1.

(i) 假设空集的边全不是空集，~~田~~则令 $E=A\times B$ 且 $\exists x\in A$，$\exists y\in B$，那么 $(x,y)\in A\times B=E$，于是 E 不是空集

(ii)

充分性：$\forall a\in A_1$，$a_1\in A_2$

$\forall b\in B_1$，$b\in B_2$

则 $\cancel{(a,b)}\ \forall (a,b)\in A_1\times B_1$

$(a,b)\in A_2\times B_2$

于是 $A_1\times B_1\subset A_2\times B_2$

必要性：

若 $E_1\subset E_2$

由于 E_1、E_2 都是矩形

~~都~~故 $E_1=A_1\times B_1\subset A_2\times B_2=E_2$

于是 $A_1\subset A_2$，$B_1\subset B_2$

(iii) 由于 $E=E_1\cup E_2$ 且 $\varnothing=E_1\cap E_2$

则 $A\times B=(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)=(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)$

$\varnothing=(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$

于是 $\begin{cases}A_1\cup A_2=A\\A_1\cap A_2=\varnothing\\B_1\cup B_2=B\\\cancel{B_1\cap B_2=\varnothing}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A_1\cup A_2=A\\B_1\cup B_2=B\\B_1\cap B_2=\varnothing\end{cases}$

2. 证明 $\cancel{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ix}}$

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right)_{x_0} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_{\lambda x_0}$$

$$\left(\bigcup_{\lambda=\Lambda} E_\lambda\right)_{x_0} = \left\{ y \mid (x_0, y) \in \bigcup_{\lambda=\Lambda} E_\lambda \right\} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left\{ y \mid (x_0, y) \in E_\lambda \right\}$$

$$= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_{\lambda x_0}$$

证明：$(E-F)_{x_0} = E_{x_0} - F_{x_0}$

$$(E-F)_{x_0} = \left\{ y \mid (x_0, y) \in E \wedge (x_0, y) \notin F \right\}$$

$$= \left\{ y \mid (x_0, y) \in E \right\} - \left\{ y \mid (x_0, y) \in F \right\}$$

$$= E_{x_0} - F_{x_0}$$

3. 记变换 $E^1 \times E^1 \longrightarrow E^1 \times E^1$

$$(x, y) \longrightarrow (\cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y,\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)$$

为旋转变换 τ_θ

记 $\tau_\theta(E) = \left\{ \tau((x,y)) \mid (x,y) \in E \right\}$

因为对任意 $E\in H(L\times L)$，存在一列 $E_i\in P$，~~于是有~~ 使 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，

于是有 $\tau_\theta(E)\subset\tau_\theta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\tau_\theta(E_i)$

则 $m\times m^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}m\times m^*(E_i)\,\middle|\,E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_i\in P\right\}$

$\geq m\times m^*(\tau_\theta(E))$

而 $\tau_{-\theta}(\tau_\theta(E))=E$

故有 $m\times m^*(E)\leq m\times m^*(\tau_\theta(E))$

即 $m\times m^*(E)=m\times m^*(\tau_\theta(E))$，两者外测度相等

若 $E\subset(L\times L)^*$

则有 $m\times m^*(F)=m\times m^*(F\cap E)+m\times m^*(F-E)$

于是 $m\times m^*(\tau_\theta(F\cap E))+m\times m^*(\tau_\theta(F-E))$

$=m\times m^*(\tau_\theta(F)\cap\tau_\theta(E))+m\times m^*(\tau_\theta(F)-\tau_\theta(E))$

$=m\times m^*(\tau_\theta(F))$

由 $\tau_\theta(F)$ 的任意性知，$\tau_\theta(E)\subset(L\times L)^*$

故 $(E'\times E',(L\times L)^*,m\times m)$ 具有旋转不变性

于是 $m\times m(E)=m\times m(\tau_{-\frac{\pi}{4}}(E))=m\times m(E'\times A)$ 可测

且当 $m(A)=0$ 时

$m\times m(E)=m\times m(E'\times A)=m(A)=0$

4. 证明：只需旋转 $-\arctan\frac{1}{\alpha}$ 即可证明

对于一般的测度，不成立，

反例：取§3.4 例8中的测度空间，

那么令 $A=\{0.5\}$，则 $\mu(A)=0$

但是令 $E=\{(x,y)\mid x-0.5y\in A\}$，即 $\alpha=0.5$

由于 $(1,1)\in E$

故 $\mu\times\mu(E)\geq 1\neq 0$

前面的结论的反例找不到

5.

$$\cancel{|f*h|\leq\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)h(x)\,dx\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)||h(x)|\,dx}$$

$$\cancel{\left|\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)h(x)\,dx\right|}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)||h(x)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)|\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$$

故由Fubini定理知

$\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)h(x)\,dx$ 存在

$$\widetilde{f*h}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)h(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}f(t-x)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)e^{isx}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}f(t)dt$$

$$=\tilde{f}\cdot\tilde{h}$$

否则可令 $t-x=y$

不妨设f有界，h可积，$\int_{-\infty}^{+\infty}h\,dx=A$

由于 $(f*h)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)h(x)dx\leq\int_{-\infty}^{+\infty}Mh(x)dx=MA$

于是 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x-\Delta x)h(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)h(x)dx\right)=0$

即 $f*h$ 连续

换成一般测度，不成立

令 $\theta(E)=\begin{cases}1, & 0\in E\\ 0, & 0\notin E\end{cases}$

则在 (E', L^θ, θ) 中

令 $h(x)=1$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\geq0\\ 1, & x<0\end{cases}$

易知 $\int_{-\infty}^{+\infty}h\,d\theta=1$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f\,d\theta=f(0)=0$

但是 $f*h=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)\,d\theta(x)=f(t)$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f*h\,d\theta=$

反例①：

令 $\lambda(x)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ 0, & x\leq1\end{cases}$

易知 $\lambda(x)$ 为 Lebesgue-Stieltjes测度

记 $h(x)=f(x)=\frac{1}{x^3}$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)d\lambda(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)d\lambda(x)$

$$=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot2x=1$$

但是 $\int_{-\infty}^{+\infty}f*h\,d\lambda(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{(t-x)^3}d\lambda(x)$$

若上式存在，则必有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{(t-x)^3}d\lambda(t)$$ 存在，

但是 $$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{(t-x)^3}d\lambda(t)=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^3}\cdot\frac{2t}{(t-x)^3}dt$$

$$=4\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\int_1^{+\infty}\frac{t}{(t-x)^3}dt \xlongequal{t-x=y} 4\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\int_{1-x}^{+\infty}\frac{x+y}{y^3}dy$$

$$=4\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}\right)dx=4\int_1^{+\infty}\frac{1}{2(1-x)^2x}+\frac{1}{x^2(1-x)}dx \text{ 不} =-\infty$$

故 $(f*h)(t)$ 不可积，

反例2

~~令 $\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$~~

~~易知 $\theta(x)$ 为 Lebesgue−stieltjes 测度~~

~~记 $f(x)=x$，$h(x)=e^{x}$~~

~~则易知 $\tilde{f}(t)=0$，$\tilde{h}(t)=1$~~

~~但 $f*h=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)e^{x}e^{x}$~~

~~但 $f*h=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)e^{x}=$~~

令 $\varphi(x)=\begin{cases}2, & 1\leq x\\ 1, & 0\leq x<1\\ 0, & x<0\end{cases}$

易知 $\varphi(x)$ 为 Lebesgue−stieltjes 测度

记 $f(x)=x$，$h(x)=1$

则 $\tilde{f}(t)=f(0)+f(1)e^{it}=e^{it}$

$\tilde{h}(t)=h(0)+h(1)e^{it}=e^{it}$

且 $(f*h)(x)=h(0)f(x)+h(1)f(x-1)$

$=x-1$

但是 $\widetilde{f*h}(t)=-1\cdot e^{i0}+(1-1)\cdot e^{it}=-1$

$\neq\tilde{f}(t)\cdot\tilde{h}(t)=e^{2it}$

反例3.

令 $\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & \cancel{x\leq 0}\ x<0\end{cases}$

则 $\theta(x)$ 为 Lebesgue – stieltjes 测度

令 ~~h(x)~~ $h(x)=1$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$

易知 $h(x)$ 有界, $f(x)$ 可积

但是 $(f*h)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\,dx = f(t)$ 在 $x=0$ 处不连续

6. ~~类~~ 先仿造定理3.2.10 证明平面上面的 H.H.Jīy3nH 定理

再仿造定理3.3.13 证明存在连续函数 φ, 使得

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} |f-\varphi|\,dm\times m < \varepsilon$$

而其对(i)阶梯函数或(ii)多项式 (iii)三角多项式 φ' 而言, 都可以任意逼近连续函数 φ

于是 $\int_c^d\int_a^b |f-\varphi'|\,dxdy = \int_{[a,b]\times[c,d]} |f-\varphi'|\,dm\times m \leq \int_{[a,b]\times[c,d]} |f-\varphi|\,dm\times m$

$$+\int_{[a,b]\times[c,d]} |\varphi-\varphi'|\,dm\times m < 2\varepsilon$$

得证.

7. 对$\forall a,b,c,d$，

$\cancel{(a\times b)}\ (a,b)\times(c,d)=\bigcup_{i,j=1}^{+\infty}(a,b-\frac{1}{i}]\times(c,d-\frac{1}{j}]$

故$(a,b)\times(c,d)$为Borel集，

而$(a,b)\times(c,d)$又是平面欧式空间的拓扑基，故所有开集、闭集都是Borel集

8. 对~~$\forall$完~~ $\forall f$（f是完全Lesbegue可积测函数），必$\exists g$（g是乘积Lesbegue可测函数，使$\mu(E(f\neq g))=0$，故$\mu(E_x(f_x\neq g_x))=0$

对$\forall x$（$\mu(E_x(f_x=g_x))$），由定理3.5.2可知g_x必为可测函数，于是对$\forall x$，f_x几处乎处处是可测函数，即f的截口几乎处处可测。

9. 不是

令$k(x,y)=x\,\mathrm{sgn}(y-0.5)$

则$\int_0^1 x\,\mathrm{sgn}(y-0.5)dx=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(y-0.5)$在$y=0.5$处不连续。

10. 仅对于阶梯函数证确，阶梯函数可以保证在某个$E'\times E'-[a,b]\times[c,d]$外恒为0。

对于多项式，在某个$E'\times E'-[a,b]\times[c,d]$外，多项式会充分大。

对于三角函数多项式，它按某个周期性循环。

12. 记 $(E^1\times E^1, (\mathbf{L}\times\mathbf{L})^*, m\times m)$ 上的测度为 μ，§2.4第6小节引入的测度为 m

则在 $\mathbf{P}$ 上，

$\forall E\in\mathbf{P}$

$m(E)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)$

$\mu(E)=m((a_1,b_1])\,m((a_2,b_2])=(b_1-a_1)(b_2-a_2)$

故在 $\mathbf{P}$ 上 m 与 μ 相等，

那么在 $\mathbf{R}_0$ 上，m 与 μ 相等

由 σ-有限测度的唯一性知，在 $(\mathbf{L}\times\mathbf{L})^*$ 上，m 与 μ 相等。

13. (1) $\psi(\emptyset)=\psi((a,a]\times(b,b])=0$

(2) $\forall E\in\mathbf{R}_0$，$\psi(E)>0$

~~若有 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，$E_i\cap E_j=\emptyset\ (i\neq j)$~~

(3) 仿造定理2.2.2