedge$E, 2
5	$r \wedge q$	$\wedge$I, 3, 4

Regras de inferência *DN*: Disjunção

Introdução

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\vee\mathbf{I_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\vee\mathbf{I_2}$$

Se já deduzimos ϕ podemos deduzir qualquer disjunção que contenha ϕ.

Eliminação

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\vee\mathbf{E}$$

- a partir da disjunção $\phi \vee \psi$
- se supusermos ϕ e deduzirmos γ (numa sub-dedução)
- e se supusermos ψ e deduzirmos γ (numa sub-dedução)
- então podemos deduzir γ

Notação de Fitch $\vee$

Introdução		**Eliminação**
$\vdots$	$\vdots$	$\phi \vee \psi$
ϕ	ϕ	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\quad \phi$
$\phi \vee \psi$ $\quad \vee$I	$\psi \vee \phi$ $\quad \vee$I	$\quad \vdots$
		$\quad \gamma$
		$\quad \psi$
		$\quad \vdots$
		$\quad \gamma$
		γ $\quad \vee$E

Exemplo

Mostrar que $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vdash q$.

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & (p \wedge q) \vee (q \wedge r) & \\
\hline
2 & \quad \begin{array}{|l} p \wedge q \\ \hline q \end{array} & \\
3 & & \wedge\mathrm{E},\ 2 \\
4 & \quad \begin{array}{|l} q \wedge r \\ \hline q \end{array} & \\
5 & & \wedge\mathrm{E},\ 4 \\
6 & q & \vee\mathrm{E},\ 1,\ 2\text{–}3,\ 4\text{–}5
\end{array}
$$