Errori di misura

Il problema più antico di ogni scienziato, che deve operare la misurazione di grandezze scientifiche, è sapere a priori che, per quanto possa essere attento il suo operato, i risultati ottenuti saranno, inevitabilmente, affetti da un errore di misurazione.

L'errore è, per definizione, la differenza tra il valore vero e il valore misurato della grandezza in esame.

La consapevolezza di non riuscire mai a determinare il valore esatto della grandezza non deve scoraggiare chi opera la misura perché, se non annullarli, è possibile ridurre significativamente gli errori, applicando opportuni accorgimenti, sia da parte dell'operatore sia nella costruzione e nell'uso degli strumenti necessari alla misurazione.

Gli strumenti di misura possono essere distinti in base a molte loro caratteristiche, tra le quali vogliamo ricordare, in particolare:

- la **portata**, che rappresenta il massimo valore della grandezza che lo strumento può misurare;
- la **sensibilità**, che esprime, invece, il minimo valore della grandezza che lo strumento riesce ad apprezzare.

Gli strumenti solitamente più sensibili sono quelli di piccola portata, basti pensare alla differente sensibilità tra il bilancino di precisione di un farmacista, che ha una portata massima di pochi grammi, e la bilancia di un salumiere capace di misurare anche quantità superiori al kilogrammo.

Le possibilità di commettere un errore durante una misura sono molteplici, ed è necessario, quindi, incominciare a mettere un po' di ordine nella valutazione degli errori, riunendoli in due sole categorie fondamentali: errori **sistematici** ed errori **accidentali**.

Gli **errori sistematici** sono quelli che compaiono in ogni singola misura e possono essere:

1. **errori strumentali**, legati all'utilizzo di strumenti poco precisi (ogni strumento è contraddistinto da una classe che ne indica il grado di precisione), mal tarati o non adatti alla misura che si deve effettuare;
2. **errori soggettivi**, provocati dalla poca abilità o dalla negligenza dello sperimentatore, quali errori di lettura, di apprezzamento ecc.;
3. **errori ambientali**, determinati da fattori esterni come, per esempio, la presenza di fonti di calore, campi magnetici esterni ecc.

Proviamo a immaginare alcune situazioni tipiche che possono determinare errori sistematici durante una misurazione.

Se proviamo a misurare il tempo che impiega un corpo in caduta libera (per esempio una moneta) per raggiungere il suolo da una determinata altezza, fermando il cronometro al momento in cui percepiamo il tintinnio della moneta che tocca il suolo, commettiamo un errore, perché non teniamo conto del tempo che impiega il suono, prodotto dall'impatto, per raggiungere il nostro orecchio né il tempo di reazione (individuale) del soggetto che deve arrestare il cronometro.

Questa situazione determina un errore soggettivo perché dipendente da un errore di valutazione dello sperimentatore. È importante sapere che gli **errori sistematici influiscono sulla misurazione sempre nello stesso senso** e, solitamente, **per una stessa quantità**.

L'uso di uno strumento di scarsa precisione o poco tarato provoca un errore strumentale: se uno strumento misura valori maggiori rispetto a quelli veri, tale maggiorazione sarà la stessa per tutte le misure che effettueremo utilizzandolo. L'uso di strumenti di buona classe di precisione e sottoposti ad attente e frequenti operazioni di taratura permetterà di ridurre al massimo tali errori, che, però, non potranno mai essere eliminati completamente.

Gli **errori accidentali** (detti anche casuali) non si possono né prevedere né evitare e affliggono la misura con valori che possono risultare a volte minori e a volte maggiori di quelli reali. Questi errori possono essere provocati anche da **brevi e imprevedibili variazioni di fattori ambientali**, come la pressione, l'umidità o la temperatura dell'aria, di cui lo sperimentatore non ha tenuto conto durante l'esecuzione della misura.

Questo tipo di errore può influire sulla misura, a seconda dei casi, in un senso o nell'altro; esso **può essere ridotto al minimo ripetendo più volte la misura e facendo poi la media aritmetica** dei valori trovati. Se si usa uno strumento poco sensibile gli errori accidentali incidono solo molto marginalmente perché lo strumento non è in grado di rilevarli: una misurazione ripetuta più volte ci darebbe sempre lo stesso risultato. Se si usa uno strumento di buona classe di precisione, invece, nel caso di misurazioni ripetute, si rileverebbero valori sensibilmente diversi, a causa degli errori accidentali.

Le differenze tra le due tipologie di errori, sistematici e accidentali, introducono i concetti di **accuratezza** e di **precisione** della misura.

Una **misura** viene definita:
- **accurata**, quando la si effettua utilizzando strumenti idonei e in adatte condizioni ambientali;
- **precisa** se l'operatore può determinare l'incidenza degli errori, dai quali essa è affetta, o quando, ripetendo più volte la misura, i risultati ottenuti siano sostanzialmente concordanti, cioè differiscano in maniera irrilevante tra loro.

Da queste osservazioni emerge una considerazione: **non è detto che una misura precisa possa considerarsi sempre anche accurata**.

Gli errori assoluti

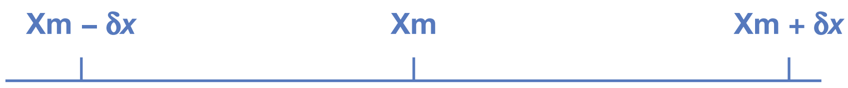
L'imprecisione di misura è una realtà non eliminabile: il modo più pratico per ridurre gli errori accidentali è quello di ripetere più volte la misura, ovviamente nelle stesse condizioni, e accettare come valore probabile la **media aritmetica** dei valori misurati. Tutte le misure, sia effettuate una sola volta sia quelle ripetute più volte, sono affette da incertezze, che chiameremo **errore assoluto** o **incertezza** assoluta della misura.

! **Per definizione, l'errore assoluto rappresenta la differenza tra il valore vero e il valore misurato della grandezza in esame.**

Ogni misura è quindi accompagnata da un **errore assoluto** δx, che può essere determinato e indicato assieme al valore della grandezza, come nella scrittura seguente:

$$X = Xm \pm \delta x$$

L'incertezza assoluta δx **viene espressa nella stessa unità di misura della grandezza** a cui si riferisce, e **individua un intervallo nel quale si troverà il valore vero della grandezza in esame**, che non è possibile però conoscere.



L'incertezza assoluta δx individua un intervallo $X = Xm \pm \delta x$ nel quale si troverà il valore vero X della grandezza in esame.

Per determinare l'incertezza assoluta dobbiamo distinguere due casi:

1. il valore misurato è stato ottenuto effettuando più volte la misura della grandezza con lo stesso strumento e **ottenendo sempre lo stesso risultato**: in questo caso, l'incertezza assoluta si considera uguale alla **sensibilità** dello strumento, che viene indicata, dal costruttore, tra i cosiddetti "dati di targa" presenti sullo strumento stesso;
2. la misura ripetuta più volte ha dato **risultati diversi**, in questo caso si assumono come valore della grandezza, la media **Xm** tra i valori trovati e come incertezza assoluta **δ*x***, la metà della differenza tra il valore massimo e il valore minimo, tra quelli misurati, che è detta **semidispersione massima o scarto medio**.

Proviamo a fare un esempio, immaginando di voler misurare la lunghezza del corridoio della nostra scuola, effettuando 10 misurazioni, che abbiamo cura di annotare in una apposita tabella:

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lunghezza (m)	15,2	15,0	15,1	15,2	15,3	15,0	15,2	15,4	15,5	15,1

La **media aritmetica m** dei valori verrà calcolata nel modo seguente:

$$m = (15{,}2 + 15{,}0 + 15{,}1 + 15{,}2 + 15{,}3 + 15{,}0 + 15{,}2 + 15{,}4 + 15{,}5 + 15{,}1)\ \text{m} : 10 = 15{,}2\ \text{m}$$

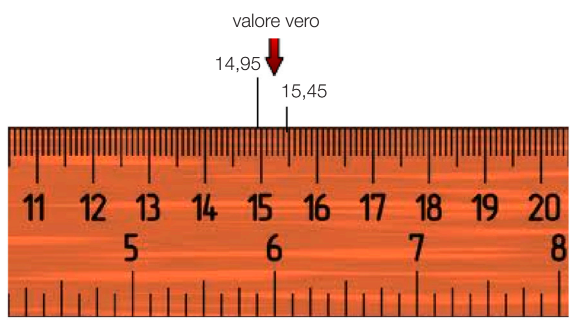
Per il calcolo dell'incertezza assoluta, in questo caso, dovremo fare la differenza tra valore massimo e valore minimo diviso per 2, determinando la **semidispersione massima** o **scarto medio**: questo valore potrà essere utilizzato come incertezza assoluta, se esso risulterà maggiore della sensibilità dello strumento usato:

$$(15{,}5 - 15{,}0)\ \text{m} : 2 = 0{,}25\ \text{m}$$

La lunghezza del nostro corridoio risulta essere:

$$l = (15{,}2 \pm 0{,}25)\ \text{m}$$

In questo caso il **valore vero** della misura sarà compreso nell'intervallo tra **14,95 m** e **15,45 m**.



Sia che la misura venga effettuata con una singola misurazione o che essa sia il risultato dell'elaborazione di più misure della grandezza in esame, **l'errore assoluto dipenderà, quasi completamente, dagli strumenti utilizzati e dal metodo con cui abbiamo effettuato la rilevazione della grandezza**.

Gli errori relativi

L'errore assoluto ci fornisce un'indicazione dell'intervallo in cui si troverà il valore reale della grandezza da misurare, indicando di quanto il valore reale può essere più grande o più piccolo del valore medio, ma non fornisce un giudizio definitivo sul nostro operato.

In primo luogo, l'errore che abbiamo calcolato è quello massimo e, soprattutto, nessuno ci può dire che sia stato effettivamente commesso e che, qualora l'avessimo commesso, esso non risulti più piccolo dell'errore assoluto, che esprime il massimo errore possibile.

In secondo luogo, bisogna stabilire se l'errore determinato possa considerarsi accettabile: se un errore di un centimetro sulla misura di una distanza di un kilometro indicherebbe una misura particolarmente precisa, lo stesso errore di un centimetro su una lunghezza di dieci centimetri indicherebbe che la misurazione è stata molto grossolana e approssimativa.

Per stabilire se l'errore commesso possa risultare accettabile, è necessario calcolare l'**errore relativo o incertezza relativa**, **che si indica con la lettera η** (eta) dell'alfabeto greco e si ottiene facendo il rapporto tra l'errore assoluto e il valore medio della grandezza, come nella seguente relazione:

errore relativo = errore assoluto/valore medio

e più sinteticamente dalla formula

$$\eta = \delta x \,/\, \bar{x}$$

dove δx è l'errore assoluto e $\bar{x}$ è la nostra "stima migliore", che nel caso di più misure della grandezza viene sostituita dal valore medio (media aritmetica).

L'errore relativo, calcolato dal rapporto di due valori con la stessa unità di misura, è un numero **adimensionale**, cioè privo di unità di misura, e viene solitamente espresso in forma percentuale, moltiplicandolo per 100.

Calcolando l'errore relativo possiamo stabilire la "qualità" della nostra misura e il grado di precisione con cui essa è stata determinata.

Se vogliamo, anche in questo caso, fare un esempio significativo, proviamo a calcolare l'incertezza relativa, nel caso ipotizzato in precedenza della misura delle due distanze, di 1 km e di 10 cm, per le quali, in entrambi i casi, supponiamo di aver commesso un errore assoluto di 1 cm.

Per operare il confronto sarà necessario esprimere entrambe le misure in cm e, quindi, operando l'opportuna equivalenza, risulterà:

$$1 \text{ km} = 100.000 \text{ cm}$$

La prima misura di 1 km sarà affetta da un'incertezza relativa o errore relativo η_1 pari a:

$$\eta_1 = 1 \text{ cm} / 100.000 \text{ cm} = 0{,}00001$$

cioè pari a un errore relativo dello 0,001%, se espresso in percentuale.

La seconda misura di 10 cm sarà affetta da un'incertezza relativa o errore relativo η_2 pari a:

$$\eta_2 = 1 \text{ cm}/10 \text{ cm} = 0{,}1$$

cioè pari a un errore relativo del 10%, se espresso in percentuale.

Dal confronto degli errori relativi risulta evidente l'enorme differenza nella precisione, con cui abbiamo effettuato le due misure: la prima può considerarsi eseguita con un grado eccellente di precisione, a differenza della seconda che è affetta da un errore eccessivo tale da non potersi considerare accettabile.

Se l'errore relativo commesso non è accettabile, si dovrà procedere a una nuova misurazione, ripartendo dall'inizio.

Per misure effettuate in un laboratorio scolastico si considerano accettabili quelle affette da un'incertezza relativa massima del 5%.

Sintesi degli argomenti di fisica trattati (parte uno)

La grandezza fisica è una proprietà dello spazio o della materia che può essere misurata.

Fare una misura vuol dire confrontare la grandezza fisica da misurare con l'unità di misura e contare quante volte è contenuta nella grandezza fisica.

Proprietà dell'unità di misura

1. deve essere il più possibile uguale per tutti
2. deve essere riproducibile
3. deve essere omogenea alla grandezza da misurare
4. non deve cambiare nel tempo

Grandezze omogenee e grandezze non omogenee:

Fra grandezze omogenee sono possibili tutte le operazioni

Fra grandezze non omogenee sono possibili solo moltiplicazione e divisione.

Moltiplicazione e divisione sono possibili in tutte le grandezze e danno come risultato una grandezza non omogenea a quella di partenza. Viceversa addizione, sottrazione e confronto sono possibili solo tra grandezze omogenee e danno come risultato una grandezza omogenea a quella di partenza.

Grandezze derivate e grandezze fondamentali

Si definisce grandezza derivata quella che si ottiene per mezzo di moltiplicazione e divisione tra grandezze fondamentali.

Si definisce fondamentale una grandezza che si può misurare direttamente con uno strumento. Le grandezze fondamentali sono 7, e sono contenute nel S.I.:

NOME	UNITA DI MISURA
LUNGHEZZA	METRO m
MASSA	KILOGRAMMO kg
TEMPO	SECONDO s
TEMPERATURA	KELVIN k
CORRENTE ELETTRICA	AMPERE A
INTENSITA' LUMINOSA	CANDELA cd
QUANTITA' DI SOSTANZA	MOLE mol

Errori accidentali ed errori sistematici

L'errore sistematico si ripete sempre uguale a se stesso, spesso è dovuto allo strumento e se si riconosce si può eliminare.

Gli errori accidentali, che cambiano ad ogni misurazione, sono dovuti al caso, non sono eliminabili ma si possono ridurre per mezzo della media.

Caratteristiche degli strumenti

La sensibilità: è la variazione minima che lo strumento è in grado di fornire.

La portata: è il massimo valore che lo strumento è in grado di fornire.

La precisione: è il rapporto tra la sensibilità e la portata

La prontezza: è il tempo di risposta dello strumento

Elaborazione dei dati presi nel corso di una misura

Per misurare una grandezza si esegue la misura un numero adeguato di volte e poi si calcolano la media e l'incertezza della misura, quest'ultima per mezzo della semidispersione o della deviazione standard (la formula di questa sarà inserita successivamente)

La media si calcola facendo la somma delle misure diviso il numero delle misure stesse.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n}$$

La semidispersione si calcola facendo la differenza fra valore massimo e valore minimo delle misure e dividendo per due.

$$\varepsilon_a = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Approssimazione

Approssimare un numero ad una certa cifra significa fermarsi a quella cifra senza modificarla, se è seguita da un numero inferiore a 5, e aumentandola di uno se il numero che la segue è maggiore uguale a 5

Esempi di approssimazione

34,764 approssimato alle seconda cifra decimale è 34,76, alla prima 34,8, all'unità 35.

Modalità per scrivere correttamente le misure:

1) approssimazione dell'errore alla prima cifra diversa da zero
2) approssimazione del valore medio alla cifra su cui si commette l'errore. Collocare il valore medio e l'errore separati dal ± all'interno della parentesi e all'esterno l'unità di misura.

Esempi di misura scritta in modo corretto

M = 0,98 Eas=0,077kg	(0,98 ± 0,08)kg	(20,00 ± 0,05)s
M=0,999 Eas=0,077kg	(1,00 ± 0,08)kg	(50,0 ± 0,5)s
t = 1,431 Eas=0,635s	(1,4 ± 0,6)s	(20 ± 1)·10 s

Notazione scientifica

La notazione scientifica serve per scrivere in modo compatto numeri molto grandi o molto piccoli.

Un numero in notazione scientifica è caratterizzato da un coefficiente moltiplicativo compreso fra uno e dieci per una potenza di dieci.

$$a \times 10^{n}$$

dove $1 \leq a < 10$

esempi di trasformazioni di numeri in notazione scientifica.

$400=4,0\cdot10^{2}$

$0,00075=7,5\cdot10^{-4}$

$3300=3,3\cdot10^{3}$

L'errore assoluto:

Esprime l'incertezza della misura (l'intervallo in cui ci si aspetta che si trovi la misura). Se si ha una sola misura l'errore da attribuire a questa è la sensibilità (che comunque è l'errore minimo possibile).Se si hanno poche misure l'errore assoluto si trova con la semidispersione.Se le misure sonno tante si usa la deviazione standard, nel calcolo della quale vengono considerate tutte le misure. Se la semidispersione o la deviazione standard sono più piccole della sensibilità l'errore è la sensibilità. L'errore assoluto ha la stessa unità di misura della grandezza.

Errore relativo:

rapporto tra errore assoluto e valore medio, è adimensionale (non ha unità di misura) e ha un importante significato, in quanto indica di quanto ci stiamo sbagliando rispetto alla misura. Questo significato emerge in maniera più chiara se lo moltiplichiamo per cento ottenendo l'errore percentuale (ossia: di quanto percentualmente sbagliamo rispetto alla misura)

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{X}}$$

Esempio di calcolo della media, della semidispersione, dell'errore relativo e percentuale e del risultato scritto correttamente:

(m ± 0,1)Kg
2,3
2,4
2,1
2,2

$$\overline{m} = \frac{2{,}3 + 2{,}4 + 2{,}1 + 2{,}2}{4} = 2{,}25Kg \cong 2{,}3Kg$$

$$\varepsilon_a = \frac{2{,}4 - 2{,}1}{2} = 0{,}15Kg \cong 0{,}2Kg$$

m=(2,3±0,2) Kg

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{m}} = \frac{0{,}15}{2{,}25} = 0{,}0\overline{6}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_r \cdot 100 \cong 7\ \%$$

Misure indirette

Applicando le regole per calcolare gli errori sulle misure indirette, si distinguono le grandezze che si calcolano per mezzo di somme e differenze(1) e grandezze che si calcolano con quoziente o prodotti (derivate)(2).

G = grandezza derivata a,b = grandezze da cui deriva

(1)

G=a+b G=a-b

L’errore assoluto si calcola facendo la somma degli errori assoluti

$\varepsilon_{aG}= \varepsilon_{aa}+ \varepsilon_{ab}$

(2)

G=a\b G=a*b

L’errore relativo si calcola facendo la somma degli errori relativi. Per tornare all’errore assoluto della grandezza derivata è sufficiente moltiplicare l’errore relativo per la grandezza stessa.

$\varepsilon_{aG}= (\varepsilon_{ra}+ \varepsilon_{rb})$

$\varepsilon_{aG}= (\varepsilon_{ra}+ \varepsilon_{rb})\times G$

Densità

E’ il rapporto tra massa e volume

$$d = \frac{m}{V}$$

$\varepsilon_{ad}= (\varepsilon_{rm}+ \varepsilon_{rV})\times d$

L’ordine di grandezza

L’ordine di grandezza di un numero è la potenza di dieci più vicina al numero stesso.

Osservazioni: se il coefficiente è inferiore a cinque, in notazione scientifica, la potenza di dieci è quella della notazione; se il coefficiente è maggiore di cinque la potenza di dieci è quella superiore alla data.

Esempi

$7,2\times10^{-5}$ o.g. è 10^{-4}

$2{,}5 \times 10^6$ o.g è 10^6

$8{,}6 \times 10^4$ o.g è 10^5

L'ordine di grandezza si può indicare con la semplice potenza di dieci.

Massa e peso

La massa è una proprietà intrinseca della materia (ed è una grandezza fondamentale con unità di misura il chilogrammo (Kg)) il peso è la forza (grandezza derivata che si misura in Newton (N)) di attrazione esercitata dalla terra (corpo dotato di massa) su un altro corpo (anch'esso dotato di massa); per chiarezza ripeto la definizione senza le parentesi che spiegano ma potrebbero confondere le idee: **la massa è una proprietà intrinseca della materia mentre il peso è la forza di attrazione esercitata dalla terra su un corpo dotato di massa.**

La formula del peso

$P = m \times g = mg$ (nelle formule di fisica si può omettere il simbolo di prodotto, è implicito quando le due lettere sono vicine)

dove m è la massa e g è l'accelerazione di gravità.

L'accelerazione di gravità sulla terra viene considerata circa costante (anche se non lo è) e pari a $9.81\ m/s^2$.
In generale, per la terra, come per ogni corpo dotato di massa, l'accelerazione varia secondo la seguente relazione

$$g = G\,\frac{M}{r^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale $6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$, mentre M è la massa del pianeta e R il suo raggio. Tutti i corpi sono dotati di massa e hanno un'accelerazione gravitazionale (quindi un campo gravitazionale) ma questo è evidente solo per i corpi di massa molto grande, a causa del valore estremamente piccolo della costante G. (n.b.: g, P, r sono grandezze vettoriali, è stata omessa la freccia che lo indica)

MISURAZIONE – ERRORI - INCERTEZZA

1. Che cos'è una misurazione *diretta*?
Si esegue una misurazione diretta quando la grandezza in esame viene confrontata direttamente con una grandezza ad essa omogenea scelta come unità di misura. Ad esempio, viene seguita una misurazione diretta quando si misura la lunghezza di un tavolo usando il metro campione.

2. Che cos'è una misurazione *indiretta*?
Si esegue una misurazione indiretta quando la grandezza in esame non viene misurata direttamente ma viene ricavata, mediante formule matematiche, dalla misura di altre grandezze dalle quali essa dipende. Ad esempio, se si vuole determinare l'area della superficie di un tavolo, si devono misurare prima la sua lunghezza b e la sua larghezza h e poi calcolare l'area attraverso la nota formula

$$A = b \cdot h$$

3. Che cos'è la *portata* o *fondo scala* di uno strumento?
La portata o fondo scala di uno strumento è il valore massimo che con esso si può misurare (eseguendo una sola operazione). Ad esempio, la portata di una comune squadretta da disegno è di 20 cm o 30 cm, dipende dalla squadretta; la portata di un metro da sarto è di 1,5 m; la portata di un orologio è di 12 ore; la portata di una bilancia da cucina è in genere 2 kg oppure 5 kg oppure 10 kg.

4. Cosa si intende per *sensibilità* di uno strumento?
La sensibilità di uno strumento è la più piccola unità di misura leggibile sulla sua scala. Ad esempio la sensibilità di un metro da sarto, piuttosto grossolana, è 1 cm, poiché non è necessario apprezzare i millimetri; la sensibilità di una squadretta è normalmente 1 mm; in alcune squadrette di precisione può anche essere 0.5 mm; la sensibilità di un calibro decimale (uno particolare strumento di misura delle lunghezze) è, come dice la parola stessa, 1/10 di millimetro; la sensibilità di un calibro centesimale (un altro strumento di misura delle lunghezze) è, come dice la parola stessa, 1/100 di millimetro; la sensibilità di un comune orologio col contasecondi è 1 s; la sensibilità di un cronometro di precisione è di 1/100 o di 1/1000 di secondo.

5. Che cosa si intende per *precisone* di uno strumento?
La precisione di uno strumento è la capacità di quello strumento di fornire sempre lo stesso risultato quando la misura viene ripetuta più volte..

6. Esistono misure prive di errore?
No, è assolutamente impossibile che una misura non sia affetta da errore. Poiché nelle misurazioni si commettono inevitabilmente degli errori, le misure delle grandezze fisiche sono sempre incerte, cioè non si può mai essere sicuri al 100% del loro valore esatto.

7. Di quali tipi sono gli errori che si commettono nelle misure?
Gli errori che si commettono nelle misure sono di due tipi:
a) sistematici
b) accidentali.

8. A cosa sono dovuti gli errori sistematici? Che caratteristiche presentano? Come si possono ridurre?
Gli errori sistematici sono dovuti alle inevitabili imperfezioni presenti negli strumenti di misura. Essi si presentano sempre nello stesso senso (cioè il valore misurato sarà sempre o più grande o sempre più piccolo di quello reale); ad esempio, un orologio che va indietro regolarmente fornisce misure del tempo affette da errore sistematico; infatti ogni misura di tempo sarà sempre minore del

valore vero; allo stesso modo, una squadretta "allungata" perché magari riposta su un termosifone per qualche motivo, fornirà sempre misure più lunghe del dovuto; una bilancia "starata" fornirà misure di massa sempre più leggere della realtà.
Gli errori sistematici si possono ridurre utilizzando strumenti *meno imperfetti* e *più precisi*. È importante considerare che gli strumenti molto precisi sono necessariamente anche molto costosi. (Si faccia attenzione al fatto che si è detto "meno imperfetti" e non "perfetti", poiché non esistono strumenti perfetti).

9. A cosa sono dovuti gli errori accidentali? Che caratteristiche presentano? Come si possono ridurre?

Gli errori accidentali dipendono da fattori casuali, che agiscono disordinatamente; essi sono commessi senza che il misuratore se ne accorga, presentandosi in modo imprevedibile e pertanto sono difficili da valutare. Essi non si presentano sempre nello stesso senso (i valori misurati possono indifferentemente essere maggiori o minori del valore vero). Spesso sono dovuti all'imperfezione imprevedibile degli strumenti e dei sensi (vista, tatto, udito) dello sperimentatore. Gli errori accidentali non sono riducibili cambiando gli strumenti di misura. Ad esempio, se volessimo far misurare con la stessa squadretta la lunghezza di uno stesso banco da 10 studenti diversi, di sicuro non otterremmo sempre lo stesso risultato.

10. Cosa si intende per incertezza assoluta di una misura?

L'incertezza assoluta di una misura è l'errore che si commette, in più o in meno, sul valore vero.
Quando si esegue un'unica misurazione di una grandezza fisica, l'incertezza si assume uguale alla sensibilità dello strumento utilizzato.
Se effettuo una misurazione di una lunghezza con il metro da sarto, l'incertezza sarà di ± 1cm; ciò significa che se la misura rilevata è 10 cm, il valore vero sarà compreso tra 10 – 1 = 9 cm e 10 + 1 = 11 cm:

$l = 10 \pm 1$ cm

Se misuro una lunghezza con il calibro decimale, l'incertezza sarà di ± 0,1 mm; ciò significa che se la misura rilevata è 125,4 mm, il valore vero sarà compreso tra 125,4 – 0,1 = 125,3 mm e 125,4 + 0,1 = 125,5 mm:

$l = 125{,}4 \pm 0{,}1$ mm

11. Cosa si intende per incertezza relativa di una misura?

Data una misura $m = x \pm i$, l'incertezza relativa di una misura è il rapporto tra l'incertezza assoluta i e il valore x della misura letto sullo strumento; in simboli:

$$i_r = \frac{i}{x}$$

L'incertezza relativa si può anche esprimere in termini percentuali, moltiplicando per 100 il valore di i_r.
L'incertezza relativa ci dà un'idea della precisione della misura: più essa è piccola e più precisa è la misura, più essa è grande e meno precisa è la misura.
Ad esempio, supponiamo di avere le misure di due diverse grandezze, come nella tabella seguente:

	valore assoluto	**incertezza assoluta**	**incertezza relativa**	**incertezza relativa percentuale**
1ª grandezza	1000 ± 1 m	1 m	$i_r = \frac{i}{x} = \frac{1m}{1000\,m} = 0{,}001$	$i_r\,(\%) = i_r \cdot 100 = 0{,}001 \cdot 100 = 0{,}1\%$
2ª grandezza	50 ± 0,5 m	0,5 m	$i_r = \frac{i}{x} = \frac{0{,}5\,m}{50\,m} = 0{,}01$	$i_r\,(\%) = i_r \cdot 100 = 0{,}01 \cdot 100 = 1\%$

Sembrerebbe che la seconda misura sia più precisa, poiché essa presenta un'incertezza assoluta più bassa, di mezzo metro invece che un metro. Ma nella prima misura l'errore di un metro è commesso su un valore di un chilometro (incertezza relativa percentuale 0,1 %), mentre nella seconda è vero che l'errore assoluto è inferiore, ma esso viene commesso su un valore di soli 50 metri (incertezza relativa percentuale dell'1 %). Si può concludere dicendo che la misura della prima grandezza è dieci volte più precisa della seconda.

12. Quando in Fisica si utilizza la media aritmetica nelle misurazioni?

La media aritmetica si utilizza in due casi nelle misurazioni:

a) quando una stessa persona misura più grandezze che in teoria dovrebbero essere tutte uguali, in pratica non otterrà sempre un unico valore.
b) quando più persone misurano la stessa grandezza con uno stesso strumento in teoria dovrebbero ottenere tutte il medesimo valore ma in realtà le misure non saranno mai tutte uguali, pur essendo molto vicine tra loro;

La media aritmetica serve proprio a produrre un unico valore attendibile della misura a partire dalla molteplicità di valori misurati (e diversi tra loro).

Se $\boldsymbol{n}$ è il numero delle misurazioni eseguite e $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ è l'insieme dei valori misurati, il valore più probabile della misura è la media aritmetica dei valori dati:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Sottolineiamo che <u>anche attraverso la media aritmetica di più misure il valore vero della misura è *inconoscibile*</u>, poiché ricordiamo che nessuna misura è esente da errore; attraverso l'operazione di media aritmetica l'errore si può ridurre ma mai eliminare completamente. <u>L'operazione di media aritmetica serve proprio a ridurre l'errore nella misura</u>.

13. Se una misura si ottiene con la media aritmetica di più valori, come si definisce l'incertezza?

Se la misura finale è ottenuta attraverso la media di circa dieci valori, allora come incertezza assoluta finale si può prendere la cosiddetta *semidispersione massima* δ, che si definisce come la metà della differenza tra il valore massimo e il valore minimo misurati:

$$incertezza\ assoluta = \delta = \frac{val_{massimo} - val_{\min imo}}{2}$$

Se invece la misura finale è ottenuta attraverso la media di più di dieci valori, allora per il calcolo dell'incertezza assoluta finale si utilizzano particolari parametri statistici come lo *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* σ, che si calcola con la seguente formula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_m)^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}}{n} - x_m^{\ 2}}$$

14. Una lunghezza è stata misurata da 10 persone diverse, con lo stesso strumento, ottenendo i seguenti valori: x_1 = 9,26; x_2 = 9,28; x_3 = 9,24; x_4 = 9,27; x_5 = 9,29; x_6 = 9,23; x_7 = 9,31; x_8 = 9,28; x_9 = 9,29; x_{10} = 9,25; si calcolino il valore medio e l'incertezza.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10}}{10} =$$
$$= \frac{9{,}26 + 9{,}28 + 9{,}24 + 9{,}27 + 9{,}29 + 9{,}23 + 9{,}31 + 9{,}28 + 9{,}29 + 9{,}25}{10} = 9{,}27$$

L'incertezza δ è: $\delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{9{,}31 - 9{,}23}{2} = 0{,}04$

Il valore finale della misura è: x = $x_m \pm \delta$ = 9,27 ± 0,04; questo significa che il valore della misura sarà compreso tra 9,23 e 9,31.

15. Come si calcola l'incertezza sulla somma o sulla differenza di misure?

L'incertezza assoluta sulla somma o sulla differenza è uguale alla somma delle incertezze assolute delle singole misure.

Ad esempio si voglia determinare il perimetro di un triangolo; è necessario misurare i singoli lati; il primo misuri 56 cm con un'incertezza di 1 mm, il secondo ed il terzo misurino 48 cm e 73 cm, con la stessa incertezza:

1° lato: 56 ± 0,1 cm
2° lato: 48 ± 0,1 cm
3° lato: 73 ± 0,1 cm

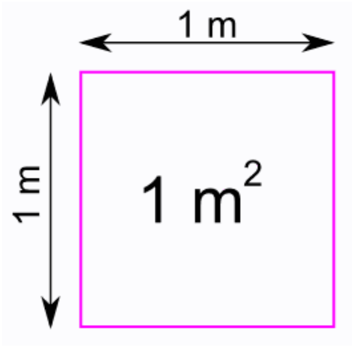
Il perimetro avrà per valore 56 + 48 + 73 = 177 cm e per incertezza la somma delle incertezze:
0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3 cm
Perimetro: 177 ± 0,3 cm.
Pertanto il perimetro avrà un valore compresa tra 176,7 e 177,3 cm.

AREA - VOLUME

16. Che cos'è l'Area? Qual è la sua unità di misura?
L'Area è una grandezza fisica derivata ottenuta dal prodotto della lunghezza per sé stessa:

$$Area = lunghezza \cdot lunghezza$$

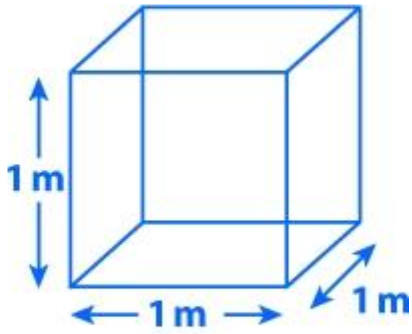
L'unità di misura dell'Area è il metro quadrato (m^2). Un metro quadrato è un quadrato con il lato di un metro.



17. Che cos'è il Volume? Qual è la sua unità di misura?
Il Volume, analogamente all'Area, è una grandezza fisica derivata ottenuta dal prodotto della lunghezza tre volte per sé stessa:

$$Volume = lunghezza \cdot lunghezza \cdot lunghezza$$

L'unità di misura del Volume è il metro cubo (m^3). Un metro cubo è un cubo con il lato di un metro.



LE INCERTEZZE E LA LORO PROPAGAZIONE NELLE MISURE INDIRETTE

1) COME SI SCRIVE IL RISULTATO DI UNA MISURA

Il modo migliore per esprimere il risultato di una misura è quello di dare, accanto ad esso, l'incertezza sperimentale associata seguita dall'unità di misura. In generale si scrive:

(1) $$G = \left(\overline{G} \pm \Delta G\right)\ \text{u}$$

Dove G è la grandezza da misurare, $\overline{G}$ (chiamato **valor medio**) è il valore numerico della misura (può essere ottenuto da una singola lettura o dalla media di diverse letture) e ΔG è l'**incertezza assoluta** sulla misura (ottenibile in diversi modi) e u è l'**unità di misura**.

Per esempio, il peso di una persona, espresso da (72,5 ± 0,5) kg sta ad indicare che la bilancia non ci ha permesso di apprezzare quantità più piccole di 0,5 kg e quindi che il peso della persona è compreso tra 72,0 kg e 73,0 kg; il lato di un cubo dato da (5,20 ± 0,05) cm sta ad indicare che nella misura c'è un'incertezza di 0,05 cm e cioè che esso è compreso tra 5,15 cm e 5,25 cm.

Se la misura della grandezza può essere ripetuta più volte il valor medio si ottiene dalla media delle misure e l'incertezza assoluta può essere ricavata in diversi modi. Il modo più semplice consiste nel fare la differenza tra il valore più grande e quello più piccolo delle misure, dividendo il risultato ottenuto per 2: $\Delta G = \dfrac{G_{MAX} - G_{MIN}}{2}$.

L'espressione (1) significa quindi che

$$\overline{G} - \Delta G < G < \overline{G} + \Delta G .$$

Rimane quindi definito un intervallo $\left(\overline{G} - \Delta G; \overline{G} + \Delta G\right)$ che viene chiamato **intervallo di confidenza** della misura (negli esempi dati sopra, per il peso della persona l'intervallo di confidenza è (72,0 kg; 73,0 kg), per il lato del cubo (5,15 cm; 5,25 cm)

Prendiamo in considerazione le misure (L_i) di una cattedra riportate nella tabella 1:

Tabella 1					
1	139,2 cm	10	139,4 cm	19	139,2 cm
2	139,2 cm	11	139,3 cm	20	149 cm
3	139,2 cm	12	139,4 cm	21	132 cm
4	139,2 cm	13	139 cm	22	139,2 cm
5	139,3 cm	14	139,2 cm	23	139,25 cm
6	139,2 cm	15	139,4 cm	24	149,2 cm
7	139,2 cm	16	139,6 cm	25	139,1 cm
8	139,4 cm	17	139,2 cm	26	139,2 cm
9	139,2 cm	18	139,3 cm	27	139,2 cm

Una prima analisi ci porta a dire che probabilmente i valori 132 cm, 149 cm e 149,2 cm sono errati (quasi sicuramente ci sono stati degli errori di lettura). Inoltre alcuni risultati sono stati espressi con una cifra decimale (ciò significa che nella misura si è apprezzato anche il millimetro) mentre altri sono dati solo come numeri interi (ciò significa che si sono apprezzati solo i centimetri); in questo non c'è nulla di male, ma visto che avevamo a disposizione uno strumento con una sensibilità di 1 mm, era il caso di esprimere il risultato con questa precisione.

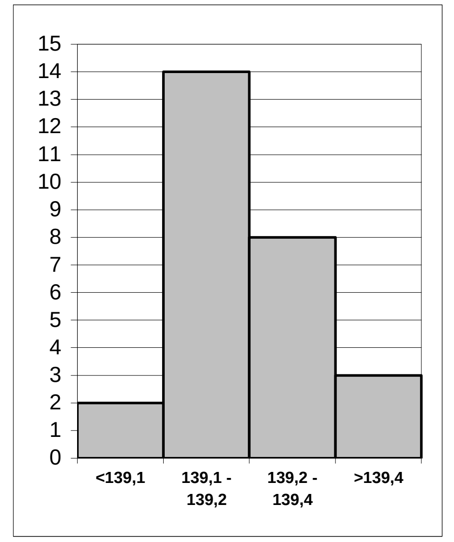


Figura 1 - Grafico dei valori delle misure della lunghezza della cattedra.

In base a quanto detto sopra possiamo quindi affermare che la misura della cattedra è L = (139,7±8,6) cm, dove il valor medio è

$$\overline{L} = \frac{139,2 + ... + 139,3 + ... + 139 + ... + 139,2}{27} = 139,7\text{cm}$$

e l'incertezza (errore) assoluta

$$\Delta L = \frac{L_{MAX} - L_{MIN}}{2} = \frac{149,2 - 132}{2} = 8,6\text{cm}.$$

Questo significa che in base alle misure fatte la lunghezza L della cattedra è compresa tra 131,1 cm e 148,3 cm:

$$131,1 \text{ cm} < L < 148,3 \text{ cm}.$$

È chiaro che il risultato non è molto soddisfacente, ma questo è quanto si ottiene dalle misure fatte. È perciò molto importante eseguire le misure correttamente. La presenza nella tabella di quei valori "strani", cioè di quelle misure che sono state fatte in maniera errata, ci porta ad un risultato non corretto. In generale non sempre è possibile accorgersi di misure errate e quindi bisogna fare più serie di misurazioni e fare poi la media dei valori ottenuti.

Diamo alcune regole per ottenre il risultato di una misurazione.

REGOLA 1:

In generale non è lecito effettuare una misura con un'incertezza inferiore alla sensibilità dello strumento[1].

Una buona riga da disegno può per esempio costituire un'eccezione; infatti è possibile stimare ad occhio (**interpolare**) un risultato più preciso come valore intermedio tra due incisioni successive che meglio approssima la lunghezza misurata. Per esempio, se in una misura si ritiene di poter apprezzare il mezzo millimetro, anche se la riga e graduata in millimetri, la misura si può esprimere ponendo (5,20 ± 0,05) cm. In questa misura lo zero che segue 5,2 sembrerebbe superfluo perché essendo a destra del punto decimale, non modifica il valore numerico. In verità, indicarlo esplicitamente ha un preciso significato sperimentale: rappresenta il fatto che la grandezza è conosciuta fino al limite permesso dalle incertezze, cioè, in questo caso, fino alla seconda cifra decimale (centesimi di centimetro).

REGOLA 2:

Il valor medio e l'incertezza di una misura devono essere scritti in maniera coerente; l'ultima cifra a destra del valor medio deve occupare la stessa posizione dell'ultima cifra a destra dell'incertezza.

È sbagliato scrivere (5,200 ± 0,05), perché l'ultimo zero a destra non avrebbe significato sperimentale.

[1] Per sensibilità di uno strumento intendiamo la più piccola misura che si può fare con quello strumento, per esempio il righello che generalmente utilizziamo ha una sensibilità di 1 mm, perché questa è la più piccola misura che possiamo fare con esso.

In un risultato vanno quindi indicate **tutte e sole** le cifre ottenibili dall'operazione di misura e che pertanto si chiamano **cifre significative**. Nella rappresentazione dei numeri, non sono significativi solo gli zeri che precedono una cifra diversa da zero: per esempio: 0,0023 è un numero con due cifre significative (2 e 3); 3,2050 è un numero con 5 cifre significative (3 – 2 – 0 – 5 – 0), per quanto detto sopra anche l'ultimo zero ha significato.

Chiameremo **misure dirette** quelle che si possono ricavare da un'unica lettura su di uno strumento (misure con righe, bilance, orologi, ecc.); **misure indirette** quelle che si ottengono combinando due o più misure dirette tramite operazioni matematiche.

Facciamo un esempio di misura indiretta. Supponiamo di voler sapere la velocità di un atleta che corre i 200 m. Per fare ciò è necessario procedere **calcolando** la velocità (che quindi è una misura indiretta) come rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo (che sono le misure dirette). Supponiamo di essere riusciti ad ottenere le seguenti misure: spazio $s = (200{,}0 \pm 0{,}1)$ m; tempo $t = (21{,}2 \pm 0{,}1)$ s. Una calcolatrice ci dà il seguente valore della velocità:

$$v = 9{,}433962264 \text{ m/s}$$

inoltre con regole che vedremo più avanti si calcola un errore pari a

$$\Delta v = 0{,}049216803 \text{ m/s}.$$

Negli esempi dati sopra l'**incertezza** di una misura è stata sempre data con una sola cifra; questo perché quello che interessa è semplicemente la valutazione di un limite superiore dell'incertezza, per cui **una sola cifra significativa** è sufficiente per fornire questa informazione. Ciò conduce quindi alla necessità di **arrotondare** il risultato del calcolo dell'incertezza Δv ad una sola cifra.

REGOLA 3:

Se in una approssimazione la cifra successiva a quella che si vuol mantenere è compresa tra 0 e 4 si arrotonda per difetto, se è compresa tra 5 e 9 si arrotonda per eccesso.

Nel nostro caso si ottiene

$$\Delta v = 0{,}05 \text{ m/s}$$

(se fosse stato $\Delta v = 0{,}043216803$ avremmo arrotondato a 0,04).

Per la REGOLA 3 non ha quindi senso esprimere la velocità con 9 cifre dopo la virgola; il modo migliore di esprimere il risultato è quindi:

$$v = (9{,}43 \pm 0{,}05) \text{ m/s}$$

Solo nel caso in cui la prima cifra dell'incertezza sia un 1 o un 2 conviene mantenere due cifre significative per evitare di introdurre approssimazioni troppo grandi. Infatti se ad esempio $\Delta x = 1{,}3$ arrotondare a $\Delta x = 1$ comporta un'approssimazione per difetto del 30%, davvero troppo grande.)

ESERCIZI

1) Le seguenti scritture rappresentano i risultati di misure indirette, calcolati con la loro incertezza e riportati così come vengono letti sul visore di una calcolatrice; poiché non tutte le cifre riportate sono significative, arrotondate opportunamente le incertezze e i risultati (in questo caso non vengono riportate le unità di misura perché non interessano).

(a) $(31{,}25 \pm 4{,}28906)$ (b) $(2{,}701 \pm 0{,}0583)$ (c) $(980{,}2 \pm 4{,}38)$
(d) (4268 ± 34) (e) $(12{,}2567 \pm 0{,}013578)$ (f) $(7{,}12\cdot10^{-19} \pm 3{,}6\cdot10^{-20})$
Risposte [(a) (31 ± 4); (b) $(2{,}70\pm0{,}06)$; (c) (980 ± 4); (d) (4270 ± 30); (e) $(12{,}257\pm0{,}014)$; (f) $(7{,}1\cdot10^{-19} \pm 0{,}4\cdot10^{-19})$]

2) Scrivete il numero corretto di cifre significative per la grandezza $x = 2{,}9289$ nel caso in cui l'incertezza, espressa nella stessa unità di misura, sia pari a:

(a) $\Delta x = 0{,}007$ (b) $\Delta x = 0{,}03$ (c) $\Delta x = 0{,}12$
Risposte [(a) 2,929; (b) 2,93; (c) 2,93]

2) PRECISIONE DI UNA MISURA

Abbiamo visto che il modo migliore per esprimere il risultato di una misura è quello di indicare accanto ad esso l'intervallo di incertezza sperimentale. Per esempio:

$$A = (100 \pm 1)\ \text{mm}$$

Il termine **intervallo** va inteso come **campo di escursione** entro il quale abbiamo fiducia che il risultato sia compreso. Inoltre esso non ha confini netti; in effetti quello che ci serve è una stima dell'ordine di grandezza dell'incertezza sperimentale. E' per questo che comunemente la si esprime con una sola cifra significativa.

Tale intervallo di indeterminazione viene chiamato **incertezza assoluta** ed ha le stesse dimensioni fisiche della grandezza a cui si riferisce.

E' chiaro che più piccole sono le incertezze sperimentali e migliore è la misura. Ma cosa si deve intendere per "piccolo"? Cioè rispetto a che cosa esse devono essere piccole? Per esempio è migliore la misura di A o quella di B = (1000 ± 1) km ?

Una prima osservazione ci dovrebbe portare a notare che B è espressa con 4 cifre significative mentre A solo con 3; inoltre la misura di A è incerta di 1 mm su 100 mm (o più semplicemente di 1 parte su 100) mentre B è incerta di 1 km su 1000 km (1 parte su 1000). Questo conduce al fatto che per valutare quale grandezza è più precisa tra A e B si deve effettuare il rapporto tra l'incertezza assoluta e il valore della grandezza.

Data quindi una grandezza $G = \left(\overline{G} \pm \Delta G\right)$ u, si chiama **incertezza relativa $E_r(G)$** il rapporto

$$E_r(G) = \frac{\Delta G}{\overline{G}}.$$

Nel linguaggio scientifico l'incertezza relativa viene quindi identificata con la **precisione di una misura**. Un modo comodo di esprime le incertezze relative consiste nel rapportarle a 100 ottenendo così le **incertezze percentuali $E_{\%}(G)$**.

$$E_{\%}(G) = E_r(G) \cdot 100$$

Nella misura della lunghezza della cattedra abbiamo ottenuto un'incertezza relativa $E_r(L) = \frac{8,6}{139,7}$ = 0,06, ossia un errore percentuale $E_{\%}(L) = E_r(L) \cdot 100 = 6\%$

ESEMPI:

$E_r(A) = 1/100 = 0,01 \quad E\%\ (A) = 0,01 \cdot 100 = 1\%$

$E_r(B) = 1/1000 = 0,001 \quad E\%\ (B) = 0,001 \cdot 100 = 0,1\%$

E' opportuno notare che l'incertezza relativa ci permette di stabilire qual è la più precisa tra una serie di misure anche di natura diversa, ma non ci permette di definire quando una misura sia **buona**, ovvero di stimare l'**attendibilità** della misura.

Per esempio se andiamo a vedere gli errori fatti nelle misurazioni della lunghezza della cattedra, osserviamo che il valore ottenuto nella maggior parte delle misure è 139,2 cm e tenendo conto della sensibilità dello strumento possiamo scrivere (139,2±0,1) cm. L'errore relativo è quindi 0,0007, il che significa un errore percentuale di 0,07%. Se andiamo a calcolare l'errore relativo anche della misura di 149,2 cm (con lo stesso errore assoluto di 0,1 cm) otteniamo lo stesso 0,0007 (approssimando come detto sopra). Abbiamo quindi una misura altrettanto precisa, ma parecchio diversa dal risultato generale e quindi non buona.

Un aspetto di cui bisogna tenere conto quando si vuol ottenere una buona misura è quello degli errori sistematici: bisogna eliminarli tutti. Non esiste però un metodo infallibile per operare ciò: l'unica possibilità è quella di misurare la stessa grandezza con metodi di natura diversa e di **confrontare** i risultati così ottenuti.

Si dice che una misura è **accurata** se l'analisi delle possibili incertezze **sistematiche** ha mostrato che esse sono irrilevanti rispetto alle incertezze **accidentali**.

3) STIMA DELLE INCERTEZZE NELLE MISURE INDIRETTE

Riassumiamo, senza dimostrazioni, le regole per valutare le incertezze nelle misure indirette.

REGOLA 4

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare la somma $s = a + b = \bar{s} \pm \Delta s$ **.**

Allora $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$ **e** $\Delta s = \Delta a + \Delta b$

ovvero il valore medio di una somma è uguale alla somma dei valori medi e l'incertezza assoluta è uguale alla somma delle incertezze assolute delle grandezze.

Ovviamente la regola si estende anche al caso in cui dobbiamo fare la somma di più di due grandezze che date con l'incertezza: il valor medio è la somma dei valori medi e l'incertezza è la somma delle incertezze.

REGOLA 5

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare la differenza $d = a - b = \bar{d} \pm \Delta d$ **.**

Allora $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ **e** $\Delta d = \Delta a + \Delta b$

ovvero il valore medio di una differenza è uguale alla differenza dei valori medi e l'incertezza assoluta è uguale alla somma delle incertezze assolute delle grandezze.

REGOLA 6

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare il prodotto $p = a \cdot b = \bar{p} \pm \Delta p$

Allora $\bar{p} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ **e** $E_r(p) = E_r(a) + E_r(b)$

ovvero il valore medio di un prodotto è uguale al prodotto dei valori medi e l'incertezza relativa è uguale alla somma delle incertezze relative delle grandezze; l'incertezza assoluta è data da:

$$\Delta p = E_r(p) \cdot \bar{p}$$

Nel caso del prodotto di due numeri con incertezza l'espressione dell'incertezza può essere scritta anche nella forma:

$$\Delta p = \bar{b} \cdot \Delta a + \bar{a} \cdot \Delta b$$

infatti:

$$\Delta p = E_r(p) \cdot \bar{p} = \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right) \cdot \left(\bar{a} \cdot \bar{b} \right) = \frac{\Delta a}{\cancel{\bar{a}}} \cdot \left(\cancel{\bar{a}} \cdot \bar{b} \right) + \frac{\Delta b}{\cancel{\bar{b}}} \cdot \left(\bar{a} \cdot \cancel{\bar{b}} \right) = \bar{b} \cdot \Delta a + \bar{a} \cdot \Delta b$$

REGOLA 7

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare il quoziente $q = \dfrac{a}{b} = \bar{q} \pm \Delta q$ **.**

Allora $\bar{q} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ **e** $E_r(q) = E_r(a) + E_r(b)$

ovvero il valore medio di un quoziente è uguale al quoziente dei valori medi e l'incertezza relativa è uguale alla somma delle incertezze relative delle grandezze; l'incertezza assoluta è data da:

$$\Delta q = E_r(q) \cdot \bar{q}$$

REGOLA 8

Se a è una grandezza espressa con la sua incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a$$

e n è un numero esatto e si vuol calcolare il prodotto tra n ed a $p = n \cdot a = \bar{p} \pm \Delta p$.

Allora $\bar{p} = n \cdot \bar{a}$ **e** $\Delta p = n \cdot \Delta a$

ovvero il valore medio del prodotto di un numero esatto per una grandezza con incertezza è dato del prodotto del numero esatto per il valore medio della grandezza e l'incertezza assoluta è data dal prodotto del numero esatto per l'incertezza assoluta della grandezza.

Si ha quindi:

$$n \cdot a = n \cdot \left(\bar{a} \pm \Delta a\right) = n \cdot \bar{a} \pm n \cdot \Delta a$$

REGOLA 9

Se a è una grandezza espressa con la sua incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a$$

e n è un numero esatto e si vuol calcolare la potenza n-esima di a $p = a^n = \bar{p} \pm \Delta p$.

Allora $\bar{p} = \bar{a}^n$ **e** $E_r(p) = n \cdot E_r(a)$

ovvero il valore medio di una potenza è uguale alla potenza del valore medio e l'incertezza relativa è data dal prodotto dell'esponente per l'incertezza relativa sulla base.

$$\Delta p = E_r(p) \cdot \bar{p}$$

Si può dimostrare che $\Delta p = n \cdot \left(\bar{a}\right)^{n-1} \cdot \Delta a$; infatti $\Delta p = E_r(p) \cdot \bar{p} = n \cdot E_r(a) \cdot \bar{p} = n \cdot \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot \bar{a}^n$ da cui semplificando si ottiene il risultato.

REGOLA 10

Se a è una grandezza espressa con la sua incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a$$

e si vuol calcolare la radice n-esima di a $r = \sqrt[n]{a} = \bar{r} \pm \Delta r$.

Allora $\bar{r} = \sqrt[n]{\bar{a}}$ **e** $E_r(r) = \frac{1}{n} E_r(a)$

ovvero il valore medio di una radice è uguale alla radice del valore medio e l'incertezza relativa è data dal rapporto tra l'incertezza relativa al radicando e l'indice della radice.

$$\Delta r = E_r(r) \cdot \bar{r}$$

ESEMPI:

---

1) Supponiamo di voler calcolare la somma L di due lunghezze x = (4,00 ± 0,05) mm e y = (1,08 ± 0,01) mm. Dapprima calcoliamo $\bar{L}$:

$$\bar{L} = \bar{x} + \bar{y} = (4{,}00 + 1{,}08)\ \text{mm} = 5{,}08\ \text{mm}$$

Calcoliamo poi ΔL secondo la REGOLA 4

$$\Delta L = \Delta x + \Delta y = (0{,}05 + 0{,}01)\ \text{mm} = 0{,}06\ \text{mm}.$$

Il risultato è quindi:

$$L = (5{,}08 \pm 0{,}06)\ \text{mm}.$$

2) Si voglia calcolare il peso netto p del materiale contenuto in una cassa. Il peso lordo P e la tara t sono stati misurati direttamente: P = (25,5 ± 0,5) kg, t = (1,2 ± 0,1) kg.
Calcoliamo $\overline{p}$:

$$\overline{p} = \overline{P} + \overline{t} = (25{,}5 - 1{,}2)\ \text{kg} = 24{,}3\ \text{kg}.$$

Calcoliamo Δp secondo la REGOLA 5

$$\Delta p = \Delta P + \Delta t = (0{,}5 + 0{,}1)\ \text{kg} = 0{,}6\ \text{kg}.$$

Il risultato è quindi:

$$p = (24{,}3 \pm 0{,}6)\ \text{kg}.$$

3) Si voglia calcolare l'area A della superficie di tavolo le cui dimensioni sono: a=(125,5±0,1)cm, b=(80,2±0,1)cm.
Calcoliamo $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \overline{a} \cdot \overline{b} = (125{,}5 \cdot 80{,}2)\ \text{cm}^2 = 10.065{,}1\ \text{cm}^2.$$

Calcoliamo $E_r(A)$ secondo la REGOLA 6

$$E_r(A) = E_r(a) + E_r(b) = 0{,}1/125{,}5 + 0{,}1/80{,}2 = 0{,}00204$$

e quindi l'incertezza assoluta ΔA:

$$\Delta A = Er(A) \cdot \overline{A} = (0{,}00204 \cdot 10065{,}1)\ \text{cm}^2 = 20{,}5328\ \text{cm}^2 \approx 21\ \text{cm}^2.$$

Utilizzando la regola rapida

$$\Delta A = \overline{a} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta a = (125{,}5 \cdot 0{,}1 + 80{,}2 \cdot 0{,}1)\ \text{cm}^2 = 20{,}57\ \text{cm}^2 \approx 21\ \text{cm}^2.$$

Il risultato è quindi:

$$A = (10.065 \pm 21)\ \text{cm}^2 = (100{,}65 \pm 0{,}21)\ \text{dm}^2\ .$$

4) Si voglia calcolare la velocità v dell'esempio riportato nel paragrafo 1. Lo spazio è s = (200,0 ± 0,1) m e il tempo t = (21,2 ± 0,1) s.
Calcoliamo $\overline{v}$:

$$\overline{v} = \frac{\overline{s}}{\overline{t}} = \frac{200{,}0}{21{,}2} m/s = 9{,}433962 m/s$$

(per ora lasciamo un discreto numero di cifre decimali).
Calcoliamo $E_r(v)$ secondo la REGOLA 7

$$E_r(v) = E_r(s) + E_r(t) = 0{,}1/200{,}0 + 0{,}1/21{,}2 \approx 0{,}00522$$

e quindi l'incertezza assoluta Δv:

$$\Delta v = E_r(v) \cdot \overline{v} = 0{,}00522 \cdot 9{,}433962\ \text{m/s} = 0{,}0492\ldots\ \text{m/s} \approx 0{,}05\ \text{m/s}.$$

Il risultato è:

$$v = (9{,}43 \pm 0{,}05)\ \text{m/s}.$$

5) Si voglia calcolare il perimetro p di un quadrato di lato l = (12,5 ± 0,1) cm. Per la regola 8 si ha:

$$p = 4 \cdot (12{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{cm} = [(4 \cdot 12{,}5) \pm (4 \cdot 0{,}1)]\ \text{cm} = (50{,}0 \pm 0{,}4)\ \text{cm}.$$

6) Si voglia calcolare il volume V di un cubo di lato l = (3,5 ± 0,1) cm. Calcoliamo $\overline{V}$:

$$\overline{V} = \overline{l}^3 = 3{,}5^3\ \text{cm}^3 = 42{,}875\ \text{cm}^3.$$

Calcoliamo $E_r(V)$ secondo la REGOLA 9

$$E_r(V) = 3 \cdot E_r(l) = 3 \cdot 0{,}1/3{,}5 \approx 0{,}0857$$

e quindi l'incertezza assoluta ΔV:

$$\Delta V = E_r(V) \cdot \overline{V} = 0{,}0857 \cdot 42{,}875\ \text{cm}^3 = 3{,}674\ldots\ \text{cm}^3 \approx 4\ \text{cm}^3.$$

Utilizzando la regola rapida:

$$\Delta V = 3 \cdot \overline{l}^2 \cdot \Delta l = 3 \cdot (3{,}5)^2 \cdot 0{,}1 = 3{,}675\ \text{cm}^3 \approx 4\ \text{cm}^3$$

Il risultato è:

$$V = (43 \pm 4)\text{cm}^3.$$

7) Si voglia calcolare il lato l di un quadrato la cui area A è data da A = (326 ± 1) cm^2. Calcoliamo $\bar{l}$:

$$\bar{l} = \sqrt{\bar{A}} = \sqrt{326}\ \text{cm} \approx 18{,}05547\ \text{cm}.$$

Calcoliamo $E_r(l)$ secondo la REGOLA 10

$$E_r(l) = E_r(A)/2 = (1/326)/2 \approx 0{,}0015337$$

e quindi l'incertezza assoluta Δl:

$$\Delta l = E_r(l)\cdot l = 0{,}0015337\cdot 18{,}055\ \text{cm} = 0{,}02769\ldots\ \text{cm} \approx 0{,}028\ \text{cm}.$$

Il risultato è:

$$l = (18{,}055 \pm 0{,}028)\ \text{cm}.$$

8) Se si vuol calcolare la lunghezza di una circonferenza di diametro d = (12,4 ± 0,1) cm, dobbiamo utilizzare la formula: $C = 2\pi r$ ovvero $C = \pi d$. Si deve quindi moltiplicare un numero con incertezza (d) per π che è anch'esso approssimato (si ricordi che π è un numero con infinite cifre dopo la virgola[2] e quindi per forza di cose lo dobbiamo approssimare). In genere si prende π = 3,14 assumendo quindi che la seconda cifra decimale è quella che contiene l'incertezza, sarebbe più corretto prendere π = (3,14 ± 0,01). Dovendo fare un prodotto, ci serve conoscere le incertezze relative; in questo caso $E_r(d) = 0{,}1/12{,}4 \approx 0{,}00806$ e $E_r(\pi) = 0{,}01/3{,}14 \approx 0{,}00318$. Si ha $\bar{C} = \pi\cdot\bar{d}$ = 38,936 cm.
$E_r(C) = E_r(d) + E_r(\pi) = 0{,}00806 + 0{,}00318 = 0{,}01124$ e quindi $\Delta C = E_r(C)\cdot\bar{C} = 0{,}01124\cdot 38{,}936$ cm = 0,437... cm ≈ 0,4 cm. Segue che C = (38,9 ± 0,4) cm.
Si osservi però che se prendiamo π con tre cifre decimali π = (3,142 ± 0,001), allora $E_r(\pi) = 0{,}001/3{,}142 \approx 0{,}000318$, $E_r(C) = E_r(d) + E_r(\pi) = 0{,}00806 + 0{,}000318 = 0{,}008378$, $\bar{C} = \pi\cdot\bar{d}$ = 38,9608 cm, $\Delta C = E_r(C)\cdot\bar{C} = 0{,}008378\cdot 38{,}9608 \approx 0{,}3$ cm e quindi C = (39,0 ± 0,3) cm che è senz'altro più preciso del valore precedente.
Le cose migliorano ulteriormente se si prende π con ancor più cifre dopo la virgola. La regola pratica è che se prendiamo π con tutte le cifre che ci dà la calcolatrice (in genere sono 9 cifre dopo la virgola, π = 3,141592654) l'errore relativo è talmente piccolo che π può essere considerato un numero esatto e quindi nei calcoli utilizzare la regola 8.
Nel nostro caso: $C = \pi d = \pi(12{,}4 \pm 0{,}1) = (38{,}9557489 \pm 0{,}314159265)$ cm ≈ (39,0 ± 0,3) cm.

La stessa cosa vale per $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ecc. che come π sono epressi con un numero infinito di cifre dopo la virgola.

ESERCIZI

3) Sono date le misure delle seguenti grandezze:
a = (30 ± 1) b = (20 ± 1) c = (13 ± 1) d = (1,2 ± 0,1) e = (16 ± 1)
Per ognuna di esse calcolare incertezza relativa e percentuale. Quale è più precisa? [R. $E_r(a)$ = 0,03 $E_\%(a)$ = 3%; $E_r(b)$ = 0,05 $E_\%(b)$ = 5%; $E_r(c)$ = 0,08 $E_\%(c)$ = 8%; $E_r(d)$ = 0,08 $E_\%(d)$ = 8%; $E_r(e)$ = 0,06 $E_\%(e)$ = 6%; a]

4) Utilizzando le regole date sopra, calcolate i valori delle grandezze:

a + b + c	a + b − c	a/d
(a - b)/d	3a	a/4
$\frac{e\cdot a}{d}$	$\frac{a^2}{(b+c)}$	$\sqrt{\frac{d\cdot(a-e)}{b-c}}$

(a, b, c, d, e sono le misure date nell'esercizio 3)

5) Calcolare incertezza relativa e percentuale nelle seguenti operazioni:
(35,2 ± 0,2)·(48,1 ± 0,3) (3,25 ± 0,01)·(17,2 ± 0,2) (428 ± 1)·(37,4 ± 0,3) [R. (1693 ± 20)= (1,693 ± 0,020) ·10^3 ; (55,9 ± 0,8); (16000 ± 170)=(16,00 ± 0,17) ·10^3]

[2] π con cinquanta cifre dopo la virgola è 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

6) Usando le regole date sopra calcolate
(a) (6 ± 1) + 2(10 ± 2) - (30 ± 3)/3 (b) (6 ± 1)·(10 ± 2)
(c) (6 ± 1) / (30 ± 1) (d) $(10 \pm 1)^2$
[R. (a) (16 ± 6); (b) (60 ± 22); (c) (0,20 ± 0,04); (d) (100 ± 20)]

7) Sapendo che l = (7,8 ± 0,1) cm, determinare, con le loro incertezze: l^2, l^3, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{l^2}$, $\frac{1}{l^3}$, $\sqrt{l}$.

8) Il diametro di una sferetta misura d = (17,00 ± 0,01) mm. Calcolate, con la relativa incertezza, l'area della superficie ($A = 4\pi r^2$) e il volume ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$, ma ricordano che r = d/2 si può anche scrivere $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{\pi}{6}d^3$). [R. A = (907,9 ± 1,1)mm^2; V = (2572 ± 5)mm^3]

9) Siano a = (73 ± 3) e b = (3,2 ± 0,1) le misure di due grandezze. Calcolate a + b e a - b. Cosa potete dire sulle incertezze di a + b e di a - b? [R. a + b = (76 ± 3); a - b = (70 ± 3)]

10) Calcolate $G = \frac{2(x+y)}{xy}$ e la relativa incertezza, dove x = (70 ± 2) e y = (143 ± 1). [R. 0,0426 ± 0,0021]

11) Sono date le misure di tre grandezze: x = (32,5 ± 0,3), y = (70,0 ± 0,1), z = (52,3 ± 0,7). Calcolate la grandezza $G = \frac{(3x+2y)}{z^2}$ con la sua incertezza. [R. 0,0868 ± 0,0026]

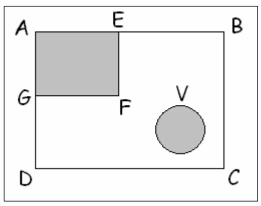
12) Calcolare il perimetro di un rettangolo i cui lati sono x = (4,00 ± 0,05) cm e y = (1,08 ± 0,01) cm. [R. (10,16 ± 0,12) cm]

13) Calcolare il peso netto p del materiale contenuto in una cassa sapendo che il peso lordo P e la tara t sono stati misurati direttamente e che P = (25,5 ± 0,1) kg, t = (1,2 ± 0,1) kg. [R. (24,3 ± 02) kg]

14) Calcolare l'area A della superficie del rettangolo di cui all'esercizio 12). [R. (4,32 ± 0,09) cm^2]

15) Calcolare l'area A della superficie di un cerchio di raggio r = (12,5 ± 0,1) cm. [R. (491 ± 8) cm^2]

16) Nella figura il rettangolo ABCD rappresenta un giardino nel quale è presente un'aiuola (il rettangolo AEFG) e una vasca V. E' noto che AB = (7,3 ± 0,1) m, BC = (5,6 ± 0,1) m, AE = (2,8 ± 0,1) m, AG = (3,7 ± 0,1) m e che la vasca ha un diametro d = (1,8 ± 0,1) m. Si calcoli la superficie calpestabile del giardino.



17) Un barattolo ha il diametro di base di D = (7,2 ± 0,2) cm ed è alto h = (12,5 ± 0,1) cm. In esso vengono immessi 175 pallini di piombo aventi diametro d = (3,0 ± 0,2) mm. Calcolare il volume che rimane libero. (Si ricordi che il volume del cilindro è dato da: $V_C = \pi r^2 h$. Se il problema assegna il valore del diametro, per evitare di introdurre ulteriori errori ricavando il raggio si possono utilizzare le seguenti formule: $V_C = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4}d^2 h$ e $V_S = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{\pi}{6}d^3$)