斐波那契数

lolispin

2025.7.9

前言

阅读这篇小笔记, 你需要掌握最基本的高中数学知识, 譬如数列, 组合数, 二项式定理等. 此外还需要一定的微积分知识, 大概包括极限, 定积分, 微分方程, 级数等, 值得注意的是, 对于不定积分几乎没有要求, 仅仅在最后一章求解定积分时需要使用牛顿莱布尼茨公式. 另一方面, 对于微分中值定理, 仅在附录 C 中引用 google ai studio 对某个不等式的证明中使用过. 由于我也没有学习过数论, 所以, 笔记中涉及到数论的一小部分, 都放在了附录. 还有线性代数的知识, 大致包括行列式, 矩阵的四则运算, 对角化, 特征方程, 凯莱哈密顿定理等. 置于一些其它的, 大抵就是一些反三角函数了. 然而, 我总不好在笔记中对反三角函数进行定义. 因此, 在涉及到反三角函数的章节中和, 仅仅进行一些计算, 而忽略相应的严谨性.

当然, 这个笔记中必然有许多疏漏之处. 如果你对全书的内容排布有什么建议, 譬如调整章节顺序, 添加一些新的主题, 或是发现了其中的错误, 亦或是单纯想和我聊聊天, 欢迎联系我的邮箱 3010059947@qq.com.

目录

第一章　斐波那契数及其推广 1

第二章　黄金分割比 3

第三章　生成函数 11

第四章　倒数和 15

第五章　斐波那契矩阵 33

第六章　组合数与斐波那契数列 45

第七章　连分数，嵌套根号 55

第八章　应用与数学游戏 59

第九章　Fibonometry 69

第十章　斐波那契数和反正切函数 75

第十一章　斐波那契数与三角函数 83

第十二章　斐波那契函数 93

第十三章　斐波那契数的积分表示 97

附录 A　常用公式 101

附录 B　严格求出通项 103

附录 C　快速计算大 F_n 和 L_n 的方法 107

附录 D　除性 115

附录 E　数的表示理论 119

第一章　斐波那契数及其推广

Leonardo Fibonacci, 生卒年不详, 大约是十二, 十三世纪意大利的数学家. 经过考证, 他大约于 1170 年在意大利比萨省出生. 这个时间点刚好赶上文艺复兴, 当然这样说并不对, 而是这些人造就了文艺复兴.Fibonacci 这个名字意思为 Bonacci 之子, 也就是 filius Bonacci. 不过根据他住的地方, 他也被称为 Leonardo Pisano, 或者 Leonardo of Pisano. Bonacci 市家族名, 有幸运、自然、简单之意. 其父亲 Guilielmo Bonacci 是个商人. 他被誉为 the most talented Western mathematician of the Middle Ages.1202 年斐波那契写了一本书 Liber Abaci , 意为计算之书在书中介绍了阿拉伯数字, 以及一些代数和几何. 在这本书中, 斐波那契提出了一个计数问题, 正是著名的兔子繁殖问题. 我们略去故事背景, 提炼出数学形式: 对于数列 $\{F_n\}$ 满足递推关系

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad n \geq 1 \tag{1.1}$$

其中给定

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

这里可能与一些材料有所不同, 在于未给出 $F_0 = 0$. 我们将在后面补充定义 $F_0 = F_2 - F_1 = 0$. 首先我们证明斐波那契数第一条性质:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \tag{1.3}$$

尝试将右侧展开

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1.4}$$

那么带证明的式子转化为

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1 \tag{1.5}$$

这里你会发现, 可以使用数学归纳法从正面证明, 或者反复利用递推公式将右侧分解. 此外, 再学习后面的章节后, 还可以利用 Binet 形式进行证明.

此外, 还有一些类似的公式, 你可以自己证明下

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

以及对应的偶数指标

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

以及一个有关平方和的公式

$$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$$

我们证明下这个公式

$$\begin{aligned}
&F_1^2=F_1F_2\\
&F_2^2=F_2(F_3-F_1)=F_2F_3-F_1F_2\\
&\cdots\\
&F_n^2=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n
\end{aligned}$$

依此相加即可. 此外, 还有一个在以后需要多次用到的式子:

$$F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$$

它也被称为 Honsberger 恒等式.Ross Honsberger, 加拿大数学家和作家, 值得一提的是, 这个简单明晰的公式知道 1985 年才被提出. 当然, 并不能否认重复造轮子的可能性. 你可以对 n 使用数学归纳法, 或者用后面的 Binet 公式给出证明, 或者后面的矩阵方法. 此外, 还有一个小性质: 任意三个不同的斐波那契数都不能构成三角形. 取三个数分别为 $F_l\le F_m\le F_n$, 那么一定有 $F_n\ge F_m+F_l$.

另一方面, 提到斐波那契数, 那就不得不讲讲与之相伴的卢卡斯数.Édouard Lucas,18 世纪法国科学家,1891 年在法国科学进步协会年度大会的宴会上, 一名服务员打碎了一些餐具, 一块碎瓷片划伤了卢卡斯的脸颊. 几天后, 他因严重的皮肤炎症去世, 可能是由败血症引起的, 享年 49 岁. 结局令人欷$\boxed{F}$, 想来现代医学不断发展, 一定可以避免此类事件. 它提出卢卡斯数的动机已不可考, 或者说我没有仔细去考察, 可能仅仅是斐波那契数的一种推广, 有许多好的性质. 言归正传, 定义卢卡斯数 $\{L_n\}$ 满足

$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\qquad n\ge 1\tag{1.6}$$

其中

$$\begin{aligned}L_1&=1\\ L_2&=3\end{aligned}\tag{1.7}$$

这里的递推关系与斐波那契数一致. 对于卢卡斯数, 有类似的公式

$$L_1+L_2+\cdots+L_n=L_{n+2}-3\qquad n\ge 1$$

此外, 还有广义斐波那契数, 也就是将第一, 二个数任意设置为 p 和 q, 保持递推关系不变, 将此数列记为 $\{H_n\}$. 在后面我们将证明

$$H_{n+2}=H_2F_{n+1}+H_1F_n\qquad n\ge 1\tag{1.8}$$

或者写为

$$H_{n+2}=qF_{n+1}+pF_n\tag{1.9}$$

实际上, 此时有推广为

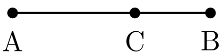
$$H_{n+m}=F_{m-1}H_n+F_mH_{n+1}$$

当然, 斐波那契数有各种各样的推广, 我们将在第九章简要介绍一些.(这句话是决定在第九章中给出一些斐波那契数列的推广后补充说明的)

第二章　黄金分割比

黄金分割的起源至今仍是个谜, 不过现在推断, 至少在公元前六世纪, 古希腊的毕达哥拉斯学派就已经掌握了黄金分割比的一些规律, 以及一些无理数. 不过我们这里不去考证这段历史, 仅仅用一个例子引入它. 我考察了一下黄金分割比名称的由来, 大致得到如下结果: 黄金分割比, 现在又称为黄金比, 黄金分割率. 至于为什么有好几个名称, 并未找到确切出处, 可能是翻译的问题, 也可能是写书的作者们率性而为所致. 又被称为中外比, 并且可能此说法为最早的名称. 中外比, 意为线段的中项和外项长度之比. 中世纪时, 意大利数学家 Luca Pacioli 将之称为神圣比例, 蒙上了一层神秘色彩, 随后开普勒又将之称为黄金比. 而达芬奇则将中外比改为黄金比, 意为这种必理有黄金般的价值. 也许是达芬奇拥有黄金般的心灵.

考虑一个线段 这里要求



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \tag{2.1}$$

上面的笔纸就是黄金分割比. 我们令 $AB = 1$, 那么有

$$\frac{1}{AC} = \frac{AC}{1 - AC} \tag{2.2}$$

据此可解出

$$\frac{1}{AC} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{2.3}$$

显然, 有一个解是负的. 我们给这两个解记号

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \beta &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

以及它们满足的方程为

$$x^2 = x + 1 \tag{2.5}$$

这里的 α 就是黄金分割比, 我们也会使用 φ 表示, 它的近似值约为 1.618. 有的时候我们也会看到 0.618 这个数, 实际上它是

$$\Phi = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1 = \varphi - 1 \tag{2.6}$$

这也是黄金分割比的神奇之处: 它的倒数为自生减去 1. 实际上, 这从 AC 满足的方程已可看出

$$\varphi = \frac{1/\varphi}{1 - 1/\varphi} = \frac{1}{\varphi - 1} \Longrightarrow \Phi = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \tag{2.7}$$

同时还有

$$\Phi = -\beta \tag{2.8}$$

说了这么多, 是时候告诉你黄金分割比和斐波那契数的关系. 秘密就藏在式 1.1 和 2.5 中. 对于 2.5 式, 我们能够得到

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \tag{2.9}$$

在左右两侧同时乘上 α^n, 那么有

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \tag{2.10}$$

惊奇吧. 同样地, 对于 β, 也有

$$\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n \tag{2.11}$$

于是现在, 我们可以利用 α 和 β 来具体求解 F_n. 也就是需要找到有关 α 和 β 的函数, 在满足递推关系的同时, 还要求满足初值. 具体的求解思路已不可考, 可能这种方法式后来偶然间发现的, 不过我们还是以事后诸葛亮的方法来还原. 人们发现 α 和 β 满足下式

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha - \beta &= \sqrt{5} \end{aligned} \tag{2.12}$$

那么考虑

$$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^n - \beta^n \tag{2.13}$$

为了凑出符合条件的初值, 考虑

$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.14}$$

此时第一项为

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1 \tag{2.15}$$

第二项为

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1 \tag{2.16}$$

恰好满足. 因此能够解出

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad n \geq 1 \tag{2.17}$$

这个公式被称为 Binet 公式. 当然, 正如斯蒂格勒定律所言, 没有任何科学发现以其最初的发现者的名字命名,Jacques Philippe Marie Binet 也不例外. 这一结果在一百年前已被 Abraham de Moivre 所知, 没错正是复变函数中的 de Moivre. 提到 Binet, 可能学习过线性代数的人想到有一个 Cauchy–Binet 公式, 是的, 他们是一个人. 除此之外, 学习过力学的人又会想到, 有一个描述星体轨道的 Binet 方程, 这个也是 Jacques Philippe Marie Binet. 然而奇怪的是, 在 Jacques Philippe Marie Binet 的维基百科中, 只提到了他对斐波那契数的贡献. 这里不去讨论存在性和唯一性的问题, 因为我没学过.

上面求解通项的过程是凑出来的, 在后面的章节中, 我们将借助矩阵的理论, 主要是对角化, 求解通项公式.

有了 Binet 公式后, 我们可以证明第一章的恒等式

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

对于等式左侧, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n - \beta - \beta^2 - \beta^n}{\alpha - \beta} \\
=&\frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} - \frac{\beta - \beta^{n+1}}{1 - \beta}\right) \\
=&\frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{\beta} - \frac{\beta - \beta^{n+1}}{\alpha}\right) \\
=&\frac{1}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha^{n+2} + \beta^{n+2}}{\alpha\beta} \\
=&\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} \\
=&F_{n+2} - 1
\end{aligned}$$

再上面的计算中, 我们使用了如下的等式:

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= \beta \\
1 - \beta &= \alpha \\
\alpha + \beta &= 1 \\
\alpha\beta &= -1
\end{aligned}$$

利用数学归纳法, 可以证明

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1} \qquad n \geq 1$$

对于卢卡斯数列, 也有类似的公式

$$L_1^2 + L_2^2 + \cdots L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2 \qquad n \geq 1$$

这里再罗列一些其他的公式, 以飨读者.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} F_{3i} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2} \\
&F_k^3 = \frac{F_{3k} + (-1)^{k+1} 3F_k}{5} \\
&\sum_{i=1}^{n} F_n^3 = \frac{F_{3n+2} + (-1)^{n+1} 6F_{n-1} + 5}{10}
\end{aligned}$$

既然解出了斐波那契数列的显式, 那么利用 1.9 式, 我们知道

$$L_{n+2} = L_2 F_{n+1} + L_1 F_n \tag{2.18}$$

具体展开为

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= 3F_{n+1} + F_n \\ &= 3\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(3\alpha+1)\alpha^n-(3\beta+1)\beta^n}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\sqrt{5}(\alpha+1)\alpha^n+\sqrt{5}(1+\beta)\beta^n}{\alpha-\beta} \\ &= (\alpha+1)\alpha^n+(1+\beta)\beta^n \\ &= \alpha^{n+2}+\beta^{n+2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

当然, 我们也可以利用 2.18 以及递推关系, 将卢卡斯数列与斐波那契数列的关系转化为下面更加好看的形式

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= 3F_{n+1} + F_n \\ &= 2F_n + 1 + F_{n+1} + F_n \\ &= 2F_{n+1} + F_{n+2} \\ &= F_{n+1} + F_{n+3} \end{aligned} \tag{2.20}$$

这样一看顺眼多了. 将具体的 F_n 带入, 有

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(\alpha^2+1)\alpha^{n+1}-(\beta^2+1)\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(\alpha+2)\alpha^{n+1}-(\beta+2)\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\sqrt{5}\alpha^{n+2}+\sqrt{5}\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} \\ &= \alpha^{n+2}+\beta^{n+2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

修改下下标, 有

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \qquad n \geq 3 \tag{2.22}$$

强行将 $n = 1$ 和 $n = 2$ 带入, 有

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha + \beta = 1 \\ L_2 &= \alpha^2 + \beta^2 = 3 \end{aligned} \tag{2.23}$$

这与我们提供的初值一致, 因此有

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \qquad n \geq 1 \tag{2.24}$$

现在我们面临一个问题: 上面的推导以来于式 1.9 的成立, 可否避开它求出卢卡斯数列的通项. 当然是可以的, 并且我们知道了 2.23 式符合卢卡斯数列的前两项, 并且有

$$\begin{aligned} \alpha^{n+2}+\beta^{n+2} &= \alpha^{n+1}+\alpha^n+\beta^{n+1}+\beta^n \\ &= \alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha^n+\beta^n \end{aligned} \tag{2.25}$$

符合递推关系, 因此便能得出 2.24 式. 我们取

$$F_0 = F_2 - F_1 = 0 \tag{2.26}$$

那么可以得到式 2.20 的改良版

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \qquad n \geq 1 \tag{2.27}$$

你有没有发现一个问题, 那就是上面的式子完全是在极度巧合下得到的, 如何更一般的得出呢? 这个可以参见附录另一种方法, 这里我们给出另一个结果, 在第五章使用矩阵给出证明

$$F_n = \frac{L_{n+1} + L_{n-1}}{5}$$

既然解出了 F_n 和 L_n, 不妨利用此二式反解出 α^n 和 β^n, 也就是分别利用式 2.17 和式 2.24

$$\begin{cases} \alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n \\ \alpha^n + \beta^n = L_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha^n = \dfrac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} \\ \beta^n = \dfrac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2} \end{cases} \tag{2.28}$$

此外, 还有另一种表示

$$\alpha^n = F_n\alpha + F_{n-1}$$
$$\beta^n = F_n\beta + F_{n-1}$$

在这个表达式中, 用到了 α 和 β. 注意, 对于 L_n, 没有类似的公式.

此外, 还有

$$2F_{m+n} = F_mL_n + L_mF_n$$
$$2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n$$

运用 Binet 公式不难证明.

现在我们将 n 由正整数拓展至整体整数, 方法就是利用递推公式, 也就是

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$
$$L_{n-1} = L_{n+1} - L_n \tag{2.29}$$

对于斐波那契数列, 已经知道 $F_1 = 1, F_0 = 0$, 那么

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 \tag{2.30}$$

现在让我们看看对于 $-n$, Binet 是否满足递推关系.

$$\begin{aligned} F_{-n+1} - F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n+1} - \beta^{-n+1}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(-1)^n\alpha\beta^n - (-1)^n\alpha^n\beta}{\alpha - \beta} - \frac{(-1)^n\beta^n - (-1)^n\alpha^n}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^n\frac{(\alpha - 1)\beta^n - (\beta - 1)\alpha^n}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^n\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^n\frac{(-1)^{n+1}\beta^{-n-1} - (-1)^{n+1}\alpha^{-n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{-n-1} - \beta^{-n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= F_{-n-1} \end{aligned} \tag{2.31}$$

这恰好满足递推关系. 因此, 我们只需在 F_n 的表达式中将 n 换为 $-n$ 即可得到 F_{-n} 的表达式. 同时, 很显然 $n=0$ 时, 式 2.17 右侧确定左侧. 此外, 通过上面的推导, 可以从第四行和第七行得出

$$F_{-n-1} = (-1)^n F_{n+1} \Longrightarrow F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \tag{2.32}$$

对于卢卡斯数列, 由类似的结果, 于此不再证明, 仅罗列如下

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \tag{2.33}$$

现在看看能否将 2.26 式推广至全体整数. 首先,$n=0$ 时, 有

$$L_0 = 2 = 1 + 1 = F_1 + F_{-1} \tag{2.34}$$

当 $n > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
L_{-n} &= (-1)^n L_n \\
&= (-1)^n (F_{n+1} + F_{n-1}) \\
&= (-1)^n F_{n+1} + (-1)^{n+2} F_{n-1} \\
&= F_{-n-1} + F_{-n+1}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

因此式 2.26 对所有整数 n 都成立.

下面我们将证明, 对于负整数 $-n$, 有

$$\begin{aligned}
\alpha^{-n} &= F_{-n}\alpha + F_{-n-1} \\
\beta^{-n} &= F_{-n}\beta + F_{-n-1}
\end{aligned}$$

我们以第一个式子为例, 右侧为

$$(-1)^{n+1} F_n (-\frac{1}{\beta}) + (-1)^{n+2} F_{n+1} = (-1)^n \left(F_n \frac{1}{\beta} + F_{n+1} \right)$$

左侧为

$$(-1)^n \beta^n$$

那么得到

$$\begin{aligned}
&\alpha^{-n} = F_{-n}\alpha + F_{-n-1} \\
\Longleftrightarrow &\beta^n = \frac{F_n}{\beta} + F_{n+1} \\
\Longleftrightarrow &\beta^{n+1} = F_{n+1}\beta + F_n
\end{aligned}$$

这个是成立的式子.

此外, 我们给出下面六个命题及其证明:

1.

$$F_{2n} = F_n L_n \qquad n \geq 1 \tag{2.36}$$

对于右侧, 展开为

$$\begin{aligned} F_nL_n &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}(\alpha^n+\beta^n) \\ &= \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\ &= F_{2n} \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.

$$5F_n^2 = L_{2n}-2(-1)^n \tag{2.38}$$

这次考虑从左侧展开

$$\begin{aligned} 5F_n^2 &= (\alpha^n-\beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^n \\ &= L_{2n}-(-1)^n \end{aligned} \tag{2.39}$$

3.

$$L_n^2 = L_{2n}+2(-1)^n \tag{2.40}$$

同样选择从左边展开

$$\begin{aligned} L_n^2 &= (\alpha^n+\beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n}+\beta^{2n}+2(\alpha\beta)^n \\ &= L_{2n}+2(-1)^n \end{aligned} \tag{2.41}$$

4.

$$F_{n+1}L_n-L_{n+1}F_n = 2(-1)^n \tag{2.42}$$

选择从左边展开

$$\begin{aligned} F_{n+1}L_n-L_{n+1}F_n &= \frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha^n+\beta^n)-(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{2(\alpha\beta)^n(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= 2(-1)^n \end{aligned} \tag{2.43}$$

现在, 使用上面的结果, 以及本节的结果, 证明下面的命题:

5.

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}-\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2(-1)^n}{F_{2n}} \tag{2.44}$$

将左侧分式通分, 有

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}-\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{F_{n+1}L_n-L_{n+1}F_n}{F_nL_n} \tag{2.45}$$

分别利用 2.36 式与 2.42 式, 有

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}-\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2(-1)^n}{F_{2n}} \tag{2.46}$$

这恰是我们需要证明的.

6.

$$5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n \tag{2.47}$$

联立式 2.38 和 2.40, 有

$$\begin{aligned} 5F_n^2 &= L_{2n} - 2(-1)^n \\ &= L_n^2 - 2(-1)^n - 2(-1)^n \\ &= L_n^2 - 4(-1)^n \end{aligned} \tag{2.48}$$

这几个命题在后续求推广 Millin 级数中会使用到.

第三章　生成函数

在介绍生成函数之前, 我们先研究由斐波那契数列生成的另一类数列的性质:

$$s_n(x) = F_1x + F_2x^2 + \cdots + F_nx^n$$

利用 Binet 公式, 最终可求得

$$s_n(x) = \frac{x - F_nx^{n+2} - F_{n+1}x^{n+1}}{1 - x - x^2}$$

我们将 $x = 1$ 带入, 可以得到熟悉的结果

$$s_n(1) = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

带入 $x = -1$, 则可得到交错和

$$-s_n(-1) = F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = 1 + (-1)^{n+1}F_{n-1}$$

下面我们讨论另外两个取值

1. 取 $x = \dfrac{1}{\alpha} = -\beta$, 那么有

$$\begin{aligned}
s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{\alpha^i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha^i}{\alpha^i} - \frac{\beta^i}{\alpha^i}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha^i}{\alpha^i} - (-\beta^2)^i\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{n - \frac{-\beta^2\left[1 - (-\beta^2)^n\right]}{1 + \beta^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{n + \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}\left[1 - (-\beta^2)^n\right]\right\}
\end{aligned}$$

具体计算可得

$$\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{10}\sqrt{5}$$

因此求得

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{\alpha^i} = \frac{n}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{10} - (-1)^n\beta^{2n}\frac{\sqrt{5} - 1}{10}$$

然而, 若将 $x = \dfrac{1}{\alpha}$ 直接带入求和后的结果, 那将会出现 $\dfrac{0}{0}$ 的不定式. 这可能与生成函数的某些

性质有关, 不过我们尝试使用洛必达法则来求解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1/\alpha}\frac{x-F_nx^{n+2}-F_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2}&=\lim_{x\to 1/\alpha}\frac{1-(n+2)F_nx^{n+1}-(n+1)F_{n+1}x^n}{-1-2x}\\&=\frac{1-\dfrac{n+1}{\alpha^{n+2}}(\alpha F_{n+1}+F_n)-\dfrac{F_n}{\alpha^{n+1}}}{2\beta-1}\\&=\frac{n}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{F_n}{\alpha^{n+1}}\end{aligned}$$

经过继续化简, 确实可以得到前面的结果. 实际上, 参考的书上给的结果是错的, 我花了很长时间来验证, 最终确信了我的答案是对的.

2. 取 $x=\dfrac{1}{\beta}=-\alpha$, 同样的计算可以得到

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=(-1)^n\frac{\sqrt{5}+1}{10}\alpha^{2n}-\frac{\sqrt{5}+1}{10}-\frac{n}{\sqrt{5}}$$

接着考虑上述函数 $n\to\infty$ 时的极限性质. 我们忽略具体的计算过程直接给出

$$s_x=\lim_{n\to\infty}s_nx=\frac{x}{1-x-x^2}$$

其中要求 $|x|<\dfrac{1}{\alpha}$. 这里 $\dfrac{1}{\alpha}=\alpha-1\sim 0.618$. 此结果有多种方法获得, 譬如仿照后文中对卢卡斯数生成函数的求解, 以及在第五章利用矩阵的方法, 第十三章利用积分表示的方法.

现在取 $x=\dfrac{1}{2}$, 那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=2$$

再取 $x=-\dfrac{1}{2}$ 看看交错和

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{F_n}{2^n}=-\frac{2}{5}$$

除了生成函数外, 还有另一种生成函数, 称为指数生成函数, 具体形式为

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{x^n}{n!}$$

不过由于 $F_0=0$, 所以求和到底是从 1 还是 0 开始, 无足挂齿. 除了利用 Binet 公式外, 还可以求导两次有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}\frac{x^n}{n!}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}F_n\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+2}\frac{x^n}{n!}$$

那么有微分方程

$$G''=G'+G$$

同时初值条件为

$$G(0)=F_0=0$$

$$G'(1)=F_1=1$$

可解出

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{x^n}{n!}=\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sqrt{5}}$$

并且函数在全体实数上收敛. 我们试着带入几个具体的 x.

1. 取 $x=1$, 那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{n!}=\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{\frac{e}{5}}\sinh\frac{\sqrt{5}}{2}$$

2. 取 $x=-1$, 那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{F_n}{n!}=\frac{e^{-\alpha}-e^{-\beta}}{\sqrt{5}}=\frac{1-e^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}e^{\alpha}}$$

3. 取 $x=\alpha$, 那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{\alpha^n}{n!}=\frac{e^{\alpha^2}-e^{-1}}{\sqrt{5}}$$

4. 取 $x=\beta$, 那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{\beta^n}{n!}=\frac{e^{-1}-e^{\beta^2}}{\sqrt{5}}$$

5. 取 $x=\ln\alpha$, 那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{\ln^n\alpha}{n!}=\frac{\alpha^{\alpha}-\alpha^{\beta}}{\sqrt{5}}$$

现在我们求取下卢卡斯数的生成函数. 有限和结果为

$$\sum_{k=0}^{n}L_kx^k=\frac{2-x}{1-x-x^2}-\frac{(L_nx+L_{n+1})x^{n+2}}{1-x-x^2}$$

现在考虑无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_nx^n$$

其收敛半径为

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}=\alpha$$

因此在收敛半径内, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_nx^n=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}L_kx^k=\frac{2-x}{1-x-x^2}$$

实际上, 还有别的求解方法. 维基百科指出, 令

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_nx^n$$

那么有

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n \\
&= L_0 + L_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} L_n x^n \\
&= 2 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (L_{n-1} + L_{n-2}) x^n \\
&= 2 + x + x \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n \\
&= 2 + x + x[\Phi(x) - 2] + \Phi(x)
\end{aligned}
$$

也可求得具体得 $\Phi(x)$. 再计算出指数生成函数为

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{(\alpha x)^n + (\beta x)^n}{n!} \\
&= e^{\alpha x} + e^{\beta x}
\end{aligned}
$$

你可以通过这两个生成函数得到一些恒等式. 现在让我们思考这样的问题, 对于指数生成函数, 其有限项求和是否拥有某种简单的封闭形式. 应该是没有的, 可以通过不完全 Gamm 函数表示, 然而这只是将求和变为特殊函数, 并未从本质上改变些什么.

第四章 倒数和

考虑有穷级数

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_i}$$

以及无穷级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}$$

不论是 S_n, 还是 S, 都没有一个良好的封闭形式, 如果你使用 mma, 那么会得到相当复杂的一串. 因此我们尝试刻画一些相关的性质.

定理 1. 斐波那契数的倒数和 S 存在.

这里我们证明数列 $\{S_n\}$ 单调有界. 单调非常容易, 为了证明有上节, 先给出一个不等式

$$\alpha^{n-1}<\alpha^n-\beta^n$$

这个证明不难, 因此就不证明了. 接着考虑放缩

$$\frac{1}{F_n}=\frac{\sqrt{5}}{\alpha^n-\beta^2}<\frac{\sqrt{5}}{\alpha^{n-1}}$$

因此有

$$S_n<\sqrt{5}\left(\frac{1}{\alpha^0}+\frac{1}{\alpha^1}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)<\frac{\sqrt{5}\alpha}{\alpha-1}<6$$

可以证明 S 是个无理数, 以及也是超越数. 虽然无法求出 S, 但是可以利用 S 来表示一些其它的求和结果, 譬如说

$$\frac{1}{F_n}=\frac{F_{n+1}F_{n+2}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=\frac{F_{n+1}^2+F_nF_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

利用卡西尼恒等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{F_n}&=\frac{F_nF_{n+2}+(-1)^n+F_nF_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}\\&=\frac{1}{F_{n+1}}+\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}=3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

虽然 S 无法直接求出, 但是, 对于一些特别的指标, 却有着精美的结果

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

这个结果也被称为 Millin 级数. 值得一提的是, 我在网络上考证 Millin 时, 发现了有趣的事情. 其本名为 Dale Miller,1974 年, 当他还是 Annville-Cleona High School in Pennsylvania 的学生时, 发表了这一结果. 当时 latex 还未出现, 他使用手写加打字机的方式投稿给了斐波那契季刊, 显然, 它的手写并不清晰, 被误读了. 这个公式应该可以追溯得更早, 但是我没找到具体的文献. 然而无论怎样,Millin 级数的提出, 极大激起了人们对这一类求和式的兴趣, 也产生了大量类似的公式.

为了证明此恒等式, 先给出一个引理

引理 1.

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^i}}=3-\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}$$

当 $n=1$ 时, 左侧为

$$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=2$$

右侧为

$$3-\frac{F_1}{F_2}=2$$

相等. 假定当 $n=k$ 时成立, 那么当 $n=k+1$ 时, 考虑左侧为

$$\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{F_{2^i}}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{F_{2^i}}+\frac{1}{F_{2^{k+1}}}=3-\frac{F_{2^k-1}}{F_{2^k}}+\frac{1}{F_{2^{k+1}}}$$

那么就需要证明

$$\frac{F_{2^k-1}}{F_{2^k}}-\frac{1}{F_{2^{k+1}}}=\frac{F_{2^{k+1}-1}}{F_{2^{k+1}}}$$
$$\Longleftrightarrow F_{2^{k+1}}F_{2^k-1}=F_{2^{k+1}-1}F_{2^k}+F_{2^k}$$

接下来利用公式

$$F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$$

并且注意到

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k=2^k+2^k$$

那么有

$$F_{2^k-1}(F_{2^k-1}F_{2^k}+F_{2^k}F_{2^k+1})=F_{2^k}(F_{2^k-1}F_{2^k-1}+F_{2^k}F_{2^k})+F_{2^k}$$
$$\Longleftrightarrow F_{2^k-1}F_{2^k+1}=F_{2^k}^2+1$$

而卡西尼公式为

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$$

这里取 $n=2^k$, 那么就是我们欲求的结果. 因此引理 1 成立.

有了这关键的引理 1 之后, 一切就都顺畅了. 那么现在

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}} &= 3-\lim_{n\to\infty}\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}\\
&= 3-\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha^t-\beta^t}{\alpha^{t+1}-\beta^{t+1}}\\
&= 3-\frac{1}{\alpha}\\
&= \frac{7-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

即为所求. 除了上面的方法外, 还有另一种方法, 利用恒等式

$$\frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}}=\frac{x}{1-x}$$

其中要求 $|x|<1$, 带入 $x=\beta^2$ 即可. 于此不再补充细节. 我在 MSE 上还找到了一个裂项的方法, 抄录如下: 先给出一个引理:

引理 1.

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}$$

那么现在考虑

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{F_{2^n}} &= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^{2^n}-\beta^{2^n}}\\
&= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^{2^n}-\alpha^{-2^n}}\\
&= \sqrt{5}\frac{\alpha^{2^n}}{(\alpha^{2^n})^2-1}\\
&= \sqrt{5}\left(\frac{1}{\alpha^{2^n}-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{n+1}}-1}\right)
\end{aligned}
$$

然而, 仔细检查, 你就会发现上述的裂项不适用于 $n=0$, 因为此时有

$$\frac{1}{F_1}=\frac{\sqrt{5}}{\alpha-\beta}=\frac{\sqrt{5}\alpha}{\alpha^2+1}$$

那么求和有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}} &= 1+\sqrt{5}\left(\frac{1}{\alpha^2-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^{2^{n+1}}-1}\right)\\
&= 1+\frac{\sqrt{5}}{\alpha}\\
&= \frac{7-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

实际上, 对于二阶线性递推数列

$$a_{n+2}=ba_{n+1}+a_n$$

其中 $a_0=0, a_1=1$, 总有求和式

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_{2^i}}=1+\frac{2}{b}+\frac{a_{2^n-1}}{a_{2^n}}$$

于是求极限有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_{2^n}}=1+\frac{2}{b}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2+4}}{2}$$

我们不证明此公式, 不过带入 $b=1$ 可得到结果. 当然, 对于更一般的递推公式, 也有相应的结果. 除了上面的证明之外, 下面我将介绍一种基于 apery 证明 $\zeta(3)$ 无理性的方法, 当然, 这也是我在 arxiv 上看到的. 首先证明两个引理:

引理 1.

$$1+\alpha^{2n}=\begin{cases}\sqrt{5}F_n\alpha^n & n \text{ is odd}\\ L_n\alpha^n & n \text{ is even}\end{cases}$$

这个证明不难, 利用前面的结果

$$\begin{cases}\alpha^n-\beta^n=\sqrt{5}F_n\\ \alpha^n+\beta^n=L_n\end{cases}$$

即可.

引理 2.

$$F_{2^n m}=F_mL_mL_{2m}\cdots L_{2^{n-1}m}$$

这个证明也不难, 利用 $F_{2n}=F_nL_n$ 反复迭代即可. 在上式中取 $m=1$, 那么有

$$F_{2^n}=F_1L_1L_2\cdots L_{2^{n-1}}$$

现在我们证明 Millin 公式: 构造

$$B_n=\frac{1}{(1+\alpha^4)(1+\alpha^8)\cdots(1+\alpha^{2^n})}\qquad n>1$$

那么作差有

$$B_n-B_{n+1}=\frac{\alpha^{2^{n+1}}}{(1+\alpha^4)(1+\alpha^8)\cdots(1+\alpha^{2^n})(1+\alpha^{2^{n+1}})}$$

根据引理 1, 分母转化为

$$\begin{aligned}(1+\alpha^4)(1+\alpha^8)\cdots(1+\alpha^{2^n})(1+\alpha^{2^{n+1}})&=L_2\alpha^2L_4\alpha^4\cdots L_{2^n}\alpha^{2^n}\\&=L_2L_4\cdots L_{2^n}\alpha^{2^{n+1}-2}\end{aligned}$$

再利用引理 2, 可得

$$L_2L_4\cdots L_{2^n}\alpha^{2^{n+1}-2}=F_{2^{n+1}}\alpha^{2^{n+1}-2}$$

那么就有

$$B_n-B_{n+1}=\frac{\alpha^{2^{n+1}}}{F_{2^{n+1}}\alpha^{2^{n+1}-2}}=\frac{\alpha^2}{F_{2^{n+1}}}$$

求和, 有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^2}{F_{2^{n+1}}}=B_2-\lim_{n\to\infty}B_{n+1}=\frac{1}{1+\alpha^4}$$

因此有

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}=\frac{1}{\alpha^2+\alpha^6}$$

把缺失的项补上, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}=1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{\alpha^2+\alpha^6}$$

我们具体计算下上式最后一项

$$\frac{1}{\alpha^2+\alpha^6}=\frac{1}{6+9\alpha}=\frac{2}{21+9\sqrt{5}}=\frac{7-3\sqrt{5}}{6}$$

除了 Millin 级数外, 还可以利用上面的方法证明另一个结果:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^a_{2^{n+1}m}-1}{F^a_{2^{n+2}m}}=\frac{1}{F^a_mL^a_m}$$

令

$$B_0=\frac{1}{F^a_mL^a_m}$$

以及

$$B_n=\frac{1}{F^a_mL^a_mL^a_{2m}\cdots L^a_{2^nm}}$$

作差可得

$$B_n-B_{n+1}=\frac{L^a_{2^{n+1}m}-1}{F^a_mL^a_mL^a_{2m}\cdots L^a_{2^nm}L^a_{2^{n+1}m}}$$

根据引理 2, 可以化简为

$$B_n-B_{n+1}=\frac{L^a_{2^{n+1}m}-1}{F^a_{2^{n+2}m}}$$

于是求和为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^a_{2^{n+1}m}-1}{F^a_{2^{n+2}m}}=B_0-\lim_{n\to\infty}B_{n+1}=\frac{1}{F^a_mL^a_m}$$

在这个结果中, 如果取 $a=m=1$, 那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{2^{n+1}}-1}{F_{2^{n+2}}}=1$$

也就是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{2^{n+1}}}{F_{2^{n+2}}}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^{n+2}}}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

这个结果也不是什么新玩意, 因为求和式可写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{2^{n+1}}}{F_{2^{n+2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^{n+1}}}=\frac{7-\sqrt{5}}{2}-1$$

此外, 还有一些其他的公式, 但是涉及的引理较多, 此处仅给出简化后的形式, 并不予证明.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{2\cdot 3^n}-2}{F_{3^{n+1}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^2_{3^n}}{F_{3^{n+1}}}=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{2\cdot 3^n}}{L_{3^{n+1}}}=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{2^{n+3}}-2F_{2^{n+2}}}{F_{3\cdot 2^{n+2}}}=\frac{1}{F_3L_3}=\frac{1}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{8\cdot 5^n}+L_{16\cdot 5^n}}{F_{4\cdot 5^{n+1}}}=\frac{1}{F_{4\times 5}}=\frac{1}{6765}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}L_{2\cdot 3^n}}{F_{3^{n+1}}}=\frac{1}{F_3}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{L_{2^{n-1}}^2-1}{L_{2^{n+1}}-2}=\frac{1}{L_4-2}=\frac{1}{5}$$

Millin 级数有一个推广, 考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^nk}}=\frac{1}{F_k}+\frac{\sqrt{5}(1-\beta^{2k})}{L_{2k}-2}$$

当 $k=1$ 时, 即为 Millin 级数. 此定理由 HOGGATT 和 MARJORSE BICKNELL 于 1976 年发表于斐波那契季刊上. 我看了另一篇文献之后, 知道上述级数又可写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^nk}}=\frac{1}{F_k}+\frac{1}{F_{2k}}+\frac{1}{F_{2k}\alpha^{2k}}$$

你可以自己试一下证明两个结果相等, 使用 Binet 公式即可. 在本章后面, 我们也将介绍此文献的内容, 并将上述结果最为某个更一般级数的特例. 为了证明这个复杂的式子, 我们把原文中的证明拆分为一个个引理, 并且一些简单的引理不给出详细证明. 列出如下:

引理 1. 当 p 为偶数时, 有

$$L_{m+p}+L_{m-p}=L_mL_p$$

使用 Binet 公式即可, 要求 p 为偶数, 是为了保证

$$\beta^p=(-1)^p\alpha^{-p}=\alpha^{-p}$$

引理 2.

$$\sum_{j=1}^{n}F_{aj-b}=\frac{(-1)^aF_{an-b}-F_{a(n+1)-b}+(-1)^{a-b}F_b+F_{a-b}}{1-L_a+(-1)^a}$$

这个引理的证明也不难, 对于左侧使用 Binet 公式, 并运用等比数列求和公式即可. 当然, 我们不会直接使用此公式, 而是利用它的两个特殊情形:

情形 1. 令 $a=2k$ 以及 $b=1$, 那么有

$$\sum_{j=1}^{n}F_{2jk-1}=\frac{F_{2kn-1}-F_{2k(n+1)-1}-1+F_{2k-1}}{2-L_{2k}}$$

情形 2. 令 $a=2k$ 以及 $b=-1$, 那么有

$$\sum_{j=1}^{n}F_{2jk+1}=\frac{F_{2kn+1}-F_{2k(n+1)+1}-1+F_{2k+1}}{2-L_{2k}}$$

当然, 我们也不是要利用上面两个式子, 而是将他们相加, 可得

$$\sum_{j=1}^{n}L_{2jk}=\frac{L_{2k(n+1)}-L_{2kn}-L_{2k}-2}{L_{2k}-2}$$

引理 3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{2^n k}-L_{(2^n-2)k}}{F_{2^n k}}=\sqrt{5}(1-\beta^{2k})$$

先将 2^n 用 m 代替, 再利用 Binet 公式即可.

引理 4.

$$\beta^{2k}=\frac{L_{2k}-\sqrt{5}F_{2k}}{2}$$

此公式于第二章中证明过.

引理 5.

$$L_k^2=L_{2k}+2(-1)^k$$

这个引理位于第二章最后六个命题之中. 当 k 为奇数时, 有

$$L_{2k}-2=L_k^2$$

当 k 为偶数时, 有

$$L_{2k}-2=L_k^2-4$$

然而, 此形式并不好看, 因此我们需要

引理 6.

$$5F_k^2=L_{2k}-2(-1)^k$$

当 k 为偶数时, 有

$$L_{2k}-2=5F_k^2$$

注意, 上面的引理 $4\sim 6$ 仅仅是为了简化最后的结果. 现在正式开始证明.

我们尝试给出有限项的结果, 先计算一项为

$$\frac{1}{F_k}$$

两项为

$$\frac{1}{F_k}+\frac{1}{F_{2k}}=\frac{F_k+F_{2k}}{F_kF_{2k}}=\frac{L_k(F_k+F_{2k})}{L_kF_kF_{2k}}=\frac{L_k+1}{F_{2k}}=\frac{F_{2k}/F_k+1}{F_{2k}}$$

三项为

$$\frac{1}{F_k}+\frac{1}{F_{2k}}+\frac{1}{F_{4k}}=\frac{F_{4k}/F_k+L_{2k}+1}{F_{4k}}$$

四项为

$$\frac{1}{F_k}+\frac{1}{F_{2k}}+\frac{1}{F_{4k}}+\frac{1}{F_{8k}}=\frac{F_{8k}/F_k+L_{4k}(L_{2k}+1)+1}{F_{8k}}$$

根据引理 1, 上式可化简为

$$\frac{1}{F_k}+\frac{1}{F_{2k}}+\frac{1}{F_{4k}}+\frac{1}{F_{8k}}=\frac{F_{8k}/F_k+(L_{6k}+L_{4k}+L_{2k})+1}{F_{8k}}$$

因此我们猜测, 有限项求和结果为

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^ik}}=\frac{F_{2^nk}/F_k+\sum\limits_{j=1}^{2^{n-1}-1}L_{2(2^{n-1}-j)k}+1}{F_{2^nk}}$$

我们将右侧分母中求和项的指标修改下, 也就是

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^ik}}=\frac{1}{F_k}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^{n-1}-1}L_{2jk}+1}{F_{2^nk}}$$

同时, 我们约定, 当求和符号 $\sum$ 的下标大于上标时, 视求和结果为 0. 如此, 我们可以利用数学归纳法证明. 由于我们已经验证了 $n=0,1,2,3$ 时的结果, 故现在假设 n 项求和成立, 也就是上面的式子成立, 对于 $n+1$ 项求和, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{F_{2^ik}}&=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^ik}}+\frac{1}{F_{2^{n+1}k}}\\&=\frac{1}{F_k}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^{n-1}-1}L_{2jk}+1}{F_{2^nk}}+\frac{1}{F_{2^{n+1}k}}\\&=\frac{1}{F_k}+\frac{F_{2^{n+1}k}\sum\limits_{j=1}^{2^{n-1}-1}L_{2jk}+F_{2^{n+1}k}+F_{2^nk}}{F_{2^nk}F_{2^{n+1}k}}\end{aligned}$$

我们先计算下分子上的乘积项

$$\begin{aligned}F_{2^{n+1}k}\sum_{j=1}^{2^{n-1}-1}L_{2jk}&=F_{2^nk}\sum_{j=1}^{2^{n-1}-1}L_{2^nk}L_{2jk}\\&=F_{2^nk}\sum_{j=1}^{2^{n-1}-1}\left[L_{(2^n+2j)k}+L_{(2^n-2j)k}\right]\\&=F_{2^nk}\sum_{j=1}^{2^n-1}L_{2jk}-F_{2^nk}L_{2^nk}\\&=F_{2^nk}\sum_{j=1}^{2^n-1}L_{2jk}-F_{2^{n+1}k}\end{aligned}$$

于是求和式转化为

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{F_{2^ik}}&=\frac{1}{F_k}+\frac{F_{2^nk}\sum\limits_{j=1}^{2^n-1}L_{2jk}+F_{2^nk}}{F_{2^nk}F_{2^{n+1}k}}\\&=\frac{1}{F_k}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^n-1}L_{2jk}+1}{F_{2^{n+1}k}}\end{aligned}$$

因此,$n+1$ 项求和式也符合我们的假设. 所以我们猜测的有限项求和结果正确, 也就是

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^ik}}=\frac{1}{F_k}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^{n-1}-1}L_{2jk}+1}{F_{2^nk}}$$

这个式子是一项巨大的进步, 因为它将分数的求和转变为正常的求和. 再利用引理 2, 可求出

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}-1} L_{2jk} = \frac{L_{2(2^{n-1})k} - L_{2(2^{n-1}-1)k} - L_{2k} - 2}{L_{2k} - 2}$$

因此求和式进一步简化为

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{F_{2^i k}} = \frac{1}{F_k} + \frac{1}{L_{2k} - 2} \frac{L_{2^n k} - L_{2^n - 2}k}{F_{2^{n+1}k}}$$

利用引理 3, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n k}} &= \frac{1}{F_k} + \frac{1}{L_{2k} - 2} \lim_{n\to\infty} \frac{L_{2^n k} - L_{2^n - 2}k}{F_{2^{n+1}k}} \\ &= \frac{1}{F_k} + \frac{\sqrt{5}(1 - \beta^{2k})}{L_{2k} - 2} \end{aligned}$$

至此, 问题的主要部分已经解决. 随后是对其进行一些简化. 将引理 4 带入其中, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n k}} &= \frac{1}{F_k} + \frac{\sqrt{5}}{L_{2k} - 2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{L_{2k}}{L_{2k} - 2} + \frac{5}{2} \frac{F_{2k}}{L_{2k} - 2} \\ &= \frac{1}{F_k} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} \frac{F_{2k}}{L_{2k} - 2} \end{aligned}$$

当 k 为奇数时, 运用引理 5, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n k}} &= \frac{1}{F_k} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} \frac{F_{2k}}{L_k^2} \\ &= \frac{1}{F_k} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5F_k}{2L_k} \end{aligned}$$

当 k 为偶数, 运用引理 6, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n k}} &= \frac{1}{F_k} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} \frac{F_k}{5F_k^2} \\ &= \frac{1}{F_k} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{L_k}{2F_k} \end{aligned}$$

下面介绍一些分母含有常数的结论

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1} + 1}$$

根据 Binet 公式, 可以计算出

$$\frac{1}{F_{2n+1} + 1} = \frac{\sqrt{5}\alpha^{2n+1}}{\alpha^{4n+2} + \sqrt{5}\alpha^{2n+1} + 1}$$

经过因式分解, 可得

$$\frac{1}{F_{2n+1} + 1} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\alpha^{2n} + 1} - \frac{1}{\alpha^{2n+2} + 1} \right)$$

于是求和式变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1} + 1} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha^{2n+2} + 1} \right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

实际上, 这个有限和是可以求出的, 结果为

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{F_{2i+1} + 1} = \frac{1}{2} + \frac{F_{2n}}{1 + F_{2n+1}}$$

取极限可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}+1}=\frac{1}{2}+\alpha-1=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

此外, 还有类似的公式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{L_{2n}+3}=\frac{2\sqrt{5}+1}{10}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{L_{2n}+\sqrt{5}}=\alpha-1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}+3/\sqrt{5}}=1$$

上面对于斐波那契倒数的求和, 分母仅仅只有一个斐波那契数, 实际上, 还有如下结果

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}=1$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}}=2-\sqrt{5}$$

然而, 参考的文献中并未给出进一步的文献. 当然, 在本章后面, 我们将介绍此文献, 并且上面的几个级数将作为特例. 不过具体的证明还是有迹可循的, 对于第一个公式, 考虑斐波那契数的定义

$$F_{n+1}=F_{n+2}-F_n\Longrightarrow\frac{1}{F_nF_{n+2}}=\frac{1}{F_nF_{n+1}}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$$

因此有限项求和结果为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{F_kF_{k+2}}=\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}=1-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$$

求极限可得第一式. 第二个式子的证明则不能用上面的方法了, 因为裂项后中间项无法相消. 然而注意到下标为 $2n$, 这意味着在某些公式中 $(-1)^{2n}=1$. 根据卡西尼恒等式, 有

$$\begin{aligned}
&1=F_{2n+1}F_{2n-1}-F_{2n}^2\\
\Longrightarrow&\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=1-\frac{F_{2n}^2}{F_{2n+1}F_{2n-1}}\\
\Longrightarrow&\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=1-\frac{F_{2n}(F_{2n+1}-F_{2n-1})}{F_{2n+1}F_{2n-1}}\\
\Longrightarrow&\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=1+\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}-\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}\\
\Longrightarrow&\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}-\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}
\end{aligned}$$

于是有限求和结果为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{F_{2k-1}F_{2k+1}}=\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}}-1$$

求极限可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=\alpha-1$$

即为所求. 第三式可利用前两个式子求出. 第四式可根据卡西尼公式

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$$
$$\Longrightarrow\frac{F_{n-1}}{F_n}-\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}}$$

那么有限求和为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{F_kF_{k+1}}=-\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

取极限可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\beta$$

即为所求. 这个式子也可以根据第二章结尾的命题

$$F_{n+1}L_n-L_{n+1}F_n=2(-1)^n$$

进行计算. 此外, 推广为

$$F_{(r+1)n}L_{rn}-L_{(r+1)n}F_{rn}=2(-1)^{rn}F_n$$

也能够得到一些求和式. 我们将之留给读者自行演算. 第五式则可利用二, 三式求得. 除了涉及斐波那契数的求和, 对于卢卡斯数亦有相应的求和公式, 甚至对于推广斐波那契数也有类似的公式, 于此不再叙述, 仅给出结果为

$$\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^{kn}}{L_{(k+1)n}L_{kn}}=\frac{F_{(r+1)n}}{2F_nL_{(r+1)n}}\Longrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{L_{(k+1)n}L_{kn}}=\frac{1}{2F_n\sqrt{5}}$$

现在不妨让我们来考虑分母含有两个斐波那契数的交错级数的一般形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+k}}$$

这需要利用 Vadja 恒等式

$$F_{n+i}F_{n+j}-F_nF_{n+i+j}=(-1)^nF_iF_j$$

在其中取 $i=-1$ 以及 $j=k$, 那么你将得到

$$F_{n-1}F_{n+k}-F_nF_{n+k-1}=(-1)^nF_k$$
$$\Longrightarrow\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+k}}=\frac{F_{n-1}F_{n+k}-F_nF_{n+k-1}}{F_kF_nF_{n+k}}$$
$$\Longrightarrow\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+k}}=\frac{1}{F_k}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}-\frac{F_{n+k-1}}{F_{n+k}}\right)$$

这里我们不再求有限和了, 因为需要分类讨论, 较为麻烦. 直接求出级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+k}}=\frac{1}{F_k}\sum_{i=1}^{k}\frac{F_{i-1}}{F_i}-\frac{1}{F_k}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n+k-1}\frac{F_{i-1}}{F_{i+1}}$$
$$=\frac{1}{F_k}\sum_{i=1}^{k}\frac{F_{i-1}}{F_i}-\frac{k}{\alpha F_k}$$

需要注意, 上面后一项有个 k, 我们将在后面对此给出一般性的描述. 带入 $k=1$ 和 $k=2$, 将得到熟悉的结果.

此外, 在考虑不交错的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+k}}$$

此级数没有一般性的公式, 或者说对于任意的 k 都能够求出, 然而无法找出一个通式. 原因即在于上述级数的求解是一种极其巧妙构造的. 譬如当 $k=4$ 时, 考虑

$$\frac{A}{F_nF_{n+2}}+\frac{B}{F_nF_{n+4}}=\frac{AF_{n+4}+BF_{n+2}}{F_nF_{n+2}F_{n+4}}$$

我们希望有

$$AF_{n+4}+BF_{n+2}=kF_n$$

如此便可消去分母中的 F_n, 从而将级数转化为已求出的结果. 于是有

$$AF_{n+4}+BF_{n+2}=(3A+B)F_{n+1}+(2A+B)F_n$$

于是我们取 $A=-1,B=3$, 那么有

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+4}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{n+2}F_{n+4}}$$

于是有

$$\begin{aligned}3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+4}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{n+2}F_{n+4}}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}-\frac{1}{F_1F_3}-\frac{1}{F_2F_4}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+4}}&=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}-\frac{5}{18}\\&=\frac{2}{3}-\frac{5}{18}\\&=\frac{7}{18}\end{aligned}$$

接着考虑 $k=6$ 时,

$$\frac{A}{F_nF_{n+4}}+\frac{B}{F_nF_{n+6}}=\frac{AF_{n+6}+BF_{n+4}}{F_nF_{n+4}F_{n+6}}$$

然而, 将分子变为 F_n 的倍数, 工作量将大大增加. 不过也能求出. 不妨让我们考虑

$$\frac{A}{F_nF_{n+1}}+\frac{B}{F_nF_{n+4}}=\frac{AF_{n+4}+BF_n}{F_nF_{n+1}F_{n+4}}$$

从这里就可以看出, 即使消去分母中的 F_n, 那么剩下的部分仍然是暂时未求出的结果. 现在考虑 $k=3$, 那么就需要

$$\frac{A}{F_nF_{n+1}}+\frac{B}{F_nF_{n+3}}=\frac{AF_{n+3}+BF_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+3}}$$

具体求出分子处为

$$AF_{n+3}+BF_{n+1}=(2A+B)F_{n+1}+AF_n$$

取 $B=2,A=-1$, 那么有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+3}}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}}-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

然而, 目前为止, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}}$$

仍没有一个可接受的封闭形式. 此外, 我们断言, 当 k 为奇数时, 一定有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+k}}=a+b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}}$$

其中 a 和 b 为有理数.

下面我们开始探究如下的求和式

$$\mathscr{Y}(u_n,\epsilon_n,k)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\epsilon_n}\frac{F_{u_{n+k}-u_n}}{F_{u_n}F_{u_{n+k}}}$$

其中 u_n 为正整数数列且发散, 对单调性无要求,ϵ_n 为依赖于 u_n 的整数序列,k 为正整数. 实际上, 由于

$$(-1)^{-n}=(-1)^{-n+2n}=(-1)^n$$

因此, 不必特意指出 ϵ_n 为正整数. 在正式开始探究级数 $\mathscr{Y}$ 的性质之前, 我们先给出一个引理, 也就是前面说过的 k

引理 1. 对于收敛于 x 的收敛数列 $\{x_n\}$, 对于任意的自然数 k, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+k}-x_n)=kx-\sum_{n=1}^{k}x_n$$

我们都知道, 无穷级数是对有限求和的求极限处理, 因此我们将有限求和写出. 对于正整数 N, 有

$$\sum_{n=1}^{N}(x_{n+k}-x_n)$$

另一方面, 又有

$$x_{n+k}-x_n=\sum_{i=1}^{k}(x_{n+i}-x_{n+i-1})$$

因此有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(x_{n+k}-x_n)&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}(x_{n+i}-x_{n+i-1})\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{N}(x_{n+i}-x_{n+i-1})\\&=\sum_{i=1}^{k}(x_{N+i}-x_i)\\&=\sum_{i=1}^{k}x_{N+i}-\sum_{i=1}^{k}x_i\end{aligned}$$

当然, 如果 $N < k$, 那么中两个求和项之间有共同项. 在 $N \to \infty$ 下, 自然有引理 1. 现在可以证明如下定理了.

定理 1. 若 t 为任意正整数, 那么有

$$\mathscr{Y}(u_n, u_n, k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{u_n} \frac{F_{u_{n+k}-u_n}}{F_{u_n} F_{u_{n+k}}} = \frac{1}{F_t} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{F_{u_n+t}}{F_{u_n}} - k\alpha^t \right)$$

你有没有觉得这个式子有些眼熟. 没错, 令 $u_n = n, t = -1$, 即可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+k}} = \frac{1}{F_k} \sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{F_i} - \frac{k}{\alpha F_k}$$

是不是顿时觉得趣味盎然. 下面具体证明. 根据 index-reduction formula

$$F_a F_b - F_c F_d = (-1)^r (F_{a+r} F_{b+r} - F_{c+r} F_{d+r})$$

在其中取

$$\begin{cases} a = u_{n+k} - u_n \\ b = -t \\ c = u_{n+k} - u_n - t \\ d = 0 \end{cases}$$

那么得到

$$\begin{aligned} F_{-t} F_{u_{n+k}-u_n} &= (-1)^{u_n+t} \left(F_{u_{n+k}+t} F_{u_n} - F_{u_n+t} F_{u_{n+k}} \right) \\ \Longrightarrow (-1)^{u_n} \frac{F_{u_{n+k}-u_n}}{F_{u_n} F_{u_{n+k}}} &= -\frac{1}{F_t} \left(\frac{F_{u_{n+k}+t}}{F_{u_{n+k}}} - \frac{F_{u_n+t}}{F_{u_n}} \right) \end{aligned}$$

为了使用引理 1, 我们需要求取下极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{u_n+t}}{F_{u_n}} = \alpha^t$$

因此, 根据引理 1, 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{u_n} \frac{F_{u_{n+k}-u_n}}{F_{u_n} F_{u_{n+k}}} = \frac{1}{F_t} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{F_{u_n+t}}{F_{u_n}} - k\alpha^t \right)$$

现在令 u_n 为等差数列,r 为公差, 那么 $u_n = (n-1)r + u_1$, 因此可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)r}}{F_{u_n} F_{u_{n+k}}} = \frac{1}{F_{kr} F_t} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{F_{u_n+t}}{F_{u_n}} - k\alpha^t \right)$$

很多求和式是它的特例, 你可以验证先之前得到过的公式. 特别地, 令 $k = 1, t = -u_1$ 以及取 $u_n = la^n$, 其中要求 a, l 为正整数且 $a \geq 2$. 那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{la^n} \frac{F_{(a-1)la^n}}{F_{la^n} F_{la^{n+1}}} = \frac{(-1)^{la}}{F_{la} \alpha^{la}}$$

现在你需要注意到如下的事实: $la(1 + a^{n-1})$ 始终为偶数, 那么上面的式子进一步简化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{(a-1)la^n}}{F_{la^n} F_{la^{n+1}}} = \frac{1}{F_{la} \alpha^{la}}$$

如果取 $a=2$, 并将 $l\to k$, 那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{k2^{n+1}}}=\frac{1}{F_{2k}\alpha^{2k}}$$

这正是拓展的 Millin 级数. 此外, 令 $a=3$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{k3^n}}{F_{k3^{n+1}}}=\frac{1}{F_{3k}\alpha^{3k}}$$

再于其中取 $k=1$, 那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{3^n}}{F_{3^{n+1}}}=\frac{1}{2\alpha^3}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

现在不妨做一件更有意思的事情. 我们直接令 $u_n=F_n$, 同时为了让公式更好看, 令 $k=2$ 以及 $t=1$, 你会得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{F_n}\frac{F_{F_{n+1}}}{F_{F_n}F_{F_{n+2}}}=1-\sqrt{5}$$

如果取 $k=1,t=-1$, 又会得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{F_n}\frac{F_{F_{n-1}}}{F_{F_n}F_{F_{n+2}}}=\beta$$

此外, 还有许许多多的公式. 然而限于篇幅, 以及我本人也不想为了证明那些看起来美丽但是证明却要费一番功夫的级数去花费更多的时间了.

现在让我们开看两个倒数求和后再取倒数的结果.

定理 1.

$$\left\lfloor\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k}\right)^{-1}\right\rfloor=\begin{cases}F_{n-2} & \text{if } n \text{ is even and } n\geq 2\\ F_{n-2}-1 & \text{if } n \text{ is odd and } n\geq 1\end{cases}$$

在证明这个定理之前, 和以往一样, 我们需要几个引理.

引理 1.

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{F_{n-2}}{F_k}<1 \qquad \text{if } n \text{ is even and } n\geq 2$$
$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{F_{n-2}}{F_k}>1 \qquad \text{if } n \text{ is odd and } n\geq 1$$

其证明过程也极为精巧. 考虑恒等式

$$\frac{1}{F_n}-\frac{2}{F_{n+2}}-\frac{1}{F_{n+3}}=\frac{2(-1)^n}{F_nF_{n+2}F_{n+3}}$$

因此, 如果 n 为偶数且 $n\geq 2$, 那么一定有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{F_n}-\frac{2}{F_{n+2}}-\frac{1}{F_{n+3}}=\frac{2}{F_nF_{n+2}F_{n+3}}\\ \Longrightarrow&\frac{1}{F_n}>\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{1}{F_{n+2}}+\frac{1}{F_{n+3}}\end{aligned}$$

于是当 $n > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{F_{n-2}} &> \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \frac{1}{F_n} \\ &> \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \left(\frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} + \frac{1}{F_{n+2}}\right) \\ &> \cdots \\ &> \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}\end{aligned}$$

那么有

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2}}{F_k} < 1$$

当然, 当 $n = 2$ 时, 上式也成立. 当 n 为奇数时证明类似.

引理 2. 对于 $n \geq 1$, 有

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2} - 1}{F_k} < 1$$
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2} + 1}{F_k} > 1$$

同样地, 我们依然只证明第一个式子. 主要原因是原文献就只证明了第一式. 原文献的证明较为古怪, 奈何我也不知道有什么其它的方法, 因此还是用原文献的方法. 当 $k \geq m \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sqrt{5}(F_{k-m} - \alpha^{-m} F_k) &= \alpha^{-m}\beta^k - \beta^{k-m} \\ &< \sqrt{5}\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}&F_{k-m} - \alpha^{-m} F_k < 1 \\ \Longrightarrow &\frac{F_{k-m} - 1}{F_k} < \alpha^{-m}\end{aligned}$$

取 $m = k - n + 2$, 那么有

$$\frac{F_{n-2} - 1}{F_k} < \alpha^{n-2-k}$$

其中要求 $2 \leq n \leq k + 1$. 于是求和可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{n-2} - 1}{F_k} < \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{n-2-k} = 1$$

另一个不等式证明类似.

有了两大引理, 现在可以证明了. 当 n 为偶数时, 为了避免使用引理时,$n = 2$ 对应的奇异, 单独考虑

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{F_k} > \frac{1}{F_2} = 1 \\ \Longrightarrow &0 < \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right) < 1 \\ \Longrightarrow &\left\lfloor \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right) \right\rfloor = 0 = F_{2-2}\end{aligned}$$

定理成立. 而当 $n > 2$ 时, 根据前面两个引理, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{n-2}+1} &< \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k} < \frac{1}{F_{n-2}}\frac{1}{F_k} \\
\Longrightarrow F_{n-2} &< \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k}\right)^{-1} < F_{n-2}+1 \\
\Longrightarrow &\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k}\right)^{-1} \right\rfloor = F_{n-2}
\end{aligned}$$

n 为奇数时证明类似. 此外, 还有另一个定理

定理 2.

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k}\right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-1}F_n - 1 & \text{if } n \text{ is even and } n \geq 2 \\ F_{n-1}F_n & \text{if } n \text{ is odd and } n \geq 1. \end{cases}$$

我们不证明此定理, 仅给出证明它所需要的两条引理.

引理 3.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n}^{\infty}\frac{F_{n-1}F_n}{F_k^2} > 1 && \text{if } n \text{ is even and } n \geq 2 \\
&\sum_{k=n}^{\infty}\frac{F_{n-1}F_n}{F_k^2} < 1 && \text{if } n \text{ is odd and } n \geq 1
\end{aligned}$$

引理 4. 对于 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty}\frac{F_{n-1}F_n - 1}{F_k^2} < 1 \\
\sum_{k=n}^{\infty}\frac{F_{n-1}F_n + 1}{F_k^2} > 1
\end{aligned}$$

第五章　斐波那契矩阵

我们默认你已经学习过有关矩阵最基础的知识, 注入矩阵四则运算, 行列式等. 考虑矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 1. 对于 $n \geq 1$, 有

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

利用数学归纳法, 当 $n = 1$ 时, 有

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

成立, 假定当 $n = k$ 时成立, 那么当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q \cdot Q^k \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k + F_{k-1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此定理成立.

现在我们考虑这样的问题: Q 是从哪冒出来的? 或者说, 为什么 Q 能够和斐波那契数有关系? 实际上, 对于对于一般的由递推关系

$$x_{n+k} = c_0 x_n + c_1 x_{n+1} + \cdots + c_{k-1} x_{n+k-1}$$

定义的数列 $\{x_n\}$, 有一个与之相伴的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

以及一个状态向量

$$v_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

满足方程

$$v_{n+1} = Av_n$$

因此有

$$v_n = A^n v_0$$

在斐波那契数列中, 有 $k = 2$, 状态向量为

$$v_0 = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

相伴的矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

这里 $P \neq Q$, 是因为状态向量的指标自上至下增大. 倘若我们修改下, 得到

$$r_{n+1} = \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = Qr_n$$

因此有

$$r_n = Q^n r_0$$

具体展开为

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令

$$Q^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$$

具体带入可解出

$$a_n = F_{n+1}$$

$$b_n = F_n$$

也就是

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & b_n \\ F_n & d_n \end{bmatrix}$$

同理可计算出

$$Q^{n+1}=\begin{bmatrix}F_{n+2} & b_{n+1}\\ F_{n+1} & d_{n+1}\end{bmatrix}$$

这里的 x,y 为待确定的元素. 但是我们有办法确定, 那就是

$$Q^{n+1}=Q\cdot Q^n$$

具体可求出

$$\begin{bmatrix}F_{n+2} & b_{n+1}\\ F_{n+1} & d_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{n+1}+b_n & F_{n+1}\\ F_n+d_n & F_n\end{bmatrix}$$

可以得到

$$b_n=F_n$$

$$d_n=F_{n-1}$$

这就是我们所求的

$$Q^n=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}$$

现在可以利用行列式来发现一些规律. 一方面, 根据行列式满足的性质, 有

$$\det Q^n=(\det Q)^n=(-1)^n$$

另一方面, 直接计算, 有

$$\det Q^n=F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2$$

那么就有

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n \qquad n\geq 1$$

然而, 在上面的计算中, 我们仅仅使用了斐波那契数列的递推性质, 并未使用具体的通项公式. 由此来看, 只要能够计算出 Q^n 具体的值, 便可得到斐波那契数列的通项公式. 尝试将其对角化, 考虑久期方程

$$|Q-\lambda I|=0$$

解出本征值为

$$\lambda_1=\alpha$$

$$\lambda_2=\beta$$

对应的本征向量为

$$a=\begin{bmatrix}\alpha\\ 1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}\beta\\ 1\end{bmatrix}$$

因此变换矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求出逆矩阵为

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} & Q = S \operatorname{diag}\{\alpha, \beta\} S^{-1} \\ \Longrightarrow & Q^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \\ \Longrightarrow & Q^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha\beta^{n+1} - \beta\alpha^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha\beta^n - \beta\alpha^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

那么得到

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

正是我们前面得到的结果.

除此之外, 利用矩阵乘法的性质, 有

$$Q^n Q^m = Q^{m+n}$$

也就是

$$\begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

具体计算可得

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$$

据考证,1984 年南京邮电大学研究生入学试题考过类似的. 不妨将指数分为三个部分, 类似得到

$$F_{l+m+n} = F_{l+1}F_{m+1}F_{n+1} + F_l F_m F_n - F_{l-1}F_{m-1}F_{n-1}$$

下面我们计算一下 Q^{-1}, 我们期望它是

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} F_0 & F_{-1} \\ F_{-1} & F_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

这里直接取

$$QQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这也就说明, 满足了上面的期望. 同样地, 你可以验证下

$$Q^{-n} = \begin{bmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n-1} \end{bmatrix}$$

或者你认为上面的矩阵就是 Q^n 的逆矩阵, 那么可以得到

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

现在考虑 $a+b=c+d$ 的情况, 那么有 $Q^aQ^b = Q^cQ^d$, 也就是

$$F_aF_b + F_{a-1}F_{b-1} = F_cF_d + F_{c-1}F_{d-1}$$

将之重写为

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)(F_{a-1}F_{b-1} - F_{c-1}F_{d-1})$$

反复迭代可得

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)^r(F_{a-r}F_{b-r} - F_{c-r}F_{d-r})$$

此公式也被称为 index-reduction formula. 在后面的第九章, 我们将以另一种方式得到. 带入 $a=b=n, c=n+m, d=n-m$ 以及 $r=n-m$, 那么得到

$$F_n^2 - F_{n+m}F_{n-m} = (-1)^{m-n}F_m^2$$

此公式被称为卡塔兰恒等式. 再取 $m=1$, 可以得到卡西尼恒等式

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

对于矩阵 Q, 除了上面直积计算久期方程外, 因为它是个二阶矩阵, 所以可以通过计算出行列式和迹来得到特征多项式, 也就是

$$\begin{aligned}
&\det Q = -1 \\
&\operatorname{Tr} Q = 1 \\
&\lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} Q + \det Q = 0
\end{aligned}$$

也就是

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

接出来的两个特征值记为

$$\begin{aligned}
\lambda_+ = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
\lambda_- = \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

下面我们利用矩阵来求斐波那契数的生成函数. 先计算出矩阵 $I - xQ$ 的逆矩阵为

$$(I-xQ)^{-1} = \frac{1}{\det(I-xQ)} \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1-x \end{bmatrix} = \frac{1}{1-x-x^2} \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1-x \end{bmatrix}$$

当然, 要求 $x \neq \lambda_\pm$. 现在用级数表示矩阵的逆为

$$(I - xQ)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n Q^n$$

对比 $(2,1)$ 或者 $(1,2)$ 的系数, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

于是, 我们使用矩阵的工具, 得到了斐波那契数的生成函数. 而比较其他的系数并不会得到新的东西, 你可以自己试试. 同时, 我们可以考虑一些其它有趣的事情, 譬如

$$(I - xQ^k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n Q^{nk}$$

另一方面

$$\begin{aligned}(I - xQ^k)^{-1} &= \frac{1}{\det(I - xQ^k)} \begin{bmatrix} 1 - xF_{k-1} & xF_k \\ xF_k & 1 - xF_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - x\operatorname{Tr} Q^k + (-1)^k x^2} \begin{bmatrix} 1 - xF_{k-1} & xF_k \\ xF_k & 1 - xF_{k+1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

同样对比系数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{nk} x^n = \frac{xF_k}{1 - x\operatorname{Tr} Q^k + (-1)^k x^2}$$

级数收敛半径为

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{(n+1)k}}{F_{nk}} = \alpha^k \Longrightarrow R = \frac{1}{\alpha^k}$$

现在取 $k = 2$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^n = \frac{xF_2}{1 - x\operatorname{Tr} Q^2 + (-1)^2 x^2} = \frac{x}{1 - 3x + x^2}$$

实际上, 此公式亦可通过

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\sqrt{x})^n + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(-\sqrt{x})^n$$

得到. 计算其收敛半径为 $|x| < \beta + 1$. 现在取 $x = \dfrac{1}{4}$, 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n}}{4^n} = \frac{4}{5}$$

当然, 根据前面的结果

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_n}{2^n} = -\frac{2}{5}$$

那么有

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{2n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{F_n}{2^n}=\frac{8}{5}$$

即为所求.

现在让我们从两个有关矩阵的公式入手

$$\exp[\operatorname{Tr}A]=\det(\exp A)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n}=-\ln(I-A)$$

这里第二个式子要求矩阵的范数 $||A||<1$. 结合可得

$$\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Tr}A^n}{n}\right]=\frac{1}{\det(I-A)}$$

令 $A=xQ^k$ 可得

$$\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\operatorname{Tr}Q^{rk}}{n}\right]=\frac{1}{1-x\operatorname{Tr}Q^k+(-1)^kx^2}$$

再利用前面求得的生成函数, 可得

$$\frac{1}{F_k}\sum_{n=1}^{\infty}F_{nk}x^{n-1}=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\operatorname{Tr}Q^{rk}}{n}\right]$$

我们也可以使用矩阵的方法求有限和. 考虑恒等式

$$I+A+A^2+\cdots+A^n=(I-A^{n+1})(I-A)^{-1}$$

令 $A=xQ^k$, 那么可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x^iF_{ik}&=\frac{[1-x^{n+1}F_{(n+1)k+1}]xF_k-x^{n+1}F_{(n+1)k}(1-xF_{k+1})}{1-x\operatorname{Tr}Q^k+(-1)^kx^2}\\&=\frac{xF_k-x^{n+1}F_{(n+1)k}+x^{n+2}[F_{k+1}F_{(n+1)k}-F_kF_{(n+1)k+1}]}{1-x\operatorname{Tr}Q^k+(-1)^kx^2}\end{aligned}$$

利用前面得到的 index-reduction formula, 可知

$$F_{k+1}F_{(n+1)k}-F_kF_{(n+1)k+1}=(-1)^kF_1F_{nk}=(-1)^kF_{nk}$$

于是得到

$$\sum_{i=1}^{n}x^iF_{ik}=\frac{xF_k-x^{n+1}F_{(n+1)k}+x^{n+2}(-1)^kF_{nk}}{1-x\operatorname{Tr}Q^k+(-1)^kx^2}$$

提到矩阵, 一个绝对绕不开的定理, 便是凯莱哈密顿定理. 它告诉我们, 矩阵的幂次不是独立的. 譬如对于矩阵 Q, 它满足

$$Q^2-Q-I=0$$

那么一定有

$$Q^k=a_kQ+b_kI$$

那么根据我们已经有的结果, 可以得出

$$Q^k = F_k Q + F_{k-1} I$$

于是

$$Q^{nk} = (F_k Q + F_{k-1} I)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i F_k^i F_{k-1}^{n-i} Q^i$$

对比系数可得

$$F_{nk} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i F_k^i F_{k-1}^{n-i} F_i$$

现在带入 $k = 2$ 可得

$$F_{2n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i F_i$$

此公式在下一章将会使用数学归纳法证明, 因为下一章的这个是先写的, 所以我才能够未卜先知下一章会再次出现此公式. 取 $k = 3$, 那么有

$$F_{3n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^i F_i$$

你注意到了吗, 上面说了半天, 没有卢卡斯数列的事. 这是因为, 在本章, 我们将给出另一种定义卢卡斯数列的方式. 定义数列

$$L_k = \operatorname{Tr} Q^k = F_{k+1} + F_{k-1}$$

前面已知的结论于此不再叙述. 由于它的递推关系与斐波那契数相同, 因此有

$$\begin{bmatrix} L_{n+2} \\ L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

现在考虑如下矩阵

$$\begin{bmatrix} L_{k+l+1} \\ L_{k+l} \end{bmatrix} = Q^k \begin{bmatrix} L_{l+1} \\ L_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{l+1} \\ L_l \end{bmatrix}$$

那么得到

$$L_{k+l} = F_k L_{l+1} + F_{k-1} L_l$$

注意,F_{m+n} 的展开式中只有斐波那契数, 没有卢卡斯数. 此外, 利用斐波那契数和卢卡斯数的关系, 可以求出

$$\begin{bmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{bmatrix} = Q^k \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

反过来, 也可求得

$$Q^k = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

我们将此常数矩阵定义为 X, 亦即

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

那么有

$$X^{-1} = \frac{X}{5}$$

从上面的式子可以得到

$$5F_k = L_{k+1} + L_{k-1}$$

这就是第二章中我们未证明的公式. 卢卡斯数列的 index-reduction formula 为

$$F_aL_b - F_cL_d = (-1)^r(F_{a-r}L_{b-r} - F_{c-r}L_{d-r})$$

这里同样要求 $a+b=c+d$. 具体证明方法为将 $Q^aQ^b = Q^cQ^d$ 作用于 $[1\ 2]^T$ 上. 通过选取合适的 a, b, c, d, 可以得到

$$F_nL_n - F_{n+1}L_{n-1} = (-1)^n$$

利用 F_n 于 L_n 的关系, 以及 L_n 的递推关系, 可以得到卢卡斯数版本的卡西尼公式

$$L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} = 5(-1)^n$$

现在让我们考虑前面定义的 X, 它满足

$$QX = XQ$$

这是个很好的性质, 当 $a+b=c+d$ 时, 有

$$5Q^aQ^b = Q^cXQ^dX$$

可以得到

$$5F_aF_b - L_aL_b = (-1)^r(5F_{a-r}F_{b-r} - L_{c-r}L_{d-r})$$

令 $a=b=c=d=r=n$, 可以得到

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

依样照葫芦画瓢可以得到卢卡斯数的生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_nx^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

以及有限项求和式

$$\sum_{i=0}^{n} L_{ik}x^i = \frac{2 - xL_k - x^{n+1}L_{(n+1)k} + x^{n+2}(-1)^kL_{nk}}{1 - xL_k + (-1)^kx^2}$$

当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{nk}x^n = \frac{2 - xL_k}{1 - xL_k + (-1)^kx^2}$$

等一下, 你是不是忘记了什么? 你再想想, 或许在你此前生命中的某个时刻. 时间总是无情, 逝去的恍若从未存在过. 其实是证明数列

$$
\begin{aligned}
&H_1 = p \\
&H_2 = q \\
&H_{n+2} = H_{n+1} + H_n
\end{aligned}
$$

的通项公式为

$$H_{n+2} = H_2F_{n+1} + H_1F_n = qF_{n+2} + pF_n$$

现在根据前面求解斐波那契数的方程可知, 有如下方程成立

$$\begin{bmatrix} H_{n+2} \\ H_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ H_1 \end{bmatrix}$$

那么自然有

$$H_{n+2} = H_2F_{n+1} + H_1F_n$$

即为所求. 当然, 对于一般的初值, 也能够讨论上面已经得到的结论, 但是没有本质上的困难, 所以便不再着墨.

现在让我们考虑这样的问题: 对于二阶矩阵 K, 如何设置其中的元素, 使得其幂次 K^n 包含斐波那契数? 实际上根据我们面的讨论, 我们知道矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

肯定满足条件. 这里我们限定两个条件, 也就是 $\det K = -1$ 同时 $\operatorname{Tr} K = 1$. 骑士也就是说 K 的特征值仍为 $\lambda_{\pm}$. 最终得到如下的形式

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ \dfrac{1+a-a^2}{b} & 1-a \end{bmatrix}$$

根据凯莱哈密顿定理, 以及一些计算, 可求得

$$K^n = F_nK + F_{n-1}$$

具体写为

$$K^n = \begin{bmatrix} aF_n + F_{n-1} & bF_n \\ \dfrac{1+a-a^2}{b}F_n & (1-a)F_n + F_{n-1} \end{bmatrix}$$

如果取 $a = b = 1$, 那就是 Q. 计算它的行列式, 可以得到卡西尼恒等式. 我们选择一个较为简单的例子, 即取 $a = 2$ 以及 $b = 1$, 那么有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_n \\ -F_n & -F_{n-2} \end{bmatrix}$$

现在, 我们将上面的叙述一般化, 有如下定理

定理 1. 对于整数 $n \in \mathbb{Z}$, 如果方阵 X 满足

$$X^2 = X + I$$

那么有

$$X^n = F_n X + F_{n-1} I$$

当 $n = 0$ 时, 上式成立. 现在用归纳法证明对于正整数 n 也成立.

1. 当 $n = 1$, 上式成立.
2. 假定当 $n = k$ 时成立, 那么当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X(F_k X + F_{k-1} I) \\ &= F_k X^2 + F_{k-1} X \\ &= F_k X + F_k I + F_{k-1} X \\ &= F_{k+1} X + F_k I \end{aligned}$$

为了说明定理对于 $-n$ 也成立, 记

$$Y = I - X = -X^{-1}$$

那么有

$$Y^2 = Y + I$$

后续证明不难. 现在考虑如下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

根据我们的定理可得

$$A^n = \begin{bmatrix} \alpha F_n + F_{n-1} & 0 \\ F_n & \beta F_n + F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ F_n & \beta^n \end{bmatrix}$$

现在我们可以利用它得到一些恒等式. 考虑

$$(A^{n+1} + A^{n-1})(A^{m+1} + A^{m-1}) = A^{m+n+2} + 2A^{m+n} + A^{m+n-2}$$

其中具体计算下

$$A^{n+1} + A^{n-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha^n & 0 \\ L_n & -\sqrt{5}\beta^n \end{bmatrix}$$

那么可求得

$$\sqrt{5} F_{m+n} = \alpha^m L_n - \beta^n L_m$$

你也可以利用 Binet 公式验证右侧. 将上式左侧平方, 并利用 $5F_{m+n}^2 = L_{m+n}^2 - 4(-1)^{m+n}$, 可以得到一个三乘积的分解式

$$(-1)^{m+n} L_m L_n L_{m+n} + 4 = (-1)^{m+n} L_{m+n}^2 + (-1)^n L_n^2 + (-1)^m L_m^2$$

利用 $A^{m+n+1}+A^{m+n-1}=A^n(A^{m+1}+A^{m-1})=(A^{m+1}+A^{m-1})A^n$, 可以得到

$$L_{m+n}=\sqrt{5}\alpha^m F_m+\beta^n L_m$$
$$L_{m+n}=\alpha^n L_m-\sqrt{5}\beta^m F_n$$

进而可以得到

$$5(-1)^{m+n}L_nL_mL_{m+n}-4=5(-1)^{m+n}F_{m+n}^2-(-1)^nL_n^2+5(-1)^mF_m^2$$

下面介绍斐波那契数的行列式形式:

$$F_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&0&0&\cdots&0\\-1&1&1&0&\cdots&0\\0&-1&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&1&1\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{vmatrix}$$

其中右侧行列式为 $n\times n$. 这是个三对角型行列式, 有相应的递推公式. 对于一般的三对角型行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&&&\cdots&0\\c&a&b&&\cdots&0\\&c&a&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&c&a&b\\0&0&\cdots&&c&a\end{vmatrix}$$

利用拉普拉斯展开, 可以得到

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$$

我们取 $a=1$ 以及 $bc=-1$, 同时还有初值 $D_3=F_4=3$, 可解出

$$\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-1\end{cases}$$

如此, 便能构造出这个行列式. 据考证, 此行列式也是卢卡斯的成果, 并且出现于苏联大学生数学竞赛之中. 还有许多其它的结论, 甚至说, 将行列式的元素设置为斐波那契数. 于此不过多讨论.

第六章　组合数与斐波那契数列

在开始介绍组合数与斐波那契之前, 我们引入斐波那契式的归纳法和强归纳法这两种方法以帮助我们更好地证明一些命题.

斐波那契式的归纳法: 直接验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时命题成立,ving 假设命题在 n 和 $n+1$ 时也成立, 如果能够据此证明 $n+2$ 时命题成立, 那么我们断言命题成立.

强归纳法: 假设命题对于所有小于 n 的情况都成立, 依此为条件, 如果能够证明命题对于 n 成立, 那么断言命题成立.

我们不去证明这两个归纳法, 仅仅将它们作为工具使用. 下面证明一个公式:

$$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$$

当 $m=1$ 时, 要证明

$$F_{n+1}=F_{n-1}F_1+F_nF_2=F_{n-1}+F_n$$

这正是斐波那契数的递推公式.

当 $m=2$ 时, 要证明

$$\begin{aligned}F_{n+2}&=F_{n-1}F_2+F_nF_3\\&=F_{n-1}+2F_n\\&=F_{n+1}+F_n\end{aligned}$$

也符合预期. 现在假设 $m=k$ 与 $m=k+1$ 时公式成立, 那么当 $m=k+2$ 时, 左侧为

$$\begin{aligned}F_{n+k+2}&=F_{n+k+1}+F_{n+k}\\&=F_{n-1}F_{k+1}+F_nF_{k+2}+F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}\\&=F_{n-1}F_{k+2}+F_nF_{k+3}\end{aligned}$$

符合公式. 这个公式可以对应青蛙跳台阶问题. 原书上写的是 Bunny Problem, 然而遗憾的是, 检索出来的结果全部为 Rabbit Problem, 就是兔子繁殖问题. 于此我们不再叙述青蛙跳台阶问题. 下面我们考虑集中特殊情况

1. 取 $m=n$, 那么有

$$F_{2n}=F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}=F_n(F_{n-1}+F_{n+1})$$

根据前面, 我们知道有公式

$$F_{2n}=F_nL_n$$

也就是

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

当然我们也可以注意到

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$$

那么有

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

2. 取 $m = n - 1$, 那么有

$$F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2$$

将之与上个公式相加, 有

$$F_{2n} + F_{2n-1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \Longrightarrow F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

这就是我们求出的公式.

3. 取 $m = 2n$, 那么有

$$F_{3n} = F_{n-1}F_{2n} + F_nF_{2n+1}$$

将前面得到的公式带入, 容易求出

$$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$$

现在, 我们陈述如下的公式:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

此公式名为卡西尼公式. 卡西尼, 十五世纪天文学家, 土星上的卡西尼环缝正是他发现的, 以及数学中的卡西尼卵线也是他发现的.

d'Ocagne 公式:

$$F_{n-1}F_m - F_nF_{m+1} = (-1)^nF_{n+m}$$

Vajda 公式:

$$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^nF_iF_j$$

我在这里枚举出两个不加任何解释的人名公式, 仅仅是因为再查阅资料的过程中看到了.

类似地, 还有

$$\begin{aligned}
&F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2 \\
&F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1 \\
&nF_1 + (n-1)F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + F_n = F_{4n} - (n+3) \\
&F_1 + 2F_2 + \cdots + nF_n = nF_{n+2} + F_{n+3} + 2
\end{aligned}$$

美名其曰, 作为习题读者自行验证.

扯了这么多, 现在开始介绍组合数. 我们不介绍有关组合数的任何基础的性质, 直接上强度:

定理 1.

$$F_{n+1}=\sum_{i=0}^{[n/2]}C_{n-i}^{i}$$

大意了, 书上没给证明. 不过我们尝试证明下, 思路大概是先看看上式右侧满足递推关系, 再看看初值, 一定是这样.

若 n 为偶数, 并取 $n=2k$, 那么

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]=k$$

因此有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{[n/2]}C_{n-i}^{i}+\sum_{0=1}^{[(n+1)/2]}C_{n+1-i}^{i}&=\sum_{i=0}^{[n/2]}\left(C_{n-i}^{i}+C_{n+1-i}^{i}\right)\\&=\sum_{i=0}^{k}\left(C_{2k-i}^{i}+C_{2k+1-i}^{i}\right)\end{aligned}$$

考虑

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{[(n+2)/2]}C_{n+2-i}^{i}&=\sum_{i=0}^{k+1}C_{2k+2-i}^{i}\\&=\sum_{i=0}^{k+1}\left(C_{2k+1-i}^{i}+C_{2k+1-i}^{i-1}\right)\end{aligned}$$

注意到当 $i=k+1$ 时, 求和项为

$$C_{k}^{k+1}+C_{k}^{k}=1$$

因此上式的变为

$$\sum_{i=0}^{k}\left(C_{2k+1-i}^{i}+C_{2k+1-i}^{i-1}\right)+1$$

于是我们需要证明

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k}\left(C_{2k-i}^{i}+C_{2k+1-i}^{i}\right)=\sum_{i=0}^{k}\left(C_{2k+1-i}^{i}+C_{2k+1-i}^{i-1}\right)+1\\\Longleftrightarrow&\sum_{i=0}^{k}C_{2k-i}^{i}=\sum_{i=0}^{k}C_{2k+1-i}^{i-1}+1\\\Longleftrightarrow&\sum_{i=0}^{k}C_{2k-i}^{i}=\sum_{i=1}^{k}C_{2k+1-i}^{i-1}+1\\\Longleftrightarrow&\sum_{i=0}^{k}C_{2k-i}^{i}=\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-j}^{j}+C_{k}^{k}\\\Longleftrightarrow&\sum_{i=0}^{k}C_{2k-i}^{i}=\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}\end{aligned}$$

现在考虑右侧的求和项为

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-j}^{j} = C_{2k}^{0} + \sum_{j=1}^{k-1} C_{2k-j}^{j} = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} C_{2k-j}^{j} = C_{k}^{k} + \sum_{j=1}^{k-1} C_{2k-j}^{j} = \sum_{j=1}^{k} C_{2k-j}^{j}$$

在上面的证明中, 我们用到了

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k-1}$$

要求 $n \geq 1$ 并且 $0 \leq k \leq n-1$. 但实际上, 我们在 $k = n$ 时应用了此等式, 得到

$$C_{n+1}^{n+1} = C_n^n + C_n^{n+1} = C_n^n$$

这是因为我们作了延拓, 具体可参考 gamma 函数相关知识. 也就是负整数的阶乘为无穷大. 我第一次看到此结论是在喀兴林的高等量子力学教材中, 当时觉得很奇妙, 并且能够得到一些公式. 后来专程学习了 gamma 函数的相关知识.

这就说明求和式满足递推关系, 当然, 这里我们假设了 n 为偶数. 至于 n 为奇数的情况, 既然有上述的公式, 那肯定就是正确的, 再不验证了. 在第 11 章, 我们将给出一种基于多项式的证明方法.

现在看看初值.$n = 0$ 时, 有

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_{n-i}^{i} = C_0^0 = 1$$

符合. 当 $n = 1$ 时, 有

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_{n-i}^{i} = C_1^0 = 1$$

也符合. 因此等式成立.

现在我们证明一个相对简单的式子

定理 2.

$$F_{2n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i F_i$$

将右侧使用 Binet 公式展开, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} C_n^i F_i &= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\alpha^n - \beta^n\right) \\ &= \frac{(1+\alpha)^n - (1+\beta)^n}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha-\beta}\end{aligned}$$

最后一步用到了

$$1 + \alpha = \alpha^2$$

$$1 + \beta = \beta^2$$

我们再罗列出几个相关的公式

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i F_{i+j} = F_{2n+j}$$

直接利用 Binet 展开即可. 不过我们还是想使用下归纳法, 当 $n=0$ 时, 有

$$C_0^0 F_j = F_j$$

成立, 假设当 $n=k$ 时也成立,

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{i+j} = F_{2k+j}$$

那么当 $n=k+1$ 时, 左侧为

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i F_{i+j} &= \sum_{i=0}^{k+1} \left(C_k^i + C_k^{i-1}\right) F_{i+j} \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{i+j} + \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} F_{i+j} \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{i+j} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{i+j+1} \\
&= F_{2k+j} + F_{2k+j+1} \\
&= F_{2k+j+2} \\
&= F_{2(k+1)+j}
\end{aligned}$$

即为所求. 上式可推广为

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k F_t^k F_{t-1}^{n-k} F_{m+k} = F_{m+tn}$$

取 $t=2$ 即可. 此外, 还有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i F_{i+j} = (-1)^{j+1} F_{n-j} \\
&\sum_{i=0}^{n} C_n^i L_{i+j} = L_{2n+j} \\
&\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i F_{2i+j} = (-1)^{n+1} F_{n+j}
\end{aligned}$$

实际上, 我峨嵋你可以通过一些已知的组合恒等式, 得到有关斐波那契数的公式. 譬如

$$\begin{aligned}
(x+y)^{2k+1} &= \sum_{j=0}^{2k+1} C_{2k+1}^j x^{2k+1-j} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^j x^{2k+1-j} y^j + \sum_{j=k+1}^{2k+1} C_{2k+1}^i x^{2k+1-j} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^j x^{2k+1-j} y^j + \sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^{2k+1-j} x^i y^{2k+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^j (xy)^j \left(x^{2k+1-2j} + y^{2k+1-2j}\right)
\end{aligned}$$

现在取 $x=\alpha^s, y=\beta^s$, 其中 s 为任意整数那么可得

$$L_s^{2k+1} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{js} C_{2k+1}^j L_{(2k+1-2j)s}$$

类似地, 你可以求得

$$\begin{aligned}
(x+y)^{2k} &= \sum_{j=0}^{k-1} C_{2k}^{j}(xy)^{j}(x^{2k-2j}+y^{2k-2j}) + C_{2k}^{k}(xy)^{k} \\
\Longrightarrow L_s^{2k} &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{js}C_{2k}^{j}L_{(2k-2j)s} + (-1)^{ks}C_{2k}^{k} \\
(x-y)^{2k+1} &= \sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}\left(x^{2k+1-2j}-y^{2k+1-2j}\right) \\
\Longrightarrow 5^{k}\sqrt{5}F_s^{2k+1} &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j(s+1)}C_{2k+1}^{j}\sqrt{5}F_{(2k+1-2j)s} \\
(x-y)^{2k} &= \sum_{j=0}^{k-1} C_{2k}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x^{2k-2j}+y^{2k-2j}) + (-1)^{k}C_{2k}^{k}(xy)^{k} \\
\Longrightarrow 5^{k}F_s^{2k} &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j(s+1)}C_{2k}^{j}L_{(2k-2j)s} + (-1)^{k(s+1)}C_{2k}^{k}
\end{aligned}$$

下面我们考虑一种特殊的组合数. 断言: 斐波那契数的 m 次幂与它前面的 $m+1$ 项满足一个递推关系, 譬如说

$$F_n^2 - 2F_{n+1}^2 - 2F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = 0$$

为了更好地描述上面的断言, 现在让我们定义一种新的组合数: 斐波那契组合数

$$\mathscr{F}_n^k = \frac{F_nF_{n-1}\cdots F_{n-k+1}}{F_kF_{k-1}\cdots F_1} = \prod_{j=1}^{k}\frac{F_{n-k+j}}{F_j}$$

并补充定义

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_n^0 &= 1 \\
\mathscr{F}_n^{n+s} &= 0 \\
\mathscr{F}_n^{t} &= 0
\end{aligned}$$

其中 s 为任意正整数, t 为任意负整数. 这与一般的组合数相同. 我们先给出一个相关的结论:

$$\mathscr{F}_n^m = \mathscr{F}_n^{n-m}$$

具体的证明较费口舌, 所以不证明了. 下面给出如下结论:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{[(m-k)/2]}\mathscr{F}_m^kF_{n+k}^{m-1} = 0$$

上面的中括号为取整符号. 但是这个公式是错的, 我让 google ai studio 帮我修改, 得到

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k(k+1)/2}\mathscr{F}_m^kF_{n+k}^{m-1} = 0$$

要求 m 为奇数. 我们先带入 $m=3$, 那么得到

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}_3^0F_n^2 - \mathscr{F}_3^1F_{n+1}^2 - \mathscr{F}_3^2F_{n+2}^2 + \mathscr{F}_3^3F_{n+3}^2 = 0 \\
\Longrightarrow &F_n^2 - 2F_{n+1}^2 - 2F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = 0
\end{aligned}$$

再带入 $m=5$, 可得

$$F_n^4-5F_{n+1}^4-15F_{n+2}^4+15F_{n+3}^4+5F_{n+4}^4-F_{n+5}^4=0$$

至少, 取 $n=0$ 时上式成立. 我们尝试使用数学归纳法来证明:

1. 当 $m=1$ 时, 很显然成立.
2. 假设当 $m=2l-1$ 时成立, 也就是

$$\sum_{k=0}^{2l-1}(-1)^{k(k+1)/2}\mathscr{F}_{2l-1}^kF_{n+k}^{2l-2}=0$$

那么当 $m=2k+1$ 时, 左侧为

$$\sum_{k=0}^{2l+1}(-1)^{k(k+1)/2}\mathscr{F}_{2l+1}^kF_{n+k}^{2l}$$

看起来难以证明.

最终, 我在 MSE 上提问, 得出正确的公式为

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{\lceil(m-k)/2\rceil}\mathscr{F}_m^kF_{n+k}^{m-1}=0$$

其中 $\lceil\rceil$ 为向上取整.

现在不妨让我们将组合数置于分母处进行求和. 那就不得不提到一个很著名的公式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$$

对于此公式, 目前能够找到的最早的来源是 ANDREW M. ROCKETT 于 1981 年在斐波那契季刊上发表的一篇论文. 然而, 他在论文中提到, 此公式修正了另一篇 1974 年论文中的小错误. 然而那篇文献我没找到. 此公式可以使用数学归纳法证明, 也可以使用 Beta 函数处理. 不过我是不会证明此公式的. 此外, 再列举一个我唯一找到的, 同时包含 π 和 α 的公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{C_{4n}^{2n}}=\frac{16}{15}+\frac{\sqrt{3}}{27}\pi-\frac{2\sqrt{5}}{25}\ln\alpha$$

在开始得到我们期望的公式之前, 需要一些有关组合数的公式, 并且我不会取证明.

公式 1. 对于 $z\neq-1$, 有

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{C_n^j}=(n+1)\left(\frac{z}{1+z}\right)^n\frac{1}{1+z}\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+z^{j+1})}{j+1}\left(\frac{1+z}{z}\right)^j$$

公式 2. 对于 $|z|<1$, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{2j}z^{2j}}{jC_{2j}^j}=\frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\arcsin z=2\arcsin z\cot\arccos z$$

定理 1. 对于任意整数 s, 有

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{F_{j+n+s}}{C_n^i}=(n+1)\sum_{j=0}^{n}\frac{F_{j+s-2}+F_{2j+s-1}}{j+1}$$
$$\sum_{j=0}^{n}\frac{L_{j+n+s}}{C_n^i}=(n+1)\sum_{j=0}^{n}\frac{L_{j+s-2}+L_{2j+s-1}}{j+1}$$

在公式 1 中分别带入 $z=\alpha$ 和 $z=\beta$ 可得

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^{j+n+s}}{C_n^i}=(n+1)\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^{j+s-2}+\alpha^{2j+s-1}}{j+1}$$
$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta^{j+n+s}}{C_n^i}=(n+1)\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta^{j+s-2}+\beta^{2j+s-1}}{j+1}$$

那么作差, 作和可得定理 1.

当然, 对于有限项求和, 我们并不太感冒, 譬如上式, 它不过是将一种求和转变为另一种求和, 对于给定的 n, 难以利用右侧求出左侧的值. 下面开始考虑无穷级数的相关结果.

定理 2. 对于任意整数 s, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_{2j+s}}{jC_{2j}^j}=(F_{s+1}\sqrt{5}-F_{s-1})\frac{\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha^3}{\sqrt{5}}}$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L_{2j+s}}{jC_{2j}^j}=(L_{s+1}\sqrt{5}-L_{s-1})\frac{\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha^3}{\sqrt{5}}}$$

实际上, 可以猜测, 会在公式 2 中分别带入 $z=\dfrac{\alpha}{2}$ 和 $z=-\dfrac{\beta}{2}$, 可得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2j}}{jC_{2j}^j}=\frac{2\alpha}{\sqrt{4-\alpha^2}}\arcsin\frac{\alpha}{2}=2\arcsin\frac{\alpha}{2}\cot\arccos\frac{\alpha}{2}$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta^{2j}}{jC_{2j}^j}=\frac{2\beta}{\sqrt{4-\beta^2}}\arcsin\frac{\beta}{2}=-2\arcsin\frac{\beta}{2}\cot\arccos\left(-\frac{\beta}{2}\right)$$

再给它配上一个系数, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2j+s}}{jC_{2j}^j}=\frac{2\alpha^{1+s}}{\sqrt{4-\alpha^2}}\arcsin\frac{\alpha}{2}=2\alpha^s\arcsin\frac{\alpha}{2}\cot\arccos\frac{\alpha}{2}$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta^{2j+s}}{jC_{2j}^j}=\frac{2\beta^{1+s}}{\sqrt{4-\beta^2}}\arcsin\frac{\beta}{2}=-2\beta^s\arcsin\frac{\beta}{2}\cot\arccos\left(-\frac{\beta}{2}\right)$$

下面具体计算以下各个反三角函数的数值. 这里之所以 β 前面配个符号, 是为了保证 $0<-\beta/2<\pi/2$, 此时, 可以定义相应的反余弦函数. 当然, 在这里我不会去定义反三角函数, 仅仅只去进行计算. 如果你接触过除了上课讲得老三样特殊角的三角函数, 那你一定记得 $\pi/5$ 这一特殊值, 我们计算一下 $\sin\dfrac{\pi}{5}$ 的值. 考虑方程

$$\begin{aligned}&\sin 2\theta=\sin 3\theta\\ \Longrightarrow&2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta\\ \Longrightarrow&4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0\\ \Longrightarrow&\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

另一方面, 该方程的解为

$$\begin{aligned}&3\theta=-2\theta+(2m+1)\pi\\ \Longrightarrow&\theta=\frac{2m+1}{5}\pi\end{aligned}$$

那么可求得

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\alpha}{2}$$

我本意是求出 $\sin\dfrac{\pi}{5}$, 然而, 求出的结果对不上, 相反 cos 的值合适着. 也就是

$$\arccos\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{5}$$

实际上, 要想直接求出某个角度 θ, 使得

$$\sin\theta=\frac{\alpha}{2}$$

或者别的值, 似乎没有什么特别的方法. 我们直接给出结果为

$$\begin{aligned}\arccos\frac{\alpha}{2}&=\frac{\pi}{5}\\ \arccos\left(-\frac{\beta}{2}\right)&=\frac{2\pi}{5}\\ \arcsin\frac{\alpha}{2}&=\frac{3\pi}{10}\\ \arcsin\frac{\beta}{2}&=-\frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

此外, 为了求出 $\cot\arccos$ 的值, 再给出

$$\cot\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\sqrt{5}}}$$

$$\cot\frac{2\pi}{5}=-\beta^3\sqrt{\frac{\alpha^3}{\sqrt{5}}}$$

回代可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2j+s}}{jC_{2j}^{j}}&=\frac{3\alpha^{1+s}\pi}{5\sqrt{4-\alpha^2}}=\frac{3\alpha^{1+s}\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}\\ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta^{2j+s}}{jC_{2j}^{j}}&=-\frac{\beta^{1+s}\pi}{5\sqrt{4-\beta^2}}=\frac{\beta^{2+s}\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

实际上, 我们也得到了

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{4-\alpha^2}}&=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}\\ \frac{1}{\sqrt{4-\beta^2}}&=\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}\\ \Longrightarrow\frac{\beta}{\sqrt{4-\alpha^2}}&=\frac{1}{\sqrt{4-\alpha^2}}\end{aligned}$$

将已求得的式子分别作差, 作和, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2j+s}-\beta^{2j-s}}{jC_{2j}^{j}}&=\left(3\alpha^{1+s}-\beta^{2+s}\right)\frac{\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}\\ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2j+s}+\beta^{2j-s}}{jC_{2j}^{j}}&=\left(3\alpha^{1+s}+\beta^{2+s}\right)\frac{\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

对于 $3\alpha^{1+s}-\beta^{2+s}$, 可以将之化简为多种形式, 此处我们按照原文献上的形式

$$\begin{aligned}3\alpha^{1+s}-\beta^{2+s}&=\alpha\left(\alpha^s+\beta^{3+s}\right)\\ &=\alpha\sqrt{5}\left(\sqrt{5}F_{r+1}-F_{r-1}\right)\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}3\alpha^{1+s}+\beta^{2+s}&=\alpha\left(3\alpha^{s}-\beta^{s+3}\right)\\&=\alpha\left(\sqrt{5}L_{r+1}-L_{r-1}\right)\end{aligned}$$

于是得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_{2j+s}}{jC_{2j}^{j}}=\left(\sqrt{5}F_{s+1}-F_{s-1}\right)\frac{\alpha\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L_{2j+s}}{jC_{2j}^{j}}=\left(\sqrt{5}L_{s+1}-L_{s-1}\right)\frac{\alpha\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}$$

现在令 $s=-1$, 可得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_{2j-1}}{jC_{2j}^{j}}=\left(\sqrt{5}F_{0}-F_{-2}\right)\frac{\alpha\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}=\frac{\alpha\pi}{5}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{5}}}$$

于是得到递推关系

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_{2j+s}}{jC_{2j}^{j}}=\left(\sqrt{5}F_{s+1}-F_{s-1}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_{2j-1}}{jC_{2j}^{j}}$$

同理可得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L_{2j+s}}{jC_{2j}^{j}}=\frac{5\beta F_{s}+2L_{s+1}}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L_{2j}}{jC_{2j}^{j}}$$

此外, 还可以根据其它类似的组合恒等式, 得到其它的结果. 于此不再叙述.

第七章　连分数, 嵌套根号

与其它章节不同, 在本章, 我们不再默认读者具有基本连分数的相关知识, 而从基础的定义开始. 这样做有两个原因:

1. 我也不会连分数.

2. 连分数不在本科标准的教材之中.

并且我们只介绍与斐波那契数相关的结论, 以及必要的定理. 其余多的, 不再赘述. 我们不对连分数下具体的定义, 只给出我们需要用到的形式:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

对于这个连分数, 我们有一下几点需要说明:

1. 每个分母处都是 1. 当然, 一般的连分数并不需要满足这一点.

2. q_i 为正整数, 其中 $i = 1, 2, \ldots, n$, 这里不包括 q_0. 你一定要注意这一点, 正整数意味着至少是 1, 这样就可以比较大小了.

另外还有一点, 上面的连分数我是不会打的, 询问了网友后得到的结果.

现在给出两个相关的定义:

定义 1. 连分数中出现的 $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$ 称为部分商.

定义 2. 表达式

$$\omega_k = q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}$$

为连分数的完全商, 其中 $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. 这里我们写出

$$\omega_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}$$

为原连分数, 有时也记为 ω. 此外

$$\omega_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{q_n}$$

由于连分数理论对于我来说较为复杂, 这里先给出我们最终得到的结果:

结论 1. 如果连分数的部分商全为 1, 那么该连分数为

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{1}}}=\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

据考证, 此结果最先被苏格兰数学家 Robert Simson 于 1753 年指出. 平面几何中著名的西姆松定理正是以他命名, 不过发现者为另一位苏格兰数学家 William Wallace, 在 1799 年. 之所以会发生这样的谬误, 可能的原因是因为彭赛列在它的著作射影几何学中将该定理归功于西姆松. 如果是无限连分数, 那么将收敛于 α. 我们可以从形式上给出无限连分数的推导, 考虑方程

$$\alpha^2=\alpha+1\Longrightarrow\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$$

迭代一次, 有

$$\alpha=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha}}$$

不断迭代即可. 然而, 如果一个理论不经过严格论述, 那将是异常可怕的, 我们知道 β 同样满足 $\beta^2=\beta+1$, 据此不断迭代, 会得到同样的连分数. 不过我们知道了有限和无限的结果, 不妨证明一下如下的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\alpha$$

证明并不困难, 利用 Binet 公式, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta(\beta/\alpha)^n}{1-(\beta/\alpha)^n}\\&=\alpha\end{aligned}$$

结论 2. $n+1$ 个部分商中, 如果除了 $q_k=2(k\neq 0)$ 外, 其余皆为 0, 那么该连分数为

$$\frac{F_{n+2}+F_{k+1}F_{n-k-1}}{F_{n+1}+F_kF_{n-k-1}}$$

对于嵌套根号, 我也是一知半解, 不过可以从形式上给出一个结果: 考虑方程

$$\alpha^2=\alpha+1$$

开根号可得

$$\alpha=\sqrt{1+\alpha}$$

不断迭代, 有

$$\alpha=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

相应地, 考虑 $-\beta=\dfrac{1}{\alpha}$, 那么有

$$\frac{1}{\alpha^2}=1-\frac{1}{\alpha}$$

为了行文方便, 令

$$\Phi = \frac{1}{\alpha}$$

那么有

$$\Phi = \sqrt{1-\Phi}$$

不断迭代, 有

$$\Phi = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}}$$

然而, 好像有些问题. 因为如果只计算有限次根号, 结果不是 1 就是 0.

采用递推的方式定义

$$a_{n+1} = \sqrt{1-a_n}$$
$$a_1 = 1$$

那么

$$a_{2k} = 0$$
$$a_{2k+1} = 1$$

不过我们可以不设置初值为 1, 或者 0. 由于我对于此理论几乎不了解, 不再深入探讨. 我让 deepseek 给我写了用于验证的 matlab 代码如下

```
% 初始化参数
x = 0.5;                      % 初始值
Phi = (sqrt(5)-1)/2;          % 黄金比例常数
tolerance = 1e-10;            % 容差
max_iterations = 1000;        % 最大迭代次数（防止无限循环）
iteration_count = 0;          % 迭代计数器

% 迭代过程
while abs(x - Phi) >= tolerance && iteration_count < max_iterations
x = sqrt(1 - x);          % 迭代公式
iteration_count = iteration_count + 1;
end

% 输出结果
if iteration_count < max_iterations
fprintf('迭代次数: %d\n', iteration_count);
fprintf('最终x值: %.15f\n', x);
fprintf('与Phi的差值: %.15f\n', abs(x - Phi));
else
fprintf('达到最大迭代次数%d仍未收敛\n', max_iterations);
end
```

输出结果为:

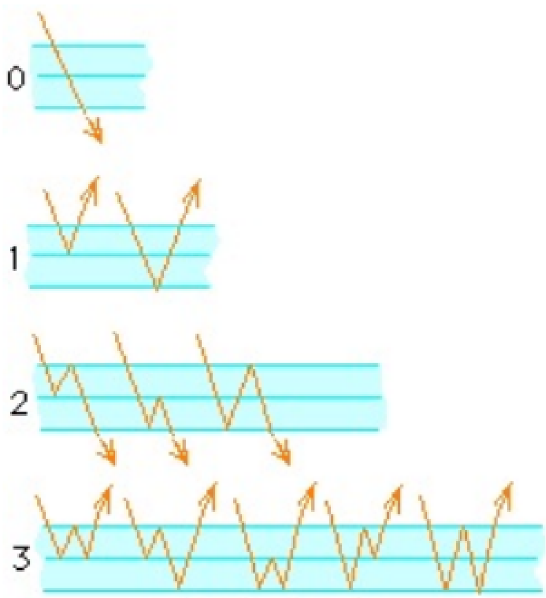
迭代次数: 99

最终 x 值: 0.618033988838723

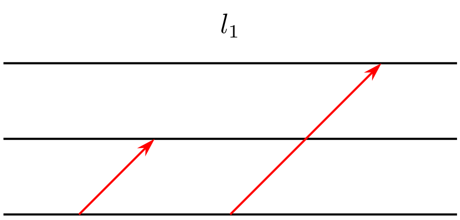
与 Phi 的差值: 0.000000000088828

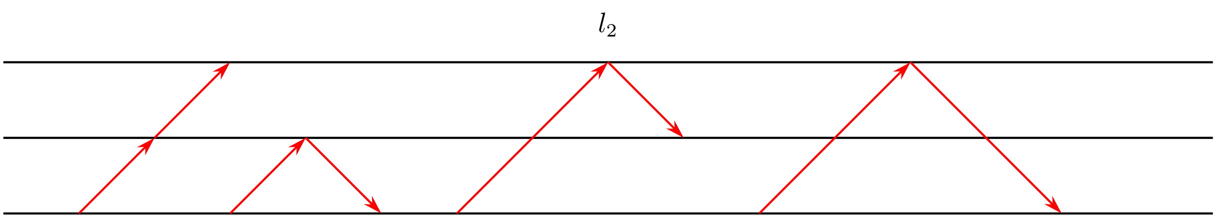
第八章　应用与数学游戏

应用 1. 考虑一束光斜着射入三层水平放置的玻璃, 每次光束解出玻璃, 会产生两种可能的结果, 或穿过, 或反射. 因此, 我们断言: 在光束行进过程中, 一共有 F_n 中不同的情况, 使得光束反射 n 此, 图片如下:



应用 2. 三能级系统. 对于一个量子系统, 假设只有三个能级, 分别记为 0,1 和 2, 具体可考虑一个处于磁场中的自旋为 1 的粒子. 现在假定一开始系统位于基态, 随后交替地吸收, 释放能量, 且每次吸收或释放地能量为 1 或 2. 那么经过共 n 次能量变化, 可能的过程有 F_{n+1} 次. 如图所示:





定理 1. 拉姆定理. 我说停停. 在考证的过程中, 完全找不到拉姆定理, 即使我将具体的定理内容放入一并检索. 得益于 ai 的发展,deepseek 给出了正确的名称.Gabriel Lamé, 正是正交坐标系中的 Lamé 系数.

定理 1. 拉梅定理. 辗转相除法的步数不大于较小数的位数的五倍.

现在开始证明: 假设 (a_{n+1}, a_n) 是一对整数, 且满足 $a_n \leq a_{n+1}$. 如果取等, 那么辗转相除法只有一步. 所以我们考虑 $a_n < a_{n+1}$. 假设这两个数之间的辗转相除法有 n 步, 那么

$$
\begin{aligned}
&a_{n+1} = m_n a_n + a_{n-1} \\
&a_n = m_{n-1} a_{n-1} + a_{n-2} \\
&\cdots \\
&a_3 = m_2 a_2 + a_1 \\
&a_2 = m_1 a_1
\end{aligned}
$$

其中 a_i 和 m_i 都是正整数, 同时辗转相除法要求

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1}$$

同时需要指出,$m_1 \neq 1$, 不然有

$$a_3 = (m_2 + m_1) a_2$$

这与辗转相除法, 以及我们假设的 n 步不符. 因此, 我们可以对所有的 a_i 都做个估计

$$
\begin{aligned}
&a_1 \geq 1 \\
&a_2 \geq 2 \cdot 1 = 2 \\
&a_3 \geq 1 \cdot 2 + 1 = 3 \\
&a_4 \geq 1 \cdots 3 + 2 = 5
\end{aligned}
$$

可以得出

$$a_i \geq F_{i+1}$$

下面给出一个引理:

引理 1.

$$F_{n+5} > 10 F_n$$

强行利用递推公式将左侧展开, 有

$$
\begin{gathered}
F_{n+5} = 5F_{n+1} + 3F_n \\
8F_n + 5F_{n-1}
\end{gathered}
$$

那么有

$$
\begin{gathered}
F_{n+5} > 10F_n \\
\Longleftrightarrow 5F_{n-1} > 2F_n \\
\Longleftrightarrow 3F_{n-1} > 2F_{n-2}
\end{gathered}
$$

这是显然成立的. 因此,F_{n+1} 至少比 F_n 多一位数. 当然, 从上面论述的过程中也能看出, 要求 $n>2$. 同时注意到 $F_6=8$ 是一位数,$F_7=13$ 为两位数, 那么当

$$6<m\leq 6+5$$

时,F_m 至少为两位数. 不断迭代可知, 当

$$5k+1<m\leq 5(k+1)+1$$

时,F_m 至少为 $k+1$ 位数. 对于任意正整数 n, 总能找到整数 k, 使得

$$5k<n\leq 5(k+1)$$

那就是

$$5k+1<n+1\leq 5(k+1)+1$$

此时 u_{n+1} 至少为 $k+1$ 位数, 那么 $a>u_{n+1}$ 至少为 $k+1$ 为数, 于是有

$$n\leq 5(k+1)\leq 5(a\text{的位数的 }5\text{ 倍})$$

这正是我们期望证明的.

类似的方法可以用来证明另一个定理. 我们定义单位分数: 分子为 1 的分数. 这种分数也被称为埃及分数或者古埃及分数. 然而我在考证的时候, 维基百科居然将下面的定理作为古埃及分数的定理, 而百度百科则是正确的, 并且给出了一些例子. 之所以称之为埃及分数, 是因为两千多年以前的古埃及就已经开始使用这种分数了, 并且他们只是用分子为 1 的分数.

定理 2. 任何一个真分数总可以表示成不同单位分数之和.

在证明此定理之前, 不妨让我们看看具体的示例, 那就是鼎鼎有名的分马问题.11 匹马分给 3 个儿子, 老大分 $\frac{1}{2}$, 老二分 $\frac{1}{4}$, 老小分 $\frac{1}{6}$. 邻居牵来 1 马, 一共 12 匹马. 于是老大 6 匹, 老二 3 匹, 老小 2 匹, 刚好 11 匹. 于此我们不讨论这样的分法是否合理等一系列乱七八糟的问题, 仅仅说明, 从数学的角度来看, 上面的分法是怎么个事. 实际上, 它就是

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$$

现在开始证明. 对于真分数 $\frac{m}{n}$, 即 $m<n$, 假设 $\frac{1}{x_1}$ 为不超过 $\frac{m}{n}$ 的最大单位分数, 如果 $\frac{1}{x_1}=\frac{m}{n}$, 那么命题得证. 反之, 则有 $\frac{1}{x_1}<\frac{m}{n}$, 于是有

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{x_1}=\frac{mx_1-n}{nx_1}=\frac{m_1}{nx_1}$$

根据我们的假设, 一定有

$$\frac{1}{x_1-1}>\frac{m}{n}>\frac{1}{x_1}$$

$$\Longleftrightarrow m_1=mx_1-n<m$$

于是现在可以找出 x_2 使得 $\frac{1}{x_2}$ 是不大于 $\frac{m_1}{nx_1}$ 的最大的单位分数, 我们假定两者不相等. 倘若相等, 则结束证明. 现在需要说明 $x_1<x_2$. 如果 $x_1\geq x_2$, 那么

$$\frac{m}{n}>\frac{m_1}{nx_1}\geq\frac{1}{x_2}$$

此时 $\frac{1}{x_2}$ 比 $\frac{1}{x_1}$ 更大, 这与我们的假设矛盾. 此时

$$\frac{m_1}{nx_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{m_2}{nx_1x_2}$$

并且有 $m_2 < m_1 < m$. 不断迭代, 可以得到

$$m > m_1 > m_2 > \cdots > m_k = 0$$

因此我们也就将真分数拆分为

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k}$$

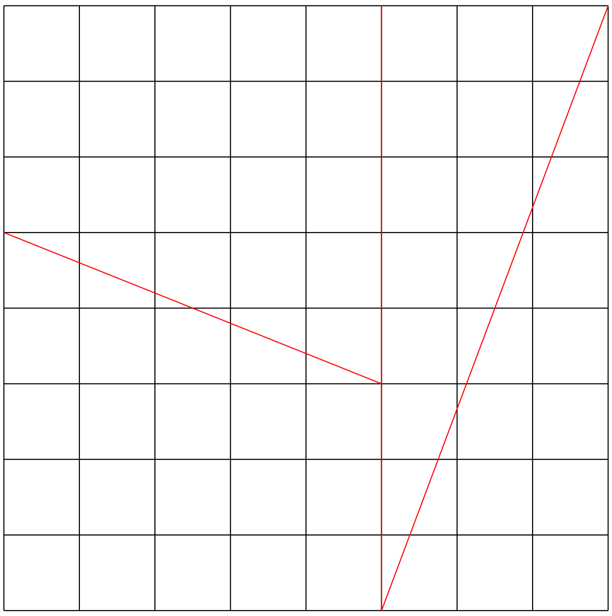
同时, 根据关于 m 的不等式, 我们知道至少有 $1 \geq k \geq m$, 那么拆分为单位分数的数量不超过 m 个.

接下来我们给出斐波那契数列与数值积分的关系. 对于正方形上的积分, 华罗庚华老师指出, 存在如下的逼近

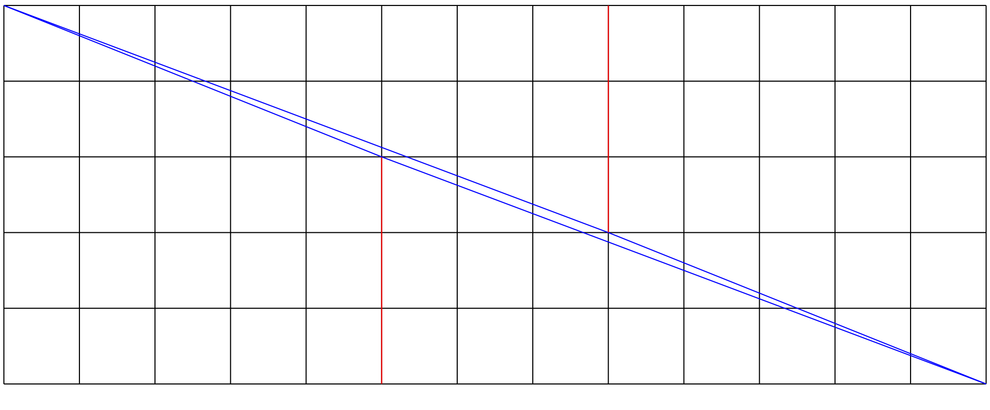
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim \frac{1}{F_{n+1}} \sum_{t=1}^{F_n+1} f\left(\left\{\frac{t}{F_{n+1}}\right\}, \left\{\frac{tF_n}{F_{n+1}}\right\}\right)$$

其中大括号表示小数部分. 此公式可推广至高维. 你可以设计一个程序来验证下, 譬如取 $f(x,y) = x+y$, 那么当 $n = 25$ 时, 精度在 1×10^{-5} 以内.

数学游戏. 大家都见过一种切巧克力的魔术, 或者切别的什么. 大致说在一块巧克力上切了几刀, 重新拼接后, 其面积变大了. 如下图所示



图中红线为切割的线, 随后拼接为



面积由 $8 \times 8 = 64$ 变为 $13 \times 5 = 65$. 大家都知道这是视觉上的错觉, 从第二幅图中蓝色部分为空隙. 你有没有发现一个问题: 这个斐波那契数有什么关系? 实际上, 回忆我们之前学习过的公式:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

我们取 $n = 6$, 那么得到

$$8^2 - 5 \times 13 = -1$$

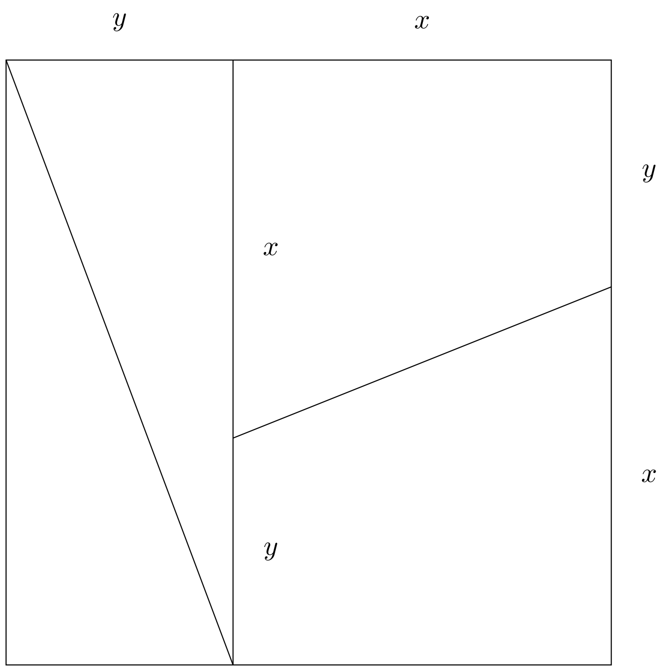
恰好为上面两个矩形对应的面积. 实际上, 如果能够刚好拼接上, 那么图中蓝线为一条直线, 里哦也能够同旁内角相等, 可以得到梯形中的小角与三角形中的大角相同, 也就是

$$\arctan \frac{8}{3} = \arctan \frac{5}{2}$$

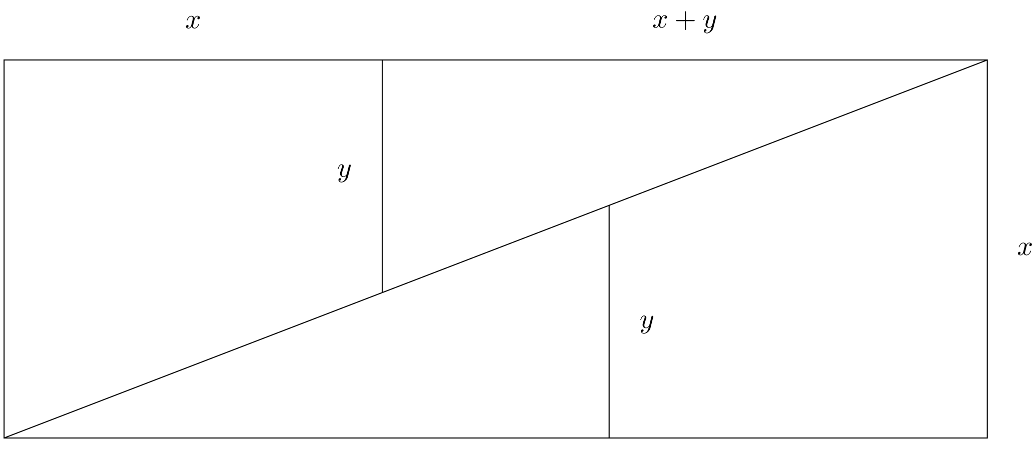
具体求出结果为

$$1.21 = 1.19 \Longrightarrow 138.89^\circ = 136.40^\circ$$

左侧为弧度, 右侧为角度, 还挺近的. 那么现在让我们思考, 如何调整切割的方式, 使得能够拼接得到一个面积相同的长方形.



拼接后得到



根据角度判据, 有

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$$

可解出

$$\frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

略去负值解, 可得

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$$

从面积的角度来看, 正方形面积为

$$S_1 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

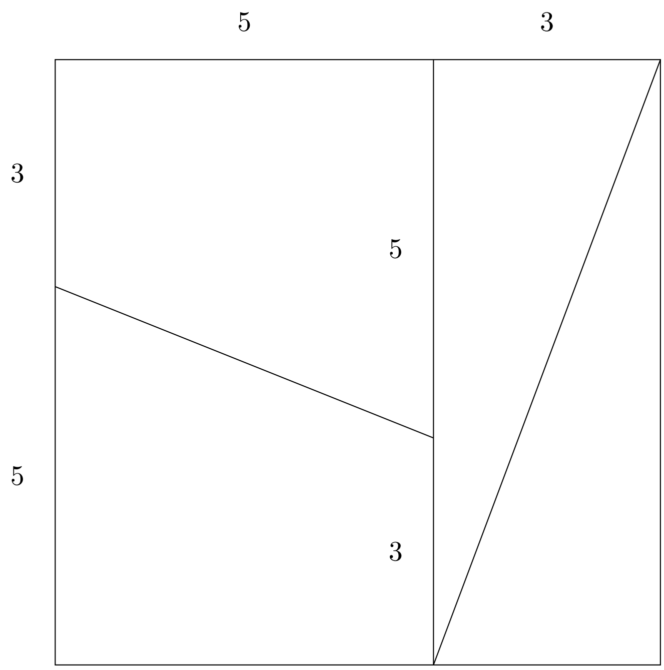
长方形面积为

$$S_2 = x(2x+y) = 2x^2 + xy$$

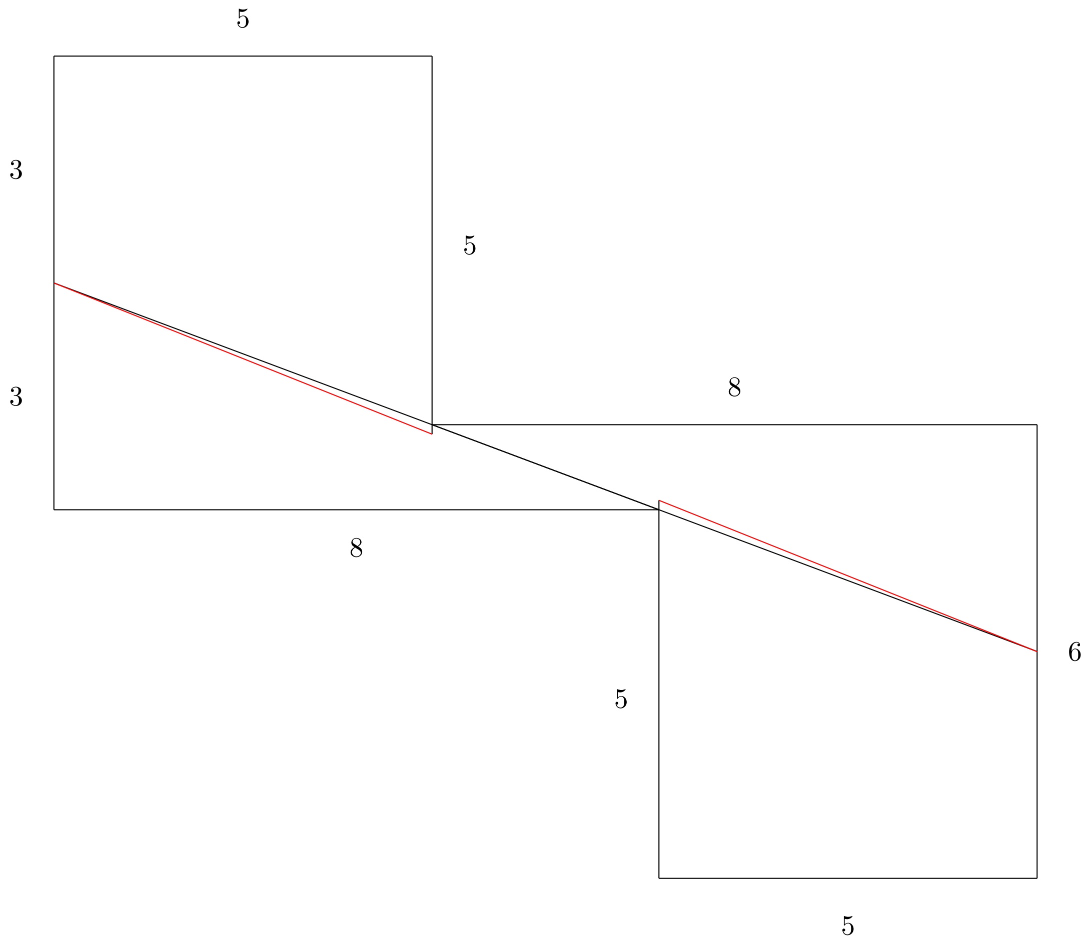
令两者相等, 有

$$\begin{aligned} & x^2 + 2xy + y^2 = x(2x+y) = 2x^2 + xy \\ \Longleftrightarrow & x^2 - xy - y^2 = 0 \end{aligned}$$

与角度判据一致. 此外, 还有另一种拼接



当然, 这就是前面的分割. 将之拼接为



可以看到, 当梯形短边与三角形短边共线时, 梯形得斜边, 即图中红色部分, 与三角形得斜边不重合. 如果观察得不仔细, 或者故意将图中两线绘制重合, 又或者在真是模型中作一些手脚, 那么就会产生错觉. 我们按照错误得拼接方式, 计算出拼接前面积为

$$S_1 = 8^2 = 64$$

拼接后为

$$S_2 = 2 \times 5 \times 6 + 1 \times 3 = 36$$

此时小了 1. 与之联系得斐波那契数为

$$4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}F_{n-4} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$$

我们取 $n = 6$ 即可得到本题得结果. 如果想实现无缝拼接, 要求同样为

$$\frac{x}{y} = \alpha$$

除了上面得拼图游戏外, 我们再介绍一种新的游戏 Nim 游戏.Nim 游戏由 Charles L. Bouton 在 1901 年提出, 目前无法考证到 Nim 名称确切得由来. 也有文献指出, 最早是中国古代的筷子游戏, 或者火柴游戏, 然而没有其它文献加以印证.Nim 游戏是说, 假使地面上由两堆数量相同的火柴, 两人轮流, 在任意一堆火柴中取出若干根, 不能不取. 谁去到了最后一根, 谁就获胜. 通过数学归纳法可以证明, 后取者可获胜. 当然,Nim 游戏也有许多变体, 我们接下来介绍斐波那契 Nim 游戏: 玩家轮流从一堆火柴中拿取火柴, 每一步最多拿取前一步的两倍数量的火柴, 并通过拿取最后一枚火柴获胜。同时约定, 在第一次移动时, 不允许玩家拿走所有火柴. 我们断言: 若火柴数为斐波那契数, 则后取者可胜; 若火柴数不为斐波那契数, 则前者可胜.

这个游戏最早由迈克尔 · J · 惠尼汉于 1963 年描述，并将发明归功于俄勒冈州立大学数学家罗伯特 · E · 加斯凯尔。由于证明较为曲折, 我们默认 Zeckendorf 定理成立, 也就是任意一个正整数 m 可被不连续的斐波那契数表示出, 并且表示唯一. 在附录中叙述了此定理, 但未给出证明. 我们举出一个具体的例子. 譬如, 假设有 10 个火柴, 为了给出它的 Zeckendorf 表示, 我们考虑 $F_6 = 8$ 是小于等于 10 的最大的斐波那契数, 那么 $10 - F_6 = 2$,$F_3 = 2$ 是小于等于 2 的最大的斐波那契数.

$$10 = 8 + 2 = F_6 + F_3$$

1. 于是第一个玩家先取出 Zeckendorf 表示中最小的斐波那契数, 也就是 2, 剩下 8 根火柴.

2. 第二个玩家可取 $1 \sim 4$ 根. 然而, 倘若它取 3 或 4 根, 那么下一次第一个玩家可将剩余火柴全部取出, 直接就可以宣布第一个玩家获胜了. 现在先假设他取走了 1 根火柴, 现在剩下 7 根. 利用贪心算法, 我们将在下面介绍, 可得

$$7 = 5 + 2 = F_5 + F_3$$

3. 现在第一个玩家取出 $F_3 = 2$ 根火柴, 剩下 5 根.

4. 在此条件下, 第二个玩家只能取出 1 根, 此时剩下 4 根, 有

$$4 = 3 + 1 = F_4 + F_2$$

5. 第一个玩家取出 1 根, 剩下 3 根.

6. 此时, 第二个玩家只能取 $1 \sim 2$ 根. 不论他如何选择, 都是第一个玩家获胜.

$2'$. 现在假设在上面的第二步中, 第二个玩家取出了 2 根, 那么剩下 6 根, 有

$$6 = 5 + 1 = F_5 + F_2$$

$3'$. 第一个玩家取出 1 根, 剩下 5 根, 这就与上面第三次取出后的结果一致.

因此我们可以归纳出, 火柴数不为斐波那契数时, 第一个玩家的必胜策略. 对于任意整数 n, 先找出小于 n, 的最大的斐波那契数 F_k, 随后对 $m_1 = n - F_k$ 进行同样的操作, 总能最终得到 Zeckendorf 表示. 这里你可以想一想, 为何在上面的步骤中不会出现诸如 F_k, F_{k-1} 这样连续的斐波那契数. 这样的算法被称为贪心算法. 不过由于我不了解计算机知识, 因此不再过多解释. 得到 Zeckendorf 表示后, 第一名玩家始终取表示中最小的斐波那契数即可.

当然, 还有一些其它的方法, 譬如当 n 不为斐波那契数是, 第一个玩家需要找出比 n 打的最小的斐波那契数 F_k, 而后取出 $F_k - n$ 根火柴, 并始终贯彻这种策略, 除非你能够将剩下的火柴全部取走.

现在开始叙述完整的定理: 对于整数 n, 按照上面所说的贪心算法得到最小的斐波那契数为 F_l, 如果 F_l 等于本轮可取的火柴数, 那么此人取 F_l 根即可确保获胜. 若 F_l 大于本轮可取的火柴数, 那么不管此人取了多少根, 下一个人总能达成先前的条件.

具体的证明不再叙述, 主要原因有两点. 一是我所参考的书籍中写得不甚清楚, 甚至扫描文件有漏印的情况. 而是我本人并未学习过数论, 并且对于它的严格证明并不感冒.

接下来介绍骑士旅游问题. 骑士旅游问题, 又称棋盘上马步哈密顿路线, 通俗的说, 便是马能否跳跃至棋盘上任意一点. 当然, 这里说的是中国象棋. 这个问题的水很深, 我把握不住, 因

此仅仅介绍如下的问题. 定义 (m,n) 广义马为每一步能够横向跳跃 m, 纵向跳跃 n 的马, 现在考虑问题: (m,n) 马从 $O(0,0)$ 点跳跃至 $P(1,0)$ 点的最小步数是多少. 我们有如下两个结论:

1. 对于 $(n,n+1)$ 马, 从 O 到 P 可用 $2n+1$ 步到达.

2. 如果 F_{n+1} 与 F_n 奇偶性不同, 那么 (F_{n-1},F_n) 马可用 F_{n+1} 步从 O 跳到 P.

我们不证明这两个结论, 因为参考书上有第二问的证明, 但是我不太想看.

此现在我们考虑如下的问题: 1 条直线能够将平面分为两份,2 条直线能够分为 4 份, 经过我也没弄懂的推理, 可以得到一个递推公式

$$H_{n+1}=H_n+n+1$$

同时初值为

$$H_0=1$$

那么可得

$$H_n=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

这个例子和斐波那契数没有什么特别的关系, 仅仅是一种递推的思想.

此外, 斐波那契述略在解决希尔伯特第十问题上也出了力. 不过很可惜, 笔者平时不学无术, 自然不知道希尔伯特第十问题.

第九章　Fibonometry

我实在不知道要如何翻译 Fibonometry, 所以用英文代替.2013 年 John Horton Conway 和 Alex Ryba 在 The Mathematical Gazette 发表了同名论文, 然而, 应该不是 Fibonometry 最早的提出者, 早在 2007 年就有人发表过类似的结论. 从论文中看, 他们应该是第一个将 Fibonometry 与 1902 年 George Osborn 在 The Mathematical Gazette 上发表的论文 Mnemonic for hyperbolic formulae 进行对比的人.

Conway, 可能有的同学会想到他写的泛函分析. 不过这是另一个 John Bligh Conway. 生命游戏, 康威多项式等结果都是他研究的.Atiyah 评价他为 Conway is the most magical mathematician in the world. 不过遗憾的是, 他于 2020 年在普林斯顿因新冠疫情逝世.

Osborn, 我在网络上找到了别人的博客中的介绍:

Osborn was Senior Physics Master at The Leys from 1888 to 1926, an excellent chess player, keen on Spanish literature and the study of the New Testament - aside from being an excellent mathematician (he was 17th Wrangler in 1887). He died on June 20th, 1932. It seems his grandfather was Rev. Dr. George Osborn, a Methodist Scholar; his father was also a George.

Osborn rule 是一种将三角函数恒等式和双曲函数恒等式联系起来的一种替换方法, 在我整理 Advanced Trigeomometry 时, 书中也提到了此规则. 只是我觉得完全不成体系, 没有什么价值, 因此将之略去. 现在重新叙述一下: 在三角函数恒等式中, 作替换 $\cos \to \cosh$ 和 $\sin \to \sinh$, 同时要求出现 $\sinh^{2k}$ 或 $\sinh^{2k+1}$ 时, 需要加上一个 $(-1)^k$, 譬如说

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \to \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Conway 和 Ryba 提出, 包含斐波那契数和卢卡斯数的恒等式与三角函数恒等式有类似的对应关系, 譬如说

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \to 2F_{a+b} = F_aL_b + L_aF_b \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \to L_{a+b} = L_aL_b + 5F_aF_b \end{aligned}$$

具体的规则为

$$\begin{aligned} &\theta = p\alpha + q\beta + r\gamma + \cdots \to n = pa + qb + rc + \cdots \\ &\sin\theta \to \frac{i^n}{2}F_n \\ &\cos\theta \to \frac{i^n}{2}L_n \end{aligned}$$

此外, 还需要在出现 $\sin^{2k}$ 或 $\sin^{2k+1}$ 时, 加上 $(-5)^k$. 我们尝试举几个例子, 二倍角公式就留给

读者了, 这里考虑三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \to F_{3n} = 5F_n^3 + 3(-1)^n F_n$$

此外, 考虑三角函数的奇偶性为

$$\sin(-x) = -\sin x \to \frac{i^{-n}}{2}F_{-n} = -\frac{i^n}{2}F_n \Longrightarrow F_{-n} = -(-1)^n F_n$$

你可以自己试验下 cos 的奇偶性. 下面考虑另一个著名的恒等式

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \to (-5)\left(\frac{i^n}{2}F_n\right)^2 + \left(\frac{i^n}{2}L_n\right)^2 = 1$$

经过化简可得

$$L_n^2 - 4F_n^2 = 4(-1)^n$$

下面介绍一种新的规则:

$$\begin{aligned}
&\theta = p\alpha + q\beta + r\gamma + \cdots \to n = pa + qb + rc + \cdots \\
&\sin\theta \to \frac{\sqrt{5}}{2}i^{n-1}F_n \\
&\cos\theta \to \frac{1}{2}i^n L_n
\end{aligned}$$

我们试验一下:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \to \left(\frac{\sqrt{5}}{2}i^{n-1}F_n\right)^2 + \left(\frac{1}{2}i^n L_n\right)^2 = 1$$

经过化简可得到同样的结果.

实际上, 由于 sin 函数是奇宇称的, 所以在一个恒等式中,sin 函数幂次的宇称必然相同, 亦即其幂次始终为奇数或偶数, 不然, 取 $\theta \to -\theta$ 就会出问题.

这种带环可能与某种代数上的相似有关, 将三角函数用复数表达为

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

而将斐波那契数和卢卡斯数用 Binet 公式写出为

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \qquad L_n = \alpha^n + \beta^n$$

其中 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}-1}{2}$, 在域 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 中, 就有

$$\alpha^* = \beta$$

两者类似复共轭关系.

现在让我们推广斐波那契数列, 他们也被称为卢卡斯数列. 考虑整数数列 $U_n(P,Q)$ 和 $V_n(P,Q)$, 他们满足同一个递推关系

$$x_n = Px_{n-1} - Qx_{n-2}$$

其中 P,Q 为固定的整数. 同时初值为

$$U_0(P,Q) = 0 \qquad U_1(P,Q) = 1$$

$$V_0(P,Q) = 2 \qquad V_1(P,Q) = P$$

这里 $U_n(P,Q)$ 称为第一类卢卡斯数列, 而 $V_n(P,Q)$ 称为第二类卢卡斯数列. 实际上,$U_n(1,-1)$ 是斐波那契数列,$V_n(1,-1)$ 为卢卡斯数列. 当然, 这里出现了两种卢卡斯数列, 你可以通过具体情境来区分. 除了我们熟悉的上面两个例子, 再给出一些其他的: $U_n(2,-1)$ 为 Pell 数列, 相应的 $V_n(P,Q)$ 为 Pell-卢卡斯数列. 据考证,Pell 数可能是数学家 John Pell 提出, 但是未找到确切的根据. 此外, 他推广了除号 $\div$ 的使用, 欧拉则将有费马提出并研究的佩尔方程误以为是佩尔的工作.$U_n(1,-2)$ 被称为 Jacobsthal 数列, 相应的 $V_n(1,-2)$ 被称为 Jacobsthal-卢卡斯数列.Ernst Jacobsthal, 德国数学家, 由于他身上有犹太血脉, 在纳粹掌权后的 1934 年 3 月 29 日, 被普鲁士科学部剥夺了在柏林工业大学的任教资格.$U_n(3,2)$ 为 2^n-1, 相应的 $V_n(3,2)$ 是 2^n+1. 在下面的书写中, 我们将简记为 U_n 和 V_n. 并定义一个特征方程

$$x^2-Px+Q=0$$

我们不取研究此方程, 仅仅是为了记它的判别式为

$$D=P^2-4Q$$

当然, 它不必大于 0. 现在给出如下的对应关系:

$$\begin{aligned}
&\theta=p\alpha+q\beta+r\gamma+\cdots\to n=pa+qb+rc+\cdots\\
&\sin\theta\to\frac{\sqrt{D}}{2i}\left(\frac{-1}{\sqrt{Q}}\right)^nU_n\\
&\cos\theta\to\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{Q}}\right)^nV_n
\end{aligned}$$

先用和差化积公式练练

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

可得

$$U_m+(-\sqrt{Q})^{m-n}U_n=U_{\frac{m+n}{2}}V_{\frac{m-n}{2}}$$

同时需要保证 $\dfrac{m+n}{2}$ 和 $\dfrac{m-n}{2}$ 为整数, 那么就有

$$U_m+Q^{\frac{m-n}{2}}U_n=U_{\frac{m+n}{2}}V_{\frac{m-n}{2}}$$

再看一个复杂点的

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$$

在此处我们不证明上面的三角恒等式, 作为对应的, 有

$$Q^nU_lU_{m-n}+Q^lU_mU_{n-l}+Q^mU_nU_{l-m}=0$$

我们取 $Q=-1$, 那么有

$$(-1)^nF_lF_{m-n}+(-1)^lF_mF_{n-l}+(-1)^mF_nF_{l-m}=0$$

当然, 这里的 F_n 不一定就是斐波那契数列, 因为还没有选择 P. 不过从此能够看出, 该恒等式与 P 无关. 再取 $n=0$, 那么有

$$F_lF_m+(-1)^lF_mF_{-l}=0$$

也就是

$$F_l = (-1)^{l+1} F_{-l}$$

现在取 $n = 1$ 看看

$$F_m F_{l-1} - F_l F_{m-1} = (-1)^{m+1} F_{l-m}$$

这个公式看似很复杂, 实际上, 在两边同时乘上 $(-1)^l$, 那么就能够得到

$$F_{m+(-l)} = F_{m-1} F_{-l} + F_m F_{-l+1}$$

这正是我们熟悉的公式. 我们将一些常见的公式列表如下

Trigonometry	**General Lucas Sequences**
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$V_n^2 - DU_n^2 = 4Q^n$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$-Q^n U_{-n} = U_n$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$V_n = Q^n V_{-n}$
$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$	$U_{2n} = U_n V_n$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	$V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$	$V_{2n} = 2Q^n - DU_n^2$
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$U_{3n} = 3Q^n U_n + DU_n^3$
$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$	$V_{3n} = V_n^3 - 3Q^n V_n$

再多的就不列了. 下面我们介绍如何得到卡塔兰恒等式.Eugène Charles Catalan,19 世纪比利时数学家. 卡塔兰数, 卡塔兰常数都是他的工作. 此外, 在梅加强数学分析的教材的习题之中, 出现了另一个卡塔兰恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

如果 $x + y = w + z$, 那么有

$$f(t) = \sin(w+t)\sin(z+t) - \sin(x+t)\sin(y+t) = \frac{\cos(w-z) - \cos(x-y)}{2}$$

受此启发, 我们知道, 如果 $a + d = b + c$, 那么下面的式子

$$g(r) = (-1)^r (F_{a+r} F_{d+r} - F_{b+r} F_{c+r})$$

与 r 无关. 现在取 $a=d=n$, $b=n+m$, $c=n-m$, 那么有

$$(-1)^r(F_{n+r}F_{n+r}-F_{n+m+r}F_{n-m+r})$$

与 r 无关. 分别取 $r=0$ 和 $r=m-n$, 那么有

$$F_n^2-F_{n+m}F_{n-m}=(-1)^{m-n}(F_m^2-F_{2m}F_0)$$

化简可得到

$$F_n^2-F_{n+m}F_{n-m}=(-1)^{m-n}F_m^2$$

这就是卡塔兰恒等式. 如果取 $m=1$, 那么有

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$$

这正是我们先前已经记录过的卡西尼恒等式. 上面的式子可推广为

$$U_n^2-U_{n+m}U_{n-m}=Q^{n-m}U_m^2$$

当然, 斐波那契数列和卢卡斯数列的恒等式与双曲函数恒等式也有对应关系, 此处仅指出相应的规则, 而不再取举例论证.

$$\begin{aligned}
&\theta=p\alpha+q\beta+r\gamma+\cdots\to n=pa+qb+rc+\cdots\\
&\sinh\theta\to\frac{\sqrt{5}}{2i^n}F_n\\
&\cosh\theta\to\frac{1}{2i^n}L_n
\end{aligned}$$

以及对于一般的卢卡斯数列, 有

$$\begin{aligned}
&\theta=p\alpha+q\beta+r\gamma+\cdots\to n=pa+qb+rc+\cdots\\
&\sinh\theta\to\frac{\sqrt{D}}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{Q}}\right)^n U_n\\
&\cosh\theta\to\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{Q}}\right)^n V_n
\end{aligned}$$

这个方法可以运用到包含 tan 函数的公式中, 具体对应为

$$\tan\theta\to\frac{\sqrt{D}}{i}\frac{U_n}{V_n}$$

譬如考虑两角和公式

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

能够得到

$$\frac{U_{m+n}}{V_{m+n}}=\frac{U_mV_n+U_nV_m}{V_mV_n+DU_mU_n}$$

此外, 你可以尝试下万能公式. 当然, 你也可以利用有关斐波那契数和卢卡斯数的恒等式, 通过对应, 得到三角函数或双曲函数的恒等式.

下面我们将从另一方面揭示两个不同的数学对象之间相似的原因. 当然, 我们会略去大量具体计算的细节. 考虑公式

$$\begin{bmatrix}\cos r\theta\\ \sin r\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{r-1}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

此公式原文献通过两角和公式反复迭代得到, 不过如果你认识右侧的变换矩阵, 就能够一眼看出它是旋转矩阵. 对角化为

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta+i\sin\theta & 0\\ 0 & \cos\theta-i\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{i}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2}\end{bmatrix}$$

于是可求得

$$\begin{aligned}\sin r\theta&=\frac{1}{2i}((\cos\theta+i\sin\theta)^r-(\cos\theta-i\sin\theta)^r)\\ \cos r\theta&=\frac{1}{2}((\cos\theta+i\sin\theta)^r+(\cos\theta-i\sin\theta)^r)\end{aligned}$$

这其实就是棣莫弗公式

$$\cos r\theta+i\sin r\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^r$$

而在前面的第五章, 我们也用矩阵讨论过斐波那契数列和卢卡斯数列, 现在让我们考虑一种新的方式, 即

$$\begin{bmatrix}L_r\\ F_r\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_{r-1}\\ F_{r-1}\end{bmatrix}$$

化简为

$$\begin{bmatrix}L_r\\ F_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha^{r-1} & 0\\ 0 & \alpha^{r-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

从上面的公式中可以得到斐波那契数列和卢卡斯数列的通项公式, 于此不再叙述. 我们考虑下矩阵

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

的几何意义, 因为三角函数对应矩阵的意义为旋转. 实际上, 根据恒等式

$$L_r^2-5F_n^2=4(-1)^r$$

那么可以说, 上述矩阵将两条双曲线

$$x^2-5y^2=4$$

$$x^2-5y^2=-4$$

在第一象限内相互转换. 同时这两条双曲线拥有共同的渐近线.

第十章　斐波那契数和反正切函数

斐波那契数和三角函数有着千丝万缕的关系. 这种关系不同于上一节介绍的对应关系, 而是会出现混合项. 先看两个公式:

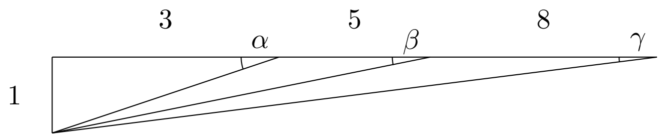
$$L_r = 2i^r \cosh\left[\frac{r}{2}\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = 2i^r \cos\left[\frac{ir}{2}\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$
$$F_r = \frac{2i^r}{\sqrt{5}}\sinh\left[\frac{r}{2}\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = -\frac{2i^{r+1}}{\sqrt{5}}\sin\left[\frac{ir}{2}\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

其中利用了公式

$$\cosh iz = \cos z$$
$$\cos iz = \cosh z$$
$$\sinh iz = i\sin z$$
$$\sin iz = i\sinh z$$

具体证明并不难, 利用 $\alpha\beta = -1$ 即可. 从此处也能够看出, 三角函数和斐波那契数的联系. 至于为什么不放在上一章, 反而放于此处, 是因为上一章没有空处了, 倘若放过去, 必然会造成空白页.

在正是介绍反正切函数之前, 我们先看如下的几何模型



现在断言:

$$\alpha = \beta + \gamma$$

我们计算下右侧的正切值为

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma} = \frac{1}{3}$$

与 $\tan\alpha$ 相同. 考虑到角度的范围, 因此上面的断言是正确的. 实际上, 有一般性的公式

定理 1. 对于非负整数 n, 有

$$\arctan\frac{1}{F_{2n}} = \arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}}$$

取 $n = 4$ 就是上面的情形. 现在让我们来定义反正切函数: 我们将其定义为正切函数 $f(x) = \tan x$ 的反函数, 然而, 由于正切函数并非双射, 同时在 $x_n = \dfrac{n\pi}{2}$ 处奇异, 因此需要一些修正.

我们仅仅取 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 此时定义反正切函数为

$$g : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\tan[g(x)] = x$$

注意, 这与解三角方程不同, 譬如

$$\tan x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

拥有无数个解, 我们取其中位于 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的值作为 $g(1)$ 的数值. 也将 $g(x)$ 即为 $\arctan x$ 或者 $\tan^{-1} x$. 此外, 还有一种积分定义

$$\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

下面介绍加法公式

$$\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

由于反正切函数值域的限制, 此公式成立的范围是

$$+:\ xy < 1$$
$$-:\ xy > -1$$

当然, 还有别的条件

$$\arctan x \pm \arctan y = \pi \pm \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

条件为

$$+:\ x > 0, xy > 1$$
$$-:\ x > 0, xy < -1$$

以及

$$\arctan x \pm \arctan y = -\pi \pm \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

条件为

$$+:\ x < 0, xy > 1$$
$$-:\ x < 0, xy < -1$$

现在令 $y = \frac{1}{x}$, 那么有

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$$

其中 $\pm$ 与 x 的符号一致. 下面我们证明一下前面几何模型中的公式. 右侧为

$$\arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}} = \arctan \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}}{F_{2n+2}F_{2n+1} - 1}$$

由于反正切函数为双射, 所以需要证明

$$\frac{1}{F_{2n}}=\frac{F_{2n+2}+F_{2n+1}}{F_{2n+2}F_{2n+1}-1}$$
$$F_{2n+1}^2-F_{2n+2}F_{2n}=1$$

这正是卡西尼恒等式. 从此也能够看出, 选择下标为 $2n$ 而不是一般整数 n 的原因. 此外, 我们将上式稍作改写

$$\arctan\frac{1}{F_{2n+1}}=\arctan\frac{1}{F_{2n}}-\arctan\frac{1}{F_{2n+2}}$$

求和可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{F_{2k+1}}&=\arctan\frac{1}{F_2}-\arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\\&=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\end{aligned}$$

取极限为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{F_{2n+1}}=\frac{\pi}{4}$$

这让我想到了另一个著名的结论, 莱布尼茨公式, 也就是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

此外, 用无穷和减去有穷和, 又可以得到

$$\arctan\frac{1}{F_{2n}}=\sum_{k=n}^{\infty}\arctan\frac{1}{F_{2k+1}}$$

定理 2. 对于正整数 k, 有

$$\arctan\alpha^{2k-1}=2\arctan 1-\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}$$

我们将他的形式转换一下, 也就是

$$\begin{aligned}&\arctan\alpha^{2k-1}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}\\\Longleftrightarrow&\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha^{2k-1}=\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}\\\Longleftrightarrow&\arctan\frac{1}{\alpha^{2k-1}}=\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}\\\Longleftrightarrow&2\arctan\frac{1}{\alpha^{2k-1}}=\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}\end{aligned}$$

利用两角和公式, 有

$$\begin{aligned}2\arctan\frac{1}{\alpha^{2k-1}}&=\arctan\frac{2}{\alpha^{2k-1}-\alpha^{-(2k-1)}}\\&=\arctan\frac{2}{\alpha^{2k-1}+\beta^{2k-1}}\\&=\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}\end{aligned}$$

即为所证.

定理 3. 对于非零整数 k, 有

$$\arctan\alpha^{2k+1}=2\arctan 1+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{L_{2k}}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{F_{2k}}$$
$$\arctan\alpha^{2k-1}=2\arctan 1-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{L_{2k}}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{F_{2k}}$$

我不太理解为什么一定要有个 $2\arctan 1$, 不过为了尊重原文, 并且第一个反正切中不是分数也较为美观, 因此不做修改. 这个定理的条件时错的, 要求 $k>0$. 这里的第二个式子和定理一相同, 也就是需要证明

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}&=-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{L_{2k}}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{F_{2k}}\\
\Longleftrightarrow\arctan\frac{2}{L_{2k-1}}&=\arctan\frac{1}{L_{2k}}+\arctan\frac{1}{F_{2k}}
\end{aligned}$$

容易知晓, 当 $k\neq 0$ 时, 始终有

$$\frac{2}{L_{2k}F_{2k}}<1$$

因此右侧为

$$\arctan\frac{1}{L_{2k}}+\arctan\frac{1}{F_{2k}}=\arctan\frac{F_{2k}+L_{2k}}{F_{2k}L_{2k}-1}$$

也就需要证明

$$\frac{2}{L_{2k-1}}=\frac{F_{2k}+L_{2k}}{F_{2k}L_{2k}-1}$$

根据 index-reduction formula 可得

$$F_{2k}L_{2k}=F_{2k+1}L_{2k-1}+1$$

因此需要证明

$$\begin{aligned}
\frac{2}{L_{2k-1}}&=\frac{F_{2k}+L_{2k}}{F_{2k+1}L_{2k-1}}\\
\Longleftrightarrow 2F_{2k+1}&=F_{2k}+L_{2k}\\
\Longleftrightarrow F_{2k+1}+F_{2k-1}&=L_{2k}
\end{aligned}$$

即为所求. 然而, 在上面的证明过程中, 并未使用到 $k>0$ 这一条件. 然而, 对于负整数 k, 对于定理 1 明显不成立. 检查了很久, 也没发现具体的问题. 不过按照文献上的方法, 则是考虑当 $k>0$ 时

$$\begin{aligned}
\arctan\alpha^{2k+1}+\arctan\alpha^{2k-1}&=\pi+\arctan\frac{\alpha^{2k-1}(\alpha^2+1)}{1-\alpha^{4k}}\\
&=\pi+\arctan\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{\alpha^{-2k}-\alpha^{2k}}\\
&=\pi-\arctan\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}\\
&=\pi-\arctan\frac{1}{F_{2k}}
\end{aligned}$$

类似可以计算出

$$\arctan\alpha^{2k+1}-\arctan\alpha^{2k-1}=\arctan\frac{1}{L_{2k}}$$

两者进行加减即可. 现在考虑 $k<0$ 的情况, 带入 $k=-1$, 第一个式子为

$$\arctan\frac{1}{\alpha}=\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}$$

这显然不对, 也可以取 $k\to-\infty$ 时的极限来考虑. 所以不可全然相信论文, 实际上这篇论文还只是 arxiv 上的.

我们需要特别指出作差时的情况, 因为这往往意味着可以不断求和消去中间项.

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{L_{2k}}=\arctan\alpha^{2n+1}-\arctan\alpha$$

取 $n\to\infty$, 那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{L_{2n}}=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha$$

关于最后一项, 则可在定理 1 或者定理 2 第二式中取 $k=1$, 得到

$$\arctan\alpha=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arctan 2$$

同时也有

$$\arctan\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}\arctan 2$$

那么得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{L_{2n}}=\frac{1}{2}\arctan 2$$

定理 4. 对于正整数 n, 有

$$\begin{aligned}\arctan\alpha^{4n-1}&=3\arctan 1-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\\ \arctan\alpha^{4n-3}&=\arctan 1+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}\end{aligned}$$

考虑

$$\begin{aligned}\arctan\frac{1}{\alpha}-\arctan\frac{F_{p-1}}{F_p}&=\arctan\frac{F_p-\alpha F_{p-1}}{\alpha F_p+F_{p-1}}\\ &=\arctan\frac{(-1)^{p-1}}{\alpha^{2p-1}}\\ &=(-1)^{p-1}\arctan\frac{1}{\alpha^{2p-1}}\end{aligned}$$

也就得到

$$(-1)^p\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha^{2p-1}\right)=\frac{1}{2}\arctan 2-\arctan\frac{F_{p-1}}{F_p}$$

分别取 $p=2n$ 和 $p=2n-1$ 即可.

定理 5. 对于非负整数 k, 有

$$2\arctan\frac{1}{\alpha^{2k}}=\arctan\frac{2}{\sqrt{5}F_{2k}}$$

直接将左侧相加, 有

$$\arctan\frac{1}{\alpha^{2k}}+\arctan\frac{1}{\alpha^{2k}}=\arctan\frac{2}{\alpha^{2k}-\alpha^{-2k}}=\arctan\frac{2}{\sqrt{5}F_{2k}}$$

然而, 条件声称对于对于非负整数 k 成立, 如果 $k=0$, 那么右侧分数的分母为 0, 这对吗?

定理 6. 对于非负整数 k, 有

$$\begin{aligned}2\arctan\frac{1}{\alpha^{2k}}&=\arctan\frac{\sqrt{5}}{L_{2k+1}}+\arctan\frac{1}{F_{2k+1}\sqrt{5}}\\2\arctan\frac{1}{\alpha^{2k+2}}&=\arctan\frac{\sqrt{5}}{L_{2k+1}}-\arctan\frac{1}{F_{2k+1}\sqrt{5}}\end{aligned}$$

根据定理 4, 如果按照同样的方法, 必然难以得出右侧的形式, 所以还是考虑

$$\begin{aligned}\arctan\frac{1}{\alpha^{2k}}+\arctan\frac{1}{\alpha^{2k+2}}&=\arctan\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{\alpha^{2k+1}-\alpha^{-(2k+1)}}\\&=\arctan\frac{\sqrt{5}}{L_{2k+1}}\end{aligned}$$

再取相减的结果为

$$\arctan\frac{1}{\alpha^{2k}}-\arctan\frac{1}{\alpha^{2k+2}}=\arctan\frac{1}{\sqrt{5}F_{2k+1}}$$

剩下的步骤就不再赘述了. 这里我们再次看到了差式, 求和可得

$$\sum_{k=0}^{n}\arctan\frac{1}{\sqrt{5}F_{2k+1}}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{\alpha^{2n+2}}$$

取极限可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{1}{\sqrt{5}F_{2n+1}}=\frac{\pi}{4}$$

当然, 对求和下限稍作修改, 可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{\sqrt{5}F_{2n+1}}=\arctan\frac{1}{\alpha^{2}}$$

定理 7. 对于非零整数 n, 有

$$\begin{aligned}\arctan\frac{1}{F_{2n-2}}&=\arctan\frac{1}{F_{2n}}+\arctan\frac{1}{L_{2n-2}}+\arctan\frac{1}{L_{2n}}\\\arctan\frac{2}{L_{2n-1}}&=\arctan\frac{1}{F_{2n}}+\arctan\frac{1}{L_{2n}}\\\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}&=\arctan\frac{1}{F_{2n}}-\arctan\frac{1}{L_{2n}}\\\arctan\frac{2}{F_{2n}\sqrt{5}}&=\arctan\frac{\sqrt{5}}{L_{2n+1}}+\arctan\frac{1}{F_{2n+1}\sqrt{5}}\end{aligned}$$

这几个公式验证不难. 此外, 将定理 1 带入其中, 可以得到, 当 n 为非零整数时, 有

$$\begin{aligned}\arctan\frac{1}{F_{2n-1}}&=\arctan\frac{1}{L_{2n-2}}+\arctan\frac{1}{L_{2n}}\\\arctan\frac{2}{L_{2n-1}}&=\arctan\frac{1}{L_{2n}}+\arctan\frac{1}{F_{2n+1}}+\arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\\\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}&=\arctan\frac{1}{F_{2n+1}}+\arctan\frac{1}{F_{2n+2}}-\arctan\frac{1}{L_{2n}}\end{aligned}$$

经过验证,$n=0$ 时, 第一个式子依旧成立, 而二三式不成立. 此外, 将上面两个公式相减, 有

$$\arctan\frac{2}{L_{2n-1}}-\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}=2\arctan\frac{1}{L_{2n}}$$

此时同样对 $n=0$ 不成立. 不过我们可以求和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{L_{2k}} &= \frac{1}{2}\left(\arctan\frac{2}{L_1}-\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan 2-\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}\right)\end{aligned}$$

定理三中得到过类似的公式, 于是我们得到

$$\arctan 2-\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}=2\arctan\alpha^{2n+1}-2\arctan\alpha$$

前面我们已经求出了 $2\arctan\alpha=\pi-\arctan 2$ 的等价形式, 代入可得

$$\arctan 2-\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}=2\arctan\alpha^{2n+1}-\pi+\arctan 2$$

化简为

$$\pi=2\arctan\alpha^{2n+1}+\arctan\frac{2}{L_{2n+1}}$$

你也可以单独计算下此公式的右侧.

定理 8. 对于正整数 n, 有

$$\begin{aligned}\arctan\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} &= \sum_{k=1}^{2n}\arctan\frac{1}{L_{2k}}\\ \arctan\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} &= \arctan 2-\sum_{k=1}^{2n-1}\arctan\frac{1}{L_{2k}}\\ \arctan\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} &= \arctan 1-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{L_{4n+1}}\\ \arctan\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} &= \arctan 1-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{L_{4n-1}}\end{aligned}$$

这几个公式也不是什么新鲜产物, 都可以通过对比前面已证明的公式得到. 注意到第一式右侧的求和式已经出现过两次, 对比可得

$$\begin{aligned}2\arctan\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}+\arctan\frac{2}{L_{2n+1}} &= \arctan 2\\ \arctan\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}+\arctan\alpha &= \arctan\alpha^{2n+1}\end{aligned}$$

实际上, 我们可以通过 BBP 公式给出一些更紧凑的写法. 然而, 这与我们的目的, 探究斐波那契数不符, 并且我也不会 BBP 公式, 所以就不叙述了.

第十一章　斐波那契数与三角函数

与上一章不同, 本章主要关注如何将斐波那契数与卢卡斯数表示为三角函数的连乘积形式. 在此之前, 先引入一个多项式恒等式

$$\mathscr{S}(x,y,n)=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r C_{n-r}^r (xy)^r (x+y)^{n-2r}=x^n+x^{n-1}y+\cdots+y^n$$

其中中括号 [ ] 为取整函数. 将其写为更紧凑的形式为

$$\mathscr{S}(x,y,n)=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r C_{n-r}^r (xy)^r (x+y)^{n-2r}=\sum_{r=0}^{n}x^r y^{n-r}$$

这里你有没有觉得右侧的多项式加和有些熟悉. 没错, 它是因式分解的结果, 具体为

$$x^{n+1}-y^{n+1}=(x-y)(x^n+x^{n-1}y+\cdots+y^n)$$

那么就有

$$\mathscr{S}(x,y,n)=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r C_{n-r}^r (xy)^r (x+y)^{n-2r}=\sum_{r=0}^{n}x^r y^{n-r}=\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$$

注意, 当 $x=y$ 时, 上面最右侧的分式应修改为极限下的结果. 我们不去证明此公式, 而是利用它作一些计算. 去 $x=\alpha, y=\beta$, 那么有

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(\alpha,\beta,n)&=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r C_{n-r}^r (-1)^r 1^{n-2r}\\&=\sum_{r=0}^{[n/2]}C_{n-r}^r\end{aligned}$$

另一方面, 从右侧的多项式形式入手, 有

$$\sum_{r=0}^{n}\alpha^r\beta^{n-r}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=F_{n+1}$$

这正是第六章中未完全证明的公式

$$F_{n+1}=\sum_{r=0}^{[n/2]}C_{n-r}^r$$

为了与后文相称, 我们将之改写为

$$F_n=\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}C_{n-1-r}^r$$

在那里我们使用数学归纳法, 只证明了 n 为偶数的情形. 这个方法也可以用于求推广的斐波那契数列, 在此不表. 我们现在看一种特殊情况, 取 $y=1$, 那么有

$$\mathscr{S}(x,1,n)=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r C_{n-r}^r x^r (x+1)^{n-2r}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

然而, 我们知道, 右侧分子是可以进行完全的因式分解的, 具体步骤为考虑方程

$$x^{n+1}-1=0 \Longrightarrow x_k=\exp\left[\frac{2ik\pi}{n+1}\right]$$

其中 $k=0,1,\ldots,n$. 为了避免出现复数, 我们需要将 $n+1$ 份奇偶讨论. 为了行文方便, 不妨将求和上限修改下, 也就是

$$\mathscr{S}(x,1,n-1)=\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^r C_{n-1-r}^r x^r(x+1)^{n-1-2r}=\frac{x^n-1}{x-1}$$

同时

$$x^n-1=0 \Longrightarrow x_r=\exp\left[\frac{2ir\pi}{n}\right]$$

其中 $r=0,1,\ldots,n-1$.

1. 倘若 n 为偶数, 那么有

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{n-2}{2}\right]=\frac{n-2}{2}$$

并且有因式分解

$$\begin{aligned} x^n-1&=\prod_{r=0}^{n-1}\left(x-\exp\left[\frac{2ir\pi}{n}\right]\right)\\ &=(x+1)(x-1)\prod_{r=1}^{(n-2)/2}\left(x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right)\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\sum_{r=0}^{(n-2)/2}(-1)^r C_{n-1-r}^r x^r(x+1)^{n-1-2r}=(x+1)\prod_{r=1}^{(n-2)/2}\left(x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right)$$

我们将左侧求和式中有哑指标的幂次聚集在一起, 也就是

$$(-1)^r x^r(x+1)^{n-1-2r}=(x+1)^{n-1}\left[\frac{-x}{(x+1)^2}\right]^r$$

于是有

$$(x+1)^{n-1}\sum_{r=0}^{(n-2)/2}C_{n-1-r}^r\left[\frac{-x}{(x+1)^2}\right]^r=(x+1)\prod_{r=1}^{(n-2)/2}\left(x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right)$$

与前面求出的 F_n 表达式对比, 我们取

$$\frac{-x}{(x+1)^2}=1$$

从这个式子中我们得到两个代换

$$\begin{aligned} &x^2+1=-3x\\ &(x+1)^{n-2}=(-x)^{(n-2)/2}\end{aligned}$$

因此可得

$$(-x)^{(n-2)/2}\sum_{r=0}^{(n-2)/2}C_{n-1-r}^r=(-x)^{(n-2)/2}\prod_{r=1}^{(n-2)/2}\left(3+2\cos\frac{2r\pi}{n}\right)$$

也就是

$$F_n = \prod_{r=1}^{(n-2)/2} \left(3 + 2\cos\frac{2r\pi}{n}\right)$$

注意, 上面我们仅仅研究了 n 为偶数的情况. 对于 n 为级数, 还请读者自行验证. 最终结果为:

定理 1. 对于正整数 n, 有

$$F_n = \sum_{r=1}^{[(n-1)/2]} \left(3 + 2\cos\frac{2r\pi}{n}\right)$$

这里需要指出, 当 $n = 1$ 时, 右侧为一个空的乘积, 约定其为 1.

实际上, 这也说明了, 在函数 ,, 中, 我们只需要 x 和 n 这两个变量即可刻画出斐波那契数. 此外, 我们不妨计算一下具体的 x, 解出为

$$x_1 = -\beta - 1$$

$$x_2 = -\alpha - 1$$

实际上, 从上面的连乘积表达式中, 也能够得到一些有关斐波那契数的整除性质, 然而由于我没有学习过数论, 就不叙述了. 有了斐波那契数, 自然要考虑卢卡斯数. 定义数列

$$a_n = \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^r C_{n-1-r}^r 5^{[(n-1)/2]-r}$$

其中要求 $n \geq 1$. 我们给出如下一系列命题:

定理 2. a_n 的三角函数表示为

$$a_n = \prod_{r=1}^{[(n-1)/2]} \left(3 - 2\cos\frac{2r\pi}{n}\right)$$

定理 3. 当 n 为偶数时, 有

$$a_n = F_n$$

当 n 为奇数时, 有

$$a_n = L_n$$

定理 4. 如果 $m \mid n$, 那么有 $a_m \mid a_n$.

有了前面证明的启发, 我们已经有了一个初步的恒等式为

$$(1+x)^{n-1} \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} C_{n-1-r}^r \left[\frac{-x}{(x+1)^2}\right]^r = \prod_{r=1}^{n-1} \left(x - \exp\left[\frac{2ir\pi}{n}\right]\right)$$

当 n 为偶数时, 与定理 1 的情形相同, 有

$$(x+1)^{n-2} \sum_{r=0}^{(n-2)/2} C_{n-1-r}^r \left[\frac{-x}{(x+1)^2}\right]^r = \prod_{r=1}^{(n-2)/2} \left(x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right)$$

这里你需要仔细对比 a_n 中 5 的幂次, 令

$$\frac{-x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{5}$$

那么得到

$$(x+1)^2 = 5x$$
$$x^2+1 = 3x$$

于是我们求得

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{r=0}^{(n-2)/2} (-1)^r C_{n-1-r}^r 5^{(n-2)/2-r} \\ &= 5^{(n-2)/2} \sum_{r=0}^{(n-2)/2} C_{n-1-r}^r \left(-\frac{1}{5}\right)^r \\ &= \frac{(5x)^{(n-2)/2}}{(x+1)^{n-2}} \prod_{r=1}^{(n-2)/2} \left(3 - 2\cos\frac{2r\pi}{n}\right) \\ &= \prod_{r=1}^{(n-2)/2} \left(3 - 2\cos\frac{2r\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

当 n 为奇数时, 有

$$\prod_{r=1}^{n-1} \left(x - \exp\left[\frac{2ir\pi}{n}\right]\right) = \prod_{r=1}^{(n-1)/2} \left(x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right)$$

你一定要自己推导下, 所以奇数情形就留作联系了.

现在证明定理 3. 我们直接求出 a_n 具体的, 简单的形式, 也就是使用 α 和 β 进行表示. 这个就非常简单了, 前面已经知道了如下的求和结果

$$\mathscr{S}(x,1,n-1) = \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^r C_{n-1-r}^r x^r (x+1)^{n-1-2r} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

在这里, 我们令

$$(x+1)^2 = 5x$$

那么当 n 为奇数时, 有

$$x^{(n-1)/2} \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^r C_{n-1-r}^r 5^{[(n-1)/2]-r} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

也就是

$$a_n = \frac{x^n-1}{x-1} \frac{1}{x^{(n-1)/2}}$$

到这里你有没有发现一个问题. 根据我们的方程,x 命名有两个取值, 但是最后 a_n 是确定, 那么具体要选择哪一个根呢? 我们先计算下 $n=1$ 与 $n=3$ 的情况:

$$a_1 = \frac{x-1}{x-1}\frac{1}{x^0} = 1$$
$$a_3 = \frac{x^3-1}{x-1}\frac{1}{x} = \frac{x^2+1+x}{x} = 4$$

在具体计算过程中, 我们并未带入具体的 x 的数值, 而是巧妙的利用 x 所满足的方程进行计

算. 再次计算下

$$
\begin{aligned}
a_5 &= \frac{x^5-1}{x-1}\frac{1}{x^2} \\
&= \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2} \\
&= 1+\frac{x(x^2+1)}{x^2}+\frac{x^4+1}{x^2} \\
&= 1+3+7 \\
&= 11
\end{aligned}
$$

下面尝试给出 a_n 的递推关系. 令 $n=2k+1$, 要求 $k\geq 0$, 那么有

$$
\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{x^{2k+1}-1}{x-1}\frac{1}{x^k} \\
&= x^k+x^{-k}+x^{k-1}+x^{-k+1}+\cdots+x+\frac{1}{x}+1
\end{aligned}
$$

此外, 还需要利用如下的恒等式

$$
\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^k+x^{-k})-(x^{k-1}+x^{-k+1})=x^{k+1}+x^{-k-1}
$$

带入此处所选取的 x 的数值, 可得

$$
3(x^k+x^{-k})-(x^{k-1}+x^{-k+1})=x^{k+1}+x^{-k-1}
$$

实际上, 这是斐波那契数列, 或者卢卡斯数列的递推关系, 即

$$
\begin{aligned}
L_{2k+1} &= L_{2k}+L_{2k-1} \\
&= 2L_{2k-1}+L_{2k-2} \\
&= 3L_{2k-1}-L_{2k-3}
\end{aligned}
$$

因此我们考虑作差

$$
3a_{2k+3}-a_{2k+1}=3(x^{k+1}+x^{-k-1})+2(x^k+x^{-k}+\cdots+1)
$$

继续作差, 有

$$
a_{2k+5}-3a_{2k+3}+a_{2k+1}=x^{k+2}+x^{-k-2}-2(x^{k+1}+x^{-k-1})-(x^k+x^{-k}+\cdots+1)
$$

这里需要注意, 当 $k=0$ 时, 最右侧括号内仅为 1. 直接证明上面的式子为 0 较困难, 不妨使用数学归纳法.

1. 当 $k=0$ 时, 上式等于 0 成立
2. 假设当 $k=m$ 时, 有

$$
x^{m+2}+x^{-m-2}-2(x^{m+1}+x^{-m-1})-(x^m+x^{-m}+\cdots+1)=0
$$

那么当 $k=m+1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&x^{m+3}+x^{-m-3}-2(x^{m+2}+x^{-m-2})-(x^{m+1}+x^{-m+1}+\cdots+1) \\
=&x^{m+3}+x^{-m-3}-2(x^{m+2}+x^{-m-2})-(x^{m+1}+x^{-m+1}) \\
&-(x^{m+2}+x^{-m-2})+2(x^{m+1}+x^{-m-1}) \\
=&x^{m+3}+x^{-m-3}-3(x^{m+2}+x^{-m-2})+(x^{m+1}+x^{-m+1})
\end{aligned}
$$

利用前面的结论, 即

$$3(x^{m+2}+x^{-m-2})=x^{m+1}+x^{-m-1}+x^{m+3}+x^{-m-3}$$

回代可知, 确实为 0. 那么结论成立. 以及 a_n 满足奇数卢卡斯数列的递推关系. 并且前面已经验证过, 初值也合适, 所以当 n 为奇数时, 有

$$a_n=L_n$$

至于 n 为偶数的情形, 留作练习. 实际上, 除了我自己不想费劲去证明外, 如果吧各个方面都写全, 那么篇幅将大大添加. 然而这些证明也不是必须的.

对于定理 4, 此处仅叙述下思路. 即需要证明 a_n 的连乘积形式中包含了所有 a_m 的连乘积形式.

从上面的定理中, 我们能够得到关于奇数指标卢卡斯数的结论

定理 5.

$$L_{2n+1}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^rC_{2n-r}^{r}5^{n-r}=\prod_{r=1}^{n}\left(3-2\cos\frac{2r\pi}{2n+1}\right)$$

下面需要求出 L_{2n} 的相关表达式, 也就是如下定理

定理 6.

$$\begin{aligned}L_{2n}&=-i(\mathscr{X}-\mathscr{X}^{-1})\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^rC_{n-1-r}^{r}(\mathscr{X}+\mathscr{X}^{-1})^{n-1-2r}\\&=\prod_{r=0}^{n-1}\left[3-2\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{X}=\alpha^2\exp\left[\frac{i\pi}{2n}\right]$$

我们先证明第一个等号. 回忆下已有的结论

$$\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^rC_{n-1-r}^{r}(xy)^r(x+y)^{n-1-2r}=\frac{x^n-y^n}{x-y}$$

令

$$x=\alpha^2\exp\left[\frac{i\pi}{2n}\right]=\mathscr{X}$$
$$y=\frac{1}{x}=\frac{1}{\mathscr{X}}$$

那么

$$\begin{aligned}x^n-y^n&=\alpha^{2n}\exp\left[\frac{i\pi}{2}\right]-\frac{1}{\alpha^{2n}}\exp\left[-\frac{i\pi}{2}\right]\\&=i(\alpha^{2n}+\beta^{2n})\\&=iL_{2n}\end{aligned}$$

于是有

$$L_{2n}=-i(\mathscr{X}-\mathscr{X}^{-1})\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^rC_{n-1-r}^{r}(\mathscr{X}+\mathscr{X}^{-1})^{n-1-2r}$$

为了证明第二个等式, 我们需要一些有关多项式分解的引理:

引理 1.

$$x^{2n}+1=\prod_{r=0}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}+1\right]$$

于此不证明该引理. 于是有

$$\begin{aligned}L_{2n}&=\alpha^{2n}+\beta^{2n}\\&=\frac{\alpha^{4n}+1}{\alpha^{2n}}\\&=\frac{1}{\alpha^{2n}}\prod_{r=0}^{n-1}\left[\alpha^4-2\alpha^2\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}+1\right]\\&=\frac{1}{\alpha^{2n}}\prod_{r=0}^{n-1}\left[3\alpha^2-2\alpha^2\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]\\&=\prod_{r=0}^{n-1}\left[3-2\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]\end{aligned}$$

上面我们使用了 $\alpha^4+1=3\alpha^2$. 实际上, 我们相当于直接对 $\alpha^{2n}+\beta^{2n}$ 进行因式分解, 其中因为 $\alpha\beta=-1$ 这层关系, 所以分解起来相当容易. 同样地, 也能够对斐波那契数和 L_{2n+1} 进行类似的分解. 此外, 你也可以取 x 和 y 为其它值, 从而得到一些其它的恒等式. 不过由于与斐波那契数无关, 因此不再陈述.

在上面, 我们得到了斐波那契数和卢卡斯数表示为连乘积的形式, 亦即对于正整数 n, 有

$$\begin{aligned}F_n&=\sum_{r=1}^{[(n-1)/2]}\left(3+2\cos\frac{2r\pi}{n}\right)\\L_{2n+1}&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^rC_{2n-r}^{r}5^{n-r}=\prod_{r=1}^{n}\left(3-2\cos\frac{2r\pi}{2n+1}\right)\\L_{2n}&=\prod_{r=0}^{n-1}\left[3-2\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]\end{aligned}$$

此外, 亦有文献指出, 上面的公式可由图论中的生成树理论来证明. 不过我没学过凸轮, 就不妄言了.

现在, 我不禁要问, 为什么上面的公式会成立. 左侧的式子满足二阶线性递推关系, 而右侧的式子却不满足, 或者说难以看出其满足. 此外, 从代数的角度来看, 斐波那契数联系着 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, 而三角函数则联系着 $\mathbb{Q}\left[\frac{2i\pi}{n}\right]$. 在揭秘之前, 我要向你介绍一些切比雪夫多项式的知识.

第一类切比雪夫多项式为

$$\begin{aligned}&T_0(x)=1\\&T_1(x)=x\\&T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\end{aligned}$$

它与三角函数的关系为

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

第二类切比雪夫多项式为

$$U_0(x)=1$$
$$U_1(x)=2x$$
$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$$

并且满足

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

这两个性质我们不给出证明. 不过从切比雪夫多项式的递推关系也能看出, 其必然与斐波那契数相关. 现在给出一个公式

$$U_n(x)=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

此公式证明不难, 因为 $\sin(n+1)\theta/\sin\theta$ 一定可以写为 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 具体可见 Advanced Trigonometry. 我们在此处只对根进行验证. 当 $\theta=\dfrac{k\pi}{n+1}$ 时, 一定有 $\sin(n+1)\theta=\sin k\pi=0$. 现在考虑

$$\begin{aligned}i^{n-1}U_{n-1}\left(-\frac{i}{2}\right)&=i^{n-1}2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{i}{2}-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\&=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

接下来开始对 n 的奇偶性讨论.

1. 当 n 为奇数时, 将之两两配对, 亦即

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2i\cos\frac{k\pi}{n}\right)&=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(1-2i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\left(1-2i\cos\frac{n-k}{n}\pi\right)\\&=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(1-2i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\left(1+2i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\&=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(1+4\cos^2\frac{k\pi}{n}\right)\\&=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(3+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

这正是我们前面证明的. 至于 n 为偶数的情形, 留作练习吧. 因此, 有如下定理.

定理 1. 对于正整数 n, 有

$$F_n=i^{n-1}U_{n-1}$$

没错, 斐波那契数和三角函数正是通过切比雪夫多项式联系起来的. 此外, 利用切比雪夫多项式的思想, 定义一些其它的多项式函数, 可以得到许多结论. 不过我们就不去具体叙述这些繁杂的理论, 而是仅仅罗列出结果.

定理 2. 对于 $n\geq 3$, 有

$$\prod_{l=1}^{n}\left(1+4\sin^2\frac{2l\pi}{n}\right)=\left(1+F_l-2F_{l+1}+(-1)^l\right)^2$$

定理 3. 对于 $n \geq 3$, 有

$$\prod_{l=1}^{n-1}\left(1+2i\sin\frac{2\pi l}{n}\right)=\alpha^n+(-\alpha)^{-n}-1-(-1)^n=L_n-1-(-1)^n$$

定理 4. 当 $n \geq 5$ 时, 有

$$\prod_{k=1}^{[(n-4)/4]}\left(5+4\sin^2\frac{2k\pi}{n}\right)=\begin{cases}F_n & n=6,8,10,\ldots\\ \sqrt{F_n^2-4} & n=5,7,9,\ldots\end{cases}$$

在下一章, 我们将介绍斐波那契多项式, 一次获得更多的恒等式.

第十二章　斐波那契函数

在定义斐波那契函数之前, 不妨让我们回忆下, 有哪些其它的数列定义过相应的函数. 没错, 就是伯努力数. 从数列的角度来看, 可以定义伯努力数为满足

$$B_0 = 1$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0$$

的数列, 相应的伯努力多项式定义为

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}$$

从生成函数的角度来看, 伯努力数为

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$$

伯努力多项式为

$$\frac{xe^{xy}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y) x^n}{n!}$$

在正式定义斐波那契多项式之前, 不妨让我们大致猜测一下它所有的性质. 首先, 观察上面的伯努力多项式可知, 有

$$B_n(0) = B_n$$

亦即伯努力多项式在 0 处的值为伯努力数. 这当然不意味着我们一定要求斐波那契多项式也完全满足, 但是一定要有某个特殊的数值将两者联系起来. 同时回忆上一届, 我们得到了一个联系第二类且剥削夫多项式与斐波那契数的公式

$$F_n = i^{n-1} U_{n-1}\left(-\frac{i}{2}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

如果我们选择当 $x = 1$ 时, 斐波那契多项式为斐波那契数, 亦即

$$F_n(1) = F_n$$

那么期望有

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x - 2i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

或者换句话说, 我们能够确定斐波那契多项式的零点. 此外, 前面我们还证明过一个组合恒等式

$$F_{n+1}=\sum_{i=0}^{[n/2]}C_{n-i}^{i}$$

那么期望有

$$F_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{[n/2]}C_{n-i}^{i}x^{n-2i}$$

现在让我们以递推的形式给出斐波那契多项式的定义, 对于 $n\geq 0$, 有

$$\begin{aligned}&F_0(x)=0\\&F_1(x)=1\\&F_{n+2}(x)=xF_{n+1}(x)+F_n(x)\end{aligned}$$

此外, 还有卢卡斯多项式

$$\begin{aligned}&L_0(x)=2\\&L_1(x)=x\\&L_{n+2}(x)=xL_{n+1}(x)+L_n(x)\end{aligned}$$

我们略去具体的求解过程, 直接给出如下的类 Binet 公式

$$F_n(x)=\frac{\mathcal{A}^n-\mathcal{B}^n}{\mathcal{A}-\mathcal{B}}$$
$$L_n(x)=\mathcal{A}^n+\mathcal{B}^n$$

其中

$$\mathcal{A}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$
$$\mathcal{B}=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$$

它们是方程

$$y^2=xy+1$$

的两个根, 根据韦达公式, 满足

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}=1$$
$$\mathcal{A}\mathcal{B}=-1$$

可以看出, 当 $x=1$ 时, 斐波那契多项式和斐波那契数相同. 在进行更深入的探究之前, 我们求取一下相关的生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)y^n=\frac{y}{1-xy-y^2}$$

其余的生成函数也可求出, 不过后文用不到, 就不求了. 我们前面指出, 当将斐波那契多项式写为连乘积形式时, 它的根也就确定了. 实际上, 这就是将一些函数写为某种连乘积形式的方法,

亦即先求出每一个根, 再对比常数项系数, 在 Advanced Trigonometry 中我们得到了许多连乘积结果. 然而, 在这里我们不去求 $F_n(x)$ 的根, 因为会涉及到复变函数.

现在我们给出一些有关切比雪夫多项式, 斐波那契多项式和卢卡斯多项式符合函数的结果. 为了保持行文流畅, 我们直接给出需要繁杂证明的结果. 首先是两类切比雪夫多项式的具体的多项式形式

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \\ U_n(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

诶, 你有没有发现, 这个和我们求出的 Binet 公式很像. 譬如我们带入 $x = \dfrac{i}{2}$, 那么有

$$\begin{aligned} U_n\left(\frac{i}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{-5}}\left[\left(\frac{i+\sqrt{-5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{i-\sqrt{-5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\ &= i^n F_{n+1} \end{aligned}$$

在上面, 我们选择了 $i = \sqrt{-1}$ 这一分支. 你不必理解这句话, 只需要知道, 具体计算了

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-1}\sqrt{5} = i\sqrt{5}$$

而不是 $i = -\sqrt{-1}$. 你可以将其平方一下看看. 此外, 还有一些别的结果, 仅陈列如下:

$$\begin{aligned} T_n\left(\frac{i}{2}\right) &= \frac{i^n}{2}L_n \\ U_n\left(\frac{i}{2}\right) &= i^n F_{n+1} \\ T_n\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{L_{2n}}{2} \\ U_n\left(\frac{3}{2}\right) &= F_{2n+2} \\ T_n\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{L_{4n}}{2} \\ U_n\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{F_{4n+4}}{3} \\ T_n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= \begin{cases} \dfrac{L_n}{2}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \dfrac{\sqrt{5}F_n}{2}, & \text{if } n \text{ is odd;} \end{cases} \\ U_n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= \begin{cases} L_{n+1}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \sqrt{5}F_{n+1}, & \text{if } n \text{ is odd;} \end{cases} \\ T_n\left(\sqrt{5}\right) &= \begin{cases} \dfrac{L_{3n}}{2}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \dfrac{\sqrt{5}F_{3n}}{2}, & \text{if } n \text{ is odd;} \end{cases} \\ U_n\left(\sqrt{5}\right) &= \begin{cases} \dfrac{L_{3n+3}}{4}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \dfrac{\sqrt{5}F_{3n+3}}{4}, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \end{aligned}$$

那么根据上一章我们得到的 $U_n(x)$ 的连乘积形式, 又可以得到一些其它的连乘积公式. 对于

$T_n(x)$, 也有类似的连乘积形式如下

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left[x - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]$$

因此我们可以得到更多的有关连乘积的恒等式. 此外, 根据切比雪夫多项式的奇偶性, 我们将得到上述所有自变量负值时的结果. 不过我们还没有确定切比雪夫多项式的奇偶性, 不过不难

$$T_n(-\cos\theta) = \cos(-n\theta) = T_n(\cos\theta)$$
$$U_n(-\cos\theta) = \frac{\sin[-(n+1)\theta]}{\sin(-\theta)} = (-1)^n U_n(\cos\theta)$$

下面我们需要证明第一类切比雪夫多项式的另一项性质, 考虑

$$T_m[T_n(\cos\theta)] = T_n(\cos m\theta) = \cos mn\theta$$

那么有

$$T_m[T_n(x)] = T_{mn}(x)$$

如此, 就可以对上面和第一类切比雪夫多项式相关的公式再嵌套一层, 譬如可以得到

$$T_n\left(\frac{L_{2m}}{2}\right) = \frac{L_{mn}}{2}$$

当然了, 第二类切比雪夫多项式并没有类似的性质. 根据查询到的文献结果, 有

$$U_{n-1}\left(\frac{L_{2m}}{2}\right) = \frac{L_{mn}}{2} \frac{F_{2mn}}{F_{2m}}$$

然而并未给出证明, 当然, 我也不打算去证明. 此外, 还有许许多多相关的, 并且美妙的结论, 但是我只能将之舍弃. 因为我的精力是有限的, 并且我也不想在完全穷尽斐波那契数的方方面面, 当然, 这一点我也做不到.

第十三章　斐波那契数的积分表示

千呼万唤始出来. 前面算了一大堆乱七八糟的董事, 终于可以开始计算积分了. 当然, 我也不能确保这一章算的东西就是优美的.

定理 1. 对于 $n \geq 1$, 有

$$F_n = \frac{n}{2^n} \int_{-1}^{1} \left(1 + \sqrt{5}x\right)^{n-1} \mathrm{d}x$$

这个式子由 Seán M. Stewart 于 2023 年给出. 他指出, 这个形式及虽然简单, 但是他以前从未见过类似的公式, 这确实是个非常简明的公式, 直接计算将得到大家喜闻乐见的 Binet 公式. 为了证明此恒等式, 我们直接给出如下公式

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} 5^k \\ &= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_{n-1}^{2k} 5^k \frac{2}{2k+1} \end{aligned}$$

注意, 此公式与第十一章引入的多项式不同. 在那里, 组合数的上限是变化的. 此公式为卡塔兰在 1846 年发现的. 此外, 还需要注意到一个简单的积分

$$\int_{-1}^{1} x^m \ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \text{ odd} \\ \dfrac{2}{m+1} & m \text{ even} \end{cases}$$

因此有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^{2k} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2k+1} \\ \int_{-1}^{1} x^{2k+1} \ \mathrm{d}x &= 0 \end{aligned}$$

回代可得

$$F_n = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_{n-1}^{2k} 5^k \int_{-1}^{1} x^{2k} \ \mathrm{d}x$$

在这个式子中, 我们取 $l = 2k$, 那么有

$$F_n = \frac{n}{2^n} \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ even}}}^{2[(n-1)/2]} C_{n-1}^{l} 5^{l/2} \int_{-1}^{1} x^l \ \mathrm{d}x$$

根据前面计算的积分, 当 l 为奇数时, 积分为 0, 顾客忽略求和符号下 l even 的限制. 此外, 当 n 为奇数时, 显然有

$$2\left[\frac{n-1}{2}\right] = n - 1$$

而当 n 为偶数时, 取 $n=2q$, 那么有

$$
\begin{aligned}
2\left[\frac{n-1}{2}\right] &= 2\left[\frac{2q-1}{2}\right] \\
&= 2\left[q-\frac{1}{2}\right] \\
&= 2(q-1) \\
&= n-2
\end{aligned}
$$

然而由于 $n-1$ 为奇数, 此时积分为 0, 故依旧可认为有

$$
2\left[\frac{n-1}{2}\right] = n-1
$$

于是我们得到

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{n}{2^n}\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l 5^{l/2}\int_{-1}^{1} x^l \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{2^n}\int_{-1}^{1}\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l (\sqrt{5}x)^l \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{2^n}\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{5}x)^{n-1} \ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

有意思的是, 如果你直接按照幂函数来计算此积分, 那么得到的结果就是 Binet 公式. 而通过换元, 可以得到如下的结果

$$
F_n = \frac{n}{\sqrt{5}}\int_{\beta}^{\alpha} t^{n-1} \ \mathrm{d}t
$$

此外, 我们还能够得到偶次指标斐波那契数的积分表示. 注意到

$$
\begin{aligned}
\alpha^{2n} &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
\beta^{2n} &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

于是有

$$
F_{2n} = \frac{n}{2^n}\int_{-1}^{1}\left(3+\sqrt{5}x\right)^n \ \mathrm{d}x
$$

此公式最早可能是 Karl Dilcher 于 1998 年使用超几何函数导出. 不过由于我仅仅在学习量子力学是接触过一些河流超几何函数, 知道的并不多, 因此于此处不再叙述. 现在我们利用积分形式来求解生成函数, 考虑级数

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{5}}\int_{\beta}^{\alpha} t^{n-1} \ \mathrm{d}t \ x^n \\
&= \frac{x}{\sqrt{5}}\int_{\beta}^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} n(xt)^{n-1} \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{\sqrt{5}}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{1}{(1-xt)^2} \ \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

具体积分即可. 此外, 上面我们用到了当 $|z|<1$ 时

$$
\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}
$$

这里不证明此公式. 你可能会问对于级数指标 $2n+1$, 积分是什么. 它的形式较为复杂, 可以利用 $F_{2n+1}=F_{2n+2}$ 得到, 结果为

$$F_{2n+1}=\frac{1}{2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}\left[n+3+\sqrt{5}(n+1)x\right]\left(3+\sqrt{5}x\right)^{n-1}\ \mathrm{d}x$$

此外, 对于卢卡斯数列, 也有类似的积分.

定理 2. 当 $n\geq 1$ 时, 有

$$L_n=\frac{n}{2^n}\int_{-1}^{1}\left(5+\sqrt{5}x-\frac{4}{n}\right)\left(1+\sqrt{5}x\right)^{n-2}\ \mathrm{d}x$$

此外, 可以对指标进行推广.

定理 3. 当 $n\geq 0$ 且 $k>0$ 时, 有

$$F_{nk}=\frac{nF_k}{2^n}\int_{-1}^{1}\left(L_k+\sqrt{5}F_kx\right)^{n-1}\ \mathrm{d}x$$

此公式当然不是粗暴地在前面求出的公式中取 $n\to kn$. 证明也不难, 直接积分可得

$$\frac{nF_k}{2^n}\int_{-1}^{1}\left(L_k+\sqrt{5}F_kx\right)^{n-1}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{L_k+\sqrt{5}F_k}{2}\right)^n-\left(\frac{L_k-\sqrt{5}F_k}{2}\right)^n\right]$$

根据我们第二章导出的结果, 可得

$$\frac{nF_k}{2^n}\int_{-1}^{1}\left(L_k+\sqrt{5}F_kx\right)^{n-1}\ \mathrm{d}x=\frac{\alpha^{nk}-\beta^{nk}}{\sqrt{5}}=F_{nk}$$

当然, 利用换元可得

$$F_{nk}=\frac{n}{\sqrt{5}}\int_{\beta^k}^{\alpha^k}t^{n-1}\ \mathrm{d}t$$

类似地, 对于卢卡斯数列, 也有这样推广的积分表示

定理 4.

$$L_{nk}=\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\left[L_k+\sqrt{5}(n+1)F_kx\right]\left(L_k+\sqrt{5}F_kx\right)^{n-1}\ \mathrm{d}x$$

直接积分即可. 此外, 还可以进行推广

定理 5. 如果 $n\geq 0, r\geq 0, k>0$, 那么有

$$F_{kn+r}=\frac{1}{2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}\left[nF_kL_r+F_rL_k+\sqrt{5}(n+1)F_kF_rx\right]\left(L_k+\sqrt{5}F_kx\right)^{n-1}\ \mathrm{d}x$$

利用公式

$$2F_{nk+r}=F_{nk}L_r+L_{nk}F_r$$

将 F_{nk} 和 L_{nk} 的积分表示带入即可.

定理 6. 如果 $n\geq 0, r\geq 0, k>0$, 那么有

$$L_{kn+r}=\frac{1}{2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}\left[5nF_kF_r+L_kL_r+\sqrt{5}(n+1)F_rL_kx\right]\left(L_k+\sqrt{5}F_kx\right)^{n-1}\ \mathrm{d}x$$

利用

$$2L_{nk+r}=L_{nk}L_r+F_{nk}F_r$$

即可. 此外, 根据其它文献, 有更多的积分形式

定理 7. 对于 $n \geq 0$, 有

$$F_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos nx - 2\sin nx \sin x}{5\sin^2 x + \cos^2 x}\ \mathrm{d}x$$

也就是说

$$\beta^n = \frac{2\sqrt{5}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos nx - 2\sin nx \sin x}{5\sin^2 x + \cos^2 x}\ \mathrm{d}x$$

该定理可通过实方法证明, 亦可通过复变函数的方法证明. 然而由于较为复杂, 故故略去.

附录 A 常用公式

$F_n^2 - F_{n+m}F_{n-m} = (-1)^{n-m}F_m^2$	卡塔兰恒等式
$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$	卡西尼恒等式
$F_{n-1}F_m - F_nF_{m+1} = (-1)^nF_{n+m}$	d'Ocagne 恒等式
$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^nF_iF_j$	Vajda 公式
$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$	Honsberger 恒等式
$F_aF_b - F_cF_d = (-1)^r(F_{a-r}F_{b-r} - F_{c-r}F_{d-r})$	index-reduction formula
$F_aL_b - F_cL_d = (-1)^r(F_{a-r}L_{b-r} - F_{c-r}L_{d-r})$	index-reduction formula

α, β, F_n, L_n 的关系

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}$$
$$\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}$$
$$\alpha^n = F_n\alpha + F_{n-1}$$
$$\beta^n = F_n\beta + F_{n-1}$$

对于广义斐波那契数 H_n, 满足递推关系

$$H_{m+n} = F_{m-1}H_n + F_mH_{n+1}$$

含有卢卡斯数的公式

$$F_nL_m - L_nF_m = (-1)^m2F_{n-m}$$
$$L_{m+n} + (-1)^mL_{m-n} = L_mL_n$$
$$L_{m+n} + (-1)^mL_{m-n} = 5F_mF_n$$
$$2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n$$

附录 B　严格求出通项

如果数列 $\{u_n\}$ 满足递推关系

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{1}$$

那么我们称 $\{u_n\}$ 为方程 1 的解, 并将之记为 U.

引理 1. 如果 V 是 1 的解, 且 c 是任意的数, 那么 cV 也是 1 的解.

引理 2. 如果 U 和 V 是 1 的解, 那么 $U+V$ 也是.

现在假设 U 和 V 是 1 的解, 同时它们不成比例, 也就是说, 并不存在一个常数 c 使得对于所有的 n, 都有

$$\frac{u_n}{v_n} = c$$

成立. 从这里可以看出, 两个解都不是零解. 或者换句话, 对于任意的常数 c, 总存在 n 使得

$$\frac{u_n}{v_n} \neq 0$$

现在我们将证明,

定理 1. 1 的任何一个解, 都能够写为

$$aU + bV$$

的形式. 这种形式也被称为一般解. 在证明定理 1 之前, 请容我介绍一下合分比性质

合比性质:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a \pm kb}{b} = \frac{c \pm kd}{d}$$

等比性质:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots \frac{a_n}{b_n} \Longrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

合分比性质:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

这三个性质, 我第一次接触应该是在一本名为高中数学精编的辅导书上, 一道习题中用到了, 然后专程查询了一下.

为了证明定理, 我们还需要一个引理:

引理 3. 如果 U 和 V 是不成比例的, 那么一定有

$$\frac{u_1}{v_1} \neq \frac{u_2}{v_2}$$

从反证法入手. 如果

$$\frac{u_1}{v_1} =\neq \frac{u_2}{v_2}$$

俺么根据等比性质, 一定有

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_1 + u_2}{v_1 + v_2} =\neq \frac{u_3}{v_3}$$

反反复复, 那么可以得到

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \cdots = \frac{u_n}{v_n} = \cdots$$

这说明 U 和 V 成比例. 矛盾了.

现在正式开始证明定理: 根据递推关系我们知道, 对于一个解 W, 如果知道了前两项 W_1, W_2, 那么通过递推关系, 我们能够知道整个 W. 现在求解方程

$$au_1 + bv_1 = w_1$$

$$au_2 + bv_2 = w_2$$

这个方程一定是有非零解的, 具体解为

$$a = \frac{v_1 w_1 - v_1 w_2}{u_1 v_2 - u_1 v_1}$$
$$b = \frac{u_1 w_2 - u_2 w_1}{u_1 v_2 - u_2 v_2}$$

因此, 对于任意的解 W, 总可以写为

$$W = aU + bV$$

的形式. 所以, 为了确定斐波那契数列的通项, 我们只需找出任意两个不成比例的解 U, V, 然后通过初值确定具体的 a 和 b 即可. 接下来具体就求出表达式比较神经兮兮, 假定几何级数

$$1, q, q^2, \ldots$$

满足条件, 那么有

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n \Longrightarrow 1 + q = q^2$$

具体可解出

$$q_1 = \alpha$$

$$q_2 = \beta$$

回代可解出

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$
$$b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

于是斐波那契数列的通项为

$$F_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

即为所求.

现在我们利用上面的定理, 找出斐波那契数和卢卡斯数之间的关系. 取数列

$$x_n = L_{n+1}$$
$$y_n = L_{n-1}$$
$$z_n = F_n$$

那么有

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

那么解方程

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \implies a = b = \frac{1}{5}$$

于是得到

$$F_n = \frac{L_{n+1} + L_{n-1}}{5}$$

附录 C 快速计算大 F_n 和 L_n 的方法

提到快速计算的方法, 笔者以前只接触过伯努力数的相关结果. 按照书上的思路, 我们先证明一个有关斐波那契数取整的结果.

定理 1: 对于 $n \geq 1$, 有

$$F_n = \left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] \tag{3.1}$$

先将斐波那契数的 Binet 公式进行处理

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

根据取整函数的性质, 我们只需说明

$$F_n \leq \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \leq F_n + 1 \tag{3.3}$$

第一个不等式要求

$$\frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \geq 0 \tag{3.4}$$

由于 $\beta < 0$, 故当 n 为偶数时, 上式成立. 而当 n 为奇数时, 我们知道

$$|\beta| < \frac{3}{4} \tag{3.5}$$

因此对于 $n \geq 3$, 容易计算得出 3.4 式成立. 而对于 $n = 1$,

$$\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\sqrt{5}} > \frac{1}{2} - \frac{3}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - 3}{4\sqrt{5}} > 0 \tag{3.6}$$

也成立, 因此第一个不等号成立. 第二个不等号则要求

$$\frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \leq 1 \tag{3.7}$$

当 n 为奇数时显然成立, 那么当 n 为偶数时, 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \leq 1 \\ \Longleftrightarrow &\beta^n \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \Longleftrightarrow &\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

这也是成立的. 因此我们就证明了 3.3 式, 从而 3.1 式成立. 在证明的过程中, 我们发现每一步都是不取等的, 因此可将 3.3 式写为

$$F_n < \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1 \tag{3.9}$$

接下来我们将继续给出一个定理

定理 2: 斐波那契数 F_n 是最接近

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \tag{3.10}$$

的整数.

请注意, 这个定理与上面的定理并不同. 譬如说最接近 37.8 的整数为 38, 而不是 $[37.8] = 37$. 因此我们需要说明

$$\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - F_n\right| < \frac{1}{2} \tag{3.11}$$

将绝对值展开为

$$-\frac{1}{2} < \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - F_n < \frac{1}{2} \tag{3.12}$$

经过变形, 恰好为 3.9 式.

对于卢卡斯数列, 有类似的结论

$$L_n = \left[\alpha^n + \frac{1}{2}\right] \qquad n \geq 2 \tag{3.13}$$

以及最接近 α^n 的整数为 L_n, 具体写为

$$|L_n - \alpha^n| < \frac{1}{2} \tag{3.14}$$

显然, 上面有关取整的结论对负整数指标也成立, 也就是

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] \tag{3.15}$$

那么, 可否将 $(-1)^{n+1}$ 移至取整符号内? 直觉告诉我们不行. 常使用 matlab 试验下前 10 个斐波那契数, 结果如下:

```
a = (1 + sqrt(5))/2;
m = 10;
n = 1:m;
b = a.^n;
c = b/sqrt(5);
x = -ones(1,m);
y = x.^(n + 1);
d = c + 0.5;
z = y.*d;
floor(d)
```

```
ans = 1×10
     1     1     2     3     5     8    13    21    34    55
```

```
floor(z)
```

```
ans = 1×10
     1    -2     2    -4     5    -9    13   -22    34   -56
```

从图中可以看出, 当 n 为偶数时, 出现了一些问题, 并且需要加上 1.

那么, 我们考虑证明

$$F_{-2n} = \left[-\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right] + 1 \tag{3.16}$$

或者证否它. 使用 matlab 验证前 40 个斐波那契数, 有

```
a = (1 + sqrt(5))/2;
m = 40;
n = 1:m;
b = a.^n;
c = b/sqrt(5);
x = -ones(1,m);
y = x.^(n + 1);
d = c + 0.5;
z = y.*d;
f = floor(d);
g = f(2:2:end)

g = 1×20
     1     3     8    21    55   144   377 ...

w = floor(z);
v = w(2:2:end)

v = 1×20
    -2    -4    -9   -22   -56  -145  -378 ...

u = -(v + 1);
H = (g == u)

H = 1×20 logical 数组
     1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20
  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1

sum(H)

ans = 20
```

可以看到 sum(H) = 20, 符合我们的期望. 再多的话, 可能由于精度而出问题.

现在来证明式 3.16, 也就是需要证明

$$F_{-2n} - 1 < -\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < F_{-2n} \tag{3.17}$$

也就是

$$F_{2n} < \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_{2n} + 1 \tag{3.18}$$

这正是 3.9 式. 因此 3.16 式成立. 说了那么多, 让我们练一下, 考虑 F_{16}, 根据定理 2, 我们先计算出 $\frac{\alpha^{16}}{\sqrt{5}}$, 容易计算出约为 987.0002, 因此

$$F_{16} = 987 \tag{3.19}$$

下面将给出另外一个有关取整的定理.

定理 3.

$$F_{n+1} = \left[\alpha F_n + \frac{1}{2}\right] \qquad n \geq 2 \tag{3.20}$$

同样地, 需要证明

$$F_{n+1} \leq \alpha F_n + \frac{1}{2} \leq F_{n+1} + 1 \tag{3.21}$$

再不去证明了. 将之具体展开为

$$F_{n+1} = \left[\frac{F_n + 1 + \sqrt{5}F_n}{2}\right] \tag{3.22}$$

这表明我们可以仅利用 F_n 得到 F_{n+1}. 对于卢卡斯数列, 有类似地定理

定理 4.

$$L_{n+1} = \left[\alpha L_n + \frac{1}{2}\right] \qquad n \geq 4 \tag{3.23}$$

以及展开得到

$$L_{n+1}=\left[\frac{L_n+1+\sqrt{5}L_n}{2}\right]\qquad n\geq 4 \tag{3.24}$$

定理 5.

$$\frac{\alpha^{n-1/n}}{\sqrt{5}}\leq F_n\leq\frac{\alpha^{n+1/n}}{\sqrt{5}}$$

我们先给出左侧不等式的证明: 根据 Binet 公式, 不等式转换为

$$\begin{aligned}&\alpha^{n-1/n}\leq\alpha^n-\beta^n=\alpha^n-\frac{1}{\alpha^n}\\ \Longleftrightarrow&\alpha^{2n-1/n}\leq\alpha^{2n}-1\\ \Longleftrightarrow&\alpha^{2n^2-1}\leq(\alpha^{2n}-1)^n\end{aligned}$$

利用数学归纳法, 容易知道 $n=1$ 时成立. 假定 n 时也成立, 现在我们证明如下的不等式即可:

$$\alpha^{2(n+1)^2-1}\leq(\alpha^{2n+2}-1)^{n+1}$$

我们令

$$\begin{aligned}A_n&=(\alpha^{2n}-1)^n\\ B_n&=\alpha^{2n^2-1}\end{aligned}$$

那么, 我们再

$$B_n\leq A_n$$

的条件下证明

$$B_{n+1}\leq A_n$$

实际上, 我们需要证明

$$A_{n+1}\geq B_{n+1}\frac{A_n}{B_n}\geq B_{n+1}$$

那么也就是证明

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}\geq\frac{B_{n+1}}{B_n}=\alpha^{4n+2}$$

相当于证明一个更强的不等式. 将左侧展开为

$$\frac{(\alpha^{2n+2}-1)^{n+1}}{(\alpha^{2n}-1)^n}=\left(\alpha^{2n+2}-1\right)\left(\frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n$$

接下来我们需要证明一个神奇的不等式

$$\frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^{2n}-1}>\alpha^2+\frac{1}{\alpha^{2n-1}}$$

证明这个不等式倒是不难, 考虑

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^{2n}-1}-\alpha^2&=\frac{\alpha^{2n+2}-1-\alpha^{2n+2}+\alpha^2}{\alpha^{2n}-1}\\ &=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1}\\ &=\frac{\alpha}{\alpha^{2n}-1}\\ &>\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\end{aligned}$$

因此有

$$\left(\frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n > \left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n$$
$$= \alpha^{2n}+n\alpha$$
$$> \alpha^{2n}+1$$

因此有

$$\frac{(\alpha^{2n+2}-1)^{n+1}}{(\alpha^{2n}-1)^n} > \left(\alpha^{2n+2}-1\right)\left(\alpha^{2n}+1\right)$$
$$= \alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n}-1$$
$$= \alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+1}-1$$
$$> \alpha^{4n+2}$$

这正是我们想证明的. 至于右边的不等式, 思路类似, 不再赘述. 有意思的是, 我将此不等式输入给 deepseek, 未开启 R1 深度思考, 它没能回答出来. 而 google ai studio 则给出了答案, 现抄录如下: 欲证明不等式

$$\alpha^{2n-1/n} \leq \alpha^{2n}-1$$

当 $n=1$ 时，我们来验证不等式是否成立. 左边为

$$\alpha^{2(1)^2-1} = \alpha^1 = \alpha$$

右边为

$$(\alpha^{2(1)}-1)^1 = \alpha^2-1$$

根据 α 的基本性质 $\alpha^2=\alpha+1$，我们可以得到 $\alpha^2-1=\alpha$。所以，当 $n=1$ 时, 不等式成立且取等。对于 $n\geq 2$, 我们需要证明 $\alpha^{2n-1/n} \leq \alpha^{2n}-1$. 让我们对这个不等式进行变形:

$$1 \leq \alpha^{2n}-\alpha^{2n-1/n}$$
$$\Longleftrightarrow 1 \leq \alpha^{2n-1/n}(\alpha^{1/n}-1)$$

现在, 我们需要证明右边的表达式大于或等于 1。我们将使用微分中值定理来找到一个有用的下界. 考虑函数 $f(x)=x^{1/n}$. 根据中值定理, 在区间 $[1,\alpha]$ 上, 存在一个 $c\in(1,\alpha)$ 使得:

$$f'(c) = \frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}$$

其中

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

代入可得:

$$\frac{1}{n}c^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\alpha^{1/n}-1}{\alpha-1}$$

所以有

$$\alpha^{1/n}-1 = \frac{1}{n}c^{\frac{1}{n}-1}(\alpha-1)$$

因为 $n \geq 2$, 指数 $\frac{1}{n}-1$ 是负数. 又因为 $c<\alpha$, 所以 $c^{\frac{1}{n}-1} > \alpha^{\frac{1}{n}-1}$. 因此, 我们得到一个很关键的下界:

$$\alpha^{1/n}-1 > \frac{1}{n}\alpha^{\frac{1}{n}-1}(\alpha-1)$$

现在，我们将这个下界代入我们想要证明的表达式中：

$$\begin{aligned}&\alpha^{2n-1/n}(\alpha^{1/n}-1) > \alpha^{2n-1/n}\left(\frac{1}{n}\alpha^{\frac{1}{n}-1}(\alpha-1)\right)\\ =&\frac{1}{n}\cdot\alpha^{2n-1/n+(1/n-1)}\cdot(\alpha-1)\\ =&\frac{1}{n}\cdot\alpha^{2n-1}\cdot(\alpha-1)\end{aligned}$$

我们知道 $\alpha^2-\alpha-1=0$, 两边同除以 α 得 $\alpha-1-1/\alpha=0$, 所以 $\alpha-1=1/\alpha$, 代入上式:

$$\frac{1}{n}\cdot\alpha^{2n-1}\cdot(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{n}\alpha^{2n-2}$$

综上所述, 我们已经证明了:

$$\alpha^{2n-1/n}(\alpha^{1/n}-1) > \frac{1}{n}\alpha^{2n-2}$$

现在, 只要我们能证明 $\dfrac{1}{n}\alpha^{2n-2} \geq 1$, 我们的整个证明就完成了. 这等价于证明:

$$\alpha^{2n-2} \geq n \quad (\text{对于} n \geq 2)$$

现在使用数学归纳法证明 $P(n): \alpha^{2n-2} \geq n$ 对于所有整数 $n \geq 1$ 成立.

1. 当 $n=1$ 时,$\alpha^{2(1)-2}=\alpha^0 \geq 1$, 成立.
2. 假设对于某个整数 $k \geq 1$, $P(k)$ 成立, 即 $\alpha^{2k-2} \geq k$.
3. 我们需要证明 $P(k+1)$ 也成立, 即

$$\alpha^{2(k+1)-2} \geq k+1$$

左边为

$$\alpha^{2k} = \alpha^{2k-2}\cdot\alpha^2$$

根据归纳假设

$$\alpha^{2k-2} \geq k$$

所以,$\alpha^{2k} \geq k\cdot\alpha^2$. 我们知道 $\alpha^2=\alpha+1 \approx 2.618$. 所以,$\alpha^{2k} \geq k(\alpha+1)$.

现在我们只需要证明 $k(\alpha+1) \geq k+1$ 即可

$$\begin{aligned}&k\alpha+k \geq k+1\\ \Longleftrightarrow& k\alpha \geq 1\\ \Longleftrightarrow& k \geq 1/\alpha\end{aligned}$$

因为 $\alpha \approx 1.618$, 所以 $1/\alpha \approx 0.618$. 由于我们的归纳是从 $k \geq 1$ 开始的, 所以 $k \geq 1 > 0.618$ 这个条件永远满足. 因此, $k(\alpha+1) \geq k+1$ 成立. 我们得到了 $\alpha^{2(k+1)-2} \geq k(\alpha+1) \geq k+1$, 所以 $P(k+1)$ 成立. 通过数学归纳法, 我们证明了 $\alpha^{2n-2} \geq n$ 对于所有 $n \geq 1$ 成立.

我检查过, 应该是没错的.

此外, 我们再证明如下三个有关分数的不等式

1.

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} < \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}} < \alpha - 1 < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}} < \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}$$

我们先证明第一个不等式, 并且回忆下卡西尼公式为

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

那么有

$$\begin{aligned}
&\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} < \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}} \\
\Longleftrightarrow &F_{2n}F_{2n+2} < F_{2n+1}F_{2n+3} \\
\Longleftrightarrow &F_{2n}(2F_{n+1} + F_{2n}) < F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n}) \\
\Longleftrightarrow &F_{2n}^2 < F_{2n+1}F_{2n-1}
\end{aligned}$$

应用卡西尼公式即可. 现在证明第二个不等式. 由于右侧项不含 n, 所以我们直接证明

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} < \alpha - 1$$

即可. 这也是容易的, 直接利用 Binet 公式展开, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}} < \alpha - 1 \\
\Longleftrightarrow &\alpha^{2n} - \beta^{2n} < \alpha^{2n+2} - \alpha\beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} \\
\Longleftrightarrow &\alpha^{2n} - \beta^{2n} < \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\beta^{2n+1} \\
\Longleftrightarrow &0 < \beta^{2n} + \beta^{2n+1} \\
\Longleftrightarrow &0 < \beta + 1
\end{aligned}$$

这是很明显的. 剩下两个不等式我不想证明了, 所以留作练习吧. 现在, 利用上面的不等式链, 也可以证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \alpha - 1$$

2. 黄金分割比 $\alpha - 1$ 总位于 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 和 $\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 之间, 且更接近后者, 也就是

$$\left|\alpha - 1 - \frac{F_n}{F_{n+1}}\right| > \left|\alpha - 1 - \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|$$

根据 1 中的不等式, 容易说明文字叙述部分的定理. 现在证明绝对值不等式. 我们回忆如下的公式:

$$\beta^n = F_n\beta + F_{n-1} \Longrightarrow \frac{F_{n-1}}{F_n} + \beta = \frac{\beta^n}{F_n}$$

于是带证明的不等式变为

$$\begin{aligned}
&\frac{|\beta^{n+1}|}{F_{n+1}} > \frac{|\beta^{n+2}|}{F_{n+2}} \\
\Longleftrightarrow &\frac{1}{F_{n+1}} > \frac{\alpha - 1}{F_{n+2}} \\
\Longleftrightarrow &F_{n+3} > \alpha F_{n+1}
\end{aligned}$$

这是显然的.

4. 在分母不大于 F_{n+1} 的分数中, 属 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 最接近 $\alpha-1$.

可利用反证法来证明, 我就不证明了.

附录 D　除性

定理 1. 斐波那契数 F_k 整除 F_{nk}, 这里要求 n 为正整数.

实际上, 我们已经遇到过一个特例, 根据习题 2.1, 我们知道 F_n 整除 F_{2n}. 这里我们直接展开

$$\begin{aligned}
F_{nk} &= \frac{\alpha^{nk}-\beta^{nk}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{(n-1)k}+\alpha^{(n-2)k}\beta^{k}+\cdots+\beta^{(n-1)k}\right] \\
&= F_k\left\{\left[\alpha^{(n-1)k}+\beta^{(n-1)k}\right]+\left[\alpha^{(n-2)k}\beta^{k}+\alpha^{k}\beta^{(n-2)k}\right]+\cdots\right\} \\
&= F_k\left[L_{(n-1)k}+(\alpha\beta)^{k}L_{(n-3)k}+\cdots\right] \\
&= F_k\left[L_{(n-1)k}+(-1)^{k}L_{(n-3)k}+\cdots\right] \\
&= F_k\left[L_{(n-1)k}+(-1)^{k}L_{(n-3)k}+(-1)^{2k}L_{(n-5)k}+\cdots\right] \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

为了求出上式最后一个卢卡斯数的指标, 考虑将 n 分奇偶讨论.

1. 若 n 为奇数, 那么取 $n=2m+1$, 中间项为

$$\begin{aligned}
\alpha^{(m+1)k}\beta^{mk}+\alpha^{mk}\beta^{(m+1)k} &= (\alpha\beta)^{mk}(\alpha+\beta) \\
&= (-1)^{mk}L_1 \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

也就是最小的卢卡斯数为 L_1.

2. 若 n 为偶数, 那么取 $n=2m$, 中间项为

$$\alpha^{(m+1)k}\beta^{(m-1)k}+\alpha^{mk}\beta^{mk}+\alpha^{(m-1)k}\beta^{(m+1)k}=(-1)^{(m-1)k}L_2+(-1)^{mk} \qquad (4.3)$$

最后一项为 1, 或者认为是 L_1. 并且能够看出, 当 k 为偶数时, 所有的项皆为正项. 此外,n 或者 k 为复数时同样成立. 利用上面的结果验证下

$$F_{10}=F_5L_5=F_2(L_8+L_4+L_1) \qquad (4.4)$$

下面介绍一个和最大公约数有关的定理.

定理 2.

$$g.c.d(F_m,F_n)=F_{g.c.d(m,n)} \qquad (4.5)$$

其中 m,n 为正整数.

此定理为卢卡斯在 1876 年发现. 为了证明此命题, 我们需要三个引理.

引理 1. 对于任意整数 m,n, 有

$$F_n \mid F_{mn} \qquad (4.6)$$

这个就是本节定理 1.

引理 2. 当 $n \geq 0$ 时, 有

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} \tag{4.7}$$

直接将右侧展开可得

$$\begin{aligned} F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} &= \frac{(\alpha^2+1)\alpha^{m+n-1} + (\beta^2+1)\beta^{m+n-1}}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + 2(\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1})}{(\alpha-\beta)^2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

这届将上式化为左侧异常困难, 我们考虑

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + 2(\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1})}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\alpha+\beta} \\ \Longleftrightarrow &\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + 2(\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1}) = \alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} - \alpha\beta^{m+n} - \beta\alpha^{m+n} \\ \Longleftrightarrow &\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1} = -\alpha\beta^{m+n} - \beta\alpha^{m+n} \\ \Longleftrightarrow &\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1} = -\alpha\beta(\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1}) \\ \Longrightarrow &1 = 1 \end{aligned}$$

因此 4.7 式成立. 在证明的过程中, 我们并未使用有关 $n \geq 1$ 的性质, 因此上式对于所有整数都成立.

引理 3. 对于任意整数 n, 有

$$g.c.d(F_n, F_{n+1}) = 1 \tag{4.9}$$

采用反证法: 假设

$$F_n \mid F_{n+1}$$

那么根据递推关系

$$F_n \mid F_n + F_{n-1}$$

那么有

$$F_n \mid F_{n-1}$$

然而我们知道 $F_n \geq F_{n-1}$, 因此一定有

$$F_n = F_{n-1}$$

这仅在 $n = 2$ 时成立. 也就是说, 当 $n \neq 2$ 时,4.9 式成立. 而当 $n = 2$ 时,$F_3 = 2$, 有

$$g.c.d(F_2, F_3) = g.c.d(1, 2) = 1$$

因此 4.9 式对任意整数 n 都成立.

下面开始证明定理 2. 令

$$c = g.c.d(m, n)$$

那么根据引理 1, 有

$$F_c \mid F_m \qquad F_c \mid F_n$$

再令

$$d = g.c.d(F_m, F_n)$$

那么 d 作为最大公因数, 一定会被所有因子整除, 也就是

$$F_c \mid d$$

根据最大公约数的性质, 一定存在整数 a, b 使得

$$c = am + bn$$

并且由于 $c \geq m, n$, 那么 a, b 中一定一正一负. 不妨就取 $a \leq 0$, 那么令

$$k = -a \geq 0$$

有

$$bn = c + km$$

再根据引理 2 将之分解为

$$F_{bn} = F_{c+km} = F_{c-1}F_{km} + F_cF_{km+1}$$

现在我们知道

$$d \mid F_n$$

并且根据引理 1, 有

$$F_n \mid F_{dn}$$

所以有

$$d \mid F_{dn}$$

此外同样的方法可以证明

$$d \mid F_{km}$$

那么一定有

$$d \mid F_cF_{km+1}$$

下面假定

$$d \mid F_{km+1}$$

由于 F_{km} 与 F_{km+1} 互素, 那么取

$$F_{km} = xd$$

$$F_{km+1} = yd$$

至少 d 是 F_{km} 和 F_{km+1} 的因数. 因此要求 $d = 1$ 的同时 x 和 y 互素. 如果 $d = 1$, 那么一定有

$$F_c = 1$$

因此得到

$$d = g.c.d(F_m, F_n) = 1$$

$$F_{g.c.d(m,n)} = F_c = 1$$

也就是 $1 = 1$, 因此此时定理 2 成立. 倘若 $d \neq 1$, 那么一定有

$$d \nmid F_{km+1}$$

那么有

$$d \mid F_c$$

同时前文又有

$$F_c \mid d$$

于是

$$F_c = d$$

就是我们需要证明的内容.

定理 3. 如果

$$n \mid n$$

那么有

$$F_n \mid F_m$$

对于卢卡斯数, 有类似的性质

定理 4. 如果 $m = 2kn$, 那么有

$$L_n \mid F_m$$

定理 5. 如果 $m = (2k-1)n$, 那么有

$$L_n \mid L_m$$

以及与引理 3 对称的引理

$$g.c.d(L_n, L_{n+1}) = 1$$

关于斐波那契数列, 还有许许多多的数论性质. 但是由于我并未学习过数论, 还是免了吧.

1876 年卢卡斯证明第 127 个梅森素数 $M_{127} = 2^{127} - 1$ 确实是一个素数. 原来的思路已不可考, 至知晓他利用勒斐波那契数相关的理论.

附录 E 数的表示理论

对于一个正整数数列 $\{a_n\}$, 如果任意正整数 m 都可表示为有限个不同的 a_n 之和, 那么我们称数列 $\{a_n\}$ 关于正整数完备.

定理 1. 数列 $\{a_n = 2^n\}$ 完备.

定理 2. 斐波那契数列完备.

这里给出一个精心设计的数学归纳法证明: 在 $k > 5$ 的情况下, 对于任意正数

$$m = 1, 2, \ldots, F_k - 1$$

都可以使用

$$F_1, F_2, \ldots, F_{k-2}$$

完备地表示出来.

这里的 5 是根据后文选取的. 为了让大家看清楚, 计算 $F_5 - 1 = 4$, 我们将 $1, 2, 3, 4$ 这四种情况穷举出来. 给出具体的斐波那契数

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_3 = 2$$

$$F_4 = 3$$

$$F_5 = 5$$

$$F_6 = 8$$

穷举可得

$$\begin{aligned}
&1 = F_1 = F_2 \\
&2 = F_3 = F_1 + F_2 \\
&3 = F_4 = F_3 + F_2 = F_3 + F_1 \\
&4 = F_4 + F_2 = F_4 + F_1 = F_3 + F_2 + F_1
\end{aligned}$$

好了, 现在对于 $k = 6$, 有

$$m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

根据上面的穷举,$1, 2, 3, 4$ 都可以使用 F_1, F_2, F_3, F_4 表示. 现在需要举例说明 $5, 6, 7$ 这三个数

字同样如此.

$$5 = F_4 + F_3$$
$$6 = F_4 + F_3 + F_2$$
$$7 = F_4 + F_3 + F_2 + F_1$$

也就是说, 对于 $k = 6$, 假设成立. 现在假定对于 $k = n$, 假设成立, 也就是

$$m = 1, 2, 3, \ldots, F_n - 1$$

可被

$$F_1, F_2, \ldots, F_{n-2}$$

表示出. 我们挑选出对于正数 l 的任意一种表示方法, 记为 $l = f(l)$. 那么对于 $k = n + 1$ 的情况,m 延伸至

$$1, 2, \ldots, F_{n+1} - 1$$

根据我们的假设, 我们知道

$$1 = f(1) \Longrightarrow 1 + F_{n-1} = f(l) + F_{n-1}$$
$$2 = f(2) \Longrightarrow 2 + F_{n-1} = f(2) + F_{n-1}$$
$$\cdots$$
$$F_n - 1 = f(F_n - 1) \Longrightarrow F_n - 1 + F_{n-1} = f(F_n - 1) + F_{n-1}$$

由于 $f(l)$ 中不含 F_{n-1}, 因此上面的表示是完备的. 也就是从 $1 + F_{n-1}$ 到 $F_n - 1 + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$, 都可以被 $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ 完备表示, 而自 1 至 $F_n - 1$, 根据我们的假设, 天然可被 $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ 完备表示. 现在的问题变为, 说明范围在

$$F_n - 1 < x < F_{n-1}$$

的整数 x 可被 $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ 完备表示. 我们解方程

$$F_n - 1 < 1 + F_{n-1}$$
$$\Longrightarrow F_{n-1} + F_{n-2} - 1 < 1 + F_{n-1}$$
$$\Longrightarrow F_{n-2} < 2$$

然而, 根据假设,$n \geq 6$, 有 $F_{n-2} \geq F_4 = 3 > 2$. 因此并不存在这样的 x. 所以我们证明了数

$$m = 1, 2, \ldots, F_{n+1} - 1$$

可被 $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ 完备表示, 这正是 $k = n + 1$ 时的情况. 因此, 对于任意正整数 m, 我们总可以找到一个 $n > 5$, 使得 $m \leq F_n - 1$, 从而可以被斐波那契数 $F_2, F_2, \ldots, F_{n-2}$ 完备表示出.

从事后的角度来看, 这样的证明实在太精巧了. 最神奇的, 莫过于

$$F_n - 1 + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$$

一般地, 有如下判据: 对于单调不减地正整数数列 $\{a_n\}$, 如果满足

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i (n \geq 1)$$

那么该数列是完备的.

运用此定理, 我们来证明 $a_n = F_n$ 的情形.

首先,F_n 单调不减, 成立; 再者,$F_1 = 1$ 成立. 最后,

$$1 + \sum_{i=1}^{n} F_n = F_{n+2}$$

那么有

$$F_{n+1} \leq F_{n+2}$$

也成立, 因此斐波那契数列完备. 这个判据可参见 https://doi.org/10.2307/2311150. 我们可以证明另一个结果.

定理 3. 斐波那契数列去掉任意一项后仍是完备的.

注意到先前的结果, 数

$$m = 1, 2, \ldots, F_{n+1} - 1$$

可被

$$F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$$

完备表示出, 这其中并未使用 F_n. 下面我们将说明

$$m = 1, 2, \ldots, 2F_{n+1} - 1$$

可被

$$F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_{n+1}$$

完备表示出. 首先, 从 1 到 $F_{n+1} - 1$ 是天然成立的, 其次,F_{n+1} 可用自身表示出, 最后, 从 $1 + F_{n+1}$ 到 $2F_{n+1} - 1$, 可以根据定理 2 的证明得出. 但是

$$2F_{n+1} - 1 > F_{n+2} - 1$$

因此我们证明了

$$m = 1, 2, \ldots, F_{n+2} - 1$$

可用斐波那契数

$$F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_{n+1}$$

完备表示出. 因此, 可以使用数学归纳法证明对于任意的 $k \geq n + 2$

$$m = 1, 2, \ldots, F_k - 1$$

可用

$$F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_{n+1}, \ldots, F_{k-1}$$

完备表示出. 也就是说, 可取去掉任意的 F_n, 而使用 F_{k-1} 来代替它.

定理 4. 斐波那契数列去掉任意两项后不完备.

我们再不证明这些莫名其妙的定理了.

定理 5. 数列 $a_n = L_{n-1}, n \geq 0$ 是完备的.

定理 6. Zeckendorf 定理. 任意一个正整数 m 可被不连续的斐波那契数表示出, 并且表示唯一.

定理 7. 对于正整数 m, 如果它可以被数列,$a_n = F_{n+1}, n \geq 1$ 表示, 并且当 $F_k, k \geq 4$ 被使用时, 至少有一对 $F_q, F_{q-1}, 3 \leq q < k$ 也被使用, 那么表示是唯一的.

证明了这么多费劲的定理, 下面给出具体的构造方法: 假设有一个数 a, 现在我们取 $a_0 = a$, 并找出比 a_0 小的最大斐波那契数, 记为 F_n, 再记 $a_1 = a_0 - F_n$, 此时找出比 a_1 小的最大斐波那契数. 但是这样做不方便我们的编号, 因此我们给出另一种叙述方式. 比较 a_1 和 F_{n-1}, 倘若有 $a_1 < F_{n-1}$, 那么取 $\varphi_2 = 0$, 不断进行, 除非 $a_1 = 0$, 不然, 必能找出合适的斐波那契数. 实际上,$\varphi_2 = 0$ 是肯定的, 否则会出现

$$\begin{aligned} & a_1 \geq F_{n-1} \\ \Longleftrightarrow & a_0 \geq F_n + F_{n-1} \\ \Longleftrightarrow & a_0 \geq F_{n+1} \end{aligned}$$

这样与假设矛盾.

假设现在找到比 a_1 小的最大斐波那契数为 F_{n-k}, 那么记 $\varphi_{k+1} = 1$. 那么此时 $a_2 = a_1 - F_{n-k}$, 并且要求 $a_2 < F_{n-k-1}$. 现在我们需要说明的是, 上述过程最终会停止在 F_2. 不妨假设

$$a_{l+1} = a_l - F_2$$

这表明 $a_l \geq 1$ 的同时, 有 $a_l - 1 < F_1 = 1$, 因此可以解出 $a_l = 1$. 当然, 上面的假设不一定成立, 譬如

$$7 - F_5 = 2 = F_3$$

不管怎样, 这种迭代的过程总能够停止, 因为数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且有界. 最终计算可得

$$a = \varphi_1 F_n + \varphi_2 F_{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} F_2$$

参考文献

[1] K. Adegoke. The golden ratio, fibonacci numbers and bbp-type formulas. *arXiv: Number Theory*, 2016.

[2] Kunle Adegoke. Fibonacci identities involving reciprocals of binomial coefficients. 2021.

[3] Barry and Lewis. Trigonometry and fibonacci numbers. *Mathematical Gazette*, 2007.

[4] Brother Alfred Brousseau. Summation of infinite fibonacci series. *Fibonacci Quarterly*, 7:143–168, 1969.

[5] Nikhil Byrapuram, Adam Ge, Selena Ge, Tanya Khovanova, Sylvia Zia Lee, Rajarshi Mandal, Gordon Redwine, Soham Samanta, Daniel Wu, and Danyang Xu. Fibonometry and beyond. 2024.

[6] Dario Castellanos. A generalization of binet's formula and some of its consequences. *Fibonacci Quarterly*, 27(5), 1989.

[7] John Conway and Alex Ryba. 97.39 fibonometry. *Mathematical Gazette*, 97(540):494–495, 2013.

[8] Bakir Farhi. Summation of certain infinite fibonacci related series. 2015.

[9] N. Garnier and O. Ramare. Fibonacci numbers and trigonometric identities. *Fibonacci Quarterly*, 1(1):56–61, 2008.

[10] Anna Grigas. The fibonacci sequence: Its history, significance, and manifestations in nature. 2013.

[11] V. E. Jun. Hoggatt and Marjorie Bicknell. A reciprocal series of fibonacci numbers with subscript 2nk. *Fibonacci Quarterly*, 14, 1976.

[12] V. E. Hoggatt Jr. and Marjorie Bicknell. Roots of fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 11(3):271–274, 1973.

[13] Refik Keskin. Three identities concerning fibonacci and lucas numbers.

[14] Refik Keskin and Bahar Demirturk. Some new fibonacci and lucas identities by matrix methods. *International Journal of Mathematical Education*, 41(3):379–387, 2010.

[15] Koshy and Thomas. *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* Wiley, 2001.

[16] H. London. Fibonacci and lucas numbers, by verner e. hoggatt jr. houghton mifflin company, boston, 1969. 92 pages. *Canadian mathematical bulletin Bulletin canadien de mathématiques*, 12(3):367–367, 1969.

[17] Stewart Seán M. 107.01 a simple integral representation of the fibonacci numbers. *The Mathematical gazette*, 2023.

[18] Hideyuki Ohtsuka and Shigeru Nakamura. On the sum of reciprocal fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly*, 46/47(2):153–159, 2009.

[19] G. Osborn. 109. [d. 6. d.] mnemonic for hyperbolic formulae. *The Mathematical Gazette*, 2(34):189–189, 1902.

[20] Andrew M. Rockett. Sum of the inverse of binomial coefficients. 1981.

[21] Chance Sanford. Infinite series involving fibonacci numbers via apery-like formulae. 2016.

[22] Ken Siler. Fibonacci summations.

[23] Lejla Smajlovi, Zenan Abanac, and Lamija Eta. Relations between chebyshev, fibonacci and lucas polynomials via trigonometric sums. 2024.

[24] Renzo Sprugnoli. Sums of reciprocals of the central binomial coefficients. 2006.

[25] Sean M. Stewart. Simple integral representations for the fibonacci and lucas numbers. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 19(2), August 2022. KAUST Repository Item: Exported on 2022-09-30.

[26] B. Sury. A parent of binet's formula? *Mathematics Magazine*, 77(4):308–310, 2004.

[27] B Sury. Trigonometric expressions for fibonacci and lucas numbers. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, LXXIX(2), 2010.

[28] S. Vajda. Fibonacci lucas numbers and the golden section. *E. Horwood Ltd. , Halsted Press*, 1989.

[29] Vorobiev and N. Nicolai. *Fibonacci Numbers.* Birkhäuser Basel, 2002.

[30] YAJUN, ZHOU, M., LAWRENCE, and GLASSER. An integral representation for the fibonacci numbers and their generalization. *Fibonacci Quarterly*, 2015.

[31] 吴振奎. *世界数学名题欣赏丛书, 斐波那契数列*. 辽宁教育出版社, 1987.

后记

一时间思绪万千, 竟不知如何下笔. 从 7 月 9 号晚上, 我尝试在 arxiv 上检索一些有趣的积分结果, 接触到斐波那契数, 到今天 28 号晚上, 一共 19 天的时间, 参考了 36 篇文献, 终于大概了解了一些. 然而, 有趣的是, 最开始看到的论文, 反而未被我写进笔记之中.

我第一次接触到斐波那契数, 大约是在高中时期. 高二暑假前, 学校分配到了几个参加数学竞赛的名额, 老师选了我去. 不过我对数学竞赛不太感冒, 直到临考的前一天晚上, 看了点数列的内容, 学会了如何解出二阶线性递推数列, 在那里我知道了斐波那契数的通项. 第二天的复试中, 真的有一道大题需要解出递推数列, 我也因此得了点分. 大学期间也接触过一些, 有一次看了某个博主的视频, 它使用矩阵的方法求出通项.

在整理这篇笔记的过程中, 也是深刻体会到, 自己写一个有体系笔记, 面临着很多困难. 譬如行文顺序的安排. 有时我写到后面章节时, 偶然又发现了一些与前面章节相关的文献可以参考整理, 然而, 其中的部分内容却已出现在后续章节, 我只好进行一些调整. 此外, 专题具体的选择, 每一个专题内要写哪些, 都是需要考虑的. 譬如前面提到的第一次看到的论文, 她涉及到一般的二阶线性递推数列, 虽然得到了许多优美的结论, 然而过于繁琐, 并且我自己没精力去看, 只好舍弃.

此外, 在查找文献时, 中文文献仅有吴振奎老师写的斐波那契数列一书, 其余全为外文文献, 甚至说有国人发表在外文期刊上的. 国内数理类教材的缺乏甚为严重, 我在学习量子力学时, 一本中译本教材的译者序中提到, 中文量子力学教材驰名中外, 他肯定是昧着良心写的. 任何一个学过量子力学的人都知道, 中文教材根本不行. 国内的大学教材多数要忙着科研, 写书便随意应付下, 甚至交给手底下的学生. 因此, 非常希望能够有中文的教材出现, 至少不必被语言所限制.

目前, 中文互联网上还未见到详细介绍斐波那契数的视频, 有一些人发布过简单的科普视频. 以后如果有机会, 我也尝试做些自媒体, 看看能否将这篇笔记制作成视频.

还有很多事情我想说, 然而行文至此, 已经脱离了斐波那契数, 索性不再写了.

lolispin

2025 年 7 月 28 日于家中