

Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

Elementi di Analisi Matematica uno

Versione semplificata per i nuovi corsi di laurea

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'editore.
Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633 ovvero dall'accordo stipulato tra SIAE, AIE, SNS e CNA, CONFARTIGIANATO, CASA, CLAAI, CONFCOMMERCIO, CONFESERCENTI il 18 dicembre 2000. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume, solo a seguito di specifica autorizzazione lasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, e-mail aidro@iol.it

Prima edizione italiana Luglio 2002

Liguori Editore, Srl
via Posillipo 394
I 80123 Napoli

<http://www.liuorini.it>

Copyright © Liguori Editore, S.r.l. 2002

Marcellini, Paolo :

Elementi di Analisi Matematica uno/Paolo Marcellini, Carlo Sbordone

Napoli : Liguori, 2002

ISBN 88 - 207 - 3383 - 8

1. Funzioni di una variabile 2. Calcolo differenziale ed integrale I. Titolo.

Ristampe:

9 8 7 6 5 4 3 2

2007 2006 2005 2004 2003

Questo volume è stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a pH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ~

Capitolo 1 — I NUMERI E LE FUNZIONI REALI

1.	Premessa.....	"	11
2.	Gli assiomi dei numeri reali	"	12
3.	Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali	"	13
4.	Cenni di teoria degli insiemi.....	"	17
5.	Numeri naturali, interi, razionali	"	20
6.	Funzioni e rappresentazione cartesiana.....	"	22
7.	Funzioni invertibili. Funzioni monotone.....	"	24
8.	Funzioni lineari. Funzione valore assoluto.....	"	26
9.	Le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo	"	30
10.	Le funzioni trigonometriche	"	34

Appendice al capitolo 1

11.	Il principio di induzione.....	"	39
-----	--------------------------------	---	----

Capitolo 2 — COMPLEMENTI AI NUMERI REALI

12.	Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore..	"	43
13.	Calcolo combinatorio	"	49
14.	Il binomio di Newton	"	51

Appendice al capitolo 2

15.	I numeri complessi.....	"	54
-----	-------------------------	---	----

Capitolo 3 — LIMITI DI SUCCESSIONI

16.	Premessa.....	"	61
17.	Definizioni e prime proprietà.....	"	63
18.	Successioni limitate.....	"	67
19.	Operazioni con i limiti	"	68
20.	Forme indeterminate	"	70
21.	Teoremi di confronto	"	71
22.	Altre proprietà dei limiti di successioni.....	"	72
23.	Alcuni limiti notevoli	"	74

24.	Successioni monotone.....	pag. 78
25.	Il numero e.....	" 79

Appendice al capitolo 3

26.	Infiniti di ordine crescente	" 84
27.	Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass...	" 85
28.	Successioni di Cauchy.....	" 87

Capitolo 4 — LIMITI DI FUNZIONI. FUNZIONI CONTINUE

29.	Premessa	" 91
30.	Definizioni	" 94
31.	Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni.....	" 97
32.	Esempi e proprietà dei limiti di funzioni	" 98
33.	Funzioni continue.....	" 101
34.	Discontinuità	" 103
35.	Alcuni teoremi sulle funzioni continue	" 106

Appendice al capitolo 4

36.	Metodo di bisezione per il calcolo delle radici di una equazione.....	" 112
37.	Dimostrazione del teorema di Weierstrass	" 114
38.	Continuità delle funzioni monotone e delle funzioni inverse.....	" 115

Capitolo 5 — DERIVATE

39.	Tasso di accrescimento. Significato meccanico della derivata	" 119
40.	Definizione di derivata	" 120
41.	Operazioni con le derivate	" 123
42.	Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse	" 125
43.	Derivate delle funzioni elementari.....	" 128
44.	Significato geometrico della derivata. Retta tangente.....	" 131

Appendice al capitolo 5

45.	Le funzioni trigonometriche inverse.....	" 137
-----	--	-------

Capitolo 6 — APPLICAZIONI DELLE DERIVATE. STUDIO DI FUNZIONI

46.	Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat.....	" 141
47.	I teoremi di Rolle e di Lagrange	" 144

48.	Funzioni crescenti e decrescenti.....	pag. 146
49.	Funzioni convesse e concave.....	" 148
50.	Il teorema di L'Hôpital.....	" 152
51.	Studio del grafico di una funzione.....	" 155
52.	La formula di Taylor: prime proprietà.....	" 158

Appendice al capitolo 6

53.	Il teorema di Cauchy. Il teorema di L'Hôpital nel caso generale.....	" 163
-----	--	-------

Capitolo 7 — FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

54.	Funzioni di due variabili: dominio; rappresentazione cartesiana	" 169
55.	Limits e continuità	" 178
56.	Derivate parziali. Gradiente	" 180
57.	Derivate successive. Teorema di Schwarz.....	" 184
58.	Massimi e minimi relativi.....	" 187
59.	Funzioni di tre o più variabili reali.....	" 193

Appendice al capitolo 7

60.	Differenziabilità	" 196
-----	-------------------------	-------

Capitolo 8 — INTEGRALI DEFINITI

61.	Il metodo di esaustione	" 199
62.	Definizioni e notazioni	" 203
63.	Proprietà degli integrali definiti	" 208
64.	Il teorema della media	" 211

Appendice al capitolo 8

65.	Uniforme continuità. Teorema di Cantor. Funzioni lipschitziane	" 213
66.	Integrabilità delle funzioni continue	" 216

Capitolo 9 — INTEGRALI INDEFINITI

67.	Il teorema fondamentale del calcolo integrale.....	" 217
68.	Primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale	" 218
69.	L'integrale indefinito	" 221
70.	Integrazione per decomposizione in somma.....	" 223
71.	Integrazione delle funzioni razionali	" 225

72.	Integrazione per parti.....	pag. 230
73.	Integrazione per sostituzione	" 232
74.	Calcolo di aree di figure piane.....	" 236

Appendice al capitolo 9

75.	Integrali impropri.....	" 238
76.	Definizione di logaritmo, esponenziale, potenza.....	" 241

Capitolo 10 — FORMULA DI TAYLOR

77.	Resto di Peano	" 245
78.	Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti.....	" 250
79.	Resto integrale.....	" 253
80.	Resto di Lagrange	" 254

Appendice al capitolo 10

81.	Tabulazione di funzioni.....	" 255
-----	------------------------------	-------

Capitolo 11 — SERIE

82.	Serie numeriche.....	" 259
83.	Serie a termini non negativi.....	" 263
84.	La serie geometrica.....	" 264
85.	La serie armonica	" 266
86.	Criteri di convergenza	" 269
87.	Serie alternate	" 272
88.	Convergenza assoluta.....	" 274

Appendice al capitolo 11

89.	Serie di Taylor.....	" 275
-----	----------------------	-------

PREFAZIONE

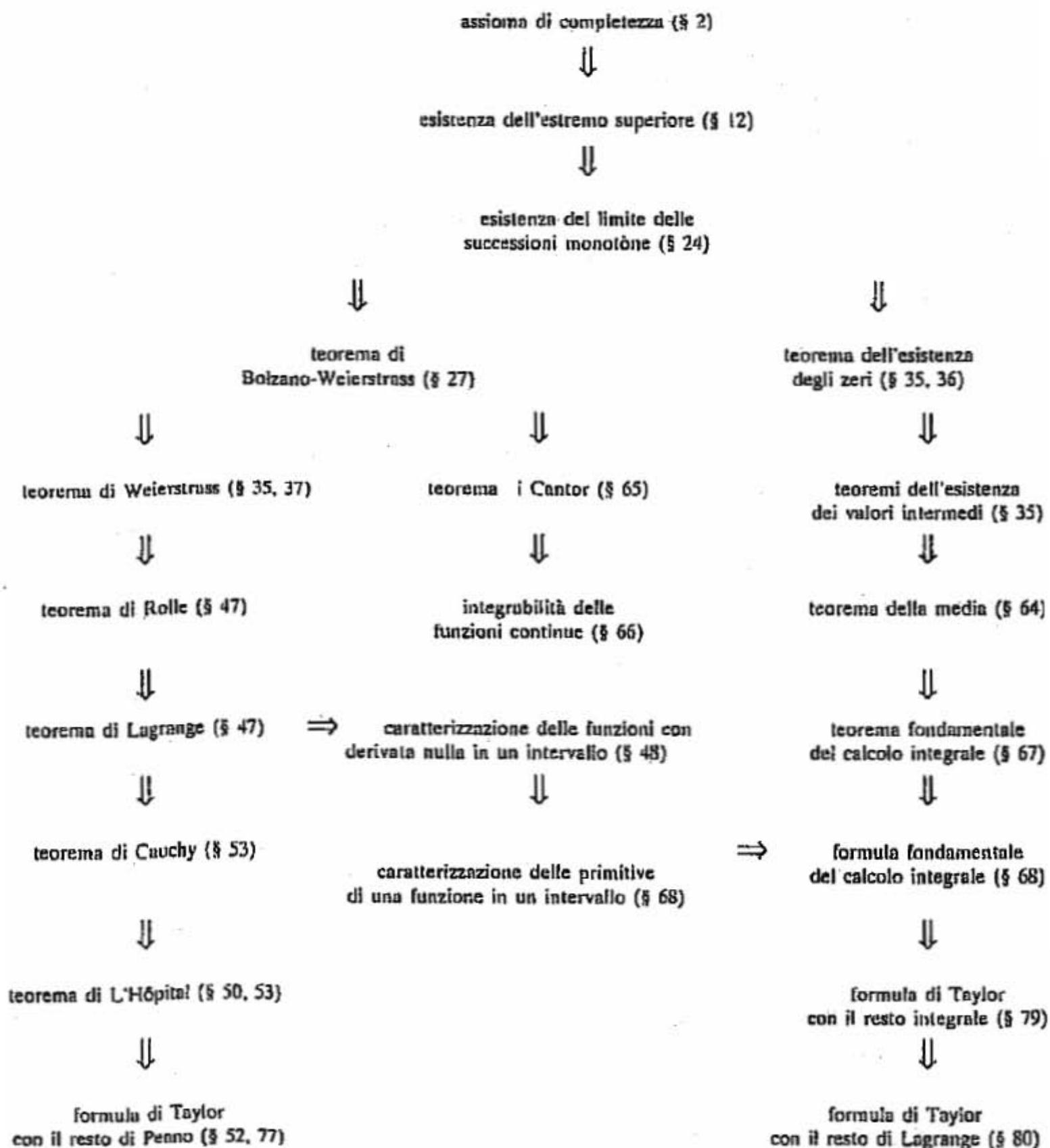
Gli autori hanno realizzato questo testo di *Elementi di Analisi Matematica uno* rielaborando il materiale del volume di *Analisi Matematica uno*, già ampiamente sperimentato in vari corsi universitari di laurea e di diploma.

È stata tenuta nella massima considerazione l'esigenza, sentita da molti, di un libro di testo rigoroso nei contenuti e, allo stesso tempo, snello e di facile lettura; ciò infatti dovrebbe facilitare lo studio della maggioranza di quegli studenti che si avvicinano al corso universitario di Analisi Matematica uno con il timore (o, forse, con il preconcetto) di non essere *a priori* in grado di comprendere a fondo l'argomento. Nel contempo, non è stato sottovalutato il desiderio di quegli studenti, e non sono pochi, che desiderano approfondire argomenti appresi a lezione e risultati particolarmente (e talvolta inaspettatamente) interessanti.

Allo scopo di fornire un quadro schematico d'insieme degli argomenti trattati in questo libro è proposto di seguito uno schema di collegamento dei principali teoremi (in genere, *di esistenza*) trattati nel testo; tale schema dovrebbe contribuire a dare un'idea al lettore del contenuto culturale di un corso di Analisi Matematica, basato non su di un elenco di formule o affermazioni fini a sé stesse, ma su di una serie di argomentazioni logiche tra loro coerenti e conseguenti. Lo schema dovrebbe rivelarsi utile allo studente, anche per la preparazione dell'esame.

Oltre all'assioma di completezza, l'intero sistema di assiomi dei numeri reali è presupposto di tutta la teoria.

Altre implicazioni importanti, non contenute nello schema, sono quelle del teorema di Bolzano-Weierstrass (§ 27), che implica il criterio di convergenza di Cauchy (§ 28) e quella del teorema dell'esistenza dei valori intermedi (§ 35), che implica la continuità delle funzioni inverse (§ 38), che a sua volta implica la derivabilità delle funzioni inverse (§ 42). Inoltre l'esistenza del limite delle successioni monotone (§ 24) è utilizzata per lo studio del carattere delle serie a termini non negativi (§ 83). Infine, il teorema di Lagrange (§ 47) ha altre importanti applicazioni, ad esempio nei criteri di monotonia (§ 48) e di convessità (§ 49), o nel teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione (§ 57).



1. Premessa

Il metodo comunemente usato in Matematica consiste nel precisare senza ambiguità i presupposti, da non cambiare durante l'elaborazione dei dati o della teoria, e nel dedurre da tali presupposti, in modo logico e coerente, il maggior numero di informazioni possibili. In altre parole, i presupposti sono le regole del gioco, che potrebbero essere state anche diverse, ma che, una volta iniziato il gioco, non vengono più cambiate. In Matematica tali presupposti vengono chiamati *postulati* o *assiomi*. Da essi, mediante dimostrazioni, si deducono i risultati o *teoremi*. Sinonimo di teorema è *lemma*, parola più spesso usata per indicare un risultato intermedio, utile soprattutto per dimostrare un altro teorema; altri sinonimi sono *corollario* e *proposizione*.

Il nostro punto di partenza è quello di assumere, come postulato, che esista *il sistema dei numeri reali*. Cioè assumiamo che esista un insieme di numeri, che chiamiamo numeri reali e che indichiamo con \mathbf{R} , su cui sia possibile, ad esempio, eseguire le quattro operazioni elementari ($+$, $-$, \cdot , $/$), oppure sia possibile stabilire quale è il maggiore tra due numeri.

Il sistema dei numeri reali è sicuramente già familiare alla maggioranza degli studenti che leggono queste pagine. Infatti stiamo assumendo come punto di partenza (come assioma) quell'insieme di regole per operare sui numeri che il lettore ha sempre usato in modo naturale fin da quando ha imparato a far di conto. Per esempio, è per tutti naturale che $2 + 3$ sia uguale a $3 + 2$, o che $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Esprimiamo ciò in modo generale per due numeri reali a , b , dicendo che valgono le proprietà commutative della somma e del prodotto:

$$(1.1) \quad a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Il lettore conosce sicuramente (provvi a scriverle) anche la proprietà associativa, sia rispetto alla somma che al prodotto, e la proprietà distribu-

tiva. Nel paragrafo successivo è riportato un elenco completo delle proprietà che assumiamo valere per assioma. Dividiamo tali proprietà in tre gruppi: quelle relative alle operazioni, le proprietà relative all'ordinamento, e l'assioma di completezza.

2. Gli assiomi dei numeri reali

Axiomi relativi alle operazioni. Sono definite le operazioni di *addizione* (+) e *moltiplicazione* (\cdot) tra coppie di numeri reali, con le seguenti proprietà (a, b, c indicano numeri reali generici):

- (2.1) *Proprietà associativa:* $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- (2.2) *Proprietà commutativa:* $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- (2.3) *Proprietà distributiva:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- (2.4) *Esistenza degli elementi neutri:* esistono in \mathbb{R} due numeri distinti 0, 1, tali che $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$.
- (2.5) *Esistenza degli opposti:* per ogni numero reale a esiste un numero reale, indicato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$.
- (2.6) *Esistenza degli inversi:* per ogni numero reale $a \neq 0$ esiste un numero, indicato con a^{-1} , tale che $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

Axiomi relativi all'ordinamento. È definita la relazione di *minore o uguale* (\leq) tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

- (2.7) *Dicotomia:* per ogni coppia di numeri reali a, b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.
- (2.8) *Proprietà asimmetrica:* se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b$, $b \leq a$, allora $a = b$.
- (2.9) *Se $a \leq b$ allora vale anche $a + c \leq b + c$.*
- (2.10) *Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora valgono anche $0 \leq a + b$, $0 \leq a \cdot b$.*

Assioma di completezza

- (2.11) *Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano a elemento di A e b elemento di B. Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B.*

3. Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali

Nel paragrafo precedente sono state elencate le proprietà dei numeri reali che vengono assunte come assiomi. Tutte le altre proprietà e teoremi esposti in questo libro discendono dagli assiomi. Sono conseguenze degli assiomi anche quelle proprietà elementari che in genere fanno parte del «bagaglio matematico» di ogni studente, come ad esempio il fatto che *un prodotto è nullo quando almeno uno dei due fattori è nullo*, oppure quella regola dei segni per il prodotto (che, dagli studenti delle scuole elementari talvolta è accettata come imposizione, perché incompresa) che schematicamente si enuncia: *meno per meno fa più*; oppure la norma di frequente applicazione nel risolvere disequazioni: *moltiplicando entrambi i membri per una quantità negativa, il verso della disequazione cambia*.

Di seguito esaminiamo alcune proprietà, come quelle sopra enunciate, che sono conseguenza degli assiomi dei numeri reali.

(3.1) *Vale la regola di semplificazione rispetto alla somma: se $a + b = a + c$, allora $b = c$.*

Utilizziamo gli assiomi (2.4) e (2.5), di esistenza dello zero e dell'opposto $-a$, e le proprietà commutativa e associativa:

$$\begin{aligned} b &= 0 + b = [a + (-a)] + b = \\ &[(-a) + a] + b = (-a) + (a + b) \end{aligned}$$

essendo $a + b = a + c$, si ottiene

$$\begin{aligned} b &= (-a) + (a + b) = (-a) + \dots + c = [(-a) + a] + c = \\ &= [a + (-a)] + c = 0 + c = c + 0 = c. \end{aligned}$$

(3.2) *Vale la semplificazione rispetto al prodotto: se $a \cdot b = a \cdot c$ e se $a \neq 0$, allora $b = c$.*

Si può procedere come nella dimostrazione della proprietà precedente, scambiando la somma con il prodotto e avendo l'accortezza di ricordare che l'inverso a^{-1} di un numero reale a esiste purché sia $a \neq 0$. In tal caso, nella linea della dimostrazione di (3.1), si ha:

$$\begin{aligned} b &= b \cdot 1 = 1 \cdot b = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) = (a^{-1} \cdot a) \cdot c = \\ &= (a \cdot a^{-1}) \cdot c = 1 \cdot c = c \cdot 1 = c. \end{aligned}$$

(3.3) Il prodotto $a \cdot b$ è nullo se e soltanto se almeno uno dei due fattori è nullo.

Proviamo preliminarmente l'implicazione con il "se"; cioè proviamo che $a \cdot 0 = 0$ per ogni numero reale a . Ricordiamo che lo zero è, per l'assioma (2.4), l'elemento neutro rispetto alla somma; cioè tale che $a + 0 = a$ per ogni reale a ; ricordiamo anche che 1, elemento neutro rispetto al prodotto, sempre per l'assioma (2.4) soddisfa la relazione $a \cdot 1 = a$ per ogni reale a . In base alla proprietà associativa abbiamo allora

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0$$

da cui, semplificando entrambi i membri in base alla proprietà (3.1), otteniamo $a \cdot 0 = 0$.

Proviamo ora l'implicazione con il «solo se»; a tale scopo supponiamo che $a \cdot b = 0$; se $a = 0$ la tesi è raggiunta; altrimenti, se $a \neq 0$, esiste l'inverso a^{-1} e si ha

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Si noti che, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato quanto già provato nella prima parte della dimostrazione.

La precedente proposizione (3.3) spiega perché nell'ambito dei numeri reali non sia possibile la divisione per zero, cioè perché nell'assioma (2.6) di esistenza dell'inverso a^{-1} si richieda che $a \neq 0$. Infatti, se $a = 0$ allora $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ per ogni numero reale b e perciò *non esiste* un numero reale 0^{-1} tale che $0 \cdot 0^{-1} = 1$.

(3.4) L'opposto di un numero reale è unico.

In base all'assioma (2.5), per ogni numero reale a esiste l'opposto di a , indicato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$. Se supponiamo che risultino anche $a + b = 0$, allora, per la legge di semplificazione (3.1) si ha $-a = b$; quindi l'opposto è unico.

(3.5) L'inverso di un numero reale non nullo è unico.

Stessa dimostrazione del caso precedente.

(3.6) Per ogni reale a vale la proprietà $-(-a) = a$.

Il numero $-(-a)$ è, per definizione, l'opposto di $-a$; ma essendo

$$a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

risulta che a è l'opposto di $-a$, cioè $a = -(-a)$, in base alla proprietà (3.4) che l'opposto di un numero reale è unico.

(3.7) Per ogni coppia di numeri reali a, b risulta $(-a) \cdot b = -a \cdot b$.

Per la proprietà distributiva si ha che

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b = 0,$$

da cui $a \cdot b$ è l'opposto di $(-a) \cdot b$, cioè $-a \cdot b = (-a) \cdot b$.

(3.8) *Per ogni coppia di numeri reali a, b risulta $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.*

Come conseguenza della precedente proprietà (3.7) e della proprietà commutativa (2.2) abbiamo.

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -[a \cdot (-b)] = -[(-b) \cdot a] = \\ &= -[-(b \cdot a)] = -[-(a \cdot b)]; \end{aligned}$$

La conclusione segue infine dalla (3.6), essendo $-[-(a \cdot b)] = a \cdot b$.

Gli assiomi del paragrafo 2, relativi all'ordinamento, si riferiscono alla relazione di *minore od uguale* (\leq) tra le coppie di numeri reali. La relazione di *maggiore od uguale* (\geq) è ricondotta a quella di minore od uguale mediante la definizione:

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a.$$

(Il simbolo \Leftrightarrow sta per «equivale»). Pertanto la relazione di \geq gode di proprietà analoghe a quelle di \leq .

Infine le relazioni di *minore* ($<$) e di *maggiore* ($>$), dette anche relazioni di *minore stretto* e, rispettivamente, di *maggiore stretto*, sono definite da:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b, a \neq b;$$

$$a > b \Leftrightarrow a \geq b, a \neq b.$$

(3.9) *La relazione $a \leq b$ è equivalente alla relazione $b - a \geq 0$.*

Infatti, se $a \leq b$, allora per la (2.9):

$$a - b \leq b - b = 0.$$

Viceversa, se $b - a \geq 0$, sempre per la (2.9) e per la proprietà associativa dell'addizione si ha:

$$a = 0 + a \leq (b - a) + a = b + [(-a) + a] = b.$$

(3.10) *Proprietà transitiva dell'ordinamento: se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.*

Supponiamo che $a \leq b$ e $b \leq c$; per la precedente proprietà (3.9) risulta $0 \leq b - a$, $0 \leq c - b$. Dalla (2.10) si ottiene poi

$$0 \leq (b - a) + (c - b) = c - a$$

che, ancora per la (3.9), equivale ad $a \leq c$.

(3.11) Risulta $a \geq 0$ se e soltanto se $-a \leq 0$.

Infatti, per la (2.9), se $0 \leq a$ allora

$$0 + (-a) \leq a + (-a),$$

cioè $-a \leq 0$. Viceversa, se $-a \leq 0$, allora $a + (-a) \leq a$, cioè $0 \leq a$.

(3.12) Se $a \leq b$ e $c \geq 0$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Infatti, se $a \leq b$ allora per la (3.9) è anche $0 \leq b - a$ da cui, per la (2.10) e per la proprietà distributiva (2.3):

$$0 \leq (b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c,$$

cioè, ancora per la (3.9), $a \cdot c \leq b \cdot c$.

(3.13) Se $a \leq b$ e $c \leq 0$ allora $a \cdot c \geq b \cdot c$.

Per le ipotesi e per la (3.11) si ha $0 \leq b - a$, $-c \geq 0$. Dalla (2.10) si ottiene

$$0 \leq (b - a) \cdot (-c) = -b \cdot c + a \cdot c,$$

da cui, per la (3.9), $b \cdot c \leq a \cdot c$

L'assioma di completezza (2.11) a prima vista può sembrare ovvio: «se tutti i numeri dell'insieme A sono minori od uguali a tutti i numeri dell'insieme B, allora esisterà certamente un numero c intermedio fra A e B, cioè tale che $a \leq c \leq b$ per ogni elemento a di A e per ogni elemento b di B; basterà infatti scegliere come numero c il più grande elemento di A, oppure il più piccolo elemento di B».

Ebbene, la frase scritta precedentemente fra virgolette è sbagliata! Infatti non tutti gli insiemi numerici hanno il più grande o il più piccolo elemento (rimandiamo al paragrafo 12 per un approfondimento di questo punto): ad esempio, l'insieme

$$B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\},$$

che, rappresentato sulla retta dà luogo ad uno schema come quello in figura 1.1, ha il più grande elemento, che è uguale ad 1, ma non ha il più piccolo elemento; potremmo essere tentati di dire che lo zero è il più piccolo elemento di \mathbb{B} , ma lo zero *non è* un elemento di \mathbb{B} ! Infatti lo zero è diverso da $1/n$ qualunque sia n (una frazione è nulla se e soltanto se il numeratore della frazione è nullo).

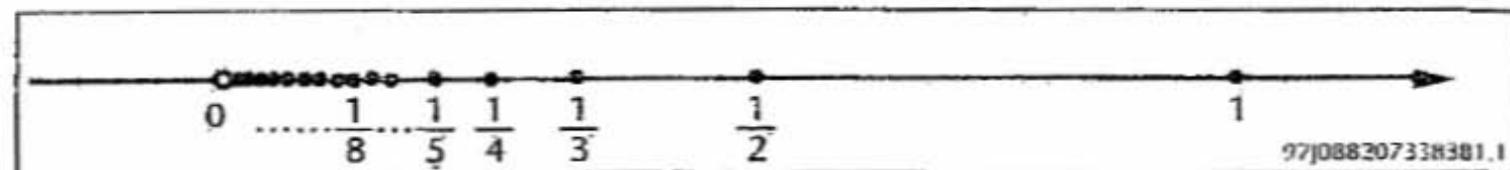


Figura 1.1

L'assioma di completezza è, in effetti, un assioma molto più profondo di quanto possa sembrare a prima vista. Come mostreremo nel paragrafo 5, soltanto tramite l'assioma di completezza è possibile distinguere l'insieme dei numeri rappresentabili sotto forma di frazione, insieme detto dei *numeri razionali*, dall'insieme dei numeri reali.

4. Cenni di teoria degli insiemi

Introduciamo alcune notazioni e definizioni tratte dalla teoria degli insiemi. Sia S un insieme di natura qualsiasi. Per indicare che x è un elemento di S scriveremo:

$$x \in S \quad (x \text{ appartiene a } S).$$

Per indicare, invece, che y non è un elemento di S , scriveremo:

$$y \notin S \quad (y \text{ non appartiene a } S).$$

Se A è un insieme i cui elementi sono anche elementi di S , diremo che A è un *sottoinsieme* o *parte* di S .

Tra i sottoinsiemi di S si suole considerare anche l'*insieme vuoto*, cioè l'insieme privo di elementi, che si indica con \emptyset .

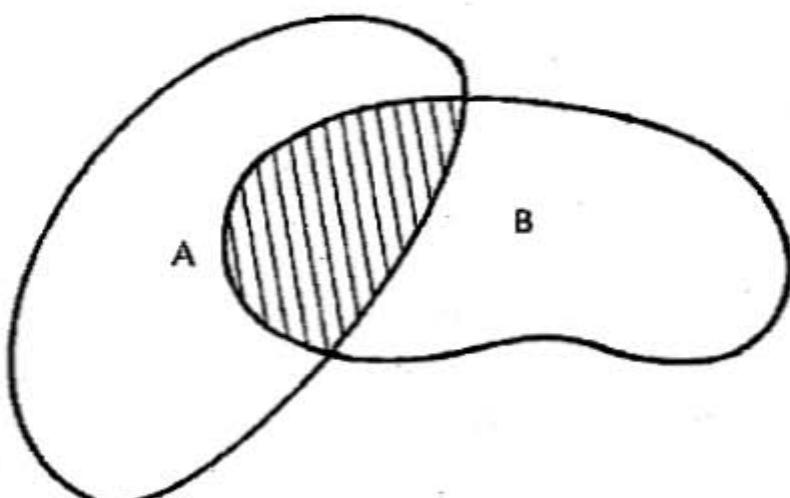
Se A e B sono due sottoinsiemi di S , l'*intersezione* $A \cap B$ di A e B è l'insieme degli elementi di S che sono comuni ad A e B (figura 1.2):

$$(4.1) \qquad A \cap B = \{x \in S : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

L'*unione* $A \cup B$ di A e B è l'insieme costituito dagli elementi di S che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B (figura 1.3):

$$(4.2) \quad A \cup B = \{x \in S : x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$

Diremo che A è *contenuto* in B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A è anche elemento di B :



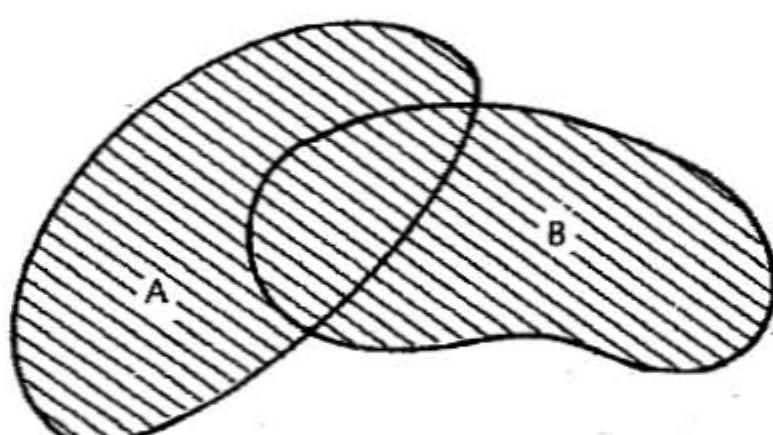
9788820733812

Figura 1.2

$$(4.3) \quad (A \subseteq B) \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Si conviene che l'insieme vuoto sia contenuto in ogni sottoinsieme di S . Se A è contenuto in B ed è diverso da B , si dice che A è una *parte propria* di B .

Il simbolo \Leftrightarrow si legge «*se e solo se*» o, come già detto, «*equivale*» ed il simbolo \Rightarrow si legge «*implica*».



9788820733812

Figura 1.3

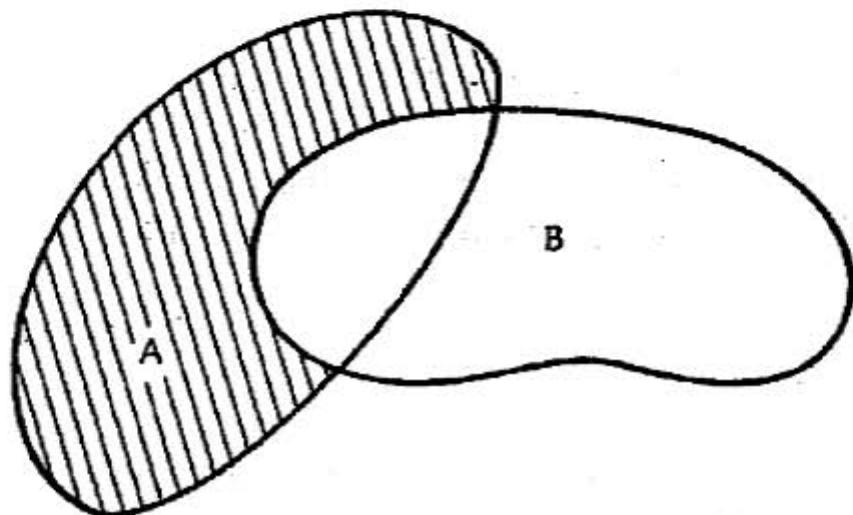
Se A e B sono due sottoinsiemi dell'insieme S , il *complemento* $A - B$ di B rispetto ad A è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B (figura 1.4):

$$(4.4) \quad A - B = \{x \in S : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

In particolare, per $A = S$, l'insieme $S - B$, complemento di B rispetto a S , si chiama anche *complementare* di B e si indica con B^c oppure con $-B$. Evidentemente si ha

$$(4.5) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c.$$

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di S si suole indicare con $P(S)$ e si chiama *insieme delle parti di S*.



97/08020738861.e

Figura 1.4

Siano A e B due insiemi. Si chiama *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con $A \times B$ l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con la *prima coordinata* a appartenente ad A e la *seconda coordinata* b appartenente a B . Le coppie ordinate sono caratterizzate dalla seguente proprietà:

$$(4.6) \quad (a, b) = (a', b') \quad \text{se e solo se} \quad a = a', b = b'$$

Nel caso particolare in cui sia $A = B$, un sottoinsieme di $A \times A$ si chiama *relazione binaria* in A .

Una relazione binaria \mathcal{R} in A si chiama *relazione di equivalenza*, se gode delle seguenti proprietà:

- 1) *riflessiva*: per ogni $a \in A$ si ha $(a, a) \in \mathcal{R}$
- 2) *simmetrica*: $(a, b) \in \mathcal{R}$ implica $(b, a) \in \mathcal{R}$
- 3) *transitiva*: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{R}$, allora $(a, c) \in \mathcal{R}$

Se $(a, b) \in \mathcal{R}$ si scrive $a \sim b$ e si dice che a e b sono *equivalenti*.

Indichiamo con $[a]$ la *classe di equivalenza* di $a \in A$, cioè l'insieme degli elementi equivalenti ad a . Si prova facilmente che due classi di equivalenza o coincidono o sono prive di elementi comuni.

L'insieme delle classi di equivalenza di elementi di A rispetto alla relazione \mathfrak{R} si chiama *insieme quoziente* e si indica con il simbolo A/\mathfrak{R} , cioè

$$(4.7) \quad A/\mathfrak{R} = \{[a] : a \in A\}.$$

Una relazione binaria \mathfrak{R} su A si chiama *relazione d'ordine*, se gode delle seguenti proprietà:

- 1) *riflessiva*
- 2) *transitiva*
- 3) *asimmetrica*: se $(a, b) \in \mathfrak{R}$ e $(b, a) \in \mathfrak{R}$, allora $a = b$.

La relazione di minore o uguale tra coppie di numeri reali considerata nei paragrafi 2 e 3 del presente capitolo è una relazione d'ordine.

5. Numeri naturali, interi, razionali

Abbiamo visto come tra gli assiomi dei numeri reali ci sia l'esistenza degli elementi neutri 0 e 1. Quindi apparterranno ad \mathbf{R} (come già detto, indichiamo con \mathbf{R} l'insieme dei *numeri reali*) anche i risultati delle operazioni eseguite a partire da 0 e 1. In particolare sono numeri reali: $1 + 1 = 2$, $(1 + 1) + 1 = 3$, ... Tale sottoinsieme di \mathbf{R} , che si chiama insieme dei *numeri naturali*, si indica con

$$(5.1) \quad \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Nel paragrafo 11 sono studiate alcune proprietà dell'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali.

Analogamente indichiamo con \mathbf{Z} il sottoinsieme di \mathbf{R} costituito dagli elementi di \mathbf{N} , dai loro opposti, e dallo 0. Cioè l'insieme dei *numeri interi* (o *interi relativi*) si indica con

$$(5.2) \quad \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{0\} \cup \{\pm n : n \in \mathbf{N}\}.$$

I risultati della divisione m/n (che, con la terminologia introdotta dagli assiomi, significa $m \cdot n^{-1}$) con $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, si chiamano *numeri razionali* e si indicano con

$$(5.3) \quad \mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Risulta $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$. Naturalmente, essendo \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} sottoinsiemi di \mathbf{R} , su di essi sono definite le operazioni di addizione e di moltiplicazione e l'ordinamento indotti da \mathbf{R} . Però essi non soddisfano tutti gli assiomi dei numeri reali. Ad esempio, \mathbf{N} non soddisfa (2.5): nell'ambito di soli numeri naturali non esiste l'opposto di alcun numero. \mathbf{Z} non soddisfa (2.6): tutti i numeri interi, escluso 1, hanno per inverso un numero reale che non è intero; in altre parole, non esiste l'inverso nell'ambito dei numeri interi.

Si può verificare che invece \mathbf{Q} soddisfa tutte le proprietà algebriche relative alle operazioni e all'ordine. L'unico assioma non soddisfatto da \mathbf{Q} è l'assioma di completezza (2.11).

Per dimostrare ciò, premettiamo la seguente

PROPOSIZIONE. — *Non esiste alcun numero razionale c tale che $c^2 = 2$.*

Dimostrazione: sia per assurdo c un numero razionale positivo tale che $c^2 = 2$. In base alla (5.3) esistono m, n numeri interi, che possiamo supporre entrambi positivi, tali che $c = m/n$: Se necessario, possiamo «semplificare» la frazione m/n , ottenendo m e n non entrambi pari. Risulta $(m/n)^2 = c^2 = 2$, cioè $2n^2 = m^2$. Essendo il primo membro $2n^2$ un numero intero pari, anche m^2 deve essere pari; ma allora anche m deve essere pari (se m fosse dispari, anche m^2 sarebbe dispari); quindi $m = 2k$, con k intero. Ne segue che

$$(5.4) \quad 2n^2 = m^2 = 4k^2, \quad \text{cioè} \quad n^2 = 2k^2.$$

Ripetendo il ragionamento, risulta che anche n deve essere un numero pari, ciò che contrasta con l'ipotesi che m ed n siano numeri interi non entrambi pari.

Consideriamo ora gli insiemi

$$(5.5) \quad A = \{a \in \mathbf{Q} : a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbf{Q} : a > 0, a^2 < 2\},$$

$$B = \{b \in \mathbf{Q} : b > 0, b^2 > 2\}.$$

Tutti i numeri di A sono minori di tutti i numeri di B . Inoltre, per la proposizione precedente, risulta $A \cup B = \mathbf{Q}$ e $A \cap B = \emptyset$.

Se esistesse un numero razionale c con la proprietà che $a \leq c \leq b$, per ogni $a \in A$, $b \in B$, tale numero dovrebbe appartenere ad A oppure a B .

Supponiamo $c \in A$. Non potendo essere $c \leq 0$, ne segue che $c^2 < 2$. Sia n un numero naturale maggiore di $(2c+1)/(2-c^2)$; certamente esistente per la proprietà di Archimede (si veda il paragrafo 12). Allora, essendo $1/n^2 < 1/n$,

$$(5.6) \quad \left(c + \frac{1}{n} \right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} < c^2 + \frac{2c+1}{n} < 2$$

per cui $c + \frac{1}{n} \in A$, il che è assurdo perché c è più grande di tutti gli elementi di A .

Analogamente si perviene ad un assurdo supponendo $c \in B$. Osserviamo ora che i due insiemi A e B , costituiti da numeri razionali, possono essere riguardati come insiemi di numeri reali e quindi, per l'assioma di completezza, esiste un numero *reale* c con la proprietà che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Tale numero, che si può dimostrare essere unico, è tale che $c^2 = 2$, è irrazionale e si denota con il simbolo $c = \sqrt{2}$.

Riassumendo con parole semplici, possiamo dire che nell'insieme dei numeri naturali N si possono eseguire le operazioni di addizione e di moltiplicazione, ma non è possibile in genere eseguire le operazioni inverse di sottrazione e di divisione. Z è un ampliamento di N che permette di calcolare anche le differenze, ma non i quozienti. Q è un ulteriore ampliamento; in Q è possibile eseguire le quattro operazioni fondamentali (tranne naturalmente la divisione per zero), ma non è possibile in generale eseguire altri calcoli altrettanto utili, come ad esempio l'estrazione di radice. Come vedremo, R è invece sufficientemente ricco per la maggior parte delle applicazioni.

6. Funzioni e rappresentazione cartesiana

Siano A e B due insiemi di numeri reali. Una *funzione* di A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed uno solo elemento di B . Se indichiamo con f tale funzione, scriveremo $f : A \rightarrow B$, oppure $y = f(x)$, intendendo che ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde, tramite la funzione f , l'elemento $y = f(x) \in B$.

Si dice che A è il *dominio* o *insieme di definizione* di f . Il simbolo $f(\)$ indica un complesso di operazioni che devono effettuarsi su x (*argomento* di f) per ottenere y (*valore* di f), come negli esempi seguenti:

$$(6.1) \quad f(x) = 2x + 1$$

occorre moltiplicare x per 2 e sommare 1;

$$(6.2) \quad f(x) = 1/x$$

occorre calcolare l'inverso di x ;

$$(6.3) \quad f(x) = \sqrt{x}$$

si deve calcolare la radice di x ;

$$(6.4) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in Z \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

occorre riconoscere se x è intero oppure no, e di conseguenza assegnare ad $f(x)$ il valore 0 oppure 1.

La funzione (6.1) è definita per ogni x reale; in altre parole il suo dominio è tutto R . La funzione (6.2) è definita per $x \neq 0$, quindi il suo dominio è

$A = \{x \in \mathbf{R}: x \neq 0\}$. Il dominio della (6.3) è $A = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$, mentre la (6.4) è definita su tutto \mathbf{R} .

Il valore $f(x)$ della funzione f in x si chiama anche *immagine* di x mediante f .

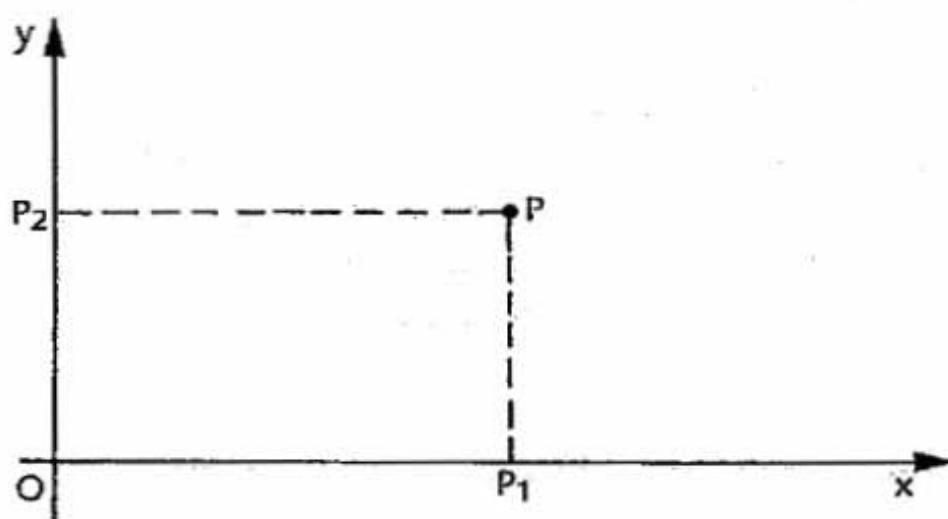


Figura 1.5

Ricordiamo brevemente come effettuare la *rappresentazione cartesiana* di una funzione. Riferendoci alla figura 1.5, consideriamo due rette perpendicolari che si intersecano in un punto O , origine degli assi. Fissiamo sulle due rette una direzione positiva ed una unità di misura. Chiamiamo asse delle *ascisse*, o asse x , una delle due rette, asse delle *ordinate*, o asse y , l'altra retta.

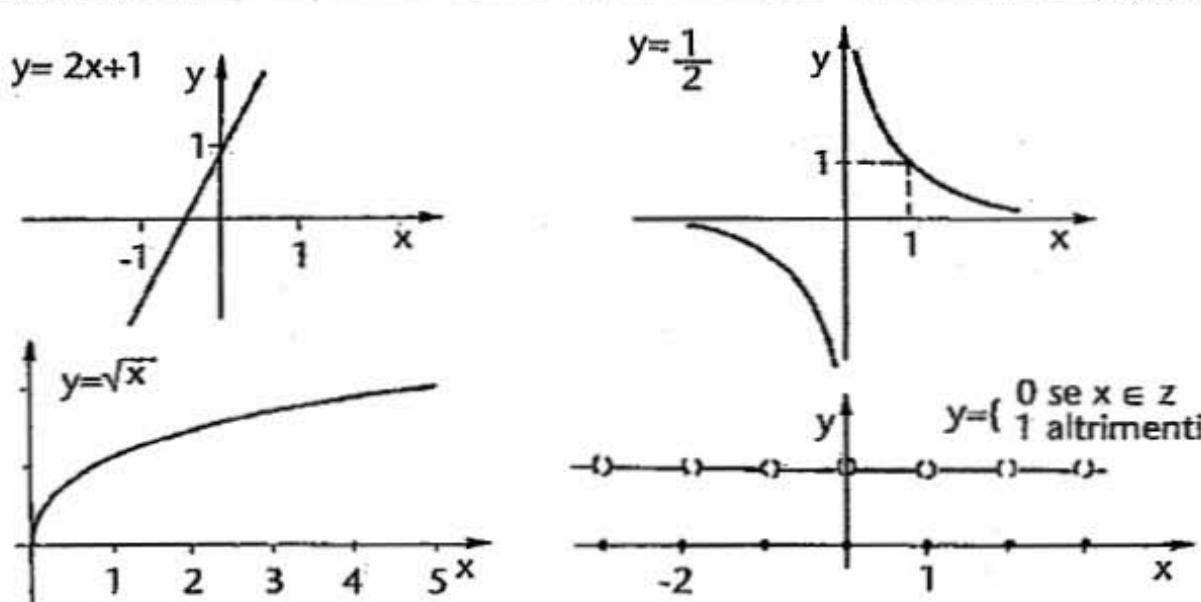


Figura 1.6

Ad ogni numero reale x corrisponde in modo biunivoco un punto P_1 dell'asse delle x , scelto in modo che il segmento OP_1 abbia lunghezza

uguale ad x . Analogamente ad ogni numero reale y corrisponde un punto P_2 dell'asse y , tale che il segmento OP_2 abbia lunghezza uguale a y . Tracciamo due rette parallele agli assi e passanti rispettivamente per P_1 e P_2 . Il punto P di incontro delle due rette corrisponde in modo biunivoco alla coppia di numeri reali (x, y) .

Se è assegnata una funzione f , in corrispondenza alle coppie di numeri reali $(x, f(x))$ abbiamo un insieme di punti del piano, ottenuti con la rappresentazione cartesiana sopraindicata, che costituisce il *grafico* della funzione.

In figura 1.6 abbiamo riportato i grafici delle quattro funzioni considerate fin dall'inizio del paragrafo; il lettore verifichi i disegni proposti per punti, cioè assegnando alla variabile indipendente x dei valori su cui calcolare semplicemente la funzione; ad esempio, nel caso (6.3), $x = 0, 1, 4, 9, \dots$

7. Funzioni invertibili. Funzioni monotone

Una funzione f da A verso B si dice *iniettiva* se elementi distinti hanno immagini distinte, cioè, equivalentemente, se sussiste l'implicazione

$$(7.1) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

La funzione f si dice poi *suriettiva* se per ogni $y \in B$ esiste almeno un $x \in A$ tale che $y = f(x)$.

Una funzione f che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva da A verso B si dice *biunivoca*. Ciò vuol dire che f non solo fa corrispondere ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y \in B$, ma anche che per ogni $y \in B$ esiste un solo $x \in A$ tale che $y = f(x)$.

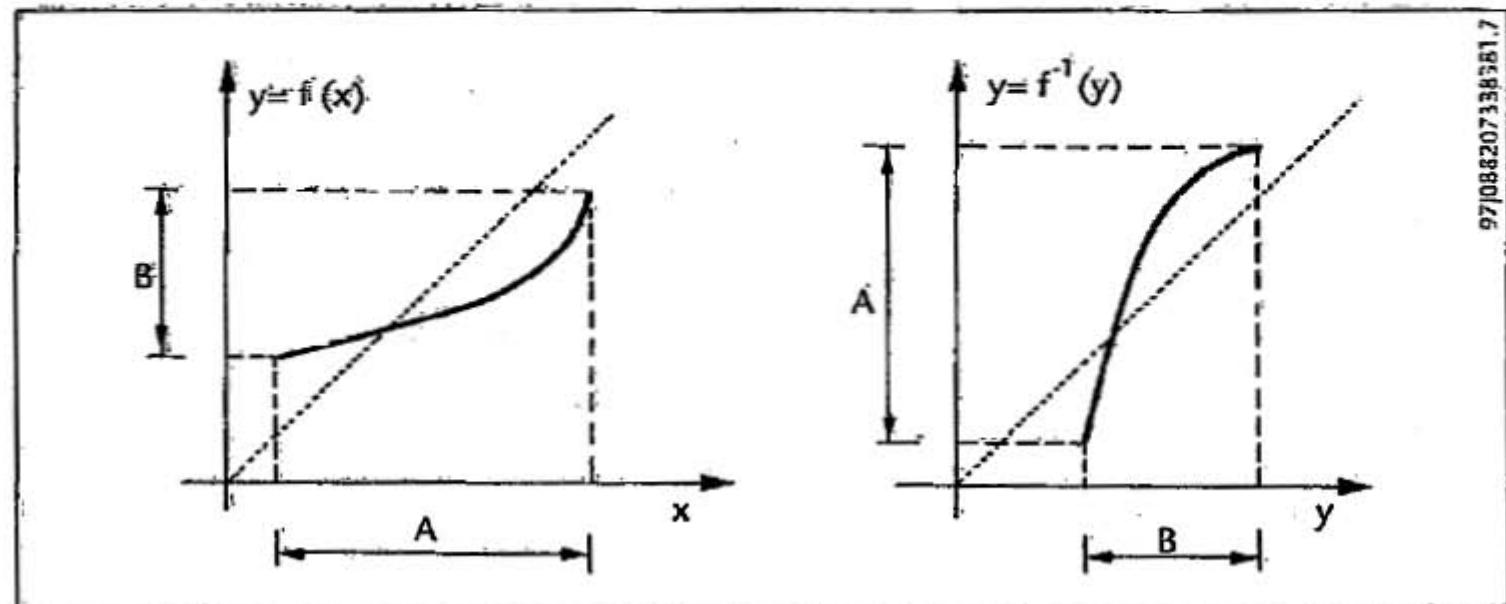


Figura 1.7

In tali condizioni diciamo che f è *invertibile*. La funzione da B ad A che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ per cui $f(x) = y$, si chiama *funzione inversa* e si indica con f^{-1} . Si ha (il simbolo \forall si legge *per ogni*):

$$(7.2) \quad f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A; \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

Da notare che spesso si cambiano le notazioni ed invece di usare $x = f^{-1}(y)$ si preferisce, con un puro scambio di simboli, $y = f^{-1}(x)$, per mettere in luce che la variabile indipendente è quella dell'argomento di f^{-1} . In figura 1.7 è riportato il grafico di una funzione $f: A \rightarrow B$ invertibile e della sua inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Ad esempio, la funzione (6.1) è invertibile; infatti, fissato $y = f(x)$, risulta $x = (y - 1)/2$. La funzione inversa della (6.1) è quindi

$$(7.3) \quad f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}.$$

Anche la funzione (6.2) è invertibile e risulta $f^{-1}(x) = 1/x$ (è solo un caso che f ed f^{-1} coincidano!). La funzione (6.3) è anche invertibile e $f^{-1}(x) = x^2$, per $x \geq 0$. Mentre la (6.4) non è invertibile, perché non stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $A = \mathbf{R}$ e l'insieme B costituito dai soli due valori 0, 1.

Diremo che una funzione f è *monotona* in un insieme A , se verifica una delle condizioni seguenti ($\forall x_1, x_2 \in A$):

$$(7.4) \quad f \text{ strettamente crescente:} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

$$(7.5) \quad f \text{ crescente:} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

$$(7.6) \quad f \text{ strettamente decrescente:} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

$$(7.7) \quad f \text{ decrescente:} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Una funzione che verifica la (7.4), oppure la (7.6), si dice *strettamente monotona*.

Ad esempio, la funzione (6.1) è strettamente crescente su \mathbf{R} ; la funzione (6.2) è strettamente decrescente, separatamente negli insiemi $\{x > 0\}$ e $\{x < 0\}$. La funzione (6.3) è strettamente crescente. La funzione (6.4) non è monotona su \mathbf{R} .

Ci sarà utile nel seguito un criterio per riconoscere se una data funzione è invertibile. Rimandando al criterio di invertibilità del paragrafo 35 per una visione più completa dell'argomento, supponiamo che la corrispondenza

tramite una funzione f tra due insiemi A e B sia tale che ad ogni $y \in B$ corrisponde almeno un $x \in A$. Se f è strettamente monotona allora è anche invertibile. Infatti, ad ogni $y \in B$ corrisponde un solo $x \in A$ per cui $f(x) = y$; perché, se ne esistessero due distinti $x_1 \neq x_2$, i corrispondenti valori $f(x_1), f(x_2)$ dovrebbero essere diversi fra loro a causa della stretta monotonia.

Concludiamo il paragrafo con alcune utili definizioni e notazioni.

Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione da A verso B . Se X è un sottoinsieme di A , l'*immagine* di X mediante f , indicata con $f(X)$, è il sottoinsieme di B definito da

$$(7.8) \quad f(X) = \{y \in B : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

(il simbolo \exists si legge *esiste*).

L'insieme $f(A)$, cioè l'immagine di A mediante f , si chiama *codominio* di f . Evidentemente, la funzione f è suriettiva da A verso B se e solo se il suo codominio coincide con B .

Se Y è un sottoinsieme di B , l'*immagine inversa* di Y mediante f , indicata con $f^{-1}(Y)$ è il sottoinsieme di A definito da

$$(7.9) \quad f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Diamo infine la definizione di *funzione composta* mediante due funzioni. Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $g : X \rightarrow Y$ e $f : Y \rightarrow Z$ due funzioni, tali che l'insieme Y contenente i valori della prima coincida con il dominio della seconda. Allora si può considerare la *funzione composta* $h : X \rightarrow Z$, definita da $h(x) = f(g(x))$ per $x \in X$. In tal caso si usa la notazione $h = f \circ g$; in altre parole, si pone $f \circ g(x) = f(g(x))$ per ogni $x \in X$.

8. Funzioni lineari. Funzione valore assoluto

Si chiama *funzione lineare* (o *funzione affine*) una funzione del tipo

$$(8.1) \quad y = mx + q$$

ove m, q sono numeri reali fissati. Si verifica facilmente che il grafico di una tale funzione è una retta, di cui il parametro m è detto *coefficiente angolare*.

Ogni funzione lineare è monotona su \mathbb{R} , anzi, strettamente monotona se $m \neq 0$. Infatti, basta considerare $x_1 < x_2$ e $f(x) = mx + q$, da cui

$$(8.2) \quad f(x_1) = mx_1 + q, \quad f(x_2) = mx_2 + q;$$

se il coefficiente angolare m è positivo, allora, essendo $x_1 < x_2$ risulta anche $mx_1 < mx_2$ e quindi $f(x_1) < f(x_2)$; in questo caso $f(x)$ risulta strettamente crescente su \mathbb{R} . Se invece m è negativo, allora da $x_1 < x_2$ segue $mx_1 > mx_2$ e quindi $f(x_1) > f(x_2)$; perciò, se $m < 0$, la funzione lineare $f(x)$ è strettamente decrescente. Infine, se $m = 0$, allora risulta $f(x) = q = \text{costante}$; essendo $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni coppia di valori x_1, x_2 , la funzione $f(x)$ è contemporaneamente crescente e decrescente su \mathbb{R} ; si dice brevemente che *la funzione è costante su \mathbb{R}* . Il grafico di $f(x)$ in questo caso è una retta parallela all'asse x , costituita dai punti (x, y) con ascissa arbitraria e ordinata costante uguale a q .

Ricordiamo il criterio esposto nel paragrafo precedente, criterio in base al quale una funzione strettamente monotona su un insieme è anche invertibile su tale insieme. Nel caso in considerazione la funzione $f(x) = mx + q$ è strettamente monotona su \mathbb{R} se $m \neq 0$ e quindi è anche invertibile se $m \neq 0$. Tale fatto è di semplice verifica diretta: infatti, se $m \neq 0$, vale l'equivalenza:

$$(8.3) \quad y = mx + q \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y - q}{m}$$

che, con i simboli introdotti nel paragrafo precedente, significa che la funzione inversa $f^{-1}(y)$ della funzione lineare $f(x) = mx + q$ è data da

$$(8.4) \quad f^{-1}(y) = \frac{y - q}{m}.$$

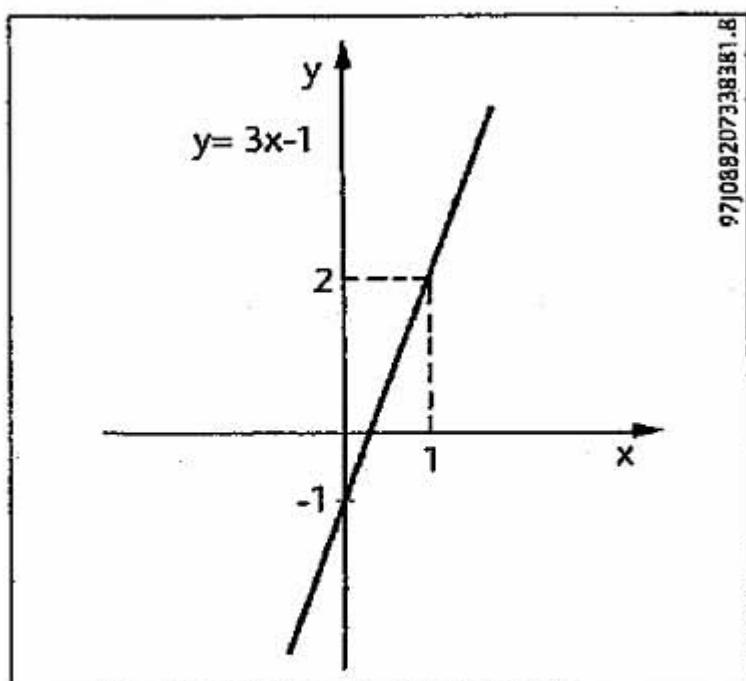


Figura 1.8

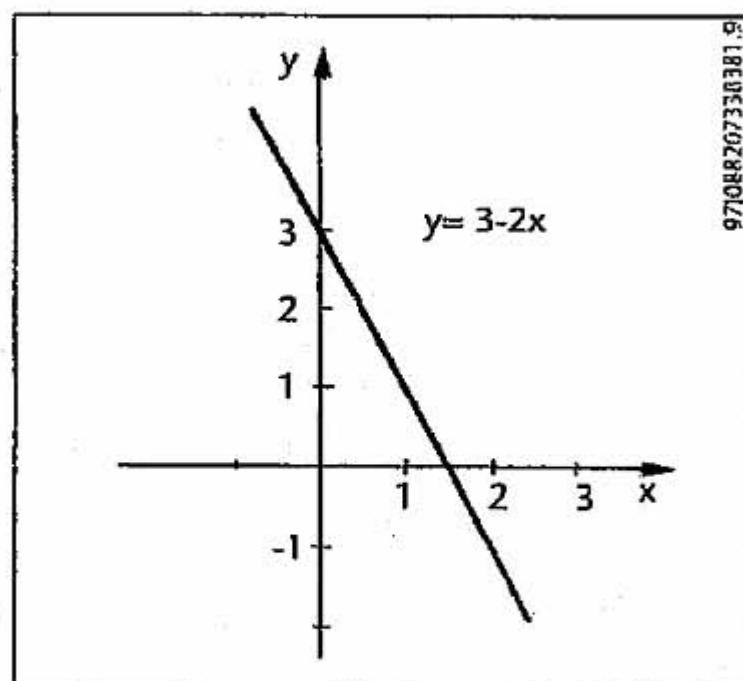


Figura 1.9

Al contrario, se $m = 0$, la funzione costante $f(x) = q$ non stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme \mathbb{R} e l'insieme $B = \{q\}$ costituito dal solo valore $y = q$; perciò la funzione costante $f : \mathbb{R} \rightarrow \{q\}$ non è invertibile.

Dato che per due punti distinti del piano passa una ed una sola retta, per disegnare il grafico di una funzione lineare è sufficiente calcolare l'ordinata y in (8.1) in corrispondenza a due valori distinti della variabile x .

Ad esempio, nel caso della funzione lineare $y = 3x - 1$, ad $x = 0$ corrisponde $y = -1$ e ad $x = 1$ corrisponde $y = 2$; pertanto il grafico è come quello in figura 1.8, ottenuto disegnando la retta passante per i punti di coordinate $(0, -1)$ e $(1, 2)$. Il lettore ritrovi da solo il grafico in figura 1.9 relativo alla funzione lineare $y = 3 - 2x$.

Il *valore assoluto* (o *modulo*) di x , indicato con il simbolo $|x|$, è definito da

$$(8.5) \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ è composto da due semirette per l'origine, di equazione rispettivamente $y = x$ e $y = -x$, come nella figura 1.10.

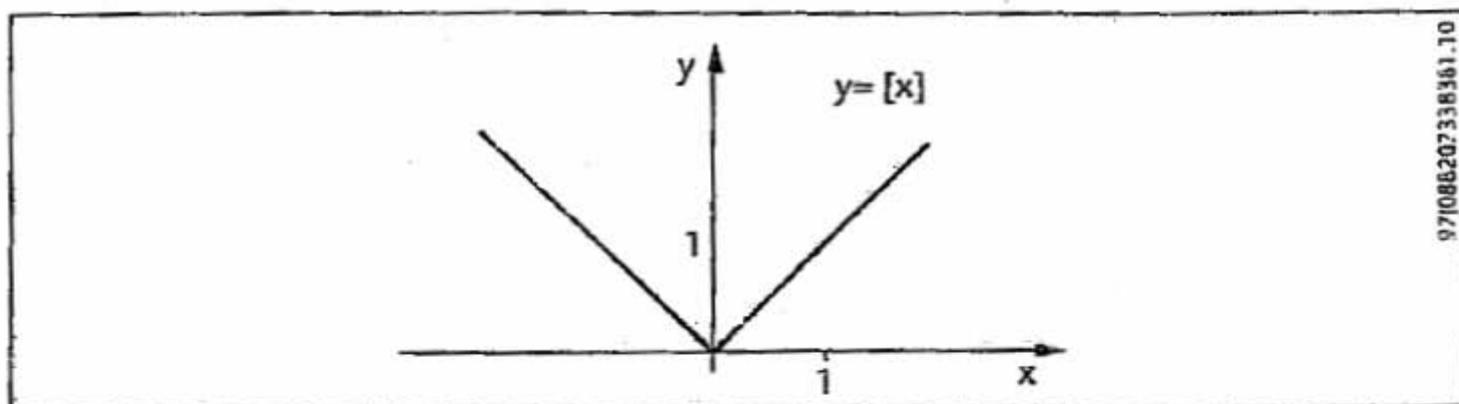


Figura 1.10

Più precisamente il grafico in figura 1.10 della funzione valore assoluto è unione della semiretta di equazione lineare $y = x$, con $x \geq 0$, e della semiretta $y = -x$, con $x < 0$.

Le seguenti proprietà sono diretta conseguenza della definizione (8.5):

$$(8.6) \quad |x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(8.7) \quad |x| = 0 \iff x = 0;$$

$$(8.8) \quad |-x| = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(8.9) \quad |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

$$(8.10) \quad |x_1 / x_2| = |x_1| / |x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0.$$

Dimostriamo ad esempio la (8.6): se $x \geq 0$ allora $|x| = x$ e quindi in questo caso $|x| \geq 0$; se invece $x < 0$, allora $|x| = -x$ e quindi, essendo $-x > 0$, risulta $|x| > 0$; in definitiva $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

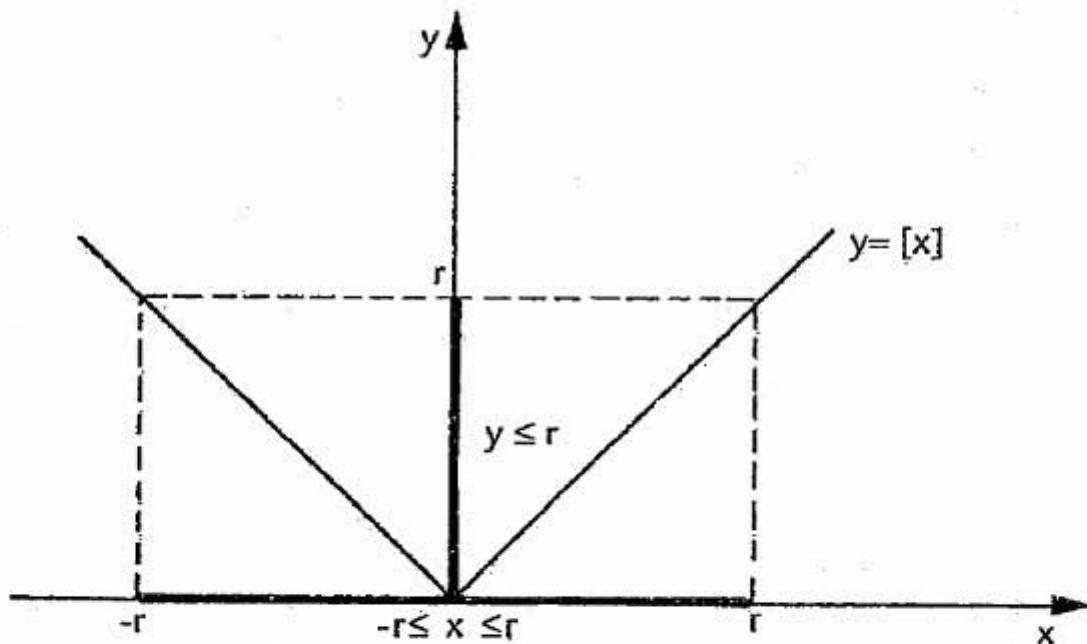
La (8.7) è immediata; le (8.9), (8.10) sono diretta conseguenza della «regola dei segni». Proviamo la (8.8): se $x > 0$ allora $|x| = x$ e $|-x| = -(-x) = x$, dato che $-x < 0$; perciò $|x| = |-x|$ se $x > 0$. Analogamente se $x < 0$ risulta $|x| = -x$ e $|-x| = -x$, essendo $-x > 0$; anche in questo caso $|x| = |-x|$. Infine, se $x = 0$, si ha $-0 = 0$ e pertanto $|-0| = |0|$.

Esaminiamo ora le seguenti proprietà (8.11) e (8.12), la cui interpretazione geometrica è schematizzata in figura 1.11.

PROPOSIZIONE. — *Per ogni numero reale $r \geq 0$ valgono le equivalenze:*

$$(8.11) \quad |x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r;$$

$$(8.12) \quad |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r.$$



9700020733836111

Figura 1.11

Dimostrazione: la verifica delle due equivalenze può procedere allo stesso modo; perciò ci limitiamo a dimostrare la (8.11). In base alla definizione (8.5) del valore assoluto, la relazione $|x| \leq r$ equivale ai due casi:

$$(8.13) \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x \leq r \end{cases}$$

il primo sistema si riscrive nella forma $0 \leq x \leq r$, mentre il secondo equivale a $-r \leq x < 0$. Unendo i due risultati si trova infine $-r \leq x \leq r$.

La seguente proprietà (8.14) del valore assoluto, detta *disuguaglianza triangolare*, è di grande importanza. La spiegazione intuitiva della diseguaglianza è semplice: a secondo membro della (8.14) compare la somma di due numeri *positivi o nulli* (i moduli dei due numeri x_1 e x_2), mentre a primo membro compare il modulo della *somma algebrica* di x_1 e x_2 ; se i segni di x_1 e x_2 sono discordi, il primo membro della (8.14) è minore del secondo membro, mentre se i segni di x_1 e x_2 sono concordi, allora i due membri sono tra loro uguali.

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE. — *Per ogni coppia di numeri reali x_1, x_2 vale la diseguaglianza*

$$(8.14) \quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|.$$

Dimostrazione: per ogni numero reale x la relazione $|x| \leq |x|$ è ovvia (anzi, vale con il segno $=$); indicando con r il secondo membro di tale ovvia relazione, per l'equivalenza (8.11) abbiamo anche $-|x| \leq x \leq |x|$; in particolare, per $x = x_1$ e $x = x_2$:

$$(8.15) \quad -|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|, \quad -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|,$$

e sommando membro a membro:

$$(8.16) \quad -(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq (|x_1| + |x_2|).$$

La conclusione segue da una nuova applicazione dell'equivalenza (8.11) con $r = |x_1| + |x_2|$.

9. Le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo

Consideriamo la funzione *potenza con esponente* $n \in \mathbb{N}$:

$$(9.1) \quad f(x) = x^n,$$

che è definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, moltiplicando il numero x per se stesso n volte. La funzione f è strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

$$(9.2) \quad 0 \leq x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n.$$

Infatti, se $n = 2$ e se $0 \leq x_1 < x_2$, allora moltiplicando prima per x_1 , poi per x_2 , si ottiene $x_1^2 \leq x_1 x_2 < x_2^2$, cioè $x_1^2 < x_2^2$.

Se $n = 3$, partendo da $x_1^2 < x_2^2$ si ottiene $x_1^3 = x_1 x_1^2 < x_1 x_2^2 < x_2 x_2^2 = x_2^3$, e così via se $n > 3$ (si veda anche il paragrafo 11 sul principio di induzione).

Per mezzo del teorema dell'esistenza degli zeri, dimostreremo nel paragrafo 35 che ad ogni $y \geq 0$ corrisponde almeno un numero reale $x \geq 0$ per cui $f(x) = x^n = y$. La condizione di stretta monotonia (9.2) implica, come osservato nel paragrafo 7, che la funzione è invertibile. Perciò è definita la funzione inversa di $f(x) = x^n$ ($x \geq 0$), che si chiama funzione *radice n-sima*, e si indica con

$$(9.3) \quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}, \quad (x \geq 0).$$

I grafici delle funzioni (9.1), per $x \geq 0$, e (9.3) sono come in figura 1.12.

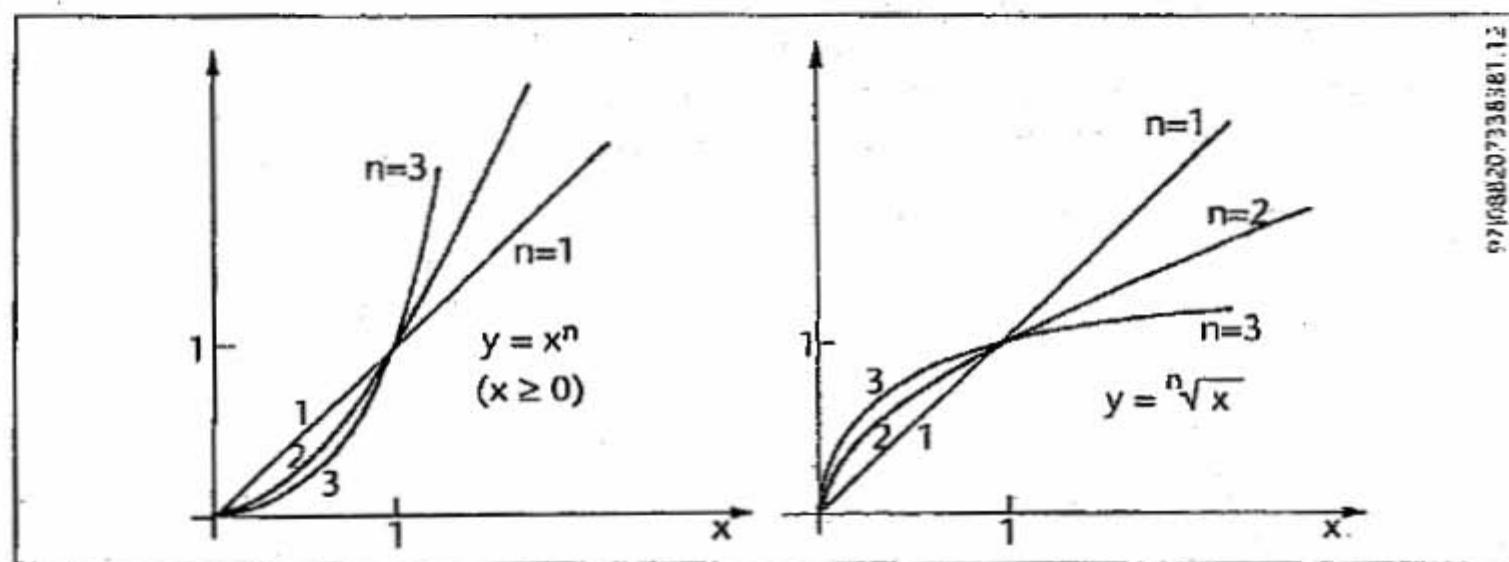


Figura 1.12

Per mezzo delle funzioni (9.1), (9.3) si può definire l'elevazione ad esponente razionale ($m, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$):

$$(9.4) \quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}, \quad x^0 = 1.$$

A questo punto è stato definito il significato di a^b , con a numero reale positivo e b numero razionale. Utilizzando l'assioma di completezza è possibile estendere la definizione di a^b anche se l'esponente b è un numero reale non razionale, come vedremo nel paragrafo 12.

Un'altra definizione equivalente è proposta nel paragrafo 76.

Elenchiamo alcune proprietà:

$$(9.5) \quad a^b \cdot a^c = a^{b+c}; \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c}.$$

$$(9.6) \quad a^b > 0.$$

$$(9.7) \quad a < b, \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a^c < b^c.$$

(9.8) $a < b, c < 0 \Rightarrow a^c > b^c.$

(9.9) $a > 1, b < c \Rightarrow a^b < a^c.$

(9.10) $a < 1, b < c \Rightarrow a^b > a^c.$

Dall'espressione a^b derivano due diversi tipi di funzione, a seconda che si faccia variare la base a o l'esponente b . Nel primo caso consideriamo la *funzione potenza* $f(x) = x^b$, con $b \in \mathbb{R}$ fissato. Nel secondo caso abbiamo la *funzione esponenziale* $f(x) = a^x$, con a numero reale positivo fissato.

Casi particolari della *funzione potenza* $f(x) = x^b$ sono quelli con $b = n \in \mathbb{N}$, oppure $b = 1/n$, già esaminati in precedenza. La funzione potenza, per $x > 0$, in base alla (9.6), è positiva. Inoltre x^b è una funzione strettamente crescente se $b > 0$ e strettamente decrescente se $b < 0$, in base alle (9.7), (9.8). Esempi di grafici nei vari casi sono riportati in figura 1.13.

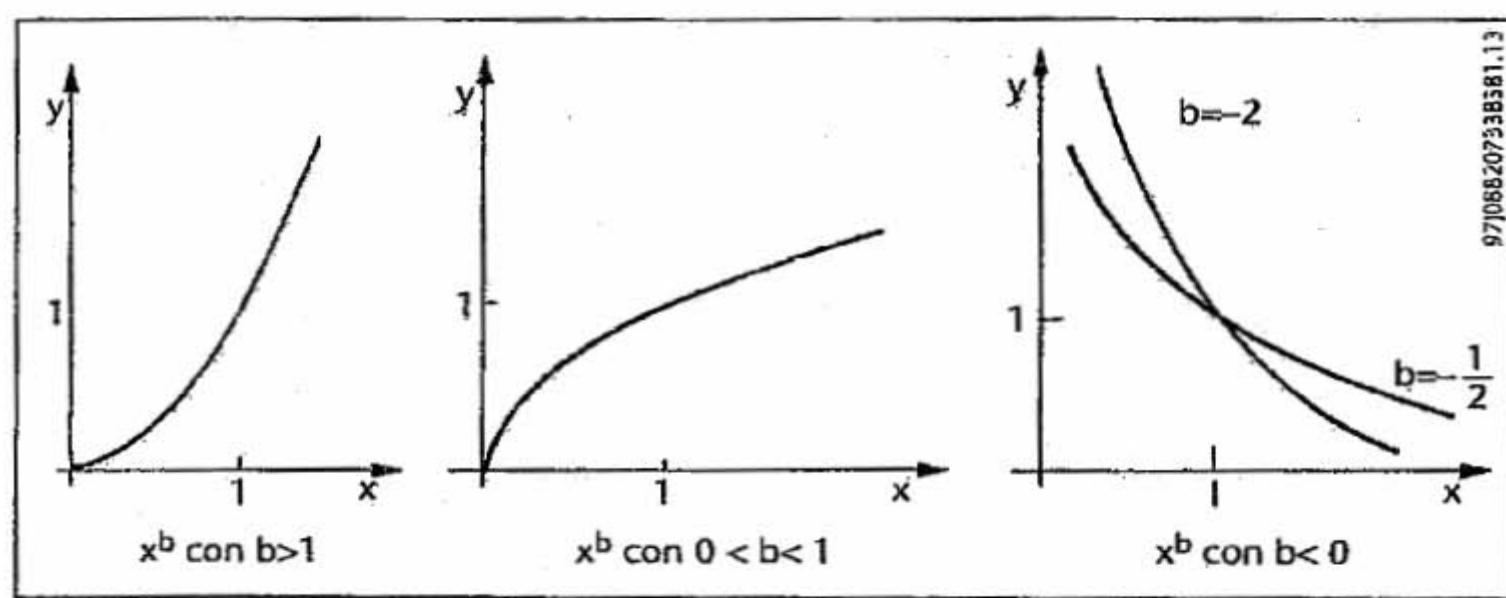


Figura 1.13

La *funzione esponenziale* $f(x) = a^x$, con a numero reale positivo, è una funzione positiva, è strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $a < 1$, in base alle (9.6), (9.9), (9.10).

Esempi di grafici sono riportati in figura 1.14.

Un caso notevolmente importante, e ciò diventerà chiaro nel paragrafo 43 nello studio delle derivate, si ha quando la base è uguale al *numero di Nepero* $e = 2.7\dots$ (definito nel paragrafo 25). In tal caso ovviamente si indica la funzione esponenziale con $f(x) = e^x$; dato che $e > 1$, la funzione e^x è crescente.

Se $a = 1$, la funzione a^x è identicamente uguale a 1. Si dice in tal caso che la funzione è *costante*. Naturalmente una funzione costante non è invertibile. Se invece $a \neq 1$, allora la funzione esponenziale a^x è invertibile. La funzione inversa è definita sui numeri reali positivi (dato che l'immagine

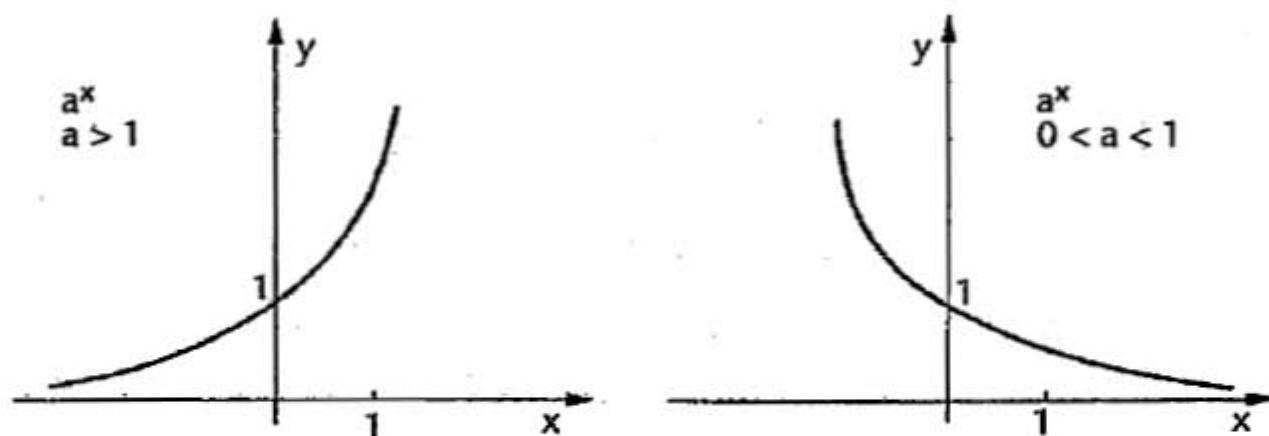


Figura 1.14

della funzione $y = a^x$ è appunto costituita dai numeri reali positivi); si chiama *funzione logaritmo* e si scrive $f(x) = \log_a x$.

Quindi la *funzione logaritmo* è definita da:

$$(9.11) \quad y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Si suole omettere l'indicazione esplicita della base, se tale base è il numero e . Quindi:

$$(9.12) \quad y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.$$

Le formule (9.11), (9.12) sono molto usate anche nella forma seguente:

$$(9.13) \quad a^{\log_a x} = x ; \quad e^{\log x} = x. \quad (x > 0)$$

Se la base è maggiore di 1, come nel caso (9.12), il logaritmo è una funzione strettamente crescente.

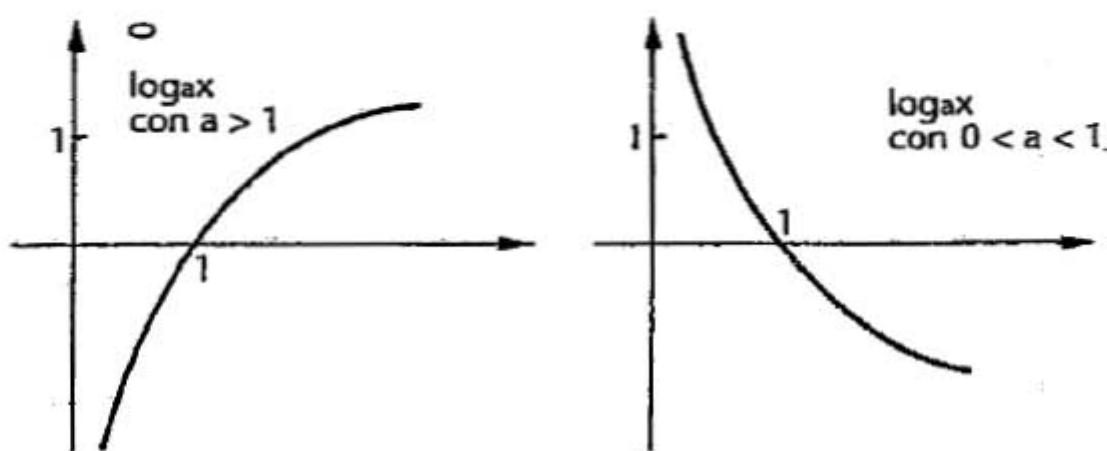


Figura 1.15

Infatti, siano $x_1 < x_2$ e $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$. Se fosse $y_2 < y_1$ per la (9.9) avremmo $x_2 = e^{y_2} < e^{y_1} = x_1$, contrariamente alle ipotesi. Analogamente è assurdo che $y_1 = y_2$, perché avremmo $x_1 = x_2$. Quindi deve risultare $y_1 < y_2$. Con dimostrazione analoga si verifica che il logaritmo è una funzione strettamente decrescente se la base è minore di 1. Esempi di grafici sono riportati in figura 1.15.

Elenchiamo alcune note proprietà dei logaritmi:

$$(9.14) \quad \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \forall x_1, x_2 > 0;$$

$$(9.15) \quad \log_a(x_1 / x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad \forall x_1, x_2 > 0;$$

$$(9.16) \quad \log_a x^b = b \log_a x, \quad \forall x > 0;$$

$$(9.17) \quad \log_b x = \log_a x / \log_a b, \quad \forall x > 0.$$

Dimostrazione: per provare la (9.14) poniamo

$$(9.18) \quad \log_a x_1 = y_1, \quad \log_a x_2 = y_2;$$

in base alla definizione (9.11) risulta

$$(9.19) \quad a^{y_1} = x_1, \quad a^{y_2} = x_2$$

Pertanto

$$(9.20) \quad x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2},$$

che, di nuovo in base alla definizione (9.11), equivale a

$$(9.21) \quad y_1 + y_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2).$$

Ricordando i simboli introdotti all'inizio in (9.18), la (9.21) equivale alla tesi (9.14).

Le altre relazioni (9.15), (9.16) e (9.17) si dimostrano in modo analogo (ed il lettore è invitato ad eseguire i calcoli esplicitamente).

10. Le funzioni trigonometriche

Riportiamo in questo paragrafo un breve riassunto di nozioni di trigonometria, in genere già note al lettore.

Il lettore sa misurare gli angoli in gradi; ad esempio un angolo retto

misura 90° , un angolo piatto 180° , un angolo giro 360° . Per studiare le funzioni trigonometriche è opportuno adottare una diversa unità di misura per gli angoli.

Definiamo la *misura di un angolo piano* espressa in *radiani*. Essa è data dalla *lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio 1* e centro nel vertice dell'angolo *intercettato dalle due semirette individuanti l'angolo* (si veda la figura 1.16).

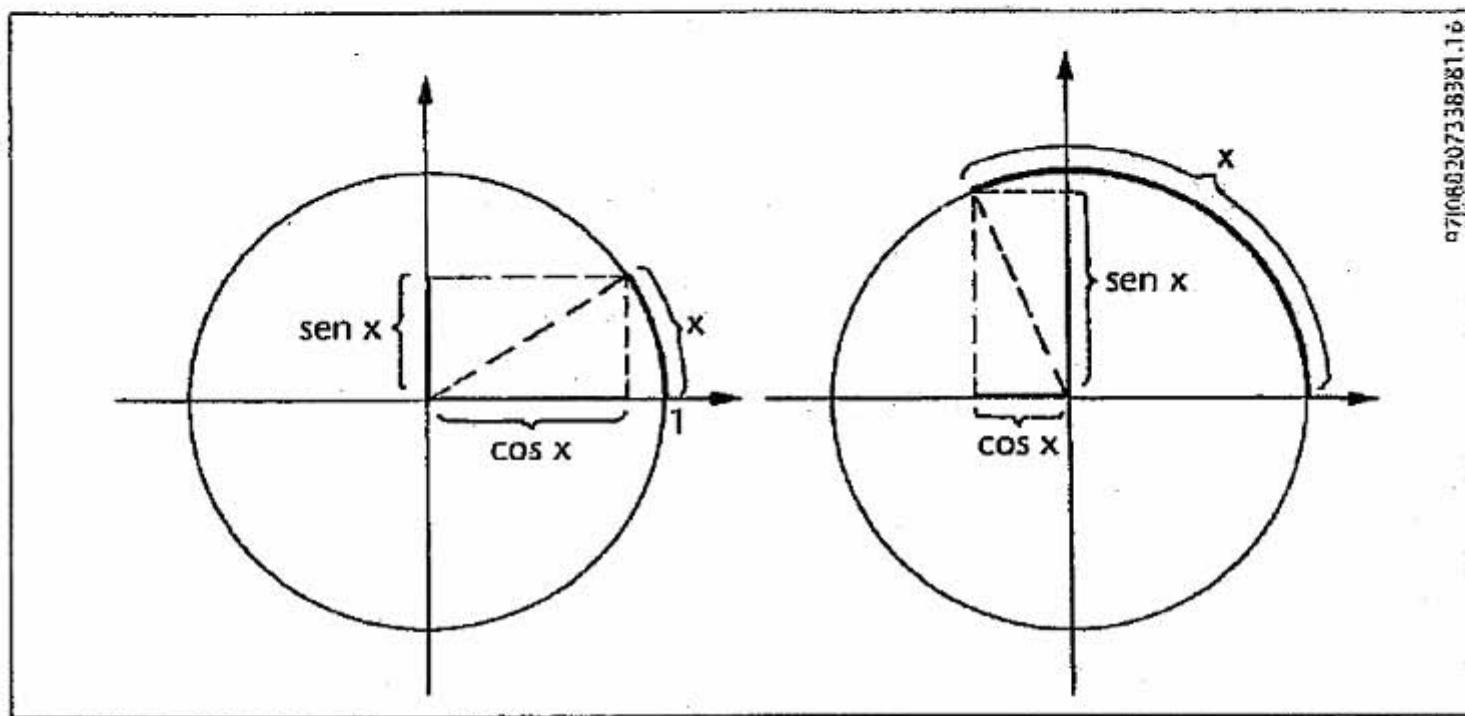


Figura 1.16

Si conviene di denotare con π (*pi greco*) la lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1. Ciò significa che, espresso in radienti, un angolo piatto misura π , un angolo retto misura $\pi/2$, mentre un angolo giro misura 2π (la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 è 2π). Come tutti sanno, un valore numerico approssimato di π è $\pi = 3.14\dots$

Analogamente a quanto si fa per l'ascissa su di una retta, si definisce un'origine ed un verso di rotazione positivo (si suole scegliere il verso antiorario a partire dall'asse delle x) e si considerano in modo naturale anche angoli maggiori di 2π radienti, o angoli minori di zero. Così l'angolo x geometricamente corrisponde all'angolo $x + 2\pi$ ed anche all'angolo $x + 4\pi$, oppure all'angolo $x - 2\pi$, o in generale all'angolo $x + 2k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$ si definiscono rispettivamente come *l'ordinata* e *l'ascissa* del punto che si trova sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e che sottende un angolo orientato di lunghezza x , a partire dall'asse delle ascisse (figura 1.16).

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$ sono definite per ogni $x \in \mathbf{R}$, mentre l'immagine delle due funzioni è compresa tra -1 ed 1 , cioè:

$$(10.1) \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il grafico delle due funzioni è riportato in figura 1.17. Nel paragrafo 49 sarà indicato come ottenere il grafico; per ora il lettore controlli sul grafico il segno delle due funzioni in base alla definizione. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ non sono monotone su \mathbb{R} .

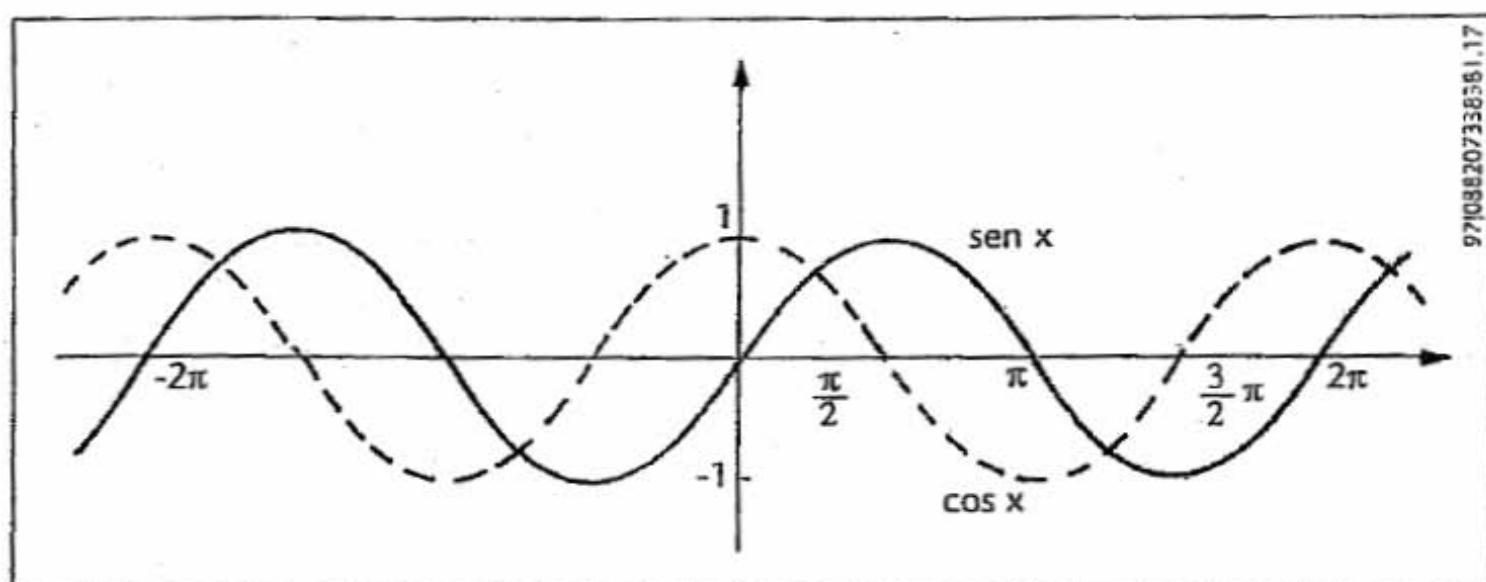


Figura 1.17

Delle numerose relazioni tra queste due funzioni, la più importante è senza dubbio quella che segue dal teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli.

È utile ricordare come si ottiene una dimostrazione del teorema di Pitagora per un triangolo rettangolo con cateti lunghi a , b e ipotenusa lunga c . Si veda la figura 1.18. Il triangolo rettangolo ripetuto più volte in figura 1.18 ha cateti lunghi a , b e angoli α , β , oltre all'angolo retto. Evidentemente $\alpha + \beta = \pi/2$ (perché la somma degli angoli interni del triangolo vale π); ne segue che anche l'angolo γ in figura 1.18 è uguale a $\pi/2$. Perciò il rombo di lato c rappresentato nella parte destra della figura 1.18 è in realtà un quadrato.

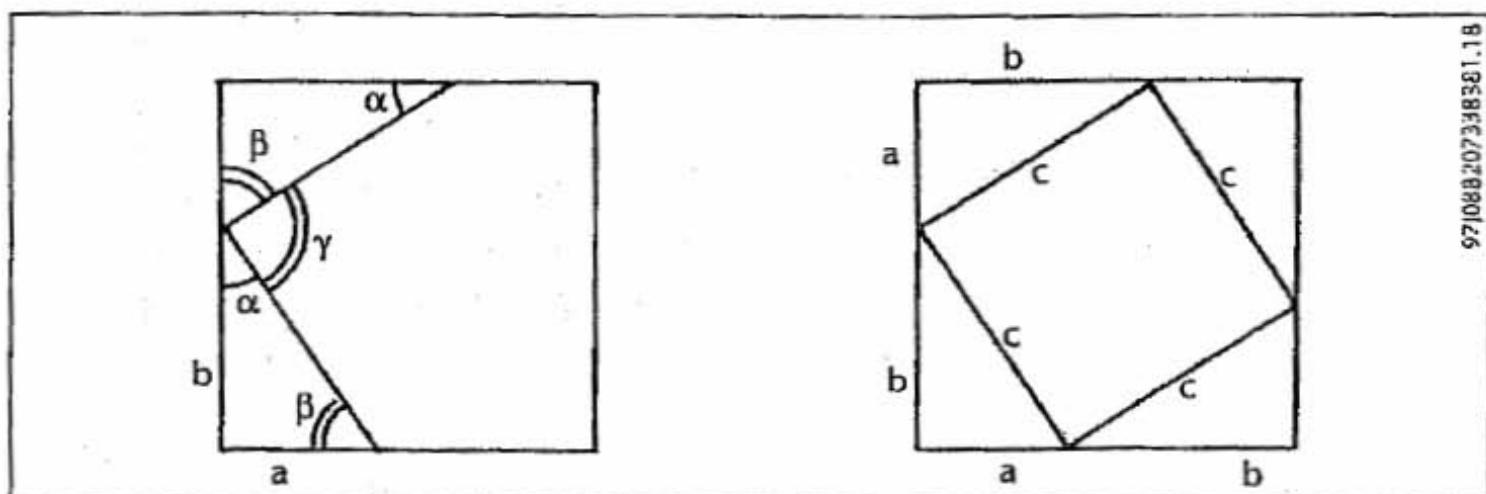


Figura 1.18

L'area del quadrato più grande, di lato $a + b$, vale $(a + b)^2$. Tale area si può ottenere sommando le aree delle figure componenti (quattro triangoli rettangoli di cateti a, b , ed un quadrato di lato c), cioè $4(ab/2) + c^2$. Perciò

$$2ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

da cui il *teorema di Pitagora*:

$$(10.2) \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di cateti $|\sin x|$ e $|\cos x|$ e ipotenusa uguale a 1, si trova la relazione fondamentale

$$(10.3) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

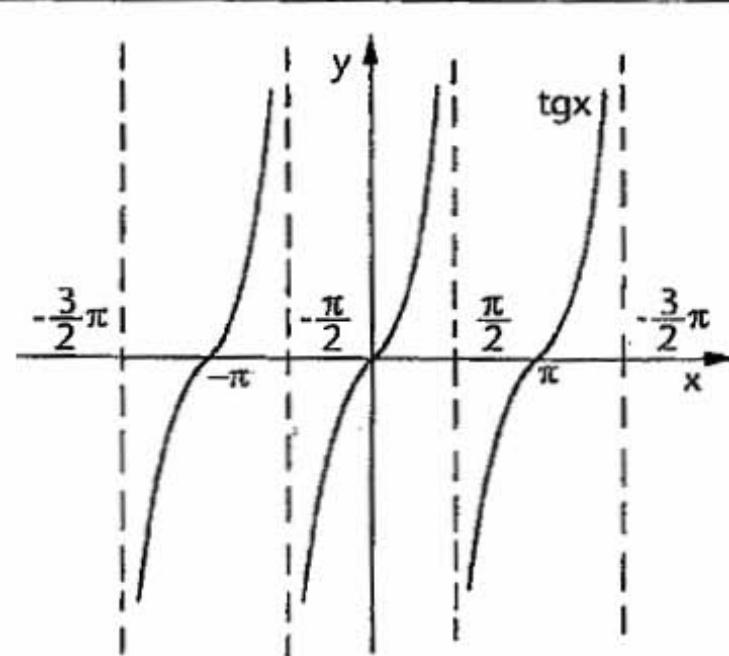
Sono anche importanti le formule di addizione:

$$(10.4) \quad \sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \sin x_2 \cos x_1.$$

$$(10.5) \quad \cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$$

Se nelle identità sopra scritte scegliamo il segno + e poniamo $x_1 = x_2 = x$, otteniamo le formule di duplicazione:

$$(10.6) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$



97060207338361.19

Figura 1.19

$$(10.7) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

A partire dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si definisce la *funzione tangente*

$$(10.8) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

il cui grafico è rappresentato in figura 1.19.

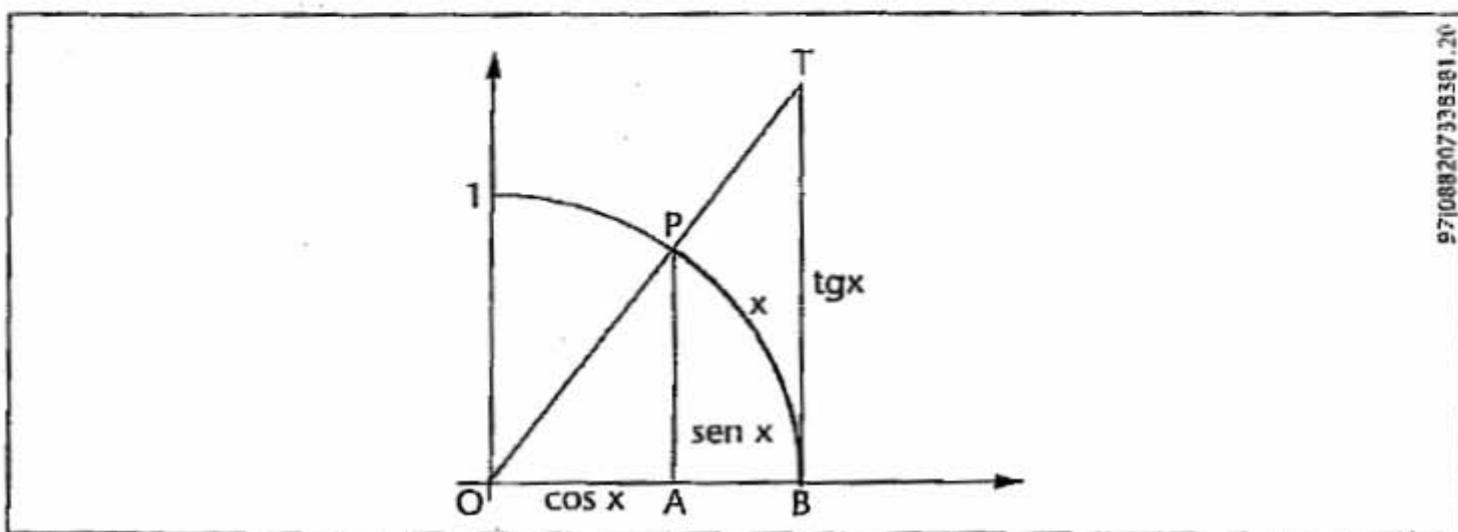


Figura 1.20

La funzione tangente è definita se $\cos x \neq 0$, cioè se $x \neq \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Usando le proprietà dei triangoli simili ($BT = BT/OB = AP/OA$), si vede che la tangente di un angolo x si può rappresentare come in figura 1.20. Dalla figura risulta chiaro che, se $0 < x < \pi/2$ allora valgono le diseguaglianze

$$(10.9) \quad 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Riportiamo una tabella con i valori delle funzioni trigonometriche per alcuni angoli di uso frequente. Il modo con cui ottenere tali valori è indicato negli esercizi.

x radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
x gradi	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	<i>non definita</i>		<i>non definita</i>	

Appendice al capitolo 1

11. Il principio di induzione

Abbiamo utilizzato nel paragrafo 9 la seguente affermazione sulla crescenza della funzione potenza x^n :

$$(11.1) \quad 0 \leq x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vogliamo dimostrare questa proposizione per mezzo del principio di induzione. Supponiamo preliminarmente che essa valga per un certo indice n (ciò che dobbiamo provare è che la (11.1) sia vera per tutti gli n ; qui stiamo supponendo che la (11.1) sia vera per qualche n ; ad esempio, per $n = 1$ la (11.1) è banalmente vera!). Perciò supponiamo che valgano le diseguaglianze $0 \leq x_1 < x_2$, $x_1^n < x_2^n$. Otteniamo:

$$(11.2) \quad x_1^{n+1} = x_1 \cdot x_1^n \leq x_2 \cdot x_1^n < x_2 \cdot x_2^n = x_2^{n+1}.$$

Cioè abbiamo provato che, se vale la (11.1) per un certo indice n , allora essa vale anche per l'indice successivo $n + 1$. Ma allora la (11.1) vale sempre, perché: sappiamo che la proposizione vale per $n = 1$ (lo verifichiamo banalmente); per quanto sopra detta essa vale anche per l'indice successivo, cioè $n = 2$; ancora, sempre per lo stesso motivo la (11.1) vale per il successivo $n = 3$, e così via... Possiamo raggiungere con questo argomento qualsiasi naturale n .

Formuliamo in generale il seguente:

PRINCIPIO DI INDUZIONE. — *Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice $n \in \mathbb{N}$ sia vera per $n = 1$ e che inoltre, supposta vera per n , sia vera anche per il successivo $n + 1$. Allora la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Per chiarire meglio il principio consideriamo altri esempi. Dimostriamo per induzione la formula che esprime la somma dei primi n numeri naturali (questa formula era nota a Gauss dall'età di nove anni!):

$$(11.3) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

La formula è vera per $n = 1$; infatti si ha l'identità $1 = (1 \cdot 2)/2$.

Supponiamo vera la (11.3) e dimostriamo la formula analoga con l'indice $n + 1$ al posto di n . Per ottenere ciò, è naturale sommare ad entrambi i membri il numero $n + 1$:

$$(11.4) \quad \begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto ciò che volevamo; quindi la (11.3) risulta vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Un'altra applicazione del principio di induzione è la seguente:

DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI. — *Per ogni numero reale $x \geq -1$, e per ogni naturale n , risulta*

$$(11.5) \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Dimostrazione: per $n = 1$ la proposizione è vera (con il segno $=$). Supponiamo vera la (11.5) per un numero naturale n , moltiplichiamo entrambi i membri per $1 + x$, che è una quantità maggiore o uguale a zero:

$$(11.6) \quad \begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &\geq (1 + nx)(1 + x) = \\ &= 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la proposizione con $n + 1$ al posto di n . Perciò, in base al principio di induzione, la (11.5) è provata.

Utilizzando il principio di induzione, dimostriamo la formula che esprime la *somma di una progressione geometrica* di ragione $x \neq 1$:

$$(11.7) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \forall x \neq 1.$$

Per $n = 1$, a secondo membro abbiamo

$$(11.8) \quad \frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = 1 + x;$$

quindi la (11.7) è vera per $n = 1$. Supponendo verificata la (11.7), sommiamo ad entrambi i membri il termine x^{n+1} :

$$(11.9) \quad \begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la proposizione con $n + 1$ al posto di n . Quindi, in base al principio di induzione, la formula (11.7) è dimostrata.

Proviamo mediante il principio di induzione una formula, analoga alla (11.3), che verrà utilizzata nel paragrafo 61 introducendo gli integrali definiti:

$$(11.10) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostrazione: la formula (11.10) è vera per $n=1$; risulta infatti

$$(11.11) \quad 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

Supponiamo che (11.10) sia verificata per un indice n e deduciamo da essa la formula analoga con $n+1$ al posto di n . Abbiamo

$$(11.12) \quad \begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] = \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}. \end{aligned}$$

Osservando che la (11.10) con $n+1$ al posto di n , a secondo membro ha l'espressione

$$(11.13) \quad \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

rimane soltanto da osservare che

$$(11.14) \quad (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

che è una relazione soddisfatta, perché, da verifica diretta, risulta $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.

Mostriamo infine che

$$(11.15) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Dimostrazione: da verifica diretta la formula (11.15) è soddisfatta per $n=1$. Supponendo poi che la (11.15) sia verificata per un indice n generico, otteniamo

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\
 (11.16) \quad & = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \\
 & = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},
 \end{aligned}$$

che corrisponde appunto alla (11.15) con $n+1$ al posto di n .

CAPITOLO 2

COMPLEMENTI AI NUMERI REALI

Raccogliamo in questo capitolo alcuni complementi ai numeri reali. Introduciamo l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali, il calcolo combinatorio ed i numeri complessi.

Il concetto di estremo superiore, introdotto nel seguente paragrafo 12, è fondamentale per la trattazione della maggior parte dei teoremi di esistenza dell'Analisi Matematica, come ad esempio per la dimostrazione del teorema sulle successioni monotone del paragrafo 24, o per altri teoremi di esistenza (Bolzano-Weierstrass, Weierstrass, ecc.).

12. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali. Il *massimo* di A , se esiste, è un numero M dell'insieme A che è maggiore od uguale ad ogni altro elemento dell'insieme. In simboli:

$$(12.1) \quad \begin{array}{l} M \text{ massimo di } A \\ (M = \max A) \end{array} \iff \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A; \\ M \in A. \end{cases}$$

Analogamente, il *minimo* di un insieme di numeri reali A , se esiste, è un numero m dell'insieme A che è minore od uguale ad ogni altro elemento di A . In simboli:

$$(12.2) \quad \begin{array}{l} m \text{ minimo di } A \\ (m = \min A) \end{array} \iff \begin{cases} m \leq a, \forall a \in A; \\ m \in A. \end{cases}$$

Non tutti gli insiemi di numeri reali hanno il massimo ed il minimo. Ad esempio, se A è costituito da tutti i numeri reali positivi, A non ha né massimo, né minimo (non esiste il più piccolo numero reale positivo; ad esempio, lo zero non è il minimo, perché non appartiene ad A).

Si verifica facilmente che quando esistono, *il massimo o il minimo sono unici*. Infatti, se M_1 e M_2 sono due massimi di un insieme A , allora per definizione

$$M_1 \geq a, \quad M_2 \geq a, \quad \forall a \in A;$$

ma dato che M_1 ed M_2 sono elementi di A , posto a rispettivamente uguale a M_2 ed a M_1 nelle relazioni precedenti, si ottiene $M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1$, cioè $M_1 = M_2$.

Un numero reale L si dice un *maggiorante* per un insieme A se $L \geq a$ per ogni $a \in A$. Analogamente un numero reale ℓ è un *minorante* di A , se $\ell \leq a$ per ogni $a \in A$.

È bene notare esplicitamente che un insieme A non sempre ammette maggioranti o minoranti. Se A è di nuovo l'insieme dei numeri reali positivi, A non ammette alcun maggiorante, mentre lo zero (ed anche qualsiasi numero reale negativo) è un minorante di A .

Diciamo che A è *limitato superiormente* se ammette un maggiorante. A è *limitato inferiormente* se ammette un minorante. Infine si dice *limitato* un insieme che è limitato sia superiormente che inferiormente. In simboli (\exists si legge esistono):

$$(12.3) \quad A \text{ limitato} \iff \exists \ell, L \in \mathbf{R}: \ell \leq a \leq L, \forall a \in A.$$

Tenendo presente la definizione (8.5) della funzione valore assoluto, si riconosce facilmente che:

PROPOSIZIONE. — *Un insieme A è limitato se e soltanto se esiste un numero positivo M tale che*

$$(12.4) \quad |a| \leq M, \quad \forall a \in A.$$

Dimostrazione: se per ipotesi vale la (12.4), allora, dalla proprietà (8.11) relativa al valore assoluto si ottiene

$$(12.5) \quad -M \leq a \leq M, \quad \forall a \in A,$$

e quindi vale la (12.3) con $\ell = -M$ e $L = M$. Viceversa, se vale la (12.3), allora vale anche la (12.4) (o equivalentemente la (12.5)) con $M = \max\{|\ell|, |L|\}$, perché:

$$(12.6) \quad -M \leq -|\ell| \leq \ell \leq a \leq L \leq |L| \leq M, \quad \forall a \in A.$$

Il risultato che segue, alla base della definizione di estremo superiore, è conseguenza dell'*assioma di completezza* (2.11) per i numeri reali.

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE. —

Supponiamo che A sia un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.

Infatti, indichiamo con B l'insieme costituito dai maggioranti di A. B è non vuoto, perché A è limitato superiormente. Applichiamo l'assioma di completezza (2.11) ai due insiemi A, B. Esiste un numero reale M tale che

$$(12.7) \quad a \leq M \leq b, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Dato che M è maggiore od uguale a tutti gli elementi di A, M è un maggiorante di A; cioè $M \in B$. Inoltre M è minore od uguale a tutti gli elementi di B. Quindi, in base alla definizione (12.2), M è il minimo di B.

In base al teorema precedente, poniamo la seguente

DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE. — *Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente. Diciamo che $M \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A se M è il minimo dei maggioranti di A.*

Ciò equivale a dire che M è un maggiorante, e che ogni numero più piccolo di M, diciamo $M - \varepsilon$ con ε positivo, non è un maggiorante; cioè $M - \varepsilon$ è minore di qualche elemento dell'insieme A. In simboli (\exists si legge esiste):

$$(12.8) \quad \begin{array}{l} M \text{ estremo superiore di } A \\ (M = \sup A) \end{array} \iff \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A; \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: M - \varepsilon < a. \end{cases}$$

Analogamente, si verifica che se A è un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo. In tali condizioni, si dice che un numero m è l'estremo inferiore di A se m è il massimo dei minoranti di A. Ciò equivale a:

$$(12.9) \quad \begin{array}{l} m \text{ estremo inferiore di } A \\ (m = \inf A) \end{array} \iff \begin{cases} m \leq a, \forall a \in A; \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: m + \varepsilon > a. \end{cases}$$

Quindi, se un insieme è limitato superiormente esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale.

È utile introdurre i simboli $+\infty$, $-\infty$ per descrivere gli insiemi non limitati. Precisamente, sia A un insieme non vuoto. L'estremo superiore di A è $+\infty$ se A non è limitato superiormente; l'estremo inferiore di A è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente. In simboli:

$$(12.10) \quad \sup A = +\infty \iff \forall L, \exists a \in A: a > L.$$

$$(12.11) \quad \inf A = -\infty \iff \forall l, \exists a \in A: a < l.$$

Nelle relazioni sopra scritte ci si può limitare a considerare $L > 0$ e $l < 0$.

Facendo uso dei simboli $+\infty$ e $-\infty$ si può quindi affermare che *ogni insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che estremo inferiore*. Se l'insieme è limitato superiormente allora l'estremo superiore è finito; se l'insieme è limitato inferiormente allora l'estremo inferiore è finito.

Diamo ora alcuni esempi; se $A = \{x \in \mathbf{R}: x > 0\}$, allora

$$(12.12) \quad \sup A = +\infty, \quad \inf A = 0$$

ed il massimo e minimo di A non esistono. Se $B = \{(n-1)/n: n \in \mathbf{N}\}$ (l'insieme B è schematizzato in figura 2.1), risulta

$$(12.13) \quad \sup B = 1, \quad \inf B = \min B = 0.$$

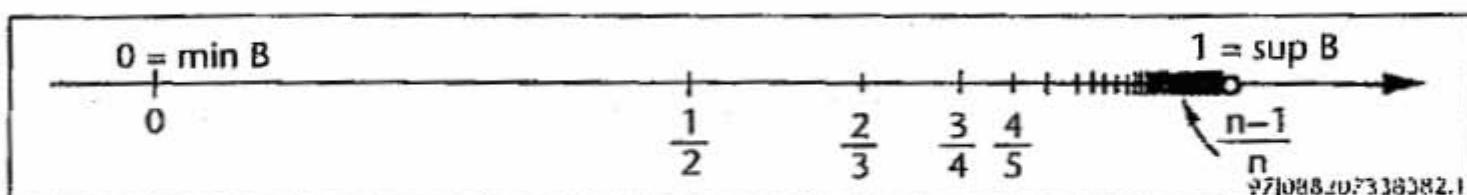


Figura 2.1

Se infine $C = \{(n+1)/n: n \in \mathbf{N}\}$ (si veda la figura 2.2), si trova

$$(12.14) \quad \sup C = \max C = 2, \quad \inf C = 1.$$

Siano A e B due sottoinsiemi di \mathbf{R} e f una funzione da A verso B . Per ogni sottoinsieme X di A , l'estremo inferiore (risp. l'estremo superiore) dell'insieme $f(X)$ si chiama *estremo inferiore* (risp. *superiore*) di f su X . Si pone inoltre

$$(12.15) \quad \inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X), \quad \sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X).$$

Se poi $f(X)$ è limitato inferiormente (risp. superiormente) si dice che la funzione f è *limitata inferiormente* (risp. *superiormente*) su X .

Se infine $f(X)$ è un insieme limitato, si dice che f è *limitata* su X .

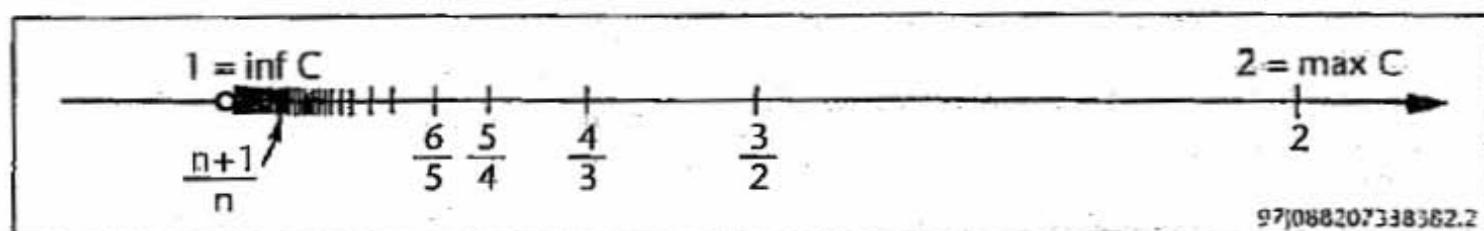


Figura 2.2

Alla luce delle nozioni introdotte nel presente paragrafo riportiamo di seguito alcune proprietà dell'insieme dei numeri naturali e dell'insieme dei numeri razionali.

Nell'insieme \mathbf{R} dei numeri reali, a partire dall'elemento 1, si possono determinare gli elementi $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ e così via. Tali elementi costituiscono l'*insieme dei numeri naturali* di \mathbf{R} , cioè l'insieme $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ i cui elementi sono ordinati secondo le relazioni $1 < 2 < 3 < \dots$

L'insieme \mathbf{N} gode di due proprietà caratteristiche:

- 1) *Ogni parte non vuota di \mathbf{N} è dotata di minimo;*
- 2) *ogni parte non vuota di \mathbf{N} , superiormente limitata, è dotata di massimo.*

Tenendo conto di tali proprietà si può dimostrare la seguente

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE – *Per ogni $x \in \mathbf{R}$, esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $n > x$.*

Dimostrazione: se la proprietà di Archimede fosse falsa, l'insieme dei numeri reali sarebbe limitato superiormente e quindi, per l'assioma di completezza, dotato di estremo superiore $M \in \mathbf{R}$. In particolare, per ogni numero naturale n di \mathbf{R} sarebbe $n \leq M$. Poiché anche $n + 1$ è un numero naturale, risulterebbe $n + 1 \leq M$, cioè $n \leq M - 1$, per ogni $n \in \mathbf{N}$, il che è assurdo perché $M - 1$ sarebbe un maggiorante di \mathbf{N} , contrariamente al fatto che M è il più piccolo dei maggioranti.

In altre parole, la proprietà di Archimede afferma che l'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali non è limitato superiormente.

Dalla proprietà di Archimede si ricava che l'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali di \mathbf{R} , cioè l'insieme dei numeri del tipo m/n con $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}$ è

denso in \mathbf{R} , vale a dire, per definizione, che per ogni coppia a, b di numeri reali con $a < b$, esiste un numero razionale compreso fra a e b .

DENSITÀ DEI NUMERI RAZIONALI. – *L'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali è denso in \mathbf{R} .*

Dimostrazione: si deve provare che, per ogni coppia a, b di numeri reali con $a < b$, esiste un numero razionale x tale che $a < x < b$. Supposto $a > 0$, sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $n > 1/(b-a)$; per cui risulterà $nb - na > 1$. Detto m il più piccolo numero naturale tale che $na < m$; si avrà $m-1 \leq na < m$ e anche $na < m = (m-1) + 1 \leq na + 1 < na + (nb-na) = nb$. Dalle diseguaglianze $na < m < nb$ segue l'assetto. Il caso $a < 0 < b$ essendo ovvio, resta da esaminare quello in cui $a < 0$ e $b \leq 0$, che si riconduce al primo, ragionando sulla coppia $-b, -a$.

Concludiamo il paragrafo soffermandoci sulla funzione esponenziale.

Nel paragrafo 9 abbiamo definito il significato di a^b con a numero reale positivo e b numero razionale. Inoltre, dalle (9.9), (9.10) segue che la funzione esponenziale su \mathbf{Q}

$$(12.16) \quad f : x \in \mathbf{Q} \rightarrow a^x \in \mathbf{R}^+$$

è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

Allo scopo di definire la *funzione esponenziale* su \mathbf{R} , proviamo il seguente:

LEMMA DI DENSITÀ – *Il codominio $f(\mathbf{Q})$ della funzione f è denso in \mathbf{R}^+ .*

Dimostrazione: verifichiamo che, per ogni coppia α, β di numeri reali positivi, con $\alpha < \beta$, esiste $y \in \mathbf{Q}$ tale che $\alpha < a^y < \beta$.

Limitiamoci al caso $a > 1$, $1 \leq \alpha < \beta$, in quanto gli altri si trattano analogamente. Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $(\beta/\alpha)^n > a$ e sia m il massimo intero tale che $a^m \leq \alpha^n$. Si ha

$$(12.17) \quad \alpha^n < a^{m+1} < \beta^n,$$

in quanto risulta $\beta^n > a \cdot \alpha^n \geq a \cdot a^m$. Dalla (12.17) segue l'asserto con $y = \frac{m+1}{n}$.

Dal lemma precedente si ricavano facilmente le formule

$$(12.18) \quad a^x = \sup_{y < x} a^y \quad (a > 1)$$

$$(12.19) \quad a^x = \sup_{y > x} a^y \quad (0 < a < 1)$$

Tali formule suggeriscono di definire la *funzione esponenziale ad esponente x reale qualsiasi* nel modo seguente:

$$(12.20) \quad a^x = \sup \{a^y : y \in \mathbb{Q}, y < x\}, \quad \text{se } a > 1$$

$$(12.21) \quad a^x = \sup \{a^y : y \in \mathbb{Q}, y > x\}, \quad \text{se } 0 < a < 1.$$

Si può dimostrare il seguente

TEOREMA. — Per $a > 1$ (risp. $0 < a < 1$) la funzione esponenziale è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) da \mathbb{R} su \mathbb{R}^+ .

13. Calcolo combinatorio

Sia A un insieme costituito da n elementi:

$$(13.1) \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Sia k un numero naturale minore od uguale ad n . Una *disposizione* di k elementi tra gli n dati è un sottoinsieme ordinato di A che ha k elementi; consideriamo distinte due disposizioni se differiscono o per gli elementi, oppure solo per l'ordine di tali elementi.

NUMERO DI DISPOSIZIONI. — Il numero delle disposizioni di k elementi tra gli n dati è

$$(13.2) \quad n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1);$$

cioè è il prodotto di k numeri interi decrescenti a partire da n .

Così ad esempio il numero delle disposizioni di 2 elementi su 3 dati è $3 \cdot 2 = 6$. Infatti, se consideriamo l'insieme $\{a_1, a_2, a_3\}$, tutte le disposizioni possibili con 2 elementi sono:

$$(13.3) \quad \begin{aligned} &\{a_1, a_2\}; \{a_2, a_1\}; \{a_1, a_3\}; \\ &\{a_3, a_1\}; \{a_2, a_3\}; \{a_3, a_2\}. \end{aligned}$$

Per dimostrare la proposizione precedente, esaminiamo un possibile modo di formare una disposizione di k elementi dall'insieme (13.1). Pos-

siamo scegliere il primo elemento da n dati. Invece è possibile scegliere il secondo elemento solo tra gli $(n - 1)$ elementi rimasti dopo fatta la prima scelta. Quindi, se $k = 2$, il numero delle disposizioni è $n(n - 1)$. Se $k > 2$, si procede allo stesso modo, cioè si sceglie il terzo elemento tra gli $(n - 2)$ rimasti. Quindi, se $k = 3$, il numero delle disposizioni è $n(n - 1)(n - 2)$. E così via, se $k > 3$.

Una disposizione di n elementi tra gli n dati ($k = n$) si chiama *permutazione* degli n elementi. Ponendo $k = n$ nella proposizione precedente, si ottiene che il numero delle permutazioni di n elementi è:

$$(13.4) \quad n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 2 \cdot 1 ;$$

il simbolo $n!$, che indica il prodotto dei primi n numeri naturali, si legge «*n fattoriale*».

Tenendo conto del simbolo di fattoriale sopra introdotto, si riconosce che il numero di disposizioni di k elementi tra n dati si può anche scrivere:

$$(13.5) \quad n(n - 1) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} ;$$

Una *combinazione* di k ($\leq n$) elementi tra n dati è un sottoinsieme (non ordinato) di k elementi; consideriamo uguali due combinazioni che hanno gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine.

NUMERO DI COMBINAZIONI. — Il numero delle combinazioni di k elementi tra n dati è

$$(13.6) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! k!}$$

Prima di passare alla dimostrazione osserviamo che il simbolo a primo membro della (13.6) si legge «*n su k*», ed è chiamato *coefficiente binomiale*. È utile dare un significato a tali espressioni anche per $k = 0$ e $k = n$ nel modo seguente:

$$(13.7) \quad 0! = 1, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! 0!} = 1.$$

Direttamente delle definizioni (13.6), (13.7) segue l'identità

$$(13.8) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Ritornando all'esempio di un insieme con 3 elementi $\{a_1, a_2, a_3\}$, si hanno $3!/(1! 2!) = 3$ combinazioni con due elementi, che sono:

$$(13.9) \quad \{a_1, a_2\}; \{a_1, a_3\}; \{a_2, a_3\}.$$

La proposizione precedente si dimostra osservando che il numero delle combinazioni è inferiore (se $k > 1$) al numero delle disposizioni, e che ad ogni combinazione con k elementi corrispondono tutte le disposizioni che si ottengono permutando tra loro i k elementi. Quindi ad ogni combinazione corrispondono $k!$ disposizioni. Il numero totale delle combinazioni è ottenuto dal numero (13.2), oppure da (13.5), che esprime il numero di disposizioni di k elementi tra n dati, diviso per $k!$.

14. Il binomio di Newton

Una importante applicazione (che peraltro è anche conseguenza del principio di induzione, come mostrato nella seconda parte del paragrafo) dei risultati del paragrafo precedente è costituita dalla

FORMULA DEL BINOMIO (DI NEWTON). — *Per ogni coppia di numeri reali a, b vale l'identità*

$$(14.1) \quad \begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n. \end{aligned}$$

Infatti, immaginiamo di eseguire il seguente prodotto di n fattori:

$$(14.2) \quad (a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b);$$

il risultato del prodotto si scrive come somma algebrica di molti addendi. Fissiamo la nostra attenzione sull'addendo del tipo $a^{n-k} b^k$. Eseguendo la moltiplicazione indicata, si ottiene tale addendo tante volte quante è possibile scegliere k fattori uguali a b dagli n dati. Cioè n su k .

La formula del binomio (14.1) in particolare fornisce dei risultati di facile verifica per $r = 2$ e $n = 3$: infatti, per tali valori di n si ottengono le ben note relazioni:

$$(14.3) \quad \binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1,$$

da cui $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$$(14.4) \quad \binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1, \quad \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3,$$

da cui $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Le considerazioni che seguono sono utili per sviluppare esplicitamente il secondo membro della formula del binomio (14.1) per valori di n più grandi di 3:

LEMMA. — *Per ogni coppia di numeri naturali n, k vale la formula*

$$(14.5) \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Infatti, dalla definizione (13.6) otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} = \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \\
 (14.6) \quad &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \\
 &= \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

La proprietà (14.5) del lemma precedente permette di scrivere il seguente *triangolo di Tartaglia* (noto anche come *triangolo di Pascal*), dove *ogni coefficiente è uguale alla somma dei coefficienti più vicini della riga precedente*:

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

Quindi ad esempio risulta

$$(14.7) \quad (a + b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5.$$

Di seguito esponiamo un'ulteriore dimostrazione della formula del binomio con il metodo di induzione.

Dimostrazione per induzione della (14.1): cominciamo con l'osservare che la formula del binomio (14.1) è verificata per $n = 1$; infatti:

$$(14.8) \quad (a + b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b.$$

Secondo l'ipotesi di induzione supponiamo vera la (14.1) per un indice $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamo la validità della formula analoga con $n + 1$ al posto di n ; a tal fine moltiplichiamo entrambi i membri della (14.1) per $(a + b)$, ottenendo

$$(14.9) \quad \begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \dots + a b^n + \\ &+ a^n b + \dots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + 1 \right] a^n b + \dots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k + \dots \\ &\dots + \left[1 + \binom{n}{n-1} \right] a b^n + b^{n+1} = a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] a^n b + \dots \\ &\dots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k + \dots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \right] a b^n + b^{n+1}; \end{aligned}$$

tenendo conto che, per la (14.5), risulta

$$(14.10) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

si ottiene infine la conclusione

$$(14.11) \quad \begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots \\ &\dots + \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}. \end{aligned}$$

Appendice al capitolo 2

15. I numeri complessi

Consideriamo una generica equazione di secondo grado nell'incognita z :

$$(15.1) \quad az^2 + bz + c = 0,$$

che ha come soluzioni (reali, se $b^2 - 4ac \geq 0$):

$$(15.2) \quad \left. \begin{array}{l} z_2 \\ z_1 \end{array} \right\} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

I coefficienti a, b, c sono legati alle soluzioni z_1, z_2 anche dalle semplici relazioni, che si verificano immediatamente:

$$(15.3) \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}.$$

Proviamo a scrivere tali relazioni nel caso dell'equazione:

$$(15.4) \quad z^2 + 1 = 0;$$

in tal caso le (15.3) diventano

$$(15.5) \quad z_1 + z_2 = 0; \quad z_1 \cdot z_2 = 1.$$

Le relazioni (15.5), anche se formalmente ben definite, non hanno alcun senso nell'ambito dei numeri reali, perché non esistono z_1, z_2 soluzioni *reali* della equazione (15.4). Questo esempio mostra come tavolta sia utile pensare che qualsiasi equazione di secondo grado ammetta soluzione. Dato che ciò non vale nell'ambito dei numeri reali \mathbf{R} , si estende \mathbf{R} introducendo il campo \mathbf{C} dei *numeri complessi*.

Consideriamo ancora l'esempio (15.4). Formalmente l'equazione (15.4) ha soluzioni

$$(15.6) \quad z = \pm \sqrt{-1}.$$

Definiamo il numero complesso $i = \sqrt{-1}$. Si dice che i è l'*unità immaginaria*. Risulta per definizione:

$$(15.7) \quad i^2 = -1.$$

L'insieme dei numeri complessi si rappresenta in *forma algebrica*

$$(15.8) \quad \mathbf{C} = \{z = x + iy: \quad x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Si dice che x è la *parte reale* ed y è il coefficiente della *parte immaginaria* del numero complesso z .

Le operazioni sui numeri complessi si eseguono con le stesse regole dei numeri reali, tenendo anche conto della (15.7). Quindi:

$$(15.9) \quad (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y');$$

$$(15.10) \quad \begin{aligned} (x + iy) \cdot (x' + iy') &= xx' + ixy' + ix'y + i^2 yy' = \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y). \end{aligned}$$

Il numero complesso $\bar{z} = x - iy$ si chiama *compleSSO coniugato* del numero $z = x + iy$. Dato che risulta

$$(15.11) \quad z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

il coniugato è particolarmente utile nel calcolo del quoziente di due numeri complessi; infatti:

$$(15.12) \quad \begin{aligned} \frac{x' + iy'}{x + iy} &= \frac{(x' + iy')(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} - i \frac{x'y - xy'}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Come si vede dal conto precedente, la divisione tra due numeri complessi è possibile purché il denominatore $z = z + iy$ sia diverso da zero, cioè purché non risulti contemporaneamente $x = 0, y = 0$.

È utile la rappresentazione cartesiana dei numeri complessi, che si ottiene facendo corrispondere ad ogni numero complesso $z = x + iy$ il punto P di coordinate (x, y) , come in figura 2.3.

Un punto P del piano può essere individuato anche dalla distanza ρ dal centro 0 degli assi, e dall'angolo ϑ che il segmento OP forma con l'asse delle x, come in figura 2.3. Dal teorema di Pitagora si deduce che

$$(15.13) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

l'angolo ϑ è legato alla parte reale x ed al coefficiente dell'immaginario y, dalle formule

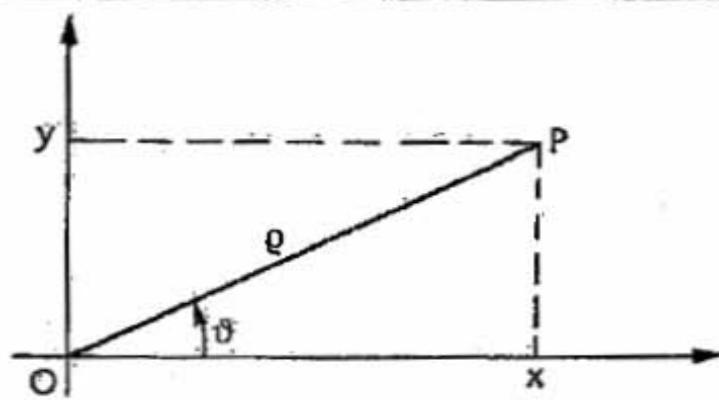


Figura 2.3

$$(15.14) \quad \cos \vartheta = \frac{x}{\rho} \quad ; \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\rho}$$

Si dice che ρ è il *modulo* del numero complesso $z = x + iy$, mentre ϑ , misurato in radianti, è l'*argomento*. Naturalmente ϑ è definito a meno di multipli di 2π . Tenendo conto delle relazioni tra ρ , ϑ e x, y, possiamo scrivere il numero complesso $z = x + iy$ in *forma trigonometrica*

$$(15.15) \quad z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

È particolarmente semplice scrivere il prodotto ed il quoziente di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica. A tale scopo, consideriamo due numeri complessi z, z' nella forma:

$$(15.16) \quad z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta); \quad z' = \rho' (\cos \vartheta' + i \sin \vartheta').$$

Tenendo conto delle formule di addizione (10.4), (10.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \cdot \rho' (\cos \vartheta' + i \sin \vartheta') = \\ (15.17) \quad &= \rho \rho' \{(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta') + i(\sin \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta' \cos \vartheta)\} = \\ &= \rho \rho' [\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')]. \end{aligned}$$

Cioè il prodotto tra due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli, e per argomento la somma degli argomenti.

Per il quoziente si ottiene la formula analoga:

$$\begin{aligned} z/z' &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)/[\rho' (\cos \vartheta' + i \sin \vartheta')] = \\ &= \frac{\rho}{\rho'} \frac{(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \vartheta' - i \sin \vartheta')}{(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta')(\cos \vartheta' - i \sin \vartheta')} = \\ (15.18) \quad &= \frac{\rho}{\rho'} \frac{(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta') + i(\sin \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta' \cos \vartheta)}{\cos^2 \vartheta - i^2 \sin^2 \vartheta} = \\ &= \frac{\rho}{\rho'} [\cos(\vartheta - \vartheta') + i \sin(\vartheta - \vartheta')]. \end{aligned}$$

Dalla formula (15.17) per il prodotto, si deduce la forma trigonometrica della potenza z^n con esponente $n \in \mathbb{N}$

$$(15.19) \quad z^n = [\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = \rho^n (\cos n \vartheta + i \sin n \vartheta).$$

Un numero complesso z' è la radice n -sima di z se risulta $(z')^n = z$. Quindi se z, z' sono rappresentati in forma trigonometrica dalla (15.16)

come in precedenza, deve risultare

$$(15.20) \quad \begin{aligned} (z')^n &= (\varrho')^n [\cos(n\vartheta') + i \sin(n\vartheta')] = \\ &= z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \\ &= \varrho [\cos(\vartheta + 2k\pi) + i \sin(\vartheta + 2k\pi)], \end{aligned}$$

qualunque sia $k \in \mathbf{Z}$. Otteniamo quindi:

$$(15.21) \quad \varrho' = \sqrt[n]{\varrho}; \quad \vartheta' = (\vartheta + 2k\pi)/n, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

In particolare il modulo di una radice n-sima è uguale alla radice n-sima del modulo. Si riconosce anche che la (15.21) fornisce n valori distinti dell'argomento ϑ' . Quindi se $z \neq 0$, esistono n radici n-esime distinte del numero complesso z.

Ad esempio, calcoliamo le radici quadrate del numero complesso $z = i$. In forma trigonometrica i ha modulo uguale ad 1, ed argomento uguale a $\pi/2$. Quindi in base alla (15.21), le due radici quadrate di $z = i$ hanno modulo uguale ad 1, ed argomento uguale a

$$(15.22) \quad \vartheta'_1 = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad \vartheta'_2 = \frac{\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{5}{4}\pi.$$

In corrispondenza si ottiene:

$$(15.23) \quad z'_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad z'_2 = 1 \left(\cos \left(\frac{5}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{4}\pi \right) \right).$$

Quindi le due radici quadrate di i sono:

$$(15.24) \quad \sqrt{i} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i).$$

Segnaliamo una notazione *di tipo esponenziale* per i numeri complessi. Posto

$$(15.25) \quad \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta},$$

un numero complesso $z = \varrho (\cos \theta + i \sin \theta)$ si potrà rappresentare nella forma

$$(15.26) \quad z = \varrho e^{i\theta}.$$

In tal modo la (15.17) si riscrive come

$$(15.27) \quad z \cdot z' = \varrho e^{i\theta} \cdot \varrho' e^{i\theta'} = \varrho \cdot \varrho' e^{i(\theta+\theta')}$$

e la potenza n-sima di $z' = \varrho' e^{i\theta'}$, come

$$(15.28) \quad (z')^n = (\varrho')^n e^{in\theta'}.$$

Se $z' = \varrho' e^{i\theta'}$ è una radice n-sima di $z = \varrho e^{i\theta}$, sarà $(\varrho')^n e^{in\theta'} = \varrho e^{i\theta}$
perciò $\varrho' = \sqrt[n]{\varrho}$, $\cos n\theta' = \cos\theta$ e $\sin n\theta' = \sin\theta$. Ne seguono le (15.21).

CAPITOLO 3

LIMITI DI SUCCESSIONI

16. Premessa

Uno dei problemi che affronteremo nel capitolo sugli integrali sarà il calcolo delle aree di figure piane. Tale calcolo fa uso in modo essenziale del concetto di limite. Per mostrare ciò, consideriamo un metodo per il calcolo dell'area di un cerchio, simile al metodo che Archimede usò nel III secolo a.C.

Si tratta di «approssimare» un cerchio di raggio 1 (potremmo scegliere anche un diverso valore per il raggio) con figure che «differiscono di poco» dal cerchio, e di cui sia possibile calcolare l'area. Nel capitolo sugli integrali vedremo che è comodo considerare, come figure approssimatori, unioni di rettangoli. Qui, per ogni $n \geq 3$ consideriamo P_n , un poligono regolare di n lati inscritto al cerchio di raggio 1. Cioè, per $n = 3$ consideriamo un triangolo equilatero ($= P_3$) inscritto al cerchio, per $n = 4$ un quadrato ($= P_4$), e così via (figura 3.1).

Agli n lati del poligono P_n corrispondono n angoli al centro uguali fra loro, che sono l' n -sima parte dell'angolo giro e che quindi misurano $2\pi/n$ radianti. Quindi l'angolo α indicato in figura vale $\alpha = \pi/n$ radianti. Dato che i cateti del triangolo rettangolo in figura misurano $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$, la sua area vale $(\sin \alpha \cos \alpha)/2$. Per ottenere l'area del poligono P_n occorre moltiplicare l'ultimo risultato per il numero dei triangoli rettangoli in cui è scomposto P_n . Tale numero è $2n$. Quindi l'area di P_n , che indichiamo con a_n , vale:

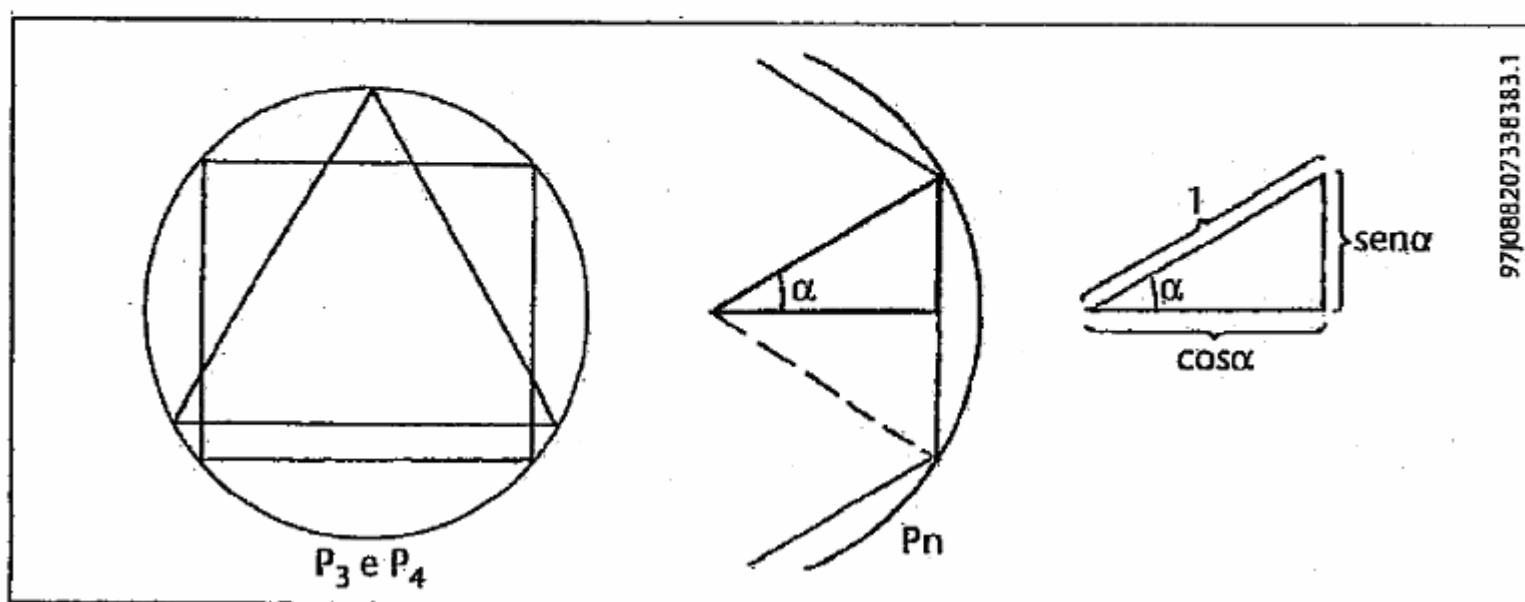


Figura 3.1

$$(16.1) \quad a_n = \text{area } (P_n) = 2n \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Usando le formule di duplicazione (10.6) e ricordando il valore di α otteniamo

$$(16.2) \quad a_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

Riportiamo a_n per alcuni valori di n ; il lettore controlli i primi valori, fino ad $n = 12$, usando la tabella del paragrafo 10.

n	3	4	6	8	12	20	50	100	200
a_n	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	2	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{2}$	3	3.09	3.133	3.139	3.1410

Come ci aspettiamo, per n grande i valori di a_n si avvicinano a $\pi = 3.14159265...$ Archimede, partendo dall'esagono e raddoppiando per 4 volte il numero dei lati, considerò un poligono regolare con 96 lati e riuscì a calcolare le prime due cifre decimali di π .

Alla fine del paragrafo 23 dimostreremo, tramite la (16.2), che l'area di un cerchio di raggio 1 vale π . Però la (16.2) non è utile per il calcolo numerico di π , perché π entra nella definizione stessa di a_n . Qui desideriamo sottolineare lo schema del procedimento: abbiamo introdotto una *successione* di numeri reali

$$(16.3) \quad a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n, \dots$$

Di tale successione ci interessa il comportamento per n grande. Infatti il numero a_n rappresenta l'area del poligono regolare di n lati inscritto al cerchio, ed è tanto più vicino all'obiettivo area del cerchio, quanto più n è grande. Se avesse un senso, diremmo che ci interessa «l'ultimo» termine della successione a_n ; però ciò non ha senso perché non esiste l'ultimo termine della successione.

Ciò che realmente ci interessa è il *limite* della successione a_n , cioè un numero $a \in \mathbb{R}$ che sia «vicino» ai termini della successione che hanno l'indice n «grande». Ciò si esprime più precisamente così: a , limite della successione a_n , è un numero reale tale che comunque si scelga un intervallo di numeri intorno ad a , diciamo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, allora esiste un indice v tale che, per $n > v$, a_n sta in questo intervallo, cioè $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Abbiamo rappresentato in figura 3.2 tre casi per diversi valori di ε ; se si cambia ε con un numero minore, l'indice v in genere aumenta. L'impor-

tante è che comunque si fissi $\varepsilon > 0$, in corrispondenza esiste un indice v con le proprietà suddette.

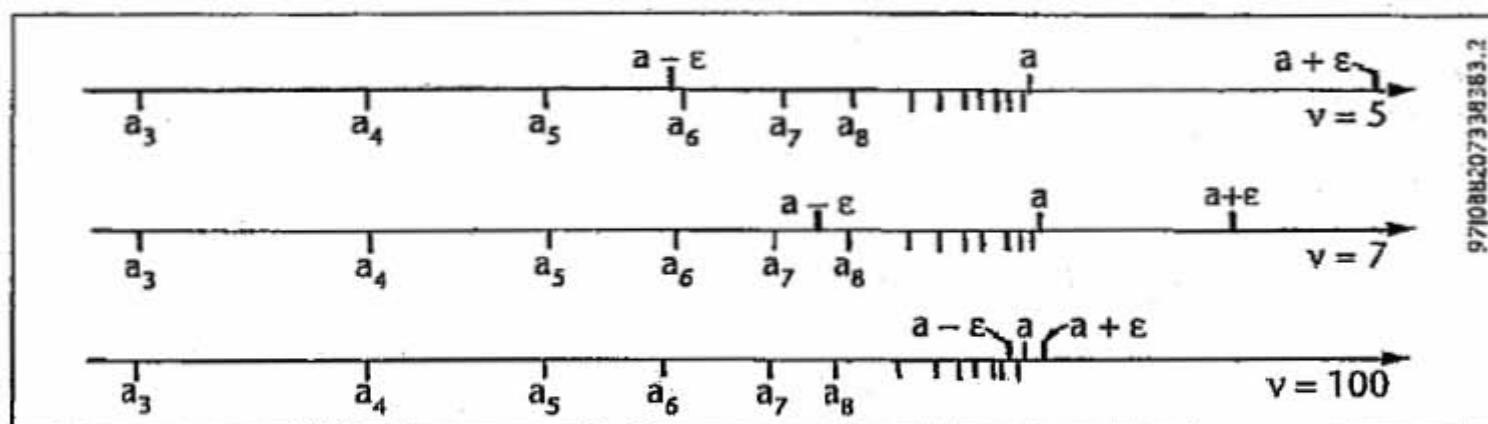


Figura 3.2

L'intervallo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ considerato in precedenza è definito, in formula, da

$$(16.4) \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\},$$

è detto *intorno* del numero a , di raggio ε .

Nel paragrafo seguente diamo la definizione di limite di successione e consideriamo alcuni esempi.

17. Definizioni e prime proprietà

Una *successione* è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n . Ricordando la definizione di funzione (paragrafo 6) si può dire che *una successione è una funzione da \mathbf{N} in \mathbf{R}* . Indichiamo una successione con il simbolo (a_n) , o più semplicemente con a_n , o per esteso con

$$(17.1) \quad a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

Parleremo allo stesso modo di successione anche se non sono definiti i termini a_n per i primi indici n , cioè per un numero finito di indici n , come nel caso considerato nel paragrafo precedente, dove era $n \geq 3$. Esempi di successioni sono:

$$(17.2) \quad a_n = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$(17.3) \quad a_n = \frac{n-1}{n} \quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

$$(17.4) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

$$(17.5) \quad a_n = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$(17.6) \quad a_n = n^2 \quad 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

DEFINIZIONE — Un numero reale a è il limite della successione a_n (si dice anche che a_n tende o converge ad a), e si scrive

$$(17.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad (\text{oppure} \quad a_n \rightarrow a),$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero v tale che $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ per ogni $n > v$.

La relazione $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ si può anche scrivere $- \varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, e ciò equivale a (proprietà (8.12)):

$$(17.8) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Quindi possiamo ripetere la definizione precedente in simboli (\exists si legge esiste):

$$(17.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists v: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > v.$$

Osserviamo, perché ci sarà utile nel seguito, che la (17.9) è equivalente a

$$(17.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff \exists c > 0: \forall \varepsilon > 0, \exists v: |a_n - a| < c\varepsilon, \forall n > v;$$

infatti dalla (17.10) si riottiene la (17.9) cambiando ε con ε/c .

Usando la definizione, verifichiamo che

$$(17.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Risulta $|a_n - a| = |1/n| = 1/n$. Dato che $1/n < \varepsilon$ equivale a $n > 1/\varepsilon$, basta scegliere $v = 1/\varepsilon$. Cioè abbiamo verificato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $v = 1/\varepsilon$ per cui $|a_n - a| = 1/n < \varepsilon$ per ogni $n > v$.

Verifichiamo ora che

$$(17.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Risulta

$$(17.13) \quad |a_n - a| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} ;$$

In questo esempio si vede l'importanza di considerare il valore assoluto di $a_n - a$; si trova $|a_n - a| = 1/n$ e poi si procede come nel caso precedente.

Naturalmente non abbiamo scelto a caso i valori, $a = 0$ e $a = 1$ nei due esempi precedenti. Proviamo a vedere che succede se invece tentassimo di dimostrare che

$$(17.14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1 !$$

Avremmo $|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 1 \right| = 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon$, cioè $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$.

Questa relazione non crea problemi se ε è grande, ad esempio se $\varepsilon = 1$ è verificata da ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma se ε è più piccolo, ad esempio se $\varepsilon = 1/2$, allora $1/n > 1/2$ è verificata solo se $n < 2$. Cioè solo a_1 verifica la relazione data, e non a_n con $n > v$. Ciò prova che $a = 1$ non è il limite della successione $1/n$.

Con un argomento simile verifichiamo la

UNICITÀ DEL LIMITE. — *Una successione convergente non può avere due limiti distinti.*

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti, cioè supponiamo che $a_n \rightarrow a$, $a_n \rightarrow b$, con $a \neq b$. Poniamo $\varepsilon = |a - b|/2 (> 0)$. Si ha

$$(17.15) \quad \exists v_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > v_1 ; \quad \exists v_2 : |a_n - b| < \varepsilon, \forall n > v_2 .$$

Ponendo $v = \max \{v_1, v_2\}$, le relazioni sopra scritte valgono contemporaneamente e si ha (utilizzando la diseguaglianza triangolare $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ del paragrafo 8)

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq \\ (17.16) \quad &\leq |a - a_n| + |a_n - b| = \\ &= |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|. \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato che $|a - b| < |a - b|$, che è assurdo.

Esaminiamo ora le successioni (17.4), (17.5). Si ha che

$$(17.17) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0;$$

infatti $|a_n - a| = |(-1)^n/n| = 1/n$; poi si procede come fatto per il limite (17.11).

Invece il limite

$$(17.18) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \quad \text{non esiste.}$$

Infatti, supponiamo per assurdo che esista $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$. Se $a \geq 0$, consideriamo $|a_n - a|$ con n dispari. Allora $a_n = -1$ e quindi $|a_n - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq 1$. Perciò, se $a < 1$, non risulta mai $|a_n - a| < \varepsilon$ per n dispari. Si procede in modo analogo per il caso $a \leq 0$ prendendo i termini con indice n pari.

Infine la successione (17.6) tende a $+\infty$ secondo la definizione seguente.

DEFINIZIONE. — Una successione a_n ha limite uguale $a + \infty$ (si dice anche che a_n tende o diverge a $+\infty$) e si scrive

$$(17.19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad (\text{oppure } a_n \rightarrow +\infty).$$

se, qualunque sia $M > 0$, esiste un numero v tale che $a_n > M$, per ogni $n > v$.

Si dà una definizione analoga nel caso di limite uguale $a - \infty$. Ad esempio, la successione $a_n = -n^2$ tende a $-\infty$. In simboli scriveremo le due definizioni nel modo seguente:

$$(17.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0, \exists v: a_n > M, \quad \forall n > v;$$

$$(17.21) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0, \exists v: a_n < -M, \quad \forall n > v.$$

Come già detto, una successione si dice *convergente* se ammette limite finito, mentre si dice *divergente* se ammette limite uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Le successioni convergenti o divergenti si dicono *regolari*, mentre le successioni che non ammettono limite si dicono *non regolari*.

Infine, una successione che converge a zero si dice *infinitesima*, mentre una successione divergente si dice anche *infinita*.

18. Successioni limitate

Abbiamo detto nel paragrafo precedente che una successione si dice *regolare* se ammette limite (finito o infinito). Invece una successione a_n si dice *limitata* se esiste un numero reale M tale che

$$(18.1) \quad |a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o (equivalentemente, in base alla proposizione (8.11)):

$$(18.2) \quad -M \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si noti il legame con la definizione (12.3) di insieme limitato (si veda anche la (12.4)).

Il lettore provi a verificare per esercizio che le successioni (17.2), (17.3), (17.4), (17.5) sono limitate, mentre la successione (17.6) non lo è; ad esempio, la successione (17.4) è limitata dalla costante $M = 1$, infatti:

$$(18.3) \quad |a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esistono successioni limitate non regolari, cioè successioni limitate che non ammettono limite; un esempio è fornito dalla successione (17.5) definita da

$$(18.4) \quad a_n = (-1)^n,$$

che è limitata (perché $|a_n| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) ma che, come dimostrato in (17.18), non ammette limite.

Viceversa, ogni successione che ammette limite finito è limitata, come mostrato dal seguente:

TEOREMA. — *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione: supponiamo che a_n converga ad a e scegliamo $\varepsilon = 1$. In base alla definizione di limite (si veda la (17.9)) esiste un indice v per cui $|a_n - a| < 1$ per ogni $n > v$. Quindi, utilizzando la diseguaglianza triangolare (8.14),

$$(18.5) \quad |a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|, \quad \forall n > v.$$

Ma allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$(18.6) \quad |a_n| \leq M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_v|, 1 + |a|\}$$

19. Operazioni con i limiti

Valgono le seguenti regole di calcolo:

OPERAZIONI CON I LIMITI. — Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$(19.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

$$(19.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = ab.$$

$$(19.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{se } b_n, b \neq 0).$$

Dimostriamo la (19.1) con il segno $+$: per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$(19.4) \quad \exists v_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > v_1; \quad \exists v_2 : |b_n - b| < \varepsilon, \forall n > v_2$$

Ponendo $v = \max \{v_1, v_2\}$, per ogni $n > v$ si ha

$$(19.5) \quad |(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

La prova è completa. Si noti che abbiamo usato la diseguaglianza triangolare (8.14) e la definizione di limite nella forma (17.10). Il lettore dimostrerà la (19.1) con il segno $-$.

Dimostriamo la formula (19.2) relativa al limite di un prodotto con due metodi: il primo dei quali non fa uso del concetto di successione limitata.

Dimostrazione della (19.2) (*primo metodo*): utilizziamo l'identità

$$(19.6) \quad \begin{aligned} a_n b_n - ab &= (a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n - 2ab = \\ &= (a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b). \end{aligned}$$

Nell'ipotesi (25.4) risulta quindi

$$(19.7) \quad \begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n - a| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| + \\ &\quad + |a| \cdot |b_n - b| < \varepsilon^2 + \varepsilon |b| + |a| \varepsilon \end{aligned}$$

per ogni $n > v = \max \{v_1, v_2\}$.

Dimostrazione della (19.2) (*secondo metodo*): per il teorema del paragrafo precedente la successione a_n è limitata, cioè esiste un numero reale $M (> 0)$ tale che

$$(19.8) \quad |a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dall'ipotesi (19.4), per ogni $n > v = \max \{v_1, v_2\}$ si ottiene

$$(19.9) \quad \begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = \\ &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < \\ &< M\varepsilon + |b| \varepsilon = (M + |b|) \varepsilon. \end{aligned}$$

La prova che il limite di un quoziente è uguale al quoziente dei limiti è simile alla prova della relazione per il limite di un prodotto.

Esaminiamo due esempi di applicazione delle operazioni con i limiti. Avendo già verificato che la successione $1/n$ converge a zero per $n \rightarrow +\infty$, dal limite del prodotto (19.2) con $a_n = b_n = 1/n$ si deduce che

$$(19.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

e, iterando il procedimento,

$$(19.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-b} = 0, \quad \forall b \in \mathbb{N}.$$

Mediante le operazioni con i limiti si calcola, ad esempio, il seguente limite, dividendo

numeratore e denominatore per n^2 :

$$(19.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n - 4}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 5/n - 4/n^2}{3 + 1/n^2} = \frac{1}{3}.$$

20. Forme indeterminate

Si prova che valgono le operazioni con limiti infiniti nei casi seguenti ($a \in \mathbb{R}$):

$$(20.1) \quad a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \pm \infty$$

$$(20.2) \quad a_n \rightarrow \pm \infty, \quad b_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \pm \infty$$

$$(20.3) \quad a_n \rightarrow a \neq 0, \quad b_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow |a_n b_n| \rightarrow +\infty$$

$$(20.4) \quad a_n \rightarrow \pm \infty, \quad b_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow |a_n b_n| \rightarrow +\infty$$

$$(20.5) \quad a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow a_n / b_n \rightarrow 0$$

$$(20.6) \quad a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow |b_n / a_n| \rightarrow +\infty$$

$$(20.7) \quad a_n \rightarrow a \neq 0, \quad b_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n / b_n| \rightarrow +\infty$$

Risultano esclusi dalla tabella alcuni casi che schematizziamo nelle forme seguenti, dette *forme indeterminate*:

$$(20.8) \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty/\infty, \quad 0/0.$$

Altre forme indeterminate sono date nella (25.9). Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa semplicemente che occorre preliminarmente eseguire trasformazioni, o semplificazioni, per togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Ad esempio, le successioni seguenti esprimono forme indeterminate:

$$(20.9) \quad (n+1)^2 - (n-1)^2; \quad \frac{1}{n^2} \cdot (n+1); \quad \frac{n-1}{n}; \quad \frac{1/n^2}{1/n}.$$

La prima di tali successioni è una forma $+\infty - \infty$. Però svolgendo i quadrati si trova che la successione vale $4n$ e quindi tende a $+\infty$. La seconda successione è una forma $0 \cdot \infty$, ma si può anche scrivere $1/n + 1/n^2$, che tende a zero. La terza successione è una forma ∞/∞ , ma già sappiamo che tende a 1. La quarta successione è del tipo $0/0$, ma semplificando si trova $1/n \rightarrow 0$.

21. Teoremi di confronto

Studiamo in questo paragrafo alcune relazioni tra limiti e ordinamento.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. — Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, esiste un numero v tale che $a_n > 0$ per ogni $n > v$.

Prima di proporre la dimostrazione del teorema della permanenza del segno sottolineiamo che, se una successione a_n converge ad un numero reale positivo a , non si può affermare in generale che tutti i termini della successione a_n sono positivi.

Ad esempio, in analogia con la (17.3), la successione $a_n = (n - 7)/n$ converge al numero 1 per $n \rightarrow +\infty$, però i primi termini della successione (a_1, a_2, \dots , fino ad a_6) sono negativi; il numero v , nella tesi del teorema della permanenza del segno, in questo caso è uguale a 7.

Dimostrazione: dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = a/2$. Esiste quindi un numero v per cui $|a_n - a| < a/2$ per ogni $n > v$. Ciò equivale $a - a/2 < a_n - a < a/2$. In particolare abbiamo

$$(21.1) \quad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \quad \forall n > v.$$

COROLLARIO. — Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, e se $a_n \geq 0$ per ogni n , allora anche $a \geq 0$.

Dimostrazione: se per assurdo fosse $a < 0$, il teorema della permanenza del segno, applicato alla successione $-a_n$, comporterebbe che $a_n < 0$ per n grande.

COROLLARIO. — Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, e se $a_n \geq b_n$ per ogni n , allora $a \geq b$.

Per ottenere la dimostrazione di quest'ultimo corollario, basta applicare il corollario precedente alla successione $a_n - b_n$.

Possiamo schematizzare i risultati ottenuti nel modo seguente (si noti la differenza tra i segni $>$ e \geq):

$$(21.2) \quad a_n \rightarrow a, \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists v: a_n > 0, \quad \forall n > v;$$

$$(21.3) \quad a_n \rightarrow a, \quad a_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a \geq 0;$$

$$(21.4) \quad a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b, \quad a_n \geq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a \geq b.$$

TEOREMA DEI CARABINIERI. — Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che

$$(21.5) \quad a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$, allora anche la successione c_n è convergente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$.

Dimostrazione: per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$

$$(21.6) \quad \exists v_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > v_1; \quad \exists v_2 : |b_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > v_2.$$

Ricordiamo che le disuguaglianze con il valore assoluto si possono anche scrivere.

$$(21.7) \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon; \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

Quindi, se $n > v = \max [v_1, v_2]$, risulta

$$(21.8) \quad a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$

Perciò $|c_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > v$, come volevasi dimostrare.

Valgono analoghi teoremi di confronto anche per i limiti infiniti:

$$(21.9) \quad a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$$

$$(21.10) \quad a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n \rightarrow -\infty.$$

Dimostriamo la (21.9) (la prova della (21.10) è analoga): per ipotesi $a_n \rightarrow +\infty$ che, per la definizione di limite (17.20), significa:

$$(21.11) \quad \forall M > 0, \exists v : a_n > M, \quad \forall n > v.$$

Dato che $b_n \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene la tesi

$$(21.12) \quad b_n \geq a_n > M, \quad \forall n > v.$$

22. Altre proprietà dei limiti di successioni

Riportiamo in questo paragrafo due ulteriori proprietà dei limiti di successioni; in particolare la seconda, enunciata sotto forma di teorema, è importante per le applicazioni.

PROPOSIZIONE. — a_n converge a zero se e soltanto se $|a_n|$ converge a zero.

Dimostrazione: posta $b_n = |a_n|$, in base alla definizione (17.9) b_n converge a zero se e solo se

$$(22.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n : |b_n| < \varepsilon, \quad \forall n > n.$$

Dato che

$$(22.2) \quad |b_n| = ||a_n|| = |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

la (22.1) è equivalente alla convergenza a zero della successione a_n .

Si noti che, nella proposizione precedente, è importante considerare non solo successioni convergenti, ma più in particolare successioni *convergenti a zero*. Ad esempio, se $a_n = (-1)^n$, allora a_n non è convergente, mentre $b_n = |a_n|$ è la successione costante $b_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, che ovviamente converge ad 1.

Ricordiamo che una successione a_n è *limitata* se esiste un numero $M > 0$ tale che

$$(22.3) \quad |a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ricordiamo inoltre che una successione che converge a zero si dice *infinitesima*.

TEOREMA DEL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA. — Se a_n è una successione limitata e b_n è una successione che converge a zero; allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

Dimostrazione (*primo metodo*) per l'ipotesi (22.3) si ha

$$(22.4) \quad |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che, per la proprietà (8.11) del valore assoluto, equivale a

$$(22.5) \quad -M \cdot |b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M \cdot |b_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dato che per ipotesi $b_n \rightarrow 0$; per la proposizione precedente anche la successione $|b_n|$ converge a zero. Per il teorema dei carabinieri, dalla (22.5) si deduce infine che $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$.

Dimostrazione (*secondo metodo*): per la definizione di limite si ha:

$$(22.6) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists v : |b_n| < \varepsilon, \quad \forall n > v.$$

Dall'ipotesi di limitatezza (22.3) si ottiene poi

$$(22.7) \quad |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| < M\varepsilon, \quad \forall n > v,$$

che equivale (si veda la (17.10)) al fatto che la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

A titolo di esempio verifichiamo che

$$(22.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2 + 1} = 0;$$

infatti si tratta del limite del prodotto della successione limitata $a_n = (-1)^n$ per la successione infinitesima

$$(22.9) \quad b_n = \frac{n+5}{3n^2+1} = \frac{1/n + 5/n^2}{3 + 1/n^2}.$$

Come ulteriore esempio verifichiamo che

$$(22.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

(il lettore non confonda questo limite con quello proposto in (23.17), uguale a 1; nel limite in (23.17) la successione a_n converge a zero, mentre la successione in considerazione in (22.10) è $\sin a_n/a_n$, con $a_n = n \rightarrow +\infty$).

Il limite in (22.10) è zero perché limite del prodotto della successione limitata $a_n = \sin n$ ($|a_n| = |\sin n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$) per la successione infinitesima $b_n = 1/n$.

23. Alcuni limiti notevoli

In questo paragrafo esaminiamo alcuni esempi di limiti particolarmente importanti. Cominciamo con ($a \in \mathbb{R}$ fissato):

$$(23.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Se $a > 1$ è possibile utilizzare la diseguaglianza di Bernoulli (11.5):

$$(23.2) \quad a^n \geq 1 + n(a - 1).$$

Dato che $a > 1$, il secondo membro tende a $+\infty$ se $n \rightarrow +\infty$; per il teorema di confronto (21.9) anche $a^n \rightarrow +\infty$. I casi $a = 1$ e $a = 0$ sono ovvi. Se a è diverso da zero e compreso tra $-1, 1$ ($0 < |a| < 1$), risulta $1/|a| > 1$, e quindi dal caso già trattato otteniamo:

$$(23.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1/|a|)^n} = 0.$$

Se $a = -1$ si riottiene il limite (17.18). Se infine $a < -1$, si vede che la successione con esponenti pari $a^{2k} \rightarrow +\infty$, mentre la successione con esponenti dispari $a^{2k+1} \rightarrow -\infty$ per $k \rightarrow +\infty$. Perciò non esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$ di a^n . Si noti che invece esiste, ed è uguale a $+\infty$, il limite di $|a^n|$, se $a < -1$; infatti si ottiene la successione $|a^n|$, che ha per base $|a| > 1$.

Proviamo ora che, se a è un numero reale positivo, risulta

$$(23.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Notiamo preliminarmente come sia facile ricordare il limite (23.4) per mezzo dei passaggi: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \rightarrow a^0 = 1$.

Dimostrazione della (23.4): nel caso $a \geq 1$ si ha $\sqrt[n]{a} \geq 1$. Poniamo $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$; risulta $b_n \geq 0$ e inoltre, sempre per la diseguaglianza di Bernoulli:

$$(23.5) \quad a = (1 + b_n)^n \geq 1 + n b_n.$$

Perciò

$$(23.6) \quad 0 \leq b_n \leq (a - 1)/n.$$

Dal teorema dei carabinieri segue che $b_n \rightarrow 0$, cioè che $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$. Se $0 < a < 1$, allora $1/a > 1$ e quindi, per quanto già dimostrato,

$$(23.7) \quad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \rightarrow 1.$$

Dimostriamo ora che, se $b \in \mathbf{R}$, risulta

$$(23.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1.$$

Esaminiamo preliminarmente il caso $b = 1/2$. Procedendo come fatto in precedenza, poniamo $b_n = \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1 \geq 0$. Utilizzando ancora la diseguaglianza di Bernoulli, otteniamo

$$(23.9) \quad \sqrt{n} = (1 + b_n)^n \geq 1 + n b_n$$

Perciò:

$$(23.10) \quad 0 \leq b_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Quindi $b_n \rightarrow 0$; cioè $\sqrt[n]{n^{1/2}} = n^{1/(2n)} \rightarrow 1$.

Alcuni quesiti per il lettore: perché si è scelto il valore $b = 1/2$? La dimostrazione proposta non funziona se si sceglie $b = 1$; perché? Quali altri valori di b , oltre $b = 1/2$, possono essere scelti in modo che la dimostrazione funzioni?

Consideriamo ora il caso in cui l'esponente $b \in \mathbb{Z}$.

In tal caso $\sqrt[n]{n^b} = (\sqrt[n]{n^{1/2}})^{2b} \rightarrow 1^{2b} = 1$. Per trattare il caso generale $b \in \mathbb{R}$, introduciamo la funzione *parte intera* di x :

$$(23.11) \quad [x] = \text{il più grande intero minore od uguale ad } x.$$

Se $b \in \mathbb{R}$, abbiamo $[b] \leq b < [b] + 1$, e quindi

$$(23.12) \quad \sqrt[n]{n^{[b]}} \leq \sqrt[n]{n^b} \leq \sqrt[n]{n^{[b]+1}}$$

Ancora, per il teorema dei carabinieri, si ottiene la tesi (23.8).

Esaminiamo ora tre limiti relativi alle funzioni trigonometriche. I primi due sono:

$$(23.13) \quad a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sin a_n \rightarrow 0;$$

$$(23.14) \quad a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \cos a_n \rightarrow 1;$$

Ad esempio $\sin(1/n) \rightarrow 0$, $\cos(1/n) \rightarrow 1$, perché $1/n \rightarrow 0$.

Dimostrazione della (23.13): dato che a_n converge a zero, per la definizione di limite esiste un indice v per cui $|a_n| < \pi/2$ per ogni $n > v$. Per tali valori di n , utilizzando la diseguaglianza (10.9), otteniamo

$$(23.15) \quad 0 \leq |\sin a_n| = \sin |a_n| \leq |a_n|$$

Per la proposizione del paragrafo precedente $|a_n| \rightarrow 0$; per il teorema dei carabinieri, $|\sin a_n| \rightarrow 0$. Infine, ancora per la proposizione del paragrafo precedente $\sin a_n \rightarrow 0$.

Dimostrazione della (23.14): si perviene al risultato dalla (23.13), utilizzando la relazione $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Allo scopo di stabilire il segno nella relazione precedente, indichiamo con v l'indice tale che risulti $-\pi/2 \leq a_n \leq \pi/2$ per ogni $n > v$ (v esiste per la

definizione di limite, dato che $a_n \rightarrow 0$). Per tali valori di n risulta $\cos a_n \geq 0$ e quindi

$$(23.16) \quad \cos a_n = \sqrt{1 - \sin^2 a_n}, \quad \forall n > v.$$

Ayendo già provato che $\sin a_n \rightarrow 0$, ne segue che $b_n = 1 - \sin^2 a_n \rightarrow 1$; la tesi è infine conseguenza del fatto che $\sqrt{b_n} \rightarrow \sqrt{1} = 1$.

Il terzo limite di funzione trigonometrica che prendiamo in considerazione è:

$$(23.17) \quad a_n \rightarrow 0, \quad a_n \neq 0, \quad \forall n \Rightarrow \frac{\sin a_n}{a_n} \rightarrow 1.$$

Notiamo che, dato che $a_n \rightarrow 0$, $(\sin a_n)/a_n$ è una forma indeterminata.

Cominciamo col dimostrare che

$$(23.18) \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Infatti, se x è positivo, dalla (10.9) si ottiene

$$(23.19) \quad \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

da cui, dividendo per $\sin x$ (che è positivo) e prendendo gli inversi, si ha

$$(23.20) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Se invece x è negativo, applicando a $-x$ la (23.20) si ottiene

$$(23.21) \quad \cos x = \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} < 1,$$

dunque la (23.20) vale anche se x è negativo e la (23.18) è dimostrata.

Dato che $a_n \rightarrow 0$, per la definizione di limite esiste un indice v tale che $|a_n| < \pi/2$ per ogni $n > v$. Dalla (23.18) si ottiene

$$(23.22) \quad \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \quad \forall n > v.$$

Per $n \rightarrow +\infty$, $\cos a_n \rightarrow 1$. La tesi (23.17) discende quindi dal teorema dei carabinieri.

Applichiamo il risultato appena dimostrato per concludere l'argomento del paragrafo 16, cioè per provare che l'area del cerchio di raggio 1 è uguale a π . Ricordiamo che, dato un cerchio di raggio 1, per definizione π è la lunghezza della semicirconferenza, mentre l'area del cerchio è il limite, per $n \rightarrow +\infty$, delle aree dei poligoni regolari di n lati inscritti. In base alla (16.2) si ottiene

$$(23.23) \quad \text{area del cerchio di raggio } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Dato che, per $n \rightarrow +\infty$, la successione $2\pi/n$ tende a zero, siamo nella situazione del limite notevole (23.17) e quindi

$$(23.24) \quad \text{area del cerchio di raggio } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} = \pi.$$

24. Successioni monotone

Abbiamo già dato nel paragrafo 7 la definizione di funzioni (strettamente) crescenti o decrescenti. Allo stesso modo per le successioni diciamo che

- (24.1) a_n strettamente crescente: $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (24.2) a_n crescente: $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (24.3) a_n strettamente decrescente: $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (24.4) a_n decrescente: $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Una successione a_n è *monotona* se verifica una delle quattro condizioni sopra scritte. Una successione è *strettamente monotona* se verifica la (24.1) oppure la (24.3).

Se $a_n = a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con a numero reale fissato, si dice che a_n è una successione *costante*. Le successioni costanti sono allo stesso tempo crescenti e decrescenti.

Ad esempio le successioni (17.2) e (17.3) sono strettamente monotone; la (17.2) $a_n = 1/n$ è strettamente decrescente, mentre la (17.3) $a_n = (n-1)/n$ è strettamente crescente; infatti, se $a_n = 1/n$, allora

$$(24.5) \quad a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \iff n+1 > n$$

e l'ultima diseguaglianza è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Invece se

$$(24.6) \quad a_n = \frac{n-1}{n},$$

allora

$$(24.7) \quad a_n < a_{n+1} \iff \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \iff n^2 - 1 < n^2$$

e anche questa volta l'ultima diseguaglianza è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il risultato seguente è di fondamentale importanza.

TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTÒNE. — *Ogni successione monotòna ammette limite. In particolare, ogni successione monotòna e limitata è convergente, cioè ammette limite finito.*

La successione (17.4) $a_n = (-1)^n/n$ non è monotòna; infatti i termini di posto pari sono positivi, mentre quelli di posto dispari sono negativi: i termini della successione oscillano intorno allo zero. La successione $a_n = (-1)^n/n$ è quindi un *esempio di successione convergente, pur non essendo monotòna* (osserviamo che ciò non contraddice il teorema; infatti nel teorema non si afferma che ogni successione convergente è monotòna!).

La successione non regolare (17.5) $a_n = (-1)^n$ non è monotòna; ciò è in accordo con il teorema sulle successioni monotòne, perché se la successione (17.5) fosse monotòna dovrebbe avere limite.

Dimostrazione del teorema sulle successioni monotòne: consideriamo il caso di una successione a_n crescente e limitata. Posto $l' = \sup_n a_n$, fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore (paragrafo 12) esiste $v \in \mathbb{N}$ tale che

$$(24.8) \quad l' - \varepsilon < a_v.$$

Per $n > v$ risulta $a_v \leq a_n$ e dunque

$$(24.9) \quad l' - \varepsilon < a_v \leq a_n \leq l' < l' + \varepsilon,$$

da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l'$.

Consideriamo ora il caso di una successione a_n crescente e non limitata (superiormente). Fissato $M > 0$ esiste $v \in \mathbb{N}$ tale che $a_v > M$. Dato che a_n è crescente, per ogni $n > v$ risulta

$$(24.10) \quad a_n \geq a_v > M$$

da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

In modo analogo si trattano i casi relativi a successioni decrescenti.

Ricordando che una successione si dice *regolare* se essa ammette limite (finito o infinito), il precedente teorema afferma che *ogni successione monotòna è regolare*.

25. Il numero e

Il teorema sulle successioni monotòne è utile per definire il *numero di Nepero* e come limite di una particolare successione monotòna e limitata.

Infatti, introduciamo tale numero mediante il limite:

$$(25.1) \quad e = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{con} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La (25.1) è la definizione del *numero di Nepero* e. Tale definizione è giustificata dal fatto che, come provato alla fine del paragrafo, la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ è (*strettamente*) crescente e limitata; quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per $n \rightarrow +\infty$ di a_n .

Nel paragrafo 81 indicheremo il metodo per calcolare espressioni decimali approssimate del numero e, del tipo

$$(25.2) \quad e = 2.71828182845904523536\dots;$$

qui riportiamo alcuni valori numerici approssimati di a_n che, essendo a_n una successione strettamente crescente, sono approssimazioni per difetto del numero e:

n	1	10	50	100	500	1000	10^5
$(1 + 1/n)^n$	2	2.5937	2.6915	2.7048	2.7155	2.7169	2.7182

Nelle applicazioni sono utili anche i limiti seguenti, generalizzazioni della definizione (25.1):

$$(25.3) \quad a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \rightarrow e;$$

$$(25.4) \quad a_n \rightarrow -\infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \rightarrow e.$$

Dimostrazione della (25.3): indichiamo con $[a_n]$, come nella (23.11), la parte intera di a_n , cioè il più grande intero minore od uguale ad a_n . Risulta $[a_n] \leq a_n < [a_n] + 1$, e quindi

$$(25.5) \quad \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n] + 1},$$

perché la base e l'esponente del primo membro sono minori rispettivamente della base e dell'esponente del secondo membro, e lo stesso accade tra secondo e terzo membro. Il risultato segue dal teorema dei carabinieri, perché si verifica facilmente che le successioni a primo e terzo membro tendono ad e, per $n \rightarrow +\infty$. Infatti ad esempio per il terzo membro:

$$(25.6) \quad \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} = \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

Dimostrazione della (25.4): poniamo

$$(25.7) \quad b_n = -a_n - 1.$$

Dato che $a_n \rightarrow -\infty$, la successione b_n diverge a $+\infty$; inoltre $a_n = -b_n - 1$ e quindi

$$(25.8) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} &= \left(1 - \frac{1}{b_n + 1}\right)^{-(b_n+1)} = \\ &= \left(\frac{b_n}{b_n + 1}\right)^{-(b_n+1)} = \left(\frac{b_n + 1}{b_n}\right)^{b_n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) \end{aligned}$$

Ricordando che $b_n \rightarrow +\infty$, l'ultimo membro converge a $e \cdot 1 = e$ per $n \rightarrow +\infty$, a causa della (25.3); ciò prova la (25.4).

La successione in (25.1), utilizzata per definire il numero e , combina fra loro due tendenze opposte: la tendenza della base ad un limite uguale ad 1, e la tendenza dell'esponente ad un limite infinito. Il risultato è appunto e , un numero intermedio tra 1 e $+\infty$. La forma 1^∞ è una nuova forma indeterminata, come pure sono indeterminate le forme ∞^0 , 0^0 . Quindi all'elenco del paragrafo 20 vanno aggiunte le *forme indeterminate*:

$$(25.9) \quad 1^{(+\infty)}, \quad 1^{(-\infty)}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0.$$

Riprendiamo la definizione del numero e come limite, per $n \rightarrow +\infty$, della successione

$$(25.10) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Come già detto, la definizione è giustificata (in base al teorema sulle successioni monotone) dalle seguenti proprietà:

(25.11) *la successione a_n è monotona crescente;*

(25.12) *la successione a_n è limitata.*

Dimostrazione della (25.11): la tesi è

$$(25.13) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad \forall n \geq 2.$$

Eseguendo la somma delle frazioni, si può scrivere in modo equivalente:

$$(25.14) \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right);$$

cioè ancora

$$(25.15) \quad \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}.$$

È conveniente isolare come addendo 1, nel modo seguente:

$$(25.16) \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

La (25.16) è equivalente alla tesi da provare.

Ciò premesso, ricordiamo la diseguaglianza di Bernoulli (11.5), che vale per $n \in \mathbb{N}$ e per $x \geq -1$:

$$(25.17) \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

La conclusione (25.16) si ottiene ponendo nella diseguaglianza di Bernoulli $x = -1/n^2$.

Osservando che la diseguaglianza di Bernoulli (25.17) vale con il segno stretto di maggiore se $x \neq 0$ e $n \neq 1$ (il lettore provi tale affermazione per induzione, con $n = 2, 3, \dots$), la dimostrazione sopra proposta mostra più precisamente che $a_n > a_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$; cioè la successione a_n risulta strettamente crescente.

Dimostrazione della (25.12): introduciamo la successione

$$(25.18) \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(25.19) \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Proveremo che b_n è una successione strettamente decrescente; dato che a_n è (strettamente) crescente, ne segue che

$$(25.20) \quad a_1 \leq a_n < b_n < b_1, \quad \forall n \geq 2$$

e quindi, essendo $a_1 = 2$, $b_1 = 4$,

$$(25.21) \quad 2 \leq a_n < 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

perciò la successione a_n risulta limitata, come si voleva dimostrare. Rimane da verificare che b_n è una successione strettamente decrescente; a tale scopo procediamo come nella dimostrazione della (25.11): la tesi è

$$(25.22) \quad b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n > b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 2,$$

cioè, equivalentemente

$$(25.23) \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right); \quad \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

Come nella dimostrazione precedente isoliamo 1 come addendo:

$$(25.24) \quad \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}.$$

La diseguaglianza di Bernoulli (25.17), con $x = 1/(n^2-1)$, dà la conclusione

$$(25.25) \quad \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 2$$

(nell'ultimo passaggio si è utilizzata la diseguaglianza $n/(n^2-1) > 1/n$, che è vera perché equivale a $n^2 > n^2 - 1$).

Un'osservazione a proposito della stima (25.21): desiderando una stima più precisa si può utilizzare la relazione

$$(25.26) \quad a_n < b_m, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

che vale perché, posto $k = \max\{n, m\}$, risulta

$$(25.27) \quad a_n \leq a_k < b_k \leq b_m.$$

Per $m = 1$ si ottiene la limitazione $a_n < b_1 = 4$; aumentando il valore numerico di m si ottengono stime più precise; ad esempio, per $m = 5$ si ha

$$(25.28) \quad a_n < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.98..., \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare si può affermare che $2 \leq a_n < 2.98 \dots < 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi anche il numero e , limite della successione crescente a_n , verifica le limitazioni $2 < e < 3$.

Appendice al capitolo 3

26. Infiniti di ordine crescente

Con lo stesso metodo utilizzato per studiare le successioni definite per ricorrenza dimostriamo il seguente:

CRITERIO DEL RAPPORTO (PER LE SUCCESSIONI). — *Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n = a_{n+1} / a_n$. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora la successione a_n tende a zero.*

Dimostrazione: per il teorema della permanenza del segno del paragrafo 21 (applicato alla successione $1 - b_n$), esiste un indice v per cui $b_n < 1$ per ogni $n > v$. Quindi $a_{n+1} / a_n < 1$, cioè $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n > v$. Il teorema sulle successioni monotone assicura l'esistenza del limite a , che è un numero reale non negativo, dato che la successione è decrescente. Supponendo per assurdo $a \neq 0$ e passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ nella relazione $b_n = a_{n+1}/a_n$, si ottiene $b = a/a = 1$, in contrasto con l'ipotesi $b < 1$. Pertanto risulta $a = 0$.

Applichiamo il criterio del rapporto al confronto delle successioni:

$$(26.1) \quad \log n; \quad n^b; \quad a^n; \quad n!; \quad n^n.$$

Abbiamo scelto $b > 0$, $a > 1$. Il simbolo $n!$ (*n fattoriale*) significa il prodotto dei primi n numeri naturali:

$$(26.2) \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Per $n \rightarrow +\infty$ le cinque successioni (26.1) tendono tutte a $+\infty$. Possiamo però dire che sono *infiniti in ordine crescente*, nel senso che i limiti dei rapporti valgono

$$(26.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Rimandiamo al paragrafo 33 (si veda la (33.9)) lo studio del primo dei tre limiti. Riguardo al secondo, poniamo

$$(26.4) \quad a_n = \frac{n^b}{a^n}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^b \quad \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1.$$

Dal criterio del rapporto otteniamo che $n^b/a^n \rightarrow 0$. Per il terzo limite poniamo

$$(26.5) \quad a_n = \frac{a^n}{n!}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0.$$

Ancora dal criterio del rapporto segue che $a^n/n! \rightarrow 0$. Infine, per il quarto limite in (26.3) poniamo

$$(26.6) \quad a_n = \frac{n!}{n^n}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

e di nuovo, per il criterio del rapporto, la successione $a_n = n!/n^n$ converge a zero per $n \rightarrow +\infty$.

27. Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione a_{n_k} definita da

$$(27.1) \quad k \in \mathbf{N} \rightarrow a_{n_k}$$

prende il nome di *successione estratta* da a_n , di indici n_k .

Ad esempio, se $n_k = 2k$, la successione estratta da a_n di indici $2k$, cioè di indici pari, è

$$(27.2) \quad a_2, a_4, \dots, a_{2k}, \dots$$

Se invece $n_k = 2k - 1$, si ottiene l'estratta da a_n di indici dispari:

$$(27.3) \quad a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}, \dots$$

LEMMA. — *Per ogni successione n_k strettamente crescente di numeri naturali, si ha*

$$(27.4) \quad n_k \geq k, \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Dimostrazione: per $k = 1$ si ha ovviamente $n_1 \geq 1$. Inoltre, supponendo valida la (27.4), proviamo che risulta $n_{k+1} \geq k + 1$, da cui, per il principio di induzione, la (27.4) risulterà vera per ogni k . Per ipotesi è $n_{k+1} > n_k \geq k$, ovvero $n_{k+1} > k$ e perciò $n_{k+1} \geq k + 1$.

Dalla (27.4) si ricava facilmente la seguente

PROPOSIZIONE. — *Se a_n converge verso a, allora ogni estratta a_{n_k} converge verso a.*

Dimostrazione: fissato $\epsilon > 0$ esiste k_0 tale che $|a_n - a| < \epsilon$ per ogni $n > k_0$. Se $k > k_0$, essendo $n_k \geq k$ per il lemma precedente, si ha anche $n_k > k_0$ e perciò $|a_{n_k} - a| < \epsilon$.

Nel paragrafo 18 abbiamo dimostrato che ogni successione a_n convergente è limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il viceversa non sussiste, perché, ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ è limitata, ma non convergente.

Tuttavia sussiste il seguente notevole

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS. — *Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.*

Dimostrazione: per ipotesi la successione a_n è limitata; pertanto esistono due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$(27.5) \quad A \leq a_n \leq B, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suddividiamo l'intervallo $[A, B]$ mediante il punto di mezzo $C = (A + B)/2$ e consideriamo i due intervalli $[A, C], [C, B]$. Uno almeno dei due intervalli $[A, C], [C, B]$ contiene termini della successione a_n per infiniti indici; cioè, più precisamente, dato che l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali è infinito, risulta anche infinito almeno uno tra i due sottoinsiemi di \mathbb{N}

$$(27.6) \quad \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [A, C]\}, \quad \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [C, B]\}.$$

Sia ad esempio $[A, C]$ (oppure $[C, B]$) il sottointervallo che contiene termini della successione a_n per infiniti indici e indichiamolo genericamente con il simbolo $[A_1, B_1]$, essendo

$$(27.7) \quad A \leq A_1, \quad B_1 \leq B, \quad B_1 - A_1 = \frac{B - A}{2}.$$

Suddividiamo l'intervallo $[A_1, B_1]$ mediante il punto di mezzo $C_1 = (A_1 + B_1)/2$. Per lo stesso motivo indicato in precedenza almeno uno tra i due intervalli $[A_1, C_1], [C_1, B_1]$ contiene termini della successione a_n per infiniti indici e indichiamo tale intervallo con il simbolo $[A_2, B_2]$; risulta

$$(27.8) \quad A_1 \leq A_2, \quad B_2 \leq B_1, \quad B_2 - A_2 = \frac{B_1 - A_1}{2} = \frac{B - A}{2^2}.$$

Iterando il procedimento si generano due successioni A_k, B_k ($k \in \mathbb{N}$) tali che

$$(27.9) \quad A \leq A_k \leq A_{k+1} < B_{k+1} \leq B_k \leq B, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$(27.10) \quad B_k - A_k = \frac{B - A}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e inoltre l'intervallo $[A_k, B_k]$ contiene termini della successione a_n per infiniti indici.

In particolare, l'intervallo $[A_1, B_1]$ contiene termini della successione a_n ; quindi esiste il primo intero n_1 tale che $a_{n_1} \in [A_1, B_1]$. Per lo stesso motivo esiste un primo intero n_2 , fra tutti i numeri naturali più grandi di n_1 , per cui $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$. Iterando i casi $k = 1, 2$ già trattati, con $k = 3, 4, 5, \dots$, determiniamo una successione strettamente crescente di interi

$$(27.11) \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

per cui $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dato che $B_k - A_k = (B - A)/2^k$, abbiamo quindi

$$(27.12) \quad A_k \leq a_{n_k} \leq B_k = A_k + \frac{B - A}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per la (27.9) la successione A_k (ed anche la B_k) è monotona e limitata; per il teorema sulle successioni monotone A_k ammette limite finito per $k \rightarrow +\infty$. Indichiamo con $l \in \mathbb{R}$ il valore di tale limite.

Dato che $(B - A)/2^k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, sia il primo che l'ultimo membro della (27.12) convergono ad l per $k \rightarrow +\infty$. Dal teorema dei carabinieri si ottiene allora la conclusione

$$(27.13) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = l.$$

28. Successioni di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è una *successione di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice v tale che per $h, k > v$ risulti

$$(28.1) \quad |a_k - a_h| < \varepsilon.$$

Dimostriamo in primo luogo la seguente

PROPOSIZIONE. — *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione: se a_n converge verso a allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste v tale che

$$(28.2) \quad |a_n - a| < \varepsilon/2, \quad \forall n > v.$$

Dalla diseguaglianza triangolare segue allora, per $h, k > v$:

$$(28.3) \quad |a_k - a_h| \leq |a_k - a| + |a - a_h| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Per dimostrare che, viceversa, ogni successione di Cauchy è convergente, premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. — *Una successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione: sia $\epsilon = 1$; per ipotesi esiste $v \in \mathbb{N}$ tale che

$$(28.4) \quad |a_k - a_h| < 1, \quad \forall h, k > v.$$

Fissiamo un indice $h_0 > v$. Allora, dalla (28.4), per le proprietà del valore assoluto, segue

$$(28.5) \quad a_{h_0} - 1 < a_k < a_{h_0} + 1, \quad \forall k > v.$$

Posto

$$A = \min \{a_1, \dots, a_k, a_{h_0} - 1\}, \quad B = \max \{a_1, \dots, a_k, a_{h_0} + 1\},$$

evidentemente risulta

$$(28.6) \quad A \leq a_k \leq B, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e perciò la successione è limitata.

LEMMA 2. — *Se una successione di Cauchy a_n contiene un'estratta a_{n_k} convergente verso ℓ , allora anche a_n converge verso ℓ .*

Dimostrazione: fissato $\epsilon > 0$ sia $v \in \mathbb{N}$ tale che

$$(28.7) \quad |a_k - a_h| < \epsilon/2, \quad \forall h, k > v.$$

Sia inoltre $k_0 > v$ tale che

$$(28.8) \quad |a_{n_k} - \ell| < \epsilon/2, \quad \forall k \geq k_0.$$

Poiché si ha: $n_{k_0} \geq k_0 > v$ (si veda la (27.4)), per ogni $n > v$ risulta

$$(28.9) \quad |a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Combinando i risultati precedenti si dimostra il seguente

CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY. — *Una successione a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dimostrazione: con la proposizione all'inizio del paragrafo abbiamo già provato che le successioni convergenti sono di Cauchy. Viceversa, se a_n è di Cauchy, per il lemma 1 è anche limitata. In base al teorema di Bolzano-Weierstrass (paragrafo 27) a_n ammette una successione estratta a_{n_k} convergente. Per il lemma 2, a_n è convergente.

LIMITI DI FUNZIONI. FUNZIONI CONTINUE

29. Premessa

Consideriamo la funzione

$$(29.1) \quad f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

che è definita per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Allo scopo di disegnarne il grafico, osserviamo preliminarmente che $-1 \leq \sin x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; dividendo tutti i membri per x otteniamo

$$(29.2) \quad -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

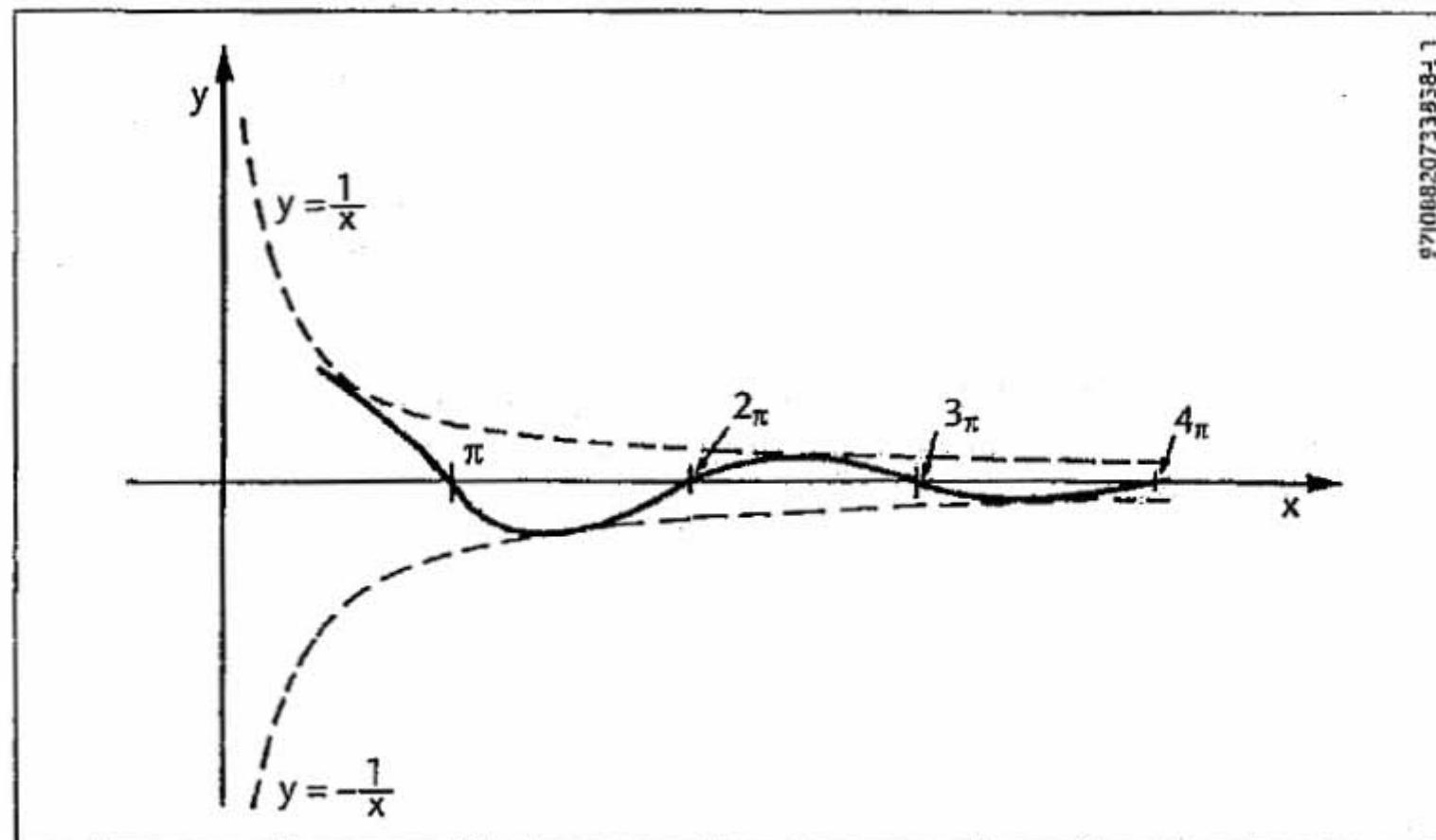


Figura 4.1

Se $x < 0$ si ottiene la situazione analoga $1/x \leq f(x) \leq -1/x$; comunque, essendo $f(x)$ una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$), è sufficiente studiarne le proprietà per $x > 0$, riportando poi il disegno anche per $x < 0$, per simmetria rispetto all'asse y .

Le funzioni $y = -1/x$ e $y = 1/x$, che appaiono nella stima (29.2), hanno per grafico dei rami di iperbole, come in figura 4.1.

Tenendo conto del segno di $f(x)$, che per $x > 0$ è lo stesso segno di $\sin x$, si ottiene per $f(x)$ un grafico come quello disegnato con tratto continuo in figura 4.1. Il disegno è significativo per x sufficientemente grande; è invece indeterminato per x è “vicino” a zero.

Ricordiamo che la funzione $f(x)$ in (29.1) non è definita per $x_0 = 0$, cioè non è calcolabile $f(0)$. Invece è possibile calcolare valori di $f(x)$ per x “vicino” a zero; ad esempio vale la tabella

x	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
$f(x)$	$\frac{2}{\pi} = 0.63\dots$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = 0.82\dots$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0.90\dots$	$\frac{3}{\pi} = 0.95\dots$

e, con l'uso di una calcolatrice, si ottiene (ad esempio) l'ulteriore tavola di valori

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$	0.9983341...	0.9999833...	0.9999998...	0.9999999...

Nella tabella precedente sono stati scelti valori di x sufficientemente vicini a $x_0 = 0$? Uno, due, tre o otto valori di x non sono — in assoluto — né vicini né lontani da zero. Certamente, sulla base delle precedenti tabelle si può intuire che $f(x)$, per x vicino a zero, assuma valori vicini al numero 1 ($f(x)$ assume valori del tipo $1 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ “piccolo”). Non è però possibile escludere che, per x ancora più vicino a $x_0 = 0$ rispetto agli otto valori già considerati, $f(x)$ cambi comportamento.

Una formulazione rigorosa del comportamento di $f(x)$ per x “vicino” ad x_0 si ottiene nel modo seguente: si considera una tabella ideale, illimitata a destra, del tipo

x	x_1	x_2	x_3
$f(x)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$y_3 = f(x_3)$

Cioè, si considera una generica successione x_n che converge ad x_0 (x_n è “vicino” ad x_0 se n è “grande”) e la corrispondente successione y_n , costituita

dai valori assunti dalla funzione $f(x)$ ($y_n = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Se y_n converge ad un numero l (e se il numero l non cambia qualunque sia la successione x_n che converge ad x_0) allora si dice che la funzione $f(x)$ ammette limite, uguale ad l , per $x \rightarrow x_0$.

Torniamo all'esempio della funzione $f(x)$ in (29.1); si è già verificato (si veda il limite (23.17)) che

$$(29.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1,$$

qualunque sia la successione x_n che converge a $x_0 = 0$ (con $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$). In accordo con quanto detto sopra, in termini di limiti di funzioni la (29.3) equivale a dire che $f(x)$ ha limite $l = 1$ per $x \rightarrow 0$; in simboli

$$(29.4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

In figura 4.2 è riportato il grafico della funzione $(\sin x)/x$; la funzione non è definita per $x_0 = 0$ (nel grafico ciò è stato evidenziato con un "tondino" vuoto); però la funzione ha un comportamento regolare anche nelle vicinanze di $x_0 = 0$ ed i valori y assunti da $f(x)$ sono vicini ad $l = 1$ quando x è vicino a $x_0 = 0$.

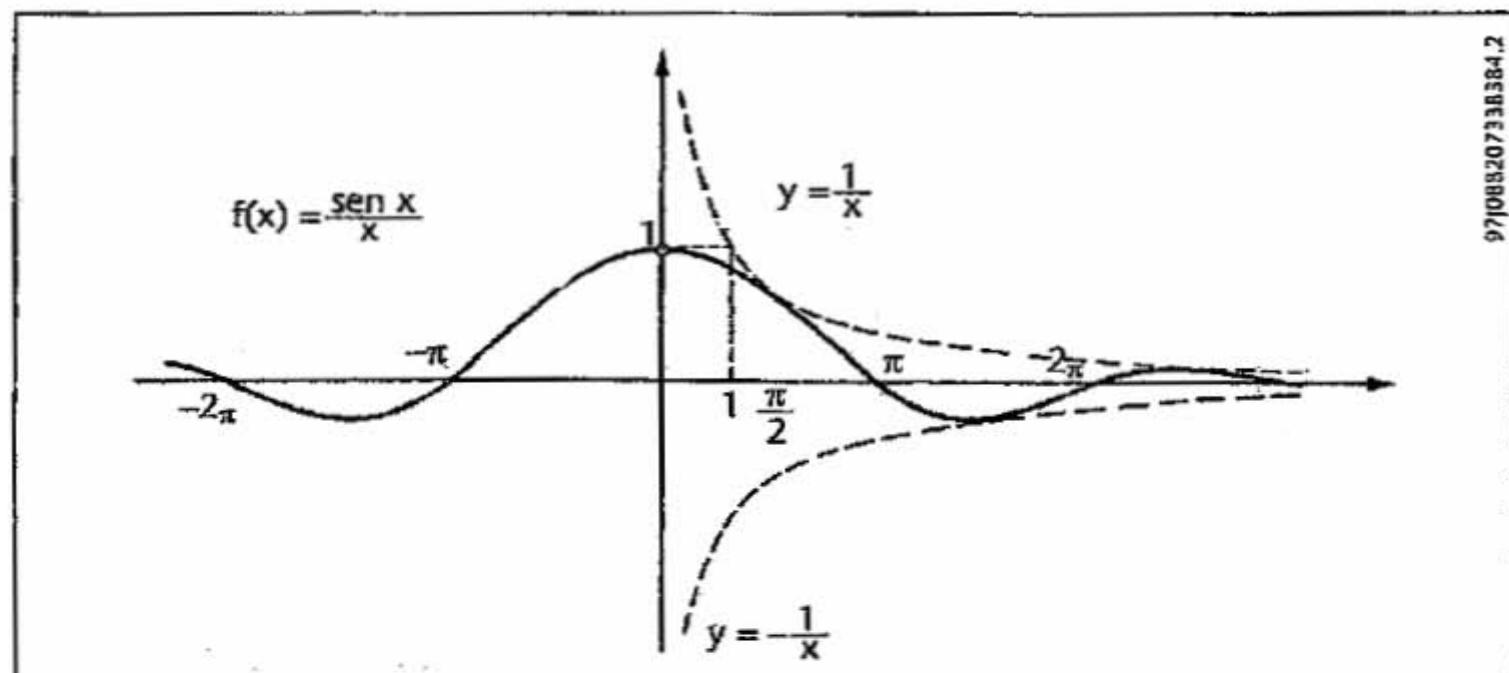


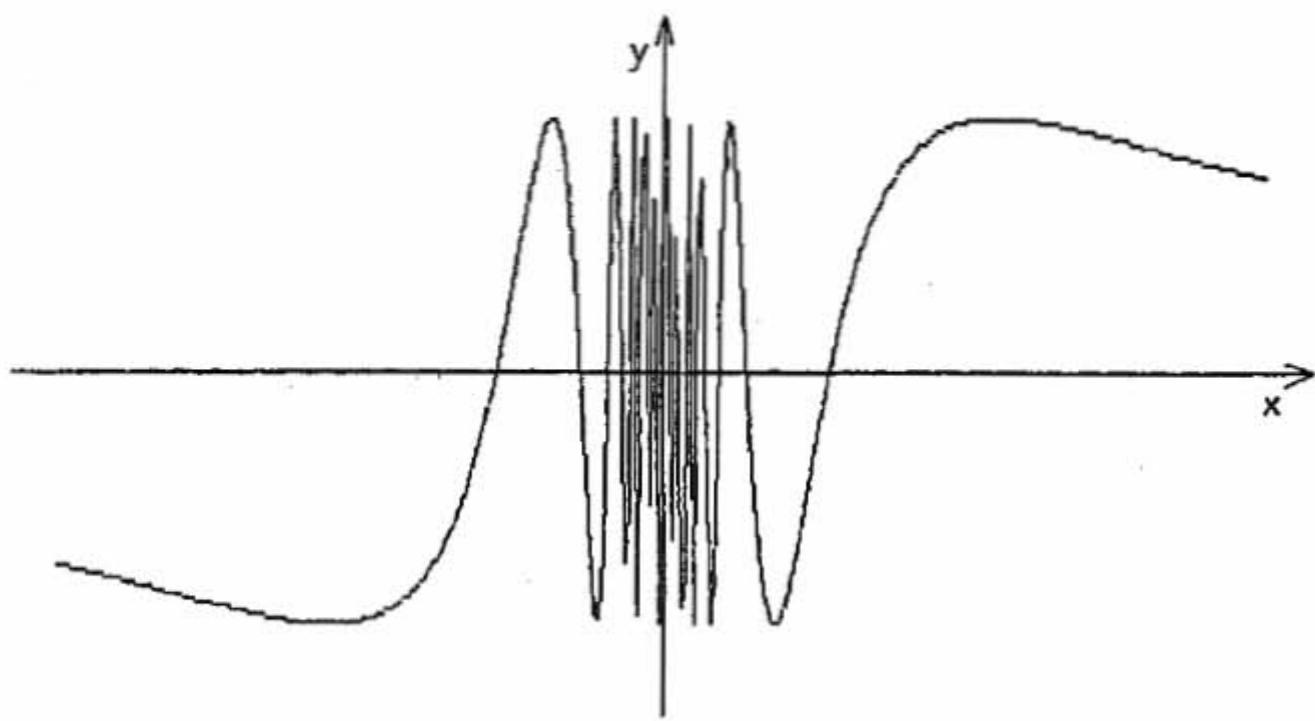
Figura 4.2

Viceversa, anche se la struttura analitica può sembrare a prima vista simile, il limite:

$$(29.5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} \quad \text{non esiste}$$

(si veda la (32.5)).

In figura 4.3 è riportato il grafico, eseguito al computer, della funzione $\sin(1/x)$. Si noti in particolare il comportamento caotico della funzione nelle vicinanze di $x_0 = 0$.

Figura 4.3 – $y = \sin(1/x)$

Nel paragrafo che segue formalizziamo la definizione di limite di funzione secondo le idee sopra esposte.

30. Definizioni

Si definisce il limite di una funzione $f(x)$, per x che tende ad $x_0 \in \mathbb{R}$, nel caso in cui x_0 risulti un *punto di accumulazione* per il dominio di $f(x)$.

In generale un numero reale x_0 si dice *punto di accumulazione* per un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se in ogni *intorno* di x_0 , cioè in ogni insieme $\{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, con $\delta > 0$, cade almeno un punto di A distinto da x_0 .

Nel prosieguo del capitolo vengono prese in considerazione soltanto funzioni il cui dominio A è costituito da un intervallo (o dall'unione finita di intervalli) e x_0 , punto prescelto per il calcolo del limite, appartiene ad A od è un punto di frontiera per il dominio A (ad esempio x_0 è un estremo dell'intervallo A nel caso in cui A è, appunto, un intervallo di numeri reali); in entrambi i casi x_0 risulta punto di accumulazione per l'insieme A .

Se a, b sono due numeri reali (con $a < b$), per indicare un *intervallo* di estremi a, b si usano le notazioni:

$$(30.1) \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};$$

$$(30.2) \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

$$(30.3) \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};$$

$$(30.4) \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

L'intervallo $[a, b]$ si dice *chiuso*, mentre (a, b) è detto *aperto*. Inoltre $[a, b)$ è detto *chiuso a sinistra e aperto a destra* (analogamente per $(a, b]$); gli intervalli sopra scritti si dicono *limitati*. Si considerano anche gli *intervalli illimitati*:

$$(30.5) \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x \geq a\};$$

$$(30.6) \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x > a\};$$

$$(30.7) \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R}: x \leq b\};$$

$$(30.8) \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R}: x < b\};$$

$$(30.9) \quad (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

Come già detto, i numeri a, b sono detti *estremi* dell'intervallo (anche nel caso in cui tali numeri non fanno parte dell'intervallo).

Un *intorno* di un punto x_0 è un intervallo aperto contenente x_0 , ad esempio un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (più generalmente, viene considerato intorno di un punto x_0 ogni insieme contenente un intervallo aperto contenente x_0).

Nelle definizioni che seguono consideriamo funzioni $f(x)$ il cui dominio A è un intervallo, o è unione finita di intervalli, e x_0 appartiene, od è estremo, ad uno di tali intervalli.

Ad esempio, se $f(x)$ è definita nell'insieme $A = \mathbf{R} - \{0\}$, allora risulta $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; in tal caso x_0 , punto prescelto per il calcolo del limite, può appartenere ad uno dei due intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ oppure può essere uguale all'estremo 0. In definitiva, in questo esempio, x_0 può essere un qualunque numero reale.

DEFINIZIONE. — Si dice che $f(x)$ ha limite uguale ad l (tende o converge ad l) per x che tende ad x_0 se, qualunque sia la successione $x_n \rightarrow x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ per ogni n , risulta $f(x_n) \rightarrow l$.

Secondo questa definizione la relazione (23.17), come già detto nel paragrafo precedente, diventa:

$$(30.10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Così pure le relazioni (23.13), (23.14) diventano:

$$(30.11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Possiamo formulare la definizione di limite direttamente per mezzo di disuguaglianze, come già fatto per le successioni, usando i simboli ε , ν . I simboli usati classicamente per i limiti di funzioni sono ε , δ (delta) nel modo seguente:

TEOREMA. — Si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se e soltanto se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ tale che $|l - \varepsilon| < f(x) < |l + \varepsilon|$, per ogni $x \in A - \{x_0\}$, con $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Il teorema, che può essere enunciato in simboli

$$(30.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\forall x \in A: 0 \neq |x - x_0| < \delta,$$

è dimostrato nel seguente paragrafo 31.

Valgono analoghe definizioni per i limiti infiniti. Così ad esempio:

$$(30.13) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \rightarrow x_0, x_n \in A - \{x_0\}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow +\infty;$$

$$\iff \forall M > 0, \exists \delta > 0: f(x) > M,$$

$$\forall x \in A: 0 \neq |x - x_0| < \delta.$$

$$(30.14) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall x_n \rightarrow +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l;$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k: |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in A: x > k.$$

$$(30.15) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \rightarrow +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow +\infty;$$

$$\iff \forall M > 0, \exists k: f(x) > M, \forall x \in A: x > k.$$

Il lettore, tenendo conto della definizione (17.21) relativa alle successioni che tendono a $-\infty$, formuli i casi corrispondenti con $-\infty$ al posto di $+\infty$.

È utile considerare anche i cosiddetti *limite destro* ($x \rightarrow x_0^+$) e *limite sinistro* ($x \rightarrow x_0^-$), quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0 , o solo minori.

Consideriamo per brevità solo i casi di limite l finito (il lettore formuli i casi con limite infinito):

$$(30.16) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x \in A}} f(x) = l \iff \forall x_n \rightarrow x_0, x_n \in A \text{ e } x_n > x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l;$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\forall x \in A: x_0 < x < x_0 + \delta.$$

$$(30.17) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x \in A}} f(x) = l \iff \forall x_n \rightarrow x_0, x_n \in A \text{ e } x_n < x_0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l;$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\forall x \in A: x_0 - \delta < x < x_0.$$

Ad esempio, è facile verificare che

$$(30.18) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1;$$

$$(30.19) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{non esiste.}$$

31. Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le seguenti relazioni (31.1), (31.2), di cui proviamo l'equivalenza, sono state adottate nel paragrafo 30 come definizione di limite (finito) di una funzione. Come nel paragrafo 30, $f(x)$ è definita in un insieme A costituito da un intervallo o da una unione finita di intervalli e x_0 è un estremo di uno degli intervalli; la situazione più generale presa in considerazione nel paragrafo precedente, in cui x_0 è punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, non presenta differenze.

TEOREMA. — *Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, l \in \mathbf{R}$):*

$$(31.1) \quad \forall x_n \rightarrow x_0, \quad x_n \in A - \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l;$$

$$(31.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in A, \quad 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Proviamo preliminarmente che (31.2) implica (31.1): per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ il numero reale per cui vale l'ipotesi (31.2); consideriamo poi una generica successione x_n , di punti di A , convergente ad x_0 , con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per la definizione di limite di successione, esiste un indice v per cui $|x_n - x_0| < \delta$ per ogni $n > v$; inoltre, essendo $x_n \neq x_0$, in definitiva si ha

$$(31.3) \quad x_n \in A, \quad 0 \neq |x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n > v.$$

Per l'ipotesi (31.2) segue allora

$$(31.4) \quad |f(x_n) - l'| < \epsilon, \quad \forall n > v,$$

che, in base alla definizione di limite di successione, significa che $f(x_n) \rightarrow l'$ per $n \rightarrow +\infty$.

Proviamo ora, per assurdo, che (31.1) implica (31.2): contraddirre la (31.2) equivale ad affermare che:

$$(31.5) \quad \exists \epsilon_0 > 0: \forall \delta > 0, \exists x \in A: 0 \neq |x - x_0| < \delta, |f(x) - l'| \geq \epsilon_0.$$

Poniamo $\delta = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$ e indichiamo con $x = x_n$ il valore di x che compare in (31.5) in dipendenza da $\delta = 1/n$:

$$(31.6) \quad \exists \epsilon_0 > 0: \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A: 0 \neq |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - l'| \geq \epsilon_0.$$

Risulta in particolare

$$(31.7) \quad x_n \neq x_0, \quad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

perciò $x_n \in A - \{x_0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow x_0$ (per il teorema dei carabinieri); però $f(x_n)$ non converge ad l' perché la diseguaglianza $|f(x_n) - l'| \geq \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, contrasta con la definizione di limite di successione.

Il lettore, per esercizio, riformuli le relazioni (31.1), (31.2) con x_0 e/o l' infiniti (come nel paragrafo 30) e ne provi l'equivalenza.

32. Esempi e proprietà dei limiti di funzioni

Esempi di limiti molto importanti, e che quindi occorre sapere bene, sono i limiti della funzione esponenziale che derivano dal limite di successione (23.1):

$$(32.1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

In particolare per la base e , dato che $e^{-x} = 1/e^x$, si ha:

$$(32.2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Il lettore controlli graficamente i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ della funzione esponenziale dai grafici riportati nel paragrafo 9; controlli graficamente anche i seguenti importanti limiti della funzione $\log x$ (in base e):

$$(32.3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty.$$

Verifichiamo che invece i limiti

$$(32.4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x, \quad \text{non esistono.}$$

Limitiamoci al primo dei due. Se esistesse il limite $= l$, dovremmo avere che $\sin x_n$ tende sempre allo stesso valore l qualunque sia la successione $x_n \rightarrow +\infty$.

Mostriamo che esistono due successioni, x_n, x'_n , divergenti a $+\infty$, con la proprietà che $\sin x_n$ e $\sin x'_n$ tendono a limiti diversi. Infatti, ponendo $x_n = 2\pi n$, $x'_n = 2\pi n + \pi/2$, risulta $\sin x_n = 0 \rightarrow 0$, mentre $\sin x'_n = 1 \rightarrow 1$.

Analogamente

$$(32.5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 1}{x} \quad \text{non esiste.}$$

La successione $x_n = 1/(n\pi)$ converge a zero per $n \rightarrow +\infty$; in corrispondenza la funzione $f(x) = \sin(1/x)$ assume i valori

$$(32.6) \quad f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0.$$

Perciò $f(x_n)$ è la successione costante, uguale a zero, e converge a zero.

Analogamente, posto $x'_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$, risulta

$$(32.7) \quad f(x'_n) = \sin \frac{1}{x'_n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1;$$

quindi $x'_n \rightarrow 0$, ma $f(x'_n) \rightarrow 1$ (in contrasto con il fatto che $f(x_n) \rightarrow 0$). Ne segue che $f(x)$ non ammette limite per $x \rightarrow 0$ (si veda il grafico di $f(x)$ in figura 4.3).

Altri limiti notevoli, conseguenza della definizione di limite di funzione e dei limiti di successione (25.3), (25.4), sono

$$(32.8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Dato che i limiti di funzioni sono definiti a partire dai limiti di successioni, anche per essi valgono le proprietà già dimostrate per i limiti di successioni. Dal paragrafo 19 deduciamo le:

OPERAZIONI CON I LIMITI DI FUNZIONI. — Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purché non sia una delle forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞ , $0/0$.

Ad esempio dimostriamo che il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti. Supponiamo che per $x \rightarrow x_0$ risulti $f(x) \rightarrow l_1$, $g(x) \rightarrow l_2$. Ciò significa che qualunque sia la successione x_n che tende ad x_0 , con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, risulta $f(x_n) \rightarrow l_1$, $g(x_n) \rightarrow l_2$. Per la (19.2), che esprime il modo di calcolare il limite del prodotto di due successioni, risulta $f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow l_1 \cdot l_2$ e ciò completa la prova.

Come applicazione calcoliamo il limite, per $x \rightarrow 0$, del rapporto $(1 - \cos x)/x^2$. È una forma indeterminata $0/0$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(1 + \cos x)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \\
 (32.9) \quad &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Il lettore verifichi che, con lo stesso metodo, si ottiene

$$(32.10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Una ulteriore proprietà utile per le applicazioni è la seguente.

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE — Siano $g: X \rightarrow Y$ e $f: Y \rightarrow R$ due funzioni tali che

$$(32.11) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l,$$

ed esista $\delta > 0$ tale che risulti $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$ dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Allora è anche

$$(32.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l.$$

Dimostrazione: consideriamo una generica successione x_n convergente ad x_0 , con $x_n \in X$ e $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la definizione di limite di successione esiste v tale che $|x_n - x_0| < \delta$, per ogni $n > v$. Perciò, per ogni $n > v$ risulta anche $g(x_n) \neq y_0$. Dato che $y_n = g(x_n)$ è una successione contenuta in Y che converge a y_0 ed è tale che $y_n \neq y_0$ per $n > v$, allora $f(y_n) \rightarrow l$. Cioè $f(g(x_n)) \rightarrow l$, come si voleva dimostrare.

33. Funzioni continue

Come nel paragrafo precedente, consideriamo funzioni $f(x)$ definite in un dominio A costituito da un intervallo, o dall'unione finita di intervalli, con x_0 punto di A o punto estremo ad uno degli intervalli costituenti A .

Abbiamo introdotto i limiti di funzioni per descrivere il comportamento di funzioni nelle vicinanze di loro punti singolari. Naturalmente possiamo calcolare il limite, per $x \rightarrow x_0$, anche se la funzione non presenta alcuna singolarità in x_0 . Ad esempio abbiamo già calcolato in (30.11) i limiti

$$(33.1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0;$$

il valore limite, per $x \rightarrow 0$, è uguale al valore che si ottiene calcolando la funzione per $x = 0$. Si dice che le funzioni $\sin x$, $\cos x$ sono *continue* per $x = 0$ (ed in realtà sono continue per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$) in accordo con la:

DEFINIZIONE. — Una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 se

$$(33.2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Una funzione è continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$ (se $x_0 = a$ si considera in (33.2) il solo limite destro $x \rightarrow a^+$, mentre se $x_0 = b$ si considera il limite sinistro $x \rightarrow b^-$).

Dato che il limite di somma, differenza, prodotto è uguale rispettivamente alla somma, differenza, prodotto dei limiti, risulta che *la somma, la differenza, il prodotto di funzioni continue è una funzione continua*. Anche *il quoziente di funzioni continue è una funzione continua*, ma come al solito occorre fare attenzione ai punti dove il denominatore si annulla.

Utilizzando la proprietà relativa ai limiti di funzioni composte (si veda il paragrafo precedente) si verifica che *la funzione composta mediante funzioni continue è continua*.

L'importanza delle funzioni continue è anche nel fatto che molte *funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione*: potenze $y = x^b$, esponenziali $y = a^x$, logaritmi $y = \log_a x$, funzioni trigonometriche $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, valore assoluto $y = |x|$.

La continuità ed altre proprietà delle potenze, esponenziali e logaritmi verrà esaminata nel paragrafo 76. La continuità della funzione $f(x) = \sin x$ nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si esprime con la relazione di limite

$$(33.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0,$$

o, equivalentemente, con la relazione di limite

$$(33.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0,$$

che è conseguenza della formula di addizione per il seno e dei limiti in (33.1); infatti:

$$(33.5) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} [\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h] = \\ &= \sin x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos h + \cos x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = \sin x_0. \end{aligned}$$

Il lettore provi in modo analogo che, qualunque sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $\cos x$ converge a $\cos x_0$ per $x \rightarrow x_0$. La continuità della funzione $f(x) = \tan x = \sin x / \cos x$, per $x \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), discende dalla continuità delle funzioni $\sin x$, $\cos x$ e dalla formula per il limite del quoziente.

La continuità della funzione $f(x) = |x|$ su \mathbb{R} segue dalla diseguaglianza:

$$(33.6) \quad ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|, \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R};$$

basta infatti porre $\delta = \varepsilon$ nella relazione di limite (30.12): se $|x - x_0| < \varepsilon$ allora anche $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| < \varepsilon$.

Mostriamo con due esempi l'importanza del concetto di continuità per eseguire calcoli di limiti.

Usiamo la continuità della funzione potenza x^b per calcolare, a partire dalla (32.8), il seguente limite notevole (poniamo $y = (bx)^{-1}$ e consideriamo il caso $b > 0$; se invece $b < 0$

occorre cambiare il segno \pm con il segno \mp ; infine se $b = 0$ il risultato è ovvio):

$$(33.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} (1 + bx)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{by} = \left[\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^b = e^b.$$

Utilizziamo ora la continuità della funzione $\log x$ per $x = 1$, per ottenere, a partire dalla (23.8), il limite notevole:

$$(33.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \sqrt[n]{n} = \log 1 = 0.$$

Per comprendere la prima uguaglianza, si riveda la proprietà (9.16) dei logaritmi. Analogamente al limite precedente, dato che $\log n = (1/b) \log n^b$, si ottiene

$$(33.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0, \quad \forall b > 0.$$

34. Discontinuità

La funzione

$$(34.1) \quad f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua per $x \neq 0$, ma non è continua se $x = 0$. Il grafico di questa funzione presenta per $x = 0$ un salto, appunto una *discontinuità* (figura 4.4).

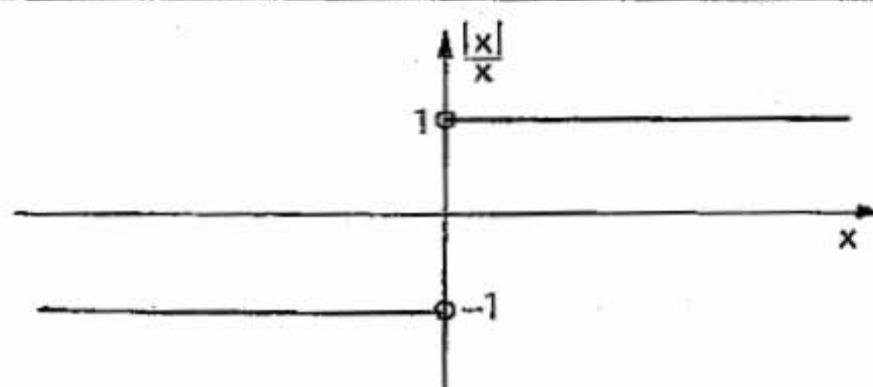


Figura 4.4

In particolare la funzione $f(x)$ in (34.1) non è continua nel punto $x_0 = 0$ perché non è definita in tal punto, cioè perché non esiste il valore $f(x_0) = f(0)$.

Estendiamo $f(x)$ anche a $x_0 = 0$ con un valore $f \in \mathbb{R}$; consideriamo cioè la nuova funzione $\tilde{f}(x)$ definita da

$$(34.2) \quad f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ è definita anche nel punto $x_0 = 0$, ma non è continua in tale punto perché non esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ di $\bar{f}(x)$; precisamente il limite destro è diverso dal limite sinistro.

Tutto ciò accade qualunque sia il valore l scelto in (34.2) per la definizione di $\bar{f}(x)$, che risulta una *estensione non continua* (o *prolungamento non continuo*) della funzione $f(x)$; inoltre la discontinuità di $f(x)$ nel punto $x_0 = 0$ si dice *non eliminabile*.

Viceversa, la funzione studiata nel paragrafo 29:

$$(34.3) \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

non è continua in $x_0 = 0$ (perché non è definita), ma è possibile *prolungare per continuità* $f(x)$ mediante la funzione:

$$(34.4) \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A causa del limite notevole (29.4), $\bar{f}(x)$ è continua anche nel punto $x_0 = 0$. Il grafico di $\bar{f}(x)$ si ottiene "completando" il disegno in figura 4.2 con l'ulteriore punto di coordinate $(0, 1)$.

Sia $f(x)$ una funzione definita in A e x_0 un punto di A . Le *discontinuità* di $f(x)$ si classificano nel modo seguente:

(a) la funzione presenta in x_0 una *discontinuità eliminabile* se esiste il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ e risulta

$$(34.5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

In tal caso, posto $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, la funzione

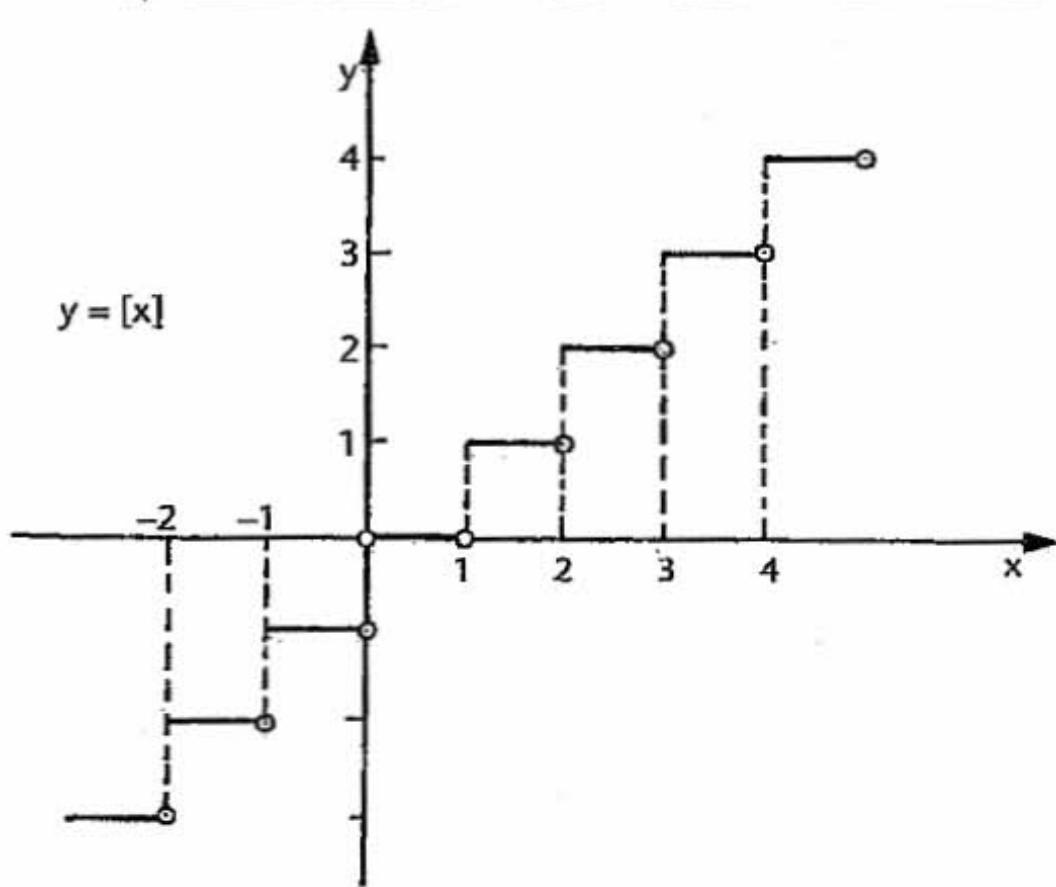
$$(34.6) \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A - \{x_0\} \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

risulta continua nel punto x_0 .

(b) la funzione $f(x)$ presenta in x_0 una discontinuità di prima specie se esistono finiti i limiti destro e sinistro di $f(x)$ in x_0 e si ha

$$(34.7) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Ad esempio la funzione $f(x) = [x]$ parte intera di x , definita in (23.11) e rappresentata in figura 4.5, presenta discontinuità di prima specie in corrispondenza ad ogni valore $x \in \mathbb{Z}$, mentre è continua per ogni $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.



S:10882073161045

Figura 4.5

(c) La funzione $f(x)$ presenta in x_0 una discontinuità di seconda specie se uno almeno dei due limiti

$$(34.8) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

non esiste oppure è infinito.

Sia A un intervallo (o unione finita di intervalli), $x_0 \in A$, e $f(x)$ una funzione definita in $A - \{x_0\}$; se esiste il limite

$$(34.9) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell,$$

allora la funzione $\bar{f}(x)$, definita in A da

$$(34.10) \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A - \{x_0\} \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è detta *prolungamento per continuità di $f(x)$ in x_0* ; $\bar{f}(x)$ risulta continua in x_0 . Se poi $f(x)$ è continua in $A - \{x_0\}$, allora $\bar{f}(x)$, continua su tutto l'insieme A , è detta *prolungamento per continuità di $f(x)$ su A* .

35. Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Il teorema seguente è analogo al teorema della permanenza del segno (paragrafo 21) per le successioni.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. — *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0 . Se $f(x_0) > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

La dimostrazione si fa come nel paragrafo 21: dato che $f(x_0) > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = f(x_0)/2$; esiste quindi un numero $\delta > 0$ per cui $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$ per ogni x nell'intervallo $|x - x_0| < \delta$. Ciò equivale a $-f(x_0)/2 < f(x) - f(x_0) < f(x_0)/2$; in particolare

$$(35.1) \quad f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Molto importanti sono i tre teoremi che seguono: il teorema dell'esistenza degli zeri, il teorema dell'esistenza dei valori intermedi ed il teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo.

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI. — *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f(a) < 0, f(b) > 0$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Naturalmente la tesi vale anche se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; cioè il teorema dell'esistenza degli zeri vale supponendo che i valori $f(a), f(b)$ siano di segno discorde. La dimostrazione del teorema è riportata nel paragrafo 36 che segue.

Per mostrare la portata del teorema, consideriamo come esempio le seguenti due equazioni nella incognita x

$$(35.2) \quad x^3 + x - 1 = 0,$$

$$(35.3) \quad e^x + x = 0,$$

che non rientrano tra le equazioni algebriche di primo e secondo grado di cui è facile ricordare la formula risolutiva. La prima delle due equazioni è una *equazione algebrica di terzo grado*, mentre la seconda è un'*equazione trascendente*. Procediamo per tentativi, assegnando ad x alcuni valori:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^3 + x - 1$	-11	-3	-1	1	9
$f(x) = e^x + x$	$e^{-2} - 2$	$e^{-1} - 1$	1	$e + 1$	$e^2 + 2$

Nel caso $f(x) = x^3 + x - 1$, abbiamo $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. In base al teorema dell'esistenza degli zeri, esiste un numero x_0 nell'intervallo $(0, 1)$ tale che $f(x_0) = 0$; cioè x_0 è una soluzione dell'equazione (35.2). Nel paragrafo 36 vedremo come calcolare numericamente tale radice, e troveremo che $x_0 = 0.682327\dots$

Nel secondo caso $f(x) = e^x + x$, risulta $f(-1) = 1/e - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Quindi esiste nell'intervallo $(-1, 0)$ una radice x_0 dell'equazione (35.3). Nel paragrafo 36 troveremo che $x_0 = -0.567143\dots$

Notiamo che esiste una formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, che dà come soluzione reale dell'equazione (35.2) il numero

$$(35.4) \quad x_0 = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{31}{108} \right)^{1/2} \right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{31}{108} \right)^{1/2} \right]^{1/3} = 0.682327\dots$$

Viceversa, non è nota alcuna formula risolutiva per l'equazione (35.3).

Applichiamo ancora una volta il teorema dell'esistenza degli zeri per dimostrare una proprietà utilizzata nel paragrafo 9: *per ogni $y_0 \geq 0$ esiste un numero reale $x_0 \geq 0$ soluzione dell'equazione*

$$(35.5) \quad x^n = y_0.$$

Ricordiamo che, essendo la funzione $f(x) = x^n$ strettamente crescente per $x > 0$, un tal numero x_0 è unico, e lo abbiamo chiamato radice n -esima di y_0 . Dimostriamo che l'equazione (35.5) ha soluzione: se $y_0 = 0$ naturalmente è $x_0 = 0$. Se $y_0 > 0$ poniamo $f(x) = x^n - y_0$; risulta $f(0) = -y_0 < 0$; rimane da trovare un punto dove la funzione f è positiva. Se $y_0 < 1$, allora $f(1) = 1 - y_0 > 0$ e quindi esiste una radice x_0 nell'intervallo $(0, 1)$. Se invece $y_0 > 1$, allora $f(y_0) = y_0^n - y_0 = y_0(y_0^{n-1} - 1) > 0$; quindi in questo caso esiste una radice nell'intervallo $(0, y_0)$. Infine se $y_0 = 1$ basta prendere $x_0 = 1$.

(PRIMO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI. — *Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione: per semplificare le notazioni consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Se $y_0 = f(a)$ si può porre $x_0 = a$; analogamente se $y_0 = f(b)$, allora basta prendere $x_0 = b$. Per trattare il caso $y_0 \in (f(a), f(b))$ consideriamo la funzione

$$(35.6) \quad g(x) = f(x) - y_0, \quad \forall x \in [a, b];$$

essendo $f(a) < y_0 < f(b)$, risulta

$$(35.7) \quad g(a) = f(a) - y_0 < 0, \quad g(b) = f(b) - y_0 > 0.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste un numero $x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono in $[a, b]$ x_1, x_2 tali che*

$$(35.8) \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

I numeri x_1, x_2 sono detti rispettivamente *punti di minimo e di massimo* per $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$; i corrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ sono detti *minimo e massimo* di $f(x)$ in $[a, b]$ (si veda la figura 4.6).

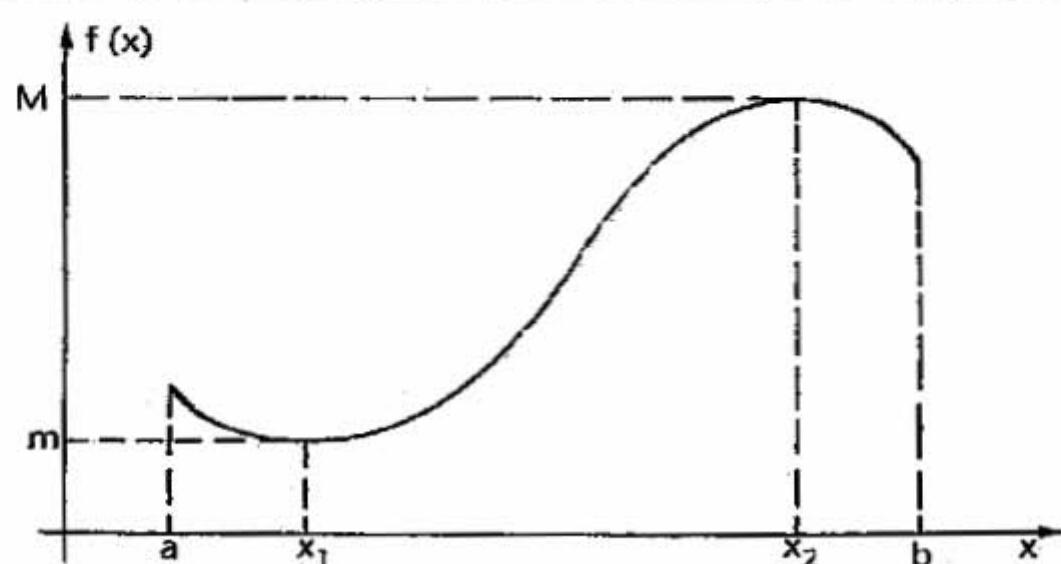


Figura 4.6

970882073384-6

Il teorema di Weierstrass è dimostrato nel paragrafo 37; in questa sede ci limitiamo a mettere in luce con degli esempi l'importanza delle ipotesi (funzione *continua* definita in un intervallo *chiuso e limitato*) che garantiscono l'esistenza del massimo e del minimo.

Consideriamo per $x > 0$ la funzione

$$(35.9) \quad f(x) = \frac{1}{x};$$

$f(x)$ non assume massimo nell'intervallo aperto a sinistra $(0, 1]$; infatti non è limitata superiormente in tale intervallo: $\forall M > 0$ risulta $f(x) > M$ se $x \in (0, 1/M)$ (si veda la figura 4.7). La funzione non assume minimo nell'intervallo illimitato $[1, +\infty)$; la funzione è limitata in tale intervallo perché risulta (si veda anche la figura 4.8):

$$(35.10) \quad 0 < \frac{1}{x} \leq 1, \quad \forall x \geq 1;$$

però 0 non è il minimo di $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché non esiste alcun valore $x_1 \geq 1$ per cui $f(x_1) = 1/x_1 = 0$ (una frazione è nulla se e soltanto se il numeratore è nullo!) e inoltre nessun numero reale positivo m è minimo per $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché risulta $f(x) < m$ per ogni $x > 1/m$.

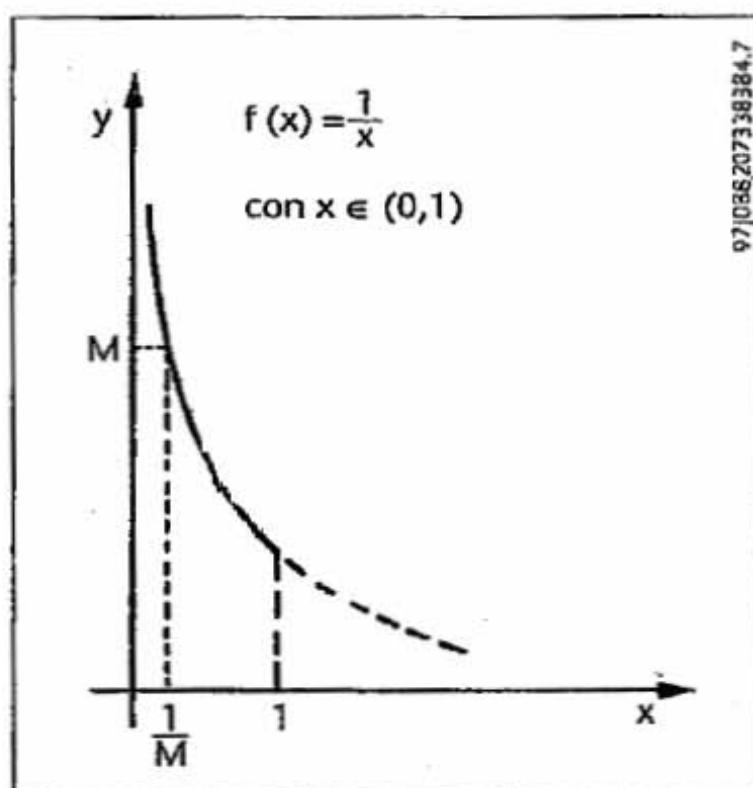


Figura 4.7

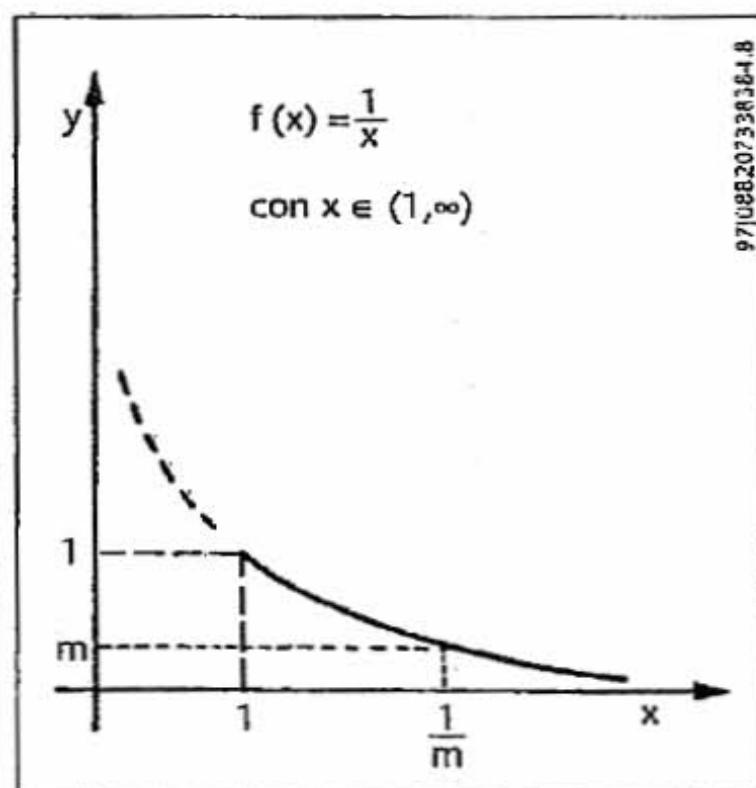


Figura 4.8

La funzione $f(x) = x^2$ assume massimo e minimo in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, in particolare nell'intervallo $[-1, 1]$. Invece la funzione $g(x)$, rappresentata in figura 4.9 e definita da

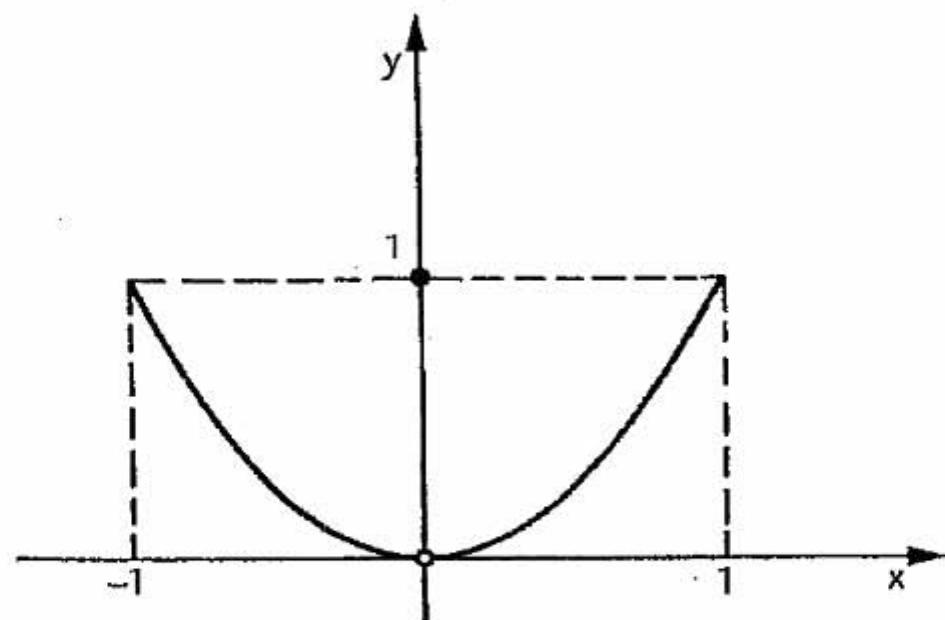


Figura 4.9

$$(35.11) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

non assume minimo nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$ perché assume valori positivi arbitrariamente vicini allo zero ($g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$) ma non è uguale a zero per alcun valore di $x \in [-1, 1]$. In questo caso la mancanza del minimo è causata dalla discontinuità di $g(x)$ nel punto $x_0 = 0$.

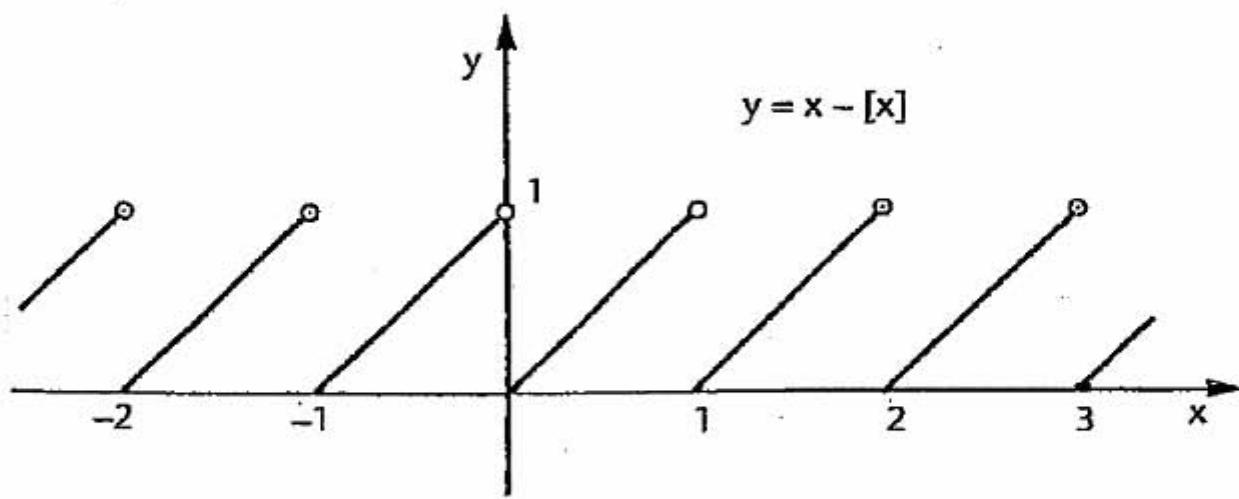


Figura 4.10

Per la sua discontinuità in corrispondenza ai numeri $x \in \mathbb{Z}$, la funzione *parte frazionaria*, rappresentata in figura 4.10 e definita da

$$(35.12) \quad f(x) = x - [x], \quad x \in \mathbb{R},$$

($\{x\}$ è la *parte intera* di x , rappresentata in figura 4.5), non ha massimo in un qualunque intervallo che contenga almeno un numero intero.

Siamo ora in grado di provare una nuova formulazione del teorema di esistenza dei valori intermedi.

(SECONDO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI.

— Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

Dimostrazione: i valori di massimo M e di minimo m sono assunti in base al teorema di Weierstrass; rimane da provare che, qualunque sia $y_0 \in (m, M)$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Indichiamo con x_1, x_2 i punti di minimo e di massimo di $f(x)$, cioè tali che $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione

$$(35.13) \quad g(x) = f(x) - y_0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Essendo $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, risulta

$$(35.14) \quad g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0, \quad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0;$$

per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste un numero x_0 , appartenente all'intervallo aperto di estremi x_1, x_2 , tale che $g(x_0) = 0$, cioè tale che $f(x_0) = y_0$.

Chiudiamo il paragrafo precisando un criterio, introdotto nel paragrafo 7, per riconoscere se una data funzione è invertibile. La continuità della funzione inversa è invece studiata nel paragrafo 38.

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ. — Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.

Proponiamo la dimostrazione nel caso in cui la funzione f sia strettamente crescente in $[a, b]$: risulta

$$(35.15) \quad f(a) < f(x) < f(b), \quad \forall x \in (a, b);$$

quindi $f(a)$ è il minimo della f in $[a, b]$, mentre $f(b)$ è il massimo. Inoltre si verifica come nel teorema precedente che f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$. Cioè, per ogni $y \in [f(a), f(b)]$, esiste almeno un $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$. Tale x è unico; infatti, se esistessero due valori x_1, x_2 distinti tra loro, diciamo $x_1 < x_2$, per cui $y = f(x_1) = f(x_2)$, allora dovrebbe risultare anche $f(x_1) < f(x_2)$, dato che f è strettamente crescente. Quindi $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ è invertibile.

Appendice al capitolo 4

36. Metodo di bisezione per il calcolo delle radici di una equazione

In questo paragrafo dimostriamo il teorema dell'esistenza degli zeri, enunciato all'inizio del paragrafo precedente. Utilizziamo nella dimostrazione il *metodo di bisezione*; si tratta di un procedimento costruttivo che, oltre a dimostrare l'esistenza di una soluzione di una equazione data, fornisce anche un metodo per calcolarla.

Prendiamo in considerazione *equazioni* del tipo

$$(36.1) \quad f(x) = 0,$$

con $f(x)$ funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Risolvere l'equazione significa determinare tutti i numeri reali $x_0 \in [a, b]$ per cui $f(x_0) = 0$; tali numeri si dicono *soluzioni* dell'equazione (36.1), od anche *zeri* della funzione $f(x)$.

Se la funzione $f(x)$ è un polinomio, si dice che (36.1) è un'*equazione algebrica*. Se $f(x)$ è una funzione trascendente (ad esempio composta tramite le funzioni e^x , $\log x$, $\sin x$, $\cos x$) allora la (36.1) prende il nome di *equazione trascendente*.

Una soluzione di un'equazione algebrica si dice anche *radice* dell'equazione. Per estensione, si usa il termine di *radici* anche per le soluzioni di equazioni trascendenti.

Ricordiamo le ipotesi del teorema dell'esistenza degli zeri: $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ e

$$(36.2) \quad f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

Consideriamo il numero c , punto di mezzo dell'intervallo $[a, b]$, cioè $c = (a + b)/2$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato una radice. Altrimenti consideriamo i due casi $f(c) > 0$, $f(c) < 0$. Se $f(c) > 0$, la funzione f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo $[a, c]$, mentre se $f(c) < 0$, $[c, b]$ è l'intervallo dove f cambia segno. Indichiamo con $[a_1, b_1]$ l'intervallo da considerare, cioè definiamo:

$$(36.3) \quad \begin{cases} \text{se } f(c) > 0 \Rightarrow a_1 = a, b_1 = c \\ \text{se } f(c) < 0 \Rightarrow a_1 = c, b_1 = b \end{cases}$$

Abbiamo così trovato un intervallo $[a_1, b_1]$, di ampiezza metà del precedente $[a, b]$, per cui risulta $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Definiamo $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ e ripetiamo il ragionamento.

Otteniamo tre successioni a_n, b_n, c_n che per $n \geq 1$ sono definite, analogamente alla (36.3), da

$$(36.4) \quad \begin{cases} \text{se } f(c_n) > 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n \\ \text{se } f(c_n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n \end{cases}, c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

Se per qualche n risulta $f(c_n) = 0$, ci si ferma perché si è trovata una radice; altrimenti, per costruzione, risulta

$$(36.5) \quad f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

È semplice scrivere la relazione che lega a_n con b_n (oppure con c_n); infatti, ad ogni iterazione, la lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$ si dimezza. Quindi $b_1 - a_1 = (b - a)/2$, $b_2 - a_2 = (b - a)/2^2$, e dopo n passi

$$(36.6) \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per costruzione, la successione a_n è crescente ($a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$) ed è limitata, perché contenuta nell'intervallo $[a, b]$. Per il teorema sulle successioni monotone a_n ammette limite finito, e sia x_0 tale limite; anche la successione b_n , espressa mediante la (36.6) da

$$(36.7) \quad b_n = a_n + \frac{b - a}{2^n},$$

converge ad x_0 per $n \rightarrow +\infty$.

Quindi, ricordando la (36.5), dalla continuità di f si ottiene

$$(36.8) \quad f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq 0; \quad f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Perciò $f(x_0) = 0$ ed il teorema dell'esistenza degli zeri è provato.

Dalla dimostrazione proposta risulta chiaro come calcolare numericamente la soluzione x_0 . Infatti le tre successioni a_n, b_n, c_n convergono ad x_0 . I termini di una qualunque delle tre successioni sono valori approssimati di x_0 ; in particolare, i valori di a_n sono approssimazioni per difetto, quelli di b_n sono approssimazioni per eccesso, cioè

$$(36.9) \quad a_n \leq x_0 \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dalle (36.6), (36.9) si deduce che l'errore di approssimazione che si commette sostituendo x_0 con a_n (oppure con b_n) è inferiore a $(b - a)/2^n$. Dato che c_n è il punto di mezzo dell'intervallo $[a_n, b_n]$, l'errore che si commette nell'approssimare x_0 con c_n è minore di $(b - a)/2^{n+1}$.

Riprendiamo in considerazione le equazioni (35.2), (35.3). Ci proponiamo il calcolo delle rispettive radici con un errore inferiore a 10^{-3} . In entrambi i casi abbiamo un intervallo di ampiezza $b - a = 1$; infatti nel primo caso $[a, b] = [0, 1]$, nel secondo $[a, b] = [-1, 0]$.

L'errore di approssimazione che si commette sostituendo la soluzione x_0 con c_n è minore di $1/2^{n+1}$; in particolare, per $n = 9$, risulta

$$(36.10) \quad |c_9 - x_0| \leq 1/2^{10} = 1/1024 < 10^{-3}.$$

Si ottiene la tabella di valori:

	c	c_1	...	c_6	c_7	c_8	c_9
$x^3 + x - 1 = 0$	0.5	0.75	...	0.6796	0.6835	0.6816	0.6826
$e^x + x = 0$	-0.5	-0.75	...	-0.5703	-0.5664	-0.5683	-0.5673

Quindi la radice dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ è $x_0 = 0.682 (\pm 0.001)$; la radice dell'equazione $e^x + x = 0$ è $x_0 = -0.567 (\pm 0.001)$. Il numero ± 0.001 è una stima dell'errore; cioè ad esempio nel primo caso risulta $0.681 < x_0 < 0.683$.

Chiudiamo il paragrafo con un'osservazione sull'assioma di completezza (2.11). Abbiamo utilizzato tale assioma nella dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri, in particolare nell'affermazione che la successione a_n , essendo monotona e limitata, risulta convergente.

Ciò è essenziale; infatti, nell'ambito dei numeri razionali \mathbf{Q} , dove non è verificato l'assioma di completezza, non vale nemmeno il teorema dell'esistenza degli zeri. Ad esempio, l'equazione $f(x) = x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni nell'intervallo di razionali $\{x \in \mathbf{Q}: 0 \leq x \leq 2\}$, nonostante che $f(0) < 0$, $f(2) > 0$. Infatti si è già verificato nel paragrafo 5 che $\sqrt{2}$ non è razionale. L'assioma di completezza è essenziale anche in altri teoremi di esistenza; ad esempio nel teorema di Weierstrass, o, come già detto, nel teorema sull'esistenza del limite per le successioni monotone.

37. Dimostrazione del teorema di Weierstrass

Dimostriamo il seguente teorema, enunciato nel paragrafo 35.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume minimo e massimo in $[a, b]$, cioè esistono x_1, x_2 in $[a, b]$ tali che*

$$(37.1) \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione: posto $M = \sup \{f(x): x \in [a, b]\}$, verifichiamo che esiste una successione x_n di punti di $[a, b]$ tale che

$$(37.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se $M = +\infty$, per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$ e perciò $f(x_n) \rightarrow M = +\infty$.

Se invece risulta $M < +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste x_n in $[a, b]$ tale che

$$(37.3) \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

e perciò $f(x_n) \rightarrow M$.

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass (paragrafo 27) esiste un'estratta x_{n_k} da x_n ed un punto $x_0 \in [a, b]$, tale che

$$(37.4) \quad x_{n_k} \rightarrow x_0 .$$

Poiché $f(x)$ è continua, ne segue

$$(37.5) \quad f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$$

e allora, per la (37.2),

$$(37.6) \quad M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) .$$

Abbiamo così dimostrato che

$$(37.7) \quad f(x_0) = M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\};$$

ciò implica allo stesso tempo che $M < +\infty$ e che l'estremo superiore è, in effetti, un massimo.

Analogamente si ragiona per determinare un punto di minimo, partendo dall'estremo inferiore di $f(x)$ in $[a, b]$.

38. Continuità delle funzioni monotone e delle funzioni inverse

Con lo stesso metodo utilizzato per la dimostrazione del teorema sulle successioni monotone si prova il seguente:

TEOREMA SUL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTONE. — *Sia $f(x)$ monotona in $[a, b]$; allora esistono finiti i limiti*

$$(38.1) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x);$$

$$(38.2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \quad \forall x_0 \in (a, b).$$

Dimostrazione: consideriamo il caso di una funzione $f(x)$ crescente in $[a, b]$; osserviamo subito che $f(x)$ è limitata in $[a, b]$:

$$(38.3) \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \forall x \in [a, b];$$

cioè $f(a)$ è il minimo di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, mentre $f(b)$ è il massimo.

Fissato $x_0 \in (a, b]$, poniamo

$$(38.4) \quad l^* = \sup \{f(x) : x \in [a, x_0]\}.$$

Per la (38.3) l'estremo superiore l^* è finito.

Per le proprietà dell'estremo superiore (paragrafo 12), per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x_1 \in [a, x_0]$ tale che

$$(38.5) \quad l^* - \epsilon < f(x_1).$$

Per $x > x_1$ risulta $f(x) \geq f(x_1)$ e dunque

$$(38.6) \quad l^* - \epsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq l^* < l^* + \epsilon,$$

da cui

$$(38.7) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l^*.$$

Si procede in modo analogo per il limite per $x \rightarrow x_0^+$, con $x_0 \in [a, b]$.

Osserviamo che, se $f(x)$ è crescente in $[a, b]$, i limiti (38.1), (38.2) si possono ordinare nel modo seguente:

$$(38.8) \quad \begin{aligned} f(a) &\leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \\ &\leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \leq f(b), \quad \forall x_0 \in (a, b). \end{aligned}$$

CRITERIO DI CONTINUITÀ PER LE FUNZIONI MONOTONE. — Sia $f(x)$ una funzione monotona nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ è continua in $[a, b]$ se e solo se l'immagine di $f(x)$ è tutto l'intervallo di estremi $f(a)$, $f(b)$.

Dimostrazione: se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ allora, indipendentemente dalla monotonia, assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$ (si veda il teorema dell'esistenza dei valori intermedi del paragrafo 35).

Viceversa, se $f(x)$ è crescente in $[a, b]$ ma non è continua in $x_0 \in (a, b)$, per il teorema precedente ammette in x_0 una discontinuità di prima specie e si ha

$$(38.9) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 < l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

ed $f(x)$ non assume alcun valore nell'intervallo (t_1, t_2) . Si procede in modo analogo se $x = a$, oppure se $x = b$: ad esempio, se $x = a$ e se $f(x)$ è crescente e non è continua per $x = a$, allora $f(x)$ non assume alcun valore nell'intervallo $(f(a), t)$, essendo:

$$(38.10) \quad f(a) < t = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE. — *Sia $f(x)$ una funzione strettamente monotona in $[a, b]$. Se $f(x)$ è continua, anche la funzione inversa f^{-1} è continua.*

Dimostrazione: osserviamo che la stretta monotonia di $f(x)$ su $[a, b]$ implica la sua invertibilità (si veda il criterio di invertibilità, alla fine del paragrafo 35).

Supponiamo, per fissare le notazioni, che $f(x)$ sia strettamente crescente in $[a, b]$; allora:

$$(38.11) \quad f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]; \quad f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b].$$

In particolare f^{-1} assume tutti i valori dell'intervallo $[a, b]$; per il criterio precedente (di continuità delle funzioni monotone), f^{-1} è continua.

CAPITOLO 5

DERIVATE

39. Tasso di accrescimento. Significato meccanico della derivata

Consideriamo un semplice processo di crescita di un corpo, supponendo che il peso p del corpo vari al crescere del tempo; cioè supponiamo che il peso sia una funzione del tempo $p = p(t)$.

Prendiamo in considerazione variazioni di peso a partire da un certo istante t . Al tempo t il peso è $p(t)$, mentre all'istante $t + h$, dopo che è trascorso un tempo uguale ad h , il peso è $p(t + h)$. Quindi, nell'intervallo di tempo h , il cambio di peso è $p(t + h) - p(t)$. Il rapporto

$$(39.1) \quad \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

dà una indicazione di quanto sia cambiato il peso per unità di tempo. Più precisamente il rapporto (39.1) esprime la variazione *media* per unità di tempo del peso nell'intervallo $[t, t + h]$. Si chiama anche *tasso medio di accrescimento*, o *tasso medio di variazione*, o *velocità media di accrescimento*.

Invece della variazione *media* nell'intervallo $[t, t + h]$, spesso è più utile la variazione *istantanea* al tempo t . Intuitivamente si considera l'espressione (39.1) per alcuni valori di h sempre più vicini a zero. Con il linguaggio più preciso introdotto nei capitoli precedenti, si calcola il limite, per $h \rightarrow 0$, del rapporto (39.1):

$$(39.2) \quad \text{Tasso di accrescimento} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

Si noti come sia indispensabile usare il limite per $h \rightarrow 0$, dato che, se nella (39.1) si pone direttamente $h = 0$, si ottiene una espressione senza significato. Invece, col linguaggio dei limiti, il limite in (39.2) è una forma indeterminata $0/0$ (se $p(t)$ è una funzione continua).

Per mostrare come il tasso di accrescimento possa essere effettivamente calcolato, consideriamo a titolo di esercizio il caso in cui il peso dipenda dal tempo in modo quadratico

$$(39.3) \quad p(t) = t^2 ;$$

per ogni $h \neq 0$, risulta

$$(39.4) \quad \frac{p(t+h) - p(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{t^2 + 2ht + h^2 - t^2}{h} = \frac{2ht + h^2}{h} = 2t + h.$$

L'ultimo membro della (39.4) tende a $2t$ per $h \rightarrow 0$. Quindi il tasso di accrescimento vale $2t$. Ciò significa che, al crescere del tempo $t (> 0)$, non soltanto il peso cresce come t^2 , ma anche il *cambiamento* di peso per unità di tempo aumenta (nel caso in considerazione, in modo proporzionale al tempo).

Proponiamo un esempio numerico: secondo la legge $p(t) = t^2$, al tempo $t = 10$ il peso risulta essere uguale a $p(10) = 100$. Il tasso di accrescimento, uguale a $2t$, al tempo $t = 10$ vale 20. Ciò significa che, dopo una unità di tempo, il peso del corpo aumenta di circa 20 unità; quindi $p(11)$ vale all'incirca 120. Si noti che effettivamente il valore trovato 120 non differisce di molto da $p(11) = 11^2 = 121$; approfondiremo questo aspetto nei paragrafi 44 e 81, nello studio della formula di Taylor.

Abbiamo già detto che "velocità di accrescimento" è sinonimo di "tasso di accrescimento"; ciò deriva dal fatto che una velocità si definisce in modo analogo a quanto fatto sopra. Consideriamo ad esempio un'automobile che percorre una strada, ed indichiamo con $s(t)$ lo spazio percorso in funzione del tempo t . La *velocità media* dell'automobile nell'intervallo di tempo $[t, t + h]$ è uguale al rapporto tra lo spazio percorso $s(t + h) - s(t)$ ed il tempo h impiegato a fare il percorso. La *velocità istantanea* (quella indicata dal tachimetro sul cruscotto dell'auto, se $s(t)$ è espresso in chilometri e t in ore), è il limite, per $h \rightarrow 0$, della velocità media; quindi

$$(39.5) \quad \text{Velocità istantanea} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}.$$

È chiaro che nei due esempi precedenti lo schema matematico è identico. In entrambi gli esempi occorre calcolare il *limite di un rapporto incrementale*, così chiamato perché a denominatore c'è l'incremento h della variabile indipendente, mentre a numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente.

Occorre calcolare il limite del rapporto incrementale anche in molte altre situazioni, analoghe a quelle dei due esempi esposti. Ad esempio, se si considera la densità di un fluido o di una popolazione, o l'accelerazione di un corpo che si muove di moto rettilineo. Un altro esempio, di tipo geometrico, è studiato nel paragrafo 44.

Introdurremo nel prossimo paragrafo la *derivata* come limite del rapporto incrementale, quando l'incremento tende a zero.

40. Definizione di derivata

Sia $f(x)$ definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia x un punto di (a, b) ; si dice che la funzione f è *derivabile* nel punto x se esiste finito il *limite del rapporto incrementale*

$$(40.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Tale limite è la *derivata* di f , e si indica con una delle seguenti notazioni, fra loro equivalenti:

$$(40.2) \quad f'(x), \quad \frac{df}{dx}, \quad Df(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad Dy.$$

Si dice che f è *derivabile nell'intervallo aperto* (a, b) se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$.

In alcuni casi è utile considerare al posto della definizione (40.1), invece del limite completo per $h \rightarrow 0$, soltanto il limite destro per $h \rightarrow 0^+$, oppure il limite per $h \rightarrow 0^-$. Nel primo caso si parla di *derivata destra*, nel secondo caso si parla di *derivata sinistra*.

Se $f(x)$ è definita in $[a, b]$, si dice che f è *derivabile nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$ e inoltre se f ammette derivata destra nel punto $x = a$ e derivata sinistra nel punto $x = b$.

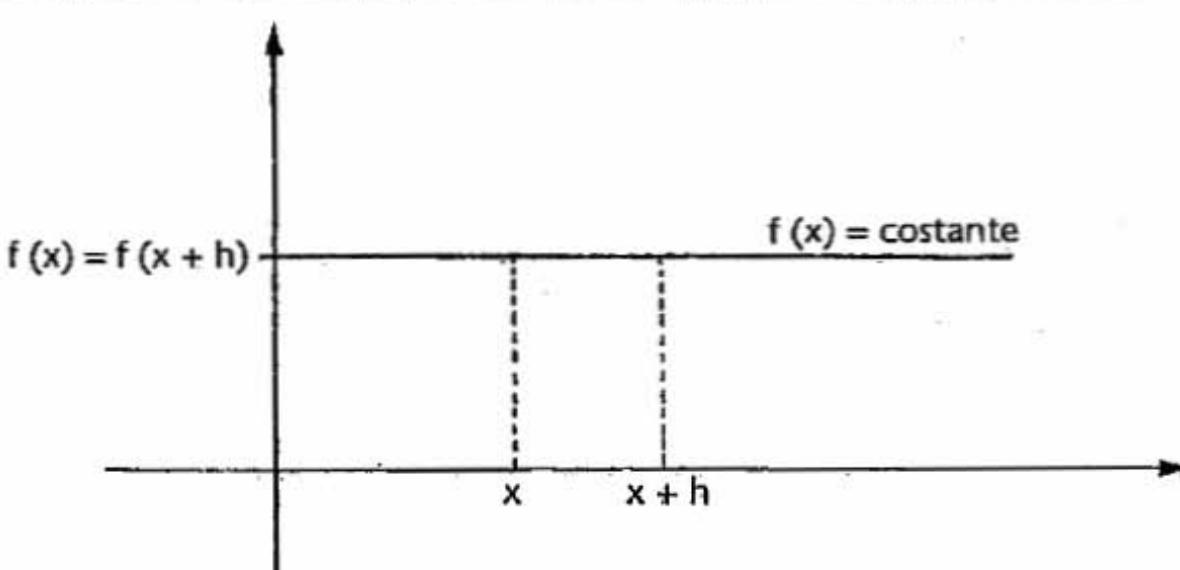
Consideriamo alcuni esempi. Iniziamo dalla funzione così tante $f(x) = q$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e proviamo che tale funzione è derivabile su tutto \mathbb{R} e che la derivata è identicamente nulla; infatti il rapporto incrementale vale costantemente zero, qualunque sia l'incremento $h \neq 0$ (si veda la figura 5.1):

$$(40.3) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{q - q}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

e quindi anche il limite del rapporto incrementale, per $h \rightarrow 0$, vale zero (il lettore non coda nell'errore di considerare il limite per $h \rightarrow 0$ di (40.3) una forma indeterminata $0/0$).

Più generalmente verifichiamo che la derivata della funzione $f(x) = mx + q$, con m e q costanti (il cui grafico è una retta), è identicamente uguale ad m ; infatti il rapporto incrementale vale costantemente m , qualunque sia $h \neq 0$:

$$(40.4) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[m(x+h) + q] - [mx + q]}{h} = m.$$



9708920733825.1

Figura 5.1

Abbiamo già calcolato nel paragrafo precedente la derivata della funzione $f(x) = x^2$, trovando $f'(x) = 2x$.

Verifichiamo invece che la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile per $x = 0$. Infatti se $h \neq 0$ si ha

$$(40.5) \quad \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Abbiamo già incontrato questa funzione nella (34.1). Il limite per $h \rightarrow 0$ del rapporto incrementale non esiste, perché risulta:

$$(40.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1; \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Quindi $f(x) = |x|$ non è derivabile per $x = 0$; mentre esistono le derivate destra e sinistra, uguali rispettivamente a +1 e -1.

Confrontiamo la nozione di derivabilità con quella di continuità. Ricordiamo che una funzione f è continua in un punto x se (riprendiamo la definizione (33.2) cambiando x_0 con x , e x con $x + h$):

$$(40.7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x).$$

L'esempio precedente, con $f(x) = |x|$, mostra che una funzione continua può non essere derivabile. Invece, *ogni funzione derivabile in x è continua in x* ; infatti:

$$(40.8) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) &= f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} [f(x + h) - f(x)] = \\ &= f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = \\ &= f(x) + f'(x) \cdot 0 = f(x). \end{aligned}$$

Se una funzione è derivabile in tutti i punti di un intervallo (a, b) , allora la sua derivata $f'(x)$ è una funzione definita su (a, b) . Se questa funzione è a sua volta derivabile, diremo che la sua derivata $(f')'$ è la *derivata seconda* della funzione f , ed indicheremo tale derivata con uno dei simboli:

$$(40.9) \quad f'', \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad D^2 f, \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad D^2 y.$$

Se a sua volta la derivata seconda è derivabile parleremo di derivata terza f''' è così via. Useremo, il simbolo $f^{(n)}$ per la derivata n-sima. Può accadere che una funzione ammetta derivate fino ad un ordine $n \in \mathbb{N}$; oppure che sia derivabile infinite volte, cioè che ammetta derivate di qualsiasi ordine n.

Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ ammette derivate di ogni ordine; infatti abbiamo verificato nel paragrafo precedente che $f'(x) = 2x$; poi dalla (40.4) segue che $f''(x) = 2$ e dalla (40.3) che $f'''(x) = 0$; dato che f''' è costante, si ottiene $f^{(4)} = 0$ e, analogamente, $f^{(n)}(x) = 0$ per ogni $n \geq 3$.

Invece, la funzione $f(x) = x \cdot |x|$ ammette per $x = 0$ derivata prima, ma non derivata seconda; infatti, essendo

$$(40.10) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

$f(x)$ è derivabile e, per $x \neq 0$, si ha

$$(40.11) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

mentre, se $x = 0$, si ha

$$(40.12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0;$$

pertanto $f'(0) = 0$. In definitiva $f(x)$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la derivata vale

$$(40.13) \quad f'(x) = 2|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Però $f'(x)$ non è derivabile per $x = 0$; quindi non esiste la derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = 0$.

41. Operazioni con le derivate

Per le derivate valgono le seguenti regole di calcolo:

OPERAZIONI CON LE DERIVATE. — Se f e g sono due funzioni derivabili in un punto x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente purché il denominatore sia diverso da zero), e si ha:

(41.1)
$$(f \pm g)' = f' \pm g' ;$$

(41.2)
$$(fg)' = f'g + fg' ;$$

(41.3)
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (se g \neq 0).$$

Dimostriamo la (41.1) con il segno $+$: per ogni $h \neq 0$, scriviamo il rapporto incrementale relativo alla funzione somma $f + g$:

$$(41.4) \quad \begin{aligned} & \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ & = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Dato che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti, per $h \rightarrow 0$ si ottiene la (41.1).

Dimostriamo ora la regola di derivazione del prodotto. A tal fine scriviamo il rapporto incrementale relativo alla funzione prodotto fg :

$$(41.5) \quad \begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ & = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ & = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

La funzione g essendo per ipotesi derivabile in x , è anche continua. Quindi al limite per $h \rightarrow 0$ risulta $g(x+h) \rightarrow g(x)$. Dalla relazione sopra scritta si ottiene la tesi passando al limite per $h \rightarrow 0$.

Per dimostrare la formula (41.3) relativa al quoziente, supponiamo $g(x) \neq 0$. Per il teorema della permanenza del segno (paragrafo 35), esiste un numero $\delta > 0$ per cui, se $|h| < \delta$, allora $g(x+h) \neq 0$. Scriviamo il rapporto incrementale di f/g :

$$(41.6) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \frac{1}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \\ & = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \\ & = \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \frac{1}{g(x+h)g(x)}. \end{aligned}$$

Al limite per $h \rightarrow 0$ si ottiene la tesi, ricordando che, come nel caso del prodotto, la funzione g è continua in x e quindi $g(x + h)$ tende a $g(x)$.

Notiamo che un caso particolarmente importante di derivazione di un prodotto si ha quando una delle due funzioni è costante. Dato che la derivata di una costante vale zero, dalla regola (41.2) si ottiene

$$(41.7) \quad (cf)' = cf' \quad (c = \text{costante}).$$

42. Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse

Una delle più importanti regole di derivazione è quella relativa alle funzioni composte. Se y è funzione di z ($y = f(z)$) e z a sua volta è funzione di x ($z = g(x)$), $y = f(g(x))$ è la *funzione composta* risultante. Si usa anche il simbolo $f(g(x)) = fog(x)$.

Sono funzioni composte, ad esempio, $y = \sin x^2$ ($y = \sin z$, $z = x^2$), oppure $y = \sin^2 x$ ($y = z^2$, $z = \sin x$).

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE. — Se g è una funzione derivabile in x , e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x , e si ha

$$(42.1) \quad Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Così, ad esempio, in base alla regola di derivazione delle funzioni composte, la derivata della funzione $y = \sin x^2$ vale $y' = \cos(x^2) \cdot 2x$, mentre la derivata della funzione $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ vale $y' = 2 \sin x \cdot \cos x$.

Per semplificare la dimostrazione, consideriamo preliminarmente il caso in cui risulti $g(x + h) \neq g(x)$ per ogni $h \neq 0$; il caso generale è trattato di seguito. Il rapporto incrementale della funzione composta, nel punto x , vale

$$(42.2) \quad \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} \cdot \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

Nel primo dei due quozienti a secondo membro compare il rapporto incrementale della funzione f nel punto $g(x)$, con incremento $k = g(x + h) - g(x)$. Tale incremento k tende a zero per $h \rightarrow 0$, dato che g è continua in x . Quindi

$$(42.3) \quad \begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} = \\ & = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)), \end{aligned}$$

che corrisponde alla tesi (42.1).

Passiamo alla dimostrazione del teorema di derivazione delle funzioni composte nel caso generale.

Ricordiamo preliminarmente che la funzione g è derivabile in un punto x (ed è definita in un intorno di tale punto), mentre la funzione f è derivabile nel punto $y = g(x)$ (ed è definita in un intorno di y). Poniamo

$$(42.4) \quad F(k) = \begin{cases} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} & \text{se } k \neq 0 \\ f'(y) & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Per l'ipotesi di derivabilità di f nel punto y e per la definizione di $F(0)$ risulta

$$(42.5) \quad \lim_{k \rightarrow 0} F(k) = f'(y) = F(0)$$

(cioè $F(k)$ è continua nel punto $k = 0$). Posto

$$(42.6) \quad k = g(x+h) - g(x),$$

ed essendo $g(x) = y$, $g(x+h) = g(x) + k = y + k$, per ogni $k \neq 0$ risulta

$$(42.7) \quad \begin{aligned} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{k}{h} = \\ &= \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = F(k) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

La novità rispetto alla dimostrazione proposta precedente è che l'identità

$$(42.8) \quad \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = F(k) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

vale, non solo per $k \neq 0$, ma anche per $k = 0$, perché in tal caso, essendo $k = g(x+h) - g(x) = 0$, risulta nullo il secondo membro di (42.8), ma anche il primo membro, dato che $g(x+h) = g(x)$. vale, non solo per $k \neq 0$, ma anche per $k = 0$, perché in tal caso, essendo $k = g(x+h) - g(x) = 0$, risulta nullo il secondo membro di (42.8), ma anche il primo membro, dato che $g(x+h) = g(x)$.

Passiamo al limite in (42.8) per $h \rightarrow 0$. Per la continuità di g (g è continua in x essendo, per ipotesi, derivabile in tale punto) $k = g(x+h) - g(x)$ converge a zero per $h \rightarrow 0$; allora, per le (42.5), (42.8), si ottiene

$$(42.9) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \lim_{k \rightarrow 0} F(k) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= F(0) \cdot g'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Esaminiamo ora la regola di derivazione delle funzioni inverse. Ricordiamo quanto già detto circa le funzioni strettamente monotone: una funzione $f(x)$ è *strettamente crescente* nell'intervallo $[a, b]$ se

$$(42.10) \quad a \leq x_1 < x_2 \leq b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

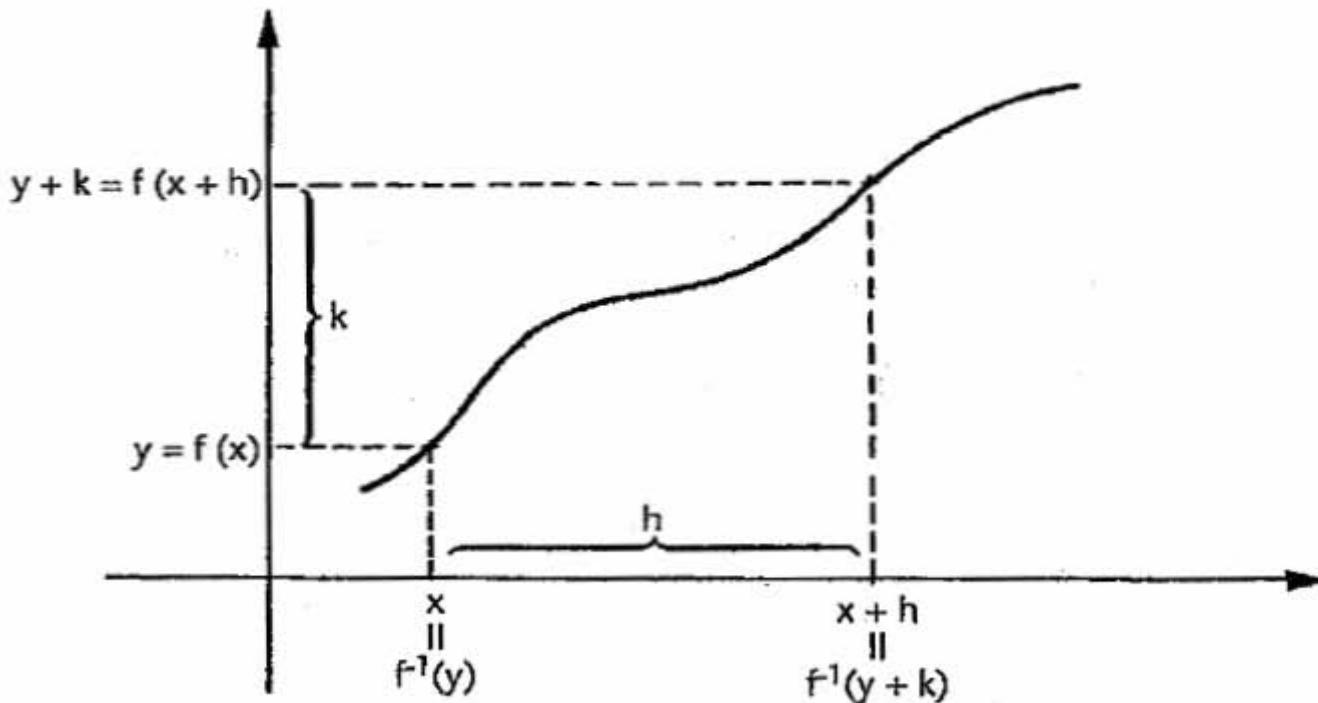
Se f è continua e strettamente crescente in $[a, b]$ allora è anche *invertibile*, cioè ad ogni $y \in [f(a), f(b)]$ corrisponde un solo $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$, e si indica $x = f^{-1}(y)$; la stessa proprietà vale per le funzioni strettamente decrescenti (si veda il criterio di invertibilità alla fine del paragrafo 35).

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE. — Sia $f(x)$ una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in un punto $x \in (a, b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e la derivata vale

$$(42.11) \quad Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Prima di dare la dimostrazione, applichiamo il teorema ad un esempio concreto: la funzione $y = f(x) = x^2$ è continua e strettamente crescente per $x > 0$. La funzione inversa f^{-1} è $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Abbiamo già visto che la funzione $y = x^2$ è derivabile e che la derivata vale $y' = 2x$. In base al teorema di derivazione delle funzioni inverse, anche $x = \sqrt{y}$ è derivabile per $y > 0$ e la derivata vale

$$(42.12) \quad D\sqrt{y} = \frac{1}{D(x^2)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$



970088207338345.2

Figura 5.2

Passiamo alla dimostrazione del teorema: con riferimento alla figura 5.2, ad x corrisponde $y = f(x)$; ad $x + h$ corrisponde $y + k = f(x + h)$, dove si è posto $k = f(x + h) - f(x)$. In termini di f^{-1} risulta quindi $x = f^{-1}(y)$ e $x + h = f^{-1}(y + k)$. Scriviamo il rapporto incrementale relativo ad f

$$(42.13) \quad \frac{f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x + h) - f(x)}.$$

Dato che f è strettamente monotona, risulta $h \neq 0$ se e solo se $k \neq 0$. Si può anche verificare che se k tende a zero allora anche h tende a zero; infatti $h = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow 0$ perché f^{-1} è una funzione continua (si veda il paragrafo 38). Dato che a secondo membro compare il reciproco del rapporto incrementale della f , passando al limite nella (42.13) per $k \rightarrow 0$, si ottiene la tesi.

43. Derivate delle funzioni elementari

In questo paragrafo calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari. Cominciamo con la potenza ad esponente naturale n :

$$(43.1) \quad D x^n = n x^{n-1}.$$

Questa formula (che si ottiene anche dalla più generale formula (43.10)) si può dimostrare facendo uso del principio di induzione: abbiamo già verificato che $D x = 1$ (si veda la (40.4)); quindi la (43.1) è vera per $n = 1$. Supponiamo, secondo lo schema del principio di induzione, che la (43.1) sia vera e calcoliamo per mezzo della regola di derivazione del prodotto:

$$(43.2) \quad \begin{aligned} D x^{n+1} &= D(x^n \cdot x) = D(x^n) x + x^n Dx = \\ &= n x^{n-1} x + x^n \cdot 1 = (n+1) x^n. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi verificato che la (43.1) vale anche per l'indice $n + 1$. Perciò la (43.1) è provata.

Notiamo che il risultato ottenuto ci permette di calcolare la derivata di un *polinomio* qualsiasi:

$$(43.3) \quad \begin{aligned} y &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \\ y' &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1. \end{aligned}$$

In particolare, la derivata di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $n-1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Proviamo che la derivata del logaritmo in base a ($a > 0, a \neq 1$) di x vale:

$$(43.4) \quad D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e, \quad \forall x > 0.$$

Utilizziamo le proprietà del logaritmo (tra cui la sua continuità) ed il limite notevole (33.7) (nel limite (33.7) cambiamo $x \rightarrow 0$ con $h \rightarrow 0$, e b con $1/x$):

$$\begin{aligned} (43.5) \quad \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)^{1/h} = \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h} = \\ &= \log_a e^{1/x} = \frac{1}{x} \log_a e. \end{aligned}$$

Risulta ora chiaro l'interesse nel considerare logaritmi in base e : dato che $\log_e e = 1$, la derivata del logaritmo in base e di x è semplicemente

$$(43.6) \quad D \log x = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

La funzione $y = \log x$ è invertibile e la sua inversa è $x = e^y$. Dal teorema di derivazione delle funzioni inverse otteniamo

$$(43.7) \quad D e^y = \frac{1}{D \log x} = \frac{1}{1/x} = x = e^y.$$

Usando, come si è soliti fare, il simbolo x per denotare la variabile indipendente, possiamo riscrivere la formula precedente:

$$(43.8) \quad D e^x = e^x.$$

Ricordiamo la proprietà (9.13): $e^{\log x} = x$, che è sempre utile quando si vuole calcolare la derivata di un esponenziale o di una potenza che non rientrano nei casi precedenti. Ad esempio, si può calcolare la derivata delle

funzioni esponenziali con base $a > 0$, $a \neq 1$, facendo uso del teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$(43.9) \quad D a^x = D e^{\log a^x} = D e^{x \log a} = \\ = e^{x \log a} D(x \log a) = a^x \log a.$$

Analogamente si calcola la derivata della funzione potenza x^b , con esponente b reale

$$(43.10) \quad D x^b = D e^{\log x^b} = D e^{b \log x} = \\ = e^{b \log x} D(b \log x) = x^b \cdot \frac{b}{x} = b x^{b-1}$$

La formula precedente è molto utile. È utilizzata ad esempio nei casi $b = 1/2$ (in questo caso si riottiene (42.12)) e $b = -1$:

$$(43.11) \quad D \sqrt{x} = D x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2 \sqrt{x}} \quad ;$$

$$(43.12) \quad D \left(\frac{1}{x} \right) = D x^{-1} = (-1) x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad .$$

Calcoliamo ora le derivate delle funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Cominciamo con

$$(43.13) \quad D \sin x = \cos x; \quad D \cos x = -\sin x.$$

Dimostriamo la prima delle due: facciamo uso delle formule di addizione (10.4) e dei limiti notevoli (30.10), (32.10):

$$(43.14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \\ = \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x.$$

Allo stesso modo si calcola la derivata di $\cos x$:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \\
 (43.15) \quad &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\
 &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x.
 \end{aligned}$$

La derivata della funzione $\operatorname{tg} x$ si calcola con la regola di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned}
 D \operatorname{tg} x &= D \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{D(\sin x) \cos x - \sin x D(\cos x)}{\cos^2 x} = \\
 (43.16) \quad &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

Riassumiamo in una tabella le principali formule di derivazione trovate in questo paragrafo:

$f(x)$	$f'(x)$
x^b	$b x^{b-1}$
$\log x$	$1/x$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$

44. Significato geometrico della derivata. Retta tangente

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0 e si consideri nel piano x, y il grafico della funzione, come in figura 5.3. Ci proponiamo di determinare l'equazione della retta r passante per il punto P_0 di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e *tangente* al grafico della funzione f .

Ciò che preliminarmente è più opportuno fare, è determinare l'equazione di una retta r' *secante* il grafico della funzione f nei punti $P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$ e $P \equiv (x_0 + h, f(x_0 + h))$. L'equazione di una generica retta non verticale è $y = mx + q$; determiniamo i parametri m, q imponendo che la retta passi per i punti dati:

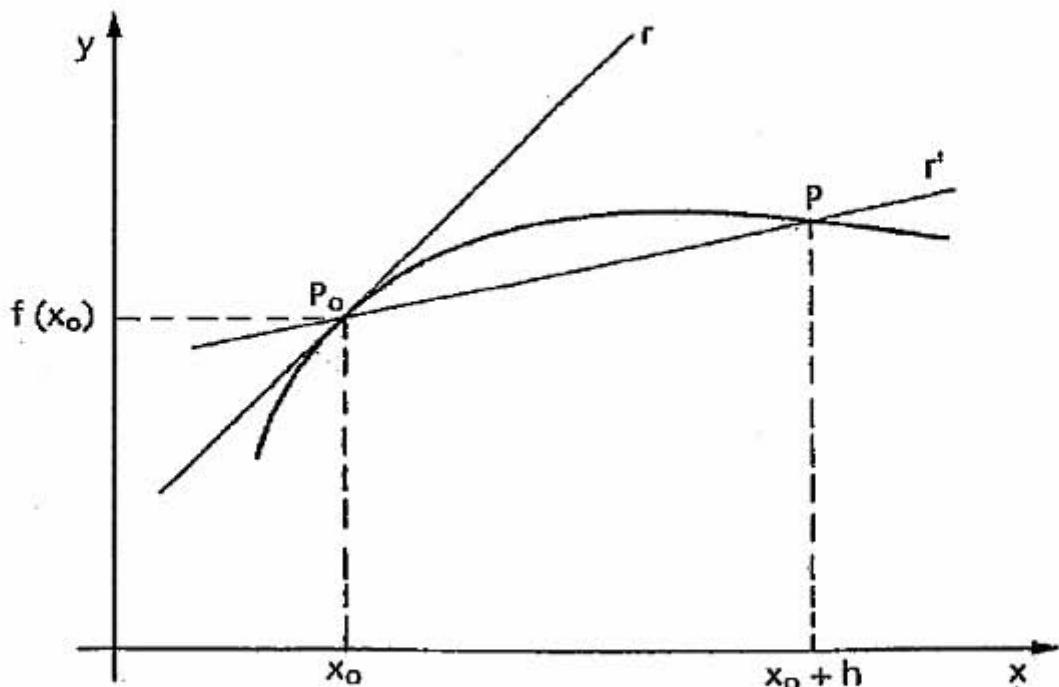


Figura 5.3

$$(44.1) \quad \begin{cases} f(x_0) = m x_0 + q & (\text{passaggio per } P_0) \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q & (\text{passaggio per } P). \end{cases}$$

Abbiamo un sistema in due equazioni nelle due incognite m, q , che si può risolvere per sostituzione, oppure sottraendo la prima equazione dalla seconda. Si ottiene $m = [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h$ e poi si ricava q dalla prima equazione. L'equazione della retta secante risulta essere:

$$(44.2) \quad y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} (x - x_0).$$

L'equazione della retta tangente, quando esiste, è il limite per $h \rightarrow 0$ dell'equazione della retta secante. Si può passare al limite nella (44.2) se e solo se f è derivabile in x_0 . Quindi, se f è derivabile in x_0 , si ottiene l'*equazione della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ al grafico della funzione f* :

$$(44.3) \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Quanto stabilito fornisce il significato geometrico della derivata. Dato che nell'equazione della retta tangente il coefficiente della x è uguale a $m = f'(x_0)$, si dice che la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il *coefficiente angolare* della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. La derivata è quindi una misura della *pendenza* del grafico della funzione.

Diamo un esempio numerico di utilizzazione dell'equazione della retta tangente, esaminando un problema di calcolo approssimato dei valori di una funzione. Normalmente non è immediato il calcolo del valore numerico di una funzione in un punto. Ad esempio, è facile calcolare a mente i valori numerici delle funzioni \sqrt{x} , oppure $\sin x$, solo per particolari valori della x . Al contrario, è sempre elementare calcolare i valori numerici delle funzioni $y = mx + q$, che hanno per grafico una retta. L'idea è quella di "sostituire" una funzione data con l'equazione della sua retta tangente in un punto di ascissa x_0 , con x_0 vicino al punto x in cui si vuole calcolare la funzione: Dalla figura 5.4 è intuitivamente chiaro che l'errore che si commette è tanto più piccolo, quanto più x è vicino all'ascissa del punto di tangenza x_0 .

Cioè la quantità $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ rappresenta una approssimazione di $f(x)$, tanto migliore quanto più x è vicino ad x_0 ; scriveremo:

$$(44.4) \quad f(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{se } x \text{ è vicino ad } x_0).$$

Il punto x_0 va scelto in modo che sia semplice calcolare $f(x_0)$ e $f'(x_0)$.

Si può dare un significato rigoroso alla scrittura (44.4) usando i limiti. La (44.4) significa che, non solo la differenza tra primo e secondo membro tende a zero quando $x \rightarrow x_0$, ma anche che tende a zero più rapidamente della quantità $x - x_0$, cioè che:

$$(44.5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0.$$

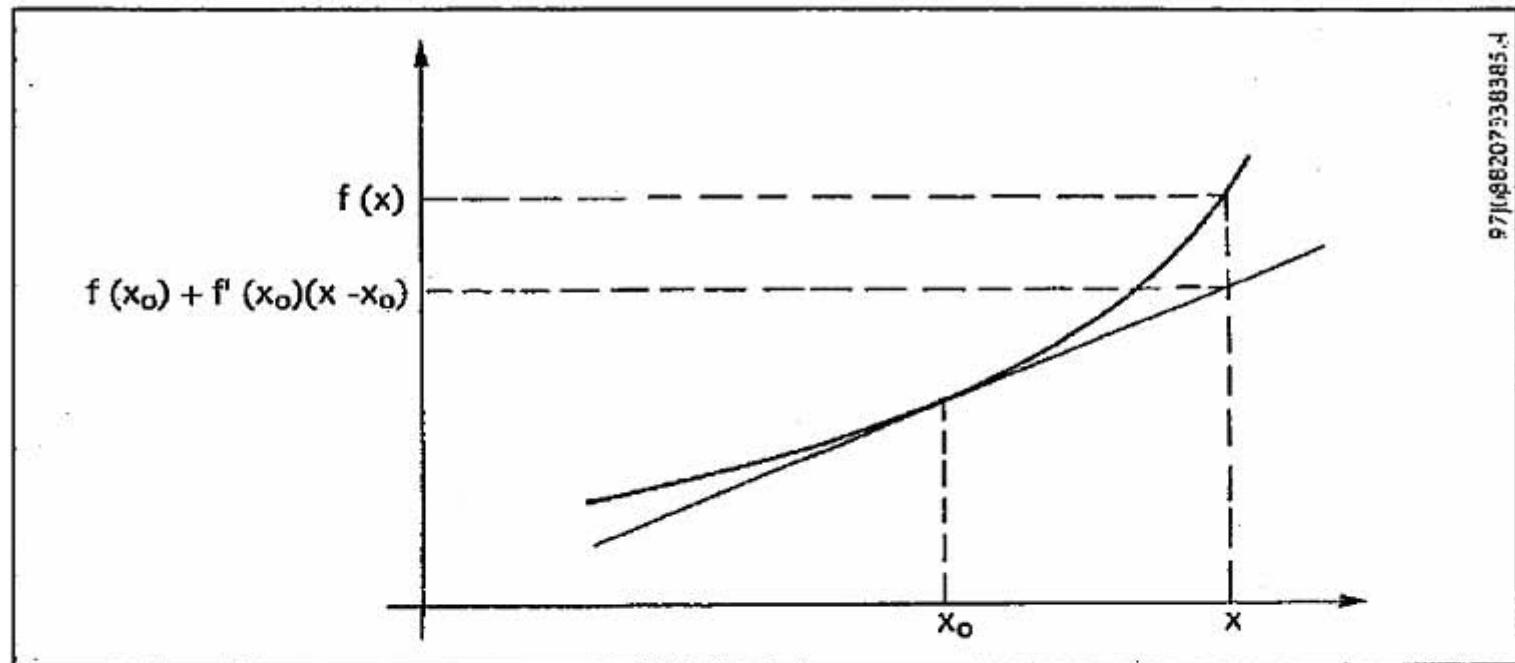


Figura 5.4

La verifica della relazione sopra scritta è immediata; infatti, dato che f è derivabile in x_0 , possiamo riscrivere il limite precedente nella forma:

$$(44.6) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Ad esempio, se $f(x) = \sqrt{x}$, la (44.4) diventa

$$(44.7) \quad \sqrt{x} \equiv \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \quad (\text{se } x \rightarrow x_0)$$

Volendo esprimere in forma decimale $\sqrt{80}$, scegliendo $x_0 = 81$ otteniamo

$$(44.8) \quad \sqrt{80} \approx 9 + \frac{1}{2 \cdot 9}(-1) = 9 - \frac{1}{18} = 8.9444\dots$$

(il valore esatto è $\sqrt{80} = 8.9442\dots$). Qualcuno forse avrà pensato che il conto è stato possibile soltanto perché 80 è vicino al quadrato perfetto 81. Proviamo con $\sqrt{2}$: si può calcolare $\sqrt{200}$, e poi dividere il risultato per 10. Il quadrato più vicino a 200 è $196 = 14^2$; si ha quindi:

$$(44.9) \quad \sqrt{200} \approx 14 + \frac{1}{2 \cdot 14} \cdot 4 = 14 + \frac{1}{7} = 14.1428\dots$$

Perciò $\sqrt{2} \approx 1.41428$ (il valore esatto di $\sqrt{2}$ è 1.41421...).

I conti fatti dovrebbero aver dato un'idea dell'utilità delle derivate nella tabulazione delle funzioni elementari. Torneremo nel paragrafo 81 in modo più completo su questo interessante aspetto del calcolo differenziale.

Utilizzando fra l'altro il significato geometrico della derivata, studiamo la continuità e la derivabilità, nel punto $x_0 = 0$, della funzione $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2$) definita su \mathbb{R} dalla formula

$$(44.10) \quad f_n(0) = 0, \quad f_n(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad \text{se } x \neq 0.$$

Per $n = 1, 2$, $f_n(x)$ è definita rispettivamente da

$$(44.11) \quad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

mentre per $n = 0$ si ottiene la funzione

$$(44.12) \quad f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

che non è continua nel punto $x_0 = 0$, ma presenta una discontinuità di seconda specie (infatti come risulta dalla (32.5), non esiste il limite per $x \rightarrow 0$ di $f_0(x)$); inoltre f_0 , non essendo continua in $x_0 = 0$, non è neanche derivabile in tale punto.

La funzione $f_1(x)$, prodotto del fattore infinitesimo x per il fattore limitato $\sin(1/x)$, converge a zero per $x \rightarrow 0$; essendo $f_1(0) = 0$, la funzione è continua (anche) in $x_0 = 0$; però

non risulta derivabile in tale punto perché non esiste il limite (si veda la (32.5)) del rapporto incrementale:

$$(44.13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}.$$

La funzione $f_2(x)$ è derivabile (e quindi anche continua) anche per $x_0 = 0$ e la derivata vale $f'_2(0) = 0$; infatti:

$$(44.14) \quad f'_2(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

I risultati trovati sono riassunti nella seguente tabella:

funzione	continua in $x_0 = 0$	derivabile in $x_0 = 0$
$f_0(x)$	no	no
$f_1(x)$	sì	no
$f_2(x)$	sì	sì

Nelle figure 5.5, 5.6, sono rappresentati i grafici delle funzioni f_1 e f_2 eseguiti al computer; la continuità di f_1 , f_2 nel punto $x_0 = 0$ corrisponde a grafici "vicini" all'origine delle coordinate quando l'ascissa x è "vicina" ad $x_0 = 0$ (si noti che tale proprietà non è verificata per il grafico della funzione f_0 in figura 4.3).

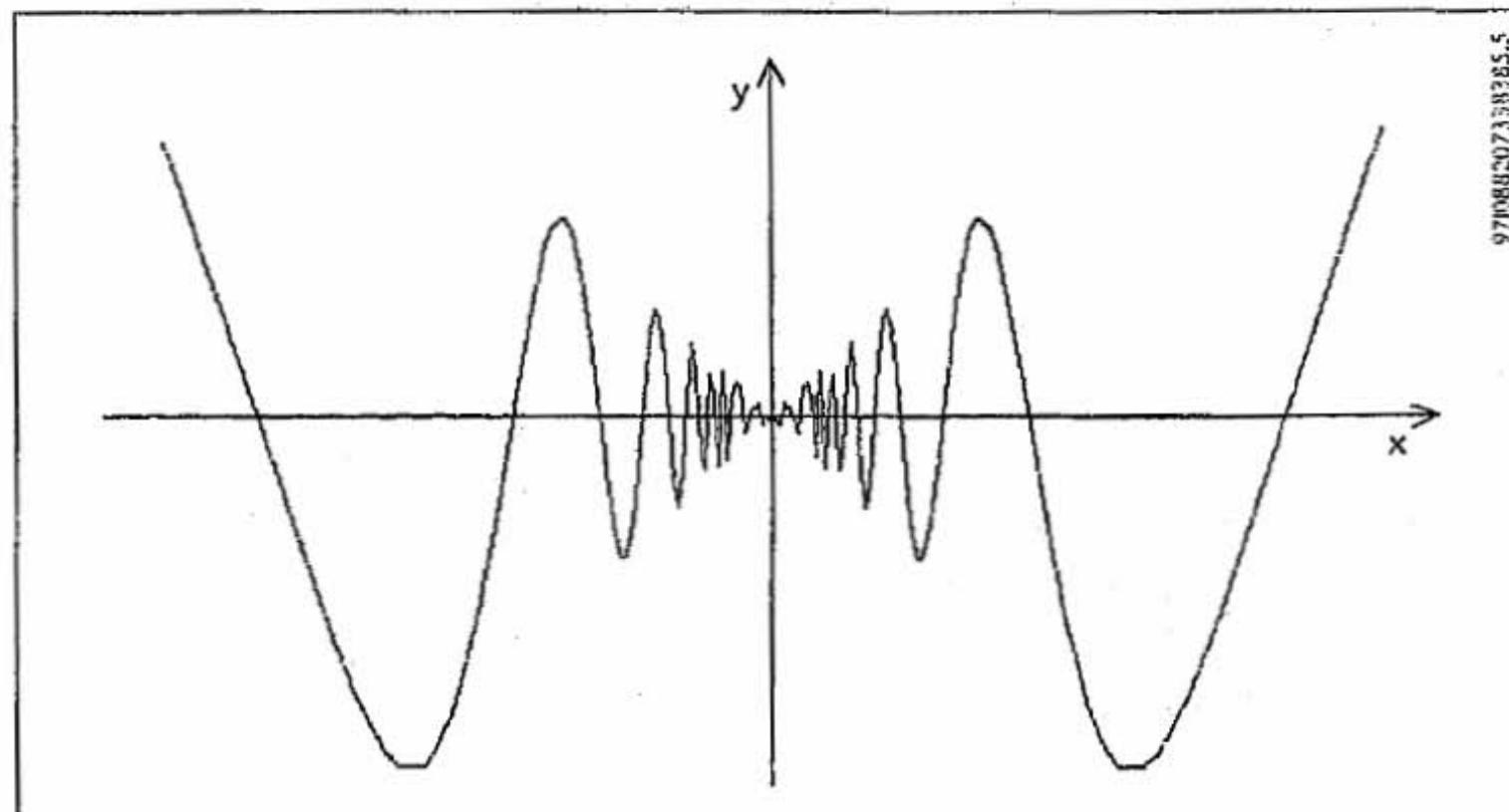
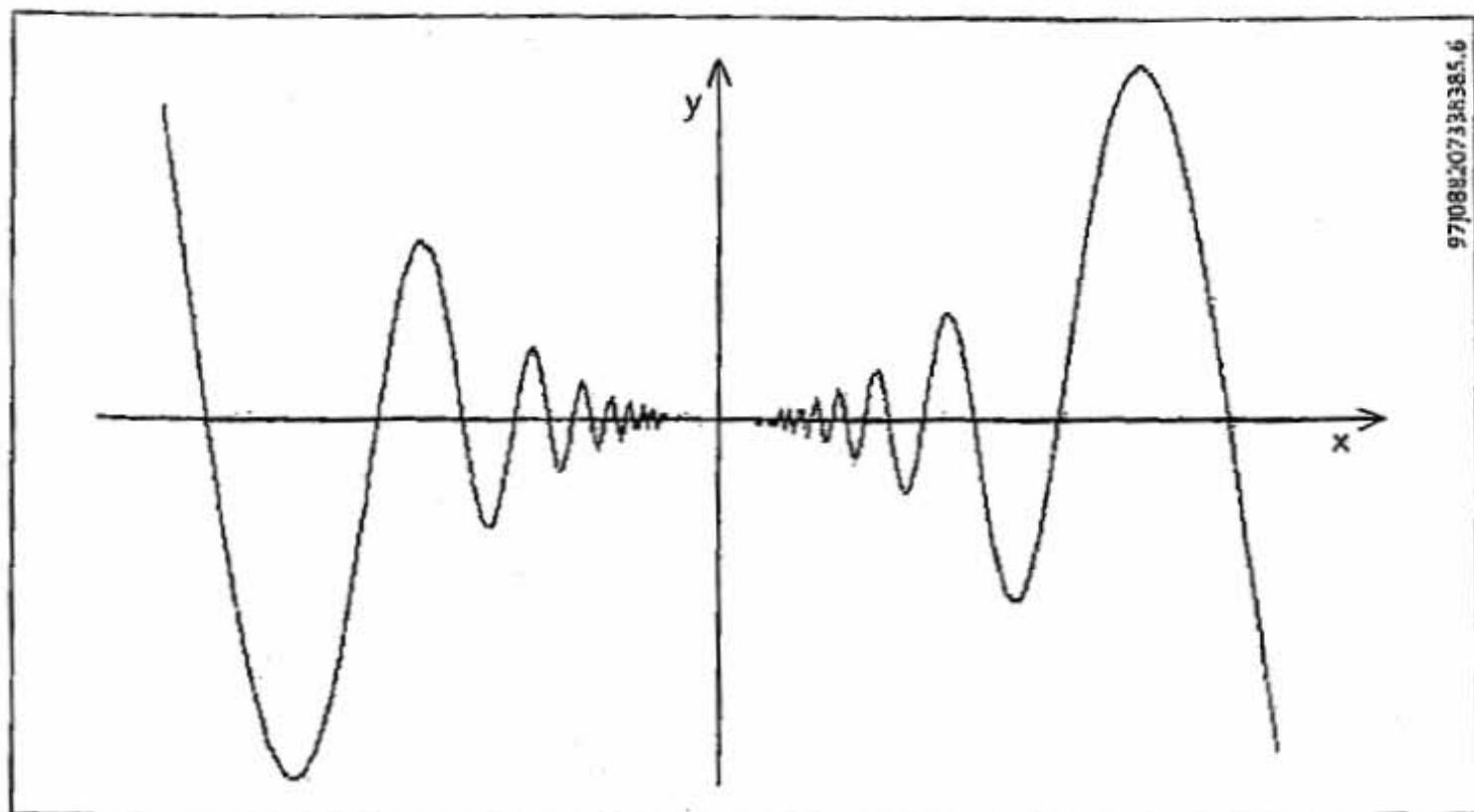


Figura 5.5 — $y = f_1(x)$

Figura 5.6 — $y = f_2(x)$

Invece la derivabilità di f_2 e la non derivabilità di f_1 corrispondono al fatto che il grafico di f_2 in figura 5.6 ammette retta tangente anche nel punto $x_0 = 0$ (dato che $f_2(0) = f'_2(0) = 0$, l'equazione (44.3) della retta tangente è: $y = 0$) mentre il grafico di f_1 in figura 5.5 non ha retta tangente nell'origine degli assi (le rette $y = x$, $y = -x$, con coefficienti angolari +1 e -1, danno un'idea dell'oscillazione della retta tangente in un generico punto $(x, f_1(x))$, con x che "si avvicina" a $x_0 = 0$). Tali proprietà sono evidenziate in figura 5.7, dove sono rappresentati in un intorno di $x_0 = 0$ i grafici delle funzioni f_1 , f_2 , con particolare enfasi alle limitazioni:

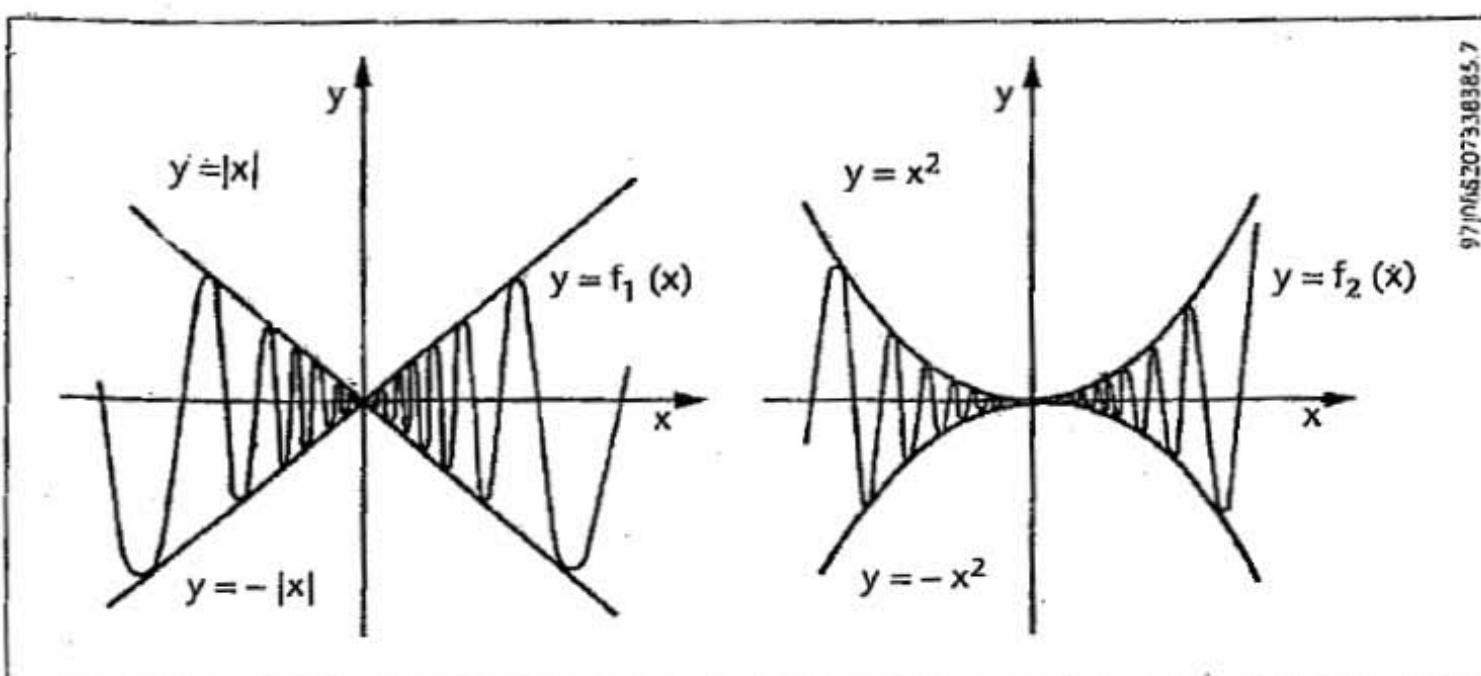


Figura 5.7

970891073385.6

970891073385.7

$$(44.15) \quad -|x| \leq f_1(x) \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(44.16) \quad -x^2 \leq f_2(x) \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Appendice al capitolo 5

45. Le funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, non sono monotone su tutto \mathbb{R} e non esistono le loro funzioni inverse su \mathbb{R} . Però possiamo restringere ad un intervallo limitato l'insieme in cui prendere in considerazione tali funzioni, in modo che risultino monotone nell'insieme considerato.

Cominciamo con la funzione $\sin x$. È una funzione strettamente crescente nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Consideriamo quindi $f(x) = \sin x$, con $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$. La funzione f è continua e quindi assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ($= -1$) ed il massimo ($= 1$). Essendo strettamente monotona, è anche invertibile. Pertanto esiste la funzione inversa $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, che viene indicata con $f^{-1}(x) = \arcsen x$ (*arcoseno di x*). Il nome deriva dal fatto che, se $y = \arcsen x$, vuol dire che y è uguale alla misura dell'arco, o angolo, il cui seno è x ($\sin y = x$). Il grafico dell'arcoseno si ottiene immediatamente dal grafico della funzione seno, come nella figura 5.8.

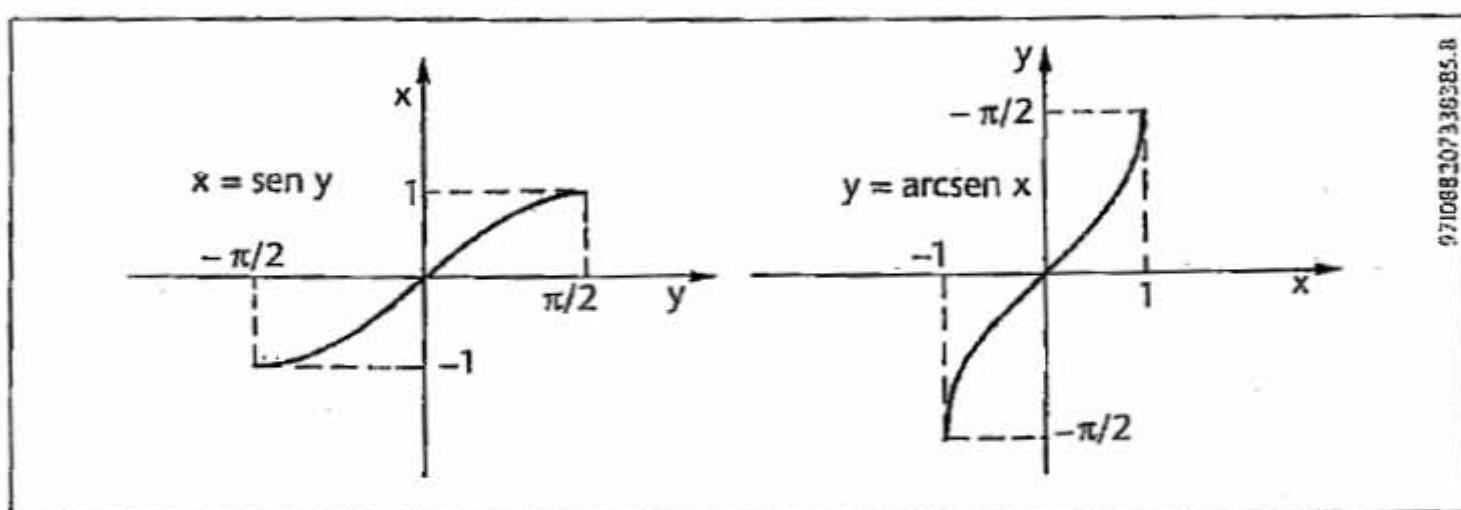


Figura 5.8

La funzione arcoseno è quindi definita nell'intervallo *chiuso* $[-1, 1]$. Dal teorema di derivazione delle funzioni inverse si ottiene che la funzione $\arcsen x$ è derivabile nell'intervallo *aperto* $(-1, 1)$, e la derivata vale:

$$(45.1) \quad D \arcsen x = \frac{1}{D \sen y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 y}} = \\ - \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 (\arcsen x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

sono state utilizzate le relazioni

$$(45.2) \quad \cos y = \sqrt{1 - \sen^2 y}, \quad \sen(\arcsen x) = x,$$

la prima delle quali vale perché $\cos y > 0$ per ogni $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La funzione $\arcsen x$ non è derivabile per $x = \pm 1$, dato che $\cos y = D \sen y$ si annulla per i corrispondenti valori $y = \arcsen(\pm 1) = \pm\pi/2$. Graficamente, ciò corrisponde al fatto che la funzione $\arcsen x$ ha retta tangente verticale se $x = \pm 1$.

Passiamo alla funzione $f(x) = \cos x$. Risulta che $f:[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è continua e strettamente decrescente; quindi è invertibile in tale intervallo. La funzione inversa $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ viene indicata con $f^{-1}(x) = \arccos x$ (*arcocoseno di x*). Il grafico si ottiene dal grafico della funzione coseno, come in figura 5.9.

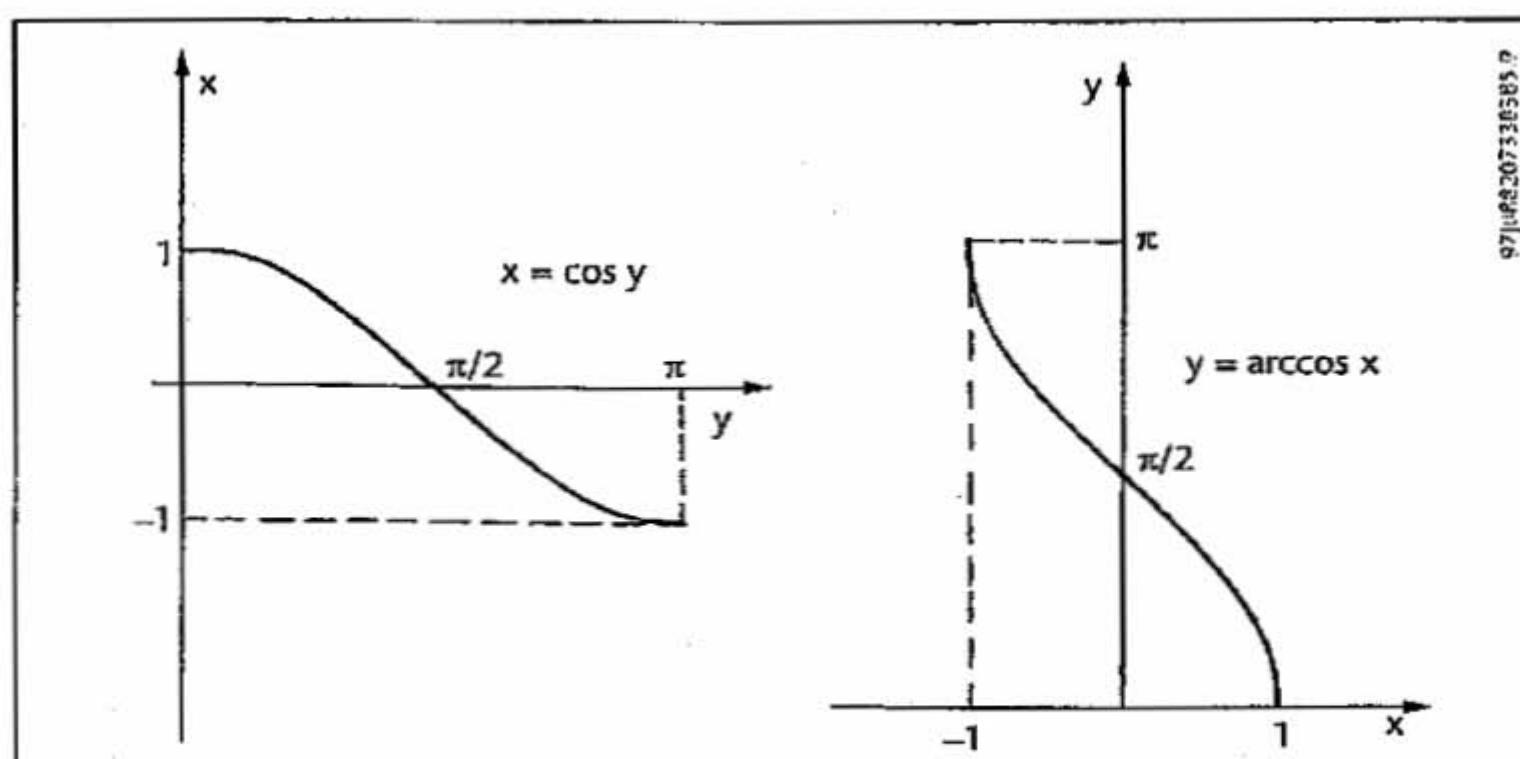


Figura 5.9

La funzione $y = \arccos x$ è definita nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$. È derivabile nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ e la derivata vale:

$$(45.3) \quad D \arccos x = \frac{1}{D \cos y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \\ = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 (\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La più usata funzione trigonometrica inversa è quella relativa alla tangente. La funzione $f(x) = \tan x$ è continua e strettamente crescente nell'intervallo aperto $(-\pi/2, \pi/2)$. È quindi invertibile in tale intervallo. La funzione inversa $f^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ viene indicata con $f^{-1}(x) = \arctg x$ (*arcotangente di x*) ed ha il grafico come in figura 5.10.

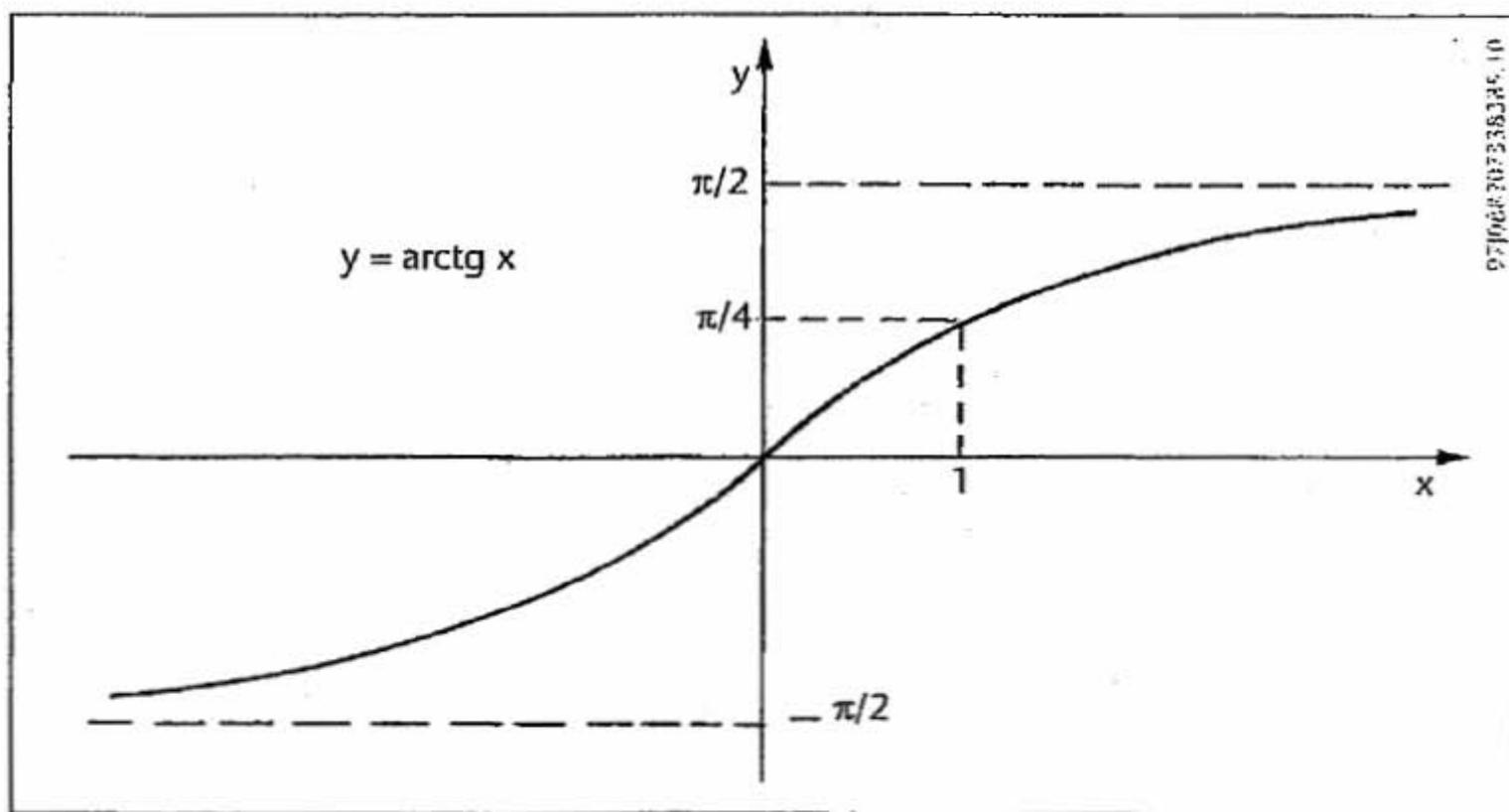


Figura 5.10

La funzione $y = \arctg x$ è definita per ogni x reale. Per i limiti all'infinito si ha:

$$(45.4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

È una funzione derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la derivata vale:

$$\begin{aligned}
 D \arctg x &= \frac{1}{D \tg y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \\
 (45.5) \quad &= \frac{1}{(\cos^2 y + \sin^2 y)/\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \tg^2 y} = \\
 &= \frac{1}{1 + \tg^2 (\arctg x)} = \frac{1}{1 + x^2}.
 \end{aligned}$$

Riassumiamo nella tabella seguente i valori trovati per le derivate:

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsen x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctg x$	$\frac{1}{1 + x^2}$

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE. STUDIO DI FUNZIONI

46. Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat

In questo capitolo affrontiamo tra l'altro lo studio del grafico di una funzione. Cominciamo col definire i punti di massimo ed i punti di minimo relativo.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Diremo che un punto $x_0 \in [a, b]$ è di *massimo (relativo)* per f , nell'intervallo $[a, b]$, se il valore $f(x_0)$ è più grande dei valori $f(x)$, con $x \in [a, b]$ vicino ad x_0 ; più precisamente, se esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$(46.1) \quad f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]: \quad |x - x_0| < \delta.$$

Si noti che non si richiede che la (46.1) valga per ogni $x \in [a, b]$, ma solo per x vicino ad x_0 . Nella figura 6.1, x_2 e x_4 sono punti di massimo; anche il punto $x = a$ è un punto di massimo relativo.

Il più grande dei valori $f(x)$ per $x \in [a, b]$, si chiama *massimo assoluto* di f nell'intervallo $[a, b]$. In figura 6.1 il massimo assoluto è assunto per $x = x_2$ e vale $f(x_2)$.

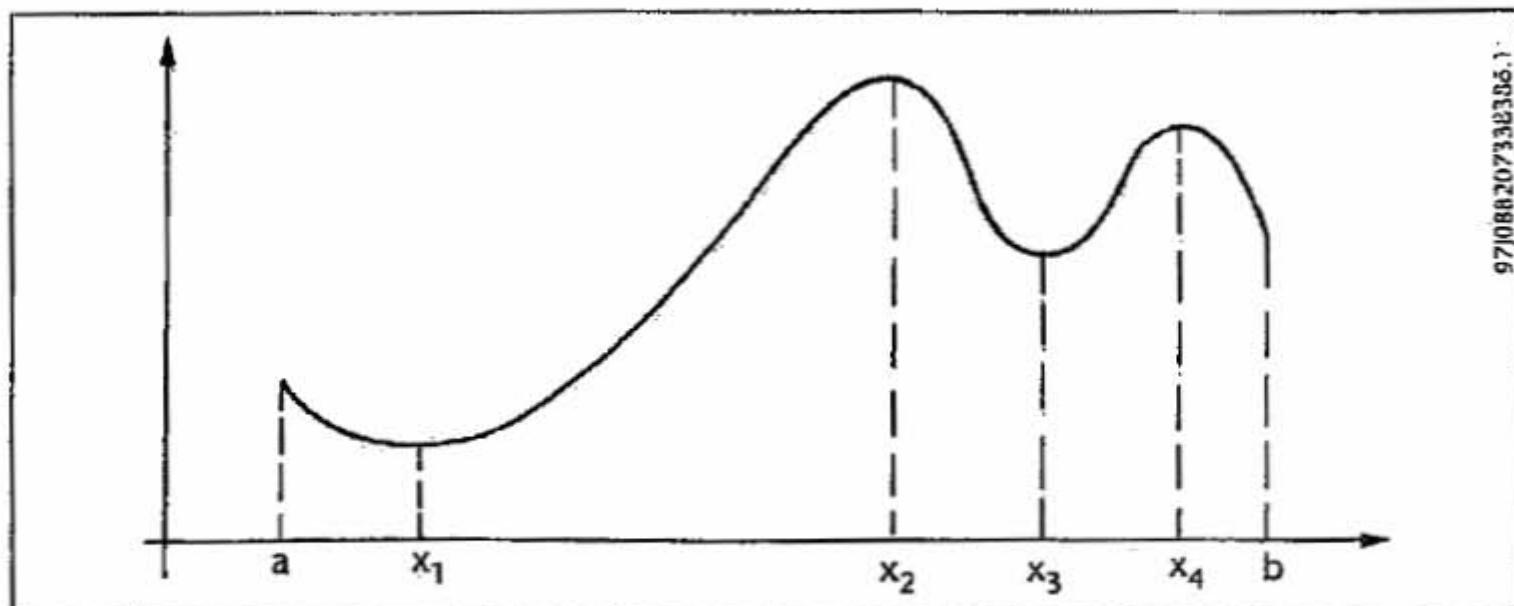


Figura 6.1

Analogamente, x_0 è un punto di *minimo (relativo)* per la funzione f , nell'intervallo $[a, b]$, se esiste $\delta > 0$ per cui

$$(46.2) \quad f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]: |x - x_0| < \delta.$$

Nella figura 6.1, x_1, x_3, b sono punti di minimo.

Dalla figura 6.1 notiamo anche il fatto seguente: se si disegna la retta tangente al grafico della funzione in ciascuno dei punti x_1, x_2, x_3, x_4 , punti di massimo o di minimo *interni* all'intervallo $[a, b]$ (un punto $x_0 \in [a, b]$ è interno all'intervallo se $x_0 \in (a, b)$; cioè se $x_0 \in [a, b]$ e $x_0 \neq a, x_0 \neq b$), tale retta risulta orizzontale. Questa proprietà vale in tutti i punti di massimo e di minimo interni all'intervallo di definizione. Non vale però (necessariamente) nei punti agli estremi dell'intervallo, dove il grafico della funzione può avere la retta tangente non orizzontale.

Una retta è orizzontale se e solo se ha equazione $y = \text{costante}$. Si ricordi l'equazione (44.3) della retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ per $x = x_0$; tale retta tangente è orizzontale se e solo se $f'(x_0) = 0$. Dimostriamo nel teorema seguente la proprietà in generale.

TEOREMA DI FERMAT. — *Sia f una funzione definita in $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0 , risulta $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione: consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo (relativo); significa che esiste $\delta > 0$ per cui

$$(46.3) \quad f(x_0) \geq f(x_0 + h), \quad \forall h: |h| < \delta.$$

Studiamo separatamente i casi $h > 0$ e $h < 0$; dalla (46.3) si ottiene:

$$(46.4) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

e, al limite per $h \rightarrow 0^\pm$

$$(46.5) \quad \begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \leq 0 ; \\ f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \geq 0 . \end{aligned}$$

Ne segue che $f'(x_0) = 0$.

Nella dimostrazione precedente l'ipotesi che x_0 sia un punto *interno* all'intervallo $[a, b]$ è essenziale. Ciò ha consentito di poter considerare incrementi h sia positivi che negativi.

Se invece x_0 è un punto non interno dell'intervallo $[a, b]$, se ad esempio $x_0 = a$, allora $x_0 + h = a + h$, con $0 < h < \delta$, rimane in $[a, b]$, mentre $x_0 + h = a + h$ non è un punto di $[a, b]$ se $h < 0$. Pertanto in (46.5) è possibile considerare solamente il limite per $h \rightarrow 0^+$ (e non il limite per $h \rightarrow 0^-$) giungendo alla conclusione che

$$(46.6) \quad f'(x_0) = f'(a) \leq 0$$

nell'ipotesi che $x_0 = a$ sia un punto di massimo relativo per $f(x)$ in $[a, b]$.

Analogamente, se $x_0 = b$ risulta $x_0 + h = b + h \in [a, b]$ soltanto se h è negativo ($-\delta < h < 0$) ed in tal caso, procedendo come nella (46.5), calcolando il limite per $h \rightarrow 0^-$ si ottiene

$$(46.7) \quad f'(x_0) = f'(b) \geq 0 ,$$

sempre nell'ipotesi che $x_0 = b$ sia un punto di massimo relativo per $f(x)$ in $[a, b]$.

In ogni caso risulta

$$(46.8) \quad f'(x_0) \cdot (x - x_0) \leq 0 , \quad \forall x \in [a, b];$$

infatti, se $x_0 = a$, allora $x - x_0 = x - a > 0$ per ogni $x \in (a, b]$ e quindi la (46.8) si riduce a $f'(x_0) \leq 0$ come in (46.6). Mentre se $x_0 = b$ allora $x - x_0 = x - b < 0$ per ogni $x \in [a, b)$ e quindi la (46.8) diventa $f'(x_0) \geq 0$ come in (46.7). Infine, se x_0 è interno ad $[a, b]$, la differenza $x - x_0$ cambia segno in dipendenza da x e la (46.8) è quindi equivalente alla condizione $f'(x_0) = 0$, come nell'enunciato del teorema di Fermat.

Come già detto la (46.8) vale nell'ipotesi che x_0 sia un punto di massimo relativo per $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, indipendentemente dall'assumere che x_0 sia *interno* ad $[a, b]$. Naturalmente, se x_0 è un punto di minimo relativo per $f(x)$ in $[a, b]$, allora nella (46.8) cambia il segno di minore o uguale con quello di maggiore o uguale. Vale quindi la seguente

PROPOSIZIONE. — *Sia $f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ e derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$. Se x_0 è un punto di massimo relativo per $f(x)$ in $[a, b]$ allora*

$$(46.9) \quad f'(x_0) \cdot (x - x_0) \leq 0 , \quad \forall x \in [a, b];$$

se x_0 è un punto di minimo relativo per $f(x)$ in $[a, b]$ risulta

$$(46.10) \quad f'(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0 , \quad \forall x \in [a, b].$$

47. I teoremi di Rolle e di Lagrange

TEOREMA DI ROLLE. — *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione: indichiamo con x_1 e x_2 due punti, rispettivamente di minimo e di massimo assoluto per f nell'intervallo $[a, b]$; cioè

$$(47.1) \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

Tali punti di massimo e di minimo assoluto per f esistono, in base al teorema di Weierstrass (paragrafi 35 e 37).

Se almeno uno dei due punti x_1, x_2 è *interno* all'intervallo $[a, b]$, in corrispondenza la derivata si annulla (per il teorema di Fermat).

Rimane da esaminare il caso in cui entrambi i punti x_1, x_2 non sono interni; diciamo $x_1 = a, x_2 = b$. La (47.1) diventa $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, per ogni x nell'intervallo $[a, b]$. Dato che per ipotesi $f(a) = f(b)$, risulta $f(x) = f(a)$ per ogni $x \in [a, b]$; quindi f è costante e la sua derivata è ovunque zero. Il teorema è dimostrato anche in questo caso.

Geometricamente il teorema di Rolle afferma che, per una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) , con $f(a) = f(b)$, esiste in (a, b) un punto x_0 in cui la retta tangente è orizzontale (figura 6.2).

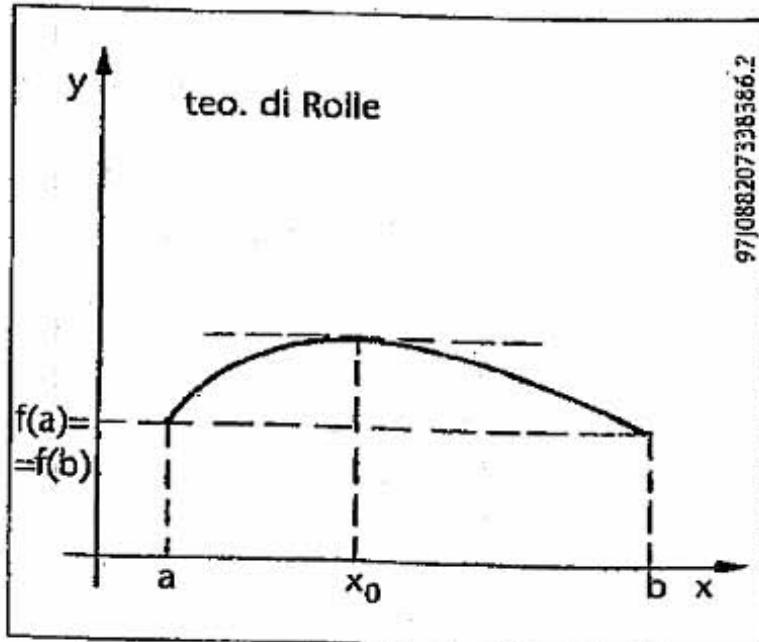


Figura 6.2

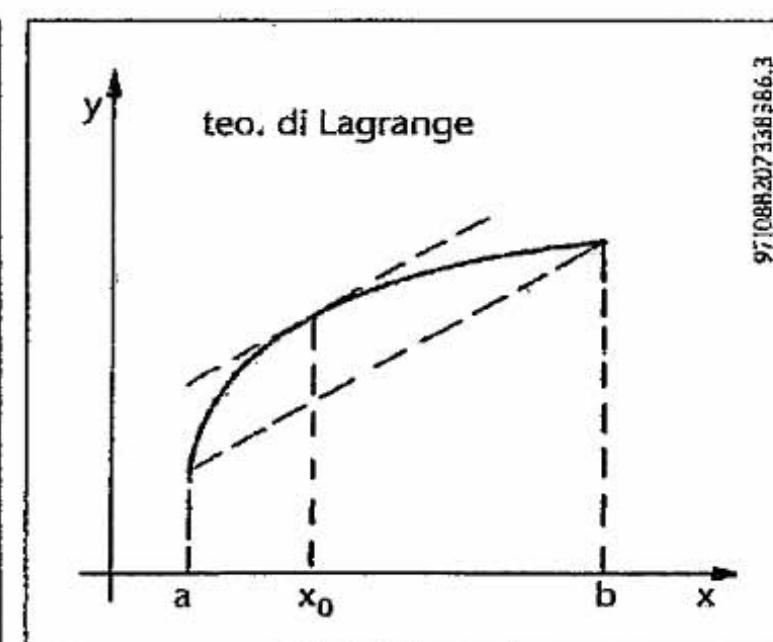


Figura 6.3

97088207338586.3

Nel teorema seguente (di Lagrange) si considera una situazione più generale, in cui non necessariamente $f(a) = f(b)$. Il teorema di Lagrange geometricamente afferma che, per una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ in cui la retta tangente è parallela alla corda congiungente gli estremi del grafico (figura 6.3). Si

tenga presente che il coefficiente angolare della retta tangente in x_0 è $f'(x_0)$, mentre il coefficiente angolare della corda è $[f(b) - f(a)]/(b - a)$.

TEOREMA DI LAGRANGE. — *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui*

$$(47.2) \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione: ci si riconduce al teorema precedente per mezzo della funzione

$$(47.3) \quad g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right].$$

Si noti che $g(x)$ è ottenuta sottraendo da $f(x)$ l'espressione della retta congiungente gli estremi del grafico. Ponendo successivamente $x = a$, $x = b$, si verifica che $g(a) = g(b) = 0$. Inoltre g è derivabile in (a, b) e risulta

$$(47.4) \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall x \in (a, b).$$

Per il teorema di Rolle, esiste quindi $x_0 \in (a, b)$ per cui $g'(x_0) = 0$. Ponendo nella relazione precedente $g'(x_0) = 0$, si ottiene la tesi (47.2).

Le ipotesi sulla funzione $f(x)$ (continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)), comuni ai teoremi di Rolle e di Lagrange, certamente sussistono se supponiamo direttamente che $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo $[a, b]$, estremi inclusi; infatti in tal caso $f(x)$ sarebbe automaticamente continua in $[a, b]$ e ovviamente, derivabile in (a, b) .

La continuità di $f(x)$ agli estremi dell'intervallo è comunque un'ipotesi indispensabile; ad esempio, la funzione (il cui grafico è rappresentato in figura 4.10)

$$(47.5) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

è derivabile in $(a, b) = (0, 1)$, è continua (a destra) per $x = 0$ (ma non è continua per $x = 1$), soddisfa l'ipotesi del teorema di Rolle $f(0) = f(1)$, ma non soddisfa la tesi del teorema di Rolle, perché la derivata è costantemente uguale ad 1 in $(0, 1)$.

48. Funzioni crescenti e decrescenti

Una conseguenza del teorema di Lagrange è il seguente criterio di monotonia, fondamentale per studiare il grafico di una funzione. Ricordiamo che la definizione di funzione monotona (ad esempio crescente) è stata data nel paragrafo 7.

CRITERIO DI MONOTONIA. — *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora.*

$$(48.1) \quad f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è crescente in } [a, b];$$

$$(48.2) \quad f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ è decrescente in } [a, b].$$

Dimostrazione: proviamo la (48.1); la (48.2) si ottiene in modo analogo.

Nell'implicazione \Rightarrow , supponendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, occorre dimostrare che, se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Scriviamo la tesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$: esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ per cui

$$(48.3) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1);$$

dato che $f'(x_0) \geq 0$ e dato che $x_2 > x_1$, risulta anche $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Viceversa, se la funzione f è crescente in $[a, b]$, per ogni $x \in (a, b)$ e $h > 0$ tale che $x + h \in (a, b)$ risulta $f(x + h) \geq f(x)$ e quindi

$$(48.4) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

(il lettore noti che la (48.4) vale anche per $h < 0$); al limite per $h \rightarrow 0^+$ si trova la tesi $f'(x) \geq 0$.

Consideriamo alcuni esempi di applicazione del criterio precedente. La funzione e^x è (strettamente) crescente su tutto \mathbb{R} , perché la derivata $D e^x = e^x$ è positiva. La funzione $\log x$ è crescente per $x > 0$, perché la sua derivata $D \log x = 1/x$ è positiva. Così pure la funzione $\arctg x$ è crescente su tutto \mathbb{R} , perché $D(\arctg x) = 1/(1+x^2) > 0$.

La funzione x^2 ha derivata uguale a $2x$, che è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$; quindi la funzione x^2 è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$; $x = 0$ è perciò un punto di minimo.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ ha come derivata $f' = 3(x^2 - 1)$, che si annulla per $x = \pm 1$, è positiva all'esterno dell'intervallo $[-1, 1]$, ed è negativa all'interno. Quindi la funzione f è crescente per $x > 1$ e $x < -1$, ed è decrescente per $-1 < x < 1$. Il punto $x = -1$ è di massimo relativo, mentre il punto $x = 1$ è di minimo. Queste sole considerazioni, unitamente ad alcuni valori della funzione (per $x = 0, x = \pm 1, x = \pm \sqrt{3}$) facilmente calcolabili, permettono di disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x$ come in figura 6.4.

In generale, si tenga conto che il segno della derivata prima costituisce una delle principali informazioni per disegnare il grafico di una funzione.

9788820733810-4

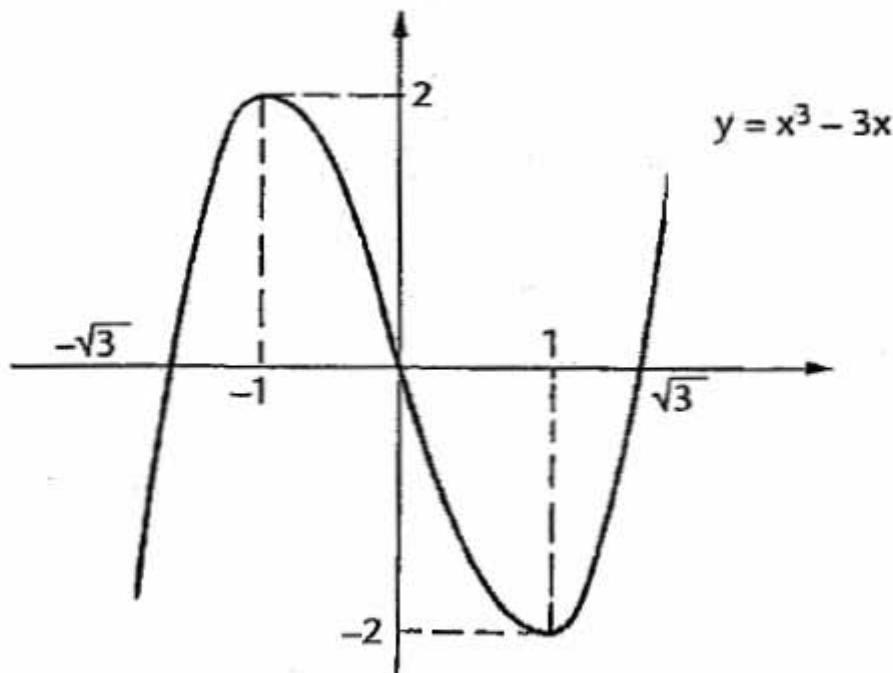


Figura 6.4

Conseguenza del criterio di monotonia è la

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO. — Una funzione è costante in un intervallo $[a, b]$ se e solo se è derivabile in $[a, b]$ e la derivata è ovunque nulla.

Dimostrazione: come in (40.3) si prova che la derivata di una funzione costante in $[a, b]$ è nulla per ogni $x \in [a, b]$.

Viceversa, se $f(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, per i criteri di monotonia (48.1), (48.2), $f(x)$ è contemporaneamente crescente e decrescente in $[a, b]$; perciò, per ogni $x \in (a, b]$ (essendo $x > a$) risulta allo stesso tempo $f(x) \geq f(a)$ e $f(x) \leq f(a)$; cioè $f(x)$ è identicamente uguale ad $f(a)$.

Combinando il criterio di monotonia e il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo si giunge facilmente al seguente:

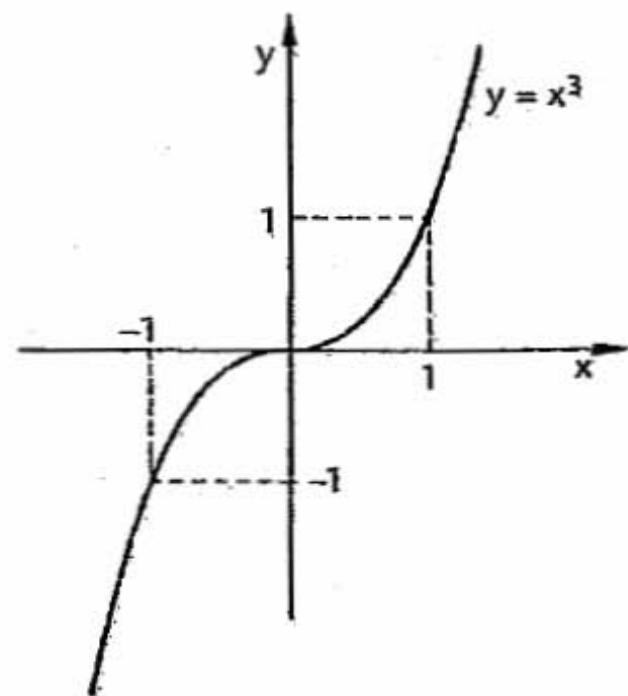
CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA. — Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora

$$(48.5) \quad \left. \begin{array}{l} f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b); \\ f' \text{ non si annulla identicamente in} \\ \text{alcun intervallo contenuto in } (a, b) \end{array} \right\} \iff f \text{ è strettamente crescente in } [a, b];$$

$$(48.6) \quad \left. \begin{array}{l} f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b); \\ f' \text{ non si annulla identicamente in} \\ \text{alcun intervallo contenuto in } (a, b) \end{array} \right\} \iff f \text{ è strettamente decrescente in } [a, b].$$

Dimostrazione: proviamo l'implicazione \Rightarrow in (48.5); essendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, per il criterio di monotonia (48.1) $f(x)$ è crescente in $[a, b]$. Se non fosse strettamente crescente, esisterebbero $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$; ma allora, dato che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ se $x_1 < x < x_2$, $f(x)$ sarebbe costante nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$, contrariamente all'ipotesi.

Proviamo ora l'implicazione \Leftarrow in (48.5); dato che f è (strettamente) crescente in $[a, b]$, per il criterio di monotonia (48.1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$; inoltre $f'(x)$ non può annullarsi identicamente in un intervallo $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$ perché altrimenti in tale intervallo $f(x)$ sarebbe costante, contrariamente all'ipotesi di stretta monotonia.



9788820733865

Figura 6.5

Osserviamo che una funzione strettamente crescente e derivabile in un intervallo può avere derivata nulla in qualche punto (il criterio (48.5) esclude che la derivata si annulli *identicamente* in un intervallo). Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, rappresentata in figura 6.5, è strettamente crescente su \mathbb{R} , perché:

$$(48.7) \quad f(x_1) < f(x_2) \iff x_1^3 < x_2^3 \iff x_1 < x_2;$$

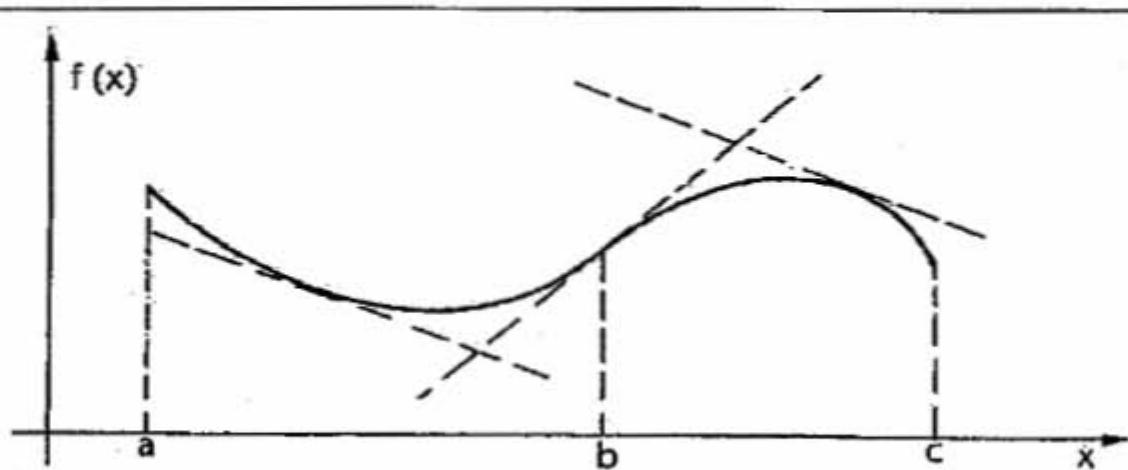
la derivata $f'(x) = 3x^2$ è positiva su $\mathbb{R} - \{0\}$, ma si annulla per $x = 0$.

49. Funzioni convesse e concave

Introduciamo una nuova definizione utile per studiare il grafico di una funzione.

Si dice che una funzione è *convessa* in un intervallo $[a, b]$, se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in $[a, b]$ è *al di sopra* della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Analogamente, si dice che una funzione è *concava* in un intervallo $[a, b]$, se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in $[a, b]$ è *al di sotto* della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

mente si dice che una funzione è *concava* in $[a, b]$ se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione è, nell'intervallo $[a, b]$, *al di sotto* della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$.



9788820736386.6

Figura 6.6

Ad esempio, nella figura 6.6 la funzione $f(x)$ è convessa in $[a, b]$, ed è concava in $[b, c]$. Il punto b è un punto di *flesso*, cioè un punto in cui cambia la concavità.

Possiamo ripetere le definizioni in modo più preciso utilizzando l'espressione analitica dell'equazione della retta tangente. Supponiamo che f sia una funzione derivabile nell'intervallo $[a, b]$; diamo le seguenti definizioni:

$$(49.1) \quad f \text{ convessa in } [a, b] \iff \begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ \forall x, x_0 \in [a, b]; \end{cases}$$

$$(49.2) \quad f \text{ concava in } [a, b] \iff \begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ \forall x, x_0 \in [a, b]. \end{cases}$$

Se, come in figura 6.6, una funzione $f(x)$ è convessa in $[a, b]$ e concava in $[b, c]$ ($a < b < c$), si dice che il punto b è di *flesso* per la funzione $f(x)$. Naturalmente b è di flesso anche se la funzione $f(x)$ è concava in $[a, b]$ e convessa in $[b, c]$.

CRITERIO DI CONVESSITÀ. — Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione derivabile in $[a, b]$ e che ammetta derivata seconda in (a, b) ; le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti

- (a) $f(x)$ è convessa in $[a, b]$;
- (b) $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$;
- (c) $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Osserviamo subito che un analogo criterio vale per le funzioni concave; in particolare una funzione $f(x)$ derivabile due volte è concava in $[a, b]$ se e soltanto se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Il criterio di monotonia (48.1) applicato alla derivata prima $f'(x)$ stabilisce che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ se e solo se $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$; pertanto le condizioni (b) e (c) sono fra loro equivalenti. La dimostrazione del criterio di convessità sarà completa provando che (a) è equivalente a (b).

Dimostrazione che (a) \Rightarrow (b): allo scopo di provare che $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$, consideriamo $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$; ponendo consecutivamente x_0 uguale a x_1 , oppure a x_2 , nella definizione di convessità (49.1), si ha

$$(49.3) \quad f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \quad \forall x \in [a, b];$$

$$(49.4) \quad f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

In (49.3), (49.4) x è un punto generico di $[a, b]$; scegliendo $x = x_2$ in (49.3) e $x = x_1$ in (49.4), sommando membro a membro e semplificando si ottiene

$$(49.5) \quad 0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

cioè

$$(49.6) \quad [f'(x_2) - f'(x_1)] \cdot (x_2 - x_1) \geq 0.$$

Essendo $x_2 > x_1$ ne segue che $f'(x_2) \geq f'(x_1)$.

Dimostrazione che (b) \Rightarrow (a): fissati $x, x_0 \in [a, b]$, con $x \neq x_0$, per il teorema di Lagrange esiste x_1 nell'intervallo di estremi x_0, x , per cui

$$(49.7) \quad f(x) - f(x_0) = f'(x_1) \cdot (x - x_0).$$

Distinguiamo i casi $x > x_0$ e $x < x_0$. Se $x > x_0$, essendo $x_1 \in (x_0, x)$ (cioè, in particolare, $x_1 > x_0$), per la monotonia di $f'(x)$ risulta $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ che, insieme alla (49.7), dà luogo alla conclusione:

$$(49.8) \quad f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Se $x < x_0$ si procede in modo analogo, osservando che $x_1 \in (x, x_0)$ è minore di x_0 e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$; anche in questo caso si ottiene la conclusione (49.8) perché, di nuovo, $f'(x_1)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$, dato che $(x - x_0) < 0$.

Riprendiamo gli esempi introdotti nel paragrafo precedente. La funzione e^x è convessa su tutto \mathbb{R} , dato che la sua derivata seconda ($= e^x$) è positiva. La funzione $\log x$ è concava per $x > 0$, perché la sua derivata seconda ($= -1/x^2$) è negativa. Il lettore può verificare che la funzione $\operatorname{arctg} x$ è convessa per $x < 0$, ed è concava per $x > 0$; il punto $x = 0$ è di flesso per la funzione $\operatorname{arctg} x$. La funzione x^2 è convessa su tutto \mathbb{R} .

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$, considerata in precedenza, ha come derivate successive: $f' = 3x^2 - 3$, $f'' = 6x$. Quindi $f(x)$ è convessa per $x > 0$ ed è concava per $x < 0$. Si confronti con il grafico in figura 6.4.

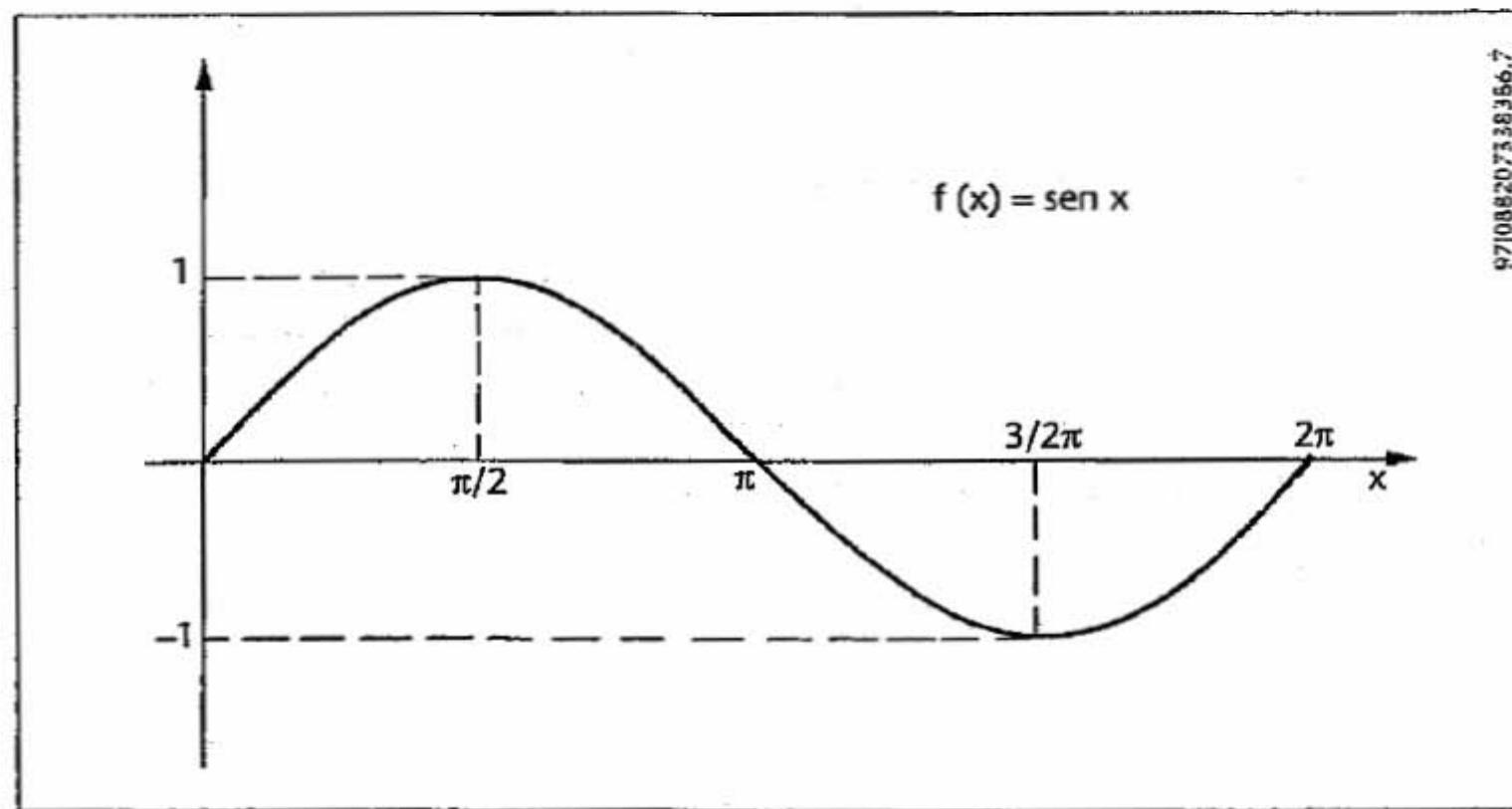


Figura 6.7

Le proprietà stabilite in questi ultimi due paragrafi ci consentono di motivare il grafico delle funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \sin x$, limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$. Calcoliamo il segno delle derivate $f' = \cos x$, $f'' = -\sin x$:

x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
$f(x) = \sin x$				
segno di f	+	+	-	-
segno di f'	+	-	-	+
segno di f''	-	-	+	+

In corrispondenza abbiamo le informazioni di monotonia e di concavità per f :

x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
$f(x) = \sin x$				
segno di f	positivo			negativo
monotonia di f	crescente		decrescente	
concavità di f	concava			convessa

Queste informazioni, insieme ad alcuni valori facilmente calcolabili di $\sin x$, indicano come disegnare il grafico ben noto della figura 6.7.

In particolare il punto $x = \pi/2$ è di massimo, il punto $x = \pi$ è di flesso, il punto $x = (3/2)\pi$ è di minimo. In modo analogo, il lettore può studiare il grafico della funzione $\cos x$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Chiudiamo il paragrafo anticipando un criterio basato sul segno della derivata seconda e studiato in condizioni più generali alla fine del paragrafo 52, per stabilire se un punto x_0 è di massimo o di minimo relativo per una funzione $f(x)$ derivabile due volte in un intorno di x_0 .

Consideriamo il caso in cui

$$(49.9) \quad f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

supponendo che la derivata seconda sia continua in x_0 . Per il teorema della permanenza del segno (paragrafo 35), $f''(x)$ è positiva in un intorno di x_0 , $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta > 0$; quindi f è convessa in tale intorno. Tenendo presente che $f'(x_0) = 0$, risulta

$$(49.10) \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0), \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta];$$

perciò x_0 è un punto di minimo relativo per f .

Il caso $f''(x_0) < 0$ si tratta in modo analogo. Riassumendo, abbiamo dimostrato il seguente criterio, valido per una funzione che ammette derivata seconda (continua):

$$(49.11) \quad f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo relativo};$$

$$(49.12) \quad f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo relativo}.$$

50. Il teorema di L'Hôpital

Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni che tendono a zero per $x \rightarrow x_0$. Abbiamo già visto nel paragrafo 20 che il rapporto $f(x)/g(x)$ è una forma indeterminata per $x \rightarrow x_0$. Cioè, in genere non è possibile dedurre immediatamente il

risultato del limite del rapporto ma occorre preliminarmente trasformare il rapporto in modo da togliere l'indeterminazione. Il teorema di L'Hôpital serve a questo scopo.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. — Siano f, g funzioni derivabili in un intorno di x_0 (con la eventuale eccezione di x_0) tali che

$$(50.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Se in un intorno di x_0 risulta $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$, allora si ha

$$(50.2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

purché esista il secondo limite.

Il teorema di L'Hôpital vale anche per forme indeterminate del tipo ∞/∞ , cioè supponendo, al posto della (50.1), che f, g tendano all'infinito per $x \rightarrow x_0$ (anzi, basta che la sola g tenda all'infinito). Inoltre il teorema vale per limiti destri e sinistri ($x \rightarrow x_0^+$) e vale anche per $x \rightarrow +\infty$, oppure $x \rightarrow -\infty$.

La dimostrazione del teorema di L'Hôpital nel caso generale è proposta nel paragrafo 53 in appendice, in questa sede ci limitiamo a provare il teorema nel caso particolare, ma significativo, in cui f, g sono derivabili in x_0 , con derivata continua, e $g'(x_0) \neq 0$.

In tal caso, dato che f, g sono derivabili in x_0 , esse sono anche continue in x_0 e quindi, per la (50.1), risulta $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Si ottiene

$$(50.3) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Consideriamo alcuni esempi. Calcoliamo il limite

$$(50.4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$$

Si tratta di una forma indeterminata $0/0$, che verifica le ipotesi del teorema di L'Hôpital

(ed anzi verifica le ipotesi che abbiamo assunto nel fare la dimostrazione). Si ha quindi:

$$(50.5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Un'altra situazione in cui sono verificate le ipotesi assunte nella dimostrazione è la seguente

$$(50.6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1/x} = 2.$$

Consideriamo ora due limiti notevoli, analoghi ai limiti di successione (26.3), e che si calcolano facilmente per mezzo del teorema di L'Hôpital. Indichiamo con b un parametro positivo; per calcolare il limite (50.8) deriviamo successivamente n volte il numeratore x^b , fino ad ottenere una potenza x^{b-n} con esponente $b - n$ negativo o nullo (cioè poniamo $n = b$, se b è intero, $n = [b] + 1$ altrimenti):

$$(50.7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{bx^{b-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{bx^b} = 0;$$

$$(50.8) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b x^{b-1}}{e^x} = \dots \\ \dots &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(b-1)\dots(b-n+1)x^{b-n}}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Il teorema di L'Hôpital è utile anche per il calcolo del limite di una differenza $f(x) - g(x)$ che si presenta sotto la forma indeterminata $\infty - \infty$, oppure per il calcolo del limite di un prodotto che si presenta sotto la forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Per il prodotto si pone $fg = f/(1/g)$, oppure $fg = g/(1/f)$, per ricondursi rispettivamente ad una forma $0/0$ oppure ∞/∞ . Ad esempio, se b è un parametro positivo, si ha:

$$(50.9) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \log x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-b x^{-b-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b}{-b} = 0. \end{aligned}$$

Per mezzo del teorema di L'Hôpital si calcolano anche alcuni limiti che si presentano sotto le forme indeterminate 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , come negli esempi seguenti:

$$(50.10) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$(50.11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \log(1 + \sin x)} = \\ = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x}} = e^1 = e.$$

51. Studio del grafico di una funzione

I risultati ottenuti in questo capitolo ci permettono di studiare l'andamento di una funzione $f(x)$ e di disegnarne il grafico. Si può procedere secondo lo schema seguente:

A. — Si determina il *dominio* (o *insieme di definizione*) della funzione $f(x)$.

B. — Si esamina se la funzione gode di qualche simmetria; ad esempio se f è una funzione *pari*: $f(-x) = f(x), \forall x$, oppure *dispari*: $f(-x) = -f(x), \forall x$, oppure *periodica* di periodo T : $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Quando è semplice farlo, si calcolano le intersezioni con gli assi ed il segno della funzione.

C. — Si determinano gli eventuali asintoti orizzontali o verticali. Ricordiamo che gli *asintoti orizzontali* si trovano calcolando i limiti per $x \rightarrow \pm \infty$, se tali limiti esistono e sono finiti. Cioè:

$$(51.1) \quad y = \ell \text{ asintoto orizzontale} \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Nel caso della definizione (51.1), si parla di asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$; si può avere in modo analogo un asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.

Gli *asintoti verticali* si trovano calcolando il limite per $x \rightarrow x_0$ (eventualmente $x \rightarrow x_0^+$, oppure $x \rightarrow x_0^-$) quando il risultato del limite è infinito:

$$(51.2) \quad x = x_0 \text{ asintoto verticale} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty.$$

D. — Si determinano gli *intervalli dove la funzione è crescente o decrescente*, ed i *punti di massimo o minimo relativo*, studiando il segno della derivata prima.

Si calcolano i valori di f nei punti di massimo o minimo relativo.

E. — Si determinano gli *intervalli dove la funzione è convessa o concava*, e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno della derivata seconda.

Si calcolano i valori di f nei punti di flesso.

F. — Si determinano gli eventuali asintoti obliqui. Un *asintoto obliquo* per $x \rightarrow +\infty$ è una retta di equazione $y = mx + q$ con la proprietà:

$$(51.3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

Ciò significa che, per $x \rightarrow +\infty$, il grafico della funzione è vicino al grafico della retta $y = mx + q$.

Supponiamo che esista un asintoto obliquo, cioè supponiamo che valga la relazione (51.3), e ricaviamo i valori di m , q . Se $f(x) - mx - q$ tende a zero per $x \rightarrow +\infty$, a maggiore ragione dividendo l'espressione per x ottieniamo una quantità che tende a zero. Quindi

$$(51.4) \quad 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m.$$

Il valore di q si ricava direttamente dalla (51.3). Riassumendo, i valori di m , q sono dati da:

$$(51.5) \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx].$$

Naturalmente considerazioni analoghe valgono per $x \rightarrow -\infty$. Notiamo anche che, se esiste un asintoto orizzontale $y = l$ per $x \rightarrow +\infty$, allora è inutile ricercare un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Infatti, se $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow +\infty$, allora $f(x)/x \rightarrow 0$, e quindi $m = 0$, $q = l$. Cioè si ritrova l'asintoto di equazione $y = l$.

Secondo lo schema proposto, studiamo la seguente funzione:

$$(51.6) \quad f(x) = x e^{1/x}.$$

A. — La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. Quindi il dominio di f è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

B. — La funzione non è definita per $x = 0$ e non si annulla per alcun valore di $x \in \mathbb{R} - \{0\}$; perciò il grafico di $f(x)$ non interseca gli assi cartesiani; $f(x)$ risulta positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$ (dato che il fattore $e^{1/x}$ è positivo per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$).

C. — Per determinare gli asintoti orizzontali e verticali si calcolano i limiti agli estremi del dominio. Nel nostro caso si calcolano i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow +\infty$. Per $x \rightarrow \pm\infty$, $e^{1/x} \rightarrow e^0 = 1$; quindi

$$(51.7) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{1/x} = \pm\infty;$$

perciò non ci sono asintoti orizzontali. Per $x \rightarrow 0^-$ abbiamo un altro limite immediato; infatti in tal caso $1/x \rightarrow -\infty$, e quindi $e^{1/x} \rightarrow 0$. Ne segue

$$(51.8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = 0;$$

ciò significa che per $x \rightarrow 0^-$ non c'è un asintoto verticale. Per calcolare il limite per $x \rightarrow 0^+$ usiamo il teorema di L'Hôpital:

$$(51.9) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty; \end{aligned}$$

quindi la retta verticale di equazione $x = 0$ è un asintoto per $x \rightarrow 0^+$.

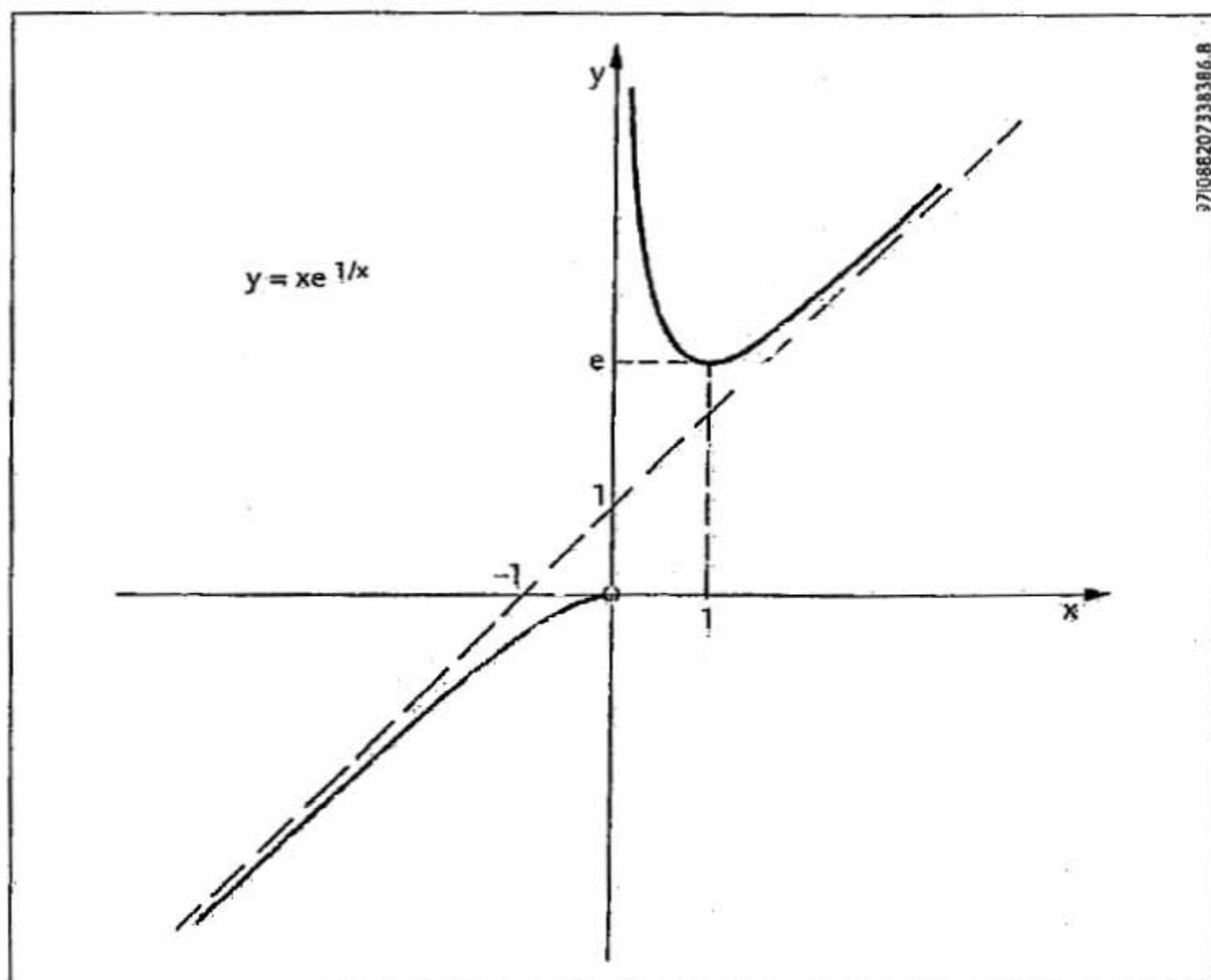


Figura 6.8

97086207336186.8

D. — La derivata prima vale

$$(51.10) \quad f'(x) = e^{1/x} + x e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right).$$

Per ogni x risulta $e^{1/x} > 0$. Quindi la derivata prima è positiva se $(1 - 1/x) > 0$, cioè se $x > 1$ oppure $x < 0$. La derivata prima è negativa se $0 < x < 1$. Ne segue che la funzione è crescente nei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$, ed è decrescente nell'intervallo $(0, 1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo relativo; in corrispondenza la funzione assume il valore $f(1) = e$.

E. — La derivata seconda vale

$$(51.11) \quad \begin{aligned} f''(x) &= e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) + e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = \\ &= e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{x} + 1 \right) = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

La derivata seconda è positiva per $x > 0$, ed è negativa per $x < 0$. Quindi la funzione è convessa per $x > 0$, ed è concava per $x < 0$. Dato che $f(x)$ non è definita per $x = 0$, non ci sono punti di flesso.

F. — Poiché il limite (51.7) per $x \rightarrow \pm\infty$ vale infinito, occorre esaminare se esistono asintoti obliqui. Calcoliamo, come in (65.5), i limiti

$$(51.12) \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1;$$

$$(51.13) \quad \begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x e^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{1/x} - 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} (-1/x^2)}{-1/x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1; \end{aligned}$$

per calcolare q si è usato il teorema di L'Hôpital. Si è trovato che la retta di equazione $y = x + 1$ è un asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$ per la funzione $f(x)$.

Con gli elementi trovati (dominio della funzione, segno, asintoto verticale per $x \rightarrow 0^+$, limite notevole (51.8) per $x \rightarrow 0^-$, intervalli di monotonia e di convessità, punto di minimo relativo in $x = 1$, asintoto obliquo) si esegue il disegno del grafico di f come in figura 6.8.

52. La formula di Taylor: prime proprietà

Abbiamo già introdotto nel paragrafo 44 un metodo per "approssimare" una funzione derivabile con un polinomio di primo grado. Abbiamo

infatti affermato che

$$(52.1) \quad f(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{per } x \text{ vicino ad } x_0),$$

dove con il simbolo \equiv intendiamo che la differenza tra il primo ed il secondo membro, che indichiamo con $R_1(x)$ (resto di ordine 1), tende a zero più rapidamente di $x - x_0$. Cioè, riscrivendo la (44.5) con il resto R_1 , abbiamo:

$$(52.2) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x),$$

$$(52.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Sapendo che una funzione è derivabile fino ad un ordine $n > 1$, ci si può domandare se sia possibile ottenere un miglior grado di approssimazione rispetto al caso $n = 1$, cioè se sia possibile decomporre $f(x)$ in un polinomio di grado n ed un resto $R_n(x)$ che tenda a zero più rapidamente di $(x - x_0)^n$. La formula di Taylor risponde affermativamente al quesito posto.

Prima di enunciare la formula di Taylor, introduciamo il simbolo di *sommatoria*, utile per scrivere in modo compatto la somma di più addendi. Diamo alcuni esempi; in particolare, il simbolo a primo membro della (52.4) significa che si considera la somma di n addendi, con il termine generico uguale ad a_k , con l'indice k che assume tutti i valori compresi tra $k = 1$ e $k = n$:

$$(52.4) \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$(52.5) \quad \sum_{k=0}^n (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1),$$

$$(52.6) \quad \sum_{k=2}^4 k! = 2! + 3! + 4! =$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 32.$$

Nell'ultima sommatoria abbiamo usato il simbolo $k!$ introdotto in (26.2), che si legge k fattoriale, ed è uguale al prodotto dei primi k numeri naturali.

FORMULA DI TAYLOR. — Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in x_0 . Risulta

$$(52.7) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

$$(52.8) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Nella formula (52.7), per $k = 0$, si intende $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, e $0! = 1$. Quindi ad esempio, se $n = 2$, si ottiene:

$$(52.9) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + R_2(x),$$

$$(52.10) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0;$$

per $n = 1$ si riottengono le (52.2), (52.3). Il lettore scriva esplicitamente la sommatoria per altri valori di n .

Dimostriamo ora la formula di Taylor supponendo che la derivata $f^{(n)}(x)$ sia continua in x_0 . Il lettore interessato al caso generale, con $f^{(n)}(x)$ non necessariamente continua in x_0 , può consultare il paragrafo 77. Inoltre, avendo difficoltà a considerare n generico, si consiglia di rileggere il metodo proposto con $n = 2$.

Ricavando $R_n(x)$ dalla (52.7), occorre dimostrare che:

$$(52.11) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n!]}{(x - x_0)^n} = 0$$

Il limite si presenta sotto forma indeterminata $0/0$. Utilizziamo il teorema di L'Hôpital. Notiamo esplicitamente che occorre derivare numeratore e denominatore rispetto ad x ; quindi ad esempio la derivata di $f(x_0)$ vale zero, mentre la derivata di $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n!$ è uguale a

$$(52.12) \quad \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot n(x - x_0)^{n-1}}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Quindi il limite nella (52.11) è lo stesso di

$$(52.13) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - [f'(x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} / (n-1)!]}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

purché il secondo limite esista. Se $n > 1$, abbiamo ottenuto una nuova forma $0/0$. Dopo aver applicato in totale n volte il teorema di L'Hôpital, abbiamo:

$$(52.14) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Quest'ultimo limite è zero, perché $f^{(n)}(x)$ è continua in x_0 . Perciò la tesi (52.11) è dimostrata.

Sviluppiamo secondo la formula di Taylor alcune funzioni elementari. Se $f(x) = e^x$, risulta $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni n . Quindi, ponendo $x_0 = 0$, si ha $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ per ogni n . Perciò otteniamo

$$(52.15) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Analogamente, scegliendo $x_0 = 0$, si ottiene

$$(52.16) \quad \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

$$(52.17) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$(52.18) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x).$$

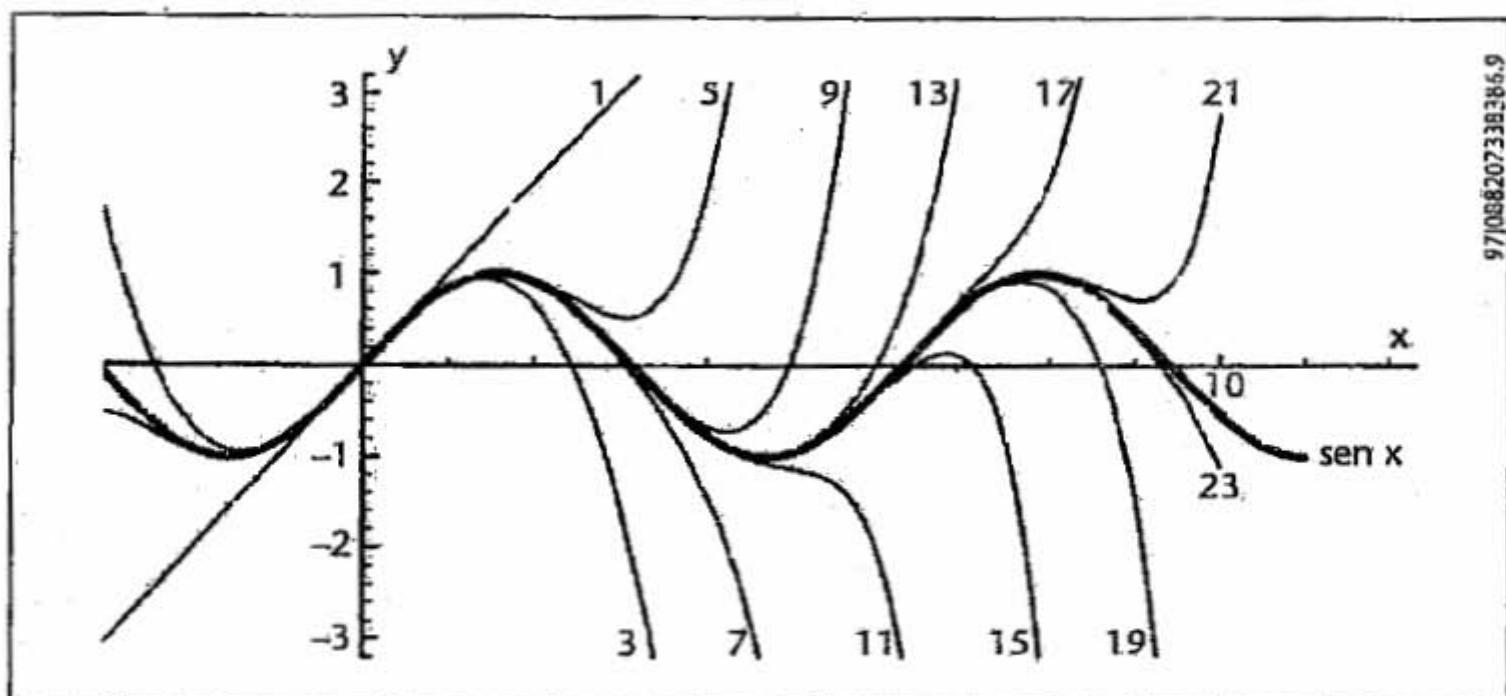


Figura 6.9

Allo scopo di verificare graficamente i risultati ottenuti, abbiamo riportato nella figura 6.9 i grafici dei polinomi di grado: primo, terzo, quinto,..., che si ricavano dallo sviluppo in

formula di Taylor per la funzione $\sin x$. Tenendo conto della (52.17), abbiamo posto:

$$(52.19) \quad f_1(x) = x; \quad f_3(x) = x - \frac{x^3}{6}; \quad f_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \dots$$

Il disegno della figura 6.9 è stato eseguito con l'ausilio di un computer. Si nota chiaramente che i polinomi $f_{2k+1}(k = 0, 1, 2, \dots)$ di Taylor hanno un grafico per x vicino a zero, tanto più simile al grafico della funzione $\sin x$, quanto più k è grande.

Per mezzo della formula di Taylor è possibile generalizzare il criterio (49.11), (49.12) nel modo seguente:

CRITERIO PER I PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO. — *Se esistono le derivate sotto indicate della funzione $f(x)$ nel punto x_0 , vale il seguente schema:*

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0: & \begin{cases} f''(x_0) > 0 & \text{minimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) < 0 & \text{massimo relativo in } x_0 \end{cases} \\ f''(x_0) = 0: & \begin{cases} f^{(3)}(x_0) \neq 0 & \text{né massimo, né minimo in } x_0 \\ f^{(3)}(x_0) = 0: & \begin{cases} f^{(4)}(x_0) > 0 & \text{minimo relativo in } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) < 0 & \text{massimo relativo in } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) = 0: & \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Dimostrazione: una situazione generica nello schema sopra proposto è quella in cui $f(x)$ è derivabile n volte in x_0 per qualche $n \geq 2$, e risulta

$$(52.20) \quad f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Consideriamo il caso in cui $f^{(n)}(x_0) > 0$ (la trattazione del caso $f^{(n)}(x_0) < 0$ è analoga). Per l'annullarsi delle derivate, la formula di Taylor (52.7) diviene

$$(52.21) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

e, per la (52.8):

$$(52.22) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(52.23) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0, \quad \forall x: 0 \neq |x - x_0| < \delta.$$

Se n è pari il denominatore $(x - x_0)^n$ è positivo per ogni $x \neq x_0$; perciò risulta $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ e quindi x_0 è un punto di minimo relativo per $f(x)$.

Se invece n è dispari, dato che il denominatore della frazione (52.23) cambia segno per x maggiore o minore di x_0 , risulta che $f(x) > f(x_0)$, oppure $f(x) < f(x_0)$, rispettivamente per $x > x_0$, oppure $x < x_0$. Perciò la funzione $f(x)$ non ha né massimo né minimo in x_0 .

A titolo di esempio osserviamo che per la funzione $f(x) = x^4$ risulta

$$(52.24) \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 4! = 24$$

e pertanto, in base al criterio precedente, $f(x)$ ammette minimo nel punto $x_0 = 0$; la verifica diretta di tale proprietà è immediata: infatti $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Invece, per la funzione $g(x) = x^3$ si ha:

$$(52.25) \quad g'(0) = g''(0) = 0, \quad g'''(0) = 3!$$

per cui, in $x_0 = 0$, $g(x)$ non assume massimo né minimo. In realtà la funzione $g(x)$, rappresentata in figura 6.5, ha un flesso in $x_0 = 0$. Osserviamo che tale proprietà vale in generale: se in un punto la prima derivata non nulla è di ordine dispari (maggiore, od uguale a 3) allora la funzione presenta un flesso nel punto.

Appendice al capitolo 6

53. Il teorema di Cauchy. Il teorema di L'Hôpital nel caso generale

Allo scopo di dimostrare il teorema di L'Hôpital nel caso generale, è utile il seguente

TEOREMA DI CAUCHY. — Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) . Se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui

$$(53.1) \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dimostrazione: si procede come per la prova del teorema di Lagrange (paragrafo 47), utilizzando la funzione

$$(53.2) \quad h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right].$$

che è ben definita in $[a, b]$ perché $g(b) - g(a) \neq 0$ (infatti, se fosse $g(a) = g(b)$, per il teorema di Rolle esisterebbe un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $g'(x_0) = 0$, contrariamente all'ipotesi $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$).

La funzione $h(x)$ è continua in $[a, b]$ e verifica le condizioni $h(a) = h(b) = 0$; inoltre è derivabile in (a, b) e la derivata vale

$$(53.3) \quad h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x).$$

Per il teorema di Rolle esiste $x_0 \in (a, b)$ per cui $h'(x_0) = 0$ che, essendo $g' \neq 0$, equivale alla tesi (53.1).

Se nel teorema di Cauchy (come pure nel teorema di Lagrange) si suppone anche che $f(a) = f(b)$, dalla tesi (53.1) si ottiene l'esistenza di un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $f'(x_0) = 0$; cioè si riottiene il teorema di Rolle, che a sua volta è alla base delle dimostrazioni proposte per i teoremi di Lagrange e di Cauchy.

Pertanto, le formulazioni dei teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy, sono da considerarsi fra loro equivalenti.

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il teorema di L'Hôpital (già introdotto nel paragrafo 50) in ipotesi generali.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. — Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni derivabili in $[a, b] - \{x_0\}$ e tali che

$$(53.4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b] - \{x_0\}$ e se esiste il limite

$$(53.5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite per $x \rightarrow x_0$ dal rapporto $f(x)/g(x)$ e si ha

$$(53.6) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Inoltre il teorema vale anche in ognuna delle seguenti situazioni:

(53.7) si considerano limiti destri ($x \rightarrow x_0^+$) o sinistri ($x \rightarrow x_0^-$);

(53.8) in luogo dell'ipotesi (53.4) si suppone che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty,$$

oppure $-\infty$ (anzi, è sufficiente che, per $x \rightarrow x_0$, la sola funzione $g(x)$ diverga a $+\infty$ o a $-\infty$);

(53.9) $f(x), g(x)$ sono derivabili in intervalli illimitati e si considera il limite per $x \rightarrow +\infty$, oppure per $x \rightarrow -\infty$.

Dimostrazione: utilizzando l'ipotesi (53.4), estendiamo per continuità $f(x), g(x)$ nel punto x_0 , con il valore 0; poniamo cioè $f(0) = g(0) = 0$ (con abuso di notazione usiamo lo stesso simbolo per le funzioni $f(x), g(x)$, a priori definite soltanto in $[a, b] - \{x_0\}$, e per le loro estensioni continue in tutto $[a, b]$). Così definite $f(x)$ e $g(x)$ risultano continue negli intervalli $[a, x_0], [x_0, b]$ (se $a \neq x_0 \neq b$) e derivabili in $(a, x_0), (x_0, b)$.

Osserviamo preliminarmente che anche la funzione $g(x)$, oltre che $g'(x)$, non si annulla in $[a, b] - \{x_0\}$; infatti, se esistesse un punto $x_1 \in [a, b] - \{x_0\}$ per cui $g(x_1) = 0$, per il teorema di Rolle applicato alla funzione $g(x)$ nell'intervallo di estremi x_0, x_1 , esisterebbe un punto $x_2 \in [a, b] - \{x_0\}$ per cui $g'(x_2) = 0$.

Consideriamo una generica successione x_n convergente ad x_0 e tale che $x_n \in [a, b] - \{x_0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Per il teorema di Cauchy applicato all'intervallo di estremi x_0 e x_n , per ogni n esiste un punto x'_n interno a tale intervallo per cui

$$(53.10) \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(x'_n)}{g'(x'_n)}.$$

Dato che x'_n è, per ogni $n \in \mathbb{N}$, interno all'intervallo di estremi x_0 e x_n , la successione x'_n converge ad x_0 per $n \rightarrow +\infty$. Perciò

$$(53.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(x'_n)}{g'(x'_n)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

l'ultimo passaggio vale perché il limite (53.5) esiste per ipotesi.

Pertanto il limite a primo membro della (53.11) è indipendente dalla particolare successione $x_n \rightarrow x_0$; per la caratterizzazione dei limiti di funzioni mediante successioni (paragrafo 31), ne segue che esiste il limite di funzione a primo membro della seguente relazione conclusiva:

$$(53.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione del teorema di L'Hôpital nell'ipotesi (53.7): si procede esattamente come nel caso sopra considerato. Ad esempio, per il limite destro $x \rightarrow x_0^+$ si suppone ovviamente che $x_0 \neq b$ e si prende in considerazione una generica successione x_n convergente ad x_0 , con $x_n \in (x_0, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione del teorema di L'Hôpital nell'ipotesi (53.8): dimostriamo la tesi (53.6) per il limite sinistro $x \rightarrow x_0^-$ (supponendo $x_0 > a$). Dato che la dimostrazione per il caso $x \rightarrow x_0^+$ è analoga, combinando i due risultati si ottiene la tesi per il limite completo $x \rightarrow x_0$.

Indichiamo con l' il limite per $x \rightarrow x_0^-$ del rapporto $f'(x)/g'(x)$, esistente per ipotesi. Consideriamo, per fissare le idee, $l' \in \mathbb{R}$ (la dimostrazione nei casi $l' = +\infty$ e $l' = -\infty$ è analoga); per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_1 > 0$ (con $a \leq x_0 - \delta_1$) tale che

$$(53.13) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} < l' + \epsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0).$$

L'ipotesi $g'(x) \neq 0$ in $[a, x_0]$ equivale (come si può dimostrare) a supporre $g'(x)$ di segno costante in tale intervallo, diciamo $g'(x) > 0$ in $[a, x_0]$.

Dalla (53.13) segue allora

$$(53.14) \quad f'(x) - (l' + \epsilon) g'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0).$$

Definiamo nell'intervallo $(x_0 - \delta_1, x_0)$ le funzioni

$$(53.15) \quad \begin{aligned} h_1(x) &= f(x) - (l' + \epsilon) g(x), \\ h_2(x) &= f(x) - (l' + 2\epsilon) g(x); \end{aligned}$$

essendo $g'(x) > 0$, per la (53.14) risulta $h'_1(x) < 0$, $h'_2(x) < 0$ in $(x_0 - \delta_1, x_0)$; quindi $h_1(x)$, $h_2(x)$ sono funzioni strettamente decrescenti in tale intervallo (ed in particolare ammettono limite per $x \rightarrow x_0$).

Per $x \rightarrow x_0^-$ le due funzioni $h_1(x)$, $h_2(x)$ non possono convergere contemporaneamente a limiti finiti, perché la differenza $h_1(x) - h_2(x) = \epsilon g(x)$ diverge all'infinito. Supponiamo quindi, ad esempio, che per $x \rightarrow x_0^-$ $h_1(x)$ diverga; trattandosi di una funzione decrescente, divergerà a $-\infty$.

Esisterà quindi $\delta_2 \leq \delta_1$ tale che $h_1(x) < 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$; cioè

$$(53.16) \quad f(x) - (l' + \epsilon) g(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0).$$

Dato che $g'(x) > 0$, $g(x)$ diverge positivamente per $x \rightarrow x_0^-$: perciò esiste $\delta_3 > 0$ tale che $g(x) > 0$ per $x \in (x_0 - \delta_3, x_0)$. Posto $\delta = \min \{\delta_2, \delta_3\}$, ne segue infine

$$(53.17) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

In modo analogo si ottiene la diseguaglianza $f(x)/g(x) > l - \varepsilon$; per la definizione di limite il rapporto $f(x)/g(x)$ ha quindi limite uguale ad l per $x \rightarrow x_0^-$.

Dimostrazione del teorema di L'Hôpital nell'ipotesi (53.9): supponiamo che $f(x)$, $g(x)$ siano derivabili nell'intervallo $[a, +\infty)$, con $a > 0$ e con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \geq a$.

Definiamo nell'intervallo $(0, 1/a]$ le funzioni

$$(53.18) \quad \bar{f}(t) = f(1/t), \quad \bar{g}(t) = g(1/t), \quad \forall t \in (0, 1/a]$$

(notiamo che, se $t \in (0, 1/a]$, allora $x = 1/t \in [a, +\infty)$; quindi le espressioni $f(1/t)$, $g(1/t)$ sono ben definite).

Risulta poi

$$(53.19) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{f}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{g}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} g(1/t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); \end{aligned}$$

quindi, se $f(x)$, $g(x)$ sono infinitesime o infinite per $x \rightarrow +\infty$, allora $\bar{f}(t)$, $\bar{g}(t)$ sono rispettivamente infinitesime o infinite per $t \rightarrow 0^+$. Applicando il teorema di L'Hôpital al limite del rapporto delle funzioni $\bar{f}(t)$, $\bar{g}(t)$ per $t \rightarrow 0^+$ (che è un caso già trattato) si ottiene

$$(53.20) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{f}(t)}{\bar{g}(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{f}'(t)}{\bar{g}'(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Df(1/t)}{Dg(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t) \cdot (-1/t^2)}{g'(1/t) \cdot (-1/t^2)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}, \end{aligned}$$

purché l'ultimo limite esista. Ma, con il cambio di variabile $1/t = x$, l'ultimo limite è uguale a

$$(53.21) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

che esiste per ipotesi; pertanto l'uguaglianza dei limiti in (53.20) è giustificata. Le (53.20), (53.21) forniscono la conclusione:

$$(53.22) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{f}(t)}{\bar{g}(t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

CAPITOLO 7

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

In questo capitolo diamo alcuni cenni di un argomento — quello delle funzioni di più variabili reali — che in genere viene ripreso e approfondito in un corso di Analisi Matematica di secondo anno.

54. Funzioni di due variabili: dominio; rappresentazione cartesiana

Indichiamo con \mathbf{R}^2 l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

$$(54.1) \quad \mathbf{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

Sia D un sottoinsieme di \mathbf{R}^2 . Un'applicazione f che ad ogni elemento di D fa corrispondere uno ed un solo elemento di \mathbf{R} è detta una *funzione di due variabili*; come nel paragrafo 6, è denotata con il simbolo $f:D \rightarrow \mathbf{R}$, oppure, per mettere in evidenza il fatto che $D \subseteq \mathbf{R}^2$, con il simbolo

$$(54.2) \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

oppure semplicemente con il simbolo $f(x, y)$.

L'insieme D si dice il *dominio* della funzione f , o anche l'*insieme di definizione* di f .

Per rappresentare graficamente una funzione di due variabili $z = f(x, y)$, spesso si utilizza un riferimento cartesiano ortogonale, di assi x , y , z ; si considera un generico punto $(x, y) \in D$ nel piano di base x , y (figura 7.1) ed il corrispondente punto (x, y, z) a quota z , con $z = f(x, y)$ (figura 7.2).

Si ottiene così, nello spazio tridimensionale di coordinate (x, y, z) , una superficie, che è detta *grafico* della funzione $f(x, y)$.

Consideriamo alcuni esempi.

Cominciamo con la funzione

$$(54.3) \quad f(x, y) = x^2 - y^2,$$

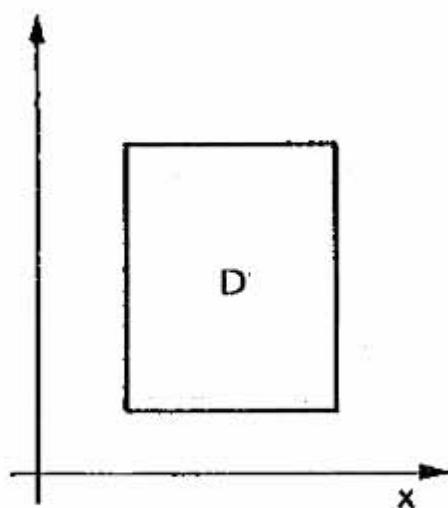


Figura 7.1

970088207338387.1

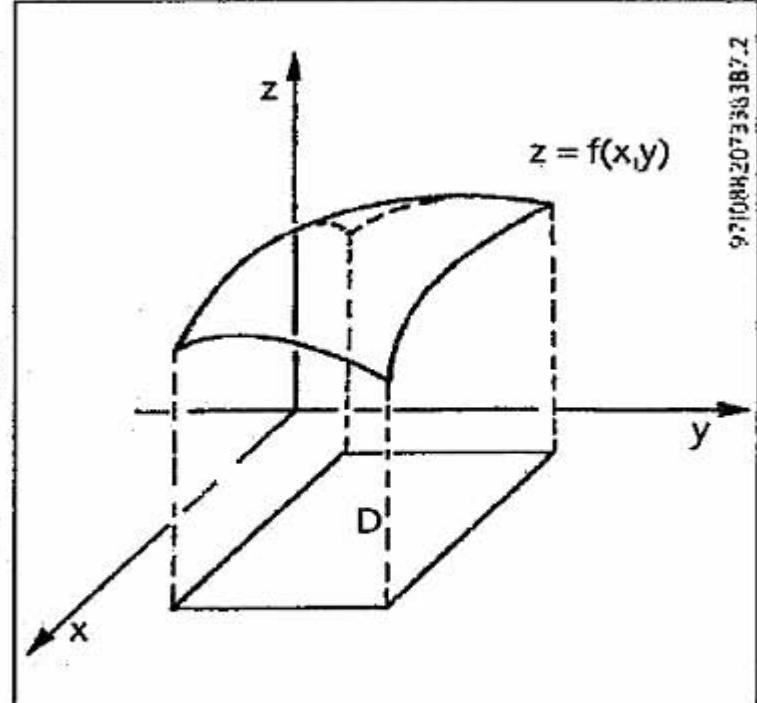


Figura 7.2

970088207338387.2

che è definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si comprende il comportamento della funzione fissando una delle due variabili indipendenti x, y . Per y fissato si ottengono delle parabole *convesse* di equazione $z = x^2 - \text{costante}$ (figura 7.3), mentre per x fissato si hanno delle parabole *concave* di equazione $z = \text{costante} - y^2$ (figura 7.4).

970088207338387.3

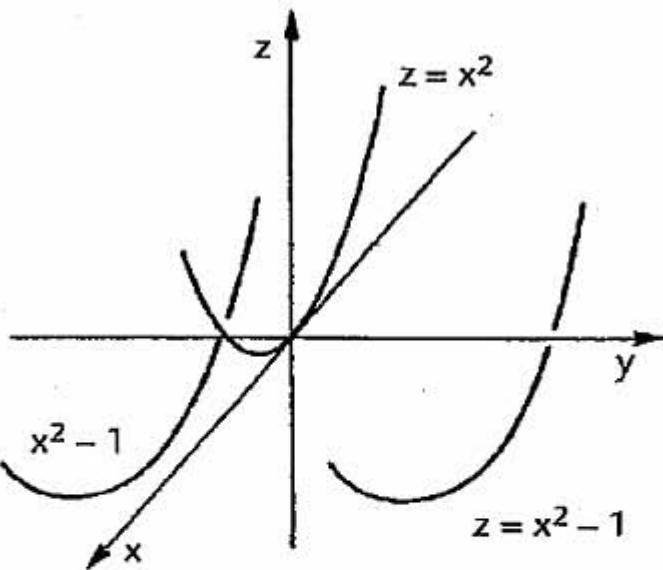


Figura 7.3

970088207338387.4

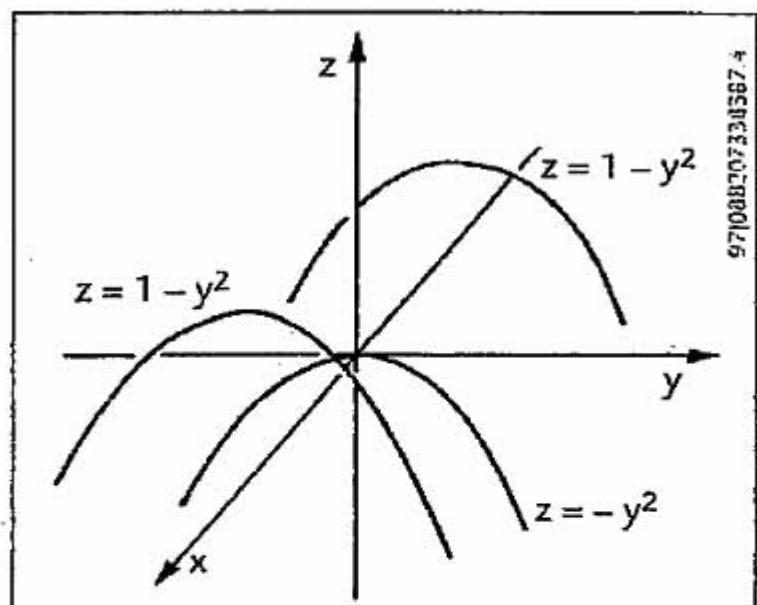


Figura 7.4

Il grafico della funzione (54.3), eseguito al computer è rappresentato in figura 7.5 limitatamente ai punti (x, y) del dominio a forma quadrata:

$$(54.4) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\};$$

talè grafico prende il nome di *paraboloido iperbolico*.

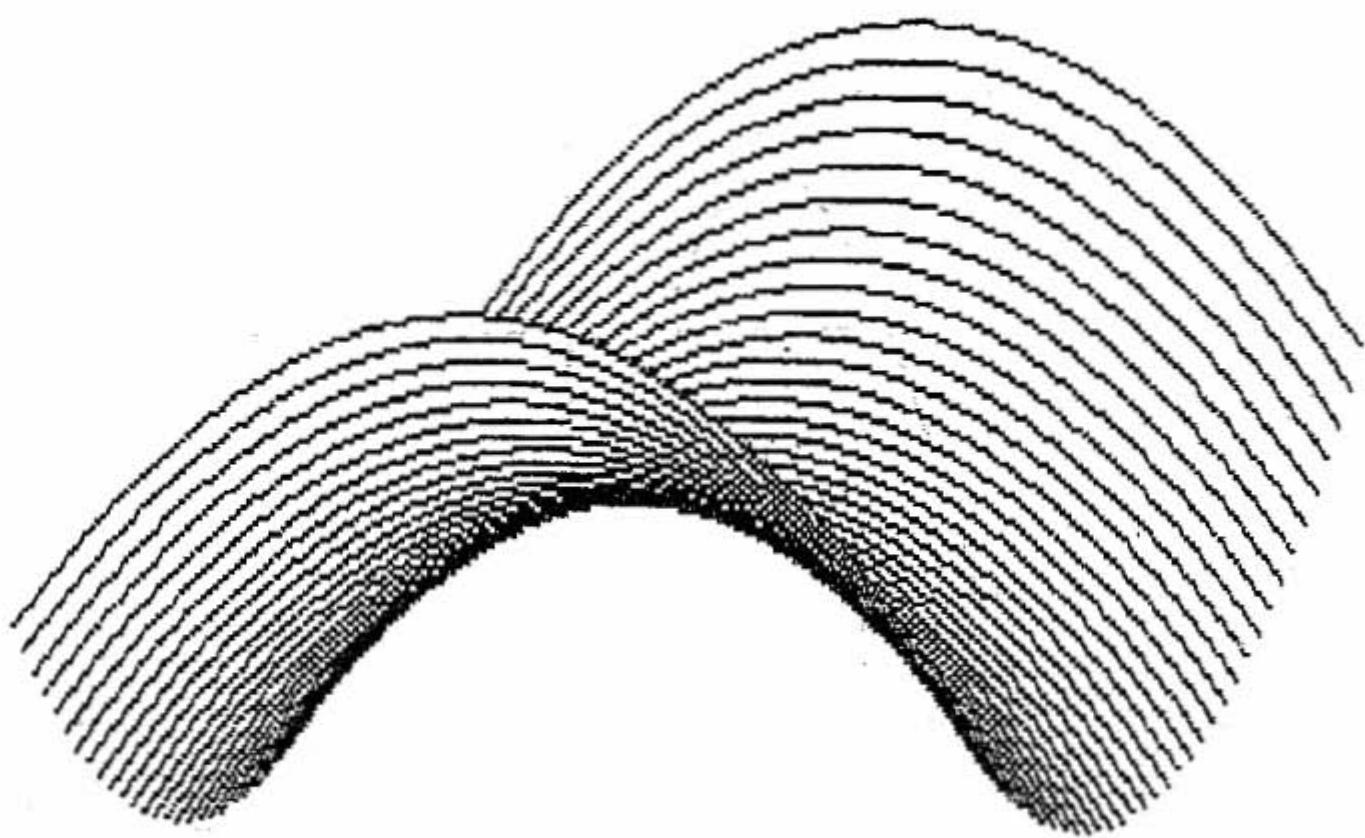


Figura 7.5 — $f(x, y) = x^2 - y^2$

Analogamente, scambiando il ruolo delle variabili x, y , si ottiene il grafico della funzione

$$(54.5) \quad f(x, y) = y^2 - x^2$$

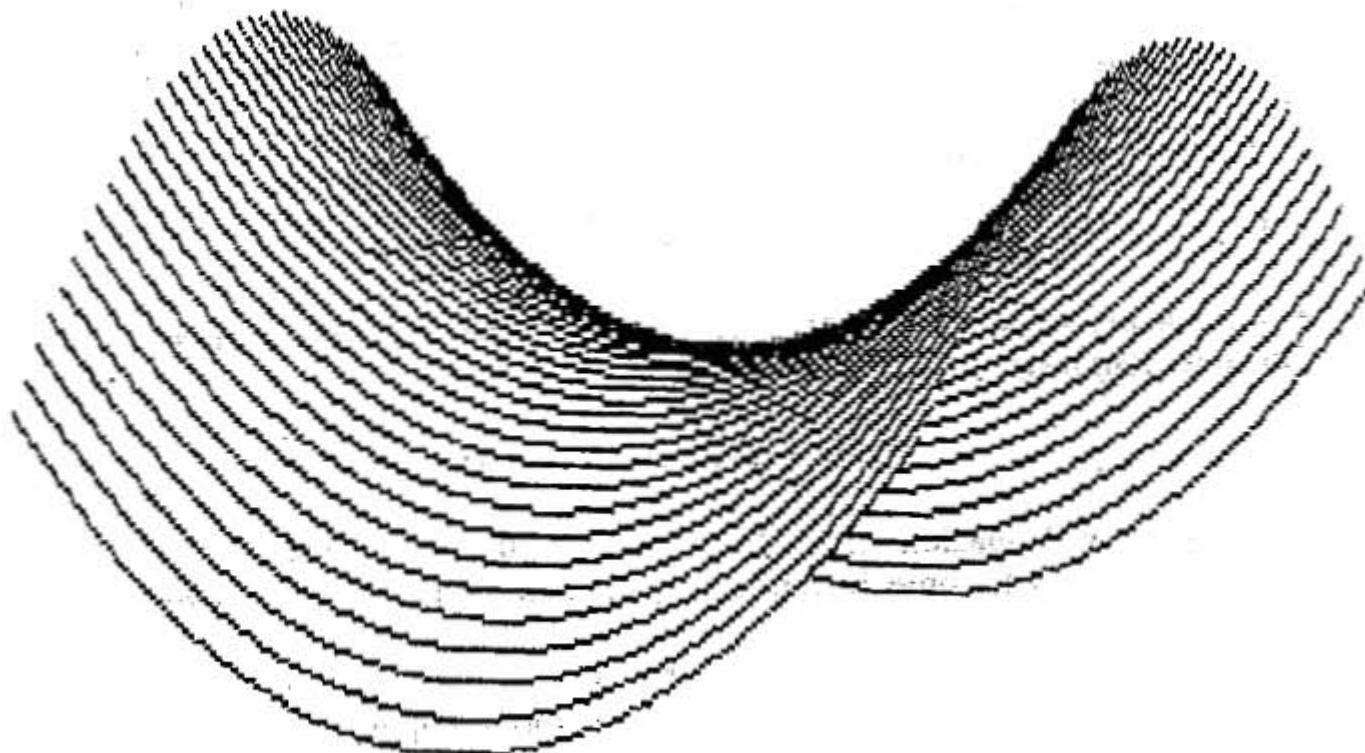


Figura 7.6 — $f(x, y) = y^2 - x^2$

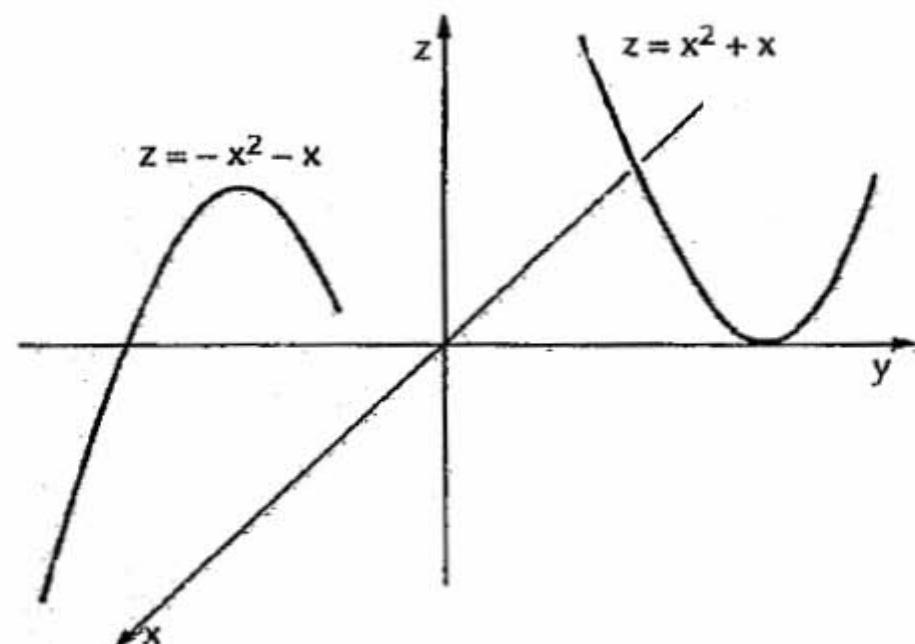


Figura 7.7

in figura 7.6, descritto da parabole concave di equazione $z = \text{costante} - x^2$ se y è fissato, e da parabole convesse di equazione $z = y^2 - \text{costante}$, se x è fissato.

La funzione

$$(54.6) \quad f(x, y) = y(x^2 + x)$$

ha, per $y > 0$ fissato, il comportamento di una parabola convessa del tipo $z = x^2 + x$, mentre se y è un numero negativo fissato, il comportamento è quello di una parabola concava del tipo $z = -x^2 - x$ (si veda la figura 7.7).

Invece per x fissato la funzione (54.6) ha un comportamento lineare: si tratta di una retta di equazione $z = \text{costante} \cdot y$. Pertanto il grafico della funzione $f(x, y)$, rappresentato in figura 7.8, è unione di una famiglia di rette; per tale motivo si dice che il grafico è una *superficie rigata*.

La funzione

$$(54.7) \quad f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

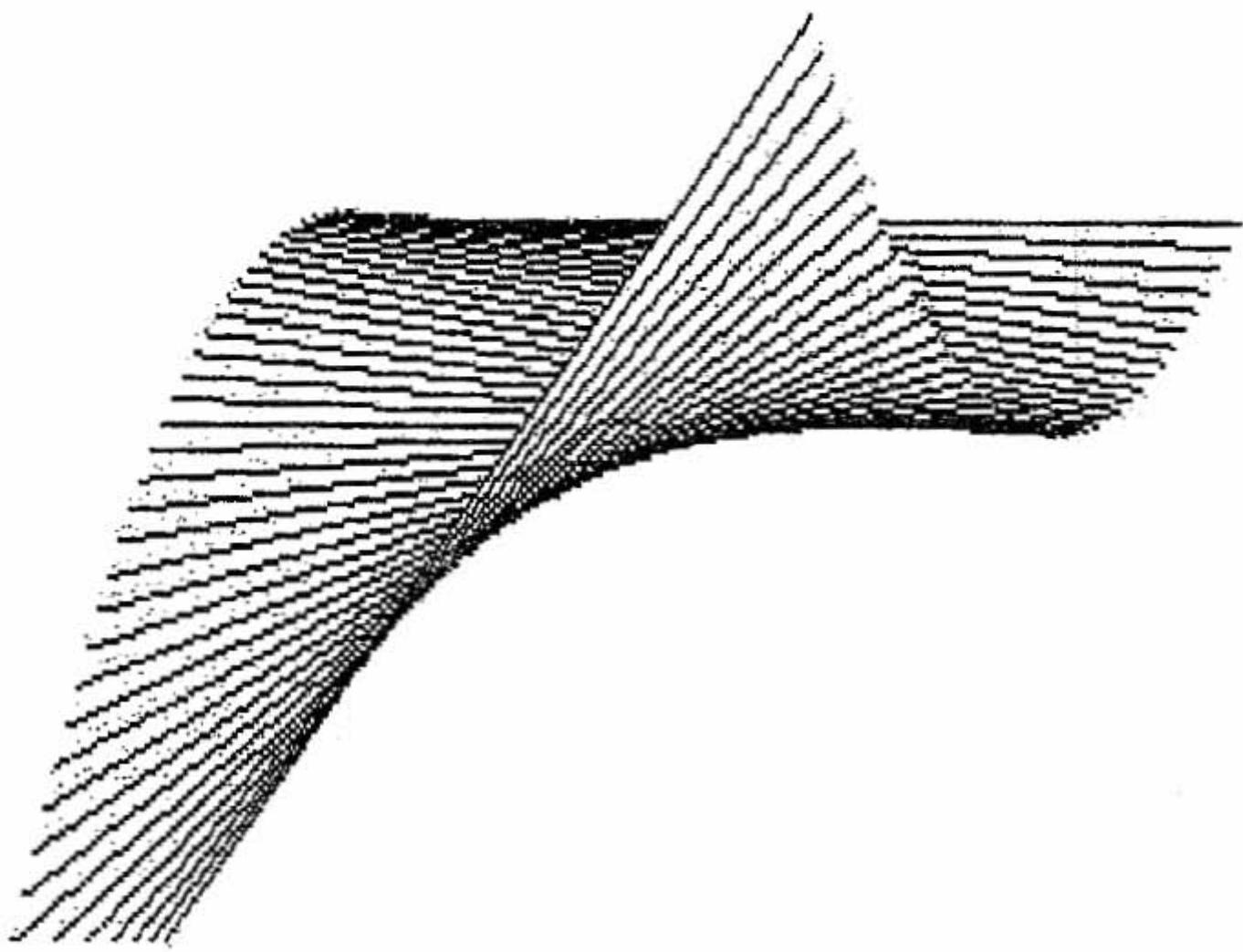
è definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; per comprenderne il grafico è opportuno pensare $f(x, y)$ funzione composta nel modo seguente:

$$(54.8) \quad f(x, y) = \cos t^2, \quad t^2 = x^2 + y^2 \quad (t \geq 0).$$

Nel piano x, y l'equazione $x^2 + y^2 = t^2$, con $t > 0$, rappresenta una circonferenza di centro l'origine e raggio t , come in figura 7.9; in figura 7.10 è invece rappresentata la funzione $t \rightarrow \cos t^2$, per $t \geq 0$.

La funzione $f(x, y)$ in (54.7) è costante (cioè assume lo stesso valore) in tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = t^2$, con t fissato, ed il valore è appunto uguale a $z = \cos t^2$. Il grafico di $f(x, y)$ si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z il profilo disegnato in figura 7.10; si perviene alla superficie rappresentata in figura 7.11. Si dice che $f(x, y)$ in (54.7) è *invariante per rotazioni*.

970088207338387.8

Figura 7.8 — $f(x, y) = y(x^2 + x)$

Invece in figura 7.12 è rappresentato il grafico della funzione di due variabili

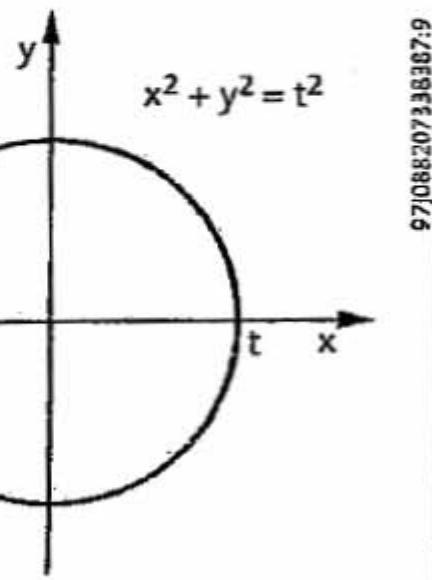


Figura 7.9

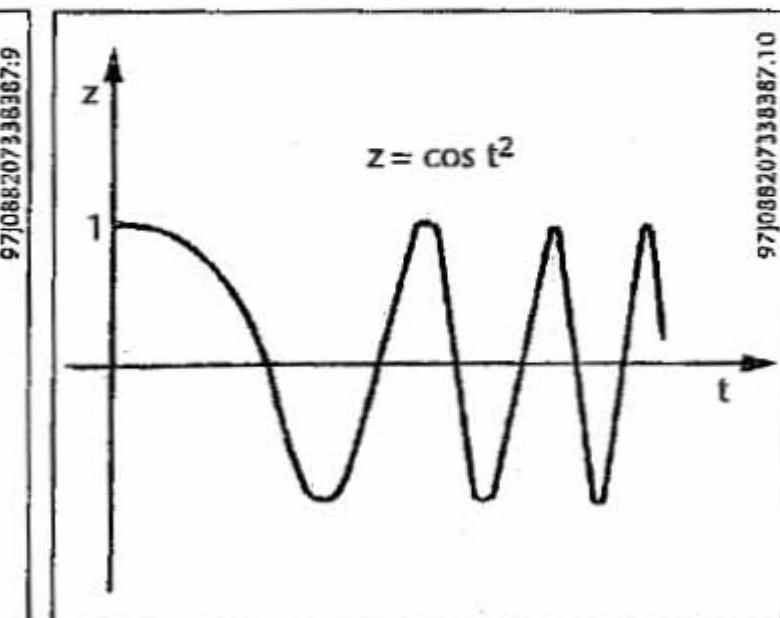
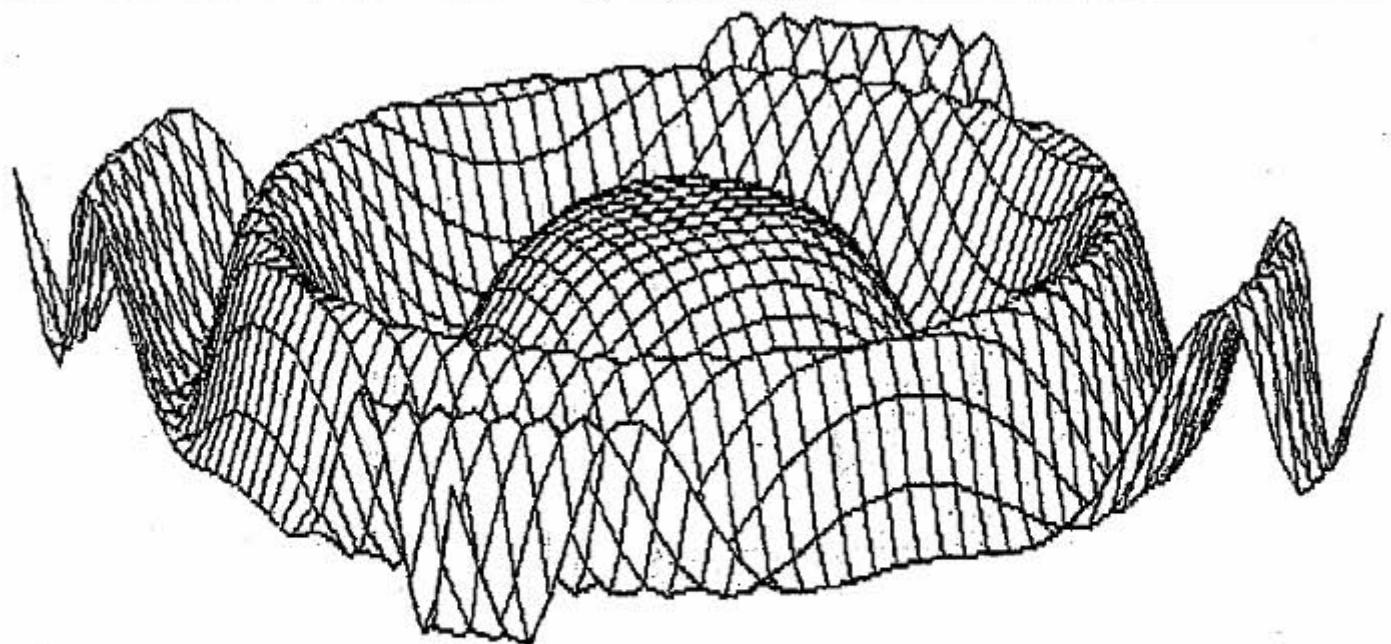


Figura 7.10

970088207338387.10

97088620738387.11

Figura 7.11 — $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

(54.9)

$$f(x, y) = \sin xy,$$

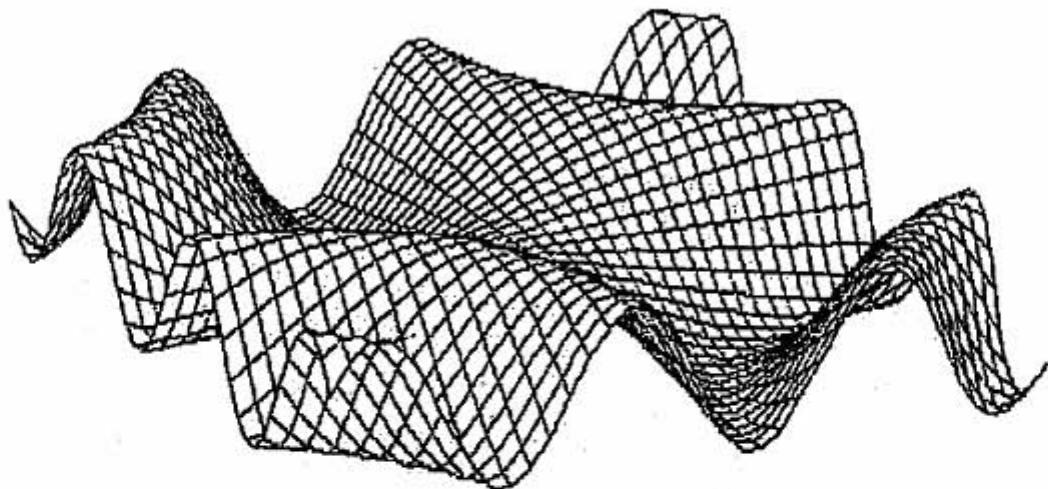
che è costante sulle iperboli del piano x, y di equazione $x \cdot y = t$, con t fissato in \mathbb{R} .

Come la funzione (54.7), anche

(54.10)

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

07100820738387.12

Figura 7.12 — $f(x, y) = \sin xy$

è invariante per rotazioni; non è però definita per $x^2 + y^2 = 0$, cioè nel punto $(0, 0)$. Il grafico si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z il profilo della funzione $z = \log t^2 = 2 \log t$, con $t > 0$, come in figura 7.13.

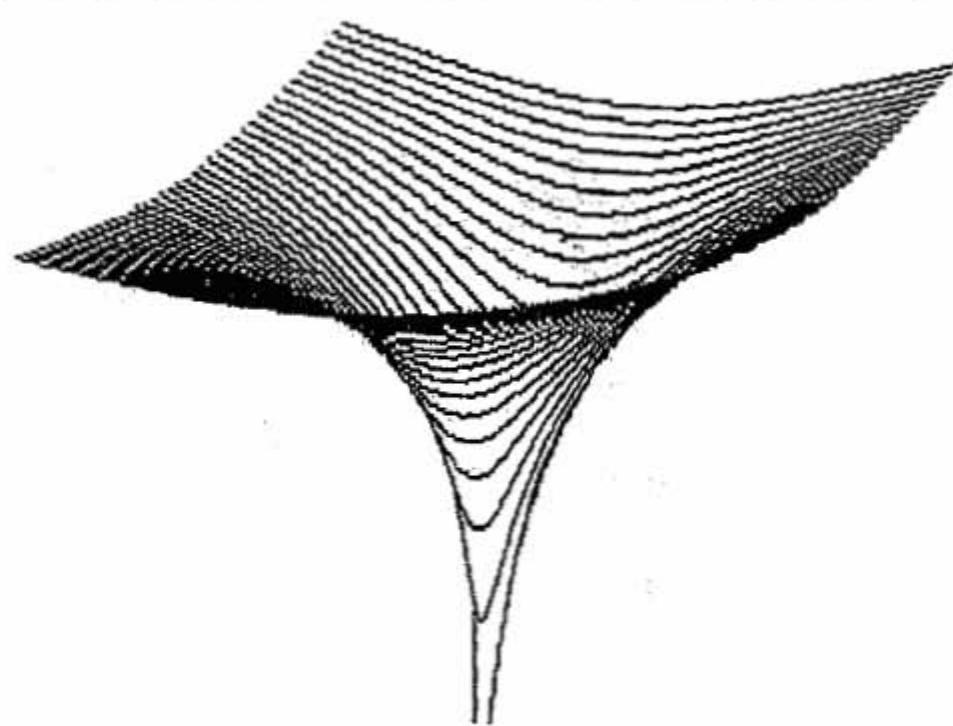
Sono invarianti per rotazioni anche le seguenti funzioni

(54.11)

$$f_0(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

(54.12)

$$f_1(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$



07108821710387

Figura 7.13 — $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

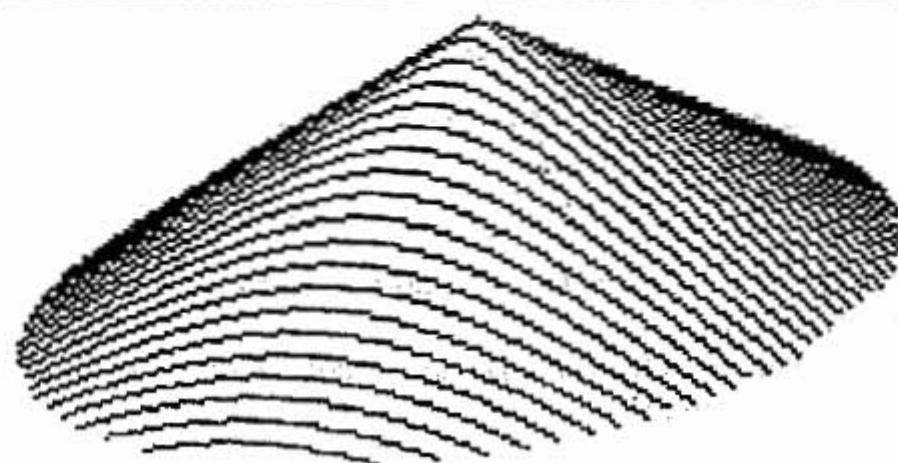
$$(54.13) \quad f_2(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2},$$

i cui grafici sono rappresentati rispettivamente nelle figure 7.14, 7.15, 7.16. La funzione f_0 , definita su tutto \mathbb{R}^2 , ha per $y = 0$ un profilo descritto dall'equazione

$$(54.14) \quad z = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|;$$

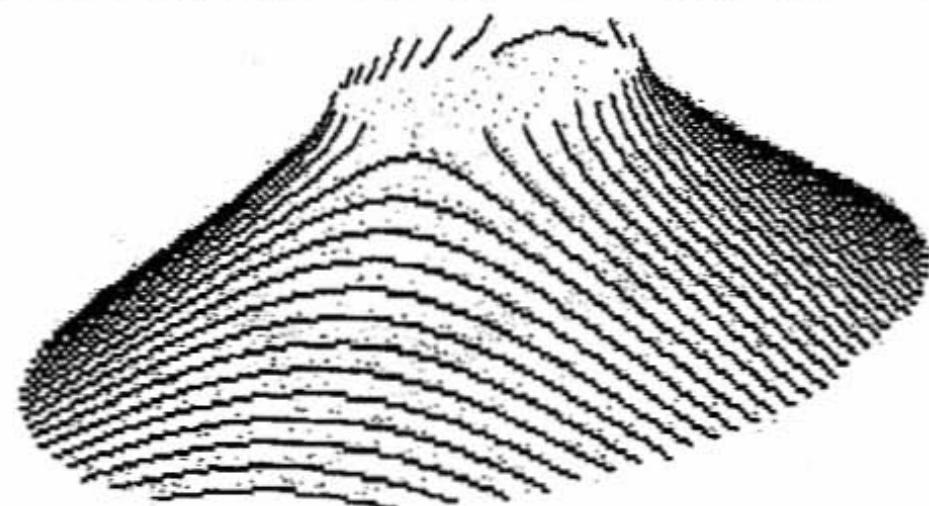
analogamente, per $x = 0$ risulta $f_0(0, y) = 1 - |y|$; si noti il punto angoloso, dovuto al valore assoluto, in figura 7.14 in corrispondenza al punto $(x, y) = (0, 0)$.

La funzione f_1 è definita se $x^2 + y^2 \geq 1$, che corrisponde all'esterno del cerchio del piano x, y di centro l'origine e raggio 1. Analogamente, la funzione f_2 è definita all'esterno del cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

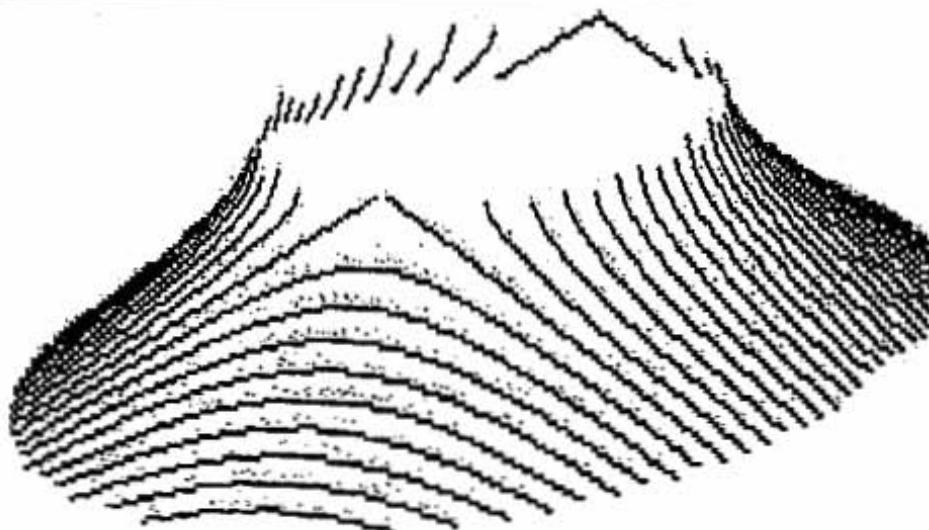


07108820748537

Figura 7.14 — $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$



97088207338387.15

Figura 7.15 — $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 

97088207338387.16

Figura 7.16 — $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$

Come le funzioni in (54.12), (54.13), anche

$$(54.15) \quad z = 1 - \sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - y^2)}$$

$$(54.16) \quad z = \sqrt{(x^2 + y^2 - x) \cdot (2x - x^2 - y^2)}$$

non sono definite su tutto \mathbb{R}^2 . La (54.15) è definita quando

$$(54.17) \quad (1 - x^2) \cdot (1 - y^2) \geq 0,$$

cioè quando i fattori $1 - x^2$ e $1 - y^2$ hanno lo stesso segno, e ciò accade nell'insieme tratteggiato in figura 7.17.

La (54.16) è definita quando l'argomento della radice quadrata è maggiore od uguale a zero. Ricordiamo che l'equazione

$$(54.18) \quad x^2 + y^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

9708820738387.18

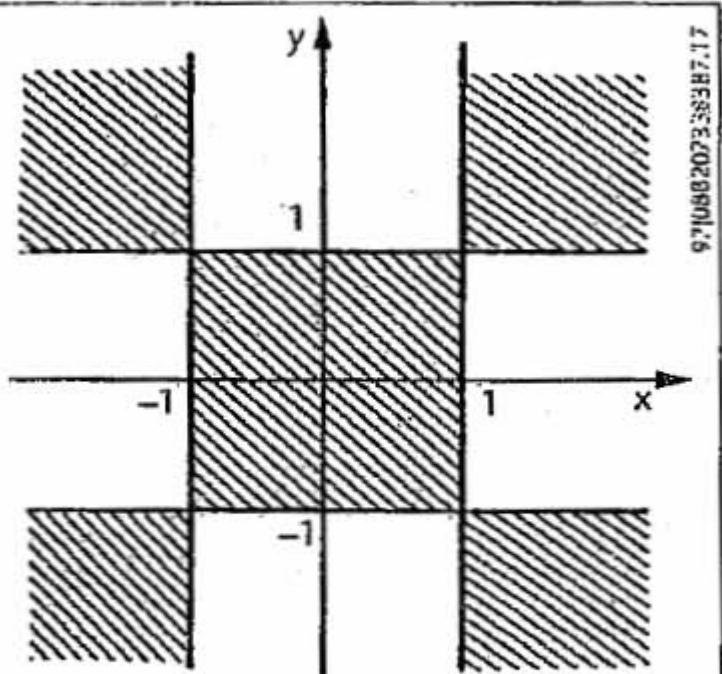


Figura 7.17

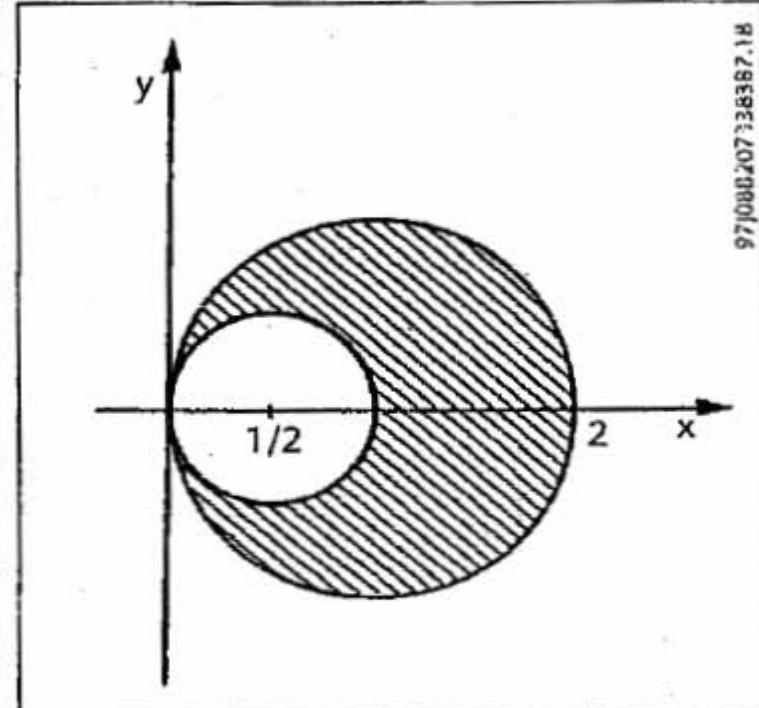
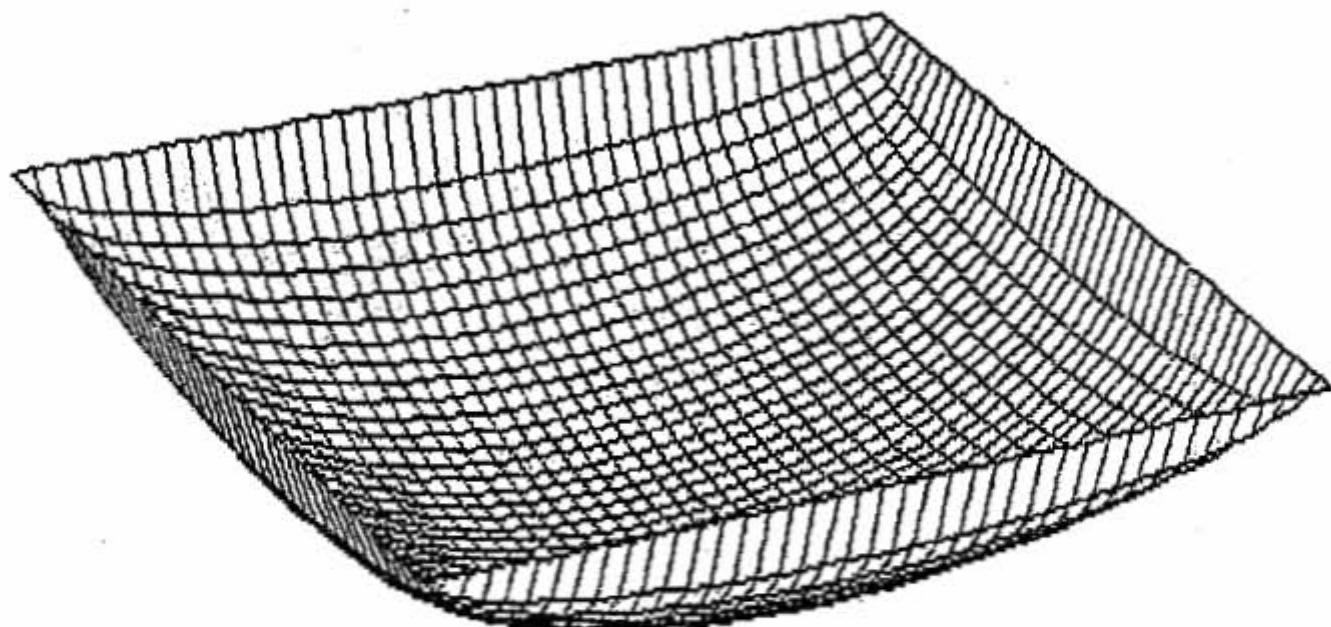


Figura 7.18

rappresenta una circonferenza del piano x, y di centro nel punto di coordinate $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$; analogamente l'equazione

$$(54.19) \quad x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

9708820738387.19

Figura 7.19 — $z = 1 - \sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - y^2)}$

rappresenta una circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Si vede allora che la funzione (54.16) è definita all'interno della circonferenza (54.19) e all'esterno della circonferenza (54.18), quando risulta:

$$(54.20) \quad x^2 + y^2 - x \geq 0, \quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0$$

(il lettore verifichi che non esistono coppie (x, y) tali che $x^2 + y^2 - x < 0$ e $x^2 + y^2 - 2x > 0$); si ottiene il dominio tratteggiato in figura 7.18.

Nelle figure 7.19 e 7.20 sono rappresentati rispettivamente il grafico della funzione (54.15), limitatamente al quadrafo $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, e il grafico della funzione (54.16) «vista da dietro», cioè cambiando il verso all'asse x (che, analiticamente, corrisponde a cambiare x con $-x$).

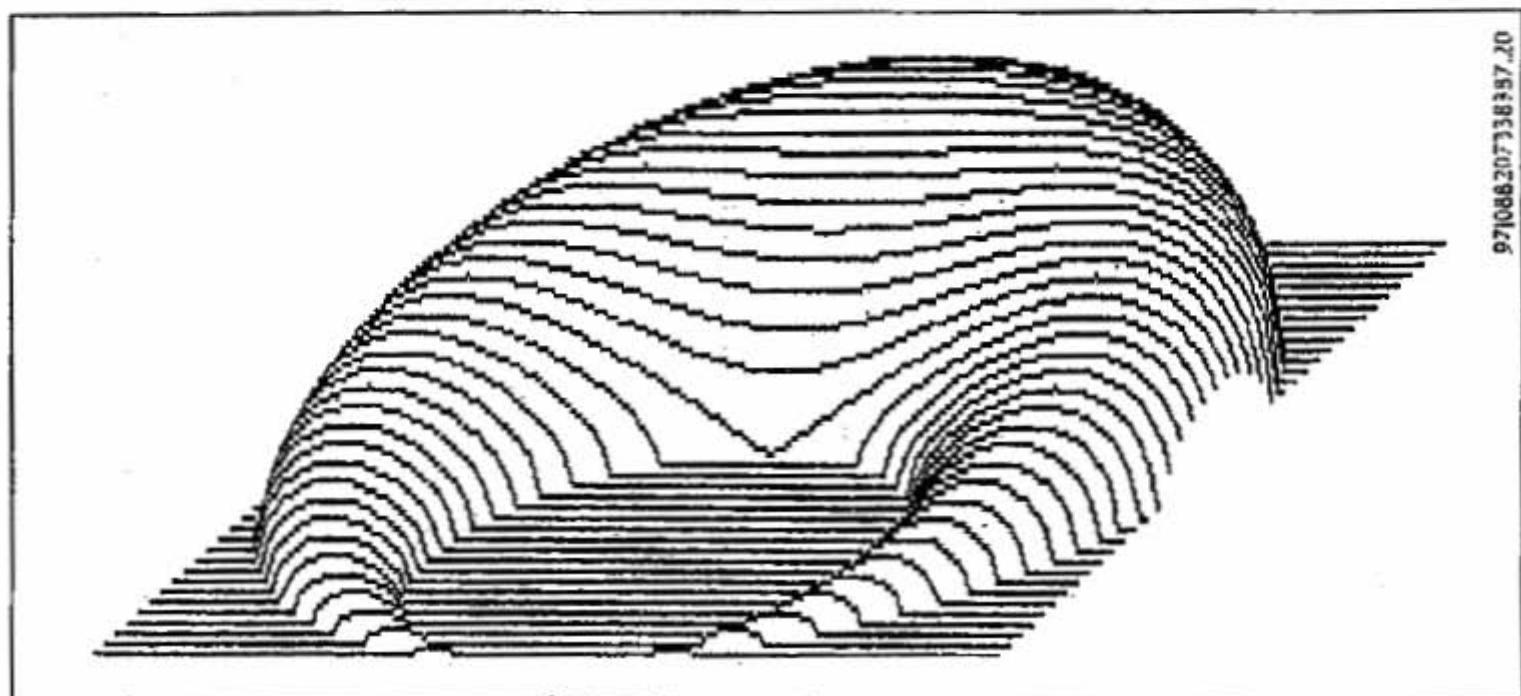


Figura 7.20 — $z = \sqrt{-(x^2 + y^2 + x) \cdot (x^2 + y^2 + 2x)}$

97088620738397.20

55. Limiti e continuità

Un *intorno circolare* I_δ di raggio $\delta (> 0)$ di un punto $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ è, per definizione, il cerchio aperto di centro (x_0, y_0) e raggio δ (in figura 7.21); analiticamente l'intorno I_δ è individuato dalla condizione:

$$(55.1) \quad I_\delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\};$$

talvolta, equivalentemente, si preferisce scrivere:

$$(55.2) \quad (x, y) \in I_\delta \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto di \mathbf{R}^2 con la proprietà che in ogni intorno circolare di (x_0, y_0) cada almeno un punto del dominio D distinto da (x_0, y_0) (come in figura 7.22); in

analogia con la definizione introdotta nel paragrafo 30 per le funzioni di una variabile reale, si dice che (x_0, y_0) è un *punto di accumulazione* per il dominio D di definizione della funzione $f(x, y)$.

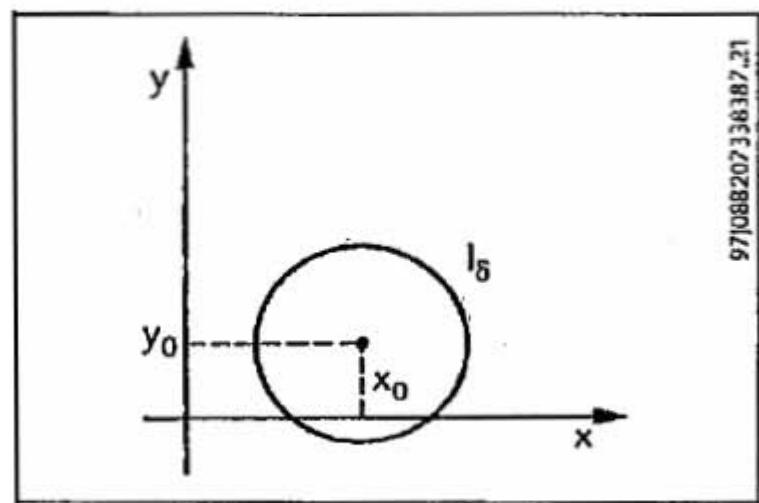


Figura 7.21

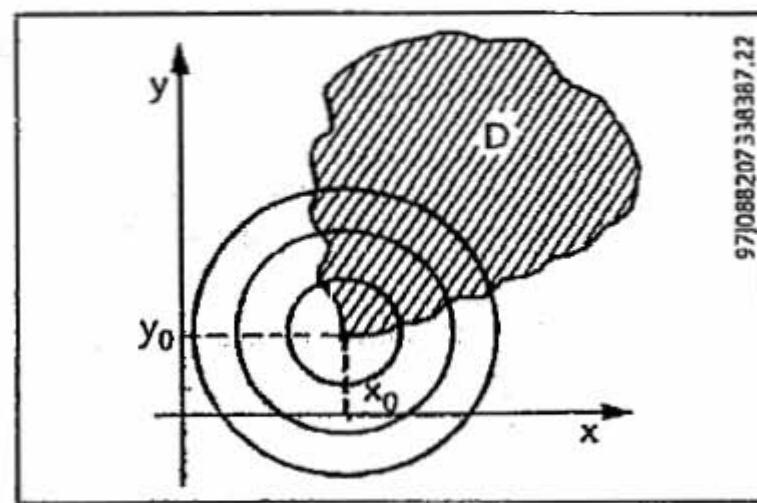


Figura 7.22

Nelle condizioni anzidette si dice che $f(x, y)$ converge ad un numero reale ℓ , per (x, y) che tende ad (x_0, y_0) , e si scrive

$$(55.3) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $(x, y) \in I_\delta \cap D - \{(x_0, y_0)\}$. In simboli la (55.3) si può anche scrivere:

$$(55.4) \quad \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall (x, y) \in D - \{(x_0, y_0)\}, \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ad esempio risulta

$$(55.5) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0;$$

infatti, essendo $x^4 + y^4 \leq x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, si ha

$$(55.6) \quad \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2;$$

perciò, se per ogni $\varepsilon > 0$ si pone $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, si ottiene

$$(55.7) \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Se la funzione $f(x, y)$ è definita anche nel punto (x_0, y_0) e se risulta

$$(55.8) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

allora si dice che $f(x, y)$ è *continua* in (x_0, y_0) ; si dice poi che $f(x, y)$ è continua in un insieme D se è continua in ogni punto di D .

Verifichiamo ad esempio che la funzione

$$(55.9) \quad f(x, y) = x \cdot y$$

è continua nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$; essendo $f(0, 0) = 0$, occorre mostrare che

$$(55.10) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot y = 0.$$

A tale scopo mostriamo preliminarmente che

$$(55.11) \quad |x \cdot y| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

infatti, se $x \cdot y \geq 0$, la (55.11) diviene $2xy \leq x^2 + y^2$, cioè ancora $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, che è verificata perché equivale a $(x - y)^2 \geq 0$; analogamente, se $x \cdot y < 0$, la (55.11) diviene $-2xy \leq x^2 + y^2$, che equivale a $(x + y)^2 \geq 0$.

In base alla (55.11), risulta $|xy| < \varepsilon$ ogni qualvolta $x^2 + y^2 < 2\varepsilon$. Pertanto, posto $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, si ha

$$(55.12) \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |x \cdot y - 0| < \varepsilon,$$

che prova la tesi (55.10).

Come accade per le funzioni di una variabile, anche le funzioni di due variabili, ottenute componendo potenze, esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche, sono continue nel loro insieme di definizione.

56. Derivate parziali. Gradiente

Sia f una funzione di due variabili definita in un intorno circolare I_δ di un punto (x, y) , come in figura 7.23.

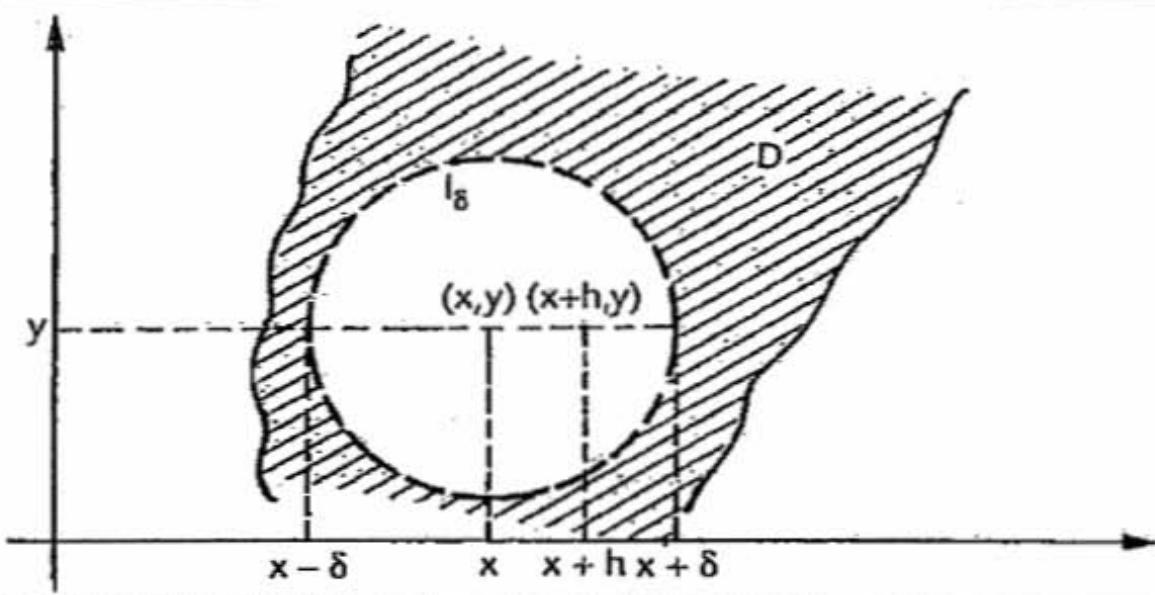


Figura 7.23

In particolare f è definita, oltre che in (x, y) , anche in $(x + h, y)$, qualunque sia h tale che $|h| < \delta$.

La *derivata parziale di f rispetto ad x* nel punto (x, y) è, per definizione, il limite

$$(56.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

se tale limite esiste ed è finito (si noti che si tratta del limite di una funzione di *una variabile reale*, dato che y è fissato e gioca il ruolo di parametro); se esiste la derivata parziale rispetto ad x si denota con uno dei simboli

$$(56.2) \quad f_x; \quad f_x(x, y); \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \quad D_x f.$$

Analogamente, la *derivata parziale di f rispetto ad y* nel punto (x, y) è, per definizione, il limite

$$(56.3) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k},$$

purché tale limite esista e sia finito, e si denota con uno dei simboli

$$(56.4) \quad f_y; \quad f_y(x, y); \quad \frac{\partial f}{\partial y}; \quad D_y f.$$

A seguito della definizione, le derivate parziali di una funzione di due

variabili si calcolano con le stesse regole di derivazione per le funzioni di una variabile, considerando l'altra variabile costante, con il ruolo di parametro.

Come primo esempio, calcoliamo le derivate parziali della funzione

$$(56.5) \quad f(x, y) = x^2 + xy^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Nel derivare rispetto ad x si considera y costante (come se fosse, ad esempio $y^2 = 9$ e si dovesse derivare la funzione $x \rightarrow x^2 + 9x$); si ottiene la derivata parziale rispetto ad x :

$$(56.6) \quad f_x(x, y) = 2x + y^2$$

e, analogamente, la derivata rispetto ad y :

$$(56.7) \quad f_y(x, y) = 2xy.$$

La funzione

$$(56.8) \quad f(x, y) = \sin xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R},$$

il cui grafico è rappresentato in figura 7.12, ammette le seguenti derivate parziali:

$$(56.9) \quad f_x = y \cos xy, \quad f_y = x \cos xy, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Come ultimo esempio consideriamo la funzione

$$(56.10) \quad f(x, y) = e^x;$$

si tratta di una funzione costante rispetto ad y e le sue derivate parziali valgono:

$$(56.11) \quad f_x = e^x, \quad f_y = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Se la funzione f ammette derivate parziali f_x, f_y in un punto (x, y) , in tale punto si definisce il *gradiente di f*, indicato con $\text{grad } f$, oppure con Df , come il vettore di \mathbf{R}^2 avente per componenti le derivate parziali di f ; in simboli:

$$(56.12) \quad \text{grad } f = Df = (f_x, f_y).$$

Si dimostra che, se non è nullo, il vettore gradiente indica la direzione di massima pendenza del grafico della funzione.

Ad esempio, la funzione

$$(56.13) \quad f(x, y) = x + 2y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

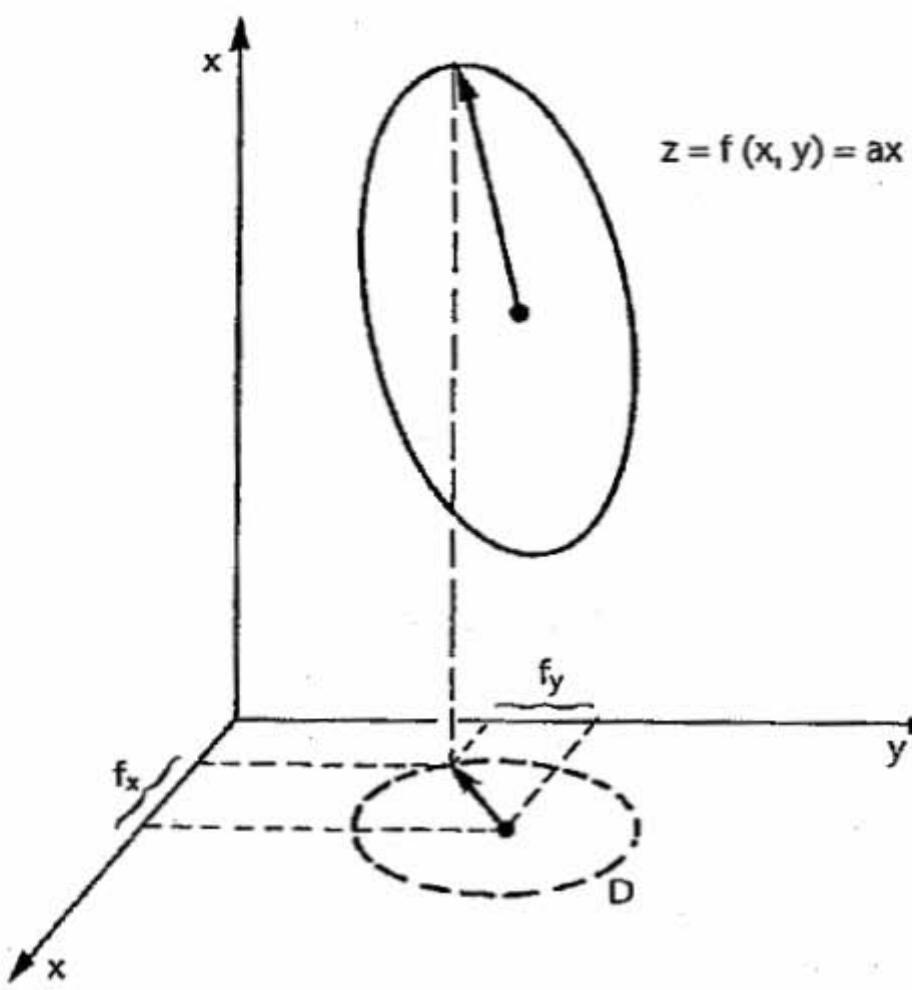


Figura 7.24

ammette derivate parziali $f_x = 1$, $f_y = 2$ costanti su \mathbb{R}^2 . Il gradiente di f per definizione è il vettore di \mathbb{R}^2

$$(56.14) \quad \text{grad } f = (1, 2)$$

ed esprime la direzione ed il verso nel piano di base x, y in cui conviene muoversi per ottenere il massimo incremento della funzione f (a parità di percorso nel piano x, y).

Generalizzando l'esempio (56.13), in figura 7.24 è stato rappresentato il grafico di una generica *funzione lineare* di due variabili, di equazione

$$(56.15) \quad z = f(x, y) = ax + by + c,$$

con $(x, y) \in D$, dove come dominio D è stato scelto un cerchio del piano x, y . Il grafico di $f(x, y)$, con $(x, y) \in D$, è una porzione di un piano dello spazio tridimensionale di assi x, y, z . Il gradiente di $f(x, y)$:

$$(56.16) \quad \text{grad } f = (f_x, f_y) = (a, b)$$

è rappresentato in figura 7.24 da un vettore giacente (nel piano x, y) nel cerchio D ; nella direzione del gradiente, in corrispondenza, la funzione $f(x, y)$ ha la massima pendenza.

57. Derivate successive. Teorema di Schwarz

Sia f una funzione di due variabili definita in un intorno circolare I_δ di un punto di \mathbf{R}^2 e supponiamo che in tutti i punti di I_δ f ammetta derivate parziali

$$(57.1) \quad f_x(x, y), \quad f_y(x, y), \quad (x, y) \in I_\delta,$$

Se a loro volta le funzioni f_x, f_y ammettono derivate parziali

$$(57.2) \quad \frac{\partial}{\partial x} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_y,$$

quest'ultime si chiamano *derivate parziali seconde* della funzione f e si indicano rispettivamente con i simboli

$$(57.3) \quad f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy},$$

oppure con i simboli

$$(57.4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

In particolare f_{xy}, f_{yx} vengono dette *derivate seconde miste*, mentre f_{xx}, f_{yy} vengono dette *derivate seconde pure*.

Ad esempio, la funzione

$$(57.5) \quad f(x, y) = x^y, \quad \forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$$

per y fissato è una potenza, mentre per x fissato è un esponenziale che, ai fini della derivazione rispetto ad y , è opportuno rappresentare nella forma $f(x, y) = e^{y \log x}$. Le derivate parziali prime di $f(x, y)$ valgono

$$(57.6) \quad f_x = y x^{y-1}, \quad f_y = x^y \cdot \log x.$$

Le derivate seconde pure sono date da

$$(57.7) \quad f_{xx} = y(y-1) x^{y-2}, \quad f_{yy} = x^y \cdot (\log x)^2;$$

per ottenere f_{xy} deriviamo f_x in (57.6) rispetto ad y con la regola di derivazione del prodotto:

$$(57.8) \quad f_{xy} = x^{y-1} + y x^{y-1} \cdot \log x = x^{y-1} (1 + y \log x);$$

la derivata f_{yx} è ottenuta derivando rispetto ad x f_y in (57.6):

$$(57.9) \quad f_{yx} = y x^{y-1} \cdot \log x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1} (y \log x + 1).$$

Il lettore che ha seguito il calcolo di f_{xy} e f_{yx} avrà notato che, con passaggi intermedi differenti nei due casi, si è ottenuto lo stesso risultato finale. Ciò non è casuale ed è formalizzato nell'importante teorema che segue.

TEOREMA DI SCHWARZ. — *Se una funzione f ammette entrambe le derivate miste f_{xy} , f_{yx} e se tali derivate seconde sono continue in (x_0, y_0) , allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.*

Dimostrazione: indichiamo con I_δ un intorno circolare del punto (x_0, y_0) dove risultano definite le derivate seconde miste f_{xy} , f_{yx} e sia (x, y) un punto di I_δ , con $x \neq x_0$ e $y \neq y_0$, come in figura 7.25.

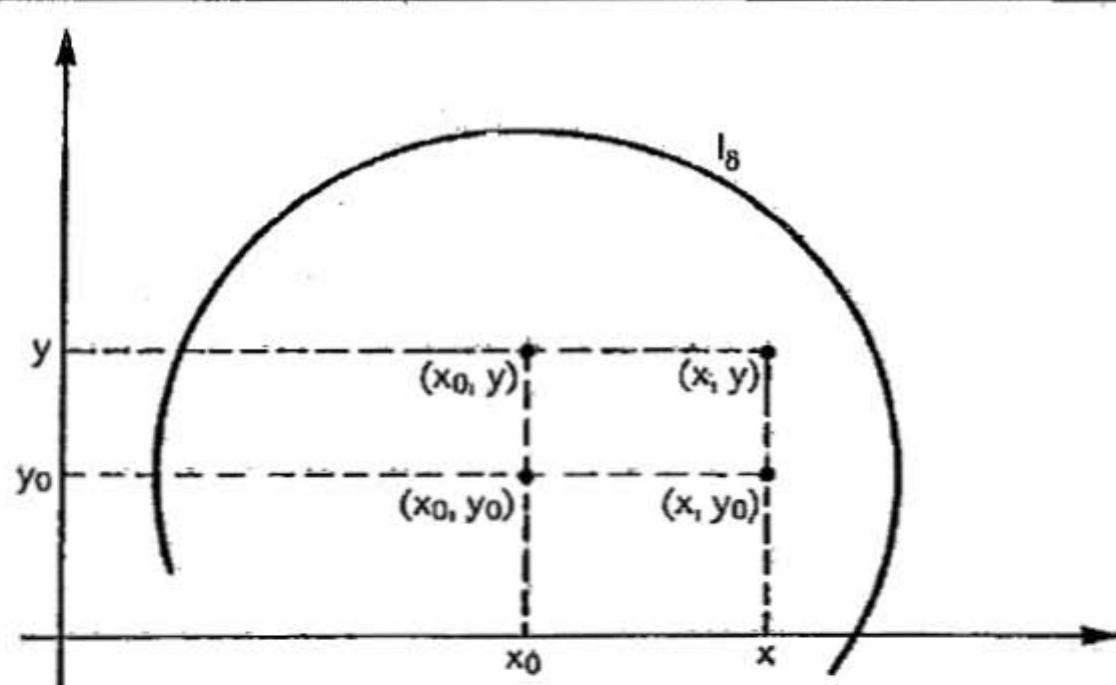


Figura 7.25

Utilizzando i valori della funzione f in corrispondenza ai punti rappresentati in figura 7.25, definiamo

$$(57.10) \quad F(x) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad (\text{per } y \text{ fissato});$$

$$(57.11) \quad G(y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad (\text{per } x \text{ fissato}).$$

Risulta:

$$(57.12) \quad F(x) - F(x_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)],$$

$$G(y) - G(y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) = [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)],$$

per cui

$$(57.13) \quad F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0).$$

Applichiamo il teorema di Lagrange (paragrafo 47) alla funzione $F(x)$ nell'intervallo di estremi x_0, x : esiste in tale intervallo un punto x_1 per cui

$$(57.14) \quad \begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= F'(x_1)(x - x_0) = \\ &= [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)](x - x_0); \end{aligned}$$

applicando di nuovo il teorema di Lagrange alla funzione $y \rightarrow f_x(x_1, y)$ nell'intervallo di estremi y_0, y , otteniamo l'esistenza in tale intervallo di un punto y_1 per cui

$$(57.15) \quad \begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)](x - x_0) = \\ &= f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Procediamo in modo analogo con la funzione $G(y)$ nell'intervallo di estremi y_0, y : esistono y_2 , e poi x_2 , per cui

$$(57.16) \quad \begin{aligned} G(y) - G(y_0) &= G'(y_2)(y - y_0) = \\ &= [f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2)](y - y_0) = \\ &= f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Confrontando le (57.13), (57.15), (57.16), si perviene alla condizione

$$(57.17) \quad f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2),$$

essendo i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) interni al rettangolo disegnato in figura 7.26. Passando al limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ anche (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tendono a (x_0, y_0) : per l'ipotesi di continuità di f_{xy} , f_{yx} si ottiene la tesi $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Per finire osserviamo che se le derivate seconde miste non sono continue, allora non necessariamente sono uguali. Il lettore esegua la verifica sulla funzione $f(x, y)$ definita da

$$(57.18) \quad f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

relativamente al punto $(0, 0)$.

Osserviamo inoltre che il teorema di Schwarz fornisce informazioni anche per le derivate terze, quarte, e così via; infatti, applicando ad esempio il teorema alla derivata parziale f_x , si trova che $f_{xxy} = f_{xyx}$, purché tali derivate terze siano continue. Pertanto, se una funzione

di due variabili ammette derivate terze continue, quelle distinte sono al più quattro, e cioè:

$$(57.19) \quad f_{xxx}, \quad f_{xxy}, \quad f_{xyy}, \quad f_{yyy}.$$

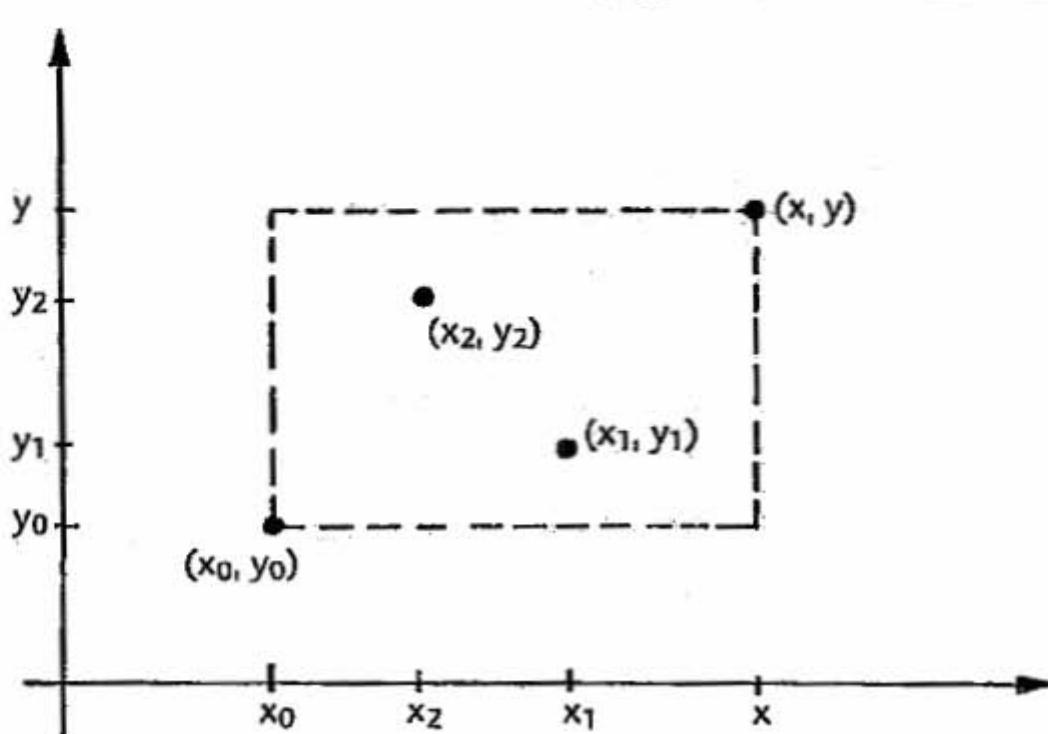


Figura 7.26

58. Massimi e minimi relativi

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $(x_0, y_0) \in D$ è di *massimo relativo* per la funzione $f(x, y)$ nel dominio D se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) tale che

$$(58.1) \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in I_\delta \cap D$$

(ricordiamo che I_δ è stato definito nel paragrafo 55).

Analogamente, un punto $(x_0, y_0) \in D$ è di *minimo relativo* per la funzione $f(x, y)$ nel dominio D se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) tale che

$$(58.2) \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in I_\delta \cap D.$$

Un punto (x_0, y_0) è *interno* ad un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) contenuto in D (si veda la figura 7.27).

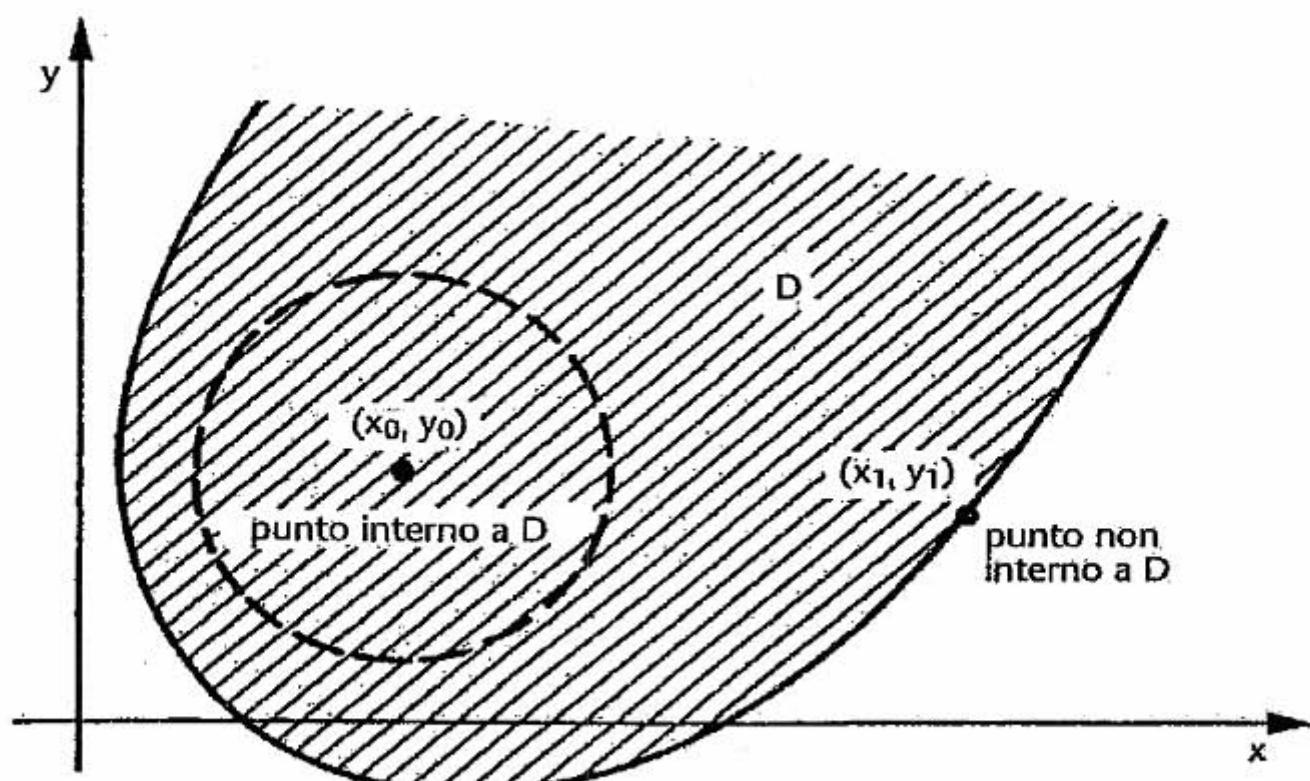


Figura 7.27

Pertanto un punto $(x_0, y_0) \in D$ è di massimo (rispettivamente minimo) relativo *interno* all'insieme D per la funzione f se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) tale che

$$(58.3) \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in I_\delta$$

(rispettivamente $f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in I_\delta$).

I due teoremi che seguono sono utili per la determinazione dei punti di massimo e di minimo relativo interni al dominio di una funzione di due variabili.

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA): — Se (x_0, y_0) è un punto di massimo o di minimo relativo interno al dominio D di una funzione $f(x, y)$ e se $f(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime in (x_0, y_0) , allora risulta

$$(58.4) \quad f_x(x_0, y_0) = 0; \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Dimostrazione: supponiamo ad esempio che (x_0, y_0) sia un punto di massimo relativo interno al dominio D di una funzione $f(x, y)$; esiste allora un intorno circolare I_δ per cui vale la diseguaglianza (58.3).

Fissato $y = y_0$, consideriamo la funzione di una variabile reale

(58.5)

$$F(x) = f(x, y_0),$$

che, per la (58.3) con $y = y_0$, soddisfa:

(58.6)

$$F(x_0) \geq F(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;$$

cioè x_0 è un punto di massimo relativo interno per la funzione $F(x)$ nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Per il teorema di Fermat (paragrafo 46), risulta $F'(x_0) = 0$; cioè, ricordando la definizione (58.5) della funzione $F(x)$

(58.7)

$$F'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0.$$

Si procede in modo analogo per ottenere $f_y(x_0, y_0) = 0$.

In base al teorema precedente, i punti di massimo o di minimo interni al dominio di una funzione di due variabili vanno ricercati tra i punti che annullano entrambe le derivate parziali prime; tali punti si dicono *punti critici* per la funzione. In altre parole, un punto critico per una funzione è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.

Il teorema che segue fornisce un criterio per stabilire se un punto critico sia di massimo o di minimo relativo per una funzione; prima di enunciare il teorema premettiamo alcune notazioni.

Supponiamo che $f(x, y)$ ammetta derivate seconde continue in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$; si definisce il *determinante Hessiano* $H(x, y)$ (o semplicemente *Hessiano*):

$$(58.8) \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

(ricordiamo che, per il teorema di Schwarz, risulta $f_{xy} = f_{yx}$). Talvolta, per mettere in luce la dipendenza dalla funzione f , si usa la notazione $Hf(x, y)$, invece di $H(x, y)$.

TEOREMA (CONDIZIONE SUFFICIENTE). — *Nelle ipotesi precedenti, se risulta*

(58.9)

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, & f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0, & f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo per $f(x, y)$. Se invece risulta

$$(58.10) \quad \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, & f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0, & f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo per $f(x, y)$. Infine, se risulta

$$(58.11) \quad Hf(x_0, y_0) < 0,$$

allora il punto (x_0, y_0) non è né di massimo, né di minimo per $f(x, y)$ (ed in tal caso si dice anche che (x_0, y_0) è un punto a sella per $f(x, y)$).

Pertanto un punto critico (x_0, y_0) risulta di massimo o di minimo relativo per una funzione $f(x, y)$ se $Hf(x_0, y_0) > 0$; se invece $Hf(x_0, y_0) < 0$ allora il punto (x_0, y_0) non è né di massimo né di minimo. Il caso $Hf(x_0, y_0) = 0$ non è contemplato nell'enunciato del teorema, potendosi verificare sia che (x_0, y_0) è di massimo o di minimo, sia il caso contrario.

Non diamo la dimostrazione della condizione sufficiente sopra enunciata, ma illustriamo alcuni esempi.

La funzione

$$(58.12) \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

ammette derivate parziali $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ che si annullano nel punto di coordinate $(0, 0)$. Il determinante Hessiano vale

$$(58.13) \quad H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

ed è quindi positivo. Essendo $f_{xx} = 2 > 0$, il punto $(0, 0)$, in base alla (58.9), è di minimo relativo per la funzione. Si verifica anche direttamente che $(0, 0)$ risulta punto di minimo assoluto per $f(x, y)$ su \mathbb{R}^2 , perché

$$(58.14) \quad f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Anche la funzione

$$(58.15) \quad f(x, y) = y^2 - x^2$$

ha derivate parziali $f_x = -2x$, $f_y = 2y$ che si annullano in $(0, 0)$. Però, essendo il determinante

Hessiano

$$(58.16) \quad H = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

negativo, in base alla (58.11), $(0, 0)$ è un punto a sella per la funzione; tale punto a sella è ben riconoscibile nel grafico della funzione in figura 7.6.

La funzione

$$(58.17) \quad f(x, y) = x^3 - 6y(x + y)$$

è definita nel dominio D costituito da tutto lo spazio \mathbf{R}^2 . Il gradiente di f si annulla in corrispondenza ai punti di coordinate (x, y) , soluzioni del sistema

$$(58.18) \quad \begin{cases} f_x = 3x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x - 12y = 0 \end{cases};$$

dalla seconda equazione si ricava $x = -2y$, che, sostituito nella prima, dà luogo a $12y^2 - 6y = 0$, cioè $y = 0$, oppure $y = 1/2$; in corrispondenza è $x = 0$, oppure $x = -1$.

Perciò i punti di coordinate $(0, 0)$, $(-1, 1/2)$ sono critici per la funzione f in (58.17).

Il determinante Hessiano di f vale

$$(58.19) \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = -144x - 36.$$

In particolare per $(x, y) = (0, 0)$ si trova $H(0, 0) = -36$; siamo quindi nella condizione (58.11) del teorema precedente e $(0, 0)$ è un punto a sella per $f(x, y)$. Invece, per $(x, y) = (-1, 1/2)$ si trova $H(-1, 1/2) = 108 > 0$; essendo $f_{xx}(-1, 1/2) = -12 < 0$, siamo nella condizione (58.10) ed il punto di coordinate $(-1, 1/2)$ è di massimo relativo per $f(x, y)$.

In figura 7.28 è rappresentato il grafico di $f(x, y)$; si noti in particolare il punto di massimo relativo nel quadrante delle y positive e delle x negative.

I punti critici della funzione

$$(58.20) \quad f(x, y) = y e^{-(x^2 + y^2)}$$

si determinano risolvendo il sistema

$$(58.21) \quad \begin{cases} f_x = -2xy e^{-(x^2 + y^2)} = 0 \\ f_y = (1 - 2y^2) e^{-(x^2 + y^2)} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione fornisce le condizioni $x = 0$ oppure $y = 0$. Quest'ultima, cioè $y = 0$, non è compatibile con l'altra condizione $f_y = 0$, che invece è soddisfatta per $1 - 2y^2 = 0$, cioè per $y = \pm \sqrt{2}/2$. Si trovano quindi i punti critici $(0, \sqrt{2}/2)$, $(0, -\sqrt{2}/2)$.

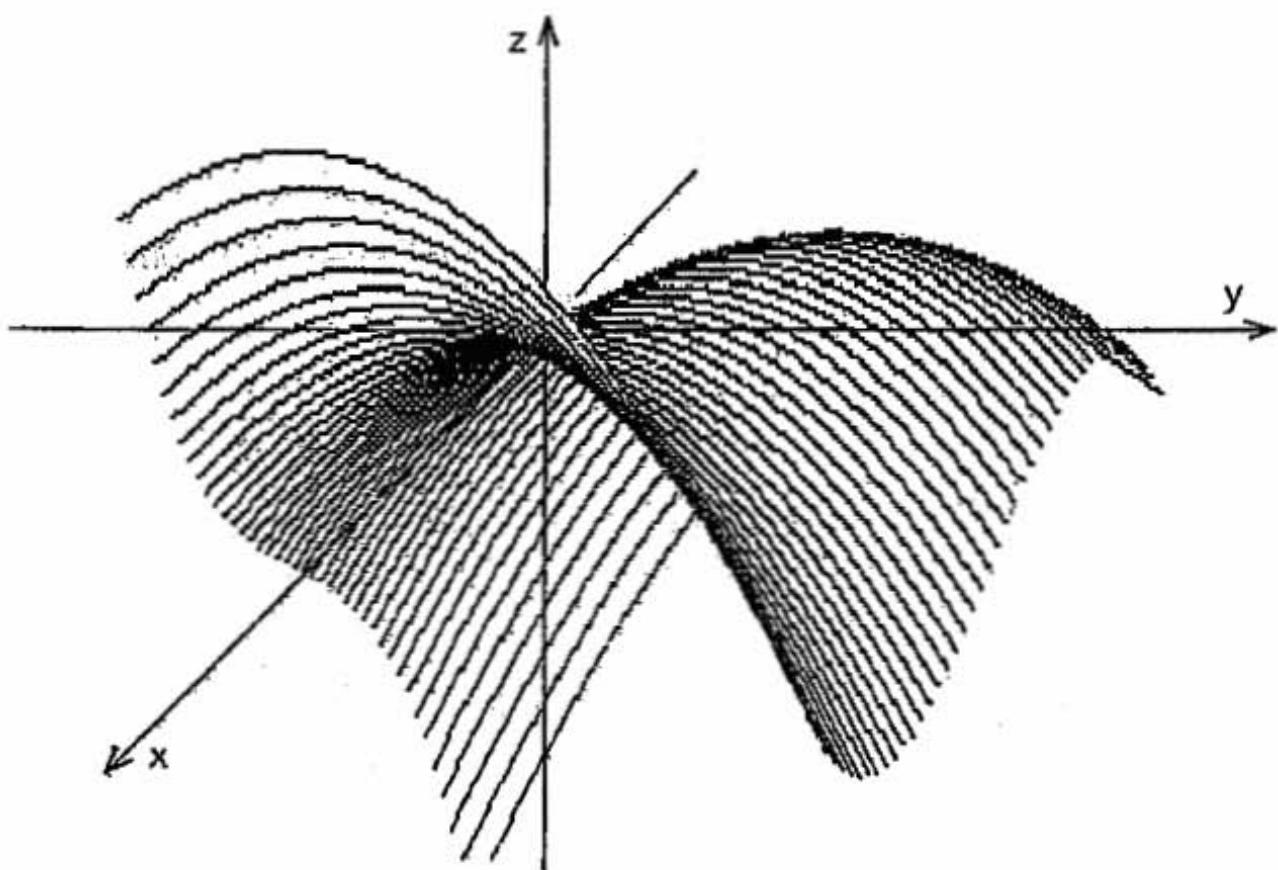


Figura 7.28 — $f(x, y) = x^3 - 6y(x + y)$

Si verifica che il determinante Hessiano è positivo in entrambi i casi, mentre per

$$(58.22) \quad f_{xx} = (-2y + 4x^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

si ha: $f_{xx}(0, \sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$, $f_{xx}(0, -\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}e^{-1/2} > 0$. Pertanto $(0, \sqrt{2}/2)$ è un punto di massimo e $(0, -\sqrt{2}/2)$ è un punto di minimo per la funzione $f(x, y)$, il cui grafico è rappresentato in figura 7.29.

Chiudiamo il paragrafo con un esempio di punto di massimo (o di minimo) per una funzione con determinante Hessiano nullo. Dalla figura 7.11 si vede chiaramente che il punto centrale, di coordinate $(0, 0)$, è di massimo per la funzione

$$(58.23) \quad f(x, y) = \cos(x^2 + y^2);$$

ciò è evidente anche analiticamente, perché, essendo

$$(58.24) \quad f(0, 0) = \cos 0 = 1 \geq \cos(x^2 + y^2) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

il punto $(0, 0)$ risulta di massimo assoluto per $f(x, y)$ su \mathbb{R}^2 . In accordo con la condizione necessaria (58.4), $(0, 0)$ è una soluzione del sistema

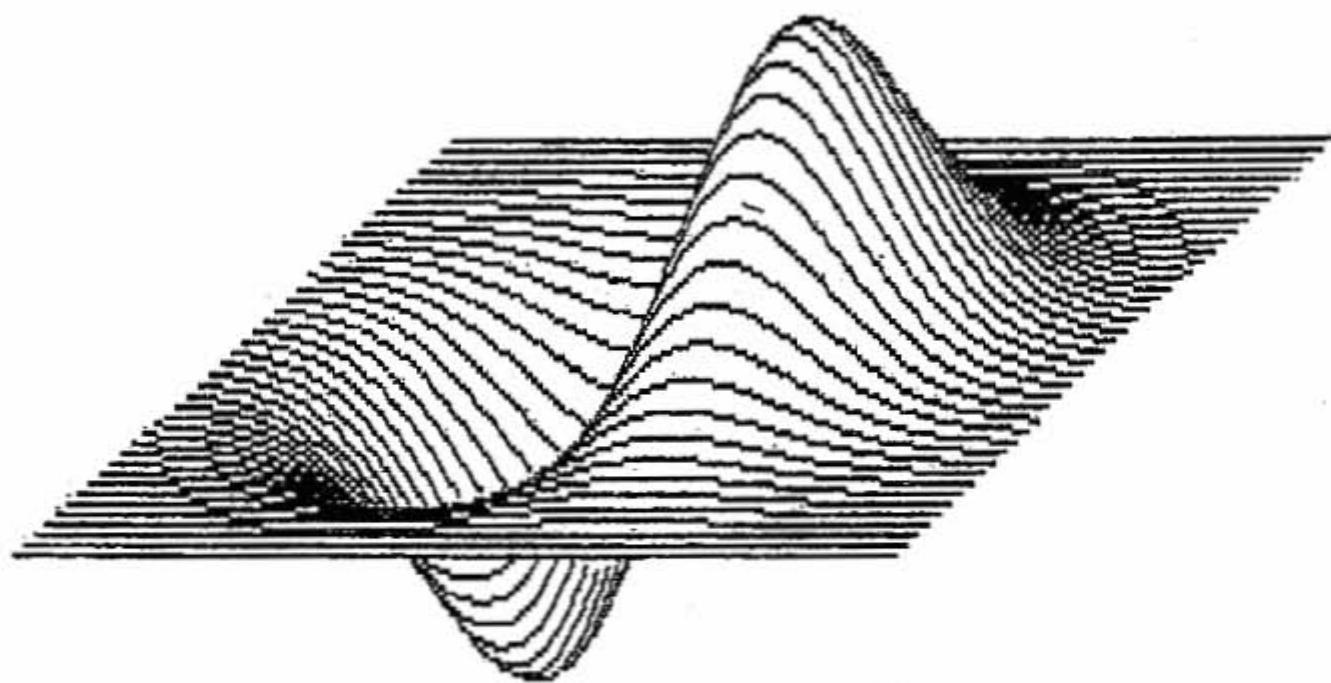


Figura 7.29 — $f(x, y) = y e^{-(x^2 + y^2)}$

$$(58.25) \quad \begin{cases} f_x = -2x \sin(x^2 + y^2) = 0 \\ f_y = -2y \sin(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Il determinante Hessiano vale

$$(58.26) \quad Hf = \begin{vmatrix} -2 \sin(x^2 + y^2) - 4x^2 \cos(x^2 + y^2) & -4xy \cos(x^2 + y^2) \\ -4xy \cos(x^2 + y^2) & -2 \sin(x^2 + y^2) - 4y^2 \cos(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$$

e si annulla in $(0, 0)$ (infatti tutte le derivate parziali seconde si annullano in $(0, 0)$).

59. Funzioni di tre o più variabili reali

Indichiamo con \mathbf{R}^3 l'insieme delle *terne ordinate* di numeri reali:

$$(59.1) \quad \mathbf{R}^3 = \{(x, y, z): x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$$

e, più generalmente, con \mathbf{R}^n , l'insieme delle *n-pie ordinate* di numeri reali:

$$(59.2) \quad \mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbf{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Un'applicazione f che ad ogni elemento di un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^n$ fa corri-

spondere uno ed un solo elemento di \mathbb{R} è detta una *funzione di n variabili* ed è denotata con il simbolo

$$(59.3) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

nel caso particolare $n = 3$ si ha una funzione f di tre variabili reali, che è denotata anche con il simbolo

$$(59.4) \quad f(x, y, z)$$

in ogni caso si usa anche il simbolo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e l'insieme D è detto il *dominio* della funzione f .

Molte definizioni e concetti introdotti nei paragrafi precedenti per le funzioni di due variabili si estendono alle funzioni di tre o più variabili; ciò vale ad esempio per le definizioni di limite, continuità, derivate parziali. Vediamo più in dettaglio quest'ultimo argomento.

La *derivata parziale* di una funzione f rispetto alla variabile x_i , nel punto (x_1, x_2, \dots, x_n) , è il limite

$$(59.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

purché tale limite esista e sia finito; in tal caso si denota con uno dei simboli

$$(59.6) \quad f_{x_i}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad D_{x_i} f; \quad D_i f.$$

Ad esempio, le derivate parziali della funzione di tre variabili

$$(59.7) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

sono date da

$$(59.8) \quad f_x = 2x + yz; \quad f_y = 2y + xz; \quad f_z = 2z + xy.$$

Mentre la funzione di n variabili, detta *modulo o norma*, definita da

$$(59.9) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

ammette, per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, derivate parziali date da

$$(59.10) \quad f_{x_i} = \frac{x_i}{f} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Come per le funzioni di due variabili, anche per le funzioni di n variabili si definiscono le *derivate parziali seconde*, che vengono a costituire la seguente matrice quadrata $n \times n$, detta *matrice Hessiana*

$$(59.11) \quad \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}.$$

Applicando il teorema di Schwarz (paragrafo 57) sull'inversione dell'ordine di derivazione alla funzione di *due* variabili

$$(59.12) \quad g(x_i, x_j) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad (i \neq j),$$

lasciando fissate le altre variabili con il ruolo di parametri, si ottiene la formula

$$(59.13) \quad f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n, (i \neq j),$$

purché tali derivate seconde esistano e siano continue. Pertanto la matrice Hessiana (59.11) è una matrice simmetrica, nel caso in cui tutte le derivate parziali seconde siano continue.

Con le stesse definizioni e la stessa dimostrazione del paragrafo precedente si prova che in un punto di massimo o di minimo relativo interno al dominio di definizione risulta

$$(59.14) \quad f_{x_1} = f_{x_2} = \dots = f_{x_n} = 0,$$

nell'ipotesi che le derivate parziali prime esistano nel punto.

Una condizione sufficiente per i massimi ed i minimi, in termini della matrice Hessiana (59.11), esiste ma è più complessa della formulazione data nel paragrafo precedente nel caso di funzioni di due variabili; tale condizione sufficiente si esprime dicendo che la matrice Hessiana (59.11) è *definita positiva* (rimandiamo ad un testo di Analisi Matematica 2, o di Geometria, per la nozione di matrice quadrata definita positiva). La condizione sufficiente, nel caso di funzioni di n variabili, ha un notevole interesse teorico, ma ha un minore interesse applicativo nella risoluzione di esercizi.

Appendice al capitolo 7

60. Differenziabilità

È ben noto che, per le funzioni di una variabile reale, la derivabilità in un punto implica la continuità della funzione nel punto (si veda il paragrafo 40).

Non vale una proprietà analoga per le funzioni di due o più variabili; esistono infatti funzioni $f(x, y)$ definite in un intorno di un punto (x_0, y_0) , aventi derivate parziali $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$, pur non essendo continue in (x_0, y_0) . La nozione naturale per le funzioni di due o più variabili, che estende il concetto di derivabilità per le funzioni di una variabile reale, è quella di *differenziabilità*.

Cominciamo col presentare un esempio di funzione che ammette derivate parziali, ma che non è continua in un punto di \mathbf{R}^2 .

Consideriamo la funzione $f(x, y)$ definita su \mathbf{R}^2 da:

$$(60.1) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La funzione si annulla, oltre che in $(0, 0)$, in tutti gli altri punti del piano x, y che giacciono sugli assi coordinati, pertanto:

$$(60.2) \quad f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Analogamente risulta $f_y(0, 0) = 0$. La funzione $f(x, y)$ ammette quindi derivate parziali nel punto di coordinate $(0, 0)$ (ed anche in tutti gli altri punti di \mathbf{R}^2).

Però $f(x, y)$ non è continua in $(0, 0)$, perché non esiste il limite

$$(60.3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

infatti, affermare che il limite in (60.3) della funzione $f(x, y)$ è uguale ad un numero $l \in \mathbf{R}$ significa che, in ogni intorno I_δ di raggio $\delta > 0$ del punto $(0, 0)$, privato dello stesso punto $(0, 0)$, la funzione $f(x, y)$ assume valori "vicini" ad l . Viceversa, in $I_\delta - \{(0, 0)\}$, qualunque sia $\delta > 0$, la funzione $f(x, y)$ assume, ad esempio, sia il valore $+1/2$ che il valore $-1/2$: ciò accade in corrispondenza della retta per l'origine, di equazione $y = x$, per cui risulta $f(x, x) = x^2 / (x^2 + x^2) = 1/2$ per ogni $x \neq 0$, ed in corrispondenza della retta di equazione $y = -x$, per cui $f(x, -x) = -x^2 / (x^2 + x^2) = -1/2$ per ogni $x \neq 0$.

Una funzione f è *differenziabile* in un punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se esistono in

tale punto le derivate parziali f_x , f_y e se risulta

$$(60.4) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0;$$

osserviamo che si può dare una definizione apparentemente più generale, senza richiedere a priori che esistano le derivate parziali $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$.

Se f è differenziabile in (x, y) , la quantità $f_x(x, y)h + f_y(x, y)k$ è detta il *differenziale* di f in (x, y) .

Con lo stesso procedimento utilizzato nel paragrafo 40 per le funzioni reali di una variabile reale, proviamo ora che *ogni funzione differenziabile in (x, y) è anche continua in (x, y)* ; infatti:

$$(60.5) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x+h, y+k) = f(x, y) + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f(x+h, y+k) - f(x, y)];$$

risulta poi

$$\begin{aligned} & |f(x+h, y+k) - f(x, y)| = \\ &= \left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \right. \\ & \quad \left. + f_x(x, y) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + f_y(x, y) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \cdot \sqrt{h^2 + k^2} \leq \\ (60.6) \quad & \leq \left\{ \left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + |f_x| + |f_y| \right\} \sqrt{h^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Per la definizione di differenziabilità (60.4), dato che $\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, dalla (60.6) si deduce che il limite a secondo membro della (60.5) vale zero e pertanto

$$(60.7) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x+h, y+k) = f(x, y),$$

che equivale alla continuità di f nel punto (x, y) .

Un importante criterio per stabilire se una data funzione è differenziabile in un punto è espresso dal seguente:

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE. — *Se una funzione f ammette derivate parziali prime continue in un punto (x, y) , allora f è anche differenziabile in (x, y) .*

Dimostrazione: allo scopo di provare la relazione di limite (60.4), applicando due volte il teorema di Lagrange (relativo a funzioni di una variabile), abbiamo

$$\begin{aligned}
 & f(x+h, y+k) - f(x, y) = \\
 (60.8) \quad & = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) = \\
 & = f_x(x(h), y+k) \cdot h + f_y(x, y(k)) \cdot k,
 \end{aligned}$$

dove $x(h)$ è un punto opportuno dell'intervallo di estremi $x, x+h$, mentre $y(k)$ è un punto opportuno dell'intervallo di estremi $y, y+k$ (si noti in particolare che $x(h), y(k)$ convergono rispettivamente a x, y per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$). Si ottiene la stima seguente:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \\
 (60.9) \quad & \leq |f_x(x(h), y+k) - f_x(x, y)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \\
 & + |f_y(x, y(k)) - f_y(x, y)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \\
 & \leq |f_x(x(h), y+k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y(k)) - f_y(x, y)| :
 \end{aligned}$$

per l'ipotesi di continuità delle derivate parziali f_x e f_y , l'ultimo membro della (60.9) tende a zero per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$; perciò anche il primo membro della (60.9) tende a zero.

Se una funzione f è continua in un dominio D (che supponiamo aperto) si dice anche che f è *di classe C^0 in D* e si scrive $f \in C^0(D)$; se f ammette derivate parziali prime continue in D si dice che f è *di classe C^1 in D* e si scrive $f \in C^1(D)$; più generalmente $f \in C^k(D)$, con $k \in \mathbb{N}$, significa che la funzione f ammette derivate parziali continue in D fino all'ordine k . Infine, se $f \in C^k(D)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si dice che $f \in C^\infty(D)$.

Con le notazioni introdotte, il teorema del differenziale e la proprietà di continuità precedentemente dimostrate si scrivono:

$$(60.10) \quad f \in C^1(D) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } D \Rightarrow f \in C^0(D).$$

CAPITOLO 8

INTEGRALI DEFINITI

61. Il metodo di esaustione

Con l'espressione «*metodo di esaustione*» si fa riferimento ad un metodo per calcolare le aree ed i volumi di figure curvilinee, usato da Archimede nel III secolo a.C., ma risalente, secondo lo stesso Archimede, ed Eudosso di Cnido, vissuto nel IV secolo a.C.

Abbiamo già descritto nel paragrafo 16 il metodo che Archimede utilizzava per calcolare l'area di un cerchio, approssimando tale area con le aree di poligoni regolari di n lati inscritti (o circoscritti). Riferendoci a questo esempio, con la parola «*esaustione*» si vuole significare che un cerchio viene riempito, o «*esaurito*», inscrivendo in esso poligoni regolari di n lati, e facendo poi tendere n all'infinito.

Descriviamo in questo paragrafo il metodo di esaustione con il linguaggio moderno, facendo uso della teoria dei limiti, in modo da facilitare la comprensione del metodo generale che introdurremo nel paragrafo successivo.

Calcoliamo con il metodo di esaustione l'area di un *settore di parabola*, cioè l'area della regione S che nel piano cartesiano x, y è compresa tra l'asse delle x , il grafico della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0, b]$, e la retta verticale di equazione $x = b$ ($b > 0$), come in figura 8.1.

Dividiamo l'intervallo $[0, b]$ in $n \in \mathbb{N}$ intervalli, $[x_{k-1}, x_k]$, ciascuno di ampiezza b/n , ponendo:

$$(61.1) \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}b, \quad x_2 = \frac{2}{n}b, \quad \dots, \quad x_k = \frac{k}{n}b, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

Calcoliamo l'area della regione tratteggiata nella figura 8.2. La regione tratteggiata è unione di rettangoli. Il generico rettangolo ha per base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, di lunghezza uguale a b/n , ed ha per altezza il valore della funzione in x_{k-1} , cioè $f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2$. L'area totale è data dalla somma delle aree dei rettangoli componenti, cioè (il simbolo di sommatoria è stato

Per facilitare il lettore osserviamo che la (61.2) si può riscrivere esplicitamente, senza l'uso del simbolo di sommatoria, nel modo seguente:

$$(61.3) \quad \begin{aligned} f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \dots + \\ + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_0^2 \frac{b}{n} + x_1^2 \frac{b}{n} + \dots + x_{k-1}^2 \frac{b}{n} + \dots + x_{n-1}^2 \frac{b}{n} = \\ = \frac{b}{n} (x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 + \dots + x_{n-1}^2). \end{aligned}$$

La somma indicata nella (61.2) è un'approssimazione per difetto dell'area della regione S. Analogamente otteniamo un'approssimazione per eccesso considerando l'area della unione di rettangoli, come in figura 8.3.

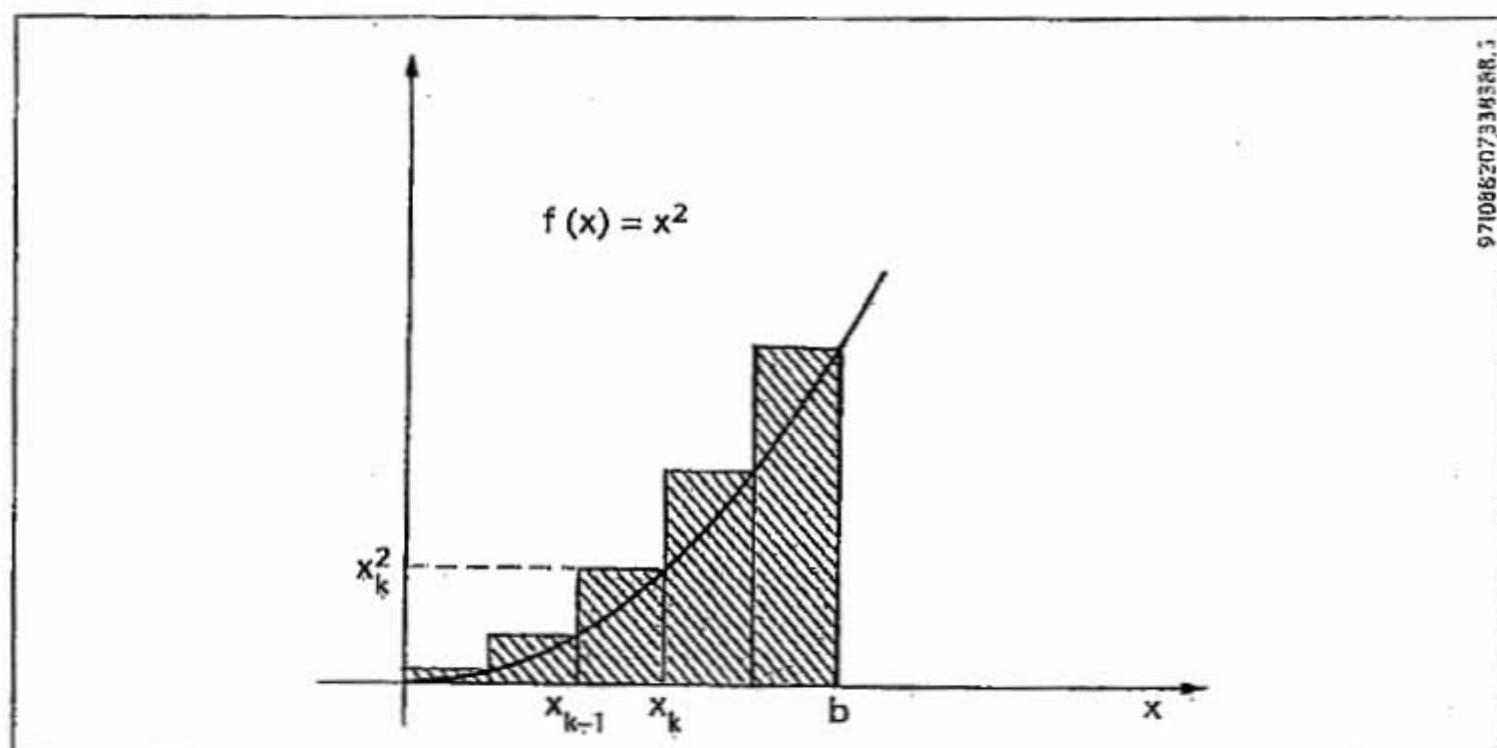


Figura 8.3

Rispetto al caso precedente, stiamo considerando rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Il generico rettangolo ha per base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, e per altezza $f(x_k) = x_k^2$. L'area totale in questo caso è data da

$$(61.4) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Quindi abbiamo ottenuto le seguenti stime per difetto e per eccesso dell'area della regione S:

$$(61.5) \quad \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_{k-1}^2 < \text{area } S < \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

la somma a primo membro è detta *somma integrale inferiore*, mentre quella all'ultimo membro è detta *somma integrale superiore*.

Ricordando la definizione (61.1) di x_k , valutiamo l'ultima sommatoria:

$$(61.6) \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} b \right)^2 = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2;$$

la (61.5) si può quindi riscrivere:

$$(61.7) \quad \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < \text{area } S < \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Utilizziamo la formula (11.10), che si verifica per mezzo del principio di induzione:

$$(61.8) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1).$$

Sostituiamo questo valore nell'ultimo membro della (61.7), mentre a primo membro sostituiamo il valore della somma corrispondente, cambiando quindi n con $n-1$. Otteniamo:

$$(61.9) \quad \frac{b^3}{6} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} < \text{area } S < \frac{b^3}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3};$$

cioè, semplificando:

$$(61.10) \quad \frac{b^3 (n-1)(2n-1)}{6n^2} < \text{area } S < \frac{b^3 (n+1)(2n+1)}{6n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si calcola facilmente il limite per $n \rightarrow +\infty$ delle successioni che compaiono nella relazione precedente (si può ad esempio dividere numeratore e denominatore per n^2). Dato che il limite del primo membro è uguale al limite del membro a destra, il comune valore ($= b^3/3$) è l'area della regione S . Ab-

biamo quindi ritrovato il risultato di Archimede: l'area del settore di parabola S, come in figura 8.1, è data da

$$(61.11) \quad \text{area } S = \frac{b^3}{3}.$$

Si noti ciò che apparentemente può sembrare una coincidenza: derivando il risultato trovato rispetto a b otteniamo:

$$(61.12) \quad \frac{d}{db} (\text{area } S) = b^2.$$

Cioè, la derivata dell'area, pensata come funzione del parametro b, è uguale al valore della funzione $f(x) = x^2$, che ci è servita per definire la regione S, calcolata per $x = b$. Chiariremo nel paragrafo 67 l'importanza di questa apparente curiosità.

Nei paragrafi seguenti introduciamo l'integrale definito sulla base delle idee sopra esposte.

62. Definizioni e notazioni

Sia $f(x)$ una funzione *limitata* nell'intervallo chiuso $[a, b]$ di \mathbf{R} ; quindi esistono due costanti m, M tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$.

Una *partizione* P di $[a, b]$ è un insieme ordinato costituito di $n + 1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n , con $n \in \mathbf{N}$, tali che

$$(62.1) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b.$$

Quindi, per definizione, risulta $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Gli $n + 1$ punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$, con $k = 1, 2, \dots, n$.

Per ogni partizione P di $[a, b]$, poniamo

$$(62.2) \quad m_k = \inf \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$(62.3) \quad M_k = \sup \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definiamo poi le *somme (integrali) inferiori*

$$(62.4) \quad s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le *somme (integrali) superiori*

$$(62.5) \quad S(P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Talvolta, per ricordare anche la dipendenza dalla funzione f , si utilizzano i simboli equivalenti $s(P) = s(P, f)$, $S(P) = S(P, f)$.

Se la funzione $f(x)$ è positiva in $[a, b]$, le somme integrali hanno il chiaro significato geometrico di somma delle aree dei rettangoli rispettivamente inscritti e circoscritti, come in figura 8.4. Si noti però che $s(P)$, $S(P)$ sono definite, indipendentemente dal significato geometrico di area, anche se $f(x)$ non è positiva nell'intervallo $[a, b]$.

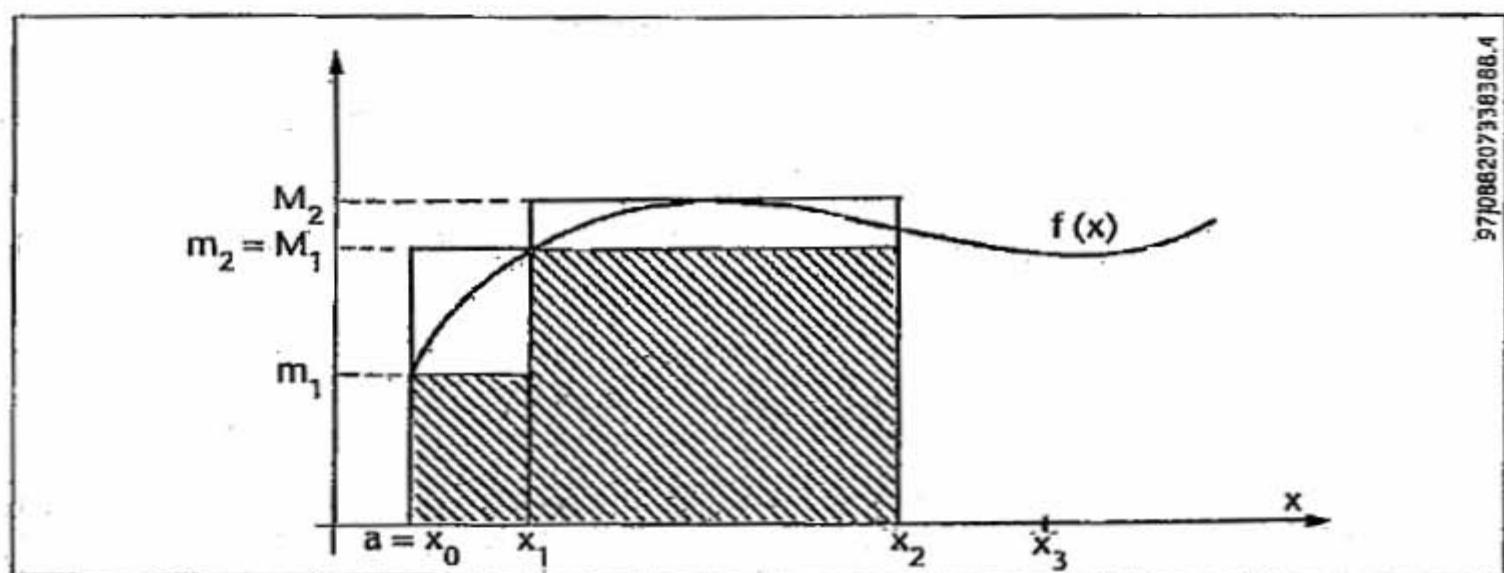


Figura 8.4

Dato che $m_k \leq M_k$ per ogni k , dalla definizione risulta che

$$(62.6) \quad s(P) \leq S(P), \quad \forall P.$$

Più in generale, vale il seguente lemma, nel quale indichiamo con

$$(62.7) \quad R = P \cup Q$$

la partizione di $[a, b]$ che si ottiene prendendo contemporaneamente i punti di P e i punti di Q .

LEMMA. — *Per ogni coppia di partizioni P, Q di $[a, b]$, se $R = P \cup Q$ si ha*

$$(62.8) \quad s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q).$$

Dimostrazione: cominciamo col confrontare fra loro le somme integrali inferiori $s(P)$ e $s(R)$. Supponiamo, per semplicità che R contenga un solo punto \bar{x} in più di P e siano x_{k-1}, x_k due punti consecutivi della partizione P tali che $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Poniamo

$$(62.9) \quad \bar{m}_1 = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\};$$

$$(62.10) \quad \bar{m}_2 = \inf \{f(x) : x \in [\bar{x}, x_k]\}.$$

Le somme inferiori $s(R)$ e $s(P)$ differiscono per pochi termini; precisamente:

$$(62.11) \quad \begin{aligned} s(R) - s(P) &= \\ &= [\bar{m}_1 (\bar{x} - x_{k-1}) + \bar{m}_2 (x_k - \bar{x})] - m_k (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Essendo $\bar{m}_1 \geq m_k$, $\bar{m}_2 \geq m_k$, in quanto l'insieme dei valori $f(x)$ per $x \in [x_{k-1}, x_k]$ contiene sia l'insieme delle $f(x)$ per $x \in [x_{k-1}, \bar{x}]$, sia l'insieme delle $f(x)$ per $x \in [\bar{x}, x_k]$, otteniamo:

$$(62.12) \quad s(R) - s(P) \geq m_k (\bar{x} - x_{k-1} + x_k - \bar{x} - x_k + x_{k-1}) = 0.$$

Si procede in modo analogo se la partizione R contiene più di un punto rispetto alla partizione P . Quindi

$$(62.13) \quad s(P) \leq s(R).$$

Analogamente si dimostra che

$$(62.14) \quad S(R) \leq S(Q).$$

Da tali relazioni e dalla (62.6) si ricava

$$(62.15) \quad s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q).$$

Indichiamo ora con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori $s(P)$ al variare delle partizioni P dell'intervallo $[a, b]$ e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$(62.16) \quad A = \{s(P)\}; \quad B = \{S(P)\}.$$

Dal lemma precedente segue che i due insiemi A e B sono *separati*, cioè $a \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Dall'assioma (2.11) di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore o uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B .

In generale non vi sarà un unico elemento di separazione tra A e B ; si dà in proposito la seguente importante

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO. — *Se vi è un unico elemento di separazione c tra A e B, allora si dice che f(x) è integrabile in [a, b] (secondo Riemann) e l'elemento c si indica con il simbolo*

$$(62.17) \quad \int_a^b f(x) \, dx$$

e si chiama integrale definito di f in [a, b]:

In altre parole, posto

$$(62.18) \quad s(f) = \sup \{s(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\},$$

$$(62.19) \quad S(f) = \inf \{S(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\},$$

se risulta $s(f) = S(f)$, allora $f(x)$ è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$ e

$$(62.20) \quad c = s(f) = S(f) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Come già detto, si dice che l'integrale in (62.17) è un *integrale definito*, per distinguerlo dagli *integrali indefiniti* che verranno presi in considerazione nel capitolo successivo, in cui *non* sono fissati gli estremi di integrazione a, b .

Dalla definizione di integrale segue banalmente che, se $f(x)$ è una funzione costante con $f(x) = m$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$(62.21) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b m \, dx = m(b - a).$$

Dalle proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore si ricava poi il seguente:

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI INTEGRABILI. — *Una funzione f limitata in [a, b] è ivi integrabile (secondo Riemann) se e solo se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione P di [a, b] tale che*

$$(62.22) \quad S(P) - s(P) < \epsilon.$$

Dimostrazione: se f è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$ allora $s(f) = S(f)$, dove $s(f)$ e $S(f)$ sono rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore definiti in (62.18), (62.19). In base alle definizioni di estremo superiore ed inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono partizioni P, Q dell'intervallo $[a, b]$ tali che

$$(62.23) \quad s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P),$$

$$(62.24) \quad S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(Q),$$

Posto $R = P \cup Q$, dalla (62.8) si deduce che

$$(62.25) \quad s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui, essendo $s(f) = S(f)$,

$$(62.26) \quad S(R) - s(R) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(s(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon$$

Viceversa, se vale la (62.22), essendo $s(P) \leq s(f)$, $S(f) \leq S(P)$, otteniamo

$$(62.27) \quad 0 \leq S(f) - s(f) \leq S(P) - s(P) < \varepsilon.$$

Dato che il numero $S(f) - s(f)$ non dipende da ε , la (62.27) può valere per ogni $\varepsilon > 0$ solo nel caso in cui $S(f) - s(f) = 0$, cioè quando f è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$.

L'integrale definito di una funzione ha un notevole significato geometrico. Ad esempio, se $f(x)$ è una funzione non negativa, integrabile nell'intervallo chiuso $[a, b]$, qualunque sia la partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$, la somma $s(P)$ rappresenta l'area di un *plurirettangolo* (cioè di una unione di rettangoli) *contenuto* nell'insieme

$$(62.28) \quad S = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbf{R}: 0 \leq y \leq f(x)\},$$

mentre la somma $S(P)$ rappresenta l'area di un plurirettangolo *contenente* S (si veda anche la precedente figura 8.4). L'insieme S prende il nome di *rettangoloide* di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$.

Il teorema precedente afferma allora che, nelle nostre ipotesi, si possono trovare un plurirettangolo contenente S ed uno contenuto in S le cui aree differiscono per meno di ε . Dunque è ragionevole attribuire a S un'area uguale all'elemento di separazione tra le aree dei plurirettangoli «inscritti» e quelle dei plurirettangoli «circoscritti». In altre parole, pos-

siamo affermare che, se $f(x)$ è non negativa e integrabile, l'area del rettangoloide di base $[a, b]$ è uguale all'integrale (62.17).

Concludiamo il paragrafo con alcune notazioni e definizioni, utili per il seguito. Nell'espressione (62.17) i numeri a, b si dicono *estremi di integrazione*, la funzione f si dice *funzione integranda*, la variabile x si dice *variabile di integrazione*.

Si noti che il risultato dell'integrazione non dipende da x , cioè non è una funzione (non costante) di x , ma è semplicemente un numero reale.

È utile considerare l'integrale definito (62.17) anche se il primo estremo di integrazione non è minore del secondo. Poniamo:

$$(62.29) \quad \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad (a > b);$$

$$(62.30) \quad \int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

63. Proprietà degli integrali definiti

Esaminiamo alcune semplici proprietà dell'integrale definito di una funzione integrabile secondo Riemann in un intervallo chiuso e limitato. Cominciamo con una proprietà che ha un chiaro significato geometrico

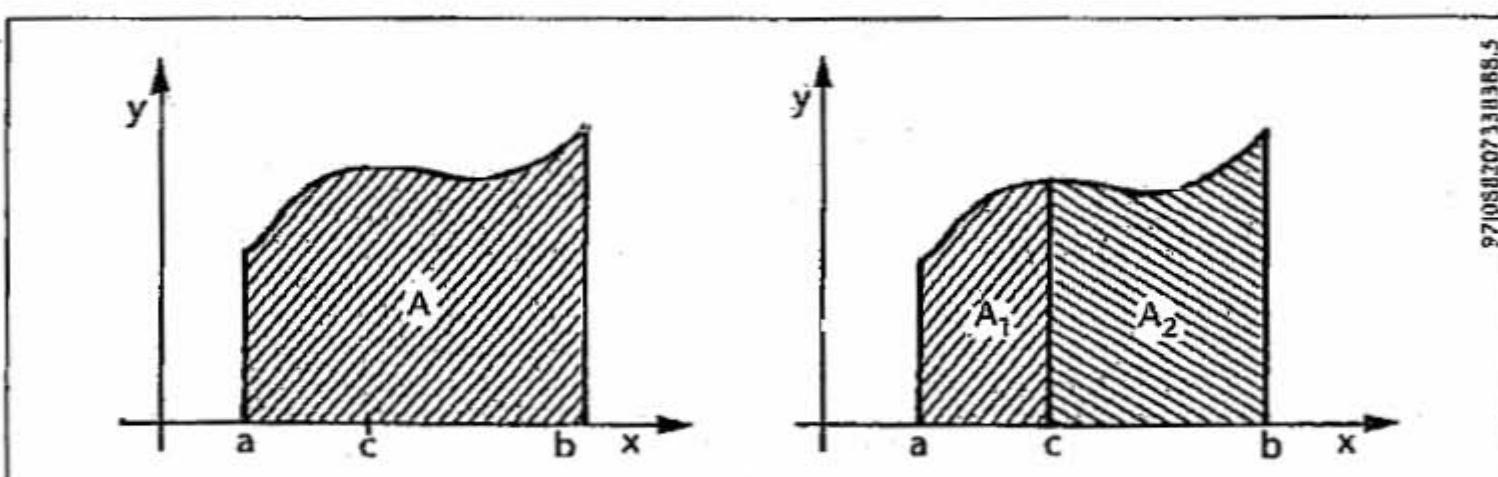


Figura 8.5

quando si interpretano gli integrali definiti di funzioni positive come aree di certe regioni piane. In tale contesto la *proprietà di additività* corrisponde al fatto che l'area della unione di due regioni piane prive di punti in comune è uguale alla somma delle due aree.

Infatti, con riferimento alla figura 8.5, se $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$ la formula (63.1) corrisponde ad affermare che l'area dell'insieme A è uguale alla somma delle aree degli insiemi A_1 e A_2 . Il lettore esamini il caso con $f(x)$ di segno indefinito.

ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO ALL'INTERVALLO. — Se a, b, c sono tre punti di un intervallo dove la funzione $f(x)$ è integrabile, allora

$$(63.1) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Dimostrazione: se due, tra i tre punti a, b, c , coincidono fra loro, allora la tesi (63.1) segue dalle definizioni (62.29), (62.30). Altrimenti, consideriamo preliminarmente il caso in cui c sia un punto interno all'intervallo $[a, b]$. Se P_1, P_2 sono partizioni rispettivamente degli intervalli $[a, c], [c, b]$, allora $P = P_1 \cup P_2$ è una partizione dell'intervallo $[a, b]$ e risulta:

$$(63.2) \quad s(P) = s(P_1) + s(P_2); \quad S(P) = S(P_1) + S(P_2).$$

Da ciò segue facilmente la tesi. I casi rimanenti (ad esempio con b interno all'intervallo $[a, c]$, ecc) si riconducono al caso già trattato, tramite la (62.29).

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE. — Se f, g sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e se c è un numero reale, anche $f + g$ e $c \cdot f$ sono integrabili in $[a, b]$ e risulta

$$(63.3) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$(63.4) \quad \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Dimostrazione: dato che f, g sono funzioni integrabili secondo Riemann in $[a, b]$, per ogni $\epsilon > 0$ esistono P e Q partizioni di $[a, b]$ tali che

$$(63.5) \quad S(P, f) - s(P, f) < \epsilon/2, \quad S(Q, g) - s(Q, g) < \epsilon/2.$$

Indichiamo con R la partizione generata da P e Q , cioè $R = P \cup Q$. Come nel lemma del paragrafo 62 (si veda in particolare la (62.8)) otteniamo

$$(63.6) \quad S(R, f) - s(R, f) < \epsilon/2, \quad S(R, g) - s(R, g) < \epsilon/2.$$

D'altra parte è immediato verificare che

$$(63.7) \quad s(R, f) + s(R, g) \leq s(R, f+g) \leq S(R, f+g) \leq S(R, f) + S(R, g)$$

quindi, per la definizione di integrale relativo alla funzione $f+g$,

$$(63.8) \quad s(R, f) + s(R, g) \leq \int_a^b [f(x) + g(x)] dx \leq S(R, f) + S(R, g).$$

Poiché è anche

$$(63.9) \quad \begin{aligned} s(R, f) + s(R, g) &\leq \int_a^b f(x) dx + \\ &+ \int_a^b g(x) dx \leq S(R, f) + S(R, g), \end{aligned}$$

dalle (63.5), (63.8), (63.9) segue

$$(63.10) \quad \left| \int_a^b [f(x) + g(x)] dx - \left[\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right] \right| < \varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε , l'asserto (63.3).

La (63.4) si prova in modo analogo.

Dalla definizione di integrale segue facilmente anche la seguente proprietà:

CONFRONTO TRA INTEGRALI. — Se f, g sono funzioni integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$(63.11) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Dato che l'integrale definito della funzione identicamente nulla è zero, dalla proprietà precedente si deduce che:

$$(63.12) \quad f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b).$$

Infine, utilizzando le disuguaglianze

$$(63.13) \quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a, b],$$

ancora dalla proprietà di confronto (63.11) e dalla (63.4) con $c = -1$, si deduce

$$(63.14) \quad - \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

che, in base alla equivalenza (8.11) relativa al valore assoluto, si scrive anche nella forma:

$$(63.15) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$$

64. Il teorema della media

Nella dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale (proposto nel paragrafo 67) faremo uso del risultato che segue.

TEOREMA DELLA MEDIA. — *Sia f è una funzione continua in $[a, b]$. Esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che*

$$(64.1) \quad \int_a^b f(x) dx = f(x_0) \cdot (b - a).$$

Dimostrazione: l'integrale definito è l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori $s(P)$ e delle somme integrali superiori $S(P)$; perciò, qualunque sia la partizione P dell'intervallo $[a, b]$, risulta

$$(64.2) \quad s(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(P).$$

Scegliendo la partizione banale di $[a, b]$, costituita dai soli punti a, b ($P = [a, b]$), otteniamo

$$(64.3) \quad s(P) = m \cdot (b - a), \quad S(P) = M \cdot (b - a),$$

dove m, M rappresentano rispettivamente il *minimo* ed il *massimo* della funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, certamente esistenti in base al teorema di Weierstrass (paragrafi 35 e 37).

Sostituendo le (64.3) nella (64.2) otteniamo

$$(64.4) \quad m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

e dividendo tutti i membri per la quantità positiva $(b - a)$ (che non cambia il verso delle diseguaglianze)

$$(64.5) \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Indichiamo con $y_m \in \mathbb{R}$ il valore

$$(64.6) \quad y_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

che quindi, per la (64.5), è un valore compreso fra il minimo m ed il massimo M di $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$. In base al secondo teorema di esistenza dei valori intermedi (paragrafo 35); esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = y_m$; ricordando la definizione (64.6) di y_m , ciò significa

$$(64.7) \quad f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

che equivale alla tesi (64.1).

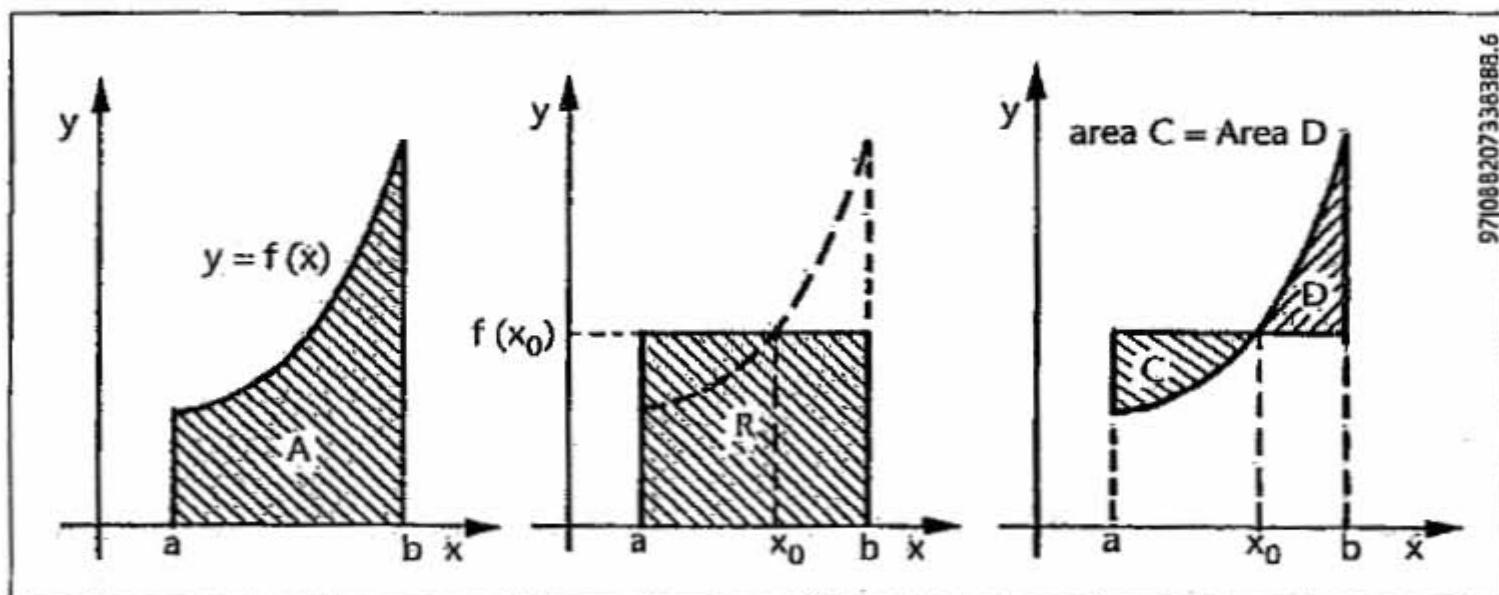


Figura 8.6

Con riferimento alla figura 8.6, dove è rappresentato il grafico di una funzione $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$, il (secondo) teorema della media afferma che l'area del rettangoloide A relativo alla

funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ è uguale all'area di un rettangolo R che ha per base l'intervallo $[a, b]$ e per altezza un valore opportuno $f(x_0)$ (cioè un valore non scelto a caso, ma determinato in base alla particolare funzione considerata).

Appendice al capitolo 8

65. Uniforme continuità. Teorema di Cantor. Funzioni lipschitziane.

Allo scopo di dimostrare che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato risulta integrabile secondo Riemann in tale insieme, introduciamo in questo paragrafo il concetto di *uniforme continuità*.

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I di \mathbf{R} . Allora, per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che, se $x \in I$ e $|x - x_0| < \delta$, risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tale numero δ dipende, in generale, sia da ε che da x_0 .

Ad esempio, sia $f(x) = x^2$ per $x \in I = \mathbf{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, supponiamo che esista $\delta > 0$, dipendente solo da ε e non da x_0 , tale che

$$(65.1) \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

Posto $x = x_0 + h$, pur di prendere $|h| < \delta$, si ha

$$(65.2) \quad |(x_0 + h)^2 - x_0^2| = |2x_0 h + h^2| < \varepsilon, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}.$$

Ma ciò è assurdo in quanto, per ogni $h \neq 0$, risulta

$$(65.3) \quad \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} |2x_0 h + h^2| = +\infty.$$

È opportuno introdurre la seguente

DEFINIZIONE DI FUNZIONE UNIFORMEMENTE CONTINUA. — Si dice che $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ è uniformemente continua nell'intervallo I di \mathbf{R} se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, per ogni $x, x' \in I$,

$$(65.4) \quad |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Riprendendo l'esempio precedente, la funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su tutto \mathbf{R} ; invece, essendo continua in \mathbf{R} , è anche uniformemente continua in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbf{R}$, grazie al seguente teorema di Cantor.

TEOREMA DI CANTOR. — *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b]. Allora f è uniformemente continua in [a, b].*

Dimostrazione: procediamo per assurdo. A tale scopo ricordiamo in simboli, per comodità del lettore, la definizione (da negare) di continuità uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \Rightarrow$$

$$(65.5) \quad \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Negare la (65.5) equivale ad affermare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, qualunque sia $\delta > 0$, esistono in corrispondenza x, x' (dipendenti da δ) con le proprietà

$$(65.6) \quad |x - x'| < \delta, \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0;$$

in simboli:

$$(65.7) \quad \exists \varepsilon_0 > 0: \forall \delta > 0, \exists x, x' \in [a, b]: \text{vale (65.6)}.$$

Scegliamo $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, e indichiamo con x_n, x'_n i corrispondenti punti di $[a, b]$ per cui vale la (65.6); abbiamo quindi

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n, x'_n \in [a, b]:$$

$$(65.8) \quad |x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass (paragrafo 27) esiste una successione x_{n_k} , estratta da x_n , convergente verso un punto $x_0 \in [a, b]$; inoltre, essendo

$$(65.9) \quad x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

per il teorema dei carabinieri anche x'_{n_k} converge ad x_0 per $k \rightarrow +\infty$.

Dall'ipotesi di continuità di $f(x)$ segue

$$(65.10) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} [f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

che contrasta con il fatto che

$$(65.11) \quad |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

A conclusione del paragrafo introduciamo una notevole classe di funzioni uniformemente continue.

Si dice che $f(x)$ è una funzione *lipschitziana* nell'intervallo I di \mathbf{R} se esiste una costante $L > 0$ per cui

$$(65.12) \quad |f(x) - f(x')| \leq L |x - x'| \quad \forall x, x' \in I.$$

Una tale funzione è anche uniformemente continua in I , in quanto, fissato $\varepsilon > 0$ e posto $\delta_\varepsilon = \varepsilon/L$, risulta $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ per ogni coppia, x, x' di punti di I tali che $|x - x'| < \delta_\varepsilon$.

La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \in I = [0, 1]$ è uniformemente continua in I per il teorema di Cantor. Essa non è lipschitziana in $(0, 1)$ per il seguente risultato.

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI DERIVABILI E LIPSCHITZIANE. — *Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I . Allora $f(x)$ è lipschitziana in I con costante L , se e solo se $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione: Se $|f'(x)| \leq L$, $\forall x \in I$, applicando il teorema di Lagrange alla funzione f nell'intervallo di estremi $x, x' \in I$, esiste $x_0 \in I$ per cui

$$(65.13) \quad |f(x) - f(x')| = |f'(x_0)| (x - x') \leq L |x - x'|.$$

Viceversa, se f è lipschitziana in I , per $x \in I$ e $x' = x + h \in I$ (con $h \neq 0$) si ha

$$(65.14) \quad |f(x) - f(x + h)| = |f(x + h) - f(x)| \leq L |h|;$$

dividendo ambo i membri per $|h|$ e passando al limite per $h \rightarrow 0$, si ottiene $|f'(x)| \leq L$.

Utilizzando la proposizione precedente si ricava subito che la funzione $f(x) = \sin x$ è lipschitziana in \mathbf{R} , in quanto $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Proponiamo comunque una ulteriore dimostrazione della lipschitzianità di $f(x) = \sin x$. Utilizzando la formula di prostaferesi

$$(65.15) \quad \sin x - \sin x' = 2 \sin \frac{x - x'}{2} \cos \frac{x + x'}{2}$$

dato che $|\sin t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, otteniamo

$$(65.16) \quad |\sin x - \sin x'| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x'}{2} \right| \leq |x - x'|.$$

Per concludere osserviamo che la funzione $f(x) = |x|$ è lipschitziana in \mathbf{R} , ma non verifica le ipotesi della proposizione precedente. Sussiste infatti la diseguaglianza:

$$(65.17) \quad ||x| - |x'|| \leq |x - x'|.$$

66. Integrabilità delle funzioni continue

Dimostriamo il seguente teorema di

INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE. — *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$.*

Dimostrazione: per il teorema di Cantor $f(x)$ è uniformemente continua e perciò, fissato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(66.1) \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

per ogni coppia di punti $x, x' \in [a, b]$ tali che $|x - x'| < \delta$. Se P è una partizione di $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $x_0 = a, x_n = b$, tale che $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ per ogni $k = 1, \dots, n$, allora, posto

$$(66.2) \quad \begin{aligned} m_k &= \inf \{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \\ M_k &= \sup \{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \end{aligned}$$

che sono rispettivamente minimo e massimo, risulta per la (66.1):

$$M_k - m_k < \frac{\epsilon}{b-a}, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

e perciò

$$(66.3) \quad \begin{aligned} S(P) - s(P) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \epsilon, \end{aligned}$$

dal teorema di caratterizzazione del paragrafo 62 segue l'asserto.

INTEGRALI INDEFINITI

67. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Ci proponiamo di mettere in evidenza una importante relazione tra integrali e derivate, che ha notevoli applicazioni in tutto il calcolo integrale.

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Per ogni $x \in [a, b]$ consideriamo l'integrale definito

$$(67.1) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Notiamo che abbiamo rappresentato l'integrale definito usando la variabile di integrazione t , invece che la x , con un puro scambio di simboli. Invece abbiamo denotato con x il secondo estremo di integrazione. Per ogni x è determinato l'integrale definito nell'intervallo $[a, x]$ della funzione f ; pertanto il risultato dell'integrazione risulta una funzione di x . Ciò spiega il simbolo di funzione $F(x)$ a primo membro della (67.1); tale funzione si chiama *funzione integrale*.

Ad esempio, con il calcolo del settore di parabola (si veda la (61.11)) si è ottenuto

$$(67.2) \quad F(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}, \quad \forall x \geq 0.$$

In questo esempio la funzione integrale vale $F(x) = x^3/3$; la sua derivata, uguale a $F'(x) = x^2$, è anche uguale alla funzione integranda $f(t) = t^2$, calcolata per $t = x$.

Tale proprietà vale in generale; infatti, risulta in generale che $F'(x) = f(x)$, secondo il teorema che segue.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE. — *Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. La funzione integrale $F(x)$, definita in (67.1), è derivabile e la derivata vale*

(67.3)

$$F(x) = f(x),$$

$$\forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione: occorre calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione $F(x)$ quando l'incremento tende a zero. Cominciamo con il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}
 \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \\
 (67.4) \quad &= \frac{1}{h} \left[\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \\
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo. Trasformiamo l'ultimo integrale per mezzo del teorema della media applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$: esiste un punto compreso tra x ed $x+h$, che dipende quindi da h , che indichiamo con $x(h)$, tale che

$$(67.5) \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x(h)).$$

Dato che $x(h)$ è compreso tra x ed $x+h$, per $h \rightarrow 0$ risulta:

$$(67.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} x(h) = x.$$

La tesi segue dalla continuità della funzione integranda f ; infatti:

$$(67.7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x(h)) = f(x).$$

68. Primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale

DEFINIZIONE. — Una funzione $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $F(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Ad esempio una primitiva della funzione $f(x) = x$ è $F(x) = x^2/2$. Una primitiva della funzione $f(x) = \sin x$ è $F(x) = -\cos x$.

Tenendo presente la definizione di primitiva, possiamo enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale dicendo che: *se f è una funzione continua in [a, b], allora la funzione integrale F, definita in (67.1), è una primitiva di f.*

È chiaro che, se $F(x)$ è una primitiva di una funzione $f(x)$, anche $G(x) = F(x) + c$, qualunque sia la costante c , è una primitiva di $f(x)$. Come provato nel lemma seguente, vale anche il viceversa, cioè tutte le primitive di f si ottengono nel modo anzidetto. Ciò caratterizza l'insieme delle primitive di una data funzione.

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO. — *Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di una stessa funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$, esiste una costante c tale che*

$$(68.1) \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione: poniamo $H(x) = G(x) - F(x)$; risulta

$$(68.2) \quad H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $H(x)$ nell'intervallo $[a, x]$, con x fissato in $(a, b]$: esiste $x_0 \in (a, x)$ tale che

$$(68.3) \quad H(x) - H(a) = H'(x_0)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0;$$

perciò $H(x) = H(a)$, per ogni $x \in (a, b]$.

Ponendo $c = H(a)$, $H(x)$ risulta costante, uguale a c , per ogni $x \in [a, b]$ (si noti che avremmo potuto equivalentemente dedurre dalla (68.2) che $H(x)$ è una funzione costante in $[a, b]$, utilizzando la caratterizzazione delle funzioni costanti del paragrafo 48).

Quindi, $G(x) = F(x) + H(x) = F(x) + c$, per ogni $x \in [a, b]$.

La formula che segue riconduce il calcolo degli integrali definiti alla ricerca delle primitive delle funzioni continue.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE. — *Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Sia G una primitiva di f. Allora*

$$(68.4) \quad \int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Il simbolo $[G(x)]_a^b$ significa appunto la differenza dei valori della funzione $G(x)$ per $x = b$ e $x = a$.

Per dimostrare la formula fondamentale, consideriamo la funzione integrale (67.1), indicando con t la variabile di integrazione.

La funzione integrale F e la funzione G sono entrambe primitive della funzione f . In base alla caratterizzazione precedente, esiste una costante c tale che

$$(68.5) \quad G(x) = F(x) + c = c + \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Per $x = a$ abbiamo

$$(68.6) \quad G(a) = c + \int_a^a f(t) dt = c$$

e, sostituendo il valore trovato al posto di c nella (68.5),

$$(68.7) \quad G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt,$$

La tesi segue ponendo $x = b$ in (68.7).

Utilizzando la formula fondamentale del calcolo integrale si ritrova immediatamente il risultato (61.11): con i simboli degli integrali definiti, l'area del settore di parabola considerato nel paragrafo 61 è dato da

$$(68.8) \quad \int_0^b x^2 dx .$$

Una primitiva della funzione x^2 è la funzione $G(x) = x^3/3$. Quindi

$$(68.9) \quad \int_0^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^3}{3} .$$

Come ulteriore esempio consideriamo l'integrale definito della funzione $f(x) = \sin x$

nell'intervallo $[0, \pi]$: dato che una primitiva della funzione $\sin x$ è $G(x) = -\cos x$, si ottiene

$$(68.10) \quad \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

69. L'integrale indefinito

Nel paragrafo precedente abbiamo ricondotto il calcolo di un integrale definito alla ricerca delle primitive della funzione integranda. È perciò naturale porre la seguente:

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO. — *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. L'insieme di tutte le primitive di f in $[a, b]$ si chiama integrale indefinito di f e si indica con il simbolo*

$$(69.1) \quad \int f(x) \, dx.$$

In base alla caratterizzazione data nel paragrafo precedente, possiamo affermare che

$$(69.2) \quad \int f(x) \, dx = F(x) + c,$$

dove F è una primitiva di f e c è una costante arbitraria.

Sottolineamo che c'è una sostanziale differenza tra l'integrale definito e quello indefinito, che indichiamo rispettivamente con i simboli

$$(69.3) \quad \int_a^b f(x) \, dx, \quad \int f(x) \, dx;$$

il primo dei due integrali è un numero reale, il secondo integrale è un insieme di funzioni. Il legame tra i due integrali è dato dalla formula fondamentale (68.4).

Ricordando che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate, si ottiene la proprietà corrispondente per gli integrali indefiniti:

$$(69.4) \quad \int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx.$$

Analogamente, ricordando la formula (41.7), che esprime la derivata del prodotto di una costante per una funzione, risulta

$$(69.5) \quad \int c f(x) dx = c \int f(x) dx \quad (c = \text{costante}).$$

Si noti l'analogia delle due proprietà sopra elencate per l'integrale indefinito con le proprietà di linearità (63.3), (63.4) per l'integrale definito.

Riportiamo di seguito una serie di integrali indefiniti immediati. Tali integrali, di facile verifica, sono ottenuti a partire dalle tabelle per le derivate esposte nei paragrafi 43, 45.

$$(69.6) \quad \int x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c, \quad b \neq -1;$$

$$(69.7) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log x + c, \quad x > 0;$$

$$(69.8) \quad \int e^x dx = e^x + c;$$

$$(69.9) \quad \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$(69.10) \quad \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$(69.11) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c;$$

$$(69.12) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + c;$$

$$(69.13) \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c.$$

A proposito dell'integrale (69.7), notiamo che risulta

$$(69.14) \quad D \log |x| = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0;$$

infatti, se $x > 0$ la relazione precedente è ben nota. Invece, se $x < 0$, per la regola di derivazione delle funzioni composte, risulta

$$(69.15) \quad D \log |x| = D \log(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad (x < 0).$$

La (69.14), in termini di integrali indefiniti, è equivalente a

$$(69.16) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c,$$

intendendo che l'integrale in (69.16) è considerato in un intervallo non contenente il punto $x = 0$.

In molte situazioni ci si riconduce ad integrali immediati del tipo sopra indicato, utilizzando la formula di derivazione delle funzioni composte. Così ad esempio la formula (69.6) si generalizza nel modo seguente: si parte dalla formula di derivazione, valida per una funzione $f(x)$ positiva e derivabile

$$(69.17) \quad D \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} = [f(x)]^b \cdot f'(x) \quad (b \neq -1).$$

In corrispondenza si ottiene la formula di integrazione indefinita

$$(69.18) \quad \int [f(x)]^b f'(x) dx = \frac{1}{b+1} [f(x)]^{b+1} + c \quad (b \neq -1).$$

Come esempio consideriamo:

$$(69.19) \quad \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + c;$$

abbiamo calcolato una primitiva dopo aver riconosciuto che a numeratore della funzione integranda c'è, a meno del segno, la derivata del denominatore.

70. Integrazione per decomposizione in somma

In molti casi il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione si può ricondurre al calcolo di integrali già noti, o di tipo più semplice. Un metodo particolarmente frequente consiste nel decomporre la funzione integranda nella somma di due o più funzioni, applicando poi la proprietà di linearità (69.4). Illustriamo ciò con alcuni esempi.

Calcoliamo il seguente integrale indefinito

$$(70.1) \quad \int \frac{x}{x+1} dx ;$$

sommendo e sottraendo 1 al numeratore della funzione integranda otteniamo

$$(70.2) \quad \begin{aligned} \int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\ &= \int 1 dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \log|x+1| + c. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$(70.3) \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx ;$$

ricordando la definizione della funzione tangente, abbiamo

$$(70.4) \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 ;$$

per decomposizione in somma otteniamo

$$(70.5) \quad \begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$(70.6) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} ;$$

anche in questo caso scriviamo il numeratore della funzione integranda in modo che sia possibile scindere la frazione nella somma di due frazioni

$$(70.7) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} ; \end{aligned}$$

integrando entrambi i membri otteniamo

$$(70.8) \quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \\ &= -\log|\cos x| + \log|\operatorname{sen} x| + c. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$(70.9) \quad \int \sin^2 x \, dx ;$$

ricordiamo la formula (10.7) di duplicazione

$$(70.10) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x ,$$

da cui si deduce che $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Otteniamo

$$(70.11) \quad \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c ;$$

nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che $D \sin 2x = 2 \cos 2x$. Se lo si preferisce, si può scrivere il risultato utilizzando la formula di duplicazione (10.6) per la funzione seno, nel modo seguente:

$$(70.12) \quad \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c .$$

Dal risultato ottenuto è facile dedurre il valore dell'integrale

$$(70.13) \quad \begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= x - \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c . \end{aligned}$$

71. Integrazione delle funzioni razionali

È sempre possibile, in linea di principio, calcolare per decomposizione in somma l'integrale indefinito delle *funzioni razionali*, cioè delle funzioni che sono il rapporto di due polinomi $f(x)$, $g(x)$:

$$(71.1) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} , \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Nella (71.1) è rappresentata una funzione razionale ottenuta come rapporto tra un polinomio $f(x)$, di grado m , ed un polinomio $g(x)$, di grado n .

Se $m \geq n$, cioè se il grado del numeratore è maggiore od uguale al grado del denominatore, si esegue la *divisione tra i polinomi* $f(x)$ e $g(x)$. Se indichiamo con $r(x)$, $q(x)$ rispettivamente il *resto* ed il *quoziente* della divisione, possiamo scrivere la scomposizione

$$(71.2) \quad f(x) = g(x) q(x) + r(x) ;$$

cioè: moltiplicando il quoziente $q(x)$ per il divisore $g(x)$, ed aggiungendo il resto, si ottiene il dividendo $f(x)$. La stessa relazione si può scrivere mettendo in luce il rapporto f/g nel modo seguente:

$$(71.3) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} .$$

Ricordiamo che *il resto è un polinomio di grado inferiore al grado n del divisore g(x)*.

Per l'integrale della funzione razionale $f(x)/g(x)$ si ottiene

$$(71.4) \quad \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx .$$

Dato che $q(x)$ è un polinomio, il suo integrale indefinito è immediato. Ci siamo quindi ricondotti a calcolare l'integrale della funzione razionale $r(x)/g(x)$, che ha la proprietà che il grado del polinomio a numeratore è inferiore al grado del polinomio a denominatore.

Prima di proseguire ad integrare $r(x)/g(x)$, ricordiamo con un esempio come si esegue la *divisione tra polinomi*. Consideriamo la funzione razionale

$$(71.5) \quad \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} ;$$

procediamo nella divisione in modo analogo al modo in cui si effettua la divisione tra due numeri naturali, secondo il seguente schema:

$$(71.6) \quad \begin{array}{cccccc|c} x^5 & - 3x^4 & + & 0 \cdot x^3 & + 0 \cdot & x^2 & + & x & + & 3 \\ & \hline & & & & x^2 - 1 & & & & \\ \hline x^5 & & & - x^3 & & & & & & \\ \hline & - 3x^4 & & x^3 & & & & x & + & 3 \\ & \hline & - 3x^4 & & + 3x^2 & & & & & \\ \hline & & x^3 & - & 3x^2 & + & x & + & 3 \\ & \hline & & x^3 & & - & x & & & \\ \hline & & & - 3x^2 & & 2x & + & 3 \\ & \hline & & - 3x^2 & & + & 3 \\ \hline & & & & & 2x & & & \end{array}$$

Il resto $r(x)$ ed il quoziente $q(x)$ valgono rispettivamente: $r(x) = 2x$, $q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$. In questo caso la scomposizione (71.3) corrisponde a

$$(71.7) \quad \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} = x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Ora si ottiene facilmente l'integrale indefinito

$$(71.8) \quad \begin{aligned} \int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} dx &= \int (x^3 - 3x^2 + x - 3) dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log|x^2 - 1| + c. \end{aligned}$$

Ritorniamo al calcolo dell'integrale della funzione razionale $r(x)/g(x)$, dove $r(x)$ è un polinomio di grado inferiore al grado del polinomio $g(x)$. Per semplicità ci limitiamo a considerare il caso in cui $g(x)$ sia un polinomio di secondo grado. In tali condizioni, il grado di $r(x)$ è minore di due. Quindi risulta

$$(71.9) \quad g(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0); \quad r(x) = dx + e.$$

Per calcolare l'integrale indefinito di $r(x)/g(x)$ è opportuno distinguere i tre casi, in cui l'equazione $g(x) = 0$ abbia 2 radici reali distinte, oppure 2 radici coincidenti, oppure nessuna radice reale. Consideriamo tre esempi in cui si verificano queste situazioni.

Il caso $b^2 - 4ac > 0$ si tratta come nell'esempio seguente: dopo aver trovato le radici del denominatore ($x_1 = -1$, $x_2 = 2$), scomponiamo la frazione

$$(71.10) \quad \frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$

con A , B numeri reali da determinare. Sviluppando il secondo membro otteniamo

$$(71.11) \quad \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2 - x - 2};$$

affinché valga l'uguaglianza (71.10) per ogni x , deve risultare

$$(71.12) \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = 7 \end{cases}$$

Si risolve il sistema per sostituzione, oppure sottraendo le due equazioni membro a

scomposizione (71.10), si calcola l'integrale definito

$$(71.13) \quad \int \frac{x+7}{x^2-x-2} dx = \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx = \\ = -2 \log|x+1| + 3 \log|x-2| + c.$$

Il caso $b^2 - 4ac = 0$ si tratta come nell'esempio seguente:

$$(71.14) \quad \frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2};$$

come in precedenza si determinano le costanti A, B in modo che valga l'identità (71.14) per ogni $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq -1$); si calcola il denominatore comune e si trovano le condizioni $A = 1$, $A + B = 0$; cioè $A = 1$, $B = -1$. Risulta in definitiva

$$(71.15) \quad \int \frac{x}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ = \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$$

Infine, se $b^2 - 4ac < 0$, cioè se l'equazione $g(x) = 0$ non ha radici reali, si procede come nell'esempio seguente:

$$(71.16) \quad \frac{1-2x}{x^2+2x+5} = \frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5};$$

L'espressione $(2x+2)$, che compare nella relazione precedente, è stata scelta perché è la derivata del denominatore. Si ricava immediatamente il sistema: $2A = -2$, $2A + B = 1$, cioè $A = -1$, $B = 3$. Quindi

$$(71.17) \quad \int \frac{1-2x}{x^2+2x+5} dx = - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \\ = -\log(x^2+2x+5) + 3 \int \frac{dx}{x^2+2x+5};$$

si noti che $\log(x^2+2x+5) = \log|x^2+2x+5|$, dato che il polinomio di secondo grado è positivo per ogni x.

Scomponiamo l'ultimo integrale nel modo seguente, tenendo conto che x^2 e $2x$ sono due addendi del polinomio $(x+1)^2$

$$(71.18) \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \\ = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{[(x+1)/2]^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c.$$

Indichiamo il metodo seguito per un generico polinomio $g(x)$, con $a > 0$:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\
 (71.19) \quad &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right];
 \end{aligned}$$

infine si mette in evidenza il fattore positivo $(4ac - b^2)/4a^2$.

Diamo ancora un esempio relativo al caso $b^2 - 4ac < 0$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \\
 (71.20) \quad &= \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 1/2)^2 + 3/4} = \\
 &= \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]^2 + 1} = \\
 &= \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{2/\sqrt{3} dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} = \\
 &= \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c.
 \end{aligned}$$

Il metodo descritto si applica anche a funzioni razionali che hanno a denominatore un polinomio di grado superiore a due, purché sia possibile calcolarne esplicitamente le radici, come nell'esempio che segue.

Come in precedenza, si inizia con la divisione tra polinomi:

$$(71.21) \quad \int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx = \int x dx - \int \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2} dx;$$

poi si scomponete l'ultimo integrando

$$(71.22) \quad \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2} = \frac{x^3 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C + Dx}{x^2 + 1};$$

si trova che vale l'identità se $A = C = 1$, $B = -1$, $D = 0$. Quindi

$$(71.23) \quad \int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \log|x| - \frac{1}{x} - \arctg x + c.$$

72. Integrazione per parti

Mentre il metodo di integrazione per decomposizione in somma si basa sulla regola di derivazione della somma di due funzioni, il metodo di integrazione per parti, che stiamo per descrivere, si basa sulla formula di derivazione del prodotto di due funzioni.

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI. — *Se in un intervallo f , g sono due funzioni derivabili con derivata continua, risulta*

$$(72.1) \quad \int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Chiameremo $f(x)$ il *fattore finito*, mentre $g'(x)$ è detto *fattore differenziale*. L'ipotesi che le derivate $f'(x)$, $g'(x)$ siano continue assicura che gli integrali in (72.1) siano ben definiti. Il lettore non confonda tale ipotesi con la condizione, più debole, che $f(x)$, $g(x)$ siano continue.

Per dimostrare la (72.1) partiamo dalla formula di derivazione del prodotto

$$(72.2) \quad [f(x) g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

Calcoliamo gli integrali indefiniti di entrambi i membri ed utilizziamo la proprietà di linearità (69.4)

$$(72.3) \quad \int [f(x) g(x)]' dx = \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx.$$

La tesi (72.1) si ottiene osservando che la funzione $f \cdot g$ è una primitiva della sua derivata $[f \cdot g]'$.

Consideriamo alcuni esempi. Cominciamo con l'integrale indefinito

$$(72.4) \quad \int x \cos x dx;$$

applichiamo la formula (72.1) di integrazione per parti, con $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$, quindi $g(x) = \sin x$ (si noti che, ponendo $g'(x) = \cos x$, potremmo scegliere $g(x) = c + \sin x$, con c costante; verificare per esercizio che il risultato finale non cambia):

$$(72.5) \quad \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = \\ = x \sin x + \cos x + c.$$

Calcoliamo per parti, ponendo $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos x$, l'integrale indefinito

$$(72.6) \quad \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$

integrando di nuovo per parti, scegliendo come fattore finito x e come fattore differenziale $\sin x$, otteniamo

$$(72.7) \quad \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = \\ = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c.$$

Calcoliamo per parti l'integrale seguente, ponendo $f(x) = \log x$, $g'(x) = 1$:

$$(72.8) \quad \int \log x \, dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \\ = x \log x - x + c.$$

Assumendo come fattore finito x e come fattore differenziale e^x , calcoliamo per parti l'integrale

$$(72.9) \quad \int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c.$$

Nell'integrale seguente assumiamo come fattore finito e^x e come fattore differenziale $\sin x$

$$(72.10) \quad \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx;$$

integriamo di nuovo per parti l'ultimo integrale:

$$(72.11) \quad \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx;$$

dalla relazione precedente si può ricavare il valore dell'integrale

$$(72.12) \quad \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

Con lo stesso metodo possiamo calcolare l'integrale

$$(72.13) \quad \begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x \cos x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx; \end{aligned}$$

ricavando dalla relazione precedente il valore dell'integrale, si ritrova il risultato, ottenuto per altra via in (70.13):

$$(72.14) \quad \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) + c.$$

Chiudiamo il paragrafo scrivendo esplicitamente la *regola di integrazione per parti per gli integrali definiti*. Tenendo conto della relazione tra gli integrali indefiniti e gli integrali definiti espressa dalla formula fondamentale (68.4), otteniamo dalla (72.1):

$$(72.15) \quad \int_a^b f(x) g'(x) \, dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx.$$

73. Integrazione per sostituzione

Abbiamo visto che il metodo di integrazione per decomposizione in somma si basa sulla regola di derivazione di una somma ed il metodo di integrazione per parti si basa sulla formula di derivazione di un prodotto. Il metodo di integrazione per sostituzione, che descriviamo in questo paragrafo, si basa sulla formula di derivazione delle funzioni composte.

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE. — *Sia f una funzione continua e g una funzione derivabile con derivata continua. Risulta*

$$(73.1) \quad \left[\int f(x) \, dx \right]_{x=g(t)} = \int f(g(t)) g'(t) \, dt.$$

Osserviamo che la formula di integrazione per sostituzione (73.1) non richiede, per la sua validità, che $g(t)$ sia una funzione invertibile; naturalmente il risultato dell'integrazione indefinita è espresso in funzione di t , mediante la posizione $x = g(t)$, con x che varia nel codominio della funzione g . Per poter esprimere il risultato in funzione di x , occorre supporre che $g(t)$ sia una funzione invertibile; in tal caso si ottiene il risultato finale, in funzione di x , con l'ulteriore sostituzione $t = g^{-1}(x)$. Notiamo però che, per il calcolo di un integrale definito, può non essere necessario invertire $g(t)$, come mostrato nella successiva formula (73.14).

Il simbolo a primo membro della (73.1) significa, indicando con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, che

$$(73.2) \quad \int f(x) dx = F(x) + c; \quad \left[\int f(x) dx \right]_{x=g(t)} = F(g(t)) + c.$$

La dimostrazione della (73.1) consiste nell'osservare che

$$(73.3) \quad F(g(t)) + c = \int f(g(t)) g'(t) dt;$$

ciò è conseguenza del teorema di derivazione delle funzioni composte. Infatti, dato che

$$(73.4) \quad \frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t),$$

abbiamo verificato che $F(g(t))$ è una primitiva di $f(g(t))g'(t)$, cioè abbiamo verificato la tesi (73.3).

Se $x = g(t)$, la quantità $g'(t) \cdot dt$ (che è una funzione delle due variabili t , dt) si chiama il differenziale della funzione $g(t)$, e si indica con il simbolo dx . Perciò, il *differenziale* della funzione derivabile $x = g(t)$ è, per definizione, dato da

$$(73.5) \quad dx = g'(t) dt;$$

tale definizione è motivata dalla formula (73.1) di integrazione per sostituzione; infatti, in (73.1) x si trasforma in $g(t)$, mentre il differenziale dx si trasforma secondo la (73.5).

Consideriamo alcuni esempi, cominciando con l'integrale

$$(73.6) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx;$$

è naturale porre $x = t^2$. In base alla formula (73.1), con $x = g(t) = t^2$, otteniamo, per $t \geq 0$

$$(73.7) \quad \begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}-3} dx &= \int \frac{2t}{t-3} dt = && (x = t^2) \\ &= 2 \left[\int \frac{t-3}{t-3} dt + \int \frac{3}{t-3} dt \right] = \\ &= 2t + 6 \log |t-3| + c ; \end{aligned}$$

volendo scrivere il risultato finale in funzione di x , si sostituisce $t = \sqrt{x}$, ottenendo:

$$(73.8) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}-3} dx = 2\sqrt{x} + 6 \log |\sqrt{x}-3| + c.$$

Con la sostituzione $2x - 1 = t^2$, cioè $x = g(t) = (t^2 + 1)/2$, calcoliamo l'integrale, per $t \geq 0$

$$(73.9) \quad \begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt{2x-1}}{x - \sqrt{2x-1}} dx &= && \left(x = \frac{t^2 + 1}{2} \right) \\ &= \int \frac{(t^2 + 1)/2 + t}{(t^2 + 1)/2 - t} t dt = \int \frac{t^3 + 2t^2 + t}{t^2 - 2t + 1} dt ; \end{aligned}$$

abbiamo ottenuto l'integrale di una funzione razionale, che possiamo risolvere con il metodo indicato nel paragrafo 71. Notiamo che il denominatore ha due radici concidenti e che, eseguendo i conti, si ottiene la scomposizione:

$$(73.10) \quad \begin{aligned} \frac{t^3 + 2t^2 + t}{t^2 - 2t + 1} &= t + 4 + \frac{8t - 4}{t^2 - 2t + 1} = \\ &= t + 4 + 4 \left(\frac{2}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right); \end{aligned}$$

quindi ($x = (t^2 + 1)/2$):

$$(73.11) \quad \int \frac{x + \sqrt{2x-1}}{x - \sqrt{2x-1}} dx = \frac{t^2}{2} + 4t + 8 \log |t-1| - \frac{4}{t-1} + c ;$$

è facile scrivere il risultato finale in funzione di x , tenendo presente che $t = \sqrt{2x-1}$.

Con la sostituzione $x = \sin t$, calcoliamo l'integrale (ci limitiamo ai valori di t per cui $\cos t \geq 0$)

$$(73.12) \quad \begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \quad (x = \sin t) \\ &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) + c; \end{aligned}$$

L'ultimo integrale era stato calcolato in (70.13) (ed anche in (72.14)).

Per finire, scriviamo esplicitamente la formula di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti. Consideriamo l'integrale di una funzione f esteso ad un intervallo $[a, b]$, ed effettuiamo la sostituzione $x = g(t)$. Supponiamo che ad $x = a$, $x = b$ corrispondano tramite la funzione g i valori $t = c$, $t = d$; cioè supponiamo che risulti:

$$(73.13) \quad g(c) = a, \quad g(d) = b.$$

In tali condizioni deduciamo immediatamente la *regola di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti*:

$$(73.14) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt.$$

Ad esempio, consideriamo l'integrale definito, corrispondente all'integrale indefinito (73.12),

$$(73.15) \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Abbiamo verificato che è utile effettuare la sostituzione $x = \sin t$. Dato che risulta

$$(73.16) \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

applicando la formula (73.14) e ricordando il risultato dell'integrale indefinito (72.14), otteniamo

$$(73.17) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \left[\frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

74. Calcolo di aree di figure piane

Abbiamo introdotto l'integrale definito con lo scopo principale di calcolare aree di figure piane del tipo

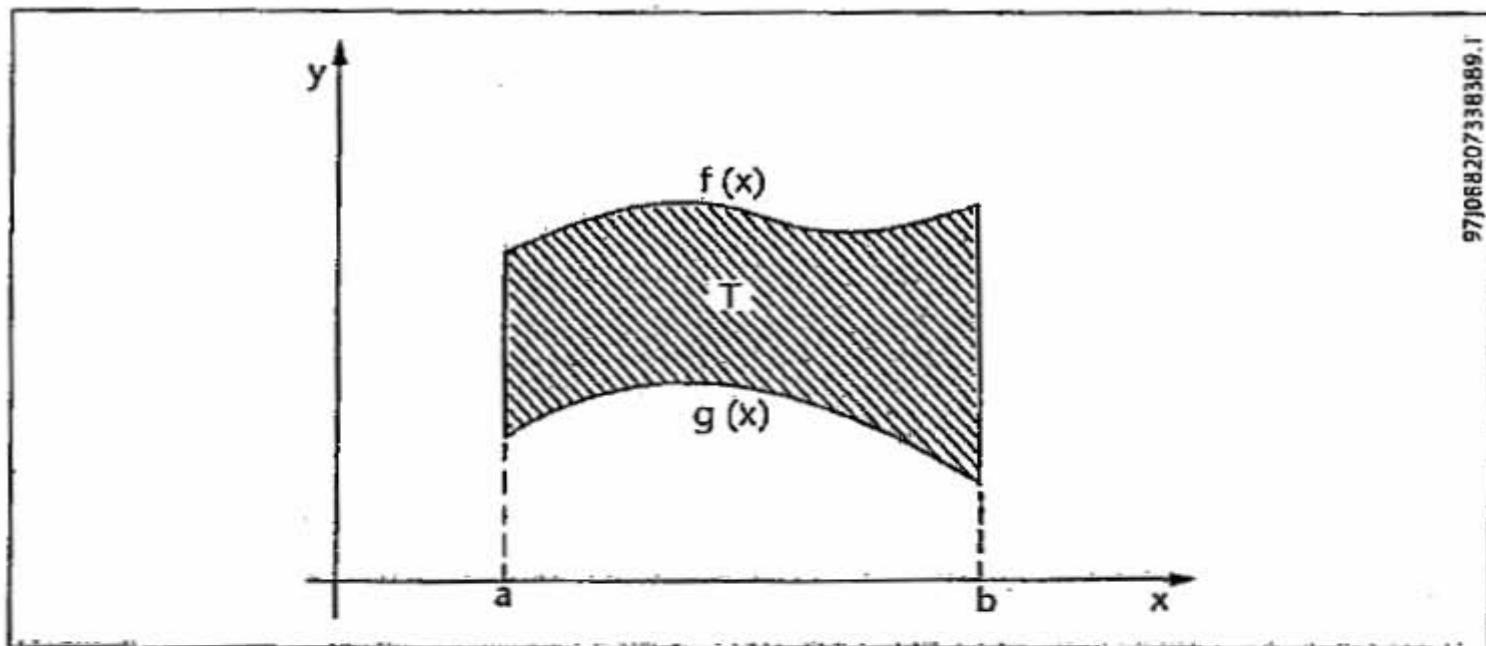
$$(74.1) \quad A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

dove $f(x)$ è una funzione continua e non negativa nell'intervallo $[a, b]$. In tal caso risulta

$$(74.2) \quad \text{area di } A = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Più generalmente possiamo calcolare l'area di una regione T , come in figura 9.1, definita per mezzo di due funzioni continue $f(x)$, $g(x)$, dalle limitazioni seguenti

$$(74.3) \quad T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$



97/0688207338389.1

Figura 9.1

In tal caso l'area della regione T si calcola per sottrazione degli integrali definiti relativi rispettivamente ad f , g : cioè

$$(74.4) \quad \text{area di } T = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx.$$

Come applicazione, calcoliamo l'area di un *cerchio* di raggio r . Il cerchio C di centro

l'origine e raggio r è individuato dalle limitazioni

$$(74.5) \quad C = \{(x, y) : -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}.$$

La situazione è quella descritta in (74.3), con $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. In conformità con la formula (74.4), l'area del cerchio è data da

$$(74.6) \quad \begin{aligned} \text{area di } C &= \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})] dx = \\ &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Anche l'ultimo membro della relazione precedente ha un chiaro significato geometrico. Infatti, in base alla (74.2), rappresenta il doppio dell'area del semicerchio al di sopra dell'asse delle x .

Effettuiamo la sostituzione $x = rt$. Utilizzando la formula (73.14) con $x = g(t) = rt$, si ottiene

$$(74.7) \quad \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - r^2 t^2} r dt = r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt$$

e l'ultimo integrale, calcolato in (73.17), è uguale in $\pi/2$.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che l'area di un cerchio di raggio r vale

$$(74.8) \quad \text{area di } C = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi r^2.$$

Il lettore osservi che abbiamo già calcolato l'area del cerchio alla fine del paragrafo 23.

Possiamo calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse di equazione

$$(74.9) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

la regione E di cui vogliamo calcolare l'area è quindi definita dalle limitazioni

$$(74.10) \quad E = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\};$$

con lo stesso procedimento usato in precedenza per il cerchio, otteniamo che l'area dell'ellisse vale

$$(74.11) \quad \text{area di } E = \int_{-a}^a 2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2 ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \pi ab.$$

Appendice al capitolo 9

75. Integrali impropri

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato l'integrale definito di una funzione limitata in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Nelle applicazioni è utile considerare anche integrali come i seguenti:

$$(75.1) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx; \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Tali integrali non rientrano nei casi già trattati; infatti nel primo caso l'integrale è esteso ad un intervallo illimitato; nel secondo caso la funzione integranda non è limitata per $x \rightarrow 0^+$. Integrali come quelli in (75.1) prendono il nome di *integrali impropri*.

Per definire il valore degli integrali impropri, consideriamo funzioni che, oltre ad essere *continue* all'interno dell'intervallo preso in considerazione, sono anche *non negative*. Consideriamo preliminarmente l'integrale improprio esteso ad un intervallo illimitato $[a, +\infty)$; diamo la seguente definizione:

$$(75.2) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

La definizione è ben posta, perché è possibile provare che *esiste il limite a secondo membro*; a tale scopo consideriamo la funzione integrale

$$(75.3) \quad F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

e notiamo che, come al solito, F è funzione dell'estremo di integrazione b . La derivata di F rispetto alla variabile b è nota in base al teorema fondamentale del calcolo integrale: $F' = f$. Dato che $f \geq 0$, anche $F' \geq 0$; perciò F , essendo una funzione crescente, ammette limite per $b \rightarrow +\infty$. È dunque lecito definire, come in (75.2)

$$(75.4) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b).$$

L'integrale improprio è detto *convergente* se il limite è finito, è detto *divergente* se il limite è $+\infty$.

Riprendendo il primo integrale in (75.1), risulta

$$(75.5) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \\ = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Più generalmente, per ogni $p \neq 1$, possiamo considerare l'integrale:

$$(75.6) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \\ = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right).$$

L'integrale improprio converge o diverge a seconda che l'esponente p sia maggiore o minore di 1; infatti:

$$(75.7) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{se } p > 1 \\ +\infty & \text{se } p < 1 \end{cases}$$

In modo analogo si definisce l'integrale improprio di una funzione *continua e non negativa* in un intervallo illimitato del tipo $(-\infty, a]$, oppure $(-\infty, +\infty)$. Ad esempio:

$$(75.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx .$$

Non sempre è possibile calcolare esplicitamente una primitiva di una data funzione. In tal caso può essere utile il seguente criterio per stabilire se un integrale improprio su un intervallo illimitato è convergente.

CRITERIO DEL CONFRONTO. — Supponiamo che nell'intervallo $[a, +\infty)$ risulti $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Se l'integrale improprio relativo alla funzione g nell'intervallo $[a, +\infty)$ è convergente, allora anche l'integrale improprio relativo alla funzione f in $[a, +\infty)$ è convergente. Se invece l'integrale relativo ad f è divergente, anche l'integrale relativo a g è divergente.

Dimostrazione: per la proprietà di confronto (63.11) risulta

$$(75.9) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Calcoliamo il limite per $b \rightarrow +\infty$. Esiste il limite di entrambi i membri. Se il limite a secondo membro è finito, anche il limite a primo membro deve risultare finito. Se invece il limite del primo membro è infinito, anche il limite del secondo membro deve essere uguale a $+\infty$.

Ad esempio, verifichiamo che il seguente integrale improprio è convergente:

$$(75.10) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty.$$

Naturalmente l'integrale (75.10) è convergente se e soltanto se è convergente l'analogo integrale esteso all'intervallo $[1, +\infty)$, invece che $[0, +\infty)$; infatti i due integrali differiscono fra loro dell'integrale definito su $[0, 1]$ dalla funzione data. Per $x \in [1, +\infty)$ risulta $1 \leq x$, e quindi

$$(75.11) \quad f(x) = e^{-x^2} \leq e^{-x^2} x = g(x), \quad \forall x \in [1, +\infty).$$

La funzione a destra ha il vantaggio di avere una primitiva facilmente calcolabile; risulta

$$(75.12) \quad \begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-x^2} x dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x^2} x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} e^{-1} \right) = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

Perciò l'integrale improprio relativo alla funzione $g(x)$ nell'intervallo $[1, +\infty)$ è convergente. Per il criterio del confronto anche l'integrale improprio della funzione $f(x)$ è convergente; cioè vale la (75.10).

In modo analogo si procede per l'integrale improprio, esteso ad un intervallo $[a, b]$, di una funzione che non è continua ad un estremo di integrazione, ad esempio all'estremo a . Supponiamo che f sia una funzione continua e non negativa nell'intervallo $(a, b]$; definiamo:

$$(75.13) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{a+h}^b f(x) dx.$$

Come in precedenza si verifica che l'integrale definito a secondo membro è monotono rispetto ad h , quindi esiste il limite per $h \rightarrow 0^+$. Se il limite è finito, l'integrale improprio (75.13) si dice *convergente*, altrimenti si dice *divergente*.

Lasciamo al lettore la cura di formulare un criterio di confronto per questo tipo di integrali impropri.

A titolo di esempio, calcoliamo per ogni $p \neq 1$, l'integrale improprio

$$(75.14) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^1 x^{-p} dx = \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_h^1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{h^{1-p}}{1-p} \right).$$

L'integrale improprio converge o diverge a seconda che p sia minore o maggiore di 1; infatti:

$$(75.15) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} 1/(1-p) & \text{se } p < 1 \\ +\infty & \text{se } p > 1 \end{cases}.$$

In particolare il secondo integrale dell'esempio iniziale (75.1) è convergente e si ottiene dal conto precedente per $p = 1/2$:

$$(75.16) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

76. Definizione di logaritmo, esponenziale, potenza

Abbiamo introdotto le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo nel paragrafo 9 a partire dalla espressione a^b , con a, b numeri reali ($a > 0$). Ci siamo basati preliminarmente sulla idea intuitiva di elevazione ad esponente reale ed abbiamo dato un significato rigoroso alla espressione a^b nel paragrafo 12 per mezzo di un *lemma di densità* del codominio della funzione esponenziale. In questa sede seguiremo un approccio diverso, basato sul concetto di integrale definito.

In questo paragrafo ci proponiamo infatti di definire la *funzione logaritmo* per mezzo di una opportuna *funzione integrale* e da questa dedurre le definizioni della *funzione esponenziale* e della *funzione potenza*. Naturalmente supponiamo validi gli assiomi dei numeri reali; in particolare sono definiti il prodotto ed il quoziente tra numeri reali e la elevazione ad

esponente naturale a^n , come prodotto del numero a per se stesso n volte. Oltre a ciò, utilizziamo i risultati dimostrati senza far uso delle tre funzioni che intendiamo definire.

La funzione $1/t$ è continua e decrescente per $t > 0$; a partire da essa consideriamo per $x > 0$ la funzione integrale

$$(76.1) \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x > 0)$$

In base al teorema fondamentale del calcolo integrale, $F(x)$ è derivabile per $x > 0$ e la sua derivata vale $1/x$. In particolare $F(x)$ è una funzione continua.

Fissati due numeri positivi x_1, x_2 , calcoliamo la funzione F nel prodotto $x_1 x_2$

$$(76.2) \quad F(x_1 x_2) = \int_1^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{dt}{t}.$$

Nell'ultimo integrale effettuiamo la sostituzione $t = g(s) = x_1 s$. Risulta $g'(s) = x_1$. Inoltre, se $s \in [1, x_2]$, allora $t \in [x_1, x_1 x_2]$. In base alla formula (73.14) di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti, otteniamo

$$(76.3) \quad \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_2} \frac{x_1 ds}{x_1 s} = \int_1^{x_2} \frac{ds}{s} = F(x_2).$$

In definitiva, con le (76.2), (76.3) abbiamo provato che

$$(76.4) \quad F(x_1 x_2) = F(x_1) + F(x_2), \quad \forall x_1, x_2 > 0.$$

In particolare, per $x_1 = x_2 = x$, risulta $F(x^2) = 2F(x)$ e più generalmente

$$(76.5) \quad F(x^n) = nF(x), \quad \forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dalla stessa definizione segue che $F(1) = 0$. Verifichiamo ora che $F(e) = 1$, con e numero di Nepero definito nel paragrafo 25 come risultato del limite

$$(76.6) \quad e = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Per la proprietà (76.5) e dato che $F(1) = 0$, abbiamo

$$(76.7) \quad \begin{aligned} F(x_n) &= nF\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \left[F\left(1 + \frac{1}{n}\right) - F(1) \right] = \\ &= \frac{F(1 + 1/n) - F(1)}{1/n}; \end{aligned}$$

nell'ultimo membro compare il rapporto incrementale della funzione F nel punto $x = 1$, con incremento $h = 1/n$. Per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$(76.8) \quad F(e) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(1 + 1/n) - F(1)}{1/n} = F'(1);$$

dato che $F'(x) = 1/x$, risulta $F'(1) = 1$ e quindi

$$(76.9) \quad F(e) = 1.$$

La funzione $F(x)$ ha derivata ($= 1/x$) positiva per ogni $x > 0$; perciò è una funzione continua e strettamente crescente per $x > 0$. In base al criterio di invertibilità del paragrafo 35, F è invertibile, cioè esiste la funzione inversa di F , che indichiamo con F^{-1} e che è definita da

$$(76.10) \quad F^{-1}(y) = x \iff F(x) = y.$$

Fissato $a > 0$, scriviamo la relazione precedente con $x = a^n$. Dato che $y = F(x) = F(a^n) = nF(a)$, abbiamo

$$(76.11) \quad a^n = x = F^{-1}(y) = F^{-1}(nF(a)).$$

La relazione precedente giustifica la seguente

DEFINIZIONE. — Se a, x sono numeri reali, con $a > 0$, definiamo l'espressione « a elevato ad x » nel modo seguente:

$$(76.12) \quad a^x = F^{-1}(x F(a)).$$

In particolare, ponendo $a = e$, dato che $F(e) = 1$, abbiamo la *funzione esponenziale*:

$$(76.13) \quad e^x = F^{-1}(x).$$

Se, come al solito, la *funzione logaritmo* (in base e) è la funzione inversa di e^x , otteniamo

$$(76.14) \quad \log x = F(x).$$

Risultano quindi definite le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo e si riconosce facilmente che esse godono delle proprietà illustrate nel paragrafo 9.

Ad esempio la proprietà (9.14):

$$(76.15) \quad \log (x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2, \quad \forall x_1, x_2 > 0,$$

è già stata provata in (76.4). Mentre la proprietà (9.15):

$$(76.16) \quad \log (x_1 / x_2) = \log x_1 - \log x_2, \quad \forall x_1, x_2 > 0,$$

si ottiene dal precedente caso (76.15), ponendo $y_1 = x_1/x_2$ e $y_2 = x_2$; risulta

$$(76.17) \quad \log (y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2,$$

da cui la conclusione (76.16), essendo $y_1 y_2 = x_1$.

CAPITOLO 10

FORMULA DI TAYLOR

La formula di Taylor (con il resto di Peano) è stata già introdotta nel paragrafo 52 e ne sono state esaminate le prime proprietà e conseguenze, come ad esempio il criterio per stabilire se un punto è di massimo o di minimo relativo, in base all'annullarsi, o meno, delle derivate successive alla prima.

In questo capitolo riprendiamo la formula di Taylor in ipotesi generali e ne esaminamo ulteriori proprietà.

77. Resto di Peano

Consideriamo un polinomio $p(x)$ di grado n a coefficienti reali

$$(77.1) \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

La funzione $p(x)$ è indefinitamente derivabile in \mathbf{R} e le sue derivate di ordine maggiore di n sono tutte nulle. Inoltre è facile verificare che

$$(77.2) \quad p(0) = a_0, \quad p^{(k)}(0) = k! a_k,$$

per ogni $k \leq n$. Ricavando i valori dei coefficienti a_k , possiamo riscrivere il polinomio (77.1) nella forma seguente:

$$(77.3) \quad p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!} x + \frac{p''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

In altre parole un polinomio di grado n è noto una volta che siano noti il suo valore e quelli delle sue derivate nello zero.

Sostituendo il ruolo dello zero con quello di un qualunque punto $x_0 \in \mathbf{R}$ si perviene analogamente ad un'espressione del polinomio $p(x)$ in cui intervengono solo il suo valore e quelli delle sue derivate in x_0 :

$$(77.4) \quad p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Dalla (77.4) segue in particolare che un polinomio di grado n è univocamente determinato una volta che siano noti i valori che esso e le sue prime n derivate assumono in x_0 .

Sia ora $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un punto x_0 e cerchiamo di determinare un polinomio $p_n(x)$ di grado minore o uguale a n che verifichi le uguaglianze

$$(77.5) \quad p_n(x_0) = f(x_0), \quad p'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Tale polinomio deve avere, per la (77.4), l'espressione

$$(77.6) \quad p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Le condizioni (77.5) sono verificate da p_n . Perciò il polinomio di grado minore od uguale ad n che verifica le uguaglianze (77.5) esiste, è unico, ed è rappresentato in (77.6); tale polinomio prende il nome di *polinomio di Taylor*, di ordine n e centro x_0 , della funzione $f(x)$.

Definiamo la *funzione resto*:

$$(77.7) \quad R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

La funzione $R_n(x)$ (*resto* della formula di Taylor di f) rappresenta l'errore che si commette quando in x si sostituisce a $f(x)$ il suo polinomio di Taylor di centro x_0 e ordine n .

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO. — Se f è derivabile n volte in x_0 , il resto $R_n(x)$ è un infinitesimo in x_0 di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, ossia

$$(77.8) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

La dimostrazione che segue si differenzia da quella proposta nel paragrafo 52 per il fatto che, in questa sede, non si suppone la continuità della derivata n-sima nel punto x_0 .

Dimostrazione: tenendo presente la definizione (77.7) di $R_n(x)$, la tesi da dimostrare è la seguente:

$$(77.9) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n!]}{(x - x_0)^n} = 0. \end{aligned}$$

Applicando $n - 1$ volte il teorema di L'Hôpital (il limite (77.9) è una forma indeterminata 0/0) si perviene a

$$(77.10) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)]}{n!(x - x_0)} &= \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right\} \\ &= \frac{1}{n!} \{f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\} = 0. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE DI «o piccolo». — Siano $f(x)$, $g(x)$ funzioni definite in un intorno di x_0 (con la eventuale eccezione di x_0), non nulle per $x \neq x_0$. Si dice che $f(x)$ è per $x \rightarrow x_0$ un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, oppure equivalentemente che $f(x)$ è un «o piccolo» di $g(x)$, e si scrive

$$(77.11) \quad f(x) = o(g(x)) \quad (\text{per } x \rightarrow x_0),$$

se $g(x)$ è una funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$ e

$$(77.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Con tale definizione il resto di Peano (77.7), (77.8) si rappresenta anche nel modo seguente:

$$(77.13) \quad R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (\text{per } x \rightarrow x_0);$$

tenendo presenti le espressioni del resto (77.7) e del polinomio di Taylor

(77.6), utilizzando (come nel paragrafo 52) il simbolo di sommatoria, si può scrivere la *formula di Taylor con il resto di Peano* nella forma:

$$(77.14) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Si utilizza spesso la formula di Taylor con centro $x_0 = 0$ (ed in tal caso si chiama anche *formula di Mac Laurin*):

$$(77.15) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Esplicitiamo tale formula per alcune funzioni elementari:

$$(77.16) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$(77.17) \quad \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(77.18) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$(77.19) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$(77.20) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Ad esempio, dalla (77.18), con $n = 0$, si ottiene $\sin x = x + o(x^2)$ e, cambiando x con x^2 , o con x^3 , si ricava rispettivamente

$$(77.21) \quad \sin x^2 = x^2 + o(x^4), \quad \sin x^3 = x^3 + o(x^6),$$

esprimendo il fatto che, per x vicino a $x_0 = 0$, le funzioni $y = \sin x^2$ e $y = \sin x^3$ hanno un «comportamento» simile rispettivamente alle funzioni $y = x^2$ e $y = x^3$. Ciò è ben evidenziato dalle figure 10.1, 10.2, eseguite al computer; infatti, in figura 10.1 è rappresentato il grafico della funzione $\sin x^2$ che, per x vicino a $x_0 = 0$, è simile alla parabola di equazione $y = x^2$, mentre il grafico in figura 10.2 della funzione $\sin x^3$ è, per x vicino a $x_0 = 0$, simile al grafico della funzione $y = x^3$.

Per motivi analoghi, la funzione $f(x) = 1 + \sin(e^x - 1)$, rappresentata in figura 10.3, ha per x vicino a $x_0 = 0$, un grafico simile al grafico della funzione $y = e^x$. Invece, per $x \rightarrow +\infty$ la

funzione $f(x)$ oscilla con «periodo» (cioè, più precisamente, «distanza tra zeri consecutivi») decrescente (dovuto al fatto che e^x diverge a $+\infty$ più che linearmente) mentre, per $x \rightarrow -\infty$, $f(x)$ ammette asintoto orizzontale a quota $1 + \sin(-1) > 0$.

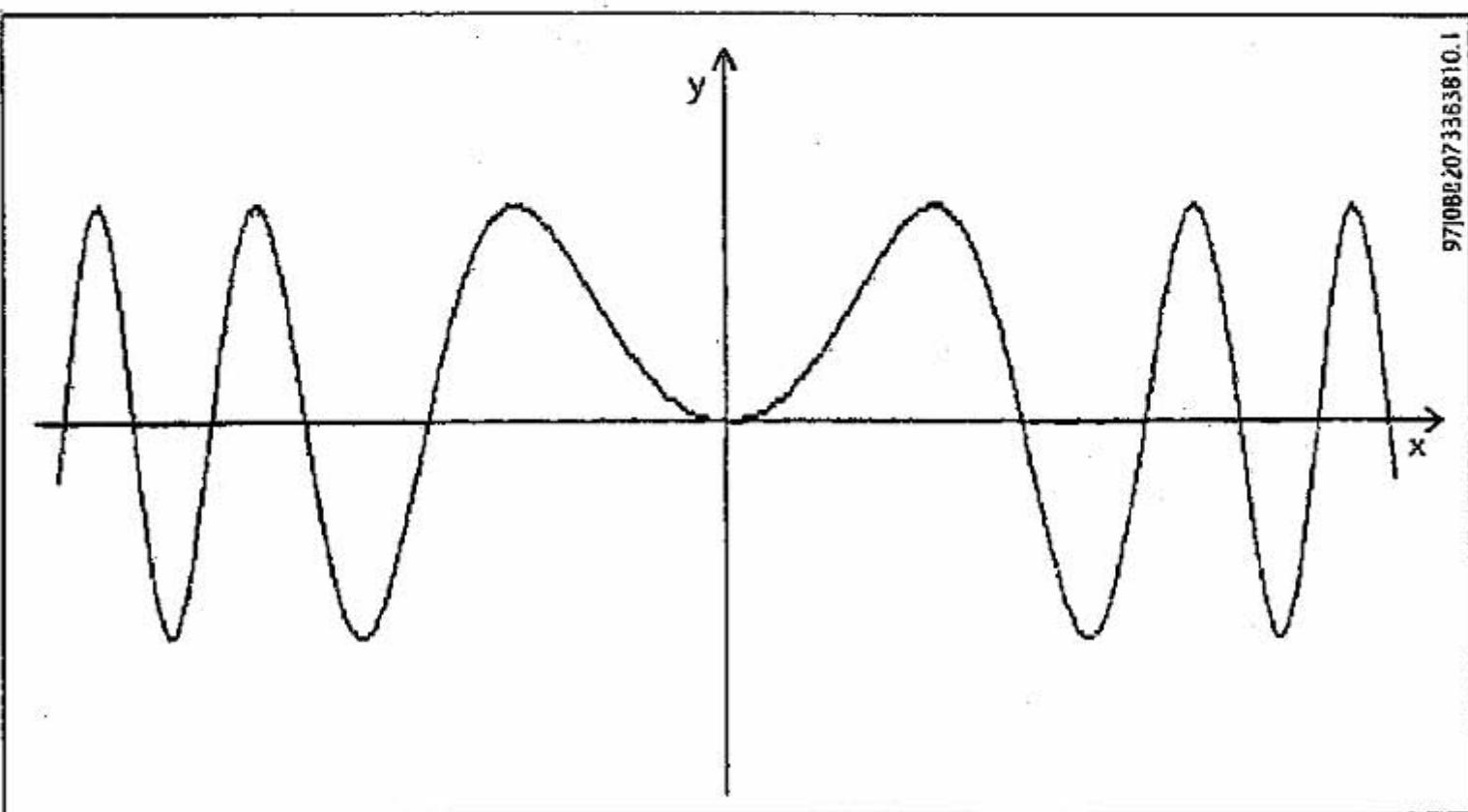


Figura 10.1 — $f(x) = \sin x^2$

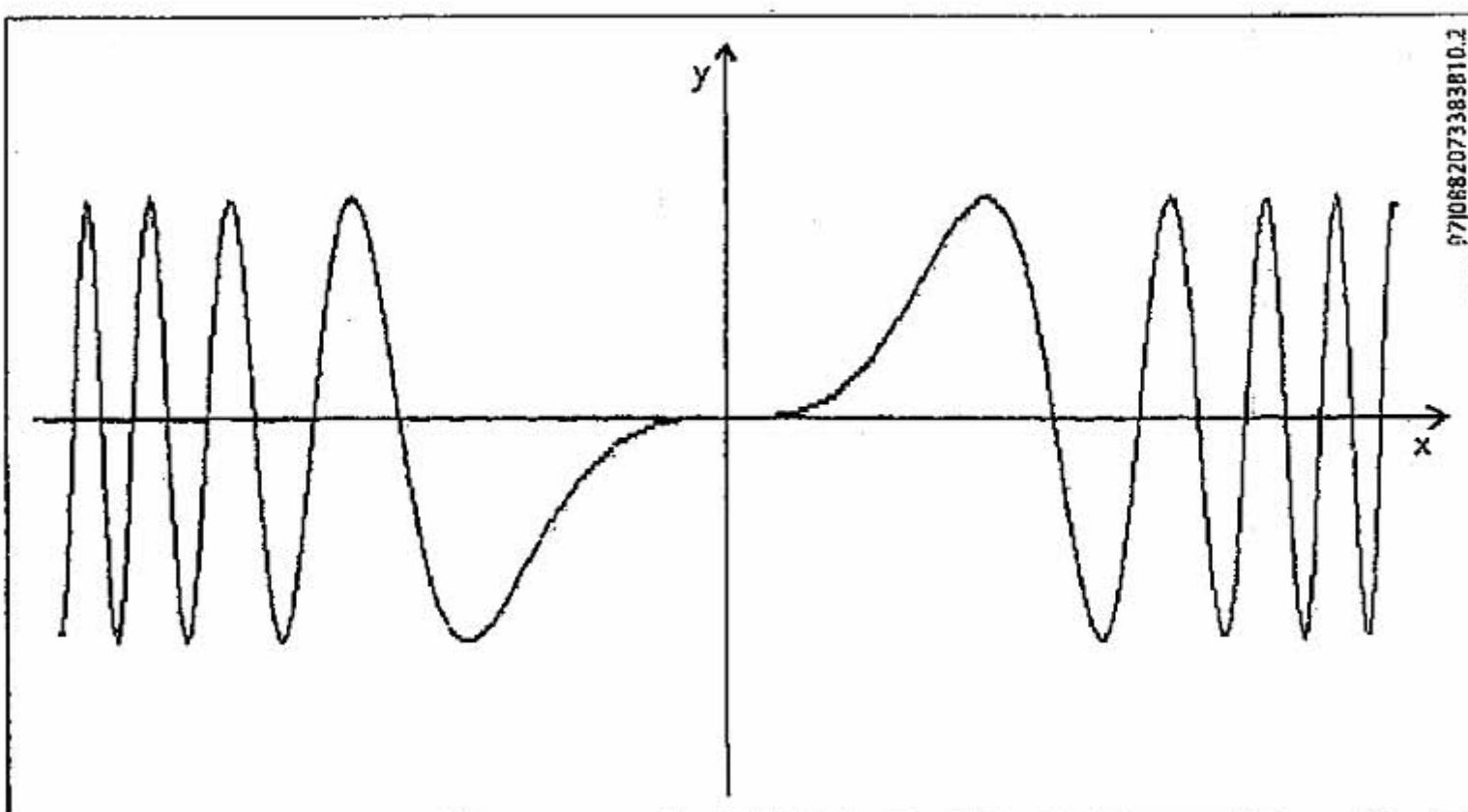
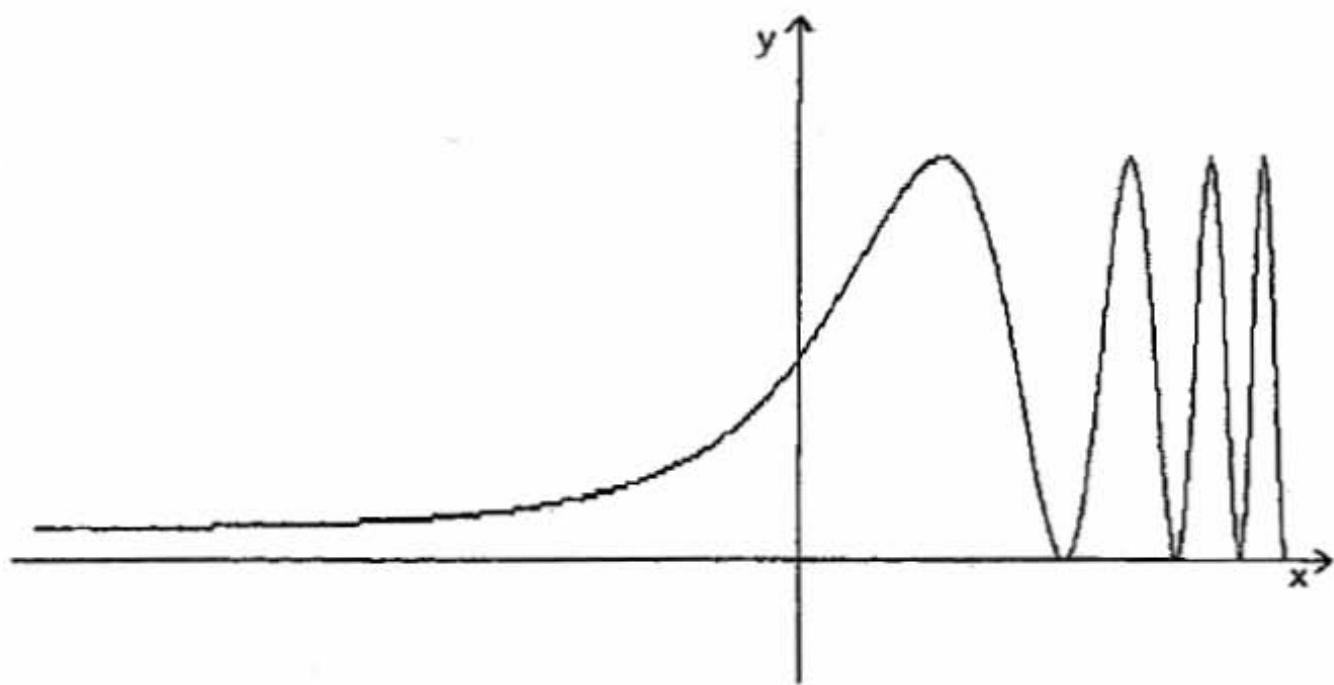


Figura 10.2 — $f(x) = \sin x^3$

970882073383B10.1

970882073383B10.2

Figura 10.3 — $f(x) = 1 + \sin(e^x - 1)$

78. Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti

La formula di Taylor con il resto di Peano si dimostra utile nel calcolo di limiti di forme indeterminate, come nell'esempio che segue.

Si voglia calcolare il limite:

$$(78.1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right).$$

Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $+\infty - (+\infty)$. Utilizziamo la formula di Taylor della funzione $\sin x$ centro $x_0 = 0$ (si veda la (77.18) con $n = 1$):

$$(78.2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Si ottiene

$$(78.3) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/6 + o(x^4)}{x^3 - x^5/6 + o(x^6)}; \end{aligned}$$

si è utilizzato il fatto che $x^2 \cdot o(x^4) = o(x^6)$ (si veda la proposizione seguente); così pure si sarebbe potuta utilizzare la proprietà: $-x^5/6 + o(x^6) = o(x^4)$.

Dividendo numeratore e denominatore della (78.3) per x^3 e tenendo presente che

$$(78.4) \quad \frac{o(x^4)}{x^3} = x \cdot \frac{o(x^4)}{x^4} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0,$$

come pure $o(x^6)/x^3 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, si ottiene infine il limite equivalente

$$(78.5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/6 + o(x^4)/x^3}{1 - x^2/6 + o(x^6)/x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Ai fini del calcolo di limiti sono utili le proprietà degli «o piccoli» elencate nella seguente

PROPOSIZIONE. — *Valgono le proprietà ($m, n \in \mathbb{N}$):*

$$(78.6) \quad o(x^m) + o(x^n) = o(x^n);$$

$$(78.7) \quad c \cdot o(x^n) = o(cx^n) = o(x^n), \quad c = \text{costante} \neq 0;$$

$$(78.8) \quad o(x^n) - o(x^n) = o(x^n);$$

$$(78.9) \quad x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$$

$$(78.10) \quad o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$$

$$(78.11) \quad o(o(x^n)) = o(x^n);$$

$$(78.12) \quad o(x^n + o(x^n)) = o(x^n).$$

Dimostriamo la (78.6): siano $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^n)$ due funzioni infinitesime di ordine superiore a x^n per $x \rightarrow 0$, cioè tali che

$$(78.13) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

Ma allora anche $[f(x) + g(x)]/x^n \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, cioè $f(x) + g(x) = o(x^n)$, come si voleva dimostrare.

La (78.7) afferma l'ovvia proprietà che se $f(x)/x^n \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, allora anche

$$(78.14) \quad \frac{c \cdot f(x)}{x^n}, \quad \frac{f(x)}{c \cdot x^n}$$

convergono a zero per $x \rightarrow 0$, qualunque sia la costante $c \neq 0$.

La (78.8) si prova come la (78.6); si osservi che, in generale, non è lecito porre $o(x^n) - o(x^n) = 0$! Infatti $o(x^n) - o(x^n)$ denota la differenza di due funzioni $f(x), g(x)$, entrambe infinitesime di ordine superiore a x^n per $x \rightarrow 0$.

Le (78.9), (78.10) si dimostrano in modo analogo.

Dimostriamo la (78.11); posto $f(x) = o(o(x^n))$, risulta

$$(78.15) \quad \frac{f(x)}{x^n} = \frac{o(o(x^n))}{o(x^n)} \cdot \frac{o(x^n)}{x^n} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0;$$

perciò $f(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$.

Dimostrazione della (78.12): posto $f(x) = o(x^n + o(x^n))$, si ha:

$$(78.16) \quad \frac{f(x)}{x^n} = \frac{o(x^n + o(x^n))}{x^n + o(x^n)} \cdot \left(1 + \frac{o(x^n)}{x^n}\right) \rightarrow 0$$

per $x \rightarrow 0$. Perciò $f(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$.

Come ulteriore esempio calcoliamo il limite

$$(78.17) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x^3} + \frac{\sin 3x}{3x^4} \right).$$

Ponendo $3x$ al posto di x nello sviluppo della funzione $\sin x$ in (77.18) e utilizzando la (78.7), si ottiene

$$(78.18) \quad \sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4).$$

Utilizzando anche lo sviluppo (77.19) della funzione coseno, il limite (78.17) diviene

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 3x \cos x + \sin 3x}{3x^4} = \\ (78.19) \quad & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 3x(1 - x^2/2 + o(x^3)) + 3x - (9/2)x^3 + o(x^4)}{3x^4} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + (3/2)x^3 - (9/2)x^3 + o(x^4)}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{3x^4} = 0. \end{aligned}$$

Come ultimo esempio studiamo il limite di successione

$$(78.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{-n^2},$$

che è riconducibile (mediante la composizione con la successione $x_n = 1/n$ e utilizzando il teorema del paragrafo 31) al limite di funzione

$$(78.21) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\log \cos x}{x^2}}.$$

Utilizzando gli sviluppi in formula di Taylor delle funzioni $\cos x$ e $\log(1 + x)$ e le proprietà degli «o piccoli», si ha:

$$(78.22) \quad \log(\cos x) = \log \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

da cui si deduce immediatamente che i limiti (78.20), (78.21) valgono $e^{1/2}$

79. Resto integrale

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO INTEGRALE. — Se f è derivabile $n+1$ volte in $[a, b]$, con derivata $f^{(n+1)}$ continua, il resto $R_n(x)$, definito in (77.7), si rappresenta nella forma

$$(79.1) \quad R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione: per la definizione (77.7), e per la (77.6), il resto $R_n(x)$ è dato da

$$(79.2) \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k;$$

pertanto la tesi consiste nel dimostrare che il secondo membro della (79.1) è, per ogni $x \in [a, b]$, uguale al secondo membro della (79.2); proviamo ciò per induzione su $n = 0, 1, 2, \dots$

Per $n = 0$, l'uguaglianza dei secondi membri delle (79.1), (79.2) è conseguenza della formula fondamentale del calcolo integrale; infatti:

$$(79.3) \quad \int_{x_0}^x f'(t) dt = [f(t)]_{x_0}^x = f(x) - f(x_0) = R_0(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Nell'ipotesi che $f(x)$ ammetta derivata di ordine $n+2$ continua in $[a, b]$, assumiamo per induzione che

$$(79.4) \quad \begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt, \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

Integrando per parti otteniamo

$$(79.5) \quad R_n(x) = \frac{1}{n!} \left\{ \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_{t=x_0}^{t=x} + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right\} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} +$$

$$+ \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt,$$

che equivale alla tesi, con $n+1$ al posto di n :

$$(79.6) \quad R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

80. Resto di Lagrange

Continuiamo ad indicare con $R_n(x)$ il resto nella formula di Taylor, definito in (77.7).

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE. — Se f è derivabile $n+1$ volte in $[a, b]$, con derivata $f^{(n+1)}$ continua, per ogni $x \in [a, b]$ esiste un numero x_1 compreso tra x_0 ed x , tale che

$$(80.1) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione: supponiamo $x > x_0$ (le differenze con il caso $x < x_0$ sono soltanto formali). Indichiamo con m, M rispettivamente il minimo ed il massimo di $f^{(n+1)}(t)$ nell'intervallo $[x_0, x]$, certo esistenti essendo $f^{(n+1)}$ continua. Dalle diseguaglianze $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$, $\forall t \in [x_0, x]$ e dall'espressione integrale (79.1) del resto $R_n(x)$ deduciamo che

$$(80.2) \quad m \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq R_n(x) \leq M \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt;$$

l'integrale è calcolabile elementarmente e vale

$$(80.3) \quad \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=x_0}^{t=x} = \\ = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Perciò

$$(80.4) \quad m \leq R_n(x) \cdot \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \leq M.$$

Per il teorema dell'esistenza dei valori intermedi applicato alla funzione $f^{(n+1)}(t)$ (tale funzione assume tutti i valori compresi tra il minimo m ed il massimo M) esiste $x_1 \in [x_0, x]$ tale che

$$(80.5) \quad f^{(n+1)}(x_1) = R_n(x) \cdot \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Per $n=0$ la formula di Taylor con il resto di Lagrange non è altro che il teorema di Lagrange (paragrafo 47): esiste x_1 nell'intervallo di estremi x_0 ed x tale che

$$(80.6) \quad f(x) - f(x_0) = R_0(x) = f'(x_1) \cdot (x - x_0).$$

Per n generico la formula di Taylor con il resto di Lagrange è utilizzata per la tabulazione numerica di funzioni; è infatti alla base della stima del resto (81.2), proposta nel paragrafo seguente.

Appendice al capitolo 10

81. Tabulazione di funzioni

La formula di Taylor è utile, oltre che per il calcolo di limiti, anche per la tabulazione numerica delle funzioni elementari: si approssima un valore di una funzione $f(x)$ con un polinomio di Taylor di grado n , scegliendo x_0 ed n in modo tale che il resto $R_n(x)$ sia compatibile con il grado di precisione consentito dal problema. A questo scopo è necessario avere una stima del resto R_n .

STIMA DEL RESTO. — Sia $f(x)$ una funzione derivabile $n+1$ volte in un intervallo $[a, b]$ contenente x_0 , con derivata $f^{(n+1)}$ continua in $[a, b]$. Posto

$$(81.1) \quad M_{n+1} = \max \{ |f^{(n+1)}(x)| : x \in [a, b] \},$$

il resto $R_n(x)$ della formula di Taylor verifica la diseguaglianza

$$(81.2) \quad |R_n(x)| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione: è diretta conseguenza della rappresentazione del resto secondo la formula di Lagrange (80.1); infatti, fissati $x, x_0 \in [a, b]$, se indichiamo con x_1 il punto per cui vale la formula (80.1), si ottiene:

$$(81.3) \quad \begin{aligned} |R_n(x)| &= |f^{(n+1)}(x_1)| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \\ &\leq M_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Diamo un'indicazione di come calcolare numericamente i valori di una data funzione usando la formula di Taylor. Con il metodo che esponiamo si possono costruire le tavole dei logaritmi o delle funzioni trigonometriche.

Si fissa preliminarmente il numero di cifre decimali con cui lavorare, o più precisamente, il grado di approssimazione con cui si vuole conoscere il risultato. Si esegue il calcolo usando il polinomio di Taylor (77.6), trascurando il resto $R_n(x)$. Il resto, o errore che si commette, è stimato con la formula (81.2).

Ad esempio, ci proponiamo di calcolare $\sin(1/10)$ con un errore inferiore a 10^{-7} . Scriviamo la formula di Taylor per la funzione $f(x) = \sin x$, con $x_0 = 0$ ed $x = 1/10$. Dato che la derivata $f^{(n)}(x)$ è uguale a $\pm \sin x$ oppure $\pm \cos x$, risulta $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, e quindi

$$(81.4) \quad M_{n+1} = \max \left\{ |f^{(n+1)}(x)| : x \in \left[0, \frac{1}{10}\right] \right\} \leq 1.$$

Perciò, se $0 \leq x \leq 1/10$, otteniamo

$$(81.5) \quad |R_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}},$$

si può calcolare $(n+1)! \cdot 10^{n+1}$ per i primi valori di n ; in particolare per $n+1 = 5$ si trova

$$(81.6) \quad |R_4(x)| \leq \frac{1}{5! \cdot 10^5} = \frac{1}{120 \cdot 10^5} < \frac{1}{10^7} = 10^{-7};$$

quindi commettiamo un errore inferiore a 10^{-7} se approssimiamo il valore del seno di x con il

valore del polinomio di Taylor:

$$(81.7) \quad \sin x \cong x - \frac{x^3}{6}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{10}\right].$$

Ponendo $x = 1/10$ otteniamo il valore:

$$(81.8) \quad \sin \frac{1}{10} \cong \frac{1}{10} - \frac{1}{6 \cdot 10^3} = \frac{599}{6000} = 0.09983333\dots$$

L'errore commesso è inferiore a $10^{-7} = 0.0000001$. Ciò significa che le prime sei cifre decimali trovate sono esatte. Quindi possiamo senza dubbio affermare che

$$(81.9) \quad \sin \frac{1}{10} = 0.099833\dots$$

Volendo conoscere altre cifre decimali di $\sin(1/10)$, basta aumentare n . Ad esempio, se si vuole un risultato con un errore inferiore a 10^{-10} , basta prendere $n = 6$. Dalla stima (81.5) si ottiene $|R_6(x)| \leq 1/(7! \cdot 10^7) < 10^{-10}$. Eseguendo i calcoli, si trova il valore esatto fino alla nona cifra decimale:

$$(81.10) \quad \sin \frac{1}{10} \cong \frac{599}{6000} + \frac{1}{120 \cdot 10^5} = 0.099833416\dots$$

Calcoliamo ora valori numerici approssimati del *numero di Nepero* e ; utilizziamo la formula di Taylor per la funzione $f(x) = e^x$, con centro $x_0 = 0$ e con $x = 1$.

Poiché la derivata $f^{(n)}(x)$ è uguale ad e^x qualunque sia n , e dato che la funzione e^x è strettamente crescente, risulta

$$(81.11) \quad M_{n+1} = \max \{e^x : x \in [0, 1]\} = e < 3.$$

Ponendo $x_0 = 0$, $x = 1$, nella stima del resto (81.2), abbiamo

$$(81.12) \quad |R_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ad esempio per $n = 10$ si trova $|R_{10}(x)| < 3/11! < 10^{-7}$. Quindi otteniamo il numero e dal polinomio di Taylor (77.16) per la funzione e^x con $x_0 = 0$, $x = 1$, $n = 10$:

$$(81.13) \quad e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!} = 2.71828180114\dots$$

Il risultato è stato ottenuto a meno di un errore inferiore a 10^{-7} . Perciò

il valore di e , esatto fino alla sesta cifra decimale, è il seguente:

$$(81.14) \qquad e = 2.718281\dots$$

Per valori più grandi di n , con lo stesso metodo si trovano, ad esempio, le prime trenta cifre decimali:

$$(81.15) \qquad e = 2.718281828459045235360287471352\dots$$

Il disegno grafico in copertina del presente volume è stato composto utilizzando la (81.15).

CAPITOLO 11

SERIE

82. Serie numeriche

Sia a_n una successione di numeri reali. Ci proponiamo di definire la somma dei termini della successione, cioè di definire l'espressione

$$(82.1) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Introduciamo la somma s_n dei primi n termini della successione (detta anche *somma parziale*, o *ridotta n-sima*):

$$(82.2) \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k .$$

Tale successione prende il nome di *serie di termine generale* a_n .

Ricordiamo che il simbolo Σ , di sommatoria, è stato introdotto nel paragrafo 52. È naturale definire l'espressione (82.1) come limite, per $n \rightarrow +\infty$, della successione s_n delle somme parziali. Cioè poniamo per definizione

$$(82.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k .$$

Il simbolo a primo membro si legge: somma, o serie, per k che va da 1 a $+\infty$, di a_k . Se il limite per $n \rightarrow +\infty$ di s_n esiste ed è un numero finito, si dice che la serie è *convergente*. Se il limite di s_n vale $+\infty$ (oppure $-\infty$), si dice che la serie è *divergente*. Una serie convergente o divergente si dice *regolare*. Se non esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$ di s_n , si dice che la serie è *indeterminata*; naturalmente, la somma della serie a primo membro della (82.3) è definita solo nel caso in cui la serie è regolare.

Il *carattere* di una serie è la sua proprietà di essere *convergente*, o *divergente* oppure *indeterminata*.

A titolo di esempio consideriamo la serie seguente, detta serie di Mengoli:

$$(82.4) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

La somma s_n dei primi n termini della serie è data dalla formula (11.15), dimostrata nel paragrafo 11 per induzione:

$$(82.5) \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1};$$

per $n \rightarrow +\infty$, s_n converge ad 1. Quindi la serie data è convergente e la somma vale

$$(82.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1.$$

Consideriamo ora la serie associata alla successione $a_n = (-1)^n$, cioè:

$$(82.7) \quad -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

Per la successione s_n delle somme parziali otteniamo: $s_1 = -1$; $s_2 = 0$; $s_3 = -1$; $s_4 = 0$; ... La successione s_n non ha limite; quindi la serie (82.7) è indeterminata.

Si noti che l'esempio (82.7) di serie indeterminata è stato dato a partire dalla successione $a_n = (-1)^n$ che non converge a zero; questo è un motivo per escludere a priori che la serie converga, secondo la seguente:

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA

SERIE. — *Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora la successione a_n tende a zero per $n \rightarrow +\infty$.*

Dimostrazione: indichiamo con s_n la successione delle somme parziali e con $s \in \mathbb{R}$ la somma della serie. Essendo

$$(82.8) \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

risulta

$$(82.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s - s = 0;$$

Osserviamo che la condizione precedente è necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie, come si vede dal seguente

ESEMPIO. Il termine generale della serie

$$(82.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

è infinitesimo, ma la serie è divergente. Verifichiamo infatti, per induzione, che la sua ridotta n-sima è data da

$$(82.11) \quad s_n = \sqrt{n+1} - 1.$$

Ciò è immediato per $n=1$. Supposta vera la (82.11) per $n=m$, verifichiamola per $n=m+1$. Sia dunque $s_m = \sqrt{m+1} - 1$, allora

$$(82.12) \quad s_{m+1} = s_m + \frac{1}{\sqrt{m+2} + \sqrt{m+1}} = \sqrt{m+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{m+2} + \sqrt{m+1}}.$$

Essendo evidentemente

$$(82.13) \quad \frac{1}{\sqrt{m+2} + \sqrt{m+1}} = \sqrt{m+2} - \sqrt{m+1},$$

dalla (82.12) segue $s_{m+1} = \sqrt{m+2} - 1$, cioè la tesi.

Quanto segue in questo paragrafo può essere omesso ad una prima lettura.

Dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni di numeri reali si ricava il

CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE. — Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sia convergente è che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $\nu > 0$ tale che

$$(82.14) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: indichiamo con s_n la successione delle somme parziali e ricordiamo, dal criterio di Cauchy per le successioni (paragrafo 28), che s_n converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per $m > \nu$, $n > \nu$

$$(82.15) \quad |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Essendo per $m > n$, $m = n + p$ con $p \in \mathbb{N}$, si ha

$$(82.16) \quad s_m - s_n = \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k .$$

da cui la tesi.

Di facile verifica sono le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 1. — *Se le serie di termine generale a_k e b_k sono regolari e se*

$$(82.17) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

ha significato in $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, allora la serie di termine generale $a_k + b_k$ è regolare e risulta

$$(82.18) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

PROPOSIZIONE 2. — *Se la serie di termine generale a_k è regolare, anche la serie di termine generale $c \cdot a_k$ è regolare per ogni $c \in \mathbf{R}$ e si ha*

$$(82.19) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Utile è la nozione di *resto* di una serie.

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la serie *resto n-simo*

$$(82.20) \quad a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+k} + \dots$$

ottenuta trascurando i primi n termini della serie data; cioè consideriamo la serie di termine generale b_k , con

$$(82.21) \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{per } k = 1, \dots, n \\ a_k & \text{per } k > n . \end{cases}$$

Sussiste il seguente

TEOREMA DEL RESTO. — Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente anche la serie resto n-simo lo è. Della R_n la sua somma, cioè posto

$$(82.22) \quad R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k ,$$

si ha inoltre

$$(82.23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0 .$$

Dimostrazione: essendo, per $m > n$, $b_m - a_m = 0$ si ha

$$(82.24) \quad \sum_{k=1}^m (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

per ogni $m > n$. Pertanto la serie di termine generale $b_k - a_k$ è convergente. Tale risulta allora, in base alla proposizione 1, anche la serie di termine generale $b_k = (b_k - a_k) + a_k$.

La (82.24) può esser riscritta come

$$(82.25) \quad \sum_{k=1}^m (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k .$$

per ogni $m > n$; per cui, passando il limite per $m \rightarrow \infty$, si ha

$$(82.26) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = a_1 + a_2 + \dots + a_n ,$$

ed anche

$$(82.27) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k - R_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ in tale relazione, si ricava la (82.23).

83. Serie a termini non negativi

Diremo che una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è a *termini non negativi* se per ogni $n \in \mathbb{N}$

risulta $a_n \geq 0$. Diremo che una serie è a *termini positivi* se $a_n > 0$ per ogni n .

La successione s_n delle somme parziali di una serie a termini non nega-

tivi è crescente. Infatti, dato che $a_{n+1} \geq 0$ per ogni n , risulta anche

$$(83.1) \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

Quindi, in base al teorema sulle successioni monotone (paragrafo 24), s_n non può essere indeterminata, ma ammette sicuramente limite (eventualmente uguale a $+\infty$). Abbiamo così dimostrato il seguente:

TEOREMA SULLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI. — *Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. È quindi convergente, oppure divergente positivamente.*

Ad esempio, in base al teorema sulle serie a termini non negativi ed alla proposizione del paragrafo precedente, è possibile affermare che

$$(83.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = +\infty;$$

infatti, la serie data è a termini positivi, quindi può essere divergente a $+\infty$, oppure convergente. Ma non è convergente, perché la successione $a_n = n/(n+1)$, non tende a zero per $n \rightarrow +\infty$, ma tende a 1.

Evidentemente la somma di una serie a termini non negativi convergente è maggiore o uguale di ciascuna delle sue somme parziali s_n .

84. La serie geometrica

Per ogni numero reale x consideriamo la *serie geometrica*

$$(84.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Il numero x si dice *ragione* della serie geometrica.

Se x è positivo, la serie è a termini positivi; perciò, se $x > 0$, la serie è convergente oppure divergente. Se $x \geq 1$, la successione $a_n = x^n$ non tende a zero; quindi, in base alla condizione necessaria per la convergenza di una serie, la serie è divergente, cioè risulta

$$(84.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = +\infty, \quad \forall x \geq 1.$$

Fissato $x < 1$, calcoliamo la somma parziale s_n . Ricordando la formula (11.7), abbiamo

$$(84.3) \quad s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

In accordo con la relazione di limite (23.1), per $n \rightarrow +\infty$, x^{n+1} tende a zero se $x \in (-1, 1)$, mentre non ha limite se $x \leq -1$. In corrispondenza otteniamo

$$(84.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} 1/(1-x), & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste,} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}.$$

Riassumendo, la serie geometrica è convergente se $|x| < 1$, divergente se $x \geq 1$, indeterminata se $x \leq -1$. Risulta inoltre:

$$(84.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

Per mezzo della serie geometrica siamo in grado di chiarire una proprietà ben nota di quei numeri reali che, in forma decimale, hanno un allineamento periodico. Ricordiamo che ogni allineamento decimale periodico può essere trasformato in un numero razionale mediante la *frazione generatrice*, cioè quella frazione che ha *a numeratore le cifre del periodo e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo*.

Ad esempio, verifichiamo che

$$(84.6) \quad 0.\overline{13} = 0.131313\dots = \frac{13}{99}.$$

L'allineamento decimale periodico $0.\overline{13}$ si scrive in modo preciso in forma di serie, la quale è poi calcolata per mezzo della formula (84.5):

$$(84.7) \quad \begin{aligned} 0.\overline{13} &= 0.13 + 0.0013 + 0.000013 + \dots \\ &= 0.13 \cdot (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots) \\ &= 0.13 \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = 0.13 \cdot \frac{10^2}{99} = \frac{13}{99}. \end{aligned}$$

85. La serie armonica

La serie seguente è detta *série armonica*:

$$(85.1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Per stabilire il *carattere* di tale serie, cioè per stabilire se la serie data è convergente o divergente, osserviamo che, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$(85.2) \quad x \geq k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Calcolando l'integrale definito nell'intervallo $[k, k+1]$, otteniamo

$$(85.3) \quad \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k}.$$

Consideriamo l'area della regione piana al di sotto del grafico della funzione $1/x$, per $k \leq x \leq k+1$, e al di sopra dell'asse delle x . Nella relazione precedente abbiamo confrontato tale area con l'area del rettangolo disegnato in figura 11.1.

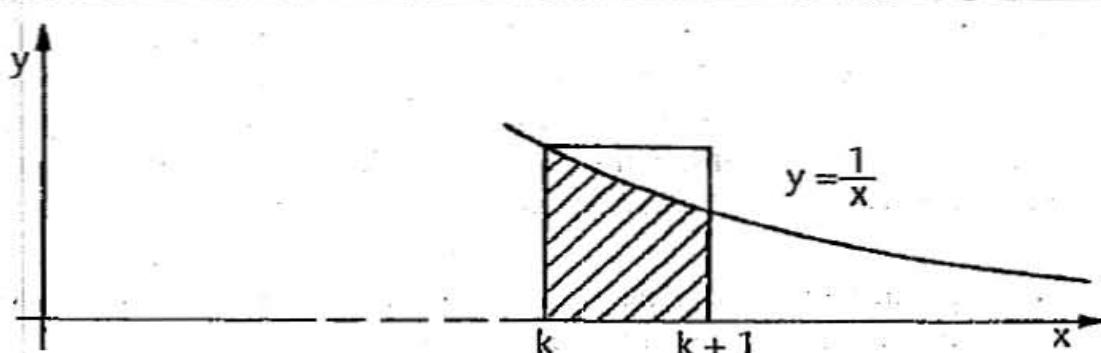


Figura 11.1

Sommmando, per k che varia da 1 ad n , otteniamo

$$(85.4) \quad \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

A secondo membro c'è la ridotta n -sima s_n della serie armonica. Sviluppiamo la somma a primo membro (utilizziamo la proprietà (63.1) di addi-

vità dell'integrale rispetto all'intervallo):

$$(85.5) \quad s_n \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1).$$

La successione $\log(n+1)$ tende a $+\infty$ per $n \rightarrow +\infty$; quindi anche la successione s_n tende a $+\infty$. Cioè la serie armonica (85.1) è divergente.

Data l'importanza dell'argomento, proponiamo una seconda dimostrazione della divergenza della serie armonica, senza far uso del calcolo integrale.

A tale scopo ricordiamo (paragrafo 25) che

$$(85.6) \quad a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

è una successione crescente, convergente al numero di Nepero e per $k \rightarrow +\infty$; abbiamo quindi

$$(85.7) \quad e \geq a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dato che la funzione $\log x$ è crescente in $(0, +\infty)$, risulta $\log e \geq \log a_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$; cioè

$$(85.8) \quad 1 = \log e \geq \log \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = k \log \left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

da cui

$$(85.9) \quad \frac{1}{k} \geq \log \left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sommmando per $k = 1, 2, \dots, n$, otteniamo

$$(85.10) \quad \begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \\ &\geq [\log(n+1) - \log n] + [\log n - \log(n-1)] + \dots + \\ &\quad + [\log 2 - \log 1] = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1). \end{aligned}$$

Si noti che, per altra via, si è ottenuta di nuovo la (85.5). Dato che la successione $\log(n+1)$ diverge a $+\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, anche la successione s_n delle somme parziali diverge a $+\infty$.

Consideriamo, per ogni valore del parametro positivo p , la seguente serie armonica generalizzata:

$$(85.11) \quad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

Procediamo analogamente a come fatto in precedenza. Se $k \leq x \leq k+1$ risulta

$$(85.12) \quad \frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}, \quad \forall x \in [k, k+1]$$

Integriamo nell'intervallo $[k, k+1]$ e sommiamo rispetto a k :

$$(85.13) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p},$$

La somma a destra è la ridotta n -sima s_n ; la somma a sinistra, a meno del primo termine (uguale ad 1), è la ridotta $(n+1)$ -sima. Quindi possiamo riscrivere la relazione precedente nella forma

$$(85.14) \quad s_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leq s_n.$$

Abbiamo già considerato il caso $p = 1$; distinguiamo ora i casi $p < 1$ e $p > 1$. Se $p < 1$ otteniamo

$$(85.15) \quad s_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p};$$

dato che $1-p > 0$, l'ultimo membro tende a $+\infty$ per $n \rightarrow +\infty$; quindi anche la successione s_n tende a $+\infty$. Pertanto la serie armonica generalizzata è divergente se $p < 1$.

Invece, se $p > 1$, dalla (85.14) otteniamo

$$(85.16) \quad s_{n+1} \leq 1 + \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p};$$

dato che $1-p < 0$, per $n \rightarrow +\infty$ la successione $(n+1)^{1-p}$ tende a zero. Quindi la successione s_{n+1} (che ha limite perché la serie è a termini positivi) è convergente.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che la serie armonica generalizzata è convergente se $p > 1$ ed è divergente se $0 < p \leq 1$. Naturalmente la serie (85.11) è divergente anche se $p \leq 0$, in quanto il suo termine n-simo non tende a zero.

86. Criteri di convergenza

Non sempre è semplice calcolare esplicitamente la somma di una serie (per questo spesso si ricorre a metodi numerici). È più facile ed è sempre interessante poter stabilire a priori il carattere di una serie, cioè stabilire se una data serie è convergente oppure no. Considereremo sempre in questo paragrafo serie a termini non negativi.

CRITERIO DEL CONFRONTO. — Siano a_n, b_n due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n . Si ha:

$$(86.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty;$$

$$(86.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty.$$

Dimostrazione: indichiamo con s_n, t_n le ridotte n-sime delle due serie relative rispettivamente alle successioni a_n, b_n . Per le ipotesi fatte risulta $s_n \leq t_n$ per ogni n . Inoltre le due ridotte s_n, t_n hanno limite per $n \rightarrow +\infty$, dato che le serie date sono a termini non negativi. Perciò, se il limite di t_n è finito anche il limite di s_n è finito, cioè vale la (86.1). Analogamente, se il limite di s_n è $+\infty$, anche t_n diverge a $+\infty$, cioè vale la (86.2).

Osserviamo esplicitamente che, nelle ipotesi del teorema di confronto, è sufficiente assumere che $a_n \leq b_n$ per n grande, cioè per ogni $n > v$, con v fissato.

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI. — Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo che, fissato un numero reale p , esista il limite:

$$(86.3) \quad l = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p a_n.$$

Si ha:

$$(86.4) \quad l \neq +\infty, \quad p > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty;$$

$$(86.5) \quad l' \neq 0, \quad p \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

Dimostrazione: nella condizione (86.4) con il limite l' finito, per la definizione di limite di successione (con $\varepsilon = 1$), esiste un indice v tale che

$$(86.6) \quad n^p a_n < l' + 1, \quad \forall n > v$$

Per tali n risulta quindi $0 \leq a_n < (l' + 1)/n^p$. Applichiamo il criterio di confronto (86.1) con $b_n = (l' + 1)/n^p$. Dato che $p > 1$, la serie armonica generalizzata relativa a b_n è convergente; quindi anche la serie relativa ad a_n converge.

Nella condizione (86.5) con $l' \neq 0$, esiste un indice v tale che (per semplicità consideriamoci $l' \in \mathbf{R}$)

$$(86.7) \quad n^p a_n > l'/2, \quad \forall n > v$$

Procedendo in modo analogo a come fatto in precedenza otteniamo la (86.5).

A titolo di esempio, possiamo affermare che la serie

$$(86.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^5 + 4k + 3}$$

è convergente. Ciò segue dal criterio (86.4) con $p = 4$; infatti risulta

$$(86.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \frac{2n+1}{n^5 + 4n + 3} = 2.$$

Allo stesso modo, applicando il criterio (86.4) con $p = 2$, si verifica che la serie seguente è convergente:

$$(86.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{k}\right) < +\infty.$$

CRITERIO DEL RAPPORTO. — Sia a_n una successione a termini positivi. Supponiamo che esista il limite

$$(86.11) \quad l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Allora si ha:

$$(86.12) \quad l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty;$$

$$(86.13) \quad l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

Dimostrazione: supponiamo $l < 1$ e scegliamo un numero x tale che $l < x < 1$. In base alla definizione di limite di successione (con $\epsilon = x - l$), esiste un indice v per cui

$$(86.14) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < x, \quad \forall n \geq v.$$

Per semplicità supponiamo che l'indice v sia uguale ad 1. Abbiamo allora $a_2 < a_1 x$; $a_3 < a_2 x^2 < a_1 x^2$, ..., in generale:

$$(86.15) \quad a_n < a_1 x^{n-1}.$$

La serie associata alla successione $b_n = a_1 x^n$ è la serie geometrica di ragione x (il fattore a_1 , comune a tutti i termini, non influenza il carattere della serie geometrica). Dato che $0 < x < 1$, la serie associata a b_n è convergente.

Per il criterio del confronto, anche la serie associata alla successione a_n è convergente; quindi la (86.12) è provata.

Se $l > 1$, esiste un indice v per cui

$$(86.16) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \forall n > v.$$

Quindi la successione a_n è strettamente crescente per $n > v$, e perciò non può convergere a zero; in base alla condizione necessaria del paragrafo 82, la serie data è divergente (essendo a termini positivi).

Come esempio consideriamo la *serie esponenziale*

$$(86.17) \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

con x numero reale fissato. Ponendo $a_n = x^n/n!$, se $x > 0$ si trova

$$(86.18) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1};$$

la quantità a_{n+1}/a_n tende a zero per $n \rightarrow +\infty$; in base al criterio del rapporto, la serie esponenziale è convergente per $x > 0$. Dimostreremo nel paragrafo 89 che la serie esponenziale è convergente per ogni x , e che la somma della serie vale e^x .

Talvolta è utile anche il criterio seguente, detto della radice, che si dimostra confrontando la serie data con la serie geometrica, analogamente a quanto è stato fatto per dimostrare il criterio del rapporto.

CRITERIO DELLA RADICE. — *Sia a_n una successione a termini non negativi. Supponiamo che esista il limite*

$$(86.19) \quad l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora valgono le stesse conclusioni (86.12), (86.13) del criterio precedente.

Dimostrazione: nell'ipotesi $l < 1$, sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1$. Per definizione di limite, esiste $v \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$ per $n \geq v$, ovvero tale che $a_n < (l + \varepsilon)^n$ per $n \geq v$. Poiché la serie geometrica di ragione $l + \varepsilon < 1$ converge, anche la serie di termine generale a_n converge, per il criterio del confronto.

Se $l > 1$, sia $v \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} > 1$, cioè $a_n > 1$ per ogni $n > v$. Poiché a_n non può essere infinitesima, per la condizione necessaria del paragrafo 82 la serie non è convergente e dunque è divergente (in quanto a termini non negativi).

87. Serie alternate

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato essenzialmente serie a termini non negativi. Nel presente paragrafo eliminiamo tale restrizione; in particolare, consideriamo *serie alternate*, cioè serie del tipo

$$(87.1) \quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

con $a_n > 0$. Proveremo, ad esempio, che la *serie armonica alternata*

$$(87.2) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

è convergente.

Vale il seguente

CRITERIO DI CONVERGENZA PER LA SERIE ALTERNATE. — *Sia $a_n \geq 0$ una successione decrescente ed infinitesima. Allora la serie (87.1) è convergente. Inoltre, detta s la somma, s_n la ridotta n -sima, si ha*

(87.3)

$$|s_n - s| \leq a_{n+1},$$

 $\forall n \in \mathbb{N}.$

Dimostrazione: essendo, per $k = 1, 2, 3, \dots$

$$(87.4) \quad s_{2k+2} = s_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq s_{2k},$$

$$(87.5) \quad s_{2k+1} = s_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k+1}) \leq s_{2k-1},$$

la successione s_2, s_4, s_6, \dots risulta crescente, mentre la successione s_1, s_3, s_5, \dots è decrescente, cioè, si ha

$$(87.6) \quad s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \leq s_{2k} \leq \dots$$

$$(87.7) \quad s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \dots \geq s_{2k+1} \geq \dots$$

Essendo inoltre

$$(87.8) \quad s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1}$$

e $a_{2k+1} \geq 0$, si ha

$$(87.9) \quad s_{2k+1} \geq s_{2k} \geq s_2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, la successione s_1, s_3, s_5, \dots è decrescente e limitata inferiormente e, grazie al teorema sul limite delle successioni monotone del paragrafo 24, è convergente.

Analogamente si vede che la successione s_2, s_4, s_6, \dots è convergente. Ricordando che $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 0$ dalla (87.8) segue che tali successioni hanno lo stesso limite s:

$$(87.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = s.$$

Dal citato teorema sulle successioni monotone seguono anche le relazioni

$$(87.11) \quad s \leq s_{2k+1}, \quad s_{2k+2} \leq s,$$

per cui

$$(87.12) \quad 0 \leq s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1},$$

$$(87.13) \quad 0 \leq s_{2k+1} - s \leq s_{2k+1} - s_{2k+2} = a_{2k+2},$$

cioè la (87.3).

Talvolta la (87.3) viene descritta in maniera espressiva affermando che l'errore che si commette sostituendo alla somma della serie la somma dei primi n termini è maggiorato in valore assoluto, dal primo termine trascorso.

La serie armonica alternata

$$(87.14) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

verifica le ipotesi del precedente criterio e perciò converge. Domandiamoci quanti termini dobbiamo sommare in modo che la somma parziale s_n differisca dalla somma s della serie per meno di $1/100$. In altre parole, vogliamo determinare n in modo che $|s - s_n| \leq 1/100$. A tale scopo, per la (87.3), basterà determinare n in modo che $a_{n+1} \leq 1/100$, cioè $1/(n+1) \leq 1/100$, che è soddisfatta per $n \geq 99$.

88. Convergenza assoluta

Una serie

$$(88.1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

si dice *assolutamente convergente* se risulta convergente la serie dei valori assoluti:

$$(88.2) \quad |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

In generale una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente, come si vede pensando alla serie armonica alternata. Il viceversa sussiste, grazie al seguente

TEOREMA. — *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Proponiamo due diverse dimostrazioni; la prima, classica, fa uso del criterio di Cauchy (paragrafo 82).

Dimostrazione (*primo metodo*): per ipotesi la serie

$$(88.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

è convergente. In base al criterio di Cauchy per le serie (paragrafo 82), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$(88.4) \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

per ogni $n > v$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$. Per gli stessi indici, dalla diseguaglianza triangolare otteniamo

$$(88.5) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq \\ \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|.$$

Combinando le (88.4), (88.5) otteniamo

$$(88.6) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

per ogni $n > v$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$. Di nuovo, per il criterio di Cauchy, la serie di termine generale a_k è convergente.

Dimostrazione (secondo metodo): la serie

$$(88.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|)$$

è convergente per il criterio del confronto, essendo

$$(88.8) \quad 0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ed essendo la serie di termine generale $|a_k|$, per ipotesi, convergente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$(88.9) \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^n |a_k|$$

ed il limite per $n \rightarrow +\infty$ del primo membro esiste finito perché esiste finito il limite dei singoli addendi del secondo membro.

Appendice al capitolo 11

89. Serie di Taylor

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intorno di un punto x_0 . Supponiamo che in x_0 $f(x)$ ammetta infinite derivate $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$, ... Traendo spunto dalla formula di Taylor (paragrafo 52, o capitolo 10), è naturale considerare la serie

$$(89.1) \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

La (89.1) è detta *serie di Taylor* della funzione $f(x)$ con centro nel punto x_0 . La funzione $f(x)$ è *sviluppabile in serie di Taylor* (con centro x_0) se per ogni x in un intorno di x_0 la serie (89.1) è convergente e la somma della serie vale $f(x)$; cioè, se esiste $\delta > 0$ tale che

$$(89.2) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x: |x - x_0| < \delta.$$

TEOREMA. — *Sia $f(x)$ una funzione che ammette infinite derivate nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, con $\delta > 0$. Supponiamo che esista un numero M per cui*

$$(89.3) \quad |f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 .

Dimostrazione: per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ indichiamo con $s_n(x)$ la ridotta n -sima della serie (89.1); come nel paragrafo 77, indichiamo con $R_n(x)$ il resto della formula di Taylor. Con queste notazioni, la formula di Taylor si scrive anche nel modo seguente

$$(89.4) \quad f(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

In base alla stima (81.2) del resto $R_n(x)$, ed in base all'ipotesi (89.3), dato che $|x - x_0| \leq \delta$, otteniamo

$$(89.5) \quad |R_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. In accordo con la (26.3), per $n \rightarrow +\infty$ l'ultimo membro tende a zero; quindi $R_n(x) \rightarrow 0$ per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ricavando $s_n(x)$ dalla (89.4), otteniamo

$$(89.6) \quad s_n(x) = f(x) - R_n(x) \rightarrow f(x).$$

Ciò significa che vale la formula (89.2), cioè $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Il teorema precedente si applica, ad esempio, alle funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$. Infatti, indicando con $f(x)$ una di tali funzioni, si vede subito che $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi le funzioni $\sin x$, $\cos x$ sono sviluppabili in serie di Taylor, ad esempio con centro in 0. Ricordando la formula di Taylor (52.17), (52.18) di tali funzioni, si ottengono gli sviluppi in serie

$$(89.7) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$(89.8) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Il teorema precedente si applica anche alla funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Risulta

$$(89.9) \quad |f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^\delta = M, \quad \forall x \in [-\delta, \delta].$$

Quindi le ipotesi del teorema precedente sono soddisfatte anche per la funzione esponenziale. Perciò la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor con centro 0 e vale la formula

$$(89.10) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Particolarmente significativo è il caso in cui $x = 1$, per cui risulta

$$(89.11) \quad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Consideriamo altri esempi di funzioni sviluppabili in serie di Taylor. Abbiamo già verificato con la (84.5) che, se $x \in (-1, 1)$, la serie geometrica è convergente e la somma vale:

$$(89.12) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Invitiamo il lettore a verificare per esercizio che, posto $f(x) = 1/(1-x)$, allora $f^{(n)}(0) = n!$ per ogni n . Quindi la (89.12) è lo sviluppo in serie di Taylor con centro 0, della funzione $1/(1-x)$.

È utile scrivere la formula di Taylor per la funzione precedente:

$$(89.13) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + R_n(x);$$

è possibile scrivere esplicitamente il resto $R_n(x)$; infatti, in base alla relazione (11.7), abbiamo:

$$(89.14) \quad R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad \forall x \in (-1, 1);$$

con tale espressione del resto, integrando tra 0 e x entrambi i membri della (89.13), otteniamo

$$(89.15) \quad -\log(1-x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.$$

La funzione $1/(1-t)$ è crescente; quindi, se $t \leq x$, risulta $1/(1-t) \leq 1/(1-x)$. Considerando per semplicità $x \geq 0$, otteniamo

$$(89.16) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \int_0^x R_n(t) dt = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \leq \\ &\leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{n+2} \frac{x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che $x^{n+2} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow +\infty$, perché $x < 1$; quindi, per $n \rightarrow +\infty$, l'integrale tra 0 e x di R_n tende a zero. Passando al limite nella (89.15) otteniamo

$$(89.17) \quad -\log(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Se nella formula precedente si cambia x con $-x$, si ottiene lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\log(1+x)$ (si confronti con la formula di Taylor (52.16)):

$$(89.18) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Ancora, cambiando x con $-x^2$ nella formula (89.12), si ottiene il seguente sviluppo:

$$(89.19) \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

Integrando entrambi i membri, con lo stesso metodo usato in precedenza, si ottiene

$$(89.20) \quad \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Particolarmente significativo è il caso in cui $x = 1$; dato che $\arctg 1 = \pi/4$, otteniamo

$$(89.21) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$