1. 对于 $\forall x\in[a,b]$，小可以找到一列点列 $\{g_i\}$ 使得 $\lim_{i\to\infty} g_i = x$

~~由于对于~~ $\forall f,g$ 为 $[a,b]$ 上的单调函数，它们至多有可列个不连续点，

记为 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$，现证明 $a_i = b_i$ $(i=1,2,\dots)$

~~假设 $\exists i_0$ 使得 $a_{i_0}\neq b_{i_0}$，不妨设 a_{i_0} 不 b_{i_0}~~

假设 $\exists i_0$，使得 $f(a_{i_0})$ 是不连续点，但是 $g(a_{i_0})$ 是连续点。

那么在 a_{i_0} 的某个邻域 $(a_{i_0}-\delta, a_{i_0}+\delta)$ 内，

存在一列稠密集中的点 $\{y_k\}$，使得 $\lim_{k\to\infty} y_k = a_{i_0}$ 且 $\forall k$，$y_k < a_{i_0}$

由 $g(a_{i_0})$ 的连续性可知，$\lim_{k\to\infty} g(y_k) = g(a_{i_0})$

而由于 $g(y_k) = f(y_k)$ $(\forall k\in\{1,2,\dots\})$，再由极限的唯一性可知，

$\lim_{k\to\infty} f(y_k) = g(a_{i_0})$，即对于函数 f，a_{i_0} 的左极限为 $g(a_{i_0})$。

同理可得，对于函数 f，a_{i_0} 的右极限也为 $g(a_{i_0})$

由于 $f(x)$ 单调，故只有 $f(a_{i_0}) = g(a_{i_0})$，也即 a_{i_0} 为 $f(x)$ 的连续点，

产生矛盾，故只能 $a_i = b_i$，于是也有 f、g 具有相同的~~不~~连续点且

函数值相等。

关于跳跃度一致，我认为是不成立的

在 $[0,4]$ 上

记 $f(x)=\begin{cases}0, & x<e\\ 1, & x>e\\ \frac{1}{4}, & x=e\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}0, & x<e\\ 1, & x>e\\ \frac{3}{4}, & x=e\end{cases}$

这两个函数，f、g 的函数值在 ~~$[0,4]$ 上~~ $[0,4]\cap\mathbb{Q}$ 上相等，

但是 $x=e$ 处的左右跳跃度不一致。

2. 由于常值函数是单调函数，故 card(单调函数全体) $\geq \aleph_1$
由于单调函数都是Borel可测函数，card(单调函数全体) $\leq \aleph_1$
因此单调函数全体的势是 $\aleph_1$
3. 由于可微分点要求此点连续，故被修改的点依然不可微分，而修改不连续点的函数值没有改变其它点的连续性，自然也没有改变可微分性。

2' 由于单调函数类 A 中的每一个单调函数可以表示成连续的单调函数 B 与~~阶梯~~跳跃函数 C 之和，

故有 $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)\,\mathrm{card}(C)$

而 B 中的势应小于等于连续函数的势 B'，

即 $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(B') = \aleph_1$

每一个~~阶梯~~跳跃函数可以~~表示成~~由可列个点的集合 C_1（不连续点的集合）与不连续点对应的左、右跳跃度 C_2 唯一确定，

即 $\mathrm{card}(C) \leq \mathrm{card}(C_1)\,\mathrm{card}(C_2)$

其中 C_1 的势等于可列集到实数集的所有映射的集合的势，

即 $\mathrm{card}(C_1) = \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$

而 C_2 的势等于可列集到实数集的所有映射组成的集合的势的平方，

即 $\mathrm{card}(C_2) = (\aleph_1^{\aleph_0})^2 = \aleph_1$

故 $\mathrm{card}(A) \leq \aleph_1$

5. 由题可知，对 $\forall x\in[a,b)$，都存在一列 x_n，满足 $x_n>x$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，有 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right|<M$

由于 f 一致连续，故有对 $\forall x\in[a,b)$，都存在一个 $\delta>0$，使当 $x'-x<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0')}{x-x_0'}\right|<M$

现任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，不妨令 $x_1<x_2$，并在 $[x_1,x_2]$ 中取一组点 $x_1<y_1<y_2<\cdots<y_n<x_2$，再记 $y_0=x_1$，$y_{n+1}=x_2$，

令上面的点组满足 $y_n-y_{n-1}<\delta$，

则有 $$|f(x_0)-f(x_1)|\le\sum_{i=0}^{n}|f(y_{i+1})-f(y_i)|<M(y_{i+1}-y_i)$$
$$=M(y_{n+1}-y_0)=M|x_0-x_1|$$

故 f 满足 Lipschitz 条件

6. $$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\varphi(x)-\sqrt{0}\cdot\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}(x^{-\frac12}+x^{\frac12}\sin\frac1x)=\lim_{x\to0^+}x^{-\frac12}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}\varphi(x)-\sqrt{0}\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\varphi(-x)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{-\frac12}+x^{\frac12}\sin\frac1x=+\infty$$

故 $f'(0)=+\infty$ 存在

7. 题中的 $f(x)$ 应为有限函数，否则可以取 $f(x)=\frac{1}{x}$

在 $[0,1]$ 上，$f(x)$ 仅在 0 点无有限导数，令 $x'=0$

则 $\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|=\infty$

题应该出错了

令 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x=0\\ 2, & x>0\end{cases}$

则在 $[-1,1]$ 上，$f(x)$ 仅在 $x=0$ 处无有限导数，令 $x'=0$

则对 $\forall x\neq x'$

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|=\left|\frac{f(x)-1}{x}-0\right|=\frac{|f(x)-1|}{|x|}=\frac{1}{|x|}$$

若令 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则结论成立

则固定一点 x_0，对任意 $x\neq x_0$

$$g(x)=\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x'}$$ 是关于 x 的连续函数。

则 $\forall \varepsilon>0$，~~$\exists \eta>0$，当~~ $\exists \eta_1>0$，当 $|x'-x_0|<\eta_1$ 时 ~~$\exists N>0$，当 $n>N$ 时~~

有 $|g(x_0)-g(x')|<\varepsilon$

令 $h_n(x) = \dfrac{f(x)-f(x+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - f'(x)$

则 $\forall \delta>0$，$\exists E_\delta \subset [a,b]$，使 $m([a,b]-E_\delta)<\delta$，

有 $h_n(x)$ 一致收敛于0

即 $\exists N>0$，$\forall x\in E_\delta$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(x+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - f'(x)\right| \leq \varepsilon$$

取 n 充分大，使 $x+\frac{1}{n} \in (x'-\eta_1, x'+\eta_1)$

则有

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} - f'(x)\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(x+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - f'(x)\right| + \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon$$

令 $\eta = \eta_1 - \frac{1}{n}$ 即为结论

8. 当 $\alpha>1$ 时

由于 $x\in(0,1]$ 上 f(x)的导数 处处有限且连续

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \cancel{\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} + x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} + x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}\right) = 0$

故 $f'(x)$在$[0,1]$上连续

因此 $f'(x)$在$[0,1]$上有界

由习题5可知，

f满足Lipschitz条件

故f为有界变差函数

当$\alpha \le 1$时

取点列$\{x_n\}$，使

$$x_n = \begin{cases} \cancel{\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}} \ \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}, & k=\frac{n}{2},\ n\text{为偶数} \\ \frac{1}{2k\pi}, & k=\frac{n+1}{2},\ n\text{为奇数} \end{cases}$$

则 $V_f(\{x_n\}) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi+\frac{\pi}{2})^{\alpha}} = +\infty$

故f不是有界变差函数

~~9. 由于$\{V_f^2(x_0,\cdots,x_n)\}$有上界$M$~~

~~则对$\forall x_1,x_2\in[a,b]$，有~~

$$\cancel{\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \le V_f^2(a,x_1,x_2,b) \le M}$$

~~故f满足Lipschitz条件~~

9.

(1) 对任意一点 $x\in[a,b]$，做一列 $\{x_n\}$，满足 $x_{n+1}\geq x_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

则 $$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}-\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right|\leq\lim_{n\to\infty}V_f^2(a,x_0,\ldots x_n)$$

$$<M$$

故级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}-\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right)$ 绝对收敛

因此 $$\left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-\lim_{i\to\infty}\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right|<M$$

不妨令 $x_0=a$，$x_1=\frac{2a+b}{3}$，且将 x 限制在 $[\frac{2a+b}{3}+\varepsilon,b]$ 中，（ε 为任意大于0的数）

则 $$\left|D_-f(x)\right|<M+\frac{f(\frac{2a+b}{3})-f(a)}{\frac{2a+b}{3}-a}$$

于是由习题5可知，函数 f 在 $[\frac{2a+b}{3}+\varepsilon,b]$ 上满足Lipschiz条件

令 $h(x)=f(-x)$，则 $h(x)$ 的定义域为 $[-b,-a]$

对 $h(x)$ 用上面的方法，可得

$$\left|D_-h(x)\right|<M+\frac{f(\frac{-2b-a}{3})-f(-b)}{\frac{-2b-a}{3}-(-b)}$$

则函数 h 在 $[\frac{-2b-a}{3}+\varepsilon,-a]$ 上满足Lipschiz条件

于是函数 f 在 $[a,\frac{2b+a}{3}-\varepsilon]$ 上满足Lipschiz条件

选取一个ε，使 $[\frac{2a+b}{3}+\varepsilon, b] \cup [a, \frac{2b+a}{3}-\varepsilon] = [a,b]$

则函数f在$[a,b]$上满足Lipschitz条件

由于函数f满足Lipschitz条件，那么f连续

(2)

假设在某一点$x_0\in[a,b]$，有$D_+f(x) < r < s < D^+f(x)$，其中r, s为某个有理数

首考虑$D_+f(x)<r$，则必存在$\xi>x$，有

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<r$$

令$g(x)=\cancel{f(x)-rx}\ rx-f(x)$

则有 $\cancel{g(\xi)<g(x)}$ $g(x)<g(\xi)$

故x为$g(x)$的右控点，

故存在一列构成区间(a_k, b_k)为右控点的集合，

同理可以找到一列构成区间(a_{kl}, b_{kl}) ~~为左控点与右控点的集合~~

为$f(x)-sx$的右控点与$g(x)$的右控点的集合

记其中一个区间$(a_{k_0l_0}, b_{k_0l_0})$为(a', b')

则任取$x_0\in(a', b')$，有一个ξ，使$\left(\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<r\right)$，记这个$\xi$为$x_1$

则有一个ξ'，使$\left\{\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}>s\right.$，记这个$\xi'$为$x_2$，交替地取一列$\{x_n\}$，

且使$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2^n}|x_n-x_{n+1}|$，于是$\{x_n\}$为无限集

则 $V_f^2(\{x_n\}) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left|\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right|-\left|\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right|\right|$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}|r-s| = +\infty$$

这于题干矛盾

用同理的方法考虑 $h(x) = \cancel{f(-x)}\ -f(x)$，可知 $D_+f(x) > s > r > D^+f(x)$ 也不可能

故有 $D^+f = D_+f$

考虑 $f'(x) = f(-x)$，则同理有 $D_-f = D^-f$.

(3)

对 f'_- 的任何一组分点 $\{x_n\}_{n=1}^{k}$

对每一个 x_n，都可以找到两个点 $y_{n,1}, y_{n,2}$（不同与 x_n 的），使得

$|y_{n,1}-x_n|$ 与 $|y_{n,2}-x_n|$ 都可以任意小且满足 $f'_-(x_n) > \frac{f(y_{n,2})-f(y_{n,1})}{y_{n,2}-y_{n,1}} - \frac{\varepsilon}{2^n}$

并且 $y_{n,1} < y_{n,2}$

~~由于 $f'_-(x_{n+1})$ 为下右有界，故存在一个 $y_{n,3}$，使得 $f'_-(x_{n+1}) < \frac{f(y_{n,3})-f(y_{n,2})}{y_{n,3}-y_{n,2}}$~~

~~那么 $V_{f'_-}(\{x_n\}) < \sum_{n=1}^{k}\left|\frac{f(y_{n,3})-f(y_{n,2})}{y_{n,3}-y_{n,2}} - \frac{f(y_{n,2})-f(y_{n,1})}{y_{n,2}-y_{n,1}} + \frac{\varepsilon}{2^n}\right|$~~

由于$f'_-(x_{n+1})$为下确界，故存在两个不同于x_{n+1}的$y_{n,3}$、$y_{n,4}$，满足

$|x_{n+1}-y_{n+3}|$与$|x_{n+1}-y_{n+4}|$可以充分小，且$f'_-(x_{n+1})<\frac{f(y_{n,4})-f(y_{n,3})}{y_{n,4}-y_{n,3}}$

且$y_{n,4}>y_{n,3}$

$$故\ V_{f'_-}(\{x_n\})=\sum_{n=1}^{k}\left|f'_-(x_{n+1})-f'_-(x_n)\right|$$

$$<\sum_{n=1}^{k}\left|\frac{f(y_{n,4})-f(y_{n,3})}{y_{n,4}-y_{n,3}}-\frac{f(y_{n,2})-f(y_{n,1})}{y_{n,2}-y_{n,1}}+\frac{\varepsilon}{2^n}\right|$$

$$<\varepsilon+\sum_{n=1}^{k}\left|\frac{f(y_{n,4})-f(y_{n,3})}{y_{n,4}-y_{n,3}}-\frac{f(y_{n,3})-f(y_{n,2})}{y_{n,3}-y_{n,2}}\right|$$

$$+\sum_{n=1}^{k}\left|\frac{f(y_{n,3})-f(y_{n,2})}{y_{n,3}-y_{n,2}}-\frac{f(y_{n,2})-f(y_{n,1})}{y_{n,2}-y_{n,1}}\right|$$

$$<\varepsilon+2M$$

令$\varepsilon\to0$，则有$V_{f'_-}(\{x_n\})\le 2M$

故f'_-为有界变差函数

同理考虑$h(x)=-f'_+(x)$，可得f'_+为有界变差函数

10. 首先，对 $\forall x_1, x_2$，满足 $|x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$，

有 $|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2|^\alpha < k\varepsilon^\alpha$

故 f 一致连续

(1) 若当 $\alpha > 1$ 时，$f(x)$ 不恒为常数，则必存在二点 $\underbrace{}_{x_1, x_2}$，使得

$f(x_1) \neq f(x_2)$

~~这两点中又必存在一点使其邻域，使得 $\forall x \in U$，使得~~

这两点中又必存在一点，使其存在一个邻域 U，满足 $\forall y_1, y_2 \in U$，

必存 $f(y_1) \neq f(y_2)$，将邻域 U 记为 (a', b')

对 (a', b') 的任意一个闭区间 $[a'', b'']$，取一列点 $a'' = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b''$

使得 $\cancel{|x_{n+1} - x_n|}\ |x_{i+1} - x_i| = \delta > 0$，

易知此时 $n = \dfrac{b'' - a''}{\delta}$

则 $|f(a'') - f(b'')| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq k \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i-1}|$

$$= k\left(\frac{b'' - a''}{\delta}\right) \cdot \delta^\alpha = k(b'' - a'')\delta^{\alpha - 1}$$

令 $\delta \to 0$，则有 $|f(a'') - f(b'')| = 0$

即 $f(a'') = f(b'')$

由 a'' 与 b'' 的任意性知，$\forall y_1, y_2 \in U$，有 $f(y_1) = f(y_2)$，与假设矛盾

故当 $\alpha > 1$ 时，$f(x)$ 恒为常数

(2) 作函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{-1}{\ln x}, & 0<x\le\frac{1}{2}\\ 0, & x=0\end{cases}$

由于 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上严格递增且连续，

故它是有界变差函数

当 $0<\alpha\le 1$ 时

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\ln x}}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\alpha x^{-\alpha}=+\infty$$

故它不满足 Hölder 条件

(3) 见实分析中的反例 11.4

4*. 满足 α $(0<\alpha<1)$ 阶 Hölder 条件而不是有界变差的函数.

设 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 是任意的项为单调递减的正项收敛级数; 并设其和为 s. 在 $[0,s]$ 上构造函数 f:

$$f(x)=0,\text{ 在点 } 0,a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3,\cdots;$$

$$f(x)=\frac{1}{n},\text{在点 } a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}\ (n=1,2,\cdots);$$

$$f(s)=0;$$

$f(x)$ 在任意形如 $[a_1+\cdots+a_{n-1},\ a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}]$, $[a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2},a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n]$ 和 $[0,\frac{a_1}{2}]$, $[\frac{a_1}{2},a_1]$ 的区间上是线性的 (这个函数的略图参看图 17). 这个函数在闭区间 $[0,s]$ 上连续, 且在其上的全变差为无穷大, 不管原先的级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 是怎样的级数. 为了证明它的全变差为无穷大这个论断, 我们用点:

$$\frac{a_1}{2},a_1,a_1+\frac{a_2}{2},a_1+a_2,a_1+a_2+\frac{a_3}{2},\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_k$$

划分区间 $[0,s]$, 这里, k 是任意自然数; 对这一分法, 我们有

$$V=\left|f\left(\frac{a_1}{2}\right)-f(0)\right|+\left|f(a_1)-f\left(\frac{a_1}{2}\right)\right|+\left|f\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)-f(a_1)\right|$$
$$+\cdots+\left|f(a_1+\cdots+a_k)-f\left(a_1+\cdots+a_{k-1}+\frac{a_k}{2}\right)\right|+|f(s)-f(a_1+\cdots+a_k)|$$

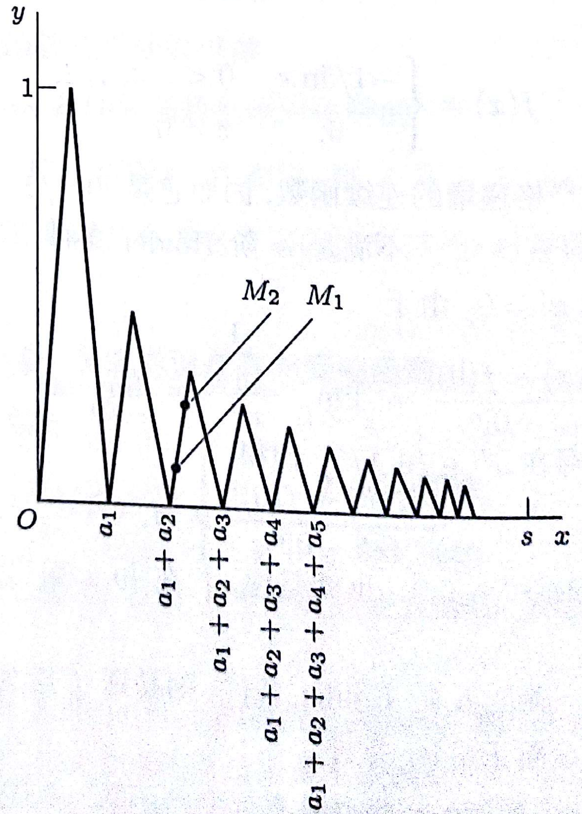

图 17

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

因而 $V_0^s(f) = +\infty$.

现在选择级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, 使函数 f 满足给定阶数的 Hölder 条件. 设 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 是属于函数图形上同一小区间上的两点 (参看图 17). 如果

$$a_1 + \cdots + a_{n-1} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2},$$

那么 $|y_2 - y_1| = K|x_2 - x_1|$, 这里 $k = \frac{1}{n}/\frac{a_n}{2} = \frac{2}{na_n}$. 因而

$$|y_2 - y_1| = \frac{2}{na_n}|x_2 - x_1| = \frac{2|x_2 - x_1|^{1-\alpha}}{na_n}|x_2 - x_1|^{\alpha}$$

$$< \frac{2a_n^{1-\alpha}}{na_n}|x_2 - x_1|^{\alpha} = \frac{2}{na_n^{\alpha}}|x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

选择这样的 $\{a_n\}$, 使 $2/na_n^{\alpha}$ 是有界的 (对一切 n). 在不破坏级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性下, 这样的级数是可以作得出来的; 对此, 只要取 $a_n = n^{-1/\alpha}$ 就够了. 那么对属于函数图形上同一小区间上的任意两点 x_1 和 x_2, 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2|x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

现设 x_1 和 x_2 是区间 $[0, s]$ 上的任意两点, 不在函数图形上的同一小区间上, 例如:

$$x_1 \in \left[a_1 + \cdots + a_{k-1}, a_1 + \cdots + a_{k-1} + \frac{a_k}{2}\right];$$

$$x_2 \in \left[a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}, a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n\right].$$

这时, $k \leqslant n$ (图 18)[①]. 通过图形上的点 M_2 (横坐标为 x_2) 引水平直线, 找出它同点 M_1 (横坐标为 x_1) 所在的图形线段的交点; 设这个交点是 $M_2'(\xi, \eta)$. 易证 $|x_2 - x_1|$

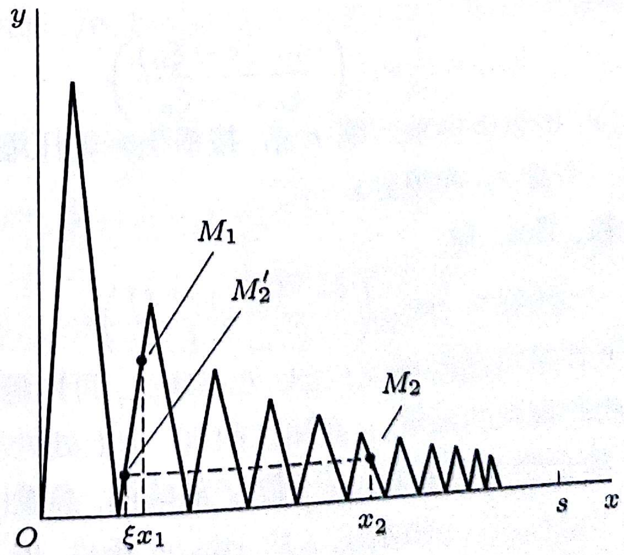

图 18

[①] 如果点 x_1 或 x_2 之一等于 s, 那么证明是类似的.

$> |\xi - x_1|$; 此外, $f(x_2) = f(\xi)$. 因而

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f(\xi) - f(x_1)| \leqslant 2|\xi - x_1|^\alpha < 2|x_2 - x_1|^\alpha.$$

于是, 不等式 $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2|x_2 - x_1|^\alpha$ 对区间 $[0, s]$ 上的任意两点 x_1, x_2 都成立; 即是说, 函数 f 在这个区间上满足 α 阶 Hölder 条件.

注 容易证明, 若函数 f 在有限区间 $[a, b]$ 上满足 Lipschitz 条件, 则 f 在 $[a, b]$ 上满足任何 α $(0 < \alpha < 1)$ 阶 Hölder 条件. 又, 满足 Lipschitz 条件的函数是有界变差函数. 因此, 上述反例说明了在后一命题中, 不能把 Lipschitz 条件减弱为 α $(0 < \alpha < 1)$ 阶 Hölder 条件.

5*. 不满足任何 α $(\alpha > 0)$ 阶 Hölder 条件且不是有界变差的连续函数.

用 $\varphi_\alpha(x)$ 表例 4 中的函数, 它在 $[0, s]$ 上满足 α 阶 Hölder 条件, 但不满足任何 $\beta > \alpha$ 阶 Hölder 条件. 后一结论可以从

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi_\alpha(b_n) - \varphi_\alpha(c_n)|}{|b_n - c_n|^\beta} = +\infty$$

得出 (如果, 设 $b_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, $c_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}$), 事实上,

$$\frac{|\varphi_\alpha(b_n) - \varphi_\alpha(c_n)|}{|b_n - c_n|^\beta} = \frac{\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{a_n}{2}\right)^\beta} = \frac{\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{1}{2n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\beta} = 2^\beta n^{\frac{\beta}{\alpha}-1},$$

当 $n \to \infty$ 时, 最后的式子趋于无穷.

用 σ_n 表级数 $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^n}$ 的和数. 现在, 我们构造要求的函数 f. 为此, 在 $[0, 1]$ 上给出点列:

$$0 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \cdots < \xi_n < \cdots$$

(这里 $\xi_n \to 1$, 当 $n \to \infty$ 时), 在每个区间 $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ 上用下面的方法给出 f:

(i) 如果 n 是偶数, 那么, 命

$$f(x) = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n \cdot (x - \xi_n)}{\xi_{n+1} - \xi_n}\right)$$

(这个函数可以由 $\varphi_{\frac{1}{n}}(x)$ 按纵坐标轴压缩 n 倍, 按横坐标轴压缩 $\sigma_n/(\xi_{n+1} - \xi_n)$ 倍, 且沿横坐标向右移动一个量 ξ_n 而得到).

(ii) 如果 n 是奇数, 那么, 命

$$f(x) = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n \cdot (\xi_{n+1} - x)}{\xi_{n+1} - \xi_n}\right).$$

这样一来, 函数 f 在半闭区间 $[0, 1)$ 上处处有定义; 再用等式 $f(1) = 0$ 补充在点 $x = 1$ 的定义后, 我们得到的函数 f 在闭区间 $[0, 1]$ 上处处有定义而且连续. 函数 f 在这个闭区间上的全变差为无穷大 (函数 f 的略图, 参看图 19).

这个函数在区间 $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ 上满足 $1/n$ 阶 Hölder 条件, 但不满足 $1/(n-1)$ 阶 Hölder 条件; 因而, 它在整个区间 $[0, 1]$ 上不满足任何 $\alpha > 0$ 阶 Hölder 条件.

11. 见《实变函数习题精选》徐森林[267]题(305页)

12.

(i) 证明 $\overset{b}{\underset{a}{P}} f = \overset{c}{\underset{a}{P}} f + \overset{b}{\underset{c}{P}} f$ 与

证明: $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$ 完全类似

(ii)

记 $\overset{x}{\underset{a}{N}} f$ 为使 $\sum f(x_i)-f(x_{i-1}) \le 0$ 的全体的求和的

负数的上确界，即

$$\overset{x}{\underset{a}{N}} f = -\sup_{n} \sum{}'' (f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

则易知，有 $\overset{x}{\underset{a}{V}} f = \overset{x}{\underset{a}{P}} f + \overset{x}{\underset{a}{N}} f$ ……①

且有 ~~f(x) - f(a~~

$$\overset{x}{\underset{a}{P}} f - \overset{x}{\underset{a}{N}} f = \sup_{n} \sum{}' (f(x_i)-f(x_{i-1})) + \sup_{n} \sum{}'' (f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

$$= \sup_{n} (f(x)-f(a))$$

$$= f(x)-f(a) \quad \text{……②}$$

解①、②所联立的方程组即可得 $\overset{x}{\underset{a}{P}} f = p(x)$

下文L为Lipschitz常数

13. ~~1~~ 必要性:

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

则当 $\sum_{v=1}^{n}(b_v - a_v) < \delta$ 时

$$\sum_{v=1}^{n}|f(b_v) - f(a_v)| \leq L\sum_{v=1}^{n}|b_v - a_v| = L\sum_{v=1}^{n}(b_v - a_v) = \varepsilon$$

充分性:

假设 f 不满足 Lipschitz 条件, 则对 $\forall k>0$,

存在一个区间 (a_v^k, b_v^k), 使得 $|f(a_v^k) - f(b_v^k)| > k(b_v^k - a_v^k)$

那么在区间 (a_v^k, b_v^k) 中, 存在一个子区间 $(a_v^{k'}, b_v^{k'})$ 使得

$$\frac{1}{k^2} < (b_v^{k'} - a_v^{k'}) < \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

如果不存在那样的区间, 那么

$$|f(a_v^k) - f(b_v^k)| \leq \sum |f(a_v^{k'}) - f(b_v^{k'})| < L\sum(b_v^{k'} - a_v^{k'}) = L(b_v^k - a_v^k)$$

矛盾, 故

对每一个 k, 均可找到一个区间满足上面的条件, 仍记为 (a_v^k, b_v^k)

由于 $\sum_{k=1}^{\infty}(b_v^{k} - a_v^{k}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} < +\infty$

故存在一个 N, 使得 $\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} < \delta$

因此 $\sum_{k=N}^{\infty}|f(a_i^k)-f(b_i^k)|<\varepsilon$

但 $\sum_{k=N}^{\infty}|f(a_i^k)-f(b_i^k)|>\sum_{k=N}^{\infty}k(b_i^k-a_i^k)>\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$

矛盾

故 f 为 Lipschitz 连续

14.

(1) 对每一个单调函数 f，它可以表示为一个连续单调函数 f_1 与一个跳跃函数 ~~跳跃和~~ f_2 的和

对 $\forall E\in\mathcal{B}$，f_1 把区间映为区间，故把 Borel 集 E 映为 Borel 集

对 $\forall E\in\mathcal{B}$，f_2 把它映为可数点集，也是可测集

因此 $f(E)=f_1(E)\cup f_2(E)$ 是 Borel 集

(2) 不妨设 f 单调递增

对任意一个 Lebesgue 零测集 E，

$E_n=E\cap\{x\in[a,b]\mid f'(x)<n\}$

易知 E_n 也为零测集

由于存在一个开集 O，使得 $m(O-E_n)<\varepsilon$

则 $m(O)<\varepsilon$

记 $O=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$

则 $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\varepsilon$

而 $\sum_{i=1}^{\infty}|f(b_i)-f(a_i)|\leq n\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<n\varepsilon$

令 $\varepsilon\to 0$，则得 $m(f(O))=0$

由于 $f(E_n)\subset f(O)$

则 $m(f(E_n))=0$

故 $m(f(E))=\bigcup_{n=1}^{\infty}m(f(E_n))=0$

15. 此题证明来自《实变函数习题精选》第280页证明：

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ 的定义3.6.3，作一个和式 $V_f(\Delta^*)$ 满足 $V_f(\Delta^*)>\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)-\varepsilon$. 设和 Δ^* 对应的分割为

$\Delta^*: a=x_0^*<x_1^*<x_2^*<\cdots<x_m^*=b$

取 δ 足够小，使得当 $|x''-x'|<\delta$ 时，有

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{V_f(\Delta^*)-(\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)-\varepsilon)}{4m+1}$$

于是对 $[a,b]$ 的任何分割 Δ，只要 $\|\Delta\|<\delta$，便有

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\geq V_f(\Delta)>\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)-\varepsilon$$

事实上，我们造一个新分割 $\Delta \cup \Delta^*$（合并 Δ 与 Δ^* 的分点得到的分割）. 假设对应于 $\Delta\cup\Delta^*$ 的和为 $\cancel{V_{\Delta\cup\Delta^*}}$ $V_f(\Delta\cup\Delta^*)$，则

$$V_f(\Delta\cup\Delta^*) \geq V_f(\Delta^*)$$

另一方面，$\Delta\cup\Delta^*$ 也可以从 Δ 每次增加一个分点，共增 m 次而得，而对于每一个分点的增加，V 的增量小于

$$2\cdot\frac{V_f(\Delta^*)-\left(\overset{b}{\underset{a}{V}}f-\varepsilon\right)}{4m+1}，所以$$

$$\cancel{V_{\Delta\cup\Delta^*}}\, V_f(\Delta\cup\Delta^*)-V_f(\Delta) < \frac{V_f(\Delta^*)-\left(\overset{b}{\underset{a}{V}}f-\varepsilon\right)}{4m+1}\cdot 2m$$

$$< \frac{V_f(\Delta^*)-\left(\overset{b}{\underset{a}{V}}f-\varepsilon\right)}{2}$$

综上则有

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f \geq V_f(\Delta) > V_f(\Delta\cup\Delta^*) - \frac{V_f(\Delta^*)-\left(\overset{b}{\underset{a}{V}}f-\varepsilon\right)}{2}$$

$$\geq V_f(\Delta^*) - \frac{V_f(\Delta^*)-\left(\overset{b}{\underset{a}{V}}f-\varepsilon\right)}{2}$$

$$= \frac{V_f(\Delta^*)+\overset{b}{\underset{a}{V}}f-\varepsilon}{2}$$

$$> \overset{b}{\underset{a}{V}}f-\varepsilon$$

16.

zhuanlan.zhihu.com/p/27668351

记 $\omega_U f = \sup\limits_{x,y\in U} |f(x)-f(y)|$ 称为函数 f 在 U 上的振幅

记 $\omega_f(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \omega_{B(x,\frac{1}{n})} f$，

其中 $B_{(x,\frac{1}{n})} = \{y\in X \mid d(x,y)<\frac{1}{n}\}$

其中 $d(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离，不妨设为 $d(x,y)=|x-y|$

于是一个函数 f 在 x 处连续当且仅当 $\omega_f(x)=0$

下面证明：对任意 $r>0$，集合 $\{x\in X \mid \omega_f(x)<r\}$ 为开集

若 $x\in\{x\in X \mid \omega_f(x)<r\}$

则必存在某个 n_0 与 ε_0，使得

$$\omega_{B(x,\frac{1}{n_0})} f \leq r-\varepsilon_0$$

则 $\forall y\in B(x,\frac{1}{n_0})$，$y\in\{x\in X \mid \omega_f(x)<r\}$，故它为开集。

因此 $\{x\in X \mid \omega_f(x)\geqslant r\}$ 为闭集

定义 $D(f)=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\{x \mid \omega_f(x)\geqslant\frac{1}{n}\}$，则 $D(f)$ 为不连续点的集合，

因此连续点的集合为 G_δ 集，也是 Borel 集。

17.

zh.wikipedia.org/wiki/达布定理

首先证明达布定理：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为一个实值且可导的函数，则 f' 满足：对任意 $f'(a)<t<f'(b)$ 的 t，存在 $x\in(a,b)$，使 $f'(x)=t$

不妨设 $f'_+(a)<t<f'_-(b)$，$g(x)=f(x)-tx$，

则有 $g'_+(a)<0<g'_-(b)$，只需找到 g' 的一个零点

由于 $f(x)$ 可导，故 $f(x)$ 连续，故 $g(x)$ 连续，因此 $g(x)$ 的 $[a,b]$ 上会取到极值，~~由~~由于 $g'_+(a)>0$，$g'_-(b)<0$，故极值点不在 $x=a$ 与 $x=b$ 上取得，那么必存在~~在~~ (a,b) 上的一点 x，使 $g(x)=0$

现证明题干结论，假设 f' 上有第一类~~连续~~间断点，由于 f' 存在，故只能为跳跃间断点，设其为 x，则不妨设 x 的右跳跃度不为0，为 c，则不存在一点 y，使得 $f'(y)=f'(x)+\frac{c}{2}$，在 $[x,x+\delta]$ 上使用达布定理，产生矛盾

18. 由《实分析中的反例》[3.16]类(在54页)

在[0,1]上的一个可微函数，其导数在已给的非空完备疏集上无处连续

这里令非空完备疏集为某个类康托集(cantor-like set)即可：

zhuanlan.zhihu.com/p/50544726

在[0,1]里，向Cantor三分集那样，第k个步骤淘汰掉每段中间的那个区间长度为l_k的开区间，剩下的集合，叫做Cantor类集。

这个l_k可以选得非常小，使得$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\cdot l_k<1$，从而使Cantor类集的测度可以为正。(这里上面的知乎专栏写错了)。

详情见上面的知乎文章。

15. $[0,1]$ **上的一个可微函数，其导数在无理点连续而在有理点间断.**

在 $[0,1]$ 上定义函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$g'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x)-\cos(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

所以 $g'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续而在 $x=0$ 处间断

设 $\{r_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g(x-r_n).$$

显然, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g'(x-r_n)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 因而 (参看 [98], 中译本 pp.223—224)

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g'(x-r_n),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

于是, f' 在 $[0,1]$ 中的任一无理点连续而在任一有理点间断.

16. $[0,1]$ **上的一个可微函数，其导数在已给的非空完备疏集上无处连续.**

设 E 为 $[0,1]$ 中的非空完备疏集, (α_n,β_n) $(n=1,2,\cdots)$ 是它的邻接区间, 在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2\sin\dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}, & x\in(\alpha_n,\beta_n),\\ 0, & x\in E.\end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]$ 上连续, 对每一 $x\in(\alpha_n,\beta_n)$, f 在 x 处可微且

$$f'(x)=2(x-\alpha_n)(\beta_n-x)(\alpha_n+\beta_n-2x)\sin\frac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}$$
$$-\frac{2(\alpha_n+\beta_n-2x)}{(x-\alpha_n)(\beta_n-x)}\cos\frac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}.$$

其实, 对每一 $x_0\in E$, f 在 x_0 处也可微且

$$f'(x_0)=0.$$

为证实这一结论, 我们先设 $x>x_0$. 若 $x\in E$, 则

$$f(x)-f(x_0)=0-0=0.$$

若 x 含于某个邻接区间 (α_n,β_n) 内, 则

$$|f(x)-f(x_0)|=(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2\left|\sin\frac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}\right|,$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{x-x_0}&\leqslant\frac{(x-x_0)^2(\beta_n-x)^2}{x-x_0}\\&=(x-x_0)(\beta_n-x)^2\to 0\quad(x\to x_0+),\end{aligned}$$

于是得到

$$f'(x_0+) = 0.$$

同理可得

$$f'(x_0-) = 0.$$

因之 $f'(x_0) = 0$.

综上所述, f 在 $[0,1]$ 上处处可微. 由 f' 的解析表达式易知, f' 在 $[0,1]\setminus E$ 上连续而在 E 上无处连续.

17. 一个具有连续导数的严格递增函数, 其导数在已给的完备疏集上恒为零.

设 E 为 $[0,1]$ 中的完备疏集, 令

$$\varphi(x) = d(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y|.$$

则 φ 在 $[0,1]$ 上连续, 且当 $x \in E$ 时, $\varphi(x) = 0$, 而当 $x \overline{\in} E$ 时, $\varphi(x) > 0$ (参看 [pp.33—34). 在 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)dt,$$

则对任意 $x \in [0,1]$, 都有 $f'(x) = \varphi(x)$. 特别, 当 $x \in E$ 时, 有 $f'(x) = 0$. 此外, f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的. 为验证这一结论, 我们任取两点 x_1 和 x_2, $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$. 由于 E 是疏集, 因而在这两点之间存在着不含有 E 中的点的开区间 (α, β). 于是

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt \geqslant \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt = \varphi(\xi)(\beta - \alpha),$$

其中 $\alpha < \xi < \beta$. 因为 $\xi \overline{\in} E$, 所以 $\varphi(\xi) > 0$, 从而 $f(x_2) > f(x_1)$. 得所欲证.

18. 一个严格递增的连续函数, 它不处处可微.

下面的例子是由 Pringsheim 作出的. 令

$$f(x) = \begin{cases} x\left\{1 + \dfrac{1}{3}\sin(\ln x^2)\right\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

易见, f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 因为当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{3}\sin(\ln x^2) + \frac{2}{3}\cos(\ln x^2) > 0,$$

所以 f 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内都是严格递增的. 又当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 而当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$. 可见 f 在 $(-\infty, \infty)$ 内也是严格递增的. 但由于

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0}\left\{1 + \frac{1}{3}\sin(\ln x^2)\right\}$$

不存在, 因而 f 在 $x = 0$ 处不可微.

注 有人或许会猜测, 严格单调函数的不可微的点都是一些间断点. 上述反例说明了这种猜测是不正确的.

19.

由定理3.6.14, 1°可知

$$\sum_k \{|f(x_k+0)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x_k-0)|\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(|\lambda_n|+|\mu_n|)\leq \bigvee_a^b f$$

又由于对于$f(x)$,
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\theta_1(x-x_n)$$
可以拆为两个单调增加函数
$$f^+(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^+\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^+\theta_1(x-x_n)$$
$$f^-(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^-\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^-\theta_1(x-x_n)$$
的函数之差 $f=f^+-f^-$

则 $\bigvee_a^b f\leq \bigvee_a^b f^+ + \bigvee_a^b f^- = \sum_{n=1}^{\infty}(|\lambda_n|+|\mu_n|)\leq \bigvee_a^b f$

4. 见《实分析中的反例》[11.3*] 在245页

可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j}|f(b_i)-f(a_i)| &= \sum_{i=1}^{k-1}|f(b_i)-f(a_i)|+|f(b_k)-f(a_k)|+\sum_{i=k+1}^{j}|f(b_i)-f(a_i)|\\ &\leqslant \left\{\sum_{i=1}^{k-1}|f(b_i)-f(a_i)|+|f(c)-f(a_k)|\right\}\\ &\quad+\left\{\sum_{i=k+1}^{j}|f(b_i)-f(a_i)|+|f(b_k)-f(c)|\right\}\\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, f 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的.

兹在 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1/n,\\ x\sin(\pi/x), & 1/n\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

则对每一 n, f_n 在 $[0,1/n]$ 与 $[1/n,1]$ 上都是绝对连续的. 于是, 由引理可知, f_n 在 $[0,1]$ 上也是绝对连续的. 令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\sin(\pi/x), & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=[1/\varepsilon]$, 则当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in[0,1]$, 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f. 然而, 由于 f 在 $[0,1]$ 上并不有界变差, 因而它在 $[0,1]$ 上也不绝对连续.

33. 一个不是绝对连续的函数序列, 却一致收敛于一个绝对连续的函数.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n, & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数},\end{cases}$$

则对每一 n, f_n 在 $[0,1]$ 上均非绝对连续. 然而, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于绝对连续的函数 $f\equiv 0$.

34. 任给 $[0,1]$ 中测度为零的集 E, 可构造 $[0,1]$ 上的一个不减的绝对连续函数 f, 使对每一 $x\in E$, 都有 $f'(x)=+\infty$.

因为 $mE=0$, 所以对每一 n, 可作开集 G_n, 使 $G_n\supset E$, 且 $mG_n<1/2^n$. 令

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{G_k}(x),$$

其中 φ_{G_k} 代表集 G_k 的特征函数. 于是, g_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[0,1]$ 上的一串非负简单函数, 且

$$g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

因此，$\{g_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于某个 (L) 可积函数 g. 令

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt.$$

因为 $g(t)\geqslant 0$, 所以 f 是 $[0,1]$ 上的一个不减的绝对连续函数.

任取 $x_0\in E$, 因为 $E\subset G_k$ $(k=1,2,\cdots)$, 所以对每一正整数 n, 总可找到这样的正数 h, 使得

$$[x_0,x_0+h]\subset G_k\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

于是就有

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}&=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}g(t)dt\geqslant\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}g_n(t)dt\\&=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi_{G_k}(t)dt=n.\end{aligned}$$

由此可见，$f'(x_0+)=+\infty$. 同理可证 $f'(x_0-)=+\infty$. 因此，$f'(x_0)=+\infty$. 由于 $x_0\in E$ 是任取的，因而对每一 $x\in E$, 都有 $f'(x)=+\infty$.

35*. 一个严格递增的连续函数，它并不绝对连续.

第七章例 31 中的函数 f, 它是 $[0,1]$ 上的一个严格递增的连续函数，且把 $[0,1]$ 中某个测度为零的集映成测度大于零的集. 因为绝对连续函数把测度为零的集映成测度为零的集 (参看 [27], 中译本 p.307), 所以 f 不可能是绝对连续的函数.

36*. 一个在 $[0,1]$ 上严格递增的连续函数，它在任何非空区间 $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ 上都不是绝对连续的.

设 $\varphi(x)$ 是第七章例 31 中的严格递增的连续函数，又设 B 也是该章例 31 中所论及的区间 $[0,1]$ 的子集，它具有如次的性质:

(i) $mB=1$; (ii) 若令 $B^*=\varphi(B)$, 则 $mB^*=0$.

现在我们任取非空区间 $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$, 则

$$[\alpha,\beta]\cap B\subset B,\quad \varphi([\alpha,\beta]\cap B)\subset B^*.$$

因为 $mB=1, mB^*=0$, 所以得到

$$m([\alpha,\beta]\cap B)=\beta-\alpha,\quad m\varphi([\alpha,\beta]\cap B)=0.$$

令 $A=[\alpha,\beta]\setminus[\alpha,\beta]\cap B$, $A^*=\varphi(A)$, 则 $mA=0$, $mA^*=\beta-\alpha>0$. 即是说，φ 把 $[\alpha,\beta]$ 中测度为零的集 A 映成测度大于零的集 A^*. 因此，φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不可能是绝对连续的.

37. 一个严格递增的绝对连续函数，它把某个测度大于零的集映成测度等于零的集.

设 E 为 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集，又设 (α_i,β_i) $(i=1,2,\cdots)$ 为 E 的全体邻接区间. 令

$$g(x)=\begin{cases}(x-\alpha_i)(\beta_i-x), & x\in(\alpha_i,\beta_i),\ i=1,2,\cdots,\\0, & x\in E.\end{cases}$$