Komplekse tall med MATLAB

Til bruk ved kretsanalyse i ELE142

Dette er en rask gjennomgang av følgende funksjoner til bruk for å regne med komplekse tall i MATLAB:

- `i` Imaginær enhet
- `j` Imaginær enhet

- `abs` Absoluttverdi og kompleks magnitude
- `angle` Fasevinkel
- `cart2pol` Fra rektangulær til polar form
- `pol2cart` Fra polar til rektangulær form

- `real` Reell del av et komplekst tall
- `imag` Imaginær del av et komplekst tall
- `conj` Kompleks konjugert

Alle eksempler er i gule tekstbokser. Hver ny «boks» fordrer at tidligere variabler er slettet med «clear»-funksjonen.

De imaginære enhetene «i» og «j»

De kjente imaginære enhetene «i» og «j» er begge gyldige i MATLAB, selv om MATLAB oversetter «j»-en til en «i». Legg også merke til at vi må skrive «i»-en og/eller «j»-en etter tallverdien, altså:

```
>> tall1 = 3 + 5i;     % Standard innmating av tall med «i»

>> tall2 = 2 - 4j;     % Standard innmating av tall med «j»

>> tall3 = i + 3;      % Det komplekse tallet kan komme først

>> tall4 = i + j + 3;  % Det kan også være et sett av tall
```

- Tips 1: Bak %-tegnet i Matlabs funksjonsvindu kan vi skrive våre egne kommentarer
- Tips 2: Et semikolon bak funksjonen gjør at MATLAB ikke gjentar det vi nettopp har skrevet

Variablene (Workspace oppe i høyre hjørne) ser nå slik ut:

Name	Value	
tall1	3.0000 + 5.0000i	Akkurat slik vi matet dataene inn
tall2	2.0000 – 4.0000i	Legg merke til at «j»-en ble en «i»
tall3	3.0000 + 1.0000i	Legg merke til at «i»-leddet ble flyttet til siste ledd
tall4	3.0000 + 2.0000i	Legg merke til at de to imaginære leddene er summert

Selv om det er en pedagogisk brøler å gjøre ting på feil måte, så lar vi det stå til:

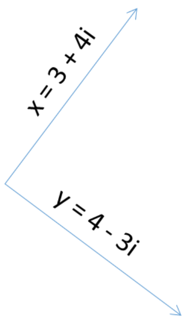
```
>> tall_feil = j26;
Undefined function or variable 'j26'.


Did you mean:
>> tall_feil = j;
```

MATLAB godkjenner altså ikke innmating med «i»-en eller «j»-en først. Da må vi eventuelt legge inn et gangetegn.

```
>> tall_korrekt = j*26;
```

Enkle aritmetiske operasjoner med komplekse tall

Ta følgende eksempel



$$x + y = (3+4i)+(4-3i) = (3+4)+(4+(-3))i = (7+1i)$$

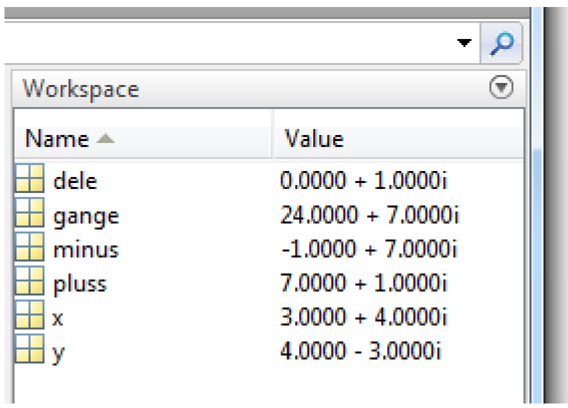
$$x - y = (3+4i)-(4-3i) = (3-4)+(4-(-3))i = (-1+7i)$$

$$x \cdot y = (3+4i)\cdot(4-3i) = 3\cdot 4 + 3\cdot(-3i) + 4i\cdot 4 + 4i\cdot(-3i) = 12 - 9i + 16i + 12 = 24 + 7i$$

$$x/y = \frac{(3+4i)}{(4-3i)} = \frac{(3+4i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{3\cdot 4 + 3\cdot 3i + 4i\cdot 4 + 4i\cdot 3i}{4^2+3^2} = \frac{12+9i+16i-12}{25} = i$$

Disse operasjonene kan utføres med MATLAB på følgende måte:

```
>> x = 3 + 4i;
>> y = 4 - 3i;
>> pluss = x + y;
>> minus = x - y;
>> dele = x/y;
>> gange = x*y;
```


Workspace

Name	Value
dele	0.0000 + 1.0000i
gange	24.0000 + 7.0000i
minus	-1.0000 + 7.0000i
pluss	7.0000 + 1.0000i
x	3.0000 + 4.0000i
y	4.0000 - 3.0000i

Resultatene fra «Workspace» er også vist. Dette stemmer bra med den manuelle utregninga ovenfor.

Veksle mellom rektangulær og polar form

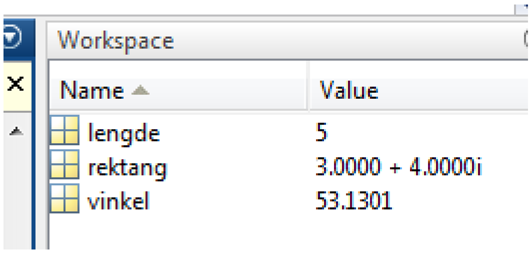
Komplekse tall kan skrives på to former, for eksempel:

$$3 + 4i = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right) = \sqrt{3^2 + 4^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 5\angle 53{,}1^\circ$$

$$5\angle 53{,}1^\circ = 5 \cdot \cos(53{,}1^\circ) + 5 \cdot \sin(53{,}1^\circ) \cdot i = 3 + 4i$$

Med MATLAB kan dette gjøres på følgende måte:

```
>> rektang = 3+4i;

>> vinkel = rad2deg(angle(rektang));

>> lengde = abs(rektang);
```



MATLAB har som default radianer framfor grader, så vi må selv konvertere slik at det passer våre ønsker.

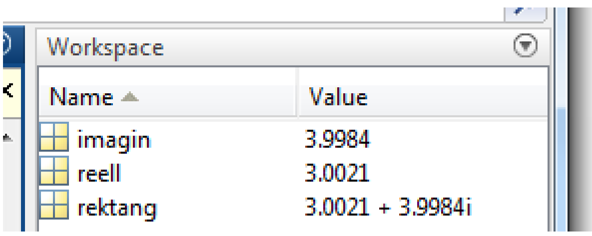
Det er også en annen funksjon, cart2pol, som betyr «cartesian to polar». «cartesian» er et annet navn på rektangulær form.

```
>> rektang = 3+4i;

>> [vinkel,lengde] = cart2pol(real(rektang), imag(rektang));

>> vinkel = rad2deg(vinkel);
```

Dette gir akkurat samme resultat som det første kommandosettet. Siste metode er kanskje litt mer tungvinn, men «søsterfunksjonen», pol2cart, er nyttig når det skal konverteres fra polar til rektangulær form.

```
>> [reell,imagin] = pol2cart(deg2rad(53.1),5);

>> rektang = reell + imagin*i;
```

Og resultatet blir 3 + 4i som forventet (se bort fra avrundingsfeil). Legg merke til at vi må mate inn vinkelen først og viserens lengde som ledd nummer to.

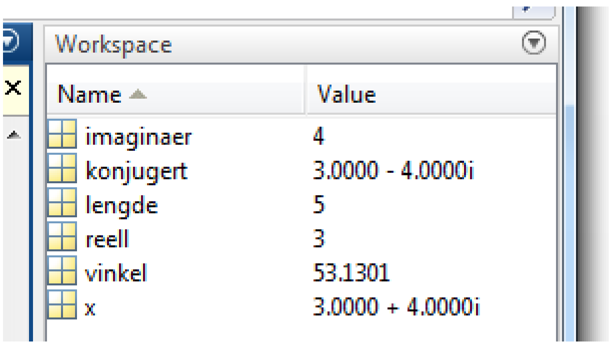


Operasjoner på komplekse tall på rektangulær form

Når vi har et tall på rektangulær form kan vi bruke følgende funksjoner (noen av dem er allerede gjennomgått, men tatt med her som en oppsummering):

```
>> x = 3 + 4i;
>> reell = real(x);               % Finner realdelen, altså 3
>> imaginaer = imag(x);           % Finner imaginærdelen, altså 4
>> lengde = abs(x);               % Finner lengden, altså 5
>> vinkel = rad2deg(angle(x));    % Finner vinkelen, altså 53,1
>> konjugert = conj(x);           % Finner kompleks konjugert, 3 - 4i
```

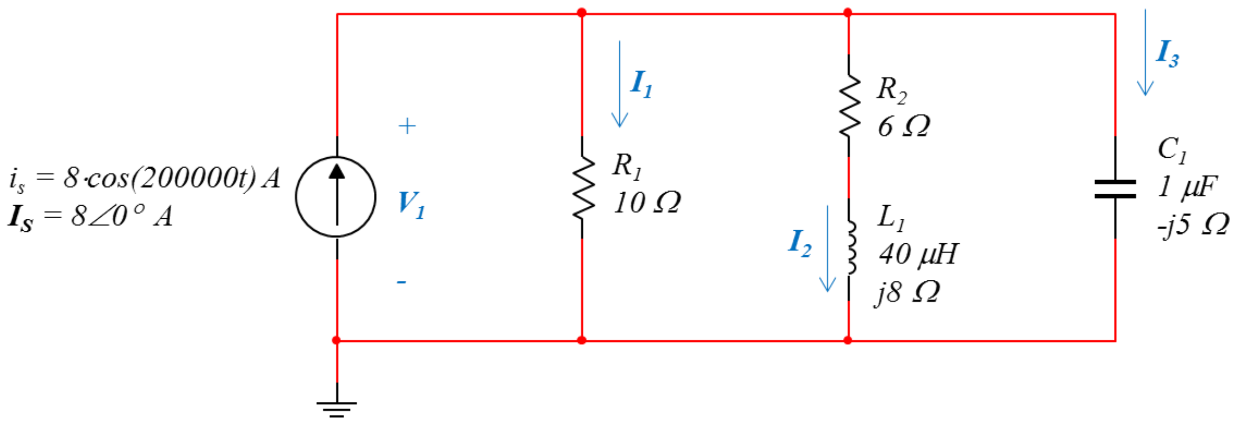
Med følgende resultat:


Workspace

Name	Value
imaginaer	4
konjugert	3.0000 - 4.0000i
lengde	5
reell	3
vinkel	53.1301
x	3.0000 + 4.0000i

Kretseksempel med komplekse tall

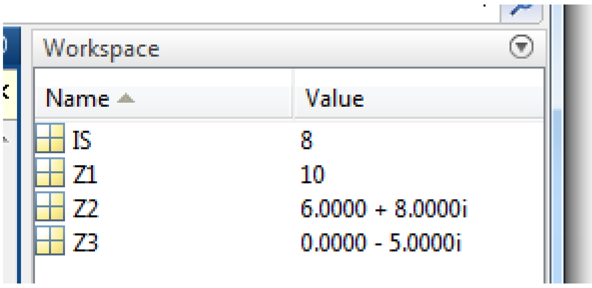
Eksempelet nedenfor er fra «Example 9.7» i niende utgave av «Electric Circuits» av Nilsson/Riedel



Oppgaven er å finne $\boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ og $\boldsymbol{I_3}$.

Kaller de tre grenene for henholdsvis Z1, Z2 og Z3.

```
>> clear

>> IS = 8;

>> Z1 = 10 + 0i;

>> Z2 = 6 + 8i;

>> Z3 = 0 - 5i;
```

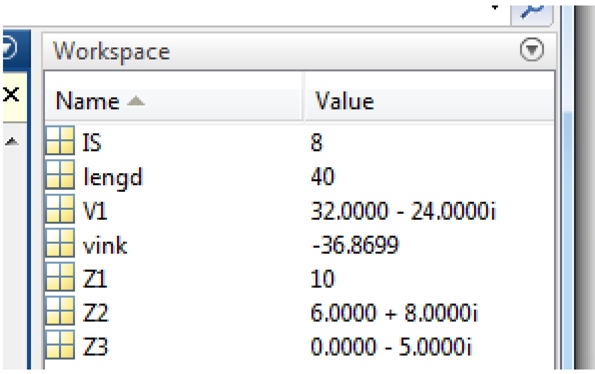


$$V_1 = I_1 \cdot (Z_1 \| Z_2 \| Z_3) = I_1 \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} \right)$$

Skriver inn formelen. Dette gir et svar på på rektangulær form, men spenninger og strømmer tolkes best på polar form.

```
>> V1 = IS*(1/(1/Z1+1/Z2+1/Z3));

>> [vink,lengd] = cart2pol(real(V1),imag(V1));

>> vink = rad2deg(vink);
```

Variablene i Workspace er nå:

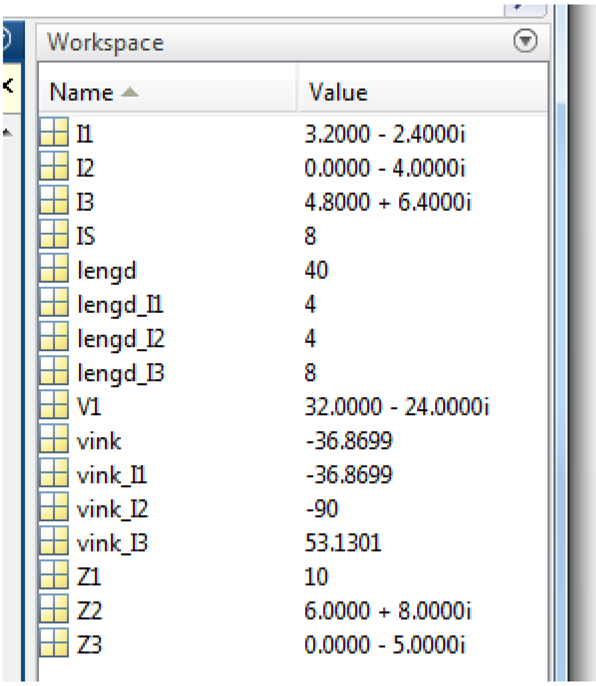


Vi ser da at $V_1 = (32 - 24i)V = (32 - j24)V = 40\angle -36{,}87°V$

Til slutt:

```
>> I1 = V1/Z1;
>> I2 = V1/Z2;
>> I3 = V1/Z3;
>> [vink_I1,lengd_I1]=cart2pol(real(I1),imag(I1));
>> [vink_I2,lengd_I2]=cart2pol(real(I2),imag(I2));
>> [vink_I3,lengd_I3]=cart2pol(real(I3),imag(I3));
>> vink_I1 = rad2deg(vink_I1);
>> vink_I2 = rad2deg(vink_I2);
>> vink_I3 = rad2deg(vink_I3);
```

Dette gir:



Name	Value
I1	3.2000 - 2.4000i
I2	0.0000 - 4.0000i
I3	4.8000 + 6.4000i
IS	8
lengd	40
lengd_I1	4
lengd_I2	4
lengd_I3	8
V1	32.0000 - 24.0000i
vink	-36.8699
vink_I1	-36.8699
vink_I2	-90
vink_I3	53.1301
Z1	10
Z2	6.0000 + 8.0000i
Z3	0.0000 - 5.0000i

Altså:

$$V_1 = 40\angle -36{,}87°V$$
$$I_1 = 4\angle -36{,}87°V$$
$$I_2 = 4\angle -90°V$$
$$I_3 = 8\angle 53{,}13°V$$

For å finne tilsynelatende effekt må vi bruke kompleks konjugert (bygger på tidligere variabler):

```
>> S_Z1 = V1*conj(I1)/2;

>> S_Z2 = V1*conj(I2)/2;

>> S_Z3 = V1*conj(I3)/2;
```

lengd_I3	8
S_Z1	80.0000 - 0.0000i
S_Z2	48.0000 + 64.0000i
S_Z3	-1.4211e-14 - 1.6000e...
V1	32.0000 - 24.0000i

Den imaginære størrelsen til S_{Z3} er håpløs å lese av, men det kan vi løse ved å droppe semikolon i siste linje.

```
>> S_Z3 = V1*conj(I3)/2


S_Z3 =


  -1.4211e-14 - 1.6000e+02i
```

Altså er $S_{Z3} = (0 - j160)VA$ som vil si at effekten er rent reaktiv. Dette passer jo bra siden lasten er rent kapasitiv. På samme måte er effekten i Z_1 rent aktiv siden denne er en resistans uten kapasitive og induktive egenskaper mens effekten i Z_2 er kompleks.