# Lógica Computacional

DCC/FCUP

2020/21

## Exemplos

#### Mostrar usando DN:

1. 
$$p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$$

2. 
$$\neg p \lor \neg q \vdash \neg (p \land q)$$

3. 
$$\vdash \neg(p \land \neg p)$$

4. 
$$\neg(\neg p \lor q) \vdash p$$

 $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

10 
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

∨E, 4–6, 7–9

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\hline
p & & & \land E, 1 \\
\hline
2 & p & & \land E, 1 \\
\hline
3 & q \lor r & & \land E, 1
\end{array}$$

10 
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
  $\vee E, 4-6, 7-9$ 

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & p \wedge (q \vee r) \\
2 & p & \wedge E, 1 \\
3 & q \vee r & \wedge E, 1 \\
4 & q
\end{array}$$

10 
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
  $\vee E, 4-6, 7-9$ 

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & p \wedge (q \vee r) \\
2 & p & \wedge E, 1 \\
3 & q \vee r & \wedge E, 1 \\
4 & q \\
5 & p \wedge q & \wedge I, 4 \\
6 & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \vee I, 5
\end{array}$$

10 
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
  $\vee E$ , 4–6, 7–9

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & p \wedge (q \vee r) \\
2 & p & \wedge E, 1 \\
3 & q \vee r & \wedge E, 1 \\
4 & q \\
5 & p \wedge q & \wedge I, 4 \\
6 & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \vee I, 5
\end{array}$$

10 
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
  $\vee E$ , 4–6, 7–9

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & p \wedge (q \vee r) \\
2 & p & \wedge E, 1 \\
3 & q \vee r & \wedge E, 1 \\
4 & q \\
5 & p \wedge q & \wedge I, 4 \\
6 & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \vee I, 5 \\
7 & r
\end{array}$$

10 
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
  $\vee E$ , 4–6, 7–9

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & p \wedge (q \vee r) \\
2 & p & \wedge E, 1 \\
3 & q \vee r & \wedge E, 1 \\
4 & q \\
5 & p \wedge q & \wedge I, 4 \\
6 & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \vee I, 5 \\
7 & r \\
8 & p \wedge r & \wedge I, 7 \\
9 & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \vee I, 8 \\
10 & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \vee E, 4-6, 7-9
\end{array}$$

 $\neg p \vee \neg q \vdash \neg (p \wedge q)$ 

$$\neg p \lor \neg q \vdash \neg (p \land q)$$

$$\begin{matrix} 1 & | \neg p \lor \neg q \\ 2 & | \neg p \end{matrix}$$

12 
$$\neg (p \land q)$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
\neg p \lor \neg q \vdash \neg (p \land q) \\
\hline
1 & \neg p \lor \neg q \\
\hline
2 & & | \neg p \\
\hline
3 & & | p \land q \\
\hline
4 & & | p \land q \\
\hline
p & \land E, 3 \\
\hline
5 & & | \bot & \bot I, 2, 4 \\
\hline
6 & | \neg (p \land q) & \neg I, 3-5 \\
\hline
7 & | \neg q \\
\hline
8 & | p \land q \\
\hline
q & \land E, 8 \\
\hline
10 & | \bot & \bot I, 7, 9 \\
\hline
11 & | \neg (p \land q) & \neg I, 7-10 \\
\hline
12 & \neg (p \land q) & \lor E, 2-11 \\
\hline
\end{array}$$

 $\vdash \neg(p \land \neg p)$ 

$$\vdash \neg(p \land \neg p)$$

5 
$$\neg (p \land \neg p)$$
  $\neg I, 1-4$ 

$$\vdash \neg (p \land \neg p)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & & & p \land \neg p \\
2 & & p & \land E, 1 \\
3 & & \neg p & \land E, 1 \\
4 & & \bot & \bot I, 2, 3 \\
5 & \neg (p \land \neg p) & \neg I, 1-4
\end{array}$$

 $\neg(\neg p \lor q) \vdash p$ 

$$\neg(\neg p \lor q) \vdash p$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & \neg(\neg p \lor q) \\
2 & \neg p \\
3 & \neg p \lor q \\
4 & \bot & \bot & \downarrow, 1, 3 \\
5 & \neg \neg p & \neg I, 2-4 \\
6 & p & \neg E, 2-4
\end{array}$$

A partir das regras base podemos obter regras derivadas que correspondem a teoremas no sistema *DN*.

Modus Tollens (em latim, *modo que nega*)

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \qquad \neg \psi}{\neg \phi}$$
MT

A partir das regras base podemos obter regras derivadas que correspondem a teoremas no sistema *DN*.

Modus Tollens (em latim, *modo que nega*)

$$\frac{\phi{ o}\psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}$$
MT

Mostrar que  $\phi \to \psi, \neg \psi \vdash \neg \phi$ 

A partir das regras base podemos obter regras derivadas que correspondem a teoremas no sistema *DN*.

Modus Tollens (em latim, modo que nega)

$$\frac{\phi{\to}\psi \qquad \neg \psi}{\neg \phi} \mathbf{M} \mathbf{T}$$

Mostrar que  $\phi \to \psi, \neg \psi \vdash \neg \phi$ :

#### Introdução da dupla negação

```
\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg \mathbf{I} (já mostrada...)
```

Redução ao absurdo



#### Redução ao absurdo



Se tivermos uma dedução de  $\bot$  supondo  $\neg\phi$  podemos ter uma dedução de  $\neg\phi\to\bot.$  Então basta mostrar  $\neg\phi\to\bot\vdash\phi$ 

#### Redução ao absurdo



Se tivermos uma dedução de  $\bot$  supondo  $\neg \phi$  podemos ter uma dedução de  $\neg \phi \to \bot$ . Então basta mostrar  $\neg \phi \to \bot \vdash \phi$ :

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & \neg \phi \to \bot \\
2 & & \neg \phi \\
3 & & \bot & \to E, 1, 2 \\
4 & \neg \neg \phi & \neg I, 2 - 3 \\
5 & \phi & \neg E, 4
\end{array}$$

Terceiro excluído  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 

$$\overline{\phi \lor \lnot \phi}$$
TE

Terceiro excluído	$\overline{\phi \vee \neg \phi} TE$	
1	$  \neg (\phi \lor \neg \phi)$	
2	$\phi$	
3	$\phi \lor \neg \phi$	∨I, 2
4		⊥ 1, 1, 3
5	$\neg \phi$	¬I, 2–4
6	$\phi \lor \neg \phi$	∨I, 5
7		⊥ <b>I</b> , 1, 5
8	$\phi \vee \neg \phi$	<b>RA</b> , 1–7

#### Exercício:

Mostrar  $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg \neg q$ :

#### Exercício:

Mostrar  $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg \neg q$ :

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & \neg q \rightarrow \neg p \\
2 & p \\
3 & \neg p & \neg l, 2 \\
4 & \neg q & MT, 1, 3 \\
5 & p \rightarrow \neg q & \rightarrow l, 2-4
\end{array}$$

#### Equivalência dedutiva

Dadas dumas fórmulas  $\phi$  e  $\psi$ , dizemos que  $\phi$  e  $\psi$  são dedutivamente equivalentes se e só se  $\phi \vdash \psi$  e  $\psi \vdash \phi$ . E denotamos por  $\phi \dashv \vdash \psi$ .

#### Equivalência dedutiva

Dadas dumas fórmulas  $\phi$  e  $\psi$ , dizemos que  $\phi$  e  $\psi$  são dedutivamente equivalentes se e só se  $\phi \vdash \psi$  e  $\psi \vdash \phi$ . E denotamos por  $\phi \dashv \vdash \psi$ .

**Exercício:** Mostre que  $\phi \dashv \vdash \psi$  se e só se  $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \land (\psi \rightarrow \phi)$ 

#### Equivalência dedutiva

Dadas dumas fórmulas  $\phi$  e  $\psi$ , dizemos que  $\phi$  e  $\psi$  são dedutivamente equivalentes se e só se  $\phi \vdash \psi$  e  $\psi \vdash \phi$ . E denotamos por  $\phi \dashv \vdash \psi$ .

**Exercício:** Mostre que  $\phi \dashv \vdash \psi$  se e só se  $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \land (\psi \rightarrow \phi)$ 

## Contraposição:

$$\phi \to \psi \dashv \vdash \neg \psi \to \neg \phi$$

# Contraposição:

$$\phi \to \psi \dashv \vdash \neg \psi \to \neg \phi$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & \phi \rightarrow \psi \\
2 & & \neg \psi \\
3 & & \neg \phi & \text{MT, 1, 2} \\
4 & & \neg \psi \rightarrow \neg \phi & \rightarrow \text{I, 2-3}
\end{array}$$

### Exemplos

#### Mostre que:

a) 
$$\neg (\phi \land \psi) \vdash \neg \phi \lor \neg \psi$$

b) 
$$\phi \rightarrow \psi \vdash \neg \phi \lor \psi$$

c) 
$$\vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$$

d) 
$$\vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$$

e) 
$$\vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$$

$$\neg(\phi \land \psi) \vdash \neg\phi \lor \neg\psi$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & \neg(\phi \wedge \psi) \\
2 & \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)
\end{array}$$

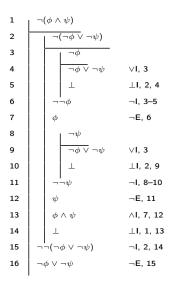
$$\neg(\phi \land \psi) \vdash \neg\phi \lor \neg\psi$$

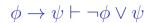
$$\begin{array}{ccc}
1 & \neg(\phi \wedge \psi) \\
2 & \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)
\end{array}$$

1	ı ¬(	(φ ^	$\psi$ )	
2		¬	$\overline{(\neg \phi \lor \neg \psi)}$	
3			Γ ¬φ	
4			$\neg \phi \lor \neg \psi$	∨I, 3
5			1	⊥I, 2, 4
6		_	$\neg \phi$	¬I, 3–5
7		φ		¬E, 6

1	ı ¬(	(φ ^	$\psi$ )	
2		¬	$\overline{(\neg \phi \lor \neg \psi)}$	
3			Γ ¬φ	
4			$\neg \phi \lor \neg \psi$	∨I, 3
5			1	⊥I, 2, 4
6		_	$\neg \phi$	¬I, 3–5
7		φ		¬E, 6

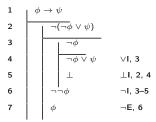
1	$\neg(\phi \wedge \psi)$	
2	$\neg(\neg\phi\lor\neg\psi)$	
3	Γ ¬φ	
4	$\neg \phi \lor \neg \psi$	∨I, 3
5	_	⊥I, 2, 4
6	$\neg \neg \phi$	¬I, 3–5
7	φ	¬E, 6
8	$          \neg \psi$	
9	$\neg \phi \lor \neg \psi$	∨I, 3
10	_	⊥I, 2, 9
11	$\neg \neg \psi$	¬I, 8–10
12	$\psi$	¬E, 11
	1 1	





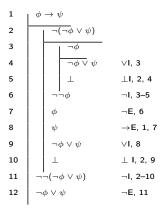
$$\phi \to \psi \vdash \neg \phi \lor \psi$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \phi \to \psi \\
 & & & \\
\hline
 & & & \\
\hline
 & & & \\
\end{array}$$



1	$\phi \rightarrow \psi$	
2	$\neg(\neg\phi\lor\psi)$	
3	¬φ	
4	$\neg \phi \lor \psi$	∨I, 3
5	_	⊥I, 2, 4
6	$\neg \neg \phi$	¬I, 3–5
7	$\phi$	¬E, 6
8	$\psi$	ightarrowE, 1, 7
	1 1	

1	φ	$\rightarrow \psi$	
2		$\neg(\neg\phi\lor\psi)$	
3		Ι ¬φ	
4		$\neg \phi \lor \psi$	∨I, 3
5		Т	⊥I, 2, 4
6		$\neg \neg \phi$	¬I, 3–5
7		$\phi$	¬E, 6
8		$\psi$	ightarrowE, 1, 7
9		$\neg \phi \lor \psi$	∨I, 8
10		上	⊥ I, 2, 9



 $\vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ 

$$\vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$$



$$\vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$$

1	$\phi$	
2	$\psi$	
3	$\phi$	R, 1
4	$\psi  o \phi$	→I, 2-3
5	$\phi  o (\psi  o \phi)$	→I, 1 <b>–</b> 4

$$\vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$$

$$\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$$

$$\vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$$

1	$\phi$ -	$\rightarrow$ $(\psi \rightarrow \theta)$	
2		$(\phi  o \psi)$	
3		$\phi$	
4		$\boxed{\psi}$	→E, 2, 3
5		$\psi  o \theta$	→E, 1, 3
6		$\theta$	→E, 4, 5
7		$\phi  o \theta$	→I, 3-6

$$\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$$

### $\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$

 $\vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$ 

$$\vdash (\neg \psi \to \neg \phi) \to ((\neg \psi \to \phi) \to \psi)$$

1 
$$\boxed{\neg\psi \rightarrow \neg\phi}$$

$$\vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$$

1	$\neg \psi$	$b \rightarrow \neg \phi$
2		$\neg \psi \to \phi$
3		$\neg \psi$

$$\vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$$

1	$\neg \psi$ –	$\rightarrow \neg \phi$	
2		$\psi \to \phi$	
3		$\neg \psi$	
4		$\phi$	→E, 2, 3
5		$\neg \phi$	→E, 1, 3

### $\vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$

1	$\neg \psi$	$b \to \neg \phi$	
2		$\neg \psi \rightarrow \phi$	
3		$\neg \psi$	
4		$\phi$	→E, 2, 3
5		$\neg \phi$	ightarrowE, 1, 3
6			⊥ <b>I</b> , 4, 5
7		$\neg \neg \psi$	¬I, 3–6
8		$\psi$	¬E, 7

## $\vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$

1		$\neg \psi \rightarrow \neg \phi$	
2		$\neg \psi  o \phi$	
3		$\neg \psi$	
4		$\phi$	$\rightarrow$ E, 2, 3
5		$\neg \phi$	$\rightarrow$ E, 1, 3
6			⊥ <b>I</b> , 4, 5
7		$\neg \neg \psi$	¬I, 3–6
8		$\psi$	¬E, 7
9		$(\neg \psi  o \phi)  o \psi$	$\rightarrow$ I, 2–8
10	(¬	$\psi \to \neg \phi) \to (\neg \psi \to \phi) \to \psi$	$\rightarrow$ I, 1–9