中国矿业大学（北京）作业纸

姓名：　　学号：　　班级：　　课程：

1. (i) 由于$\{f_n\}$依测度收敛于f,

故必有子列$\{f_{n_k}\}$几乎处处收敛于f,

由于$(X, \mathbf{R}, \mu)$是完全测度空间,

故f可测。

(ii) 由于$f_n \Rightarrow f$, $h \Rightarrow h$

则$\forall \varepsilon_1 > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m(E(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$

$\forall \varepsilon_2 > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m(E(|h_n - h| \geq \varepsilon)) = 0$

于是 $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E(|\alpha f_n + \beta h_n - \alpha f - \beta h| \geq \varepsilon)\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} m\left(E(|\alpha f_n - \alpha f| + |\beta h_n - \beta h| \geq \varepsilon)\right)$

$\leq \lim\limits_{n\to\infty} m\left(E(|\alpha f_n - \alpha f| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \cup E(|\beta h_n - \beta h| \geq \frac{\varepsilon}{2})\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} m\left(E(|\alpha f_n - \alpha f| \geq \frac{\varepsilon}{2})\right) + m\left(E(|\beta h_n - \beta h| \geq \frac{\varepsilon}{2})\right)$

$= 0$

得证

(iii) 由于$f_n \Rightarrow f$, $h_n \Rightarrow h$,

故对任意$\{f_n\}$与$\{h_n\}$的子列$\{f_{n_k}\}$与$\{h_{n_k}\}$都依测度收敛

故存在子列$\{f_{n_{k_v}}\}$与$\{h_{n_{k_v}}\}$使得 $\lim\limits_{v\to\infty} f_{n_{k_v}} \doteq f$, $\lim\limits_{v\to\infty} h_{n_{k_v}} \doteq h$

即故 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n_{k_v}} \cdot h_{n_{k_v}} \doteq f \cdot h$

也就是 $h_n \cdot f_n \Rightarrow f \cdot h$

2. (1) 首先，对于 $f_n \Rightarrow f$ 可得 $|f_n| \Rightarrow |f|$

对 $\forall p \in (0,1)$

$$\big||f_n|^p - |f|^p\big| \le |f_n - f|^p$$

~~故 $E(\big||f_n|^p - |f|^p\big| \ge \sigma)$~~

故对任意 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$，都存在子列 $\{f_{n_{k_v}}\}$，满足 $\{|f_{n_{k_v}}|^p\}$ 几乎处处收敛于 $|f_n|^p$，故 $|f_n|^p \Rightarrow |f|$

当 $p=1$ 时

易知 $\big||f_n| - |f|\big| \le |f_n - f|$

同理 $|f_n|^1 \Rightarrow |f|^1$

对 $p>1$ 时

将 $[1,+\infty)$ 分为 $[1,2]$、$[2,3]$、… $(n,n+1]$ 等可数个区间，由数学归纳法可知，$|f_n|^p \Rightarrow |f|^p$

(2) 由于 $f_n - h \Rightarrow f - h$

由 (1) 可得 $|f_n - h|^p \Rightarrow |f - h|^p$

中国矿业大学（北京）作业纸

姓名：　　　　学号：　　　　班级：　　　　课程：

3. ① 由于 $m(E)<\infty$，故对任意的 δ，必存在 n，使得

$m\left(E\cap\left((-\infty,n)\cup(n,+\infty)\right)\right)<\delta$，

取全直线上的连续函数 h，使其在 $[-n,n]$ 上，跟满足

$|f-h|\neq 0$ 的点的测度小于 δ，在 $]-n,n[$ 上，h 恒为 0。

对任意的 h，由于 h 在 $[-n,n]$ 上一致连续，故存在一阶梯函数

φ，使得 $[-n,n]\left(\cancel{|\varphi-h|}\right)=0$，

~~故有 E(~~

取 $\delta=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\dots$，得到一列 $\{\varphi_n\}$

故有 $E(|f-\varphi_n|>\delta)<\delta+[-n,n](|f-\varphi_n|>\delta)$

$<\delta+[-n,n](|f-h|>\delta)+[-n,n](|h-\varphi_n|>\delta)$

$<\delta+[-n,n](|f-h|\neq 0)$

$<2\delta$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}E(|f-\varphi_n|>\delta)=0$

即 $\varphi_n\Rightarrow f$

故存在一子列，使得 $\varphi_{n_k}\Rightarrow f$ 且 $\varphi_{n_k}\xrightarrow{\cdot} f$

中国矿业大学（北京）作业纸

姓名： 学号： 班级： 课程：

② 当 $m(E)=\infty$ 时，由于 Lebesgue 测度空间是 σ-有限空间，故有一列 $\{E_n\}$，使得 $m(E_n)<+\infty$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$ 且 E_n 互不相交。

对每一个 E_n 上的 f，都存在一列 $\{\varphi_{n,m}\}_m$，使得 f 是阶梯函数。

且 $\varphi_{n,m}\longrightarrow f\ (m\to+\infty)\ (x\in E_n)$

那么记 $\phi_n=\sum_{m=1}^{n}\varphi_{n,m}$

易知 ϕ_n 也是阶梯函数且 $\phi_n\longrightarrow f\ (n\to+\infty)(x\in E)$

4. 由于 $f_n\xrightarrow{m}\infty$，故存在一个 N，使得当 $n\geq N$ 时，$f_n\geq M$，（M可以与x有关）

即当 $n\geq N$ 时，f_n 几乎处处不为0，不妨令 $N=1$，

则 $g_n=\frac{1}{f_n}$ 几乎处处有定义，且 $g_n\xrightarrow{\cdot}0$

那么对任何 $\delta>0$，必存在 E 的可测子集 E_δ，使得 $\mu(E-E_\delta)<\delta$，且 $\{g_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于0，

故 f_n 在 E_δ 上均匀发散于 ∞。

5. 由于E是σ-可测的，故存在一列互不相交的有限可测集E_n，

~~且在E_n上的f，存在h_n，使得$E_n(f\neq h_n)<\frac{\delta}{2^n}$，~~

使得 $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}E_n=E$

且对任意的δ与n，存在一个E_n的闭集$F_{n,\delta}$，使得$m(E_n-F_{n,\delta})<\frac{\delta}{2^{|n|+1}}$，

且f在$F_{n,\delta}$上是连续函数。

不妨取 $E_n=E\cap[n,n+1)$，$n=0、\pm1、\pm2、\cdots$

记 $F_\delta=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}F_{n,\delta}$

易知$F_\delta'\subset F_\delta$，即$F_\delta$为闭集

此外f在F_δ上是连续函数，

且$m(E-F_\delta)=m\left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}(E_n-F_{n,\delta})\right)<\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\delta}{2^{|n|+1}}=\frac{\delta}{2}<\delta$

6. ① 不能改为多项式，

在 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测空间上，对于函数 $f(x)=e^x$，多项式函数 h 仅能保证在有限个点上，$f=h$。

② 不能将 δ 换为零。

记 C 为 $[0,1]$ 上的一个类 Cantor 集，使 $m(C)=\frac{1}{2}$

记 $f=\begin{cases} 1, & x\in C \\ -1, & x\notin C \end{cases}$

7. ① 不行，假设 $h(x)=x^2$，$m(E)=\infty$，

则 $h(f_n)=(f_n)^2=f_n\cdot f_n \Rightarrow f\cdot f=f^2=h(f)$

但是如果 $m(E)<+\infty$，必有 $h(f_n)\Rightarrow h(f)$

证明：由于 $f_n\Rightarrow f$

则对任意的子列 f_{n_k}，存在一个数子列 $f_{n_{k_v}}$，使得 $f_{n_{k_v}}\xrightarrow{\cdot}$

则 $h(f_{n_{k_v}})\xrightarrow{\cdot} h(f)$，

即 $h(f_n)\Rightarrow h(f)$

② 不行，假设有一列 $\{f_n\}$，满足 $m(E(|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon))<\delta$，即 $f_n\Rightarrow f$

那么

~~$m(E|f_n(x)-f(x)|$~~

取某一 ε，使 $0<mE(|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon))<\delta$ 且 存在一个 k $(k>0)$，使得 $[0,k)$ $E(|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon$

则 $m(E(|f_n(\frac{1}{x})-f(x)|>\varepsilon))>m((\frac{1}{k},+\infty]\cup[-\infty,-\frac{1}{k}))=+\infty$

故 $f_n(\frac{1}{x})\not\Rightarrow f(\frac{1}{x})$

姓名： 学号： 班级： 课程：

8. 首先证明ЛУЗИН逆定理，即：

设E是直线上的Lebesgue可测集，若对任何$\delta>0$，必有直线上的连续函数h，使得$m(E(f\neq h))<\delta$，则f是E上的Lebesgue可测函

证明. 取$\delta=\frac{1}{n}$，记此时的连续函数为h_n，$E_n=E(f=h_n)$

再记 $E_0=E-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$

而且 $m(E_0)=m(E-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leq m(E(f\neq h_n))<\frac{1}{n}$

由n的任意性可得

$m(E_0)=0$

则 $E(f\geq c)=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n(f\geq c))\right)\cup E_0(f\geq c)=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n(h_n\geq c))\right)\cup E_0(f\geq c)$

故f为Lebesgue可测函数.

(1) 必要性：

由于f在$[a,b]$上Lebesgue可测，记$E=[a,b]$

故对任意$n>0$，必有全直线上的连续函数h_n，使得$m(E(f\neq h_n))<\frac{1}{n}$，

由于h_n在$[a,b]$上连续，由魏尔斯特拉斯逼近定理可知，

存在一列多项式序列$\{P_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $P_{n,k}\longrightarrow h_n\ (k\to+\infty)$。

记 $E_0=E-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E(f=h_n))$，则$m(E_0)=0$

易知 $P_{n,n}\longrightarrow f\ (n\to+\infty,\ x\in E-E_0)$

则 $P_{n,n}\xrightarrow{m}f$

中国矿业大学（北京）作业纸

姓名：　　学号：　　班级：　　课程：

充分性：由于 $p_n \xrightarrow{m} f$，故对任意 $\delta>0$，存在一可测集 E_δ，满足

$m(E-E_\delta)<\delta$ 且 p_n 在 E_δ 上一致收敛于 f

于是 f 在 E_δ 上是连续函数

故 f 是 E 上的 Lebesgue 可测函数。

(2) 仿照 (1) 可得。

9.

先令 $t_1=0$，则

$f(t_2)=f(0)+f(t_2)$

故 $f(0)=0$

~~而 $\lim_{\Delta t\to 0}(f(t+\Delta t)-f(t))=\lim_{\Delta t\to 0}f(\Delta t)$~~

而 $f(nt)=\underbrace{f(t)+\cdots f(t)}_{n个}=nf(t)$

$nf(\frac{1}{n}t)=f(n\cdot\frac{1}{n}\cdot t)=f(t)$

$f(t)+f(-t)=f(0)=0$

故对~~的~~任意有理数 r，有 $rf(t)=f(rt)$

记 $E_n=\{x\in(-\infty,+\infty)\mid -n<f(x)<n\}$

由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=(-\infty,+\infty)$，$E_n$ 为单调递增数列，故存在 n_0，使 $m(E_{n_0})>0$

记 $F_k=E_{n_0}\cap(-k,k)$，由于 F_k 单调递增，故存在 k_0，使 $m(F_{k_0})>0$

选取一开集 O，满足 $O\subset(-k,k)$，$F_{k_0}\subset O$，$m(O)<1.1m(F_{k_0})$

记 O 的构成区间为 $\{(a_v,b_v)\}_v$，则：

$\sum_v(b_v-a_v)<1.1(\sum_v m(E_{n_0}\cap(a_v,b_v)))$

故存在一个 v_0，满足

$m(E_0\cap(a_{v_0},b_{v_0}))>\frac{1}{1.1}(b_{v_0}-a_{v_0})>0.9(b_{v_0}-a_{v_0})$

记 $E = E_{n_0} \cap (a_{v_0}, b_{v_0})$,

易知 $m(E) \in (0.9(b_{v_0} - a_{v_0}), (b_{v_0} - a_{v_0}))$, $E \subset (a_{v_0}, b_{v_0})$

且当 $x \in E$ 时, $f(x) \in (-n_0, n_0)$,

见答案 P_{300}

或 "~~关~~ Lebesgue 测度关于平移不变性的两点的应用.pdf"

中国矿业大学（北京）作业纸

姓名：　　学号：　　班级：　　课程：

10. 由于 Lebesgue-Stieltjes 可测空间是全σ-有限空间，并且具有欧式拓扑，故 Лузин 成立

11. 成立

12. 由于 $f_n \Rightarrow f$

故存在子序列，满足 $f_{n_\nu} \to f$

再由 Егоров 定理可知

结论成立

13. 在 R_p 中，由于 $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ 都可测，

故所有的多项式~~序列~~函数也可测

由于连续函数闭区间上的连续函数可由多项式序列逼近，

故连续函数也可测，

记所有连续函数全体为 $B_0(E)$（见125页）

由于 R_p 是 σ-环，

故 Baire 函数类 $B \subset R_p$

再由 R_p 是最小σ-环，故 $R_p \subset B$

即 $B = R_p$

同理 $R_T = B$，即 $R_T = B = R_p$

15 (ii)

由定理3.1.6，存在一列函数$\{f_n\}$，每个f_n是R^*的元素的子集的特征函数的线性组合，即

$$f_n=\sum_{i=1}^{l_n}\alpha_i^{(n)}\chi_{E_i^{(n)}}$$

使得$\{f_n\}$在E上处处收敛于f

对于每个$E_i^{(n)}$，存在R中元素$D_i^{(n)}$，使得$E_i^{(n)}\supset D_i^{(n)}$，且$\mu(E_i^{(n)}-D_i^{(n)})=0$

做函数

$$h_n=\sum_{i=1}^{l_n}\alpha_i^{(n)}\chi_{D_i^{(n)}}$$

则$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n\neq h_n)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{l_n}(E_i^{(n)}-D_i^{(n)})$

故$\mu(E_0)=0$

并且在$E-E_0$上，满足$\lim_{n\to\infty}h_n=f$

对于E_0，必有R中元素B_0，满足$m(B_0)=0$且$B_0\supset E_0$

记$X-B_0=B_1$

$h(x)=\lim_{n\to\infty}h_n\chi_{B_1}$

则有$E(h\neq f)=0$

16. 见"Lebesgue测度关于平移不变性的两点应用.pdf"