

Calcolo per l'Astronomia - a.a 2021/2022

Stima della costante di Hubble a partire dall'analisi delle curve luce di un campione di supernovae

Lorenzo Cavazzini

1	Introduzione al problema	2
2	Descrizione fisica del problema	2
3	Approccio matematico e breve introduzione agli algoritmi utilizzati	3
3.1	Algoritmi utilizzati	3
3.1.1	Spline	3
3.1.2	Algoritmo di Thomas	4
3.1.3	Monte Carlo	4
3.1.4	Integrazione	5
4	Presentazione dei dati disponibili	6
5	Descrizione del programma	6
5.1	Descrizione della struttura del programma	6
5.1.1	Modulo <i>funzione</i>	6
5.1.2	Estrapolazione dei dati	6
5.1.3	Stima di H_0	7
5.1.4	Trattamento degli errori	7
5.1.5	Stima finale	7
6	Analisi critica dei risultati	7

1 Introduzione al problema

La costante di Hubble (H_0) è una misura cosmologica del tasso di espansione dell'universo.

Essa compare all'interno della legge di Hubble-Lemaitre (1), la quale afferma che sussiste una relazione lineare tra lo spostamento verso il rosso della luce emessa dalle sorgenti luminose e la loro distanza: le sorgenti più distanti da noi hanno un redshift più elevato e quindi anche una velocità di allontanamento maggiore. In particolare ogni oggetto ha una velocità di recessione radiale proporzionale alla sua distanza secondo:

$$v = H_0 d. \quad (1)$$

Il problema richiede una stima della costante H_0 a partire da dati osservativi relativi ad un campione di supernovae di tipo Ia; si fa utilizzo di algoritmi numerici (interpolazione per spline cubica, integrazione con metodo di Newton-Cotes al secondo ordine, metodo Monte Carlo) per la determinazione delle quantità utili.

2 Descrizione fisica del problema

La stima della costante di Hubble può essere fatta in 2 modi: attraverso misure cosmologiche, oppure per mezzo di candele standard nell'universo locale. Utilizzeremo il secondo metodo.

A partire dalla distanza di un oggetto e dal suo redshift è possibile stimare la costante di Hubble secondo la seguente formula:

$$H_0 = \frac{c(1 + z_{CMB})}{d} \int_0^{z_{CMB}} \frac{dz}{\sqrt{0.3(1+z)^3 + 0.7}}, \quad (2)$$

dove z_{CMB} si riferisce al redshift della radiazione cosmica di fondo (CMB); si è utilizzato il modello Λ CDM *Concordance* per i valori di $\Omega_{0\Lambda}$ e Ω_{0m} (0.7 e 0.3 rispettivamente).

Dato che le candele standard sono oggetti la cui magnitudine assoluta è nota è possibile ricavarne la distanza attraverso:

$$(m - M)_{filtro} = 5 \log d - 5, \quad (3)$$

dove m ed M sono la magnitudine apparente (calibrata secondo una correzione) e la magnitudine assoluta rispettivamente e la distanza d è espressa in parsec.

Le candele standard che utilizzeremo sono supernove di tipo Ia. Il valore della loro magnitudine di picco non è lo stesso, tuttavia la forma della curva di luce è sempre uguale: questo perché le supernovae Ia avvengono sempre sotto le stesse condizioni fisiche, ovvero quando una nana bianca C-O accresce abbastanza massa da raggiungere 1.4 masse solari; dunque la differenza in magnitudine del valore di picco e quella dopo 15 giorni da esso è simile per ogni supernova.

Attraverso la formula di Hamuy (Hamuy et al. (1996)) è possibile ricavare la magnitudine assoluta massima nel filtro blu di una supernova Ia e dunque la sua distanza conoscendo la differenza tra la magnitudine massima e quella misurata 15 giorni dopo il picco (Δm_{15}):

$$B_{max} = -19.258 + 0.784(\Delta m_{15} - 1.1). \quad (4)$$

3 Approccio matematico e breve introduzione agli algoritmi utilizzati

La risoluzione del problema si basa sull'analisi dei dati relativi alle curve luce di 70 supernovae.

L'osservazione delle supernovae avviene su intervalli di tempo variabili: è quindi necessario ottenere una stima della curva di luce con i dati disponibili utilizzando l'interpolazione per spline cubica, da cui è possibile ricavare un valore dettagliato del massimo di luminosità e della magnitudine dopo 15 giorni.

Per ottenere una stima della costante di Hubble è necessaria un'integrazione sul redshift, utilizzando in questo caso il metodo di Newton-Cotes al secondo ordine.

Per il trattamento degli errori usiamo il metodo Monte Carlo attraverso 100 realizzazioni casuali di curve di luce distribuite gaussianamente rispetto alla media data dai valori osservati.

3.1 Algoritmi utilizzati

3.1.1 Spline

Per eseguire l'interpolazione sui dati si è scelto di usare il metodo della spline, in particolare spline cubica, poiché essa fornisce risultati più affidabili e precisi rispetto ai metodi di Newton e Lagrange.

L'interpolazione con spline cubica prevede la divisione dell'intervallo di interpolazione in n sotto-intervalli, in ognuno dei quali la funzione viene approssimata con un polinomio del terzo ordine,

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, \quad (5)$$

dove a, b, c e d sono le incognite da trovare per ogni intervallo (in totale quindi abbiamo $4n$ incognite). Se però deriviamo $f(x)$ due volte possiamo ridurre il nostro polinomio del terzo ordine ad una retta approssimabile con un polinomio di Lagrange al primo ordine.

Basta quindi risolvere la seguente equazione:

$$f_i''(x) = f''(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f''(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (6)$$

in cui le uniche variabili da determinare sono le $n - 1$ derivate seconde.

Integrando (6) due volte e imponendo opportuni valori per x_i e x_{i-1} come costanti di integrazione calcoliamo i valori interpolati con la seguente formula:

$$\begin{aligned} f_i(x) = & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \\ & \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^3 + \\ & \left[\frac{f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) + \\ & \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Questo algoritmo viene implementato nella subroutine 'spline'.

3.1.2 Algoritmo di Thomas

Per risolvere il sistema tridiagonale generato dalla spline e ottenere le $n - 1$ derivate seconde della funzione utilizziamo l'algoritmo di Thomas, una versione più efficiente dell'eliminazione di Gauss.

L'algoritmo si basa sull'eliminazione di Gauss per riscrivere il sistema in una matrice tridiagonale superiore.

$$b'_i = \begin{cases} \frac{b_i}{a_i} \wedge i = 1 \\ \frac{b_i - c_i b'_{i-1}}{a_i - c_i b'_{i-1}} \wedge i = 2, \dots, n-1 \end{cases} ; d'_i = \begin{cases} \frac{d_i}{a_i} \wedge i = 1 \\ \frac{d_i - c_i d'_{i-1}}{a_i - c_i b'_{i-1}} \wedge i = 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (8)$$

Si ottiene la soluzione del sistema invertendo la matrice triangolare superiore appena trovata tramite la formula di sostituzione all'indietro:

$$x_i = \begin{cases} d'_i \wedge i = n \\ d'_i - b'_i x_{i+1} \wedge i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (9)$$

Questo algoritmo viene implementato nella subroutine 'spline'.

3.1.3 Monte Carlo

Per realizzare delle nuove curve di luce nell'ambito della stima degli errori abbiamo utilizzato un procedimento Monte Carlo: esso si basa sull'implementazione di un generatore congruenziale lineare il quale, da un numero iniziale intero (che chiameremo 'seme'), realizza numeri casuali non interi da 0 a 1 distribuiti linearmente:

$$seme = \text{mod}(a \times seme + c, m), \quad (10)$$

$$random = \text{FLOAT}(seme) / \text{FLOAT}(m), \quad (11)$$

dove la funzione *mod* restituisce il resto della divisione tra i due argomenti. I parametri interi a, c ed m sono stati definiti in modo da riprodurre una distribuzione casuale il più uniforme possibile. I numeri generati casualmente vengono usati, attraverso il metodo di Box-Muller, per ottenere una distribuzione casuale gaussiana. Il metodo di Box-Muller utilizza la trasformazione inversa in due dimensioni data dalla relazione:

$$y_1 = \sqrt{-2\ln(x_1)} \cos(2\pi x_1),$$

$$y_2 = \sqrt{-2\ln(x_2)} \cos(2\pi x_2),$$

per ottenere coppie di numeri casuali e indipendenti distribuiti gaussianamente con media nulla e varianza unitaria (nell'algoritmo implementato si fa utilizzo di solo uno dei 2 numeri generati). Se la distribuzione gaussiana che vogliamo ottenere deve avere media μ e varianza σ basta applicare la trasformazione:

$$z_{1,2} = \sigma \times y_{1,2} + \mu. \quad (12)$$

Questo algoritmo viene implementato completamente all'interno della subroutine 'montecarlo'.

Figure 1 mostra la distribuzione gaussiana dei dati di picco generati attraverso il metodo Monte Carlo per un campione di tre supernovae.

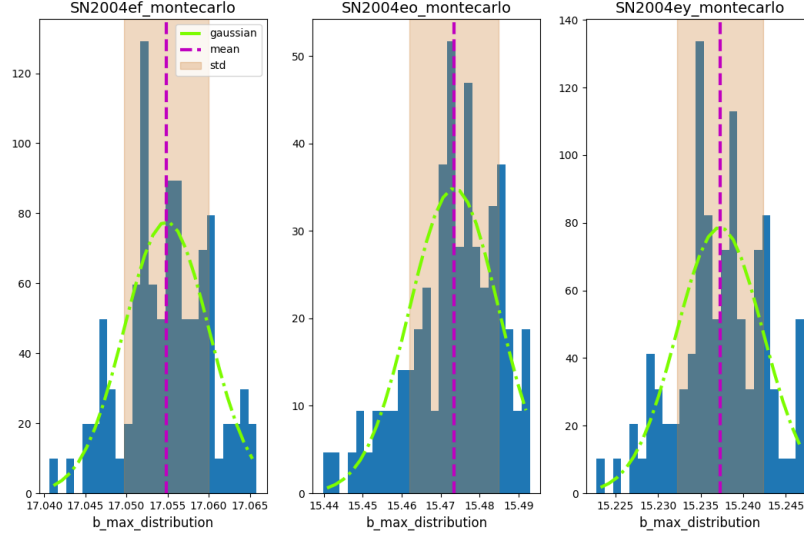


Figure 1: Distribuzione gaussiana dei dati di picco generati casualmente per tre diverse supernovae

3.1.4 Integrazione

Tutti gli integrali necessari per risolvere l'esercizio vengono svolti tramite la regola di Simpson 1/3, ovvero una formula di Newton-Cotes del secondo ordine. L'intervallo di integrazione viene diviso in n sotto-intervalli su ognuno dei quali la funzione integranda viene approssimata con un polinomio al secondo ordine. L'integrale da calcolare è la somma delle aree sottese da ogni sotto-intervallo, ricavabili tramite:

$$I \simeq (b - a) \frac{f(a) + 4f(a + h) + f(b)}{6}. \quad (13)$$

In realtà il metodo di Simpson 1/3, pur essendo molto facile da implementare, non è particolarmente preciso. Tuttavia si è scelto di utilizzare questo metodo di integrazione perché la funzione per la quale è stato necessario risolvere gli integrali non richiede un alto grado di precisione (equazione (2)). Questo algoritmo viene implementato nella subroutine 'integrale - newton - cotes'.

4 Presentazione dei dati disponibili

I dati a disposizione sono strutturati nel seguente modo:

- Il file 'newtable2.txt' che contiene, nelle prime 31 righe, una spiegazione del contenuto del file e il corrispondente formato di lettura. Ogni riga successiva rappresenta una supernova, il cui primo elemento è il nome: le prime 4 cifre rappresentano l'anno dell'osservazione, le ultime due il periodo specifico dell'anno in cui essa è stata effettuata. Le quantità da estrarre sono il *CMB Redshift*, l'eccesso di colore B-V, la pendenza dell'arrossamento e i relativi errori. Queste 2 ultime quantità sono utili per la correzione della magnitudine che a causa dell'estinzione viene modificata.
- 70 file 'SNXXXXX.txt' che contengono i dati osservativi dei flussi di ogni supernova. La prima colonna di ogni file corrisponde alla data, in *modified julian date* (MJD), a cui è stata effettuata una particolare osservazione. Le colonne successive contengono i valori di magnitudine in diverse bande dello spettro; le quantità da estrarre per lo svolgimento dell'esercizio sono le date giuliane, le magnitudini in banda B e gli errori associati. Alcuni dati hanno un valore corrispondente a '99,900': in tal caso è necessario scartarli poiché corrispondono ad un'osservazione mancante.

5 Descrizione del programma

In questa sezione ripercorreremo la struttura del programma per spiegarne i passaggi e le procedure utilizzate.

5.1 Descrizione della struttura del programma

5.1.1 Modulo *funzione*

Nel modulo *funzione* è contenuta la funzione che viene utilizzata nella subroutine 'integrale - newton - cotes' per essere integrata in un intervallo di redshift dato da $[0, z_{CMB}]$. Seguono tutte le subroutine contenenti gli algoritmi matematici descritti di seguito, che verranno richiamate dal programma principale quando necessario.

5.1.2 Estrapolazione dei dati

Il programma principale è composto da un ciclo DO che svolge l'intero procedimento una supernova alla volta. La prima parte si occupa dell'estrazione dei dati dai file descritti precedentemente; ogni quantità utile (magnitudine B, date giuliane, CMB redshift, etc) è ubicata in un apposito vettore.

Lo scarto dei dati mancanti '99.900' viene effettuato tramite un ciclo che li individua e li esclude da un nuovo vettore in cui vengono invece collocati tutti i dati validi.

Se poi viene rilevata una curva di luce che non presenta un picco di magnitudine, bensì un andamento monotono, essa viene scartata per passare alla supernova successiva; il calcolo della costante di Hubble non può essere effettuato in questi

casi poiché per conoscere la distanza dell'oggetto è necessaria la differenza di magnitudine tra il picco e 15 giorni dopo.

5.1.3 Stima di H_0

Per ottenere una curva di luce abbastanza accurata si è scelto un numero di punti di interpolazione pari a 50 volte il numero di dati osservati (una discussione più critica di questa scelta è condotta nelle conclusioni).

Dopo aver ottenuto una curva di luce dettagliata dall'applicazione della spline cubica si passa al calcolo della costante di Hubble tramite la subroutine 'stima - costante - Hubble', che individua il massimo della curva e la utilizza per stimare la distanza dell'oggetto tramite la formula di Hamuy. Con la successiva integrazione della funzione nell'intervallo di redshift considerato, la costante di Hubble è determinata per ogni supernova.

5.1.4 Trattamento degli errori

Per ogni supernova si creano $N = 100$ curve di luce, i cui valori hanno una distribuzione gaussiana con media pari alla misura reale e deviazione standard pari all'errore reale sulla misura (tramite la subroutine 'montecarlo'). Per ogni curva di queste 100 si effettua una stima della costante di Hubble e, tramite la formula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (H_{0,i} - \bar{H}_0)^2}{N}}, \quad (14)$$

se ne determina l'errore. Lo stesso viene fatto per $MJD - max$, $B - max$, $b - delta15$, $delta - m15$, modulo di distanza e distanza di luminosità. Queste quantità e i loro relativi errori sono successivamente salvati nel file 'tabella - quantità.dat'.

5.1.5 Stima finale

Avendo un numero di costanti di Hubble pari al numero di supernove su cui è stato possibile stimarne il valore, usiamo la media pesata per ottenere il risultato finale:

$$H_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{H_{0,i}}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad (15)$$

con l'errore associato:

$$\sigma_{H_0} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \quad (16)$$

6 Analisi critica dei risultati

Come risultato finale abbiamo ottenuto il seguente valore di H_0 con il rispettivo errore:

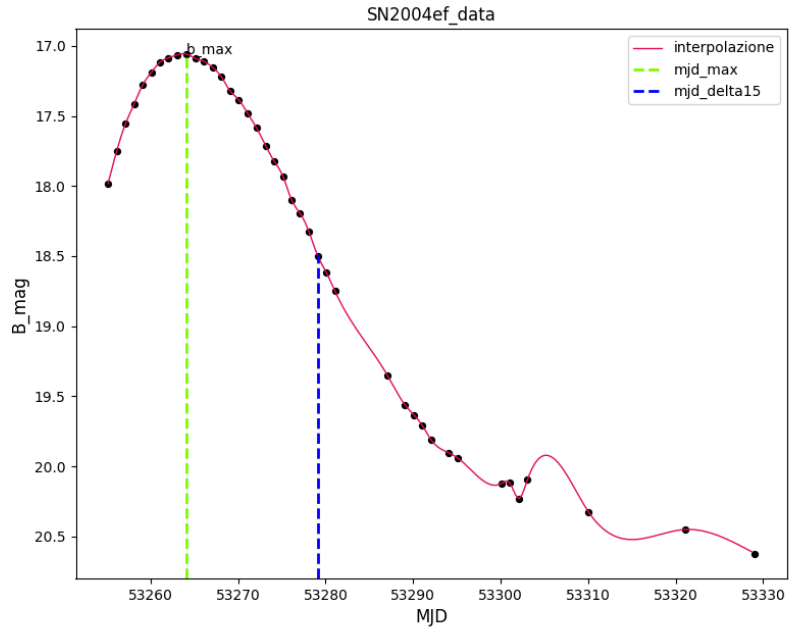
$$\begin{aligned} H_0 &= 72.7906 \text{ km/s mpc} \\ \sigma &= 0.1476 \text{ km/s mpc}. \end{aligned} \quad (17)$$

Seguono delle considerazioni sui dati ottenuti.

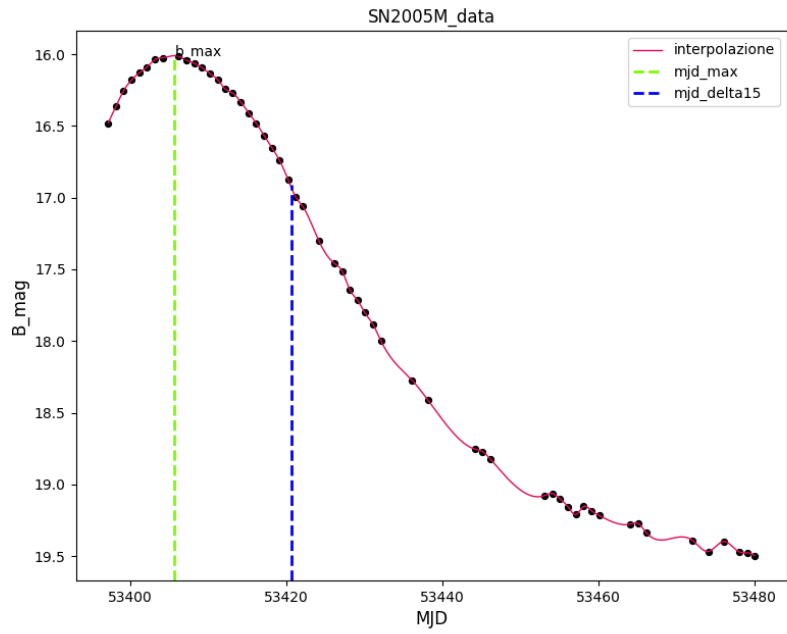
- Il valore trovato è consistente con le tipiche misure di H_0 nell'universo locale, che invece riportano (mediamente) $H_0 = 74.03 \text{ km/s Mpc}$, $\sigma = 1.42 \text{ km/s Mpc}$;
- si può notare come i valori di H_0 ottenuti da diverse supernovae assumano talvolta valori disparati; tuttavia, i valori che si discostano molto dalla media hanno generalmente anche un errore molto grande e, di conseguenza, un peso statistico minore (per i dati fare riferimento al file 'tabella - H0.dat') ;
- la scelta del numero di punti su cui interpolare (nel codice, $k3$) risulta cruciale per ottenere una stima sempre più dettagliata di H_0 ; la scelta di $n = 50 \times \text{numero_dati_osservati}$, infatti, risulta sufficiente da ottenere curve di luce accurate con un numero non eccessivo di calcoli;
- ho riscontrato problemi con la scelta del *seed* durante la generazione dei numeri casuali. Poiché esso deve cambiare ogni volta per generare sequenze diverse di numeri è opportuno assegnare $\text{seed} = i + j + h$ dove i, j, h sono numeri interi che rappresentano l'indice del ciclo Do a cui appartengono. In particolare,
 - i =indice del ciclo sulle 70 supernovae;
 - j =indice del ciclo sui valori di b ;
 - h =indice del ciclo sulle 100 curve di luce.

La figura 2 contiene le curve di luce di due supernovae, dove i punti neri sono i dati di magnitudine osservati e la curva rossa è un plot dei punti ottenuti tramite interpolazione con spline cubica. Nella figura 2(a) si nota bene come la spline abbia approssimato la funzione tra due punti distanti con un polinomio al terzo ordine.

La figura 3 rappresenta invece l'andamento del modulo di distanza rispetto al redshift. poiché il modulo μ è la misura indiretta del logaritmo della distanza si nota un andamento lineare che evidenzia il fatto che a distanze maggiori gli oggetti si allontanano più velocemente.



(a) Curva luce della supernova SN2004ef



(b) Curva luce della supernova SN2005M

Figure 2: Due esempi di curve luce

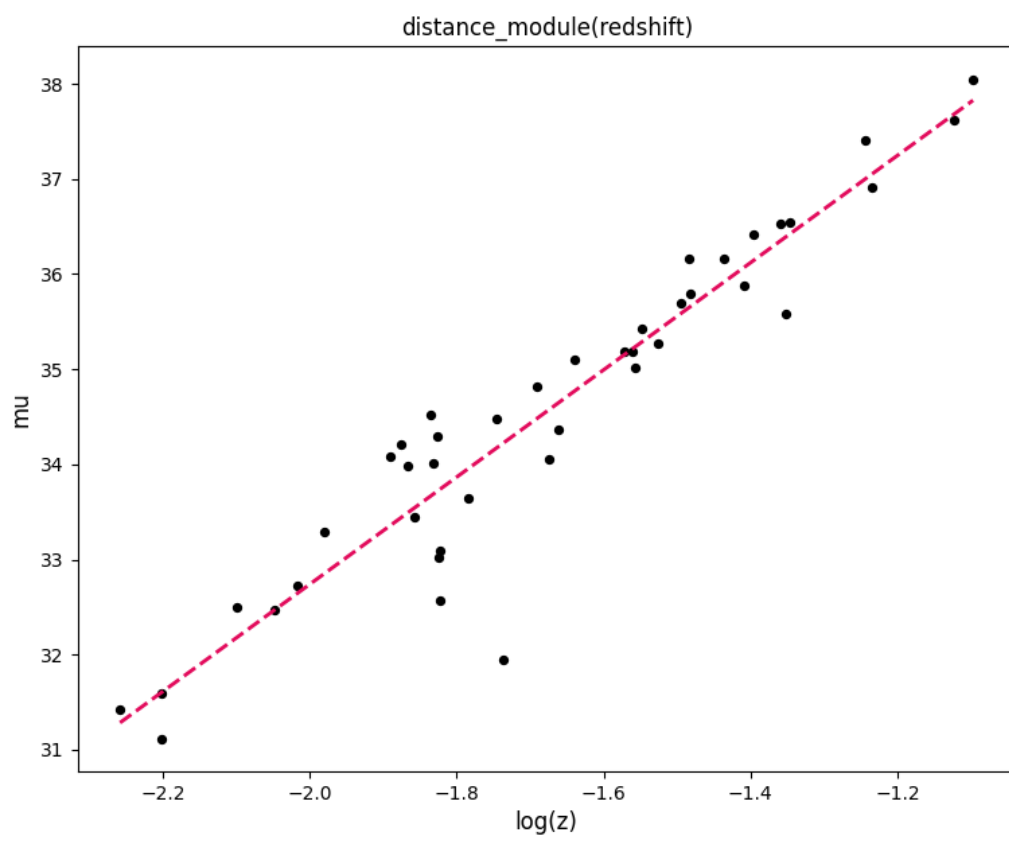


Figure 3: Modulo di distanza in funzione del redshift