FUNZIONI E DISCONTINUITA': ESERCIZI SVOLTI

1] Determina e classifica i punti di discontinuità dopo averne calcolato i limiti destro e sinistro :

A) $\langle$Punti 3$\rangle$ $\quad y = \dfrac{|x+2|}{x^2+2x}$

D : $x^2 + 2x \neq 0 \mapsto x(x+2) \neq 0 \mapsto x \neq -2, x \neq 0$

______________ - 2____________0_________

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+2x} = \dfrac{x+2}{x(x+2)}, \quad x > -2\ ; \quad y(-2^+) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \left[\dfrac{1}{x}\right] = -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{x+2}{x^2+2x} = -\dfrac{x+2}{x(x+2)}, \ x < -2; \quad y(-2^-) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \left[\dfrac{1}{x}\right] = +\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$x = -2$ discontinuità di prima specie.

$y(0^{\pm}) = \left[\dfrac{x+2}{x^2+2x}\right] = \left[\dfrac{1}{x}\right] = \dfrac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$ $\quad$: $x = 0$ seconda specie

B) $\langle$Punti 2$\rangle$ $y = \begin{cases} 9 - x^2, \ x \leq 2 \\ \dfrac{2x+1}{1-x}, \ x > 2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} y(2^-) = 9 - 2^2 = 5 \\ y(2^+) = \dfrac{2 \times 2 + 1}{1 - 2} = -5 \end{cases}$: $x = 2$ prima specie

$\mapsto$ D : $x \neq 1 \mapsto y(1^{\pm}) = \dfrac{2 \times 1 + 1}{1 - 1^{\pm}} = \dfrac{3}{0^{\mp}} = \mp\infty$ $\quad$: $x = 1$ seconda specie

C) $\langle$Punti 1$\rangle$ $\quad y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

D : $x \neq -2 \mapsto y(-2^{\pm}) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \left[\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}\right] = -2 - 2 = -4$

$x = -2$ discontinuità di terza specie

2] Esegui lo studio approssimato delle funzioni:

A) ⟨Punti 5⟩ $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x - 2}$; $D : x \neq 2$; Simmetrie :

$$f(-x) = \frac{2x^2 - x - 3}{-x - 2} = \frac{-2x^2 + x + 3}{x + 2} \neq \pm f(x) : \text{non simmetrica}$$

Intersezioni con gli assi : $\begin{cases} x = 0 \\ f(0) = \dfrac{2 \times 0^2 - 0 - 3}{0 - 2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \mapsto C\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} f(x) = 0 \\ \Delta = 25 \mapsto x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{4} \end{cases} \mapsto A(-1, 0), B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

Studio del segno :

$2x^2 - x - 3 \geq 0 \mapsto \quad]-\infty$ ______ $-1]$ $\quad [3/2$ ______ $+\infty[$

$x - 2 > 0 \mapsto \quad -\infty \quad]2$ ______ $+\infty[$

$f(x) \geq 0 \mapsto \quad -\infty \quad]-1$ ____ $3/2]$ $\quad]2$ ______ $+\infty[$

Limiti agli estremi del dominio ed asintoti :

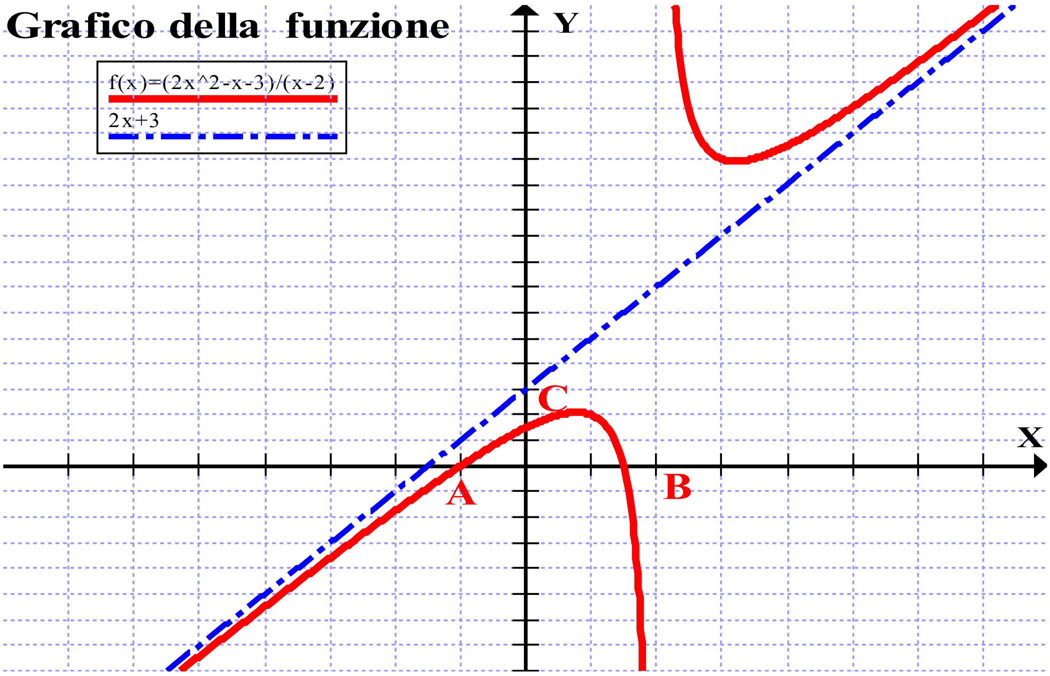
$$y(\pm\infty) = \left[\frac{2x^2 - x - 3}{x - 2}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{(\pm\infty)^2 (2 - 0 - 0)}{(\pm\infty)(1 - 0)} = +\infty \mapsto \text{Niente AS.OR}$$

$$y(2^{\pm}) = \left[\frac{2x^2 - x - 3}{x - 2}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{8 - 2 - 3}{2^{\pm} - 2} = \frac{3}{0^{\pm}} = \pm\infty \mapsto \text{AS.VER.} : x = 2$$

Asintoto obliquo : $m = \lim\limits_{x \Rightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \Rightarrow \infty} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{2}{1} = 2$

$$q = \lim_{x \Rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \Rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 - x - 3}{x - 2} - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x \Rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 3 - 2x^2 + 4x}{x - 2} = \lim_{x \Rightarrow \infty} \frac{3x - 3}{x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{3}{1} = 3 \mapsto y = 2x + 3$$



B) $\langle Punti\ 3 \rangle\ f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x^2 - 4}$; $D : x^2 - 4 \neq 0 \mapsto x \neq -2,\ x \neq +2$

Simmetria : $f(-x) = \dfrac{9 - (-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{9 - x^2}{x^2 - 4} = f(x) \mapsto$ pari

Intersezioni : $\begin{cases} x = 0 \\ f(0) = \dfrac{9 - (0)^2}{(0)^2 - 4} = \dfrac{9}{-4} \end{cases} \mapsto C\left(0, -\dfrac{9}{4}\right)$

$\begin{cases} f(x) = 0 \\ 9 - x^2 = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} f(x) = 0 \\ x_{1,2} = \pm 3 \end{cases} \mapsto A(-3, 0)\ ;\ B(3, 0)$

Studio del segno :

$9 - x^2 \geq 0 \qquad -\infty \qquad [-3$___________________$+3] \qquad +\infty$

$x^2 - 4 > 0 \qquad -\infty$ _____________ $]-2 \qquad +2[$ ______________$+\infty$

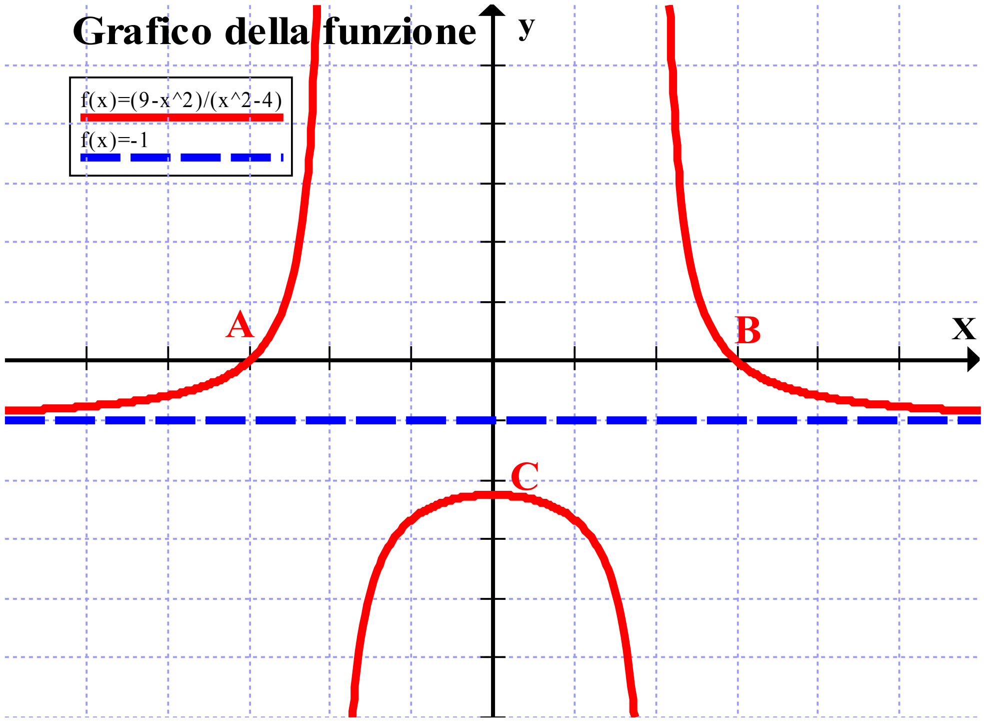
$f(x) \geq 0 \qquad -\infty \qquad [-3$___$-2[\qquad]+2$ ___$+3] \qquad +\infty$

Limiti agli estremi ed asintoti :

$y(\infty) = \left[\dfrac{9 - x^2}{x^2 - 4}\right] = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{-1} = -1 \mapsto AS.ORIZZONTALE:\ y = -1$

$y(-2^{\mp}) =^{*} y(2^{\pm}) = \left[\dfrac{9 - x^2}{x^2 - 4}\right] = \left[\dfrac{9 - x^2}{(x - 2)(x + 2)}\right] = {}^{*}(Simmetria\ pari)$

$= \dfrac{9 - 4}{(2^{\pm} - 2)(2^{\pm} + 2)} = \dfrac{5}{0^{\pm} \times 4} = \dfrac{5}{0^{\pm}} = \pm\infty\ ;\ AS.VERTICALI.\ :\ x = \pm 2$



3] <Punti 2 >Per quali valori di K le funzioni sono continue?

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 2x - 3\ , & x \geq 2 \mapsto y(2^+) = 2 \times 2 - 3 = 1 \\ kx & x < 2 \mapsto y(2^-) = 2k \end{cases}$$

$$y(2^-) = y(2^+) \mapsto 2k = 1 \mapsto k = \frac{1}{2}$$

$$b)\ f(x) = \frac{x - 3}{1 - kx} \rightarrow 1 - kx \neq 0\ \forall x \in R \mapsto k = 0$$

4] <P.2>Def.ne di funzione continua. F(x) è continua in x=c se:

$$\lim_{x \Rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Questo accade se sono rispettate le seguenti condizioni:

$$1)\ \lim_{x \Rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \Rightarrow c^-} f(x)$$

$$2)\ \lim_{x \Rightarrow c} f(c) \neq \pm\infty$$

$$3)\ \text{esiste il valore } f(c) = \lim_{x \Rightarrow c} f(x)$$