Lógica Computacional

DCC/FCUP

2020/21

Exemplos

Mostrar usando *DN*:

1. $p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$
2. $\neg p \lor \neg q \vdash \neg(p \land q)$
3. $\vdash \neg(p \land \neg p)$
4. $\neg(\neg p \lor q) \vdash p$

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$

10	$(p \land q) \lor (p \land r)$	$\lor$E, 4–6, 7–9

$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	
2	p	$\wedge$E, 1
3	$q \vee r$	$\wedge$E, 1
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$E, 4–6, 7–9

$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	
2	p	$\wedge$E, 1
3	$q \vee r$	$\wedge$E, 1
4	$\quad q$	
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$E, 4–6, 7–9

$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	
2	p	$\wedge$E, 1
3	$q \vee r$	$\wedge$E, 1
4	$\quad q$	
5	$\quad p \wedge q$	$\wedge$I, 4
6	$\quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$I, 5
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$E, 4–6, 7–9

$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	
2	p	$\wedge$E, 1
3	$q \vee r$	$\wedge$E, 1
4	$\quad q$	
5	$\quad p \wedge q$	$\wedge$I, 4
6	$\quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$I, 5
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$E, 4–6, 7–9

$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	
2	p	$\wedge$E, 1
3	$q \vee r$	$\wedge$E, 1
4	$\quad q$	
5	$\quad p \wedge q$	$\wedge$I, 4
6	$\quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$I, 5
7	$\quad r$	
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$E, 4–6, 7–9

$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	
2	p	$\wedge$E, 1
3	$q \vee r$	$\wedge$E, 1
4	$\quad q$	
5	$\quad p \wedge q$	$\wedge$I, 4
6	$\quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$I, 5
7	$\quad r$	
8	$\quad p \wedge r$	$\wedge$I, 7
9	$\quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$I, 8
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$E, 4–6, 7–9

$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

1	$\neg p \vee \neg q$	
2	$\quad \neg p$	
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vee$E, 2–11

$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

1	$\neg p \vee \neg q$	
2	$\quad \neg p$	
3	$\quad\quad p \wedge q$	
4	$\quad\quad p$	$\wedge$E, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot$ **I**, 2, 4
6	$\quad \neg(p \wedge q)$	$\neg$I, 3–5
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vee$E, 2–11

$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

1	$\neg p \vee \neg q$	
2	$\neg p$	
3	$p \wedge q$	
4	p	$\wedge$E, 3
5	$\bot$	$\bot$ **I**, 2, 4
6	$\neg(p \wedge q)$	$\neg$I, 3–5
7	$\neg q$	
8	$p \wedge q$	
9	q	$\wedge$E, 8
10	$\bot$	$\bot$ **I**, 7, 9
11	$\neg(p \wedge q)$	$\neg$I, 7–10
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vee$E, 2–11

$$\vdash \neg(p \land \neg p)$$

$\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

5	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg$I, 1–4

$\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

1	$\quad\vert\ \underline{p \wedge \neg p}$	
2	$\quad\vert\ p$	$\wedge$E, 1
3	$\quad\vert\ \neg p$	$\wedge$E, 1
4	$\quad\vert\ \bot$	$\bot$ **I**, 2, 3
5	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg$I, 1–4

$\neg(\neg p \vee q) \vdash p$

$\neg(\neg p \lor q) \vdash p$

1	$\neg(\neg p \lor q)$	
2	$\quad \neg p$	
3	$\quad \neg p \lor q$	$\lor$I, 2
4	$\quad \bot$	$\bot$I, 1, 3
5	$\neg\neg p$	$\neg$I, 2–4
6	p	$\neg$E, 2–4

Algumas regras derivadas de *DN*

A partir das regras base podemos obter regras derivadas que correspondem a teoremas no sistema *DN*.

Modus Tollens (em latim, *modo que nega*)

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\,\mathsf{MT}$$

Algumas regras derivadas de *DN*

A partir das regras base podemos obter regras derivadas que correspondem a teoremas no sistema *DN*.
Modus Tollens (em latim, *modo que nega*)

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\,\mathbf{MT}$$

Mostrar que $\phi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\phi$

Algumas regras derivadas de *DN*

A partir das regras base podemos obter regras derivadas que correspondem a teoremas no sistema *DN*.
Modus Tollens (em latim, *modo que nega*)

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\,\mathsf{MT}$$

Mostrar que $\phi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\phi$:

1	$\phi \to \psi$	
2	$\neg\psi$	
3	$\quad \phi$	
4	$\quad \psi$	$\to$E, 1, 3
5	$\quad \bot$	$\bot$ **I**, 2, 4
6	$\neg\phi$	$\neg$I, 3–5

Algumas regras derivadas de *DN*

Introdução da dupla negação

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg\mathbf{I}$$

(já mostrada...)

Algumas regras derivadas de *DN*

Redução ao absurdo

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\phi}\ \textbf{RA}$$

Algumas regras derivadas de *DN*

Redução ao absurdo

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\phi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\phi}\ \textbf{RA}$$

Se tivermos uma dedução de $\bot$ supondo $\neg\phi$ podemos ter uma dedução de $\neg\phi \to \bot$. Então basta mostrar $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$

Algumas regras derivadas de *DN*

Redução ao absurdo

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\phi}\,\mathbf{RA}$$

Se tivermos uma dedução de $\bot$ supondo $\neg\phi$ podemos ter uma dedução de $\neg\phi \to \bot$. Então basta mostrar $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$:

1	$\neg\phi \to \bot$	
2	$\quad\neg\phi$	
3	$\quad\bot$	$\to$E, 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg$ **I**, 2–3
5	ϕ	$\neg$E, 4

Algumas regras derivadas de *DN*

Terceiro excluído $$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\,\textbf{TE}$$

Algumas regras derivadas de *DN*

Terceiro excluído $\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\,\textbf{TE}$

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	
2	ϕ	
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee$I, 2
4	$\perp$	$\perp$ **I**, 1, 3
5	$\neg\phi$	$\neg$I, 2–4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee$I, 5
7	$\perp$	$\perp$ **I**, 1, 5
8	$\phi \vee \neg\phi$	**RA**, 1–7

Exercício:

Mostrar $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

Exercício:

Mostrar $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$:

1	$\neg q \to \neg p$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg\neg p$	$\neg\neg$I, 2
4	$\quad \neg\neg q$	**MT**, 1, 3
5	$p \to \neg\neg q$	$\to$I, 2–4

Equivalência dedutiva

Dadas dumas fórmulas ϕ e ψ, dizemos que ϕ e ψ são dedutivamente equivalentes se e só se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$. E denotamos por $\phi \dashv\vdash \psi$.

Equivalência dedutiva

Dadas dumas fórmulas ϕ e ψ, dizemos que ϕ e ψ são dedutivamente equivalentes se e só se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$. E denotamos por $\phi \dashv\vdash \psi$.

Exercício: Mostre que $\phi \dashv\vdash \psi$ se e só se $\vdash (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$

Equivalência dedutiva

Dadas dumas fórmulas ϕ e ψ, dizemos que ϕ e ψ são dedutivamente equivalentes se e só se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$. E denotamos por $\phi \dashv\vdash \psi$.

Exercício: Mostre que $\phi \dashv\vdash \psi$ se e só se $\vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

Contraposição:

$$\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$$

Contraposição:

$$\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$$

$$
\begin{array}{l|lll}
1 & \phi \rightarrow \psi & & \\ \hline
2 & \quad \vert\ \neg\psi & & \\
3 & \quad \vert\ \neg\phi & & \textbf{MT},\ 1,\ 2 \\
4 & \neg\psi \rightarrow \neg\phi & & \rightarrow\text{I},\ 2\text{–}3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|lll}
1 & \neg\psi \rightarrow \neg\phi & & \\ \hline
2 & \quad \vert\ \phi & & \\
3 & \quad \vert\ \quad \vert\ \neg\psi & & \\
4 & \quad \vert\ \quad \vert\ \neg\phi & & \perp\textbf{I},\ 1,\ 3 \\
5 & \quad \vert\ \quad \vert\ \perp & & \perp\textbf{I},\ 2,\ 4 \\
6 & \quad \vert\ \psi & & \textbf{RA},\ 6\text{–}5 \\
7 & \phi \rightarrow \psi & & \rightarrow\text{I},\ 2\text{–}6
\end{array}
$$

Exemplos

Mostre que:

a) $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$
b) $\phi \to \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$
c) $\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$
d) $\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$
e) $\vdash (\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$

$$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$$

$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$

1	$\neg(\phi \wedge \psi)$
2	$\quad \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$

$$
\begin{array}{lll}
1 & & \neg(\phi \wedge \psi) \\
2 & & \quad \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)
\end{array}
$$

$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$

1	$\neg(\phi \wedge \psi)$	
2	$\quad \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$	
3	$\quad\quad \neg\phi$	
4	$\quad\quad \neg\phi \vee \neg\psi$	$\vee$**I**, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot$**I**, 2, 4
6	$\quad \neg\neg\phi$	$\neg$**I**, 3–5
7	$\quad \phi$	$\neg$**E**, 6

$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$

1	$\neg(\phi \wedge \psi)$	
2	$\quad\mid\ \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$	
3	$\quad\mid\quad\mid\ \neg\phi$	
4	$\quad\mid\quad\mid\ \neg\phi \vee \neg\psi$	$\vee$**I**, 3
5	$\quad\mid\quad\mid\ \bot$	$\bot$**I**, 2, 4
6	$\quad\mid\ \neg\neg\phi$	$\neg$**I**, 3–5
7	$\quad\mid\ \phi$	$\neg$E, 6

$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$

1	$\neg(\phi \wedge \psi)$	
2	$\quad \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$	
3	$\quad\quad \neg\phi$	
4	$\quad\quad \neg\phi \vee \neg\psi$	$\vee$I, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot$I, 2, 4
6	$\quad \neg\neg\phi$	$\neg$I, 3–5
7	$\quad \phi$	$\neg$E, 6
8	$\quad\quad \neg\psi$	
9	$\quad\quad \neg\phi \vee \neg\psi$	$\vee$I, 3
10	$\quad\quad \bot$	$\bot$I, 2, 9
11	$\quad \neg\neg\psi$	$\neg$I, 8–10
12	$\quad \psi$	$\neg$E, 11

$\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$

1	$\neg(\phi \wedge \psi)$	
2	$\quad \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$	
3	$\quad\quad \neg\phi$	
4	$\quad\quad \neg\phi \vee \neg\psi$	$\vee$I, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot$I, 2, 4
6	$\quad \neg\neg\phi$	$\neg$I, 3–5
7	$\quad \phi$	$\neg$E, 6
8	$\quad\quad \neg\psi$	
9	$\quad\quad \neg\phi \vee \neg\psi$	$\vee$I, 3
10	$\quad\quad \bot$	$\bot$I, 2, 9
11	$\quad \neg\neg\psi$	$\neg$I, 8–10
12	$\quad \psi$	$\neg$E, 11
13	$\quad \phi \wedge \psi$	$\wedge$I, 7, 12
14	$\quad \bot$	$\bot$I, 1, 13
15	$\neg\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$	$\neg$I, 2, 14
16	$\neg\phi \vee \neg\psi$	$\neg$E, 15

$$\phi \to \psi \vdash \neg\phi \lor \psi$$

$\phi \to \psi \vdash \neg\phi \lor \psi$

1	$\phi \to \psi$
2	$\quad \neg(\neg\phi \lor \psi)$

$\phi \to \psi \vdash \neg\phi \lor \psi$

$$
\begin{array}{r l l}
1 & \mid\ \phi \to \psi & \\
2 & \mid\ \mid\ \neg(\neg\phi \lor \psi) & \\
3 & \mid\ \mid\ \mid\ \neg\phi & \\
4 & \mid\ \mid\ \mid\ \neg\phi \lor \psi & \lor\mathbf{I},\ 3 \\
5 & \mid\ \mid\ \mid\ \bot & \bot\mathbf{I},\ 2,\ 4 \\
6 & \mid\ \mid\ \neg\neg\phi & \neg\mathbf{I},\ 3\text{–}5 \\
7 & \mid\ \mid\ \phi & \neg\mathbf{E},\ 6
\end{array}
$$

$\phi \to \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$

1	$\phi \to \psi$	
2	$\quad \neg(\neg\phi \vee \psi)$	
3	$\quad\quad \neg\phi$	
4	$\quad\quad \neg\phi \vee \psi$	$\vee$I, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot$I, 2, 4
6	$\quad \neg\neg\phi$	$\neg$I, 3–5
7	$\quad \phi$	$\neg$E, 6
8	$\quad \psi$	$\to$E, 1, 7

$\phi \to \psi \vdash \neg\phi \lor \psi$

1	$\phi \to \psi$			
2		$\neg(\neg\phi \lor \psi)$		
3			$\neg\phi$	
4			$\neg\phi \lor \psi$	$\lor$I, 3
5			$\bot$	$\bot$I, 2, 4
6		$\neg\neg\phi$		$\neg$I, 3–5
7		ϕ		$\neg$E, 6
8		ψ		$\to$E, 1, 7
9		$\neg\phi \lor \psi$		$\lor$I, 8
10		$\bot$		$\bot$ I, 2, 9

$\phi \rightarrow \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$

1	$\phi \rightarrow \psi$	
2	$\quad \neg(\neg\phi \vee \psi)$	
3	$\quad\quad \neg\phi$	
4	$\quad\quad \neg\phi \vee \psi$	$\vee$I, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot$I, 2, 4
6	$\quad \neg\neg\phi$	$\neg$I, 3–5
7	$\quad \phi$	$\neg$E, 6
8	$\quad \psi$	$\rightarrow$E, 1, 7
9	$\quad \neg\phi \vee \psi$	$\vee$I, 8
10	$\quad \bot$	$\bot$ I, 2, 9
11	$\neg\neg(\neg\phi \vee \psi)$	$\neg$I, 2–10
12	$\neg\phi \vee \psi$	$\neg$E, 11

$$\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$$

$\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$

1	ϕ (assumption)
2	ψ (assumption, nested)

$\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$

1	ϕ	
2	ψ	
3	ϕ	R, 1
4	$\psi \to \phi$	$\to$I, 2–3
5	$\phi \to (\psi \to \phi)$	$\to$I, 1–4

$$\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$$

$\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$

1	$\phi \to (\psi \to \theta)$
2	$(\phi \to \psi)$

$\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$

1	$\phi \to (\psi \to \theta)$	
2	$(\phi \to \psi)$	
3	ϕ	
4	ψ	$\to$E, 2, 3
5	$\psi \to \theta$	$\to$E, 1, 3
6	θ	$\to$E, 4, 5
7	$\phi \to \theta$	$\to$I, 3–6

$\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$

1	$\phi \to (\psi \to \theta)$	
2	$\quad (\phi \to \psi)$	
3	$\quad\quad \phi$	
4	$\quad\quad \psi$	$\to$E, 2, 3
5	$\quad\quad \psi \to \theta$	$\to$E, 1, 3
6	$\quad\quad \theta$	$\to$E, 4, 5
7	$\quad \phi \to \theta$	$\to$I, 3–6
8	$(\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)$	$\to$I, 2–7

$\vdash (\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$

1	$\phi \to (\psi \to \theta)$	
2	$(\phi \to \psi)$	
3	ϕ	
4	ψ	$\to$E, 2, 3
5	$\psi \to \theta$	$\to$E, 1, 3
6	θ	$\to$E, 4, 5
7	$\phi \to \theta$	$\to$I, 3–6
8	$(\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)$	$\to$I, 2–7
9	$\phi \to (\psi \to \theta) \to (\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)$	$\to$I, 1–8

$$\vdash (\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$$

$\vdash (\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

1	$\neg\psi \to \neg\phi$

$\vdash (\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

1	$\neg\psi \to \neg\phi$
2	$\neg\psi \to \phi$
3	$\neg\psi$

$$\vdash (\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$$

1	$\quad \neg\psi \to \neg\phi$	
2	$\quad\quad \neg\psi \to \phi$	
3	$\quad\quad\quad \neg\psi$	
4	$\quad\quad\quad \phi$	$\to$E, 2, 3
5	$\quad\quad\quad \neg\phi$	$\to$E, 1, 3

$\vdash (\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

1	$\neg\psi \to \neg\phi$	
2	$\neg\psi \to \phi$	
3	$\neg\psi$	
4	ϕ	$\to$E, 2, 3
5	$\neg\phi$	$\to$E, 1, 3
6	$\perp$	$\perp$ I, 4, 5
7	$\neg\neg\psi$	$\neg$I, 3–6
8	ψ	$\neg$E, 7

$\vdash (\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

1	$\mid\ \mid\ \neg\psi \to \neg\phi$	
2	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\psi \to \phi$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg\psi$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \phi$	$\to$E, 2, 3
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg\phi$	$\to$E, 1, 3
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \bot$	$\bot$ **I**, 4, 5
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg\psi$	$\neg$I, 3–6
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \psi$	$\neg$E, 7
9	$\mid\ \mid\ (\neg\psi \to \phi) \to \psi$	$\to$I, 2–8
10	$\mid\ (\neg\psi \to \neg\phi) \to (\neg\psi \to \phi) \to \psi$	$\to$I, 1–9