



PROYECTO II: CÁLCULO ESTOCÁSTICO APLICADO

I. Teorema de Existencia y Unicidad

II. Simulación de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Lola Serrano Carrasco

Primavera 2023

Índice

1. Teorema de Existencia y Unicidad	3
1.1. Definiciones	3
1.2. Soluciones Fuertes y Débiles	5
1.3. Teorema de Existencia y Unicidad	6
1.4. Ecuación de Tanaka	14
2. Simulación de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	17
2.1. Método de Euler	17
2.2. Método de Milstein	18
2.3. Transformación de Lamperti	18
2.4. Relación Euler y Milstein	19
2.5. Simulación de Algunas Difusiones	20
2.5.1. Movimiento Browniano	20
2.5.2. Movimiento Browniano Geométrico	21
2.5.3. Proceso de Vasicek	23
2.5.4. Puente Browniano	24
2.5.5. Simulación Puente de Difusión	25

1. Teorema de Existencia y Unicidad

La primera sección de este trabajo recopila notas relacionadas al teorema de existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas. Se define qué significa que un proceso sea solución a una ecuaciones diferencial estocástica. Se hace una distinción entre soluciones fuertes y débiles.

Se definen algunas condiciones utilizadas en el teorema, así como lemas y proposiciones que son demostradas. Después se enuncia y prueba con detalle el teorema de existencia y unicidad. Por último se trabaja con la ecuación de Tanaka. Esta sirve como ejemplo de una ecuación la cual tiene solución débil, mas no solución fuerte ya que no cumple todas las condiciones del teorema.

1.1. Definiciones

A continuación se enuncian algunas definiciones y notaciones que serán utilizadas a lo largo del trabajo

Definición 1.1 (*Espacio $L^p(\mathbb{P})$*). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $1 \leq p < \infty$. La variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ está en L^p si $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. La norma en el espacio es

$$\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}. \quad (1.1)$$

En particular, si $p = 2$ entonces L^2 es el conjunto de variables aleatorias cuadrado integrables.

Definición 1.2. Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en L^p a la variable aleatoria X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0. \quad (1.2)$$

Si $p = 2$ se dice que converge en *media cuadrática*.

Observación 1.1. Si $1 \leq q < p$ entonces $L^q(\mathbb{P}) \subset L^p(\mathbb{P})$. Por lo tanto, si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}|X|^2 < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|X| < \infty. \quad (1.3)$$

Observación 1.2. El espacio $L^2(\mathbb{P})$ es un espacio completo. Por lo tanto, toda sucesión de Cauchy definida en el espacio converge dentro del mismo.

Definición 1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad e I un conjunto de índices. Una *filtración* $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ es una familia creciente de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} . Se trabajará con $I = [0, \infty)$. Si $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ es una filtración entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ es un *espacio de probabilidad filtrado*.

Notación. Para filtraciones y procesos se utilizará la notación

$$\{\mathcal{F}_t\} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, \mathbf{X} = \{X_t\} = \{X_t : t \in [0, T]\}.$$

Definición 1.4. Sean $\{X_t\}, \{Y_t\}$ dos procesos estocásticos definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El proceso $\{X_t\}$ es una modificación de $\{Y_t\}$ si

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

Los procesos son *indistinguishables* si para casi todo $\omega \in \Omega$ se tiene $X_t = Y_t$, para todo $t \in [0, T]$. Es decir

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \quad \forall t \in [0, T]) = 1. \quad (1.5)$$

Definición 1.5. Un *Proceso de Itô* $\{X_t : t \in [0, T]\}$ es de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s, \quad (1.6)$$

donde $m(t), \sigma(t)$ son dos procesos estocásticos adaptados a la filtración browniana \mathcal{F}_t , y que casi seguramente cumplen

$$m \text{ es integrable:} \quad \int_0^T |m(t)|dt < \infty, \quad (1.7)$$

$$\sigma \text{ es cuadrado integrable:} \quad \int_0^T \sigma^2(t)dt < \infty. \quad (1.8)$$

En su notación diferencial

$$dX_t = m(t)dt + \sigma(t)dB_t. \quad (1.9)$$

1.2. Soluciones Fuertes y Débiles

Definición 1.6. Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t = m(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t), & 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0. \end{cases} \quad (1.10)$$

donde dado $T > 0$

$$m : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.11)$$

son dos funciones medibles que satisfacen las condiciones (1.7) y (1.8), respectivamente. Un proceso $\{X_t\}$ que satisface (1.10) es un *proceso de difusión*.

Se trabaja en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde se define a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y a $\{B_t\}_{t \geq 0}$, un movimiento browniano estándar.

Definición 1.7. El proceso $\{X_t\}$ es una *solución fuerte* de (1.10) si dado cualquier espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ con $\{B_t\}$ un movimiento browniano sucede que

- (a) \mathbf{X} es continuo y adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$,
- (b) Para todo $t \in [0, T]$

$$X_t = X_0 + \int_0^t m(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad \text{c.s.} \quad (1.12)$$

$$\text{i.e., } \mathbb{P} \left(X_t = X_0 + \int_0^t m(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \forall t \in [0, T] \right) = 1.$$

X_0 es la condición inicial del proceso, la cual puede o no ser aleatoria. En caso de ser aleatoria debe independiente de $\{\mathcal{F}_t\}$ y cuadrado integrable. En este trabajo se utilizará una condición inicial determinista $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.8. Una *solución débil* con condición inicial x para (1.10) es un proceso $\{X_t\}$ definido en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que para algún movimiento browniano $\{B_t\}$ y filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ el proceso es adaptado y satisface (1.12).

Observación 1.3. En la solución fuerte, a diferencia de la débil, se conoce a priori el espacio de probabilidad, la filtración y el movimiento browniano. El proceso $\{X_t\}$ se construye a partir de la condición inicial y la información generada por el movimiento browniano hasta el tiempo t .

En cambio en la solución débil el proceso puede no depender del browniano, pues no se necesita conocer la filtración previamente. Si una ecuación diferencial tiene una solución fuerte, entonces es también débil. El regreso de esta implicación no se cumple.

1.3. Teorema de Existencia y Unicidad

A continuación se enuncia el Teorema de Existencia y Unicidad para soluciones fuertes de (1.10), donde tanto el proceso $\{X_t\}$ como el movimiento browniano son unidimensionales. Para ello se definen las siguientes dos condiciones.

Condición 1. (*Globalmente Lipschitz*). Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$, existe una constante $D < \infty$ tal que

$$|m(t, x) - m(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|. \quad (1.13)$$

Observación 1.4. De la condición anterior se sigue que

$$|m(t, x) - m(t, y)| \leq D|x - y|, \quad |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|. \quad (1.14)$$

Condición 2. (*Crecimiento Lineal*). Para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$, existe una constante $C < \infty$ tal que

$$|m(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|). \quad (1.15)$$

Esta condición garantiza que el proceso $\{X_t\}$ no explote. Es decir, que no tome valores infinitos en tiempos finitos.

Teorema 1.1. (Existencia y Unicidad) Sea $T > 0$ y

$$m : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dos funciones medibles que cumplen las condiciones (1.7) y (1.8), respectivamente. Si se satisfacen también las condiciones (1.13) y (1.15) entonces existe $\{X_t\}$, una única solución fuerte, continua y adaptada para la ecuación diferencial estocástica (1.10). Además

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty. \quad (1.16)$$

El teorema habla de unicidad en el sentido de trayectoria. Esto significa que cualesquiera dos soluciones que satisfagan (1.12) deben ser indistinguibles. Antes de hacer la demostración se enuncian y prueban algunas propiedades que serán utilizadas dentro de la prueba.

Proposición 1.1. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \quad (1.17)$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2). \quad (1.18)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &\leq (a + b)^2 + (a - b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &\leq (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \\
&= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \\
&= 3(a^2 + b^2 + c^2) .
\end{aligned}$$

Lema 1.1. (Desigualdad de Gronwall). Sea $y(t)$ una función no negativa y $T > 0$. Si existen constantes $A, B \geq 0$ tales que

$$y(t) \leq A + B \int_0^t y(s) ds < \infty \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad (1.19)$$

entonces

$$y(t) \leq Ae^{Bt} \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (1.20)$$

Demostración. Se itera k veces sobre la desigualdad (1.19).

$$\begin{aligned}
y(t) &\leq A + B \int_0^t y(s) ds \\
&\leq A + B \int_0^t \left(A + B \int_0^s y(r) dr \right) ds \\
&\leq A + ABt + B^2 \int_0^t \int_0^s \left(A + B \int_0^r y(q) dq \right) dr ds \\
&\leq A + ABt + \frac{AB^2 t^2}{2!} + B^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^r \left(A + B \int_0^q y(p) dp \right) dq dr ds \\
&\vdots \\
&\leq A \sum_{j=0}^k \frac{(Bt)^j}{j!} + B^{k+1} \underbrace{\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \cdots \int_0^{L^k} \int_0^{L^{k+1}} y(x_{k+2}) dx_{k+2} dx_{k+1} dx_k \cdots dx_2 dx_1}_{I_k = k+1 \text{ integrales}}.
\end{aligned} \quad (1.21)$$

Como $y(t)$ es no negativa entonces para toda $t \in [0, T]$

$$y(t) \leq A + B \int_0^T y(s) ds < \infty.$$

Por lo tanto la integral iterada I_k se puede acotar como

$$I_k \leq \left(\frac{B^k t^{k+1}}{(k+1)!} \right) \left(A + B \int_0^T y(s) ds \right) < \infty. \quad (1.22)$$

Al hacer $k \rightarrow \infty$, el primer sumando de (1.21) es la serie de Taylor de Ae^{Bt} y el segundo sumando converge a 0, por cómo se acotó en (1.22). Por lo tanto

$$y(t) \leq Ae^{Bt}.$$

Lema 1.2. Sea $y_n(t)$ una sucesión de funciones no negativas en $t \in [0, T]$. Si existen constantes $A, B < \infty$ tales que

$$y_0(t) \leq A, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$y_{n+1}(t) \leq B \int_0^t y_n(s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad n \geq 0.$$

Entonces

$$y_n(t) \leq A \frac{B^n t^n}{n!}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración. Se prueba por inducción.

Base ($n = 0$):

$$\frac{B^0 t^0}{0!} = 1 \Rightarrow y_0(t) \leq A \cdot 1 = A.$$

Hipótesis de inducción: Se supone que

$$y_n(t) \leq A \frac{B^n t^n}{n!}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Paso inductivo:

$$\begin{aligned} y_{(n+1)}(t) &\leq B \int_0^t y_n(s) ds \\ &\leq B \int_0^t A \frac{B^n s^n}{n!} ds \\ &= BA \frac{B^n}{n!} \left(\frac{s^{n+1}}{n+1} \Big|_0^t \right) \\ &= A \frac{B^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Lema 1.3. Sean $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ dos procesos definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, continuos por la derecha. Si $\{X_t\}$ es modificación de $\{y_t\}$ entonces los procesos son indistinguibles.

Demostración. Sea $t \in [0, T]$. Como $\{X_t\}$ es modificación de $\{Y_t\}$ entonces

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_t \neq Y_t\}) = 0. \quad (1.23)$$

Se define al conjunto de trayectorias donde los procesos son indistinguibles para toda $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} B &= \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}\} \\ &= \bigcap_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} \\ &= \left(\bigcup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \right)^C \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad del conjunto B es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \right) \\ &\geq 1 - \sum_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sean

$$C = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \text{ es continuo por la derecha}\} \Rightarrow \mathbb{P}(C) = 1,$$

$$D = \{\omega \in \Omega : Y_t(\omega) \text{ es continuo por la derecha}\} \Rightarrow \mathbb{P}(D) = 1.$$

El conjunto $A = B \cap C \cap D$ son las trayectorias donde los procesos son continuos por la derecha e indistinguibles para $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$. Entonces $\mathbb{P}(A) = 1$.

Como $[0, T] \cap \mathbb{Q}$ es denso en $[0, T]$, para todo $t \in [0, T]$ existe una sucesión $\{q_n\} \subset [0, T] \cap \mathbb{Q}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = t.$$

Entonces, por la continuidad por la derecha para todo $\omega \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{q_n} = X_t, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{q_n} = Y_t.$$

Como $X_{q_n}(\omega) = Y_{q_n}(\omega)$ entonces $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $\omega \in A$. Por lo tanto los procesos son indistinguibles.

Demostración Teorema 1.1.

Se comienza demostrando la unicidad de la solución. Sean $\{X_t\}, \{\widehat{X}_t\}$ dos soluciones a la ecuación (1.10) con condición inicial x y \widehat{x} , respectivamente. El objetivo es probar que las soluciones son indistinguibles.

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \int_0^t m(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \\ \widehat{X}_t &= \widehat{x}_0 + \int_0^t m(s, \widehat{X}_s) ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{X}_s) dB_s \\ \Rightarrow X_t - \widehat{X}_t &= (x - \widehat{x}) + \int_0^t (m(s, X_s) - m(s, \widehat{X}_s)) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, \widehat{X}_s)) dB_s. \end{aligned} \quad (1.24)$$

El proceso (1.24) es continuo y del lado derecho de la igualdad se tienen 3 sumandos. Sean

$$a_s = m(s, X_s) - m(s, \widehat{X}_s), \quad \gamma_s = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \widehat{X}_s).$$

Se nota que, por la condición de Lipschitz

$$a_s^2 + \gamma_s^2 \leq D^2 |X_s - \widehat{X}_s|^2.$$

Utilizando la Proposición 1.1

$$\begin{aligned} |X_t - \widehat{X}_t|^2 &= (x - \widehat{x}) + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \gamma_s dB_s \\ &\leq 3|x - \widehat{x}|^2 + 3 \left(\int_0^t a_s ds \right)^2 + 3 \left(\int_0^t \gamma_s dB_s \right)^2. \end{aligned}$$

Al calcular la esperanza de ambos lados de la desigualdad

$$\mathbb{E} \left[|X_t - \widehat{X}_t|^2 \right] \leq 3\mathbb{E} [|x - \widehat{x}|^2] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t a_s ds \right)^2 \right] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \gamma_s dB_s \right)^2 \right].$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left(\int_0^t a_s ds \right)^2 \leq \left(\int_0^t a_s^2 ds \right) \left(\int_0^t 1 ds \right) = t \int_0^t a_s^2 ds.$$

Utilizando la isometría de Itô

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \gamma_s dB_s \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \gamma_s^2 ds \right].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|X_t - \widehat{X}_t|^2 \right] &\leq 3(x - \widehat{x})^2 + 3t\mathbb{E} \left[\int_0^t a_s^2 ds \right] + 3\mathbb{E} \left[\int_0^t \gamma_s^2 ds \right] \\ &= 3(x - \widehat{x})^2 + 3(t+1)\mathbb{E} \left[\int_0^t (a_s^2 + \gamma_s^2) ds \right] \\ &\leq 3(x - \widehat{x})^2 + 3D^2(t+1)\mathbb{E} \left[\int_0^t |X_s - \widehat{X}_s|^2 ds \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Sea $y(t) = \mathbb{E} \left[|X_t - \widehat{X}_t|^2 \right]$, $0 \leq t \leq T$. Claramente, $y(t)$ es una función positiva. Se tiene en (1.25) una desigualdad como en el Lema 1.1. Por lo tanto para toda $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E} \left[|X_t - \widehat{X}_t|^2 \right] \leq 3(x - \widehat{x})^2 e^{3t(T+1)D^2}. \quad (1.26)$$

Recordamos que ambos procesos son solución de (1.10) por lo que $x = \widehat{x}$, entonces $3(x - \widehat{x}) = 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E} \left[|X_t - \widehat{X}_t|^2 \right] \leq 0 &\Rightarrow \mathbb{E} \left[|X_t - \widehat{X}_t|^2 \right] = 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{E} |X_t - \widehat{X}_t| = 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(X_t = \widehat{X}_t) = 1 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

El proceso $\{X_t\}$ es una versión del proceso $\{\widehat{X}_t\}$. Como los procesos son soluciones entonces son continuos, y en particular son ambos continuos por la derecha. Por el Lema 1.3 se concluye que $\{X_t\}$ y $\{\widehat{X}_t\}$ son indistinguibles. Es decir

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \quad \forall t \in [0, T]) = 1. \quad (1.27)$$

De esta forma concluye la demostración para unicidad de las soluciones fuertes.

Se demuestra la existencia de $\{X_t\}$; la solución fuerte, continua y adaptada. Se construye de forma iterativa la siguiente sucesión de procesos $(\{X_t^{(n)}\})_{n \geq 0}$ ¹

$$\begin{cases} X_t^{(0)} &= x \\ X_t^{(n+1)} &= x + \int_0^t m(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s. \end{cases} \quad (1.28)$$

Afirmación. $(\{X_t^{(n)}\})_{n \geq 0} \in L^2(\mathbb{P})$.

Demostración. Se prueba por inducción.

Base: ($n = 0$) $X_t^{(0)} = x$ es una constante, por lo tanto el proceso es continuo. Además

$$\mathbb{E}|x|^2 < \infty.$$

Hipótesis de inducción Se supone que para $n \geq 1$ el proceso $\{X_t^{(n)}\}$ es continuo y está en $L^2(\mathbb{P})$.

Paso inductivo: El proceso

$$X_t^{(n+1)} = x + \int_0^t m(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s$$

es continuo. La primera integral es continua pues es integrable. La segunda integral es continua por ser una integral estocástica. Usando la desigualdad (1.1)

$$\mathbb{E} \left[|X_t^{(n+1)}|^2 \right] \leq 3x^2 + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t m(s, X_s^{(n)}) ds \right)^2 \right] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s \right)^2 \right].$$

¹Los corchetes indican que se habla de un proceso y los paréntesis que se habla de una sucesión.

Por hipótesis de inducción las siguientes integrales son finitas

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t m(s, X_s^{(n)}) ds \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[t \int_0^t m(s, X_s^{(n)})^2 ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[t \int_0^t C^2 (1 + |X_s^{(n)}|)^2 ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[t \int_0^t 2C^2 (1 + (X_s^{(n)})^2) ds \right] < \infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})^2 ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t C^2 (1 + |X_s^{(n)}|)^2 ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t 2C^2 (1 + (X_s^{(n)})^2) ds \right] < \infty.\end{aligned}$$

Así, se obtiene que $|X_t^{(n+1)}|$ es cuadrado integrable.

$$\mathbb{E} [|X_t^{(n+1)}|^2] < \infty.$$

Por lo tanto se tiene que $(X_t^{(n)})$ es una sucesión de procesos continuos en $L^2(\mathbb{P})$ y termina la demostración de la Afirmación.

Ahora se prueba que la sucesión converge. Usando la Proposición 1.1, la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la primera integral, la isometría de Itô en la segunda integral, y la condición de Lipschitz

$$X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} = \int_0^t (m(s, X_s^{(n)}) - m(s, X_s^{(n-1)})) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s.$$

Calculando la esperanza

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2] &\leq 2\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (m(s, X_s^{(n)}) - m(s, X_s^{(n-1)})) ds \right)^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right)^2 \right] \\ &\leq 2t\mathbb{E} \left[\int_0^t (m(s, X_s^{(n)}) - m(s, X_s^{(n-1)}))^2 ds \right] + 2\mathbb{E} \left[\int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)}))^2 ds \right] \\ &\leq 2(T+1)D^2 \int_0^t \mathbb{E} [|X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)}|^2] ds.\end{aligned}$$

Usando la condición de crecimiento lineal

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 \right] &\leq 2\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t m(s, X_t^{(0)}) ds \right)^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_t^{(0)}) dB_s \right)^2 \right] \\
&\leq 2\mathbb{E} \left[t \int_0^t C^2(1 + |x|)^2 ds \right] + 2\mathbb{E} \left[\int_0^t C^2(1 + |x|)^2 ds \right] \\
&\leq 2tC^2(1 + |x|)^2(1 + t) \\
&\leq 4TC^2(1 + x^2)(1 + T).
\end{aligned}$$

Sean $A_1 = 4TC^2(1 + x^2)(1 + T)$, $A_2 = 2(T + 1)D^2$, ambas constantes positivas. Consideramos a la sucesión de funciones positivas

$$y_n(t) = \mathbb{E} \left[|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right].$$

Utilizando el Lema 1.2

$$0 \leq \mathbb{E} \left[|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right] \leq A_1 \frac{A_2^n t^n}{n!} \leq A_1 \frac{A_2^n T^n}{n!} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.29)$$

Al calcular el límite del lado derecho de la desigualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1 \frac{A_2^n T^n}{n!} = 0.$$

Entonces se puede acotar el límite de la esperanza como

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right] \leq 0, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right] &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto hay convergencia en $L^2(\mathbb{P})$. El siguiente paso es calcular el límite en $L^2(\mathbb{P})$ de la sucesión.

$$X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{(n)}.$$

Por la condición de Lipschitz

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E} \left[|m(s, X_s^{(n)}) - m(s, X_s)|^2 \right] \leq D^2 \mathbb{E} \left[|X_s^{(n)} - X_s|^2 \right] \\
0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|m(s, X_s^{(n)}) - m(s, X_s)|^2 \right] \leq 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|m(s, X_s^{(n)}) - m(s, X_s)|^2 \right] &= 0.
\end{aligned} \quad (1.30)$$

Análogamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)|^2 \right] = 0. \quad (1.31)$$

Por lo tanto se tienen los siguientes límites en $L^2(\mathbb{P})$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} m(s, X_s^{(n)}) &= m(s, X_s), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(s, X_s^{(n)}) = \sigma(s, X_s) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{(n)} &= X_t = x + \int_0^t m(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.
\end{aligned} \quad (1.32)$$

En conclusión, se ha probado que existe el proceso continuo $\{X_t\}$ y en $L^2(\mathbb{P})$ que satisface (1.12) y termina la prueba del Teorema 1.1.

1.4. Ecuación de Tanaka

En el siguiente ejemplo se trabaja con una ecuación diferencial estocástica que tiene solución débil pero no fuerte. Se encuentra la solución débil y se prueba por qué no es una solución fuerte.

Ejemplo 1.1. (*Ecuación de Tanaka*) Consideremos la función $g(x) = |x|$. Si aplicáramos la fórmula de Itô a $g(B_t)$ tendríamos

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(B_s)ds.$$

Sin embargo esto no es posible, pues g no es una función de clase C^2 . Para solucionar el problema definimos a las siguientes funciones. Sea $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon} \right), & |x| < \varepsilon \end{cases} \quad (1.33)$$

Notemos que si $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$g'_\varepsilon(x) = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto

$$\int_0^t g'_\varepsilon(B_s) \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} dB_s = \int_0^t \frac{B_s}{\varepsilon} \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} dB_s.$$

Probemos que la integral anterior converge en $L^2(\mathbb{P})$ a 0 si $\varepsilon \rightarrow 0$. Por isometría de la integral estocástica, y dado que $B_s < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \frac{B_s}{\varepsilon} \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} dB_s \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} ds \right] \\ &= \int_0^t \mathbb{E} [\mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)}] ds \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)) ds. \end{aligned}$$

Notemos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)) = \mathbb{P}(B_s = 0) = 0$. Por lo tanto si $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_0^t g'_\varepsilon(B_s) \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} dB_s \xrightarrow{L^2} 0.$$

Si $|B_s| > \varepsilon$ entonces

$$\int_0^t g'_\varepsilon(B_s) \mathbb{1}_{B_s \notin (-\varepsilon, \varepsilon)} dB_s = \int_0^t \text{sign}(B_s) \mathbb{1}_{B_s \notin (-\varepsilon, \varepsilon)} dB_s,$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Por otro lado la segunda derivada de g_ε es

$$g''_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \end{cases}. \quad (1.35)$$

Entonces

$$\frac{1}{2} \int_0^t g''_\varepsilon(B_s) ds = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} ds.$$

Aplicando la fórmula de Itô a $g_\varepsilon(B_t)$

$$g_\varepsilon(B_t) = g_\varepsilon(B_0) + \int_0^t \left(g'_\varepsilon(B_s) \mathbb{1}_{B_s \notin (-\varepsilon, \varepsilon)} + g'_\varepsilon(B_s) \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \right) dB_s + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} ds.$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s + L^t \quad (1.36)$$

donde L^t es el tiempo local del movimiento browniano en 0

$$L^t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)} ds.$$

Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t = \text{sign}(X_t) dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases}. \quad (1.37)$$

La función $\sigma(t, x) = \text{sign}(x)$ no es continua. Por lo tanto no cumple la condición de Lipschitz y la ecuación diferencial no tiene una solución fuerte, pero sí tiene una solución débil. Definamos para $\{\widehat{B}_s\}$ un movimiento browniano definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

$$Y_t = \int_0^t \text{sign}(\widehat{B}_s) d\widehat{B}_s.$$

Teorema 1.2. ² Sea $dY_t = v dB_t$ un proceso de Itô con condición inicial $Y_0 = 0$. El proceso coincide en ley con un movimiento browniano si y sólo si $v^2 = 1$ casi seguramente.

Por el teorema anterior $\{Y_t\}$ coincide en ley con un movimiento browniano. Entonces

$$dY_t = \text{sign}(\widehat{B}_t) d\widehat{B}_t.$$

Despejando $d\widehat{B}_t$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{sign}(\widehat{B}_t)} dY_t &= d\widehat{B}_t, \\ d\widehat{B}_t &= \text{sign}(\widehat{B}_t) dY_t. \end{aligned}$$

²Una redacción más formal y prueba de este teorema se puede encontrar en [10] p. 143-146.

Por lo tanto $\{\widehat{B}_t\}$ es una solución débil para la ecuación diferencial estocástica (1.37). Por la igualdad (1.36)

$$Y_t = |\hat{B}_t| - |\hat{B}_0| - L^t.$$

Se tiene la siguiente contención de filtraciones

$$\sigma(Y_s : 0 \leq s \leq t) \subset \sigma(|\hat{B}_s| : 0 \leq s \leq t) \subset \sigma(\hat{B}_s : 0 \leq s \leq t). \quad (1.38)$$

Supongamos que $\{X_t\}$ es una solución fuerte para (1.37). En ese caso $\{B_t\}$ es un movimiento browniano y $\{X_t\}$ es adaptado a la filtración generada por $\{B_t\}$.

$$dX_t = \text{sign}(X_t)dB_t.$$

Despejando dB_t y usando que $\text{sign}(X_t) = \text{sign}(X_t)^{-1}$

$$dB_t = \text{sign}(X_t)dX_t.$$

Es decir que $\{X_t\}$ coincide en ley con un browniano. Usando la misma idea que en (1.38) se tiene

$$\sigma(B_s : 0 \leq s \leq t) \subset \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)!!!$$

Se tiene que X_t no es adaptado a la filtración browniana, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la ecuación de Tanaka no tiene soluciones fuertes.

2. Simulación de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

La segunda sección de este trabajo tiene que ver con la simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas a partir de métodos numéricos. El objetivo es tener simulaciones computacionales de trayectorias de diferentes procesos de difusión. Se definen los métodos de Euler y Milstein. Después se define la transformación de Lamperti, utilizada para dar una relación entre los dos métodos anteriores.

Se simulan algunos procesos de difusión utilizando alguno de los dos métodos. Las difusiones simuladas son: movimiento browniano, movimiento browniano geométrico, proceso de Vasicek y puentes brownianos. También se simulan puentes de difusión con una metodología distinta a la usada para los anteriores procesos. Para cada difusión se muestran gráficos con trayectorias simuladas.

Sea $\{X_t\}$ un proceso de difusión, solución a la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} dX_t = m(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t), & 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definición 2.1. Consideremos el intervalo de tiempo $[0, T]$ y la partición $\Pi_N([0, T])$

$$\Pi_N([0, T]) = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\}. \quad (2.2)$$

En las simulaciones de este trabajo se utilizará un partición uniforme con $\Delta t = 10^{-3}$

$$\Pi_N([0, T]) = \left\{ t_i = \frac{iT}{N} : i = 0, 1, \dots, N \right\}. \quad (2.3)$$

Se define \mathbf{Y}_N , la *discretización o aproximación* del proceso $\mathbf{X} = \{X_t\}$ correspondiente a $\Pi_N([0, T])$ como es el conjunto de observaciones

$$\mathbf{Y}_N = \{X_{t_i} : i = 0, 1, \dots, N\}.$$

2.1. Método de Euler

Definición 2.2. El proceso estocástico continuo \mathbf{Y} es la *aproximación de Euler* de \mathbf{X} si satisface el siguiente esquema iterativo:

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + m(t_i, Y_{t_i})\Delta t_i + \sigma(t_i, Y_{t_i})\Delta B_{t_i}. \quad (2.4)$$

Donde

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i,$$

$$\Delta B_{t_i} = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}, \quad \Delta B_{t_i} \sim N(0, \Delta t_i),$$

para $i = 0, 1, \dots, N-1$ y $Y_0 = X_0$. Cuando el incremento en el tiempo es constante se define

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = T/N,$$

$$\Delta B_t = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}, \quad \Delta B_t \sim N(0, \Delta t).$$

Para que el proceso sea continuo se define Y_t haciendo interpolación lineal.

$$Y_t = Y_{t_i} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (2.5)$$

2.2. Método de Milstein

El método de Milstein añade un término de segundo orden al esquema de Euler. Se utiliza la fórmula de Itô para mejorar la aproximación del proceso.

Definición 2.3. Utilizando el mismo proceso y discretización que en el método de Euler, el proceso continuo \mathbf{Y} es la *aproximación de Milstein* de \mathbf{X} si satisface el siguiente sistema iterativo:

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + m(t_i, Y_{t_i})\Delta t_i + \sigma(t_i, Y_{t_i})\Delta B_{t_i} + \frac{1}{2}\sigma(t_i, Y_{t_i})\sigma'(t_i, Y_{t_i})((\Delta B_{t_i})^2 - \Delta t_i). \quad (2.6)$$

Como $\Delta B_{t_i} \sim N(0, \Delta t_i)$ entonces $\Delta B_{t_i} = \sqrt{\Delta t_i}Z$ donde $Z \sim N(0, 1)$. Por lo tanto

$$(\Delta B_{t_i})^2 - \Delta t_i = \Delta t_i Z^2 - \Delta t_i.$$

El esquema de Milstein se puede escribir también de la siguiente forma

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + m(t_i, Y_{t_i})\Delta t_i + \sigma(t_i, Y_{t_i})\sqrt{\Delta t_i}Z + \frac{1}{2}\sigma(t_i, Y_{t_i})\sigma'(t_i, Y_{t_i})\Delta t_i(Z^2 - 1). \quad (2.7)$$

2.3. Transformación de Lamperti

A continuación se define la transformación de Lamperti, la cual se usará para dar una relación entre los esquemas de Milstein y Euler.

Sea $\{X_t\}$ un proceso que satisface una ecuación diferencial estocástica, cuyo coeficiente de difusión depende únicamente del proceso

$$dX_t = m(t, X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t. \quad (2.8)$$

Definición 2.4. La *transformación de Lamperti* de $\{X_t\}$ (definido como en (2.8)) es

$$Y_t = F(X_t) = \int_z^{X_t} \frac{1}{\sigma(u)} du, \quad (2.9)$$

donde z es un elemento arbitrario del espacio de estados de $\{X_t\}$

La transformación de Lamperti permite transformar la ecuación (2.8) a una ecuación con coeficiente de difusión unitario. Esto se verifica aplicando la fórmula III de Itô a $Y_t = F(X_t)$.

$$\begin{aligned} dF(X_t) &= \left(m(t, X_t)F'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)F''(X_t) \right) dt + \sigma(X_t)F'(X_t)dB_t \\ &= \left(\frac{m(t, X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)\frac{\sigma'(X_t)}{\sigma^2(X_t)} \right) dt + \frac{\sigma(X_t)}{\sigma(X_t)}dB_t. \end{aligned}$$

$$dY_t = \left(\frac{m(t, X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma'(X_t) \right) dt + dB_t$$

2.4. Relación Euler y Milstein

A diferencia del método de Euler, el método de Milstein añade un término que involucra la primera derivada del coeficiente de difusión. Este término permite refinar el esquema de Euler. Ahora bien, si el proceso tiene un coeficiente de difusión constante se anulará el término adicional. Por lo tanto no habría diferencia entre aproximar dicho proceso con uno u otro método.

Consideremos $\{X_t\}$ un proceso como en (2.1). Sea $Y_t = F(X_t)$, donde $F(x) = y$ es la transformación de Lamperti. Utilizando la fórmula III de Itô

$$dY_t = \left(F'(X_t)m(t, X_t) + \frac{1}{2}F''(X_t)\sigma^2(t, X_t) \right) dt + F'(X_t)\sigma(t, X_t)dB_t.$$

Al aplicar la transformación se obtiene

$$dY_t = \left(\frac{m(t, X_t)}{\sigma(t, X_t)} - \frac{1}{2}\sigma'(t, X_t) \right) dt + dB_t.$$

La aproximación de Euler para Y_t es

$$\begin{aligned} Y_{t_{i+1}} &= Y_{t_i} + \left(\frac{m(t_i, X_{t_i})}{\sigma(t_i, X_{t_i})} - \frac{1}{2}\sigma'(t_i, X_{t_i}) \right) \Delta t_i + \Delta B_{t_i}. \\ \Delta Y_{t_i} &= \left(\frac{m(t_i, X_{t_i})}{\sigma(t_i, X_{t_i})} - \frac{1}{2}\sigma'(t_i, X_{t_i}) \right) \Delta t_i + \sqrt{\Delta t_i}Z. \end{aligned}$$

Sea $G(y) = F^{-1}(y)$ la función inversa de F .

$$\begin{aligned} G'(y) &= (F^{-1}(y))' = \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} = \sigma(t, G(y)), \\ G''(y) &= (\sigma(t, G(y)))' = \sigma'(t, G(y))G'(y) = \sigma'(t, G(y))\sigma(t, G(y)). \end{aligned}$$

La serie de Taylor de G es

$$G(y) = G(h) + G'(h)(y - h) + \frac{1}{2}G''(h)(y - h)^2 + O((y - h)^3)$$

Si $y = Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \Delta Y_{t_i}$ y $h = Y_{t_i}$, entonces $y - h = \Delta Y_{t_i}$.

$$\begin{aligned} G(Y_{t_{i+1}}) &= G(Y_{t_i}) + G'(Y_{t_i})\Delta Y_{t_i} + \frac{1}{2}G''(Y_{t_i})(\Delta Y_{t_i})^2 + O((\Delta Y_{t_i})^3) \\ &= G(Y_{t_i}) + \sigma(t_i, G(Y_{t_i})) \left[\left(\frac{m(t_i, X_{t_i})}{\sigma(t_i, X_{t_i})} - \frac{1}{2}\sigma'(t_i, X_{t_i}) \right) \Delta t_i + \sqrt{\Delta t_i}Z \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma'(t_i, G(Y_{t_i}))\sigma(t, G(Y_{t_i})) \left[\left(\frac{m(t_i, X_{t_i})}{\sigma(t_i, X_{t_i})} - \frac{1}{2}\sigma'(t_i, X_{t_i}) \right) \Delta t_i + \sqrt{\Delta t_i}Z \right]^2 + O((\Delta Y_{t_i})^3) \\ &= G(Y_i) + \left(m(t_i, X_{t_i}) - \frac{1}{2}\sigma(t_i, X_{t_i})\sigma'(t_i, X_{t_i}) \right) \Delta t_i + \sigma(t_i, X_{t_i})\sqrt{\Delta t_i}Z \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma(t_i, X_{t_i})\sigma'(t_i, X_{t_i})\Delta t_i Z^2 + O((\Delta t_i)^{3/2}). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta G(Y_{t_i}) &= \left(m(t_i, X_{t_i}) - \frac{1}{2} \sigma(t_i, X_{t_i}) \sigma'(t_i, X_{t_i}) \right) \Delta t_i + \sigma(t_i, X_{t_i}) \sqrt{\Delta t_i} Z \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma(t_i, X_{t_i}) \sigma'(t_i, X_{t_i}) \Delta t_i Z^2 + O((\Delta t_i)^{3/2}).\end{aligned}$$

Utilizando (2.7) se tiene que la aproximación de Milstein de \mathbf{X} es

$$\begin{aligned}\Delta X_{t_i} &= \left(m(t_i, X_{t_i}) - \frac{1}{2} \sigma(t_i, X_{t_i}) \sigma'(t_i, X_{t_i}) \right) \Delta t_i + \sigma(t_i, X_{t_i}) \sqrt{\Delta t_i} Z \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma(t_i, X_{t_i}) \sigma'(t_i, X_{t_i}) \Delta t_i Z^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de Milstein de $\{X_t\}$ y la aproximación de Euler de la transformada del proceso son equivalentes hasta el orden Δt .

2.5. Simulación de Algunas Difusiones

2.5.1. Movimiento Browniano

Existen diferentes formas de simular el movimiento browniano. En este trabajo se utilizará la propiedad de incrementos estacionarios para generar las trayectorias.

Algoritmo 1 : Simulación Movimiento Browniano

- 1: Dado $[0, T]$ un intervalo de tiempo, generar una partición uniforme con N subintervalos como en (2.3). El tamaño de paso será $\Delta t = T/N$.
- 2: Generar N variables aleatorias con distribución $X_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ para $i = 1, \dots, N$, $X_0 = 0$.
- 3: Se hace una suma acumulada sobre las variables aleatorias, obteniendo una trayectoria simulada del proceso.

$$\left\{ B_{t_i} = \sum_{j=0}^i X_{t_j} : i = 0, 1, \dots, N \right\}.$$

En la Figura 1 se simulan múltiples trayectorias de un movimiento browniano estándar para un tiempo $T = 10$. En la Figura 2 se simula un movimiento browniano con $\mu = 1$, $\sigma = 0.5$ y $x_0 = -8$.

En la segunda Figura, como la media es positiva las trayectorias tienden a crecer. Se observa menos ruido en las trayectorias de la Figura 2. Esto es porque la varianza de 0.3 es menor a la de un browniano estándar como en la Figura 1.

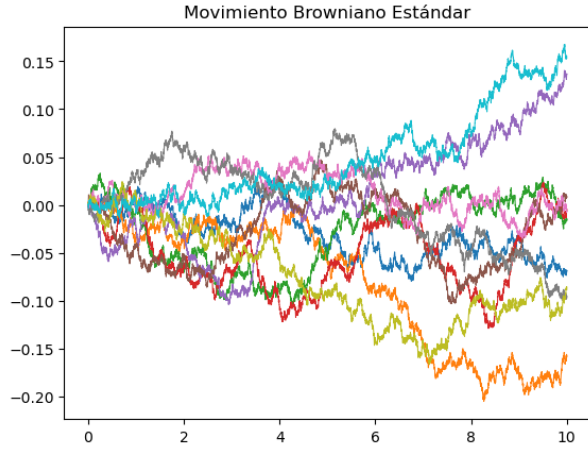


Figura 1

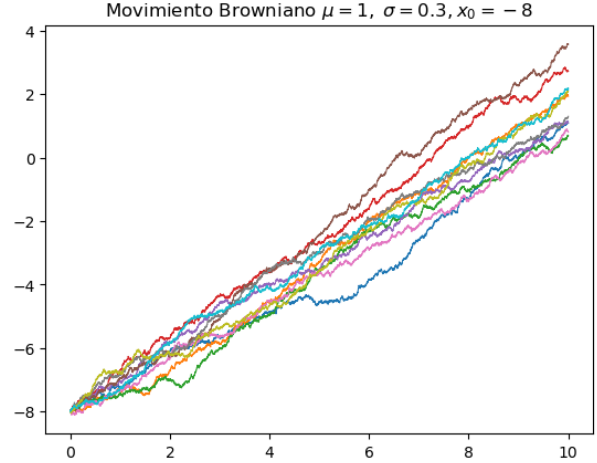


Figura 2

2.5.2. Movimiento Browniano Geométrico

El movimiento browniano geométrico con coeficientes de deriva μ y difusión σ es solución a la ecuación diferencial

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0. \quad (2.10)$$

Simulando con el método de Milstein se tiene el siguiente sistema iterativo

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \mu X_{t_i} \Delta t + \sigma X_{t_i} \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} \sigma X_{t_i} \Delta t (Z^2 - 1), \quad i = 1, \dots, N.$$

En las Figuras 3 y 4 se simulan trayectorias del movimiento browniano geométrico, con condición inicial $X_0 = 1$. En la Figura 3 se tienen tres trayectorias simuladas con diferentes coeficientes de deriva. Así como en el modelo continuo, en el modelo simulado las trayectorias con un coeficiente μ mayor tienen pendientes mayores. En las trayectorias simuladas en la Figura 4 se varía el coeficiente de difusión. Como es de esperar por el modelo teórico, la simulación con $\sigma = 0.1$ tiene poca varianza comparada con la de parámetro $\sigma = 1.2$.

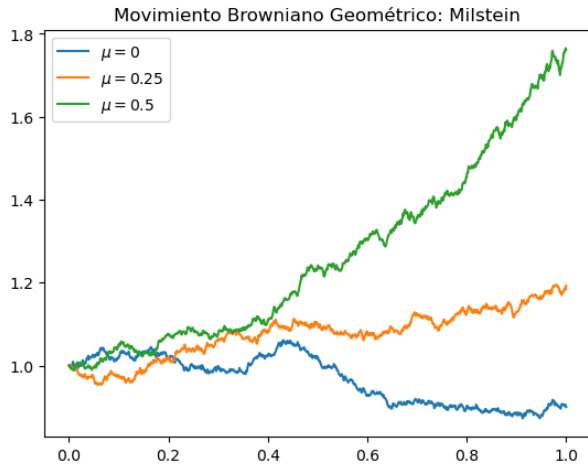


Figura 3: $T = 1, \sigma = 0.1$

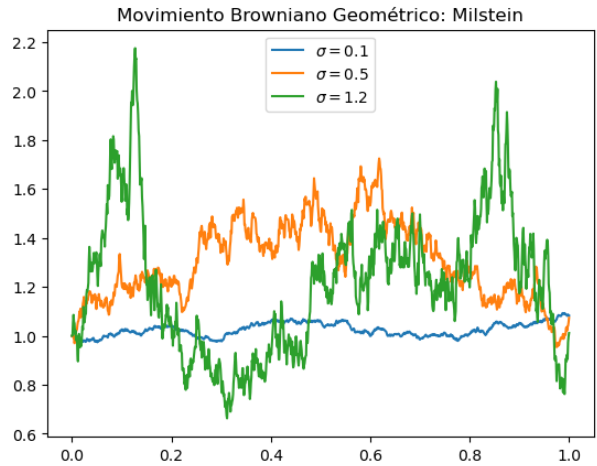


Figura 4: $T = 1, \mu = 0$

El proceso puede ser simulado también usando el método de Euler. Para ello se aplica la transformación de Lamperti.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma} \ln(x) \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sigma x}, \quad F''(x) = -\frac{1}{\sigma x^2}.$$

Sea $F(X_t)$ la transformación de Lamperti del movimiento browniano geométrico $\{X_t\}$.

$$dF(X_t) = \left(\frac{\mu X_t}{\sigma X_t} - \frac{1}{2}\sigma \right) dt + dB_t$$

$$d \ln(X_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t$$

$$\ln(X_{t_{i+1}}) = \ln(X_{t_i}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z$$

$$X_{t_{i+1}} = \exp \left(\ln(X_{t_i}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right).$$

En las Figuras 5 y 6 se simulan trayectorias usando el método de Euler y la transformación de Lamperti. Se varían los parámetros de la misma manera que en el esquema de Milstein.

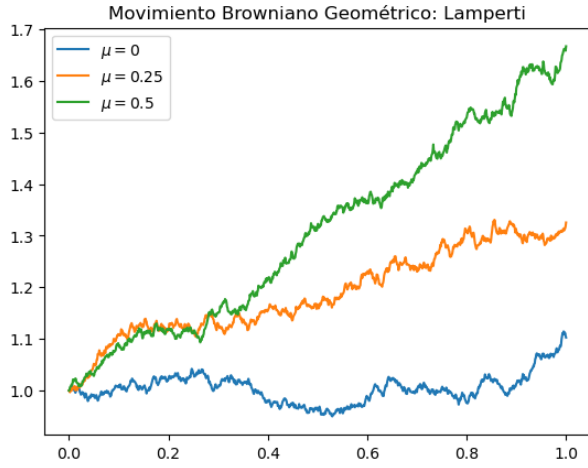


Figura 5: $T = 1, \sigma = 0.1$

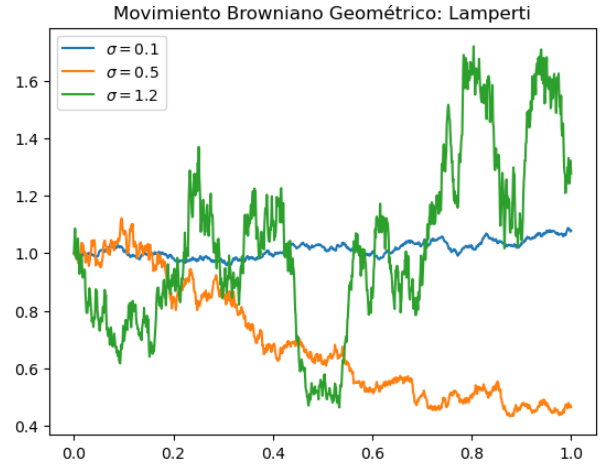


Figura 6: $T = 1, \mu = 0$

El comportamiento de las simulaciones usando el método de Euler coincide con las trayectorias simuladas usando el método de Milstein.

2.5.3. Proceso de Vasicek

El proceso de Vasicek es solución a la ecuación diferencial

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dB_t. \quad (2.11)$$

$$a, b, \sigma \in \mathbb{R}, \quad a, \sigma > 0, \quad X_0 = x_0 \geq 0.$$

Como tiene un coeficiente de difusión constante se aproxima usando el esquema de Euler. Se sigue el sistema iterativo

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a(b - X_{t_i})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z.$$

En la Figura 7 se simulan dos procesos con los mismos parámetros pero con diferente condición inicial y diferente parámetro a . Recordando que $b = 0.75$ representa la media a largo plazo y a representa la velocidad de reversión a la media, se puede ver cómo ambos procesos se aproximan a la media conforme avanzan en el tiempo. La trayectoria roja se aproxima más rápido que la rosa, ya que su velocidad de reversión es mayor.

Las trayectorias simuladas en la Figura 8 tienen misma condición inicial y coeficiente a , pero diferente coeficiente b y diferente volatilidad σ . Cada trayectoria toma valores cercanos a b conforme avanza el tiempo. La trayectoria roja tiene mayor volatilidad que la rosa, pues su coeficiente σ es mayor.

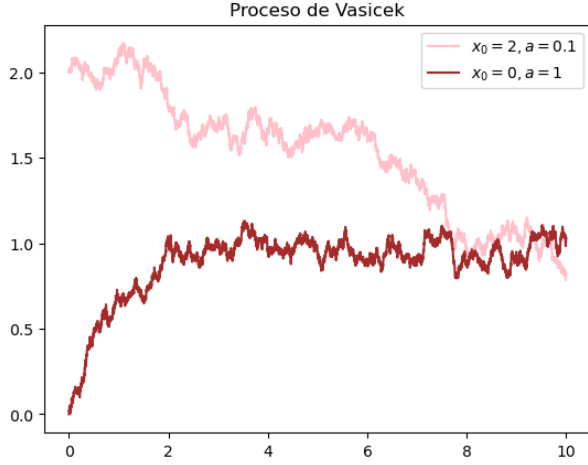


Figura 7: $T = 10, b = 0.75, \sigma = 0.2$

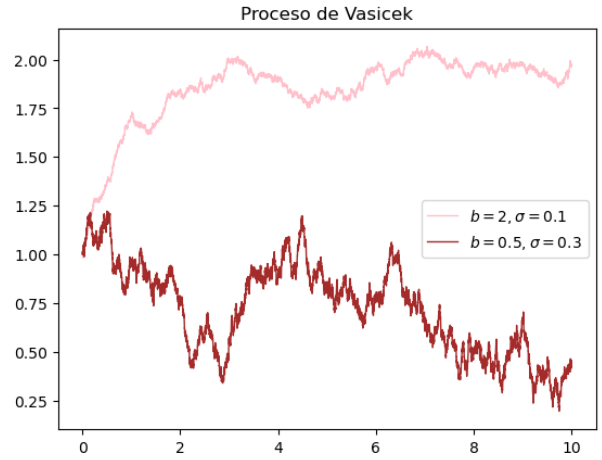


Figura 8: $T = 10, a = 1$

2.5.4. Puente Browniano

Un puente browniano es un proceso con misma distribución que un movimiento browniano estándar, con condición inicial $X_0 = a$, pero condicionado a tomar el valor $X_T = b$. Es solución a la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t = \frac{b-X_t}{T-t} dt + dB_t, & t \in [0, T] \\ X_0 = a \end{cases}. \quad (2.12)$$

El proceso tiene un coeficiente de difusión unitario, por lo tanto en este caso el método de Euler coincide con el de Milstein. Se aproxima el proceso de la siguiente forma

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \left(\frac{b - X_{t_i}}{T - t_i} \right) \Delta t + \sqrt{\Delta t} Z.$$

En la Figura 9 se simulan diferentes trayectorias de un puente browniano con parámetros $a = 0, b = 2$ y $T = 1$. Todas las trayectorias comienzan en 0 y terminan en 2.

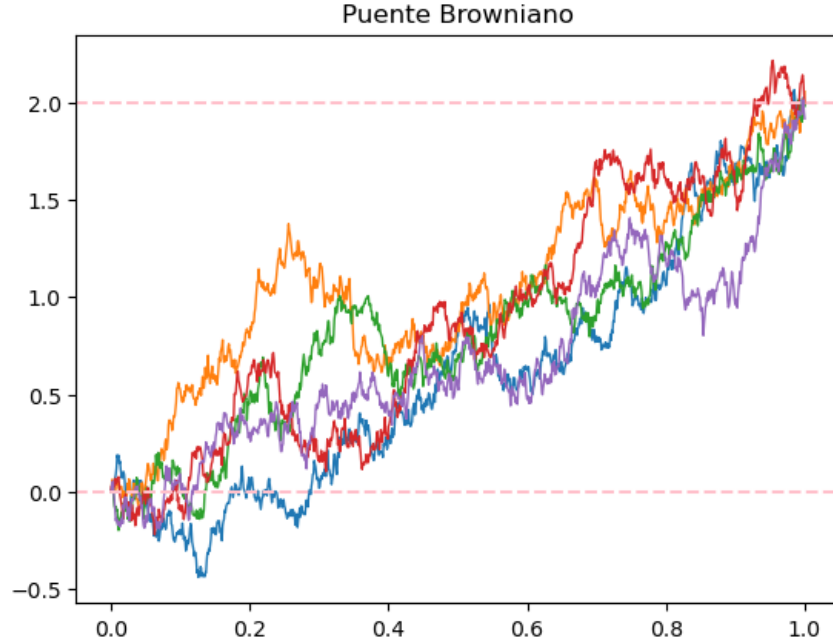


Figura 9: $T = 1, a = 0, b = 2$

2.5.5. Simulación Puente de Difusión

Definición 2.5. Sea $\{X_t\}$ un proceso de difusión como en la Definición 1.6

$$\begin{cases} dX_t = m(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Se dice que $\{X^{T,b}\} = \{X_t^{T,b} : t \in [0, T]\}$ es un *puente de difusión* si tiene la misma distribución de probabilidad que $\{X_t\}$ condicionado a $X_T = b$.

Notación. Se denota como $(0, a, T, b)$ -puente al proceso $\{X^{T,b}\}$. Si el proceso es solución a (2.13) pero $X_{t_1} = a$ y $X_{t_2} = b$, con $t_1 < t_2 \in [0, T]$ se denota como (t_1, a, t_2, b) -puente.

Los procesos hasta ahora simulados tienen una representación como solución a una ecuación diferencial estocástica. Por lo tanto, se pueden usar usando los métodos de Euler o Milstein. Sin embargo los puentes de difusión no siempre se pueden representar de esta forma, por lo que se usará otra técnica para la simulación de trayectorias.

Sea $\{X_t\}$ como en la Definición 2.5. Sean B_1 y B_2 dos movimientos brownianos independientes. Se definen $\{X_t^1\}$ y $\{X_t^2\}$ como las soluciones a las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} dX_t^1 = m(t, X_t^1)dt + \sigma(t, X_t^1)dB_t^1 \\ X_0^1 = a, a \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad \begin{cases} dX_t^2 = m(t, X_t^2)dt + \sigma(t, X_t^2)dB_t^2 \\ X_0^2 = b, b \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Se discretiza el intervalo de tiempo $[0, T]$ utilizando una partición uniforme $\Pi_N([0, T])$ como en (2.3). Usando tal partición se definen $\{Y_{t_i}^1\}$ y $\{\tilde{Y}_{t_i}^2\}$ aproximaciones para $\{X_t^1\}$ y $\{X_t^2\}$, respectivamente.

Consideremos $\{\tilde{Y}_{t_i}^2\} = \{Y_{t_{N-i}}^2\}$ el proceso a tiempo reverso de $\{Y_{t_i}^2\}$. Notamos que

$$\tilde{Y}_T^2 = Y_0^2 = b.$$

Se simulan trayectorias de $\{Y_{t_i}^1\}$ y $\{\tilde{Y}_{t_i}^2\}$ hasta que haya un cruce entre ellas. Por ser discretizaciones, la única manera computacional de detectar un cruce es si hay i tal que $Y_{t_i}^1 \leq \tilde{Y}_{t_i}^2$ y $Y_{t_{i+1}}^1 \geq \tilde{Y}_{t_{i+1}}^2$ o $\tilde{Y}_{t_i}^2 \leq Y_{t_i}^1$ y $\tilde{Y}_{t_{i+1}}^2 \geq Y_{t_{i+1}}^1$. Se define ν como

$$\nu = \begin{cases} \min \left\{ i \in \{1, \dots, N\} : Y_{t_i}^1 \leq \tilde{Y}_{t_i}^2 \right\} & \text{si } Y_0^1 \geq \tilde{Y}_0^2 \\ \min \left\{ i \in \{1, \dots, N\} : Y_{t_i}^1 \geq \tilde{Y}_{t_i}^2 \right\} & \text{si } Y_0^1 \leq \tilde{Y}_0^2 \end{cases}.$$

Entonces una aproximación del $(0, a, T, b)$ -puente es

$$Y_{t_i} = \begin{cases} Y_{t_i}^1 & i = 0, 1, \dots, \nu - 1 \\ \tilde{Y}_{t_i}^2 & i = \nu, \dots, N \end{cases}. \quad (2.14)$$

Es decir, antes del cruce se construye con los valores de $\{Y_{t_i}^1\}$ y después del cruce con $\{\tilde{Y}_{t_i}^2\}$. Existe la probabilidad de que las trayectorias no se crucen. Esta depende de la longitud del intervalo, los coeficientes de deriva y difusión y la distancia entre a y b .

La justificación teórica se basa en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. ³ Sea $\tau = \inf\{t \in [0, T] : X_t^1 = X_{T-t}^2\}$ ($\inf \emptyset = \infty$). Se define

$$Z_t = \begin{cases} X_t^1 & 0 \leq t \leq \tau \\ X_{T-t}^2 & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

Entonces la distribución de $\{Z_t : 0 \leq t \leq T\}$ condicionado a $\{\tau \leq T\}$ es igual a la distribución condicional de $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ dado $X_0 = a$ y $X_T = b$. Es decir, $\{Z_t\}$ es un $(0, a, T, b)$ -puente.

Ejemplo 2.1. Consideremos $\{X_t\}$ un proceso de Vasicek que satisface la siguiente ecuación

$$dX_t = 0.1(6 - X_t)dt + \sigma dB_t, t \in [0, 10].$$

En la Figura 10 se muestran diferentes trayectorias simuladas de un $(0, 5, 10, 8)$ -puente de difusión para el proceso $\{X_t\}$ variando el coeficiente σ . Al igual que se vio en la Figura 8 entre mayor sea el valor de σ mayor será la volatilidad.

Notamos también que la trayectoria con mayor volatilidad cruza más seguido las barreras rosas. En cambio, la trayectoria azul con menor volatilidad llega de a a b casi sin salirse de las líneas.

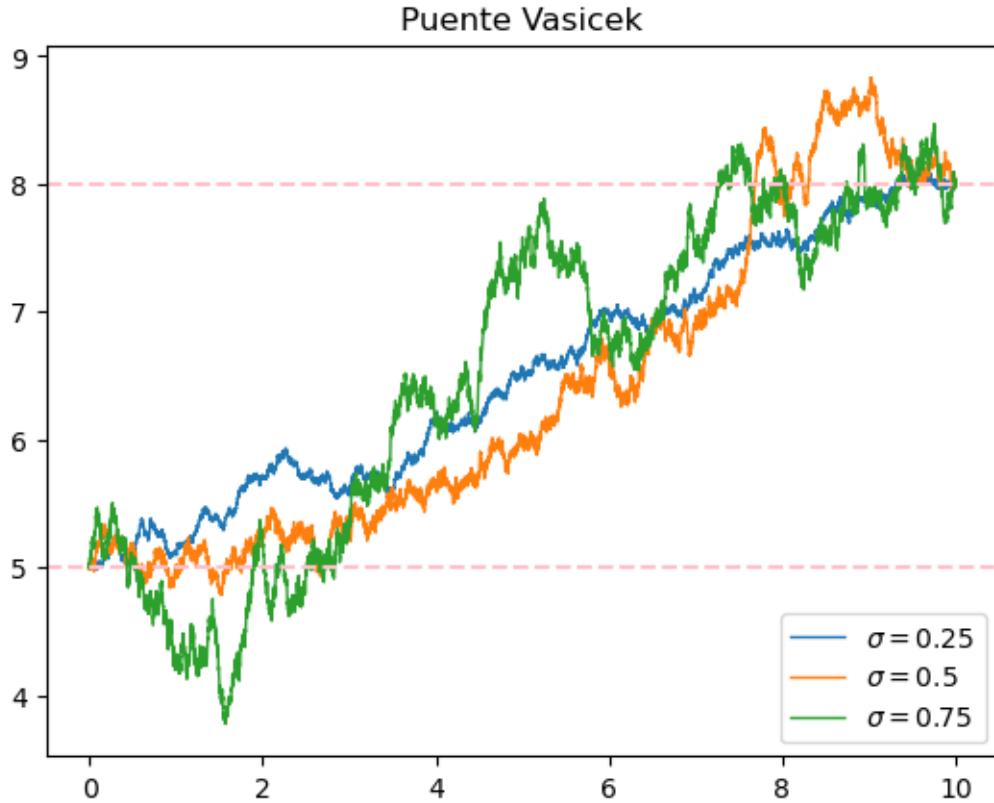


Figura 10: $T = 10, a = 5, b = 8$

³La prueba del teorema puede ser consultada en [3]

Referencias

- [1] Mun-Jin Bae, Chan-Ho Park y Young-Ho Kim. “An Existence and Uniqueness Theorem of Stochastic Differential Equations and the Properties of Their Solution”. En: *Journal of applied mathematics informatics* 37.5₆ (2019), págs. 491-506.
- [2] Fernando Baltazar-Larios y Sergio Iván López Ortega. *Simulación Estocástica*. 2023.
- [3] Mogens Bladt y Michael Sørensen. “Simple simulation of diffusion bridges with application to likelihood inference for diffusions”. En: *Bernoulli* 20.2 (mayo de 2014). DOI: 10.3150/12-bej501. URL: <https://doi.org/10.3150/12-bej501>.
- [4] Anindya Goswami. *Probabilistic Methods in PDE*. IISER Pune, 2020.
- [5] Stefano M. Iacus. *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. Springer, 2008.
- [6] Peter E. Kloeden y Eckhard Platen. *Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*. 3.^a ed. Springer, 1999.
- [7] Steven P. Lalley. *Stochastic Differential Equations*. 2016.
- [8] Gregory F. Lawler. *Stochastic Calculus: An Introduction with Applications*. 2023.
- [9] Patrik Nummi. “Existence and Uniqueness of Solutions for Stochastic Differential Equations”. Tesis de mtría. University of Helsinki, nov. de 2019.
- [10] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*. 5.^a ed. Springer, 2003.