Lógica Proposicional: sistemas dedutivos

Sistema de Dedução Natural, DN

Todas as deduções devem usar o sistema de dedução natural DN e a notação de Fitch dada nas aulas.

Observações para a obtenção de uma dedução duma fórmula φ

- Se a fórmula φ for uma implicação $\psi \to \theta$, supor ψ e deduzir θ; aplicando de seguida a regra da introdução da implicação.
- Se a fórmula φ for uma negação $\neg\psi$, supor ψ e deduzir F; aplicando de seguida a regra da introdução da negação.
- Por redução ao absurdo: supor $\neg\varphi$ e deduzir F. Caso haja uma negação $\neg\psi$ nas premissas, poder-se-á deduzir ψ para obter F.
- Suponhamos que uma das premissas é $\varphi \vee \psi$ e se pretende deduzir γ. Podemos: supor φ e deduzir γ, supor ψ e deduzir γ; aplicando de seguida a regra de eliminação da disjunção.
- Suponhamos que uma premissa é $\neg\varphi$ e pretendemos obter **F**: podemos tentar obter φ e aplicar a regra da introdução de **F**.
- Suponhamos que temos uma implicação $\phi \to \theta$. Podemos entao tentar deduzir ϕ e aplicar a regra da eliminação da implicação (modus ponens) para obter θ.

Notar que cada passo da dedução tem de ser obtido por aplicação duma regra ou ser uma repetição duma fórmula já deduzida ou uma premissa. Assim cada passo de dedução tem de ser ou uma suposição ou resultar da aplicação duma regra a fórmulas já deduzidas, pelo que não se podem usar "equivalências semânticas".

22. Indica se as seguintes deduções são válidas. Em caso afirmativo indica as regras usadas em cada passo. Se não for válida indica qual o passo em que não está correcta e se existe uma dedução correcta com as mesmas premissas e conclusão.

a)

```
1 | p ∨ q
  |------
2 | | p
  | |---
3 | | p
4 | | q
  | |---
5 | | q
6 | p ∧ q
```

b)

```
1 | (p ∧ q) ∨ r
  |------------
2 | | p ∧ q
  | |-------
3 | | p
4 | | p ∨ r
5 | | r
  | |---
6 | | p ∨ r
7 | p ∧ r
```

c)

```
1 | ¬(p ∨ ¬q)
  |----------
2 | | ¬q
  | |----
3 | | p ∨ ¬q
4 | | F
5 | ¬¬q
6 | q
```

d)

1	$p \rightarrow q$	
2		p
3		q
4		$\neg p \lor q$
5	$\neg p \lor q$	

e)

1	$p \rightarrow \neg p$	
2		p
3		$\neg p$
4		$\mathbf{F}$
5	$\neg p$	

f)

1	$\neg p \rightarrow \neg q$	
2		q
3		$\neg q$
4		$\mathbf{F}$
5		p
6	$q \rightarrow p$	

23. Mostra que:

(a) $(p \land q) \rightarrow r, p \vdash q \rightarrow r$
(b) $q \rightarrow p, q \rightarrow \neg p \vdash \neg q$
(c) $(\neg p \lor \neg q) \lor r, q \lor r, p \vdash r$
(d) $p \lor \neg q, \neg r \rightarrow q, r \rightarrow \neg s, s \vdash p$

24. Mostra que:

(a) $\delta \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi), \neg\psi, \delta \vdash \neg\varphi$
(b) $(\delta \land \neg\varphi) \rightarrow \psi, \neg\psi, \delta \vdash \varphi$
(c) $\vdash (\varphi \lor \psi) \rightarrow (\psi \lor \varphi)$
(d) $\vdash (\delta \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\delta \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$
(e) $\vdash (\delta \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\delta \rightarrow \psi))$
(f) $\vdash (\delta \land \varphi) \rightarrow \varphi$
(g) $\vdash \delta \rightarrow (\delta \lor \varphi)$
(h) $\vdash \delta \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \varphi))$
(i) $\vdash (\varphi \rightarrow \delta) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \delta) \rightarrow \delta)$
(j) $\vdash ((\varphi \rightarrow \delta) \rightarrow \delta) \rightarrow ((\delta \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(k) $\vdash ((\varphi \rightarrow \delta) \land (\delta \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \lor \delta) \rightarrow (\varphi \land \delta))$
(l) $\delta, \varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow (\delta \rightarrow \psi)$
(m) $\delta, \neg\varphi \vdash \neg(\delta \rightarrow \varphi)$
(n) $\vdash (\delta \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\delta \lor \varphi)$
(o) $\vdash \varphi \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \delta) \rightarrow \delta)$
(p) $\vdash \varphi \lor \varphi \rightarrow \varphi$
(q) $(\psi \land \theta) \rightarrow \neg\delta, \varphi \rightarrow \delta, \theta, \varphi \vdash \neg\psi$
(r) $\vdash ((\psi \lor \varphi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi))$
(s) $\psi \lor \varphi, \psi \rightarrow \delta, \neg\theta \rightarrow \neg\varphi \vdash \delta \lor \theta$
(t) $\vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\delta \lor \psi \rightarrow \delta \lor \varphi)$
(u) $\vdash ((((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\delta \rightarrow \neg\gamma)) \rightarrow \delta) \rightarrow \theta) \rightarrow ((\theta \rightarrow \varphi) \rightarrow (\gamma \rightarrow \varphi))$
(v) $(\psi \rightarrow \varphi) \land (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\psi \land \varphi) \lor (\neg\psi \land \neg\varphi)$
(w) $(\psi \rightarrow \varphi) \lor (\delta \rightarrow \gamma) \vdash (\psi \rightarrow \gamma) \lor (\delta \rightarrow \varphi)$
(x) $\psi \vdash (\psi \land \varphi) \lor (\psi \land \neg\varphi)$

Nota: Caso uses regras derivadas, terás que as mostrar separamente.