1. 设记 $\sum_{n=1}^{k} u_n = f_k$

则 $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 单调递增.

而 $A=\sup\limits_{k}\int_E f_k\,d\mu = \sup\limits_{k}\int_E \sum_{n=1}^{k} u_n\,d\mu = \sup\limits_{k}\sum_{n=1}^{k}\int_E u_n\,d\mu$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n\,d\mu < +\infty$

故由Levi引理可知

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \lim_{k\to+\infty} f_k\,d\mu = \lim_{k\to+\infty}\int_E f_k\,d\mu = \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_E u_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_E u_n\,d\mu$$

2. $$\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n^2x)\right| = 2\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f(n^2x)\right| \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}|f(n^2x)|$$

而 $$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(n^2x)|\,dx \overset{n^2x=y}{=\!=} \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2}|f(y)|\,dy = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\,dy\right) < +\infty$$

由Levi引理可知，存在可积函数 f_1，使得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|f(n^2x)| \doteq f_1$$

即 $\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n^2x)\right| \leq 2f_1$

故 存在可积函数 f_2，使得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n^2x) \doteq f_2$$

3. 取 $\theta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$

令 (E^1, L^θ, θ) 为 $\theta(x)$ 生成的测度空间,

做 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,d\theta = \int_{\{0\}} f(x)\,d\theta = 0$, 可积,

但是 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n^2x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} f(n^2x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ 发散

4.

证明 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}}\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+\frac{t}{2})^2 \cancel{t}}+\int_0^{\cancel{+\infty}\,1}\frac{dt}{t^{\frac{1}{n}}}\right)$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+\frac{t}{2})^2}+\lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^{-\frac{1}{n}}dt$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^{-\frac{1}{n}}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1 = \int_0^1 1\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} t^{-\frac{1}{n}}dt$

故原式 $=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}} = \int_0^{+\infty}e^{-t}dt = 1$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\ln^{p}(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,dx$

令 $f(n)=\frac{\ln^{p}(x+n)}{n}\quad(n\geq 1)$

则 $f'(n)=\frac{\ln^{p-1}(x+n)}{n^2}\left(\frac{p}{x+n}-\ln(x+n)\right)$

故满足 $\ln(x+n)=\frac{p}{x+n}$ 的 n 为 $f(n)$ 的极大值点,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\ln^{p}(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,dx\leq\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{p^p}{(x+n)^p n}e^{-x}\cos x\,dx$

$<p^p\int e^{-x}dx=p^p$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\ln^{p}(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,dx=\int_0^{\infty}0\,dx=0$

5. 反例:
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(-\frac{1}{n^2}+k,\ k+\frac{1}{n^2}\right),\ k\in\mathbb{Z}^+\wedge k\geq 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则 $\int_0^{\infty}f(x)dx=2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}-2$

但 $f(x)$ 不一致连续

证明：假设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) \neq 0$,

则 ~~[illegible]~~ $\exists \varepsilon$，使 $\forall N$，都存在 $n > N$，并且 $f(n) > \varepsilon$

~~将每一个大于N的n进行编号，记为，则~~

由于 $f(x)$ 一致连续，

故对于上面的 ε，存在一个 δ，使得 $|n'-n|<\delta$ 时，

$|f(n') - f(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$

即对 $\forall x \in (n-\delta, n+\delta)$， $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$

则 $$\int_{\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}(n-\delta,\, n+\delta)} f(x)\,dx > \frac{\varepsilon}{2}\sum_{N=1}^{\infty} 2\delta = +\infty$$

这与 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上 Lebesgue 可积矛盾

6.

这里 $\int f(x+t)h(x)\,dx$ 的积分上下限应该分别为 $+\infty$、$-\infty$，

$$(f*h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,h(x-t)\,dx$$

$$= \int_{-M}^{M} f(x)\,h(x-t)\,dx$$

由于 $h(x)$ 在 $[-M, M]$ 上连续，故 $h(x)$ 在 $[-M, M]$ 上有界，

即 $\exists K$，$\forall x \in [-M, M]$，$|h(x)| \le K$

则 $(f*h)(t) \le \int_{-M}^{+M} f(x) K \cdot dx$ 由控制收敛定理可知，

$(f*h)(t)$ 具有一阶导数。

7. 当 $f=\chi_{[a,b]}$ 时

$$\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt=\int_{a}^{b} e^{i\alpha t}dt=\frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha b}-e^{i\alpha a}\right)$$

故 $\lim\limits_{\alpha\to\pm\infty}\tilde{f}(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to\pm\infty}\frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha b}-e^{i\alpha a}\right)=0$

对实值函数 f，存在一个阶梯函数 φ，使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f-\varphi|dt<\varepsilon$$

则 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} fe^{i\alpha t}-\varphi e^{i\alpha t}dt\right|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f-\varphi||e^{i\alpha t}|dt<\varepsilon$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} fe^{i\alpha t}<\varepsilon+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi e^{i\alpha t}dt$

令 $\alpha\to\pm\infty$ 有

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} fe^{i\alpha t}<\varepsilon$$

由 ε 的任意性有

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} fe^{i\alpha t}=0$$

对于复值函数 $f=f_1+if_2$

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\tilde{f}(\alpha)=\lim_{\alpha\to\pm\infty}\tilde{f}_1(\alpha)+i\lim_{\alpha\to\pm\infty}\tilde{f}_2(\alpha)=0$$

8. 首先证明 $h(\alpha)$ ~~可积~~ 存在，不为∞

记 $\alpha = a+ib \quad (b>0)$

则 $|e^{i\alpha x}\tilde{f}(x)| \leq e^{-bx}|\tilde{f}(x)| = e^{-bx}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right|$

$\leq e^{-bx}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$

故 $h(\alpha)$ 存在，不为∞

用和7题一样的方法，可证明 $h(\alpha)$ 解析

10. 条件可以扩大到若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$，但且 f_n 几乎处处收敛于f，

对于任意的 $\sigma>0$ 和充分大的 n，有

$\sigma\,\mu(E(|f_n-f|\geq\sigma)) \leq \int_{E(|f_n-f|\geq\sigma)}|f_n-f|\,d\mu \leq \int_E |f_n-f|d\mu \leq \varepsilon$

即 $\mu(E(|f_n-f|\leq\sigma)) \leq \frac{\varepsilon}{\sigma}$

令 $\varepsilon\to 0$，则有 $\mu(E(|f_n-f|\leq\sigma)) \to 0$

故 f_n 依测度收敛于f

11. 在$[0,1]$上的Borel可测集全体定义测度μ

$$\mu(B)=\begin{cases}2, & 1\in B \text{ 且 } 0\in B\\ 0, & 1\notin B \text{ 且 } 0\notin B\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

定义 $f_k(x)=\begin{cases}-\infty, & x=0\\ k, & x\neq 0\end{cases}$

则 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)=\begin{cases}-\infty, & x=0\\ +\infty, & x\neq 0\end{cases}$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[0,1]} f_k(x)d\mu = f(0)+f(1)=-\infty+k=-\infty$

而 $\int_{[0,1]} f(x)d\mu = f(0)+f(1)=-\infty+(+\infty)$ 未定义

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[0,1]} f_k(x)d\mu \neq \int_{[0,1]}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)d\mu$

这里f应该几乎处处有限，否则当$f=+\infty$时，ν不为σ-有限测度

12. 当$E=X$为全集时

$\nu(X)=\int_X f d\mu$ 存在，

故(X,R,ν)为全测度空间

当$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，且 $\mu(E_n)<+\infty$ 时

$$\nu(E)=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n} f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)$$

故(X,R,ν)为σ-有限测度空间

当 $\mu(E)=0$ 时

有 $\nu(E)\leqslant \lim\limits_{k\to\infty}\int_E [f]_k d\mu \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}\mu(E)\cdot k=\lim\limits_{k\to\infty}0=0$