Lógica Computacional

DCC/FCUP

2020/21

Integridade e completude dum sistema dedutivo $\mathcal{D}$

Dado um conjunto Σ de premissas e uma conclusão ϕ:

Integridade Se existe uma dedução de ϕ com premissas Σ, i.e $\Sigma \vdash_{\mathcal{D}} \phi$, então a conclusão ϕ é consequência semântica de Σ, i.e $\Sigma \models \phi$. Se $\vdash_{\mathcal{D}} \phi$ então ϕ é uma tautologia ($\models \phi$) .

Completude Se ϕ é consequência semântica de Σ, i.e $\Sigma \models \phi$, então existe uma dedução de ϕ com premissas Σ, i.e $\Sigma \vdash_{\mathcal{D}} \phi$. Se ϕ é uma tautologia ($\models \phi$) então $\vdash_{\mathcal{D}} \phi$.

Porquê estudar sistemas de dedutivos?

No caso da lógica proposicional as tabelas de verdade permitem determinar se uma fórmula ϕ é uma tautologia ou uma sequência semântica. Mas

- A obtenção de uma dedução pode ser mais rápida que construir as tabelas de verdade e com menor gasto de espaço
- é possível ter um objecto que represente a dedução e portanto mais fácil de manipular computacionalmente
- serve para ilustração da noção de dedução que é imprescindível em lógicas cuja semântica é mais complexa e as tabelas de verdade não se podem usar.

Integridade do sistema de dedução natural *DN*

Proposição: Se $\Sigma \vdash \phi$ então $\Sigma \models \phi$.

Demonstração.

Suponhamos que temos uma dedução de ϕ, $\phi_1, \ldots, \phi_n = \phi$. Vamos mostrar que em cada passo a fórmula que aí ocorre é consequência semântica das premissas (ou hipóteses) que aí são assumidas.
Provamos por redução ao absurdo: Suponhamos que existe um passo p que contém uma fórmula que não é consequência semântica das premissas assumidas em p. E seja p o primeiro desses passos . Vamos ver que qualquer que seja a regra de *DN* aplicada em p, temos uma contradição. O que permite concluir que não existe tal passo p. $\square$

Integridade do sistema de dedução natural *DN*

Fazemos a demonstração por casos, considerando cada uma das regras:

	1	ϕ_1		
	$\vdots$	$\vdots$		
	n	$\phi \to \theta$		
			ϕ_2	
$\to$ **E**	$\vdots$		$\vdots$	
$\dfrac{\phi \quad \phi\to\psi}{\psi}$	l		ϕ	
	$\vdots$		$\vdots$	
				ϕ_3
	$\vdots$			$\vdots$
	p			θ

Seja θ a fórmula deduzida no passo p por aplicação de $\to$ **E** a $\phi \to \theta$ e ϕ. E sejam $\phi_1, \ldots, \phi_k$ as premissas assumidas em θ, e, por hipótese, θ não é consequência semântica delas. Mas as premissas para $\phi \to \theta$ e ϕ estão entre os $\phi_1, \ldots, \phi_k$ e ambos são consequência semânticas delas:

Considera a tabela de verdade para as fórmulas $\phi_1, \dots, \phi_k$,ϕ,$\phi \to \theta$ e θ. Por hipótese, existe uma valorização v tal que $v(\phi_i) = \top$, $1 \leq i \leq k$ e $v(\theta) = \bot$. E também $v(\phi) = v(\phi \to \theta) = \top$. Mas isto contradiz a tabela de verdade para a implicação.

$\rightarrow \mathbf{I}$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi\rightarrow\psi}$$

$$\begin{array}{r|l}
\vdots & \vdots \\
 & \begin{array}{|l}\phi \\ \hline \vdots \\ \theta \end{array} \\
\vdots & \\
p & \color{red}{\phi \rightarrow \theta} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Suponhamos que o passo p deduz $\phi \rightarrow \theta$ por aplicação da regra $\rightarrow \mathbf{I}$ a uma sub-dedução com premissa ϕ e conclusão θ. Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_k$ as premissas assumidas em $\phi \rightarrow \theta$. Em θ as premissas são algumas das $\phi_1, \ldots, \phi_k$ e ϕ e θ é consequência semântica delas.

Seja a tabela de verdade para $\phi_1, \ldots, \phi_k$, ϕ, $\phi \to \theta$ e θ. Por hipótese, existe uma valorização v tal que $v(\phi_i) = \top$, $1 \leq i \leq k$ e $v(\phi \to \theta) = \bot$. Então $v(\phi) = \top$ e $v(\theta) = \bot$. Mas isto contradiz o facto de θ ser consequência semântica de $\phi_1, \ldots, \phi_k$ e ϕ.

$\perp$**E** :

$$\frac{\perp}{\phi}$$

Suponhamos que no passo p se deduz ϕ de $\perp$. Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_k$ as premissas assumidas em ϕ, que são as premissas assumidas em $\perp$(e das quais $\perp$ é consequência semântica). Mas isto só pode ser se $\phi_1, \ldots, \phi_k$ forem todas contradições. E portanto ϕ é (vacuosamente) consequência semântica de $\phi_1, \ldots, \phi_k$.

Depois de analisados os restantes casos e em todos obtermos uma contradição, podemos concluir que uma dedução no sistema *DN* não pode ter passos que não sejam consequência semântica das premissas.

Corolário:

Se $\vdash \phi$ então $\models \phi$.

Usando, a contraposição temos:

A integridade da dedução natural permite-nos determinar se não existe uma dedução de uma fórmula ψ a partir de premissas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ (i.e $\phi_1, \ldots, \phi_n \nvdash \psi$): basta encontrar uma valorização v tal que $v(\phi_i) = \top$, $1 \leq i \leq n$ e $v(\psi) = \bot$ (i.e que $\phi_1, \ldots, \phi_n \not\models \psi$).

Exercício: Mostre que $\neg p \vee (q \rightarrow p) \nvdash \neg p \wedge q$

Completude do sistema de dedução *DN*

Vamos ver que a dedução natural *DN* é completa para a lógica proposicional: qualquer consequência semântica pode ser deduzida em *DN*; em particular todas as tautologias são teoremas de *DN*.

Isto parece mais complicado que a integridade: sempre que todas as valorizações satisfazem uma fórmula ϕ existe uma dedução para ela...

Seja v uma atribuição de valores às variáveis. Para cada fórmula ψ, define-se

$$\psi^v = \begin{cases} \psi & \text{se } v(\psi) = \top \\ \neg\psi & \text{se } v(\psi) = \bot \end{cases}$$

Completude do sistema de dedução *DN*

Lemma: Seja ϕ uma fórmula cujas variáveis proposicionais são $q_1, \ldots, q_n$ e seja v uma atribuição de valores às variáveis. Então

$$q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi^v$$

Por exemplo, seja $p \wedge q$, $v(p) = \top$ e $v(q) = \bot$.
Temos que $p^v = p$, $q^v = \neg q$ e $(p \wedge q)^v = \neg(p \wedge q)$.
Então pelo lema, vem que $p, \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$.

Completude do sistema de dedução *DN*

Proposition: Se $\models \phi$ então $\vdash \phi$, i.e, se ϕ é uma tautologia então ϕ é um teorema.

Proposition: Se $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \phi$ então $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi$.

Completude do sistema de dedução DN

Demonstração.

Queremos mostrar

$$\textit{Se} \models \phi \textit{ então} \vdash \phi$$

Seja ϕ uma tautologia e $p_1, \ldots, p_n$ as variáveis proposicionais que nela ocorrem. De $\models \phi$ e pelo lema **??**, $v(\phi) = \top = v(\phi^v)$ e $p_1^v, \ldots, p_n^v \vdash \phi$, para toda a valorização v. Tem-se então que:

$$p_1^v, \ldots, p_{n-1}^v, p_n \vdash \phi \text{ e } p_1^v, \ldots, p_{n-1}^v, \neg p_n \vdash \phi$$

para toda a valorização v. Usando **TE** para $p_n \vee \neg p_n$ e a regra $\vee$**E**, podemos combinar as deduções anteriores numa dedução de:

$$p_1^v, \ldots, p_{n-1}^v \vdash \phi$$

$\square$

$$
\begin{array}{|l}
p_1^v \\
\vdots \\
p_n \\
\hline
\boxed{\mathsf{A}} \\
\phi
\end{array}
$$

$$p_1^v, \ldots, p_{n-1}^v, p_n \vdash \phi$$

$$
\begin{array}{|l}
p_1^v \\
\vdots \\
\neg p_n \\
\hline
\boxed{\mathsf{B}} \\
\phi
\end{array}
$$

$$p_1^v, \ldots, p_{n-1}^v, \neg p_n \vdash \phi$$

$$
\begin{array}{|ll}
p_1^v & \\
\vdots & \\
p_{n-1}^v & \\
\hline
p_n \vee \neg p_n & \\
\quad \begin{array}{|l} p_n \\ \hline \boxed{\mathsf{A}} \\ \phi \end{array} & \\
\quad \begin{array}{|l} \neg p_n \\ \hline \boxed{\mathsf{B}} \\ \phi \end{array} & \\
\phi & \vee\mathsf{E}
\end{array}
$$

$$p_1^v, \ldots, p_{n-1}^v \vdash \phi$$

Completude do sistema de dedução DN

Repetindo o processo $n-1$ vezes para $p_1, \ldots, p_{n-1}$ obtemos

$$\vdash \phi$$

Completude do sistema de dedução *DN*

Teorema da Dedução: $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ se e só se $\Sigma \vdash \phi \to \psi$.

Demonstração.

$\Rightarrow$: Se $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, obtemos $\Sigma \vdash \phi \to \psi$, supondo ϕ, usando a dedução anterior até obter ψ e aplicando a regra $\to$ **I**.

$\Leftarrow$: Se $\Sigma \vdash \phi \to \psi$, para obter $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, usamos apenas dedução de ψ supondo ϕ. $\square$

Completude do sistema de dedução *DN*

Lema: $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ se e só se $\models (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots(\phi_n \to \psi)\ldots)))$.

Demonstração.

Por contradição. Para qualquer valorização $v((\phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots(\phi_n \to \psi)\ldots)))) = \bot$ se $v(\phi_i) = \top$ para todos $1 \leq i \leq n$ e $v(\psi) = \bot$. Mas isto contradiz $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$! $\square$

Completude do sistema de dedução *DN*

Demonstração.

Pelo lema anterior,

$$\models (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\dots(\phi_n \to \psi)\dots)))$$

Pela proposição,

$$\vdash (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\dots(\phi_n \to \psi)\dots)))$$

E pelo Teorema (da dedução),

$$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$$

$\square$

O resultado anterior também se verifica para o caso Σ ser infinito e portanto

$$\Sigma \models \phi \quad \text{se e só se} \quad \Sigma \vdash \phi$$

Falta apenas a demonstração do Lema
Lema: Seja ϕ uma fórmula cujas variáveis proposicionais são $q_1, \ldots, q_n$ e seja v uma atribuição de valores de verdade às variáveis. Então

$$q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi^v$$

Demonstração.

Por indução na estrutura da fórmula ϕ (= no número de conectivas que ocorrem em ϕ): $\square$

$\phi = q_1$ Então é claro que $q_1^v \vdash q_1^v$.

$\phi = \neg\phi_1$ e tem-se que $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1^v$ por hipótese de indução.Se $v(\phi) = \top$, então $v(\phi_1) = \bot$, donde $\phi^v = \neg\phi_1 = \phi_1^v$ e portanto $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi^v$. Caso contrário, $v(\phi) = \bot$, então $v(\phi_1) = \top$, então $\phi_1^v = \phi_1$ e $\phi^v = \neg\neg\phi_1$. Podemos estender a dedução de $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1$ usando a regra **DN** e obtemos uma dedução $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg\neg\phi_1 = \phi^v$.

$\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ onde $\circ$ pode ser $\vee$, $\vee$ ou $\rightarrow$. Sejam $p_1, \ldots, p_l$ e $r_1, \ldots, r_k$, respectivamente as variáveis proposicionais que ocorrem em ϕ_1 e ϕ_2, e $\{q_1, \ldots, q_n\} = \{p_1, \ldots, p_l\} \cup \{r_1, \ldots, r_k\}$. De $p_1^v, \ldots, p_l^v \vdash \phi_1^v$ e $r_1^v, \ldots, r_k^v \vdash \phi_2^v$ podemos deduzir, usando a regra $\vee$**I**:

$$q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1^v \vee \phi_2^v$$

donde temos de deduzir ϕ^v.

$\phi = \phi_1 \to \phi_2$ Se $v(\phi) = \bot$, então $v(\phi_1) = \top$ e $v(\phi_2) = \bot$. Então $\phi_1^v = \phi_1$ e $\phi_2^v = \neg\phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \neg\phi_2$. Para ter $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg(\phi_1 \to \phi_2)$, basta que $\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \to \phi_2)$.

Se $v(\phi) = \top$, temos 3 casos:

- $v(\phi_1) = v(\phi_2) = \bot$. Então $\phi_1^v = \neg\phi_1$ e $\phi_2^v = \neg\phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$. Para ter $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \to \phi_2$, basta que $\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vdash \phi_1 \to \phi_2$.
- $v(\phi_1) = \bot$ e $v(\phi_2) = \top$. Então $\phi_1^v = \neg\phi_1$ e $\phi_2^v = \phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg\phi_1 \vee \phi_2$. Para ter $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \to \phi_2$, basta que $\neg\phi_1 \vee \phi_2 \vdash \phi_1 \to \phi_2$.
- $v(\phi_1) = v(\phi_2) = \top$. Então $\phi_1^v = \phi_1$ e $\phi_2^v = \phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \phi_2$. Para ter $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \to \phi_2$, basta que $\phi_1 \vee \phi_2 \vdash \phi_1 \to \phi_2$.

$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ Temos 4 casos:

- $v(\phi_1) = v(\phi_2) = \top$. Então $\phi_1^v = \phi_1$ e $\phi_2^v = \phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \phi_2$e então $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \phi_2 = \phi^v$.
- $v(\phi_1) = \bot$ e$v(\phi_2) = \top$. Então $\phi_1^v = \neg\phi_1$ e $\phi_2^v = \phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg\phi_1 \vee \phi_2$. Para que $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2) = \phi^v$ basta que $\neg\phi_1 \vee \phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)$.
- $v(\phi_1) = \top$ e$v(\phi_2) = \bot$. Então $\phi_1^v = \phi_1$ e $\phi_2^v = \neg\phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \neg\phi_2$. Para que $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2) = \phi^v$ basta que $\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)$.
- $v(\phi_1) = V(\phi_2) = \bot$. Então $\phi_1^v = \neg\phi_1$ e $\phi_2^v = \neg\phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$. Para o $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2) = \phi^v$ basta que $\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)$.

$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ Temos 4 casos:

- $v(\phi_1) = v(\phi_2) = \bot$. Então $\phi_1^v = \neg\phi_1$ e $\phi_2^v = \neg\phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$. Para que $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2) = \phi^v$ basta que $\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)$.
- $v(\phi_1) = v(\phi_2) = \top$. Então $\phi_1^v = \phi_1$ e $\phi_2^v = \phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \phi_2$. Para que $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \phi_2 = \phi^v$ basta que $\phi_1 \vee \phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2$
- $v(\phi_1) = \bot$ e $v(\phi_2) = \top$. Então $\phi_1^v = \neg\phi_1$ e $\phi_2^v = \phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \neg\phi_1 \vee \phi_2$. Para que $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \phi_2 = \phi^v$ basta que $\neg\phi_1 \vee \phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2$.
- $v(\phi_1) = \top$ e $v(\phi_2) = \bot$. Então $\phi_1^v = \phi_1$ e $\phi_2^v = \neg\phi_2$, e $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \neg\phi_2$. Para o $q_1^v, \ldots, q_n^v \vdash \phi_1 \vee \phi_2 = \phi^v$ basta que $\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2$.

Decidibilidade da Lógica proposicional

Proposition: Dado um conjunto de fórmulas Σ e uma fórmula ϕ é decidível se $\Sigma \vdash \phi$, i.e, existe um algoritmo que determina se ϕ é dedutível de Σ.

Demonstração.

Pela completude e integridade, decidir $\Sigma \vdash \phi$ equivale a decidir se $\Sigma \models \phi$. E podemos supor $\Sigma = \emptyset$ (usando a lema da dedução)). Então basta construir a tabela de verdade para ϕ (que é finita) e verificar se ϕ é uma tautologia. $\square$

Corolário:

É decidível se uma fórmula ϕ é um teorema (= é válida).

Corolário: É decidível se uma fórmula ϕ é satisfazível.

Demonstração.

A fórmula ϕ é satisfazível se e só se $\neg\phi$ não é uma tautologia. $\square$