FORMULARIO: tavola degli integrali indefiniti

Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \left(1 + tg^2 x\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$$

$$\int \left(1 + ctg^2 x\right)dx = \int \frac{1}{sen^2 x} dx = -ctgx + c$$

$$\int Ch\,x\,dx = Sh\,x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

Integrali notevoli

$$\int \frac{1}{senx} dx = \log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} arcsen\,x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arccos x + c \\ -arcsenx + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\,x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \begin{cases} arcsSh\,x + c \\ \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 arcsen\frac{x}{a} + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right) + c$$

$$\int sen^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - senx\cos x\right) + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + senx\cos x\right) + c$$

$$\int \frac{1}{Ch^2 x} dx = \int \left(1 - Th^2 x\right)dx + c = Th\,x + c$$

Integrali indefiniti riconducibili a quelli immediati:

$$\int f^n(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$$

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = sen\, f(x) + c$$

$$\int f'(x)\, sen\, f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log_e a} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \begin{cases} arcsen\, f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+f^2(x)}\,dx = arctg\, f(x) + c$$

Integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Consideriamo la funzione razionale fratta

$$y=\frac{N(x)}{D(x)}\ ,$$

quoziente fra due polinomi in x e sia $N(x)$ di grado m e $D(x)$ di grado n.

- Il grado del numeratore è maggiore o uguale del grado del denominatore: $m \geq n$

Si divide $N(x)$ per $D(x)$ con l'algoritmo di divisione e otteniamo un $Q(x)$ e un resto $R(x)$ che risultano immediatamente integrabili: $\frac{N(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$

- Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore: $m < n$

a) Gli zeri del denomitatore sono reali e distinti.

Ricordiamo che la scomposizione di un trinomio di secondo grado è:

se $\Delta>0$ $\quad ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ con x_1 e x_2 radici dell'equazione di secondo grado associata.

Esempio:

$$\int\frac{dx}{x^2-3x+2}=-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x-2}dx=-\ln|x-1|+\ln|x-2|+c=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$$

$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$ ossia $1=A(x-2)+B(x-1)$ da cui $1=x(A+B)-2A-B$

per il principio di identità dei polinomi si avrà $\begin{cases}A+B=0\\-2A-B=1\end{cases}$ da cui $A=-1$ e $B=1$

b) Gli zeri del denominatore sono reali e coincidenti .

Esempio:

$$\int\frac{dx}{4x^2-4x+1}=\int\frac{dx}{(2x-1)^2}$$

Si tratta di un integrale risolubile per sostituzione.

Basterà porre $2x-1=t$ da cui $2dx=dt$ ossia $dx=\frac{1}{2}dt$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=-\frac{1}{2t}+c=-\frac{1}{2(2x-1)}+c$$

c) Gli zeri del denominatore sono complessi e coniugati.

Con opportuni accorgimenti (talvolta laboriosissimi) l'integrale proposto dovrà essere ricondotto ancora ad un integrale per sostituzione ed il risultato dovrà sempre essere l'arcotangente di un binomio di primo grado (eventualmente incompleto).

Esempio:

$\int\frac{dx}{9x^2-6x+2}=\int\frac{dx}{9x^2-6x+1+1}=\int\frac{dx}{(3x-1)^2+1}$ poniamo $3x-1=t$ da cui $3dx=dt$ ossia $dx=\frac{1}{3}dt$

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}arctgt+c=\frac{1}{3}arctg(3x-1)+c$$

Integrazione per sostituzione

Il calcolo dell'integrale a volte può risultare più semplice se si opera un cambiamento della variabile di integrazione.
Se $f(x)$ è la funzione da integrare si pone $x = g(t)$ *(1)*, supponendo g derivabile e invertibile in un opportuno intervallo: si ha quindi $t = g^{-1}(x)$ la funzione inversa. Differenziando la *(1)* si ha $dx=g'(t)dt$ e pertanto l'integrale di $\int f(x)dx$ si può scrivere:

$$\int f[g(t)]g'(t)dt$$

Esempio:
Calcolare $\int \sqrt{3x+1}dx$

3x+1 = t da cui x= (t-1)/3 (x= g(x)) dx= $\frac{1}{3}dt$

$$\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + c$$

Integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Esempio:
$\int x senx dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + senx + c$
g'(x) = senx g(x) = - cosx
f(x) = x f '(x) = 1