Esame di Algebra e Geometria
Secondo appello - 10 giugno 2024

Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche

Prof. Luca Moci, Università di Bologna - Campus di Cesena

Ogni risposta dovrà essere adeguatamente motivata.

Esercizio A

Consideriamo i vettori $v_0 = (1, -1, 6), v_1 = (2, -2, 0), v_2 = (-1, 1, 2)$ e $v_3 = (1, 0, -1) \in V = \mathbb{R}^3$.

1. (v_0, v_1, v_2) è una base di V? (v_1, v_2, v_3) è una base di V?

2. Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_1, f(v_0) = v_3$? Se esiste, è unica?

3. Esiste un'applicazione lineare $g : V \to V$ tale che $g(v_1) = v_2, g(v_2) = v_1, g(v_3) = 2v_0, g(v_0) = 3v_1 + 2v_2$? Se esiste, è unica?

4. Effettuando meno calcoli possibile, stabilire se g è un isomorfismo, e dire quanto vale il determinante di g.

5. Descrivere, tramite equazioni parametriche o cartesiane, il nucleo e l'immagine di g.

Esercizio B

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t(x, y) = ((5 - 17t)x - 24ty, 12tx + (5 + 17t)y$$

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di f_t, specificandone la molteplicità algebrica.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, dire se f_t si diagonalizza su $\mathbb{R}$ e se f_t si diagonalizza su $\mathbb{C}$.

3. Determinare, ove possibile, una base di autovettori v_1, v_2 per f_t. Tale base dipende da t?

4. Fissiamo per il resto dell'esercizio $t = 4$ e dunque $f = f_4$. Scrivere la matrice M di f nella base v_1, v_2 di autovettori trovata al punto precedente. Trovare poi quattro matrici D_1, D_2, D_3, D_4 tali che il prodotto riga per colonna di ciascuna matrice per se stessa faccia la matrice trovata al punto precedente: $D_i^2 = M \; \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

5. Esprimere i vettori e_1, e_2 della base canonica come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2 del punto 3.Trovare poi quattro applicazioni lineari $g_1, g_2, g_3, g_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $g_i \circ g_i = f \; \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, e scrivere la matrice di ciascuna di esse nella base canonica e_1, e_2.

Esercizio C

Sia $V = \mathbb{R}^2$ munito della forma $\beta_{r,s,t}$ che, a due vettori $v = (x, y)$ e $u = (x', y')$, associa il numero reale

$$\beta_{r,s,t}(v, u) = rxy + xx' + (1 - 3s)xy' + (2s - 4)x'y + (2t - s)yy'.$$

1. Determinare i valori di $r, s, t \in \mathbb{R}$ per cui la forma $\beta_{r,s,t}$ è bilineare, ed i valori per cui oltre ad essere bilineare è simmetrica.

2. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $\beta_{0,1,t}$ è un prodotto scalare. Poi trovare una base v_1, v_2 ortonormale rispetto al prodotto scalare $\beta = \beta_{0,1,3}$.

3. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y) = (2x - 5y, x - 2y)$. Enunciando e applicando un teorema visto nel corso, dire se f é una isometria rispetto a β.

4. Calcolare il determinante di f, quindi dire che tipo di trasformazione geometrica è f. Effettuando meno calcoli possibile, determinare f^{25}.

5. Trovare la retta r_2 passante per il punto $P = (3, -1)$ e ortogonale (rispetto a β) alla retta r_1 di equazione $x - 2y = 3$.