Leonardo Oleynik

Quantum trajectories models

Curitiba

2017

Leonardo Oleynik

Quantum trajectories models

Final report presented as a requirement for the discipline *CF-374 Introduction to Research II* of the Physics course (Bachelor) at the Federal University of Paraná

Federal University of Paraná

Exact Sciences Sector

Physics Department

Orientador: Prof. Dr. Renato Moreira Angelo

Curitiba

2017

Abstract

The trajectory's notion — natural and straightforward from everyday experience — presents strangely and as the core of ontological questions when extrapolated to the quantum realm. The main models of trajectories in the scientific community can be classified as unrealistic, causal and subjectively real — respectively, based on the standard interpretation of quantum mechanics, pilot wave theory and measurement theory. Given this plurality, this report presents the principal studies on the subject, focusing on the causal trajectory model, which will meet the requirements to describe the nonlocal aspects inherent in the dynamics of a free particle.

Keywords: Quantum Mechanics, Trajectory models, De Brolie-Bohm theory, nonlocality

Sumário

Introdução

A experiência clássica de trajetória afirma que essa corresponde basicamente à variação contínua no espaço-tempo das grandezas necessárias à descrição de um corpo, sua posição e velocidade. Isto é, assumindo que ambas possuem valores bem definidos a cada instante de tempo, pode-se compor a noção de movimento.

Quanto à posição, David Bohm nos mostra em [Bohm 1952] que a intuição pictórica mais simplista nos leva a imaginar que algo com posição precisamente definida está em somente um ponto do espaço e que sua trajetória seria, por conseguinte, o espectro ou composição dessas sucessivas imagens em tempos sequenciais. Porém, ao refletir mais ceticamente sobre tal premissa, percebe-se que essa seria incapaz de fornecer a noção de velocidade, ou passagem contínua pelo espaço. Para tanto, esse objeto não poderia ter posição bem definida — ou seja, assim como uma fotografia tirada com exposição prolongada, sua trajetória consistiria de um borrão.

A argumentação acima nos aproxima da noção encontrada na Mecânica Quântica (MQ), nos princípios de complementariedade e incerteza, e persiste, mesmo quando abstraímos a matemática. Isso, visto que, embora seja possível associar uma função contínua e limitada à trajetória e, consequentemente, sua derivada à função velocidade (dessa forma definindo, a cada instante, simultaneamente, a posição e velocidade), tal raciocínio sustenta-se na hipótese que tais funções são também deriváveis, contudo isso não é sempre válido. Matematicamente é fácil encontrar funções descontínuas em todo espaço com comportamento semelhantes àquelas, porém essas são descartadas como descrição de trajetórias, posto que contradizem o paradigma de espaço-tempo contínuo. Isso nos leva a concluir que nossa visão clássica é apenas fundamentada e reforçada historicamente pela experiência cotidiana de grandes escalas.

Diante dessa problemática, parece, ao menos razoável, propor-se à investigar os *modelos de trajetórias quânticas*. Em particular, nesta revisão, objetivaremos conhecer os principais trabalhos desenvolvidos — começando pela interpretação em termos de variáveis ocultas, de Bohm; passando pela teoria quântica da medição, apresentada por Weiseman em [Wiseman e Milburn 1993]; pelo modelo baseado na interpretação usual de Griffiths em [Griffiths 1993]; e chegando nos resultados experimentais atuais de importância tecnológica, publicados por Murch em [Murch et al. 2013]— categorizando-os segundo suas premissas ontológicas: não-real, subjetivamente real e objetivamente real. Ao final, como conclusão deste trabalho, procederemos com o cálculo ilustrativo de trajetórias quânticas Bohmianas para o problema da partícula livre. O resultado será comparado com aquele esperado pela mecânica clássica.

1 Classificação Ontológica

Diante da pluralidade de modelos de trajetórias quânticas e objetivando apresentar brevemente a maioria deles de forma organizada, seguiremos a classificação ontológica em [Wiseman 1996] distinguindo-os, portanto, em três grupos: não real (mera ferramenta matemática sem correspondência com a realidade); subjetivamente real (uma aplicação da teoria quântica da medição); e objetivamente real (uma teoria de redução de estado microscópica).

1.1 Trajetórias Quânticas Não Reais

Fundamentadas na interpretação de Copenhague, as trajetórias quânticas não reais carecem de qualquer significado físico, visto que, pelo princípio de incerteza, é impossível determinar, com exatidão arbitrária, a posição e o momento de dada partícula, simultaneamente — grandezas essas essenciais à intuição de trajetória clássica. Contudo, como percebe-se no artigo [Mølmer, Castin e Dalibard 1993] essas servem como ferramentas numéricas de grande aplicabilidade computacional; ou, ainda, como noção capaz de unir os elementos determinísticos e estatísticos da teoria, como desenvolve Griffiths em [Griffiths 1993].

De acordo com Griffiths, para um sistema clássico fechado qualquer propriedade mecânica, em dado instante de tempo, pode ser expressa com um ponto γ pertencente ao espaço de fase Γ e na medida que o tempo passa esse descreve uma trajetória governada pela equação de Hamilton. Nesse contexto, ele define: *evento*, E, como a célula C_E pertencente à Γ composta pelos pontos nos quais essa propriedade é válida; e *história* como sequência de eventos em tempos distintos.

Nesse cenário para um sistema quântico fechado, o vetor de estado $|\psi\rangle$ e o espaço de Hilbert H, de dimensão finita, são, respectivamente, os análogos quânticos para γ e Γ, dessa forma, todo evento E corresponde à um subespaço S_E; formado pela base de autokets, cujos autovalores estão associados à propriedade em questão; com a evolução temporal governada pela transformação unitária $U(t_f, t_i)$. Contudo, a contrapartida quântica para trajetória não é a imediata relação da passagem de certo ket por S_I distintos, pois essa é incapaz de prever fenômenos envolvendo medições, tão pouco de introduzir elementos estatísticos à discussão, para estados iniciais coerentes. Esses problemas são resolvidos com a seguinte definição de *trajetória quântica*.

Considere, conforme Griffiths, a partição $\{t_1, t_2, \dots t_n\}$ do intervalo $[t_1, t_n]$ e para cada instante de tempo, ou elemento t_j, associe uma base ortonormal, $\{|\phi_j^\alpha\rangle\}$. A partir de um *gráfico de trajetórias*, no qual todo ponto $P_i = (j, \alpha)$ pertencente à uma coluna j está associado à um $\left|\phi_j^\alpha\right\rangle$, *linhas* são traçadas entre esses se, e somente se,

$$\left\langle \phi_{j+1}^{\alpha'} \middle| U(t_{j+1}, t_j) \middle| \phi_j^\alpha \right\rangle \neq 0. \tag{1.1}$$

Diante desse gráfico, define-se *caminho* como a sequência de linhas consecutivas*. Consequentemente, para todo par de pontos conectados por no máximo um caminho, tem-se que a escolha das bases satisfaz a condição de não interferência e nesse caso, tal caminho, é denominado *trajetória*. Dentre todas as possibilidades, pode-se destacar o subconjunto, ou a família elementar F_e de trajetórias que passa por um ponto específico.

1.2 Trajetórias Quânticas Subjetivamente Reais

Nesta seção apresentaremos o conceito de trajetórias quânticas subjetivamente reais, e as diversas motivações, como exemplificadas por Wiseman em [Wiseman 1996], em se adotar tal postura, tais como: soluções parcialmente analíticas para problemas da teoria quântica da medição; inspirações para descrições de processos irreversíveis; e como conceito capaz de fornecer realimentações em medições de ambiente em tempo real.

Quanto ao conceito, diferentemente da interpretação em 1.1, atribui-se, aqui, certo grau de realidade às trajetórias quânticas, no sentido que essas modelam apropriadamente a evolução temporal de sistemas continuamente observados. O termo *subjetivo* é usado, pois a realidade da evolução é condicionada intrinsecamente pela escolha, do observador, do cenário de medição; entretanto, escolhido o cenário, a trajetória tem realidade objetiva, no sentido de que qualquer observador concordará com o resultado apresentado.

Acerca das soluções, Goetsch ressalta em [Goetsch e Graham 1994] que a não linearidade resultante da observação, consequência da contínua interação entre equação de onda e reservatório, e sua permanência, mesmo quando os graus de liberdade do reservatório são eliminados, é um fato importante; e que esse elemento é tão fundamental à teoria quântica, quanto o princípio de superposição, ou a equação de Schrödinger. Diante dessa importância, ele discute acoplamentos de reservatórios Markovianos, bem como apresenta a dedução da equação de onda estocástica linear e suas implicações físicas.

Ressaltando, também, o caráter fundamental dessa interação, Murch, em [Murch et al. 2013], desenvolve uma montagem experimental capaz de monitorar em tempo real as flutuações de uma cavidade de microondas preservando o estado coerente, cuja evolução temporal é descrita por uma trajetória quântica determinada pelos resultados obtidos. Observando tanto a fase quanto a amplitude de um único modo eletromagnético, eles foram capazes de confinar a trajetória ao equador e meridiano da esfera de Block; e por

* Sem saltos e independente da direção temporal.

tomografia de estados quânticos comprovaram que a descoerência é controlável, validando os fundamentos de realimentação quânticos.

1.3 Trajetórias Quânticas Objetivamente Reais

Segundo essa postura, a existência da trajetória é independente do cenário de observação escolhido. Fundamenta-se, portanto, em interpretações alternativas da mecânica quântica em dois grupos proeminentes: descrições causais em termos de variáveis ocultas, apresentados em [Bohm 1952] e aplicadas por [Gindensperger, Meier e Beswick 2000]; e teorias que substituem o colapso subjetivo pelo real e objetivo, defendidos em [Gisin e Percival 1992] e criticados por Wiseman e Milburn em [Wiseman e Milburn 1993].

1.3.1 Variáveis Ocultas

A Interpretação Bohmiana e suas respectivas equações surgem da aplicação da aproximação WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) do limite clássico na MQ. Assim, considere a seguinte função de onda

$$\psi = R\,\exp(iS/\hbar), \tag{1.2}$$

e insira na equação de schröndiger, obtendo estas expressões:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right) \tag{1.3}$$

e

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(R^2 \frac{\nabla S}{m}\right) = 0. \tag{1.4}$$

No limite clássico, no qual a largura do pacote associado a partícula é muito maior que o comprimento de onda, o último termo em 1.3 é desprezível, comparado aos demais, e, ao tirá-lo, obtemos a equação de Hamilton-Jacobi clássica que descreve um corpúsculo com momento

$$\mathbf{p} = \nabla S. \tag{1.5}$$

Com isso em mente, percebemos que 1.3 difere da equação clássica somente pelo termo $-\hbar^2/2m(\nabla^2 R/R)$. Então, assumindo que esse tem papel fundamental na dinâmica, defini-se o potencial quântico:

$$Q := -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}. \tag{1.6}$$

E, a equação de Hamilton-Jacobi pode ser reescrita desta forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q = 0. \tag{1.7}$$

Logo, temos que 1.4 pode ser vista como uma equação de conservação de probabilidade para o *ensemble* de tais partículas, com densidade de probabilidade $P = R^2$.

Quanto à ontologia dessa nova interpretação vale destacar que:

1. Os objetos quânticos são partículas com funções horárias da posição bem definidas e contínuas.

2. A partícula nunca está livre da ação do campo quântico ψ, que satisfaz a equação de Schröndinger, sendo, portanto, contínuo e causal.

3. O momento da partícula, por construção, está restrito à 1.5.

4. Em um *ensemble* de partículas com a mesma ψ a densidade de probabilidade, $P = R^2$, se conserva, como garante 1.4.

1.3.1.1 Aplicação

No contexto de problemas multidimensionais com efeitos quânticos relevantes, a abordagem híbrida MQCB† mostra-se uma alternativa pragmaticamente boa e mais precisa para o exemplo tratado por Gindensperger, em [Gindensperger, Meier e Beswick 2000], do que os métodos convencionais — campo médio e SFC ‡.

A teoria parte de um Hamiltoniano $H = H(x, X, t)$ em que x são as variáveis quânticas, associadas à uma massa m pequena, e $X(t)$ as variáveis clássicas relacionadas à uma massa M. Avaliando a função de onda 1.2 na coordenada clássica, ou seja,

$$\psi(x, X, t)|_{x=x(t),\, X=X(t)} = \widetilde{\psi} = \tilde{R}(x, X(t), t)\, \exp\Big(i\tilde{S}(x, X(t), t)\Big), \tag{1.8}$$

e considerando M suficientemente grande, tal que o pacote de onda associado não demonstre nenhuma dispersão na dimensão X, pode-se retirar os termos $\frac{\partial^2 S}{\partial^2 X}$ e $\frac{\partial^2 R}{\partial^2 X}$ das equações Bohmianas para um sistema de duas partículas (derivadas de 1.4 e 1.7) e então obter:

$$\frac{d\widetilde{R}^2}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{R}^2 \frac{1}{m}\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.9}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}\right) + \left(\frac{1}{m}\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(V + \widetilde{Q}), \tag{1.10}$$

as quais equivalem a um problema quântico no subespaço x, no qual X é um parâmetro temporal. Portanto $\widetilde{\psi}$ obedece à equação de Schröndinger com o potencial quântico aproximado por

$$\widetilde{Q} = \widetilde{Q}(x, t) = -\frac{1}{2m}\frac{1}{|\widetilde{\psi}|}\frac{\partial^2 |\widetilde{\psi}|}{\partial x^2} \tag{1.11}$$

† Mixing Quantum and Classical dynamics using Bohmian trajectories

‡ Surface hopping trajectories

e com a trajetória Bohmiana para variável quântica e clássica dada, respectivamente, por

$$\dot{x} = \frac{\hbar}{m}\left(\frac{1}{\widetilde{\psi}}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}\right)_{x=x(t),\, X=X(t)} \tag{1.12}$$

e

$$\ddot{X} = -\frac{1}{M}\frac{\partial(V+\tilde{Q})}{\partial X}_{x=x(t),\, X=X(t)} \tag{1.13}$$

A adoção de $\tilde{\psi}$, ao invés de ψ permite determinar facilmente o Q por 1.11 e a trajetória quântica por 1.12, a qual, por sua vez, define a aceleração clássica por 1.13. Contudo, como é ressaltado em [Gindensperger, Meier e Beswick 2000], a contribuição do potencial quântico à trajetória clássica é mínima podendo, portanto, ser negligenciada.

1.3.2 Colapso Objetivamente real

É proposto em [Gisin e Percival 1992] um modelo de sistema quântico (no caso, certo estado puro que satisfaz uma equação diferencial estatística) interagente com o ambiente capaz de: ilustrar processos de colapso, absorção não-linear, entre outros; e cujas flutuações estatísticas imitam os resultados experimentais.

Entretanto, Wiseman e Milburn criticam esse modelo precisamente nos seguintes aspectos: a irreversibilidade *ad hoc* do processo de observação; e a obtenção das mesmas trajetórias segundo um modelo subjetivo. Quanto àquele, defendem que restringe demais, sem uma justificativa plausível, a discussão em torno do problema da medição; e acerca deste propõem em [Wiseman e Milburn 1993] uma descrição usando detecções heterodinas capazes de obter trajetórias análogas.

1.4 Partícula Livre

Nesta seção iremos explorar o trabalho de [Sanz e Miret-Artés 2007] para a partícula livre quântica. Baseando-se no formalismo Bohmiano, esse tem como objetivo encontrar analiticamente uma família de trajetórias no espaço de configuração real e compará-las ao análogo clássico explicando as divergências pelo termo adicional (não-clássico) na equação de trajetória.

Assim sendo, considere a função de onda Gaussiana livre, cujo centro do pacote está inicialmente na origem:

$$\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \quad ; \quad \Psi(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_t{}^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-(x-v_0t)^2}{4\tilde{\sigma}_t\sigma_0} + \frac{ip_0(x-v_0t)}{\hbar} + \frac{iEt}{\hbar}\right) \tag{1.14}$$

em que $p_0 = mv_0$ é o momento inicial, σ_0 a dispersão inicial, E a energia inicial e

$$\tilde{\sigma}_t = \sigma_0\left(1 + \frac{i\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right), \tag{1.15}$$

Para aplicarmos a as equações bohmianas é necessário escrever 1.14 na forma $\psi = R\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$, logo devemos escrever a amplitude em coordenadas polares e explicitar as componentes do primeiro termo da exponencial.

Quanto à amplitude, observe que

$$\tilde{\sigma_t} = \sigma_0(1+iy) \quad ; \quad y := \frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2} \tag{1.16}$$

e, multiplicando em cima e em baixo pelo complexo conjugado $1 - iy$ e tomando o inverso, obtemos

$$\frac{1}{\tilde{\sigma_t}} = \frac{1-iy}{\sigma_0(1+y^2)} = \frac{\exp(i\theta)}{\sigma_0(1+y^2)} \quad ; \quad \theta = -\arctan(y). \tag{1.17}$$

Tomando a raiz quadrada da expressão e substituindo o valor de y

$$\left(\frac{1}{\tilde{\sigma_t}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0\left[1+\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0}\right)^2\right]}} \exp\left\{-\frac{i}{2}\arctan\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0}\right)\right\}. \tag{1.18}$$

Acerca do primeiro termo da exponencial, defina-o como

$$A := \frac{(x-v_0t)^2}{4\tilde{\sigma}_t\sigma_0}. \tag{1.19}$$

Observe que ao multiplicar 1.16 por σ_0, ou seja,

$$\tilde{\sigma}_t\sigma_0 = \frac{2m\sigma_0^2 + i\hbar t}{2m}, \tag{1.20}$$

a qual, quando multiplicada pelo complexo conjugado e substituída em 1.19, pode ser rearranjada desta forma

$$A = \frac{(x-v_0t)^2}{2}\frac{m(2m\sigma_0^2 - i\hbar t)}{(2m\sigma_0^2)^2 + (\hbar t)^2}, \tag{1.21}$$

cuja parte imaginária é

$$Im(A) = \frac{m\hbar t(x-v_0t)^2}{2[(2m\sigma_0^2)^2 + (\hbar t)^2]}. \tag{1.22}$$

Observe, ainda, que dada a função horária da dispersão,

$$\sigma_t = \sigma_0\sqrt{1+\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right)^2}, \tag{1.23}$$

podemos obter

$$\sigma_t^2\sigma_0^2 = \sigma_0^4\left[1+\left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right)^2\right] = \frac{\left(2m\sigma_0^2\right)^2 + (\hbar t)^2}{4m^2}. \tag{1.24}$$

Assim, por meio dessa, a expressão 1.22 pode ser reescrita desta maneira

$$Im(A) = \frac{\hbar t(x - v_0 t)^2}{8m\sigma_t^2\sigma_0^2}. \tag{1.25}$$

Podemos, agora, reescrever Ψ no formato $R\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$ e assim identificar a ação Bohmiana

$$S(x,t) = -\frac{\hbar}{2}\arctan\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2} + Et + p_0(x - v_0 t) + \frac{\hbar^2 t}{8m\sigma_0^2\sigma_t^2}(x - v_0 t)^2. \tag{1.26}$$

Pela equação de velocidade Bohmiana

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x} = v_0 + \left(\frac{\hbar}{2m\sigma_0\sigma_t}\right)^2 t(x - v_0 t). \tag{1.27}$$

Defina $\xi := \left(\frac{\hbar}{2m\sigma_0}\right)$ e $s(t) := x(t) - v_0 t$, de forma que, ao passar v_0 para à esquerda, podemos inclui-lo da diferencial e obter:

$$\frac{ds}{dt} = \xi \frac{\sigma_0}{\sigma_t}^2 ts \tag{1.28}$$

dividindo a expressão por s e multiplicando por dt, temos ao integrar de 0 à T

$$\ln\frac{s(T)}{s(0)} = \xi\int_0^T \frac{dt}{1 + \xi t^2} = \xi\frac{\ln(1 + \xi t^2)}{2\xi} \tag{1.29}$$

assim, ao igualar os argumentos, encontramos:

$$\frac{s(T)}{s(0)} = \sqrt{1 + \xi T^2} = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \tag{1.30}$$

trocando a variável T por t e isolando $x(t)$, encontramos, por fim, a família de trajetórias quânticas

$$x(t) = v_0 t + \frac{\sigma_t}{\sigma_0}x(0), \tag{1.31}$$

na qual $x(0)$ é a posição inicial aleatória da partícula.

Dada a expressão exata para a família de trajetórias Bohmianas 1.31, e sendo essa ditada pela dinâmica desvinculada do pacote Gaussiano (o movimento translacional do centro do pacote independe da dispersão), iremos analisá-la nestes regimes, propostos por [Sanz e Miret-Artés 2012]: Ehrenfest-Huygens §, Fresnel ¶ e Fraunhofer ‖. Por fim, iremos expor o caráter não-local do segundo termo da mesma equação.

§ Ou regime de tempo muito pequeno
¶ Ou regime de tempo pequeno
‖ Ou regime assintótico

Para tanto, defini-se a seguinte escala de tempo

$$\tau := \frac{2m\sigma_0^2}{\hbar}, \tag{1.32}$$

associada a dispersão inicial, e substituindo-a em 1.23, obtém-se

$$\sigma_t = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \tag{1.33}$$

1.4.1 Regime de Ehrenfest-Huygens

Assuma t muito pequeno, ou seja, $0 < t \ll \tau$. Assim, tomando o limite de 1.23, encontramos

$$\lim_{t/\tau \to 0} \sigma_t = \sigma_0 \tag{1.34}$$

e, portanto, 1.31 fica:

$$x(t) \approx x(0) + v_0 t. \tag{1.35}$$

Logo, nessa aproximação, é evidente que todas as trajetórias possíveis, dadas por 1.35, são paralelas entre si correspondendo, portanto, a família clássica; e que essas independem de qualquer característica ondulatória da função de onda.

1.4.2 Regime de Fresnel

Neste iremos aproximar a mesma função dispersão por série de Taylor. Considere, portanto, $t \ll \tau$ de forma que $\frac{t}{\tau} \ll 1$ e expanda 1.33 em torno de zero desta forma

$$\sigma_t \approx \sigma_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + o(3)\right] \tag{1.36}$$

tomando apenas termos até segunda ordem e substituindo em 1.31, obtemos

$$x(t) \approx x(0) + v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 x(0) \tag{1.37}$$

e, definindo aceleração quântica como $a_q := x(0)/\tau^2$, concluímos

$$x(t) \approx x(0) + v_0 t + a_q \frac{t^2}{2}. \tag{1.38}$$

Pela análise do terceiro termo da função acima, percebemos que a trajetória diverge da clássica à medida que a posição inicial da partícula se afasta da origem (posição inicial do centro do pacote de onda), ou seja, quanto maior $\|x(0)\|$, maior será o módulo de a_q a qual essa estará sujeita. Substituindo 1.32 na definição de a_q, fica evidente que a aceleração é inversamente proporcional à m^2 e σ_0^4 o que, portanto, justifica a concordância da MQ com a física clássica, no limite $\hbar \ll m\sigma_0^2$. Em outras palavras, o termo responsável pela aceleração desaparece para objetos com massa apreciável e bem localizados, restando apenas a função da reta, e, dessa forma, *uma partícula livre de forças permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme*, como dita a primeira lei de Newton.

1.4.3 Regime de Fraunhofer

Analogamente à expansão acima, mas assumindo que $\tau \ll t$

$$\sigma_t \approx \frac{\sigma_0 t}{\tau}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{t}\right)^2 + o(3)\right) \tag{1.39}$$

e, definindo velocidade quântica como $v_q := x(0)/\tau$, tem-se

$$x(t) \approx (v_0 + v_q)t. \tag{1.40}$$

Evidentemente por 1.40, qualquer trajetória dessa família tem velocidade constante — resultante das contribuições clássica e não-local — e suas particularidades são realçadas quando $x(0)/\sigma_0 \approx 1$, pois: se $v_0 > v_q$, então a trajetória aproxima-se da clássica; contudo, pela relação inversa, temos como predominante a contribuição não-local específica de cada $x(0)$, a qual causa divergência com relação a primeira. É interessante, também, o paralelo entre frequência e posição, visto que, assim como componentes da onda com frequências maiores correspondem a velocidades maiores, o mesmo procede com $\|x(0)\|$.

Segundo [Sanz e Miret-Artés 2007], a não-localidade está intrinsicamente relacionada ao fato de que *a todo instante, qualquer partícula tem informação sobre a configuração de todo o sistema*, e, portanto, essa emerge quando a função de onda — com informação sobre todo o sistema, i.e., um campo físico real, como descreve [Bohm e Stapp 1994] — afeta a partícula, pelo potencial quântico. E, isso é claramente evidenciado pela equação 1.31, cujo segundo termo, dependente da dispersão inicial do pacote, controla a evolução espaço-temporal da partícula. Contudo, vale ressaltar a magnitude dessa influência — inversa e diretamente proporcional, respectivamente, à m, σ_0 e $\hbar$ —, nitidamente desprezível em limites macroscópicos.

Conclusão

A MQ é problemática interpretativamente desde sua concepção no século passado, devido, majoritariamente: ao caráter não determinístico que essa confere à realidade; e aos inúmeros *objetos* desprovidos de análogo clássico. Essas características foram responsáveis por destituir certas intuições clássicas, das mais enraizadas em nossa razão, como, por exemplo, a noção de trajetória — extinta pelo princípio de incerteza. Contudo, com o passar dos anos, esforços não faltaram, na direção de restabelecê-la (ou criar o análogo quântico) e opiniões divergentes, de natureza ontológica, surgiram para sustentá-la. Dentre essas destacamos nesta pesquisa: a não-real (conceito em conformidade com a teoria quântica original), a subjetivamente real (cuja realidade é condicionada pelo cenário de observação) e a objetivamente real (teorizada por David Bohm** como consequência direta de uma interpretação alternativa e causal da MQ).

Suportados por essa última e motivados à construir uma *narrativa* (isto é, uma intuição tanto matemática quanto física) do sistema físico mais simples de todos, a partícula livre, partimos do pacote de onda gaussiano e, aplicando as equações bohmianas, obtivemos sua função horária da posição, a qual particularizamos para três regimes (Huygens, Fresnel e assintótico), típicos da dinâmica de pacotes. Fomos, então, surpreendidos por uma violação da primeira lei de Newton, cuja gênese está na influência não-local da função de onda.

** Aprimoramento dos trabalhos de de Brolie

Referências

BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of *hidden* variables. i. *Physical Review*, APS, v. 85, n. 2, p. 166, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 7.

BOHM, D.; STAPP, H. P. *The undivided universe: An ontological interpretation of quantum theory*. [S.l.]: AAPT, 1994. Citado na página 13.

GINDENSPERGER, E.; MEIER, C.; BESWICK, J. Mixing quantum and classical dynamics using bohmian trajectories. *The Journal of Chemical Physics*, AIP, v. 113, n. 21, p. 9369–9372, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 7, 8 e 9.

GISIN, N.; PERCIVAL, I. C. Wave-function approach to dissipative processes: are there quantum jumps? *Physics Letters A*, Elsevier, v. 167, n. 4, p. 315–318, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 9.

GOETSCH, P.; GRAHAM, R. Linear stochastic wave equations for continuously measured quantum systems. *Physical Review A*, APS, v. 50, n. 6, p. 5242, 1994. Citado na página 6.

GRIFFITHS, R. B. Consistent interpretation of quantum mechanics using quantum trajectories. *Physical Review letters*, APS, v. 70, n. 15, p. 2201, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 5.

MØLMER, K.; CASTIN, Y.; DALIBARD, J. Monte carlo wave-function method in quantum optics. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 10, n. 3, p. 524–538, 1993. Citado na página 5.

MURCH, K. et al. Observing single quantum trajectories of a superconducting quantum bit. *Nature*, Nature Research, v. 502, n. 7470, p. 211–214, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 6.

SANZ, A.; MIRET-ARTÉS, S. Aspects of nonlocality from a quantum trajectory perspective: A wkb approach to bohmian mechanics. *Chemical Physics Letters*, Elsevier, v. 445, n. 4-6, p. 350–354, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 13.

SANZ, A.; MIRET-ARTÉS, S. Quantum phase analysis with quantum trajectories: A step towards the crweation of a bohmian thinking. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 80, n. 6, p. 525–533, 2012. Citado na página 11.

WISEMAN, H. Quantum trajectories and quantum measurement theory. *Quantum and Semiclassical Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, IOP Publishing, v. 8, n. 1, p. 205, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.

WISEMAN, H.; MILBURN, G. Interpretation of quantum jump and diffusion processes illustrated on the bloch sphere. *Physical Review A*, APS, v. 47, n. 3, p. 1652, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 4, 7 e 9.