

*	ϕ	
**	ψ	
	$\phi \wedge \psi$	$\wedge I, *, **$

$\phi \wedge \psi$	
ϕ	$\wedge E$

$\phi \wedge \psi$	
ψ	$\wedge E$

$$(p \wedge q) \wedge R \vdash R \wedge q$$

$$1 \quad (p \wedge q) \wedge R$$

$$2 \quad R \quad \wedge E, 1$$

$$3 \quad p \wedge q \quad \wedge E, 1$$

$$4 \quad q \quad \wedge E, 3$$

$$5 \quad R \wedge q \quad \wedge I, 2, 4$$

$$(p \wedge q) \vee q \vdash q$$

1	$(p \wedge q) \vee q$	
2	$p \wedge q$	
3	q	$\wedge E, 2$
4	q	
5	q	$R, 4$
6	q	$\vee E, 1, 2-3, 4-5$

ϕ	ψ
$\phi \vee \psi \vdash I$	$\phi \vee \psi \vee I$
$\phi \vee \psi$	ϕ
ψ	ψ
ψ	R
ψ	$\vee E, *, O, O$

1	φ	
2	$\neg \varphi$	
2'	$\neg \varphi$	R, 2
3	\perp	$\perp I, 1, 2'$
4	$\neg \neg \varphi$	$\neg I, 2-3$

$$\varphi \vdash \neg \neg \varphi$$

α		\perp	
$\neg \alpha$		α	$\perp E$
\perp	$\perp I$		
$\neg \neg \varphi$		φ	
φ	$\neg E$	\perp	
		$\neg \varphi$	$\neg I, 1-\dots$

$$p, p \rightarrow q, q \rightarrow (p \rightarrow \underline{r}) \vdash r$$

1	p	
2	$p \rightarrow q$	
3	$q \rightarrow (p \rightarrow \underline{r})$	
<hr/>		
4	q	$\rightarrow E, 1, 2$
5	$p \rightarrow r$	$\rightarrow E, 3, 4$
6	\underline{r}	$\rightarrow E, 1, 5$

$\alpha \rightarrow \beta$	
α	
β	$\rightarrow E$

α	
β	
$\alpha \rightarrow \beta$	$\rightarrow I$

$$(p \vee q) \rightarrow R \vdash p \rightarrow R$$

1	$(p \vee q) \rightarrow R$	
2	P	
3	$p \vee q$	$\vee I, 2$
4	R	$\rightarrow E, 1, 3$
5	$p \rightarrow R$	$\rightarrow I, 2-4$

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

1	$\alpha \rightarrow \beta$	
2	$\neg \beta$	
3	α	
4	β	$\rightarrow E, 1, 3$
5	\perp	$\bot I, 2, 4$
6	$\neg \alpha$	$\neg I, 3-5$
7	$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$	$\rightarrow I, 2-6$
8	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$	$\rightarrow I, 1-7$

$$\vdash \phi \rightarrow \neg \neg \phi$$

1	ϕ	
2	$\neg \phi$	
3	\perp	$\perp I, 1, 2$
4	$\neg \neg \phi$	$\neg I, 2-3$
5	$\phi \rightarrow \neg \neg \phi$	$\rightarrow I, 1-4$

