



FACULDADE DE CIÊNCIAS  
UNIVERSIDADE DO PORTO

# Lógica Computacional - Exercícios

DCC-FCUP

2020/21

## Lógica Proposicional: semântica

1. Considerando as convenções de prioridades das operações lógicas dadas no curso ( $\neg < \wedge < \vee < \rightarrow$  e  $\rightarrow$  associativa à direita), para cada uma das fórmulas seguintes desenha a sua árvore sintáctica (abstracta) e indica quais as suas subfórmulas:
  - (a)  $p \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ ;
  - (b)  $p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$ ;
  - (c)  $\neg(s \rightarrow (\neg(p \rightarrow (q \vee \neg s))))$ ;
  - (d)  $p \rightarrow (\neg q \vee (q \rightarrow p))$ ;
  - (e)  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge r)))$ .
2. Sendo  $v(p) = \mathbf{V}$  e  $v(q) = \mathbf{F}$  determina se  $\models_v \phi$  sendo  $\phi$  cada uma das seguintes fórmulas:
  - (a)  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ ;
  - (b)  $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$ ;
  - (c)  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ ;
  - (d)  $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee q))$ ;
  - (e)  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ;
3. Mostra a equivalência semântica das propriedades das operações lógicas dadas no curso:
  - (a) comutatividade e associatividade de  $\wedge$  e  $\vee$ ;
  - (b) Leis de DeMorgan;
  - (c) distributividade de  $\wedge$  em relação a  $\vee$  (e vice-versa);
  - (d) idempotências de  $\wedge$  e  $\vee$ ;
  - (e) dupla negação.
4. Quais das seguintes fórmulas são semanticamente equivalentes a  $p \rightarrow (q \vee r)$ ?
  - (a)  $q \vee (\neg p \vee r)$
  - (b)  $(q \wedge \neg r) \rightarrow p$
  - (c)  $(p \wedge \neg r) \rightarrow q$
  - (d)  $(\neg q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$
5. Das fórmulas seguintes indica, **justificando**, se são tautologias, satisfazíveis ou contradições. Começa por simplificar as fórmulas usando equivalências semânticas.
  - (a)  $(p \rightarrow (q \vee r)) \vee (r \rightarrow \neg p)$ ;
  - (b)  $p \rightarrow (q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p))$ ;
  - (c)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ ;
  - (d)  $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee q))$ ;
  - (e)  $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg(p \rightarrow s) \rightarrow \neg(q \rightarrow s))$ ;
  - (f)  $(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ;
  - (g)  $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ ;

- (h)  $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ ;
- (i)  $(p \rightarrow s) \rightarrow (((p \rightarrow (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow s)))$ ;
- (j)  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ;
- (k)  $(p \rightarrow q) \wedge \neg((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$ ;
- (l)  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge r)))$ ;
- (m)  $((p \vee q) \rightarrow (s \wedge t)) \rightarrow ((p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow t))$ ;
- (n)  $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$ ;
- (o)  $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (\neg(p \leftrightarrow r))$ .

6. <sup>1</sup> Numa ilha alguns dos seus habitantes, chamados “cavaleiros”, dizem sempre a verdade, e outros chamados “vagabundos” mentem sempre. Assumimos que um qualquer habitante desta ilha cai numa ou na outra classe.

- (a) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. **A** faz a seguinte afirmação: “Pelo menos um de nós é um vagabundo.”  
O que são **A** e **B**?
- (b) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. Suponhamos que **A** diz: “Eu sou um vagabundo ou **B** é um cavaleiro.” O que são **A** e **B**?
- (c) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. Suponhamos que **A** diz: “Eu sou um vagabundo, ou dois mais dois é igual a cinco.” O que podemos concluir?
- (d) Dois habitantes da ilha, **A** e **B** estavam juntos num jardim. Suponhamos que **A** diz: “Eu sou um vagabundo, mas **B** não.”  
O que são **A** e **B**?
- (e) Três habitantes, **A**, **B** e **C** juntam-se. **A** e **B** fazem as seguintes afirmações:  
**A**: Todos nós somos vagabundos.  
**B**: Exactamente um de nós é um cavaleiro.  
O que são **A**, **B** e **C**?
- (f) Suponhamos que no problema anterior, **A** e **B** dizem o seguinte:  
**A**: Nós somos todos vagabundos.  
**B**: Exactamente um de nós é um vagabundo.  
Podemos determinar o que é **B**? Podemos determinar o que é **C**?
- (g) Temos três personagens, **A**, **B** e **C** (cavaleiros ou vagabundos). **A** diz: “**B** e **C** são do mesmo tipo”. Alguém pergunta então a **C**: “**A** e **B** são do mesmo tipo?”  
O que é que respondeu **C**?
- (h) Mais uma vez deparamo-nos com três habitantes, **A**, **B** e **C**. Dois deles são do mesmo tipo (cavaleiros ou vagabundos). **A** e **B** fazem as seguintes afirmações:  
**A**: **B** é um vagabundo.  
**B**: **A** e **C** são do mesmo tipo.  
O que é **C**?

---

<sup>1</sup>Extraído de *What is the name of this book?*, R. Smullyan (tradução Rogério Reis).

- (i) Três dos habitantes da ilha, **A**, **B** e **C**, estavam juntos num jardim. Um estrangeiro que por ali passava perguntou a **A**, “Tu és um cavaleiro ou um vagabundo?” **A** respondeu, mas de tal forma que o estrangeiro não conseguiu entender a resposta. Perguntou então, o estrangeiro, a **B**, “O que foi que **A** respondeu?” **B** responde: “**A** disse que era um vagabundo.” Nessa altura **C** exclama: “Não acredites em **B**, ele está a mentir!” O que são **B** e **C**?
- (j) Nessa ilha existe uma bifurcação numa estrada, conduzindo um dos caminhos à cidade mais próxima. Se um estrangeiro quiser saber qual é esse caminho, qual deve ser a pergunta que deve fazer a um habitante que esteja na bifurcação, de tal modo que ele possa responder com um simples “sim” ou “não”. **Sugestão:** A pergunta deve relacionar (por equivalência) o que se pretende saber com a determinação da classe do habitante.
- (k) **Uma minha aventura** Este é um problema invulgar, e além disso é inspirado num caso real. Uma vez quando na ilha dos cavaleiros e dos vagabundos, encontrei dois habitantes que descansavam debaixo de uma árvore. Aproximei-me e perguntei a um deles: “Alguém de vocês é um cavaleiro?”. Ele respondeu, e com isso eu fiquei a saber a resposta à minha pergunta.  
A pessoa que interpelei era um cavaleiro ou um vagabundo? E o outro? Posso garantir que dei a informação necessária para resolver o problema.
- (l) Suponhamos que visitavas a ilha dos cavaleiros e vagabundos e encontrava dois dos seus habitantes a descansar, preguiçosamente, ao sol. Perguntas a um deles se o outro é um cavaleiro e recebes a resposta (sim ou não). Nessa altura perguntas ao outro se o primeiro é um cavaleiro e recebes a respectiva resposta (sim ou não).  
As duas respostas são necessariamente iguais?
7. [Cavaleiros, Vagabundos e Normais.] Um tipo igualmente fascinante de problemas trata de três tipos de pessoas: cavaleiros, que dizem sempre verdade; vagabundos, que dizem sempre mentira; e normais, que por vezes mentem, por vezes dizem a verdade.
- (a) Dadas três pessoas, **A**, **B** e **C**, uma das quais é um cavaleiro, outra um vagabundo e outra um normal (não necessariamente nesta ordem). Fazem as seguintes declarações:  
**A:** Eu sou normal.  
**B:** Isso é verdade!  
**C:** Eu não sou normal.  
O que são **A**, **B** e **C**?
- (b) Eis um invulgar! Duas pessoas, **A** e **B** (qualquer uma das quais pode ser cavaleiro, vagabundo ou normal), fazem as seguintes declarações:  
**A:** **B** é um cavaleiro.  
**B:** **A** não é um cavaleiro.  
Prova que pelo menos um deles diz a verdade, mas não é um cavaleiro.
- (c) Desta vez **A** e **B** dizem o seguinte:  
**A:** **B** é um cavaleiro.  
**B:** **A** é um vagabundo.  
Prova que um deles diz a verdade mas não é um cavaleiro, ou um deles mente mas não é um vagabundo.

8. Três indivíduos, A, B, e C, suspeitos de um crime, fazem os seguintes depoimentos, respectivamente:

A: B é culpado, mas C é inocente;

B: Se A é culpado, então C é culpado;

C: Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

- (a) Os três depoimentos são compatíveis?
- (b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?
- (c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
- (d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?
- (e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentiram, quem é inocente e quem é culpado?

9. A proposição “Smith foi o assassino” é ou não uma consequência das proposições “se Jones não encontrou Smith na noite passada, então Smith foi o assassino ou Jones mente”, “se Smith não foi o assassino, então Jones não encontrou Smith na noite passada e o assassinio sucedeu depois da meia noite” e “se o assassinio sucedeu depois da meia noite, então Smith foi o assassino ou Jones mente”.

10. Será possível cumprir simultaneamente todas as instruções seguintes?

- se caminhar em silêncio então não tenha um revólver carregado, ou use óculos escuros;
- se tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio ou não use óculos escuros;
- se usar óculos escuros ou tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio.
- caminhe em silêncio ou tenha um revólver carregado, e se tiver um revólver carregado então não caminhe em silêncio;

11. Imagina as seguintes regras para escolher disciplinas de opção para o próximo ano lectivo:

R1: Se se escolher *Computação Gráfica*, então escolha também *Programação Numérica* ou *Álgebra*.

R2: Escolher *Álgebra* se e só se escolher *Computação Gráfica* ou *Programação Numérica*.

R3: Não se pode escolher as três, mas tem que se escolher pelo menos uma das três disciplinas.

R4: Se não se escolher *Álgebra*, então escolher as outras duas.

- 1. É possível satisfazer este conjunto de regras?
- 2. Será que a regra R4 é realmente necessária? E a regra R1?
- 3. Indica uma regra simples, mas equivalente a este conjunto (confuso) de quatro regras.