

# Foglio di esercizi

## Errori di misura: stima e propagazione

Alessio Del Vigna

25 giugno 2022

### 1 Stima dell'errore assoluto

**Esercizio 1.** Una persona esegue tre misure di lunghezza ottenendo i valori 45.6 cm, 45.3 cm e 45.6 cm.

- (a) Qual è la sensibilità dello strumento di misura utilizzato?
- (b) Determinare una singola misura come risultato delle tre, usando il metodo più appropriato e spiegando il procedimento seguito.
- (c) Calcolare l'errore relativo percentuale della misura ottenuta al punto precedente.

[(a) 0.1 cm, (b)  $l = (45.5 \pm 0.2)$  cm, (c)  $\varepsilon_r = 0.44\%$ ]

**Esercizio 2.** Due gruppi di studenti misurano in modo diverso il volume di un parallelepipedo. Le misure ottenute dai due gruppi sono queste:

$$V_1 = (19.2 \pm 0.4) \text{ cm}^3 \quad \text{e} \quad V_2 = (18.9 \pm 0.2) \text{ cm}^3.$$

Raffigurare gli intervalli di errore delle due misure. Le due misure sono fra loro compatibili? Giustificare opportunamente la risposta.

[Le due misure sono compatibili]

**Esercizio 3.** Dieci persone munite di cronometro misurano il tempo di caduta di un oggetto. I valori determinati sono i seguenti:

1.21 s, 1.23 s, 1.30 s, 1.22 s, 1.23 s, 1.26 s, 1.27 s, 1.21 s, 1.22 s, 1.21 s.

Determinare una singola misura come risultato delle dieci, usando il metodo più appropriato e spiegando il procedimento seguito.

[ $t = (1.24 \pm 0.01)$  s, con l'errore statistico]

## 2 Propagazione degli errori di misura

**Esercizio 4.** Si consideri un cerchio di raggio  $r = (4.78 \pm 0.01)$  m. Calcolare l'area del cerchio.

$$[A = (71.8 \pm 0.3)\text{m}^2]$$

**Esercizio 5.** Si prende un cilindro graduato di portata 100 mL e sensibilità 1 mL. La massa del cilindro vuoto misurata con una bilancia è  $m_1 = (103.2 \pm 0.1)$  g. Si prende un liquido incognito e si riempie il cilindro fino al massimo possibile. La massa del cilindro pieno è  $m_2 = (194.2 \pm 0.1)$  g.

- (a) Determinare la massa di liquido usata per riempire il cilindro.
- (b) Calcolare la densità del liquido incognito.
- (c) Si ha a disposizione una tabella che riporta la densità di alcuni liquidi. In particolare si hanno la densità dell'acqua,  $d_{acqua} = 1$  g/cm<sup>3</sup>, quella dell'alcool etilico,  $d_{alcool} = 0.806$  g/cm<sup>3</sup>, e quella dell'olio d'oliva,  $d_{olio} = 0.92$  g/cm<sup>3</sup>. La densità calcolata al punto precedente è compatibile con qualcuno di questi valori? Si può ipotizzare quale sia il liquido incognito utilizzato?

$$[(a) m = (91.0 \pm 0.2) \text{ g}, (b) d = (0.91 \pm 0.01) \text{ g/cm}^3, (c) \text{ Compatibile con olio d'oliva}]$$

**Esercizio 6.** Si consideri un cilindro di diametro di base  $d = (8.6 \pm 0.1)$  cm e di altezza  $h = (15.2 \pm 0.1)$  cm. Calcolare il volume del cilindro.

$$[V = (883 \pm 26) \text{ cm}^3]$$

**Esercizio 7.** Un pendolo ha un periodo di oscillazione  $T$  (tempo per compiere un'oscillazione completa) dato dalla relazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

dove  $\ell$  è la lunghezza del filo del pendolo e  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> è l'accelerazione di gravità. Se un pendolo ha una lunghezza  $\ell = (12.3 \pm 0.1)$  cm si calcoli il suo periodo.

$$[T = (0.704 \pm 0.003) \text{ s}]$$

## ESERCIZI SU MISURE DIRETTE E INDIRETTE DI GRANDEZZE FISICHE e SERIE di MISURE

**Esercizio 1:** Nove misure diverse della larghezza della cattedra forniscono la seguente serie di risultati: 1.21 m, 1.23 m, 1.20 m, 1.20 m, 1.19 m, 1.24 m, 1.22 m, 1.21 m, 1.21 m. Si determinino la migliore stima per l'esito della misura, l'errore assoluto, l'errore relativo.

**Esercizio 2 :** Supponiamo di aver effettuato le misure di due lunghezze e di aver ottenuto come risultato  $a = (21.3 \pm 0.4)$  m e  $b = (19.61 \pm 0.06)$  m. Usando le regole di propagazione degli errori si calcolino  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a \cdot b$ ,  $a : b$ .

**Esercizio 3 :** Sei fisici dotati di un cronometro misurano il tempo di caduta di un oggetto da una certa altezza e trovano i seguenti risultati: 3.04 s, 2.95 s, 3.01 s, 3.02 s, 2.97 s, 3.04 s. Stabilisci la miglior stima nella misura del tempo di caduta, l'errore assoluto e relativo commesso.

**Esercizio 4 :** Scrivere in forma corretta i risultati seguenti:

- a.  $(87.34067 \pm 0.0932)$  m<sup>2</sup> .....
- b.  $(32.123 \pm 1.2)$  m/s .....
- c.  $(0.00003540 \pm 0.00000275)$  s .....
- d.  $(7.34 \cdot 10^{22} \pm 6.56 \cdot 10^{21})$  kg .....

**Esercizio 5 :** Siano date le seguenti misure in metri di una lunghezza L, eseguite ripetutamente nelle stesse condizioni con uno strumento di grande accuratezza:

17.03	15.92	18.16	19.29	15.86
17.65	17.56	18.41	13.55	16.81

- a) Quali sono il valor medio e la deviazione standard della misura di L ?
- b) Qual è l'errore relativo della misura di L ?
- c) Scrivi la misura di L con l'incertezza in modo corretto.

**Esercizio 6 :** Siano date le seguenti misure in secondi del tempo di caduta t di un oggetto da una certa altezza. Le misure sono eseguite ripetutamente nelle stesse condizioni con uno strumento di al decimo di secondo :

6.0	6.0	5.9	6.0	6.2	6.9	6.6	6.0	5.5	5.7
6.0	6.4	6.8	5.7	5.7	6.3	6.0	6.7	6.5	5.8
5.6	6.8	6.9	5.6	6.9	5.5	6.5	6.4	6.2	5.5

Calcolare l'incertezza della misura di t.  
Calcolare l'errore relativo della misura di t .  
Scrivi la misura di t con l'incertezza in modo corretto.

**Esercizio 8 :** La misura della lunghezza dei tre lati di un triangolo fornisce il risultato:  $a = (17.3 \pm 0.2)$  cm,  $b = (11.25 \pm 0.08)$  cm,  $c = (14.48 \pm 0.06)$  cm. Si determini la lunghezza del perimetro e l'errore nella misura del perimetro

**Esercizio 9 :** Misurare l'area e il perimetro di un triangolo partendo dalle misure dirette della base  $b = (2.5 \pm 0.1)$  m e dell'altezza  $h = (4.0 \pm 0.1)$  m.

**Esercizio 10 :** Misurare l'area e il 2p di un cerchio conoscendo il suo raggio  $r = (6.7 \pm 0.1)$  cm

**Esercizio 11 :** Calcola volume e superficie totale dei seguenti solidi ponendo  $a = (23 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm})$ ,  $b = (55 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm})$ ,  $c = (8 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm})$ ,  $r = (12 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm})$ ,  $d = (14 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm})$ .

Cubo di lato b  
Parallelepipedo di lati a, b, c  
Cilindro di raggio r e altezza d  
Sfera di raggio r  
Cubo di lato b  
Cono di raggio r e altezza d

## ESERCIZI SULLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

(In ognuno degli esercizi è sottinteso che si debbano sempre calcolare errore assoluto, relativo e percentuale)

- 1) Misurando le dimensioni di una stanza si trovano i seguenti valori: altezza 3 m ( $E_{\%} = 2\%$ ), larghezza 4 m ( $E_R = 0,01$ ), lunghezza  $(5,0 \pm 0,1)$  m. Determinare la superficie della stanza e il suo volume.  
 $[S = (20,0 \pm 0,6) \text{ m}^2; V = (60 \pm 3) \text{ m}^3]$
- 2) I numeri 41,341 e 12,029 rappresentano due grandezze fisiche. L'errore sul primo valore è del 9%, quello sul secondo del 7%. Approssimare i numeri in modo corretto, determinandone poi somma, differenza, prodotto e quoziente.
- 3) La distanza Tolentino-Macerata è 19 km, misurata con un errore di 10 m. Un'auto percorre tale distanza in 15 minuti, misurati con errore relativo 0,02. Supponendo che l'auto viaggi a velocità costante, trovarne il valore.  
 $[76 \text{ km/h}; E_{\%} = 2,05\%]$
- 4) Il prezzo di un terreno è 50000 € all'ettaro. Il terreno in questione è un rettangolo di 120 m per 180 m, misurati con un metro a nastro da 10 m e sensibilità 2 cm. A quanto si vende il terreno?  
 $[(108000 \pm 220) \text{ €}; E_R = 0,002]$
- 5) Viene acquistata una piccola botte di *Chuachag Laghach*, whisky molto pregiato. La botte è di forma cilindrica, con diametro di base  $(60 \pm 1)$  cm e altezza 80 cm ( $E_R = 0,02$ ). Trascurando lo spessore della botte, quante bottiglie da un litro sono necessarie per travasare tutto il whisky?  
 $[227 \pm 12]$
- 6) Con riferimento all'esercizio precedente, se il costo del *Chuachag Laghach* è 40 Euro al litro, quanto è costata la botte?  
 $[(9050 \pm 480) \text{ €}]$
- 7) Sempre con riferimento all'esercizio 5, se la massa totale della botte piena è  $m = (190 \pm 10)$  kg, l'involucro è costituito di alluminio, di densità  $\delta = (2700 \pm 54) \text{ kg/m}^3$ , e se il whisky ha densità  $0,8 \text{ g/cm}^3$  ( $E_R = 0,08$ ), determinare il volume dell'alluminio.
- 8) Un Cd-Rom è in grado di immagazzinare una quantità di dati pari a  $(700 \pm 10)$  Mb. Con il vostro computer il tempo di duplicazione del disco è 3 minuti e 52 s, misurati con un orologio di sensibilità 1 s. Qual è la velocità di trasferimento dati del computer usato?  
 $[(3,017 \pm 0,050) \text{ Mb/s}]$
- 9) La stella Alfa Centauri si trova a  $4,07 \cdot 10^{13}$  km dalla Terra ( $E_R = 0,05$ ). Sapendo che la velocità della luce è 300000 km/s, con un errore dell'1%, determinare quanto tempo impiega la luce in anni per giungere fino a noi (si usi l'approssimazione 1 anno = 31556000 secondi)  $[(4,30 \pm 0,26) \text{ anni}]$
- 10) Col valore della velocità della luce dell'esercizio precedente si calcoli la distanza del Sole, sapendo che la luce impiega 8 m e 18 s ( $E_R = 0,01$ ) per raggiungere la Terra.  $[(149,4 \pm 3,0) \cdot 10^6 \text{ km}]$
- 11) Il prezzo della benzina è 1,64 Euro e nel vostro portafoglio avete 65 Euro. Il serbatoio della vostra auto è un parallelepipedo di dimensioni 26x70x21 cm (l'errore è 1 cm su ciascun lato). Esiste la possibilità di riempire il serbatoio con i soldi che avete? Esiste la certezza di riempirlo? Spiegate la situazione.  $[Si; no; \text{volume del serbatoio} = (38,220 \pm 3,836) \text{ l}; \text{spesa} = (62,7 \pm 6,3) \text{ €}]$
- 12) Per determinare la lunghezza di una piscina si utilizzano due metodi: a) si misura direttamente la grandezza con una riga da 0,6 m di sensibilità 10 cm, ottenendo il valore  $L = 30,7$  m b) un carrello percorre con velocità costante  $v = 8 \cdot 10^2 \text{ cm/s}$  ( $E_{\%} = 11\%$ ) la lunghezza della piscina, impiegando un tempo di 4,6 s (misurato con un cronometro di sensibilità 0,2 s).

Le misure sono compatibili? Qual è la più precisa? Che valore dareste alla lunghezza della piscina?  
 $[(30,7 \pm 2,6) \text{ m}; (36,8 \pm 4,8) \text{ m}; \text{sono compatibili, la prima è più precisa}; L = (32,7 \pm 0,7) \text{ m}]$

**13)** Un recipiente di forma cubica ha lato  $(0,24 \pm 0,01) \text{ m}$ . Ci si mette dentro un certo numero di pallini di piombo, ciascuno dei quali ha raggio  $(20 \pm 1) \text{ mm}$ . Dopo questa operazione si calcoli il volume dell'aria rimasta nel recipiente (i pallini si considerano perfettamente sferici).

**14)** Dato un quadrato circoscritto a un cerchio, la superficie del secondo è  $S = (318 \pm 32) \text{ m}^2$ . Si calcoli la superficie  $S'$  del quadrato.  
 $[S' = (405 \pm 28) \text{ m}^2]$

**15)** Dato il numero  $\pi = 3,1415926535897826433832384632795\dots$ , dire a quante cifre decimali deve essere arrotondato perché a) sia corretto all'1% b)  $\pi^2$  sia corretto all'1%.

**16)** Date le grandezze fisiche  $a = (12,4 \pm 0,4)$ ,  $b = (35,5 \pm 0,71)$ ,  $c = 18$  ( $E_R = 0,04$ ) determinare le seguenti grandezze:  $a + b - 2c$ ;  $(a \cdot c):b$ ;  $a \cdot (2c + 3b)$ ;  $a \cdot b \cdot c$ ;  $1/a + 1/b$ .

**17)** Una scacchiera è composta di 64 quadrati di lato  $l = 4 \text{ cm}$ , misurati con un righello di sensibilità  $2 \text{ mm}$ . Trovare l'area della scacchiera, con l'errore assoluto.  $[(1024 \pm 51) \text{ cm}^2]$

**18)** La durata  $t$  di un certo fenomeno fisico, misurata con un orologio di sensibilità  $1 \text{ s}$ , risulta di  $8 \text{ s}$ . Determinare l'errore su  $t$ ,  $t^2$ ,  $t^3$ ,  $1/t$ ,  $1/t^2$ .  
 $[6,25\%; 12,5\%; 6,25\%; 18,75\%]$

**19)** Un pentolino ha capacità  $V = (0,60 \pm 0,10) \text{ dm}^3$  e vi si vuol versare il tè contenuto in un thermos di forma cilindrica, pieno fino all'orlo. Se l'altezza del thermos è  $(30 \pm 1) \text{ cm}$  e il diametro di base  $(6,0 \pm 0,2) \text{ cm}$ , è possibile vuotare il thermos nel pentolino senza che il tè trabocchi? Trascurare lo spessore delle pareti del thermos.  $[\text{Volume thermos} = (848 \pm 35) \text{ cm}^3. \text{ Il tè trabocca}]$

**20)** Un segmento ha lunghezza  $l = (37,00 \pm 0,74) \text{ cm}$ . Si calcolino a) l'area del quadrato di lato  $l$  b) l'area del cerchio di raggio  $l$  c) il volume del cubo di spigolo  $l$ . Quale delle tre grandezze è più precisa e quale meno?

**21)** Un'auto viaggia alla velocità di  $72 \text{ km/h}$  (la sensibilità del tachimetro è  $6 \text{ km/h}$ ) e passa davanti alla palizzata di un giardino. Il tempo impiegato a percorrerla in tutta la sua lunghezza è  $2,40 \text{ s}$ , misurato con un cronometro di sensibilità  $0,1 \text{ s}$ . Determinare la lunghezza della palizzata.

**22)** Il lato di un cubo è dato, in metri, dalla seguente espressione:

$$\frac{(3,14 \cdot 10^{-17} - 3136 \cdot 10^{-20}) \cdot (83245 \cdot 10^{-11} - 8,324 \cdot 10^{-7})}{\frac{3 \cdot 10^{-14}}{5 \cdot 10^{16}} + \frac{7 \cdot 10^{11}}{1,4 \cdot 10^{42}} + \frac{4,5 \cdot 10^{-57}}{50 \cdot 10^{-28}}}, \text{ con errore relativo } 0,03. \text{ Il cubo viene diviso}$$

in 10 cubi più piccoli, tutti uguali fra loro. Calcolare il volume di uno di essi.

**23)** Una stanza è un parallelepipedo di lunghezza  $60 \text{ dm}$  ( $E\% = 3\%$ ), larghezza  $400 \text{ cm}$  ( $E_R = 0,02$ ) e altezza  $(2,70 \pm 0,09) \text{ m}$ . La stanza possiede tre finestre uguali, di dimensioni  $120 \times 80 \text{ cm}$  (gli errori assoluti sono, rispettivamente,  $3 \text{ cm}$  e  $1,6 \text{ cm}$ ). Si vuole tappezzare l'ambiente con una carta da parati. Quanti  $\text{m}^2$  ne servono?

**24)** Un cerchio ha raggio  $r = (50 \pm 4) \text{ cm}$ . Determinarne il diametro, la circonferenza e l'area con errori assoluti, relativi e percentuali.  
 $[(100 \pm 8) \text{ cm}; (310 \pm 30) \text{ cm}; (8000 \pm 1000) \text{ cm}^2]$

**25)** Una stanza rettangolare ha lunghezza  $60 \text{ dm}$  ( $E\% = 3\%$ ) e larghezza  $(400 \pm 8) \text{ cm}$ . La si vuol pavimentare con del parquet che costa  $42 \text{ Euro al m}^2$  (questo dato è senza errore). Determinare il costo totale della pavimentazione, con errore assoluto, relativo e percentuale.  
 $[(43200 \pm 2100) \text{ €}]$

## ESERCIZI SUL CALCOLO DEGLI ERRORI NELLE MISURE INDIRETTE

- 1) Due segmenti misurati separatamente hanno lunghezza pari a  $(5,2 \pm 0,1)$  cm e  $(9,3 \pm 0,1)$  cm. Determina la loro lunghezza complessiva quando vengono posti uno accanto all'altro.  
[(14,5  $\pm$  0,2) cm]
- 2) Si vuole determinare l'area di una sottile lamina metallica di cui si sono misurate la lunghezza e la larghezza con un micrometro, ottenendo, come valori, rispettivamente:  
 $(2,15 \pm 0,01)$  cm e  $(9,51 \pm 0,03)$  cm.  
Esprimi la misura dell'area  $A$  corredata dall'incertezza assoluta con il metodo della propagazione dell'incertezza.  
[ $A = (20,4 \pm 0,2)$  cm<sup>2</sup>]
- 3) In una misura di velocità di deflusso di acqua da un foro si sono rilevate le seguenti coppie di valori:  
acqua defluita =  $(10,2 \pm 0,1)$  cm<sup>3</sup>;  
tempo di deflusso =  $(5,84 \pm 0,01)$  s.  
Esprimi il valore della velocità di deflusso  $v$  calcolando l'incertezza con il metodo della propagazione delle incertezze.  
[ $v = (1,75 \pm 0,02)$  cm<sup>3</sup>/s]
- 4) La misura del tempo di caduta di una sferetta di vetro in un liquido viscoso su un tratto di  $(15,0 \pm 0,1)$  cm ha fornito i seguenti valori (rilevati con un cronometro al centesimo di secondo):  
7,25 s; 7,32 s; 7,20 s; 7,23 s.  
Determina la velocità di caduta  $v$  della sferetta esprimendo la sua incertezza con il metodo della propagazione delle incertezze.  
[ $v = (2,07 \pm 0,03)$  cm/s]
- 5) Una sfera ha un raggio la cui misura risulta uguale a  $(12,0 \pm 0,1)$  cm. Valuta il volume  $V$  della sfera esprimendo la sua incertezza con il metodo della propagazione delle incertezze.  
[ $V = (7200 \pm 200)$  cm<sup>3</sup>]
- 6) Si sa che due misure hanno lo stesso errore relativo. La prima ha come risultato  $(258,2 \pm 0,5)$  m, la seconda ha come valore medio 2580 m. Quanto vale l'errore assoluto sulla seconda misura?  
[5 m]
- 7) Un cilindro metallico avente diametro di base pari a  $(0,995 \pm 0,005)$  cm e altezza  $(5,015 \pm 0,005)$  cm ha massa  $(32,7 \pm 0,5)$  g. Determinare la densità del solido, l'errore assoluto e scrivere correttamente il risultato.  
[(8,4  $\pm$  0,2) g/cm<sup>3</sup>]
- 8) Determinare la densità di un cubo avente spigolo  $(1,225 \pm 0,005)$  cm e massa  $(8,83 \pm 0,01)$  g. l'errore assoluto e scrivere correttamente il risultato.  
[(4,80  $\pm$  0,06) g/cm<sup>3</sup>]
- 9) Un oggetto di ferro, la cui densità è  $(7860 \pm 30)$  kg/m<sup>3</sup>, ha di massa  $(234 \pm 4)$  g. Determinare il volume dell'oggetto, l'errore assoluto e scrivere correttamente il risultato.  
[(2,98  $\pm$  0,06)  $\cdot 10^{-5}$  kg]
- 10) Nel libretto di istruzioni di un autovelox si afferma che le misure possono essere affette da un errore massimo percentuale pari a 2,5%. Se con tale strumento si è misurato una velocità  $v = 118$  km/h, quanto vale l'errore assoluto su tale misura? Scrivere il risultato correttamente.  
[(118  $\pm$  3) km/h]