Limiti con gli sviluppi di Taylor

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x) = (2x - \sin x)\ln(1+3x)$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$ (rispetto al campione standard);

(c) calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1-\cos x}$$

Svolgimento:

(a) Per $x \to 0$ si ha $\sin x = x + o(x^2)$ e $\ln(1+3x) = 3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$, dunque

$$(2x - \sin x)\ln(1+3x) = (2x - x + o(x^2))(3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)) =$$

$$= (x + o(x^2))(3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)) = 3x^2 - \frac{9x^3}{2} + o(x^3),\ x \to 0.$$

(b) La parte principale dello sviluppo per $x \to 0$ è $p(x) = 3x^2$, l'ordine d'infinitesimo è $\alpha = 2$. Si ha che $f(x) \sim p(x),\ x \to 0$.

(c) Dal fatto che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),\ x \to 0$ abbiamo che $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0$. Per quanto ottenuto dai punti precedenti abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\frac{x^2}{2}} = 6.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{1-x^4}\, e^{x^2} - 1$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al quarto ordine per $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$ (rispetto al campione standard);

(c) calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x^2}{\sin^4 x}$$

Svolgimento:

(a)

$$\frac{1}{1-x^4}\, e^{x^2} - 1 = (1 + x^4/2 + o(x^4))(1 + x^2 + x^4 + o(x^4)) - 1 = x^2 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4),\ x \to 0.$$

(b) La parte principale dello sviluppo per $x \to 0$ è $p(x) = x^2$, l'ordine d'infinitesimo è $\alpha = 2$. Si ha che $f(x) \sim p(x),\ x \to 0$.

(c) $f(x) - x^2 = \frac{3}{2}x^4 + o(x^4),\ x \to 0$, per cui $f(x) - x^2 \sim \frac{3}{2}x^4,\ x \to 0$. Inoltre $\sin^4 x = x^4 + o(x^4) \sim x^4,\ x \to 0$, otteniamo allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x^2}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^4}{x^4} = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f(x) = x \ln(1-x) + \sin^2 x$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al quarto ordine per $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$ (rispetto al campione standard);

(c) calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \frac{1}{2}x^3}{\sin^3 x}$$

Svolgimento:

(a) $x \ln(1-x) + \sin^2 x = x(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^2 = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.

(b) La parte principale dello sviluppo per $x \to 0$ è $p(x) = -\frac{1}{2}x^3$, l'ordine d'infinitesimo è $\alpha = 3$. Si ha che $f(x) \sim p(x),\ x \to 0$.

(c) $f(x) + \frac{1}{2}x^3 = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4),\ x \to 0$, per cui $f(x) + \frac{1}{2}x^3 \sim -\frac{2}{3}x^4,\ x \to 0$. Inoltre $\sin^3 x = x^3 + o(x^3) \sim x^3,\ x \to 0$, otteniamo allora:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \frac{1}{2}x^3}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{3}x^4}{x^3} = 0.$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(x) = x \ln(1+x) - 1 + \cos^2 x$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al quarto ordine per $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$ (rispetto al campione standard);

(c) calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \frac{1}{2}x^3}{\tan(x^4)}$$

Svolgimento:

(a) $x \ln(1+x) - 1 + \cos^2 x = x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - 1 + (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5))^2 = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.

(b) La parte principale dello sviluppo per $x \to 0$ è $p(x) = -\frac{1}{2}x^3$, l'ordine d'infinitesimo è $\alpha = 3$. Si ha che $f(x) \sim p(x),\ x \to 0$.

(c) $f(x)+\frac{1}{2}x^3=+\frac{2}{3}x^4+o(x^4),\ x\to 0$, per cui $f(x)+\frac{1}{2}x^3\sim\frac{2}{3}x^4,\ x\to 0$. Inoltre $\tan x^4=x^4+o(x^4)\sim x^4,\ x\to 0$, otteniamo allora:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+\frac{1}{2}x^3}{\tan x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 5 Si considerino le funzioni $f(x)=\ln(1+2\tan^2 x)$, $g(x)=\sin^2\sqrt{3}x$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $f(x)$, indicando la parte principale di f e l'ordine di infinitesimo;

(b) determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $g(x)$, indicando la parte principale di g e l'ordine di infinitesimo;

(c) calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{1-\cos x}$$

Svolgimento:

(a) Si ha $2\tan x=2(x+o(x^2))$, $2\tan^2 x=2(x+o(x^2))^2=2x^2+o(x^3)$ e $f(x)=\ln(1+2\tan^2 x)=\ln(1+2x^2+o(x^3))=2x^2+o(x^3),\ x\to 0$. Allora $p(x)=2x^2$, e l'ordine di infinitesimo è $\alpha=2$.

(b) $\sin^2\sqrt{3}x=(\sqrt{3}x+o(x^2))^2=3x^2+o(x^3)$. Abbiamo $p(x)=3x^2$, e l'ordine di infinitesimo è $\alpha=2$.

(c) $f(x)-g(x)=-x^2+o(x^3)\simeq -x^2,\ x\to 0$, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2/2}=-2.$$

Esercizio 6 Si considerino le funzioni $f(x)=e^{2x^2}-1$, $g(x)=x\ln(1+2x+3x^2)$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $f(x)$, indicando la parte principale di f e l'ordine di infinitesimo;

(b) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $g(x)$, indicando la parte principale di g e l'ordine di infinitesimo;

(c) determinare la parte principale delle funzioni $f(x)-g(x)$ e $f(x)g(x)$ per $x\to 0$.

Svolgimento:

(a) $f(x)=e^{2x^2}-1=2x^2+o(x^3)$, ($f$ è pari). $p(x)=2x^2$, $\alpha=2$.

(b) $g(x)=x\ln(1+2x+3x^2)=x(2x+3x^2+\frac{(2x+3x^2)^2}{2}+o(x^2))=2x^2+x^3+o(x^3)$. $p(x)=2x^2$, $\alpha=2$.

(c) $f(x)-g(x)=2x^2+o(x^3)-(2x^2+x^3+o(x^3))=x^3+o(x^3)$, con $p(x)=x^3$, $\alpha=3$.

$f(x)g(x)=(2x^2+o(x^3))(2x^2+x^3+o(x^3))=4x^4+o(x^5)$, con $p(x)=4x^4$, $\alpha=4$.

Esercizio 7 Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(1+x)\sin^2\sqrt{x} - x^2 \ .$$

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$;

(b) calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\frac{1}{4}x^4} \quad \text{dove} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \ , \ x \geq 0.$$

Svolgimento:

(a) $\ln(1+x)\sin^2\sqrt{x} - x^2 = (x - x^2/2 + o(x^2))(\sqrt{x} - x\sqrt{x}/3! + o(x^2))^2 - x^2 = -5/6x^3 + o(x^{7/2}) = -5/6x^3 + o(x^3)$. Abbiamo $p(x) = -5/6x^3$, $\alpha = 3$.

(b) Applicando prima De L'Hopital e poi lo sviluppo ottenuto si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\frac{1}{4}x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5/6x^3}{x^3} = -5/6.$$

Esercizio 8 Si consideri la funzione $f(x) = \ln\left(1 + 2x - x^2\right) - 2x\cos x$.

(a) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$;

(c) stabilire la convergenza del seguente integrale improprio: $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x) + 3x^2}{x^4}\,dx.$

Esercizio 9 Si consideri la funzione

$$f(x) = (\sin 2x)^2 - 4x\ln(1+x).$$

(a) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$;

(b) stabilire la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\tan x^5}\,dx$$

Esercizio 10 Usando gli sviluppi di Taylor, determinare il valore dei seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{x^6 - \tan^8 x} \quad ; \quad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{x(e^{\sin x - x} - 1)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x - \tan x} - 1}{\cos 3x - 1} \quad ; \quad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{\sqrt{1 + \sin^4 x} - 1}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{1 - \cos x + x^2} \quad ; \quad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\tan x^2}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2} \quad ; \quad h)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - e^x) - 2x}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^{x^2}}{x^3} \qquad ; \qquad l)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{1-x-e^{-x}}$$

Svolgimento:

a) $\sin x^2 = x^2 - x^6/3! + o(x^9)$; $\tan x = x + o(x^2)$, $\tan^8 x = (x+o(x^2))^8 = x^8 + o(x^9)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x^2}{x^6-\tan^8 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6/3!}{x^6} = 1/6.$$

b) $\sin^2 x = (x - x^3/3! + o(x^4))^2 = x^2 - 1/3\, x^4 + o(x^5)$; $\tan^2 x = (x + x^3/3 + o(x^4))^2 = x^2 + 2/3\, x^4 + o(x^5)$; $e^{\sin x - x} = e^{-x^3/3! + o(x^4)} = 1 - x^3/3! + o(x^3)$, $x(e^{\sin x - x} - 1) = -x^4/3! + o(x^4)$. Segue allora:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{x(e^{\sin x - x}-1)}\right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x^4}{-x^4/3!}\right)^{\frac{1}{3}} = 6^{1/3}.$$

c) *R.* : 0;

d) *R.* : $\frac{1}{6}$;

e) *R.* : 4/3;

f) *R.* : 1;

g) *R.* : $\frac{1}{2}$;

h) $\ln(e^{2x}-e^x) - 2x = \ln e^{2x}(1-e^{-x}) - 2x = 2x + \ln(1-e^{-x}) - 2x = \ln(1-e^{-x})$, ponendo $e^{-x} = t \to 0$, per $x \to +\infty$, si ha $\ln(1-t) = -t + o(t)$, cioè $\ln(1-e^{-x}) \sim e^{-x}$, $x \to +\infty$. Allo stesso modo ponendo $1/x^2 = s \to 0$, per $x \to +\infty$, si ha $\sin 1/x^2 \sim 1/x^2$, $x \to +\infty$. Si ha allora:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{2x}-e^x)-2x}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-x} = 0.$$

i) *R.* : $-7/6$;

l) *R.* : -2.

Esercizio 11 Determinare il valore di α in modo che il limite sia finito:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \alpha\sin x + \cos x - 2}{x^3} \qquad ; \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2 + \alpha x^4}{x^5}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x^2}{1-x^2} - \alpha x}{x^2} \qquad ; \qquad d)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 1 - \alpha\ln x}{(1-x)^2}$$

Svolgimento:

a) $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + o(x^3)$; $\sin x = x - x^3/3! + o(x^4)$; $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$. Segue allora che $e^x + \alpha\sin x + \cos x - 2 = (1+\alpha)x + (1-\alpha)x^3/3! + o(x^3)$. Per $\alpha = -1$ si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \alpha\sin x + \cos x - 2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3/3!}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Per $\alpha \neq -1$ il valore del limite è infinito.

b) $\sin^2 x - x^2 + \alpha x^4 = (x - x^3/3! + x^5/5!)^2 = (\alpha - 1/3)\, x^4 + 1/90\, x^6 + o(x^7)$. Per $\alpha = 1/3$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 + \alpha x^4}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1/90\, x^6}{x^5} = 0$$

mentre il limite è infinito per $\alpha \neq 1/3$.

c) $\ln \frac{1+x^2}{1-x^2} - \alpha x = \ln(1+x^2) - \ln(1-x^2) - \alpha x = 2x^2 - \alpha x + o(x^2)$.

Per $\alpha = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{1+x^2}{1-x^2} - \alpha x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Il limite risulta invece infinito nel caso $\alpha \neq 0$.

d) Poniamo $x - 1 = t \to 0$, per $x \to 1$. Si deve calcolare allora il

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t-1)^2 - 1 - \alpha \ln(1+t)}{t^2}.$$

Abbiamo $(t-1)^2 - 1 - \alpha \ln(1+t) = (2-\alpha)t + (1+\alpha/2)t^2 + o(t^2)$, e per $\alpha = 2$ si ottiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t-1)^2 - 1 - \alpha \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{t^2} = 2.$$

Il valore del limite è infinito se $\alpha \neq 2$.

Esercizio 12 Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il valore dei seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^6 x + x \sin^\alpha x}{3x^2 - \ln(1+3x^2)} \quad ; \quad b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{(x - \sin x)(e^{x-x^2} - 1 - \alpha x)}{x^{3\alpha+1} \sin x}$$

Svolgimento:

a) $3x^2 - \ln(1+3x^2) = 3x^2 - 3x^2 + 9/2\, x^4 + o(x^4) = 9/2\, x^4 + o(x^4) \sim 9/2\, x^4$, $x \to 0$.

$\tan^6 x - x \sin^\alpha x = x^6 + x^{\alpha+1} + o(x^\beta)$, $x \to 0$, con $\beta = \min(6, \alpha+1)$. In particolare:

$$x^6 + x^{\alpha+1} + o(x^\beta) = \begin{cases} 2x^6 + o(x^6) & \alpha = 5 \\ x^6 + o(x^6) & \alpha > 5 \\ x^{\alpha+1} & \alpha < 5 \end{cases}$$

Per $\alpha \geq 5$, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^6 x + x \sin^\alpha x}{3x^2 - \ln(1+3x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{Kx^6}{9/2\, x^4} = 0,\ (k = 2 \text{ se } \alpha = 5;\ k = 1 \text{ se } \alpha > 5)$$

Per $\alpha < 5$, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^6 x + x \sin^\alpha x}{3x^2 - \ln(1+3x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{9/2\, x^4} = \begin{cases} 2/9 & \alpha = 3 \\ 0 & 3 < \alpha < 5 \\ +\infty & 0 < \alpha < 3 \end{cases}.$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^6 x + x \sin^\alpha x}{3x^2 - \ln(1+3x^2)} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 3 \\ 2/9 & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha > 3 \end{cases}.$$

b) $x^{3\alpha+1}\sin x \sim x^{3\alpha+2}$, $x \to 0$.

$e^{x-x^2} = 1 + (x - x^2) + \frac{(x-x^2)^2}{2} + o(x^2)$, $x \to 0$, $e^{x-x^2} - 1 - \alpha x = x(1-\alpha) - x^2/2 + o(x^2)$, $x \to 0$.

$x - \sin x = x^3/3! + o(x^4)$, $x \to 0$.

Per $\alpha = 1$, abbaimo $\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-\sin x)(e^{x-x^2}-1-\alpha x)}{x^{3\alpha+1}\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^5/12}{x^5} = -\frac{1}{12}$.

Per $\alpha \neq 1$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-\sin x)(e^{x-x^2}-1-\alpha x)}{x^{3\alpha+1}\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\alpha)}{x^{3\alpha+2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)}{x^{3\alpha+1}} = \begin{cases} +\infty & 0<\alpha<1 \\ -\infty & \alpha>1 \end{cases}.$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-\sin x)(e^{x-x^2}-1-\alpha x)}{x^{3\alpha+1}\sin x} = \begin{cases} +\infty & 0<\alpha<1 \\ -1/12 & \alpha=1 \\ -\infty & \alpha>1 \end{cases}.$$