Formelark MAT201, MAT202, MAT203

1. **Potensregning**

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
4. $a^{-n} = 1/a^n$
5. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

2. **Derivasjon og integrasjon**

Definisjon deriverte:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Regler:

1. $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
4. Produktregelen: $(f(x)g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
   (eller $(uv)' = u'v + uv'$)
5. Brøksregelen: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
   (eller $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$)
6. Kjerneregel: Hvis $f(x) = g(h(x)) = g(u)$, der $u = h(x)$, da er
   $$f'(x) = g'(u) \cdot u'$$
7. Delvis integrasjon: $\int uv' = uv - \int u'v$
8. Integrasjon ved substitusjon: $\int g(u)u' \, \mathrm{d}x = \int g(u) du$, der $du = u'dx$

Kjente deriverte og integraler:

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Kommentarer
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln(\cos x) + C$	integrasjon bare for $\cos x > 0$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$		$-\dfrac{1}{\tan x} + C$	$x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
x^n	nx^{n-1}	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	integrasjon bare for $n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$		$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$e^x + C$	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x\ln x - x + C$	$x > 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\sin^{-1} x + C$	$-1 < x < 1$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\cos^{-1} x + C$	$-1 < x < 1$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\tan^{-1} x + C$	

3. Rekker

Taylorrekker/maclaurinrekker. La f være en funksjon i en variabel som kan deriveres n ganger i punktet $x = a$. Da er *taylorrekken* P om $x = a$ for f gitt ved $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. I tilfellet $a = 0$ kalles dette ofte en *maclaurinrekke*.

Kjente maclaurinrekker.

i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for alle x.

ii) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ for alle x.

iii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ for alle x.

iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ for $-1 < x \leq 1$.

4. **Fourierrekker**

La $f(t)$ være en periodisk funksjon med periode T, og la $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Da er fourierrekken til $f(t)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

der

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\, dt, \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\, dt, \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

5. **Kjente integraler**

i) $\int t\cos(at)\, dt = \dfrac{\cos(at)}{a^2} + \dfrac{t\sin(at)}{a} + C.$

ii) $\int t^2\cos(at)\, dt = -2\dfrac{\sin(at)}{a^3} + 2\dfrac{t\cos(at)}{a^2} + \dfrac{t^2\sin(at)}{a} + C.$

iii) $\int t\sin(at)\, dt = \dfrac{\sin(at)}{a^2} - \dfrac{t\cos(at)}{a} + C.$

iv) $\int t^2\sin(at)\, dt = 2\dfrac{\cos(at)}{a^3} + 2\dfrac{t\sin(at)}{a^2} - \dfrac{t^2\cos(at)}{a} + C.$

5.1. **Kjente verdier til cosinus og sinus.**

i) $\sin(0) = 0$
ii) $\sin(-n\pi) = 0 = \sin(n\pi) = 0$, for n heltall.

iii) $\cos(0) = 1$
iv) $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ for n heltall.

6. **Lineære differensialligninger med konstante koeffisienter**

6.1. **Homogen.**

- For en homogen 1. ordens differensialligning $ay' + by = 0$ har generell løsning som avhenger av røttene til den karakteristiske likningen $ar + b = 0$. Dersom r er en løsning, så er den generelle løsningen $y = Ae^{rx}$.
- For en homogen 2. ordens differensialligning $ay'' + by' + cy = 0$ har generell løsning som avhenger av roten til den karakteristiske likningen $ar^2 + br + c = 0$.
  i) to forskjellige reelle røtter r_1, r_2 er den generelle løsningen:
  $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$,

ii) to like røtter r_1 er den generelle løsningen:
$y = (Ax + B)e^{r_1 x}$,

iii) to komplekskonjugerte røtter $r = \alpha \pm \beta i$ er den generelle løsningen:
$y = e^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big)$.

6.2. **Inhomogen.** Tabell med forslag til partikulære løsninger:

$f(x)$	y_p
c (konstant)	A (konstant), hvis $c \neq 0$
$ax + b$	$Ax + B$ hvis $c \neq 0$
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots K_0$, hvis $c \neq 0$
$ce^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$ (hvis α ikke er en rote til den karakteristiske likningen)
$ce^{\alpha x}$	$Axe^{\alpha x}$ (hvis α er en rote til den karakteristiske likningen)
$ce^{\alpha x}$	$Ax^2e^{\alpha x}$ (hvis α er dobbelt røtter til den karakteristiske likningen)
$c\cos(\beta x)$ eller $c\sin(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$ (hvis $\pm i\beta$ ikke er røttene til den karakteristiske likningen)
$c\cos(\beta x)$ eller $c\sin(\beta x)$	$x(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ (hvis $\pm i\beta$ er røttene til den karakteristiske likningen)

7. Interpolasjon

Ved lineær interpolasjon, der man antar det er lineær sammenheng mellom de to kjente målepunktene, kan man bestemme y_i i datapunktet (x_i, y_i) som ligger mellom datapunktene (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) for en gitt x_i:

$$y_i = y(x_i) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x_i - x_k)$$

8. **Lineær algebra**

Egenverdi og egenvektor. La A være en kvadratisk matrise (altså $n \times n$). En vektor $\vec{v} \in \mathbf{R^n}$ kalles en *egenvektor* for A dersom:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{for et tall } \lambda, \quad \text{der } \vec{v} \neq \vec{0}$$

For hver løsning λ_i til denne ligningen finnes de tilhørende egenvektorene som løsninger til ligningssystemet

$$(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}.$$

Ligningen

$$\det\big(A - \lambda I\big) = 0$$

Diagonalisering. La P være matrisen med egenvektorene som søyler:

$$P = \big(\vec{v}_1|\vec{v}_2|\cdots|\vec{v}_n\big)$$

Da er P inverterbar, og

$$A = PDP^{-1},$$

der D er diagonalmatrisen

9. **Systemer av differensialligninger**

For et homogent lineært differensialligningssystem, $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, med diagonaliserbar konstant koeffisientmatrise A, er den generelle løsningen:

$$\vec{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n,$$

der $\vec{v}_i$ er egenvektor med egenverdi λ_i.

10. **Funksjoner av flere variable**

i) f er en funksjon definert på $\mathbb{R}^2$. Dersom f er deriverbar i (a,b), så har grafen til f et tangentplan i (a,b,c) med $c = f(a,b)$. Likningen for tangentplanet kan skrives slik:

$$z = c + L(x-a) + M(y-b) \ ,$$

der $L = f_x(a,b)$ og $M = f_y(a,b)$.

ii) Hessematrisen til f i et punkt (a,b) er gitt ved

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

Dersom $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ og

$\det H(a,b) < 0$ så er (a,b) et sadelpunkt.

$\det H(a,b) > 0$ og $f_{xx}(a,b) > 0$ så er (a,b) et lokalt minimum.

$\det H(a,b) > 0$ og $f_{xx}(a,b) < 0$ så er (a,b) et lokalt maksimum.

$\det H(a,b) = 0$ så har vi ingen informasjon.

11. **Diffusjonsligninger for MAT201**

Gitt varmeledningsligningen, også kalt diffusjonsligning, med initial- og randkrav:

(1) $u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0$

(2) randkrav $u(t,0) = 0,\ u(t,L) = 0, \quad t > 0$

(3) initialkrav $u(0,x) = f(x), \quad 0 < x < L$

der $f(x)$ er stykkevis kontinuerlig over intervallet $0 \le x \le L$.
For $n = 1, 2, 3, \cdots, \infty$,

$$u_n(t,x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-c^2\alpha_n^2 t}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

løser problemet (1)-(3). Den generelle løsningen til problemet er gitt ved:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-c^2\alpha_n^2 t}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

der B_n, $n = 1, 2, \cdots$, er koeffisientene (også kalt Fourier-koeffisienter):

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

i den Fourier sinus-rekken til $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

12. **Kjente resultater om laplacetransformer (MAT201 og MAT202)**

1) $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}$

2) $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

3) $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$

4) $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

5) $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

6) $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

7) $\mathcal{L}(e^{at}\sin(\omega t)) = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

8) $\mathcal{L}(e^{at}\cos(\omega t)) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

9) $\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$

10) $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$

11) $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$

12) $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

13) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))$

14) **Kun MAT202:** $\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$, der $\delta(t)$ er impulsfunksjonen

15) **Kun MAT202:** $\mathcal{L}(f(t-a)\cdot u(t-a)) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))$, der $u(t)$ er Heaviside-funksjonen (enhetsstegs-funksjonen).

13. **Mer differensialligninger med fokus på stabilitet (MAT203)**

- Gitt Differensialligningen

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

  a) En hver konstant løsning til $f(y) = 0$, $y = k$, tilfredsstiller $y' = f(y)$.
  b) Likevektløsningen(e) finner man ved å løse: $f(y) = 0$.
  c) Likevektsløsningen $y = k$ er
    i) *ustabil* dersom $f'(k) > 0$
    ii) *asymptotisk stabil* dersom $f'(k) < 0$ og
    iii) *kan være både stabil, asymptotisk stabil og ustabil* dersom $f'(k) = 0$: Bruk faselinje med likevektsløsningen(e) (de(t) stasjonære punkte(t/ne) markert(e). Lag fortegnslinje for $f(y)$ langs faselinjen. Der $f(y) > 0$ tegn en pil i positiv retning langs faselinjen. Der $f(y) < 0$ tegn en pil i negativ retning langs faselinjen. Det nærmeste stasjonære punktet pilen peker mot er stabilt/asymptotisk stabilt fra den siden hvor pilen befinner seg. Det nærmeste stasjonære punktet pilen peker vekk fra er ustabilt fra den siden hvor pilen befinner seg.

- Løsningen til

$$\frac{dy}{dt} = a(y - A)(y - B)$$

  der $a \neq 0$ og $A \neq B$ er:

$$y(t) = A + \frac{B - A}{1 + Ce^{a(B-A)t}}$$