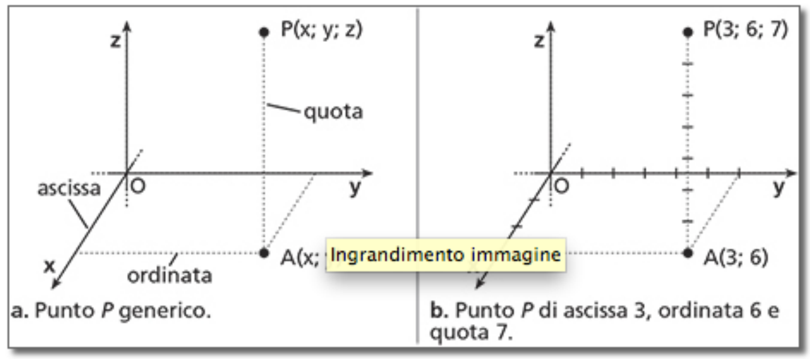
GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO (3D Geometry)

SISTEMA DI RIFERIMENTO NELLO SPAZIO

La geometria analitica dello spazio è molto simile alla geometria analitica del piano. Per questo motivo le formule sono spesso un'estensione di quelle già conosciute.

Per rappresentare lo spazio con un riferimento di tipo cartesiano si usano tre rette, a due a due perpendicolari: gli *assi* x , y , z . Il punto di intersezione degli assi, è detto *origine* e si indica con O .
Le coordinate sono quindi *x, y, z.* L'origine O ha coordinate *O(0;0;0).*



a. Punto *P* generico.
b. Punto *P* di ascissa 3, ordinata 6 e quota 7.

Un punto generico P è individuato da una terna ordinata di numeri reali, $P(x;y;z)$; x , y e z sono detti rispettivamente *ascissa, ordinata e quota* del punto P .
Il punto $A(x;y)$ è la proiezione di P nel piano Oxy.

FORMULARIO

1. Distanza fra due punti $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ e $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

2. Punto medio di un segmento di estremi $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ e $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

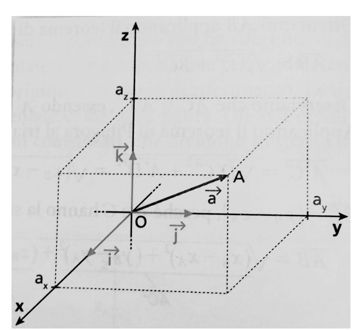
In particolare, se il segmento AB è parallelo all'asse x, vale $\overline{AB} = |x_B - x_A|$
se il segmento AB è parallelo all'asse y, vale $\overline{AB} = |y_B - y_A|$
se il segmento AB è parallelo all'asse z, vale $\overline{AB} = |z_B - z_A|$

VETTORI NELLO SPAZIO

Un vettore nello spazio è individuato dalle sue componenti cartesiane.

Ad ogni punto $A\left(a_x;a_y;a_z\right)$ è associato un vettore $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ che ha il primo estremo nell'origine O con modulo:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$



Più in generale:

Le componenti di un vettore $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ con primo estremo in $A\left(x_A;\, y_A;\, z_A\right)$ e secondo estremo in $B\left(x_B;\, y_B;\, z_B\right)$, ossia il vettore che lo indentifica, che ne indica la "direzione" è dato da:

$$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;\, y_B-y_A;\, z_B-z_A\right)$$

OPERAZIONI FRA VETTORI

Consideriamo due vettori $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$ e $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$. Analogamente a quanto accade per il piano:

⇒ SOMMA	$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x;\, a_y+b_y;\, a_z+b_z\right)$
⇒ DIFFERENZA	$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x;\, a_y-b_y;\, a_z-b_z\right)$
⇒ PRODOTTO PER UNO SCALARE, $k\in\mathbb{R}$	$k\cdot\vec{a}=\left(ka_x;\, ka_y;\, ka_z\right)$
⇒ PRODOTTO SCALARE $\vec{a}\bullet\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ dove θ è l'angolo fra i due vettori	$\vec{a}\bullet\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$ (evidenziando le componenti)

Vettori paralleli

Dati due vettori $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$ e $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$, essi sono **paralleli** se e solo se essi hanno le componenti proporzionali ossia: $\exists k\in\mathbb{R}$ tale che $\vec{a}=k\vec{b}$, ossia: $\vec{a}\left(kb_x;kb_y;kb_z\right)$. Se $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$ ha le componenti tutte non nulle si può anche scrivere:

$$\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=k}$$

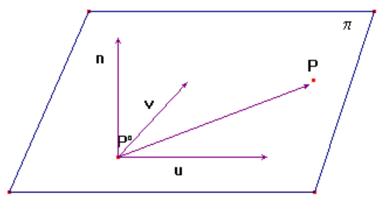
Vettori perpendicolari

Dati due vettori $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$ e $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$, essi sono **perpendicolari** se e solo se fra di essi c'è un angolo $\theta=\pi/2$ e quindi $\cos\theta=\cos\pi/2=0$. Ciò comporta che il loro prodotto scalare sia 0, ossia:

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0}$$

IL PIANO E LA SUA EQUAZIONE

L'equazione di un generico piano nello spazio ha equazione del tipo: $\boxed{ax+by+cz+d=0}$



Infatti un generico piano si può scrivere come il luogo geometrico dei punti $P(x;y;z)$ dello spazio per cui il vettore $\overrightarrow{PP_0}$, con $P_0(x_0;y_0;z_0)$ è ortogonale al vettore $\vec{n}(a;b;c)$, che ha la stessa direzione della retta passante per P_0 e perpendicolare al piano:

$$\overrightarrow{PP_0}(x-x_0;y-y_0;z-z_0) \perp \vec{n}(a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_0} \bullet \vec{n} = 0$$

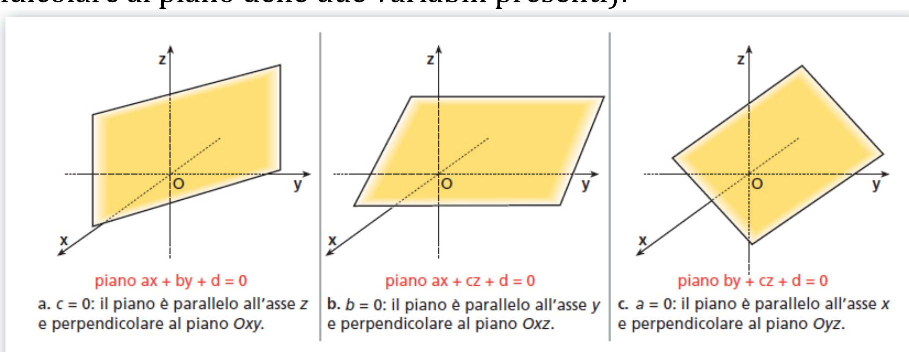
$$(x-x_0)\cdot a+(y-y_0)\cdot b+(z-z_0)\cdot c=0 \quad \text{ossia} \quad ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$$

Ponendo $d=-ax_0-by_0-cz_0$ si ha appunto l'equazione $\boxed{ax+by+cz+d=0}$

RICORDA: i coefficienti dell'equazione di un piano a, b, c rappresentano SEMPRE le componenti di un vettore $\vec{n}(a;b;c)$ che risulta ortogonale, normale al piano stesso e si chiamano **coefficienti direttivi del piano: il vettore $\vec{n}(a;b;c)$ risulta ortogonale a tutte le direzioni parallele al piano.**

Casi particolari:

- Se d=0, il piano passa per l'origine (0;0;0).
- Se nell'equazione del piano manca una delle variabili, il piano è parallelo all'asse di quella variabile (ossia è perpendicolare al piano delle due variabili presenti):

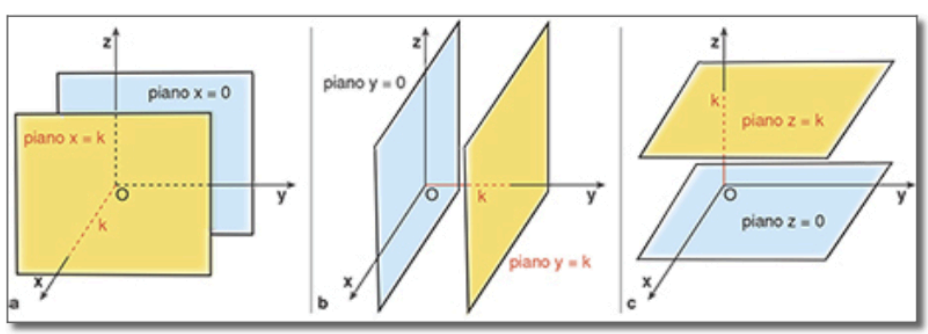


piano ax + by + d = 0
a. *c* = 0: il piano è parallelo all'asse *z* e perpendicolare al piano *Oxy*.

piano ax + cz + d = 0
b. *b* = 0: il piano è parallelo all'asse *y* e perpendicolare al piano *Oxz*.

piano by + cz + d = 0
c. *a* = 0: il piano è parallelo all'asse *x* e perpendicolare al piano *Oyz*.

- Se nell'equazione del piano mancano due variabili, il piano è parallelo al piano di quelle variabili:



PIANO PER TRE PUNTI
Un piano è univocamente determinato dalla conoscenza di suoi *tre punti non allineati*.
Per trovarne l'equazione basta risolvere un sistema 3x3 imponendo il passaggio dei tre punti nell'equazione cartesiana:

Piano passante per tre punti $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$:

$$\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ ax_C + by_C + cz_C + d = 0 \end{cases}$$

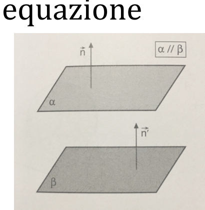
Se i punti sono allineati, esistono infiniti piani passanti per i tre punti allineati (sono i piani del fascio passante per la retta determinata dai punti allineati).

PIANO PASSANTE PER UN PUNTO, PARALLELO AD UN PIANO DATO
L'equazione del piano passante per $P_0(x_0;y_0;z_0)$ e parallelo al piano $ax+by+cz+d=0$ è data da:

$$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$$

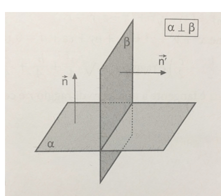
Ricordare sempre che un piano non è definito univocamente dai valori a, b, c; infatti se si moltiplica o si divide a, b, c per un qualsiasi numero non nullo, si ottiene un'altra equazione dello stesso piano. In generale possiamo porre una di queste variabili uguali a 1 e calcolare univocamente le altre.

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE PIANI
Consideriamo due piani di equazione $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$.



PIANI PARALLELI: $\boxed{\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{n}' \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$ (con $a',b',c' \neq 0$)

PIANI PARALLELI E COINCIDENTI: $\alpha \parallel \beta$ et $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$



PIANI PERPENDICOLARI: $\boxed{\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow a\cdot a' + b\cdot b' + c\cdot c' = 0}$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO

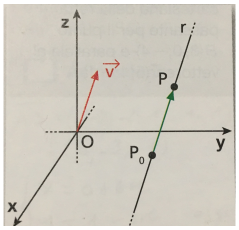
Dato il piano $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e il punto $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, la misura della DISTANZA di A dal piano è data da:

$$d(A;\alpha)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

LA RETTA E LA SUA EQUAZIONE

1) Una retta nello spazio è definita se si conosce un suo punto $P_0(x_0;y_0;z_0)$ e un vettore che ne identifica la direzione $\vec{v}=(l;m;n)$. Allora un punto $P(x;y;z)$ appartiene a tale retta se e solo se:

$$\overrightarrow{PP_0}(x-x_0;y-y_0;z-z_0) \parallel \vec{v}(l;m;n) \text{ ossia } \overrightarrow{PP_0}=k\cdot\vec{v}\text{, con } k\in\mathbb{R}.$$



$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+kl \\ y=y_0+km \\ z=z_0+kn \end{cases}} \qquad k\in\mathbb{R} \qquad \textbf{Equazioni parametriche}$$

RICORDA:
I coefficienti **l, m, n** si chiamano **coefficienti direttivi** della retta: **il vettore** $\vec{v}=(l;m;n)$ **individua la direzione della retta.**

2) Se tutti i coefficienti direttivi sono non nulli, si può scrivere l'equazione della retta in forma cartesiana:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}} \qquad \textbf{Equazioni cartesiane}$$

Se uno dei coefficienti direttivi è nullo (ad esempio n=0), del sistema iniziale si scrive:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}; \quad z-z_0=0$$

3) Infine una retta nello spazio si può determinare come intersezione di due piani non paralleli e non coincidenti:

$$\boxed{\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}} \qquad \textbf{Equazione come intersezione di due piani}$$

Equazione della retta passante per due punti $A(x_A;\,y_A;\,z_A)$ e $B(x_B;\,y_B;\,z_B)$:

- Equazioni parametriche:
  la retta AB ha la direzione del vettore $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;\,y_B-y_A;\,z_B-z_A)$ quindi $(l;m;n)=(x_B-x_A;\,y_B-y_A;\,z_B-z_A)$ da cui le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=x_A+kl \\ y=y_A+km \\ z=z_A+kn \end{cases} \qquad k\in\mathbb{R}$$

- Equazione cartesiana:
  eliminando il parametro *k* dalle equazioni precedenti (quando l, m, n tutti non nulli) si ricava:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}$$

  che è comunque la condizione di allineamento di tre punti nello spazio.

Dalla retta come intersezione di due piani alla retta in forma parametrica
In questo senso, basta porre una delle tre variabili uguale a k e ricavare le altre due variabili in funzione di k stesso; si ottiene un sistema con le tre equazioni cercate.

Dalla retta in forma parametrica alla retta come intersezione di due piani
In questo senso, basta ricavare il parametro k presente in una delle tre equazioni ed andare a sostituire nelle altre due equazioni che rimangono le quali saranno appunto i due piani incidenti.

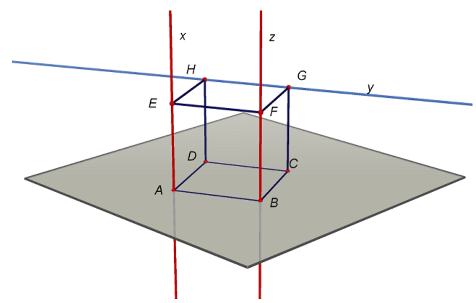
Fascio di piani aventi per asse una data retta
Il fascio di piani aventi per asse una retta è l'insieme di tutti i piani contenenti la retta stessa. Se la retta è individuata come $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$, il fascio di piani si può scrivere come:

$$ax+by+cz+d+k\left(a'x+b'y+c'z+d'\right)=0$$

Ovviamente, con un solo parametro reale k, il fascio comprende tutti i piani, tranne il piano $a'x+b'y+c'z+d'=0$, analogamente a quanto avviene per i fasci di rette nel piano.

POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE RETTE

Due rette nello spazio sono **complanari** (quando appartengono ad uno stesso piano; in tal caso possono essere *incidenti, parallele distinte, parallele coincidenti*) oppure sono **sghembe**, se non sono complanari.



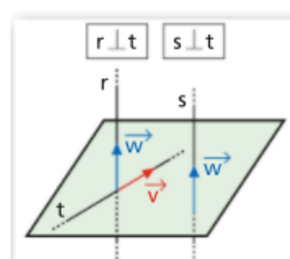
RETTE PARALLELE
Due rette con vettori direzione $\vec{v}=(l;m;n)$ e $\vec{w}=(l';m';n')$ sono **parallele** se e solo se

$$\vec{v}\parallel\vec{w}\Leftrightarrow\vec{v}=k\vec{w},k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$$

RETTE PERPENDICOLARI
Due rette con vettori direzione $\vec{v}=(l;m;n)$ e $\vec{w}=(l';m';n')$ sono **perpendicolari** se e solo se

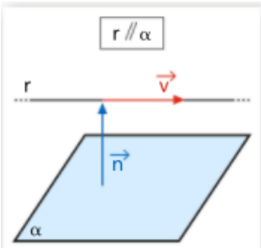
$$\vec{v}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{v}\bullet\vec{w}=0\Leftrightarrow l\cdot l'+m\cdot m'+n\cdot n'=0$$

RETTE SGHEMBE O INCIDENTI
Se i due vettori direzione non sono paralleli, le due rette sono **sghembe** quando non hanno punti in comune oppure **incidenti** quando hanno un punto in comune.
N.B. Due rette perpendicolari possono essere sia incidenti sia sghembe, come in figura: r e t sono perpendicolari e incidenti mentre s e t sono perpendicolari e sghembe.



RETTE E PIANI

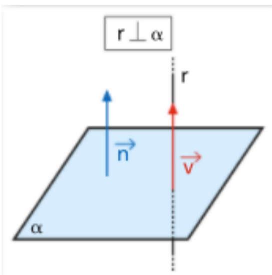
Consideriamo un piano α con vettore normale $\vec{n}(a;b;c)$ non nullo e una retta r con vettore direzione $\vec{v}=(l;m;n)$ non nullo. Si ha:



Retta parallela al piano

$r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \Leftrightarrow a\cdot l+b\cdot m+c\cdot n=0$

In particolare se il piano e la retta hanno almeno un punto in comune, allora la retta giace sul piano.



Retta perpendicolare al piano

$r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}$

DISTANZE

DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO

Dato il piano $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e il punto $A(x_A;\, y_A;\, z_A)$, la DISTANZA di A dal piano è data da:

$$d(A;\alpha)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

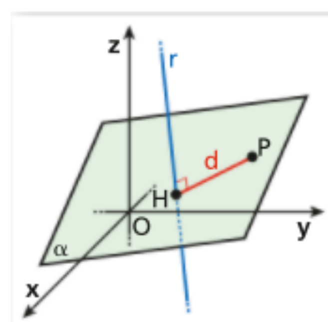
DISTANZA FRA DUE PIANI PARALLELI

Se α,β sono due piani paralleli, la distanza fra essi si calcola come $d(P;\beta)$, essendo P un punto scelto a piacere sul piano α.

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Non c'è una formula specifica!

Note le coordinate di P e l'equazione della retta r (forma parametrica o cartesiana), un metodo può essere quello di trovare l'intersezione H fra il piano passante per P, perpendicolare alla retta r e la retta r stessa; la distanza sarà PH.



DISTANZA TRA DUE RETTE PARALLELE

Non c'è una formula specifica!

Se r ed s sono due rette parallele, la loro distanza si può calcolare come la distanza tra un punto R scelto a piacere su r e la retta s.

DISTANZA FRA DUE RETTE SGHEMBE

Non c'è una formula specifica!

Si possono trovare i punti $R\in r$, $S\in s$ tali che il vettore $\overrightarrow{RS}$ sia perpendicolare sia alla direzione di r che alla direzione di s. Fatto questo, la distanza fra le rette sghembe sarà: $d(r;s)=\overline{RS}$.

SUPERFICIE SFERICA

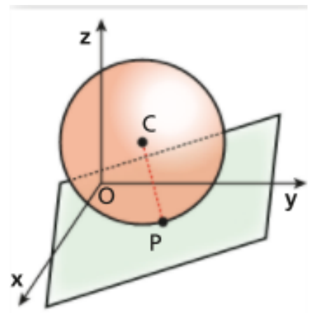
La superficie sferica è il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno tutti la stessa distanza r da un punto fisso detto centro $C(x_0;y_0;z_0)$.

Equazioni $\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

Oppure: $\quad x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, con $C\left(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2};\frac{-c}{2}\right)$ e $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$

L'equazione precedente rappresenta quella di una superficie sferica se e solo se $a^2+b^2+c^2-4d\geq 0$ (condizione di realtà).

Piano e sfera



Dato un piano α e una superficie sferica di centro C e raggio r, si ha:

- Se $d(C;\alpha)<r$, il piano interseca la sfera in un cerchio;
- Se $d(C;\alpha)=r$, il piano è perpendicolare alla sfera ($PC\perp\alpha$)
- Se $d(C;\alpha)>r$, il piano non interseca la sfera.

Equazione del piano tangente a una sfera

Data una superficie sferica di centro C e raggio r e un suo punto $P(x_1;y_1;z_1)$, il piano tangente in P alla superficie sferica ha vettore perpendicolare dato da $\overrightarrow{PC}$.

AREA DI UN TRIANGOLO NELLO SPAZIO

Area di un triangolo di vertici $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$:

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$