LAPLACE-TRANSFORMASJONEN 14

14.1 Eksponentiell vekst og Laplace-transformasjonen

Oppgave 14.1.1: Karbon C-14 er et radioaktivt materiale med halveringstid 5730 år. I et eksperiment har vi til å begynne med 5,0 milligram av denne karbonisotopen. Bruk funksjonen $y(t)$ til å beskrive massen av C-14 målt i milligram. Tiden t måler er antall år etter start.

a) Ved radioaktiv nedbrytning avtar massen av radioaktivt materiale men en rate proporsjonal med massen selv. Sett opp en differensialligning for $y(t)$.

b) Hva er startverdien $y(0)$? La $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Bruk Laplace-transformasjonen på differensialligningen og løs med hensyn på $Y(s)$.

c) Finn en formel for $y(t)$ ved invers Laplace. Bestem proporsjonalitetskonstanten ved å bruke halveringstiden. Hvor mye C-14 er igjen etter 100 år?

Oppgave 14.1.2: En lukket metallbeholder inneholder en liter vann som til å begynne med har temperaturen 96 °C. Omgivelsene har konstant temperatur 21 °C. La funksjonen $y(t)$ være vannets temperatur målt i °C ved tiden t minutter etter start. Newtons avkjølingslov gir differensialligningen

$$y'(t) = -k(y(t) - 21).$$

a) Forklar hvorfor $\mathcal{L}(a) = \frac{a}{s}$ når a er en konstant.

b) Bruk Laplace-transformasjonen på differensialligningen og finn et uttrykk for $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$.

c) En ingeniør har beregnet verdien til konstanten k til å være 0,1. Sett inn denne verdien og bruk delbrøkoppspalting til å forenkle uttrykket for $Y(s)$. Bestem funksjonen $y(t)$ ved invers Laplace.

Oppgave 14.1.3: Antallet bakterier i en fuktig kjøkkenklut øker med en rate proporsjonal med antallet. La $y(t)$ være antallet bakterier i kluten t minutter etter start. Da er

$$y'(t) = ky(t).$$

I vårt tilfelle setter vi proposjonalitetskonstanten til å være $k = 2$. Dette er en typisk verdi for vekst under optimale forhold. Gå ut fra at det var 200 bakterier i kluten til å begynne med. Bruk Laplace-transformasjonen til å finne en formel for $y(t)$.

Oppgave 14.1.4: Løs startverdiproblemene ved hjelp av Laplace-transformasjonen. Bruk delbrøkoppspalting der det trengs.

a) $y'(t) - 2y(t) = 0$, der $y(0) = 1$

b) $y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t}$, der $y(0) = -2$

c) $y'(t) + y(t) = e^{-2t} + 4e^{t}$, der $y(0) = 5$

Oppgave 14.1.5: Se på dette systemet av differensialligninger:

$$y'(t) = 6y(t) - 2z(t)$$
$$z'(t) = 10y(t) - 3z(t)$$

La startverdiene $y(0) = 2$ og $z(0) = -1$ være gitt.

a) Bruk Laplace-transformasjonen på differensialligningssystemet slik at du får et algebraisk ligningssystem for $Y(s)$ og $Z(s)$.
b) Finn uttrykk for $Y(s)$ og $Z(s)$.
c) Hva er løsningen av det opprinnelige differensialligningssystemet?

14.2 Linearitet, eksistens og entydighet

Oppgave 14.2.1: Bruk definisjonen til å regne ut Laplace-transformasjonen til disse funksjonene:
a) $\mathcal{L}(7)$
b) $\mathcal{L}(t)$
c) $\mathcal{L}(2^t)$

Oppgave 14.2.2: At Laplace-transformasjonen er *lineær* betyr at

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)+g(t)) &= \mathcal{L}(f(t))+\mathcal{L}(g(t)) \quad \text{og} \\ \mathcal{L}(af(t)) &= a\mathcal{L}(f(t)) \quad \text{når } a \text{ er konstant.} \end{aligned}$$

a) Skriv ut stegene som viser den første formelen.
b) Skriv ut stegene som viser den andre formelen.

Oppgave 14.2.3: Vi skal klassifisere diskontinuitetene til disse seks funksjonene:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{t} \\ f_2(t) &= \arctan(\frac{1}{t-2}) \\ f_3(t) &= e^{1/t} \\ f_4(t) &= \frac{t^2-3t+2}{t-1} \\ f_5(t) &= \frac{\sqrt{t^2-6t-9}}{t-3} \\ f_6(t) &= \begin{cases} \sin t & \text{for } t<1 \\ \ln t & \text{for } t>1 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Hvilke funksjoner har fjernbare diskontinuiteter?
b) Hvilke funksjoner har stegdiskontinuiteter?
c) Hvilke funksjoner har vertikale asymptoter?

Oppgave 14.2.4: Vi skal i denne oppgaven gi et eksempel på to forskjellige funksjon som blir like etter anvendelse av Laplace-transformasjonen. Definer f og g ved del forskrift:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t<1 \\ 1 & \text{for } t\geq 1 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t\leq 1 \\ 1 & \text{for } t>1. \end{cases}$$

a) Hvor er funksjonsverdiene ulike?
b) Regn ut $\mathcal{L}(f(t))$ og $\mathcal{L}(g(t))$ ved definisjonen.

Oppgave 14.2.5: Ikke alle funksjoner har noen Laplace-transform.

a) Hvorfor har ikke $f(t) = e^{t^2}$ noen Laplace-transform?

b) Hvorfor har ikke $g(t) = \tan t$ noen Laplace-transform?

Oppgave 14.2.6: a) La $F(s) = \mathcal{L}(e^{at})$. Regn ut grenseverdiene

$$\lim_{s\to\infty} F(s) \qquad \text{og} \qquad \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

b) Gå ut fra at $f(t)$ er stykkevis kontinuerlig av eksponentiell orden. La $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Bruk ulikheten $|f(t)| < ke^{at}$ til å vise at

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

c) La $f(t)$ være en funksjon som har en Laplace-transformert $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Gå ut fra at $f'(t)$ er stykkevis kontinuerlig av eksponentiell orden. Bruk formelen for $\mathcal{L}(f'(t))$ til å vise at

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0).$$

14.3 Basisformler for Laplace-transformasjonen

Oppgave 14.3.1: Finn Laplace-transformasjonen til følgende uttrykk. Bruk tabellen om mulig.

a) e^{2t}

b) e^{-2t}

c) $e^{-3t} + 2e^{-2t}$

Oppgave 14.3.2: Finn Laplace-transformasjonen til følgende uttrykk. Bruk tabellen om mulig.

a) $e^{-13t} \sin 2t$

b) $\cos 3t + \sin 2t$

c) $3t + \sin 4t$

Oppgave 14.3.3: Regn ut Laplace-transformasjonen

a) $\mathcal{L}(e^{-t} \sin(3t))$

b) $\mathcal{L}(te^{3t})$

c) $\mathcal{L}(\ (t^2 - 3)^2\ )$

Oppgave 14.3.4: Regn ut Laplace-transformasjonen

a) $\mathcal{L}(5t - 3)$

b) $\mathcal{L}\left((2t-1)^2\right)$

c) $\mathcal{L}\left((5-2t)e^{-2t}\right)$

d) $\mathcal{L}\left(e^t(2\sin 2t + 3\cos 2t)\right)$

Oppgave 14.3.5: Regn ut Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}(f(t))$ når funksjonen er gitt ved:

a) $f(t) = 3 + e^{-2t}$

b) $f(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

c) $f(t) = (-\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 3t + 1)e^t$

Oppgave 14.3.6: Regn ut invers Laplace:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s-2}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{3s-1}\right)$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-2)^2}\right)$

Oppgave 14.3.7: Finn den inverse Laplace-transformasjonen til følgende funksjoner. Bruk tabellen om mulig.

a) $\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$

b) $\frac{1}{s^2+4s+8}$

c) $\frac{s}{s^2+4s+8}$

Oppgave 14.3.8: Finn den inverse Laplace-transformasjonen til følgende funksjoner. Bruk tabellen om mulig.

a) $\frac{1}{s^2+5s+6}$

b) $\frac{s}{s^2+5s+6}$

c) $\frac{4}{s^5}$

Oppgave 14.3.9: Bruk delbrøkoppspalting og regn ut invers Laplace:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7s-2}{s^2-1}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s^2-9s-15}{s^3-8s^2+15s}\right)$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s^2-10s+17}{(s-2)((s-3)^2+16)}\right)$

Oppgave 14.3.10: Regn ut invers Laplace:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9}{s^2}\right)$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{5s-1}\right)$

Oppgave 14.3.11: Regn ut invers Laplace:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+5}{s^2}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+4}\right)$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s-1}{s^2+4}\right)$

Oppgave 14.3.12: Regn ut invers Laplace:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s^2+4s}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{15}{s^2+4s+29}\right)$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s^3-5s}\right)$

Oppgave 14.3.13: Finn de inverse Laplace-transformasjonene.

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+4}{s^2+4}\right)$

b) Bruk delbrøkoppspaltning til å vise at:

$$\frac{s+11}{s^2+7s+10} = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+5}$$

Bestem så den inverse Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+11}{s^2+7s+10}\right)$.

c) Bruk delbrøkoppspaltning til å vise at:

$$\frac{3s+11}{s^2+7s+12} = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+4}$$

Bestem den inverse Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+11}{s^2+7s+12}\right)$.

Oppgave 14.3.14:

a) Bruk delbrøkoppspaltning til å vise at:

$$\frac{3s^2-4s}{(s^2+4)(s+3)} = \frac{3}{s+3} - \frac{4}{s^2+4}$$

Bestem den inverse Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s^2-4s}{(s^2+4)(s+3)}\right)$.

b) Bruk delbrøkoppspaltning til å vise at:

$$\frac{8s+11}{s^2+5s-14} = \frac{3}{s-2} + \frac{5}{s+7}$$

Bestem den inverse Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8s+11}{s^2+5s-14}\right)$.

c) Bruk delbrøkoppspaltning til å vise at:

$$\frac{3s+27}{s^3-s^2+9s-9} = \frac{3}{s-1} - \frac{3s}{s^2+9}$$

Bestem den inverse Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+27}{s^3-s^2+9s-9}\right)$.

14.4 Heavisides enhetssteg, Diracs impulsfunksjon og gammafunksjonen

Oppgave 14.4.1: En 100 g ball slippes og faller fritt i 2,0 s. Da treffer den bakken og får en impuls på 3 Ns.

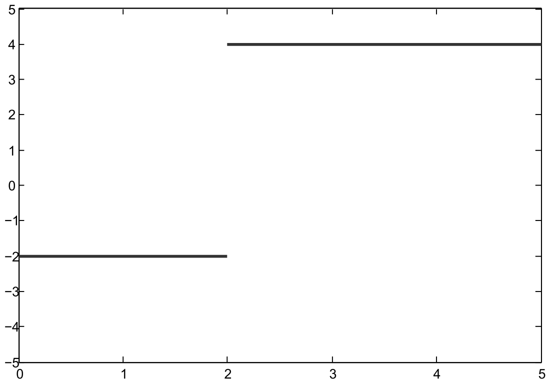
a) Forklar hvordan man kan komme fram til følgende differensialligning for farten $v(t)$:

$$mv'(t) = -mg + 3\delta(t-2), \qquad v(0) = 0 \quad \text{og} \quad g = 9{,}81 \text{ m/s}^2.$$

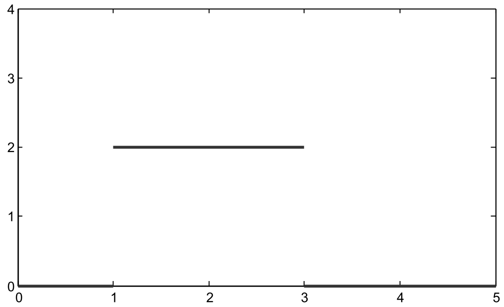
b) Løs differensialligningen ved hjelp av Laplacetransformasjonen.

c) Finn tidspunktet der ballen er på topp for andre gang.

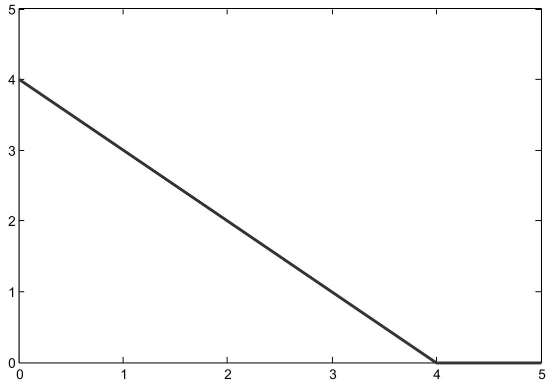
Oppgave 14.4.2: Bruk enhetsstegfunksjonen til å skrive ned formler som passer med grafene:



a)



b)



c)

Oppgave 14.4.3: Regn ut integralene:

a) $\int_0^\infty (1 - u(t-5))\,\mathrm{d}t$

b) $\int_0^5 t u(t-2)\,\mathrm{d}t$

c) $\int_0^{2\pi} t(1 - u(t-\pi))\,\mathrm{d}t$

Oppgave 14.4.4: Kan du forklare hvorfor den deriverte av enhetsstegfunksjonen er enhetsimpuls-funksjonen, $u'(t) = \delta(t)$?

Oppgave 14.4.5: En alternativ definisjon av enhetsimpulsfunksjonen er som en grense av funksjoner:

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t),$$

der $g_n(t) = \begin{cases} n & \text{for } 0 \le t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$ Kan du forklare hvorfor $\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)g_n(t)\ dt = f(0)$ når $f(t)$ er kontinuerlig og $b > 0$?

Oppgave 14.4.6: Bruk enhetsstegfunksjonen til å skrive disse delte forskriftene som ett uttrykk.

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t < 1 \\ t & \text{for } t > 1 \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{for } t < \pi \\ e^{-3t} & \text{for } t > \pi \end{cases}$

c) $h(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{for } t < 2 \\ 0 & \text{for } 2 < t < 4 \\ \sin t\ e^{-t} & \text{for } t > 4 \end{cases}$

Oppgave 14.4.7: Regn ut Laplace-transformasjonen for funksjonene under:

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t \le 2, \\ 5 & \text{for } 2 < t \le 4, \\ 0 & \text{for } 4 < t. \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le t \le 1, \\ 3 & \text{for } 1 < t. \end{cases}$

c) $h(t) = \begin{cases} \cos t & \text{for } 0 \le t \le 2\pi, \\ 0 & \text{for } 2\pi < t. \end{cases}$

Oppgave 14.4.8: Gjør delvis integrasjon på definisjonen av $\Gamma(p)$ for å vise at

$$p\Gamma(p) = \Gamma(p+1).$$

Oppgave 14.4.9: Bruk $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ som utgangspunkt for å regne ut verdiene til

$$\Gamma(\frac{3}{2}), \quad \Gamma(\frac{5}{2}), \quad \Gamma(\frac{7}{2}) \quad \text{og} \quad \Gamma(\frac{9}{2}).$$

14.5 Derivasjon, integrasjon, skiftsetninger og konvolusjon

Oppgave 14.5.1: La $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Regn ut Laplace-transformen av følgende uttrykk:

a) $2y' - y$ når $y(0) = 2$

b) $y'' - 5y' + 6y$ når $y(0) = 0$ og $y'(0) = 2$

c) $y'' - 5y' + 6y$ når $y(0) = 3$ og $y'(0) = 0$

Oppgave 14.5.2: La $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Finn Laplace-transformasjonen av følgende uttrykk. Bruk tabellen om mulig.

a) $\delta(t-2)+t$

b) $y''+3y-e^t$ når $y(0)=0$ og $y'(0)=4$

c) $y^{(3)}+y-t^2$ når $y(0)=2$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

Oppgave 14.5.3: Løs startverdiproblemene:

a) $y'(t)-2y(t)=8, \qquad y(0)=6$

b) $y'(t)+3y(t)=e^{-3t}, \qquad y(0)=0$

c) $y'(t)+y(t)=2e^t+2\cos t-2\sin t, \qquad y(0)=4.$

Oppgave 14.5.4: Løs følgende differensiallikninger ved å bruke metoden med laplacetransform. Bruk tabellen om mulig.

a) $y'+y=0$ med startbetingelse $y(0)=1$.

b) $y'+y=t$ med startbetingelse $y(0)=1$.

c) $y''+y=0$ med startbetingelser $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Oppgave 14.5.5: Bruk s-skifting til å omskrive nevneren til formen s^2+b^2, og finn den inverse Laplace-transformasjonen av uttrykket.

a) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s+3}{s^2-2s+5})$

b) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{9s-3}{s^2+8s+25})$

c) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{2s^2+2s+5})$

Oppgave 14.5.6: Finn Laplace-transformasjonen av følgende uttrykk. Bruk tabellen om mulig.

a) $(t+5)u(t-4)$

b) $(t^2+5)u(t-4)$

c) $f(t)u(t-4)$

Oppgave 14.5.7: Finn inverse Laplace til følgende funksjoner.

a) $e^{-3s}\frac{4}{s^5}$

b) $e^{-4s}\frac{1}{s^2+5s+6}$

c) $e^{-4s}\frac{s}{s^2+5s+6}$

Oppgave 14.5.8: Finn Laplace-transformene. (Her er u enhetstrinnsfunksjonen).

a) $\mathcal{L}\Big(7e^{2t}\cdot u(t-8)\Big)$

b) $\mathcal{L}(5\sin(\pi t)\ u(t-3))$

c) $\mathcal{L}(\frac{1}{6}t^2u(t-4))$

Oppgave 14.5.9: Bruk andre skiftsetning (t-skifting) og regn ut Laplace-transformasjonen:

a) $\mathcal{L}(\cos(3t-6)\ u(t-2))$

b) $\mathcal{L}(tu(t-3))$

c) $\mathcal{L}(te^{3t}u(t-5))$

Oppgave 14.5.10: Regn ut Laplace-transformasjonen:

a) $\mathcal{L}(tu(t-5)-tu(t-10))$

b) $\mathcal{L}(e^{-t}u(t-1)-e^{2t}u(t-2))$

c) $\mathcal{L}(\sqrt{4t-8}u(t-2))$

Oppgave 14.5.11: Regn ut invers Laplace av $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi s}-e^{-8\pi s}}{s^2+1}\right)$.

Oppgave 14.5.12:

a) Konvolusjonen av funksjonene e^{-t} og e^{-3t} er definert ved integralet

$$e^{-t} * e^{-3t} = \int_0^t e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Regn ut dette integralet.

b) For Laplace-transformasjonen tilsvarer multiplikasjon av s-funksjoner konvoulsjon av t-funksjoner. Det vil si at $\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = f(t) * g(t)$. Bruk dette til å regne ut invers Laplace av $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$.

c) Bruk delbrøkoppspalting til å regne ut invers Laplace av $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$.

Oppgave 14.5.13: Konvolusjonen av to funksjoner $f(t)$ og $g(t)$ er definert ved integralet

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Regn ut konvolusjonen av disse uttrykkene:

a) $t * t$

b) $1 * e^t$

c) $\sin t * \cos t$

Oppgave 14.5.14: Regn ut konvolusjonen av disse uttrykkene:

a) $\cos t * 1$

b) $t^3 * t$

c) $t * e^t$

Oppgave 14.5.15: Løs følgende differensialligninger ved å bruke metoden med Laplace-transformasjonen. Bruk tabellen om mulig.

a) $y' - y = \delta(t-2)$ med startbetingelse $y(0) = 3$.

b) $y' - y = u(t-2)$ med startbetingelse $y(0) = 3$.

c) $y' - y = (t-2)\cdot u(t-2)$ med startbetingelser $y(0) = 3$.

Oppgave 14.5.16: Likningen $y'' + 3y = 0$ representerer en svingning som ikke er dempet (for eksempel en elektromagnetisk bølge). Vi skal se på hva som skjer når den utsettes for en impuls. Løs likningen

$$y'' + 4y = \delta(t-2)$$

med startbetingelser $y(0) = 4$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 14.5.17:

a) Bestem Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}\Big((t^3-3t)\cdot u(t-3)\Big)$ (u er enhetstrinnsfunksjonen) og den inverse Laplace-transformasjonen $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+7}{s^2+2s-15}\right)$.

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Oppgave 14.5.18:

a) Bestem Laplace-transformen $\mathcal{L}(e^{-t} + 3te^{4t})$ og den inverse Laplace-transformen $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-4s}}{s^3}\right)$.

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' - 4y = 15e^{4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Oppgave 14.5.19:

a) Bestem Laplacetransformasjonene (u er enhetstrinnsfunksjonen)

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}\big(e^{3t} - 3\sin t\big) \qquad\qquad \text{ii)} \quad \mathcal{L}\big((t^2 - 7t)\cdot u(t-7)\big)$$

b) Beregn de inverse Laplacetransformasjonene

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^3}\right) \qquad\qquad \text{ii)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s+6}{s^2-4}\right)$$

c) Bruk Laplacetransformasjoner til å løse initialverdiproblemet

$$y'' - 4y' + 4y = -e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Oppgave 14.5.20:

a) Bestem følgende Laplacetransformasjoner:

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}\big(-2e^{t} + e^{2t} + 2e^{3t}\big) \qquad\qquad \text{ii)} \quad \mathcal{L}\big(e^{t}\cdot u(t-3)\big)$$

b) Beregn de inverse Laplacetransformasjonene:

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s+6}{s^2+4}\right) \qquad\qquad \text{ii)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-5}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right)$$

i) $5\cos(2t) + 3\sin(2t)$, ii) $-2e^{t} + e^{2t} + 2e^{3t}$

c) Bruk Laplacetransformasjoner til å løse initialverdiproblemet

$$y'' - 4y' + 3y = -e^{2t}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 6.$$

Oppgave 14.5.21:

a) Bestem følgende Laplacetransformasjoner:

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}\big(2e^{-3t} + te^{2t}\big) \qquad\qquad \text{ii)} \quad \mathcal{L}\big(t^2\cdot u(t-5)\big)$$

b) Beregn de inverse Laplacetransformasjonene:

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s+6}{s^2+9}\right) \qquad\qquad \text{ii)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)^2}\right)$$

c) Bruk Laplacetransformasjoner til å løse initialverdiproblemet

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2t}, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5.$$

Oppgave 14.5.22: Bruk formlene for s-derivasjon eller s-integrasjon til å regne ut disse Laplace-transformasjonene:

a) $\mathcal{L}(te^{4t})$

b) $\mathcal{L}(t\cos(bt))$.

c) $\mathcal{L}(\frac{\sin t}{t})$

Oppgave 14.5.23: a) Finn Laplace-transformasjonen til

$$f(t) = u(t-3)\sin(\pi t),$$

der $u(t)$ er Heavisides enhetsstegfunksjon.

b) Løs startverdiproblemet

$$y'' + \pi^2 y = \pi\delta(t-3), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = \pi,$$

der $\delta(t)$ er Diracs enhetsimpulsfunksjon.

Oppgave 14.5.24: Løs startverdiproblemene ved bruk av Laplace-transformasjonen.

a) $y'' + 2y' + 10y = 85\cos t$ der $y(0) = 0$ og $y'(0) = 20$.
b) $y'' - 3y' - 10y = 3e^{2t}$ der $y(0) = \frac{3}{4}$ og $y'(0) = 1$.
c) $y'' + 2y' + 26y = 5e^{2\pi}\delta(t-2\pi)$ der $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$.

Oppgave 14.5.25: Bruk laplacetransformen til å løse startverdiproblemet

$$y'' + y = \delta(t-2\pi), \qquad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0.$$

Oppgave 14.5.26: Bruk laplacetransformen til å løse startverdiproblemet

$$y'' - y' = 1 - u(t-2), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Oppgave 14.5.27: a) Bruk Heavisidefunksjonen $u(t)$ til å skrive funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{for } 0 \le t < 2, \\ t + e^{2-t} & \text{for } t \ge 2 \end{cases}$$

som et lukket uttrykk.

b) Finn Laplacetransformen $Y = \mathcal{L}(y)$ til løsningen av differensialligningen

$$y' + 3y = f(t), \qquad \text{hvor} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

c) Finn delbrøkoppspaltingen til

$$\frac{1}{s^2(s+3)} \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{(s+1)(s+3)}.$$

d) Finn løsningsfunksjonen $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

14.6 Laplace-transformasjonen og initialverdiproblemer

Oppgave 14.6.1: a) Et lodd med masse 1 kg henger i en fjær med stivhet 5 N/m og dempes med 4 Ns/m. Ved start er loddet i likevektsposisjon og har farten 1 m/s. Det er ingen ytre krefter som virker på loddet. Finn en funksjon for posisjonen $y(t)$, der t er antall sekunder etter start.

b) Et lodd med masse 1 kg henger i en fjær med stivhet 9 N/m og dempes med 6 Ns/m. Ved start er loddet i likevektsposisjon og har farten 5 m/s. Det er ingen ytre krefter som virker på loddet. Finn en funksjon for posisjonen $y(t)$, der t er antall sekunder etter start.

c) Et lodd med masse 1 kg henger i en fjær med stivhet 5 N/m og dempes med 6 Ns/m. Ved start er loddet i likevektsposisjon og har farten 8 m/s. Det er ingen ytre krefter som virker på loddet. Finn en funksjon for posisjonen $y(t)$, der t er antall sekunder etter start.

Oppgave 14.6.2: Et lodd med masse 1 kg henger i en fjær med stivhet 10 N/m og dempes med 2 Ns/m. Ved start er loddet i likevektsposisjon og har farten 1 m/s. Loddet utsettes for en ytre kraft på $f(t)$ Newton. La funksjonen $y(t)$ beskrive loddets posisjon.

a) Finn $y(t)$ når den ytre kraften er $f(t) = 10(1 - u(t - \pi))$ og startverdiene er $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$.

b) Finn $y(t)$ når den ytre kraften er $f(t) = 3\delta(t - \pi)$ og startverdiene er $y(0) = 4$ og $y'(0) = 0$.

c) Finn $y(t)$ når den ytre kraften er $f(t) = 20\cos(\sqrt{10}t)$ og startverdiene er $y(0) = 0$ og $y'(0) = 10$.

Oppgave 14.6.3: En RLC-krets med en ekstern spenningskilde består av en kondensator, en motstand og en spole koblet i serie med spenningskilden. Differensialligningen som beskriver ladningen $q(t)$ på kondensatoren er

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = v(t),$$

der L er spolens induktans, R er motstandens resistans, C er kondensatorens kapasitans og $v(t)$ er spenningen fra den ytre spenningskilden.

a) Finn en funksjon for $q(t)$ når $L = 1$, $R = 10$, $\frac{1}{C} = 25$ og $v(t) = 0$ gitt startverdiene $q'(0) = 0$ og $q(0) = 2$.

b) Finn en funksjon for $q(t)$ når $L = \pi^2$, $R = 0$, $C = 1$ og $v(t) = 1 - u(t - 2)$ gitt startverdiene $q'(0) = 0$ og $q(0) = 0$.

c) Finn en funksjon for $q(t)$ når $L = 1$, $R = 2$, $C = \frac{1}{2}$ og $v(t) = \delta(t - 5)$ gitt startverdiene $q'(0) = 0$ og $q(0) = 7$.

14.7 *Tillegg: Utledning av Laplace-transformasjonens formler

Oppgave 14.7.1: En *periodisk funksjon* $f(t)$ med *periode* T gjentar seg selv når den uavhengige variabelen økes med T. Dette uttrykkes ved

$$f(t + T) = f(t).$$

For en periodisk funksjon gjelder følgende formel for Laplace-transformasjonen:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{for } s > 0.$$

a) La $f(t) = \max(0, \sin(t))$, se graf. Bruk delvis integrasjon til å bestemme verdien til

$$\int_0^\pi e^{-st}\sin(t)\,dt.$$

Bruk formelen for periodiske funksjoner til å regne ut $\mathcal{L}(f(t))$.

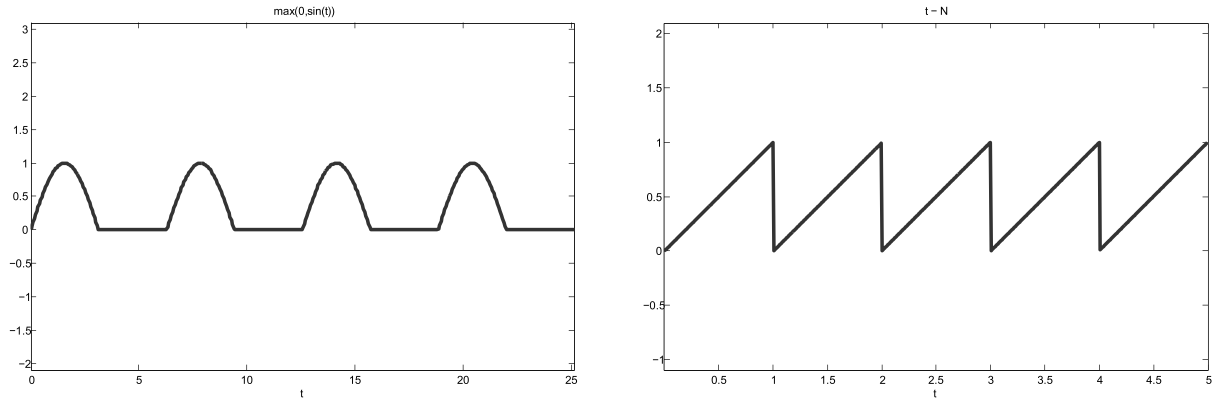
b) La $f(t)$ være sagtann-bølgen med periode 1 gitt ved

$$f(t) = t - N, \qquad \text{når } N \leq t < N + 1, \text{ for } N = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Se graf. Regn ut integralet

$$\int_0^1 te^{-st}\,dt.$$

Bruk formelen for laplacetransformasjonen for periodiske funksjoner til å finne $\mathcal{L}(f(t))$.



Klippet sinusfunksjon

Sagtannfunksjonen

Figur 14.1: Periodiske funksjoner

c) Bruk formelen for en sum til en geometrisk rekke til å bevise formelen for laplacetransformasjonen for en periodisk funksjon.

Oppgave 14.7.2: I denne oppgaven bruker vi Laplace-transformasjonen til å løse differensialligninger på formen

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0,$$

der n er et naturlig tall. Disse differensialligningene kalles *Laguerre-ligningene*.

a) Bruk formelen for s-derivasjon, $\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$, sammen med formlene for $\mathcal{L}(y')$ og $\mathcal{L}(y'')$ til å vise at

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}(ty') = -Y - sY' \qquad \text{og} \qquad \text{ii)} \quad \mathcal{L}(ty'') = -2sY - s^2Y' + y(0).$$

b) Bruk Laplace-transformasjonen til å omskrive differensialligningen

$$ty'' + (1-t)y' + 2y = 0$$

til den separable differensialligningen

$$\frac{1}{Y}Y' = -\frac{3-s}{s-s^2}.$$

c) Vis at den separable differensialligningen har en løsning

$$Y = \frac{(s-1)^2}{s^3},$$

og finn invers Laplace til Y. Det gir løsningen til Laguerre-ligningen for $n = 2$. Prøv selv å løse for andre verdier av n.

14.8 Blandede oppgaver