Knutepunktsspenninger og nodetransformasjonen

Gitt en graf med G grener og N knutepunkter.

Knutepunktsspenninger
Til nå har alle spenninger vi har brukt vært grenspenninger. Vi skal se at i mange tilfeller er det hensiktsmessig å ha en spenning assosiert med hvert knutepunkt i grafen. Men spenning er noe som måles mellom to punkter, så vi kan ikke bare si at et knutepunkt har en spenning. Spenningen må måles mellom knutepunktet og et annet punkt som vi vil kalle referansepunktet. Dette punktet kan være hvor som helst, utenfor kretsen eller i kretsen, men det er mest hensiktsmessig å velge et av kretsens knutepunkt som referansepunkt. Dette knutepunktet får da navnet referanseknutepunktet eller referansenoden. Siden kretsen har N noder er det da (N – 1) forskjellige nodespenninger i kretsen.

Påstand
Alle kretsens G grenspenninger kan uttrykkes ved kretsens (N – 1) nodespenninger.

Bevis
En graf med G grener og N knutepunkt har et tre med (N – 1) grener. Alle G grenspenningene kan uttrykkes ved disse (N – 1) tregrenspenningene. Sammenhengen finnes ved å skrive Kirchhoffs spenningslov for de [G – (N – 1)] fundamentale sløyfene.
Knutepunktsspenningene kan også uttrykkes ved tregrenspenningene og dermed er det en sammenheng mellom grenspenningene og knutepunktsspenningene.

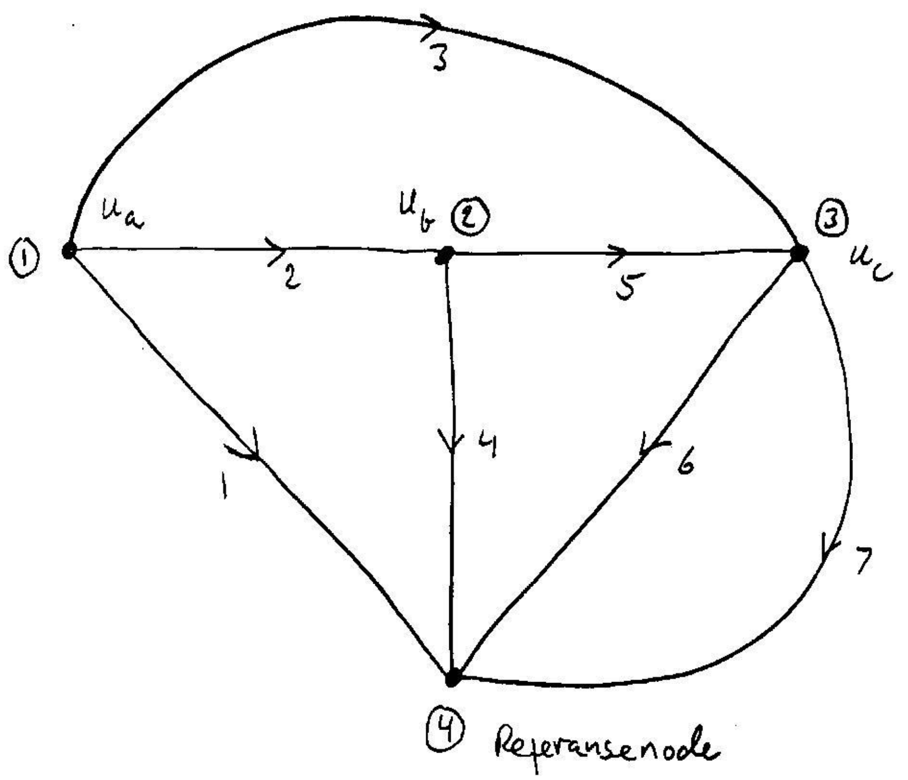
Nodetransformasjonen
Nodetransformasjonen er navnet på sammenhengen mellom grenspenningene og knutepunktsspenningene.

Sammenheng mellom grenspenning og knutepunktsspenninger
Gitt gren k som er plassert mellom node m og node n med positiv retning fra node m til node n. Grenspenningen u_k er lik differansen av spenningen til node m og spenningen til node n.
Bevis
La oss bruke symbolet v for nodespenninger slik at vi unngår å blande dem sammen med grenspenningene u. La da v_m bety spenningen mellom node m og referansenoden med positiv referanse på node m.
Lag en sløyfe som inneholder gren nummer k, bruk Kirchhoffs spenningslov på denne. Sløyfen er: Fra referansenoden til node m gjennom gren k til node n og tilbake til referansenoden.

$$-v_m + u_k + v_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_k = v_m - v_n \quad .$$

Kommentar:
Hvis node n er referansenoden blir grenspenningen u_k lik knutepunktsspenningen v_m. Dette fordi $v_{referansenode} = 0$ per definisjon.

Eksempel:



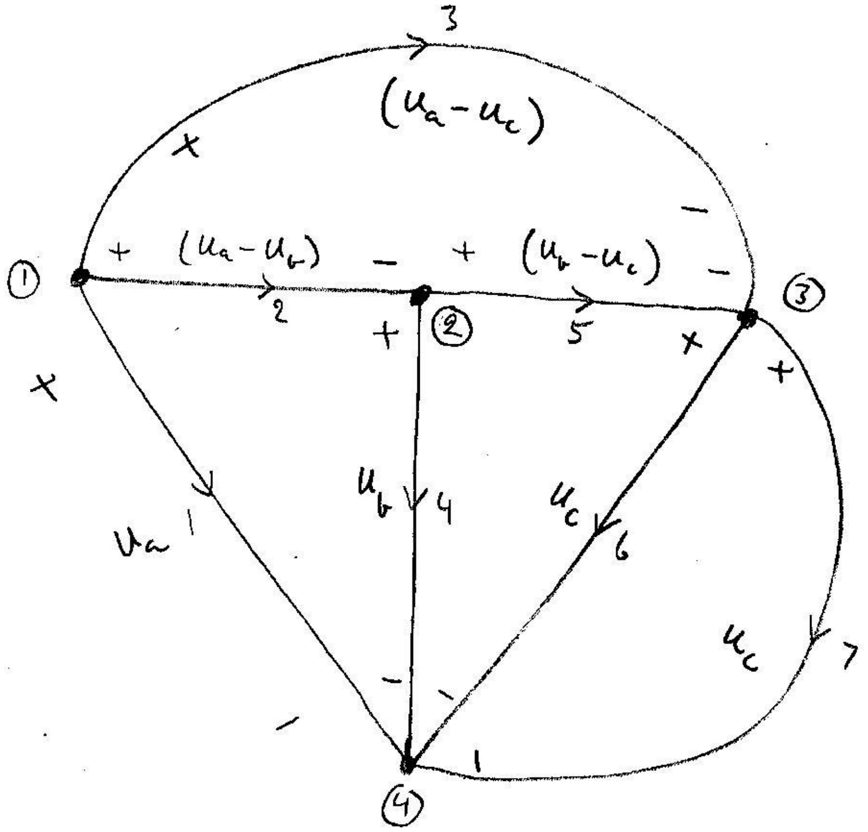
Den viste grafen har G = 7 grener og N = 4 noder.
Vi har valgt node 4 som referansenode. Spenningen mellom knutepunkt 1 og referansenoden har fått navnet u_a, spenningen mellom knutepunkt 2 og referansenoden har fått navnet u_b og spenningen mellom knutepunkt 3 og referansenoden har fått navnet u_c.

Vi kan nå skrive:

$$u_1 = u_a$$
$$u_2 = u_a - u_b$$
$$u_3 = u_a - u_c$$
$$u_4 = u_b$$
$$u_5 = u_b - u_c$$
$$u_6 = u_c$$
$$u_7 = u_c$$

Legg merke til at alle grenspenningene kan uttrykkes ved en knutepunktsspenning eller differansen mellom to knutepunktsspenninger.

I figuren under har vi skrevet nodetransformasjonen inn i grafen.



Fra denne tegningen kan vi lese at $u_1 = u_a$, $u_2 = u_a - u_b$ og så videre.
Med litt trening er det unødvendig å skrive nodetransformasjonen og det er også unødvendig å tegne den som over. Bildet er så enkelt at vi klarer å holde orden på det uten disse hjelpemidlene.

Sammenheng mellom KCL og nodetransformasjonen

La oss skrive Kirchhoffs strømlov for knutepunktene 1, 2 og 3 på matriseform:

$$A \cdot I_G = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad der \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad og \quad I_G = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix}$$

Rekke nr. j i matrisen A svarer til ligningen for knutepunkt nr. j.
Kolonne nr. k i matrisen A svarer til strømmen i gren nr. k.

La a_{jk} være elementet i rekke j og kolonne k i matrisen A. Da ser vi at

$$a_{jk} = \begin{matrix} +1 & \text{hvis gren k forlater node j} \\ -1 & \text{hvis gren k kommer inn til node j} \\ 0 & \text{hvis gren k ikke er koblet til node j} \end{matrix}$$

Nodetransformasjonen skriver vi slik, med knutepunkt 4 som referansenode:

$$U_G = B \cdot U_{node}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \quad der\ U_G = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad og\ \ U_{node} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

Rekke nr. j i matrisen B svarer til spenningen over gren nr. j.
Kolonne nr. k i matrisen A svarer til knutepunkt nr. k.

La b_{jk} være elementet i rekke j og kolonne k i matrisen B. Da ser vi at

$$b_{jk} = \begin{matrix} +1 & \text{hvis gren j forlater node k} \\ -1 & \text{hvis gren j kommer inn til node k} \\ 0 & \text{hvis gren j ikke er koblet til node k} \end{matrix}$$

Av dette ser vi at $b_{kj} = a_{jk}$, det vil si at rekkene til B-matrisen er lik kolonnene til A-matrisen, vi sier da at matrisen B er den transponerte av matrisen A, altså at $B = A^T$.

Forutsetningen for at dette skal være sant er:

- Det knutepunktet som er referansenode i nodetransformasjonen er det knutepunktet som er utelatt i KCL .
- At vi skriver nodetransformasjonen i samme grenrekkefølge som vi bruker når vi skriver knutepunktsligningene.
- At vi skriver knutepunktsspenningene i nodetransformasjonen i samme rekkefølge som den vi bruker i KCL.

Dermed er $U_G = A^T \cdot U_{node}$.
Dette betyr at når vi har skrevet KCL har vi samtidig skrevet nodetransformasjonen!

Nodetransformasjonen og KVL

Vi skal vise at nodetransformasjonen er en alternativ måte å skrive Kirchhoffs spenningslov på.

KCL: $A \cdot I_G = 0$.   KVL: $B \cdot U_G = 0$.

Fra før har vi funnet at $A_a \cdot B_a^T = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot B^T = 0 \quad \Rightarrow \quad (A \cdot B^T)^T = B \cdot A^T = 0$.

Nodetransformasjonen: $U_G = A^T \cdot U_{node}$.

Dermed: $B \cdot U_G = B \cdot A^T \cdot U_{node} = (B \cdot A^T) \cdot U_{node} = 0 \cdot U_{node} = 0$.

Altså: $B \cdot U_G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_G = A^T \cdot U_{node}$.

Tellegens teorem

Gitt en krets med G grener og N noder.
La grenspenningene i denne kretsen være u_k , $k = 1,\cdots,G$
og la grenstrømmene være i_k , $k = 1,\cdots,G$.

Da sier Tellegens teorem at

$$\sum_{k=1}^{G} u_k \cdot i_k = 0$$

hvis grenspenningene oppfyller KVL og grenstrømmene oppfyller KCL.

Bevis:

Hvis KCL er oppfylt er $A \cdot I_G = 0$.

Hvis KVL er oppfylt er $U_G = A^T \cdot U_{node}$.

Nå kan $\sum_{k=1}^{G} u_k \cdot i_k$ skrives som $\sum_{k=1}^{G} u_k \cdot i_k = U_G^T \cdot I_G$ og dermed får vi:

$$\sum_{k=1}^{G} u_k \cdot i_k = U_G^T \cdot I_G = (A^T \cdot U_{node})^T \cdot I_G = U_{node}^T \cdot (A^T)^T \cdot I_G = U_{node}^T \cdot (A \cdot I_G) = U_{node}^T \cdot 0 = 0$$

og dermed er setningen bevist.

Tellegens teorem viser at energi er konservert i en krets, da summen av effektene i grenene er lik null.