趣味习题

lolispin

2025.6.5

第一章　复变函数及其应用

5.7 对于足够大的 R 证明: 当 $|z| > R$ 时, 多项式

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

满足不等式

$$|P(z)| < 2|a_n|\ |z|^n$$

47.7 证明: 函数

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\ \mathrm{d}\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

对区间 $-1 \le x \le 1$ 上的所有 x 值满足

$$|\ P_n(x)\ | \le 1$$

这里的 $P_n(x)$ 被称为勒让德多项式.

53.4 证明:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \qquad (b > 0)$$

53.5 给定路径

$$C_1: \quad y(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{\pi}{x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

先证明它是一条光滑弧, 并且与实轴相交无限次. 路径 C_2 为实轴上从 $z = 1$ 到原点的直线段, 路径 C_3 则表示从原点到 $z = 1$ 且与 C_1, C_2 只有公共端点的任意不自交的光滑弧. 应用发柯西-古萨定理证明: 如果函数 $f(z)$ 为整函数, 那么有

$$\int_{C_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_3} f(z)\ \mathrm{d}z$$

$$\int_{C_2} f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_{C_3} f(z)\ \mathrm{d}z$$

那么我们得到闭围线 $C = C_1 + C_2$ 自交了无限次, 但是仍有

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

53.7 证明: 如果 C 是一条正向的简单闭围线, 那么它所包住区域的面积可以写为

$$\frac{1}{2i}\int_C \overline{z}\ \mathrm{d}z$$

57.8 利用勒让德多项式的表达式

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(s^2-1)^n}{(s-z)^{n+1}}\ \mathrm{d}s \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

其中围线 C 是一条包含 z 的简单闭曲线. 证明:

$$P_n(1) = 1 \qquad P_n(-1) = (-1)^n$$

57.10 设 $f(z)$ 为一个整函数, 且满足

$$|\ f(z)\ | \leq A|\ z\ |$$

其中 A 为一个固定的正常数. 证明:

$$f(z) = a_1 z$$

其中 a_1 为一个复常数.

68.8 假设级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

在某圆环 $R_1 < |\ z\ | < R_2$ 内收敛于解析函数 $X(z)$ 那么我们就称 $X(z)$ 为 $x[n] \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的 z 变换. 证明: 若该圆环包含单位圆周 $|\ z\ | = 1$ 那么逆变换可以写为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}\ \mathrm{d}\theta$$

68.9 证明:

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)w^n \qquad (0 < |\ w\ | < \infty)$$

其中

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(n\varphi - z\sin\varphi)]\ \mathrm{d}\varphi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

再证明:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(n\varphi - z\sin\varphi)\ \mathrm{d}\varphi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

68.10

(a) 设 $f(z)$ 在关于原点且包含单位圆周的某圆环域内为解析函数, 利用洛朗级数的相关结论证明:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi})\ \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi})\left[\left(\frac{z}{e^{i\varphi}}\right) + \left(\frac{e^{i\varphi}}{z}\right)\right]\ \mathrm{d}\varphi$$

其中 z 为圆环域中任一点.

(b) 记

$$u(\theta) = \Re[f(e^{i\theta})]$$

证明:

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} u(\varphi)\cos n(\theta - \varphi)\ \mathrm{d}\varphi$$

实际上, 这个式子为 $u(\theta)$ 在区间 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 上的傅里叶级数展开式的形式之一. 不过注意到题干要求它是一个解析函数的实部, 这是不必要的.

73.8 设 $f(z)$ 为整函数, 且可有下列级数表出

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \qquad (|\ z\ | < \infty)$$

(a) 通过对复合函数 $g(z)=f[f(z)]$ 连续求导, 证明:

$$f[f(z)]=z+2a_2z^2+2(a_2^2+a_3)z^3+\cdots$$

(b) 通过记

$$f[f(z)]=f(z)+a_2f^2(z)+a_3f^3(z)+\cdots$$

得到与 (a) 中相同的结果.

(c) 证明:

$$\sin\sin z=z-\frac{1}{3}z^3+\cdots$$

73.9 欧拉数为如下指数生成函数的系数

$$\frac{1}{\cosh z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}z^n \qquad \left(\mid z\mid<\frac{\pi}{2}\right)$$

证明:

(a)

$$E_{2n+1}=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

(b)

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61$$

77.5 取单位圆周 C 为围线, 证明:

$$\int_C \exp\left[z+\frac{1}{z}\right]\ \mathrm{d}z=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

先将积分写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_C z^n\exp\left[\frac{1}{z}\right]\ \mathrm{d}z$$

再利用留数定理求出上述积分.

77.7 设多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n \quad (a_n\neq 0)$$

和

$$Q(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m \quad (b_m\neq 0)$$

并且满足 $m\geq n+2$ 证明: 若 $Q(z)$ 的零点都落在简单闭围线 C 内, 那么有

$$\int_C\frac{P(z)}{Q(z)}\ \mathrm{d}z=0$$

83.6 正方形围线

$$C_N:\begin{cases} x=\pm\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\pi \\ \\ y=\pm\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\pi \qquad N\in\mathbb{N}^+\end{cases}$$

证明:

$$\int_{C_N}\frac{\mathrm{d}z}{z^2\sin z}=2\pi i\left[\frac{1}{6}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]$$

并藉此证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

83.8 考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{[q(z)]^2}$$

其中 z_0 为 $q(z)$ 的一阶零点, 证明:

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=-\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}$$

86.9 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

86.10 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2n}\csc\frac{2m+1}{2n}\pi\qquad(0\le m<n,\quad m,n\in\mathbb{N})$$

88.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right)\qquad(a>b>0)$$

88.2

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-a}\qquad(a>0)$$

88.3

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab}\qquad(a>0,\ b>0)$$

88.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^4+4}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-a}\sin a\qquad(a>0)$$

88.5

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin ax}{x^4+4}\ \mathrm{d}x=\pi e^{-a}\cos a\qquad(a>0)$$

88.12 计算菲涅尔积分

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\ \mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sin x^2\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

91.1 利用函数

$$f(z)=\frac{\exp[iaz]-\exp[ibz]}{z^2}$$

证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(b-a)$$

并利用二倍角公式证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

91.2 考虑函数

$$f(z)=\frac{z^{-1/2}}{z^2+1}=\frac{\exp[-\log z/2]}{z^2+1}\qquad\left(|\ z\ |>0,\ -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right)$$

计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x^2+1)}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

92.4

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \qquad (-1 < a < 1)$$

92.6

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta \ \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \ \mathrm{d}\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

94.9 求方程

$$cz^n = e^z$$

在单位圆周内解的个数, 计及重数, 其中 $|\ c\ | > e$

95.1 已知拉普拉斯象函数为

$$F(s) = \frac{2s^3}{s^4 - 4}$$

求解原函数为

$$f(t) = \cosh\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}t$$

95.4 已知拉普拉斯象函数为

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s\sinh s}$$

求解原函数为

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi t$$